



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ευθέα και αντίστροφα φασματικά προβλήματα
στη θεωρία σκέδασης

Διδακτορική Διατριβή
του
Κυριάκου Στρατουρά

Συμβουλευτική επιτροπή: Γκιντίδης Δρόσος (επιβλέπων)
Αντώνης Χαραλαμπίδης
Εμμανουήλ Γεωργιάδης

Αθήνα, Οκτώβριος 2022



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ευθέα και αντίστροφα φασματικά προβλήματα στη θεωρία σκέδασης

Διδακτορική Διατριβή

του

Κυριάκου Στρατουρά

Διπλωματούχου Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ
ΔΠΜΣ Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Επιστημών ΕΜΠ

Η παρούσα διατριβή έχει κατατεθεί στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου για τον επιστημονικό τίτλο του Διδάκτορα.

Εξεταστική Επιτροπή:

...
Δ. Γκιντίδης
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

...
Α. Χαραλαμπίδης
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

...
Ε. Γεωργούλης
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

...
Κ. Χρυσάφινος
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

...
Ι. Γάσπαρης
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

...
Μ. Χατζηνικολάου
Καθηγήτρια
Ε.Α.Π.

...
Ν. Τσίτσας
Αν. Καθηγητής
Α.Π.Θ.

Αθήνα, Οκτώβριος 2022

...

Κυριάκος Στρατουράς

© 2022 - Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος

Απαγορεύεται η αντιγραφή, η αποθήκευση σε αρχείο πληροφοριών, η διανομή, η αναπαραγωγή, η μετάφραση ή μετάδοση της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό, υπό οποιαδήποτε μορφή και με οποιοδήποτε μέσο επικοινωνίας, ηλεκτρονικό ή μηχανικό, χωρίς την προηγούμενη έγγραφη άδεια του συγγραφέα. Επιτρέπεται η αναπαραγωγή, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Η έγκριση της παρούσας διδακτορικής διατριβής από τη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202).

Η παρούσα διδακτορική διατριβή χρηματοδοτήθηκε με υποτροφία από τον Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων και Έρευνας του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Αυτή η διατριβή εξετάζει το ευθύ και αντίστροφο πρόβλημα για μια τροποποίηση του κλασικού προβλήματος ιδιοτιμών διαπερατότητας, η οποία προκύπτει μέσω της εισαγωγής ενός τεχνητού μεταϊλιικού υποβάθρου. Για τη μελέτη του ευθέως προβλήματος, αξιοποιούμε τη μεταβολική του διατύπωση και το θεώρημα Hilbert-Schmidt για να αποδείξουμε την διακριτότητα και ύπαρξη του φάσματος. Επιπρόσθετα, εάν ο κυματάρημος είναι αρκούντως μικρός, συμπεραίνουμε ότι τα αντίστοιχα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων δεν αποτελούν πλήρες σύστημα στον χώρο λύσεων αφού δεν σχηματίζουν βάση Riesz. Ακολούθως, ορίζουμε ένα βοηθητικό φασματικό πρόβλημα το οποίο μας προμηθεύει με μια ορθοκανονική βάση, σε αντίθεση με το αρχικό πρόβλημα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τη βάση αυτή για να εφαρμόσουμε ένα φασματικό σχήμα Galerkin, το οποίο θα προσεγγίζει τις άγνωστες ιδιοτιμές. Κάτω από την προαναφερθείσα συνθήκη για τον κυματάρημο, αποδεικνύουμε ότι το διακριτό σχήμα Galerkin συγκλίνει στις άγνωστες ιδιοτιμές. Τέλος, για την ειδική περίπτωση όπου το χωρίο είναι ο μοναδιαίος δίσκος, παρουσιάζουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου τα οποία επαληθεύουμε, χρησιμοποιώντας αναλυτικά υπολογισμένες ιδιοτιμές.

Στην ειδική περίπτωση ενός τρισδιάστατου, σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης παρουσιάζουμε μια εναλλακτική απόδειξη για την ύπαρξη του φάσματος, αξιοποιώντας ασυμπτωτικές εκφράσεις για τις αντίστοιχες χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Επιπλέον, θέτουμε το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα και δείχνουμε ότι η γνώση του φάσματος μπορεί να προσδιορίσει με μοναδικό τρόπο μια ακολουθία πηλίκων από συνοριακά δεδομένα Cauchy. Τα πηλίκα αυτά, κάτω από την υπόθεση ότι ο κυματάρημος δεν αποτελεί ιδιοτιμή Dirichlet, χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για την απόδειξη ενός θεωρήματος μοναδικότητας για την ανακατασκευή ενός $C[0, 1]$ δείκτη διάθλασης.

Abstract

This thesis investigates the direct and inverse spectral problem for a modification to the classical transmission eigenvalue problem, by introducing an artificial metamaterial background. For the direct problem, we utilize a variational formulation setting and the Hilbert-Schmidt theorem to prove discreteness and existence of the spectrum. Furthermore, under a smallness condition on the wavenumber, we discover that the corresponding eigenfunction pairs are not complete in the solution space, in the sense that they do not form a Riesz basis. We define an auxiliary spectral problem that yields an orthonormal basis, in contrast to the original problem. Afterwards, we use this basis to implement a spectral Galerkin scheme for the approximation of the eigenvalues. We are able to prove convergence of the discrete Galerkin scheme to the unknown eigenvalues, under the previously mentioned condition on the wavenumber. Finally, in the case where the domain is a unit disk, we present some numerical examples for the method that we are able to verify, using analytically computed eigenvalues.

In the special case of a three dimensional, spherically symmetric refractive index, we show existence of the spectrum in an alternative way, utilizing asymptotic expressions for the corresponding characteristic functions. Furthermore, we pose the inverse spectral problem and show that the knowledge of the spectrum can uniquely determine fractions of boundary Cauchy data. These ratios, under the assumption that the wavenumber is not a Dirichlet eigenvalue, are then used to prove a uniqueness theorem for the reconstruction of a $C[0, 1]$ refractive index.

Ευχαριστίες

Αυτή η προσπάθεια δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την καθοδήγηση του επιβλέποντα καθηγητή μου, Δρόσου Γκιντίδη, ο οποίος με ώθησε να μελετήσω ένα ενδιαφέρον και σημαντικό αντικείμενο των Μαθηματικών. Η στήριξή του και οι συζητήσεις που είχαμε ήταν καθοριστικής σημασίας στην ολοκλήρωση αυτής της διατριβής. Είμαι επίσης βαθιά ευγνώμων προς το φίλο και συνάδελφο Νίκο Παλληκαράκη, ο οποίος όχι μόνο έχει συνεισφέρει στην έρευνα για αυτή τη διατριβή, αλλά ήτανε πάντοτε πρόθυμος να με βοηθήσει σε αυτή τη δύσκολη περίοδο της ζωής μου. Θα ήθελα να εκφράσω την εκτίμησή μου για τους καθηγητές μου Ιωάννη Σαραντόπουλο, Σωτήριο Καρανάσιο, Κυριακή Κυριάκη, Αντώνη Χαραλαμπόπουλο και Μιχάλη Λουλάκη που με ενέπνευσαν να ακολουθήσω αυτό το μονοπάτι. Επιπρόσθετα, δεν θα μπορούσα να ξεχάσω το συνάδελφό μου Σωτήρη Γιόγιακα από τον Τομέα Μαθηματικών, όχι μόνο για τη στήριξη του αλλά και για τις συζητήσεις μας για τα Μαθηματικά και την Έρευνα. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου αλλά και τους φίλους μου που ήτανε πάντοτε εκεί όταν τους χρειάστηκα. Αφιερώνω τη διατριβή σε αυτούς.

Περιεχόμενα

| | |
|---|-----------|
| Περίληψη | 5 |
| Abstract | 7 |
| Ευχαριστίες | 9 |
| 1. Εισαγωγή | 13 |
| 1.1. Ακουστικά προβλήματα σκέδασης | 14 |
| 1.2. Το πρόβλημα κλασικών ιδιοτιμών διαπερατότητας | 16 |
| 1.3. Το αντίστροφο πρόβλημα κλασικών ιδιοτιμών διαπερατότητας | 18 |
| 1.4. Η εισαγωγή τροποποιημένων προβλημάτων σκέδασης | 20 |
| 1.5. Σύνοψη της διατριβής | 21 |
| 2. Τροποποιημένα προβλήματα ιδιοτιμών διαπερατότητας | 25 |
| 2.1. Η τροποποίηση Stekloff | 26 |
| 2.2. Η τροποποίηση τεχνητού μεταύλικού υποβάθρου | 28 |
| 3. Μια μεταβολική προσέγγιση για το ευθύ φασματικό πρόβλημα | 33 |
| 3.1. Ύπαρξη διακριτού φάσματος | 34 |
| 3.2. Μια ισοδύναμη διατύπωση για έναν πιεστικό και έναν συμπαγή τελεστή | 39 |
| 4. Η ιδιότητα μη πληρότητας των ιδιοσυναρτήσεων στον χώρο λύσεων $\mathcal{H}(D_b)$ | 43 |
| 4.1. Είναι τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων βάση Riesz στον $\mathcal{H}(D_b)$; | 44 |
| 4.2. Επιλογή μιας βάσης Riesz που να εμπλέκει το σύστημα ιδιοσυναρτήσεων | 47 |
| 5. Κατασκευή ορθοκανονικής βάσης για τον χώρο λύσεων | 49 |
| 5.1. Ένα βοηθητικό πρόβλημα ιδιοτιμών | 50 |
| 5.2. Μια αναλυτική προσέγγιση κατασκευής ορθοκανονικής βάσης σε σφαιρική γεωμετρία | 55 |
| 5.3. Μια αναλυτική προσέγγιση κατασκευής ορθοκανονικής βάσης σε αυθαίρετη γεωμετρία | 57 |
| 6. Μια φασματική μέθοδος Galerkin | 61 |
| 6.1. Η προσέγγιση των ιδιοτιμών μέσω ενός φασματικού σχήματος Galerkin | 62 |
| 6.2. Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας - σταθερός δείκτης διάθλασης | 67 |
| 6.3. Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας - τμηματικά σταθερός δείκτης διάθλασης | 70 |

| | |
|--|------------|
| 7. Το ευθύ και το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για την ειδική περίπτωση ενός σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης | 75 |
| 7.1. Ύπαρξη των ιδιοτιμών του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας για το σφαιρικά συμμετρικό χωρίο | 76 |
| 7.1.1. Η περίπτωση $l = 0$ | 77 |
| 7.1.2. Η περίπτωση $l \geq 1$ | 79 |
| 7.2. Μοναδικότητα για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα | 82 |
| 7.2.1. Ένα αποτέλεσμα μοναδικότητας για συνοριακά δεδομένα Cauchy | 82 |
| 7.2.2. Ένα αποτέλεσμα μοναδικότητας για συνοριακά δεδομένα Cauchy με λιγότερες απαιτήσεις γνώσεως του φάσματος | 87 |
| 7.2.3. Το θεώρημα μοναδικότητας για τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας | 89 |
| A'. Παράρτημα | 95 |
| A'.1. Μεταβολική διατύπωση | 95 |
| A'.2. Σχήμα Galerkin | 99 |
| Κατάλογος Σχημάτων | 105 |
| Κατάλογος Πινάκων | 107 |
| Βιβλιογραφία | 109 |

1. Εισαγωγή

Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποια βασικά προβλήματα σκέδασης που εμφανίζονται στην ακουστική θεωρία και τις ιδιότητές τους. Δίνουμε έμφαση στο πρόβλημα σκέδασης για μη ομογενή υλικά και το πως μας οδηγεί με φυσιολογικό τρόπο στο πρόβλημα κλασικών ιδιοτιμών διαπερατότητας. Για το αντίστοιχο ευθύ φασματικό πρόβλημα, διατυπώνουμε τα σημαντικότερα βιβλιογραφικά αποτελέσματα που αφορούν τα ζητήματα διακριτότητας και ύπαρξης του φάσματος. Από την άλλη, για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα παρουσιάζουμε τα πιο πρόσφατα βιβλιογραφικά αποτελέσματα που αφορούν την μοναδικότητα ανακατασκευών σφαιρικά συμμετρικών δεικτών διάθλασης από κλασικές ιδιοτιμές διαπερατότητας. Δίνουμε ιδιαίτερη έμφαση στον κεντρικό ρόλο του κλασικού προβλήματος διαπερατότητας στην αντίστροφη θεωρία σκέδασης και τα κίνητρα για την εισαγωγή τροποποιημένων προβλημάτων διαπερατότητας.

Περιεχόμενα

| | |
|---|----|
| 1.1. Ακουστικά προβλήματα σκέδασης | 14 |
| 1.2. Το πρόβλημα κλασικών ιδιοτιμών διαπερατότητας | 16 |
| 1.3. Το αντίστροφο πρόβλημα κλασικών ιδιοτιμών διαπερατότητας | 18 |
| 1.4. Η εισαγωγή τροποποιημένων προβλημάτων σκέδασης | 20 |
| 1.5. Σύνοψη της διατριβής | 21 |

1.1. Ακουστικά προβλήματα σκέδασης

Η θεωρία σκέδασης είναι ένα αντικείμενο με σημαντικές εφαρμογές στη σύγχρονη επιστήμη, όπως για παράδειγμα στην ατομική και πυρηνική φυσική, στη μελέτη συστημάτων στερεάς κατάστασης και στην υπολογιστική τομογραφία. Πραγματεύεται την αλληλεπίδραση μεταξύ ενός προσπίπτοντος σωματιδίου ή κύματος και ενός μέσου, ή αλλιώς σχεδαστή. Πιο συγκεκριμένα, ένα φαινόμενο σκέδασης περιγράφεται συνήθως από ένα ολικό πεδίο u , το οποίο αποτελεί άθροισμα ενός προσπίπτοντος πεδίου u^i και ενός σχεδαζόμενου πεδίου u^s . Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης αφορά την εύρεση του u^s , έχοντας εκ των προτέρων γνώση του u^i καθώς και της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το φαινόμενο. Από την άλλη, το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης αφορά τον καθορισμό των υλικών ιδιοτήτων ή του σχήματος του σχεδαστή, δοθείσας της γνώσης του μακρινού πεδίου που αντιστοιχεί στο u^s . Για την επίτευξη του πρώτου, επιδιώκουμε την εύρεση των συντελεστών της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το φαινόμενο· για το δεύτερο προσπαθούμε να ανακατασκευάσουμε το χωρίο στο οποίο είναι ορισμένη η εξίσωση. Για τους σκοπούς αυτής της διατριβής, περιοριζόμαστε σε προβλήματα σκέδασης που πηγάζουν από την ακουστική θεωρία.

Τα υλικά επιδεικνύουν ποικίλες ιδιότητες καθώς αλληλοεπιδρούν με ακουστικά κύματα. Ως παράδειγμα, θεωρούμε το πρόβλημα σκέδασης για ένα ομογενές και μη διαπερατό εμπόδιο D . Το απλούστερο μαθηματικό μοντέλο που θα μπορούσε δυνητικά να περιγράψει ένα τέτοιο φαινόμενο, διατυπώνεται ως εξής: Να βρεθεί ένα ολικό πεδίο u , τέτοιο ώστε

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R}^3 / \overline{D}, \quad (1.1)$$

$$u(x) = u^i(x) + u^s(x), \quad (1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{στο } \partial D, \quad (1.3)$$

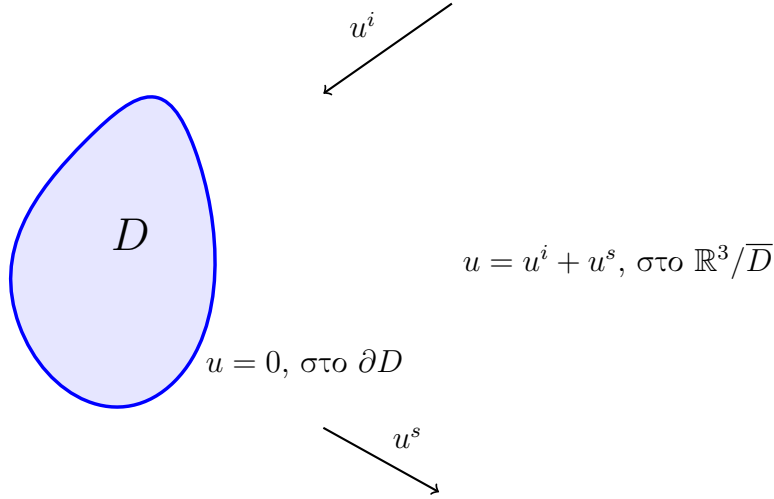
$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku^s \right) = 0, \quad (1.4)$$

όπου με k συμβολίζουμε τον κυματάρημο, με d την κατεύθυνση του διαδιδόμενου κύματος, D είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 , $u^i(x) = e^{ikx \cdot d}$ είναι ένα επίπεδο προσπίπτον κύμα και το u ικανοποιεί την *συνοριακή συνθήκη Dirichlet* (1.3) και την *συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld* (1.4). Στη βιβλιογραφία, το πρόβλημα αυτό συνήθως αποκαλείται ως σκέδαση από ηχητικά μαλακό υλικό. Αξιοποιώντας το θεώρημα Green, την συνθήκη ακτινοβολίας (1.4) και τη θεωρία Riesz-Fredholm για ολοκληρωτικές εξισώσεις δευτέρου είδους, μπορεί ναδειχθεί ότι (δείτε για παράδειγμα [29]) αυτό το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet διαθέτει μοναδική λύση, για ομαλές επιφάνειες ∂D . Παρομοίως, θα μπορούσε κάποιος να θεωρήσει το πρόβλημα σκέδασης για ένα ηχητικά σκληρό υλικό, το οποίο αντιστοιχεί στη *συνοριακή συνθήκη Neumann* $\partial u / \partial \nu = 0$, ή ακόμη μια *συνθήκη τύπου εμπέδησης*, δηλαδή

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + ik\lambda u = 0 \quad \text{στο } \partial D,$$

όπου λ είναι μια θετική σταθερά και ν είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο στο σύνορο ∂D .

Για την περίπτωση ενός μη ομογενούς και διαπερατού μέσου, μπορούμε να θεωρήσουμε ως παράδειγμα το ακόλουθο πρόβλημα.



Σχήμα 1.1.: Σκέδαση από ένα μη διαπερατό, ηχητικά μαλακό εμπόδιο D .

Αναζητούμε ένα ολικό πεδίο u , τέτοιο ώστε

$$\Delta u + k^2 \eta(x) u = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R}^3, \quad (1.5)$$

$$u(x) = u^i(x) + u^s(x), \quad (1.6)$$

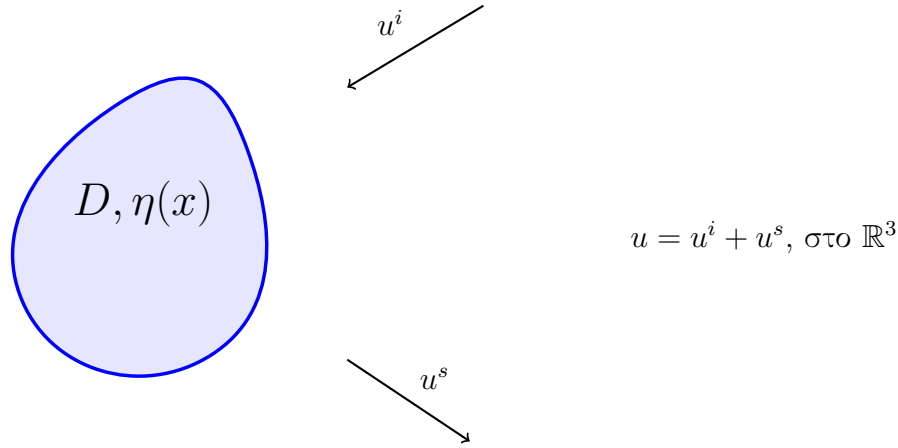
$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i k u^s \right) = 0, \quad (1.7)$$

όπου με η συμβολίζουμε το δείκτη διάθλασης. Εάν το μέσο είναι μη απορροφητικό, τότε ο δείκτης διάθλασης είναι πραγματική συνάρτηση και δίνεται από τον λόγο $\eta(x) := c_0^2/c^2$, όπου c_0 και c είναι οι ταχύτητες ήχου στο ομογενές μέσο υποβάθρου και στο μη ομογενές μέσο αντίστοιχα. Επιπρόσθετα, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $m := 1 - \eta$ διαθέτει συμπαγή φορέα. Μπορεί ναδειχθεί ότι το πρόβλημα (1.5)-(1.7) είναι ισοδύναμο με μια ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Lippmann-Schwinger, η οποία έχει ασθενώς ιδιόμορφο πυρήνα. Αξιοποιώντας τη θεωρία Riesz-Fredholm και μια αρχή αναλυτικής συνέχισης για λύσεις της (1.5), έχει αποδειχθεί ότι για όλους τους θετικούς κυματάρηθους k , ομαλά σύνορα ∂D και τμηματικά συνεχείς δείκτες διάθλασης η , το πρόβλημα σκέδασης (1.5)-(1.7) διαθέτει μοναδική λύση η οποία εξαρτάται συνεχώς από το προσπίπτον κύμα u^i (δείτε για παράδειγμα [29]). Μια σημαντική ποσότητα που εμφανίζεται στα πιο πάνω προβλήματα σκέδασης είναι το μακρινό πεδίο του σκεδαζόμενου κύματος. Μπορεί ναδειχθεί ότι και για τα δυο προβλήματα (1.1)-(1.4) και (1.5)-(1.7), το σκεδαζόμενο πεδίο u^s έχει την ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$u^s(x) = \frac{e^{ikr}}{r} u_\infty(\hat{x}, d) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r = |x| \rightarrow \infty \quad (1.8)$$

όπου $\hat{x} = x/|x|$ και με u_∞ συμβολίζουμε το μακρινό πεδίο. Πρόκειται για μια εξαιρετικά σημαντική ποσότητα στην αντίστροφη θεωρία σκέδασης, διότι οι ανακατασκευές των η ή D βασίζονται συχνά στη γνώση του μακρινού πεδίου ως μιας συνάρτησης ορισμένης στη μοναδιαία σφαίρα. Επιπρόσθετα, μέσω της διεξαγωγής πειραμάτων σκέδασης μπορούν να συλλεχθούν μετρήσεις για το u_∞ , οι οποίες στη συνέχεια χρησιμοποιούνται για να λυθούν αντίστροφα προβλήματα σκέδασης [29, 36, 62, 68, 70, 73].

Στην ειδική περίπτωση του μη ομογενούς προβλήματος σκέδασης (1.5)-(1.7), το



Σχήμα 1.2.: Σκέδαση από ένα διαπερατό, ανομοιογενές μέσο $(D, \eta(x))$.

σχεδαζόμενο κύμα έχει την μορφή

$$u^s(x) = -k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y) m(y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

όπου $\Phi(x, y)$ είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz. Το μακρινό πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$u_\infty(\hat{x}) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik \hat{x} \cdot y} m(y) u(y) dy \quad (1.9)$$

Εάν το u^i είναι ένα επίπεδο προσπίπτον κύμα, δηλαδή $u^i(x) = e^{ikx \cdot d}$, τότε μπορούμε να εκφράσουμε την εξάρτηση του μακρινού πεδίου από την προσπίπτουσα κατεύθυνση d χρησιμοποιώντας τη γραφή $u_\infty(\hat{x}) = u_\infty(\hat{x}, d)$. Ο τελεστής μακρινού πεδίου $F : L^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^2)$ ορίζεται ως εξής

$$(Fg)(\hat{x}) := \int_{\mathbb{S}^2} u_\infty(\hat{x}, d) g(d) ds(d), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2 \quad (1.10)$$

και μπορεί να θεωρηθεί ως μια υπέρθεση μακρινών πεδίων που αντιστοιχούν στα προσπίπτοντα κύματα $e^{ikx \cdot d}$. Μια κυματοσυνάρτηση Herglotz v_g , που ορίζεται ως

$$v_g(x) := \int_{\mathbb{S}^2} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (1.11)$$

θα μπορούσε με την ίδια λογική, να θεωρηθεί ως η υπέρθεση των προσπίπτοντων επιπέδων κυμάτων.

1.2. Το πρόβλημα κλασικών ιδιοτιμών διαπερατότητας

Το ζήτημα της πληρότητας των μακρινών πεδίων ως συναρτήσεις του \hat{x} στο $L^2(\mathbb{S}^2)$, που είναι ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στη μοναδιαία σφαίρα, μελετήθηκε διεξοδικά τις τελευταίες δεκαετίες διότι είναι συνυφασμένο με την ανάπτυξη μεθόδων που επιλύουν αντίστροφα προβλήματα σκέδασης. Για την περίπτωση σκέδασης

από ένα μη διαπερατό εμπόδιο, έχει αποδειχθεί ότι τα μακρινά πεδία που αντιστοιχούν σε όλες τις προσπίπτουσες κατευθύνσεις είναι πυκνά στον $L^2(\mathbb{S}^2)$, εφόσον το k^2 δεν αποτελεί ιδιοτιμή *Dirichlet* [28].

Σημείωση 1.2.1 Οι τιμές του k^2 για τις οποίες το πρόβλημα

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u} &= 0 & \text{στο } D, \\ \tilde{u} &= 0 & \text{στο } \partial D\end{aligned}$$

κατέχει μη τετριμμένες λύσεις καλούνται ιδιοτιμές *Dirichlet*.

Η συσχέτιση της πληρότητας των μακρινών πεδίων με ένα εσωτερικό πρόβλημα ιδιοτιμών είναι δυνατή ακόμη και στη περίπτωση μη ομογενών υλικών. Έστω ότι $\{d_n : n = 1, 2, \dots\}$ αποτελεί ένα αριθμησιμο και πυκνό σύνολο διανυσμάτων στην μοναδιαία σφαίρα \mathbb{S}^2 του \mathbb{R}^3 και ας συμβολίσουμε με $\mathcal{F} := \{u_\infty(\cdot, d_n) : n = 1, 2, \dots\}$ την αντίστοιχη οικογένεια μακρινών πεδίων. Τότε, για ένα συνεκτικό χωρίο που περιέχει την αρχή και διαθέτει ένα C^2 σύνορο ∂D , έχει προκύψει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.2.2 ([29, Θεώρημα 8.9]) Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του \mathcal{F} στον $L^2(\mathbb{S}^2)$ αποτελείται από τις συζυγείς συναρτήσεις όλων των $g \in L^2(\mathbb{S}^2)$, για τις οποίες υπάρχουν μια $w \in H^2(D)$ και μια κυματοσυνάρτηση *Herglotz*

$$v(x) = \int_{\mathbb{S}^2} e^{-ikx \cdot d} g(d) ds(d), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (1.12)$$

έτσι ώστε το ζεύγος w, v είναι μια λύση για το εσωτερικό πρόβλημα

$$\Delta w + k^2 \eta w = 0 \quad \text{στο } D, \quad (1.13)$$

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{στο } D, \quad (1.14)$$

$$w = v \quad \text{στο } \partial D, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} \quad \text{στο } D \quad (1.16)$$

Επειδή στο πιο πάνω αποτέλεσμα θεωρούνται λύσεις ειδικής μορφής για το πρόβλημα (1.13)-(1.16), είναι χρήσιμος και ο γενικότερος ορισμός:

Ορισμός 1.2.3 Όλες οι τιμές του κυματάρθμου k για τις οποίες υπάρχουν μη τετριμμένα ζεύγη λύσεων w, v για το (1.13)-(1.16) καλούνται **κλασικές ιδιοτιμές διαπερατότητας**.

Μια σημαντική ιδιότητα του πιο πάνω προβλήματος είναι ότι στην περίπτωση απορροφητικών μέσων, δηλαδή εάν $\Im(\eta) \neq 0$, δεν υπάρχουν πραγματικές ιδιοτιμές:

Θεώρημα 1.2.4 ([29, Θεώρημα 8.12]) Υποθέτουμε ότι $\Im(\eta) \neq 0$. Τότε, το σύνολο των μακρινών πεδίων \mathcal{F} είναι πλήρες στον $L^2(\mathbb{S}^2)$ για κάθε $k > 0$.

Το πρόβλημα κλασικών ιδιοτιμών διαπερατότητας έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών τα τελευταία τριάντα περίπου χρόνια, καθώς έχει αναδειχθεί ως ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα στην αντίστροφη θεωρία σκέδασης. Για τους σκοπούς αυτής της διατριβής, θα ακολουθήσει μια σύνοψη των σημαντικότερων βιβλιογραφικών αποτελεσμάτων. Διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Kirsch στην

[57] και μετά από λίγα έτη, οι Colton and Monk [33] κατάφεραν να το αξιοποιήσουν για να επιλύσουν το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης για μη ομογενή μέσα. Επιπρόσθετα, οι Colton και Kirsch [30] ανέπτυξαν την γραμμική μέθοδο *Sampling*, μια διαδικασία που μπορεί να ανακατασκευάσει το σχήμα ενός μη ομογενούς σκεδαστή, εφόσον το $k > 0$ δεν αποτελεί κλασική ιδιοτιμή διαπερατότητας. Αυτό είχε οδηγήσει στο πρόβλημα προσδιορισμού του πληθαιρίθμου για το φάσμα, αφού είναι σε αυτές ακριβώς τις τιμές συχνοτήτων που μπορεί να αποτύχει η μέθοδος *Sampling*. Επειδή οι κλασικές ιδιοτιμές διαπερατότητας αντιστοιχούν σε ένα φασματικό πρόβλημα που δεν είναι αυτοσυζυγές ούτε ελλειπτικό, έγινε γρήγορα εμφανές ότι η διακριτότητα και ύπαρξη του φάσματος δεν θα ήταν τετριμμένα ζητήματα. Ο λόγος είναι ότι τα κλασικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται συνήθως για να καθοριστούν οι ιδιότητες των φασματικών προβλημάτων, όπως για παράδειγμα η εναλλακτική *Fredholm* ή το θεώρημα *Hilbert-Schmidt*, δεν μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν με κάποιο άμεσο τρόπο και νέες τεχνικές έπρεπε να αναπτυχθούν για την απάντηση αυτών των ερωτημάτων. Δύο δεκαετίες αργότερα, νέα αποτελέσματα [10, 12, 23] οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι οι κλασικές ιδιοτιμές διαπερατότητας περιέχουν πληροφορία για τις υλικές ιδιότητες ενός μη ομογενούς σκεδαστή. Παρ' όλα αυτά, ένα σημαντικό ερώτημα παρέμεινε αναπάντητο. Υπάρχουν πράγματι αυτές οι ιδιοτιμές, για μη ομογενή υλικά με γενικό σχήμα; Η εφαρμογή μεθόδων *Sampling* σε αντικείμενα με διάφορες γεωμετρίες ήταν μια ισχυρή ένδειξη, αφού αποτυγχάνουν μόνο στην περίπτωση όπου ο κυματάριθμος είναι ιδιοτιμή για το αντίστοιχο χωρίο. Προς αυτή την κατεύθυνση υπήρξαν αρκετά αποτελέσματα [14, 18, 58, 72], όμως το ζήτημα επιλύθηκε πλήρως από τους Cakoni, Γκιντίδη και Haddar [15], με τον μόνο περιορισμό ότι η συνάρτηση $m = 1 - \eta$ διατηρεί πρόσημο:

Θεώρημα 1.2.5 ([15, Θεώρημα 2.5]) Έστω ότι D είναι ένα φραγμένο, απλά συνεκτικό χωρίο με τμηματικά λείο σύνορο ∂D . Ορίζουμε $\eta^* := \sup \eta$, $\eta_* := \inf \eta$ και υποθέτουμε ότι ο δείκτης διάθλασης $\eta \in \mathbb{L}^\infty(D)$ ικανοποιεί μια εκ των δύο παρακάτω συνθηκών:

$$1 + A \leq \eta_* \leq \eta(x) \leq \eta^* < +\infty$$

ή

$$0 < \eta_* \leq \eta(x) \leq \eta^* < 1 - B$$

για κάποιες επιλογές σταθερών $A > 0$ και $B > 0$. Τότε, υπάρχει ένα άπειρο και διακριτό σύνολο πραγματικών κλασικών ιδιοτιμών διαπερατότητας, με το $+\infty$ να είναι το μοναδικό σημείο συσσώρευσης.

Τέλος, για την αριθμητική επίλυση του κλασικού προβλήματος ιδιοτιμών διαπερατότητας υπάρχει μια πληθώρα βιβλιογραφικών αποτελεσμάτων. Στην πλειοψηφία αξιοποιούνται μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων [21, 24, 34, 52, 55, 56, 64, 77, 80], όμως έχουν εφαρμοστεί και φασματικές μέθοδοι Galerkin [2, 3, 41, 42, 71], ολοκληρωτικές μέθοδοι [20, 50, 53, 59, 63, 82] αλλά και μέθοδοι θεμελιώδων λύσεων [60, 61]. Για το αντίστοιχο πρόβλημα διαπερατότητας που προκύπτει για τις εξισώσεις Maxwell, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στις [54, 67, 78, 83].

1.3. Το αντίστροφο πρόβλημα κλασικών ιδιοτιμών διαπερατότητας

Σε αντίθεση με το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης, για το οποίο είναι αναγκαίες οι μετρήσεις μακρινού πεδίου, το αντίστροφο πρόβλημα κλασικών ιδιοτιμών διαπερατότη-

1.3. Το αντίστροφο πρόβλημα κλασικών ιδιοτιμών διαπερατότητας

τας επιχειρεί να ανακατασκευάσει τον άγνωστο δείκτη διάθλασης $\eta(x)$, υποθέτοντας εκ των προτέρων γνώση των ιδιοτιμών και αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων. Από πρακτικής απόψεως, αφού τα δεδομένα μακρινού πεδίου μπορούν να αξιοποιηθούν για να ανιχνεύσουν το πραγματικό υποσύνολο των ιδιοτιμών [8], η ανάπτυξη μεθόδων που επιλύουν το *αντίστροφο φασματικό πρόβλημα* για ιδιοτιμές διαπερατότητας είναι ένα από τα κεντρικά αντικείμενα μελέτης στην αντίστροφη θεωρία σκέδασης.

Λόγω του ότι η πολυπλοκότητα του αντίστροφου φασματικού προβλήματος κυμαίνεται ανάλογα με τη γεωμετρία του σχεδαστή, η έρευνα αρχικά επικεντρώθηκε σε απλούστερα σχήματα όπου η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών είναι εφαρμόσιμη. Αυτό γιατί σε τέτοιες περιπτώσεις, οι ιδιοσυναρτήσεις που επιλύουν το (1.13)-(1.16) έχουν αναλυτικές αναπαραστάσεις. Για την ειδική περίπτωση ενός σφαιρικά στρωματοποιημένου μέσου ($D = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \leq R\}$), οι ιδιοσυναρτήσεις έχουν τη μορφή

$$w_l^m(x) = a_l^m \frac{y_l(r)}{r} Y_l^m(\hat{x}) \quad (1.17)$$

και

$$v_l^m(x) = b_l^m j_l(kr) Y_l^m(\hat{x}), \quad (1.18)$$

όπου με j_l^m συμβολίζουμε τις *σφαιρικές συναρτήσεις Bessel* τάξης l και y_l είναι μια λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$y_l''(r) + \left(k^2 \eta(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) y_l(r) = 0 \quad (1.19)$$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες διαπερατότητας, προκύπτει ότι οι κλασικές ιδιοτιμές διαπερατότητας αποτελούν ρίζες της *χαρακτηριστικής συνάρτησης*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{y_l(r)}{r} \Big|_{r=R} & -j_l(kr) \Big|_{r=R} \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{y_l(r)}{r} \right) \Big|_{r=R} & -\frac{d}{dr} j_l(kr) \Big|_{r=R} \end{pmatrix} = 0, \quad (1.20)$$

για $l = 0, 1, 2, \dots$. Χρησιμοποιώντας ασυμπτωτικές εκφράσεις για τις συναρτήσεις Bessel, οι Colton και Päiväranta [35] το 1990 κατάφεραν να δείξουν ότι οι ρίζες της (1.20), και επομένως οι κλασικές ιδιοτιμές διαπερατότητας, είναι πράγματι άπειρες. Έχουμε ήδη αναφέρει προηγουμένως ότι για γενικότερα χωρία, το πρόβλημα ύπαρξης παρέμεινε ανοικτό για πολύ περισσότερο. Μετά από λίγα χρόνια, οι McLaughlin και Polyakov [66] ήταν οι πρώτοι που απέδειξαν μοναδικότητα για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα, υποθέτοντας γνώση των *ειδικών ιδιοτιμών διαπερατότητας*, δηλαδή του υποσυνόλου του φάσματος που αντιστοιχεί στις σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις, και επίσης μερική γνώση του δείκτη διάθλασης. Πιο πρόσφατα, οι Cakoni, Γκιντίδης και Colton διατύπωσαν το ακόλουθο θεώρημα μοναδικότητας για $C^2[0, \infty)$ δείκτες διάθλασης [13]:

Θεώρημα 1.3.1 ([13, Θεώρημα 2.1]) *Υποθέτουμε ότι το $\eta(0)$ είναι γνωστό. Τότε, ο δείκτης διάθλασης μπορεί να ανακτηθεί με μοναδικό τρόπο από τις κλασικές ιδιοτιμές διαπερατότητας.*

1. Εισαγωγή

Η απόδειξη του πιο πάνω βασίζεται σε μια αναπαράσταση Goursat της y_l [31], την εφαρμογή του θεωρήματος παραγοντοποίησης Hadamard στις ακέραιες χαρακτηριστικές συναρτήσεις (1.20) και στην χρήση του θεωρήματος Muntz [39]. Στην ίδια εργασία, δείχθηκε ότι για έναν αρκούντως μικρό και σταθερό δείκτη η , πρέπει να υπάρχουν και μιγαδικές ιδιοτιμές.

Αργότερα, οι Aktosun, Γκιντίδης και Παπανικολάου [1] έδειξαν ότι οι ειδικές ιδιοτιμές διαπερατότητας, μαζί με τις πολλαπλότητες τους ως ρίζες της χαρακτηριστικής συνάρτησης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μοναδική ανακατασκευή του δείκτη διάθλασης, επιβάλλοντας λιγότερους περιορισμούς απ' ό,τι στην [13].

Υπόθεση 1.3.2 Υποθέτουμε ότι $\eta(r) > 0$, $r \in (0, R)$, $\eta \in C^1(0, R)$ και $\eta'' \in L^2(0, R)$.

Θεώρημα 1.3.3 ([1, Θεώρημα 3.2]) Έστω ότι $A := \int_0^R \sqrt{\eta(r)} dr$ και υποθέτουμε ότι για την χαρακτηριστική συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί στο $l = 0$, υπάρχει τουλάχιστον μια συνάρτηση η η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 1.3.2 και ότι $A < R$. Τότε, η μπορεί να καθοριστεί με μοναδικό τρόπο από τη γνώση των ειδικών ιδιοτιμών διαπερατότητας μαζί με τις πολλαπλότητες τους ως ρίζες της χαρακτηριστικής συνάρτησης για $l = 0$.

Η απόδειξη του πιο πάνω στηρίζεται στο θεώρημα παραγοντοποίησης του Hadamard για ακέραιες συναρτήσεις, σε ασυμπτωτικές εκφράσεις για τη χαρακτηριστική συνάρτηση και γίνεται μια συσχέτιση με ένα μη σύννητες πρόβλημα τύπου Sturm-Liouville. Στην ίδια εργασία, αποδεικνύεται επίσης μια παρόμοια εκδοχή του πιο πάνω αποτελέσματος για την περίπτωση $A = R$ και γίνεται μια συζήτηση για τον λόγο που οι ίδιες τεχνικές δεν αρκούν για να καλύψουν την περίπτωση $A > R$.

1.4. Η εισαγωγή τροποποιημένων προβλημάτων σκέδασης

Όπως έχουμε προαναφέρει, οι κλασικές ιδιοτιμές διαπερατότητας έχουν σημαντικό ρόλο στις εφαρμογές της αντίστροφης θεωρίας σκέδασης. Ένα σημαντικό παράδειγμα είναι ότι μπορούν να αξιοποιηθούν στο μη καταστροφικό έλεγχο υλικών [19, 23, 48]. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν όμως κάποιοι περιορισμοί στην χρήση τους. Ένα παράδειγμα είναι ότι μετρήσεις μακρινού πεδίου μπορούν να ανιχνεύσουν μόνο τις πραγματικές ιδιοτιμές. Επομένως, για απορροφητικά μέσα, οι μέθοδοι τύπου Sampling δεν μπορούν να προσδιορίσουν τις κλασικές ιδιοτιμές διαπερατότητας, αφού είναι όλες μιγαδικές. Επιπρόσθετα, επειδή το φάσμα εξαρτάται από τις υλικές ιδιότητες του σκεδαστή, που δεν είναι εν γένει γνωστές, το εύρος συχνοτήτων για το οποίο θα πάρουμε ακριβείς μετρήσεις είναι άγνωστο. Για να ανταπεξέλθουμε, απαιτείται η συλλογή πολυχρωματικών δεδομένων σκέδασης, κάτι που αυξάνει κατά πολύ το κόστος διεξαγωγής των πειραμάτων.

Προσφάτως, έχει θεωρηθεί μια νέα κατηγορία τροποποιημένων προβλημάτων διαπερατότητας [4, 11, 26], η οποία μπορεί να αποφύγει τα μειονεκτήματα που συναντούμε στον μη καταστροφικό έλεγχο. Βασίζονται στην εισαγωγή μιας νέας παραμέτρου που θεωρείται ως η ιδιοτιμή του προβλήματος, ενώ ο κυματάριθος παραμένει σταθερός. Με αυτή τη νέα προσέγγιση, η έννοια του κλασικού τελεστή μακρινού πεδίου αντικαθίσταται από έναν τροποποιημένο τελεστή μακρινού πεδίου, ο οποίος θα είναι

μονοσήμαντος εάν αποφύγουμε τις αντίστοιχες τροποποιημένες ιδιοτιμές. Ένα αξιοσημείωτο παράδειγμα είναι η τροποποίηση τύπου *Stekloff*, της οποίας το φάσμα μπορεί να υπολογιστεί από δεδομένα σκέδασης και επίσης μπορεί να αξιοποιηθεί στην εύρεση ελαττωμάτων σε μη ομογενή υλικά [11]. Ένα άλλο παράδειγμα είναι το πρόβλημα τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας για ένα τεχνητό μεταύλικό. Για το τελευταίο, οι αντίστοιχες ιδιοτιμές μπορούν και πάλι να καθοριστούν από μετρήσεις μακρινού πεδίου, χρησιμοποιώντας μια *Γενικευμένη Μέθοδο Sampling* [4]. Στο επόμενο κεφάλαιο, θα συζητήσουμε αυτές τις δύο τροποποιήσεις πιο αναλυτικά.

1.5. Σύνοψη της διατριβής

Σε αυτή τη διδακτορική διατριβή θεωρούμε προβλήματα ιδιοτιμών που αναδεικνύει η θεωρία σκέδασης και τα οποία είναι συσχετισμένα με τροποποιημένους τελεστές μακρινού πεδίου. Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνουμε έμφαση σε δυο συγκεκριμένες τροποποιήσεις, η πρώτη παράγει ένα πρόβλημα ιδιοτιμών τύπου *Stekloff* και η δεύτερη, ένα πρόβλημα ιδιοτιμών για τεχνητό μεταύλικό. Για την τελευταία εξετάζουμε το ευθύ αλλά και το αντίστροφο πρόβλημα, τόσο από θεωρητική όσο και αριθμητική σκοπιά.

Χρησιμοποιώντας μια μεταβολική διατύπωση στον κατάλληλο χώρο λύσεων, δείχνουμε ότι το τροποποιημένο πρόβλημα ιδιοτιμών διαπερατότητας για τεχνητό μεταύλικό είναι αυτοσυζυγές, εφόσον ο δείκτης διάθλασης δίνεται από μια πραγματική συνάρτηση. Επιπλέον, έχει την αναλυτική *Fredholm* ιδιότητα, η οποία εξασφαλίζει διακριτότητα του φάσματος. Επιπρόσθετα, δείχνεται η ισοδυναμία με ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών για έναν αυτοσυζυγή και συμπαγή τελεστή με τετριμμένο πυρήνα, κάτι το οποίο εξασφαλίζει και την ύπαρξη του φάσματος. Για αρχούντως μικρούς κυματάρθμους δείχνουμε ότι το πρόβλημα επίσης διαθέτει μια ιδιότητα πιστικότητας, αποκαλύπτοντας περισσότερες ιδιότητες για το φάσμα. Πιο συγκεκριμένα, οι ιδιοτιμές του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας μπορούν να διαταχθούν ως μια φθίνουσα ακολουθία, με την πρώτη ιδιοτιμή να είναι πάντοτε θετική και το μόνο σημείο συσώρευσής τους είναι το $-\infty$. Έχουνε επίσης τον χαρακτηρισμό *Courant-Fischer*, όπου η πρώτη ιδιοτιμή αποτελεί το *supremum* του αντίστοιχου πηλίκου *Rayleigh* στον χώρο λύσεων. Τέλος, δείχνουμε ότι η γνώση της πρώτης ιδιοτιμής είναι αρκετή για τον μοναδικό καθορισμό ενός σταθερού δείκτη διάθλασης.

Ο περιορισμός πιστικότητας έχει όμως και κάποιες μη αναμενόμενες συνέπειες για το πρόβλημα που μελετάμε. Πιο συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι το ισοδύναμο πρόβλημα ιδιοτιμών για έναν πιστικό και ένα συμπαγή τελεστή δεν μπορεί να μας προμηθεύσει με μια ορθοκανονική βάση για τον χώρο λύσεων. Ο λόγος είναι ότι ο συμπαγής τελεστής έχει απειροδιάστατο πυρήνα και επομένως, τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων δεν αποτελούν πλήρες σύστημα. Πράγματι, τα ζεύγη αυτά παράγουν ένα γνήσιο κλειστό υπόχωρο. Η απόδειξη του τελευταίου υποδηλώνει έναν τρόπο για να επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση, θεωρώντας όχι μόνο τις ιδιοσυναρτήσεις αλλά και μια βάση για τον πυρήνα του συμπαγούς τελεστή.

Ένας από τους στόχους μας είναι να μελετηθεί το ευθύ φασματικό πρόβλημα αριθμητικά, εφαρμόζοντας μια φασματική μέθοδο *Galerkin*. Για να επιτευχθεί αυτό, θα χρειαστούμε μια ορθοκανονική βάση για τον χώρο λύσεων. Η προαναφερθείσα τεχνική μας δίνει έναν τρόπο επιλογής βάσης, όμως σε πρακτικό επίπεδο είναι δύσκολο να εφαρμοστεί επειδή οι εμπλεκόμενοι χώροι δεν αναλύονται με απλό τρόπο. Ένας εναλλακτικός τρόπος είναι να εισάγουμε ένα βοηθητικό πρόβλημα ιδιοτιμών το οποίο όμως να ορίζεται στον ίδιο χώρο λύσεων. Επιλέγουμε ένα πρόβλημα παρόμοιο με το

1. Εισαγωγή

αρχικό, που αντιστοιχεί σε τεχνητό μεταϊλικό, όμως τώρα η φασματική παράμετρος εμφανίζεται και στις δυο διαφορικές εξισώσεις. Ως αποτέλεσμα, δεν είναι απλά ένα αυτοσυζυγές πρόβλημα, αλλά οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις έχουν επίσης την ιδιότητα πληρότητας. Άρα, μπορεί να μας προμηθεύσει με την ζητούμενη βάση.

Μια αξιοσημείωτη ιδιότητα του βοηθητικού προβλήματος είναι ότι δεν αποτελεί ένα εντελώς άγνωστο πρόβλημα όσο αφορά τις πιθανές λύσεις του, αφού μπορούμε να δείξουμε ότι το φάσμα του αποτελείται από το σύνολο των ιδιοτιμών Dirichlet και Neumann που αντιστοιχούν στο χωρίο D_b . Επίσης, τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων μπορούν να περιγραφούν με μοναδικό τρόπο ως αθροίσματα λύσεων των προβλημάτων Dirichlet και Neumann αντίστοιχα. Συνοπτικά, οι βοηθητικές ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις μπορούν να καθοριστούν μοναδικά από την γνώση του φάσματος Dirichlet και Neumann.

Στη συνέχεια ορίζουμε ένα φασματικό σχήμα Galerkin για να λύσουμε αριθμητικά το ευθύ φασματικό πρόβλημα. Χρησιμοποιώντας την ορθοκανονική βάση ως δοκιμαστικές συναρτήσεις στη μεταβολική διατύπωση, προκύπτει ένα διακριτό ανάλογο του αρχικού προβλήματος ιδιοτιμών στη μορφή ενός γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών πινάκων. Υποθέτοντας ότι ισχύει ο περιορισμός πειστικότητας για τον κυματάριθμο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι ιδιοτιμές του γενικευμένου προβλήματος πινάκων συγκλίνουν στις ιδιοτιμές του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας, καθώς η διάσταση τείνει στο $+\infty$.

Στην ειδική περίπτωση όπου το χωρίο D είναι ο μοναδιαίος δίσκος, εφαρμόζουμε την τεχνική χωρισμού μεταβλητών για να υπολογίσουμε την προαναφερθείσα βάση Dirichlet-Neumann. Έπειτα, χρησιμοποιώντας την ως ένα σύστημα δοκιμαστικών συναρτήσεων και υποθέτοντας ότι ο δείκτης διάθλασης είναι σταθερός, μπορούμε να υπολογίσουμε τους εμπλεκόμενους πίνακες στο διακριτό σχήμα Galerkin. Επιλύοντας το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών παίρνουμε προσεγγίσεις για τις ιδιοτιμές του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας, τις οποίες επαληθεύουμε συγκρίνοντας με τις αναλυτικά υπολογισμένες τιμές του φάσματος. Το τελευταίο επιτυγχάνεται βρίσκοντας τις ρίζες των αντίστοιχων χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Επίσης, ως μια προκαταρκτική προσέγγιση του αντιστρόφου φασματικού προβλήματος, εφαρμόσαμε τη μέθοδο Galerkin για ποικίλους σταθερούς δείκτες διάθλασης και κατασκευάσαμε μια βάση δεδομένων αποτελούμενη από τις αντίστοιχες ιδιοτιμές. Έπειτα, έχοντας εις γνώση το φάσμα που αντιστοιχεί σε έναν άγνωστο και σταθερό δείκτη διάθλασης, ελαχιστοποιήσαμε το σφάλμα μεταξύ του γνωστού φάσματος και των υπολογισμένων ιδιοτιμών, παίρνοντας μια ανακατασκευή για το δείκτη διάθλασης. Η ίδια διαδικασία εφαρμόστηκε και για τμηματικά σταθερούς δείκτες διάθλασης και οι ανακατασκευές μας βελτιώθηκαν όταν η βάση δεδομένων εμπλουτίστηκε από δεδομένα από πολλούς κυματάριθμους.

Για την περίπτωση ενός τρισδιάστατου σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης, αποδεικνύουμε ύπαρξη του φάσματος, χρησιμοποιώντας ασυμπτωτικές εκφράσεις των χαρακτηριστικών συναρτήσεων και αναλυτικές ιδιότητες των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel. Επίσης, εξετάζουμε το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα, αν δηλαδή το φάσμα εμπεριέχει πληροφορία για τον άγνωστο δείκτη διάθλασης. Υποθέτοντας ότι ο κυματάριθμος είναι αρκετά μικρός, δείχνουμε πρώτα μέσω του θεωρήματος παραγοντοποίησης Hadamard, ότι η γνώση των ιδιοτιμών του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας που αντιστοιχούν σε κάθε χαρακτηριστική συνάρτηση, μπορεί να καθορίσει με μοναδικό ένα πηλίκιο συνοριακών δεδομένων Cauchy. Επιπρόσθετα, το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να αποδειχθεί με λιγότερες απαιτήσεις όσο αφορά γνώση του φάσματος. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε χαρακτηριστική συνάρτηση, αρκεί

η γνώση μόνο μιας ιδιοτιμής για να προσδιοριστούν τα συνοριακά δεδομένα Cauchy. Χρησιμοποιώντας μια απεικονιστική ιδιότητα του τελεστή Dirichlet-to-Neumann, καταφέρνουμε τελικά να αποδείξουμε ότι ο δείκτης διάθλασης μπορεί να ανακτηθεί με μοναδικό τρόπο, γνωρίζοντας εκ των προτέρων τα πηλίκα Cauchy.

Τέλος, στο Παράρτημα υπάρχουν οι αποδείξεις κάποιων χρήσιμων εργαλείων που αφορούν τεχνικά ζητήματα της μεταβολικής διατύπωσης ενός φασματικού προβλήματος, καθώς και την εφαρμογή και σύγκλιση της μεθόδου Galerkin.

Κάποια από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται σε αυτή τη διατριβή συμπεριλαμβάνονται στις εργασίες:

- Gintides D., Pallikarakis N. and Stratouras K. (2021), On the modified transmission eigenvalue problem with an artificial metamaterial background, *Res. Math. Sci.* **8** 40
- Gintides D., Pallikarakis N. and Stratouras K. (2022), Uniqueness of a spherically symmetric refractive index from modified transmission eigenvalues, *Inverse Problems*, **38** 085010

και ανακοινώθηκαν στο διεθνές συνέδριο:

- Gintides D., Pallikarakis N. and Stratouras K. (2021), A computational approach for the inverse problem of reconstructing a spherically symmetric refractive index using modified transmission eigenvalues, *2021 XXXIVth General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science (URSI GASS)*

2. Τροποποιημένα προβλήματα ιδιοτιμών διαπερατότητας

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται δυο παραδείγματα προβλημάτων σκέδασης, τα οποία συσχετίζονται με έναν τροποποιημένο τελεστή μακρινού πεδίου και η φυσιολογική τους σύνδεση με τροποποιημένα προβλήματα ιδιοτιμών διαπερατότητας. Το πρώτο αντιστοιχεί σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών τύπου *Stekloff* και το δεύτερο, σε μια τροποποίηση με τεχνητό μεταϊλικό υπόβαθρο.

Περιεχόμενα

| | |
|--|----|
| 2.1. Η τροποποίηση <i>Stekloff</i> | 26 |
| 2.2. Η τροποποίηση τεχνητού μεταϊλικού υποβάθρου | 28 |

2.1. Η τροποποίηση Stekloff

Έστω ότι B είναι μια μπάλα με κέντρο την αρχή, για την οποία ισχύει $D \subset B$ ή $D = B$ και θεωρούμε μια συνάρτηση $h \in C^2(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}) \cap C^1(\mathbb{R}^m \setminus B)$ που να επιλύει το πρόβλημα σκέδασης με συνθήκη εμπέδησης

$$\begin{aligned} \Delta h + k^2 h &= 0 \text{ στο } \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}, \\ h(x) &= e^{ikx \cdot d} + h^s(x), \\ \frac{\partial h}{\partial \nu} + \lambda h &= 0 \text{ στο } \partial B, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial h^s}{\partial r} - ikh^s \right) = 0 \text{ ομοιόμορφα ως προς το } \frac{x}{|x|}$$

όπου με ν συμβολίζουμε το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στη B , λ είναι μια σταθερά τέτοια ώστε $\Im(\lambda) \geq 0$ και η ασυμπτωτική συμπεριφορά του σχεδαζόμενου κύματος δίνεται από την

$$h^s(x) = \frac{\exp(ikr)}{r^{\frac{m-1}{2}}} h_\infty(\hat{x}, d) + O\left(\frac{1}{r^{\frac{m+1}{2}}}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα Rellich [29, Θεώρημα 2.13], μπορεί ναδειχθεί ότι το (2.1) έχει το πολύ μια λύση, ενώ η ύπαρξη λύσης προκύπτει αξιοποιώντας τη θεωρία δυναμικών [29, Θεώρημα 3.13].

Υποθέτουμε τώρα ότι w είναι μια λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} \Delta w + k^2 \eta(x)w &= 0 \text{ στο } B, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} + \lambda w &= 0 \text{ στο } \partial B. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ορισμός 2.1.1 Για ένα σταθερό κυματάρημο k , όλες οι τιμές της φασματικής παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{C}$ για τις οποίες υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις $w \in H^1(B)$ της (2.2) καλούνται ιδιοτιμές Stekloff.

Για να αναλύσουν αυτό το φασματικό πρόβλημα, οι συγγραφείς της [11] χρησιμοποίησαν μια μεταβολική προσέγγιση. Υποθέτουμε ότι η παράμετρος λ αποτελεί ιδιοτιμή Stekloff και ότι η $w \in H^1(B)$ είναι η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση. Τότε, ικανοποιείται η ακόλουθη εξίσωση

$$(\nabla w, \nabla \xi) - k^2(\eta w, \xi) = -\lambda \langle w, \xi \rangle \quad \forall \xi \in H^1(B)$$

όπου

$$(f, g) := \int_B f \bar{g} dA \quad \text{και} \quad \langle f, g \rangle := \int_{\partial B} f \bar{g} ds$$

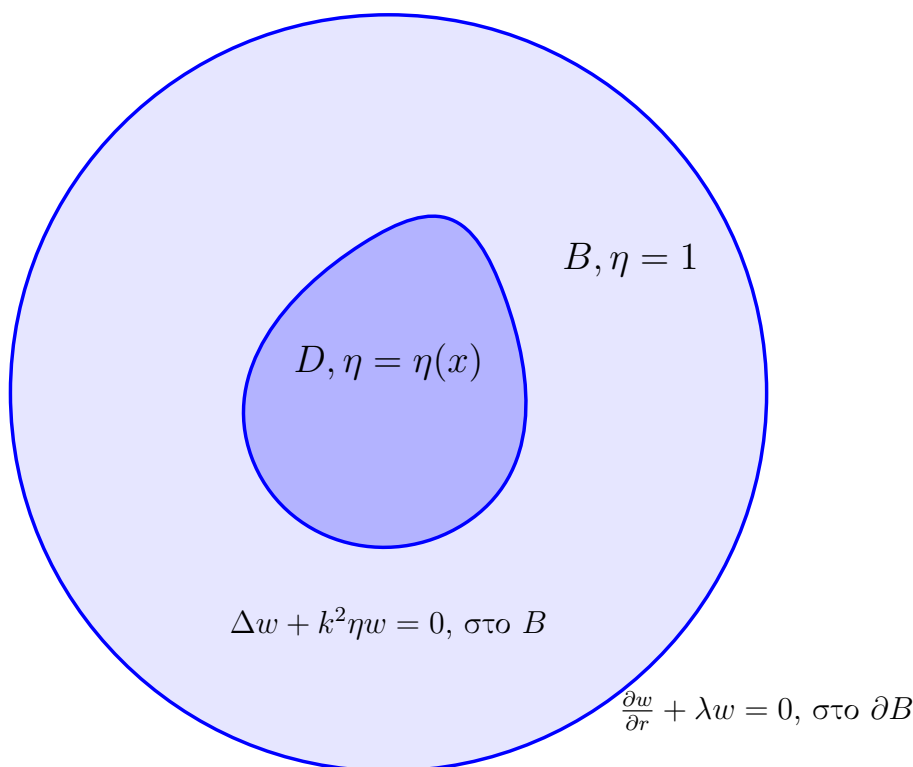
Εαν υποθέσουμε επιπλέον ότι το k^2 δεν αποτελεί ιδιοτιμή Neumann για τον τελεστή Laplace στη B , μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση Neumann-to-Dirichlet $T : L^2(\partial B) \rightarrow L^2(\partial B)$ ως εξής:

Εαν $\mu \in L^2(\partial B)$ και $v_\mu \in H^1(B)$ ορίζεται ως η μοναδική λύση της

$$(\nabla v_\mu, \nabla \xi) - k^2(\eta v_\mu, \xi) = \langle v_\mu, \xi \rangle \quad \forall \xi \in H^1(B),$$

τότε θέτουμε $T\mu := v_\mu|_{\partial B}$. Συνεπώς, το $\mu \in L^2(\partial B)$ αποτελεί ιδιοσυνάρτηση Stekloff για την ιδιοτιμή λ αν και μόνο αν αποτελεί μη τετριμμένη λύση της

$$-\lambda T\mu = \mu$$



Σχήμα 2.1.: Το πρόβλημα ιδιοτιμών Stekloff.

Επειδή $T\mu \in H^{1/2}(B)$ και λόγω της συμπαγούς εμφύτευσης του $H^{1/2}(\partial B)$ στον $L^2(\partial B)$, ο T είναι συμπαγής τελεστής. Αν ο δείκτης διάθλασης περιγράφεται από μια πραγματική συνάρτηση, παρατηρούμε ότι ο T είναι επιπρόσθετα αυτοσυζυγής. Επομένως, η διακριτότητα και ύπαρξη του φάσματος προκύπτουν άμεσα εφαρμόζοντας το θεώρημα Hilbert-Schmidt.

Για την περίπτωση απορροφητικών μέσων, είναι δυνατό να δειχθεί και πάλι ύπαρξη του φάσματος και πληρότητα των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων στον χώρο λύσεων $H^1(B)$, αξιοποιώντας την θεωρία Agmon για τελεστές Hilbert-Schmidt (δείτε [11] για περισσότερες λεπτομέρειες).

Το πρόβλημα σκέδασης (2.1) και το πρόβλημα ιδιοτιμών Stekloff (2.2) συνδέονται μέσω του τροποποιημένου τελεστή μακρινού πεδίου $\mathcal{F} : L^2(S) \rightarrow L^2(S)$, ο οποίος ορίζεται από την

$$(\mathcal{F}g)(\hat{x}) := \int_S [u_\infty(\hat{x}, d) - h_\infty(\hat{x}, d)] g(d) ds(d)$$

Ο τελεστής αυτός είναι μονοσήμαντος εφόσον η παράμετρος λ δεν αποτελεί ιδιοτιμή Stekloff με ιδιοσυνάρτηση της μορφής $w = v_g + w^s(x)$, όπου v_g είναι μια κυματοσυνάρτηση Herglotz και w^s είναι το σχεδαζόμενο κύμα που αντιστοιχεί στη v_g και στην ανομοιογένεια $\eta(x)$ [29, Θεώρημα 10.9], δηλαδή

$$\begin{aligned} \Delta w + k^2 \eta w &= 0 \text{ στο } \mathbb{R}^m \setminus \bar{B}, \\ w(x) &= v_g(x) + w^s(x), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - ikh^s \right) &= 0 \text{ ομοιόμορφα ως προς το } \frac{x}{|x|} \end{aligned} \quad (2.3)$$

2. Τροποποιημένα προβλήματα ιδιοτιμών διαπερατότητας

Θα διατυπώσουμε τώρα κάποια αποτελέσματα από την [11] τα οποία αποτελούν ένδειξη ότι, για ένα σταθερό κυματάρημο k , οι ιδιοτιμές Stekloff μπορούν να υπολογιστούν από μετρήσεις μακρινού πεδίου. Η κύρια ιδέα είναι να επιλυθεί η τροποποιημένη εξίσωση μακρινού πεδίου

$$\mathcal{F}g = \Phi_\infty(\hat{x}, z)$$

με κάποιο κατάλληλο τρόπο, όπου $g = g_z \in L^2(S)$. Πρώτα, για $f \in H^{-1/2}(\partial B)$, θεωρούμε το βοηθητικό πρόβλημα

$$\begin{aligned} \Delta w + k^2 \eta(x)w &= 0 \text{ στο } B, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} + \lambda w &= f \text{ στο } \partial B \end{aligned} \quad (2.4)$$

Λήμμα 2.1.2 ([11, Λήμμα 3.1]) Υποθέτουμε ότι το λ δεν αποτελεί ιδιοτιμή Stekloff. Τότε, η (2.4) διαθέτει μοναδική λύση της μορφής $w = w^i + w^s$, όπου η $w^i \in H^1(B)$ λύνει την εξίσωση Helmholtz στη B και το $w^s \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^m)$ αποτελεί ένα ακτινοβόλο πεδίο.

Η απόδειξη του πιο πάνω προκύπτει ως συνέπεια του ότι η (2.4) ικανοποιεί την εναλλακτική Fredholm και μετά από εφαρμογή της αναπαράστασης Green για τη λύση w .

Θέτουμε $f := f_z = \frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial \nu} + \lambda \Phi(\cdot, z)$ και έστω ότι w_z είναι η αντίστοιχη λύση της (2.4), με διάσπαση $w_z = w_z^i + w^s$. Τότε, το Λήμμα 2.1.2 μπορεί να αξιοποιηθεί για να αποδειχθεί το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.1.3 ([11, Θεώρημα 3.2]) Υποθέτουμε ότι η λ δεν είναι ιδιοτιμή Stekloff και έστω ότι $z \in D$. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει μια συνάρτηση $g_\epsilon^z \in L^2(S)$ τέτοια ώστε

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{F}g_\epsilon^z - \Phi_\infty(\cdot, z)\|_{L^2(S)} = 0 \quad (2.5)$$

έτσι ώστε $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|v_{g_\epsilon^z} - w_z^i\|_{H^1(B)} = 0$ και επομένως η $\|v_{g_\epsilon^z}\|_{H^1(B)}$ παραμένει φραγμένη καθώς $\epsilon \rightarrow 0$, όπου η $v_{g_\epsilon^z}$ είναι η κυματοσυνάρτηση Herglotz με πυρήνα g_ϵ^z .

Θεώρημα 2.1.4 ([11, Θεώρημα 3.3]) Υποθέτουμε ότι η λ είναι ιδιοτιμή Stekloff και ότι η $g_\epsilon^z \in L^2(S)$ ικανοποιεί την (2.5). Τότε, η $\|v_{g_\epsilon^z}\|_{H^1(B)}$ δεν μπορεί να παραμείνει φραγμένη καθώς $\epsilon \rightarrow 0$, σχεδόν για κάθε $z \in B_\rho$, όπου $B_\rho \subset D$ είναι μια αυθαίρετη μπάλα με ακτίνα ρ .

Παρατήρηση 2.1.5 Τα πιο πάνω αποτελέσματα υπονοούν ότι, για ένα σταθερό κυματάρημο k , οι μετρήσεις μακρινού πεδίου μπορούν να αξιοποιηθούν για να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές Stekloff. Για αριθμητικά παραδείγματα, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην [11].

2.2. Η τροποποίηση τεχνητού μεταϋλικού υποβάθρου

Έστω ότι D_b είναι ένα φραγμένο σύνολο με αρχούντως λείο σύνορο ∂D_b και συνεκτικό συμπλήρωμα στον \mathbb{R}^m , ούτως ώστε $D \subset D_b$. Τότε, θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα

2.2. Η τροποποίηση τεχνητού μεταλλικού υποβάθρου

σκέδασης, το οποίο αντιστοιχεί σε ανομοιογένεια με φορέα D_b και αρνητικές υλικές ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
 \Delta u_b^s + k^2 u_b^s &= 0 \text{ στο } \mathbb{R}^m \setminus \overline{D_b}, \\
 (-a)\Delta u_b + k^2 \lambda u_b &= 0 \text{ στο } D_b \\
 u_b - u_b^s &= u^i \text{ στο } \partial D_b \\
 (-a)\frac{\partial u_b}{\partial \nu} - \frac{\partial u_b^s}{\partial \nu} &= \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \text{ στο } \partial D_b \\
 \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial u_b^s}{\partial r} - ik u_b^s \right) &= 0 \text{ ομοιόμορφα ως προς το } r = \frac{x}{|x|}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

όπου με $-a < 0$ συμβολίζουμε μια σταθερή παράμετρο τέτοια ώστε $a \neq 1$ και το προσπίπτον κύμα είναι της μορφής $u^i = e^{ikx \cdot d}$. Από την [6], γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα σκέδασης (2.6) είναι καλά τοποθετημένο εφόσον $\Im(\lambda) \geq 0$. Ο τελεστής μακρινού πεδίου $F_b^\lambda : L^2 \rightarrow L^2$ δίνεται από την

$$(F_b^\lambda g)(\hat{x}) := \int_S u_b^\infty(\hat{x}, d) g(d) ds(d),$$

όπου με $u_\infty(\hat{x}, d)$ συμβολίζουμε το μακρινό πεδίο του u_b^s και το $F_b^\lambda g := u_{b,g}^\infty$ είναι το μακρινό πεδίο της ακτινοβολού λύσης $u_{b,g}^s$, που αντιστοιχεί στη κυματοσυνάρτηση Herglotz $u^i := v_b$ με πυρήνα g . Ο τροποποιημένος τελεστής μακρινού πεδίου $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ ορίζεται τώρα από την διαφορά

$$\mathcal{F}g := Fg - F_b^\lambda g,$$

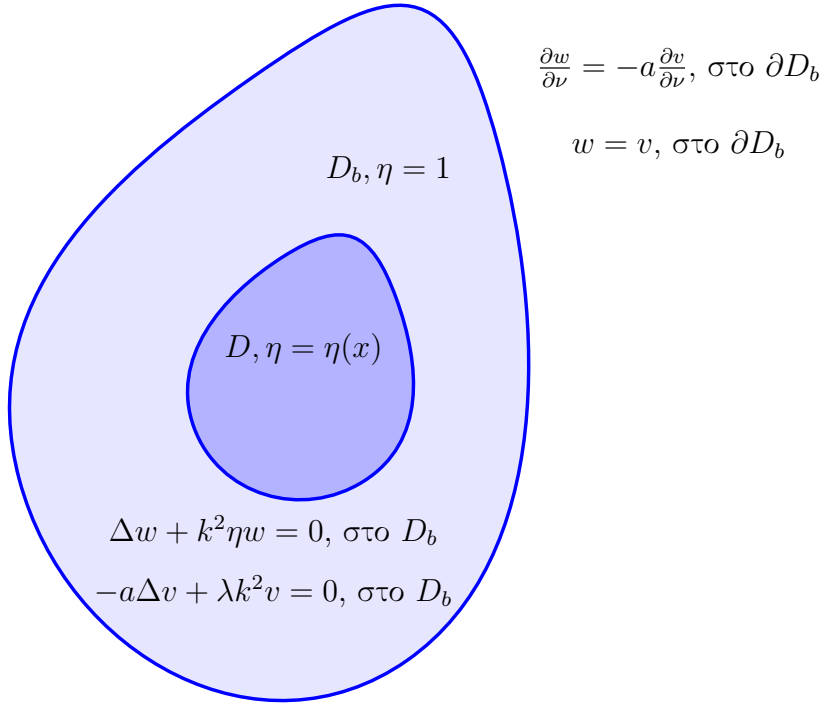
όπου F είναι ο τελεστής μακρινού πεδίου (1.10) που αντιστοιχεί στο φυσικό υπόβαθρο (η, D) και ο F_b^λ στο υπόβαθρο τεχνητού μεταλλικού $(-a, \lambda, D_b)$.

