



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Έλεγχος Τετραπτέρυγυ Ρομπότ και Προσομοίωση με Ελεγκτές PID, LQR

Γεώργιος Μπαϊραμπάς - 02119211

Εκπόνηση διπλωματικής εργασίας ως μέρος του
Διατμηματικού Προγράμματος
Μεταπτυχιακών Σπουδών
“ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ”

Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Τζαφέστας

Αθήνα , Νοέμβριος 2022

Δήλωση Συγγραφικής Ιδιότητας

Εγώ, ο Γεώργιος Μπαϊραμπάς, δηλώνω ότι αυτή η πτυχιακή εργασία και η δουλειά που παρουσιάζεται σε αυτή είναι δικά μου. Επιβεβαιώνω ότι:

- Αυτή η δουλειά πραγματοποιήθηκε ολοκληρωτικά ή κυρίως κατά την υποψηφιότητά μου για τίτλο μεταπτυχιακών σπουδών σε αυτό το πανεπιστήμιο.
- Όπου οποιοδήποτε μέρος αυτής της διπλωματικής εργασίας έχει προηγουμένως κατατεθεί για την απόκτηση πτυχίου ή άλλου τίτλου σε αυτό ή άλλο πανεπιστήμιο, αυτό διατυπώνεται ξεκάθαρα.
- Όπου έχω συμβουλευτεί την δημοσιευμένη δουλειά τρίτων, αυτό αποδίδεται ορθώς.
- Όπου έχω παραθέσει από δουλειά τρίτων, η πηγή δίνεται πάντα. Με εξαίρεση αυτές τις παραθέσεις, αυτή η διπλωματική εργασία είναι εξ ολοκλήρου προσωπική μου δουλειά.
- Έχω παραθέσει όλες τις κύριες πηγές βοήθειας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

Απόφθεγμα (προεραιτικό)

Συγγραφέας Αποφθέγματος

ABSTRACT

In this thesis, a quadrotor with four rotors is being modelled and the control of its whole system will be attempted by the use of PID, PIDH (PID with H_∞ techniques) and LQR which will try to achieve the goals of hovering and dynamic trajectory tracking. The simulations will be implemented in Matlab environment and the advantages and disadvantages of the implementation of every control method will be analyzed and comparisons will be made between the controllers as far as the performance and robustness.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή τη διπλωματική, ένα τετραπτέρυγο ρομπότ με 4 κινητήρες μοντελοποιείται και γίνεται προσπάθεια ελέγχου του ολικού συστήματος με τους ελεγκτές PID, PIDH (PID με τεχνικές H_∞ θεωρίας), LQR οι οποίοι θα προσπαθήσουν να επιτύχουν στόχους όπως η αιώρηση και η δυναμική παρακολούθηση τροχιάς. Οι προσομοιώσεις θα πραγματοποιηθούν σε περιβάλλον MATLAB και θα αναλυθούν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της εφαρμογής κάθε μεθόδου ελέγχου και θα συμπεριληφθούν συμπεράσματα όσον αφορά την απόδοση και την ευρωστία.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή μου κ. Τζαφέστα για την πολύτιμη βοήθεια του καθώς και τον διδάκτορα Γ.Θανέλλα που ήταν εκεί για να με βοηθήσει με κάθε απορία μου όποτε και αν τον χρειαζόμουν. Οφείλω επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου και τους φίλους μου που με συντρόφευσαν από την αρχή μέχρι το τέλος αυτής της διπλωματικής.

Περιεχόμενα

Δήλωση Συγγραφικής Ιδιότητας	i
Ευχαριστίες	v
Λίστα Εικόνων	vii
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1 Δομή Διπλωματικής	2
2 ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ	3
2.1 Ιστορία Ελέγχου	3
2.2 Περιγραφή Προβλήματος και Στόχοι	6
3 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΟ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	7
3.1 Δομή Τετραπτέρυγων	7
3.2 Γωνίες Euler	8
3.3 Κινηματική Ανάλυση	9
3.4 Δυναμική Ανάλυση	12
3.4.1 Δυναμική Γραμμικών Παραγόντων	12
3.4.2 Δυναμική Περιστροφικών Παραγόντων	15
4 ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΛΕΓΧΟΥ	19
4.1 PID	19
4.1.1 Σενάρια Αιώρησης και Παρακολούθησης Τροχιάς	20
4.1.2 Διαχείριση Παραμετρικών Αβεβαιοτήτων	29
4.1.3 Διαχείριση Θορύβου	34
4.2 LQ	36
4.2.1 LQR	36
4.2.2 LQG	40
5 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ	42
5.1 Προσομοίωση LQR	47
6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ	53

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Κινήσεις τετραπτέρυγου συναρτήσει περιστροφικών κινήσεων των ροτόρων [1]	2
3.1	Αναπαράσταση earth και body πλαισίων [36]	8
4.1	Έλεγχος γωνιακών ταχυτήτων	22
4.2	Εσωτερικό του μπλοκ	23
4.3	Έλεγχος γωνιών ϕ, θ	25
4.4	Διάγραμμα ελέγχου γωνιών και γωνιακών ταχυτήτων	26
4.5	Έλεγχος θέσης	27
4.6	Ολικό διάγραμμα Ελέγχου	28
4.7	Αρχικές Τιμές	28
4.8	Ολικό διάγραμμα ελέγχου με δυναμικές τετραπτέρυγου	29
4.9	Αβεβαιότητες θέσης Z και φράγμα	33
4.10	Αβεβαιότητες roll γωνίας και φράγμα	33
4.11	Παρατηρητής [2]	36
4.12	Γενικό σχήμα LQR ελεγκτή [2]	38
4.13	Δομή ελέγχου LQR εφαρμοσμένη στο τετραπτέρυγο	39
4.14	LQR με Kalman φίλτρο	41
5.1	Προσομοίωση Z θέσης για το απλουστευμένο μοντέλο χωρίς διαταραχές και θόρυβο	42
5.2	Προσομοίωση Z θέσης για το απλουστευμένο μοντέλο με διαταραχές και χωρίς θόρυβο	43
5.3	Προσομοίωση Z θέσης για το απλουστευμένο μοντέλο με θόρυβο χωρίς διαταραχές	43
5.4	Προσομοίωση Z θέσης για το απλουστευμένο μοντέλο με διαταραχές και θόρυβο	44
5.5	Προσομοίωση Z θέσης για το απλουστευμένο μοντέλο για διάφορες τιμές της μάζας	44
5.6	Απόκριση γωνιών Euler	48
5.7	Z θέση	48
5.8	Αιώρηση	51

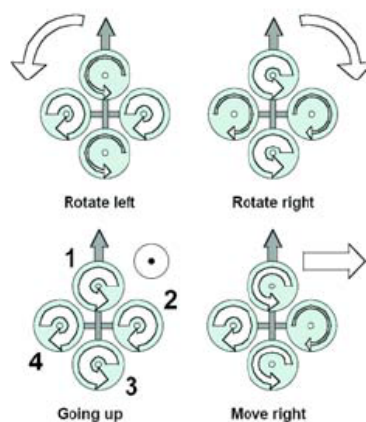
Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη σημερινή εποχή, οι ανάγκες του ανθρώπου για επιτυχημένη συλλογή και πρόσβαση στην πληροφορία αυξάνονται συνεχώς. Τα τετραπύεργα ρομπότ κινούνται προς αυτή την κατεύθυνση με μεγάλη επιτυχία και αποτελούν αρωγό του ανθρώπου σε καταστάσεις που είναι αδύνατον να τις διαχειριστεί ο ίδιος.

Πιο συγκεκριμένα, βιομηχανίες όπως ιατρική, κατασκευαστική, αυτοκινούμενα, διάστημα, στρατός, κ.α. αναζητούν ρομποτικές λύσεις ώστε να διευκολυνθεί η εργασία του ανθρώπου, να εξοικονομηθεί χρόνος και να αποφευχθεί οποιοσδήποτε κίνδυνος για τον ίδιο. Για αυτόν ακριβώς τον λόγο, το ερευνητικό κομμάτι γύρω από τα αέρια οχήματα γενικότερα απασχολεί εδώ και πολλά χρόνια τους επιστήμονες, οι οποίοι προσπαθούν να εξελίσσουν συνεχώς τις τεχνολογίες αυτών και να παρέχουν ουσιαστικές εφαρμόσιμες λύσεις.

Τα τετραπύεργα ρομπότ που αναφέρονται παραπάνω είναι μικρά αέρια οχήματα τα οποία κινούνται μέσω των γωνιακών ταχυτήτων των κινητήρων τους. Οι κινητήρες τους είναι ανά ζευγάρια πανομοιότυποι. Κάθε ζευγάρι περιστρέφεται αντίστροφα από το άλλο όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1. Ο έλεγχος αυτών των ταχυτήτων μας δίνει τη δυνατότητα να καθορίσουμε καταστάσεις αιώρησης, απογείωσης, προσεδάφισης, παρακολούθησης τροχιάς κ.α. ώστε να επιτύχουμε οποιεσδήποτε εργασίες επιθυμούμε. Οι δυνατότητες αυτές μας δημιουργούν την ανάγκη για ασφαλή πλοήγηση του ρομπότ σε περιβάλλοντα τα οποία ενέχουν διαταραχές όπως ο αέρας, φυσικά εμπόδια, καθυστερήσεις από τους αισθητήρες ή ακόμα και κατασκευαστικοί περιορισμοί του ίδιου του ρομπότ. Οι απαιτήσεις κάθε μέρα αυξάνονται και οι εργασίες που πρέπει να φέρουν εις πέρας γίνονται όλο και πιο πολύπλοκες με αποτέλεσμα η έρευνα στο συγκεκριμένο αντικείμενο να έχει εμβαθύνει σε αρκετές πρακτικές (μέθοδοι ελέγχου) τις οποίες χρησιμοποιεί ο άνθρωπος για την ολοκλήρωση των εργασιών.



ΣΧΗΜΑ 1.1: Κινήσεις τετραπτέρυγου συναρτήσει περιστροφικών κινήσεων των ροτόρων [1]

1.1 Δομή Διπλωματικής

- **Κεφάλαιο 3.** Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύεται όλο το μαθηματικό υπόβαθρο πίσω από την μοντελοποίηση των εξισώσεων της κινηματικής και δυναμικής του τετραπτέρυγου και εξάγεται ένα τελικό μοντέλο αναφοράς που θα χρησιμοποιηθεί στους παρακάτω μεθόδους ελέγχου.
- **Κεφάλαιο 4.** Σε αυτό το κεφάλαιο, αναλύονται τρεις ελεγκτές. Ξεκινώντας με τον PID κατασκευάζεται η ροή ελέγχου και αποτυπώνεται σε Simulink το γραμμικοποιημένο μοντέλο. Στη συνέχεια, αναλύεται ο PIDH ελεγκτής με όλο το θεωρητικό υπόβαθρο και τέλος η ίδια διαδικασία με τον LQR.
- **Κεφάλαιο 5.** Σε αυτό το κεφάλαιο αποτυπώνονται προσομοιώσεις για τους 3 ελεγκτές και αναλύονται ποιοτικά και ποσοτικά χαρακτηριστικά κάθε γραφήματος. Στο τέλος, γίνεται σύγκριση μεταξύ των 3 ελεγκτών για αιώρηση και παρακολούθηση τροχιάς και εξάγονται συμπεράσματα όσον αφορά την απόδοση και την ευρωστία.
- **Κεφάλαιο 6.** Σε αυτό το κεφάλαιο ,τέλος, αναφέρονται συμπεράσματα από όλες τις παραπάνω αναλύσεις και πιθανές βελτιοποιήσεις που μπορούν να επιτευχθούν.

Κεφάλαιο 2

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Η έρευνα πάνω στα τετραπτέρυγα ρομπότ έχει πολλά χρόνια που έχει ξεκινήσει και ιδίως τα τελευταία έχει πραγματοποιήσει σημαντικά βήματα. Ο στόχος είναι να σχεδιαστεί ένα όσο το δυνατόν βέλτιστο και εύρωστο σύστημα ελέγχου. Παρακάτω θα σχολιασθούν επιτεύγματα και ανοιχτές προκλήσεις που υφίστανται στον χώρο του ελέγχου για τους ελεγκτές PID,LQR,MPC.

2.1 Ιστορία Ελέγχου

Τα τετραπτέρυγα ρομπότ είναι υποενεργούμενα συστήματα, δηλαδή γίνεται προσπάθεια ελέγχου 6 βαθμών ελευθερίας(προσανατολισμός + θέση) με 4 επενεργητές.

Οι πρώτες απόπειρες ελέγχου με ικανοποιητικά αποτελέσματα [7, 14, 21, 32], πραγματοποιήθηκαν με τη βοήθεια ελεγκτών PID(Proportional -Integral-Derivative).Οι PID είναι γραμμικοί ελεγκτές και καθιστώνται κατάλληλοι για την απόπειρα ελέγχου τετραπτέρυγων καθώς έχουν αρκετά απλή δομή και εύκολη εφαρμογή.

Οι Samir Bouabdallah και Roland Siegwart [7] δημιούργησαν ένα πλήρες μοντέλο με αναγνώριση του μοντέλου των επενεργητών και πήραν υπόψιν τους τα σφάλματα των αισθητήρων και τους θορύβους.Έπειτα το μοντέλο γραμμικοποιήθηκε ώστε να εφαρμοστούν οι τεχνικές ελέγχου PID και Backstepping για εργασίες όπως αιώρηση, μετάβαση σε συγκεκριμένη θέση και αποφυγή εμποδίων μέσω ελιγμών του τετραπτέρυγου.

Οι [6, 32] χρησιμοποίησαν παρόμοιο μοντέλο με διαφορετική αναπαράσταση του συστήματος των εξισώσεων. Διάλεξαν η μορφή του συστήματος να είναι μια γραμμική συνάρτηση του

νόμου ελέγχου $u(t)$ δηλαδή μια σχέση της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + G(x)u \quad (2.1)$$

όπου x το διάνυσμα καταστάσεων, ωστόσο αν και επαρκή τα αποτελέσματα με εφαρμογή του PID, η παραπάνω μέθοδος θα ήταν αδύνατο να αντιμετωπίσει μη αφηρητικό σύστημα ως προς το νόμο ελέγχου [29]. Τέλος, δημοσίευσαν μοντέλα Simulink για καλύτερη κατανόηση και περαιτέρω έρευνα μελλοντικά.

Ίσως το πιο χρήσιμο σενάριο προσομοίωσης είναι η παρακολούθηση τροχιάς του τετραπτέρυγου. Εξυπηρετεί ανάγκες όπως διασώσεις σε πυρκαγιές, σκοπούς παρακούιθησης σε στρατιωτικές επιχειρήσεις κ.α. Οι αυξημένες ταχύτητες δημιουργούν θέματα όσον αφορά την απόδοση αλλά και την ευρωστία. Αυτό συμβαίνει λόγω αδυναμίας μοντελοποίησης παραγόντων όπως αεροδυναμικές διαταραχές, τριβές κ.α. τα οποία αντιμετωπίζονται ως διαταραχές ή θόρυβος. Ο ελεγκτής PID χρησιμοποιήθηκε λοιπόν από τους [19, 27, 28] για τη συγκεκριμένη πρόκληση. Οι Hoffman et al. [19] δημιούργησαν μια αλληλουχία σημείων στον 3D χώρο, τα οποία αποτελούσαν τους κόμβους που θα ακολουθούσε το τετραπτέρυγο και πέτυχαν μέγιστα σφάλματα θέσης της τάξεως των 50cm σε εσωτερικές και εξωτερικές πτήσεις. Καθώς το ρομπότ κινούνταν στο ευθύγραμμο τμήμα που ένωνε τους κόμβους σαν σφάλμα πάθηκε μόνο η απόκλιση της ταχύτητας που ήταν παράλληλη με την πορεία και όχι η κάθετη σε αυτήν. Παρατήρησαν ότι στις αλλαγές από ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ένα άλλο δημιουργόταν μεγάλο overshoot λόγω της αποχής καμπυλότητας και έλυσαν το πρόβλημα τοποθετώντας φράγματα στις επιταχύνσεις και κατ' επέκταση στις ταχύτητες που αναπτύσσονται κοντά στις περιοχές αλλαγής, ώστε να δημιουργηθεί ομαλότερη μετάβαση.

Οι [27, 28] αντιμετώπισαν το σενάριο πιο απότομων ελιγμών κατά την δυναμική παρακολούθηση τροχιάς. Χρησιμοποίησαν μια σειρά από PID ελεγκτές για όλες τις φάσεις της τροχιάς και πραγματοποίησαν 9 διαφορετικά πειράματα όπως πέρασμα μέσα από παράθυρο υπό διάφορες γωνίες και perching.

Μαζί με τους PID ελεγκτές ξεκίνησε και η χρήση ελεγκτών που μέσω ανατροφοδότησης παράγουν βέλτιστα κέρδη ώστε να καταστήσουν το σύστημα κλειστού βρόχου ευσταθές και αποδοτικό. Ένας από αυτούς τους ελεγκτές ονομάζεται LQR (Linear Quadratic Regulator) ο οποίος είναι επίσης γραμμικός και η χρήση του είναι ευρέως διαδεδομένη. Σκοπός του είναι να παράξει ένα νόμο ελέγχου που ελαχιστοποιεί μια συνάρτηση κόστους που σχετίζεται με τα διανύσματα καταστάσεων και εισόδων ελέγχου, ώστε να οδηγήσει το σύστημα στην επιθυμητή κατάσταση.

Το 2006 οι Mario Valenti et al. [35] ασχολήθηκαν με το πρόβλημα της μακράς διάρκειας πτήσεων που βρίσκεται πιο κοντά στις πραγματικές απαιτήσεις που καλείται να φέρει εις πέρας το τετραπτέρυγο. Συγκεκριμένα, χρησιμοποίησαν LQR ελεγκτές και προσομοίωσαν

πάνω από 60 πτήσεις με αιώρηση και παρακολούθηση κυκλικής τροχιάς για αρκετά λεπτά. Επίσης, ανέπτυξαν λογισμικό που αυτόματα 'καλεί' το ρομπότ στο έδαφος για να επαναφορτιστεί, αφού προηγουμένως έχει απογειωθεί ένα δεύτερο με σκοπό να το αντικαταστήσει. Οι Ian D Cowling et al.[11] ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο ελέγχου με βάση τον LQR για επιτυχή σχεδιασμό και παρακολούθηση τροχιάς. Εχμεταλλεύτηκαν την σημαντική ιδιότητα της διαφορικής επιπεδότητας που προσφέρει το σύστημα, δηλαδή την δυνατότητα όλων των καταστάσεων και των νόμων ελέγχου να μπορούν να γραφτούν συναρτήσει των καταστάσεων-εξόδων και των παραγώγων τους.

Η πρόοδος συνεχίστηκε με την ανάπτυξη μιας μεθόδου ελέγχου που έχει ως θεμέλιο την πρόβλεψη της μελλοντικής κατάστασης στην οποία θα βρίσκεται το σύστημα δεδομένης της τωρινής και είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως MPC (Model Predictive Control).

Οι Alexis et al. [4, 5] αρχικά το 2010 και έπειτα το 2014 πέτυχαν πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα στην κατηγορία της παρακολούθησης τροχιάς όπου χρησιμοποίησαν μια μίξη ενός MPC για την σταθεροποίηση των γραμμικών δυναμικών και ενός δεύτερου feedforward ελεγκτή για την σταθεροποίηση των γωνιακών. Στην ίδια φιλοσοφία κινήθηκαν και οι Raffo et al. [31] με μίξη ενός MPC και ενός H_∞ ελεγκτή, με πολύ υψηλή απόδοση και ευρωστία. Με την δουλειά των [10, 25] αναπτύχθηκαν MPC ελεγκτές που αντιμετώπιζαν τόσο τις γραμμικές όσο και τις γωνιακές δυναμικές με τους Maropa Chipofya et al. [10] να κάνουν χρήση και ορθομοναδιαίων συναρτήσεων Laguerre για την προσέγγιση του διανύσματος ελέγχου ΔU .

Χρήση Laguerre συναρτήσεων έκαναν και οι [30, 38] με τους πρώτους να χρησιμοποιούν τον MPC και ένα Kalman φίλτρο για την εκτίμηση των καταστάσεων για τον επιτυχή έλεγχο της θερμοκρασίας ενός θερμοκηπίου. Ο L. Wang [38] ήδη από το 2003 είχε δείξει ότι η συγκεκριμένη προσέγγιση υπερέχει της παραδοσιακής καθώς απαιτεί λιγότερες παραμέτρους για τον προσδιορισμό του μελλοντικού νόμου ελέγχου, επομένως και μικρότερες απαιτήσεις υπολογιστικά για την κατασκευή του αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

Το σημαντικό πλεονέκτημα του MPC έναντι των LQR, PID είναι ότι μπορεί να διαχειριστεί μη γραμμικότητες και πιο πολύπλοκα μοντέλα. Ο λεγόμενος NMPC (Nonlinear Model Predictive Controller) έχει δώσει πολύ αξιόπιστες λύσεις σε τέτοια θέματα όπως φαίνεται και στη δουλειά των [9, 20, 39].

