



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Διπλωματική Εργασία

Ελαστικές και Μηχανικές Ιδιότητες του Ανθρώπινου Μεσολοβίου

Σέργιος Φράσταλης

Επιβλέπων:

δρ. Δημήτρης Ευταξιοπούλος

Επίκουρος Καθηγητής

Αθήνα 2022

Περίληψη

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method-FEM) μπορεί να αποτελεί μία πολύ αποτελεσματική μέθοδο για την περιγραφή εμβιομηχανικών ιδιοτήτων των μαλακών ιστών, των βιολογικών οργανισμών. Η μέθοδος απεικόνισης του τανυστή διάχυσης (Diffusion Tensor Imaging - DTI) και η δεσμιδογραφία (Tractography) αποτελούν νευροαπεικονιστικές τεχνικές μαγνητικού συντονισμού που επιτρέπουν την περιγραφή της μυελοαρχιτεκτονικής του νευρικού ιστού και τη δυνατότητα ποσοτικών αξιολογήσεων της λευκής ουσίας και αποτελεί την πρώτη μη καταστροφική μέθοδο μελέτης της ανατομίας των ινών της λευκής ουσίας[1]. Αλλαγές στη δομή των ιστών που απεικονίζονται, μπορούν να αποτελούν προγνωστικό μέσο νευρολογικών και ψυχιατρικών παθήσεων, σύμφωνα με τις σύγχρονες θέσεις των νευρολογικών επιστημών. Ένας μεγάλος αριθμός μαθηματικών μοντέλων για την εμβιομηχανική του εγκεφάλου, έχει αναπτυχθεί με στόχο την προσομοίωση κρανιοεγκεφαλικών κακώσεων, καθώς και με στόχο τον καλύτερο σχεδιασμό προστατευτικών μέσων (κράνη κλπ). Λόγω έλλειψης ποσοτικών δεδομένων συσχετιζόμενων με τις συνοριακές συνθήκες κρανίου και εγκεφάλου, καθώς και παραμορφώσεων λευκής ουσίας, οι προβλέψεις αυτών των μοντέλων παραμένουν αβέβαιες. Τα θεωρητικά αποτελέσματα αυτής της εργασίας προσφέρουν μια βασική κατανόηση των εσωτερικών μηχανικών αντιδράσεων, ενός τμήματος του εγκεφάλου (μεσολόβιο) που υπόκειται σε συγκεκριμένα φορτία. Παρουσιάζεται μια προσεγγιστική μοντελοποίηση του μεσολοβίου χρησιμοποιώντας γεωμετρικές και ελαστικές ιδιότητες και παραμέτρους συνοριακών συνθηκών.

Abstract

The finite element method (FEM) can be an extremely effective method for describing the biomechanical properties of soft tissue in biological organisms. Diffusion tensor imaging (DTI) and Tractography are neuroimaging techniques of magnetic resonance, that can describe the neural architecture of the brain, offer a quantitative analysis of white matter and of its fibers, and is the first non-invasive method that can depict the anatomy of white matter fibers. According to modern neuroscience the analysis of changes in the structure of these fibers, could potentially provide prognostic tools for neurological and psychiatric disorders. A great number of models for the biomechanics of the brain has been developed to simulate traumatic brain injury and for the purpose of designing better safety equipment (helmets etc.) . However, due to a lack of quantitative data, regarding the boundary conditions of the skull and the brain, as well as data regarding white matter deformation, the predictive power of these models remains uncertain. The theoretical results of this thesis provide a basic understanding of the mechanics reactions of a certain part of the brain (corpus callosum) under the effect of certain loads. We present a modeling approximation of the corpus callosum, with the employment of geometric and elastic properties, as well as boundary conditions.

*Στον Δ. Αναστασόπουλο, τον Κ. Μπατσαλιά, τον Δ. Δικαίο και στα ιδρύματα Προμηθέας, Άγιος
Χαράλαμπος και ΚΕΘΕΑ Αριάδνη*

για τη βοήθεια τους όλα αυτά τα χρόνια

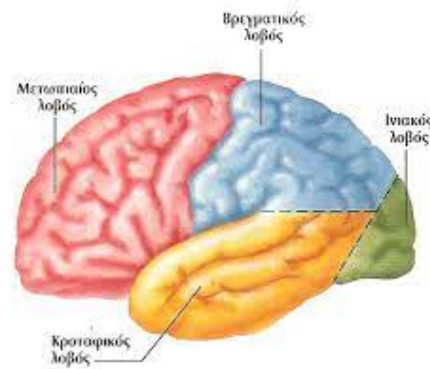
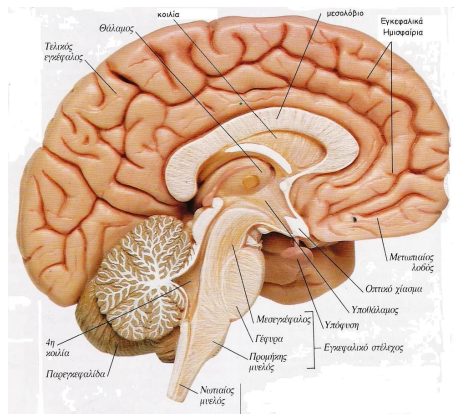
Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	7
3	Λογισμικό και το δοκίμιο προς ανάλυση	22
4	Αποτελέσματα και Ανάλυση	37
5	Συμπεράσματα	46
	A □ Μαθηματικές Σχέσεις	53
	B □ Σύντομο βιογραφικό σημείωμα	65

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σε αυτήν την εισαγωγή παρατίθεται η γενική εμβιομηχανική θεωρία μαλακών ιστών που χρησιμοποιείται σε αυτήν την εργασία, και οι γενικές αρχές της DTI και της Δεσμιδογραφίας . Οι υπολογιστικές προσομοιώσεις εγκεφαλικών παραμορφώσεων χρειάζονται μια ακριβή κατανόηση των ιδιοτήτων των ιστών της λευκής ουσίας και των συνοριακών συνθηκών τους. Αυτό το κεφάλαιο επίσης συνοψίζει και συγκρίνει σύγχρονες μελέτες των εμβιομηχανικών ιδιοτήτων του εγκεφαλικού ιστού. Επιπρόσθετα , συζητούνται πρόσφατες μέθοδοι έρευνας των εμβιομηχανικών ιδιοτήτων του λευκού ιστού και των συνοριακών συνθηκών του εγκεφάλου ,όπως μηχανικές μέθοδοι και μαγνητικές τομογραφίες. Το κεφάλαιο αναφέρεται στη σημασία της εμβιομηχανικής μελέτης του εγκεφάλου στα πεδία της μελέτης κρανιοεγκεφαλικών κακώσεων, τη νευροχειρουργική , την ανάπτυξη του εγκεφάλου, και την ψυχιατρική. Το κεφάλαιο καταλήγει με τους συγκεκριμένους στόχους της εργασίας και μία σύνοψη της οργάνωσής της.



Σχήμα 1.1: Μερικά βασικά ανατομικά τμήματα του εγκεφάλου(αριστερά) και η ανατομία των λοβών(δεξιά)

Η ανθρώπινη κεφαλή αποτελείται από το κρανίο που συνιστά ένα οστικό κέλυφος και τον εγκεφαλικό μαλακό ιστό, που περιβάλλεται από το κρανίο. Ο εγκέφαλος αποτελείται από δύο ημισφαίρια (τα οποία χωρίζονται μεταξύ τους από την επιμήκη σχισμή), την παρεγκεφαλίδα και το εγκεφαλικό στέλεχος. Τα δύο ημισφαίρια διαιρούνται στον μετωπιαίο, τον βρεγματικό, τον κροταφικό και τον ινιακό λοβό. Το μεσολόβιο είναι ένας σχηματισμός ιστών λευκής ουσίας, που συνδέει τα δύο ημισφαίρια, και τα κενά ανάμεσα στους ιστούς καλύπτονται από εγκεφαλονωτιαίο υγρό. Ο εγκεφαλικός ιστός χωρίζεται στη φαιά ουσία, η οποία αποτελείται κυρίως από νευρικά κύτταρα είτε διάσπαρτα ή σε πυρήνες, αγγεία, και δεν έχει εμμύελους (περιβαλλόμενους από μυελίνη) άξονες νευρώνων, και τη λευκή ουσία, η οποία αποτελείται από τη νευρογλοία, αγγεία, και έχει εμμύελους και λίγες αμύελους νευρικές ίνες. Ο εγκέφαλος καλύπτεται, και προστατεύεται από τρία στρώματα ιστού, τη χοριοειδή, την αραχνοειδή και τη σκληρά μήνιγγα, ενώ τα κενά γεμίζονται με εγκεφαλονωτιαίο υγρό [2].

1.1 Εμβιομηχανικές μελέτες των ιδιοτήτων του εγκεφαλικού ιστού

Η έρευνα των μηχανικών ιδιοτήτων του εγκεφάλου ξεκίνησε πριν από πενήντα χρόνια [3,4], και υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός πειραμάτων *in vivo* και *in vitro* που έχει εμβαθύνει την κα-

τανόηση της μηχανικής συμπεριφοράς του εγκεφαλικού ιστού. Τα πειράματα αντοχής υλικών που έχουν γίνει πιο συχνά, είναι πειράματα εφελκυσμού, διάτμησης και θλίψης/σκληρότητας. Οι περισσότερες μελέτες αντιμετωπίζουν τον εγκεφαλικό ιστό ως ένα ισότροπο σώμα. Τα αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων ποικίλουν ανάλογα με τον εάν η λευκή ουσία παρουσιάζει ανισότροπες ιδιότητες. Παρόλο που οι περισσότερες αναλύσεις αντιμετωπίζουν τη φαιά και λευκή ουσία ξεχωριστά, οι υπολογισμοί των ελαστικών σταθερών και της λευκής και της φαιάς ουσίας ποικίλουν. Επίσης, οι υπολογισμοί ελαστικών σταθερών παρουσιάζουν εν γένει διαφορές για το ίδιο δοκίμιο, στην ίδια περιοχή, πιθανόν λόγω του φάσματος συχνοτήτων, και των πειραματικών συνθηκών. Όλα τα πειράματα διάτμησης και εφελκυσμού έγιναν *in vitro*, επειδή το δοκίμιο αφαιρέθηκε από το δότη και κόπηκε σε συγκεκριμένο σχήμα πριν το πείραμα [5-7]. Τα πειράματα σκληρότητας όμως είναι εφικτά και *in vivo* μέσω της βύθισης ενός κυλινδρικού μεταλλικού σώματος στον εγκέφαλο, μέσα από μία εσοχή στο κρανίο [8,9].

1.2 In Vivo μετρήσεις μέσω μαγνητικής τομογραφίας (MRI)

Παρόλο που τα πειράματα αντοχής υλικών δίνουν μία άμεση μέθοδο μέτρησης των ιδιοτήτων του εγκεφαλικού ιστού, λίγα έχουν γίνει *in vivo* [5-7]. Οι μέθοδοι απεικόνισης μέσω μαγνητικής τομογραφίας αποτελούν έναν χρήσιμο τρόπο για να εκτιμηθούν και οι ιδιότητες του ιστού, αλλά και οι συνοριακές του συνθήκες *in vivo*. Οι μετρήσεις μετατοπίσεων ιστών *in vivo* μέσω μαγνητικής τομογραφίας (MR tagging) προσφέρει ένα εργαλείο για την εκτίμηση των συνοριακών συνθηκών ενός μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων του εγκεφαλικού ιστού. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε πρώτα για τον καρδιακό μυ *in vivo* και βασίζεται στο ότι όταν αλλάζει η τοπική μαγνήτιση ενός υλικού, αυτό διατηρεί την αλλαγμένη μαγνήτιση καθώς κινείται [10,11]. Η μέτρηση των μηχανικών ιδιοτήτων του εγκεφαλικού ιστού, γίνεται ευρέως με χρήση τη μαγνητικής ελαστογραφίας (MR elastography -MRE) [12,13]. Η MRE χρησιμοποιείται για τους ανθρώπινους [14,15] και ζωικούς [16-18] εγκεφάλους, για το ήπαρ [19-21], το στήθος [22,23],

την καρδιά [24] , τον προστάτη [25,26] και για τους μυς [27].

1.3 Η σημασία της εμβιομηχανικής του εγκεφαλικού ιστού

Μία πλήρης κατανόηση των μηχανικών ιδιοτήτων του εγκεφαλικού ιστού, απαιτείται έτσι ώστε να εξακριβωθεί η σύνδεση ανάμεσα στις μηχανικές αντιδράσεις του ιστού σε συγκεκριμένα φορτία, και της ζημιάς που υφίσταται βάσει πειραματικών δεδομένων. Επιπρόσθετα, ακριβείς πληροφορίες για αυτές τις ιδιότητες, θα βοηθήσουν στην εφαρμογή της ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων για μοντέλα του εγκεφαλικού ιστού. Οι πληροφορίες αυτές βρίσκουν εφαρμογή σε φαινόμενα κρανιοεγκεφαλικών κακώσεων των οποίων οι μηχανισμοί παραμένουν αβέβαιοι και παράγοντες όπως κατώφλια τραυματισμού και οι συνθήκες υπό τις οποίες πραγματοποιείται μια κρανιοεγκεφαλική κάκωση, παραμένουν αντικείμενο σύγχρονης έρευνας [28,29]. Εμβιομηχανικά δεδομένα *in vivo* και *in vitro* θα είναι χρήσιμα για την καλύτερη κατανόηση των μηχανισμών και της μοντελοποίησης κρανιοεγκεφαλικών κακώσεων.

Η μηχανική συμπεριφορά του εγκεφαλικού ιστού θα αποτελέσει ένα πολύ σημαντικό εύρημα για τη νευροχειρουργική. Για παράδειγμα , στα νευροχειρουργεία, μπορεί να γίνει μερικό μάζεμα ενός τμήματος του ιστού με στόχο να υπάρξει πιο καθαρή εικόνα του τμήματος που πρέπει να χειρουργηθεί. Οι ελκτικές δυνάμεις που θα ασκηθούν όμως , μπορεί να προκαλέσουν παραμορφώσεις και νευρολογική βλάβη. Επιπλέον, οι νευροάξονες, καθώς συνδέουν διαφορετικά μέρη του εγκεφάλου, πρέπει να προστατεύονται κατά τη διάρκεια ενός χειρουργείου. Ως εκ τούτου, μία ακριβής προσομοίωση που θα προβλέπει τις ασκούμενες τάσεις από της νευροχειρουργικές επεμβάσεις στον ιστό θα έχει μεγάλη αξία [30,31]. Δομικές αλλαγές έχουν επίσης παρατηρηθεί σε έρευνες που συνέκριναν τομογραφίες DTI αθλητών, σε αθλήματα στα οποία οι κρανιοεγκεφαλικές κακώσεις είναι συνήθεις (πάλη κλπ), όπου διασείσεις συνέβησαν, χωρίς όμως να έχουν αναφερθεί από συνήθεις μεθόδους διάγνωσης. Τα δεδομένα υποστηρίζουν πως δομικές αλλαγές στους ιστούς μπορούν να συμβούν λόγω κρούσεων και επανειλημμένης φόρ-

τισης , αλλά τα εμβιομηχανικά χαρακτηριστικά των χτυπημάτων που οδήγησαν σε αυτές τις παραμορφώσεις δεν έχουν εξακριβωθεί [29,32].

Στον τομέα της ψυχιατρικής , με χρήση της DTI , υπάρχουν ευρήματα που υποστηρίζουν ανωμαλίες διάχυσης στην αγκιστροειδή δεσμίδα, τον μεγαλύτερο νευροάξονα που συνδέει τον εμπρόσθιο και κροταφικό λοβό σε ασθενείς που έχουν διαγνωσθεί με σχιζοφρένεια. Επίσης , υπάρχουν προβλέψεις , πως οι συνδέσεις ανάμεσα στα δύο ημισφαίρια θα παρουσιάσουν ανωμαλίες σε ασθενείς με σχιζοφρένεια, και πως οι συνδέσεις μεταξύ των ημισφαιρίων μέσω του μεσολοβίου θα είναι πιο πυκνές για τους ίδιους ασθενείς. Εφαρμογές επίσης έχουν βρεθεί για την επιληψία , και για τη σύνδεση της με ανωμαλίες στη μικροδομή λευκής ουσίας κοντά στο επιληπτικό κέντρο. Μελέτες επίσης γίνονται σε ασθενείς με διπολική διαταραχή, σύνδρομο Di George και σύνδρομο William [33-36].

1.4 Στόχοι της εργασίας

- ▶ Εύρεση των σχέσεων τάσης παραμόρφωσης που περιγράφουν το τμήμα του μεσολοβίου
- ▶ Διερεύνηση του πεδίου μετατοπίσεων του μεσολοβίου, για συγκεκριμένες τάσεις.
- ▶ Διερεύνηση των ανισοτροπικών ιδιοτήτων του μεσολοβίου ιστού.

1.5 Οργάνωση της εργασίας

Η εργασία ακολουθεί την επικείμενη σειρά παρουσίασης:

Το Κεφάλαιο 2 παρουσιάζει το θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας. Έπειτα από μια γενική

εισαγωγή στις βασικές αρχές, δίνεται έμφαση στις ιδιότητες ενός εγκάρσιως ισοτρόπου υλικού. Συζητούνται οι καταστατικές εξισώσεις για μικρές και μεγάλες παραμορφώσεις, οι οποίες είναι ικανές να περιγράψουν την ανισοτροπία στη λευκή ουσία. Επίσης, παρουσιάζονται βασικές αρχές της γραμμικής βισκοελαστικότητας και της μετάδοσης κυμάτων σε μαλακούς ιστούς. Τέλος, θα αναφερθούν οι βασικές αρχές της μεθόδου DTI και της δεσμιδογραφίας.

Το Κεφάλαιο 3 θα παρουσιάσει την αριθμητική ανάλυση που χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση των παραμορφώσεων του μεσολοβίου, υπό συγκεκριμένα φορτία με χρήση, και τα αποτελέσματα που υπολογίζονται

Κεφάλαιο 2

Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Σε αυτό το κεφάλαιο διατυπώνονται τα θεωρητικά θεμέλια για την υπόλοιπη εργασία. Αρχικά θα παρουσιαστούν βασικά στοιχεία της θεωρίας του συνεχούς μέσου. Στη συνέχεια, παρατίθενται οι καταστατικές σχέσεις για υπερελαστικά μέσα και για ένα εγκάρσια ισότροπο υλικό. Επίσης προτείνεται μία καταστατική σχέση για την περιγραφή της ανισοτροπίας μαλακού ιστού για διάτμηση και εφελκυσμό [37].

2.1 Εισαγωγή

Οι καταστατικές εξισώσεις έχουν θεμελιώδη σημασία στη μηχανική μοντελοποίηση των μαλακών ιστών. Μία κατάλληλη καταστατική σχέση διατυπώνει τις παραμορφώσεις ενός ιστού δοσμένου ενός φορτίου, και κατά συνέπεια μπορεί να προσφέρει μία καλύτερη κατανόηση των μηχανισμών φθοράς των μαλακών ιστών. Οι προσεγγίσεις για την μοντελοποίηση των βιολογικών ιστών μπορεί να κατηγοριοποιηθεί στους δομικούς και τους φαινομενολογικούς τύπους. Η δομική προσέγγιση βασίζεται στην ρητή περιγραφή της δομής και σύστασης του ιστού, ενώ η φαινομενολογική αναφέρεται στη γενικότερη συμπεριφορά του ιστού. Σε αυτή την εργασία, χρησιμοποιείται ένας συνδυασμός αυτών των προσεγγίσεων.

Τα μοντέλα της μηχανικής του συνεχούς μέσου έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως για την περιγραφή των μαλακών βιολογικών ιστών. Βρίσκουν χρήση στη μελέτη των ιστών του αρτηριακού τοιχώματος, του μυοκαρδίου, και του εγκεφαλικού ιστού. Η θεωρία της μηχανικής συνεχούς μέσου μπορεί να περιγράψει και μικρές και μεγάλες παραμορφώσεις, και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για δομικές, και για φαινομενολογικές καταστατικές εξισώσεις.