Όπως και προηγουμένως, το φασματικό πρόβλημα που προκύπτει πηγάζει από το αν αυτός ο τροποποιημένος τελεστής μακρινού πεδίου είναι μονοσήμαντος ή όχι. Αν $g \in N(\mathcal{F})$ και με u_g συμβολίζουμε την λύση του (1.5)-(1.7) στην περίπτωση όπου το προσπίπτον κύμα είναι η κυματοσυνάρτηση Herglotz v_g , τότε από το λήμμα του Rellich και ένα επιχείρημα μοναδικής συνέχισης, προκύπτει ότι $u_g = u_{b,g}$ στο $\mathbb{R}^m \setminus D_b$. Επομένως, επεκτείνοντας τον δείκτη διάθλασης ως $\eta = 1$ στο $D_b \setminus \overline{D}$ και αξιοποιώντας την συνέχεια των δεδομένων Cauchy για τα πεδία u_g και $u_{b,g}$ εντός και εκτός του συνόρου ∂D_b , συμπεραίνουμε ότι το ζεύγος συναρτήσεων $w := u_{b,g}|_{D_b}$ και $v := u_g|_{D_b}$ ικανοποιεί το ομογενές σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned}
 \Delta w + k^2 \eta(x) w &= 0 \quad \text{στο } D_b, \\
 -a \Delta v + \lambda k^2 v &= 0 \quad \text{στο } D_b \\
 w &= v \quad \text{στο } \partial D_b, \\
 \frac{\partial w}{\partial n} &= -a \frac{\partial v}{\partial n} \quad \text{στο } \partial D_b
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Σε ποιες περιπτώσεις όμως ο τελεστής \mathcal{F} είναι μονοσήμαντος; Αν υποθέσουμε ότι η μόνη λύση του πιο πάνω είναι η τετριμμένη, τότε για κάθε $g \in N(\mathcal{F})$, έχουμε ότι $u_g|_{D_b} = 0$ και από την αρχή μοναδικής συνέχισης θα πρέπει να ισχύει $u_g \equiv 0$. Αυτό όμως είναι δυνατό μόνο στην περίπτωση όπου $u_{b,g}^s = -v_g$, κάτι που υποδηλώνει ότι ο πυρήνας g είναι τετριμμένος.

2. Τροποποιημένα προβλήματα ιδιοτιμών διαπερατότητας



Σχήμα 2.2.: Το πρόβλημα τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας για ένα τεχνητό μεταλλικό υπόβαθρο.

Όλες οι τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{C}$ για τις οποίες υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις $w, v \in H^1(D_b)$ καλούνται *τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας* για το υπόβαθρο τεχνητού μεταλλικού. Οι φασματικές ιδιότητες αυτού του προβλήματος θα συζητηθούν εκτενώς στο επόμενο κεφάλαιο.

Αυτό το νέο σύνολο ιδιοτιμών μπορεί να ανιχνευθεί χρησιμοποιώντας μια *Γενικευμένη μέθοδο Sampling* και διατυπώνουμε τα βασικότερα αποτελέσματα σε αυτή την κατεύθυνση. Για περισσότερες λεπτομέρειες και τις τεχνικές απόδειξης, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην [4].

Ορίζουμε έναν τελεστή $\mathcal{H} : L^2(S) \rightarrow L^2(D_b)^m \times L^2(D_b)$ έτσι ώστε

$$\mathcal{H}g := (\nabla u_{b,g}|_{D_b}, u_{b,g}|_{D_b})$$

και επίσης $\mathcal{G} : \overline{R(H)} \subset L^2(D_b)^m \times L^2(D_b) \rightarrow L^2(S)$ έτσι ώστε

$$\mathcal{G}(\phi, \psi) = w^\infty,$$

όπου w^∞ ορίζεται να είναι το μακρινό πεδίο του $w^s \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^m)$, και w^s αποτελεί την ακτινοβόλο λύση της

$$\Delta w^s + k^2 \eta w^s = \nabla \cdot (-a - I)\phi + k^2(\lambda - \eta)\psi \quad \text{στο } \mathbb{R}^m$$

Τότε, ο τροποποιημένος τελεστής μακρινού πεδίου μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $\mathcal{F} = \mathcal{G}\mathcal{H}$ και τότε έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Λήμμα 2.2.1 ([4, Λήμμα 6]) Υποθέτουμε ότι η, λ είναι ιδιοτιμή για την (2.7) και ότι δεν είναι ιδιοτιμή για το ίδιο σύστημα ομογενών εξισώσεων στην περίπτωση όπου

2.2. Η τροποποίηση τεχνητού μεταλλικού υποβάθρου

$\eta(x) = 1$. Τότε, το σύνολο των σημείων z που ικανοποιούν την $\Phi_z^\infty \in \overline{R(\mathcal{G})}$ δεν είναι πουθενά πυκνό στο D_b .

Θεώρημα 2.2.2 ([4, Θεώρημα 7]) Έστω ότι $\lambda \in \mathbb{C}$ και υποθέτουμε ότι ο τροποποιημένος τελεστής μακρινού πεδίου \mathcal{F} έχει πυκνό πεδίο τιμών και ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του [4, Λήμμα 4]. Επίσης, θεωρούμε το συναρτησιακό

$$J_\alpha(\Phi_z^\infty, g) := \alpha |(F_b^\lambda g, g)| + \|\mathcal{F}g - \Phi_z^\infty\|^2$$

και θέτουμε $j_\alpha(\Phi_z^\infty) := \inf_g J_\alpha(\Phi_z^\infty, g)$. Έστω ότι g_α^z είναι μια ακολουθία ελαχιστοποίησης, που ορίζεται από την

$$J_\alpha(\Phi_z^\infty, g_\alpha^z) \leq j_\alpha(\Phi_z^\infty) + C\alpha,$$

όπου η $C > 0$ είναι μια καθορισμένη σταθερά. Τότε, η λ αποτελεί ιδιοτιμή για την (2.7) αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων για τα οποία ισχύει ότι η $|(F_b^\lambda g_\alpha^z, g_\alpha^z)|$ παραμένει φραγμένη καθώς $\alpha \rightarrow 0$ δεν είναι πουθενά πυκνή στο D_b .

Για τους σκοπούς αυτής της διατριβής εισάγουμε μια γενίκευση του προβλήματος ιδιοτιμών (2.7),

$$\begin{aligned} \Delta w + k^2 \eta(x) w &= 0 & \text{στο } D_b, \\ -a \Delta v + \lambda k^2 \eta_0(x) v &= 0 & \text{στο } D_b \\ w &= v & \text{στο } \partial D_b, \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= -a \frac{\partial v}{\partial n} & \text{στο } \partial D_b, \end{aligned}$$

όπου ένας δοκιμαστικός δείκτης διάθλασης εμφανίζεται στην δεύτερη διαφορική εξίσωση. Στα επόμενα κεφάλαια, θα εξετάσουμε το ευθύ αλλά και το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για αυτή την τροποποίηση. Ομοίως με προηγούμενως, το πρόβλημα αυτό συσχετίζεται με το ακόλουθο πρόβλημα σκέδασης

$$\begin{aligned} \Delta u_b^s + k^2 u_b^s &= 0 \text{ στο } \mathbb{R}^m \setminus \overline{D_b}, \\ (-a) \Delta u_b + k^2 \lambda \eta_0(x) u_b &= 0 \text{ στο } D_b \\ u_b - u_b^s &= u^i \text{ στο } \partial D_b \\ (-a) \frac{\partial u_b}{\partial \nu} - \frac{\partial u_b^s}{\partial \nu} &= \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \text{ στο } \partial D_b \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial u_b^s}{\partial r} - i k u_b^s \right) &= 0 \text{ ομοιόμορφα ως προς το } r = \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

που είναι επίσης καλά τοποθετημένο κάτω από τους ίδιους περιορισμούς $a \neq 1$ και $\Im(\lambda) \geq 0$ [6].

3. Μια μεταβολική προσέγγιση για το ευθύ φασματικό πρόβλημα

*Εξετάζουμε τις φασματικές ιδιότητες του προβλήματος τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας που αντιστοιχεί σε ένα τεχνητό μεταλλικό με δοκιμαστικό δείκτη διάθλασης. Χρησιμοποιώντας τη μεταβολική διατύπωση του προβλήματος, αποδεικνύουμε ύπαρξη και διακριτότητα. Επιπρόσθετα, επιβάλλοντας έναν περιορισμό πιστικότητας στον κυματάρημο, δείχνουμε ότι οι ιδιοτιμές μπορούν να διαταχθούν σε μια φθίνουσα ακολουθία που τείνει στο $-\infty$. Στην περίπτωση αυτή, η πρώτη ιδιοτιμή αποτελεί το *supremum* ενός πηλίκου Rayleigh και κάθε αντίστοιχο ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων είναι ένας μεγιστοποιητής.*

Περιεχόμενα

| | |
|--|----|
| 3.1. Ύπαρξη διακριτού φάσματος | 34 |
| 3.2. Μια ισοδύναμη διατύπωση για έναν πιστικό και έναν συμπαγή τελεστή | 39 |

3.1. Ύπαρξη διακριτού φάσματος

Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$\Delta w + k^2 \eta(x)w = 0 \quad \text{στο } D_b, \quad (3.1)$$

$$-a\Delta v + \lambda k^2 \eta_0(x)v = 0 \quad \text{στο } D_b \quad (3.2)$$

$$w = v \quad \text{στο } \partial D_b, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = -a \frac{\partial v}{\partial n} \quad \text{στο } \partial D_b \quad (3.4)$$

Ορίζουμε ως ένα ιδιοζεύγος του προβλήματος κάθε συνδυασμό τιμών της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{C}$ και μη τετριμμένων λύσεων (w, v) του (3.1)-(3.4). Αυτά τα λ είναι οι ιδιοτιμές και (w, v) είναι οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος. Για να μελετήσουμε περαιτέρω τις φασματικές ιδιότητες του πιο πάνω προβλήματος, ακολουθώντας τις ιδέες που αναπτύχθηκαν στην [4], προχωράμε με τον προσδιορισμό μιας κατάλληλης μεταβολικής διατύπωσης.

Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $\mathcal{H}(D_b) := \{(w, v) \in H^1(D_b) \times H^1(D_b) : w = v \text{ στο } \partial D_b\}$. Τότε, ορίζουμε ως ασθενή λύση του (3.1)-(3.4) οποιοδήποτε ζεύγος συναρτήσεων (w, v) που επιλύει την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda((w, v), (w', v')) &= \int_{D_b} \nabla w \cdot \nabla \bar{w}' dx + a \int_{D_b} \nabla v \cdot \nabla \bar{v}' dx \\ &\quad - k^2 \int_{D_b} \eta(x)w \cdot \bar{w}' dx + k^2 \lambda \int_{D_b} \eta_0(x)v \cdot \bar{v}' dx = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

για κάθε $(w', v') \in \mathcal{H}(D_b)$, όπου η Φ_λ μπορεί να θεωρηθεί ως μια ημιγραμμική μορφή ορισμένη στον $\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)$.

Εάν αντικαταστήσουμε ως δοκιμαστικές συναρτήσεις ένα από τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων (w, v) , παρατηρούμε ότι όλες οι ιδιοτιμές λ του (3.5), αν πράγματι υπάρχουν, θα πρέπει να είναι πραγματικοί αριθμοί. Πράγματι, στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι ιδιοτιμές λ αντιστοιχούν σε έναν αυτοσυζυγή τελεστή. Επιπρόσθετα, είμαστε σε θέση να δείξουμε ότι το σύστημα εξισώσεων (3.1)-(3.4) έχει ελλειπτικές ιδιότητες:

Πρόταση 3.1.1 Το πρόβλημα ιδιοτιμών (3.1)-(3.4) είναι ισχυρά ελλειπτικό [65].

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιείται η ακόλουθη ανισότητα (δείτε το Παράρτημα):

$$\Re(\Phi_\lambda((w, v), (w, v))) \geq c_1(\lambda) \|(w, v)\|_{\mathcal{H}(D_b)} - c_2(\lambda) \|(w, v)\|_{L^2(D_b) \times L^2(D_b)}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Έχουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$\begin{aligned} \Re(\Phi_\lambda((w, v), (w, v))) &= \|\nabla w\|^2 + a\|\nabla v\|^2 \\ &\quad - k^2 \int_{D_b} \eta |w|^2 dx + k^2 \Re(\lambda) \int_{D_b} \eta_0 |v|^2 dx \\ &= \|\nabla w\|^2 + a\|\nabla v\|^2 + \|w\|^2 + \|v\|^2 - \|w\|^2 - \|v\|^2 \\ &\quad - k^2 \int_{D_b} \eta |w|^2 dx + k^2 \Re(\lambda) \int_{D_b} \eta_0 |v|^2 dx \\ &\geq c_1 \|(w, v)\|_{\mathcal{H}(D_b)}^2 - (k^2 \eta_{\max} + 1) \|w\|^2 + (k^2 \Re(\lambda) - 1) \|v\|^2 \\ &\geq c_1 \|(w, v)\|_{\mathcal{H}(D_b)}^2 - c_2(\lambda) \|(w, v)\|_{L^2(D_b) \times L^2(D_b)}^2 \end{aligned}$$

όπου ορίζουμε ως $c_1 := \min\{1, a\}$ και $c_2(\lambda) := \max\{k^2\eta_{\max} + 1, |k^2\Re(\lambda) - 1|\}$. ■

Για την περαιτέρω μελέτη των φασματικών ιδιοτήτων του πιο πάνω προβλήματος ιδιοτιμών, ορίζουμε ένα ισοδύναμο πρόβλημα ιδιοτιμών για τελεστές, μέσω του Θεωρήματος Αναπαράστασης Riesz :

Ορίζουμε έναν τελεστή $A_\lambda : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε:

$$(A_\lambda(w, v), (w', v'))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} = \Phi_\lambda((w, v), (w', v'))$$

Επομένως, το (3.5) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$(A_\lambda(w, v), (w', v'))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} = 0, \quad \forall (w', v') \in \mathcal{H}(D_b) \quad (3.6)$$

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε έναν τελεστή $K_\lambda : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow (\mathcal{H}(D_b))^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε:

$$\langle K_\lambda(w, v), (w', v') \rangle_{\mathcal{H}^*(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} = \Phi_\lambda((w, v), (w', v')),$$

όπου ο πιο πάνω συμβολισμός αντιστοιχεί στη δυϊκή ζεύξη $(\mathcal{H}(D_b))^* \times \mathcal{H}(D_b)$.

Συνεπώς, το (3.5) είναι επίσης ισοδύναμο με το ακόλουθο πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\langle K_\lambda(w, v), (w', v') \rangle_{\mathcal{H}^*(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} = 0, \quad \forall (w', v') \in \mathcal{H}(D_b) \quad (3.7)$$

Παρατηρούμε ότι το $K_\lambda(w, v)$ αποτελεί ένα αντιγραμμικό συναρτησιακό ορισμένο στον $\mathcal{H}(D_b)$ και ως $(\mathcal{H}(D_b))^*$ συμβολίζουμε τον χώρο όλων των αντιγραμμικών συναρτησοειδών που είναι ορισμένα στον $\mathcal{H}(D_b)$. Οι πιο πάνω τελεστές, ορισμένοι μέσω του Θεωρήματος Αναπαράστασης Riesz, είναι γραμμικοί και φραγμένοι και συνδέονται μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$A_\lambda = \Gamma \cdot K_\lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.8)$$

Ο τελεστής $\Gamma : (\mathcal{H}(D_b))^* \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ είναι ο τοπολογικός ισομορφισμός, ορισμένος μέσω του Θεωρήματος Αναπαράστασης Riesz, τέτοιος ώστε για κάθε $f \in (\mathcal{H}(D_b))^*$ να ισχύει $\Gamma(f) = x$, όπου $f(v) = (x, v)_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)}$.

Λήμμα 3.1.2 Η οικογένεια τελεστών A_λ είναι τύπου Fredholm και εξαρτάται αναλυτικά από την παράμετρο λ .

Απόδειξη. Ορίζουμε δυο βοηθητικούς τελεστές

$$\begin{aligned} (A_\lambda^{(1)}(w, v), (w', v'))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} &:= \int_{D_b} \nabla w \cdot \nabla \overline{w'} dx + a \int_{D_b} \nabla v \cdot \nabla \overline{v'} dx \\ &+ \int_{D_b} w \cdot \overline{w'} dx + \int_{D_b} v \cdot \overline{v'} dx \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} (A_\lambda^{(2)}(w, v), (w', v'))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} &:= - \int_{D_b} w \cdot \overline{w'} dx - \int_{D_b} v \cdot \overline{v'} dx \\ &- k^2 \int_{D_b} \eta(x) w \cdot \overline{w'} dx + k^2 \lambda \int_{D_b} \eta_0(x) v \cdot \overline{v'} dx \end{aligned}$$

Ο $A_\lambda^{(1)}$ είναι πιεστικός ως προς τη νόρμα που επάγει το εσωτερικό γινόμενο του χώρου λύσεων $\mathcal{H}(D_b)$ και ο $A_\lambda^{(2)}$ είναι συμπαγής και εξαρτάται αναλυτικά από τη φασματική παράμετρο. Επομένως, ο $A_\lambda = A_\lambda^{(1)} + A_\lambda^{(2)}$ είναι τύπου Fredholm ως άθροισμα ενός

3. Μια μεταβολική προσέγγιση για το ευθύ φασματικό πρόβλημα

γραμμικού ισομορφισμού και ενός συμπαγούς τελεστή και επίσης, εξαρτάται αναλυτικά από το $\lambda \in \mathbb{C}$. ■

Επιπρόσθετα, αν επιλέξουμε ένα $\tau \in \mathbb{R}$ και θέσουμε $t = i\tau$, παρατηρούμε ότι $N(A_t) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $A_t(w, v) = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Επειδή όμως ο A_t είναι Fredholm, προκύπτει άμεσα ότι θα είναι και αμφιμονοσήμαντος. Επομένως, υπάρχει ο αντίστροφος $(A_z)^{-1}$ ως γραμμικός και φραγμένος τελεστής, για έναν τουλάχιστον μιγαδικό αριθμό $z = t$.

Οι πιο πάνω ιδιότητες μεταφέρονται και στην οικογένεια τελεστών K_λ αν αξιοποιηθεί το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Λήμμα 3.1.3 *Ο A_λ έχει την ιδιότητα Fredholm αν και μόνο αν ο K_λ έχει την ιδιότητα Fredholm.*

Απόδειξη. Η ιδιότητα Fredholm παραμένει αναλλοίωτη από τοπολογικούς ισομορφισμούς, όπου σε αυτή την περίπτωση αναφερόμαστε στους Γ και Γ^{-1} (δείτε Παράρτημα). ■

Είμαστε πλέον σε θέση να χρησιμοποιήσουμε το Αναλυτικό Θεώρημα Fredholm [29, Θεώρημα 8.26]:

Θεώρημα 3.1.4 *Υποθέτουμε ότι $\{Q_z\}_{z \in \mathbb{C}}$ είναι μια οικογένεια τελεστών Fredholm οι οποίοι εξαρτώνται αναλυτικά από στην παράμετρο z . Τότε, ισχύει ακριβώς μια εκ των δύο εναλλακτικών:*

- (α) *Ο $(Q_z)^{-1}$ δεν υπάρχει για κανένα $z \in \mathbb{C}$ ή,*
- (β) *Ο $(Q_z)^{-1}$ υπάρχει για κάθε z , εξαιρώντας το πολύ ένα διακριτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου.*

Επομένως, για την οικογένεια τελεστών $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$ ισχύει η εναλλακτική (β) που εξασφαλίζει την διακριτότητα του φάσματος. Επιπρόσθετα, ως συνέπεια της (β), μπορούμε πάντα να επιλέξουμε ένα $\beta \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε ο A_β^{-1} να υπάρχει ως γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Από το σημείο αυτό και έπειτα, θα υποθέτουμε πάντοτε ότι το $\beta \in \mathbb{R}$ έχει αυτή την ιδιότητα.

Ορίζουμε τον συμπαγή, θετικό, γραμμικό τελεστή $B : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$

$$(B(w, v), (w', v'))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} = \int_{D_b} \eta_0 v \bar{v}' dx$$

Τότε, η (3.6) είναι ισοδύναμη με το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$A_\beta(w, v) = k^2(\beta - \lambda)B(w, v)$$

Αξιοποιώντας τα πιο πάνω, διατυπώνουμε ένα ισοδύναμο πρόβλημα ιδιοτιμών με τα (3.6) και (3.7), το οποίο αντιστοιχεί σε έναν αυτοσυζυγή και συμπαγή τελεστή. Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε

$$T : L^2(D_b) \rightarrow L^2(D_b) \text{ έτσι ώστε } Tf = v_f \in H^1(D_b)$$

όπου το v_f είναι το μοναδικό στοιχείο του $H^1(D_b)$ τέτοιο ώστε $K_\beta(w_f, v_f) = (0, \eta_0 f) \in (\mathcal{H}(D_b))^*$. Σημειώνουμε πως για κάθε $f \in L^2(D_b)$, έχουμε επίσης ότι $\eta_0 f \in L^2(D_b)$. Αφού η παράμετρος $\beta \in \mathbb{R}$ επιλέχθηκε με τέτοιο τρόπο ώστε ο A_β^{-1} να υπάρχει ως γραμμικός και φραγμένος τελεστής, από την (3.8) ο K_β^{-1} επίσης θα υπάρχει ως γραμμικός και φραγμένος. Σε ότι θα ακολουθήσει, θα αναλύσουμε τις ιδιότητες του T και

το αντίστοιχο πρόβλημα ιδιοτιμών του. Αρχίζουμε ορίζοντας το σταθμισμένο εσωτερικό γινόμενο $(f, g)_{L^2(D_b, \eta_0 dx)} := \int_{D_b} \eta_0(x) f \bar{g} dx$, όπου $f, g \in L^2(D_b)$. Ως συνέπεια της εκτίμησης $\eta_{0, \min} \leq \eta_0 \leq \eta_{0, \max}$, το σταθμισμένο εσωτερικό γινόμενο είναι ισοδύναμο με το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο του $L^2(D_b)$. Μπορούμε πλέον να διατυπώσουμε το ακόλουθο:

Πρόταση 3.1.5 *Ο τελεστής $T : L^2(D_b, \eta_0 dx) \rightarrow L^2(D_b, \eta_0 dx)$ είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής. Επιπλέον, το πρόβλημα ιδιοτιμών για τον T :*

$$Tv = \frac{1}{k^2(\beta - \lambda)}v, \quad (3.9)$$

όπου με v αναγνωρίζουμε τη δεύτερη ιδιοσυνάρτηση από οποιοδήποτε ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων (w, v) του (3.5), αποτελεί ισοδύναμο πρόβλημα ιδιοτιμών με το (3.5).

Απόδειξη. Ο T είναι συμπαγής επειδή ως απεικόνιση από τον $L^2(D_b)$ στον $H^1(D_b)$ είναι φραγμένος, η εμφύτευση $I : H^1(D_b) \rightarrow L^2(D_b)$ είναι συμπαγής και από την ισοδυναμία του συνήθους και του σταθμισμένου εσωτερικού γινομένου. Επιπρόσθετα, αφού η A_β , $\beta \in \mathbb{R}$ αποτελεί οικογένεια αυτοσυζυγών τελεστών, προκύπτει ότι και ο T είναι αυτοσυζυγής (δείτε το Παράρτημα). Απομένει να δείξουμε την ισοδυναμία των (3.5) και (3.9).

Εστω ότι το $\{\lambda, (w, v)\}$ αποτελεί μια μη τετριμμένη λύση του (3.5). Τότε,

$$\langle K_\lambda(w, v), (w', v') \rangle = 0, \quad \text{για κάθε } (w', v') \in \mathcal{H}(D_b)$$

ή

$$\langle K_\beta(w, v), (w', v') \rangle = k^2(\beta - \lambda) \int_{D_b} \eta_0 v \bar{v}' dx, \quad \text{για κάθε } (w', v') \in \mathcal{H}(D_b).$$

Επίσης, έστω $f \in L^2(D_b)$. Τότε, έχουμε ότι $(0, \eta_0 f) \in L^2(D_b) \times L^2(D_b)$. Αφού ισχύει ότι $L^2(D_b) \times L^2(D_b) \subset H^{-1}(D_b) \times H^{-1}(D_b) \subset (\mathcal{H}(D_b))^*$, θα έχουμε (δείτε το Παράρτημα):

$$\langle (0, \eta_0 f), (w', v') \rangle = \int_{D_b} \eta_0 f \bar{v}' dx = \langle K_\beta(w_f, v_f), (w', v') \rangle$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} & \langle K_\beta(k^2(\beta - \lambda)w_f - w, k^2(\beta - \lambda)v_f - v), (w', v') \rangle \\ &= k^2(\beta - \lambda) \langle K_\beta(w_f, v_f), (w', v') \rangle - \langle K_\beta(w, v), (w', v') \rangle \\ &= k^2(\beta - \lambda) \langle (0, \eta_0 f), (w', v') \rangle - k^2(\beta - \lambda) \langle (0, \eta_0 v), (w', v') \rangle \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $f = v$, όπου με v αναγνωρίζουμε τη δεύτερη ιδιοσυνάρτηση σε οποιοδήποτε ιδιοζεύγος (w, v) , η πιο πάνω έκφραση θα είναι ίση με 0 για κάθε επιλογή $(w', v') \in \mathcal{H}(D_b)$. Επειδή ο τελεστής K_β είναι αντιστρέψιμος, ο πυρήνας του είναι τετριμμένος, δηλαδή ισχύει $N(K_\beta) = \{0\}$. Συνεπώς,

$$k^2(\beta - \lambda)w_f = w \quad \text{και} \quad k^2(\beta - \lambda)v_f = v, \quad \text{επομένως} \quad Tv = \frac{1}{k^2(\beta - \lambda)}v$$

3. Μια μεταβολική προσέγγιση για το ευθύ φασματικό πρόβλημα

Αντιστρόφως, εάν (t, u) αποτελεί ένα αυθαίρετο ιδιοστοιχείο για τον T , με $t \neq 0$, μπορούμε να δείξουμε ότι ικανοποιεί το πρόβλημα ιδιοτιμών (3.5).

Αφού $\langle K_\beta(w_u, tu), (w', v') \rangle = \langle (0, \eta_0 u), (w', v') \rangle$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_{D_b} \nabla w_u \cdot \nabla \bar{w}' dx + a \int_{D_b} \nabla tu \cdot \nabla \bar{v}' dx \\ & - k^2 \int_{D_b} \eta(x) w_u \cdot \bar{w}' dx + k^2 \beta \int_{D_b} \eta_0(x) tu \cdot \bar{v}' dx = \int_{D_b} \eta_0(x) u \cdot \bar{v}' dx \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} & \int_{D_b} \nabla \frac{w_u}{t} \cdot \nabla \bar{w}' dx + a \int_{D_b} \nabla u \cdot \nabla \bar{v}' dx \\ & - k^2 \int_{D_b} \eta(x) \frac{w_u}{t} \cdot \bar{w}' dx + k^2 \beta \int_{D_b} \eta_0(x) u \cdot \bar{v}' dx = \frac{1}{t} \int_{D_b} \eta_0(x) u \cdot \bar{v}' dx \end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} & \int_{D_b} \nabla \frac{w_u}{t} \cdot \nabla \bar{w}' dx + a \int_{D_b} \nabla u \cdot \nabla \bar{v}' dx \\ & - k^2 \int_{D_b} \eta(x) \frac{w_u}{t} \cdot \bar{w}' dx + k^2 \left(\beta - \frac{1}{tk^2} \right) \int_{D_b} \eta_0(x) u \cdot \bar{v}' dx = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, το $\{\beta - \frac{1}{tk^2}, (\frac{1}{t} w_u, u)\}$ αποτελεί ένα ιδιοζεύγος για το πρόβλημα ιδιοτιμών (3.5). ■

Πρόταση 3.1.6 *Ο τελεστής T είναι μονοσήμαντος.*

Απόδειξη. Έστω ότι $f \in N(T)$, $f \neq 0$. Τότε, θα ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση για κάθε επιλογή δοκιμαστικών συναρτήσεων

$$\int_{D_b} \nabla w_f \cdot \nabla \bar{w}' dx - k^2 \int_{D_b} \eta w_f \cdot \bar{w}' dx = \int_{D_b} \eta_0 f \bar{v}' dx$$

Σταθεροποιούμε ένα $w' \in H_0^1(D_b)$, $w' \neq 0$ και διαλέγουμε $v'_1 = 0, v'_2 \in H_0^1(D_b)$. Τότε ισχύει

$$\langle K_\beta(w_f, 0), (w', v'_1) \rangle = \langle K_\beta(w_f, 0), (w', v'_2) \rangle = \int_{D_b} \eta_0 f \bar{v}'_2 dx = 0$$

Αφού το $\eta_0 f \in (H_0^1(D_b))^*$ και το $v'_2 \in H_0^1(D_b)$ αποτελεί ένα αυθαίρετο στοιχείο, το $\eta_0 f$ θα πρέπει να ταυτίζεται με το τετριμμένο συναρτησιακό του $(H_0^1(D_b))^*$. Άρα, $f = 0$. ■

Παρατήρηση 3.1.7 *Αφού ο T είναι μονοσήμαντος, από την ακόλουθη διάσπαση χώρων Hilbert:*

$$L^2(D_b, \eta_0 dx) = N(T) \oplus \overline{R(T)} = \overline{R(T)}$$

και το θεώρημα Hilbert-Schmidt, τα ιδιοστοιχεία του T σχηματίζουν ορθοκανονική βάση για τον χώρο $L^2(D_b, \eta_0 dx)$, εξασφαλίζοντας την ύπαρξη ενός απείρου και διακριτού συνόλου ιδιοτιμών $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$.

3.2. Μια ισοδύναμη διατύπωση για έναν πιεστικό και έναν συμπαγή τελεστή

Μέχρι στιγμής, έχουμε επιλέξει ένα $\beta \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε ο A_β^{-1} να υπάρχει ως γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Σε ό,τι θα ακολουθήσει, επιχειρούμε να βρούμε κατάλληλες συνθήκες, κάτω από τις οποίες θα υπάρχει μια σταθερά $\Lambda > 0$, τέτοια ώστε ο A_Λ να αποτελεί πιεστικό τελεστή. Σημειώνουμε ότι όλοι οι πιεστικοί τελεστές είναι αντιστρέψιμοι, ως συνέπεια του θεωρήματος Lax-Milgram.

Λήμμα 3.2.1 Έστω ότι $(w, v) \in \mathcal{H}(D_b)$. Τότε, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \|w\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_0(D_b)} [\|\nabla w\|^2 + \|\nabla v\|^2] + (\epsilon - 1) \|v\|^2, \quad (3.10)$$

όπου $\epsilon > 1$ και με $\lambda_0(D_b)$ συμβολίζουμε την πρώτη ιδιοτιμή Dirichlet στο D_b .

Απόδειξη. Ως συνέπεια της ανισότητας Poincare στον χώρο $H_0^1(D_b)$, έχουμε:

$$\|w - v\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_0(D_b)} \|\nabla w - \nabla v\|^2 \quad \text{και άρα,} \quad (\|w\| - \|v\|)^2 \leq \frac{2}{\lambda_0(D_b)} [\|\nabla w\|^2 + \|\nabla v\|^2]$$

Εκμεταλλευόμενοι την ανισότητα Young για κάποιο $\epsilon > 1$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \|w\|^2 + (1 - \epsilon) \|v\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_0(D_b)} [\|\nabla w\|^2 + \|\nabla v\|^2]$$

■

Λήμμα 3.2.2 Έστω ότι $\sigma \in (0, 1)$, $\epsilon > 1$ και $c_1 = \min\{1, a\}$. Τότε ο τελεστής A_Λ θα είναι πιεστικός, αρκεί να ικανοποιούνται οι ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$k^2 < \frac{(1 - \sigma)c_1\lambda_0(D_b)(\epsilon - 1)}{2\epsilon\eta_{\max}}, \quad \Lambda > \frac{(1 - \sigma)c_1\lambda_0(D_b)(\epsilon - 1)}{2k^2\eta_{0,\min}} \quad (3.11)$$

Απόδειξη. Η ανισότητα (3.10) μπορεί να χρησιμοποιηθεί, σε συνδυασμό με μια συνθήκη για τον κυματάρημο k^2 , για να δείξουμε ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός $\Lambda > 0$, τέτοιος ώστε ο A_Λ να είναι πιεστικός τελεστής. Επιλέγουμε ένα $\Lambda > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} (A_\Lambda(w, v), (w, v)) &= \int_{D_b} \nabla w \cdot \nabla \bar{w} dx + a \int_{D_b} \nabla v \cdot \nabla \bar{v} dx \\ &\quad - k^2 \int_{D_b} \eta(x) w \cdot \bar{w} dx + k^2 \Lambda \int_{D_b} \eta_0(x) v \cdot \bar{v} dx \\ &\geq c_1 [\|\nabla w\|^2 + \|\nabla v\|^2] - k^2 \eta_{\max} \|w\|^2 + k^2 \Lambda \eta_{0,\min} \|v\|^2 \\ &= \sigma c_1 [\|\nabla w\|^2 + \|\nabla v\|^2] + (1 - \sigma) c_1 [\|\nabla w\|^2 + \|\nabla v\|^2] \\ &\quad - k^2 \eta_{\max} \|w\|^2 + k^2 \Lambda \eta_{0,\min} \|v\|^2 \\ &\geq \sigma c_1 [\|\nabla w\|^2 + \|\nabla v\|^2] + (1 - \sigma) c_1 \left[\frac{\lambda_0(D_b)(\epsilon - 1)}{2\epsilon} \|w\|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_0(D_b)(\epsilon - 1)}{2} \|v\|^2 \right] - k^2 \eta_{\max} \|w\|^2 + k^2 \Lambda \eta_{0,\min} \|v\|^2 \end{aligned}$$

3. Μια μεταβολική προσέγγιση για το ευθύ φασματικό πρόβλημα

■

Η επιλογή συγκεκριμένων τιμών για τα σ, ϵ μας προμηθεύει με ένα κάτω φράγμα για το Λ το οποίο ταυτοχρόνως αποτελεί άνω φράγμα για όλες τις ιδιοτιμές $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Στη συνέχεια, βρίσκουμε έναν περιορισμό πιστικότητας για τον κυματάρημο, ο οποίος προσδιορίζει άμεσα τιμές για τα σ, ϵ και Λ , έτσι ώστε να ισχύει η (3.11).

Πόρισμα 3.2.3 Αν υποθέσουμε ότι ο κυματάρημος k^2 ικανοποιεί την ανισότητα

$$k^2 < \frac{c_1 \lambda_0(D_b)}{2\eta_{\max}}, \quad (3.12)$$

τότε θα υπάρχει ένα $\Lambda > 0$, τέτοιο ώστε ο A_Λ να είναι πιστικός.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η ανισότητα (3.12). Τότε, παρατηρούμε ότι υπάρχουν κατάλληλες επιλογές για τα σ, ϵ και επίσης ένα $\Lambda > 0$ αρκετά μεγάλο, έτσι ώστε να ισχύει η (3.11). Συνεπώς, ο τελεστής A_Λ είναι πιστικός. ■

Θεώρημα 3.2.4 Έστω ότι ικανοποιείται η ανισότητα (3.12). Τότε, υπάρχει μια άπειρη ακολουθία ιδιοτιμών $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ για το (3.5), με το $-\infty$ ως το μοναδικό σημείο συσσώρευσης. Ως αποτέλεσμα, υπάρχουν το πολύ πεπερασμένες θετικές ιδιοτιμές.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η (3.12). Τότε, υπάρχει ένα $\Lambda > 0$, τέτοιο ώστε ο A_Λ να είναι πιστικός. Επομένως, το (3.5) είναι ισοδύναμο με το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\begin{aligned} \int_{D_b} \nabla w \cdot \nabla \bar{w}' dx + a \int_{D_b} \nabla v \cdot \nabla \bar{v}' dx - k^2 \int_{D_b} \eta(x) w \cdot \bar{w}' dx \\ + k^2 \Lambda \int_{D_b} \eta_0(x) v \cdot \bar{v}' dx = k^2 (\Lambda - \lambda) \int_{D_b} \eta_0(x) v \bar{v}' dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

δηλαδή,

$$(A_\Lambda(w, v), (w', v')) = k^2 (\Lambda - \lambda) (B(w, v), (w', v')) \quad (3.14)$$

Ο A_Λ είναι ένας γραμμικός, πιστικός και αυτοσυζυγής τελεστής. Επίσης, ο B είναι γραμμικός, αυτοσυζυγής, συμπαγής και θετικός. Το πρόβλημα ιδιοτιμών για τελεστές

$$A_\Lambda(w, v) = k^2 (\Lambda - \lambda) B(w, v) \quad (3.15)$$

που είναι ισοδύναμο με το (3.5), έχει δειχθεί πως διαθέτει μια αύξουσα και θετική ακολουθία ιδιοτιμών $\{k^2 (\Lambda - \lambda_j)\}_{j=1}^{\infty}$ που έχουν το $+\infty$ ως μοναδικό σημείο συσσώρευσης (εάν είναι πράγματι άπειρες) [29, Θεώρημα 10.23]. Από το Πόρισμα 3.1.7, η $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι πράγματι άπειρη ακολουθία. Επομένως, $k^2 (\Lambda - \lambda_j) \rightarrow +\infty$ και άρα, $\lambda_j \rightarrow -\infty$. Επιπρόσθετα, αφού $\Lambda - \lambda_j > 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda_j < \Lambda \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (3.16)$$

Όπως βλέπουμε, το (3.16) αποτελεί το προαναφερθέν άνω φράγμα για όλες τις ιδιοτιμές λ_j . Για το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος, ας υποθέσουμε προς εις άτοπο ότι υπάρχει ένα άπειρο πλήθος θετικών ιδιοτιμών, δηλαδή $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ είναι μια άπειρη υπακολουθία θετικών ιδιοτιμών. Επειδή η (3.16) αποτελεί άνω φράγμα για όλες τις ιδιοτιμές, το υποσύνολο των θετικών ιδιοτιμών $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ θα περιέχεται στο διάστημα $(0, \Lambda)$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, θα υπάρχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία θετικών

3.2. Μια ισοδύναμη διατύπωση για έναν πιεστικό και έναν συμπαγή τελεστή

ιδιοτιμών $\{\lambda_{j_k}\}_{k \in I}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού το όριο τους θα αποτελούσε ένα δεύτερο σημείο συσσώρευσης για τις ιδιοτιμές $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ του (3.5). ■

Η ακολουθία των γενικευμένων ιδιοτιμών $k^2(\Lambda - \lambda_j)$ χαρακτηρίζεται από τις αρχές ελαχίστου-μεγίστου Courant-Fischer, με την πρώτη ιδιοτιμή να αποτελεί το πιο κάτω infimum [29, Θεώρημα 10.24]:

$$\begin{aligned} k^2(\Lambda - \lambda_1) &= \inf_{(w,v) \in \mathcal{H}(D_b), v \neq 0} \frac{(A_\Lambda(w,v), (w,v))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)}}{(B(w,v), (w,v))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)}} \\ &= \inf_{(w,v) \in \mathcal{H}(D_b), v \neq 0} \frac{-\|\nabla w\|^2 + a\|\nabla v\|^2 - k^2 \int_{D_b} \eta |w|^2 dx + k^2 \Lambda \int_{D_b} \eta_0 |v|^2 dx}{\int_{D_b} \eta_0 |v|^2 dx} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Από τις ιδιότητες των inf – sup και την (3.17), προκύπτει ότι ισχύει ο ακόλουθος χαρακτηρισμός για την λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{1}{k^2} \sup_{(w,v) \in \mathcal{H}(D_b), v \neq 0} \frac{-\|\nabla w\|^2 - a\|\nabla v\|^2 + k^2 \int_{D_b} \eta |w|^2 dx}{\int_{D_b} \eta_0 |v|^2 dx} \quad (3.18)$$

Πόρισμα 3.2.5 Υποθέτουμε ότι ισχύει ο περιορισμός πιεστικότητας (3.12). Τότε, υπάρχει ένα θετικό κάτω φράγμα για την μεγαλύτερη ιδιοτιμή λ_1 :

$$\lambda_1 \geq \frac{\eta_{\min}}{\eta_{0,\max}} > 0$$

Με άλλα λόγια, πάντοτε υπάρχει μια θετική ιδιοτιμή για το (3.5).

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας το ζεύγος δοκιμαστικών συναρτήσεων $(1, 1) \in \mathcal{H}(D_b)$ στο δεξί μέλος της (3.18), έχουμε ότι

$$\lambda_1 \geq \frac{\int_{D_b} \eta dx}{\int_{D_b} \eta_0 dx} \geq \frac{\int_{D_b} \eta_{\min} dx}{\int_{D_b} \eta_{0,\max} dx} = \frac{\eta_{\min}}{\eta_{0,\max}}$$

■

Επιπρόσθετα, η (3.18) υπονοεί ότι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή λ_1 είναι μονοτόνως αύξουσα ως προς το δείκτη διάθλασης η . Συνεπώς, αν θεωρήσουμε το πρόβλημα (3.1)-(3.4) για έναν σταθερό δείκτη διάθλασης, προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα μοναδικότητας για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα:

Θεώρημα 3.2.6 Κάτω από τον περιορισμό πιεστικότητας (3.12), ένας σταθερός δείκτης διάθλασης μπορεί να καθοριστεί μονοσήμαντα από τη γνώση της μεγαλύτερης ιδιοτιμής $\lambda_1 = \lambda_1(\eta)$.

Απόδειξη. Έστω ότι οι $\eta_1(x) = \eta_1 \neq \eta_2 = \eta_2(x)$ αποτελούν δυο διαφορετικούς, σταθερούς δείκτες διάθλασης και ότι $\lambda_1(\eta_1) = \lambda_1(\eta_2)$. Επιπρόσθετα, έστω ότι τα k , a και $\eta_0 = \eta_0(x)$ ταυτίζονται για τα δυο προβλήματα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\eta_1 < \eta_2$. Από την (3.18), έχουμε ότι:

$$\lambda_1(\eta_1) = \frac{1 - \|\nabla w_1\|^2 - a\|\nabla v_1\|^2 + k^2 \eta_1 \|w_1\|^2}{k^2 \int_{D_b} \eta_0 |v_1|^2 dx}$$

όπου η (w_1, v_1) αποτελεί μεγιστοποιητή για την (3.18). Τότε, η

$$m = \frac{1 - \|\nabla w_1\|^2 - a\|\nabla v_1\|^2 + k^2 \eta_2 \|w_1\|^2}{k^2 \int_{D_b} \eta_0 |v_1|^2 dx}$$

ικανοποιεί την ανισότητα $\lambda_1(\eta_1) < m \leq \lambda_1(\eta_2)$, που είναι άτοπο. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο με την αρχική υπόθεση $\eta_2 < \eta_1$. ■

3. Μια μεταβολική προσέγγιση για το ευθύ φασματικό πρόβλημα

Παρατήρηση 3.2.7 Σε αντίθεση με την [13], η μοναδικότητα για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για ένα σταθερό δείκτη διάθλασης δεν συσχετίζεται με οποιοδήποτε περιορισμό για το πρόσημο της συνάρτησης $1 - \eta$.

4. Η ιδιότητα μη πληρότητας των ιδιοσυναρτήσεων στον χώρο λύσεων $\mathcal{H}(D_b)$

Σε αυτό το κεφάλαιο δείχνουμε ότι, κάτω από τον περιορισμό πιστικότητας για τον κυματάριθμο, τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων δεν αποτελούν πλήρες σύστημα στον χώρο λύσεων. Αυτό προκύπτει ως συνέπεια του ότι ο εμπλεκόμενος συμπαγής τελεστής έχει απειροδιάστατο πυρήνα. Επομένως, δεν είναι δυνατό να κατασκευαστεί μια ορθοκανονική βάση για τον χώρο $\mathcal{H}(D_b)$, αξιοποιώντας αποκλειστικά τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων.

Περιεχόμενα

| | |
|--|----|
| 4.1. Είναι τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων βάση Riesz στον $\mathcal{H}(D_b)$; | 44 |
| 4.2. Επιλογή μιας βάσης Riesz που να εμπλέκει το σύστημα ιδιοσυναρτήσεων | 47 |

4.1. Είναι τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων βάση Riesz στον $\mathcal{H}(D_b)$;

Ένας από τους βασικούς στόχους αυτής της διατριβής είναι η εφαρμογή ενός σχήματος Galerkin για την αριθμητική προσέγγιση των ιδιοτιμών του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας. Κινούμενοι προς αυτή την κατεύθυνση, ένα βασικό προαπαιτούμενο είναι η εύρεση μιας ορθοκανονικής βάσης για τον χώρο λύσεων $\mathcal{H}(D_b)$. Μια αρχική ιδέα ήταν ο ορισμός ενός βοηθητικού φασματικού προβλήματος, που να μοιάζει με το αρχικό πρόβλημα. Μια φυσική επιλογή για το τελευταίο προκύπτει ως ειδική περίπτωση του (3.1)-(3.4), επιλέγοντας τα η και η_0 να είναι σταθερές παράμετροι. Προφανώς, αυτό το δυνητικό πρόβλημα ιδιοτιμών θα είχε ιδιότητες παρόμοιες με το αρχικό πρόβλημα και επομένως, για να καθορίσουμε κατά πόσο θα μπορούσε να μας προμηθεύσει με ένα πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων, μπορούμε εναλλακτικά να μελετήσουμε το ζήτημα της πληρότητας για το (3.1)-(3.4).

Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση, εάν ικανοποιείται ο περιορισμός πιστικότητας για τον κυματάρημο, τότε τα ακόλουθα προβλήματα ιδιοτιμών είναι ισοδύναμα:

$$(A_\lambda(w, v), (w', v')) = 0$$

ή,

$$(A_\beta(w, v), (w', v')) = k^2(\beta - \lambda)(B(w, v), (w', v'))$$

ή,

$$(A_\Lambda(w, v), (w', v')) = k^2(\Lambda - \lambda)(B(w, v), (w', v')) \quad (4.1)$$

όπου ο A_Λ συγκεκριμένα μπορεί να επιλεγεί ως ένας πιστικός αυτοσυζυγής τελεστής. Θα δούμε στη συνέχεια ότι η ιδιότητα πιστικότητας είναι εξαιρετικά σημαντική τόσο για θεωρητικά, όσο και για αριθμητικά ζητήματα του φασματικού προβλήματος.

Ορίζουμε έναν τελεστή $\tilde{T} : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$, τέτοιο ώστε

$$\tilde{T} := A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} B A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}$$

Οι τελεστές $A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}, A_\Lambda^{+\frac{1}{2}}$ είναι καλά ορισμένοι και ισχύει η ιδιότητα $A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \cdot A_\Lambda^{+\frac{1}{2}} = I = A_\Lambda^{+\frac{1}{2}} \cdot A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}$, αφού ο A_Λ αποτελεί πιστικό και αυτοσυζυγή τελεστή (ως συνέπεια του ότι οι πιστικοί τελεστές είναι θετικοί). Επομένως, η (4.1) είναι ισοδύναμη με το πρόβλημα ιδιοτιμών τελεστών για τον \tilde{T} :

$$\left[\frac{1}{k^2(\Lambda - \lambda)} I - \tilde{T} \right] u = 0, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathcal{H}(D_b) \quad (4.2)$$

όπου $(u_1, u_2) = A_\Lambda^{+\frac{1}{2}}(w, v)$ και εξαιρώντας την μηδενική ιδιοτιμή για τον \tilde{T} . Σε ότι θα ακολουθήσει, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\mu = \frac{1}{k^2(\Lambda - \lambda)}$$

για τις ιδιοτιμές του (4.2).

Σημειώνουμε πως εξ' ορισμού, ο τελεστής \tilde{T} είναι συμπαγής, αυτοσυζυγής και θετικός. Επομένως, προκύπτει ότι ο χώρος λύσεων διασπάται ως εξής: $\mathcal{H}(D_b) = N(\tilde{T}) \oplus \overline{R(\tilde{T})}$.

Πρόταση 4.1.1 Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{v'_i\}_{i \in J}$ που απαρτίζεται από ιδιοστοιχεία του \tilde{T} που αντιστοιχούν στη μηδενική ιδιοτιμή του \tilde{T} , η οποία παράγει τον χώρο $N(\tilde{T})$.

Απόδειξη. Ο $N(\tilde{T})$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}(D_b)$, άρα θα είναι και αυτός ένας χώρος Hilbert. Επιπρόσθετα, αφού ο $\mathcal{H}(D_b)$ είναι διαχωρίσιμος, θα υπάρχει αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση για τον $N(\tilde{T})$. ■

Πρόταση 4.1.2 Ο χώρος $\overline{R(\tilde{T})}$ παράγεται από ένα ορθοκανονικό σύστημα ιδιοστοιχείων $\{u_i\}_{i \in I}$ του \tilde{T} που αντιστοιχούν σε όλες τις μη μηδενικές ιδιοτιμές του \tilde{T} .

Απόδειξη. Πόρισμα του θεωρήματος Hilbert-Schmidt . ■

Πόρισμα 4.1.3 Εάν συνδυάσουμε τις ορθοκανονικές βάσεις $\{v'_i\}_{i \in J}$ και $\{u_i\}_{i \in I}$ για τους $N(\tilde{T})$ και $\overline{R(\tilde{T})}$ αντίστοιχα, προκύπτει μια ορθοκανονική βάση για τον $\mathcal{H}(D_b)$. Με άλλα λόγια, η $\{v'_i\}_{i \in J} \cup \{u_i\}_{i \in I}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση για τον $\mathcal{H}(D_b)$ αφού $(N(\tilde{T}))^\perp = \overline{R(\tilde{T})}$.

Ορισμός 4.1.4 Ένα σύστημα $\{x_k\}_{k \in I}$ σε έναν χώρο Hilbert X καλείται βάση Riesz, εάν υπάρχει ένας τοπολογικός ισομορφισμός (γραμμικός, φραγμένος και αντιστρέψιμος τελεστής) $T : Y \rightarrow X$ τέτοιος ώστε $x_k = Te_k$, όπου $\{e_k\}_{k \in I}$ είναι μια ορθοκανονική βάση για τον χώρο Hilbert Y .

Μια βασική ιδιότητα μιας βάσης Riesz $\{x_n\}$ είναι η ακόλουθη:

Πρόταση 4.1.5 Έστω ότι ο X είναι ένας χώρος Hilbert. Τότε, για κάθε $x \in X$, υπάρχει μια μοναδική επιλογή σταθερών $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ τέτοια ώστε:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \quad (\text{ιδιότητα πληρότητας})$$

Απόδειξη. Έστω ότι η $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ είναι μια βάση Riesz για τον χώρο X , $x \in X$ και $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. Τότε από τον ορισμό, θα υπάρχει ένας τοπολογικός ισομορφισμός $T : X \rightarrow X$, τέτοιος ώστε $x_n := Te_n$. Μπορούμε επίσης να ορίσουμε $y := T^{-1}x$ και επειδή $y \in X$, θα διαθέτει ένα ανάπτυγμα σειράς ως προς την $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, δηλαδή υπάρχει μοναδική επιλογή σταθερών $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ τέτοιες ώστε

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$$

Επομένως,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T^{-1} x_n = T^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$$

Άρα,

$$x = Ty = T \left(T^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$$

■

4. Η ιδιότητα μη πληρότητας των ιδιοσυναρτήσεων στον χώρο λύσεων $\mathcal{H}(D_b)$

Συνεχίζουμε εξετάζοντας εάν υπάρχει κάποιο σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (w_n, v_n) που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, το οποίο να αποτελεί βάση για τον χώρο $\mathcal{H}(D_b)$. Αν $\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση, τότε το σύστημα $\{A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\tilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ θα αποτελεί βάση Riesz για τον $\mathcal{H}(D_b)$, αφού ο τελεστής $A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}$ είναι ένας τοπολογικός ισομορφισμός. Εάν ο τελεστής \tilde{T} ήταν μονοσήμαντος, θα προέκυπτε άμεσα ότι ένα σύστημα ιδιοστοιχείων του $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση για τον $\mathcal{H}(D_b)$. Επομένως, το σύστημα $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty} := \{A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}u_n\}_{n=1}^{\infty}$ θα ήταν μια βάση Riesz αποτελούμενη από ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος ιδιοτιμών (3.5).

Στο ακόλουθο λήμμα, παρουσιάζουμε μια διαστατική ανάλυση για τον πυρήνα $N(\tilde{T})$, η οποία είναι απαραίτητη για την μελέτη της πληρότητας του συστήματος ιδιοσυναρτήσεων $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Λήμμα 4.1.6 Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη πιεστικότητας (3.12). Τότε,

$$\dim N(\tilde{T}) = \infty \quad (4.3)$$

Απόδειξη. Αφού ο $A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός, $N(\tilde{T}) = N(A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}BA_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}) = N(BA_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}})$. Έστω ότι $u \in N(\tilde{T})$. Τότε, η $\tilde{T}u = 0$ είναι ισοδύναμη με τις $BA_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}u = 0$ και $A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}u \in N(B)$. Επιπρόσθετα, ο πυρήνας του B μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$N(B) = \{(w, 0) : w \in H_0^1(D_b)\},$$

ως αποτέλεσμα της σχέσης ορθογωνιότητας

$$(B(w, v), (w', v')) = 0 \text{ για κάθε } (w', v') \in \mathcal{H}(D_b),$$

που είναι ισοδύναμη με $v = 0$ και $w \in H_0^1(D_b)$. Επομένως, έχουμε ότι $\dim N(B) = \dim H_0^1(D_b) = \infty$. Επιπρόσθετα, $A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}u \in N(B)$, δηλαδή, $u \in A_{\Lambda}^{+\frac{1}{2}}N(B)$ και αφού ο $A_{\Lambda}^{+\frac{1}{2}}$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός, θα διατηρεί επίσης διαστάσεις. Συνεπώς, $\dim N(\tilde{T}) = \dim(A_{\Lambda}^{+\frac{1}{2}}N(B)) = \dim N(B) = \infty$. ■

Θεώρημα 4.1.7 Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη πιεστικότητας (3.12). Τότε, τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ της (3.5) δεν είναι πλήρες σύστημα στον χώρο $\mathcal{H}(D_b)$, με την έννοια ότι δεν αποτελούν βάση Riesz.

Απόδειξη. Έστω ότι $\omega := (\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{H}(D_b)$. Υποθέτουμε προς εις άτοπο, ότι το σύστημα ιδιοσυναρτήσεων $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ σχηματίζει μια βάση Riesz για τον χώρο $\mathcal{H}(D_b)$, η πιο γενικά μια βάση Schauder. Τότε, θα υπάρχει μια μοναδική επιλογή σταθερών a_n , τέτοια ώστε

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(w_n, v_n) \quad (4.4)$$

Από την ισοδυναμία των (3.5) και (4.2), για κάθε ιδιοζεύγος $\{\lambda_n, (w_n, v_n)\}$ της (3.5), θα υπάρχει ένα μοναδικό ιδιοζεύγος $\{\mu_n, g_n\}$ για τον \tilde{T} , $\mu_n \neq 0$, τέτοιο ώστε $(w_n, v_n) = A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}g_n$. Επειδή το $\{\mu_n, g_n\}$, $\mu_n \neq 0$ αποτελεί ιδιοζεύγος συμπαγούς τελεστή, ο αντίστοιχος ιδιόχωρος του είναι πεπερασμένης διάστασης και συνεπώς, θα

4.2. Επιλογή μιας βάσης Riesz που να εμπλέκει το σύστημα ιδιοσυναρτήσεων

υπάρχει ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός από ορθοκανονικά ιδιοστοιχεία $u_i^{(n)}$ του \tilde{T} , που αντιστοιχούν στην μ_n , τέτοιος ώστε:

$$g_n = \sum_{i=1}^{k(n)} b_i^{(n)} u_i^{(n)}, \quad (4.5)$$

όπου με $k(n)$ συμβολίζουμε τη γεωμετρική πολλαπλότητα της μ_n . Από τις (4.4) και (4.5), έχουμε την ακόλουθη περιγραφή για το ω :

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} a_n A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{k(n)} b_i^{(n)} u_i^{(n)} \right]$$

Και επειδή ο $A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}$ είναι ένας φραγμένος τελεστής,

$$\omega = A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{i=1}^{k(n)} b_i^{(n)} u_i^{(n)} \right] \right)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{i=1}^{k(n)} b_i^{(n)} u_i^{(n)} \right]$$

ως άθροισμα ιδιοστοιχείων $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ του \tilde{T} , θα ανήκει στον υπόχωρο $\overline{R(\tilde{T})}$. Άρα, $\omega \in R(A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}|_{\overline{R(\tilde{T})}})$, δηλαδή $\mathcal{H}(D_b) \subset R(A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}|_{\overline{R(\tilde{T})}})$. Αφού ο $A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός και ο $\overline{R(\tilde{T})}$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $\mathcal{H}(D_b)$ από το Λήμμα 4.1.6, συμπεραίνουμε ότι $R(A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}|_{\overline{R(\tilde{T})}}) \subsetneq \mathcal{H}(D_b)$ που αντικρούει την αρχική μας υπόθεση. Επομένως, το σύστημα ιδιοσυναρτήσεων $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ του προβλήματος ιδιοτιμών (3.5) δεν είναι πλήρες με την έννοια της βάσης Riesz, στον χώρο λύσεων $\mathcal{H}(D_b)$. ■

Παρατήρηση 4.1.8 Σημειώνουμε ότι η προηγούμενη διαδικασία θα μπορούσε να εφαρμοσθεί σε ένα οποιοδήποτε αυτοσυζυγές, γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών. Πιο συγκεκριμένα, εάν είναι δυνατό να οριστεί ένα ισοδύναμο πρόβλημα ιδιοτιμών, που αντιστοιχεί σε τελεστή της μορφής $A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}$, όπου ο A είναι αυτοσυζυγής και πειστικός και ο B είναι συμπαγής, τότε η φασματική πληρότητα με τη λογική βάσεως Riesz εξαρτάται από το αν ο συμπαγής τελεστής B είναι μονοσήμαντος ή όχι.

4.2. Επιλογή μιας βάσης Riesz που να εμπλέκει το σύστημα ιδιοσυναρτήσεων

Από τη προηγούμενη συζήτηση έχουμε δυο προβλήματα τα οποία παραμένουν αναπάντητα. Πρώτο, η κατασκευή μιας βάσης Riesz για τον χώρο $\mathcal{H}(D_b)$ και δεύτερο, εάν είναι δυνατό να συμπεριληφθεί το σύστημα ιδιοσυναρτήσεων $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ με κάποιο τρόπο σε αυτή τη βάση. Στη συνέχεια, επιχειρούμε να απαντήσουμε αυτά τα ερωτήματα. Για το σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιηθεί το ακόλουθο λήμμα:

4. Η ιδιότητα μη πληρότητας των ιδιοσυναρτήσεων στον χώρο λύσεων $\mathcal{H}(D_b)$

Λήμμα 4.2.1 Έστω ότι οι H, V είναι χώροι Hilbert και $A : H \rightarrow V$ ένας γραμμικός, φραγμένος και αντιστρέψιμος τελεστής (τοπολογικός ισομορφισμός). Εάν η \mathcal{L} αποτελεί βάση Riesz για τον $A(M)$ και η \mathcal{K} αποτελεί βάση Riesz για τον $A(M^\perp)$, όπου M είναι ένας κλειστός υπόχωρος του H , τότε η $\mathcal{L} \cup \mathcal{K}$ θα είναι βάση Riesz για τον V .

Απόδειξη. Έστω ότι $v \in V$. Τότε, θα υπάρχει μοναδικό $h \in H$ τέτοιο ώστε $v = Ah$. Από τη διάσπαση $H = M \oplus M^\perp$, υπάρχουν επίσης μοναδικές επιλογές $\mu_1 \in M$ και $\mu_2 \in M^\perp$, τέτοιες ώστε $h = \mu_1 + \mu_2$. Τότε,

$$v = Ah = A(\mu_1 + \mu_2) = A\mu_1 + A\mu_2$$

όπου $A\mu_1 \in A(M)$ και $A\mu_2 \in A(M^\perp)$. Συνεπώς, το $A\mu_1$ μπορεί να περιγραφεί από την \mathcal{L} και το $A\mu_2$ μπορεί να περιγραφεί από την \mathcal{K} . Με άλλα λόγια, η $\mathcal{L} \cup \mathcal{K}$ είναι βάση Riesz για τον V . ■

Επιστρέφουμε τώρα στα ερωτήματα που θέσαμε προηγουμένως. Ακολουθεί μια κατασκευή βάσης Riesz για τον χώρο $\mathcal{H}(D_b)$, η οποία θα αποτελείται μερικώς από το σύστημα ιδιοσυναρτήσεων $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^\infty$ και μερικώς από ένα σύστημα συναρτήσεων που συσχετίζονται με τον απειροδιάστατο υπόχωρο $N(B)$.

Αφού $A_\Lambda(N(B)) = A_\Lambda^{\frac{1}{2}}(A_\Lambda^{\frac{1}{2}}(N(B))) = A_\Lambda^{\frac{1}{2}}(N(\tilde{T}))$, $N(B)$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}(D_b)$ και ο A_Λ είναι ένας τοπολογικός ισομορφισμός, προκύπτει ότι ο υπόχωρος $A_\Lambda^{\frac{1}{2}}(N(\tilde{T})) = (A_\Lambda^{-1})^{-1}(N(B))$ είναι κλειστό σύνολο στον $\mathcal{H}(D_b)$, ως η αντίστροφη εικόνα ενός κλειστού συνόλου μέσω συνεχούς απεικόνισης. Επομένως, πρόκειται για κλειστό υπόχωρο του $\mathcal{H}(D_b)$.

Εάν επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ για τον χώρο Sobolev $H_0^1(D_b)$, τότε το σύστημα $\{(g_n, 0)\}_{n=1}^\infty$ είναι ορθοκανονική βάση για τον $N(B)$ και η $\mathcal{L} = \{A_\Lambda(g_n, 0)\}_{n=1}^\infty$ θα αποτελεί εξ' ορισμού, μια βάση Riesz για τον $A_\Lambda^{\frac{1}{2}}(N(\tilde{T}))$.

Θεωρούμε τη διάσπαση $\mathcal{H}(D_b) = N(\tilde{T}) \oplus \overline{R(\tilde{T})}$. Από το Λήμμα 4.2.1, αρκεί να επιλέξουμε βάσεις Riesz για τους $A_\Lambda^{\frac{1}{2}}(N(\tilde{T}))$ και $A_\Lambda^{\frac{1}{2}}(\overline{R(\tilde{T})})$. Τότε, η ένωσή τους θα είναι η ζητούμενη βάση Riesz.

Επειδή υπάρχει ένα σύστημα ιδιοσυναρτήσεων $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^\infty$ για το (3.5) τέτοιο ώστε $A_\Lambda^{\frac{1}{2}}(\overline{R(\tilde{T})}) = \overline{\text{span}\{(w_n, v_n) : n \in \mathbb{N}\}}$, δηλαδή το σύστημα $\mathcal{K} = \{(w_n, v_n)\}_{n=1}^\infty$ αποτελεί βάση Riesz για τον $A_\Lambda^{\frac{1}{2}}(\overline{R(\tilde{T})})$, τότε από το Λήμμα 4.2.1, η $\mathcal{L} \cup \mathcal{K}$ είναι βάση Riesz για τον $\mathcal{H}(D_b)$ η οποία συμπεριλαμβάνει το σύστημα ιδιοσυναρτήσεων $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^\infty$.

Εάν εφαρμόσουμε μια μέθοδο Gram-Schmidt στη βάση Riesz $\mathcal{L} \cup \mathcal{K}$, παίρνουμε μια ορθοκανονική βάση για τον χώρο $\mathcal{H}(D_b)$. Παρόλα αυτά, είναι δύσκολο να αναλύσουμε σε πρακτικό επίπεδο τους χώρους $N(\tilde{T})$, $\overline{R(\tilde{T})}$ και για τον λόγο αυτό, το επόμενο κεφάλαιο επικεντρώνεται στο να βρεθεί μια απλούστερη μέθοδος κατασκευής ορθοκανονικής βάσης για το σχήμα Galerkin, που θα αναπτυχθεί στα επόμενα κεφάλαια.

5. Κατασκευή ορθοκανονικής βάσης για τον χώρο λύσεων

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε ένα βοηθητικό φασματικό πρόβλημα, παρόμοιο σε δομή με το πρόβλημα τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας, με τη διαφορά ότι η φασματική παράμετρος εμφανίζεται και στις δυο διαφορικές εξισώσεις. Ως συνέπεια, τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων αυτού του βοηθητικού προβλήματος είναι πλήρη στον χώρο λύσεων και απαρτίζουν μια ορθοκανονική βάση. Δείχνουμε επίσης ότι το φάσμα αυτού του προβλήματος μπορεί να καθοριστεί, εάν οι ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις των προβλημάτων *Dirichlet* και *Neumann* είναι γνωστές εκ των προτέρων.

Περιεχόμενα

| | |
|---|----|
| 5.1. Ένα βοηθητικό πρόβλημα ιδιοτιμών | 50 |
| 5.2. Μια αναλυτική προσέγγιση κατασκευής ορθοκανονικής βάσης σε σφαιρική γεωμετρία | 55 |
| 5.3. Μια αναλυτική προσέγγιση κατασκευής ορθοκανονικής βάσης σε αυθαίρετη γεωμετρία | 57 |

5.1. Ένα βοηθητικό πρόβλημα ιδιοτιμών

Σε ό,τι θα ακολουθήσει ορίζουμε ένα βοηθητικό φασματικό πρόβλημα, το οποίο μπορεί να μας εφοδιάσει με μια ορθοκανονική βάση για τον χώρο λύσεων $\mathcal{H}(D_b)$. Θεωρούμε το σύστημα

$$\Delta\phi - \sigma\phi = 0 \quad \text{στο } D_b, \quad (5.1)$$

$$\Delta\psi - \sigma\psi = 0 \quad \text{στο } D_b, \quad (5.2)$$

$$\phi = \psi, \quad \text{στο } \partial D_b, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\partial\psi}{\partial n} \quad \text{στο } \partial D_b \quad (5.4)$$

που διαθέτει παρόμοια δομή με το πρόβλημα ιδιοτιμών (3.1)-(3.4), αλλά όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια έχει επίσης την ιδιότητα φασματικής πληρότητας, σε αντίθεση με το πρόβλημα (3.1)-(3.4). Επιπρόσθετα, είναι ένα εκφυλισμένο σύστημα, με την έννοια ότι ο διαφορικός τελεστής $\Delta - \sigma$ επαναλαμβάνεται και στις δύο εξισώσεις (5.1) και (5.2). Οι αναλυτικές επιπτώσεις του πιο πάνω ορισμού θα εξεταστούν αργότερα.

Ακολούθως, θα μελετηθούν οι φασματικές ιδιότητες του πιο πάνω φασματικού προβλήματος. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε την μεταβολική διατύπωση του (5.1)-(5.4) και αναζητούμε ένα $(\phi, \psi) \in \mathcal{H}(D_b)$ και ένα $\sigma \in \mathbb{C}$, τέτοια ώστε

$$\int_{D_b} \nabla\phi \cdot \nabla\bar{\phi}' dx + \int_{D_b} \nabla\psi \cdot \nabla\bar{\psi}' dx + \sigma \int_{D_b} \phi\bar{\phi}' dx + \sigma \int_{D_b} \psi\bar{\psi}' dx = 0, \quad (5.5)$$

για κάθε $(\phi', \psi') \in \mathcal{H}(D_b)$. Μέσω του θεωρήματος αναπαράστασης Riesz, ορίζουμε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών για τελεστές, ισοδύναμο με την (5.5):

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_\sigma(\phi, \psi), (\phi', \psi')) &:= \int_{D_b} \nabla\phi \cdot \nabla\bar{\phi}' dx + \int_{D_b} \nabla\psi \cdot \nabla\bar{\psi}' dx \\ &+ \sigma \int_{D_b} \phi\bar{\phi}' dx + \sigma \int_{D_b} \psi\bar{\psi}' dx = 0 \end{aligned}$$

για κάθε $(\phi', \psi') \in \mathcal{H}(D_b)$, όπου $\mathbb{A}_\sigma : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ είναι ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής ο οποίος εξαρτάται αναλυτικά από τη φασματική παράμετρο $\sigma \in \mathbb{C}$.

Παρατήρηση 5.1.1 Ο \mathbb{A}_σ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $\sigma \in \mathbb{R}$. Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι αν το σ δεν είναι πραγματικός αριθμός, τότε $N(\mathbb{A}_\sigma) = \{0\}$.

Παρατήρηση 5.1.2 Η οικογένεια τελεστών $\{\mathbb{A}_\sigma\}_{\sigma \in \mathbb{C}}$ είναι τύπου Fredholm και εξαρτάται αναλυτικά από την παράμετρο σ . Επομένως, εάν θέσουμε $\tilde{\sigma} := \sigma_0 + i\sigma_1$, $\sigma_1 \neq 0$, τότε από το Πρόρισμα 5.1.1 προκύπτει ότι $R(\mathbb{A}_{\tilde{\sigma}}) = \mathcal{H}(D_b)$ και συνεπώς ο $\mathbb{A}_{\tilde{\sigma}}^{-1}$ υπάρχει ως γραμμικός και φραγμένος τελεστής.

Από τη θεωρία για αναλυτικούς τελεστές Fredholm, συμπεραίνουμε ότι ο \mathbb{A}_σ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $\sigma \in \mathbb{C}$, εκτός ίσως από ένα διακριτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\beta \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε ο \mathbb{A}_β^{-1} να υπάρχει ως γραμμικός και φραγμένος τελεστής.

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε, μέσω του θεωρήματος αναπαράστασης Riesz, έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή $\mathbb{K}_\beta : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow (\mathcal{H}(D_b))^*$ ως ακολούθως:

$$\langle \mathbb{K}_\beta(\phi, \psi), (\phi', \psi') \rangle_{(\mathcal{H}(D_b))^* \times \mathcal{H}(D_b)} = (\mathbb{A}_\beta(\phi, \psi), (\phi', \psi'))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} \quad (5.6)$$

Επομένως ο \mathbb{K}_β είναι επίσης τύπου Fredholm και άρα ο $\mathbb{K}_\beta^{-1} : (\mathcal{H}(D_b))^* \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ υπάρχει ως φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Αυτός ο τελεστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να οριστεί ένα ισοδύναμο πρόβλημα ιδιοτιμών με το (5.5). Ορίζουμε $\mathbb{T} : L^2(D_b) \times L^2(D_b) \rightarrow L^2(D_b) \times L^2(D_b)$ έτσι ώστε $\mathbb{T}(f, g) := (\phi_f, \psi_g) \in \mathcal{H}(D_b)$, όπου $\mathbb{K}_\beta^{-1}(f, g) = (\phi_f, \psi_g)$. Επειδή ο \mathbb{K}_β είναι αντιστρέψιμος, ο \mathbb{T} είναι καλά ορισμένος.

