ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

«Η μη επιλυσιμότητα της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης χωρίς Θεωρία Galois»

Τσανακτσίδου Βασιλική (ge17128)

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Σοφία Λαμπροπούλου, Καθηγήτρια ΣΕΜΦΕ

Τριμελής εξεταστική επιτροπή

Σοφία Λαμπροπούλου	Παναγιώτης Ψαρράκος	Χριστίνα Βασιλακοπούλου
Καθηγήτρια ΣΕΜΦΕ	Καθηγητής ΣΕΜΦΕ	Επίκουρη Καθηγήτρια ΕΜΠ

Αθήνα, 2022

Ευχαριστίες

Πρώτα από όλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την καθηγήτριά μου Σοφία Λαμπροπούλου για όλη τη στήριξη και την καθοδήγησή της κατά την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κυρία Χριστίνα Βασιλακοπούλου και τον κύριο Παναγιώτη Ψαρράκο που δέχτηκαν να συμμετέχουν στην τριμελή επιτροπή της διπλωματικής μου εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την στήριξη που μου παρέχει συνεχώς και με κάθε τρόπο όλα αυτά τα χρόνια αλλά, και τους φίλους μου που ήταν κοντά μου κατά τη διάρκεια αυτής της εργασίας.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία περιλαμβάνει τις αποδείξεις δύο πολύ σημαντικών θεωρημάτων της Αφηρημένης Άλγεβρας: του *Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας* και της *μη Επιλυσιμότητας της Πεμπτοβάθμιας εξίσωσης, χωρίς Θεωρία Galois*.

Στο 9ο εξάμηνο των σπουδών μου, με επιβλέπουσα την καθηγήτρια κυρία Σ.Λαμπροπούλου ανέλαβα στο πλαίσιο του μαθήματος «Θέμα» να αποδείξω το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας με την χρήση της τοπολογικής έννοιας του αριθμού περιέλιξης. Επομένως, στο 1ο κεφάλαιο της εργασίας γίνεται μία ιστορική αναδρομή στα γεγονότα που οδήγησαν στην απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας. Έπειτα, δίνονται τέσσερις διαφορετικές διατυπώσεις του Θεωρήματος. Τέλος, αποδεικνύεται το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας αφού, πρώτα, έχουν δοθεί τα απαραίτητα εργαλεία για αυτήν.

Στην συνέχεια, προχωρούμε στο βασικό θέμα της διπλωματικής εργασίας, δηλαδή στην μη Επιλυσιμότητα της εξίσωσης 5ου βαθμού με ριζικά. Στο 2ο κεφάλαιο της εργασίας, διατυπώνεται το Θεώρημα των Abel – Ruffini σύμφωνα με το οποίο δεν υπάρχει κλειστή μορφή λύσης για το πολυώνυμο 5ου βαθμού στη γενική του μορφή. Αναφέρονται, επίσης, κάποια ιστορικά στοιχεία. Συγκεκριμένα, ο Ruffini, αξιοποιώντας τις ιδέες του Lagrange, διατυπώνει το Θεώρημα για την μη επιλυσιμότητα της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης. Η πρώτη απόδειξη για το Θεώρημα Abel – Ruffini δόθηκε από τον Abel το 1824 ενώ στη συνέχεια το 1830 ο Galois εξέδωσε την πρώτη του εργασία για αυτά τα θέματα, στην οποία θέτει τα θεμέλια της σημερινής Θεωρίας Galois. Με άλλα λόγια, ούτε ο Ruffini ούτε ο Abel χρησιμοποιήσαν τις μεθόδους του Galois προκειμένου να αποδείξουν ότι ορισμένες αλγεβρικές εξισώσεις δεν επιλύονται. Επομένως, θα υπάρχει ένας πιο απλός και κατανοητός τρόπος μέσω του οποίου μπορούμε να κατανοήσουμε τον λόγο για τον οποίο η γενική πεμπτοβάθμια εξίσωση δεν επιλύεται με ριζικά. Παρόλ' αυτά τόσο οι Abel και Ruffini όσο και ο Galois βασίστηκαν στην ίδια ιδέα: *τη συμμετρία μιας αλγεβρικής εξίσωσης υπό την μετάθεση των λύσεων της*.

Στο 3ο κεφάλαιο παρατίθενται κάποιες γνώσεις-εργαλεία όπως οι χώροι επικάλυψης και οι αντιμεταθέτες που είναι χρήσιμα για την απόδειξη μας. Στο κεφάλαιο 4, μελετώνται οι εξισώσεις 2ου, 3ου και 4ου βαθμού ώστε να γίνει μία έμμεση σύγκριση με την περίπτωση της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης. Έπειτα, στο επόμενο κεφάλαιο αποδεικνύεται η μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης 5ου βαθμού χωρίς την χρήση της Θεωρίας Galois.

Τέλος, συνοψίζοντας, αναφερόμαστε σε μερικά σημαντικά αποτελέσματα που προκύπτουν από την μελέτη των πολυωνυμικών εξισώσεων, όπως ότι η ομάδα S_5 δεν είναι επιλύσιμη.

1. Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

1.1 Ιστορικά στοιχεία

Αρχικά, θα ξεκινήσουμε κάνοντας μία ιστορική αναδρομή στα γεγονότα μέσω των οποίων ανακαλύφθηκε μια απόδειξη για το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. Σύμφωνα με αυτό, κάθε μη σταθερό πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές n-οστού βαθμού έχει ακριβώς n-μιγαδικές ρίζες. Καμία απόδειξη του θεωρήματος δεν είναι καθαρά αλγεβρική, δηλαδή να συνδέεται με το αντικείμενο της Αφηρημένης Άλγεβρας. Άλλωστε, οι έννοιες που χρησιμοποιούνται, όπως οι μιγαδικοί αριθμοί, είναι αναλυτικές και όχι αλγεβρικές. Το θεώρημα πήρε το όνομα του σε μία εποχή που η άλγεβρα σχετιζόταν με την εύρεση λύσεων εξισώσεων. Για το λόγο αυτό, η ανακάλυψη είναι *«θεμελιώδης»*. Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας είναι πολύ σημαντικό για την εξέλιξη της Θεωρίας Εξισώσεων.

Η επίλυση των εξισώσεων 2^{ου} βαθμού πραγματοποιήθηκε, αρχικά, από τους Βαβυλώνιους πριν 3.600 χρόνια.

Τον 16^{ο} αιώνα, ο Niccolo Tartaglia ανακάλυψε έναν παρόμοιο τύπο για την επίλυση κυβικών εξισώσεων με ρίζες. Βέβαια, το 1545, ο Cardano δημοσίευσε τον τύπο του Tartaglia. Έτσι, ο τύπος έμεινε γνωστός ως *«τύπος του Cardano»*. Μία άλλη μορφή ανακάλυψε ο Scipione del Ferro. Τέλος, ένας μαθητής του Cardano, ο Ferrari διεύρυνε τον τύπο και στην επίλυση πολυωνύμων 4^{ου} βαθμού με ριζικά.

Τον 17^{ο} αιώνα, διαπιστώθηκε ότι, από τις στοιχειώδεις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων, όλα τα πραγματικά πολυώνυμα περιττού βαθμού πρέπει να έχουν πραγματικές θέσεις μηδενισμού.

Η πρώτη αναφορά του Θεωρήματος, στην παραπάνω μορφή, έγινε το 1608 από τον Peter Roth στο βιβλίο του "Arithmetica Philosophica".

Η πρώτη προσπάθεια για την σωστή διατύπωση του Θ.Θ.Α έγινε από τον μαθηματικό Girard, το 1629, στο βιβλίο του "L'invention en algébre". Συγκεκριμένα, παραθέτει μερικά παραδείγματα εξισώσεων που συμφωνούν με την πρόταση του (ότι κάθε πολυωνυμική εξίσωση n-οστού βαθμού έχει *ακριβώς* n-ρίζες). Επιπλέον, ο Girard αφήνει ανοιχτό το ενδεχόμενο οι λύσεις των εξισώσεων να ανήκουν σε ένα ευρύτερο των μιγαδικών αριθμών σύνολο.

Έπειτα, το 1637, ο Descartes διαχώρισε τις πραγματικές από τις φανταστικές θέσεις μηδενισμού στο βιβλίο του "Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences".

Ο Leibniz, το 1702, δημοσιεύει στο Acta Eruditorum ένα άρθρο που αφορά την μέθοδο ολοκλήρωσης των ρητών παραστάσεων μέσω απλών κλασμάτων. Ο μαθηματικός διατυπώνει, όμως, έναν λάθος ισχυρισμό. Συγκεκριμένα, ισχυρίζεται ότι το πολυώνυμο $x^4 + a^4, a \in \mathbb{R}$ δε μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού με πραγματικούς συντελεστές. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο δεν έχει ρίζες και άρα το Θ.Θ.Α δε θα ισχύει.

Το λάθος του Leibniz εντοπίζεται το 1742 από τον Euler. Σε γράμματα που στέλνει στους Bernoulli και Goldbach, αναφέρει ότι το παράδειγμα του Leibniz δεν ισχύει. Συγκεκριμένα, δείχνει ότι $x^4 + a^4 = \left(x^2 + a^2 - a\sqrt{x}\right)\left(x^2 + a^2 + a\sqrt{x}\right)$

Όλα τα παραπάνω γεγονότα οδηγούν σταδιακά στην απόδειξη ενός πορίσματος του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας (ότι κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων 1ου ή 2ου βαθμού).

Η πρώτη δημοσίευση της απόδειξης του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας έγινε από τον D'Alembert, το 1746, σε παρουσίαση της εργασίας του "Recherches sur le calcul intégral" στην Ακαδημία του Βερολίνου, με κάποια κενά.

Τρία χρόνια αργότερα, το 1749, ο Euler κάνει μια προσπάθεια να αποδείξει το Θ.Θ.Α. Συγκεκριμένα, ο Euler αποδεικνύει ότι κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό $n \leq 6$ έχει n-μιγαδικές ρίζες. Παρόλα αυτά, δεν κατόρθωσε να αποδείξει το θεώρημα για την γενική περίπτωση ($n > 6$).

Μια ακόμη προσπάθεια απόδειξης του θεωρήματος έγινε από τον Laplace το 1795, ο οποίος χρησιμοποιεί κατά κάποιον τρόπο την έννοια της διακρίνουσας ενός πολυωνύμου.

Σε όλες τις παραπάνω αποδείξεις του Θ.Θ.Α. παρατηρείται το ίδιο «πρόβλημα». Όλοι οι παραπάνω μαθηματικοί υποθέτουν αυθαίρετα ότι το πολυώνυμο έχει ρίζες κάποιας μορφής οι οποίες έπειτα αποδεικνύεται ότι είναι μιγαδικές.

Το 1799, ο Gauss, καθώς κάνει το διδακτορικό του, εντοπίζει την αιτία του προβλήματος. Πρώτα από όλα, εξετάζει όλες τις προηγούμενες προσπάθειες απόδειξης του θεωρήματος και παρουσιάζει μία απόδειξη που βασίζεται σε τοπολογικές έννοιες. Ουσιαστικά, ο Gauss αποδεικνύει ότι η ρίζα υπάρχει χωρίς να την υπολογίζει. Παρόλα αυτά, η απόδειξη έχει ένα κενό γιατί χρησιμοποιήθηκε το Θεώρημα καμπυλών Jordan που δεν έχει επαληθευτεί ως τότε. Το κενό αυτό καλύφθηκε από τον μαθηματικό Alexander Ostrowski το 1920.

Κάποια χρόνια αργότερα, το 1816, ο Gauss δίνει μια 2η αλγεβρική απόδειξη, η οποία είναι αρκετά τεχνική αλλά απόλυτα σωστή. Έπειτα, δίνει και μία 3η απόδειξη η οποία βασίζεται στην τοπολογία. Τέλος, το 1849, δίνει και μια 4η απόδειξη, παραλλαγή της 1ης .

Παράλληλα, το 1805, ο Ruffini προσπάθησε να αποδείξει ότι οι πεμπτοβάθμιες πολυωνυμικές εξισώσεις δεν επιλύονται με ριζικά. Βέβαια, δεν κατάφερε να καταλήξει σε κάποια απόδειξη. Οι Abel (1825-1826) και Galois (1831) διεύρυναν το αποτέλεσμα του Ruffini και απέδειξαν ότι η επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων 5ου και μεγαλύτερου βαθμού, στη γενική τους μορφή, με ριζικά είναι αδύνατη.

Έτσι, ο Galois ανέπτυξε μία Θεωρία Επεκτάσεων Σωμάτων την οποία συνέδεσε με την Θεωρία Ομάδων (Θεωρία Galois).

1.2 Διατυπώσεις του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας

Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας διατυπώνεται με διάφορους τρόπους.

Οι παρακάτω διατυπώσεις του Θ.Θ.Α. είναι **ισοδύναμες**.

1. *Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές έχει μία μιγαδική ρίζα.*
2. *Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές παραγοντοποιείται πλήρως με πρωτοβάθμιους παράγοντες στο σώμα των μιγαδικών αριθμών* $\mathbb{C}$.
3. *Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές* n*-οστού βαθμού έχει ακριβώς* n*-μιγαδικές ρίζες (λαμβάνοντας υπ' όψιν μας την πολλαπλότητα κάθε ρίζας)*
4. *Το σώμα* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών είναι αλγεβρικά κλειστό.*

1.3 Προαπαιτούμενες γνώσεις

1.3.1 Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

- **Σώμα (ορισμός)**

Σώμα είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος $(\mathcal{R}, +, \cdot)$, στον οποίο κάθε μη μηδενικό στοιχείο $r \in R$ είναι αντιστρέψιμο. Πιο συγκεκριμένα, ένα σώμα $\mathcal{F}$ είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με δύο διμελείς πράξεις, την πρόσθεση «+» και τον πολλαπλασιασμό «·» ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:

1. Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική: $a + b = b + a$ για κάθε ζεύγος $a, b \in \mathcal{F}$
2. Η πρόσθεση είναι προσεταιριστική: $a + (b + c) = (a + b) + c$ για $a, b, c \in \mathcal{F}$
3. Υπάρχει ένα προσθετικό ουδέτερο στοιχείο, το μηδενικό το οποίο συμβολίζεται με 0, ώστε $a + 0 = a$ για κάθε $a \in \mathcal{F}$
4. Για κάθε $a \in \mathcal{F}$ υπάρχει προσθετικό συμμετρικό στοιχείο, το αντίθετο, το οποίο συμβολίζεται με $-a$, ώστε $a + (-a) = 0$
5. Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός: $a(bc) = (ab)c$ για $a, b, c \ \in \mathcal{F}$.
6. Ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση: $a(b + c) = ab + ac$ για $a, b, c \ \in \mathcal{F}$
7. Ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικός: $ab = ba$ για κάθε ζεύγος a, b του $\mathcal{F}$
8. Υπάρχει ένα πολλαπλασιαστικό ουδέτερο στοιχείο, το μοναδιαίο, το οποίο συμβολίζεται με 1 (και δεν είναι ίσο με το 0), ώστε $a1 = a$ για κάθε a του $\mathcal{F}$
9. Για κάθε $a \in \mathcal{F}$ με $a \neq 0$ υπάρχει ένα πολλαπλασιαστικό συμμετρικό, το αντίστροφο, το οποίο συμβολίζεται με a^{-1}, ώστε $aa^{-1} = 1$

Βασικά παραδείγματα σωμάτων είναι το $\mathbb{Q}$, το $\mathbb{R}$ και τα πεπερασμένα σώματα $\mathbb{Z}_p$ όπου p πρώτος αριθμός.

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ είναι το εξής:

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Εάν ο $z \in \mathbb{C}$ με $z = x + iy$, τότε ο **μιγαδικός συζυγής** του z, που συμβολίζεται με $\bar{z}$, είναι $\bar{z} = x - iy$ και η **απόλυτη τιμή** ή **μέτρο** του z, που συμβολίζεται με $|z|$, ισούται με $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ αποκτά τη δομή σώματος αν εφοδιαστεί με τις κατάλληλες πράξεις, την **πρόσθεση** και τον **πολλαπλασιασμό**.

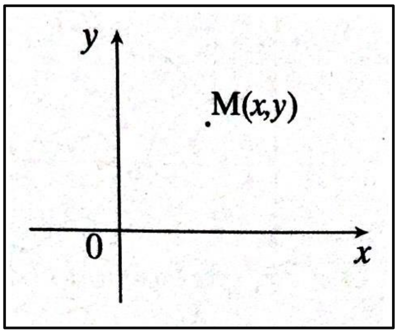
Η **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών ορίζεται ως εξής:

Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + i\, y_1$ και $z_2 = x_2 + i\, y_2$.

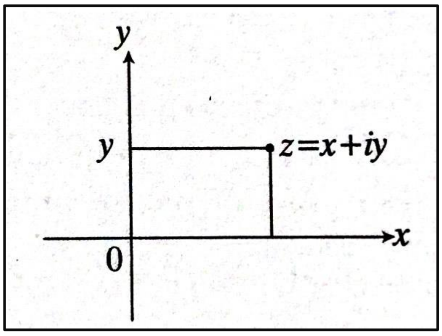
Το άθροισμα τους θα είναι: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$.

- **<u>Το μιγαδικό επίπεδο</u>**

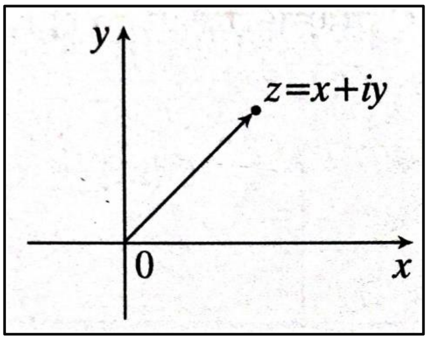
Ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + i\,y$ ορίζεται από ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών. Επομένως, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ και του σημείου (x, y) στο επίπεδο $x0y$. Με αυτόν τον τρόπο, το $\mathbb{C}$ ταυτίζεται με το $\mathbb{R}^2$.



Ονομάζουμε γεωμετρική εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x + i\,y$ το σημείο $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου $x0y$. Έτσι, σε κάθε μιγαδικό αριθμό αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο του επιπέδου και αντίστροφα. Το επίπεδο που περιέχει τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών ονομάζεται <u>μιγαδικό επίπεδο</u> ή <u>επίπεδο Gauss</u>. Ο άξονας των x ονομάζεται πραγματικός άξονας και ο άξονας των y ονομάζεται φανταστικός άξονας.



Ο μιγαδικός αριθμός μπορεί, επίσης, να θεωρηθεί ως ένας διάνυσμα στις 2 διαστάσεις με αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το σημείο (x, y).



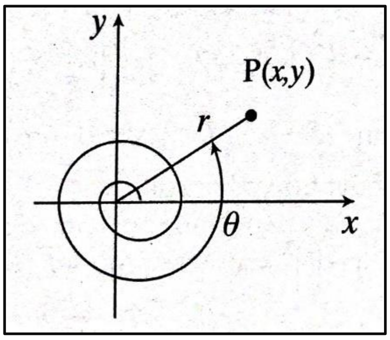
Το μέτρο $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι το μήκος του διανύσματος z.

- **Τριγωνομετρική μορφή και γωνία μιγαδικού αριθμού**

Έστω $z = x + i\,y \neq 0$ ένας μιγαδικός αριθμός, $|z| = r$ και $P(x, y)$ η εικόνα του στο επίπεδο. Κάθε γωνία θ (σε rad) που ικανοποιεί τις σχέσεις: $x = rcos\theta, y = rsin\theta$, ονομάζεται **όρισμα του $\boldsymbol{z}$**.

Η τριγωνομετρική μορφή του z είναι: $z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$.

Ορίζουμε: $e^{i\theta} = cos\theta + i\,sin\theta$ **(Τύπος του Euler).**



Με την βοήθεια του τύπου Euler η σχέση $z = r(cos\theta + isin\theta)$ γράφεται στη μορφή $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$ που ονομάζεται **εκθετική μορφή** του z.

- **Πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών:**

Έστω δυο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ και $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$.

Το γινόμενο αυτών θα είναι: $z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)\left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = (r_1 r_2)\left(e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right)$

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (cos\theta_1 + i\,sin\theta_1)(cos\theta_2 + i\,sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 [cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2 + i\,(sin\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1 sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι στον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών, **πολλαπλασιάζονται τα μέτρα τους και προστίθενται οι γωνίες τους.**

Για παράδειγμα, το $z^2 = \left(re^{i\theta}\right)^2 = r^2 e^{2i\theta}$, δηλαδή η γωνία διπλασιάζεται και το μέτρο υψώνεται στο τετράγωνο. Όμοια, και το $z^3 = \left(re^{i\theta}\right)^3 = r^3 e^{3i\theta}$ και τα λοιπά.