Ο εγκεφαλικός ιστός είναι έντονα ετερογενής, καθώς αποτελείται και από λευκή και από φαιά ουσία, και κατά συνέπεια οι καταστατικές εξισώσεις για τη λευκή και τη φαιά ουσία πρέπει να είναι διαφορετικές. Για κάποια μικρά ζώα, όπως ποντίκια και αρουραίους, όπου μόνο ένα μικρό τμήμα του εγκεφάλου αποτελείται από λευκή ουσία, γίνεται να χρησιμοποιηθεί ένα ομοιογενές μοντέλο για ολόκληρο τον εγκέφαλο. Η λευκή ουσία, η οποία αποτελείται από ευθυγραμμισμένους νευροάξονες, θεωρείται πως είναι μηχανικά ανισότροπη, ενώ η φαιά ουσία θεωρείται πως είναι μηχανικά ισότροπη. Κάποια σύγχρονα ανισότροπα μοντέλα για τη λευκή ουσία βασίζονται στην αρχή της υπερελαστικότητας, στην οποία μία συγκεκριμένη συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας τάσης χρησιμοποιείται έτσι ώστε να εξακριβωθεί η καταστατική εξίσωση. Καθώς η λευκή ουσία ενέχει κατά κόρον ευθυγραμμισμένους νευροάξονες, συχνά υιοθετούνται μοντέλα γραμμικής ελαστικότητας, βισκοελαστικότητας, και εγκαρσώς ισότροπης ελαστικότητας.

Η θεωρία στα μοντέλα των εγκαρσώς ισότροπων υλικών θεμελιώθηκε κυρίως από τον Spencer. Εισήγαγε μοντέλα για μικρές και μεγάλες παραμορφώσεις, κάνοντας χρήση της θεωρίας της γραμμικής ελαστικότητας και της υπερελαστικότητας αντίστοιχα. Τα μοντέλα αυτά υιοθετήθηκαν ή μιμήθηκαν ευρέως από τους μεταγενέστερους ερευνητές. Οι περισσότερες συναρτήσεις πυκνότητας ενέργειας τάσης εμπεριέχουν ψευδο-αναλλοιώτες που προτάθηκαν από τον Spencer, και έχουν εφαρμοσθεί επιτυχώς στο μυοκάρδιο, το εγκεφαλικό στέλεχος και τη λευκή ουσία.

Το κεφάλαιο θα παρουσιάσει πρώτα τη θεωρία των μοντέλων για εγκαρσώς ισότροπο υλικό. Ο εγκεφαλικός ιστός όμως αποτελεί βισκοελαστικό υλικό. Ο χαρακτηρισμός των βισκοε-

λαστικών ιδιοτήτων του εγκεφαλικού ιστού ξεκίνησε στα πολύ νεαρά στάδια της μελέτης της μηχανικής του εγκεφάλου. Μερικά από τα σύγχρονα βισκοελαστικά μοντέλα είναι οι σειρές Prony και το Κλασματικό Μοντέλο Zener. Ένας γενικός χαρακτηρισμός των ανισότροπων, βισκοελαστικών, και υπερελαστικών ιδιοτήτων του εγκεφαλικού ιστού απαιτεί ένα μεγάλο αριθμό πειραματικών δεδομένων και προσομοιώσεων .

Το κεφάλαιο προσφέρει μια εισαγωγή στις βασικές υπερελαστικές και βισκοελαστικές θεωρίες στο πλαίσιο της μοντελοποίησης το εγκεφαλικού ιστού. Παραδίδονται οι σχέσεις ανάμεσα στη συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας τάσης και στις εξισώσεις του συμβατού, ενώ προτείνονται και οι κατάλληλες συναρτήσεις αυτής της ενέργειας.

2.2 Μηχανική των παραμορφώσεων

Στη μηχανική του συνεχούς μέσου , η παραμόρφωση ενός υλικού , ορίζεται ως ο μετασχηματισμός ενός αρχικού (απαραμόρφωτου) σχηματισμού αναφοράς Ω_0 , σε έναν νέο παραμορφωμένο σχηματισμό Ω . Η βαθμίδα παραμόρφωσης F είναι ο τανυστής που περιγράφει αυτόν τον μετασχηματισμό :

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} \quad (2.1)$$

όπου X είναι το διάνυσμα θέσης του απαραμόρφωτου (υλικού) σχηματισμού και x είναι το διάνυσμα θέσης του παραμορφωμένου (χωρικού) σχηματισμού. Ο τανυστής F δρα ως ένας τανυστής αντιστοίχισης δύο σημείων , συνδέοντας την αρχική και την παραμορφωμένη θέση ενός υλικού σημείου. Η ορίζουσα της F αποτελεί τον λόγο J , του στοιχείου όγκου dv του παραμορφωμένου σχηματισμού διά του στοιχείου όγκου dV του υλικού σχηματισμού.

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{dv}{dV} = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (2.2)$$

Ο τανυστής \mathbf{F} μπορεί να διασπαστεί σε μία καθαρή παραμόρφωση που ακολουθείται από μία καθαρή περιστροφή, ή ανάποδα, από μία καθαρή περιστροφή και μία ακόλουθη καθαρή παραμόρφωση. Για μικρές παραμορφώσεις και στροφές, τα δύο αυτά μεγέθη προστίθενται και αντιμετωπίζονται. Για μεγάλες παραμορφώσεις όμως, κάτι τέτοιο δεν ισχύει, και η παραμόρφωση και περιστροφή πολλαπλασιάζονται.

Το θεώρημα πολικής διάσπασης δηλώνει πως ο τανυστής της βαθμίδας των παραμορφώσεων μπορεί να διασπαστεί, με μοναδικό τρόπο, στις δύο ακόλουθες μορφές:

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Theta} \quad (2.3)$$

Όπου \mathbf{U} και \mathbf{V} είναι θετικά ορισμένοι και συμμετρικοί τανυστές και ο $\mathbf{\Theta}$ είναι ένας ορθοκανονικός τανυστής (αφού $J = \det \mathbf{F} > 0$). Καθώς ένας ορθοκανονικός τανυστής περιγράφει την περιστροφή στερεού σώματος, ο $\mathbf{\Theta}$ καλείται τανυστής στροφών. Κατά συνέπεια, το σύνολο των παραμορφώσεων περιγράφεται από τους τανυστές \mathbf{U} και \mathbf{V} , οι οποίοι καλούνται δεξιός και αριστερός τανυστής τροπών αντίστοιχα. Ο τανυστής \mathbf{U} επιδρά στον απαράμορφωτο σχηματισμό, ενώ ο \mathbf{V} στον παραμορφωμένο. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του τανυστή βαθμίδας παραμορφώσεων, μπορούμε να ορίσουμε τον αριστερό και δεξιό τανυστή Cauchy-Green ως εξής:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.4)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (2.5)$$

Όπου \mathbf{B} είναι ο αριστερός, και \mathbf{C} είναι ο δεξιός τανυστής Cauchy-Green. Ο υλικός τανυστής

τροπών E , και ο χωρικός τανυστής τροπών e , μπορούν να διατυπωθούν ως:

$$2E = C - I \quad (2.6)$$

$$2e = I - B^{-1} \quad (2.7)$$

Όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Ο τανυστής E , συχνά αποκαλείται Green-Lagrange, και ο e , Euler-Almansi.

2.3 Αναλλοίωτες των τροπών και η συνάρτηση ενέργειας παραμόρφωσης

Γενικά, η τάση ορίζεται ως δύναμα ανά επιφάνεια. Για μικρές παραμορφώσεις , η επιφάνεια μπορεί να είναι η απαραμόρφωτη, ή η παραμορφωμένη , καθώς η διαφορά τους θεωρείται αμελητέα. Για μεγάλες παραμορφώσεις όμως, είναι αναγκαίο να υπάρχει διαχωρισμός ανάμεσα στις δύο. Η τάση, που ασκείται στην παραμορφωμένη επιφάνεια καλείται πραγματική τάση, ενώ η ασκούμενη στην απαραμόρφωτη ονομάζεται ψευδο-τάση. Η τάση Cauchy δίνεται από τη σχέση:

$$T^{(n)} = n \cdot \sigma \quad (2.8)$$

Ο όρος σ αποκαλείται τανυστής πραγματικής τάσης ή τανυστής τάσης Cauchy. Καθώς αναφέρεται στο παραμορφωμένο σώμα , ο τανυστής τάσης Cauchy είναι το κατάλληλο μέτρο τάσης για σχηματισμούς Euler. Σε σχηματισμούς Lagrange , εΐθισται να γίνεται χρήση τανυστών ψευδο-τάσης. Σε αναλογία με την (2.8), ο πρώτος τανυστής Piola-Kirchhoff, t , και ο δεύτερος τανυστής Piola-Kirchhoff , s , ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(N)} &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{t} \\ \mathbf{T}^{(N)} &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{s} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{F}^T \\ \mathbf{s} &= J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-T} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Εάν μία παραμόρφωση είναι ισόθερμη (η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή) , και το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά , ορίζουμε τη συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης,

$$W(R, E) = \rho_0 \psi \quad (2.11)$$

ανά μονάδα απαραμόρφωτου όγκου(R είναι το διάνυσμα θέσης του απαραμόρφωτου σχηματισμού και ψ η συνάρτηση ελεύθερης ενέργειας). Καθώς η πυκνότητα ρ_0 του απαραμόρφωτου σώματος είναι ανεξάρτητη της παραμόρφωσης παίρνουμε την καταστατική εξίσωση:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.12)$$

Η (2.12) μπορεί να γραφεί και σε μορφή τανυστή τάσης Cauchy και του πρώτου τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff. Με αντικατάσταση στη (2.10) , καταλήγουμε στο σύνολο των καταστατικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \\
\mathbf{t} &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \\
\mathbf{S} &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Από τον ορισμό του τανυστή Cauchy-Green , μπορούμε να εκφράσουμε τον δεύτερο τανυστή Piola-Kirchhoff \mathbf{S} , και την τάση $\boldsymbol{\sigma}$ συναρτήσει του \mathbf{C} :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= 2\mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \\
\mathbf{S} &= 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Η συνάρτηση ενέργειας W μπορεί επίσης να εκφραστεί συναρτήσει των πρώτων (ισοτροπικών) αναλλοίωτων του τανυστή \mathbf{C} . Αυτές οι αναλλοίωτες είναι οι:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \text{tr}(\mathbf{C}) \\
I_2 &= \frac{1}{2}[(\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] \\
I_3 &= \det(\mathbf{C})
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ενώ οι δύο ψευδο-αναλλοίωτες I_4 και I_5 δίνονται από τις σχέσεις :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \epsilon_{33} \\
I_5 &= \epsilon_{31}^2 + \epsilon_{23}^2
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Η συνάρτηση ενέργειας W , για εγκαρσίως ισότροπο υλικό, μπορεί να γραφεί και ως συνάρτηση αυτών των αναλλοίωτων :

$$W = W(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) \quad (2.17)$$

2.2 Καταστατικός νόμος για εγκαρσίως ισότροπο υλικό

Για ένα εγκαρσίως ισότροπο υλικό οι καρτεσιανές συνιστώσες του δεύτερου τανυστή Piola-Kirchhoff δίνονται από τις σχέσεις:

$$S^{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{IJ}} + \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{JI}} \right) \quad (2.18)$$

Με παραγωγή της συνάρτησης W και κάνοντας χρήση του κανόνα αλυσίδωτης παραγωγής παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{IJ}} &= \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_{IJ}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \epsilon_{IJ}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{IJ}} \\ &\quad + \frac{\partial W}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial \epsilon_{IJ}} + \frac{\partial W}{\partial I_5} \frac{\partial I_5}{\partial \epsilon_{IJ}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Παίρνοντας υπόψιν τη σχέση $\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{IJ}} = 2 \frac{\partial W}{\partial c_{IJ}}$, βρίσκουμε για το s :

$$\begin{aligned} \mathbf{s} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} &= 2[W_1 \mathbf{I} + W_2(I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}) + W_3 I_3 \mathbf{C}^{-1}] \\ &\quad + W_4 \delta_3^I \delta_3^J + 2W_5(\epsilon_{31} \delta_3^I \delta_3^J + \epsilon_{23} \delta_2^I \delta_3^J) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Για την εύρεση της τάσης Cauchy , πρώτα εισάγουμε κάποιον επιπρόσθετο συμβολισμό. Έστω, πως σε ένα σημείο P του απαραμόρφωτου σώματος, ορίζονται τρία συστήματα συντεταγμένων. Το ένα έχει καρτεσιανές συντεταγμένες Z^I και διανύσματα βάσης e_I κατά μήκος των υλικών αξόνων. Το δεύτερο έχει ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες $X^{I'}$ με διανύσματα βάσης $G_{I'}$ παράλληλα στο e_I και στο P , ενώ το τρίτο, έχει γενικές καμπυλόγραμμες συντεταγμένες X^I με διανύσματα βάσης G_I . Με βάση τα παραπάνω, παίρνουμε για τον τανυστή τροπών Lagrange και για τον δεύτερο τανυστή Piola-Kirchhoff :

$$\begin{aligned}\sigma &= J^{-1}F \frac{\partial W}{\partial E} F^T \\ t &= \frac{\partial W}{\partial E} F^T\end{aligned}\tag{2.21}$$

Και η δυαδικές τους αναπαραστάσεις είναι οι:

$$\begin{aligned}\epsilon_{IJ} &= A_I^K A_J^L E_{KL} \\ s^{IJ} &= A_K^I A_L^J S^{KL}\end{aligned}\tag{2.22}$$

Όπου :

$$\begin{aligned}A_I^{J'} &= e_I G^{J'} = \frac{\partial X^{J'}}{\partial Z^I} \\ A_I^J &= e_I G^J = \frac{\partial X^J}{\partial Z^I} \\ A_{I'}^J &= G_{I'} G^J = \frac{\partial X^J}{\partial X^{I'}}\end{aligned}\tag{2.23}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις τα διανύσματα e και G αποτελούν διανύσματα βάσης. Τώρα ,

βρισκόμαστε σε θέση να βρούμε τις συνιστώσες της τάσης, σε ένα σύστημα γενικών καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Αντικαθιστώντας την (2.18) στην (2.22) παίρνουμε :

$$\sigma^{I*J*} = \Phi G^{IJ} + \psi Q^{IJ} - pg^{IJ} + \Theta M^{IJ} + \Lambda N^{IJ} \quad (2.24)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} \Theta &= I_3^{-1/2} W_4 \\ \Lambda &= I_3^{-1/2} W_5 \\ M^{IJ} &= A_3^I A_3^J \\ N^{IJ} &= (A_3^I A_a^J + A_a^I A_3^J) \epsilon_{a3} \quad a = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.3 Εξισώσεις για ασυμπίεστο μαλακό ιστό

Οι μαλακοί ιστοί εν γένει θεωρούνται ασυμπίεστα σώματα , συνεπώς η παραμόρφωσή τους περιορίζεται από τη συνθήκη $J = 1$. Έτσι, οι συνιστώσες των τροπών δεν είναι όλες ανεξάρτητες , και οι καταστατικές εξισώσεις πρέπει να τροποποιηθούν. Αυτό μπορεί να γίνει, γράφοντας πρώτα την συνθήκη του ασυμπίεστου στη μορφή:

$$\Delta = \bar{\nabla} \cdot \mathbf{v} = tr \mathbf{D} = 0 \quad (2.26)$$

Συνεχίζοντας με την τάση, μπορούμε να ορίσουμε έναν τροποποιημένο τανυστή τάσης

Cauchy ως:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I} \quad (2.27)$$

Όπου p είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση, ανάλογης θέσης με την υδροστατική πίεση. Οι τροποποιημένες καταστατικές εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T - p\mathbf{I} \\ \mathbf{t} &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T - p\mathbf{F}^{-1} \\ \mathbf{S} &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{E}} - p\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.4 Το πρόβλημα των συνοριακών τιμών και η θλίψη μαλακού ιστού

Στη θεωρία της ελαστικότητας, οι καταστατικές και κινηματικές εξισώσεις, καθώς και το σύνολο συνοριακών και αρχικών συνθηκών ορίζουν το πρόβλημα συνοριακών τιμών για κάποιο υλικό. Παρατίθεται το σύνολο αυτών των εξισώσεων:

Κινηματικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\nabla \mathbf{r})^T \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})(\nabla \mathbf{u})^T] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Τάση:

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.30)$$

Εξισώσεις Κίνησης:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= \rho \mathbf{a} \\ \nabla \cdot \mathbf{t} + \mathbf{f}_0 &= \rho_0 \mathbf{a} \\ \nabla \cdot (\mathbf{s} \cdot \mathbf{F}^T) + \mathbf{f}_0 &= \rho_0 \mathbf{a} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Καταστατικές Εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= J^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T - p \mathbf{I} \\ \mathbf{t} &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T - p \mathbf{F}^{-1} \\ \mathbf{S} &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{E}} - p \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Συνθήκη ασυμπίεστου:

$$J = \det \mathbf{F} = 1 \quad (2.33)$$

Για το πρόβλημα της θλίψης μαλακού ιστού, θεωρούμαι πως ο ιστός είναι εγκαρσίως ισοτροπικός, και πως οι ίνες του είναι ευθυγραμμισμένες με τον άξονα X^1 , που επίσης θεωρείται και η κατεύθυνση του ασκούμενου φορτίου. Λόγω συμμετρίας, οι άξονες συντεταγμένων συμπίπτουν με τους κύριους άξονες της τάσης. Για ένα καρτεσιανό σύστημα X_i και x_i η βαθμίδα παραμόρφωσης, και ο τανυστής τροπών Lagrange είναι :

$$\begin{aligned} [F_I^i] &= [F_{iI}] = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] \\ [E_{IJ}] &= \text{diag}\left[\frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1), \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - 1), \frac{1}{2}(\lambda_3^2 - 1)\right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

Όπου λ_i είναι οι διαστάσεις των επιμηκύνσεων. Καθώς οι x_i είναι οι κύριοι άξονες, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο πρώτος τανυστής Piola-Kirchhoff, ο οποίος συνήθως δεν είναι συμμετρικός, αν υφίστανται διατμητικές τάσεις. Σε αυτήν την περίπτωση, η καταστατική σχέση είναι :

$$t_{II} = \frac{\partial W}{\partial E_{II}} F_{II} - p(F_{II})^{-1} \quad (2.35)$$

Από τον κανόνα αλυσιδωτής παραγωγής έχουμε:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial W}{\partial E_{11}} \frac{\partial E_{11}}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial W}{\partial E_{11}} \lambda_1 = \frac{\partial W}{\partial E_{11}} F_{11} \quad (2.36)$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε:

$$t_{II} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_I} - \frac{p}{\lambda_I} \quad (2.37)$$

Για ασυμπίεστο υλικό, τα λ_I δεν μπορούν να προσδιοριστούν ανεξάρτητα, καθώς περιορίζονται από τη συνθήκη του ασυμπίεστου. Ένα καλώς ορισμένο πρόβλημα απαιτεί τον ορισμό μίας εκ των συνιστωσών του ταυσιτή Piola-Kirchhoff, για παράδειγμα του t_{33} . Σε αυτήν την περίπτωση η (2.37) δίνει:

$$p = \lambda_3 \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - t_{33} \right) \quad (2.38)$$

Οι υπόλοιπες τάσεις υπολογίζονται από την (2.37) και από τη σχέση $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Εάν θεωρήσουμε πως η t_{33} είναι παντού μηδέν, παίρνουμε για τις άλλες συνιστώσες :

$$\begin{aligned} t_{11} &= \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} \\ t_{22} &= \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Εάν ο ιστός είναι εγκαρσίως ισοτροπικός, τότε η W είναι συνάρτηση των αναλλοίωτων:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\
I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\
I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \\
I_4 &= \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) \\
I_5 &= 0
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Αυτές οι εξισώσεις δίνουν τις παραγώγους:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} &= \lambda_1 [2W_1 + 2W_2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + W_4] \\
\frac{\partial W}{\partial \lambda_2} &= \lambda_2 [2W_1 + 2W_2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2)] \\
\frac{\partial W}{\partial \lambda_3} &= \lambda_3 [2W_1 + 2W_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)]
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Εισάγοντας τις παραπάνω ταυτότητες στην και την $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$ στην (2.39) καταλήγουμε στις :

$$\begin{aligned}
t_{11} &= 2\lambda_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2}\right) (W_1 + \lambda_2^2 W_2) + \lambda_1 W_4 \\
t_{22} &= 2\lambda_2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^4}\right) (W_1 + \lambda_1^2 W_2)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Κεφάλαιο 3

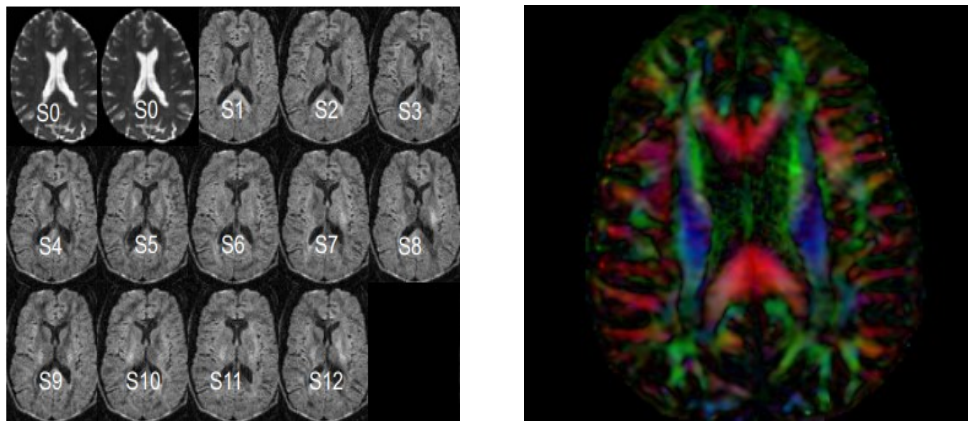
Λογισμικό και το δοκίμιο προς ανάλυση

3.1 Απεικόνιση του τανυστή διάχυσης και δεσμιδογραφία

Στο πρώτο τμήμα της εργασίας, έγινε η επιλογή του δοκιμίου για το οποίο έγινε η δεσμιδογραφία, καθώς και η εφαρμογή της ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων. Το δείγμα είναι μια μαγνητική τομογραφία, που προερχόταν από το εκπαιδευτικό υλικό του λογισμικού 3DSlicer , που είναι το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε για να απεικονισθεί η δεσμιδογραφία.