Πρόταση 5.1.3 Ο $\mathbb{T} : L^2(D_b) \times L^2(D_b) \rightarrow L^2(D_b) \times L^2(D_b)$ είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής τελεστής.

Απόδειξη. Ο \mathbb{T} είναι συμπαγής επειδή αποτελεί φραγμένη απεικόνιση από τον $L^2(D_b) \times L^2(D_b)$ στον $\mathcal{H}(D_b)$ και τη συμπαγή εμφύτευση του $\mathcal{H}(D_b)$ στον $L^2(D_b) \times L^2(D_b)$. Από την άλλη, ο \mathbb{T} είναι αυτοσυζυγής ως συνέπεια του ότι η οικογένεια $\mathbb{A}_\beta, \beta \in \mathbb{R}$ είναι αυτοσυζυγής:

Έστω ότι $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in L^2(D_b) \times L^2(D_b)$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ((f_1, g_1), \mathbb{T}(f_2, g_2))_{L^2 \times L^2} &= \langle \mathbb{K}_\beta(\phi_{f_1}, \psi_{g_1}), (\phi_{f_2}, \psi_{g_2}) \rangle_{(\mathcal{H}(D_b))^* \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= (\mathbb{A}_\beta(\phi_{f_1}, \psi_{g_1}), (\phi_{f_2}, \psi_{g_2}))_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} \\ &= ((\phi_{f_1}, \psi_{g_1}), \mathbb{A}_\beta(\phi_{f_2}, \psi_{g_2}))_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} \\ &= \langle (\phi_{f_1}, \psi_{g_1}), \mathbb{K}_\beta(\phi_{f_2}, \psi_{g_2}) \rangle_{(\mathcal{H}(D_b))^* \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= \langle (\phi_{f_1}, \psi_{g_1}), (f_2, g_2) \rangle_{(\mathcal{H}(D_b))^* \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= (\mathbb{T}(f_1, g_1), (f_2, g_2))_{L^2 \times L^2} \end{aligned}$$

■

Πρόταση 5.1.4 Το πρόβλημα ιδιοτιμών (5.5) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο πρόβλημα ιδιοτιμών για τον \mathbb{T} , εξαιρώντας την μηδενική ιδιοτιμή του \mathbb{T} (Εάν πράγματι το μηδέν αποτελεί ιδιοτιμή).

$$\mathbb{T}(\phi, \psi) = \frac{1}{\beta - \sigma}(\phi, \psi) \quad (5.7)$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η (ϕ, ψ) είναι μια μη τετριμμένη λύση της (5.5) για κάποιο σ . Τότε, η (ϕ, ψ) θα ανήκει στον πυρήνα του K_σ , δηλαδή

$$\langle \mathbb{K}_\sigma(\phi, \psi), (\phi', \psi') \rangle = 0 \quad \forall (\phi', \psi') \in \mathcal{H}(D_b)$$

Εναλλακτικά, η πιο πάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως:

$$\langle \mathbb{K}_\beta(\phi, \psi), (\phi', \psi') \rangle - (\beta - \sigma)\langle (\phi, \psi), (\phi', \psi') \rangle = 0$$

για κάθε $(\phi', \psi') \in \mathcal{H}(D_b)$, αφού το $\{\sigma, (\phi, \psi)\}$ αποτελεί ιδιοζεύγος για την (5.5). Συνεπώς ισχύει $\mathbb{K}_\beta(\phi, \psi) = (\beta - \sigma)(\phi, \psi)$ και άρα, $\mathbb{T}(\phi, \psi) = \mathbb{K}_\beta^{-1}(\phi, \psi) = \frac{1}{\beta - \sigma}(\phi, \psi)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε πως το $\{t, (u_1, u_2)\}$, $t \neq 0$ αποτελεί ιδιοζεύγος του \mathbb{T} . Τότε, είναι επίσης μη τετριμμένη λύση της (5.5), αφού:

$$T(u_1, u_2) = t(u_1, u_2) \Leftrightarrow K_\beta^{-1}(u_1, u_2) = t(u_1, u_2)$$

5. Κατασκευή ορθοκανονικής βάσης για τον χώρο λύσεων

που είναι ισοδύναμη με την

$$K_\beta K_\beta^{-1}(u_1, u_2) = tK_\beta(u_1, u_2) \Leftrightarrow (u_1, u_2) = tK_\beta(u_1, u_2)$$

Δηλαδή,

$$\langle K_\beta(u_1, u_2), (\phi', \psi') \rangle = \langle \frac{1}{t}(u_1, u_2), (\phi', \psi') \rangle$$

ή ισοδύναμα,

$$\langle K_{\beta - \frac{1}{t}}(u_1, u_2), (\phi', \psi') \rangle = 0 \quad \forall (\phi', \psi') \in \mathcal{H}(D_b)$$

Με άλλα λόγια, η $\beta - \frac{1}{t}$ είναι ιδιοτιμή και το (u_1, u_2) το αντίστοιχο ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων για την (5.5). ■

Ως αποτέλεσμα οι ιδιοτιμές σ του (5.5) σχηματίζουν ένα διακριτό σύνολο χωρίς σημεία συσσώρευσης στο \mathbb{R} .

Λήμμα 5.1.5 *Ο τελεστής \mathbb{T} είναι μονοσήμαντος, δηλαδή $N(\mathbb{T}) = \{0\}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $(f_0, g_0) \in N(\mathbb{T})$. Τότε, $\mathbb{T}(f_0, g_0) = (0, 0) = \mathbb{K}_\beta^{-1}(f_0, g_0) \in L^2(D_b) \times L^2(D_b)$ και επειδή ο \mathbb{K}_β^{-1} είναι ισομορφισμός, συμπεραίνουμε πως $(f_0, g_0) = (0, 0) \in \mathcal{H}(D_b)$. ■

Παρατήρηση 5.1.6 *Από τη διάσπαση $L^2(D_b) \times L^2(D_b) = N(\mathbb{T}) \oplus \overline{R(\mathbb{T})}$, προκύπτει ότι αφού ο \mathbb{T} είναι μονοσήμαντος, τότε $L^2(D_b) \times L^2(D_b) = \overline{R(\mathbb{T})}$ και άρα, τα ιδιοστοιχεία $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ του \mathbb{T} μπορούν να σχηματίσουν ορθοκανονική βάση για τον χώρο $L^2(D_b) \times L^2(D_b)$. Επιπρόσθετα, αφού ο \mathbb{T} είναι μονοσήμαντος, προκύπτει και ότι οι ιδιοτιμές $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ είναι άπειρες.*

Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων της (5.5) είναι ορθογώνια ως προς τα εσωτερικά γινόμενα των χώρων $L^2(D_b) \times L^2(D_b)$ και $\mathcal{H}(D_b)$.

Πρόταση 5.1.7 *Έστω ότι $\sigma_1 \neq \sigma_2$ είναι δυο διαφορετικές ιδιοτιμές της (5.5) και ότι τα $(\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2)$ αποτελούν τα αντίστοιχα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων. Τότε θα είναι ορθογώνια ως προς το εσωτερικό γινόμενο του $L^2(D_b) \times L^2(D_b)$, δηλαδή ισχύει ότι $((\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2))_{L^2(D_b) \times L^2(D_b)} = 0$.*

Απόδειξη. Αν $t_1 \neq t_2$ είναι δυο διαφορετικές ιδιοτιμές του \mathbb{T} και $(f_1, g_1), (f_2, g_2)$ είναι τα αντίστοιχα ιδιοστοιχεία, τότε είναι ορθογώνια ως προς το εσωτερικό γινόμενο του $L^2(D_b) \times L^2(D_b)$ αφού ο \mathbb{T} είναι αυτοσυζυγής τελεστής. Από την ισοδυναμία των προβλημάτων ιδιοτιμών (5.5) και (5.7) προκύπτει ότι όλα τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων της (5.5) που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές σ θα είναι επίσης ορθογώνιες ως προς το εσωτερικό γινόμενο του $L^2(D_b) \times L^2(D_b)$. ■

Λήμμα 5.1.8 *Υποθέτουμε πως $\{\sigma_1, (\phi_1, \psi_1)\}$ και $\{\sigma_2, (\phi_2, \psi_2)\}$ είναι δύο ιδιοζεύγη της (5.5), για τα οποία ισχύει ότι $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Τότε, θα είναι ορθογώνια ως προς το εσωτερικό γινόμενο του χώρου λύσεων $\mathcal{H}(D_b)$, δηλαδή $((\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2))_{\mathcal{H}(D_b)} = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\{\sigma_1, (\phi_1, \psi_1)\}$ και $\{\sigma_2, (\phi_2, \psi_2)\}$ είναι δυο ιδιοζεύγη της (5.5), με $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Αφού το (ϕ_1, ψ_1) αποτελεί ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων, θα αποτελεί λύση της

(5.5) για οποιαδήποτε επιλογή δοκιμαστικών συναρτήσεων. Επιλέγοντας το (ϕ_2, ψ_2) ως δοκιμαστική συνάρτηση μας δίνει ότι

$$\int_{D_b} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \bar{\phi}_2 dx + \int_{D_b} \nabla \psi_1 \cdot \nabla \bar{\psi}_2 dx + \sigma_1 \left[\int_{D_b} \phi_1 \bar{\phi}_2 dx + \int_{D_b} \psi_1 \bar{\psi}_2 dx \right] = 0 \quad (5.8)$$

Από την Πρόταση 5.1.7,

$$\int_{D_b} \phi_1 \bar{\phi}_2 dx + \int_{D_b} \psi_1 \bar{\psi}_2 dx = 0 \quad (5.9)$$

Οι εξισώσεις (5.8) και (5.9) υποδηλώνουν ότι

$$\int_{D_b} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \bar{\phi}_2 dx + \int_{D_b} \nabla \psi_1 \cdot \nabla \bar{\psi}_2 dx = 0 \quad (5.10)$$

Ως αποτέλεσμα,

$$\begin{aligned} ((\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} &= ((\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2))_{L^2(D_b) \times L^2(D_b)} \\ &\quad + ((\nabla \phi_1, \nabla \psi_1), (\nabla \phi_2, \nabla \psi_2))_{L^2(D_b) \times L^2(D_b)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Ακολούθως θα διατυπώσουμε ένα ισοδύναμο, γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών με το (5.5), το οποίο δίνει ένα χαρακτηρισμό τύπου ελαχίστου-μεγίστου στις ιδιοτιμές του προβλήματος αυτού:

Έστω ότι $\Lambda > 0$ είναι ένας αυθαίρετος θετικός αριθμός. Τότε, το πρόβλημα ιδιοτιμών (5.5) θα είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} &\int_{D_b} \nabla \phi \cdot \nabla \bar{\phi}' dx + \int_{D_b} \nabla \psi \cdot \nabla \bar{\psi}' dx \\ + \Lambda \left[\int_{D_b} \phi \bar{\phi}' dx + \int_{D_b} \psi \bar{\psi}' dx \right] &= (\Lambda - \sigma) \left[\int_{D_b} \phi \bar{\phi}' dx + \int_{D_b} \psi \bar{\psi}' dx \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ορίζουμε τον φραγμένο γραμμικό τελεστή $\mathbb{B} : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ μέσω του θεωρήματος αναπαράστασης Riesz :

$$(\mathbb{B}(\phi, \psi), (\phi', \psi'))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} := \int_{D_b} \phi \bar{\phi}' dx + \int_{D_b} \psi \bar{\psi}' dx \quad (5.12)$$

Τότε, η (5.11) γράφεται ως ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών για τελεστές:

$$\mathbb{A}_\Lambda(\phi, \psi) = (\Lambda - \sigma)\mathbb{B}(\phi, \psi), \quad (5.13)$$

όπου ο \mathbb{A}_Λ είναι ένας γραμμικός, αυτοσυζυγής, πιστικός τελεστής και ο \mathbb{B} είναι ένας συμπαγής, γραμμικός και θετικός τελεστής. Σημειώνουμε ότι, σε αντίθεση με το αρχικό πρόβλημα ιδιοτιμών (3.5), δεν υπάρχει κανένας περιορισμός πιστικότητας.

Οι ιδιοτιμές $\Lambda - \sigma_n$ αυτού το φασματικού προβλήματος για τελεστές αποτελούν μια θετική, αύξουσα ακολουθία με το $+\infty$ ως το μοναδικό σημείο συσσώρευσης (εάν είναι πράγματι άπειρες) [29, Θεώρημα 10.23]. Επίσης διαθέτουν ένα χαρακτηρισμό τύπου

5. Κατασκευή ορθοκανονικής βάσης για τον χώρο λύσεων

ελαχίστου-μεγίστου (Courant-Fischer), με τη μικρότερη ιδιοτιμή $\Lambda - \sigma_1$, να είναι ένα infimum:

$$\begin{aligned}
 \Lambda - \sigma_1 &= \inf_{(\phi, \psi) \in \mathcal{H}(D_b), (\phi, \psi) \neq (0,0)} \frac{(\mathbb{A}_\Lambda(\phi, \psi), (\phi, \psi))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)}}{(\mathbb{B}(\phi, \psi), (\phi, \psi))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)}} \\
 &= \inf_{(\phi, \psi) \in \mathcal{H}(D_b), (\phi, \psi) \neq (0,0)} \frac{\|\nabla \phi\|^2 + \|\nabla \psi\|^2 + \Lambda \int_{D_b} |\phi|^2 dx + \Lambda \int_{D_b} |\psi|^2 dx}{\int_{D_b} |\phi|^2 dx + \int_{D_b} |\psi|^2 dx} \\
 &= \inf_{(\phi, \psi) \in \mathcal{H}(D_b), (\phi, \psi) \neq (0,0)} \frac{\|\nabla \phi\|^2 + \|\nabla \psi\|^2}{\int_{D_b} |\phi|^2 dx + \int_{D_b} |\psi|^2 dx} + \Lambda \\
 &= \Lambda, \quad (\text{επιλέγοντας } (\phi_0, \psi_0) = (1, 1))
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Οι ιδιοτιμές του (5.5) κληρονομούν τις πιο πάνω ιδιότητες. Επομένως, η $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ είναι φθίνουσα, με μοναδικό πιθανό σημείο συσσώρευσης στο $-\infty$. Επειδή οποιοσδήποτε μικρός, θετικός αριθμός είναι κατάλληλη επιλογή για την παράμετρο Λ , $\sigma_n \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$\sigma_1 = \Lambda - \Lambda = 0 \tag{5.15}$$

Στη συνέχεια θα διαπιστώσουμε ότι η σ_1 αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή Neumann, αλλά και ότι ολόκληρη η ακολουθία $\{-\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ αποτελείται αποκλειστικά από ιδιοτιμές Dirichlet και Neumann για τη Λαπλασιανή στο χωρίο D_b .

Για την εύρεση ορθοκανονικής βάσης για τον χώρο λύσεων $\mathcal{H}(D_b)$, θα αξιοποιήσουμε τον τελεστή $\tilde{\mathbb{T}} : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ που ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{\mathbb{T}} := \mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \mathbb{B} \mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \tag{5.16}$$

Εξ' ορισμού, ο $\tilde{\mathbb{T}}$ είναι ένας αυτοσυζυγής, συμπαγής και θετικός γραμμικός τελεστής. Επιπρόσθετα ο \mathbb{B} έχει την ιδιότητα $N(\mathbb{B}) = \{0\}$, κάτι που υποδηλώνει ότι $N(\tilde{\mathbb{T}}) = \{0\}$. Το γεγονός ότι ο \mathbb{B} είναι μονοσήμαντος εξασφαλίζει τη φασματική πληρότητα, αφού από τη διάσπαση του χώρου Hilbert $\mathcal{H}(D_b) = N(\tilde{\mathbb{T}}) \oplus R(\tilde{\mathbb{T}}) = R(\tilde{\mathbb{T}})$ και την εφαρμογή του θεωρήματος Hilbert-Schmidt στον τελεστή $\tilde{\mathbb{T}}$, μπορούμε να επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση για τον χώρο $\mathcal{H}(D_b)$ αποτελούμενη από ιδιοστοιχεία του $\tilde{\mathbb{T}}$.

Το πρόβλημα ιδιοτιμών (5.5) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:

$$\left[\frac{1}{\Lambda - \sigma} I - \tilde{\mathbb{T}} \right] u = 0, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathcal{H}(D_b) \tag{5.17}$$

όπου $(u_1, u_2) = \mathbb{A}_\Lambda^{+\frac{1}{2}}(\phi, \psi)$, (ϕ, ψ) είναι ένα ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων της (5.5) και οι δυο τελεστές $\mathbb{A}_\Lambda^{+\frac{1}{2}}, \mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ αποτελούν τοπολογικούς ισομορφισμούς. Σε αντίθεση με την (4.2), αυτό το πρόβλημα ιδιοτιμών αντιστοιχεί σε ένα μονοσήμαντο τελεστή, επομένως το μηδέν δεν ανήκει στο φάσμα του.

Υποθέτουμε ότι η $\{\tilde{u}_j\}_{j=1}^\infty := \{(u_1^{(j)}, u_2^{(j)})\}_{j=1}^\infty$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}(D_b)$, αποτελούμενη από ιδιοστοιχεία του $\tilde{\mathbb{T}}$. Τότε η $\{\mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \tilde{u}_j\}_{j=1}^\infty$ είναι εξ' ορισμού, μια βάση Riesz για τον χώρο $\mathcal{H}(D_b)$. Αποτελείται από ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων (ϕ, ψ) της (5.5), αφού τα (5.5) και (5.17) είναι ισοδύναμα προβλήματα ιδιοτιμών.

Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω αποτελέσματα, παρουσιάζουμε μια απλή μέθοδο κατασκευής της ζητούμενης ορθοκανονικής βάσης. Για κάθε ιδιοτιμή σ_n , όπου $n \in \mathbb{N}$, επιλέγουμε μια ορθοκανονική βάση για τον αντίστοιχο ιδιόχωρο $\{(\phi_1^{(n)}, \psi_1^{(n)}), (\phi_2^{(n)}, \psi_2^{(n)})\}$,

5.2. Μια αναλυτική προσέγγιση κατασκευής ορθοκανονικής βάσης σε σφαιρική γεωμετρία

$\dots, (\phi_{k(n)}^{(n)}, \psi_{k(n)}^{(n)})\}$, όπου $k(n) < +\infty$ είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα της σ_n . Τότε, από την ισοδυναμία των (5.5) και (5.17), έχουμε ότι:

$$\mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \tilde{u}_n \in \text{span}\{(\phi_1^{(n)}, \psi_1^{(n)}), (\phi_2^{(n)}, \psi_2^{(n)}), \dots, (\phi_{k(n)}^{(n)}, \psi_{k(n)}^{(n)})\}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (5.18)$$

Θεώρημα 5.1.9 Το σύστημα

$$\mathcal{F} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(\phi_1^{(n)}, \psi_1^{(n)}), (\phi_2^{(n)}, \psi_2^{(n)}), \dots, (\phi_{k(n)}^{(n)}, \psi_{k(n)}^{(n)})\} \quad (5.19)$$

αποτελεί ορθοκανονική βάση για τον χώρο λύσεων $\mathcal{H}(D_b)$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.1.8, το \mathcal{F} αποτελεί ορθοκανονικό σύστημα. Αφού η $\{\mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \tilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι βάση Riesz για τον $\mathcal{H}(D_b)$, κάθε $\omega \in \mathcal{H}(D_b)$ περιγράφεται από το ανάπτυγμα

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \tilde{u}_n, \quad (5.20)$$

για κάποια επιλογή σταθερών c_n . Η σχέση (5.18) υποδηλώνει ότι

$$\mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \tilde{u}_n = \sum_{i=1}^{k(n)} a_i^{(n)} (\phi_i^{(n)}, \psi_i^{(n)}), \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.21)$$

Ως συνέπεια των (5.20) και (5.21),

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=1}^{k(n)} a_i^{(n)} (\phi_i^{(n)}, \psi_i^{(n)})$$

Επομένως, $\omega \in \overline{\text{span}\mathcal{F}}$ και άρα $\mathcal{H}(D_b) \subset \overline{\text{span}\mathcal{F}}$. Από την άλλη ισχύει ότι $\overline{\text{span}\mathcal{F}} \subset \mathcal{H}(D_B)$, επομένως $\text{span}\mathcal{F} = \mathcal{H}(D_B)$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται. ■

5.2. Μια αναλυτική προσέγγιση κατασκευής ορθοκανονικής βάσης σε σφαιρική γεωμετρία

Στο προηγούμενο υποκεφάλαιο δείξαμε ότι το (5.1)-(5.4) μας προμηθεύει με ένα πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων στον $\mathcal{H}(D_b)$. Τώρα, περιοριζόμαστε στην απλούστερη περίπτωση όπου το D_b είναι ο δίσκος $D(0, R) \subset \mathbb{R}^2$, ώστε η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών να είναι εφαρμόσιμη και άρα προκύπτουν αναλυτικές εκφράσεις για το σύστημα ιδιοσυναρτήσεων. Για λόγους απλότητας, σε ό,τι θα ακολουθήσει αντικαθιστούμε το $-\sigma$ με σ και το βοηθητικό πρόβλημα ιδιοτιμών παίρνει τη μορφή:

$$\Delta\phi + \sigma\phi = 0 \quad \text{στο } D_b, \quad (5.22)$$

$$\Delta\psi + \sigma\psi = 0 \quad \text{στο } D_b, \quad (5.23)$$

$$\phi = \psi \quad \text{στο } D_b, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\partial\psi}{\partial n} \quad \text{στο } \partial D_b \quad (5.25)$$

5. Κατασκευή ορθοκανονικής βάσης για τον χώρο λύσεων

Επομένως, κάθε ζεύγος λύσεων του προβλήματος (5.22)-(5.25) σε πολικές συντεταγμένες $x = (r, \theta)$, διαθέτει το ανάπτυγμα σειράς:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_m(\sqrt{\sigma}r) e^{im\theta} \quad (5.26)$$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_m(\sqrt{\sigma}r) e^{im\theta}, \quad (5.27)$$

όπου με J_m συμβολίζουμε τις κυλινδρικές συναρτήσεις Bessel. Επειδή κάθε ζεύγος λύσεων πρέπει επίσης να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (5.24)-(5.25), δηλαδή $\phi(R, \theta) = \psi(R, \theta)$ και $\partial\phi/\partial n(R, \theta) = -\partial\psi/\partial n(R, \theta)$, προκύπτει το ακόλουθο ομογενές γραμμικό σύστημα εξισώσεων για τις σταθερές a_m και b_m :

$$a_m J_m(\sqrt{\sigma}R) - b_m J_m(\sqrt{\sigma}R) = 0 \quad (5.28)$$

$$\sqrt{\sigma} a_m J'_m(\sqrt{\sigma}R) + \sqrt{\sigma} b_m J'_m(\sqrt{\sigma}R) = 0 \quad (5.29)$$

Οι μη τετριμμένες ιδιοσυναρτήσεις $w(r, \theta)$ και $v(r, \theta)$ πηγάζουν από τις τιμές του σ που αποτελούν ρίζες της ορίζουσας

$$\det \begin{pmatrix} J_m(\sqrt{\sigma}R) & -J_m(\sqrt{\sigma}R) \\ \sqrt{\sigma} J'_m(\sqrt{\sigma}R) & \sqrt{\sigma} J'_m(\sqrt{\sigma}R) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.30)$$

Ισοδύναμα, θα πρέπει να ισχύει $2\sqrt{\sigma} J'_m(\sqrt{\sigma}R) \cdot J_m(\sqrt{\sigma}R) = 0$, δηλαδή

$$J_m(\sqrt{\sigma}R) = 0 \quad (5.31)$$

ή,

$$\sqrt{\sigma} J'_m(\sqrt{\sigma}R) = 0 \quad (5.32)$$

Για να ανακεφαλαιώσουμε, εάν η σ είναι μια ιδιοτιμή του βοηθητικού φασματικού προβλήματος, τότε θα πρέπει να είναι ιδιοτιμή Dirichlet (5.31), ή ιδιοτιμή Neumann (5.32) για την Λαπλασιανή στον δίσκο $D_b = D(0, R)$. Παρατηρούμε ότι οι (5.31) και (5.32) είναι αμοιβαίως αποκλειόμενες (για σταθερό $m \in \mathbb{N}$), αφού μια ιδιοσυνάρτηση Dirichlet δεν μπορεί να είναι ταυτοχρόνως και ιδιοσυνάρτηση Neumann.

Στην περίπτωση όπου ικανοποιείται η (5.31), τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων παίρνουν την ακόλουθη μορφή, ως συνέπεια των (5.28) και (5.29):

$$c_1 \left(J_m \left(\frac{j_{m,l}}{R} r \right) e^{im\theta}, -J_m \left(\frac{j_{m,l}}{R} r \right) e^{im\theta} \right), \quad c_1 \in \mathbb{C}, \quad (5.33)$$

όπου $j_{m,l}$ είναι η l -οστή ρίζα της J_m , $m \in \mathbb{N}_0$

Στην περίπτωση όπου ικανοποιείται η (5.32) και το $\sigma \neq 0$, τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων παίρνουν την ακόλουθη μορφή, ως συνέπεια των (5.28) και (5.29):

$$c_2 \left(J_m \left(\frac{j'_{m,l}}{R} r \right) e^{im\theta}, J_m \left(\frac{j'_{m,l}}{R} r \right) e^{im\theta} \right), \quad c_2 \in \mathbb{C}, \quad (5.34)$$

όπου $j'_{m,l}$ είναι η l -οστή ρίζα της J'_m , $m \in \mathbb{N}_0$

Η περίπτωση όπου το $\sigma = 0$ είναι ξεχωριστή από τις πιο πάνω, διότι οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις Neumann για την $-\Delta$ δεν είναι πλέον συναρτήσεις Bessel, αλλά η οικογένεια των σταθερών συναρτήσεων. Παρατηρήσουμε πως το $\sigma = 0$ πράγματι αποτελεί ιδιοτιμή, αφού το $(1, 1)$ είναι ένα αντίστοιχο ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων.

Λήμμα 5.2.1 Για $\sigma = 0$, τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$c_3(1, 1), c_3 \in \mathbb{C} \quad (5.35)$$

Απόδειξη. Έστω ότι το (ϕ, ψ) είναι ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων για το βοηθητικό πρόβλημα ιδιοτιμών, που να αντιστοιχεί στο $\sigma = 0$. Ορίζουμε $u := \phi - \psi$. Τότε, η u επιλύει την διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta \phi - \Delta \psi = 0 \quad \text{στο } D_b \\ u|_{\partial D_b} &= (\phi - \psi)|_{\partial D_b} = 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση είναι καλά τοποθετημένη και διαθέτει μόνο την τετριμμένη λύση $u = 0$. Επομένως, το ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων (ϕ, ψ) ικανοποιεί τη σχέση $\phi = \psi$, στο $\overline{D_b}$. Άρα, αντικαθιστώντας στο βοηθητικό πρόβλημα ιδιοτιμών προκύπτει ότι η ϕ αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= 0 \quad \text{στο } D_b, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0 \quad \text{στο } \partial D_b \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, οι συναρτήσεις ϕ και ψ είναι ιδιοσυναρτήσεις Neumann για την $\sigma = 0$, δηλαδή $\phi = \psi = c$, όπου $c \in \mathbb{C}$. ■

Ανακεφαλαιώνουμε τα πιο πάνω διατυπώνοντας το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πόρισμα 5.2.2 Έστω ότι με $\mathcal{D}(D(0, R))$ και $\mathcal{N}(D(0, R))$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ιδιοτιμών Dirichlet και Neumann αντίστοιχα, για την $-\Delta$ στον δίσκο $D(0, R)$. Τότε, οι ιδιοτιμές σ του βοηθητικού προβλήματος ιδιοτιμών αποτελούνται από το σύνολο $\mathcal{D}(D(0, R)) \cup \mathcal{N}(D(0, R))$, ενώ οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} c_1(J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}, -J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}) & \quad \text{αν } \sigma \in \mathcal{D}(D(0, R)), \\ c_2(J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}, J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}) & \quad \text{αν } 0 \neq \sigma \in \mathcal{N}(D(0, R)), \\ c_3(1, 1) & \quad \text{αν } \sigma = 0 \end{aligned}$$

5.3. Μια αναλυτική προσέγγιση κατασκευής ορθοκανονικής βάσης σε αυθαίρετη γεωμετρία

Προηγουμένως, χρησιμοποιήσαμε την τεχνική χωρισμού μεταβλητών για να υπολογίσουμε τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων για έναν δίσκο $D(0, R) \subset \mathbb{R}^2$. Μετά από κανονικοποίηση, η οικογένεια των ζευγών ιδιοσυναρτήσεων που περιγράφεται από το Πόρισμα 5.2.2, είναι η ζητούμενη ορθοκανονική βάση για τον χώρο λύσεων $\mathcal{H}(D(0, R))$. Δείξαμε ότι η επιλογή αυτής της βάσης πηγάζει από τις λύσεις των προβλημάτων ιδιοτιμών Dirichlet και Neumann, ορισμένων στον $D(0, R)$.

Ο στόχος μας είναι να γενικεύσουμε το Πόρισμα 5.2.2 σε όλες τις πιθανές γεωμετρίες. Επομένως, το πρόβλημα κατασκευής μιας ορθοκανονικής βάσης για τον χώρο $\mathcal{H}(D_b)$, όπου D_b είναι μια αυθαίρετη γεωμετρία, μειώνεται στην επίλυση των αντίστοιχων προβλημάτων ιδιοτιμών Dirichlet και Neumann στο D_b .

5. Κατασκευή ορθοκανονικής βάσης για τον χώρο λύσεων

Πρόταση 5.3.1 Έστω ότι $\mathcal{D}(D_b)$ και $\mathcal{N}(D_b)$ συμβολίζουν τα σύνολα όλων των ιδιοτιμών *Dirichlet* και *Neumann* αντιστοίχως, για την $-\Delta$ στο D_b . Επίσης, έστω ότι $\mathcal{E}(D_b)$ είναι το σύνολο όλων των ιδιοτιμών για το βοηθητικό πρόβλημα (5.22)-(5.25). Αν $\sigma \in \mathcal{D}(D_b) \cup \mathcal{N}(D_b)$, τότε $\sigma \in \mathcal{E}(D_b)$, δηλαδή το φάσμα του (5.22)-(5.25) περιέχει το σύνολο $\mathcal{D}(D_b) \cup \mathcal{N}(D_b)$. Αφού $0 \in \mathcal{N}(D_b)$, τότε το $\sigma = 0$ είναι πάντα ιδιοτιμή του (5.22)-(5.25).

Απόδειξη. Ορίζουμε τα προβλήματα ιδιοτιμών

$$\begin{aligned} \Delta u + \sigma u &= 0 & \text{στο } D_b \\ u &= 0 & \text{στο } \partial D_b \end{aligned} \quad (5.37)$$

και

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} + \sigma \tilde{u} &= 0 & \text{στο } D_b, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} &= 0 & \text{στο } \partial D_b \end{aligned} \quad (5.38)$$

που είναι τα προβλήματα ιδιοτιμών *Dirichlet* και *Neumann*, ορισμένα στο D_b , για την $-\Delta$.

Υποθέτουμε ότι (σ, u) είναι ένα ιδιοζεύγος για την (5.37). Τότε, ορίζουμε ένα ζεύγος συναρτήσεων $\mathcal{H}(D_b) \ni (\phi, \psi) := (u, -u) \neq (0, 0)$, αφού $u \neq 0$. Παρατηρούμε ότι (ϕ, ψ) είναι μια λύση του βοηθητικού προβλήματος ιδιοτιμών (5.22)-(5.25), αφού:

$$\begin{aligned} \Delta u + \sigma u &= 0 & \text{στο } D_b \\ \Delta(-u) + \sigma(-u) &= -(\Delta u + \sigma u) = 0 & \text{στο } D_b, \\ u &= -u = 0 & \text{στο } \partial D_b \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= - \left(-\frac{\partial u}{\partial n} \right) & \text{στο } \partial D_b \end{aligned}$$

Τώρα, υποθέτουμε ότι (σ, \tilde{u}) είναι ένα ιδιοζεύγος για την (5.38). Τότε, ορίζουμε ένα ζεύγος συναρτήσεων $\mathcal{H}(D_b) \ni (\phi, \psi) := (\tilde{u}, \tilde{u}) \neq (0, 0)$, αφού $\tilde{u} \neq 0$. Παρατηρούμε ότι (ϕ, ψ) είναι μια λύση του βοηθητικού προβλήματος ιδιοτιμών (5.22)-(5.25), αφού:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} + \sigma \tilde{u} &= 0 & \text{στο } D_b, \\ \Delta \tilde{u} + \sigma \tilde{u} &= 0 & \text{στο } D_b, \\ \tilde{u} &= \tilde{u} & \text{στο } \partial D_b, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} &= - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right) & \text{στο } \partial D_b \end{aligned}$$

■

Για να δείξουμε ότι $\mathcal{E}(D_b) = \mathcal{D}(D_b) \cup \mathcal{N}(D_b)$, απομένει να δειχθεί ότι $\mathcal{E}(D_b) \subset \mathcal{D}(D_b) \cup \mathcal{N}(D_b)$.

Θεώρημα 5.3.2 Το φάσμα του βοηθητικού προβλήματος ιδιοτιμών (5.22)-(5.25) αποτελείται από τις ιδιοτιμές *Dirichlet* και *Neumann* για την $-\Delta$ στο D_b . Τα αντίστοιχα

5.3. Μια αναλυτική προσέγγιση κατασκευής ορθοκανονικής βάσης σε αυθαίρετη γεωμετρία

ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} c_1(u, -u) & \text{ αν } \sigma \in \mathcal{D}(D_b), \\ c_2(\tilde{u}, \tilde{u}) & \text{ αν } 0 \neq \sigma \in \mathcal{N}(D_b), \\ c_3(1, 1) & \text{ αν } \sigma = 0 \end{aligned}$$

όπου u, \tilde{u} είναι ιδιοσυναρτήσεις *Dirichlet* και *Neumann* αντίστοιχα.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\sigma \in \mathcal{E}(D_b)$ και ότι (w, v) είναι ένα αντίστοιχο ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων. Ορίζουμε τη συνάρτηση $u := \phi - \psi$. Τότε,

$$\Delta u + \sigma u = \Delta(\phi - \psi) + \sigma(\phi - \psi) = \Delta\phi - \Delta\psi + \sigma\phi - \sigma\psi = 0 \quad (5.39)$$

και

$$u|_{\partial D_b} = \phi|_{\partial D_b} - \psi|_{\partial D_b} = 0 \quad (5.40)$$

Επομένως, αν $\phi \neq \psi$, τότε $u \neq 0$ είναι μια ιδιοσυνάρτηση *Dirichlet* για την $-\Delta$ στο D_b και σ είναι η αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Συνεχίζουμε, ορίζοντας τη συνάρτηση $\tilde{u} := \phi + \psi$. Τότε ισχύει

$$\Delta \tilde{u} + \sigma \tilde{u} = \Delta(\phi + \psi) + \sigma(\phi + \psi) = \Delta\phi + \Delta\psi + \sigma\phi + \sigma\psi = 0 \quad (5.41)$$

και

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \Big|_{\partial D_b} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\partial D_b} + \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\partial D_b} = 0 \quad (5.42)$$

Επομένως, αν $\phi \neq -\psi$, τότε $\tilde{u} \neq 0$ είναι μια ιδιοσυνάρτηση *Neumann* για την $-\Delta$ στο D_b και σ είναι η αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Τώρα, υποθέτουμε προς εις άτοπον ότι $\sigma \in \mathcal{E}(D_b)$ δεν είναι ιδιοτιμή *Dirichlet* ή *Neumann* και ότι (ϕ, ψ) είναι ένα αντίστοιχο ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων. Ορίζουμε $u := \phi - \psi$ και $\tilde{u} := \phi + \psi$. Τότε, u είναι μια λύση του (5.39)-(5.40) και $\sigma \notin \mathcal{D}(D_b)$. Επομένως $u \equiv 0$, δηλαδή $\phi = \psi$.

Επιπρόσθετα, \tilde{u} είναι μια λύση του (5.41)-(5.42) και $\sigma \notin \mathcal{N}(D_b)$, επομένως $\tilde{u} \equiv 0$ και άρα $\phi = -\psi$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $(\phi, \psi) \neq (0, 0)$. Επομένως, $\sigma \in \mathcal{D}(D_b) \cup \mathcal{N}(D_b)$, δηλαδή $\mathcal{E}(D_b) = \mathcal{D}(D_b) \cup \mathcal{N}(D_b)$. ■

Για να αποδείξουμε το θεώρημα αυτό, είχαμε την ταυτόχρονη υπόθεση ότι $\sigma \notin \mathcal{D}(D_b)$ και ότι $\sigma \notin \mathcal{N}(D_b)$. Μπορούμε να διατυπώσουμε μια δεύτερη απόδειξη για το θεώρημα, υποθέτοντας μια εκ των δυο κάθε φορά.

Απόδειξη. (Εναλλακτικός τρόπος) Υποθέτουμε ότι $\mathcal{E}(D_b) \ni \sigma \notin \mathcal{D}(D_b)$ και ορίζουμε $u := \phi - \psi$. Αφού u είναι μια λύση του (5.39)-(5.40), τότε από την υπόθεση $u \equiv 0$, ή ισοδύναμα $\phi = \psi$. Θέτουμε τώρα $\tilde{u} := \phi + \psi = 2\phi$. Τότε, \tilde{u} είναι μια μη τετριμμένη λύση για το (5.41)-(5.42). Επομένως, $\sigma \in \mathcal{N}(D_b)$, δηλαδή αν το σ ανήκει στο φάσμα και δεν είναι ιδιοτιμή *Dirichlet*, τότε πρέπει αναγκαστικά να είναι ιδιοτιμή *Neumann*. Με παρόμοιο τρόπο μπορεί ναδειχθεί και ότι

$$\text{Αν } \mathcal{E}(D_b) \ni \sigma \notin \mathcal{N}(D_b) \text{ τότε } \sigma \in \mathcal{D}(D_b)$$

Επομένως,

$$\mathcal{E}(D_b) = \mathcal{D}(D_b) \cup \mathcal{N}(D_b)$$

■

Υπάρχουν γεωμετρίες για τις οποίες $\mathcal{D}(D_b) \cap \mathcal{N}(D_b) \neq \emptyset$, δηλαδή υπάρχουν τιμές για το $\sigma \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε το σ να είναι ιδιοτιμές *Dirichlet* και *Neumann* ταυτοχρόνως. Σε

5. Κατασκευή ορθοκανονικής βάσης για τον χώρο λύσεων

αυτές τις περιπτώσεις, οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι για το βοηθητικό φασματικό πρόβλημα (5.22)-(5.25) περιγράφονται από μια αλγεβρική διάσπαση που αποκαλύπτει τις προβολές στους ιδιόχωρους Dirichlet και Neumann:

Λήμμα 5.3.3 Έστω ότι $\sigma \in \mathcal{E}(D_b)$ και (ϕ, ψ) είναι ένα αντίστοιχο ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων. Τότε έχουμε την αλγεβρική διάσπαση

$$(\phi, \psi) = \frac{1}{2}(u, -u) + \frac{1}{2}(\tilde{u}, \tilde{u}) \quad (5.43)$$

όπου η u ικανοποιεί την (5.39)-(5.40) και η \tilde{u} ικανοποιεί την (5.41)-(5.42). Πιο συγκεκριμένα, αν $\sigma \in \mathcal{D}(D_b)$, τότε η u θα ανήκει στον αντίστοιχο ιδιόχωρο Dirichlet. Ομοίως, αν $\sigma \in \mathcal{N}(D_b)$, τότε η \tilde{u} ανήκει στον αντίστοιχο ιδιόχωρο Neumann.

Απόδειξη. Έστω ότι $\sigma \in \mathcal{E}(D_b)$ και ότι (ϕ, ψ) είναι ένα αντίστοιχο ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων για το (5.22)-(5.25). Αν ορίσουμε τις συναρτήσεις $u := \phi - \psi$ και $\tilde{u} := \phi + \psi$, τότε η (5.43) ικανοποιείται. Επίσης, η u είναι μια λύση για το (5.39)-(5.40) και η \tilde{u} είναι μια λύση για το (5.41)-(5.42). Αν $\sigma \notin \mathcal{D}(D_b)$, τότε από το Θεώρημα 5.3.2 έχουμε $u \equiv 0$ και \tilde{u} είναι μια ιδιοσυνάρτηση Neumann. Αν $\sigma \notin \mathcal{N}(D_b)$, τότε από το Θεώρημα 5.3.2 προκύπτει ότι $\tilde{u} \equiv 0$ και άρα η u είναι μια ιδιοσυνάρτηση Dirichlet. ■

Παρατήρηση 5.3.4 Στην περίπτωση όπου το σ είναι ταυτοχρόνως ιδιοτιμή Dirichlet και Neumann και οι δυο όροι u, \tilde{u} στην αλγεβρική διάσπαση (5.43) μπορούν να είναι μη τετριμμένοι. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, ακριβώς ένας εκ των δυο είναι μηδενικός.

6. Μια φασματική μέθοδος Galerkin

Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας που αντιστοιχεί σε τεχνητό μεταϊλικό, θα αναπτύξουμε ένα φασματικό σχήμα Galerkin, αξιοποιώντας την ορθοκανονική βάση που κατασκευάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι οι ιδιοτιμές του διακριτού σχήματος συγκλίνουν στις άγνωστες ιδιοτιμές, κάτω από έναν περιορισμό πιστικότητας στον κυματάρημο. Επιπρόσθετα, εφαρμόζουμε τη μέθοδο στον μοναδιαίο δίσκο όπου έχουμε αναλυτικές αναπαραστάσεις για την ορθοκανονική βάση και παρουσιάζουμε στο τέλος αριθμητικά παραδείγματα, τόσο για το ευθύ, όσο και για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα.

Περιεχόμενα

| | |
|---|----|
| 6.1. Η προσέγγιση των ιδιοτιμών μέσω ενός φασματικού σχήματος Galerkin | 62 |
| 6.2. Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας - σταθερός δείκτης διάθλασης | 67 |
| 6.3. Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας - τμηματικά σταθερός δείκτης διάθλασης | 70 |

6.1. Η προσέγγιση των ιδιοτιμών μέσω ενός φασματικού σχήματος Galerkin

Σε ό,τι θα ακολουθήσει, επιχειρούμε να αναπτύξουμε ένα φασματικό σχήμα Galerkin για τον καθορισμό των ιδιοτιμών του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας (3.5). Κάποιες άλλες μέθοδοι για τον υπολογισμό ιδιοτιμών τροποποιημένων προβλημάτων διαπερατότητας έχουν ήδη θεωρηθεί στις [25, 26]. Επιπρόσθετα, για την αριθμητική προσέγγιση ιδιοτιμών Stekloff που συσχετίζονται με έναν τροποποιημένο τελεστή μακρινού πεδίου, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στις [11, 49]. Εδώ υιοθετούμε μια παρόμοια τεχνική με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην [42], όπου γίνεται εφαρμογή μιας φασματικής μεθόδου Galerkin για τον υπολογισμό των κλασικών ιδιοτιμών διαπερατότητας. Σε εκείνη την περίπτωση, η κατάλληλη βάση απαρτιζόταν από τις ιδιοσυναρτήσεις της δι-Λαπλασιανής στον αντίστοιχο χώρο λύσεων. Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση, υποθέτουμε ότι η συνθήκη πιστικότητας (3.12) για τον κυματάρημο k ικανοποιείται και ότι $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ορθοκανονική βάση για τον $\mathcal{H}(D_b)$. Έχουμε ήδη παρουσιάσει μια μέθοδο κατασκευής τέτοιας βάσης, μέσω του βοηθητικού, εκφυλισμένου φασματικού προβλήματος (5.22)-(5.25):

$$\begin{aligned}\Delta\phi + \sigma\phi &= 0 & \text{στο } D_b, \\ \Delta\psi + \sigma\psi &= 0 & \text{στο } D_b, \\ \phi &= \psi & \text{στο } \partial D_b, \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= -\frac{\partial\psi}{\partial n} & \text{στο } \partial D_b\end{aligned}$$

Έστω ότι $\{\lambda, (w, v)\}$ αποτελεί ένα ιδιοζεύγος για πρόβλημα (3.5). Επειδή $(w, v) \in \mathcal{H}(D_b)$, μπορούμε να θεωρήσουμε το ανάπτυγμα Fourier ως προς την ορθοκανονική βάση $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$(w, v) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\phi_n, \psi_n)$$

Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε μια προσέγγιση για το ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων (w, v) μέσω του μερικού αθροίσματος

$$(w, v)^{(N)} := \sum_{n=1}^N c_n (\phi_n, \psi_n) \quad (6.1)$$

δηλαδή

$$w^{(N)} := \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \quad \text{και} \quad v^{(N)} := \sum_{n=1}^N c_n \psi_n$$

Αντικαθιστώντας τα $w^{(N)}$ και $v^{(N)}$ στη μεταβολική διατύπωση (3.5) και επιλέγοντας ως δοκιμαστικές συναρτήσεις το ορθοκανονικό σύστημα $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^N$, αναδεικνύεται το προσεγγιστικό, γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών για πίνακες:

$$M_1^{(N)} \mathbf{c} = -\lambda^{(N)} M_2^{(N)} \mathbf{c} \quad (6.2)$$

6.1. Η προσέγγιση των ιδιοτιμών μέσω ενός φασματικού σχήματος Galerkin

όπου οι M_1, M_2 είναι $N \times N$ πίνακες, ορισμένοι ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} M_1^{(N)} &:= \int_{D_b} \nabla \phi_i \cdot \nabla \bar{\phi}_j dx + a \int_{D_b} \nabla \psi_i \cdot \nabla \bar{\psi}_j dx - k^2 \int_{D_b} \eta(x) \phi_i \bar{\phi}_j dx \\ M_2^{(N)} &:= k^2 \int_{D_b} \eta_0(x) \psi_i \bar{\psi}_j dx \end{aligned} \quad (6.3)$$

και το $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T \in \mathbb{R}^N$, $i, j = 1, 2, \dots, N$.

Η εξίσωση (6.2) είναι ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών πινάκων και αποτελεί διακριτό ανάλογο του προβλήματος ιδιοτιμών (3.5). Επειδή ικανοποιείται η συνθήκη πιστικότητας, τα (3.5) και (3.15) θα είναι ισοδύναμα προβλήματα. Επομένως, μπορούμε να εξάγουμε προσεγγιστικά αποτελέσματα για τις ιδιοτιμές της εξίσωσης πινάκων (6.2), εφαρμόζοντας την προσεγγιστική φασματική θεωρία στο γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών (3.15).

Είναι χρήσιμο να εισάγουμε ένα αφηρημένο πλαίσιο που αφορά τη σύγκλιση προβολικών μεθόδων [46]. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε ένα διακριτό σχήμα Galerkin, αφού ανήκει στην προαναφερθείσα κατηγορία.

Έστω ότι X είναι ένας χώρος Hilbert και $\{X_N\}_{N=1}^{\infty}$ μια ακολουθία υπόχωρων πεπερασμένης διάστασης του X , όπου $\dim(X_N) = N$, για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Επίσης έστω ότι $P_N : X \rightarrow X$ είναι φραγμένοι ορθογώνιοι τελεστές προβολής στους υπόχωρους πεπερασμένης διάστασης X_N , για κάθε $N \in \mathbb{N}$, τέτοιοι ώστε $P_N x \rightarrow x$ για όλα τα $x \in X$. Δοθέντος ενός αντιστρέψιμου τελεστή $A \in \mathcal{L}(H)$, η προβολική μέθοδος για τον A επιχειρεί να προσεγγίσει τις λύσεις της εξίσωσης $Ax = y$, για $y \in H$ από μια ακολουθία λύσεων $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$ των εξισώσεων

$$P_N A P_N x = P_N y, \quad N = 1, 2, \dots \quad (6.4)$$

Ορισμός 6.1.1 Θεωρούμε ότι η προβολική μέθοδος για τον A συγκλίνει, εάν υπάρχει ένας ακέραιος n_0 τέτοιος ώστε για κάθε $y \in X$ και για κάθε $N \geq n_0$, υπάρχει μια μοναδική λύση x_N για την εξίσωση (6.4) και επιπρόσθετα απαιτούμε η ακολουθία προσεγγιστικών λύσεων να συγκλίνει, δηλαδή $x_N \rightarrow A^{-1}y$.

Συμβολίζουμε με $\prod(P_N)$ το σύνολο όλων των γραμμικών αντιστρέψιμων τελεστών για τους οποίους η προβολική μέθοδος συγκλίνει. Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι χρήσιμο για την ανάλυσή μας [46, Θεώρημα 17.1]:

Θεώρημα 6.1.2 Έστω ότι $A \in \mathcal{L}(X)$ είναι αντιστρέψιμος. Τότε, $A \in \prod(P_N)$ αν και μόνο αν υπάρχει ένας ακέραιος n_0 , τέτοιος ώστε για κάθε $N \geq n_0$, ο $P_N A|_{X_N} = P_N A P_N|_{X_N} : X_N \rightarrow X_N$ διαθέτει φραγμένο αντίστροφο και επίσης,

$$\sup_{N \geq n_0} \|(P_N A P_N|_{X_N})^{-1}\| < \infty.$$

Επίσης θα αξιοποιήσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα [46, Πρόταση 17.5]:

Πόρισμα 6.1.3 Έστω ότι X είναι ένας χώρος Hilbert και ότι $A : X \rightarrow X$ είναι ένας γραμμικός, πιστικός τελεστής. Αν $P_N : X \rightarrow X$ είναι μια ακολουθία τελεστών ορθογώνιας προβολής, τέτοια ώστε $P_N x \rightarrow x$, τότε $A \in \prod(P_N)$.

Συνδυάζοντας τα πιο πάνω, εξάγουμε το ακόλουθο:

6. Μια φασματική μέθοδος Galerkin

Πόρισμα 6.1.4 Έστω ότι $A \in \prod(P_N)$ και ας ορίσουμε $A^{(N)} := P_N A|_{X_N} : X_N \rightarrow X_N$. Τότε, σαν συνέπεια της (6.4) και του Θεωρήματος 6.1.2,

$$(A^{(N)})^{-1} P_N y \rightarrow A^{-1} y \quad (6.5)$$

Συνεχίζοντας, η ασυμπτωτική συμπεριφορά των ιδιοτιμών που αντιστοιχεί στην εξίσωση πινάκων (6.2) μπορεί να προσδιοριστεί, χρησιμοποιώντας ένα αποτέλεσμα φασματικής προσέγγισης για θετικούς και συμπαγείς τελεστές [47, σελ. 134]. Σημειώνουμε πως οι υποθέσεις για τη σύγκλιση των ιδιοτιμών είναι ισχυρότερες απ' ότι στην [42], όπου το αντίστοιχο πρόβλημα ιδιοτιμών δεν ήταν αυτοσυζυγές.

Θεώρημα 6.1.5 Έστω ότι H είναι ένας χώρος Hilbert και $K_N : H \rightarrow H$ μια ακολουθία θετικών και συμπαγών τελεστών, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα (ή αλλιώς κατά νόρμα) σε έναν θετικό και συμπαγή τελεστή $K : H \rightarrow H$. Εάν συμβολίσουμε με $\{t_{N,k}\}$ την ακολουθία ιδιοτιμών του K_N και με $\{t_k\}$ την ακολουθία ιδιοτιμών του K , τότε έχουμε ότι:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} t_{N,k} = t_k \quad (6.6)$$

όπου η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη ως προς το k .

Η χρήση του προαναφερθέντος πλαισίου για προβολικές μεθόδους και του πιο πάνω αποτελέσματος φασματικής προσέγγισης μας επιτρέπει να ορίσουμε ένα σχήμα διακριτοποίησης Galerkin, το οποίο στοχεύει στην προσέγγιση των ιδιοτιμών $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ του (3.5) και να μελετήσουμε κατά πόσο θα συγκλίνει.

Έστω ότι $X := \mathcal{H}(D_b)$ και οι N -διάστατοι υπόχωροι $X_N \subset X$, όπου $N \in \mathbb{N}$ ορίζονται ως εξής:

$$X_N := \text{span}\{(\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2), \dots, (\phi_N, \psi_N)\}$$

Επιπρόσθετα, θεωρούμε τις αντίστοιχες ορθογώνιες προβολές $P_N : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$, που θα έχουν ως πεδίο τιμών τους X_N . Τότε, ορίζουμε τους ακόλουθους γραμμικούς και φραγμένους τελεστές:

$$\begin{aligned} A_{\Lambda}^{(N)} &:= P_N A_{\Lambda}|_{X_N} : X_N \rightarrow X_N \\ B^{(N)} &:= P_N B|_{X_N} : X_N \rightarrow X_N \end{aligned}$$

Αφού ο A_{Λ} είναι πιεστικός τελεστής, από το Θεώρημα (6.1.3), $A_{\Lambda} \in \prod(P_n)$. Επίσης, παρατηρούμε εύκολα ότι ο $A_{\Lambda}^{(N)}$ κληρονομεί την ιδιότητα πιεστικότητας από τον A_{Λ} . Ως αποτέλεσμα, μπορούμε να ορίσουμε τους τελεστές

$$\left(A_{\Lambda}^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}}, \left(A_{\Lambda}^{(N)}\right)^{+\frac{1}{2}} : X_N \rightarrow X_N,$$

αφού οι $A_{\Lambda}^{(N)}$ και ο $\left(A_{\Lambda}^{(N)}\right)^{-1}$ είναι θετικοί τελεστές. Επιπρόσθετα, μπορούμε να ορίσουμε το διακριτό ανάλογο του προβλήματος ιδιοτιμών για τελεστές (3.15) ως εξής:

$$\left(A_{\Lambda}^{(N)}(w^{(N)}, v^{(N)}), (w', v')\right) = k^2(\Lambda - \lambda^{(N)}) \left(B^{(N)}(w^{(N)}, v^{(N)}), (w', v')\right), \quad (6.7)$$

για κάθε (w', v') στον X_N . Επίσης ορίζουμε έναν γραμμικό, φραγμένο και αυτοσυζυγή τελεστή $\tilde{T}^{(N)} : X_N \rightarrow X_N$ ως ακολούθως:

$$\tilde{T}^{(N)} := \left(A_{\Lambda}^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}} B^{(N)} \left(A_{\Lambda}^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

6.1. Η προσέγγιση των ιδιοτιμών μέσω ενός φασματικού σχήματος Galerkin

Τότε, για $u^{(N)} = (u_1^{(N)}, u_2^{(N)}) \in X_N$ και $(u_1^{(N)}, u_2^{(N)}) = \left(A_\Lambda^{(N)}\right)^{+\frac{1}{2}} (w^{(N)}, v^{(N)})$, έχουμε ότι το

$$\left[\frac{1}{k^2(\Lambda - \lambda^{(N)})} I - \tilde{T}^{(N)} \right] u^{(N)} = 0$$

είναι ένα ισοδύναμο πρόβλημα ιδιοτιμών με το (6.7), εξαιρώντας την μηδενική ιδιοτιμή του $\tilde{T}^{(N)}$.

Το πρόβλημα ιδιοτιμών για τον τελεστή πεπερασμένης διάστασης (6.7) είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα ιδιοτιμών πινάκων (6.2). Θέτουμε

$$\mu^{(N)} := \frac{1}{k^2(\Lambda - \lambda^{(N)})} \quad \text{και} \quad \mu = \frac{1}{k^2(\Lambda - \lambda)}$$

Τότε, για να προκύψει το αποτέλεσμα σύγκλισης $\lambda^{(N)} \rightarrow \lambda$, καθώς $N \rightarrow \infty$, αρκεί να δείξουμε ότι $\mu^{(N)} \rightarrow \mu$, καθώς $N \rightarrow \infty$. Προς αυτή την κατεύθυνση, θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο Λήμμα (αποδεικνύεται στο Παράρτημα):

Λήμμα 6.1.6 Έστω ότι H είναι ένας χώρος Hilbert και οι $F, F_N : H \rightarrow H$ θετικοί τελεστές, για $N \in \mathbb{N}$. Αν $F_N \rightarrow F$ ισχυρά (σημειακά), τότε:

$$F_N^{\frac{1}{2}} \rightarrow F^{\frac{1}{2}} \text{ ισχυρά (σημειακά)}$$

Θεώρημα 6.1.7 Οι ιδιοτιμές της εξίσωσης πινάκων (6.2) συγκλίνουν στις ιδιοτιμές $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ του (3.5).

Απόδειξη. Θεωρούμε τον τελεστή $\tilde{T}^{(N)} P_N : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$, για $N \in \mathbb{N}$, που πρόκειται για γραμμική επέκταση του $\tilde{T}^{(N)}$ στον $\mathcal{H}(D_b)$, για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Αφού το φάσμα των $\tilde{T}^{(N)} P_N$ και $\tilde{T}^{(N)}$ ταυτίζεται, εκτός (ίσως) από τη μηδενική ιδιοτιμή, θα χρησιμοποιήσουμε το πλαίσιο φασματικής προσέγγισης για την ακολουθία τελεστών $\{\tilde{T}^{(N)} P_N\}_{N=1}^\infty$.

Θέτουμε $K := \tilde{T}$ και $K^{(N)} := \tilde{T}^{(N)} P_N$. Αφού οι K και $K^{(N)}$ αποτελούν γραμμικούς, συμπαγείς και θετικούς τελεστές, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\|K - K^{(N)}\| \rightarrow 0.$$

Θεωρούμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned} \|K - K^{(N)}\| &= \left\| A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} B A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}} B^{(N)} \left(A_\Lambda^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}} \right\| \\ &\leq \left\| A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} B A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}} P_N B A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \right\| \\ &\quad + \left\| \left(A_\Lambda^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}} P_N B A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}} B^{(N)} \left(A_\Lambda^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}} \right\| \\ &= \left\| \left(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}} P_N\right) B A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \right\| \\ &\quad + \left\| \left(A_\Lambda^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(P_N B A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - B^{(N)} \left(A_\Lambda^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}} P_N\right) \right\| \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$a_1(N) := \left\| \left(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}} P_N\right) B A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \right\|$$

6. Μια φασματική μέθοδος Galerkin

και

$$a_2(N) := \left\| \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(P_N B A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - B^{(N)} \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right\|$$

αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{N \rightarrow \infty} a_1(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} a_2(N) = 0$.

Ο δεύτερος όρος ικανοποιεί την ευρύτερη εκτίμηση:

$$\begin{aligned} a_2(N) &= \left\| \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(P_N B A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - B^{(N)} \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right\| \\ &= \left\| \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(P_N B A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - P_N B \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right\| \\ &\leq \left\| \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\| \cdot \|P_N\| \cdot \left\| B \left(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right\| \end{aligned} \quad (6.8)$$

Από τα Πορίσματα 6.1.3 και 6.1.4, αφού ο τελεστής A_Λ είναι πειστικός, έχουμε ότι $\left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-1} P_N \rightarrow A_\Lambda^{-1}$ ισχυρά. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 6.1.6 στην ακολουθία θετικών τελεστών $\left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-1} P_N$, προκύπτει $\left(\left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-1} P_N \right)^{\frac{1}{2}} = \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \rightarrow A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}$. Παρατηρούμε επίσης ότι η $B \left(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ είναι μια ακολουθία συμπαγών τελεστών, αφού ο $B : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ είναι συμπαγής. Επιπρόσθετα, η ακολουθία $A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ είναι αυτοσυζυγής και επίσης ο B είναι αυτοσυζυγής. Επομένως,

$$\begin{aligned} \left\| B \left(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right\| &= \left\| \left(B \left(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right)^* \right\| \\ &= \left\| \left(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) B \right\| \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε επίσης ένα αποτέλεσμα [46, Λήμμα 17.8], που δηλώνει ότι αν πολλαπλασιάσουμε μια ισχυρά συγκλίνουσα ακολουθία τελεστών από τα δεξιά με ένα συμπαγή τελεστή, μετατρέπεται σε νορμ-συγκλίνουσα ακολουθία. Επομένως,

$$\left\| B \left(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right\| \rightarrow 0.$$

Ως συνέπεια της ιδιότητας πειστικότητας για τον $A_\Lambda^{(N)}$, ικανοποιείται η εκτίμηση ομοιόμορφου φράγματος $\left\| \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq C$ για κάποια σταθερά $C > 0$. Οι τελεστές ορθογώνιας προβολής είναι επίσης ομοιόμορφα φραγμένοι, αφού $\|P_N\| \leq 1$ για όλους τους φυσικούς αριθμούς N .

Συνεπώς, $\lim_{N \rightarrow \infty} a_1(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} a_2(N) = 0$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται. ■

Παρατήρηση 6.1.8 Αφού το (6.7) είναι ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών για τον γραμμικό, πειστικό τελεστή $A_\Lambda^{(N)} : X_N \rightarrow X_N$ και τον γραμμικό, συμπαγή και θετικό τελεστή $B^{(N)} : X_N \rightarrow X_N$, οι αντίστοιχες γενικευμένες ιδιοτιμές έχουν την ιδιότητα $k^2(\Lambda - \lambda^{(N)}) > 0$ για όλα τα $N \in \mathbb{N}$. Ως αποτέλεσμα, το $\Lambda > 0$ εξυπηρετεί ως ένα φράγμα για όλες τις προσεγγιστικές ιδιοτιμές $\Lambda > \lambda^{(N)}$, για $N \in \mathbb{N}$. Σημειώνουμε ότι αυτή είναι μια ιδιότητα που κληρονομείται από το αρχικό πρόβλημα ιδιοτιμών (3.15).

6.2. Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας - σταθερός δείκτης διάθλασης

Παρουσιάζουμε τώρα κάποια αριθμητικά αποτελέσματα για να επαληθεύσουμε τη σύγκλιση της μεθόδου Galerkin, όπως αυτή περιγράφηκε προηγουμένως. Ακολούθως, ως μια προκαταρκτική εξέταση του αντίστροφου φασματικού προβλήματος, θα αξιοποιήσουμε τη μέθοδο Galerkin για την ανακατασκευή ενός σταθερού δείκτη διάθλασης. Περιορίζουμε την ανάλυση μας σε κυκλικά χωρία με σταθερό δείκτη διάθλασης, διότι σε αυτή την περίπτωση οι ιδιοτιμές του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά. Έστω ότι το D_b είναι ο μοναδιαίος δίσκος $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ και υποθέτουμε ότι ο κυματάρηθος $k > 0$ είναι σταθεροποιημένος, η μεταύλική παράμετρος a και το η_0 είναι θετικές σταθερές και ότι ο δείκτης διάθλασης είναι επίσης σταθερός, $\eta(x) := \eta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας, χρησιμοποιώντας την τεχνική χωρισμού μεταβλητών για τις λύσεις του (3.1)-(3.4). Τότε, οι ιδιοσυναρτήσεις εκφράζονται ως υπερθέσεις συναρτήσεων Bessel:

$$v(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_m \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) e^{im\theta}$$

$$w(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m J_m(k\sqrt{\eta}r) e^{im\theta}$$

Από τις συνοριακές συνθήκες, συμπεραίνουμε ότι η λ θα είναι ιδιοτιμή για το τροποποιημένο πρόβλημα διαπερατότητας αν και μόνο αν:

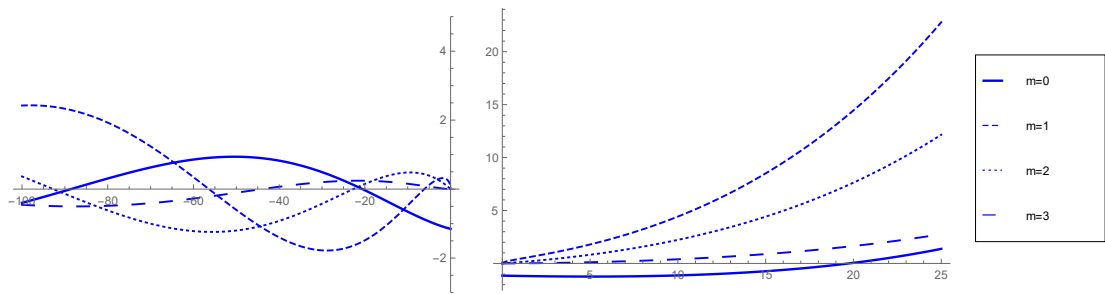
$$\det \begin{pmatrix} J_m(k\sqrt{\eta}) & -J_m \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) \\ \frac{d}{dr} J_m(k\sqrt{\eta}r) \Big|_{r=1} & a \frac{d}{dr} J_m \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) \Big|_{r=1} \end{pmatrix} = 0, \quad m = 0, 1, \dots \quad (6.9)$$

Αφού οι ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε αυτοσυζυγές πρόβλημα, η εξίσωση (6.9) μπορεί να έχει μόνο πραγματικές ρίζες. Στην περίπτωση όπου $\lambda > 0$, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $J_m(ix) = i^m I_m(x)$ για να υπολογίσουμε τις θετικές ιδιοτιμές, αν πράγματι υπάρχουν, όπου με I_m συμβολίζουμε την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους. Ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 6.1.

Από την άλλη, κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο σύστημα $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^N$ και εφαρμόζουμε την μέθοδο Galerkin για να προσεγγίσουμε τις ιδιοτιμές του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας, όπου με $\lambda^{(N)}$ συμβολίζουμε τις προσεγγίσεις μας. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο κατασκευής ορθοκανονικής βάσης που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και από το Πρόσχημα 5.2.2, αναπαριστούμε τις ιδιοσυναρτήσεις του βοηθητικού φασματικού προβλήματος που αποτελούν το ορθοκανονικό μας σύστημα, ως τα ζεύγη Dirichlet και Neumann:

$$\begin{aligned} (J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}, -J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}) & \text{ αν } \sigma \in \mathcal{D}(B(0, 1)), \\ (J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}, J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}) & \text{ αν } 0 \neq \sigma \in \mathcal{N}(B(0, 1)), \\ (1, 1) & \text{ αν } \sigma = 0 \end{aligned}$$

6. Μια φασματική μέθοδος Galerkin



Σχήμα 6.1.: Ιδιοτιμές του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας για τον μοναδιαίο δίσκο με $\eta = 4$, $\eta_0 = 1$, $a = 1$ και $k = 1$, από τις πρώτες τέσσερις συναρτήσεις Bessel. Οι αρνητικές ρίζες φαίνονται στα αριστερά και η (μόνη) θετική στα δεξιά

| (η, η_0, a) | λ_1 | $ \lambda_1 - \lambda_1^{(N)} $ | λ_2 | $ \lambda_2 - \lambda_2^{(N)} $ | λ_3 | $ \lambda_3 - \lambda_3^{(N)} $ |
|---------------------|-------------|---------------------------------|-------------|---------------------------------|-------------|---------------------------------|
| (0.1, 0.5, 1) | 0.2006 | 1.9×10^{-6} | -94.3193 | 0.0713 | -239.5053 | 0.4822 |
| (0.5, 1, 1) | 0.5077 | 2.4×10^{-5} | -46.9584 | 0.0349 | -119.3490 | 0.3753 |
| (4, 1, 2) | 4.4093 | 0.0109 | -74.1301 | 0.1276 | -200.3112 | 0.8096 |
| (15.8, 6, 4) | 3.8892 | 0.1463 | -20.2322 | 0.0189 | -58.2437 | 0.2978 |

Πίνακας 6.1.: Προσέγγιση των ιδιοτιμών του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας για δίσκους με διαφορετικές υλικές ιδιότητες και σταθερό κυματάριθμο $k = 0.35$.

Οι ιδιοτιμές Dirichlet και Neumann $\sqrt{\sigma}$, αντιστοιχούν σε ρίζες συναρτήσεων Bessel που δίνονται από τις (5.33)-(5.34) και μπορούν να υπολογιστούν εύκολα [79]. Σχηματίζουμε μια βάση από 40 ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων του βοηθητικού προβλήματος και υπολογίζουμε τους 40×40 πίνακες του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών (6.2) χρησιμοποιώντας δισδιάστατη αριθμητική ολοκλήρωση.

Για το ευθύ πρόβλημα, υποθέτουμε ότι όλες οι φυσικές παράμετροι είναι γνωστές και χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `eig` της Matlab, υπολογίζουμε τις προσεγγιστικές ιδιοτιμές για το τροποποιημένο πρόβλημα διαπερατότητας $\lambda^{(N)}$. Σημειώνουμε πως χρησιμοποιήσαμε έναν αρχούντως μικρό κυματάριθμο k , έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη πιστικότητας (3.12). Για τον μοναδιαίο δίσκο του \mathbb{R}^2 και για σταθερούς δείκτες διάθλασης που κυμαίνονται στο διάστημα $(0, 20)$ με $a \geq 1$, πρέπει να πάρουμε $k < 0.38$.

Στον πίνακα 6.1, αναφέρονται οι πρώτες τρεις ιδιοτιμές για δίσκους με διαφορετικές υλικές ιδιότητες. Επίσης υπολογίζουμε τα αντίστοιχα σφάλματα μεταξύ των αναλυτικά γνωστών και προσεγγιστικών ιδιοτιμών. Σε όλες τις περιπτώσεις παίρνουμε $k = 0.35$, για να ικανοποιείται ο περιορισμός πιστικότητας.

Επιπρόσθετα, στον Πίνακα 6.2, επαληθεύουμε τη σύγκλιση της προσεγγιστικής μεθόδου Galerkin. Το σχετικό σφάλμα μειώνεται όσο αυξάνεται η διάσταση της βάσης, κάτι που αναμέναμε από το Θεώρημα 6.1.7.

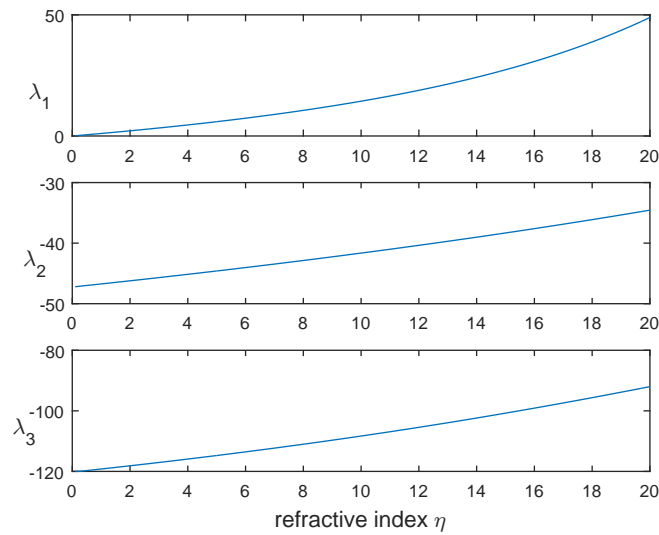
Παρατηρήσαμε ότι όλες οι υλικές ιδιότητες επηρεάζουν την κατανομή των ιδιοτιμών. Ιδιαίτερα ενδιαφέρονσα είναι η μονοτονική σχέση μεταξύ των ιδιοτιμών και του δείκτη διάθλασης, που παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.2. Αυτό το αποτέλεσμα εξετάζεται από θεωρητική σκοπιά στο (3.18), για τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή.

