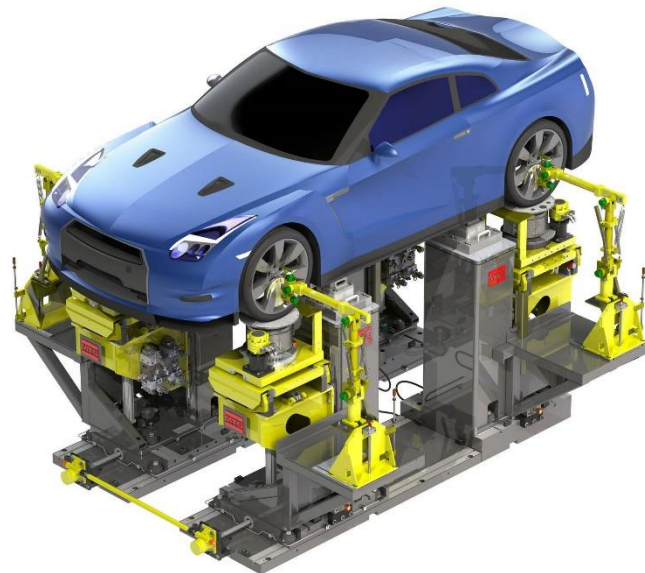


# Κινηματική και Ελαστοκινηματική Ανάλυση Μηχανισμών Ανάρτησης Διπλών Ψαλιδιών



Τομέας Μηχανολογικών Κατασκευών & Αυτομάτου Ελέγχου

Εργαστήριο Οχημάτων

Επιβλέπων: Δημήτριος Κουλοχέρης, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα 2022







## Kinematic and Elastokinematic Analysis of Double Wishbone Suspension Mechanisms



Section of Mechanical Design and Automatic Control

Vehicles Laboratory

Supervisor: Dimitrios Koulocheris, Associate Professor NTUA

Athens 2022





*“In the final analysis, every engineering material is rubber”*

*Sir Henry Royce  
Rolls-Royce*

## Ευχαριστίες

*Με την εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας ολοκληρώνονται οι προπτυχιακές σπουδές μου στη Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.*

*Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της Διπλωματικής Εργασίας, Αναπληρωτή Καθηγητή της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ, Δρ.-Μηχ. Δημήτριο Κουλοχέρη για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε με την ανάθεση αυτής, για την άριστη συνεργασία, καθώς και για τις γνώσεις και την εμπειρία που μου μετέδωσε. Επίσης, ευχαριστώ τη Δρ.-Μηχ. Κλειώ Βόσου για τις συμβουλές και την καθοδήγηση.*

*Οφείλω, επίσης, να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς όλα τα μέλη της ομάδας Formula Student του ΕΜΠ, Prom Racing, για όλες τις γνώσεις που αποκόμισα μαθητεύοντας δίπλα τους, οι οποίες αποτέλεσαν σημαντικό εφόδιο κατά την εκπόνηση αυτής της Διπλωματικής Εργασίας.*

*Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω τους προϊσταμένους και μέντορές μου κατά την πραγματοποίηση πρακτικής άσκησης στην Toyota Motor Europe, Ernesto Mottola και Makoto Nagao, για τις πολύτιμες γνώσεις που μου μετέδωσαν, ιδιαίτερα όσον αφορά την ελαστοκινηματική ανάλυση συστημάτων ανάρτησης, πολλές από τις οποίες έχουν ενσωματωθεί στην παρούσα Διπλωματική Εργασία.*

*Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τα μέλη της οικογένειάς μου και την Αλεξάνδρα, για την αμέριστη στήριξή τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.*

Υπεύθυνη δήλωση για λογοκλοπή και για κλοπή πνευματικής ιδιοκτησίας:

Έχω διαβάσει και κατανοήσει τους κανόνες για τη λογοκλοπή και τον τρόπο σωστής αναφοράς των πηγών που περιέχονται στον οδηγό συγγραφής Διπλωματικών Εργασιών. Δηλώνω ότι, από όσα γνωρίζω, το περιεχόμενο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας είναι προϊόν δικής μου εργασίας και υπάρχουν αναφορές σε όλες τις πηγές που χρησιμοποίησα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτή τη Διπλωματική εργασία είναι του συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών ή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ανδρέας Θεοχαρόπουλος

## Περιεχόμενα

Περίληψη.....	10
Abstract .....	11
1. Εισαγωγή.....	12
1.1 Πλαίσιο .....	12
1.2 Σκοπός, ερωτήματα και στόχοι.....	14
1.3 Οριοθέτηση.....	15
1.4 Διάρθρωση της εργασίας .....	16
2. Βιβλιογραφική ανασκόπηση.....	17
2.1 Συνήθεις τύποι συστημάτων ανάρτησης τροχοφόρων οχημάτων .....	17
2.1.1 Ημιάκαμπτος άξονας .....	17
2.1.2 Γόνατα MacPherson.....	19
2.1.3 Διπλά ψαλίδια.....	20
2.1.4 Ανάρτηση πολλαπλών συνδέσμων.....	21
2.2 Χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη συστημάτων ανάρτησης.....	23
2.2.1 Κατακόρυφη, εγκάρσια και διαμήκης μετατόπιση τροχού .....	23
2.2.2 Γωνία κλίσης και γωνία σύγκλισης τροχού .....	23
2.2.3 Γωνία caster και μηχανικό ίχνος.....	24
2.2.4 Γωνία βασιλικού πείρου και scrub radius .....	26
2.2.5 Θέσεις στιγμιαίων κέντρων περιστροφής και κέντρου κλυδωνισμού.....	26
2.3 Γεωμετρία ανάρτησης & δυναμική οχήματος.....	29
2.3.1 Δυναμική ελαστικοφόρων τροχών .....	29
2.3.2 Μεταφορά φορτίου .....	34
2.3.3 Στροφική συμπεριφορά οχήματος .....	43
2.4 Συνήθη στοιχεία σύνδεσης στα συστήματα ανάρτησης.....	58
2.4.1 Δύσκαμπτα στοιχεία σύνδεσης .....	59
2.4.2 Εύκαμπτα στοιχεία σύνδεσης.....	64
2.5 Προσδιορισμός γεωμετρικών μεγεθών συστημάτων ανάρτησης .....	69
2.5.1 Πειραματικές διατάξεις .....	70
2.5.2 Εργαλεία υπολογιστικής προσομοίωσης .....	74
3. Ευθεία κινηματική ανάλυση ανάρτησης διπλών ψαλιδιών.....	79
3.1 Βαθμός ελευθερίας μηχανισμού.....	80
3.2 Η μέθοδος των κλειστών διανυσματικών βρόχων.....	85
3.3 Η μέθοδος των τριών σημείων .....	92
3.3.1 Μαθηματικό υπόβαθρο.....	92
3.3.2 Εφαρμογή σε μηχανισμούς ανάρτησης διπλών ψαλιδιών .....	95
3.3.3 Εφαρμογή σε άλλους μηχανισμούς ανάρτησης.....	114
3.3.4 Υπολογισμός χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών ανάρτησης.....	117
3.4 Παρουσίαση ενδεικτικών αποτελεσμάτων .....	120

4.	Ελαστοκινηματική ανάλυση ανάρτησης διπλών ψαλιδιών .....	126
4.1	Μαθηματικό υπόβαθρο .....	127
4.1.1	Θέση και προσανατολισμός απολύτως στερεών σωμάτων στο χώρο ..	127
4.1.2	Μοντελοποίηση ελαστικής συμπεριφοράς στοιχείων σύνδεσης .....	136
4.2	Ισορροπία ανάρτησης διπλών ψαλιδιών υπό στατική φόρτιση .....	143
4.2.1	Εκφυλισμός σε ισοστατικό χωροδικτύωμα .....	144
4.2.2	Σύστημα πολλαπλών απολύτως στερεών σωμάτων .....	151
4.2.3	Ενσωμάτωση ελαστικής συμπεριφοράς φορέων .....	179
4.3	Αναλυτική παρουσίαση αποτελεσμάτων ελαστοκινηματικής ανάλυσης .....	189
5.	Συμπεράσματα και μελλοντική εργασία .....	221
	Κατάλογος Σχημάτων .....	224
	Κατάλογος Πινάκων .....	233
	Κατάλογος Αναφορών .....	234

## Περίληψη

Τα συστήματα ανάρτησης των σύγχρονων τροχοφόρων οχημάτων σχεδιάζονται με στόχο την εκπλήρωση ενός μεγάλου πλήθους λειτουργικών, χωροταξικών και κατασκευαστικών προδιαγραφών. Όσον αφορά τα οχήματα γενικής χρήσης, οι λειτουργικές προδιαγραφές εισάγονται ώστε να διασφαλιστεί αφενός μεν η άνεση, αφετέρου δε η ασφάλεια των επιβατών, αν και η συσχέτιση της τελευταίας με τα συστήματα ανάρτησης δεν είναι προφανής. Εδώ και δεκαετίες, ο σχεδιασμός μηχανισμών ανάρτησης λογίζεται ως μέσο επίδρασης στην προκύπτουσα δυναμική συμπεριφορά ενός οχήματος, άρα και στην ασφάλεια αυτού, γι' αυτό και δίνεται ιδιαίτερη φροντίδα τόσο για την επίτευξη της βέλτιστης, κατά περίπτωση, ονομαστικής γεωμετρίας, όσο και για την ελαχιστοποίηση της απόκλισης από αυτή εξαιτίας των επιβαλλόμενων φορτίσεων κατά την κίνηση του εκάστοτε οχήματος. Καθίσταται, λοιπόν, απαραίτητος ο υπολογισμός της κινηματικής και ελαστοκινηματικής απόκρισης μηχανισμών ανάρτησης, ως αποτέλεσμα της επιβολής εξωτερικών κινηματικών και δυναμικών διεγέρσεων στον τροχό, αντίστοιχα.

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία αποσκοπεί στη μαθηματική θεμελίωση και αντιπαραβολή διαδεδομένων μεθόδων κινηματικής και ελαστοκινηματικής ανάλυσης που χρησιμοποιούνται κατά το σχεδιασμό αναρτήσεων, εστιάζοντας ως επί το πλείστον σε μηχανισμούς διπλών ψαλιδιών. Αρχικά, παρουσιάζονται δύο μέθοδοι κινηματικής ανάλυσης συνοδευόμενες από ενδεικτικά αποτελέσματα, όπως αυτά προέκυψαν έπειτα από εφαρμογή της μιας εξ αυτών. Εν συνεχεία, επιχειρείται η ελαστοκινηματική ανάλυση ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, υιοθετώντας σε πρώτη φάση μια απλοποιημένη προσέγγιση υπό παραδοχές προκειμένου για τη μείωση του πλήθους των αγνώστων μεταβλητών. Ακολούθως, ο ανωτέρω μηχανισμός λαμβάνεται ως σύστημα πολλαπλών απολύτως στερεών σωμάτων και οι εξισώσεις ισορροπίας και κινηματικών περιορισμών καταστρώνονται αναλυτικά, ύστερα από λεπτομερή παρουσίαση των εμπλεκόμενων μαθηματικών εργαλείων. Τα απολύτως στερεά σώματα αντικαθίστανται από πεπερασμένα στοιχεία και υπερστοιχεία ώστε να ληφθεί υπόψιν η ελαστική συμπεριφορά των μελών του μηχανισμού ανάρτησης, ο οποίος σε αυτήν την περίπτωση μοντελοποιείται ως σύστημα πολλαπλών γραμμικά ελαστικών σωμάτων. Τέλος, τα ανωτέρω συστήματα πολλαπλών σωμάτων αξιοποιούνται για την εξαγωγή ενός πλήρους σετ διαγραμμάτων χαρακτηρισμού της ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης.

Κλείνοντας, αξίζει να αναφερθεί ότι η αυτή η εργασία μπορεί να αποτελέσει σημαντικό βοήθημα για τους λεγόμενους «απλούς χρήστες» εμπορικών λογισμικών προσομοίωσης της δυναμικής συστημάτων πολλαπλών σωμάτων, οι οποίοι τις περισσότερες φορές διαθέτουν γνώσεις που σχετίζονται αποκλειστικά με την ερμηνεία των αποτελεσμάτων τέτοιου είδους αναλύσεων, αγνοώντας τον τρόπο με τον οποίο αυτά προκύπτουν.

## Abstract

The suspension systems of modern ground vehicles are designed to meet a vast amount of functional, spatial, and manufacturing standards. As far as general-purpose vehicles are concerned, functional standards are introduced to ensure the comfort and safety of passengers, although the impact of suspension systems on the latter is not obvious. For decades, the design of suspension mechanisms has been considered as a means of influencing the resulting dynamic behavior of a vehicle, and therefore its safety, which is why special care is taken both to achieve the optimal, as the case may be, nominal geometry, and to minimize the deviation from it due to the imposed loads during the vehicle's operation. Therefore, it becomes necessary to calculate the kinematic and elastokinematic response of suspension mechanisms, due to external kinematic and dynamic excitations on the wheel, respectively.

This thesis aims at providing the mathematical foundation and comparing of established kinematic and elastokinematic analysis methods used in suspension design, mostly focusing on double wishbone mechanisms. Initially, two methods of kinematic analysis are presented accompanied by indicative results obtained after applying one of them. Subsequently, the elastokinematic analysis of a double wishbone suspension mechanism is attempted, following a simplified approach under assumptions to reduce the number of unknown variables. The same mechanism is then modelled as a rigid multibody system and the corresponding equations of equilibrium and kinematic constraints are derived, after a detailed presentation of the mathematical tools involved. The rigid bodies are replaced by finite elements and superelements to consider the elastic behavior of the suspension mechanism members, which in this case is modeled as a linearly elastic multibody system. The multibody system models generated are then used to derive a complete set of diagrams characterizing the elastokinematic behavior of the example suspension mechanism.

Finally, it is worth mentioning that this work can be of great help to the so-called "regular users" of commercial multibody simulation software, who most often have knowledge related exclusively to the interpretation of the results of such analyses, ignoring the way in which the latter arise.

## 1. Εισαγωγή

### 1.1 Πλαίσιο

Σύστημα ανάρτησης ενός οχήματος καλείται οιαδήποτε διάταξη συνδέει το πλαίσιο (chassis/frame) με τους τροχούς αυτού, επιτρέποντας σχετική κίνηση μεταξύ τους [1]. Ένα τυπικό σύστημα ανάρτησης αποτελείται από συνδέσμους και βραχίονες, μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η δέσμευση ορισμένων εκ των βαθμών ελευθερίας των τροχών ως προς το πλαίσιο. Όσον αφορά την κίνηση των τροχών κατά την έννοια των εναπομεινάντων βαθμών ελευθερίας τους, αυτή συνήθως ελέγχεται από στοιχεία δυσκαμψίας ή/και στοιχεία απόσβεσης, εκτός φυσικά από τη στροφή των τροχών γύρω από τον άξονά τους κατά την κύλιση, η οποία ιδανικά πραγματοποιείται εντελώς ελεύθερα.

Τα πρώτα οχήματα που έφεραν συστήματα ανάρτησης κατασκευάστηκαν το 14<sup>ο</sup> αιώνα. Συγκεκριμένα, επρόκειτο για ζωήλατες άμαξες που κινούνταν στους τραχείς δρόμους εκείνης της περιόδου και έφεραν απλά συστήματα ανάρτησης (Σχήμα 1.1), αποτελούμενα κατά κανόνα από άκαμπτους άξονες (rigid beam axles) και φυλλοειδή ελατήρια (leaf springs). Αυτά τα συστήματα αποσκοπούσαν αποκλειστικά στον περιορισμό των εξαιρετικά έντονων κραδασμών που βίωναν οι επιβάτες εξαιτίας των διεγέρσεων των τροχών από ανωμαλίες του εδάφους.



**Σχήμα 1.1: Σύστημα ανάρτησης ζωήλατης άμαξας με φυλλωτά ελατήρια [2]**

Η βελτίωση της άνεσης των επιβατών (ride comfort) εξακολουθεί μέχρι σήμερα να αποτελεί έναν από τους κυριότερους στόχους κατά το σχεδιασμό συστημάτων ανάρτησης. Παρόλα αυτά, η συνεχής αύξηση της ισχύος των κινητήρων και η ταχεία εξέλιξη της τεχνολογίας στον τομέα των ελαστικών επισώτρων, σε συνδυασμό με την αυστηροποίηση των προδιαγραφών ασφαλείας που σχετίζονται με τη δυναμική συμπεριφορά των οχημάτων, οδήγησε από πολύ νωρίς στη θεώρηση των συστημάτων ανάρτησης, εκτός των άλλων και



ως μέσο επίδρασης στα εγκάρσια και διαμήκη φορτία που αναπτύσσονται μεταξύ ελαστικοφόρων τροχών και οδοστρώματος (road holding/handling). Συνεπώς, ένα σύγχρονο σύστημα ανάρτησης οφείλει όχι μόνο να απομονώνει όσο το δυνατόν περισσότερο το πλαίσιο από τις διάφορες διεγέρσεις βάσης, αλλά ταυτόχρονα να μεγιστοποιεί τις αναπτυσσόμενες, στη διεπαφή τροχού-οδοστρώματος, δυνάμεις πρόσφυσης. Οι δύο αυτές απαιτήσεις είναι αντικρουόμενες και χρειάζεται να γίνει συμβιβασμός τους ανάλογα με τον τύπο του εκάστοτε οχήματος. Άλλωστε, ο συμβιβασμός απαιτήσεων αποτελεί συνήθη πρακτική κατά το σχεδιασμό οχημάτων, καθώς οι αρμόδιοι μηχανικοί καλούνται να δημιουργήσουν ένα τελικό προϊόν το οποίο ανταπεξέρχεται στις λειτουργικές προδιαγραφές με τον καλύτερο δυνατό τρόπο, ενώ ταυτόχρονα ικανοποιούνται περιορισμοί σχετιζόμενοι με το βάρος, τη χωροταξία, την αξιοπιστία, τη συντήρηση, τη συναρμολόγηση κ.λπ.

Ως γνωστόν, ο σχεδιασμός συστημάτων ανάρτησης, όπως συμβαίνει και με πολλές άλλες πτυχές του σχεδιασμού οχημάτων, επηρεάζεται σημαντικά και από οικονομικούς παράγοντες. Αυτό σημαίνει ότι τα βελτιωμένα συστήματα αναρτήσεων που προορίζονται για χρήση στα νέα οχήματα μιας αυτοκινητοβιομηχανίας θα πρέπει να σχεδιάζονται σε σύντομο χρονικό διάστημα, κάνοντας όσο το δυνατόν μεγαλύτερη οικονομία πόρων λ.χ. περιορίζοντας την κατασκευή πρωτοτύπων και τη διεξαγωγή πειραματικών δοκιμών [3]. Έτσι λοιπόν, από τις αρχές της δεκαετίας του 1990 και έπειτα, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων και λογισμικού μέσω των οποίων καθίσταται δυνατή η προσομοίωση και αξιολόγηση πληθώρας σχεδιαστικών προτάσεων, γρήγορα και χωρίς υπέρμετρη αύξηση των δαπανών. Η εισαγωγή των υπολογιστικών προσομοιώσεων στο σχεδιασμό συστημάτων ανάρτησης διευκόλυνε σημαντικά το έργο των μηχανικών και αποτέλεσε τη βάση για την κατασκευή ασφαλέστερων οχημάτων, των οποίων ο σχεδιασμός δεν είναι πλέον βασισμένος στην εμπειρία αλλά σε συμπεράσματα που εξάγονται βάσει αριθμητικών αποτελεσμάτων.

Σταδιακά, όλες οι μεγάλες αυτοκινητοβιομηχανίες υιοθέτησαν λογισμικά προσομοίωσης δυναμικής συστημάτων πολλαπλών σωμάτων, όπως το ADAMS (MSC Software) και το SIMPACK (Dassault Systèmes), αφενός μεν για την κινηματική και ελαστοκινηματική ανάλυση των σχεδιαζόμενων συστημάτων ανάρτησης, αφετέρου δε για τον προσδιορισμό των φορτίων που καταπονούν τα μέλη αυτών σε πραγματικές συνθήκες λειτουργίας. Η εξέλιξη της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών σε συνδυασμό με την συνεχή βελτίωση των λογισμικών προσομοίωσης δυναμικής συστημάτων πολλαπλών σωμάτων, έχουν πλέον καταστήσει δυνατή τη διεξαγωγή προσομοιώσεων υποσυστημάτων ή και ολόκληρου του οχήματος με μεγάλη ακρίβεια, πολλούς βαθμούς ελευθερίας και σχετικά μικρό υπολογιστικό κόστος (συγκριτικά με αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων), γι' αυτό και πλέον χρησιμοποιούνται εκτενώς. Παρόλα αυτά, αξίζει να σημειωθεί ότι το κόστος κτήσης τέτοιων λογισμικών είναι ιδιαίτερα υψηλό, ενώ απαιτούνται εξειδικευμένες γνώσεις και μεγάλο πλήθος έγκυρων δεδομένων εισόδου (input data) για την πλήρη εκμετάλλευση των δυνατοτήτων τους. Επιπλέον, η επαλήθευση των αποτελεσμάτων

(simulation results validation) των προσομοιώσεων με πειραματικά αποτελέσματα κρίνεται απαραίτητη προκειμένου να ελεγχθεί η ορθότητα των υπολογισμών και να διερευνηθεί η ακρίβεια που επιτυγχάνουν τα διάφορα μοντέλα.

## 1.2 Σκοπός, ερωτήματα και στόχοι

---

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία (ΔΕ) αποσκοπεί στη μαθηματική θεμελίωση και αντιπαραβολή διαφορετικών μεθόδων κινηματικής και ελαστοκινηματικής ανάλυσης που χρησιμοποιούνται κατά το σχεδιασμό μηχανισμών ανάρτησης. Είναι προφανές από τον τίτλο ότι η έμφαση δίνεται συγκεκριμένα σε αναρτήσεις διπλών ψαλιδιών, ωστόσο οι μέθοδοι που παρουσιάζονται μπορούν να τροποποιηθούν για χρήση κατά το σχεδιασμό και άλλων τύπων συστημάτων ανάρτησης.

Έχοντας ολοκληρώσει την ανάγνωση της παρούσας ΔΕ, ο αναγνώστης θα πρέπει να είναι σε θέση να απαντήσει στα ακόλουθα ερωτήματα:

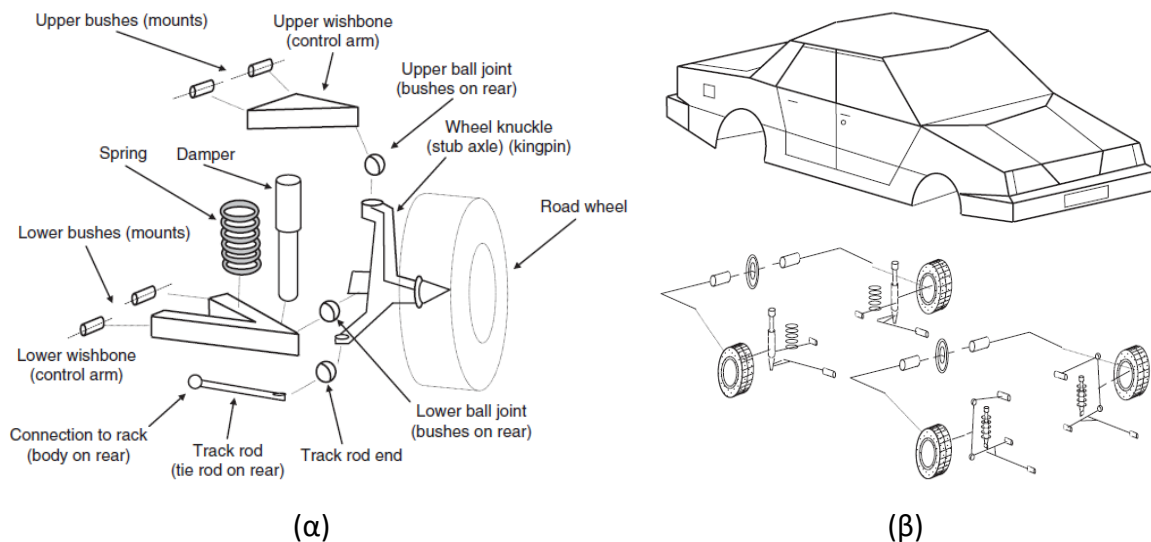
- Ποιά η χρησιμότητα της κινηματικής και ελαστοκινηματικής ανάλυσης συστημάτων ανάρτησης ως προς τη βελτιστοποίηση της δυναμικής οχήματος;
- Σε ποιές περιπτώσεις χρησιμοποιείται καθένας από τους προαναφερθέντες τύπους ανάλυσης;
- Ποιά η δομή και τα δεδομένα εισόδου που απαιτούνται από ένα σύγχρονο λογισμικό προσομοίωσης δυναμικής πολλαπλών σωμάτων, όσον αφορά τη χρήση του κατά το σχεδιασμό συστημάτων ανάρτησης;

Σχετικά με το τελευταίο ερώτημα, όπως ήδη αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, η ανάπτυξη μοντέλων στο πλαίσιο λογισμικών προσομοίωσης δυναμικής συστημάτων πολλαπλών σωμάτων είναι μια διαδικασία που προϋποθέτει εξειδικευμένες γνώσεις και πρόσβαση σε δεδομένα εμπιστευτικού χαρακτήρα. Για το λόγο αυτό, ακόμα και στα ίδια τα εγχειρίδια χρήσης λογισμικών όπως το SIMPACK, γίνεται σαφής διάκριση των χρηστών σε 2 κατηγορίες: από τη μια πλευρά υπάρχουν οι «απλοί χρήστες» (users) που χρησιμοποιούν το λογισμικό μεταβάλλοντας ένα προκαθορισμένο πλήθος παραμέτρων για την αξιολόγηση διαφορετικών σχεδιαστικών προτάσεων και από την άλλη υπάρχουν οι «ειδικοί» (experts) οι οποίοι είναι υπεύθυνοι για τη δημιουργία και επαλήθευση της ακρίβειας των μοντέλων και γνωρίζουν εν πολλοίς τη φυσική και τα μαθηματικά στα οποία βασίζονται. Η διάκριση αυτή λειτουργεί εις βάρος των «απλών χρηστών», καθώς αυτοί καταλήγουν να χρησιμοποιούν ένα ιδιαίτερα σύνθετο εργαλείο το οποίο δεν γνωρίζουν ούτε πώς δομείται, αλλά ούτε και πώς λειτουργεί. Έτσι λοιπόν, μέσα από αυτή τη ΔΕ ο γράφων επιχειρεί να εισάγει τους τελευταίους στη λογική των συστημάτων πολλαπλών σωμάτων, κυρίως όσον αφορά την κατανόηση των φυσικών αρχών από τις οποίες αυτά διέπονται, διαμέσου εφαρμογών στην ελαστοκινηματική ανάλυση συστημάτων ανάρτησης.

### 1.3 Οριοθέτηση

Στο πλαίσιο αυτής της ΔΕ, διεξάγονται κατ' αποκλειστικότητα στατικές αναλύσεις συστημάτων ανάρτησης. Συνεπώς, δεν περιλαμβάνονται υπολογισμοί ταχυτήτων και επιταχύνσεων στα διάφορα σημεία των μελετώμενων μηχανισμών, αφού οι πρώτοι ούτως ή άλλως έχουν δευτερεύοντα ρόλο όσον αφορά το σχεδιασμό αναρτήσεων (π.χ. υπολογισμός ταχύτητας έκτασης/συμπίεσης αποσβεστήρων και αδρανειακών φορτίσεων των μελών ανάρτησης σε διάφορα σενάρια).

Επιπλέον, οι κάτωθι αναλύσεις περιορίζονται σε μοντέλα ενός τετάρτου οχήματος (quarter car linkage models – Σχήμα 1.2α) τα οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμα κατά τα πρώτα στάδια του σχεδιασμού οχημάτων, όταν τα δεδομένα που απαιτούνται για την παραμετροποίηση πιο σύνθετων μοντέλων (full car linkage models – Σχήμα 1.2β) δεν είναι ακόμα διαθέσιμα. Η χρήση των μοντέλων ενός τετάρτου οχήματος ενδείκνυται λόγω της σχετικά περιορισμένης περιπλοκότητάς τους, εισάγει ωστόσο ορισμένους περιορισμούς στις αναλύσεις που ακολουθούν, οι οποίοι σχετίζονται με φαινόμενα που προκύπτουν εξαιτίας της αλληλεπίδρασης των αναρτήσεων διαφορετικών τροχών μέσω του πλαισίου ή άλλων συνδέσμων, όπως οι αντιστρεπτικές δοκοί. Για παράδειγμα, όταν το όχημα υφίσταται πλευρικές επιταχύνσεις εισάγεται γωνία στροφής του πλαισίου γύρω από ένα διαμήκη άξονα, με αποτέλεσμα τη μετατόπιση των σημείων έδρασης των αναρτήσεων σε σχέση με την ονομαστική τους θέση. Εκτενέστερη αναφορά στο φαινόμενο αυτό, καθώς και σε τρόπους με τους οποίους μπορεί να συμπεριληφθεί σε αναλύσεις με μοντέλα ενός τετάρτου οχήματος, γίνεται στα Κεφάλαια 3 και 4.



**Σχήμα 1.2: Μοντελοποίηση ενός τετάρτου οχήματος και πλήρους οχήματος ως συστήματα πολλαπλών σωμάτων [4]**

## 1.4 Διάρθρωση της εργασίας

---

Στο Κεφάλαιο 2, αρχικά λαμβάνει χώρα μια συνοπτική παρουσίαση των συνηθέστερων τύπων συστημάτων ανάρτησης που χρησιμοποιούνται στα σύγχρονα τροχοφόρα οχήματα, αναδεικνύοντας τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα καθενός από αυτά. Εν συνεχεία, ορίζονται μερικά από τα πλέον διαδεδομένα χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη που χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση της απόδοσης μηχανισμών ανάρτησης. Προκειμένου να γίνει κατανοητή η επίδραση του συστήματος ανάρτησης στην εγκάρσια δυναμική συμπεριφορά του οχήματος, γίνεται αναφορά στη δυναμική των ελαστικοφόρων τροχών. Κατόπιν, ο αναγνώστης εισάγεται στις έννοιες της μεταφοράς φορτίου και της στροφικής συμπεριφοράς οχήματος, ενώ ακολούθως γίνεται λόγος περί εύκαμπτων και δύσκαμπτων στοιχείων σύνδεσης, καθώς αυτά είναι εν πολλοίς υπεύθυνα για την εμφάνιση ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς στους μηχανισμούς ανάρτησης, ο προσδιορισμός της οποίας γίνεται είτε μέσω εμπορικών λογισμικών προσομοίωσης της δυναμικής πολλαπλών σωμάτων, είτε μέσω πειραματικών δοκιμών, εντός ή εκτός εργαστηρίου.

Στο Κεφάλαιο 3, δίνονται ορισμένες διευκρινίσεις σχετικά με το βαθμό ελευθερίας ενός μηχανισμού και εισάγονται οι έννοιες της υπερστατικότητας και των πλεοναζόντων κινηματικών περιορισμών. Ύστερα, παρουσιάζεται μια σχετικά απλή μέθοδος κινηματικής ανάλυση μηχανισμών ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, φερόμενη και ως «μέθοδος των κλειστών διανυσματικών βρόχων». Ακολουθεί η παρουσίαση της «μεθόδου των τριών σημείων» για τον ίδιο σκοπό, η οποία συνίσταται από τη διαδοχική αριθμητική επίλυση μη γραμμικών συστημάτων εξισώσεων. Η μέθοδος αυτή αναλύεται διεξοδικά και εφαρμόζεται επίσης για την κινηματική ανάλυση συστημάτων ανάρτησης με γόνατα MacPherson, ενώ στο τέλος του κεφαλαίου δίνονται ενδεικτικά αποτελέσματα που προέκυψαν έπειτα από την εφαρμογή της.

Στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζονται τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται κατά την ανάλυση συστημάτων πολλαπλών σωμάτων (γωνίες Euler, κίνηση απολύτως στερεού σώματος κ.λπ.) και στη συνέχεια επιχειρείται υπό παραδοχές η στατική ανάλυση ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών ως ισοστατικό χωροδικτύωμα. Έπειτα, ο ίδιος μηχανισμός μοντελοποιείται ως σύστημα πολλαπλών απολύτως στερεών σωμάτων και καταστρώνονται αναλυτικά οι εξισώσεις κίνησης και κινηματικών περιορισμών από τις οποίες αυτός διέπεται. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων ελαστοκινηματικής ανάλυσης βελτιώνεται λαμβάνοντας υπόψιν την ελαστική συμπεριφορά των μελών του μηχανισμού ανάρτησης, ενσωματώνοντας τα τελευταία ως πεπερασμένα στοιχεία ή/και υπερστοιχεία στο προκύπτον σύστημα πολλαπλών γραμμικά ελαστικών σωμάτων. Κλείνοντας, αντιπαραβάλλονται τα αποτελέσματα ελαστοκινηματικής ανάλυσης του ανωτέρω μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, όπως αυτά προέκυψαν με καθέναν από τους προτεινόμενους τρόπους μοντελοποίησης ως σύστημα πολλαπλών σωμάτων.

Στο Κεφάλαιο 5, δίνονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εκπόνηση της παρούσας ΔΕ και προτάσεις για μελλοντική εργασία βάσει αυτής.

## 2. Βιβλιογραφική ανασκόπηση

### 2.1 Συνήθεις τύποι συστημάτων ανάρτησης τροχοφόρων οχημάτων

Στην παρούσα ΔΕ γίνεται λόγος κυρίως για μηχανισμούς ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, ωστόσο στα επόμενα κεφάλαια γίνονται σύντομες αναφορές και σε ορισμένους άλλους τύπους αναρτήσεων που απαντώνται συχνά στα σύγχρονα τροχοφόρα οχήματα. Για λόγους πληρότητας, ακολουθεί συνοπτική παρουσίαση του τρόπου λειτουργίας των μηχανισμών αυτών.

#### 2.1.1 Ημιάκαμπτος άξονας

Ο ημιάκαμπτος άξονας (semi-rigid axle/twist beam/torsion beam suspension) είναι ένας τύπος ημιεξαρτώμενης ανάρτησης (semi-dependent suspension) που χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο στον πίσω άξονα προσθιοκίνητων οχημάτων χαμηλού κόστους και μικρού μεγέθους. Σε αυτό το σύστημα ανάρτησης υπάρχει μηχανική σύνδεση μεταξύ αριστερού και δεξιού τροχού του άξονα, μέσω μιας εύκαμπτης εγκάρσιας δοκού (lateral crossmember) που συνδέει δύο δύσκαμπτους υστερούντες βραχίονες (trailing links) επί των οποίων εδράζονται οι πλήμνες των τροχών (wheel hubs), τα ελατήρια και οι αποσβεστήρες, ενώ το ένα άκρο κάθε βραχίονα συνδέεται στο πλαίσιο μέσω άρθρωσης (Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1: Σύστημα ανάρτησης ημιάκαμπτου άξονα [5]

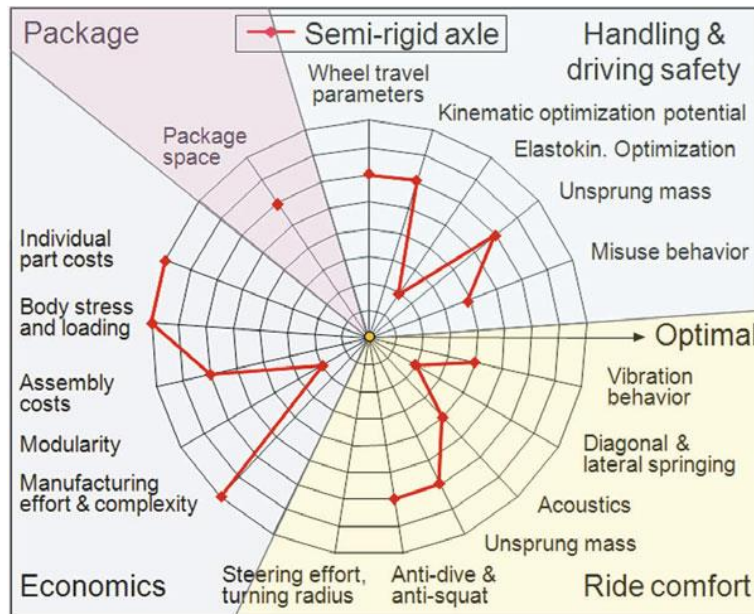
Όταν οι τροχοί μετατοπίζονται σε φάση (in-phase displacement), ο ημιάκαμπτος άξονας παραμορφώνεται κατ' ελάχιστο, με αποτέλεσμα να προκύπτουν πολύ μικρές αλλαγές στη γεωμετρία της ανάρτησης σε σχέση με την ονομαστική. Αντίθετα, η μετατόπιση των τροχών



εκτός φάσης (out-of-phase displacement) οδηγεί σε ελαστική παραμόρφωση της εύκαμπτης εγκάρσιας δοκού, η οποία μάλιστα μπορεί να είναι αρκετά μεγάλου πλάτους, με αποτέλεσμα η τελική γεωμετρία της ανάρτησης να εξαρτάται έντονα από τη σύνθετη παραμορφωσιακή κατάσταση του ημιάκαμπτου άξονα που προκύπτει για τις εκάστοτε συνθήκες φόρτισης.

Ο σχεδιασμός του ημιάκαμπτου άξονα ως ανεξάρτητο τεμάχιο είναι ιδιαίτερα απαιτητικός καθώς περιλαμβάνει αναπόφευκτα πολλούς συμβιβασμούς εξαιτίας του δομικού και λειτουργικού ρόλου του. Πιο συγκεκριμένα, ένας ημιάκαμπτος άξονας πρέπει να είναι αρκετά στιβαρός ώστε να μην τίθεται θέμα δομικής ακεραιότητας (structural integrity), αλλά ταυτόχρονα αρκετά εύκαμπτος ώστε να επιτρέπει σχετική κίνηση μεταξύ των τροχών του άξονα κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, προσιδιάζοντας σε ένα σύστημα ανεξάρτητης ανάρτησης (independent suspension). Έτσι, μια ανάρτηση ημιάκαμπτου άξονα μπορεί να προσφέρει σαφώς βελτιωμένα χαρακτηριστικά άνεσης συγκριτικά με μια ανάρτηση άκαμπτου άξονα (rigid axle), στην οποία οι τροχοί εδράζονται επί μιας άκαμπτης εγκάρσιας δοκού. Επιπλέον, προκειμένου να επιτευχθούν τα επιθυμητά κινηματικά χαρακτηριστικά που αναφέρονται στην Ενότητα 2.2, για όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εύρος κίνησης των τροχών, συχνά γίνεται χρήση εγκάρσιων δοκών μεταβλητής διατομής.

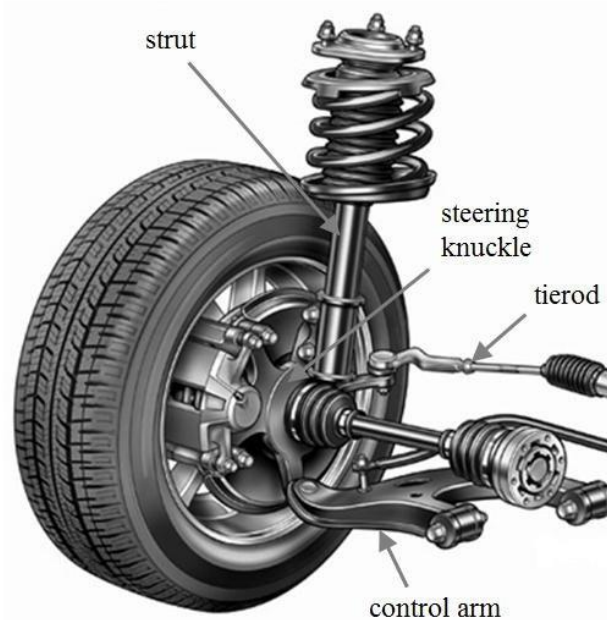
Λόγω του χαμηλού της κόστους, η ανάρτηση ημιάκαμπτου άξονα χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα σε πολλά οχήματα παρά τις δυσκολίες στο σχεδιασμό και την περιορισμένη ελευθερία που προσφέρει ως προς την επίτευξη των επιθυμητών κινηματικών χαρακτηριστικών. Στο Σχήμα 2.2 δίνονται σε μορφή διαγράμματος τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του εν λόγω συστήματος ανάρτησης.



Σχήμα 2.2: Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ανάρτησης ημιάκαμπτου άξονα [6]

### 2.1.2 Γόνατα MacPherson

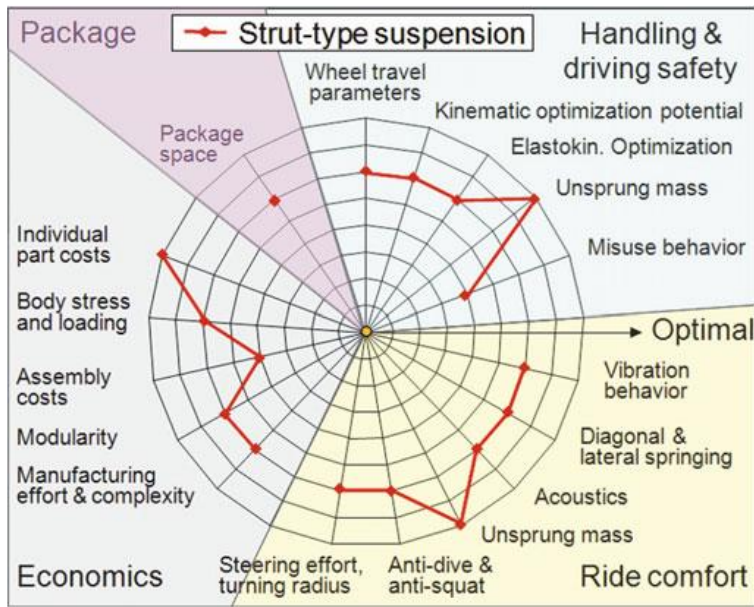
Τα γόνατα MacPherson (MacPherson struts suspension) είναι με διαφορά το συχνότερα χρησιμοποιούμενο σύστημα ανάρτησης στον εμπρόσθιο άξονα οχημάτων που κατασκευάστηκαν από το 1970 και έπειτα. Το φερόμενο ως «γόνατο» (strut) είναι ουσιαστικά ένας μηχανικός σύνδεσμος αποτελούμενος από δύο κυλινδρικούς σωλήνες, ένας εκ των οποίων μπορεί να περιστρέφεται και να ολισθαίνει εντός του άλλου. Στην εσωτερική κοιλότητα του συνδέσμου αυτού τοποθετείται ο αποσβεστήρας (damper strut), ενώ συνήθως εξωτερικά και ομοαξονικά τοποθετείται το ελατήριο όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3 (coilover strut). Το κατώτερο άκρο του γονάτου πακτώνεται στο φορέα του τροχού (wheel carrier), ενώ το ανώτερο άκρο του συνδέεται στο πλαίσιο μέσω σφαιρικού συνδέσμου (spherical joint).



**Σχήμα 2.3: Σύστημα ανάρτησης με γόνατα MacPherson [7]**

Το σύστημα ανάρτησης με γόνατα MacPherson περιλαμβάνει δύο ακόμα μηχανικούς συνδέσμους: το βραχίονα ελέγχου (control arm) και τη ράβδο διεύθυνσης/συγκράτησης (steering/tie rod). Ο βραχίονας ελέγχου συνδέεται σε δύο σημεία του πλαισίου και στο φορέα του τροχού μέσω αρθρώσεων, ενώ η ράβδος διεύθυνσης/συγκράτησης φέρει σφαιρικές αρθρώσεις και στα δύο άκρα της, συνδέοντας το φορέα του τροχού με το σύστημα διεύθυνσης ή το πλαίσιο.

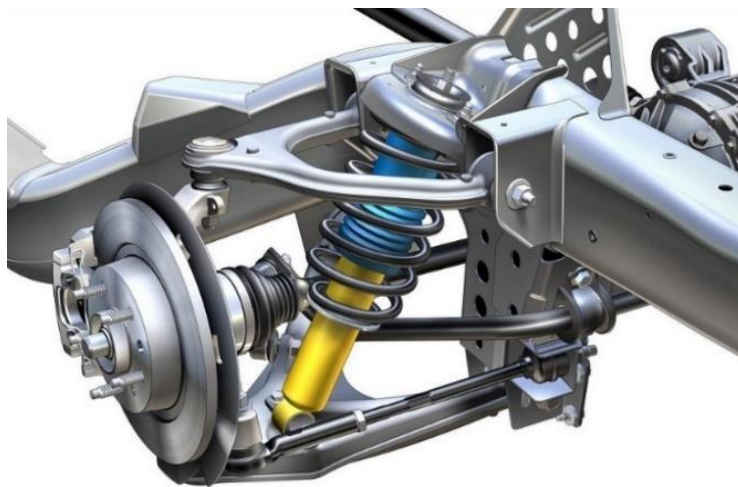
Πρόκειται, λοιπόν, για ένα ανεξάρτητο σύστημα ανάρτησης το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως εξαιτίας του απλού και συμπαγή σχεδιασμού του και της μεγάλης επιφάνειας στήριξης του πλαισίου, η οποία οδηγεί σε αντιδράσεις στήριξης μικρού πλάτους [6]. Στο Σχήμα 2.4 δίνονται σε μορφή διαγράμματος τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της ανάρτησης με γόνατα MacPherson.



Σχήμα 2.4: Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ανάρτησης με γόνατα MacPherson [6]

### 2.1.3 Διπλά ψαλίδια

Το σύστημα ανάρτησης διπλών ψαλιδιών (double wishbone suspension) πήρε το όνομά του από τη χρήση 2 βραχιόνων ελέγχου, οι οποίοι συχνά αποκαλούνται «ψαλίδια» λόγω του σχήματός τους, για τη σύνδεση του πλαισίου με το φορέα του τροχού μέσω αρθρώσεων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5. Συνήθως, ο ανώτερος βραχίονας ελέγχου (upper control arm) έχει μικρότερο εγκάρσιο μήκος από τον κατώτερο (lower control arm), αφενός μεν για την επίτευξη των επιθυμητών κινηματικών χαρακτηριστικών, αφετέρου δε για τη μεγιστοποίηση του διαθέσιμου χώρου στο μηχανοστάσιο ή/και το χώρο αποσκευών του εκάστοτε οχήματος (Short Long Arm/SLA suspension).

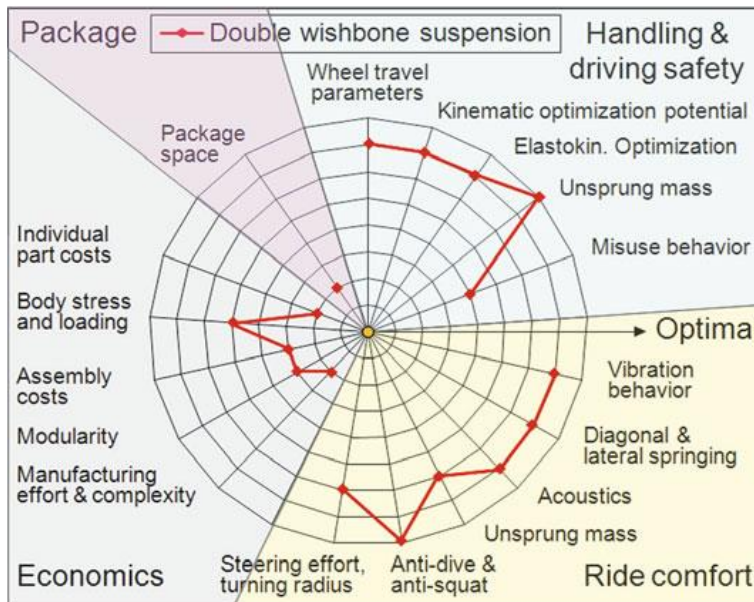


Σχήμα 2.5: Σύστημα ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [8]



Τα κινηματικά χαρακτηριστικά του μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών μπορούν να βελτιστοποιηθούν μεταβάλλοντας τις θέσεις 8 ανεξάρτητων μεταξύ τους σημείων (hardpoints) σε κάθε τροχό [6]. Επιπλέον, ο εν λόγω τύπος ανάρτησης συνδυάζει αυξημένη δυσκαμψία με σχετικά χαμηλό βάρος, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιείται κατά κόρον σε οχήματα υψηλών επιδόσεων όπου η επαγόμενη περιπλοκότητα και το κόστος δεν αποτελούν περιοριστικούς παράγοντες.

Το σύστημα ανάρτησης διπλών ψαλιδιών αναλύεται διεξοδικά στα επόμενα κεφάλαια και στο Σχήμα 2.6 δίνονται συνοπτικά σε μορφή διαγράμματος ορισμένα από τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα του.

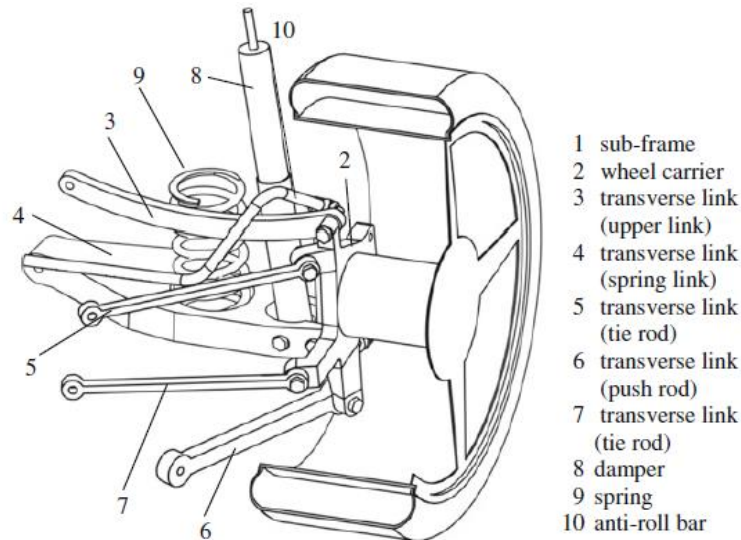


Σχήμα 2.6: Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [6]

#### 2.1.4 Ανάρτηση πολλαπλών συνδέσμων

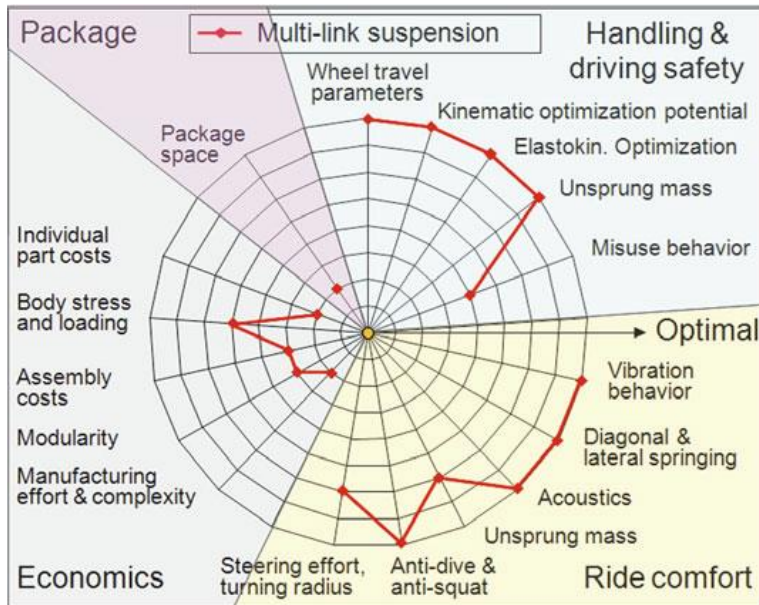
Δεν υπάρχει κάποιος αυστηρός ορισμός για τα συστήματα ανάρτησης πολλαπλών συνδέσμων (multilink suspension). Εν γένει, αυτά αποτελούνται από μηχανικούς συνδέσμους (links), συνήθως 4 ή 5, που φέρουν στα άκρα τους αρθρώσεις και συνδέουν το πλαίσιο με το φορέα του τροχού. Η χρήση πολλαπλών ανεξάρτητων συνδέσμων αντί βραχιόνων ελέγχου για τη δέσμευση βαθμών ελευθερίας του τροχού, προσφέρει μεγάλη ελευθερία κατά το σχεδιασμό όσον αφορά την επίτευξη των επιθυμητών κινηματικών χαρακτηριστικών, ενώ μέσω κατάλληλων εύκαμπτων αρθρώσεων (bushings/flexible joints – Υποενότητα 2.4.2) μπορεί να επιτευχθεί πολύ καλή ελαστοκινηματική συμπεριφορά. Παρόλα αυτά, υπάρχουν παραλλαγές του εν λόγω μηχανισμού ανάρτησης, όπου κάποιοι από τους ανεξάρτητους συνδέσμους αντικαθίστανται από βραχίονες ελέγχου παρόμοιας γεωμετρίας με αυτούς που χρησιμοποιούνται στην ανάρτηση διπλών ψαλιδιών. Στο Σχήμα 2.7 δίνεται μια ενδεικτική σχηματική απεικόνιση ανάρτησης πολλαπλών συνδέσμων.

Σημειώνεται εδώ ότι δύο συστήματα ανάρτησης πολλαπλών συνδέσμων μπορεί να διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους, τόσο εμφανισιακά όσο και λειτουργικά.



Σχήμα 2.7: Σύστημα ανάρτησης πολλαπλών συνδέσμων [5]

Η ανάρτηση πολλαπλών συνδέσμων εισήχθη για πρώτη φορά σε όχημα παραγωγής κατά τη δεκαετία του 1960 από τη Mercedes-Benz και έκτοτε υιοθετήθηκε από πολλές αυτοκινητοβιομηχανίες για χρήση κυρίως στον οπίσθιο άξονα οχημάτων μεσαίου και μεγάλου μεγέθους. Στο Σχήμα 2.8 δίνονται σε μορφή διαγράμματος τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του εν λόγω συστήματος ανάρτησης.



Σχήμα 2.8: Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ανάρτησης πολλαπλών συνδέσμων [6]

## 2.2 Χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη συστημάτων ανάρτησης

Σε αυτήν την ενότητα δίνονται οι ορισμοί των κυριότερων γεωμετρικών μεγεθών που χαρακτηρίζουν ένα σύστημα ανάρτησης. Ο υπολογισμός των μεγεθών αυτών αποτελεί άλλωστε και ένα από τους βασικούς λόγους που καθιστούν απαραίτητη την κινηματική και ελαστοκινηματική ανάλυση κατά τη φάση σχεδιασμού οποιουδήποτε τέτοιου συστήματος. Οι ορισμοί που ακολουθούν αναφέρονται στους αριστερούς τροχούς του εκάστοτε οχήματος και ισχύουν ανεξαρτήτως της αρχιτεκτονικής του συστήματος ανάρτησης, εκτός εάν αναφέρεται ρητά το αντίθετο.

Η αρχή του κάτωθι χρησιμοποιούμενου συστήματος συντεταγμένων ταυτίζεται με το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από τα κέντρα των τροχών που ανήκουν στον ίδιο άξονα όταν οι τελευταίοι βρίσκονται στην ονομαστική τους θέση, με το διάμηκες επίπεδο συμμετρίας του οχήματος. Ο άξονας  $x$  είναι παράλληλος και ο άξονας  $y$  κάθετος προς αυτό το επίπεδο με θετική φορά προς τα εμπρός και αριστερά αντίστοιχα, σε σχέση με τον οδηγό του οχήματος. Πρόκειται για δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων, επομένως η κατεύθυνση του άξονα  $z$  προκύπτει με βάση τα προηγούμενα.

### 2.2.1 Κατακόρυφη, εγκάρσια και διαμήκης μετατόπιση τροχού

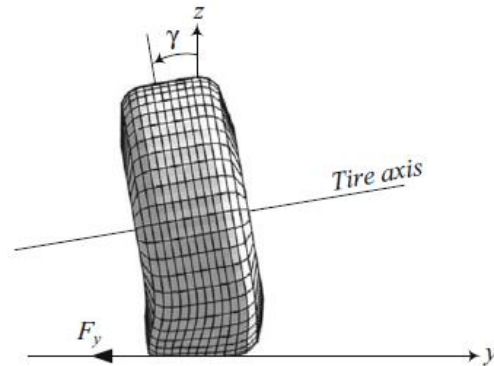
Κατά τη λειτουργία ενός συστήματος ανάρτησης οι τροχοί μετατοπίζονται εν γένει προς όλες τις κατευθύνσεις σε σχέση με το πλαίσιο. Η κύρια συνιστώσα της μετατόπισης αυτών είναι η κατακόρυφη (bump movement), η οποία λαμβάνεται συχνά ως ανεξάρτητη μεταβλητή της κινηματικής ανάλυσης μηχανισμών ανάρτησης, συναρτήσει της οποίας εκφράζονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών για τα υπόλοιπα γεωμετρικά μεγέθη σε μορφή διαγραμμάτων ή πινάκων. Σημειώνεται εδώ ότι κινηματική ανάλυση μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε συστήματα ανάρτησης των οποίων τα μέλη δεν έχουν κανένα βαθμό ελευθερίας απολύτως στερεού σώματος (Ενότητα 3.1) [4].

Η κατακόρυφη συνιστώσα μετατόπισης θεωρείται θετική όταν ο τροχός μετατοπίζεται προς τα θετικά του άξονα  $z$ , ενώ η εγκάρσια (wheel scrub/half-track change/axle tramp) και η διαμήκης (wheel recession) μετατόπιση αυτού θεωρούνται θετικές όταν λαμβάνουν χώρα κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $y$  και  $x$  αντίστοιχα. Τέλος, στο πλαίσιο αυτής της ΔΕ η μετατόπιση του τροχού αναφέρεται στο κέντρο του σώτρου και όχι στο σημείο επαφής του ελαστικού επισώτρου με το οδόστρωμα.

### 2.2.2 Γωνία κλίσης και γωνία σύγκλισης τροχού

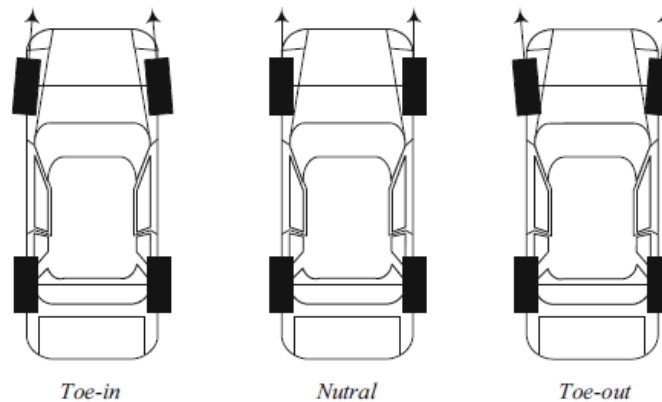
Η γωνία κλίσης  $\gamma$  (camber angle) ενός τροχού, ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ ενός επιπέδου (wheel plane), κάθετου ως προς τον άξονα περιστροφής/κύλισης του πρώτου (spindle axis) και της κατακόρυφης διεύθυνσης [4], ενώ λαμβάνεται ως θετική όταν το άνω μέρος του τροχού κλίνει προς τα έξω σε σχέση με το όχημα (Σχήμα 2.9). Κατά τη σχεδίαση ενός συστήματος ανάρτησης πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στη γωνία κλίσης των τροχών, έτσι ώστε αυτή να διατηρείται όσο το δυνατόν περισσότερο εντός ενός

ωφέλιμου, όσον αφορά την ανάπτυξη δυνάμεων πρόσφυσης από τα ελαστικά επίσωτρα, εύρους.



**Σχήμα 2.9: Ελαστικοφόρος τροχός υπό γωνία κλίσης  $\gamma$  [1]**

Η γωνία σύγκλισης  $\delta$  (toe angle) ενός τροχού, ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του διαμήκου επιπέδου συμμετρίας του οχήματος και της ευθείας που προκύπτει από την τομή ενός επιπέδου, κάθετου στον άξονα κύλισης του πρώτου, με το οριζόντιο επίπεδο [4], ενώ λαμβάνεται ως θετική όταν το εμπρός μέρος του τροχού κλίνει προς το όχημα (toe-in – Σχήμα 2.10). Η γωνία σύγκλισης συχνά καλείται και γωνία στροφής (steer angle), ωστόσο, στο πλαίσιο αυτής της ΔΕ ως γωνία στροφής θα αναφέρεται η γωνία σύγκλισης που εισάγεται στους τροχούς αποκλειστικά μέσω επενέργειας του οδηγού στο σύστημα διεύθυνσης.

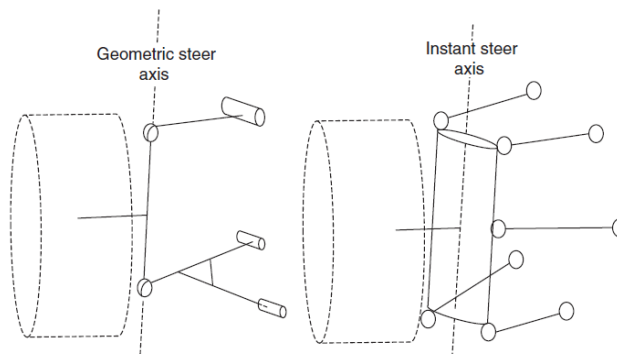


**Σχήμα 2.10: Θετική, ουδέτερη και αρνητική σύγκλιση τροχών [1]**

### 2.2.3 Γωνία caster και μηχανικό ίχνος

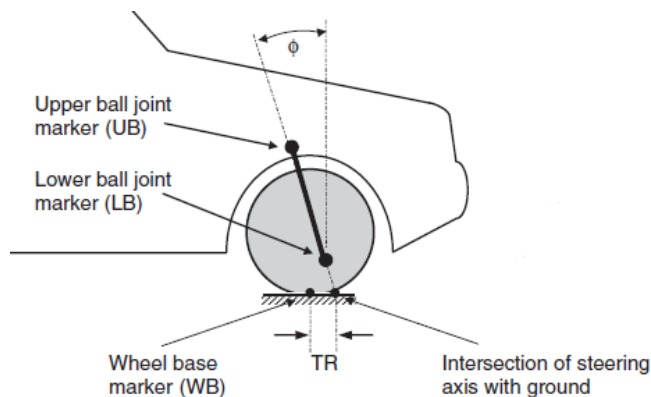
Η γωνία caster (ή castor)  $\varphi$  ενός τροχού, ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της κατακόρυφης διεύθυνσης και της προβολής του άξονα διεύθυνσης του τροχού (steering axis  $\neq$  steering axle) επί του διαμήκου επιπέδου συμμετρίας του οχήματος. Λαμβάνεται ως θετική όταν η προαναφερθείσα προβολή κλίνει προς τα πίσω.

Ο άξονας διεύθυνσης ενός τροχού προσδιορίζεται διαφορετικά ανάλογα με τον τύπο του συστήματος ανάρτησης που χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση. Για παράδειγμα, σε ένα σύστημα ανάρτησης διπλών ψαλιδιών ο άξονας διεύθυνσης διέρχεται από τα σημεία σύνδεσης των βραχιόνων ελέγχου με το φορέα του τροχού, προσδιορίζεται δηλαδή με αμιγώς γεωμετρικό τρόπο όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.11. Παρόμοια, σε μια ανάρτηση με γόνατα MacPherson ο άξονας διεύθυνσης διέρχεται από το σημείο έδρασης του γονάτου στο πλαίσιο και από το σημείο σύνδεσης του βραχίονα ελέγχου με το φορέα του τροχού. Αντίθετα, σε μια ανάρτηση πολλαπλών συνδέσεων η διεύθυνση του εν λόγω άξονα εν γένει δεν προκύπτει άμεσα από τη γεωμετρία του μηχανισμού, αλλά απαιτούνται επιπλέον υπολογισμοί προκειμένου να προσδιοριστεί ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής του φορέα του τροχού που ταυτίζεται με τον άξονα διεύθυνσης του τελευταίου.



**Σχήμα 2.11: Προσδιορισμός άξονα περιστροφής του φορέα του τροχού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών και πολλαπλών συνδέσεων [4]**

Το μηχανικό ίχνος (mechanical/caster trail) ορίζεται ως η διαμήκης απόσταση μεταξύ του σημείου επαφής του τροχού με το έδαφος (wheel base) και του σημείου τομής του άξονα διεύθυνσης, επίσης, με το έδαφος (Σχήμα 2.12). Αυτή η απόσταση ουσιαστικά αποτελεί το μοχλοβραχίονα για την ανάπτυξη ροπής γύρω από τον άξονα διεύθυνσης όταν αναπτύσσεται εγκάρσια δύναμη πρόσφυσης μεταξύ τροχών και οδοστρώματος [9].

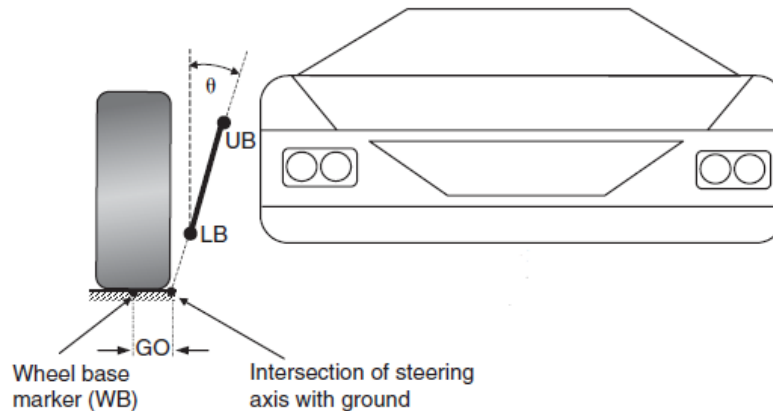


**Σχήμα 2.12: Γωνία caster και μηχανικό ίχνος ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [4]**



### 2.2.4 Γωνία βασιλικού πείρου και scrub radius

Η γωνία βασιλικού πείρου  $\theta$  (King Pin Inclination/KPI) ενός τροχού, ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της κατακόρυφης διεύθυνσης και της προβολής του άξονα διεύθυνσης του τροχού επί ενός επιπέδου κάθετου ως προς το διάμηκες επίπεδο συμμετρίας του οχήματος (Σχήμα 2.13). Λαμβάνεται ως θετική όταν η προαναφερθείσα προβολή κλίνει προς το εσωτερικό του οχήματος.



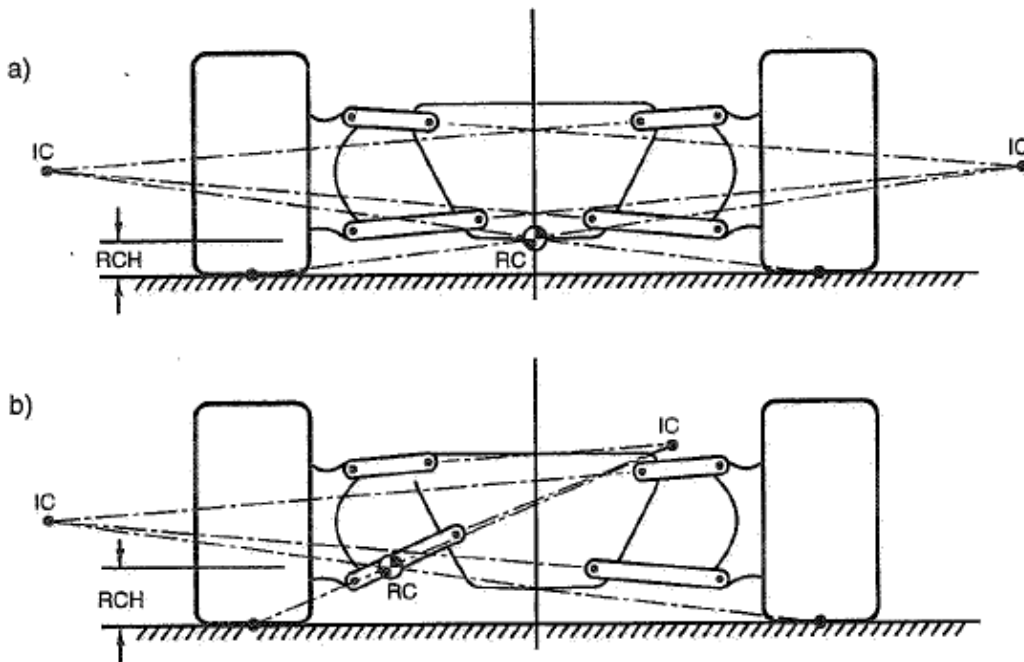
**Σχήμα 2.13: Γωνία βασιλικού πείρου και scrub radius ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [4]**

Το scrub radius ορίζεται ως η εγκάρσια απόσταση μεταξύ του σημείου επαφής του τροχού με το έδαφος και του σημείου τομής του άξονα διεύθυνσης, επίσης, με το έδαφος. Αυτή η απόσταση πρακτικά αποτελεί το μοχλοβραχίονα για την ανάπτυξη ροπής γύρω από τον άξονα διεύθυνσης όταν αναπτύσσεται διαμήκης δύναμη πρόσφυσης μεταξύ τροχών και οδοστρώματος.

### 2.2.5 Θέσεις στιγμιαίων κέντρων περιστροφής και κέντρου κλυδωνισμού

Ιδιαίτερα σημαντικές όσον αφορά την επίδραση του συστήματος ανάρτησης στη δυναμική συμπεριφορά του οχήματος είναι οι θέσεις των στιγμιαίων κέντρων περιστροφής των τροχών (instant centers) και του κέντρου κλυδωνισμού της ανηρτημένης μάζας (roll center). Όπως και ο άξονας διεύθυνσης, έτσι και τα εν λόγω κέντρα περιστροφής, προσδιορίζονται διαφορετικά ανάλογα με τον τύπο του συστήματος ανάρτησης που χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση. Στη συνέχεια δίνεται μια σύντομη περιγραφή της κλασικής γραφικής/γεωμετρικής μεθόδου μέσω της οποίας προσδιορίζονται οι θέσεις των σημείων αυτών για αναρτήσεις διπλών ψαλιδιών και αναρτήσεις με γόνατα MacPherson.

Ξεκινώντας με την ανάρτηση διπλών ψαλιδιών, το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής αυτής προσδιορίζεται ως το σημείο τομής δύο ευθειών, παράλληλων ως προς τον ανώτερο και κατώτερο βραχίονα ελέγχου (Σχήμα 2.14a). Μπορεί, λοιπόν, να θεωρηθεί ότι κάθε τροχός εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής του, ακτίνας ίσης με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το σημείο επαφής του με το έδαφος και το αντίστοιχο στιγμιαίο κέντρο περιστροφής (Front View Swing Arm/FVSA).

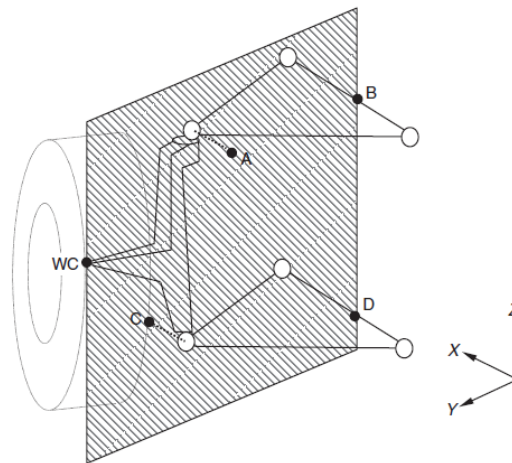


**Σχήμα 2.14: Στιγμαία κέντρα περιστροφής και κέντρο κλυδωνισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [10]**

Η θέση του κέντρου κλυδωνισμού της ανηρτημένης μάζας προσδιορίζεται ως το σημείο τομής δύο ευθειών, διερχόμενων από το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής και το σημείο επαφής καθενός από τους τροχούς του μελετώμενου άξονα με το οδόστρωμα (Σχήμα 2.14a). Από τον παραπάνω ορισμό είναι φανερό ότι το κέντρο κλυδωνισμού δε βρίσκεται απαραίτητα επί του διαμήκου επιπέδου συμμετρίας του οχήματος, όπως πράγματι συμβαίνει σε αναρτήσεις ασύμμετρης γεωμετρίας ή όταν η γωνία κλυδωνισμού (roll angle) είναι μη μηδενική κατά την πλευρική επιτάχυνση του οχήματος (Σχήμα 2.14b) [10].

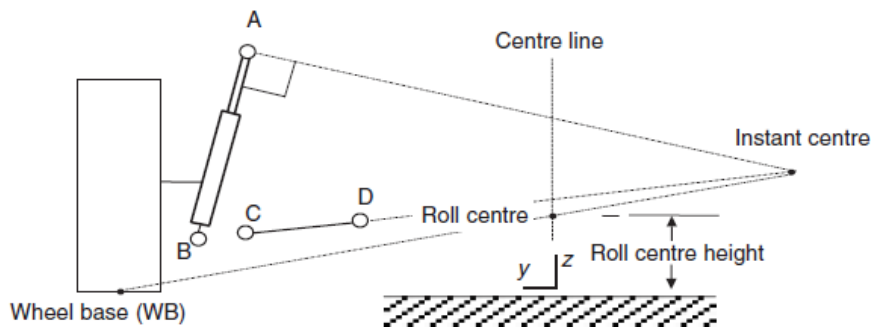
Στο σημείο αυτό διευκρινίζεται ότι η διδιάστατη αναπαράσταση ενός συστήματος ανάρτησης διπλών ψαλιδιών όπως στο Σχήμα 2.14, αποτελεί μια απλοποίηση της τρισδιάστατης γεωμετρίας του πραγματικού συστήματος. Έτσι όλα τα σημεία, οι ευθείες και τα ευθύγραμμα τμήματα που αναφέρονται στους ορισμούς που δόθηκαν παραπάνω για τα στιγμιαία κέντρα περιστροφής των τροχών και το κέντρο κλυδωνισμού της ανηρτημένης μάζας θεωρείται ότι ανήκουν εξ ολοκλήρου στο κατακόρυφο επίπεδο που διέρχεται από τα κέντρα των τροχών του εκάστοτε άξονα.

Προκειμένου να αναχθούν σε αυτό το επίπεδο τα σημεία σύνδεσης των βραχιόνων ελέγχου με το πλαίσιο, απαιτείται γραμμική παρεμβολή μεταξύ των αντίστοιχων σημείων στον τρισδιάστατο χώρο (Σχήμα 2.15, σημεία B, D), ενώ όσον αφορά τα σημεία σύνδεσης των βραχιόνων ελέγχου με τους φορείς των τροχών, αρκεί αυτά να μετατοπιστούν κατά τη διαμήκη κατεύθυνση, έως ότου συμπέσουν με το εν λόγω κατακόρυφο επίπεδο (Σχήμα 2.15, σημεία A, C).



**Σχήμα 2.15: Σημεία για τον προσδιορισμό του στιγμιαίου κέντρου περιστροφής ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [4]**

Σε αντιστοιχία με όσα ειπώθηκαν παραπάνω, το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής του τροχού σε ένα σύστημα ανάρτησης με γόνατα MacPherson, ορίζεται ως το σημείο τομής μιας ευθείας παράλληλης στο βραχίονα ελέγχου και μιας δεύτερης ευθείας, διερχόμενης από το σημείο σύνδεσης του γονάτου στο πλαίσιο και κάθετης στον άξονα αυτού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.16. Για τον προσδιορισμό της θέσης του κέντρου κλυδωνισμού ακολουθείται η ίδια διαδικασία με αυτή που περιγράφηκε για το μηχανισμό ανάρτησης διπλών ψαλιδιών. Προφανώς, το γόνατο και ο βραχίονας ελέγχου στη γενική περίπτωση δε μπορούν να αναπαρασταθούν στο επίπεδο, γι' αυτό και ακολουθείται η ίδια μέθοδος γεωμετρικού «εκφυλισμού» τους στις 2 διαστάσεις, όπως προηγουμένως.



**Σχήμα 2.16: Στιγμιαίο κέντρο περιστροφής και κέντρο κλυδωνισμού ανάρτησης με γόνατα MacPherson [4]**

Εκτός των όσων ήδη αναφέρθηκαν, υπάρχουν ορισμένα ακόμα χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη συστημάτων ανάρτησης, τα οποία αφορούν κυρίως τη διαμήκη δυναμική οχήματος (pitch center, anti-features) και δε θα αναλυθούν στο πλαίσιο αυτής της ΔΕ. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο ορισμού και τη χρησιμότητα αυτών των μεγεθών, ο αναγνώστης παραπέμπεται στις πηγές [6] και [10].

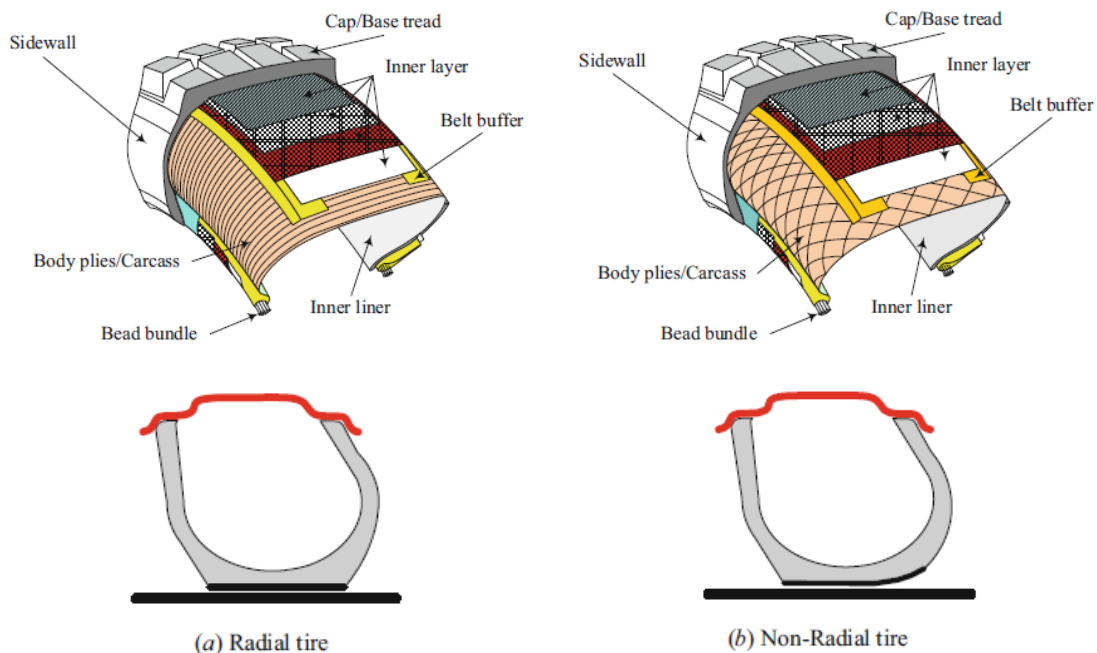


## 2.3 Γεωμετρία ανάρτησης & δυναμική οχήματος

Ο όρος «γεωμετρία ανάρτησης» αναφέρεται στο πώς οι μη ανηρτημένες μάζες ενός οχήματος (σώτρα, φορείς τροχών κ.λπ.) συνδέονται με την ανηρτημένη μάζα αυτού. Η γεωμετρία ενός συστήματος ανάρτησης καθορίζει, όχι μόνο την τροχιά σχετικής κίνησης μεταξύ ανηρτημένης και μη ανηρτημένων μαζών, αλλά και τα φορτία που αναπτύσσονται στους μεταξύ αυτών συνδέσμους [10]. Συνεπώς, μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τη διαδικασία σχεδιασμού ενός οχήματος ως προς την εκπλήρωση προδιαγραφών σχετιζόμενων με τη δυσκαμψία (stiffness) και το βάρος διαφόρων τεμαχίων, αλλά και τη γενικότερη χωροταξία του πρώτου (packaging, wheel assembly/suspension envelopes). Παρόλα αυτά, ο κυριότερος λόγος για τον οποίο η γεωμετρία της ανάρτησης είναι ιδιαίτερα σημαντική για ένα όχημα δεν είναι άλλος από την επίδραση που αυτή έχει στις αναπτυσσόμενες, από τους ελαστικοφόρους τροχούς, δυνάμεις πρόσφυσης.

### 2.3.1 Δυναμική ελαστικοφόρων τροχών

Τα ελαστικά επισώτρα ή ελαστικά (tires) είναι τα μόνα μέρη του οχήματος που έρχονται σε επαφή με το οδόστρωμα και σε μεγάλο βαθμό καθορίζουν τις επιδόσεις του πρώτου όσον αφορά τη διαμήκη και εγκάρσια δυναμική του (longitudinal/lateral vehicle dynamics). Τα σύγχρονα ελαστικά διακρίνονται σε ακτινικά (radial) και μη ακτινικά (non-radial/cross-ply/bias-ply) ανάλογα με τον προσανατολισμό των ενισχυτικών ινών τους (body plies/carcass – Σχήμα 2.17), εξαιτίας του οποίου εμφανίζουν διαφορετική παραμορφωσιακή συμπεριφορά.



Σχήμα 2.17: Δομή και παραμορφωσιακή συμπεριφορά ακτινικών και μη ακτινικών ελαστικών επισώτρων [1]

Όσον αφορά τα δυναμικά χαρακτηριστικά των ελαστικών (tire dynamics), αυτά προσδιορίζονται κατά κύριο λόγο μέσω πειραματικών δοκιμών που λαμβάνουν χώρα σε διατάξεις όπως αυτές που φαίνονται στο Σχήμα 2.18. Κατά τη διάρκεια των δοκιμών, τα ελαστικά κυλινδώνται επί ενός ταινιοδρόμου υπό φορτία που αντιστοιχούν σε πραγματικές συνθήκες λειτουργίας, ενώ ταυτόχρονα λαμβάνονται μετρήσεις πληθώρας μεγεθών με μεγάλη συχνότητα δειγματοληψίας.



**Σχήμα 2.18: Πειραματικές διατάξεις προσδιορισμού δυναμικών χαρακτηριστικών ελαστικών επισώτρων [11], [12]**

Απώτερος σκοπός των ανωτέρω δοκιμών είναι η χρήση των πειραματικών δεδομένων που προκύπτουν για τη δημιουργία μαθηματικών μοντέλων (tire models), που συσχετίζουν τις αναπτυσσόμενες δυνάμεις πρόσφυσης κατά τη διαμήκη και εγκάρσια διεύθυνση των ελαστικών με άλλα μετρούμενα ή υπολογιζόμενα μεγέθη, όπως για παράδειγμα ο λόγος διαμήκουσ ολίσθησης (slip ratio) και η γωνία πλαγιολίσθησης (tire sideslip angle). Εν συνεχεία, τα μοντέλα ελαστικών ενσωματώνονται σε λογισμικά προσομοίωσης της δυναμικής του πλήρους οχήματος (full car model simulation), τα οποία αποτελούν εδώ και περίπου δύο δεκαετίες απαραίτητο εργαλείο κατά τη φάση σχεδιασμού (και όχι μόνο) ενός οχήματος.

Ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο ημιεμπειρικό μοντέλο μέσω του οποίου υπολογίζονται οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις και ροπές στη διεπιφάνεια ελαστικού-οδοστρώματος είναι η λεγόμενη “Magic Formula”. Η ανάπτυξη του μοντέλου ξεκίνησε στα μέσα της δεκαετίας του 1980 ως αποτέλεσμα συνεργασίας του τεχνικού πανεπιστημίου του Delft (H. Pacejka) και της αυτοκινητοβιομηχανίας Volvo (E. Bakker) και συνεχίστηκε με τη μεταγενέστερη κυκλοφορία, βελτιωμένων ως προς την ακρίβεια, εκδόσεων [13].

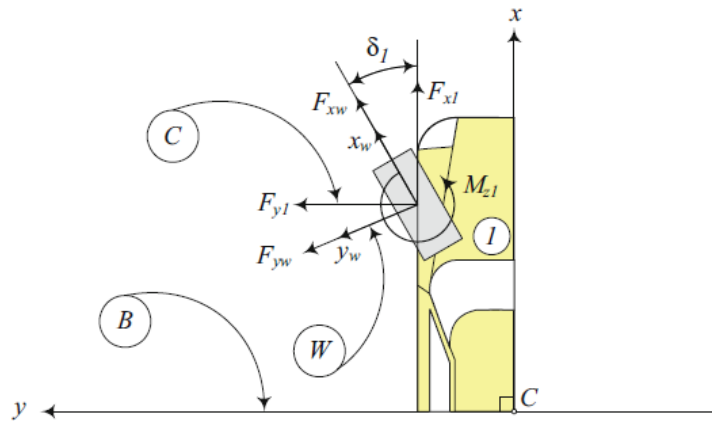
Η έκδοση Magic Formula 5.2 συμπεριλαμβάνεται σε πολλά εμπορικά λογισμικά προσομοίωσης δυναμικής οχήματος, αφού συνδυάζει ικανοποιητική ακρίβεια αποτελεσμάτων με σχετικά περιορισμένη πολυπλοκότητα. Ειδικότερα, ως δεδομένα εισόδου στο συγκεκριμένο μοντέλο ελαστικών δίνονται:

- το κάθετο φορτίο  $F_z$  που ασκείται στον τροχό
- ο λόγος διαμήκους ολίσθησης  $\kappa$
- η γωνία πλαγιολίσθησης του ελαστικού  $\alpha$  και
- η γωνία κλίσης του τροχού  $\gamma$

ενώ τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από το μοντέλο είναι εκτιμήσεις τιμών για:

- τη διαμήκη δύναμη πρόσφυσης  $F_{xw}$
- την εγκάρσια δύναμη πρόσφυσης  $F_{yw}$
- τη ροπή ανατροπής  $M_x$  (overturning moment)
- τη ροπή αντίστασης κύλισης  $M_y$  (rolling resistance moment) και
- τη ροπή αυτοευθυγράμμισης  $M_z$  (self-aligning moment)

που ασκούνται μεταξύ ελαστικού και οδοστρώματος (Σχήμα 2.19).



**Σχήμα 2.19: Σύστημα δυνάμεων και ροπών πρόσφυσης ελαστικοφόρου τροχού [1]**

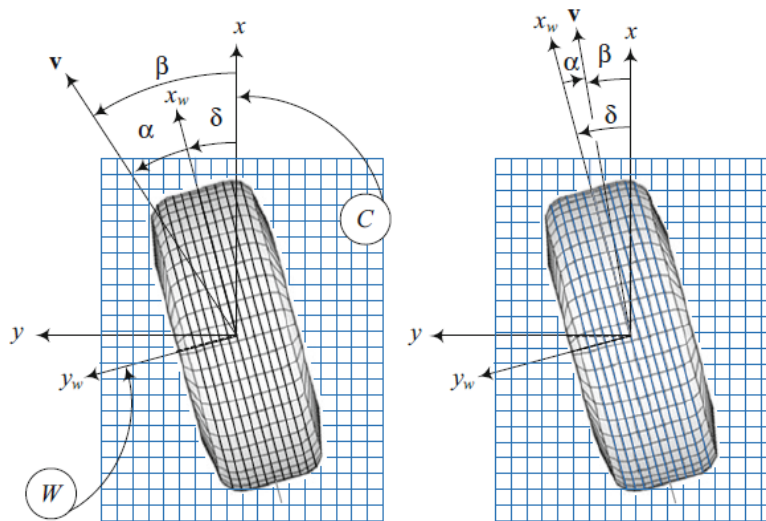
Ο λόγος διαμήκους ολίσθησης  $\kappa$  δεν εμπίπτει στο πλαίσιο της παρούσας ΔΕ, ωστόσο για λόγους πληρότητας δίνεται ο ορισμός του:

$$\kappa = \frac{R_g \omega_w}{v_x} - 1 \quad (2.1)$$

όπου,  $R_g$ , η γεωμετρική και άφορτη ακτίνα του ελαστικού (geometric and unloaded tire radius),  $\omega_w$ , η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής αυτού και  $v_x$ , η συνιστώσα της μεταφορικής ταχύτητάς του κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x$ , όπως αυτή ορίζεται στο σύστημα

συντεταγμένων  $W$  (Σχήμα 2.19), η αρχή του οποίου τοποθετείται στο κέντρο του τροχού και επιπλέον αυτό ακολουθεί όλες τις κινήσεις του τελευταίου εκτός της περιστροφής γύρω από τον τοπικό άξονα  $y$  (κύλιση). Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το λόγο διαμήκους ολίσθησης, ο αναγνώστης παραπέμπεται στις πηγές [1] και [13].

Από την άλλη πλευρά, η γωνία πλαγιολίσθησης  $\alpha$  ενός ελαστικού είναι ένα μέγεθος που επηρεάζεται άμεσα από τη γεωμετρία της ανάρτησης και ορίζεται ως η γωνία μεταξύ του διανύσματος της μεταφορικής ταχύτητας του τροχού και του άξονα  $x$  του συστήματος συντεταγμένων  $W$  που ορίστηκε προηγουμένως (Σχήμα 2.20). Η γωνία πλαγιολίσθησης του ελαστικού δεν πρέπει να συγχέεται με τη γωνία πλαγιολίσθησης του τροχού  $\beta$  (wheel sideslip angle), η οποία ορίζεται ως η γωνία μεταξύ του διανύσματος της μεταφορικής ταχύτητας του τροχού και του άξονα  $x$  του συστήματος συντεταγμένων  $C$  (Σχήμα 2.20), η αρχή του οποίου συμπίπτει με αυτή του συστήματος  $W$ , αλλά διατηρεί σταθερό προσανατολισμό, ίδιο με αυτόν του οχηματοπαγούς συστήματος συντεταγμένων  $B$  (Σχήμα 2.19).



**Σχήμα 2.20: Γωνία σύγκλισης και γωνίες πλαγιολίσθησης τροχού και ελαστικού [1]**

Οι παραπάνω ορισμοί εκφράζονται μαθηματικά από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$a_i = \beta_i - \delta_i \quad (2.2)$$

$$\beta_i = \arctan\left(\frac{v_{y_i}}{v_{x_i}}\right) = \arctan\left(\frac{v_y + x_i \cdot r}{v_x - y_i \cdot r}\right) \quad (2.3)$$

$$x_1 = x_2 = l_f, \quad x_3 = x_4 = -l_r \quad (2.4)$$

$$y_1 = t_f, \quad y_2 = -t_f, \quad y_3 = -t_r, \quad y_4 = t_r \quad (2.5)$$

όπου,  $i$ , ο αύξων αριθμός των τροχών του οχήματος ακολουθώντας ωρολογιακή φορά με αφετηρία τον εμπρός αριστερό τροχό,  $r$ , η κατακόρυφη συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του οχηματοπαγούς συστήματος συντεταγμένων ως προς το αδρανειακό σύστημα (yaw rate),  $t_f$  και  $t_r$  τα ημιμετατρόχια (half-tracks) του εμπρόσθιου και οπίσθιου άξονα αντίστοιχα και τέλος,  $l_f$  και  $l_r$  η διαμήκης απόσταση του κέντρου μάζας του οχήματος από τους ίδιους άξονες.

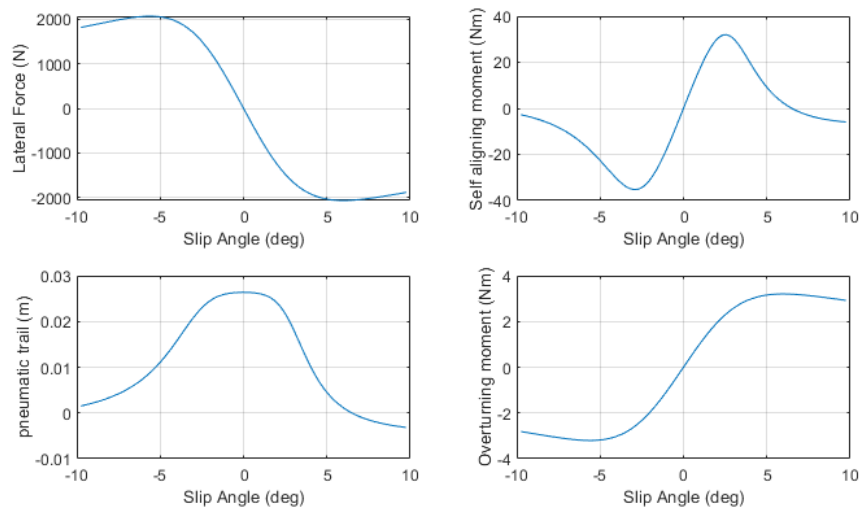
Για φόρτιση των ελαστικών αποκλειστικά κατά την εγκάρσια διεύθυνση (pure lateral slip conditions), το μοντέλο ελαστικών Magic Formula 5.2 συνοψίζεται από τη σχέση:

$$F_{yw}(\alpha) = D \sin[C \arctan\{Ba - E(Ba - \arctan(Ba))\}] \quad (2.6)$$

όπου οι συντελεστές  $B, C, D$  και  $E$  εξαρτώνται από το κάθετο φορτίο που ασκείται στον εκάστοτε τροχό, καθώς και τη γωνία κλίσης αυτού. Η ροπή αυτοευθυγράμμισης  $M_z$  εισάγεται λόγω έκκεντρης άσκησης της εγκάρσιας δύναμης πρόσφυσης  $F_{yw}$  σε απόσταση  $t$  από το σημείο επαφής τροχού-οδοστρώματος, γνωστή και ως πνευματικό ίχνος (pneumatic trail), η οποία σχετίζεται άμεσα με το μηχανικό ίχνος (Υποενότητα 2.2.3). Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιείται μια συνημιτονοειδής παραλλαγή της σχέσης (2.6):

$$t(\alpha) = D \cos[C \arctan\{Ba - E(Ba - \arctan(Ba))\}] \quad (2.7)$$

Στο Σχήμα 2.21 που ακολουθεί, δίνονται ενδεικτικά αποτελέσματα που προέκυψαν από τη χρήση του μοντέλου ελαστικών Magic Formula 5.2 για το επίσωτρο Continental C16 205/510R13, το οποίο προορίζεται για χρήση σε οχήματα τύπου Formula Student. Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε για την πραγματοποίηση των απαιτούμενων υπολογισμών είναι γραμμένο σε γλώσσα MATLAB και ο πηγαίος κώδικας αυτού διατίθεται δωρεάν [14].



**Σχήμα 2.21: Ενδεικτικά αποτελέσματα μοντέλου Magic Formula 5.2, Continental C16 205/510R13,  $F_z = 800$  N,  $\gamma = 0$ ,  $\kappa = 0$**

### 2.3.2 Μεταφορά φορτίου

Ως γνωστόν, τα διαμήκη και εγκάρσια φορτία πρόσφυσης που αναπτύσσονται μεταξύ των ελαστικών επισώτρων ενός οχήματος και του οδοστρώματος, εξαρτώνται από τα κάθετα φορτία που ασκούνται στους τροχούς. Τα φορτία αυτά προκύπτουν εξαιτίας του βάρους, του προσανατολισμού (κλίση οδοστρώματος), των αεροδυναμικών και των αδρανειακών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα όχημα κατά την κίνησή του [15]. Σε αυτήν την ενότητα, αναλύεται ο τρόπος υπολογισμού των μεταβολών των κάθετων φορτίων στους τροχούς ενός ομαλά επιταχυνόμενου οχήματος (quasi-steady state). Οι μεταβολές αυτές συχνά καλούνται μεταφορές βάρους (weight transfer), ή ακριβέστερα, μεταφορές φορτίου (load transfer). Στην ανάλυση που ακολουθεί λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι αδρανειακές δυνάμεις, διότι αυτές αποτελούν το κυριότερο αίτιο για την εμφάνιση μεταφορών φορτίου.

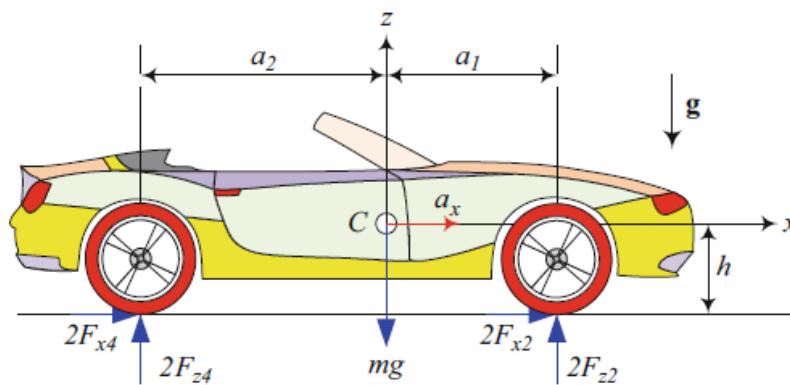
#### 2.3.2.1 Διαμήκης μεταφορά φορτίου

Προκειμένου να υπολογιστεί η διαμήκης μεταφορά φορτίου, υποτίθεται εγκάρσια συμμετρία του οχήματος και μηδενική κλίση οδοστρώματος, ή ισοδύναμα, ότι τα φορτία που παραλαμβάνουν οι τροχοί της δεξιάς και της αριστερής πλευράς ενός άξονα του οχήματος είναι ίσα. Αξίζει να αναφερθεί ότι η υπόθεση εγκάρσιας συμμετρίας δεν απέχει πολύ από την πραγματικότητα για την πλειοψηφία των σύγχρονων οχημάτων. Τα κάθετα φορτία που ασκούνται στους τροχούς ενός οχήματος, όταν αυτό επιταχύνεται ομαλά κατά τη διαμήκη κατεύθυνση, κινούμενο επί οριζοντίου επιπέδου (Σχήμα 2.22), προκύπτουν εύκολα από τις εξισώσεις δυναμικής ισορροπίας και δίνονται από τις σχέσεις (2.8) και (2.9):

$$F_{z_1} = F_{z_2} = \frac{1}{2} mg \frac{a_2}{l} - \frac{1}{2} ma_x \frac{h}{l} \quad (2.8)$$

$$F_{z_3} = F_{z_4} = \frac{1}{2} mg \frac{a_1}{l} + \frac{1}{2} ma_x \frac{h}{l} \quad (2.9)$$

$$l = a_1 + a_2 \quad (2.10)$$



Σχήμα 2.22: Διαμήκως επιταχυνόμενο όχημα κινούμενο επί οριζοντίου επιπέδου [15]



Σε καθεμία από τις ανωτέρω σχέσεις, ο πρώτος όρος εξαρτάται μόνο από τη διαμήκη και κατακόρυφη θέση του κέντρου μάζας του οχήματος, γι' αυτό και καλείται στατική συνιστώσα του κάθετου φορτίου, ενώ ο δεύτερος όρος εξαρτάται από το ύψος του κέντρου μάζας  $h$  και τη διαμήκη επιτάχυνση  $a_x$  και καλείται δυναμική συνιστώσα αυτού [1]. Συνεπώς, για τον υπολογισμό της συνολικής διαμήκους μεταφοράς φορτίου αρκεί να υπολογιστεί η διαφορά μεταξύ των φορτίων των αξόνων:

$$\Delta W_{long} = (F_{z_1} + F_{z_2}) - (F_{z_3} + F_{z_4}) = 2F_{z_1} - 2F_{z_3} \quad (2.11)$$

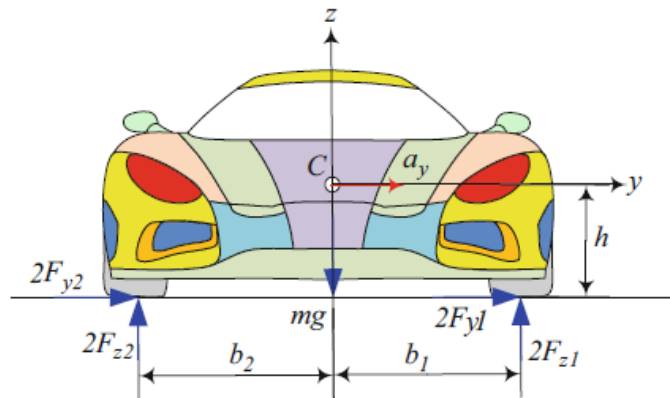
### 2.3.2.2 Εγκάρσια μεταφορά φορτίου

Σε πλήρη αντιστοιχία με τα προηγούμενα, για τον υπολογισμό της εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου, υποτίθεται διαμήκης συμμετρία οχήματος και μηδενική κλίση οδοστρώματος. Λαμβάνοντας τις εξισώσεις δυναμικής ισορροπίας για πλευρικά επιταχυνόμενο όχημα, κινούμενο επί οριζοντίου επιπέδου (Σχήμα 2.23) και εκτελώντας τις απαραίτητες πράξεις, προκύπτουν οι ζητούμενες εκφράσεις για τα κάθετα φορτία των τροχών:

$$F_{z_1} = F_{z_4} = \frac{1}{2} mg \frac{b_2}{w} - \frac{1}{2} ma_y \frac{h}{w} \quad (2.12)$$

$$F_{z_2} = F_{z_3} = \frac{1}{2} mg \frac{b_1}{w} + \frac{1}{2} ma_y \frac{h}{w} \quad (2.13)$$

$$w = b_1 + b_2 \quad (2.14)$$



**Σχήμα 2.23: Πλευρικός επιταχυνόμενο όχημα κινούμενο επί οριζοντίου επιπέδου [15]**

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της συνολικής εγκάρσιας μεταφοράς βάρους αρκεί να υπολογιστεί η διαφορά μεταξύ των φορτίων των τροχών κάθε πλευράς του οχήματος:

$$\Delta W_{lat} = (F_{z_1} + F_{z_4}) - (F_{z_2} + F_{z_3}) = 2F_{z_1} - 2F_{z_2} \quad (2.15)$$

### 2.3.2.3 Ανάλυση εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου σε συνιστώσες

Στις προηγούμενες δύο παραγράφους έγινε αναφορά στη συνολική μεταφορά φορτίου που λαμβάνει χώρα κατά τη διαμήκη και εγκάρσια επιτάχυνση ενός οχήματος. Μέσω απλής εποπτείας των σχέσεων (2.8), (2.9) και (2.12), (2.13) και των μεγεθών που εμπλέκονται σε αυτές, διαπιστώνεται ότι για ένα δεδομένο σενάριο επιτάχυνσης η συνολική μεταφορά φορτίου, δύσκολα μπορεί να μεταβληθεί για ένα ήδη υπάρχον όχημα. Δυνητικά, θα μπορούσε να τοποθετηθεί έρμα (ballast) σε κατάλληλη θέση επί του τελευταίου, ώστε να αλλάξει η συνολική μάζα αυτού και πιθανώς ο τρόπος με τον οποίο κατανέμεται στους 2 άξονες. Ωστόσο, η αύξηση της συνολικής μάζας ενός οχήματος έχει αρνητική επίδραση στη δυναμική συμπεριφορά του (2<sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα) και εκτός πολύ ειδικών περιπτώσεων, αποφεύγεται.

Παρόλα αυτά, η εγκάρσια μεταφορά φορτίου συχνά λογίζεται ως μέσο βελτιστοποίησης (tuning/setup) της εγκάρσιας δυναμικής συμπεριφοράς οχημάτων, ιδιαίτερα όσον αφορά οχήματα υψηλών επιδόσεων. Στην πραγματικότητα, το μέγεθος που μπορεί να λειτουργήσει κατ' αυτόν τον τρόπο είναι η κατανομή της εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου μεταξύ των αξόνων (roll couple distribution), η οποία μπορεί να μεταβληθεί σχετικά εύκολα ακόμα και σε ένα ήδη υπάρχον όχημα [16]. Προκειμένου να γίνει κατανοητή η επίδραση της εν λόγω κατανομής στη δυναμική οχήματος, ορίζονται παρακάτω οι 3 συνιστώσες της εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου σε έναν άξονα, το άθροισμα των οποίων ισούται με τη συνολική μεταφορά φορτίου που λαμβάνει χώρα σε αυτόν.

Ξεκινώντας με την εγκάρσια μεταφορά φορτίου μη ανηρημένης μάζας (unsprung load transfer), αυτή οφείλεται στην εγκάρσια αδρανειακή δύναμη που ασκείται στο κέντρο βάρους των μη ανηρημένων μαζών ενός άξονα κατά την πλευρική επιτάχυνση του οχήματος. Το ύψος,  $Z_{ua}$ , του ανωτέρω κέντρου βάρους ως προς το έδαφος λειτουργεί ως μοχλοβραχίονας για την ανάπτυξη αδρανειακής ροπής, η οποία διαιρούμενη με το μετατρόχιο του άξονα δίνει τη ζητούμενη συνιστώσα εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου:

$$\Delta W_u = \frac{W_{ua} a_y Z_{ua}}{2t_a} \quad (2.16)$$

όπου,  $W_{ua}$ , το βάρος της μη ανηρημένης μάζας του μελετώμενου άξονα. Η συνιστώσα αυτή είναι η λιγότερο χρήσιμη όσον αφορά τη δυνατότητα επέμβασης στη δυναμική οχήματος, διότι σπάνια υπάρχει τρόπος να μεταβληθούν τα μεγέθη από τα οποία εξαρτάται για λόγους που ήδη αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Η επόμενη συνιστώσα εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου που αναλύεται, καλείται κινηματική ή σπανιότερα άμεση (kinematic/direct load transfer), καθώς σχετίζεται με το κέντρο κλυδωνισμού που αποτελεί χαρακτηριστικό κινηματικό μέγεθος ενός συστήματος ανάρτησης (Υποενότητα 2.2.5). Συμπληρωματικά αναφέρεται εδώ ότι η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα κλυδωνισμού των αξόνων ενός οχήματος καλείται άξονας κλυδωνισμού (roll axis). Από δυναμική σκοπιά, ο τελευταίος μπορεί να οριστεί ως το σύνολο



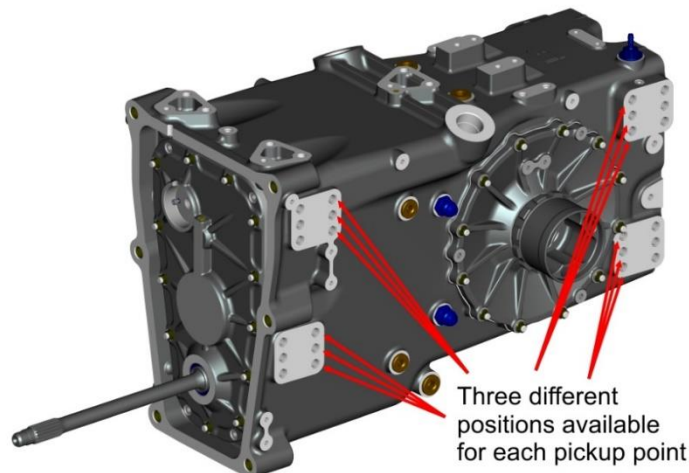
σημείων της ανηρτημένης μάζας, η άσκηση δύναμης επί των οποίων δε δύναται να εισάγει γωνία κλυδωνισμού. Όσον αφορά τον υπολογισμό της εν λόγω συνιστώσας εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου, με εφαρμογή των εξισώσεων ισορροπίας προκύπτει η εξής σχέση:

$$\Delta W_{RC} = \frac{W_{sa} a_y Z_{RC}}{2t_a} \quad (2.17)$$

όπου,  $Z_{RC}$ , το ύψος του κέντρου κλυδωνισμού ως προς το έδαφος και  $W_{sa}$ , το βάρος της ανηρτημένης μάζας που αντιστοιχεί στο μελετώμενο άξονα.

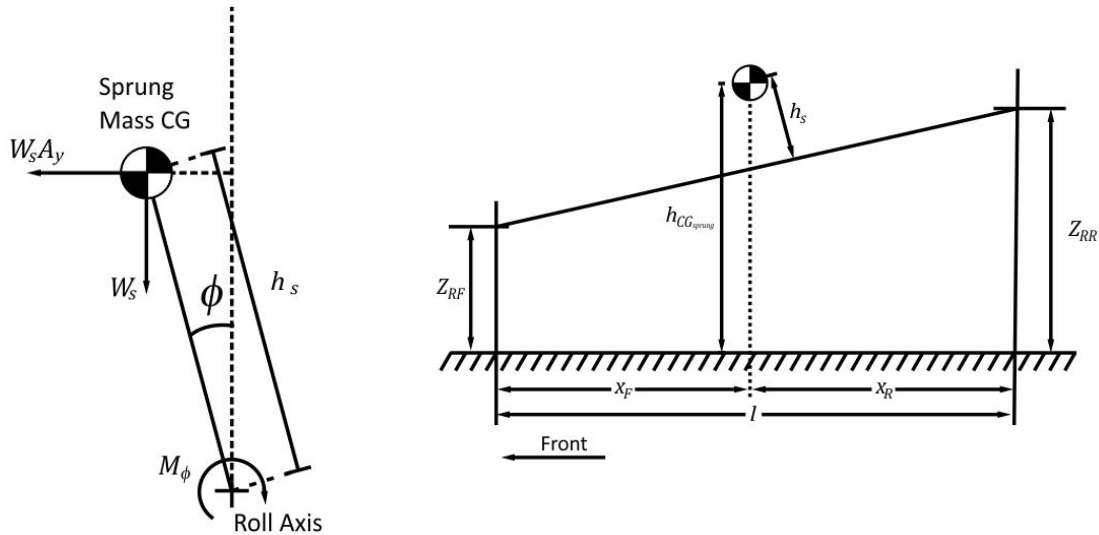
Όπως και η συνιστώσα μη ανηρτημένης μάζας, έτσι και η κινηματική συνιστώσα εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου συνήθως δεν προσφέρεται ως μέθοδος επέμβασης στη δυναμική συμπεριφορά ενός ήδη κατασκευασμένου οχήματος. Χαρακτηριστική κατηγορία οχημάτων τα οποία αποτελούν εξαίρεση και συχνά γίνεται σχετική πρόβλεψη κατά το σχεδιασμό τους, είναι αυτά που προορίζονται για συμμετοχή σε αγώνες ταχύτητας και μάλιστα σε κατηγορίες όπου το κόστος και η περιπλοκότητα δεν αποτελούν περιοριστικούς παράγοντες.

Στο Σχήμα 2.24 φαίνεται μια κατασκευαστική λύση που επιτρέπει την επέμβαση στην κινηματική συνιστώσα εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου. Ειδικότερα, πρόκειται για μια ανάρτηση οπίσθιου άξονα με διπλά ψαλίδια εδραζόμενα επί του κιβωτίου ταχυτήτων (transaxle). Κατά την κατασκευή του περιβλήματος του τελευταίου γίνεται διάνοιξη δύο ή περισσότερων διαφορετικών σετ οπών, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εναλλακτικά σημεία έδρασης των βραχιόνων ελέγχου της ανάρτησης, με στόχο τη μικρή διαφοροποίηση του ύψους του κέντρου κλυδωνισμού ως προς την ονομαστική του θέση. Παρόλα αυτά τονίζεται ότι η αλλαγή θέσης των ανωτέρω σημείων έδρασης εισάγει μεταβολές και στα υπόλοιπα χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη της ανάρτησης.



**Σχήμα 2.24: Πολλαπλές διαθέσιμες θέσεις για την έδραση των βραχιόνων ελέγχου ανάρτησης διπλών ψαλιδιών επί του περιβλήματος κιβωτίου ταχυτήτων [16]**

Η τρίτη και τελευταία συνιστώσα εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου ονομάζεται ελαστική και προκύπτει εξαιτίας της ροπής κλυδωνισμού που εισάγεται από την άσκηση εγκάρσιας αδρανειακής δύναμης στο κέντρο βάρους της ανηρτημένης μάζας, το οποίο βρίσκεται σε κάθετη απόσταση  $h_s$  ως προς τον άξονα κλυδωνισμού (Σχήμα 2.25). Η ροπή αυτή εισάγει με τη σειρά της γωνιακή μετατόπιση της ανηρτημένης μάζας γύρω από τον άξονα κλυδωνισμού, εισάγοντας ελαστική παραμόρφωση των στοιχείων δυσκαμψίας των αναρτήσεων, εξού και το όνομα της εν λόγω συνιστώσας.



**Σχήμα 2.25: Αδρανειακή φόρτιση ανηρτημένης μάζας πλευρικά επιταχυνόμενου οχήματος [16]**

Η ελαστική συνιστώσα της εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου άξονα ενός πλευρικά επιταχυνόμενου οχήματος υπολογίζεται μέσω της ακόλουθης σχέσης:

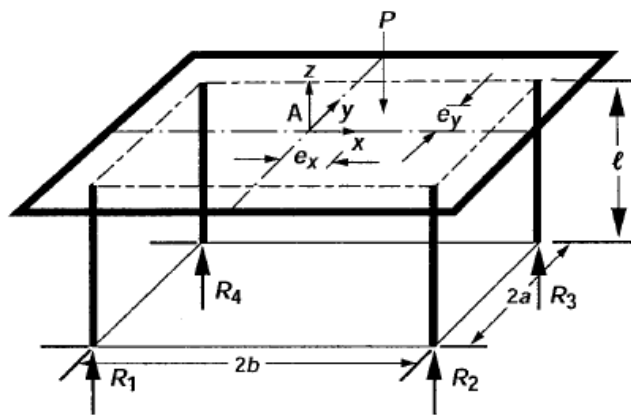
$$\Delta W_\phi = \frac{W_s a_y h_s}{2t} \left( \frac{K_{\phi\alpha} + (l - x) W_s h_s / l}{K_{\phi F} + K_{\phi R} - W_s h_s} \right) \quad (2.18)$$

όπου,  $W_s$ , το συνολικό βάρος της ανηρτημένης μάζας,  $K_{\phi\alpha}$ , η συνολική δυσκαμψία κλυδωνισμού του εκάστοτε άξονα (axle roll stiffness),  $l$ , το μεταξόνιο του οχήματος και  $x$ , η διαμήκης απόσταση του μη μελετώμενου άξονα από το κέντρο βάρους της ανηρτημένης μάζας. Με απλή εποπτεία της τελευταίας σχέσης, διαπιστώνεται ότι ο απλούστερος τρόπος επέμβασης στην ελαστική συνιστώσα εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου είναι μέσω μεταβολής της δυσκαμψίας κλυδωνισμού των αξόνων, π.χ. χρησιμοποιώντας διαφορετικά ελατήρια ή αντιστρεπτικές δοκούς. Για την απόδειξη της σχέσης (2.18) και περαιτέρω ανάλυση και σχολιασμό των συνιστωσών εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις πηγές [10] και [16]. Τέλος, αναφέρεται ότι με παρόμοιο τρόπο μπορούν να οριστούν συνιστώσες και για τη διαμήκη μεταφορά φορτίου, ωστόσο σπάνια χρησιμοποιούνται.

**2.3.2.4 Συνδυασμός διαμήκους και εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου**

Για την εξαγωγή των σχέσεων (2.8), (2.9) και (2.12), (2.13), εκτός από τις υποθέσεις εγκάρσιας και διαμήκους συμμετρίας του οχήματος που αναφέρθηκαν ρητά σε κάθε περίπτωση, έγινε επιπλέον η σιωπηλή υπόθεση ότι οι μη ανηρτημένες μάζες του οχήματος δε μετατοπίζονται ως προς την ανηρτημένη μάζα αυτού. Η τελευταία υπόθεση αποτελεί σημαντική απλοποίηση του προβλήματος και απέχει αρκετά από την πραγματικότητα, ενώ οι υποθέσεις συμμετρίας των φορτίων προφανώς δεν μπορούν να εφαρμοστούν στη γενική περίπτωση μεταφοράς φορτίου, κατά την οποία το όχημα επιταχύνεται ταυτόχρονα διαμήκως και εγκάρσιως. Σε αυτήν την περίπτωση, εισάγονται αδρανειακές δυνάμεις κατά την έννοια των ανωτέρω διευθύνσεων, οι οποίες ασκούμενες στο κέντρο βάρους του οχήματος, εισάγουν με τη σειρά τους αδρανειακές ροπές πρόνευσης (pitch moments) και κλυδωνισμού (roll moments).

Το πρόβλημα υπολογισμού των κάθετων φορτίων των τροχών ενός επιταχυνόμενου οχήματος προσιδιάζει στο φερόμενο ως πρόβλημα του τραπεζιού του Navier (Navier’s table problem). Ο τελευταίος επιχείρησε να προσδιορίσει τις αντιδράσεις στήριξης ενός τραπεζιού με 4 πόδια, όταν επί της επιφάνειας αυτού ασκείται ένα συγκεντρωμένο φορτίο  $P$ , με εκκεντρότητες (eccentricities)  $e_x$  και  $e_y$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.26 [17]. Το τραπέζι τοποθετείται επί πέτρινου δαπέδου, είναι διπλά συμμετρικό, κατασκευασμένο από ξύλο, έχει ύψος  $l$  και οι αποστάσεις ενός ποδιού από τα γειτονικά πόδια είναι  $2a$  και  $2b$ .