Έτσι, έχουμε τον **Τύπο De Moivre**:

$$\boxed{\boldsymbol{z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\,sin(n\theta)\right)\ \ n \in \mathbb{N}}}$$

Ο τύπος αυτός, αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας την τέλεια επαγωγή.

Για $\boldsymbol{n = 1}$ προφανώς ισχύει καθώς παίρνουμε την τριγωνομετρική μορφή του z:

$$\boldsymbol{z = r(cos\theta + isin\theta)}$$

Έστω ότι ισχύει για $\boldsymbol{n = k}$.

Τότε για $\boldsymbol{n = k + 1}$,

$$z^{k+1} = z \cdot z^k = r(cos\theta + isin\theta) \cdot r^k\big(cos(k\theta) + isin(k\theta)\big)$$
$$= r^{k+1}\Big(cos\big((k+1)\theta\big) + isin\big((k+1)\theta\big)\Big)$$

1.3.2 <u>Στοιχεία μιγαδικής ανάλυσης</u>

- **<u>Μιγαδικές συναρτήσεις</u>**

Οι συναρτήσεις $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z) = w$ ονομάζονται **μιγαδικές συναρτήσεις**. Τα $w, z \in \mathbb{C}$ ονομάζονται ***μιγαδικές μεταβλητές***. Αν θεωρήσουμε το σώμα $\mathbb{C}$ ως το μιγαδικό επίπεδο, τότε μία μιγαδική συνάρτηση είναι μία απεικόνιση ή ένας μετασχηματισμός του μιγαδικού επιπέδου στον εαυτό του.

Αν $z = x + i\,y = (x, y)$ και $w = u + i\,v$, τότε $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$ αποτελούν πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Επομένως, για κάθε μιγαδική συνάρτηση γράφουμε:

$$w = f(z) = u(z) + i\,v(z)$$

με $u(z)$ να καλείται πραγματικό μέρος $\big(Real\,f(z)\big)$ και η $v(z)$ φανταστικό μέρος $\big(Im\,f(z)\big)$

Σ’ αυτό το σημείο θα αναφερθούμε σε μερικές έννοιες που αφορούν την τοπολογία του μιγαδικού επιπέδου.

- ***ε*-γειτονιά σημείου:** Εάν $z_0 \in \mathbb{C}$, τότε η ανοικτή (κυκλική) ε-γειτονιά του z_0, $N_\varepsilon(z_0)$, αποτελείται από τα σημεία που απέχουν απόσταση μικρότερη από ε από το z_0, δηλαδή:
$$\boldsymbol{N_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}}$$
- **περιοχή:** μία περιοχή είναι ένα οποιοδήποτε μη-κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.
- **ανοικτή περιοχή:** μια περιοχή $U \subset \mathbb{C}$ είναι ανοικτή, όταν για κάθε σημείο $z_0 \in U$ υπάρχει μία ε-γειτονιά του z_0 η οποία περιέχεται πλήρως στο U.
- **κλειστή περιοχή:** μία περιοχή $C \subset \mathbb{C}$ ονομάζεται κλειστή, όταν για οποιαδήποτε συγκλίνουσα ακολουθία σημείων $\{z_n\} \subset C$ με $z_n \to z$, έπεται ότι $z \in C$.

- **φραγμένη περιοχή:** μια περιοχή $U \subset \mathbb{C}$ ονομάζεται φραγμένη, όταν η U περιέχεται σε έναν δίσκο ακτίνας r με κέντρο την αρχή των αξόνων, δηλαδή $U \subset \{z : |z| \leq r\}$ για κάποιο $r \in \mathbb{R}$.
- **συμπαγής περιοχή:** μία κλειστή και φραγμένη περιοχή ονομάζεται συμπαγής.
- **συνεκτική περιοχή:** μία ανοικτή περιοχή U είναι συνεκτική, όταν δύο οποιαδήποτε σημεία της μπορούν να συνδεθούν με μία πεπερασμένη ακολουθία ευθυγράμμων τμημάτων που ανήκουν εξ' ολοκλήρου στη U.
- **απλά συνεκτική περιοχή:** όταν η περιοχή είναι συνεκτική και το εσωτερικό οποιασδήποτε απλής κλειστής καμπύλης που κείται εξ' ολοκλήρου στη U έχει όλα τα σημεία του στη U.
- **χωρίο:** μία ανοικτή και συνεκτική περιοχή του $\mathbb{C}$ ονομάζεται χωρίο.

- **<u>Αναλυτική μιγαδική συνάρτηση</u>**

Η $w = f(z)$ ονομάζεται **αναλυτική** (ή **ολόμορφη**) σε ένα σημείο z_0 όταν η $f(z)$ είναι παραγωγίσιμη σε μία κυκλική γειτονιά του z_0. Η $f(z)$ είναι αναλυτική σε μία περιοχή U, εάν είναι αναλυτική σε κάθε σημείο της U. Όταν η $f(z)$ είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$, ονομάζεται **ακέραια**.

- **<u>Τύπος ολοκλήρωσης του Cauchy</u>**

Έστω ότι η $f(z)$ είναι αναλυτική σε ένα απλό συνεκτικό χωρίο, το οποίο περιέχει μία απλή κλειστή καμπύλη γ. Εάν z_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο της γ, τότε:

$$\boldsymbol{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz}$$

όπου, για την εκτέλεση της ολοκλήρωσης, η φορά της καμπύλης γ θεωρείται αντίθετη εκείνης που ακολουθούν οι δείκτες του ρολογιού.

1.3.3 <u>Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης στο άπειρο</u>

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, με $z \in \mathbb{C}, a_i \in \mathbb{C}$ και $a_n \neq 0$

- $\lim\limits_{z \to +\infty} P(z) = \lim\limits_{z \to +\infty} (a_n z^n)$

- $\lim\limits_{z \to -\infty} P(z) = \lim\limits_{z \to -\infty} (a_n z^n)$

1.3.4 <u>Αριθμός Περιέλιξης</u>

Έστω η καμπύλη $\gamma(t) = z_0 + re^{it},\ r, t \in \mathbb{R}$ και $0 \leq t \leq 2n\pi$.

Από γεωμετρική άποψη, πρόκειται για έναν κύκλο που περιελίσσεται n-φορές γύρω από ένα σημείο z_0.

Με ολοκλήρωση παίρνουμε:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2n\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = n$$

*Κάνοντας μία σύγκριση με τον **Τύπο Ολοκλήρωσης του Cauchy**, που αναφέραμε παραπάνω, θα έχουμε ότι για $f(z) = 1$ πάνω στην καμπύλη γ είναι $f(z_0) = n$.*

Το $\boldsymbol{n = n(\gamma, z_0)}$ ονομάζεται **αριθμός περιέλιξης (winding number)** της γ γύρω από το z_0.
Γενικά, αν η γ είναι μία οποιαδήποτε κλειστή συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη στο $\mathbb{C}$ και $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, αποδεικνύεται ότι:

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

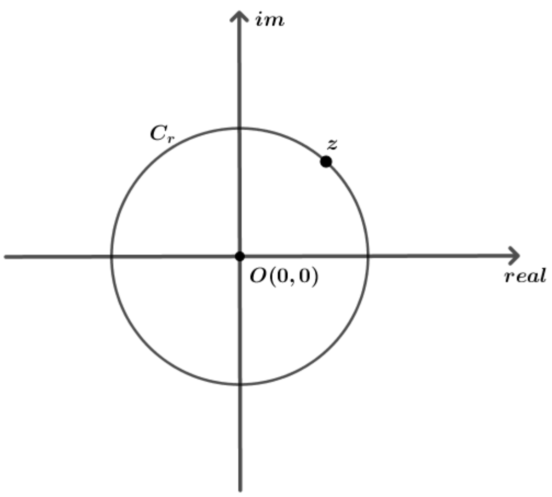
είναι ένας ακέραιος, ο οποίος ονομάζεται αριθμός περιέλιξης της γ γύρω από το z_0.

Ας πάρουμε τώρα την συνάρτηση επί του C_r

$$g(z) = z^n.$$

Ονομάζουμε C_r τον κύκλο με ακτίνα r και κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, δηλαδή βλέπε Σχήμα 1:

$$C_r = \{z = re^{it} | 0 \leq t \leq 2\pi\}$$



Σχήμα 1

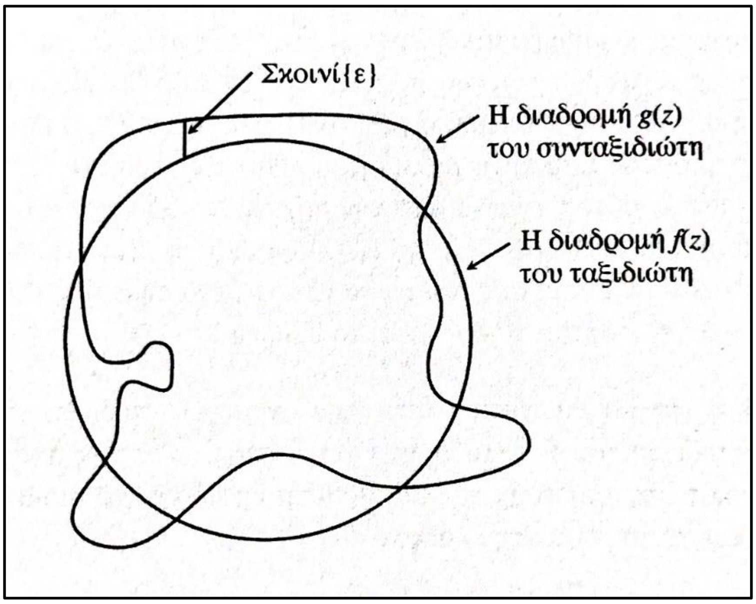
Τότε, περιορίζοντας την g σ' αυτόν τον κύκλο, θα έχουμε $g(z) = z^n = r^n e^{int}$. Δηλαδή, οι εικόνες των $z \in C_r$ θα είναι τα σημεία του κύκλου C_{r^n}. Επιπλέον, καθώς το t παίρνει τιμές μεταξύ του 0 και του 2π, το z «τυλίγεται» μία φορά γύρω από τον κύκλο. Από την άλλη, το nt παίρνει τιμές από το 0 έως το $n \cdot (2\pi)$. Άρα, για $z \in C_r$, οι εικόνες z^n «τυλίγονται» n-φορές γύρω από τον κύκλο ακτίνας r^n. Τα παραπάνω ισχύουν για κάθε ακτίνα r. Έτσι, ο αριθμός περιέλιξης της συνάρτησης z^n γύρω από την αρχή των αξόνων είναι ίσος με n.

Σ' αυτό το σημείο θα γενικεύσουμε τον όρο **«αριθμός περιέλιξης»** μιας συνάρτησης. Εάν γ είναι μία κλειστή συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μία συνεχής συνάρτηση, τότε η $f(\gamma)$ είναι επίσης μία κλειστή καμπύλη. Επομένως, αν η $f(\gamma)$ έχει αριθμό περιέλιξης ίσο με n γύρω από ένα σημείο z_0, η f περιελίσσει n-φορές την καμπύλη γ γύρω από το z_0.

Αν έχουμε δύο συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$ να είναι αρκούντως κοντά δηλαδή αν $|f(z) - g(z)| < \varepsilon$ για ε αρκούντως μικρό, τότε περιορισμένες στα σημεία ενός κύκλου C_r με ακτίνα r, και οι δύο συναρτήσεις f, g θα περιελίσσουν τον κύκλο C_r ίσες φορές γύρω από την αρχή των αξόνων, δηλαδή τα $f(C_r), g(C_r)$ θα έχουν τον ίδιο αριθμό περιέλιξης γύρω από την αρχή των αξόνων.

Για να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό, θα αναφερθούμε στην «***ιδιότητα του συνταξιδιώτη*» *(fellow traveler property)***

Έστω, λοιπόν, δύο ταξιδιώτες οι οποίοι είναι δεμένοι με ένα σκοινί. Αν ο ένας ταξιδιώτης $f(z)$ διατρέχει την περιφέρεια ενός κύκλου, τότε ο ταξιδιώτης $g(z)$ θα διαγράψει μία τροχιά γύρω από το κέντρο του κύκλου, ακολουθώντας ίσως διαφορετική διαδρομή, με την προϋπόθεση το μήκος ε του σκοινιού να είναι μικρότερο της ακτίνας του κύκλου.

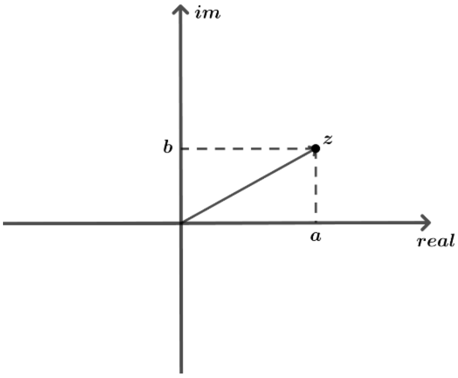


Σχήμα 2: η ιδιότητα του συνταξιδιώτη

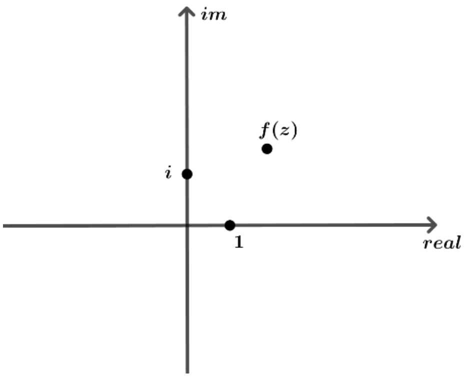
1.4 <u>Μία τοπολογική απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας</u>

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις για το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. Κάποιες βασίζονται σε <u>τοπολογικές έννοιες</u>, κάποιες στην <u>Άλγεβρα</u> και κάποιες άλλες στους <u>μιγαδικούς αριθμούς</u> και σε <u>θεωρήματα</u> που αφορούν αυτούς. Στην παρούσα εργασία, θα μελετήσουμε μια απόδειξη οποία βασίζεται στους μιγαδικούς αριθμούς και σε κάποια τοπολογικά επιχειρήματα.

Αρχικά, ας πάρουμε το μιγαδικό επίπεδο και έναν τυχαίο μιγαδικό αριθμό $z = a + i\, b$.
Έστω το μιγαδικό πολυώνυμο $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$.



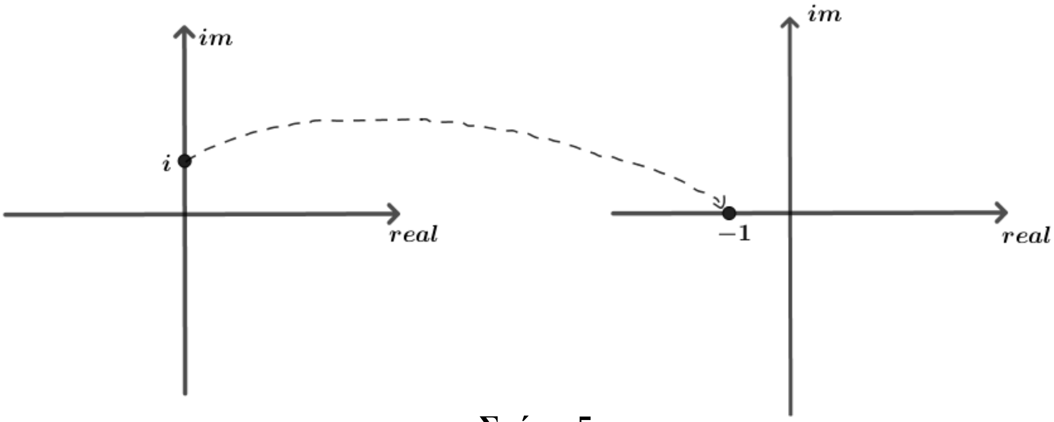
Σχήμα 3: Το μιγαδικό επίπεδο



Σχήμα 4: Ο χώρος όπου παίρνει τιμές το $f(z)$

Τα $z, f(z)$ παίρνουν τιμές στο μιγαδικό επίπεδο. Έτσι, μπορούμε να διαχωρίσουμε την «πηγή» του πολυωνύμου, δηλαδή τον χώρο όπου παίρνει τιμές το z, από τις τιμές του πολυωνύμου, δηλαδή τον χώρο όπου παίρνει τιμές το $f(z)$. Επομένως, κάθε μιγαδικός αριθμός z στο Σχήμα 3 αντιστοιχίζεται με ένα σημείο του Σχήματος 4. Άρα, το πολυώνυμο είναι μια απεικόνιση μέσω της οποίας αντιστοιχίζεται κάθε σημείο του Σχήματος 3 με κάθε σημείο του Σχήματος 4.

Για παράδειγμα αν είχαμε $f(z) = z^2$ τότε $f(i) = -1$, βλέπε Σχήμα 5.



Σχήμα 5

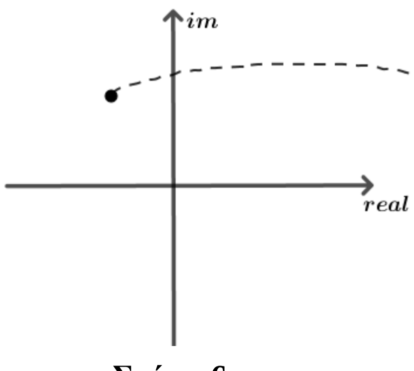
Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι τα σημεία του Σχήματος 3 που αντιστοιχίζονται με την αρχή των αξόνων στο Σχήμα 4.

Αναζητώντας μία θέση μηδενισμού μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $a_n = 1$, δηλαδή ότι:

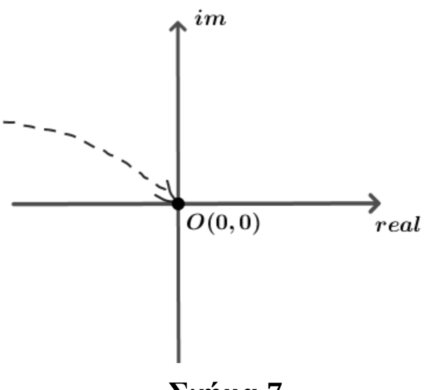
$$\boldsymbol{f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

Εάν $a_0 = 0$, τότε το $z = 0$ είναι θέση μηδενισμού και άρα θα υποθέσουμε ότι $a_0 \neq 0$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει ένα σημείο του Σχήματος 6 το οποίο αντιστοιχίζεται με την αρχή των αξόνων του Σχήματος 7.



Σχήμα 6



Σχήμα 7

Πώς θα αποδείξουμε, λοιπόν, ότι υπάρχει ένα τέτοιο σημείο;

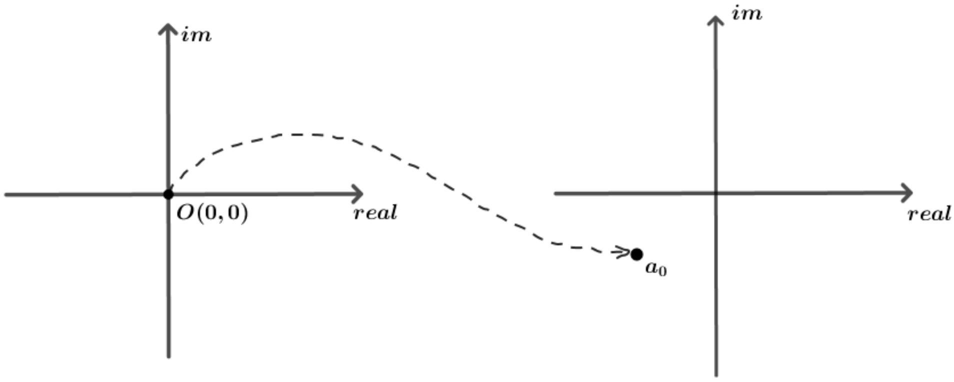
Πρώτα από όλα, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το όριο πολυωνυμικής συνάρτησης είναι $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z^n$. Επομένως, αν το z είναι πολύ μεγάλο τότε ο όρος αυτός «κυριαρχεί». Άρα, το πολυώνυμο μπορεί να προσεγγιστεί από αυτόν τον όρο, δηλαδή

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \sim z^n$$

Η $f(z)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση $: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, άρα:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z^n}{f(z)} = 1$$

Άρα, παρόμοια, μπορούμε να πάρουμε κάποιο αποτέλεσμα αν το z είναι πολύ μικρό. Αν $z = 0$ τότε $f(0) = a_0$, βλέπε Σχήμα 8.