Ακολούθως, ως μια προκαταρκτική εξέταση του αντίστροφου φασματικού προβλήμα-

6.2. Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας - σταθερός δείκτης διάθλασης

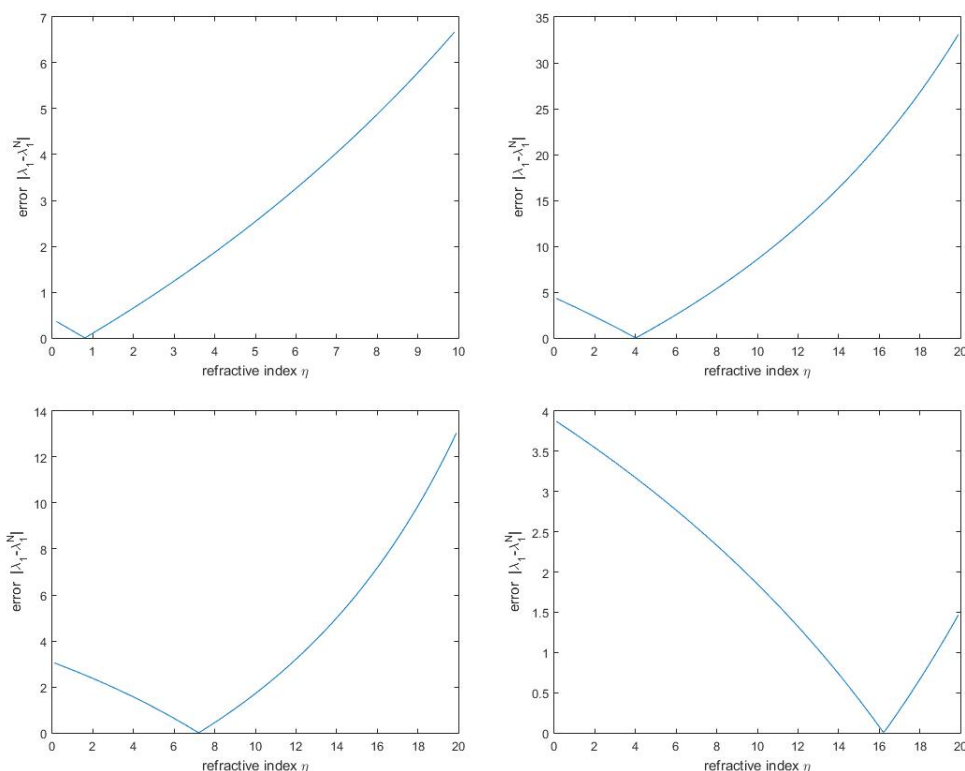
| σφάλμα | $N = 10$ | $N = 20$ | $N = 30$ | $N = 40$ |
|---------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| $ \lambda_1 - \lambda_1^{(N)} $ | 0.0320 | 0.0155 | 0.0151 | 0.0109 |
| $ \lambda_2 - \lambda_2^{(N)} $ | 0.4018 | 0.2681 | 0.1704 | 0.1276 |
| $ \lambda_3 - \lambda_3^{(N)} $ | 2.3993 | 1.2239 | 0.9311 | 0.8096 |

Πίνακας 6.2.: Σύγκλιση για τις τρεις πρώτες ιδιοτιμές του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας, για το δίσκο με $\eta = 4$, $\eta_0 = 1$, $a = 2$ και $k = 0.35$.



Σχήμα 6.2.: Γραφήματα των πρώτων τριών ιδιοτιμών για το τροποποιημένο πρόβλημα διαπερατότητας ως προς τον δείκτη διάθλασης η , για $k = 0.35$, $a = 1$ και $\eta_0 = 1$.

6. Μια φασματική μέθοδος Galerkin



Σχήμα 6.3.: Ανακατασκευές του άγνωστου δείκτη διάθλασης για μοναδιαίους δίσκους. Οι επιλογές παραμέτρων (η, η_0, a) για τα πιο πάνω παραδείγματα είναι $(0.8, 2, 1)$, $(4, 1, 2)$, $(7.2, 3, 1)$ και $(15.8, 6, 4)$ αντίστοιχα.

τος, υποθέτουμε ότι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή είναι γνωστή και προσπαθούμε να εκτιμήσουμε τον δείκτη διάθλασης η , σταθεροποιώντας τις παραμέτρους k , a και η_0 . Στο Θεώρημα 3.2.6 έχουμε ήδη δείξει ότι η μεγαλύτερη θετική ιδιοτιμή μπορεί να προσδιορίσει με μοναδικό τρόπο ένα σταθερό δείκτη διάθλασης. Υπολογίζουμε τους 40×40 πίνακες του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών (6.2) για $\eta \in (0, 20)$ και βήμα 0.1. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε μια βάση δεδομένων με τις ιδιοτιμές $\lambda_1^{(N)}$ και ανακατασκευάζουμε τον η ελαχιστοποιώντας το σφάλμα $|\lambda_1 - \lambda_1^{(N)}|$, όπου θεωρούμε $\lambda_1^{(N)} = \lambda_1^{(N)}(\eta)$. Κάποια γραφήματα των σφαλμάτων έναντι του η φαίνονται στο Σχήμα 6.3. Βλέπουμε ότι το σφάλμα ελαχιστοποιείται για εκτίμηση του η πολύ κοντά στην αυθεντική του τιμή, που αντιστοιχεί στο λ_1 .

Παρατήρηση 6.2.1 Παρατηρούμε ότι για τα πιο πάνω αριθμητικά παραδείγματα, δεν υποθέτουμε εκ των προτέρων μια εκ των $\eta > 1$ ή $\eta < 1$, κάτι που είναι απαραίτητο στην περίπτωση των ιδιοτιμών του κλασικού προβλήματος διαπερατότητας [42, 71].

6.3. Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας - τμηματικά σταθερός δείκτης διάθλασης

Για την περίπτωση τμηματικά σταθερών δεικτών διάθλασης, μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Galerkin και να επιλύσουμε το ευθύ φασματικό πρόβλημα.

6.3. Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας - τμηματικά σταθερός δείκτης διάθλασης

Έπειτα, επιχειρούμε να επιλύσουμε αριθμητικά το αντίστροφο πρόβλημα ανακατασκευής ενός τμηματικά σταθερού δείκτη διάθλασης με την εκ των προτέρων γνώση των τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας. Έστω ότι D_b είναι ο μοναδιαίος δίσκος $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, υποθέτουμε ότι ο κυματάρηθος $k > 0$ είναι σταθερός, οι μεταυλική παράμετρος a και το η_0 είναι θετικές σταθερές και ότι ο δείκτης διάθλασης δίνεται από την

$$\eta(r) := \begin{cases} \eta^{(1)} & 0 < r < d \\ \eta^{(2)} & d < r \leq 1 \end{cases}$$

Ως αποτέλεσμα του χωρισμού μεταβλητών για λύσεις του (3.1)-(3.4), οι ιδιοσυναρτήσεις μπορούν και πάλι να εκφραστούν ως υπερθέσεις συναρτήσεων Bessel :

$$v(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_m \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) e^{im\theta}$$

$$w(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m J_m(k\sqrt{\eta}r) e^{im\theta}$$

Από τις συνοριακές συνθήκες και τη συνέχεια των ιδιοσυναρτήσεων και των παραγώγων τους στο $r = d$, συμπεραίνουμε ότι το λ είναι μια τροποποιημένη ιδιοτιμή διαπερατότητας αν και μόνο αν

$$\det \begin{pmatrix} J_m \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) & 0 & -J_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}) & -N_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}) \\ (-a) \frac{d}{dr} J_m \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) \Big|_{r=1} & 0 & -\frac{d}{dr} J_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}r) \Big|_{r=1} & -\frac{d}{dr} N_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}r) \Big|_{r=1} \\ 0 & J_m(k\sqrt{\eta^{(1)}}d) & -J_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}d) & -N_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}d) \\ 0 & \frac{d}{dr} J_m(k\sqrt{\eta^{(1)}}r) \Big|_{r=d} & -\frac{d}{dr} J_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}r) \Big|_{r=d} & -\frac{d}{dr} N_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}r) \Big|_{r=d} \end{pmatrix} = 0$$

Συνεπώς, τα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων παίρνουν τη μορφή

$$v_m(r, \theta) = a_m J_m \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) e^{im\theta}$$

$$w_m(r, \theta) = \begin{cases} b_m J_m(k\sqrt{\eta^{(1)}}r) e^{im\theta}, & 0 < r < d \\ (c_m J_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}r) + d_m N_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}r)) e^{im\theta}, & d \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Αφού το χωρίο $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ δεν έχει αλλάξει, η ορθοκανονική βάση για τη μέθοδο Galerkin δίνεται και πάλι από τα βοηθητικά ζεύγη Dirichlet-Neumann

$$\begin{aligned} (J_m(\sqrt{\sigma}r) e^{im\theta}, -J_m(\sqrt{\sigma}r) e^{im\theta}) & \quad \text{αν } \sigma \in \mathcal{D}(B(0,1)), \\ (J_m(\sqrt{\sigma}r) e^{im\theta}, J_m(\sqrt{\sigma}r) e^{im\theta}) & \quad \text{αν } 0 \neq \sigma \in \mathcal{N}(B(0,1)), \\ (1, 1) & \quad \text{αν } \sigma = 0 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο Galerkin για να επιλύσουμε το ευθύ φασματικό πρόβλημα για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$ και της εσωτερικής ακτίνας d . Για τους σκοπούς των παραδειγμάτων μας, χρησιμοποιήσαμε μια βάση αποτελούμενη από 40 βοηθητικές ιδιοσυναρτήσεις που σε συνδυασμό με την κάθε επιλογή $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, d)$ μας δίνει τους 40×40 πίνακες του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών (6.2). Επίσης,

6. Μια φασματική μέθοδος Galerkin

| $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, d)$ | υπολογισμένα $\lambda_i^{(N)}$ | ανακατασκευή |
|-------------------------------|---|-----------------|
| (9.2, 1.5, 0.3) | (2.6398, -36.5788, -98.7148, -115.1933) | (8.5, 1.6, 0.3) |
| (6, 0.3, 0.4) | (1.4268, -37.2794, -99.2614, -116.3238) | (5.6, 0.4, 0.4) |
| (2.1, 3.5, 0.5) | (3.6369, -35.4089, -97.7453, -114.2539) | (2.7, 4, 0.8) |
| (3.2, 4.8, 0.7) | (4.8283, -34.6907, -97.1716, -113.1924) | (3.3, 5.4, 0.8) |
| (0.2, 4, 0.9) | (0.9394, -36.6911, -98.5589, -116.7713) | (0.2, 4, 0.9) |

Πίνακας 6.3.: Ανακατασκευή ενός τμηματικά σταθερού δείκτη διάθλασης από τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας.

επιλέξαμε συγκεκριμένες τιμές για τις μεταύλικές παραμέτρους $a = 2$ και $\eta_0 = 1$. Έπειτα, ελαχιστοποιώντας τη συνάρτηση

$$f(\eta) := \sum_{i=1}^m \frac{|\lambda_i^{(N)}(\eta) - \lambda_i|}{|\lambda_i|},$$

που είναι το σχετικό επί τοις εκατόν σφάλμα μεταξύ κάποιων από τις πρώτες υπολογισμένες $(\lambda_i^{(N)})$ και αναλυτικά γνωστές (λ_i) ιδιοτιμές, επιχειρήσαμε να ανακατασκευάσουμε έναν τμηματικά σταθερό δείκτη διάθλασης βρίσκοντας τις επιλογές παραμέτρων $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, d)$ για τις οποίες το σφάλμα ελαχιστοποιείται.

Στο πρώτο παράδειγμα που φαίνεται στον Πίνακα 6.3, επιλέξαμε $k = 0.5$ και $0.1 \leq d \leq 1$ με βήμα 0.1 και τμηματικά σταθερούς δείκτες διάθλασης στο εύρος $0.1 \leq \eta^{(1)}, \eta^{(2)} \leq 10$, επίσης με βήμα 0.1. Έπειτα, ελαχιστοποιήσαμε το σφάλμα για τις μεγαλύτερες 4 αναλυτικά γνωστές και υπολογισμένες ιδιοτιμές.

Παρά όλα αυτά, παρατηρήσαμε ότι κάποιες από τις ανακατασκευές μας δεν ήταν αρκετά ακριβείς. Μια ιδέα για βελτίωση της ακρίβειας των ανακατασκευών ήταν να συλλέξουμε δεδομένα όχι μόνο από έναν κυματάρημο, αλλά από πολλαπλούς κυματάρημους. Στο επόμενο παράδειγμα που φαίνεται στον Πίνακα 6.4, συγκρίνουμε τις ανακατασκευές για τον κυματάρημο $k = 0.5$ και $0.1 \leq k \leq 0.5$, με βήμα 0.1.

Παρατήρηση 6.3.1 Οι μεγαλύτερες τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας μεταφέρουν πληροφορία για έναν τμηματικά συνεχή δείκτη διάθλασης $n(r)$ αλλά και για τη θέση της ασυνέχειας. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ανακατασκευές που προέρχονται από πολλαπλούς κυματάρημους είναι πιο ακριβείς.

6.3. Αριθμητικά αποτελέσματα για το πρόβλημα τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας - τμηματικά σταθερός δείκτης διάθλασης

| $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, d)$ | ανακατασκευή | ανακατασκευή |
|-------------------------------|-----------------|------------------------------------|
| | $k = 0.5$ | $k = \{0, 1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ |
| (9.2, 1.5, 0.3) | (8.5, 1.6, 0.3) | (9.2, 1.5, 0.3) |
| (2.1, 3.5, 0.5) | (2.7, 4.0, 0.8) | (2.4, 3.4, 0.5) |
| (0.2, 4.0, 0.6) | (1.4, 8.1, 0.9) | (0.2, 4.0, 0.6) |
| (3.2, 7.6, 0.6) | (4.4, 9.1, 0.9) | (2.2, 7.3, 0.5) |
| (7.5, 1.2, 0.2) | (3.4, 1.6, 0.3) | (7.5, 1.5, 0.2) |

Πίνακας 6.4.: Ανακατασκευή ενός τμηματικά συνεχή δείκτη διάθλασης από τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας που αντιστοιχούν σε έναν και πέντε κυματάρθρωτους αντιστοίχως.

7. Το ευθύ και το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για την ειδική περίπτωση ενός σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης

Για την ειδική περίπτωση ενός σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης θέτουμε το ευθύ φασματικό πρόβλημα και δείχνουμε την ύπαρξη ενός διακριτού φάσματος, χρησιμοποιώντας ασυμπτωτικές εκφράσεις για τις σφαιρικές συναρτήσεις Bessel. Επιπρόσθετα, θέτουμε το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα και αποδεικνύουμε ότι η γνώση των τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας μπορεί να καθορίσει με μοναδικό τρόπο τον δείκτη διάθλασης.

Περιεχόμενα

| | |
|--|----|
| 7.1. Ύπαρξη των ιδιοτιμών του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας για το σφαιρικά συμμετρικό χωρίο | 76 |
| 7.1.1. Η περίπτωση $l = 0$ | 77 |
| 7.1.2. Η περίπτωση $l \geq 1$ | 79 |
| 7.2. Μοναδικότητα για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα | 82 |
| 7.2.1. Ένα αποτέλεσμα μοναδικότητας για συνοριακά δεδομένα Cauchy | 82 |
| 7.2.2. Ένα αποτέλεσμα μοναδικότητας για συνοριακά δεδομένα Cauchy με λιγότερες απαιτήσεις γνώσεως του φάσματος | 87 |
| 7.2.3. Το θεώρημα μοναδικότητας για τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας | 89 |

7.1. Ύπαρξη των ιδιοτιμών του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας για το σφαιρικά συμμετρικό χωρίο

Εξετάζουμε την ύπαρξη των ιδιοτιμών του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας στην περίπτωση όπου το χωρίο είναι η μοναδιαία μπάλα $B := B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$ και ο δείκτης διάθλασης είναι σφαιρικά συμμετρικός $\eta = \eta(r)$. Αναζητούμε μόνο πραγματικές ιδιοτιμές, αφού γνωρίζουμε ήδη πως το πρόβλημα είναι αυτοσυζυγές. Το σύστημα (3.1)-(3.4) απλοποιείται στην ακόλουθη μορφή:

$$\Delta w + k^2 \eta(r) w = 0, \quad \text{στο } B \quad (7.1)$$

$$(-a)\Delta v + k^2 \lambda \eta_0(r) v = 0, \quad \text{στο } B \quad (7.2)$$

$$w = v, \quad \text{στο } \partial B \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = (-a) \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \text{στο } \partial B. \quad (7.4)$$

Από το σημείο αυτό και έπειτα υποθέτουμε ότι ο τεχνητός δείκτης διάθλασης υποβάθρου είναι σταθερός, δηλαδή $\eta_0(r) = \eta_0 > 0$ και χρησιμοποιούμε την τεχνική χωρισμού μεταβλητών για να πάρουμε αναπαραστάσεις των ιδιοσυναρτήσεων. Αξιοποιώντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά των κατάλληλων χαρακτηριστικών συναρτήσεων για μεγάλες τιμές της λ , δείχνουμε την ύπαρξη απείρων ιδιοτιμών.

Θεωρούμε τις λύσεις του (7.1)-(7.4), κάτω από τις ακόλουθες υποθέσεις για τον δείκτη διάθλασης:

Υπόθεση 7.1.1 Υποθέτουμε ότι $\eta \in C^1[0, 1]$ και $\Re(\eta) > 0$, $\Im(\eta) = 0$.

Υποθέτοντας αξιωματική συμμετρία, οι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz έχουν τις ακόλουθες αναπαραστάσεις [29, σελ. 314]:

$$v_l(r, \theta) = a_l j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) P_l(\cos \theta) \quad (7.5)$$

και

$$w_l(r, \theta) = b_l \frac{y_l(r)}{r} P_l(\cos \theta). \quad (7.6)$$

όπου με P_l συμβολίζουμε τα πολυώνυμα Legendre, οι a_l και b_l είναι σταθερές και οι y_l αποτελούν λύσεις των ακόλουθων βοηθητικών προβλημάτων, για $r > 0$:

$$y_l''(r) + \left(k^2 \eta(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) y_l(r) = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{y_l(r)}{r} - j_l(kr) \right) = 0.$$

Τότε, οι συνοριακές συνθήκες (7.3)-(7.4) υποδηλώνουν ότι $\lambda \neq 0$ θα είναι ιδιοτιμή για το (7.1)-(7.4), αν και μόνο αν:

$$d_l(\lambda) := \det \begin{pmatrix} \frac{y_l(r)}{r} \Big|_{r=1} & -j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) \Big|_{r=1} \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{y_l(r)}{r} \right) \Big|_{r=1} & a \frac{d}{dr} j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) \Big|_{r=1} \end{pmatrix} = 0, \quad (7.7)$$

7.1. Ύπαρξη των ιδιοτιμών του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας για το σφαιρικά συμμετρικό χωρίο

για $l = 0, 1, 2, \dots$. Σημειώνουμε πως η $\lambda = 0$ δεν αποτελεί ιδιοτιμή εν γένει. Αν θέσουμε $\lambda = 0$ στο (7.1)-(7.4) και εφαρμόσουμε χωρισμό μεταβλητών, η αντίστοιχη ορίζουσα παίρνει τη μορφή:

$$y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) = 0. \quad (7.8)$$

Επομένως, η $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή αν και μόνο αν ικανοποιείται η (7.8), για κάποιο $l \in \mathbb{N}_0$. Λαμβάνοντας τα πιο πάνω υπόψη, συμπεραίνουμε πως η λ είναι ιδιοτιμή για το τροποποιημένο πρόβλημα διαπερατότητας, αν και μόνο αν είναι μια ρίζα της τμηματικής χαρακτηριστικής συνάρτησης

$$\hat{d}_l(\lambda) = \begin{cases} d_l(\lambda), & \text{για } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ y_l(1)(al - 1) + y'_l(1), & \text{για } \lambda = 0. \end{cases} \quad (7.9)$$

Για διευκόλυνση μας, θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\mathcal{L} := \{l \in \mathbb{N}_0 : \hat{d}_l(0) = 0\}$. Εάν το $\lambda = 0$ αποτελεί ιδιοτιμή για το τροποποιημένο πρόβλημα ιδιοτιμών διαπερατότητας, τότε θα υπάρξει τουλάχιστον ένα $l \in \mathbb{N}_0$ για το οποίο $\hat{d}_l(0) = 0$, επομένως $l \in \mathcal{L} \neq \emptyset$. Με άλλα λόγια, το \mathcal{L} είναι το σύνολο δεικτών από τους οποίους προκύπτουν ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων για το (7.1)-(7.4) με αντίστοιχη ιδιοτιμή το $\lambda = 0$.

Παρατήρηση 7.1.2 Επειδή η συνάρτηση τετραγωνικής ρίζας δεν είναι καλά ορισμένη στον αρνητικό άξονα, τότε ούτε οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις θα είναι. Σε ό,τι θα ακολουθήσει, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη σύμβαση για να επεκτείνουμε την τετραγωνική ρίζα, άρα και τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις, σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Εάν $\Re(z) < 0$ και $\Im(z) = 0$, τότε επιλέγουμε τον κλάδο $\sqrt{z} = i\sqrt{|z|}$. Προφανώς, αυτή δεν είναι μια συνεχής συνάρτηση. Παρ' όλα αυτά, είναι εύκολο να δούμε ότι οι ρίζες των χαρακτηριστικών συναρτήσεων παραμένουν αμετάβλητες με οποιαδήποτε επιλογή $\sqrt{z} = i\sqrt{|z|}$ ή $\sqrt{z} = -i\sqrt{|z|}$.

Εξετάζουμε την ύπαρξη θετικών και αρνητικών ιδιοτιμών για το τροποποιημένο πρόβλημα διαπερατότητας ξεχωρίζοντας την περίπτωση $l = 0$, που αντιστοιχεί σε σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις, και τις περιπτώσεις $l \geq 1$. Υπενθυμίζουμε πως για το τροποποιημένο πρόβλημα ιδιοτιμών διαπερατότητας, ο κυματάριθμος k είναι σταθεροποιημένος και η φασματική παράμετρος λ εμπλέκεται μόνο στο όρισμα των συναρτήσεων Bessel και των παραγώγων τους, ενώ δεν εμφανίζεται στο όρισμα των συναρτήσεων y_l . Αυτό έρχεται σε αντιπαράβολή με την περίπτωση των κλασικών ιδιοτιμών διαπερατότητας, όπου η φασματική παράμετρος εμφανίζεται και στις δυο ιδιοσυναρτήσεις (δείτε για παράδειγμα [1, 35, 37, 66]).

7.1.1. Η περίπτωση $l = 0$.

Στην περίπτωση όπου θεωρούνται μόνο οι σφαιρικά συμμετρικές ιδιοσυναρτήσεις, το ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$v_0(r) = a_0 \frac{\sin\left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}}r\right)}{k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}}}, \quad (7.10)$$

$$w_0(r) = b_0 \frac{y_0(r)}{r} \quad (7.11)$$

7. Το ευθύ και το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για την ειδική περίπτωση ενός σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης

και η y_0 αποτελεί λύση του ακόλουθου προβλήματος:

$$\begin{aligned} y_0''(r) + k^2 \eta(r) y_0(r) &= 0, \quad 0 < r < 1 \\ y_0(0) &= 0. \end{aligned}$$

Στην ειδική αυτή περίπτωση, η συνάρτηση (7.7) έχει ως εξής

$$d_0(\lambda) = ay_0(1) \cos \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) + \left(y_0'(1) - (a+1)y_0(1) \right) \frac{\sin \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right)}{k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}}} \quad (7.12)$$

και τα $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ για τα οποία $d_0(\lambda) = 0$ καλούνται ειδικές ιδιοτιμές του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας.

Παρατήρηση 7.1.3 Παρατηρούμε πως $\lim_{\lambda \rightarrow 0} d_0(\lambda) = y_0'(1) - y_0(1)$, δηλαδή η τμηματική χαρακτηριστική συνάρτηση $\hat{d}_0(\lambda)$ είναι πάντοτε συνεχής στο $\lambda = 0$.

Για τους σκοπούς της ανάλυσής μας, ξεχωρίζουμε τις περιπτώσεις των $\lambda > 0$ και $\lambda < 0$. Εάν $\lambda < 0$, η χαρακτηριστική συνάρτηση έχει την ακόλουθη ασυμπτωτική μορφή:

$$d_0(\lambda) = ay_0(1) \cos \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) + O \left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \right) \quad (7.13)$$

και επομένως, στέλνοντας $\lambda \rightarrow -\infty$, προκύπτει ότι υπάρχουν άπειρες αρνητικές τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας.

Για $\lambda > 0$, χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες $\sin \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) = i \sinh \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{a}} \right)$ και $\cos \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) = \cosh \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{a}} \right)$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση παίρνει τη μορφή

$$d_0(\lambda) = ay_0(1) \cosh \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{a}} \right) + \left(y_0'(1) - (a+1)y_0(1) \right) \frac{\sinh \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{a}} \right)}{k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{a}}}. \quad (7.14)$$

Εάν το k^2 τυγχάνει να είναι ιδιοτιμή Dirichlet του (7.1) με την y_0 ως αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση, τότε $y_0(1) = 0$ και $d_0(\lambda) \neq 0$ για όλα τα $\lambda > 0$. Από την άλλη, αν υποθέσουμε ότι το k^2 δεν αποτελεί ιδιοτιμή Dirichlet, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση $d_0(\lambda) = 0$ γράφεται ως:

$$k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{a}} \coth \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{a}} \right) = 1 + \frac{1}{a} - \frac{y_0'(1)}{ay_0(1)}. \quad (7.15)$$

Αφού το αριστερό μέλος της εξίσωσης (7.15) είναι μεγαλύτερο της μονάδας και αποτελεί μονότονη συνάρτηση για $\lambda > 0$, θα υπάρχει τουλάχιστον μια θετική ιδιοτιμή για το τροποποιημένο πρόβλημα διαπερατότητας αν και μόνο αν το δεξί μέλος είναι επίσης μεγαλύτερο της μονάδας.

7.1.2. Η περίπτωση $l \geq 1$.

Για $l \geq 1$, υποθέτουμε λύσεις της μορφής (7.5)-(7.6). Αντικαθιστώντας τις παραγώγους των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel

$$\frac{dj_l(z)}{dz} = \frac{l}{z}j_l(z) - j_{l+1}(z) \quad (7.16)$$

στην (7.7), συμπεραίνουμε ότι

$$d_l(\lambda) = j_l \left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}} \right) \left(y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) \right) - ak\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}} j_{l+1} \left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}} \right) y_l(1). \quad (7.17)$$

Παρατήρηση 7.1.4 Αφού $\lim_{\lambda \rightarrow 0} d_l(\lambda) = 0$, οι τμηματικές χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\hat{d}_l(\lambda)$ είναι συνεχείς στο $\lambda = 0$ αν και μόνο αν $l \in \mathcal{L}$.

Όταν το λ είναι αρνητικό, χρησιμοποιούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel [29, σελ. 31]:

$$j_l(r) = \frac{1}{r} \sin \left(r - \frac{l\pi}{2} \right) + O \left(\frac{1}{r^2} \right)$$

και συμπεραίνουμε ότι καθώς $\lambda \rightarrow -\infty$

$$d_l(\lambda) = ay_l(1) \cos \left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}} - \frac{l\pi}{2} \right) + O \left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \right). \quad (7.18)$$

Αυτό εξασφαλίζει την ύπαρξη απείρων αρνητικών ιδιοτιμών διαπερατότητας για κάθε $l \geq 1$.

Για λ θετικό, το όρισμα των συναρτήσεων Bessel παίρνει μιγαδικές τιμές. Χρησιμοποιώντας ότι

$$j_l \left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}} \right) = i^l i_l \left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} \right),$$

όπου με i_l συμβολίζουμε τις τροποποιημένες σφαιρικές συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους, οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις παίρνουν τη μορφή:

$$d_l(\lambda) = i^l \left(y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) \right) i_l \left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} \right) - i^{l+2} y_l(1) ak\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} i_{l+1} \left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} \right). \quad (7.19)$$

Αν το k^2 είναι ιδιοτιμή Dirichlet για το (7.1) και η y_l είναι η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση για κάποιο $l \in \mathbb{N}$, τότε $y_l(1) = 0$ και επομένως $d_l(\lambda) \neq 0$ για όλα τα $\lambda > 0$. Υποθέτοντας ότι το k^2 δεν αποτελεί ιδιοτιμή Dirichlet, τότε το λ θα είναι μια θετική ιδιοτιμή για το τροποποιημένο πρόβλημα διαπερατότητας αν και μόνο αν:

$$k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} \frac{i_{l+1} \left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} \right)}{i_l \left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} \right)} = -l + \frac{1}{a} - \frac{y'_l(1)}{ay_l(1)}. \quad (7.20)$$

Σημειώνουμε πως το δεξί μέλος της πιο πάνω εξίσωσης είναι ανεξάρτητο του λ , άρα είναι μια σταθερά για κάθε l . Για να εξετάσουμε τις ιδιότητες του πηλίκου που εμφανίζεται στο αριστερό μέλος, χρησιμοποιούμε το ακόλουθο Λήμμα:

7. Το ευθύ και το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για την ειδική περίπτωση ενός σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης

Λήμμα 7.1.5 Η συνάρτηση $\sqrt{x}I_{\nu+1}(\sqrt{x})/I_{\nu}(\sqrt{x})$ είναι αύξουσα και θετική για $x > 0$ και $\nu > -1$, όπου με I_{ν} συμβολίζουμε την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Mittag-Leffler [40, εξ. 7.9.3] και τη σχέση $J_{\nu}(ix) = i^{\nu}I_{\nu}(x)$, παίρνουμε την ακόλουθη αναπαράσταση για συναρτήσεις Bessel σε μορφή σειράς [5]:

$$\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_{\nu}(x)} = \sum_{n \geq 1} \frac{2x}{x^2 + \gamma_{\nu,n}^2},$$

όπου με $\gamma_{\nu,n}$ συμβολίζουμε την ακολουθία ριζών της $J_{\nu}(z)/z^{\nu}$. Ως αποτέλεσμα, έχουμε ότι:

$$\sqrt{x} \frac{I_{\nu+1}(\sqrt{x})}{I_{\nu}(\sqrt{x})} = \sqrt{x} \sum_{n \geq 1} \frac{2\sqrt{x}}{x + \gamma_{\nu,n}^2}.$$

Αυτή η συνάρτηση είναι θετική για $x > 0$ και παραγωγίζοντας ως προς x συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x} \frac{I_{\nu+1}(\sqrt{x})}{I_{\nu}(\sqrt{x})} \right) &= \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x} \sum_{n \geq 1} \frac{2\sqrt{x}}{x + \gamma_{\nu,n}^2} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{d}{dx} \left(\frac{2x}{x + \gamma_{\nu,n}^2} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{2\gamma_{\nu,n}^2}{(x + \gamma_{\nu,n}^2)^2} > 0 \end{aligned}$$

για κάθε $x > 0$. Ως αποτέλεσμα, η συνάρτηση $\sqrt{x}I_{\nu+1}(\sqrt{x})/I_{\nu}(\sqrt{x})$ είναι αύξουσα για όλα τα $x > 0$ και $\nu > -1$. ■

Ως συνέπεια του πιο πάνω Λήμματος και θέτοντας $\nu=1/2 + l$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\sqrt{x}i_{l+1}(\sqrt{x})/i_l(\sqrt{x})$ είναι επίσης θετική και αύξουσα. Αυτό υποδηλώνει ότι το αριστερό μέλος της εξίσωσης (7.20) είναι μια θετική και αύξουσα συνάρτηση του $\lambda > 0$, για όλα τα $l \geq 0$.

Ακολούθως, δείχνουμε ότι υπάρχουν το πολύ πεπερασμένες θετικές ιδιοτιμές για το τροποποιημένο πρόβλημα διαπερατότητας, δεδομένου ότι ικανοποιείται η Υπόθεση 7.1.1.

Θεώρημα 7.1.6 Υποθέτουμε ότι ο δείκτης διάθλασης $\eta(r)$ είναι μια $C^1[0, 1]$ συνάρτηση με $\Re(\eta) > 0$, $\Im(\eta) = 0$, ο κυματάρθρωτος $k^2 > 0$ είναι σταθεροποιημένος και ότι τα a και η_0 αποτελούν θετικές σταθερές. Τότε, υπάρχουν το πολύ πεπερασμένες θετικές τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας για το (7.1)-(7.4) στη μοναδιαία μπάλα $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$.

Απόδειξη. Επειδή το αριστερό μέλος των χαρακτηριστικών εξισώσεων (7.20) είναι μια θετική, αύξουσα συνάρτηση του $\lambda > 0$ για όλα τα $l \geq 0$, θα υπάρχει το πολύ μια θετική ιδιοτιμή για κάθε l . Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο των θετικών ιδιοτιμών είναι πεπερασμένο, αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει ένα $l_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $l \geq l_0$, το δεξί μέλος της (7.20) να είναι αρνητικό.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τις ιδιότητες του πηλίκου $y'_l(1)/y_l(1)$, για μεγάλες τιμές του l . Για το σκοπό αυτό, αναπαριστούμε την συνάρτηση $y_l(r)$ ως ακολούθως [13, 31]:

$$\frac{y_l(r)}{r} = j_l(kr) + \int_0^r G(r, s, k) j_l(ks) ds, \quad (7.21)$$

7.1. Ὑπαρξη των ιδιοτιμών του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας για το σφαιρικά συμμετρικό χωρίο

όπου ο πυρήνας $G(r, s, k)$ ικανοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα Goursat για $0 < s \leq r < 1$

$$r^2 \left[\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + k^2 \eta(r) G \right] = s^2 \left[\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial G}{\partial s} + k^2 G \right],$$

$$G(r, r, k) = \frac{k^2}{2r} \int_0^r tm(t) dt,$$

$$G(r, s, k) = O((rs)^{1/2}).$$

Η ολοκληρωτική αναπαράσταση (7.21) είναι καλά ορισμένη, αφού $\eta(r) \in C^1[0, 1]$. Η παραγώγιση της (7.21) ως προς r δίνει:

$$\begin{aligned} (y_l(r))' &= j_l(kr) + \int_0^r G(r, s, k) j_l(ks) ds + r(j_l(kr))' + r j_l(kr) G(r, r, k) \\ &\quad + r \int_0^r \frac{\partial}{\partial r} (G(r, s, k)) j_l(ks) ds. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel ικανοποιούν την ακόλουθη ασυμπτωτική φόρμουλα [29, σελ. 30]:

$$j_l(r) = \frac{r^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right) \right), \quad l \rightarrow \infty \quad (7.23)$$

ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{R} . Εφαρμόζοντας την πιο πάνω εκτίμηση στην (7.16), συμπεραίνουμε ότι:

$$(j_l(r))' = \left(\frac{l r^{l-1}}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} - \frac{r^{l+1}}{1 \cdot 3 \cdots (2l+3)} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right) \right), \quad l \rightarrow \infty.$$

Χρησιμοποιώντας την φόρμουλα (7.23), είναι δυνατό να πάρουμε ασυμπτωτικές εκφράσεις για τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στις (7.21) και (7.22). Αφού η G είναι συνεχώς διαφορίσιμη, μπορεί να εφαρμοστεί η ασυμπτωτική μέθοδος Laplace για ολοκληρώματα [38, σελ. 36], που μας δίνει ότι:

$$\int_0^1 G(1, s, k) j_l(ks) ds = \frac{k^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} O\left(\frac{1}{l}\right)$$

και

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} G(r, s, k) \Big|_{r=1} j_l(ks) ds = \frac{k^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} O\left(\frac{1}{l}\right).$$

Ακολούθως, αντικαθιστώντας τις ασυμπτωτικές εκτιμήσεις στις εξισώσεις (7.21) και (7.22) προκύπτει ότι:

$$y_l(1) = \frac{k^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right) \right)$$

και

$$\begin{aligned} y_l'(1) &= \left(\frac{k^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} + \frac{l k^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} - \frac{k^{l+2}}{1 \cdot 3 \cdots (2l+3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} G(1, 1, k) \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right) \right). \end{aligned}$$

7. Το ευθύ και το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για την ειδική περίπτωση ενός σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης

Πρώτα, υποθέτουμε ότι το k^2 δεν είναι ιδιοτιμή Dirichlet για το (7.1) και επομένως, $y_l(1) \neq 0$ για όλα τα l . Επομένως, το πηλίκο $y'_l(1)/y_l(1)$ είναι καλά ορισμένο και διαθέτει την ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά ως προς l :

$$\frac{y'_l(1)}{y_l(1)} = \left(1 + l - \frac{k^2}{2l+3} + G(1, 1, k)\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right)\right), \quad l \rightarrow \infty. \quad (7.24)$$

Η πιο πάνω εκτίμηση υποδηλώνει ότι το δεξί μέλος στην εξίσωση (7.20) τείνει στο $-\infty$ για $l \rightarrow \infty$ και επομένως, θα υπάρχει ένα $l_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $l \geq l_0$ δεν υπάρχουν άλλες θετικές ιδιοτιμές για το τροποποιημένο πρόβλημα ιδιοτιμών διαπερατότητας. Στην ειδική περίπτωση όπου το k^2 τυγχάνει να είναι ιδιοτιμή Dirichlet για την (7.1), υπάρχουν το πολύ πεπερασμένες τάξεις l για τις οποίες $y_l(1) = 0$. Ως αποτέλεσμα, για αρκετά μεγάλο l , το πηλίκο $y'_l(1)/y_l(1)$ είναι επίσης καλά ορισμένο και η (7.24) ισχύει. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Τέλος, εξετάζουμε την περίπτωση όπου δεν υπάρχει ανομοιογένεια, δηλαδή $\eta(r) \equiv 1$. Στο κλασικό πρόβλημα ιδιοτιμών διαπερατότητας αυτό υποδηλώνει ότι η αντίστοιχες χαρακτηριστικές συναρτήσεις είναι ταυτοτικά μηδενικές για όλα τα $k \in \mathbb{C}$, που είναι μια εκφυλισμένη περίπτωση. Όταν $\eta(r) \equiv 1$, το τροποποιημένο πρόβλημα (7.1)-(7.4) είναι καλά ορισμένο και η ιδιοσυνάρτηση w_l μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$w_l(r, \theta) = b_l j_l(kr) P_l(\cos\theta).$$

Επομένως η ορίζουσα (7.7) παίρνει τη μορφή

$$d_l(\lambda) = j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) \left(j_l(k) l(a+1) - k j_{l+1}(k) \right) - a k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) j_l(k),$$

που δεν είναι ταυτοτικά μηδενική. Ως αποτέλεσμα, υπάρχουν άπειρες και διακριτές ιδιοτιμές, ακόμη και στην περίπτωση όπου $\eta(r) \equiv 1$.

7.2. Μοναδικότητα για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για τις ιδιοτιμές του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας. Στην ειδική περίπτωση όπου $\eta(x) = \eta(r)$ είναι ένας σφαιρικά συμμετρικός δείκτης διάθλασης, εξετάζουμε κατά πόσο η γνώση του φάσματος για το πρόβλημα (7.1)-(7.4) είναι αρκετή για να καθορίσει με μοναδικό τρόπο τον άγνωστο δείκτη διάθλασης. Αυτό το πρόβλημα μοναδικότητας μπορεί να διασπαστεί σε δύο μέρη. Πρώτα, εξετάζουμε πως συνδέεται το φάσμα με τα δεδομένα Cauchy των ιδιοσυναρτήσεων στο σύνορο. Μετέπειτα, μελετάμε πως αυτά τα δεδομένα Cauchy μπορούν να αξιοποιηθούν για την μοναδική ανάκτηση του δείκτη διάθλασης.

7.2.1. Ένα αποτέλεσμα μοναδικότητας για συνοριακά δεδομένα Cauchy

Στην ακόλουθη ανάλυση απαιτούμε μια ασθενέστερη συνθήκη για τον δείκτη διάθλασης $\eta(r)$, συγκρίνοντας με την Υπόθεση 7.1.1. Από τα συμπεράσματα του τέταρτου κεφαλαίου, ακόμη και για την περίπτωση L^∞ δεικτών διάθλασης σε γενικά χωρία εξασφαλίζεται η ύπαρξη ενός απείρου, διακριτού και πραγματικού φάσματος.

Υπόθεση 7.2.1 Υποθέτουμε ότι $\eta \in C[0, 1]$ και $\Re(\eta) > 0$, $\Im(\eta) = 0$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\{d_l(\lambda)\}_{l=0}^{\infty}$, που είναι μια αναλυτική οικογένεια στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τον άξονα των θετικών αριθμών:

$$d_l(\lambda) = j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) \left(y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) \right) - ak \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) y_l(1), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Επιπρόσθετα, ορίζουμε μια άλλη οικογένεια βοηθητικών συναρτήσεων, που διαθέτουν τις ίδιες μη μηδενικές ρίζες με τις $d_l(\lambda)$:

$$f_l(\lambda) := \left(\sqrt{\lambda} \right)^l d_l(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Η εισαγωγή αυτών των βοηθητικών συναρτήσεων γίνεται να εξασφαλιστεί η αναλυτικότητα και στον άξονα των θετικών αριθμών, όπως φαίνεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Λήμμα 7.2.2 Οι $\{f_l(\lambda)\}_{l=0}^{\infty}$ είναι ακέραιες συναρτήσεις του λ .

Απόδειξη. Έστω ότι $l = 0, 1, 2, \dots$, θέτουμε $c := k \sqrt{\frac{\eta_0}{-a}}$ και θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f_l^{(1)}(\lambda) := \left(\sqrt{\lambda} \right)^l j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) = \left(\sqrt{\lambda} \right)^l j_l \left(c \sqrt{\lambda} \right)$$

και

$$f_l^{(2)}(\lambda) := \left(\sqrt{\lambda} \right)^l \sqrt{\lambda} j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) = \left(\sqrt{\lambda} \right)^l \sqrt{\lambda} j_{l+1} \left(c \sqrt{\lambda} \right).$$

Τότε, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f_l^{(1)}(\lambda) &= \left(\sqrt{\lambda} \right)^l j_l \left(c \sqrt{\lambda} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sqrt{\lambda} \right)^l \frac{(-1)^p \left(c \sqrt{\lambda} \right)^{l+2p}}{2^p p! \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2l + 2p + 1)} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p c^{l+2p} \lambda^{l+p}}{2^p p! \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2l + 2p + 1)}, \end{aligned} \quad (7.25)$$

που αποτελεί δυναμοσειρά η οποία συγκλίνει για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Επομένως οι $f_l^{(1)}$ είναι διαφορίσιμες και άρα, ακέραιες συναρτήσεις για $l = 0, 1, 2, \dots$. Τα ίδια επιχειρήματα μπορούν να αξιοποιηθούν και για τις $f_l^{(2)}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} f_l^{(2)}(\lambda) &= \left(\sqrt{\lambda} \right)^l \sqrt{\lambda} j_{l+1} \left(c \sqrt{\lambda} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sqrt{\lambda} \right)^l \sqrt{\lambda} \frac{(-1)^p \left(c \sqrt{\lambda} \right)^{l+2p+1}}{2^p p! \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2l + 2p + 1) \cdot (2l + 2p + 3)} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p c^{l+2p+1} \lambda^{l+p+1}}{2^p p! \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2l + 2p + 1) \cdot (2l + 2p + 3)}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

7. Το ευθύ και το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για την ειδική περίπτωση ενός σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης

που είναι επίσης μια δυναμοσειρά η οποία συγχλίνει για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Επομένως, οι $f_l^{(2)}$ είναι και αυτές ακέραιες για $l = 0, 1, 2, \dots$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη, αφού οι f_l αποτελούν το άθροισμα δυο ακέραιων συναρτήσεων. ■

Ακολουθώντας, υπολογίζουμε την τάξη αύξησης για την οικογένεια των ακέραιων συναρτήσεων $\{f_l\}_{l=0}^{\infty}$. Επειδή οι j_l είναι ακέραιες συναρτήσεις εκθετικού τύπου, θα έχουν την ασυμπτωτική συμπεριφορά $|j_l(\lambda)| \leq M_1 e^{\tau_1 |\lambda|}$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, όπου $M_1 = M_{1,l}$ και $\tau_1 = \tau_{1,l}$ είναι θετικές σταθερές. Επομένως ισχύει η ακόλουθη ανισότητα

$$|j_l(c\sqrt{\lambda})| \leq M_1 e^{c|\tau_1|\lambda^{\frac{1}{2}}}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (7.27)$$

Επιπρόσθετα, αφού τα λ^l είναι πολυώνυμα, έχουν μηδενική τάξη αύξησης. Αυτό σημαίνει ότι για $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$, έχουμε ότι $|\lambda^l| = |\lambda|^l \leq M_2 e^{\tau_2 |\lambda|^\epsilon}$, για $|\lambda| \rightarrow \infty$, όπου $M_2 = M_{2,l}$ και $\tau_2 = \tau_{2,l}$ είναι επίσης θετικές σταθερές. Επομένως, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\left|(\sqrt{\lambda})^l\right| = \sqrt{|\lambda|^l} \leq |\lambda|^l \leq M_2 e^{\tau_2 |\lambda|^\epsilon}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (7.28)$$

Θέτοντας $\tau = \max\{c|\tau_1, \tau_2\}$, έχουμε την εκτίμηση:

$$\begin{aligned} |f_l^{(1)}(\lambda)| &\leq \left|(\sqrt{\lambda})^l\right| |j_l(c\sqrt{\lambda})| \\ &\leq M_1 M_2 e^{\tau(|\lambda|^{\frac{1}{2}} + |\lambda|^\epsilon)} \\ &\leq M_1 M_2 e^{2\tau |\lambda|^{\frac{1}{2}}}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Ως αποτέλεσμα, η τάξη αύξησης για τις ακέραιες συναρτήσεις $f_l^{(1)}$ είναι $\rho_l^{(1)} \leq \frac{1}{2}$, για κάθε $l \in \mathbb{N}_0$. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εκτιμήσουμε την τάξη αύξησης και για τις ακέραιες συναρτήσεις $\{f_l^{(2)}\}_{l=0}^{\infty}$. Χρησιμοποιώντας τις (7.27) και (7.28) για $l+1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f_l^{(2)}(\lambda)| &\leq \left|(\sqrt{\lambda})^{l+1}\right| |j_{l+1}(c\sqrt{\lambda})| \\ &\leq |\lambda|^{l+1} |j_{l+1}(c\sqrt{\lambda})| \\ &\leq M_3 e^{\tau_3 |\lambda|^\epsilon} M_4 e^{c|\tau_4|\lambda^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq M_3 M_4 e^{2\tilde{\tau} |\lambda|^{\frac{1}{2}}}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (7.30)$$

όπου οι M_3, M_4, τ_3 και τ_4 είναι θετικές σταθερές, με $\tilde{\tau} := \max\{c|\tau_3, \tau_4\}$. Επομένως, η τάξη αύξησης για τις ακέραιες συναρτήσεις $f_l^{(2)}$ είναι $\rho_l^{(2)} \leq \frac{1}{2}$, για κάθε $l \in \mathbb{N}_0$. Συνεπώς, η τάξη αύξησης για τις $\{f_l\}_{l=0}^{\infty}$ είναι $\rho_l \leq \frac{1}{2}$.

Επιπρόσθετα, ορίζουμε ως $\{\tilde{\lambda}_{n,l}\}_{n=1}^{\infty}$ την ακολουθία των μη μηδενικών ιδιοτιμών για το τροποποιημένο πρόβλημα διαπερατότητας, λαμβάνοντας υπόψη και τις αλγεβρικές τους πολλαπλότητες ως ρίζες των $d_l(\lambda)$. Αυτός ο ορισμός μπορεί να επεκταθεί για να συμπεριλαμβάνει και το $\lambda = 0$ στην ακολουθία, στην ειδική περίπτωση όπου υπάρχει κάποιο $l \in \mathcal{L}$. Αυτό επιτυγχάνεται ορίζοντας ως $\{\lambda_{n,l}\}_{n=1}^{\infty}$ την ακολουθία των τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας (συμπεριλαμβάνοντας τη μηδενική ιδιοτιμή εάν $l \in \mathcal{L}$), με την πιο πάνω θεώρηση περί πολλαπλοτήτων, για κάθε $l = 0, 1, 2, \dots$

7.2. Μοναδικότητα για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα

Ακολουθώντας, υποθέτουμε πως η ακολουθία $\{\lambda_{n,l}\}_{n=1}^{\infty}$ είναι γνωστή και εφαρμόζουμε το θεώρημα παραγοντοποίησης του Hadamard [76, σελ. 147] στις ακέρατες συναρτήσεις $f_l(\lambda)$:

$$f_l(\lambda) = e^{P_l(\lambda)} \lambda^{m_l} \prod_{n=1}^{\infty} E_{k_0} \left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_{n,l}} \right), \quad (7.31)$$

όπου με $P_l(\lambda)$ συμβολίζουμε ένα πολυώνυμο βαθμού $k_0 = 0$ (αφού $k_0 \leq \rho_l \leq k_0 + 1$), m_l είναι η τάξη του μηδενός ως ρίζα της $f_l(\lambda)$ και E_{k_0} είναι τα κανονικά γινόμενα. Επιπρόσθετα, αξιοποιώντας τις (7.25)-(7.26), συμπεραίνουμε ότι οι $f_l(\lambda)$ αποτελούν δυναμοσειρές που ξεκινούν από τον όρο λ^l , με αντίστοιχο συντελεστή

$$c_l = \left(k \sqrt{\frac{\eta_0}{-a}} \right)^l \frac{y_l(1)(al - 1) + y_l'(1)}{1 \cdot 3 \cdots (2l + 1)}.$$

Πρώτα, εξετάζουμε την περίπτωση όπου $c_l \neq 0$, ή ισοδύναμα $y_l(1)(al - 1) + y_l'(1) \neq 0$. Δηλαδή ισχύει ότι $l \notin \mathcal{L}$, άρα έχουμε $m_l = l$ και οι συναρτήσεις f_l θα έχουν τις αναπαραστάσεις

$$f_l(\lambda) = c_l \lambda^l \prod_{n=1}^{\infty} E_{k_0} \left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_{n,l}} \right).$$

Παρατηρούμε ότι τα $f_l(\lambda)/c_l$ μπορούν να καθοριστούν με μοναδικό τρόπο από τη γνώση της ακολουθίας $\{\tilde{\lambda}_{n,l}\}_{n=1}^{\infty}$.

Ακολουθώντας, θα προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την πληροφορία έτσι ώστε να ανακτήσουμε τα συνοριακά δεδομένα Cauchy για τις ιδιοσυναρτήσεις y_l . Επιλέγουμε $\Lambda_l^{(1)}, \Lambda_l^{(2)} \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $j_l \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(1)} \eta_0}{-a}} \right) = 0$ και $j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(2)} \eta_0}{-a}} \right) = 0$. Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel προκύπτει ότι $j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(1)} \eta_0}{-a}} \right) \neq 0$ και $j_l \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(2)} \eta_0}{-a}} \right) \neq 0$. Επομένως, έχουμε ένα 2×2 σύστημα εξισώσεων για τα $y_l(1)$ και $y_l'(1)$:

$$y_l(1) = \frac{d_l \left(\Lambda_l^{(1)} \right)}{-ak \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(1)} \eta_0}{-a}} j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(1)} \eta_0}{-a}} \right)} \quad (7.32)$$

και

$$y_l(1)(al - 1) + y_l'(1) = \frac{d_l \left(\Lambda_l^{(2)} \right)}{j_l \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(2)} \eta_0}{-a}} \right)}. \quad (7.33)$$

Αυτό το σύστημα διαθέτει μοναδική λύση, αφού η αντίστοιχη ορίζουσα είναι μη μηδενική:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (al - 1) & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Από την (7.33) έχουμε ότι:

$$y_l'(1) = \frac{d_l \left(\Lambda_l^{(2)} \right)}{j_l \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(2)} \eta_0}{-a}} \right)} - (al - 1)y_l(1). \quad (7.34)$$

Από το σημείο αυτό και έπειτα, κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση για το k^2 :

7. Το ευθύ και το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για την ειδική περίπτωση ενός σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης

Υπόθεση 7.2.3 Ο κυματάριθος $k^2 > 0$ δεν είναι ιδιοτιμή Dirichlet που να αντιστοιχεί στο δείκτη διάθλασης $\eta(r)$.

Η πιο πάνω συνθήκη εξασφαλίζει ότι $y_l(1) \neq 0$, $l \in \mathbb{N}_0$. Επομένως, μπορούμε να διαιρέσουμε τη (7.34) με τη (7.32), που μας δίνει

$$\frac{y'_l(1)}{y_l(1)} = \frac{d_l(\Lambda_l^{(2)}) \left(-ak\sqrt{\frac{\Lambda_l^{(1)}\eta_0}{-a}} j_{l+1} \left(k\sqrt{\frac{\Lambda_l^{(1)}\eta_0}{-a}} \right) \right)}{d_l(\Lambda_l^{(1)}) j_l \left(k\sqrt{\frac{\Lambda_l^{(2)}\eta_0}{-a}} \right)} - (al - 1). \quad (7.35)$$

Αφού

$$\frac{d_l(\Lambda_l^{(2)})}{d_l(\Lambda_l^{(1)})} = \frac{\left(\sqrt{\Lambda_l^{(1)}} \right)^l f_l(\Lambda_l^{(2)})}{\left(\sqrt{\Lambda_l^{(2)}} \right)^l f_l(\Lambda_l^{(1)})} = \frac{\left(\sqrt{\Lambda_l^{(2)}} \right)^l \prod_{n=1}^{\infty} E_k \left(\frac{\Lambda_l^{(2)}}{\lambda_{n,l}} \right)}{\left(\sqrt{\Lambda_l^{(1)}} \right)^l \prod_{n=1}^{\infty} E_k \left(\frac{\Lambda_l^{(1)}}{\lambda_{n,l}} \right)},$$

όλοι οι όροι στη (7.35) είναι γνωστοί. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι τα πηλίκα $y'_l(1)/y_l(1)$ μπορούν να καθοριστούν με μοναδικό τρόπο από την ακολουθία $\{\tilde{\lambda}_{n,l}\}_{n=1}^{\infty}$, στην περίπτωση όπου $y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) \neq 0$.

Τώρα θα εξετάσουμε την απλούστερη περίπτωση για την οποία $l \in \mathcal{L}$. Με άλλα λόγια, ικανοποιείται η συνθήκη $y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) = 0$ και όπως είδαμε προηγουμένως, αυτό ισοδυναμεί με το ότι το $\lambda = 0$ αποτελεί ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης για αυτή την επιλογή του δείκτη l , δηλαδή $\hat{d}_l(0) = 0$. Αυτό μπορεί επίσης να μεταφραστεί ως το $\lambda = 0$ είναι μια ιδιοτιμή για το τροποποιημένο πρόβλημα διαπερατότητας, που αντιστοιχεί σε αυτή την τάξη l . Από το τρίτο κεφάλαιο μπορούμε να δούμε ότι ο ιδιόχωρος της $\lambda = 0$, εάν πράγματι πρόκειται για ιδιοτιμή, οφείλει να είναι πεπερασμένης διάστασης. Επομένως, το \mathcal{L} μπορεί να έχει το πολύ πεπερασμένα στοιχεία. Για $l \in \mathcal{L}$, το πηλίκο $y'_l(1)/y_l(1)$ μπορεί να καθοριστεί μοναδικά από τη

$$\frac{y'_l(1)}{y_l(1)} = 1 - al.$$

Συνοψίζουμε τα πιο πάνω σε ένα αποτέλεσμα μοναδικότητας για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα, εάν ικανοποιούνται οι Υποθέσεις 7.2.1 και 7.2.3.

Θεώρημα 7.2.4 Υποθέτουμε ότι οι $\eta_1, \eta_2 \in C[0, 1]$ είναι δυο διαφορετικοί δείκτες διάθλασης, που να ικανοποιούν το πρόβλημα (7.1)-(7.4) για την ίδια επιλογή θετικών σταθερών a και η_0 . Υποθέτουμε επίσης ότι το k^2 δεν είναι ιδιοτιμή Dirichlet για τους η_1, η_2 και ότι το αντίστοιχο φάσμα ταυτίζεται με την έννοια ότι $\{\lambda_{n,l}(\eta_1)\}_{n=1}^{\infty} = \{\lambda_{n,l}(\eta_2)\}_{n=1}^{\infty}$ για κάθε $l = 0, 1, 2, \dots$. Τότε έχουμε ότι

$$\frac{y'_l(1; \eta_1)}{y_l(1; \eta_1)} = \frac{y'_l(1; \eta_2)}{y_l(1; \eta_2)},$$

για κάθε $l \in \mathbb{N}_0$. Δηλαδή, τα πηλίκα $y'_l(1)/y_l(1)$ μπορούν να καθοριστούν με μοναδικό τρόπο από τη γνώση του φάσματος για το τροποποιημένο πρόβλημα διαπερατότητας.

7.2.2. Ένα αποτέλεσμα μοναδικότητας για συνοριακά δεδομένα Cauchy με λιγότερες απαιτήσεις γνώσεως του φάσματος

Στην προηγούμενη ανάλυση, αξιοποιήσαμε τη μιγαδική θεωρία για ακέραιες συναρτήσεις, το θεώρημα παραγοντοποίησης του Hadamard και υποθέσαμε ολική γνώση του φάσματος, με την έννοια ότι $\{\lambda_{n,l}(\eta_1)\}_{n=1}^{\infty} = \{\lambda_{n,l}(\eta_2)\}_{n=1}^{\infty}$ για όλα τα $l = 0, 1, 2, \dots$. Θα παρουσιάσουμε τώρα μια απλούστερη μέθοδο για να πάρουμε ένα αποτέλεσμα μοναδικότητας, απαιτώντας λιγότερη γνώση για το φάσμα του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας.

Οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\{d_l(\lambda)\}_{l=0}^{\infty}$ αποτελούν μια αναλυτική οικογένεια στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από το θετικό άξονα:

$$d_l(\lambda) = j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) \left(y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) \right) - ak \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) y_l(1), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Πρώτα, εξετάζουμε την περίπτωση όπου $y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) \neq 0$, δηλαδή $l \notin \mathcal{L}$. Έστω ότι το λ_l είναι μια ρίζα για τη χαρακτηριστική εξίσωση, $d_l(\lambda_l) = 0$. Τότε έχουμε

$$0 = j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) \left(y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) \right) - ak \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) y_l(1). \quad (7.36)$$

Για να προχωρήσουμε, θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Λήμμα 7.2.5 Αν $l \notin \mathcal{L}$, τότε $j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) \neq 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς εις άτοπο ότι $j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) = 0$. Τότε, από τη (7.36), έχουμε ότι $j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) = 0$. Επομένως, $j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) = j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) = 0$, που είναι άτοπο αφού δυο διαδοχικές σφαιρικές συναρτήσεις Bessel δεν διαθέτουν κοινές μη μηδενικές ρίζες. ■

Από το πιο πάνω Λήμμα έχουμε ότι ο όρος $j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) \neq 0$. Επομένως, μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε για να διαιρέσουμε την έκφραση (7.36) και να πάρουμε

$$0 = y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) - ak \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \frac{j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right)}{j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right)} y_l(1).$$

Επομένως, από την Υπόθεση (7.2.3) μπορούμε να λύσουμε ως προς το πηλίκο δεδομένων Cauchy:

$$\frac{y'_l(1)}{y_l(1)} = ak \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \frac{j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right)}{j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right)} + 1 - al. \quad (7.37)$$

Πόρισμα 7.2.6 Εάν $l \notin \mathcal{L}$, η γνώση μόνο μιας ιδιοτιμής που αντιστοιχεί στη χαρακτηριστική συνάρτηση d_l είναι αρκετή για να καθοριστεί μοναδικά το πηλίκο $y'_l(1)/y_l(1)$.

7. Το ευθύ και το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για την ειδική περίπτωση ενός σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης

Στην απλούστερη περίπτωση για $l \in \mathcal{L}$, γνωρίζουμε ήδη ότι το πηλίκο $y'_l(1)/y_l(1)$ μπορεί να καθοριστεί μοναδικά από την

$$\frac{y'_l(1)}{y_l(1)} = 1 - al. \quad (7.38)$$

Τα στοιχεία του συνόλου \mathcal{L} μπορούν επίσης να προσδιοριστούν από την εξής ιδιότητα:

Λήμμα 7.2.7 Υποθέτουμε ότι $\lambda_l \neq 0$. Τότε, $l \in \mathcal{L}$ αν και μόνο αν $j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) = 0$.

Απόδειξη. Αφού η λ_l αποτελεί μια μη μηδενική ιδιοτιμή, θα παράγεται από την χαρακτηριστική συνάρτηση (7.17). Εάν επιπλέον υποθέσουμε ότι $l \in \mathcal{L}$, τότε είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι $j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) = 0$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) = 0$. Τότε $j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) \neq 0$, αφού δυο διαδοχικές σφαιρικές συναρτήσεις Bessel δεν έχουν μη μηδενικές ρίζες που να ταυτίζονται. Από την (7.17), έχουμε ότι $j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) (y_l(1)(al - 1) + y'_l(1)) = 0$. Άρα $y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) = 0$, που ισοδυναμεί με το ότι $l \in \mathcal{L}$. ■

Συνοψίζουμε τα πιο πάνω σε ένα αποτέλεσμα μοναδικότητας για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα, εάν οι Υποθέσεις 7.2.1 και 7.2.3 ικανοποιούνται.

Θεώρημα 7.2.8 Υποθέτουμε ότι οι $\eta_1, \eta_2 \in C[0, 1]$ είναι δυο διαφορετικοί δείκτες διάθλασης που να ικανοποιούν το (7.1)-(7.4) για την ίδια επιλογή θετικών σταθερών a και η_0 . Επίσης, υποθέτουμε ότι το k^2 δεν είναι ιδιοτιμή Dirichlet για τους η_1, η_2 και ότι για κάθε $l \in \mathbb{N}_0$, οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις $d_l(\lambda; \eta_1)$ και $d_l(\lambda; \eta_2)$ έχουν μια κοινή ρίζα. Τότε έχουμε ότι

$$\frac{y'_l(1; \eta_1)}{y_l(1; \eta_1)} = \frac{y'_l(1; \eta_2)}{y_l(1; \eta_2)},$$

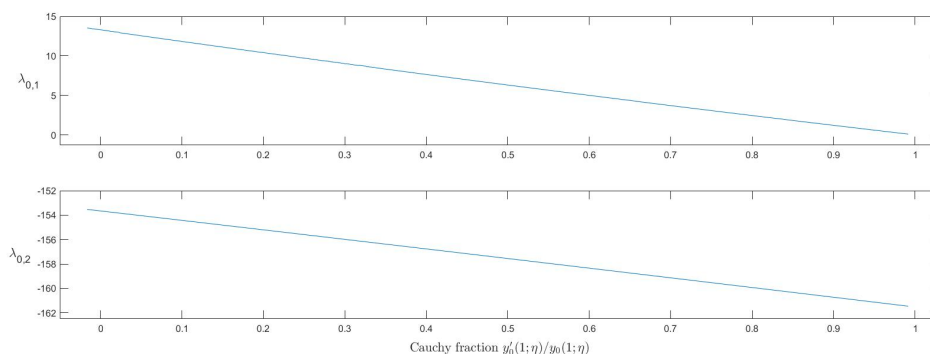
για κάθε $l \in \mathbb{N}_0$. Με άλλα λόγια, για κάθε δείκτη l , το πηλίκο $y'_l(1)/y_l(1)$ μπορεί να καθοριστεί με μοναδικό τρόπο από μόνο μια ιδιοτιμή του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας.

Απόδειξη. Έστω ότι $\lambda_l = \lambda_l(\eta_1) = \lambda_l(\eta_2)$ είναι η κοινή ρίζα των χαρακτηριστικών συναρτήσεων $d_l(\lambda; \eta_1)$ και $d_l(\lambda; \eta_2)$, για κάθε $l \in \mathbb{N}_0$. Τότε από το Λήμμα 7.2.7 συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{L}(\eta_1) = \mathcal{L}(\eta_2) = \mathcal{L}$. Επομένως, το πηλίκο συνοριακών δεδομένων Cauchy δίνεται από την (7.37) στην περίπτωση όπου $l \notin \mathcal{L}$ και από την (7.38) στην περίπτωση $l \in \mathcal{L}$. ■

Παρατήρηση 7.2.9 Οι ρίζες της χαρακτηριστικής συνάρτησης $d_l(\lambda; \eta)$ ορίζουν μια φασματική υπακολουθία για κάθε τάξη $l = 0, 1, 2, \dots$, η οποία μπορεί να διαταχθεί ως $\{\lambda_{l,j}\}_{j=1}^{\infty}$, σύμφωνα και με τη συζήτηση που έχει γίνει για το ευθύ φασματικό πρόβλημα. Η γνώση μιας τροποποιημένης ιδιοτιμής διαπερατότητας, ανεξαρτήτως από τη θέση που κατέχει στην υπακολουθία, αρκεί για τον μοναδικό καθορισμό του πηλίκου $y'_l(1)/y_l(1)$.

Θα αναδείξουμε το πιο πάνω αποτέλεσμα μοναδικότητας με κάποια αριθμητικά παραδείγματα. Περιοριζόμαστε στην απλή περίπτωση όπου ο δείκτης διάθλασης είναι

7.2. Μοναδικότητα για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα



Σχήμα 7.1.: Οι πρώτες δυο τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας έναντι των δεδομένων Cauchy στο σύνορο, για δείκτες διάθλασης $\eta \in [0.1, 10]$ και τάξη $l = 0$.

σταθερός, $\eta(r) = \eta > 0$ για $r \in [0, 1]$. Σε αυτή την περίπτωση, η ιδιοσυνάρτηση y_l δίνεται από την $y_l(r) = r j_l(k\sqrt{\eta}r)$ και επομένως, η χαρακτηριστική συνάρτηση (7.7) παίρνει την απλούστερη μορφή

$$d_l(\lambda) := \det \begin{pmatrix} j_l(k\sqrt{\eta}) & -j_l\left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}}\right) \\ \left.\frac{d}{dr}(j_l(k\sqrt{\eta}r))\right|_{r=1} & a\left.\frac{d}{dr}j_l\left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}}r\right)\right|_{r=1} \end{pmatrix} = 0,$$

για $l = 0, 1, 2, \dots$. Δοθέντος του κυματάριθμου k και των μεταύλικών παραμέτρων η_0 και a , χρησιμοποιούμε λογισμικό εύρεσης ριζών για να υπολογίσουμε αναλυτικά τις τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας για κάθε δείκτη η και τάξη l . Υπενθυμίζουμε πως στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε ένα παρόμοιο παράδειγμα στον \mathbb{R}^2 .

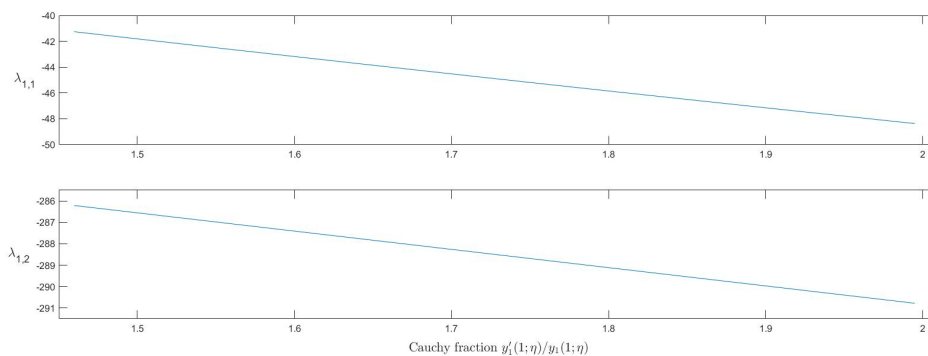
Για τις τρεις πρώτες τάξεις $l = 0, 1, 2$ θεωρούμε κάθε ιδιοτιμή ως μια συνάρτηση του δείκτη διάθλασης, δηλαδή $\lambda_{l,j} = \lambda_{l,j}(\eta)$. Υπολογίζουμε τις πρώτες δύο ιδιοτιμές $\lambda_{l,1}$ και $\lambda_{l,2}$, για $\eta \in [0.1, 10]$ με βήμα 0.01 και σταθεροποιημένα $k = 0.5$, $a = 2$, $\eta_0 = 1$. Από την άλλη, για αυτή την επιλογή τάξεων l και του κυματάριθμου k , υπολογίζουμε τα πηλίκια Cauchy στο σύνορο $y'_l(1; \eta)/y_l(1; \eta)$. Σημειώνουμε πως ο κυματάριθμος αρκετά μικρός για να εξασφαλίσουμε ότι δεν αποτελεί ιδιοτιμή Dirichlet, για κάθε $\eta \in [0.1, 10]$. Η σχέση μεταξύ των ιδιοτιμών και των πηλίκων Cauchy φαίνεται στα Σχήματα 7.1, 7.2 και 7.3.

Η σχέση μονοτονίας που παρατηρείται στα σχήματα, εξασφαλίζει ότι η απεικόνιση $y'_l(1; \eta)/y_l(1; \eta) \rightarrow \lambda_{l,j}(\eta)$ για $j = 1, 2$ και $l = 0, 1, 2$ είναι μονοσήμαντη. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι από τους αριθμητικούς πειραματισμούς μας σε αυτές τις απλές περιπτώσεις, όλες οι ιδιοτιμές είναι καλά διαχωρισμένες για κάθε $l = 0, 1, 2, \dots$. Τα πιο πάνω επαληθεύουν το Θεώρημα 7.2.8, για αυτή την επιλογή σταθερών δεικτών διάθλασης.

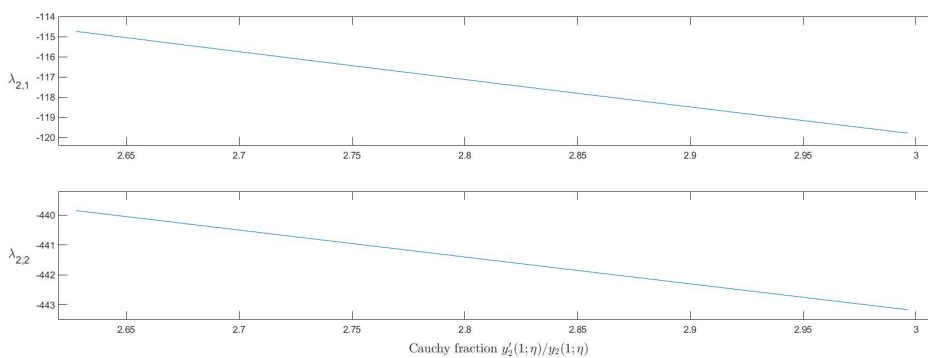
7.2.3. Το θεώρημα μοναδικότητας για τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας

Η εξέταση του αντίστροφου φασματικού προβλήματος στη σφαιρικά συμμετρική περίπτωση θα ολοκληρωθεί, δείχνοντας ότι η γνώση του πηλίκου $y'_l(1)/y_l(1)$ για κάθε

7. Το ευθύ και το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για την ειδική περίπτωση ενός σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης



Σχήμα 7.2.: Οι πρώτες δυο τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας έναντι των δεδομένων Cauchy στο σύνορο, για δείκτες διάθλασης $\eta \in [0.1, 10]$ και τάξη $l = 1$.