Η μέθοδος απεικόνισης της διάχυσης (Diffusion Weighted Imaging-DWI) είναι η χρήση συγκεκριμένων MRI σειρών και λογισμικού παραγωγής εικονών, που χρησιμοποιεί τη διάχυση των μορίων νερού ώστε να παραχθούν αντιθέσεις στις εικόνες μαγνητικής τομογραφίας. Επιτρέπει τη χαρτογράφηση της διαδικασίας διάχυσης των μορίων του νερού σε βιολογικούς ιστούς. Η μοριακή διάχυση στους ιστούς, δεν είναι τυχαία, αλλά αντικατροπτρίζει αλληλεπιδράσεις με πολλά εμπόδια, όπως μακρομόρια, ίνες, και μεμβράνες. Τα μοτίβα διάχυσης των μορίων νερού, μπορούν, κατά συνέπεια, να αποκαλύψουν μικροσκοπικές λεπτομέρειες της αρχιτεκτονικής του ιστού, είτε αυτός βρίσκεται σε υγιή ή σε παθολογική κατάσταση [38-48].

Η μέθοδος απεικόνισης του τανυστή της διάχυσης (diffusion tensor imaging-DTI) βρίσκει εφαρμογή όταν ένας ιστός, όπως οι νευροάξονες λευκής ουσίας στον εγκέφαλο, έχουν μία εσωτερική ιστώδη δομή που εξαρτάται από την ανισοτροπία συγκεκριμένων κρυστάλλων. Το νερό



Σχήμα 3.1: Βάση δεδομένων DWI (αριστερά) και βάση δεδομένων DTI (δεξιά)

τότε θα διαχυθεί πιο γρήγορα στην κατεύθυνση που είναι συνευθειακή της εσωτερικής δομής (αξονική διάχυση) και πιο αργά όταν κινείται κάθετα στην προτιμητέα κατεύθυνση (ακτινική διάχυση). Αυτό επίσης σημαίνει πως ο μετρούμενος ρυθμός διάχυσης αλλάζει συναρτήσει του συστήματος αναφοράς του παρατηρητή.

Η DTI είναι μία τεχνική μαγνητικού συντονισμού, που μπορεί να μετρήσει την υπό περιορισμούς διάχυση του νερού, με στόχο την παραγωγή εικόνων νευρικών ινών. Στην DTI κάθε στοιχείο όγκου έχει ένα , ή περισσότερα ζεύγη παραμέτρων, ένα ρυθμό διάχυσης και την προτιμητέα κατεύθυνση διάχυσης. Επιπρόσθετα, οι πληροφορίες της κατεύθυνσης της διάχυσης γίνεται να επιλεχθούν ώστε να σχεδιασθούν νευρικές οδοί στον εγκέφαλο, μία διαδικασία που λέγεται δεσμιδογραφία[38-40]. Η διαδικασία βασίζεται στη μαθηματική και φυσική ερμηνεία του τανυστή διάχυσης, που δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{xz} & D_{yz} & D_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

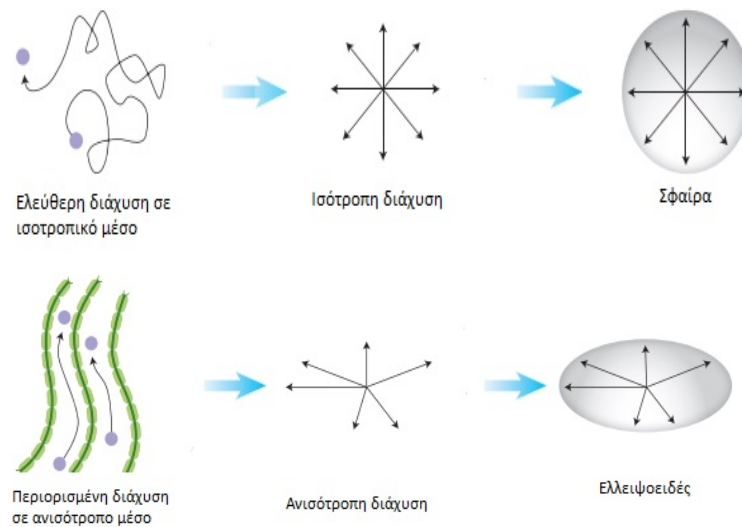
Στα πλαίσια της περιγραφής του φαινομένου της διάχυσης του νερού και της ανισοτροπίας των ινών θα χρησιμοποιηθούν τα ελλειψοειδή των ιδιοτιμών. Ένα ελλειψοειδές, μπορεί να

περιγραφεί από τον τύπο $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$. Οι τιμές a,b και c καθορίζουν το εάν η επιφάνεια θα είναι ελλειψοειδής ή υπερβολοειδής. Στη σύγχρονη νευρολογία, διάφορες παθολογίες του εγκεφάλου μπορούν να εντοπισθούν, μετρώντας την ανισοτροπία και τη διάχυση. Η φυσική διαδικασία της διάχυσης κάνει μία ομάδα μορίων νερού να απομακρυνθεί από κάποιο κεντρικό σημείο, και σταδιακά να φτάσει στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς, αν το μέσο είναι ανισότροπο (θα ήταν επιφάνεια σφαίρας για ένα ισότροπο μέσο). Ο φορμαλισμός των ελλειψοειδών λειτουργεί επίσης ως ένα μαθηματικό μοντέλο οργάνωσης δεδομένων για τους τανυστές που θα χρησιμοποιηθούν[38-40].

Σε ένα ισότροπο μέσο, όπως το εγκεφαλονωτιαίο υγρό, τα μόρια νερού κινούνται λόγω διάχυσης, και κινούνται με τον ίδιο ρυθμό προς κάθε κατεύθυνση. Γνωρίζοντας την ακριβή δράση της βαθμίδας διάχυσης, μπορούμε να παράγουμε μία σχέση που να υπολογίζει τον συντελεστή διάχυσης D. Όταν υπάρχουν διάφορα εμπόδια, όπως κυτταρικές μεμβράνες και μικροσωληνίσκοι που επηρεάζουν την ελεύθερη διάχυση, μετριέται ο φαινόμενος συντελεστής διάχυσης (apparent diffusion coefficient-ADC). Ο ADC σε ανισοτροπικούς ιστούς ποικίλλει αναλόγως με την κατεύθυνση στην οποία μετράται. Η διάχυση είναι γρήγορη κατά μήκος (παράλληλα) στον άξονα, και πιο αργή κάθετα σε αυτόν[38-40].

Το ελλειψοειδές έχει έναν κύριο άξονα μεγάλου μήκος, και δύο μικρότερους που περιγράφουν το πλάτος και το βάθος του. Αυτοί οι τρεις άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους και τέμνονται στο κέντρο του ελλειψοειδούς. Αυτοί οι άξονες είναι τα ιδιοδιανύσματα, και οι τιμές τους- οι ιδιοτιμές, του ελλειψοειδούς. Το μέτρο της διάχυσης κατά μήκος του κύριου άξονα, λ_1 είναι η αξονική διάχυση, ενώ η ακτινική διάχυση δίνεται από τη σχέση $\lambda_{\perp} = (\lambda_2 + \lambda_3)/2$. Ένα άλλο μέτρο της ολικής διάχυσης δίνεται από το ίχνος: $tr(\Lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ και τη μέση τιμή $MD = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)/3$.

Πέρα από την περιγραφή του μεγέθους της διάχυσης, είναι επίσης σημαντικό να υπολογισθεί ο βαθμός της ανισοτροπίας σε κάθε στοιχείο όγκου. Στην μία ακραία περίπτωση έχουμε μία σφαίρα ιστροπικής διάχυσης, ενώ στο άλλο άκρο ένα έντονα πεπλατυσμένο σφαιροειδές. Ο πιο

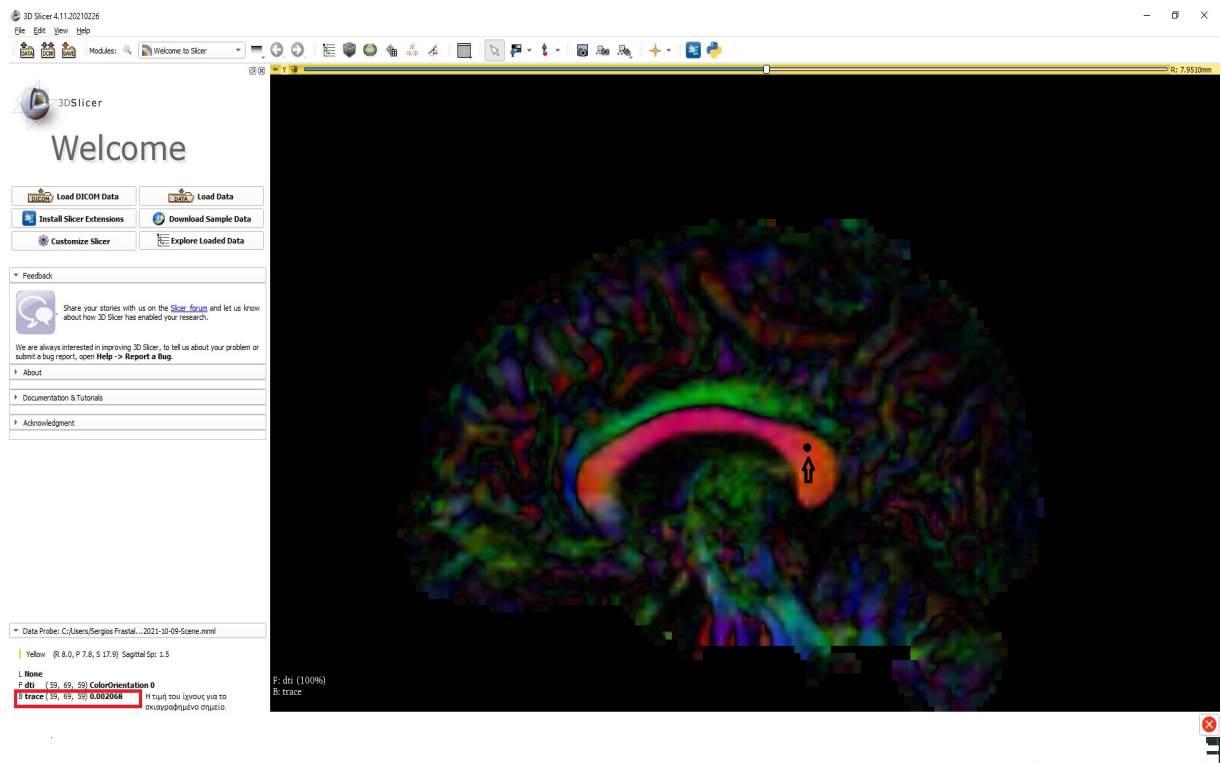


Σχήμα 3.2: Διάχυση σε ισότροπο (άνω) και ανισότροπο (κάτω) μέσο

απλός τρόπος μέτρησης της ανισοτροπίας είναι μέσω της διαίρεσης του μεγαλύτερου άξονα με τον μικρότερο, ήτοι λ_1/λ_3 . Όμως, αυτή η σχέση είναι πολύ επιρρεπής στον πειραματικό θόρυβο, και γι' αυτό έχουν εισαχθεί πιο πολύπλοκοι τύποι, ώστε να ελαχιστοποιηθεί αυτός ο θόρυβος. Ένα σημαντικό στοιχείο αυτών των υπολογισμών, είναι το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών του μέτρου της διάχυσης : $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2$. Χρησιμοποιείται η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων, ώστε να ληφθεί ένας μέσος όρος στον οποίο κυριαρχεί το μεγαλύτερο στοιχείο. Ένας στόχος, είναι ο αριθμός που θα προκύψει να είναι κοντά στο 0 εάν το στοιχείο όγκου είναι σφαιρικό και κοντά στο 1 εάν είναι πεπλατυσμένο. Αυτό οδηγεί στην κλασματική ανισοτροπία (fractional anisotropy-FA) η οποία είναι η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των διαφορών της διάχυσης, δια της τετραγωνικής ρίζας του αθροίσματος των τετραγώνων των μέτρων της διάχυσης. Έτσι, όταν ο δεύτερος και τρίτος άξονας είναι μικρά σε σχέση με τον κύριο άξονα, ο αριθμητής και ο παρανομαστής είναι σχεδόν ίσοι. Επίσης, η σχέση πολλαπλασιάζεται με $1/\sqrt{2}$ ώστε η FA να έχει μέγιστη τιμή ίση με ένα. Ο τελικός τύπος έχει τη μορφή.

$$FA = \frac{\sqrt{3((\lambda_1 - E[\lambda])^2 + (\lambda_2 - E[\lambda])^2 + (\lambda_3 - E[\lambda])^2)}}{\sqrt{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}} \quad (3.2)$$

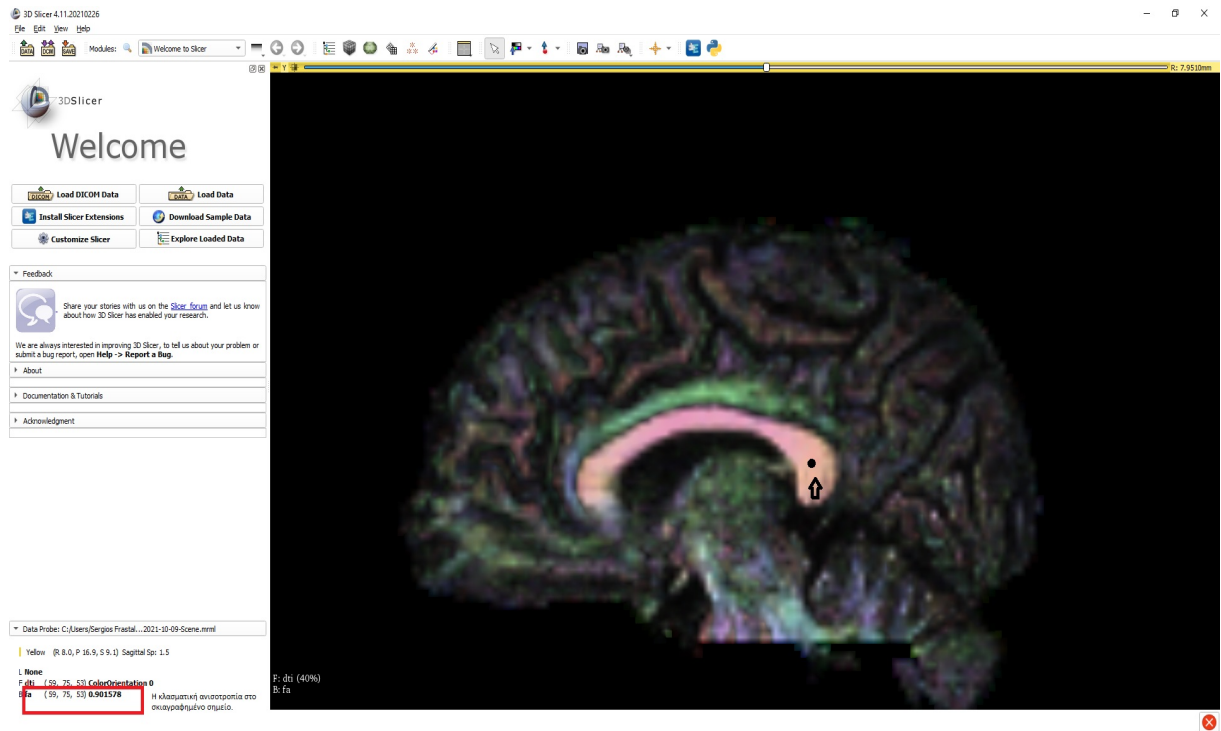
Το πρώτο βήμα στην ανάλυση της μαγνητικής τομογραφίας ήταν η εύρεση του ίχνους του τανυστή διάχυσης . Επαναλαμβάνεται ότι το ίχνος είναι μία εγγενής ιδιότητα του ιστού, ανεξάρτητη της κατεύθυνσης των ινών, χρήσιμη για τον προσδιορισμό του ελλειψοειδούς των ιδιοτιμών, και αποτελεί μία κλινικά σχετική παράμετρο, για την παρακολούθηση ασθενών με ρίσκο εγκεφαλικού και άλλων νευρολογικών παθήσεων. Παρατίθεται η εύρεση του ίχνους με τη χρήση του λογισμικού 3DSlicer:



Σχήμα 3.3: Οι τιμές του ίχνους του D στον εγκέφαλο

Μετακινώντας τον κέρσορα στα διάφορα σημεία της DTI αποτυπώνονται οι διαφορετικές τιμές του ίχνους. Αυτές οι τιμές κυμαίνονται από το 0.001 ως το 0.008 και οι τιμές είναι αρκετά ομοιογενείς σε διάφορα μέρη του εγκεφάλου, ανεξαρτήτως για το εάν είναι λευκή ή φαιά ουσία ή εάν υπάρχουν διαφορές στη δομή των ιστών.

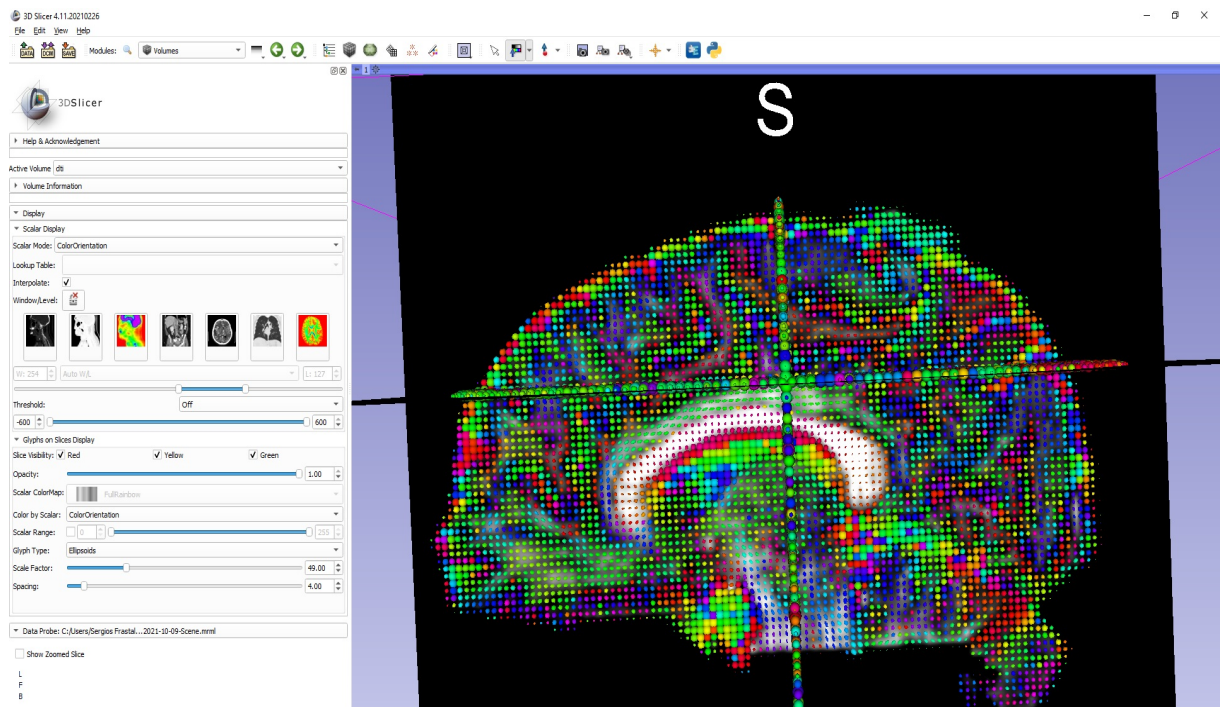
Στο επόμενο βήμα υπολογίσθηκε η κλασματική ανισοτροπία του δοκιμίου στη μαγνητική τομογραφία. Επισημαίνεται πως η κλασματική ανισοτροπία είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού των ινών του δοκιμίου, και είναι χρήσιμη για τον χαρακτηρισμό της καμπυλότητας του ελλειψοειδούς (χαμηλή κλασματική ανισοτροπία αντιστοιχεί σε σφαιρικό σχήμα, ενώ υψηλή κλασματική ανισοτροπία αντιστοιχεί σε ελλειψοειδές).