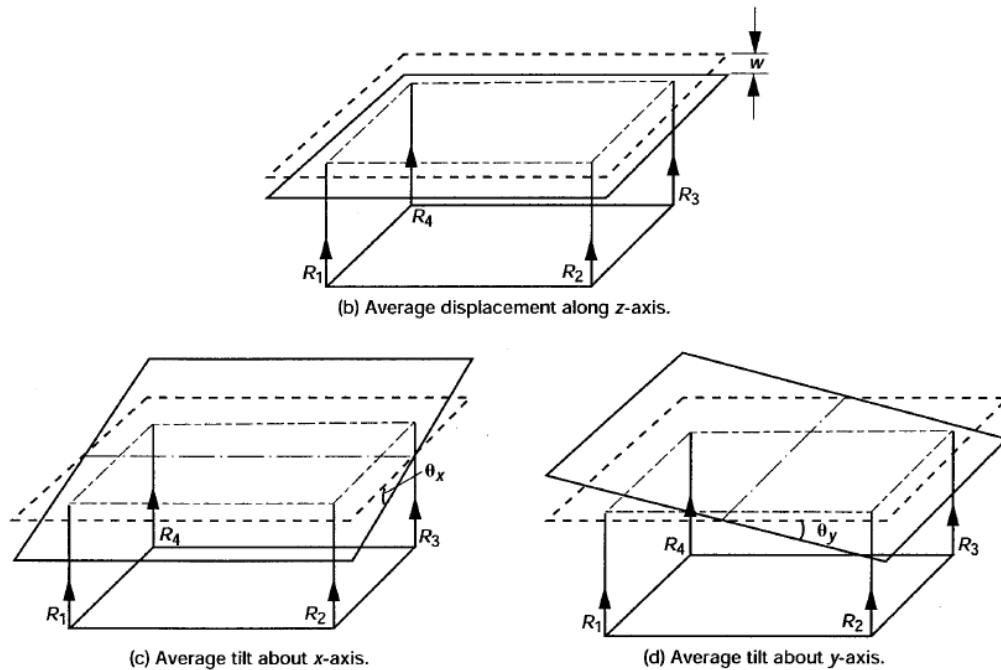


**Σχήμα 2.26: Το στατικά απροσδιόριστο τραπέζι του Navier [17]**

Η αρχή  $A$  του συστήματος συντεταγμένων  $(x, y, z)$  τοποθετείται στο κέντρο συμμετρίας του τραπεζιού και τα άγνωστα μεγέθη είναι οι αντιδράσεις στήριξης από το δάπεδο,  $R_1, R_2, R_3$  και  $R_4$ . Το πρόβλημα διέπεται από 3 εξισώσεις ισορροπίας και το τραπέζι έχει ισάριθμους κινηματικούς βαθμούς ελευθερίας (Σχήμα 2.27) που αντιστοιχίζονται στις μεταβλητές μετατόπισης  $w, \theta_x$  και  $\theta_y$ . Οι άγνωστοι του προβλήματος είναι περισσότεροι από τις διαθέσιμες εξισώσεις κατά 1, συνεπώς πρόκειται για πρόβλημα με στατική απροσδιοριστία πρώτου βαθμού (one-degree indeterminate). Οι εξισώσεις ισορροπίας του προβλήματος δίνονται σε μητρική μορφή από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ a & a & -a & -a \\ -b & b & b & -b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ -e_y P \\ e_x P \end{Bmatrix} \Rightarrow [B]\{R\} = \{P\} \quad (2.19)$$

Οι 3 εξισώσεις ισορροπίας είναι εκπεφρασμένες συναρτήσεις των 4 αγνώστων αντιδράσεων στήριξης, επομένως δεν είναι δυνατή η επίλυση του προβλήματος αξιοποιώντας αποκλειστικά τις πρώτες. Ο Navier ήταν ο πρώτος που αναγνώρισε την απροσδιόριστη φύση του εν λόγω προβλήματος, για τη λύση του οποίου είναι απαραίτητη η εισαγωγή μιας συνθήκης συμβατότητας (compatibility condition).



**Σχήμα 2.27: Βαθμοί ελευθερίας τραπεζιού του Navier [17]**

Η σχέση παραμορφώσεων-μετατοπίσεων για το τραπέζι του Navier μπορεί να γραφεί σε μητρική μορφή ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & a & -b \\ -1 & a & b \\ -1 & -a & b \\ -1 & -a & -b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

όπου  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  και  $\beta_4$ , οι παραμορφώσεις κατά μήκος των αντίστοιχων ποδιών του τραπεζιού, οι οποίες εισάγονται λόγω άσκησης των αντιδράσεων στήριξης  $R_1, R_2, R_3$  και  $R_4$  στα τελευταία. Η επιφάνεια του τραπεζιού αντιμετωπίζεται ως απολύτως στερεό σώμα. Η σχέση (2.20) συσχετίζει τις παραμορφώσεις των ποδιών με 3 μετατοπίσεις ( $w, \theta_x$  και  $\theta_y$ ). Με άλλα λόγια, οι παραμορφώσεις αυτές δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Απαλείφοντας τις 3 από τις 4 σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων προκύπτει η ζητούμενη συνθήκη συμβατότητας:

$$\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 = 0 \quad (2.21)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι τόσο οι εξισώσεις ισορροπίας, όσο και η ανωτέρω συνθήκη δεν εξαρτώνται από την ελαστική συμπεριφορά των ποδιών του τραπεζιού. Η τελευταία υπεισέρχεται στους υπολογισμούς μέσω καταστατικών εξισώσεων, οι οποίες στην προκειμένη περίπτωση δεν είναι άλλες από τις σχέσεις φορτίου-παραμόρφωσης των ποδιών:

$$\beta_1 = \frac{lR_1}{AE}, \quad \beta_2 = \frac{lR_2}{AE}, \quad \beta_3 = \frac{lR_3}{AE}, \quad \beta_4 = \frac{lR_4}{AE} \quad (2.22)$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{l}{AE} = \frac{\beta_1}{R_1} = \frac{\beta_2}{R_2} = \frac{\beta_3}{R_3} = \frac{\beta_4}{R_4} = const. \quad (2.23)$$

όπου,  $A$ , το εμβαδόν διατομής και  $E$  το μέτρο ελαστικότητας των ποδιών του τραπεζιού. Αξιοποιώντας τις σχέσεις (2.22), η συνθήκη συμβατότητας (2.21) μπορεί να εκφραστεί σε όρους δυνάμεων ως εξής:

$$\frac{l}{AE} (R_1 - R_2 + R_3 - R_4) = 0 \quad (2.24)$$

Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση με τις εξισώσεις ισορροπίας της σχέσης (2.19), προκύπτει ένα επιλύσιμο γραμμικό σύστημα 4 εξισώσεων, με αγνώστους τις 4 αντιδράσεις στήριξης του τραπεζιού:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ a & a & -a & -a \\ -b & b & b & -b \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ -e_y P \\ e_x P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

όπου τέθηκε αυθαίρετα  $l/AE = 1$ . Η επίλυση του γραμμικού συστήματος δίνει:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \frac{P}{4} \begin{Bmatrix} 1 - r_x - r_y \\ 1 + r_x - r_y \\ 1 + r_x + r_y \\ 1 - r_x + r_y \end{Bmatrix} = \frac{P}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}_{r_x=r_y=0} \quad (2.26)$$

όπου,  $r_x = e_x/b$  και  $r_y = e_y/a$ . Όπως ήταν αναμενόμενο, όταν το φορτίο  $P$  ασκείται στο κέντρο συμμετρίας του τραπεζιού ( $r_x = r_y = 0$ ), κάθε πόδι παραλαμβάνει το  $1/4$  του συνολικού κάθετου φορτίου. Τέλος, είναι δυνατός ο υπολογισμός των μετατοπίσεων του

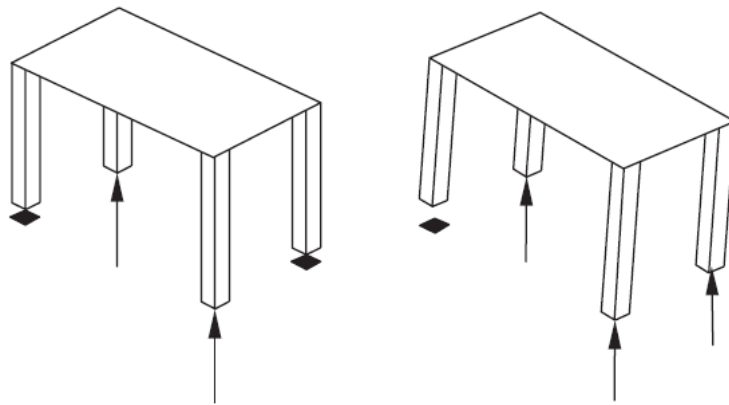
τραπεζιού κατά την έννοια των βαθμών ελευθερίας του, κάνοντας πίσω-αντικατάσταση (back-substitution) των τιμών των αντιδράσεων στήριξης στις σχέσεις (2.20):

$$w = -\left(\frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4}{4}\right) = -\frac{l}{4AE}(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = -\frac{Pl}{4AE} \quad (2.27)$$

$$\theta_x = \frac{\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \beta_4}{4a} = \frac{l}{4AEa}(R_1 + R_2 - R_3 - R_4) = -\frac{Ple_y}{4AEa^2} \quad (2.28)$$

$$\theta_y = -\left(\frac{\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 + \beta_4}{4b}\right) = -\frac{l}{4AEb}(R_1 - R_2 - R_3 + R_4) = \frac{Ple_x}{4AEb^2} \quad (2.29)$$

Σε πρώτη ανάγνωση, η προηγηθείσα ανάλυση φαίνεται να μην έχει θέση στην παρούσα ΔΕ. Παρόλα αυτά, το παράδειγμα του τραπεζιού έχει πολλές ομοιότητες με ένα όχημα που φέρει ανεξάρτητο ή ημιανεξάρτητο σύστημα ανάρτησης. Όπως το τραπέζι του Navier, έτσι και ένα όχημα με 4 τροχούς δέχεται από το έδαφος 4 κατακόρυφες αντιδράσεις στήριξης. Οι τιμές αυτών των δυνάμεων προκύπτουν με βάση την ισοδύναμη κατακόρυφη δυσκαμψία της ανάρτησης κάθε τροχού, σε πλήρη αντιστοιχία με την ελαστική αξονική δυσκαμψία των ξύλινων ποδιών του τραπεζιού. Άλλωστε αν οι τροχοί ενός οχήματος δεν ήταν ανηρημένοι, αλλά πλήρως ακινητοποιημένοι ως προς το πλαίσιο αυτού, κατά τη διέλευση από ανωμαλίες του οδοστρώματος, το όχημα θα συμπεριφερόταν ως ένα τραπέζι, τα πόδια του οποίου έχουν διαφορετικά μήκη. Ένα τέτοιο τραπέζι θεωρητικά μπορεί να ισορροπεί στηριζόμενο μόνο από τα 2 μακρύτερα πόδια του (οριακή ευστάθεια) ή από 3 πόδια σε μια από τις δύο πιθανές ασυμπτωτικά ευσταθείς καταστάσεις (τυπικό παράδειγμα στατικής απροσδιοριστίας – Σχήμα 2.28) [4].



**Σχήμα 2.28: Ισορροπία τραπεζιού Navier με διαφορετικά μήκη ποδιών [4]**

Συνεχίζοντας την παράθεση ομοιοτήτων, μπορεί ένα όχημα να μη δέχεται έκκεντρα φορτία κατά την κατακόρυφη διεύθυνση (με εξαίρεση ορισμένα οχήματα υψηλών επιδόσεων που μπορεί να δέχονται τέτοιου είδους αεροδυναμικές φορτίσεις), ωστόσο δέχεται ροπές πρόνευσης και κλυδωνισμού που εισάγονται από αδρανειακές δυνάμεις ασκούμενες κατά



τη διαμήκη και εγκάρσια διεύθυνση. Στο παράδειγμα του τραπεζιού του Navier, εισάγονται αντίστοιχες ροπές εξαιτίας της έκκεντρης άσκησης του φορτίου  $P$ . Τέλος, όσον αφορά τη θεώρηση του τραπεζιού ως απολύτως στερεού σώματος στην προηγηθείσα ανάλυση, αξίζει να αναφερθεί ότι ένα μεγάλο πλήθος υπολογιστικών μοντέλων οχημάτων βασίζεται στην παραδοχή άκαμπτου πλαισίου για την απλοποίηση των υπολογισμών και τη μείωση του υπολογιστικού κόστους των διαφόρων προσομοιώσεων.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να έχει ήδη γίνει αντιληπτός ο ρόλος της γεωμετρίας της ανάρτησης στη δυναμική οχήματος, ως μέσο επίδρασης στην ανάπτυξη δυνάμεων πρόσφυσης από τα ελαστικά επίσωτρα και κατά συνέπεια στη στροφική συμπεριφορά του εκάστοτε οχήματος (under-/over-/neutral steer – ακολουθεί περαιτέρω ανάλυση των όρων στην Υποενότητα 2.3.3). Καθώς το τελευταίο επιταχύνεται κατά τη διαμήκη ή/και εγκάρσια διεύθυνση, τα κάθετα φορτία των τροχών μεταβάλλονται σύμφωνα με όσα ήδη αναφέρθηκαν περί μεταφορών φορτίου, εξαιτίας των οποίων τα στοιχεία δυσκαμψίας (ελατήρια, αντιστρεπτικές ράβδοι κ.λπ.) των αναρτήσεων παραμορφώνονται, με αποτέλεσμα να εισάγονται κατακόρυφες μετατοπίσεις στους τροχούς του οχήματος σε σχέση με το πλαίσιο αυτού. Ο προσδιορισμός της μεταβολής της γεωμετρίας των αναρτήσεων λόγω κατακόρυφης μετατόπισης των τροχών (ή/και κινηματικής διέγερσης από το σύστημα διεύθυνσης), αποτελεί άλλωστε θεμελιώδη στόχο της κινηματικής ανάλυσης μηχανισμών ανάρτησης. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι κατά την κατακόρυφη μετατόπιση των τροχών, είτε λόγω διέγερσης βάσης, είτε λόγω μεταφοράς φορτίου, στη γενική περίπτωση εισάγεται σε αυτούς γωνία σύγκλισης (bump/roll steer) και γωνία κλίσης (bump/roll camber), ενώ οποιαδήποτε επένεργηση του συστήματος διεύθυνσης στους τροχούς, εκτός από την επιθυμητή γωνία στροφής, εισάγει επιπρόσθετη γωνία κλίσης (steering camber).

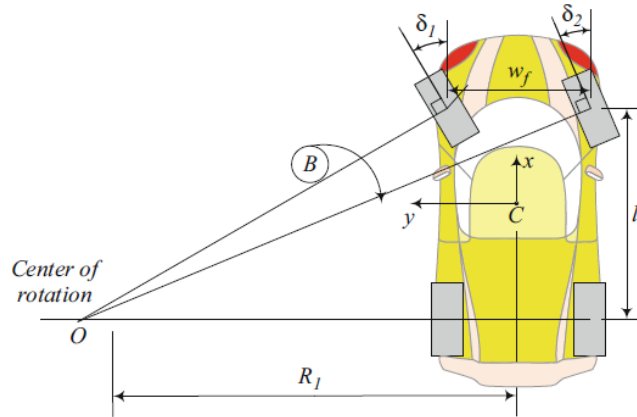
### 2.3.3 Στροφική συμπεριφορά οχήματος

Η στροφική συμπεριφορά (cornering behavior) ενός οχήματος αναφέρεται στην απόκριση αυτού σε διεγέρσεις προερχόμενες είτε από εισαγωγή γωνίας σύγκλισης στους τροχούς, είτε από το περιβάλλον, όπως για παράδειγμα ριπές ανέμου και διεγέρσεις βάσης, οι οποίες μπορούν να επηρεάσουν την κατεύθυνση κίνησης του πρώτου [18]. Σε αυτήν την υποενότητα, παρουσιάζονται ορισμένες μέθοδοι ανάλυσης της στροφικής συμπεριφοράς τροχοφόρων οχημάτων, με στόχο να αναδειχθεί περαιτέρω ο τρόπος επίδρασης της γεωμετρίας της ανάρτησης στη δυναμική των τελευταίων.

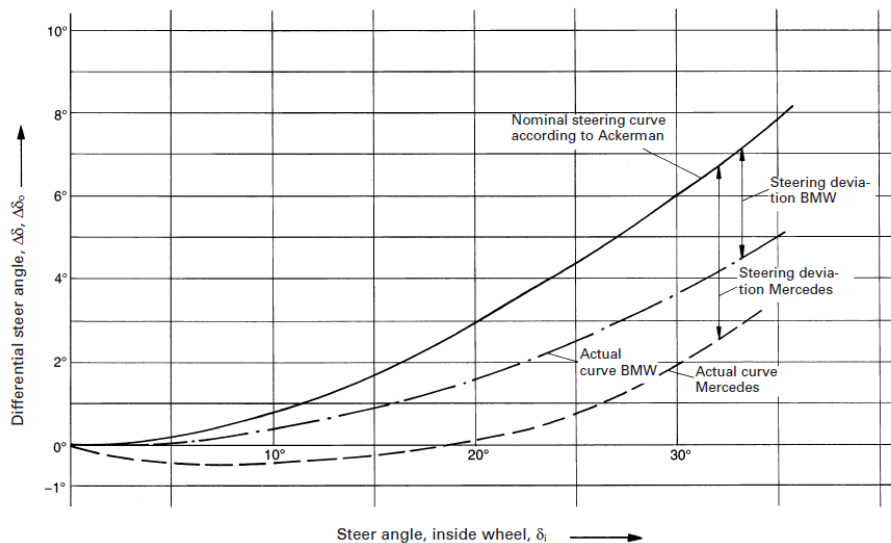
Σε χαμηλές ταχύτητες κίνησης, οι γωνίες πλαγιολίσθησης των ελαστικών μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες και η στροφική συμπεριφορά των οχημάτων συνοψίζεται από μια γεωμετρική σχέση που εισήχθη για πρώτη φορά από το Langensperger το 1816 και αργότερα έγινε γνωστή ως συνθήκη Ackermann (Ackermann condition):

$$\cot \delta_o - \cot \delta_i = \frac{w_f}{l} \quad (2.30)$$

όπου τα εμπλεκόμενα μεγέθη ορίζονται στο Σχήμα 2.29. Ωστόσο, οι τραπεζοειδείς μηχανισμοί που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση των συστημάτων διεύθυνσης των σύγχρονων οχημάτων, συνήθως δεν μπορούν να εξασφαλίσουν την εκπλήρωση της συνθήκης Ackermann σε όλο το εύρος λειτουργίας τους (Σχήμα 2.30) [1], με αποτέλεσμα η πραγματική σχέση των γωνιών  $\delta_i$  και  $\delta_o$  να διαφέρει από τη θεωρητική σχέση (2.30). Αυτό σημαίνει ότι ακόμα και σε χαμηλές ταχύτητες τουλάχιστον ένας από τους τροχούς του διευθυντηρίου άξονα δεν κυλίεται απλά (rolling), αλλά ταυτόχρονα ολισθαίνει (slipping/sliding).



Σχήμα 2.29: Όχημα με εμπρόσθιο διευθυντήριο άξονα που ικανοποιεί τη συνθήκη Ackermann [15]



Σχήμα 2.30: Πραγματική και κατά Ackermann διαφορά γωνίας στροφής τροχών [19]

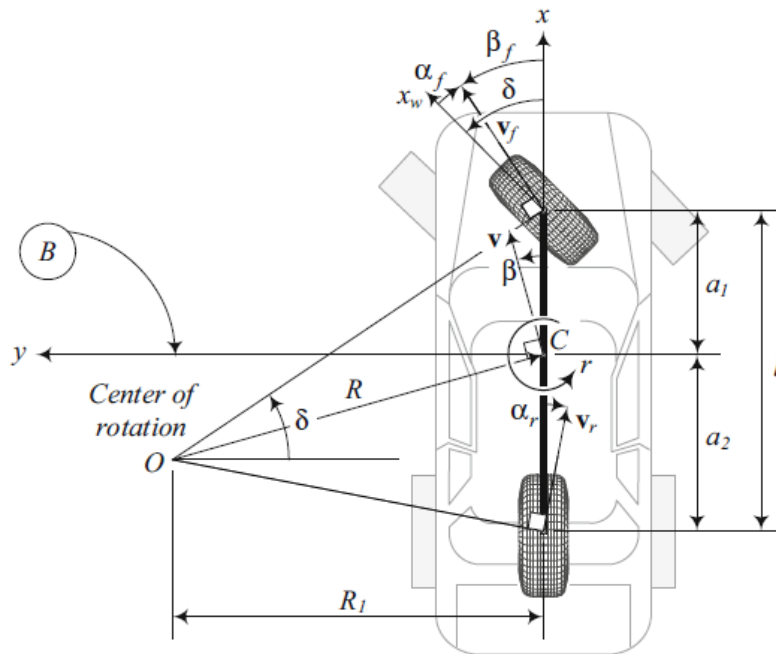
Το φαινόμενο αυτό εκμεταλλεύεται η φερόμενη ως «γεωμετρία Ackermann» του συστήματος διεύθυνσης με σκοπό την επίτευξη γωνιών πλαγιολίσθησης που ευνοούν όσο το δυνατόν περισσότερο την ανάπτυξη εγκάρσιων δυνάμεων πρόσφυσης στα ελαστικά,

κυρίως σε εφαρμογές οχημάτων υψηλών επιδόσεων [9]. Έτσι, η γεωμετρία που προκύπτει όταν η γωνία στροφής του εσωτερικού τροχού είναι μεγαλύτερη (κατ' απόλυτη τιμή) από αυτή του εξωτερικού καλείται "pro-Ackermann", ενώ όταν συμβαίνει το αντίστροφο η προκύπτουσα γεωμετρία καλείται "anti-Ackermann".

**2.3.3.1 Χαρακτηρισμός στροφικής συμπεριφοράς οχήματος**

Οι όροι «υποστροφή» και «υπερστροφή» έχουν κυριαρχήσει όσον αφορά το χαρακτηρισμό της στροφικής συμπεριφοράς οχημάτων σε μεσαίες και υψηλές ταχύτητες κίνησης, ενώ ως έννοιες χρησιμοποιούνταν διαισθητικά ακόμα και πριν τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό τους [10]. Τα φαινόμενα ολίσθησης των ελαστικών σε αυτές τις ταχύτητες έχουν κυρίαρχη επίδραση στη δυναμική οχήματος στο επίπεδο και δε μπορούν να αμεληθούν [18].

Προκειμένου να εξισορροπήσουν την εγκάρσια αδρανειακή δύναμη που αναπτύσσεται στο κέντρο μάζας ενός οχήματος καθώς αυτό επιταχύνεται πλευρικά, τα ελαστικά πίσω αναπτύσσουν κατάλληλες δυνάμεις πρόσφυσης, οι οποίες οφείλονται στην εισαγωγή γωνιών πλαγιολίσθησης όσον αφορά τα τελευταία (Υποενότητα 2.3.1). Η σχέση της γωνίας πλαγιολίσθησης μεταξύ των ελαστικών του εμπρόσθιου και του οπίσθιου άξονα καθορίζει τη στροφική συμπεριφορά ενός οχήματος. Ειδικότερα, όταν η μέση γωνία πλαγιολίσθησης των ελαστικών του εμπρόσθιου άξονα,  $\alpha_f$ , είναι ίση με αυτή του οπίσθιου,  $\alpha_r$ , το όχημα επιτυγχάνει ουδέτερη στροφική συμπεριφορά (neutral steer), ενώ όταν η ισότητα αυτή δεν ικανοποιείται, προκύπτει υποστροφική (understeer) ή υπερστροφική (oversteer) συμπεριφορά και η μέση γωνία πλαγιολίσθησης των ελαστικών του εμπρόσθιου άξονα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από αυτή του οπίσθιου αντίστοιχα.



**Σχήμα 2.31: Απλοποιημένο μοντέλο δυναμικής οχήματος στο επίπεδο [1]**

Για περαιτέρω ανάλυση της στροφικής συμπεριφοράς ενός οχήματος εισάγεται ένα από τα απλούστερα διαθέσιμα μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή της δυναμικής οχήματος στο επίπεδο, το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 2.31 (bicycle model). Η εν λόγω μοντελοποίηση βασίζεται στις ακόλουθες παραδοχές [10]:

- Εφόσον δεν ορίζονται μετατροχία για τους άξονες, προφανώς δε λαμβάνονται υπόψιν εγκάρσιες μεταφορές φορτίου
- Δε λαμβάνονται υπόψιν διαμήκεις μεταφορές φορτίου
- Δεν εισάγονται γωνίες πρόνευσης και κλυδωνισμού στην ανηρτημένη μάζα
- Τα ελαστικά επίσωτρα λειτουργούν στη γραμμική περιοχή τους (Σχήμα 2.21)
- Η διαμήκης ταχύτητα  $V$  παραμένει σταθερή
- Οι αεροδυναμικές φορτίσεις αγνοούνται
- Το πλαίσιο θεωρείται άκαμπτο

Από το Σχήμα 2.31 και για μικρές τιμές των μέσων γωνιών πλαγιολίσθησης των αξόνων προκύπτει η εξής προσεγγιστική έκφραση για τη γωνία σύγκλισης  $\delta$  [20]:

$$\delta \cong \frac{l}{R} + a_f - a_r \quad (2.31)$$

Από τη σχέση (2.31) διαπιστώνεται ότι η γωνία στροφής που απαιτείται ώστε ένα όχημα να κινηθεί σε κυκλική τροχιά ορισμένης ακτίνας εξαρτάται, εκτός των άλλων και από τις γωνίες πλαγιολίσθησης των ελαστικών των δύο αξόνων. Για μικρές τιμές της γωνίας  $\delta$ , οι συνολικές εγκάρσιες δυνάμεις πρόσφυσης στα ελαστικά του εμπρόσθιου και οπίσθιου άξονα δίνονται από τις ακόλουθες προσεγγιστικές σχέσεις [18]:

$$F_{yf} \cong \frac{W}{g} \frac{V^2}{R} \frac{a_2}{l} = 2W_f \frac{V^2}{gR}, \quad F_{yr} \cong \frac{W}{g} \frac{V^2}{R} \frac{a_1}{l} = 2W_r \frac{V^2}{gR} \quad (2.32)$$

όπου,  $W$ , το συνολικό βάρος του οχήματος και  $W_f, W_r$ , τα βάρη που αντιστοιχούν στους τροχούς κάθε άξονα. Σε αυτό το σημείο, ορίζεται η στροφική δυσκαμψία (cornering stiffness) ελαστικού, ως η μερική παράγωγος,  $\partial F_y / \partial a$ , της αναπτυσσόμενης εγκάρσιας δύναμης πρόσφυσης ως προς τη γωνία πλαγιολίσθησης αυτού. Εφόσον έγινε η παραδοχή ότι τα ελαστικά λειτουργούν στην γραμμική περιοχή τους, η στροφική δυσκαμψία διατηρείται σταθερή (Σχήμα 2.21) και στο εξής θα συμβολίζεται με  $C_{af}$  και  $C_{ar}$  για τα ελαστικά του εμπρόσθιου και οπίσθιου άξονα αντίστοιχα. Επομένως, οι γωνίες πλαγιολίσθησης των αξόνων υπολογίζονται ως ακολούθως:

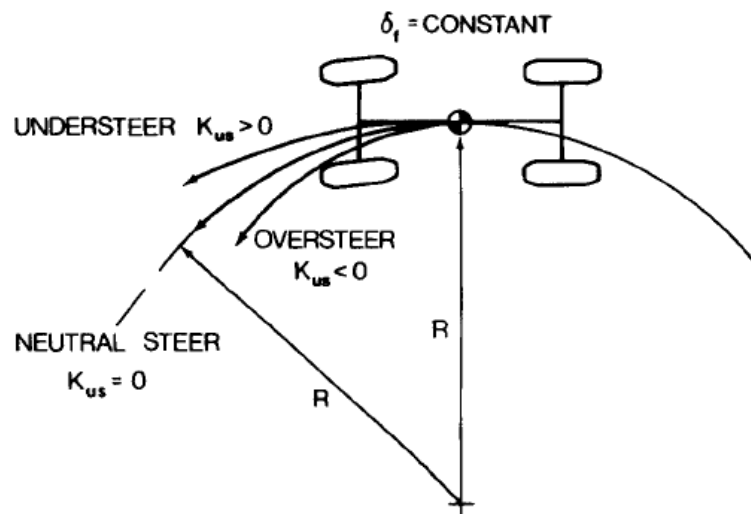
$$a_f = \frac{F_{yf}}{2C_{af}} = \frac{W_f}{C_{af}} \frac{V^2}{gR}, \quad a_r = \frac{F_{yr}}{C_{ar}} = \frac{W_r}{C_{ar}} \frac{V^2}{gR} \quad (2.33)$$

Απαλείφοντας τις γωνίες πλαγιολίσθησης από τη σχέση (2.31) προκύπτει:

$$\delta = \frac{l}{R} + \left( \frac{W_f}{C_{af}} - \frac{W_r}{C_{ar}} \right) \frac{V^2}{gR} = \frac{l}{R} + K_{us} \frac{V^2}{gR} = \frac{l}{R} + K_{us} \frac{a_y}{g} \quad (2.34)$$

όπου,  $K_{us}$ , ο συντελεστής υποστροφής (understeer coefficient) και  $a_y$ , η πλευρική επιτάχυνση.

Εν γένει, είναι επιθυμητή η επίτευξη στροφικής συμπεριφοράς πλησίον της ουδέτερης ( $K_{us} = 0$ ). Σε οχήματα που απευθύνονται στο ευρύ κοινό, συνήθως επιδιώκεται η ύπαρξη ελαφρά υποστροφικής τάσης ( $K_{us} > 0$ ), καθώς σε αυτήν την περίπτωση το όχημα διατηρεί τη διευθυντική του ευστάθεια (directional stability) ακόμα και στο όριο της πρόσφυσης (limit handling) και είναι ευκολότερο στην οδήγηση για το μέσο οδηγό, κατά συνέπεια και ασφαλέστερο. Από την άλλη πλευρά, ελαφρά υπερστροφική τάση ( $K_{us} < 0$ ) συχνά διευκολύνει το έργο των οδηγών οχημάτων υψηλών επιδόσεων, καθώς η απόκριση των τελευταίων στις διεγέρσεις του συστήματος διεύθυνσης είναι αμεσότερη. Παρόλα αυτά, ένα όχημα με υπερστροφική συμπεριφορά γίνεται ασταθές στο όριο της πρόσφυσης και απαιτεί ειδικούς χειρισμούς προκειμένου να μην εκτραπεί της πορείας του. Το Σχήμα 2.32 απεικονίζει την τροχιά που ακολουθεί ένα όχημα εμφανίζοντας τα τρία διαφορετικά είδη στροφικής συμπεριφοράς που ορίστηκαν παραπάνω.

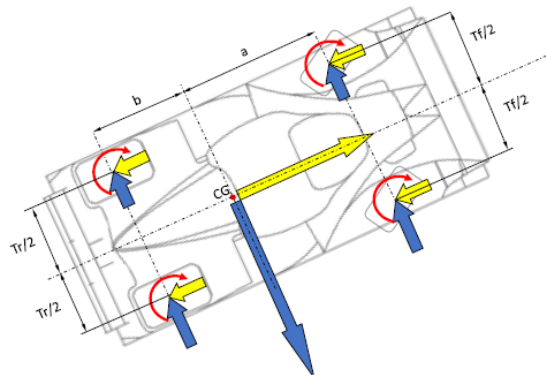


**Σχήμα 2.32: Τροχιές οχημάτων με διαφορετικά είδη στροφικής συμπεριφοράς [18]**

Οι εξαιρετικά απλουστευτικές παραδοχές στις οποίες βασίζεται το μοντέλο δυναμικής οχήματος στο επίπεδο που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη ανάλυση, το καθιστούν ιδανικό όσον αφορά την επεξήγηση εννοιών όπως η υποστροφή και η υπερστροφή, ωστόσο περιορίζουν τη χρησιμότητα αυτού για τη μελέτη της στροφικής συμπεριφοράς κατά το σχεδιασμό οχημάτων. Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται πιο σύνθετα μοντέλα, τα οποία λαμβάνουν υπόψιν την επίδραση των συστημάτων ανάρτησης στη δυναμική οχήματος και αποτελούν χρήσιμα εργαλεία στα χέρια των μηχανικών για την ταχεία αξιολόγηση διαφόρων σχεδιαστικών προτάσεων όσον αφορά το σχεδιασμό αναρτήσεων.

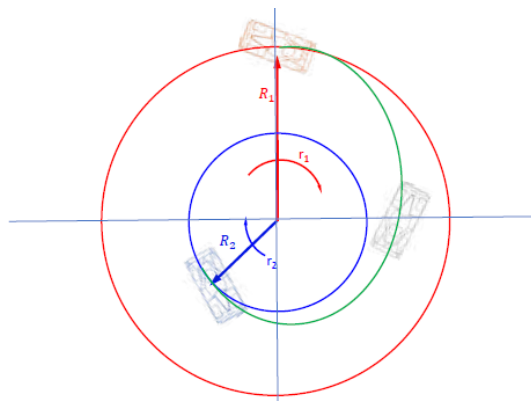
### 2.3.3.2 Διαγράμματα ροπής εκτροπής

Η χάραξη διαγραμμάτων ροπής εκτροπής (yaw moment diagrams) είναι μια μέθοδος προσδιορισμού της στροφικής συμπεριφοράς ενός οχήματος βασιζόμενη σε υπολογισμούς που αφορούν τη μόνιμη κατάσταση και παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους αδερφούς Milliken υπό την ονομασία “Force-Moment Analysis” κατά τη δεκαετία του 1950 [10]. Η συνολική ροπή εκτροπής που ασκείται σε ένα όχημα προκύπτει εν γένει εξαιτίας των δυνάμεων πρόσφυσης και των ροπών αυτοευθυγράμμισης που αναπτύσσονται μεταξύ ελαστικών επισώτρων και οδοστρώματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.33 (στην ανάλυση που ακολουθεί δε λαμβάνεται υπόψιν η αεροδυναμική ροπή εκτροπής) [21].



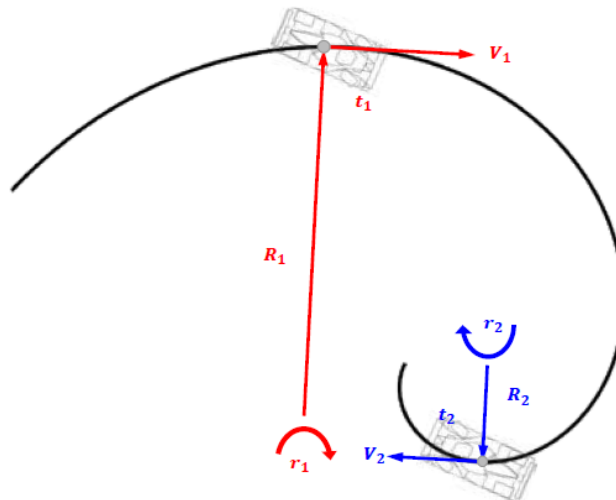
**Σχήμα 2.33: Σύστημα δυνάμεων που ασκούνται από τα ελαστικά επίσωτρα σε ένα πλευρικά επιταχυνόμενο όχημα [21]**

Έστω ένα όχημα κινούμενο με σταθερή ταχύτητα  $V_1$  σε κυκλική τροχιά (skid pad) ακτίνας  $R_1$ , με πλευρική επιτάχυνση  $\alpha_{y_1}$  και γωνιακή ταχύτητα εκτροπής  $r_1$  (Σχήμα 2.34). Υπολογίζεται ακολούθως η συνολική ροπή εκτροπής που απαιτείται για την ταχύτερη μετάβαση αυτού χωρίς την εμφάνιση υποστροφής ή υπερστροφής, σε κυκλική τροχιά ακτίνας  $R_2$ , κινούμενο με ταχύτητα  $V_2$ , πλευρική επιτάχυνση  $\alpha_{y_2}$  και γωνιακή ταχύτητα εκτροπής  $r_2$ .



**Σχήμα 2.34: Μετάβαση από μια κυκλική τροχιά σε μια δεύτερη [21]**

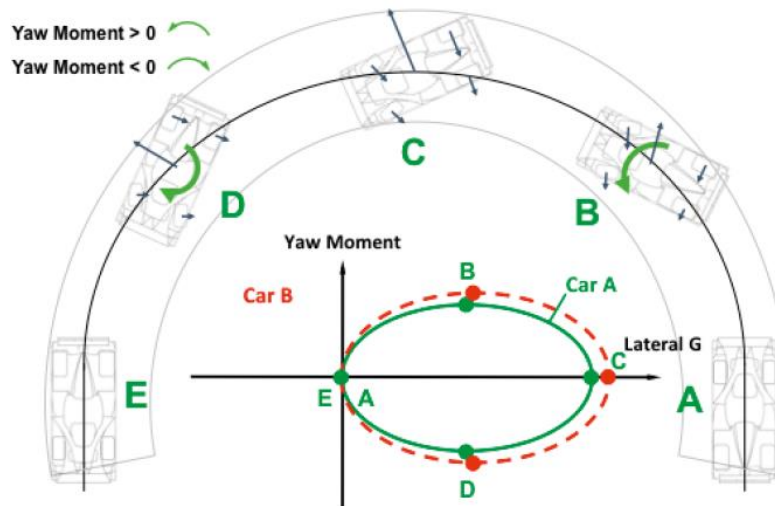
Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποτίθεται  $R_1 > R_2$ . Επομένως, η μεταβολή (μείωση) της επιτροχίου ταχύτητας από  $V_1$  σε  $V_2$  ισοδυναμεί με επιτρόχιο και γωνιακή επιβράδυνση,  $a_x = (V_1 - V_2)/\Delta t$  και  $\dot{r} = (r_1 - r_2)/\Delta t$ , αντίστοιχα. Το γινόμενο της τελευταίας με τη ροπή αδράνειας εκτροπής (yaw inertia) του οχήματος ισούται με την απαιτούμενη ροπή εκτροπής, ούτως ώστε το όχημα να εκτελέσει τη ζητούμενη μετάβαση. Με βάση τα παραπάνω προκύπτει άμεσα ότι η συνολική ροπή εκτροπής ενός οχήματος στη μόνιμη κατάσταση είναι μηδενική. Η προηγηθείσα ανάλυση γενικεύεται για οποιαδήποτε τροχιά, αν θεωρηθεί ότι η τελευταία αποτελείται από διαδοχικά κυκλικά τόξα διαφορετικής ακτίνας, η προσέγγιση καθενός εκ των οποίων απαιτεί μεταβολή της επιτροχίου ταχύτητας, συνεπώς και ανάπτυξη επιτροχίου και γωνιακής επιτάχυνσης (Σχήμα 2.35). Για  $a_y > 0$ , αρνητικά προσεσημασμένη ροπή εκτροπής ισοδυναμεί με υποστροφή, ενώ θετικά προσεσημασμένη ροπή εκτροπής ισοδυναμεί με υπερστροφή (αντίστροφα για  $a_y < 0$ ).



**Σχήμα 2.35: Διακριτοποίηση τροχιάς οχήματος σε κυκλικά τόξα σταθερής ακτίνας [21]**

Όταν ένα όχημα προσεγγίζει μια καμπή, εισάγεται γωνία στροφής στους τροχούς του διεθυντηρίου άξονα με αποτέλεσμα την ανάπτυξη εγκάρσιων δυνάμεων πρόσφυσης στα ελαστικά επίσωτρα, οι οποίες σε συνδυασμό με τις διαμήκεις δυνάμεις πρόσφυσης και τις ροπές αυτοευσθυγράμμισης εισάγουν θετική συνολική ροπή εκτροπής (Σχήμα 2.33). Εξαιτίας της τελευταίας, το όχημα αρχίζει να παρεκκλίνει από την αρχική πορεία του και ξεκινά να διαγράφει καμπυλόγραμμη τροχιά (Σχήμα 2.36, μετάβαση  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ). Στην κορυφή της καμπής (corner apex, σημείο  $C$ ) η ροπή εκτροπής λαμβάνει (θεωρητικά) μηδενική και στη συνέχεια αρνητικές τιμές (Σχήμα 2.36, μετάβαση  $C \rightarrow D \rightarrow E$ ), ώστε το όχημα να εξέλθει από την πρώτη [22]. Στο Σχήμα 2.36 δίνεται ένα ποιοτικό διάγραμμα μεταβολής της ροπής εκτροπής συναρτήσει της πλευρικής επιτάχυνσης κατά τη διέλευση δύο διαφορετικών οχημάτων από την ίδια καμπή. Από το διάγραμμα αυτό μπορεί κανείς να διαπιστώσει όχι μόνο τη σύζευξη (coupling) που υφίσταται μεταξύ των δύο μεγεθών, αλλά και ότι για την ανάπτυξη μεγαλύτερης πλευρικής επιτάχυνσης απαιτείται επιπλέον αύξηση της συνολικής ροπής εκτροπής.





**Σχήμα 2.36: Ροπή εκτροπής και πλευρική επιτάχυνση κατά μήκος μιας καμπής [22]**

Ένα τυπικό διάγραμμα ροπής εκτροπής απεικονίζει την πλευρική επιτάχυνση και τη ροπή εκτροπής για ένα δεδομένο συνδυασμό γωνιών σύγκλισης των τροχών  $\delta_i$  και γωνίας πλαγιολίσθησης του πλαισίου  $\beta$  (chassis sideslip angle) [23], με την τελευταία να ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του διαμήκους επιπέδου συμμετρίας του οχήματος και του διανύσματος μεταφορικής ταχύτητας του κέντρου μάζας αυτού (Σχήμα 2.31):

$$\beta = \arctan\left(\frac{V_y}{V_x}\right) \quad (2.35)$$

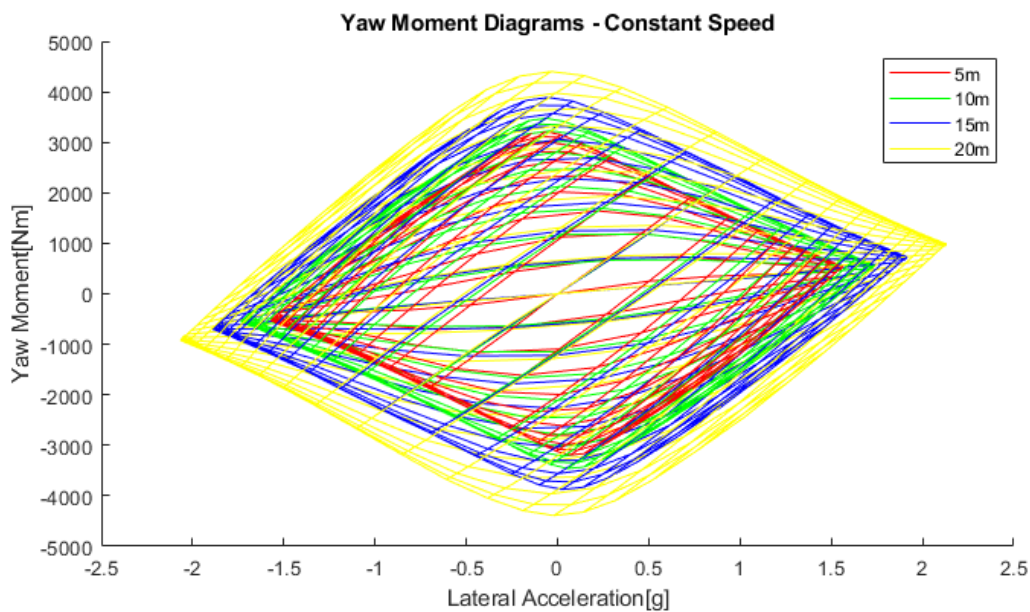
Υπάρχουν δύο τύποι διαγραμμάτων ροπής εκτροπής. Η τελική μορφή τους και στις δύο περιπτώσεις είναι ίδια, παρόλα αυτά αντιστοιχούν σε διαφορετικά σενάρια κίνησης. Τα διαγράμματα ροπής εκτροπής υπό σταθερή ταχύτητα (constant speed) αφορούν ένα όχημα στη μόνιμη κατάσταση, το οποίο διαγράφει κυκλική τροχιά με τη μικρότερη δυνατή ακτίνα για κάθε δεδομένη (σταθερή) ταχύτητα πρόωσης, διατηρώντας ουδέτερη στροφική συμπεριφορά. Από την άλλη, τα διαγράμματα ροπής εκτροπής υπό σταθερή ακτίνα (constant radius) αφορούν ένα όχημα στη μόνιμη κατάσταση, το οποίο διαγράφει κυκλική τροχιά με τη μεγαλύτερη δυνατή επιτρεπόμενη ταχύτητα για κάθε δεδομένη ακτίνα.

Για τη χάραξη διαγραμμάτων ροπής εκτροπής, είτε σταθερής ακτίνας, είτε σταθερής ταχύτητας, απαιτείται η εκτέλεση της παρακάτω επαναληπτικής διαδικασίας για κάθε συνδυασμό των παραμέτρων εισόδου  $\delta_i$  και  $\beta$ :

1. Αρχικοποίηση μεταβλητών:  $r = 0, a_y = 0$ .
2. Υπολογισμός  $V_y$  μέσω της σχέσης (2.35).
3. Υπολογισμός των γωνιών  $a_i$  μέσω των σχέσεων (2.2).
4. Υπολογισμός των κάθετων φορτίων που παραλαμβάνουν οι ελαστικοφόροι τροχοί (ενγκάρσια μεταφορά φορτίου – Υποενότητα 2.3.2).

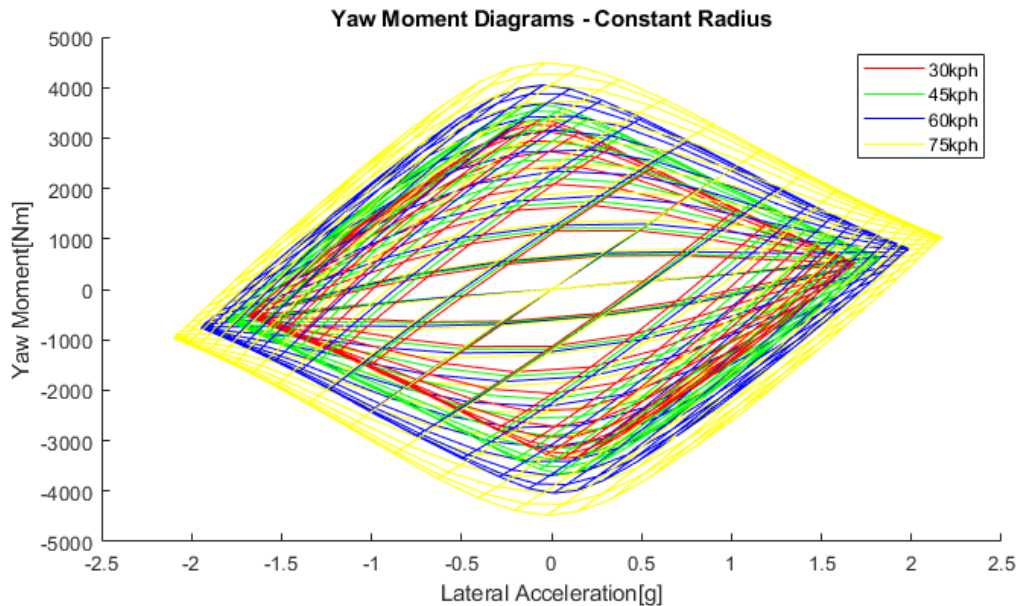
5. Χρήση μοντέλου ελαστικών για τον υπολογισμό των αναπτυσσόμενων φορτίων πρόσφυσης και ροπών μεταξύ επισώτρων και οδοστρώματος, π.χ. Magic Formula 5.2 (απαιτείται επιπλέον η γνώση των γωνιών κλίσης  $\gamma_i$ ).
6. Υπολογισμός πλευρικής επιτάχυνσης ( $2^{\text{ος}}$  Νόμος του Νεύτωνα) και συνολικής ροπής εκτροπής που δέχεται το όχημα
7. Ανανέωση τιμών των μεγεθών που εξαρτώνται από την πλευρική επιτάχυνση (κάθετα φορτία τροχών, γωνίες  $\delta_i$  και  $\gamma_i$ , ταχύτητα γωνιακής εκτροπής  $r$ , επιτρόχιος ταχύτητα  $V_x$  αν πρόκειται για ανάλυση σταθερής ακτίνας κ.λπ.).
8. Επανάληψη των βημάτων 2 έως 7 μέχρι την ικανοποίηση ενός κριτηρίου σύγκλισης για την πλευρική επιτάχυνση.

Ενδεικτικά παραδείγματα διαγραμμάτων ροπής εκτροπής υπό σταθερή ταχύτητα και ακτίνα δίνονται παρακάτω για το μονοθέσιο όχημα τύπου Formula Student, P20, της φοιτητικής ομάδας του ΕΜΠ, Prom Racing (Σχήμα 2.37 και Σχήμα 2.38 αντίστοιχα).



**Σχήμα 2.37: Διάγραμμα ροπής εκτροπής υπό σταθερή ταχύτητα, Prom Racing P20**

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια και η χρησιμότητα των διαγραμμάτων ροπής εκτροπής μεταβάλλεται ανάλογα με την περιπλοκότητα της μοντελοποίησης του οχήματος. Για παράδειγμα, στα βήματα 3 και 5 της ανωτέρω επαναληπτικής διαδικασίας απαιτείται γνώση των γωνιών σύγκλισης  $\delta_i$  και  $\gamma_i$  των τροχών. Αυτές μπορούν να υπολογιστούν σε πρώτη προσέγγιση μέσω κινηματικής ανάλυσης, ωστόσο ο υπολογισμός τους μέσω ελαστοκινηματικής ανάλυσης ανταποκρίνεται περισσότερο στην πραγματικότητα, καθώς τόσο τα διάφορα μέλη της ανάρτησης όσο και οι μεταξύ τους σύνδεσμοι παραλαμβάνουν φορτία με αποτέλεσμα να παραμορφώνονται.



**Σχήμα 2.38: Διάγραμμα ροπής εκτροπής υπό σταθερή ακτίνα, Prom Racing P20**

Συνοψίζοντας, η μέθοδος των διαγραμμάτων ροπής εκτροπής αποτελεί ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση της στροφικής συμπεριφοράς οχημάτων και χρησιμοποιείται ευρέως όσον αφορά οχήματα που προορίζονται για αγωνιστική χρήση. Για περισσότερη εμβάθυνση και τρόπους ερμηνείας των αποτελεσμάτων των διαγραμμάτων ροπής εκτροπής, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις πηγές [10] και [24].

### 2.3.3.3 Στροφική συμβιβαστότητα κατά Bundorf

Μια ακόμα προσέγγιση για την ανάλυση της στροφικής συμπεριφοράς οχημάτων είναι γνωστή ως «στροφική συμβιβαστότητα κατά Bundorf» (Bundorf's cornering compliance) και έχει υιοθετηθεί εδώ και δεκαετίες από πολλές αυτοκινητοβιομηχανίες για την προκαταρκτική αξιολόγηση σχεδιαστικών προτάσεων όσον αφορά συστήματα ανάρτησης και όχι μόνο. Η προσέγγιση αυτή εισήχθη για πρώτη φορά από τον Olley [25] στα τέλη της δεκαετίας του 1930 λαμβάνοντας υπόψιν αποκλειστικά την επίδραση των χαρακτηριστικών των ελαστικών επισώτρων στη στροφική συμπεριφορά οχημάτων (π.χ. στροφική δυσκαμψία), ενώ αργότερα γενικεύτηκε από τους Bundorf [26] και Leffert [27], εξού και το όνομά της.

Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα της ανάλυσης στροφικής συμβιβαστότητας κατά Bundorf είναι ότι η συνεισφορά καθεμίας από τις μεταβλητές σχεδιασμού (design variables) μπορεί να μελετηθεί ξεχωριστά και τελικά μέσω επαλληλίας να υπολογιστεί η προκύπτουσα στροφική συμπεριφορά του οχήματος εξαιτίας όλων των εμπλεκόμενων παραγόντων. Κατά συνέπεια μπορεί να διευκολύνει σημαντικά τη διαδικασία σύνθεσης κατά το σχεδιασμό οχημάτων, λειτουργώντας ως ένα εργαλείο ταχείας ποσοτικοποίησης της επίδρασης των διαφόρων σχεδιαστικών προτάσεων στη στροφική συμπεριφορά των πρώτων.

Από την άλλη, βασικό μειονέκτημα της ανάλυσης στροφικής συμβιβαστότητας κατά Bundorf αποτελεί η περιορισμένη ακρίβεια των αποτελεσμάτων όταν η γωνία πλαγιολίσθησης του πλαισίου είναι μεγάλη και τα ελαστικά λειτουργούν στη μη γραμμική περιοχή (non-linear handling regime/limit handling). Αν και υπάρχουν τρόποι βελτίωσης της ακρίβειας σε τέτοιες περιπτώσεις, π.χ. λαμβάνοντας υπόψιν μη-γραμμικότητες (nonlinearities), η περιπλοκότητα αυξάνεται σημαντικά με αποτέλεσμα να χάνεται το προαναφερθέν πλεονέκτημα της μεθόδου όσον αφορά την ταχύτητα υπολογισμού και ερμηνείας των αποτελεσμάτων. Τα μη-γραμμικά φαινόμενα έχουν συνήθως μικρή επίδραση στη δυναμική οχημάτων γενικής χρήσης, τα οποία κατά κύριο λόγο υφίστανται μικρές επιταχύνσεις. Γι' αυτό άλλωστε η ανάλυση στροφικής συμβιβαστότητας κατά Bundorf εν γένει προτιμάται από τις αυτοκινητοβιομηχανίες σε σχέση με τα διαγράμματα ροής εκτροπής που αναλύθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.

Υπό την παραδοχή, λοιπόν, ότι η εγκάρσια δυναμική οχήματος στη μόνιμη κατάσταση μπορεί να περιγραφεί μέσω ενός συνόλου αποκλειστικά γραμμικών σχέσεων (κατ' αντιστοιχία με τη γραμμικοποίηση ενός δυναμικού συστήματος γύρω από μια θέση ισορροπίας του), ο χαρακτηρισμός αυτής ανάγεται στον υπολογισμό των εξής παραγώγων ευαισθησίας (sensitivity derivatives/gradients) [20]:

- Παράγωγος ευαισθησίας γωνίας κλυδωνισμού  $\varphi$  (roll gradient):

$$k_{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_y} \quad (2.36)$$

- Παράγωγος ευαισθησίας γωνίας πλαγιολίσθησης πλαισίου  $\beta$  (attitude gradient):

$$k_{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial a_y} \quad (2.37)$$

- Παράγωγος ευαισθησίας γωνίας υποστροφής  $\delta_v$  (understeer gradient):

$$k = \frac{\partial \delta_v}{\partial a_y} \quad (2.38)$$

Η γωνία υποστροφής (understeer angle)  $\delta_v$ , ορίζεται ως εκείνη η συνιστώσα της μέσης γωνίας σύγκλισης  $\delta$  (mean steer angle) των τροχών του διεθυντηρίου άξονα ενός οχήματος, η οποία εισάγεται εξαιτίας δυναμικών φαινομένων, ενώ η κινηματική συνιστώσα (kinematic steer angle)  $\delta_k$ , προκύπτει σύμφωνα με τη συνθήκη Ackermann:

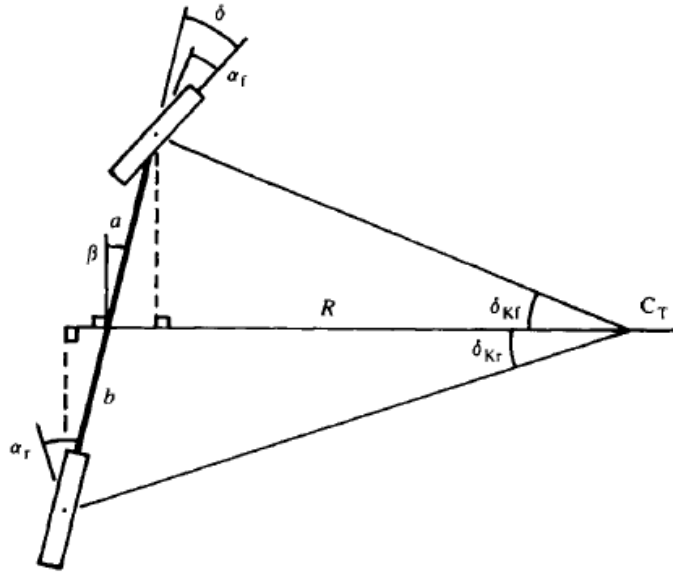
$$\delta_v = a_f - a_r \quad (2.39)$$

$$\delta_k = \tan^{-1} \left( \frac{l}{R} \right) \cong \frac{l}{R} \quad (2.40)$$

Λόγω της σχέσης (2.31), προκύπτει άμεσα ότι το άθροισμά της συνιστώσας  $\delta_v$  και της κινηματικής συνιστώσας  $\delta_k$ , ισούται με τη μέση γωνία σύγκλισης των τροχών του διεθυντηρίου άξονα για την προσέγγιση μιας δεδομένης καμπής σταθερής ακτίνας:

$$\delta = \delta_{\kappa} + \delta_{\nu} \quad (2.41)$$

Οι παραπάνω παράγωγοι ευαισθησίας μπορούν να θεωρηθούν σταθερές και συσχετίζουν τις γωνίες  $\varphi$ ,  $\beta$  και  $\delta_{\nu}$  με την υφιστάμενη πλευρική επιτάχυνση  $a_y$  μέσω απλών γραμμικών σχέσεων. Η ανάλυση στροφικής συμβιβαστότητας κατά Bunderf εστιάζει στον υπολογισμό της παραγώγου ευαισθησίας γωνίας υποστροφής  $k$ .



Σχήμα 2.39: Απλοποιημένο μοντέλο δυναμικής οχήματος στο επίπεδο [20]

Αξιοποιώντας και πάλι το απλοποιημένο μοντέλο δυναμικής οχήματος στο επίπεδο που εισήχθη στην Παράγραφο 2.3.3.1, αποδεικνύεται (Σχήμα 2.39) ότι η γωνία πλαγιολίσθησης του πλαισίου  $\beta$ , δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\beta = a_r - \frac{b}{R} \quad (2.42)$$

Σύμφωνα με την παραδοχή λειτουργίας των ελαστικών επισώτρων στη γραμμική περιοχή και με βάση τα όσα ειπώθηκαν παραπάνω περί στροφικής δυσκαμψίας αυτών, οι μέσες γωνίες πλαγιολίσθησης του εμπρόσθιου και οπίσθιου άξονα υπολογίζονται ως ακολούθως:

$$a_f = \frac{m_f a_y}{2C_{af}} = \frac{mb}{2lC_{af}} a_y, \quad a_r = \frac{m_r a_y}{2C_{ar}} = \frac{ma}{2lC_{ar}} a_y \quad (2.43)$$

όπου  $m_f$  και  $m_r$ , οι μάζες που αντιστοιχούν σε κάθε άξονα. Συνεπώς, η παράγωγος ευαισθησίας της γωνίας πλαγιολίσθησης του πλαισίου,  $k_{\beta}$ , δίνεται από την εξής σχέση:

$$\beta = \frac{ma}{2lC_{ar}} a_y - \frac{b}{R} \Rightarrow k_{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial a_y} = \frac{ma}{2lC_{ar}} \quad (2.44)$$

Ενώ με αντικατάσταση των σχέσεων (2.43) στη σχέση (2.39) προκύπτει ότι:

$$\delta_v = \frac{ma_y}{2l} \left( \frac{b}{C_{af}} - \frac{a}{C_{ar}} \right) \Rightarrow k = \frac{\partial \delta_v}{\partial a_y} = \frac{m}{2l} \left( \frac{b}{C_{af}} - \frac{a}{C_{ar}} \right) \quad (2.45)$$

Προκειμένου να ληφθεί υπόψιν η διαφοροποίηση της γωνίας  $\delta$  λόγω των μετατοπίσεων (kinematics) και των παραμορφώσεων (compliance) που υφίστανται οι αναρτήσεις, εισάγονται στη σχέση (2.31) οι γωνίες  $a_{sf}$  και  $a_{sr}$  ως επιπλέον όροι:

$$\delta = \frac{l}{R} + (a_f - a_r) + (a_{sf} + a_{sr}) \quad (2.46)$$

Όταν οι γωνίες αυτές έχουν θετικό πρόσημο τότε ενισχύουν την υποστροφική συμπεριφορά του οχήματος και αντίστροφα, δηλαδή για  $a_{sf} > 0$  η εγκάρσια δύναμη πρόσφυσης του εμπρόσθιου άξονα τείνει να μειωθεί και για  $a_{sr} > 0$  η εγκάρσια δύναμη πρόσφυσης του οπίσθιου άξονα τείνει να αυξηθεί, με αποτέλεσμα την αύξηση της απαιτούμενης γωνίας  $\delta$  για την προσέγγιση μιας δεδομένης καμπής σταθερής ακτίνας  $R$ .

Η γωνία σύγκλισης που εισάγεται στους τροχούς εξαιτίας της μη μηδενικής γωνίας κλυδωνισμού της ανηρητημένης μάζας κατά το εκάστοτε σενάριο πλευρικής επιτάχυνσης, υπολογίζεται μέσω των σχέσεων:

$$\Delta a_f = \frac{\partial a_f}{\partial \delta_f} \frac{\partial \delta_f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial a_y} a_y, \quad \Delta a_r = \frac{\partial a_r}{\partial \delta_r} \frac{\partial \delta_r}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial a_y} a_y \quad (2.47)$$

όπου,  $\delta_f$  και  $\delta_r$ , οι μέσες γωνίες σύγκλισης που εισάγονται στους τροχούς του εμπρόσθιου και οπίσθιου άξονα αντίστοιχα, λόγω μετατόπισης/παραμόρφωσης των μηχανισμών ανάρτησης. Οι γωνίες  $\delta_f$  και  $a_f$  (αντίστοιχα  $\delta_r$  και  $a_r$ ) σε κάθε χρονική στιγμή διαφέρουν κατά μία σταθερή ποσότητα, έστω  $c$ . Συνεπώς:

$$a_f = \delta_f + c \Rightarrow \frac{\partial a_f}{\partial \delta_f} = 1, \quad a_r = \delta_r + c \Rightarrow \frac{\partial a_r}{\partial \delta_r} = 1 \quad (2.48)$$

$$\Delta a_f = \frac{\partial \delta_f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial a_y} a_y = E_{R_f} k_\varphi a_y, \quad \Delta a_r = \frac{\partial \delta_r}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial a_y} a_y = E_{R_r} k_\varphi a_y \quad (2.49)$$

όπου,  $E_{R_f}$  και  $E_{R_r}$  σταθερές γραμμικής συσχέτισης της γωνίας κλυδωνισμού  $\varphi$  με τις γωνίες σύγκλισης,  $\delta_f$  και  $\delta_r$ , των τροχών. Ο κλυδωνισμός της ανηρητημένης μάζας εν γένει οδηγεί και σε μεταβολή των γωνιών κλίσης των τροχών. Παρόμοια με προηγουμένως, οι επαγόμενες γωνίες κλίσης συσχετίζονται με τη γωνία κλυδωνισμού ως ακολούθως:

$$\Delta \gamma_f = \frac{\partial \gamma_f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial a_y} a_y = \Gamma_{R_f} k_\varphi a_y, \quad \Delta \gamma_r = \frac{\partial \gamma_r}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial a_y} a_y = \Gamma_{R_r} k_\varphi a_y \quad (2.50)$$



όπου,  $\Gamma_{R_f}$  και  $\Gamma_{R_r}$ , σταθερές γραμμικής συσχέτισης της γωνίας κλυδωνισμού  $\varphi$  με τις γωνίες κλίσης,  $\gamma_f$  και  $\gamma_r$ , των τροχών. Στο σημείο αυτό, ορίζεται η δυσκαμψία κλίσης ελαστικού  $C_\gamma$  (camber stiffness), ως η μερική παράγωγος,  $\partial F_y / \partial \gamma$ , της αναπτυσσόμενης εγκάρσιας δύναμης πρόσφυσης ως προς τη γωνία κλίσης αυτού. Με βάση την παραδοχή λειτουργίας των ελαστικών επισώτρων στη γραμμική περιοχή και τους ορισμούς της στροφικής δυσκαμψίας και δυσκαμψίας κλίσης αυτών προκύπτουν άμεσα οι εξής σχέσεις:

$$\frac{\partial a_f}{\partial \gamma_f} = \frac{C_{\gamma f}}{C_{af}}, \quad \frac{\partial a_r}{\partial \gamma_r} = \frac{C_{\gamma r}}{C_{ar}} \quad (2.51)$$

Σε πλήρη αντιστοιχία με τις σχέσεις (2.47) λαμβάνονται οι ζητούμενες εκφράσεις για την αναγωγή της συνεισφοράς της μεταβολής της γωνίας κλίσης των τροχών κάθε άξονα στις γωνίες πλαγιολίσθησης  $a_f$  και  $a_r$ :

$$\Delta a_f = \frac{C_{\gamma f}}{C_{af}} \Gamma_{R_f} k_\varphi a_y, \quad \Delta a_r = \frac{C_{\gamma r}}{C_{ar}} \Gamma_{R_r} k_\varphi a_y \quad (2.52)$$

Συνεπώς, η συνολική ισοδύναμη συνεισφορά της μετατόπισης/παραμόρφωσης των αναρτήσεων στις γωνίες πλαγιολίσθησης του εμπρόσθιου και οπίσθιου άξονα ενός πλευρικά επιταχυνόμενου οχήματος υπολογίζεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$a_{sf} = \left( E_{R_f} k_\varphi + \frac{C_{\gamma f}}{C_{af}} \Gamma_{R_f} k_\varphi \right) a_y, \quad a_{sr} = \left( E_{R_r} k_\varphi + \frac{C_{\gamma r}}{C_{ar}} \Gamma_{R_r} k_\varphi \right) a_y \quad (2.53)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.43) και (2.53) στη σχέση (2.46) και παραγωγίζοντας τη σχέση που προκύπτει ως προς  $a_y$ , λαμβάνεται μια έκφραση για την παράγωγο ευαισθησίας  $k$ :

$$k = \frac{m}{2l} \left( \frac{b}{C_{af}} - \frac{a}{C_{ar}} \right) + \left( E_{R_f} k_\varphi + \frac{C_{\gamma f}}{C_{af}} \Gamma_{R_f} k_\varphi \right) + \left( E_{R_r} k_\varphi + \frac{C_{\gamma r}}{C_{ar}} \Gamma_{R_r} k_\varphi \right) \quad (2.54)$$

Το πρόσημο της τελευταίας παραγώγου είναι ενδεικτικό της στροφικής συμπεριφοράς του εκάστοτε μελετώμενου οχήματος. Πιο συγκεκριμένα, για  $k > 0$ , το όχημα είναι υποστροφικό, ενώ για  $k < 0$ , το όχημα είναι υπερστροφικό και το μέτρο της ίδιας παραγώγου είναι ενδεικτικό του πόσο απέχει η τρέχουσα στροφική συμπεριφορά του οχήματος από την ουδέτερη.

Οι παράγωγοι ευαισθησίας  $D_f$  και  $D_r$ , των διαφόρων συνιστωσών,  $\Delta a_f$  και  $\Delta a_r$ , των μέσων γωνιών πλαγιολίσθησης, ως προς την πλευρική επιτάχυνση του οχήματος καλούνται στροφικές συμβιβαστότητες (cornering compliances) του εμπρόσθιου και οπίσθιου άξονα αντίστοιχα:

$$D_f = \frac{\partial \Delta a_f}{\partial a_y}, \quad D_r = \frac{\partial \Delta a_r}{\partial a_y} \quad (2.55)$$



Η δε διαφορά τους ισούται (για το συγκεκριμένο μοντέλο οχήματος) με την παράγωγο ευαισθησίας γωνίας υποστροφής,  $k$ :

$$k = D_f - D_r \quad (2.56)$$

Ομοίως με παραπάνω, μπορούν να ληφθούν υπόψιν και άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν τη στροφική συμπεριφορά ενός οχήματος [20]. Στον ακόλουθο πίνακα (Πίνακας 2-1) δίνονται ενδεικτικά αποτελέσματα μιας ανάλυσης στροφικής συμβιβαστότητας κατά Bundorf για ένα όχημα με ελεύθερο διαφορικό (open differential) και χωρίς αεροδυναμικές επιδράσεις. Η προκύπτουσα παράγωγος ευαισθησίας γωνίας υποστροφής είναι θετική, επομένως το συγκεκριμένο όχημα εμφανίζει υποστροφική συμπεριφορά.

**Πίνακας 2-1: Αποτελέσματα ανάλυσης στροφικής συμβιβαστότητας κατά Bundorf [20]**

Factor	$D_f$ [deg/g]	$D_r$ [deg/g]	$D_f - D_r$ [deg/g]
Tire cornering stiffness	6.0	6.0	0.0
CoG longitudinal position	0.6	-0.6	1.2
Tire cornering stiffness nonlinearity	-0.3	0.3	-0.6
Roll steer	0.5	-0.5	1.0
Roll camber	0.2	0.5	-0.3
Lateral force compliance	0.2	0.2	0.0
Aligning torque compliance	1.1	0.1	1.0
Aligning torque on rigid body	0.1	-0.1	0.2
Cornering compliance	8.4	5.9	-
Understeer gradient	-	-	2.5

Με βάση τα όσα παρουσιάστηκαν σε αυτήν την παράγραφο, είναι εμφανής η χρησιμότητα της κινηματικής και ελαστοκινηματικής ανάλυσης συστημάτων ανάρτησης προκειμένου για τον υπολογισμό των σταθερών γραμμικής συσχέτισης  $E_{R_f}$ ,  $E_{R_r}$ ,  $\Gamma_{R_f}$  και  $\Gamma_{R_r}$ . Ειδικότερα, οι εν λόγω σταθερές προκύπτουν κάνοντας γραμμική παρεμβολή στα σχετικά αποτελέσματα των παραπάνω αναλύσεων. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την ανάλυση στροφικής συμβιβαστότητας κατά Bundorf, τρόπους ενσωμάτωσης της επίδρασης επιπλέον παραγόντων (π.χ. ροπές αυτοευθυγράμμισης των ελαστικών επισώτρων) σε αυτή και επέκτασή της στην περιοχή του ορίου πρόσφυσης ο αναγνώστης παραπέμπεται στις πηγές [10], [20], [26] και [27].

#### 2.3.3.4 Σύνθετα υπολογιστικά μοντέλα δυναμικής οχήματος

Τα μοντέλα δυναμικής οχήματος στο επίπεδο που αναλύθηκαν παραπάνω στηρίζονται σε απλουστευτικές παραδοχές, ώστε να είναι κατάλληλα για την πραγματοποίηση γρήγορων

υπολογισμών, βασιζόμενων κατά κύριο λόγο σε δεδομένα που είναι διαθέσιμα από τα πρώτα κιόλας στάδια του σχεδιασμού ενός οχήματος (π.χ. μεταξόνιο, συνολική μάζα και κατανομή αυτής κ.λπ.). Παρόλα αυτά, η ακρίβεια των αποτελεσμάτων των απλών αυτών μοντελοποιήσεων είναι περιορισμένη και δεν επαρκεί για την ολοκληρωμένη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς οχημάτων.

Για το σκοπό αυτόν, έχουν αναπτυχθεί σύνθετα μαθηματικά μοντέλα τα οποία προσομοιώνουν τη δυναμική του πλήρους οχήματος αξιοποιώντας στοιχεία συγκεντρωμένων ιδιοτήτων (full car model simulation with lumped elements), όπως το IPG Carmaker και το VI Grade. Τα εν λόγω μοντέλα, είναι λιγότερο σύνθετα από τα πλήρη μοντέλα οχημάτων σε περιβάλλον λογισμικού προσομοίωσης συστημάτων πολλαπλών σωμάτων που αναφέρθηκαν στο εισαγωγικό κεφάλαιο, γι' αυτό και έχουν σημαντικά μικρότερο υπολογιστικό κόστος σε σχέση με τα τελευταία. Παρόλα αυτά, περιορίζουν το χρήστη σε σχέση με την ποικιλία υποσυστημάτων που μπορούν να υλοποιηθούν. Ειδικά όσον αφορά τα κινηματικά και ελαστοκινηματικά χαρακτηριστικά των αναρτήσεων, αυτά λαμβάνονται υπόψιν μέσω πινακοποιημένων συναρτήσεων (look-up tables) που παρέχονται ως δεδομένα εισόδου από το χρήστη. Τέλος, αναφέρεται ότι η στροφική συμπεριφορά ενός οχήματος μπορεί να αναλυθεί με μεγάλη ακρίβεια κάνοντας χρήση τέτοιων σύνθετων υπολογιστικών μοντέλων, αφού σε κάθε χρονικό βήμα της εκάστοτε προσομοίωσης είναι διαθέσιμες οι γωνίες πλαγιολίσθησης όλων των ελαστικών επισώτρων.

### 2.4 Συνήθη στοιχεία σύνδεσης στα συστήματα ανάρτησης

---

Οποιοδήποτε σώμα κινείται σε σχέση με ένα άλλο σώμα/σύστημα αναφοράς, στη γενική περίπτωση διαθέτει 3 μεταφορικούς (translational/linear) και 3 στροφικούς (rotational) βαθμούς ελευθερίας από τους οποίους καθορίζεται πλήρως η κινητική του κατάσταση κάθε χρονική στιγμή. Θεωρητικά, ένα σύστημα ανεξάρτητης ανάρτησης καθορίζει μονοσήμαντα την τροχιά (path of motion) που ακολουθούν οι τροχοί σε σχέση με το πλαίσιο ή ισοδύναμα δεσμεύει όλους τους βαθμούς ελευθερίας των τελευταίων πλην ενός. Στην πραγματικότητα όμως, τα διάφορα τεμάχια από τα οποία αποτελείται ένα σύστημα ανάρτησης παραλαμβάνουν φορτία με αποτέλεσμα να παραμορφώνονται, έτσι η δέσμευση βαθμών ελευθερίας δεν είναι απόλυτη και η πραγματική τροχιά των τροχών μπορεί να αποκλίνει ελαφρώς από την ονομαστική [10]. Ο προσδιορισμός των χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών μηχανισμών ανάρτησης λαμβάνοντας υπόψιν τις εν λόγω παραμορφώσεις, αποτελεί άλλωστε θεμελιώδη στόχο της ελαστοκινηματικής ανάλυσης αυτών. Ακολούθως, αναλύονται συνοπτικά τα πλέον συνήθη στοιχεία σύνδεσης που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση μηχανισμών ανάρτησης σύγχρονων οχημάτων και εν πολλοίς καθορίζουν την ελαστοκινηματική συμπεριφορά αυτών. Τα ανωτέρω στοιχεία σύνδεσης διακρίνονται σε δύσκαμπτα και εύκαμπτα.

### 2.4.1 Δύσκαμπτα στοιχεία σύνδεσης

Κατά το σχεδιασμό συστημάτων ανάρτησης οχημάτων που προορίζονται για αγωνιστική χρήση, η κινηματική των αντίστοιχων μηχανισμών βελτιστοποιείται ούτως ώστε ο προσανατολισμός των τροχών (γωνίες κλίσης και σύγκλισης) να ευνοεί όσο το δυνατόν περισσότερο την ανάπτυξη δυνάμεων πρόσφυσης από τα ελαστικά επίσωτρα. Η απόκλιση της πραγματικής γεωμετρίας της ανάρτησης από τη βέλτιστη/ονομαστική, ουσιαστικά δεν επιτρέπει στο όχημα να εκμεταλλευτεί τις μέγιστες δυνάμεις πρόσφυσης που είναι σε θέση να αναπτύξουν τα ελαστικά και ισοδυναμεί με μικρότερες επιταχύνσεις, δηλαδή συνολικά χειρότερες επιδόσεις. Τα δύσκαμπτα στοιχεία σύνδεσης αποτελούν ιδανική επιλογή για την ελαχιστοποίηση της ανωτέρω απόκλισης, διότι υφίστανται πολύ μικρές παραμορφώσεις κατά τη φόρτίσή τους, συνεπώς περιορίζουν σημαντικά την επίδραση ελαστοκινηματικών φαινομένων στην προκύπτουσα γεωμετρία των μηχανισμών ανάρτησης.

Τα συνηθέστερα δύσκαμπτα στοιχεία σύνδεσης είναι τα κοινά σφαιρικά έδρανα (spherical bearings), αποτελούμενα από ένα τμήμα κοίλης σφαίρας που λειτουργεί ως περίβλημα μιας άλλης σφαίρας (Σχήμα 2.40α), δεσμεύοντας έτσι όλους τους μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας μεταξύ των συνδεδεμένων σωμάτων. Στην πλειοψηφία των εφαρμογών σε οχήματα, τα σφαιρικά έδρανα είναι κατασκευασμένα εξ ολοκλήρου από χάλυβα, εξού και η αυξημένη δυσκαμψία τους. Επιπλέον, διαμορφώσεις με σπείρωμα (threaded sleeve rod ends) όπως αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 2.40β, επιτρέπουν τη μικρή μεταβολή του μήκους των διαφόρων μελών ενός μηχανισμού ανάρτησης και αποτελούν ένα γρήγορο, ακριβή και ανέξοδο τρόπο επέμβασης στη γεωμετρία αυτού χωρίς αντικατάσταση των ήδη υπαρχόντων τεμαχίων.



**Σχήμα 2.40: Σφαιρικά έδρανα για τη σύνδεση μελών ανάρτησης [28]**

Η δυνατότητα αυτή, καθιστά τα εν λόγω σφαιρικά έδρανα ακόμα πιο ελκυστικά για χρήση σε οχήματα που προορίζονται για αγωνιστική χρήση, καθώς η ρυθμισιμότητα (adjustability) των μηχανισμών ανάρτησης αποτελεί σημαντικό πλεονέκτημα για τη βελτιστοποίηση της δυναμικής των πρώτων (π.χ. επεμβάσεις στη στροφική συμπεριφορά οχημάτων μέσω μεταβολών στη γεωμετρία των αναρτήσεων – Υποενότητα 2.3.3). Παρόλα αυτά, σημαντικό μειονέκτημα των σφαιρικών εδράνων με σπείρωμα αποτελεί η μειωμένη δυσκαμψία

αυτών σε κάμψη (rod ends in bending) [29], σε αντίθεση με τη μεγάλη δυσκαμψία που εμφανίζουν κατά την αξονική διεύθυνση [30].

Επιπρόσθετα, η χρήση σφαιρικών εδράνων για τη σύνδεση των μελών ενός μηχανισμού ανάρτησης, τόσο μεταξύ τους όσο και με το πλαίσιο, απαιτεί την τήρηση ιδιαίτερα υψηλών προδιαγραφών ακριβείας (standards of accuracy) κατά την κατασκευή ενός οχήματος. Αν το πλαίσιο ή τα διάφορα τεμάχια εμφανίζουν διαστατικές αποκλίσεις σε σχέση με τα αντίστοιχα κατασκευαστικά σχέδια, αφενός ενδέχεται να μην είναι καν εφικτή η συναρμολόγηση του συστήματος ανάρτησης, αφετέρου η πραγματική τροχιά που θα ακολουθούν οι τροχοί θα αποκλίνει από τη θεωρητικά προβλεπόμενη.

Σε ορισμένες ιδιαίτερα απαιτητικές εφαρμογές (π.χ. αναρτήσεις μονοθεσίων τύπου Formula 1), ως επιπλέον μειονέκτημα των σφαιρικών εδράνων θεωρείται και η κατασκευαστική ανοχή (engineering tolerance) που απαιτείται για τη συναρμολόγηση των δύο προαναφερθεισών σφαιρών. Μάλιστα, όσο μεγαλύτερο πλήθος σφαιρικών εδράνων χρησιμοποιείται για τη συναρμολόγηση (assembly) ενός μηχανισμού ανάρτησης, τόσο πιο μεγάλη είναι η απόκλιση μεταξύ της πραγματικής και της θεωρητικής γεωμετρίας της ανάρτησης, φαινόμενο γνωστό και ως «συσσώρευση ανοχών» (stack-up of accumulated tolerances) [31].

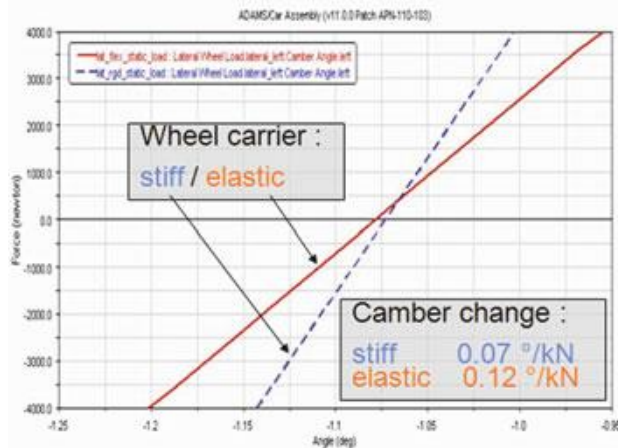


**Σχήμα 2.41: Ανάρτηση διπλών ψαλιδιών πίσω άξονα αγωνιστικού οχήματος χωρίς σφαιρικά έδρανα [32]**

Προκειμένου να αντιμετωπιστούν εν μέρει τα μειονεκτήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω, κυρίως σε αναρτήσεις διπλών ψαλιδιών και όταν η επαγόμενη περιπλοκότητα δεν αποτελεί περιοριστικό παράγοντα, τα σφαιρικά έδρανα που συνδέουν τους βραχίονες ελέγχου με το πλαίσιο καταργούνται εντελώς. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι τελευταίοι εδράζονται απευθείας επί του πλαισίου μέσω κοχλιοσυνδέσεων, ενώ τα άκρα τους είναι διαμορφωμένα ούτως ώστε να έχουν μικρή κατακόρυφη καμπτική δυσκαμψία και ταυτόχρονα να είναι πολύ στιβαρά ως προς οποιοδήποτε άλλο είδος καταπόνησης (suspension flexures/deformable hinges – Σχήμα 2.41). Σημειώνεται εδώ ότι ο σχεδιασμός

τέτοιων βραχιόνων ελέγχου είναι ιδιαίτερα απαιτητικός και λόγω των μεγάλων παραμορφώσεων που υφίστανται τα άκρα τους, συνοδεύεται αναπόφευκτα από εκτεταμένη χρήση λογισμικού ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων.

Στο ίδιο κλίμα με παραπάνω, όλα τα μέλη ενός μηχανισμού ανάρτησης (βραχιόνες ελέγχου, φορείς τροχών κ.λπ.) θα μπορούσαν δυνητικά να θεωρηθούν δύσκαμπτα στοιχεία σύνδεσης, καθώς υφίστανται μικρές παραμορφώσεις κατά τη φόρτισή τους (με εξαίρεση τις αναρτήσεις ημιάκαμπτου άξονα) και συνδέουν τουλάχιστον δύο άλλα σώματα μεταξύ τους. Πράγματι, η θεώρηση αυτή έχει επικρατήσει κατά το σχεδιασμό αναρτήσεων που προορίζονται για σύγχρονα οχήματα ανεξαρτήτως επιδόσεων και κόστους, με αποτέλεσμα την εισαγωγή προδιαγραφών δυσκαμψίας για κάθε μεμονωμένο τεμάχιο αυτών, προκειμένου για την επίτευξη της επιθυμητής ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς. Στο Σχήμα 2.42, απεικονίζεται η μεταβολή της γωνίας κλίσης ενός τροχού, κατά την ελαστοκινηματική ανάλυση (ADAMS) ενός συστήματος ανάρτησης με άκαμπτους (rigid/stiff) και εύκαμπτους (flexible/elastic) φορείς τροχών. Είναι εμφανής η διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων σε κάθε περίπτωση (ακολουθεί περαιτέρω ανάλυση στην Υποενότητα 4.2.3).

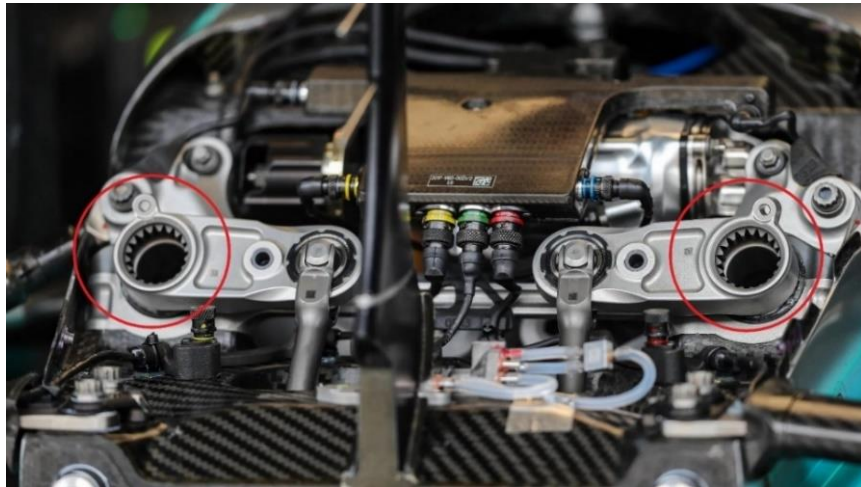


**Σχήμα 2.42: Μεταβολή γωνίας κλίσης με άκαμπτο και εύκαμπτο φορέα τροχού [6]**

Επιπλέον, η χρήση δύσκαμπτων στοιχείων σύνδεσης με τη γενικότερη έννοια του όρου, όπως αυτή αναλύθηκε παραπάνω (π.χ. δοκών, ελασμάτων κ.λπ.), ως στοιχεία δυσκαμψίας (stiffness elements) στη θέση των κλασικών ελατηρίων, αποτελεί συνήθη πρακτική σε οχήματα υψηλών επιδόσεων και όχι μόνο. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.43, φαίνεται μέρος του συστήματος επενέργησης της ανάρτησης (suspension actuation system) του εμπρόσθιου άξονα ενός μονοθεσίου οχήματος τύπου Formula 1, στο οποίο παρατηρείται η απουσία ελικοειδών ελατηρίων (coil springs). Σε αυτήν την περίπτωση, ως στοιχεία δυσκαμψίας χρησιμοποιούνται κυλινδρικές δοκοί σε στρέψη, τα κάτω άκρα των οποίων πακτώνονται στο πλαίσιο, ενώ τα άνω άκρα τους συνδέονται μέσω πολύσφηνων (splines) στα μοχλικά επενέργησης της ανάρτησης (bellcranks/rockers). Με κατάλληλη

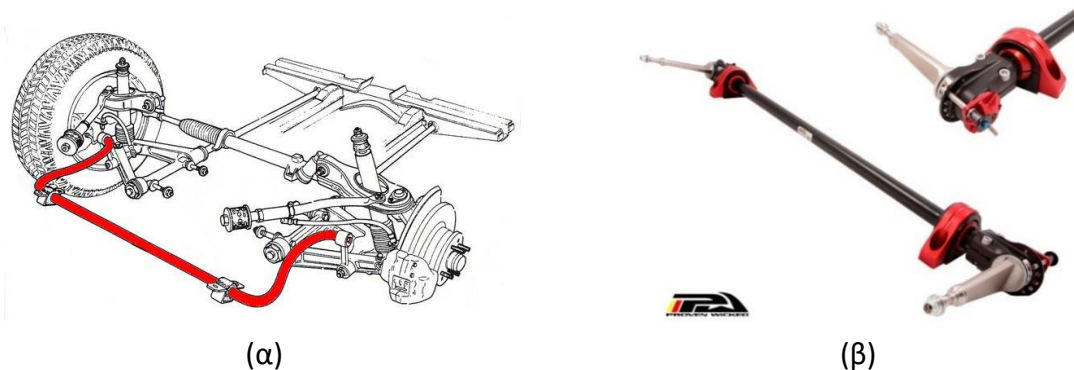


διαστασιολόγηση και στήριξη των δοκών στο πλαίσιο, οι καμπτικές παραμορφώσεις που αυτές υφίστανται μπορούν να εξαλειφθούν σχεδόν πλήρως, ώστε να είναι δυνατή η λειτουργία των πρώτων και ως άξονες περιστροφής των ανωτέρω μοχλικών. Κατ' αυτόν τον τρόπο, μειώνεται ο συνολικός αριθμός τεμαχίων που απαιτούνται για την υλοποίηση του συστήματος επενέργειας της ανάρτησης και ταυτόχρονα περιορίζονται τα φαινόμενα συσσώρευσης ανοχών, με αποτέλεσμα την αύξηση της στιβαρότητας και τη μείωση του ιδίου βάρους του συναρμολογήματος.



**Σχήμα 2.43: Υλοποίηση στοιχείων δυσκαμψίας με κυλινδρικές δοκούς σε στρέψη**

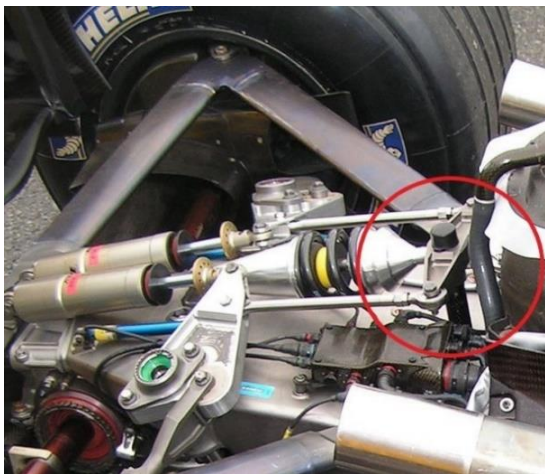
Αντίστοιχο παράδειγμα όσον αφορά τα σχήματα γενικής χρήσης αποτελεί η ευρύτητα χρησιμοποιούμενη αντιστρεπτική δοκός σχήματος U (U-bar). Πρόκειται για μια κυλινδρική δοκό, εδραζόμενη σε δύο σημεία του πλαισίου, η οποία μέσω κατάλληλων στιβαρών συνδέσμων στα άκρα της (drop links) μπορεί να «παρακολουθεί» την κίνηση των τροχών του φέροντος αυτήν άξονα κατά την κατακόρυφη διεύθυνση (Σχήμα 2.44α). Η αντιστρεπτική δοκός παραλαμβάνει στρεπτικά φορτία κατά την εκτός φάσης μετατόπιση των τροχών, με αποτέλεσμα να παραμορφώνεται, συνεισφέροντας έτσι στη συνολική δυσκαμψία κλυδωνισμού του ανωτέρω άξονα.



**Σχήμα 2.44: Αντιστρεπτικές δοκοί σχήματος U [33], [16]**

Μια διαφορετική υλοποίηση του ίδιου στοιχείου δυσκαμψίας είναι γνωστή ως αντιστρεπτική δοκός σχήματος T (T-bar) και απαντάται σχεδόν αποκλειστικά σε αγωνιστικά οχήματα. Σε αυτήν την παραλλαγή, ένας μηχανισμός Watt (Watt's linkage) μετατρέπει την κίνηση των μοχλικών επενέργησης σε στρεπτική παραμόρφωση μιας κυλινδρικής δοκού, η οποία δε μπορεί να περιστραφεί ελεύθερα γύρω από τον άξονά της, ούσα κατάλληλα αρθρωμένη στο πλαίσιο του οχήματος, συνεπώς υφίσταται στρεπτικές παραμορφώσεις κατά την κίνηση των τροχών εκτός φάσης (Σχήμα 2.45α).

Όπως ήδη αναφέρθηκε στην Παράγραφο 2.3.2.3, η μεταβολή της δυσκαμψίας της αντιστρεπτικής δοκού επηρεάζει άμεσα την κατανομή της συνολικής εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου μεταξύ των αξόνων, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιείται ως μέσο βελτιστοποίησης της εγκάρσιας δυναμικής αγωνιστικών οχημάτων. Προκειμένου να αποφεύγεται η τοποθέτηση δοκού διαφορετικής διαμέτρου κάθε φορά που απαιτείται διαφορετική δυσκαμψία κλυδωνισμού άξονα, συχνά χρησιμοποιούνται οι φερόμενες ως «λεπίδες» αντιστρεπτικής δοκού (ARB blades), οι οποίες ουσιαστικά είναι ελάσματα μεταβλητής διατομής υπό κάμψη. Στην περίπτωση της αντιστρεπτικής δοκού σχήματος U, αυτές αντικαθιστούν τους συνδέσμους στα άκρα της (Σχήμα 2.44β), ενώ σε αντιστρεπτικές δοκούς σχήματος T, οι λεπίδες αρθρώνονται στο πλαίσιο και επί αυτών εδράζεται ο προαναφερθείς μηχανισμός Watt (Σχήμα 2.45β).



(α)



(β)

**Σχήμα 2.45: Αντιστρεπτικές δοκοί σχήματος T**

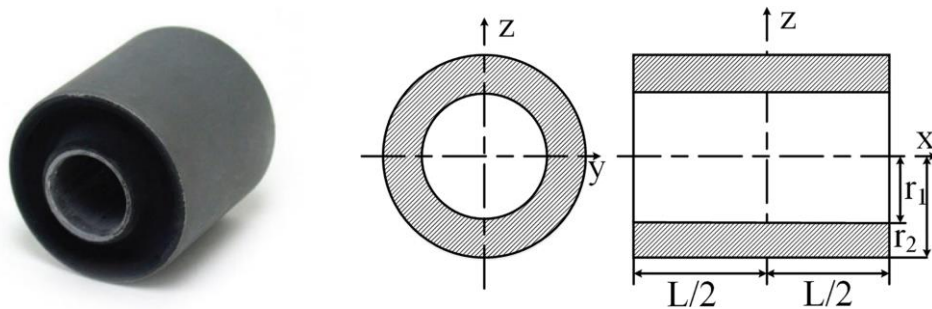
Οι λεπίδες μπορούν να περιστρέφονται γύρω από την αξονική διεύθυνση, με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται η «ενεργή» ροπή αδράνειας αυτών, κατά συνέπεια και η ισοδύναμη δυσκαμψία τους όταν παραλαμβάνουν καμπτικά φορτία. Έτσι, λειτουργούν ως στοιχείο δυσκαμψίας συνδεδεμένο εν σειρά με την κυλινδρική δοκό υπό στρέψη. Μάλιστα, σε προηγμένες εφαρμογές οι λεπίδες μπορούν να περιστρέφονται από σερβοκινητήρα, προσφέροντας στον οδηγό τη δυνατότητα άμεσης επέμβασης στη δυσκαμψία κλυδωνισμού του εκάστοτε άξονα σε πραγματικό χρόνο.



Τα πλεονεκτήματα των δύσκαμπτων στοιχείων σύνδεσης είναι πολλά, ωστόσο αν και η χρήση τους αποτελεί συνήθη πρακτική σε οχήματα υψηλών επιδόσεων, δεν είναι το ίδιο εκτεταμένη σε οχήματα γενικού σκοπού. Οι δύο βασικότεροι λόγοι εξαιτίας των οποίων τα πρώτα αποφεύγονται σε τέτοιου είδους εφαρμογές είναι, αφενός το αυξημένο κόστος τους σε σχέση με τα εύκαμπτα στοιχεία σύνδεσης που θα αναλυθούν στην ακόλουθη υποενότητα, αφετέρου η συμβολή τους στη σχεδόν αυτούσια μετάδοση κινηματικών και δυναμικών διεγέρσεων από τις αναρτήσεις στο πλαίσιο.

#### 2.4.2 Εύκαμπτα στοιχεία σύνδεσης

Η συντριπτική πλειοψηφία συστημάτων ανάρτησης τροχοφόρων οχημάτων περιλαμβάνει εύκαμπτα στοιχεία σύνδεσης γνωστά και ως ελαστικά παρεμβύσματα ή σινεμπλόκ (rubber bushings/silent blocks), η χρήση των οποίων καθίσταται επιβεβλημένη τόσο για την ελαχιστοποίηση των δονήσεων και των κραδασμών που βιώνουν οι επιβάτες (ride comfort), όσο και για τον περιορισμό του θορύβου που αναπτύσσεται εντός της καμπίνας του οχήματος κατά την κίνηση αυτού (NVH). Ένα σύγχρονο όχημα φέρει επιπλέον εύκαμπτα στοιχεία σύνδεσης για την έδραση του υποπλαισίου (subframe), του κινητήρα και του συστήματος μετάδοσης (κιβώτιο ταχυτήτων, διαφορικό) στο κυρίως πλαίσιο, τα οποία μάλιστα διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη συνολική αίσθηση άνεσης και ποιότητας κύλισης που αποκομίζουν οι επιβάτες. Παρόλα αυτά, η ανάλυση όλων των διαθέσιμων τύπων εύκαμπτων στοιχείων σύνδεσης ξεφεύγει από το πλαίσιο της παρούσας ΔΕ γι' αυτό και παρακάτω γίνεται αναφορά μόνο σε όσα από αυτά χρησιμοποιούνται για τη σύνδεση μελών συστημάτων ανάρτησης και διεύθυνσης.

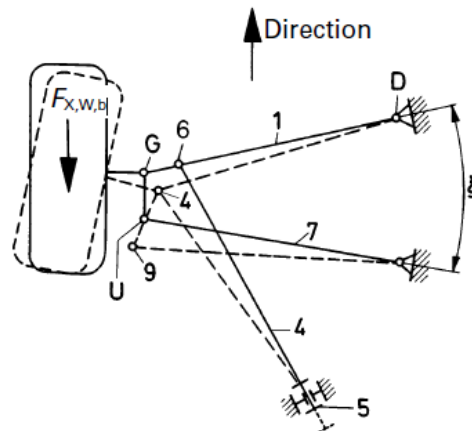


**Σχήμα 2.46: Τυπικό ελαστικό παρέμβυσμα και σχηματική απεικόνιση αυτού [34]**

Το απλούστερο εύκαμπτο στοιχείο σύνδεσης που μπορεί κανείς να συναντήσει σε σύγχρονα συστήματα ανάρτησης αποτελείται από δύο ομοαξονικούς μεταλλικούς κυλίνδρους (sleeves) στο διάκενο μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται προεντεταμένο πολυμερές υλικό (rubber) που έχει υποστεί βουλκανισμό (Σχήμα 2.46) [6], [34]. Στη γενική περίπτωση, ένα τέτοιο στοιχείο σύνδεσης επιτρέπει τη σχετική κίνηση των συνδεόμενων τεμαχίων κατά την έννοια όλων των μεταξύ τους βαθμών ελευθερίας, εντός ορισμένου εύρους και υπό την προϋπόθεση άσκησης δύναμης/ροπής, καθώς η παραμόρφωση του

προαναφερθέντος πολυμερούς προσδίδει χαρακτηριστικά δυσκαμψίας στις διάφορες συνδέσεις.

Εξαιτίας της ανωτέρω ελαστικής συμπεριφοράς, ένα τέτοιο εύκαμπτο στοιχείο σύνδεσης στη μόνιμη κατάσταση μπορεί να μοντελοποιηθεί ως συνδυασμός τριών στοιχείων μεταφορικής και ισάριθμων στοιχείων στροφικής δυσκαμψίας, τα οποία εν γένει παρουσιάζουν εξόχως μη γραμμική και συχνά συζευγμένη συμπεριφορά. Συνήθως, η δυσκαμψία που σχετίζεται με τη στροφή γύρω από την αξονική διεύθυνση είναι μειωμένη, ούτως ώστε να μην απαιτείται άσκηση μεγάλης ροπής για τη σχετική περιστροφή των συνδεόμενων τεμαχίων γύρω από τη διεύθυνση αυτή. Η πρόσδοση ελαστικότητας στις διάφορες συνδέσεις μεταξύ τεμαχίων αποτελεί ένα ιδιαίτερα σημαντικό πλεονέκτημα για τις αυτοκινητοβιομηχανίες όσον αφορά τη μείωση του κόστους, καθώς οι προδιαγραφές ακριβείας κατά την κατασκευή ενός οχήματος (ανοχές) δε χρειάζεται να είναι το ίδιο αυστηρές με ένα σύστημα ανάρτησης που αξιοποιεί, για παράδειγμα, σφαιρικά έδρανα. Τα ελαστικά παρεμβύσματα προσδίδουν επίσης χαρακτηριστικά απόσβεσης στις συνδέσεις μεταξύ τεμαχίων, τα οποία εξαρτώνται έντονα από τη συχνότητα της κινηματικής/δυναμικής διέγερσης και συμβάλλουν καθοριστικά στον περιορισμό του θορύβου που αναπτύσσεται στο χώρο των επιβατών.



**Σχήμα 2.47: Ελαστοκινηματική μεταβολή της γωνίας σύγκλισης λόγω διαμήκου φόρτισης του τροχού [19]**

Κατά την κίνηση του οχήματος, τα μέλη της ανάρτησης, συνεπώς και τα εμπλεκόμενα εύκαμπτα στοιχεία σύνδεσης, παραλαμβάνουν φορτία με αποτέλεσμα την εμφάνιση σχετικών μετατοπίσεων, τόσο μεταξύ του πλαισίου και των μελών της ανάρτησης, όσο και αποκλειστικά μεταξύ των τελευταίων (Σχήμα 2.47). Γίνεται, επομένως, φανερή η κρισιμότητα της επιλογής χαρακτηριστικών δυσκαμψίας και προσανατολισμού των εύκαμπτων στοιχείων σύνδεσης που θα χρησιμοποιηθούν σε ένα σύστημα ανάρτησης, όσον αφορά την επίτευξη των επιθυμητών ελαστοκινηματικών χαρακτηριστικών. Για παράδειγμα, η πλευρική δυναμική συμπεριφορά οχημάτων που φέρουν αναρτήσεις ημιάκαμπτου άξονα, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τα ελαστικά παρεμβύσματα που

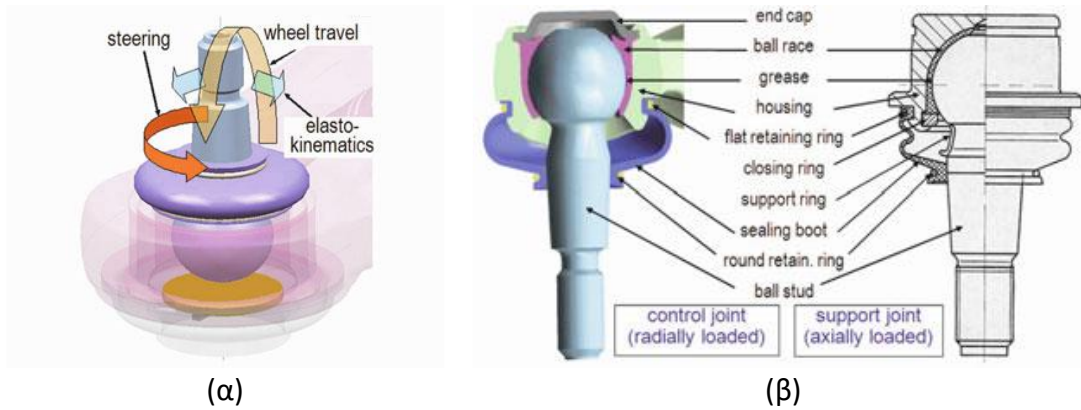
μεσολαβούν μεταξύ του τελευταίου και του πλαισίου (toe-correct bushings). Τα εν λόγω στοιχεία σύνδεσης είναι υπεύθυνα για τη διατήρηση της γωνίας σύγκλισης των τροχών εντός ενός ευνοϊκού, για τη στροφική συμπεριφορά του οχήματος, εύρους, όταν αυτοί μετατοπίζονται εκτός φάσης.

Λόγω της σημαντικής επίδρασης που έχουν τα εύκαμπτα στοιχεία σύνδεσης στην άνεση και στη δυναμική συμπεριφορά ενός οχήματος, έχουν αποτελέσει βασικό αντικείμενο βελτιστοποίησης κατά το σχεδιασμό αναρτήσεων εδώ και δεκαετίες, αποτέλεσμα της οποίας ήταν η εισαγωγή σύνθετων γεωμετριών (Σχήμα 2.48) και η χρήση μη γραμμικών υλικών για την κατασκευή των πρώτων. Έτσι, ο σχεδιασμός εύκαμπτων στοιχείων σύνδεσης συστημάτων ανάρτησης πραγματοποιείται πλέον σχεδόν αποκλειστικά μέσω λογισμικών ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων. Από την άλλη πλευρά, η ενσωμάτωση των ελαστικών παρεμβυσμάτων σε λογισμικά προσομοίωσης δυναμικής οχημάτων γίνεται μέσω προσεγγιστικών μοντέλων, τα οποία επιτυγχάνουν ικανοποιητική ακρίβεια χωρίς να αυξάνεται υπέρμετρα το επαγόμενο υπολογιστικό κόστος [5].

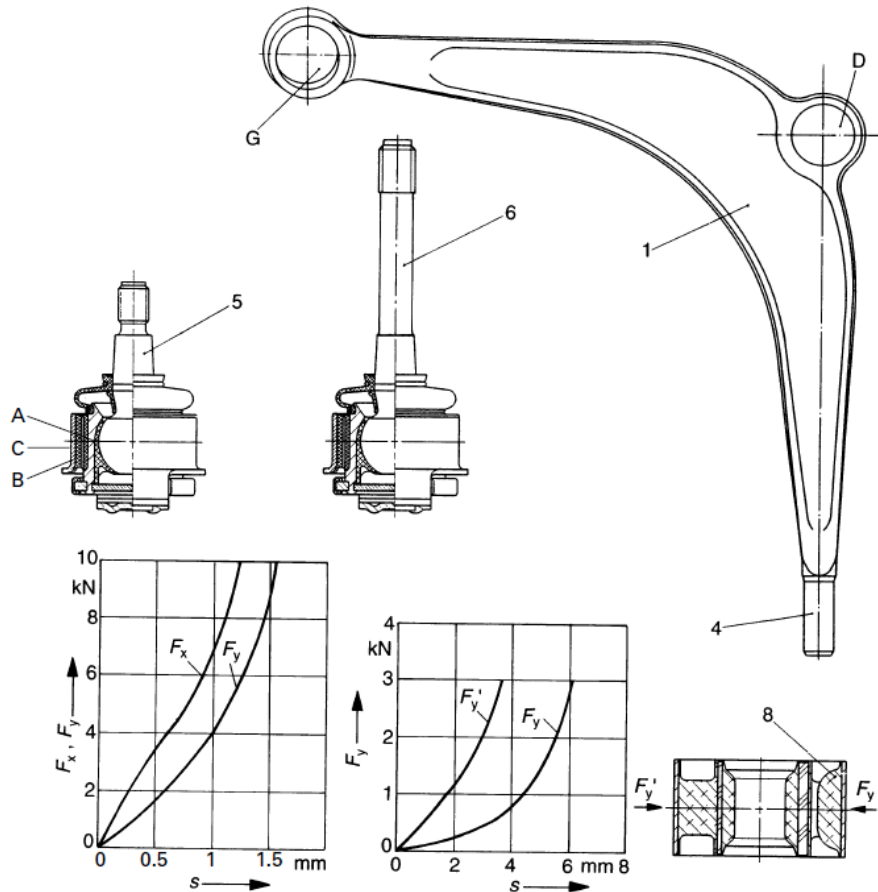


**Σχήμα 2.48: Διάφορα ελαστικά παρεμβύσματα συστημάτων ανάρτησης**

Μια άλλη κατηγορία στοιχείων σύνδεσης, τα οποία προσιδιάζουν στα σφαιρικά έδρανα που αναλύθηκαν παραπάνω, είναι οι σφαιρικοί σύνδεσμοι (ball joints). Τα εν λόγω στοιχεία χρησιμοποιούνται κατά κόρον για τη σύνδεση του φορέα του τροχού με το σύστημα διεύθυνσης, αφού σε αντίθεση με τα κυλινδρικά ελαστικά παρεμβύσματα, απαιτείται η άσκηση ροπής μικρού πλάτους προκειμένου να υπάρξει σχετική περιστροφή μεταξύ των συνδεόμενων σωμάτων γύρω από οποιαδήποτε διεύθυνση [6]. Οι δύο εκ των τριών σχετικών στροφικών βαθμών ελευθερίας των σφαιρικών συνδέσμων αξιοποιούνται για την κατακόρυφη μετατόπιση της ανάρτησης και τη στροφή του φορέα του τροχού γύρω από τον άξονα διεύθυνσης, ενώ ο εναπομείναντας στροφικός βαθμός ελευθερίας επιτρέπει τη μεταβολή της θέσης και του προσανατολισμού του φορέα του τροχού εξαιτίας ελαστοκινηματικών φαινομένων (Σχήμα 2.49α).



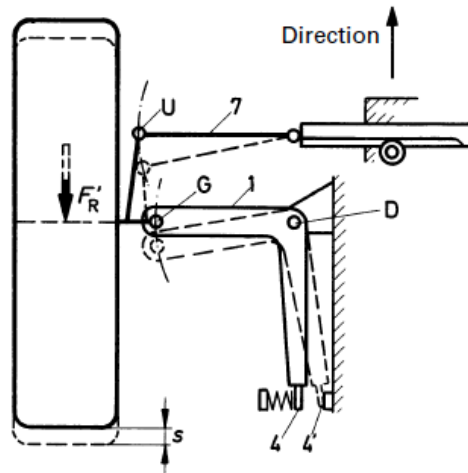
Σχήμα 2.49: Δομικά και λειτουργικά στοιχεία σφαιρικών παρεμβυσμάτων και βαθμοί ελευθερίας αυτών [6]



Σχήμα 2.50: Έδραση βραχίονα ελέγχου σχήματος L, εμπρός BMW Z3 [19]

Μια ακόμα εφαρμογή του εν λόγω εύκαμπτου στοιχείου σύνδεσης σε σύγχρονα συστήματα ανάρτησης είναι για την έδραση βραχιόνων ελέγχου σχήματος L (boomerang/L-shaped control arms) στο πλαίσιο του οχήματος και στο φορέα του τροχού, όπως φαίνεται στο

Σχήμα 2.50 (σημεία G, D → παρεμβύσματα 5, 6 αντίστοιχα), σε συνδυασμό με ένα κυλινδρικό ελαστικό παρέμβυσμα (σημείο 4 → παρέμβυσμα 8). Ο ανωτέρω τρόπος έδρασης των βραχιόνων ελέγχου απαντάται συνήθως σε αναρτήσεις με γόνατα MacPherson και εάν οι δυσκαμψίες των παρεμβυσμάτων επιλεγούν κατάλληλα, μπορεί να συμβάλει καθοριστικά στον περιορισμό του θορύβου που αναπτύσσεται στην καμπίνα λόγω κύλισης των τροχών επί οδοστρώματος με ανωμαλίες μικρού πλάτους (π.χ. αυτοκινητόδρομος). Ειδικότερα, τα δύο σφαιρικά παρεμβύσματα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο δύσκαμπτα όσον αφορά τους μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας, ενώ το κυλινδρικό παρέμβυσμα πρέπει να έχει εντόνως προοδευτικά χαρακτηριστικά δυσκαμψίας κατά την εγκάρσια διεύθυνση [19]. Μια υλοποίηση ενός τέτοιου συστήματος ανάρτησης απεικονίζεται στο Σχήμα 2.51. Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι το εγκάρσιο τμήμα του βραχίονα ελέγχου (1) και η ράβδος συγκράτησης του τροχού (7) έχουν περίπου το ίδιο μήκος και εδράζονται ούτως ώστε τα τόξα που διαγράφουν τα σημεία U και G κατά τη διαμήκη μετατόπιση του τροχού να έχουν σχεδόν ίδια ακτίνα, με αποτέλεσμα την ελαχιστοποίηση της γωνίας σύγκλισης που εισάγεται στον τροχό όταν ο τελευταίος μετατοπίζεται διαμήκως λόγω φόρτισης κατά την ίδια διεύθυνση.

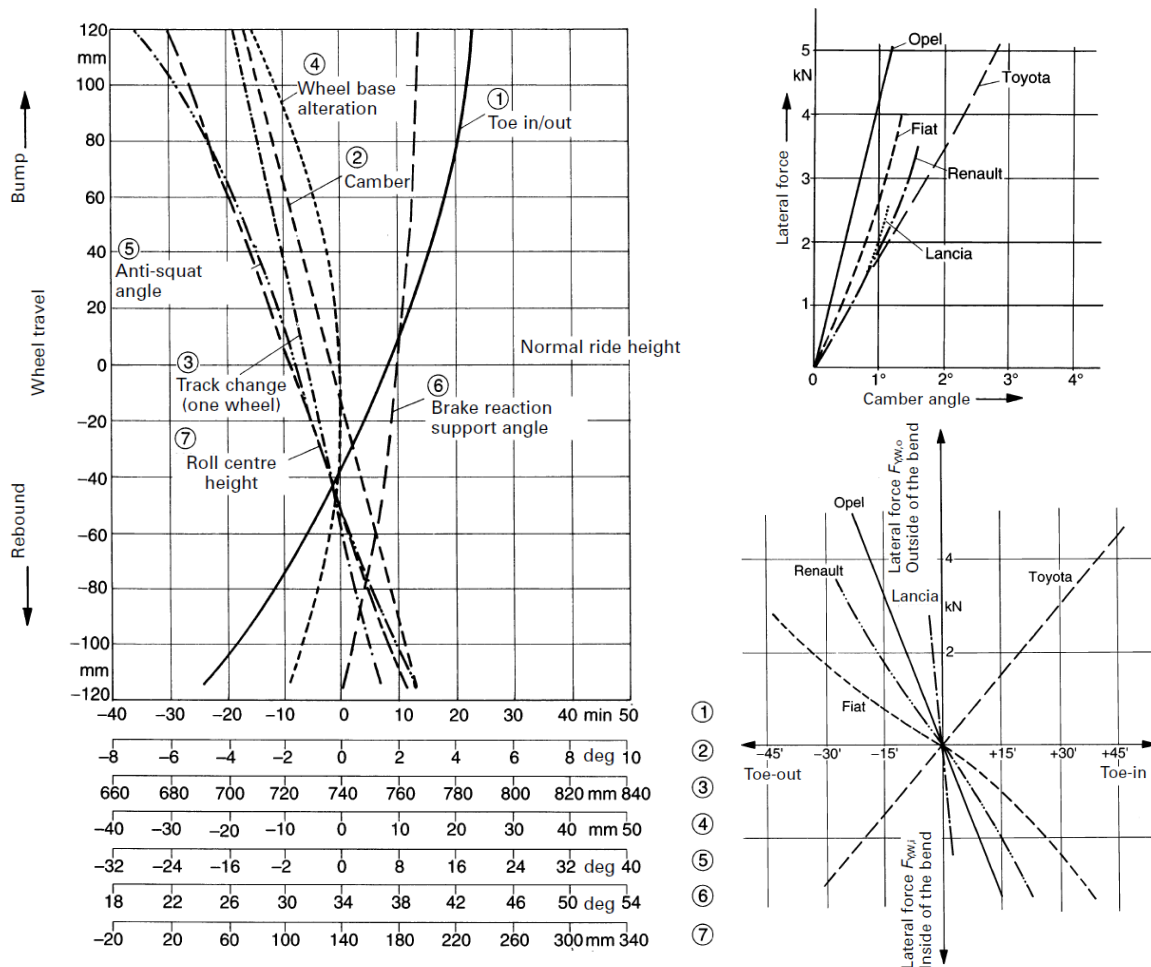


**Σχήμα 2.51: Μερική εξάλειψη της ελαστοκινηματικής μεταβολής της γωνίας σύγκλισης κατά τη διαμήκη φόρτιση τροχού [19]**

Κλείνοντας, κατά το σχεδιασμό και την κατασκευή σφαιρικών παρεμβυσμάτων ιδιαίτερη προσοχή δίνεται όσον αφορά την ελαχιστοποίηση της ακτινικής χάρης μεταξύ της κοίλης και της περιεχόμενης σφαίρας, ενώ ταυτόχρονα επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση των φορτίων που οφείλονται στην τριβή μεταξύ των δύο αυτών τμημάτων κάνοντας χρήση κατάλληλου λιπαντικού (Σχήμα 2.49β). Επιπλέον, είναι επιθυμητή η επίτευξη όσο το δυνατόν μεγαλύτερης διάρκειας ζωής των σφαιρικών παρεμβυσμάτων, χωρίς αυτά να επηρεάζονται από τις συνθήκες του περιβάλλοντος στο οποίο βρίσκονται (ακτινοβολία, υγρασία, ακραίες θερμοκρασίες, σκόνη), γι' αυτό και χρησιμοποιούνται κατάλληλα λαστιχένια καλύμματα (sealing boots).