Σχήμα 8

Συνεπώς, για έναν αρκούντως μεγάλο κύκλο C_r και z να κινείται σ' αυτόν έχουμε:

$|z^n - f(z)| = \left|z^n \cdot \frac{(z^n - f(z))}{z^n}\right| = \left|z^n \cdot \left(1 - \frac{f(z)}{z^n}\right)\right| = |z^n| \left|1 - \frac{f(z)}{z^n}\right| = r^n \left|1 - \frac{f(z)}{z^n}\right|$.

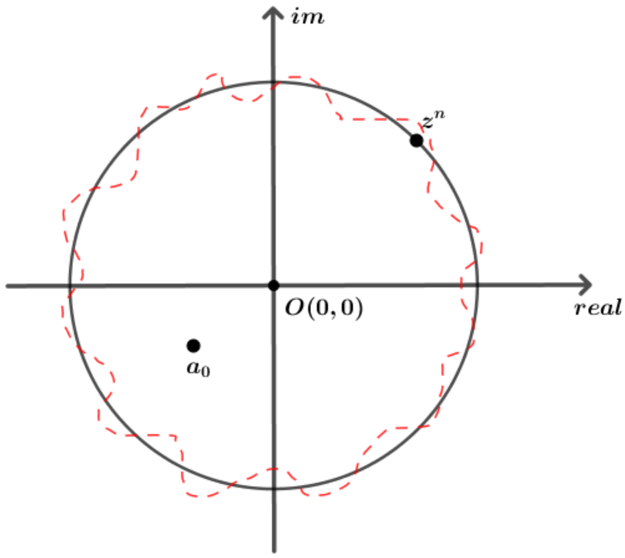
Έχουμε ότι $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = \frac{\lim_{z\to\infty} f(z)}{\lim_{z\to\infty} z^n} = \frac{\lim_{z\to\infty} z^n}{\lim_{z\to\infty} z^n} = 1$ δηλαδή $1 - \frac{f(z)}{z^n} \to 0$ για $z \to \infty$.

Επομένως $\exists\ \lambda \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: $\left|\frac{z^n}{f(z)} - 1\right| \le \lambda$.

Επομένως, για $0 < \lambda < 1$ και z να βρίσκεται επί του κύκλου C_r θα ισχύει:

$$|z^n - f(z)| \le \lambda r^n \quad \mathbf{(1)}$$

Επιπλέον, λόγω του $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z^n$ θα ισχύει $|z^n - f(z)| < \varepsilon$ με ε αρκούντως μικρό. Άρα, με βάση την ιδιότητα του συνταξιδιώτη και το γεγονός ότι το z^n περιελίσσει n-φορές τον κύκλο C_{r^n} γύρω από την αρχή των αξόνων, η $f(z)$ περιελίσσει n-φορές γύρω από την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 9: Οι τιμές του πολυωνύμου $f(z)$ κινούνται γύρω από τον κύκλο σε μία συνεχή κλειστή καμπύλη για αρκούντως μεγάλη ακτίνα.

Από την άλλη μεριά, για τον περιορισμό της f επί του C_r, για αρκούντως μικρή ακτίνα r, έχουμε κατά προσέγγιση $f(z) \cong a_0$ επί του C_r. Κατά συνέπεια, το $f(C_r)$ διαγράφει έναν βρόχο γύρω από το a_0 και δεν περιελίσσεται καθόλου γύρω από την αρχή των αξόνων ενώ περιελίσσεται n-φορές γύρω από το a_0.

$$C_{a_0,r}(z) = a_0 + re^{it}\,, t \in [0,2\pi)$$

Για $r \to 0$ παρατηρούμε ότι:

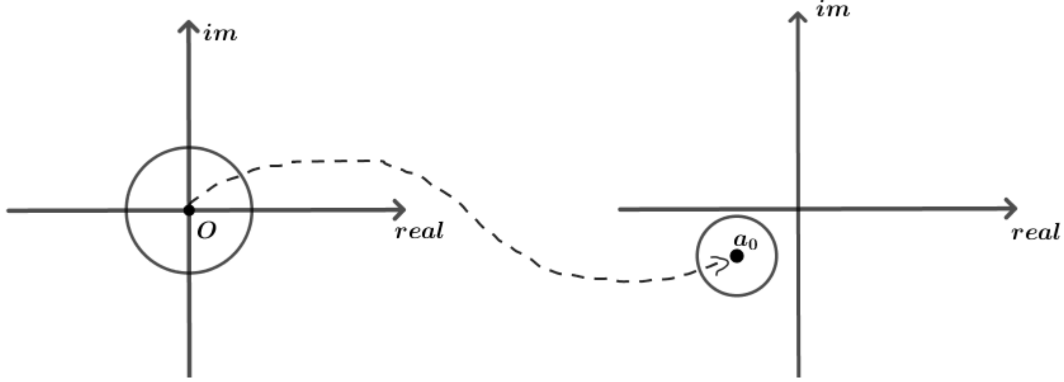
$$C_{a_0,r} \to a_0 \text{ και } f(z) \to a_0$$

Συνεπώς, $\left|f(z) - C_{a_0,r}\right| < \varepsilon$.

Σ' αυτό το σημείο της απόδειξης κινούμαστε ως εξής:

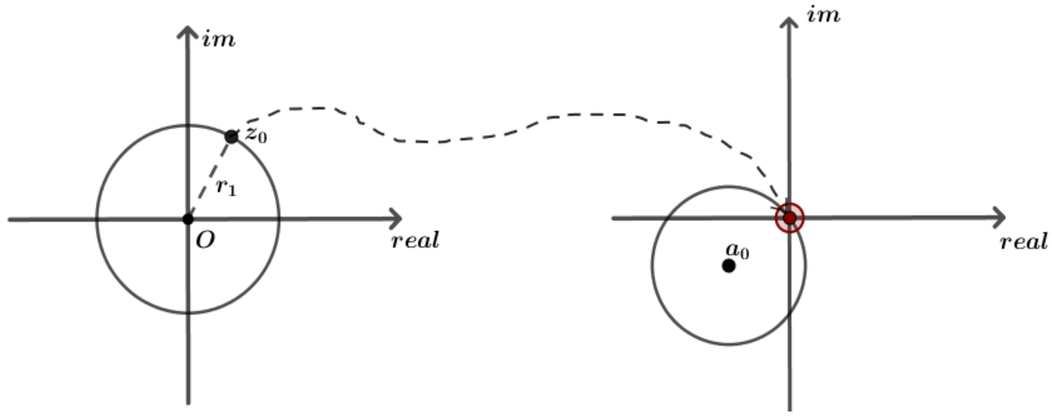
Σταδιακά συρρικνώνω τον κύκλο του Σχήματος 1 έως ότου πλησιάσει πολύ στην αρχή των αξόνων και παρατηρώ τι συμβαίνει στο Σχήμα 9.

Έτσι, λοιπόν, ο κύκλος του Σχήματος 9 θα αρχίσει να συρρικνώνεται. Αυτό το γνωρίζουμε, καθώς παραπάνω αναφέραμε πως αν το z είναι πολύ μικρό ή ακόμα και $z = 0$ ο κύκλος θα πρέπει να συρρικνωθεί γύρω από το a_0. Άρα, ο κύκλος του Σχήματος 9 αρχίζει να συρρικνώνεται προς κάθε πιθανή κατεύθυνση με κάπως άνισο τρόπο και καταλήγει σε έναν πολύ μικρό κύκλο γύρω από το a_0 όταν ο κύκλος του Σχήματος 1 συρρικνωθεί γύρω από το 0, βλέπε Σχήμα 10 και 11.



Σχήμα 10 **Σχήμα 11**

Επειδή η $f(z)$ είναι συνεχής, η $f(C_r)$ εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από το r. Επομένως, κατά την διαδικασία της συρρίκνωσης, κάποια στιγμή, ο κύκλος του Σχήματος 9 πρέπει να περάσει από την αρχή των αξόνων. Εφόσον το $f(C_r)$ έχει αριθμό περιέλιξης 0 γύρω από την αρχή των αξόνων για πολύ μικρή ακτίνα r και περιελίσσεται n-φορές γύρω από την αρχή των αξόνων για μεγαλύτερα r, πρέπει να υπάρχει μία ενδιάμεση ακτίνα, έστω r_1, έτσι ώστε το $f\left(C_{r_1}\right)$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επομένως, πρέπει να υπάρχει ένα σημείο z_0 του κύκλου C_{r_1} με $f(z_0) = 0$. Εκεί , θα βρω και την ρίζα του πολυωνύμου, βλέπε Σχήμα 12 και 13.



Σχήμα 12 **Σχήμα 13**

Επομένως, αποδείξαμε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον μιγαδική ρίζα για το πολυώνυμο $f(z)$.

Όμως, το μονοπάτι του Σχήματος 9 κινείται n-φορές και άρα το ίδιο συμβαίνει όσο συρρικνώνω το Σχήμα.

Επομένως, λόγω του αριθμού περιέλιξης, το z^n περιελίσσεται n-φορές γύρω από την αρχή των αξόνων. Το ίδιο θα ισχύει και για την $f(z)$, λόγω της σχέσης **(1)**. Με άλλα λόγια, ο κύκλος του Σχήματος 13 θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων n-φορές όσο η ακτίνα του κύκλου στο Σχήμα 12 σταδιακά μικραίνει.

Άρα, θα υπάρχουν n-μιγαδικές ρίζες για το πολυώνυμο

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

δηλαδή όσος και ο βαθμός του πολυωνύμου. ■

2. Η πεμπτοβάθμια εξίσωση

2.1 Ιστορικά Στοιχεία

Η εύρεση μιας γενικής έκφρασης για την επίλυση μιας αλγεβρικής εξίσωσης ήταν ένα από τα παλαιότερα και πιο γόνιμα προβλήματα στα μαθηματικά. Η ιστορία πίσω από αυτό που κάποτε ονομαζόταν ***«Θεωρία των εξισώσεων»*** είναι σχεδόν τόσο πλούσια και παλιά όσο και η ίδια η ιστορία των μαθηματικών. Για παράδειγμα, οι μέθοδοι επίλυσης γραμμικών και τετραγωνικών εξισώσεων είναι γνωστές για τουλάχιστον τέσσερις χιλιετίες.

Ο τύπος για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης που διδάσκεται σήμερα στα σχολεία, γράφτηκε πρώτα από τον René Descartes το 1637.

Η εισαγωγή του συμβόλου " √ " έγινε το 1525.

Οι τετραγωνικές και κυβικές εξισώσεις επιλύθηκαν οριστικά τον $16^{ο}$ αιώνα. Μέχρι τότε, μία ομάδα ανταγωνιστών Ιταλών μαθηματικών, ανάμεσα τους οι Scipione del Ferro, Niccolo Tartaglia, Gerolamo Cardano, Lodovico de Ferrari, ανακάλυψαν τυχαία τους μιγαδικούς αριθμούς, στην προσπάθειά τους να επιλύσουν την κυβική εξίσωση στην γενική της μορφή.

Το 1545, ο Lodovico de Ferrari έλυσε την εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού στην γενική της μορφή, «μειώνοντάς» την σε κυβική.

Παρόλ’αυτά, η πεμπτοβάθμια εξίσωση παρέμενε πρόβλημα για πολλούς μαθηματικούς, ενώ παράλληλα η ιδέα ότι δεν επιλύεται είχε αρχίσει να εμφανίζεται.

Μη επιλύσιμες εξισώσεις

Ο Joseph-Louis Lagrange, το 1771, ήταν ο πρώτος μαθηματικός που σκέφτηκε να χρησιμοποιήσει τις ***μεταθέσεις*** των ***λύσεων*** για την μελέτη της επιλυσιμότητας ή μη των αλγεβρικών εξισώσεων.

Στις αρχές του 1800, αξιοποιήθηκαν οι ιδέες του Lagrange για την πεμπτοβάθμια εξίσωση από τον Paolo Ruffini. Για 20 χρόνια ο Ruffini προσπαθούσε να πείσει την μαθηματική κοινότητα για τα συμπεράσματα του χωρίς αποτέλεσμα.

Το 1821, ο Augustin-Louis Cauchy βοήθησε τον Ruffini να προωθήσει τη δουλειά του με σκοπό να αναγνωριστεί. Παρόλ’ αυτά, ο Ruffini δεν απέδειξε το θεώρημα που φέρει το όνομά του, αλλά τα αποτελέσματά του αξιοποιήθηκαν για να αμφισβητηθεί η ύπαρξη λύσης για την πεμπτοβάθμια εξίσωση στην γενική της μορφή.

Λίγα χρόνια αργότερα, το 1824, ο Niels Henrik Abel έγραψε μία πρώτη ολοκληρωμένη απόδειξη για το θεώρημα. Βέβαια, το έργο του άφησε ανεπηρέαστους πολλούς μαθηματικούς, ανάμεσα τους οι Gauss και Cauchy. Ο Abel πέθανε το 1829, σε ηλικία 26 ετών, λίγο πριν το έργο του για την μη επιλυσιμότητα της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης λάβει την θέση που του άρμοζε. Έλαβε, μετά τον θάνατο του, το Grand Prix de l’ Academie de Sciences de Paris, το 1830.

Την ίδια χρονιά, ο Évariste Galois εξέδωσε την πρώτη του εργασία για αυτά τα θέματα, στην οποία θέτει τα θεμέλια της σημερινής Θεωρίας Galois.

Η πρώτη ολοκληρωμένη απόδειξη (του Abel) για το Θεώρημα Abel – Ruffini είναι κάποια χρόνια παλαιότερη από την απόδειξη του Galois. Τα έργα του Galois έγιναν ευρέως γνωστά μετά από αρκετές δεκαετίες. Με άλλα λόγια, ούτε ο Ruffini ούτε ο Abel χρησιμοποιήσαν τις μεθόδους του Galois προκειμένου να αποδείξουν ότι ορισμένες αλγεβρικές εξισώσεις δεν επιλύονται. Επομένως, θα υπάρχει μία άλλη απόδειξη, ένας πιο απλός και κατανοητός τρόπος, μέσω του οποίου μπορούμε να κατανοήσουμε τον λόγο για τον οποίο η γενική πεμπτοβάθμια εξίσωση δεν επιλύεται με ριζικά. Παρόλα αυτά, αξίζει να αναφέρουμε πως τόσο οι Abel και Ruffini όσο και ο Galois βασίστηκαν στην ίδια ιδέα: *τη συμμετρία μιας αλγεβρικής εξίσωσης υπό την μετάθεση των λύσεων της*.

2.2 <u>Το Θεώρημα Abel – Ruffini</u>

Το **Θεώρημα Abel – Ruffini** δηλώνει ότι δεν υπάρχει αλγεβρική λύση για το πολυώνυμο $5^{ου}$ βαθμού στη γενική του μορφή.

Πιο αυστηρά:

Δεν υπάρχει κλειστή μορφή έκφρασης, έστω $F(p)$, που αποτελείται από προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς, διαιρέσεις, δυνάμεις ακεραίων και πεπερασμένα ακέραια ριζικά, ώστε η $F(p)$ να παρέχει λύσεις για οποιαδήποτε αλγεβρική εξίσωση p της μορφής $\boldsymbol{x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0} \quad (\boldsymbol{p})$

Επιπλέον, το Θεώρημα Abel – Ruffini αναφέρεται και στο ισχυρότερο αποτέλεσμα, ότι οι εξισώσεις $5^{ου}$ και μεγαλύτερου βαθμού δεν επιλύονται με ριζικά.

Η αδυναμία επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων για $5^{ο}$ και μεγαλύτερο βαθμό έρχεται σε αντίθεση με την επίλυση των χαμηλότερων βαθμών εφόσον υπάρχουν τύποι για την επίλυση εξισώσεων $2^{ου}$, $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού.

3. Προαπαιτούμενες γνώσεις

3.1 <u>Στοιχεία Θεωρίας Ομάδων</u>

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε μερικές έννοιες από την Θεωρία Ομάδων.

Ομάδα:

Ομάδα $\langle \boldsymbol{G}, * \rangle$ είναι ένα σύνολο G εφοδιασμένο με τη διμελή πράξη $*$ στο G έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:

- Η διμελής πράξη $*$ είναι προσεταιριστική
- Υπάρχει ένα στοιχείο e στο G τέτοιο ώστε: $e * x = x * e = x$ για κάθε $x \in G$. (το e λέγεται ταυτοτικό για την $*$ στο G)
- Για κάθε a στο G, υπάρχει ένα στοιχείο a' στο G με την ιδιότητα: $$a' * a = a * a' = e$$ (το a' λέγεται αντίστροφο του a ως προς την πράξη $*$)

Υποομάδα:

Αν ένα υποσύνολο H μιας ομάδας είναι κλειστό ως προς την διμελή πράξη της ομάδας G και ως προς τα αντίστροφα τότε H είναι ομάδα με την ίδια πράξη. Τότε η H λέγεται **υποομάδα** της G. Θα γράφουμε $H \leq G$ ή $G \geq H$ για να συμβολίσουμε ότι η H είναι υποομάδα της G, και γράφοντας $H < G$ ή $G > H$ θα λέμε ότι η H είναι γνήσια υποομάδα της G.

Μετάθεση:

Μετάθεση ενός συνόλου A είναι μία συνάρτηση «1-1» και «επί» από το A στον εαυτό του.

Τετριμμένη μετάθεση, που συμβολίζεται ( ), είναι η ταυτοτική μετάθεση που αφήνει όλα τα στοιχεία του A στην αρχική τους θέση.

Το σύνολο S_A όλων των μεταθέσεων του συνόλου A αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.

Συμμετρική ομάδα:

Έστω A το πεπερασμένο σύνολο $\{1,2,\dots,n\}$. Η ομάδα όλων των μεταθέσεων του A λέγεται **συμμετρική ομάδα** για τους n χαρακτήρες και συμβολίζεται S_n. Η S_n έχει $n!$ στοιχεία. (Υπενθύμιση: $n! = n(n-1)(n-2) \dots (3)(2)(1)$)

Κύκλος:

Μία μετάθεση $\sigma \in S_n$ λέγεται **κύκλος** αν έχει το πολύ μία τροχιά, η οποία να περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία. Το **μήκος** ενός κύκλου είναι το πλήθος των στοιχείων της μεγαλύτερης τροχιάς του.

Αν γράψουμε τον κύκλο $(i_1\, i_2 \dots i_k)$ σημαίνει ότι απεικονίζει την i_1 στοιχείο στο i_2 – στοιχείο, το i_2 στοιχείο στο i_3 στοιχείο κτλ ενώ όλα τα στοιχεία που ανήκουν $\{1,2,\dots,n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ απεικονίζονται στον εαυτό τους.

Ξένοι ονομάζονται οι κύκλοι οι οποίοι δεν έχουν κοινά στοιχεία μεταξύ τους.

Αντιμετάθεση

Αντιμετάθεση είναι μία μετάθεση που ενεργεί ως ταυτοτική σε όλα τα στοιχεία εκτός από δύο δηλαδή ανταλλάσσει δύο στοιχεία και διατηρεί όλα τα υπόλοιπα σταθερά.

Εναλλάσσουσα ομάδα:

Μια μετάθεση ενός πεπερασμένου συνόλου λέγεται **άρτια** αν γράφεται ως γινόμενο άρτιου πλήθους αντιμεταθέσεων.
Η υποομάδα της S_n που αποτελείται από τις ***άρτιες*** μεταθέσεις των $n -$ στοιχείων λέγεται η **εναλλάσσουσα ομάδα** $\boldsymbol{A_n}$ των $n -$ στοιχείων.
Οι εναλλάσσουσες ομάδες, γενικά, δεν είναι αβελιανές.

Γεννήτορας – Κυκλική ομάδα:

Αν G είναι μια ομάδα και $a \in G$, τότε το $H = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ είναι υποομάδα της G. Η ομάδα αυτή είναι η κυκλική υποομάδα $< a >$ της G που παράγεται από το a. Επίσης, για μία ομάδα G και ένα στοιχείο $a \in G$, αν $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$, τότε το a λέγεται **γεννήτορας** της G και η ομάδα $G =< a >$ λέγεται **κυκλική**.

Αντιμεταθέτης (commutator):

Ο **αντιμεταθέτης** δύο στοιχείων, g και h, μιας ομάδας G είναι το στοιχείο

$$\boldsymbol{[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}}$$

Αυτό το στοιχείο είναι ίσο με το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας ***αν και μόνο αν*** τα στοιχεία g, h αντιμετατίθενται

> *Από τον ορισμό $gh = [g,h]hg$, το στοιχείο $[g,h]$ θα είναι το ταυτοτικό αν και μόνο αν $\boldsymbol{gh = hg}$*

Το σύνολο των αντιμεταθετών ***<u>δεν</u>*** είναι, γενικά, κλειστό υπό την πράξη της ομάδας.