Σχήμα 3.4: Οι τιμές της κλασματικής ανισοτροπίας στο δοκίμιο

Εξερευνώντας τις τιμές της κλασματικής ανισοτροπίας παρατηρούμε πως οι τιμές είναι υψηλές στις περιοχές λευκής ουσίας (0.7 – 0.9) , όπως το μεσολόβιο, και μικρές (0.1 – 0.3) στις περιοχές φαιάς ουσίας .

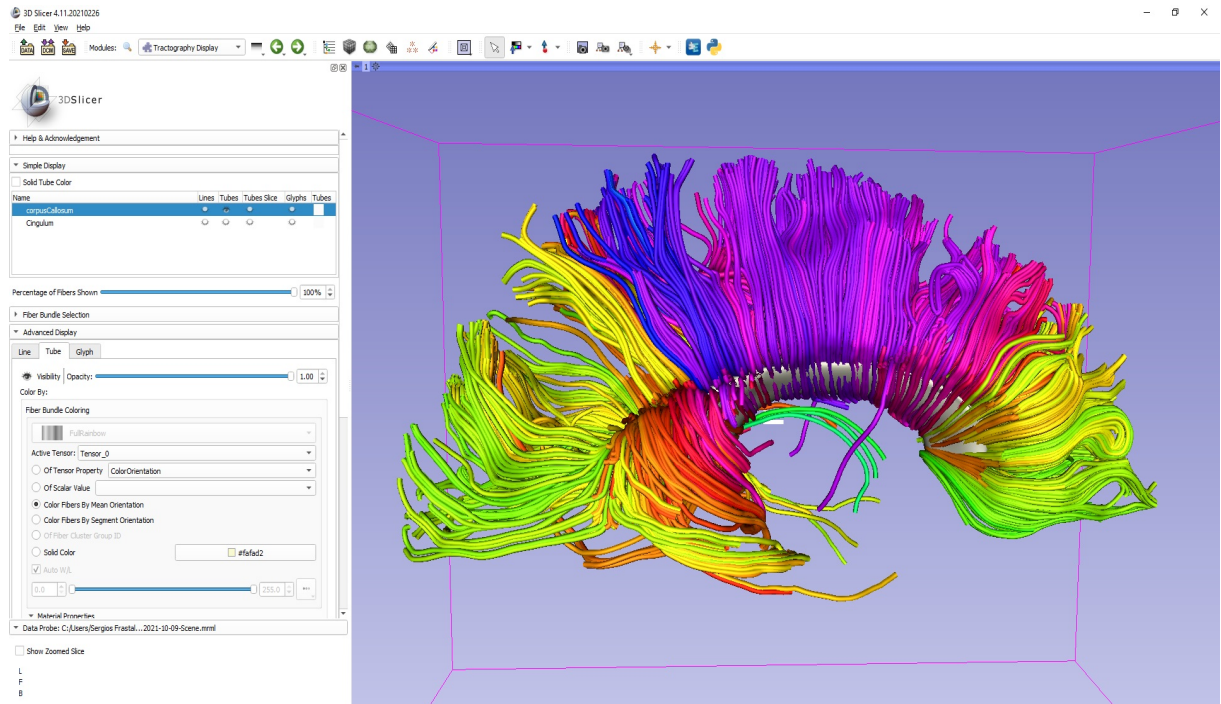
Στη συνέχεια έγινε η απεικόνιση των ελλειψοειδών του τανυστή της διάχυσης. Τα ελλειψοειδή χρησιμοποιούνται με στόχο να απεικονισθούν τα δεδομένα του τανυστή διάχυσης, καθώς οι άξονες τους είναι οι ιδιοτιμές αυτού του τανυστή.



Σχήμα 3.5: Τα ελλειψοειδή του τανυστή διάχυσης στο δοκίμιο

Σε συμφωνία με τις προβλέψεις που έγιναν, τα ελλειψοειδή είναι πράγματι πιο σφαιρικά στις περιοχές χαμηλής ανισοτροπίας (εγκεφαλονωτιαίο υγρό, φαιά ουσία) και πιο πεπλατυσμένα στις περιοχές υψηλής ανισοτροπίας όπως στη λευκή ουσία. Στην περιοχή του μεσολοβίου, παρατηρούμε πεπλατυσμένα ελλειψοειδή, όπως προβλέφθηκε, καθώς το μεσολόβιο αποτελείται από λευκή ουσία. Τα ελλειψοειδή αντιπροσωπεύουν την κύρια κατεύθυνση της διάχυσης (κύριο ιδιοδιάνυσμα) και το χρώμα τους εξαρτάται από αυτήν την κατεύθυνση.

Στο τελικό βήμα , φτιάχθηκε το τριδιάστατο μοντέλο του μεσολοβίου από τη μαγνητική τομογραφία, και έγινε η απεικόνιση των νευρικών ιστών που διέρχονται από το μεσολόβιο(δεσμιδογραφία). Ακολουθεί η απεικόνιση:

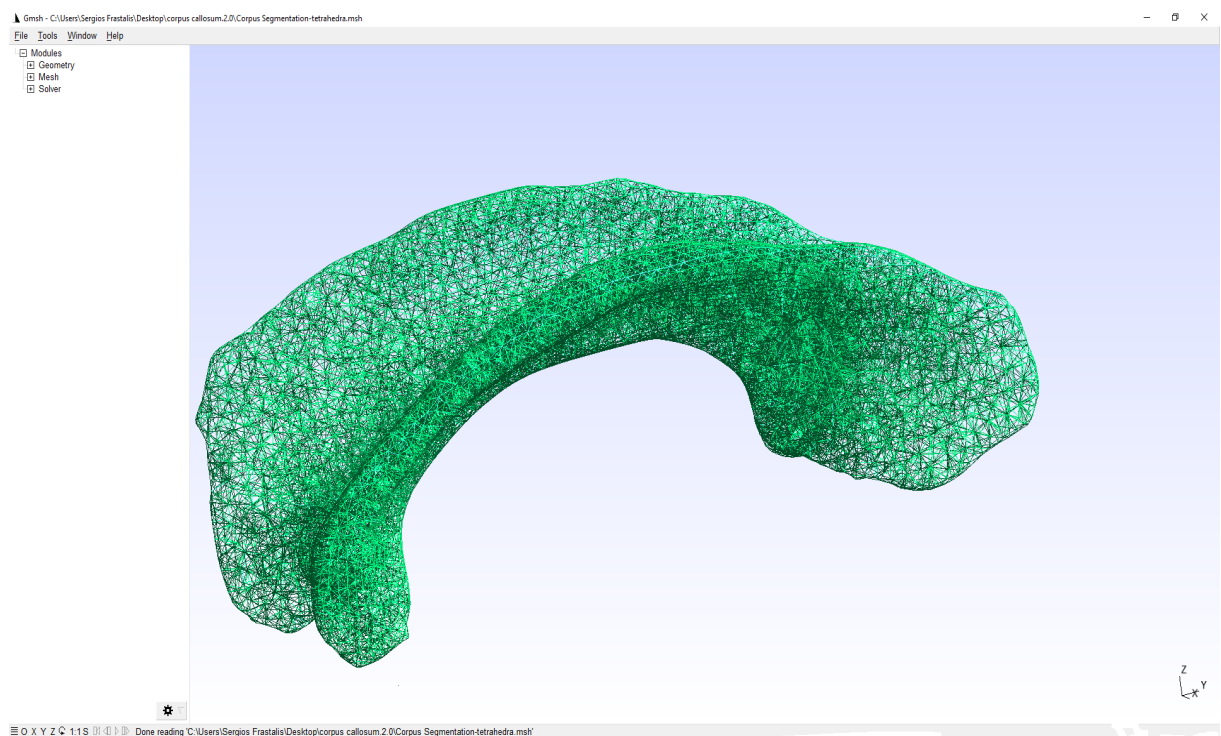


Σχήμα 3.6: Το μοντέλο του μεσολοβίου (με λευκό χρώμα) και οι ίνες

Στη συγκεκριμένη απεικόνιση, τα χρώματα των ινών προσδιορίζονται από τη μέση τιμή του προσανατολισμού τους, αλλά ο χρωματισμός τους μπορεί να γίνει και για την τιμή του ίχνους του τανυστή διάχυσης, ή της κλασματικής ανισοτροπίας, κλπ.

3.2 Ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων

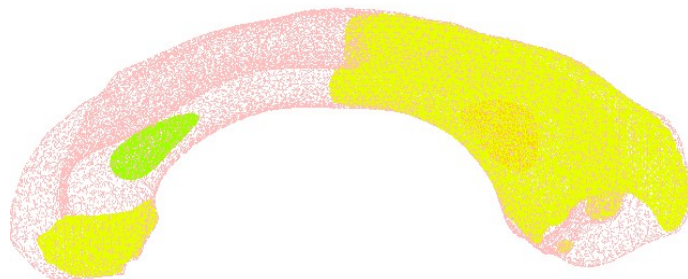
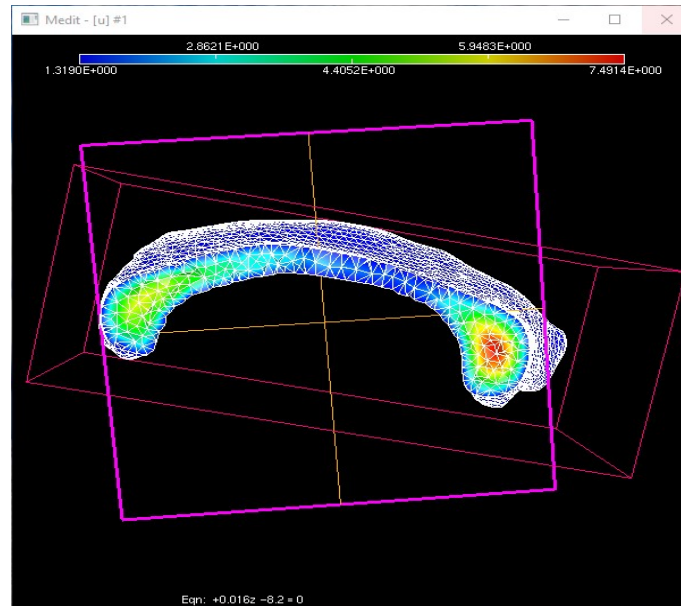
Στο δεύτερο τμήμα της εργασίας, έγινε καταρχάς, η διακριτοποίηση του τρισδιάστατου μοντέλου του μεσολοβίου που βρέθηκε στο πρώτο μέρος. Ο όγκος που επιλέχθηκε, χωρίστηκε σε έναν πεπερασμένο αριθμό τετραέδρων πάνω στα οποία θα γίνει η ανάλυση των τάσεων και παραμορφώσεων, γνωστή ως ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων. Η διακριτοποίηση έγινε με χρήση του λογισμικού gmsh και παρουσιάζεται παρακάτω:



Σχήμα 3.7: Το mesh του μεσολοβίου, διακριτοποιημένο σε τετράεδρα, στο gmsh

Στη συνέχεια, το διακριτοποιημένο μοντέλο εισήχθη σε ένα καινούργιο λογισμικό (freefem++) με στόχο την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων.

Το πρώτο σύστημα εξισώσεων που επιλύθηκε στο freefem++ αντιμετώπισε το δοκίμιο ως ένα γραμμικό ελαστικό υλικό, και το ασκούμενο φορτίο ήταν η βαρυτική δύναμη. Παρατίθεται το mesh με τις αντίστοιχες παραμορφώσεις:



Σχήμα 3.8: Μία τομή στο mesh του μεσολοβίου που αποτυπώνει τις μετατοπίσεις (πάνω) και γράφημα του mesh με όλες τις μετατοπίσεις σκιαγραφημένες (κάτω), θεωρώντας το μεσολόβιο ελαστικό γραμμικό υλικό, σε βαρυτικό πεδίο

Όπως φαίνεται οι μετατοπίσεις κυμαίνονται ανάμεσα στις τιμές των 1-7.5 mm. Αυτές οι μετατοπίσεις μεγιστοποιούνται στα κεντρικά σημεία των άκρων του μεσολοβίου, και ελαχιστοποιούνται στην επιφάνεια. Έπειτα έγινε το ίδιο για τα μοντέλα Mooney-Rooslin και για εγκάρσιο ισοτροπικό υλικό.

Στη συνέχεια το σώμα αντιμετωπίστηκε ως μη γραμμικό. Το πρώτο μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε ήταν το Mooney-Rivlin. Για αυτό το μοντέλο, η συνάρτηση ενέργειας W δίνεται από τη σχέση:

$$W = b_1(I_1 - 3) + b_2(I_2 - 3) \quad (3.3)$$

Όπου b_1 και b_2 είναι σταθερές του υλικού και I_1 και I_2 η πρώτη και δεύτερη αναλλοίωτη του τανυστή παραμορφώσεων. Ως εκ τούτου, ο αντίστοιχος 2ος τανυστής Piola-Kirchoff υπολογίζεται ως [49,50] :

$$\begin{aligned} S^{IJ} &= \frac{\partial W}{\partial E_{IJ}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{IJ}} = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C_{IJ}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial C_{IJ}} \right] \\ \Rightarrow S^{IJ} &= 2[b_1 \delta_{IJ} + b_2(I_1 \delta_{IJ} - C_{IJ})] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Η τάση Kirchoff άρα είναι :

$$\begin{aligned} \kappa &= F S F^T = 2[b_1 F F^T + b_2 I_2 F F^T - b_2 F F^T F F^T] \\ &= 2[b_1 B + b_2 I_2 B - b_2 B^2] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Όπου ο αριστερός τανυστής Cauchy-Green. Ο εφαπτόμενος τανυστής τάσης Kirchoff στο F_n που δρα στο δF_{n+1} , κατα συνέπεια δίνεται από τη σχέση :

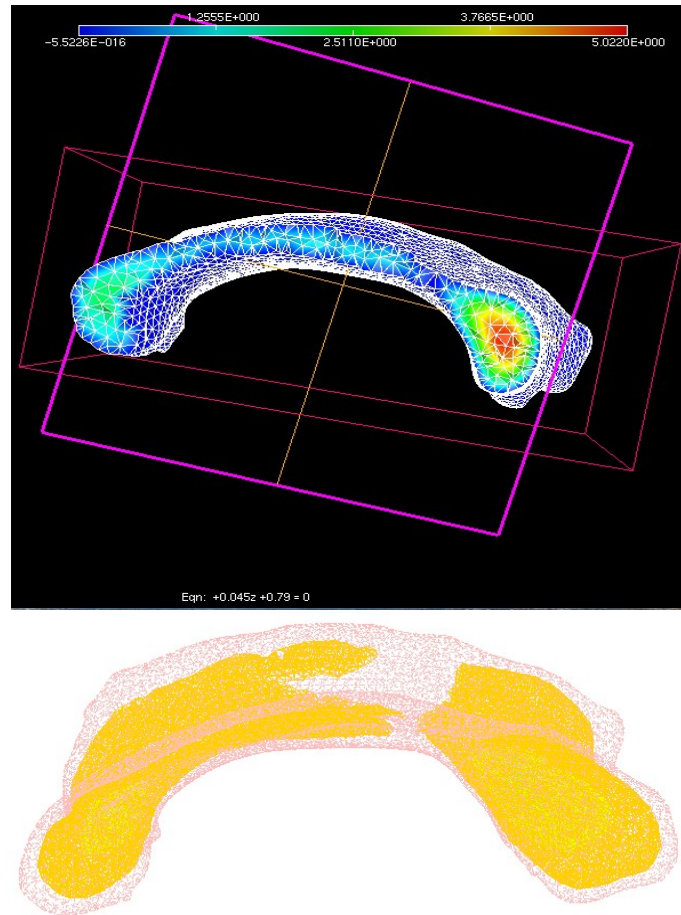
$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa}{\partial F}(F_n) \delta F_{n+1} &= 2b_1(F_n \delta F_{n+1}^T + \delta F_{n+1} F_n^T) \\ &+ 2b_2 I_2(F_n \delta F_{n+1}^T + \delta F_{n+1} F_n^T) \\ &- 2b_2(F_n F_n^T \delta F_{n+1} \delta F_{n+1}^T + \delta F_{n+1} \delta F_{n+1}^T F_n F_n^T) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Το freefem++ είναι ένα λογισμικό που επιλύει συστήματα αποκλειστικά στην ασθενή (ολοκληρωτική) μορφή τους. Συνεπώς, οι εξισώσεις του παραπάνω συστήματος θα πρέπει να μετατραπούν στην ασθενή μορφή τους. Επιπρόσθετα, καθώς το σύστημα θα επιλυθεί με χρήση της μεθόδου Newton-Raphson θα πρέπει να εκφραστεί και το σύστημα διαδοχικών προσεγγίσεων, όπως καταγράφεται παρακάτω:

Θεωρούμε ως Ω_0 το σύνορο του μεσολοβίου και ως w μία αυθαίρετη συνάρτηση ελέγχου. Η ασθενής μορφή του συστήματος συνοριακών τιμών είναι:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_0} \kappa[F_n + \delta F_{n+1}] : [(\nabla \otimes w)(F_n + \delta F_{n+1})^{-1}] \\ &= \int_{\Omega_0} \kappa[F_n + \frac{\partial \kappa}{\partial F} F_n \delta F_{n+1}] : [(\nabla \otimes w)(F_n + \delta F_{n+1})^{-1}] \\ &= \int_{\Omega_0} [\kappa F_n + \frac{\partial \kappa}{\partial F} F_n \delta F_{n+1}] : [(\nabla \otimes w)(F_n^{-1} + F_n^{-2} \delta F_{n+1})] \\ &= \int_{\Omega_0} \kappa F_n : [(\nabla \otimes w) F_n^{-1}] \\ &= - \int_{\Omega_0} \kappa F_n : [(\nabla \otimes w) F_n^{-2} \delta F_{n+1}] \\ &= + \int_{\Omega_0} \frac{\partial \kappa}{\partial F} F_n \delta F_{n+1} : [(\nabla \otimes w) F_n^{-1}] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Όπου έχουμε πάρει $\delta F_{n+1} = \nabla \otimes \delta u_{n+1}$ και u_{n+1} είναι η διόρθωση για κάποια προσέγγιση Newton u_n , για το πεδίο μετατοπίσεων u , που ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών. Η εφαρμογή των παραπάνω στο freefem++ έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα:



Σχήμα 3.9: Μία τομή στο mesh του μεσολοβίου που αποτυπώνει τις μετατοπίσεις (πάνω) και γράφημα του mesh με όλες τις μετατοπίσεις σκιαγραφημένες (κάτω), θεωρώντας το υλικό που υπακούει στο μοντέλο Mooney-Rivlin, σε βαρυτικό πεδίο

Με το μοντέλο Mooney-Rivlin τα αποτελέσματα για τις μετατοπίσεις δείχνουν πως αυτές κυμαίνονται μεταξύ των τιμών 0-5 mm . Κατά συνέπεια , παρατηρείται συγκρίσιμο αποτέλεσμα σε σχέση με το γραμμικό μοντέλο. Παρατηρούνται επίσης παραμορφώσεις σε ολόκληρο σχεδόν το μεσολόβιο, αντί για μεμονωμένες περιοχές.