2.2 Περιγραφή Προβλήματος και Στόχοι

Συνοψίζοντας την προηγούμενη ενότητα, παρατηρείται έντονα η φιλοδοξία για πλήρως αυτόνομη πλοήγηση του ρομπότ με ασφάλεια και ύψιστη ακρίβεια εκτέλεσης των εργασιών που του ανατίθενται. Η μεγάλη πρόκληση έγκειται στην επίτευξη των παραπάνω ακόμα και σε αλλαγές στις δυναμικές που διέπουν το σύστημα κάνοντας το, πέρα από αποδοτικό, ικανοποιητικά εύρωστο.

Οι στόχοι της συγκεκριμένης διπλωματικής είναι :

α) Δημιουργία ενός πλήρες μοντέλου που θα μπορεί να απλουστευθεί κατάλληλα κατά την κατασκευή των μεθόδων ελέγχου

β) Προσομοίωση της εργασίας της αιώρησης μέσω γραμμικοποίησης του μοντέλου με ελεγχτές PID, PIDH, LQR και σύγκριση των αποτελεσμάτων.

γ) Προσομοίωση της εργασίας της παρακολούθησης τροχιάς του μοντέλου με ελεγχτές PID, PIDH, LQR με σκοπό την σύγκριση των μεθόδων σε απόδοση και ευρωστία.

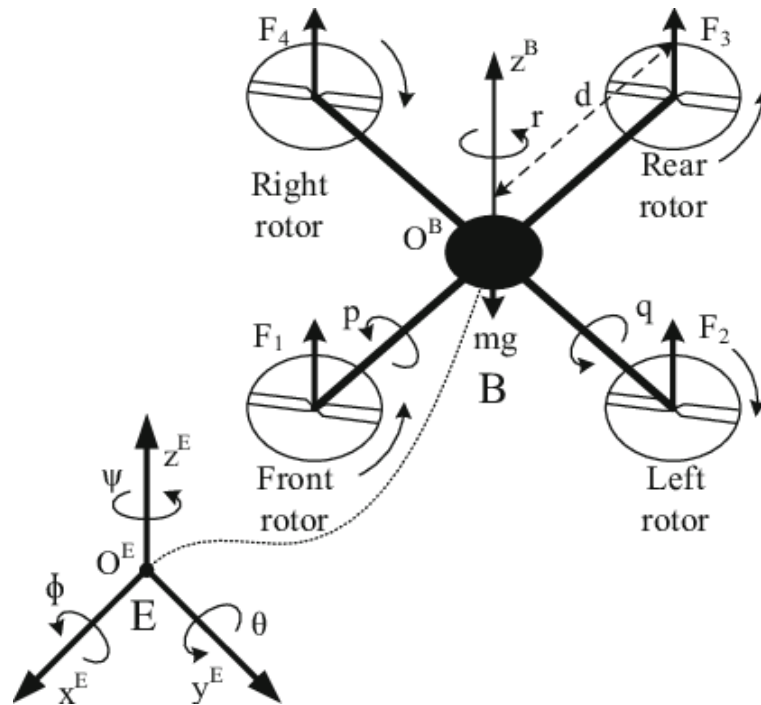
Κεφάλαιο 3

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΟ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

3.1 Δομή Τετραπτέρυγων

Στην συγκεκριμένη παράγραφο παρουσιάζονται η κινηματική και δυναμική ανάλυση που ακολουθούν την δουλειά των [7]. Υπάρχουν κάποιες υποθέσεις που χρησιμοποιούνται από την αρχή για το μοντέλο. Η δομή θεωρείται άκαμπτη και συμμετρική. Το κέντρο βάρους του τετραπτέρυγου συμπίπτει με την αρχή αξόνων του body frame. Οι προπέλες θεωρούνται επίσης άκαμπτες και εφαρμόζεται η παραδοχή ότι οι δυνάμεις προώθησης(thrust forces) και έλξης(drag forces) είναι ανάλογες των τετραγώνων των γωνιακών ταχυτήτων που παράγουν οι προπέλες [3, 13, 23, 26].

Τόσο το κινηματικό όσο και το δυναμικό μοντέλο περιγράφονται με τη βοήθεια των εξισώσεων του Νεύτωνα. Για την παρακάτω ανάλυση θα χρησιμοποιηθούν 2 συστήματα συντεταγμένων, το earth(world), το οποίο είναι σταθερό και το body frame, το οποίο είναι κινητό, ακολουθώντας τον προσανατολισμό του σώματος του ρομπότ. Το earth(world) πλαίσιο ορίζεται από τους άξονες X_E, Y_E, Z_E όπου ο Z_E έχει φορά προς τα πάνω. Το body frame έχει την αρχή του στο κέντρο μάζας του τετραπτέρυγου και οι άξονες X_B, Y_B, Z_B δημιουργούν ένα τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Όπως φαίνεται στο σχήμα (3.1) ο ρότορας 1 βρίσκεται στην προέκταση του X_B άξονα, ο ρότορας 2 στην προέκταση του Y_B άξονα, ο ρότορας 3 στην προέκταση του $-X_B$ άξονα και ο ρότορας 4 στην προέκταση του $-Y_B$ άξονα.



ΣΧΗΜΑ 3.1: Αναπαράσταση earth και body πλαισίων [36]

3.2 Γωνίες Euler

Οι γωνίες αυτές κατά τον Euler μπορούν να περιγράψουν πλήρως τον προσανατολισμό ενός στερεού σώματος. Ο τρόπος με τον οποίο μπορούν να οριστούν ποικίλλει. Εδώ θα χρησιμοποιηθούν οι ZXY γωνίες Euler [37]. Παίρνουν τυπικά τις τιμές $-\pi < \phi < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ και $-\pi < \psi < \pi$ και αποτελούν τη βάση για τη μετάβαση από το ένα πλαίσιο αναφοράς στο άλλο. Για την μετάβαση λοιπόν από το earth frame στο body frame και αντίστροφα χρησιμοποιούνται οι λεγόμενοι πίνακες περιστροφής. Ο κάθε ένας από αυτούς αντιπροσωπεύει τη στροφή γύρω από κάθε άξονα του earth frame κατά τις αντίστοιχες γωνίες ϕ , θ , ψ και συνθέτοντας όλες αυτές τις στροφές περιγράφεται πλήρως ο προσανατολισμός του στερεού. Πρόκειται για 3x3 συμμετρικούς πίνακες οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν επιπλέον για να εκφράσουν ένα διάνυσμα, από το ένα πλαίσιο, σε ένα άλλο.

Παρακάτω παρατίθενται οι 3 πίνακες περιστροφής για τον πλήρη προσανατολισμό ενός στερεού σώματος [22]:

- Πίνακας περιστροφής γύρω από τον άξονα Z κατά γωνία ψ (yaw) :

$$\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

- Πίνακας περιστροφής γύρω από τον άξονα X (τον καινούριο άξονα δηλαδή που προέκυψε μετά την πρώτη στροφή γύρω από τον άξονα Z) κατά γωνία ϕ (roll) :

$$\mathbf{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

- Πίνακας περιστροφής γύρω από τον άξονα Y (τον καινούριο άξονα δηλαδή που προέκυψε μετά τις 2 στροφές, πρώτα κατά Z και μετά κατά X) κατά γωνία θ (pitch) :

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Συγκεντρωτικά, παίρνουμε τον πίνακα περιστροφής ο οποίος ταυτίζεται με τον πίνακα περιστροφής από το body frame στο earth frame και παράγεται από τις 3 συνεχόμενες περιστροφές γύρω από τους 3 άξονες. Έτσι, θα μπορεί να εκφραστεί κάθε διάνυσμα που είναι γραμμένο από συντεταγμένες B, σε συντεταγμένες E.

$$\mathbf{R}_B^E = \mathbf{R}_z(\psi) * \mathbf{R}_y(\theta) * \mathbf{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

όπου συμβολικά έχουμε ότι $\cos(*) = c_*$ και $\sin(*) = s_*$ για $* = \phi, \theta, \psi$.

Χρήσιμες Ιδιότητες

- $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$
- $\det(\mathbf{R}) = 1$
- $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{R}}^T$

3.3 Κινηματική Ανάλυση

Παρακάτω περιγράφεται το αναλυτικό μαθηματικό μοντέλο, με σκοπό την κατασκευή ενός συστήματος εξισώσεων που θα περιγράφουν τη συμπεριφορά του τετραπτέρυγου.

→ *Earth Frame* : $\mathbf{\Gamma}^E = [x_E, y_E, z_E]$, $\mathbf{\Theta}^E = [\phi, \theta, \psi]$

όπου $\mathbf{\Gamma}^E$ είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας του τεραπτέρυγου στον 3Δ χώρο

και Θ^E είναι η τριπλέτα γωνιών Euler, εκφρασμένα στο earth frame.

$$\rightarrow \text{Body Frame} : \Gamma^B = [x_B, y_B, z_B], \Theta^B = [\phi_B, \theta_B, \psi_B]$$

όπου Γ^B είναι η θέση του κέντρου μάζας του τεραπτέρυγου στον 3Δ χώρο και Θ^B είναι η τριπλέτα γωνιών Euler, εκφρασμένα στο body frame.

Οι παρακάτω εξισώσεις εκφράζουν την κινηματική ανάλυση ενός 6 βαθμών ελευθερίας ενός στερεού σώματος :

$$\dot{\Gamma}^E = R_B^E \dot{\Gamma}^B \quad (3.5)$$

όπου $\dot{\Gamma}^B = \mathbf{v}^B$ είναι το διάνυσμα γραμμικής ταχύτητας εκφρασμένο στο body frame και αντίστοιχα $\dot{\Gamma}^E = \mathbf{v}^E$ στο earth frame. Ο πίνακας R_B^E είναι υπεύθυνος για τη μετατροπή του διανύσματος από το body στο earth frame. Θα χρησιμοποιηθούν από δω και στο εξής μόνο οι συμβολισμοί $\mathbf{v}^B, \mathbf{v}^E$ για τις γραμμικές ταχύτητες.

Επίσης έχουμε ότι:

$$\dot{\Theta}^E = T_{\Theta} \dot{\Theta}^B \quad (3.6)$$

όπου $\dot{\Theta}^B = \boldsymbol{\omega}^B = [p \ q \ r]^T = [\dot{\phi}_B \ \dot{\theta}_B \ \dot{\psi}_B]^T$ είναι το διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας εκφρασμένο στο body frame και αντίστοιχα το $\dot{\Theta}^E = \boldsymbol{\omega}^E = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ στο earth frame, ενώ ο πίνακας T_{Θ} είναι υπεύθυνος για τη μετατροπή των γωνιακών ταχυτήτων από το body στο earth frame. Θα χρησιμοποιηθούν από δω και στο εξής μόνο οι συμβολισμοί $\boldsymbol{\omega}^B = [p \ q \ r]^T, \boldsymbol{\omega}^E = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ για τις γωνιακές ταχύτητες. Ο πίνακας T_{Θ} είναι της μορφής

$$T_{\Theta} = \begin{bmatrix} 1 & s_{\phi} t_{\theta} & c_{\phi} t_{\theta} \\ 0 & c_{\phi} & -s_{\phi} \\ 0 & \frac{s_{\phi}}{c_{\theta}} & \frac{c_{\phi}}{c_{\theta}} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

όπου συμβολίζουμε ομοίως $\tan(*) = t_*$.

Ο τρόπος δημιουργίας του παραπάνω πίνακα προκύπτει ως εξής:

Γνωρίζουμε ότι λόγω συμμετρίας ισχύει

$$R(a)R(a)^T = I$$

για οποιαδήποτε γωνία \mathbf{a} . Παραγωγίζοντας τη σχέση ως προς \mathbf{a} και χρησιμοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα των πινάκων $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{d}{d\mathbf{a}} \mathbf{R}_l(\mathbf{a}) \mathbf{R}_l(\mathbf{a})^T + \left(\frac{d}{d\mathbf{a}} \mathbf{R}_l(\mathbf{a}) \mathbf{R}_l(\mathbf{a})^T \right)^T = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

όπου \vec{l} είναι η διεύθυνση γύρω από την οποία ορίζεται η περιστροφή κατά γωνία \mathbf{a} . Ορίζοντας ως $\mathbf{S} = \frac{d}{d\mathbf{a}} (\mathbf{R}_l(\mathbf{a}) \mathbf{R}_l(\mathbf{a})^T)$ η σχέση παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{S} + \mathbf{S}^T = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

δηλαδή ικανοποιείται η συνθήκη της αντισυμμετρίας. Άρα συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας \mathbf{S} είναι αντισυμμετρικός και έχει την παρακάτω μορφή:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & \mathbf{0} & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

όπου $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ είναι το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας που αναπτύσσεται κατά τη διεύθυνση \vec{l} και ισχύει $\boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{a}} \vec{l}$. Επομένως, γυρνώντας στη σχέση :

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \frac{d}{d\mathbf{a}} \mathbf{R}_l(\mathbf{a}) \mathbf{R}_l(\mathbf{a})^T \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\mathbf{a}} \mathbf{R}_l(\mathbf{a}) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{R}_l(\mathbf{a})$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με την ποσότητα $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ έχουμε :

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \frac{d}{d\mathbf{a}} \mathbf{R}_l(\mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{R}_l(\mathbf{a}) \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbf{R}}_l(\mathbf{a}) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{R}_l(\mathbf{a}) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & \mathbf{0} & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{R}}_l(\mathbf{a}) \mathbf{R}_l(\mathbf{a})^T$$

Μας παρέχεται επίσης η δυνατότητα να εκφράσουμε οποιοδήποτε εξωτερικό γινόμενο σε γινόμενο πίνακα επί διάνυσμα και αντίστροφα. Δηλαδή,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{b}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \quad (3.11)$$

Αντικαθιστώντας όπου $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^B$, δηλαδή $[\omega_x, \omega_y, \omega_z] = [\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}]$ και όπου $\mathbf{R}_l(\mathbf{a}) = \mathbf{R}_B^E$

καθώς και πραγματοποιώντας αναλυτικά τις πράξεις στο δεξί μέλος, παίρνουμε το διάνυσμα γωνιακών ταχυτήτων εκφρασμένο στο body frame :

$$\omega^B = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - s_{\theta}\dot{\psi} \\ c_{\phi}\dot{\theta} + s_{\phi}c_{\theta}\dot{\psi} \\ -s_{\phi}\dot{\theta} + c_{\phi}c_{\theta}\dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_{\theta} \\ 0 & c_{\phi} & s_{\phi}c_{\theta} \\ 0 & -s_{\phi} & c_{\phi}c_{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Τέλος, αντιστρέφοντας τον παραπάνω πίνακα καταλήγουμε στον ζητούμενο πίνακα T_{Θ} ο οποίος εκφράζει τις γωνιακές ταχύτητες του body frame στο earth frame.

$$T_{\Theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_{\theta} \\ 0 & c_{\phi} & s_{\phi}c_{\theta} \\ 0 & -s_{\phi} & c_{\phi}c_{\theta} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s_{\phi}t_{\theta} & c_{\phi}t_{\theta} \\ 0 & c_{\phi} & -s_{\phi} \\ 0 & \frac{s_{\phi}}{c_{\theta}} & \frac{c_{\phi}}{c_{\theta}} \end{bmatrix}$$

3.4 Δυναμική Ανάλυση

3.4.1 Δυναμική Γραμμικών Παραγόντων

Από το πρώτο αξίωμα του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα έχουμε :

$$m\dot{v}^E = F^E \quad (3.12)$$

$$m \frac{d}{dt}(R_B^E v^B) = R_B^E F^B$$

$$m(\dot{R}_B^E v^B + R_B^E \dot{v}^B) = R_B^E F^B \xrightarrow{(3.10)}$$

$$m(S(\omega^B)R_B^E v^B + R_B^E \dot{v}^B) = R_B^E F^B \xrightarrow{(3.11)}$$

$$mR_B^E(\omega^B \times v^B + \dot{v}^B) = R_B^E F^B$$

$$m(\dot{v}^B + \omega^B \times v^B) = F^B$$

όπου

m : η μάζα του τετραπτέρυγου

F^E, F^B : η συνολική δύναμη που εφαρμόζεται στο τετραπτέρυγο εκφρασμένη στο E,B πλαίσιο.

\dot{v}^B, \dot{v}^E : η γραμμική επιτάχυνση εκφρασμένη στο body frame, earth frame.

Η σχέση (3.12) παρέχει πληροφορίες για το πώς συνδέονται γραμμική,γωνιακή ταχύτητα καθώς και συνολική δύναμη στο body frame αλλά για τις μεθόδους ελέγχου που θα εφαρμοστούν είναι βολικότερο να είναι εκφρασμένη η δυναμική των γραμμικών παραγόντων στο earth frame. Οπότε από την σχέση (3.12) συνεχίζουμε διαφορετικά :

$$m\dot{v}^E = F^E \Rightarrow$$

Σύμφωνα με τους [8] η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στο τετραπτέρυγο είναι το άθροισμα 3 επιμέρους δυνάμεων:

1. Της συνολικής προωθητικής δύναμης που παράγεται από την περιστροφή των προπελών F_{thrust}
2. Της βαρυτικής δύναμης F_g
3. Των αεροδυναμικών αντιστάσεων F_{aero}

Δηλαδή,

$$\begin{aligned} m\dot{v}^E &= F_{thrust}^E + F_g^E + F_{aero}^E \Rightarrow \\ m\dot{v}^E &= R_B^E F_{thrust}^B + F_g^E + F_{aero}^E \Rightarrow \\ \dot{v}^E &= \frac{1}{m} (R_B^E F_{thrust}^B + F_g^E + F_{aero}^E) \Rightarrow \end{aligned}$$

$\rightarrow F_{thrust}^B$:

Υπολογίζουμε τη συνολική συνεισφορά των 4 προπελών (μπροστινή,οπίσθια,δεξιά,αριστερή)

$$F_{thrust}^B = F_f + F_b + F_r + F_l$$

όπου κάθε δύναμη F_i αναπαριστά τον i -οστό παράγοντα προώθησης ο οποίος είναι ανάλογος των τετραγώνων των γωνιακών ταχυτήτων που παράγει η εκάστοτε προπέλα, δηλαδή

$$F_i = c_F \Omega_i^2, i = f, b, r, l$$

όπου c_F είναι ο συντελεστής προώθησης και έχειδειχθεί εμπειρικά ότι ακολουθεί τιμές τάξεως 10^{-8} στη μόνιμη κατάσταση [27] και Ω_i οι γωνιακές ταχύτητες των προπελών. Ο συντελεστής αυτός μοντελοποιεί σε καλό βαθμό [3, 26] τη σχέση

$$F_i = c_T \rho \pi r^4 \Omega_i^2$$

όπου c_T ο συντελεστής προώθησης, ρ η πυκνότητα του αέρα και r η ακτίνα της προπέλας. Συνεπώς,

$$\mathbf{F}_{thrust}^B = c_F(\Omega_f^2 + \Omega_b^2 + \Omega_r^2 + \Omega_l^2)$$

$\rightarrow \underline{\mathbf{F}_g^E}$:

Υπολογισμός της βαρυτικής δύναμης εκφρασμένη στο earth frame

$$\mathbf{F}_g^E = -mgz_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

όπου $g = 9.81m/s^2$ και $z_E = [0, 0, 1]^T$.

$\rightarrow \underline{\mathbf{F}_{aero}^E}$:

Υπολογισμός των αντιστάσεων του αέρα οι οποίες αποδεικνύεται σύμφωνα με το βιβλίο του [24] ότι συνδέονται με τις γραμμικές ταχύτητες μέσω της σχέσης :

$$\mathbf{F}_{aero}^E = \begin{bmatrix} -K_{fx} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{fy} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{fz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix}$$

όπου K_{fi} , $i = x, y, z$ συντελεστής αντίστασης του αέρα με υπολογισμένες τιμές μέσω πειραμάτων τάξεως 10^{-6} .

Ο έλεγχος του τετραπτέρυγου θα πραγματοποιείται με τον έλεγχο της προωθητικής δύναμης \mathbf{F}_{thrust}^B οπότε ορίζουμε ως πρώτη συνιστώσα του διανύσματος ελέγχου την $U_1 = \mathbf{F}_{thrust}^B$. Επομένως συμπεριλαμβάνοντας όλα τα παραπάνω, οι τελικές εξισώσεις που περιγράφουν την δυναμική του τετραπτέρυγου όσον αφορά τους γραμμικούς παράγοντες είναι :

$$\ddot{x}_E = \frac{1}{m}((c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi)U_1 - K_{fx}\dot{x}_E) \quad (3.13)$$

$$\ddot{y}_E = \frac{1}{m}((c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi)U_1 - K_{fy}\dot{y}_E) \quad (3.14)$$

$$\ddot{z}_E = \frac{1}{m}((c_\phi c_\theta)U_1 - K_{fz}\dot{z}_E) - g \quad (3.15)$$

Οι παραπάνω σχέσεις θα αποτελέσουν τη βάση για τις επερχόμενες μεθόδους ελέγχου που θα χρησιμοποιηθούν για τις ανάλογες εργασίες.