## 2.5 Προσδιορισμός γεωμετρικών μεγεθών συστημάτων ανάρτησης

Ο ακριβής προσδιορισμός της μεταβολής των χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών ενός συστήματος ανάρτησης, καθώς αυτό υφίσταται κινηματικές (Kinematics) ή/και δυναμικές (Compliance) εξωτερικές διεγέρσεις σταθερού πλάτους, αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία με τον όρο “K&C mapping”. Η διαδικασία προσδιορισμού των ανωτέρω μεγεθών μπορεί να είναι είτε πειραματική, είτε αμιγώς θεωρητική/υπολογιστική και τα αποτελέσματα σε κάθε περίπτωση δίνονται σε μορφή πινάκων και διαγραμμάτων, μέσω των οποίων η προκύπτουσα κινηματική ή/και ελαστοκινηματική απόκριση συσχετίζεται με το εκάστοτε είδος και πλάτος διέγερσης. Ενδεικτικά διαγράμματα από μετρήσεις σε οχήματα διαφόρων κατασκευαστών δίνονται στο Σχήμα 2.52.



Σχήμα 2.52: Πειραματικές μετρήσεις χαρακτηριστικών μεγεθών συστημάτων ανάρτησης υπό κινηματική και δυναμική διέγερση [19]

Παρατηρώντας τα δύο διαγράμματα στο δεξί μέρος του παραπάνω σχήματος, διαπιστώνεται ότι η μεταβολή των γωνιών κλίσης και σύγκλισης κατά την άσκηση



εγκάρσιων φορτίων στους τροχούς δεν είναι σε καμία περίπτωση αμελητέα, ενώ επιπλέον οι ανωτέρω μεταβολές είναι αρκετά διαφορετικές για κάθε κατασκευαστή, παρόλο που οι μετρήσεις αφορούν οχήματα τα οποία ανήκουν στην ίδια κατηγορία (προσθιοκίνητα επιβατηγά οχήματα μεσαίου μεγέθους).

### 2.5.1 Πειραματικές διατάξεις

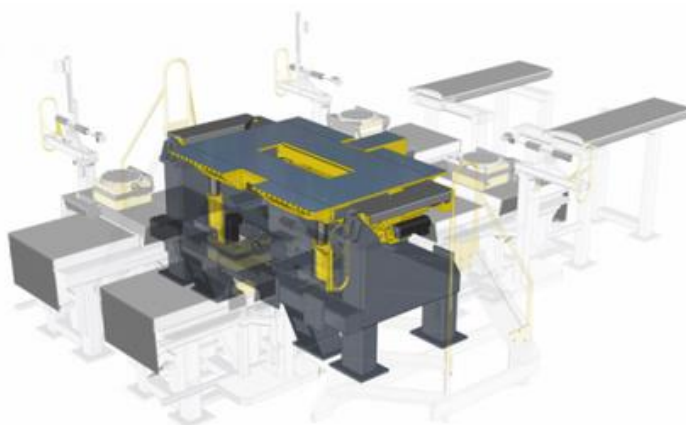
Οι πειραματικές διατάξεις που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της μεταβολής των χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών ενός συστήματος ανάρτησης υπό κινηματικές και δυναμικές διεγέρσεις είναι γνωστές ως “K&C machines” και διακρίνονται σε 2 κατηγορίες με βάση τον τρόπο εφαρμογής των τελευταίων. Οι διατάξεις που ανήκουν στην πρώτη κατηγορία απαιτούν την πλήρη ακινητοποίηση του πλαισίου ως προς το έδαφος, με τις διάφορες διεγέρσεις να εισάγονται απευθείας στους τροχούς διαμέσου υδραυλικών ή ηλεκτρομηχανικών επενεργητών. Κατασκευαστής των εν λόγω πειραματικών διατάξεων είναι η εταιρεία MTS Systems (Σχήμα 2.53).



Σχήμα 2.53: Πειραματική διάταξη K&C της εταιρείας MTS Systems [35]

Αντίθετα, όσον αφορά τις διατάξεις της δεύτερης κατηγορίας, το πλαίσιο πακτώνεται μέσω κοχλιοσυνδέσεων σε μια άκαμπτη πλατφόρμα (moving body platform) με 6 βαθμούς ελευθερίας που ελέγχονται από ισάριθμους ηλεκτρομηχανικούς επενεργητές, ενώ οι τροχοί στηρίζονται πάνω σε βάσεις που φέρουν ενσωματωμένους αισθητήρες υψηλής ακρίβειας για τη μέτρηση των ασκούμενων φορτίων (load cells) και μετατοπίσεων (Σχήμα 2.54). Οι βάσεις αυτές, εδράζονται επί άκαμπτων στύλων (posts) διατηρώντας 2 μεταφορικούς (διαμήκης και εγκάρσια διεύθυνση) και 1 στροφικό (γύρω από την κατακόρυφη διεύθυνση) βαθμό ελευθερίας ως προς αυτούς και η κίνησή τους ελέγχεται επίσης μέσω επενεργητών. Οι εν λόγω διατάξεις είναι γνωστές ως “Suspension Parameter Measurement Machine” ή απλώς “SPMM” και κατασκευαστής αυτών είναι η εταιρεία Anthony Best Dynamics.





**Σχήμα 2.54: Πειραματική διάταξη K&C της εταιρείας Anthony Best Dynamics [36]**

Τόσο ο σχεδιασμός, όσο και η κατασκευή όλων των διατάξεων K&C γίνεται με στόχο την εξάλειψη οποιασδήποτε ευκαμψίας (flexibility) ή χάριτος (play) στο σύστημα, η οποία δυνητικά θα μπορούσε να αλλοιώσει τα πειραματικά αποτελέσματα. Για τον ίδιο λόγο, ιδιαίτερη προσοχή δίνεται και στον τρόπο σύνδεσης του πλαισίου με το σχετικό τμήμα της εκάστοτε διάταξης [19]. Επιπλέον, πριν την πραγματοποίηση μετρήσεων, είναι απαραίτητη η βαθμονόμηση όλων των αισθητήρων και η τοποθέτηση των βάσεων των τροχών στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με μεγάλη ακρίβεια. Ο Πίνακας 2-2 δίνει τα εύρη δυνάμεων και μετατοπίσεων καθώς και την ακρίβεια μέτρησης των διαφόρων χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών που επιτυγχάνει μια τυπική διάταξη K&C.

**Πίνακας 2-2: Εύρη και ακρίβεια μετρήσεων διατάξεων K&C [19]**

Magnitude	Measurement area	Measurement precision	Unit of measurement
Wheel load	20,000	40	N
Wheel vertical travel	$\pm 150$	0.5	mm
Longitudinal force	$\pm 10,000$	20	N
Longitudinal (fore-and-aft) travel	$\pm 75$	0.2	mm
Lateral force	$\pm 10,000$	20	N
Lateral displacement	$\pm 75$	0.2	mm
Camber angle	$\pm 10$	0.01	deg
Steering wheel angle	$\pm 5$	0.025	deg
Steering angle	$\pm 45$	0.2	deg
Caster angle	$\pm 10$	0.02	deg
Steering wheel moment	$\pm 20$	0.2	Nm
Steering wheel angle	$\pm 900$	1	deg

Οι διατάξεις K&C πολλές φορές συγχέονται με ένα άλλο είδος ευρέως χρησιμοποιούμενων διατάξεων που είναι γνωστές ως “shaker rigs” και συμβάλλουν στον προσδιορισμό και τη βελτιστοποίηση των χαρακτηριστικών δυσκαμψίας και απόσβεσης συστημάτων ανάρτησης. Οι εν λόγω διατάξεις φέρουν υδραυλικούς ή σπανιότερα ηλεκτρομηχανικούς επενεργητές, οι οποίοι βρίσκονται κάτω από κάθε τροχό του οχήματος (4-post rigs, Σχήμα 2.55α) εισάγοντας διεγέρσεις αυθαιρέτως ή περιοδικά μεταβαλλόμενου πλάτους κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Πιο σύνθετα συστήματα (7-post rigs, Σχήμα 2.55β) επιτρέπουν επιπλέον την άσκηση δυνάμεων και ροπών στην ανηρητημένη μάζα για την εργαστηριακή προσομοίωση φορτίσεων που οφείλονται σε αεροδυναμικά φαινόμενα [37].



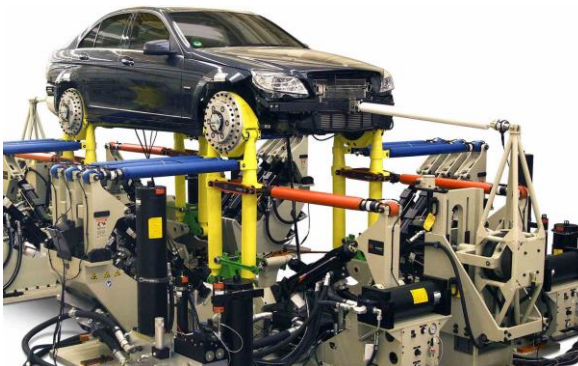
(α)



(β)

**Σχήμα 2.55: Πειραματικές διατάξεις βελτιστοποίησης χαρακτηριστικών δυσκαμψίας και απόσβεσης οχημάτων [38]**

Η εταιρεία MTS Systems έχει συνδυάσει τα δύο προηγούμενα είδη διατάξεων (K&C machines και shaker rigs) σε ενιαίες εγκαταστάσεις, οι οποίες είναι κατάλληλες για τον πειραματικό έλεγχο της αντοχής συστημάτων ανάρτησης σε κόπωση (Σχήμα 2.56α), ενώ ταυτόχρονα επιτρέπουν τη διερεύνηση ελαστοκινηματικών φαινομένων και φαινομένων συντονισμού (body resonance, NVH) που λαμβάνουν χώρα εξαιτίας υψίσυχνων διεγέρσεων, περίπου έως 30 Hz (Σχήμα 2.56β).



(α)



(β)

**Σχήμα 2.56: Πειραματικές διατάξεις για τον έλεγχο αντοχής και τη μελέτη δυναμικών ελαστοκινηματικών φαινομένων [39], [40]**

Η αντικατάσταση των βάσεων των τροχών από ανεξάρτητους ταινιοδρόμους επί των οποίων κυλίνουν οι πρώτοι, οδήγησε στη δημιουργία μιας ακόμα πιο σύνθετης πειραματικής διάταξης η οποία είναι σε θέση να προσομοιώσει με πολύ μεγάλη ακρίβεια τις πραγματικές συνθήκες λειτουργίας ενός οχήματος εντός εργαστηριακού περιβάλλοντος, εξασφαλίζοντας μεγάλη επαναληψιμότητα των πειραματικών αποτελεσμάτων. Τέτοιου τύπου διατάξεις είναι ιδιαίτερα περίπλοκες και χρησιμοποιούνται σε μεγάλο βαθμό για τη δοκιμή προηγμένων συστημάτων υποβοήθησης οδηγού (**Advanced Driver Assistance Systems/ADAS**) σε ασφαλές και απολύτως ελεγχόμενο περιβάλλον. Για περισσότερες πληροφορίες και οπτικοακουστικό υλικό σχετικά με τη λειτουργία των τριών τελευταίων τύπων πειραματικών διατάξεων, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις πηγές [39], [40], [41] και [42].



**Σχήμα 2.57: Πειραματική διάταξη για εργαστηριακή προσομοίωση της πλήρους δυναμικής οχήματος [41]**

Συμπληρωματικά αναφέρεται ότι, μετρήσεις σχετιζόμενες με την κινηματική και ελαστοκινηματική συμπεριφορά αναρτήσεων μπορούν να ληφθούν και εν κινήσει κατά την πραγματοποίηση διαφόρων δοκιμών σε ειδικά διαμορφωμένες πίστες (proving grounds), κάνοντας χρήση κατάλληλων αισθητήρων για τον ακριβή προσδιορισμό της θέσης και του προσανατολισμού των τροχών και των φορτίων που αυτοί παραλαμβάνουν (Σχήμα 2.58). Οι εν λόγω αισθητήρες πρέπει να επηρεάζουν όσο το δυνατόν λιγότερο τα χαρακτηριστικά του οχήματος (μάζα, κατανομή μάζας, ροπές αδράνειας, αεροδυναμική), ούτως ώστε η επίδραση τους στη δυναμική αυτού να είναι αμελητέα για ευνόητους λόγους [43]. Η λήψη μετρήσεων κατά τη διάρκεια δοκιμών σε πίστα πλεονεκτεί έναντι των εργαστηριακών δοκιμών, αφού όσον αφορά τις τελευταίες δε μπορεί να ληφθεί υπόψιν με μεγάλη ακρίβεια η γεωμετρία και το υλικό κατασκευής του οδοστρώματος, ωστόσο αυτές υπερτερούν ως προς την επαναληψιμότητα.





**Σχήμα 2.58: Προσδιορισμός χαρακτηριστικών K&C εν κινήσει [43]**

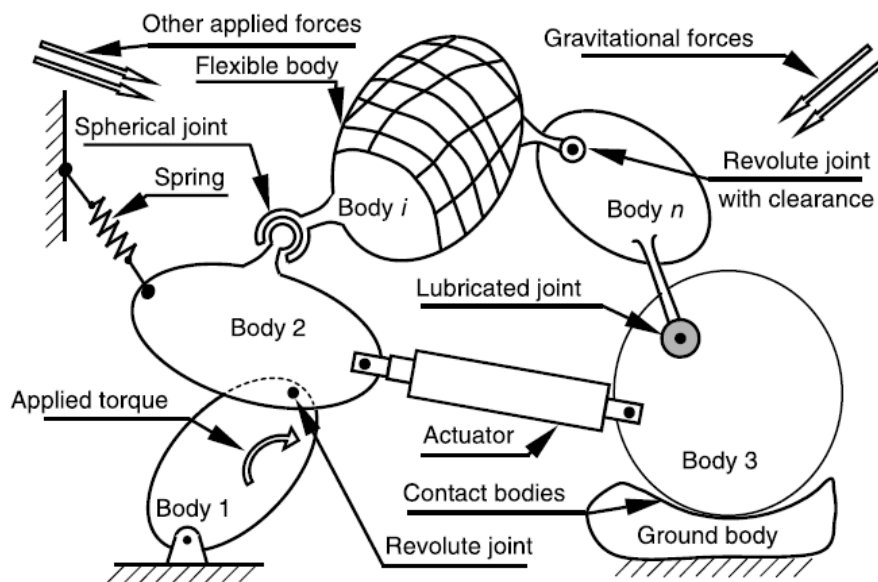
Η χρήση οποιασδήποτε από τις πειραματικές διατάξεις που αναφέρθηκαν παραπάνω, για τον προσδιορισμό των κινηματικών και ελαστοκινηματικών χαρακτηριστικών αναρτήσεων, συνοδεύεται από ιδιαίτερα υψηλό κόστος, καθώς πρόκειται για σύνθετα συστήματα που κατασκευάζονται σύμφωνα με πολύ αυστηρές προδιαγραφές ακριβείας και απαιτούν εξειδικευμένο προσωπικό για τη λειτουργία τους. Επιπλέον, για την πραγματοποίηση ενός πλήρους σετ δοκιμών για ένα όχημα, ακόμα και με τις σχετικά απλές μηχανές που παρουσιάστηκαν στην αρχή της τρέχουσας υποενότητας, απαιτείται σημαντικό χρονικό διάστημα (1-2 ημέρες). Ωστόσο, το μεγαλύτερο μειονέκτημα των εν λόγω διατάξεων είναι ότι απαιτείται η κατασκευή πρωτοτύπων οχημάτων ώστε να προσδιοριστεί η ελαστοκινηματική συμπεριφορά των αναρτήσεων κατά τη φάση του σχεδιασμού, εκτοξεύοντας το συνολικό κόστος σε ακόμα υψηλότερα επίπεδα. Παρά τα μειονεκτήματα που αναφέρθηκαν, η χρησιμότητα των μετρήσεων που λαμβάνονται δικαιολογεί τη χρήση τέτοιων διατάξεων για όλες τις αυτοκινητοβιομηχανίες, αλλά και για πολλούς κατασκευαστές αγωνιστικών οχημάτων υψηλών επιδόσεων (π.χ. μονοθέσια Formula 1).

### **2.5.2 Εργαλεία υπολογιστικής προσομοίωσης**

Όπως ήδη αναφέρθηκε στο εισαγωγικό κεφάλαιο, το βασικότερο υπολογιστικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση (evaluation) των κινηματικών και ελαστοκινηματικών χαρακτηριστικών συστημάτων ανάρτησης, είναι τα διάφορα εμπορικά λογισμικά προσομοίωσης δυναμικής συστημάτων πολλαπλών σωμάτων (**Multi-Body Simulation/MBS**). Η χρήση των ανωτέρω λογισμικών, επιτρέπει την προσομοίωση όλων των δοκιμών που πραγματοποιούνται στις πειραματικές διατάξεις που αναλύθηκαν στην προηγούμενη υποενότητα με μεγάλη ακρίβεια και σχετικά μικρό υπολογιστικό κόστος, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούνται ευρέως κατά το σχεδιασμό συστημάτων ανάρτησης και όχι μόνο. Τα λογισμικά MBS χρησιμοποιούνται επίσης για την ανάλυση πολλών άλλων υποσυστημάτων οχημάτων, όπως για παράδειγμα για τη μελέτη της αλληλεπίδρασης κινητήρα, συστήματος μετάδοσης και πλαισίου, με στόχο τον περιορισμό του θορύβου και των δονήσεων που μεταδίδονται στο χώρο των επιβατών. Παρά την ταχεία εξέλιξη και τις ολοένα αυξανόμενες δυνατότητές τους, εντούτοις, τα εν λόγω εργαλεία υπολογιστικής

προσομοίωσης δεν πρόκειται ποτέ να εξαλείψουν πλήρως την ανάγκη κατασκευής πρωτοτύπων (prototype/pre-production vehicles), καθώς η αξιολόγηση της άνεσης και της δυναμικής συμπεριφοράς ενός οχήματος βασίζεται σε μεγάλο βαθμό και σε υποκειμενικά, εκτός από αντικειμενικά/αριθμητικά, κριτήρια [6].

Ένα σύστημα πολλαπλών σωμάτων στη γενική περίπτωση αποτελείται από σώματα μη μηδενικής μάζας, άκαμπτα (rigid) ή/και εύκαμπτα (flexible), τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μέσω κινηματικών συνδέσμων (kinematic joints) ή/και στοιχείων δύναμης (force elements) [44]. Οι μεν κινηματικοί σύνδεσμοι ελέγχουν τις σχετικές κινήσεις που λαμβάνουν χώρα μεταξύ των συνδεόμενων σωμάτων, τα δε στοιχεία δύναμης είναι υπεύθυνα για την ανάπτυξη φορτίων εξαιτίας των ανωτέρω σχετικών κινήσεων. Η μαθηματική μοντελοποίηση (formulation) ενός συστήματος πολλαπλών σωμάτων μπορεί να βασιστεί σε μεθόδους όπως η αρχή των δυνατών έργων, η κατάστρωση των εξισώσεων Newton/Euler για κάθε σώμα κ.λπ., ενώ οι κινηματικοί περιορισμοί (constraints) συνήθως λαμβάνονται υπόψιν με τη μέθοδο επαύξησης κατά Lagrange (augmented Lagrange formulation). Η χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange για τη μοντελοποίηση της δυναμικής ενός συστήματος πολλαπλών σωμάτων οδηγεί στην κατάστρωση ενός συστήματος αλγεβροδιαφορικών εξισώσεων (Differential-Algebraic Equations/DAE), η αριθμητική επίλυση του οποίου δε θεωρείται τετριμμένη [45]. Ενδεικτικά, η τοπολογία ενός τυπικού συστήματος πολλαπλών σωμάτων φαίνεται στο Σχήμα 2.59.



**Σχήμα 2.59: Σχηματική αναπαράσταση τυπικού συστήματος πολλαπλών σωμάτων [44]**

Υστερα από αυτή τη σύντομη αναφορά στη δομή των συστημάτων πολλαπλών σωμάτων, είναι προφανής ο τρόπος με τον οποίο τα σχετικά λογισμικά χρησιμοποιούνται για την κινηματική και ελαστοκινηματική ανάλυση συστημάτων ανάρτησης. Ειδικότερα, μέσα από την κατάστρωση και την επίλυση συστημάτων αλγεβροδιαφορικών εξισώσεων που

περιγράφουν με λεπτομέρεια ένα πλήρες όχημα (full car linkage model), έναν άξονα (half car linkage model) ή το σύστημα ανάρτησης ενός τροχού (quarter car linkage model) επιδιώκεται ο ακριβής προσδιορισμός των κάτωθι [6]:

- Διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης (κατά την έννοια των μεταφορικών και στροφικών βαθμών ελευθερίας) στα κέντρα βάρους όλων των εμπλεκόμενων σωμάτων και στα μεταξύ τους σημεία σύνδεσης
- Τροχιές κίνησης των εμπλεκόμενων σωμάτων συναρτήσει των ασκούμενων διεγέρσεων (μετατοπίσεις → κινηματική, δυνάμεις/ροπές → ελαστοκινηματική)
- Δυνάμεις και ροπές που καταπονούν τα εμπλεκόμενα σώματα

Αξιοποιώντας τις τελευταίες, προσδιορίζεται η απαιτούμενη μηχανική αντοχή και η δυσκαμψία των διαφόρων τεμαχίων σε στατικές και δυναμικές καταπονήσεις, μέσω κατάλληλων αναλύσεων που πραγματοποιούνται με λογισμικά πεπερασμένων στοιχείων.

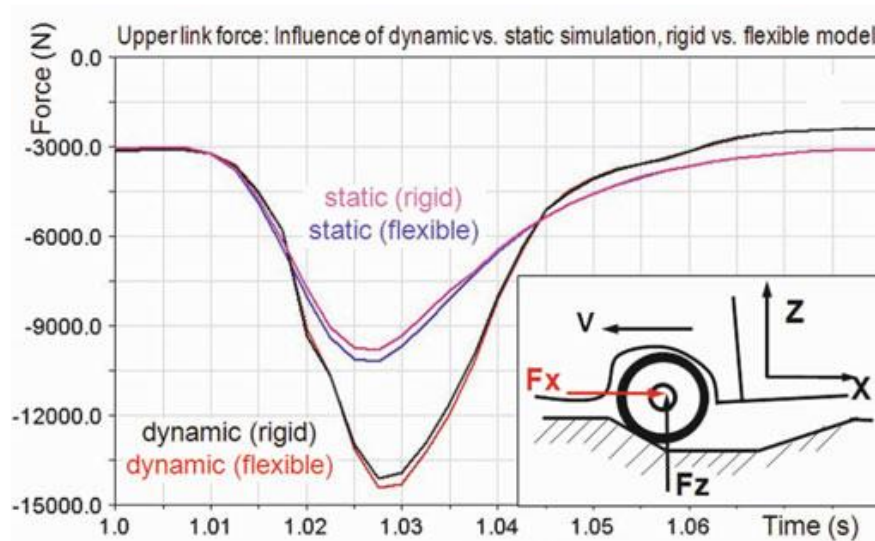
Μια εξίσου χρήσιμη δυνατότητα που προσφέρουν τα σύγχρονα λογισμικά προσομοίωσης της δυναμικής συστημάτων πολλαπλών σωμάτων όσον αφορά το σχεδιασμό αναρτήσεων, είναι η εκτίμηση της επίδρασης της συσσώρευσης κατασκευαστικών ανοχών στην προκύπτουσα γεωμετρία. Πιο συγκεκριμένα, οι ανοχές ενός συστήματος ανάρτησης πρέπει να είναι αρκετά μικρές, ούτως ώστε η πραγματική γεωμετρία να μην αποκλίνει σημαντικά από την προβλεπόμενη, ενώ ταυτόχρονα να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερες προκειμένου για τη μείωση του κόστους κατασκευής. Τα σύγχρονα λογισμικά MBS διαθέτουν αυτοματοποιημένες ρουτίνες μέσω των οποίων, τα μήκη των μελών ενός μηχανισμού ανάρτησης και οι θέσεις των σημείων έδρασης αυτών, μεταβάλλονται εντός ενός ορισμένου εύρους και στη συνέχεια προσδιορίζεται η απόκλιση μεταξύ προκύπτουσας και ονομαστικής γεωμετρίας. Κατ' αυτόν τον τρόπο, μπορεί να εκτιμηθεί αν ένα σύστημα ανάρτησης μπορεί να κατασκευαστεί με επαρκή ακρίβεια από τον εξοπλισμό που διαθέτει (δηλαδή τις ανοχές που μπορεί να επιτύχει) η εκάστοτε αυτοκινητοβιομηχανία.

Όσον αφορά τη γεωμετρία, τη μάζα και τις ροπές αδράνειας των διαφόρων μελών των αναρτήσεων, αυτές εισάγονται απευθείας από τα αντίστοιχα μοντέλα CAD, ενώ όλα τα απαραίτητα μητρώα δυσκαμψίας και απόσβεσης, καθώς και οι ιδιοτιμές που απαιτούνται για την προσομοίωση με εύκαμπτα σώματα, υπολογίζονται εφάπαξ μέσω λογισμικών ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων και στη συνέχεια εισάγονται στο περιβάλλον του χρησιμοποιούμενου λογισμικού MBS (περαιτέρω ανάλυση για τα εύκαμπτα σώματα ακολουθεί στο Κεφάλαιο 4). Από την άλλη πλευρά, τα διάφορα στοιχεία σύνδεσης που αναφέρθηκαν σε προηγούμενη ενότητα (ελαστικά παρεμβύσματα, σφαιρικά έδρανα κ.λπ.), μοντελοποιούνται είτε ως κινηματικοί σύνδεσμοι, είτε ως στοιχεία δύναμης, είτε ως συνδυασμός αυτών, με μηδενική μάζα σε κάθε περίπτωση.

Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται από τις προσομοιώσεις με λογισμικό MBS εξαρτάται, αφενός από τις παραδοχές που γίνονται κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης ενός οχήματος/συστήματος ανάρτησης (idealization), αφετέρου από την



εγκυρότητα των δεδομένων εισόδου (input data) που χρησιμοποιούνται. Εν γένει, στα πρώιμα στάδια σχεδιασμού ενός οχήματος, τα χρησιμοποιούμενα μοντέλα αποτελούνται από άκαμπτα σώματα, καθώς οι γεωμετρίες των διαφόρων τεμαχίων δεν έχουν ακόμα οριστικοποιηθεί (Κεφάλαιο 4). Το ίδιο συμβαίνει και με πολλά άλλα δεδομένα εισόδου (π.χ. χαρακτηριστικά δυσκαμψίας των ελαστικών παρεμβυσμάτων), αρχικές εκτιμήσεις για τα οποία λαμβάνονται από παραπλήσια ή/και παλαιότερα οχήματα. Καθώς η διαδικασία σχεδιασμού προχωρά, τα υπολογιστικά μοντέλα ανανεώνονται διαρκώς με τα νέα δεδομένα που ανακύπτουν, ενώ ορισμένα άκαμπτα σώματα αντικαθίστανται από τα αντίστοιχα εύκαμπτα και οι διάφορες προσομοιώσεις εκτελούνται εκ νέου.



**Σχήμα 2.60: Απόκλιση αποτελεσμάτων προσομοίωσης με άκαμπτο και εύκαμπτο βραχίονα ελέγχου ανάρτησης [6]**

Η συμπερίληψη εύκαμπτων σωμάτων (linear flexible bodies) είναι κρίσιμης σημασίας προκειμένου για την ακριβή μοντελοποίηση συστημάτων ανάρτησης, πρωτίστως όσον αφορά τον υπολογισμό των φορτίων που καταπονούν τα διάφορα τεμάχια (Σχήμα 2.60) και δευτερευόντως αναφορικά με την προκύπτουσα ελαστοκινηματική συμπεριφορά, αφού αυτή καθορίζεται κυρίως από τα εύκαμπτα στοιχεία σύνδεσης, των οποίων η δυσκαμψία είναι εν γένει σαφώς μικρότερη, συγκριτικά με αυτή των εύκαμπτων σωμάτων. Η χρήση των τελευταίων πρέπει να γίνεται ληλογισμένα, διαφορετικά το πλήθος των βαθμών ελευθερίας των μοντέλων αυξάνεται σημαντικά, με αποτέλεσμα τη ραγδαία αύξηση του υπολογιστικού κόστους των προσομοιώσεων. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι κάνοντας χρήση του λογισμικού ADAMS, μια προσομοίωση με αμιγώς άκαμπτα σώματα διαρκεί 10 έως 25 φορές λιγότερο από την αντίστοιχη με αποκλειστικά εύκαμπτα σώματα [6]. Για να προσδιοριστεί η μέθοδος μοντελοποίησης που θα χρησιμοποιηθεί για κάθε σώμα, απαιτείται η διενέργεια ανάλυσης ευαισθησίας (sensitivity analysis), μέσω της οποίας αξιολογείται η επίδραση της πρώτης στα αποτελέσματα των προσομοιώσεων, ξεχωριστά για κάθε τεμάχιο.

Υπάρχουν, ωστόσο, περιπτώσεις όπου η μοντελοποίηση σωμάτων ως απολύτως στερεά μπορεί να οδηγήσει σε πλήρως εσφαλμένα αποτελέσματα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο ημιάκαμπτος άξονας, η λειτουργικότητα του οποίου είναι συνυφασμένη με την ικανότητά του να υφίσταται ελαστικές παραμορφώσεις. Μάλιστα, οι εν λόγω παραμορφώσεις μπορεί να είναι μεγάλου πλάτους, συνεπώς κατά τη μοντελοποίηση του ανωτέρω τεμαχίου πρέπει να ληφθούν υπόψιν και οι επαγόμενες γεωμετρικές μη γραμμικότητες (geometric nonlinearities). Τέτοιου είδους προβλήματα επιλύονται παραδοσιακά μέσω συμπροσομοίωσης (co-simulation), δηλαδή κάνοντας χρήση λογισμικών πεπερασμένων στοιχείων (slave software) για τον προσδιορισμό της παραμορφωσιακής κατάστασης του ημιάκαμπτου άξονα ανά κάποια (λίγα) χρονικά βήματα της κύριας προσομοίωσης που γίνεται με λογισμικό MBS (master software).

Η μη γραμμική ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία συνίσταται στη σταδιακή άσκηση των συνολικών φορτίσεων με ενδιάμεση ανανέωση του μητρώου δυσκαμψίας της εκάστοτε κατασκευής/τεμαχίου και είναι από μόνη της μια πολύ χρονοβόρα διαδικασία, πόσο μάλλον δε στο πλαίσιο συμπροσομοίωσης με λογισμικό MBS, κατά την οποία λαμβάνουν χώρα πολλαπλές τέτοιες αναλύσεις. Καθίστανται, λοιπόν, προφανείς οι λόγοι για τους οποίους τα τελευταία χρόνια έχουν ενσωματωθεί σε αρκετά εμπορικά λογισμικά MBS, προσεγγιστικές μέθοδοι υπολογισμού της απόκρισης εύκαμπτων σωμάτων που υφίστανται παραμορφώσεις εκτός της γραμμικής περιοχής (nonlinear flexible bodies), επιτυγχάνοντας ικανοποιητική ακρίβεια χωρίς υπέρμετρη αύξηση του υπολογιστικού κόστους. Για παράδειγμα, όσον αφορά την υλοποίηση της συγκεκριμένης μεθόδου μοντελοποίησης στο λογισμικό SIMPACK, απαιτείται η εξάπαξ πραγματοποίηση μη γραμμικής ανάλυσης, συγκεκριμένα με το λογισμικό ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS, κατά την οποία το εκάστοτε τεμάχιο φορτίζεται, ούτως ώστε στο πέρας αυτής να έχει αναπτύξει παραμορφώσεις πλάτους ίσου ή μεγαλύτερου σε σχέση με το μέγιστο που πρόκειται να αναπτυχθεί κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης της δυναμικής του συστήματος πολλαπλών σωμάτων. Εν συνεχεία, όλες οι ενδιάμεσες παραμορφωσιακές καταστάσεις της μη γραμμικής ανάλυσης «φορτώνονται» στο SIMPACK μέσω κατάλληλου αρχείου και σε κάθε χρονικό βήμα ουσιαστικά γίνεται «παρεμβολή» μεταξύ αυτών για τον προσδιορισμό του μητρώου δυσκαμψίας που αντιστοιχεί στην τρέχουσα γεωμετρία του τεμαχίου.

Συνοψίζοντας, τα λογισμικά προσομοίωσης δυναμικής πολλαπλών σωμάτων αποτελούν ένα ιδιαίτερα χρήσιμο υπολογιστικό εργαλείο κατά το σχεδιασμό οχημάτων, ιδιαίτερα όσον αφορά τα συστήματα ανάρτησης αυτών. Ωστόσο, η χρήση τέτοιων λογισμικών δεν αποτελεί πανάκεια και τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων πρέπει να επαληθεύονται με πειραματικές μετρήσεις (results validation), όποτε αυτό είναι δυνατό. Συνεπώς, η χρήση σχετικών πειραματικών διατάξεων και η κατασκευή πρωτοτύπων οχημάτων δεν πρόκειται ποτέ να καταργηθεί εντελώς, αλλά έχει ήδη περιοριστεί σημαντικά σε σχέση με παλαιότερα.

### 3. Ευθεία κινηματική ανάλυση ανάρτησης διπλών ψαλιδιών

Η Κινηματική είναι εκείνος ο κλάδος της κλασικής μηχανικής ο οποίος αποσκοπεί στη συσχέτιση της μετατόπισης, της ταχύτητας, της επιτάχυνσης και του χρόνου, χωρίς να γίνεται οποιαδήποτε αναφορά στα αίτια της κίνησης [46]. Όταν η κινηματική ανάλυση ενός συστήματος σωμάτων γίνεται με σκοπό τον προσδιορισμό των κινήσεων που λαμβάνουν χώρα για δεδομένη τοπολογία του πρώτου, καλείται ευθεία (forward kinematics). Από την άλλη πλευρά, όταν επιδιώκεται ο προσδιορισμός της τοπολογίας που πρέπει να έχει ένα σύστημα ώστε να εμφανίζει τα επιθυμητά κινηματικά χαρακτηριστικά, πραγματοποιείται αντίστροφη κινηματική ανάλυση (inverse kinematics).

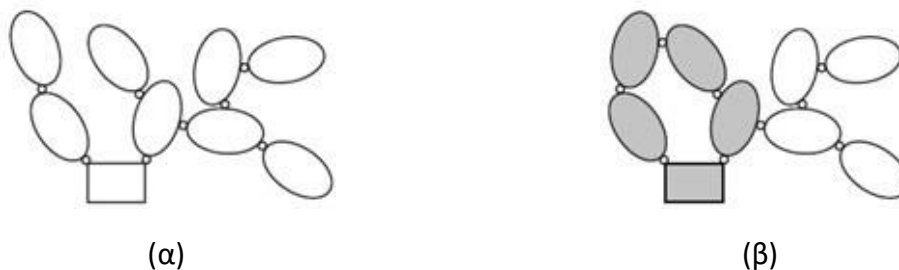
Όσον αφορά το σχεδιασμό μηχανισμών ανάρτησης, η κινηματική ανάλυση αποτελεί ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο στη διάθεση των μηχανικών. Μάλιστα, σε συστήματα ανάρτησης που εμφανίζουν ελαστικές παραμορφώσεις μικρού πλάτους, η κινηματική ανάλυση πολλές φορές προσφέρει ικανοποιητική ακρίβεια αποτελεσμάτων και ελαστοκινηματική ανάλυση πραγματοποιείται μόνο κατά το πέρας του σχεδιασμού ως απλός έλεγχος ή μπορεί και να παραλείπεται εντελώς. Για παράδειγμα, έτσι σχεδιάζονται οι αναρτήσεις πολλών οχημάτων που προορίζονται για συμμετοχή σε αγώνες ταχύτητας χαμηλών κατηγοριών, όπου το κόστος εξέλιξης πρέπει να διατηρείται σε χαμηλά επίπεδα. Παρόλα αυτά, όταν η απαιτούμενη ακρίβεια των υπολογισμών είναι αυξημένη ή/και στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται εύκαμπτα στοιχεία σύνδεσης, η χρησιμότητα της ευθείας κινηματικής ανάλυσης περιορίζεται στα αρχικά στάδια σχεδιασμού (conceptual design), οπότεν τα δεδομένα που απαιτούνται για την πραγματοποίηση πιο σύνθετων υπολογισμών (ελαστοκινηματική ανάλυση) δεν είναι ακόμα διαθέσιμα.

Η κινηματική ανάλυση μηχανισμών, όπως ήδη αναφέρθηκε, περιλαμβάνει τον υπολογισμό ταχυτήτων και επιταχύνσεων στα διάφορα σημεία αυτών. Προκειμένου για μηχανισμούς αναρτήσεων, τέτοια δεδομένα μπορεί να είναι χρήσιμα για την επιλογή κατάλληλων αποσβεστήρων (υπολογισμός των ταχυτήτων έκτασης/συμπίεσης αυτών), καθώς και για τον υπολογισμό των αδρανειακών φορτίσεων που δέχονται τα μέλη της ανάρτησης κατά τη διέλευση από ανωμαλίες του οδοστρώματος (διεγέρσεις βάσης). Σημειώνεται εδώ ότι κατά την κινηματική ανάλυση μηχανισμών τα σώματα λαμβάνονται ως απολύτως στερεά, με αποτέλεσμα οι υπολογιζόμενες επιταχύνσεις (συνεπώς και τα αδρανειακά φορτία) να υπερεκτιμώνται σε σχέση με τις πραγματικές, οδηγώντας σε υπερδιαστασιολόγηση τεμαχίων και αύξηση του συνολικού βάρους του εκάστοτε συναρμολογήματος [6]. Γενικά, ο υπολογισμός των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων που εμφανίζονται στα διάφορα σημεία ενός μηχανισμού ανάρτησης είναι δευτερεύουσας σημασίας κατά το σχεδιασμό του τελευταίου, υπό την έννοια ότι τα προαναφερθέντα μεγέθη δεν επιδρούν άμεσα στη δυναμική οχήματος. Όπως ήδη πρέπει να έχει γίνει αντιληπτό, δεν ισχύει το ίδιο όσον αφορά τις μετατοπίσεις που υφίστανται τα διάφορα σημεία ενός μηχανισμού ανάρτησης.

### 3.1 Βαθμός ελευθερίας μηχανισμού

Στο πλαίσιο της Κινηματικής, ένας μηχανισμός αποτελείται από απολύτως στερεά σώματα και κινηματικούς συνδέσμους που μεσολαβούν μεταξύ αυτών. Ένας κινηματικός σύνδεσμος είναι ουσιαστικά μια ιδανική διάταξη η οποία εισάγει αποκλειστικά κινηματικούς περιορισμούς όσον αφορά την σχετική κίνηση ενός σώματος ως προς ένα άλλο. Επιπλέον, δύο διακριτά σώματα δε μπορούν να συνδέονται με περισσότερους από ένα τέτοιο σύνδεσμο, που σημαίνει ότι όλες οι διατάξεις μέσω των οποίων επιβάλλονται κινηματικοί περιορισμοί μεταξύ δύο σωμάτων λαμβάνονται ως ένας ενιαίος κινηματικός σύνδεσμος [47]. Το πλήθος των βαθμών ελευθερίας μεταξύ δύο σωμάτων καλείται βαθμός ελευθερίας του συνδέσμου που παρεμβάλλεται μεταξύ τους και στο εξής θα συμβολίζεται με το γράμμα  $f$ .

Έστω ένας μηχανισμός αποτελούμενος από  $n$  το πλήθος σώματα, ένα από τα οποία διατηρείται ακίνητο ως προς το ακλόνητο σύστημα αναφοράς που αντιστοιχεί στο έδαφος (**G**round **R**eference **F**rame/**GRF**). Απαραίτητη προϋπόθεση ώστε να υφίσταται πράγματι μηχανισμός είναι η μεσολάβηση  $m \geq n - 1$  συνδέσμων μεταξύ των  $n$  σωμάτων, καθένας από τους οποίους έχει βαθμό ελευθερίας  $1 \leq f_i \leq 5, i = 1, \dots, m$ . Τότε, ο μηχανισμός ως ενιαίο σύστημα πολλαπλών σωμάτων έχει βαθμό ελευθερίας  $F$ , ο οποίος ισούται με το ελάχιστο πλήθος γενικευμένων μεταβλητών (generalized coordinates) που απαιτούνται για τον πλήρη προσδιορισμό της θέσης και του προσανατολισμού του ως προς το ακλόνητο σύστημα αναφοράς [47]. Ο βαθμός ελευθερίας,  $F$ , ενός μηχανισμού δεν εξαρτάται μόνο από τα πλήθη  $n, m$  και τους βαθμούς ελευθερίας  $f_i$  των μεμονωμένων συνδέσμων, αλλά και από τη γενικότερη δομή του εκάστοτε συστήματος. Για  $m = n - 1$ , η προκύπτουσα δομή καλείται δενδροειδής (tree structure – Σχήμα 3.1α), ενώ για  $m = n$  και  $m > n$ , ο μηχανισμός αποτελείται από μία ή περισσότερες κλειστές κινηματικές αλυσίδες αντίστοιχα (closed kinematic chains), οι οποίες μπορεί να συνδέονται με επιπλέον παράπλευρους κλάδους (side branches, Σχήμα 3.1β).



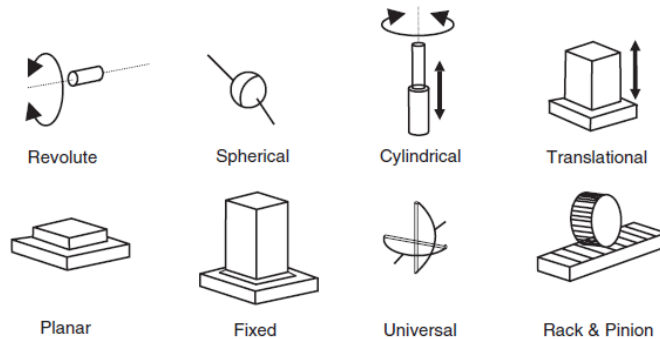
**Σχήμα 3.1: Μηχανισμοί με δενδροειδή δομή και απλή κλειστή κινηματική αλυσίδα με παράπλευρους κλάδους [47]**

Προκειμένου για τον υπολογισμό του  $F$  ακολουθείται η εξής διαδικασία: Αφαιρούνται οι κινηματικοί σύνδεσμοι μεταξύ όλων των σωμάτων που ανήκουν στο σύστημα με εξαίρεση αυτό που διατηρείται ακίνητο ως προς το έδαφος. Έτσι, τα  $n - 1$  σώματα έχουν συνολικά  $6(n - 1)$  βαθμούς ελευθερίας. Ο σύνδεσμος  $i$  με βαθμό ελευθερίας  $f_i$  σχετίζεται με

$(6 - f_i)$  κινηματικούς περιορισμούς. Επομένως, το πλήθος των τελευταίων για όλους τους συνδέσμους του συστήματος ισούται με το άθροισμα των αριθμών  $(6 - f_i)$  για κάθε μεμονωμένο σύνδεσμο. Ωστόσο, το πλήθος των ανεξάρτητων κινηματικών περιορισμών μπορεί να είναι μικρότερο κατά  $d$ , όπου με  $d$  συμβολίζεται το πλήθος των εξαρτημένων/συζευγμένων κινηματικών περιορισμών (dependent/coupled constraints). Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται από τη γενική σχέση του Grübler, γνωστή και ως κριτήριο Chebychev – Grübler – Kutzbach:

$$F = 6(n - 1) - \left[ \sum_{i=1}^m (6 - f_i) - d \right] = 6(n - 1 - m) + d + \sum_{i=1}^m (f_i) \quad (3.1)$$

Η επιβολή κινηματικών περιορισμών ισοδυναμεί με δέσμευση ορισμένων ή όλων των σχετικών βαθμών ελευθερίας μεταξύ των συνδεόμενων σωμάτων. Ο Πίνακας 3-1 δίνει το πλήθος και το είδος των βαθμών ελευθερίας που δεσμεύονται από τους πιο συχνά χρησιμοποιούμενους κινηματικούς συνδέσμους (Σχήμα 3.2).



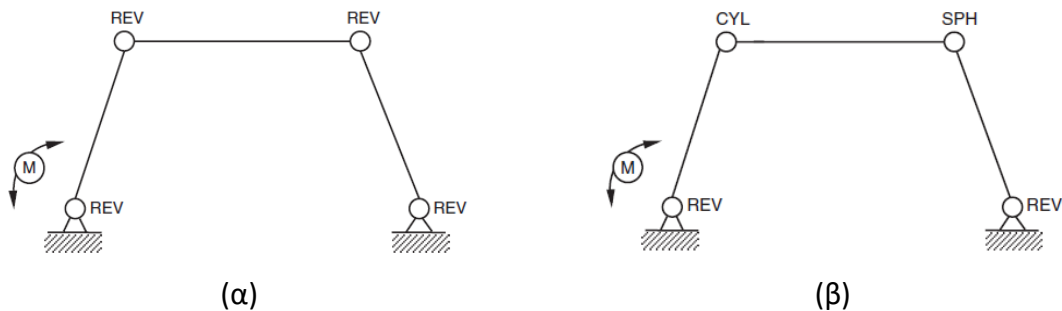
**Σχήμα 3.2: Συνήθεις σύνδεσμοι σε προβλήματα Κινηματικής [4]**

Σε αυτό το σημείο εισάγονται οι έννοιες των πλεοναζόντων κινηματικών περιορισμών (redundant constraints) και του ελέγχου υπερστατικότητας (overconstraint check) ενός μηχανισμού. Για την επεξήγηση των παραπάνω όρων αξιοποιείται το παράδειγμα του μηχανισμού τεσσάρων μελών (four bar linkage). Ο εν λόγω μηχανισμός αποτελείται από 3 κινούμενα και 1 σταθερό μέλος (έδαφος), τα οποία σε πρώτη προσέγγιση συνδέονται μεταξύ τους αποκλειστικά μέσω περιστροφικών συνδέσμων (revolute joints), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3α. Ο βαθμός ελευθερίας του μηχανισμού με βάση τη σχέση Grübler είναι  $F = -3$ , δηλαδή το σύστημα έχει αρνητικό πλήθος βαθμών ελευθερίας, πράγμα το οποίο προφανώς δεν μπορεί να συμβεί στην πραγματικότητα. Σε αυτήν την περίπτωση ο μηχανισμός έχει 3 πλεονάζοντες κινηματικούς περιορισμούς, συνεπώς είναι 3 φορές υπερστατικός. Εάν τα μέλη του τελευταίου συνδεθούν όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3β προκύπτει  $F = 0$ , συνεπώς είναι δυνατή η κινηματική ανάλυσή του. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε μηχανισμούς που περιλαμβάνουν περισσότερες από μία κλειστές κινηματικές αλυσίδες, ο έλεγχος υπερστατικότητας πρέπει να πραγματοποιείται τόσο για ολόκληρο το σύστημα όσο και για καθεμία από αυτές ξεχωριστά [4].

Πίνακας 3-1: Δέσμευση βαθμών ελευθερίας από συνήθεις κινηματικούς συνδέσμους [4]

Constraint element	Translational constraints	Rotational constraints	Coupled Constraints	Total constraints
Cylindrical joint	2	2	0	4
Fixed joint	3	3	0	6
Planar joint	1	2	0	3
Rack-and-pinion joint	0	0	1	1
Revolute joint	3	2	0	5
Spherical joint	3	0	0	3
Universal joint	3	1	0	4
Inplane point primitive	1	0	0	1
Motion (Translational)	1	0	0	1
Motion (Rotational)	0	1	0	1
Coupler	0	0	1	1

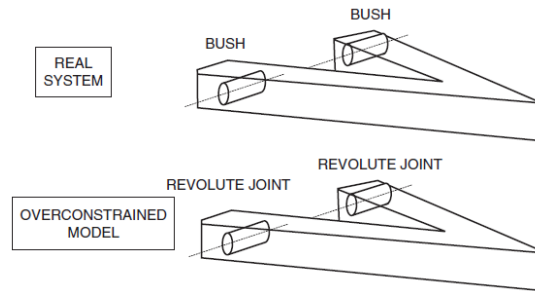
Προκειμένου για την κινηματική ανάλυση ενός μηχανισμού ανάρτησης απαιτείται εκτός των άλλων και μοντελοποίηση του τρόπου έδρασης των βραχιόνων ελέγχου στο πλαίσιο. Στην πλειοψηφία των οχημάτων, η σύνδεση των ανωτέρω σωμάτων γίνεται μέσω κυλινδρικών ελαστικών παρεμβυσμάτων, τα οποία δε μπορούν να συμπεριληφθούν στην κινηματική ανάλυση αφού δεν εισάγουν κινηματικούς, παρά μόνο δυναμικούς περιορισμούς, κατά συνέπεια δε λειτουργούν ως κινηματικοί σύνδεσμοι. Άλλωστε η χρήση ελαστικών παρεμβυσμάτων δε δεσμεύει κανένα από τους βαθμούς ελευθερίας των βραχιόνων ελέγχου. Η απλούστερη εξιδανίκευση που μπορεί να γίνει σε αυτήν την περίπτωση είναι η αντικατάσταση των κυλινδρικών ελαστικών παρεμβυσμάτων από περιστροφικούς συνδέσμους (Σχήμα 3.4). Παρόλα αυτά, διεξάγοντας έναν έλεγχο υπερστατικότητας για το βραχίονα ελέγχου ως απολύτως στερεό σώμα, εύκολα διαπιστώνεται ότι υφίστανται 5 πλεονάζοντες κινηματικοί περιορισμοί.



Σχήμα 3.3: Υπερστατική και ισοστατική υλοποίηση μηχανισμού τεσσάρων μελών [4]

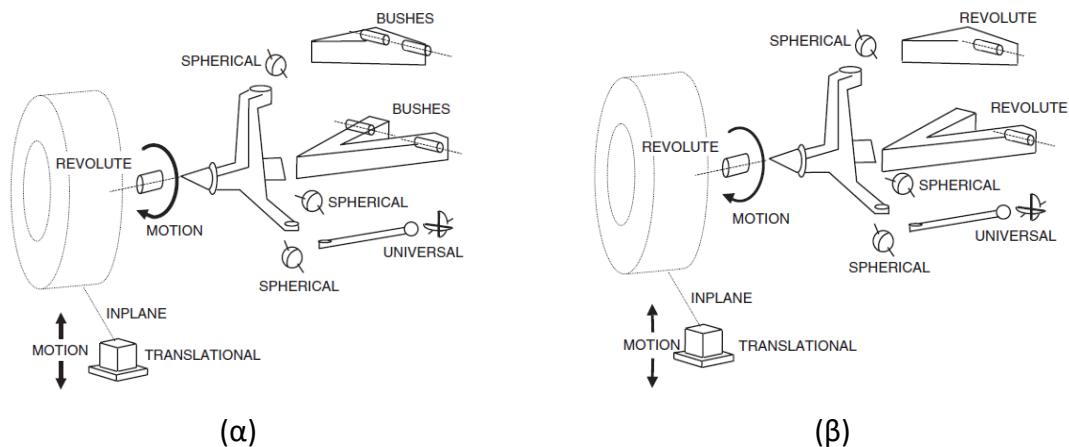


Στην πραγματικότητα, η χρήση μόνο του ενός από τους δύο περιστροφικούς συνδέσμους θα ήταν αρκετή ώστε να γίνει η επιθυμητή δέσμευση βαθμών ελευθερίας του βραχίονα ελέγχου. Εντούτοις, η εισαγωγή ενός ακόμα περιστροφικού συνδέσμου θεωρητικά δεσμεύει 5 επιπλέον βαθμούς ελευθερίας απολύτως στερεού σώματος, καθιστώντας το φορέα (δηλ. το βραχίονα ελέγχου) υπερστατικό. Σε πλήρη αντιστοιχία με τα προηγούμενα, εάν για τη σύνδεση πλαισίου-βραχίονα ελέγχου χρησιμοποιούνταν σφαιρικά έδρανα, ο τελευταίος θεωρητικά δε θα είχε κανένα βαθμό ελευθερίας ως προς το πλαίσιο. Κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι δεν υφίσταται σχετική κίνηση μεταξύ των εν λόγω σωμάτων, πράγμα το οποίο προφανώς δεν ισχύει.



**Σχήμα 3.4: Πλεονάζοντες κινηματικοί περιορισμοί κατά την έδραση βραχίονα ελέγχου στο πλαίσιο μέσω δύο περιστροφικών συνδέσμων [4]**

Γενικεύοντας τα παραπάνω σε επίπεδο ολόκληρου μηχανισμού ανάρτησης ενός τροχού (quarter car linkage model), ενδιαφέρον παρουσιάζει ο υπολογισμός του βαθμού ελευθερίας αυτού. Σε πρώτη προσέγγιση, ο υπολογισμός πραγματοποιείται για ένα σύστημα ανάρτησης στο οποίο οι βραχίονες ελέγχου εδράζονται στο πλαίσιο μέσω κυλινδρικών ελαστικών παρεμβυσμάτων (Σχήμα 3.5α). Σε αυτήν την περίπτωση το προκύπτον σύστημα πολλαπλών σωμάτων έχει 10 εναπομείναντες βαθμούς ελευθερίας, τους οποίους συνοψίζει ο Πίνακας 3-2.



**Σχήμα 3.5: Μοντελοποίηση συστήματος ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με ελαστικά παρεμβύσματα και κινηματικούς συνδέσμους [4]**

**Πίνακας 3-2: Υπολογισμός βαθμού ελευθερίας μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με ελαστικά παρεμβύσματα μεταξύ πλαισίου και βραχιόνων ελέγχου [4]**

Component	Number	DOF	ΣDOF
<b>Parts</b>	6	6	36
<b>Translationals</b>	1	-5	-5
<b>Revolutes</b>	1	-5	-5
<b>Universals</b>	1	-4	-4
<b>Sphericals</b>	3	-3	-9
<b>Inplanes</b>	1	-1	-1
<b>Motions</b>	2	-1	-2
			<b>ΣDOF for system = 10</b>

Όπως ήδη αναφέρθηκε στην Υποενότητα 2.2.1, είναι αδύνατη η κινηματική ανάλυση οποιουδήποτε μηχανισμού ο οποίος έχει μη μηδενικό πλήθος βαθμών ελευθερίας απολύτως στερεού σώματος. Συνεπώς, εισάγεται η μοντελοποίηση που φαίνεται στο Σχήμα 3.5β, σύμφωνα με την οποία τα κυλινδρικά ελαστικά παρεμβύσματα αντικαθίστανται από κατάλληλα προσανατολισμένους περιστροφικούς συνδέσμους. Ο βαθμός ελευθερίας του προκύπτοντος συστήματος πολλαπλών σωμάτων σε αυτήν την περίπτωση είναι μηδενικός (τους σχετικούς υπολογισμούς συνοψίζει ο Πίνακας 3-3), επομένως υπό τις ανωτέρω παραδοχές πράγματι μπορεί να πραγματοποιηθεί κινηματική ανάλυση του μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών. Στο σημείο αυτό διευκρινίζεται ότι κατά τον υπολογισμό του πλήθους εναπομεινάντων βαθμών ελευθερίας στις παραπάνω περιπτώσεις, έχει ληφθεί υπόψιν η κατακόρυφη κινηματική διέγερση που ασκείται στο σύστημα ως είσοδος, με αποτέλεσμα το σύστημα πολλαπλών σωμάτων να λειτουργεί ως μηχανισμός και να μην «κλειδώνει» προσιδιάζοντας σε ένα ισοστατικό χωροδικτύωμα. Επιπλέον, ο βαθμός ελευθερίας που σχετίζεται με την κύλιση του τροχού λογίζεται και αυτός ως μεταβλητή εισόδου και η γωνία στροφής γύρω από τον άξονα κύλισης τίθεται ίση με μηδέν.

**Πίνακας 3-3: Υπολογισμός βαθμού ελευθερίας μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με περιστροφικούς συνδέσμους μεταξύ πλαισίου και βραχιόνων ελέγχου [4]**

Component	Number	DOF	ΣDOF
<b>Parts</b>	6	6	36
<b>Translationals</b>	1	-5	-5
<b>Revolutes</b>	3	-5	-15
<b>Universals</b>	1	-4	-4
<b>Sphericals</b>	3	-3	-9
<b>Inplanes</b>	1	-1	-1
<b>Motions</b>	2	-1	-2
			<b>ΣDOF for system = 0</b>

Συνοψίζοντας, ο υπολογισμός του βαθμού ελευθερίας ενός μηχανισμού είναι ιδιαίτερα χρήσιμος όσον αφορά την κατανόηση του τρόπου λειτουργίας αυτού και πρέπει να προηγείται οποιασδήποτε ανάλυσης ακόμα και αν αυτή πραγματοποιείται με σύγχρονα εμπορικά λογισμικά MBS. Τα τελευταία έχουν τη δυνατότητα να αφαιρούν τους πλεονάζοντες κινηματικούς περιορισμούς μέσω αυτοματοποιημένων διαδικασιών [4], ωστόσο ο χρήστης πρέπει να είναι ιδιαίτερα προσεκτικός ούτως ώστε η διαφοροποιημένη τοπολογία του προκύπτοντος μηχανισμού να μη μεταβάλει ουσιαστικά τα κινηματικά χαρακτηριστικά αυτού σε σχέση με την αρχική. Από την άλλη πλευρά, η κινηματική ανάλυση λ.χ. ενός μηχανισμού ανάρτησης πολλαπλών συνδέσμων δεν είναι δυνατή, καθώς στη γενική περίπτωση αυτός διαθέτει μη μηδενικό πλήθος βαθμών ελευθερίας και η αντικατάσταση των εύκαμπτων στοιχείων σύνδεσης από κινηματικούς συνδέσμους, όπως έγινε προηγουμένως για την κινηματική ανάλυση ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι λειτουργία του εν λόγω μηχανισμού βασίζεται εν πολλοίς στην παραμόρφωση των ελαστικών παρεμβυσμάτων που χρησιμοποιούνται για τη σύνδεση των διαφόρων μελών του και η συμπεριφορά του αλλοιώνεται σημαντικά εάν αυτά αφαιρεθούν.

### 3.2 Η μέθοδος των κλειστών διανυσματικών βρόχων

Στην παρούσα ενότητα περιγράφεται η απλούστερη μέθοδος κινηματικής ανάλυσης ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, η οποία είναι γνωστή ως μέθοδος των κλειστών διανυσματικών βρόχων. Η μέθοδος αυτή ενδείκνυται για τη μελέτη σχετικά απλών μηχανισμών και όπως ήδη αναφέρθηκε προηγουμένως, η εφαρμογή της για την κινηματική ανάλυση μηχανισμών ανάρτησης διπλών ψαλιδιών προϋποθέτει την εξιδανίκευση των εδράσεων των βραχιόνων ελέγχου στο πλαίσιο. Ειδικότερα, τα ζεύγη ελαστικών παρεμβυσμάτων ή σφαιρικών εδράνων που μπορεί να χρησιμοποιούνται για τη σύνδεση των ανωτέρω σωμάτων αντικαθίστανται από περιστροφικούς συνδέσμους, ο άξονας των οποίων συμπίπτει με την ευθεία που διέρχεται από τα ονομαστικά σημεία έδρασης κάθε βραχίονα ελέγχου στο πλαίσιο (Σχήμα 3.5β). Υπενθυμίζεται επίσης ότι κατά την κινηματική ανάλυση μηχανισμών όλα τα σώματα λαμβάνονται ως απολύτως στερεά, συνεπώς ένας μηχανισμός ανάρτησης διπλών ψαλιδιών μπορεί να αναπαρασταθεί όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.6.

Για τον πλήρη προσδιορισμό της θέσης και του προσανατολισμού του τροχού απαιτείται ο υπολογισμός της κατεύθυνσης των μοναδιαίων διανυσμάτων  $\vec{e}_k$  και  $\vec{e}_{hub}$ , καθένα από τα οποία σχετίζεται με μια κλειστή κινηματική αλυσίδα ή αλλιώς με ένα κλειστό διανυσματικό βρόχο. Επομένως, η κινηματική ανάλυση του μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών ανάγεται στην ανεξάρτητη ανάλυση δύο τέτοιων βρόχων [34], οι οποίοι δεν είναι άλλοι από τους OBDAO και OBNHJO (Σχήμα 3.6).

Ξεκινώντας με τον κλειστό βρόχο OBDAO, προκειμένου για τον υπολογισμό του διανύσματος  $\vec{e}_k$  απαιτείται η γνώση των γεωμετρικών παραμέτρων  $l_i, l_k, l_u, d, h, q, \xi$  και  $\Phi$

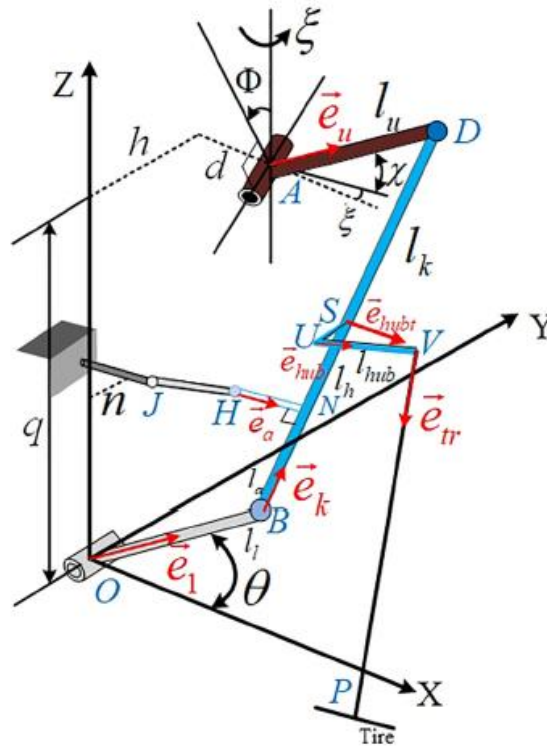
του μηχανισμού. Η γωνία  $\theta$  που σχηματίζει ο κατώτερος βραχίονας ελέγχου με την οριζόντια διεύθυνση, λειτουργεί ως δεδομένο εισόδου για την πραγματοποίηση κινηματικής ανάλυσης του μηχανισμού για διαφορετικές κατακόρυφες μετατοπίσεις του τροχού. Η διανυσματική εξίσωση κλειστού βρόχου της κινηματικής αλυσίδας OBDAO είναι:

$$l_k = |\overline{BD}| = |\overline{OD} - \overline{OB}| \quad (3.2)$$

$$\overline{OB} = l_l \cos \theta \vec{i} + l_l \sin \theta \vec{k} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \overline{OD} = & (d + l_u \cos \chi \cos \xi + l_u \sin \chi \sin \Phi \sin \xi) \vec{i} \\ & + (h + l_u \cos \chi \sin \xi - l_u \sin \chi \sin \Phi \cos \xi) \vec{j} \\ & + (q + l_u \sin \chi \cos \varphi) \vec{k} \end{aligned} \quad (3.4)$$

όπου,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , τα μοναδιαία διανύσματα που αντιστοιχούν στους άξονες  $x$ ,  $y$ ,  $z$  του συστήματος συντεταγμένων με αρχή το  $O$  που φαίνεται στο Σχήμα 3.6.



Σχήμα 3.6: Μονογραμμική απεικόνιση μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [34]

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.3) και (3.4) στη σχέση (3.2) και εκτελώντας τις απαραίτητες αριθμητικές πράξεις λαμβάνεται η ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} k_1 + (k_2 - k_3 \cos \theta) \cos \chi - (k_4 + k_5 \sin \theta - k_6 \cos \theta) \sin \chi - k_7 \cos \theta \\ - k_8 \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} k_1 = h^2 + d^2 + q^2 + l_l^2 + l_u^2 - l_k^2 \\ k_2 = 2hl_u \sin \xi + 2dl_u \cos \xi \\ k_3 = 2l_l l_u \cos \xi \\ k_4 = 2hl_u \cos \xi \sin \Phi - 2ql_u \sin \xi \sin \Phi \\ k_5 = 2l_l l_u \cos \Phi \\ k_6 = 2l_l l_u \sin \xi \sin \Phi \\ k_7 = 2dl_l \\ k_8 = 2ql_l \end{cases} \quad (3.6)$$

Επιλύοντας τη γραμμική τριγωνομετρική εξίσωση της σχέσης (3.5) για δεδομένη τιμή της γωνίας  $\theta$ , εξάγεται μια έκφραση για την άγνωστη γωνία  $\chi$  συναρτημένη αποκλειστικά γνωστών ποσοτήτων (tangent half-angle substitution, [48]):

$$\chi = 2 \tan^{-1} \left( \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} a = -k_1 + k_2 - k_3 \cos \theta + k_7 \cos \theta + k_8 \sin \theta \\ b = 2k_4 + 2k_5 \sin \theta - 2k_6 \cos \theta \\ c = -k_1 - k_2 + k_3 \cos \theta + k_7 \cos \theta + k_8 \sin \theta \end{cases} \quad (3.8)$$

Εν συνεχεία, το διάνυσμα  $\overline{BD}$  που αντιστοιχεί στο φορέα του τροχού υπολογίζεται ως εξής:

$$\overline{BD} = \overline{OD} - \overline{OB} = l_k \vec{e}_k \quad (3.9)$$

$$\vec{e}_k = \frac{1}{l_k} \begin{bmatrix} d + l_u \cos \chi \cos \xi + l_u \sin \chi \sin \Phi \sin \xi - l_l \cos \theta \\ h + l_u \cos \chi \sin \xi - l_u \sin \chi \sin \Phi \cos \xi \\ q + l_u \sin \chi \cos \varphi - l_l \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

ενώ το μοναδιαίο διάνυσμα που αντιστοιχεί στον κατώτερο βραχίονα ελέγχου δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{e}_1 = [\cos \theta \quad 0 \quad \sin \theta]^T \quad (3.11)$$

Τέλος, το διάνυσμα  $\overline{AD}$  υπολογίζεται εύκολα από τα ήδη γνωστά διανύσματα  $\overline{BD}$ ,  $\vec{e}_1$  και τις γεωμετρικές παραμέτρους  $q, h, d$  και  $l_l$ . Συνεχίζοντας με την ανάλυση της δεύτερης κλειστής κινηματικής αλυσίδας OBNHJO, προκειμένου για τον υπολογισμό του διανύσματος  $\vec{e}_{hub}$  απαιτείται επιπλέον η γνώση των συντεταγμένων των σημείων  $H$  και  $J$ , δηλαδή των δύο άκρων της ράβδου συγκράτησης του τροχού. Το μήκος  $t_r$  της τελευταίας ισούται με  $|\overline{HJ}|$ , ενώ ο μοχλοβραχίονας  $s_a$ , μέσω του οποίου η δύναμη που ασκεί το

σύστημα διεύθυνσης στο φορέα του τροχού μετατρέπεται σε ροπή, ισούται με  $|\overline{HN}|$ . Ο ανωτέρω μοχλοβραχίονας προσδιορίζεται από τη σχέση υπολογισμού του εμβαδού του παραλληλογράμμου με πλευρές HB και HD κάνοντας χρήση του εξωτερικού γινομένου των αντίστοιχων διανυσμάτων [49]. Το ύψος HN του εν λόγω παραλληλογράμμου ισούται με αυτό του τριγώνου HBD, επομένως:

$$s_a = |\overline{HN}| = |\overline{HB} \times \overline{HD}| / |\overline{DB}| \quad (3.12)$$

Για τον προσδιορισμό της μεταβολής της γωνίας σύγκλισης που λαμβάνει χώρα κατά την κατακόρυφη μετατόπιση του τροχού ενός συστήματος ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, εισάγονται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$t_r^2 = (H_x - J_{x_0})^2 + (H_y - J_{y_0})^2 + (H_z - J_{z_0})^2 \quad (3.13)$$

$$s_a^2 = (N_x - H_x)^2 + (N_y - H_y)^2 + (N_z - H_z)^2 \quad (3.14)$$

$$\overline{ON} = (N_x, N_y, N_z) = l_l \vec{e}_1 + l_a \vec{e}_k \quad (3.15)$$

$$l_a = \sqrt{|\overline{BH}|^2 - s_a^2} \quad (3.16)$$

όπου,  $(J_{x_0}, J_{y_0}, J_{z_0})$ , οι συντεταγμένες του σημείου  $J$  στην αρχική θέση του μηχανισμού. Διευκρινίζεται εδώ ότι η παρούσα ανάλυση γίνεται με στόχο τον υπολογισμό των κινηματικών χαρακτηριστικών αναρτήσεων διπλών ψαλιδιών, οι οποίες μπορούν να δέχονται ως εξωτερική κινηματική διέγερση μόνο κατακόρυφες μετατοπίσεις του τροχού και όχι επενεργήσεις του συστήματος διεύθυνσης επί αυτού. Κατά συνέπεια το σημείο  $J$  δε μετατοπίζεται.

Οι σχέσεις (3.13) και (3.14) εκφράζουν μαθηματικά το γεγονός ότι τα μήκη  $t_r$  και  $s_a$  διατηρούνται σταθερά για οποιαδήποτε μεταβολή της θέσης του μηχανισμού. Επιπλέον, η συνθήκη της σχέσης (3.17) εξασφαλίζει την καθετότητα μεταξύ του μοχλοβραχίονα  $s_a$  και του άξονα διεύθυνσης του τροχού,  $\overline{HN} \perp \overline{BN}$ , βάσει της σχετικής ιδιότητας του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων:

$$\overline{HN} \cdot \overline{BN} = 0 \Rightarrow (l_l \vec{e}_1 + l_a \vec{e}_k - (H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k})) \cdot (l_a \vec{e}_k) = 0 \quad (3.17)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως εξής:

$$c_1 H_x + c_2 H_y + c_3 H_z + c_4 = 0 \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} c_1 = -l_a \vec{e}_{k_x}, & c_2 = -l_a \vec{e}_{k_y}, & c_3 = -l_a \vec{e}_{k_z} \\ c_4 = l_a^2 + l_l l_a (\vec{e}_{k_x} \vec{e}_{1_x} + \vec{e}_{k_y} \vec{e}_{1_y} + \vec{e}_{k_z} \vec{e}_{1_z}) \end{cases} \quad (3.19)$$



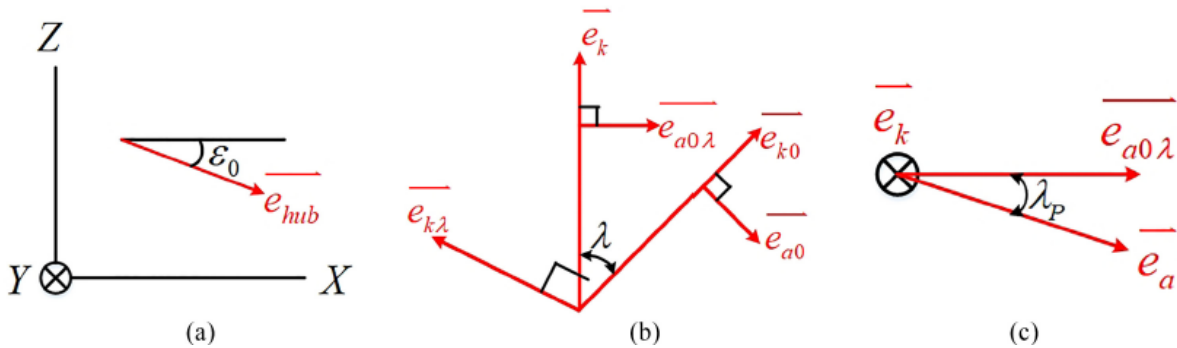
Τα άγνωστα μεγέθη που εμπλέκονται στις σχέσεις (3.13), (3.14) και (3.18) είναι οι συντεταγμένες του σημείου  $H$ , προκύπτει δηλαδή ένα μη γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με ισάριθμο πλήθος αγνώστων, έπειτα από την επίλυση του οποίου καθίστανται γνωστές οι θέσεις όλων των σημείων που ανήκουν στις κλειστές κινηματικές αλυσίδες OBDAO και OBNHJO.

Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{e}_{hub}$  είναι συγγραμικό και ομόρροπο του  $\overline{UV}$ , δηλαδή έχει κοινή διεύθυνση με τον άξονα κύλισης του τροχού. Στην αρχική θέση του μηχανισμού ανάρτησης (δείκτης 0) το εν λόγω μοναδιαίο διάνυσμα υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\vec{e}_{hub_0} = [\cos \varepsilon_0 \quad 0 \quad -\sin \varepsilon_0]^T \quad (3.20)$$

όπου,  $\varepsilon_0$ , η γωνία που σχηματίζεται αρχικά μεταξύ της οριζόντιας διεύθυνσης και του ανωτέρω άξονα κύλισης (Σχήμα 3.7a). Ο τελικός προσανατολισμός του τροχού προκύπτει ως αποτέλεσμα της υπέρθεσης δύο διαδοχικών στροφών του φορέα του, με αφητηρία τον προσανατολισμό του τελευταίου στην αρχική θέση του μηχανισμού. Η πρώτη στροφή πραγματοποιείται με άξονα το φορέα του διανύσματος  $\vec{e}_{k\lambda}$  κατά γωνία  $\lambda$  (Σχήμα 3.7b, διευκρινίζεται ότι το διάνυσμα  $\vec{e}_{k\lambda}$  είναι κάθετο στο επίπεδο που ανήκουν τα διανύσματα  $\vec{e}_{k_0}$  και  $\vec{e}_k$ ):

$$\lambda = \sin^{-1}[(\vec{e}_{k_0} \times \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_{k\lambda}] \quad (3.21)$$



**Σχήμα 3.7: Ορισμός μεγεθών για τον υπολογισμό του προσανατολισμού του τροχού [34]**

Τα διανύσματα  $\vec{e}_{k_0}$  και  $\vec{e}_k$  υπολογίζονται με εφαρμογή της σχέσης (3.10) στην αρχική και τρέχουσα θέση του μηχανισμού αντίστοιχα και από αυτά προκύπτει η σχέση υπολογισμού του διανύσματος  $\vec{e}_{k\lambda}$ :

$$\vec{e}_{k\lambda} = \frac{\vec{e}_{k_0} \times \vec{e}_k}{|\vec{e}_{k_0} \times \vec{e}_k|} \quad (3.22)$$

Η δεύτερη στροφή πραγματοποιείται με άξονα το φορέα του διανύσματος  $\vec{e}_k$  κατά γωνία  $\lambda_p$  (Σχήμα 3.7c), πρόκειται δηλαδή για στροφή του φορέα του τροχού γύρω από τον άξονα διεύθυνσης:

$$\lambda_p = \sin^{-1}[(\vec{e}_{\alpha_{0\lambda}} \times \vec{e}_\alpha) \cdot \vec{e}_k]$$

όπου,  $\vec{e}_{\alpha_{0\lambda}} = \overline{HN}_0 / |\overline{HN}_0|$  και  $\vec{e}_\alpha = \overline{HN} / |\overline{HN}|$ . Η στροφή ενός διανύσματος κατά γωνία  $\theta$  γύρω από ένα δεδομένο άξονα με κατεύθυνση που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{\omega}$ , υλοποιείται μαθηματικά πολλαπλασιάζοντας το πρώτο διάνυσμα από αριστερά με το μητρώο στροφής κατά Rodrigues  $R_{\vec{\omega}}(\theta)$  [50]:

$$R_{\vec{\omega}}(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} r_{11} = \cos \theta + \omega_x^2(1 - \cos \theta) \\ r_{12} = \omega_x \omega_y(1 - \cos \theta) - \omega_z \sin \theta \\ r_{13} = \omega_y \sin \theta + \omega_x \omega_z(1 - \cos \theta) \\ r_{21} = \omega_z \sin \theta + \omega_x \omega_y(1 - \cos \theta) \\ r_{22} = \cos \theta + \omega_y^2(1 - \cos \theta) \\ r_{23} = -\omega_x \sin \theta + \omega_y \omega_z(1 - \cos \theta) \\ r_{31} = -\omega_y \sin \theta + \omega_x \omega_z(1 - \cos \theta) \\ r_{32} = \omega_x \sin \theta + \omega_y \omega_z(1 - \cos \theta) \\ r_{33} = \cos \theta + \omega_z^2(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (3.24)$$

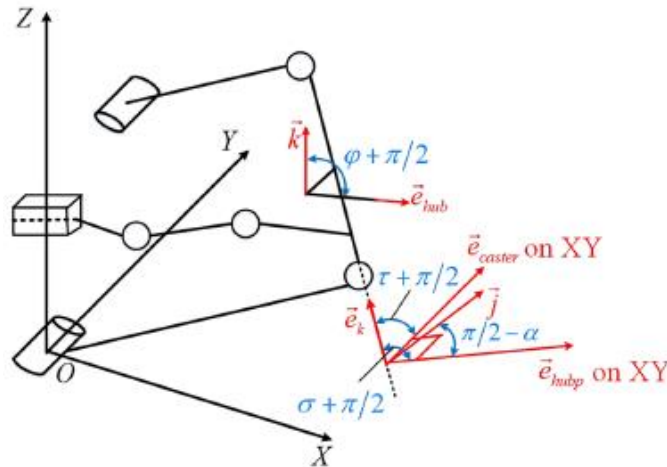
Συνεπώς, το μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{e}_{hub}$  για οποιαδήποτε κατακόρυφη κινηματική διέγερση του τροχού υπολογίζεται ως εξής:

$$\vec{e}_{hub} = R_{\vec{e}_k}(\lambda_p) R_{\vec{e}_{k\lambda}}(\lambda) \vec{e}_{hub_0} \quad (3.25)$$

Έχοντας προσδιορίσει τα διανύσματα  $\vec{e}_k$  και  $\vec{e}_{hub}$ , μπορούν να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη μιας ανάρτησης διπλών ψαλιδιών. Ενδεικτικά, δίνονται παρακάτω οι σχέσεις υπολογισμού των γωνιών σύγκλισης  $\alpha$ , κλίσης  $\varphi$ , caster  $\tau$  και βασιλικού πείρου  $\sigma$ , για την εξαγωγή των οποίων απαιτείται ο ορισμός των μοναδιαίων διανυσμάτων,  $\vec{e}_{hubp}$  και  $\vec{e}_{caster}$  (Σχήμα 3.8). Το διάνυσμα  $\vec{e}_{hubp}$  είναι η προβολή του  $\vec{e}_{hub}$  στο  $xy$  επίπεδο, ενώ το διάνυσμα  $\vec{e}_{caster}$  κείται επί του τελευταίου επιπέδου και είναι κάθετο ως προς το διάνυσμα  $\vec{e}_{hubp}$ :

$$\vec{e}_{hubp} = [e_{hubx} \quad e_{huby} \quad 0]^T / \sqrt{e_{hubx}^2 + e_{huby}^2} \quad (3.26)$$

$$\vec{e}_{caster} = \begin{bmatrix} \mp \frac{e_{huby}}{e_{hubx}} \sqrt{1 / \left[ \left( \frac{e_{huby}}{e_{hubx}} \right)^2 + 1 \right]} & \pm \sqrt{1 / \left[ \left( \frac{e_{huby}}{e_{hubx}} \right)^2 + 1 \right]} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.27)$$



**Σχήμα 3.8: Σχηματική απεικόνιση γεωμετρίας ανάρτησης διπλών ψαλιδιών για τον υπολογισμό χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών [34]**

Με βάση την τρισδιάστατη γεωμετρία του μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών προκύπτουν οι ζητούμενες σχέσεις υπολογισμού (Σχήμα 3.8):

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(\vec{e}_{hubp} \cdot \vec{j}) \quad (3.28)$$

$$\varphi = \cos^{-1}(\vec{e}_{hub} \cdot \vec{k}) - \frac{\pi}{2} \quad (3.29)$$

$$\tau = \cos^{-1}(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_{caster}) - \frac{\pi}{2} \quad (3.30)$$

$$\sigma = \cos^{-1}(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_{hubp}) - \frac{\pi}{2} \quad (3.31)$$

Για την εξαγωγή όλων των σχέσεων που χρειάζονται για την κινηματική ανάλυση ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με τη μέθοδο των κλειστών διανυσματικών βρόχων απαιτείται η εκτέλεση μεγάλου αριθμού πράξεων, ωστόσο η χρήση λογισμικού συμβολικών μαθηματικών (π.χ. Mathcad, Maple, Matlab) μπορεί να διευκολύνει την παραπάνω διαδικασία. Από την άλλη πλευρά, οι πράξεις αυτές γίνονται εφάπαξ και οι προκύπτουσες αλγεβρικές εξισώσεις μπορούν εύκολα να υλοποιηθούν σε υπολογιστικά φύλλα, με αποτέλεσμα η χρήση του τελικού υπολογιστικού εργαλείου να είναι εύκολη και γρήγορη. Σημειώνεται, επίσης, ότι η μέθοδος των κλειστών διανυσματικών βρόχων προϋποθέτει τη γνώση των γεωμετρικών παραμέτρων  $l_l, l_k, l_w, d, h, q, \xi$  και  $\Phi$ , οι οποίες υπολογίζονται με βάση τις συντεταγμένες των σημείων έδρασης των βραχιόνων ελέγχου στο πλαίσιο και στο φορέα του τροχού σε οποιαδήποτε εφικτή θέση του μηχανισμού. Κλείνοντας, αναφέρεται ότι κατά την κινηματική ανάλυση μηχανισμών ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με τη εν λόγω μέθοδο δεν απαιτούνται δεδομένα σχετικά με το σύστημα επενέργειας, γεγονός που μπορεί να φανεί χρήσιμο στα αρχικά στάδια του σχεδιασμού.

### 3.3 Η μέθοδος των τριών σημείων

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζεται μια γενικότερη μέθοδος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κινηματική ανάλυση μηχανισμών ανάρτησης, η οποία είναι μεν απλούστερη όσον αφορά τη διαδικασία εξαγωγής των απαιτούμενων εξισώσεων, αλλά δυσκολότερη ως προς την υπολογιστική υλοποίηση συγκριτικά με τη μέθοδο των κλειστών διανυσματικών βρόχων.

#### 3.3.1 Μαθηματικό υπόβαθρο

Για τον προσδιορισμό της θέσης οποιουδήποτε σημείου στον τρισδιάστατο χώρο αρκεί η γνώση των συντεταγμένων τριών άλλων σημείων καθώς και των αποστάσεων τους από το πρώτο [4]. Ο ανωτέρω ισχυρισμός επιβεβαιώνεται από το ακόλουθο παράδειγμα.

Έστω τρία σημεία A, B, C οι συντεταγμένες των οποίων είναι γνωστές, το ίδιο και οι αποστάσεις τους από το σημείο D, οι συντεταγμένες του οποίου ζητείται να υπολογιστούν (Σχήμα 3.9):

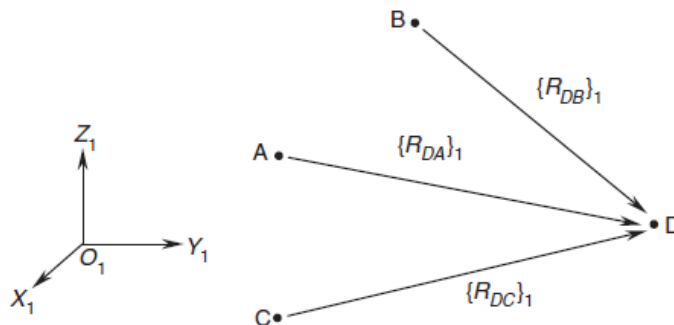
$$\{R_A\}_1 = [A_x \quad A_y \quad A_z]^T \quad (3.32)$$

$$\{R_B\}_1 = [B_x \quad B_y \quad B_z]^T \quad (3.33)$$

$$\{R_C\}_1 = [C_x \quad C_y \quad C_z]^T \quad (3.34)$$

όπου, ο δείκτης 1 υποδεικνύει το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο εκφράζονται τα ανωτέρω διανύσματα θέσης. Προκειμένου για τον υπολογισμό των τριών αγνώστων συντεταγμένων  $D_x, D_y, D_z$  απαιτούνται ισάριθμες σχέσεις προς ταυτόχρονη επίλυση, οι οποίες συνιστούν το ακόλουθο μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} |R_{DA}|^2 = (D_x - A_x)^2 + (D_y - A_y)^2 + (D_z - A_z)^2 \\ |R_{DB}|^2 = (D_x - B_x)^2 + (D_y - B_y)^2 + (D_z - B_z)^2 \\ |R_{DC}|^2 = (D_x - C_x)^2 + (D_y - C_y)^2 + (D_z - C_z)^2 \end{cases} \quad (3.35)$$



Σχήμα 3.9: Διανύσματα θέσης για τον προσδιορισμό των αγνώστων συντεταγμένων σημείου [4]

Το ανωτέρω σύστημα εξισώσεων μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά και στη γενική περίπτωση έχει δύο λύσεις, γεγονός ενδεικτικό του μη γραμμικού χαρακτήρα του. Στην πράξη, η αποδεκτή λύση του συστήματος προκύπτει μέσω εποπτείας των αποτελεσμάτων και των κατευθύνσεων των διανυσμάτων  $\{R_{DA}\}_1, \{R_{DB}\}_1, \{R_{DC}\}_1$ .

Εφόσον πρόκειται για ένα μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων, η επίλυσή του θα μπορούσε εναλλακτικά να γίνει μέσω κάποιας αριθμητικής μεθόδου, όπως για παράδειγμα με τη μέθοδο Newton-Raphson. Η τελευταία είναι η απλούστερη μέθοδος επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων και συγκλίνει πολύ γρήγορα, εφόσον η αρχικοποίηση των αγνώστων μεταβλητών δεν απέχει σημαντικά από τις πραγματικές τιμές αυτών [51]. Σε αντίθετη περίπτωση η σύγκλιση της μεθόδου μπορεί να είναι από αργή έως αδύνατη.

Ένα τυπικό μη γραμμικό πρόβλημα διέπεται από  $N$  συναρτησιακές σχέσεις προς μηδενισμό, οι οποίες εμπεριέχουν  $N$  άγνωστες μεταβλητές, έστω  $x_i, i = 0, 1, \dots, N - 1$ :

$$G_i(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.36)$$

Έστω  $\mathbf{x}$  το διάνυσμα των αγνώστων μεταβλητών  $x_i$  και  $\mathbf{G}$  το διάνυσμα των συναρτήσεων  $G_i$ . Στη γειτονιά του  $\mathbf{x}$  καθεμία από τις συναρτήσεις  $G_i$  μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor ως εξής:

$$G_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = G_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial G_i}{\partial x_j} \delta x_j + O(\delta\mathbf{x}^2) \quad (3.37)$$

Ο πίνακας μερικών παραγώγων στη σχέση (3.37) είναι στην πραγματικότητα ο Ιακωβιανός πίνακας  $\mathbf{J}$ :

$$J_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial x_j} \quad (3.38)$$

Επομένως, η σχέση (3.37) ισοδυναμεί με την ακόλουθη σχέση:

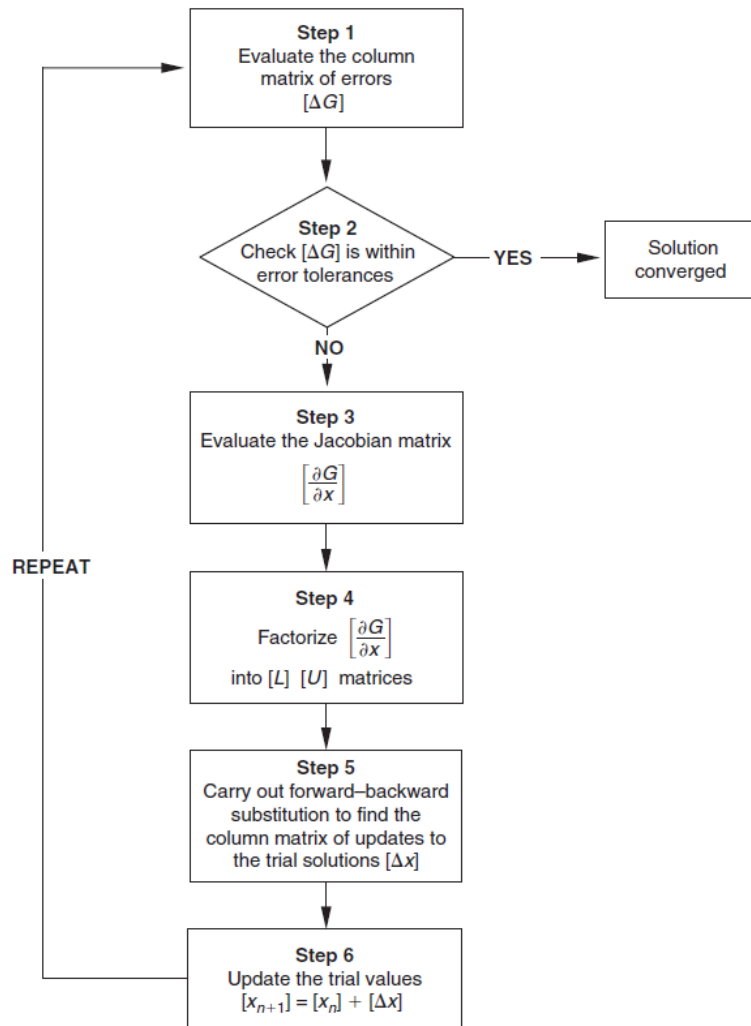
$$G_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{x} + O(\delta\mathbf{x}^2) \quad (3.39)$$

Θέτοντας  $\mathbf{G}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = 0$  και αγνοώντας τους όρους δεύτερης τάξης και άνω, λαμβάνεται ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων μέσω του οποίου υπολογίζονται οι διορθώσεις  $\delta x_i$ . Οι τελευταίες, αθροιζόμενες με τις τρέχουσες τιμές των μεταβλητών  $x_i$ , οδηγούν σε τιμές των συναρτήσεων  $G_i$  πλησιέστερες στο μηδέν συγκριτικά με τις προϋπάρχουσες:

$$\mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{x} = -\mathbf{G} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{x}_{new} = \mathbf{x}_{old} + \delta\mathbf{x} \quad (3.41)$$

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου επέλθει σύγκλιση, των αγνώστων μεταβλητών  $x_i$  και των τιμών που λαμβάνουν οι συναρτήσεις  $G_i$  (Σχήμα 3.10).



**Σχήμα 3.10: Διάγραμμα ροής αριθμητικής επίλυσης μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων με τη μέθοδο Newton-Raphson [4]**

Διαμέσου της κινηματικής ανάλυσης μηχανισμών συνήθως επιχειρείται ο υπολογισμός χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών σε όλο το διαθέσιμο/χρήσιμο εύρος κίνησης των πρώτων. Έτσι, ξεκινώντας από μια αρχική θέση του εκάστοτε μηχανισμού εισάγεται η κατάλληλη κάθε φορά κινηματική διέγερση μόνιμης κατάστασης σε επαρκώς μικρά διαδοχικά βήματα, προκειμένου για τη διενέργεια κινηματικής ανάλυσης σε ικανοποιητικό πλήθος διαφορετικών θέσεων. Το γεγονός αυτό λειτουργεί υπέρ της μεθόδου των τριών σημείων, καθώς στην πλειοψηφία των μηχανισμών, κινηματικές διεγέρσεις μικρού πλάτους εισάγουν επίσης μικρές μετατοπίσεις και στροφές των διαφόρων μελών τους ως προς την αμέσως προηγούμενη θέση, με αποτέλεσμα να ευνοείται η σύγκλιση της χρησιμοποιούμενης μεθόδου αριθμητικής επίλυσης των μη γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν. Επιπρόσθετα, η αριθμητική επίλυση του συστήματος εξισώσεων της σχέσης (3.35) πλεονεκτεί έναντι της αναλυτικής αφού κατ' αυτόν τον τρόπο υπολογίζεται μόνο μία



από τις συνολικά δύο λύσεις. Εφόσον η αρχική και τελική θέση του μηχανισμού δεν απέχουν σημαντικά ή ισοδύναμα τα διαδοχικά βήματα της κινηματικής διέγερσης έχουν επαρκώς μικρό πλάτος (ούτως ή άλλως πρέπει να είναι μικρό ώστε να είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας), αυτή η λύση είναι και η αποδεκτή. Συνεπώς, η αριθμητική επίλυση του εν λόγω μη γραμμικού συστήματος δεν απαιτεί εποπτεία και μπορεί να λαμβάνει χώρα με πλήρως αυτοματοποιημένο τρόπο μέσω κατάλληλου λογισμικού.

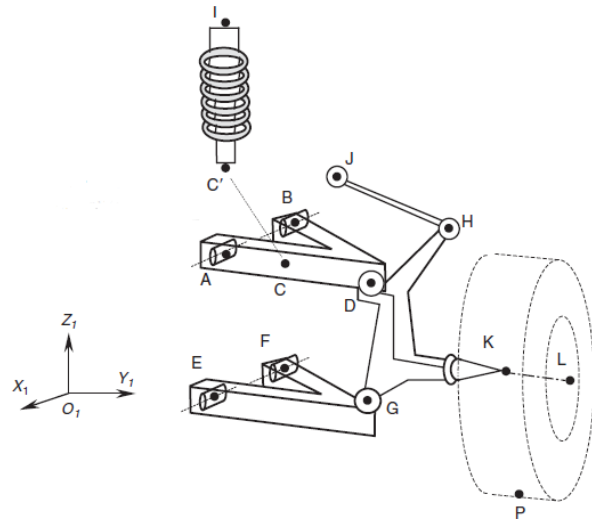
Όσον αφορά το υπολογιστικό κόστος της αριθμητικής επίλυσης του συστήματος εξισώσεων της σχέσης (3.35), αυτό είναι σαφώς μεγαλύτερο από της αντίστοιχης αναλυτικής. Παρόλα αυτά, εάν οι άγνωστες μεταβλητές αρχικοποιούνται με τον προαναφερθέντα τρόπο, δηλαδή βάσει της αμέσως προηγούμενης θέσης του μηχανισμού, η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει ταχύτατα (3-4 επαναλήψεις το πολύ). Επιπλέον, λόγω του μικρού πλήθους αγνώστων η επίλυση του γραμμικού συστήματος της σχέσης (3.40) γίνεται πολύ γρήγορα, ενώ για την τελευταία χρησιμοποιείται η μέθοδος παραγοντοποίησης LU (LU-decomposition/factorization) η οποία μειώνει περαιτέρω το υπολογιστικό κόστος σε σχέση με άλλες μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Τέλος, αναφέρεται για λόγους πληρότητας ότι ορισμένοι από τους επιλύτες Newton-Raphson που χρησιμοποιούνται στα σύγχρονα λογισμικά προσομοίωσης δυναμικής πολλαπλών σωμάτων δεν υπολογίζουν τον Ιακωβιανό πίνακα σε κάθε επανάληψη (quasi-Newton solvers), διότι τα βήματα 3 και 4 του ανωτέρω διαγράμματος ροής (Σχήμα 3.10) είναι εν πολλοίς υπεύθυνα για την αύξηση του υπολογιστικού κόστους [4]. Σε αυτές τις περιπτώσεις ο Ιακωβιανός πίνακας ανανεώνεται ανά κάποιες (λίγες) επαναλήψεις, με αποτέλεσμα τη δραστική μείωση του υπολογιστικού κόστους, ιδιαίτερα όταν το πλήθος των αγνώστων μεταβλητών (δηλ. η διάσταση του Ιακωβιανού πίνακα) είναι μεγάλο.

### 3.3.2 Εφαρμογή σε μηχανισμούς ανάρτησης διπλών ψαλιδιών

Τα όσα ειπώθηκαν στην προηγούμενη υποενότητα σχετικά με τη μέθοδο των τριών σημείων, εφαρμόζονται στη συνέχεια για την κινηματική ανάλυση μηχανισμών ανάρτησης διπλών ψαλιδιών. Η παρουσίαση των απαιτούμενων βημάτων υπολογισμού γίνεται αρχικά για την απλούστερη παραλλαγή υλοποίησης τέτοιων μηχανισμών, δηλαδή για τη φερόμενη ως ανάρτηση διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργησης (direct actuation double wishbone suspension). Η ονομασία της συγκεκριμένης παραλλαγής απορρέει από τον τρόπο με τον οποίο ένα τέτοιο σύστημα ανάρτησης επενεργεί στο στοιχείο που είναι υπεύθυνο για την κατακόρυφη δυσκαμψία του τροχού, το οποίο συνήθως είναι ένα ελικοειδές ελατήριο. Ειδικότερα, το τελευταίο εδράζεται ομοαξονικά επί του αποσβεστήρα (coilover damper), τα άκρα του οποίου με τη σειρά τους εδράζονται στο πλαίσιο και στον ανώτερο ή κατώτερο βραχίονα ελέγχου (Σχήμα 3.11). Έτσι, οποιαδήποτε κατακόρυφη μετατόπιση του τροχού συνεπάγεται μεταβολή του μήκους του ελατηρίου και αντίστροφα. Αναφέρεται επίσης ότι το σύστημα ανάρτησης διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργησης προσιδιάζει εμφανισιακά σε μια ανάρτηση με γόνατα MacPherson, ωστόσο στην πράξη δεν υφίσταται ομοιότητα όσον αφορά τα λειτουργικά χαρακτηριστικά των δύο συστημάτων.



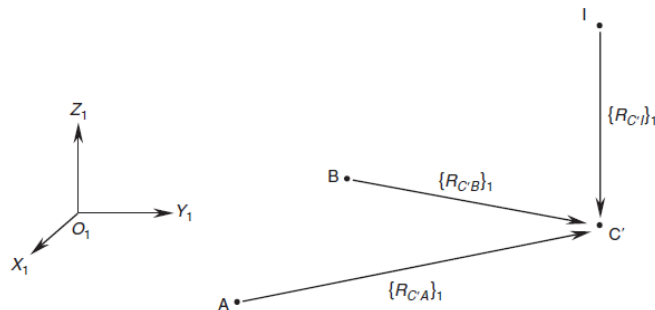
(α)



(β)

**Σχήμα 3.11: Μηχανισμός ανάρτησης διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργειας [4]**

Όπως ήδη αναφέρθηκε, για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου μετά την αυθαίρετη μετατόπισή του στο χώρο είναι απαραίτητη η γνώση των συντεταγμένων τριών άλλων σημείων και των αποστάσεων αυτών από το πρώτο. Προκειμένου για την αξιοποίηση του ανωτέρω πορίσματος κατά την κινηματική ανάλυση του μηχανισμού ανάρτησης που φαίνεται στο Σχήμα 3.11β, λαμβάνονται αρχικά τα σημεία A, B και I με στόχο να προσδιοριστούν οι άγνωστες συντεταγμένες του σημείου C έπειτα από μικρή μεταβολή του μήκους του στοιχείου δυσκαμψίας. Η τελευταία ισούται με τη μεταβολή μήκους που υφίσταται το ευθύγραμμο τμήμα CI, συνεπώς το μήκος αυτού είναι γνωστό και αποτελεί τη μεταβλητή εισόδου της πραγματοποιηθείσας κινηματικής ανάλυσης. Είναι προφανές από τη γεωμετρία του μηχανισμού ότι η βράχυνση του τμήματος CI εισάγει θετική κατακόρυφη μετατόπιση του τροχού, ενώ το αντίστροφο ισχύει για την επιμήκυνση αυτού. Τα σημεία A, B και I ανήκουν στο πλαίσιο του οχήματος, συνεπώς δε μετατοπίζονται κατά την κίνηση του μηχανισμού ανάρτησης. Όσον αφορά τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων CA και CB, αυτά παραμένουν αμετάβλητα αφού όλα τα σώματα λαμβάνονται ως απολύτως στερεά.



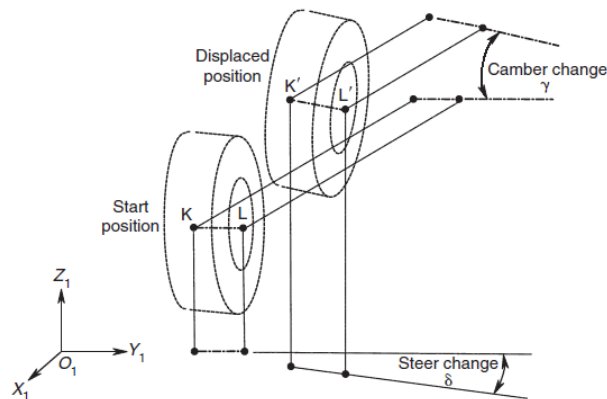
**Σχήμα 3.12: Εντοπισμός του σημείου σύνδεσης του αποσβεστήρα στον ανώτερο βραχίονα ελέγχου με τη μέθοδο των τριών σημείων [4]**

Η νέα θέση,  $C'$ , του σημείου C που προκύπτει έπειτα από μεταβολή του μήκους του ευθυγράμμου τμήματος CI, υπολογίζεται από την επίλυση του ακόλουθου μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων (Σχήμα 3.12):

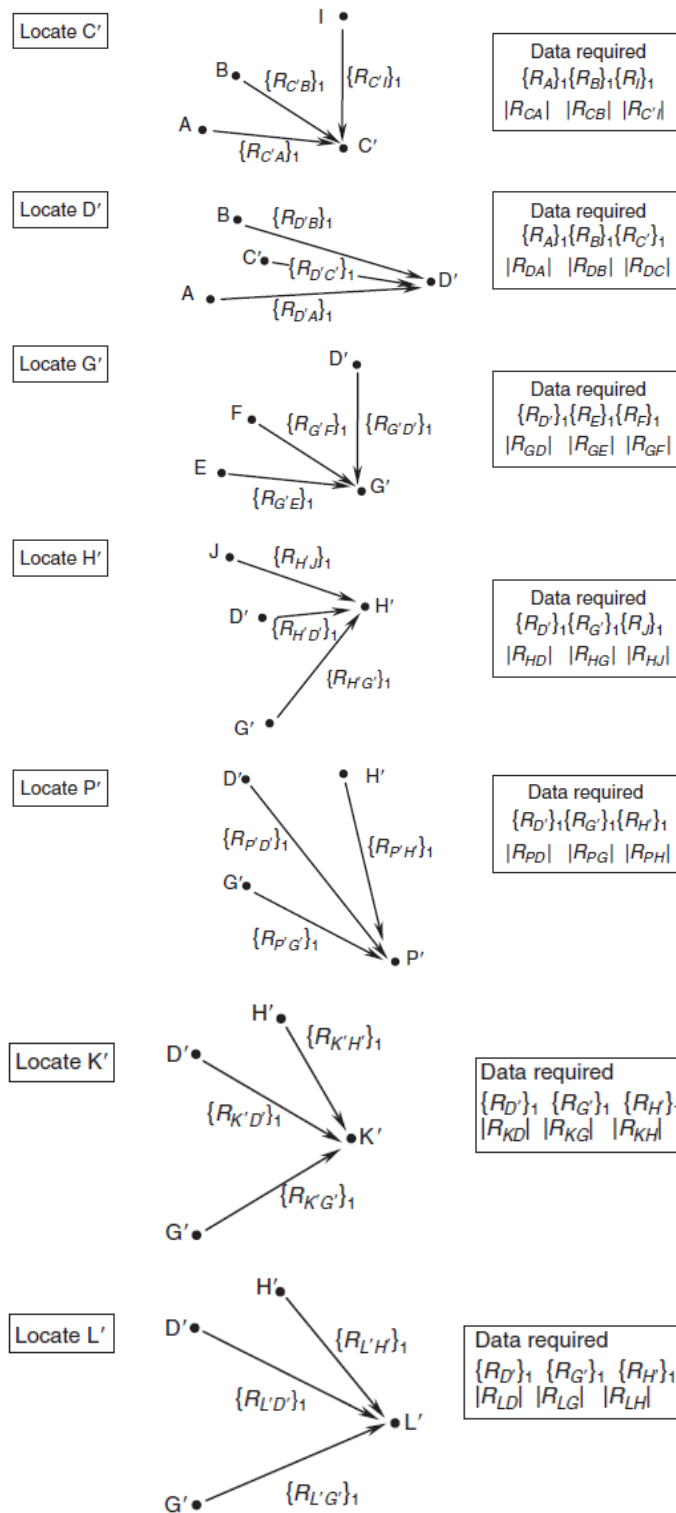
$$\begin{cases} |R_{C'A}|^2 = (C'_x - A_x)^2 + (C'_y - A_y)^2 + (C'_z - A_z)^2 \\ |R_{C'B}|^2 = (C'_x - B_x)^2 + (C'_y - B_y)^2 + (C'_z - B_z)^2 \\ |R_{C'I}|^2 = (C'_x - I_x)^2 + (C'_y - I_y)^2 + (C'_z - I_z)^2 \end{cases} \quad (3.42)$$

Όπως ήδη αναφέρθηκε, για την επίλυση του παραπάνω συστήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αριθμητική μέθοδος Newton-Raphson υπό την προϋπόθεση ότι η μεταβολή του μήκους του ευθυγράμμου τμήματος CI είναι επαρκώς μικρή μεταξύ δύο διαδοχικών βημάτων της κινηματικής ανάλυσης. Προκειμένου η σύγκλιση της μεθόδου να είναι εξασφαλισμένη σε κάθε περίπτωση (numerical robustness), συστήνεται η εν λόγω μεταβολή μήκους να μην ξεπερνά τα 3 mm και η αρχικοποίηση των αγνώστων συντεταγμένων να γίνεται με τις αντίστοιχες τιμές τους από το αμέσως προηγούμενο βήμα.

Με την ίδια λογική, αξιοποιώντας τη μέθοδο των τριών σημείων μπορούν να υπολογιστούν οι άγνωστες συντεταγμένες όλων των σημείων ενδιαφέροντος του μηχανισμού, τα οποία μετατοπίζονται στο χώρο εξαιτίας της επιβαλλόμενης κινηματικής διέγερσης. Κατ' αυτόν τον τρόπο, η κινηματική ανάλυση ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργησης ανάγεται στη σειριακή επίλυση επτά μη γραμμικών συστημάτων τριών εξισώσεων με ισάριθμο πλήθος αγνώστων. Η αλληλουχία των υπολογισμών και τα απαιτούμενα δεδομένα για την κατάστρωση των εξισώσεων καθενός από αυτά τα συστήματα δίνονται συνοπτικά στο Σχήμα 3.14. Για τον προσδιορισμό της θέσης του τροχού αρκεί η πραγματοποίηση των υπολογισμών όσον αφορά τα σημεία  $C'$ ,  $D'$ ,  $G'$ ,  $H'$  και  $P'$ . Ωστόσο, για τον προσδιορισμό του προσανατολισμού του τροχού απαιτείται επιπλέον ο υπολογισμός των συντεταγμένων των σημείων  $K'$  και  $L'$ , τα οποία βρίσκονται επί του άξονα κύλισης, στο κεντρικό και στο εξωτερικό τμήμα του τροχού αντίστοιχα (Σχήμα 3.13).



**Σχήμα 3.13: Προσδιορισμός μεταβολής της γωνίας κλίσης και σύγκλισης κατά την κατακόρυφη μετατόπιση του τροχού [4]**



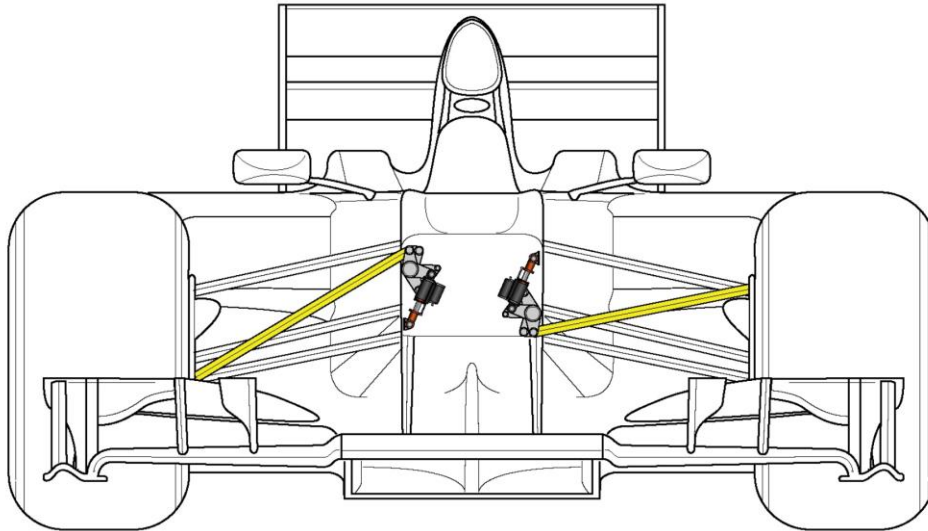
Σχήμα 3.14: Σύνοψη αλληλουχίας υπολογισμών για την κινηματική ανάλυση μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργειας [4]

Τα δεδομένα που απαιτούνται για την κινηματική ανάλυση ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με τη μέθοδο των τριών σημείων είναι οι συντεταγμένες όλων των σημείων που φαίνονται στο Σχήμα 3.11, στην αρχική θέση του μηχανισμού. Με βάση τις εν λόγω συντεταγμένες υπολογίζονται εφάπαξ οι αποστάσεις μεταξύ όλων των σημείων που ανήκουν στο ίδιο σώμα, αφού αυτές διατηρούνται σταθερές λόγω της παραδοχής απολύτως στερεών σωμάτων κατά τη διεξαγωγή οποιασδήποτε κινηματικής ανάλυσης. Διευκρινίζεται ότι ο αποσβεστήρας αποτελείται από δύο διακριτά σώματα μεταξύ των οποίων μεσολαβεί ένας κυλινδρικός σύνδεσμος (cylindrical joint) γι' αυτό και διατηρεί τη δυνατότητα μεταβολής του μήκους του, ενώ σημειώνεται επίσης ότι λαμβάνοντας ως δεδομένες τις συντεταγμένες του σημείου J, η πραγματοποιηθείσα ανάλυση γίνεται υπό σταθερό πλάτος κινηματικής διέγερσης από το σύστημα διεύθυνσης (Παράγραφος 3.3.2.2).

Εκτός από τα ανωτέρω αριθμητικά δεδομένα, για την κινηματική ανάλυση ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί η ακριβής τοπολογία αυτού. Πιο συγκεκριμένα, η αλληλουχία βημάτων υπολογισμού που δίνεται στο Σχήμα 3.14 αφορά μηχανισμούς ανάρτησης διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργησης, στους οποίους ο αποσβεστήρας εδράζεται στον ανώτερο βραχίονα ελέγχου. Όταν όμως η έδραση του αποσβεστήρα γίνεται στον κατώτερο βραχίονα ελέγχου, η αλληλουχία κατάστρωσης και επίλυσης των μη γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν έπειτα από την εφαρμογή της μεθόδου των τριών σημείων, είναι ελαφρώς διαφοροποιημένη. Σε αυτήν την περίπτωση πρώτα πρέπει να υπολογιστεί η θέση του σημείου G' με βάση τις συντεταγμένες των σημείων E, F, C' και στη συνέχεια η θέση του σημείου D' με βάση τις συντεταγμένες των σημείων A, B, G'.

Στα περισσότερα οχήματα δρόμου που φέρουν μηχανισμούς ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, η επενέργηση επί των στοιχείων δυσκαμψίας και απόσβεσης γίνεται άμεσα (Σχήμα 3.11). Παρόλα αυτά, υπάρχουν περιπτώσεις οχημάτων, κατά κανόνα υψηλών επιδόσεων, στα οποία χρησιμοποιούνται πιο σύνθετοι μηχανισμοί επενέργησης προκειμένου για τη μείωση των μη ανηρημένων μαζών και των αεροδυναμικών αντιστάσεων. Τα εν λόγω συστήματα αποτελούνται από μια ράβδο ώθησης (pushrod actuation system) ή έλξης (pullrod actuation system) που συνδέεται μέσω σφαιρικών εδράνων με έναν από τους βραχίονες ελέγχου και με ένα μοχλικό, το οποίο με τη σειρά του συνδέεται στο πλαίσιο μέσω ενός εδράνου ολίσθησης. Επί του μοχλικού συνδέονται επίσης τα στοιχεία που είναι υπεύθυνα για τα χαρακτηριστικά δυσκαμψίας και απόσβεσης του συστήματος ανάρτησης μέσω σφαιρικών εδράνων, ενώ το εναπομείναν άκρο αυτών στην πιο απλή περίπτωση συνδέεται με τον ίδιο τρόπο στο πλαίσιο. Αξίζει να σημειωθεί επιπλέον ότι οι ανωτέρω μηχανισμοί επενέργησης ενδείκνυνται για χρήση αντιστρεπτικής δοκού σχήματος T, σε αντίθεση με τα συστήματα ανάρτησης διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργησης στα οποία η ενσωμάτωση αντιστρεπτικής δοκού τέτοιου τύπου είναι κατά κανόνα αδύνατη. Στο Σχήμα 3.15 φαίνεται ο απλούστερος τρόπος υλοποίησης μηχανισμών ανάρτησης με ράβδο ώθησης και έλξης, χωρίς αντιστρεπτική δοκό.

Ο τρόπος λειτουργίας ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με σύστημα επενέργησης ράβδου ώθησης (αντίστοιχα έλξης) είναι προφανής: Η κατακόρυφη μετατόπιση του τροχού προς τα πάνω, εισάγει θλιπτικό (αντίστοιχα εφελκυστικό) φορτίο στη ράβδο ώθησης (αντίστοιχα έλξης), με αποτέλεσμα την ανάπτυξη ροπής γύρω από τον άξονα περιστροφής του μοχλικού. Στη μόνιμη κατάσταση, η ροπή αυτή αντισταθμίζεται από τα φορτία που αναπτύσσονται εξαιτίας της μεταβολής μήκους που υφίστανται τα στοιχεία δυσκαμψίας της ανάρτησης.

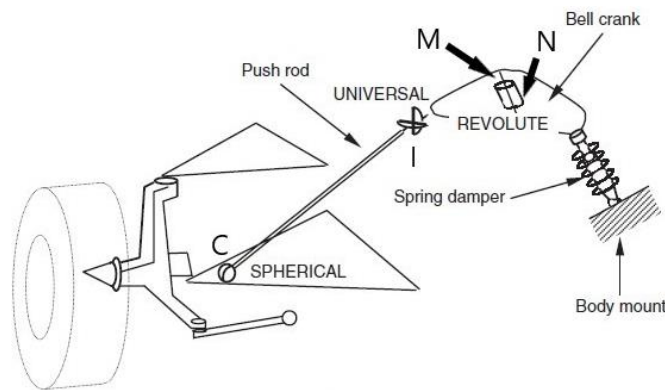


**Σχήμα 3.15: Σύστημα επενέργησης μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με ράβδο ώθησης και έλξης [52]**

Οι ράβδοι ώθησης και έλξης φέρουν στα άκρα τους σφαιρικά έδρανα μέσω των οποίων συνδέονται στον ανώτερο ή κατώτερο βραχίονα ελέγχου και στο μοχλικό του συστήματος επενέργησης. Ωστόσο, στο πλαίσιο της κινηματικής ανάλυσης η μοντελοποίηση των εν λόγω συνδέσεων με σφαιρικούς συνδέσμους δε δεσμεύει το βαθμό ελευθερίας που σχετίζεται με τη στροφή των ράβδων επενέργησης γύρω από τον άξονά τους, η οποία στην πραγματικότητα περιορίζεται σε μικρές γωνίες εξαιτίας των αναπτυσσόμενων δυνάμεων τριβής και της γενικότερης διαμόρφωσης των σφαιρικών εδράνων (κοχλιοσυνδέσεις). Προκειμένου για τη δέσμευση του εν λόγω βαθμού ελευθερίας κατά την κινηματική ανάλυση ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με ράβδο επενέργησης, απαιτείται η αντικατάσταση του ενός από τους δύο σφαιρικούς συνδέσμους με μια ελεύθερη άρθρωση (universal joint) όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.16. Αναφέρεται επίσης για λόγους πληρότητας, ότι η αντικατάσταση ορισμένων σφαιρικών συνδέσμων από ελεύθερες αρθρώσεις αποτελεί συνήθη πρακτική κατά τη μοντελοποίηση μηχανισμών κάνοντας χρήση λογισμικών MBS, ούτως ώστε να μην λαμβάνονται υπόψιν στις πραγματοποιούμενες αναλύσεις, όσοι βαθμοί ελευθερίας δεν επηρεάζουν την δυναμική και κινηματική συμπεριφορά του εκάστοτε μελετώμενου συστήματος πολλαπλών σωμάτων [4].