Το δεύτερο μη γραμμικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε, ήταν για εγκαρσίως ισοτροπικό υλικό. Η συνάρτηση ενέργειας W για αυτό το μοντέλο είναι:

$$W = c_1(I_1 - 3) + c_4 I_4^2 \quad (3.8)$$

Όπου c_1 και c_4 είναι σταθερές του υλικού, I_1 η πρώτη αναλλοίωτη του τανυστή τροπών, και I_4 η τέταρτη ψευδοαναλλοίωτη του τανυστή τροπών. Ο 2ος τανυστής Piola-Kirchoff είναι κατά συνέπεια:

$$\begin{aligned} S^{IJ} &= \frac{\partial W}{\partial E_{IJ}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{IJ}} = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C_{IJ}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial C_{IJ}} \right] \\ \Rightarrow S^{IJ} &= 2C_1 \delta_{IJ} + 2C_4 I_4 \end{aligned} \quad (3.9)$$

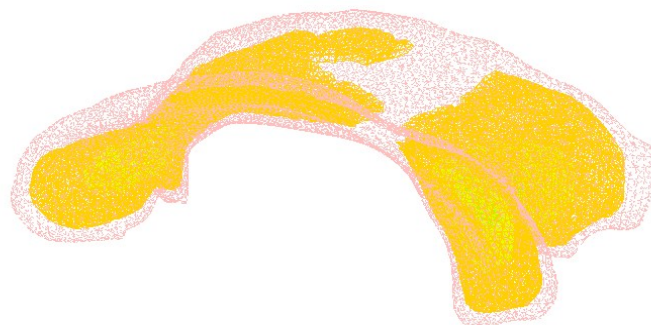
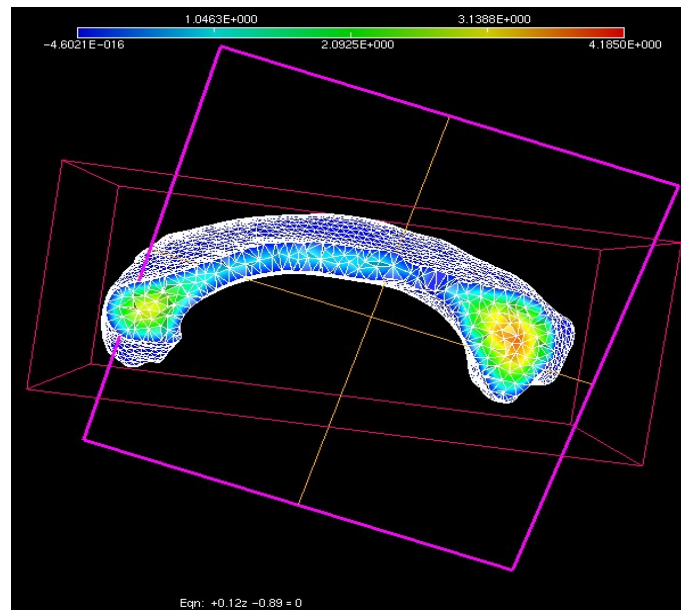
Και η τάση Kirchoff προκύπτει:

$$\begin{aligned} \kappa &= F S F^T = 2C_1 F F^T + 2C_4 I_4 F F^T \\ &= (2C_1 + 2C_4 I_4) B \end{aligned} \quad (3.10)$$

Όπου ο αριστερός τανυστής Cauchy-Green. Ο εφαπτόμενος τανυστής τάσης Kirchoff στο F_n που δρα στο δF_{n+1} , κατα συνέπεια δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial F}(F_n) \delta F_{n+1} = (2C_1 + 2C_4 I_4) [F_n (\delta F_{n+1})^T + \delta F_{n+1} F_n^T] \quad (3.11)$$

Η ασθενής μορφή του συστήματος συννοριακών τιμών, ορίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως στο προηγούμενο μοντέλο. Εν τέλει η επίλυση στο freefem++ έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα:



Σχήμα 3.10: Μία τομή στο mesh του μεσολοβίου που αποτυπώνει τις μετατοπίσεις (πάνω) και γράφημα του mesh με όλες τις μετατοπίσεις σκιαγραφημένες (κάτω), θεωρώντας το υλικό που υπακούει στο μοντέλο εγκαρσίου ιστροπικού υλικού, σε βαρυτικό πεδίο

Όπως φαίνεται, οι μετατοπίσεις βρίσκονται ανάμεσα στις τιμές 0-0.4mm. Κατά τα άλλα, παρουσιάζονται παρεμφερείς παραμορφώσεις, στα ίδια σημεία με το μοντέλο Mooney-Rivlin.

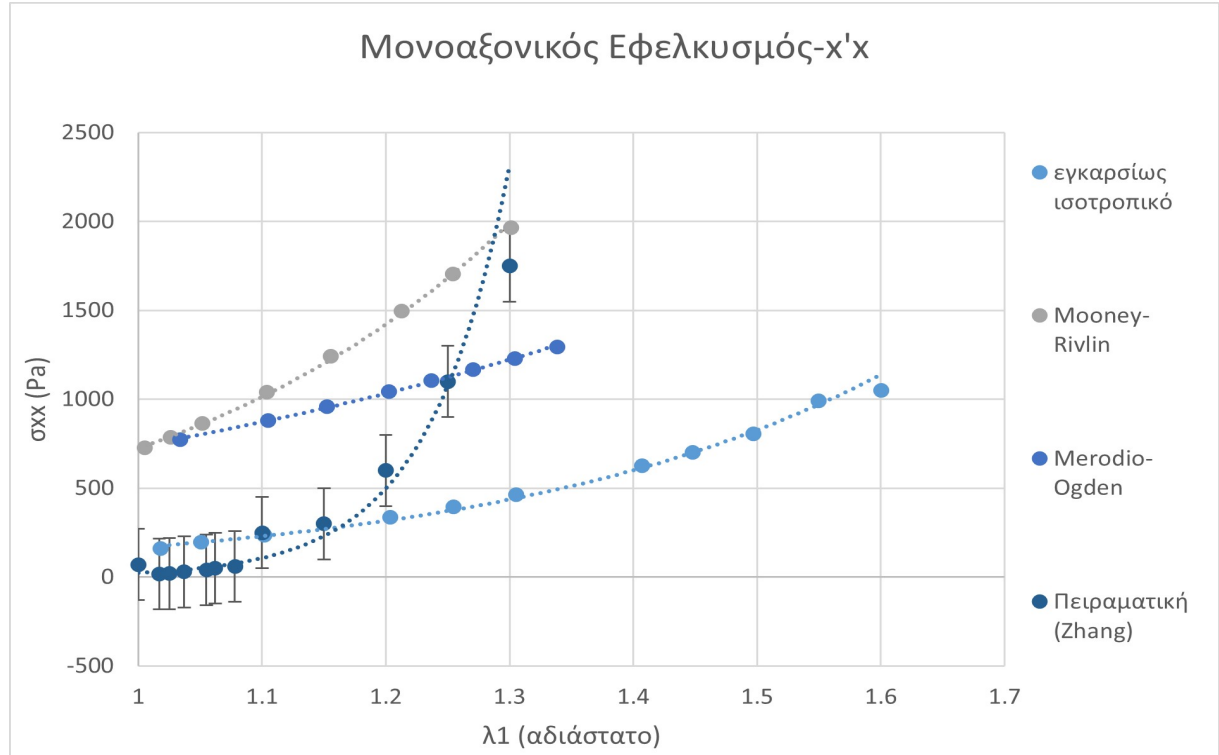
Κεφάλαιο 4

Αποτελέσματα και Ανάλυση

4.1 Μονοαξονικός εφελκυσμός και θλίψη

Στο 4ο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της υπολογιστικής ανάλυσης, για τα επιλεγθέντα μοντέλα, σε σύγκριση με τις πειραματικές τιμές. Η μηχανική εξέταση του εγκεφαλικού ιστού αποτελεί μία απαιτητική διαδικασία, εξαιτίας της χαμηλής ακαμψίας και πολύπλοκης δομής του. Ως εκ τούτου, οι πειραματικές μελέτες αναφέρουν δισταμένους μηχανικές ιδιότητες για τον εγκέφαλο, και σε μακροσκοπική και σε μικροσκοπική κλίμακα. Ο εγκεφαλικός ιστός χαρακτηρίζεται από έντονα μη γραμμικές και βισκοελαστικές μηχανικές ιδιότητες με αξιοσημείωτη ασυμμετρία θλίψης και εφελκυσμού. Συνεπώς, οι υλικές παράμετροι που χρησιμοποιούνται για μονοαξονική φόρτιση δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ακριβή πρόβλεψη μηχανικών ανταποκρίσεων σε πολυαξονική φόρτιση. Η ινώδης δομή είναι τυπική για διάφορους βιολογικούς ιστούς, όπως οι σκελετικού μυς [51], το μυοκάρδιο [52,53], οι τένοντες [54] κ.α. Για να γίνει κατανοήτη η συμπεριφορά τους χρειάζονται φερέγγυα μοντέλα. Ως επί το πλείστον, τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση της συμπεριφοράς αυτών των ιστών είναι για υπερελαστικά και εγκαρσίως ιστροπικά υλικά. Τα περισσότερα από αυτά τα μοντέλα ενέχουν μία ή και τις δύο ψευδο-αναλλοιώτες (I_4 ή I_5) για να συμπεριλάβουν την ενέργεια που αποθηκεύεται στις ίνες [55-57]. Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται εδώ είναι για μη-γραμμικό, εγκαρσίως ισότροπο υλικό, υπερελαστικό Mooney-Rivlin, και υπερελαστικό Merodio-Ogden.

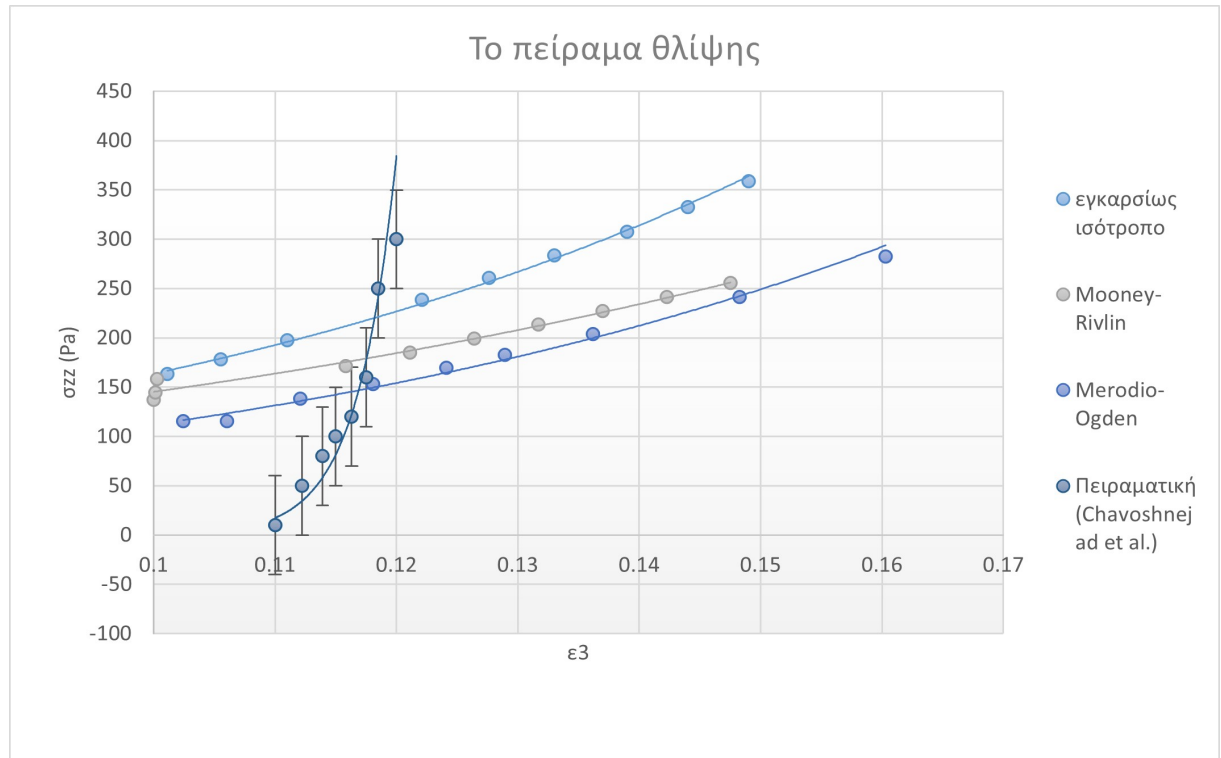
Η πρώτη προσομοίωση που έγινε, ήταν για μονοαξονικό εφελκυσμό, στην κατεύθυνση του άξονα x . Παρατίθενται τα σχετικά διαγράμματα:



Σχήμα 4.1: Αποτελέσματα τάσης-τεντώματος για μονοαξονικό εφελκυσμό στην κατεύθυνση το άξονα x . Για το μοντέλο εγκαρσίως ισότροπου υλικού, οι σταθερές που χρησιμοποιήθηκαν ήταν $c_1 = c_4 = 80 Pa$. Για το μοντέλο Mooney-Rivlin $c_1 = 106 Pa, c_2 = 250 Pa$. Για το Merodio-Ogden $\mu = 722 Pa, \gamma = -23 Pa$

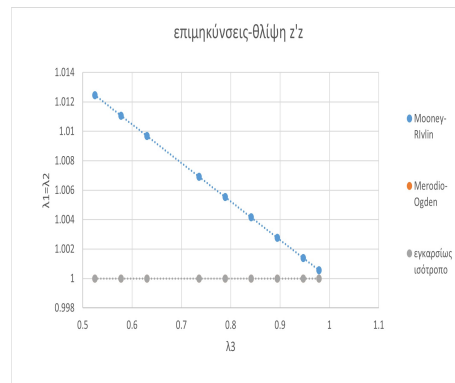
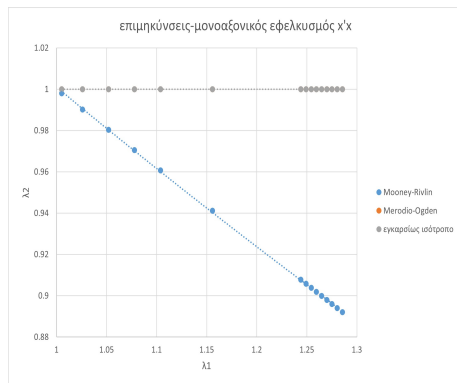
Σύμφωνα με την ανάλυση το μοντέλο για εγκαρσίως ισότροπο υλικό παρουσιάζει μεγαλύτερες παραμορφώσεις για τις ίδιες τιμές τάσεις σε σχέση με τα άλλα δύο μοντέλα. Αυτές οι παραμορφώσεις έρχονται σε συμφωνία με τις πειραματικές τιμές [58], για μικρές επιμηκύνσεις $\lambda_1 = 1 - 1.2$ αλλά αποκλίνουν για μεγαλύτερα φορτία. Τα μοντέλα Mooney-Rivlin και Merodio-Ogden έρχονται σε συμφωνία για τις μεγάλες τιμές τάσης, αλλά αποκλίνουν για τις μικρές.

Η δεύτερη ανάλυση, ήταν για το φαινόμενο θλίψης κατά τον άξονα z . Τα αποτελέσματα είναι τα παρακάτω:

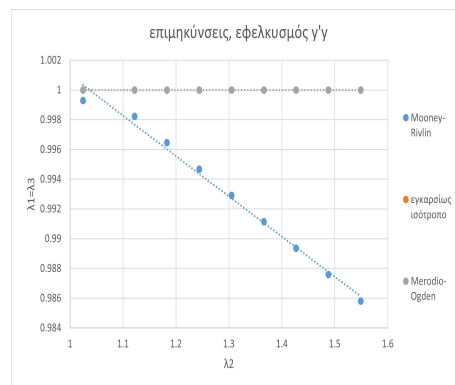
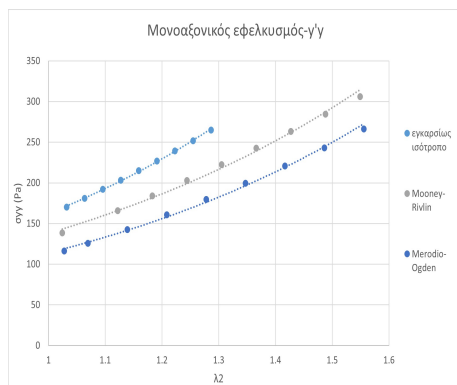


Σχήμα 4.2: Αποτελέσματα τάσης-τροπής για θλίψη στην κατεύθυνση το άξονα x . Για το μοντέλο εγκαρσίως ισότροπου υλικού, οι σταθερές που χρησιμοποιήθηκαν ήταν $c_1 = c_4 = 80 Pa$. Για το μοντέλο Mooney-Rivlin $c_1 = 60 Pa, c_2 = 6 Pa$. Για το Merodio-Ogden $\mu = 110 Pa, \gamma = -6 Pa$

Στη συγκεκριμένη ανάλυση οι μικρότερες τροπές για ίδια τάση εμφανίζονται στο εγκαρσίως ισότροπο μοντέλο, σε αντίθεση με την ανάλυση για τον εφελκυσμό στον άξονα x . Σε αυτή τη περίπτωση, το φορτίο γίνεται παράλληλα στις ίνες του δοκιμίου, και όχι κάθετα. Τα μοντέλα εμφανίζουν απόκλιση από τις πειραματικές τιμές [59], για μικρότερες τάσεις, ενώ αποτελούν καλή προσέγγιση για μεγαλύτερες τιμές της.



Σχήμα 4.3: Οι επιμηκύνσεις $\lambda_2 \approx \lambda_3$ συναρτήσει της επιμήκυνσης λ_1 για το πείραμα του εφελκυσμού (αριστερά), και οι επιμηκύνσεις $\lambda_2 \approx \lambda_1$ συναρτήσει της επιμήκυνσης λ_3 για το πείραμα της θλίψης (δεξιά)

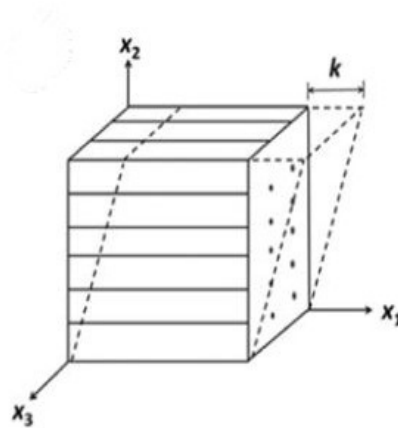


Σχήμα 4.4: Διάγραμμα τάσης-τεντώματος λ_2 για μονοαξονικό εφελκυσμό στην κατεύθυνση του άξονα y (αριστερά), και σύγκριση των επιμηκύνσεων λ_2 και $\lambda_3 \approx \lambda_1$ για το ίδιο φαινόμενο (δεξιά)

Για την ανάλυση του εφελκυσμού στην κατεύθυνση του άξονα y παρατηρούνται επιμηκύνσεις για μικρότερες τάσεις σε σχέσεις με τον εφελκυσμό στον άξονα x . Η διαφορά αυτή μπορεί να ερμηνευθεί παίρνοντας υπόψιν πως η ακαμψία του δοκιμίου προβλέπεται να είναι μεγαλύτερη παράλληλα στην κατεύθυνση των ινών και μικρότερη κάθετα στην κατεύθυνσή τους, όπως θα σχολιασθεί στη συνέχεια.

4.2 Διατμητικές Παραμορφώσεις

Θεωρούμε διατμητική παραμόρφωση, που επιβάλλεται στην κατεύθυνση των ινών, όπως στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 4.5: Διατμητική τάση στην κατεύθυνση των ινών

Για αυτήν την περίπτωση, ο τανυστής της βαθμίδας των μετατοπίσεων \mathbf{F} και ο τανυστής Cauchy-Green \mathbf{C} θα δίνονται από τους πίνακες:

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ k & k^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Οι Feng et al.(2013) και Murphy(2013) αναφέρουν, πως η συνάρτηση ενέργειας W πρέπει να ενέχει και τις δύο ανισοτροπικές ψευδο-αναλλοιώτες, ώστε να περιγραφούν σωστά οι μικρές διατμητικές παραμορφώσεις. Κατά συνέπεια, η συνάρτηση ενέργειας που θα χρησιμοποιηθεί για τη συγκεκριμένη ανάλυση, είναι η προτεινόμενη από τους Feng et al.[55,60]:

$$W = \frac{\mu}{2}((I_1 - 3) + \zeta(I_4 - 1)^2 + \phi I_5^*) \quad (4.2)$$

Όπου $I_5^* = I_5 - I_4^2$. Το παραπάνω μοντέλο θεωρείται το πιο απλό για την περιγραφή της ανισοτροπίας για μικρές διατμήσεις. Εδώ, το μ είναι ο συντελεστής διάτμησης, ενώ τα ζ και ϕ είναι αδιάστατες σταθερές.