3.4.2 Δυναμική Περιστροφικών Παραγόντων

Από το δεύτερο αξίωμα του Euler του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\mathbf{J}\ddot{\Theta}^E = \boldsymbol{\tau}^E \quad (3.16)$$

ή ομοίως,

$$\mathbf{J}\dot{\omega}^E = \boldsymbol{\tau}^E \quad (3.17)$$

όπου $\boldsymbol{\tau}^E$ είναι η συνολική ροπή εκφρασμένη στο earth frame και η ποσότητα \mathbf{J} αντιπροσωπεύει τον πίνακα αδράνειας ως προς όλους τους άξονες και έχει τη μορφή :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

Αλλά επειδή υπάρχει συμμετρία μεταξύ των 3 αξόνων οδηγούμαστε στις εξής απλουστεύσεις:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας που προέκυψε είναι διαγώνιος οπότε είναι γνωστό ότι ο αντίστροφος του είναι της μορφής :

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{J_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_{zz}} \end{pmatrix}$$

Συνεχίζοντας με τη σχέση (3.9) έχουμε:

$$\mathbf{J}\dot{\omega}^E = \boldsymbol{\tau}^E \Rightarrow$$

$$\mathbf{J} \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_\Theta \boldsymbol{\omega}^B) = \mathbf{T}_\Theta \boldsymbol{\tau}^B \Rightarrow$$

$$\mathbf{J} (\dot{\mathbf{T}}_\Theta \boldsymbol{\omega}^B + \mathbf{T}_\Theta \dot{\boldsymbol{\omega}}^B) = \mathbf{T}_\Theta \boldsymbol{\tau}^B \Rightarrow$$

$$\mathbf{J} (\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^B) \mathbf{T}_\Theta \boldsymbol{\omega}^B + \mathbf{T}_\Theta \dot{\boldsymbol{\omega}}^B) = \mathbf{T}_\Theta \boldsymbol{\tau}^B \Rightarrow$$

$$\mathbf{J} (\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^B) \boldsymbol{\omega}^B + \dot{\boldsymbol{\omega}}^B) = \boldsymbol{\tau}^B \Rightarrow$$

$$\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}^B + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^B) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}^B = \boldsymbol{\tau}^B \Rightarrow$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^B = \mathbf{J}^{-1} (-\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^B) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}^B + \boldsymbol{\tau}^B)$$

Η συνισταμένη ροπή τ^B εκφρασμένη στο body frame που δρα πάνω στο τετραπτέρυγο αποτελείται από τις εξής επιμέρους ροπές:

1. Τη ροπή που δημιουργείται από τις δυνάμεις που παράγονται από τα ζεύγη των ομοαξονικών κινητήρων, δηλαδή των ζευγών δεξιάς-αριστερός και εμπρός-πίσθιος, καθώς και της ροπής που δημιουργείται από τις δυνάμεις έλξης των προπελών γύρω από τον κατακόρυφο άξονα Z
2. Τις αεροδυναμικές τριβές
3. Τα γυροσκοπικά φαινόμενα που αναπτύσσονται από τις περιστροφές των προπελών

Η σχέση που δίνει τη συνολική ροπή πάνω στο τετραπτέρυγο γράφεται ως εξής:

$$\tau^B = \begin{pmatrix} \tau_\phi + \tau_{ax} + \tau_{gyro_x} \\ \tau_\theta + \tau_{ay} + \tau_{gyro_y} \\ \tau_\psi + \tau_{az} + \tau_{gyro_z} \end{pmatrix}$$

1. $\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi$

Η ροπή κύλισης (rolling torque) που παράγεται από τις δυνάμεις του δεξιού και αριστερού κινητήρα δίνεται από τη σχέση :

$$\tau_\phi = l(F_r - F_l)$$

όπου l το μήκος από το άκρο όπου βρίσκεται η προπέλα μέχρι το κέντρο βάρους.

$$\tau_\phi = lc_F(\Omega_r^2 - \Omega_l^2)$$

και ομοίως η ροπή στρέψης (pitching torque) που παράγεται από τις δυνάμεις του πίσθιου και μπροστινού κινητήρα δίνεται από τη σχέση :

$$\tau_\theta = l(F_b - F_f)$$

$$\tau_\theta = lc_F(\Omega_b^2 - \Omega_f^2)$$

ενώ τέλος η ροπή εκτροπής (yawing torque) που παράγεται από τη συμμετοχή των ελκτικών δυνάμεων λόγω των προπελών δίνεται από τη σχέση :

$$\tau_\psi = \tau_r + \tau_l - \tau_f - \tau_b$$

$$\tau_\psi = c_T(\Omega_r^2 + \Omega_l^2 - \Omega_f^2 - \Omega_b^2)$$

Ορίζονται ως εντολές ελέγχου $U_i, i = 2, 3, 4$ οι τιμές των ροπών που αναπτύσσονται γύρω από τους άξονες X_E, Y_E, Z_E :

$$U_2 = \tau_\phi$$

$$U_3 = \tau_\theta$$

$$U_4 = \tau_\psi$$

2. τ_a

Οι ροπές λόγω αεροδυναμικών αντιστάσεων είναι ανάλογες των τετραγώνων των γωνιακών ταχυτήτων εκφρασμένων στο body frame [24]. Δηλαδή,

$$\tau_a = \begin{pmatrix} \tau_{ax} \\ \tau_{ay} \\ \tau_{az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & K_{ay} & 0 \\ 0 & 0 & K_{az} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ q^2 \\ r^2 \end{pmatrix}$$

3. τ_{gyro}

Η ροπή που παράγεται λόγω των γυροσκοπικών φαινομένων που δρουν στο τετραπύρο προκαλείται από την αδράνεια των ροτόρων J_r , και δημιουργείται μια σχετική, όπως ονομάζεται, γωνιακή ταχύτητα Ω_r η οποία υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Omega_r = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4$$

όπου οι γωνιακές ταχύτητες $\Omega_i, (i = 1, 2, 3, 4)$ αναπαριστούν τις ταχύτητες του κάθε ρότορα και οι μορφές των ροπών που παράγονται σύμφωνα με τον [7] έχουν την εξής μορφή :

$$\begin{pmatrix} \tau_{gyro_x} \\ \tau_{gyro_y} \\ \tau_{gyro_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_r q \Omega_r \\ J_r p \Omega_r \\ J_r \dot{\Omega}_r \end{pmatrix}$$

Επομένως, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί συνολικά :

$$\dot{\omega}^B = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} qr \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} pr \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} pq \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_\phi \\ \frac{1}{J_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{J_z} \tau_\psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_{ax} \\ \frac{1}{J_y} \tau_{ay} \\ \frac{1}{J_z} \tau_{az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{J_x} \tau_{gyro_x} \\ \frac{1}{J_y} \tau_{gyro_y} \\ \frac{1}{J_z} \tau_{gyro_z} \end{pmatrix}$$

$$\dot{p} = \frac{J_y - J_z}{J_x} qr + \frac{U_2}{J_x} + \frac{\tau_{ax}}{J_x} + \frac{\tau_{gyro_x}}{J_x} \quad (3.18)$$

$$\dot{q} = \frac{J_z - J_x}{J_y} pr + \frac{U_3}{J_y} + \frac{\tau_{ay}}{J_y} + \frac{\tau_{gyro_y}}{J_y} \quad (3.19)$$

$$\dot{r} = \frac{J_x - J_y}{J_z} pq + \frac{U_4}{J_z} + \frac{\tau_{az}}{J_z} + \frac{\tau_{gyro_z}}{J_z} \quad (3.20)$$

→ Η συνολική δυναμική του τετραπτέρυγου είναι :

1. ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

$$\dot{\mathbf{r}}^E = \mathbf{R}_B^E \dot{\mathbf{r}}^B \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{z}_B \end{pmatrix}$$

$$\ddot{x}_E = \frac{1}{m} ((c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) U_1 - K_{fx} \dot{x}_E)$$

$$\ddot{y}_E = \frac{1}{m} ((c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) U_1 - K_{fy} \dot{y}_E)$$

$$\ddot{z}_E = \frac{1}{m} ((c_\phi c_\theta) U_1 - K_{fz} \dot{z}_E) - g$$

2. ΓΩΝΙΑΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

$$\dot{\Theta}^E = \mathbf{T} \dot{\Theta}^B \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & \frac{s_\phi}{c_\theta} & \frac{c_\phi}{c_\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\dot{p} = \frac{J_y - J_z}{J_x} qr + \frac{U_2}{J_x} + \frac{\tau_{ax}}{J_x} + \frac{\tau_{gyro_x}}{J_x}$$

$$\dot{q} = \frac{J_z - J_x}{J_y} pr + \frac{U_3}{J_y} + \frac{\tau_{ay}}{J_y} + \frac{\tau_{gyro_y}}{J_y}$$

$$\dot{r} = \frac{J_x - J_y}{J_z} pq + \frac{U_4}{J_z} + \frac{\tau_{az}}{J_z} + \frac{\tau_{gyro_z}}{J_z}$$

Κεφάλαιο 4

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΛΕΓΧΟΥ

4.1 PID

Ο πυρήνας της συγκεκριμένης μεθόδου έγκειται στην διαχείριση του σφάλματος μεταξύ επιθυμητής και ό,τι μετριέται από το σύστημα ως πραγματική τιμή τη δεδομένη στιγμή. Υπάρχουν 3 παράμετροι που ρυθμίζονται κατάλληλα για την επίτευξη της βέλτιστης εντολής ελέγχου $u(t)$ που παράγεται από τον PID.

- $P \rightarrow$ Proportional

Πρόκειται για έναν σταθερό πραγματικό αριθμό k_P ο οποίος λειτουργεί ως συντελεστής της ποσότητας $e(t)$ που αντιπροσωπεύει τη διαφορά $Value_{desired} - Value_{real}$ και επιλέγεται κατάλληλα για να διορθώσει το παροντικό σφάλμα.

- $I \rightarrow$ Integral

Ο ολοκληρωτέος όρος περιέχει το γινόμενο μιας σταθεράς k_I και του ολοκληρώματος του σφάλματος $e(t)$ από την αρχική χρονική στιγμή μέχρι κάποιο χρόνο t . Επιδρά στο συσσωρευμένο σφάλμα που έχει δημιουργηθεί μέχρι τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή και τείνει να λειτουργήσει διορθωτικά με βάση αυτό.

- $D \rightarrow$ Derivative

Ο διαφορικός όρος περιέχει το γινόμενο μιας σταθεράς k_D με το ρυθμό μεταβολής του σφάλματος. Δημιουργεί έτσι έναν τρόπο προβλεπτικού ελέγχου αλλά απαιτεί μεγάλη ισχύ του ελεγκτή και το σύστημα κλειστού βρόχου συχνά χαρακτηρίζεται από μεγάλο overshoot.

Η διορθωτική εντολή που παράγει ο PID ελεγκτής στο πεδίο του χρόνου παίρνει τη μορφή,

$$u(t) = k_P * e(t) + k_I * \int_0^t e(t)dt + k_D * \frac{e(t) - e(t-1)}{dt}$$

ενώ στο πεδίο της συχνότητας,

$$U(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d * s$$

όπου s είναι η μιγαδική συχνότητα.

4.1.1 Σενάρια Αιώρησης και Παρακολούθησης Τροχιάς

Στην περίπτωση της αιώρησης, είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν συγκεκριμένες παραδοχές. Επειδή οι τιμές των γωνιών ϕ, θ, ψ παίρνουν μικρές τιμές, είναι εύλογο να θεωρηθεί ότι οι γωνιακές ταχύτητες και επιταχύνσεις περίπου ταυτίζονται στο earth και το body frame [12]. Εναλλακτικά δηλαδή ότι ο πίνακας \mathbf{T}_Θ τείνει στον μοναδιαίο, οπότε :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix}$$

Για το μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί θεωρούνται όλες οι αεροδυναμικές τριβές και τα γυροσκοπικά φαινόμενα ως αμελητέα, καθώς περιορίζονται σε πολύ χαμηλές τιμές επίσης. Τέλος, όλα τα γινόμενα των γωνιακών ταχυτήτων που εμφανίζονται στον υπολογισμό της γωνιακής επιτάχυνσης θεωρούνται μικρά (τάξεως $< 10^{-4}$) και παραλείπονται. Τα παραπάνω στοχεύουν στην γραμμικοποίηση του συστήματος για να είναι εφαρμόσιμος ο PID. Διαλέγεται ένα σημείο ισορροπίας στο οποίο θα πραγματοποιηθεί η γραμμικοποίηση, με το συγκεκριμένο για την περίπτωση της αιώρησης να είναι εκείνο το σημείο στο οποίο μηδενίζονται όλες οι γραμμικές και γωνιακές ταχύτητες και επίσης οι τιμές των γωνιών Euler όπως αναφέρθηκε παραπάνω επίσης να τείνουν στο 0.

Αναλυτικά παρακάτω:

- $\psi = \psi_0 = \text{const}$
- $U_1^{des} = mg$ και $z_E = z_0 = \text{const}$
- $U_2^{des} = 0$
- $U_3^{des} = 0$
- $U_4^{des} = 0$

Παραδοχές για αιώρηση και παρακολούθηση τροχιάς σε χαμηλές ταχύτητες

- $\phi \approx \sin \phi$, $\phi \in [-0.1, 0.1]$
- $\theta \approx \sin \theta$, $\theta \in [-0.1, 0.1]$
- $\dot{x}_E \rightarrow 0, \dot{y}_E \rightarrow 0, \dot{z}_E \rightarrow 0$
- $\dot{\phi} \rightarrow 0, \dot{\theta} \rightarrow 0, \dot{\psi} \rightarrow 0$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (3.13 - 3.15) τα παραπάνω, το τελικό απλουστευμένο μοντέλο που προκύπτει για την εργασία αιώρησης έχει την μορφή,

$$\ddot{x}_E = g\theta \quad (4.1)$$

$$\ddot{y}_E = -g\phi \quad (4.2)$$

$$\ddot{z}_E = \frac{U_1}{m} - g \quad (4.3)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{U_2}{J_x} \quad (4.4)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{U_3}{J_y} \quad (4.5)$$

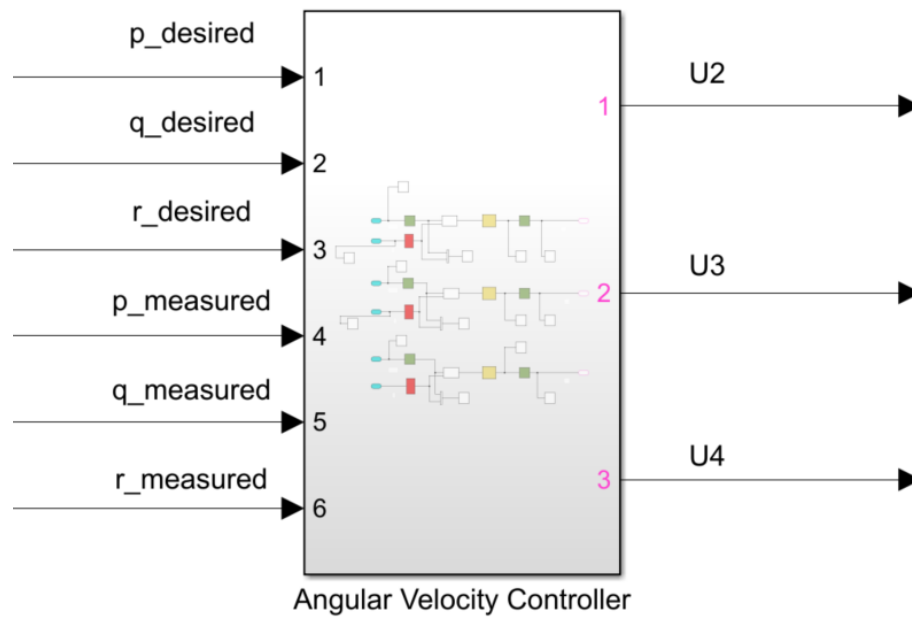
$$\ddot{\psi} = \frac{U_4}{J_z} \quad (4.6)$$

Το παραπάνω μοντέλο είναι ασταθές κάτι το οποίο μπορεί να φανεί εύκολα αν εξεταστούν οι ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{A} (διπλοί πόλοι στο 0) που προκύπτει με διάνυσμα κατάστασης το $\vec{X} = [x_E, y_E, z_E, \dot{x}_E, \dot{y}_E, \dot{z}_E, \phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]$ και διάνυσμα εισόδου το $\vec{U} = [U_1, U_2, U_3, U_4]$. Όλα αυτά τα σφάλματα που έχουν δημιουργηθεί με αυτές τις παραδοχές θα αντιμετωπιστούν στην υποενότητα (4.1.2).

ΡΟΗ ΕΛΕΓΧΟΥ

Θα ακολουθηθεί το διάγραμμα ελέγχου του Wil Selby [33], το οποίο αποτελείται από 3 υποσυστήματα ελεγκτών και έχει τη δυνατότητα να προσομοιώσει πέρα από αιώρηση και παρακολούθηση τροχιάς με ικανοποιητικά αποτελέσματα.

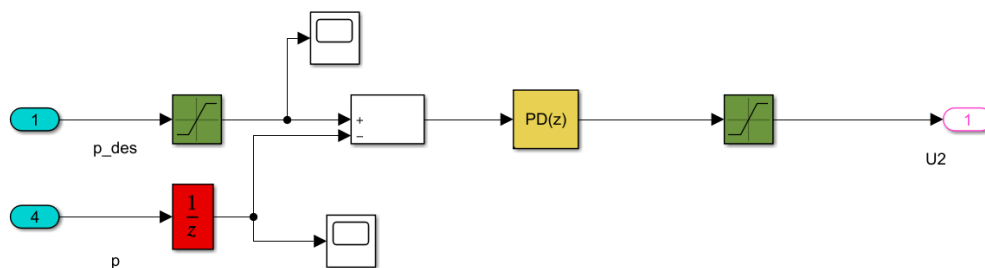
- Έλεγχος των γωνιακών ταχυτήτων
- Έλεγχος του προσανατολισμού και της κίνησης κατά τον κατακόρυφο άξονα Z_E
- Έλεγχος θέσης στους άξονες X_E, Y_E

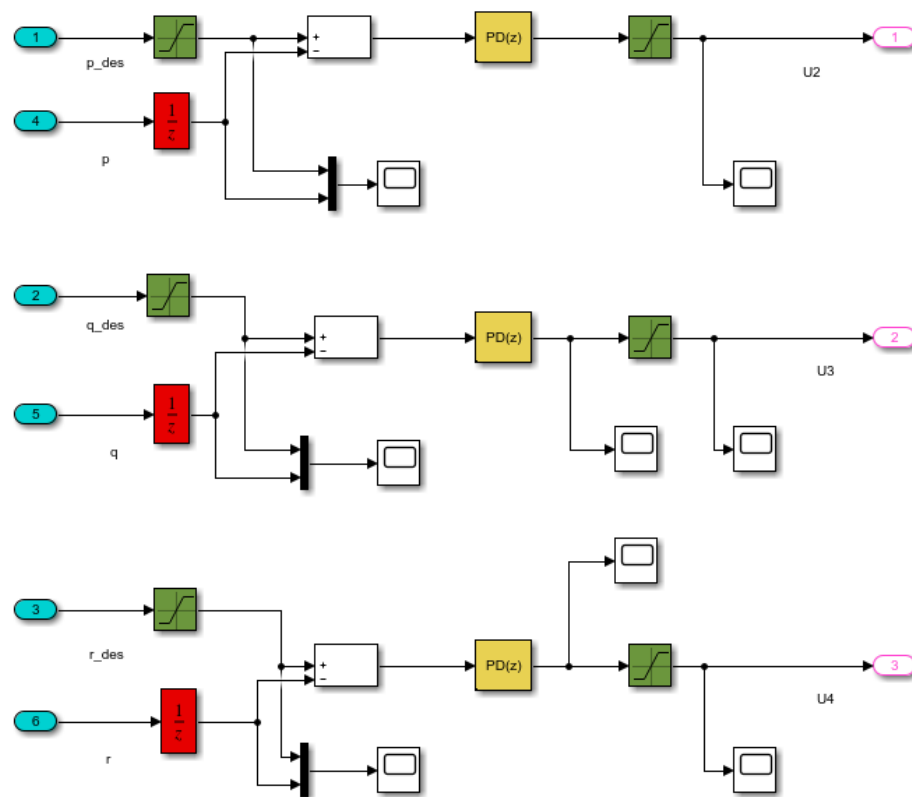


ΣΧΗΜΑ 4.1: Έλεγχος γωνιακών ταχυτήτων

Τελευταίο Στάδιο Ελέγχου: Έλεγχος γωνιακών ταχυτήτων (Σχήμα 4.1)

Ο βρόχος που θα ελέγχει τις γωνιακές ταχύτητες θα τρέχει σε υψηλή συχνότητα ώστε να δύναται να διαχειριστεί τις γωνιακές δυναμικές του ρομπότ. Θα εισέρχονται οι επιθυμητές τιμές των γωνιακών ταχυτήτων p_{des} , q_{des} , r_{des} που είναι εκφρασμένες στο body frame και θα συγκρίνονται με τις μετρήσεις που έρχονται από το γυροσκόπιο (αισθητήρας που μετράει και διατηρεί τον προσανατολισμό). Έπειτα τα σφάλματα εισάγονται σε έναν PD ελεγκτή και η εξαγόμενη εντολή επιθυμείται να ακολουθεί τις εισόδους U_2 , U_3 , U_4 αντίστοιχα του συστήματος των γωνιακών παραγόντων. Στο εσωτερικό του παραπάνω Simulink block φαίνεται το διάγραμμα ελέγχου αναλυτικά για την περίπτωση της p ταχύτητας και είναι όμοιο για τις υπόλοιπες (Σχήμα 4.2).