Σχήμα 7.3.: Οι πρώτες δυο τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας έναντι των δεδομένων Cauchy στο σύνορο, για δείκτες διάθλασης $\eta \in [0.1, 10]$ και τάξη $l = 2$.

7.2. Μοναδικότητα για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα

$l \geq 0$ αρκεί για να καθορισθεί μοναδικά ο δείκτης διάθλασης. Προς αυτή την κατεύθυνση, υποθέτουμε επίσης ότι ο $\eta(r)$ είναι φραγμένος από μια προκαθορισμένη σταθερά $A > 0$:

Υπόθεση 7.2.10 Υποθέτουμε ότι $\eta \in C[0, 1]$ έτσι ώστε $0 < \Re(\eta) \leq A$, $\Im(\eta) = 0$.

Ξεκινάμε θεωρώντας τα ακόλουθα μη ομογενή προβλήματα Dirichlet:

$$\begin{aligned} \Delta w_1 + k^2 \eta_1(r) w_1 &= 0, & \text{στο } B \\ w_1 &= h(\theta, \phi), & \text{στο } \partial B \end{aligned} \quad (7.39)$$

και

$$\begin{aligned} \Delta w_2 + k^2 \eta_2(r) w_2 &= 0, & \text{στο } B \\ w_2 &= h(\theta, \phi), & \text{στο } \partial B \end{aligned} \quad (7.40)$$

όπου τα $\eta_1(r)$ και $\eta_2(r)$ ικανοποιούν την πιο πάνω υπόθεση. Επιπρόσθετα, επιβάλλουμε έναν περιορισμό στον κυματάριθμο k^2 :

Υπόθεση 7.2.11 Έστω ότι $k^2 \in (0, k_0^2(B)/A)$, όπου με $k_0^2(B)$ ορίζουμε την πρώτη ιδιοτιμή Dirichlet του

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0, & \text{στο } B \\ u &= 0, & \text{στο } \partial B. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $k_0^2(B) = \pi^2$ [51, σελ. 11] και επομένως $k^2 \in (0, \pi^2/A)$.

Λήμμα 7.2.12 Έστω ότι οι δείκτες διάθλασης η_1 , η_2 και ο κυματάριθμος k^2 ικανοποιούν τις Υποθέσεις 7.2.10 και 7.2.11 αντίστοιχα. Τότε, το k^2 δεν είναι ιδιοτιμή για τα (7.39) και (7.40).

Απόδειξη. Ορίζουμε ως $k_0^2(\eta_1; B)$ και $k_0^2(\eta_2; B)$ τις πρώτες ιδιοτιμές Dirichlet των (7.39) και (7.40) αντίστοιχα. Τότε, διαθέτουν τους χαρακτηρισμούς Courant-Fischer:

$$k_0^2(\eta_1; B) = \inf_{w \in H_0^1(B), w \neq 0} \frac{\int_B \nabla w \cdot \nabla \bar{w} \, dx}{\int_B \eta_1(r) w \cdot \bar{w} \, dx}$$

και

$$k_0^2(\eta_2; B) = \inf_{w \in H_0^1(B), w \neq 0} \frac{\int_B \nabla w \cdot \nabla \bar{w} \, dx}{\int_B \eta_2(r) w \cdot \bar{w} \, dx}.$$

Επομένως ικανοποιούνται οι ακόλουθες εκτιμήσεις

$$\begin{aligned} \inf_{w \in H_0^1(B), w \neq 0} \frac{\int_B \nabla w \cdot \nabla \bar{w} \, dx}{\int_B \eta_i(r) w \cdot \bar{w} \, dx} &\geq \inf_{w \in H_0^1(B), w \neq 0} \frac{\int_B \nabla w \cdot \nabla \bar{w} \, dx}{A \int_B w \cdot \bar{w} \, dx} \\ &= \frac{1}{A} k_0^2(B), \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Δηλαδή, $k_0^2(\eta_1; B) \geq k_0^2(B)/A$ και $k_0^2(\eta_2; B) \geq k_0^2(B)/A$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

7. Το ευθύ και το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για την ειδική περίπτωση ενός σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης

Συνεπώς, εάν επιλέξουμε $k^2 \in (0, \pi^2/A)$, τότε τα βοηθητικά προβλήματα (7.39) και (7.40) είναι καλά τοποθετημένα. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε τους αντίστοιχους τελεστές Dirichlet-to-Neumann $\mathcal{N}_{\eta_1}, \mathcal{N}_{\eta_2} : H^{1/2}(\partial B) \rightarrow H^{-1/2}(\partial B)$ ως $\mathcal{N}_{\eta_1}, \mathcal{N}_{\eta_2} : h \rightarrow \frac{\partial w_h}{\partial r} \Big|_{r=1}$, όπου οι $w_h(\eta_1)$ και $w_h(\eta_2)$ ικανοποιούν τα (7.39) και (7.40) αντίστοιχα.

Συνεχίσουμε εφαρμόζοντας την τεχνική χωρισμού των μεταβλητών για να πάρουμε αναπαραστάσεις σε μορφή σειρών στον χώρο $H^1(B)$ για τις λύσεις των προβλημάτων Dirichlet (7.39) και (7.40), στην περίπτωση όπου $h \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B)$. Έχουμε ότι

$$w_1(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m \frac{y_l(r; \eta_1)}{r} Y_l^m(\theta, \phi)$$

και

$$w_2(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \beta_l^m \frac{y_l(r; \eta_2)}{r} Y_l^m(\theta, \phi).$$

Επίσης, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη συνοριακή συνάρτηση ως μια σειρά στον $L^2(\partial B)$

$$h(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l h_l^m Y_l^m(\theta, \phi),$$

αφού ο $H^{\frac{1}{2}}(\partial B)$ είναι ένας υπόχωρος του $L^2(\partial B)$. Οι όροι $\{h_l^m\}_{l=0}^{\infty}$ μπορούν να καθοριστούν μοναδικά από την h , αφού οι σφαιρικά αρμονικές συναρτήσεις $\{Y_l^m : l = 0, 1, 2, \dots, -l \leq m \leq l\}$ αποτελούν μια ορθοκανονική βάση για τον $L^2(\partial B)$, [29, σελ. 26]. Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 7.2.13 Υποθέτουμε ότι $\eta_1, \eta_2 \in C[0, 1]$ είναι δυο διαφορετικοί δείκτες διάθλασης, που να ικανοποιούν το (7.1)-(7.4) για την ίδια επιλογή θετικών σταθερών a και η_0 και ότι $0 < \eta_1(r), \eta_2(r) \leq A$. Υποθέτουμε ότι $k^2 \in (0, \pi^2/A)$ και ότι μια τουλάχιστον τροποποιημένη ιδιοτιμή διαπερατότητας για τους η_1 και η_2 αντίστοιχα, ταυτίζεται για κάθε τάξη $l = 0, 1, 2, \dots$. Τότε, θα ταυτίζονται και οι απεικονίσεις Dirichlet-to-Neumann,

$$\mathcal{N}_{\eta_1} = \mathcal{N}_{\eta_2}.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι w_1 και w_2 είναι οι μοναδικές λύσεις για τα ανομοιογενή προβλήματα Dirichlet (7.39) και (7.40), που αντιστοιχούν στους δείκτες διάθλασης η_1 και η_2 . Αφού οι η_1 και η_2 διαθέτουν τουλάχιστον μια κοινή τροποποιημένη ιδιοτιμή διαπερατότητας για κάθε τάξη l , οι υποθέσεις του Θεωρήματος 7.2.8 ικανοποιούνται και επομένως,

$$\frac{y'_l(1; \eta_1)}{y_l(1; \eta_1)} = \frac{y'_l(1; \eta_2)}{y_l(1; \eta_2)} := \gamma_l.$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή ίχνους στα w_1 και w_2 , έχουμε τις αναπαραστάσεις:

$$w_1(1, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m y_l(1; \eta_1) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (7.41)$$

και

$$w_2(1, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \beta_l^m y_l(1; \eta_2) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (7.42)$$

7.2. Μοναδικότητα για το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα

όπου η εναλλαγή του τελεστή ίχνους και της σειράς επιτρέπεται αφού είναι φραγμένος τελεστής από τον $H^1(B)$ στον $H^{\frac{1}{2}}(\partial B)$. Επιπρόσθετα, από τις (7.41), (7.42) και το γεγονός ότι ο $H^{\frac{1}{2}}(\partial B)$ είναι συμπαγώς εμφυτευμένος στον $L^2(\partial B)$, έχουμε ότι $w_2(1, \theta, \phi) = w_1(1, \theta, \phi) = h(\theta, \phi)$. Τέλος, από την ορθογωνιότητα των σφαιρικών αρμονικών $Y_l^m(\theta, \phi)$, παίρνουμε ότι

$$\alpha_l^m y_l(1; \eta_1) = h_l^m = \beta_l^m y_l(1; \eta_2). \quad (7.43)$$

Επίσης εφαρμόζουμε τον τελεστή ίχνους μερικής παραγώγου στις w_1 και w_2 . Με παρόμοιο τρόπο όπως πιο πάνω, μπορούμε να δικαιολογήσουμε την εναλλαγή με τη σειρά. Ως αποτέλεσμα,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial r} \Big|_{r=1} - \frac{\partial w_1}{\partial r} \Big|_{r=1} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [\beta_l^m (y_l'(1; \eta_2) - y_l(1; \eta_2))] Y_l^m(\theta, \phi) \\ &\quad - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [\alpha_l^m (y_l'(1; \eta_1) - y_l(1; \eta_1))] Y_l^m(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (7.44)$$

Εστω ότι $h \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B)$, τότε από τις (7.43) και (7.44) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\eta_2} h - \mathcal{N}_{\eta_1} h &= \frac{\partial w_2}{\partial r} \Big|_{r=1} - \frac{\partial w_1}{\partial r} \Big|_{r=1} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [\beta_l^m y_l(1; \eta_2) - \alpha_l^m y_l(1; \eta_1)] (\gamma_l - 1) Y_l^m(\theta, \phi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Το θεώρημα μοναδικότητας μπορεί τώρα να προκύψει από μια ιδιότητα της απεικόνισης Dirichlet-to-Neumann, που διατυπώνεται από τους Nachmann, Sylvester και Uhlmann στην [69, Θεώρημα 1.6] και την οποία συμπεριλαμβάνουμε εδώ προς διευκόλυνση του αναγνώστη:

Θεώρημα 7.2.14 Έστω ότι $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ και υποθέτουμε ότι το λ_0 δεν αποτελεί ιδιοτιμή Dirichlet για τα q_1 ή q_2 , δηλαδή το

$$\begin{aligned} -\Delta u + q_i u &= \lambda_0 u, \quad \text{στο } \Omega \\ u &= f, \quad \text{στο } \partial\Omega \end{aligned} \quad (7.45)$$

διαθέτει μοναδική λύση για $i = 1, 2$. Θέτουμε $\mu \in \Lambda_{q_i - \lambda_0} : f \rightarrow \frac{\partial u_f}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega}$, $i = 1, 2$ την αντίστοιχη απεικόνιση Dirichlet-to-Neumann. Αν $\Lambda_{q_1 - \lambda_0} = \Lambda_{q_2 - \lambda_0}$, τότε $q_1 = q_2$.

Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει αξιοποιώντας μια αναπαράσταση γεωμετρικής οπτικής για λύσεις της εξίσωσης Schrödinger και το Ολοκληρωτικό Θεώρημα Fourier. Μπορεί να εφαρμοσθεί και στη δική μας περίπτωση, θέτοντας $\Omega := B$, $\lambda_0 := 0$ και $q_i := -k^2 \eta_i$, $i = 1, 2$. Παρατηρούμε πως το $\lambda_0 = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή για το (7.45), αφού οι (7.39) και (7.40) διαθέτουν μοναδικές λύσεις. Επομένως, η $\mathcal{N}_{\eta_1} = \mathcal{N}_{\eta_2}$ υποδηλώνει ότι $\eta_1 = \eta_2$. Είμαστε τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε ένα θεώρημα μοναδικότητας για το αντίστροφο πρόβλημα τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας, όταν οι Υποθέσεις 7.2.10 και 7.2.11 ικανοποιούνται.

7. Το ευθύ και το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για την ειδική περίπτωση ενός σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης

Θεώρημα 7.2.15 Υποθέτουμε ότι οι $\eta_1, \eta_2 \in C[0, 1]$ είναι δυο διαφορετικοί δείκτες διάθλασης, που ικανοποιούν το (7.1)-(7.4) για την ίδια επιλογή θετικών σταθερών a και η_0 , όπου $0 < \eta_1(r), \eta_2(r) \leq A$ και $k^2 \in (0, \pi^2/A)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια άπειρη ακολουθία τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας που να συμπίπτει για κάθε δείκτη διάθλασης, με την έννοια ότι για κάθε τάξη $l = 0, 1, 2, \dots$ τουλάχιστον μια ιδιοτιμή για τους η_1 και η_2 αντίστοιχα, ταυτίζεται. Τότε, $\eta_1(r) = \eta_2(r)$, για $r \in [0, 1]$.

Απόδειξη. Ως μια άμεση συνέπεια των Θεωρημάτων 7.2.13 και 7.2.14, έχουμε ότι $\eta_1 = \eta_2$ σχεδόν παντού. Αφού $\eta_1, \eta_2 \in C[0, 1]$ προκύπτει ότι $\eta_1(r) = \eta_2(r)$, $\forall r \in [0, 1]$.

■

Παρατήρηση 7.2.16 Η υποθέσεις για τον δείκτη διάθλασης και τον κυματάρημο συνδυάζονται με την έννοια ότι ο περιορισμός στο μέγεθος A του δείκτη διάθλασης εξασφαλίζει ότι το k^2 δεν είναι ιδιοτιμή για κανέναν η σε αυτή την κλάση. Το Θεώρημα 7.2.15 μπορεί να γενικευτεί καλύπτοντας κάθε κλάση δεικτών διάθλασης, για τους οποίους το k^2 δεν αποτελεί ιδιοτιμή για το αντίστοιχο ανομοιογενές πρόβλημα *Dirichlet*.

Παρατήρηση 7.2.17 Σημειώνουμε πως το πιο πάνω αποτέλεσμα μοναδικότητας δεν συσχετίζεται με οποιοδήποτε περιορισμό στο πρόσημο του $1 - \eta$, κάτι που απαιτείται στην περίπτωση του κλασικού προβλήματος ιδιοτιμών διαπερατότητας.

Παρατήρηση 7.2.18 Σε αντίθεση με το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα για κλασικές ιδιοτιμές διαπερατότητας, όπου είναι απαραίτητη είτε η γνώση όλων των ιδιοτιμών [13] ή του υποσυνόλου των ειδικών κλασικών ιδιοτιμών διαπερατότητας [1], απαιτούμε τη γνώση μόνο μιας ιδιοτιμής για κάθε χαρακτηριστική συνάρτηση. Αυτή η διαδικασία μας κατασκευάζει ένα άπειρο φασματικό υποσύνολο με διαφορετική δομή. Επιπρόσθετα, στην κλασική περίπτωση τα θεμελιώδη εργαλεία που αξιοποιούνται είναι το θεώρημα παραγοντοποίησης του *Hadamard*, το θεώρημα *Muntz*, αναπαραστάσεις *Goursat* και ασυμπτωτικές εκφράσεις για τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Για την περίπτωση των τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας που μελετούμε εδώ, αξιοποιήσαμε την τεχνική χωρισμού μεταβλητών σε συνδυασμό με μια ιδιότητα της απεικόνισης *Dirichlet-to-Neumann* για να καθορίσουμε μοναδικά τον δείκτη διάθλασης.

Α'. Παράρτημα

Α'.1. Μεταβολική διατύπωση

Ορισμός Α'.1.1 Έστω ότι ο H είναι ένας χώρος Hilbert. Ορίζουμε τον χώρο των αντιγραμμικών συναρτησιακών του H ως εξής:

$$H^* := \{f : H \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ είναι φραγμένο και αντιγραμμικό}\}$$

Ορισμός Α'.1.2 Υποθέτουμε ότι οι H, V είναι χώροι Hilbert, τέτοιοι ώστε:

$$H \subset V \subset H^*,$$

όπου αναγνωρίζουμε τον V ως ένα πυκνό υπόχωρο του H^* . Τότε, λέμε ότι ο V είναι χώρος πινोट για τον H .

Ορισμός Α'.1.3 Έστω ότι H είναι ένας χώρος Hilbert, ο V είναι ένας χώρος πινोट για τον H και ότι $\Phi : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια ημιγραμμική μορφή. Θα λέμε ότι η Φ είναι πιεστική στον H , ως προς τον χώρο πινोट V , αν:

$$\Re(\Phi(u, u)) \geq c_1 \|u\|_H^2 - c_2 \|u\|_V^2 \quad \forall u \in H \quad (\text{Α'.1})$$

Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό (Α'.1.3), μπορούμε να αναγνωρίσουμε ισχυρά ελλειπτικά συστήματα [65]

Θεώρημα Α'.1.4 (Κριτήριο ισχυρής ελλειπτικότητας) Ένας διαφορικός τελεστής με φραγμένους και ομοιόμορφα συνεχείς συντελεστές είναι ισχυρά ελλειπτικός, αν και μόνο αν η αντίστοιχη ημιγραμμική μορφή Φ είναι πιεστική στον H , ως προς τον χώρο πινोट V .

Το ακόλουθο κριτήριο χαρακτηρίζει τελεστές που έχουν την ιδιότητα Fredholm [75]:

Θεώρημα Α'.1.5 Έστω ότι X, Y είναι χώροι Banach. Τότε, ένας φραγμένος τελεστής $F : X \rightarrow Y$ είναι Fredholm αν και μόνο αν υπάρχει ένας φραγμένος τελεστής $A : Y \rightarrow X$ τέτοιος ώστε οι $A \cdot F - I$ και $F \cdot A - I$ είναι συμπαγείς τελεστές.

Παρουσιάζουμε ένα χρήσιμο πόρισμα του Θεωρήματος (Α'.1.5) στο πλαίσιο μεταβολικών διατυπώσεων:

Πόρισμα Α'.1.6 Η ιδιότητα Fredholm παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τοπολογικούς ισομορφισμούς.

Απόδειξη. Έστω ότι X, Y είναι χώροι Banach και $A : X \rightarrow X$, $B : X \rightarrow Y$ είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Επίσης, έστω ότι $T : Y \rightarrow X$ είναι ένας τοπολογικός ισομορφισμός, τέτοιος ώστε

$$A = T \cdot B$$

Υποθέτουμε ότι ο A είναι Fredholm. Τότε, από το Θεώρημα (A'.1.5), υπάρχει ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής $F_1 : X \rightarrow X$ τέτοιος ώστε οι $A \cdot F_1 - I$ και $F_1 \cdot A - I$ να είναι συμπαγείς τελεστές. Ως αποτέλεσμα, εφαρμόζοντας τον T^{-1} στο αριστερό μέλος και τον T στο δεξί μέλος, έχουμε ότι οι $K(F_1 T) - I$ και $(F_1 T)K - I$ είναι επίσης συμπαγείς. Επομένως, από το Θεώρημα (A'.1.5), ο K είναι Fredholm, αφού το γινόμενο ενός φραγμένου και ενός συμπαγούς τελεστή αποτελεί ένα συμπαγή τελεστή. Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να αποδείξουμε και το αντίστροφο, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ■

Έστω ότι H είναι ένας χώρος Hilbert και $\Phi : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ μια ημιγραμμική μορφή. Σταθεροποιούμε ένα $u \in H$ και ορίζουμε ένα αντιγραμμικό συναρτησιακό $f_u : H \rightarrow \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε:

$$f_u(v) = \Phi(u, v), \quad v \in H$$

Τότε μέσω του Θεωρήματος αναπαράστασης Riesz, ορίζουμε έναν γραμμικό και φραγμένο τελεστή $A : H \rightarrow H$ τέτοιο ώστε

$$(Au, v)_H := f_u(v), \quad \forall v \in H$$

Μέσω του Θεωρήματος αναπαράστασης Riesz, επίσης ορίζουμε ένα γραμμικό και φραγμένο τελεστή $K : H \rightarrow H^*$, τέτοιο ώστε

$$\langle Ku, v \rangle_{H^* \times H} := f_u(v), \quad \forall v \in H$$

Ορίζουμε επίσης $\Gamma : H^* \rightarrow H$, έτσι ώστε

$$\Gamma h := x,$$

όπου το x είναι το μοναδικό στοιχείο για το οποίο ισχύει ότι

$$h(v) = (x, v)_H$$

Πρόταση A'.1.7 Ο τελεστής Γ είναι ένας τοπολογικός ισομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω ότι $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ και $g_1, g_2 \in H^*$, έτσι ώστε $\Gamma g_1 = x_1$, $\Gamma g_2 = x_2$. Τότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} (a_1 g_1 + a_2 g_2)(v) &= a_1 (x_1, v)_H + a_2 (x_2, v)_H \\ &= (a_1 x_1, v)_H + (a_2 x_2, v)_H \\ &= (a_1 x_1 + a_2 x_2, v) \end{aligned}$$

για κάθε $v \in H$. Επομένως, $\Gamma(a_1 g_1 + a_2 g_2) = x_1 + x_2$, δηλαδή ο Γ είναι γραμμικός τελεστής. Έστω ότι $h_1, h_2 \in H^*$, τέτοια ώστε $\Gamma h_1 = \Gamma h_2 = x$. Τότε,

$$h_1(v) - h_2(v) = (x, v)_H - (x, v)_H = 0$$

Επομένως, το $H^* \ni h := h_1 - h_2$ έχει την ιδιότητα ότι $h(v) = 0$ για κάθε $v \in H$. Δηλαδή $h \equiv 0$ και άρα ο Γ είναι μονοσήμαντος.

Έστω ότι $y \in H$. Ορίζουμε ένα αντιγραμμικό συναρτησιακό $g \in H^*$, τέτοιο ώστε $g(v) := (y, v)$. Προφανώς, $\Gamma g = y$ και επομένως ο Γ είναι επί.

Έστω $h \in H^*$ τέτοιο ώστε $x = \Gamma h$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|h\| &= \sup\{|h(v)| : \|v\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|(x, v)| : \|v\| \leq 1\} \\ &\leq \{\|x\| \|v\| : \|v\| \leq 1\} \\ &= \|x\| = \|\Gamma h\| \end{aligned}$$

Από την άλλη, αν $x \neq 0$ θέτουμε $v_0 := \frac{x}{\|x\|}$. Τότε, $\|v_0\| = \|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$. Επομένως, $(x, v_0) = (x, \frac{x}{\|x\|}) = \|x\|$. Ως αποτέλεσμα, $\|h\| \geq \|x\| = \|\Gamma h\|$. Δηλαδή,

$$\|h\| = \|\Gamma h\| \Rightarrow \|\Gamma\| = 1$$

Για να συνοψίσουμε, ο Γ είναι γραμμικός, αμφιμονοσήμαντος και φραγμένος, άρα και αντιστρέψιμος από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης. ■

Θεώρημα A'.1.8 Έστω ότι οι $A : H \rightarrow H$ και $K : H^* \rightarrow H$ ορίζονται όπως πιο πάνω. Τότε, ο A έχει την ιδιότητα Fredholm αν και μόνο αν ο K έχει την ιδιότητα Fredholm.

Απόδειξη. Αφού οι τελεστές A, K ικανοποιούν την εξίσωση $A = \Gamma \cdot K$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πρόσχημα (A'.1.6) και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

Μια γνωστή ιδιότητα για τους δυϊκούς χώρους Hilbert είναι η εξής:

Λήμμα A'.1.9 Υποθέτουμε ότι οι H_1 και H_2 είναι δύο χώροι Hilbert τέτοιοι ώστε $H_1 \subset H_2$ και ο H_1 είναι εφοδιασμένος με την H_2 -νόρμα. Τότε, οι δυϊκοί τους (ή αντίστοιχα οι αντιγραμμικοί δυϊκοί τους) έχουν την ιδιότητα εμφύτευσης $H_2^* \hookrightarrow H_1^*$.

Απόδειξη. Έστω ότι $f \in H_2^*$. Τότε αν θέσουμε $g := f|_{H_1}$, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι το $g : H_1 \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ένα γραμμικό (ή αντίστοιχα αντιγραμμικό) συναρτησιακό στον H_1 , αφού κληρονομεί αυτές τις ιδιότητες από το f . Επομένως, έχουμε ότι $H_2^* \hookrightarrow H_1^*$. ■

Παρατήρηση A'.1.10 Εάν η δράση των συναρτησιακών στον H_2^* δίνεται από την $f(x) = \langle f, x \rangle_{H_2^* \times H_2}$, παρατηρούμε ότι η δράση του $g := f|_{H_1}$ δίνεται από την $g(y) = f(y)|_{y \in H_1} = \langle f, y \rangle_{H_2^* \times H_2}$, για $y \in H_1$. Δηλαδή έχουμε

$$\langle g, y \rangle_{H_1^* \times H_1} = \langle f, y \rangle_{H_2^* \times H_2},$$

για $y \in H_1$.

Πρόταση A'.1.11 Ο τελεστής $T : L^2(D_b) \rightarrow L^2(D_b)$ που ορίζεται ως

$$Tf = v_f \in H^1(D_b), \text{ όπου } K_\beta(w_f, v_f) = (0, \eta_0 f) \in (\mathcal{H}(D_b))^*$$

είναι αυτοσυζυγής ως προς το σταθμισμένο εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g)_{L^2(D_b, \eta_0 dx)} := \int_{D_b} \eta_0(x) f \bar{g} dx,$$

όπου $f, g \in L^2(D_b)$.

Απόδειξη. Έστω ότι $f, g \in L^2(D_b)$ και υποθέτουμε ότι $(w_f, v_f), (w_g, v_g) \in \mathcal{H}(D_b)$ είναι οι μοναδικές λύσεις των

$$K_\beta(w_f, v_f) = (0, \eta_0 f) \text{ και } K_\beta(w_g, v_g) = (0, \eta_0 g)$$

αντίστοιχα. Τότε αξιοποιώντας τους ορισμούς των K_β, A_β και την αυτοσυζυγία του A_β για όλα τα $\beta \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{D_b} \eta_0 f \bar{v}_g dx &= \langle K_\beta(w_f, v_f), (w_g, v_g) \rangle_{\mathcal{H}^*(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= (A_\beta(w_f, v_f), (w_g, v_g))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= ((w_f, v_f), A_\beta(w_g, v_g))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= \overline{(A_\beta(w_g, v_g), (w_f, v_f))}_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= \overline{\langle K_\beta(w_g, v_g), (w_f, v_f) \rangle}_{\mathcal{H}^*(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= \int_{D_b} \eta_0 v_f \bar{g} dx \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$(Tf, g)_{L^2(D_b, \eta_0 dx)} = (f, Tg)_{L^2(D_b, \eta_0 dx)}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Παρουσιάζουμε μια χρήσιμη αρχή ελαχίστου για γενικευμένα προβλήματα ιδιοτιμών:

Θεώρημα A'.1.12 (Αρχή ελαχίστου για την πρώτη ιδιοτιμή) Έστω ότι ο H είναι ένας χώρος Hilbert, ο $A : H \rightarrow H$ είναι ένας πιστικός, γραμμικός, φραγμένος τελεστής και ο $B : H \rightarrow H$ είναι ένας θετικός, συμπαγής και φραγμένος τελεστής. Ορίζουμε το πηλίκο Rayleigh

$$\frac{(Af, f)}{(Bf, f)}, \quad f \in (N(B))^c \quad (A'.2)$$

και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ελαχιστοποιητής για την (A'.2). Τότε, η μικρότερη ιδιοτιμή του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών

$$Au = \lambda Bu$$

αποτελεί το ελάχιστο του πηλίκου Rayleigh στο σύνολο $(N(B))^c$, δηλαδή

$$\lambda_1 = \inf_{f \in (N(B))^c} \frac{(Af, f)}{(Bf, f)}$$

και κάθε αντίστοιχο ιδιοστοιχείο u_1 εξυπηρετεί ως ένας ελαχιστοποιητής, δηλαδή $\lambda_1 = \frac{(Au_1, u_1)}{(Bu_1, u_1)}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ελαχιστοποιητής u για το πηλίκο Rayleigh, δηλαδή

$$m = \frac{(Au, u)}{(Bu, u)} = \inf_{f \in (N(B))^c} \frac{(Af, f)}{(Bf, f)}$$

Επιλέγουμε οποιοδήποτε $v \in (N(B))^c$ και ορίζουμε

$$f(\epsilon) := \frac{(A(u + \epsilon v), u + \epsilon v)}{(B(u + \epsilon v), u + \epsilon v)}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}$$

Εαν το u είναι ελαχιστοποιητής, τότε $f'(0) = 0$. Έχουμε ότι

$$f(\epsilon) = \frac{(Au, u) + 2\epsilon(Au, v) + \epsilon^2(Av, v)}{(Bu, u) + 2\epsilon(Bu, v) + \epsilon^2(Bv, v)}$$

Επομένως,

$$f'(0) = \frac{2(Au, v)B(u, u) - 2(Bu, v)(Av, v)}{(Bu, u)^2} = 0$$

Δηλαδή, $(Au, v)(Bu, u) = (Bu, v)(Au, u)$ για κάθε $v \in (N(B))^c$. Αφού $m = \frac{(Au, u)}{(Bu, u)}$, ικανοποιείται η ακόλουθη εξίσωση:

$$(Au, v) = m(Bu, v) \quad \forall v \in (N(B))^c \quad (A'.3)$$

Τώρα, αν επιλέξουμε ένα $f \in N(B)$, έχουμε ότι

$$(Au, f) = m(Bu, f) = 0, \quad (A'.4)$$

αφού $Au = mBu \in R(B)$ και $R(B) \subset \overline{R(B)} \perp N(B)$. Από τις (A'.3) και (A'.4), προκύπτει ότι

$$(Au, v) = m(Bu, v) \quad \forall v \in H,$$

δηλαδή m είναι μια γενικευμένη ιδιοτιμή, με το u να αποτελεί ένα αντίστοιχο γενικευμένο ιδιοστοιχείο. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, παρατηρούμε ότι αν λ είναι οποιαδήποτε γενικευμένη ιδιοτιμή, με \tilde{u} ως αντίστοιχο ιδιοστοιχείο, τότε:

$$\lambda = \frac{(A\tilde{u}, \tilde{u})}{(B\tilde{u}, \tilde{u})} \geq m$$

Με άλλα λόγια, κάθε άλλη ιδιοτιμή θα είναι μεγαλύτερη από την m . ■

Συνεχίζουμε παρουσιάζουμε ένα χαρακτηρισμό για αυστηρά θετικούς τελεστές:

Πρόταση A'.1.13 Έστω H ένας χώρος Hilbert και $T : H \rightarrow H$ ένας θετικός τελεστής, δηλαδή $(Tu, u) \geq 0 \quad \forall u \in H$. Τότε, ο T θα είναι αυστηρά θετικός, δηλαδή $(Tu, u) > 0$ για κάθε $u \neq 0$ αν και μόνο αν ο T είναι μονοσήμαντος.

Απόδειξη. Έστω ότι $(Tu, u) > 0$, για $u \neq 0$. Υποθέτουμε προς εις άτοπον, ότι ο T δεν είναι μονοσήμαντος, δηλαδή ότι υπάρχει ένα $0 \neq u_0 \in H$ τέτοιο ώστε $Tu_0 = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $0 < (Tu_0, u_0) = (0, u_0) = 0$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω ότι ο T είναι μονοσήμαντος. Αφού είναι και θετικός τελεστής, θα υπάρχει η μοναδική (θετική) τετραγωνική ρίζα $T^{\frac{1}{2}}$. Δηλαδή, $T = T^{\frac{1}{2}} \cdot T^{\frac{1}{2}}$, που μας δίνει ότι $N(T^{\frac{1}{2}}) \subset N(T)$. Συνεπώς, $N(T^{\frac{1}{2}}) = \{0\}$ και άρα $(Tu, u) = (T^{\frac{1}{2}} \cdot T^{\frac{1}{2}}u, u) = (T^{\frac{1}{2}}u, T^{\frac{1}{2}}u) = \|T^{\frac{1}{2}}u\|^2 \neq 0$, για $u \neq 0$. Δηλαδή, έχουμε ότι $(Tu, u) > 0$ για $u \neq 0$. ■

Το προηγούμενο αποτέλεσμα παράγει την ακόλουθη περιγραφή για τον πυρήνα ενός θετικού τελεστή:

Πόρισμα A'.1.14 Έστω H ένας χώρος Hilbert και $T : H \rightarrow H$ ένας θετικός τελεστής. Τότε,

$$N(T) = \{u \in H : (Tu, u) = 0\} \quad (A'.5)$$

A'.2. Σχήμα Galerkin

Πρόταση A'.2.1 Έστω H ένας χώρος Hilbert και $A : H \rightarrow H$ ένας γραμμικός, πειστικός τελεστής. Έστω επίσης ότι $P_N : H \rightarrow H$ είναι ορθογώνιες προβολές με πεδίο

τιμών ένα υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης X_N . Τότε, $A^{(N)} := P_N A|_{X_N} : X_N \rightarrow X_N$ είναι μια ακολουθία γραμμικών, πιστικών τελεστών που ικανοποιούν την

$$\left\| (A^{(N)})^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq C \quad (\text{Α'.6})$$

για κάποιο $C > 0$. Επιπρόσθετα, $\{(A^{(N)})^{-1} P_N\}_{N=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία θετικών τελεστών.

Απόδειξη. Έστω $u \in X_N$. Τότε,

$$\begin{aligned} \left\| (A^{(N)})^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 &= \left((A^{(N)})^{\frac{1}{2}} u, (A^{(N)})^{\frac{1}{2}} u \right)_H \\ &= (A^{(N)} u, u)_H \\ &= (P_N A u, u)_H \\ &= (A u, P_N u)_H \\ &= (A u, u)_H \geq c' \|u\|^2 \end{aligned} \quad (\text{Α'.7})$$

Αφού $(A^{(N)})^{\frac{1}{2}}$ είναι φραγμένος,

$$\left\| (A^{(N)})^{\frac{1}{2}} u \right\| \leq \left\| (A^{(N)})^{\frac{1}{2}} \right\| \cdot \|u\| \quad \forall u \in H \quad (\text{Α'.8})$$

Από τις (Α'.7) και (Α'.8), έχουμε την εκτίμηση

$$\left\| (A^{(N)})^{\frac{1}{2}} \right\| \geq c' \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \left\| (A^{(N)})^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq \frac{1}{c'} = c$$

Για το δεύτερο μέρος, παρατηρούμε ότι:

$$\left(A^{(N)} (A^{(N)})^{-1} P_N u, (A^{(N)})^{-1} P_N u \right) \geq c \left\| (A^{(N)})^{-1} P_N u \right\|^2 \geq 0$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \left(A^{(N)} (A^{(N)})^{-1} P_N u, (A^{(N)})^{-1} P_N u \right) &= \left(P_N u, (A^{(N)})^{-1} P_N u \right) \\ &= \left(u - (I - P_N) u, (A^{(N)})^{-1} P_N u \right) \\ &= \left(u, (A^{(N)})^{-1} P_N u \right) \\ &= \left((A^{(N)})^{-1} P_N u, u \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\left((A^{(N)})^{-1} P_N u, u \right) \geq 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Πρόταση Α'.2.2 Έστω H ένας χώρος Hilbert, $A \in \mathcal{B}(H)$, δηλαδή ο A είναι ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής και $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση, αναλυτική σε κάποιο $D \subset \mathbb{C}$. Αν το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το $z_0 \in D$ δίνεται από την

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z - z_0)^n}{n!}, \quad \forall |z - z_0| \leq r,$$

όπου $r \leq \rho$, $\|A - z_0 I\| \leq \rho$ και ρ είναι η ακτίνα σύγκλισης για τη σειρά Taylor της f γύρω από το z_0 , τότε μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή $f(A) : H \rightarrow H$ ως εξής:

$$f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} (A - z_0 I)^n, \quad (A'.9)$$

όπου η σύγκλιση είναι ως προς τη νόρμα του χώρου των γραμμικών και φραγμένων τελεστών $\mathcal{B}(H)$.

Απόδειξη. Έστω ότι $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση, αναλυτική σε κάποιο $D \subset \mathbb{C}$, με σειρά Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z - z_0)^n}{n!}, \quad \forall |z - z_0| \leq \rho$$

Ορίζουμε τους τελεστές μερικών αθροισμάτων $f_k(A) : H \rightarrow H$, για $k \in \mathbb{N}$ ως εξής:

$$f_k(A) := \sum_{n=0}^k c_n \frac{(A - z_0 I)^n}{n!}$$

Πρώτα, παρατηρούμε ότι $f_k(A) \in \mathcal{B}(H)$. Το ερώτημα που προκύπτει είναι κατά πόσο το όριο $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(A)$ υπάρχει στον $\mathcal{B}(H)$. Αφού ο $\mathcal{B}(H)$ αποτελεί χώρο Banach, αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{f_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ είναι Cauchy. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \|f_k(A) - f_m(A)\| &= \left\| \sum_{n=m}^k c_n \frac{(A - z_0 I)^n}{n!} \right\| \quad \text{για } k \geq m \\ &\leq \sum_{n=m}^k \frac{|c_n|}{n!} \|(A - z_0 I)^n\| \\ &\leq \sum_{n=m}^k \frac{|c_n|}{n!} \|A - z_0 I\|^n \\ &\leq \sum_{n=m}^k \frac{|c_n|}{n!} r^n \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } n, m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

αφού η σειρά Taylor μιας αναλυτικής συνάρτησης συγκλίνει απόλυτα και επομένως, η ουρά της θα συγκλίνει στο μηδέν. Συνεπώς, η $\{f_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία Cauchy και η απόδειξη ολοκληρώνεται, αφού

$$\|f_k(A) - f(A)\| \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } k \rightarrow \infty.$$

■

Λήμμα A'.2.3 Έστω H ένας χώρος Hilbert και $A, A_N : H \rightarrow H$ θετικοί τελεστές, για $N \in \mathbb{N}$. Εάν $A_N \rightarrow A$ ισχυρά (σημειακά), τότε:

$$(A_N)^{\frac{1}{2}} \rightarrow A^{\frac{1}{2}} \text{ ισχυρά (σημειακά)} \quad (A'.10)$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|A_n\| \leq 1$ και $\|A\| \leq 1$. Ως αποτέλεσμα, ικανοποιούνται επίσης οι εκτιμήσεις $\|I - A_n\| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ και $\|I - A\| \leq 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sqrt{1-z}$, που είναι αναλυτική για $|z| < 1$. Η αντίστοιχη σειρά Taylor $\sqrt{1-z} = 1 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$ όμως, συγκλίνει απόλυτα για $z \leq 1$ [74] (Η ισοδύναμα, η δυναμοσειρά για τη \sqrt{z} με κέντρο το $z_0 = 1$, συγκλίνει απόλυτα για $|z - z_0| \leq 1$). Επομένως, από την Πρόταση (Α'.2.2), έχουμε τις αναπαραστάσεις:

$$\begin{aligned}\sqrt{A_n} &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i (I - A_n)^i \\ \sqrt{A} &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i (I - A)^i\end{aligned}$$

Στην [74, σελ. 195] αποδεικνύεται ότι αυτός είναι ένας εναλλακτικός τρόπος ορισμού τετραγωνική ρίζας τελεστών. Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί, αν δείξουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sqrt{A_n}x - \sqrt{A}x\| = 0$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sqrt{A_n}x - \sqrt{A}x\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i (I - A_n)^i x - \sum_{i=1}^{\infty} c_i (I - A)^i x \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k c_i \left[(I - A_n)^i - (I - A)^i \right] x \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=0}^k c_i \left[(I - A_n)^i - (I - A)^i \right] x \right\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k |c_i| \cdot \left\| \left[(I - A_n)^i - (I - A)^i \right] x \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k a_i(n)\end{aligned}\tag{Α'.11}$$

όπου $a_i(n) := |c_i| \cdot \left\| \left[(I - A_n)^i - (I - A)^i \right] x \right\|$.

Αφού $A_n \rightarrow A$ ισχυρά, προκύπτει ότι $I - A_n \rightarrow I - A$ ισχυρά. Επομένως,

$$(I - A_n)^i \rightarrow (I - A)^i \text{ ισχυρά, } \forall i \in \mathbb{N}\tag{Α'.12}$$

Απομένει να δείξουμε ότι τα όρια στην (Α'.11) μπορούν να εναλλαχθούν, αφού η (Α'.12) υποδηλώνει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i(n) = 0$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας το Λήμμα Tannery (πόρισμα του θεωρήματος Κυριαρχημένης σύγκλισης).

Λήμμα Α'.2.4 Θεωρούμε την ακολουθία $S_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n)$ και υποθέτουμε ότι οι όροι $a_i(n)$ συγκλίνουν με την έννοια ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i(n) = b_i$, για $i \in \mathbb{N}$. Εάν

$$|a_i(n)| \leq M_i \quad \text{και} \quad \sum_{i=0}^{\infty} M_i < +\infty,$$

τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$$

Εφαρμόζουμε το Λήμμα (A'.2.4) στην (A'.11), θέτοντας

$$S_n := \sum_{i=0}^{\infty} |c_i| \cdot \left\| \left[(I - A_n)^i - (I - A)^i \right] x \right\| = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n)$$

Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i(n) = 0$, θέτουμε $b_i := 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} a_i(n) &= |a_i(n)| = |c_i| \cdot \left\| \left[(I - A_n)^i - (I - A)^i \right] x \right\| \\ &\leq |c_i| \left[\left\| (I - A_n)^i x \right\| + \left\| (I - A)^i x \right\| \right] \\ &\leq |c_i| \left[\left\| (I - A_n)^i \right\| + \left\| (I - A)^i \right\| \right] \cdot \|x\| \\ &\leq |c_i| \|x\| \left[\|I - A_n\|^i + \|I - A\|^i \right] \end{aligned}$$

Επειδή $\|I - A_n\| \leq 1$ και $\|I - A\| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε επίσης τις εκτιμήσεις $\|I - A_n\|^i \leq 1$ και $\|I - A\|^i \leq 1$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Επομένως,

$$|a_i(n)| \leq 2|c_i| \|x\| := M_i$$

και

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i(n)| \leq 2\|x\| \sum_{i=0}^{\infty} |c_i| = \sum_{i=0}^{\infty} M_i$$

Η σειρά Taylor

$$\sqrt{1-z} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \quad \text{συγκλίνει απόλυτα για } |z| \leq 1$$

Επομένως,

$$\sum_{i=0}^{\infty} |c_i| < \infty$$

και άρα,

$$\sum_{i=0}^{\infty} M_i < +\infty$$

Συνεπώς, από το Λήμμα Tannery έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i = 0$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη, αφού τα όρια στην (A'.11) μπορούν να εναλλαχθούν:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sqrt{A_n} x - \sqrt{A} x \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \rightarrow 0$$

■

Κατάλογος Σχημάτων

| | | |
|------|--|----|
| 1.1. | Σκέδαση από ένα μη διαπερατό, ηχητικά μαλακό εμπόδιο D | 15 |
| 1.2. | Σκέδαση από ένα διαπερατό, ανομοιογενές μέσο $(D, \eta(x))$ | 16 |
| 2.1. | Το πρόβλημα ιδιοτιμών Stekloff. | 27 |
| 2.2. | Το πρόβλημα τροποποιημένων ιδιοτιμών διαπερατότητας για ένα τεχνητό μεταλλικό υπόβαθρο. | 30 |
| 6.1. | Ιδιοτιμές του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας για τον μοναδιαίο δίσκο με $\eta = 4$, $\eta_0 = 1$, $a = 1$ και $k = 1$, από τις πρώτες τέσσερις συναρτήσεις Bessel. Οι αρνητικές ρίζες φαίνονται στα αριστερά και η (μόνη) θετική στα δεξιά | 68 |
| 6.2. | Γραφήματα των πρώτων τριών ιδιοτιμών για το τροποποιημένο πρόβλημα διαπερατότητας ως προς τον δείκτη διάθλασης η , για $k = 0.35$, $a = 1$ και $\eta_0 = 1$ | 69 |
| 6.3. | Ανακατασκευές του άγνωστου δείκτη διάθλασης για μοναδιαίους δίσκους. Οι επιλογές παραμέτρων (η, η_0, a) για τα πιο πάνω παραδείγματα είναι $(0.8, 2, 1)$, $(4, 1, 2)$, $(7.2, 3, 1)$ και $(15.8, 6, 4)$ αντίστοιχα. | 70 |
| 7.1. | Οι πρώτες δυο τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας έναντι των δεδομένων Cauchy στο σύνορο, για δείκτες διάθλασης $\eta \in [0.1, 10]$ και τάξη $l = 0$ | 89 |
| 7.2. | Οι πρώτες δυο τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας έναντι των δεδομένων Cauchy στο σύνορο, για δείκτες διάθλασης $\eta \in [0.1, 10]$ και τάξη $l = 1$ | 90 |
| 7.3. | Οι πρώτες δυο τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας έναντι των δεδομένων Cauchy στο σύνορο, για δείκτες διάθλασης $\eta \in [0.1, 10]$ και τάξη $l = 2$ | 90 |

Κατάλογος Πινάκων

| | |
|---|----|
| 6.1. Προσέγγιση των ιδιοτιμών του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας για δίσκους με διαφορετικές υλικές ιδιότητες και σταθερό κυματάρημο $k = 0.35$ | 68 |
| 6.2. Σύγκλιση για τις τρεις πρώτες ιδιοτιμές του τροποποιημένου προβλήματος διαπερατότητας, για το δίσκο με $\eta = 4$, $\eta_0 = 1$, $a = 2$ και $k = 0.35$ | 69 |
| 6.3. Ανακατασκευή ενός τμηματικά σταθερού δείκτη διάθλασης από τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας. | 72 |
| 6.4. Ανακατασκευή ενός τμηματικά συνεχή δείκτη διάθλασης από τροποποιημένες ιδιοτιμές διαπερατότητας που αντιστοιχούν σε έναν και πέντε κυματάρημους αντιστοίχως. | 73 |

Βιβλιογραφία

- [1] Aktosun T., Gintides D. and Papanikolaou V. G. (2011), The uniqueness in the inverse problem for transmission eigenvalues for the spherically symmetric variable-speed wave equation, *Inverse Problems* **27** 115004
- [2] An J. and Shen J. (2013), A spectral-element method for transmission eigenvalue problems, *J. Sci. Comput.* **57** 670-688
- [3] An J. and Shen J. (2015), Spectral approximation to a transmission eigenvalue problem and its applications to an inverse problem, *Comput. Math. Appl.* **69** 1132-1143
- [4] Audibert L., Cakoni F. and Haddar H. (2017), New sets of eigenvalues in inverse scattering for inhomogeneous media and their determination from scattering data, *Inverse Problems* **33** 125011
- [5] Baricz A. (2010) Bounds for modified Bessel functions of the first and second kinds, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **53** 575-599
- [6] Bonnet-Ben Dhia A.S., Carvalho C., Chesnel L. and Ciarlet P. Jr. (2016) On the use of perfectly matched layers at corners for scattering problems with sign-changing coefficients, *J. Comput. Phys.* **322**
- [7] Buterin S. A., Yang C. F. and Yurko V. A. (2015), On an open question in the inverse transmission eigenvalue problem, *Inverse Problems* **31** 045003
- [8] Cakoni F, Colton D. and Haddar H (2010), On the determination of Dirichlet or transmission eigenvalues from far field data, *Comptes Rendus Mathematique* **348** 379-383
- [9] Cakoni F, Colton D and Haddar H (2016), *Inverse Scattering Theory and Transmission Eigenvalues*, vol. **88** of CBMS Series (Philadelphia: SIAM Publications)
- [10] Cakoni F., Colton D. and Haddar H. (2009), The computation of lower bounds for the norm of the index of refraction in an anisotropic media, *J. Integral Equations and Applications* **21** 203-227
- [11] Cakoni F., Colton D., Meng S. and Monk P. (2016), Stekloff eigenvalues in inverse scattering, *SIAM J. Math. Anal.* **76** 1737-1763
- [12] Cakoni F., Colton D. and Monk P. (2007), On the use of transmission eigenvalues to estimate the index of refraction from far field data, *Inverse Problems* **23** 507-522
- [13] Cakoni F., Colton D. and Gintides D. (2010), The Interior Transmission Eigenvalue Problem *SIAM J. Math. Anal.* **42** 2912-2921

- [14] Cakoni F. and Gintides D. (2010), New results on transmission eigenvalues, *Inverse Problems Imaging* **4** 39-48
- [15] Cakoni F., Gintides D. and Haddar H. (2010), The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues *SIAM J. Math. Anal.* **42** 237–55
- [16] Cakoni F. and Haddar H. (2012), Transmission eigenvalues in inverse scattering theory *Inverse Problems and Applications: Inside Out II (MSRI Publications 60)* ed G. Uhlmann (Cambridge: Cambridge University Press) 527-578
- [17] Cakoni F. and Haddar H. (2013), Special issue on transmission eigenvalues, *Inverse Problems* **29** 100201
- [18] Cakoni F. and Haddar H. (2009), On the existence of transmission eigenvalues in an inhomogeneous medium, *Applicable Analysis* **88** 475-493
- [19] Cakoni F., Harris I. and Sun J. (2014), Transmission eigenvalues and nondestructive testing of anisotropic magnetic materials with voids, *Inverse Problems* **30** 035016
- [20] Cakoni F. and Kress R. (2017), A boundary integral equation method for the transmission eigenvalue problem, *Applicable Analysis* **96** 23-38
- [21] Cakoni F., Monk P. and Sun J. (2014), Error analysis for the finite element approximation of transmission eigenvalues, *Comput. Methods Appl. Math.* **14** 419-427
- [22] Camaño J., Lackner C. and Monk P. (2017), Electromagnetic Stekloff eigenvalues in inverse scattering, *SIAM J. Math. Anal.* **49** 4376–4401
- [23] Cakoni F., Cayoren M. and Colton D. (2008), Transmission eigenvalues and the nondestructive testing of dielectrics, *Inverse Problems* **24** 065016
- [24] Cheng X. and Yang J. (2015), Computational method for transmission eigenvalues for a spherically stratified medium, *J. Opt. Soc. Am. A* **32** 1243-1246
- [25] Cogar S. (2019) *New Eigenvalue Problems in Inverse Scattering*, PhD Thesis (University of Delaware)
- [26] Cogar S., Colton D., Meng S. and Monk P. (2017), Modified transmission eigenvalues in inverse scattering theory, *Inverse Problems* **33** 125002
- [27] Cogar S. and Monk P. (2020), Modified electromagnetic transmission eigenvalues in inverse scattering theory, *SIAM J. Math. Anal.* **52**, 6412–6441
- [28] Colton D., and Kirsch A. (1984), Dense sets and far field patterns in acoustic wave propagation, *SIAM J. Math. Anal.* **15**, 996–1006
- [29] Colton D. and Kress R. (2013), *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, 3rd edn (New York: Springer)
- [30] Colton D. and Kirsch A. (1996), A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region, *Inverse Problems* **12** 383-393

- [31] Colton D. and Kress R. (1978), The construction of solutions to acoustic scattering problems in a spherically stratified medium II, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **32** 53-62
- [32] Colton D. and Leung Y. J. (2013), Complex eigenvalues and the inverse spectral problem for transmission eigenvalues, *Inverse Problems* **29** 104008
- [33] Colton D. and Monk M. (1988), The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in an inhomogeneous medium, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **41** 97-125
- [34] Colton D., Monk P. and Sun J. (2010), Analytical and computational methods for transmission eigenvalues, *Inverse Problems* **26** 045011
- [35] Colton D. and Päivärinta L. (1990), Far-field patterns for electromagnetic waves in an inhomogeneous medium, *SIAM J. Math. Anal.* **21** 1537–1549
- [36] Colton D. and Päivärinta L. (1992), The uniqueness of a solution to an inverse scattering problem for electromagnetic waves, *Arch. Rational Mech. Anal.* **119**, 59–70
- [37] Colton D., Päivärinta L. and Sylvester J. (2007), The interior transmission problem, *Inverse Problems Imaging* **1** 13-28
- [38] Erdélyi A. (1956), *Asymptotic Expansions*, (New York: Dover)
- [39] Davis P.J. (1975), *Interpolation and Approximation*, Dover, New York
- [40] Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F. and Tricomi F. (1954), *Higher Transcendental Functions*, vol 2 (New York: McGraw-Hill).
- [41] Geng H., Ji X., Sun J. and Xu L. (2016), C^0 IP Methods for the transmission eigenvalue problem, *J. Sci. Comput.* **68** 326-338
- [42] Gintides D. and Pallikarakis N. (2013), A computational method for the inverse transmission eigenvalue problem, *Inverse Problems* **29** 104010
- [43] Gintides D. and Pallikarakis N. (2017), The inverse transmission eigenvalue problem for a discontinuous refractive index, *Inverse Problems* **33** 055006
- [44] Gintides D., Pallikarakis N. and Stratouras K. (2021), On the modified transmission eigenvalue problem with an artificial metamaterial background, *Res. Math. Sci.* **8** 40
- [45] Gintides D., Pallikarakis N. and Stratouras K. (2021), A computational approach for the inverse problem of reconstructing a spherically symmetric refractive index using modified transmission eigenvalues, *2021 XXXIVth General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science (URSI GASS)*
- [46] Gohberg I., Goldberg S. and Kaashoek M. (2003), *Basic Classes of Linear Operators*, (Basel: Birkhauser)

- [47] Gould S. (1995), *Variational Methods for Eigenvalue Problems: An Introduction to the Methods of Rayleigh, Ritz, Weinstein, and Aronszajn*, (New York: Dover)
- [48] Harris I. (2015), *Non-destructive testing of anisotropic materials*, PhD Thesis, University of Delaware
- [49] Harris I. (2021), Approximation of the inverse scattering Steklov eigenvalues and the inverse spectral problem, *Res. Math. Sci.* **8** 31
- [50] Harris I., Kleefeld A. (2020) Analysis and computation of the transmission eigenvalues with a conductive boundary condition, *Applicable Analysis* **101** 1880-1895
- [51] Henrot A. (2006), *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators* (Basel: Birkhäuser)
- [52] Hsiao G. C., Liu F., Sun J. and Xu L. (2011), A coupled BEM and FEM for the interior transmission problem in acoustics, *J. Comput. Appl. Math.* **235** 5213–5221
- [53] Huang R., Struthers A., Sun J. and Zhang R. (2016), Recursive integral method for transmission eigenvalues, *J. Comput. Phys.* **327** 830-840
- [54] Huang T.-M., Huang W.-Q. and Lin W.-W. (2015), A robust numerical algorithm for computing Maxwell's transmission eigenvalue problems, *SIAM J. Sci. Comput.* **37** 2403–2423
- [55] Ji X., Sun J. and Turner T. (2012), Algorithm 922: A mixed finite element method for Helmholtz transmission eigenvalues, *ACM T. Math. Software* **38** 1-8
- [56] Ji X., Sun J. and Xie H. (2014), A multigrid method for Helmholtz transmission eigenvalue problems, *J. Sci. Comput.* **60** 276-294
- [57] Kirsch A. (1986), The denseness of the far field patterns for the transmission problem, *IMA J. Appl. Math.* **37** 213-225
- [58] Kirsch A. (2009), On the existence of transmission eigenvalues, *Inverse Problems Imaging* **3** 155-172
- [59] Kleefeld A. (2013), A numerical method to compute interior transmission eigenvalues, *Inverse Problems* **29** 104012
- [60] Kleefeld A., Pieronek L. (2018), The method of fundamental solutions for computing acoustic interior transmission eigenvalues, *Inverse Problems* **34** 035007
- [61] Kleefeld A., Pieronek L. (2018), Computing interior transmission eigenvalues for homogeneous and anisotropic media, *Inverse Problems* **34** 105007
- [62] Lax P.D., and Phillips R.S. (1967), *Scattering Theory* Academic Press, New York.

- [63] Lechleiter A. and Peters S. (2015), Determining transmission eigenvalues of anisotropic inhomogeneous media from far field data, *Commun. Math. Sci.* **13** 1803 – 1827
- [64] Li T., Huang W.-Q., Lin W.-W. and Liu J. (2015), On spectral analysis and a novel algorithm for transmission eigenvalue problems, *J. Sci. Comput.* **64** 83–108
- [65] McLean W. (2000), *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, (Cambridge: Cambridge University Press)
- [66] McLaughlin J. R. and Polyakov P. L. (1994), On the uniqueness of a spherically symmetric speed of sound from transmission eigenvalues, *J. Differ. Eqns* **107** 351-82
- [67] Monk P. and Sun J. (2012), Finite element methods for Maxwell transmission eigenvalues, *SIAM J. Sci. Comput.* **34** 247–264
- [68] Nachman A. (1988), Reconstructions from boundary measurements, *Annals of Math.* **128**, 531–576
- [69] Nachmann A., Sylvester J. and Uhlmann G. (1988), An n-Dimensional Borg-Levinson Theorem, *Communications in Mathematical Physics* **115** 595-605
- [70] Novikov R. (1988), Multidimensional inverse spectral problems for the equation $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$, *Translations in Func. Anal. and its Appl.* **22**, 263–272
- [71] Pallikarakis N. (2017), *The Inverse Spectral Problem for the Reconstruction of the Refractive Index from the Interior Transmission Problem*, PhD Thesis (NTUA)
- [72] Päiväranta L. and Sylvester J. (2008), Transmission eigenvalues, *SIAM J. Math. Anal.* **40** 738-753
- [73] Ramm A.G. (1988), Recovery of the potential from fixed energy scattering data, *Inverse Problems* **4**, 877–886
- [74] Reed M. and Simon B. (1980) *Methods of Mathematical Physics Vol.1: Functional Analysis*, (New York: Academic Press)
- [75] Schechter M. *Principles of Functional Analysis* (Graduate Studies in Mathematics vol. 36), 2nd edn (American Mathematical Society)
- [76] Shakarchi R. and Stein E. M. (2003), *Complex Analysis*, (Princeton: Princeton University Press)
- [77] Sun J. (2011), Iterative methods for transmission eigenvalues, *SIAM J. Numer. Anal.* **49** 1860-1874
- [78] Sun J. and Xu L. (2013), Computation of Maxwell’s transmission eigenvalues and its applications in inverse medium problems, *Inverse Problems* **29** 104013

- [79] Weisstein E. *Bessel Function Zeros*, From MathWorld—A Wolfram Web Resource <https://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionZeros.html>
- [80] Wu X. and Chen W. (2013), Error estimates of the finite element method for interior transmission problems, *J. Sci. Comput.* **57** 331–348
- [81] Xu X. C., Yang C. F., Buterin S. and Yurko V. (2019), Estimates of complex eigenvalues and an inverse spectral problem for the transmission eigenvalue problem, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* **38** 1-15
- [82] Zeng F., Sun J. and Xu L. (2016), A spectral projection method for transmission eigenvalues, *Sci. China Math.* **59** 1613–1622
- [83] Zeng F., Turner T. and Sun J. (2015), Some results on electromagnetic transmission eigenvalues, *Math. Meth. Appl. Sci.* **38** 155–163



National Technical University of Athens

SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL
AND PHYSICAL SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

**Direct and Inverse Spectral Problems in
Scattering Theory**

PhD Thesis
of
Kyriakos Stratouras

Thesis Committee: Gintides Drossos (supervisor)
Antonis Charalampopoulos
Emmanuil Georgoulis

Athens, October 2022



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL
AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Direct and inverse spectral problems in scattering theory

PhD Thesis

of

Kyriakos Stratouras

Diploma in Applied Mathematics and Physical Sciences NTUA

MSc in Applied Mathematical Sciences NTUA

The thesis is submitted to the School of Applied Mathematical and Physical Sciences of the National Technical University of Athens in fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.

Examining Committee:

...

D. Gintides
Professor
N.T.U.A.

...

A. Charalampopoulos
Professor
N.T.U.A.

...

E. Georgoulis
Professor
N.T.U.A.

...

K. Chrysafinos
Professor
N.T.U.A.

...

I. Gasparis
Professor
N.T.U.A.

...

M. Chatzinikolaou
Professor
H.O.U.

...

N. Tsitsas 7
Associate Professor
A.U.Th.

Athens, October 2022

...

Kyriakos Stratouras

© 2022 - All rights reserved

Neither the whole nor any part of this doctoral thesis may be copied, stored in a retrieval system, distributed, reproduced, translated, or transmitted for commercial purposes, in any form or by any means now or hereafter known, electronic or mechanical, without the written permission from the author. Reproducing, storing and distributing this doctoral thesis for non-profitable, educational or research purposes is allowed, without prejudice to reference to its source and to inclusion of the present text. Any queries in relation to the use of the present doctoral thesis for commercial purposes must be addressed to its author.

Approval of this doctoral thesis by the School of Applied Mathematical and Physical Sciences of the National Technical University of Athens does not constitute in any way an acceptance of the views of the author contained herein by the said academic organisation (L. 5343/1932, art. 202).

The research for the elaboration of the present doctoral dissertation was funded through the scholarship of Special Account for Research Grant of National Technical University of Athens.

Abstract

This thesis investigates the direct and inverse spectral problem for a modification to the classical transmission eigenvalue problem, by introducing an artificial meta-material background. For the direct problem, we utilize a variational formulation setting and the Hilbert-Schmidt theorem to prove discreteness and existence of the spectrum. Furthermore, under a smallness condition on the wavenumber, we discover that the corresponding eigenfunction pairs are not complete in the solution space, in the sense that they do not form a Riesz basis. We define an auxiliary spectral problem that yields an orthonormal basis, in contrast to the original problem. Afterwards, we use this basis to implement a spectral Galerkin scheme for the approximation of the eigenvalues. We are able to prove convergence of the discrete Galerkin scheme to the unknown eigenvalues, under the previously mentioned condition on the wavenumber. Finally, in the case where the domain is a unit disk, we present some numerical examples for the method that we are able to verify, using analytically computed eigenvalues.

In the special case of a three dimensional, spherically symmetric refractive index, we show existence of the spectrum in an alternative way, utilizing asymptotic expressions for the corresponding characteristic functions. Furthermore, we pose the inverse spectral problem and show that the knowledge of the spectrum can uniquely determine fractions of boundary Cauchy data. These ratios, under the assumption that the wavenumber is not a Dirichlet eigenvalue, are then used to prove a uniqueness theorem for the reconstruction of a $C[0, 1]$ refractive index.

Περίληψη

Αυτή η διατριβή εξετάζει το ευθύ και αντίστροφο πρόβλημα για μια τροποποίηση του κλασικού προβλήματος ιδιοτιμών διαπερατότητας, η οποία προκύπτει μέσω της εισαγωγής ενός τεχνητού μεταϊλιικού υποβάθρου. Για τη μελέτη του ευθέως προβλήματος, αξιοποιούμε τη μεταβολική του διατύπωση και το θεώρημα Hilbert-Schmidt για να αποδείξουμε την διακριτότητα και ύπαρξη του φάσματος. Επιπρόσθετα, εάν ο κυματάριθος είναι αρκούντως μικρός, συμπεραίνουμε ότι τα αντίστοιχα ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων δεν αποτελούν πλήρες σύστημα στον χώρο λύσεων αφού δεν σχηματίζουν βάση Riesz. Ακολούθως, ορίζουμε ένα βοηθητικό φασματικό πρόβλημα το οποίο μας προμηθεύει με μια ορθοκανονική βάση, σε αντίθεση με το αρχικό πρόβλημα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τη βάση αυτή για να εφαρμόσουμε ένα φασματικό σχήμα Galerkin, το οποίο θα προσεγγίζει τις άγνωστες ιδιοτιμές. Κάτω από την προαναφερθείσα συνθήκη για τον κυματάριθο, αποδεικνύουμε ότι το διακριτό σχήμα Galerkin συγκλίνει στις άγνωστες ιδιοτιμές. Τέλος, για την ειδική περίπτωση όπου το χωρίο είναι ο μοναδιαίος δίσκος, παρουσιάζουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου τα οποία επαληθεύουμε, χρησιμοποιώντας αναλυτικά υπολογισμένες ιδιοτιμές.

Στην ειδική περίπτωση ενός τρισδιάστατου, σφαιρικά συμμετρικού δείκτη διάθλασης παρουσιάζουμε μια εναλλακτική απόδειξη για την ύπαρξη του φάσματος, αξιοποιώντας ασυμπτωτικές εκφράσεις για τις αντίστοιχες χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Επιπλέον, θέτουμε το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα και δείχνουμε ότι η γνώση του φάσματος μπορεί να προσδιορίσει με μοναδικό τρόπο μια ακολουθία πηλίκων από συνοριακά δεδομένα Cauchy. Τα πηλίκα αυτά, κάτω από την υπόθεση ότι ο κυματάριθος δεν αποτελεί ιδιοτιμή Dirichlet, χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για την απόδειξη ενός θεωρήματος μοναδικότητας για την ανακατασκευή ενός $C[0, 1]$ δείκτη διάθλασης.

Acknowledgements

This endeavour would not have been possible without the guidance of my thesis supervisor, Drossos Gintides, who has motivated me to study an interesting and important subject in Mathematics. His support and our conversations were of paramount significance to the completion of this thesis. I am deeply grateful to my friend and colleague Nikos Pallikarakis, who not only contributed to the research for this doctoral thesis, but was also always eager to help me during this challenging period of my life. I would also like to express my appreciation for my professors Ioannes Sarantopoulos, Sotirios Karanasios, Kiriakie Kiriaki, Antonios Charalambopoulos and Michael Loulakis who inspired me to follow this path. Furthermore, i could not forget to thank my colleague Sotirios Giogiakas from the Department of Mathematics, not only for supporting me but also about our discussions about Math and Research. Finally, i would like to thank my family and friends that were always there for me when i needed them. I dedicate this thesis to them.

Contents

| | |
|---|-----------|
| Abstract | 5 |
| Περίληψη | 7 |
| Acknowledgements | 9 |
| 1. Introduction | 13 |
| 1.1. Scattering problems in acoustics | 14 |
| 1.2. The classic transmission eigenvalue problem | 16 |
| 1.3. The inverse classic transmission eigenvalue problem | 18 |
| 1.4. The introduction of modified scattering problems | 20 |
| 1.5. Outline of the thesis | 20 |
| 2. Modified transmission eigenvalue problems | 23 |
| 2.1. The Stekloff modification | 24 |
| 2.2. An artificial metamaterial background modification | 26 |
| 3. A variational approach to the direct spectral problem | 31 |
| 3.1. Existence of a discrete spectrum | 32 |
| 3.2. An equivalent formulation for a coercive and a compact operator | 36 |
| 4. A non completeness property for the eigenfunctions in the solution space $\mathcal{H}(D_b)$ | 41 |
| 4.1. Are the eigenfunction pairs a Riesz basis in $\mathcal{H}(D_b)$? | 42 |
| 4.2. Selection of a Riesz basis that involves the eigenfunction system | 45 |
| 5. Construction of an orthonormal basis for the solution space | 47 |
| 5.1. An auxiliary eigenvalue problem | 48 |
| 5.2. An analytic approach for the orthonormal basis construction in a spherical geometry | 53 |
| 5.3. An analytic approach for the orthonormal basis construction in an arbitrary geometry | 55 |
| 6. A spectral Galerkin method | 59 |
| 6.1. Approximating the eigenvalues using a spectral Galerkin scheme | 60 |
| 6.2. Numerical results for the modified transmission eigenvalue problem - constant refractive index | 64 |
| 6.3. Numerical results for the modified transmission eigenvalue problem - piecewise constant refractive index | 68 |

| | |
|---|------------|
| 7. The direct and inverse spectral problem for the case of a spherically symmetric refractive index | 71 |
| 7.1. Existence of modified transmission eigenvalues for the spherically symmetric domain | 72 |
| 7.1.1. The case $l = 0$ | 73 |
| 7.1.2. The case $l \geq 1$ | 74 |
| 7.2. Uniqueness for the inverse spectral problem | 78 |
| 7.2.1. A uniqueness result for boundary Cauchy data | 78 |
| 7.2.2. A uniqueness result for boundary Cauchy data with lesser requirements on knowledge of the spectrum | 82 |
| 7.2.3. The uniqueness theorem for modified transmission eigenvalues | 85 |
| A. Appendix | 89 |
| A.1. Variational formulation | 89 |
| A.2. Galerkin scheme | 93 |
| List of Figures | 99 |
| List of Tables | 101 |
| Bibliography | 103 |

1. Introduction

In this introductory chapter we present some basic scattering problems that arise in acoustic theory and their properties. We focus on the scattering problem for inhomogeneous media and how it leads to the classic transmission eigenvalue problem. For the corresponding direct spectral problem, we discuss the main results from bibliography, regarding discreteness and existence of the spectrum. On the other hand, for the inverse spectral problem, we present state of the art uniqueness results for the reconstruction of a spherically symmetric refractive index from classic transmission eigenvalues. We emphasize on the significance of the classic transmission eigenvalue problem in inverse scattering theory in general and explain the motivations behind introducing modified transmission problems. Finally, we provide with an outline of the thesis.

Contents

| | |
|--|----|
| 1.1. Scattering problems in acoustics | 14 |
| 1.2. The classic transmission eigenvalue problem | 16 |
| 1.3. The inverse classic transmission eigenvalue problem | 18 |
| 1.4. The introduction of modified scattering problems | 20 |
| 1.5. Outline of the thesis | 20 |

1.1. Scattering problems in acoustics

Scattering theory is a subject with important applications in modern science, such as atomic and nuclear physics, the study of solid state systems and computerized tomography. It is concerned with the interaction between an incident particle or wave and a medium, the so called scatterer. More specifically, a scattering phenomenon is usually described by a total field u , that is viewed as the sum of the incident field u^i and a scattered field u^s . Then, the *direct scattering problem* can be defined as finding u^s , with an a priori knowledge of u^i and the differential equation that describes the phenomenon. It is also possible to define the *inverse scattering problem*, that is to determine either the material properties or the shape of the scatterer, given a knowledge of the *far field pattern* of u^s . In mathematical terms, the first is possible by recovering the coefficients of the differential equation and the latter, by reconstructing the domain on which the equation is defined. For the purposes of this thesis, we confine to scattering problems that arise in acoustic theory.