Επομένως, προκύπτει ο παρακάτω ορισμός:

Υποομάδα αντιμεταθετών – commutator subgroup:

Η υποομάδα που παράγεται από όλους τους αντιμεταθέτες και είναι κλειστή ονομάζεται **υποομάδα αντιμεταθετών**.

Μία ομάδα που συμπίπτει με την υποομάδα αντιμεταθετών της ονομάζεται **τέλεια ομάδα**.

3.2 <u>Μεταθέσεις βρόχων</u>

Στην ενότητα αύτη θα παραθέσουμε ορισμούς κάποιων τοπολογικών εννοιών.

Μονοπάτι:

Έστω ένας τοπολογικός χώρος X και $x, y \in X$. Ένα μονοπάτι από το x στο y είναι μία συνεχής συνάρτηση $\gamma : [0,1] \to X$ ώστε $\gamma(0) = x$ και $\gamma(1) = y$.

Βρόχος:

Ένας **βρόχος** είναι ένα μονοπάτι γ με την ιδιότητα $\gamma(0) = \gamma(1)$. Ο βρόχος γ λέμε ότι ξεκινά από το $\gamma(0)$.

Δοθέντων ενός τοπολογικού χώρου (X, τ), με τ την τοπολογία του χώρου X, και μίας «επί» απεικόνισης από τον X σε ένα σύνολο Y προκύπτουν οι δύο παρακάτω ορισμοί:

Τοπολογία πηλίκο – Απεικόνιση πηλίκο:

Έστω $p : X \to Y$ μία «επί» απεικόνιση. Τότε η **τοπολογία πηλίκο** επί του Y είναι η μεγαλύτερη τοπολογία που επάγεται από την τ μέσω της p και την καθιστά συνεχή. Για την τοπολογία πηλίκου σ ισχύει:

$$\sigma = \{V \subseteq Y | f^{-1}(V) \in \tau\}.$$

Από την άλλη, μία συνεχής και «επί» απεικόνιση $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ λέγεται **(τοπολογική) απεικόνιση πηλίκου** αν η σ ταυτίζεται με την τοπολογία πηλίκο που επάγεται από την τ και την f.

Πρόταση 1:

Κάθε απεικόνιση πηλίκου $q : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ επάγει μία σχέση ισοδυναμίας $\sim_q$ στο X ορισμένη ως εξής: $x \sim_q \bar{x} \iff q(x) = q(\bar{x})$.
Αντίστροφα, κάθε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο X επάγει μία απεικόνιση πηλίκου $q : X \to X/\sim$ όπου $x \mapsto [x]$, με $X/\sim$ το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας κάτω από την $\sim$, εφοδιασμένο με την τοπολογία πηλίκου σεβόμενη την απεικόνιση q.

Απόδειξη

Λόγω του αντιστρόφου, το ζητούμενο προκύπτει από τον ορισμό της σχέσης ισοδυναμίας. Πρέπει να δείξουμε ότι $\sim_q$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Γνωρίζουμε, όμως, ότι q είναι συνάρτηση και άρα η $\sim_q$ ικανοποιεί την ανακλαστική, την συμμετρική και την μεταβατική ιδιότητα.■

Μεταθέσεις ριζών πολυωνύμου

Για να περάσουμε στα πολυώνυμα, που είναι και το αντικείμενο που μας απασχολεί, θα αναφερθούμε σε δύο τρόπους μέσω των οποίων ορίζουμε ένα πολυώνυμο. Συγκεκριμένα, μπορούμε να ορίσουμε ένα μονικό μιγαδικό πολυώνυμο δίνοντας τις ρίζες ή τους συντελεστές του. Ένα πολυώνυμο βαθμού n μπορεί να προσδιοριστεί από τις n στο πλήθος ρίζες του στο $\mathbb{C}$ ή από τους n-συντελεστές του. Προς αποφυγή συγχύσεων, ονομάζουμε τον χώρο των ριζών του πολυωνύμου $\mathbb{C}_r^n$ και τον χώρο των συντελεστών του πολυωνύμου $\mathbb{C}_c^n$. Αν γνωρίζουμε τις ρίζες του πολυωνύμου μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές του γράφοντας το πολυώνυμο στην παρακάτω μορφή:

$$(z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n).$$

Έπειτα, εκτελούμε την επιμεριστική ιδιότητα ή χρησιμοποιούμε τους τύπους Vieta ώστε να προκύψει η ακόλουθη έκφραση του πολυωνύμου:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Μ' αυτόν τον τρόπο έχουμε μία απεικόνιση

$$h : \mathbb{C}_r^n \to \mathbb{C}_c^n$$

από τον χώρο των ριζών στο χώρο των πολυωνύμων. Η απεικόνιση είναι συνεχής γιατί οι συντελεστές βρίσκονται πολλαπλασιάζοντας και προσθέτοντας ρίζες. Οι δύο αυτές πράξεις, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός, είναι συνεχείς. Επίσης, η απεικόνιση είναι «επί» γιατί για όλα τα $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0)$ υπάρχει πολυώνυμο το $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ και από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας κάθε τέτοιο πολυώνυμο έχει τουλάχιστον μία μιγαδική ρίζα. Ακόμη, πρέπει να αναφέρουμε ότι η απεικόνιση δεν είναι «1-1» γιατί υπάρχουν διάφορες μεταθέσεις ριζών που αντιστοιχούν στο ίδιο πολυώνυμο. Για να καταστεί πιο σαφές, ας θεωρήσουμε $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2} \in \mathbb{C}_r^n$ ώστε $h(\boldsymbol{r_1}) = h(\boldsymbol{r_2})$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας γνωρίζουμε ότι ένα πολυώνυμο έχει μοναδικό σύνολο ριζών. Επομένως, διαπιστώνουμε ότι το $\boldsymbol{r_1}$ είναι μία μετάθεση του $\boldsymbol{r_2}$. Άρα, όλα τα σύνολα λύσεων που απεικονίζονται στο ίδιο πολυώνυμο είναι μεταθέσεις μεταξύ τους. Έτσι, ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας $\sim_h$ που επάγεται από την απεικόνιση h.

Πρόταση 2:

Η σχέση ισοδυναμίας $x \sim_h y \Leftrightarrow h(x) = h(y)$ υπονοεί ότι υπάρχει $\sigma \in S_n$ ώστε $x = \sigma(y)$.

Όπως αναφέρθηκε στα παραπάνω, λόγω του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας, ένα πολυώνυμο έχει ένα μοναδικό σύνολο λύσεων. Αυτό σημαίνει ότι για ένα πολυώνυμο $p \in \mathbb{C}_c^n$, όλα τα στοιχεία στο $h^{-1}(p)$ είναι μεταθέσεις το ένα του άλλου.

Θα αναφερόμαστε στον χώρο πηλίκου ως $\mathbb{C}_r^n/S_n$ αντί για $\mathbb{C}_r^n/\sim_h$. Επιπλέον, έχουμε και την απεικόνιση πηλίκου

$$q: \mathbb{C}_r^n \to \mathbb{C}_r^n/S_n$$

που είναι «επί» και συνεχής.

Συνοψίζοντας, το πολυώνυμο μπορεί να ορισθεί με μοναδικό τρόπο είτε μέσω του συνόλου των ριζών είτε μέσω των συντελεστών του. Με βάση τα παραπάνω, κατασκευάσαμε μία «1-1» και «επί» απεικόνιση

$$g : \mathbb{C}_r^n/S_n \to \mathbb{C}_c^n.$$

Έτσι, η h προκύπτει ως σύνθεση $h = g \circ q$. Αυτό μπορεί να απεικονιστεί με το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}_r^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{C}_c^n \\
\mathbb{C}_r^n/S_n \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Ένα ερώτημα που ίσως προκύπτει είναι γιατί δεν έχει οριστεί εξ' αρχής ο χώρος των ριζών ως $\mathbb{C}_r^n/S_n$ αντί για $\mathbb{C}_r^n$. Δεν μπορούμε διαισθητικά να θεωρήσουμε ότι οι ρίζες είναι κατά οποιονδήποτε τρόπο ταξινομημένες. Για το λόγο αυτό θα μελετήσουμε παρακάτω το πώς οι βρόχοι στο $\mathbb{C}_r^n/S_n$ αντιστοιχούν σε μονοπάτια στο χώρο των ριζών. Η S_n έχει $n!$ στοιχεία, επομένως το μονοπάτι που θα επιλέξουμε δε θα είναι μοναδικό. Για το λόγο αυτό θα χρειαστούμε τους χώρους επικάλυψης.

Απεικόνιση επικάλυψης:

Μια **απεικόνιση επικάλυψης (covering map)** είναι μία ανοικτή και «επί» απεικόνιση $f : X \to Y$ που είναι τοπικά ένας ομοιομορφισμός. Δηλαδή, κάθε σημείο του X έχει μία γειτονιά που παραμένει ίδια μετά από την απεικόνιση της f στο Y. Στην απεικόνιση επικάλυψης, οι αντίστροφες εικόνες $f^{-1}(y)$ είναι διακριτά σύνολα του X και το πλήθος των $f^{-1}(y)$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του $y \in Y$.

Για παράδειγμα, έστω $S^1 = \{e^{ix} \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Η απεικόνιση $p : S^1 \to S^1, x \mapsto x^n$ είναι απεικόνιση επικάλυψης. Η απεικόνιση είναι επί και συνεχής.

Έστω $e^{it} \in S^1$ και $U_t = \left(e^{i\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}, e^{i\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$.

Επομένως, $p^{-1}(U_t) = \bigcup_{j=0}^{n-1}\left(e^{i\left(n\left(t_j-\frac{\pi}{4n}\right)\right)}, e^{i\left(n\left(t_j+\frac{\pi}{4n}\right)\right)}\right)$ για $t_j = \frac{t+2\pi j}{n} \in p^{-1}(t)$.

Άρα, καταλήγουμε στην ένωση ανοικτών συνόλων που είναι ομοιομορφικά με το U_t. Άρα, (S^1, p) είναι απεικόνιση επικάλυψης.

Χώρος επικάλυψης:

Έστω (X, τ_X) ένας τοπολογικός χώρος. Ένας χώρος επικάλυψης $\big((C, \tau_C), p\big)$ του X είναι ένας τοπολογικός χώρος (C, τ_C) μαζί με μία απεικόνιση επικάλυψης $p : C \to X$.

Πρόταση 3 (ανύψωση μονοπατιού – path lifting):

Έστω $p : \hat{X} \to X$ απεικόνιση επικάλυψης, $f : [0,1] \to X$ ένα μονοπάτι και $\widehat{x_0} \in p^{-1}\{f(0)\}$. Τότε, υπάρχει μία μοναδική ανύψωση $\hat{f} : [0,1] \to \hat{X}$ ώστε $\hat{f}(0) = \widehat{x_0}$ της f.

3.3 <u>Σπάσιμο βρόχων</u>

Σπάσιμο βρόχου (loop breaking):

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[dl, "g"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

όπου p είναι μία απεικόνιση επικάλυψης, f συνεχής και «επί», g συνεχής, «1-1» και «επί». Η αντίστροφη εικόνα f^{-1} ***σπάει ένα βρόχο*** $\boldsymbol{\gamma}$ στο A αν οποιαδήποτε από τις ανυψώσεις της σύνθεσης βρόχου $g \circ \gamma$ μέσω του p δεν είναι βρόχος.

Εφαρμόζουμε το παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει, σε αυτή των πολυωνύμων.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}_r^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{C}_c^n \\ \mathbb{C}_r^n/S_n \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι η g «πηγαίνει» προς την αντίθετη κατεύθυνση. Γνωρίζουμε ότι η g είναι μία συνεχής, «1-1» και «επί» απεικόνιση. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι g^{-1} είναι συνεχής. Άρα, πρόκειται για έναν ομοιομορφισμό.

Για τα $\mathbb{C}_r^n/S_n$, $\mathbb{C}_r^n$ μαζί με την απεικόνιση q σχεδόν ταιριάζουν με τον ορισμό του χώρου επικάλυψης. Γνωρίζουμε ότι q είναι συνεχής και «επί» απεικόνιση γιατί είναι απεικόνιση πηλίκου. Το ζήτημά μας σε αυτό το σημείο είναι η απαίτηση το q να είναι τοπικός ομοιομορφισμός και πιο συγκεκριμένα πολυώνυμα με επαναλαμβανόμενες ρίζες.

Ας αφαιρέσουμε τα στοιχεία με επαναλαμβανόμενες συντεταγμένες στο $\mathbb{C}_r^n$.
Ονομάζουμε το σύνολο των n-άδων με επαναλαμβανόμενες ρίζες L και L' το συμπλήρωμα του L στο $\mathbb{C}_r^n$.

Άρα, $L = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_r^n | \exists\, i, j: i \neq j, z_i = z_j\}$ και $L' = \mathbb{C}_r^n \setminus L$

Χαρακτηρίζουμε το σύνολο L ως κορεσμένο (saturated) υπό την q. Παίρνουμε, λοιπόν, τα παρακάτω:

- $q^{-1}\big(q(L)\big) = L$, που σημαίνει ότι οι διακριτές ρίζες παραμένουν διακριτές ακόμα και υπό μεταθέσεις
- $q(\mathbb{C}_r^n \setminus L) = q(\mathbb{C}_r^n) \setminus q(L)$

Ορίζουμε, τώρα, κάποιες νέες απεικονίσεις.

Έστω $\tilde{q}\, :\, L' \to L'/S_n$ ο περιορισμός της q στο L'. Η $\tilde{q}$ είναι συνεχής και επί απεικόνιση γιατί πρόκειται για απεικόνιση πηλίκου.

Αν ορίσουμε και τις $i : L' \to \mathbb{C}_r^n$ και $\tilde{\imath} : L'/S_n \to \mathbb{C}_r^n/S_n$ ως τον κλασική εγκλεισμό απεικονίσεων, έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
L' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\tilde{q}"] & \mathbb{C}_r^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{C}_c^n \\
L'/S_n \arrow[r, "\tilde{\imath}"] & \mathbb{C}_r^n/S_n \arrow[ur, "g"] &
\end{tikzcd}$$

Πρόταση 4:

Η απεικόνιση $\tilde{q}$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.

Απόδειξη

Για κάθε $[z] = [(z_1, z_2, \dots, z_n)] \in L'/S_n$. Επιλέγουμε $R'_{min} = d(i \circ \tilde{q}^{-1}(z), L)$, όπου $d(\cdot\,,\cdot)$ η απόσταση μεταξύ συνόλων με την κλασική μετρική σχέση στο $\mathbb{C}^n$. Ας πάρουμε U_z τον δίσκο με ακτίνα $\frac{R_{min}}{2}$ γύρω από το z. Αυτό έχει νόημα στο L'/S_n γιατί ο δίσκος δεν θα τέμνει το L ακόμη και χωρίς τον περιορισμό στον υπόχωρο και άρα είναι ίδιος με τον τρόπο που ορίζεται στο $\mathbb{C}^n$. Άρα, έχουμε ένα ανοικτό σύνολο με τις απαραίτητες ιδιότητες. Συγκεκριμένα, η προεικόνα (pre-image) του U_z είναι ξένη ένωση n-δίσκων ακτίνας $\frac{R_{min}}{2}$, καθένας από τους οποίους έχει κέντρο ένα από τα $n!$ στοιχεία στην προεικόνα του z. Αυτά τα ανοικτά σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους λόγω του ορισμού του R_{min}. Η ακτίνα του ανοικτού συνόλου είναι, εκ κατασκευής, το πολύ το $\frac{1}{4}$ της απόστασης από την κοντινότερη μετάθεση. Για να γίνει πιο σαφές, παίρνουμε μία μετάθεση σ και $\tilde{z} \in L'$ και θα έχουμε:

$$\|\tilde{z} - \sigma(\tilde{z})\| = \|\widetilde{z_1} - \sigma(\widetilde{z_1}), \dots, \widetilde{z_5} - \sigma(\widetilde{z_5})\| \geq \min_{i \neq j}\{|\widetilde{z_\iota} - \widetilde{z_j}|\} \geq 2d(i(\tilde{z}), L). \blacksquare$$

Πρόταση 5:

Η απεικόνιση g είναι ομοιομορφισμός.

Η **απόδειξη** της Πρότασης 5 βρίσκεται στην πηγή [21].

Έστω, τώρα, γ ένα μονοπάτι στον $\mathbb{C}_c^n$. Εφόσον g ομοιομορφισμός, αν το γ δεν διέρχεται από οποιοδήποτε πολυώνυμο με επαναλαμβανόμενες ρίζες, θα είναι ομοιομορφικό με ένα μονοπάτι $\tilde{\gamma}$ στον L'/S_n. Επομένως, από Πρόταση 3, θα έχουμε ένα σύνολο μονοπατιών (lifts) στο L'.

Ορισμός:
Έστω $L_c' = h(L')$ και έστω γ μονοπάτι στο χώρο των συντελεστών $L_c' \subset \mathbb{C}_c^n$. Ορίζουμε Γ_γ το σύνολο των ανυψώσεων (lifts) του $\tilde{\iota}^{-1} \circ g^{-1} \circ \gamma$.

Σπάσιμο πολυωνυμικού βρόχου (Polynomial loop breaking):

Έστω, λοιπόν, γ ένας βρόχος στο $L_c' \subset \mathbb{C}_c^n$. Η αντίστροφη εικόνα h^{-1} λέμε ότι σπάει αυτό το βρόχο αν οποιοδήποτε από τις ανυψώσεις στο σύνολο Γ_γ δεν είναι βρόχος.

3.4 <u>Αντιμεταθέσεις που επάγονται από βρόχους</u>

Πρόταση 6:

Δίνεται ένα μετρήσιμο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^2$ και δύο σημεία $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Τότε θα υπάρχει κύκλος $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ με $a, b \in C$.

Απόδειξη

Φέρνουμε (ε) την μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζουν τα a, b. Παίρνουμε σημείο $c_0 \in (\varepsilon)$. Εφόσον a, b έχουν ίση απόσταση από το c_0, υπάρχει ένας κύκλος C_0 με κέντρο c_0 που τέμνει στα a, b. Παίρνουμε, τώρα, $c_1 \in (\varepsilon)$ με $c_1 \neq c_0$. Κατασκευάζουμε κύκλο C_1 με κέντρο c_1 με τον ίδιο τρόπο. Εφόσον C_0, C_1 έχουν διαφορετικά κέντρα, θα είναι διαφορετικοί κύκλοι. Ας πούμε ότι ο κύκλος C_0 τέμνει στο $x \in A$. Αν C_1 τέμνει, επίσης, στο x τότε οι κύκλοι C_0, C_1 έχουν 3 κοινά σημεία (x, a, b). Εφόσον ένας κύκλος μπορεί να ορισθεί μοναδικά από οποιαδήποτε 3 σημεία στα οποία τέμνει, οδηγούμαστε σε **άτοπο**. Άρα, $C_0 = C_1$. Αυτό σημαίνει ότι για οποιοδήποτε $x \in A$ μπορεί να τέμνει έναν από αυτούς τους κύκλους. Άρα, για οποιοδήποτε $x \in A$ υπάρχει το πολύ ένα σημείο $p \in (\varepsilon)$ ώστε ο κύκλος που αντιστοιχεί στο p περιέχει το x. Εφόσον γνωρίζουμε ότι A είναι μετρήσιμο, θα τέμνει μόνο ένα μετρήσιμο σύνολο τέτοιων κύκλων. Εφόσον (ε) δεν είναι μετρήσιμο, πρέπει να υπάρχουν σημεία στο (ε) των οποίων ο κύκλος δεν τέμνει το A σε κανένα σημείο. Άρα, υπάρχουν κύκλοι που τέμνουν στα a, b αλλά όχι στο A.■

Θα περάσουμε, τώρα, σε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα:
Αν υπάρχει μία αλγεβρική λύση της πεμπτοβάθμιας, τότε για οποιαδήποτε μετάθεση στο σύνολο των ριζών που παρέχεται από αυτή την εξίσωση σε ένα πολυώνυμο με διακριτές ρίζες, υπάρχει ένας βρόχος στο χώρο των συντελεστών που επάγει αυτή την μετάθεση.

Απόδειξη

Ας πάρουμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
L' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\tilde{q}"'] & \mathbb{C}_r^5 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{C}_c^5 \\
L'/S_5 \arrow[r, "\tilde{\iota}"] & \mathbb{C}_r^5/S_5 \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Το θεώρημα μας λέει ότι, αν επιλέξουμε ένα στοιχείο $p = (r_1, \dots, r_5) \in L'$ και $\sigma \in S_5$ μία μετάθεση, θα υπάρχει ένας βρόχος γ στο $L'_c \subset \mathbb{C}^5_c$, ώστε το σύνολο ανυψώσεων Γ_γ να περιέχει ένα μονοπάτι $\tilde{\gamma}$ ώστε $\tilde{\gamma}(0) = p$ και $\tilde{\gamma}(1) = \sigma(p)$.