ΣΧΗΜΑ 4.2: Εσωτερικό του μπλοκ

Το σήμα p_{des} που αντιπροσωπεύει την εντολή για τη γωνιακή ταχύτητα p σύμφωνα με τον [33] παίρνει τιμές στο διάστημα $[-50 * (2 * \pi / 360), 50 * (2 * \pi / 360)]$ ώστε να αποφευχθούν πολύ έντονες κινήσεις του ρομπότ (ομοίως για q_{des}, r_{des}). Το παραγόμενο σήμα περιορίζεται μεταξύ των τιμών $[-6.25, 6.25]$. Αυτό συμβαίνει διότι σύμφωνα με τις σχέσεις που συνδέει τις ροπές και τη δύναμη προώθησης με τα τετράγωνα των γωνιακών ταχυτήτων μπορεί να γραφτεί ότι:

$$\begin{pmatrix} F_{thrust}^B \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_F & c_F & c_F & c_F \\ 0 & lc_F & 0 & -lc_F \\ -lc_F & 0 & lc_F & 0 \\ c_T & -c_T & c_T & -c_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{pmatrix}$$

Αντιστρέφοντας την παραπάνω σχέση και λύνοντας ως προς τα τετράγωνα των ταχυτήτων των κινητήρων η προηγούμενη σχέση γίνεται :

$$\begin{pmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4c_F} & \frac{1}{4c_F} & \frac{1}{4c_F} & \frac{1}{4c_F} \\ 0 & -\frac{1}{2lc_F} & 0 & \frac{1}{2lc_F} \\ \frac{1}{2lc_F} & 0 & -\frac{1}{2lc_F} & 0 \\ \frac{1}{4c_T} & -\frac{1}{4c_T} & \frac{1}{4c_T} & -\frac{1}{4c_T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}$$

Δεδομένου λοιπόν ότι οι αντοχές του συστήματος αγγίζουν μέγιστες ταχύτητες τάξεως $\Omega_i = 920r/s$, βάσει των παραπάνω σχέσεων μπορούν να υπολογιστούν οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές για τα σήματα ελέγχου U_i .

$$U_2^{min} = -Lc_F\omega_{max}^2 = -6.25 < U_2 < 6.25 = Lc_F\omega_{max}^2 = U_2^{max}$$

$$U_3^{min} = -Lc_F\omega_{max}^2 = -6.25 < U_3 < 6.25 = Lc_F\omega_{max}^2 = U_3^{max}$$

$$U_4^{min} = -2c_T\omega_{max}^2 = -2.25 < U_4 < 2.25 = 2c_T\omega_{max}^2 = U_4^{max}$$

Επομένως με βάση τα παραπάνω είναι επιθυμητό οι είσοδοι μας στο σύστημα να είναι οι εντολές που παράγονται από τους παραπάνω PD ελεγκτές, δηλαδή :

$$U_2(t) = k_{P,p}e_p(t) + k_{D,p}\dot{e}_p(t) \quad (4.7)$$

$$U_3(t) = k_{P,q}e_q(t) + k_{D,q}\dot{e}_q(t) \quad (4.8)$$

$$U_4(t) = k_{P,r}e_r(t) + k_{D,r}\dot{e}_r(t) \quad (4.9)$$

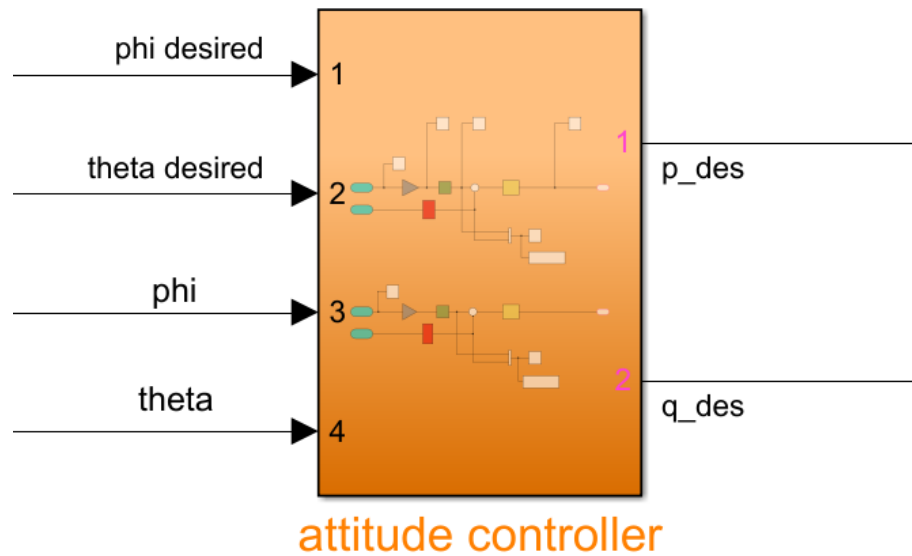
Στο επόμενο στάδιο, ένα βήμα πίσω, θα εξακριβωθεί πως δημιουργήθηκαν τα σήματα $p_{des}, q_{des}, r_{des}$.

Ενδιάμεσο Στάδιο Ελέγχου: Έλεγχος προσανατολισμού

Λόγω των εξαρτήσεων των γραμμικών επιταχύνσεων από τις γωνίες ϕ, θ , οποιοσδήποτε αλλαγές δημιουργούν δυνητικά ανεπιθύμητες μετατοπίσεις στους αντίστοιχους άξονες. Οι επιθυμητές ϕ_{des}, θ_{des} έρχονται ως είσοδοι από την πρώτη βαθμίδα που θα αναλυθεί παρακάτω. Οι παραπάνω γωνίες αποφασίζεται να ικανοποιούν τις συνθήκες :

$$-\frac{\pi}{4} < \phi_{des}, \theta_{des} < \frac{\pi}{4}$$

ώστε να μην υπάρχει περίπτωση αναποδογυρισμού του ρομπότ και να επιτυγχάνεται ομαλότερη κίνηση συνολικά.



ΣΧΗΜΑ 4.3: Έλεγχος γωνιών ϕ, θ

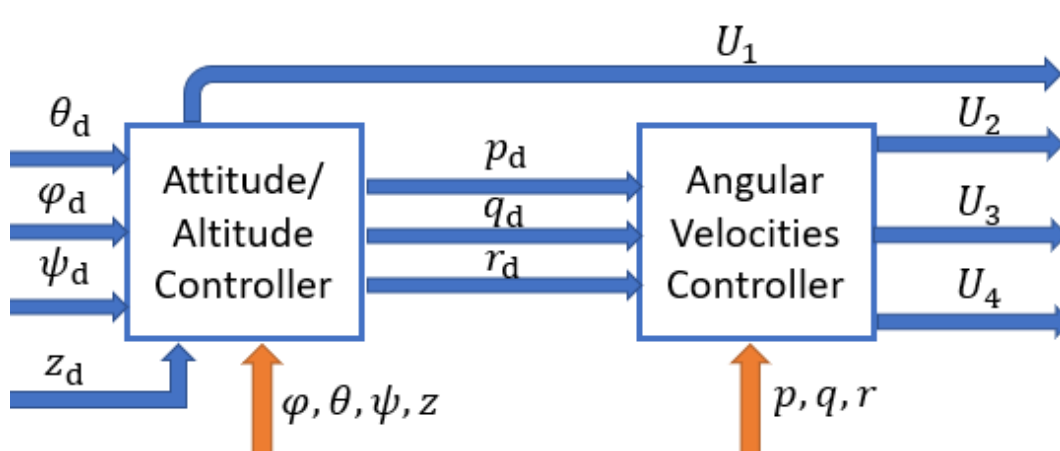
Οι p_{des} και q_{des} που αποτελούν έξοδο της μεσαίας βαθμίδας επιθυμείται να ακολουθούν τα εξαγόμενα σήματα των δυο PID ελεγκτών, ένας για κάθε ένα από τα e_i , $i = \phi, \theta$.

$$p_{des}(t) = k_{P,\phi}e_{\phi}(t) + k_{I,\phi} \int e_{\phi}(t)dt + k_{D,\phi}\dot{e}_{\phi} \quad (4.10)$$

$$q_{des}(t) = k_{P,\theta}e_{\theta}(t) + k_{I,\theta} \int e_{\theta}(t)dt + k_{D,\theta}\dot{e}_{\theta} \quad (4.11)$$

Τέλος, για να παραχθεί η γωνιακή ταχύτητα r_{des} , η μετρούμενη γωνία ψ συγκρίνεται με την $\psi_{des} = \psi_0$ που εμείς ορίζουμε σαν αρχική συνθήκη. Το ζητούμενο σήμα που παράγεται από τον PID είναι

$$r_{des}(t) = k_{P,\psi}e_{\psi}(t) + k_{I,\psi} \int e_{\psi}(t)dt + k_{D,\psi}\dot{e}_{\psi} \quad (4.12)$$



ΣΧΗΜΑ 4.4: Διάγραμμα ελέγχου γωνιών και γωνιακών ταχυτήτων

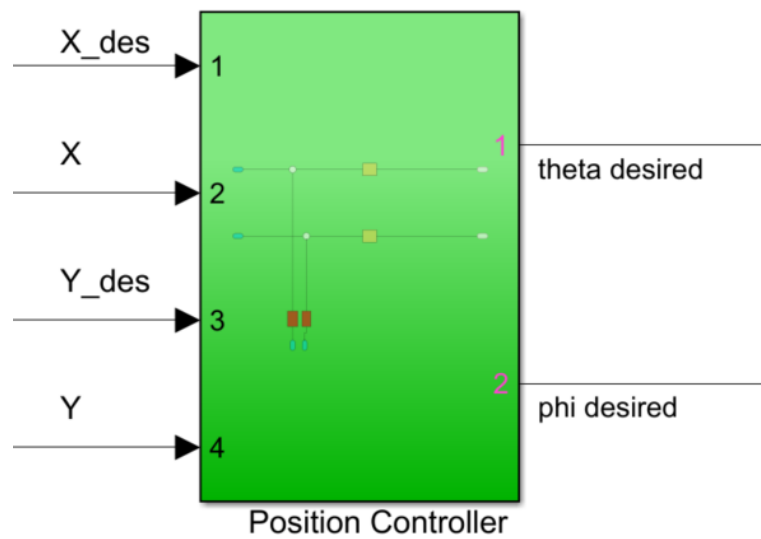
Ο έλεγχος της κίνησης κατά τον Z_E άξονα (altitude control) πραγματοποιείται προσαρμόζοντας κατάλληλα το σήμα ελέγχου U_1 . Επομένως είναι επιθυμητό η έξοδος του PID που τοποθετείται για τη διόρθωση της κατακόρυφης μετατόπισης να ακολουθείται από το σήμα ελέγχου U_1 . Δηλαδή:

$$U_1 = k_{P,z}e_z(t) + k_{I,z} \int e_z(t)dt + k_{D,z}\dot{e}_z \quad (4.13)$$

Η μέχρι στιγμής πορεία ελέγχου έχει την μορφή του Σχήματος 4.4.

Πρώτη βαθμίδα: Έλεγχος θέσης στους X_E, Y_E

Όσο καλά και να έχουν σχεδιαστεί οι παραπάνω ελεγκτές είναι απίθανο να μην υπάρχουν ανεπιθύμητες μετατοπίσεις στο επίπεδο $X_E O_E Y_E$ ακόμα και με μικρές αλλαγές στις γωνίες Euler. Σχεδιάζεται επομένως ένας τελευταίος PID ελεγκτής που θα παίρνει τις μετρήσεις ως προς το earth frame από ένα GPS και τις επιθυμητές τιμές που ορίζονται off-line, ώστε να παράξει τις ϕ_{des} και θ_{des} όπως ειπώθηκε και παραπάνω. Ένα τέτοιο σύστημα θα είχε την παρακάτω μορφή :



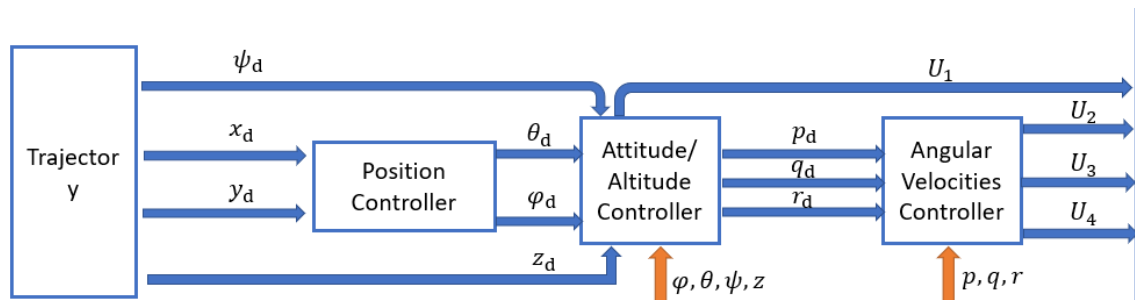
ΣΧΗΜΑ 4.5: Έλεγχος θέσης

Τα σήματα ϕ_{des} , θ_{des} είναι επιθυμητό να ακολουθούν τις εξόδους των PID_y και PID_x αντίστοιχα και να χαρακτηρίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις :

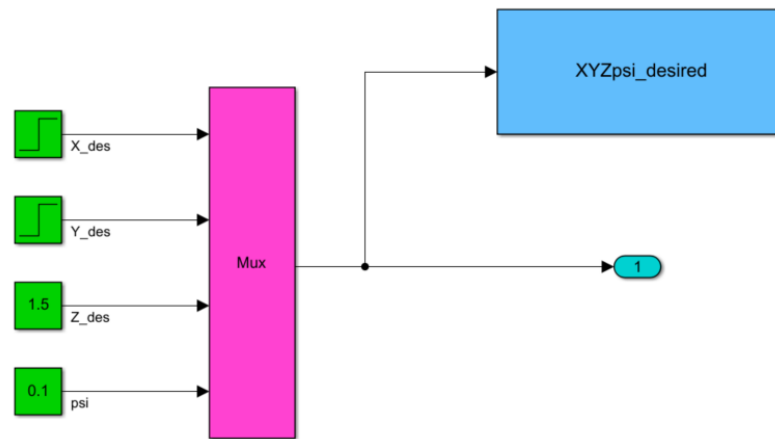
$$\theta_{des}(t) = k_{P,x}e_x(t) + k_{I,x} \int e_x(t)dt + k_{D,x}\dot{e}_x \quad (4.14)$$

$$\phi_{des}(t) = k_{P,y}e_y(t) + k_{I,y} \int e_y(t)dt + k_{D,y}\dot{e}_y \quad (4.15)$$

Επόμενος μια εποπτεία του τι έχει υλοποιηθεί μέχρι στιγμής φαίνεται στο Σχήμα 4.5:



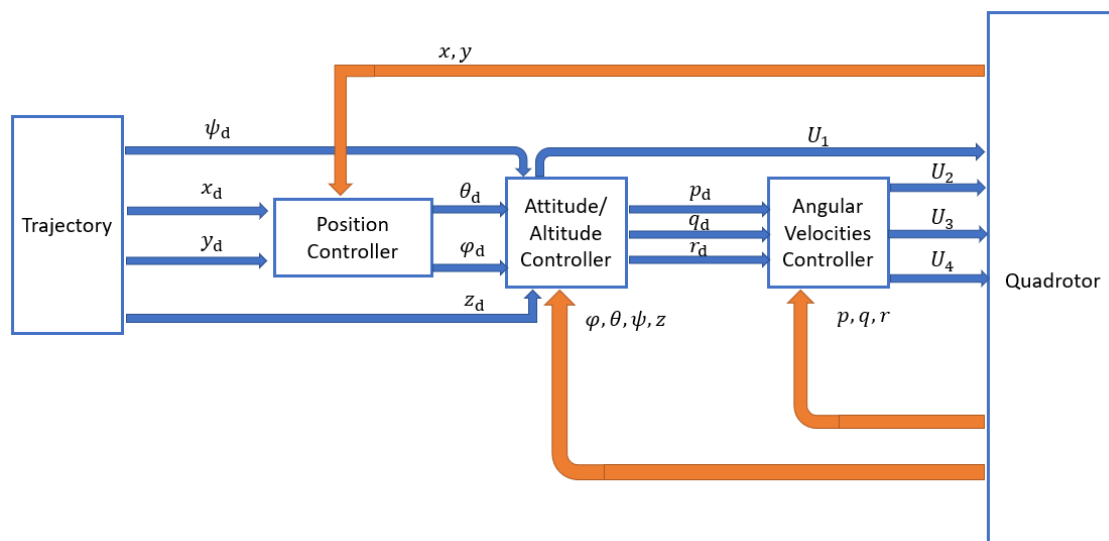
ΣΧΗΜΑ 4.6: Ολικό διάγραμμα Ελέγχου



ΣΧΗΜΑ 4.7: Αρχικές Τιμές

Αρχικοποιούμε τις επιθυμητές τιμές που θέλουμε να επιτύχουμε στη συνολική ροή ελέγχου που θα χρησιμοποιηθεί, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα (τυχαία παραδείγματα επιθυμητών τιμών). Στη συνέχεια, ξεκινάει η διαδικασία που περιγράφηκε από την πρώτη βαθμίδα ελέγχου μέχρι και την τελευταία.

Έτσι, πλέον έχει κατασκευαστεί μια πορεία ελέγχου με 3 στάδια που καταλήγει στη δημιουργία των σημάτων ελέγχου U_1, U_2, U_3, U_4 που θα εισαχθούν ως είσοδοι στο δυναμικό μοντέλο του τετραπτέρυγου. Επομένως υπολογίζονται οι σχέσεις (4.1)-(4.6) και αποκτώνται οι γραμμικές και γωνιακές επιταχύνσεις από τις οποίες υπολογίζεται στη συνέχεια το υπόλοιπο state και ανατροφοδοτείται. Το συνολικό διάγραμμα ελέγχου φαίνεται στο σχήμα (4.8).



ΣΧΗΜΑ 4.8: Ολικό διάγραμμα ελέγχου με δυναμικές τετραπτέρου

Η διάθεση όλων των σημάτων δεν είναι κάτι θύσφατο. Είναι ανάγκη να υπάρχουν οι κατάλληλοι αισθητήρες και κάμερες για να μετρηθούν όσες μεταβλητές επιθυμείται να δοθούν ως feedback για την πραγματοποίηση του ελέγχου. Θεωρούμε ότι στο συγκεκριμένο μοντέλο όλες οι απαιτούμενες μετρήσεις είναι διαθέσιμες. Παρόλα αυτά, οι μετρήσεις αυτές θα πρέπει να παρθεί υπόψιν ότι δημιουργούν θόρυβο κατά τη διάρκεια του ελέγχου. Η σημασία αυτού έγκειται στο ότι τα ανατροφοδοτούμενα σήματα είναι διεφθαρμένα κατά ακανόνιστο τρόπο και ο ελεγκτής αδυνατεί να βελτιώσει σημαντικά το σφάλμα που προκύπτει. Για αυτό το λόγο, εφαρμόζονται τεχνικές με τις οποίες τα σήματα αυτά "καθαρίζουν" ως ένα βαθμό, αν και τις περισσότερες φορές υπάρχει κάποιο σφάλμα. Μια τέτοια τεχνική είναι τα Kalman φίλτρα τα οποία θα αναλυθεί παρακάτω το πώς δουλεύουν και πώς εξυπηρετούν αυτόν τον σκοπό.