Materials showcase varying properties while interacting with acoustic waves. As an example, we consider the scattering problem for a homogeneous and impenetrable obstacle D . The simpler mathematical model that can describe such a phenomenon is to find a total field u , such that

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 / \overline{D}, \quad (1.1)$$

$$u(x) = u^i(x) + u^s(x), \quad (1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial D, \quad (1.3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i k u^s \right) = 0, \quad (1.4)$$

where k is the wavenumber, d is the direction of the propagated wave, D is a bounded subset of \mathbb{R}^3 , $u^i(x) = e^{ikx \cdot d}$ is a planar incident wave and u satisfies a *Dirichlet boundary condition* (1.3) and the *Sommerfeld radiation condition* (1.4). In literature, this problem is referred to as scattering from a *sound-soft obstacle*. Using Green's theorem, the radiation condition (1.4) and Riesz-Fredholm theory for integral equations of the second kind, it is possible to show (see for example [29]) that this exterior Dirichlet problem has a unique solution, for smooth boundaries ∂D . One could also consider the scattering problem for a *sound-hard obstacle*, that corresponds instead to the Neumann boundary condition $\partial u / \partial \nu = 0$, or even an *impedance-type condition*, that is

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + ik\lambda u = 0 \quad \text{on } \partial D$$

where λ is a positive constant and ν is the unit outward normal to ∂D .

For the case of an inhomogeneous and penetrable medium, we can also consider the following scattering problem as an example. We seek a total field u , such that

$$\Delta u + k^2 \eta(x) u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3, \quad (1.5)$$

$$u(x) = u^i(x) + u^s(x), \quad (1.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i k u^s \right) = 0, \quad (1.7)$$

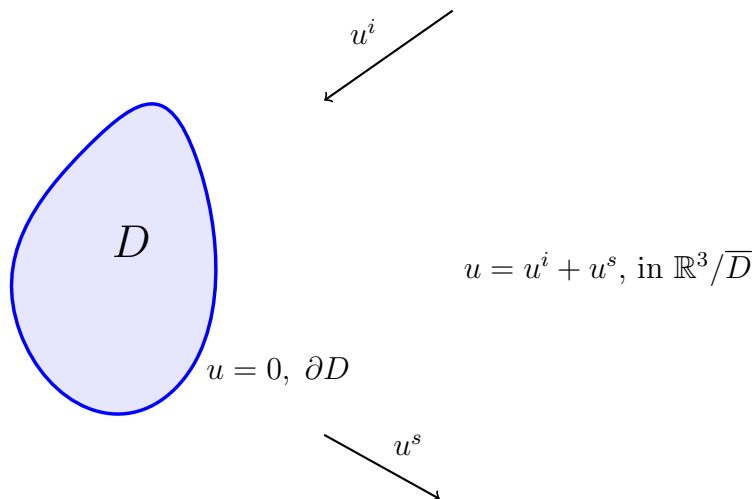


Figure 1.1.: Scattering from a non penetrable, sound soft obstacle D .

where η is the refractive index. If the medium is non-absorbing, then the refractive index is a real function given by the ratio $\eta(x) := c_0^2/c^2$, where c_0 and c are the corresponding sound speeds in the homogeneous host medium and in the inhomogeneous medium. We also assume that the contrast $m := 1 - \eta$ has compact support. It can be shown, that problem (1.5)-(1.7) is equivalent to a Lippmann-Schwinger integral equation, with a weakly singular kernel. Utilizing the Riesz-Fredholm theory and a unique continuation principle for solutions of (1.5), it was proven that for all positive wavenumbers k , smooth boundaries ∂D and piecewise continuous refractive indices η , there exists a unique solution to the scattering problem (1.5)-(1.7), that depends continuously on the incident wave u^i (see for example [29]).

An important quantity in the scattering problems mentioned above is the *far field pattern* of the scattered wave. It can be shown that, in both cases, u^s has the following asymptotic behaviour

$$u^s(x) = \frac{e^{ikr}}{r} u_\infty(\hat{x}, d) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r = |x| \rightarrow \infty \quad (1.8)$$

where $\hat{x} = x/|x|$ and u_∞ is the far field pattern. Its significance lies in the fact that in inverse scattering theory, one usually attempts to reconstruct η or D from a knowledge of the far field pattern as a function on the unit sphere. Moreover, it is possible to conduct experiments that yield measurements for u_∞ , which are then used to solve inverse scattering problems [29, 36, 62, 68, 70, 73].

Specifically in the case of the inhomogeneous scattering problem (1.5)-(1.7), the scattered wave has the form

$$u^s(x) = -k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y) m(y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

where $\Phi(x, y)$ is the fundamental solution of the Helmholtz equation. The far field pattern is given by

$$u_\infty(\hat{x}) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik \hat{x} \cdot y} m(y) u(y) dy \quad (1.9)$$

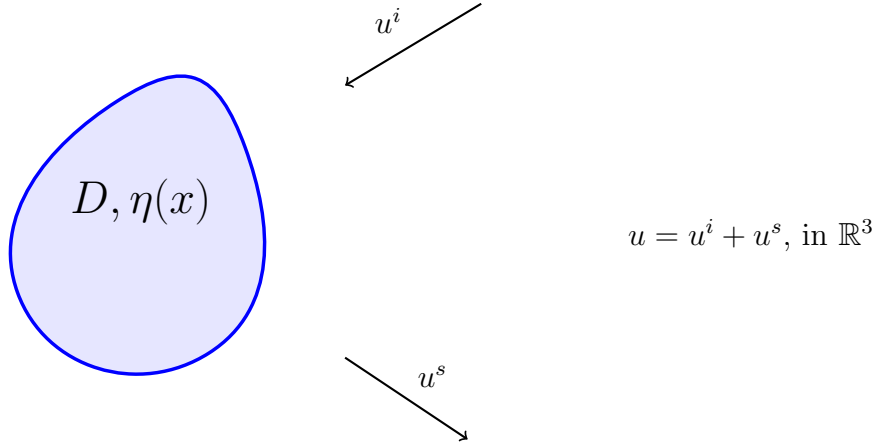


Figure 1.2.: Scattering from a penetrable inhomogeneous medium $(D, \eta(x))$.

If u^i is an incident plane wave, that is $u^i(x) = e^{ikx \cdot d}$, then we express the dependence of the far field on the the incident direction d by writing $u_\infty(\hat{x}) = u_\infty(\hat{x}, d)$. The *far field operator* $F : L^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^2)$ is defined as

$$(Fg)(\hat{x}) := \int_{\mathbb{S}^2} u_\infty(\hat{x}, d)g(d)ds(d), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2 \quad (1.10)$$

The far field operator can be viewed as a superposition of far fields corresponding to the incident waves $e^{ikx \cdot d}$. A Herglotz wave function v_g , defined as

$$v_g(x) := \int_{\mathbb{S}^2} e^{ikx \cdot d}g(d)ds(d), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (1.11)$$

can then be seen with the same logic as a superposition of the incident plane waves.

1.2. The classic transmission eigenvalue problem

The subject of completeness for far field patterns as functions of \hat{x} on $L^2(\mathbb{S}^2)$, the space of square integrable functions on the unit sphere, was investigated thoroughly in the last decades, as it is tied to the development of methods that solve inverse scattering problems. In the case of obstacle scattering from a non-penetrable object, it was proved that far field patterns corresponding to all incident plane waves, are dense in $L^2(\mathbb{S}^2)$, as long as k^2 is not a *Dirichlet eigenvalue* [28].

Note 1.2.1 Any values of k^2 for which the problem

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u} &= 0 & \text{in } D, \\ \tilde{u} &= 0 & \text{on } \partial D \end{aligned}$$

possesses non trivial solutions are called *Dirichlet eigenvalues*.

The association of far field completeness with an *interior eigenvalue problem* can also be established for inhomogeneous media. Let $\{d_n : n = 1, 2, \dots\}$ be a countable and dense set of vectors on the unit sphere \mathbb{S}^2 of \mathbb{R}^3 and denote by $\mathcal{F} := \{u_\infty(\cdot, d_n) : n = 1, 2, \dots\}$ the corresponding family of far field patterns. Then, for a connected domain D that contains the origin, alongside a C^2 boundary ∂D , the following result holds

1.2. The classic transmission eigenvalue problem

Theorem 1.2.2 ([29, Theorem 8.9]) *The orthogonal complement of \mathcal{F} in $L^2(\mathbb{S}^2)$ consists of the conjugates of all $g \in L^2(\mathbb{S}^2)$, for which exist a $w \in H^2(D)$ and a Herglotz wave function*

$$v(x) = \int_{\mathbb{S}^2} e^{-ikx \cdot d} g(d) ds(d), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (1.12)$$

such that the pair w, v is a solution to the interior problem

$$\Delta w + k^2 \eta w = 0 \quad \text{in } D, \quad (1.13)$$

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{in } D, \quad (1.14)$$

$$w = v \quad \text{on } \partial D, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} \quad \text{on } D \quad (1.16)$$

The above result considers only special solutions of (1.13)-(1.16), motivating the use of a more general definition:

Definition 1.2.3 *All values of the wavenumber k for which there exist non trivial solution pairs w, v to (1.13)-(1.16) are called **classic transmission eigenvalues**.*

An important property of the above, is that in the case of absorbing media, that is if $\Im(\eta) \neq 0$, $k > 0$ is never an eigenvalue:

Theorem 1.2.4 ([29, Theorem 8.12]) *Suppose that $\Im(\eta) \neq 0$. Then, the set of far field patterns \mathcal{F} is complete in $L^2(\mathbb{S}^2)$ for all $k > 0$.*

The classic transmission eigenvalue problem attracted the attention of many researchers over the years, because it arises as an important problem in inverse scattering theory. For the purposes of this thesis we shall have a brief discussion on the more significant results in literature. It was firstly introduced by Kirsch in [57] and some years later, Colton and Monk [33] were able to utilize it in order to solve the inverse scattering problem for inhomogeneous media. Furthermore, Colton and Kirsch [30] developed the *Linear Sampling Method*, a process that is able to reconstruct the shape of an inhomogeneous scatterer, provided that $k > 0$ is not a classic transmission eigenvalue. The latter raised the question of cardinality for the spectrum, since it is on those exact frequency values that the sampling method can fail. Since classic transmission eigenvalues correspond to a spectral problem that is neither self adjoint nor non-elliptic, it became evident that discreteness and existence were not trivial issues. That is because classical tools that can be used to determine properties of eigenvalue problems, such as the *Fredholm alternative*, or the *Hilbert-Schmidt Theorem*, could not be implemented, at least in a straightforward way, and new techniques had to be developed. Two decades later, new results [10, 12, 23] lead to the conclusion that classic transmission eigenvalues hold information about the material properties of the inhomogeneous scatterer. However, a crucial question remained unanswered. Do these eigenvalues actually exist, for inhomogeneous media with general shape? The implementation of Sampling Methods on objects with differing geometries was a strong indication, since they fail only if the wavenumber is an eigenvalue. A lot of results were published in this direction [14, 18, 58, 72], but the issue was completely resolved by Cakoni, Gintides and Haddar in [15], with the only assumption that the contrast $m = 1 - \eta$ does not change sign:

1. Introduction

Theorem 1.2.5 ([15, Theorem 2.5]) *Let D be a bounded, simply connected domain with piecewise smooth boundary ∂D . We define $\eta^* := \sup \eta$, $\eta_* := \inf \eta$ and assume that the refractive index $\eta \in \mathbb{L}^\infty(D)$ satisfies one of the following:*

$$1 + A \leq \eta_* \leq \eta(x) \leq \eta^* < +\infty$$

or

$$0 < \eta_* \leq \eta(x) \leq \eta^* < 1 - B$$

for some constants $A > 0$ and $B > 0$. Then, there exists an infinite and discrete set of real classic transmission eigenvalues, with $+\infty$ as the only accumulation point.

Finally, there exists a plethora of results in literature for the numerical investigation of the classic transmission eigenvalue problem. Most of them are utilizing finite element methods [21, 24, 34, 52, 55, 56, 64, 77, 80], however there are also applications of spectral Galerkin methods [2, 3, 41, 42, 71], integral methods [20, 50, 53, 59, 63, 82] and fundamental solution methods [60, 61]. For the corresponding eigenvalue problem that occurs for the Maxwell equation, we refer the reader to [54, 67, 78, 83].

1.3. The inverse classic transmission eigenvalue problem

In contrast to the inverse scattering problem, that requires having far field measurements, the *inverse classic transmission eigenvalue problem* attempts to reconstruct the unknown refractive index $\eta(x)$, assuming an a priori knowledge of eigenvalues and corresponding eigenfunctions. From a practical standpoint, since far field data can be utilized to detect the real subset of eigenvalues [8], the development of methods to solve the *inverse spectral problem* for transmission eigenvalues is central in inverse scattering theory.

Since the complexity of the inverse problem varies with the geometry of the scatterer, research initially focused on simpler shapes that allow for the separation of variables technique. Hence, it was possible to have analytical representations for eigenfunction solutions to (1.13)-(1.16). In particular, in the case of a spherically stratified medium ($D = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \leq R\}$), the eigenfunctions take the form

$$w_l^m(x) = a_l^m \frac{y_l(r)}{r} Y_l^m(\hat{x}) \quad (1.17)$$

and

$$v_l^m(x) = b_l^m j_l(kr) Y_l^m(\hat{x}), \quad (1.18)$$

where j_l^m are the *spherical Bessel functions* of order l and y_l is a solution to the ordinary differential equation

$$y_l''(r) + \left(k^2 \eta(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) y_l(r) = 0 \quad (1.19)$$

1.4. The inverse classic transmission eigenvalue problem

Using the transmission boundary conditions, it quickly follows that classic transmission eigenvalues are the roots of the *characteristic function*

$$\det \begin{pmatrix} \left. \frac{y_l(r)}{r} \right|_{r=R} & \left. -j_l(kr) \right|_{r=R} \\ \left. \frac{d}{dr} \left(\frac{y_l(r)}{r} \right) \right|_{r=R} & \left. -\frac{d}{dr} j_l(kr) \right|_{r=R} \end{pmatrix} = 0, \quad (1.20)$$

for $l = 0, 1, 2, \dots$. Using asymptotic expressions, it was shown by Colton and Päivärinta [35] in 1990 that the roots of (1.20), and thus, classic transmission eigenvalues, are in fact infinite. We already mentioned that for more general domains, the problem of existence remained open for much longer. A few years later, McLaughlin and Polyakov [66] were the first to prove uniqueness for the inverse spectral problem, assuming knowledge of the *special transmission eigenvalues*, that is the subset of the spectrum corresponding to the spherically symmetric eigenfunctions, and partial knowledge for the index of refraction. More recently, the following uniqueness theorem was established by Cakoni, Gintides and Colton for $C^2[0, \infty)$ refractive indices [13]:

Theorem 1.3.1 ([13, Theorem 2.1]) *Suppose that $\eta(0)$ is known. Then, the index of refraction can be uniquely recovered by the classic transmission eigenvalues.*

The proof relies upon a Goursat representation of y_l from [31], the implementation of Hadamard's factorization theorem to the entire, characteristic functions (1.20) and the use of Muntz's Theorem [39]. In the same work, it was shown that for a sufficiently small and constant index η , complex eigenvalues must also exist.

Soon after, Aktosun, Gintides and Papanikolaou [1] established that the special transmission eigenvalues, together with their multiplicities as roots of the characteristic function can be used to recover the refractive index, under less significant restrictions than in [13].

Assumption 1.3.2 *Suppose that $\eta(r) > 0$, $r \in (0, R)$, $\eta \in C^1(0, R)$ and $\eta'' \in L^2(0, R)$.*

Theorem 1.3.3 ([1, Theorem 3.2]) *Let $A := \int_0^R \sqrt{\eta(r)} dr$ and assume that for the characteristic function that corresponds to $l = 0$, there exists at least one function η that satisfies Assumption 1.3.2 and that $A < R$. Then, η is uniquely determined by the knowledge of the special transmission eigenvalues together with their multiplicities as roots of the characteristic function for $l = 0$.*

The proof of the above relies on Hadamard's factorization theorem for entire complex functions, asymptotic expressions for the characteristic function and there is a correlation with a non-standard Sturm-Liouville problem. In the same paper, a similar version of the above result is also proven for the case $A = R$ and there is a discussion on why the techniques used are not sufficient to cover the case of $A > R$.

1.4. The introduction of modified scattering problems

As we have previously mentioned, classic transmission eigenvalues play an important role in applications of inverse scattering theory. One important example is that they can be utilized in non-destructive testing of materials [19, 23, 48]. Unfortunately, there are some limitations to their use. For example, far field measurements can only be used to detect real eigenvalues. Hence for absorbing media, sampling method techniques cannot measure the classic transmission eigenvalues. Moreover, since the spectrum is dependant on the unknown physical properties of the scatterer, the frequency range that will provide successful measurements is not known beforehand. To compensate, multifrequency scattering data have to be collected and thus, the costs of conducting the required experiments is highly increased.

As of recent, a new category of modified transmission problems [4, 11, 26] is considered, that can bypass the drawbacks in non-destructive testing. They are centered around the idea of introducing a new parameter that has the role of the "signature" eigenvalue, while the wavenumber remains fixed. In this new approach, the notion of the classic far field operator is replaced by a *modified far field operator*, that is injective as long as the corresponding *modified eigenvalues* are avoided. A notable example is a *Stekloff-type modification*, whose spectrum can be measured by scattering data and may be utilized in identifying material flaws of inhomogeneous media [11]. Another example is the modified transmission eigenvalue problem for an *artificial metamaterial*. For the latter, the corresponding eigenvalues can be also be determined from far field measurements, by using a *Generalized Sampling Method* [4]. In the following chapter, we will discuss these two modifications in more detail.

1.5. Outline of the thesis

In this thesis we consider eigenvalue problems that arise in scattering theory and are associated with a modified far field operator. In the second chapter we give emphasis on two specific modifications, the first produces a Stekloff-type eigenvalue problem and the second, an artificial metamaterial eigenvalue problem. For the latter we investigate both the direct and inverse problems, from a theoretical and numerical standpoint.

Using a variational formulation in the appropriate solution space, we show that the modified transmission eigenvalue problem for an artificial metamaterial is self-adjoint as long as the refractive index is a real function. It also has the analytic Fredholm property, which secures discreteness for the spectrum. Moreover, equivalence with a generalized eigenvalue problem for a self-adjoint and compact operator with a trivial nullspace guarantees existence. Additionally, if the wavenumber is small enough, a coercivity property can be inferred, revealing more properties for the spectrum. To be more specific, the *modified transmission eigenvalues* can be ordered in a decreasing sequence, the first eigenvalue is always positive and their only accumulation point is at $-\infty$. They also have a Courant-Fischer characterization, with the first one being a supremum of the corresponding Rayleigh quotient over the solution space. The knowledge of the first eigenvalue is shown to be sufficient for the unique determination of a constant refractive index.

The coercivity constraint, however, has more consequences over this eigenvalue problem. It can be proven that the equivalent generalized eigenvalue problem for a

coercive and a compact operator does not provide with an orthonormal basis for the solution space. This is due to the compact operator having an infinite-dimensional nullspace and hence, the eigenfunction pairs are not complete. In fact, they span a proper, closed subspace. The proof suggests that one way to obtain an orthonormal basis, is to consider not only the eigenfunctions, but also a basis for the nullspace of the compact operator.

One of our goals is to study the direct spectral problem numerically, by implementing a Galerkin spectral method. To this end, an orthonormal basis for the solution space is required. The previously mentioned procedure provides a way to obtain a basis, but is not practical since the spaces involved are difficult to analyze. An alternative way to solve this problem is the introduction of an auxiliary eigenvalue problem with the same solution space. It is similar with the modified transmission eigenvalue problem for an artificial metamaterial, but now the spectral parameter appears in both differential equations. As a result, it is not only self-adjoint, but the corresponding eigenelements also have the completeness property. Hence, it can provide us with the desired basis.

Remarkably, we later find out that the aforementioned auxiliary eigenvalue problem is not entirely new, since the spectrum is composed of the Dirichlet and Neumann eigenvalues that correspond to the domain D_b . Also, the eigenfunction pairs can be uniquely described by sums of solutions to the Dirichlet and Neumann problems. That is, the auxiliary eigenvalues and corresponding eigenfunction pairs can be uniquely determined with an a priori knowledge of the Dirichlet and Neumann spectrum.

Afterwards, we define a spectral Galerkin scheme to solve the direct spectral problem numerically. By using the orthonormal basis as test elements in the variational formulation, we derive a discrete analogue of the initial eigenvalue problem in the form of a generalized matrix eigenvalue problem. Under the coercivity constraint assumption for the wavenumber, we are able to prove that the generalized matrix eigenvalues converge to the modified transmission eigenvalues, if the dimension goes to $+\infty$.

In the special case when the domain D is a unit disk, we apply the separation of variables technique to obtain the Dirichlet-Neumann basis mentioned earlier. Then, by using it as test functions, and assuming that the refractive index is constant, we are able to calculate the matrices involved in the discrete Galerkin scheme. Solving the generalized eigenvalue problem yields approximations for the modified transmission eigenvalues that we also verify by comparison to analytically computed values of the spectrum. The latter is accomplished by solving the corresponding characteristic functions. Also, as a preliminary approach to the inverse spectral problem, we implemented the Galerkin method for various constant refractive indices and created a database with the corresponding spectra. Then, with the knowledge of the spectrum that corresponds to an unknown, constant refractive index we minimized the error between the known spectrum and computed eigenvalues to obtain a reconstruction for the refractive index. The same procedure was also applied to piecewise constant refractive indices and our reconstruction were improved when the database was supplemented with data from multiple wavenumbers.

For the spherically symmetric case of a refractive index in 3-D, we also prove existence of the spectrum, utilizing asymptotic expressions of the characteristic functions and analytical properties for the spherical Bessel functions. We also investigate

1. Introduction

the inverse spectral problem, asking the question on whether the spectrum carries information about an unknown refractive index. Assuming a smallness condition on the wavenumber, we firstly show by means of Hadamard's factorization theorem, that the knowledge of modified transmission eigenvalues corresponding to each characteristic function can uniquely determine the fraction of boundary Cauchy data. Additionally, the previous result can also be proven with less requirements on knowledge of the spectrum. More specifically, only one eigenvalue corresponding to each characteristic function is enough to uniquely recover the boundary Cauchy data. Using a Dirichlet-to-Neumann mapping property, we finally prove that the refractive index can be uniquely reconstructed with an a priori knowledge of the boundary Cauchy data.

Finally, in the Appendix we include the proving techniques for some useful results regarding technical issues in the variational formulation of an eigenvalue problem and also the implementation and convergence of a spectral Galerkin scheme.

Some of the results presented in this thesis are included in the following papers:

- Gintides D., Pallikarakis N. and Stratouras K. (2021), On the modified transmission eigenvalue problem with an artificial metamaterial background, *Res. Math. Sci.* **8** 40
- Gintides D., Pallikarakis N. and Stratouras K. (2022), Uniqueness of a spherically symmetric refractive index from modified transmission eigenvalues, *Inverse Problems*, **38** 085010

and were announced in the international conference:

- Gintides D., Pallikarakis N. and Stratouras K. (2021), A computational approach for the inverse problem of reconstructing a spherically symmetric refractive index using modified transmission eigenvalues, *2021 XXXIVth General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science (URSI GASS)*

2. Modified transmission eigenvalue problems

In this chapter, we present two examples of scattering problems that are associated with a modified far field operator and lead to modified transmission eigenvalue problems. The first one corresponds to a Stekloff-type eigenvalue problem and the second one, to an artificial metamaterial-type modification.

Contents

| | |
|---|----|
| 2.1. The Stekloff modification | 24 |
| 2.2. An artificial metamaterial background modification | 26 |

2.1. The Stekloff modification

Let B be a ball centered at the origin, that either satisfies $D \subset B$ or $D = B$ and consider a function $h \in C^2(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}) \cap C^1(\mathbb{R}^m \setminus B)$ that solves the *impedance scattering problem*

$$\begin{aligned} \Delta h + k^2 h &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}, \\ h(x) &= e^{ikx \cdot d} + h^s(x), \\ \frac{\partial h}{\partial \nu} + \lambda h &= 0 \text{ on } \partial B, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial h^s}{\partial r} - ikh^s \right) &= 0 \text{ uniformly with respect to } \frac{x}{|x|} \end{aligned} \quad (2.1)$$

where ν is the outward unit normal to B , λ is constant such that $\Im(\lambda) \geq 0$. The asymptotic behaviour of the scattered wave is given by

$$h^s(x) = \frac{\exp(ikr)}{r^{\frac{m-1}{2}}} h_\infty(\hat{x}, d) + O\left(\frac{1}{r^{\frac{m+1}{2}}}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

Using Rellich's Lemma [29, Theorem 2.13], it can be shown that (2.1) has at most one solution, while existence is a consequence of potential theory [29, Theorem 3.13].

Now, suppose that w is a solution of the boundary value problem

$$\begin{aligned} \Delta w + k^2 \eta(x)w &= 0 \text{ in } B, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} + \lambda w &= 0 \text{ on } \partial B. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Definition 2.1.1 *For a fixed wavenumber k , all values of the spectral parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ for which there exists a non-trivial solution $w \in H^1(B)$ to (2.2) are called Stekloff eigenvalues.*

To analyze this spectral problem, authors in [11] used a variational approach. Suppose that λ is a Stekloff eigenvalue and $w \in H^1(B)$ is the corresponding eigenfunction. Then, the following equation is satisfied

$$(\nabla w, \nabla \xi) - k^2(\eta w, \xi) = -\lambda \langle w, \xi \rangle \quad \forall \xi \in H^1(B)$$

where

$$(f, g) := \int_B f \bar{g} dA \quad \text{and} \quad \langle f, g \rangle := \int_{\partial B} f \bar{g} ds$$

If we furthermore assume that k^2 is not a Neumann eigenvalue for the Laplace operator on B , it is possible to define the Neumann-to-Dirichlet map $T : L^2(\partial B) \rightarrow L^2(\partial B)$ as follows:

If $\mu \in L^2(\partial B)$ and $v_\mu \in H^1(B)$ is defined to be the unique solution of

$$(\nabla v_\mu, \nabla \xi) - k^2(\eta v_\mu, \xi) = \langle v_\mu, \xi \rangle \quad \forall \xi \in H^1(B),$$

then we set $T\mu := v_\mu|_{\partial B}$. As a consequence, $\mu \in L^2(\partial B)$ is a Stekloff eigenfunction with the eigenvalue λ if and only if it is a non-trivial solution of

$$-\lambda T\mu = \mu$$

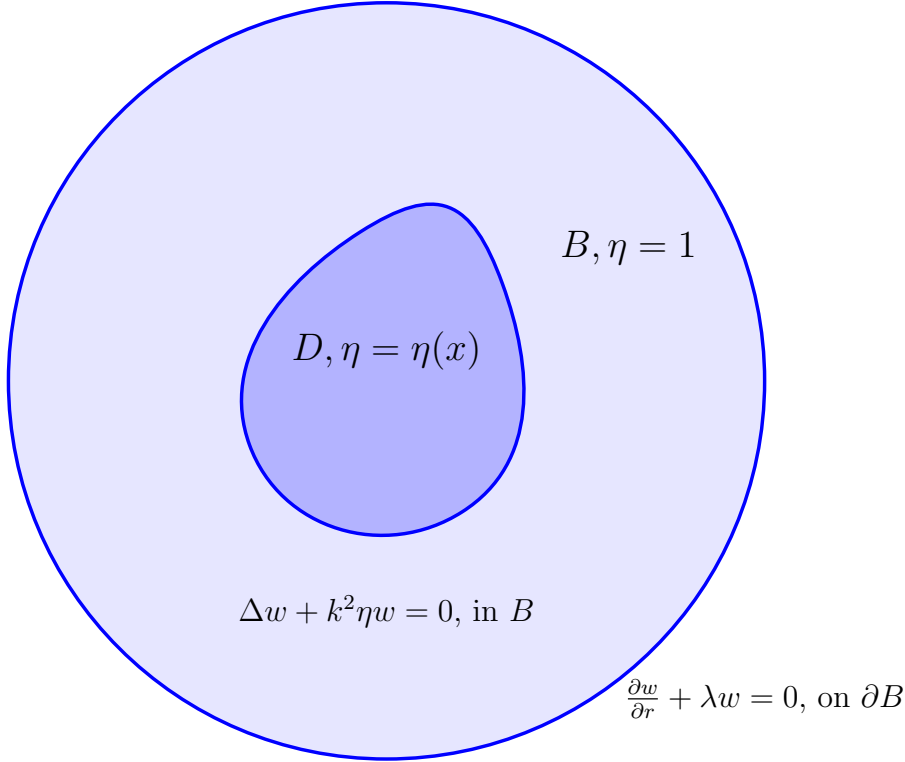


Figure 2.1.: The Stekloff eigenvalue problem

Since $T\mu \in H^{1/2}(B)$ and the compact embedding of $H^{1/2}(\partial B)$ into $L^2(\partial B)$, T is compact. For a real refractive index, we notice that T is also self-adjoint. Thus, discreteness and existence are secured by the Hilbert-Schmidt theorem.

In the case of absorbing media, it is also possible to show existence of the spectrum and completeness of the corresponding eigenvectors in the solution space $H^1(B)$, by utilizing Agmon's theory for Hilbert-Schmidt operators (see [11] for more details).

The scattering problem (2.1) and the Stekloff eigenvalue problem (2.2) are connected through the modified far field operator $\mathcal{F} : L^2(S) \rightarrow L^2(S)$, defined by

$$(\mathcal{F}g)(\hat{x}) := \int_S [u_\infty(\hat{x}, d) - h_\infty(\hat{x}, d)] g(d) ds(d)$$

It is injective as long as λ is not a Stekloff eigenvalue with eigenfunction of the form $w = v_g + w^s(x)$, where v_g is a Herglotz wavefunction and w^s is the scattered wave corresponding to v_g and the inhomogeneity $\eta(x)$ [29, Theorem 10.9], i.e.

$$\begin{aligned} \Delta w + k^2 \eta w &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}, \\ w(x) &= v_g(x) + w^s(x), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial h^s}{\partial r} - ikh^s \right) &= 0 \text{ uniformly with respect to } \frac{x}{|x|} \end{aligned} \quad (2.3)$$

We state some results from [11], indicating that for a fixed wavenumber k , Stekloff eigenvalues can be calculated from far field measurements. The main idea is to solve the modified far field equation

$$\mathcal{F}g = \Phi_\infty(\hat{x}, z)$$

2. Modified transmission eigenvalue problems

in an appropriate way, where $g = g_z \in L^2(S)$. Firstly, for $f \in H^{-1/2}(\partial B)$, we consider the auxiliary problem

$$\begin{aligned} \Delta w + k^2 \eta(x) w &= 0 \text{ in } B, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} + \lambda w &= f \text{ on } \partial B \end{aligned} \quad (2.4)$$

Lemma 2.1.2 ([11, Lemma 3.1]) *Assume that λ is not a Stekloff eigenvalue. Then, (2.4) has a unique solution $w = w^i + w^s$, where $w^i \in H^1(B)$ solves the Helmholtz equation in B and $w^s \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^m)$ is a radiating field.*

The above is a consequence of (2.4) satisfying the Fredholm alternative and the application of Green's representation formula to the solution w .

We set $f := f_z = \frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial \nu} + \lambda \Phi(\cdot, z)$ and let w_z be the corresponding solution of (2.4), with decomposition $w_z = w_z^i + w^s$. Then, Lemma 2.1.2 can be utilized to prove the following:

Theorem 2.1.3 ([11, Theorem 3.2]) *Assume that λ is not a Stekloff eigenvalue and let $z \in D$. Then, for every $\epsilon > 0$, there exists a $g_\epsilon^z \in L^2(S)$ such that*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{F}g_\epsilon^z - \Phi_\infty(\cdot, z)\|_{L^2(S)} = 0 \quad (2.5)$$

such that $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|v_{g_\epsilon^z} - w_z^i\|_{H^1(B)} = 0$ and hence $\|v_{g_\epsilon^z}\|_{H^1(B)}$ is bounded as $\epsilon \rightarrow 0$, where $v_{g_\epsilon^z}$ is the Herglotz wavefunction with kernel g_ϵ^z .

Theorem 2.1.4 ([11, Theorem 3.3]) *Assume that λ is a Stekloff eigenvalue and that $g_\epsilon^z \in L^2(S)$ satisfies (2.5). Then, $\|v_{g_\epsilon^z}\|_{H^1(B)}$ cannot be bounded as $\epsilon \rightarrow 0$, for almost every $z \in B_\rho$, where $B_\rho \subset D$ is an arbitrary ball of radius ρ .*

Remark 2.1.5 *The above results imply that for a fixed wavenumber k , it is possible to obtain the Stekloff eigenvalues from far field measurements. For numerical examples, we refer the reader to [11].*

2.2. An artificial metamaterial background modification

Let D_b be a bounded set with sufficiently smooth boundary ∂D_b and a connected complement in \mathbb{R}^m , so that $D \subset D_b$. Then, we consider the following scattering problem, corresponding to an inhomogeneity with support D_b and negative material properties:

$$\begin{aligned} \Delta u_b^s + k^2 u_b^s &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^m \setminus \overline{D_b}, \\ (-a)\Delta u_b + k^2 \lambda u_b &= 0 \text{ in } D_b \\ u_b - u_b^s &= u^i \text{ on } \partial D_b \\ (-a)\frac{\partial u_b}{\partial \nu} - \frac{\partial u_b^s}{\partial \nu} &= \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \text{ on } \partial D_b \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial u_b^s}{\partial r} - i k u_b^s \right) &= 0 \text{ uniformly w.r.t. } r = \frac{x}{|x|} \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2. An artificial metamaterial background modification

where $-a < 0$ is a fixed parameter such that $a \neq 1$ and the incident wave is given by $u^i = e^{ikx \cdot d}$. From [6], it is known that the scattering problem (2.6) is well posed as long as $\Im(\lambda) \geq 0$. The far field operator $F_b^\lambda : L^2 \rightarrow L^2$ is given by

$$(F_b^\lambda g)(\hat{x}) := \int_S u_b^\infty(\hat{x}, d) g(d) ds(d),$$

where $u_\infty(\hat{x}, d)$ denotes the far field of u_b^s and $F_b^\lambda g := u_{b,g}^\infty$ is the far field pattern of the radiating solution $u_{b,g}^s$, corresponding to the Herglotz incident wave $u^i := v_b$ with kernel g . The *modified far field operator* $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ is now defined to be the subtraction

$$\mathcal{F}g := Fg - F_b^\lambda g,$$

where F is the far field operator (1.10) corresponding to the physical background (η, D) and F_b^λ to the artificial, metamaterial background $(-a, \lambda, D_b)$.

Again, the injectivity of this modified far field operator gives rise to a new spectral problem. If $g \in N(\mathcal{F})$ and u_g denotes the solution of (1.5)-(1.7) in the case where the incident wave is the Herglotz wave function v_g , then from Rellich's Lemma and a unique continuation argument, we can conclude that $u_g = u_{b,g}$ in $\mathbb{R}^m \setminus D_b$. Therefore, by extending the refractive index $\eta = 1$ in $D_b \setminus \overline{D}$ and utilize the continuity of the Cauchy data for the fields u_g and $u_{b,g}$ across ∂D_b , we conclude that the pair of functions $w := u_{b,g}|_{D_b}$ and $v := u_g|_{D_b}$ satisfy the homogeneous set of equations

$$\begin{aligned} \Delta w + k^2 \eta(x) w &= 0 & \text{in } D_b, \\ -a \Delta v + \lambda k^2 v &= 0 & \text{in } D_b \\ w &= v & \text{on } \partial D_b, \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= -a \frac{\partial v}{\partial n} & \text{on } \partial D_b \end{aligned} \tag{2.7}$$

We now raise the question of injectivity for \mathcal{F} . Suppose that the above possesses only trivial solutions. Then, for any $g \in N(\mathcal{F})$, we have that $u_g|_{D_b} = 0$ and from the unique continuation principle, $u_g \equiv 0$. This is only possible if $u_{b,g}^s = -v_g$, which implies that the kernel g has to be trivial.

All values of $\lambda \in \mathbb{C}$ for which there exists non-trivial solutions $w, v \in H^1(D_b)$ are called *modified transmission eigenvalues* for the artificial metamaterial background. The spectral properties of this problem will be discussed thoroughly in the next chapter.

This new set of eigenvalues can be detected by using a *Generalized Sampling Method* and we state some basic results in this direction. For more details and the proving techniques, we refer the reader to [4].

We define the operator $\mathcal{H} : L^2(S) \rightarrow L^2(D_b)^m \times L^2(D_b)$ such that

$$\mathcal{H}g := (\nabla u_{b,g}|_{D_b}, u_{b,g}|_{D_b})$$

and also $\mathcal{G} : \overline{R(H)} \subset L^2(D_b)^m \times L^2(D_b) \rightarrow L^2(S)$ such that

$$\mathcal{G}(\phi, \psi) = w^\infty,$$

where w^∞ is defined to be the far field pattern of $w^s \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^m)$, and w^s is the radiating solution of

$$\Delta w^s + k^2 \eta w^s = \nabla \cdot (-a - I)\phi + k^2(\lambda - \eta)\psi \quad \text{in } \mathbb{R}^m$$

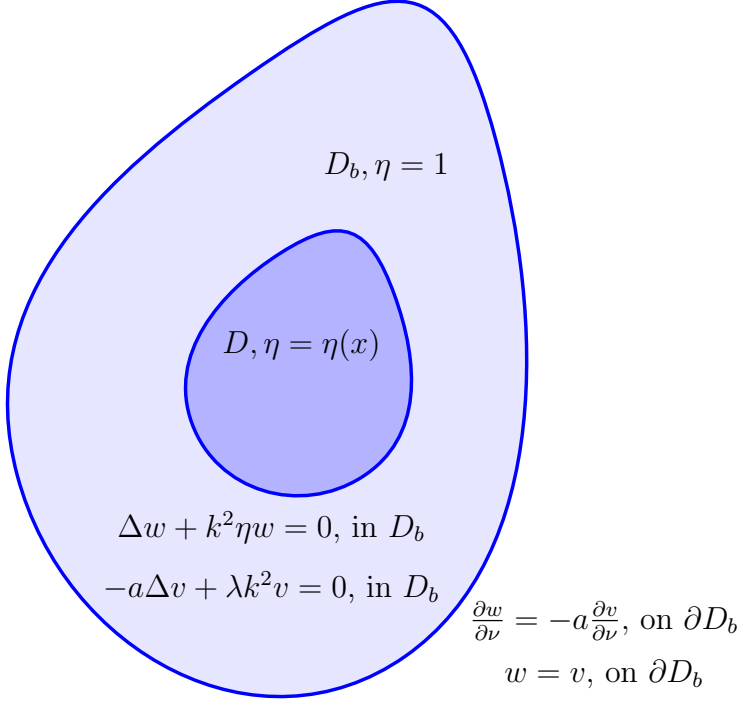


Figure 2.2.: The modified transmission eigenvalue problem for an artificial metamaterial background

Then, the modified far field operator can be factorized as $\mathcal{F} = \mathcal{G}\mathcal{H}$ and we have the following results:

Lemma 2.2.1 ([4, Lemma 6]) *Assume that λ is an eigenvalue for (2.7) and not an eigenvalue for the same homogeneous set of equations in the case when $\eta(x) = 1$. Then, the set of points z that satisfy $\Phi_z^\infty \in R(\mathcal{G})$ is nowhere dense in D_b .*

Theorem 2.2.2 ([4, Theorem 7]) *Let $\lambda \in \mathbb{C}$ and assume that the modified far field operator \mathcal{F} has dense range and that the assumptions of [4, Lemma 4] hold. Also, consider the functional*

$$J_\alpha(\Phi_z^\infty, g) := \alpha |(F_b^\lambda g, g)| + \|\mathcal{F}g - \Phi_z^\infty\|^2$$

and set $j_\alpha(\Phi_z^\infty) := \inf_g J_\alpha(\Phi_z^\infty, g)$. Let g_α^z be a minimizing sequence defined by

$$J_\alpha(\Phi_z^\infty, g_\alpha^z) \leq j_\alpha(\Phi_z^\infty) + C\alpha,$$

where $C > 0$ is a fixed constant. Then, λ is an eigenvalue of (2.7) if and only if the set of points for which $|(F_b^\lambda g_\alpha^z, g_\alpha^z)|$ is bounded as $\alpha \rightarrow 0$ is nowhere dense in D_b .

For the purposes of this thesis, we also introduce a more general variant of the eigenvalue problem (2.7),

$$\begin{aligned} \Delta w + k^2 \eta(x) w &= 0 & \text{in } D_b, \\ -a \Delta v + \lambda k^2 \eta_0(x) v &= 0 & \text{in } D_b \\ w &= v & \text{on } \partial D_b, \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= -a \frac{\partial v}{\partial n} & \text{on } \partial D_b, \end{aligned}$$

2.2. An artificial metamaterial background modification

where a "test" refractive index appears in the second differential equation. In the following chapters, we investigate both the direct and inverse spectral problems for this modification. With regard to our previous discussion, the above is related to the scattering problem

$$\begin{aligned}
 \Delta u_b^s + k^2 u_b^s &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^m \setminus \overline{D_b}, \\
 (-a)\Delta u_b + k^2 \lambda \eta_0(x) u_b &= 0 \text{ in } D_b \\
 u_b - u_b^s &= u^i \text{ on } \partial D_b \\
 (-a) \frac{\partial u_b}{\partial \nu} - \frac{\partial u_b^s}{\partial \nu} &= \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \text{ on } \partial D_b \\
 \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial u_b^s}{\partial r} - i k u_b^s \right) &= 0 \text{ uniformly w.r.t. } r = \frac{|x|}{|x|}
 \end{aligned}$$

which is also well posed under the same restrictions $a \neq 1$ and $\Im(\lambda) \geq 0$ [6].

3. A variational approach to the direct spectral problem

We examine the spectral properties of the modified transmission eigenvalue problem corresponding to an artificial metamaterial with a test refractive index. Using a variational formulation setting, we prove discreteness and existence and under a coercivity constraint on the wavenumber, we show that the eigenvalues can be arranged in a decreasing sequence that goes to $-\infty$. In this case, the first eigenvalue is the supremum of a Rayleigh quotient and any corresponding pair of eigenfunctions is one of the maximizers.

Contents

| | |
|--|----|
| 3.1. Existence of a discrete spectrum | 32 |
| 3.2. An equivalent formulation for a coercive and a compact operator . . . | 36 |

3.1. Existence of a discrete spectrum

Consider the system of equations

$$\Delta w + k^2 \eta(x)w = 0 \quad \text{in } D_b, \quad (3.1)$$

$$-a\Delta v + \lambda k^2 \eta_0(x)v = 0 \quad \text{in } D_b \quad (3.2)$$

$$w = v \quad \text{on } \partial D_b, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = -a \frac{\partial v}{\partial n} \quad \text{on } \partial D_b \quad (3.4)$$

We define as an eigenpair of the problem, all combinations of values $\lambda \in \mathbb{C}$ and non trivial solutions (w, v) of (3.1)-(3.4). These λ are the eigenvalues and (w, v) are the corresponding eigenfunction pairs of the problem. In order to study the spectral properties of the problem stated above, following the ideas of [4], we proceed with the identification of a suitable variational formulation.

We consider the Hilbert space $\mathcal{H}(D_b) := \{(w, v) \in H^1(D_b) \times H^1(D_b) : w = v \text{ on } \partial D_b\}$. Then, a weak solution of (3.1)-(3.4) is defined to be a function pair (w, v) that solves the following equation:

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda((w, v), (w', v')) &= \int_{D_b} \nabla w \cdot \nabla \overline{w'} dx + a \int_{D_b} \nabla v \cdot \nabla \overline{v'} dx \\ &\quad - k^2 \int_{D_b} \eta(x)w \cdot \overline{w'} dx + k^2 \lambda \int_{D_b} \eta_0(x)v \cdot \overline{v'} dx = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

for all $(w', v') \in \mathcal{H}(D_b)$, where Φ_λ can be seen as a sesquilinear form defined on $\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)$.

By substituting as test functions one of the eigenfunction pairs (w, v) , we notice that all eigenvalues λ of (3.5), if they exist, have to be real. In fact, we later demonstrate that the eigenvalues λ correspond to a self-adjoint operator. It is also possible to show that system of equations (3.1)-(3.4) has ellipticity properties:

Proposition 3.1.1 *Eigenvalue problem (3.1)-(3.4) is strongly elliptic [65].*

Proof. It suffices to show that the following inequality holds (see Appendix):

$$\Re(\Phi_\lambda((w, v), (w, v))) \geq c_1(\lambda) \|(w, v)\|_{\mathcal{H}(D_b)}^2 - c_2(\lambda) \|(w, v)\|_{L^2(D_b) \times L^2(D_b)}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

We estimate that:

$$\begin{aligned} \Re(\Phi_\lambda((w, v), (w, v))) &= \|\nabla w\|^2 + a\|\nabla v\|^2 \\ &\quad - k^2 \int_{D_b} \eta|w|^2 dx + k^2 \Re(\lambda) \int_{D_b} \eta_0|v|^2 dx \\ &= \|\nabla w\|^2 + a\|\nabla v\|^2 + \|w\|^2 + \|v\|^2 - \|w\|^2 - \|v\|^2 \\ &\quad - k^2 \int_{D_b} \eta|w|^2 dx + k^2 \Re(\lambda) \int_{D_b} \eta_0|v|^2 dx \\ &\geq c_1 \|(w, v)\|_{\mathcal{H}(D_b)}^2 - (k^2 \eta_{\max} + 1) \|w\|^2 + (k^2 \Re(\lambda) - 1) \|v\|^2 \\ &\geq c_1 \|(w, v)\|_{\mathcal{H}(D_b)}^2 - c_2(\lambda) \|(w, v)\|_{L^2(D_b) \times L^2(D_b)}^2 \end{aligned}$$

where $c_1 := \min\{1, a\}$ and $c_2(\lambda) := \max\{k^2\eta_{\max} + 1, |k^2\Re(\lambda) - 1|\}$. ■

Further study of the spectral properties of the above eigenvalue problem requires to proceed by defining an equivalent operator eigenvalue problem by means of Riesz Representation Theorem:

Define $A_\lambda : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ such that:

$$(A_\lambda(w, v), (w', v'))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} = \Phi_\lambda((w, v), (w', v'))$$

Thus, (3.5) is equivalent to the following eigenvalue problem:

$$(A_\lambda(w, v), (w', v'))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} = 0, \quad \forall (w', v') \in \mathcal{H}(D_b) \quad (3.6)$$

We can also define $K_\lambda : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow (\mathcal{H}(D_b))^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$ such that:

$$\langle K_\lambda(w, v), (w', v') \rangle_{\mathcal{H}^*(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} = \Phi_\lambda((w, v), (w', v')),$$

where the above notation corresponds to the duality pairing of $(\mathcal{H}(D_b))^* \times \mathcal{H}(D_b)$. As a consequence, problem (3.5) is also equivalent to the following eigenvalue problem:

$$\langle K_\lambda(w, v), (w', v') \rangle_{\mathcal{H}^*(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} = 0, \quad \forall (w', v') \in \mathcal{H}(D_b) \quad (3.7)$$

We note that $K_\lambda(w, v)$ is an antilinear functional defined on $\mathcal{H}(D_b)$ and $(\mathcal{H}(D_b))^*$ is the space of all antilinear functionals defined on $\mathcal{H}(D_b)$. The above operators, defined by means of the Riesz representation Theorem, are linear and bounded. They are linked through the following relation:

$$A_\lambda = \Gamma \cdot K_\lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.8)$$

Operator $\Gamma : (\mathcal{H}(D_b))^* \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ is the topological isomorphism, defined by the Riesz Representation Theorem, such that for every $f \in (\mathcal{H}(D_b))^*$ we have $\Gamma(f) = x$, where $f(v) = (x, v)_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)}$.

Lemma 3.1.2 *The family of operators A_λ are of Fredholm type and depend analytically on λ .*

Proof. We define two auxiliary operators

$$\begin{aligned} (A_\lambda^{(1)}(w, v), (w', v'))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} &:= \int_{D_b} \nabla w \cdot \nabla \overline{w'} dx + a \int_{D_b} \nabla v \cdot \nabla \overline{v'} dx \\ &+ \int_{D_b} w \cdot \overline{w'} dx + \int_{D_b} v \cdot \overline{v'} dx \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (A_\lambda^{(2)}(w, v), (w', v'))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} &:= - \int_{D_b} w \cdot \overline{w'} dx - \int_{D_b} v \cdot \overline{v'} dx \\ &- k^2 \int_{D_b} \eta(x) w \cdot \overline{w'} dx + k^2 \lambda \int_{D_b} \eta_0(x) v \cdot \overline{v'} dx \end{aligned}$$

$A_\lambda^{(1)}$ is coercive with respect to the inner product of the solution space $\mathcal{H}(D_b)$ and $A_\lambda^{(2)}$ is compact and depends analytically on the spectral parameter. Thus,

3. A variational approach to the direct spectral problem

$A_\lambda = A_\lambda^{(1)} + A_\lambda^{(2)}$ are of Fredholm type as they are the sum of a linear isomorphism and a compact operator, and they also depend analytically on $\lambda \in \mathbb{C}$. ■

Moreover, if we choose a $\tau \in \mathbb{R}$ and set $t = i\tau$, we can see that $N(A_t) = 0$, i.e. $A_t(w, v) = 0$ possesses only the trivial solution. Since A_t is of Fredholm type, it must then be a bijective mapping. Hence, $(A_z)^{-1}$ exists as a linear and bounded operator, for a complex number $z = t$.

We can see that the above properties also hold for the family of operators K_λ by utilizing the following:

Lemma 3.1.3 *A_λ has the Fredholm property if and only if K_λ has the Fredholm property.*

Proof. The Fredholm property remains invariant under topological isomorphisms, namely Γ and Γ^{-1} (See appendix). ■

Now, we are able to use the Analytic Fredholm Theorem [29, Theorem 8.26]

Theorem 3.1.4 *Suppose $\{Q_z\}_{z \in \mathbb{C}}$ is a family of Fredholm operators that depend analytically on the parameter z . Then, exactly one of the two alternatives is correct:*

- (a) $(Q_z)^{-1}$ does not exist for any $z \in \mathbb{C}$ or,
- (b) $(Q_z)^{-1}$ exists at every z , excluding at most a discrete subset of the complex plane.

Thus, for the family of operators $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$ alternative (b) is valid, securing the discreteness of the spectrum. Also, as a consequence of alternative (b), we can always find a $\beta \in \mathbb{R}$, such that A_β^{-1} exists as a linear, bounded operator. From this point onward, we always assume that $\beta \in \mathbb{R}$ has this property.

We define the compact, positive, linear operator $B : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$

$$(B(w, v), (w', v'))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} = \int_{D_b} \eta_0 v \overline{v'} dx$$

Then, (3.6) is equivalent with the generalized eigenvalue problem:

$$A_\beta(w, v) = k^2(\beta - \lambda)B(w, v)$$

Utilizing the above, we formulate an equivalent eigenvalue problem to (3.6) and (3.7) that corresponds to a compact and self-adjoint operator. To this end, we define

$$T : L^2(D_b) \rightarrow L^2(D_b) \text{ such that } Tf = v_f \in H^1(D_b)$$

where v_f is the unique element in $H^1(D_b)$ such that $K_\beta(w_f, v_f) = (0, \eta_0 f) \in (\mathcal{H}(D_b))^*$. We note that for each $f \in L^2(D_b)$, we also have that $\eta_0 f \in L^2(D_b)$. Since $\beta \in \mathbb{R}$ was selected in such a way that A_β^{-1} exists as a linear and bounded operator, from (3.8) K_β^{-1} also exists as a linear and bounded operator. In what follows, we demonstrate the properties of T and its corresponding eigenvalue problem. To begin, we define the weighted inner product $(f, g)_{L^2(D_b, \eta_0 dx)} := \int_{D_b} \eta_0(x) f \overline{g} dx$, where $f, g \in L^2(D_b)$. As a consequence of the estimate $\eta_{0, \min} \leq \eta_0 \leq \eta_{0, \max}$, the weighted inner product is equivalent to the usual inner product of $L^2(D_b)$. We are now able to state the following:

Proposition 3.1.5 $T : L^2(D_b, \eta_0 dx) \rightarrow L^2(D_b, \eta_0 dx)$ is a compact and self-adjoint operator. Furthermore, the eigenvalue problem that arises for T :

$$Tv = \frac{1}{k^2(\beta - \lambda)}v, \quad (3.9)$$

where v is identified as the second eigenfunction from an eigenpair (w, v) of (3.5), is an equivalent eigenvalue problem to (3.5).

Proof. Since T as a mapping from $L^2(D_b)$ to $H^1(D_b)$ is bounded, the embedding $I : H^1(D_b) \rightarrow L^2(D_b)$ is compact and from the equivalence of the usual and weighted inner products, we can infer that T is compact. Moreover, since A_β , $\beta \in \mathbb{R}$ is a family of self-adjoint operators, T is self-adjoint (see Appendix). It remains to show that (3.5) and (3.9) are equivalent.

Let $\{\lambda, (w, v)\}$ be a non-trivial solution of (3.5). Then,

$$\langle K_\lambda(w, v), (w', v') \rangle = 0, \quad \text{for all } (w', v') \in \mathcal{H}(D_b)$$

or,

$$\langle K_\beta(w, v), (w', v') \rangle = k^2(\beta - \lambda) \int_{D_b} \eta_0 v \bar{v}' dx, \quad \text{for all } (w', v') \in \mathcal{H}(D_b).$$

Also, let $f \in L^2(D_b)$. Then, $(0, \eta_0 f) \in L^2(D_b) \times L^2(D_b)$. Since $L^2(D_b) \times L^2(D_b) \subset H^{-1}(D_b) \times H^{-1}(D_b) \subset (\mathcal{H}(D_b))^*$, we have that (see Appendix):

$$\langle (0, \eta_0 f), (w', v') \rangle = \int_{D_b} \eta_0 f \bar{v}' dx = \langle K_\beta(w_f, v_f), (w', v') \rangle$$

Hence,

$$\begin{aligned} & \langle K_\beta(k^2(\beta - \lambda)w_f - w, k^2(\beta - \lambda)v_f - v), (w', v') \rangle \\ &= k^2(\beta - \lambda) \langle K_\beta(w_f, v_f), (w', v') \rangle - \langle K_\beta(w, v), (w', v') \rangle \\ &= k^2(\beta - \lambda) \langle (0, \eta_0 f), (w', v') \rangle - k^2(\beta - \lambda) \langle (0, \eta_0 v), (w', v') \rangle \end{aligned}$$

If we set $f = v$, where v is the second eigenfunction in any eigenpair (w, v) , the expression above is equal to zero for all $(w', v') \in \mathcal{H}(D_b)$. Since K_β is invertible, its nullspace is trivial, that is $N(K_\beta) = \{0\}$. Consequently,

$$k^2(\beta - \lambda)w_f = w \quad \text{and} \quad k^2(\beta - \lambda)v_f = v, \quad \text{thus} \quad Tv = \frac{1}{k^2(\beta - \lambda)}v$$

Conversely, if (t, u) is an arbitrary eigenelement of T , with $t \neq 0$, then we can show that it satisfies eigenvalue problem (3.5).

Since $\langle K_\beta(w_u, tu), (w', v') \rangle = \langle (0, \eta_0 u), (w', v') \rangle$, we have that

$$\begin{aligned} & \int_{D_b} \nabla w_u \cdot \nabla \bar{w}' dx + a \int_{D_b} \nabla tu \cdot \nabla \bar{v}' dx \\ & - k^2 \int_{D_b} \eta(x) w_u \cdot \bar{w}' dx + k^2 \beta \int_{D_b} \eta_0(x) tu \cdot \bar{v}' dx = \int_{D_b} \eta_0(x) u \cdot \bar{v}' dx \end{aligned}$$

3. A variational approach to the direct spectral problem

or equivalently,

$$\begin{aligned} & \int_{D_b} \nabla \frac{w_u}{t} \cdot \nabla \overline{w'} dx + a \int_{D_b} \nabla u \cdot \nabla \overline{v'} dx \\ & - k^2 \int_{D_b} \eta(x) \frac{w_u}{t} \cdot \overline{w'} dx + k^2 \beta \int_{D_b} \eta_0(x) u \cdot \overline{v'} dx = \frac{1}{t} \int_{D_b} \eta_0(x) u \cdot \overline{v'} dx \end{aligned}$$

and we conclude that

$$\begin{aligned} & \int_{D_b} \nabla \frac{w_u}{t} \cdot \nabla \overline{w'} dx + a \int_{D_b} \nabla u \cdot \nabla \overline{v'} dx \\ & - k^2 \int_{D_b} \eta(x) \frac{w_u}{t} \cdot \overline{w'} dx + k^2 \left(\beta - \frac{1}{tk^2} \right) \int_{D_b} \eta_0(x) u \cdot \overline{v'} dx = 0. \end{aligned}$$

Hence, $\{\beta - \frac{1}{tk^2}, (\frac{1}{t}w_u, u)\}$ is an eigenpair for eigenvalue problem (3.5). ■

Proposition 3.1.6 *Operator T is injective.*

Proof. Let $f \in N(T)$, $f \neq 0$. Then, it satisfies the following equation for any choice of test functions (w', v')

$$\int_{D_b} \nabla w_f \cdot \nabla \overline{w'} dx - k^2 \int_{D_b} \eta w_f \cdot \overline{w'} dx = \int_{D_b} \eta_0 f \overline{v'} dx$$

We fix a $w' \in H_0^1(D_b)$, $w' \neq 0$ and we pick $v'_1 = 0, v'_2 \in H_0^1(D_b)$. Then,

$$\langle K_\beta(w_f, 0), (w', v'_1) \rangle = \langle K_\beta(w_f, 0), (w', v'_2) \rangle = \int_{D_b} \eta_0 f \overline{v'_2} dx = 0$$

Since $\eta_0 f \in (H_0^1(D_b))^*$ and $v'_2 \in H_0^1(D_b)$ is an arbitrary element, $\eta_0 f$ has to be the zero functional of $(H_0^1(D_b))^*$. Thus, $f = 0$. ■

Remark 3.1.7 *Since T is injective, from the following Hilbert space decomposition:*

$$L^2(D_b, \eta_0 dx) = N(T) \oplus \overline{R(T)} = \overline{R(T)}$$

and the Hilbert-Schmidt theorem, the eigenelements of T form an orthonormal basis for $L^2(D_b, \eta_0 dx)$, proving the existence of an infinite, discrete set of eigenvalues $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$.

3.2. An equivalent formulation for a coercive and a compact operator

Until this point, we have selected a $\beta \in \mathbb{R}$, such that A_β^{-1} exists as a linear and bounded operator. In what follows, we attempt to find sufficient conditions, under which there exists a $\Lambda > 0$, such that A_Λ is a coercive operator. Note that, all coercive operators are invertible, due to the Lax-Milgram theorem.

Lemma 3.2.1 *Let $(w, v) \in \mathcal{H}(D_b)$. Then, the following inequality holds:*

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \|w\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_0(D_b)} [\|\nabla w\|^2 + \|\nabla v\|^2] + (\epsilon - 1) \|v\|^2, \quad (3.10)$$

where $\epsilon > 1$ and $\lambda_0(D_b)$ is the first Dirichlet eigenvalue on D_b .

3.2. An equivalent formulation for a coercive and a compact operator

Proof. As a consequence of Poincaré's inequality on $H_0^1(D_b)$, we have:

$$\|w - v\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_0(D_b)} \|\nabla w - \nabla v\|^2 \quad \text{and so,} \quad (\|w\| - \|v\|)^2 \leq \frac{2}{\lambda_0(D_b)} [\|\nabla w\|^2 + \|\nabla v\|^2]$$

Using Young's inequality for an $\epsilon > 1$, we derive that:

$$\left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \|w\|^2 + (1 - \epsilon)\|v\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_0(D_b)} [\|\nabla w\|^2 + \|\nabla v\|^2]$$

■

Lemma 3.2.2 *Let $\sigma \in (0, 1)$, $\epsilon > 1$ and $c_1 = \min\{1, a\}$. Then, for the operator A_Λ to be coercive, it suffices:*

$$k^2 < \frac{(1 - \sigma)c_1\lambda_0(D_b)(\epsilon - 1)}{2\epsilon\eta_{\max}}, \quad \Lambda > \frac{(1 - \sigma)c_1\lambda_0(D_b)(\epsilon - 1)}{2k^2\eta_{0,\min}} \quad (3.11)$$

Proof. Inequality (3.10) can be used, in combination with a sufficient condition on the wavenumber k , to show that there exists a positive number $\Lambda > 0$, such that A_Λ is a coercive operator. Choose a $\Lambda > 0$. Then,

$$\begin{aligned} (A_\Lambda(w, v), (w, v)) &= \int_{D_b} \nabla w \cdot \nabla \bar{w} dx + a \int_{D_b} \nabla v \cdot \nabla \bar{v} dx \\ &\quad - k^2 \int_{D_b} \eta(x) w \cdot \bar{w} dx + k^2 \Lambda \int_{D_b} \eta_0(x) v \cdot \bar{v} dx \\ &\geq c_1 [\|\nabla w\|^2 + \|\nabla v\|^2] - k^2 \eta_{\max} \|w\|^2 + k^2 \Lambda \eta_{0,\min} \|v\|^2 \\ &= \sigma c_1 [\|\nabla w\|^2 + \|\nabla v\|^2] + (1 - \sigma) c_1 [\|\nabla w\|^2 + \|\nabla v\|^2] \\ &\quad - k^2 \eta_{\max} \|w\|^2 + k^2 \Lambda \eta_{0,\min} \|v\|^2 \\ &\geq \sigma c_1 [\|\nabla w\|^2 + \|\nabla v\|^2] + (1 - \sigma) c_1 \left[\frac{\lambda_0(D_b)(\epsilon - 1)}{2\epsilon} \|w\|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_0(D_b)(\epsilon - 1)}{2} \|v\|^2 \right] - k^2 \eta_{\max} \|w\|^2 + k^2 \Lambda \eta_{0,\min} \|v\|^2 \end{aligned}$$

■

Choosing specific values for σ, ϵ provides a lower bound for Λ that also serves as an upper bound for all eigenvalues $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$. Moreover, it is possible to derive a coercivity constraint on the wavenumber k which explicitly determines σ, ϵ and Λ , such that (3.11) holds.

Corollary 3.2.3 *Suppose that the wavenumber k satisfies the inequality*

$$k^2 < \frac{c_1\lambda_0(D_b)}{2\eta_{\max}} \quad (3.12)$$

Then, there exists a $\Lambda > 0$, such that A_Λ is coercive.

Proof. Suppose that (3.12) is satisfied. Then, it is easy to see that there are suitable choices for σ, ϵ and a $\Lambda > 0$ large enough, such that (3.11) holds. As a result, the operator A_Λ is coercive. ■

3. A variational approach to the direct spectral problem

Theorem 3.2.4 *Suppose (3.12) is satisfied. Then, there exists an infinite sequence of eigenvalues $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ for (3.5), with $-\infty$ as their only accumulation point. As a consequence, there exist at most finite positive eigenvalues.*

Proof. Suppose (3.12) is satisfied. Then, there exists a $\Lambda > 0$, such that A_{Λ} is coercive. Hence, (3.5) is equivalent to the generalized eigenvalue problem:

$$\begin{aligned} \int_{D_b} \nabla w \cdot \nabla \overline{w'} dx + a \int_{D_b} \nabla v \cdot \nabla \overline{v'} dx - k^2 \int_{D_b} \eta(x) w \cdot \overline{w'} dx \\ + k^2 \Lambda \int_{D_b} \eta_0(x) v \cdot \overline{v'} dx = k^2(\Lambda - \lambda) \int_{D_b} \eta_0(x) v \overline{v'} dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

that is,

$$(A_{\Lambda}(w, v), (w', v')) = k^2(\Lambda - \lambda)(B(w, v), (w', v')) \quad (3.14)$$

A_{Λ} is a linear, coercive and self-adjoint operator. Moreover, B is also linear, self-adjoint, compact and positive. The operator eigenvalue problem

$$A_{\Lambda}(w, v) = k^2(\Lambda - \lambda)B(w, v) \quad (3.15)$$

which is equivalent to (3.5), has been shown to have an increasing and positive sequence of eigenvalues $\{k^2(\Lambda - \lambda_j)\}_{j=1}^{\infty}$ that have $+\infty$ as their only possible accumulation point (if they are indeed infinite) [29, Theorem 10.23]. From Remark 3.1.7, $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ is an infinite sequence. Thus, $k^2(\Lambda - \lambda_j) \rightarrow +\infty$ and so, $\lambda_j \rightarrow -\infty$. Furthermore, since $\Lambda - \lambda_j > 0$, we conclude that

$$\lambda_j < \Lambda \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (3.16)$$

As we can see, (3.16) is the aforementioned upper bound for all eigenvalues λ_j . For the second part of the theorem, let us assume to the contrary that there exists an infinite number of positive eigenvalues, i.e. $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ is an infinite subsequence of positive eigenvalues. Since (3.16) is an upper bound for all eigenvalues, the subset of positive eigenvalues $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ is contained in $(0, \Lambda)$. From Bolzano-Weierstrass theorem, there exists a convergent subsequence of positive eigenvalues $\{\lambda_{j_k}\}_{k \in I}$. That is a contradiction, since their limit would be a second accumulation point for the eigenvalues $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ of (3.5). ■

The sequence of generalized eigenvalues $k^2(\Lambda - \lambda_j)$ follows the Courant-Fischer type min-max principles, with the first (smallest) eigenvalue $k^2(\Lambda - \lambda_1)$ being an infimum [29, Theorem 10.24]:

$$\begin{aligned} k^2(\Lambda - \lambda_1) &= \inf_{(w,v) \in \mathcal{H}(D_b), v \neq 0} \frac{(A_{\Lambda}(w, v), (w, v))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)}}{(B(w, v), (w, v))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)}} \\ &= \inf_{(w,v) \in \mathcal{H}(D_b), v \neq 0} \frac{\|\nabla w\|^2 + a\|\nabla v\|^2 - k^2 \int_{D_b} \eta |w|^2 dx + k^2 \Lambda \int_{D_b} \eta_0 |v|^2 dx}{\int_{D_b} \eta_0 |v|^2 dx} \end{aligned} \quad (3.17)$$

From inf – sup properties and (3.17), the following min-max principle for λ_1 holds:

$$\lambda_1 = \frac{1}{k^2} \sup_{(w,v) \in \mathcal{H}(D_b), v \neq 0} \frac{-\|\nabla w\|^2 - a\|\nabla v\|^2 + k^2 \int_{D_b} \eta |w|^2 dx}{\int_{D_b} \eta_0 |v|^2 dx} \quad (3.18)$$

3.2. An equivalent formulation for a coercive and a compact operator

Corollary 3.2.5 *Suppose that the coercivity constraint (3.12) is met. Then, there exists a positive, lower bound for the largest eigenvalue λ_1 :*

$$\lambda_1 \geq \frac{\eta_{\min}}{\eta_{0,\max}} > 0$$

That is to say, there always exists a positive eigenvalue for (3.5).

Proof. By substituting the pair of test functions $(1, 1) \in \mathcal{H}(D_b)$ in the right-hand side of (3.18), we have that

$$\lambda_1 \geq \frac{\int_{D_b} \eta dx}{\int_{D_b} \eta_0 dx} \geq \frac{\int_{D_b} \eta_{\min} dx}{\int_{D_b} \eta_{0,\max} dx} = \frac{\eta_{\min}}{\eta_{0,\max}}$$

■

Furthermore, (3.18) implies that the largest eigenvalue λ_1 is monotonically increasing with respect to the refractive index η . As a result, if we consider (3.1)-(3.4) for a constant refractive index, we have the following uniqueness result for the inverse spectral problem:

Theorem 3.2.6 *Under the coercivity constraint (3.12), a constant refractive index is uniquely determined from the knowledge of the largest eigenvalue $\lambda_1 = \lambda_1(\eta)$.*

Proof. Let $\eta_1(x) = \eta_1 \neq \eta_2 = \eta_2(x)$ be two distinct, constant indices of refraction and that $\lambda_1(\eta_1) = \lambda_1(\eta_2)$. Furthermore, let k , a and $\eta_0 = \eta_0(x)$ be identical for both problems. Without loss of generality, we suppose that $\eta_1 < \eta_2$. From (3.18), we have that:

$$\lambda_1(\eta_1) = \frac{1 - \|\nabla w_1\|^2 - a\|\nabla v_1\|^2 + k^2\eta_1\|w_1\|^2}{k^2 \int_{D_b} \eta_0 |v_1|^2 dx}$$

where (w_1, v_1) is a maximizer of (3.18). Then,

$$m = \frac{1 - \|\nabla w_1\|^2 - a\|\nabla v_1\|^2 + k^2\eta_2\|w_1\|^2}{k^2 \int_{D_b} \eta_0 |v_1|^2 dx}$$

satisfies the inequality $\lambda_1(\eta_1) < m \leq \lambda_1(\eta_2)$, which is a contradiction. Similarly, we arrive at a contradiction, if we assume that $\eta_2 < \eta_1$. ■

Remark 3.2.7 *In contrast to [13], uniqueness for the inverse spectral problem for a constant index of refraction is not associated with any constraints on the sign of the contrast $1 - \eta$.*

4. A non completeness property for the eigenfunctions in the solution space $\mathcal{H}(D_b)$

In this chapter we show that, under a coercivity constraint on the wavenumber, the eigenfunction pairs are not complete in the solution space. This is a consequence of the compact operator involved having an infinite dimensional nullspace. Hence, it is not possible to create an orthonormal basis for $\mathcal{H}(D_b)$, using the eigenfunction pairs exclusively.

Contents

| | |
|--|----|
| 4.1. Are the eigenfunction pairs a Riesz basis in $\mathcal{H}(D_b)$? | 42 |
| 4.2. Selection of a Riesz basis that involves the eigenfunction system | 45 |

4.1. Are the eigenfunction pairs a Riesz basis in $\mathcal{H}(D_b)$?

One of the main goals of this thesis is to implement a Galerkin Scheme for the numerical approximation of the modified transmission eigenvalues. In order to do that, an orthonormal basis for the solution space $\mathcal{H}(D_b)$ is required. At first glance, an attempt to define an auxiliary spectral problem, similar to (3.1)-(3.4), would be reasonable. A natural choice for the latter occurs as a special case of (3.1)-(3.4), by choosing η and η_0 to be constants. Obviously, this potential eigenvalue problem would then have properties similar to the starting eigenvalue problem and thus, in order to determine whether it produces a complete set of eigenfunctions, one could first study the completeness of (3.1)-(3.4).

According to the previous analysis, if the coercivity condition for our wavenumber is satisfied, then the following eigenvalue problems are equivalent:

$$(A_\lambda(w, v), (w', v')) = 0$$

or,

$$(A_\beta(w, v), (w', v')) = k^2(\beta - \lambda)(B(w, v), (w', v'))$$

or,

$$(A_\Lambda(w, v), (w', v')) = k^2(\Lambda - \lambda)(B(w, v), (w', v')) \quad (4.1)$$

where A_Λ in particular can be chosen to be a coercive, self-adjoint operator. We will find out, later in our study, that the coercivity property is of great significance, both to the theoretical and the numerical aspects of the spectral problem.