Το παραπάνω διάγραμμα είναι μεταθετικό. Οπότε, εξ' ορισμού θα έχουμε: $\gamma = g \circ \tilde{\iota} \circ \tilde{q} \circ \tilde{\gamma}$ άρα $\gamma = h \circ i \circ \tilde{\gamma}$

Η απεικόνιση i είναι απεικόνιση εγκλεισμού, λόγω περιορισμός στα πολυώνυμα χωρίς επαναλαμβανόμενες ρίζες. Το πρόβλημα μας περιορίζεται στο να βρεθεί ένα μονοπάτι $I: [0,1] \to \mathbb{C}^5_r$ με τις εξής ιδιότητες:

- Το I δεν διέρχεται από οποιοδήποτε πολυώνυμο με επαναλαμβανόμενες ρίζες
- $I(0) = p, I(1) = \sigma(p)$
- $h \circ I$ είναι βρόχος

Αν κατασκευάσουμε ένα τέτοιο μονοπάτι, τότε το $h(I)$ θα είναι το γ. Αυτό ισχύει λόγω της μοναδικότητας στην πρόταση 3 που εγγυάται ότι $\tilde{\iota}^{-1}$ περιέχεται στο $\Gamma_{h(I)}$. Αν βρεθεί, λοιπόν, το I η απόδειξή μας τελειώνει.

Για $p = (r_1, \dots, r_5)$, επιλέγουμε μία μετάθεση σ η οποία θα μεταθέτει τα r_i, r_j. Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι η σ είναι αντιμετάθεση. Επομένως, οι άλλες τρεις ρίζες δε θα αλλάξουν θέση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα υποθέσουμε ότι $r_i = r_1$ και $r_j = r_2$. Από την πρόταση 6, θα υπάρχει ένας κύκλος στο $\mathbb{C}$ που διέρχεται από τα r_1, r_2 αλλά όχι από τα r_3, r_4, r_5. Ορίζουμε φ_1 το μονοπάτι από το r_1 στο r_2 κατά μήκος του κύκλου κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Ορίζουμε φ_2 το μονοπάτι από το r_2 στο r_1 κατά μήκος του κύκλου κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Έστω, λοιπόν, μονοπάτι $I: [0,1] \to \mathbb{C}^5_r$ ως

$$I: t \longmapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t), r_3, r_4, r_5)$$

Αυτό, λόγω κατασκευής, ξεκινά από το p και τελειώνει στο $\sigma(p)$ χωρίς να διέρχεται από πολυώνυμα με επαναλαμβανόμενες ρίζες. Επιπλέον, $h(I)$ είναι βρόχος εφόσον οι μεταθέσεις ριζών στο χώρο των ριζών τις απεικονίζουν στο ίδιο πολυώνυμο στο χώρο των συντελεστών. ■

Σε αυτό το σημείο θα παραθέσουμε μία σημαντική παρατήρηση.

Παρατήρηση: Εφόσον όλες οι μεταθέσεις μπορούν να εκφραστούν ως γινόμενα αντιμεταθέσεων, τότε θα υπάρχει βρόχος για οποιαδήποτε μετάθεση των ριζών αρκεί να δείξουμε ότι η σύνθεση βρόχων αντιστοιχεί στο να πάρουμε το γινόμενο των παραγόμενων μεταθέσεών τους.

3.5 Μεταθέσεις αντιμεταθετών (Commutator permutations)

Σ’αυτό το σημείο της εργασίας θα μελετήσουμε μεταθέσεις που επάγονται από βρόχους αντιμεταθετών.

Θα απαντήσουμε στο εξής ερώτημα:

«Πώς η υποθετική λύση μας θα συμπεριφερόταν κάτω από συγκεκριμένους βρόχους και τί θα έκανε με τις ρίζες ενός πολυωνύμου;»

Για δοθέν πολυώνυμο p 5ου βαθμού, έστω ότι ονομάζουμε $F(p)$ την υποθετική λύση και $M_p = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ την πεντάδα των ριζών του *(στοιχείο του $\mathbb{C}_r^5$)*. Όσον αφορά το M_p, πρόκειται για μία διατεταγμένη πεντάδα. Και ενώ, η διάταξη στο M_p είναι εντελώς αυθαίρετη, χρειάζεται να βάλουμε μία διάταξη, διότι για να μελετήσουμε τις μεταθέσεις των ριζών που θέλουμε, θα πρέπει να υπάρχει μια διάταξη στην M_p.

3.5.1 Γινόμενο μεταθέσεων

Αλληλουχία μονοπατιών (path concatenation):

Έστω γ_1, γ_2 μονοπάτια με την ιδιότητα $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Τότε η ***αλληλουχία*** τους ή αλλιώς το ***γινόμενό*** τους $\gamma_1 * \gamma_2$ ορίζεται ως:

$$\gamma_1 * \gamma_2(x) = \begin{cases} \gamma_1(2x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2x-1) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Επίσης, το αντίστροφο ενός βρόχου γ ορίζεται ως: $\boxed{\boldsymbol{\gamma^{-1}(x) = \gamma(1-x)}}$

Πρόταση 7:

Έστω δύο βρόχοι γ_1, γ_2 που αντιστοιχούν στις μεταθέσεις σ_1, σ_2. Αν και οι δύο βρόχοι βασίζονται στο ίδιο σημείο, τότε $\gamma_1 * \gamma_2$ αντιστοιχεί στο $\sigma_1 \circ \sigma_2$ (σύνθεση μεταθέσεων).

Απόδειξη

Έστω δύο βρόχοι γ_1, γ_2, που επάγουν τις μεταθέσεις σ_1, σ_2 στην πλειάδα των ριζών M_p. Αν, λοιπόν, διασχίσουμε το μονοπάτι γ_1, θα έχουμε ότι κάθε ρίζα $r \in M_p$ στέλνεται στο $\sigma_1(r)$. Αν, έπειτα, διασχίσουμε το μονοπάτι γ_2, θα έχουμε ότι κάθε ρίζα $r \in M_p$ στέλνεται στο $\sigma_2(\sigma_1(r))$. Έτσι, διασχίζοντας την σύνθεση και των δύο βρόχων, $\gamma_1 * \gamma_2$, αντιστοιχεί στο να μετατεθούν οι ρίζες από το γινόμενο των δύο μεταθέσεων. ■

Πρόταση 8:

Δοθέντος πολυωνύμου p με 5 διακριτές ρίζες, για οποιαδήποτε μετάθεση στο σύνολο $F(p)$, υπάρχει βρόχος στον πολυωνυμικό χώρο που επάγει αυτή την μετάθεση.

Απόδειξη

Βασιζόμενοι στην ενότητα 3.1, γνωρίζουμε ότι για οποιαδήποτε αντιμετάθεση στο σύνολο $F(p)$ θα έχουμε ένα βρόχο που επάγει αυτή την αντιμετάθεση. Από την Θεωρία Ομάδων, όμως, γνωρίζουμε ότι κάθε μετάθεση μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο αντιμεταθέσεων. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 7. ∎

3.6 Αντιμεταθέτες

Αντιμεταθέτες βρόχων (loop commutators):

Ο αντιμεταθέτης δύο βρόχων ορίζεται ως:

$$[\gamma_1, \gamma_2] = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_1^{-1} * \gamma_2^{-1}$$

Αντιμεταθέτες μεταθέσεων (permutation commutators):

Ο αντιμεταθέτης δύο μεταθέσεων ορίζεται ως:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1^{-1} \circ \sigma_2^{-1}$$

Με τον αντιμεταθέτη παράγουμε μία μη τετριμμένη μετάθεση από ένα ζεύγος μη αντιμεταθετικών μεταθέσεων.

Περιλαμβάνει δύο εμφανίσεις και των δύο στοιχείων ώστε να επιλέξουμε μία ακολουθία πράξεων που επάγουν τον αντιμεταθέτη και να έχουμε ίσο βαθμό ωρολογιακών και αντιωρολογιακών πράξεων (για βρόχους).

Πρόταση 9:

Υπάρχουν βρόχοι της μορφής $[\gamma_1, \gamma_2]$ που επάγουν μη τετριμμένες μεταθέσεις στην πλειάδα M_p.

Απόδειξη

Για οποιεσδήποτε δύο ρίζες θα υπάρχει ένας βρόχος που αντιμεταθέτει τις δύο ρίζες. Για $M_p = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$, έχουμε για όλα τα i, j ένα βρόχο, έστω $\gamma_{i,j}$ που επάγει μία $a_{i,j} : M_p \to M_p$ ώστε $a_{i,j} : r_i \mapsto r_j, r_j \mapsto r_i$ αλλά θα λειτουργεί ως ταυτότητα για τα υπόλοιπα στοιχεία. Αφού η σύνθεση των βρόχων αντιστοιχεί στο γινόμενο των μεταθέσεων, ο αντιμεταθέτης των βρόχων του $\gamma_{j,k}$ και $\gamma_{i,j}$ με $i \neq j \neq k$ αντιστοιχεί στην μετάθεση $(r_i\ r_j)(r_j\ r_k)(r_i\ r_j)(r_j\ r_k) = (r_i\ r_j\ r_k) \neq (1)$. Επομένως, έχουμε έναν αντιμεταθέτη βρόχων που επάγει μία μη τετριμμένη μετάθεση των ριζών ενός πολυωνύμου.■

3.7 Αντιμεταθέτης ριζικών

3.7.1 Ανύψωση βρόχου από ριζικά

Πρόταση 10:

Βρόχοι, αντίστροφοι βρόχοι και γινόμενα βρόχων διατηρούνται κάτω από συνεχείς συναρτήσεις.

Απόδειξη

Ορίζουμε βρόχο γ και συνεχή συνάρτηση f. Γνωρίζουμε ότι βρόχοι είναι συνεχείς και η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής. Επομένως, η $f \circ \gamma$ είναι συνεχής.

Η f είναι συνάρτηση και $\gamma(0) = \gamma(1)$. Άρα, $\boldsymbol{f \circ \gamma(0) = f \circ \gamma(1)}$. Άρα, $f \circ \gamma$ είναι βρόχος. Στην προηγούμενη ενότητα, αναφέραμε ότι $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$.

Άρα, $\boldsymbol{(f \circ \gamma)^{-1}(t) = f \circ \gamma(1 - t)}$

Επομένως, πρόκειται για έναν αντίστροφο του βρόχου $f \circ \gamma(t)$. Αν $\gamma_1 * \gamma_2$ είναι γινόμενο βρόχων και f συνάρτηση τότε $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1)$. Εφόσον f συνεχής, $f \circ (\gamma_1 * \gamma_2)$ θα είναι γινόμενο βρόχων.■

Πρόταση 11:

Οι συναρτήσεις δε μπορούν να σπάσουν βρόχους.

Απόδειξη

Ορίζουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα, το οποίο ικανοποιεί τον ορισμό του **«σπασίματος βρόχου»**.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "q"'] & A \arrow[dl, "G"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Θεωρούμε ότι Φ^{-1} είναι συνάρτηση και ότι σπάει τον βρόχο γ στο A. Έτσι, υπάρχει ανύψωση (lift) στο X του βρόχου $G(\gamma)$, που δεν είναι βρόχος. Έστω ότι μία τέτοια ανύψωση είναι το μονοπάτι $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$. Εφόσον το παραπάνω διάγραμμα αντιμετατίθεται, θα έχουμε:

$$\boldsymbol{G(\gamma) = q(\tilde{\gamma}) = G\big(\Phi(\tilde{\gamma})\big)}.$$

Καθώς η G είναι «1-1», θα έχουμε $\Phi(\tilde{\gamma}) = \gamma$. Εφόσον Φ^{-1} είναι συνάρτηση, οδηγούμαστε σε **άτοπο**.■

Πρόταση 12:

Η απεικόνιση $p:\ \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}, x\mapsto x^n$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.

Απόδειξη

Αρχικά, έχουμε τον κανονικό ισομορφισμό $\mathbb{C}\setminus\{0\}\cong S^1\times(0,\infty)$. Η απεικόνιση p χωρίζεται στην απεικόνιση

$$\tilde{p}: S^1\times(0,\infty)\to S^1\times(0,\infty)$$
$$\left(e^{ix},r\right)\mapsto\left(e^{ixn},r^n\right)$$

Αξιοποιώντας το παράδειγμα στην ενότητα 3.1.1, έχουμε ότι η απεικόνιση είναι απεικόνιση επικάλυψης στην πρώτη συνιστώσα. Η δεύτερη συνιστώσα είναι ομοιομορφισμός. Επομένως, η απεικόνιση p είναι απεικόνιση επικάλυψης.■

Σ' αυτό το σημείο της εργασίας, χάρη στην Πρόταση 3, το παραπάνω αποτέλεσμα μας επιτρέπει να ορίσουμε ποια μονοπάτια βρίσκονται υπό ριζικών.

Ριζικό ενός μονοπατιού (radical of a path):

Ορισμός:

Έστω ένα μονοπάτι γ στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Τότε το $\sqrt[n]{\boldsymbol{\gamma}}$ ορίζεται ως το σύνολο των ανυψώσεων του γ από την απεικόνιση επικάλυψης (λόγω της Πρότασης 12). Αυτό ονομάζεται **ριζικό ενός μονοπατιού** $\boldsymbol{\gamma}$.

Πρόταση 13:

Ορίζουμε δύο μονοπάτια γ_1,γ_2 με την ιδιότητα: $\gamma_1(1)=\gamma_2(0)$ Επομένως, για κάθε ανύψωση $\sqrt[n]{\gamma_1}$ θα υπάρχει και μία ανύψωση $\sqrt[n]{\gamma_2}$ ώστε:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{\gamma_1}}(\mathbf{1})=\sqrt[n]{\boldsymbol{\gamma_2}}(\mathbf{0})$$

Ορίζουμε, λοιπόν, $\sqrt[n]{\gamma_1}*\sqrt[n]{\gamma_2}$ ως την αλληλουχία (ή το γινόμενο) των αντίστοιχων ανυψώσεων.

Απόδειξη

Ισχύει ότι: $\left(\sqrt[n]{\gamma_1}(1)\right)^n=\gamma_2(0)$. Αξιοποιώντας την Πρόταση 3, αποδεικνύεται ότι υπάρχει τέτοιο μονοπάτι.■

Ορισμός:

Με τον συμβολισμό $\sqrt[n]{\boldsymbol{\gamma}}^{-\mathbf{1}}$ εννοούμε το σύνολο των ανυψώσεων του γ που διανύονται αντίστροφα.

Παρακάτω θα παραθέσουμε μία πρόταση πολύ σημαντική για ό,τι αφορά το ***σπάσιμο βρόχων***.

Πρόταση 14:

Αν η έκφραση $F(p)$ περιέχει μονό ριζικό, και αυτό δε μπορεί να σπάσει ένα βρόχο, τότε και ολόκληρη η συνάρτηση δε μπορεί.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ότι η έκφραση $F(p)$ μπορεί να γραφεί ως $f\left(\sqrt[n]{g(p)}\right)$. Η g είναι μία αλγεβρική έκφραση η οποία δεν περιέχει ριζικά. Συγκεκριμένα, η g περιέχει σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Αν το p διαγράψει ένα βρόχο, το ίδιο θα κάνει και το $g(p)$, διατηρώντας την σύνθεση των βρόχων. Κατά όμοιο τρόπο, αν το $\sqrt[n]{g(p)}$ διαγράψει ένα βρόχο, το ίδιο θα κάνει και η f, καθώς πρόκειται για σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επομένως καταλήγουμε στο εξής: αν το ριζικό δε μπορεί να σπάσει ένα βρόχο τότε ολόκληρη η έκφραση δε θα μπορεί. ■

3.7.2 Ανύψωση αντιμεταθέτη (commutator lifting)

Πρόταση 15:

Θεωρούμε έναν αντιμεταθέτη βρόχο γ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Όλες οι ανυψώσεις $\sqrt[n]{\gamma}$ εξακολουθούν να είναι βρόχοι.

Απόδειξη

Αρχικά, θεωρούμε βρόχους γ_1, γ_2 που ξεκινούν από το ίδιο σημείο. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $\sqrt[m]{[\gamma_1, \gamma_2]}$ είναι βρόχος. Επιλέγουμε μία από τις ανυψώσεις $\sqrt[m]{[\gamma_1, \gamma_2]}$ και την ονομάζουμε $\hat{\gamma}$. Προφανώς $\hat{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Τα γ_1, γ_2 είναι μέσα στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Επομένως, μπορούν να γραφούν με τη χρήση πολικών συντεταγμένων. Γνωρίζουμε ότι η πρωταρχική ρίζα είναι συνεχής συνάρτηση πάνω στους θετικούς πραγματικούς οπότε η ακτινική συνιστώσα διατηρεί τους βρόχους.

Για την γωνιακή συνιστώσα, τώρα, δουλεύουμε πιο αυστηρά.

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t) = r_1(t)e^{i\theta_1(t)} \\
&\gamma_2(t) = r_2(t)e^{i\theta_2(t)} \\
&\Delta\theta_1(t) = \theta_1(t) - \theta_1(0) \\
&\Delta\theta_2(t) = \theta_2(t) - \theta_2(0)
\end{aligned}$$

Ως $\Delta\theta$ ορίζουμε τη διαφορά μεταξύ της γωνιακής συνιστώσας μετά από ένα χρονικό διάστημα t σε ένα μονοπάτι και της γωνιακής συνιστώσας στην αρχή του μονοπατιού.

Επειδή οι βρόχοι ξεκινούν από το ίδιο σημείο θα έχουμε:

$$r_1(0) = r_1(1) = r_2(0) = r_2(1)$$
$$\Delta\theta_1(1) = 2\pi n_1, \Delta\theta_2(1) = 2\pi n_2 \ \ \mu\varepsilon\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

Σ' αυτό το σημείο μπορούμε να δούμε ότι πιθανότατα η m-οστή ρίζα μπορεί να σπάσει βρόχους.

Γνωρίζουμε ότι $\sqrt[m]{r(0)} = \sqrt[m]{r(1)}$. Όμως, το $\Delta\theta(1)$ δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi m$.

Για τον αντιμεταθέτη του βρόχου, θα έχουμε:

$$[\gamma_1, \gamma_2](t) = r_{12}(t)e^{i\theta_{12}(t)}$$

$$\Delta\theta_{12}(t) = \theta_{12}(t) - \theta_{12}(0)$$

και έπειτα

$$\big(r_{12}(t), \theta_{12}(t)\big) = \begin{cases} \big(r_1(4t), \theta_1(4t)\big), 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \big(r_1(4t-1), \theta_2(4t-1)\big), \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \big(r_1(3-4t), \theta_1(3-4t)\big), \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \big(r_2(4-4t), \theta_2(4-4t)\big), \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

Ισχύει ότι: $\Delta\theta_{\gamma * \overline{\gamma}} = \Delta\theta_\gamma + \Delta\theta_{\overline{\gamma}}$ και $\Delta\theta_{\overline{\gamma}^{-1}} = -\Delta\theta_\gamma$

Επομένως, $\Delta\theta_{12}(1) = 0$

Για $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ θα έχουμε:

$$\sqrt[m]{[\gamma_1, \gamma_2]}(1) = \sqrt[m]{r_{12}(1)e^{i\theta_{12}(1)}}$$

$$= \sqrt[m]{r_{12}(1)}\, e^{\left[i\frac{\theta_{12}(1)}{m} + \frac{2\pi j}{m}\right]} = \sqrt[m]{r_{12}(1)}\, e^{\left[i\frac{\theta_{12}(0)}{m} + \frac{2\pi j}{m} + i\frac{\Delta\theta_{12}(1)}{m}\right]}$$

$$= \sqrt[m]{r_{12}(0)}\, e^{\left[i\frac{\theta_{12}(0)}{m} + \frac{2\pi j}{m} + 0\right]} = \sqrt[m]{[\gamma_1, \gamma_2]}(0)$$

Επομένως, $\sqrt[m]{[\boldsymbol{\gamma_1}, \boldsymbol{\gamma_2}]}(\mathbf{1}) = \sqrt[m]{[\boldsymbol{\gamma_1}, \boldsymbol{\gamma_2}]}(\mathbf{0})$. ■

Θα παραθέσουμε, τώρα, μία συνέπεια των προτάσεων 10, 15 και 16.

Πρόταση 16:

Μία αλγεβρική εξίσωση που περιέχει ένα μονό ριζικό δεν μπορεί να σπάσει όλους τους βρόχους.