Όπως και στην παραλλαγή άμεσης επενέργησης, έτσι και σε μηχανισμούς ανάρτησης που φέρουν ράβδους ώθησης ή έλξης, η κατακόρυφη μετατόπιση του τροχού ισοδυναμεί με μεταβολή του μήκους του συνδυασμού ελατηρίου-αποσβεστήρα και αντίστροφα. Παρόλα αυτά, στην περίπτωση του συστήματος ανάρτησης με ράβδους επενέργησης είναι προτιμότερη η επιλογή της γωνίας στροφής του μοχλικού γύρω από τον άξονά του ως μεταβλητή εισόδου της κινηματικής ανάλυσης, αφού κατ' αυτόν τον τρόπο δεν απαιτείται η γνώση των σημείων έδρασης του ανωτέρω συνδυασμού, τόσο επί του πλαισίου όσο και επί του μοχλικού. Η περιστροφή του τελευταίου υλοποιείται μαθηματικά αξιοποιώντας και πάλι το μητρώο στροφής κατά Rodrigues (axis-angle representation) όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω μέσω των σχέσεων (3.23) και (3.24). Προκειμένου για τον προσδιορισμό του μοναδιαίου διανύσματος κατεύθυνσης του άξονα περιστροφής του μοχλικού του συστήματος επενέργησης, απαιτείται η γνώση των συντεταγμένων δύο σημείων, έστω M και N (Σχήμα 3.16), τα οποία ανήκουν σε αυτόν και μπορούν να προσδιοριστούν εύκολα βάσει του μοντέλου CAD του συστήματος ανάρτησης. Όσον αφορά τη γωνία περιστροφής του μοχλικού, αυτή εισάγεται σε μικρά διαδοχικά βήματα για λόγους που αναλύθηκαν εκτενώς παραπάνω, ενώ για την έδραση της ράβδου επενέργησης στον ανώτερο ή κατώτερο βραχίονα ελέγχου ακολουθείται η ίδια αλληλουχία υπολογισμών με αυτήν που δόθηκε για την κινηματική ανάλυση μηχανισμών ανάρτησης άμεσης επενέργησης.



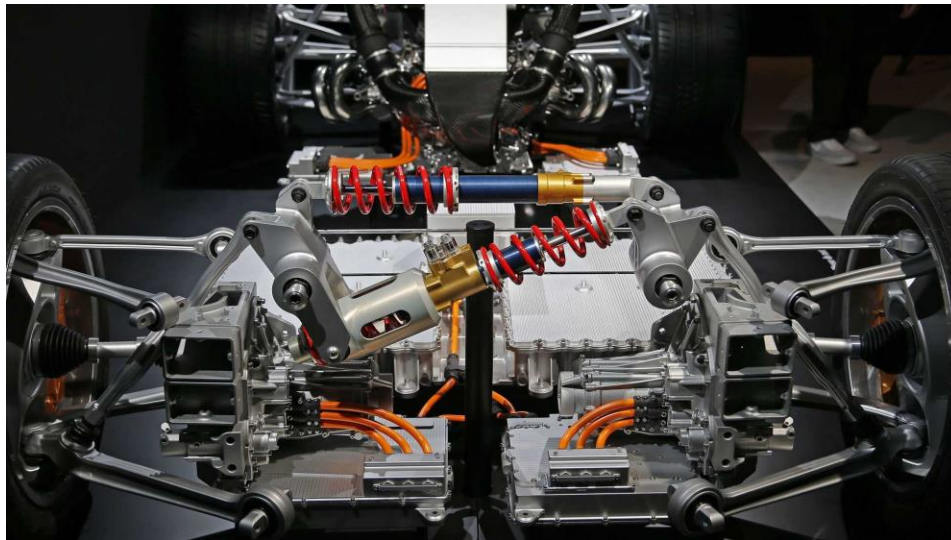
**Σχήμα 3.16: Μοντελοποίηση συστήματος επενέργησης με ράβδο ώθησης για την κινηματική ανάλυση μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [4]**

Συνοψίζοντας, η ανάλυση που λαμβάνει χώρα για την κινηματική ανάλυση των δύο αυτών παραλλαγών ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, διαφέρει μόνο ως προς την επιβολή της κινηματικής διέγερσης που είναι υπεύθυνη για την κατακόρυφη μετατόπιση του τροχού. Ειδικότερα, η θέση του σημείου I σε ένα μηχανισμό άμεσης επενέργησης είναι γνωστή εξ αρχής, το ίδιο και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος CI ως μεταβλητή εισόδου. Από την άλλη πλευρά, σε ένα σύστημα ανάρτησης με ράβδους επενέργησης η θέση του σημείου I υπολογίζεται ύστερα από στροφή του μοχλικού γύρω από τον άξονά του κατά μία γνωστή γωνία που λειτουργεί ως μεταβλητή εισόδου της ανάλυσης, ενώ το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος CI είναι γνωστό και δε μεταβάλλεται καθώς η ράβδος επενέργησης λαμβάνεται ως απολύτως στερεό σώμα.

Στις ακόλουθες παραγράφους αναλύονται ορισμένα ειδικά θέματα αναφορικά με την κινηματική ανάλυση μηχανισμών ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, τα οποία σχετίζονται με την εφαρμογή της μεθόδου των τριών σημείων.

### 3.3.2.1 Απόζευξη κατακόρυφης δυσκαμψίας και δυσκαμψίας κλυδωνισμού άξονα

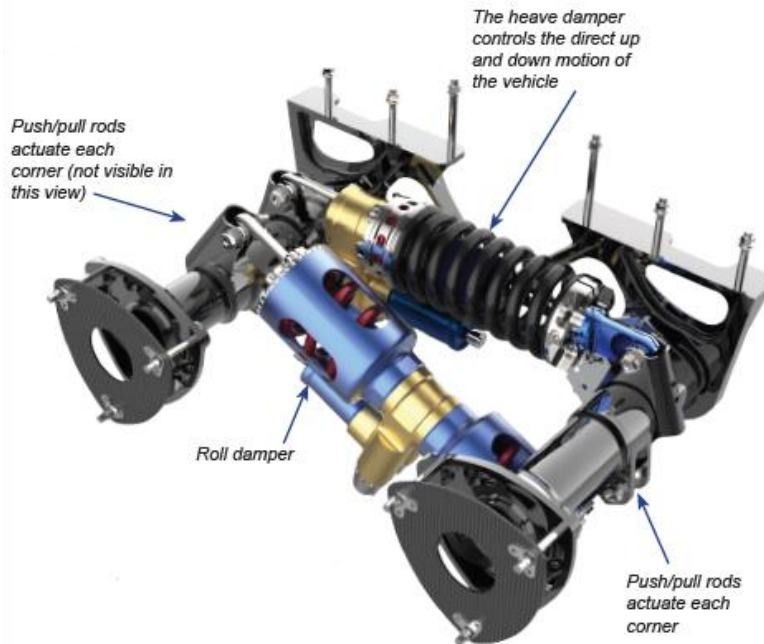
Σε οχήματα που προορίζονται για αγωνιστική χρήση επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση του διακένου μεταξύ αμαξώματος και οδοστρώματος (rideheight) με σκοπό τη μείωση του ύψους του κέντρου βάρους και των αεροδυναμικών αντιστάσεων. Ωστόσο, πρέπει να εξασφαλίζεται ότι δεν πρόκειται να επέλθει επαφή του αμαξώματος με το έδαφος όταν στο όχημα ασκούνται κατακόρυφα αεροδυναμικά φορτία (downforce) ή αδρανειακές ροπές πρόνευσης μεγάλου πλάτους. Καθίσταται λοιπόν επιβεβλημένη η χρήση υψηλών κατακόρυφων δυσκαμψιών στους άξονες ενός τέτοιου οχήματος, οι οποίες δεν είναι πάντοτε δυνατόν να επιτευχθούν χωρίς ταυτόχρονη αύξηση των αντίστοιχων δυσκαμψιών κλυδωνισμού, προκειμένου για συστήματα ανάρτησης που φέρουν συμβατικούς μηχανισμούς επενέργησης όπως αυτοί που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Ειδικότερα, στα εν λόγω συστήματα ανάρτησης, τα στοιχεία που είναι υπεύθυνα για την κατακόρυφη δυσκαμψία άξονα συνεισφέρουν αναπόφευκτα και στη δυσκαμψία κλυδωνισμού, η τελική τιμή της οποίας διαμορφώνεται από αυτά σε συνδυασμό με τις αντιστρεπτικές δοκούς, εάν υπάρχουν.



**Σχήμα 3.17: Υλοποίηση μηχανισμού επενέργησης για την απόζευξη της κατακόρυφης δυσκαμψίας και της δυσκαμψίας κλυδωνισμού άξονα – Mercedes AMG Project One [53]**

Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων οχημάτων υψηλών επιδόσεων που δέχονται σημαντικές αεροδυναμικές φορτίσεις, η δυσκαμψία κλυδωνισμού που οφείλεται αποκλειστικά στα χρησιμοποιούμενα στοιχεία κατακόρυφης δυσκαμψίας (corner springs) είναι μεγαλύτερη από τη συνολική επιθυμητή, όπως αυτή προκύπτει με γνώμονα τη μεγιστοποίηση των αναπτυσσόμενων δυνάμεων πρόσφυσης από τα ελαστικά επίσωτρα. Η

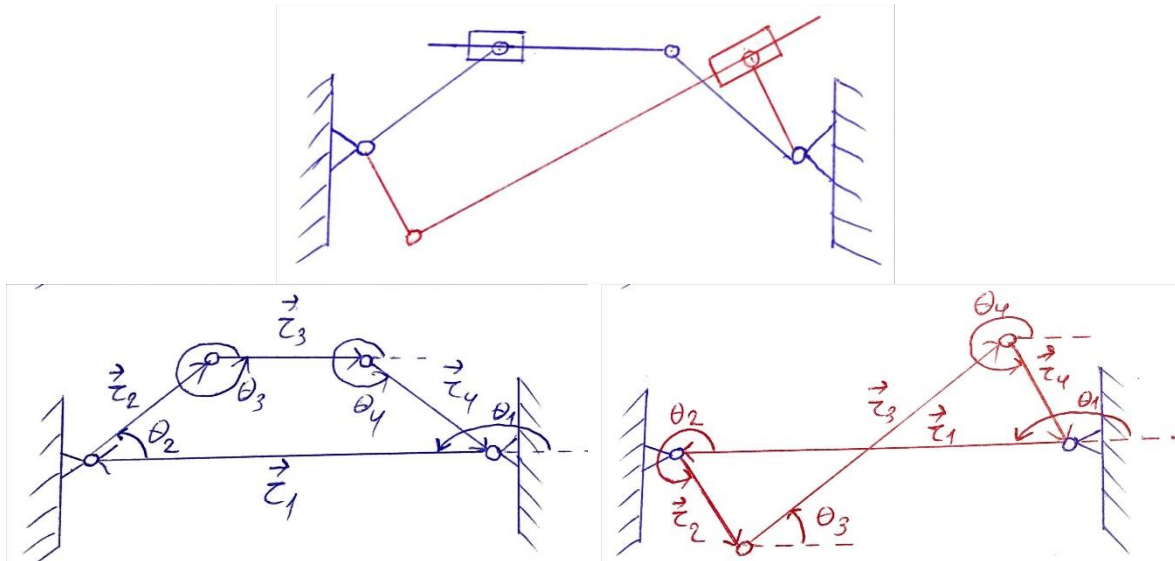
χρήση αντιστρεπτικής δοκού σε αυτές τις περιπτώσεις δεν έχει νόημα αφού κατ' αυτόν τον τρόπο η συνολική δυσκαμψία κλυδωνισμού άξονα θα αυξανόταν περαιτέρω. Σε ορισμένα οχήματα των οποίων οι επιδόσεις είναι συνυφασμένες με την ανάπτυξη κάθετων αεροδυναμικών φορτίων και η επαγόμενη περιπλοκότητα δεν αποτελεί περιοριστικό παράγοντα (π.χ. μονοθέσια αγωνιστικά οχήματα), το παραπάνω πρόβλημα εξαλείφεται κάνοντας χρήση σύνθετων μηχανισμών επενέργησης (Σχήμα 3.17 και Σχήμα 3.18). Οι εν λόγω μηχανισμοί δίνουν τη δυνατότητα πλήρως ανεξάρτητης ρύθμισης της κατακόρυφης δυσκαμψίας και της δυσκαμψίας κλυδωνισμού άξονα, ενώ το ίδιο ισχύει και όσον αφορά τα χαρακτηριστικά απόσβεσης του τελευταίου. Η κάτωθι εικονιζόμενη διάταξη πλεονεκτεί σε σχέση με άλλες διατάξεις που χρησιμοποιούνται για τον ίδιο σκοπό (π.χ. συστήματα ανάρτησης τύπου “third spring” – Σχήμα 2.45α) ως προς την κατασκευαστική απλότητα και το μειωμένο βάρος του συστήματος επενέργησης.



**Σχήμα 3.18: Υλοποίηση μηχανισμού επενέργησης για την απόζευξη της κατακόρυφης δυσκαμψίας και της δυσκαμψίας κλυδωνισμού άξονα – Multimatic Inc. [54]**

Ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται η απόζευξη των χαρακτηριστικών δυσκαμψίας και απόσβεσης που σχετίζονται με την κατακόρυφη μετατόπιση και τον κλυδωνισμό της ανηρτημένης μάζας, γίνεται ευκολότερα αντιληπτός έπειτα από την ανάλυση της ανωτέρω διάταξης σε δύο μηχανισμούς τεσσάρων μελών, με είσοδο τις γωνίες στροφής των δύο μοχλικών γύρω από το σημείο έδρασης αυτών στο πλαίσιο και έξοδο το μήκος και τη γωνία προσανατολισμού του συνδυασμού ελατηρίου-αποσβεστήρα που αντιστοιχεί σε κάθε μηχανισμό. Οι σκελετικές και διανυσματικές αναπαραστάσεις των εν λόγω μηχανισμών δίνονται στο Σχήμα 3.19 με μεταβλητές εισόδου τις γωνίες  $\theta_2, \theta_4$  και μεταβλητές εξόδου τα μεγέθη  $r_3, \theta_3$ , όπου με  $r_i, i = 1, \dots, 4$  συμβολίζεται το μήκος του εκάστοτε μέλους του

μηχανισμού και με  $\theta_i, i = 1, \dots, 4$  η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ αυτού και της οριζόντιας διεύθυνσης.



**Σχήμα 3.19: Σκελετική και διανυσματική αναπαράσταση μηχανισμού επενέργειας για την απόζευξη των δυσκαμψιών κλυδωνισμού και πρόνευσης άξονα**

Η διανυσματική εξίσωση κλειστού βρόχου για τους παραπάνω μηχανισμούς είναι η εξής:

$$r_3 \begin{bmatrix} \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 \end{bmatrix} = -r_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix} - r_2 \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{bmatrix} - r_4 \begin{bmatrix} \cos \theta_4 \\ \sin \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

ενώ η γενική λύση του παραπάνω αλγεβρικού συστήματος εξισώσεων δίνεται από τις σχέσεις (3.44) και (3.46):

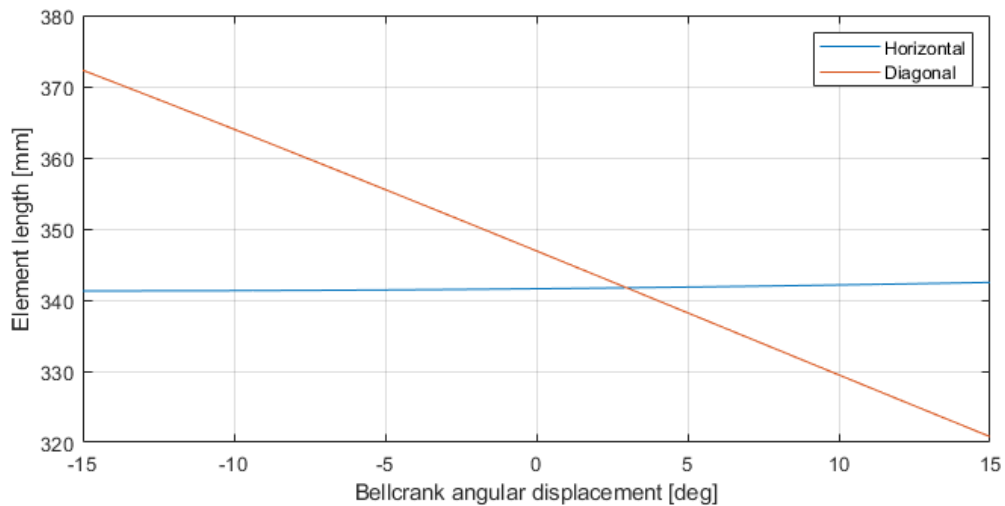
$$r_3 = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} \quad (3.44)$$

$$\theta_3^* = \arctan\left(\frac{b_y}{b_x}\right), \cos \theta_3^* = \frac{b_x}{r_3}, \sin \theta_3^* = \frac{b_y}{r_3} \quad (3.45)$$

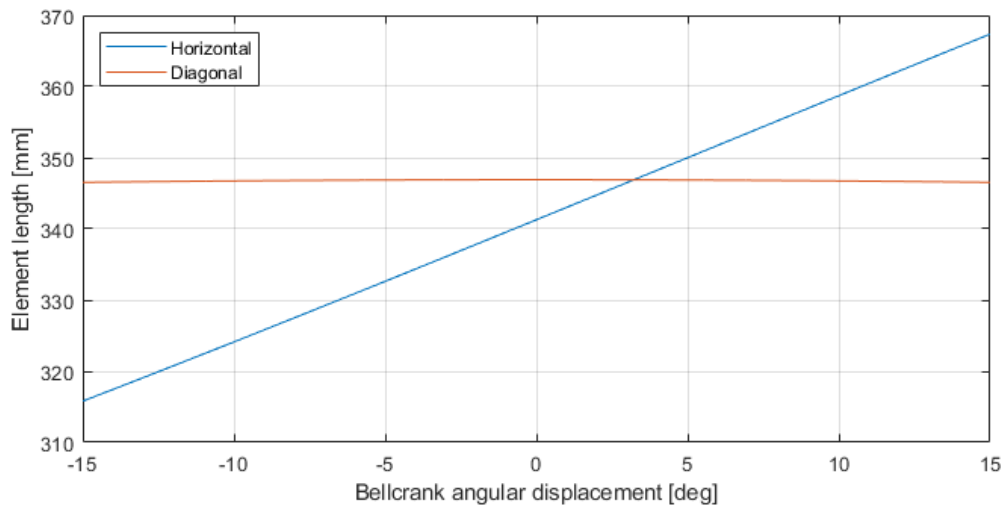
$$\theta_3 = \begin{cases} \theta_3^*, & \cos \theta_3^* > 0, \sin \theta_3^* > 0 \\ \pi - \theta_3^*, & \cos \theta_3^* < 0, \sin \theta_3^* > 0 \\ \pi + \theta_3^*, & \cos \theta_3^* < 0, \sin \theta_3^* < 0 \\ 2\pi - \theta_3^*, & \cos \theta_3^* > 0, \sin \theta_3^* < 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

Όταν οι τροχοί ενός άξονα μετατοπίζονται σε φάση, οι γωνίες  $\theta_2$  και  $\theta_4$  μεταβάλλονται με αντίθετη φορά αλλά κατά την ίδια ποσότητα. Αντίθετα, όταν οι τροχοί του ίδιου άξονα μετατοπίζονται εκτός φάσης, οι ανωτέρω γωνίες μεταβάλλονται και πάλι κατά την ίδια ποσότητα αλλά με κοινή φορά. Στα παρακάτω σχήματα δίνεται η μεταβολή της απόστασης

μεταξύ των σημείων έδρασης των δύο αποσβεστήρων του συστήματος (eye-to-eye length), όπως αυτή υπολογίστηκε για  $r_1 = 350 \text{ mm}$  και  $r_2 = r_4 = 50 \text{ mm}$  και για τους δύο μηχανισμούς τεσσάρων μελών, όταν οι γωνίες  $\theta_2$  και  $\theta_4$  μεταβάλλονται σε φάση (Σχήμα 3.20) και εκτός φάσης μεταξύ τους (Σχήμα 3.21). Με βάση τα αποτελέσματα της παραπάνω ανάλυσης προκύπτει ότι ο εν λόγω μηχανισμός επενέργησης στη γραμμική περιοχή λειτουργίας του, επιτυγχάνει πλήρη απόζευξη των μετατοπίσεων του διαγωνίου (roll element) από αυτές του οριζοντίου στοιχείου δυσκαμψίας/απόσβεσης (heave element) σε διεγέρσεις των τροχών τόσο σε φάση, όσο και εκτός φάσης.



**Σχήμα 3.20: Μεταβολή μήκους στοιχείων δυσκαμψίας-απόσβεσης κατά την περιστροφή των μοχλικών επενέργησης σε φάση**



**Σχήμα 3.21: Μεταβολή μήκους στοιχείων δυσκαμψίας-απόσβεσης κατά την περιστροφή των μοχλικών επενέργησης εκτός φάσης**



Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι το διαγώνιο στοιχείο δυσκαμψίας-απόσβεσης δε συμπιέζεται λόγω του βάρους του οχήματος όπως συμβαίνει με το οριζόντιο. Έτσι, όταν τα μοχλικά επενέργησης περιστρέφονται σε φάση, αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα ανάλογα με την υλοποίηση του εκάστοτε μηχανισμού, το στοιχείο αυτό καλείται να παραλάβει εφελκυστικά φορτία, γεγονός αδύνατο στην περίπτωση που χρησιμοποιείται θλιπτικό ελατήριο και συμβατικός αποσβεστήρας. Για το λόγο αυτό, όσον αφορά την κατακόρυφη κίνηση των μηχανισμών ανάρτησης ενός άξονα λόγω κλυδωνισμού της ανηρτημένης μάζας, συχνά χρησιμοποιούνται ειδικά διαμορφωμένοι αποσβεστήρες (roll dampers – Σχήμα 3.22) οι οποίοι φέρουν δύο ανεξάρτητα θλιπτικά ελατήρια εντός κοίλων κυλίνδρων που σε συνδυασμό με εσωτερικούς συνδέσμους μετατρέπουν τα εφελκυστικά φορτία σε θλιπτικά. Η λύση αυτή οδηγεί σε χαμηλό βάρος του συστήματος επενέργησης, ωστόσο παρουσιάζει αυξημένη κατασκευαστική περιπλοκότητα και υψηλό κόστος.



**Σχήμα 3.22: Στοιχεία δυσκαμψίας και απόσβεσης κλυδωνισμού και κατακόρυφης μετατόπισης – Multimatic Inc. [54]**

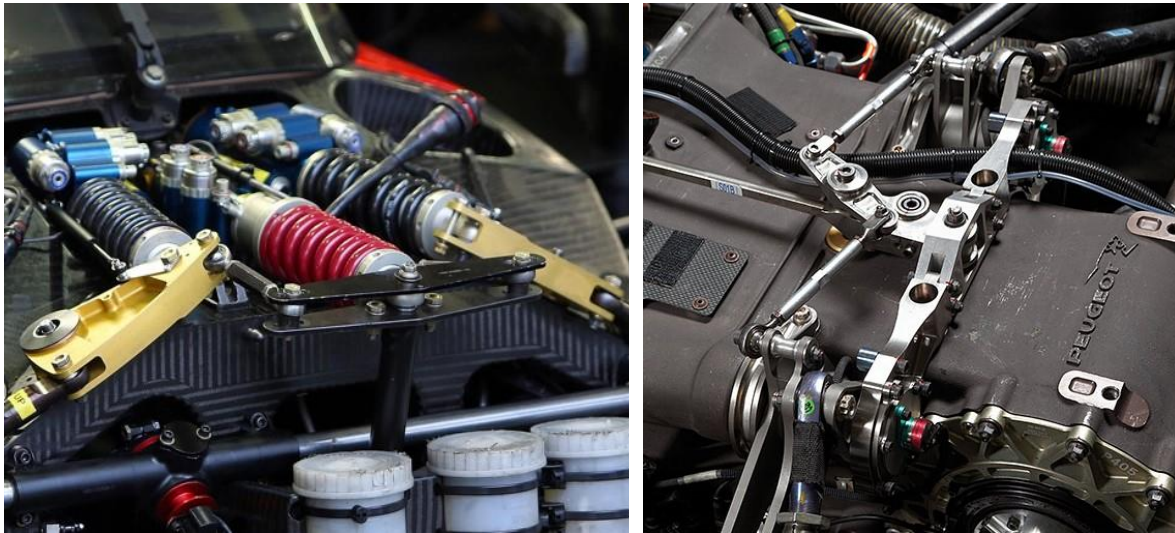
Προκειμένου να χρησιμοποιηθεί ένα τυπικό θλιπτικό ελατήριο σε συνδυασμό με ένα συμβατικό αποσβεστήρα για την υλοποίηση ενός τέτοιου αποσυζευγμένου συστήματος επενέργησης, αξιοποιείται η διάταξη που φαίνεται στο Σχήμα 3.23, βασικό μειονέκτημα της οποίας αποτελεί η ανάπτυξη μη αμελητέων δυνάμεων τριβής και το αυξημένο βάρος σε σχέση με την προηγούμενη εναλλακτική λύση.



**Σχήμα 3.23: Υλοποίηση μηχανισμού επενέργησης για την απόζευξη της κατακόρυφης δυσκαμψίας και της δυσκαμψίας κλυδωνισμού άξονα – HAWKS Racing Formula SAE**



Η απόζευξη των χαρακτηριστικών δυσκαμψίας και απόσβεσης που σχετίζονται με την κατακόρυφη μετατόπιση και τον κλυδωνισμό της ανηρτημένης μάζας μπορεί να επιτευχθεί από πολλούς και διαφορετικούς μηχανισμούς επενέργειας (ενδεικτικά, Σχήμα 3.24). Σχεδόν σε κάθε περίπτωση όμως, χρησιμοποιούνται ράβδοι ώθησης ή έλξης σε συνδυασμό με δύο μοχλικά εδραζόμενα στο πλαίσιο, η γωνία στροφής των οποίων αποτελεί την κινηματική είσοδο του εκάστοτε μηχανισμού επενέργειας. Επομένως, εάν για την κινηματική ανάλυση ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με τη μέθοδο των τριών σημείων χρησιμοποιείται ως κινηματική διέγερση η ανωτέρω γωνία (και όχι το μήκος κάποιου στοιχείου δυσκαμψίας-απόσβεσης), καθίσταται δυνατή η πλήρως ανεξάρτητη μελέτη του πρώτου από τον αντίστοιχο μηχανισμό επενέργειας.



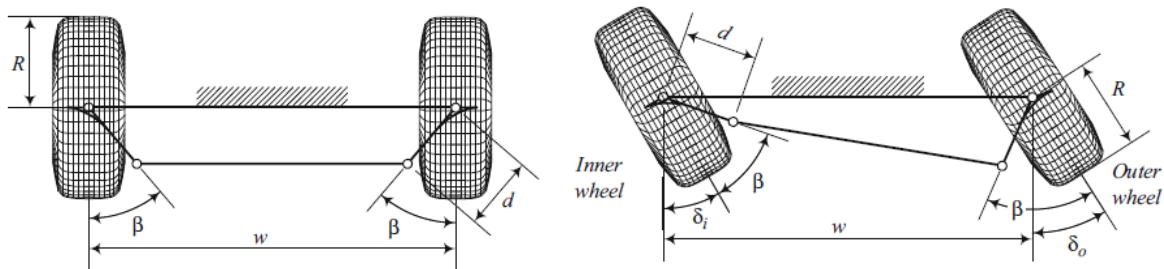
**Σχήμα 3.24: Εναλλακτικές υλοποιήσεις μηχανισμών επενέργειας για την απόζευξη της κατακόρυφης δυσκαμψίας και της δυσκαμψίας κλυδωνισμού άξονα [55], [56]**

### 3.3.2.2 Κινηματική ανάλυση τραπεζοειδών μηχανισμών διεύθυνσης

Στην συντριπτική πλειοψηφία των σύγχρονων οχημάτων, ανεξαρτήτως της χρήσης για την οποία αυτά προορίζονται, χρησιμοποιούνται οι λεγόμενοι τραπεζοειδείς μηχανισμοί για την υλοποίηση του συστήματος διεύθυνσης (Σχήμα 3.25). Ουσιαστικά πρόκειται για τρισδιάστατους μηχανισμούς τεσσάρων μελών, με την κινηματική διέγερση να εισάγεται μέσω της εγκάρσιας μετατόπισης των σημείων έδρασης των ράβδων διεύθυνσης επί του κανόνα της κρεμαγιέρας (steering rack). Ο τελευταίος έχει έναν εγκάρσιο μεταφορικό βαθμό ελευθερίας ως προς το πλαίσιο και συνεργάζεται με έναν οδοντωτό τροχό που εδράζεται επί της κολώνας του συστήματος διεύθυνσης (steering column).

Όπως αναλύθηκε στην Υποενότητα 2.2.3, ο άξονας διεύθυνσης του τροχού σε ένα σύστημα ανάρτησης διπλών ψαλιδιών καθορίζεται αποκλειστικά από τις θέσεις των σημείων έδρασης των βραχιόνων ελέγχου επί του φορέα του τροχού, ενώ το στοιχείο δυσκαμψίας-απόσβεσης (όταν πρόκειται για σύστημα ανάρτησης άμεσης επενέργειας) ή η ράβδος

επενέργησης συνήθως εδράζεται επί ενός εκ των δύο βραχιόνων ελέγχου. Συνεπώς, οι κινηματικές διεγέρσεις που προέρχονται από το σύστημα διεύθυνσης δεν έχουν καμία επίδραση στη γεωμετρία του μηχανισμού ανάρτησης, με εξαίρεση τη στροφή του φορέα του τροχού γύρω από τον άξονα διεύθυνσης. Σε αυτήν την περίπτωση μπορεί και πάλι να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των τριών σημείων, αυτή τη φορά για την κινηματική ανάλυση του τραπεζοειδούς μηχανισμού διεύθυνσης.



**Σχήμα 3.25: Διδιάστατη απεικόνιση τραπεζοειδούς μηχανισμού διεύθυνσης [1]**

Πιο συγκεκριμένα, λαμβάνοντας ως δεδομένο εισόδο της κινηματικής ανάλυσης τις συντεταγμένες του σημείου J (Σχήμα 3.11β), όπως αυτές προκύπτουν λόγω εγκάρσιας μετατόπισης του κανόνα και γνωρίζοντας εκ των προτέρων τις συντεταγμένες των σημείων D και G, προκύπτει το ακόλουθο μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων μέσω του οποίου υπολογίζονται οι άγνωστες συντεταγμένες του σημείου H' :

$$\begin{cases} |R_{H'D}|^2 = (H'_x - D_x)^2 + (H'_y - D_y)^2 + (H'_z - D_z)^2 \\ |R_{H'G}|^2 = (H'_x - G_x)^2 + (H'_y - G_y)^2 + (H'_z - G_z)^2 \\ |R_{H'J}|^2 = (H'_x - J_x)^2 + (H'_y - J_y)^2 + (H'_z - J_z)^2 \end{cases} \quad (3.47)$$

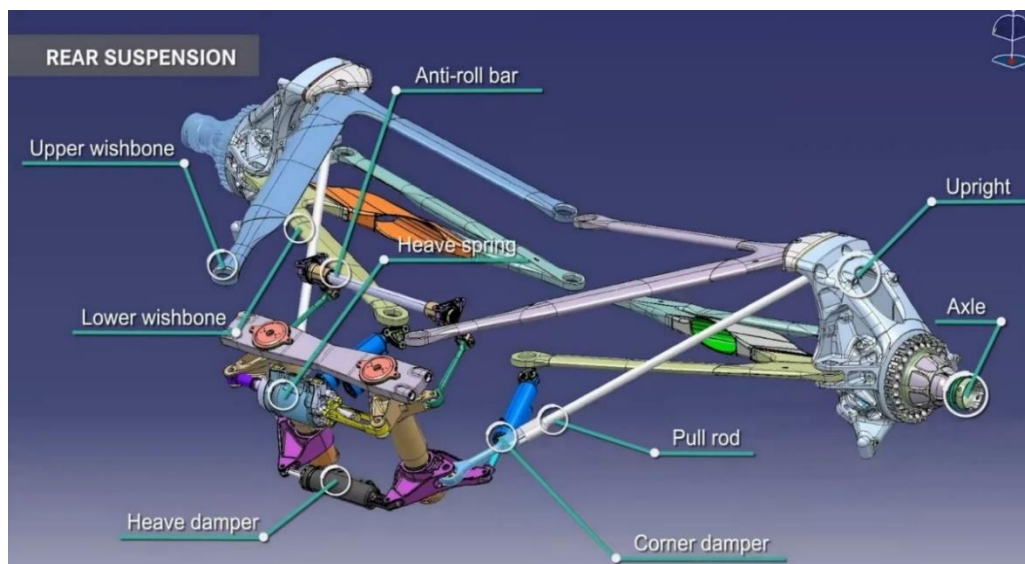
Διευκρινίζεται ότι τα σημεία D και G δε μετατοπίζονται κατά την επιβολή κινηματικών διεγέρσεων από το σύστημα διεύθυνσης, ενώ οι αποστάσεις  $|R_{H'D}|, |R_{H'G}|, |R_{H'J}|$  υπολογίζονται εφάπαξ στην αρχή της κινηματικής ανάλυσης, αφού ο φορέας του τροχού και η ράβδος διεύθυνσης λαμβάνονται ως απολύτως στερεά σώματα. Όσον αφορά τον υπολογισμό των συντεταγμένων των σημείων P', K' και L' ακολουθείται ακριβώς η ίδια διαδικασία με αυτήν που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.14.

Όταν οι τροχοί του διευθυντηρίου άξονα ενός κινούμενου οχήματος υφίστανται διεγέρσεις από το σύστημα διεύθυνσης, μεταξύ ελαστικών επισώτρων και οδοστρώματος αναπτύσσονται δυνάμεις πρόσφυσης οι οποίες είναι υπεύθυνες για την άσκηση πλευρικών επιταχύνσεων στο κέντρο βάρους της ανηρημένης μάζας. Οι τελευταίες εισάγουν εγκάρσιες μεταφορές φορτίου στους άξονες του οχήματος, με αποτέλεσμα την έκταση των μηχανισμών ανάρτησης των εσωτερικών τροχών και τη συμπίεση των μηχανισμών ανάρτησης των εξωτερικών τροχών (Παράγραφος 2.3.2.3, ελαστική συνιστώσα εγκάρσιας μεταφοράς φορτίου). Επομένως, η κινηματική ανάλυση συστημάτων διεύθυνσης πρέπει να

πραγματοποιείται όχι μόνο για μηδενική κατακόρυφη μετατόπιση των τροχών, αλλά και για ένα ικανοποιητικό πλήθος άλλων θέσεων που αντιστοιχούν σε ρεαλιστικά σενάρια κατακόρυφων μετατοπίσεων αυτών κατά την πλευρική επιτάχυνση του οχήματος. Προκειμένου για την κινηματική ανάλυση του συστήματος διεύθυνσης σε τέτοιες περιπτώσεις, προηγείται η άσκηση κατάλληλης κινηματικής διέγερσης ούτως ώστε ο τροχός να μεταβεί στην επιθυμητή κατακόρυφη θέση. Έπειτα, γνωρίζοντας τις νέες συντεταγμένες των σημείων D και G ως αποτέλεσμα της προαναφερθείσας μετάβασης, μπορεί να πραγματοποιηθεί κινηματική ανάλυση του συστήματος διεύθυνσης με τον τρόπο που περιγράφηκε προηγουμένως αξιοποιώντας το σύστημα εξισώσεων (3.47).

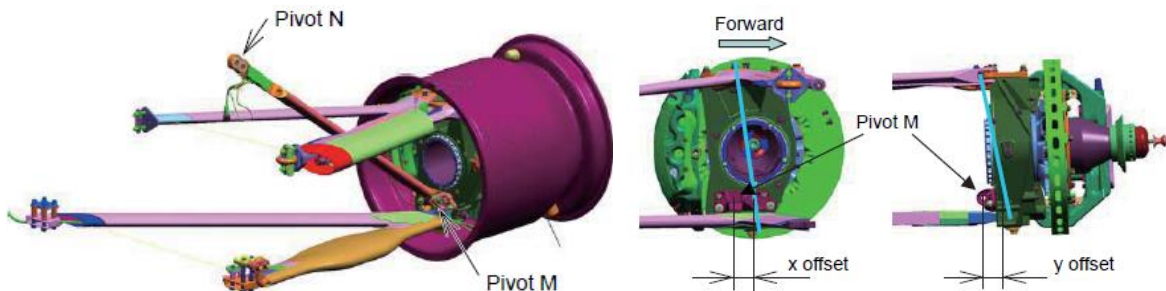
### 3.3.2.3 Σύζευξη μηχανισμών ανάρτησης και διεύθυνσης

Υπάρχουν συστήματα ανάρτησης στα οποία το στοιχείο δυσκαμψίας-απόσβεσης (όταν πρόκειται για σύστημα ανάρτησης άμεσης επενέργησης) ή η ράβδος επενέργησης εδράζεται επί του φορέα του τροχού (Σχήμα 3.26), αντί επί ενός εκ των βραχιόνων ελέγχου. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι μέθοδοι που δόθηκαν παραπάνω για την κινηματική ανάλυση συστήματος ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με τραπεζοειδή μηχανισμό διεύθυνσης δε μπορούν να εφαρμοστούν. Πιο συγκεκριμένα, οι αποστάσεις των σημείων A και B (αντίστοιχα E και F) ως προς το σημείο C δεν είναι σταθερές, αφού το τελευταίο δεν ανήκει πλέον στον ανώτερο (αντίστοιχα κατώτερο) βραχίονα ελέγχου, αλλά στο φορέα του τροχού. Μάλιστα, όταν το σημείο C δε βρίσκεται επί του άξονα διεύθυνσης του τροχού (Σχήμα 3.27), τέτοιου είδους υλοποιήσεις επιτυγχάνουν κινηματική σύζευξη των μηχανισμών ανάρτησης και διεύθυνσης, όταν η γωνία στροφής των τροχών είναι μη μηδενική. Μέσω κατάλληλου σχεδιασμού των τελευταίων μηχανισμών, καθίσταται δυνατή η επίτευξη αμεσότερης απόκρισης του οχήματος κατά την είσοδό του (turn-in) σε καμπές χαμηλής ταχύτητας (εισαγωγή χαρακτηριστικών υπερστροφής) [57].



Σχήμα 3.26: Σύστημα ανάρτησης διπλών ψαλιδιών – Mercedes AMG F1 [58]

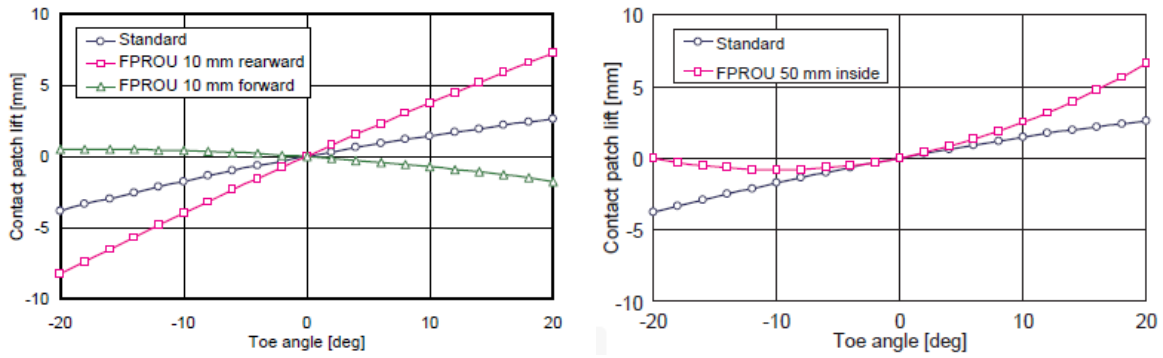
Προκειμένου να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται η ανωτέρω κινηματική σύζευξη, χρησιμοποιείται ως παράδειγμα ο μηχανισμός ανάρτησης που φαίνεται στο Σχήμα 3.27. Έστω ένα πλευρικά επιταχυνόμενο όχημα το οποίο βρίσκεται στη μόνιμη κατάσταση (quasi-steady state cornering) και φέρει τον εν λόγω μηχανισμό ανάρτησης στον εσωτερικό τροχό του εμπρόσθιου άξονα. Το σημείο έδρασης της ράβδου ώθησης στο μοχλικό επενέργησης (pivot N) μπορεί να θεωρηθεί ακίνητο, υπό την παραδοχή ότι αυτό δε μετατοπίζεται κατά την εισαγωγή γωνίας στροφής στους τροχούς. Σημειώνεται εδώ ότι η παραδοχή αυτή δεν απέχει πολύ από την πραγματικότητα, ειδικά όσον αφορά οχήματα με πολύ υψηλές δυσκαμψίες άξονα. Συνεπώς, το σημείο έδρασης της ράβδου ώθησης επί του φορέα του τροχού (pivot M) κινείται επί μιας σφαίρας με κέντρο το σημείο N και ακτίνα ίση με το μήκος της ανωτέρω ράβδου. Εάν το σημείο M βρίσκεται πίσω από τον άξονα διεύθυνσης κατά τη διαμήκη κατεύθυνση (Σχήμα 3.27), τότε εξαιτίας της στροφής του τροχού γύρω από τον τελευταίο, το σημείο αυτό μετατοπίζεται προς το εσωτερικό του οχήματος. Εξαιτίας του προσανατολισμού της ράβδου ώθησης και της κίνησης του σημείου M πάνω στην προαναφερθείσα σφαιρική επιφάνεια, η ανωτέρω εγκάρσια μετατόπιση συνοδεύεται επίσης από μετατόπιση κατά την κατακόρυφη διεύθυνση και συγκεκριμένα προς τα κάτω. Όσον αφορά τον εξωτερικό τροχό, με παρόμοιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι η κατακόρυφη μετατόπιση αυτού λόγω εισαγωγής γωνίας στροφής στους τροχούς λαμβάνει χώρα προς τα άνω.



**Σχήμα 3.27: Έδραση ράβδου ώθησης επί του φορέα του τροχού και εκτός του άξονα διεύθυνσης – BAR Honda F1 [57]**

Στο Σχήμα 3.28 απεικονίζεται η κατακόρυφη μετατόπιση του σημείου επαφής ελαστικού επισώτρου-οδοστρώματος (contact patch) ως προς το πλαίσιο του οχήματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του τροχού. Η σκούρα μπλε καμπύλη (“standard”) αντιστοιχεί σε ένα σύστημα ανάρτησης ίδιο με αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 3.27, με μοναδική διαφορά ότι η ράβδος ώθησης εδράζεται στον κατώτερο βραχίονα ελέγχου. Είναι εμφανές ότι ακόμα και σε ένα τέτοιο σύστημα ανάρτησης, η κατακόρυφη μετατόπιση του σημείου επαφής ελαστικού επισώτρου-οδοστρώματος ως προς το πλαίσιο του οχήματος όταν οι τροχοί διεγείρονται από το σύστημα διεύθυνσης, είναι μη μηδενική. Το γεγονός αυτό οφείλεται στη χρήση θετικής γωνίας caster, λόγω της οποίας λαμβάνει χώρα διαγώνια μεταφορά φορτίου. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την τελευταία ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην πηγή [10].





**Σχήμα 3.28: Μετατόπιση του σημείου επαφής ελαστικού επισώτρου-οδοστρώματος ως προς το πλαίσιο συναρτήσεως της γωνίας στροφής τροχού – BAR Honda F1 [57]**

Για την κινηματική ανάλυση ενός τέτοιου μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών μπορεί να χρησιμοποιηθεί και πάλι η μέθοδος των τριών σημείων, αυτή τη φορά όμως για την κατάστρωση ενός ενιαίου μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων από την επίλυση του οποίου προκύπτουν οι 12 άγνωστες συντεταγμένες των σημείων  $C'$ ,  $D'$ ,  $G'$ ,  $H'$  στην εκάστοτε νέα θέση του μηχανισμού. Όλα τα παραπάνω σημεία ανήκουν στο φορέα του τροχού, επομένως οι αποστάσεις μεταξύ τους είναι γνωστές και σταθερές. Εκφράζοντας τις αποστάσεις καθενός από αυτά ως προς τα υπόλοιπα τρία σημεία συναρτήσεως των αγνώστων συντεταγμένων τους, προκύπτουν οι ακόλουθες  $4!/[2!(4-2)!] = 6$  μη γραμμικές σχέσεις (πλήθος συνδυασμών τεσσάρων σημείων ανά δύο):

$$\begin{aligned}
 |R_{G'D'}|^2 &= (G'_x - D'_x)^2 + (G'_y - D'_y)^2 + (G'_z - D'_z)^2 \\
 |R_{H'G'}|^2 &= (H'_x - G'_x)^2 + (H'_y - G'_y)^2 + (H'_z - G'_z)^2 \\
 |R_{H'C'}|^2 &= (H'_x - C'_x)^2 + (H'_y - C'_y)^2 + (H'_z - C'_z)^2 \\
 |R_{H'D'}|^2 &= (H'_x - D'_x)^2 + (H'_y - D'_y)^2 + (H'_z - D'_z)^2 \\
 |R_{D'C'}|^2 &= (D'_x - C'_x)^2 + (D'_y - C'_y)^2 + (D'_z - C'_z)^2 \\
 |R_{G'C'}|^2 &= (G'_x - C'_x)^2 + (G'_y - C'_y)^2 + (G'_z - C'_z)^2
 \end{aligned}
 \tag{3.48}$$

Επιπλέον, τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων AD, BD, EG, FG, CI, JH είναι γνωστά, έτσι με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν οι 6 μη γραμμικές εξισώσεις της σχέσης (3.49). Συνεπώς, για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων των σημείων  $C'$ ,  $D'$ ,  $G'$ ,  $H'$  στη νέα θέση του μηχανισμού απαιτείται η ταυτόχρονη επίλυση των 12 εξισώσεων των σχέσεων (3.48) και (3.49), ενώ ο υπολογισμός των συντεταγμένων των σημείων  $P'$ ,  $K'$  και  $L'$  γίνεται όπως και προηγουμένως μέσω ανεξάρτητης επίλυσης τριών μη γραμμικών συστημάτων με αγνώστους τις συντεταγμένες κάθε σημείου. Αρχικοποιώντας και πάλι τις άγνωστες μεταβλητές με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου βήματος της κινηματικής ανάλυσης και μεταβάλλοντας ελαφρώς το πλάτος διέγερσης μεταξύ δύο διαδοχικών βημάτων, καθίσταται δυνατή η αριθμητική επίλυση όλων των ανωτέρω συστημάτων εξισώσεων με

τη μέθοδο Newton-Raphson. Τέλος, σημειώνεται ότι προκειμένου να επέλθει σύγκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας όσον αφορά το σύστημα εξισώσεων των σχέσεων (3.48) και (3.49), μπορεί να απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις συγκριτικά με προηγουμένως εξαιτίας του μεγαλύτερου πλήθους αγνώστων.

$$\begin{aligned}
 |R_{AD'}|^2 &= (A_x - D'_x)^2 + (A_y - D'_y)^2 + (A_z - D'_z)^2 \\
 |R_{BD'}|^2 &= (B_x - D'_x)^2 + (B_y - D'_y)^2 + (B_z - D'_z)^2 \\
 |R_{EG'}|^2 &= (E_x - G'_x)^2 + (E_y - G'_y)^2 + (E_z - G'_z)^2 \\
 |R_{FG'}|^2 &= (F_x - G'_x)^2 + (F_y - G'_y)^2 + (F_z - G'_z)^2 \\
 |R_{IC'}|^2 &= (I_x - C'_x)^2 + (I_y - C'_y)^2 + (I_z - C'_z)^2 \\
 |R_{JH'}|^2 &= (J_x - H'_x)^2 + (J_y - H'_y)^2 + (J_z - H'_z)^2
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

#### 3.3.2.4 Έδραση ράβδων συγκράτησης επί των βραχιόνων ελέγχου

Σε πολλούς μηχανισμούς ανάρτησης διπλών ψαλιδιών που προορίζονται για χρήση στο μη διευθυντήριο άξονα οχημάτων, η ράβδος συγκράτησης του τροχού δεν εδράζεται στο πλαίσιο αλλά επί ενός εκ των βραχιόνων ελέγχου όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.29. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του εύρους μεταβολής της γωνίας σύγκλισης κατά την κατακόρυφη μετατόπιση του τροχού (bump steer) και χρησιμοποιείται κατά κόρον σε οχήματα υψηλών επιδόσεων.

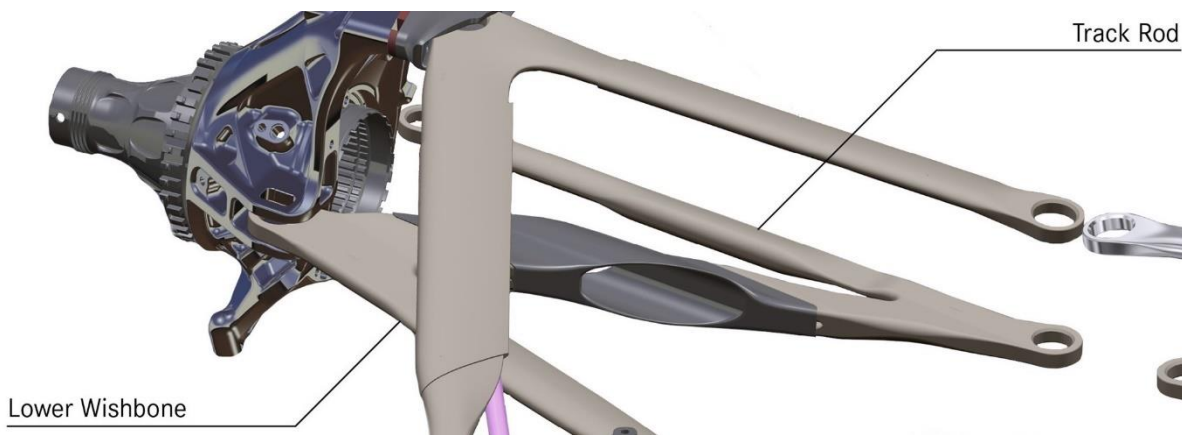


**Σχήμα 3.29: Έδραση ράβδου συγκράτησης τροχού επί του βραχίονα ελέγχου**

Μάλιστα, σε ορισμένες εφαρμογές η ράβδος συγκράτησης ενσωματώνεται πλήρως σε έναν εκ των δύο βραχιόνων ελέγχου (συνήθως στον κατώτερο προκειμένου για την επίτευξη χαμηλότερου κέντρου βάρους), ούτως ώστε να χρησιμοποιηθεί ένα λιγότερο σφαιρικό έδρανο για τη συναρμολόγηση του μηχανισμού ανάρτησης κάθε τροχού, με σκοπό τον περιορισμό του φαινομένου της συσσώρευσης ανοχών που αναφέρθηκε στην Υποενότητα



2.4.1. Στο Σχήμα 3.30 φαίνεται ο μηχανισμός ανάρτησης ενός τροχού του οπίσθιου άξονα ενός μονοθεσίου οχήματος Formula 1, όπου ο κατώτερος βραχίονας ελέγχου και η ράβδος συγκράτησης συνιστούν ένα ενιαίο τεμάχιο. Όσον αφορά τον κάτωθι εικονιζόμενο μηχανισμό ανάρτησης, αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι όλοι οι μηχανικοί σύνδεσμοι μεταξύ του πλαισίου και του φορέα του τροχού κείτονται επί δύο σχεδόν οριζοντίων επιπέδων, ώστε να μειωθεί η συνολική μετωπική επιφάνεια (frontal area) με απώτερο σκοπό τη μείωση της αεροδυναμικής οπισθέλκουσας δύναμης. Στην ίδια λογική, το ημιαξόνιο βρίσκεται και αυτό στο κατώτερο εκ των δύο επιπέδων και μάλιστα διέρχεται μέσα από κατάλληλη οπή που φέρει ο αντίστοιχος βραχίονας ελέγχου. Προφανώς τα παραπάνω σχόλια αφορούν αποκλειστικά οχήματα με ακάλυπτους τροχούς και μηχανισμούς ανάρτησης.



**Σχήμα 3.30: Υλοποίηση κατώτερου βραχίονα ελέγχου και ράβδου συγκράτησης τροχού ως ενιαίο τεμάχιο – Mercedes AMG F1 [59]**

Όσον αφορά την κινηματική ανάλυση τέτοιων μηχανισμών ανάρτησης, ο υπολογισμός των συντεταγμένων των σημείων  $C'$ ,  $D'$ ,  $G'$  γίνεται σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφεται στο Σχήμα 3.14. Ωστόσο, το σημείο  $J$  σε αυτήν την περίπτωση δεν ανήκει στο πλαίσιο αλλά σε κάποιον από τους βραχίονες ελέγχου, έστω στον κατώτερο. Επομένως, η νέα θέση του σημείου  $J'$  στο χώρο προσδιορίζεται μέσω της αριθμητικής επίλυσης του ακόλουθου μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων:

$$\begin{cases} |R_{EJ'}|^2 = (E_x - J'_x)^2 + (E_y - J'_y)^2 + (E_z - J'_z)^2 \\ |R_{FJ'}|^2 = (F_x - J'_x)^2 + (F_y - J'_y)^2 + (F_z - J'_z)^2 \\ |R_{G'J'}|^2 = (G'_x - J'_x)^2 + (G'_y - J'_y)^2 + (G'_z - J'_z)^2 \end{cases} \quad (3.50)$$

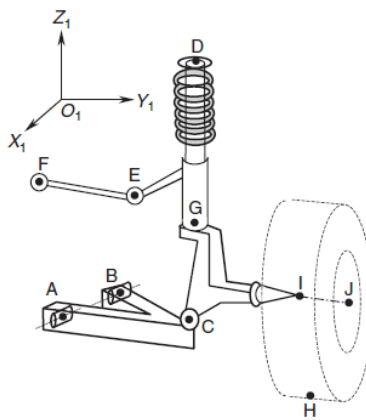
Αντίστοιχα, εάν το σημείο  $J$  κείται επί του ανώτερου βραχίονα ελέγχου, οι συντεταγμένες του υπολογίζονται με βάση τα σημεία  $A'$ ,  $B'$ ,  $D'$  και τις αποστάσεις του από αυτά. Γνωρίζοντας πλέον τις συντεταγμένες του σημείου  $J'$ , η κινηματική ανάλυση συνεχίζεται κανονικά σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν παραπάνω (Σχήμα 3.14).

### 3.3.3 Εφαρμογή σε άλλους μηχανισμούς ανάρτησης

Σε αντίθεση με τη μέθοδο των κλειστών διανυσματικών βρόχων, η μέθοδος των τριών σημείων μπορεί πολύ εύκολα να εφαρμοστεί προκειμένου για την κινηματική ανάλυση και άλλων μηχανισμών ανάρτησης.

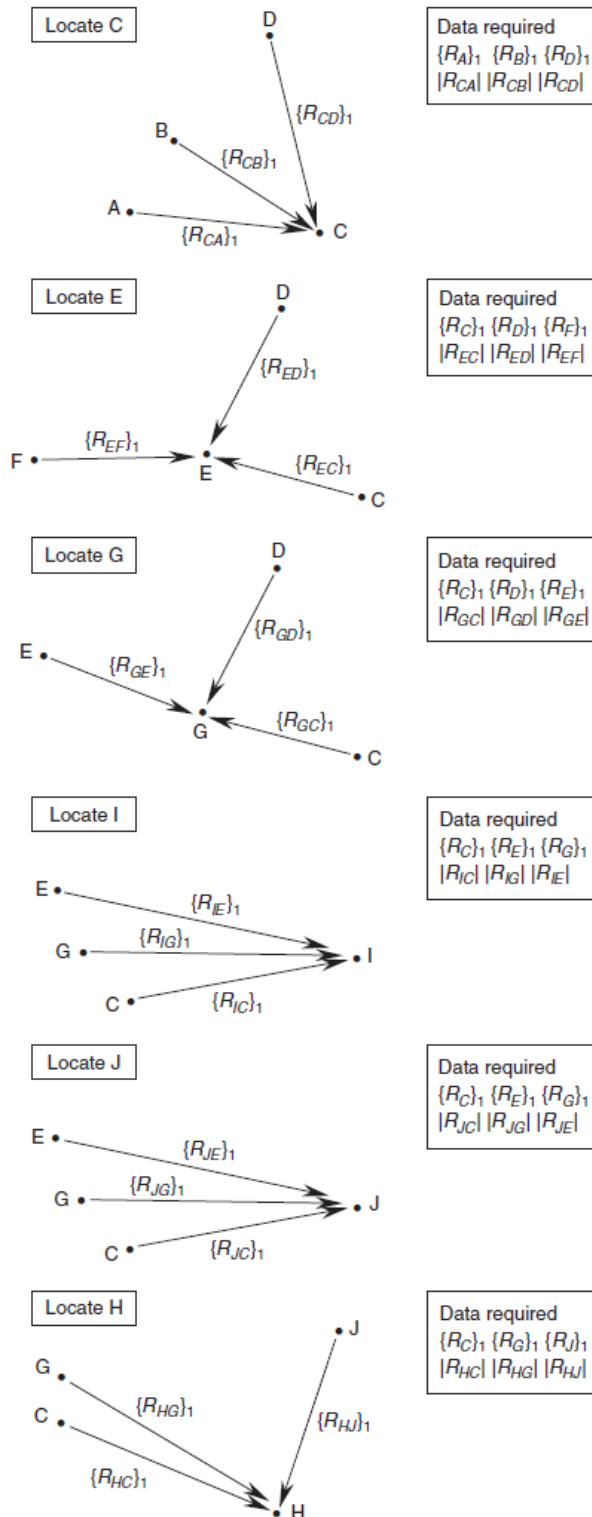
#### 3.3.3.1 Κινηματική ανάλυση μηχανισμών με γόνατα MacPherson

Η κινηματική διέγερση για την κατακόρυφη μετατόπιση του τροχού σε αυτήν την περίπτωση δίνεται μέσω μεταβολής του μήκους του στοιχείου δυσκαμψίας-απόσβεσης (ευθύγραμμο τμήμα DG – Σχήμα 3.31), κατ' αντιστοιχία με την κινηματική ανάλυση ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργησης. Σημειώνεται εδώ ότι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος CD υπολογίζεται εύκολα σε κάθε βήμα της κινηματικής ανάλυσης, εφαρμόζοντας το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο CDG. Η αλληλουχία κατάστρωσης και επίλυσης των σχετικών μη γραμμικών συστημάτων δίνεται συνοπτικά στο Σχήμα 3.32. Όσον αφορά την αριθμητική επίλυση αυτών ισχύουν τα όσα ήδη έχουν αναφερθεί.



Σχήμα 3.31: Σύστημα ανάρτησης με γόνατα MacPherson [4]

Τα συστήματα ανάρτησης με γόνατα MacPherson συνδυάζονται σχεδόν πάντοτε με τραπεζοειδείς μηχανισμούς διεύθυνσης, η κινηματική ανάλυση των οποίων γίνεται παρόμοια με προηγουμένως. Πιο συγκεκριμένα, η κινηματική διέγερση εισάγεται μέσω εγκάρσιας μετατόπισης του οδοντωτού κανόνα, επομένως οι συντεταγμένες του σημείου F είναι δεδομένες. Εφόσον δεν υπάρχει μεταβολή του μήκους του ευθυγράμμου τμήματος DG, η γεωμετρία του μηχανισμού ανάρτησης παραμένει ως έχει με εξαίρεση τη στροφή του φορέα του τροχού γύρω από τον άξονα διεύθυνσης του. Υπενθυμίζεται εδώ ότι ο άξονας διεύθυνσης ενός μηχανισμού ανάρτησης με γόνατα MacPherson διέρχεται από τα σημεία D και C. Εν συνεχεία, επιλύεται αριθμητικά το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων της σχέσης (3.51), όπου η απόσταση  $|R_{DE'}|$  υπολογίζεται εφαρμόζοντας το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο DEG. Τέλος, σύμφωνα με το Σχήμα 3.32 προσδιορίζονται οι συντεταγμένες των σημείων I και J για το μετέπειτα υπολογισμό των χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών του εν λόγω μηχανισμού ανάρτησης.

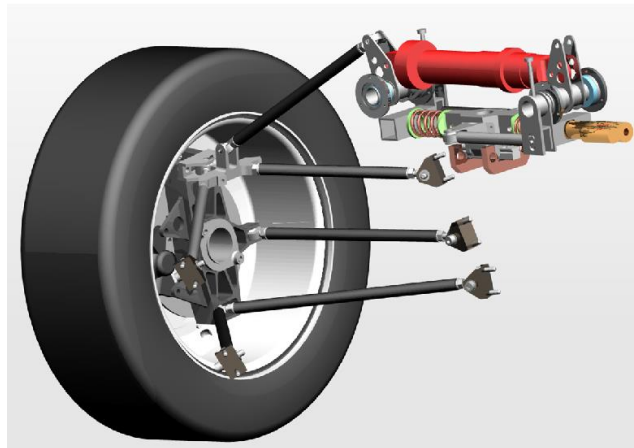


Σχήμα 3.32: Σύνοψη αλληλουχίας υπολογισμών για την κινηματική ανάλυση μηχανισμού ανάρτησης με γόνατα MacPherson [4]

$$\begin{cases} |R_{CE'}|^2 = (C_x - E'_x)^2 + (C_y - E'_y)^2 + (C_z - E'_z)^2 \\ |R_{DE'}|^2 = (D_x - E'_x)^2 + (D_y - E'_y)^2 + (D_z - E'_z)^2 \\ |R_{FE'}|^2 = (F_x - E'_x)^2 + (F_y - E'_y)^2 + (F_z - E'_z)^2 \end{cases} \quad (3.51)$$

### 3.3.3.2 Κινηματική ανάλυση μηχανισμών ανάρτησης πολλαπλών συνδέσμων

Όπως αναφέρθηκε στο τέλος της Ενότητας 3.1, η κινηματική ανάλυση μηχανισμών ανάρτησης πολλαπλών συνδέσμων που αξιοποιούν ελαστικά παρεμβύσματα για τη σύνδεση των μελών τους, δεν έχει ιδιαίτερο νόημα. Τα ανωτέρω στοιχεία σύνδεσης επηρεάζουν σημαντικά τη θέση και τον προσανατολισμό του τροχού κατά την κατακόρυφη κίνηση και περιστροφή του γύρω από τον άξονα διεύθυνσης, με αποτέλεσμα η αντικατάστασή τους από περιστροφικούς ή/και σφαιρικούς συνδέσμους για την πραγματοποίηση κινηματικής ανάλυσης να οδηγεί σε ανακριβή αποτελέσματα. Ωστόσο, σε ορισμένα οχήματα υψηλών επιδόσεων απαντώνται μηχανισμοί ανάρτησης πολλαπλών συνδέσμων, οι οποίοι φέρουν αποκλειστικά δύσκαμπτα στοιχεία σύνδεσης και συγκεκριμένα, σφαιρικά έδρανα.



**Σχήμα 3.33: Υλοποίηση συστήματος ανάρτησης πολλαπλών συνδέσμων χρησιμοποιώντας αποκλειστικά σφαιρικά έδρανα [60]**

Σε αυτές τις περιπτώσεις μηχανισμών, η κινηματική ανάλυση πράγματι έχει νόημα και μπορεί να λάβει χώρα αξιοποιώντας τη μέθοδο των τριών σημείων στην ίδια λογική με την Παράγραφο 3.3.2.3. Προκειμένου, λοιπόν, για τον προσδιορισμό των 18 αγνώστων συντεταγμένων των σημείων έδρασης των μελών του μηχανισμού ανάρτησης επί του φορέα του τροχού (Σχήμα 3.33), απαιτείται η επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος που απαρτίζεται από ισάριθμο πλήθος εξισώσεων. Εκφράζοντας τις (γνωστές και σταθερές) αποστάσεις καθενός από τα ανωτέρω σημεία ως προς τα υπόλοιπα συναρτήσει των αγνώστων συντεταγμένων τους, προκύπτουν συνολικά  $6!/[2!(6-2)!] = 15$  μη γραμμικές σχέσεις, 12 εκ των οποίων είναι ανεξάρτητες. Επιπλέον, εκφράζοντας τα μήκη όλων των μελών του μηχανισμού συναρτήσει των συντεταγμένων των σημείων που βρίσκονται στα

άκρα τους, προκύπτουν οι υπόλοιπες 6 μη γραμμικές σχέσεις που απαιτούνται για τον προσδιορισμό των νέων θέσεων των σημείων ενδιαφέροντος του φορέα του τροχού, έπειτα από την εισαγωγή οποιασδήποτε κινηματικής διέγερσης. Η κατάσταση των εξισώσεων που απαρτίζουν το εν λόγω μη γραμμικό σύστημα αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη, ενώ η αριθμητική επίλυση μπορεί να γίνει και πάλι με τη μέθοδο Newton-Raphson.

### 3.3.4 Υπολογισμός χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών ανάρτησης

Σύμφωνα με τα όσα ήδη ειπώθηκαν, αξιοποιώντας τη μέθοδο των τριών σημείων για την κινηματική ανάλυση ενός μηχανισμού ανάρτησης υπολογίζονται οι συντεταγμένες όλων των σημείων ενδιαφέροντος του τελευταίου. Βάσει αυτών, εν συνεχεία μπορούν να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη του εκάστοτε συστήματος ανάρτησης. Όσον αφορά τις κατακόρυφες, εγκάρσιες και διαμήκεις μετατοπίσεις που υφίσταται ο τροχός λόγω κινηματικών διεγέρσεων, ο τρόπος υπολογισμού αυτών προκύπτει άμεσα εξ ορισμού (Υποενότητα 2.2.1). Ομοίως, τα βήματα που απαιτούνται για τον υπολογισμό των θέσεων των στιγμιαίων κέντρων περιστροφής και του κέντρου κλυδωνισμού συστημάτων ανάρτησης με διπλά ψαλίδια ή γόνατα MacPherson, περιγράφονται αναλυτικά στην Υποενότητα 2.2.5. Στις ακόλουθες παραγράφους γίνεται μια σύντομη περιγραφή του τρόπου υπολογισμού των υπολοίπων χαρακτηριστικών μεγεθών που ορίστηκαν στην Ενότητα 2.2, εστιάζοντας σε μηχανισμούς ανάρτησης με διπλά ψαλίδια (Σχήμα 3.11β) και γόνατα MacPherson (Σχήμα 3.31).

#### 3.3.4.1 Γωνία κλίσης και γωνία σύγκλισης τροχού

Γνωρίζοντας τις συντεταγμένες δύο σημείων που ανήκουν στον άξονα κύλισης του τροχού (διπλά ψαλίδια  $\rightarrow K, L$ , γόνατα MacPherson  $\rightarrow I, J$ ), καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός των συνιστωσών του διανύσματος  $\vec{e}_s$ , με αρχή και πέρας τα ανωτέρω σημεία και κατεύθυνση απομάκρυνσης από το όχημα. Μέσω του διανύσματος  $\vec{e}_s$  προσδιορίζεται πλήρως ο προσανατολισμός του τροχού στο χώρο. Εισάγεται επίσης το βοηθητικό διάνυσμα  $\vec{e}_{s,xy}$ , το οποίο αποτελεί προβολή του διανύσματος  $\vec{e}_s$  στο  $xy$  επίπεδο. Τα μέτρα των γωνιών κλίσης  $\gamma$  και σύγκλισης  $\delta$  του τροχού υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις (3.54) και (3.55) αντίστοιχα, όπου  $\vec{j}$ , το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση του άξονα  $y$  του συστήματος συντεταγμένων που ορίστηκε στην αρχή της Ενότητας 2.2.

$$\vec{e}_s = [e_{s,x} \quad e_{s,y} \quad e_{s,z}]^T \quad (3.52)$$

$$\vec{e}_{s,xy} = [e_{s,x} \quad e_{s,y} \quad 0]^T \quad (3.53)$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{e}_s \cdot \vec{e}_{s,xy}}{|\vec{e}_s| |\vec{e}_{s,xy}|} \quad (3.54)$$

$$\cos \delta = \frac{\vec{j} \cdot \vec{e}_{s,xy}}{|\vec{e}_{s,xy}|} \quad (3.55)$$

Ισχύει ότι  $\cos^{-1} x \geq 0, \forall x \in [-1,1]$ , επομένως η συνάρτηση τόξου συνημιτόνου δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό των προσήμων των γωνιών κλίσης και σύγκλισης. Τα τελευταία ακολουθούν τη σύμβαση που δόθηκε κατά τον ορισμό των ανωτέρω γωνιών, οι τελικές εκφράσεις υπολογισμού των οποίων δίνονται από τις σχέσεις (3.56) και (3.57):

$$\gamma = -\frac{e_{s,z}}{|e_{s,z}|} \cos^{-1} \left( \frac{\vec{e}_s \cdot \vec{e}_{s,xy}}{|\vec{e}_s| |\vec{e}_{s,xy}|} \right) \quad (3.56)$$

$$\delta = \frac{e_{s,x}}{|e_{s,x}|} \cos^{-1} \left( \frac{\vec{j} \cdot \vec{e}_{s,xy}}{|\vec{e}_{s,xy}|} \right) \quad (3.57)$$

Σημειώνεται εδώ ότι οι παραπάνω σχέσεις υπολογισμού των γωνιών κλίσης και σύγκλισης του τροχού είναι γενικές και δεν αφορούν μόνο μηχανισμούς ανάρτησης με διπλά ψαλίδια και γόνατα MacPherson.

#### 3.3.4.2 Γωνία caster και μηχανικό ίχνος

Για τον υπολογισμό της γωνίας caster ακολουθείται αντίστοιχη συλλογιστική πορεία με προηγουμένως. Αρχικά, υπολογίζεται το διάνυσμα  $\vec{e}_c$  που αντιστοιχεί στον άξονα διεύθυνσης του τροχού. Σε μηχανισμούς ανάρτησης διπλών ψαλιδιών το ανωτέρω διάνυσμα έχει ως αρχή και πέρας τα σημεία G, D, ενώ σε μηχανισμούς ανάρτησης με γόνατα MacPherson τα αντίστοιχα σημεία είναι τα C, D. Εισάγεται επίσης το βοηθητικό διάνυσμα κατεύθυνσης  $\vec{e}_{c,xz}$ , το οποίο αποτελεί προβολή του διανύσματος  $\vec{e}_c$  στο xz επίπεδο. Η γωνία caster  $\varphi$ , σύμφωνα με τον τρόπο που ορίστηκε παραπάνω, υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\vec{e}_c = [e_{c,x} \quad e_{c,y} \quad e_{c,z}]^T \quad (3.58)$$

$$\vec{e}_{c,xz} = [e_{c,x} \quad 0 \quad e_{c,z}]^T \quad (3.59)$$

$$\varphi = -\frac{e_{c,x}}{|e_{c,x}|} \cos^{-1} \left( \frac{\vec{k} \cdot \vec{e}_{c,xz}}{|\vec{e}_{c,xz}|} \right) \quad (3.60)$$

όπου  $\vec{k}$ , το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση του άξονα z του συστήματος συντεταγμένων που ορίστηκε στην αρχή της Ενότητας 2.2. Το μηχανικό ίχνος υπολογίζεται εύκολα εξ ορισμού συναρτήσει της υπολογισθείσας τιμής της γωνίας caster.

#### 3.3.4.3 Γωνία βασιλικού πείρου και scrub radius

Προκειμένου για τον υπολογισμό της γωνίας βασιλικού πείρου, εισάγεται το βοηθητικό διάνυσμα κατεύθυνσης  $\vec{e}_{c,yz}$ , το οποίο αποτελεί προβολή του διανύσματος  $\vec{e}_c$  στο yz επίπεδο. Η γωνία βασιλικού πείρου  $\theta$ , σύμφωνα με τον τρόπο που ορίστηκε παραπάνω, υπολογίζεται μέσω της σχέσης (3.62). Όσον αφορά το scrub radius, αυτό υπολογίζεται εύκολα εξ ορισμού συναρτήσει της υπολογισθείσας τιμής της γωνίας  $\theta$ .

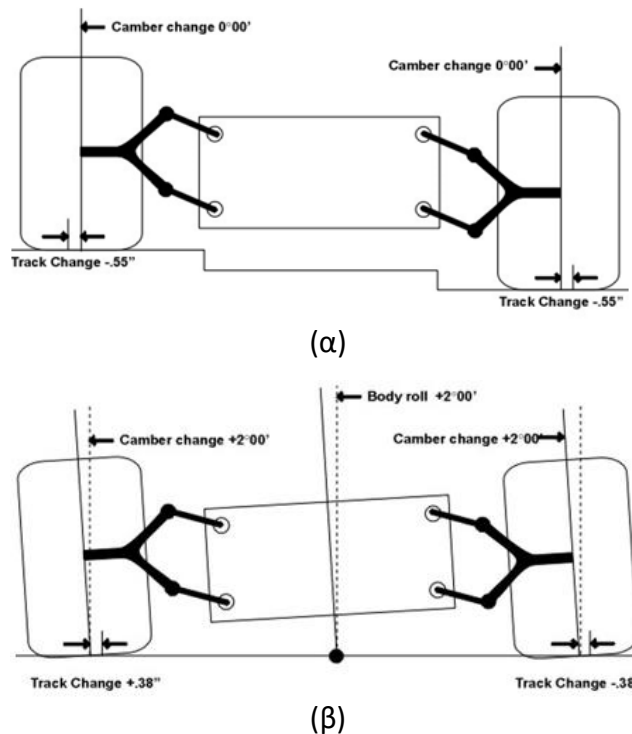


$$\vec{e}_{c,yz} = [0 \quad e_{c,y} \quad e_{c,z}]^T \quad (3.61)$$

$$\theta = -\frac{e_{c,y}}{|e_{c,y}|} \cos^{-1} \left( \frac{\vec{k} \cdot \vec{e}_{c,yz}}{|\vec{e}_{c,yz}|} \right) \quad (3.62)$$

**3.3.4.4 Κινηματική ανάλυση αναρτήσεων υπό μη μηδενική γωνία κλυδωνισμού**

Όταν ένα όχημα επιταχύνεται πλευρικά, προκύπτουν εγκάρσιες μεταφορές φορτίου με αποτέλεσμα τη συμπίεση (αντίστοιχα έκταση) των μηχανισμών ανάρτησης των εξωτερικών (αντίστοιχα εσωτερικών) τροχών. Οι εν λόγω συμφασικές κατακόρυφες μετατοπίσεις των τροχών κάθε πλευράς του οχήματος είναι υπεύθυνες για την περιστροφή της αναρτημένης μάζας γύρω από τον άξονα κλυδωνισμού. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη μετατόπιση όλων των σημείων έδρασης των μελών ενός συστήματος ανάρτησης επί του πλαισίου σε σχέση με την ονομαστική τους θέση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.34β.



**Σχήμα 3.34: Προσεγγιστικός τρόπος υπολογισμού της γωνίας κλίσης που εισάγεται λόγω κλυδωνισμού της ανηρτημένης μάζας [61]**

Το παραπάνω φαινόμενο μπορεί σε πρώτη προσέγγιση να μη ληφθεί υπόψιν θεωρώντας ότι κατά την πλευρική επιτάχυνση του οχήματος η ανηρτημένη μάζα διατηρείται υπό μηδενική γωνία κλυδωνισμού, ενώ οι μηχανισμοί ανάρτησης μετατοπίζονται ως προς αυτήν όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.34α. Κατ' αυτόν τον τρόπο λαμβάνεται υπόψιν η μεταβολή της γεωμετρίας των τελευταίων αποκλειστικά λόγω κατακόρυφης μετατόπισης των τροχών ως προς το πλαίσιο, όπως για παράδειγμα θα συνέβαινε κατά τη διέλευση του

οχήματος από μια εγκάρσια ανωμαλία του οδοστρώματος. Ωστόσο, στην πραγματικότητα η προαναφερθείσα μετατόπιση των σημείων έδρασης της ανάρτησης στο πλαίσιο λόγω κλυδωνισμού της ανηρτημένης μάζας έχει σημαντική επίδραση στην προκύπτουσα γεωμετρία, ειδικά όσον αφορά την γωνία κλίσης των τροχών (roll camber).

Προκειμένου να ληφθεί υπόψιν το εν λόγω φαινόμενο κατά την κινηματική ανάλυση μηχανισμών ανάρτησης με μοντέλα ενός τετάρτου οχήματος (quarter car linkage models), χρησιμοποιούνται λιγότερο απλουστευτικές προσεγγίσεις. Σύμφωνα με την πλέον ακριβή από αυτές, η ανηρτημένη μάζα υφίσταται μικρές διαδοχικές περιστροφές γύρω από τον άξονα κλυδωνισμού της και οι νέες συντεταγμένες των σημείων έδρασης των διαφόρων μελών της ανάρτησης στο πλαίσιο υπολογίζονται μέσω κατάλληλου μητρώου στροφής. Έπειτα από κάθε μεταβολή της γωνίας κλυδωνισμού, πραγματοποιείται κινηματική ανάλυση των μηχανισμών ανάρτησης του οχήματος ούτως ώστε να υπολογιστούν οι νέες θέσεις των κέντρων κλυδωνισμού κάθε άξονα, βάσει των οποίων προκύπτει η θέση και ο προσανατολισμός του νέου άξονα κλυδωνισμού. Ο τελευταίος χρησιμοποιείται για την περιστροφή της ανηρτημένης μάζας στο επόμενο βήμα της ανάλυσης και η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου επιτευχθεί το επιθυμητό πλάτος γωνίας κλυδωνισμού.

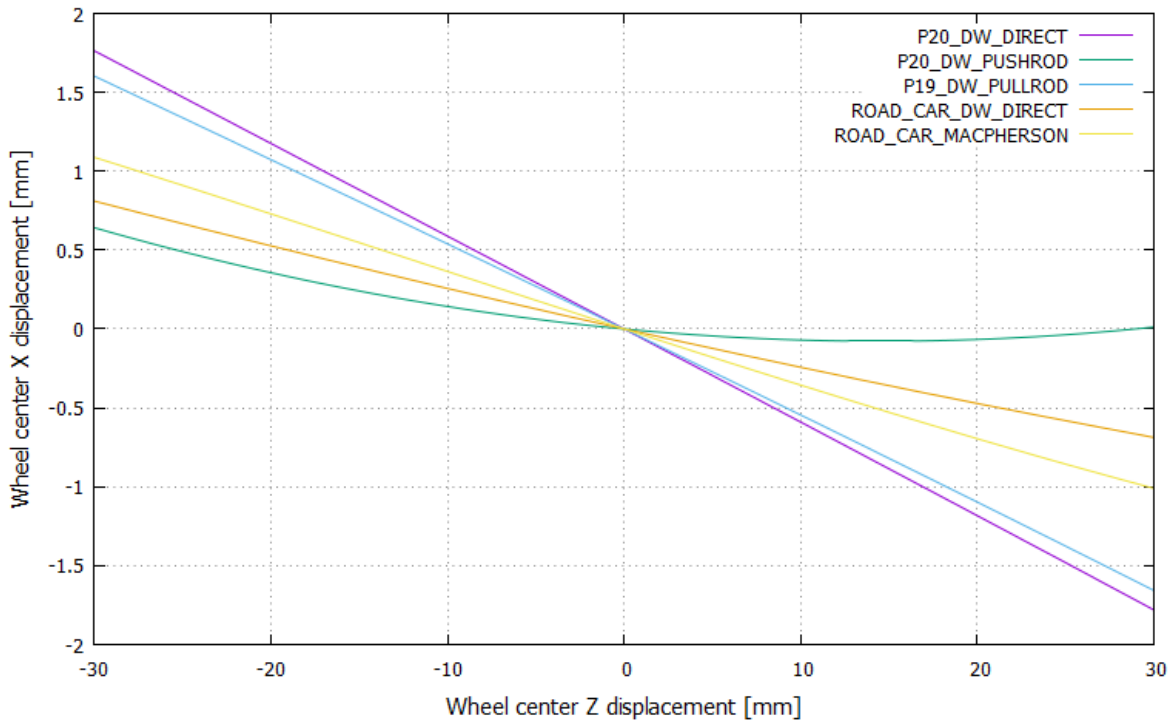
Η διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω είναι ενσωματωμένη σε διάφορα εμπορικά λογισμικά κινηματικής ανάλυσης μηχανισμών ανάρτησης οχημάτων (π.χ. SusProg 3D) και δίνει αποτελέσματα ικανοποιητικής ακρίβειας για τις περισσότερες εφαρμογές, παρόλα αυτά παραμένει προσεγγιστική. Στο Κεφάλαιο 4 δίνεται μια μέθοδος για τον ακριβή προσδιορισμό της γεωμετρίας ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών έπειτα από την εισαγωγή γωνίας κλυδωνισμού στην ανηρτημένη μάζα, μοντελοποιώντας τον πρώτο ως σύστημα πολλαπλών σωμάτων.

### 3.4 Παρουσίαση ενδεικτικών αποτελεσμάτων

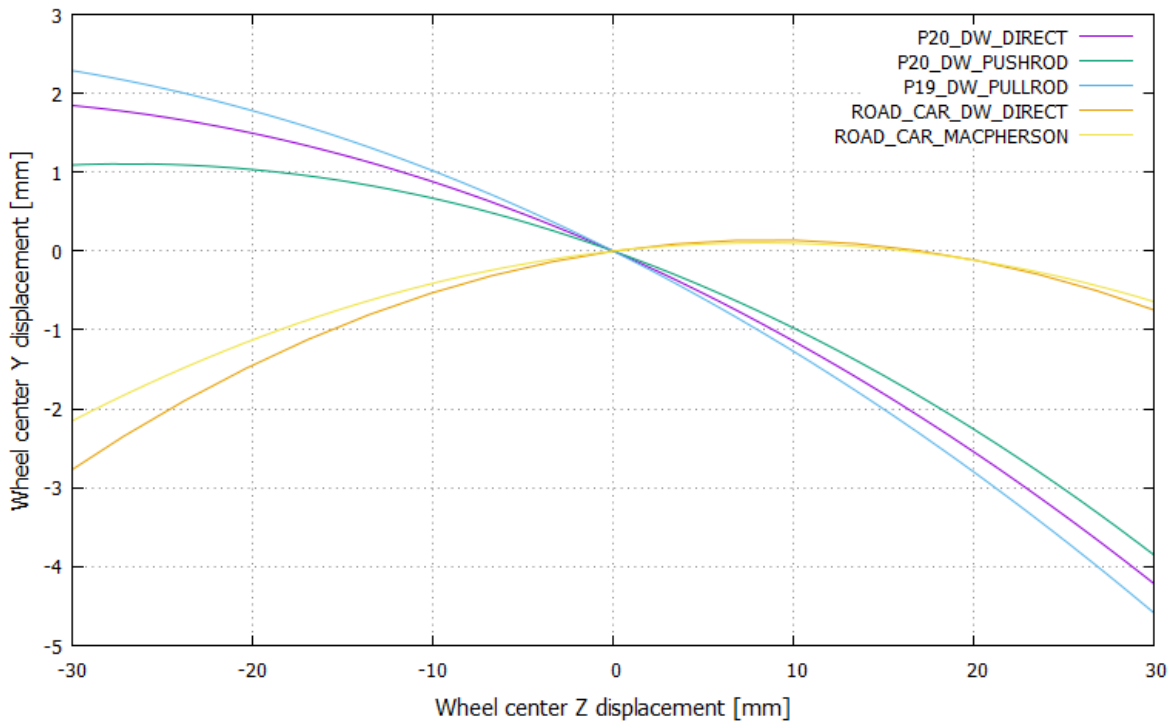
---

Στην παρούσα ενότητα δίνονται ενδεικτικά αποτελέσματα κινηματικής ανάλυσης μηχανισμών ανάρτησης με τη μέθοδο των τριών σημείων. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται η μεταβολή των χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών που ορίστηκαν στην Ενότητα 2.2 κατά την κατακόρυφη μετατόπιση του τροχού εντός δεδομένου εύρους. Τα κάτωθι διαγράμματα αφορούν μηχανισμούς ανάρτησης διπλών ψαλιδιών που χρησιμοποιήθηκαν στα μονοθέσια οχήματα P19 και P20 της Prom Racing, καθώς και αναρτήσεις οχημάτων γενικής χρήσης με διπλά ψαλιδία και γόνατα MacPherson.

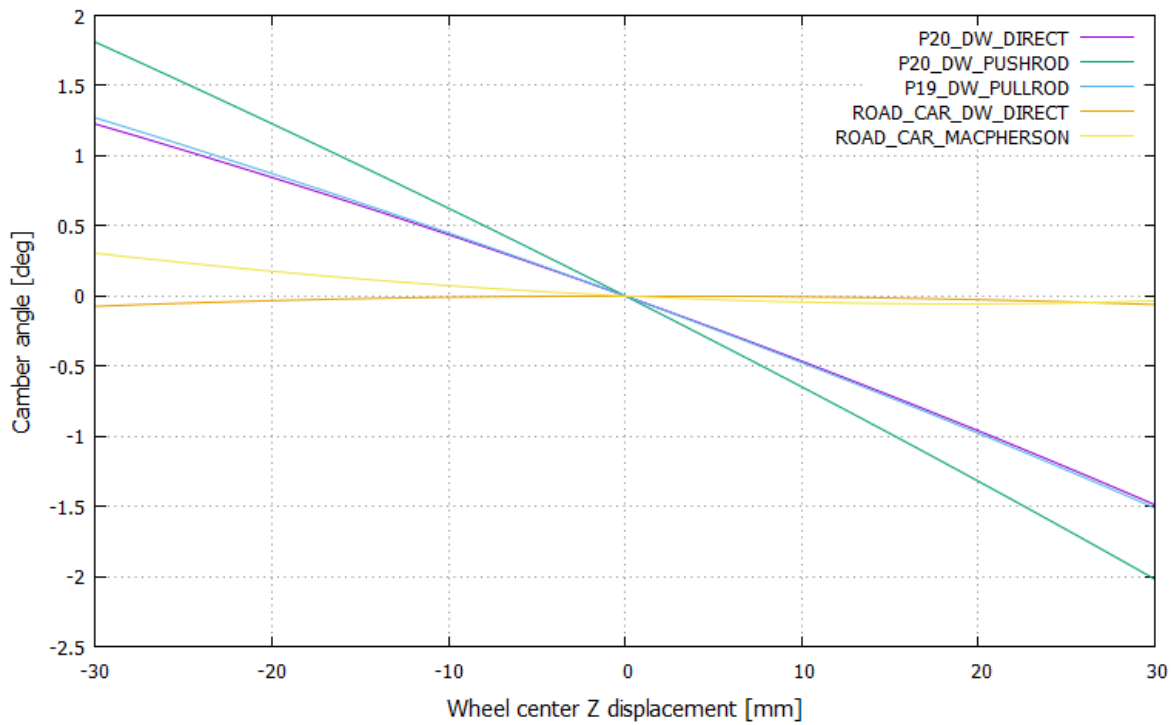
Για την εξαγωγή των εν λόγω αριθμητικών αποτελεσμάτων δημιουργήθηκε υπολογιστικός κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού C++, μέσω του οποίου γίνεται αυτόματα η κατάστρωση και επίλυση των μη γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν κατά την εφαρμογή της μεθόδου των τριών σημείων για την κινηματική ανάλυση των ανωτέρω μηχανισμών ανάρτησης.



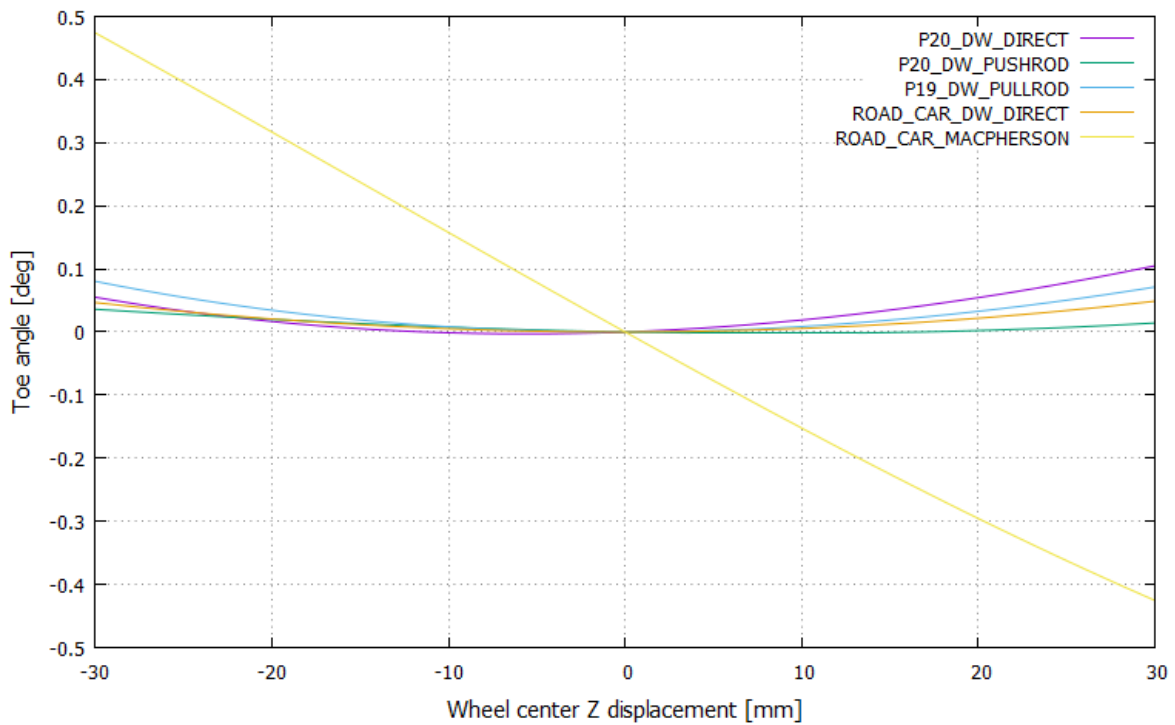
Σχήμα 3.35: Διαμήκης συναρτήσεις κατακόρυφης μετατόπισης τροχού



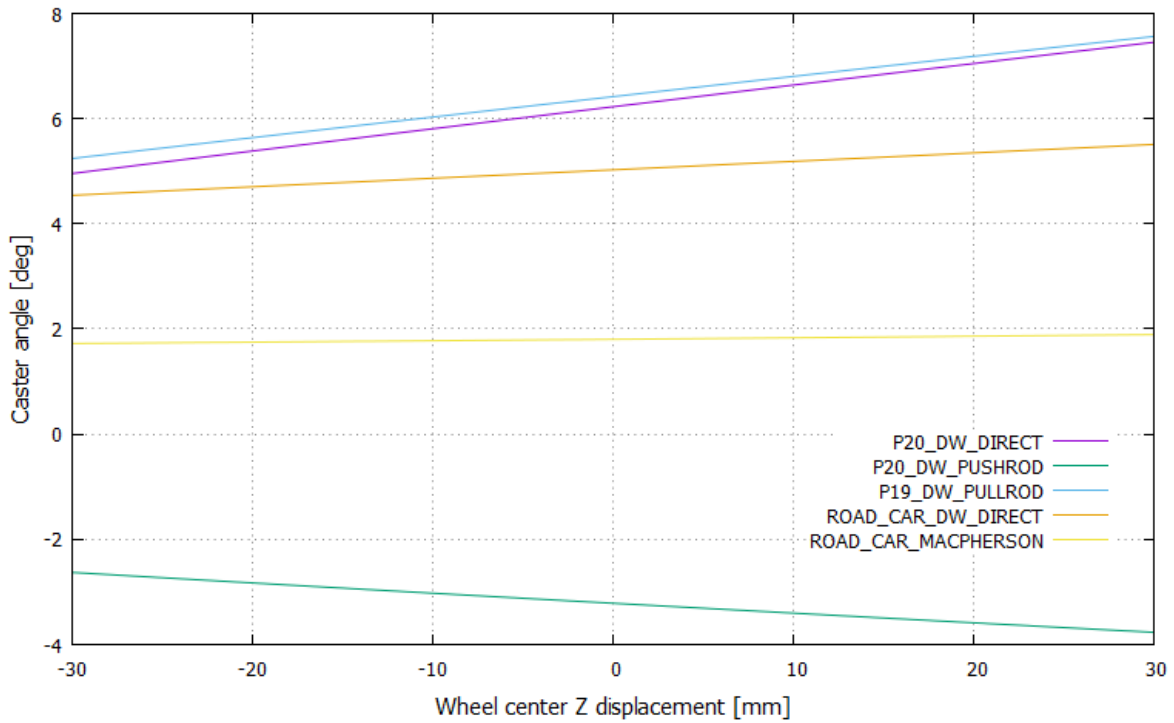
Σχήμα 3.36: Εγκάρσια συναρτήσεις κατακόρυφης μετατόπισης τροχού



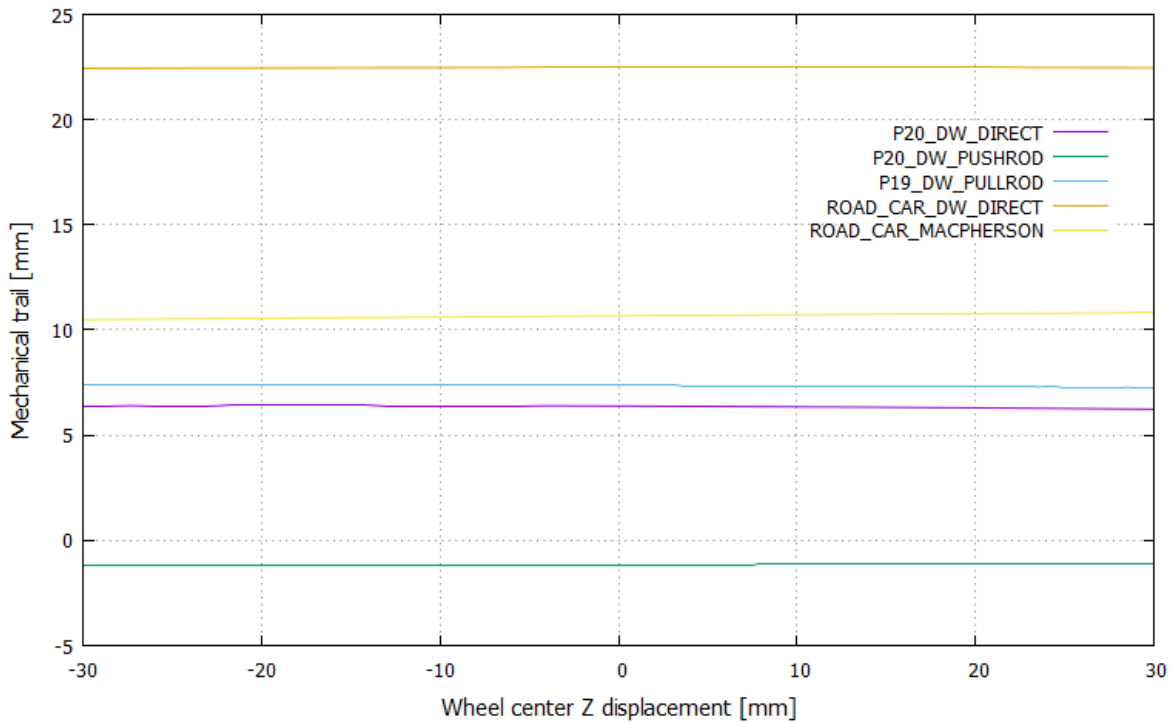
Σχήμα 3.37: Γωνία κλίσης συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού



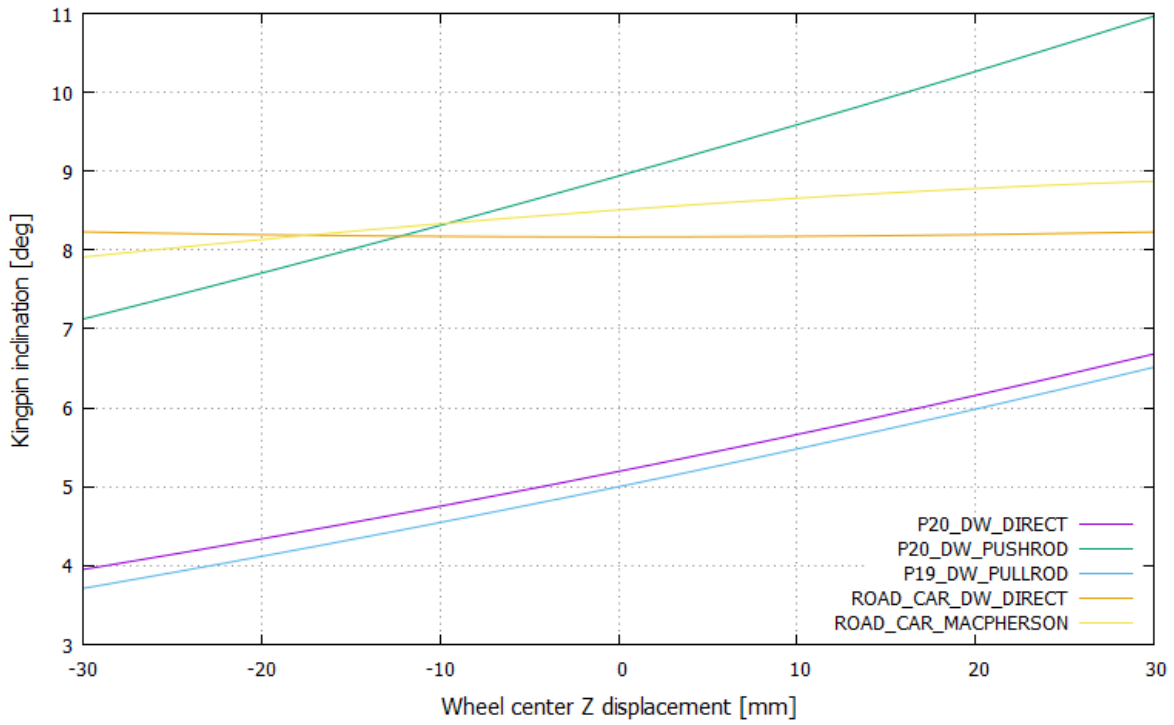
Σχήμα 3.38: Γωνία σύγκλισης συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού



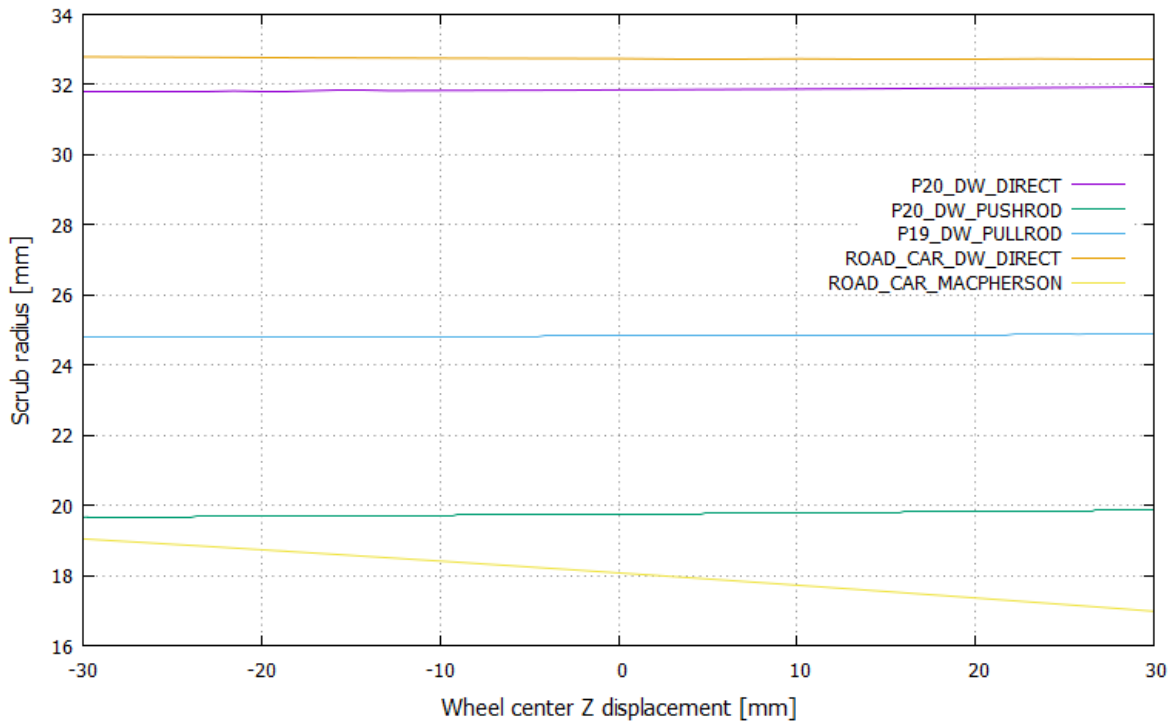
Σχήμα 3.39: Γωνία caster συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού



Σχήμα 3.40: Μηχανικό ίχνος συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού

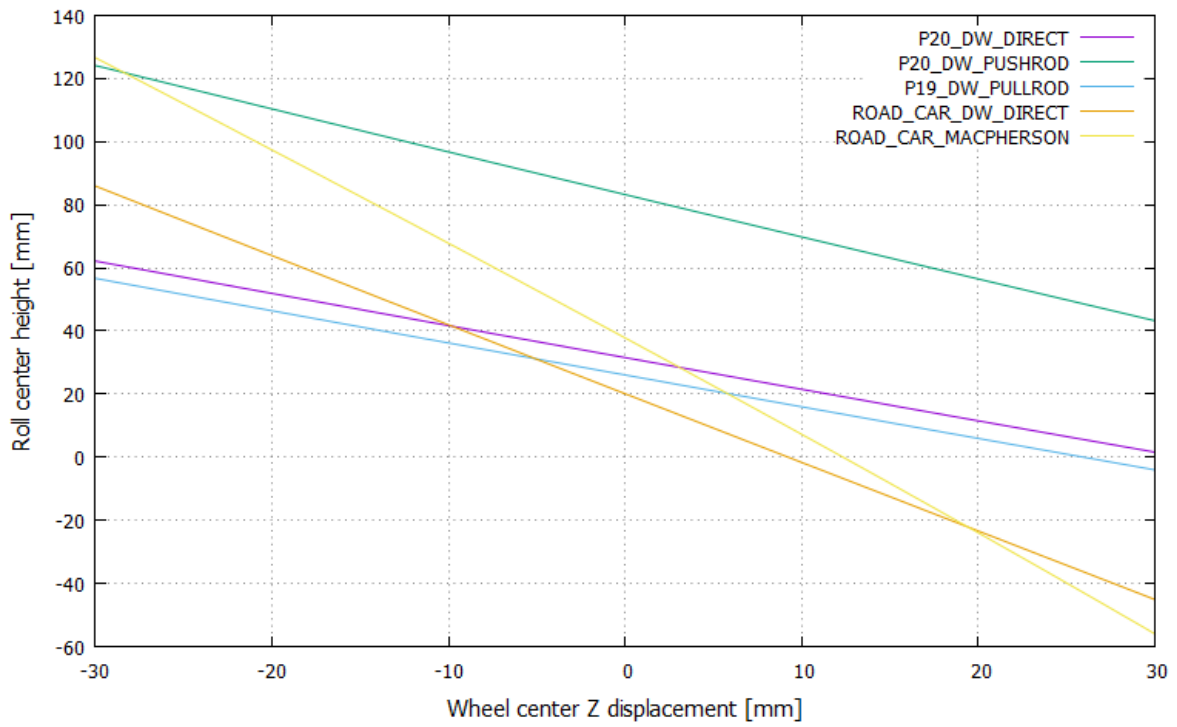


Σχήμα 3.41: Γωνία βασιλικού πείρου συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού



Σχήμα 3.42: Scrub radius συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού





Σχήμα 3.43: Ύψος κέντρου κλυδωνισμού συναρτήσεσι κατακόρυφης μετατόπισης τροχού

#### 4. Ελαστοκινηματική ανάλυση ανάρτησης διπλών ψαλιδιών

Η ελαστοκινηματική ανάλυση μηχανισμών αποσκοπεί στον υπολογισμό των γραμμικών και γωνιακών μετατοπίσεων που υφίστανται τα σημεία ενδιαφέροντος των πρώτων λόγω παραμόρφωσης των διαφόρων μελών τους ή/και των μεταξύ τους στοιχείων σύνδεσης, ενώ σε αντίθεση με την κινηματική ανάλυση λαμβάνονται υπόψιν τα αίτια της κίνησης, δηλαδή τα φορτία που παραλαμβάνουν τα μέλη του μηχανισμού σε συνθήκες λειτουργίας. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το πλέον καθιερωμένο υπολογιστικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για την ελαστοκινηματική ανάλυση μηχανισμών είναι το λογισμικό προσομοίωσης δυναμικής συστημάτων πολλαπλών σωμάτων ή συντομότερα το λογισμικό MBS, βασικό πεδίο εφαρμογής του οποίου αποτελεί ο σχεδιασμός συστημάτων ανάρτησης οχημάτων παντός είδους (αυτοκίνητα, τρένα, αεροσκάφη). Υπενθυμίζεται ότι τα συστήματα πολλαπλών σωμάτων διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με το πλάτος των ελαστικών παραμορφώσεων που δύνανται να αναπτύξουν ορισμένα ή όλα τα σώματα από τα οποία αυτά αποτελούνται [62]:

- **Συστήματα πολλαπλών απολύτως στερεών σωμάτων:** Αποτελούνται από απολύτως στερεά σώματα (rigid bodies) τα οποία συνδέονται μεταξύ τους διαμέσου μηχανικών συνδέσμων (mechanical joints). Παρόλο που τα απολύτως στερεά σώματα δεν παραμορφώνονται, τέτοιου είδους συστήματα δεν αποκλείεται να εμφανίζουν χαρακτηριστικά ελαστικότητας εξαιτίας στοιχείων συγκεντρωμένων ιδιοτήτων (lumped elastic components) που ενδέχεται να χρησιμοποιούνται για τη σύνδεση των σωμάτων, τα οποία συχνά καλούνται εύκαμπτοι σύνδεσμοι (flexible joints), ελαστικά παρεμβύσματα (bushing elements) ή γενικότερα, στοιχεία δύναμης (force elements).
- **Συστήματα πολλαπλών γραμμικά ελαστικών σωμάτων:** Αποτελούνται τόσο από απολύτως στερεά όσο και από γραμμικά ελαστικά σώματα (linearly elastic/linear flexible bodies), ενώ όσον αφορά τον τρόπο σύνδεσης αυτών ισχύουν τα ίδια με παραπάνω. Για τα γραμμικά ελαστικά σώματα, υποτίθεται ότι οι συνιστώσες της παραμόρφωσης είναι μικρές και οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων παραμένουν γραμμικές σε κάθε περίπτωση, εξού και το όνομα των πρώτων.
- **Συστήματα πολλαπλών μη γραμμικά ελαστικών σωμάτων:** Αποτελούνται τόσο από απολύτως στερεά όσο και από ελαστικά σώματα, ενώ όσον αφορά τον τρόπο σύνδεσης αυτών ισχύουν τα ίδια με παραπάνω. Τα εν λόγω συστήματα πολλαπλών σωμάτων περιλαμβάνουν ένα ή περισσότερα σώματα τα οποία είτε εμφανίζουν παραμορφώσεις μεγάλου πλάτους ή/και οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων γίνονται μη γραμμικές σε αυτά. Στο πλαίσιο της Μηχανικής του Παραμορφώσιμου Στερεού τέτοιου είδους προβλήματα χαρακτηρίζονται ως μη γραμμικά (geometric/material nonlinearities), εξού και το όνομα των μη γραμμικά ελαστικών σωμάτων (nonlinearly elastic/nonlinear flexible bodies).

Οι μεγάλες απόλυτες και σχετικές μετατοπίσεις που εμφανίζονται συνήθως στα συστήματα πολλαπλών σωμάτων καθιστούν τα αντίστοιχα προβλήματα εξόχως μη γραμμικά. Διευκρινίζεται, λοιπόν, ότι ανεξαρτήτως του πλάτους παραμόρφωσης των σωμάτων από τα οποία αποτελείται ένα τέτοιο σύστημα, στη γενική περίπτωση αυτό περιγράφεται από μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης, ενώ η ελαστική συμπεριφορά των πρώτων μπορεί να είναι γραμμική, μη γραμμική ή να μην υφίσταται.

Στο παρόν κεφάλαιο, παρατίθενται λεπτομερώς όλα τα βήματα που απαιτούνται για την πραγματοποίηση ελαστοκινηματικής ανάλυσης μηχανισμών ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, θεωρώντας ότι οι τελευταίοι συνιστούν συστήματα πολλαπλών απολύτως στερεών ή γραμμικά ελαστικών σωμάτων. Τα μέλη ενός σωστά σχεδιασμένου συστήματος ανάρτησης διπλών ψαλιδιών πράγματι δεν εμφανίζουν παραμορφώσεις μεγάλου πλάτους, επομένως δεν έχει νόημα η μοντελοποίηση αυτών ως μη γραμμικά ελαστικά σώματα.

## 4.1 Μαθηματικό υπόβαθρο

Τα κάτωθι συμπληρώνονται από όσα έχουν αναφερθεί στην Ενότητα 3.1 περί κινηματικών περιορισμών, βαθμών ελευθερίας κ.λπ. και αποτελούν ιδιαίτερα χρήσιμες γνώσεις αφενός μεν για την κατανόηση, αφετέρου δε για την ανάλυση συστημάτων πολλαπλών σωμάτων.

### 4.1.1 Θέση και προσανατολισμός απολύτως στερεών σωμάτων στο χώρο

#### 4.1.1.1 Συστήματα αναφοράς

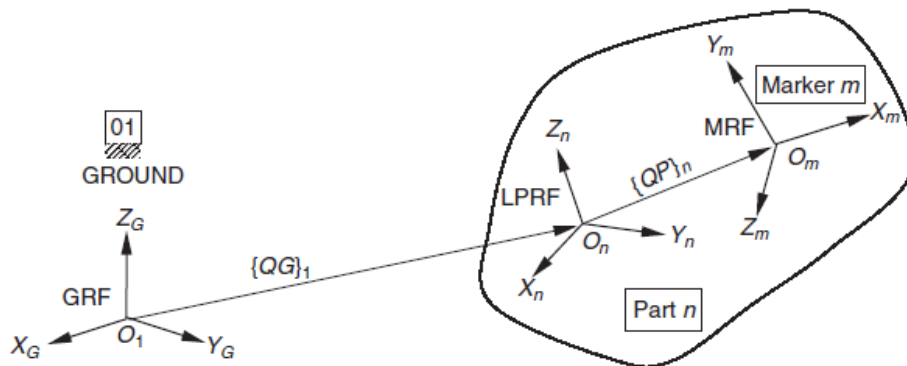
Προκειμένου για τη μαθηματική περιγραφή ενός συστήματος πολλαπλών σωμάτων στις τρεις διαστάσεις, απαιτείται ο ορισμός και η χρήση πληθώρας συστημάτων αναφοράς (reference frames). Τα τελευταία είναι απαραίτητα τόσο για τον καθορισμό της τοπολογίας του μοντέλου, όσο και για την έκφραση των αποτελεσμάτων της εκάστοτε προσομοίωσης που πραγματοποιείται με αυτό. Εν γένει, ένα σύστημα πολλαπλών σωμάτων περιλαμβάνει τα ακόλουθα είδη καρτεσιανών συστημάτων συντεταγμένων [4]:

- **Αδρανειακό σύστημα αναφοράς:** Ορίζεται μονοσήμαντα για κάθε σύστημα πολλαπλών σωμάτων και διατηρείται ακίνητο. Οποιοδήποτε σημείο ανήκει στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς έχει μηδενική ταχύτητα και επιτάχυνση, ενώ συνήθως το τελευταίο τοποθετείται επί ενός εκ των σωμάτων του συστήματος πολλαπλών σωμάτων, το φερόμενο και ως «έδαφος». Γι' αυτό άλλωστε το αδρανειακό σύστημα καλείται και σύστημα αναφοράς εδάφους (**Ground Reference Frame/GRF**). Ενδεικτικά αναφέρεται ότι σε ένα μοντέλο ενός τετάρτου οχήματος ως έδαφος λαμβάνεται το πλαίσιο αυτού, ενώ σε μοντέλα προσομοίωσης της δυναμικής του πλήρους οχήματος λαμβάνεται αντίστοιχα η επιφάνεια του οδοστρώματος.
- **Σωματόδετα συστήματα αναφοράς:** Για κάθε σώμα ενός συστήματος πολλαπλών σωμάτων ορίζεται ένα τοπικό σύστημα αναφοράς (**Local Part**

Reference Frame/LPRF), το οποίο μετατοπίζεται και μεταβάλλει τον προσανατολισμό του μαζί με το αντίστοιχο σώμα, γι' αυτό και συχνά καλείται σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων (Body Coordinate System/BCS). Η θέση και ο προσανατολισμός των σωματόδετων συστημάτων εκφράζεται ως προς το εκάστοτε αδρανειακό σύστημα, ενώ η χρήση τους διευκολύνει τη διαδικασία ορισμού της αρχικής τοπολογίας ενός μοντέλου, π.χ. επιτρέποντας την αξιοποίηση της συμμετρίας ενός σώματος για τον ορισμό των διαφόρων σημείων ενδιαφέροντος επί αυτού, όταν ο άξονας συμμετρίας του δεν ταυτίζεται με κάποιον από τους άξονες του αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

- Βοηθητικά συστήματα αναφοράς:** Σύμφωνα με την ορολογία των εμπορικών λογισμικών MBS, ADAMS και SIMPACK, τα βοηθητικά συστήματα αναφοράς καλούνται “Marker Reference Frames/MRF” ή απλά “markers” και εισάγονται στα διάφορα μοντέλα συστημάτων πολλαπλών σωμάτων προκειμένου για τον προσδιορισμό της θέσης και του προσανατολισμού των εκάστοτε στοιχείων σύνδεσης ως προς τα αντίστοιχα σώματα, καθώς και των θέσεων των κέντρων μάζας των τελευταίων. Τα βοηθητικά συστήματα αναφοράς μπορεί να ανήκουν στο αδρανειακό ή σε κάποιο σωματόδετο σύστημα αναφοράς, σε κάθε περίπτωση, όμως, ακολουθούν την κίνηση του συστήματος εντός του οποίου ορίζονται.

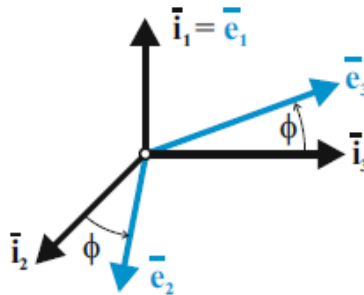
Το Σχήμα 4.1 είναι ενδεικτικό της σχετικής θέσης και του προσανατολισμού των ανωτέρω τύπων συστημάτων αναφοράς εντός ενός συστήματος πολλαπλών σωμάτων. Αναφέρεται για λόγους πληρότητας ότι ο ορισμός τοπικών συστημάτων αναφοράς με προσανατολισμό που διαφέρει ως προς αυτόν του αδρανειακού συστήματος δεν είναι επιβεβλημένος, ωστόσο διευκολύνει σημαντικά τη μοντελοποίηση συστημάτων πολλαπλών σωμάτων σύνθετης τοπολογίας. Όταν ο ορισμός ενός τοπικού συστήματος συντεταγμένων παραλείπεται, τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι ο προσανατολισμός του ταυτίζεται με αυτόν του αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Αυτό συμβαίνει, άλλωστε, όσον αφορά και τα προαναφερθέντα εμπορικά λογισμικά MBS, ADAMS και SIMPACK.