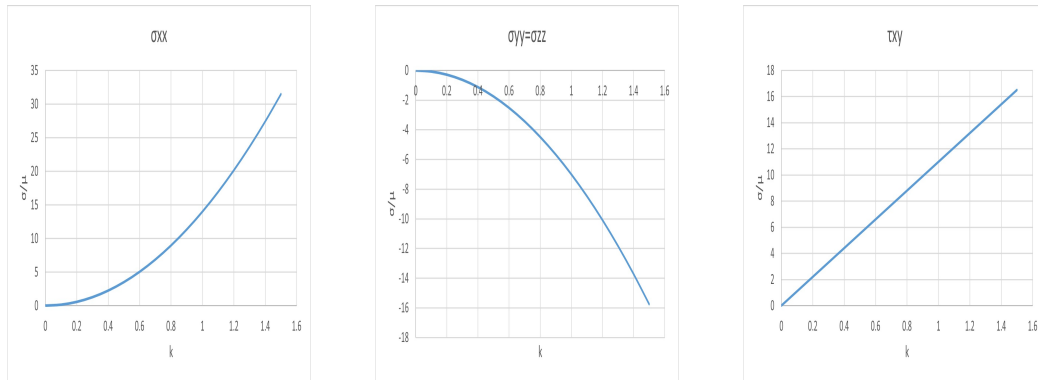
Οι ψευδοαναλλοιώτες για το συγκεκριμένο πείραμα δίνονται από τις σχέσεις:

$$I_4 = 1, I_5 = 1 + k^2, I_5^* = k^2 \quad (4.3)$$

Και ο τανυστής τάσης Cauchy που προκύπτει είναι ο :

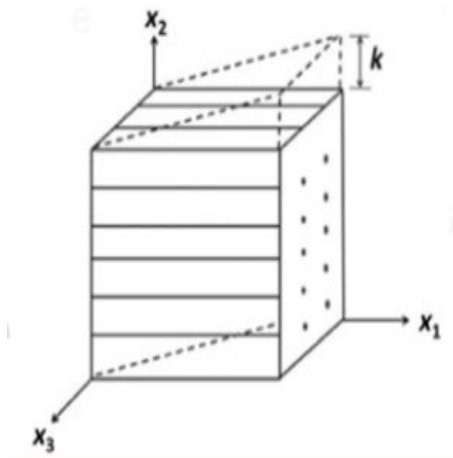
$$\sigma_{ij} = \mu \begin{bmatrix} \frac{2k^2}{3}(2\phi + 1) & k(\phi + 1) & 0 \\ k(\phi + 1) & \frac{-k^2}{3}(2\phi + 1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-k^2}{3}(2\phi + 1) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Παρουσιάζονται τα διαγράμματα της τάσης συναρτήσει του k :



Σχήμα 4.6: Η ανταπόκριση της τάσης για απλή διατμητική μετατόπιση k , για $\varphi=10$. Παρατηρείται πως οι ανταποκρίσεις είναι ανεξάρτητες του ζ - που συσχετίζεται με την επιμήκυνση των ινών

Για την περίπτωση που η διάτμηση γίνεται μέσω μετατόπισης που είναι εγκάρσια ως προς τις ίνες (σχήμα 4.7), ο τανυστής της βαθμίδας των μετατοπίσεων \mathbf{F} και ο τανυστής Cauchy-Green \mathbf{C} θα δίνονται από:



Σχήμα 4.7: Διατμητική τάση από μετατόπιση κάθετη των ινών

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_{ij} = \begin{bmatrix} k^2 + 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

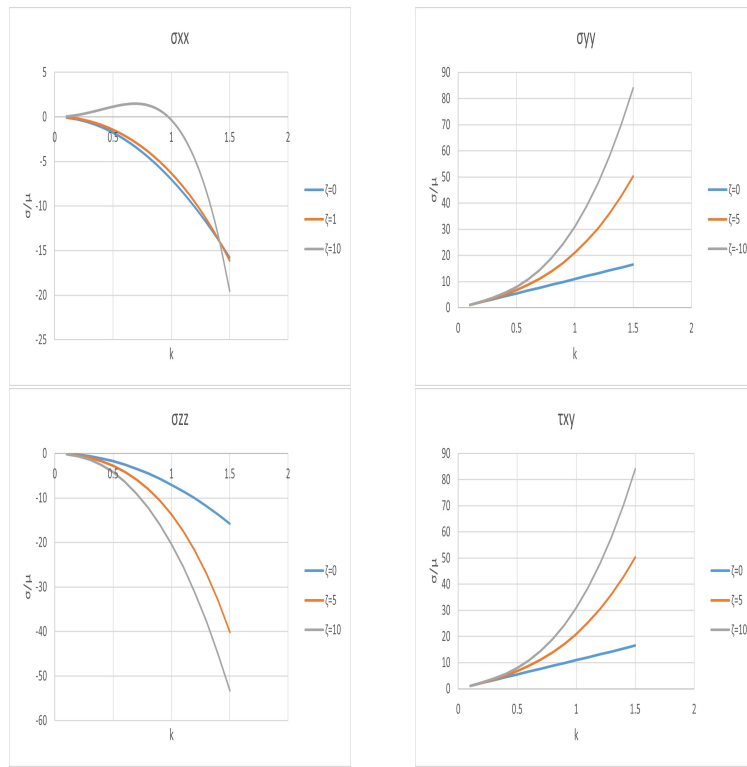
Οι ψευδοαναλλοιώτες για το συγκεκριμένο πείραμα δίνονται από τις σχέσεις:

$$I_4 = k^2, I_5 = (1 + k^2)^2, I_5^* = k^2 \quad (4.6)$$

Ενώ ο τανυστής τάσης Cauchy που προκύπτει είναι ο :

$$\sigma_{ij} = \mu \begin{bmatrix} \frac{-k^2}{3}(2\phi + 1 - 4\zeta + 2\zeta k^2) & k(\phi + 1) & 0 \\ k(\phi + 1 + 2\zeta k^2) & \frac{2k^2}{3}(2\phi + 1 - \zeta + 2\zeta k^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-k^2}{3}(2\phi + 1 + 2\zeta + 2\zeta k^2) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Οι ανταποκρίσεις της τάσης ως συνάρτηση του k παρουσιάζονται στα ακόλουθα διαγράμματα:



Σχήμα 4.8: Η ανταπόκριση της τάσης για απλή διαμητική μετατόπιση k , κάθετα στην κατεύθυνση των ινών, για $\varphi=10$

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Σε αυτή την εργασία μελετήθηκαν οι υπερελαστικές ανταποκρίσεις της λευκής ουσίας για διαφορετικά μοντέλα για διάφορα είδη φόρτισης. Τα μοντέλα που επιλέχθηκαν ήταν για εγκαρσίως ισότροπο υλικό, εγκαρσίως ισότροπο Feng, Mooney-Rivlin και Merodio-Ogden. Πειραματικά δεδομένα μονοαξονικού εφελκυσμού και θλίψης συνδυάζονται με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων για το τρισδιάστατο μοντέλο του δοκιμίου με στόχο την εξακρίβωση των μακροσκοπικών υλικών παραμέτρων του καταστατικού νόμου. Τα μοντέλα αποδείχθηκαν ικανά για να περιγράψουν τη συμπεριφορά κάποιων ιστών, στους οποίους οι ίνες ήταν σχετικά ευθύγραμμες, για το ανθρώπινο μεσολόβιο. Το μοντέλο εγκαρσίως ισότροπου υλικού αποδείχθηκε πιο επιτυχές για μικρές παραμορφώσεις ($\lambda = 1.1 - 1.2$) ενώ τα Mooney-Rivlin και Merodio-Ogden για μεγαλύτερες επιμηκύνσεις. Το αποτέλεσμα δηλώνει πως τα μοντέλα δε διαθέτουν το μηχανισμό περιγραφής της μεταβατικής κινηματικής των ινών[62]. Τα μοντέλα παρουσιάζουν μικρότερη παραμόρφωση παράλληλα στην κατεύθυνση των ινών, όπως προβλέπεται, παρά κάθετα. Για την περίπτωση της διάτμησης οι παράμετροι ϕ και ζ αναφέρονται στην ανισοτροπία και επιμήκυνση των ινών. Για μικρές τιμές της ϕ οι ανταποκρίσεις τάσης είναι μονοτονικές, αλλά αυτό αλλάζει όσο αυξάνεται η τιμή της ϕ . Οι ανταποκρίσεις τάσης για διάτμηση παράλληλα και εγκάρσια στις ίνες επιβαιώνουν το φαινόμενο ενίσχυσης του δοκιμίου λόγω ινών, για $\zeta > 0$. Η ανάλυση των διατμητικών τάσεων δείχνει ότι η διαφορά τους είναι συνάρτηση του ζ , και άρα η ανισοτροπική του συμπεριφορά υπό πεπερασμένη τάση είναι εν μέρει αποτέλεσμα του τεντώ-

ματος των ιών, παρόμοια με το φαινόμενο Roynting[60]. Τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν δε δηλώνουν τις πορώδεις, βισκοελαστικές ιδιότητες του δοκιμίου, ούτε την καμπύλωση των ιών. Αναμένεται πως η προβλεπτική ισχύς τους θα διευρυνθεί με την ένταξη αυτών[61,63].

Βιβλιογραφία

- [1] Alexander AL, Lee JE, Lazar M, Field AS. Diffusion tensor imaging of the brain. *Neurotherapeutics*. 2007;4(3):316-329. doi:10.1016/j.nurt.2007.05.011
- [2] Σημειώσεις του μαθήματος "Νευροανατομία (Κεντρικού Νευρικού Συστήματος)" του ΕΚΠΑ. Σύνδεσμος: <https://eclass.uoa.gr/modules/document/?course=MED740>
- [3] Chatelin, S., A. Constantinesco, and R. Willinger, Fifty years of brain tissue mechanical testing: From in vitro to in vivo investigations. *Biorheology*, 47(255-276), 2010.
- [4] Cheng, S., E.C. Clarke, and L.E. Bilston, Rheological properties of the tissues of the central nervous system: a review. *Med Eng Phys*, 30(10):1318- 37, 2008.
- [5] Miller, K., et al., Mechanical properties of brain tissue in-vivo: experiment and computer simulation. *J Biomech*, 33(11):1369-76, 2000.
- [6] Miller, K., Constitutive model of brain tissue suitable for finite element analysis of surgical procedures. *Journal of Biomechanics*, 32(5):531-537, 1999.
- [7] Gefen, A. and S.S. Margulies, Are in vivo and in situ brain tissues mechanically similar? *J Biomech*, 37(1339-1352), 2004.
- [8] Elkin, B.S., A. Ilankovan, and B. Morrison Iii, A detailed viscoelastic characterization of the rat brain. *J Neurotrauma*, 2011.
- [9] J.A.W. van Dommelen, et al., Mechanical properties of brain tissue by indentation: interregional variation. *J Mech Behav Biomed Mater*, 3(2):158- 66, 2010.
- [10] Cheng, S. and L.E. Bilston, Unconfined compression of white matter. *J Biomech*, 40(1):117-24, 2007.
- [11] Hrapko, M., et al., Characterisation of the mechanical behaviour of brain tissue in compression and shear. *Biorheology*, 45(6):663-76, 2008.
- [12] Christ, A.F., et al., Mechanical difference between white and gray matter in the rat cerebellum measured by scanning force microscopy. *J Biomech*, 43(15):2986-92, 2010.
- [13] Elkin, B.S., A. Ilankova, and B. Morrison, Dynamic, Regional Mechanical Properties of the Porcine Brain: Indentation in the Coronal Plane. *J Biomech Eng-T Asme*, 133(7):2011

- [14] Axel, L. and L. Dougherty, MR imaging of motion with spatial modulation of magnetization. *Radiology*, 171(3):841-5, 1989.
- [15] Feng, Y., et al., Relative brain displacement and deformation during constrained mild frontal head impact. *J R Soc Interface*, 7(53):1677-88, 2010.
- [16] Vappou, J., et al., Magnetic resonance elastography compared with rotational rheometry for in vitro brain tissue viscoelasticity measurement. *Magma*, 20(5-6):273-8, 2007.
- [17] Riek, K., et al., Wide-range dynamic magnetic resonance elastography. *J Biomech*, 44(7):1380-6, 2011.
- [18] Atay, S.M., et al., Measurement of the dynamic shear modulus of mouse brain tissue in vivo by magnetic resonance elastography. *J Biomech Eng*, 130(21013), 2008.
- [19] Klatt, D., et al., Noninvasive assessment of the rheological behavior of human organs using multifrequency MR elastography: a study of brain and liver viscoelasticity. *Phys Med Biol*, 52(24):7281-94, 2007.
- [20] Klatt, D., et al., Viscoelastic properties of liver measured by oscillatory rheometry and multifrequency magnetic resonance elastography. *Biorheology*, 47(2):133-41, 2010.
Asbach, P., et al., Viscoelasticity-based staging of hepatic fibrosis with multifrequency MR elastography. *Radiology*, 257(1):80-6, 2010.
- [21] Sinkus, R., et al., Imaging anisotropic and viscous properties of breast tissue by magnetic resonance-elastography. *Magn Reson Med*, 53(2):372-87, 2005.
- [22] Sinkus, R., et al., Viscoelastic shear properties of in vivo breast lesions measured by MR elastography. *Magn Reson Imaging*, 23(2):159-65, 2005.
- [23] Xydeas, T., et al., Magnetic resonance elastography of the breast: correlation of signal intensity data with viscoelastic properties. *Invest Radiol*, 40(7):412-20, 2005.
- [24] Elgeti, T., et al., Cardiac magnetic resonance elastography: toward the diagnosis of abnormal myocardial relaxation. *Invest Radiol*, 45(12):782-7, 2010.
- [25] Li, S.Y., et al., A feasibility study of MR elastography in the diagnosis of prostate cancer at 3.0T. *Acta Radiol.*, 52(3):354-358, 2011.
- [26] Chopra, R., et al., In Vivo MR Elastography of the Prostate Gland Using a Transurethral Actuator. *Magn Reson Med*, 62(3):665-671, 2009.
- [27] Bensamoun, S.F., et al., Determination of thigh muscle stiffness using magnetic resonance elastography. *J Magn Reson Imaging*, 23(2):242-7, 2006.
- [28] Coronado, V.G., et al., Surveillance for traumatic brain injury-related deaths- -United States, 1997-2007. *MMWR Surveill Summ*, 60(5):1-32, 2011.
- [29] Goldstein, M., Traumatic brain injury: A silent epidemic. *Annals of Neurology*, 27(3):327-327, 1990.

- [30] Miller, K., Constitutive model of brain tissue suitable for finite element analysis of surgical procedures. *Journal of Biomechanics*, 32(5):531-537, 1999.
- [31] Kyriacou, S.K., et al., Brain mechanics For neurosurgery: modeling issues. *Biomech Model Mechanobiol*, 1(2):151-64, 2002.
- [32] Limbic system structure volumes and associated neurocognitive functioning in former NFL players Lepage C, Muehlmann M, Tripodis Y, Hufschmidt J, Stamm J, Green K, Wrobel P, Schultz V, Weir I, Alosco ML, Baugh CM, Fritts NG, Martin BM, Chaisson C, Coleman MJ, Lin AP, Pasternak O, Makris N, Stern RA, Shenton ME, Koerte IK *Brain Imaging Behav* 2019 Jun;13(3):725-734
- [33] Striato-nigro-striatal tract dispersion abnormalities in patients with chronic schizophrenia Rivas-Grajales AM, Savadjiev P, Kubicki M, Nestor PG, Niznikiewicz M, McCarley RW, Westin CF, Shenton ME, Levitt JJ *Brain Imaging Behav* 2019 Oct;13(5):1236-1245
- [34] Patients with chronic bipolar disorder exhibit widespread increases in extracellular free water Tuozzo C, Lyall AE, Pasternak O, James ACD, Crow TJ, Kubicki M, *Bipolar Disord* 2018 09;20(6):523-530
- [35] Detecting microstructural white matter abnormalities of frontal pathways in children with ADHD using advanced diffusion models Wu W, McAnulty G, Hamoda HM, Sarill K, Karmacharya S, Gagoski B, Ning L, Grant PE, Shenton ME, Waber DP, Makris N, Rath Y, *Brain Imaging Behav* 2019 Apr;
- [36] Childhood adversity associated with white matter alteration in the corpus callosum, corona radiata, and uncinate fasciculus of psychiatrically healthy adults McCarthy-Jones S, Oestreich LKL, Lyall AE, Kikinis Z, Newell DT, Savadjiev P, Shenton ME, Kubicki M, Pasternak O, Whitford TJ, *Brain Imaging Behav* 2018 Apr;12(2):449-458
- [37] Larry A. Taber, NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY Applications in Biomechanics Copyright © 2004 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [38] O'Donnell LJ, Westin CF. An introduction to diffusion tensor image analysis. *Neurosurg Clin N Am*. 2011 Apr;22(2):185-96, viii.
- [39] Johansen-Berg Heidi, Behrens Timothy E.J., editors. Diffusion MRI: from quantitative measurement to in-vivo neuroanatomy. *Elsevier*; 2009.
- [40] Sonia Pujol, Diffusion MRI Analysis. Παρουσίαση του εγχειριδίου του λογισμικού 3D-Slicer
- [41] <https://www.slicer.org>
- [42] Kikinis R, Pieper SD, Vosburgh K (2014) 3D Slicer: a platform for subject-specific image analysis, visualization, and clinical support. *Intraoperative Imaging Image-Guided Therapy*, Ferenc A. Jolesz, Editor 3(19):277–289 ISBN: 978-1-4614-7656-6
- [43] Kapur, Tina; Pieper, Steve; Fedorov, Andriy; Fillion-Robin, J-C; Halle, Michael; O'Donnell, Lauren; Lasso, Andras; Ungi, Tamas; Pinter, Csaba; Finet, Julien; Pujol, Sonia;

- Jagadeesan, Jayender; Tokuda, Junichi; Norton, Isaiah; Estepar, Raul San Jose; Gering, David; Aerts, Hugo J W L; Jakab, Marianna; Hata, Nobuhiko; Ibanez, Luiz; Blezek, Daniel; Miller, Jim; Aylward, Stephen; Grimson, W Eric L; Fichtinger, Gabor; Wells, William M; Lorensen, William E; Schroeder, Will; Kikinis, Ron; 2016. "Increasing the Impact of Medical Image Computing Using Community-Based Open-Access Hackathons: The NA-MIC and 3D Slicer Experience." *Medical Image Analysis* 33 (October): 176–80.
- [44] Fedorov A., Beichel R., Kalpathy-Cramer J., Finet J., Fillion-Robin J-C., Pujol S., Bauer C., Jennings D., Fennessy F.M., Sonka M., Buatti J., Aylward S.R., Miller J.V., Pieper S., Kikinis R. 3D Slicer as an Image Computing Platform for the Quantitative Imaging Network. *Magn Reson Imaging*. 2012 Nov;30(9):1323-41. PMID: 22770690. PMCID: PMC3466397.
- [45] Pieper S, Lorensen B, Schroeder W, Kikinis R. The NA-MIC Kit: ITK, VTK, Pipelines, Grids and 3D Slicer as an Open Platform for the Medical Image Computing Community. Proceedings of the 3rd IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: *From Nano to Macro* 2006; 1:698-701.
- [46] Pieper S, Halle M, Kikinis R. 3D SLICER. Proceedings of the 1st IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: *From Nano to Macro* 2004; 1:632-635.
- [47] Gering D.T., Nabavi A., Kikinis R., Hata N., O'Donnell L., Grimson W.E.L., Jolesz F.A., Black P.M., Wells III W.M. An Integrated Visualization System for Surgical Planning and Guidance using Image Fusion and an Open MR. *J Magn Reson Imaging*. 2001 Jun;13(6):967-75. PMID: 11382961.
- [48] Gering D.T., Nabavi A., Kikinis R., Grimson W.E.L., Hata N., Everett P., Jolesz F.A., Wells III W.M. An Integrated Visualization System for Surgical Planning and Guidance using Image Fusion and Interventional Imaging. *Int Conf Med Image Comput Comput Assist Interv*. 1999 Sep;2:809-19.
- [49] SAAD, Yousef. Iterative methods for sparse linear systems. *siam*, 2003.
- [50] OGDEN, Ray W. Non-linear elastic deformations. 1984.
- [51] Morrow DA, Haut Donahue TL, Odegard GM, Kaufman KR. Transversely isotropic tensile material properties of skeletal muscle tissue. *J Mech Behav Biomed Mater*. 2010;3:124–129.
- [52] Humphrey JD. Continuum Mechanics, Cardiovascular Solid Mechanics. Springer; New York: 2002. pp. 68–106.
- [53] Ning XG, Zhu QL, Lanir Y, Margulies SS. A transversely isotropic viscoelastic constitutive equation for Brainstem undergoing finite deformation. *J Biomech Eng—Trans ASME*. 2006;128:925–933.
- [54] Lake SP, Miller KS, Elliott DM, Soslowsky LJ. Tensile properties and fiber alignment of human supraspinatus tendon in the transverse direction demonstrate inhomogeneity, nonlinearity, and regional isotropy. *J Biomech*. 2010;43:727–732.