3.8 Ένθετα ριζικά αντιμεταθετών (nested commutator radicals)

Στις προηγούμενες ενότητες έχουμε δείξει τα παρακάτω:

- Υπό την υποθετική έκφραση $F(p)$, οι αντιμεταθέτες των βρόχων επάγουν τους αντιμεταθέτες των μεταθέσεων, κάποιοι από τους οποίους δεν είναι τετριμμένοι. Με άλλα λόγια, οι βρόχοι αντιμεταθετών δεν είναι πάντα βρόχοι αφότου διέρχονται από την $F(p)$.
- Ένα ριζικό μόνο δεν σπάει ένα βρόχο αντιμεταθέτη. Ένας βρόχος αντιμεταθέτη κάτω από ριζικό ίσως δεν εξακολουθεί να είναι βρόχος αντιμεταθέτη. Παρόλα αυτά, θα είναι βρόχος.

Παρακάτω θα αναφέρουμε κάποιους ισχυρισμούς.

Ισχυρισμός 1ος: Το ριζικό ενός βρόχου αντιμεταθέτη κάποιων βρόχων αντιμεταθετών είναι βρόχος αντιμεταθέτη. Αυτό μπορεί να δειχθεί επαγωγικά.

Ισχυρισμός 2ος: Παίρνοντας όλους τους αντιμεταθέτες του συνόλου των αντιμεταθετών μεταθέσεων της S_5 επιστρέφει το σύνολο των αντιμεταθετών της S_5.

Επομένως, συνδυάζοντας τους παραπάνω ισχυρισμούς, παίρνουμε βρόχους αντιμεταθέτων που επάγουν μεταθέσεις και έχουν ένθετα N-στρώματα βρόχων αντιμεταθέτων, με N αυθαίρετο. Άρα, οποιαδήποτε αυθαίρετη ποσότητα ένθετων ριζικών δεν μπορεί να σπάσει όλους τους βρόχους και να τα μετατρέψει σε μεταθέσεις. Παρόλα αυτά, αυτό πρέπει να γίνει από το $F(p)$.

Επομένως, που καταλήγουμε;

«Καμία αλγεβρική έκφραση που περιέχει μόνο πεπερασμένα ριζικά δεν μπορεί να λύσει την πεμπτοβάθμια εξίσωση».

Παρακάτω θα αποδείξουμε δύο προτάσεις που σχετίζονται με τους παραπάνω ισχυρισμούς.

Πρόταση 17:

Θεωρούμε $\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k, \gamma_l$ βρόχους στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Το ριζικό ενός βρόχου της μορφής $\left[[\gamma_i, \gamma_j], [\gamma_k, \gamma_l]\right]$ είναι βρόχος αντιμεταθέτη.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω γ_1, γ_2 βρόχοι αντιμεταθέτη. Τότε θα έχουμε:

$$\sqrt[n]{[\gamma_1, \gamma_2]} = \sqrt[n]{\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_1^{-1} * \gamma_2^{-1}} = \sqrt[n]{\gamma_1} * \sqrt[n]{\gamma_2} * \sqrt[n]{\gamma_1}^{-1} * \sqrt[n]{\gamma_2}^{-1} = \left[\sqrt[n]{\gamma_1}, \sqrt[n]{\gamma_2}\right]$$

Γνωρίζουμε ότι γ_1, γ_2 βρόχοι αντιμεταθέτη, τότε τα ριζικά αυτών θα είναι βρόχοι. Επομένως, $[\sqrt[n]{\gamma_1}, \sqrt[n]{\gamma_2}]$ θα είναι βρόχος αντιμεταθέτη.∎

Πρόταση 18:

Θεωρούμε $\hat{\gamma}$ βρόχο της μορφής των N-στρωμάτων ένθετων βρόχων αντιμεταθέτη. Τότε, οι ανυψώσεις (lifts)

$$\sqrt[n_1]{} \circ \ldots \circ \sqrt[n_N]{} \circ \hat{\gamma}$$

εξακολουθούν να είναι βρόχοι.

<u>Απόδειξη</u>

Έχουμε δείξει το ζητούμενο για $N = 2$.

Προχωράμε στο επαγωγικό βήμα.

Θεωρούμε $\hat{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2]$ με $(N-1)$-στρώματα ένθετων βρόχων αντιμεταθέτη. Θεωρούμε $\tilde{h}$ την σύνθεση $(N-2)$-ριζικών και θα ισχύει $h = \sqrt[n]{} \circ \tilde{h}$

Επομένως,

$$h(\hat{\gamma}) = \sqrt[n]{\left[\tilde{h}(\gamma_1), \tilde{h}(\gamma_2)\right]}$$

Από την επαγωγική υπόθεση, $\tilde{h}(\gamma_1), \tilde{h}(\gamma_2)$ είναι βρόχοι. Ακριβέστερα, πρόκειται για ένα σύνολο ανυψώσεων (lifts) βρόχων. Εφόσον γνωρίζουμε ότι το ριζικό ενός βρόχου αντιμεταθέτη είναι βρόχος, τότε $h(\hat{\gamma})$ είναι βρόχος.∎

3.9 Ρίζα μιγαδικού αριθμού

Βασιζόμενοι τόσο στις υποενότητες της ενότητας 3 όσο και στις υποενότητες 1.3.1 και 1.3.2, θα μελετήσουμε την «συμπεριφορά» της ρίζας ενός μιγαδικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο.

Έστω, λοιπόν, ένας μιγαδικός αριθμός z. **Ρίζα** ενός μιγαδικού αριθμού θα ονομάζεται ένας αριθμός $\zeta \in \mathbb{C}$ για τον οποίο θα ισχύει: $\zeta^m = z$ με $m \in \mathbb{N}$. Το ζ θα ονομάζεται m-ιοστή ρίζα του z και συμβολίζεται με $\sqrt[m]{\ }$. Το z δέχεται m στο πλήθος m-οστές, λόγω του Θ.Θ.Α.

Θα θεωρήσουμε ότι το z εκτελεί ένα βρόχο γ και θα μελετήσουμε την συμπεριφορά του $\sqrt[m]{z}$.

Σ' αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε την **εκθετική μορφή** του μιγαδικού αριθμού:

$\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$ με $\boldsymbol{r = |z|}$ και $\boldsymbol{\theta = argz}$

Οι m-οστές ρίζες του ζ $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m)$ θα γράφονται ως εξής:

$\zeta_k = r^{\frac{1}{m}} e^{\frac{i(\theta + 2\pi k)}{m}} \quad k = 1,2, \dots, m \quad (\boldsymbol{A})$

γιατί οι γωνίες που διαφέρουν κατά 2π θεωρούνται ίδιες.

Λόγω της **(A)** προκύπτουν τα εξής:

- Οι ζ_k θα έχουν το ίδιο μέτρο, $r^{\frac{1}{m}}$. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι θα βρίσκονται στον ίδιο κύκλο με ακτίνα $\rho = r^{\frac{1}{m}}$ στο μιγαδικό επίπεδο.
- Επιπλέον για το όρισμα θα ισχύει:
$$arg\zeta_k = \frac{\theta}{m} + \frac{2\pi k}{m} \quad (\boldsymbol{B})$$
Αυτό σημαίνει ότι όλες οι ρίζες βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους σε γωνία $\frac{2\pi}{m}$ μεταξύ τους.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι το z διανύει ένα βρόχο $\boldsymbol{\gamma}$ γύρω από την αρχή των αξόνων όπως φαίνεται στο Σχήμα 14 (ο κόκκινος βρόχος).

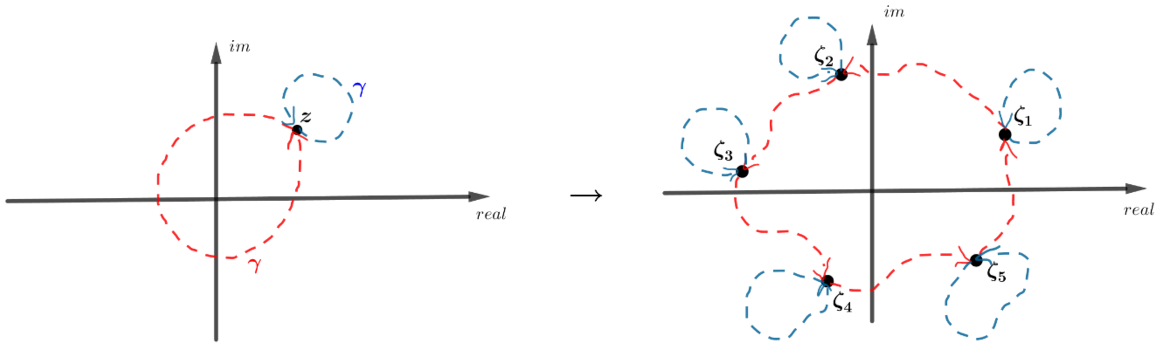
Όσο το z κινείται κατά μήκος του βρόχου $\boldsymbol{\gamma}$, η m −οστή ρίζα θα κινείται, επίσης, και η θέση της μπορεί να προσδιοριστεί από την σχέση **(A)**.

Εφόσον $\boldsymbol{\gamma}$ βρόχος, η ακτίνα r επιστρέφει στην αρχική της θέση. Το ίδιο κάνει και η $r^{\frac{1}{m}}$.

Με άλλα λόγια, οι ρίζες παραμένουν στον κύκλο τους μετά το βρόχο $\boldsymbol{\gamma}$.

Αντίθετα, το $argz$ μεταφέρεται από το θ στο $\theta + 2\pi$. Άρα, η m-οστή ρίζα ζ_k, λόγω της **(B)**, μετακινείται στο κοντινότερο σημείο, δηλαδή στο ζ_{k+1}. Επομένως, οι ρίζες ακολουθούν ένα μη κλειστό μονοπάτι.

Αν, όμως, το z ακολουθούσε ένα διαφορετικό βρόχο, έστω τον $\boldsymbol{\gamma}$ (όπως φαίνεται στο Σχήμα 14, ο μπλε βρόχος) και δεν τυλιγόταν γύρω από την αρχή των αξόνων, τότε οι ρίζες θα ακολουθούσαν τους δικούς τους βρόχους (βλέπε Σχήμα 14).



Σχήμα 14: Όταν το z ακολουθεί ένα βρόχο σαν τον $\boldsymbol{\gamma}$, τότε οι ρίζες ακολουθούν επίσης βρόχους (μπλε βρόχοι, δεξί σχήμα). Όταν το z ακολουθεί ένα βρόχο σαν τον $\boldsymbol{\gamma}$, τότε οι ρίζες ακολουθούν μη κλειστά μονοπάτια (κόκκινα μονοπάτια, δεξί σχήμα).

Είδαμε, λοιπόν, δύο διαφορετικά παραδείγματα βρόχων του z και παράλληλα παρατηρήσαμε τη «συμπεριφορά» των ριζών $\sqrt[m]{z}$. Συγκεκριμένα, στην μία περίπτωση οι ρίζες ακολουθούν βρόχους (μπλε βρόχοι στο δεξί σχήμα 14) και στην άλλη διατρέχουν μη κλειστά μονοπάτια (κόκκινα μη κλειστά μονοπάτια στο δεξί σχήμα 14), δηλαδή δεν διατρέχουν βρόχους.

Συνοψίζοντας την παραπάνω παρατήρηση, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα.

*«Όταν το z ακολουθεί ένα βρόχο, το $\sqrt[m]{z}$ **δεν** ακολουθεί πάντα ένα βρόχο»*

Με άλλα λόγια, όπως αναφέραμε και σε προηγούμενη ενότητα, τα ριζικά «σπάνε» βρόχους.

4. *Μελετώντας τις εξισώσεις $2^{ου}$, $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού*

Πριν περάσουμε στην απόδειξη της μη επιλυσιμότητας της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης, ας δούμε πως προκύπτουν όσα γνωρίζουμε για τις εξισώσεις $2^{ου}$, $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού.

Ορίζουμε την πολυωνυμική εξίσωση n-βαθμού στη γενική της μορφή ως εξής:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \ \ (\mathbf{1})$$

με $z \in \mathbb{C}$ ο άγνωστος και οι μιγαδικοί αριθμοί $(a_{n-1}, \dots, a_0)$ οι συντελεστές του πολυωνύμου. Λόγω του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας (Θ.Θ.Α), η εξίσωση **(1)** θα έχει n στο πλήθος μιγαδικές λύσεις, έστω $(r_1, r_2, \dots, r_n)$.

- ***Η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού***

Θέτουμε $n = 2$ στην εξίσωση **(1)**.

Προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση στη γενική της μορφή:

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \ \ (\mathbf{2})$$

Λόγω του Θ.Θ.Α, η εξίσωση **(2)** θα έχει 2 μιγαδικές ρίζες, έστω r_1, r_2. Μπορούμε, λοιπόν, να τροποποιήσουμε την εξίσωση **(2)** ως εξής:

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \Longrightarrow (z - r_1)(z - r_2) = 0$$

και λόγω των ***τύπων Vieta*** θα έχουμε:

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \Longrightarrow (z - r_1)(z - r_2) = 0 \Longrightarrow z^2 - (r_1 + r_2)z + r_1 r_2 = 0 \ \ (\mathbf{3})$$

Λόγω της ισότητας πολυωνύμων, προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} a_1 = -(r_1 + r_2) \\ a_0 = r_1 r_2 \end{cases} \quad (\mathbf{4})$$

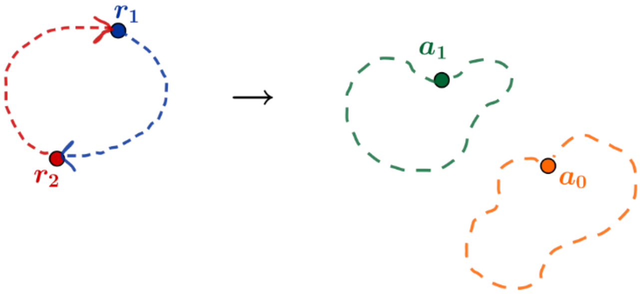
Η σχέση **(4)** μπορεί να γενικευτεί.

Συγκεκριμένα, θα έχουμε: $\begin{cases} a_{n-1} = -\sum_i r_i \\ a_0 = (-1)^n \prod_i r_i \end{cases} \quad \text{για } n \geq 2 \quad (\mathbf{5})$

Επομένως, προκύπτει η παρακάτω ιδιότητα:

Οι συντελεστές $(a_{n-1}, \dots, a_0)$ είναι συμμετρικές συναρτήσεις των λύσεων $(r_1, \dots, r_n)$

Πιο συγκεκριμένα, για $n = 2$, αν μεταθέσουμε τις r_1 και r_2 μετακινώντας τες με συνεχή τρόπο στο μιγαδικό επίπεδο, αν για παράδειγμα εκτελέσουμε την αντιμετάθεση $(1\ 2)$, τότε οι συντελεστές (a_1, a_0) θα κινηθούν σε κάποιο μονοπάτι. Στο τέλος, όμως, θα πρέπει να επιστρέψουν στην αρχική τους θέση καθώς είναι συμμετρικές συναρτήσεις των λύσεων (r_1, r_2). Ουσιαστικά, τα a_1, a_0 θα εκτελέσουν ένα ***βρόχο***, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 15: η αντιμετάθεση $(1\ 2)$ επάγει ένα βρόχο στους συντελεστές.

Μπορούμε να εκφράσουμε γεωμετρικά την συμμετρία που προαναφέραμε ως εξής:

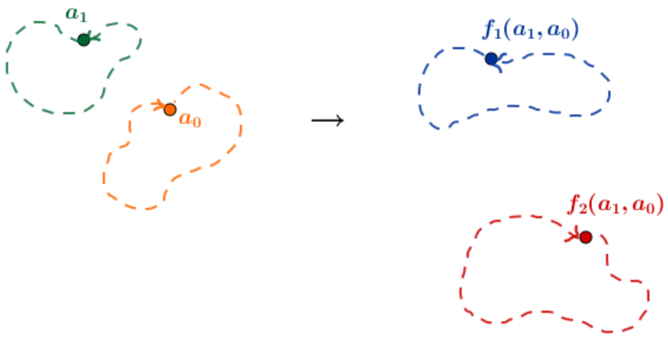
Όταν οι λύσεις $(r_1, \dots, r_n)$ υφίστανται μία μετάθεση, καθένας από τους συντελεστές $(a_{n-1}, \dots, a_0)$ ακολουθεί ένα βρόχο.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μπορούμε να οδηγηθούμε σε ένα σημαντικό αποτέλεσμα.

Ας υποθέσουμε ότι οι λύσεις r_1 και r_2 της δευτεροβάθμιας εξίσωσης δίνονται από δύο τύπους της μορφής $r_1 = f_1(a_1, a_0)$ και $r_2 = f_2(a_1, a_0)$ $\quad$ **(6)**

Έστω ότι οι εκφράσεις αυτές περιέχουν τους συντελεστές (a_1, a_0) και τις 4 πράξεις $(+, -, \times, \div)$. Εκτελούμε την ακόλουθη τακτική:

1. Ενώνουμε τις ρίζες με μονοπάτια που επάγουν την αντιμετάθεση $(1\ 2)$ και θα κινηθούν κατά μήκος των μονοπατιών, όπως φαίνεται στο σχήμα 15.
2. Ταυτόχρονα οι συντελεστές (a_1, a_0) εκτελούν από ένα βρόχο, όπως φαίνεται στο σχήμα 15.
3. Εφόσον οι εκφράσεις f_1, f_2 αποτελούνται από τους συντελεστές (a_1, a_0), θα εκτελούν και αυτές από ένα βρόχο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 16

Στο τέλος, οι δύο ρίζες θα έχουν υποστεί μία μετάθεση και οι εκφράσεις f_1, f_2 θα έχουν εκτελέσει ένα βρόχο. Επομένως, $r_1 \neq f_1(a_1, a_0)$ και $r_2 \neq f_2(a_1, a_0)$.

Άρα, καταλήγουμε στο ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση δε μπορεί να λυθεί με έναν τύπο σαν τον τύπο $f_i(a_{n-1}, \dots, a_0)$ για $n \geq 2$.

Συνοψίζοντας, διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει τύπος της μορφής f_i για την επίλυση της γενικής πολυωνυμικής εξίσωσης **(1)** για $n \geq 2$.

Ο ***τετραγωνικός τύπος*** βρίσκεται με την βοήθεια της συμπλήρωσης τετραγώνων στην εξίσωση **(2)**. Συγκεκριμένα:

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \Longrightarrow z^2 + a_1 z + \frac{a_1^2}{4} = \frac{a_1^2}{4} - a_0 \Longrightarrow \left(z + \frac{a_1}{2}\right)^2 = \frac{a_1^2}{4} - a_0 \Longrightarrow$$

$$z + \frac{a_1}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a_1^2}{4} - a_0\right)} \Longrightarrow z = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1^2}{4} - a_0\right)} \Longrightarrow$$

$$z = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_0}{4}} \Longrightarrow \boldsymbol{z_{1,2}} = \frac{\boldsymbol{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}}{\boldsymbol{2}} \quad (\mathbf{7})$$

Η υπόριζη ποσότητα είναι η γνωστή ***διακρίνουσα*** $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$ για $\boldsymbol{a = 1}$.

Η σχέση **(7)** δίνει δύο λύσεις.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι το αποτέλεσμα περί αδυναμίας επίλυσης της τετραγωνικής εξίσωσης με έναν τύπο f_i αφορά την γενική της μορφή. Ωστόσο, θα υπάρχουν κάποιες τετραγωνικές εξισώσεις με συγκεκριμένους συντελεστές που θα μπορούν να επιλυθούν με έναν τύπο που περιέχει μόνο τις 4 πράξεις.

- ***Η εξίσωση 3ου βαθμού***

Θέτουμε $n = 3$ στην εξίσωση **(1)**.

Προκύπτει η τριτοβάθμια εξίσωση στη γενική της μορφή:

$$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \ \ (\mathbf{8})$$

Λόγω του Θ.Θ.Α, η εξίσωση **(8)** θα έχει 3 μιγαδικές ρίζες, έστω r_1, r_2, r_3. Μπορούμε, λοιπόν, να τροποποιήσουμε την εξίσωση **(8)** ως εξής:

$$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \Longrightarrow (z - r_1)(z - r_2)(z - r_3) = 0 \Longrightarrow$$

$$z^3 - (r_1 + r_2 + r_3)z^2 + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)z - r_1 r_2 r_3 = 0 \ \ (\mathbf{9})$$

Έστω ότι υπάρχει ένας τύπος για την επίλυση της τριτοβάθμιας εξίσωσης της ακόλουθης μορφής:

$$r_i = g_i(a_2, a_1, a_0) \ \ \mu\varepsilon \ i = 1,2,3 \quad (\mathbf{10})$$

Οι συναρτήσεις g_1, g_2 και g_3 περιέχουν τις συναρτήσεις της μορφής f και $\sqrt{f}$ (όπως αναφέραμε στην δευτεροβάθμια εξίσωση) και τις 4 πράξεις.