Σχήμα 4.1: Σχετική θέση συστημάτων αναφοράς σε σύστημα πολλαπλών σωμάτων [4]

4.1.1.2 Προσανατολισμός σώματος στο χώρο

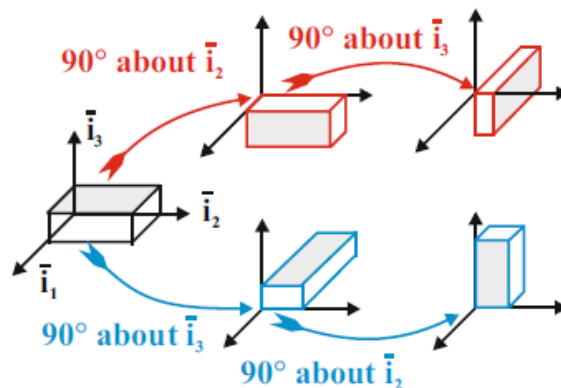
Ο πιο εύληπτος τρόπος μαθηματικής περιγραφής της αλλαγής προσανατολισμού ενός απολύτως στερεού σώματος βασίζεται στη γεωμετρική αναπαράσταση της στροφής [62] και αναλύεται κάτωθι. Στο σημείο αυτό διευκρινίζεται ότι στο πλαίσιο της παρούσας ΔΕ οι έννοιες της αλλαγής προσανατολισμού και της στροφής ενός σώματος λογίζονται ως ισοδύναμες και οι αντίστοιχοι όροι χρησιμοποιούνται αδιακρίτως σε όσα ακολουθούν.



Σχήμα 4.2 Επίπεδη στροφή σώματος κατά γωνία  $\phi$  [62]

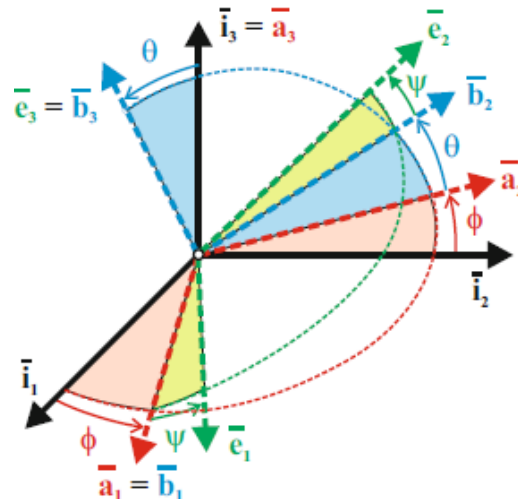
Ένα απλό παράδειγμα αλλαγής προσανατολισμού ενός σώματος είναι η επίπεδη στροφή αυτού (planar rotation), η οποία ορίζεται ως η γωνιακή μετατόπιση του αντίστοιχου σωματόδετου συστήματος αναφοράς κατά μία γωνία, έστω  $\varphi$ , γύρω από το φορέα ενός εκ των τριών διανυσμάτων βάσης αυτού, έστω  $\bar{i}_1$  (Σχήμα 4.2). Εφαρμόζοντας στοιχειώδη τριγωνομετρία προκύπτουν εκφράσεις των διανυσμάτων βάσης  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  συναρτήσει των  $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ , εκ των οποίων υπολογίζεται ο πίνακας κατευθυνόντων συνημιτόνων  $D_1(\varphi)$  (direction cosine matrix). Ομοίως προκύπτουν αντίστοιχες εκφράσεις όσον αφορά τη στροφή του ανωτέρω σώματος γύρω από τους φορείς των διανυσμάτων βάσης  $\bar{i}_2$  και  $\bar{i}_3$ .

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \bar{i}_1 \\ \bar{e}_2 = \cos \varphi \bar{i}_2 + \sin \varphi \bar{i}_3 \\ \bar{e}_3 = -\sin \varphi \bar{i}_2 + \cos \varphi \bar{i}_3 \end{cases} \Rightarrow D_1(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.1)$$



Σχήμα 4.3: Μη αντιμεταθετικότητα διαδοχικών πεπερασμένων στροφών [62]

Είναι προφανές ότι οι διαδοχικές στροφές που υφίσταται ένα σώμα, προκειμένου να αποκτήσει ένα συγκεκριμένο τελικό προσανατολισμό για δεδομένες επιμέρους γωνίες στροφής, εν γένει δεν αντιμετωπίζονται, καθώς ο προκύπτων προσανατολισμός καθορίζεται όχι μόνο από το μέτρο των τελευταίων, αλλά και από τη σειρά εφαρμογής αυτών (Σχήμα 4.3). Αυτή η ιδιότητα είναι γνωστή ως μη-αντιμεταθετικότητα των στροφών (non-commutativity of rotations) και δεν ισχύει για απειροστές (infinitesimal rotations), παρά μόνο για πεπερασμένες στροφές (finite rotations) [63].



**Σχήμα 4.4: Αυθαίρετη στροφή ως αποτέλεσμα διαδοχικών στροφών επί τριών διαφορετικών επιπέδων [62]**

Οποιαδήποτε στροφή από μια διανυσματική βάση  $\mathcal{J} = (\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3)$  σε μια άλλη βάση  $\mathcal{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ , μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα τριών διαδοχικών στροφών γύρω από τρεις διαφορετικούς άξονες [64]. Στην αρχική θέση, το σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων ταυτίζεται με τη διανυσματική βάση  $\mathcal{J}$  (Σχήμα 4.4). Η πρώτη στροφή λαμβάνει χώρα γύρω από τον άξονα  $\bar{i}_3$  κατά γωνία  $\varphi$  (precession) και έπειτα από αυτήν το σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων ταυτίζεται με τη διανυσματική βάση  $\mathcal{A} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$ . Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο πίνακας των κατευθυνόντων συνημιτόνων που συνοδεύει την εν λόγω στροφή υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \bar{a}_1 = \cos \varphi \bar{i}_1 + \sin \varphi \bar{i}_2 \\ \bar{a}_2 = -\sin \varphi \bar{i}_1 + \cos \varphi \bar{i}_2 \\ \bar{a}_3 = \bar{i}_3 \end{cases} \Rightarrow D_3(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Εν συνεχεία το σώμα στρέφεται γύρω από τον άξονα  $\bar{a}_1$  κατά γωνία  $\theta$  (nutation) με αποτέλεσμα ο προσανατολισμός του να ταυτίζεται με αυτόν της διανυσματικής βάσης  $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$  και ακολούθως πραγματοποιείται η τρίτη και τελευταία στροφή του σώματος γύρω από τον άξονα  $\bar{b}_3$  κατά γωνία  $\psi$  (spin). Τελικά, το σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων ταυτίζεται με την αυθαίρετα επιλεγμένη διανυσματική βάση  $\mathcal{E}$ .



$$\begin{cases} \bar{b}_1 = \bar{a}_1 \\ \bar{b}_2 = \cos \theta \bar{a}_2 + \sin \theta \bar{a}_3 \\ \bar{b}_3 = -\sin \theta \bar{a}_2 + \cos \theta \bar{a}_3 \end{cases} \Rightarrow D_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \cos \psi \bar{b}_1 + \sin \psi \bar{b}_2 \\ \bar{e}_2 = -\sin \psi \bar{b}_1 + \cos \psi \bar{b}_2 \\ \bar{e}_3 = \bar{b}_3 \end{cases} \Rightarrow D_3(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Η σχέση μεταξύ των βάσεων  $\mathcal{J}$  και  $\mathcal{E}$  προκύπτει συνδυάζοντας κατάλληλα τις σχέσεις (4.2) έως (4.4). Για λόγους συντομίας τίθεται,  $S_\varphi = \sin \varphi$  και  $C_\varphi = \cos \varphi$  κ.λπ.

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = (C_\varphi C_\psi - S_\varphi C_\theta S_\psi) \bar{l}_1 + (S_\varphi C_\psi + C_\varphi C_\theta S_\psi) \bar{l}_2 + S_\theta S_\psi \bar{l}_3 \\ \bar{e}_2 = (-C_\varphi S_\psi - S_\varphi C_\theta C_\psi) \bar{l}_1 + (-S_\varphi S_\psi + C_\varphi C_\theta C_\psi) \bar{l}_2 + S_\theta C_\psi \bar{l}_3 \\ \bar{e}_3 = S_\varphi S_\theta \bar{l}_1 - C_\varphi S_\theta \bar{l}_2 + C_\theta \bar{l}_3 \end{cases} \quad (4.5)$$

Οι τρεις γωνίες στροφής  $\varphi, \theta, \psi$  καλούνται γωνίες Euler και ο πίνακας κατευθυνόντων συνημιτόνων εκπεφρασμένος συναρτήσει αυτών είναι:

$$D_{3-1-3} = \begin{bmatrix} C_\varphi C_\psi - S_\varphi C_\theta S_\psi & -C_\varphi S_\psi - S_\varphi C_\theta C_\psi & S_\varphi S_\theta \\ S_\varphi C_\psi + C_\varphi C_\theta S_\psi & -S_\varphi S_\psi + C_\varphi C_\theta C_\psi & -C_\varphi S_\theta \\ S_\theta S_\psi & S_\theta C_\psi & C_\theta \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Από τη σχέση (4.5) προκύπτει άμεσα ότι το μητρώο στροφής που μετασχηματίζει τη διανυσματική βάση  $\mathcal{J}$  στη βάση  $\mathcal{E}$  ισούται με τον πίνακα  $D_{3-1-3}^T$  και στο εξής θα συμβολίζεται ως  ${}^\mathcal{E}R_{\mathcal{J}}$ . Επιπλέον, όταν τα διανύσματα βάσης  $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$  και  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  είναι ανά ζεύγη γραμμικά ανεξάρτητα, οι αντίστοιχες βάσεις,  $\mathcal{J}$  και  $\mathcal{E}$ , είναι ορθογώνιες (orthogonal basis) και το μητρώο στροφής  ${}^\mathcal{E}R_{\mathcal{J}}$  είναι και αυτό ορθογώνιο [1], [47]. Συνεπώς, ο ανάστροφος  ${}^\mathcal{E}R_{\mathcal{J}}^T$  και ο αντίστροφος πίνακας  ${}^\mathcal{E}R_{\mathcal{J}}^{-1}$  του μητρώου στροφής  ${}^\mathcal{E}R_{\mathcal{J}}$  είναι μεταξύ τους ίσοι, ενώ επίσης ταυτίζονται με το μητρώο στροφής  ${}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{E}}$ :

$${}^\mathcal{E}R_{\mathcal{J}} = D_{3-1-3}^T \quad (4.7)$$

$${}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{E}} = {}^\mathcal{E}R_{\mathcal{J}}^{-1} = {}^\mathcal{E}R_{\mathcal{J}}^T = D_{3-1-3} \quad (4.8)$$

Στο πλαίσιο της ανάλυσης συστημάτων πολλαπλών σωμάτων, συχνά χρειάζεται να υπολογιστούν οι γωνίες Euler για ένα δεδομένο μητρώο στροφής. Υπό την προϋπόθεση ότι  $D_{32} \neq 0$ , βάσει του πίνακα κατευθυνόντων συνημιτόνων  $D_{3-1-3}$  προκύπτουν οι σχέσεις (4.9) έως (4.11). Αντίστοιχες σχέσεις για τον υπολογισμό των γωνιών Euler μπορούν να προκύψουν συναρτήσει των στοιχείων του μητρώου στροφής  ${}^\mathcal{E}R_{\mathcal{J}}$  αξιοποιώντας την ισότητα της σχέσης (4.7). Προκειμένου για την άρση της ασάφειας προσήμου που σχετίζεται με τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, υπολογίζονται τα ημίτονα και

τα συνημίτονα των γωνιών Euler, συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση  $\text{atan2}(y, x) = \tan^{-1}(y/x)$  για τον υπολογισμό των τελευταίων στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ .

$$\tan \psi = D_{31}/D_{32} \quad (4.9)$$

$$\sin \theta = D_{31} \sin \psi + D_{32} \cos \psi, \quad \cos \theta = D_{33} \quad (4.10)$$

$$\sin \varphi = D_{21} \cos \psi - D_{22} \sin \psi, \quad \cos \varphi = D_{11} \cos \psi - D_{12} \sin \psi \quad (4.11)$$

Για  $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ , ο πίνακας κατευθυνόντων συνημιτόνων λαμβάνει την ακόλουθη μορφή – σχέση (4.12) – από την οποία προκύπτει ότι οι γωνίες  $\psi$  και  $\varphi$  δε μπορούν να οριστούν ανεξάρτητα, αφού σύμφωνα με όσα έχουν ήδη αναφερθεί το μητρώο στροφής  $D$  περιγράφει μια επίπεδη στροφή κατά γωνία  $\varphi \pm \psi$ .

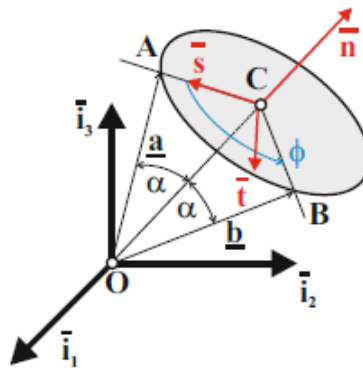
$$D = \begin{bmatrix} \cos(\varphi \pm \psi) & -\sin(\varphi \pm \psi) & 0 \\ \sin(\varphi \pm \psi) & \cos(\varphi \pm \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Αυτή η ιδιομορφία (singularity) που συνοδεύει τη χρήση των γωνιών Euler είναι γνωστή ως “gimbal lock” και ισοδυναμεί με την απώλεια ενός βαθμού ελευθερίας της στροφής, καθώς η μεταβολή των γωνιών  $\varphi$  και  $\psi$  επιδρά στον προσανατολισμό του εκάστοτε σώματος κατά μία μόνο διεύθυνση. Εξαιτίας του φαινομένου του “gimbal lock” μπορεί να υπεισέλθουν αριθμητικές αστάθειες ή/και σφάλματα στα διάφορα υπολογιστικά μοντέλα [65], γι’ αυτό αντί των γωνιών Euler χρησιμοποιείται συχνά μια πιο αφηρημένη μαθηματική περιγραφή της στροφής, τα λεγόμενα quaternions, η ανάλυση των οποίων ξεφεύγει από το πλαίσιο της παρούσας ΔΕ. Για περεταίρω εμβάθυνση σχετικά με τους διάφορους τρόπους μαθηματικής περιγραφής της στροφής ο αναγνώστης παραπέμπεται στις πηγές [47] και [62].

Οι γωνίες Euler ορίστηκαν παραπάνω ως οι γωνίες στροφής  $\varphi, \theta, \psi$  που εφαρμόζονται διαδοχικά γύρω από τα διανύσματα βάσης  $\bar{i}_3, \bar{a}_1, \bar{b}_3$  αντίστοιχα. Ο ανωτέρω ορισμός χαρακτηρίζεται ως «ακολουθία 3-1-3» και δεν είναι μονοσήμαντος. Πιο συγκεκριμένα, οι γωνίες Euler μπορούν να οριστούν με αρκετούς διαφορετικούς τρόπους. Η πρώτη στροφή μπορεί να λαμβάνει χώρα γύρω από οποιονδήποτε από τους άξονες  $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ , προσφέροντας τρεις επιλογές. Για τη δεύτερη και τρίτη στροφή υπάρχουν δύο πιθανές επιλογές, διότι δύο διαδοχικές στροφές δε μπορούν να πραγματοποιούνται γύρω από τον ίδιο άξονα. Συνολικά υπάρχουν  $3 \times 2 \times 2 = 12$  πιθανές ακολουθίες ορισμού των γωνιών Euler: 1-2-1, 1-2-3, 1-3-1, 1-3-2, 2-1-2, 2-1-3, 2-3-1, 2-3-2, 3-1-2, 3-1-3, 3-2-1 και 3-2-3.

Για λόγους πληρότητας αναφέρεται επίσης ότι οι γωνίες που ορίζονται από ακολουθίες που περιλαμβάνουν στροφές γύρω από τρεις διαφορετικούς άξονες (π.χ. 1-2-3) καλούνται γωνίες Cardan/Tait-Bryan, ενώ αντίστοιχα ο όρος «γωνίες Euler» συνήθως αναφέρεται σε ακολουθίες που περιλαμβάνουν στροφές γύρω από δύο διαφορετικούς άξονες (π.χ. 1-3-1). Στο πλαίσιο αυτής της ΔΕ, προκειμένου για τον ορισμό των γωνιών Euler χρησιμοποιείται αποκλειστικά η ακολουθία 3-1-3, η οποία ορίστηκε αναλυτικά παραπάνω.

Κλείνοντας αυτήν την παράγραφο, αξίζει να αναφερθεί ότι σύμφωνα με τον Euler (Euler's theorem on rotations) [66], οποιαδήποτε στροφή ενός απολύτως στερεού σώματος δε μεταβάλει τη θέση ενός σημείου αυτού, μπορεί να θεωρηθεί ως μια στροφή επί επιπέδου, κάθετου στον άξονα ενός κατάλληλα προσανατολισμένου μοναδιαίου διανύσματος  $\bar{n}$ , κατά γωνία  $\varphi$  (Σχήμα 4.5). Μάλιστα, σε αυτό το θεώρημα βασίζεται η εξαγωγή του μητρώου στροφής κατά Rodrigues – σχέση (3.23).

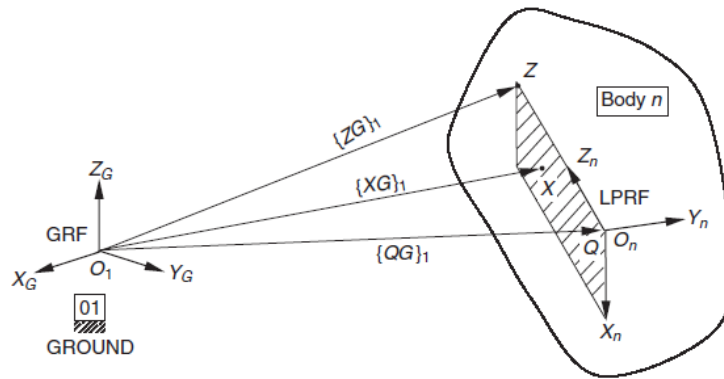


**Σχήμα 4.5: Στροφή διανύσματος κατά γωνία  $\phi$  περί του άξονα που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα  $n$  [62]**

#### 4.1.1.3 Προσδιορισμός σχετικού προσανατολισμού συστημάτων αναφοράς

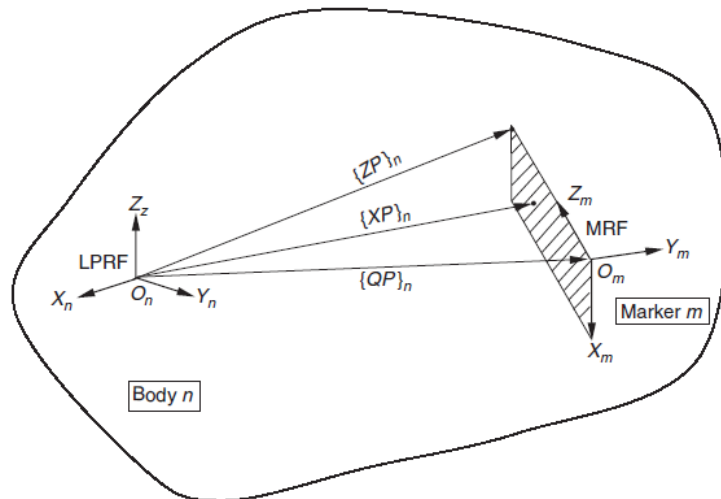
Κατά τη μοντελοποίηση ενός συστήματος πολλαπλών σωμάτων, απαιτείται ο καθορισμός του προσανατολισμού όλων των σωματόδετων (LPRF) και βοηθητικών (MRF) συστημάτων αναφοράς στην αρχική κατάσταση. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, τα σωματόδετα συστήματα αναφοράς προσανατολίζονται ως προς το αδρανειακό (GRF), ενώ τα βοηθητικά συστήματα ως προς το αντίστοιχο σωματόδετο σύστημα αναφοράς. Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, ο προσανατολισμός των σωμάτων μπορεί να καθοριστεί μέσω των γωνιών Euler, οι οποίες μάλιστα υπολογίζονται αυτόματα από τα περισσότερα σχεδιαστικά πακέτα CAD. Ωστόσο, οι γωνίες Euler ενδέχεται υπό συνθήκες να μην είναι διαθέσιμες. Στη συνέχεια περιγράφεται μια ιδιαίτερα χρήσιμη μέθοδος καθορισμού του σχετικού προσανατολισμού συστημάτων αναφοράς στην αρχική κατάσταση, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά σε τέτοιες περιπτώσεις.

Η μέθοδος αυτή αναφέρεται συχνά ως “x-point-z-point method” [4], καθώς προϋποθέτει γνώση των συντεταγμένων δύο σημείων που ανήκουν στο σύστημα αναφοράς του οποίου ο προσανατολισμός τίθεται προς προσδιορισμό (για λόγους συντομίας στο εξής το εν λόγω σύστημα θα αναφέρεται ως «νέο»). Συγκεκριμένα, το ένα εξ αυτών των σημείων βρίσκεται επί του άξονα  $z$ , ενώ το δεύτερο επί του επιπέδου  $xz$  του νέου συστήματος αναφοράς και ταυτόχρονα δεν κείται επί του άξονα  $z$  αυτού (σημεία  $Z$  και  $X$  αντίστοιχα, Σχήμα 4.6 και Σχήμα 4.7). Διευκρινίζεται ότι οι συντεταγμένες των ανωτέρω δύο σημείων δίνονται υπό τη μορφή διανυσμάτων θέσης, εκπεφρασμένων στο σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο προσανατολίζεται το νέο σύστημα (στο εξής, «αρχικό» σύστημα αναφοράς).



**Σχήμα 4.6: Προσανατολισμός ενός σωματόδετου συστήματος συντεταγμένων με τη μέθοδο x-point-z-point [4]**

Εφόσον οι συντεταγμένες της αρχής του νέου συστήματος αναφοράς είναι γνωστές, καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός των διανυσμάτων θέσης των ανωτέρω δύο σημείων ως προς την αρχή του νέου συστήματος αναφοράς, εκπεφρασμένα όμως στο αρχικό. Λαμβάνοντας το εξωτερικό γινόμενο των δύο τελευταίων διανυσμάτων προκύπτει ένα διάνυσμα με διεύθυνση που ταυτίζεται με αυτή του άξονα  $y$  του νέου συστήματος αναφοράς. Ακολουθώντας, λαμβάνεται το εξωτερικό γινόμενο του τελευταίου διανύσματος με το διάνυσμα θέσης του σημείου  $Z$  στο νέο σύστημα αναφοράς, εκπεφρασμένο στο αρχικό σύστημα και έτσι προκύπτει η διεύθυνση του νέου άξονα  $x$ . Προφανώς η προηγηθείσα ανάλυση εξακολουθεί να ισχύει όταν π.χ. δίνεται ένα σημείο επί του άξονα  $y$  και ένα άλλο σημείο επί του επιπέδου  $yz$  (εκτός του άξονα  $y$ ) του νέου συστήματος αναφοράς.



**Σχήμα 4.7: Προσανατολισμός ενός βοηθητικού συστήματος συντεταγμένων με τη μέθοδο x-point-z-point [4]**

Στο σημείο αυτό έχουν προσδιοριστεί τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, εκπεφρασμένα στο αρχικό σύστημα, καθένα από τα οποία είναι παράλληλο ως προς έναν

από τους άξονες του νέου συστήματος αναφοράς. Πολλές φορές χρειάζεται να εκφραστεί στο νέο αυτό σύστημα, ένα διάνυσμα με δεδομένες συντεταγμένες στο αρχικό ή αντίστροφα. Προκειμένου να γίνει αυτό απαιτείται ο υπολογισμός του πίνακα μεταφοράς από τη μια διανυσματική βάση στην άλλη (αλλαγή βάσης) [49].

Έστω ότι ζητείται το μητρώο που μετασχηματίζει την αρχική βάση στη νέα. Εξ ορισμού του πίνακα κατευθυνόντων συνημιτόνων προκύπτει ότι αυτός θα έχει ως στήλες τα κανονικοποιημένα διανύσματα βάσης της τελευταίας, εκπεφρασμένα στο αρχικό σύστημα αναφοράς [47]. Τα εν λόγω διανύσματα υπολογίζονται εύκολα έπειτα από εφαρμογή της μεθόδου “x-point-z-point”. Ως γνωστόν, ο πίνακας κατευθυνόντων συνημιτόνων ισούται με τον ανάστροφο του πίνακα μεταφοράς από την αρχική στη νέα βάση – σχέση (4.7), επομένως σύμφωνα με τα προηγούμενα ο τελευταίος θα έχει ως γραμμές τα κανονικοποιημένα διανύσματα βάσης της νέας βάσης, εκπεφρασμένα στο αρχικό σύστημα αναφοράς. Ο αντίστροφος του τελευταίου πίνακα ισούται με τον ανάστροφό αυτού καθώς και με τον πίνακα μεταφοράς από τη νέα βάση στην αρχική – σχέση (4.8), ενώ για τον υπολογισμό των γωνιών Euler μπορούν να εφαρμοστούν οι σχέσεις (4.9) έως (4.11).

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι κατά την ανάλυση συστημάτων πολλαπλών σωμάτων υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι γωνίες Euler δύο συστημάτων αναφοράς, έστω  $\mathcal{A}$  και  $\mathcal{B}$ , είναι γνωστές ως προς ένα τρίτο σύστημα, έστω  $\mathcal{C}$ , και ζητείται ο υπολογισμός του πίνακα μεταφοράς  ${}^{\mathcal{B}}R_{\mathcal{A}}$  [1]. Σε αυτήν την περίπτωση υπολογίζονται αρχικά οι πίνακες  ${}^{\mathcal{A}}R_{\mathcal{C}}$  και  ${}^{\mathcal{B}}R_{\mathcal{C}}$  συναρτήσει των δεδομένων γωνιών Euler – σχέσεις (4.6), (4.7) – και ο ζητούμενος πίνακας μεταφοράς υπολογίζεται με βάση τη σχέση (4.13). Στη συνέχεια μπορούν εύκολα να υπολογιστούν επίσης οι γωνίες Euler που αντιστοιχούν στον πίνακα  ${}^{\mathcal{B}}R_{\mathcal{A}}$ .

$${}^{\mathcal{B}}R_{\mathcal{A}} = {}^{\mathcal{B}}R_{\mathcal{C}} {}^{\mathcal{C}}R_{\mathcal{A}} = {}^{\mathcal{B}}R_{\mathcal{C}} {}^{\mathcal{A}}R_{\mathcal{C}}^T \quad (4.13)$$

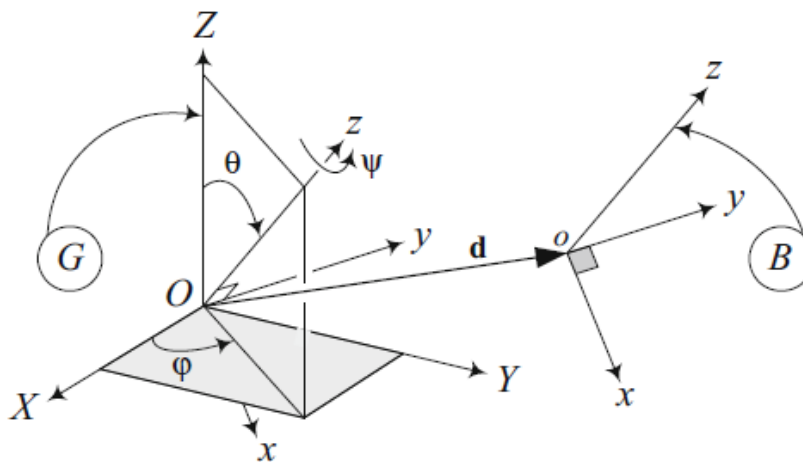
#### 4.1.1.4 Γενική κίνηση απολύτως στερεού σώματος

Έστω ένα απολύτως στερεό σώμα και  $B(oxyz)$ , το σωματόδετο σύστημα αναφοράς που αντιστοιχεί σε αυτό (Σχήμα 4.8). Το σώμα κινείται εντός του αδρανειακού συστήματος  $G(OXYZ)$ . Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να μεταβάλει τον προσανατολισμό του ως προς αυτό, ενώ το σημείο  $o$  του συστήματος  $B$  μετατοπίζεται ως προς την αρχή  $O$  του συστήματος  $G$ , όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Το διάνυσμα  $\{d\}_G$  είναι το διάνυσμα θέσης της αρχής του κινούμενου σωματόδετου συστήματος αναφοράς ως προς την αρχή του ακλόνητου αδρανειακού συστήματος. Οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου του απολύτως στερεού σώματος, έστω  $P$ , εκπεφρασμένες στο σωματόδετο και στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, σχετίζονται μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$\{r_P\}_G = {}^G R_B \{r_P\}_B + \{d\}_G \quad (4.14)$$

$$\{r_P\}_G = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}, \quad \{r_P\}_B = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}, \quad \{d\}_G = \begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

όπου,  $\{r_P\}_G$  και  $\{r_P\}_B$  τα διανύσματα θέσης του σημείου  $P$ , ως προς την αρχή του αδρανειακού και του σωματόδετου συστήματος αναφοράς αντίστοιχα. Το διάνυσμα  $\{d\}_G$  καλείται μετατόπιση ή μεταφορά του  $B$  ως προς το  $G$  και το μητρώο  ${}^G R_B$  μετασχηματίζει το διάνυσμα  $\{r_P\}_B$  στο  $\{r_P\}_G$  όταν  $\{d\}_G = \{0\}_G$  [1]. Ένας τέτοιος συνδυασμός μεταφοράς και αλλαγής προσανατολισμού (στροφής) ονομάζεται γενική κίνηση απολύτως στερεού σώματος (general motion of a rigid body/rigid body motion) και η τελική κατάσταση του σωματόδετου συστήματος αναφοράς  $B$  ύστερα από αυτήν εκφράζεται συναρτήσει της θέσης του σημείου  $o$  και του προσανατολισμού του  $B$ . Η ανάλυση της γενικής κίνησης απολύτως στερεού σώματος σε μια στροφική και μια μεταφορική κίνηση αποτελεί το συνηθέστερο τρόπο περιγραφής αυθαίρετων χωρικών μετατοπίσεων απολύτως στερεών σωμάτων. Για την απόδειξη της σχέσης (4.14), ο αναγνώστης παραπέμπεται στην πηγή [1].



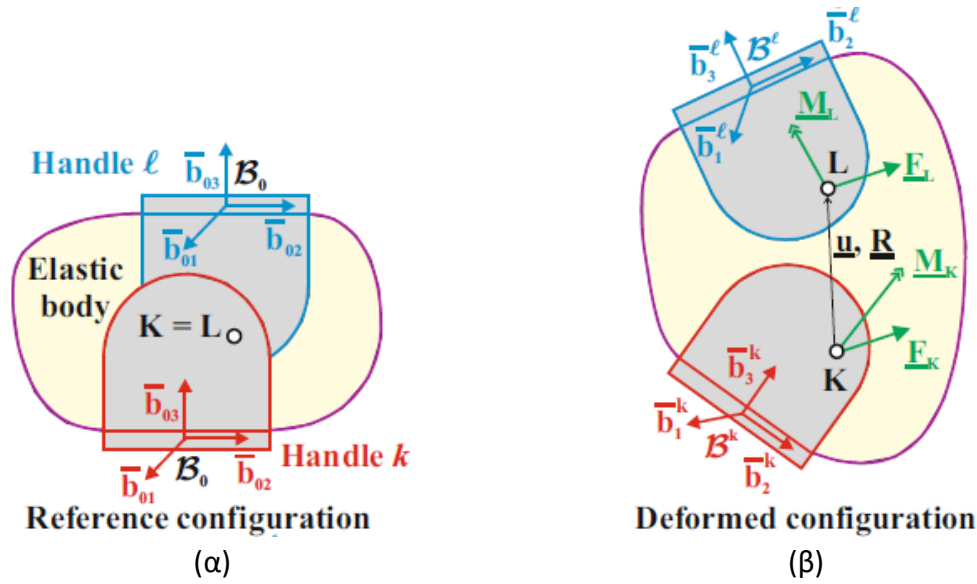
Σχήμα 4.8: Γενική κίνηση απολύτως στερεού σώματος [1]

#### 4.1.2 Μοντελοποίηση ελαστικής συμπεριφοράς στοιχείων σύνδεσης

Όλα τα συνήθη στοιχεία σύνδεσης που χρησιμοποιούνται για τη συναρμολόγηση συστημάτων ανάρτησης (Ενότητα 2.4), εμφανίζουν ελαστική παραμορφωσιακή συμπεριφορά. Τα μεν εύκαμπτα στοιχεία σύνδεσης παραμορφώνονται έντονα, τα δε δύσκαμπτα αναπτύσσουν ελαστικές παραμορφώσεις μικρού, αλλά συχνά μη αμελητέου πλάτους. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στον τρόπο ενσωμάτωσης της ελαστικότητας των διαφόρων στοιχείων σύνδεσης στην ανάλυση συστημάτων πολλαπλών σωμάτων.

Στο Σχήμα 4.9 φαίνεται ένα στοιχείο σύνδεσης στην ονομαστική (Σχήμα 4.9α) και σε μια ενδεικτική παραμορφωμένη κατάσταση (Σχήμα 4.9β). Το εν λόγω στοιχείο σύνδεσης μοντελοποιείται ως ένα τρισδιάστατο ελαστικό σώμα πεπερασμένων διαστάσεων, το οποίο συνδέεται με πλήρως άκαμπτο τρόπο σε δύο απολύτως στερεά σώματα, τις λεγόμενες λαβές (handles)  $k$  και  $\ell$ . Στην ονομαστική κατάσταση, τα σωματόδετα συστήματα συντεταγμένων των λαβών (markers) θεωρείται ότι έχουν κοινό προσανατολισμό, ο οποίος ταυτίζεται με αυτόν της διανυσματικής βάσης  $\mathcal{B}_0 = (\bar{b}_{01}, \bar{b}_{02}, \bar{b}_{03})$ , ενώ τα σημεία  $K$  και  $L$  αποτελούν υλικά σημεία επί των λαβών  $k$  και  $\ell$  αντίστοιχα και αρχικά συμπίπτουν. [62]





Σχήμα 4.9: Ονομαστική και παραμορφωμένη κατάσταση στοιχείου σύνδεσης [62]

Στην παραμορφωμένη κατάσταση, οι δύο λαβές έχουν μεταβεί σε νέες θέσεις και το ελαστικό σώμα έχει παραμορφωθεί όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.9β. Πλέον, τα σημεία  $K$  και  $L$  βρίσκονται σε διακριτές θέσεις και το διάνυσμα σχετικής μετατόπισης του σημείου  $L$  ως προς το σημείο  $K$  συμβολίζεται με  $\underline{u}$ . Όσον αφορά τον προσανατολισμό των λαβών στην παραμορφωμένη κατάσταση του στοιχείου σύνδεσης, είναι και αυτός διαφορετικός και οι διανυσματικές βάσεις από τις οποίες προσδιορίζεται είναι οι  $\mathcal{B}^k = (\bar{b}_1^k, \bar{b}_2^k, \bar{b}_3^k)$  και  $\mathcal{B}^\ell = (\bar{b}_1^\ell, \bar{b}_2^\ell, \bar{b}_3^\ell)$  για τις λαβές  $k$  και  $\ell$  αντίστοιχα.

Η παραμόρφωση του στοιχείου σύνδεσης προκύπτει λόγω των εφαρμοζόμενων δυνάμεων και ροπών σε αυτό. Έστω  $\underline{F}_k$  και  $\underline{M}_k$ , τα διανύσματα της ασκούμενης δύναμης και ροπής στο σημείο  $K$  και  $\underline{F}_\ell$  και  $\underline{M}_\ell$  τα αντίστοιχα διανύσματα όσον αφορά το σημείο  $L$ . Σύμφωνα με τον Τρίτο Νόμο του Νεύτωνα, τα ανωτέρω φορτία αποτελούν ζεύγος δυνάμεων δράσης-αντίδρασης, δηλαδή ισχύει ότι:

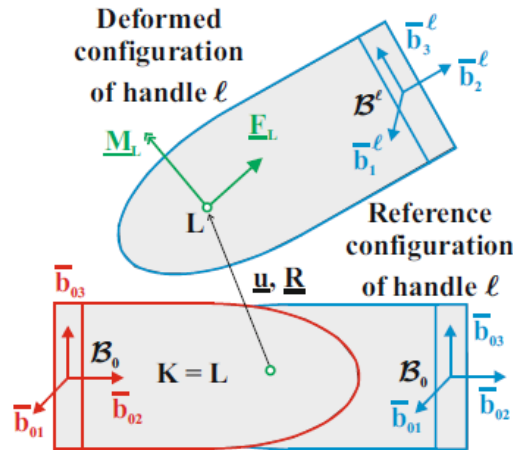
$$\underline{A}_k = - \begin{bmatrix} I & O \\ \tilde{u} & I \end{bmatrix} \underline{A}_\ell \quad (4.16)$$

$$\underline{A}_k = \begin{Bmatrix} \underline{F}_k \\ \underline{M}_k \end{Bmatrix}, \quad \underline{A}_\ell = \begin{Bmatrix} \underline{F}_\ell \\ \underline{M}_\ell \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

όπου  $I$ , ο μοναδιαίος και  $O$ , ο μηδενικός πίνακας. Στο σημείο αυτό διευκρινίζεται ότι το ελαστικό σώμα και οι λαβές που εισήχθησαν για την εξιδανίκευση του στοιχείου σύνδεσης δεν έχουν μάζα, επομένως κατά την κίνησή τους δεν αναπτύσσονται αδρανειακές δυνάμεις.

Η παραμορφωσιακή κατάσταση του ελαστικού σώματος εξαρτάται αποκλειστικά από τη σχετική μετατόπιση και στροφή μεταξύ των δύο λαβών, κατά συνέπεια μπορεί να θεωρηθεί ότι η μία εξ αυτών, έστω η  $k$ , διατηρείται ακίνητη. Σε αυτήν την περίπτωση η σχετική κίνηση της λαβής  $\ell$  ως προς τη λαβή  $k$  ταυτίζεται με την κίνηση της πρώτης όπως την αντιλαμβάνεται ένας ακίνητος παρατηρητής ευρισκόμενος επί της τελευταίας (Σχήμα 4.10, το ελαστικό σώμα δεν απεικονίζεται προς αποφυγή σύγχυσης). Η παραπάνω διαπίστωση διευκολύνει σημαντικά την ενσωμάτωση ελαστικών στοιχείων σύνδεσης στα συστήματα πολλαπλών σωμάτων όπως θα φανεί στη συνέχεια (Υποενότητα 4.2.2).



**Σχήμα 4.10: Ονομαστική και παραμορφωμένη κατάσταση στοιχείου σύνδεσης όταν η λαβή  $k$  διατηρείται ακίνητη [62]**

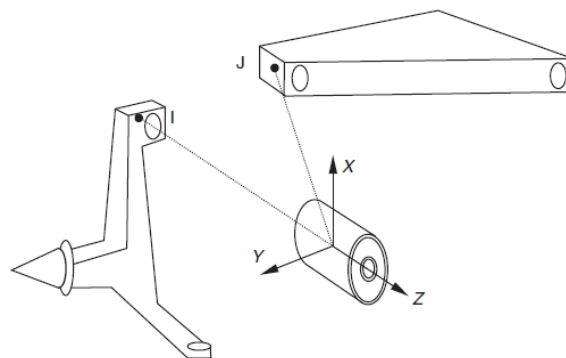
Σε πρώτη ανάλυση, η ελαστική συμπεριφορά ενός στοιχείου σύνδεσης μπορεί να αναπαρασταθεί από έξι ανεξάρτητες γραμμικές εξισώσεις, μέσω των οποίων τα φορτία  $\underline{F}_k, \underline{M}_k$  και  $\underline{F}_\ell, \underline{M}_\ell$  εκφράζονται συναρτήσει της σχετικής μετατόπισης των λαβών κατά την έννοια όλων των εμπλεκόμενων μεταφορικών και στροφικών βαθμών ελευθερίας. Έχει ήδη αναφερθεί ότι στην ονομαστική κατάσταση ενός στοιχείου σύνδεσης οι εν λόγω μετατοπίσεις θεωρούνται μηδενικές, ωστόσο δεν ισχύει απαραίτητα το ίδιο για τα αναπτυσσόμενα φορτία. Έτσι, εάν κατά τη συναρμολόγηση ενός συστήματος απαιτείται η εφαρμογή προέντασης σε κάποιο στοιχείο σύνδεσης, αυτή υπεισέρχεται στις ανωτέρω γραμμικές εξισώσεις μέσω του σταθερού όρου. Στην πραγματικότητα τέτοιου είδους προεντάσεις εισάγονται επιβάλλοντας αρχικές μεταφορικές ή στροφικές μετατοπίσεις μεταξύ των λαβών ενός στοιχείου σύνδεσης. Για παράδειγμα, σε ένα κυλινδρικό ελαστικό παρέμβυσμα (Σχήμα 4.11) αρκεί η ακτινική μετατόπιση του εσωτερικού μεταλλικού κυλίνδρου σε σχέση με τον εξωτερικό, ούτως ώστε να αναπτυχθεί ακτινική δύναμη προέντασης. Σε αυτήν την περίπτωση το ελαστικό σώμα του στοιχείου σύνδεσης είναι το ελαστομερές υλικό μεταξύ των μεταλλικών κυλίνδρων, ενώ υποθέτοντας ότι οι τελευταίοι συμπεριφέρονται ως απολύτως στερεά σώματα, μπορούν να θεωρηθούν ως λαβές. Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι δυνάμεις και οι ροπές που αναπτύσσονται από έναν ελαστικό σύνδεσμο (flexible joint) στη μόνιμη κατάσταση δίνονται από την ακόλουθη σχέση [4]:

$$\{F_{ij}\}_j = -[k]\{d_{ij}\}_j + \{f_{ij}\}_j \quad (4.19)$$

όπου,  $\{F_{ij}\}_j$  είναι το διάνυσμα των φορτίων που ασκούνται στη λαβή  $I$  από τη λαβή  $J$  (Σχήμα 4.11),  $[k]$ , το διαγώνιο μητρώο δυσκαμψίας,  $\{d_{ij}\}_j$ , το διάνυσμα των σχετικών μετατοπίσεων και στροφών της λαβής  $I$  ως προς τη λαβή  $J$  και  $\{f_{ij}\}_j$ , το διάνυσμα των φορτίων προέντασης που ασκούνται στη λαβή  $I$ . Υπενθυμίζεται ότι ο δείκτης εκτός των αγκυλών υποδηλώνει το σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο εκφράζονται τα αντίστοιχα διανύσματα. Η σχέση (4.19) γράφεται αναλυτικά ως εξής:

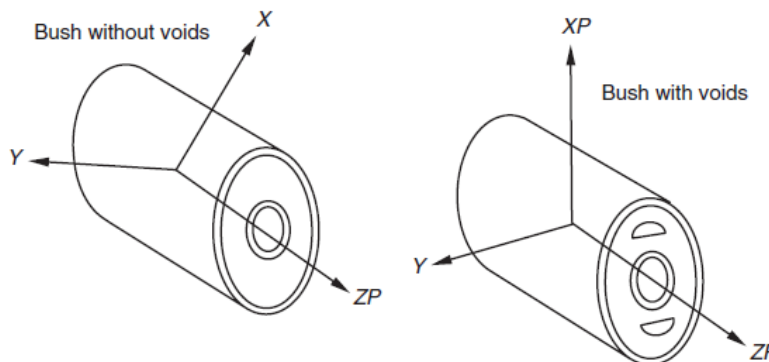
$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{tx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{ty} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{tz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν στην Ενότητα 2.4, η γεωμετρία και ο τρόπος κατασκευής των ελαστικών συνδέσμων παίζει καθοριστικό ρόλο όσον αφορά τα προκύπτοντα χαρακτηριστικά δυσκαμψίας αυτών. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 4.12 απεικονίζονται δύο κυλινδρικά ελαστικά παρεμβύσματα, το ένα εκ των οποίων φέρει δύο αντιδιαμετρικές αξονικές οπές (voids) σχεδόν ημικυκλικού σχήματος, ενώ το άλλο όχι. Προκειμένου για τον ορισμό των χαρακτηριστικών δυσκαμψίας του τελευταίου παρεμβύσματος αρκεί να γίνει διάκριση μεταξύ της αξονικής και ακτινικής κατεύθυνσης μέσω κατάλληλου βοηθητικού συστήματος αναφοράς, καθώς η δυσκαμψία επί του επιπέδου  $xy$  δε μεταβάλλεται συναρτήσει της γωνίας αζιμουθίου. Παρόλα αυτά, όσον αφορά τη δυσκαμψία του παρεμβύσματος που φέρει τις αντιδιαμετρικές αξονικές οπές, προφανώς χρειάζεται να γίνει επιπλέον διάκριση μεταξύ των κατευθύνσεων  $x$  και  $y$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.12.



Σχήμα 4.11: Σύνδεση φορέα τροχού και ανώτερου βραχίονα ελέγχου μέσω κυλινδρικού ελαστικού παρεμβύσματος [4]

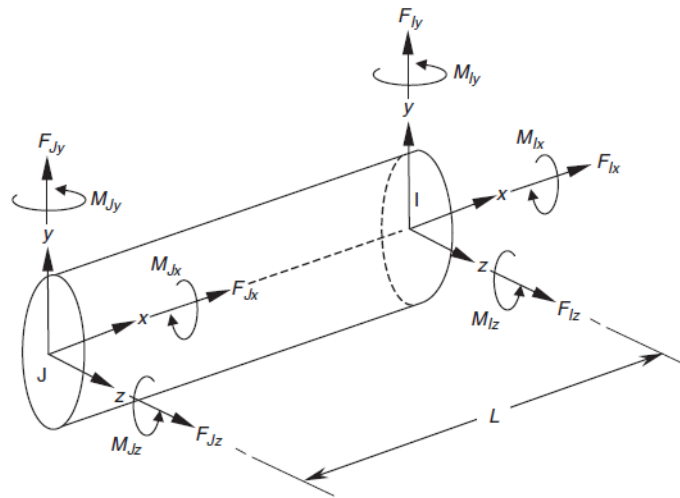
Στην πραγματικότητα, ακόμα και τα ελαστικά παρεμβύσματα απλής γεωμετρίας εμφανίζουν εξόχως μη γραμμική ελαστική συμπεριφορά εξαιτίας των μηχανικών ιδιοτήτων των ελαστομερών υλικών που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή τους. Επομένως, οι γραμμικές σχέσεις (4.20) δε μπορούν να περιγράψουν με ακρίβεια τη συσχέτιση μεταξύ των σχετικών μετατοπίσεων και των αναπτυσσόμενων φορτίων, παρά μόνο εντός ενός μικρού εύρους παραμόρφωσης γύρω από την ονομαστική κατάσταση του εκάστοτε ελαστικού συνδέσμου. Προκειμένου, λοιπόν, να ληφθούν επιτυχώς υπόψη τα μη γραμμικά χαρακτηριστικά δυσκαμψίας, απαιτείται γνώση της μεταβολής των τιμών των αναπτυσσόμενων φορτίων συναρτήσει της σχετικής μετατόπισης των λαβών κατά την έννοια κάθε βαθμού ελευθερίας ξεχωριστά, σε όλο το αξιοποιήσιμο εύρος κίνησης. Εν συνεχεία, τα δεδομένα αυτά παρέχονται στον επιλύτη (solver) σε πινακοποιημένη μορφή (look-up tables), ενώ για τον υπολογισμό τιμών στα ενδιάμεσα σημεία επιστρατεύονται διάφορες μέθοδοι παρεμβολής, π.χ. γραμμική, κυβική, splines κ.λπ.



**Σχήμα 4.12: Προσανατολισμός βοηθητικού συστήματος αναφοράς κυλινδρικού ελαστικού παρεμβύσματος [4]**

Ως στοιχεία δυσκαμψίας συστημάτων ανάρτησης συχνά χρησιμοποιούνται δοκοί υπό στρέψη ή κάμψη (Ενότητα 2.4). Για τη μοντελοποίηση των χαρακτηριστικών δυσκαμψίας των ανωτέρω στοιχείων στο πλαίσιο της ανάλυσης συστημάτων πολλαπλών σωμάτων, χρησιμοποιούνται μαθηματικές αναπαραστάσεις βασιζόμενες στη λογική των πεπερασμένων στοιχείων [4]. Συνήθεις εφαρμογές του ανωτέρω τρόπου μοντελοποίησης αποτελούν οι αντιστρεπτικές δοκοί και σπανιότερα οι ράβδοι διεύθυνσης/συγκράτησης ή οι βραχίονες ελέγχου, εάν το επιτρέπουν οι γεωμετρίες των αντίστοιχων τεμαχίων.

Σε περιπτώσεις δοκών όπου οι διαστάσεις της διατομής είναι μικρές συγκριτικά με την αξονική διάσταση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα πεπερασμένο στοιχείο δοκού υπό τις παραδοχές Euler-Bernoulli, δηλαδή ότι επίπεδα, αρχικά κάθετα στον άξονα της δοκού, παραμένουν επίπεδα και κάθετα ως προς αυτόν. Η χρήση των εν λόγω πεπερασμένων στοιχείων συστήνεται για τη μοντελοποίηση λιγυρών δοκών (slender beams) και στην περίπτωση που αυτές είναι κατασκευασμένες εξ ολοκλήρου από το ίδιο υλικό, ο λόγος λιγυρότητας (slenderness ratio) θα πρέπει να είναι μικρότερος του 1/15, ούτως ώστε η εγκάρσια διατμητική παραμόρφωση να μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα [67].



**Σχήμα 4.13: Πεπερασμένο στοιχείο τρισδιάστατης δοκού [4]**

Υπό τις παραδοχές Euler-Bernoulli, τα φορτία που εφαρμόζονται στον κόμβο  $I$  (Σχήμα 4.13) συσχετίζονται με τις μετατοπίσεις και τις στροφές μεταξύ των άκρων της δοκού μέσω της σχέσης (4.21) [68], όπου  $E$  και  $G$ , το μέτρο ελαστικότητας και διάτμησης του υλικού κατασκευής αντίστοιχα,  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ , οι ροπές αδράνειας της διατομής,  $A$ , το εμβαδόν διατομής της δοκού και  $L$ , το μήκος αυτής. Οι όροι  $d_x, d_y, d_z$  (αντίστοιχα  $r_x, r_y, r_z$ ) αναφέρονται στη σχετική μετατόπιση (αντίστοιχα στροφή) του κόμβου  $I$  ως προς τον κόμβο  $J$  κατά τους άξονες  $x, y, z$  και εκφράζονται στο σύστημα αναφοράς του κόμβου  $J$ .

Πεπερασμένο στοιχείο δοκού κατά Bernoulli-Euler:

$$\begin{bmatrix} F_{tx} \\ F_{ty} \\ F_{tz} \\ M_{tx} \\ M_{ty} \\ M_{tz} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{yy}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{yy}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_{yy}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{yy}}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{zz}}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x - L \\ d_y \\ d_z \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Όταν οι διαστάσεις της διατομής της δοκού είναι συγκρίσιμες με την αξονική διάσταση αυτής, η θεωρία Euler-Bernoulli δεν οδηγεί σε ακριβή αποτελέσματα. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιείται η ακριβέστερη θεωρία του Timoshenko, η οποία λαμβάνει επιπλέον υπόψιν τη διατμητική παραμόρφωση επί της διατομής της δοκού (transverse shear deformation). Για δοκούς κατασκευασμένες εξ ολοκλήρου από το ίδιο υλικό, η εν

λόγω θεωρία δίνει χρήσιμα αποτελέσματα για λόγους λιγυρότητας έως 1/8 [69]. Σύμφωνα με τη θεωρία του Timoshenko, τα φορτία που εφαρμόζονται στον κόμβο  $I$  (Σχήμα 4.13) συσχετίζονται με τις μετατοπίσεις και τις στροφές μεταξύ των άκρων της δοκού μέσω της σχέσης (4.22) [4]. Το τελευταίο μέρος του ορισμού των όρων του μητρώου δυσκαμψίας αφορά τους συντελεστές διόρθωσης της διατμητικής παραμόρφωσης κατά τους άξονες  $y$  και  $z$ ,  $A_{sy}$  και  $A_{sz}$ . Οι όροι  $Q_y$  και  $Q_z$  είναι οι πρώτες ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες  $y$  και  $z$  αντίστοιχα, ενώ οι όροι  $\ell_y$  και  $\ell_z$  συμβολίζουν τις διαστάσεις της διατομής της δοκού κατά τους ίδιους άξονες. Σημειώνεται επίσης ότι οι στροφές μεταξύ των άκρων του στοιχείου δοκού υποτίθενται σε κάθε περίπτωση μικρές, κατά συνέπεια η σειρά εφαρμογής αυτών δεν έχει σημασία (Παράγραφος 4.1.1.2, απειροστές στροφές). Όταν δε οι παραμορφώσεις της δοκού προσεγγίζουν το 10% του ονομαστικού της μήκους, η θεωρία του Timoshenko δεν περιγράφει με ακρίβεια τη συμπεριφορά αυτής [4].

Πεπερασμένο στοιχείο δοκού κατά Timoshenko:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 & 0 & k_{26} \\ 0 & 0 & k_{33} & 0 & k_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{35} & 0 & k_{55} & 0 \\ 0 & k_{26} & 0 & 0 & 0 & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x - L \\ d_y \\ d_z \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$k_{11} = \frac{EA}{L}, \quad k_{22} = \frac{12EI_{zz}}{L^3(1 + P_y)}, \quad k_{26} = -\frac{6EI_{zz}}{L^2(1 + P_y)}, \quad k_{33} = \frac{12EI_{yy}}{L^3(1 + P_z)}$$

$$k_{35} = \frac{6EI_{yy}}{L^2(1 + P_z)}, \quad k_{44} = \frac{GI_{xx}}{L}, \quad k_{55} = \frac{4 + P_zEI_{yy}}{L(1 + P_z)}, \quad k_{66} = \frac{4 + P_yEI_{zz}}{L(1 + P_y)}$$

$$P_y = \frac{12EI_{zz}A_{sy}}{GAL^2}, \quad P_z = \frac{12EI_{yy}A_{sz}}{GAL^2}$$

$$A_{sy} = \frac{A}{I_{yy}^2} \int_A \left( \frac{Q_y}{\ell_z} \right)^2 dA, \quad A_{sz} = \frac{A}{I_{zz}^2} \int_A \left( \frac{Q_z}{\ell_y} \right)^2 dA$$

Πολλές φορές απαιτείται ο υπολογισμός ισοδύναμων μητρώων δυσκαμψίας για τους ελαστικούς συνδέσμους και τα πεπερασμένα στοιχεία που περιλαμβάνονται σε ένα σύστημα πολλαπλών σωμάτων, προκειμένου για την κατάσταση των εξισώσεων ισορροπίας σε συστήματα αναφοράς με διαφορετικό προσανατολισμό από αυτόν των ανωτέρω στοιχείων δύναμης. Σε αυτές τις περιπτώσεις τα αρχικά μητρώα δυσκαμψίας πολλαπλασιάζονται από αριστερά και δεξιά με κατάλληλα μητρώα στροφής. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στις πηγές [68] και [70].



Κλείνοντας αναφέρεται ότι εάν μεταξύ των λαβών ενός στοιχείου σύνδεσης λαμβάνουν χώρα στροφές κατά μη απειροστές (μικρές) γωνίες, η μαθηματική περιγραφή της προκύπτουσας ελαστικής συμπεριφοράς γίνεται σημαντικά πιο σύνθετη, αφενός μεν λόγω της μη γραμμικής συμπεριφοράς των υλικών σε μεγάλα πλάτη παραμόρφωσης, κυρίως δε εξαιτίας της μη-αντιμεταθετικότητας των πεπερασμένων στροφών [62]. Για παράδειγμα, έστω ότι ένας ελαστικός σύνδεσμος υφίσταται τυχαίες πεπερασμένες γωνιακές μετατοπίσεις και ότι οι γωνίες Cardan κατά την ακολουθία 1-2-3 μεταξύ αρχικού και τελικού προσανατολισμού της μίας εκ των λαβών του ως προς την άλλη, είναι γνωστές. Βάσει αυτών μπορούν να υπολογιστούν οι γωνίες Cardan κατά οποιαδήποτε άλλη ακολουθία, οι οποίες στη γενική περίπτωση θα διαφέρουν από τις γωνίες Cardan κατά την ακολουθία 1-2-3. Αντικαθιστώντας τις εν λόγω γωνίες στις σχέσεις (4.20), υπολογίζονται διαφορετικά φορτία, αναπτυσσόμενα από τον ελαστικό σύνδεσμο για την ίδια παραμορφωσιακή κατάσταση, πράγμα αδύνατο.

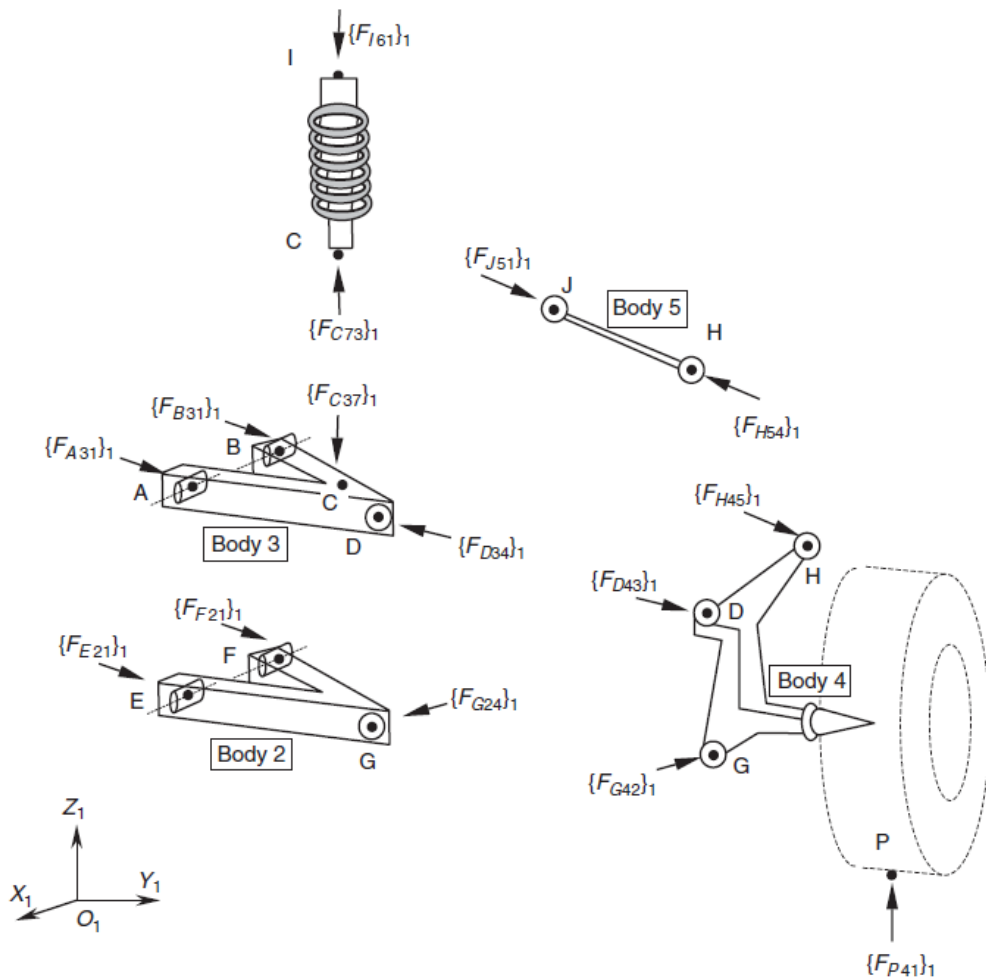
Για την αντιμετώπιση της ανωτέρω πρακτικής δυσκολίας κατά τη μοντελοποίηση ελαστικών συνδέσμων, έχουν αναπτυχθεί διάφορα μέτρα μη γραμμικής γωνιακής παραμόρφωσης (nonlinear deformation measures) που λαμβάνουν υπόψιν τη μη γραμμική κινηματική τέτοιου είδους προβλημάτων και δίνουν χρήσιμα αποτελέσματα όσον αφορά γωνιακές μετατοπίσεις έως και μετρίου μεγέθους (moderately large deformations) [62]. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι στο εγχειρίδιο χρήσης του λογισμικού ABAQUS, ενός ευρέως χρησιμοποιούμενου εμπορικού κώδικα μη γραμμικής ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων, τονίζεται ότι οι στροφικές μετατοπίσεις μεταξύ των λαβών των ελαστικών συνδέσμων θα πρέπει να είναι μικρές [71], περιορίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο τη χρησιμότητα των τελευταίων.

## 4.2 Ισορροπία ανάρτησης διπλών ψαλιδιών υπό στατική φόρτιση

Προκειμένου για την ανάλυση της ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς οποιουδήποτε μηχανισμού πρέπει να υπολογιστούν αφενός μεν τα φορτία που καταπονούν τα μέλη του, αφετέρου δε οι νέες θέσεις και ο προσανατολισμός των τελευταίων εξαιτίας της επιβαλλόμενης εξωτερικής φόρτισης. Στην περίπτωση του μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, η κατάστρωση των εξισώσεων στατικής ισορροπίας όταν αυτός βρίσκεται σε μια δεδομένη θέση, λαμβάνοντας όλα τα σώματα ως απολύτως στερεά και θεωρώντας ότι αυτά συνδέονται μεταξύ τους μέσω ανελαστικών σφαιρικών συνδέσμων, οδηγεί σε ένα σύστημα εξισώσεων με άπειρες λύσεις, αφού ο εν λόγω μηχανισμός χαρακτηρίζεται από υπερστατικότητα δευτέρου βαθμού, δηλαδή το πλήθος των αγνώστων είναι κατά 2 μεγαλύτερο από το πλήθος των διαθέσιμων εξισώσεων προς ταυτόχρονη επίλυση. Η άρση της ανωτέρω υπερστατικότητας μπορεί να γίνει είτε μέσω παραδοχών που οδηγούν σε αποτελέσματα περιορισμένης εμπιστοσύνης, είτε λαμβάνοντας υπόψιν κατά τη μοντελοποίηση την ελαστική συμπεριφορά των χρησιμοποιούμενων στοιχείων σύνδεσης ή και των μελών του μηχανισμού ανάρτησης, θεωρώντας δηλαδή ότι ο τελευταίος συνιστά ένα σύστημα πολλαπλών απολύτως στερεών ή γραμμικά ελαστικών σωμάτων, αντίστοιχα.

### 4.2.1 Εκφυλισμός σε ισοστατικό χωροδικτύωμα

Έστω ένας μηχανισμός ανάρτησης διπλών ψαλιδιών δεδομένης γεωμετρίας, όπως αυτή προέκυψε έπειτα από εφαρμογή αυθαίρετης κινηματικής διέγερσης στον τροχό. Υπό την παραδοχή χρήσης απολύτως στερεών σωμάτων και ιδανικών κινηματικών συνδέσμων για τη μοντελοποίηση του μηχανισμού, καταστρώνονται παρακάτω οι εξισώσεις ισορροπίας των μελών του όταν στο σημείο P ασκείται εξωτερική δύναμη  $\{F_{P41}\}_1$  (Σχήμα 4.14). Υπενθυμίζεται ότι με  $\{F_{P41}\}_1$  συμβολίζεται η δύναμη που ασκείται από το σώμα 1 (έδαφος) στο σώμα 4, εκπεφρασμένη στο σύστημα συντεταγμένων 1 (αδρανειακό). Η ανάλυση που ακολουθεί πραγματοποιείται για μηχανισμό ανάρτησης άμεσης επενέργησης, παρόλα αυτά εφόσον η γεωμετρία του πρώτου δε μεταβάλλεται (σταθερό μήκος IC), ισχύει αυτούσια όσον αφορά μηχανισμούς διπλών ψαλιδιών με ράβδο επενέργησης (σταθερός προσανατολισμός μοχλικών επενέργησης). Επιπλέον, διευκρινίζεται ότι το ίδιο βάρος των μελών της ανάρτησης θεωρείται αμελητέο.



Σχήμα 4.14: Διαγράμματα ελεύθερου σώματος των μελών ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργησης [4]

Στο Σχήμα 4.14 δίνονται τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος των μελών ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργησης. Σύμφωνα με τον Τρίτο Νόμο του Νεύτωνα, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις για τα ζεύγη δυνάμεων δράσης-αντίδρασης:

$$\{F_{D43}\}_1 = -\{F_{D34}\}_1 \quad (4.23)$$

$$\{F_{G42}\}_1 = -\{F_{G24}\}_1 \quad (4.24)$$

$$\{F_{H45}\}_1 = -\{F_{H54}\}_1 \quad (4.25)$$

Όλες οι συνδέσεις μεταξύ σωμάτων σε πρώτη φάση υποτίθεται ότι υλοποιούνται μέσω ιδανικών σφαιρικών αρθρώσεων, επομένως όσον αφορά τη ράβδο διεύθυνσης JH και το στοιχείο δυσκαμψίας CI ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\{F_{J51}\}_1 = -\{F_{H54}\}_1 \quad (4.26)$$

$$\{F_{C37}\}_1 = -\{F_{C73}\}_1 = \{F_{I61}\}_1 \quad (4.27)$$

Ως γνωστόν, ράβδοι που φέρουν σφαιρικές αρθρώσεις στα άκρα τους δύνανται να παραλαμβάνουν φορτία μόνο κατά την αξονική διεύθυνση, συνεπώς, με δεδομένη τη γεωμετρία του μηχανισμού, ο υπολογισμός των δυνάμεων  $\{F_{H54}\}_1$  και  $\{F_{C37}\}_1$  ανάγεται στον υπολογισμό των συντελεστών (scale factors)  $f_{S1}$  και  $f_{S2}$  αντίστοιχα:

$$\{F_{H54}\}_1 = f_{S1}\{R_{JH}\}_1 \quad (4.28)$$

$$\{F_{C37}\}_1 = f_{S2}\{R_{CI}\}_1 \quad (4.29)$$

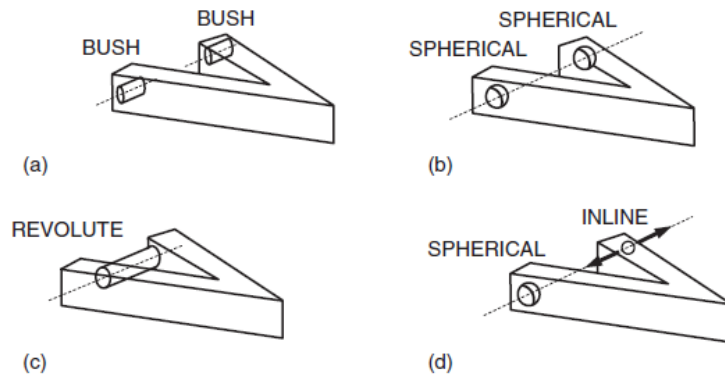
όπου  $\{R_{JH}\}_1$ , το διάνυσμα θέσης του σημείου J ως προς το σημείο H και  $\{R_{CI}\}_1$ , το διάνυσμα θέσης του σημείου C ως προς το σημείο I. Αξιοποιώντας όλες τις παραπάνω σχέσεις, οι άγνωστοι του προβλήματος περιορίζονται στους 20 και το διάνυσμα αυτών είναι:

$$\{x\} = [\{F_{A31}\}_1 \quad \{F_{B31}\}_1 \quad \{F_{D43}\}_1 \quad \{F_{E21}\}_1 \quad \{F_{F21}\}_1 \quad \{F_{G24}\}_1 \quad f_{S1} \quad f_{S2}]^T \quad (4.30)$$

Ο υπολογισμός των αγνώστων μπορεί να γίνει αποκλειστικά μέσω των εξισώσεων ισορροπίας των σωμάτων 2, 3 και 4, αφού οι αντίστοιχες εξισώσεις όσον αφορά τα σώματα 6 και 7 δε μπορούν να αξιοποιηθούν, εξαιτίας της χρήσης των συντελεστών  $f_{S1}$  και  $f_{S2}$  για την έκφραση των δυνάμεων  $\{F_{H54}\}_1$  και  $\{F_{C37}\}_1$  σύμφωνα με τις σχέσεις (4.28) και (4.29) [4]. Διαπιστώνεται αμέσως ότι οι διαθέσιμες εξισώσεις ισορροπίας είναι 18, δηλαδή κατά 2 λιγότερες από το πλήθος των αγνώστων μεταβλητών, συνεπώς απαιτούνται δύο ακόμα εξισώσεις για το μονοσήμαντο υπολογισμό των τελευταίων. Ουσιαστικά, υπό τις παραδοχές που έχουν γίνει ως τώρα, ο μηχανισμός ανάρτησης διπλών ψαλιδιών που φαίνεται στο Σχήμα 4.14 είναι ισοδύναμος με ένα δύο φορές υπερστατικό χωροδικτύωμα, το οποίο αποτελεί αδύνατο πρόβλημα στο πλαίσιο της Μηχανικής του Απολύτως Στερεού Σώματος [72]. Σε αυτό το σημείο χρειάζεται να γίνει μια πιο προσεκτική διερεύνηση του τρόπου έδρασης των βραχιόνων ελέγχου στο πλαίσιο.

Στο Σχήμα 4.15a, ο εικονιζόμενος βραχίονας ελέγχου εδράζεται στο πλαίσιο του οχήματος μέσω δύο ελαστικών συνδέσμων, διατηρώντας έτσι και τους 6 βαθμούς ελευθερίας του ως προς το τελευταίο, ενώ οι σχετικές μετατοπίσεις και στροφές μεταξύ των δύο σωμάτων ελέγχονται από τα χαρακτηριστικά δυσκαμψίας των χρησιμοποιούμενων στοιχείων σύνδεσης. Ο ανωτέρω τρόπος μοντελοποίησης της σύνδεσης πλαισίου-βραχίονα ελέγχου αναλύεται περαιτέρω στην επόμενη ενότητα και είναι κατάλληλος για τον υπολογισμό των τιμών των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίσεων των υπολοίπων μελών του μηχανισμού ανάρτησης με μεγάλη ακρίβεια.

Στο Σχήμα 4.15b, απεικονίζεται ένας βραχίονας ελέγχου, εδραζόμενος στο πλαίσιο μέσω δύο ανελαστικών σφαιρικών αρθρώσεων, καθένα εκ των οποίων δεσμεύει 3 βαθμούς ελευθερίας (Πίνακας 3-1) και ασκεί στο βραχίονα ελέγχου ισάριθμες αντιδράσεις στήριξης. Το πρόβλημα σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι ο βραχίονας ελέγχου ως απολύτως στερεό σώμα έχει 6 βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι θεωρητικά δεσμεύονται εξ ολοκλήρου. Προφανώς κάτι τέτοιο δεν ισχύει στην πραγματικότητα, αφού ο βραχίονας ελέγχου μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από την ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των σφαιρικών αρθρώσεων.



**Σχήμα 4.15: Πιθανοί τρόποι σύνδεσης βραχίονα ελέγχου στο πλαίσιο οχήματος [4]**

Το ίδιο πρόβλημα είχε αναφερθεί για πρώτη φορά στην Ενότητα 3.1, όπου έγινε λόγος για πλεονάζοντες περιορισμούς σε μηχανισμούς ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, στους οποίους άλλωστε οφείλεται και η υπερστατικότητα δευτέρου βαθμού που προέκυψε κατά την προηγηθείσα στατική ανάλυση. Συγκεκριμένα, κάθε βραχίονας ελέγχου σχετίζεται με έναν πλεονάζοντα κινηματικό περιορισμό, αφού οι ανελαστικές σφαιρικές αρθρώσεις που χρησιμοποιούνται για την έδρασή του στο πλαίσιο δεσμεύουν έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας από ότι θα έπρεπε (δέσμευση 6 αντί 5 βαθμών ελευθερίας απολύτως στερεού σώματος).

Κατά την πραγματοποίηση κινηματικής ανάλυσης του μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών στο προηγούμενο κεφάλαιο, έγινε άρση των ανωτέρω πλεονάζοντων περιορισμών χρησιμοποιώντας μια περιστροφική άρθρωση για την έδραση καθενός εκ των βραχιόνων ελέγχου στο πλαίσιο (Σχήμα 4.15c). Ωστόσο, όσον αφορά τον υπολογισμό των

αντιδράσεων στήριξης που ασκούνται στα μέλη της ανάρτησης, η προσέγγιση αυτή δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ευνόητους λόγους.

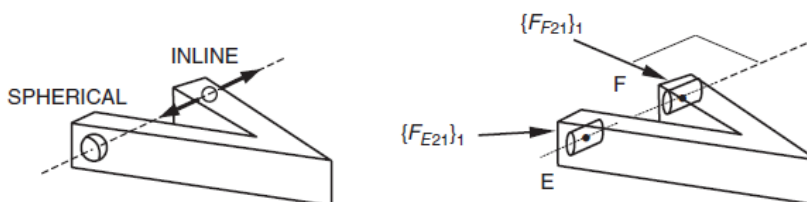
Έτσι, λοιπόν, για την άρση της υπερστατικότητας κατά τη στατική ανάλυση του μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, αξιοποιούνται οι κινηματικοί σύνδεσμοι που φαίνονται στο Σχήμα 4.15d, σύμφωνα με το οποίο ο βραχίονας ελέγχου εδράζεται στο πλαίσιο μέσω μιας σφαιρικής άρθρωσης και ενός πείρου (inline joint primitive). Διευκρινίζεται ότι ο ανωτέρω τρόπος μοντελοποίησης της έδρασης του βραχίονα ελέγχου επί του πλαισίου είναι προσεγγιστικός και δίνει αποτελέσματα ικανοποιητικής ακρίβειας εφόσον το πλάτος της διαμήκουσ συνιστώσας του εξωτερικά επιβαλλόμενου φορτίου,  $\{F_{P41}\}_1$ , είναι μικρό. Η σύνδεση πλαισίου-βραχίονα ελέγχου μέσω πείρου δεσμεύει 2 βαθμούς ελευθερίας του τελευταίου, διατηρώντας το αντίστοιχο σημείο έδρασης επί του άξονα του πείρου σε κάθε περίπτωση, ενώ όλο το φορτίο που ασκείται κατά τη διεύθυνση του ανωτέρω άξονα στο βραχίονα ελέγχου, παραλαμβάνεται από τη σφαιρική άρθρωση στο δεύτερο σημείο έδρασης αυτού στο πλαίσιο.

Επιστρέφοντας στο αρχικό πρόβλημα υπολογισμού των δυνάμεων που καταπονούν τα μέλη ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργησης, χωρίς βλάβη της γενικότητας της ανάλυσης, υποτίθεται ότι οι σφαιρικές αρθρώσεις στα σημεία B και F αντικαθίστανται από πείρους, οι άξονες των οποίων συμπίπτουν με τις ευθείες που διέρχονται από τα σημεία A, B και E, F αντίστοιχα. Κατ' αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι οι αντιδράσεις στήριξης στα σημεία B και F θα είναι κάθετες στον άξονα περιστροφής του αντίστοιχου βραχίονα ελέγχου, ο οποίος συμπίπτει με τον άξονα του σχετικού πείρου (Σχήμα 4.16). Οι παραπάνω συνθήκες εκφράζονται μαθηματικά αξιοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων ως ακολούθως:

$$\{F_{B31}\}_1 \cdot \{R_{AB}\}_1 = 0 \quad (4.31)$$

$$\{F_{F21}\}_1 \cdot \{R_{EF}\}_1 = 0 \quad (4.32)$$

Πλέον διατίθενται 20 γραμμικές εξισώσεις, ταυτόχρονη επίλυση των οποίων μπορεί να οδηγήσει στον υπολογισμό των 20 εμπλεκόμενων σε αυτές, αγνώστων μεταβλητών. Εν συνεχεία, δίνονται αναλυτικά οι εξισώσεις ισορροπίας για τα σώματα 2, 3 και 4 και η έκφραση του προκύπτοντος γραμμικού συστήματος εξισώσεων σε μητρική μορφή  $[A]\{x\} = \{b\}$ , προκειμένου για την επίλυση αυτού κάνοντας χρήση H/Y.



**Σχήμα 4.16: Διάγραμμα ελεύθερου σώματος βραχίονα ελέγχου έπειτα από προσεγγιστική άρση της υπερστατικότητας αυτού [4]**

Σώμα 2:

$$\begin{aligned}
 \Sigma\{F_2\}_1 = \{0\}_1 &\Rightarrow \{F_{E21}\}_1 + \{F_{F21}\}_1 + \{F_{G24}\}_1 = \{0\}_1 \\
 A_{1,10} = A_{1,13} = A_{1,16} &= 1, \quad b_1 = 0 \\
 A_{2,11} = A_{2,14} = A_{2,17} &= 1, \quad b_2 = 0 \\
 A_{3,12} = A_{3,15} = A_{3,18} &= 1, \quad b_3 = 0
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma\{M_{G2}\}_1 = \{0\}_1 &\Rightarrow \{R_{EG}\}_1 \times \{F_{E21}\}_1 + \{R_{FG}\}_1 \times \{F_{F21}\}_1 = \{0\}_1 \\
 A_{4,11} = -R_{EGz}, \quad A_{4,12} &= R_{EGy}, \quad A_{4,14} = -R_{FGz}, \quad A_{4,15} = R_{FGy} \\
 A_{5,10} = R_{EGz}, \quad A_{5,12} &= -R_{EGx}, \quad A_{5,13} = R_{FGz}, \quad A_{5,15} = -R_{FGx} \\
 A_{6,10} = -R_{EGy}, \quad A_{6,11} &= R_{EGx}, \quad A_{6,13} = -R_{FGy}, \quad A_{6,14} = R_{FGx} \\
 b_4 = b_5 = b_6 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Σώμα 3:

$$\begin{aligned}
 \Sigma\{F_3\}_1 = \{0\}_1 &\Rightarrow \{F_{A31}\}_1 + \{F_{B31}\}_1 + f_{S2}\{R_{CI}\}_1 + \{F_{D34}\}_1 = \{0\}_1 \\
 A_{7,1} = A_{7,4} = A_{7,7} &= 1, \quad A_{7,20} = R_{CIx}, \quad b_7 = 0 \\
 A_{8,2} = A_{8,5} = A_{8,8} &= 1, \quad A_{8,20} = R_{CIy}, \quad b_8 = 0 \\
 A_{9,3} = A_{9,6} = A_{9,9} &= 1, \quad A_{9,20} = R_{CIz}, \quad b_9 = 0
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma\{M_{D3}\}_1 = \{0\}_1 &\Rightarrow \\
 \{R_{AD}\}_1 \times \{F_{A31}\}_1 + \{R_{BD}\}_1 &\times \{F_{B31}\}_1 + \{R_{CD}\}_1 \times f_{S2}\{R_{CI}\}_1 = \{0\}_1 \\
 A_{10,2} = -R_{ADz}, \quad A_{10,3} &= R_{ADy}, \quad A_{10,5} = -R_{BDz}, \quad A_{10,6} = R_{BDy} \\
 A_{10,20} = -R_{CDz} R_{CIy} &+ R_{CDy} R_{CIz}, \quad b_{10} = 0 \\
 A_{11,1} = R_{ADz}, \quad A_{11,3} &= -R_{ADx}, \quad A_{11,4} = R_{BDz}, \quad A_{11,6} = -R_{BDx} \\
 A_{11,20} = R_{CDz} R_{CIx} - &R_{CDx} R_{CIz}, \quad b_{11} = 0 \\
 A_{12,1} = -R_{ADy}, \quad A_{12,2} &= R_{ADx}, \quad A_{12,4} = -R_{BDy}, \quad A_{12,5} = R_{BDx} \\
 A_{12,20} = -R_{CDy} R_{CIx} &+ R_{CDx} R_{CIy}, \quad b_{12} = 0
 \end{aligned} \tag{4.36}$$



Σώμα 4:

$$\begin{aligned}
 \Sigma\{F_4\}_1 = \{0\}_1 &\Rightarrow \{F_{P41}\}_1 - \{F_{D34}\}_1 - \{F_{G24}\}_1 - f_{S1}\{R_{JH}\}_1 = \{0\}_1 \\
 A_{13,7} = A_{13,16} = 1, \quad A_{13,19} = R_{JHx}, \quad b_{13} = F_{P41x} \\
 A_{14,8} = A_{14,17} = 1, \quad A_{14,19} = R_{JHy}, \quad b_{14} = F_{P41y} \\
 A_{15,9} = A_{15,18} = 1, \quad A_{15,19} = R_{JHz}, \quad b_{15} = F_{P41z}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma\{M_{G4}\}_1 = \{0\}_1 &\Rightarrow \\
 \{R_{PG}\}_1 \times \{F_{P41}\}_1 - \{R_{DG}\}_1 \times \{F_{D34}\}_1 - \{R_{HG}\}_1 \times f_{S1}\{R_{JH}\}_1 &= \{0\}_1 \Rightarrow \\
 \{R_{PG}\}_1 \times \{F_{P41}\}_1 - \{R_{DG}\}_1 \times \{F_{D34}\}_1 - f_{S1}(\{R_{HG}\}_1 \times \{R_{JH}\}_1) &= \{0\}_1 \\
 A_{16,8} = -R_{DGz}, \quad A_{16,9} = R_{DGy}, \quad A_{16,19} = -R_{HGz} R_{JHy} + R_{HGy} R_{JHz} \\
 b_{16} = -R_{PGz} F_{P41y} + R_{PGy} F_{P41z} \\
 A_{17,7} = R_{DGz}, \quad A_{17,9} = -R_{DGx}, \quad A_{17,19} = R_{HGz} R_{JHx} - R_{HGx} R_{JHz} \\
 b_{17} = R_{PGz} F_{P41x} - R_{PGx} F_{P41z} \\
 A_{18,7} = -R_{DGy}, \quad A_{18,8} = R_{DGx}, \quad A_{18,19} = -R_{HGy} R_{JHx} + R_{HGx} R_{JHy} \\
 b_{18} = -R_{PGy} F_{P41x} + R_{PGx} F_{P41y}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Κινηματικός περιορισμός πείρου B:

$$\begin{aligned}
 \{F_{B31}\}_1 \cdot \{R_{AB}\}_1 &= 0 \\
 A_{19,4} = R_{ABx}, \quad A_{19,5} = R_{ABy}, \quad A_{19,6} = R_{ABz}, \quad b_{19} = 0
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Κινηματικός περιορισμός πείρου F:

$$\begin{aligned}
 \{F_{F21}\}_1 \cdot \{R_{EF}\}_1 &= 0 \\
 A_{20,13} = R_{EFx}, \quad A_{20,14} = R_{EFy}, \quad A_{20,15} = R_{EFz}, \quad b_{20} = 0
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Διευκρινίζεται ότι όλα τα στοιχεία του μητρώου  $A$  για τα οποία δεν ορίστηκαν τιμές παραπάνω, τίθενται ίσα με μηδέν. Επιπλέον, το εν λόγω σύστημα εξισώσεων αφορά αναρτήσεις διπλών ψαλιδιών, ο μηχανισμός επενέργησης των οποίων συνδέεται στον ανώτερο βραχίονα ελέγχου. Εάν η επενέργηση επί των στοιχείων δυσκαμψίας και απόσβεσης λαμβάνει χώρα μέσω του κατώτερου βραχίονα ελέγχου, οι εξισώσεις που αφορούν τα σώματα 2 και 3 χρειάζεται να τροποποιηθούν κατάλληλα.

Ενδεικτικά αποτελέσματα εφαρμογής της προσεγγιστικής μεθόδου που περιγράφηκε, προκειμένου για τον υπολογισμό των δυνάμεων που καταπονούν τα μέλη ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών κατά την άσκηση εξωτερικού κάθετου φορτίου στο σημείο επαφής τροχού-οδοστρώματος, δίνονται στον ακόλουθο πίνακα (Πίνακας 4-1). Συγκεκριμένα, τα κάτωθι αποτελέσματα αφορούν ένα μηχανισμό ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, το σύστημα επενέργειας του οποίου συνδέεται στον κατώτερο βραχίονα ελέγχου, ενώ για την ευκολότερη πραγματοποίηση των σχετικών υπολογισμών έγινε υλοποίηση των εξισώσεων που συνιστούν το γραμμικό σύστημα προς επίλυση, στο περιβάλλον του λογισμικού MATLAB.

**Πίνακας 4-1: Αποτελέσματα στατικής ανάλυσης μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών στην ονομαστική του θέση υπό κατακόρυφη φόρτιση – Prom Racing, P20**

Δυνάμεις [N]	Συνιστώσες		
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
$F_{A31}$	19.812	29.817	8.003
$F_{B31}$	1.820	105.485	19.351
$F_{C37}$	-27.723	518.532	-607.423
$F_{D34}$	-21.631	-135.302	-27.354
$F_{E21}$	53.874	-284.010	9.968
$F_{F21}$	-47.540	-416.788	7.011
$F_{G24}$	21.389	182.267	590.349
$F_{H54}$	0.243	-46.964	-2.995
$F_{P41}$	0.000	0.000	560.000

Έχοντας υπολογίσει τις τιμές των δυνάμεων που ασκούνται στα σημεία ενδιαφέροντος του μηχανισμού ανάρτησης, μπορεί στη συνέχεια να πραγματοποιηθεί ανεξάρτητη ανάλυση της ελαστικής παραμορφωσιακής συμπεριφοράς κάθε μέλους αυτού, κάνοντας χρήση λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων. Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτουν οι νέες θέσεις των σημείων ενδιαφέροντος στο χώρο εξαιτίας της επιβαλλόμενης εξωτερικής φόρτισης στον τροχό, ωστόσο γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι ολοκληρώνοντας την ανωτέρω διαδικασία είναι δυνατή η εξαγωγή αποκλειστικά ποιοτικών συμπερασμάτων αναφορικά με την ενιαία ελαστοκινηματική συμπεριφορά του μηχανισμού ανάρτησης. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι οι ελαστικές παραμορφώσεις που υφίστανται τα μέλη αυτού, αφενός μεν επηρεάζουν τα αναπτυσσόμενα φορτία με αποτέλεσμα να μη μπορούν στην πραγματικότητα να αναλυθούν ξεχωριστά από αυτά, αφετέρου δε, είναι αδύνατος ο συνδυασμός των πρώτων προκειμένου για τον ακριβή υπολογισμό των νέων θέσεων των σημείων ενδιαφέροντος του μηχανισμού και ακολούθως, βάσει αυτών, των χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών του συστήματος ανάρτησης.

Για παράδειγμα, οι μετατοπίσεις των σημείων D και G των βραχιόνων ελέγχου που προκύπτουν έπειτα από ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων των τελευταίων, αξιοποιώντας τα φορτία που υπολογίστηκαν από την προηγηθείσα στατική ανάλυση, στη γενική περίπτωση δεν είναι συμβατές με τις μετατοπίσεις των αντίστοιχων σημείων επί του φορέα του τροχού. Με άλλα λόγια, είναι αδύνατη η συναρμολόγηση του μηχανισμού λαμβάνοντας όλα τα σώματα στην παραμορφωμένη τους κατάσταση, όπως αυτή προκύπτει έπειτα από ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, αξιοποιώντας τα φορτία που υπολογίστηκαν από την προηγηθείσα στατική ανάλυση. Ωστόσο, μελετώντας τις ελαστικές παραμορφώσεις που υφίσταται κάθε σώμα ξεχωριστά, είναι δυνατή η προσθήκη ή αφαίρεση υλικού όπου κρίνεται απαραίτητο, με σκοπό την αύξηση της δυσκαμψίας και τη μείωση του συνολικού βάρους του συναρμολογήματος της ανάρτησης.

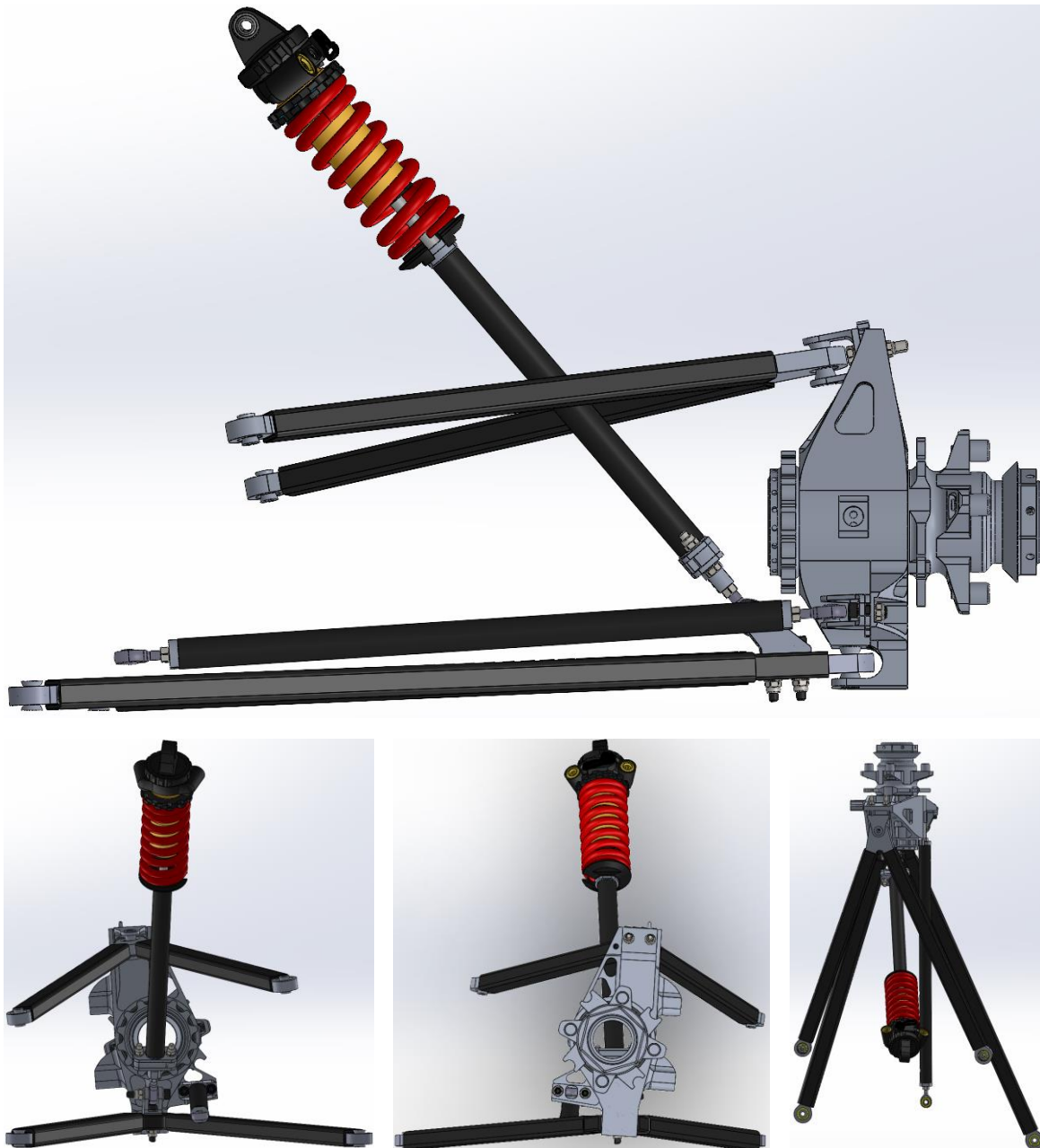
Πραγματοποιώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε σε αυτήν την ενότητα επαναληπτικά, ακολουθώντας δηλαδή μια προσέγγιση «δοκιμής και σφάλματος» (trial and error), καθίσταται δυνατή η βελτίωση της ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς του εκάστοτε μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών. Κλείνοντας, αξίζει να αναφερθεί ότι το σημαντικότερο πλεονέκτημα της παραπάνω μεθόδου ελαστοκινηματικής ανάλυσης δεν είναι άλλο από την απλότητα αυτής, αν και η ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων που προκύπτουν είναι περιορισμένη εξαιτίας των απλουστευτικών παραδοχών στις οποίες βασίζεται, ενώ επίσης δε λαμβάνεται υπόψιν η συνεισφορά της ελαστικής συμπεριφοράς των χρησιμοποιούμενων στοιχείων σύνδεσης.

#### 4.2.2 Σύστημα πολλαπλών απολύτως στερεών σωμάτων

Η μοντελοποίηση ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών ως σύστημα πολλαπλών σωμάτων είναι μια σύνθετη διαδικασία, η οποία παρουσιάζεται λεπτομερώς παρακάτω. Καθίσταται εξ αρχής σαφές, ότι σκοπός της ανάλυσης που ακολουθεί δεν είναι η εξοικείωση του αναγνώστη με τις πλέον προηγμένες και υπολογιστικά συμφέρουσες μαθηματικές διατυπώσεις τέτοιου είδους προβλημάτων (γι' αυτό άλλωστε υπάρχουν εξειδικευμένα συγγράμματα όπως τα [5], [62] και [73]). Αντιθέτως, επιδιώκεται η κατανόηση των φυσικών αρχών από τις οποίες αυτά διέπονται, διαμέσου εφαρμογής των πρώτων για τη διενέργεια ελαστοκινηματικής ανάλυσης ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών αξιοποιώντας το μαθηματικό υπόβαθρο που δόθηκε στην Ενότητα 4.1. Κατά συνέπεια, όσον αφορά τη μαθηματική διατύπωση του ανωτέρω προβλήματος, καταστρώνονται οι εξισώσεις Newton-Euler για κάθε μέλος του μηχανισμού ανάρτησης, θεωρούμενο ως απολύτως στερεό σώμα, συνοδευόμενες από ορισμένες επιπλέον εξισώσεις, σχετιζόμενες με τη μαθηματική υλοποίηση των εμπλεκόμενων κινηματικών περιορισμών (constraint equations).

Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για την παραμετροποίηση του συστήματος πολλαπλών σωμάτων που αναλύεται τόσο σε αυτήν, όσο και στην επόμενη ενότητα, αφορούν την ανάρτηση του εμπρόσθιου αριστερού τροχού του μονοθεσίου οχήματος P20 της Prom Racing (Σχήμα 4.17), τα αποτελέσματα κινηματικής ανάλυσης της οποίας παρατίθενται υπό μορφή διαγραμμάτων στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου (Σχήμα 3.35 έως Σχήμα

3.43, P20\_DW\_DRCT). Το εν λόγω σύστημα ανάρτησης προορίζεται για αγωνιστική χρήση και σχεδιάστηκε με γνώμονα την ελαχιστοποίηση της απόκλισης της κινηματικής από την ελαστοκινηματική απόκριση αυτού, αξιοποιώντας αποκλειστικά δύσκαμπτα στοιχεία για τη σύνδεση των μελών του και συγκεκριμένα σφαιρικά έδρανα με (threaded rod ends) ή χωρίς σπείρωμα (spherical bearings).



Σχήμα 4.17: Ανάρτηση διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργειας – Prom Racing, P20

Ιδανικά, θα έπρεπε να αναλυθεί επιπρόσθετα ένας μηχανισμός ανάρτησης με εύκαμπτα στοιχεία σύνδεσης, τα οποία, εφόσον υπάρχουν, καθορίζουν εν πολλοίς την ελαστοκινηματική συμπεριφορά του πρώτου. Ωστόσο, τέτοιου είδους μηχανισμοί χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο σε οχήματα που κατασκευάζονται από μεγάλες αυτοκινητοβιομηχανίες, με αποτέλεσμα τα δεδομένα που απαιτούνται για την ανάλυσή τους να συνιστούν εμπορικά μυστικά και η πρόσβαση σε αυτά να είναι αδύνατη. Επιπλέον, τα ελαστικά παρεμβύσματα παραμορφώνονται έντονα κατά την κινηματική ή/και δυναμική διέγερση της ανάρτησης, εισάγοντας την ανάγκη χρήσης περίπλοκων διατυπώσεων για την ακριβή μαθηματική περιγραφή της στροφικής δυσκαμψίας αυτών (Υποενότητα 4.1.2, πεπερασμένες στροφές μεταξύ λαβών στοιχείου σύνδεσης). Εξαιτίας των παραπάνω πρακτικών και τεχνικών δυσκολιών, η εφαρμοσιμότητα της ακόλουθης ανάλυσης περιορίζεται σε συστήματα ανάρτησης που φέρουν αποκλειστικά δύσκαμπτα στοιχεία σύνδεσης.

#### 4.2.2.1 Δεδομένα εισόδου: παραδοχές και προεπεξεργασία

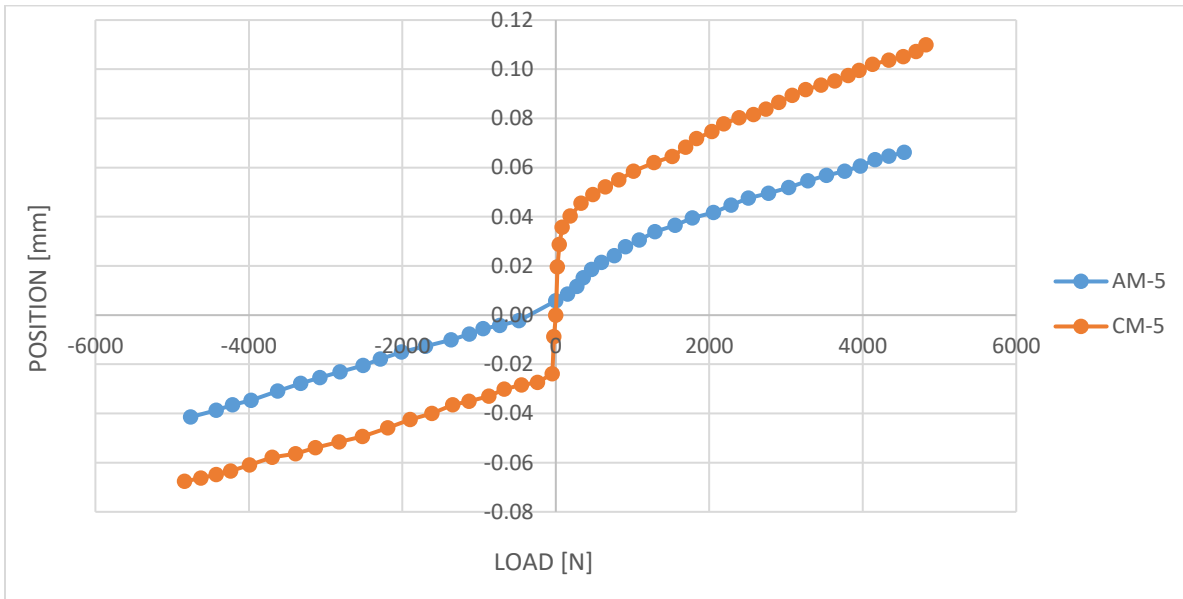
Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε για τα συστήματα πολλαπλών απολύτως στερεών σωμάτων στην αρχή αυτού του κεφαλαίου, αν και τα σώματα που ανήκουν σε αυτά λαμβάνονται ως απαραμόρφωτα, εντούτοις τα μεταξύ τους στοιχεία σύνδεσης, εύκαμπτα ή δύσκαμπτα, δύνανται να εμφανίζουν ελαστική συμπεριφορά. Όσον αφορά το μελετώμενο μηχανισμό ανάρτησης, αυτός φέρει σφαιρικά έδρανα της Aurora Bearing Company και ο Πίνακας 4-2 αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο σύνδεσης του πρώτου με τον τύπο σφαιρικού εδράνου που χρησιμοποιείται για την υλοποίησή αυτού στην πραγματικότητα. Στο εξής, προς αποφυγή σύγχυσης και για λόγους συμβατότητας με τα προηγούμενα, θα γίνεται αναφορά στα διάφορα σημεία και στοιχεία σύνδεσης του μηχανισμού ανάρτησης με βάση το Σχήμα 4.14.

**Πίνακας 4-2: Σφαιρικά έδρανα της Aurora Bearing Company για την υλοποίηση του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης**

Τύπος σφαιρικού εδράνου	Στοιχεία σύνδεσης
AM-6 (threaded rod end)	C
AM-5 (threaded rod end)	H, J
AOM-6 (spherical bearing)	I
COM-5 (spherical bearing)	A, B
COM-6 (spherical bearing)	D, E, F, G

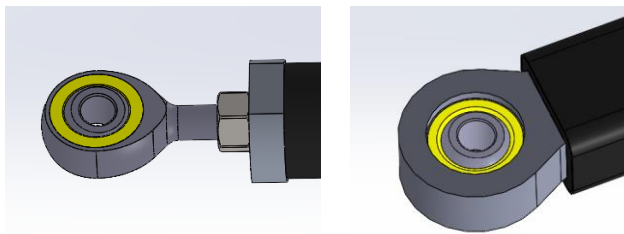
Τα χαρακτηριστικά δυσκαμψίας των σφαιρικών εδράνων που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση του εν λόγω μηχανισμού ανάρτησης δεν είναι διαθέσιμα απευθείας από την κατασκευάστρια εταιρεία. Ωστόσο, όσον αφορά τα σφαιρικά έδρανα με σπείρωμα, AM-5 και CM-5, έχουν πραγματοποιηθεί σχετικές πειραματικές δοκιμές στο πλαίσιο της δραστηριότητας της ομάδας Formula Student του πανεπιστημίου του Cornell, στις οποίες μάλιστα συμπεριλαμβάνονταν πολλά ακόμα σφαιρικά έδρανα του ίδιου κατασκευαστή

[74]. Συγκεκριμένα, πρόκειται για τυπικές δοκιμές μονοαξονικού εφελκυσμού, τα αποτελέσματα των οποίων φαίνονται στο Σχήμα 4.18. Διευκρινίζεται ότι από τις μετρούμενες τιμές μετατόπισης, έχει αφαιρεθεί η συνεισφορά της παραμόρφωσης των διαφόρων τμημάτων της μηχανής εφελκυσμού και της διάταξης αγκύρωσης των εδράνων σε αυτή (Σχήμα 4.20) βάσει απλών υπολογισμών Στατικής Μηχανικής.



**Σχήμα 4.18: Σχετική μετατόπιση συναρτήσει φορτίου – Aurora AM-5 & CM-5**

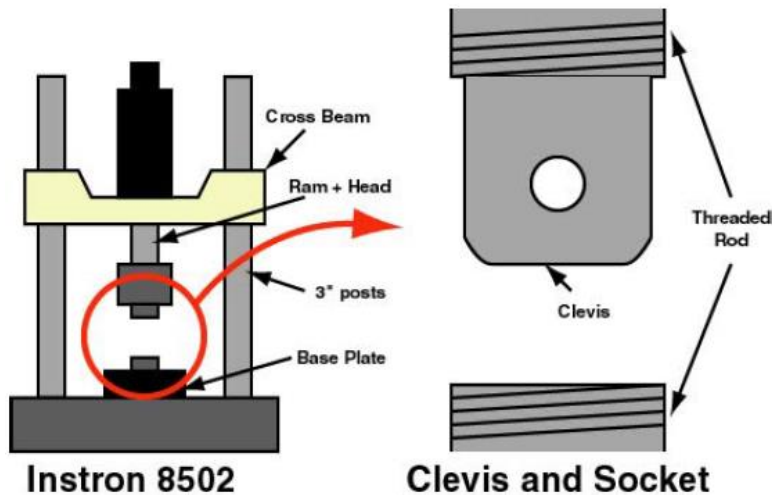
Με απλή εποπτεία των ανωτέρω πειραματικών αποτελεσμάτων διαπιστώνεται ότι η δυσκαμψία των σφαιρικών εδράνων AM-5 και CM-5 είναι μειωμένη όταν αυτά παραλαμβάνουν εφελκυστικά φορτία (θετικό πρόσημο φορτίου στα σχετικά διαγράμματα), γεγονός το οποίο πιθανώς οφείλεται στην παραμόρφωση της κοίλης σφαίρας προς ένα, επίσης κοίλο, ελλειψοειδές στερεό με μεγάλο άξονα κατά τη διεύθυνση της φόρτισης, εξαιτίας της τελευταίας. Από την άλλη πλευρά, κατά την άσκηση θλιπτικών φορτίων η δυσκαμψία των σφαιρικών εδράνων χωρίς σπείρωμα είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη με σπείρωμα, καθώς στην πρώτη περίπτωση οι παραμορφώσεις που σχετίζονται με το σπειροτομημένο τμήμα δεν υφίστανται, με τα έδρανα να τοποθετούνται π.χ. με σφικτή συναρμογή εντός κατάλληλων οπών που φέρουν τα συνδεδεμένα τεμάχια (Σχήμα 4.19).



**Σχήμα 4.19: Τρόποι αγκύρωσης σφαιρικών εδράνων μηχανισμού ανάρτησης**



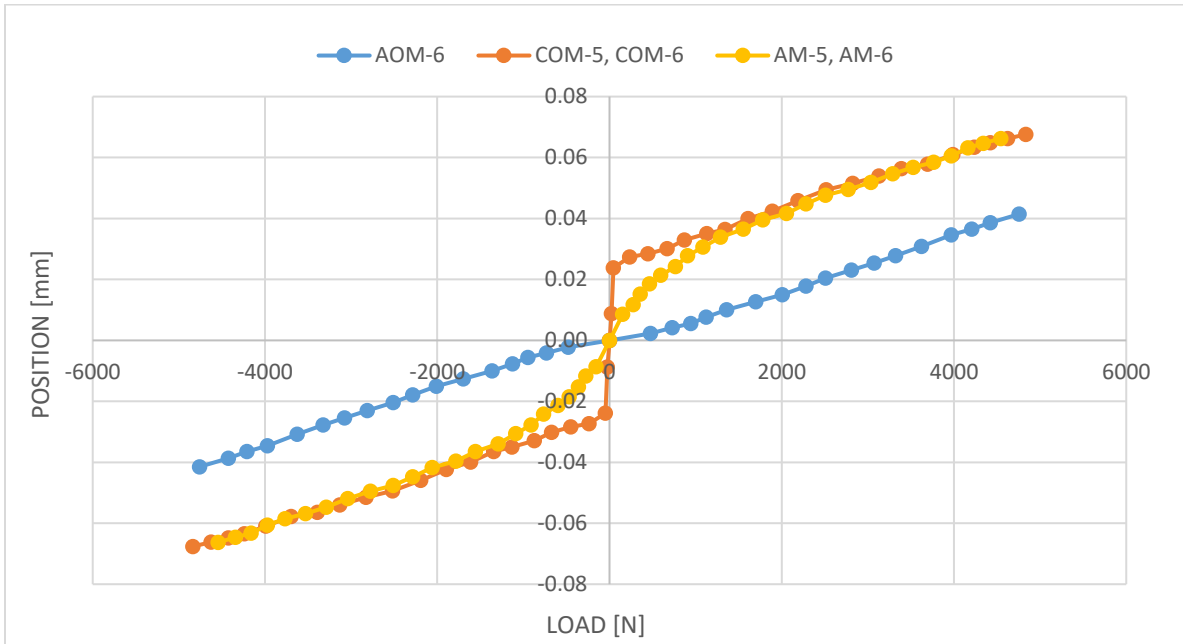
Συνεχίζοντας το σχολιασμό των πειραματικών αποτελεσμάτων (Σχήμα 4.18), αξίζει να αναφερθεί ότι στην περίπτωση του σφαιρικού εδράνου CM-5 η ακτινική χάρη είναι σαφώς μεγαλύτερη συγκριτικά με αυτή του εδράνου AM-5, όπως διαπιστώνεται από το απότομο άλμα της μετατόπισης υπό σχεδόν μηδενικό φορτίο στο σχετικό διάγραμμα. Αντιθέτως, η μετατόπιση της κοίλης ως προς την περιεχόμενη σε αυτή, σφαίρα του εδράνου AM-5 λαμβάνει χώρα με σχεδόν (δι)γραμμικό τρόπο ανεξάρτητα από το πλάτος του επιβαλλόμενου φορτίου. Άλλωστε η σειρά εδράνων A, σύμφωνα με τον κατασκευαστή, προορίζεται για χρήση σε εφαρμογές υψηλής ακρίβειας, ενώ η σειρά C χαρακτηρίζεται ως «γενικής χρήσης» και «οικονομική» με ό,τι αυτό συνεπάγεται για την κατασκευαστική διαδικασία.



**Σχήμα 4.20: Πειραματική διάταξη δοκιμών εφελκυσμού σφαιρικών εδράνων [74]**

Λόγω έλλειψης πειραματικών δεδομένων όσον αφορά τα χαρακτηριστικά δυσκαμψίας των σφαιρικών εδράνων AM-6, AOM-6, COM-5 και COM-6 (Πίνακας 4-2), γίνονται οι ακόλουθες παραδοχές: Τα έδρανα AM-6 και AOM-6 εμφανίζουν ελαστική συμπεριφορά ίδια με αυτή του εδράνου AM-5, ενώ τα έδρανα COM-5 και COM-6, ίδια με αυτήν του εδράνου CM-5. Επίσης, προκειμένου να ληφθεί υπόψιν στις ανωτέρω παραδοχές η διαφορετική δυσκαμψία των εδράνων AM-5 και CM-5 σε εφελκυσμό και θλίψη, τα σφαιρικά έδρανα χωρίς σπείρωμα (AOM-6, COM-5 και COM-6) υποτίθεται ότι εμφανίζουν την ελαστική συμπεριφορά των εδράνων AM-5 και CM-5, που αντιστοιχεί συγκεκριμένα στον κλάδο με τη μεγαλύτερη δυσκαμψία (δηλ. αυτόν που προκύπτει κατά την άσκηση θλιπτικού φορτίου στα εν λόγω έδρανα). Μάλιστα, λόγω συμμετρίας των σφαιρικών εδράνων χωρίς σπείρωμα, αυτά υποτίθεται ότι εμφανίζουν κοινή ελαστική συμπεριφορά προς όλες τις κατευθύνσεις φόρτισης. Όσον αφορά τα σφαιρικά έδρανα με σπείρωμα (AM-5, AM-6), κατά την αξονική διεύθυνση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αυτούσια η πειραματική καμπύλη φορτίου-μετατόπισης, ενώ για φορτίσεις κάθετες στον άξονα του σπειροτομημένου τμήματος η δυσκαμψία είναι σαφώς μικρότερη εξαιτίας των αναπτυσσόμενων καμπτικών ροπών. Εν τέλει, χρησιμοποιείται ανεξαρτήτως της κατεύθυνσης φόρτισης, το τμήμα της πειραματικής

καμπύλης των εδράνων AM-5 και CM-5 που εμφανίζει τη μικρότερη δυσκαμψία (αν και πιθανώς αυτή εξακολουθεί να είναι μεγαλύτερη από την πραγματική) και αντιστοιχεί σε εφελκυσμό. Το Σχήμα 4.21 συνοψίζει τα χαρακτηριστικά δυσκαμψίας που προκύπτουν σύμφωνα με τις προαναφερθείσες παραδοχές και πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για την παραμετροποίηση των μοντέλων συστημάτων πολλαπλών σωμάτων που αναπτύσσονται σε αυτήν και την επόμενη ενότητα.



**Σχήμα 4.21: Σχετική μετατόπιση συναρτήσει φορτίου σφαιρικών εδράνων Aurora AM-5, AM-6, AOM-6, COM-5 & COM-6 υπό παραδοχές**

Μια πιο ρεαλιστική μοντελοποίηση των σφαιρικών εδράνων του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης, θα περιλάμβανε επίσης φαινόμενα υστέρησης και τριβολογίας, για τα οποία διατίθενται, μάλιστα, ορισμένα πειραματικά δεδομένα όσον αφορά τα έδρανα AM-5 και CM-5 [74]. Παρόλα αυτά, τέτοιου είδους μοντελοποιήσεις προϋποθέτουν την εισαγωγή σύνθετων μαθηματικών διατυπώσεων και δεν εμπίπτουν στο πλαίσιο της παρούσας ΔΕ. Για περαιτέρω εμβάθυνση όσον αφορά την πλήρη μοντελοποίηση των ιδιοτήτων των διαφόρων στοιχείων σύνδεσης που απαντώνται σε συστήματα πολλαπλών σωμάτων, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην πηγή [44].

Αναφέρεται, επίσης, ότι η κατάσταση στην οποία αντιστοιχεί η γεωμετρία του μηχανισμού ανάρτησης στην αρχή της ελαστοκινηματικής ανάλυσης, επηρεάζει τόσο τα αποτελέσματα της τελευταίας, όσο και τον τρόπο ερμηνείας αυτών. Στην ανάλυση που ακολουθεί, η γεωμετρία στην αρχική κατάσταση αντιστοιχεί σε πλήρη έκταση του στοιχείου δυσκαμψίας ή ισοδύναμα σε άσκηση μηδενικού κάθετου φορτίου στον τροχό. Πιο συγκεκριμένα, η συναρμολόγηση του μελετώμενου συστήματος ανάρτησης λαμβάνει χώρα με το πλαίσιο

του οχήματος υποστηριζόμενο κατάλληλα ούτως ώστε οι τροχοί να μη φορτίζονται, συνεπώς οι μηχανισμοί ανάρτησης βρίσκονται σε πλήρη έκταση κατά τη διάρκεια της πρώτης. Εν συνεχεία, οι στηρίξεις του πλαισίου αφαιρούνται και κατά την επαφή τους με το έδαφος, οι τροχοί παραλαμβάνουν στατικό κάθετο φορτίο λόγω του βάρους της ανηρτημένης μάζας που αντιστοιχεί σε καθέναν από αυτούς. Έτσι, τα μέλη της ανάρτησης και τα μεταξύ τους στοιχεία σύνδεσης φορτίζονται, με αποτέλεσμα την παραμόρφωσή τους. Εάν η ελαστοκινηματική ανάλυση είχε ως αφετηρία την ονομαστική γεωμετρία του μηχανισμού, χωρίς την εφαρμογή αντίστοιχης στατικής φόρτισης στον τροχό, οι ανωτέρω παραμορφώσεις δε θα συμπεριλαμβάνονταν στους μετέπειτα υπολογισμούς οδηγώντας σε εσφαλμένα αποτελέσματα. Προκειμένου για τον προσδιορισμό της γεωμετρίας του μελετώμενου μηχανισμού σε πλήρη έκταση, μπορεί να πραγματοποιηθεί κινηματική ανάλυση με αφετηρία την ονομαστική του θέση (Πίνακας 4-3), καθώς οι φορτίσεις και οι παραμορφώσεις που υφίστανται τα μέλη και τα στοιχεία σύνδεσης αυτού κατά τη συναρμολόγηση με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω, οφείλονται αποκλειστικά στο ίδιο βάρος του συστήματος ανάρτησης και μπορούν να αμεληθούν.

**Πίνακας 4-3: Συντεταγμένες σημείων ενδιαφέροντος μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών στην ονομαστική θέση και σε πλήρη έκταση έπειτα από κινηματική ανάλυση**

Σημείο	Ονομαστική θέση			Μηχανισμός σε πλήρη έκταση		
	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]
<b>A</b>	120.00	248.00	50.32	120.00	248.00	50.32
<b>B</b>	-130.00	258.00	19.32	-130.00	258.00	19.32
<b>C</b>	-4.14	527.00	-57.68	-3.96	528.62	-82.30
<b>D</b>	-25.00	561.00	88.00	-21.49	564.68	60.85
<b>E</b>	190.00	130.00	-94.68	190.00	130.00	-94.68
<b>F</b>	-130.00	166.50	-94.68	-130.00	166.50	-94.68
<b>G</b>	-7.00	576.00	-77.00	-6.97	576.25	-104.77
<b>H</b>	38.00	566.00	-49.00	38.60	566.77	-77.52
<b>I</b>	10.83	247.00	270.32	10.83	247.00	270.32
<b>J</b>	40.00	179.00	-73.68	40.00	179.00	-73.68
<b>P</b>	0.00	619.00	-199.68	-2.53	616.70	-228.43
<b>K</b>	0.00	526.29	0.00	1.61	528.13	-26.92
<b>L</b>	0.00	619.00	0.00	1.69	620.82	-28.83

Για λόγους πληρότητας αξίζει να αναφερθεί ότι όσον αφορά συστήματα ανάρτησης που φέρουν εύκαμπτα στοιχεία σύνδεσης, π.χ. κυλινδρικά ελαστικά παρεμβύσματα, τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Το μεγαλύτερο τμήμα της συναρμολόγησης τέτοιων μηχανισμών λαμβάνει χώρα υπό μηδενικό κάθετο φορτίο στους τροχούς, παρόλα αυτά η ροπή σύσφιξης των κοχλιών που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση των διαφόρων συνδέσεων μέσω κυλινδρικών ελαστικών παρεμβυσμάτων, εφαρμόζεται αφού οι τροχοί μεταβούν στην ονομαστική τους θέση λόγω άσκησης της αντίστοιχης στατικής φόρτισης.