4.1.2 Διαχείριση Παραμετρικών Αβεβαιοτήτων

Μέχρι στιγμής έχει δειχθεί ότι ένα μοντέλο που υιοθετήθηκε λειτουργεί με τον συγκεκριμένο ελεγκτή που κατασκευάστηκε παραπάνω. Προκειμένου όμως να εξακριβωθεί η ευρωστία του συστήματος είναι σημαντικό να κατασκευαστεί ελεγκτής που θα μπορεί να αποδίδει για διάφορες αλλαγές στο φυσικό περιβάλλον ή στη δυναμική του (όχι εξαιρετικά έντονες). Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε δεν παίρνει υπόψιν τις δυναμικές των κινητήρων, τις συζευγμένες δυναμικές που απλοποιήθηκαν, τον θόρυβο από τους αισθητήρες ή τον θόρυβο κατά τη διάρκεια της διαδικασίας καθώς και οτιδήποτε άλλο δεν μοντελοποιήθηκε όσον αφορά αεροδυναμικές τριβές που επηρεάζουν τόσο τις γραμμικές όσο και τις γωνιακές δυναμικές του ρομπότ. Επίσης όσες παράμετροι υπολογίζονται πειραματικά, δεν είναι ποτέ ακριβώς ίδιες με τις τιμές των πραγματικών παραμέτρων. Το σύνολο των παραπάνω θα αποτελούν για τη

συνέχεια, εξωτερικές διαταραχές του συστήματος. Επομένως καλείται να δημιουργηθεί ένας νέος PID ελεγκτής που θα ανταπεξέρχεται σε όλες αυτές τις διαταραχές. Η διαδικασία που θα ακολουθηθεί προβλέπει τη μετάβαση στο πεδίο συχνοτήτων για απόκτηση περισσότερης πληροφορίας με σκοπό την αποτελεσματικότερη κατασκευή του ελεγκτή. Για τη μετάβαση στο πεδίο συχνοτήτων, μέσω μετασχηματισμού Laplace, το απλουστευμένο μοντέλο όσον αφορά τις γραμμικές δυναμικές θα πάρει τις μορφές:

$$s^2 X_E(s) = g\Theta(s) \quad (4.16)$$

$$s^2 Y_E(s) = -g\Phi(s) \quad (4.17)$$

$$s^2 Z_E(s) = \frac{U_1^*(s)}{m} \quad (4.18)$$

όπου $U_1^*(t) = U_1(t) - mg$

$s = j\omega$ (j : φανταστική μονάδα, ω : συχνότητα)

Όσον αφορά τις γωνιακές δυναμικές θα έχουμε:

$$s^2 \Phi(s) = \frac{U_2(s)}{J_x} \quad (4.19)$$

$$s^2 \Theta(s) = \frac{U_3(s)}{J_y} \quad (4.20)$$

$$s^2 \Psi(s) = \frac{U_4(s)}{J_z} \quad (4.21)$$

Όπως φαίνεται παραπάνω, οι συναρτήσεις μεταφοράς που δημιουργούνται είναι της μορφής

$$G_i(s) = \frac{K_i}{s^2}, \quad i = z_E, \phi, \theta, \psi \quad (4.22)$$

και

$$G_i(s) = \frac{K_i}{s^4}, \quad i = x, y \quad (4.23)$$

Για την περίπτωση της αιώρησης δε θα παρθούν υπόψιν οι (4.16),(4.17). Επομένως, οι συναρτήσεις μεταφοράς που περιγράφουν τις σχέσεις εισόδου-εξόδου θα είναι οι σχέσεις (4.22). Είναι γνωστό από το βιβλίο των [18] ότι ένας PID ελεγκτής μπορεί να γραφτεί στο πεδίο συχνοτήτων στη μορφή

$$C_{PID}(s) = K_P \frac{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}{T_I s (\tau_D s + 1)} \quad (4.24)$$

και βασισμένος σε αφρινική παραμετροποίηση στη μορφή

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G(s)} \quad (4.25)$$

όπου $Q(s)$ είναι μια συνάρτηση μεταφοράς που ακυρώνει τις σταθερές δυναμικές του συστήματος μας, δηλαδή μπορεί να γραφτεί ως

$$Q(s) = F_Q(s)G^{-1}(s) \quad (4.26)$$

και F_Q επιλέγεται κατάλληλα ώστε να ικανοποιεί ορισμένους περιορισμούς [18]. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι η $Q(s)$ πρέπει να επιλεγεί με τρόπο τέτοιο ώστε να ισχύει $\deg(\text{numerator}) \leq \deg(\text{denominator})$, επομένως ο σχετικός βαθμός της F_Q πρέπει να είναι τουλάχιστον 2. Ακολουθώντας τους [17] επιλέγουμε τη συνάρτηση μεταφοράς F_Q ως

$$F_Q(s) = \frac{a_2s^2 + a_1s + 1}{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + 1} \quad (4.27)$$

Η σχέση (4.8) λόγω των (4.9) και (4.10) γίνεται :

$$C(s) = \frac{a_2s^2 + a_1s + 1}{a_3K\left(\frac{a_4}{a_3}s + 1\right)} \quad (4.28)$$

Από τις σχέσεις (4.7) και (4.11) έχουμε ότι: $K_P = \frac{a_1}{a_3K}$, $T_I = a_1$, $T_D = \frac{a_2}{a_1}$, $\tau_D = \frac{a_4}{a_3}$. Επιλέγεται από τους [17] οι χρόνοι ολοκλήρωσης T_I και T_D να συνδέονται με τη σχέση $T_I = 4T_D$, μια σχέση που πρότειναν οι Ziegler και Nichols ως αποτελεσματικότερη. Επίσης διαλέγεται $\tau_D = \frac{T_D}{10}$. Από τις προηγούμενες 2 σχέσεις εξάγονται οι εξής σχέσεις μεταξύ των συντελεστών a_i :

$$a_2 = \frac{a_1^2}{4} \quad (4.29)$$

$$a_4 = \frac{a_2a_3}{10a_1} \Rightarrow a_4 = \frac{a_1a_3}{40} \quad (4.30)$$

Δηλαδή, αναγόμαστε μόνο στην επιλογή των παραμέτρων a_1 και a_3 για να ολοκληρωθεί η κατασκευή του ελεγκτή.

Το σημαντικό πρόβλημα όπως αναφέρθηκε παραπάνω έγκειται στις αποκλίσεις που υπάρχουν μεταξύ του επιλεγμένου μοντέλου και του πραγματικού συστήματος. Σύμφωνα με τον Skogestad [34] μπορούμε να αναπαραστήσουμε το αβέβαιο πραγματικό σύστημα ως μια συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$G_P^*(s) = \frac{K^*}{s^2(\tau_m s + 1)} e^{-Ls} \quad (4.31)$$

με $G_P^* \in \Pi$ όπου Π μια οικογένεια υποψήφιων πραγματικών συστημάτων, ενώ θεωρώντας ότι $\tau_m = 0.1s$ αντιπροσωπεύει την σταθερά χρόνου των κινητήρων και $L = 0.02s$ την καθυστέρηση λόγω του ESC (Electronic Speed Controller) [17]. Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση καθοδήγησης ή συμπληρωματικής ευαισθησίας T γράφεται στην παρακάτω

μορφή

$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \quad (4.32)$$

Για να ικανοποιηθεί ο στόχος της εύρωστης ευστάθειας αρχικά, δηλαδή να έχει κατασκευαστεί ελεγκτής που για οποιοδήποτε G_P^* να μπορεί να εγγυηθεί σε πρώτη φάση την ευστάθεια του συστήματος, πρέπει η συνάρτηση καθοδήγησης να φράσσεται από κάποιο βάρος (επίσης συνάρτηση μεταφοράς) για κάθε συχνότητα.

Ο τρόπος με τον οποίο συνδέονται τα τελευταία με τα παραπάνω είναι ότι αυτό το βάρος είναι το αντίστροφο του βάρους που χρειάζεται για να φραγεί το πηλίκιο της πολλαπλασιαστικής αβεβαιότητας [34]. Πιο αναλυτικά, το μέτρο του πηλίκιου της πολλαπλασιαστικής αβεβαιότητας γράφεται

$$\frac{|G_P^* - G|}{|G|}$$

Το μέγιστο του παραπάνω πηλίκιου από την οικογένεια Π φράσσεται από κάποιο βάρος $W(s)$, δηλαδή :

$$|W(s)| > \max_{G_P \in \Pi} \frac{|G_P^*(s) - G(s)|}{|G(s)|}, \forall \omega. \quad (4.33)$$

Επομένως το συγκεκριμένο βάρος αντεστραμμένο θα πρέπει να φράσσει την συνάρτηση ευαισθησίας, δηλαδή :

$$\left| \frac{1}{W(s)} \right| > |T(s)|, \forall \omega. \quad (4.34)$$

Η τελική συνθήκη εύρωστης ευστάθειας που θα πρέπει να ικανοποιείται είναι :

$$\|W(s)T(s)\|_\infty < 1, \forall \omega. \quad (4.35)$$

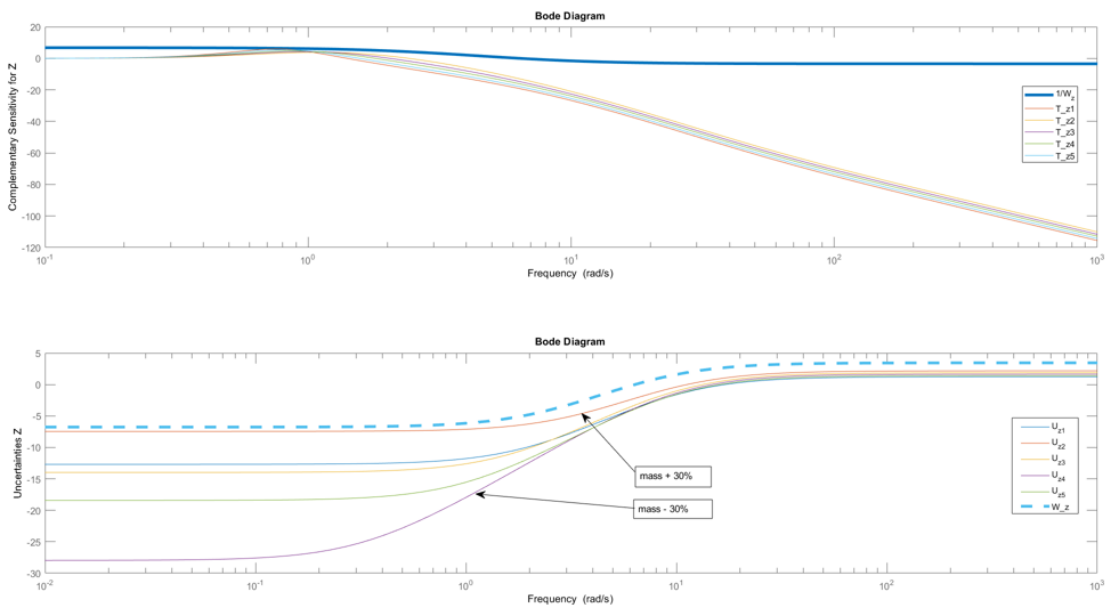
Λόγω των (4.17),(4.18) και (4.19) η (4.23) γίνεται

$$T(s) = \frac{10a_1^2 + 40a_1s + 40}{a_1a_3s^5 + 40a_3s^4 + 10a_1^2s^2 + 40a_1s + 40} \quad (4.36)$$

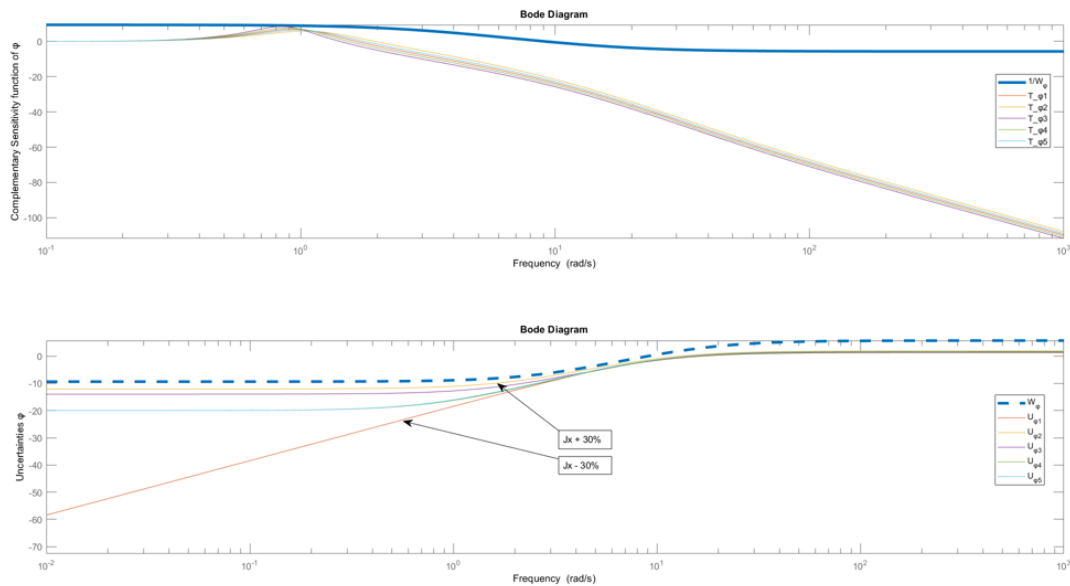
και επιλέγονται τα α_1, α_3 με τέτοιο τρόπο ώστε η $T(s)$ να είναι φραγμένη από το βάρος $\frac{1}{W(s)}$. Για κάθε ένα από τα $i = z_E, \phi, \theta, \psi$ σχηματίζονται αντίστοιχα οι $T_i(s)$ και τα αντίστοιχα $W_i(s)$. Μετά από διάφορες δοκιμές πάνω στις τιμές των α_{z1}, α_{z3} βρέθηκε πως το ζεύγος $(\alpha_{z1}, \alpha_{z3}) = (5.3, 6)$ ικανοποιεί τη σχέση (4.26). Για τα α_{j1}, α_{j3} , $j = \phi, \theta, \psi$ τα αντίστοιχα ζεύγη είναι $(\alpha_{j1}, \alpha_{j3}) = (4, 4)$.

Τα διαγράμματα Bode των συναρτήσεων $T_i(s)$ με τα αντίστοιχα βάρη $\frac{1}{W_i(s)}$ καθώς και οι αντίστοιχες πολλαπλασιαστικές αβεβαιότητες και τα βάρη τους $W_i(s)$ για $i = z_E, \phi$ φαίνονται παρακάτω (τα διαγράμματα για τις γωνίες θ, ψ παρουσιάζουν αντίστοιχες μορφές).

Τα βάρη που χρησιμοποιήθηκαν είναι τα $W_z(s) = \frac{s+2.43}{s+7.87}$, $\|W_z(s)T_z(s)\|_\infty = 0.96$ και $W_\phi(s) = \frac{s+2.8}{s+16}$ και $\|W_\phi(s)T_\phi(s)\|_\infty = 0.81$.



ΣΧΗΜΑ 4.9: Αβεβαιότητες θέσης Z και φράγμα



ΣΧΗΜΑ 4.10: Αβεβαιότητες roll γωνίας και φράγμα

4.1.3 Διαχείριση Θορύβου

Σχεδιάζοντας ένα σύστημα ελέγχου, εκτός από τις διαταραχές του συστήματος συμπεριλαμβάνονται 2 είδη θορύβων. Ο θόρυβος που προκύπτει κατά την διαδικασία του ελέγχου στην οποία τα διαφορά σήματα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αλλά και με τις ηλεκτρονικές συσκευές που υπάρχουν πάνω στο τετραπτέρυγο (αισθητήρες, κάμερα) και ο θόρυβος από τις μετρήσεις που λαμβάνονται. Ο πιο σημαντικός είναι ο δεύτερος καθώς αλλοιώνει το σήμα που ανατροφοδοτείται και καθίσταται δύσκολο σε έναν απλό PID ελεγκτή να το διαχειριστεί. Το πιο σύνηθες μέτρο είναι ο εφοδιασμός του ελεγκτή με ένα βαθυπερατό φίλτρο Kalman το οποίο θα τοποθετηθεί ακριβώς μετά την εφαρμογή του θορύβου ώστε το σφάλμα επιθυμητής και μετρούμενης τιμής να μεταβεί καθαρό στον ελεγκτή. Τα Kalman φίλτρα αποτελούν ειδικές περιπτώσεις εκτιμητών (observers). Οι εκτιμητές είναι απαραίτητοι όταν υπάρχει έλλειψη μετρήσεων για συγκεκριμένες καταστάσεις που είναι απαραίτητο να εκτιμηθούν. Η δομή των εκτιμητών έγκειται στη σύγκριση των μετρούμενων τιμών με τις εκτιμώμενες και μέσω ενός κέρδους L τείνει να ελαχιστοποιηθεί το μεταξύ τους σφάλμα. Το πρόβλημα είναι ότι αν οι μετρούμενες τιμές εμπεριέχουν θόρυβο (πραγματικές συνθήκες) ακόμα και ένας κλαστικός εκτιμητής θα αποτύχει να φέρει το σφάλμα στο 0. Η μορφή ενός τέτοιου συστήματος εκφρασμένο σε διακριτό χρόνο είναι :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (4.37)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_k \quad (4.38)$$

Ένα Kalman φίλτρο χρησιμοποιείται σε αυτήν την περίπτωση καθώς παίρνει υπόψιν το σφάλμα μεταξύ εκτιμώμενου και θορυβώδες μετρούμενου σήματος. Αναλυτικά, η δομή του χωρίζεται σε δύο φάσεις. Τη φάση πρόβλεψης και τη φάση ενημέρωσης. Στη φάση πρόβλεψης έχουμε τα παρακάτω :

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (4.39)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (4.40)$$

Η εκτίμηση που έρχεται από το μοντέλο στο βήμα $k-1$ χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί η a priori εκτίμηση $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ για το βήμα k καθώς και η συνδιακύμανση \mathbf{P}_k^- του σφάλματος $\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-$. Η ποσότητα \mathbf{Q} αναφέρεται στην συνδιακύμανση της Gauss κατανομής που θεωρείται ότι ακολουθεί το σήμα \mathbf{w}_k . Στη δεύτερη φάση τα 2 σήματα χρησιμοποιούνται για την εύρεση των a posteriori σημάτων $\hat{\mathbf{x}}_k$ και \mathbf{P}_k όπως φαίνεται παρακάτω :

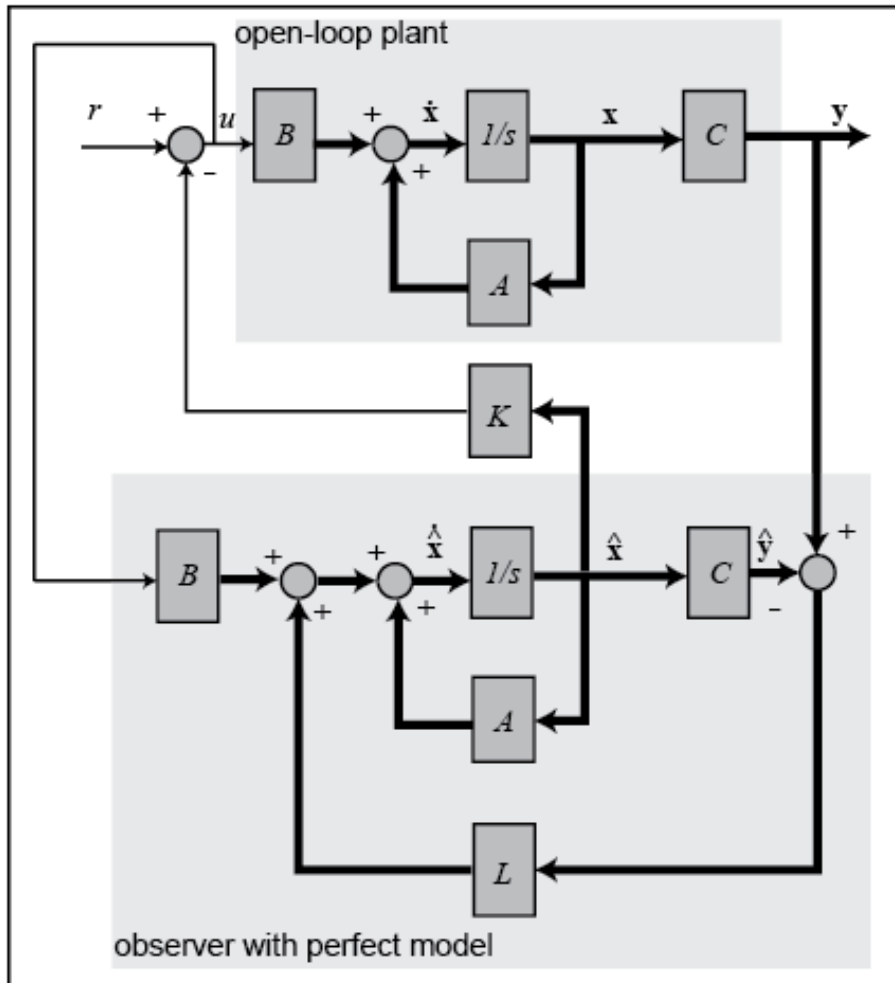
$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (4.41)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})\mathbf{P}_k^- \quad (4.42)$$

Η ποσότητα \mathbf{K}_k αποτελεί το κέρδος του Kalman φίλτρου το οποίο επιχειρεί να ελαχιστοποιήσει την a posteriori συνδιακύμανση \mathbf{P}_k και δίνεται από τον τύπο :

$$\mathbf{K}_k = \frac{\mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T}{\mathbf{C} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R}} \quad (4.43)$$

όπου η ποσότητα \mathbf{R} αναφέρεται στην συνδιακύμανση της Gauss κατανομής που θεωρείται ότι ακολουθεί το σήμα \mathbf{v}_k . Το επόμενο βήμα θα χρησιμοποιούσε τις $\hat{\mathbf{x}}_k$ και \mathbf{P}_k για να υπολογίσει τις a priori $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ και \mathbf{P}_{k+1}^- και συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο η επαναληπτική διαδικασία.