Define $\tilde{T} : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$, such that

$$\tilde{T} := A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} B A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}$$

The operators $A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}, A_\Lambda^{+\frac{1}{2}}$ are well defined and the property $A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \cdot A_\Lambda^{+\frac{1}{2}} = I = A_\Lambda^{+\frac{1}{2}} \cdot A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ also holds, since A_Λ is a coercive, self adjoint operator (as a consequence of coercive operators being positive operators). Thus, (4.1) is equivalent with the operator eigenvalue problem for \tilde{T} :

$$\left[\frac{1}{k^2(\Lambda - \lambda)} I - \tilde{T} \right] u = 0, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathcal{H}(D_b) \quad (4.2)$$

where $(u_1, u_2) = A_\Lambda^{+\frac{1}{2}}(w, v)$ and excluding the zero eigenvalue for \tilde{T} . We denote by:

$$\mu = \frac{1}{k^2(\Lambda - \lambda)}$$

the eigenvalues of (4.2).

We note that from definition, the operator \tilde{T} is compact, self-adjoint and positive. Thus, we have the Hilbert space decomposition $\mathcal{H}(D_b) = N(\tilde{T}) \oplus \overline{R(\tilde{T})}$.

Proposition 4.1.1 *There exists an orthonormal basis $\{v_i\}_{i \in J}$ consisting of eigenelements of \tilde{T} that correspond to the zero eigenvalue of \tilde{T} , that spans $N(\tilde{T})$.*

4.1. Are the eigenfunction pairs a Riesz basis in $\mathcal{H}(D_b)$?

Proof. $N(\tilde{T})$ is a closed subspace of $\mathcal{H}(D_b)$, thus is a Hilbert space itself. Furthermore, since $\mathcal{H}(D_b)$ is a separable space, there exists a countable orthonormal basis for $N(\tilde{T})$. ■

Proposition 4.1.2 $\overline{R(\tilde{T})}$ is spanned by an orthonormal system of eigenelements $\{u_i\}_{i \in I}$ of \tilde{T} that correspond to all non zero eigenvalues of \tilde{T} .

Proof. Corollary of Hilbert-Schmidt theorem. ■

Corollary 4.1.3 If we combine the orthonormal basis $\{v'_i\}_{i \in J}$ and $\{u_i\}_{i \in I}$ for $N(\tilde{T})$ and $\overline{R(\tilde{T})}$ respectively, we get an orthonormal basis for $\mathcal{H}(D_b)$. That is, $\{v'_i\}_{i \in J} \cup \{u_i\}_{i \in I}$ is an orthonormal basis for $\mathcal{H}(D_b)$ since $(N(\tilde{T}))^\perp = \overline{R(\tilde{T})}$.

Definition 4.1.4 A system $\{x_k\}_{k \in I}$ on a Hilbert space X is called a Riesz basis, if there exists a topological isomorphism $T : Y \rightarrow X$ (linear, bounded and invertible operator) such that $x_k = Te_k$, where $\{e_k\}_{k \in I}$ is an orthonormal basis for a Hilbert space Y .

A basic property of a Riesz Basis $\{x_n\}$ is the following:

Proposition 4.1.5 Let X be a Hilbert space. Then, for each $x \in X$, there exists a unique selection of constants $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ such that:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \quad (\text{completeness property})$$

Proof. Let $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ be a Riesz Basis for X , $x \in X$ and $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. Then from definition, there exists a topological isomorphism $T : X \rightarrow X$, such that $x_n := Te_n$. We can also define $y := T^{-1}x$ and since $y \in X$, it has a series expansion with respect to $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, i.e. there exists a unique selection of constants $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ such that

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$$

Hence,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T^{-1}x_n = T^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$$

Thus,

$$x = Ty = T \left(T^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$$

■

We examine the existence of a system of eigenfunctions (w_n, v_n) that correspond to the eigenvalues $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, which constitutes a basis for $\mathcal{H}(D_b)$. If $\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^\infty$ is any orthonormal basis, then the system $\{A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \tilde{u}_n\}_{n=1}^\infty$ is a Riesz basis for $\mathcal{H}(D_b)$, since operator $A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ is a topological isomorphism. If \tilde{T} was injective, it would be straightforward to conclude that a system of its eigenelements $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ would constitute an orthonormal basis for $\mathcal{H}(D_b)$ and thus, $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^\infty := \{A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} u_n\}_{n=1}^\infty$ would be a Riesz basis from eigenfunctions belonging to the eigenvalue problem (3.5).

In the following lemma, we present a dimensional analysis for the nullspace $N(\tilde{T})$, which is necessary in order to study the completeness of eigenfunction pairs $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^\infty$.

4. A non completeness property for the eigenfunctions in the solution space $\mathcal{H}(D_b)$

Lemma 4.1.6 *Suppose the coercivity condition (3.12) is satisfied. Then,*

$$\dim N(\tilde{T}) = \infty \quad (4.3)$$

Proof. Since $A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ is a topological isomorphism, $N(\tilde{T}) = N(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}BA_\Lambda^{-\frac{1}{2}}) = N(BA_\Lambda^{-\frac{1}{2}})$. Let $u \in N(\tilde{T})$. Then, $\tilde{T}u = 0$ is equivalent with $BA_\Lambda^{-\frac{1}{2}}u = 0$ and $A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}u \in N(B)$. Furthermore, the nullspace of B can be described as follows:

$$N(B) = \{(w, 0) : w \in H_0^1(D_b)\},$$

as a result of the orthogonality relation

$$(B(w, v), (w', v')) = 0 \text{ for all } (w', v') \in \mathcal{H}(D_b),$$

which is equivalent to $v = 0$ and $w \in H_0^1(D_b)$. Hence, we have that $\dim N(B) = \dim H_0^1(D_b) = \infty$. Moreover, $A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}u \in N(B)$, that is, $u \in A_\Lambda^{+\frac{1}{2}}N(B)$ and since $A_\Lambda^{+\frac{1}{2}}$ is a topological isomorphism, it also conserves dimensions. Consequently, $\dim N(\tilde{T}) = \dim(A_\Lambda^{+\frac{1}{2}}N(B)) = \dim N(B) = \infty$. ■

Theorem 4.1.7 *Suppose the coercivity condition (3.12) is satisfied. Then, eigenfunction pairs $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^\infty$ of (3.5) is not a complete system in $\mathcal{H}(D_b)$, in the sense that they are not a Riesz Basis.*

Proof. Let $\omega := (\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{H}(D_b)$. We assume to the contrary, that the system of eigenfunctions $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^\infty$ forms a Riesz Basis for $\mathcal{H}(D_b)$, or more generally a Schauder basis. Then, there exists a unique selection of constants a_n , such that

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w_n, v_n) \quad (4.4)$$

From the equivalence of (3.5) and (4.2), for each eigenpair $\{\lambda_n, (w_n, v_n)\}$ of (3.5), there exists a unique eigenpair $\{\mu_n, g_n\}$ of \tilde{T} , $\mu_n \neq 0$, such that $(w_n, v_n) = A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}g_n$. Since $\{\mu_n, g_n\}$, $\mu_n \neq 0$ is an eigenpair of the compact operator \tilde{T} , its corresponding eigenspace has to be finite-dimensional and consequently, there is a finite linear combination of orthonormal eigenelements $u_i^{(n)}$ of \tilde{T} , corresponding to μ_n , such that:

$$g_n = \sum_{i=1}^{k(n)} b_i^{(n)} u_i^{(n)}, \quad (4.5)$$

where $k(n)$ denotes the geometric multiplicity of μ_n . From (4.4) and (4.5), we have the following description for ω :

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} a_n A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{k(n)} b_i^{(n)} u_i^{(n)} \right]$$

And since $A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ is a bounded operator,

$$\omega = A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{i=1}^{k(n)} b_i^{(n)} u_i^{(n)} \right] \right)$$

4.2. Selection of a Riesz basis that involves the eigenfunction system

We notice that

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{i=1}^{k(n)} b_i^{(n)} u_i^{(n)} \right]$$

belongs in the subspace $\overline{R(\tilde{T})}$, as a sum of eigenelements $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ of \tilde{T} . That is, $\omega \in R(A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}|_{\overline{R(\tilde{T})}})$, i.e. $\mathcal{H}(D_b) \subset R(A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}|_{\overline{R(\tilde{T})}})$. Since $A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}$ is a topological isomorphism and $\overline{R(\tilde{T})}$ is a proper subset of $\mathcal{H}(D_b)$ as a consequence of Lemma 4.1.6, we conclude that $R(A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}|_{\overline{R(\tilde{T})}}) \subsetneq \mathcal{H}(D_b)$ which is a contradiction to the initial hypothesis. Thus, the system of eigenfunctions $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ of eigenvalue problem (3.5) isn't complete in the Riesz-Basis sense, in $\mathcal{H}(D_b)$. ■

Remark 4.1.8 *Note that the previous procedure can be applied to any self-adjoint, generalized eigenvalue problem. More specifically, if it is possible to define an equivalent eigenvalue problem, corresponding to an operator with the form $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$, where A is self-adjoint and coercive and B is a compact operator, then spectral completeness in the Riesz Basis sense is dependent on whether compact operator B is injective or not.*

4.2. Selection of a Riesz basis that involves the eigenfunction system

From the previous discussion, two problems remain unsolved. First, creating a Riesz Basis for $\mathcal{H}(D_b)$ and second, investigating if it is possible to also include the eigenfunction system $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ into that basis. Next, we attempt to answer these questions. To this end, we will make use of the following lemma:

Lemma 4.2.1 *Let H, V be Hilbert spaces and $A : H \rightarrow V$ a linear, bounded and invertible operator (topological isomorphism). If \mathcal{L} is a Riesz basis for $A(M)$ and \mathcal{K} is a Riesz basis for $A(M^{\perp})$, where M is a closed subspace of H , then $\mathcal{L} \cup \mathcal{K}$ is a Riesz basis for V .*

Proof. Let $v \in V$. Then, there exists a unique $h \in H$ such that $v = Ah$. From the decomposition $H = M \oplus M^{\perp}$, there also exist unique choices of $\mu_1 \in M$ and $\mu_2 \in M^{\perp}$, such that $h = \mu_1 + \mu_2$. Then,

$$v = Ah = A(\mu_1 + \mu_2) = A\mu_1 + A\mu_2$$

where $A\mu_1 \in A(M)$ and $A\mu_2 \in A(M^{\perp})$. Consequently, $A\mu_1$ is described by \mathcal{L} and $A\mu_2$ is described by \mathcal{K} . That is, $\mathcal{L} \cup \mathcal{K}$ is a Riesz basis for V . ■

We return to the questions stated above. What follows is a construction of a Riesz basis for $\mathcal{H}(D_b)$, which consists partially from the eigenfunction system $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ and partially from an system of functions related to the infinite-dimensional subspace $N(B)$.

Since $A_{\Lambda}(N(B)) = A_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}(A_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}(N(B))) = A_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}(N(\tilde{T}))$, $N(B)$ is a closed subspace of $\mathcal{H}(D_b)$ and A_{Λ} is a topological isomorphism, we derive that the subspace $A_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}(N(\tilde{T})) =$

4. A non completeness property for the eigenfunctions in the solution space $\mathcal{H}(D_b)$

$(A_\Lambda^{-1})^{-1}(N(B))$ is a closed set in $\mathcal{H}(D_b)$, as the inverse image of a closed set through a continuous mapping. Thus, it is a closed subspace of $\mathcal{H}(D_b)$.

If we select an orthonormal basis $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ for the Sobolev space $H_0^1(D_b)$, then the system $\{(g_n, 0)\}_{n=1}^\infty$ is an orthonormal basis for $N(B)$ and $\mathcal{L} = \{A_\Lambda(g_n, 0)\}_{n=1}^\infty$ is from definition, a Riesz basis for $A_\Lambda^{\frac{1}{2}}(N(\tilde{T}))$.

Consider the decomposition: $\mathcal{H}(D_b) = N(\tilde{T}) \oplus \overline{R(\tilde{T})}$. From Lemma 4.2.1, it suffices to select a Riesz basis for $A_\Lambda^{\frac{1}{2}}(N(\tilde{T}))$ and for $A_\Lambda^{\frac{1}{2}}(\overline{R(\tilde{T})})$. Then, their union is the desired Riesz basis.

Since there exists a system of eigenfunctions $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^\infty$ such that $A_\Lambda^{\frac{1}{2}}(\overline{R(\tilde{T})}) = \overline{\text{span}\{(w_n, v_n) : n \in \mathbb{N}\}}$, i.e. the system $\mathcal{K} = \{(w_n, v_n)\}_{n=1}^\infty$ is a Riesz basis for $A_\Lambda^{\frac{1}{2}}(\overline{R(\tilde{T})})$, then from Lemma 4.2.1, $\mathcal{L} \cup \mathcal{K}$ is a Riesz basis for $\mathcal{H}(D_b)$ that includes the eigenfunction system $\{(w_n, v_n)\}_{n=1}^\infty$.

If we implement a Gram-Schmidt method to the Riesz basis $\mathcal{L} \cup \mathcal{K}$, we obtain an orthonormal basis for $\mathcal{H}(D_b)$. However in practice, it is difficult to analyze the spaces $N(\tilde{T})$, $\overline{R(\tilde{T})}$ and for this reason, the following chapter is dedicated in finding a simpler way to construct an orthonormal basis for our future Galerkin scheme.

5. Construction of an orthonormal basis for the solution space

In this chapter we define an auxiliary spectral problem, similar in structure with the modified transmission eigenvalue problem for an artificial metamaterial, with the difference that the eigenvalue parameter appears in both differential equations. As a consequence, the eigenfunction pairs of this auxiliary problem are complete in the solution space and form an orthonormal basis. We also show that the spectrum of this auxiliary problem can be determined, if the Dirichlet and Neumann eigenvalues and eigenfunctions are known beforehand.

Contents

| | |
|---|----|
| 5.1. An auxiliary eigenvalue problem | 48 |
| 5.2. An analytic approach for the orthonormal basis construction in a spherical geometry | 53 |
| 5.3. An analytic approach for the orthonormal basis construction in an arbitrary geometry | 55 |

5.1. An auxiliary eigenvalue problem

In what follows we define an auxiliary eigenvalue problem that can provide an orthonormal basis for the solution space $\mathcal{H}(D_b)$. We consider the system

$$\Delta\phi - \sigma\phi = 0 \quad \text{in } D_b, \quad (5.1)$$

$$\Delta\psi - \sigma\psi = 0 \quad \text{in } D_b, \quad (5.2)$$

$$\phi = \psi, \quad \text{on } \partial D_b, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\partial\psi}{\partial n} \quad \text{on } \partial D_b \quad (5.4)$$

which is similar in structure with eigenvalue problem (3.1)-(3.4), but as we will discover later, it also has the spectral completeness property that (3.1)-(3.4) lacks. It is also a degenerate system, in the sense that the differential operator $\Delta - \sigma$ repeats itself on both equations (5.1) and (5.2). The analytical implications of the above definition will be examined later on.

We proceed by illustrating the spectral properties of the auxiliary eigenvalue problem. To this end, we consider the variational formulation of (5.1)-(5.4) and search for a $(\phi, \psi) \in \mathcal{H}(D_b)$ and a $\sigma \in \mathbb{C}$, such that

$$\int_{D_b} \nabla\phi \cdot \nabla\bar{\phi}' dx + \int_{D_b} \nabla\psi \cdot \nabla\bar{\psi}' dx + \sigma \int_{D_b} \phi\bar{\phi}' dx + \sigma \int_{D_b} \psi\bar{\psi}' dx = 0, \quad (5.5)$$

for all $(\phi', \psi') \in \mathcal{H}(D_b)$. By means of Riesz representation theorem, we define an operator eigenvalue problem, equivalent to (5.5):

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_\sigma(\phi, \psi), (\phi', \psi')) &:= \int_{D_b} \nabla\phi \cdot \nabla\bar{\phi}' dx + \int_{D_b} \nabla\psi \cdot \nabla\bar{\psi}' dx \\ &+ \sigma \int_{D_b} \phi\bar{\phi}' dx + \sigma \int_{D_b} \psi\bar{\psi}' dx = 0 \end{aligned}$$

for all $(\phi', \psi') \in \mathcal{H}(D_b)$, where $\mathbb{A}_\sigma : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ is a linear bounded operator that depends analytically on the spectral parameter $\sigma \in \mathbb{C}$.

Remark 5.1.1 \mathbb{A}_σ is self-adjoint if and only if $\sigma \in \mathbb{R}$. It is easy to verify that if σ is not a real number, then $N(\mathbb{A}_\sigma) = \{0\}$.

Remark 5.1.2 The family of operators $\{\mathbb{A}_\sigma\}_{\sigma \in \mathbb{C}}$ is of Fredholm type and depends analytically on the parameter σ . Thus, if we set $\tilde{\sigma} := \sigma_0 + i\sigma_1$, $\sigma_1 \neq 0$, then from Remark 5.1.1 it follows that $R(\mathbb{A}_{\tilde{\sigma}}) = \mathcal{H}(D_b)$ and as a consequence $\mathbb{A}_{\tilde{\sigma}}^{-1}$ exists as a bounded, linear operator.

From the theory for analytic Fredholm operators, we conclude that \mathbb{A}_σ is invertible for all $\sigma \in \mathbb{C}$, except mostly on a discrete subset of the complex plane. Thus, we can choose one $\beta \in \mathbb{R}$, such that \mathbb{A}_β^{-1} exists as a linear and bounded operator.

We can also define by means of the Riesz Representation theorem, a bounded linear operator $\mathbb{K}_\beta : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow (\mathcal{H}(D_b))^*$ in the following way:

$$\langle \mathbb{K}_\beta(\phi, \psi), (\phi', \psi') \rangle_{(\mathcal{H}(D_b))^* \times \mathcal{H}(D_b)} = (\mathbb{A}_\beta(\phi, \psi), (\phi', \psi'))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} \quad (5.6)$$

Hence, \mathbb{K}_β is also of Fredholm type and $\mathbb{K}_\beta^{-1} : (\mathcal{H}(D_b))^* \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ exists as a bounded linear operator.

This operator can be used to define an equivalent eigenvalue problem with (5.5). Define $\mathbb{T} : L^2(D_b) \times L^2(D_b) \rightarrow L^2(D_b) \times L^2(D_b)$ such that $\mathbb{T}(f, g) := (\phi_f, \psi_g) \in \mathcal{H}(D_b)$, where $\mathbb{K}_\beta^{-1}(f, g) = (\phi_f, \psi_g)$. Since \mathbb{K}_β is invertible, \mathbb{T} is well defined.

Proposition 5.1.3 $\mathbb{T} : L^2(D_b) \times L^2(D_b) \rightarrow L^2(D_b) \times L^2(D_b)$ is compact and self-adjoint

Proof. \mathbb{T} is compact since it is a bounded mapping from $L^2(D_b) \times L^2(D_b)$ to $\mathcal{H}(D_b)$ and the compact embedding of $\mathcal{H}(D_b)$ into $L^2(D_b) \times L^2(D_b)$. On the other hand, \mathbb{T} is self-adjoint as a consequence of the family \mathbb{A}_β , $\beta \in \mathbb{R}$ being self-adjoint:

Let $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in L^2(D_b) \times L^2(D_b)$. Then we have that

$$\begin{aligned} ((f_1, g_1), \mathbb{T}(f_2, g_2))_{L^2 \times L^2} &= \langle \mathbb{K}_\beta(\phi_{f_1}, \psi_{g_1}), (\phi_{f_2}, \psi_{g_2}) \rangle_{(\mathcal{H}(D_b))^* \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= (\mathbb{A}_\beta(\phi_{f_1}, \psi_{g_1}), (\phi_{f_2}, \psi_{g_2}))_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} \\ &= ((\phi_{f_1}, \psi_{g_1}), \mathbb{A}_\beta(\phi_{f_2}, \psi_{g_2}))_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} \\ &= \langle (\phi_{f_1}, \psi_{g_1}), \mathbb{K}_\beta(\phi_{f_2}, \psi_{g_2}) \rangle_{(\mathcal{H}(D_b))^* \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= \langle (\phi_{f_1}, \psi_{g_1}), (f_2, g_2) \rangle_{(\mathcal{H}(D_b))^* \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= (\mathbb{T}(f_1, g_1), (f_2, g_2))_{L^2 \times L^2} \end{aligned}$$

■

Proposition 5.1.4 The eigenvalue problem (5.5) is equivalent with the following eigenvalue problem for \mathbb{T} , excluding the zero eigenvalue of \mathbb{T} (If zero is an eigenvalue).

$$\mathbb{T}(\phi, \psi) = \frac{1}{\beta - \sigma}(\phi, \psi) \tag{5.7}$$

Proof. Suppose (ϕ, ψ) is a non-trivial solution of (5.5) for some σ . Then (ϕ, ψ) belongs to the nullspace of K_σ , i.e.

$$\langle \mathbb{K}_\sigma(\phi, \psi), (\phi', \psi') \rangle = 0 \quad \forall (\phi', \psi') \in \mathcal{H}(D_b)$$

Alternatively, the relation above can be written as:

$$\langle \mathbb{K}_\beta(\phi, \psi), (\phi', \psi') \rangle - (\beta - \sigma) \langle (\phi, \psi), (\phi', \psi') \rangle = 0$$

for all $(\phi', \psi') \in \mathcal{H}(D_b)$, since $\{\sigma, (\phi, \psi)\}$ is an eigenpair for (5.5). As a consequence, $\mathbb{K}_\beta(\phi, \psi) = (\beta - \sigma)(\phi, \psi)$ and thus, $\mathbb{T}(\phi, \psi) = \mathbb{K}_\beta^{-1}(\phi, \psi) = \frac{1}{\beta - \sigma}(\phi, \psi)$.

Conversely, suppose $\{t, (u_1, u_2)\}$, $t \neq 0$ is an eigenpair of \mathbb{T} . Then, it is also a non-trivial solution of (5.5), since:

$$T(u_1, u_2) = t(u_1, u_2) \Leftrightarrow K_\beta^{-1}(u_1, u_2) = t(u_1, u_2)$$

which is equivalent to

$$K_\beta K_\beta^{-1}(u_1, u_2) = t K_\beta(u_1, u_2) \Leftrightarrow (u_1, u_2) = t K_\beta(u_1, u_2)$$

5. Construction of an orthonormal basis for the solution space

That is,

$$\langle \mathbb{K}_\beta(u_1, u_2), (\phi', \psi') \rangle = \langle \frac{1}{t}(u_1, u_2), (\phi', \psi') \rangle$$

or equivalently,

$$\langle \mathbb{K}_{\beta - \frac{1}{t}}(u_1, u_2), (\phi', \psi') \rangle = 0 \quad \forall (\phi', \psi') \in \mathcal{H}(D_b)$$

That is, $\beta - \frac{1}{t}$ is an eigenvalue and (u_1, u_2) the corresponding eigenfunction pair for (5.5). ■

As a result, the eigenvalues σ of (5.5) form a discrete set with no accumulation points in \mathbb{R} .

Lemma 5.1.5 *Operator \mathbb{T} is injective, i.e. $N(\mathbb{T}) = \{0\}$.*

Proof. Let $(f_0, g_0) \in N(\mathbb{T})$. Then, $\mathbb{T}(f_0, g_0) = (0, 0) = \mathbb{K}_\beta^{-1}(f_0, g_0) \in L^2(D_b) \times L^2(D_b)$ and since \mathbb{K}_β^{-1} is an isomorphism, we conclude that $(f_0, g_0) = (0, 0) \in \mathcal{H}(D_b)$. ■

Remark 5.1.6 *From the decomposition $L^2(D_b) \times L^2(D_b) = N(\mathbb{T}) \oplus \overline{R(\mathbb{T})}$, injectivity of \mathbb{T} implies that $L^2(D_b) \times L^2(D_b) = \overline{R(\mathbb{T})}$ and thus, the eigenelements $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ of \mathbb{T} can form an orthonormal basis for the space $L^2(D_b) \times L^2(D_b)$. Moreover, injectivity of \mathbb{T} also implies that eigenvalues $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ are infinite.*

Next, we illustrate that eigenfunction pairs of (5.5) are orthogonal with respect to the inner products of both $L^2(D_b) \times L^2(D_b)$ and $\mathcal{H}(D_b)$.

Proposition 5.1.7 *Let $\sigma_1 \neq \sigma_2$ are two distinct eigenvalues of (5.5) and $(\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2)$ are corresponding eigenfunction pairs. Then, they are orthogonal with respect to the $L^2(D_b) \times L^2(D_b)$ -inner product, i.e. $((\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2))_{L^2(D_b) \times L^2(D_b)} = 0$.*

Proof. If $t_1 \neq t_2$ are two distinct eigenvalues of \mathbb{T} and $(f_1, g_1), (f_2, g_2)$ are the corresponding eigenelements, they are orthogonal with respect to the $L^2(D_b) \times L^2(D_b)$ inner product, due to \mathbb{T} being self-adjoint. Equivalence of eigenvalue problems (5.5) and (5.7) implies that all eigenfunction pairs of (5.5) that correspond to distinct eigenvalues σ are also orthogonal with respect to the $L^2(D_b) \times L^2(D_b)$ inner product. ■

Lemma 5.1.8 *Suppose $\{\sigma_1, (\phi_1, \psi_1)\}$ and $\{\sigma_2, (\phi_2, \psi_2)\}$ are two eigenpairs of (5.5), with $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Then, they are orthogonal with respect to the $\mathcal{H}(D_b)$ -inner product, i.e. $((\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} = 0$.*

Proof. Let $\{\sigma_1, (\phi_1, \psi_1)\}$ and $\{\sigma_2, (\phi_2, \psi_2)\}$ be two eigenpairs of (5.5), with $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Since (ϕ_1, ψ_1) is an eigenfunction pair, it is a solution of (5.5) for any choice of test functions. Choosing (ϕ_2, ψ_2) as test functions yields

$$\int_{D_b} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \overline{\phi_2} dx + \int_{D_b} \nabla \psi_1 \cdot \nabla \overline{\psi_2} dx + \sigma_1 \left[\int_{D_b} \phi_1 \overline{\phi_2} dx + \int_{D_b} \psi_1 \overline{\psi_2} dx \right] = 0 \quad (5.8)$$

From Proposition 5.1.7,

$$\int_{D_b} \phi_1 \overline{\phi_2} dx + \int_{D_b} \psi_1 \overline{\psi_2} dx = 0 \quad (5.9)$$

Equations (5.8) and (5.9) imply that

$$\int_{D_b} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \overline{\phi_2} dx + \int_{D_b} \nabla \psi_1 \cdot \nabla \overline{\psi_2} dx = 0 \quad (5.10)$$

As a result,

$$\begin{aligned} ((\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} &= ((\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2))_{L^2(D_b) \times L^2(D_b)} \\ &\quad + ((\nabla \phi_1, \nabla \psi_1), (\nabla \phi_2, \nabla \psi_2))_{L^2(D_b) \times L^2(D_b)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

In what follows, an equivalent generalized eigenvalue problem to (5.5) is formulated, which grants a min-max characterization to the eigenvalues of this problem:

Let $\Lambda > 0$ be an arbitrary positive number. Then, eigenvalue problem (5.5) is equivalent with the following:

$$\begin{aligned} &\int_{D_b} \nabla \phi \cdot \nabla \overline{\phi'} dx + \int_{D_b} \nabla \psi \cdot \nabla \overline{\psi'} dx \\ + \Lambda \left[\int_{D_b} \phi \overline{\phi'} dx + \int_{D_b} \psi \overline{\psi'} dx \right] &= (\Lambda - \sigma) \left[\int_{D_b} \phi \overline{\phi'} dx + \int_{D_b} \psi \overline{\psi'} dx \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

We define a bounded, linear operator $\mathbb{B} : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ by means of Riesz Representation theorem:

$$(\mathbb{B}(\phi, \psi), (\phi', \psi'))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} := \int_{D_b} \phi \overline{\phi'} dx + \int_{D_b} \psi \overline{\psi'} dx \quad (5.12)$$

Then, (5.11) can be written as an generalized, operator eigenvalue problem:

$$\mathbb{A}_\Lambda(\phi, \psi) = (\Lambda - \sigma)\mathbb{B}(\phi, \psi), \quad (5.13)$$

where \mathbb{A}_Λ is a linear, self-adjoint, coercive operator and \mathbb{B} is a compact, linear and positive operator. Note that, in contrast to our original eigenvalue problem (3.5), there are no coercivity constraints.

The eigenvalues $\Lambda - \sigma_n$ of this operator eigenvalue problem are positive, increasing, with only possible accumulation point at $+\infty$, if they are infinite [29, Theorem 10.23]. They also have a min-max characterization (Courant-Fischer), with the smallest eigenvalue $\Lambda - \sigma_1$, being an infimum:

$$\begin{aligned} \Lambda - \sigma_1 &= \inf_{(\phi, \psi) \in \mathcal{H}(D_b), (\phi, \psi) \neq (0,0)} \frac{(\mathbb{A}_\Lambda(\phi, \psi), (\phi, \psi))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)}}{(\mathbb{B}(\phi, \psi), (\phi, \psi))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)}} \\ &= \inf_{(\phi, \psi) \in \mathcal{H}(D_b), (\phi, \psi) \neq (0,0)} \frac{\|\nabla \phi\|^2 + \|\nabla \psi\|^2 + \Lambda \int_{D_b} |\phi|^2 dx + \Lambda \int_{D_b} |\psi|^2 dx}{\int_{D_b} |\phi|^2 dx + \int_{D_b} |\psi|^2 dx} \\ &= \inf_{(\phi, \psi) \in \mathcal{H}(D_b), (\phi, \psi) \neq (0,0)} \frac{\|\nabla \phi\|^2 + \|\nabla \psi\|^2}{\int_{D_b} |\phi|^2 dx + \int_{D_b} |\psi|^2 dx} + \Lambda \\ &= \Lambda, \quad (\text{by choosing } (\phi_0, \psi_0) = (1, 1)) \end{aligned} \quad (5.14)$$

5. Construction of an orthonormal basis for the solution space

These properties are then passed onto the eigenvalues of (5.5). Hence, $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ is a decreasing sequence, with only possible accumulation point at $-\infty$. Since Λ can be chosen to be an arbitrarily small positive number, $\sigma_n \leq 0$ for all $n \in \mathbb{N}$. Also,

$$\sigma_1 = \Lambda - \Lambda = 0 \quad (5.15)$$

We will later find out that σ_1 corresponds to the first Neumann eigenvalue. In fact, the sequence $\{-\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ consists of either Dirichlet or Neumann eigenvalues for the Laplacian in D_b .

In order to construct the orthonormal basis for the solution space $\mathcal{H}(D_b)$, we utilize the operator $\tilde{\mathbb{T}} : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ defined as follows:

$$\tilde{\mathbb{T}} := \mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \mathbb{B} \mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \quad (5.16)$$

From definition, $\tilde{\mathbb{T}}$ is a self-adjoint, compact and positive linear operator. Moreover, \mathbb{B} has the property $N(\mathbb{B}) = \{0\}$ which implies that $N(\tilde{\mathbb{T}}) = \{0\}$. Injectivity of \mathbb{B} secures spectral completeness, since from the the Hilbert space decomposition $\mathcal{H}(D_b) = N(\tilde{\mathbb{T}}) \oplus \overline{R(\tilde{\mathbb{T}})} = \overline{R(\tilde{\mathbb{T}})}$ and the application of the Hilbert-Schmidt theorem to $\tilde{\mathbb{T}}$, it is possible to select an orthonormal basis of $\mathcal{H}(D_b)$ consisting of eigenlements of $\tilde{\mathbb{T}}$.

The eigenvalue problem (5.5) is equivalent with the following:

$$\left[\frac{1}{\Lambda - \sigma} I - \tilde{\mathbb{T}} \right] u = 0, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathcal{H}(D_b) \quad (5.17)$$

where $(u_1, u_2) = \mathbb{A}_\Lambda^{+\frac{1}{2}}(\phi, \psi)$, (ϕ, ψ) is an eigenfunction pair of (5.5) and both operators $\mathbb{A}_\Lambda^{+\frac{1}{2}}, \mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ are topological isomorphisms. In contrast to (4.2), this eigenvalue problem corresponds to an injective operator, thus zero isn't one of its eigenvalues.

Suppose that $\{\tilde{u}_j\}_{j=1}^\infty := \{(u_1^{(j)}, u_2^{(j)})\}_{j=1}^\infty$ is an orthonormal basis for $\mathcal{H}(D_b)$, consisting of eigenlements of $\tilde{\mathbb{T}}$. Then, $\{\mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \tilde{u}_j\}_{j=1}^\infty$ is from definition, a Riesz basis for $\mathcal{H}(D_b)$. It consists of eigenfunction pairs (ϕ, ψ) of (5.5), since (5.5) and (5.17) are equivalent eigenvalue problems.

Using the results mentioned above, we present a convenient method to construct the desired orthonormal basis. For each eigenvalue σ_n , where $n \in \mathbb{N}$, we select an orthonormal basis for its corresponding eigenspace $\{(\phi_1^{(n)}, \psi_1^{(n)}), (\phi_2^{(n)}, \psi_2^{(n)}), \dots, (\phi_{k(n)}^{(n)}, \psi_{k(n)}^{(n)})\}$, where $k(n) < +\infty$ is the geometric multiplicity of σ_n . Then, from the equivalence of (5.5) and (5.17), we have that:

$$\mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \tilde{u}_n \in \text{span}\{(\phi_1^{(n)}, \psi_1^{(n)}), (\phi_2^{(n)}, \psi_2^{(n)}), \dots, (\phi_{k(n)}^{(n)}, \psi_{k(n)}^{(n)})\}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (5.18)$$

Theorem 5.1.9 *The system*

$$\mathcal{F} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(\phi_1^{(n)}, \psi_1^{(n)}), (\phi_2^{(n)}, \psi_2^{(n)}), \dots, (\phi_{k(n)}^{(n)}, \psi_{k(n)}^{(n)})\} \quad (5.19)$$

is an orthonormal basis for $\mathcal{H}(D_b)$.

5.2. An analytic approach for the orthonormal basis construction in a spherical geometry

Proof. From Lemma 5.1.8, \mathcal{F} is orthonormal. Since $\{\mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}}\tilde{u}_n\}_{n=1}^\infty$ is a Riesz basis for $\mathcal{H}(D_b)$, every $\omega \in \mathcal{H}(D_b)$ can be described from a series expansion

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \tilde{u}_n, \quad (5.20)$$

for some choice of constants c_n . Relation (5.18) implies that

$$\mathbb{A}_\Lambda^{-\frac{1}{2}} \tilde{u}_n = \sum_{i=1}^{k(n)} a_i^{(n)} (\phi_i^{(n)}, \psi_i^{(n)}), \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.21)$$

As a consequence of (5.20) and (5.21),

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=1}^{k(n)} a_i^{(n)} (\phi_i^{(n)}, \psi_i^{(n)})$$

Hence, $\omega \in \overline{\text{span}\mathcal{F}}$, implying that $\mathcal{H}(D_b) \subset \overline{\text{span}\mathcal{F}}$. On the other hand, $\overline{\text{span}\mathcal{F}} \subset \mathcal{H}(D_B)$, so we have that $\overline{\text{span}\mathcal{F}} = \mathcal{H}(D_B)$ and the proof is concluded. ■

5.2. An analytic approach for the orthonormal basis construction in a spherical geometry

In the previous section we showed that (5.1)-(5.4) provides a complete eigenfunction system in $\mathcal{H}(D_b)$. Now, we confine to the simple case of D_b being the disk $D(0, R) \subset \mathbb{R}^2$. Hence, we can apply separation of variables and obtain analytical formulas for the eigenfunction system. For simplicity, in what follows we substitute $-\sigma$ with σ and the auxiliary eigenvalue problem is re-written in the form:

$$\Delta\phi + \sigma\phi = 0 \quad \text{in } D_b, \quad (5.22)$$

$$\Delta\psi + \sigma\psi = 0 \quad \text{in } D_b, \quad (5.23)$$

$$\phi = \psi \quad \text{on } D_b, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\partial\psi}{\partial n} \quad \text{on } \partial D_b \quad (5.25)$$

Thus, any solution pair of problem (5.22)-(5.25) for $x = (r, \theta)$ in polar coordinates, possesses the series expansion:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_m(\sqrt{\sigma}r) e^{im\theta} \quad (5.26)$$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_m(\sqrt{\sigma}r) e^{im\theta}, \quad (5.27)$$

where J_m are the cylindrical Bessel functions. Since any solution pair must also satisfy the boundary conditions (5.24)-(5.25), i.e. $\phi(R, \theta) = \psi(R, \theta)$ and $\partial\phi/\partial n(R, \theta) = -\partial\psi/\partial n(R, \theta)$, the following homogeneous, linear system of equations emerges for constants a_m and b_m :

$$a_m J_m(\sqrt{\sigma}R) - b_m J_m(\sqrt{\sigma}R) = 0 \quad (5.28)$$

$$\sqrt{\sigma}a_m J'_m(\sqrt{\sigma}R) + \sqrt{\sigma}b_m J'_m(\sqrt{\sigma}R) = 0 \quad (5.29)$$

5. Construction of an orthonormal basis for the solution space

Non-trivial eigenfunctions $w(r, \theta)$ and $v(r, \theta)$ stem from values of σ that are roots of the determinant

$$\det \begin{pmatrix} J_m(\sqrt{\sigma}R) & -J_m(\sqrt{\sigma}R) \\ \sqrt{\sigma}J'_m(\sqrt{\sigma}R) & \sqrt{\sigma}J'_m(\sqrt{\sigma}R) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.30)$$

Equivalently, $2\sqrt{\sigma}J'_m(\sqrt{\sigma}R) \cdot J_m(\sqrt{\sigma}R) = 0$, that is

$$J_m(\sqrt{\sigma}R) = 0 \quad (5.31)$$

or,

$$\sqrt{\sigma}J'_m(\sqrt{\sigma}R) = 0 \quad (5.32)$$

To summarize, if σ is an eigenvalue of the auxiliary spectral problem, then it has to be either a Dirichlet eigenvalue (5.31), or a Neumann eigenvalue (5.32) for the Laplacian in the disk $D_b = D(0, R)$. We notice that (5.31) and (5.32) are mutually exclusive (for fixed $m \in \mathbb{N}$), since a Dirichlet eigenfunction can not be simultaneously a Neumann eigenfunction.

In the case where (5.31) holds, the eigenfunction pairs take the following form, as a consequence of (5.28) and (5.29):

$$c_1 \left(J_m \left(\frac{j_{m,l}}{R} r \right) e^{im\theta}, -J_m \left(\frac{j_{m,l}}{R} r \right) e^{im\theta} \right), \quad c_1 \in \mathbb{C}, \quad (5.33)$$

where $j_{m,l}$ is the l -th zero of J_m , $m \in \mathbb{N}_0$

In the case where (5.32) holds and $\sigma \neq 0$, the eigenfunction pairs take the following form, as a consequence of (5.28) and (5.29):

$$c_2 \left(J_m \left(\frac{j'_{m,l}}{R} r \right) e^{im\theta}, J_m \left(\frac{j'_{m,l}}{R} r \right) e^{im\theta} \right), \quad c_2 \in \mathbb{C}, \quad (5.34)$$

where $j'_{m,l}$ is the l -th zero of J'_m , $m \in \mathbb{N}_0$

The case when $\sigma = 0$ is special, because the corresponding Neumann eigenfunctions for $-\Delta$ are no longer Bessel function, but instead the family of constant functions. Moreover, it is easy to see that $\sigma = 0$ is in fact an eigenvalue, since $(1, 1)$ is a corresponding eigenpair.

Lemma 5.2.1 *For $\sigma = 0$, eigenfunction pairs take the following form:*

$$c_3(1, 1), \quad c_3 \in \mathbb{C} \quad (5.35)$$

Proof. Let (ϕ, ψ) be an eigenfunction pair for the auxiliary eigenvalue problem, corresponding to $\sigma = 0$. Define $u := \phi - \psi$. Then, u satisfies the differential equation

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta \phi - \Delta \psi = 0 \quad \text{in } D_b \\ u|_{\partial D_b} &= (\phi - \psi)|_{\partial D_b} = 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

This differential equation is well posed and only possesses the trivial solution $u = 0$. Thus, our eigenfunction pair (ϕ, ψ) satisfies the relation $\phi = \psi$, in $\overline{D_b}$. Hence, by substituting in the auxiliary eigenvalue problem, ϕ must be a solution of the differential equation

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= 0 \quad \text{in } D_b, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0 \quad \text{on } \partial D_b \end{aligned}$$

5.3. An analytic approach for the orthonormal basis construction in an arbitrary geometry

That is, both ϕ and ψ are Neumann eigenfunctions for $\sigma = 0$, i.e. $\phi = \psi = c$, where $c \in \mathbb{C}$. ■

To summarize the results above, we state the following:

Corollary 5.2.2 *Let $\mathcal{D}(D(0, R))$ and $\mathcal{N}(D(0, R))$ denote the set of all Dirichlet and Neumann eigenvalues respectively, for $-\Delta$ in the disk $D(0, R)$. Then, the eigenvalues σ of the auxiliary eigenvalue problem consist of the set $\mathcal{D}(D(0, R)) \cup \mathcal{N}(D(0, R))$, where the corresponding eigenpairs are of the form:*

$$\begin{aligned} c_1(J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}, -J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}) & \text{ if } \sigma \in \mathcal{D}(D(0, R)), \\ c_2(J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}, J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}) & \text{ if } 0 \neq \sigma \in \mathcal{N}(D(0, R)), \\ c_3(1, 1) & \text{ if } \sigma = 0 \end{aligned}$$

5.3. An analytic approach for the orthonormal basis construction in an arbitrary geometry

Previously, separation of variables was used to compute the eigenfunction pairs for a disk $D(0, R) \subset \mathbb{R}^2$. After normalization, the family of eigenfunction pairs that is described by Corollary 5.2.2, is the desired orthonormal basis for $\mathcal{H}(D(0, R))$. We illustrated that this choice of a basis stems from the Dirichlet and Neumann eigenvalue problems, defined on $D(0, R)$.

Our aim is to generalize the results of Corollary 5.2.2 in all feasible geometries. Hence, the problem of constructing an orthonormal basis for $\mathcal{H}(D_b)$, where D_b is an arbitrary geometry, reduces to solving the corresponding Dirichlet and Neumann eigenvalue problems on D_b .

Proposition 5.3.1 *Let $\mathcal{D}(D_b)$ and $\mathcal{N}(D_b)$ denote the set of all Dirichlet and Neumann eigenvalues respectively, for $-\Delta$ in D_b . Also, let $\mathcal{E}(D_b)$ denote the set of all eigenvalues of the auxiliary eigenvalue problem (5.22)-(5.25). If $\sigma \in \mathcal{D}(D_b) \cup \mathcal{N}(D_b)$, then $\sigma \in \mathcal{E}(D_b)$, i.e. the spectrum of (5.22)-(5.25) contains the set $\mathcal{D}(D_b) \cup \mathcal{N}(D_b)$. Since $0 \in \mathcal{N}(D_b)$, then $\sigma = 0$ is always an eigenvalue of (5.22)-(5.25)*

Proof. Define the eigenvalue problems

$$\begin{aligned} \Delta u + \sigma u &= 0 & \text{in } D_b \\ u &= 0 & \text{on } \partial D_b \end{aligned} \tag{5.37}$$

and

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} + \sigma \tilde{u} &= 0 & \text{in } D_b, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} &= 0 & \text{on } \partial D_b \end{aligned} \tag{5.38}$$

which are the Dirichlet and Neumann eigenvalue problems, defined on D_b , for $-\Delta$.

Suppose that (σ, u) is an eigenpair for (5.37). Then, we define a function pair $\mathcal{H}(D_b) \ni (\phi, \psi) := (u, -u) \neq (0, 0)$, since $u \neq 0$. We notice that (ϕ, ψ) is a solution

5. Construction of an orthonormal basis for the solution space

of the auxiliary eigenvalue problem (5.22)-(5.25), since:

$$\begin{aligned} \Delta u + \sigma u &= 0 && \text{in } D_b \\ \Delta(-u) + \sigma(-u) &= -(\Delta u + \sigma u) = 0 && \text{in } D_b, \\ u &= -u = 0 && \text{on } \partial D_b \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= -\left(-\frac{\partial u}{\partial n}\right) && \text{on } \partial D_b \end{aligned}$$

Now, suppose that (σ, \tilde{u}) is an eigenpair for (5.38). Then, we define a function pair $\mathcal{H}(D_b) \ni (\phi, \psi) := (\tilde{u}, \tilde{u}) \neq (0, 0)$, since $\tilde{u} \neq 0$. We notice that (ϕ, ψ) is a solution of the auxiliary eigenvalue problem (5.22)-(5.25), since:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} + \sigma \tilde{u} &= 0 && \text{in } D_b, \\ \Delta \tilde{u} + \sigma \tilde{u} &= 0 && \text{in } D_b, \\ \tilde{u} &= \tilde{u} && \text{on } \partial D_b, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} &= -\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}\right) && \text{on } \partial D_b \end{aligned}$$

■

For $\mathcal{E}(D_b) = \mathcal{D}(D_b) \cup \mathcal{N}(D_b)$ to hold, it remains to show that $\mathcal{E}(D_b) \subset \mathcal{D}(D_b) \cup \mathcal{N}(D_b)$.

Theorem 5.3.2 *The spectrum of the auxiliary eigenvalue problem (5.22)-(5.25) consists of Dirichlet and Neumann eigenvalues for $-\Delta$ on D_b . The corresponding eigenfunction pairs are of the form:*

$$\begin{aligned} c_1(u, -u) & \quad \text{if } \sigma \in \mathcal{D}(D_b), \\ c_2(\tilde{u}, \tilde{u}) & \quad \text{if } 0 \neq \sigma \in \mathcal{N}(D_b), \\ c_3(1, 1) & \quad \text{if } \sigma = 0 \end{aligned}$$

where u, \tilde{u} are Dirichlet and Neumann eigenfunctions respectively.

Proof. Suppose that $\sigma \in \mathcal{E}(D_b)$ and that (w, v) is a corresponding eigenfunction pair. We define the function $u := \phi - \psi$. Then,

$$\Delta u + \sigma u = \Delta(\phi - \psi) + \sigma(\phi - \psi) = \Delta\phi - \Delta\psi + \sigma\phi - \sigma\psi = 0 \quad (5.39)$$

and

$$u|_{\partial D_b} = \phi|_{\partial D_b} - \psi|_{\partial D_b} = 0 \quad (5.40)$$

Hence, if $\phi \neq \psi$, then $u \neq 0$ is a Dirichlet eigenfunction for $-\Delta$ on D_b and σ is the corresponding eigenvalue.

Next, we define the function $\tilde{u} := \phi + \psi$. Then,

$$\Delta \tilde{u} + \sigma \tilde{u} = \Delta(\phi + \psi) + \sigma(\phi + \psi) = \Delta\phi + \Delta\psi + \sigma\phi + \sigma\psi = 0 \quad (5.41)$$

and

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \Big|_{\partial D_b} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\partial D_b} + \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\partial D_b} = 0 \quad (5.42)$$

Hence, if $\phi \neq -\psi$, then $\tilde{u} \neq 0$ is a Neumann eigenfunction for $-\Delta$ on D_b and σ is the corresponding eigenvalue.

Now, suppose to the contrary that $\sigma \in \mathcal{E}(D_b)$ is neither a Dirichlet nor a Neumann eigenvalue and that (ϕ, ψ) is a corresponding eigenfunction pair. We define $u := \phi - \psi$ and $\tilde{u} := \phi + \psi$. Then, u is a solution of (5.39)-(5.40) and $\sigma \notin \mathcal{D}(D_b)$. Consequently $u \equiv 0$, that is, $\phi = \psi$.

Also, \tilde{u} is a solution of (5.41)-(5.42) and $\sigma \notin \mathcal{N}(D_b)$, consequently $\tilde{u} \equiv 0$ and thus $\phi = -\psi$. This is a contradiction, since $(\phi, \psi) \neq (0, 0)$. Thus, $\sigma \in \mathcal{D}(D_b) \cup \mathcal{N}(D_b)$, i.e. $\mathcal{E}(D_b) = \mathcal{D}(D_b) \cup \mathcal{N}(D_b)$. ■

To prove this theorem, we had the simultaneous hypothesis that $\sigma \notin \mathcal{D}(D_b)$ and that $\sigma \notin \mathcal{N}(D_b)$. We can formulate a second proof for the theorem, assuming one at a time.

Proof. (Alternative way) Suppose that $\mathcal{E}(D_b) \ni \sigma \notin \mathcal{D}(D_b)$ and define $u := \phi - \psi$. Since u is a solution of (5.39)-(5.40), then from hypothesis $u \equiv 0$ or equivalently, $\phi = \psi$. Now, set $\tilde{u} := \phi + \psi = 2\phi$. Then, \tilde{u} is a non trivial solution for (5.41)-(5.42). Hence, $\sigma \in \mathcal{N}(D_b)$, i.e. *if σ belongs in the spectrum and is not a Dirichlet eigenvalue, then it must be a Neumann eigenvalue.* In the same way, one can show that:

$$\text{If } \mathcal{E}(D_b) \ni \sigma \notin \mathcal{N}(D_b) \text{ then } \sigma \in \mathcal{D}(D_b)$$

Hence,

$$\mathcal{E}(D_b) = \mathcal{D}(D_b) \cup \mathcal{N}(D_b)$$

■

There are geometries where $\mathcal{D}(D_b) \cap \mathcal{N}(D_b) \neq \emptyset$, i.e. there exist values for $\sigma \in \mathbb{R}$ such that σ is a Dirichlet eigenvalue and a Neumann eigenvalue simultaneously. In those cases, the corresponding eigenspaces for the auxiliary eigenvalue problem (5.22)-(5.25) are described by an algebraic decomposition, that illustrates the projections on Dirichlet and Neumann eigenspaces:

Lemma 5.3.3 *Let $\sigma \in \mathcal{E}(D_b)$ and (ϕ, ψ) is a corresponding eigenpair. The following algebraic decomposition holds:*

$$(\phi, \psi) = \frac{1}{2}(u, -u) + \frac{1}{2}(\tilde{u}, \tilde{u}) \tag{5.43}$$

where u satisfies (5.39)-(5.40) and \tilde{u} satisfies (5.41)-(5.42). More specifically, if $\sigma \in \mathcal{D}(D_b)$, then u belongs to the corresponding Dirichlet eigenspace. Respectively, if $\sigma \in \mathcal{N}(D_b)$, then \tilde{u} belongs to the corresponding Neumann eigenspace.

Proof. Let $\sigma \in \mathcal{E}(D_b)$ and (ϕ, ψ) a corresponding eigenfunction pair for (5.22)-(5.25). If we define the functions $u := \phi - \psi$ and $\tilde{u} := \phi + \psi$, then (5.43) holds. Also, u is a solution of (5.39)-(5.40) and \tilde{u} is a solution for (5.41)-(5.42). If $\sigma \notin \mathcal{D}(D_b)$, then from Theorem 5.3.2 $u \equiv 0$ and \tilde{u} is a Neumann eigenfunction. If $\sigma \notin \mathcal{N}(D_b)$, then Theorem 5.3.2 implies that $\tilde{u} \equiv 0$, hence u is a Dirichlet eigenfunction. ■

Remark 5.3.4 *In the case where σ is simultaneously a Dirichlet and a Neumann eigenvalue, it is possible that both terms u, \tilde{u} in the algebraic decomposition (5.43) are non-trivial. In all other cases, exactly one of them is equal to zero.*

6. A spectral Galerkin method

For the calculation of the modified transmission eigenvalues that corresponds to an artificial metamaterial, we develop a spectral Galerkin scheme by utilizing the orthonormal basis that was constructed in the previous chapter. We are able to prove that the eigenvalues of the discrete scheme converge to the unknown eigenvalues, under a coercivity constraint on the wavenumber. Furthermore, we implement the method on the unit disk where we have analytical representations for the orthonormal basis and in the end, we present some numerical examples.

Contents

| | |
|--|----|
| 6.1. Approximating the eigenvalues using a spectral Galerkin scheme . . . | 60 |
| 6.2. Numerical results for the modified transmission eigenvalue problem - constant refractive index | 64 |
| 6.3. Numerical results for the modified transmission eigenvalue problem - piecewise constant refractive index | 68 |

6.1. Approximating the eigenvalues using a spectral Galerkin scheme

In what follows we attempt to implement a spectral Galerkin method, for the determination of the eigenvalues of (3.5). Some methods for the computation of modified transmission eigenvalues are considered in [25, 26]. Also, for the numerical approximation of Stekloff eigenvalues associated with a modified far field operator, we refer the reader to [11, 49]. Here, we adopt a similar technique with the one used in [42], where a spectral Galerkin method was introduced for the computation of transmission eigenvalues. In that case, the bilaplacian eigenfunctions were used as the appropriate basis in the corresponding solution space. According to the previous analysis, we assume that the coercivity condition (3.12) for the wavenumber k^2 is satisfied and that $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ is an orthonormal basis for $\mathcal{H}(D_b)$. We have already demonstrated one method of constructing such basis, through means of the auxiliary, degenerate spectral problem (5.22)-(5.25):

$$\begin{aligned} \Delta\phi + \sigma\phi &= 0 & \text{in } D_b, \\ \Delta\psi + \sigma\psi &= 0 & \text{in } D_b, \\ \phi &= \psi & \text{on } \partial D_b, \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= -\frac{\partial\psi}{\partial n} & \text{on } \partial D_b \end{aligned}$$

Let $\{\lambda, (w, v)\}$ be an eigenpair for (3.5). Since $(w, v) \in \mathcal{H}(D_b)$, we can consider its Fourier expansion with respect to the orthonormal basis $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$(w, v) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\phi_n, \psi_n)$$

Hence, an approximation for the eigenpair (w, v) can be defined through the partial sum:

$$(w, v)^{(N)} := \sum_{n=1}^N c_n (\phi_n, \psi_n) \quad (6.1)$$

i.e.

$$w^{(N)} := \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \quad \text{and} \quad v^{(N)} := \sum_{n=1}^N c_n \psi_n$$

By substituting $w^{(N)}$ and $v^{(N)}$ in variational formulation (3.5) and choosing as test functions the orthonormal system $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^N$, an approximate generalized, matrix eigenvalue problem arises:

$$M_1^{(N)} \mathbf{c} = -\lambda^{(N)} M_2^{(N)} \mathbf{c} \quad (6.2)$$

where M_1, M_2 are $N \times N$ matrices, defined as follows:

$$\begin{aligned} M_1^{(N)} &:= \int_{D_b} \nabla\phi_i \cdot \nabla\bar{\phi}_j dx + a \int_{D_b} \nabla\psi_i \cdot \nabla\bar{\psi}_j dx - k^2 \int_{D_b} \eta(x) \phi_i \bar{\phi}_j dx \\ M_2^{(N)} &:= k^2 \int_{D_b} \eta_0(x) \psi_i \bar{\psi}_j dx \end{aligned} \quad (6.3)$$

6.1. Approximating the eigenvalues using a spectral Galerkin scheme

and $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T \in \mathbb{R}^N$, $i, j = 1, 2, \dots, N$.

Equation (6.2) is a generalized matrix eigenvalue problem and is a discrete analogue of the eigenvalue problem (3.5). Since the coercivity condition is met, (3.5) and (3.15), are also equivalent eigenvalue problems. Thus, approximation results for eigenvalues of matrix equation (6.2) can be obtained, through an application of spectral approximation theory to the generalized eigenvalue problem (3.15).

It is useful to introduce an abstract framework for convergence of projection methods [46]. Then, a Galerkin discretization scheme can be defined, since it falls into such category.

Let X be a Hilbert space and $\{X_N\}_{N=1}^{\infty}$ be a sequence of finite-dimensional subspaces of X , where $\dim(X_N) = N$, for all $N \in \mathbb{N}$. Also, let $P_N : X \rightarrow X$ be bounded orthogonal projectors on the finite-dimensional subspaces X_N , for all $N \in \mathbb{N}$, such that $P_N x \rightarrow x$ for all $x \in X$. Given an invertible operator $A \in \mathcal{L}(H)$, the projection method for A seeks to approximate the solutions of the equation $Ax = y$, where $y \in H$, by a sequence of solutions $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$ to the equations

$$P_N A P_N x = P_N y, \quad N = 1, 2, \dots \quad (6.4)$$

Definition 6.1.1 *The projection method for A is said to converge, if there exists an integer n_0 such that for every $y \in X$ and for every $N \geq n_0$, there exists a unique solution x_N to equation (6.4) and additionally it is required that the sequence of approximate solutions converges, that is $x_N \rightarrow A^{-1}y$.*

We denote by $\prod(P_N)$ the set of all linear, invertible operators for which the projection method converges. The following result is useful for our analysis [46, Theorem 17.1]:

Theorem 6.1.2 *Let $A \in \mathcal{L}(X)$ be invertible. Then, $A \in \prod(P_N)$ iff there exists an integer n_0 , such that for all $N \geq n_0$, $P_N A|_{X_N} = P_N A P_N|_{X_N} : X_N \rightarrow X_N$ has a bounded inverse and also,*

$$\sup_{N \geq n_0} \|(P_N A P_N|_{X_N})^{-1}\| < \infty.$$

We also make use of the following result [46, Corollary 17.5]:

Corollary 6.1.3 *Let X be a Hilbert space and $A : X \rightarrow X$ be a linear, coercive operator. If $P_N : X \rightarrow X$ is a sequence of orthogonal projectors, such that $P_N x \rightarrow x$, then $A \in \prod(P_N)$.*

Combining the above considerations, we derive the following:

Corollary 6.1.4 *Let $A \in \prod(P_N)$ and set $A^{(N)} := P_N A|_{X_N} : X_N \rightarrow X_N$. Then, as a consequence of (6.4) and Theorem 6.1.2,*

$$(A^{(N)})^{-1} P_N y \rightarrow A^{-1} y \quad (6.5)$$

Furthermore, the asymptotic behaviour of eigenvalues corresponding to matrix equation (6.2) can be determined, by using a spectral approximation result for positive and compact operators [47, pg. 134]. We note that the assumptions for spectral convergence are stronger than in [42], where the corresponding eigenvalue problem was not self-adjoint.

6. A spectral Galerkin method

Theorem 6.1.5 *Let H be a Hilbert space and $K_N : H \rightarrow H$ be a sequence of positive and compact operators, that converge uniformly to a positive and compact operator $K : H \rightarrow H$ (norm-convergence). If we denote by $\{t_{N,k}\}$ the sequence of eigenvalues of K_N and by $\{t_k\}$ the sequence of eigenvalues of K , then we have that:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} t_{N,k} = t_k \quad (6.6)$$

where the convergence is uniform with respect to k .

The use of the aforementioned framework for projection methods and spectral approximation allows us to define a Galerkin discretization scheme, which intends to approximate the eigenvalues $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ of (3.5) and we examine whether it converges or not.

Let $X := \mathcal{H}(D_b)$ and the N -dimensional subspaces $X_N \subset X$, where $N \in \mathbb{N}$ are defined as follows:

$$X_N := \text{span}\{(\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2), \dots, (\phi_N, \psi_N)\}$$

Moreover, we consider the corresponding orthogonal projection operators $P_N : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$, with range in X_N . Then, we define the following linear, bounded operators:

$$\begin{aligned} A_{\Lambda}^{(N)} &:= P_N A_{\Lambda}|_{X_N} : X_N \rightarrow X_N \\ B^{(N)} &:= P_N B|_{X_N} : X_N \rightarrow X_N \end{aligned}$$

Since A_{Λ} is coercive, from Theorem (6.1.3), $A_{\Lambda} \in \prod(P_n)$. It is also easy to see that $A_{\Lambda}^{(N)}$ inherits the coercivity property from A_{Λ} . Hence the operators

$$\left(A_{\Lambda}^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}}, \left(A_{\Lambda}^{(N)}\right)^{+\frac{1}{2}} : X_N \rightarrow X_N$$

can be defined, since both $A_{\Lambda}^{(N)}$ and $\left(A_{\Lambda}^{(N)}\right)^{-1}$ are positive operators. Furthermore, we can define the discrete analogue of operator eigenvalue equation (3.15) as follows:

$$\left(A_{\Lambda}^{(N)}(w^{(N)}, v^{(N)}), (w', v')\right) = k^2(\Lambda - \lambda^{(N)}) \left(B^{(N)}(w^{(N)}, v^{(N)}), (w', v')\right), \quad (6.7)$$

for all (w', v') in X_N . We also define a linear, bounded and self adjoint operator $\tilde{T}^{(N)} : X_N \rightarrow X_N$ such that:

$$\tilde{T}^{(N)} := \left(A_{\Lambda}^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}} B^{(N)} \left(A_{\Lambda}^{(N)}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Then, for $u^{(N)} = (u_1^{(N)}, u_2^{(N)}) \in X_N$ and $(u_1^{(N)}, u_2^{(N)}) = \left(A_{\Lambda}^{(N)}\right)^{+\frac{1}{2}} (w^{(N)}, v^{(N)})$, we have that

$$\left[\frac{1}{k^2(\Lambda - \lambda^{(N)})} I - \tilde{T}^{(N)} \right] u^{(N)} = 0$$

is an equivalent eigenvalue problem with (6.7), excluding the eigenvalue $\mu^{(N)} = 0$ for $\tilde{T}^{(N)}$.

6.1. Approximating the eigenvalues using a spectral Galerkin scheme

The finite-dimensional operator eigenvalue problem (6.7) is equivalent with the matrix eigenvalue problem (6.2). Set:

$$\mu^{(N)} := \frac{1}{k^2(\Lambda - \lambda^{(N)})} \quad \text{and} \quad \mu = \frac{1}{k^2(\Lambda - \lambda)}$$

Then, to obtain the convergence result $\lambda^{(N)} \rightarrow \lambda$, for $N \rightarrow \infty$, it suffices to show that $\mu^{(N)} \rightarrow \mu$, for $N \rightarrow \infty$. To this end, we make use of the following Lemma (which is proven in the Appendix):

Lemma 6.1.6 *Let H be a Hilbert space and $F, F_N : H \rightarrow H$ positive operators, $N \in \mathbb{N}$. If $F_N \rightarrow F$ strongly (pointwise), then:*

$$F_N^{\frac{1}{2}} \rightarrow F^{\frac{1}{2}} \text{ strongly (pointwise)}$$

Theorem 6.1.7 *The eigenvalues of matrix equation (6.2) converge to the eigenvalues $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ of (3.5).*

Proof. We consider the operator $\tilde{T}^{(N)} P_N : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$, for $N \in \mathbb{N}$, which is a linear extension of $\tilde{T}^{(N)}$ onto $\mathcal{H}(D_b)$, for all $N \in \mathbb{N}$. Since the spectrum of $\tilde{T}^{(N)} P_N$ and $\tilde{T}^{(N)}$ are identical, apart from (possibly) the zero eigenvalue, we will attempt to use the spectral approximation setting for the sequence of operators $\{\tilde{T}^{(N)} P_N\}_{N=1}^{\infty}$.

Set $K := \tilde{T}$ and $K^{(N)} := \tilde{T}^{(N)} P_N$. Since both K and $K^{(N)}$ are linear, compact and positive operators, it suffices to show that:

$$\|K - K^{(N)}\| \rightarrow 0.$$

Consider the estimation

$$\begin{aligned} \|K - K^{(N)}\| &= \left\| A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} B A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} - \left(A_{\Lambda}^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} B^{(N)} \left(A_{\Lambda}^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\| \\ &\leq \left\| A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} B A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} - \left(A_{\Lambda}^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N B A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \right\| \\ &\quad + \left\| \left(A_{\Lambda}^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N B A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} - \left(A_{\Lambda}^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} B^{(N)} \left(A_{\Lambda}^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\| \\ &= \left\| \left(A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} - \left(A_{\Lambda}^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) B A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \right\| \\ &\quad + \left\| \left(A_{\Lambda}^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(P_N B A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} - B^{(N)} \left(A_{\Lambda}^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right\| \end{aligned}$$

By setting

$$a_1(N) := \left\| \left(A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} - \left(A_{\Lambda}^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) B A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \right\|$$

and

$$a_2(N) := \left\| \left(A_{\Lambda}^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(P_N B A_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} - B^{(N)} \left(A_{\Lambda}^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right\|$$

it suffices to show that $\lim_{N \rightarrow \infty} a_1(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} a_2(N) = 0$.

6. A spectral Galerkin method

The second term satisfies the broader estimate:

$$\begin{aligned}
 a_2(N) &= \left\| \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(P_N B A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - B^{(N)} \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right\| \\
 &= \left\| \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(P_N B A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - P_N B \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right\| \\
 &\leq \left\| \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\| \cdot \|P_N\| \cdot \left\| B \left(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right\| \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

From Corollaries 6.1.3 and 6.1.4, since operator A_Λ is coercive, we have that $\left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-1} P_N \rightarrow A_\Lambda^{-1}$ strongly. Applying Lemma 6.1.6 to the sequence of positive operators $\left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-1} P_N$ yields $\left(\left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-1} P_N \right)^{\frac{1}{2}} = \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \rightarrow A_\Lambda^{-\frac{1}{2}}$. We also notice that $B \left(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ is a sequence of compact operators, since $B : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ is compact. Furthermore, the sequence $A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N : \mathcal{H}(D_b) \rightarrow \mathcal{H}(D_b)$ is self adjoint and B is self-adjoint. Hence,

$$\begin{aligned}
 \left\| B \left(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right\| &= \left\| \left(B \left(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right)^* \right\| \\
 &= \left\| \left(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) B \right\|
 \end{aligned}$$

We also apply a result [46, Lemma 17.8], which states that multiplying a strongly convergent operator sequence with a compact operator on the right hand-side, it becomes norm convergent. Thus,

$$\left\| B \left(A_\Lambda^{-\frac{1}{2}} - \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} P_N \right) \right\| \rightarrow 0.$$

As a consequence of the coercivity property for $A_\Lambda^{(N)}$, we have the uniform bound estimate $\left\| \left(A_\Lambda^{(N)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq C$ for some $C > 0$. The orthogonal projection operators are also uniformly bounded, since $\|P_N\| \leq 1$ for all natural numbers N .

As a consequence, $\lim_{N \rightarrow \infty} a_1(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} a_2(N) = 0$ and the proof is concluded. ■

Remark 6.1.8 *Since (6.7) is a generalized operator eigenvalue problem for the linear, coercive operator $A_\Lambda^{(N)} : X_N \rightarrow X_N$ and the linear, compact and positive operator $B^{(N)} : X_N \rightarrow X_N$, its corresponding generalized eigenvalues satisfy the property $k^2(\Lambda - \lambda^{(N)}) > 0$ for all $N \in \mathbb{N}$. As a result, $\Lambda > 0$ serves as an upper bound for all approximate eigenvalues $\Lambda > \lambda^{(N)}$, for $N \in \mathbb{N}$. We note that this is a property inherited by the original eigenvalue problem (3.15).*

6.2. Numerical results for the modified transmission eigenvalue problem - constant refractive index

We now present some numerical results to validate the convergence of the Galerkin method, as described above. Afterwards, as a preliminary approach to the inverse

6.2. Numerical results for the modified transmission eigenvalue problem - constant refractive index

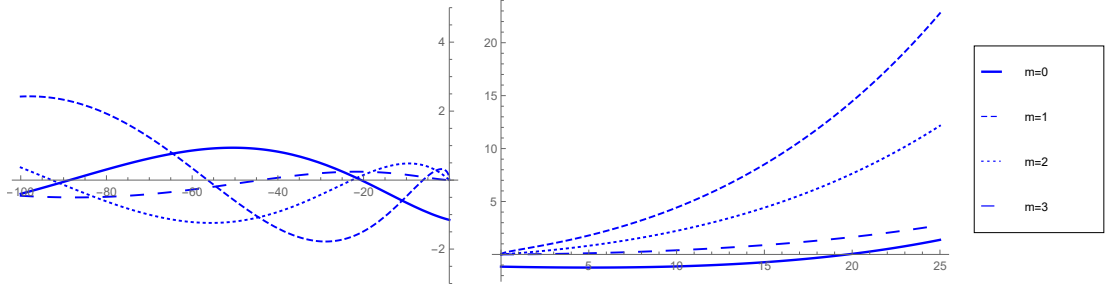


Figure 6.1.: Modified transmission eigenvalues for the unit disk with $\eta = 4$, $\eta_0 = 1$, $a = 1$ and $k = 1$, from the first four Bessel functions. Negative roots are shown on the left and the (only) positive on the right

spectral problem, we utilize the Galerkin method to reconstruct a constant refractive index. We confine our analysis to circular domains with constant refractive index because in this case, modified transmission eigenvalues can also be computed analytically. Let D_b be the unit disk $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ and assume that the wavenumber $k > 0$ is fixed, the metamaterial parameters a and η_0 are both positive constants and the refractive index is constant as well, $\eta(x) := \eta > 0$. We can compute the modified transmission eigenvalues, using the separation of variables technique for the solutions of (3.1)-(3.4). As a result, the eigenfunctions are expressed as a superposition of Bessel functions:

$$v(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_m \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) e^{im\theta}$$

$$w(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m J_m(k\sqrt{\eta}r) e^{im\theta}$$

From the boundary conditions, we conclude that λ is a modified transmission eigenvalue, if and only if:

$$\det \begin{pmatrix} J_m(k\sqrt{\eta}) & -J_m \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) \\ \frac{d}{dr} J_m(k\sqrt{\eta}r) \Big|_{r=1} & a \frac{d}{dr} J_m \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) \Big|_{r=1} \end{pmatrix} = 0, \quad m = 0, 1, \dots \quad (6.9)$$

Since the eigenvalues correspond to a self-adjoint operator, equation (6.9) may only have real roots. When $\lambda > 0$, we use the property that $J_m(ix) = i^m I_m(x)$ in order to compute the positive eigenvalues, if any, where I_m is the modified Bessel function of the first kind. An example is shown in Figure 6.1.