Τα παραπάνω αποσκοπούν στην ανακούφιση τυχόν ροπών προέντασης που θα αναπτύσσονταν γύρω από την αξονική διεύθυνσή των κυλινδρικών ελαστικών παρεμβυσμάτων κατά τη μετάβαση του μηχανισμού στην ονομαστική του θέση, εάν η ροπή σύσφιξης των σχετικών κοχλιών εφαρμοζόταν με τον τελευταίο να βρίσκεται σε πλήρη έκταση. Έχει ήδη αναφερθεί ότι η δυσκαμψία των εν λόγω στοιχείων σύνδεσης που σχετίζεται με την αξονική στροφή είναι μειωμένη, συνεπώς η αναπτυσσόμενη ροπή προέντασης σε ένα τέτοιο σενάριο θα ήταν μικρή. Ωστόσο, η ύπαρξη αυτής συμβάλει στη μείωση της διάρκειας ζωής των ελαστικών παρεμβυσμάτων και πρέπει να αποφεύγεται. Στο πλαίσιο της ανάλυσης συστημάτων πολλαπλών σωμάτων, η ανωτέρω ιδιομορφία μπορεί να ληφθεί υπόψιν επιλέγοντας την ονομαστική γεωμετρία του μηχανισμού ως αρχική και εφαρμόζοντας κατάλληλα φορτία προέντασης μεταξύ των λαβών των στοιχείων σύνδεσης, ο υπολογισμός των οποίων μπορεί να γίνει μέσω ξεχωριστής ανάλυσης με την ίδια τοπολογία συστήματος. Διευκρινίζεται ότι τα ανωτέρω φορτία προέντασης μπορούν να σχετίζονται με όλους τους σχετικούς βαθμούς ελευθερίας, πλην της στροφής γύρω από την αξονική διεύθυνση του εκάστοτε κυλινδρικού ελαστικού παρεμβύσματος.

Προκειμένου για τη μαθηματική περιγραφή ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών ως σύστημα πολλαπλών σωμάτων, απαιτείται ο προσδιορισμός του προσανατολισμού των μελών αυτού στο χώρο, στην αρχική κατάσταση. Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, ο προσανατολισμός ενός σώματος μπορεί να προσδιοριστεί μέσω των γωνιών Euler του σωματόδετου (LPRF) ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (GRF), το οποίο, στο πλαίσιο της παρούσας ανάλυσης, ταυτίζεται με το σύστημα συντεταγμένων που ορίστηκε στο εισαγωγικό τμήμα της Ενότητας 2.2.

Εφόσον η γεωμετρία στην αρχική κατάσταση δίνεται αποκλειστικά μέσω των συντεταγμένων των σημείων ενδιαφέροντος του μηχανισμού σε πλήρη έκταση (Πίνακας 4-3), οι γωνίες Euler των σωματόδετων συστημάτων αναφοράς δεν είναι εκ των προτέρων γνωστές. Ο υπολογισμός τους μπορεί γίνει αξιοποιώντας τη μέθοδο που παρουσιάστηκε παραπάνω υπό την ονομασία “x-point-z-point method” για τον προσδιορισμό των διανυσμάτων βάσης των σωματόδετων συστημάτων αναφοράς, εκπεφρασμένων στο αδρανειακό σύστημα, ενώ, ως γνωστόν, ο πίνακας μεταφοράς από το τελευταίο στο εκάστοτε σωματόδετο σύστημα αναφοράς έχει ως γραμμές τα ανωτέρω διανύσματα βάσης, αφού αυτά κανονικοποιηθούν. Κατά συνέπεια, οι γωνίες Euler που αντιστοιχούν στα μέλη του μηχανισμού ανάρτησης υπολογίζονται βάσει του αντίστοιχου πίνακα μεταφοράς διαμέσου των σχέσεων (4.9) έως (4.11), λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο τελευταίος ισούται με τον ανάστροφο του πίνακα κατευθυνόντων συνημιτόνων (Πίνακας 4-4).

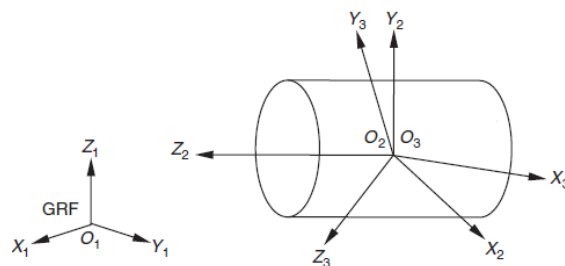
Σημειώνεται ότι οι προκύπτουσες γωνίες Euler προφανώς εξαρτώνται από την επιλογή των σημείων που χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή της μεθόδου “x-point-z-point”, δηλαδή η επιλογή διαφορετικών σετ σημείων για την εφαρμογή της τελευταίας μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικές γωνίες Euler όσον αφορά το ίδιο σώμα. Στην πραγματικότητα, ο προσανατολισμός αυτού στο χώρο παραμένει σταθερός, απλώς συσχετίζεται με

σωματόδετα συστήματα αναφοράς, ο προσανατολισμός των οποίων διαφέρει σε κάθε περίπτωση (Σχήμα 4.22). Γενικά, ο προσανατολισμός των σωματόδετων συστημάτων αναφοράς ως προς τα αντίστοιχα σώματα στην αρχική κατάσταση, πρέπει να γίνεται με γνώμονα την αποφυγή εκδήλωσης του φαινομένου “gimbal lock” (Παράγραφος 4.1.1.2), ενώ καλό θα ήταν, επίσης, να διευκολύνει τον καθορισμό της ευρύτερης τοπολογίας του εκάστοτε συστήματος πολλαπλών σωμάτων, π.χ. επιτρέποντας την αξιοποίηση των πρώτων ως αναφορά για τον καθορισμό του προσανατολισμού βοηθητικών συστημάτων αναφοράς χωρίς να χρειάζεται εφαρμογή της μεθόδου “x-point-z-point”, αλλά μέσω διαδοχικών στροφών τους στο επίπεδο (planar rotations).

**Πίνακας 4-4: Γωνίες Euler μελών μηχανισμού ανάρτησης στην αρχική κατάσταση**

Σώμα	Γωνίες Euler		
	$\phi$ [deg]	$\theta$ [deg]	$\psi$ [deg]
2	-6.515	1.373	0.000
3	-54.751	8.889	52.793
4	-45.790	1.694	45.728
5	0.000	0.568	0.207
6	3.007	38.670	-2.349
7	3.007	38.670	-2.349

Όσον αφορά το συγκεκριμένο μηχανισμό ανάρτησης, ο καθορισμός προσανατολισμού για τα περισσότερα βοηθητικά συστήματα αναφοράς στην αρχική κατάσταση δεν είναι απαραίτητος, καθώς η χρησιμότητα αυτών περιορίζεται στον υπολογισμό της σχετικής θέσης των λαβών των διαφόρων στοιχείων σύνδεσης. Ειδικότερα, τα σφαιρικά έδρανα που αξιοποιούνται για τη σύνδεση των μελών του μηχανισμού δεν αναπτύσσουν φορτία εξαιτίας της αλλαγής προσανατολισμού μεταξύ της κοίλης και της περιεχόμενης σε αυτή, σφαίρας, αρκεί, λοιπόν, ο καθορισμός της θέσης της αρχής των βοηθητικών συστημάτων αναφοράς που αντιστοιχούν στις λαβές των πρώτων. Από τα όσα ειπώθηκαν παραπάνω εξαιρούνται τα έδρανα C, H και I, διότι ο καθορισμός προσανατολισμού των λαβών τους είναι απαραίτητος προκειμένου για τη μαθηματική διατύπωση κινηματικών περιορισμών, όπως θα φανεί στη συνέχεια.



**Σχήμα 4.22: Αντιστοίχιση προσανατολισμού σώματος σε διαφορετικά σωματόδετα συστήματα αναφοράς [4]**

Οι αρχές των βοηθητικών συστημάτων αναφοράς που αντιστοιχούν στις λαβές ενός σφαιρικού εδράνου, ως γνωστόν, ανήκουν σε ξεχωριστά σώματα και εφόσον δεν υφίστανται φορτία προέντασης, στην αρχική κατάσταση θεωρείται ότι συμπίπτουν. Δεν ισχύει, όμως, το ίδιο κατά την επιβολή φορτίσεων στο μηχανισμό ανάρτησης για την πραγματοποίηση ελαστοκινηματικής ανάλυσης, αφού σε αυτήν την περίπτωση τα στοιχεία σύνδεσης παραλαμβάνουν φορτία μη αμελητέου πλάτους, συνεπώς προκύπτει σχετική μετατόπιση μεταξύ των ανωτέρω συστημάτων αναφοράς. Προς αποφυγή σύγχυσης, οποιαδήποτε αναφορά γίνεται στα σημεία ενδιαφέροντος του μηχανισμού, στο εξής θα συνοδεύεται από τον αριθμό του σώματος στο οποίο ανήκει. Έτσι, για παράδειγμα, το σημείο  $A_1$  ανήκει στο πλαίσιο του οχήματος, ενώ το σημείο  $A_3$  στον ανώτερο βραχίονα ελέγχου και στην αρχική κατάσταση τα δύο σημεία ταυτίζονται.

**Πίνακας 4-5: Αρχές αδρανειακού και σωματόδετων συστημάτων αναφοράς και συντεταγμένες σημείων ενδιαφέροντος ως προς αυτές στην αρχική κατάσταση**

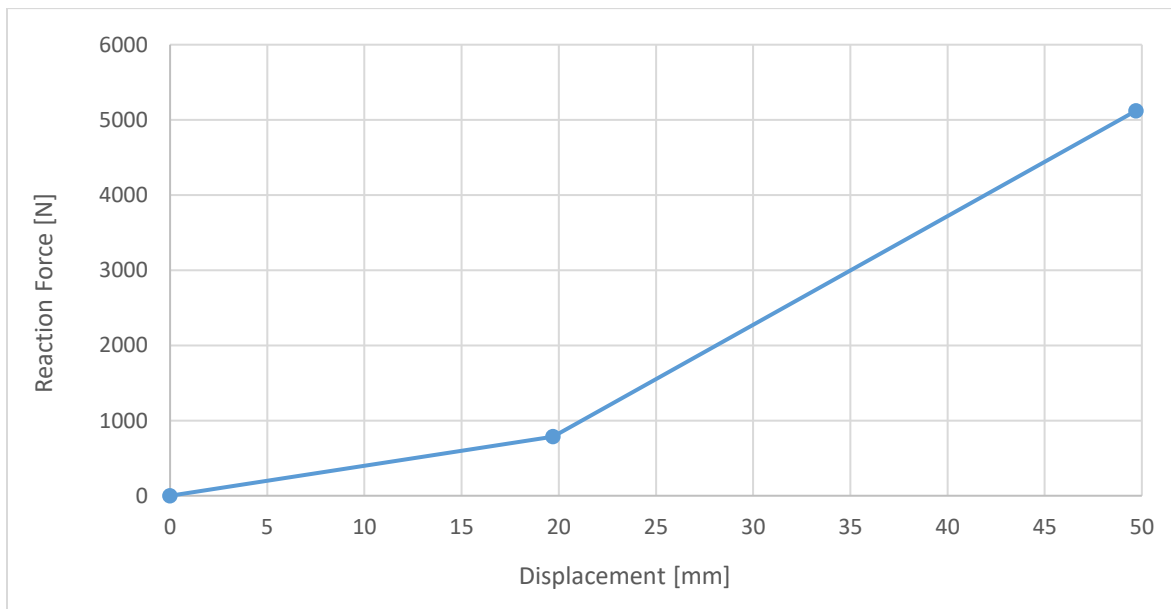
Σημείο Αναφοράς	Σημείο	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]
$O_1$	$A_1$	120.00	248.00	50.32
	$B_1$	-130.00	258.00	19.32
	$E_1$	190.00	130.00	-94.68
	$F_1$	-130.00	166.50	-94.68
	$I_1$	10.83	247.00	270.32
	$J_1$	40.00	179.00	-73.68
$G_2$	$C_2$	8.39	-46.43	23.58
	$E_2$	246.28	-420.69	20.17
	$F_2$	-75.80	-420.69	20.17
	$G_2$	0	0	0
$D_3$	$A_3$	151.57	-312.16	0.00
	$B_3$	-100.55	-312.16	0.00
	$D_3$	0	0	0
$L_4$	$D_4$	-21.21	-54.30	91.30
	$G_4$	-10.21	-46.13	-74.80
	$H_4$	35.94	-55.01	-48.33
	$K_4$	0.08	-92.63	3.83
	$P_4$	-8.44	-8.24	-199.33
	$L_4$	0	0	0
$H_5$	$H_5$	0	0	0
	$J_5$	0.00	-387.72	7.69
$I_6$	$I_6$	0	0	0
$C_7$	$C_7$	0	0	0

Γνωρίζοντας τις γωνίες Euler όλων των μελών του μηχανισμού ανάρτησης, υπολογίζονται οι συντεταγμένες των σημείων ενδιαφέροντος αυτού, εκπεφρασμένες ως προς τα



αντίστοιχα σωματόδετα συστήματα αναφοράς προς χρήση σε επόμενο βήμα της διαδικασίας μοντελοποίησης. Προκειμένου να γίνει αυτό, απαιτείται ο ορισμός σημείων αναφοράς για κάθε σώμα, τα οποία δεν είναι άλλα από τις αρχές των ανωτέρω συστημάτων. Ακολουθώντας, υπολογίζονται τα διανύσματα θέσης των σημείων ενδιαφέροντος ως προς τα προαναφερθέντα σημεία αναφοράς, εκπεφρασμένα στο αδρανειακό σύστημα και μέσω πολλαπλασιασμού με κατάλληλα μητρώα στροφής, όπως αυτά υπολογίζονται βάσει των σχετικών γωνιών Euler (Πίνακας 4-4), τα εν λόγω διανύσματα θέσης εκφράζονται στο επιθυμητό σωματόδετο σύστημα αναφοράς (Πίνακας 4-5).

Η καμπύλη φορτίου-μετατόπισης του ελικοειδούς ελατηρίου που χρησιμοποιείται για την εισαγωγή κατακόρυφης δυσκαμψίας στον τροχό δίνεται στο Σχήμα 4.23 και υλοποιείται αξιοποιώντας δύο εν σειρά συνδεδεμένα ελατήρια, επιλέγοντας προσεκτικά το ενεργό μήκος (active length) του πιο εύκαμπτου εξ αυτών, ούτως ώστε να επιτυγχάνεται η επιθυμητή προοδευτική (διγραμμική) συμπεριφορά. Η τελευταία αποσκοπεί στη διατήρηση του διακένου οχήματος-οδοστρώματος εντός ενός στενού, αεροδυναμικά ωφέλιμου, εύρους για όσο το δυνατόν μεγαλύτερο χρονικό διάστημα κατά την κίνηση του οχήματος.



**Σχήμα 4.23: Καμπύλη φορτίου-μετατόπισης προοδευτικού ελικοειδούς ελατηρίου μηχανισμού ανάρτησης**

Έχοντας ολοκληρώσει την παράθεση και προεπεξεργασία (preprocessing) των δεδομένων εισόδου, καθίσταται δυνατή η κατάστρωση του συνόλου των εξισώσεων που περιγράφουν μαθηματικά τις αλληλεπιδράσεις που λαμβάνουν χώρα μεταξύ των μελών του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης υπό στατική φόρτιση, θεωρώντας ότι ο τελευταίος συνιστά σύστημα πολλαπλών απολύτως στερεών σωμάτων.

#### 4.2.2.2 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος και σχολιασμός

Εν γένει, τα συστήματα πολλαπλών σωμάτων στη μόνιμη κατάσταση περιγράφονται μαθηματικά από μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις, η ταυτόχρονη επίλυση των οποίων μπορεί να πραγματοποιηθεί αξιοποιώντας τη μέθοδο Newton-Raphson στην κλασική της μορφή (Υποενότητα 3.3.1) ή διάφορες παραλλαγές της που αποσκοπούν στη μείωση του επαγόμενου υπολογιστικού κόστους [51]. Προκειμένου για την καλύτερη κατανόηση της υπολογιστικής υλοποίησης και του τρόπου επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος, η κατάστρωση των εξισώσεων κίνησης γίνεται στη λογική με την οποία αυτές θα αξιολογούνταν (evaluation) από έναν αλγόριθμο αριθμητικής επίλυσης με την κλασική μέθοδο Newton-Raphson, όσον αφορά τον υπολογισμό των υπολοίπων (residuals) σε κάθε επανάληψη.

Ως γνωστόν, η επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων με τη μέθοδο Newton-Raphson προϋποθέτει την αρχικοποίηση των αγνώστων μεταβλητών, προκειμένου να καταστεί δυνατή η πραγματοποίηση των υπολογισμών που σχετίζονται με την πρώτη επανάληψη. Μάλιστα, η αρχικοποίηση αυτή επηρεάζει καθοριστικά την ταχύτητα σύγκλισης της αριθμητικής μεθόδου, γι' αυτό συστήνεται η χρήση τιμών από την πλησιέστερη γνωστή κατάσταση του μηχανισμού ανάρτησης, τεχνική που υιοθετήθηκε επίσης κατά την πραγματοποίηση κινηματικής ανάλυσης αυτού στο προηγούμενο κεφάλαιο. Υπενθυμίζεται ότι οι τιμές που χρησιμοποιούνται για την αρχικοποίηση των αγνώστων μεταβλητών δεν πρέπει να απέχουν πολύ από τη ζητούμενη λύση, καθώς σε αυτήν την περίπτωση ενδέχεται να μην επιτευχθεί σύγκλιση της μεθόδου ανεξαρτήτως του πλήθους επαναλήψεων. Στο πλαίσιο της κινηματικής ανάλυσης, το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε εφαρμόζοντας την εξωτερική κινηματική διέγερση υπό τη μορφή μικρών διαδοχικών βημάτων, με αποτέλεσμα οι προκύπτουσες μετατοπίσεις των σημείων ενδιαφέροντος μεταξύ δύο διαδοχικών καταστάσεων του μηχανισμού να είναι πράγματι μικρές, ενώ ταυτόχρονα οι σχετικοί υπολογισμοί πραγματοποιούνταν για ένα ικανοποιητικό πλήθος διαφορετικών θέσεων μεταξύ πλήρους συμπίεσης και έκτασης του τελευταίου.

Εντελώς αντίστοιχα, όσον αφορά την ελαστοκινηματική ανάλυση του μηχανισμού ανάρτησης, τα επιβαλλόμενα φορτία μπορούν να εφαρμόζονται σταδιακά (incremental loading), όπως για παράδειγμα συμβαίνει κατά τη μη γραμμική στατική ανάλυση κατασκευών με λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων, όπου το πλάτος των επιβαλλόμενων φορτίσεων αυξάνεται προοδευτικά, ενώ σε κάθε βήμα υπολογίζεται εκ νέου η δυσκαμψία της εκάστοτε κατασκευής βάσει της τρέχουσας παραμορφωμένης γεωμετρίας αυτής. Κατ' αυτόν τον τρόπο, εξασφαλίζεται εν μέρει ότι οι άγνωστες μεταβλητές μεταξύ δύο διαδοχικών βημάτων φόρτισης (increments) του μηχανισμού δε διαφέρουν σημαντικά. Ωστόσο, ακόμα και στην περίπτωση που η ανωτέρω διαφορά είναι αρκετή για να προκαλέσει την απόκλιση της αριθμητικής μεθόδου, μέσω κατάλληλης προγραμματιστικής υλοποίησης καθίσταται δυνατή η περαιτέρω αυτόματη μείωση του σχετικού πλάτους φόρτισης (π.χ. μειώνοντας το επιπρόσθετο επιβαλλόμενο φορτίο μεταξύ δύο διαδοχικών

βημάτων φόρτισης κατά ένα αυθαίρετα επιλεγμένο παράγοντα) και η εκ νέου αριθμητική επίλυση με τη μέθοδο Newton-Raphson, προκειμένου για την επίτευξη σύγκλισης. Σημειώνεται ότι η μέθοδος σταδιακής εφαρμογής των φορτίσεων που περιγράφηκε παραπάνω μπορεί να οδηγήσει σε ραγδαία αύξηση του υπολογιστικού κόστους εάν η μεταβολή του πλάτους των φορτίσεων μεταξύ δύο διαδοχικών βημάτων γίνει πολύ μικρή, γι' αυτό και τέτοιου είδους υλοποιήσεις πρέπει οπωσδήποτε να συνοδεύονται από κριτήρια, η εκπλήρωση των οποίων ισοδυναμεί με αύξηση του σχετικού πλάτους φόρτισης, εφόσον δεν επηρεάζεται αρνητικά η σύγκλιση της αριθμητικής μεθόδου που χρησιμοποιείται για την επίλυση του εκάστοτε συστήματος εξισώσεων.

Ο μελετώμενος μηχανισμός ανάρτησης, εξαιρουμένου του πλαισίου του οχήματος, αποτελείται από 6 σώματα καθένα από τα οποία, λαμβανόμενο ξεχωριστά, έχει 6 βαθμούς ελευθερίας απολύτως στερεού σώματος. Πράγματι, οι δύο βραχίονες ελέγχου, η ράβδος διεύθυνσης και ο φορέας του τροχού συνδέονται τόσο μεταξύ τους, όσο και με το πλαίσιο, αποκλειστικά μέσω σφαιρικών εδράνων, τα οποία σύμφωνα με τις προηγηθείσες παραδοχές εμφανίζουν κοινή ελαστική συμπεριφορά ως προς όλες τις κατευθύνσεις σχετικής μεταφορικής κίνησης μεταξύ των λαβών τους, ενώ δεν έχουν καμία επίδραση επί των σχετικών στροφών μεταξύ των τελευταίων, συνεπώς μοντελοποιούνται ως στοιχεία σύνδεσης που δεν εισάγουν κανένα κινηματικό περιορισμό ή ισοδύναμα δε δεσμεύουν κανένα βαθμό ελευθερίας μεταξύ των συνδεόμενων σωμάτων. Οι δυνάμεις αντίδρασης που ασκούνται στα μέλη του μηχανισμού λόγω ελαστικής παραμόρφωσης των σφαιρικών εδράνων, μπορούν να υπολογιστούν συναρτήσει της σχετικής θέσης των λαβών αυτών (Σχήμα 4.10), αξιοποιώντας κατάλληλα τα όσα ειπώθηκαν στην Υποενότητα 4.1.2. Η διαδικασία υπολογισμού σχετικής θέσης των λαβών περιγράφεται αναλυτικά για τα σφαιρικά έδρανα A και D, τα οποία βρίσκονται στο σύνορο και στο εσωτερικό του μηχανισμού αντίστοιχα, ενώ για τα υπόλοιπα έδρανα δίνονται απευθείας οι ζητούμενες εκφράσεις.

Ξεκινώντας με τη δύναμη αντίδρασης του σφαιρικού εδράνου A που ασκείται στον ανώτερο βραχίονα ελέγχου, εκπεφρασμένη στο σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων του τελευταίου,  $\{RF_{A3}\}_3$ , επιδιώκεται η εξαγωγή μιας έκφρασης αυτής συναρτήσει του διανύσματος θέσης  $\{D_3\}_1$  και των γωνιών Euler που σχετίζονται με τον προσανατολισμό του εν λόγω σώματος,  $\varphi_3, \theta_3, \psi_3$ . Βάσει της ανάλυσης που προηγήθηκε περί γενικής κίνησης απολύτως στερεού σώματος στο χώρο (Παράγραφος 4.1.1.4), προκύπτει η εξής σχέση:

$$\{A_1\}_3 = {}^3R_1\{A_1\}_1 + \{O_1\}_3 \quad (4.41)$$

Εφόσον η αρχή του σωματόδετου συστήματος αναφοράς 3 τοποθετείται στο σημείο  $D_3$ , προφανώς ισχύει ότι:

$$\{O_1\}_3 = -{}^3R_1\{D_3\}_1 \quad (4.42)$$

Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις προκύπτει μια σχέση υπολογισμού του διανύσματος θέσης  $\{A_1\}_3$  συναρτήσεως των επιθυμητών μεταβλητών, στην οποία οι γωνίες Euler,  $\varphi_3, \theta_3, \psi_3$ , υπεισέρχονται μέσω του μητρώου στροφής  ${}^3R_1$ :

$$\{A_1\}_3 = {}^3R_1\{\{A_1\}_1 - \{D_3\}_1\} \quad (4.43)$$

Τελικά, η σχετική θέση μεταξύ των λαβών του σφαιρικού εδράνου A υπολογίζεται ως η διαφορά των διανυσμάτων θέσης  $\{A_1\}_3$  και  $\{A_3\}_3$ , σύμφωνα με τη σχέση (4.44). Σημειώνεται ότι οι συνιστώσες των διανυσμάτων  $\{A_1\}_1$  και  $\{A_3\}_3$  είναι γνωστές και σταθερές καθ' όλη τη διάρκεια της πραγματοποιηθείσας ανάλυσης, αφού όλα τα μέλη του μηχανισμού ανάρτησης λαμβάνονται ως απολύτως στερεά σώματα.

Σφαιρικό έδρανο A:

$$\{A_1\}_3 - \{A_3\}_3 = {}^3R_1\{\{A_1\}_1 - \{D_3\}_1\} - \{A_3\}_3 \quad (4.44)$$

Το διάνυσμα θέσης μεταξύ των λαβών του σφαιρικού εδράνου A είναι πλέον γνωστό κατά μέτρο και κατεύθυνση, έτσι μπορεί εν συνεχεία να υπολογιστεί η δύναμη αντίδρασης  $\{RF_{A_3}\}_3$ . Συγκεκριμένα, εφόσον η δυσκαμψία του εδράνου θεωρείται κοινή προς όλες τις κατευθύνσεις που σχετίζονται με τη μεταφορική κίνηση μεταξύ των λαβών αυτού, αρχικά υπολογίζεται το μέτρο του διανύσματος  $\{A_1\}_3 - \{A_3\}_3$  και μέσω γραμμικής παρεμβολής στην αντίστοιχη καμπύλη φορτίου-μετατόπισης (Σχήμα 4.21), προκύπτει το μέτρο της δύναμης  $\{RF_{A_3}\}_3$ , η κατεύθυνση της οποίας συμπίπτει με αυτή του ανωτέρω διανύσματος. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Τρίτο Νόμο του Νεύτωνα, η δύναμη αντίδρασης που ασκείται στο σημείο  $A_1$  του πλαισίου θα είναι ίση κατά μέτρο και αντίθετη κατεύθυνσης με αυτή που ασκείται στο σημείο  $A_3$  του ανώτερου βραχίονα ελέγχου:

$$\{RF_{A_1}\}_3 = -\{RF_{A_3}\}_3 \quad (4.45)$$

Όσον αφορά το σφαιρικό έδρανο D, η διαδικασία υπολογισμού της σχετικής θέσης των λαβών του είναι παραπλήσια. Ομοίως με προηγούμενως προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\{D_4\}_3 = {}^3R_1\{D_4\}_1 + \{O_1\}_3 = {}^3R_1\{\{D_4\}_1 - \{D_3\}_1\} \quad (4.46)$$

$$\{D_4\}_1 = {}^1R_4\{D_4\}_4 + \{L_4\}_1 \quad (4.47)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.46) και (4.47) προκύπτει η ζητούμενη σχέση υπολογισμού του διανύσματος θέσης  $\{D_4\}_3$ , συναρτήσεως των διανυσμάτων θέσης  $\{D_3\}_1, \{L_4\}_1$  και των γωνιών Euler,  $\varphi_3, \theta_3, \psi_3, \varphi_4, \theta_4, \psi_4$ :

Σφαιρικό έδρανο D:

$$\{D_4\}_3 - \{D_3\}_3 = {}^3R_1\{{}^1R_4\{D_4\}_4 + \{L_4\}_1 - \{D_3\}_1\} \quad (4.48)$$

Για τον υπολογισμό των δυνάμεων αντίδρασης που ασκούνται στα σημεία  $D_3$  και  $D_4$  λόγω σχετικής μετατόπισης μεταξύ των λαβών του σφαιρικού εδράνου D ισχύουν τα ίδια με

προηγούμενως. Οι σχέσεις υπολογισμού των διανυσμάτων θέσης μεταξύ των λαβών των υπολοίπων εδράνων του μηχανισμού, συναρτήσει των γωνιών Euler και των σημείων αναφοράς των σωματόδετων συστημάτων των μελών του, δίνονται συνοπτικά παρακάτω:

Σφαιρικό έδρανο B:

$$\{B_1\}_3 - \{B_3\}_3 = {}^3R_1\{\{B_1\}_1 - \{D_3\}_1\} - \{B_3\}_3 \quad (4.49)$$

Σφαιρικό έδρανο C:

$$\{C_2\}_7 - \{C_7\}_7 = {}^7R_1\{{}^1R_2\{C_2\}_2 + \{G_2\}_1 - \{C_7\}_1\} \quad (4.50)$$

Σφαιρικό έδρανο E:

$$\{E_1\}_2 - \{E_2\}_2 = {}^2R_1\{\{E_1\}_1 - \{G_2\}_1\} - \{E_2\}_2 \quad (4.51)$$

Σφαιρικό έδρανο F:

$$\{F_1\}_2 - \{F_2\}_2 = {}^2R_1\{\{F_1\}_1 - \{G_2\}_1\} - \{F_2\}_2 \quad (4.52)$$

Σφαιρικό έδρανο G:

$$\{G_4\}_2 - \{G_2\}_2 = {}^2R_1\{{}^1R_4\{G_4\}_4 + \{L_4\}_1 - \{G_2\}_1\} \quad (4.53)$$

Σφαιρικό έδρανο H:

$$\{H_4\}_5 - \{H_5\}_5 = {}^5R_1\{{}^1R_4\{H_4\}_4 + \{L_4\}_1 - \{H_5\}_1\} \quad (4.54)$$

Σφαιρικό έδρανο I:

$$\{I_1\}_6 - \{I_6\}_6 = {}^6R_1\{\{I_1\}_1 - \{I_6\}_1\} \quad (4.55)$$

Σφαιρικό έδρανο J:

$$\{J_1\}_5 - \{J_5\}_5 = {}^5R_1\{\{J_1\}_1 - \{H_5\}_1\} - \{J_5\}_5 \quad (4.56)$$

Θετική κατακόρυφη μετατόπιση του τροχού ισοδυναμεί με μείωση του μήκους του ελικοειδούς ελατηρίου του μηχανισμού ανάρτησης (Σχήμα 4.17), το οποίο με τη σειρά του ανθίσταται στη σχετική μετατόπιση μεταξύ του ανώτερου (κύλινδρος) και κατώτερου τμήματος (έμβολο) του αποσβεστήρα κατά την αξονική διεύθυνση (Σχήμα 4.24), με αποτέλεσμα την ανάπτυξη κατακόρυφης δυσκαμψίας στον τροχό. Στο πλαίσιο της ελαστοκινηματικής ανάλυσης του εν λόγω μηχανισμού, μπορεί να θεωρηθεί ότι τα άκρα του ελατηρίου ακολουθούν την κίνηση των σημείων  $I_6$  και  $C_7$ , ενώ μεταξύ των σωμάτων 6 και 7 παρεμβάλλεται ένας κυλινδρικός κινηματικός σύνδεσμος (cylindrical joint – Σχήμα 3.2), επομένως καθίσταται δυνατή η σχετική μετατόπιση και στροφή των τελευταίων αποκλειστικά γύρω από την αξονική διεύθυνση, όπως άλλωστε επιβάλλεται από την κατασκευαστική υλοποίηση του αποσβεστήρα.



**Σχήμα 4.24: Σχηματική απεικόνιση τυπικού αποσβεστήρα για εφαρμογές οχημάτων [75]**

Προκειμένου για τη μαθηματική διατύπωση του ανωτέρω κινηματικού περιορισμού αξιοποιούνται τα σωματόδετα συστήματα αναφοράς των σωμάτων 6 και 7, τα οποία έχουν κοινό προσανατολισμό στην αρχική κατάσταση (Πίνακας 4-4) και η διεύθυνση του τοπικού άξονα  $z$  αυτών ταυτίζεται με την αξονική διεύθυνση του συνδυασμού ελατηρίου-αποσβεστήρα. Δύο σώματα που συνδέονται μέσω κυλινδρικού κινηματικού συνδέσμου διαθέτουν δύο βαθμούς ελευθερίας σχετικής κίνησης, επομένως απαιτείται η εισαγωγή τεσσάρων αλγεβρικών εξισώσεων κινηματικών περιορισμών:

$$\{z_6\}_1 \cdot \{x_7\}_1 = 0 \quad (4.57)$$

$$\{z_6\}_1 \cdot \{y_7\}_1 = 0 \quad (4.58)$$

$$\{R_{I_6C_7}\}_1 \cdot \{x_7\}_1 = 0 \quad (4.59)$$

$$\{R_{I_6C_7}\}_1 \cdot \{y_7\}_1 = 0 \quad (4.60)$$

όπου,  $\{z_6\}_1$ , το μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης του άξονα  $z$  του σωματόδετου συστήματος 6, εκπεφρασμένο στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς και  $\{R_{I_6C_7}\}_1$ , το διάνυσμα θέσης του σημείου  $I_6$  ως προς το σημείο  $C_7$ , εκπεφρασμένο στο ίδιο σύστημα. Παρόμοια με το διάνυσμα  $\{z_6\}_1$  ορίζονται και τα διανύσματα  $\{x_7\}_1$  και  $\{y_7\}_1$ .

$$\{z_6\}_1 = {}^1R_6\{z_6\}_6 = {}^6R_1^T[0 \ 0 \ 1]^T = [S_{\varphi_6}S_{\theta_6} \ -C_{\varphi_6}S_{\theta_6} \ C_{\theta_6}]^T \quad (4.61)$$

$$\{x_7\}_1 = [C_{\varphi_7}C_{\psi_7} - S_{\varphi_7}C_{\theta_7}S_{\psi_7} \ S_{\varphi_7}C_{\psi_7} + C_{\varphi_7}C_{\theta_7}S_{\psi_7} \ S_{\theta_7}S_{\psi_7}]^T \quad (4.62)$$

$$\{y_7\}_1 = [-C_{\varphi_7}S_{\psi_7} - S_{\varphi_7}C_{\theta_7}C_{\psi_7} \ -S_{\varphi_7}S_{\psi_7} + C_{\varphi_7}C_{\theta_7}C_{\psi_7} \ S_{\theta_7}C_{\psi_7}]^T \quad (4.63)$$

$$\{R_{I_6C_7}\}_1 = \{I_6\}_1 - \{C_7\}_1 \quad (4.64)$$

Ο βαθμός ελευθερίας που σχετίζεται με τη στροφή των σωμάτων 6 και 7 γύρω από την αξονική διεύθυνση του αποσβεστήρα, δεν έχει καμία επίδραση στην ελαστοκινηματική συμπεριφορά του μηχανισμού ανάρτησης. Στην πραγματικότητα η ανεξέλεγκτη σχετική γωνιακή μετατόπιση των σωμάτων 6 και 7 γύρω από την εν λόγω διεύθυνση αποτρέπεται λόγω φαινομένων τριβής, τα οποία, όμως, δε λαμβάνονται υπόψιν στην παρούσα ανάλυση. Αξιοποιώντας αποκλειστικά ένα κυλινδρικό κινηματικό σύνδεσμο για τη σύνδεση των δύο τμημάτων του αποσβεστήρα, ο εναπομείνας στροφικός βαθμός ελευθερίας μεταξύ αυτών

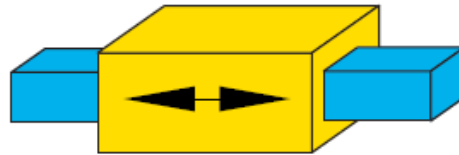


είναι εντελώς αδέσμευτος, γεγονός που μπορεί να εισάγει αριθμητικές αστάθειες κατά την επίλυση του προκύπτοντος συστήματος εξισώσεων με τη μέθοδο Newton-Raphson, αφού η συνισταμένη των ροπών γύρω από την αξονική διεύθυνση του αποσβεστήρα ισούται με μηδέν, με αποτέλεσμα η αντίστοιχη εξίσωση Euler (ισορροπία ροπών) να ικανοποιείται ταυτοτικά. Προς αποφυγή των παραπάνω, εισάγεται μια ελεύθερη άρθρωση (universal joint – Σχήμα 3.2) μεταξύ των σημείων  $I_6$  και  $C_7$ , η οποία εισάγει έναν ακόμα κινηματικό περιορισμό που υλοποιείται μαθηματικά ως ακολούθως:

$$\{x_6\}_1 \cdot \{y_7\}_1 = 0 \quad (4.65)$$

$$\{x_6\}_1 = [C_{\varphi_6}C_{\psi_6} - S_{\varphi_6}C_{\theta_6}S_{\psi_6} \quad S_{\varphi_6}C_{\psi_6} + C_{\varphi_6}C_{\theta_6}S_{\psi_6} \quad S_{\theta_6}S_{\psi_6}]^T \quad (4.66)$$

Έχοντας επιβάλει 5 κινηματικούς περιορισμούς όσον αφορά τη σχετική κίνηση μεταξύ των δύο τμημάτων του αποσβεστήρα απομένει ένας βαθμός ελευθερίας μεταξύ αυτών, ο οποίος δεν είναι άλλος από τη σχετική μετατόπισή τους κατά την αξονική διεύθυνση του πρώτου. Συνεπώς, ο συνδυασμός κυλινδρικού συνδέσμου και ελεύθερης άρθρωσης για τη σύνδεση των σωμάτων 6 και 7, ισοδυναμεί με τη χρήση ενός πρισματικού συνδέσμου (Σχήμα 4.25).



**Σχήμα 4.25: Σχηματική απεικόνιση πρισματικού συνδέσμου [76]**

Το πρόβλημα που περιγράφηκε παραπάνω ανακύπτει επίσης όσον αφορά τους βαθμούς ελευθερίας που σχετίζονται με τη στροφή γύρω από την αξονική διεύθυνση, τόσο της ράβδου διεύθυνσης, όσο και του αποσβεστήρα, αυτή τη φορά λαμβανομένου ως ενιαίο συναρμολόγημα, αποτελούμενο από τα σώματα 6 και 7. Πιο συγκεκριμένα, η σύνδεση των ανωτέρω μελών του μηχανισμού με τα συνεργαζόμενα με αυτά, τεμάχια, μέσω σφαιρικών εδράνων επιτρέπει την ανεξέλεγκτη γωνιακή μετατόπισή των πρώτων γύρω από την αξονική τους διεύθυνση, αφού τα εν λόγω στοιχεία σύνδεσης δεν εισάγουν στροφική δυσκαμψία ή κατάλληλους κινηματικούς περιορισμούς. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται ομοίως με προηγουμένως, εισάγοντας ελεύθερες αρθρώσεις μεταξύ των σημείων  $J_1, J_5$  και  $I_1, I_6$ . Για να γίνει αυτό, ορίζονται δύο βοηθητικά συστήματα αναφοράς, έστω  $MRF_1$  και  $MRF_2$ , με αρχή τα σημεία  $J_1$  και  $I_1$  και (σταθερό) προσανατολισμό, ίδιο με αυτόν των σωματόδετων συστημάτων αναφοράς 5 και 6 αντίστοιχα. Διευκρινίζεται ότι η διεύθυνση του άξονα  $\gamma$  του σωματόδετου συστήματος αναφοράς 5 συμπίπτει με την αξονική διεύθυνση της ράβδου επενέργειας. Συνεπώς, θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\{x_{MRF1}\}_1 \cdot \{z_5\}_1 = 0 \quad (4.67)$$

$$\{x_{MRF2}\}_1 \cdot \{y_6\}_1 = 0 \quad (4.68)$$

Εφόσον ο προσανατολισμός των βοηθητικών συστημάτων αναφοράς  $MRF_1$  και  $MRF_2$  είναι κοινός με αυτόν των σωματόδετων συστημάτων 5 και 6 αντίστοιχα, οι γωνίες Euler, από το αδρανειακό σύστημα αναφοράς προς αυτά είναι επίσης κοινές, ενώ διευκρινίζεται ότι ο υπολογισμός των διανυσμάτων  $\{x_{MRF1}\}_1, \{x_{MRF2}\}_1$  γίνεται εφάπαξ στην αρχική κατάσταση, καθώς τα σημεία  $J_1$  και  $I_1$  ανήκουν στο πλαίσιο του οχήματος (αδρανειακό σύστημα αναφοράς) και ως εκ τούτου παραμένουν ακλόνητα καθ' όλη τη διάρκεια της ανάλυσης.

$$\{x_{MRF1}\}_1 = [C_{\varphi 5} C_{\psi 5} - S_{\varphi 5} C_{\theta 5} S_{\psi 5} \quad S_{\varphi 5} C_{\psi 5} + C_{\varphi 5} C_{\theta 5} S_{\psi 5} \quad S_{\theta 5} S_{\psi 5}]^T \quad (4.69)$$

$$\{x_{MRF2}\}_1 = [C_{\varphi 6} C_{\psi 6} - S_{\varphi 6} C_{\theta 6} S_{\psi 6} \quad S_{\varphi 6} C_{\psi 6} + C_{\varphi 6} C_{\theta 6} S_{\psi 6} \quad S_{\theta 6} S_{\psi 6}]^T \quad (4.70)$$

$$\{y_6\}_1 = [-C_{\varphi 6} S_{\psi 6} - S_{\varphi 6} C_{\theta 6} C_{\psi 6} \quad -S_{\varphi 6} S_{\psi 6} + C_{\varphi 6} C_{\theta 6} C_{\psi 6} \quad S_{\theta 6} C_{\psi 6}]^T \quad (4.71)$$

$$\{z_5\}_1 = [S_{\varphi 5} S_{\theta 5} \quad -C_{\varphi 5} S_{\theta 5} \quad C_{\theta 5}]^T \quad (4.72)$$

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται σε τέτοιες περιπτώσεις ούτως ώστε να αποφεύγεται η εισαγωγή πλεοναζόντων κινηματικών περιορισμών, όπως π.χ. θα συνέβαινε με τη χρήση μιας ακόμα ελεύθερης άρθρωσης μεταξύ των σημείων  $C_2, C_7$ , η οποία εκ πρώτης όψεως φαίνεται δικαιολογημένη, ωστόσο, οι στροφικοί βαθμοί ελευθερίας των σωμάτων 6 και 7 είναι ήδη δεσμευμένοι από τους κινηματικούς περιορισμούς που εισήχθησαν παραπάνω και συγκεκριμένα από τις ελεύθερες αρθρώσεις μεταξύ των σημείων  $I_1, I_6$  και  $I_6, C_7$ . Εναλλακτικά, σε συνδυασμό με τον κυλινδρικό σύνδεσμο θα μπορούσαν να είχαν χρησιμοποιηθεί ελεύθερες αρθρώσεις αποκλειστικά μεταξύ των σημείων  $I_1, I_6$  και  $C_2, C_7$ .

Η δύναμη αντίδρασης που ασκεί το ελατήριο στα σφαιρικά έδρανα I και C υπολογίζεται εντελώς αντίστοιχα με τη δύναμη αντίδρασης των τελευταίων, λόγω σχετικής μετατόπισης μεταξύ των λαβών τους. Έχοντας, λοιπόν, θεωρήσει ότι τα άκρα του ελατηρίου ακολουθούν την κίνηση των σημείων  $I_6$  και  $C_7$ , η εν λόγω δύναμη αντίδρασης υπολογίζεται συναρτήσει του μέτρου του διανύσματος θέσης  $\{R_{I_6 C_7}\}_1$ , αφού αφαιρεθεί από αυτό το φυσικό μήκος του ελατηρίου,  $l_0$ . Στη συνέχεια μέσω γραμμικής παρεμβολής στην αντίστοιχη καμπύλη φορτίου-μετατόπισης (Σχήμα 4.23), υπολογίζεται το μέτρο της ζητούμενης δύναμης αντίδρασης, ενώ η κατεύθυνση της τελευταίας, ασκούμενης επί του σημείου  $C_7$  και εκπεφρασμένης στο σωματόδετο σύστημα αναφοράς 7, είναι αντίθετη με αυτή του ανωτέρω διανύσματος θέσης πολλαπλασιασμένου με το μητρώο στροφής  ${}^7R_1$ , καθώς πρόκειται για θλιπτικό ελατήριο που εδράζεται επί του αποσβεστήρα υπό μηδενική προένταση, συνεπώς δύναται να παραλαμβάνει μόνο θλιπτικά φορτία. Υπό στατική φόρτιση το ελατήριο ισορροπεί και ο προσανατολισμός των σωματόδετων συστημάτων αναφοράς 6 και 7 διατηρείται κοινός εξαιτίας των κινηματικών περιορισμών που εισάγονται από τις σχέσεις (4.57), (4.58) και (4.65), επομένως:

$$\{RF_{s,C7}\}_7 = -\{RF_{s,I6}\}_7 = -\{RF_{s,I6}\}_6 \quad (4.73)$$

Μέχρι στιγμής, έχουν δοθεί οι τρόποι υπολογισμού των δυνάμεων αντίδρασης των σφαιρικών εδράνων και του ελικοειδούς ελατηρίου του μελετώμενου μηχανισμού

ανάρτησης, συναρτήσει των γωνιών Euler και των συντεταγμένων των σημείων αναφοράς των μελών αυτού, εκπεφρασμένων στο αδρανειακό σύστημα. Οι άγνωστες μεταβλητές που σχετίζονται με τους βαθμούς ελευθερίας απολύτως στερεού σώματος των μελών του μηχανισμού είναι 36, ενώ μπορούν να γραφούν ισάριθμες εξισώσεις Newton-Euler (6 για κάθε σώμα, συνολικά 6 σώματα). Ωστόσο, υπάρχουν 7 επιπλέον εξισώσεις – σχέσεις (4.57), (4.58), (4.59), (4.60), (4.65), (4.67) και (4.68) – μέσω των οποίων επιβάλλονται οι απαιτούμενοι κινηματικοί περιορισμοί, με αποτέλεσμα το πλήθος των εξισώσεων προς ταυτόχρονη επίλυση να υπερβαίνει κατά 7 το πλήθος των αγνώστων μεταβλητών. Επιπρόσθετα, κατά την κατάστρωση των εξισώσεων Newton-Euler, θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν οι δυνάμεις και οι ροπές αντίδρασης των κινηματικών συνδέσμων που μεσολαβούν μεταξύ των σωμάτων, για τις οποίες, προς το παρόν, δε διατίθενται κατάλληλες εκφράσεις ή κάποιος άλλος τρόπος υπολογισμού. Τα παραπάνω κωλύματα αντιμετωπίζονται με την εισαγωγή πολλαπλασιαστών Lagrange (Lagrange's multipliers) στη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη δυναμική ενός συστήματος πολλαπλών απολύτως στερεών σωμάτων που υπόκειται σε περιορισμούς (constrained multibody system of rigid bodies), μπορούν να γραφούν συμβολικά στην ακόλουθη μορφή [77]:

$$[M]\{\ddot{q}\} = \{g\} + \{g^{(c)}\}, \quad \{\Phi(\{q\}, t)\} = \{0\} \quad (4.74)$$

όπου,  $[M]$ , το μητρώο μάζας του συστήματος,  $\{\ddot{q}\}$ , το διάνυσμα των επιταχύνσεων του συστήματος,  $\{g\}$ , το διάνυσμα των γενικευμένων δυνάμεων, το οποίο περιλαμβάνει όλες τις εξωτερικές δυνάμεις και ροπές που ασκούνται στα επιμέρους σώματα,  $\{g^{(c)}\}$ , το διάνυσμα των αντιδράσεων που ασκούνται σε αυτά εξαιτίας της επιβολής περιορισμών και  $\{\Phi(\{q\}, t)\}$ , το διάνυσμα των εκφράσεων που αντιστοιχούν στο μη μηδενικό μέλος των εξισώσεων μέσω των οποίων υλοποιούνται μαθηματικά οι τελευταίοι. Το διάνυσμα  $\{g^{(c)}\}$  μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του Ιακωβιανού πίνακα  $[\Phi_q] = \partial\{\Phi\}/\partial\{q\}$  (constraint matrix) των εξισώσεων περιορισμών (constraint equations) και του διανύσματος των πολλαπλασιαστών Lagrange  $\{\lambda\}$ , σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση [44]:

$$\{g^{(c)}\} = [\Phi_q]^T \{\lambda\} \quad (4.75)$$

όπου το διάνυσμα  $\{\lambda\}$  περιλαμβάνει  $m$  άγνωστους πολλαπλασιαστές Lagrange, σχετιζόμενους με  $m$  εξισώσεις περιορισμών. Στο πλαίσιο της παρούσας ΔΕ πραγματοποιούνται αποκλειστικά στατικές αναλύσεις, επομένως όλοι οι χρονοεξαρτώμενοι όροι απαλείφονται από τις παραπάνω σχέσεις. Εν τέλει, ο μελετώμενος μηχανισμός ανάρτησης ως σύστημα πολλαπλών απολύτως στερεών σωμάτων που υπόκειται σε περιορισμούς, περιγράφεται μαθηματικά από ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής:

$$\{g\} + [\Phi_q]^T \{\lambda\} = \{0\}, \quad \{\Phi(\{q\})\} = \{0\} \quad (4.76)$$

όπου  $\{q\}$ , το διάνυσμα γενικευμένων συντεταγμένων (generalized coordinates) του συστήματος, το οποίο στην προκειμένη περίπτωση περιλαμβάνει τις γωνίες Euler και τις συντεταγμένες των σημείων αναφοράς των μελών του μηχανισμού, εκπεφρασμένες στο αδρανειακό σύστημα. Με βάση τα παραπάνω, καθίσταται δυνατή η εξαγωγή εκφράσεων (εξισώσεις στατικής ισορροπίας και εξισώσεις περιορισμών) για τον υπολογισμό των υπολοίπων (residuals) σε κάθε επανάληψη κατά την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου Newton-Raphson, προκειμένου για την επίλυση του προκύπτοντος μη γραμμικού συστήματος 43 εξισώσεων με 43 αγνώστους, 7 εκ των οποίων είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange που υπεισέρχονται στην ανάλυση μέσω του διανύσματος  $\{\lambda\}$ .

#### Εξισώσεις Newton-Euler – Σώμα 2

$$-{}^2R_7\{RF_{C7}\}_7 + \{RF_{E2}\}_2 + \{RF_{F2}\}_2 + \{RF_{G2}\}_2 + \{g_{F2}^{(c)}\}_2 = \{0\}_2 \quad (4.77)$$

$$-\{R_{C2G2}\}_2 \times {}^2R_7\{RF_{C7}\}_7 + \{R_{E2G2}\}_2 \times \{RF_{E2}\}_2 + \{R_{F2G2}\}_2 \times \{RF_{F2}\}_2 + \{g_{M2}^{(c)}\}_2 = \{0\}_2 \quad (4.78)$$

#### Εξισώσεις Newton-Euler – Σώμα 3

$$\{RF_{A3}\}_3 + \{RF_{B3}\}_3 + \{RF_{D3}\}_3 + \{g_{F3}^{(c)}\}_3 = \{0\}_3 \quad (4.79)$$

$$\{R_{A3D3}\}_3 \times \{RF_{A3}\}_3 + \{R_{B3D3}\}_3 \times \{RF_{B3}\}_3 + \{g_{M3}^{(c)}\}_3 = \{0\}_3 \quad (4.80)$$

#### Εξισώσεις Newton-Euler – Σώμα 4

$$-{}^4R_3\{RF_{D3}\}_3 - {}^4R_2\{RF_{G2}\}_2 - {}^4R_5\{RF_{H5}\}_5 + \{g_{F4}^{(c)}\}_3 = -{}^4R_1\{F_{L4}\}_1 \quad (4.81)$$

$$-\{R_{D4L4}\}_4 \times {}^4R_3\{RF_{D3}\}_3 - \{R_{G4L4}\}_4 \times {}^4R_2\{RF_{G2}\}_2 - \{R_{H4L4}\}_4 \times {}^4R_5\{RF_{H5}\}_5 + \{g_{M4}^{(c)}\}_4 = -{}^4R_1\{M_{L4}\}_1 \quad (4.82)$$

#### Εξισώσεις Newton-Euler – Σώμα 5

$$\{RF_{H5}\}_5 + \{RF_{J5}\}_5 + \{g_{F5}^{(c)}\}_5 = \{0\}_5 \quad (4.83)$$

$$\{R_{J5H5}\}_5 \times \{RF_{J5}\}_5 + \{g_{M5}^{(c)}\}_5 = \{0\}_5 \quad (4.84)$$

#### Εξισώσεις Newton-Euler – Σώμα 6

$$\{RF_{I6}\}_6 + \{RF_{S,I6}\}_6 + \{g_{F6}^{(c)}\}_6 = \{0\}_6 \quad (4.85)$$

$$\{g_{M6}^{(c)}\}_6 = \{0\}_6 \quad (4.86)$$

## Εξισώσεις Newton-Euler – Σώμα 7

$$\{RF_{C7}\}_7 + \{RF_{s,C7}\}_6 + \{g_{F7}^{(c)}\}_7 = \{0\}_7 \quad (4.87)$$

$$\{g_{M7}^{(c)}\}_7 = \{0\}_7 \quad (4.88)$$

όπου  $\{g_{Fi}^{(c)}\}_i, \{g_{Mi}^{(c)}\}_i, i = 2, \dots, 7$ , οι δυνάμεις και ροπές αντίδρασης που ασκούνται στα σώματα 2 έως 7 εξαιτίας της επιβολής των κινηματικών περιορισμών και  $\{F_{L4}\}_1, \{M_{L4}\}_1$  η εξωτερική δύναμη και ροπή που ασκείται στο κέντρο του τροχού κατά την πραγματοποίηση ελαστοκινηματικής ανάλυσης του μηχανισμού ανάρτησης. Συγκεκριμένα, όσον αφορά τα διανύσματα  $\{g_{Fi}^{(c)}\}_i, \{g_{Mi}^{(c)}\}_i, i = 2, \dots, 7$ , αυτά υπολογίζονται σύμφωνα με τη σχέση (4.75), η οποία εμπλέκει τον Ιακωβιανό πίνακα  $[\Phi_q]$ :

$$\{\Phi(\{q\})\} = \begin{bmatrix} \{z_6\}_1 \cdot \{x_7\}_1 \\ \{z_6\}_1 \cdot \{y_7\}_1 \\ \{d_{I6C7}\}_1 \cdot \{x_7\}_1 \\ \{d_{I6C7}\}_1 \cdot \{y_7\}_1 \\ \{x_6\}_1 \cdot \{y_7\}_1 \\ \{x_{MRF1}\}_1 \cdot \{z_5\}_1 \\ \{x_{MRF2}\}_1 \cdot \{y_6\}_1 \end{bmatrix}, \quad [\Phi_q] = \frac{\partial\{\Phi\}}{\partial\{q\}} \quad (4.89)$$

Αν και οι εξισώσεις περιορισμών στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι μόλις 7, είναι φανερό ότι ο αναλυτικός υπολογισμός του Ιακωβιανού πίνακα  $[\Phi_q]$  είναι μια ιδιαίτερα επίπονη διαδικασία, λόγω του μεγάλου αριθμού πράξεων που εμπεριέχει, ενώ το ίδιο ισχύει και όσον αφορά τον υπολογισμό των στοιχείων του Ιακωβιανού πίνακα που σχετίζεται με την επίλυση του συστήματος των 43 μη γραμμικών εξισώσεων που προέκυψαν, αξιοποιώντας τη μέθοδο Newton-Raphson. Προτείνεται, λοιπόν, ο υπολογισμός των ζητούμενων παραγώγων μέσω σχημάτων πρόσω ή κεντρικών πεπερασμένων διαφορών, εφόσον το υπολογιστικό κόστος της ανάλυσης δεν αυξάνεται υπέρμετρα, όπως πράγματι συμβαίνει στην περίπτωση του μελετώμενου μηχανισμού. Η παραπάνω μέθοδος υπολογισμού παραγώγων, μπορεί να αντικατασταθεί από αυτόματη διαφόριση (automatic differentiation) ή υπολογισμό των ζητούμενων παραγώγων μέσω λογισμικού συμβολικών μαθηματικών, τεχνικές οι οποίες απαιτούν σημαντικά μεγαλύτερη προσπάθεια όσον αφορά την υπολογιστική υλοποίηση τους συγκριτικά με αυτήν ενός σχήματος πεπερασμένων διαφορών, ωστόσο συμβάλλουν στη διατήρηση του υπολογιστικού κόστους της ανάλυσης σε χαμηλά επίπεδα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μηχανισμού, μάλιστα, εάν διατίθενται αναλυτικές εκφράσεις υπολογισμού των ανωτέρω Ιακωβιανών πινάκων, αυτές μπορούν να χρησιμοποιούνται καθ' όλη τη διάρκεια της

πραγματοποιηθείσας ανάλυσης, καθώς η τοπολογία του συστήματος πολλαπλών σωμάτων δε μεταβάλλεται.

Διευκρινίζεται επίσης, ότι η κατάστρωση των εξισώσεων Newton-Euler για κάθε μέλος του μηχανισμού έγινε στο αντίστοιχο, κάθε φορά, σωματόδετο σύστημα αναφοράς, τακτική η οποία δεν είναι δεσμευτική και ακολουθήθηκε ούτως ώστε η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος να είναι πιο εύληπτη για τον αναγνώστη. Εναλλακτικά, η κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας θα μπορούσε να γίνει στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς για όλα τα μέλη του μηχανισμού ανάρτησης, τακτική η οποία ενδεχομένως να είναι περισσότερο συμφέρουσα υπολογιστικά, καθώς έτσι λαμβάνουν χώρα λιγότερες στροφές διανυσμάτων.

Ανακεφαλαιώνοντας, προκειμένου για την επίλυση του συστήματος 43 εξισώσεων που προέκυψε ύστερα από την προηγηθείσα ανάλυση, με σκοπό τον υπολογισμό των τιμών των γενικευμένων συντεταγμένων του συστήματος πολλαπλών σωμάτων που αντιστοιχεί στο μελετώμενο μηχανισμό ανάρτησης, όταν στο κέντρο του τροχού (σημείο  $L_4$ ) ασκείται συγκεντρωμένη δύναμη ή/και ροπή, ακολουθούνται τα εξής βήματα:

1. Υπέρθεση ενός «επαρκώς» μικρού βήματος φόρτισης επί της τρέχουσας κατάστασης φόρτισης.
2. Αρχικοποίηση των αγνώστων μεταβλητών αξιοποιώντας τις αντίστοιχες τιμές από την πλησιέστερη γνωστή κατάσταση του μηχανισμού.
3. Υπολογισμός διανυσμάτων σχετικής θέσης μεταξύ των άκρων του ελατηρίου – σχέση (4.64) – και μεταξύ των λαβών των σφαιρικών εδράνων – σχέσεις (4.44) και (4.48) έως (4.56).
4. Υπολογισμός δυνάμεων αντίδρασης λόγω σχετικής μετατόπισης μεταξύ των λαβών των σφαιρικών εδράνων και των άκρων του ελατηρίου, μέσω γραμμικής παρεμβολής στις αντίστοιχες καμπύλες φορτίου-μετατόπισης (Σχήμα 4.21 και Σχήμα 4.23 αντίστοιχα).
5. Υπολογισμός Ιακωβιανού πίνακα  $[\Phi_q]$ .
6. Υπολογισμός υπολοίπων των εξισώσεων προς ταυτόχρονη επίλυση – σχέσεις (4.57), έως (4.60), (4.65), (4.67), (4.68) και (4.77) έως (4.88).
7. Υπολογισμός Ιακωβιανού πίνακα για την αριθμητική επίλυση του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων με τη μέθοδο Newton-Raphson.
8. Επίλυση του σχετικού γραμμικού συστήματος για τον υπολογισμό των διορθώσεων των τιμών των αγνώστων μεταβλητών.
9. Επιστροφή στο βήμα 3, έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση της αριθμητικής μεθόδου.
10. Επιστροφή στο βήμα 1, έως ότου επιτευχθεί το επιθυμητό (απόλυτο) πλάτος φόρτισης.

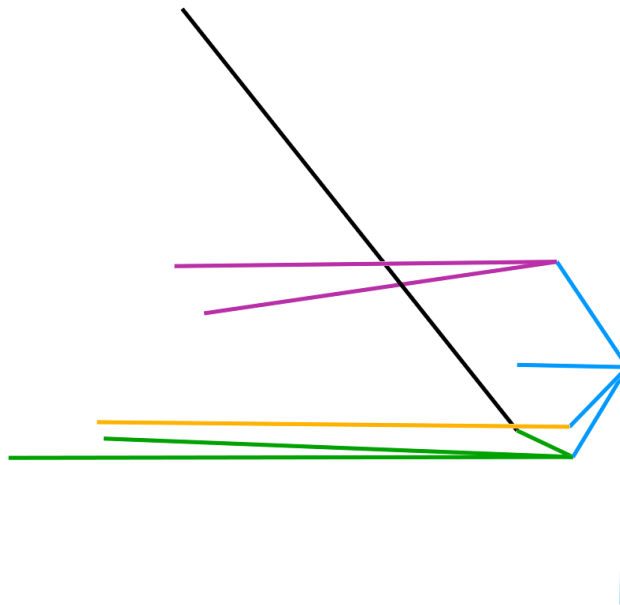
Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι τόσο στη γενική περίπτωση, όσο και στο συγκεκριμένο σύστημα πολλαπλών σωμάτων, η αντιστροφή του Ιακωβιανού πίνακα που σχετίζεται με τον



υπολογισμό των διορθώσεων των τιμών των αγνώστων μεταβλητών κατά την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου επίλυσης Newton-Raphson, έχει σχετικά μικρό υπολογιστικό κόστος, καθώς ο πρώτος περιλαμβάνει λίγα μόνο μη μηδενικά στοιχεία (sparse matrix).

#### 4.2.2.3 Υπολογιστική υλοποίηση με χρήση του λογισμικού ABAQUS/Standard

Το μη γραμμικό σύστημα που περιγράφει μαθηματικά τις αλληλεπιδράσεις που λαμβάνουν χώρα μεταξύ των μελών του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης υπό στατική φόρτιση, επιλύεται με τη βοήθεια του λογισμικού ABAQUS\Standard της εταιρείας Dassault Systèmes. Ειδικότερα, πρόκειται για ένα λογισμικό που χρησιμοποιείται ευρέως για τη διεξαγωγή μη-γραμμικών αναλύσεων κατασκευών με πεπερασμένα στοιχεία, ως εκ τούτου διαθέτει ισχυρούς μη-γραμμικούς επιλύτες (Newton-Raphson, quasi-Newton) και επιτρέπει την ανάλυση συστημάτων πολλαπλών σωμάτων, λαμβάνοντας ή όχι υπόψιν την ελαστική συμπεριφορά των τελευταίων, στη γραμμική ή μη-γραμμική περιοχή. Αξίζει να αναφερθεί, ότι παρά τη δυνατότητα του συγκεκριμένου λογισμικού να επιλύει τέτοιου είδους προβλήματα, αυτό υστερεί σε σχέση με τα λογισμικά που προορίζονται αποκλειστικά για ανάλυση συστημάτων πολλαπλών σωμάτων (π.χ. SIMPACK), καθώς τα τελευταία αξιοποιούν προχωρημένες μαθηματικές διατυπώσεις και επιλύτες που έχουν βελτιστοποιηθεί με σκοπό τη μείωση του υπολογιστικού κόστους [78] και την αύξηση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων όσον αφορά την εκπλήρωση των εξισώσεων περιορισμών (constraint violation, [44], [62]). Τα παραπάνω πλεονεκτήματα γίνονται αντιληπτά κατά κύριο λόγο στο πλαίσιο δυναμικών αναλύσεων συστημάτων πολλαπλών σωμάτων, μέσω των οποίων επιδιώκεται η μελέτη των τελευταίων για εκτεταμένες χρονικές περιόδους, π.χ. προσομοιώσεις με το πλήρες μοντέλο οχήματος για τον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών άνεσης αυτού κατά την κίνησή του επί ανώμαλου οδοστρώματος.



Σχήμα 4.26: Μηχανισμός ανάρτησης στην αρχική κατάσταση – ABAQUS

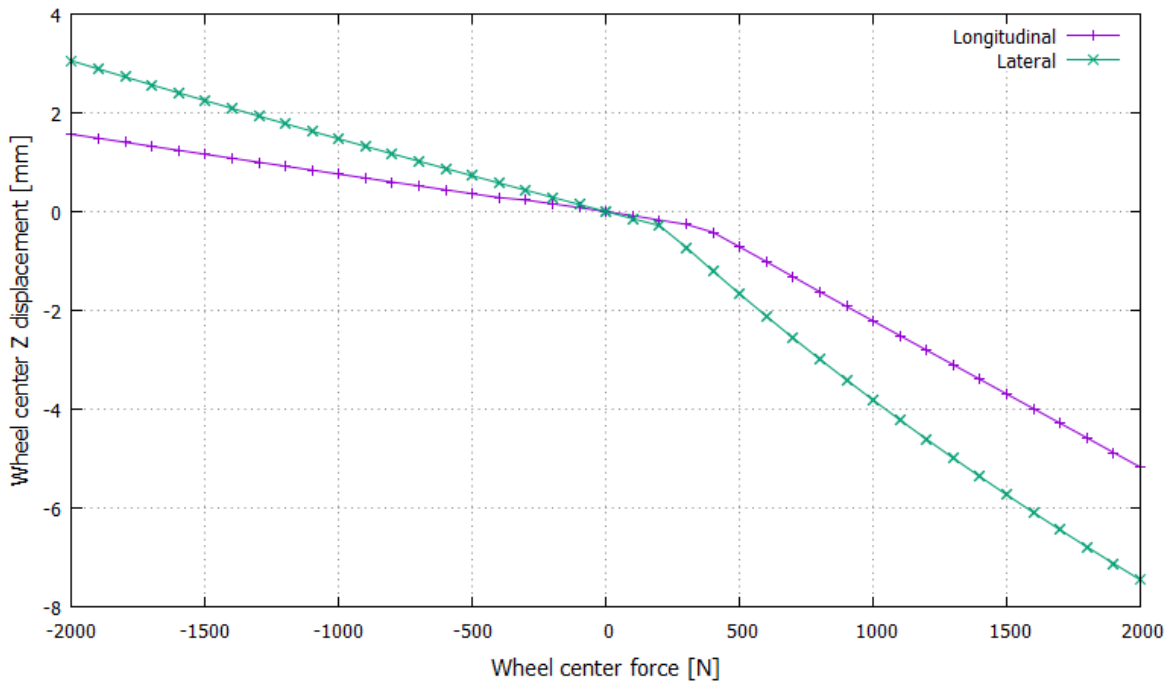
Προκειμένου για τον προσδιορισμό της ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης, προσομοιώνονται με τη βοήθεια του μαθηματικού μοντέλου που διατυπώθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, οι δοκιμές που θα λάμβαναν χώρα στην πραγματικότητα εάν υπήρχε πρόσβαση σε μία πειραματική διάταξη όμοια με αυτή που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.53. Πιο συγκεκριμένα, ο σχεδιασμός του πειράματος (Design Of Experiment/DOE) με αφετηρία τη γεωμετρία του μηχανισμού ανάρτησης, ευρισκόμενου σε πλήρη έκταση (Σχήμα 4.26), έχει ως εξής:

1. Άσκηση του ισοδύναμου στατικού κατακόρυφου φορτίου σχεδιασμού στο κέντρο του τροχού (σημείο  $L_4$ ), ούτως ώστε ο μηχανισμός ανάρτησης να μεταβεί στην ονομαστική του θέση.
2. Άσκηση επιπλέον κατακόρυφης δύναμης  $F_z$  με βραδέως μεταβαλλόμενο πλάτος, στο κέντρο του τροχού. Η ασκούμενη δύναμη λαμβάνει θετικές και αρνητικές τιμές εντός ενός προκαθορισμένου εύρους και στο τέλος της δοκιμής το επιπρόσθετο πλάτος φόρτισης μηδενίζεται, δηλαδή ο μηχανισμός βρίσκεται και πάλι στην ονομαστική του θέση, φορτιζόμενος ως ανωτέρω κατά την κατακόρυφη διεύθυνση.
3. Αντικατάσταση του στοιχείου δυσκαμψίας/απόσβεσης από μια πλήρως άκαμπτη δοκό με το ίδιο μήκος.
4. Άσκηση διαμήκου δύναμης  $F_x$ , ομοίως με παραπάνω.
5. Άσκηση εγκάρσιας δύναμης  $F_y$ , ομοίως με παραπάνω.
6. Άσκηση ροπής ανατροπής  $M_x$ , ομοίως με παραπάνω.
7. Άσκηση ροπής πρόωσης/πέδησης  $M_y$ , ομοίως με παραπάνω.
8. Άσκηση ροπής απευθυγράμμισης  $M_z$ , ομοίως με παραπάνω.

Η αντικατάσταση του συνδυασμού ελατηρίου-αποσβεστήρα από μια πλήρως άκαμπτη δοκό με το ίδιο μήκος, αποσκοπεί στην εξάλειψη των (μεγάλων) κατακόρυφων μετατοπίσεων του μηχανισμού κατά την πραγματοποίηση των μετέπειτα δοκιμών. Ως γνωστόν, τέτοιου είδους μετατοπίσεις εισάγουν μεταβολές των χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών ανάρτησης εξαιτίας φαινομένων που σχετίζονται με την κινηματική του μηχανισμού, οι οποίες μάλιστα είναι κατά πολύ μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες μεταβολές που οφείλονται στην επιβολή φορτίσεων στο κέντρο του τροχού, με αποτέλεσμα την αλλοίωση των αποτελεσμάτων της ελαστοκινηματικής ανάλυσης.

Η συζευγμένη απόκριση του μηχανισμού ανάρτησης όταν στο κέντρο του τροχού ασκούνται φορτία κατά την έννοια αποκλειστικά ενός βαθμού ελευθερίας (πλην αυτού που αντιστοιχεί στην κατακόρυφη διεύθυνση), οφείλεται στον τρόπο «διάχυσης» των φορτίων εσωτερικά του πρώτου (suspension load paths) και σχετίζεται άμεσα με τα λεγόμενα “anti-features” και το “jacking effect” (για περισσότερες λεπτομέρειες συστήνονται οι πηγές [4] και [10]). Ενδεικτικά, στο Σχήμα 4.27 δίνεται η κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου του τροχού κατά την άσκηση διαμήκου και εγκάρσιας δύναμης σε αυτό, προτού ο συνδυασμός ελατηρίου-αποσβεστήρα αντικατασταθεί από την προαναφερθείσα άκαμπτη δοκό.

Όσον αφορά τον προσδιορισμό της ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης όταν στο κέντρο του τροχού ασκούνται φορτία κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, προφανώς δε θα είχε νόημα η εξάλειψη των κατακόρυφων μετατοπίσεων αυτού. Σε αυτήν την περίπτωση, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μεταβολή των χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών ανάρτησης συγκριτικά με την αντίστοιχη μεταβολή που αυτά υφίστανται αποκλειστικά εξαιτίας κινηματικής διέγερσης.



**Σχήμα 4.27: Κατακόρυφη μετατόπιση τροχού συναρτήσει της διαμήκουσ και εγκάρσιας δύναμης στο κέντρο του**

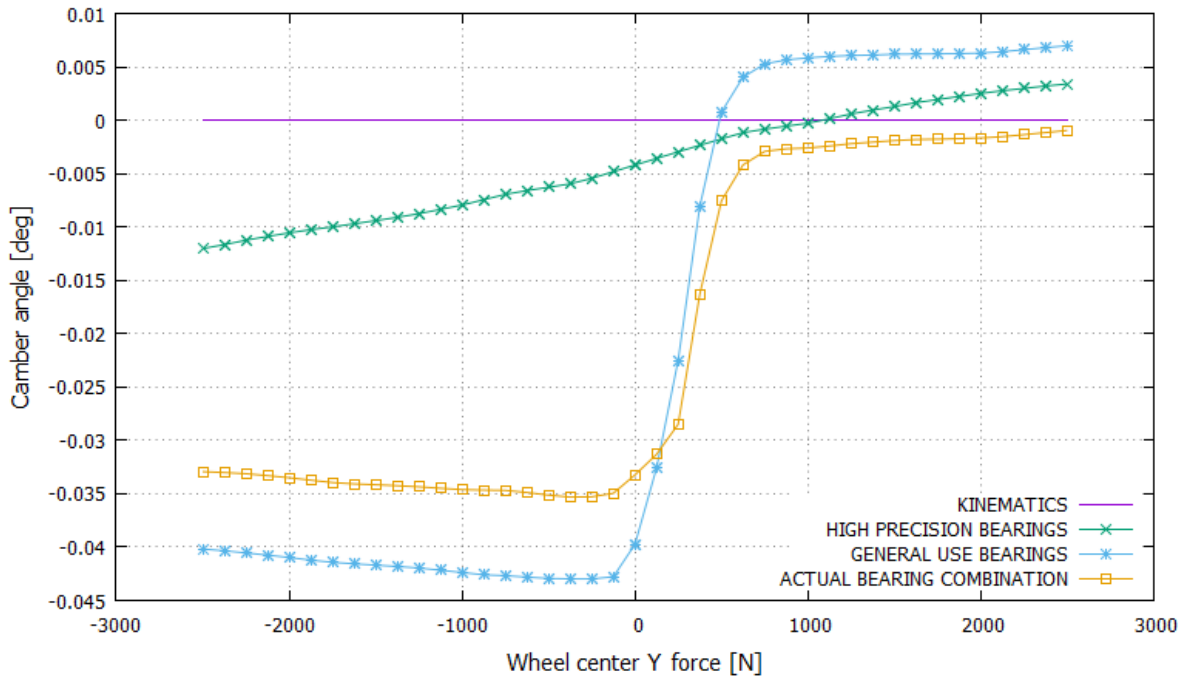
Με βάση τη μαθηματική διατύπωση της προηγούμενης παραγράφου, εκτός των άλλων, καθίσταται δυνατός και ο υπολογισμός των φορτίων που καταπονούν τα μέλη του μηχανισμού ανάρτησης για δεδομένες συνθήκες φόρτισης στο κέντρο του τροχού. Οι παραδοχές που έγιναν κατά τη μοντελοποίηση του μηχανισμού ως σύστημα πολλαπλών απολύτως στερεών σωμάτων είναι σαφώς πιο ρεαλιστικές από αυτές που εισήχθησαν κατά τον εκφυλισμό αυτού σε ισοστατικό χωροδικτύωμα προκειμένου για τη διεξαγωγή στατικής ανάλυσης (Υποενότητα 4.2.1), επομένως τα προκύπτοντα αποτελέσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αναφορά για την επαλήθευση (validation) των αποτελεσμάτων της παραπάνω προσεγγιστικής μεθόδου. Διευκρινίστηκε εξ αρχής ότι η μέθοδος εκφυλισμού σε ισοστατικό χωροδικτύωμα δίνει αποτελέσματα ικανοποιητικής ακρίβειας όταν στον τροχό δεν ασκούνται φορτία μεγάλου πλάτους κατά τη διαμήκη διεύθυνση, επομένως η αντιπαραβολή αποτελεσμάτων μεταξύ των δύο μεθόδων αφορά την άσκηση του ισοδύναμου στατικού κατακόρυφου φορτίου σχεδιασμού στο κέντρο του τροχού, ούτως ώστε ο μηχανισμός ανάρτησης να διατηρείται στην ονομαστική του θέση. Τα φορτία σε όλα

τα σημεία ενδιαφέροντος του μηχανισμού, όπως αυτά υπολογίστηκαν και με τις δύο προαναφερθείσες μεθόδους, δίνονται στον ακόλουθο πίνακα (Πίνακας 4-6). Με απλή εποπτεία διαπιστώνεται ότι η ακρίβεια της προσεγγιστικής στατικής ανάλυσης είναι αρκετά καλή, επομένως θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την προκαταρκτική διαστασιολόγηση των μελών ενός συστήματος ανάρτησης στο αρχικό στάδιο του μηχανολογικού σχεδιασμού.

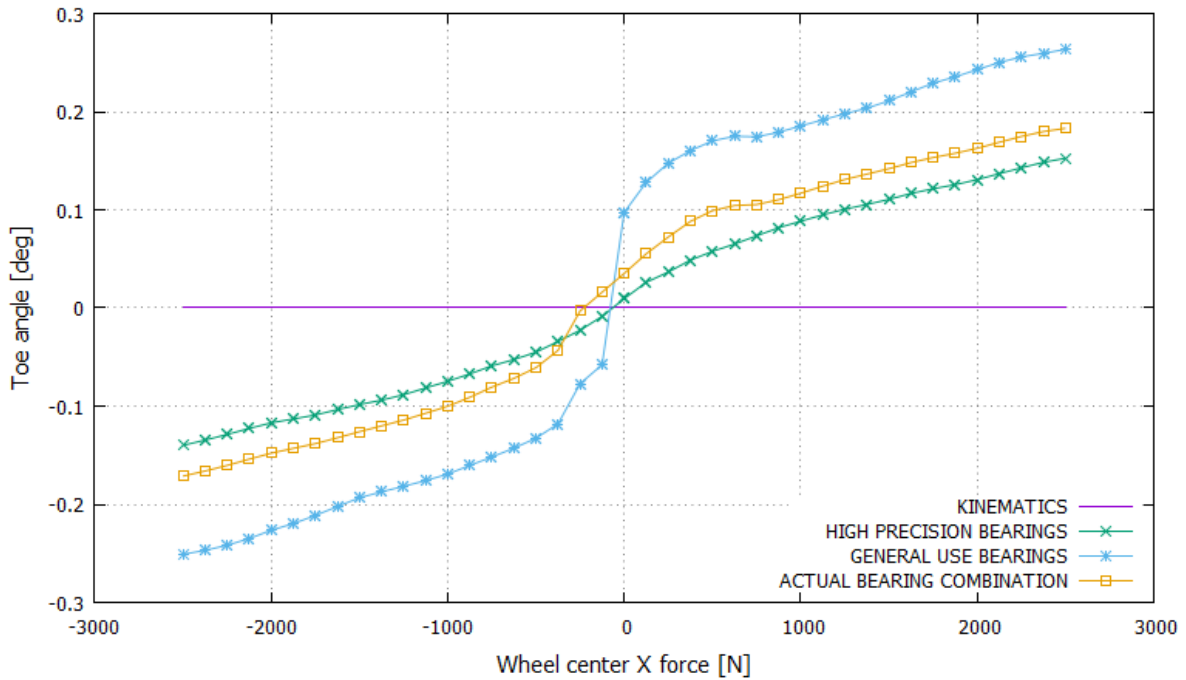
**Πίνακας 4-6: Επαλήθευση αποτελεσμάτων προσεγγιστικής στατικής ανάλυσης μηχανισμού ανάρτησης στην ονομαστική του θέση υπό στατική κατακόρυφη φόρτιση**

Σημείο	Ασκούμενη δύναμη [N]		Σφάλμα [%]
	Προσεγγιστική στατική ανάλυση	Σύστημα πολλαπλών σωμάτων	
<b>A</b>	36.682	32.347	13.4
<b>B</b>	107.261	110.382	-2.8
<b>C</b>	799.128	816.678	-2.1
<b>D</b>	139.724	142.630	-2.0
<b>E</b>	289.245	284.374	1.7
<b>F</b>	419.551	431.877	-2.9
<b>G</b>	618.215	631.651	-2.1
<b>H</b>	47.060	48.058	-2.1

Ενδιαφέρον παρουσιάζει, επίσης, η διερεύνηση της επίδρασης της δυσκαμψίας και της ακτινικής χάρης των χρησιμοποιούμενων σφαιρικών εδράνων, επί της ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης. Προκειμένου να γίνει αντιληπτή η σημαντική συνεισφορά των σφαιρικών εδράνων στην απόκλιση της πραγματικής από την κινηματικά προβλεπόμενη γεωμετρία της ανάρτησης, δίνονται ενδεικτικά παρακάτω οι καμπύλες μεταβολής των γωνιών κλίσης και σύγκλισης κατά την άσκηση εγκάρσιου και διαμήκου φορτίου, αντίστοιχα, στο κέντρο του τροχού, όπως αυτές προέκυψαν για τρεις διαφορετικές υλοποιήσεις του μηχανισμού: Στην πρώτη εξ αυτών χρησιμοποιούνται αποκλειστικά σφαιρικά έδρανα υψηλών προδιαγραφών (καμπύλες φορτίου-μετατόπισης AOM-6, AM-5, AM-6 – Σχήμα 4.21), στη δεύτερη, σφαιρικά έδρανα γενικής χρήσης (καμπύλη φορτίου-μετατόπισης COM-5, COM-6 – Σχήμα 4.21) και στην τρίτη και τελευταία, ο συνδυασμός εδράνων που αντιστοιχεί στην πραγματική υλοποίηση του μηχανισμού (Πίνακας 4-2), σε κάθε περίπτωση υπό τις σχετικές προαναφερθείσες παραδοχές. Εκ πρώτης όψευς, οι διαφορές στον τρόπο μεταβολής των γωνιών κλίσης (Σχήμα 4.28) και σύγκλισης (Σχήμα 4.29) μεταξύ των ανωτέρω παραλλαγών του μηχανισμού θα μπορούσαν να θεωρηθούν αμελητέες, ωστόσο, όσον αφορά συστήματα ανάρτησης οχημάτων υψηλών επιδόσεων, όπως άλλωστε είναι και το μελετώμενο σύστημα, ο παραπάνω ισχυρισμός είναι εσφαλμένος.



**Σχήμα 4.28: Γωνία κλίσης του τροχού συναρτήσει της εγκάρσιως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του – Απολύτως στερεά σώματα**



**Σχήμα 4.29: Γωνία σύγκλισης του τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του – Απολύτως στερεά σώματα**

Βάσει των διαγραμμάτων της προηγούμενης σελίδας, διαπιστώνεται ότι η επίδραση της ακτινικής χάρης των σφαιρικών εδράνων επί της ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς του μηχανισμού, είναι κατά πολύ δυσμενέστερη συγκριτικά με την αντίστοιχη επίδραση της ελαστικής παραμόρφωσης αυτών. Το εν λόγω συμπέρασμα εξάγεται παρατηρώντας ότι για μικρές τιμές του εγκαρσίως επιβαλλόμενου φορτίου στο τροχό, οι προκύπτουσες μεταβολές των γωνιών κλίσης και σύγκλισης είναι μεγάλες και εισάγονται κατά τρόπο, σχεδόν βηματικό. Αντιθέτως, όσον αφορά μεγαλύτερα πλάτη φόρτισης, οι γωνίες κλίσης και σύγκλισης αυξάνονται με πολύ μικρότερο ρυθμό, καθώς τότε κυριαρχούν φαινόμενα που σχετίζονται με τη δυσκαμψία των εδράνων. Είναι λογικό, λοιπόν, η ελαστοκινηματική συμπεριφορά του μηχανισμού ανάρτησης, φέροντος αποκλειστικά σφαιρικά έδρανα υψηλών προδιαγραφών, να είναι σαφώς καλύτερη σε σχέση τις άλλες δύο υλοποιήσεις που εξετάστηκαν, καθώς η κατασκευή των ανωτέρω εδράνων γίνεται υπό αυστηρές προδιαγραφές ακριβείας, με αποτέλεσμα τη μείωση της ακτινικής χάρης. Επιπλέον, η χρήση του συνδυασμού εδράνων που αντιστοιχεί στην πραγματική υλοποίηση του μηχανισμού, οδηγεί σε μεταβολές των γωνιών κλίσης και σύγκλισης που είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες της υλοποίησης με σφαιρικά έδρανα υψηλών προδιαγραφών, αλλά μικρότερες από αυτές της υλοποίησης με σφαιρικά έδρανα γενικής χρήσης, επιβεβαιώνοντας τα όσα ειπώθηκαν στην Υποενότητα 2.4.1 περί συσσώρευσης ανοχών.

Κλείνοντας την παρούσα ενότητα, περιγράφεται ένας ακόμα τρόπος αξιοποίησης του μοντέλου ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών ως σύστημα πολλαπλών απολύτως στερεών σωμάτων. Πιο συγκεκριμένα, το τελευταίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί, εκτός των άλλων και για τον ακριβή προσδιορισμό της μεταβολής της γωνίας κλίσης των τροχών κατά την εισαγωγή γωνίας κλυδωνισμού στην ανηρτημένη μάζα ως ακολούθως: Αρχικά, εισάγεται ένας επιπρόσθετος κινηματικός περιορισμός σύμφωνα με τον οποίο ο τροχός ακινητοποιείται στην επιθυμητή θέση κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Εν συνεχεία υπολογίζεται η θέση του κέντρου κλυδωνισμού του συστήματος ανάρτησης, γύρω από το οποίο περιστρέφονται κατά την ίδια μικρή γωνία, όλα τα σημεία έδρασης του μηχανισμού επί του πλαισίου, πολλαπλασιάζοντας τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης με κατάλληλο μητρώο (επίπεδης) στροφής. Στη συνέχεια, η γεωμετρία του μηχανισμού ανανεώνεται με βάση τις νέες θέσεις των ανωτέρω σημείων και επιλύεται το προκύπτον σύστημα εξισώσεων για τον προσδιορισμό της νέας κατάστασης του μηχανισμού. Ακολουθεί επανυπολογισμός της θέσης του κέντρου κλυδωνισμού αξιοποιώντας τη νέα γεωμετρία της ανάρτησης και η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου επιτευχθεί το επιθυμητό πλάτος γωνίας κλυδωνισμού της ανηρτημένης μάζας.

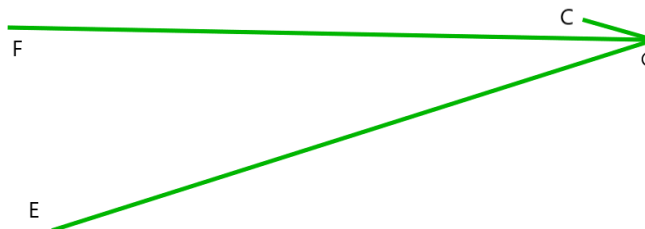
Τα αποτελέσματα πλήρους ελαστοκινηματικής ανάλυσης του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης, λαμβανομένου ως σύστημα πολλαπλών απολύτως στερεών σωμάτων, δίνονται στην Ενότητα 4.3, υπό τη μορφή διαγραμμάτων μεταβολής των χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών ανάρτησης συναρτήσει του εκάστοτε εξωτερικά ασκούμενου φορτίου στον τροχό.



### 4.2.3 Ενσωμάτωση ελαστικής συμπεριφοράς φορέων

Στην Υποενότητα 2.5.2 αναφέρθηκε ότι η ενσωμάτωση της ελαστικής συμπεριφοράς των μελών ενός μηχανισμού ανάρτησης κατά τη μοντελοποίηση αυτού ως σύστημα πολλαπλών σωμάτων, αποσκοπεί στη βελτίωση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων της εκάστοτε ανάλυσης, πρωτίστως όσον αφορά τα φορτία που καταπονούν τα διάφορα τεμάχια και δευτερευόντως αναφορικά με την προκύπτουσα ελαστοκινηματική συμπεριφορά του μηχανισμού. Ο ισχυρισμός αυτός είναι πράγματι αληθής προκειμένου για μηχανισμούς ανάρτησης οχημάτων γενικής χρήσης, για την υλοποίηση της πλειοψηφίας των οποίων, αξιοποιούνται αποκλειστικά εύκαμπτα στοιχεία σύνδεσης. Ωστόσο, στην περίπτωση του μελετώμενου μηχανισμού, η δυσκαμψία των χρησιμοποιούμενων στοιχείων σύνδεσης (σφαιρικά έδρανα) είναι συγκρίσιμη με αυτήν των μελών του, επομένως καθίσταται επιβεβλημένη η μοντελοποίηση των τελευταίων ως παραμορφώσιμα.

Ξεκινώντας με τους βραχίονες ελέγχου του μηχανισμού ανάρτησης, κάθε σκέλος αυτών εξιδανικεύεται ως πεπερασμένο στοιχείο δοκού κατά Euler ή Timoshenko, αφού οι, σχετιζόμενες με το λόγο λιγυρότητας, προϋποθέσεις ικανοποιούνται στη συγκεκριμένη περίπτωση, σύμφωνα και με τις δύο παραπάνω θεωρίες (Ενότητα 4.2.3). Από την άλλη πλευρά, το σημείο  $C_2$  του κατώτερου βραχίονα ελέγχου, θεωρείται προς το παρόν ότι συνδέεται με το σημείο αναφοράς  $G_2$ , διαμέσου μιας πλήρως άκαμπτης δοκού κατάλληλου μήκους (Σχήμα 4.30). Συνεπώς, η προκύπτουσα τοπολογία του εν λόγω βραχίονα ελέγχου έχει ως εξής: Τα δύο πεπερασμένα στοιχεία δοκού που αντιστοιχούν στα σκέλη αυτού και η προαναφερθείσα άκαμπτη δοκός έχουν κοινό άκρο το σημείο αναφοράς  $G_2$ , ενώ τα σημεία  $C_2, E_2, F_2, G_2$  συνδέονται στα σημεία  $C_7, E_1, F_1, G_4$  αντίστοιχα, μέσω σφαιρικών εδράνων, όπως προηγουμένως. Όσον αφορά την τοπολογία του ανώτερου βραχίονα ελέγχου, ισχύουν τα ίδια, εξαιρουμένης της άκαμπτης δοκού.



Σχήμα 4.30: Κατώτερος βραχίονας ελέγχου – ABAQUS

Κατ' αυτόν τον τρόπο μοντελοποιείται και η ράβδος διεύθυνσης του μηχανισμού ανάρτησης, με ένα πεπερασμένο στοιχείο δοκού και σφαιρικά έδρανα στα άκρα της. Αντίθετα, η προέκταση του κάτω μέρους του συνδυασμού ελατηρίου-αποσβεστήρα (Σχήμα 4.17) λαμβάνεται ως απολύτως στερεό σώμα, καθώς η αντικατάσταση αυτής από ένα πεπερασμένο στοιχείο δοκού θα ήταν ισοδύναμη με την εν σειρά σύνδεση ενός πολύ σκληρού με ένα πολύ μαλακό ελατήριο, όπου η προκύπτουσα δυσκαμψία καθορίζεται εξ ολοκλήρου από το τελευταίο. Εκτός αυτού, οι παραμορφώσεις που υφίστανται τα διάφορα μέλη του συστήματος επενέργησης, δεν επηρεάζουν άμεσα τη γεωμετρία του μηχανισμού.

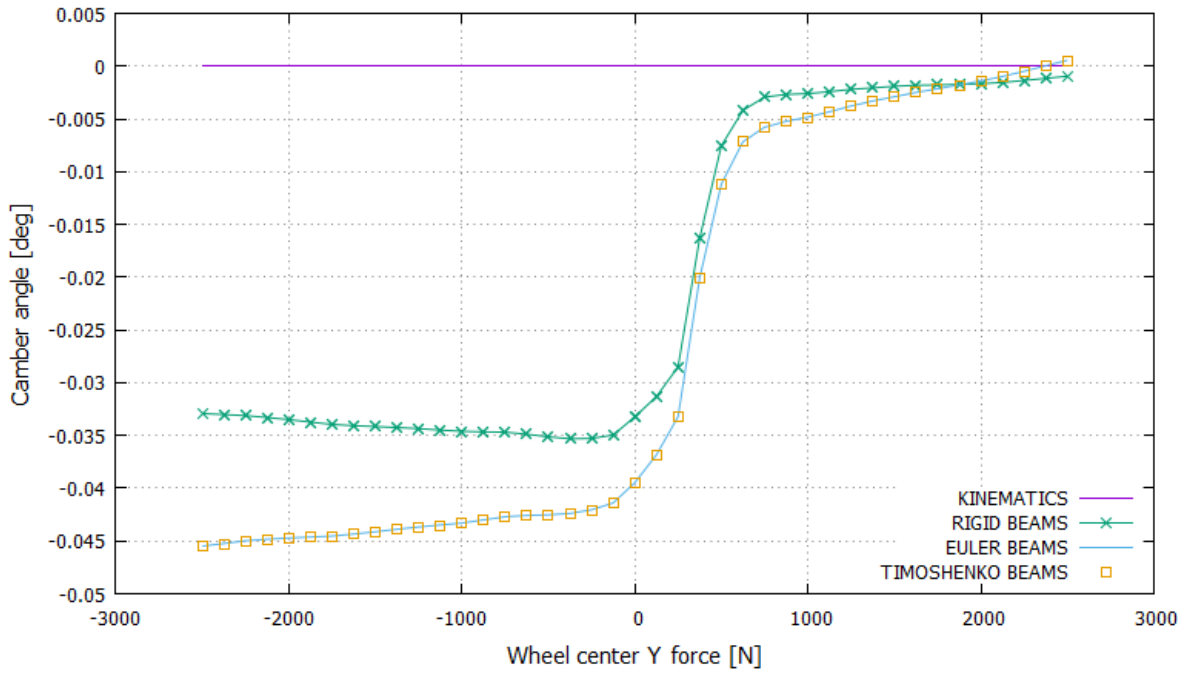
Προκειμένου να γίνει αντιληπτή η συνεισφορά των ελαστικών παραμορφώσεων που υφίστανται οι βραχίονες ελέγχου και η ράβδος διεύθυνσης, στην ελαστοκινηματική συμπεριφορά του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης, δίνονται παρακάτω (Σχήμα 4.32 και Σχήμα 4.33) ενδεικτικά διαγράμματα μεταβολής των γωνιών κλίσης και σύγκλισης κατά την άσκηση εγκάρσιου και διαμήκους φορτίου, αντίστοιχα, στο κέντρο του τροχού. Συγκεκριμένα, αντιπαραβάλλονται αποτελέσματα που προέκυψαν λαμβάνοντας αρχικά υπόψιν όλα τα μέλη του μηχανισμού ως απολύτως στερεά σώματα και εν συνεχεία μοντελοποιώντας τους βραχίονες ελέγχου και τη ράβδο διεύθυνσης με πεπερασμένα στοιχεία δοκού κατά Euler και Timoshenko, σύμφωνα με τα όσα προαναφέρθηκαν.

Υστερα από εποπτεία των ανωτέρω διαγραμμάτων, εξάγεται το συμπέρασμα ότι η χρήση πεπερασμένων στοιχείων δοκού για τη μοντελοποίηση των βραχιόνων ελέγχου και της ράβδου διεύθυνσης πράγματι έχει νόημα, καθώς οι προκύπτουσες καμπύλες μεταβολής των γωνιών κλίσης και σύγκλισης διαφέρουν αρκετά από τις αντίστοιχες με όλα τα μέλη του μηχανισμού θεωρούμενα ως απολύτως στερεά σώματα, ενώ το υπολογιστικό κόστος της ανάλυσης παρέμεινε πρακτικά αμετάβλητο (περίπου 18.5 s). Επιπλέον, τα αποτελέσματα της ελαστοκινηματικής ανάλυσης, τουλάχιστον όσον αφορά τις ανωτέρω γωνίες, φαίνεται να μην επηρεάζονται από την επιλογή μαθηματικής διατύπωσης των πεπερασμένων στοιχείων δοκού, είτε αυτή βασίζεται στη θεωρία Euler, είτε στη θεωρία Timoshenko. Το γεγονός αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού τα σκέλη των βραχιόνων ελέγχου και η ράβδος διεύθυνσης του μελετώμενου μηχανισμού καταπονούνται ως επί το πλείστον από αξονικά φορτία. Συγκεκριμένα, τα σκέλη του κατώτερου βραχίονα ελέγχου παραλαμβάνουν, επίσης, συγκεντρωμένη ροπή κάμψης στο σημείο  $G_2$  που οφείλεται στη δύναμη επενέργησης, αλλά εξαιτίας του βραχέως μοχλοβραχίονα υπό του οποίου ασκείται η τελευταία, η επαγόμενη καμπτική ροπή είναι σχετικά μικρή, το ίδιο και οι διατμητικές τάσεις και παραμορφώσεις που αναπτύσσονται λόγω αυτής, επί των διατομών των σκελών.

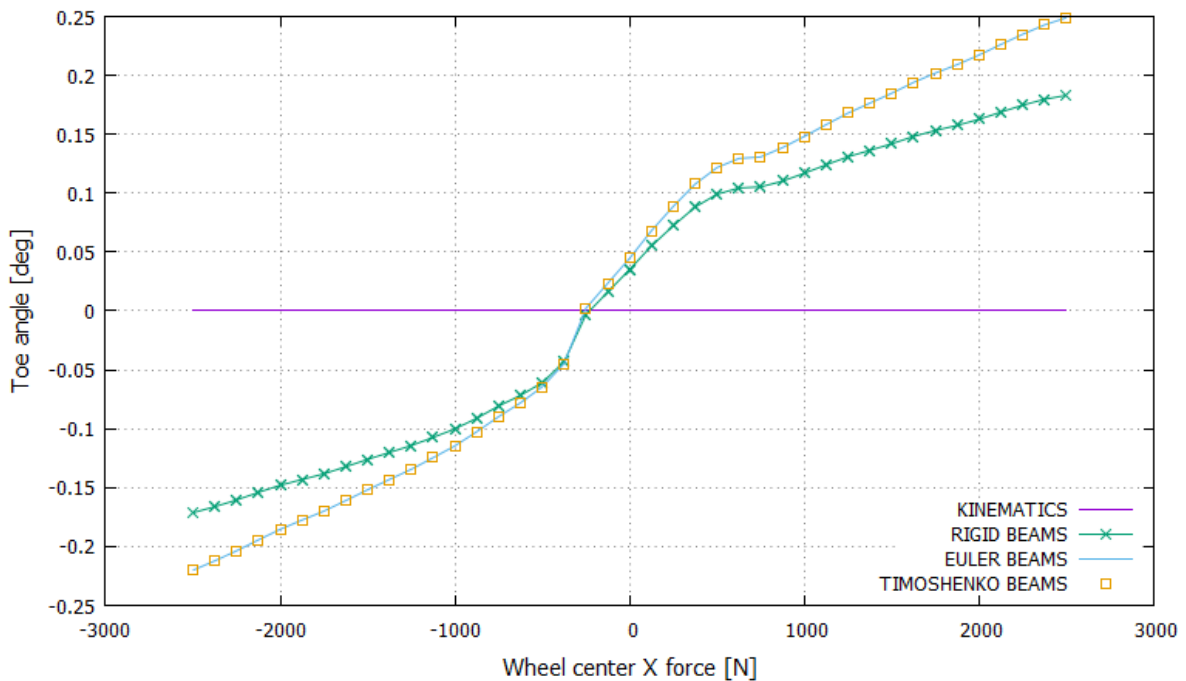


**Σχήμα 4.31: Βραχίονες ελέγχου συστήματος ανάρτησης οχήματος γενικής χρήσης [79]**

Αντίθετα, σε μηχανισμούς ανάρτησης με εύκαμπτα στοιχεία σύνδεσης, δεν αποκλείεται οι, εξ αυτών αναπτυσσόμενες, καμπτικές ροπές να είναι αρκετά μεγάλες (συχνό φαινόμενο σε αναρτήσεις πολλαπλών συνδέσμων), με αποτέλεσμα η χρήση πεπερασμένων στοιχείων δοκού κατά Timoshenko να είναι προτιμότερη. Σημειώνεται, επίσης, ότι οι βραχίονες ελέγχου που απαντώνται σε συστήματα ανάρτησης οχημάτων γενικής χρήσης, συχνά χαρακτηρίζονται από σύνθετη γεωμετρία (Σχήμα 4.31) με σκοπό την εκπλήρωση χωροταξικών και κατασκευαστικών περιορισμών, κατά συνέπεια η μοντελοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία δοκού σε αυτές τις περιπτώσεις, κρίνεται ακατάλληλη.



**Σχήμα 4.32: Γωνία κλίσης του τροχού συναρτήσει της εγκάρσιως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του – Ελαστικοί βραχίονες ελέγχου**



**Σχήμα 4.33: Γωνία σύγκλισης του τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του – Ελαστικοί βραχίονες ελέγχου**

Για λόγους πληρότητας δίνονται κάτωθι οι διαστάσεις των διατομών των σκελών των βραχιόνων ελέγχου και της ράβδου διεύθυνσης του μελετώμενου συστήματος ανάρτησης (Πίνακας 4-7 και Πίνακας 4-8). Αναφέρεται επίσης ότι τα ανωτέρω τεμάχια κατασκευάζονται από πυρήνα αλουμινίου 7075, τυλισσόμενο από ανθρακονήματα και το ισοδύναμο πειραματικά προσδιορισμένο μέτρο ελαστικότητας κατά την αξονική διεύθυνση αυτών ανέρχεται στα 120 GPa.

**Πίνακας 4-7: Διαστάσεις ορθογωνικών διατομών των σκελών των βραχιόνων ελέγχου**

Σκέλη βραχιόνων ελέγχου	Βάση [mm]	Ύψος [mm]	Πάχος τοιχώματος [mm]
AD	18	13	1.5
BD	18	13	1.5
EG	19.8	14.8	2.4
FG	21.6	16.6	3.3

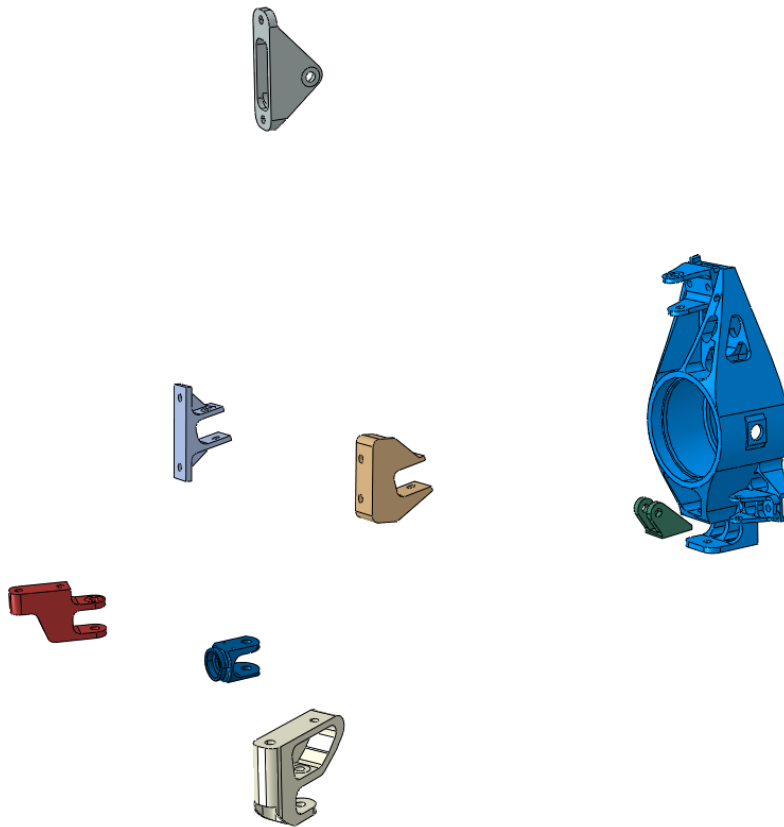
**Πίνακας 4-8: Διαστάσεις κυκλικής διατομής ράβδου διεύθυνσης**

Ράβδος διεύθυνσης	Εξωτερική ακτίνα [mm]	Πάχος τοιχώματος [mm]
JH	14.6	1.8

Στην πραγματικότητα, οι βραχίονες ελέγχου και η ράβδος διεύθυνσης δεν είναι τα μόνα μέλη του μηχανισμού ανάρτησης που υφίστανται ελαστικές παραμορφώσεις, αφού το ίδιο ισχύει, τόσο για το φορέα του τροχού, όσο και για τους διάφορους βραχίονες έδρασης (suspension brackets) που αυτός περιλαμβάνει. Ειδικότερα, οι τελευταίοι χρησιμεύουν για τη σύνδεση: του συστήματος ανάρτησης και επενέργησης στο πλαίσιο (σημεία A, B, E, F, I), της ράβδου διεύθυνσης στον οδοντωτό κανόνα της κρεμαγιέρας (σημείο J) και του συνδυασμού ελατηρίου-αποσβεστήρα στον κατώτερο βραχίονα ελέγχου (σημείο C). Υπενθυμίζεται εδώ ότι στο πλαίσιο της παρούσας ΔΕ, το πλαίσιο και η κρεμαγιέρα λαμβάνονται ως απολύτως στερεά και ακίνητα σώματα (έδαφος).

Η σύνθετη γεωμετρία των ανωτέρω τεμαχίων δεν επιτρέπει τη μοντελοποίηση τους με πεπερασμένα στοιχεία δοκού, ενώ η διακριτοποίηση καθενός από αυτά με τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία (solid elements) θα οδηγούσε σε υπέρμετρη αύξηση του πλήθους των εμπλεκόμενων βαθμών ελευθερίας, εισάγοντας, έτσι, σημαντική επιβάρυνση όσον αφορά το υπολογιστικό κόστος της ανάλυσης. Οι εν λόγω γενικές αναπαραστάσεις του φορέα του τροχού και των βραχιόνων έδρασης μέσω τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων μπορούν να αντικατασταθούν από τα λεγόμενα «υπερστοιχεία» (superelements/substructures), τα οποία διατηρούν μόνο τους βαθμούς ελευθερίας που απαιτούνται για τη σύνδεσή τους στα συνεργαζόμενα τεμάχια (retained nodal DOFs), με αποτέλεσμα τη μικρή αύξηση του συνολικού πλήθους βαθμών ελευθερίας του συστήματος πολλαπλών σωμάτων. Μάλιστα, εφόσον οι προσομοιούμενες δοκιμές χαρακτηρισμού της ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς του μηχανισμού ανάρτησης δεν περιλαμβάνουν δυναμικά φαινόμενα, η ανωτέρω τεχνική υποβιβασμού τάξης του μοντέλου (model order

reduction technique) είναι απολύτως ακριβής, δηλαδή η υπολογισθείσα ελαστική απόκριση των εν λόγω σωμάτων ταυτίζεται με αυτήν που προκύπτει εκτελώντας την αρχική κοστοβόρα ανάλυση (Guyan reduction/static condensation). Αξίζει να αναφερθεί ότι τέτοιου είδους τεχνικές, ξεκίνησαν να αναπτύσσονται από τα πρώτα κιάλας χρόνια έπειτα από την εδραίωση των μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων, με σκοπό την καλύτερη εκμετάλλευση των διαθέσιμων υπολογιστικών πόρων για την επίλυση προβλημάτων δομικής μηχανικής, ενώ για τον ίδιο λόγο, αντίστοιχες τεχνικές υποβιβασμού τάξης χρησιμοποιούνται ευρέως κατά την ανάλυση δυναμικών συστημάτων πολλών βαθμών ελευθερίας [80].



**Σχήμα 4.34: Φορέας τροχού και βραχίονες έδρασης μηχανισμού ανάρτησης στην αρχική κατάσταση – ABAQUS**

Ο υπολογισμός των κομβικών μετατοπίσεων κατά τη στατική ανάλυση ενός τεμαχίου με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, ανάγεται στην επίλυση του ακόλουθου γραμμικού συστήματος:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (4.90)$$

όπου,  $[K]$ , το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής,  $\{u\}$ , το διάνυσμα κομβικών μετατοπίσεων και  $\{F\}$ , το διάνυσμα κομβικών φορτίσεων. Οι εξισώσεις από τις οποίες

αποτελείται το παραπάνω σύστημα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: από τη μια πλευρά υπάρχουν αυτές που αντιστοιχούν στους διατηρούμενους βαθμούς ελευθερίας (master/boundary DOFs – δείκτης “m”) και από την άλλη, αυτές που αντιστοιχούν στους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας (slave/internal DOFs – δείκτης “s”) του διακριτοποιημένου τεμαχίου. Επιπλέον αναφέρεται ότι οι κόμβοι που σχετίζονται με τους διατηρούμενους βαθμούς ελευθερίας συχνά καλούνται κόμβοι διεπαφής (interface nodes), καθώς χρησιμεύουν για τη σύνδεση του υπερστοιχείου με το περιβάλλον αυτού. Έτσι, λοιπόν, το σύστημα εξισώσεων (4.90), λαμβάνει την ακόλουθη μορφή [81]:

$$\begin{bmatrix} [K_{mm}] & [K_{ms}] \\ [K_{sm}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_m\} \\ \{u_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_m\} \\ \{F_s\} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$[K_{mm}]\{u_m\} + [K_{ms}]\{u_s\} = \{F_m\} \quad (4.91)$$

$$[K_{sm}]\{u_m\} + [K_{ss}]\{u_s\} = \{F_s\} \quad (4.92)$$

Επιλύοντας τη σχέση (4.92) ως προς  $\{u_s\}$  και αντικαθιστώντας, εν συνεχεία, στη σχέση (4.91), εξάγεται η ζητούμενη μαθηματική διατύπωση – σχέση (4.94), όπου,  $[\hat{K}]$ , το μητρώο δυσκαμψίας και  $\{\hat{F}\}$ , το διάνυσμα κομβικών φορτίσεων του υπερστοιχείου.

$$\{u_s\} = [K_{ss}]^{-1}\{F_s\} - [K_{ss}]^{-1}[K_{sm}]\{u_m\} \quad (4.93)$$

$$[\hat{K}]\{\hat{u}\} = \{\hat{F}\}$$

$$[\hat{K}] = [K_{mm}] - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1}[K_{sm}] \quad (4.94)$$

$$\{\hat{F}\} = \{F_m\} - [K_{ms}][K_{ss}]^{-1}\{F_s\}$$

$$\{\hat{u}\} = \{u_m\}$$

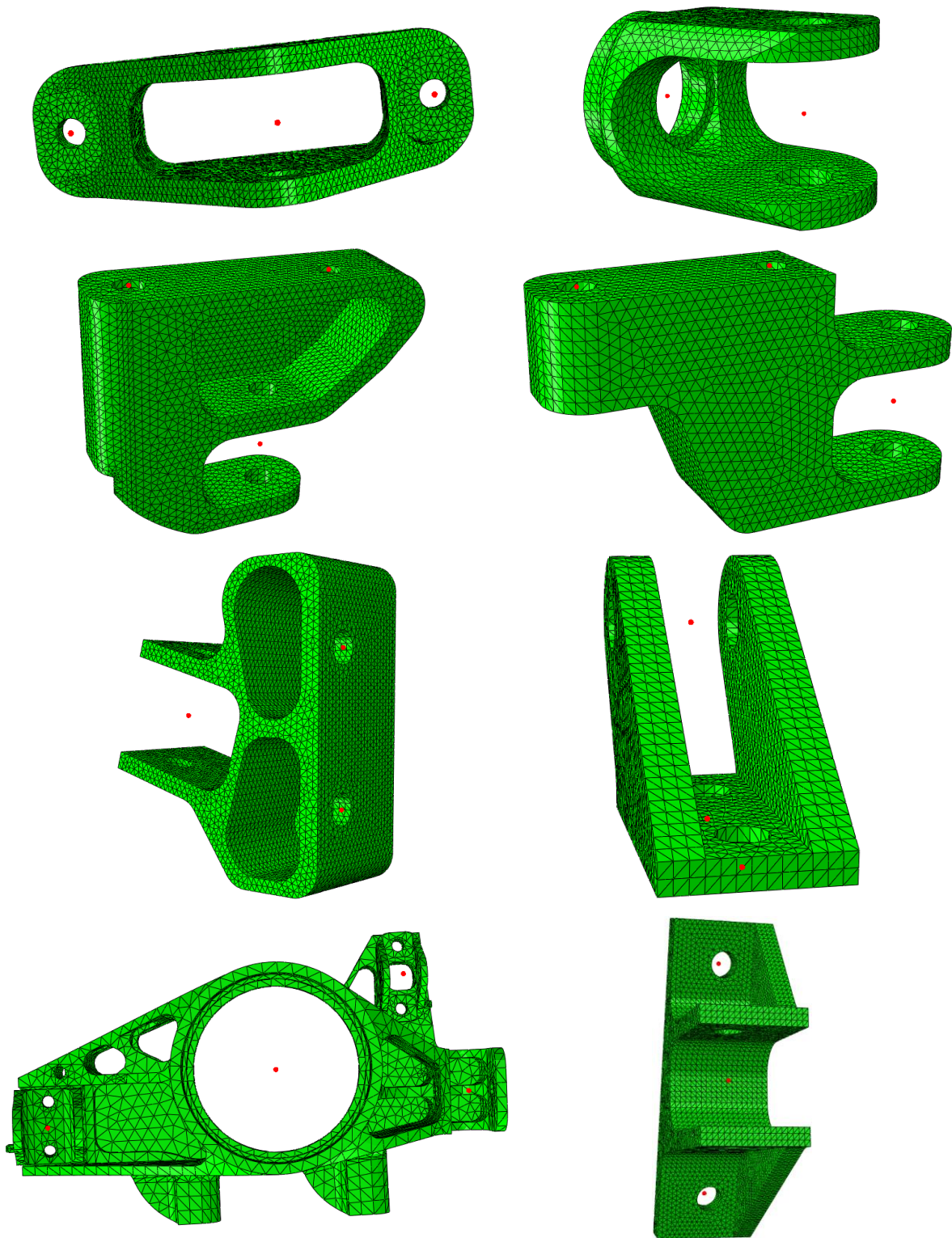
Ένα ακόμα πλεονέκτημα της χρήσης υπερστοιχείων για την ενσωμάτωση της ελαστικής συμπεριφοράς φορέων κατά την ανάλυση συστημάτων πολλαπλών σωμάτων, είναι το γεγονός ότι καθίσταται δυνατός ο εκ των υστέρων ανεξάρτητος υπολογισμός ολόκληρου του διανύσματος κομβικών μετατοπίσεων,  $\{u\}$ , συναρτήσεως των υπολογισθεισών κομβικών μετατοπίσεων κατά την έννοια των διατηρούμενων βαθμών ελευθερίας,  $\{u_m\}$ . Κατ’ αυτόν τον τρόπο, το υπολογιστικό κόστος της εκάστοτε ανάλυσης διατηρείται σε χαμηλά επίπεδα, αφού κατά τη διάρκεια αυτής γίνεται αποθήκευση σχετικά μικρού όγκου δεδομένων για κάθε κατάσταση του συστήματος πολλαπλών σωμάτων. Μετά το πέρας της προσομοίωσης, οι άγνωστες κομβικές μετατοπίσεις,  $\{u_s\}$ , μπορούν να ανακτηθούν σύμφωνα με τη σχέση (4.93), αρκεί να έχουν διατηρηθεί/φορτωθεί στη μνήμη τα στοιχεία των μητρώων  $[K_{ss}]^{-1}$ ,  $[K_{sm}]$  και του διανύσματος  $\{F_s\}$ , όπως αυτά υπολογίστηκαν κατά την εξαγωγή του μητρώου δυσκαμψίας  $[\hat{K}]$  και του διανύσματος  $\{\hat{F}\}$ . Διευκρινίζεται ότι ο υπολογισμός του μητρώου  $[\hat{K}]$  πραγματοποιείται εφάπαξ πριν την ανάλυση στην οποία αυτό εμπλέκεται, ενώ, τόσο τα στοιχεία αυτού, όσο και τα στοιχεία των μητρώων  $[K_{ss}]^{-1}$ ,  $[K_{sm}]$  και του διανύσματος  $\{F_s\}$ , αποθηκεύονται σε κατάλληλο αρχείο για μετέπειτα χρήση.



Όταν ένα υπερστοιχείο υφίσταται πεπερασμένες στροφές στο πλαίσιο της ανάλυσης ενός συστήματος πολλαπλών σωμάτων, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός ενός ισοδύναμου μητρώου στροφής απολύτως στερεού σώματος  $[R]$ , το οποίο σχετίζεται με τη μακροσκοπική κίνηση (large displacements/rotations) του πρώτου στο χώρο. Εφόσον το υπερστοιχείο δύναται να παραμορφωθεί ελαφρώς ως προς την ονομαστική γεωμετρία (γραμμικά ελαστικός φορέας), οι αρχικές και τρέχουσες θέσεις δύο κόμβων, σχετιζόμενων με τους διατηρούμενους βαθμούς ελευθερίας, μπορούν να αξιοποιηθούν προκειμένου για τον προσδιορισμό του προσανατολισμού ενός σωματόδετου συστήματος αναφοράς στην αρχική και τρέχουσα κατάσταση του συστήματος πολλαπλών σωμάτων (x-point-z-point method – Παράγραφος 4.1.1.3). Με βάση τον προσανατολισμό του εν λόγω συστήματος αναφοράς στις δύο αυτές καταστάσεις, προκύπτει το ζητούμενο μητρώο στροφής  $[R]$ . Εν συνεχεία, για τον υπολογισμό των δυνάμεων αντίδρασης λόγω ελαστικής παραμόρφωσης του υπερστοιχείου, οι κομβικές μετατοπίσεις κατά την έννοια των διατηρούμενων βαθμών ελευθερίας, λόγω κίνησης απολύτως στερεού σώματος θα πρέπει να «αφαιρεθούν» από τις αντίστοιχες συνολικές κομβικές μετατοπίσεις [82]. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη μαθηματική διατύπωση προβλημάτων ανάλυσης συστημάτων πολλαπλών γραμμικά ελαστικών συστημάτων, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην πηγή [62].