- [55] Feng Y, Okamoto RJ, Namani R, Genin GM, Bayly PV. Measurements of mechanical anisotropy in brain tissue and implications for transversely isotropic material models of white matter. *J Mech Behav Biomed*. 2013;23:117–132.
- [56] Merodio J, Ogden RW. Instabilities and loss of ellipticity in fiber-reinforced compressible non-linearly elastic solids under plane deformation. *Int J Solids Struct*. 2003a;40:4707–4727.
- [57] Pierce DM, Ricken T, Holzapfel GA. A hyperelastic biphasic fibre-reinforced model of articular cartilage considering distributed collagen fibre orientations: continuum basis, computational aspects and applications *Comput Methods Biomech Biomed Eng*. 2013;16:1344–1361.
- [58] Zhang, Wei , Liu, Yi-fan , Liu, Li-fu ,Niu, Ying Ma, Jian-li , Wu, C.W.. (2017). Effect of vitro preservation on mechanical properties of brain tissue. *Journal of Physics: Conference Series*. 842. 012005. 10.1088/1742-6596/842/1/012005.
- [59] Poorya Chavoshnejad, Guy K. German, Mir Jalil Razavi, Hyperelastic material properties of axonal fibers in brain white matter, *Brain Multiphysics*, Volume 2, 2021, 100035, ISSN 2666-5220, <https://doi.org/10.1016/j.brain.2021.100035>.
- [60] Feng Y, Okamoto RJ, Genin GM, Bayly PV. On the accuracy and fitting of transversely isotropic material models. *J Mech Behav Biomed Mater*. 2016;61:554-566. doi:10.1016/j.jmbbm.2016.04.024
- [61] Li, W., Shepherd, D.E.T. , Espino, D.M. Investigation of the Compressive Viscoelastic Properties of Brain Tissue Under Time and Frequency Dependent Loading Conditions. *Ann Biomed Eng* 49, 3737–3747 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10439-021-02866-0>
- [62] Pan, Y., Shreiber, D. I., and Pelegri, A. A. (January 13, 2021). "On the Transversely Isotropic, Hyperelastic Response of Central Nervous System White Matter Using a Hybrid Approach." ASME. ASME J of Medical Diagnostics. February 2021; 4(1): 011005. <https://doi.org/10.1115/1.4049168>
- [63] Meaney, D.F., Relationship between structural modeling and hyperelastic material behavior: application to CNS white matter. *Biomech Model Mechanobiol*, 1(4):279-93, 2003

Παράρτημα Α □

Μαθηματικές Σχέσεις

Για την εύρεση τιμών στα διαγράμματα χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Newton-Raphson. Η διαδικασία εύρεσης ριζών γίνεται από την εξίσωση:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{A}\square.1)$$

Όπου f είναι η συνάρτηση της οποίας οι ρίζες είναι υπό αναζήτηση, f' η παράγωγός της, x_n η προσέγγιση n -οστού βαθμού (με x_0 η πρώτη αυθαίρετη προσέγγιση) και x_{n+1} η καινούργια προσέγγιση.

Το πλέγμα του μεσολοβίου που παράχθηκε, αποτελεί ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων προβλήματος Dirichlet. Παρατίθενται οι σχετικές σχέσεις για τυπικό πρόβλημα στις 2 διαστάσεις:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= f(x, y), \Omega \\ u &= 0, \partial\Omega \end{aligned} \quad (\text{A}\square.2)$$

Η ασθενής μορφή είναι (για αυθαίρετο v):

$$\int_{\Omega} f v ds = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v ds = -\phi(u, v) \quad (\text{A}\square.3)$$

Παρατίθεται ένας αντιπροσωπευτικός κώδικας(στο λογισμικό freefem++) που χρησιμοποιήθηκε για την αριθμητική επίλυση των προβλημάτων. Λόγω μεγέθους, δεν διατίθενται όλοι στο σύνολό τους, και οι υπόλοιποι θα παραδωθούν σε ηλεκτρονική μορφή. Ο συγκεκριμένος είναι για εγκαρσίως ισότροπο υλικό σε βαρυτικό πεδίο.

```
// Macros for the gradient of a vector field (u1, u2, u3) macro grad11(u1, u2, u3) (dx(u1)) //
macro grad21(u1, u2, u3) (dy(u1)) // macro grad31(u1, u2, u3) (dz(u1)) // macro grad12(u1, u2,
u3) (dx(u2)) // macro grad22(u1, u2, u3) (dy(u2)) // macro grad32(u1, u2, u3) (dz(u2)) // macro
grad13(u1, u2, u3) (dx(u3)) // macro grad23(u1, u2, u3) (dy(u3)) // macro grad33(u1, u2 ,u3)
(dz(u3)) //
```

```
// Macros for the deformation gradient
macro F11(u1, u2, u3) (1.0 + grad11(u1,u2,u3)) // macro F12(u1, u2, u3) (0.0 + grad12(u1,u2,u3))
// macro F13(u1, u2, u3) (0.0 + grad13(u1,u2,u3)) // macro F21(u1, u2, u3) (0.0 + grad21(u1,u2,u3))
// macro F22(u1, u2, u3) (1.0 + grad22(u1,u2,u3)) // macro F23(u1, u2, u3) (0.0 + grad23(u1,u2,u3))
// macro F31(u1, u2, u3) (0.0 + grad31(u1,u2,u3)) // macro F32(u1, u2, u3) (0.0 + grad32(u1,u2,u3))
// macro F33(u1, u2, u3) (1.0 + grad33(u1,u2,u3)) //
```

```
// Macros for the incremental deformation gradient
macro dF11(varu1, varu2, varu3) (grad11(varu1, varu2, varu3)) // macro dF12(varu1, varu2,
varu3) (grad12(varu1, varu2, varu3)) // macro dF13(varu1, varu2, varu3) (grad13(varu1, varu2,
varu3)) // macro dF21(varu1, varu2, varu3) (grad21(varu1, varu2, varu3)) // macro dF22(varu1,
varu2, varu3) (grad22(varu1, varu2, varu3)) // macro dF23(varu1, varu2, varu3) (grad23(varu1,
varu2, varu3)) // macro dF31(varu1, varu2, varu3) (grad31(varu1, varu2, varu3)) // macro dF32(varu1,
varu2, varu3) (grad32(varu1, varu2, varu3)) // macro dF33(varu1, varu2, varu3) (grad33(varu1,
varu2, varu3)) //
```

```
// Macros for the deformation gradient cofactors
macro E11(u1, u2, u3) (F22(u1, u2, u3)*F33(u1, u2, u3)-F23(u1, u2, u3)*F32(u1, u2, u3)) //
macro E12(u1, u2, u3) (F21(u1, u2, u3)*F33(u1, u2, u3)-F23(u1, u2, u3)*F31(u1, u2, u3)) //
macro E13(u1, u2, u3) (F21(u1, u2, u3)*F32(u1, u2, u3)-F22(u1, u2, u3)*F31(u1, u2, u3)) //
macro E21(u1, u2, u3) (F12(u1, u2, u3)*F33(u1, u2, u3)-F13(u1, u2, u3)*F32(u1, u2, u3)) //
macro E22(u1, u2, u3) (F11(u1, u2, u3)*F33(u1, u2, u3)-F13(u1, u2, u3)*F31(u1, u2, u3)) //
macro E23(u1, u2, u3) (F11(u1, u2, u3)*F32(u1, u2, u3)-F12(u1, u2, u3)*F31(u1, u2, u3)) //
macro E31(u1, u2, u3) (F12(u1, u2, u3)*F23(u1, u2, u3)-F13(u1, u2, u3)*F22(u1, u2, u3)) //
macro E32(u1, u2, u3) (F11(u1, u2, u3)*F23(u1, u2, u3)-F13(u1, u2, u3)*F21(u1, u2, u3)) //
macro E33(u1, u2, u3) (F11(u1, u2, u3)*F22(u1, u2, u3)-F12(u1, u2, u3)*F21(u1, u2, u3)) //
```

```
// Macro for the determinant of the deformation gradient
macro J(u1, u2, u3) (F11(u1, u2, u3)*E11(u1, u2 ,u3) - F12(u1, u2, u3)*E12(u1, u2, u3) + F13(u1,
u2, u3)*E13(u1, u2, u3)) //
```

```
// Macros for the inverse of the deformation gradient
```

```

macro Finv11 (u1, u2, u3) ( E11(u1, u2, u3) / J(u1, u2, u3)) // macro Finv12 (u1, u2, u3)
(-E21(u1, u2, u3) / J(u1, u2, u3)) // macro Finv13 (u1, u2, u3) (E31(u1, u2, u3) / J(u1, u2, u3)) //
macro Finv21 (u1, u2, u3) (-E12(u1, u2, u3) / J(u1, u2, u3)) // macro Finv22 (u1, u2, u3) (E22(u1,
u2, u3) / J(u1, u2, u3)) // macro Finv23 (u1, u2, u3) (-E32(u1, u2, u3) / J(u1, u2, u3)) // macro
Finv31 (u1, u2, u3) (E13(u1, u2, u3) / J(u1, u2, u3)) // macro Finv32 (u1, u2, u3) (-E23(u1, u2,
u3) / J(u1, u2, u3)) // macro Finv33 (u1, u2, u3) (E33(u1, u2, u3) / J(u1, u2, u3)) //

```

```

// Macros for the square of the inverse of the deformation gradient
macroFFinv11(u1, u2, u3)(Finv11(u1, u2, u3)2 + Finv12(u1, u2, u3) *
Finv21(u1, u2, u3) + Finv13(u1, u2, u3) * Finv31(u1, u2, u3))//
macroFFinv12(u1, u2, u3)(Finv12(u1, u2, u3) * (Finv11(u1, u2, u3)
+ Finv22(u1, u2, u3)) + Finv13(u1, u2, u3) * Finv32(u1, u2, u3))//
macroFFinv13(u1, u2, u3)(Finv11(u1, u2, u3) * Finv13(u1, u2, u3)
+ Finv12(u1, u2, u3) * Finv23(u1, u2, u3) + Finv13(u1, u2, u3) * Finv33(u1, u2, u3))//
macroFFinv21(u1, u2, u3)(Finv21(u1, u2, u3) * (Finv11(u1, u2, u3)
+ Finv22(u1, u2, u3)) + Finv23(u1, u2, u3) * Finv31(u1, u2, u3))//
macroFFinv22(u1, u2, u3)(Finv12(u1, u2, u3) * Finv21(u1, u2, u3)
+ Finv22(u1, u2, u3)2 + Finv23(u1, u2, u3) * Finv32(u1, u2, u3))//
macroFFinv23(u1, u2, u3)(Finv21(u1, u2, u3) * Finv13(u1, u2, u3)
+ Finv22(u1, u2, u3) * Finv23(u1, u2, u3) + Finv23(u1, u2, u3) * Finv33(u1, u2, u3))//
macroFFinv31(u1, u2, u3)(Finv11(u1, u2, u3) * Finv31(u1, u2, u3)
+ Finv32(u1, u2, u3) * Finv21(u1, u2, u3) + Finv31(u1, u2, u3) * Finv33(u1, u2, u3))//
macroFFinv32(u1, u2, u3)(Finv12(u1, u2, u3) * Finv31(u1, u2, u3)
+ Finv22(u1, u2, u3) * Finv32(u1, u2, u3) + Finv32(u1, u2, u3) * Finv33(u1, u2, u3))//
macroFFinv33(u1, u2, u3)(Finv13(u1, u2, u3) * Finv31(u1, u2, u3)
+ Finv23(u1, u2, u3) * Finv32(u1, u2, u3) + Finv33(u1, u2, u3)2)//

```

```

// Macros for the inverse of the transpose of the deformation gradient
macro FinvT11(u1, u2, u3) (Finv11(u1, u2, u3)) // macro FinvT12(u1, u2, u3) (Finv21(u1, u2,
u3)) // macro FinvT13(u1, u2, u3) (Finv31(u1, u2, u3)) // macro FinvT21(u1, u2, u3) (Finv12(u1,
u2, u3)) // macro FinvT22(u1, u2, u3) (Finv22(u1, u2, u3)) // macro FinvT23(u1, u2, u3) (Finv32(u1,
u2, u3)) // macro FinvT31(u1, u2, u3) (Finv13(u1, u2, u3)) // macro FinvT32(u1, u2, u3) (Finv23(u1,
u2, u3)) // macro FinvT33(u1, u2, u3) (Finv33(u1, u2, u3)) //

```

```

// The left Cauchy-Green strain tensor
macroB11(u1, u2, u3)(F11(u1, u2, u3)2 + F12(u1, u2, u3)2 + F13(u1, u2, u3)2)//
macroB12(u1, u2, u3)(F11(u1, u2, u3)*F21(u1, u2, u3)+F12(u1, u2, u3)*F22(u1, u2, u3)+
F13(u1, u2, u3) * F23(u1, u2, u3))//
macroB13(u1, u2, u3)(F11(u1, u2, u3)*F31(u1, u2, u3)+F12(u1, u2, u3)*F32(u1, u2, u3)+
F13(u1, u2, u3) * F33(u1, u2, u3))//
macroB21(u1, u2, u3)(F21(u1, u2, u3)*F11(u1, u2, u3)+F22(u1, u2, u3)*F12(u1, u2, u3)+
F13(u1, u2, u3) * F23(u1, u2, u3))//
macroB22(u1, u2, u3)(F21(u1, u2, u3)*F21(u1, u2, u3)+F22(u1, u2, u3)*F22(u1, u2, u3)+
F23(u1, u2, u3) * F23(u1, u2, u3))//
macroB23(u1, u2, u3)(F21(u1, u2, u3)*F31(u1, u2, u3)+F22(u1, u2, u3)*F32(u1, u2, u3)+

```



```

F23(u1, u2, u3) * F33(u1, u2, u3))//
macroB31(u1, u2, u3)(F11(u1, u2, u3)*F31(u1, u2, u3)+F12(u1, u2, u3)*F32(u1, u2, u3)+
F13(u1, u2, u3) * F33(u1, u2, u3))//
macroB32(u1, u2, u3)(F21(u1, u2, u3)*F31(u1, u2, u3)+F22(u1, u2, u3)*F32(u1, u2, u3)+
F23(u1, u2, u3) * F33(u1, u2, u3))//
macroB33(u1, u2, u3)(F31(u1, u2, u3)*F31(u1, u2, u3)+F32(u1, u2, u3)*F32(u1, u2, u3)+
F33(u1, u2, u3) * F33(u1, u2, u3))//

```

```

// The 4th Invariant I4
macro I4(u1, u2, u3) (B33(u1, u2, u3)/2 -1/2) //

```

```

//=====
// The macros for the auxiliary tensors (D0, D1, D2, ...): Begin

```

```

/////The tensor quantity  $D0 = F_n(\delta F_{n+1})^T$ 

```

```

macro d0Aux11 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF11(varu1, varu2, varu3) * F11(u1, u2,
u3) + dF12(varu1, varu2, varu3) * F12(u1, u2, u3) + dF13(varu1, varu2, varu3) * F13(u1, u2,
u3)) // macro d0Aux12 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF21(varu1, varu2, varu3) * F11(u1,
u2, u3) + dF22(varu1, varu2, varu3) * F12(u1, u2, u3) + dF23(varu1, varu2, varu3) * F13(u1, u2,
u3)) // macro d0Aux13 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF31(varu1, varu2, varu3) * F11(u1,
u2, u3) + dF32(varu1, varu2, varu3) * F12(u1, u2, u3) + dF33(varu1, varu2, varu3) * F13(u1, u2,
u3)) // macro d0Aux21 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF11(varu1, varu2, varu3) * F21(u1,
u2, u3) + dF12(varu1, varu2, varu3) * F22(u1, u2, u3) + dF13(varu1, varu2, varu3) * F23(u1, u2,
u3)) // macro d0Aux22 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF21(varu1, varu2, varu3) * F21(u1,
u2, u3) + dF22(varu1, varu2, varu3) * F22(u1, u2, u3) + dF23(varu1, varu2, varu3) * F23(u1, u2,
u3)) // macro d0Aux23 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF31(varu1, varu2, varu3) * F21(u1,
u2, u3) + dF32(varu1, varu2, varu3) * F22(u1, u2, u3) + dF33(varu1, varu2, varu3) * F23(u1, u2,
u3)) // macro d0Aux31 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF11(varu1, varu2, varu3) * F31(u1,
u2, u3) + dF12(varu1, varu2, varu3) * F32(u1, u2, u3) + dF13(varu1, varu2, varu3) * F33(u1, u2,
u3)) // macro d0Aux32 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF21(varu1, varu2, varu3) * F31(u1,
u2, u3) + dF22(varu1, varu2, varu3) * F32(u1, u2, u3) + dF23(varu1, varu2, varu3) * F33(u1, u2,
u3)) // macro d0Aux33 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF31(varu1, varu2, varu3) * F31(u1,
u2, u3) + dF32(varu1, varu2, varu3) * F32(u1, u2, u3) + dF33(varu1, varu2, varu3) * F33(u1,
u2, u3)) //

```

```

////// The tensor quantity  $D1 = D0 + D0^T$  macro d1Aux11 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3)
(2.0 * d0Aux11 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ) // macro d1Aux12 (u1, u2, u3, varu1, varu2,
varu3) (d0Aux12 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) + d0Aux21 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) )
// macro d1Aux13 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (d0Aux13 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) +
d0Aux31 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ) // macro d1Aux21 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3)
(d1Aux12 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3)) // macro d1Aux22 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3)
(2.0 * d0Aux22 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ) // macro d1Aux23 (u1, u2, u3, varu1, varu2,

```

varu3) (d0Aux23 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) + d0Aux32 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3))
 // macro d1Aux31 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (d0Aux13 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) +
 d0Aux31 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3)) // macro d1Aux32 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3)
 (d0Aux23 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) + d0Aux32 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3)) // macro
 d1Aux33 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (2.0 * d0Aux33 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3)) //

/// The tensor quantity $D2 = F_n^{-T} dF_{n+1}$

macro d2Aux11 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF11(varu1, varu2, varu3) * FinvT11(u1,
 u2, u3) + dF21(varu1, varu2, varu3) * FinvT12(u1, u2, u3) + dF31(varu1, varu2, varu3) * FinvT13(u1,
 u2, u3)) // macro d2Aux12 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF12(varu1, varu2, varu3) * FinvT11(u1,
 u2, u3) + dF22(varu1, varu2, varu3) * FinvT12(u1, u2, u3) + dF32(varu1, varu2, varu3) * FinvT13(u1,
 u2, u3)) // macro d2Aux13 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF13(varu1, varu2, varu3) * FinvT11(u1,
 u2, u3) + dF23(varu1, varu2, varu3) * FinvT12(u1, u2, u3) + dF33(varu1, varu2, varu3) * FinvT13(u1,
 u2, u3)) // macro d2Aux21 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF11(varu1, varu2, varu3) * FinvT21(u1,
 u2, u3) + dF21(varu1, varu2, varu3) * FinvT22(u1, u2, u3) + dF31(varu1, varu2, varu3) * FinvT23(u1,
 u2, u3)) // macro d2Aux22 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF12(varu1, varu2, varu3) * FinvT21(u1,
 u2, u3) + dF22(varu1, varu2, varu3) * FinvT22(u1, u2, u3) + dF32(varu1, varu2, varu3) * FinvT23(u1,
 u2, u3)) // macro d2Aux23 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF13(varu1, varu2, varu3) * FinvT21(u1,
 u2, u3) + dF23(varu1, varu2, varu3) * FinvT22(u1, u2, u3) + dF33(varu1, varu2, varu3) * FinvT23(u1,
 u2, u3)) // macro d2Aux31 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF11(varu1, varu2, varu3) * FinvT31(u1,
 u2, u3) + dF21(varu1, varu2, varu3) * FinvT32(u1, u2, u3) + dF31(varu1, varu2, varu3) * FinvT33(u1,
 u2, u3)) // macro d2Aux32 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF12(varu1, varu2, varu3) * FinvT31(u1,
 u2, u3) + dF22(varu1, varu2, varu3) * FinvT32(u1, u2, u3) + dF32(varu1, varu2, varu3) * FinvT33(u1,
 u2, u3)) // macro d2Aux33 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) (dF13(varu1, varu2, varu3) * FinvT31(u1,
 u2, u3) + dF23(varu1, varu2, varu3) * FinvT32(u1, u2, u3) + dF33(varu1, varu2, varu3) * FinvT33(u1,
 u2, u3)) //