Οι συναρτήσεις της μορφής g, γενικά, δεν εκτελούν βρόχους. Για το λόγο αυτό θα ακολουθήσουμε μία διαφορετική τακτική από αυτήν της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Σ’ αυτό το σημείο θα χρειαστούμε τους ***αντιμεταθέτες***.

Θεωρούμε την αντιμετάθεση $(1\ 2)$ που επάγει έναν βρόχο γ_1 στην f και ένα μη κλειστό μονοπάτι k_1 στην $\sqrt{f}$.

Θεωρούμε την αντιμετάθεση $(2\ 3)$ που επάγει έναν βρόχο γ_2 στην f και ένα μη κλειστό μονοπάτι k_2 στην$\sqrt{f}$.

Εκτελούμε τον αντιμεταθέτη των $(1\ 2), (2\ 3)$ ως εξής:

$$[(1\ 2),(2\ 3)] = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)^{-1}(2\ 3)^{-1} \quad \mathbf{(11)}$$

Όμως, ισχύει $(1\ 2)^{-1} = (1\ 2)$ και $(2\ 3)^{-1} = (2\ 3)$

Επομένως, η σχέση **(11)** γίνεται:

$[(1\ 2),(2\ 3)] = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3)$ που είναι κυκλική μετάθεση.

Αυτό ισχύει, γενικά, για οποιοδήποτε ζεύγος αντιμεταθέσεων

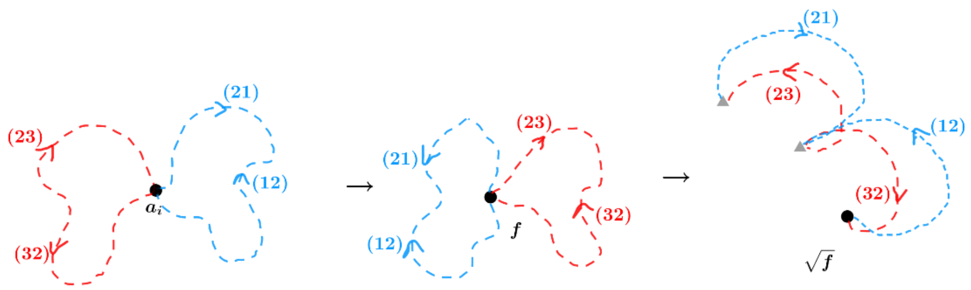
$$[(i\ j)(j\ k)] = (i\ j\ k) \quad \mathbf{(12)}$$

Επομένως, ο αντιμεταθέτης $[(1\ 2),(2\ 3)]$ μεταθέτει τις 3 λύσεις (r_1, r_2, r_3)

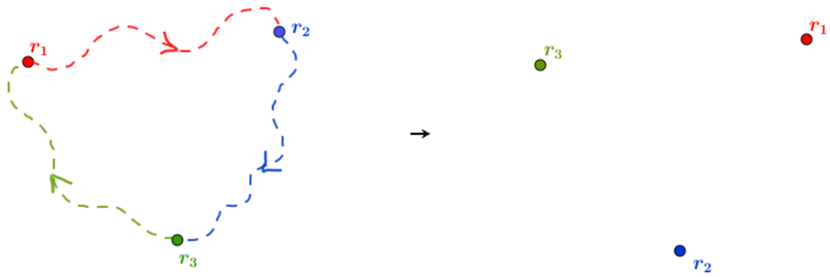
Πώς, όμως, επηρεάζονται τα f και $\sqrt{f}$;

Η f ακολουθεί μια σειρά βρόχων $\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$, που ονομάζεται αντιμεταθέτης βρόχων, που είναι βρόχος.

Η $\sqrt{f}$ ακολουθεί μια σειρά μη κλειστών μονοπατιών $k_1k_2k_1^{-1}k_2^{-1}$, αλλά κλείνει μόνη της λόγω κατασκευής.



Σχήμα 17: ο αντιμεταθέτης $[(1\ 2),(2\ 3)]$ και η επίδραση του σε έναν συντελεστή a_i, στην f και στην $\sqrt{f}$. Οι f και $\sqrt{f}$ έχουν ακολουθήσει βρόχους και συγκεκριμένα ο βρόχος της $\sqrt{f}$ αποτελείται από 4 μη κλειστά μονοπάτια.



Σχήμα 18: Η μετάθεση $(\mathbf{1\ 2\ 3})$ των λύσεων (r_1, r_2, r_3)

Έτσι, λοιπόν, με την μετάθεση $(1\ 2\ 3)$ καταλήγουμε σε ένα παρόμοιο αποτέλεσμα με αυτό της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Όσο οι ρίζες (r_1, r_2, r_3) υφίστανται την μετάθεση $(1\ 2\ 3)$, οι f και $\sqrt{f}$ ακολουθούν ένα βρόχο.

Το ίδιο κάνει και ο τύπος g που θεωρήσαμε στην αρχή, καταλήγει δηλαδή στο αρχικό του σημείο. Επομένως, $r_i \neq g_i(a_2, a_1, a_0)$ για $i = 1,2,3$.

Συνοψίζοντας, διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει τύπος της μορφής g_i για την επίλυση της γενικής πολυωνυμικής εξίσωσης **(1)** για $n \geq 3$.

Αξίζει να αναφέρουμε πως αυτή η τακτική λειτουργεί μόνο αν εφαρμόσουμε τον κύκλο $(1\ 2\ 3)$ σαν αντιμεταθέτη (σχέση **(11)**). Αν είχαμε εφαρμόσει απευθείας την μετάθεση $(1\ 2\ 3)$ δε θα μπορούσαμε να εγγυηθούμε η $\sqrt{f}$ θα επιστρέψει στην αρχική της θέση, ακολουθώντας έναν βρόχο. Χάρη στον αντιμεταθέτη μπορούμε να αποκλείσουμε την απλή ρίζα $\sqrt{f}$ από τον τύπο.

Ο ***κυβικός τύπος*** βρίσκεται με μία μέθοδο που εφαρμόστηκε από κάποιους Ιταλούς μαθηματικούς τον 16ο αιώνα. Αρχικά, θα κάνουμε αλλαγή μεταβλητής για να «διώξουμε» τον όρο z^2 από την σχέση **(7)**.

Συγκεκριμένα, για $Z = z + \frac{a_2}{3}$ θα έχουμε:

$$Z^3 + 3PZ + 2Q = 0 \quad (\mathbf{13})$$

με $P = \frac{a_1}{3} - \frac{a_2^2}{9}$ και $Q = \frac{a_0}{2} + \frac{a_2^3}{27} - \frac{(a_1 a_2)}{6}$

Παρατηρούμε ότι τα P, Q είναι συναρτήσεις που περιέχουν τους συντελεστές του κυβικού πολυωνύμου και τις 4 πράξεις, όπως και η f στην περίπτωση της τετραγωνικής εξίσωσης.

Για να λυθεί, λοιπόν, η **(11)** θα θέσουμε $Z = v + w$ με v, w αυθαίρετους μιγαδικούς αριθμούς.

Άρα, η **(11)** θα γίνει:

$$(v+w)^3 + 3P(v+w) + 2Q = 0 \Longrightarrow$$

$$v^3 + w^3 + 3v^2w + 3vw^2 + 3P(v+w) + 2Q = 0 \Longrightarrow$$

$$v^3 + w^3 + 3vw(v+w) + 3P(v+w) + 2Q = 0 \Longrightarrow$$

$$v^3 + w^3 + 3(vw+P)(v+w) + 2Q = 0$$

Έπειτα, επιβάλλουμε $vw = -P$ και έχουμε: $v^3 + w^3 + 3(v+w) + 2Q = 0$

Θα έχουμε, επίσης, $v^3 + w^3 = -2Q$ και $v^3w^3 - P^3$ **(14)**

Στο σημείο αυτό μπορούμε να αξιοποιήσουμε τους τύπους Vieta, την σχέση **(14)** και τον τύπο για την επίλυση της τετραγωνικής εξίσωσης. Έτσι, βρίσκουμε τα v^3, w^3 συναρτήσει των P, Q και παίρνοντας την κυβική τους ρίζα βρίσκουμε το $Z = v + w$.

Ύστερα, προχωρούμε στο $z = Z - \frac{a_2}{3}$ και καταλήγουμε στον ακόλουθο κυβικό τύπο

$$r_{1,2,3} = -\frac{a_2}{3} + \sqrt[3]{-Q + \sqrt{Q^2 + P^3}} + \sqrt[3]{-Q - \sqrt{Q^2 + P^3}} \quad (\mathbf{15})$$

με P, Q τις ποσότητες που αναφέραμε παραπάνω.

Η σχέση **(15)** δίνει τρεις λύσεις.

Είναι φανερό πως ο τύπος αυτός δεν περιέχει μόνο συναρτήσεις f και $\sqrt{f}$. Ουσιαστικά, οι κυβικές ρίζες που χρησιμοποιούνται είναι της μορφής $\sqrt{g}$.

Με άλλα λόγια, ο κυβικός τύπος περιέχει 2-επίπεδα ριζών ενώ ο τύπος g που χρησιμοποιήσαμε έχει μόνο 1, λόγω του ορισμού του. Αυτή η έκφραση ονομάζεται ***ένθετη ρίζα (nested root)***. Με την χρήση του αντιμεταθέτη κατορθώσαμε να αποκλείσουμε το ένα επίπεδο ρίζας. Με ένα ίδιο σκεπτικό θα μπορούσαμε να πούμε πως με 2 αντιμεταθέτες θα μπορούσαμε να αποκλείσουμε 2-επίπεδα ριζών.

- ***Η εξίσωση 4ου βαθμού.***

Θέτουμε $n = 4$ στην εξίσωση **(1)**.

Προκύπτει η τεταρτοβάθμια εξίσωση στη γενική της μορφή:

$$z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \ \ (\mathbf{16})$$

Λόγω του Θ.Θ.Α, η εξίσωση **(16)** θα έχει 4 μιγαδικές λύσεις, έστω r_1, r_2, r_3, r_4. Μπορούμε, λοιπόν, να τροποποιήσουμε την σχέση **(16)** ως εξής:

$$z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \Longrightarrow$$

$$(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)(z - r_4) = 0 \ \ (\mathbf{17})$$

Η σχέση **(16)** μπορεί να γραφεί σε μία παρόμοια μορφή με τις σχέσεις **(3)** και **(9)** αν εφαρμόσουμε επιμεριστική ιδιότητα στο 1ο μέλος της σχέσης **(17)** και ισότητα πολυωνύμων με την **(16)**.

Όπως είδαμε παραπάνω, για την κυβική εξίσωση, συναρτήσεις της μορφής g δεν αρκούν για την επίλυση της. Χρειαζόμαστε επιπλέον συναρτήσεις της μορφής $\sqrt{g}$. Επομένως, για την εξίσωση 4ου βαθμού υποθέτουμε ότι υπάρχει τύπος της παρακάτω μορφής:

$$r_i = h_i(a_4, a_3, a_2, a_1) \text{ για } i = 1,2,3,4 \ \ (\mathbf{18})$$

Οι συναρτήσεις h_i περιλαμβάνουν τις συναρτήσεις $g, \sqrt{g}$ και τις 4 πράξεις. Έχοντας μελετήσει τις προηγούμενες δύο περιπτώσεις, μπορούμε να καταλάβουμε ότι οι συναρτήσεις της μορφής h_i δεν μπορούν να λύσουν την εξίσωση 4ου βαθμού.

Θα προσπαθήσουμε να το δείξουμε κατασκευάζοντας μία μετάθεση των (r_1, r_2, r_3, r_4). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αντιμεταθέτη δύο κυκλικών μεταθέσεων, έστω των (1 2 3) και (2 3 4) εκφράζοντας τες ως αντιμεταθέτες χρησιμοποιώντας την σχέση **(12)**.

Αρχικά, πρέπει να ελέγξουμε ότι ο αντιμεταθέτης των $(1\ 2\ 3)$ και $(2\ 3\ 4)$ όντως μεταθέτει τις 4 λύσεις (r_1, r_2, r_3, r_4).

Έχουμε ότι:

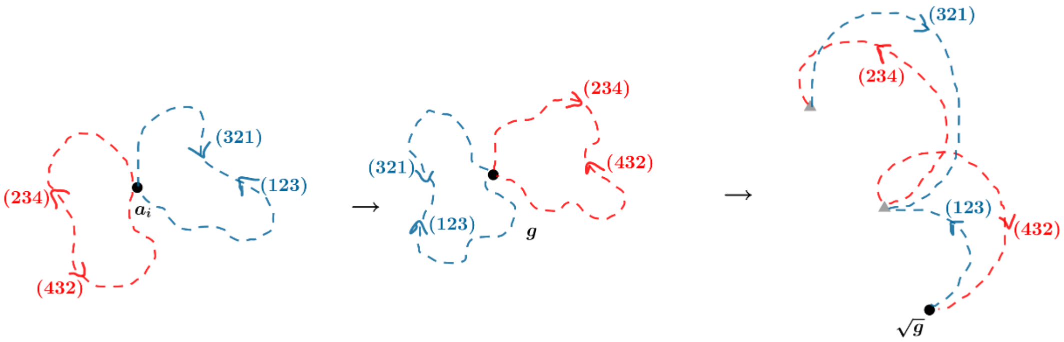
$$[(1\ 2\ 3), (2\ 3\ 4)] = (1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3)^{-1}(2\ 3\ 4)^{-1}$$
$$= (1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(3\ 2\ 1)(4\ 3\ 2) = (1\ 4)(2\ 3)$$

Πρόκειται για μία ειδική περίπτωση του γενικού τύπου $[(\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{k}), (\boldsymbol{j}\ \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{l})] = (\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{l})(\boldsymbol{j}\ \boldsymbol{k})$.

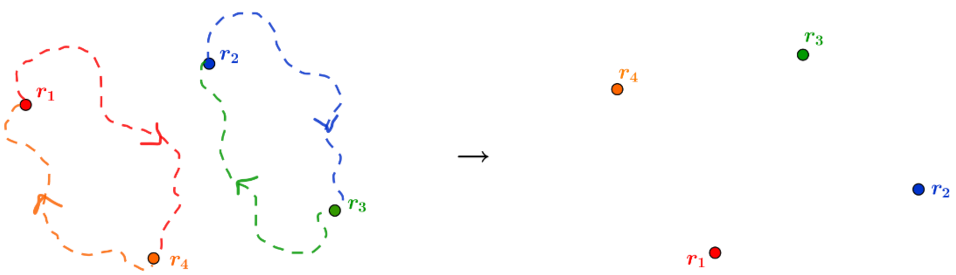
Άρα, ο αντιμεταθέτης $[(1\ 2\ 3),(2\ 3\ 4)]$ χρησιμοποιήσαμε μεταθέτει τις 4 ρίζες (r_1, r_2, r_3, r_4).

Ας δούμε βήμα – βήμα πως θα επηρεαστούν οι g και $\sqrt{g}$.

- Αρχικά, εφαρμόζουμε τους κύκλους $(1\ 2\ 3) = [(1\ 2),(2\ 3)]$ και $(2\ 3\ 4) = [(2\ 3),(3\ 4)]$. Αφού είναι αντιμεταθέτες, η g θα ακολουθήσει δύο βρόχους $\gamma_1\gamma_2$ και θα επιστρέψει στην αρχική της θέση. Η $\sqrt{g}$ θα ακολουθήσει δύο μη κλειστά μονοπάτια $k_1 k_2$.
- Έπειτα εφαρμόζουμε τους δύο κύκλους αντίστροφα ως εξής:
$$(1\ 2\ 3)^{-1} = (3\ 2\ 1) = [(3\ 2),(2\ 1)]$$
$$(2\ 3\ 4)^{-1} = (4\ 3\ 2) = [(4\ 3),(3\ 2)]$$
Έτσι, η g θα ακολουθήσει τους δύο προηγούμενους βρόχους αντίστροφα, $\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$. Η $\sqrt{g}$ θα ακολουθήσει τα δύο προηγούμενα μη κλειστά μονοπάτια αντίστροφα, $k_1^{-1}k_2^{-1}$.



Σχήμα 19: Συμπεριφορά ενός a_i συντελεστή και των συναρτήσεων $g, \sqrt{g}$ μετά την εφαρμογή του αντιμεταθέτη $[(1\ 2\ 3),(2\ 3\ 4)]$



Σχήμα 20: Η μετάθεση $(\mathbf{1\ 4})(\mathbf{2\ 3})$ των λύσεων (r_1, r_2, r_3, r_4)

Επομένως, η g ακολουθεί τον βρόχο $\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$ και η $\sqrt{g}$ ακολουθεί μια σειρά μη κλειστών μονοπατιών $k_1k_2k_1^{-1}k_2^{-1}$ και επιστρέφει στην αρχική της θέση, λόγω κατασκευής. Ουσιαστικά, και η g και η $\sqrt{g}$ ακολουθούν ένα βρόχο με αποτέλεσμα και η h να ακολουθεί ένα βρόχο.

Συνεπώς, όσο οι λύσεις (r_1, r_2, r_3, r_4) υφίστανται την μετάθεση $(1\,4)(2\,3)$, η συνάρτηση h διανύει ένα βρόχο και επιστρέφει στην αρχική της θέση. Επομένως, $r_i \neq h_i(a_3, a_2, a_1, a_0)$ για $i = 1,2,3,4$

Συνοψίζοντας, διαπιστώνουμε δεν υπάρχει τύπος της μορφής h_i για την επίλυση της γενικής πολυωνυμικής εξίσωσης **(1)** για $n \geq 4$.

Ο ***τύπος για την εξίσωση 4ου βαθμού*** θα έχει 3 $-$επίπεδα ριζών και βρίσκεται ως εξής:

Αρχικά, θα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $Z = z + \frac{a_3}{4}$ ώστε να «διώξουμε» τον όρο z^3. Η εξίσωση **(16)** θα γίνει:

$$Z^4 + PZ^2 + QZ + R = 0 \;\; (\mathbf{19})$$

με P, Q, R συναρτήσεις των (a_3, a_2, a_1, a_0) και των 4 πράξεων. Οι συναρτήσεις αυτές είναι αρκετά πολύπλοκες.

Έπειτα, μετατρέπουμε την εξίσωση **(19)** σε δευτεροβάθμια ως προς Z^2. Άρα, για το $PZ^2 + QZ + R$ δε μπορούμε να εγγυηθούμε ότι είναι τέλειο τετράγωνο. Αν ήταν, θα μπορούσε να παραγοντοποιηθεί σε δύο εξισώσεις του Z^2.

Μπορούμε να γράψουμε το εξής: $Z^4 = (Z^2 + S)^2 - 2SZ^2 - S^2$ με S έναν αυθαίρετο μιγαδικό αριθμό. Έπειτα, η **(19)** μετατρέπεται στην παρακάτω μορφή:

$$(Z^2 + S)^2 + (P - 2S)Z^2 + QZ + R - S^2 = 0 \;\; (\mathbf{20})$$

Είναι χρήσιμο να επιλέξουμε ένα S τέτοιο ώστε $(\boldsymbol{P - 2S})\boldsymbol{Z^2} + \boldsymbol{QZ} + \boldsymbol{R} - \boldsymbol{S^2}$ να είναι ***τέλειο τετράγωνο***.

Αυτό θα γίνει αν $\Delta = 0 \Longrightarrow \; Q^2 + 4(P - 2S)S^2 = 0$.

Άρα, $8S^3 - 4PS^2 - Q^2 = 0 \;\; (\mathbf{21})$, κυβική εξίσωση ως προς S.

Το S θα είναι συνάρτηση των P, Q, της μορφής h που αναφέραμε παραπάνω – όπως είδαμε στον κυβικό τύπο.

Επομένως, η σχέση **(20)** θα γίνει: $(Z^2 + S)^2 + (P - 2S)(Z - S)^2 = 0$ και μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε 2 τετραγωνικά πολυώνυμα του Z.

Συνεπώς, αφού το S θα περιέχει συναρτήσεις της μορφής h τότε το Z θα περιέχει συναρτήσεις $\sqrt{h}$, που δεν περιλαμβάνονται στον πιθανό τύπο **(18)** που ορίσαμε στην αρχή.

Κλείνοντας αυτή την ενότητα καταλήγουμε στα εξής:

I. ***<u>Δευτεροβάθμια εξίσωση</u>***

- **i.** **<u>Πιθανός τύπος:</u>** έκφραση των συντελεστών (a_1, a_0) και των 4 πράξεων.
- **ii.** Ο πιθανός τύπος απορρίπτεται μέσω της αντιμετάθεσης $(1\ 2)$.
- **iii.** **<u>Τελικός τύπος:</u>** έκφραση των συντελεστών (a_1, a_0), των 4 πράξεων και της $\sqrt{}$ (1-επίπεδο ρίζας).