ΣΧΗΜΑ 4.11: Παρατηρητής [2]

4.2 LQ

4.2.1 LQR

Η συγκεκριμένη μέθοδος ανήκει στην κατηγορία βέλτιστου ελέγχου ανατροφοδότησης και είναι υπεύθυνη ώστε να οδηγήσει ένα δυναμικό σύστημα στον επιθυμητό στόχο με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Το κόστος αυτό είναι ένα τετραγωνικό συναρτησοειδές.

$$J_f = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt$$

Ο στόχος όμως δεν είναι να οδηγηθεί το διάνυσμα κατάστασης στο $\mathbf{0}$, αλλά σε μια επιθυμητή θέση, επομένως θα γίνει χρήση ενός παραλλαγμένου συναρτησοειδούς με πιο γενική μορφή [16].

Συγκεκριμένα,

$$\tilde{J}_f = \int_0^{\infty} [(x(t) - x_{des}(t))^T Q (x(t) - x_{des}(t)) + u^T R u] dt$$

όπου $\mathbf{x}(t) = [X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$ είναι το τωρινό state και \mathbf{x}_{des} το επιθυμητό. Το \mathbf{u} αντιπροσωπεύει τον νόμο ελέγχου που πρέπει να προσδιοριστεί για να εξασφαλίσουμε το ελάχιστο κόστος του \tilde{J}_f . Όλη η φιλοσοφία της κατασκευής ενός αποδοτικού και εύρωστου ελεγκτή είναι ο συμβιβασμός μεταξύ των τιμών που εμπεριέχουν οι πίνακες βαρών \mathbf{Q}, \mathbf{R} .

Χρησιμοποιείται η επαυξημένη μορφή αυτού του είδους ελέγχου, δηλαδή με βάρος πάνω στο σφάλμα και όχι στην κατάσταση, διότι προσφέρει πολύ μεγαλύτερη ευρωστία[15].

- Ο πίνακας \mathbf{Q} είναι θετικά ημιορισμένος ($\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}$) και διαλέγεται συνήθως να είναι διαγώνιος. Αντιπροσωπεύει το κόστος του σφάλματος μεταξύ της τρέχουσας και επιθυμητής κατάστασης. Ο τρόπος ρύθμισης λειτουργεί ως εξής:

1) Αν δοθούν μεγάλες τιμές στη διαγώνιο του τότε αυτό μεταφράζεται ως ισχυρό penalty για μικρές αποκλίσεις του σφάλματος από το 0. Έτσι, έχουμε υψηλό κέρδος όσον αφορά τον ελεγκτή. 2) Αν δοθούν μικρές τιμές τότε θα υπάρχει χαλάρωση ως προς την έκταση του σφάλματος, οπότε ίσως προκύψουν αποκλίσεις μεταξύ τρέχουσων και επιθυμητών τιμών.

Το ιδανικό έγγυται στην τοποθέτηση μεγάλων τιμών στα σφάλματα που θέλουμε σίγουρα να είναι πολύ μικρά και μικρότερες τιμές για τα σφάλματα που δε θέλουμε να ελέγξουμε αναγκαστικά.

- Ο πίνακας \mathbf{R} είναι θετικά ορισμένος ($\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$) και διαλέγεται επίσης συνήθως ως διαγώνιος. Ο τελευταίος τοποθετεί ένα είδος βάρους πάνω στην εντολή ελέγχου \mathbf{u} . Στη συγκεκριμένη περίπτωση δε μας ενδιαφέρουν μεγάλες τιμές διότι θα περιορίσουν τη δράση του ελεγκτή. Επομένως, διαλέγονται κατευθείαν μικρές τιμές ώστε να υπάρχει ευελιξία στο σήμα ελέγχου.

Για την εφαρμογή της LQR χρησιμοποιούμε όπως και στον PID ένα απλουστευμένο γραμμικό μοντέλο (όπως αυτό που δημιουργήθηκε παραπάνω και προσομοιώνει συνθήκες αιώρησης), οπότε δύναται το σύστημα να γραφτεί στην παρακάτω μορφή :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

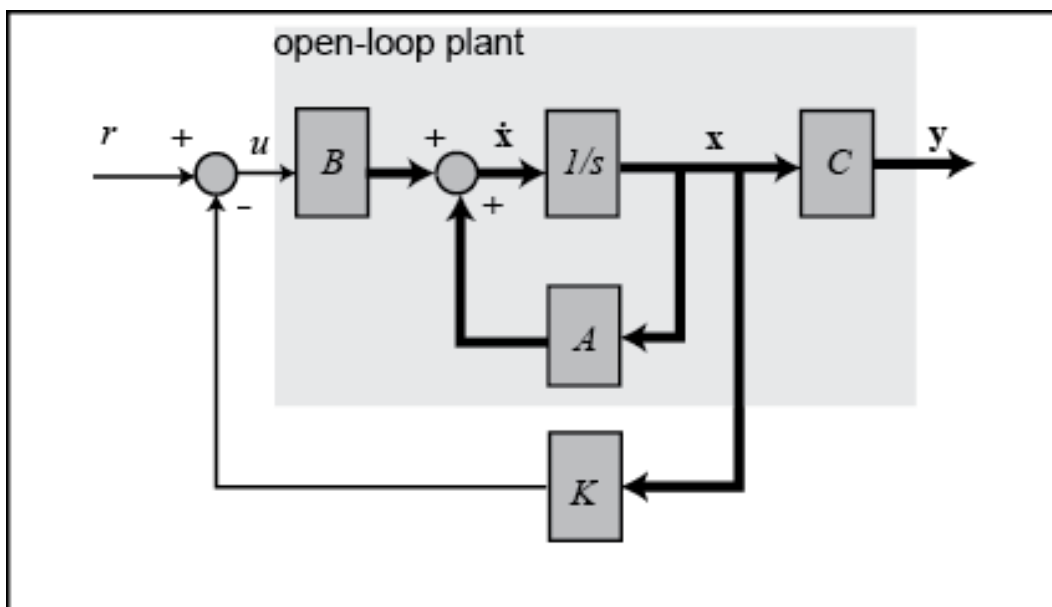
όπου $\mathbf{x} = [X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$ και χρησιμοποιείται ο νόμος ελέγχου $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_c[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{des}(t)]$.

Δηλαδή,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}_c[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{des}(t)])$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c)\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}_c\mathbf{x}_{des}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c\mathbf{x} + \mathbf{B}_c\mathbf{x}_{des}$$



ΣΧΗΜΑ 4.12: Γενικό σχήμα LQR ελεγκτή [2]

όπου ο πίνακας $A_c = A - BK_c$ αντιπροσωπεύει τον πίνακα A του κλειστού βρόχου, η ποσότητα x_{des} την εξωτερική είσοδο στο σύστημα και ο πίνακας $B_c = BK_c$ παίζει το ρόλο του πίνακα B του κλειστού βρόχου. Η ποσότητα K_c είναι ένας πίνακας ο οποίος καθορίζει το σήμα ελέγχου και υπολογίζεται από την σχέση :

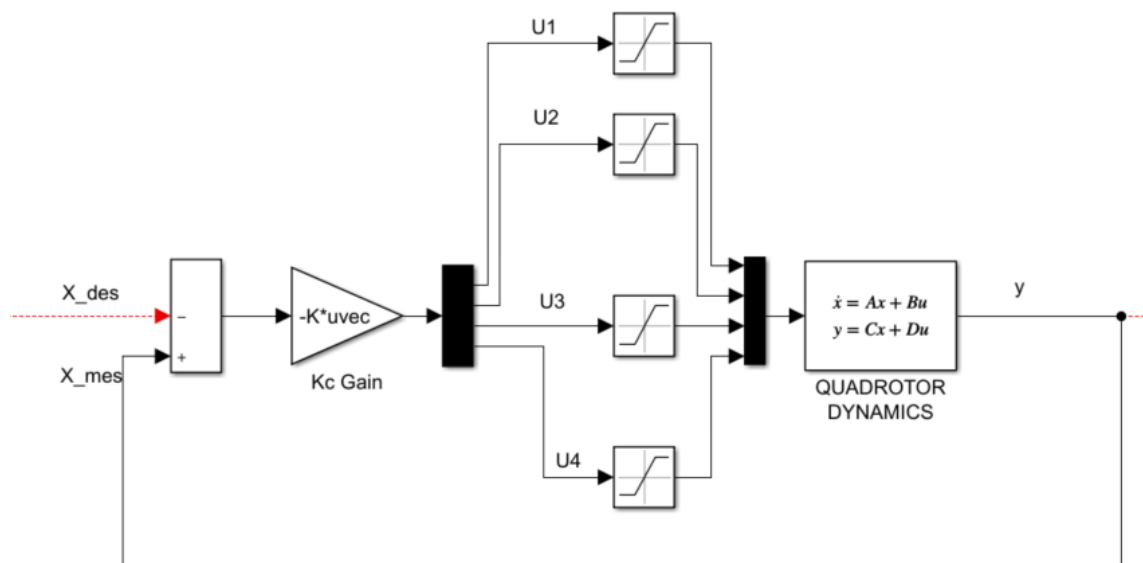
$$K_c = R^{-1}BP$$

όπου ο πίνακας P εξάγεται από την λύση της παρακάτω εξίσωσης Ricatti :

$$-PA - A^T P + PBR^{-1}B^T - Q = P$$

Πλήρης κατοχή μετρήσεων του διανύσματος καταστάσεων

Στην περίπτωση αυτή έχουμε όλα τα απαραίτητα μέσα (αισθητήρες, κάμερες) για να λάβουμε από το ρομπότ σε πραγματικό χρόνο τις μετρήσεις από τις καταστάσεις. Τα παρακάτω σχήματα παρουσιάζουν πρώτα (Σχήμα 4.3) τη γενική μορφή του LQR ελέγχου με πλήρη ανατροφοδότηση του διανύσματος καταστάσεων ενώ στην επόμενη (Σχήμα 4.4) την ειδική μορφή που χρησιμοποιήθηκε για το τετραπύεργο σε περιβάλλον Simulink.



ΣΧΗΜΑ 4.13: Δομή ελέγχου LQR εφαρμοσμένη στο τετραπτερυγο

Στο παραπάνω ss σύστημα χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω πίνακες που αντιπροσωπεύουν ακριβώς το απλουστευμένο μοντέλο που έχει χρησιμοποιηθεί ήδη :

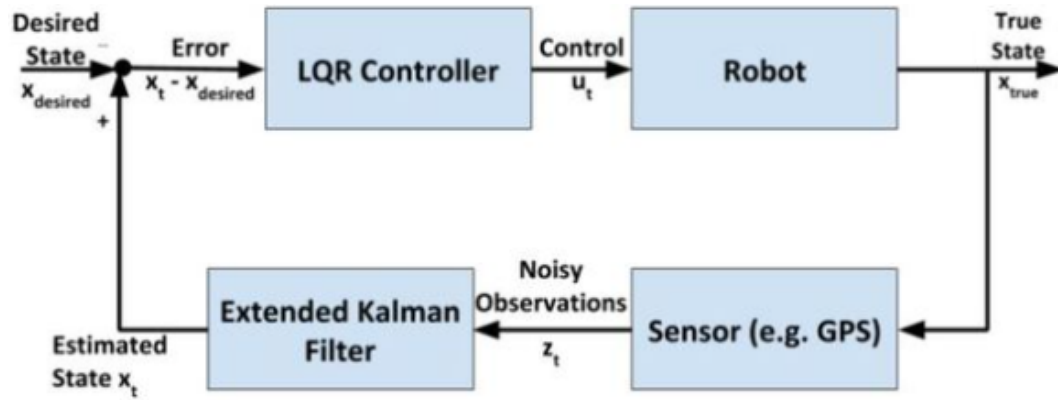
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{pmatrix}$$

και ο $C \in \mathbf{R}^{12 \times 12}$ έχοντας παντού μηδέν εκτός από την κύρια διαγώνιο που τοποθετείται η μονάδα για να παρθεί ως έξοδος όλο το state. Τέλος, ο D θεωρείται ο μηδενικός πίνακας $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^{12 \times 4}$. Το εξόδιο σήμα \mathbf{y} εμπεριέχει την πληροφορία του συνολικού state \mathbf{X}_{mes} και στη συνέχεια συγκρίνεται με το \mathbf{X}_{des} και το σφάλμα μέσω του κέρδους \mathbf{K}_c θα δημιουργήσει τον νόμο ελέγχου $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{4 \times 1}$. Τα σήματα αυτά πριν οδηγηθούν στις δυναμικές του τετραπέρυγου θα υποστούν saturation για τις περιπτώσεις όπου δημιουργήθηκαν σήματα τα οποία δεν μπορούν να παράξουν οι κινητήρες του ρομπότ στις μέγιστες ή ελάχιστες γωνιακές ταχύτητες ω_i που αναπτύσσουν.

4.2.2 LQG

Απουσία μετρήσεων του διανύσματος καταστάσεων

Πριν την εφαρμογή του ελέγχου πρέπει να διευθετηθεί το πρόβλημα της απουσίας αισθητήρων για την μέτρηση ορισμένων καταστάσεων του state. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως σε εξωτερικές πτήσεις του ρομπότ, το GPS είναι υπεύθυνο για να παρέχει τις μετρήσεις των θέσεων ως προς το earth frame. Σε περίπτωση που παρουσιαστούν προβλήματα ανάκτησης των μετρήσεων λόγω εμπλοκής, αυξάνεται το ρίσκο προσέχρυσσης του ρομπότ. Για να αντιμετωπιστεί μια τέτοια κατάσταση χρησιμοποιείται ένα Kalman φίλτρο ή όπως είναι διαδεδομένο ένας LQE (Linear Quadratic Estimator) το οποίο παίζει τον ρόλο του εκτιμητή των μη μετρούμενων καταστάσεων. Εν τέλει, ένας LQR συνδυασμένος με έναν LQE συνθέτουν τον γνωστό στη βιβλιογραφία ως LQG (Linear Quadratic Gaussian). Στα παρακάτω σχήματα (4.5),(4.6) φαίνεται η δομή του LQR εφοδιασμένη με ένα Kalman φίλτρο.



ΣΧΗΜΑ 4.14: LQR με Kalman φίλτρο

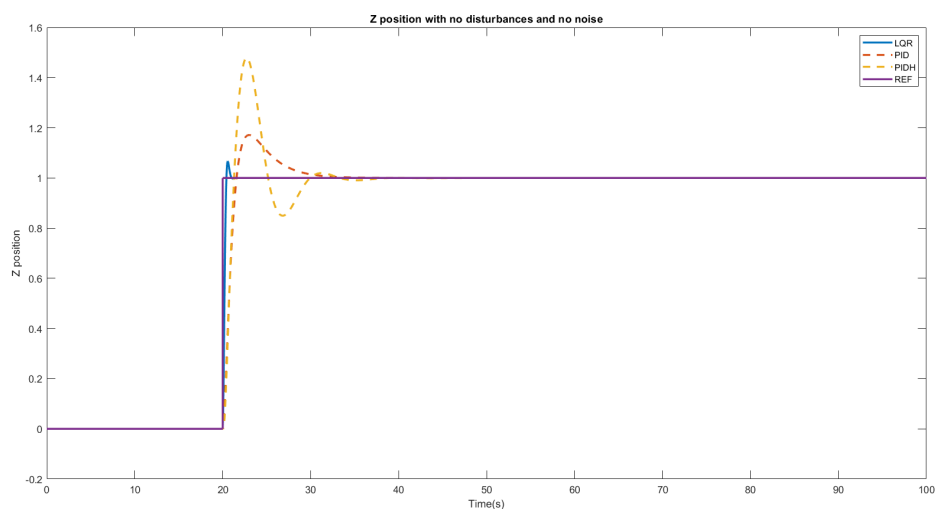
Η νέα δομή που αναπαριστά τον LQG παίρνει υπόψιν και οποιοδήποτε θόρυβο δημιουργείται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ή στο τέλος, στα σήματα των μετρήσεων.

Κεφάλαιο 5

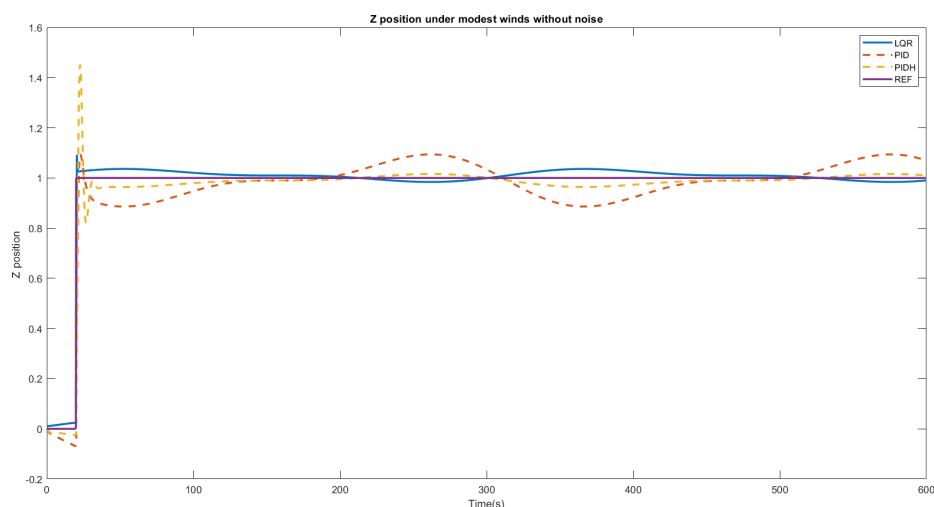
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ

Η πρώτη προσομοίωση αφορά στο σενάριο της αιώρησης και προσομοιώνεται το απλουστευμένο μοντέλο δίχως θόρυβο και δίχως να παρθούν υπόψιν εξωτερικές διαταραχές. Τα διαγράμματα των z , φ , θ , ψ με τις επιθυμητές τιμές τους φαίνονται στα σχήματα (5.1),(5.2) :

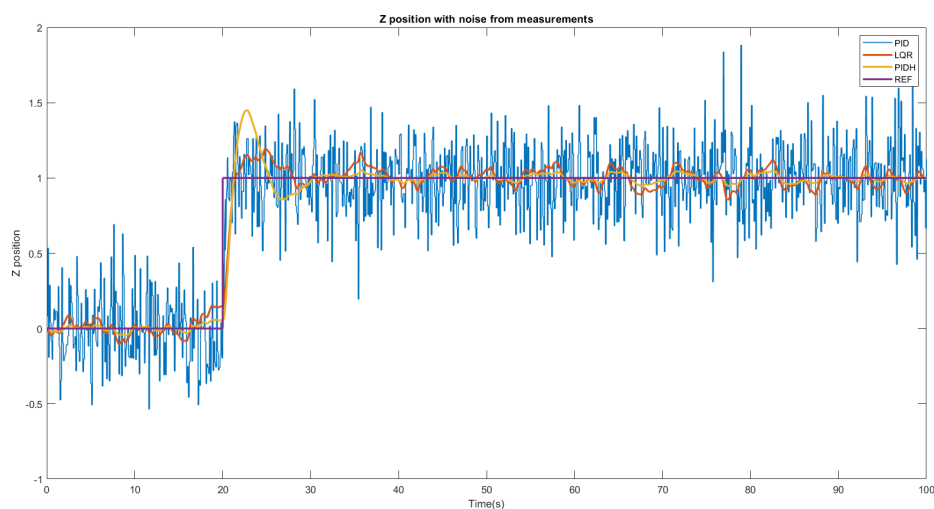
Αποτελέσματα για Z			
	PID	PIDH	LQR
Rise Time(ms)	1087	858.2	279.353
Settling Time(ms)	—	—	—
Overshoot(%)	17.059%	48.507%	6.989%
Peak	1.17	1.485	1.069