/// The tensor quantity $D3 = F_n^{-2} dF_{n+1}$

macro d3Aux11 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3, w1, w2, w3) (dF11(varu1, varu2, varu3)
 *FFinv11(u1, u2, u3) *grad11(w1, w2, w3) + dF21(varu1, varu2, varu3) *FFinv12(u1, u2, u3)
 *grad11(w1, w2, w3) + dF31(varu1, varu2, varu3) *FFinv13(u1, u2, u3) *grad11(w1, w2, w3)
 + dF11(varu1, varu2, varu3) *FFinv21(u1, u2, u3) *grad12(w1, w2, w3) + dF21(varu1, varu2,
 varu3) *FFinv22(u1, u2, u3) *grad12(w1, w2, w3) + dF31(varu1, varu2, varu3) *FFinv23(u1,
 u2, u3) *grad12(w1, w2, w3) + dF11(varu1, varu2, varu3) *FFinv31(u1, u2, u3) *grad13(w1,
 w2, w3) + dF21(varu1, varu2, varu3) *FFinv32(u1, u2, u3) *grad13(w1, w2, w3) + dF31(varu1,
 varu2, varu3) *FFinv33(u1, u2, u3) *grad13(w1, w2, w3)) //

macro d3Aux12 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3, w1, w2, w3) (dF12(varu1, varu2, varu3)
 *FFinv11(u1, u2, u3) *grad11(w1, w2, w3) + dF22(varu1, varu2, varu3) *FFinv12(u1, u2, u3)
 *grad11(w1, w2, w3) + dF32(varu1, varu2, varu3) *FFinv13(u1, u2, u3) *grad11(w1, w2, w3)
 + dF12(varu1, varu2, varu3) *FFinv21(u1, u2, u3) *grad12(w1, w2, w3) + dF22(varu1, varu2,
 varu3) *FFinv22(u1, u2, u3) *grad12(w1, w2, w3) + dF32(varu1, varu2, varu3) *FFinv23(u1,
 u2, u3) *grad12(w1, w2, w3) + dF12(varu1, varu2, varu3) *FFinv31(u1, u2, u3) *grad13(w1,
 w2, w3)) //

w2, w3) + dF21(varu1, varu2, varu3) *FFinv32(u1, u2, u3) *grad33(w1, w2, w3) + dF31(varu1, varu2, varu3) *FFinv33(u1, u2, u3) *grad33(w1, w2, w3)) //

macro d3Aux32 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3, w1, w2 ,w3) (dF12(varu1, varu2, varu3) *FFinv11(u1, u2, u3) *grad31(w1, w2, w3) + dF22(varu1, varu2, varu3) *FFinv12(u1, u2, u3) *grad31(w1, w2, w3) + dF32(varu1, varu2, varu3) *FFinv13(u1, u2, u3) *grad31(w1, w2, w3) + dF12(varu1, varu2, varu3) *FFinv21(u1, u2, u3) *grad32(w1, w2, w3) + dF22(varu1, varu2, varu3) *FFinv22(u1, u2, u3) *grad32(w1, w2, w3) + dF32(varu1, varu2, varu3) *FFinv23(u1, u2, u3) *grad32(w1, w2, w3) + dF12(varu1, varu2, varu3) *FFinv31(u1, u2, u3) *grad33(w1, w2, w3) + dF22(varu1, varu2, varu3) *FFinv32(u1, u2, u3) *grad33(w1, w2, w3) + dF32(varu1, varu2, varu3) *FFinv33(u1, u2, u3) *grad33(w1, w2, w3)) //

macro d3Aux33 (u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3, w1, w2 ,w3) (dF13(varu1, varu2, varu3) *FFinv11(u1, u2, u3) *grad31(w1, w2, w3) + dF23(varu1, varu2, varu3) *FFinv12(u1, u2, u3) *grad31(w1, w2, w3) + dF33(varu1, varu2, varu3) *FFinv13(u1, u2, u3) *grad31(w1, w2, w3) + dF13(varu1, varu2, varu3) *FFinv21(u1, u2, u3) *grad32(w1, w2, w3) + dF23(varu1, varu2, varu3) *FFinv22(u1, u2, u3) *grad32(w1, w2, w3) + dF33(varu1, varu2, varu3) *FFinv23(u1, u2, u3) *grad32(w1, w2, w3) + dF13(varu1, varu2, varu3) *FFinv31(u1, u2, u3) *grad33(w1, w2, w3) + dF23(varu1, varu2, varu3) *FFinv32(u1, u2, u3) *grad33(w1, w2, w3) + dF33(varu1, varu2, varu3) *FFinv33(u1, u2, u3) *grad33(w1, w2, w3)) //

//// The tensor quantity D4 = (grad w) * Finv macro d4Aux11 (w1, w2, w3, u1, u2, u3) (Finv11(u1, u2, u3)*grad11(w1, w2, w3) + Finv21(u1, u2, u3)*grad12(w1, w2, w3) + Finv31(u1, u2, u3)*grad13(w1, w2, w3))// macro d4Aux12 (w1, w2, w3, u1, u2, u3) (Finv12(u1, u2, u3)*grad11(w1, w2, w3) + Finv22(u1, u2, u3)*grad12(w1, w2, w3) + Finv32(u1, u2, u3)*grad13(w1, w2, w3))// macro d4Aux13 (w1, w2, w3, u1, u2, u3) (Finv13(u1, u2, u3)*grad11(w1, w2, w3) + Finv23(u1, u2, u3)*grad12(w1, w2, w3) + Finv33(u1, u2, u3)*grad13(w1, w2, w3))// macro d4Aux21 (w1, w2, w3, u1, u2, u3) (Finv11(u1, u2, u3)*grad21(w1, w2, w3) + Finv21(u1, u2, u3)*grad22(w1, w2, w3) + Finv31(u1, u2, u3)*grad23(w1, w2, w3))// macro d4Aux22 (w1, w2, w3, u1, u2, u3) (Finv12(u1, u2, u3)*grad21(w1, w2, w3) + Finv22(u1, u2, u3)*grad22(w1, w2, w3) + Finv32(u1, u2, u3)*grad23(w1, w2, w3))// macro d4Aux23 (w1, w2, w3, u1, u2, u3) (Finv13(u1, u2, u3)*grad21(w1, w2, w3) + Finv23(u1, u2, u3)*grad22(w1, w2, w3) + Finv33(u1, u2, u3)*grad23(w1, w2, w3))// macro d4Aux31 (w1, w2, w3, u1, u2, u3) (Finv11(u1, u2, u3)*grad31(w1, w2, w3) + Finv21(u1, u2, u3)*grad32(w1, w2, w3) + Finv31(u1, u2, u3)*grad33(w1, w2, w3))// macro d4Aux32 (w1, w2, w3, u1, u2, u3) (Finv12(u1, u2, u3)*grad31(w1, w2, w3) + Finv22(u1, u2, u3)*grad32(w1, w2, w3) + Finv32(u1, u2, u3)*grad33(w1, w2, w3))// macro d4Aux33 (w1, w2, w3, u1, u2, u3) (Finv13(u1, u2, u3)*grad31(w1, w2, w3) + Finv23(u1, u2, u3)*grad32(w1, w2, w3) + Finv33(u1, u2, u3)*grad33(w1, w2, w3)) //

// The macros for the auxiliary tensors (D0, D1, D2, ...): End

//_____

//=====

// The macros for the various stress measures: BEGIN

```

// The Kirchhoff stress tensor
macro StressK11(u1, u2, u3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1, u2, u3)) * B11(u1, u2, u3)) // macro StressK12(u1,
u2, u3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1, u2, u3)) * B12(u1, u2, u3) ) // macro StressK13(u1, u2, u3) ((2 *c1
+2*c4*I4(u1, u2, u3)) * B13(u1, u2, u3) ) // macro StressK21(u1, u2, u3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1,
u2, u3)) * B21(u1, u2, u3) ) // macro StressK22(u1, u2, u3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1, u2, u3)) *
B22(u1, u2, u3) ) // macro StressK23(u1, u2, u3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1, u2, u3)) * B23(u1, u2,
u3) ) // macro StressK31(u1, u2, u3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1, u2, u3)) * B31(u1, u2, u3) ) // macro
StressK32(u1, u2, u3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1, u2, u3)) * B32(u1, u2, u3) ) // macro StressK33(u1,
u2, u3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1, u2, u3)) * B33(u1, u2, u3) ) // // The tangent Kirchhoff stress tensor
macro TanK11(u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1, u2, u3)) * d1Aux11(u1, u2,
u3, varu1, varu2, varu3) ) // macro TanK12(u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1,
u2, u3)) * d1Aux12(u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ) // macro TanK13(u1, u2, u3, varu1, varu2,
varu3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1, u2, u3)) * d1Aux13(u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ) // macro
TanK21(u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1, u2, u3)) * d1Aux21(u1, u2, u3,
varu1, varu2, varu3) ) // macro TanK22(u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1,
u2, u3)) * d1Aux22(u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ) // macro TanK23(u1, u2, u3, varu1, varu2,
varu3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1, u2, u3)) * d1Aux23(u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ) // macro
TanK31(u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1, u2, u3)) * d1Aux31(u1, u2, u3,
varu1, varu2, varu3) ) // macro TanK32(u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1,
u2, u3)) * d1Aux32(u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ) // macro TanK33(u1, u2, u3, varu1, varu2,
varu3) ((2 *c1 +2*c4*I4(u1, u2, u3)) * d1Aux33(u1, u2, u3, varu1, varu2, varu3) ) //

```

```

// The macros for the stress tensor components: END
//-----
// END OF MACROS
//-----
// *****
// THE (BIO)MECHANICAL PARAMETERS: Begin

```

```

// Elastic coefficients real c1 = 80.0; //

```

```

real c4=80.0; //

```

```

real D = 1.e3; // (1 / compressibility)

```

```

// Stress loads real Pa = -30;

```

```

// Tolerance(L2) real tol = 1.e-4;

```

```

// THE (BIO)MECHANICAL PARAMETERS: End
// *****

```

```

load "msh3" load "tetgen" load "medit"

```

```

mesh3 Th("corpus.mesh"); fespace Vh(Th,[P1,P1,P1]); fespace Sh(Th,P2); fespace Qh(Th,
P1);

Qh ex, ey, ez, gxy, gyz, gzx, exyz, sx, sy, sz, txy, tyz, tzx;

Vh [w1, w2, w3], [u1n, u2n, u3n], [varu1, varu2, varu3];

varf vfMass1D(p,q) = int3d(Th)(p*q); matrix Mass1D = vfMass1D(Sh,Sh,solver=CG);

Sh p, ppp;

p[] = 1; ppp[] = Mass1D * p[];

real DomainMass = ppp[].sum;

cout << "*****" << endl; cout << "DomainMass =
" << DomainMass << endl; cout << "*****" << endl;

varf vmass([u1,u2,u3],[v1,v2,v3],solver=CG) = int3d(Th)((u1*v1 + u2*v2 + u3*v3)/DomainMass
);

matrix Mass = vmass(Vh,Vh);

matrix Id = vmass(Vh,Vh);

// Define the standard Euclidean basis functions Vh [ehat1x, ehat1y, ehat1z], [ehat2x, ehat2y,
ehat2z], [ehat3x, ehat3y, ehat3z]; [ehat1x, ehat1y, ehat1z] = [1.0, 0.0, 0.0]; [ehat2x, ehat2y,
ehat2z] = [0.0, 1.0, 0.0]; [ehat3x, ehat3y, ehat3z] = [0.0, 0.0, 1.0];

// The individual elements of the total 1st Piola-Kirchoff stress Vh [auxVec1, auxVec2,
auxVec3];

// Sh Stress1PK11, Stress1PK12, Stress1PK13, Stress1PK21, Stress1PK22, Stress1PK23,
Stress1PK31, Stress1PK32, Stress1PK33;

Sh StrK11, StrK12, StrK13, StrK21, StrK22, StrK23, StrK31, StrK32, StrK33;

Vh [ef1, ef2, ef3];

real ContParam, dContParam;

problem neoHookeanInc ([varu1, varu2, varu3], [w1, w2, w3], solver = LU)=

int3d(Th, qforder=1) (// BILINEAR part -( StressK11 (u1n, u2n, u3n) * d3Aux11(u1n, u2n,
u3n, varu1, varu2, varu3, w1, w2, w3) + StressK12 (u1n, u2n, u3n) * d3Aux12(u1n, u2n, u3n,

```

```

varu1, varu2, varu3, w1, w2, w3) + StressK13 (u1n, u2n, u3n) * d3Aux13(u1n, u2n, u3n, varu1,
varu2, varu3, w1, w2, w3) + StressK21 (u1n, u2n, u3n) * d3Aux21(u1n, u2n, u3n, varu1, varu2,
varu3, w1, w2, w3) + StressK22 (u1n, u2n, u3n) * d3Aux22(u1n, u2n, u3n, varu1, varu2, varu3,
w1, w2, w3) + StressK23 (u1n, u2n, u3n) * d3Aux23(u1n, u2n, u3n, varu1, varu2, varu3, w1,
w2, w3) + StressK31 (u1n, u2n, u3n) * d3Aux31(u1n, u2n, u3n, varu1, varu2, varu3, w1, w2,
w3) + StressK32 (u1n, u2n, u3n) * d3Aux32(u1n, u2n, u3n, varu1, varu2, varu3, w1, w2, w3) +
StressK33 (u1n, u2n, u3n) * d3Aux33(u1n, u2n, u3n, varu1, varu2, varu3, w1, w2, w3) )

```

```

+ TanK11 (u1n, u2n, u3n, varu1, varu2, varu3) * d4Aux11(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) +
TanK12 (u1n, u2n, u3n, varu1, varu2, varu3) * d4Aux12(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) + TanK13
(u1n, u2n, u3n, varu1, varu2, varu3) * d4Aux13(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) + TanK21 (u1n,
u2n, u3n, varu1, varu2, varu3) * d4Aux21(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) + TanK22 (u1n, u2n,
u3n, varu1, varu2, varu3) * d4Aux22(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) + TanK23 (u1n, u2n, u3n,
varu1, varu2, varu3) * d4Aux23(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) + TanK31 (u1n, u2n, u3n, varu1,
varu2, varu3) * d4Aux31(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) + TanK32 (u1n, u2n, u3n, varu1, varu2,
varu3) * d4Aux32(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) + TanK33 (u1n, u2n, u3n, varu1, varu2, varu3) *
d4Aux33(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) ) + int3d(Th, qforder=1) ( // LINEAR part

```

```

StressK11 (u1n, u2n, u3n) * d4Aux11(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) + StressK12 (u1n, u2n,
u3n) * d4Aux12(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) + StressK13 (u1n, u2n, u3n) * d4Aux13(w1, w2,
w3, u1n, u2n, u3n) + StressK21 (u1n, u2n, u3n) * d4Aux21(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) +
StressK22 (u1n, u2n, u3n) * d4Aux22(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) + StressK23 (u1n, u2n, u3n)
* d4Aux23(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) + StressK31 (u1n, u2n, u3n) * d4Aux31(w1, w2, w3,
u1n, u2n, u3n) + StressK32 (u1n, u2n, u3n) * d4Aux32(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) + StressK33
(u1n, u2n, u3n) * d4Aux33(w1, w2, w3, u1n, u2n, u3n) ) - int3d(Th)( (5*w3) ) // + on(1, varu1
= 0., varu2 = 0., varu3 = 0. ); ;

```

```

// The Lagrange-Green strain tensor, E = (1/2)(C - I) // Wh E111, E12, E131, E23, E31, E33,
E32, E121, E12; // Auxiliary variables matrix auxMat;

```

```

// Newton's method // ————— Sh u1,u2,u3;

```

```

ContParam = 0.0; dContParam = 0.01;

```

```

// Initialization: [varu1,varu2,varu3] = [0.0, 0.0, 0.0];

```

```

[u1n, u2n, u3n] = [0.0, 0.0, 0.0];

```

```

real res = 2.0 * tol;

```

```

real eforceres;

```

```

int loopcount = 0; int loopmax = 45;

```

```

// Iteration: while (loopcount <= loopmax res >= tol) loopcount ++;

```

```

////////////////////////////////////

cout << "Loop " << loopcount << endl; // cout << "Hello world1" << endl;

// plot([u1n,u2n,u3n], wait=0, cmm="displacement:"); ; neoHookeanInc; // compute [varu1,varu2,varu3]
= (D2J(u1n))-1(DJ(u1n))

// cout << "This marker reached" << endl;

u1 = varu1; u2 = varu2; u3 = varu3;

w1[] = Mass*varu1[];

res = sqrt(w1[]' * varu1[]);

cout << " u1 min =" << u1[].min << ", u1 max=" << u1[].max << endl; cout << " u2 min =" <<
u2[].min << ", u2 max=" << u2[].max << endl; cout << " u3 min =" << u3[].min << ", u3 max=" <<
u3[].max << endl;

// plot([varu1, varu2, varu3], wait=1, cmm=" varu1, varu2, varu3 "); // μεντιτ

u1n[] += varu1[];

cout << " L2residual = " << res << endl;

// plot([u1n,u2n,u3n], wait=0, cmm="displacement:"); // καντο με μεντιτ

// plot(u3);

// medit("u1n", Th, u1, order=1); // medit("u2n", Th, u2, order=1); // medit("u3n", Th, u3,
order=1);

//cout << "res" << res << endl; //cout << "tol" << tol << endl;

ex=1+dx(u1); ey=1+dy(u2); ez=1+dz(u3); gxy=dy(u1)+dx(u2); gzx=dz(u1)+dx(u3); gyz=dz(u2)+dy(u3);

// sx=2*ex*F11(u1,u2,u3)*(c1*(1-ex(-4) * ey(-2)) + 0.5 * c4 * (ex2 - 1));

sx=2*c1*B11(u1,u2,u3)+2*c4*(ex2-1)*B11(u1, u2, u3); sy = 2*c1*B22(u1, u2, u3)+
2 * c4 * (ex2 - 1) * B22(u1, u2, u3); sz = 2 * c1 * B33(u1, u2, u3) + 2 * c4 * (ex2 - 1) *
B33(u1, u2, u3); txy = 2 * c1 * B12(u1, u2, u3) + 2 * c4 * (ex2 - 1) * B12(u1, u2, u3); tyz =
2*c1*B23(u1, u2, u3)+2*c4*(ex2-1)*B23(u1, u2, u3); tzx = 2*c1*B32(u1, u2, u3)+
2 * c4 * (ex2 - 1) * B32(u1, u2, u3);

cout << " ex min =" << ex[].min << ", ex max=" << ex[].max << endl; cout << " ey min =" << ey[].min

```



```

« ", ey max=" « ey[].max « endl; cout « " ez min =" « ez[].min « ", ez max=" « ez[].max « endl;
cout « " sx min =" « sx[].min « ", sx max=" « sx[].max « endl; cout « " sy min =" « sy[].min « ",
sy max=" « sy[].max « endl; cout « " sz min =" « sz[].min « ", sz max=" « sz[].max « endl; cout
« " txy min =" « txy[].min « ", txy max=" « txy[].max « endl; cout « " tyz min =" « tyz[].min «
", tyz max=" « tyz[].max « endl; cout « " tzx min =" « tzx[].min « ", tzx max=" « tzx[].max «
endl;

    //for (int j=0; j<u1[].n; j++) // cout « u1[][j] « endl;

    // Calculate the elastic force residue

    /* if (res < tol) loopcount = 1; res = 1.0 + tol; ContParam += dContParam; cout « "ContParam
= " « ContParam « endl; */

    end; plot(Th, wait=2, ps="ref-config.eps");

```

Παράρτημα Β □

Σύντομο βιογραφικό σημείωμα

Σέργιος Φράσταλης, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

► Προσωπικά Στοιχεία

Έτος γέννησης: 1990 | Τόπος γέννησης: Αθήνα , Ελλάς

► Σπουδές

2007: Απολυτήριο, Ελληνογαλλική Σχολή Αγίας Παρασκευής, Eugène Delacroix

2015: Πτυχίο, Τμήμα Φυσικής , Πανεπιστήμιο Κρήτης

2018–σήμερα: Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

► Προσόντα και Διακρίσεις

- Μέλος Σκακιστικής Λέσχης Χαλανδρίου (ΣΑΧ), Βετεράνος 13ου βαθμού(Αρχιστράτηγος) των δυνάμεων της Συμμαχίας στο World of Warcraft Classic
- Γλώσσες: Ελληνική(μητρική), Αγγλική (άριστο επίπεδο), Γαλλική (μεσαίο επίπεδο), Ρωσική και Ιαπωνική (ερασιτεχνικό επίπεδο)