II. ***<u>Τριτοβάθμια εξίσωση</u>***

- **i.** ***<u>Πιθανός τύπος:</u>*** έκφραση των συντελεστών (a_2, a_1, a_0), των 4 πράξεων και της $\sqrt{}$.
- **ii.** Ο πιθανός τύπος απορρίπτεται μέσω του αντιμεταθέτη των αντιμεταθέσεων $[(1\ 2), (2\ 3)] = (1\ 2\ 3)$.
- **iii.** **<u>Τελικός τύπος:</u>** έκφραση των συντελεστών (a_2, a_1, a_0), των 4 πράξεων, της $\sqrt{}$ και της $\sqrt{\ldots\sqrt{}}$ (2-επίπεδα ρίζας).

III. ***<u>Τεταρτοβάθμια εξίσωση</u>***

- **i.** **<u>Πιθανός τύπος:</u>** έκφραση των συντελεστών (a_3, a_2, a_1, a_0), των 4 πράξεων, της $\sqrt{}$ και της $\sqrt{\ldots\sqrt{}}$.
- **ii.** Ο πιθανός τύπος απορρίπτεται μέσω του αντιμεταθέτη του αντιμεταθέτη των αντιμεταθέσεων

$$\big[[(1\ 2), (2\ 3)], [(2\ 3), (3\ 4)]\big] = (1\ 4)(2\ 3).$$

- **iii.** **<u>Τελικός τύπος:</u>** έκφραση των συντελεστών (a_3, a_2, a_1, a_0), των 4 πράξεων, της $\sqrt{}$, της $\sqrt{\ldots\sqrt{}}$ και της $\sqrt{\ldots\sqrt{\ldots\sqrt{}}}$ (3-επίπεδα ρίζας).

5. Απόδειξη του Θεωρήματος Abel – Ruffini

Σύμφωνα με την διατύπωση του θεωρήματος των Abel – Ruffini, *δεν υπάρχει καμία αλγεβρική λύση για το πολυώνυμο 5ου βαθμού στην γενική του μορφή.*

Από την προηγούμενη ενότητα, γνωρίζουμε ότι για $n = 2,3,4$ (στη σχέση **(1)**) χρησιμοποιήσαμε αντιμεταθέτες για να απορρίψουμε τύπους με πλήθος ένθετων ριζών μη επαρκές για την επίλυση των αντίστοιχων εξισώσεων. Παρόλα αυτά, χρησιμοποιώντας επιπλέον επίπεδα ριζών να μπορούμε να καταλήξουμε στους γνωστούς τύπους επίλυσης των εξισώσεων 2ου, 3ου και 4ου βαθμού.

Θα δούμε, όμως, ότι για $n = 5$ η τακτική αυτή καταρρέει. Για το λόγο αυτό η πεμπτοβάθμια εξίσωση είναι μία πολύ ιδιαίτερη περίπτωση.

Στόχος μας είναι να εφαρμόσουμε την προηγούμενη τακτική και να καταλήξουμε στο ότι όχι μόνο απορρίπτονται τα 3-επίπεδα ένθετων ριζών (ένα παραπάνω από της τεταρτοβάθμιας) αλλά απορρίπτεται οποιοσδήποτε αριθμός ένθετων ριζών.

Θεωρούμε $n = 5$ στην εξίσωση **(1)**.

Προκύπτει η πεμπτοβάθμια εξίσωση στη γενική της μορφή:

$$z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \ \ \mathbf{(22)}$$

Λόγω του Θ.Θ.Α, η εξίσωση (22) θα έχει 5 μιγαδικές ρίζες, έστω r_1, r_2, r_3, r_4, r_5. Μπορούμε, λοιπόν, να τροποποιήσουμε ισοδύναμα την σχέση **(22)** ως εξής:

$$(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)(z - r_4)(z - r_5) = 0 \ \ \mathbf{(23)}$$

Το πρόβλημα που προσπαθούμε να επιλύσουμε είναι το εξής: *από το σύνολο των συντελεστών προσπαθούμε να περάσουμε στο σύνολο των λύσεων*. Δηλαδή, αυτό που προσπαθούμε να πετύχουμε είναι να περάσουμε από τους 5 συντελεστές $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)$ στις 5 ρίζες $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$:

$$(\boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_0}) \to (\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_3}, \boldsymbol{r_4}, \boldsymbol{r_5})$$

Αυτή θα ήταν η «συμπεριφορά» που θα θέλαμε να έχει ένας πιθανός τύπος για την επίλυση της εξίσωσης 5ου βαθμού.

Παρατήρηση: Είναι εύκολο να βρούμε τους συντελεστές μιας πεμπτοβάθμιας εξίσωσης αν γνωρίζουμε τις ρίζες της. Συγκεκριμένα, εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα στο 1ο μέλος της σχέσης **(23)** και ισότητα πολυωνύμων με την σχέση **(22)**.

Θα έχουμε:

$$z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = (z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)(z - r_4)(z - r_5)$$

και

$$(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0) \to (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$$

Για παράδειγμα, αν αλλάξουμε τη θέση δύο ριζών r_1 και r_4 θα έχουμε το εξής:

$$z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = (z - \boldsymbol{r_4})(z - r_2)(z - r_3)(z - \boldsymbol{r_1})(z - r_5)$$

Επομένως, παρατηρούμε ότι θα έχουμε το ίδιο πολυώνυμο με αυτό που είχαμε στην αρχή. Αλλάξαμε τη θέση των δύο ριζών στην παραγοντοποιημένη μορφή του πολυωνύμου και λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας η έκφραση δεν αλλάζει.

Άρα, θα έχουμε $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0) \rightarrow (r_4, r_2, r_3, r_1, r_5)$ – δηλαδή το σύνολο των συντελεστών παραμένει το ίδιο και οι λύσεις έχουν αλλάξει θέσεις. Αυτό δεν μας επηρεάζει καθώς σχετίζεται με το πώς έχουμε αποφασίσει να ταξινομήσουμε τις ρίζες.

Έστω, λοιπόν, ότι υπάρχει ένας πιθανός τύπος, που επιλύει την πεμπτοβάθμια εξίσωση, της παρακάτω μορφής:

$$r_i = \varphi_i(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0) \text{ για } i = 1,2,3,4,5 \quad (\mathbf{24})$$

Ο πιθανός τύπος **(24)** θα περιέχει συναρτήσεις της μορφής $h, \sqrt{h}$ και τις 4 πράξεις.

Ακολουθώντας την τακτική της προηγούμενης ενότητας, θα έχουμε τα εξής:

- Η συνάρτηση h θα ακολουθήσει ένα βρόχο, που θα προκληθεί από έναν αντιμεταθέτη αντιμεταθετών των λύσεων.
- Για την συνάρτηση $\sqrt{h}$ θα χρειαστούμε, κατά τα γνωστά, ένα επιπλέον επίπεδο αντιμεταθετών.

Στην περίπτωσή μας, έχουμε 5 σημεία με τα οποία μπορούμε να επάγουμε κάποιες μεταθέσεις. Έστω ότι θεωρούμε τις μεταθέσεις $(1\,2\,3)$ και $(3\,4\,5)$. Έτσι, κατασκευάζουμε τον πρώτο μας αντιμεταθέτη: $[(1\,2\,3), (3\,4\,5)]$

Έχουμε: $[(1\,2\,3), (3\,4\,5)] = (1\,2\,3)(3\,4\,5)(1\,2\,3)^{-1}(3\,4\,5)^{-1}$

$$= (1\,2\,3)(3\,4\,5)(3\,2\,1)(5\,4\,3) = (2\,3\,5)$$

Παρατηρούμε, ότι 3 από τις 5 λύσεις μετατίθενται και 2 παραμένουν σταθερές.

Το παραπάνω είναι μία ειδική περίπτωση του γενικού τύπου:

$$[(i\,j\,k)(k\,l\,m)] = (j\,k\,m) \quad (\mathbf{25})$$

Αυτό ισχύει για μεταθέσεις τουλάχιστον 5 αντικειμένων.

Από τα παραπάνω, προκύπτει μία σημαντική ιδιότητα που σχετίζεται με την σχέση **(25)**. Διαπιστώνουμε ότι οποιοσδήποτε κύκλος $(j\,k\,m)$ μπορεί να γραφεί σαν αντιμεταθέτης 2 άλλων κύκλων $[(i\,j\,k), (k\,l\,m)]$. Αυτό θα ισχύει για οποιοδήποτε κύκλο $(j\,k\,m)$ συμπεριλαμβανομένων και των $(i\,j\,k), (k\,l\,m)$ στο 1ο μέλος της σχέσης **(25)**.

Με άλλα λόγια, αυτή η ιδιότητα μπορεί να εφαρμοστεί στον εαυτό της ξανά και ξανά. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε τον κύκλο $(j\,k\,m)$ σαν αντιμεταθέτη όσων αντιμεταθετών χρειαζόμαστε.

Γνωρίζουμε, από την ενότητα 4, ότι ένας αριθμός αντιμεταθετών, έστω $N \in \mathbb{N}$, θα απορρίπτει N-επίπεδα ριζών. Επομένως, μπορούμε να αποκλείσουμε οποιοδήποτε αριθμό ριζών για τον πιθανό τύπο επίλυσης της πεμπτοβάθμιας.

Θεωρήσαμε φ_i για $i = 1,2,3,4,5$ τον πιθανό τύπο επίλυσης της πεμπτοβάθμιας εξίσωσης. Αυτός ο τύπος, σύμφωνα με όσα έχουμε πει για τις εξισώσεις $2^{ου}$, $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού, θα περιέχει τις 4 πράξεις, τους συντελεστές της **(22)** και ρίζες με $0,1,2,\dots$ επίπεδα ένθετων ριζών.

Επιλέγουμε την μετάθεση $(1\ 2\ 3)$, η οποία αρχικά απορρίπτει τις συναρτήσεις χωρίς ένθετες ρίζες, όπως η f_i.

Έπειτα, γράφουμε την μετάθεση $(1\ 2\ 3)$ σαν αντιμεταθέτη ως εξής:

$$(1\ 2\ 3) = [(4\ 1\ 2), (2\ 5\ 3)] \quad (\mathbf{26})$$

Εφαρμόζοντας την σχέση **(26)** στις ρίζες $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$, αποκλείουμε τις συναρτήσεις με 1-επίπεδο ένθετων ριζών, όπως η g_i

Ύστερα, γράφουμε τους κύκλους $(4\ 1\ 2), (2\ 5\ 3)$ σαν αντιμεταθέτες χρησιμοποιώντας την σχέση **(25)**.

Επομένως, η μετάθεση $(1\ 2\ 3)$ γράφεται σαν αντιμεταθέτης αντιμεταθέτων όπως παρακάτω:

$$(1\ 2\ 3) = \big[[(3\ 4\ 1), (1\ 5\ 2)], [(4\ 2\ 5), (5\ 1\ 3)]\big] \quad (\mathbf{27})$$

Έτσι, αποκλείουμε και τις συναρτήσεις με 2-επίπεδα ένθετων ριζών, όπως η h_i.

Επαναλαμβάνουμε αυτή την διαδικασία άλλες $(N-2)$-φορές. Μ' αυτόν τον τρόπο, γράφουμε την μετάθεση $(1\ 2\ 3)$ ως συνδυασμό N-αντιμεταθετών.

Επομένως, οι ρίζες r_1, r_2, r_3 υφίστανται την κυκλική μετάθεση $(1\ 2\ 3)$ ενώ παράλληλα οι συντελεστές a_i και οποιεσδήποτε εκφράσεις αυτών θα ακολουθήσουν ένα βρόχο.

Ο πιθανός τύπος φ_i αποτελείται από τα προαναφερθέντα και άρα $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ επιστρέφουν στην αρχική θέση. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό του φ_i, στη σχέση **(24)**.

Τέλος, επειδή N αυθαίρετο διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει κάποιος αριθμός ριζών που να είναι επαρκής για να μπορεί να κατασκευαστεί ένας τύπος για την επίλυση της γενικής πεμπτοβάθμιας εξίσωσης.■

6. *Αποτελέσματα*

Ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει μετά την απόδειξη είναι:

Γιατί 5ου βαθμού; Και όχι 4ου ή 6ου;

Όλα όσα έχουμε αναφέρει εντάσσονται στην εξής τακτική: γράφουμε μία μετάθεση τουλάχιστον 2 ριζών ως μία σειρά αντιμεταθετών. Ένας τύπος σαν τη σχέση **(24)** μπορεί να επαναληφθεί επ' αόριστο μόνο αν έχουμε 5 και άνω στοιχεία. Για 4 ή λιγότερα στοιχεία οποιαδήποτε ακολουθία αντιμεταθετών αντιμεταθέσεων και/ή κύκλων θα καταλήξει στη τετριμμένη μετάθεση.

Μέσα από αυτή την εργασία, ουσιαστικά, δείξαμε ότι οι ομάδες μεταθέσεων ή αλλιώς συμμετρικές ομάδες S_2, S_3, S_4 είναι επιλύσιμες. Συγκεκριμένα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αντιμεταθέτη αντιμεταθετών, αντιμεταθετών. . . και στο τέλος να καταλήξουμε σε τετριμμένη μετάθεση. Άρα, με βάση το Θεώρημα Abel – Ruffini, η συμμετρική ομάδα S_5 δεν είναι επιλύσιμη.

Πιο συγκεκριμένα, η S_5 έχει $5! = 120$ στοιχεία, δηλαδή 120 διαφορετικές μεταθέσεις 5 στοιχείων. Οι μεταθέσεις αυτές μπορούν να εκφραστούν ως αντιμεταθέτες αυθαίρετου πλήθους ένθετων αντιμεταθετών. Ωστόσο, αξίζει να αναφέρουμε ότι αυτό δεν ισχύει για όλες τις μεταθέσεις. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι ισχύει ακριβώς για τις μισές, τις 60 μεταθέσεις 5 στοιχείων.

Επιπλέον, αν ελεγχθούν τα στοιχεία της υποομάδας αντιμεταθετών για την S_5, είναι η εναλλάσσουσα ομάδα A_5. Γνωρίζοντας ότι οι εναλλάσσουσες ομάδες δεν είναι αβελιανές, προκύπτει ότι η A_5 είναι απλή ομάδα. Άρα, δεν περιέχει κανονικές υποομάδες, εκτός από την τετριμμένη και τον εαυτό της. Τέλος, η A_5 είναι τέλεια ομάδα καθώς αποτελεί υποομάδα αντιμεταθετών.

7. Επίλογος

Ολοκληρώνοντας αυτή την εργασία, θα ήθελα να αναφερθώ σε μερικά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της απόδειξης, συγκρίνοντάς την με την απόδειξη μέσω της Θεωρίας Galois.

Κατ' αρχάς, η απόδειξη της εργασίας δεν δηλώνει ότι οι εξισώσεις $5^{ου}$ και μεγαλύτερου βαθμού δεν επιλύονται. Αναφέρει πως δεν υπάρχει ένας γενικός τύπος στον οποίο να χρησιμοποιούνται οι 4 πράξεις $(+,-,\times,\div)$ και πεπερασμένες ρίζες $\sqrt{\ }$. Από την άλλη πλευρά, μέσω της Θεωρίας Galois, διαπιστώνουμε ότι κάποιες εξισώσεις, όπως αυτές της μορφής $z^5 + az + b = 0$ μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας ριζικά. Το ίδιο ισχύει και για συγκεκριμένες μορφές πολυωνυμικών εξισώσεων για $n \geq 5$. Επιπλέον, δοθείσης μίας εξίσωσης, η Θεωρία Galois μπορεί να απαντήσει στο αν είναι επιλύσιμη ή όχι.

Ωστόσο, η απόδειξη της παρούσας εργασίας μπορεί να επεκταθεί ώστε να λάβει υπόψιν της και τις συνεχείς συναρτήσεις μίας τιμής (single-valued) των συντελεστών. Σ' αυτές τις συναρτήσεις περιλαμβάνονται οι τριγωνομετρικές, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές κτλ. Όπως και οι πράξεις $(+,-,\times,\div)$ έτσι και οι προαναφερθείσες συναρτήσεις, όταν οι συντελεστές ακολουθούν ένα βρόχο, εκτελούν και αυτές. Η Θεωρία Galois, από την άλλη, δε μπορεί να μας παρέχει ένα τέτοιο αποτέλεσμα καθώς επεκτείνεται μόνο για ριζικά.

Αυτή η διπλωματική εργασία παρέχει, όχι μόνο μια πιο απλοποιημένη και στοιχειώδη απόδειξη του Θεωρήματος Abel – Ruffini αλλά εξηγεί τον λόγο για τον οποίο η γενική πολυωνυμική εξίσωση για $n = 5$ είναι τόσο ιδιαίτερη και γιατί οι τύποι επίλυσης των εξισώσεων $2^{ου}$, $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού έχουν τέτοιες μορφές – σαν αυτές των ένθετων ριζών.

8. *Βιβλιογραφία*

1. Δημήτρης Κραββαρίτης. Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση. Εκδόσεις Τσότρας

2. John B. Fraleigh. Εισαγωγή στην Άλγεβρα. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

3. Benjamin Fine & Gerhard Rosenberger. Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. Εκδόσεις Leader Books

4. Rich Schwartz. The Fundamental Theorem of Algebra. October 2004.

5. Artem Novozhilov. Complex Analysis. Spring 2019.

6. Lectures by Anatole Katok. Surfaces: (almost) everything you wanted to know about them. Lecture 34.

7. Alexander Kupers. Lectures on complex analysis. April 2020.

8. Dan File. Fundamental Theorem of Algebra Lecture notes from the Reading Classics (Euler) Working Group. Autumn 2003.

9. Jonathan Evans. Winding numbers and fundamental theorem of algebra. 2017 URL: 1.01 Winding numbers and the fundamental theorem of algebra (ucl.ac.uk)

10. The Fundamental Theorem of algebra – a visual proof
    URL: The fundamental theorem of algebra - a visual proof (weitz.de)

11. Christopher Thron and Jordan Barry. A Visualizable, Constructive Proof of the Fundamental Theorem of Algebra and a Parallel Polynomial Root Estimation Algorithm. 2010.

12. Cut the knot. The Fundamental Theorem of Algebra.
    URL: https://www.cut-the-knot.org/do_you_know/fundamental2.shtml

13. An introduction to the history of algebra: solving equations from Mesopotamian times to the Renaissance. American Mathematical Society

14. Stillwell, J. (2010). Mathematics and Its History. Springer Verlag New York

15. Descartes R. (1637). La Géométrie. Edition Leyde.

16. Mazur, J. (2014). Enlightening Symbols: A short history of mathematical notation and its hidden powers. Princeton University Press.

17. Abel, N. H. (1826). Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré. Journal für die reine und angewandte Mathematik. (1):65–96

18. Abel, N. H. (1824). Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré.

19. Galois, É. (1830). Analyse d'un Mémoire sur la résolution algébrique des équations. Bull. des Sci. Math. Phys. Chim. 13(55): 171–172.

20. D. M. Burton. The history of mathematics: An introduction. McGraw-Hill, 2007.

21. R. Bhatia and K. K. Mukherjea. "The space of unordered tuples of complex numbers". In: Linear Algebra and its Applications 52-53 (1983), 765–768. URL: https://doi.org/10.1016/0024-3795(83)80048-2

22. L. Goldmahker. Arnold's elementary proof of the insolvability of the quintic. URL: web.williams.edu/Mathematics/lg5/394/ArnoldQuintic.pdf

23. Michael I. Rosen. Niels Hendrik Abel and equations of the fifth degree. Amer. Math. Monthly 102 (1995), no.6, 495–505.

24. Henryk Zoladek, The topological proof of Abel-Ruffini theorem, Topol. Methods Nonlinear Anal. 16 (2000), no.2, 253–265.

25. M. Müger. Topology for the working mathematician. May 2020.

26. V.B. Alekseev. Abel's Theorem in Problems and Solutions: Based on the lectures of Professor V.I. Arnold. January 2004.

27. M.T.J.N Vrij. Bachelor Thesis, Radbound University. "A topological proof of the Abel – Ruffini Theorem – Based on the method of V.I. Arnold". January 2022

28. "Why There's 'No' Quintic Formula (proof without Galois Theory)". URL: https://www.youtube.com/watch?v=BSHv9Elk1MU&t=84s

29. "Short proof of Abel's theorem that 5^{th} degree polynomial equations cannot be solved"
URL: https://www.youtube.com/watch?v=RhpVSV6iCko&t=17s