ΣΧΗΜΑ 5.1: Προσομοίωση Z θέσης για το απλουστευμένο μοντέλο χωρίς διαταραχές και θόρυβο



ΣΧΗΜΑ 5.2: Προσομοίωση Z θέσης για το απλουστευμένο μοντέλο με διαταραχές και χωρίς θόρυβο

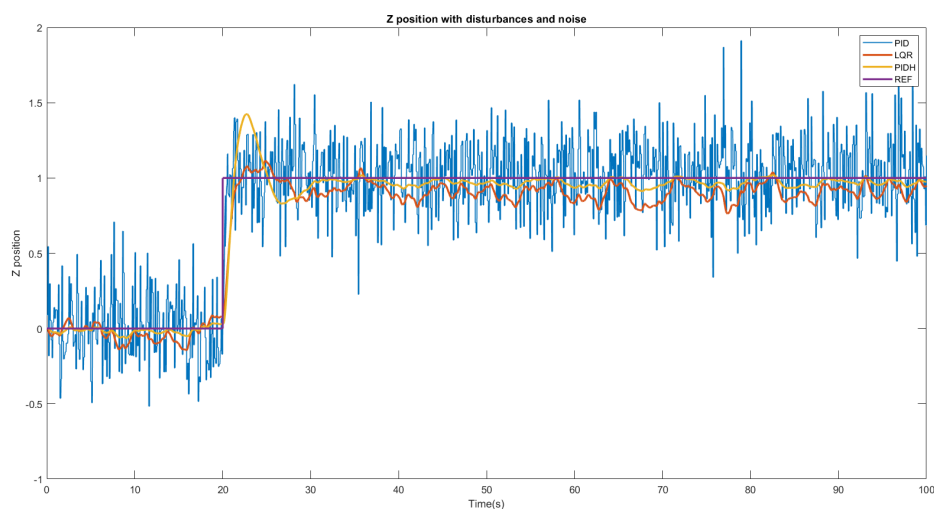


ΣΧΗΜΑ 5.3: Προσομοίωση Z θέσης για το απλουστευμένο μοντέλο με θόρυβο χωρίς διαταραχές

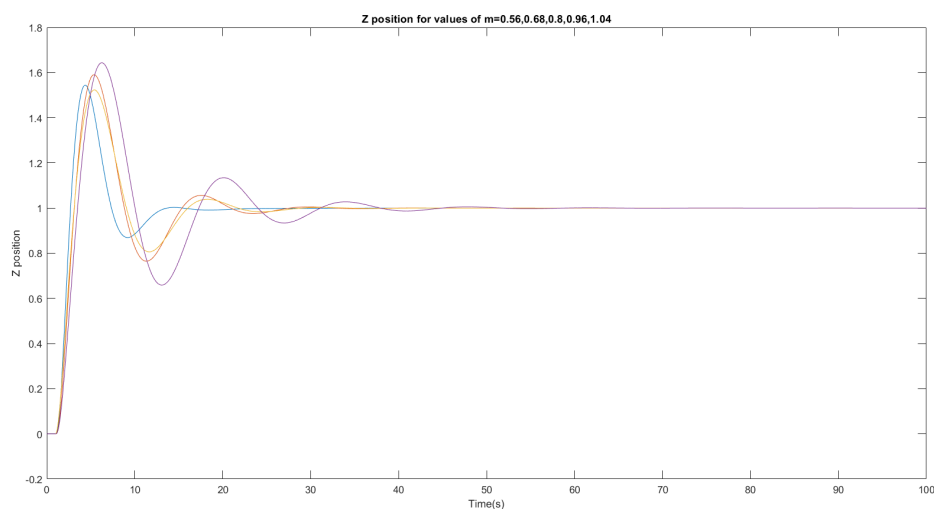
Διαπιστώνεται στο σχήμα 5.1 ότι για την ιδεατή περίπτωση και οι 3 ελεγκτές αποδίδουν ικανοποιητικά με τον PIDH να δημιουργεί ένα μικρό overshoot. Στο σχήμα (5.2) έχει επιστρατευτεί ένα σήμα ως εξωτερική διαταραχή στο σύστημα το οποίο έχει τη μορφή ίσως ήπιων ανέμων με εξίσωση:

$$d = 0.05 + 0.02\sin(0.04t) + 0.04\sin(0.08t)$$

και παρατηρούμε ότι στη μόνιμη κατάσταση ο PID παρουσιάζει μεγάλες ταλαντώσεις με ένα σφάλμα κοντά στα **15cm** ενώ οι PIDH και LQR αποδίδουν καλύτερα με ένα σφάλμα κοντά στα **4cm**. Σημειώνεται εδώ ότι ο PIDH έχει δοκιμασθεί με κάθε ένα από τα πιθανά μοντέλα



ΣΧΗΜΑ 5.4: Προσομοίωση Z θέσης για το απλουστευμένο μοντέλο με διαταραχές και θόρυβο

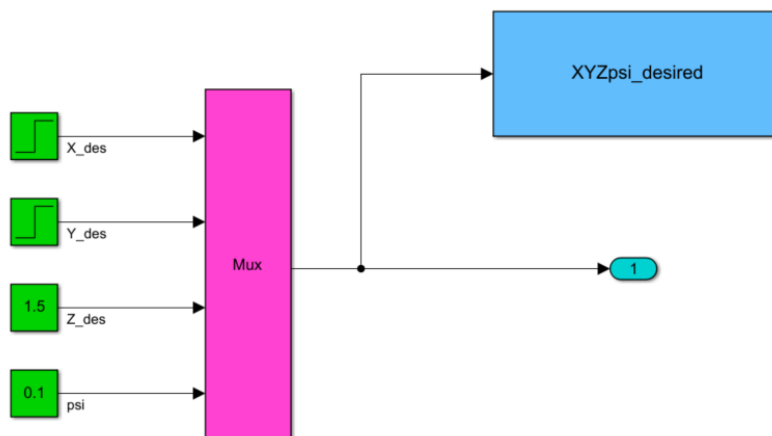


ΣΧΗΜΑ 5.5: Προσομοίωση Z θέσης για το απλουστευμένο μοντέλο για διάφορες τιμές της μάζας

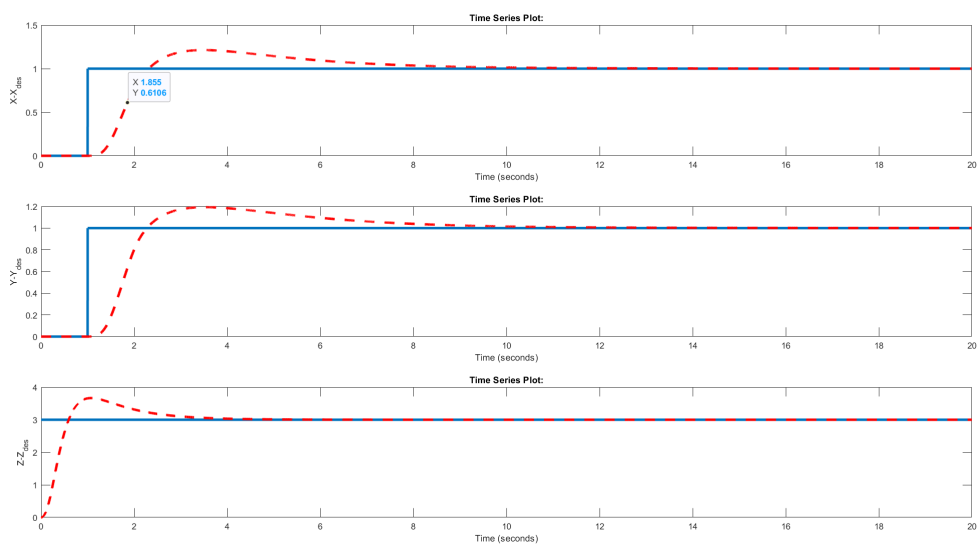
και η απόδοση του είναι παρόμοια. Στο σχήμα (5.5) φαίνεται η απόδοση του για διάφορες παραμέτρους στην τιμή της μάζας σε ένα εύρος $-30\% * m < m < +30\%m$. Στο σχήμα (5.4) έχουμε προσομοίωση που περιέχει θόρυβο έντασης 0.005 και χρόνο δειγματοληψίας 0.1s. Παρατηρείται ότι κανένας ελεγκτής δε μπορεί να αποδώσει βέλτιστα παρουσία θορύβου αν και τα αποτελέσματα του PIDH ακολουθούν ένα σφάλμα της τάξης των $10cm$ (συγκριτικά καλύτερος).

ΣΕΝΑΡΙΟ ΑΙΩΡΗΣΗΣ

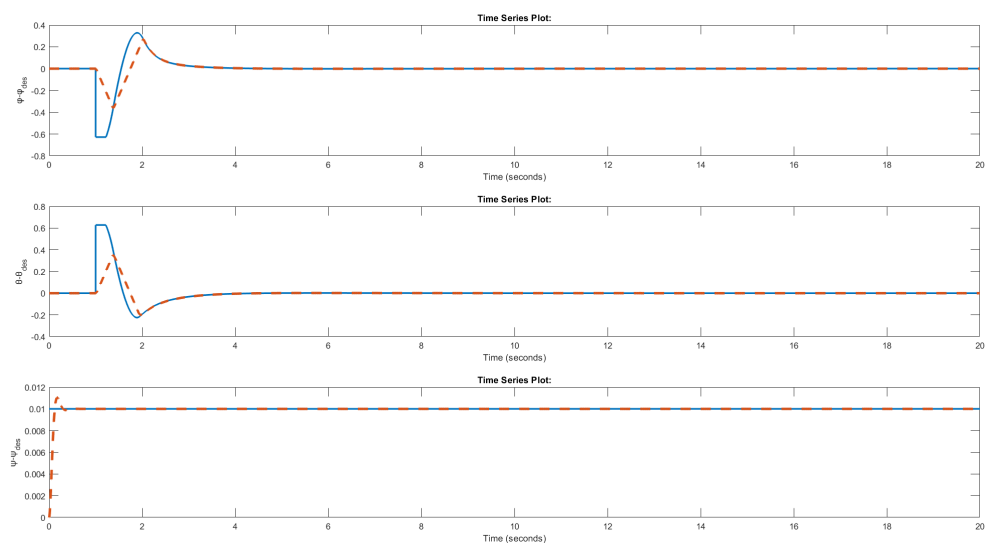
1) Αρχικές τιμές



2) Διανύσματα θέσης X, Y, Z

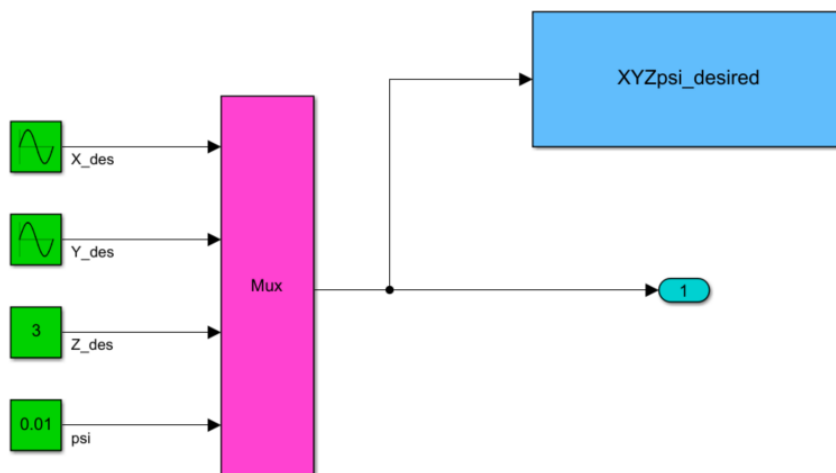


3) Γωνίες ϕ, θ, ψ

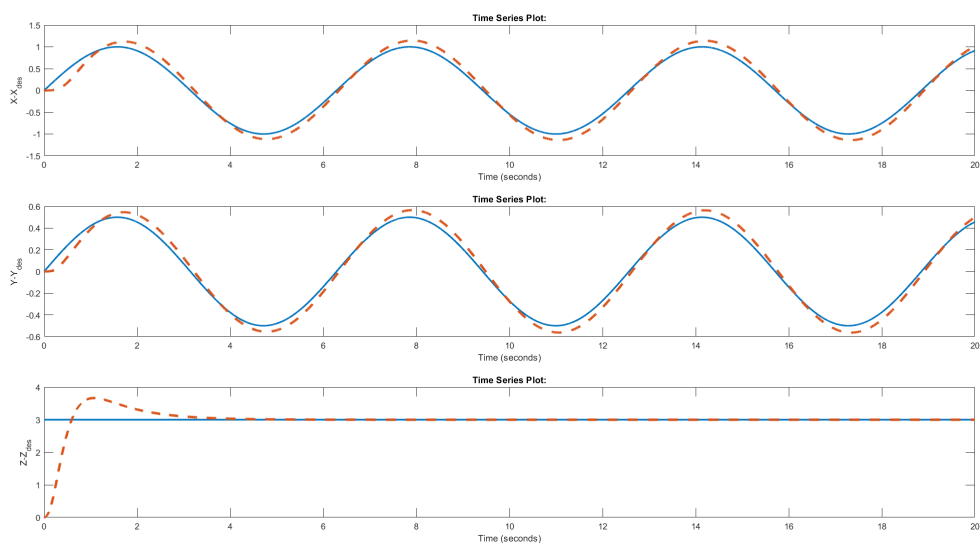


ΣΕΝΑΡΙΟ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΤΡΟΧΙΑΣ

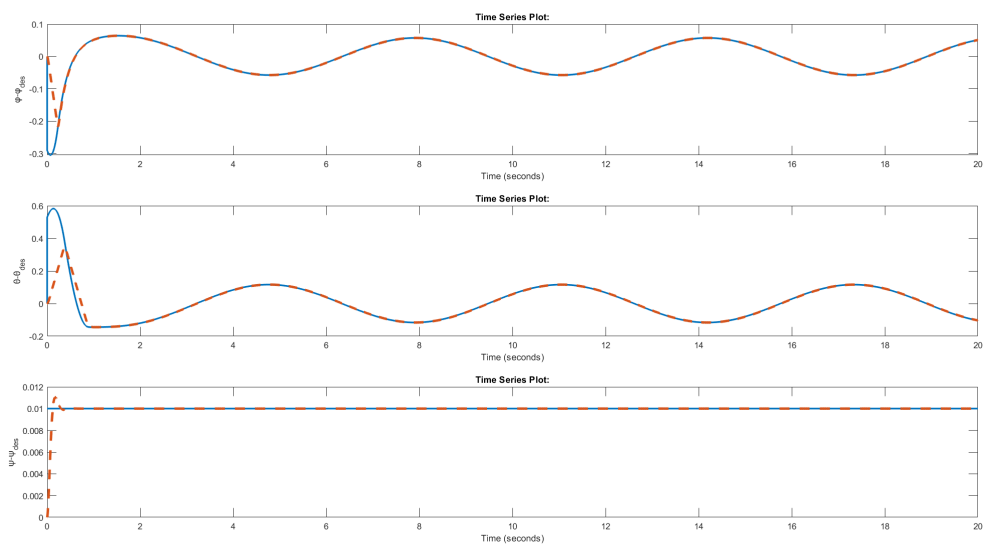
1) Αρχικές τιμές



2) Διανύσματα θέσης X, Y, Z



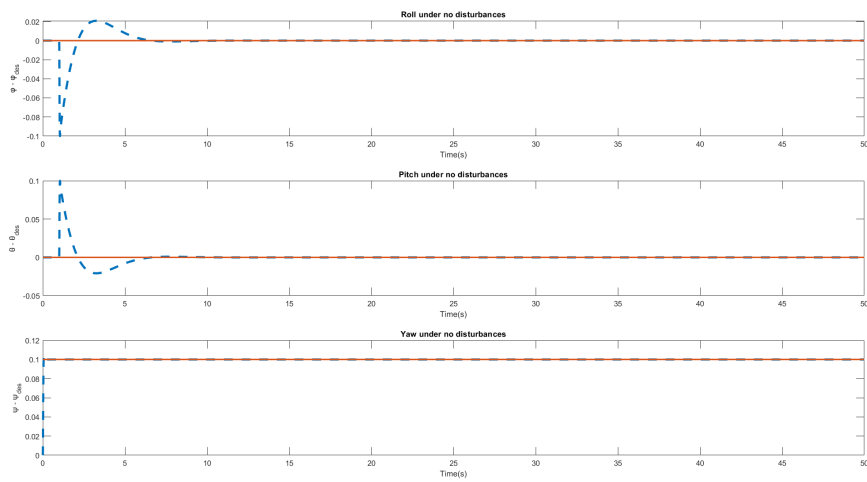
3) Γωνίες ϕ, θ, ψ



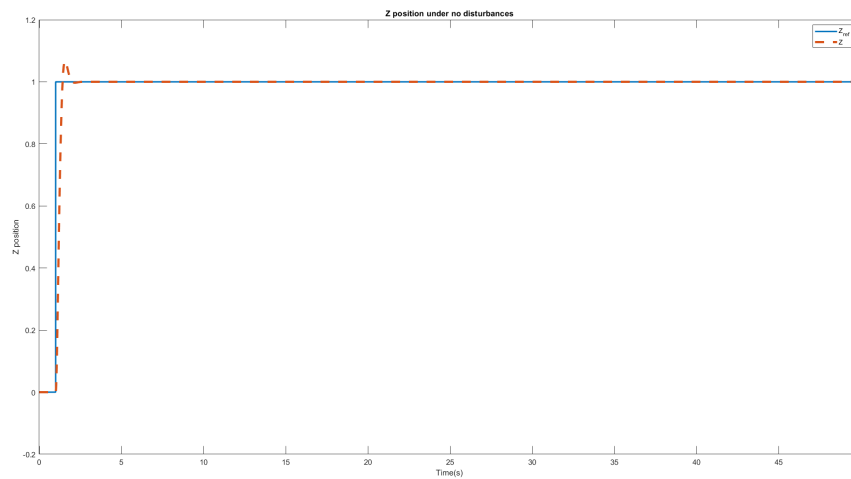
5.1 Προσομοίωση LQR

ΣΕΝΑΡΙΟ ΑΙΩΡΗΣΗΣ

Θεωρείται για κάθε σενάριο ότι το διάνυσμα κατάστασης αρχικών συνθηκών $\mathbf{X}_{init} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^{12 \times 12}$. Επιλέγονται υψηλές τιμές βαρών για τις γωνίες ϕ, θ, ψ που ορίζουν τον προσανατολισμό καθώς και για τη θέση στον άξονα Z. Τα βάρη στον νόμο ελέγχου επιλέγονται