Στα ακόλουθα σχήματα (Σχήμα 4.35 σε συνδυασμό με Σχήμα 4.34) απεικονίζονται τα υπερστοιχεία που δημιουργήθηκαν για την ελαστοκινηματική ανάλυση του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης. Οι κόμβοι που σχετίζονται με τους διατηρούμενους βαθμούς ελευθερίας σημειώνονται με κόκκινο χρώμα, ενώ διατηρούνται και οι 6 βαθμοί ελευθερίας σε καθέναν από αυτούς σύμφωνα με σχετική προτροπή από το εγχειρίδιο χρήσης του λογισμικού ABAQUS [83]. Στην πραγματικότητα, κανένας εκ των ανωτέρω κόμβων δε βρίσκεται επί των σωμάτων που μοντελοποιούνται ως υπερστοιχεία, αλλά επί των κοχλιών που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση των αντίστοιχων συνδέσεων, με μοναδική εξαίρεση τον κόμβο του φορέα του τροχού που αντιστοιχεί στο κέντρο του τελευταίου. Έτσι η σχετική κίνηση των κόμβων των οποίων οι βαθμοί ελευθερίας διατηρούνται, δεσμεύεται ως προς τα αντίστοιχα υπερστοιχεία μέσω κατάλληλων κινηματικών περιορισμών. Οι συνοριακές συνθήκες του μοντέλου επιβάλλονται δεσμεύοντας όλους τους βαθμούς ελευθερίας των κόμβων που αντιστοιχούν στις κοχλιοσυνδέσεις μεταξύ πλαισίου και βραχιόνων έδρασης, ενώ ο συνδυασμός ελατηρίου-αποσβεστήρα δε συνδέεται πλέον στον κατώτερο βραχίονα ελέγχου απευθείας μέσω άκαμπτης δοκού, αλλά μεσολαβεί ο αντίστοιχος βραχίονας έδρασης (Σχήμα 4.34 και Σχήμα 4.35).

Ενδεικτικά δίνονται παρακάτω – σχέση (4.95), τα στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας που αντιστοιχεί στο βραχίονα έδρασης της ράβδου διεύθυνσης επί του οδοντωτού κανόνα της κρεμαγιέρας. Το εν λόγω μητρώο δυσκαμψίας είναι συμμετρικό και έχει 12 γραμμές και 12 στήλες, όσοι δηλαδή είναι και οι διατηρούμενοι βαθμοί ελευθερίας του αντίστοιχου υπερστοιχείου. Διευκρινίζεται ότι, σύμφωνα με το χρησιμοποιούμενο σύστημα μονάδων, το παραπάνω μητρώο δυσκαμψίας είναι κατάλληλο για χρήση με διανύσματα κομβικών φορτίσεων, εκπεφρασμένα σε  $N$  και  $Nmm$ , ενώ οι μετατοπίσεις υπολογίζονται σε  $mm$ .



Σχήμα 4.35: Υπερστοιχεία και κόμβοι που σχετίζονται με τους διατηρούμενους βαθμούς ελευθερίας αυτών

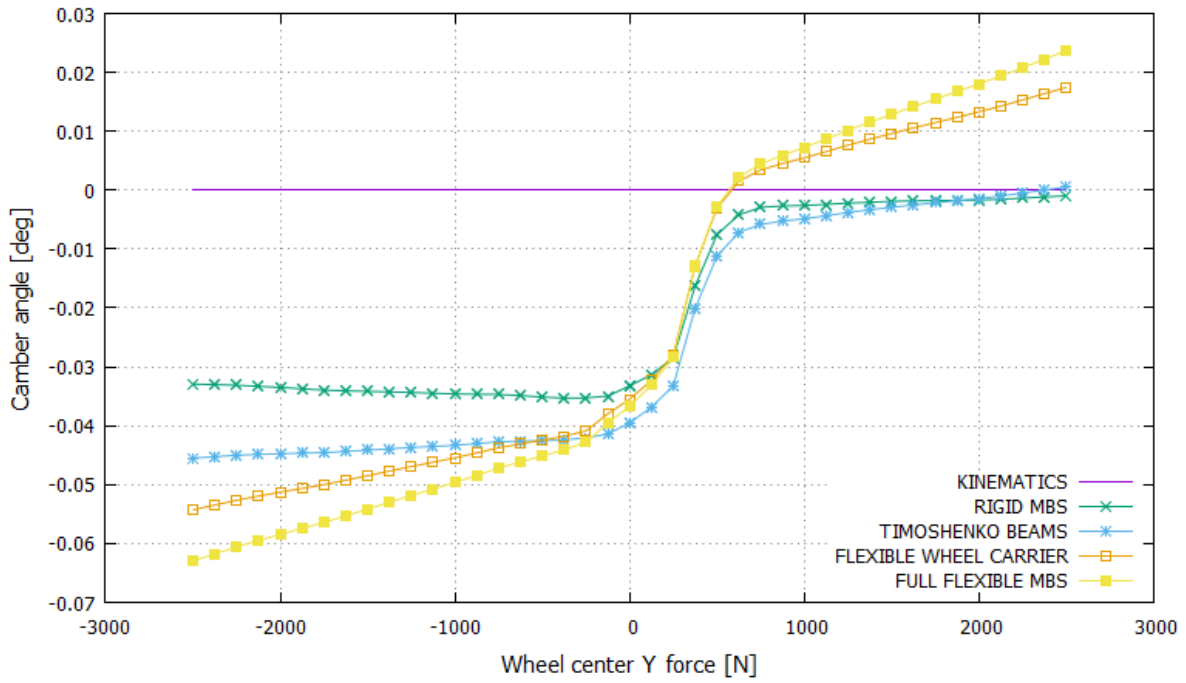
$$[\widehat{K}_{clevis}] = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{12}]^T & [k_{22}] \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} 52226.2 & -22.0 & -1112.8 & 7089.5 & -2896.5 & 672397.0 \\ & 168333.7 & -665.7 & 17473.3 & 249.7 & -626.1 \\ & & 24047.9 & -484813.5 & 73.3 & -7409.9 \\ & & & 16015220.7 & -190.2 & -147997.7 \\ & & & & 5238664.7 & -26530.2 \\ & & & & & 12249274.2 \end{bmatrix}$$

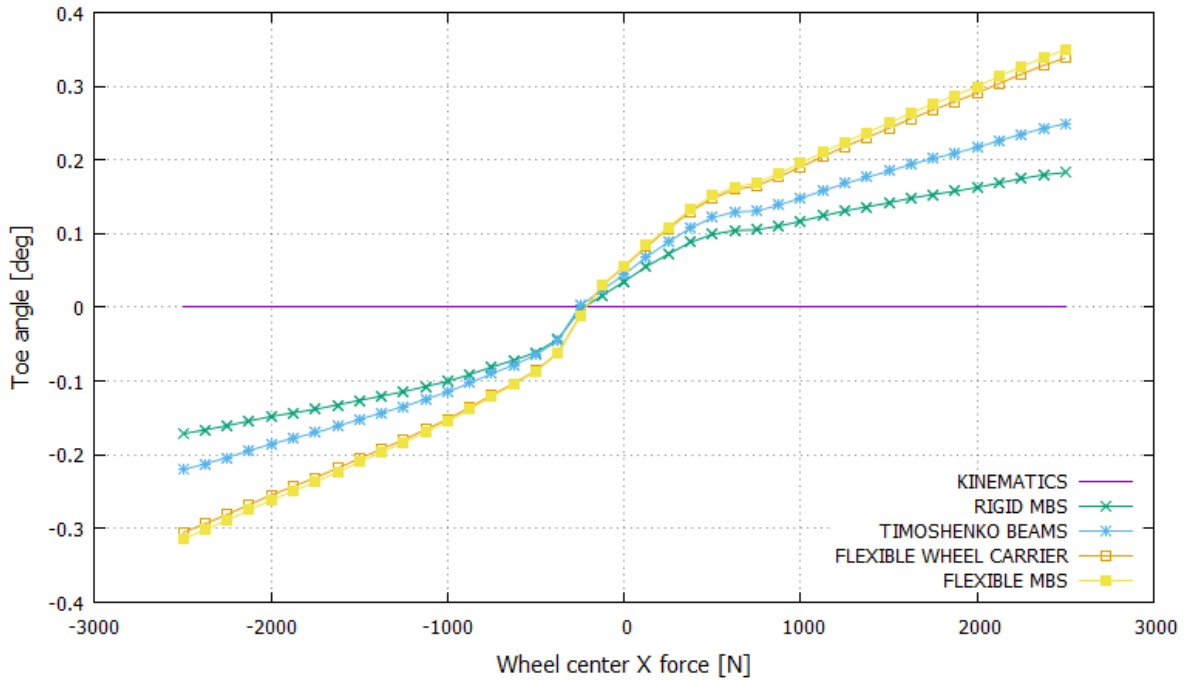
$$[k_{22}] = \begin{bmatrix} 52226.2 & -22.0 & -1112.8 & -13965.0 & -2896.5 & -315723.4 \\ & 168333.6 & -665.7 & 4878.7 & 249.7 & -209.0 \\ & & 24047.9 & -29827.1 & 73.3 & 13644.6 \\ & & & 6278220.7 & 1197.1 & -23974.6 \\ & & & & 5238664.7 & 28272.2 \\ & & & & & 5501009.8 \end{bmatrix}$$

$$[k_{12}] = \begin{bmatrix} -52226.2 & 22.0 & 1112.8 & 13965.0 & 2896.5 & 315723.4 \\ 22.0 & -168333.7 & 665.7 & -4878.7 & -249.7 & 209.0 \\ 1112.8 & 665.7 & -24047.9 & 29827.1 & -73.3 & -13644.6 \\ -7089.5 & -17473.3 & 484813.5 & -6842549.9 & 190.2 & 282131.0 \\ 2896.5 & -249.7 & -73.3 & -1197.2 & -5238664.6 & -28272.2 \\ -672397.0 & 626.1 & 7409.9 & 288192.5 & 26530.2 & 472476.2 \end{bmatrix}$$

Προκειμένου να γίνει αντιληπτή η συνεισφορά των ελαστικών παραμορφώσεων που υφίστανται οι βραχίονες έδρασης και ο φορέας του τροχού, στην ελαστοκινηματική συμπεριφορά του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης, δίνονται παρακάτω (Σχήμα 4.36 και Σχήμα 4.37) ενδεικτικά διαγράμματα μεταβολής των γωνιών κλίσης και σύγκλισης κατά την άσκηση εγκάρσιου και διαμήκους φορτίου, αντίστοιχα, στο κέντρο του τροχού. Συγκεκριμένα, αντιπαραβάλλονται αποτελέσματα που προέκυψαν θεωρώντας αρχικά ότι μόνο ο φορέας του τροχού συμπεριφέρεται ως γραμμικά ελαστικό σώμα και ακολούθως οι βραχίονες έδρασης μοντελοποιούνται και αυτοί κατά τον ίδιο τρόπο, σύμφωνα με τα όσα ειπώθηκαν περί υπερστοιχείων. Αναφέρεται επιπλέον ότι, στο πλαίσιο των ανωτέρω προσομοιώσεων οι βραχίονες ελέγχου και η ράβδος διεύθυνσης μοντελοποιούνται ως πεπερασμένα στοιχεία δοκού κατά Timoshenko, όπως προηγουμένως. Αξίζει να σημειωθεί ότι παρά τη χρήση υπερστοιχείων για τη διατήρηση του υπολογιστικού κόστους σε χαμηλά επίπεδα, το τελευταίο σχεδόν διπλασιάστηκε σε σχέση με προηγουμένως (περίπου 33.5 s).



Σχήμα 4.36: Γωνία κλίσης του τροχού συναρτήσει της εγκάρσιως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του



Σχήμα 4.37: Γωνία σύγκλισης του τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του

Παρατηρώντας τα διαγράμματα της προηγούμενης σελίδας, είναι φανερό οι διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων που προέκυψαν, υιοθετώντας κάθε έναν από τους προτεινόμενους τρόπους μοντελοποίησης του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης. Ωστόσο, όλες οι καμπύλες μεταβολής της γωνίας κλίσης (Σχήμα 4.36), περιλαμβάνουν μια σχεδόν βηματική αύξηση αυτής, αυξανομένου του φορτίου, η οποία λαμβάνει χώρα για σχετικά μικρό πλάτος του τελευταίου. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στην ακτινική χάρη των σφαιρικών εδράνων, η οποία λαμβάνεται υπόψιν μέσω της αντίστοιχης καμπύλης φορτίου-μετατόπισης (Σχήμα 4.21). Πιο συγκεκριμένα, η μεταβολή της απόστασης μεταξύ των λαβών των εν λόγω στοιχείων σύνδεσης, εντός ενός στενού εύρους ως προς την ονομαστική (μηδενική) απόσταση αυτών, είναι υπεύθυνη για την ανάπτυξη πολύ μικρών, (πρακτικά αμελητέων) δυνάμεων αντίδρασης και αντίστροφα. Επιπλέον, διευκρινίζεται ότι η ανωτέρω βηματική μεταβολή της γωνίας κλίσης, λαμβάνει χώρα υπό μικρό αλλά μη μηδενικό πλάτος εγκάρσιας φόρτισης, καθώς σύμφωνα με όσα έχουν ήδη αναφερθεί, ο μηχανισμός ανάρτησης στην ονομαστική του θέση παραλαμβάνει στατικό κατακόρυφο φορτίο ασκούμενο στο κέντρο του τροχού λόγω βάρους του οχήματος, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη δυνάμεων αντίδρασης και σχετικών μετατοπίσεων μεταξύ των λαβών των σφαιρικών εδράνων που οφείλονται αποκλειστικά σε αυτό. Παρόμοια μη γραμμική μεταβολή των χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών ανάρτησης όσον αφορά μικρά πλάτη φόρτισης, παρατηρείται και σε πολλά ακόμα διαγράμματα που δίνονται κατά την αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της ελαστοκινηματικής ανάλυσης του μελετώμενου μηχανισμού στην ακόλουθη ενότητα.

### 4.3 Αναλυτική παρουσίαση αποτελεσμάτων ελαστοκινηματικής ανάλυσης

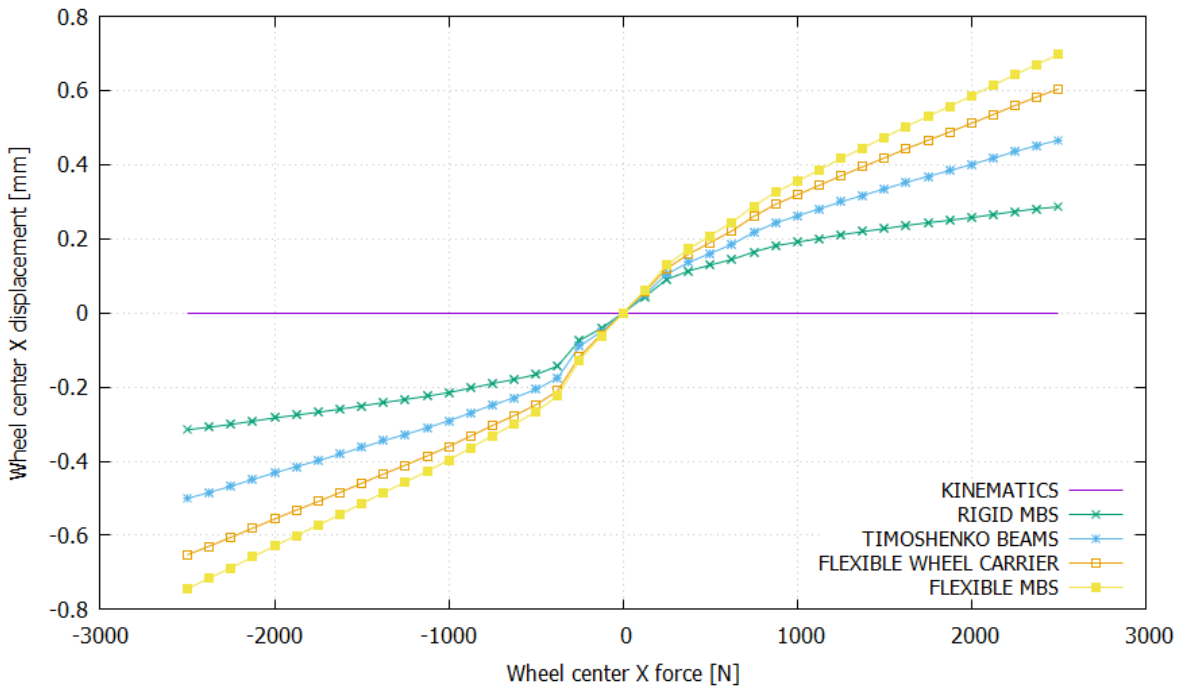
Δίνονται παρακάτω τα διαγράμματα μεταβολής όλων των χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών ανάρτησης, συναρτήσει των εκάστοτε φορτίων που ασκούνται στο κέντρο του τροχού (suspension compliance maps – Πίνακας 4-9). Κατ' εξαίρεση, τα αποτελέσματα που προέκυψαν λόγω άσκησης κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του τροχού, δίνονται συναρτήσει της κατακόρυφης μετατόπισης αυτού εξαιτίας της επιβαλλόμενης φόρτισης, συνοδευόμενα από το διάγραμμα κατακόρυφης μετατόπισης του τροχού συναρτήσει της κατακόρυφα ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του (Σχήμα 4.60).

Διαγράμματα όπως αυτά που ακολουθούν χρησιμοποιούνται κατά κόρον από τις αυτοκινητοβιομηχανίες για το χαρακτηρισμό της ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς συστημάτων ανάρτησης, είτε αυτά χαράσσονται βάσει αποτελεσμάτων προσομοιώσεων με λογισμικά MBS, είτε βάσει πειραματικών μετρήσεων που λαμβάνονται μέσω διατάξεων K&C. Ο λεπτομερής σχολιασμός της προκύπτουσας ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς για το μελετώμενο μηχανισμό ανάρτησης δεν εμπίπτει στο πλαίσιο της παρούσας ΔΕ, παρόλα αυτά, τονίζεται ότι οι πληροφορίες που λαμβάνονται από τα ακόλουθα διαγράμματα είναι πολύτιμες προκειμένου για την καλύτερη κατανόηση της επίδρασης του συστήματος ανάρτησης στη δυναμική συμπεριφορά του οχήματος και την περαιτέρω βελτίωση αυτής.

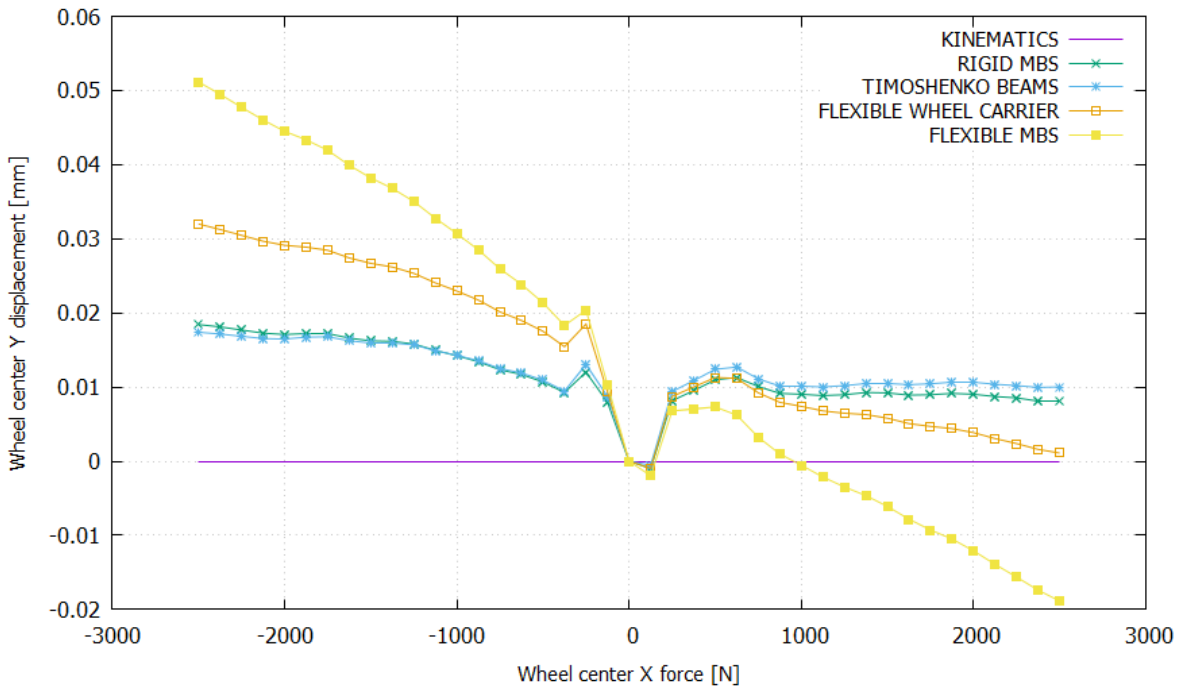
**Πίνακας 4-9: Ευρετήριο διαγραμμάτων χαρακτηρισμού της ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης**

Χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη ανάρτησης	Είδος φόρτισης στο κέντρο του τροχού					
	$F_x$	$F_y$	$F_z$	$M_x$	$M_y$	$M_z$
<b>Διαμήκης Μετατόπιση</b>	Σχήμα 4.38	Σχήμα 4.48	Σχήμα 4.58	Σχήμα 4.68	Σχήμα 4.78	Σχήμα 4.88
<b>Εγκάρσια Μετατόπιση</b>	Σχήμα 4.39	Σχήμα 4.49	Σχήμα 4.59	Σχήμα 4.69	Σχήμα 4.79	Σχήμα 4.89
<b>Κατακόρυφη Μετατόπιση</b>	Σχήμα 4.40	Σχήμα 4.50	Σχήμα 4.60	Σχήμα 4.70	Σχήμα 4.80	Σχήμα 4.90
<b>Γωνία κλίσης</b>	Σχήμα 4.41	Σχήμα 4.51	Σχήμα 4.61	Σχήμα 4.71	Σχήμα 4.81	Σχήμα 4.91
<b>Γωνία σύγκλισης</b>	Σχήμα 4.42	Σχήμα 4.52	Σχήμα 4.62	Σχήμα 4.72	Σχήμα 4.82	Σχήμα 4.92
<b>Γωνία caster</b>	Σχήμα 4.43	Σχήμα 4.53	Σχήμα 4.63	Σχήμα 4.73	Σχήμα 4.83	Σχήμα 4.93
<b>Μηχανικό ίχνος</b>	Σχήμα 4.44	Σχήμα 4.54	Σχήμα 4.64	Σχήμα 4.74	Σχήμα 4.84	Σχήμα 4.94
<b>Γωνία βασιλικού πείρου</b>	Σχήμα 4.45	Σχήμα 4.55	Σχήμα 4.65	Σχήμα 4.75	Σχήμα 4.85	Σχήμα 4.95
<b>Scrub radius</b>	Σχήμα 4.46	Σχήμα 4.56	Σχήμα 4.66	Σχήμα 4.76	Σχήμα 4.86	Σχήμα 4.96
<b>Ύψος κέντρου κλυδωνισμού</b>	Σχήμα 4.47	Σχήμα 4.57	Σχήμα 4.67	Σχήμα 4.77	Σχήμα 4.87	Σχήμα 4.97

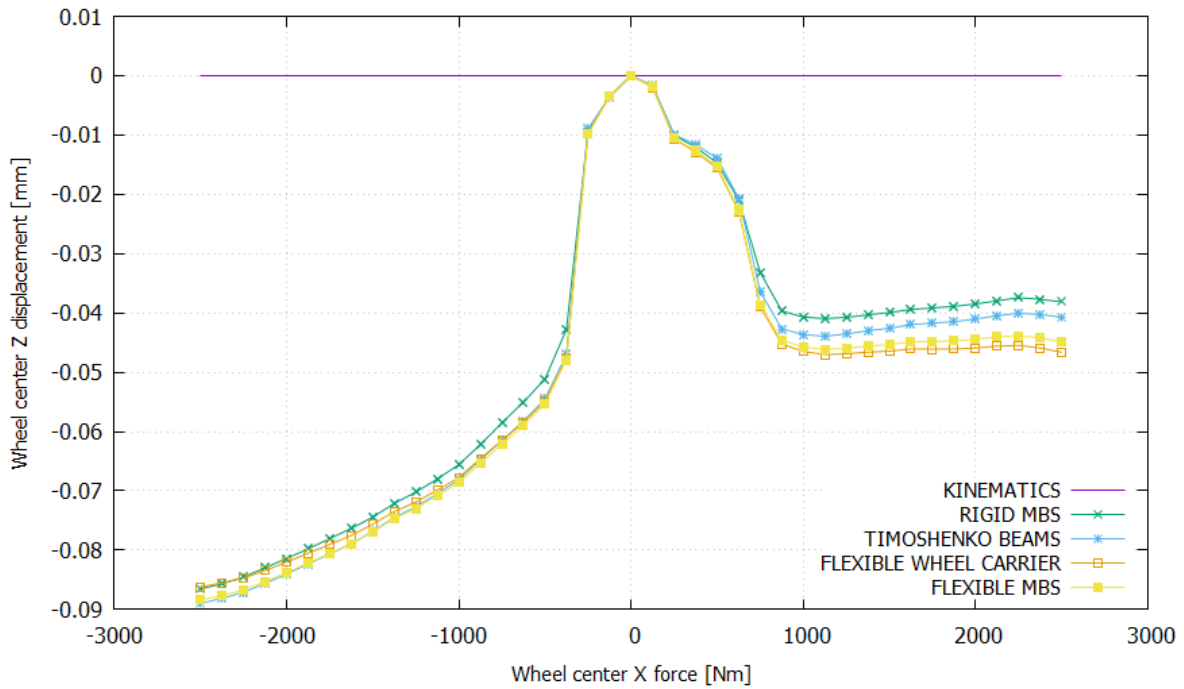




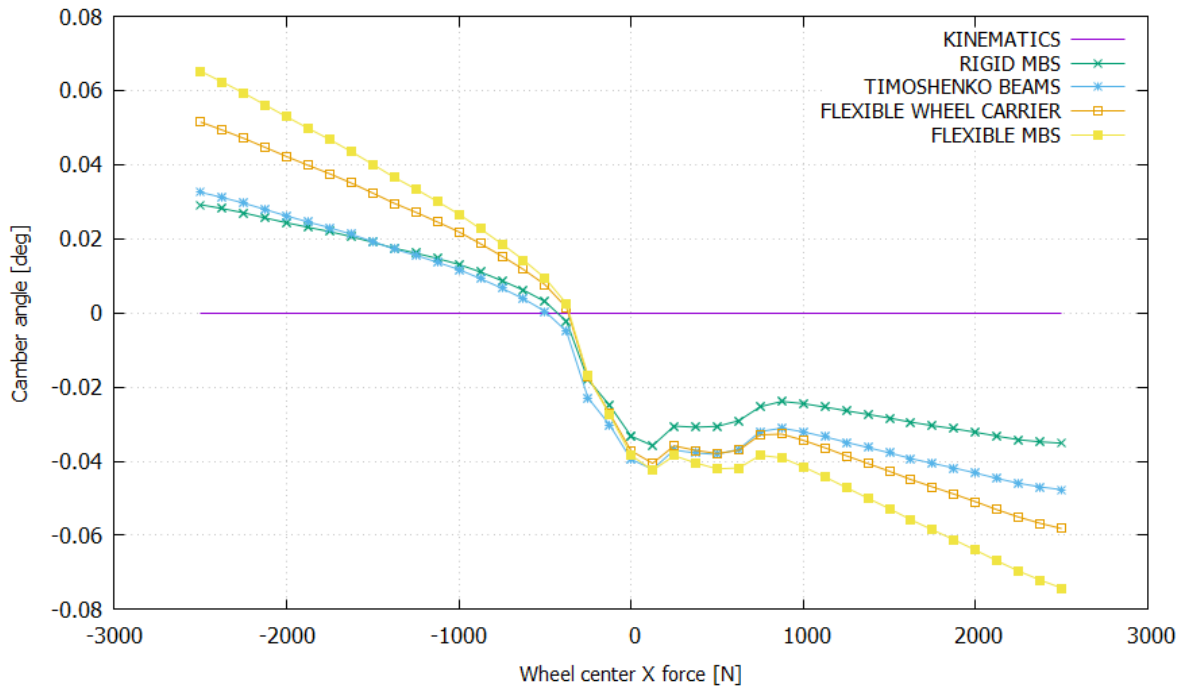
**Σχήμα 4.38: Διαμήκης μετατόπιση τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του**



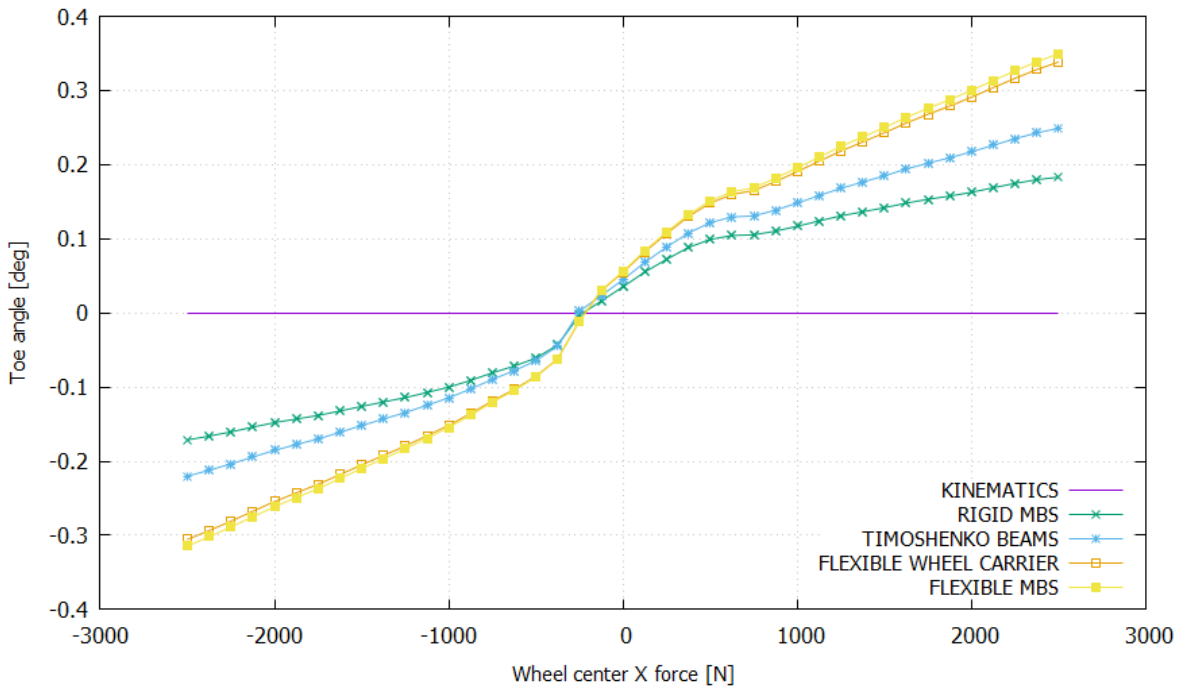
**Σχήμα 4.39: Εγκάρσια μετατόπιση τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του**



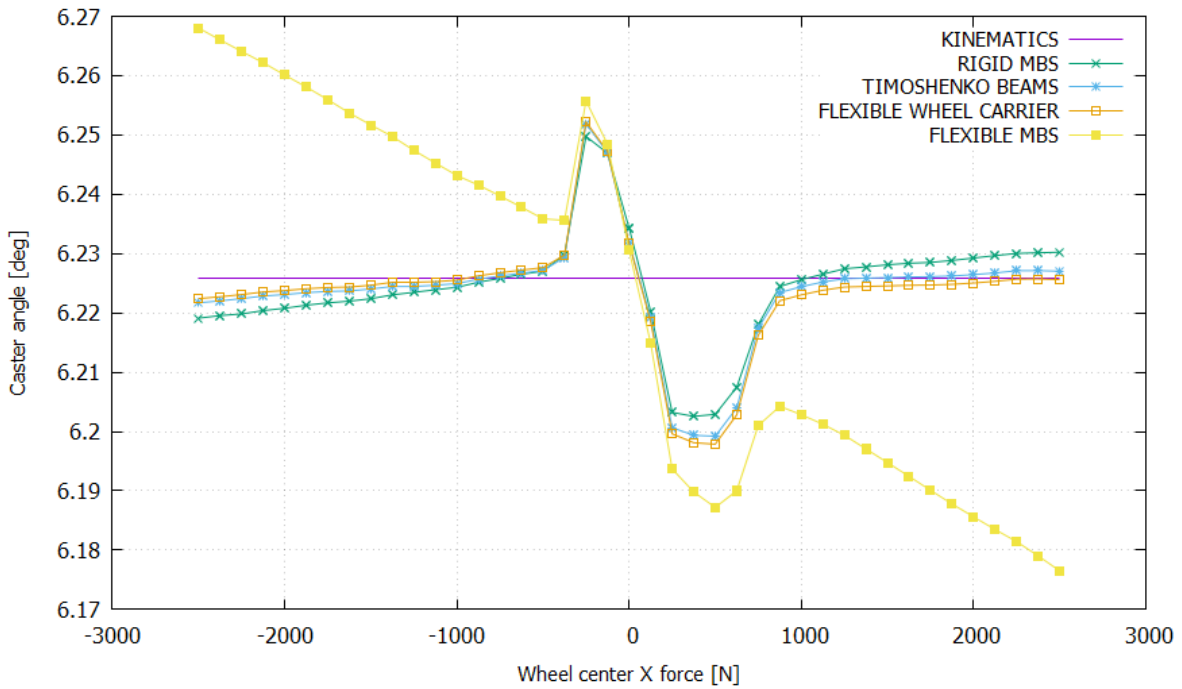
**Σχήμα 4.40:** Κατακόρυφη μετατόπιση τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του



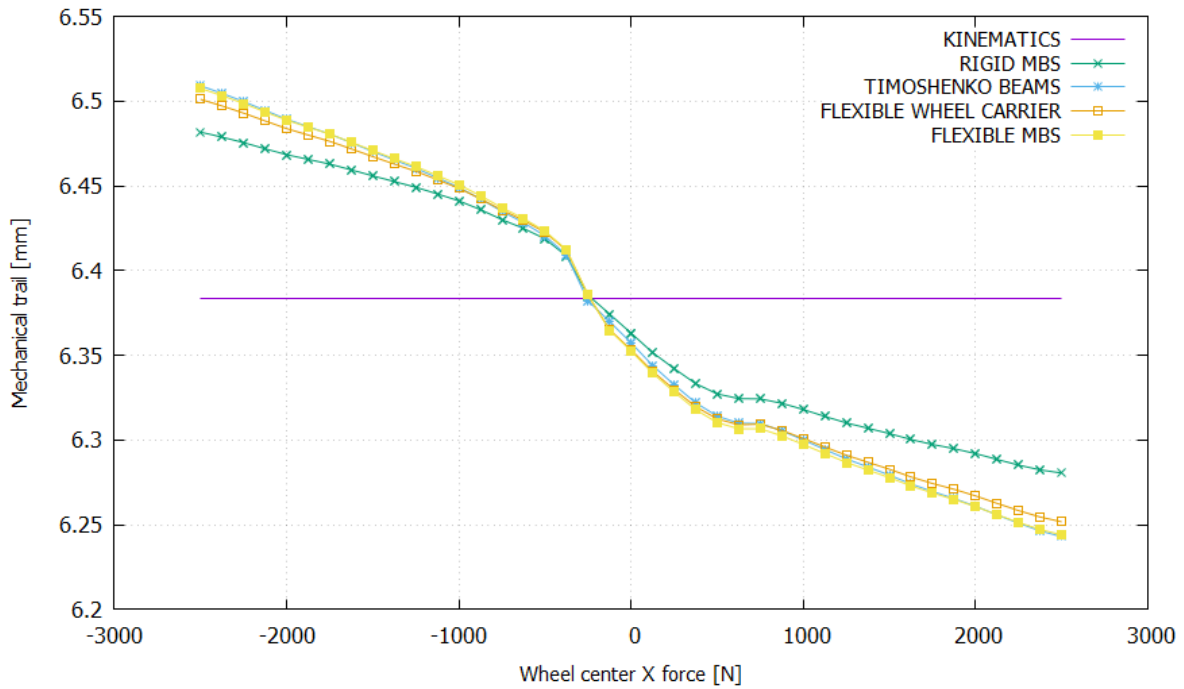
**Σχήμα 4.41:** Γωνία κλίσης τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του



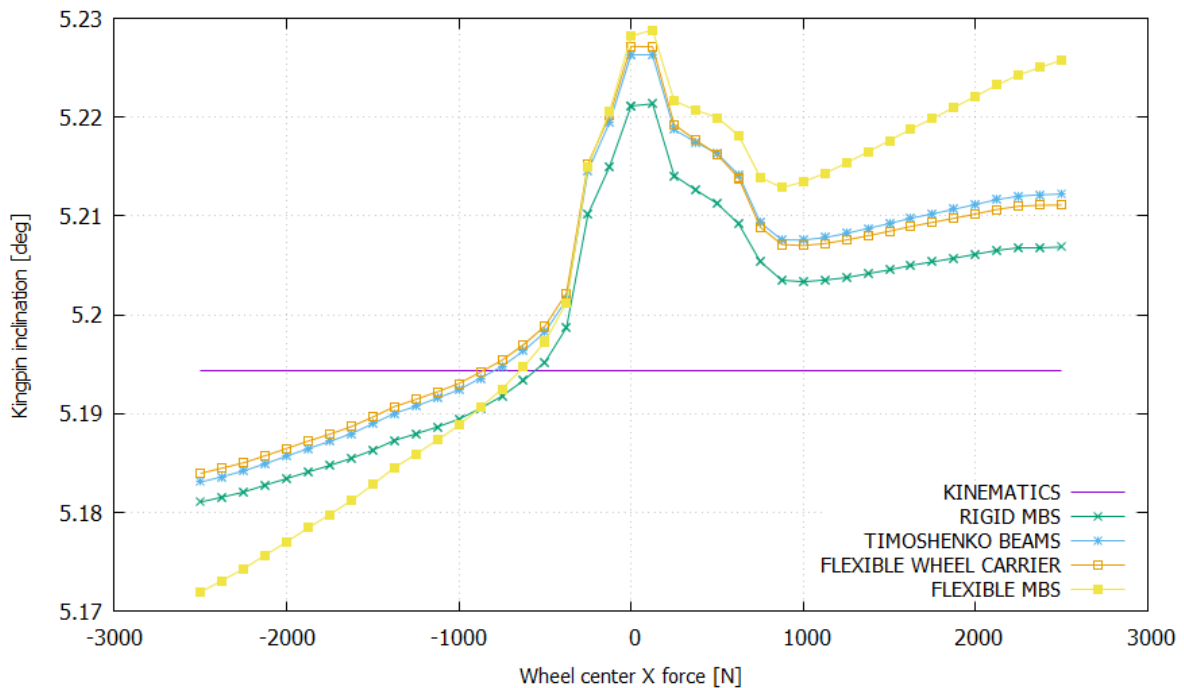
**Σχήμα 4.42:** Γωνία σύγκλισης τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του



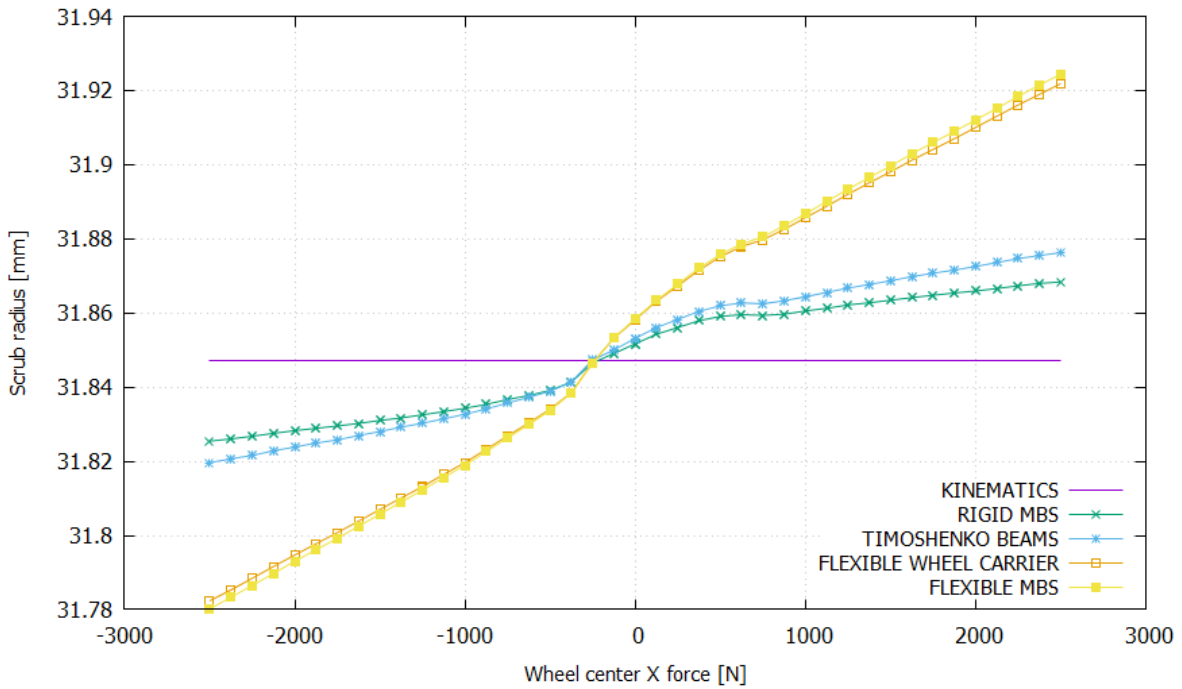
**Σχήμα 4.43:** Γωνία caster συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού



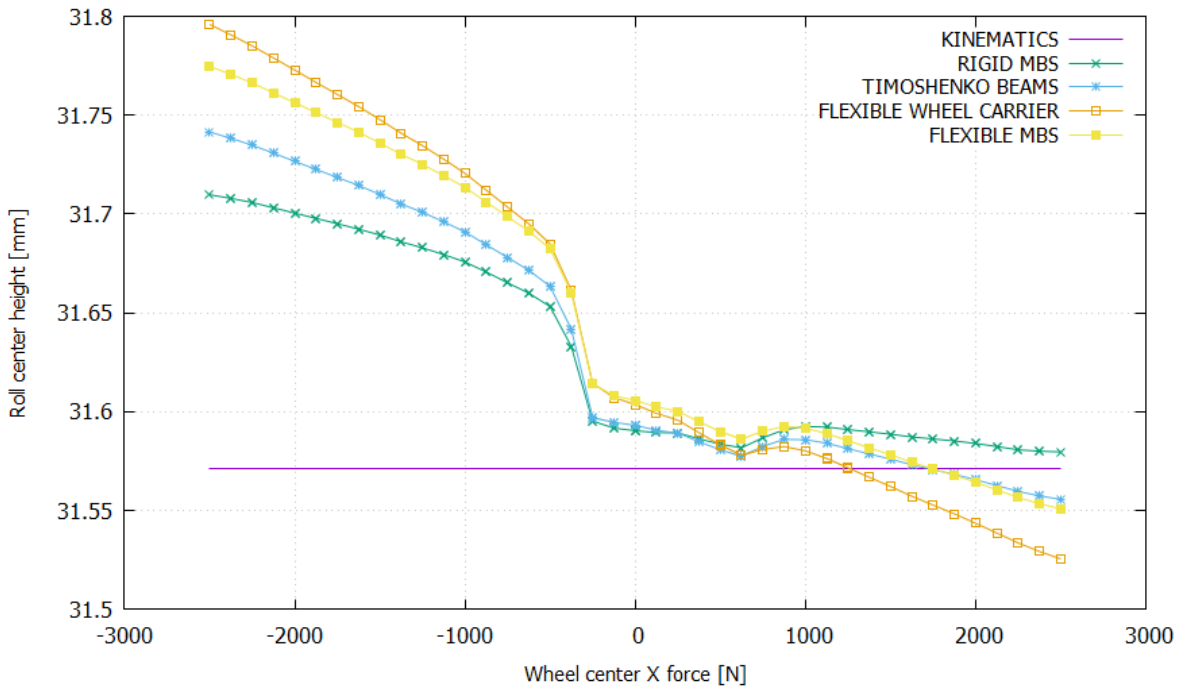
Σχήμα 4.44: Μηχανικό ίχνος συναρτήσεως της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού



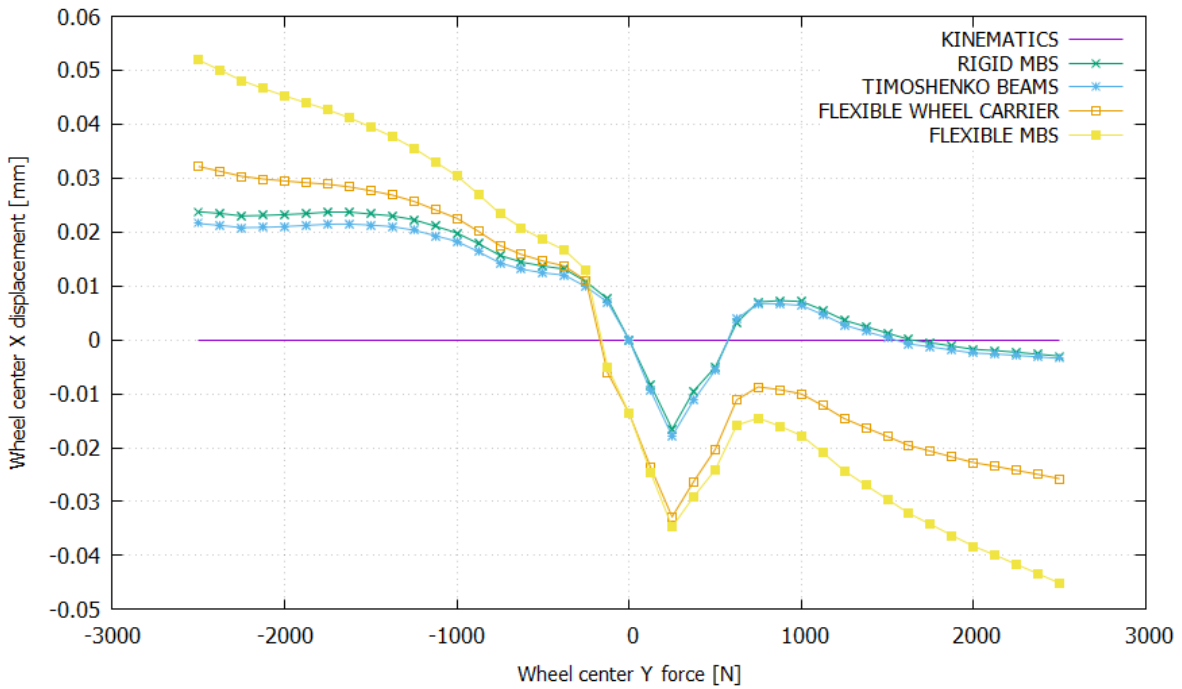
Σχήμα 4.45: Γωνία βασιλικού πείρου συναρτήσεως της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού



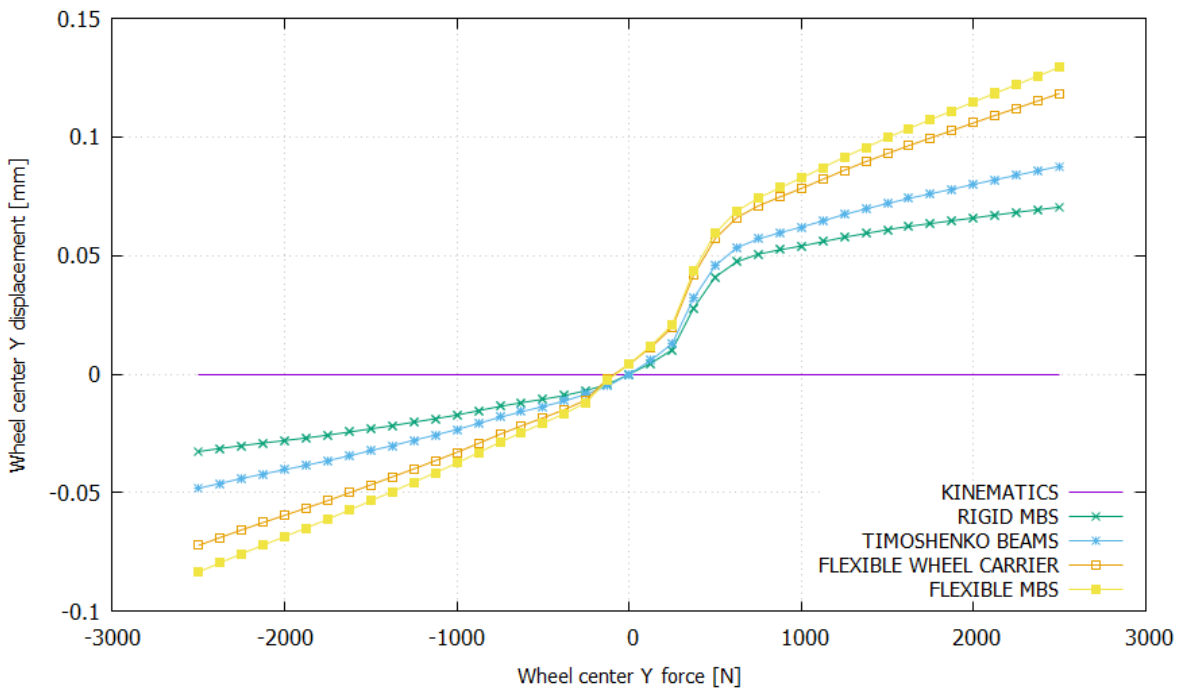
**Σχήμα 4.46: Scrub radius συναρτήσεως της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού**



**Σχήμα 4.47: Ύψος κέντρου κλυδωνισμού συναρτήσεως της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού**

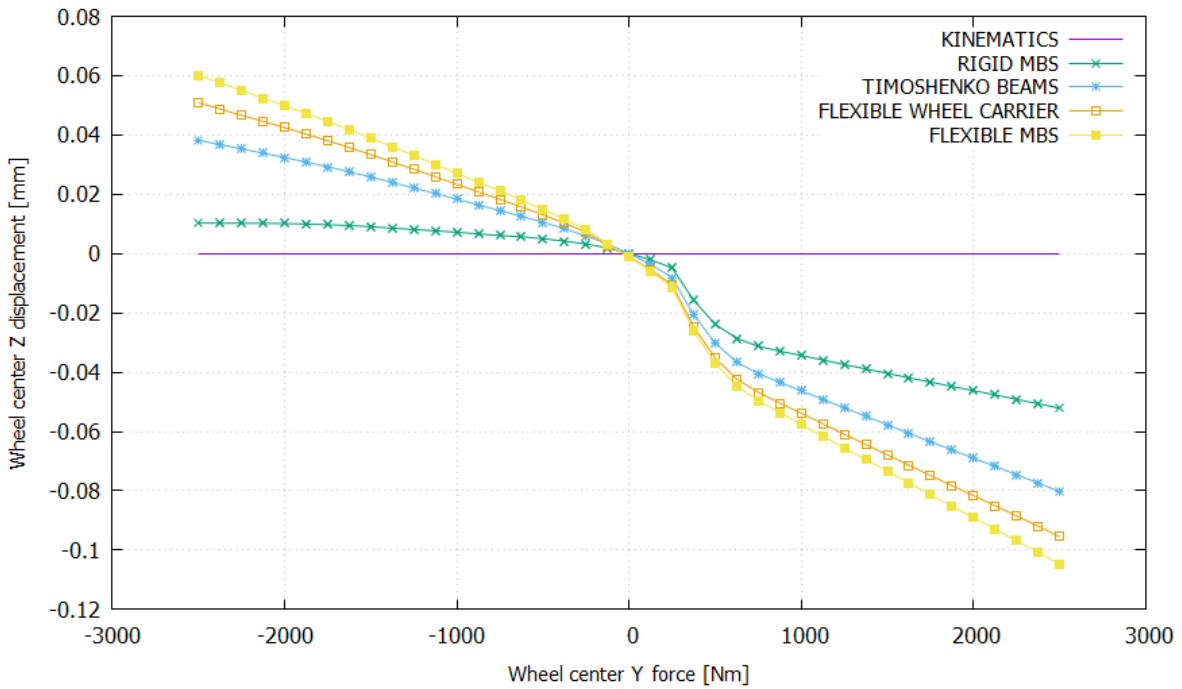


**Σχήμα 4.48: Διαμήκης μετατόπιση τροχού συναρτήσει της εγκάρσιως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του**

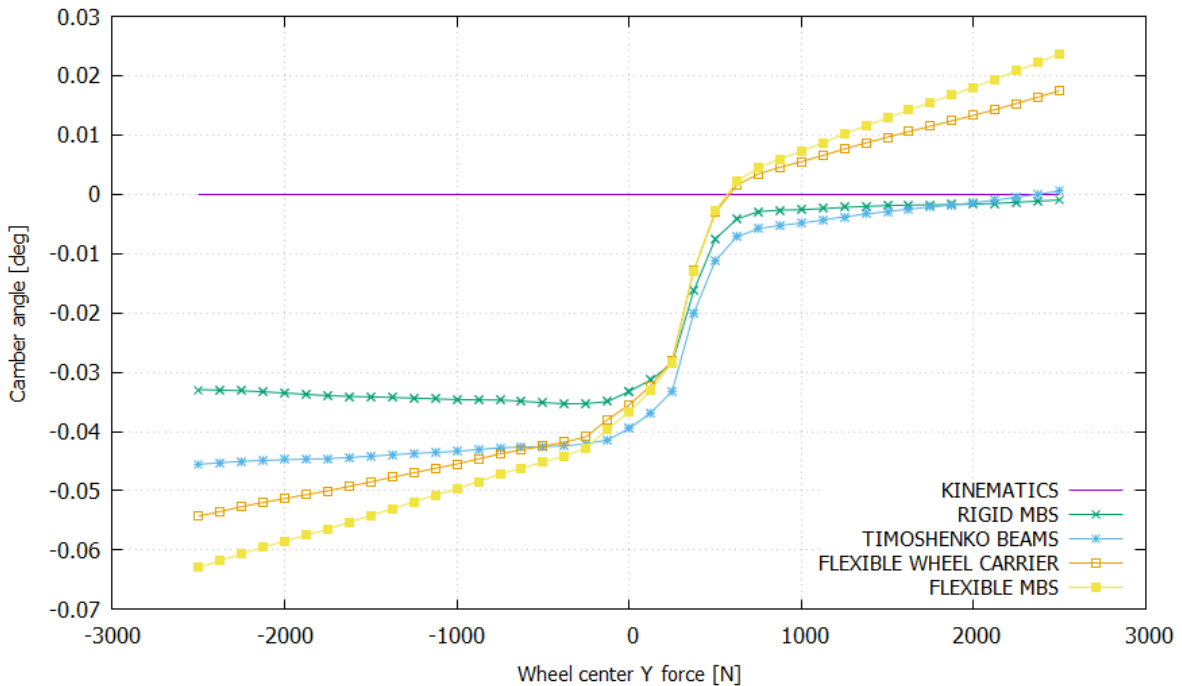


**Σχήμα 4.49: Εγκάρσια μετατόπιση τροχού συναρτήσει της εγκάρσιως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του**

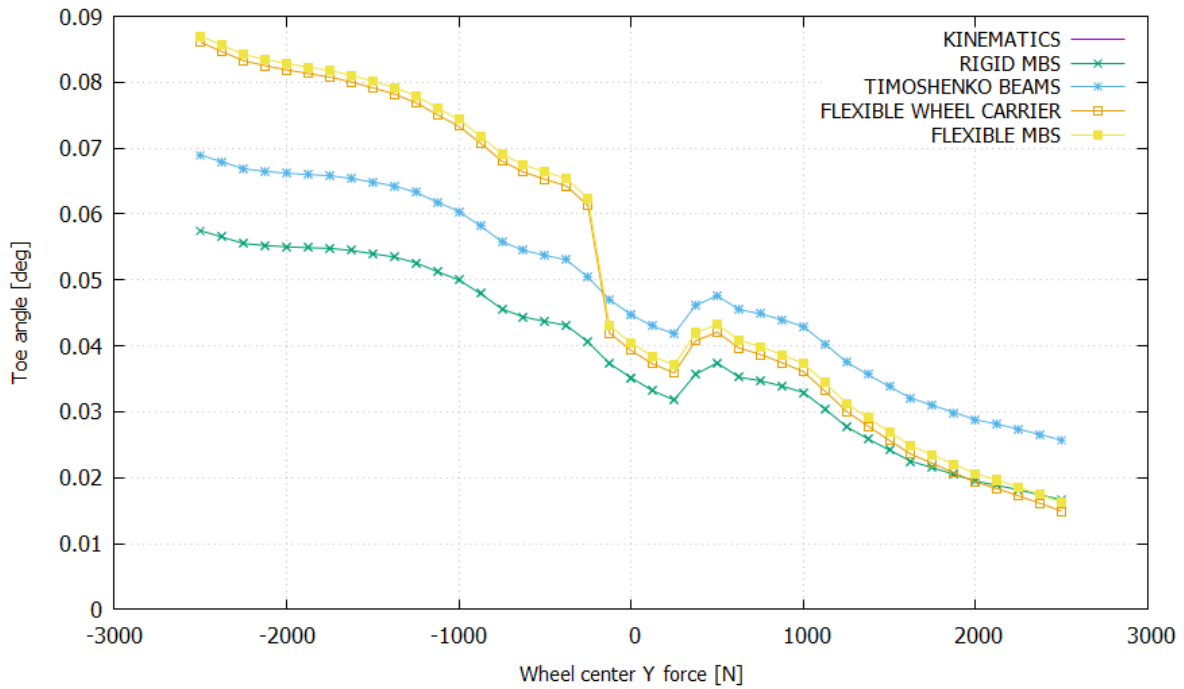




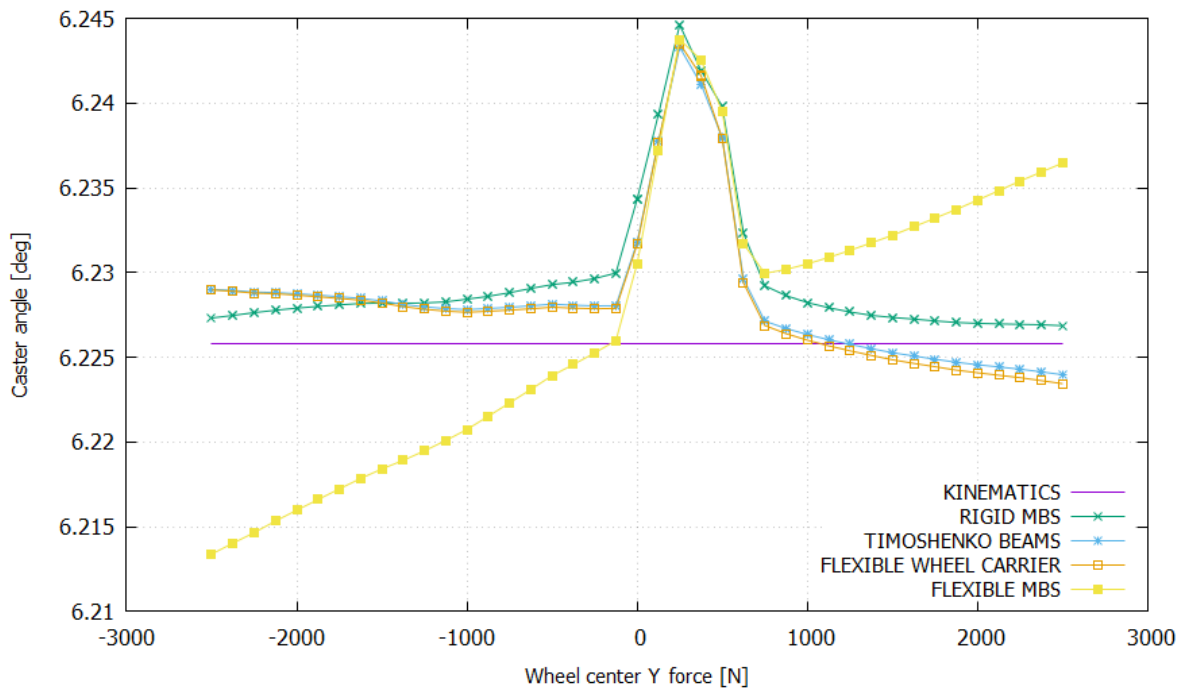
**Σχήμα 4.50: Κατακόρυφη μετατόπιση τροχού συναρτήσει της εγκάρσιως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του**



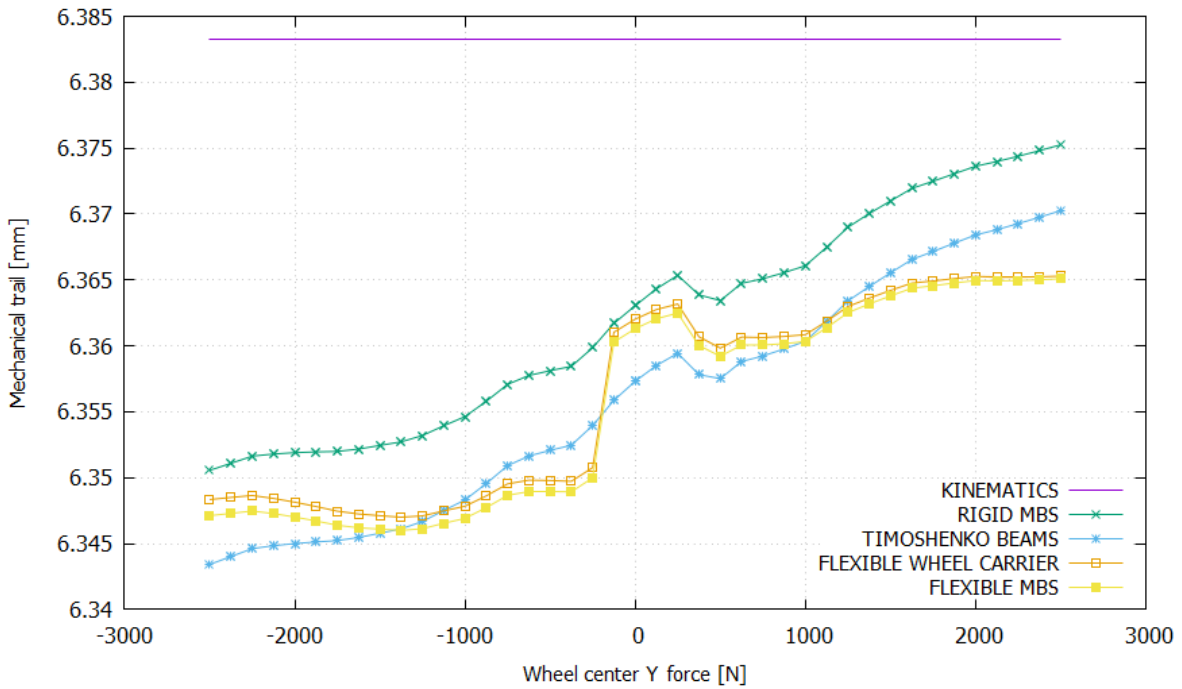
**Σχήμα 4.51: Γωνία κλίσης τροχού συναρτήσει της εγκάρσιως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του**



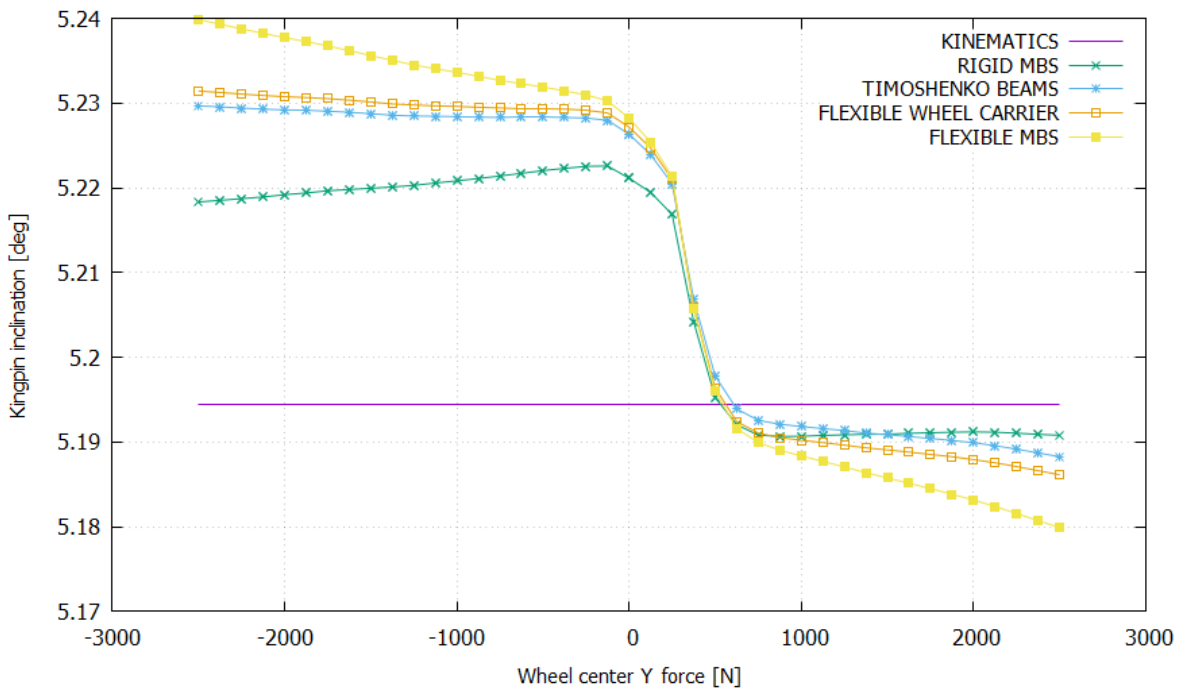
**Σχήμα 4.52:** Γωνία σύγκλισης τροχού συναρτήσει της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του



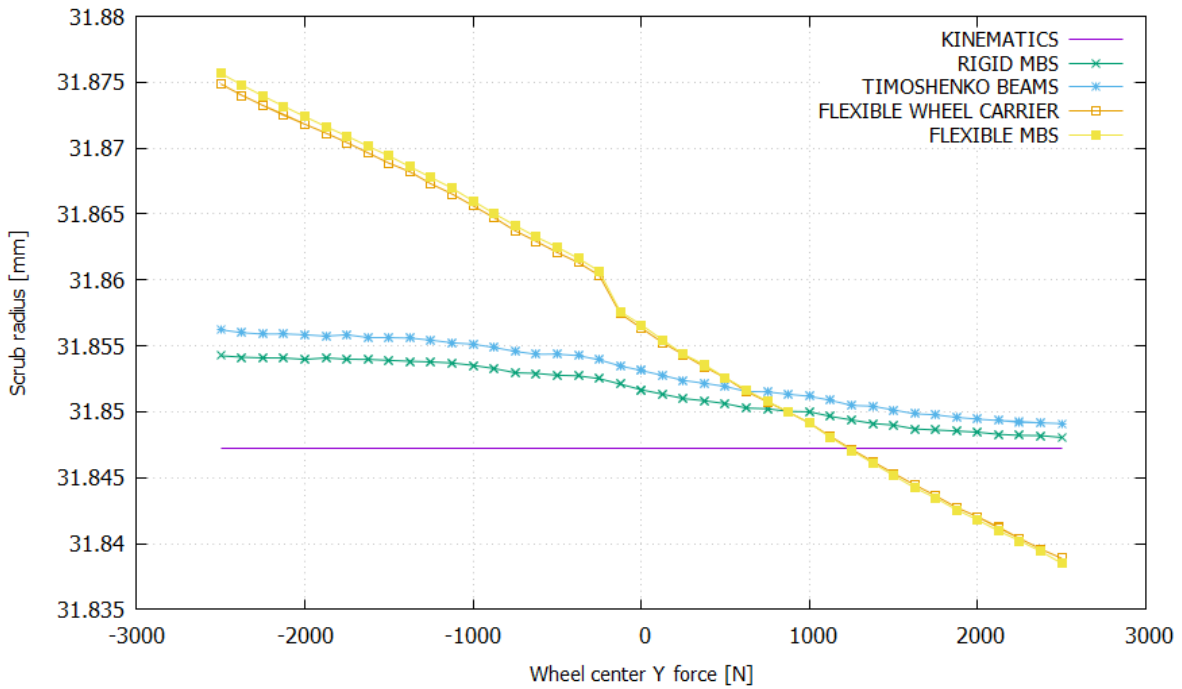
**Σχήμα 4.53:** Γωνία caster συναρτήσει της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού



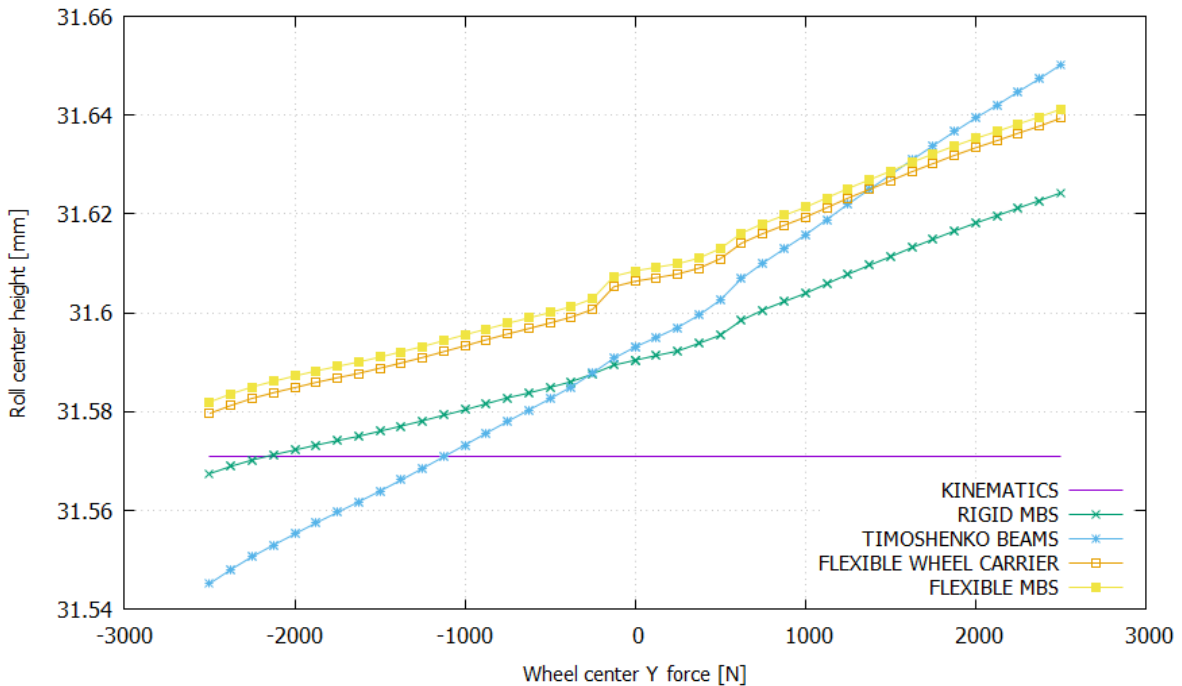
**Σχήμα 4.54: Μηχανικό ίχνος συναρτήσει της εγκάρσιως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού**



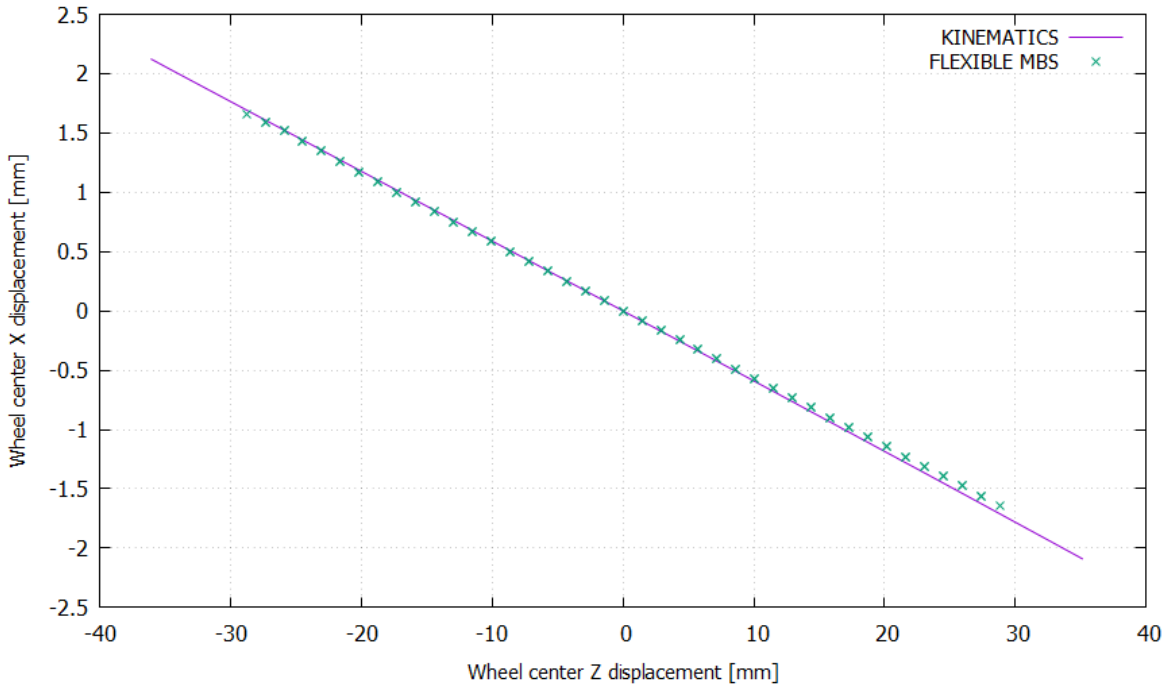
**Σχήμα 4.55: Γωνία βασικού πείρου συναρτήσει της εγκάρσιως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού**



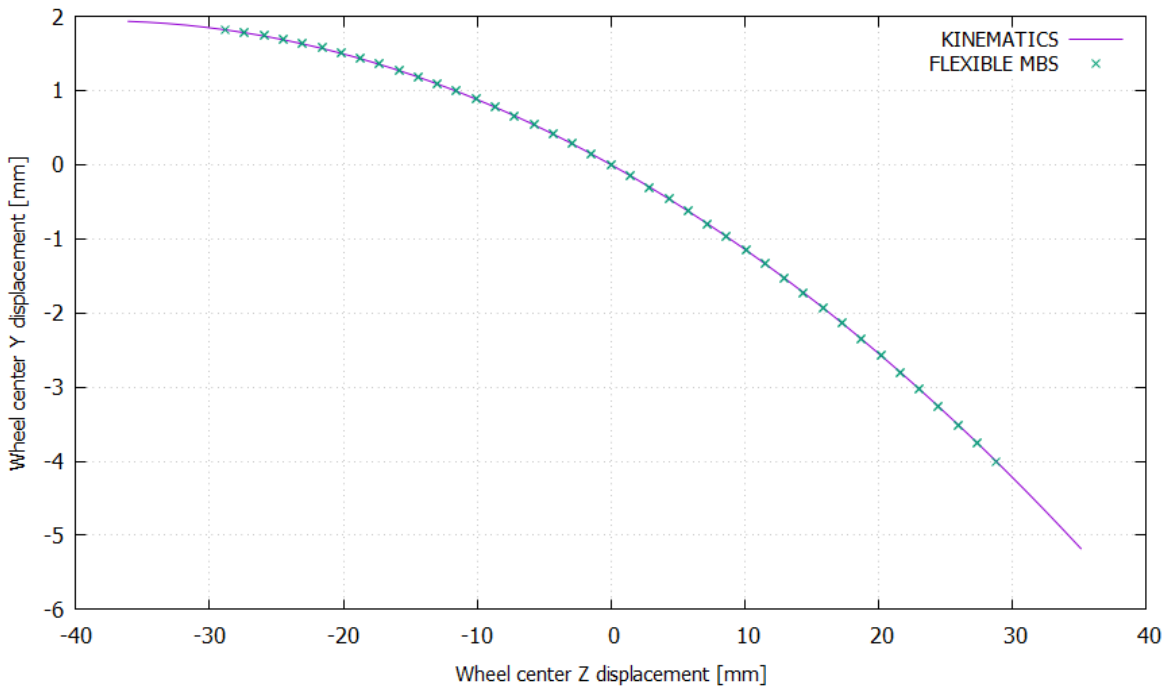
**Σχήμα 4.56:** Scrub radius συναρτήσεϊ της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού



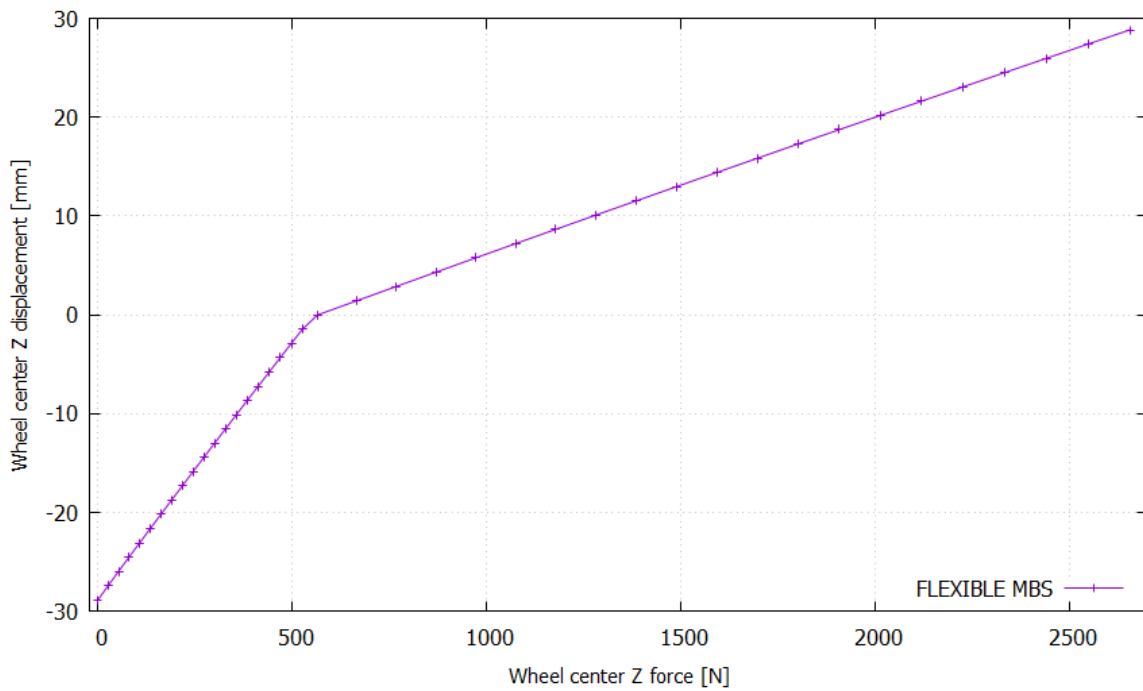
**Σχήμα 4.57:** Ύψος κέντρου κλυδωνισμού συναρτήσεϊ της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού



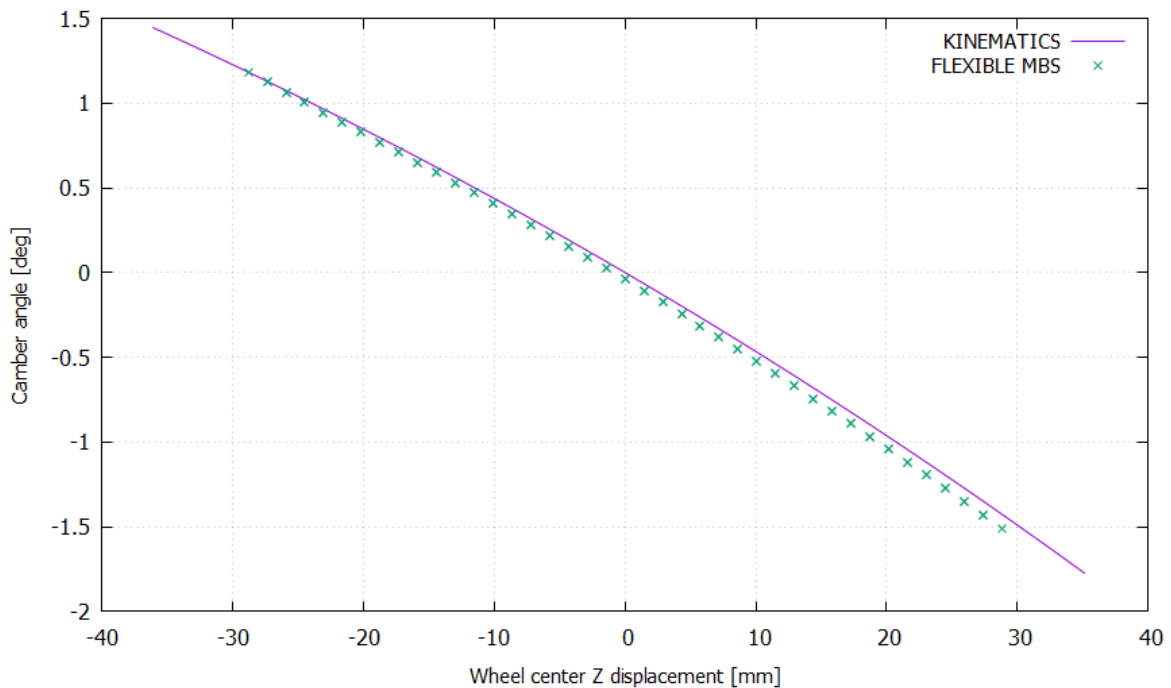
**Σχήμα 4.58: Διαμήκης μετατόπιση τροχού υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του**



**Σχήμα 4.59: Εγκάρσια μετατόπιση τροχού υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του**

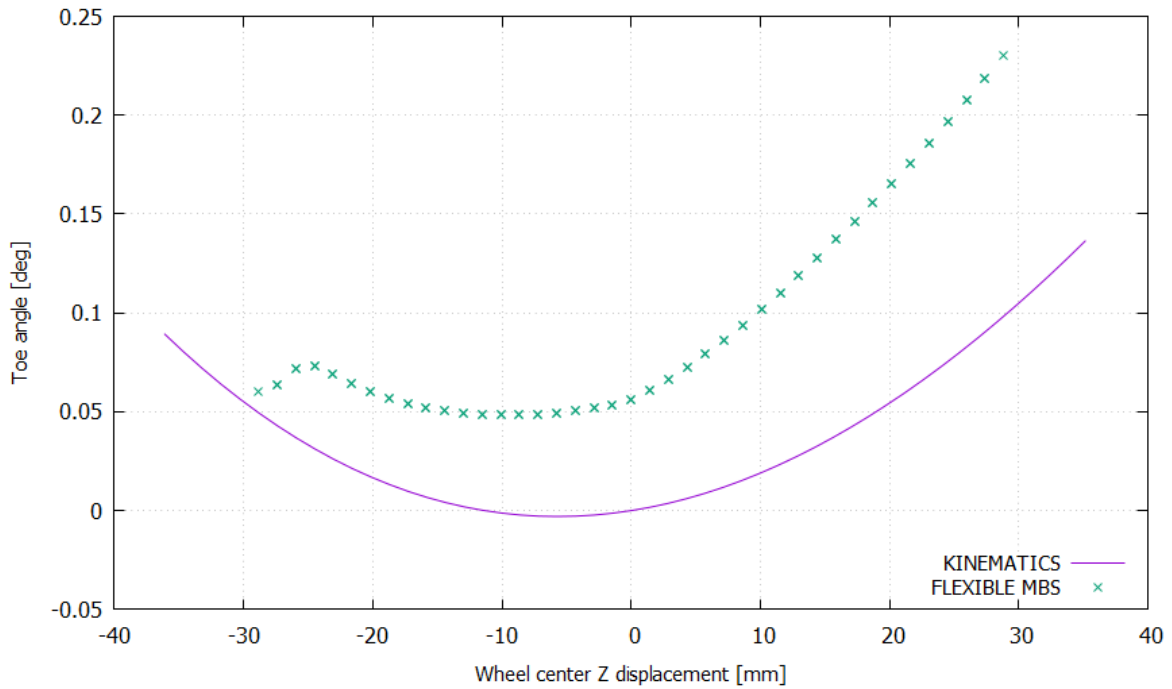


Σχήμα 4.60: Κατακόρυφη μετατόπιση τροχού συναρτήσει της κατακόρυφα ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του

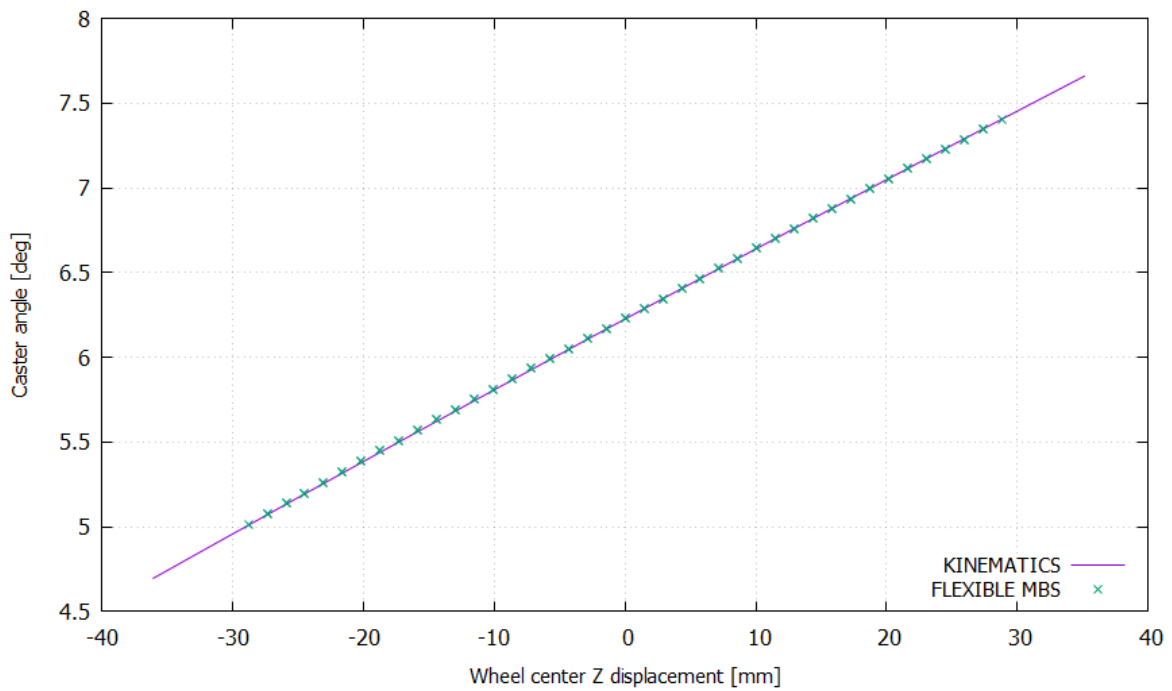


Σχήμα 4.61: Μεταβολή γωνίας κλίσης τροχού υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του

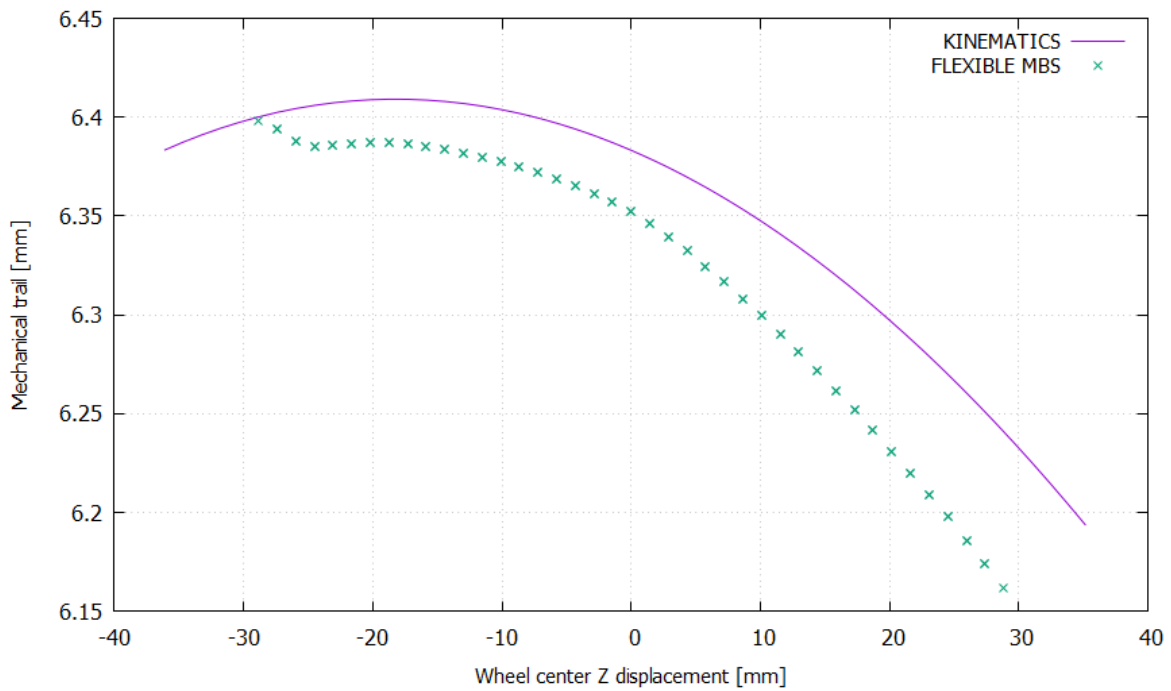




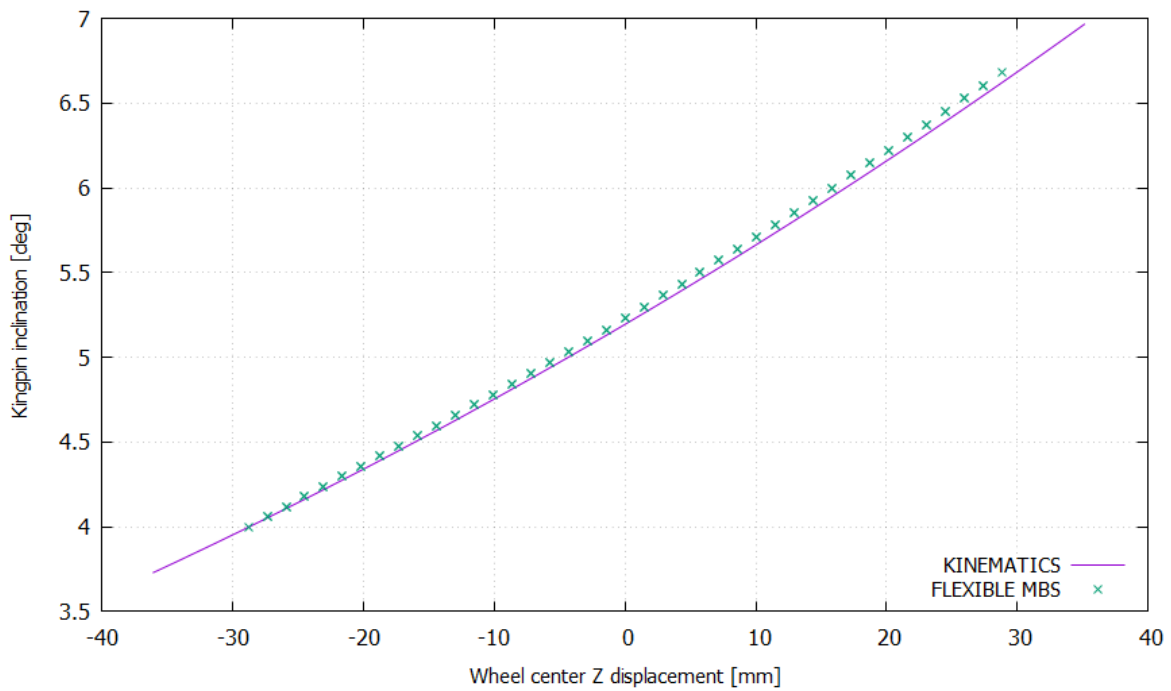
**Σχήμα 4.62: Μεταβολή γωνίας σύγκλισης τροχού υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του**



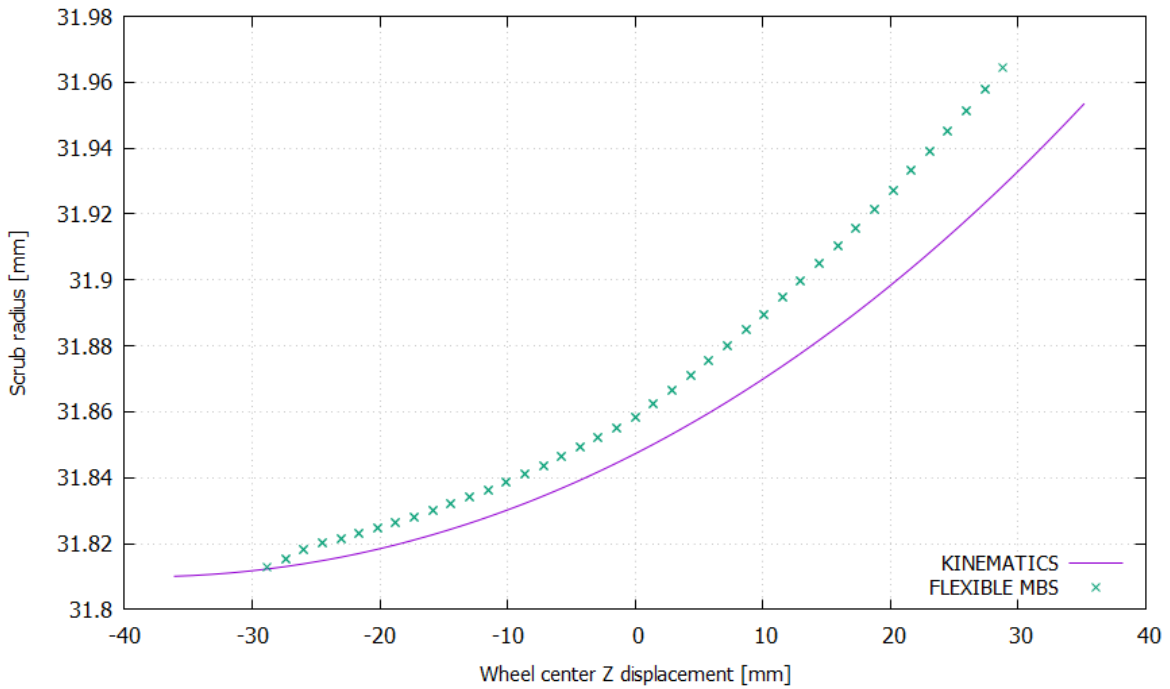
**Σχήμα 4.63: Μεταβολή γωνίας caster υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του τροχού**



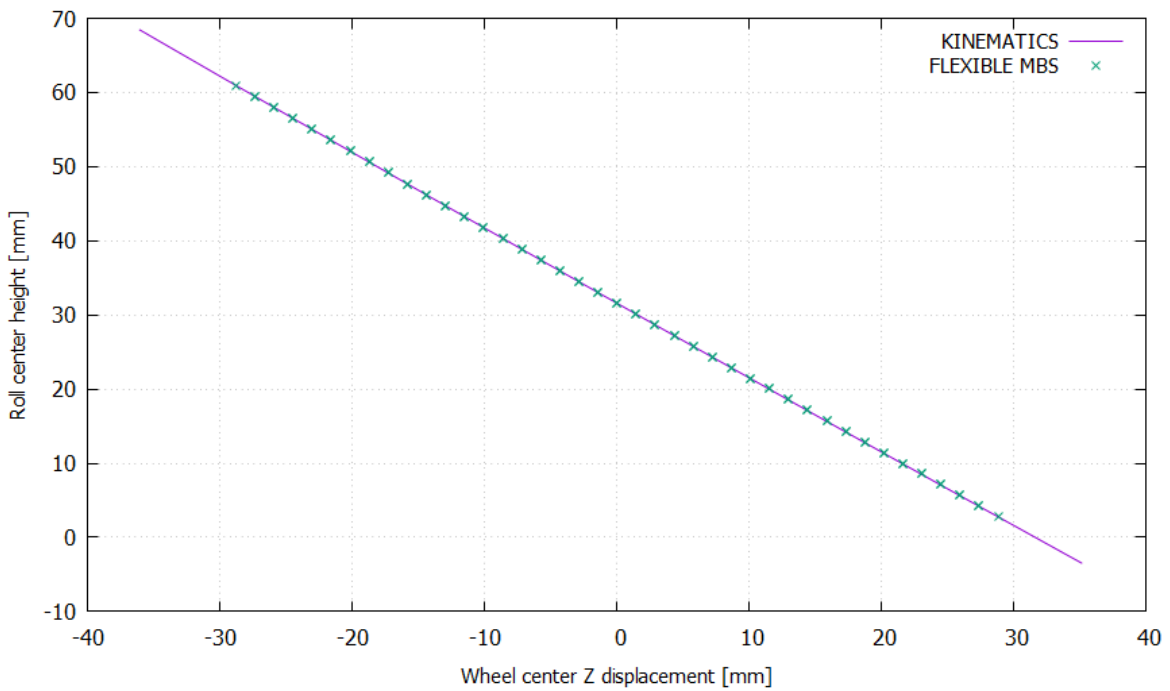
**Σχήμα 4.64: Μεταβολή μηχανικού ίχνους υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του τροχού**



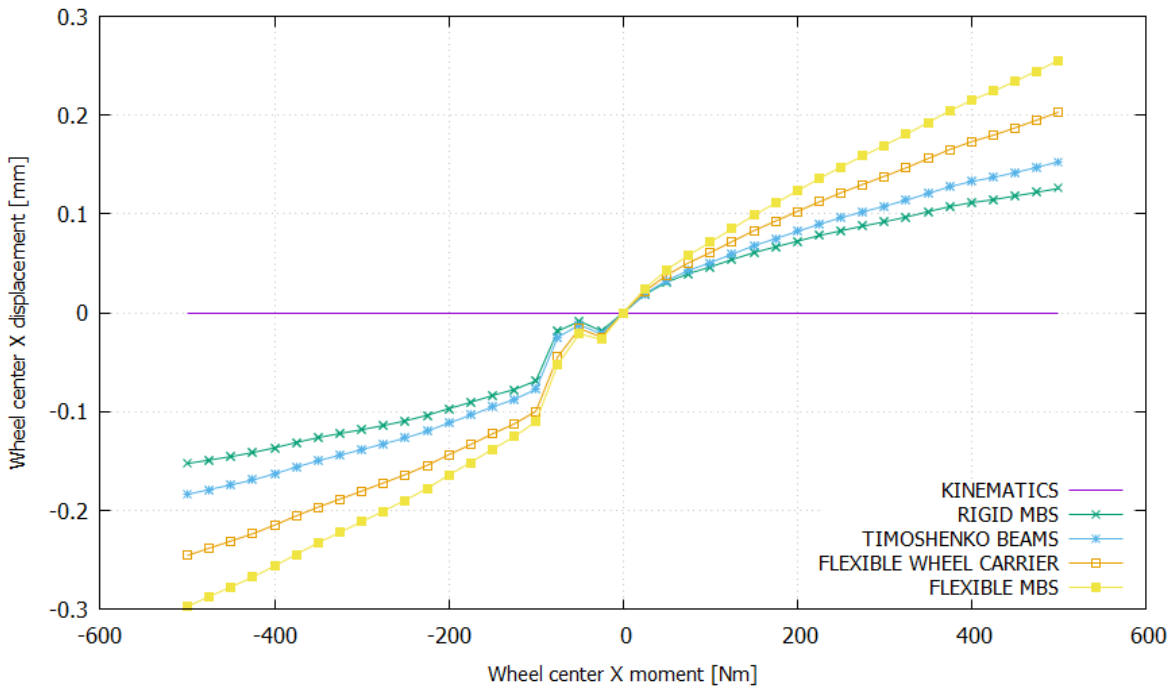
**Σχήμα 4.65: Μεταβολή γωνίας βασιλικού πείρου υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του τροχού**



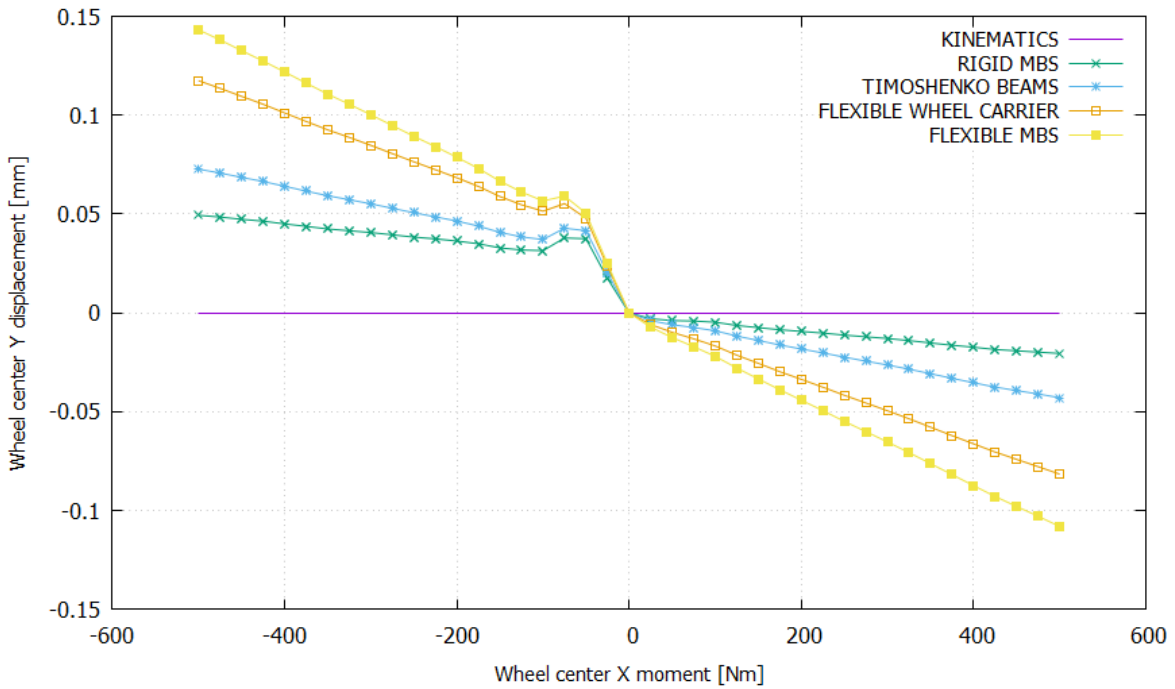
**Σχήμα 4.66: Μεταβολή scrub radius υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του τροχού**



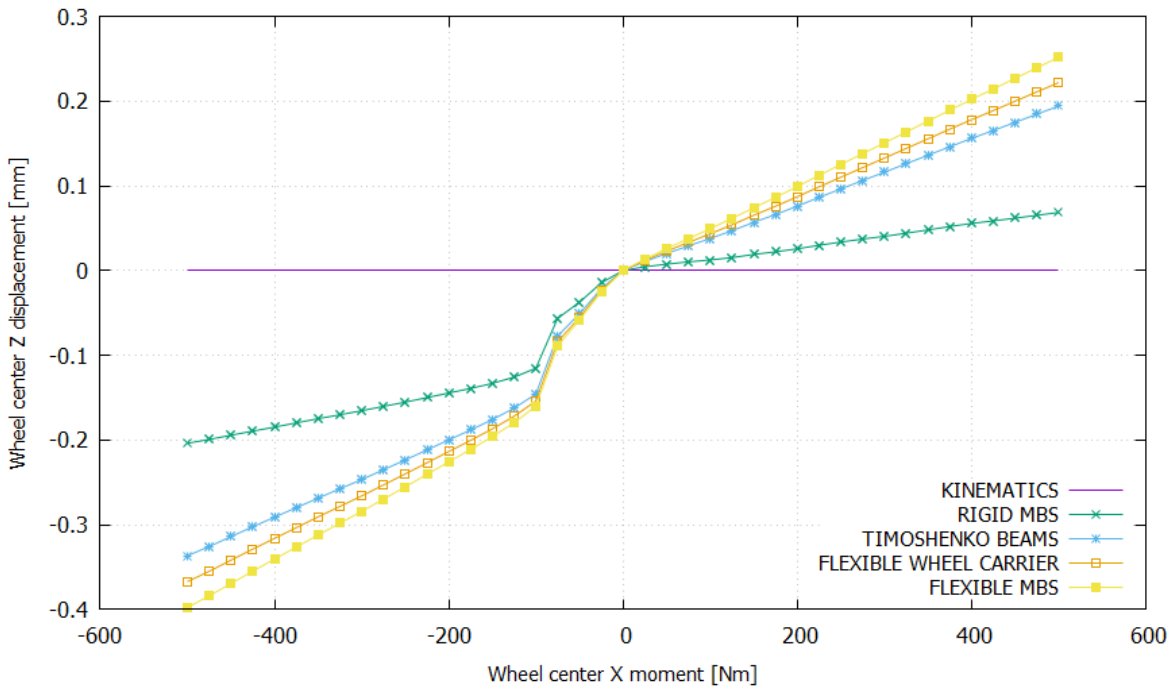
**Σχήμα 4.67: Μεταβολή ύψους κέντρου κλυδωνισμού υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του τροχού**



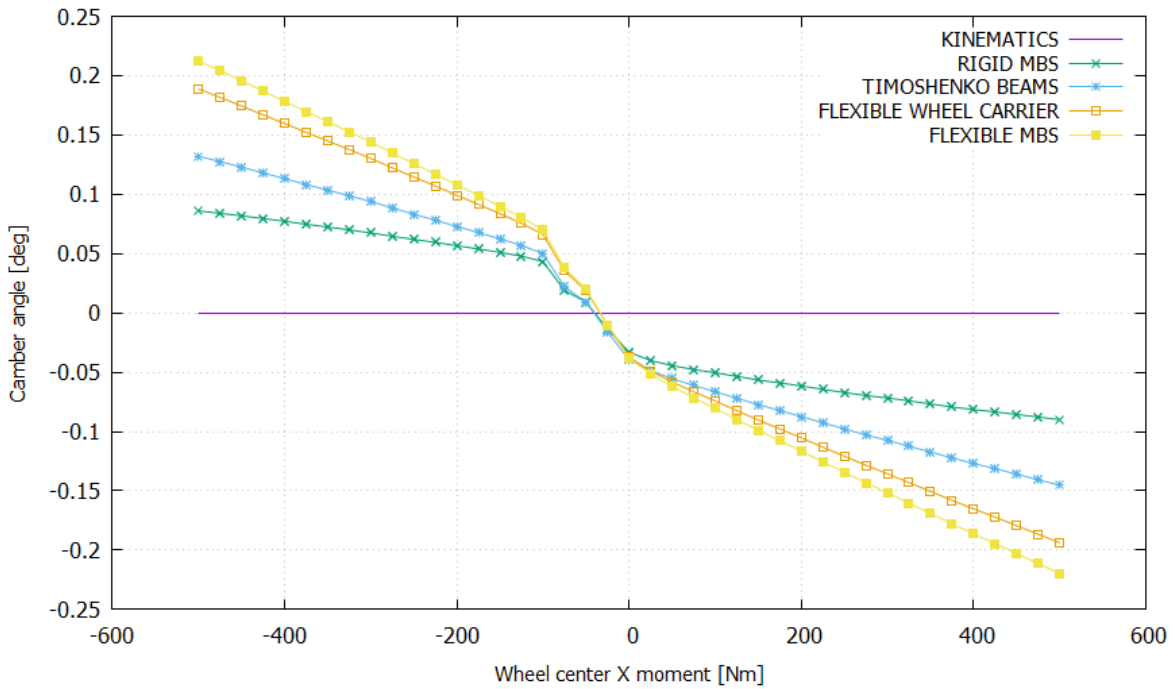
**Σχήμα 4.68: Διαμήκης μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του**



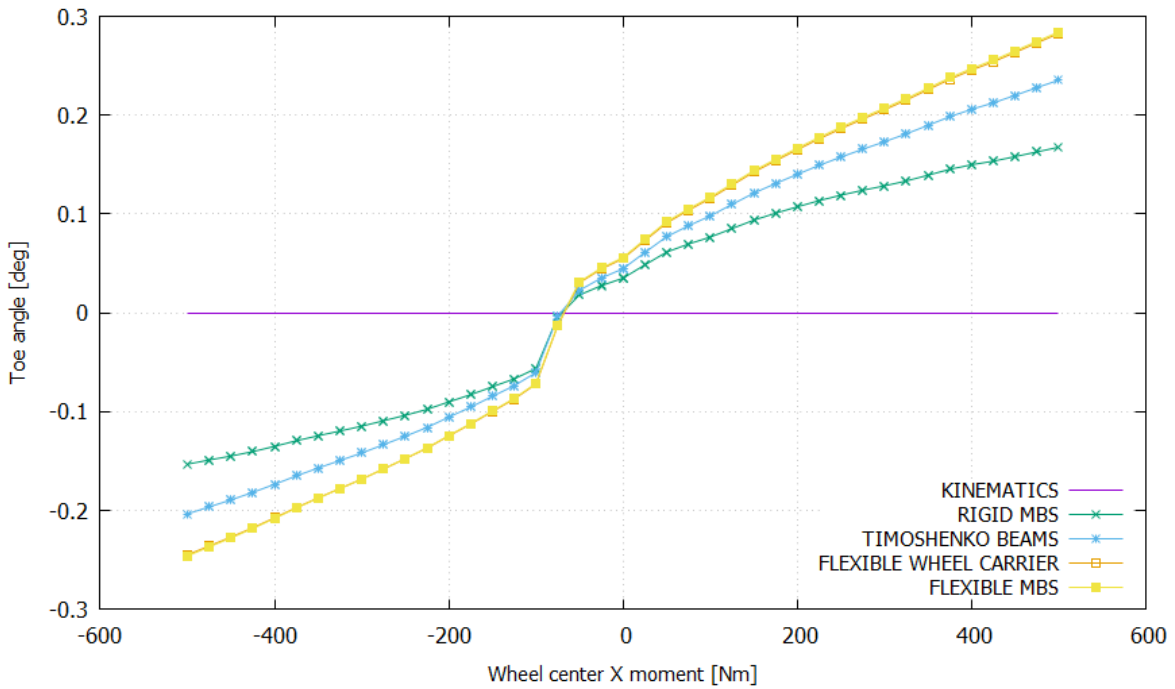
**Σχήμα 4.69: Εγκάρσια μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του**



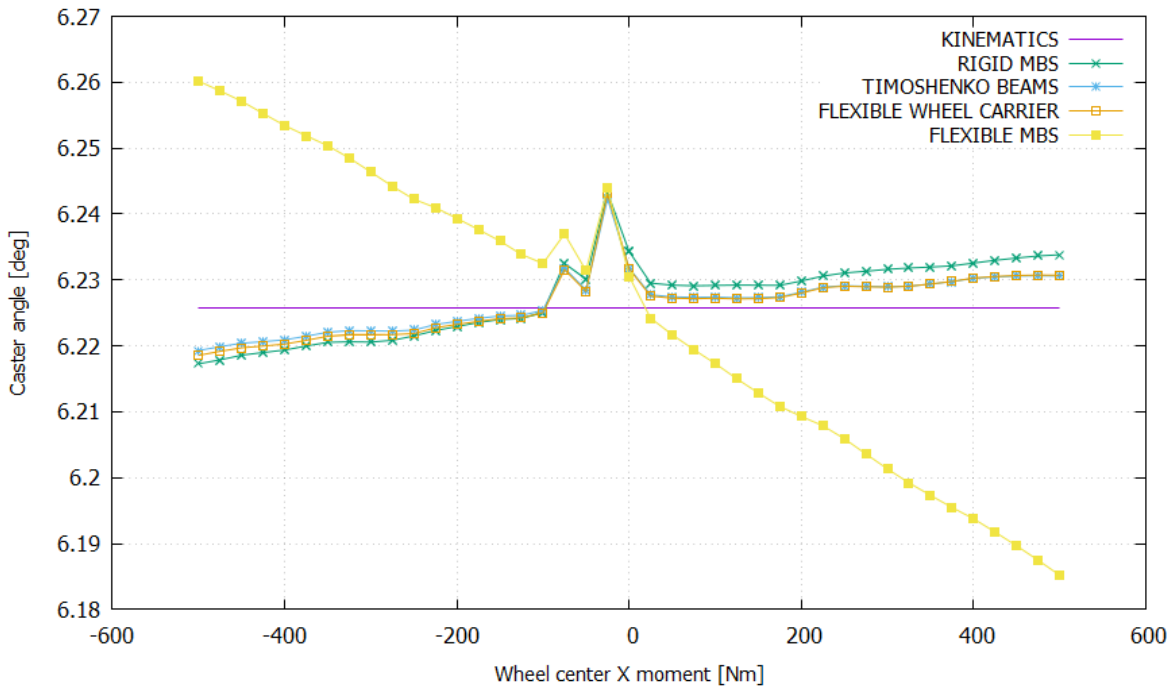
**Σχήμα 4.70:** Κατακόρυφη μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του



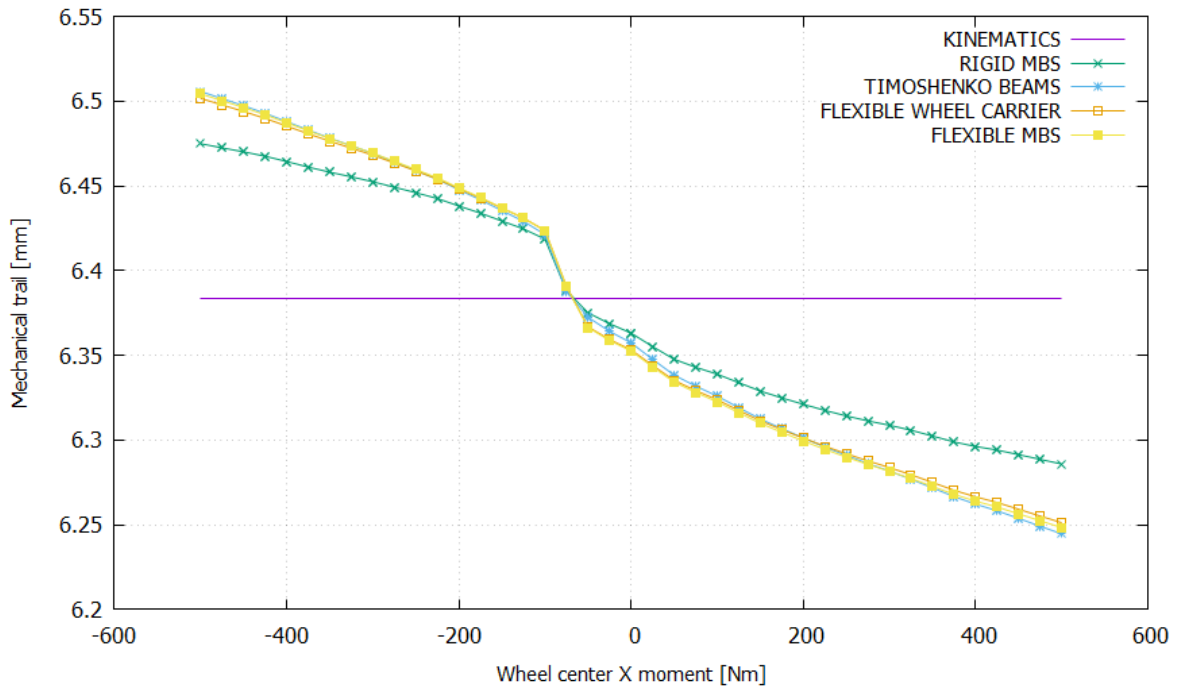
**Σχήμα 4.71:** Γωνία κλίσης τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του