ΣΧΗΜΑ 5.6: Απόκριση γωνιών Euler

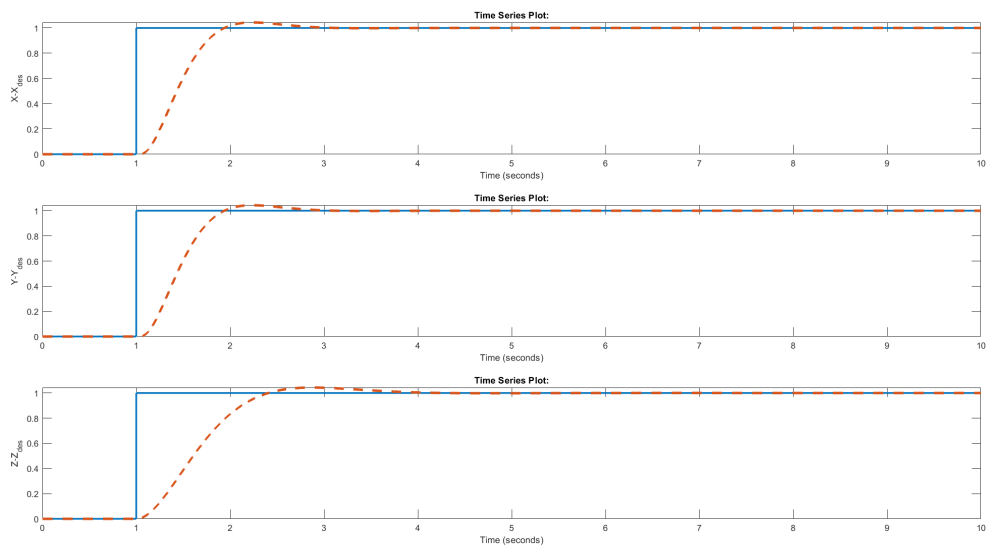


ΣΧΗΜΑ 5.7: Z θέση

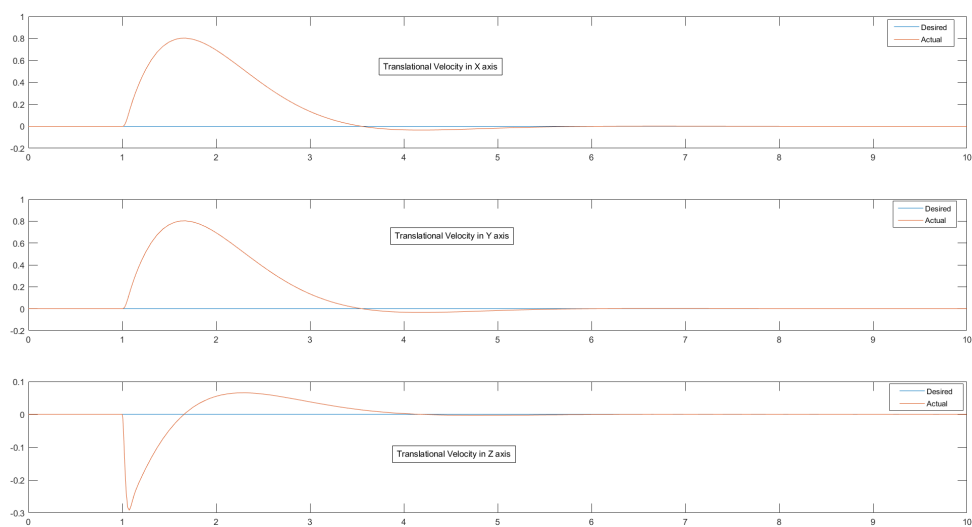
σχετικά μικρά για να εντοπιστούν από το πρώτο βήμα τυχόν ακραίες τιμές κατά τη μετάβαση στη μόνιμη κατάσταση. Η παρακάτω προσομοίωση πραγματοποιήθηκε με τις εξής τιμές:

$$Q = \text{diag}(10, 10, 1000, 0, 0, 0, 1000, 1000, 1000, 0, 0, 0)$$

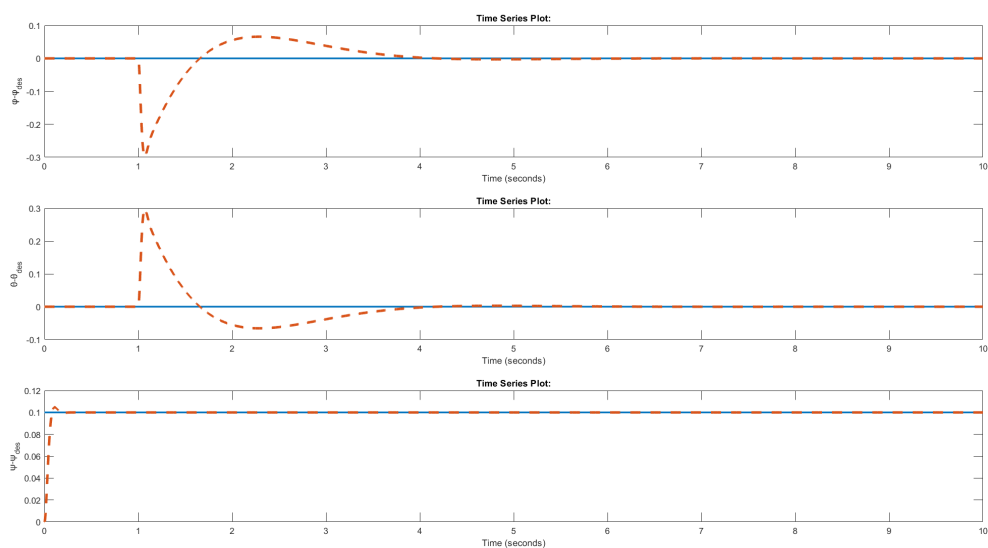
$$R = \text{diag}(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$$



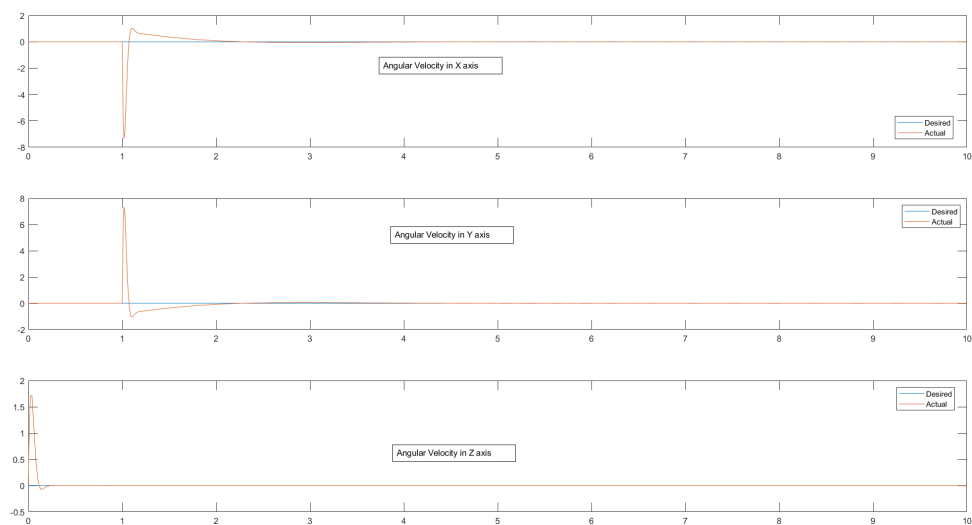
2) $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$



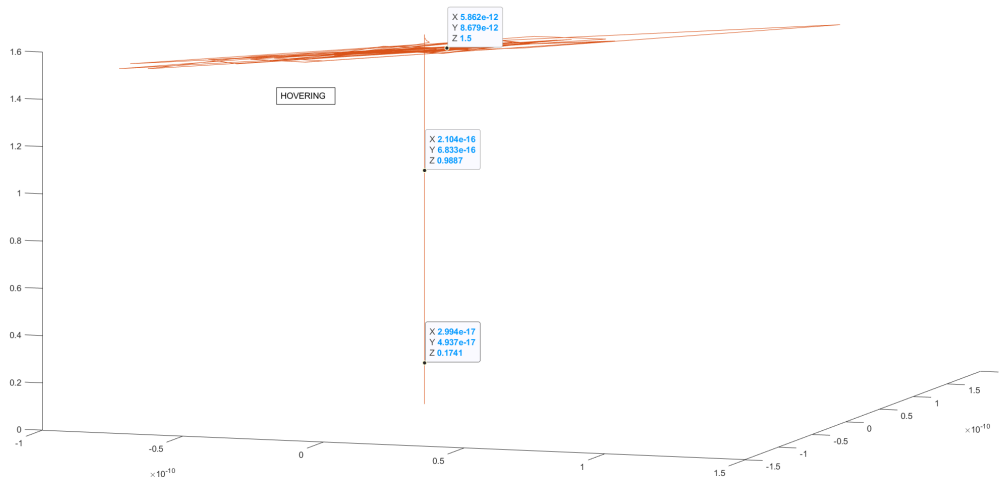
3) Γωνίες ϕ, θ, ψ



4) $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$



5) Επιθυμητές τιμές σε κατάσταση αιώρησης $X_{des} = [0, 0, 1.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.1, 0, 0]$

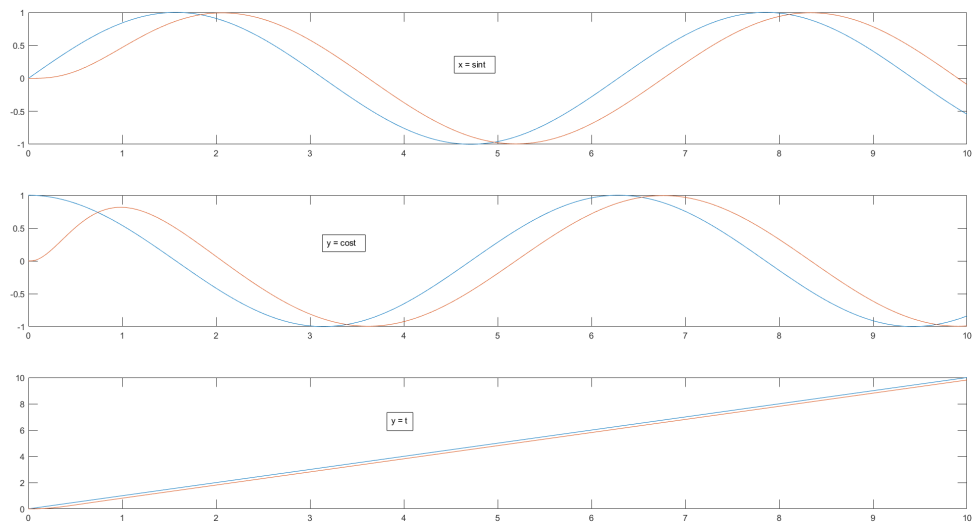


ΣΧΗΜΑ 5.8: Αιώρηση

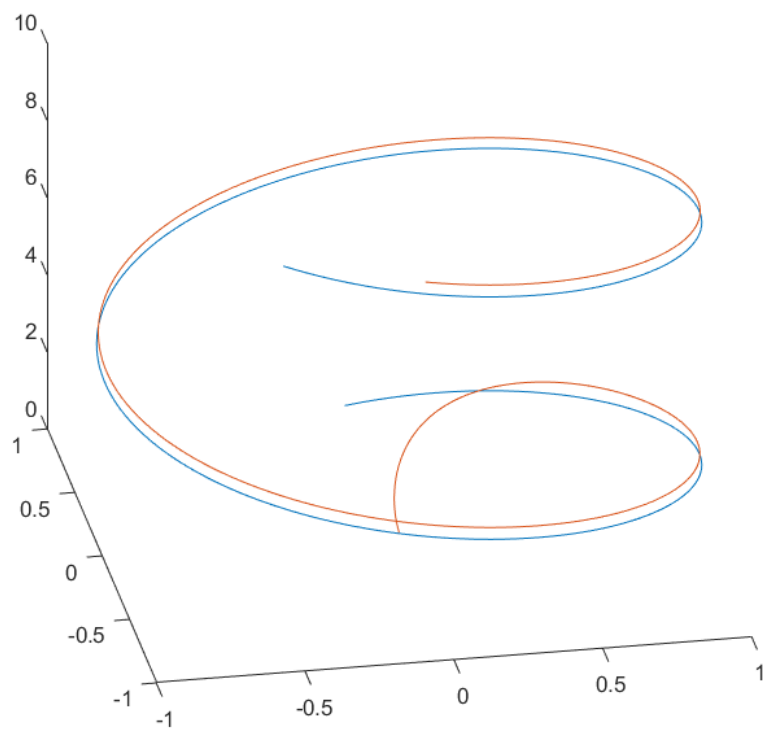
Η παρακάτω προσομοίωση πραγματοποιήθηκε με τις εξής τιμές:

$$Q = \begin{pmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Με τα παραπάνω δεδομένα προσομοιώθηκε μια έλικα με εξισώσεις : $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$, $z(t) = t$ και πήραμε τα εξής αποτελέσματα για το διάνυσμα θέσης:



ή εναλλακτικά σε 3Δ μορφή:



Κεφάλαιο 6

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Αυτό που έδειξαν τα αποτελέσματα είναι ότι ένας απλός PID ελεγκτής δεν είναι ικανός να φέρει το σύστημα στην επιθυμητή θέση αν υπάρχουν εξωτερικές διαταραχές ή θόρυβος ως συνήθως σε πραγματικές συνθήκες. Είναι επιτακτική η ανάγκη χρήσης ενός φίλτρου για την ελαχιστοποίηση του θορύβου και μια πιο εύρωστη προσέγγιση στην κατασκευή του. Ο PIDH οδεύει προς αυτή την κατεύθυνση αλλά δεν αντιμετωπίζει το θέμα του θορύβου τόσο αποτελεσματικά. Επίσης για τη βελτίωση της απόδοσης του θα ήταν ωφέλιμη η χρήση βάρους και στη συνάρτηση ευαισθησίας για να επιτευχθεί έτσι εύρωστη απόδοση, οπότε ο ελεγκτής να αντιδρά αποτελεσματικά ως προς την ευστάθεια για όποιες αβεβαιότητες και αν υπάρχουν σε σχέση με το πραγματικό σύστημα και να πετυχαίνει και ικανοποιητικά επίπεδα απόδοσης ταυτόχρονα. Ο LQR επίσης θα μπορούσε και αυτός να εφοδιαστεί με ένα Kalman φίλτρο για να είναι πιο αποδοτικός αν και δεν απέτυχε εντελώς.

Συμπεραίνεται λοιπόν ότι για ένα τέτοιο πολυμεταβλητό σύστημα όπως είναι το τετραπτέρυγο είναι αναγκαίος ένας πολύ προσεκτικός σχεδιασμός για να παραχθεί ένα σύστημα ελέγχου τόσο αποδοτικό όσο και εύρωστο.

Βιβλιογραφία

- [1] [n. d.]. http://ffden-2.phys.uaf.edu/webproj/212_spring_2014/Clay_Allen/clay_allen/works.html. ([n. d.]).
- [2] [n. d.]. <https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum§ion=ControlStateSpace>. ([n. d.]).
- [3] A Alaimo, V Artale, C Milazzo, A Ricciardello, and L Trefletti. 2013. Mathematical modeling and control of a hexacopter. In *2013 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. IEEE, 1043–1050.
- [4] Kostas Alexis, George Nikolakopoulos, and Anthony Tzes. 2010. Experimental model predictive attitude tracking control of a quadrotor helicopter subject to wind-gusts. In *18th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'10*. IEEE, 1461–1466.
- [5] Kostas Alexis, George Nikolakopoulos, and Anthony Tzes. 2014. On trajectory tracking model predictive control of an unmanned quadrotor helicopter subject to aerodynamic disturbances. *Asian Journal of Control* 16, 1 (2014), 209–224.
- [6] L Salih Atheer, AF Mohamed Haider, and Sallom Gaeid Khalaf. 2010. Flight PID controller design for a UAV quadrotor. *Scientific research and essays* 5, 23 (2010), 3660–3667.
- [7] Samir Bouabdallah, Andre Noth, and Roland Siegwart. 2004. PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)(IEEE Cat. No. 04CH37566)*, Vol. 3. IEEE, 2451–2456.
- [8] H Bouadi, M Bouchoucha, and M Tadjine. 2007. Modelling and stabilizing control laws design based on backstepping for an UAV type-quadrotor. *IFAC Proceedings Volumes* 40, 15 (2007), 245–250.
- [9] Zhou Chao, Lei Ming, Zhou Shaolei, and Zhang Wenguang. 2011. Collision-free UAV formation flight control based on nonlinear MPC. In *2011 international conference on electronics, communications and control (ICECC)*. IEEE, 1951–1956.

- [10] Mapopa Chipofya, Deok Jin Lee, and Kil To Chong. 2015. Trajectory tracking and stabilization of a quadrotor using model predictive control of Laguerre functions. In *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2015. Hindawi.
- [11] Ian D Cowling, Oleg A Yakimenko, James F Whidborne, and Alastair K Cooke. 2010. Direct method based control system for an autonomous quadrotor. *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 60, 2 (2010), 285–316.
- [12] Abhijit Das, Kamesh Subbarao, and Frank Lewis. 2009. Dynamic inversion with zero-dynamics stabilisation for quadrotor control. *IET control theory & applications* 3, 3 (2009), 303–314.
- [13] Laloui Derafa, Tarek Madani, and Abdelaziz Benallegue. 2006. Dynamic modelling and experimental identification of four rotors helicopter parameters. In *2006 IEEE international conference on industrial technology*. IEEE, 1834–1839.
- [14] Minh Nguyen Duc, Thang Nguyen Trong, and Yang Sheng Xuan. 2015. The quadrotor MAV system using PID control. In *2015 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)*. IEEE, 506–510.
- [15] Zachary T Dydek, Anuradha M Annaswamy, and Eugene Lavretsky. 2012. Adaptive control of quadrotor UAVs: A design trade study with flight evaluations. *IEEE Transactions on control systems technology* 21, 4 (2012), 1400–1406.
- [16] Michael Farrell, James Jackson, Jerel Nielsen, Craig Bidstrup, and Tim McLain. 2019. Error-state LQR control of a multirotor UAV. In *2019 international conference on unmanned aircraft systems (ICUAS)*. IEEE, 704–711.
- [17] RA Garcia, FR Rubio, and MG Ortega. 2012. Robust PID control of the quadrotor helicopter. *IFAC Proceedings Volumes* 45, 3 (2012), 229–234.
- [18] Graham Clifford Goodwin, Stefan F Graebe, Mario E Salgado, et al. 2001. *Control system design*. Vol. 240. Prentice Hall Upper Saddle River.
- [19] Gabriel Hoffmann, Steven Waslander, and Claire Tomlin. 2008. Quadrotor helicopter trajectory tracking control. In *AIAA guidance, navigation and control conference and exhibit*. 7410.
- [20] Yeonsik Kang and J Hedrick. 2006. Design of nonlinear model predictive controller for a small fixed-wing unmanned aerial vehicle. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. 6685.
- [21] Shahida Khatoun, Dhiraj Gupta, and LK Das. 2014. PID & LQR control for a quadrotor: Modeling and simulation. In *2014 international conference on advances in computing, communications and informatics (ICACCI)*. IEEE, 796–802.

- [22] DongBin Lee, Timothy C Burg, Darren M Dawson, Dule Shu, Bin Xian, and Enver Tatlicioglu. 2009. Robust tracking control of an underactuated quadrotor aerial-robot based on a parametric uncertain model. In *2009 IEEE international conference on systems, man and cybernetics*. IEEE, 3187–3192.
- [23] Sang-hyun Lee, Seung Hoon Kang, and Youdan Kim. 2011. Trajectory tracking control of quadrotor UAV. In *2011 11th International Conference on Control, Automation and Systems*. IEEE, 281–285.
- [24] Gordon J Leishman. 2006. *Principles of helicopter aerodynamics with CD extra*. Cambridge university press.
- [25] Renato Vilela Lopes, PHRQA Santana, G Borges, and J Ishihara. 2011. Model predictive control applied to tracking and attitude stabilization of a VTOL quadrotor aircraft. In *21st international congress of mechanical engineering*. 176–185.
- [26] Teppo Luukkonen. 2011. Modelling and control of quadcopter Independent research project in applied mathematics. *Espoo* 22 (2011), 22.
- [27] Daniel Mellinger, Nathan Michael, and Vijay Kumar. 2012. Trajectory generation and control for precise aggressive maneuvers with quadrotors. *The International Journal of Robotics Research* 31, 5 (2012), 664–674.
- [28] Nathan Michael, Daniel Mellinger, Quentin Lindsey, and Vijay Kumar. 2010. The grasp multiple micro-uav testbed. *IEEE Robotics & Automation Magazine* 17, 3 (2010), 56–65.
- [29] Reza Olfati-Saber. 2001. *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*. Ph.D. Dissertation. Massachusetts Institute of Technology.
- [30] Mohamed Outanoute, Abdelouahed Selmani, Mohammed Guerbaoui, Abdelali Ed-dahhak, Abdeslam Lachhab, and Benachir Bouchikhi. 2018. Predictive control algorithm using laguerre functions for greenhouse temperature control. *International Journal of Control and Automation* 11, 10 (2018), 11–20.
- [31] Guilherme V Raffo, Manuel G Ortega, and Francisco R Rubio. 2010. An integral predictive/nonlinear H control structure for a quadrotor helicopter. *Automatica* 46, 1 (2010), 29–39.
- [32] Atheer L Salih, M Moghavvemi, Haider AF Mohamed, and Khalaf Sallom Gaeid. 2010. Modelling and PID controller design for a quadrotor unmanned air vehicle. In *2010 IEEE International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics (AQTR)*, Vol. 1. IEEE, 1–5.

-
- [33] Wil Selby. [n. d.]. Simulation Environment. <https://www.wilselby.com/research/arducopter/simulation-environment/>. ([n. d.]).
- [34] Sigurd Skogestad and Ian Postlethwaite. 2005. *Multivariable feedback control: analysis and design*. John Wiley & Sons.
- [35] Mario Valenti, Brett Bethke, Gaston Fiore, Jonathan How, and Eric Feron. 2006. Indoor multi-vehicle flight testbed for fault detection, isolation, and recovery. In *AIAA guidance, navigation, and control conference and exhibit*. 6200.
- [36] Tu Van Duong, Hak Kyeong Kim, Tan Tien Nguyen, Sea June Oh, and Sang Bong Kim. 2014. Position control of a small scale quadrotor using block feedback linearization control. In *AETA 2013: Recent advances in electrical engineering and related sciences*. Springer, 525–534.
- [37] Luigi Villani and Giuseppe Oriolo. [n. d.]. Bruno Siciliano • Lorenzo Sciavicco. ([n. d.]).
- [38] Liuping Wang. 2004. Discrete model predictive controller design using Laguerre functions. *Journal of process control* 14, 2 (2004), 131–142.
- [39] Kwangjin Yang, Yeonsik Kang, and Salah Sukkarieh. 2013. Adaptive nonlinear model predictive path-following control for a fixed-wing unmanned aerial vehicle. *International Journal of Control, Automation and Systems* 11, 1 (2013), 65–74.