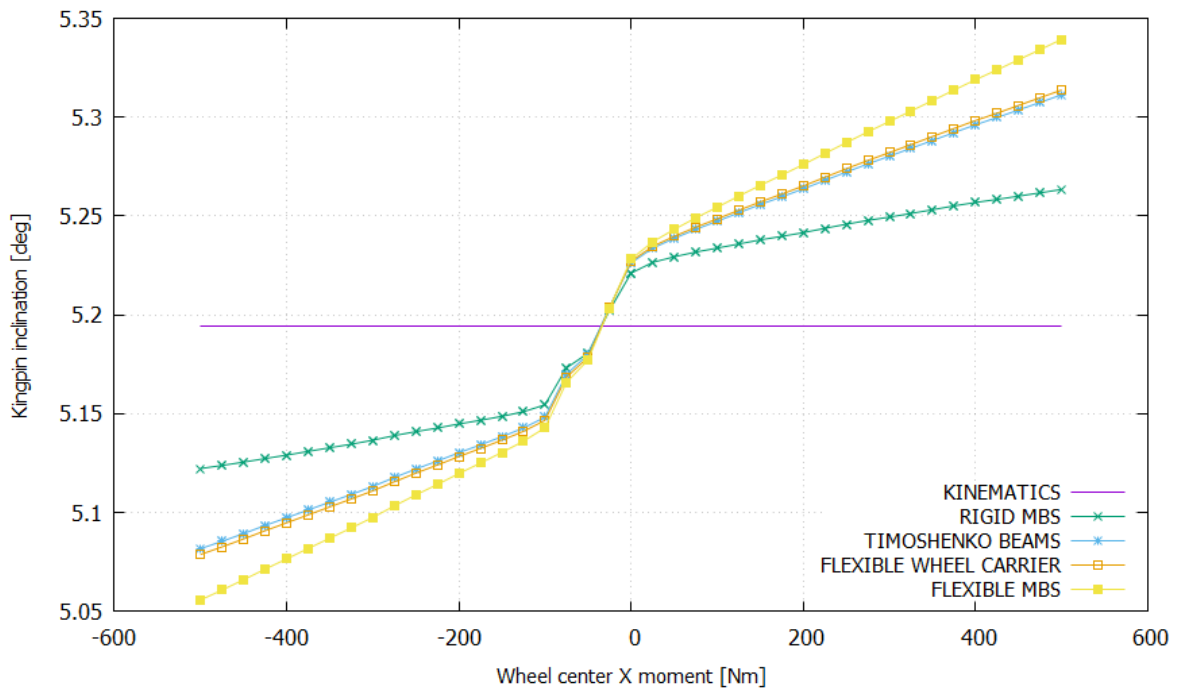
Σχήμα 4.72: Γωνία σύγκλισης τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του



Σχήμα 4.73: Γωνία caster συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του τροχού

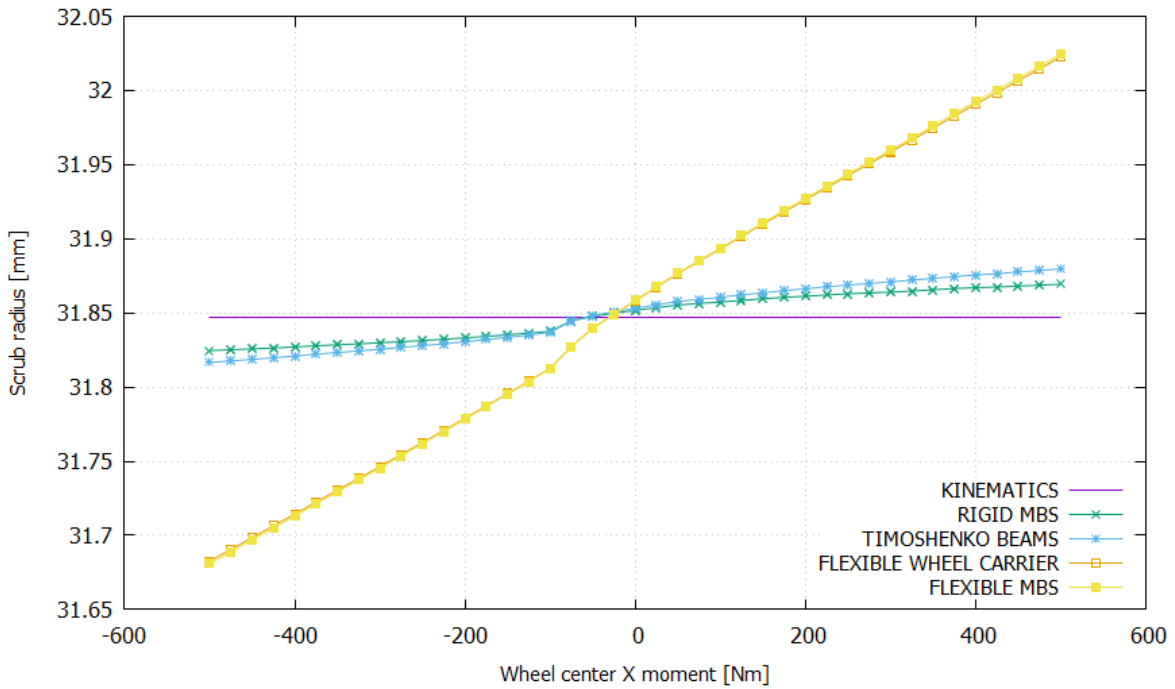


**Σχήμα 4.74: Μηχανικό ίχνος συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του τροχού**

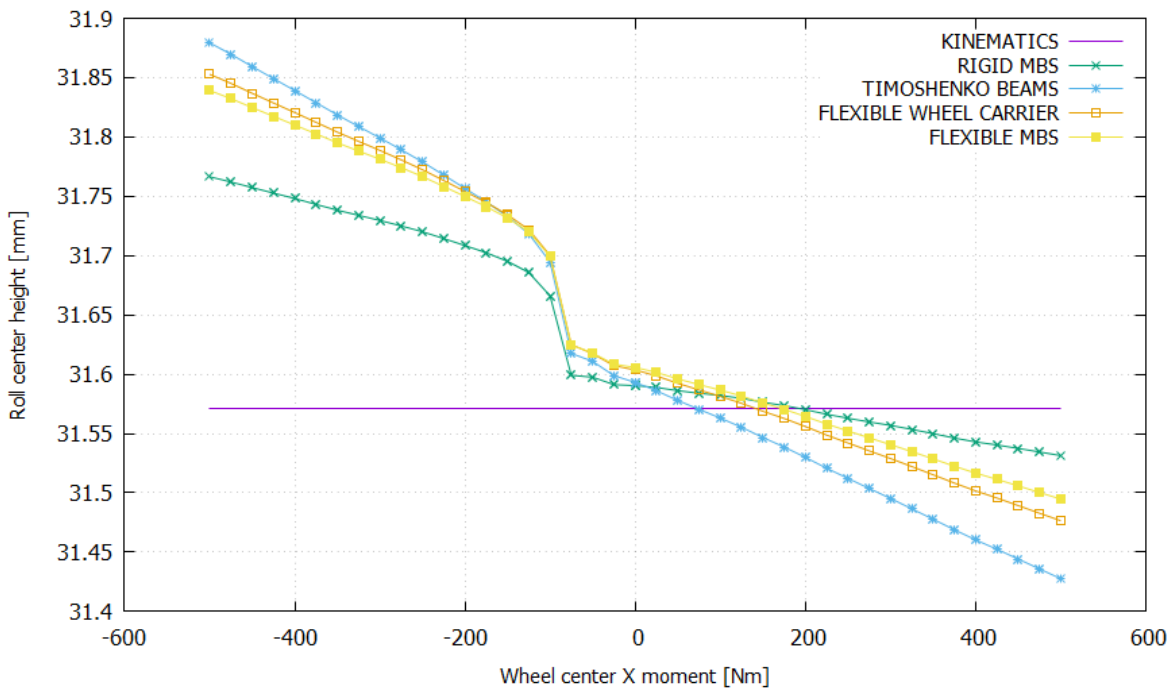


**Σχήμα 4.75: Γωνία βασιλικού πείρου συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του τροχού**

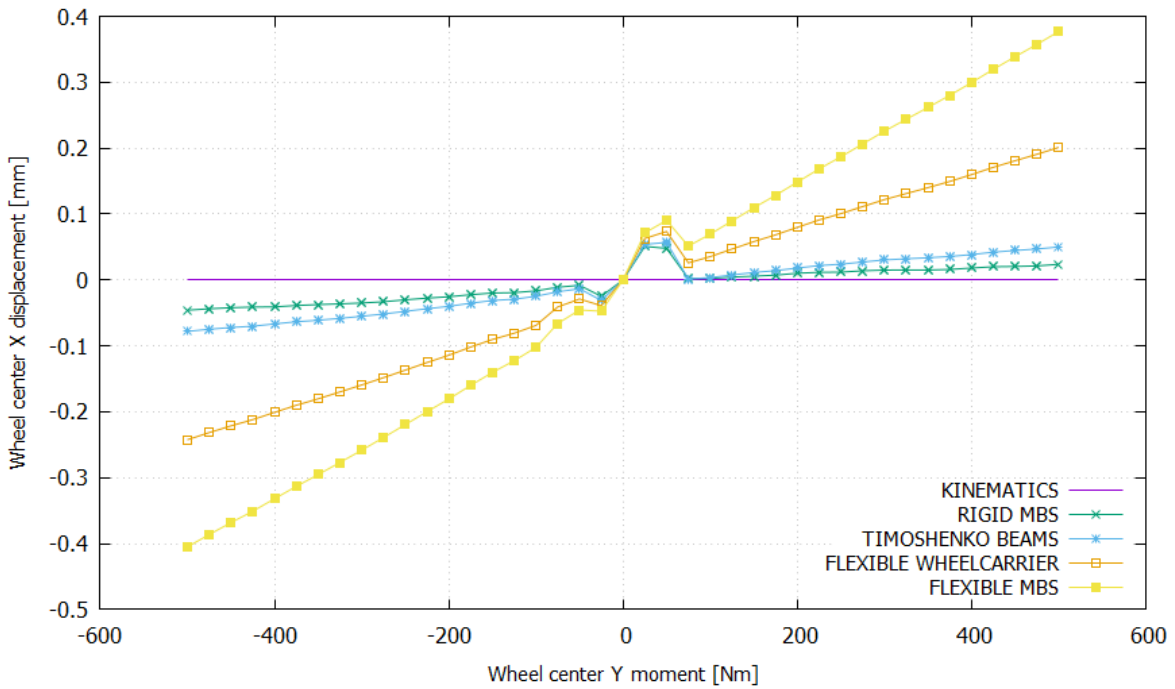




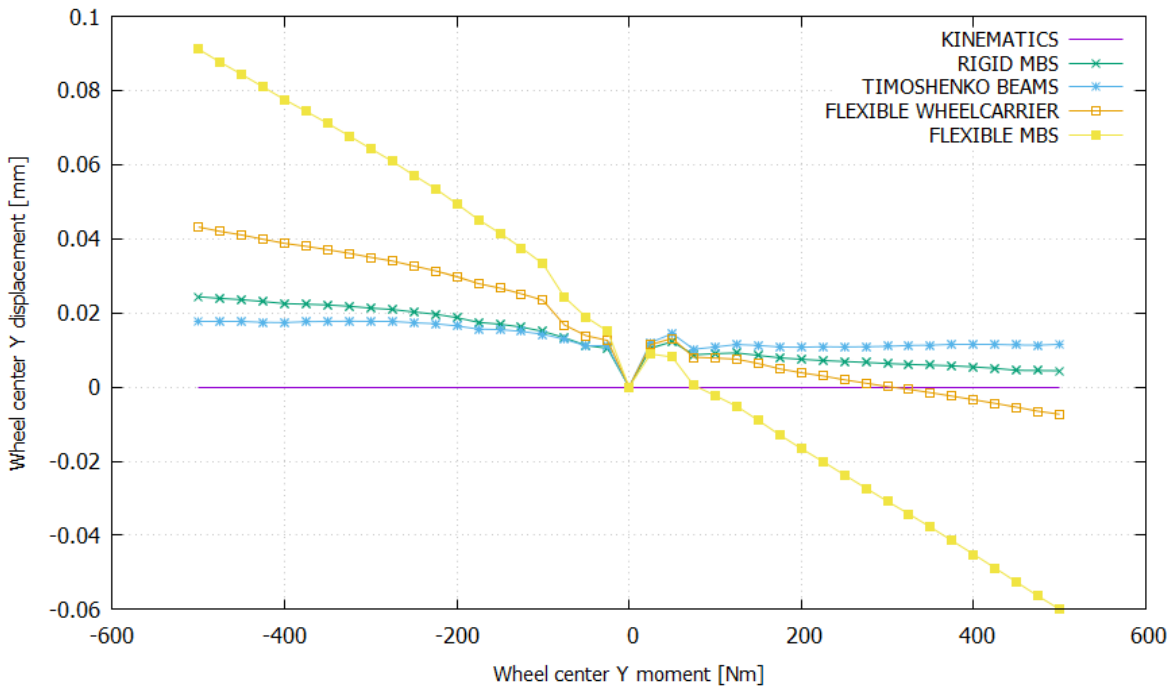
Σχήμα 4.76: Scrub radius συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του τροχού



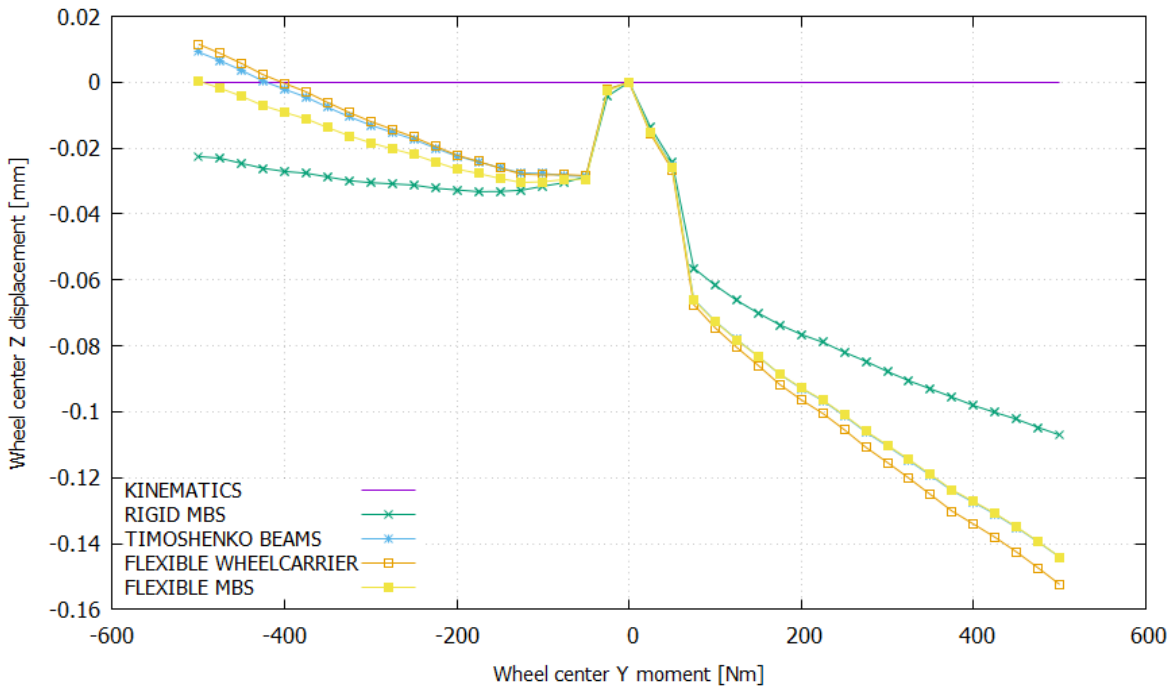
Σχήμα 4.77: Ύψος κέντρου κλυδωνισμού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του τροχού



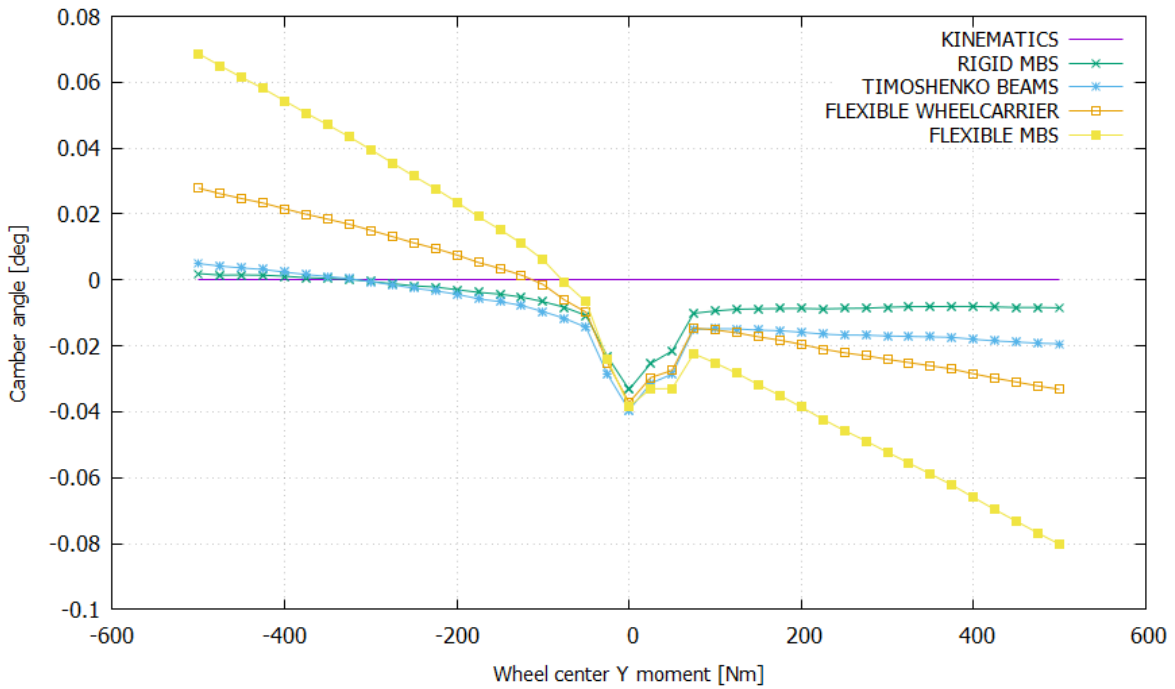
**Σχήμα 4.78: Διαμήκης μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής στρώφης στο κέντρο του**



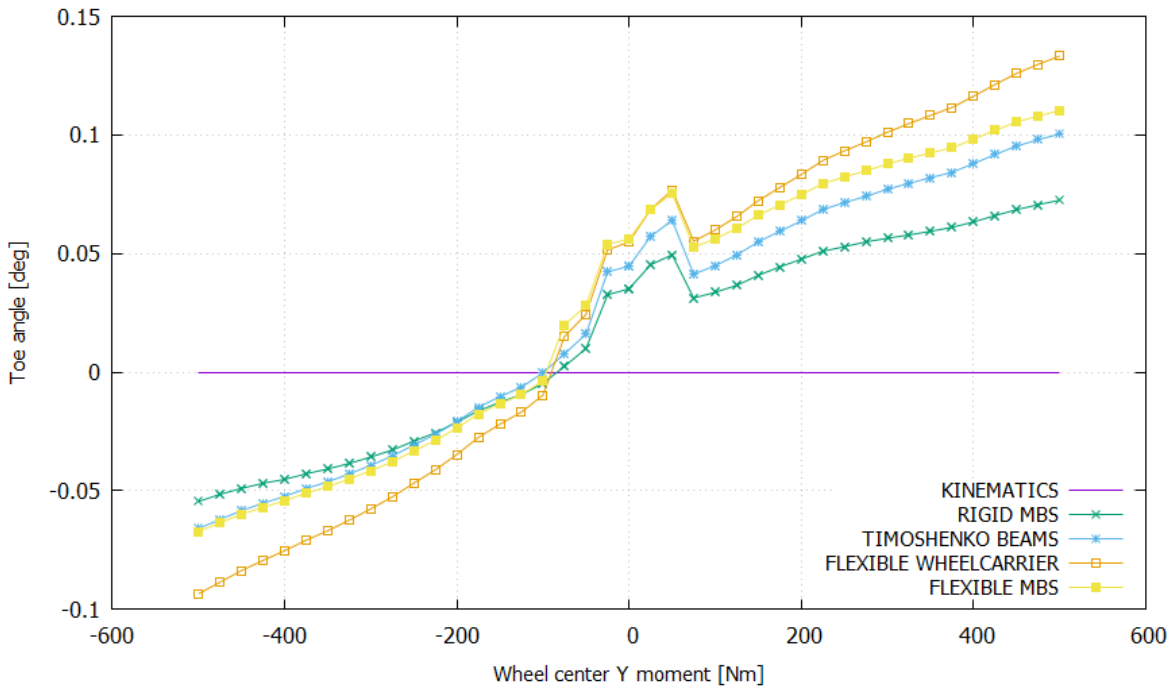
**Σχήμα 4.79: Εγκάρσια μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής στρώφης στο κέντρο του**



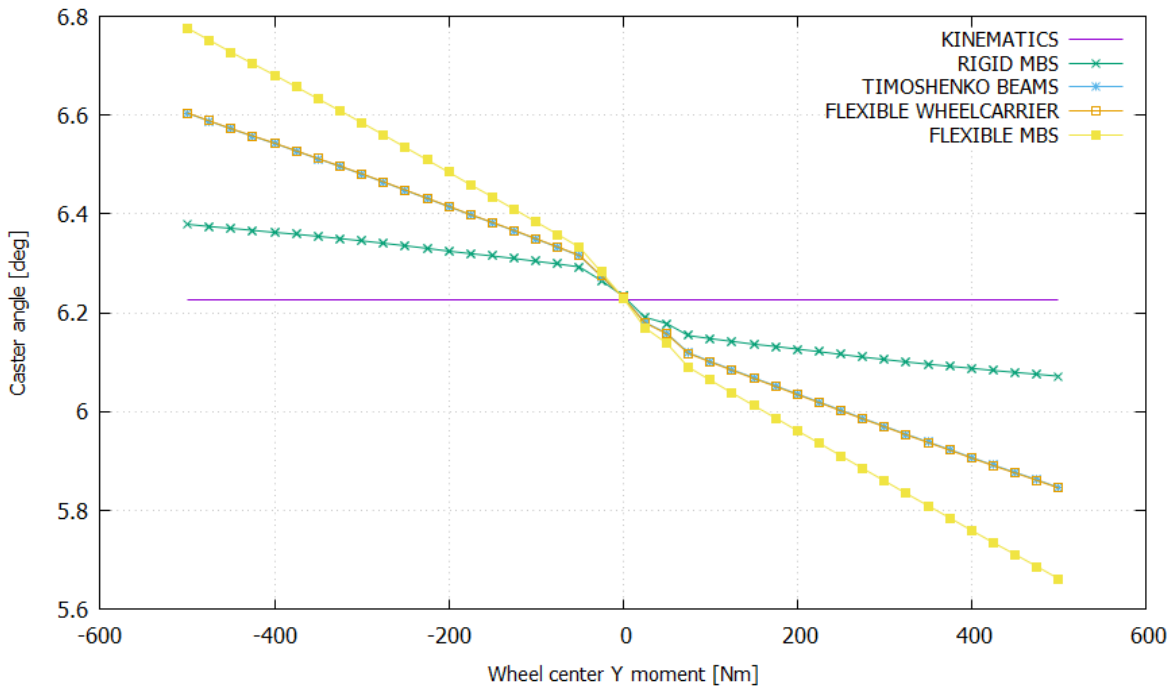
**Σχήμα 4.80:** Κατακόρυφη μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του



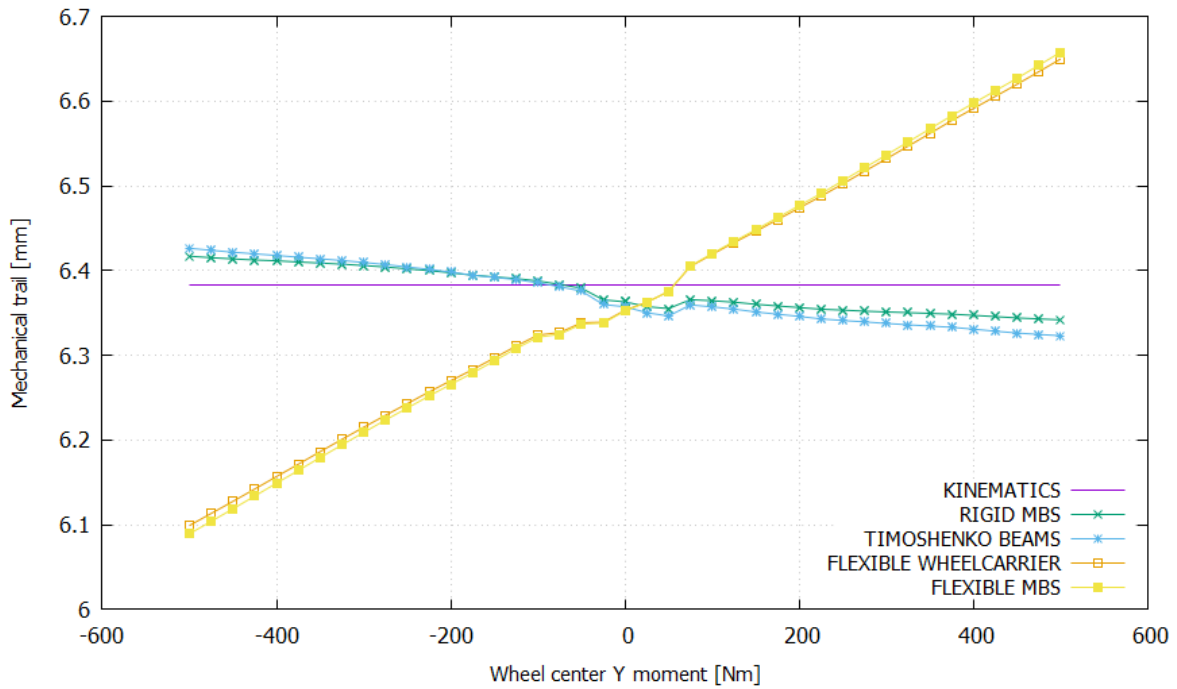
**Σχήμα 4.81:** Γωνία κλίσης τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του



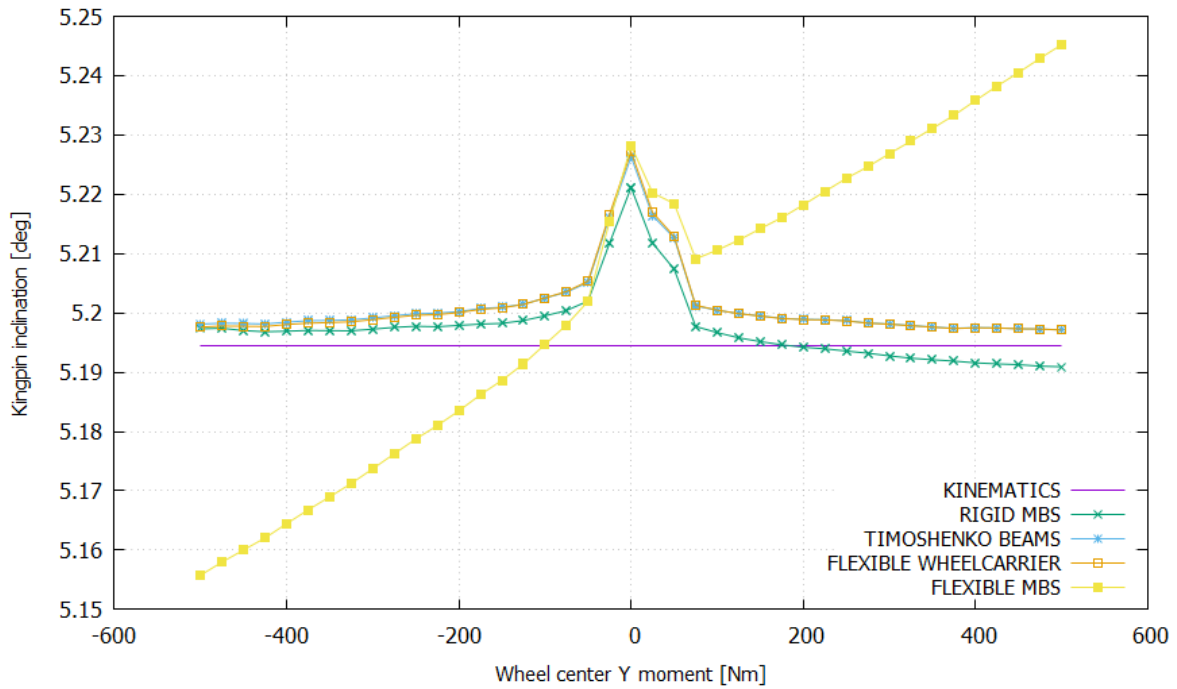
**Σχήμα 4.82: Γωνία σύγκλισης τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του**



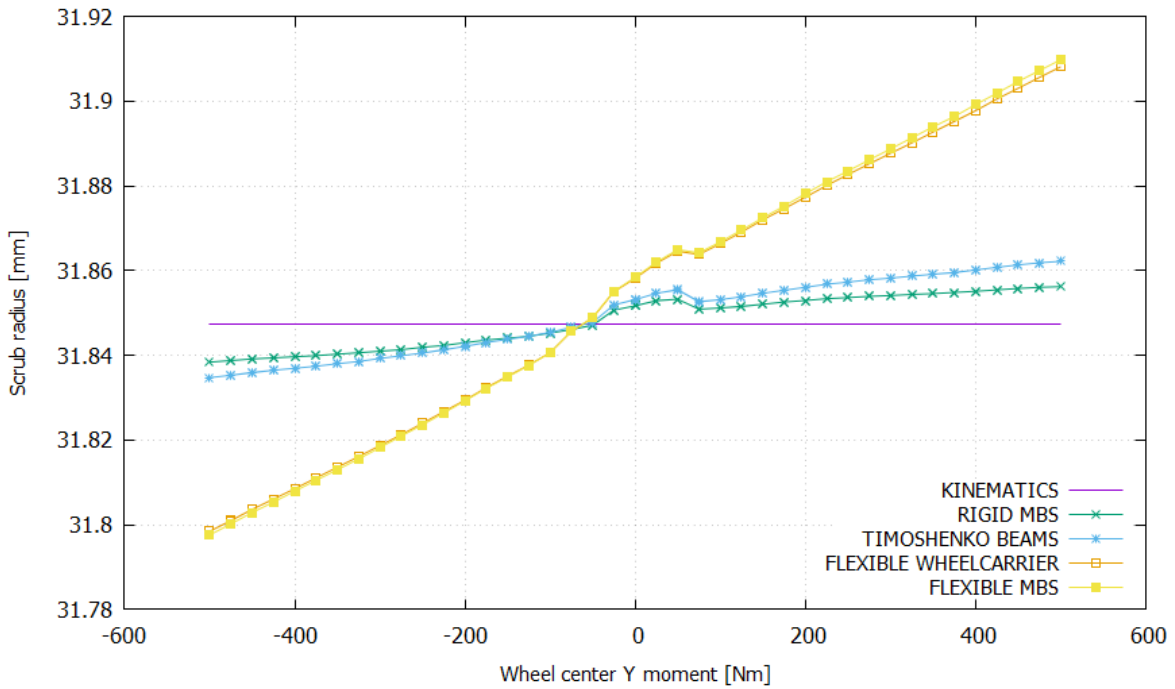
**Σχήμα 4.83: Γωνία caster συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του τροχού**



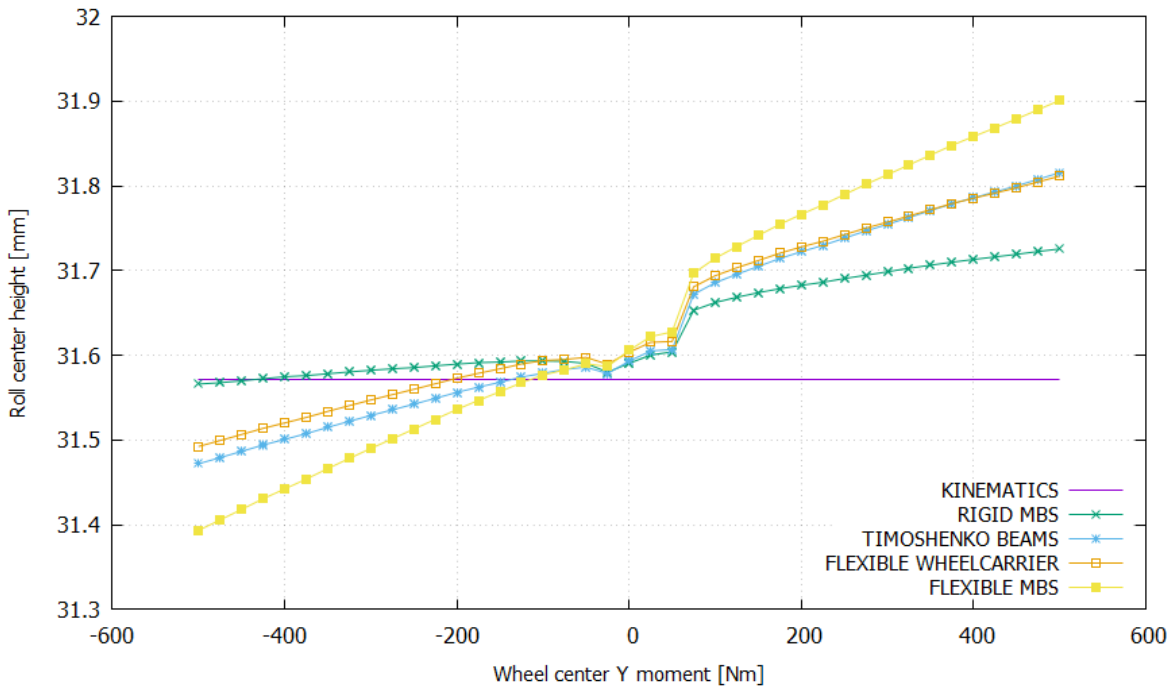
**Σχήμα 4.84: Μηχανικό ίχνος συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του τροχού**



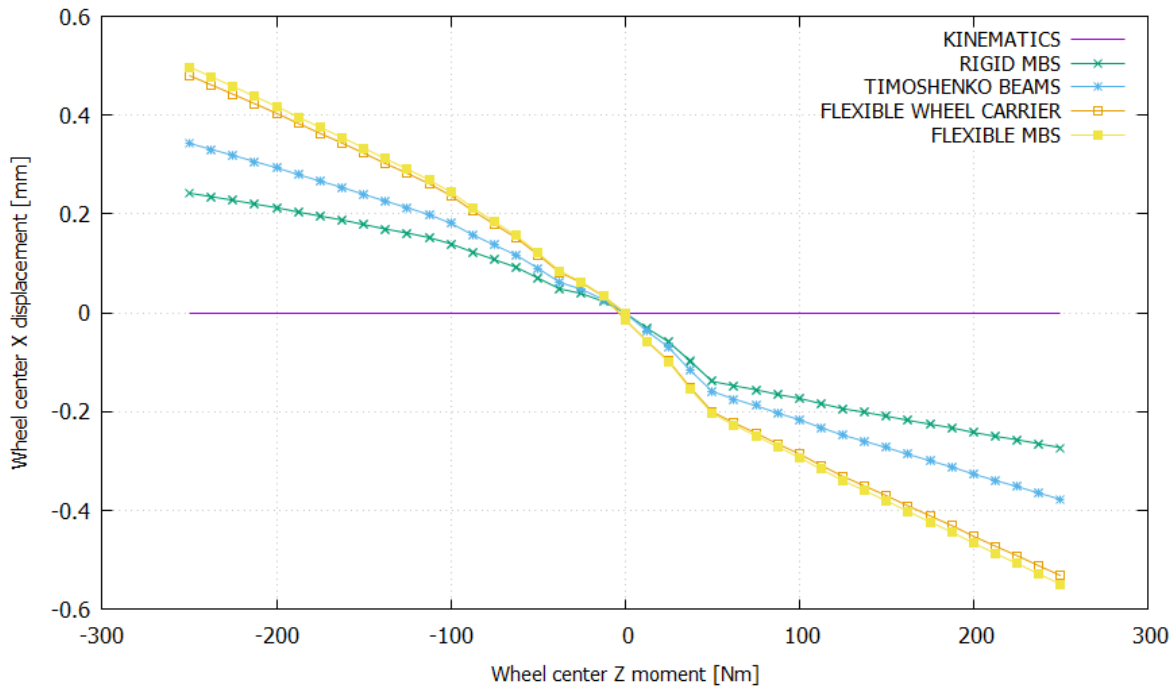
**Σχήμα 4.85: Γωνία βασιλικού πείρου συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του τροχού**



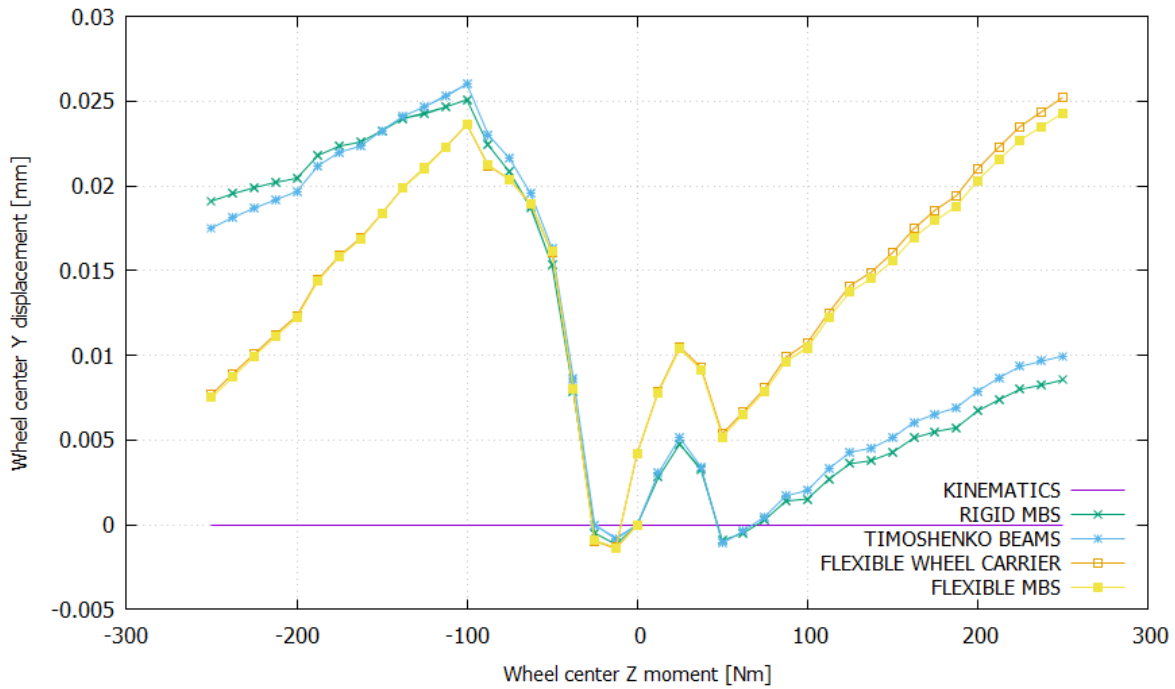
**Σχήμα 4.86:** Scrub radius συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του τροχού



**Σχήμα 4.87:** Ύψος κέντρου κλυδωνισμού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του τροχού

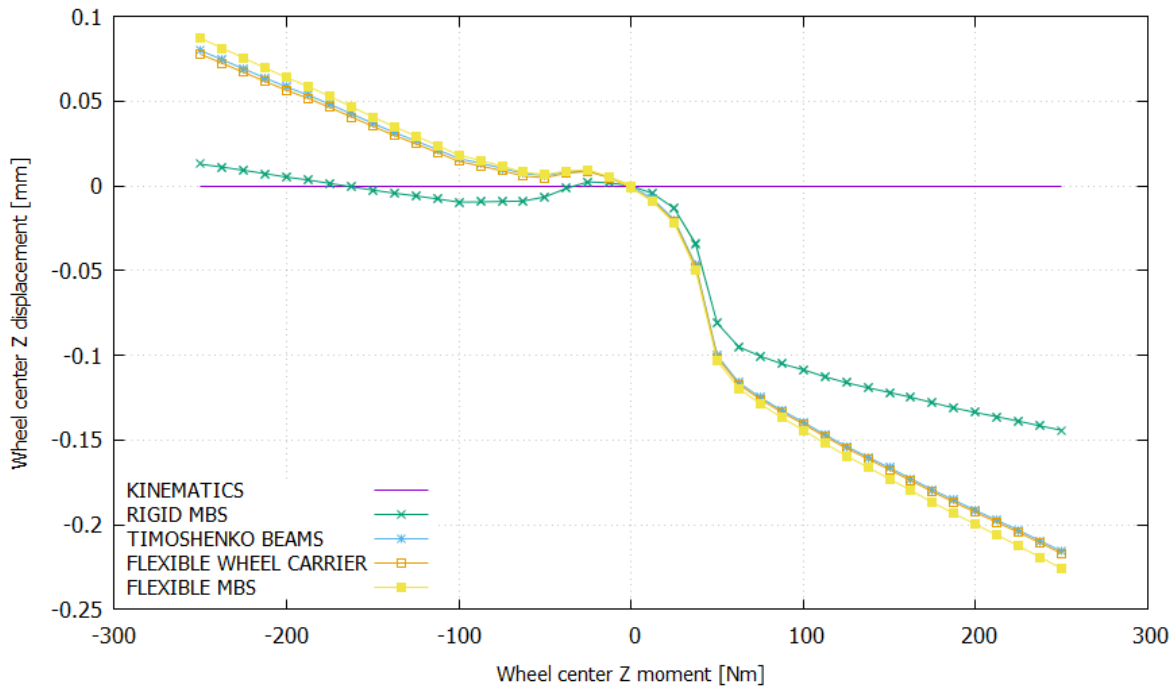


**Σχήμα 4.88: Διαμήκης μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του**

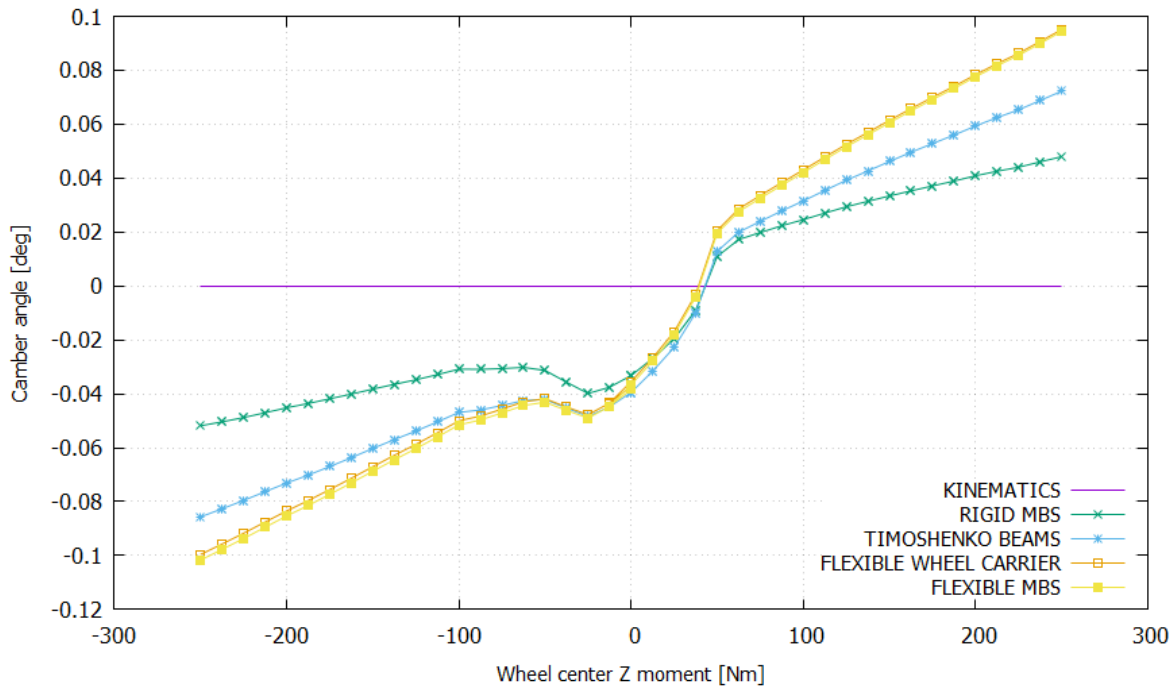


**Σχήμα 4.89: Εγκάρσια μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του**

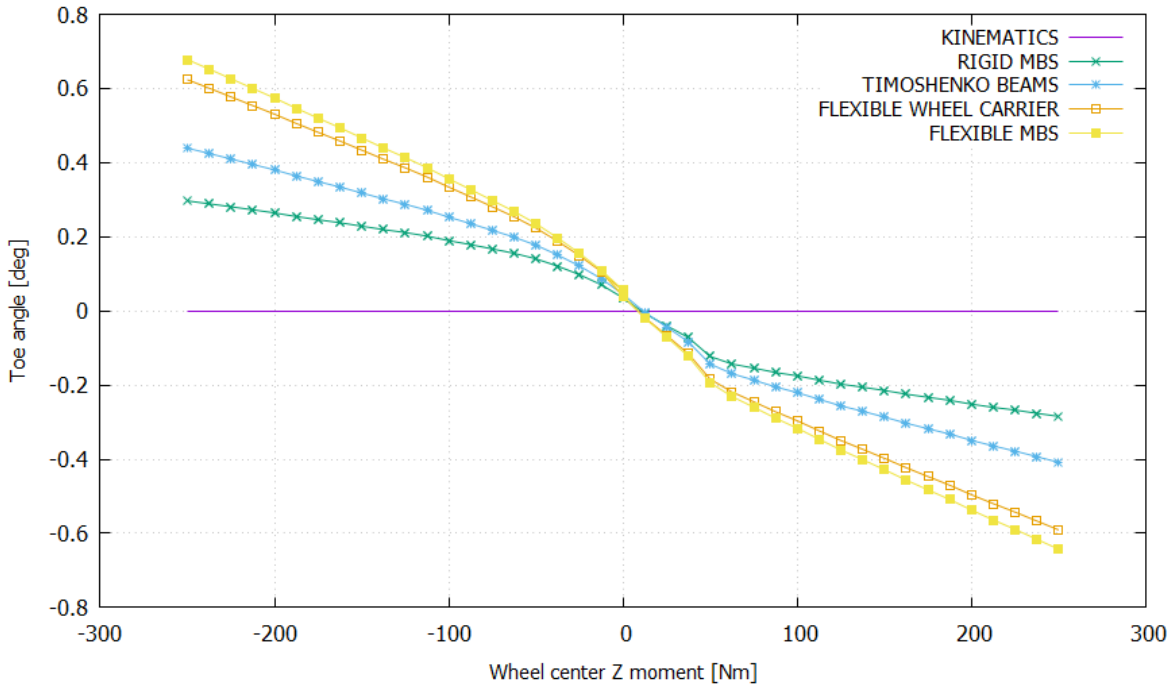




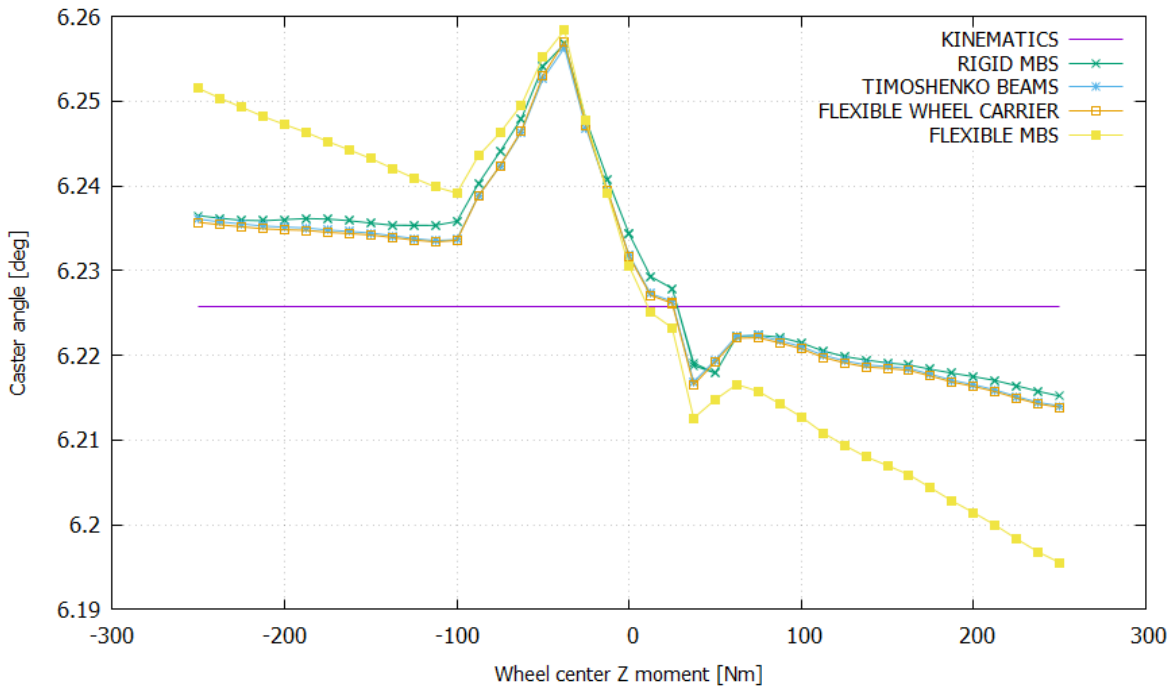
**Σχήμα 4.90: Κατακόρυφη μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του**



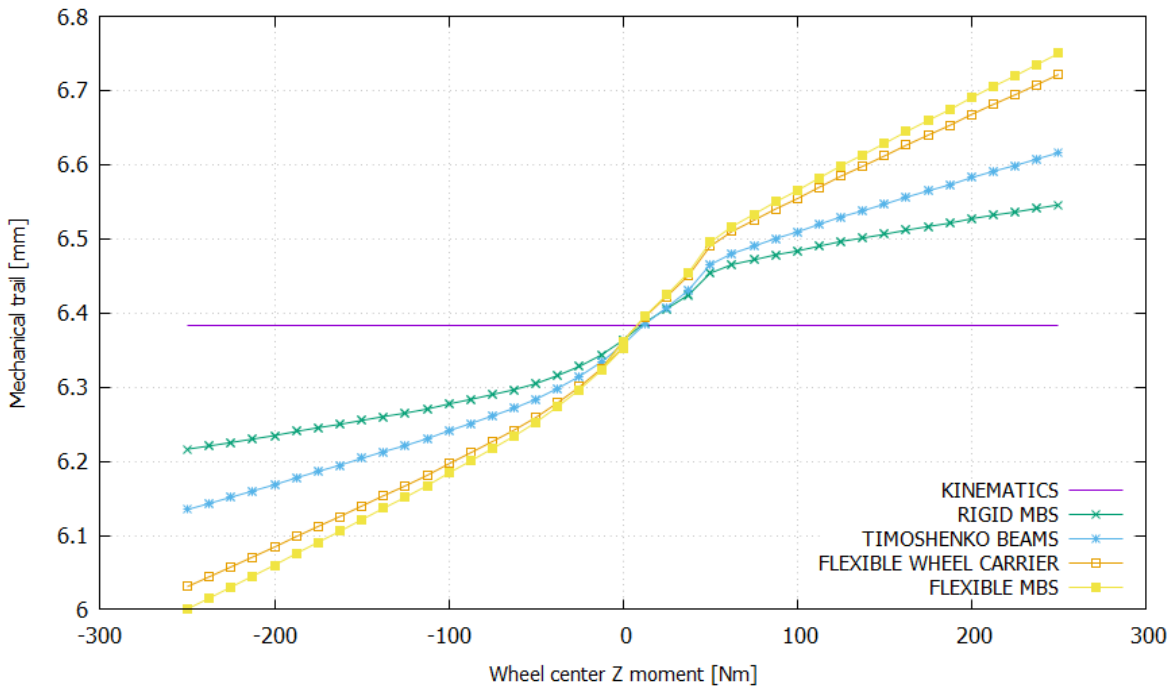
**Σχήμα 4.91: Γωνία κλίσης τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του**



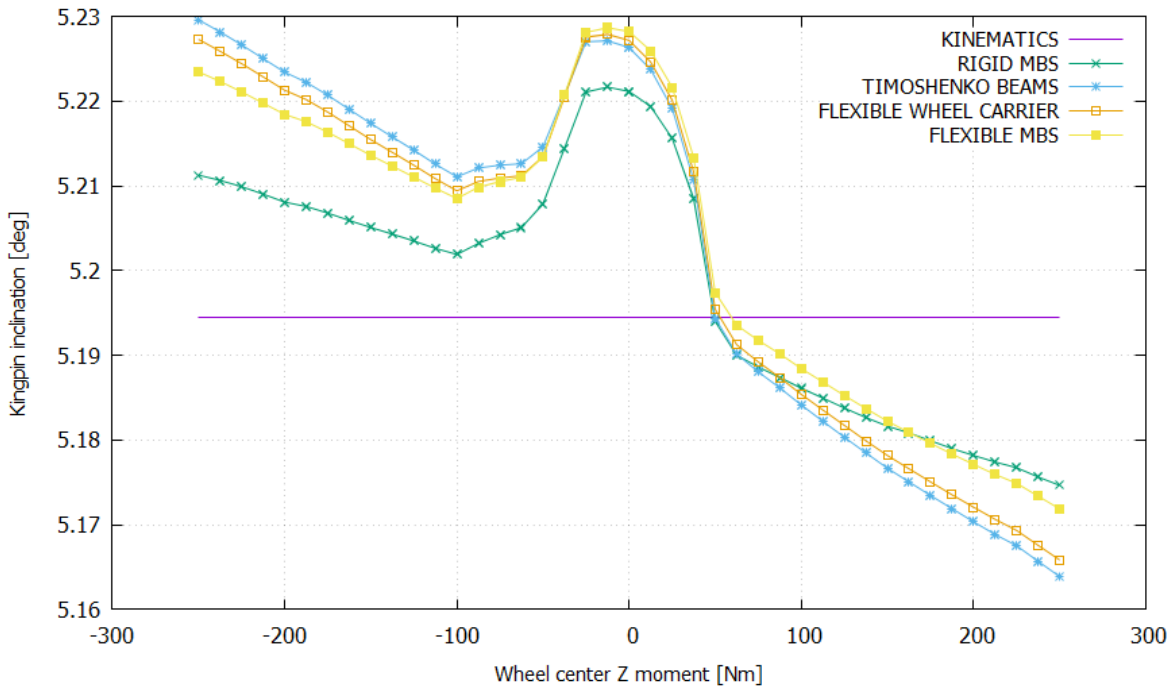
Σχήμα 4.92: Γωνία σύγκλισης τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του



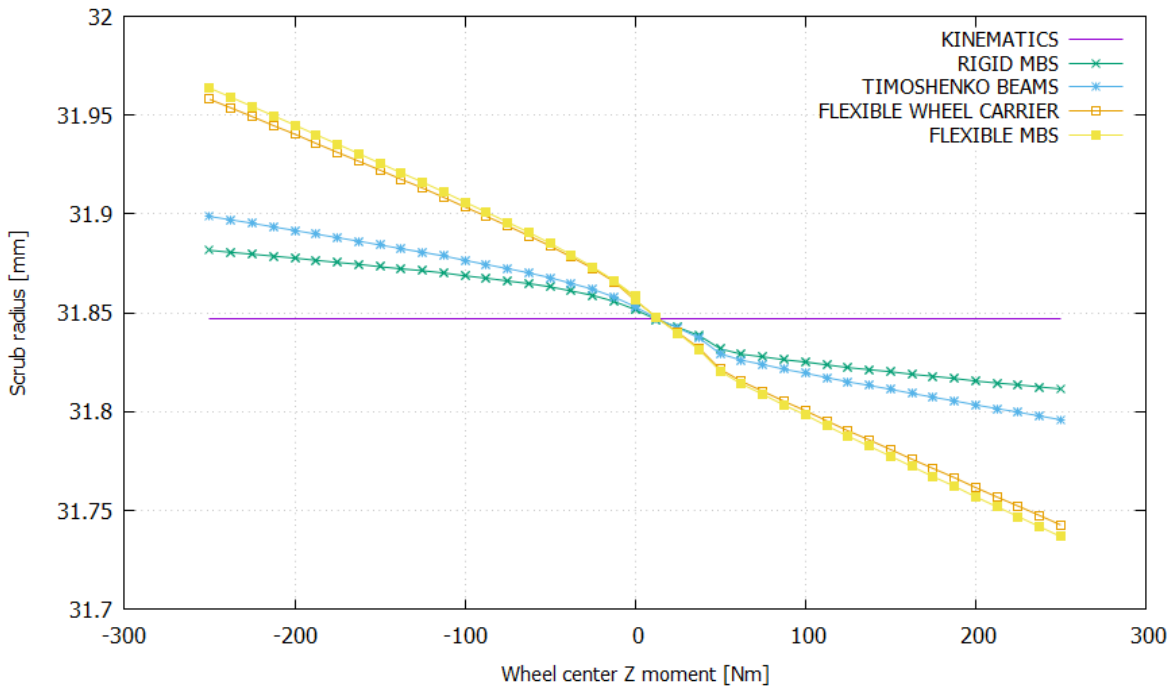
Σχήμα 4.93: Γωνία caster συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του τροχού



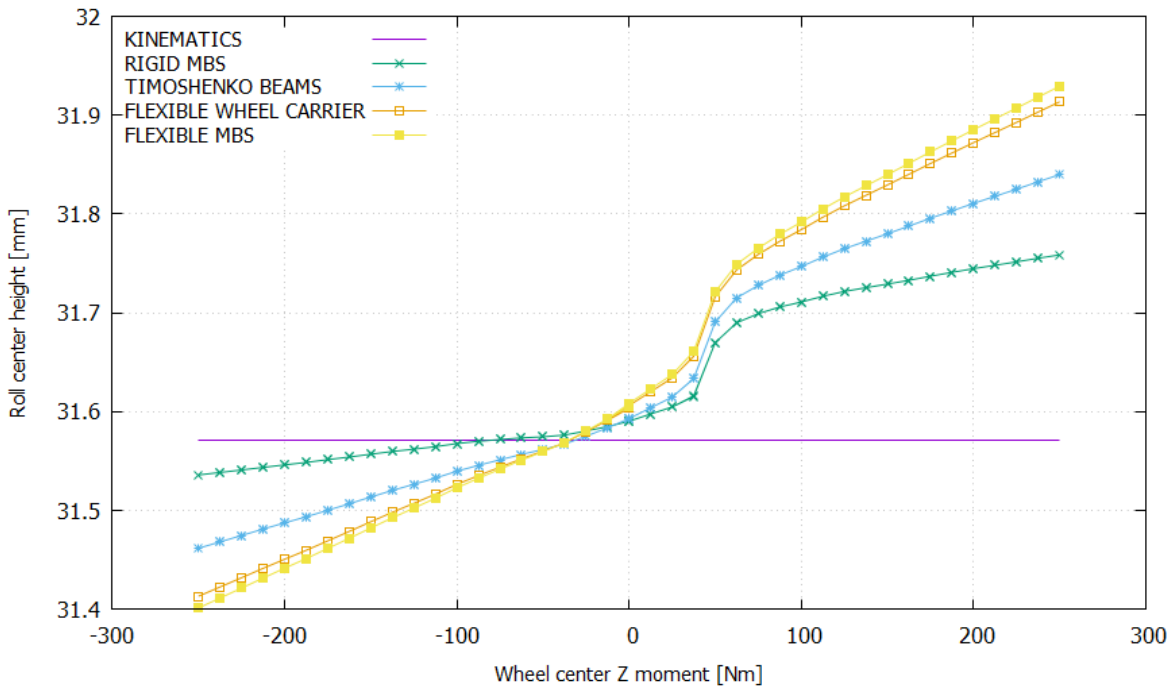
**Σχήμα 4.94: Μηχανικό ίχνος συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του τροχού**



**Σχήμα 4.95: Γωνία βασιλικού πείρου συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του τροχού**



**Σχήμα 4.96: Scrub radius συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του τροχού**



**Σχήμα 4.97: Ύψος κέντρου κλυδωνισμού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του τροχού**

## 5. Συμπεράσματα και μελλοντική εργασία

Ανακεφαλαιώνοντας, σκοπός της παρούσας ΔΕ ήταν η αναλυτική παρουσίαση και αντιπαραβολή ορισμένων μεθόδων κινηματικής και ελαστοκινηματικής ανάλυσης μηχανισμών ανάρτησης και η εφαρμογή αυτών για τη μελέτη, κυρίως αλλά όχι αποκλειστικά, αναρτήσεων διπλών ψαλιδιών. Προκειμένου να γίνει αντιληπτός ο ρόλος των συστημάτων ανάρτησης ως μέσο επίδρασης στη δυναμική συμπεριφορά οχημάτων, έγινε εκτεταμένη αναφορά, εκτός των άλλων, και σε έννοιες που άπτονται περισσότερο της τελευταίας (π.χ. μεταφορά φορτίου, στροφική συμπεριφορά οχήματος), παρά της ανάλυσης και του σχεδιασμού μηχανισμών ανάρτησης αυτού καθ' εαυτόν. Μάλιστα, η βιβλιογραφική ανασκόπηση που έγινε στο Κεφάλαιο 2 θα μπορούσε, ενδεχομένως, να θεωρηθεί υπερβολικά λεπτομερής στο πλαίσιο μιας προπτυχιακού επιπέδου ΔΕ, ωστόσο αυτού του είδους η θεματολογία δεν καλύπτεται επαρκώς από την ελληνική, παρά μόνο από την ξενόγλωσση, βιβλιογραφία, με αποτέλεσμα η παρούσα ΔΕ να συνεισφέρει προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Μεγάλη έμφαση δόθηκε κατά την εισαγωγή των μαθηματικών εργαλείων που αξιοποιούν οι προαναφερθείσες μέθοδοι κινηματικής και ελαστοκινηματικής ανάλυσης (π.χ. λεπτομέρειες σχετικά με την υλοποίηση και την αρχικοποίηση της αριθμητικής μεθόδου Newton-Raphson σε κάθε περίπτωση χρήσης της), καθώς η ραγδαία εξέλιξη των λογισμικών MBS και η εκτεταμένη αυτοματοποίηση πολλών διαδικασιών που σχετίζονται με τέτοιου είδους προσομοιώσεις έχει οδηγήσει στην αποκοπή του μηχανικού από τη μαθηματική διατύπωση και επίλυση προβλημάτων δυναμικής συστημάτων πολλαπλών σωμάτων, καθιστώντας τον τελευταίο «απλό χρήστη» των διαφόρων εμπορικών πακέτων. Στόχος του γράφοντος δεν ήταν σε καμία περίπτωση η μύηση του αναγνώστη στις πλέον σύγχρονες και υπολογιστικά συμφέρουσες μαθηματικές διατυπώσεις που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση συστημάτων πολλαπλών σωμάτων, αφού κάτι τέτοιο δεν εμπίπτει στο πλαίσιο μιας ΔΕ, αλλά ενός ολοκληρωμένου συγγράμματος επ' αυτού του θέματος. Αντίθετα, επιχειρήθηκε η συστηματική κατάστρωση των εξισώσεων κίνησης και κινηματικών περιορισμών από τις οποίες διέπεται ένας μηχανισμός ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, μοντελοποιούμενος ως σύστημα πολλαπλών απολύτως στερεών σωμάτων, με σκοπό να γίνουν κατανοητές οι φυσικές αρχές και τα μαθηματικά εργαλεία που εμπλέκονται κατά κανόνα σε τέτοιου είδους αναλύσεις. Άλλωστε, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να εμβαθύνει στα συστήματα πολλαπλών σωμάτων αξιοποιώντας τον εκτενή κατάλογο βιβλιογραφικών αναφορών που δίνεται στο τέλος αυτής της ΔΕ.

Έχοντας θεμελιώσει μαθηματικά και εφαρμόσει στην πράξη τις ανωτέρω μεθόδους κινηματικής και ελαστοκινηματικής ανάλυσης για τη μελέτη μηχανισμών ανάρτησης διπλών ψαλιδιών, εξάγονται τα ακόλουθα συμπεράσματα για καθεμία από αυτές:

- **Μέθοδος των κλειστών διανυσματικών βρόχων:** Πρόκειται για μια σχετικά απλή μέθοδο κινηματικής ανάλυσης που προϋποθέτει την εφάπαξ εκτέλεση μεγάλου όγκου συμβολικών μαθηματικών πράξεων για την εξαγωγή εκφράσεων

μέσω των οποίων υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά γεωμετρικά μεγέθη του εκάστοτε μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών. Το υπολογιστικό κόστος της συγκεκριμένης μεθόδου είναι πρακτικά μηδενικό, ωστόσο οι ανωτέρω εκφράσεις δεν μπορούν να τροποποιηθούν εύκολα προκειμένου για την κινηματική ανάλυση παραλλαγών του αρχικού μηχανισμού, χωρίς την επανεκτέλεση μεγάλου πλήθους συμβολικών μαθηματικών πράξεων, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως.

- **Μέθοδος των τριών σημείων:** Η μέθοδος των τριών σημείων μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά για την κινηματική ανάλυση μηχανισμών ανάρτησης αντί της μεθόδου των κλειστών διανυσματικών βρόχων, καθώς υπερτερεί της τελευταίας όσον αφορά την πρακτικότητα (π.χ. εύκολη τροποποίηση για την κινηματική ανάλυση αναρτήσεων με γόνατα MacPherson). Από την άλλη πλευρά, η υπολογιστική υλοποίηση της εν λόγω μεθόδου προϋποθέτει στοιχειώδεις γνώσεις προγραμματισμού και αριθμητικής ανάλυσης, ενώ το υπολογιστικό κόστος αυτής παραμένει μικρό, αλλά σημαντικά μεγαλύτερο από αυτό της μεθόδου των κλειστών διανυσματικών βρόχων.
- **Εκφυλισμός μηχανισμού σε ισοστατικό χωροδικτύωμα:** Πρόκειται για μια προσεγγιστική μέθοδο στατικής ανάλυσης μηχανισμών ανάρτησης διπλών ψαλιδιών που αποσκοπεί στον υπολογισμό των φορτίων που καταπονούν τα μέλη τους. Εισάγοντας τη γεωμετρία καθενός από αυτά και τα ως ανωτέρω υπολογισθέντα φορτία σε ένα λογισμικό ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων, είναι δυνατός ο υπολογισμός της στατικής ελαστικής απόκρισης κάθε τεμαχίου ξεχωριστά. Παρόλα αυτά, δεν είναι εφικτή η αξιολόγηση της ενιαίας ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς ενός μηχανισμού ανάρτησης, διότι οι προκύπτουσες θέσεις των σημείων σύνδεσης των διαφόρων τεμαχίων δεν είναι συμβατές μεταξύ τους, συνεπώς η εκ νέου συναρμολόγηση του μηχανισμού αξιοποιώντας τις παραμορφωμένες γεωμετρίες των τελευταίων είναι αδύνατη.
- **Ανάλυση μηχανισμού ανάρτησης ως σύστημα πολλαπλών σωμάτων:** Η μοντελοποίηση ενός μηχανισμού ανάρτησης ως σύστημα πολλαπλών σωμάτων, αποτελεί ίσως τον πλέον ενδεδειγμένο τρόπο ανάλυσης αυτού, όταν η ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι αδιαπραγμάτευτη. Λόγω έλλειψης δεδομένων, στο πλαίσιο της παρούσας ΔΕ μελετήθηκε κατ' αυτόν τον τρόπο μια ανάρτηση διπλών ψαλιδιών φέρουσα αποκλειστικά δύσκαμπτα στοιχεία σύνδεσης. Ο εν λόγω μηχανισμός ανάρτησης μοντελοποιήθηκε αρχικά ως σύστημα πολλαπλών απολύτως στερεών, και στη συνέχεια, γραμμικά ελαστικών σωμάτων, ενσωματώνοντας στην ανάλυση τα λεγόμενα «υπερστοιχεία» προκειμένου να ληφθεί υπόψη η ελαστική συμπεριφορά των μελών του μηχανισμού, αφού η δυσκαμψία των τελευταίων είναι συγκρίσιμη με αυτή των χρησιμοποιούμενων δύσκαμπτων στοιχείων σύνδεσης (σφαιρικά έδρανα με ή χωρίς σπείρωμα). Τα πιο σημαντικά μειονεκτήματα μιας τέτοιας ανάλυσης είναι η αυξημένη περιπλοκότητα και οι μεγάλες απαιτήσεις σε δεδομένα εισόδου τα οποία δεν

είναι πάντα άμεσα διαθέσιμα (π.χ. δυσκαμψίες στοιχείων σύνδεσης). Εντούτοις, εάν οι παραπάνω δυσκολίες ξεπεραστούν, τα αποτελέσματα που λαμβάνονται χαρακτηρίζονται από μεγάλη ακρίβεια, γι' αυτό και η κατασκευή πρωτοτύπων οχημάτων για τη λήψη πειραματικών μετρήσεων σε διατάξεις K&C έχει πλέον περιοριστεί σημαντικά σε σχέση με παλαιότερα. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι όσο λιγότερες εξιδανικεύσεις γίνονται κατά τη μοντελοποίηση ενός μηχανισμού ως σύστημα πολλαπλών σωμάτων, τόσο αυξάνεται η επιτυγχάνόμενη ακρίβεια αποτελεσμάτων, η βελτίωση της οποίας συνοδεύεται σχεδόν πάντα από αύξηση του υπολογιστικού κόστους της εκάστοτε προσομοίωσης. Συνεπώς, ο αναλυτής καλείται να επιλέγει το βέλτιστο, κατά περίπτωση, τρόπο μοντελοποίησης κάθε τεμαχίου και στοιχείου σύνδεσης με γνώμονα την εξισορρόπηση των απαιτήσεων ακρίβειας των αποτελεσμάτων και την καλύτερη δυνατή εκμετάλλευση των διαθέσιμων υπολογιστικών πόρων.

Ύστερα από την εκτέλεση κινηματικής ή/και ελαστοκινηματικής ανάλυσης ενός μηχανισμού ανάρτησης, ένας έμπειρος μηχανικός έχει στη διάθεσή του πολύτιμα δεδομένα με βάση τα οποία μπορεί να κάνει στοχευμένες αλλαγές στο σχεδιασμό του πρώτου με σκοπό την ευνοϊκή επίδραση επί της δυναμικής του οχήματος. Η εξαγωγή συμπερασμάτων με βάση τα αποτελέσματα τέτοιου είδους αναλύσεων είναι άλλωστε θεμελιώδες καθήκον των προαναφερθέντων «απλών χρηστών» εμπορικών λογισμικών MBS στο πλαίσιο εφαρμογών των τελευταίων για τη μελέτη συστημάτων ανάρτησης. Ωστόσο, είναι γεγονός ότι οι εν λόγω χρήστες σπάνια γνωρίζουν λεπτομέρειες σχετικά με τη δομή και τις αυτοματοποιημένες διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στο παρασκήνιο, πίσω από το κομψό παραθυρικό περιβάλλον του εκάστοτε λογισμικού που χρησιμοποιούν.

Με βάση την αναλυτική μαθηματική διατύπωση που δόθηκε στο Κεφάλαιο 4 για ένα μοντέλο ενός τετάρτου οχήματος (quarter car linkage model), καθίσταται δυνατή η επέκταση των όσων ειπώθηκαν σε επίπεδο άξονα ή ακόμα και ολόκληρου οχήματος, προκειμένου να μελετηθούν με μεγαλύτερη ακρίβεια φαινόμενα όπως η μεταβολή της γωνίας κλίσης των τροχών εξαιτίας της εισαγωγής μη μηδενικής γωνίας κλυδωνισμού στην ανηρτημένη μάζα. Σε επόμενο στάδιο θα μπορούσαν να διατυπωθούν εκ νέου όλες οι εξισώσεις ισορροπίας συμπεριλαμβάνοντας τους χρονοεξαρτώμενους όρους που δεν ελήφθησαν υπόψιν στο πλαίσιο των στατικών αναλύσεων της παρούσας ΔΕ, προκειμένου να μελετηθεί η απόκριση τόσο του συστήματος ανάρτησης όσο και ολόκληρου του οχήματος υπό δυναμικές εξωτερικές διεγέρσεις (π.χ. ride comfort). Ενσωματώνοντας επιπλέον ένα μοντέλο ελαστικών σε συνδυασμό με μια στοιχειώδη μοντελοποίηση του κινητήριου συστήματος και των συστημάτων πέδησης και διεύθυνσης, καθώς και ένα ΣΑΕ στο ρόλο του οδηγού, θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν μελέτες της δυναμικής του πλήρους οχήματος στο επίπεδο. Πράγματι, οι αυτοκινητοβιομηχανίες αξιοποιούν τα εμπορικά λογισμικά MBS με τους τρόπους που περιεγράφηκαν παραπάνω, εξοικονομώντας χρόνο και χρήματα που διαφορετικά θα δαπανούσαν για την πραγματοποίηση δοκιμών σε ειδικά διαμορφωμένες πίστες με πρωτότυπα οχήματα.



## Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1.1: Σύστημα ανάρτησης ζωήλατης άμαξας με φυλλωτά ελατήρια [2].....	12
Σχήμα 1.2: Μοντελοποίηση ενός τετάρτου οχήματος και πλήρους οχήματος ως συστήματα πολλαπλών σωμάτων [4] .....	15
Σχήμα 2.1: Σύστημα ανάρτησης ημιάκαμπτου άξονα [5].....	17
Σχήμα 2.2: Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ανάρτησης ημιάκαμπτου άξονα [6] .....	18
Σχήμα 2.3: Σύστημα ανάρτησης με γόνατα MacPherson [7] .....	19
Σχήμα 2.4: Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ανάρτησης με γόνατα MacPherson [6] ....	20
Σχήμα 2.5: Σύστημα ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [8].....	20
Σχήμα 2.6: Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [6].....	21
Σχήμα 2.7: Σύστημα ανάρτησης πολλαπλών συνδέσμων [5].....	22
Σχήμα 2.8: Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα ανάρτησης πολλαπλών συνδέσμων [6]....	22
Σχήμα 2.9: Ελαστικοφόρος τροχός υπό γωνία κλίσης $\gamma$ [1].....	24
Σχήμα 2.10: Θετική, ουδέτερη και αρνητική σύγκλιση τροχών [1].....	24
Σχήμα 2.11: Προσδιορισμός άξονα περιστροφής του φορέα του τροχού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών και πολλαπλών συνδέσμων [4] .....	25
Σχήμα 2.12: Γωνία caster και μηχανικό ίχνος ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [4] .....	25
Σχήμα 2.13: Γωνία βασιλικού πείρου και scrub radius ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [4]...	26
Σχήμα 2.14: Στιγμαιαία κέντρα περιστροφής και κέντρο κλυδωνισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [10].....	27
Σχήμα 2.15: Σημεία για τον προσδιορισμό του στιγμιαίου κέντρου περιστροφής ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [4] .....	28
Σχήμα 2.16: Στιγμαιαίο κέντρο περιστροφής και κέντρο κλυδωνισμού ανάρτησης με γόνατα MacPherson [4] .....	28
Σχήμα 2.17: Δομή και παραμορφωσιακή συμπεριφορά ακτινικών και μη ακτινικών ελαστικών επισώτρων [1] .....	29
Σχήμα 2.18: Πειραματικές διατάξεις προσδιορισμού δυναμικών χαρακτηριστικών ελαστικών επισώτρων [11], [12].....	30
Σχήμα 2.19: Σύστημα δυνάμεων και ροπών πρόσφυσης ελαστικοφόρου τροχού [1] .....	31
Σχήμα 2.20: Γωνία σύγκλισης και γωνίες πλαγιολίσθησης τροχού και ελαστικού [1] .....	32
Σχήμα 2.21: Ενδεικτικά αποτελέσματα μοντέλου Magic Formula 5.2, Continental C16 205/510R13, $F_z = 800 \text{ N}$ , $\gamma = 0$ , $\kappa = 0$ .....	33
Σχήμα 2.22: Διαμήκως επιταχυνόμενο όχημα κινούμενο επί οριζοντίου επιπέδου [15]....	34
Σχήμα 2.23: Πλευρικό επιταχυνόμενο όχημα κινούμενο επί οριζοντίου επιπέδου [15] ..	35
Σχήμα 2.24: Πολλαπλές διαθέσιμες θέσεις για την έδραση των βραχιόνων ελέγχου ανάρτησης διπλών ψαλιδιών επί του περιβλήματος κιβωτίου ταχυτήτων [16] .....	37
Σχήμα 2.25: Αδρανειακή φόρτιση ανηρτημένης μάζας πλευρικά επιταχυνόμενου οχήματος [16] .....	38
Σχήμα 2.26: Το στατικά απροσδιόριστο τραπέζι του Navier [17] .....	39
Σχήμα 2.27: Βαθμοί ελευθερίας τραπέζιου του Navier [17] .....	40

Σχήμα 2.28: Ισορροπία τραπεζιού Navier με διαφορετικά μήκη ποδιών [4].....	42
Σχήμα 2.29: Όχημα με εμπρόσθιο διευθυντήριο άξονα που ικανοποιεί τη συνθήκη Ackermann [15] .....	44
Σχήμα 2.30: Πραγματική και κατά Ackermann διαφορά γωνίας στροφής τροχών [19].....	44
Σχήμα 2.31: Απλοποιημένο μοντέλο δυναμικής οχήματος στο επίπεδο [1] .....	45
Σχήμα 2.32: Τροχιές οχημάτων με διαφορετικά είδη στροφικής συμπεριφοράς [18].....	47
Σχήμα 2.33: Σύστημα δυνάμεων που ασκούνται από τα ελαστικά επίσωτρα σε ένα πλευρικά επιταχυνόμενο όχημα [21].....	48
Σχήμα 2.34: Μετάβαση από μια κυκλική τροχιά σε μια δεύτερη [21].....	48
Σχήμα 2.35: Διακριτοποίηση τροχιάς οχήματος σε κυκλικά τόξα σταθερής ακτίνας [21]...	49
Σχήμα 2.36: Ροπή εκτροπής και πλευρική επιτάχυνση κατά μήκος μιας καμπής [22].....	50
Σχήμα 2.37: Διάγραμμα ροπής εκτροπής υπό σταθερή ταχύτητα, Prom Racing P20 .....	51
Σχήμα 2.38: Διάγραμμα ροπής εκτροπής υπό σταθερή ακτίνα, Prom Racing P20.....	52
Σχήμα 2.39: Απλοποιημένο μοντέλο δυναμικής οχήματος στο επίπεδο [20] .....	54
Σχήμα 2.40: Σφαιρικά έδρανα για τη σύνδεση μελών ανάρτησης [28] .....	59
Σχήμα 2.41: Ανάρτηση διπλών ψαλιδιών πίσω άξονα αγωνιστικού οχήματος χωρίς σφαιρικά έδρανα [32] .....	60
Σχήμα 2.42: Μεταβολή γωνίας κλίσης με άκαμπτο και εύκαμπτο φορέα τροχού [6].....	61
Σχήμα 2.43: Υλοποίηση στοιχείων δυσκαμψίας με κυλινδρικές δοκούς σε στρέψη .....	62
Σχήμα 2.44: Αντιστρεπτικές δοκοί σχήματος U [33], [16] .....	62
Σχήμα 2.45: Αντιστρεπτικές δοκοί σχήματος T.....	63
Σχήμα 2.46: Τυπικό ελαστικό παρέμβυσμα και σχηματική απεικόνιση αυτού [34].....	64
Σχήμα 2.47: Ελαστοκινηματική μεταβολή της γωνίας σύγκλισης λόγω διαμήκους φόρτισης του τροχού [19] .....	65
Σχήμα 2.48: Διάφορα ελαστικά παρεμβύσματα συστημάτων ανάρτησης.....	66
Σχήμα 2.49: Δομικά και λειτουργικά στοιχεία σφαιρικών παρεμβυσμάτων και βαθμοί ελευθερίας αυτών [6] .....	67
Σχήμα 2.50: Έδραση βραχίονα ελέγχου σχήματος L, εμπρόσθια ανάρτηση BMW Z3 [19] .	67
Σχήμα 2.51: Μερική εξάλειψη της ελαστοκινηματικής μεταβολής της γωνίας σύγκλισης κατά τη διαμήκη φόρτιση τροχού [19] .....	68
Σχήμα 2.52: Πειραματικές μετρήσεις χαρακτηριστικών μεγεθών συστημάτων ανάρτησης υπό κινηματική και δυναμική διέγερση [19].....	69
Σχήμα 2.53: Πειραματική διάταξη K&C της εταιρείας MTS Systems [35].....	70
Σχήμα 2.54: Πειραματική διάταξη K&C της εταιρείας Anthony Best Dynamics [36].....	71
Σχήμα 2.55: Πειραματικές διατάξεις βελτιστοποίησης χαρακτηριστικών δυσκαμψίας και απόσβεσης οχημάτων [38].....	72
Σχήμα 2.56: Πειραματικές διατάξεις για τον έλεγχο αντοχής και τη μελέτη δυναμικών ελαστοκινηματικών φαινομένων [39], [40].....	72
Σχήμα 2.57: Πειραματική διάταξη για εργαστηριακή προσομοίωση της πλήρους δυναμικής οχήματος [41].....	73
Σχήμα 2.58: Προσδιορισμός χαρακτηριστικών K&C εν κινήσει [43] .....	74

Σχήμα 2.59: Σχηματική αναπαράσταση τυπικού συστήματος πολλαπλών σωμάτων [44] .	75
Σχήμα 2.60: Απόκλιση αποτελεσμάτων προσομοίωσης με άκαμπτο και εύκαμπτο βραχίονα ελέγχου ανάρτησης [6] .....	77
Σχήμα 3.1: Μηχανισμοί με δένδροειδή δομή και απλή κλειστή κινηματική αλυσίδα με παράπλευρους κλάδους [47].....	80
Σχήμα 3.2: Συνήθειες σύνδεσμοι σε προβλήματα Κινηματικής [4] .....	81
Σχήμα 3.3: Υπερστατική και ισοστατική υλοποίηση μηχανισμού τεσσάρων μελών [4].....	82
Σχήμα 3.4: Πλεονάζοντες κινηματικοί περιορισμοί κατά την έδραση βραχίονα ελέγχου στο πλαίσιο μέσω δύο περιστροφικών συνδέσμων [4].....	83
Σχήμα 3.5: Μοντελοποίηση συστήματος ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με ελαστικά παρεμβύσματα και κινηματικούς συνδέσμους [4].....	83
Σχήμα 3.6: Μονογραμμική απεικόνιση μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [34] ....	86
Σχήμα 3.7: Ορισμός μεγεθών για τον υπολογισμό του προσανατολισμού του τροχού [34] .....	89
Σχήμα 3.8: Σχηματική απεικόνιση γεωμετρίας ανάρτησης διπλών ψαλιδιών για τον υπολογισμό χαρακτηριστικών γεωμετρικών μεγεθών [34] .....	91
Σχήμα 3.9: Διανύσματα θέσης για τον προσδιορισμό των αγνώστων συντεταγμένων σημείου [4].....	92
Σχήμα 3.10: Διάγραμμα ροής αριθμητικής επίλυσης μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων με τη μέθοδο Newton-Raphson [4] .....	94
Σχήμα 3.11: Μηχανισμός ανάρτησης διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργειας [4] .....	96
Σχήμα 3.12: Εντοπισμός του σημείου σύνδεσης του αποσβεστήρα στον ανώτερο βραχίονα ελέγχου με τη μέθοδο των τριών σημείων [4] .....	96
Σχήμα 3.13: Προσδιορισμός μεταβολής της γωνίας κλίσης και σύγκλισης κατά την κατακόρυφη μετατόπιση του τροχού [4].....	97
Σχήμα 3.14: Σύνοψη αλληλουχίας υπολογισμών για την κινηματική ανάλυση μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργειας [4].....	98
Σχήμα 3.15: Σύστημα επενέργειας μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με ράβδο ώθησης και έλξης [52].....	100
Σχήμα 3.16: Μοντελοποίηση συστήματος επενέργειας με ράβδο ώθησης για την κινηματική ανάλυση μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών [4] .....	101
Σχήμα 3.17: Υλοποίηση μηχανισμού επενέργειας για την απόζευξη της κατακόρυφης δυσκαμψίας και της δυσκαμψίας κλυδωνισμού άξονα – Mercedes AMG Project One [53] .....	102
Σχήμα 3.18: Υλοποίηση μηχανισμού επενέργειας για την απόζευξη της κατακόρυφης δυσκαμψίας και της δυσκαμψίας κλυδωνισμού άξονα – Multimatic Inc. [54] .....	103
Σχήμα 3.19: Σκελετική και διανυσματική αναπαράσταση μηχανισμού επενέργειας για την απόζευξη των δυσκαμψιών κλυδωνισμού και πρόνευσης άξονα .....	104
Σχήμα 3.20: Μεταβολή μήκους στοιχείων δυσκαμψίας-απόσβεσης κατά την περιστροφή των μοχλικών επενέργειας σε φάση .....	105

Σχήμα 3.21: Μεταβολή μήκους στοιχείων δυσκαμψίας-απόσβεσης κατά την περιστροφή των μοχλικών επενέργησης εκτός φάσης.....	105
Σχήμα 3.22: Στοιχεία δυσκαμψίας και απόσβεσης κλυδωνισμού και κατακόρυφης μετατόπισης – Multimatic Inc. [54].....	106
Σχήμα 3.23: Υλοποίηση μηχανισμού επενέργησης για την απόζευξη της κατακόρυφης δυσκαμψίας και της δυσκαμψίας κλυδωνισμού άξονα – HAWKS Racing Formula SAE....	106
Σχήμα 3.24: Εναλλακτικές υλοποιήσεις μηχανισμών επενέργησης για την απόζευξη της κατακόρυφης δυσκαμψίας και της δυσκαμψίας κλυδωνισμού άξονα [55], [56].....	107
Σχήμα 3.25: Διδιάστατη απεικόνιση τραπεζοειδούς μηχανισμού διεύθυνσης [1].....	108
Σχήμα 3.26: Σύστημα ανάρτησης διπλών ψαλιδιών – Mercedes AMG F1 [58].....	109
Σχήμα 3.27: Έδραση ράβδου ώθησης επί του φορέα του τροχού και εκτός του άξονα διεύθυνσης – BAR Honda F1 [57].....	110
Σχήμα 3.28: Μετατόπιση του σημείου επαφής ελαστικού επισώτρου-οδοστρώματος ως προς το πλαίσιο συναρτήσει της γωνίας στροφής τροχού – BAR Honda F1 [57] .....	111
Σχήμα 3.29: Έδραση ράβδου συγκράτησης τροχού επί του βραχίονα ελέγχου .....	112
Σχήμα 3.30: Υλοποίηση κατώτερου βραχίονα ελέγχου και ράβδου συγκράτησης τροχού ως ενιαίο τεμάχιο – Mercedes AMG F1 [59].....	113
Σχήμα 3.31: Σύστημα ανάρτησης με γόνατα MacPherson [4] .....	114
Σχήμα 3.32: Σύνοψη αλληλουχίας υπολογισμών για την κινηματική ανάλυση μηχανισμού ανάρτησης με γόνατα MacPherson [4].....	115
Σχήμα 3.33: Υλοποίηση συστήματος ανάρτησης πολλαπλών συνδέσμων χρησιμοποιώντας αποκλειστικά σφαιρικά έδρανα [60] .....	116
Σχήμα 3.34: Προσεγγιστικός τρόπος υπολογισμού της γωνίας κλίσης που εισάγεται λόγω κλυδωνισμού της ανηρτημένης μάζας [61] .....	119
Σχήμα 3.35: Διαμήκης συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού.....	121
Σχήμα 3.36: Εγκάρσια συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού .....	121
Σχήμα 3.37: Γωνία κλίσης συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού .....	122
Σχήμα 3.38: Γωνία σύγκλισης συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού .....	122
Σχήμα 3.39: Γωνία caster συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού .....	123
Σχήμα 3.40: Μηχανικό ίχνος συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού.....	123
Σχήμα 3.41: Γωνία βασιλικού πείρου συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού....	124
Σχήμα 3.42: Scrub radius συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού .....	124
Σχήμα 3.43: Ύψος κέντρου κλυδωνισμού συναρτήσει κατακόρυφης μετατόπισης τροχού .....	125
Σχήμα 4.1: Σχετική θέση συστημάτων αναφοράς σε σύστημα πολλαπλών σωμάτων [4]	128
Σχήμα 4.2 Επίπεδη στροφή σώματος κατά γωνία $\phi$ [62] .....	129
Σχήμα 4.3: Μη αντιμεταθετικότητα διαδοχικών πεπερασμένων στροφών [62] .....	129
Σχήμα 4.4: Αυθαίρετη στροφή ως αποτέλεσμα διαδοχικών στροφών επί τριών διαφορετικών επιπέδων [62].....	130
Σχήμα 4.5: Στροφή διανύσματος κατά γωνία $\phi$ περί του άξονα που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $n$ [62].....	133

Σχήμα 4.6: Προσανατολισμός ενός σωματόδετου συστήματος συντεταγμένων με τη μέθοδο x-point-z-point [4] .....	134
Σχήμα 4.7: Προσανατολισμός ενός βοηθητικού συστήματος συντεταγμένων με τη μέθοδο x-point-z-point [4] .....	134
Σχήμα 4.8: Γενική κίνηση απολύτως στερεού σώματος [1].....	136
Σχήμα 4.9: Ονομαστική και παραμορφωμένη κατάσταση στοιχείου σύνδεσης [62].....	137
Σχήμα 4.10: Ονομαστική και παραμορφωμένη κατάσταση στοιχείου σύνδεσης όταν η λαβή k διατηρείται ακίνητη [62] .....	138
Σχήμα 4.11: Σύνδεση φορέα τροχού και ανώτερου βραχίονα ελέγχου μέσω κυλινδρικού ελαστικού παρεμβύσματος [4] .....	139
Σχήμα 4.12: Προσανατολισμός βοηθητικού συστήματος αναφοράς κυλινδρικού ελαστικού παρεμβύσματος [4].....	140
Σχήμα 4.13: Πεπερασμένο στοιχείο τρισδιάστατης δοκού [4].....	141
Σχήμα 4.14: Διαγράμματα ελευθέρου σώματος των μελών ενός μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργειας [4].....	144
Σχήμα 4.15: Πιθανοί τρόποι σύνδεσης βραχίονα ελέγχου στο πλαίσιο οχήματος [4] .....	146
Σχήμα 4.16: Διάγραμμα ελευθέρου σώματος βραχίονα ελέγχου έπειτα από προσεγγιστική άρση της υπερστατικότητας αυτού [4].....	147
Σχήμα 4.17: Ανάρτηση διπλών ψαλιδιών άμεσης επενέργειας – Prom Racing, P20 .....	152
Σχήμα 4.18: Σχετική μετατόπιση συναρτήσε φορτίου – Aurora AM-5 & CM-5 .....	154
Σχήμα 4.19: Τρόποι αγκύρωσης σφαιρικών εδράνων μηχανισμού ανάρτησης .....	154
Σχήμα 4.20: Πειραματική διάταξη δοκιμών εφελκυσμού σφαιρικών εδράνων [74] .....	155
Σχήμα 4.21: Σχετική μετατόπιση συναρτήσε φορτίου σφαιρικών εδράνων Aurora AM-5, AM-6, AOM-6, COM-5 & COM-6 υπό παραδοχές.....	156
Σχήμα 4.22: Αντιστοίχιση προσανατολισμού σώματος σε διαφορετικά σωματόδετα συστήματα αναφοράς [4] .....	159
Σχήμα 4.23: Καμπύλη φορτίου-μετατόπισης προοδευτικού ελικοειδούς ελατηρίου μηχανισμού ανάρτησης .....	161
Σχήμα 4.24: Σχηματική απεικόνιση τυπικού αποσβεστήρα για εφαρμογές οχημάτων [75] .....	166
Σχήμα 4.25: Σχηματική απεικόνιση πρισματικού συνδέσμου [76] .....	167
Σχήμα 4.26: Μηχανισμός ανάρτησης στην αρχική κατάσταση – ABAQUS .....	173
Σχήμα 4.27: Κατακόρυφη μετατόπιση τροχού συναρτήσε της διαμήκουσ και εγκάρσιας δύναμης στο κέντρο του .....	175
Σχήμα 4.28: Γωνία κλίσεσ του τροχού συναρτήσε της εγκαρσίωσ ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του – Απολύτωσ στερεά σώματα .....	177
Σχήμα 4.29: Γωνία σύγκλισεσ του τροχού συναρτήσε της διαμήκωσ ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του – Απολύτωσ στερεά σώματα .....	177
Σχήμα 4.30: Κατώτεροσ βραχίονασ ελέγχου – ABAQUS .....	179
Σχήμα 4.31: Βραχίονεσ ελέγχου συστήματοσ ανάρτησεσ οχήματοσ γενικήσ χρήσεσ [79].	180

Σχήμα 4.32: Γωνία κλίσης του τροχού συναρτήσει της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του – Ελαστικοί βραχίονες ελέγχου .....	181
Σχήμα 4.33: Γωνία σύγκλισης του τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του – Ελαστικοί βραχίονες ελέγχου .....	181
Σχήμα 4.34: Φορέας τροχού και βραχίονες έδρασης μηχανισμού ανάρτησης στην αρχική κατάσταση – ABAQUS .....	183
Σχήμα 4.35: Υπερστοιχεία και κόμβοι που σχετίζονται με τους διατηρούμενους βαθμούς ελευθερίας αυτών .....	186
Σχήμα 4.36: Γωνία κλίσης του τροχού συναρτήσει της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του .....	188
Σχήμα 4.37: Γωνία σύγκλισης του τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του .....	188
Σχήμα 4.38: Διαμήκης μετατόπιση τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του .....	191
Σχήμα 4.39: Εγκάρσια μετατόπιση τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του .....	191
Σχήμα 4.40: Κατακόρυφη μετατόπιση τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του .....	192
Σχήμα 4.41: Γωνία κλίσης τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του .....	192
Σχήμα 4.42: Γωνία σύγκλισης τροχού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του .....	193
Σχήμα 4.43: Γωνία caster συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού .....	193
Σχήμα 4.44: Μηχανικό ίχνος συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού .....	194
Σχήμα 4.45: Γωνία βασιλικού πείρου συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού.....	194
Σχήμα 4.46: Scrub radius συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού .....	195
Σχήμα 4.47: Ύψος κέντρου κλυδωνισμού συναρτήσει της διαμήκως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού.....	195
Σχήμα 4.48: Διαμήκης μετατόπιση τροχού συναρτήσει της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του .....	196
Σχήμα 4.49: Εγκάρσια μετατόπιση τροχού συναρτήσει της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του .....	196
Σχήμα 4.50: Κατακόρυφη μετατόπιση τροχού συναρτήσει της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του .....	197
Σχήμα 4.51: Γωνία κλίσης τροχού συναρτήσει της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του .....	197



Σχήμα 4.52: Γωνία σύγκλισης τροχού συναρτήσει της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του .....	198
Σχήμα 4.53: Γωνία caster συναρτήσει της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού .....	198
Σχήμα 4.54: Μηχανικό ίχνος συναρτήσει της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού.....	199
Σχήμα 4.55: Γωνία βασιλικού πείρου συναρτήσει της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού.....	199
Σχήμα 4.56: Scrub radius συναρτήσει της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού .....	200
Σχήμα 4.57: Ύψος κέντρου κλυδωνισμού συναρτήσει της εγκαρσίως ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του τροχού .....	200
Σχήμα 4.58: Διαμήκης μετατόπιση τροχού υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του .....	201
Σχήμα 4.59: Εγκάρσια μετατόπιση τροχού υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του .....	201
Σχήμα 4.60: Κατακόρυφη μετατόπιση τροχού συναρτήσει της κατακόρυφα ασκούμενης δύναμης στο κέντρο του .....	202
Σχήμα 4.61: Μεταβολή γωνίας κλίσης τροχού υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του .....	202
Σχήμα 4.62: Μεταβολή γωνίας σύγκλισης τροχού υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του .....	203
Σχήμα 4.63: Μεταβολή γωνίας caster υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του τροχού.....	203
Σχήμα 4.64: Μεταβολή μηχανικού ίχνους υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του τροχού.....	204
Σχήμα 4.65: Μεταβολή γωνίας βασιλικού πείρου υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του τροχού .....	204
Σχήμα 4.66: Μεταβολή scrub radius υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του τροχού .....	205
Σχήμα 4.67: Μεταβολή ύψους κέντρου κλυδωνισμού υπό την άσκηση κατακόρυφης δύναμης στο κέντρο του τροχού.....	205
Σχήμα 4.68: Διαμήκης μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του .....	206
Σχήμα 4.69: Εγκάρσια μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του .....	206
Σχήμα 4.70: Κατακόρυφη μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του.....	207
Σχήμα 4.71: Γωνία κλίσης τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του .....	207



Σχήμα 4.72: Γωνία σύγκλισης τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του .....	208
Σχήμα 4.73: Γωνία caster συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του τροχού .....	208
Σχήμα 4.74: Μηχανικό ίχνος συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του τροχού .....	209
Σχήμα 4.75: Γωνία βασιλικού πείρου συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του τροχού.....	209
Σχήμα 4.76: Scrub radius συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του τροχού .....	210
Σχήμα 4.77: Ύψος κέντρου κλυδωνισμού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής ανατροπής στο κέντρο του τροχού.....	210
Σχήμα 4.78: Διαμήκης μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής στροφής στο κέντρο του .....	211
Σχήμα 4.79: Εγκάρσια μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής στροφής στο κέντρο του .....	211
Σχήμα 4.80: Κατακόρυφη μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του.....	212
Σχήμα 4.81: Γωνία κλίσης τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του .....	212
Σχήμα 4.82: Γωνία σύγκλισης τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του .....	213
Σχήμα 4.83: Γωνία caster συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του τροχού.....	213
Σχήμα 4.84: Μηχανικό ίχνος συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του τροχού.....	214
Σχήμα 4.85: Γωνία βασιλικού πείρου συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του τροχού.....	214
Σχήμα 4.86: Scrub radius συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του τροχού.....	215
Σχήμα 4.87: Ύψος κέντρου κλυδωνισμού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής πρόωσης/πέδησης στο κέντρο του τροχού .....	215
Σχήμα 4.88: Διαμήκης μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του .....	216
Σχήμα 4.89: Εγκάρσια μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του .....	216
Σχήμα 4.90: Κατακόρυφη μετατόπιση τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του .....	217
Σχήμα 4.91: Γωνία κλίσης τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του .....	217

Σχήμα 4.92: Γωνία σύγκλισης τροχού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του .....	218
Σχήμα 4.93: Γωνία caster συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του τροχού.....	218
Σχήμα 4.94: Μηχανικό ίχνος συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του τροχού.....	219
Σχήμα 4.95: Γωνία βασιλικού πείρου συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του τροχού .....	219
Σχήμα 4.96: Scrub radius συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του τροχού.....	220
Σχήμα 4.97: Ύψος κέντρου κλυδωνισμού συναρτήσει της ασκούμενης ροπής απευθυγράμμισης στο κέντρο του τροχού.....	220

## Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 2-1: Αποτελέσματα ανάλυσης στροφικής συμβιβαστότητας κατά Bundorf [20] ..	57
Πίνακας 2-2: Εύρη και ακρίβεια μετρήσεων διατάξεων K&C [19] .....	71
Πίνακας 3-1: Δέσμευση βαθμών ελευθερίας από συνήθεις κινηματικούς συνδέσμους [4] .....	82
Πίνακας 3-2: Υπολογισμός βαθμού ελευθερίας μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με ελαστικά παρεμβύσματα μεταξύ πλαισίου και βραχιόνων ελέγχου [4].....	84
Πίνακας 3-3: Υπολογισμός βαθμού ελευθερίας μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών με περιστροφικούς συνδέσμους μεταξύ πλαισίου και βραχιόνων ελέγχου [4] .....	84
Πίνακας 4-1: Αποτελέσματα στατικής ανάλυσης μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών στην ονομαστική του θέση υπό κατακόρυφη φόρτιση – Prom Racing, P20.....	150
Πίνακας 4-2: Σφαιρικά έδρανα της Aurora Bearing Company για την υλοποίηση του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης .....	153
Πίνακας 4-3: Συντεταγμένες σημείων ενδιαφέροντος μηχανισμού ανάρτησης διπλών ψαλιδιών στην ονομαστική θέση και σε πλήρη έκταση έπειτα από κινηματική ανάλυση	157
Πίνακας 4-4: Γωνίες Euler μελών μηχανισμού ανάρτησης στην αρχική κατάσταση .....	159
Πίνακας 4-5: Αρχές αδρανειακού και σωματόδετων συστημάτων αναφοράς και συντεταγμένες σημείων ενδιαφέροντος ως προς αυτές στην αρχική κατάσταση .....	160
Πίνακας 4-6: Επαλήθευση αποτελεσμάτων προσεγγιστικής στατικής ανάλυσης μηχανισμού ανάρτησης στην ονομαστική του θέση υπό στατική κατακόρυφη φόρτιση .....	176
Πίνακας 4-7: Διαστάσεις ορθογωνικών διατομών των σκελών των βραχιόνων ελέγχου .	182
Πίνακας 4-8: Διαστάσεις κυκλικής διατομής ράβδου διεύθυνσης .....	182
Πίνακας 4-9: Ευρετήριο διαγραμμάτων χαρακτηρισμού της ελαστοκινηματικής συμπεριφοράς του μελετώμενου μηχανισμού ανάρτησης .....	190

## Κατάλογος Αναφορών

- [1] R. N. Jazar, *Vehicle Dynamics, Theory and Application*, Third Edition, New York: Springer, 2017.
- [2] Wikipedia, «Leaf spring. In Wikipedia, The Free Encyclopedia,» 23 June 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Leaf\\_spring](https://en.wikipedia.org/wiki/Leaf_spring).
- [3] D. C. Barton και J. D. Fieldhouse, *Automotive Chassis Engineering*, Cham: Springer Switzerland AG, 2018.
- [4] M. Blundell και D. Harty, *The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics*, New York: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2004.
- [5] D. Schramm, M. Hiller και R. Bordini, *Vehicle Dynamics: Modelling and Simulation*, 2nd Edition, Berlin, Germany: Springer Nature, 2017.
- [6] B. Heiβing και M. Ersoy, *Chassis Handbook, Fundamentals, Driving Dynamics, Components, Mechatronics, Perspectives*, 1st Edition, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2011.
- [7] H. Van der Auweraer, T. Tamarozzi, E. Risaliti, M. Sarrazin, J. Croes, B. Forrier, F. Naets και W. Desmet, «Virtual Sensing Based on Design Engineering Simulation Models,» σε *International Conference on Structural Engineering Dynamics*, Ericeira, Portugal, 2017.
- [8] YouWheel.com, «Automobile Suspension Design 101 (Part III): Double Wishbone Suspension,» 21 January 2015. [Ηλεκτρονικό]. Available: [https://medium.com/@you\\_wheel/automobile-suspension-design-101-part-iii-double-wishbone-suspension-1edbcbe29232](https://medium.com/@you_wheel/automobile-suspension-design-101-part-iii-double-wishbone-suspension-1edbcbe29232).
- [9] Ά. Τσιαπάρας, *Ανάλυση Προσέγγισης Σχεδιασμού Συστήματος Ανάρτησης Πρωτότυπου Αγωνιστικού Οχήματος*, Διπλωματική Εργασία, Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2016.
- [10] W. F. Milliken και D. L. Milliken, *Race Car Vehicle Dynamics*, Warrendale: SAE International, 1995.
- [11] FKA - Forschungsgesellschaft Kraftfahrwesen MbH Aachen, «Cornering & Traction Test Rig MTS Flat-Trac IV CT plus,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.fka.de/en/testing/chassis/112-cornering-traction-test-rig-mts-flat-trac-iv-ct-plus.html>.

- [12] Calspan, «Tire Performance Testing,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://calspan.com/automotive/tire-performance-testing>.
- [13] H. B. Pacejka, *Tire and Vehicle Dynamics*, Third Edition, Delft: Butterworth-Heinemann, 2012.
- [14] M. Furlan, «MFeval,» MATLAB Central File Exchange, 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/63618-mfeval>.
- [15] R. N. Jazar, *Advanced Vehicle Dynamics*, Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2019.
- [16] R. Santos, «A discussion on steady-state lateral weight transfer and how to use it in setup,» *Racing Car Dynamics*, 9 June 2015. [Ηλεκτρονικό]. Available: <http://racingcardynamics.com/weight-transfer/>.
- [17] S. N. Patnaik, D. A. Hopkins και G. R. Halford, *Integrated Force Method Solution to Indeterminate Structural Mechanics Problems*, Glenn Research Center: National Aeronautics and Space Administration, 2004.
- [18] J. Y. Wong, *Theory of Ground Vehicles*, Ottawa, Canada: John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [19] J. Reimpell, H. Stoll και J. Betzler, *The Automotive Chassis: Engineering Principles*, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001.
- [20] J. C. Dixon, «Linear and non-linear steady state vehicle handling,» *Proceedings of the Institution of Automobile Engineers*, 29 February 1988.
- [21] C. Rouelle, «Getting to grips with your yaw moments,» *Racecar Engineering*, 11 May 2017.
- [22] C. Rouelle, «Slide Rules: analysing an oversteering car,» *Racecar Engineering*, 20 July 2017.
- [23] C. Rouelle, «Getting more from your yaw diagrams,» *Racecar Engineering*, 20 September 2017.
- [24] C. Rouelle, «The four secrets for chassis happiness,» *Racecar Engineering*, 20 November 2017.
- [25] M. Olley, «National Influences on American Passenger Car Design,» *Proceedings of the Institution of Automobile Engineers*, 1937-38.

- [26] T. R. Bundorf, «The Influence of Vehicle Design Parameters on Characteristic Speed and Understeer,» *SAE Transactions*, 1968.
- [27] R. T. Bundorf και R. L. Leffert, «The Cornering Compliance Concept for Description of Vehicle Directional Control Properties,» *SAE Transactions*, 1976.
- [28] Aurora Bearing Company, «Commercial/Industrial Rod Ends & Spherical Bearings,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://cad.aurorabearing.com/category/commercial-industrial-rod-ends-spherical-bearings>.
- [29] P. Clarke, «Pat's Seven Deadly Sins of FS Design,» Formula Student Germany, International Design Competition, 2 November 2012. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.formulastudent.de/pr/news/details/article/pats-seven-deadly-sins-of-fs-design/>.
- [30] A. Staniforth, *Competition car suspension: Design, Construction, Tuning*, Sparkford UK: Haynes Publishing, 1988.
- [31] P. Clarke, «Chassis Stiffness and Compliance,» Formula Student Germany, International Design Competition, 2 December 2010. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.formulastudent.de/pr/news/details/article/chassis-stiffness-and-compliance/>.
- [32] MAX F1, «Suspension,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://maxf1.net/en/suspension/>.
- [33] CarThrottle, «How Do Anti-Roll Bars Actually Work?,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.carthrottle.com/post/how-do-anti-roll-bars-actually-work/>.
- [34] J. Gao και F. Wu, «Analysis and optimization of the vehicle handling stability considering suspension kinematics and compliance characteristics,» *Advances in Mechanical Engineering*, 7 May 2021.
- [35] MTS Systems, «Kinematic & Compliance (K&C) Deflection Measurement Systems,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.mts.com/en/products/automotive/full-vehicle-test-systems/kinematic-compliance-systems>.
- [36] Anthony Best Dynamics, «SPMM 5000e,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.abdynamics.com/en/products/measurement-systems/kinematics-and-compliance/spmm-5000e>.
- [37] Morse Measurements LLC, «7 Post Shaker Rig vs. K&C Rig,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.morsemeasurements.com/kc-vs-shaker-rig/>.

- [38] MTS Systems, «Model 320 Tire-coupled Road Simulators,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.mts.com/en/products/automotive/full-vehicle-test-systems/model-320-tire-coupled-road-simulator>.
- [39] MTS Systems, «Model 329 Spindle-Coupled Road Simulators,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.mts.com/en/products/automotive/full-vehicle-test-systems/model-329-spindle-coupled-road-simulator>.
- [40] MTS Systems, «Dynamic Kinematic & Compliance (K&C) Systems,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.mts.com/en/products/automotive/full-vehicle-test-systems/dynamic-kinematic-compliance>.
- [41] MTS Systems, «Flat-Trac Handling Roadway,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.mts.com/en/products/automotive/full-vehicle-test-systems/flat-trac-handling-roadway>.
- [42] C. Liu, C. Deubel, J. Zhou, A. Gerhard, J. Kubenz και G. Prokop , «Experimental Analysis of Suspension Kinematics and Compliance Characteristics of Sensitivities and Combined Load Cases with the Suspension Motion Simulator,» *SAE International*, January 2019.
- [43] OptimumG, «Intelligent Testing to Advance Vehicle Performance,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://optimumg.com/intelligent-testing-to-advance-vehicle-performance/>.
- [44] P. Flores, J. Ambrósio, J. Pimenta Claro και H. M. Lankarani, Kinematics and Dynamics of Multibody Systems with Imperfect Joints: Models and Case Studies, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [45] E. K. Brenan, S. L. Campbell και L. R. Petzold, Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations, North-Holland, New York: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.
- [46] F. P. Beer, R. E. Johnston, P. J. Cornwell και P. B. Self, Δυναμική: Διανυσματική Μηχανική, 9η έκδοση, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2017.
- [47] J. Wittenburg, Kinematics: Theory and Applications, Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2016.
- [48] Math24, «Precalculus Trigonometry: Linear Trigonometric Equations,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://math24.net/linear-trigonometric-equations.html>.



- [49] Α. Φελλούρης, Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Αθήνα: Εκδόσεις Τσιότρα, 2017.
- [50] Wolfram MathWorld, «Rodrigues' Rotation Formula,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://mathworld.wolfram.com/RodriguesRotationFormula.html>.
- [51] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling και B. P. Flannery, Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, Third Edition, New York: Cambridge University Press, 2007.
- [52] A. Jena, «Analysis | The main technical changes for 2022,» 22 February 2022. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.gpblog.com/en/news/104879/analysis-the-main-technical-changes-for-2022.html>.
- [53] Χρήστος Αποστολόπουλος - 4 Τροχοί, 22 Αύγουστος 2017. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.4trochoi.gr/epikairoita/premiera-sti-frankfoyrti-gia-to-project-one-tis-mercedes-amg/>.
- [54] Multimatic Inc., «Multimatic Announces Formula SAE / Formula Student DSSV™ Damper Program,» June 2021. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.multimatic.com/press/multimatic-announces-formula-sae-formula-student-dssv-damper-program>.
- [55] M. Pruett, «IMSA: Suspension changes under consideration for Daytona Prototypes,» 5 February 2014. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://racer.com/2014/02/05/imsa-suspension-changes-under-consideration-for-dps/>.
- [56] J. Tons, «2008 Peugeot 908 HDi FAP Le Mans Prototype,» 14 February 2014. [Ηλεκτρονικό]. Available: <http://buildraceparty.com/2008-peugeot-908-hdi-fap-le-mans-prototype/>.
- [57] H. Shibue, K. Taneda και Y. Kitaki, «Technologies for Enhancement of Dynamic Performance of Formula One Vehicle,» *Honda R&D Technical Review 2009 F1 Special (The Third Era Activities)*, 2009.
- [58] A. Brilliant, «Mystery or Magic? The Science Behind Porpoising In F1 Today,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://motoiq.com/mystery-or-magic-the-science-behind-porpoising-in-f1-today/4/>.
- [59] M. Hughes και G. Piola, «TECH TUESDAY: How the Mercedes W10 devours slow-speed corners,» 11 June 2019. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.formula1.com/en/latest/article.tech-tuesday-how-the-mercedes-w10-devours-slow-speed-corners.4YyPEfVVDFYoU2j2qbg1o.html>.

- [60] W. Lamers, Development and analysis of a multi-link suspension for racing applications, Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2008.
- [61] M. Deffenbaugh, «Double Wishbone Suspensions,» [Ηλεκτρονικό]. Available: [http://mikedeff.in/double\\_wishbone.htm](http://mikedeff.in/double_wishbone.htm).
- [62] O. A. Bauchau, Flexible Multibody Dynamics, Heidelberg London New York: Springer Dordrecht, 2011.
- [63] Wolfram-Mathworld, «Infinitesimal Rotation,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://mathworld.wolfram.com/InfinitesimalRotation.html>.
- [64] L. Euler, «De motu corporum circa pumctum fixum mobilium,» *Opera Mechanica et Astronomica*, 9 (*Series Secunda*), pp. 413-441, 1776.
- [65] A. B. Bhat και A. Naik, Suspension Steady-State Kinematics and Compliance Analysis Based on Linear Bushing Model, Master's thesis in Automotive Engineering, Gothenburg, Sweden: Department of Mechanics and Maritime Sciences, Chalmers University of Technology, 2020.
- [66] L. Euler, «Formulae generales pro translatione quacunq̄ue corporum rigidorum,» *Novi Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, pp. 189-207, 1775.
- [67] SIMULIA, «Euler-Bernoulli (slender) beams,» σε *Abaqus 6.11 Analysis User's Manual, Volume IV: Elements*, Providence, RI, USA, Dassault Systèmes, 2011, p. 287.
- [68] Χ. Γ. Προβατίδης, Πεπερασμένα Στοιχεία στην Ανάλυση Κατασκευών, 2η Έκδοση, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2017.
- [69] SIMULIA, «Timoshenko (shear flexible) beams,» σε *Abaqus 6.11 Analysis User's Manual, Volume IV: Elements*, Providence, RI, USA, Dassault Systèmes, 2011, p. 288.
- [70] A. Patra, «Trusses and Transformations,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.eng.buffalo.edu/~abani/fem/node6.html>.
- [71] SIMULIA, «Flexible joint element,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEELMRefMap/simaelm-c-joint.htm>.
- [72] Β. Γ. Βαδαλούκα και Γ. Α. Παπαδόπουλος, Τεχνική Μηχανική, Αθήνα: Εκδόσεις ΝΚ, 2017.

- [73] P. E. Nikravesh, *Planar Multibody Dynamics, Formulation, Programming with MATLAB®, and Applications*, Second Edition, New York: CRC Press Taylor & Francis Group, 2018.
- [74] M. S. Zipfel και A. R. George, «Compliance and Friction in Elastic and Mechanical Joints of Race Car Suspensions,» *SAE Technical Paper 2006-01-3650*, 2006.
- [75] Bilstein ThyssenKrupp, «A look inside the all new BILSTEIN ESCV for the Ford Bronco,» 10 June 2021. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://offroad.bilstein.com/en/a-look-inside-the-all-new-bilstein-escv-for-the-ford-bronco/>.
- [76] SIMULIA, «Connection Type TRANSLATOR,» σε *Abaqus 6.11 Analysis Users's Manual, Volume IV: Elements*, Providence, RI, USA, Dassault Systèmes, 2011, p. 643.
- [77] P. E. Nikravesh, *Computer-aided analysis of mechanical systems*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.
- [78] Dassault Systèmes, «SIMPACT: Multibody Simulation and Working with SIMULIA,» October 2015. [Ηλεκτρονικό]. Available: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/resources/simpack-multibody-simulation-and-working-with-simulia/>.
- [79] DYNATUNE XL, «10 “EASY” STEPS TO HAPPY (ELASTO-) KINEMATICS,» [Ηλεκτρονικό]. Available: <http://www.dynatune-xl.com/>.
- [80] J. B. Rutzmoser, *Model Order Reduction for Nonlinear Structural Dynamics: Simulation-free Approaches*, München: Technischen Universität München, 2017.
- [81] ANSYS, Inc., «15.6 Substructuring Analysis,» [Ηλεκτρονικό]. Available: [https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans\\_help\\_v182/ans\\_thry/thy\\_anproc6.html](https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_thry/thy_anproc6.html).
- [82] SIMULIA, «Large-rotation substructures,» σε *Abaqus 6.11 Theory Manual*, Providence, RI, USA, Dassault Systèmes, 2011, p. 346.
- [83] SIMULIA, «Using substructures in geometrically nonlinear stress/displacement analysis,» σε *Abaqus 6.12 Analysis User's Manual*, Providence, RI, USA, Dassault Systèmes, 2012, p. 679.