On the other hand, we construct an orthogonal system $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^N$ and apply the Galerkin method to approximate the modified transmission eigenvalues $\lambda^{(N)}$. Using the method of constructing an orthonormal basis described in the previous chapter and from Corollary 5.2.2, we are able to represent the eigenfunctions of the auxiliary spectral problem that constitute our orthonormal basis, as the Dirichlet and Neumann pairs:

$$\begin{aligned} (J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}, -J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}) & \quad \text{if } \sigma \in \mathcal{D}(B(0, 1)), \\ (J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}, J_m(\sqrt{\sigma}r)e^{im\theta}) & \quad \text{if } 0 \neq \sigma \in \mathcal{N}(B(0, 1)), \\ (1, 1) & \quad \text{if } \sigma = 0 \end{aligned}$$

6. A spectral Galerkin method

| (η, η_0, a) | λ_1 | $ \lambda_1 - \lambda_1^{(N)} $ | λ_2 | $ \lambda_2 - \lambda_2^{(N)} $ | λ_3 | $ \lambda_3 - \lambda_3^{(N)} $ |
|---------------------|-------------|---------------------------------|-------------|---------------------------------|-------------|---------------------------------|
| (0.1, 0.5, 1) | 0.2006 | 1.9×10^{-6} | -94.3193 | 0.0713 | -239.5053 | 0.4822 |
| (0.5, 1, 1) | 0.5077 | 2.4×10^{-5} | -46.9584 | 0.0349 | -119.3490 | 0.3753 |
| (4, 1, 2) | 4.4093 | 0.0109 | -74.1301 | 0.1276 | -200.3112 | 0.8096 |
| (15.8, 6, 4) | 3.8892 | 0.1463 | -20.2322 | 0.0189 | -58.2437 | 0.2978 |

Table 6.1.: Approximation of modified transmission eigenvalues for disks with different material properties and fixed wavenumber $k = 0.35$.

| error | $N = 10$ | $N = 20$ | $N = 30$ | $N = 40$ |
|---------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| $ \lambda_1 - \lambda_1^{(N)} $ | 0.0320 | 0.0155 | 0.0151 | 0.0109 |
| $ \lambda_2 - \lambda_2^{(N)} $ | 0.4018 | 0.2681 | 0.1704 | 0.1276 |
| $ \lambda_3 - \lambda_3^{(N)} $ | 2.3993 | 1.2239 | 0.9311 | 0.8096 |

Table 6.2.: Convergence for the first three modified transmission eigenvalues, for a disk with $\eta = 4$, $\eta_0 = 1$, $a = 2$ and $k = 0.35$.

The Dirichlet and Neumann eigenvalues $\sqrt{\sigma}$, correspond to Bessel function roots given in (5.33)-(5.34) and can be easily computed [79]. We form a basis with 40 auxiliary eigenfunction pairs and compute the 40×40 matrices of the generalized eigenvalue problem (6.2) with 2-D numerical integration.

For the direct problem, we assume that all physical parameters are known and using the Matlab function `eig`, we compute the approximate modified transmission eigenvalues $\lambda^{(N)}$. We note that we use a sufficiently small wavenumber k , to satisfy the coercivity constraint (3.12). For the unit disc of \mathbb{R}^2 and for refractive indices in the range $\eta \in (0, 20)$ with $a \geq 1$, we must take $k < 0.38$.

In Table 6.1, we report the first three eigenvalues for disks with different material properties. We also calculate the corresponding errors between analytically known and approximated eigenvalues. In all cases, we take $k = 0.35$, to satisfy the coercivity constraint. Furthermore, in Table 6.2, we verify the convergence of our Galerkin approximation method. Relative error is reduced as we increase the basis dimension, as we expect from Theorem 6.1.7.

We noticed that all material parameters affect the distribution of eigenvalues. Of particular interest is the monotonic relationship between eigenvalues and refractive index, which is demonstrated in Figure 6.2. This result is theoretically addressed in (3.18), for the largest eigenvalue.

Next, as a preliminary approach to the inverse spectral problem, we assume that the largest eigenvalue is known and we estimate η , by fixing the parameters k , a and η_0 . In Theorem 3.2.6 we have shown that the largest positive eigenvalue can uniquely determine a constant refractive index. We calculate the 40×40 matrices of the generalized eigenvalue problem (6.2) for $\eta \in (0, 20)$ and step 0.1. We construct a database with the eigenvalues $\lambda_1^{(N)}$ and reconstruct η by minimizing the error $|\lambda_1 - \lambda_1^{(N)}|$, where we consider $\lambda_1^{(N)} = \lambda_1^{(N)}(\eta)$. Some plots of the error versus η are shown in Figure 6.3. We see that the error is minimized for estimated η very close to the original one, which corresponds to λ_1 .

Remark 6.2.1 *We note that for the above numerical examples, we do not a priori assume that $\eta > 1$ or $\eta < 1$, which is the case for the classical transmission*

6.2. Numerical results for the modified transmission eigenvalue problem - constant refractive index

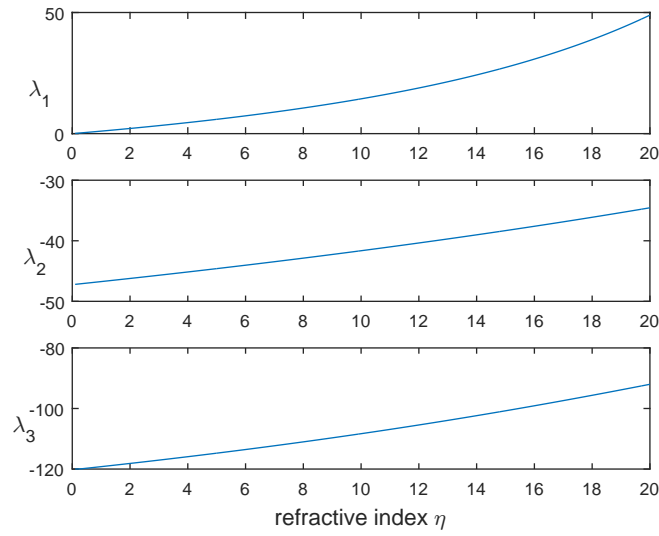


Figure 6.2.: Plots of the first three modified transmission eigenvalues versus the refractive index η , for $k = 0.35$, $a = 1$ and $\eta_0 = 1$.

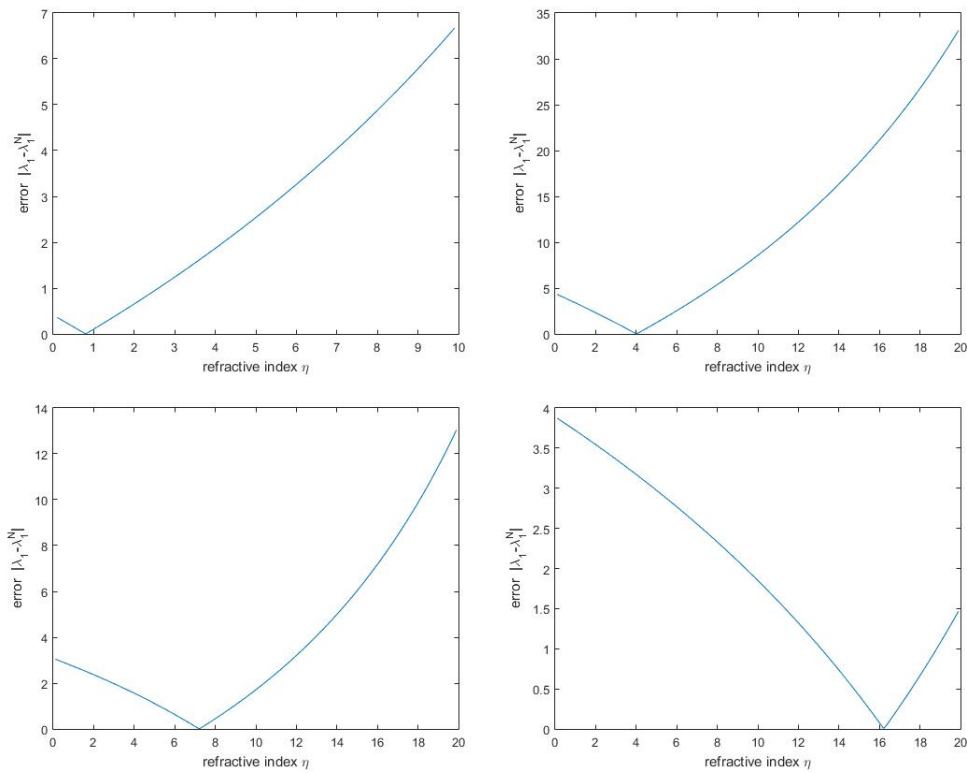


Figure 6.3.: Reconstructions of the unknown refractive index for unit disks. The material properties (η, η_0, a) for the above examples are $(0.8, 2, 1)$, $(4, 1, 2)$, $(7.2, 3, 1)$ and $(15.8, 6, 4)$ respectively.

eigenvalue problem [42, 71].

6.3. Numerical results for the modified transmission eigenvalue problem - piecewise constant refractive index

In the case of piecewise constant refractive indices, it is also possible to use the Galerkin method and solve the direct spectral problem. Afterwards, we attempt to solve numerically the inverse problem of reconstructing a piecewise constant refractive index with an a priori knowledge of modified transmission eigenvalues. Let D_b be the unit disk $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, assume that the wavenumber $k > 0$ is fixed, the metamaterial parameters a and η_0 are both positive constants and that the refractive index is given by

$$\eta(r) := \begin{cases} \eta^{(1)} & 0 < r < d \\ \eta^{(2)} & d < r \leq 1 \end{cases}$$

As a result of the separation of variables technique for solutions of (3.1)-(3.4), the eigenfunctions are again expressed as a superposition of Bessel functions:

$$v(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_m \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) e^{im\theta}$$

$$w(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m J_m(k\sqrt{\eta}r) e^{im\theta}$$

From the boundary conditions and the continuity of the eigenfunctions and their derivatives at $r = d$, we conclude that λ is a modified transmission eigenvalue, if and only if

$$\det \begin{pmatrix} J_m \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) & 0 & -J_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}) & -N_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}) \\ (-a) \frac{d}{dr} J_m \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) \Big|_{r=1} & 0 & -\frac{d}{dr} J_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}r) \Big|_{r=1} & -\frac{d}{dr} N_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}r) \Big|_{r=1} \\ 0 & J_m(k\sqrt{\eta^{(1)}}d) & -J_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}d) & -N_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}d) \\ 0 & \frac{d}{dr} J_m(k\sqrt{\eta^{(1)}}r) \Big|_{r=d} & -\frac{d}{dr} J_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}r) \Big|_{r=d} & -\frac{d}{dr} N_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}r) \Big|_{r=d} \end{pmatrix} = 0$$

As a consequence, the eigenfunction pairs take the form

$$v_m(r, \theta) = a_m J_m \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) e^{im\theta}$$

$$w_m(r, \theta) = \begin{cases} b_m J_m(k\sqrt{\eta^{(1)}}r) e^{im\theta}, & 0 < r < d \\ (c_m J_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}r) + d_m N_m(k\sqrt{\eta^{(2)}}r)) e^{im\theta}, & d \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Since the domain $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ has not changed, the orthonormal basis for the Galerkin method is also given by the auxiliary Dirichlet-Neumann pairs

$$\begin{aligned} (J_m(\sqrt{\sigma}r) e^{im\theta}, -J_m(\sqrt{\sigma}r) e^{im\theta}) & \text{ if } \sigma \in \mathcal{D}(B(0, 1)), \\ (J_m(\sqrt{\sigma}r) e^{im\theta}, J_m(\sqrt{\sigma}r) e^{im\theta}) & \text{ if } 0 \neq \sigma \in \mathcal{N}(B(0, 1)), \\ (1, 1) & \text{ if } \sigma = 0 \end{aligned}$$

6.3. Numerical results for the modified transmission eigenvalue problem - piecewise constant refractive index

| $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, d)$ | computed $\lambda_i^{(N)}$ | reconstruction |
|-------------------------------|---|-----------------|
| (9.2, 1.5, 0.3) | (2.6398, -36.5788, -98.7148, -115.1933) | (8.5, 1.6, 0.3) |
| (6, 0.3, 0.4) | (1.4268, -37.2794, -99.2614, -116.3238) | (5.6, 0.4, 0.4) |
| (2.1, 3.5, 0.5) | (3.6369, -35.4089, -97.7453, -114.2539) | (2.7, 4, 0.8) |
| (3.2, 4.8, 0.7) | (4.8283, -34.6907, -97.1716, -113.1924) | (3.3, 5.4, 0.8) |
| (0.2, 4, 0.9) | (0.9394, -36.6911, -98.5589, -116.7713) | (0.2, 4, 0.9) |

Table 6.3.: Reconstruction of a piecewise constant refractive index from modified transmission eigenvalues.

We used the Galerkin method to solve the direct spectral problem and create a database for all possible combinations of $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$ and the inner radius d . For the purposes of our examples, we used a basis consisting of 40 auxiliary eigenfunctions which in combination with each permutation $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, d)$ yields the 40×40 matrices of the generalized eigenvalue problem (6.2). Also, we chose specific values for the metamaterial parameters, $a = 2$ and $\eta_0 = 1$. Afterwards, by minimizing

$$f(\eta) := \sum_{i=1}^m \frac{|\lambda_i^{(N)}(\eta) - \lambda_i|}{|\lambda_i|}$$

which is the relative percent error between a couple of the first computed $(\lambda_i^{(N)})$ and analytically known (λ_i) eigenvalues, we attempt to reconstruct a piecewise constant refractive index by finding the permutation for which this error is minimized.

In the first example which is shown in Table 6.3, we selected $k = 0.5$ and $0.1 \leq d \leq 1$ with a step 0.1 and piecewise constant refractive indices in the range $0.1 \leq \eta^{(1)}, \eta^{(2)} \leq 10$, also with step 0.1. Then, we minimized the error for the largest 4 analytically known and computed eigenvalues.

However, we noticed that some of our reconstructions were not accurate enough. An idea to improve this was to gather data not only from one wavenumber, but from multiple wavenumbers to enhance the accuracy of our reconstruction. In the next example which is shown in Table 6.4, we compare our reconstructions for the wavenumber $k = 0.5$ and $0.1 \leq k \leq 0.5$, with step 0.1.

Remark 6.3.1 *The largest modified transmission eigenvalues carry information about a piecewise constant refractive index $n(r)$ and the position of discontinuity, d . Furthermore, we notice that reconstructions originating from multiple wavenumbers are more accurate.*

| $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, d)$ | reconstruction | reconstruction |
|-------------------------------|-----------------|------------------------------------|
| | $k = 0.5$ | $k = \{0, 1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ |
| (9.2, 1.5, 0.3) | (8.5, 1.6, 0.3) | (9.2, 1.5, 0.3) |
| (2.1, 3.5, 0.5) | (2.7, 4.0, 0.8) | (2.4, 3.4, 0.5) |
| (0.2, 4.0, 0.6) | (1.4, 8.1, 0.9) | (0.2, 4.0, 0.6) |
| (3.2, 7.6, 0.6) | (4.4, 9.1, 0.9) | (2.2, 7.3, 0.5) |
| (7.5, 1.2, 0.2) | (3.4, 1.6, 0.3) | (7.5, 1.5, 0.2) |

Table 6.4.: Reconstruction of a piecewise constant refractive index from modified transmission eigenvalues corresponding to one and five wave numbers respectively.

7. The direct and inverse spectral problem for the case of a spherically symmetric refractive index

We pose the direct spectral problem for the special case of a spherically symmetric refractive index and show existence of a discrete spectrum, using asymptotic expressions for the spherical Bessel functions. Moreover, we pose the inverse spectral problem and prove that the knowledge of the modified transmission eigenvalues can uniquely determine the refractive index.

Contents

| | |
|---|----|
| 7.1. Existence of modified transmission eigenvalues for the spherically symmetric domain | 72 |
| 7.1.1. The case $l = 0$ | 73 |
| 7.1.2. The case $l \geq 1$ | 74 |
| 7.2. Uniqueness for the inverse spectral problem | 78 |
| 7.2.1. A uniqueness result for boundary Cauchy data | 78 |
| 7.2.2. A uniqueness result for boundary Cauchy data with lesser requirements on knowledge of the spectrum | 82 |
| 7.2.3. The uniqueness theorem for modified transmission eigenvalues | 85 |

7.1. Existence of modified transmission eigenvalues for the spherically symmetric domain

We examine the existence of modified transmission eigenvalues when the domain is the unit ball $B := B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$ and the refractive index is spherically symmetric, $\eta = \eta(r)$. We are looking for real eigenvalues only, since the problem is self-adjoint. System (3.1)-(3.4) is simplified in the following:

$$\Delta w + k^2 \eta(r) w = 0, \quad \text{in } B \quad (7.1)$$

$$(-a)\Delta v + k^2 \lambda \eta_0(r) v = 0, \quad \text{in } B \quad (7.2)$$

$$w = v, \quad \text{on } \partial B \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = (-a) \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \text{on } \partial B. \quad (7.4)$$

From this point onward, it is assumed that the artificial metamaterial background is constant, i.e. $\eta_0(r) = \eta_0 > 0$ and we use the separation of variables technique to obtain the eigenfunctions. Existence of infinite eigenvalues is shown using the asymptotic behaviour of the appropriate characteristic functions, for large values of λ .

We consider the solutions of (7.1)-(7.4), under the following assumption on the refractive index:

Assumption 7.1.1 *Suppose that $\eta \in C^1[0, 1]$ and $\Re(\eta) > 0$, $\Im(\eta) = 0$.*

Assuming azimuthal symmetry, we are able to represent the solutions of the Helmholtz equations in the following form [29, p. 314]:

$$v_l(r, \theta) = a_l j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) P_l(\cos \theta) \quad (7.5)$$

and

$$w_l(r, \theta) = b_l \frac{y_l(r)}{r} P_l(\cos \theta), \quad (7.6)$$

where P_l are Legendre's polynomials, a_l and b_l are constants and y_l are solutions of the following auxiliary problems, for $r > 0$:

$$y_l''(r) + \left(k^2 \eta(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) y_l(r) = 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{y_l(r)}{r} - j_l(kr) \right) = 0.$$

Then, boundary conditions (7.3)-(7.4) imply that $\lambda \neq 0$ is an eigenvalue of (7.1)-(7.4), if and only if:

$$d_l(\lambda) := \det \begin{pmatrix} \frac{y_l(r)}{r} \Big|_{r=1} & -j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) \Big|_{r=1} \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{y_l(r)}{r} \right) \Big|_{r=1} & a \frac{d}{dr} j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} r \right) \Big|_{r=1} \end{pmatrix} = 0 \quad (7.7)$$

for $l = 0, 1, 2, \dots$. We note that $\lambda = 0$, is not an eigenvalue in general. If we set $\lambda = 0$ in (7.1)-(7.4) and apply separation of variables, the corresponding determinant becomes:

$$y_l(1)(al - 1) + y_l'(1) = 0. \quad (7.8)$$

Therefore, $\lambda = 0$ is an eigenvalue if and only if (7.8) is met, for some $l \in \mathbb{N}_0$. Taking the above into account, we infer that λ is a modified transmission eigenvalue, if and only if is a root of the piecewise *characteristic function*:

$$\hat{d}_l(\lambda) = \begin{cases} d_l(\lambda), & \text{for } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ y_l(1)(al - 1) + y_l'(1), & \text{for } \lambda = 0. \end{cases} \quad (7.9)$$

For convenience we denote as $\mathcal{L} := \{l \in \mathbb{N}_0 : \hat{d}_l(0) = 0\}$. If $\lambda = 0$ is a modified transmission eigenvalue, then there exists at least one $l \in \mathbb{N}_0$ for which $\hat{d}_l(0) = 0$, thus we have that $l \in \mathcal{L} \neq \emptyset$. In other words, \mathcal{L} is the set of indices for which there exist eigenfunction pairs for (7.1)-(7.4), with corresponding eigenvalue $\lambda = 0$.

Remark 7.1.2 *Since the square root function is not well defined on the negative axis, the characteristic functions are not as well. In what follows, we make use of the following convention to extend the square root function, and as a result, the characteristic functions, on the whole complex plane. If $\Re(z) < 0$ and $\Im(z) = 0$, then we choose the branch $\sqrt{z} = i\sqrt{|z|}$. Obviously, this is not a continuous function. However, it is easy to see that the zeros of the characteristic functions remain invariant with either choice of $\sqrt{z} = i\sqrt{|z|}$ or $\sqrt{z} = -i\sqrt{|z|}$.*

We investigate the existence of positive and negative modified transmission eigenvalues by distinguishing the case of $l = 0$, that is for spherically symmetric eigenfunctions, and $l \geq 1$. We remind that for the modified transmission eigenvalue problem, the wavenumber k is fixed and the spectral parameter λ is involved only in the argument of the Bessel functions and their derivatives and not in the argument of the functions y_l . This is not the case for the classic transmission eigenvalues where the spectral parameter appears in both eigenfunctions (see e.g. [1, 35, 37, 66]).

7.1.1. The case $l = 0$.

In the case where only spherically symmetric eigenfunctions are considered, the eigenfunction pair is reduced to:

$$v_0(r) = a_0 \frac{\sin\left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}}r\right)}{k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}}r}, \quad (7.10)$$

$$w_0(r) = b_0 \frac{y_0(r)}{r} \quad (7.11)$$

and y_0 is a solution of the following problem:

$$\begin{aligned} y_0''(r) + k^2\eta(r)y_0(r) &= 0, & 0 < r < 1 \\ y_0(0) &= 0. \end{aligned}$$

7. The direct and inverse spectral problem for the case of a spherically symmetric refractive index

For this special case, function (7.7) is

$$d_0(\lambda) = ay_0(1) \cos \left(k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}} \right) + \left(y_0'(1) - (a+1)y_0(1) \right) \frac{\sin \left(k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}} \right)}{k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}}} \quad (7.12)$$

and the $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ for which $d_0(\lambda) = 0$, are the *special modified transmission eigenvalues*.

Remark 7.1.3 We notice that $\lim_{\lambda \rightarrow 0} d_0(\lambda) = y_0'(1) - y_0(1)$, that is the piecewise characteristic function $\hat{d}_0(\lambda)$ is always continuous at $\lambda = 0$.

For the purposes of our analysis, we will distinguish the cases of $\lambda > 0$ and $\lambda < 0$. If $\lambda < 0$, the characteristic function has the following asymptotic form:

$$d_0(\lambda) = ay_0(1) \cos \left(k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}} \right) + O \left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \right) \quad (7.13)$$

and thus, letting $\lambda \rightarrow -\infty$, there exist infinitely many negative modified transmission eigenvalues.

For $\lambda > 0$, we use the identities $\sin \left(k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}} \right) = i \sinh \left(k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} \right)$ and $\cos \left(k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}} \right) = \cosh \left(k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} \right)$. The characteristic function (7.12) is written as

$$d_0(\lambda) = ay_0(1) \cosh \left(k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} \right) + \left(y_0'(1) - (a+1)y_0(1) \right) \frac{\sinh \left(k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} \right)}{k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}}}. \quad (7.14)$$

If k^2 happens to be a Dirichlet eigenvalue of (7.1) with y_0 as the corresponding eigenfunction, then $y_0(1) = 0$ and $d_0(\lambda) \neq 0$ for all $\lambda > 0$. On the other hand, if we assume that k^2 is not a Dirichlet eigenvalue, then the characteristic equation $d_0(\lambda) = 0$ becomes:

$$k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} \coth \left(k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} \right) = 1 + \frac{1}{a} - \frac{y_0'(1)}{ay_0(1)}. \quad (7.15)$$

Since the left hand side of equation (7.15) is greater than 1 and is a monotonic function of $\lambda > 0$, there exists at most one positive modified transmission eigenvalue if and only if the right hand side is also greater than 1.

7.1.2. The case $l \geq 1$.

Now, we assume solutions of the form (7.5)-(7.6), for $l \geq 1$. By substituting the derivative of spherical Bessel functions

$$\frac{dj_l(z)}{dz} = \frac{l}{z} j_l(z) - j_{l+1}(z) \quad (7.16)$$

to (7.7), we conclude that

$$d_l(\lambda) = j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}} \right) \left(y_l(1)(al-1) + y_l'(1) \right) - ak \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}} j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}} \right) y_l(1). \quad (7.17)$$

7.1. Existence of modified transmission eigenvalues for the spherically symmetric domain

Remark 7.1.4 *Since $\lim_{\lambda \rightarrow 0} d_l(\lambda) = 0$, the piecewise characteristic functions $\hat{d}_l(\lambda)$ are continuous at $\lambda = 0$ if and only if $l \in \mathcal{L}$.*

When λ is negative, we use the asymptotics for spherical Bessel functions [29, p. 31]:

$$j_l(r) = \frac{1}{r} \sin\left(r - \frac{l\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

and deduce that for $\lambda \rightarrow -\infty$

$$d_l(\lambda) = ay_l(1) \cos\left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}} - \frac{l\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right). \quad (7.18)$$

This establishes existence of infinite negative eigenvalues for each $l \geq 1$.

For λ positive, the argument of Bessel functions is complex valued. Using that

$$j_l\left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}}\right) = i^l i_l\left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}}\right),$$

where i_l are modified spherical Bessel functions of the first kind, the characteristic function becomes:

$$d_l(\lambda) = i^l \left(y_l(1)(al - 1) + y_l'(1)\right) i_l\left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}}\right) - i^{l+2} y_l(1) ak\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} i_{l+1}\left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}}\right). \quad (7.19)$$

If k^2 is a Dirichlet eigenvalue of (7.1) and y_l is the corresponding eigenfunction for some $l \in \mathbb{N}$, then $y_l(1) = 0$ and therefore $d_l(\lambda) \neq 0$ for all $\lambda > 0$. Assuming that k^2 is not a Dirichlet eigenvalue, then λ is a positive modified transmission eigenvalue if and only if:

$$k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}} \frac{i_{l+1}\left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}}\right)}{i_l\left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{a}}\right)} = -l + \frac{1}{a} - \frac{y_l'(1)}{ay_l(1)}. \quad (7.20)$$

We note that the right hand side of the above equation is independent of λ , hence it is a constant for each l . In order to examine the properties of the left hand side fraction, we use the following Lemma:

Lemma 7.1.5 *Function $\sqrt{x}I_{\nu+1}(\sqrt{x})/I_{\nu}(\sqrt{x})$ is increasing and positive for $x > 0$ and $\nu > -1$, where I_{ν} is the modified Bessel function of the first kind.*

Proof. Using the Mittag-Leffler expansion [40, eq. 7.9.3] and the relation $J_{\nu}(ix) = i^{\nu}I_{\nu}(x)$, we obtain the following representation of Bessel functions in series form [5]:

$$\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_{\nu}(x)} = \sum_{n \geq 1} \frac{2x}{x^2 + \gamma_{\nu,n}^2},$$

where $\gamma_{\nu,n}$ is the sequence formed by the zeros of $J_{\nu}(z)/z^{\nu}$. As a result, we have:

$$\sqrt{x} \frac{I_{\nu+1}(\sqrt{x})}{I_{\nu}(\sqrt{x})} = \sqrt{x} \sum_{n \geq 1} \frac{2\sqrt{x}}{x + \gamma_{\nu,n}^2}.$$

7. The direct and inverse spectral problem for the case of a spherically symmetric refractive index

This function is positive for $x > 0$ and by differentiating with respect of x we conclude that:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x} \frac{I_{\nu+1}(\sqrt{x})}{I_{\nu}(\sqrt{x})} \right) &= \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x} \sum_{n \geq 1} \frac{2\sqrt{x}}{x + \gamma_{\nu,n}^2} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{d}{dx} \left(\frac{2x}{x + \gamma_{\nu,n}^2} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{2\gamma_{\nu,n}^2}{(x + \gamma_{\nu,n}^2)^2} > 0 \end{aligned}$$

for all $x > 0$. As a result, the function $\sqrt{x}I_{\nu+1}(\sqrt{x})/I_{\nu}(\sqrt{x})$ is increasing for all $x > 0$ and $\nu > -1$. ■

As a consequence of the Lemma above and by setting $\nu=1/2+l$, we conclude that $\sqrt{x}i_{l+1}(\sqrt{x})/i_l(\sqrt{x})$ is also positive and increasing. This implies that the left hand side of equation (7.20) is a positive and increasing function of $\lambda > 0$, for all $l \geq 0$.

Next, we show that there exist at most finite positive modified transmission eigenvalues, if Assumption 7.1.1 is satisfied.

Theorem 7.1.6 *Suppose that the refractive index $\eta(r)$ is a $C^1[0, 1]$ function with $\Re(\eta) > 0$, $\Im(\eta) = 0$, the wavenumber $k^2 > 0$ is fixed, and a and η_0 are positive constants. Then, there exist at most finite positive modified transmission eigenvalues for (7.1)-(7.4), defined in the unit ball $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$.*

Proof. Since the left hand side of the characteristic equation (7.20) is a positive, increasing function of $\lambda > 0$ for all $l \geq 0$, there exists at most one positive eigenvalue for each l . In order to prove that the set of positive eigenvalues is finite, it suffices to show that there exists an $l_0 \in \mathbb{N}$, such that for every $l \geq l_0$, the right hand side of (7.20) becomes negative.

Next, we examine the properties of the fraction $y'_l(1)/y_l(1)$, for large values of l . To this end, we represent $y_l(r)$ as follows [13, 31]:

$$\frac{y_l(r)}{r} = j_l(kr) + \int_0^r G(r, s, k) j_l(ks) ds, \quad (7.21)$$

where the kernel $G(r, s, k)$ satisfies the following Goursat problem for $0 < s \leq r < 1$

$$r^2 \left[\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + k^2 \eta(r) G \right] = s^2 \left[\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial G}{\partial s} + k^2 G \right],$$

$$G(r, r, k) = \frac{k^2}{2r} \int_0^r t m(t) dt,$$

$$G(r, s, k) = O((rs)^{1/2}).$$

The integral representation (7.21) is well defined, since $\eta(r) \in C^1[0, 1]$. Differentiation of (7.21) with respect to r gives:

$$\begin{aligned} (y_l(r))' &= j_l(kr) + \int_0^r G(r, s, k) j_l(ks) ds + r(j_l(kr))' + r j_l(kr) G(r, r, k) \\ &\quad + r \int_0^r \frac{\partial}{\partial r} (G(r, s, k)) j_l(ks) ds. \end{aligned} \quad (7.22)$$

7.1. Existence of modified transmission eigenvalues for the spherically symmetric domain

Spherical Bessel functions satisfy the following asymptotic formula [29, p. 30]:

$$j_l(r) = \frac{r^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right) \right), \quad l \rightarrow \infty \quad (7.23)$$

uniformly in compact subsets of \mathbb{R} . By applying the above estimate to (7.16), we conclude that:

$$(j_l(r))' = \left(\frac{l r^{l-1}}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} - \frac{r^{l+1}}{1 \cdot 3 \cdots (2l+3)} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right) \right), \quad l \rightarrow \infty.$$

Using formula (7.23), it is possible to obtain asymptotic expressions for the integrals appearing in (7.21) and (7.22). Since G is continuously differentiable, the Laplace's asymptotic method for integrals is applicable [38, p. 36], yielding:

$$\int_0^1 G(1, s, k) j_l(ks) ds = \frac{k^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} O\left(\frac{1}{l}\right)$$

and

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} G(r, s, k) \Big|_{r=1} j_l(ks) ds = \frac{k^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} O\left(\frac{1}{l}\right).$$

Next, we substitute the asymptotic estimates to equations (7.21) and (7.22) and we derive that:

$$y_l(1) = \frac{k^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right) \right)$$

and

$$\begin{aligned} y_l'(1) = & \left(\frac{k^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} + \frac{l k^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} - \frac{k^{l+2}}{1 \cdot 3 \cdots (2l+3)} \right. \\ & \left. + \frac{k^l}{1 \cdot 3 \cdots (2l+1)} G(1, 1, k) \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right) \right). \end{aligned}$$

Firstly, we assume that k^2 is not a Dirichlet eigenvalue for (7.1) and thus $y_l(1) \neq 0$ for all l . Hence, the quotient $y_l'(1)/y_l(1)$ is well defined and has the following asymptotic behaviour with respect to l :

$$\frac{y_l'(1)}{y_l(1)} = \left(1 + l - \frac{k^2}{2l+3} + G(1, 1, k) \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right) \right), \quad l \rightarrow \infty. \quad (7.24)$$

The above estimate implies that the right hand side of equation (7.20) goes to $-\infty$ for $l \rightarrow \infty$ and thus there exists an $l_0 \in \mathbb{N}$ such that for every $l \geq l_0$ no positive modified transmission eigenvalues exist. In the special case when k^2 happens to be a Dirichlet eigenvalue for (7.1), there exist at most finite orders l for which $y_l(1) = 0$. As a result, for l large enough, fraction $y_l'(1)/y_l(1)$ is also well defined and (7.24) holds. This completes the proof. ■

Finally, we examine the case where no inhomogeneity is present i.e. $\eta(r) \equiv 1$. In the classic transmission eigenvalue problem, this implies that the corresponding characteristic function is identically zero for all complex k , which is a degenerate case. When $\eta(r) \equiv 1$, the modified problem (7.1)-(7.4) is well defined and the eigenfunction w_l can be represented as

$$w_l(r, \theta) = b_l j_l(kr) P_l(\cos\theta).$$

7. The direct and inverse spectral problem for the case of a spherically symmetric refractive index

Therefore, the determinant (7.7) becomes

$$d_l(\lambda) = j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) (j_l(k)l(a+1) - k j_{l+1}(k)) - ak \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) j_l(k),$$

which is not identically equal to zero. As a result, there exist infinite and discrete eigenvalues, even when $\eta(r) \equiv 1$.

7.2. Uniqueness for the inverse spectral problem

In what follows, we delve into the inverse spectral problem for modified transmission eigenvalues. In the special case where $\eta(x) = \eta(r)$ is a spherically symmetric refractive index, we examine whether the knowledge of the spectrum of (7.1)-(7.4) is sufficient to uniquely determine the unknown refractive index. This uniqueness problem can be decomposed into two parts. First, we examine the connection between the spectrum and Cauchy data of the eigenfunctions at the boundary. Afterwards, we study how these boundary data can be utilized for the unique recovery of the refractive index.

7.2.1. A uniqueness result for boundary Cauchy data

In the following analysis, we require a weaker condition on the refractive index compared to Assumption 7.1.1. From the conclusions of the fourth chapter, existence of a discrete and real spectrum is secured for L^∞ refractive indices in general domains.

Assumption 7.2.1 *Suppose that $\eta \in C[0, 1]$ and $\Re(\eta) > 0$, $\Im(\eta) = 0$.*

We consider the functions $\{d_l(\lambda)\}_{l=0}^\infty$, which is an analytic family on the complex plane except the positive axis:

$$d_l(\lambda) = j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) (y_l(1)(al - 1) + y_l'(1)) - ak \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) y_l(1), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

We furthermore define another family of auxiliary functions, with the same non-zero roots as $d_l(\lambda)$:

$$f_l(\lambda) := \left(\sqrt{\lambda} \right)^l d_l(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

These auxiliary functions have been introduced to ensure analyticity at the positive axis, as seen by the following result.

Lemma 7.2.2 *$\{f_l(\lambda)\}_{l=0}^\infty$ are entire functions of λ .*

Proof. Let $l = 0, 1, 2, \dots$, set $c := k \sqrt{\frac{\eta_0}{-a}}$ and consider the functions:

$$f_l^{(1)}(\lambda) := \left(\sqrt{\lambda} \right)^l j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) = \left(\sqrt{\lambda} \right)^l j_l \left(c \sqrt{\lambda} \right)$$

and

$$f_l^{(2)}(\lambda) := \left(\sqrt{\lambda} \right)^l \sqrt{\lambda} j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) = \left(\sqrt{\lambda} \right)^l \sqrt{\lambda} j_{l+1} \left(c \sqrt{\lambda} \right).$$

Then, we have that

$$\begin{aligned}
 f_l^{(1)}(\lambda) &= \left(\sqrt{\lambda}\right)^l j_l\left(c\sqrt{\lambda}\right) \\
 &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sqrt{\lambda}\right)^l \frac{(-1)^p \left(c\sqrt{\lambda}\right)^{l+2p}}{2^p p! \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2l + 2p + 1)} \\
 &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p c^{l+2p} \lambda^{l+p}}{2^p p! \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2l + 2p + 1)}, \tag{7.25}
 \end{aligned}$$

which is a power series that converges for all $\lambda \in \mathbb{C}$. Hence, $f_l^{(1)}$ are differentiable, i.e. entire functions, for $l = 0, 1, 2, \dots$. The same arguments can be made for $f_l^{(2)}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
 f_l^{(2)}(\lambda) &= \left(\sqrt{\lambda}\right)^l \sqrt{\lambda} j_{l+1}\left(c\sqrt{\lambda}\right) \\
 &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sqrt{\lambda}\right)^l \sqrt{\lambda} \frac{(-1)^p \left(c\sqrt{\lambda}\right)^{l+2p+1}}{2^p p! \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2l + 2p + 1) \cdot (2l + 2p + 3)} \\
 &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p c^{l+2p+1} \lambda^{l+p+1}}{2^p p! \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2l + 2p + 1) \cdot (2l + 2p + 3)}, \tag{7.26}
 \end{aligned}$$

which is also a power series that converges for all $\lambda \in \mathbb{C}$. Thus, $f_l^{(2)}$ are entire, for $l = 0, 1, 2, \dots$. This concludes the proof, since f_l is the sum of two entire functions.

■

In the following, we evaluate the order of growth for the family of entire functions $\{f_l\}_{l=0}^{\infty}$. Since j_l are entire functions of exponential type, they have the asymptotic behavior $|j_l(\lambda)| \leq M_1 e^{\tau_1 |\lambda|}$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, where $M_1 = M_{1,l}$ and $\tau_1 = \tau_{1,l}$ are positive constants. Thus, the following inequality holds

$$\left| j_l\left(c\sqrt{\lambda}\right) \right| \leq M_1 e^{|\tau_1| |\lambda|^{\frac{1}{2}}}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \tag{7.27}$$

Moreover, since λ^l are polynomials, they have an order of growth equal to zero. That is, for $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$, we have that $|\lambda^l| = |\lambda|^l \leq M_2 e^{\tau_2 |\lambda|^\epsilon}$, for $|\lambda| \rightarrow \infty$, where $M_2 = M_{2,l}$ and $\tau_2 = \tau_{2,l}$ are positive constants as well. Thus, the following inequality holds

$$\left| \left(\sqrt{\lambda}\right)^l \right| = \sqrt{|\lambda|^l} \leq |\lambda|^l \leq M_2 e^{\tau_2 |\lambda|^\epsilon}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \tag{7.28}$$

By setting $\tau = \max\{|c| \tau_1, \tau_2\}$, we estimate:

$$\begin{aligned}
 \left| f_l^{(1)}(\lambda) \right| &\leq \left| \left(\sqrt{\lambda}\right)^l \right| \left| j_l\left(c\sqrt{\lambda}\right) \right| \\
 &\leq M_1 M_2 e^{\tau(|\lambda|^{\frac{1}{2}} + |\lambda|^\epsilon)} \\
 &\leq M_1 M_2 e^{2\tau |\lambda|^{\frac{1}{2}}}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \tag{7.29}
 \end{aligned}$$

That is, the order of growth of the entire functions $f_l^{(1)}$ is $\rho_l^{(1)} \leq \frac{1}{2}$, for each $l \in \mathbb{N}_0$. In a similar way we can estimate the order of growth for the entire functions $\{f_l^{(2)}\}_{l=0}^{\infty}$.

7. The direct and inverse spectral problem for the case of a spherically symmetric refractive index

Using (7.27) and (7.28) for $l + 1$, we have that

$$\begin{aligned} |f_l^{(2)}(\lambda)| &\leq \left| (\sqrt{\lambda})^{l+1} \right| \left| j_{l+1}(c\sqrt{\lambda}) \right| \\ &\leq |\lambda|^{l+1} \left| j_{l+1}(c\sqrt{\lambda}) \right| \\ &\leq M_3 e^{\tau_3 |\lambda|^c} M_4 e^{|c| \tau_4 |\lambda|^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq M_3 M_4 e^{2\tilde{\tau} |\lambda|^{\frac{1}{2}}}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (7.30)$$

where M_3, M_4, τ_3 and τ_4 are positive constants, with $\tilde{\tau} := \max\{|c| \tau_3, \tau_4\}$. Hence, the order of growth of the entire functions $f_l^{(2)}$ is $\rho_l^{(2)} \leq \frac{1}{2}$, for each $l \in \mathbb{N}_0$. As a consequence, the order of growth for $\{f_l\}_{l=0}^\infty$ is $\rho_l \leq \frac{1}{2}$.

Furthermore, we define as $\{\tilde{\lambda}_{n,l}\}_{n=1}^\infty$ the sequence of non-zero modified transmission eigenvalues, including their algebraic multiplicities as roots of $d_l(\lambda)$. This definition can be expanded to also include $\lambda = 0$ in the sequence, in the special case where there exists a $l \in \mathcal{L}$. That is, we define as $\{\lambda_{n,l}\}_{n=1}^\infty$ the sequence of modified transmission eigenvalues (including the zero eigenvalue if $l \in \mathcal{L}$), with the above considerations about multiplicity, for all $l = 0, 1, 2, \dots$.

Next, we assume the knowledge of the sequence $\{\lambda_{n,l}\}_{n=1}^\infty$ and apply Hadamard's factorization theorem [76, pg. 147] for the entire functions $f_l(\lambda)$:

$$f_l(\lambda) = e^{P_l(\lambda)} \lambda^{m_l} \prod_{n=1}^{\infty} E_{k_0} \left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_{n,l}} \right), \quad (7.31)$$

where $P_l(\lambda)$ is a polynomial of degree $k_0 = 0$ (since $k_0 \leq \rho_l \leq k_0 + 1$), m_l is the order of zero as a root of $f_l(\lambda)$ and E_{k_0} are the canonical products. Furthermore, utilizing (7.25)-(7.26), we derive that $f_l(\lambda)$ is a power series starting from the term λ^l , with the corresponding coefficient

$$c_l = \left(k \sqrt{\frac{\eta_0}{-a}} \right)^l \frac{y_l(1)(al - 1) + y_l'(1)}{1 \cdot 3 \cdots (2l + 1)}.$$

First, we examine the case when $c_l \neq 0$, or equivalently $y_l(1)(al - 1) + y_l'(1) \neq 0$. That is $l \notin \mathcal{L}$, hence $m_l = l$ and the functions f_l have the representation

$$f_l(\lambda) = c_l \lambda^l \prod_{n=1}^{\infty} E_{k_0} \left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_{n,l}} \right).$$

Notice that $f_l(\lambda)/c_l$ can be uniquely determined from the knowledge of the sequence $\{\tilde{\lambda}_{n,l}\}_{n=1}^\infty$.

In what follows, we attempt to make use of this information in order to recover the boundary Cauchy data for the eigenfunctions y_l . We choose $\Lambda_l^{(1)}, \Lambda_l^{(2)} \in \mathbb{C}$ such that $j_l \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(1)} \eta_0}{-a}} \right) = 0$ and $j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(2)} \eta_0}{-a}} \right) = 0$. Taking the spherical Bessel functions' properties into account, it follows that $j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(1)} \eta_0}{-a}} \right) \neq 0$ and $j_l \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(2)} \eta_0}{-a}} \right) \neq 0$. Then, we have a 2×2 system of equations for $y_l(1)$ and $y_l'(1)$:

$$y_l(1) = \frac{d_l \left(\Lambda_l^{(1)} \right)}{-ak \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(1)} \eta_0}{-a}} j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(1)} \eta_0}{-a}} \right)} \quad (7.32)$$

and

$$y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) = \frac{d_l \left(\Lambda_l^{(2)} \right)}{j_l \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(2)} \eta_0}{-a}} \right)}. \quad (7.33)$$

This system has a unique solution, since its corresponding determinant is non-zero:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (al - 1) & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

From (7.33) we have that

$$y'_l(1) = \frac{d_l \left(\Lambda_l^{(2)} \right)}{j_l \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(2)} \eta_0}{-a}} \right)} - (al - 1)y_l(1). \quad (7.34)$$

From this point onward, we make the following assumption for k^2 :

Assumption 7.2.3 *The wavenumber $k^2 > 0$ is not a Dirichlet eigenvalue corresponding to $\eta(r)$.*

The above is a sufficient condition for $y_l(1) \neq 0$, $l \in \mathbb{N}_0$. Hence, it is possible to divide (7.34) by (7.32), yielding

$$\frac{y'_l(1)}{y_l(1)} = \frac{d_l \left(\Lambda_l^{(2)} \right) \left(-ak \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(1)} \eta_0}{-a}} j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(1)} \eta_0}{-a}} \right) \right)}{d_l \left(\Lambda_l^{(1)} \right) j_l \left(k \sqrt{\frac{\Lambda_l^{(2)} \eta_0}{-a}} \right)} - (al - 1). \quad (7.35)$$

Since

$$\frac{d_l \left(\Lambda_l^{(2)} \right)}{d_l \left(\Lambda_l^{(1)} \right)} = \frac{\left(\sqrt{\Lambda_l^{(1)}} \right)^l f_l \left(\Lambda_l^{(2)} \right)}{\left(\sqrt{\Lambda_l^{(2)}} \right)^l f_l \left(\Lambda_l^{(1)} \right)} = \frac{\left(\sqrt{\Lambda_l^{(2)}} \right)^l \prod_{n=1}^{\infty} E_k \left(\frac{\Lambda_l^{(2)}}{\lambda_{n,l}} \right)}{\left(\sqrt{\Lambda_l^{(1)}} \right)^l \prod_{n=1}^{\infty} E_k \left(\frac{\Lambda_l^{(1)}}{\lambda_{n,l}} \right)},$$

all terms in (7.35) are known. Thus, we conclude that $y'_l(1)/y_l(1)$ can be uniquely determined from the knowledge of the sequence $\{\tilde{\lambda}_{n,l}\}_{n=1}^{\infty}$, in the case when $y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) \neq 0$.

We now examine the simpler case when $l \in \mathcal{L}$. That is, the condition $y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) = 0$ holds and as previously discussed, that is equivalent with $\lambda = 0$ being a root of the characteristic function for that choice of l , i.e. $\hat{d}_l(0) = 0$. That can also be translated to $\lambda = 0$ being a modified transmission eigenvalue, corresponding to the order l . From the third chapter, we can see that the eigenspace of $\lambda = 0$, if it is actually an eigenvalue, must be finite-dimensional. Thus, \mathcal{L} can only have a finite number of elements. For $l \in \mathcal{L}$, the fraction $y'_l(1)/y_l(1)$ can be uniquely determined by

$$\frac{y'_l(1)}{y_l(1)} = 1 - al.$$

We summarize the above in a uniqueness result for the inverse spectral problem, if Assumptions 7.2.1 and 7.2.3 are met.

7. The direct and inverse spectral problem for the case of a spherically symmetric refractive index

Theorem 7.2.4 *Suppose that $\eta_1, \eta_2 \in C[0, 1]$ are two distinct refractive indices, both satisfying (7.1)-(7.4) for some positive constants a and η_0 . We also assume that k^2 is not a Dirichlet eigenvalue for η_1, η_2 and that the corresponding spectrum is identical in the sense that $\{\lambda_{n,l}(\eta_1)\}_{n=1}^{\infty} = \{\lambda_{n,l}(\eta_2)\}_{n=1}^{\infty}$ for all $l = 0, 1, 2, \dots$. Then we have that*

$$\frac{y'_l(1; \eta_1)}{y_l(1; \eta_1)} = \frac{y'_l(1; \eta_2)}{y_l(1; \eta_2)},$$

for all $l \in \mathbb{N}_0$. That is, the fractions $y'_l(1)/y_l(1)$ can be uniquely determined by the knowledge of the modified transmission spectrum.

7.2.2. A uniqueness result for boundary Cauchy data with lesser requirements on knowledge of the spectrum

In the previous analysis, we utilized complex theory for entire functions, Hadamard's factorization theorem and assumed total knowledge of the spectrum, in the sense that $\{\lambda_{n,l}(\eta_1)\}_{n=1}^{\infty} = \{\lambda_{n,l}(\eta_2)\}_{n=1}^{\infty}$ for all $l = 0, 1, 2, \dots$. We will now present a simpler method to obtain a uniqueness result, requiring less knowledge about the modified transmission spectrum.

The characteristic functions $\{d_l(\lambda)\}_{l=0}^{\infty}$ are an analytic family on the complex plane except the positive axis:

$$d_l(\lambda) = j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) \left(y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) \right) - ak \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda \eta_0}{-a}} \right) y_l(1), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

First, we examine the case of $y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) \neq 0$, that is $l \notin \mathcal{L}$. Suppose that λ_l is a root of the characteristic function, $d_l(\lambda_l) = 0$. Then, we have that

$$0 = j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) \left(y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) \right) - ak \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) y_l(1). \quad (7.36)$$

To proceed, we require the following result:

Lemma 7.2.5 *If $l \notin \mathcal{L}$, then $j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) \neq 0$.*

Proof. Suppose to the contrary, that $j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) = 0$. Then, from (7.36), we have that $j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) = 0$. That is, $j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) = j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) = 0$, which is a contradiction, since two consecutive spherical Bessel functions do not have non zero roots that coincide. ■

From the Lemma above we have that the term $j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right) \neq 0$. Thus, we can use it to divide the expression (7.36) and obtain

$$0 = y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) - ak \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \frac{j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right)}{j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right)} y_l(1).$$

Hence, from Assumption 7.2.3 we can solve with respect to the Cauchy data fraction:

$$\frac{y'_l(1)}{y_l(1)} = ak \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \frac{j_{l+1} \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right)}{j_l \left(k \sqrt{\frac{\lambda_l \eta_0}{-a}} \right)} + 1 - al. \quad (7.37)$$

7.2. Uniqueness for the inverse spectral problem

Corollary 7.2.6 *If $l \notin \mathcal{L}$, the knowledge of only one eigenvalue corresponding to the characteristic function d_l is sufficient to uniquely determine the fraction $y'_l(1)/y_l(1)$.*

In the simpler case when $l \in \mathcal{L}$, we have previously concluded that the fraction $y'_l(1)/y_l(1)$ can be uniquely determined by:

$$\frac{y'_l(1)}{y_l(1)} = 1 - al. \quad (7.38)$$

The elements of \mathcal{L} can also be identified by the property:

Lemma 7.2.7 *Suppose that $\lambda_l \neq 0$. Then, $l \in \mathcal{L}$ if and only if $j_{l+1}\left(k\sqrt{\frac{\lambda_l\eta_0}{-a}}\right) = 0$.*

Proof. Since λ_l is a non zero eigenvalue, it is generated by the characteristic function (7.17). If we furthermore assume that $l \in \mathcal{L}$, it is easy to verify that $j_{l+1}\left(k\sqrt{\frac{\lambda_l\eta_0}{-a}}\right) = 0$.

Conversely, suppose that $j_{l+1}\left(k\sqrt{\frac{\lambda_l\eta_0}{-a}}\right) = 0$. Then $j_l\left(k\sqrt{\frac{\lambda_l\eta_0}{-a}}\right) \neq 0$, since two consecutive spherical Bessel functions do not have non zero roots that coincide. From (7.17), we have that $j_l\left(k\sqrt{\frac{\lambda_l\eta_0}{-a}}\right)(y_l(1)(al - 1) + y'_l(1)) = 0$. Hence $y_l(1)(al - 1) + y'_l(1) = 0$, which is equivalent with $l \in \mathcal{L}$. ■

We summarize the above in a uniqueness result for the inverse spectral problem, if Assumptions 7.2.1 and 7.2.3 are met.

Theorem 7.2.8 *Suppose that $\eta_1, \eta_2 \in C[0, 1]$ are two distinct refractive indices, both satisfying (7.1)-(7.4) for some positive constants a and η_0 . We also assume that k^2 is not a Dirichlet eigenvalue for η_1, η_2 and that for each $l \in \mathbb{N}_0$, the characteristic functions $d_l(\lambda; \eta_1)$ and $d_l(\lambda; \eta_2)$ have a common root. Then for all $l \in \mathbb{N}_0$ we have that*

$$\frac{y'_l(1; \eta_1)}{y_l(1; \eta_1)} = \frac{y'_l(1; \eta_2)}{y_l(1; \eta_2)}.$$

That is to say, for each l , the fraction $y'_l(1)/y_l(1)$ can be uniquely determined by knowledge of only one modified transmission eigenvalue.

Proof. Let $\lambda_l = \lambda_l(\eta_1) = \lambda_l(\eta_2)$ be the common root of the characteristic functions $d_l(\lambda; \eta_1)$ and $d_l(\lambda; \eta_2)$, for every $l \in \mathbb{N}_0$. Then from Lemma 7.2.7 we can conclude that $\mathcal{L}(\eta_1) = \mathcal{L}(\eta_2) = \mathcal{L}$. Hence, the boundary Cauchy fraction is given by (7.37) in the case where $l \notin \mathcal{L}$ and by (7.38) in the case $l \in \mathcal{L}$. ■

Remark 7.2.9 *The roots of the characteristic function $d_l(\lambda; \eta)$ define a spectral subsequence for each order $l = 0, 1, 2, \dots$ and each subsequence can be ordered as $\{\lambda_{l,j}\}_{j=1}^{\infty}$, according to the previous discussion for the direct spectral problem. The knowledge of one modified transmission eigenvalue, independently of its position in the subsequence, suffices to uniquely determine the fraction $y'_l(1)/y_l(1)$.*

We illustrate the above uniqueness result with some numerical examples. We confine to the simple case where the refractive index is a constant, $\eta(r) = \eta >$

7. The direct and inverse spectral problem for the case of a spherically symmetric refractive index

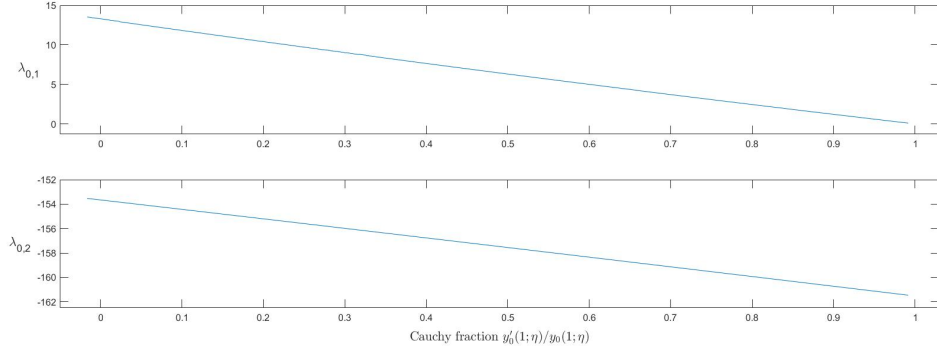


Figure 7.1.: The first two modified transmission eigenvalues versus the Cauchy data at the boundary, for refractive indices $\eta \in [0.1, 10]$ and order $l = 0$.

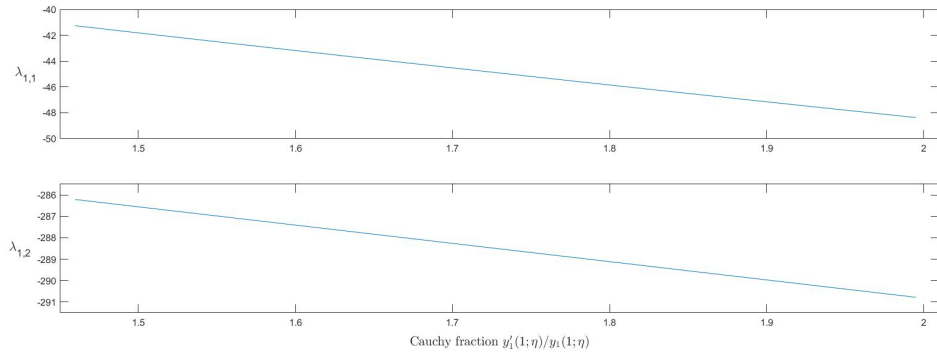


Figure 7.2.: The first two modified transmission eigenvalues versus the Cauchy data at the boundary, for refractive indices $\eta \in [0.1, 10]$ and order $l = 1$.

0 for $r \in [0, 1]$. In this case, the eigenfunction y_l is given by $y_l(r) = r j_l(k\sqrt{\eta}r)$ and thus, the characteristic function (7.7) is simplified in the following expression:

$$d_l(\lambda) := \det \begin{pmatrix} j_l(k\sqrt{\eta}) & -j_l\left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}}\right) \\ \frac{d}{dr}(j_l(k\sqrt{\eta}r)) \Big|_{r=1} & a \frac{d}{dr} j_l\left(k\sqrt{\frac{\lambda\eta_0}{-a}}r\right) \Big|_{r=1} \end{pmatrix} = 0,$$

for $l = 0, 1, 2, \dots$. Given wavenumber k and metamaterial parameters η_0 and a , we use a root finding software to analytically compute the modified transmission eigenvalues for any index η and order l . A similar example was presented in the previous chapter, for the two dimensional case.

For the first three orders $l = 0, 1, 2$, we consider each eigenvalue as a function of the refractive index i.e. $\lambda_{l,j} = \lambda_{l,j}(\eta)$. We calculate the first two eigenvalues $\lambda_{l,1}$ and $\lambda_{l,2}$, for $\eta \in [0.1, 10]$ with step 0.01 and fixed $k = 0.5$, $a = 2$, $\eta_0 = 1$. On the other hand, for this selection of indices and k , we calculate the Cauchy fractions at the boundary $y'_l(1; \eta)/y_l(1; \eta)$. The wavenumber is sufficiently small to secure that it isn't a Dirichlet eigenvalue for all $\eta \in [0.1, 10]$. The relation between the eigenvalues and the Cauchy fractions is shown in Figures 7.1, 7.2 and 7.3.

The monotonic relationship, as demonstrated in the figures, secures injectivity for the mapping $y'_l(1; \eta)/y_l(1; \eta) \rightarrow \lambda_{l,j}(\eta)$ for $j = 1, 2$ and $l = 0, 1, 2$. Furthermore, we note that from the numerical experiments we made for these simple cases, all

7.2. Uniqueness for the inverse spectral problem

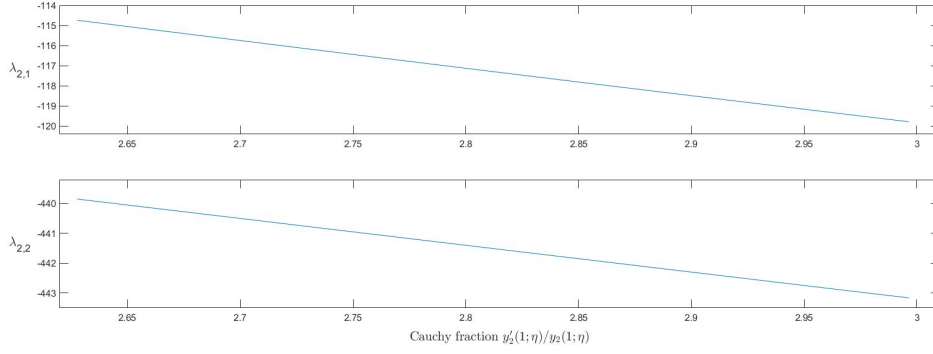


Figure 7.3.: The first two modified transmission eigenvalues versus the Cauchy data at the boundary, for refractive indices $\eta \in [0.1, 10]$ and order $l = 2$.

eigenvalues are well separated for each $l = 0, 1, 2, \dots$. The above confirm Theorem 7.2.8, for this selection of constant refractive indices.

7.2.3. The uniqueness theorem for modified transmission eigenvalues

The investigation of the inverse spectral problem for the spherically symmetric case will be concluded by proving that the knowledge of the fraction $y_l'(1)/y_l(1)$ for all $l \geq 0$ suffices to uniquely determine the refractive index. To this end, we also assume that $\eta(r)$ is bounded by a predetermined constant $A > 0$:

Assumption 7.2.10 *Suppose that $\eta \in C[0, 1]$ such that $0 < \Re(\eta) \leq A$, $\Im(\eta) = 0$.*

To begin, we consider the following inhomogeneous Dirichlet problems:

$$\begin{aligned} \Delta w_1 + k^2 \eta_1(r) w_1 &= 0, & \text{in } B \\ w_1 &= h(\theta, \phi), & \text{on } \partial B \end{aligned} \quad (7.39)$$

and

$$\begin{aligned} \Delta w_2 + k^2 \eta_2(r) w_2 &= 0, & \text{in } B \\ w_2 &= h(\theta, \phi), & \text{on } \partial B \end{aligned} \quad (7.40)$$

where $\eta_1(r)$ and $\eta_2(r)$ satisfy the above assumption. Moreover, we impose a restriction on the wavenumber k^2 :

Assumption 7.2.11 *Let $k^2 \in (0, k_0^2(B)/A)$, where $k_0^2(B)$ is defined to be the first Dirichlet eigenvalue of*

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0, & \text{in } B \\ u &= 0, & \text{on } \partial B. \end{aligned}$$

It is a well known result that $k_0^2(B) = \pi^2$ [51, p.11], and therefore $k^2 \in (0, \pi^2/A)$.

7. The direct and inverse spectral problem for the case of a spherically symmetric refractive index

Lemma 7.2.12 *Suppose that the refractive indices η_1 , η_2 and the wavenumber k^2 satisfy Assumptions 7.2.10 and 7.2.11 respectively. Then, k^2 is not an eigenvalue for (7.39) and (7.40).*

Proof. Define as $k_0^2(\eta_1; B)$ and $k_0^2(\eta_2; B)$ the first Dirichlet eigenvalues of (7.39) and (7.40) respectively. Then, they have the Courant-Fischer characterizations:

$$k_0^2(\eta_1; B) = \inf_{w \in H_0^1(B), w \neq 0} \frac{\int_B \nabla w \cdot \nabla \bar{w} \, dx}{\int_B \eta_1(r) w \cdot \bar{w} \, dx}$$

and

$$k_0^2(\eta_2; B) = \inf_{w \in H_0^1(B), w \neq 0} \frac{\int_B \nabla w \cdot \nabla \bar{w} \, dx}{\int_B \eta_2(r) w \cdot \bar{w} \, dx}.$$

Thus, the following estimations hold

$$\begin{aligned} \inf_{w \in H_0^1(B), w \neq 0} \frac{\int_B \nabla w \cdot \nabla \bar{w} \, dx}{\int_B \eta_i(r) w \cdot \bar{w} \, dx} &\geq \inf_{w \in H_0^1(B), w \neq 0} \frac{\int_B \nabla w \cdot \nabla \bar{w} \, dx}{A \int_B w \cdot \bar{w} \, dx} \\ &= \frac{1}{A} k_0^2(B), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

That is, $k_0^2(\eta_1; B) \geq k_0^2(B)/A$ and $k_0^2(\eta_2; B) \geq k_0^2(B)/A$. This concludes the proof. \blacksquare

As a consequence, if we choose $k^2 \in (0, \pi^2/A)$, then the auxiliary problems (7.39) and (7.40) are well posed. Hence, it is possible to define their corresponding Dirichlet-to-Neumann operators $\mathcal{N}_{\eta_1}, \mathcal{N}_{\eta_2} : H^{1/2}(\partial B) \rightarrow H^{-1/2}(\partial B)$ as $\mathcal{N}_{\eta_1}, \mathcal{N}_{\eta_2} : h \rightarrow \left. \frac{\partial w_h}{\partial r} \right|_{r=1}$, where $w_h(\eta_1)$ and $w_h(\eta_2)$ satisfy (7.39) and (7.40) respectively.

We proceed by implementing the separation of variables technique to obtain series representations in $H^1(B)$ for the solutions of the Dirichlet problem (7.39), in the case of $h \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B)$. We have that

$$w_1(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m \frac{y_l(r; \eta_1)}{r} Y_l^m(\theta, \phi).$$

and

$$w_2(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \beta_l^m \frac{y_l(r; \eta_2)}{r} Y_l^m(\theta, \phi).$$

Also, we can represent the boundary function as a series in $L^2(\partial B)$

$$h(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l h_l^m Y_l^m(\theta, \phi),$$

since $H^{\frac{1}{2}}(\partial B)$ is a subset of $L^2(\partial B)$. The terms $\{h_l^m\}_{l=0}^{\infty}$ can be uniquely determined by h , since the spherical harmonics $\{Y_l^m : l = 0, 1, 2, \dots, -l \leq m \leq l\}$ are an orthogonal basis in $L^2(\partial B)$, [29, p. 26]. We are now ready to state the following result:

7.2. Uniqueness for the inverse spectral problem

Theorem 7.2.13 *Suppose that $\eta_1, \eta_2 \in C[0, 1]$ are two distinct refractive indices, both satisfying (7.1)-(7.4) for some positive constants a and η_0 and that $0 < \eta_1(r), \eta_2(r) \leq A$. We assume that $k^2 \in (0, \pi^2/A)$ and that at least one modified transmission eigenvalue for η_1 and η_2 respectively, coincides for each order $l = 0, 1, 2, \dots$. Then, the Dirichlet-to-Neumann maps are identical as well,*

$$\mathcal{N}_{\eta_1} = \mathcal{N}_{\eta_2}.$$

Proof. Suppose that w_1 and w_2 are the unique solutions of the inhomogeneous Dirichlet problems (7.39) and (7.40), for the refractive indices η_1 and η_2 respectively. Since η_1 and η_2 have at least one identical modified transmission eigenvalue for each order l , the assumptions of Theorem 7.2.8 are satisfied and therefore,

$$\frac{y'_l(1; \eta_1)}{y_l(1; \eta_1)} = \frac{y'_l(1; \eta_2)}{y_l(1; \eta_2)} := \gamma_l.$$

By applying the trace operator on w_1 and w_2 , we have the representations:

$$w_1(1, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m y_l(1; \eta_1) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (7.41)$$

and

$$w_2(1, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \beta_l^m y_l(1; \eta_2) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (7.42)$$

where the interchange of the trace operator and the series is allowed since it is bounded from $H^1(B)$ to $H^{\frac{1}{2}}(\partial B)$. Moreover, from (7.41), (7.42) and the fact that $H^{\frac{1}{2}}(\partial B)$ is compactly embedded in $L^2(\partial B)$, we have that $w_2(1, \theta, \phi) = w_1(1, \theta, \phi) = h(\theta, \phi)$. Finally, from the orthogonality of the spherical harmonics $Y_l^m(\theta, \phi)$, we obtain that

$$\alpha_l^m y_l(1; \eta_1) = h_l^m = \beta_l^m y_l(1; \eta_2). \quad (7.43)$$

We also apply the partial derivative trace operator to w_1 and w_2 . In a similar way as above, we can justify the interchange with the series. As a result,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial r} \Big|_{r=1} - \frac{\partial w_1}{\partial r} \Big|_{r=1} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [\beta_l^m (y'_l(1; \eta_2) - y_l(1; \eta_2))] Y_l^m(\theta, \phi) \\ &\quad - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [\alpha_l^m (y'_l(1; \eta_1) - y_l(1; \eta_1))] Y_l^m(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (7.44)$$

Let $h \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B)$, then from (7.43) and (7.44) we conclude that

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\eta_2} h - \mathcal{N}_{\eta_1} h &= \frac{\partial w_2}{\partial r} \Big|_{r=1} - \frac{\partial w_1}{\partial r} \Big|_{r=1} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [\beta_l^m y_l(1; \eta_2) - \alpha_l^m y_l(1; \eta_1)] (\gamma_l - 1) Y_l^m(\theta, \phi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

The uniqueness theorem can now be inferred from a Dirichlet-to-Neumann mapping property, stated by Nachmann, Sylvester and Uhlmann in [69, Theorem 1.6] and which is included here for convenience:

7. The direct and inverse spectral problem for the case of a spherically symmetric refractive index

Theorem 7.2.14 *Let $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ and suppose that λ_0 is not a Dirichlet eigenvalue for q_1 or q_2 , i.e.*

$$\begin{aligned} -\Delta u + q_i u &= \lambda_0 u, & \text{in } \Omega \\ u &= f, & \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \tag{7.45}$$

has a unique solution, for $i = 1, 2$. Set $\Lambda_{q_i - \lambda_0} : f \rightarrow \frac{\partial u_f}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega}$, $i = 1, 2$ as the corresponding Dirichlet-to-Neumann map. If $\Lambda_{q_1 - \lambda_0} = \Lambda_{q_2 - \lambda_0}$, then $q_1 = q_2$.

This result occurs by utilizing a geometrical optic-type representation for solutions of the Schrödinger equation and the Fourier Integral Theorem. It can be implemented in our case, by setting $\Omega := B$, $\lambda_0 := 0$ and $q_i := -k^2 \eta_i$, $i = 1, 2$. We observe that $\lambda_0 = 0$ is not an eigenvalue for (7.45), since (7.39) and (7.40) have unique solutions. Hence, $\mathcal{N}_{\eta_1} = \mathcal{N}_{\eta_2}$ implies that $\eta_1 = \eta_2$. We are now ready to state a uniqueness theorem for the inverse modified transmission eigenvalue problem, when Assumptions 7.2.10 and 7.2.11 hold.

Theorem 7.2.15 *Suppose that $\eta_1, \eta_2 \in C[0, 1]$ are two distinct refractive indices, both satisfying (7.1)-(7.4) for some positive constants a and η_0 , where $0 < \eta_1(r)$, $\eta_2(r) \leq A$ and $k^2 \in (0, \pi^2/A)$. We assume that there exists a sequence of infinite modified transmission eigenvalues which coincides for each refractive index, in the sense that for each order $l = 0, 1, 2, \dots$ at least one eigenvalue for η_1 and η_2 respectively coincides. Then $\eta_1(r) = \eta_2(r)$, for $r \in [0, 1]$.*

Proof. As a direct consequence of Theorems 7.2.13 and 7.2.14, we have that $\eta_1 = \eta_2$ almost everywhere. Since $\eta_1, \eta_2 \in C[0, 1]$ it follows that $\eta_1(r) = \eta_2(r)$, $\forall r \in [0, 1]$. ■

Remark 7.2.16 *The assumption on the refractive index and the wavenumber is combined in the sense that the restriction on the size A of the refractive index secures that k^2 is not an eigenvalue for any η in this class. Theorem 7.2.15 can be generalized to cover any class of refractive indices, provided that k^2 is not an eigenvalue for the corresponding inhomogeneous Dirichlet problem.*

Remark 7.2.17 *We note that the above uniqueness result is not associated with any constraints on the sign of $1 - \eta$, which is necessary the case of the classic inverse transmission eigenvalue problem.*

Remark 7.2.18 *In contrast with the inverse spectral problem for classic transmission eigenvalues, where either knowledge of all eigenvalues is required [13] or the subset of special classic transmission eigenvalues [1], we require the knowledge of only one eigenvalue for each characteristic function that creates an infinite subset of the spectrum with different structure. Also, in the classic case the fundamental tools utilized were Hadamard's factorization theorem, Muntz's Theorem, Goursat representations and asymptotic expressions for the characteristic functions. In the case of modified transmission eigenvalues that is studied here, we utilized the separation of variables technique in combination with a Dirichlet-to-Neumann mapping property to uniquely determine the refractive index.*

A. Appendix

A.1. Variational formulation

Definition A.1.1 *Let H be a Hilbert space. We define the space of antilinear functionals on H as follows:*

$$H^* := \{f : H \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ is antilinear and bounded} \}$$

Definition A.1.2 *Suppose that H, V are Hilbert spaces, such that:*

$$H \subset V \subset H^*,$$

where we identify V as a dense subspace of H^ . Then, we say that V is a pivot space for H .*

Definition A.1.3 *Let H be a Hilbert space, V be a pivot space for H and $\Phi : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ be a sesquilinear form. We say that Φ is coercive on H , with respect to the pivot space V , if:*

$$\Re(\Phi(u, u)) \geq c_1 \|u\|_H^2 - c_2 \|u\|_V^2 \quad \forall u \in H \quad (\text{A.1})$$

Using Definition (A.1.3), we can identify strongly elliptic systems [65]

Theorem A.1.4 *(Criterion for strong ellipticity) A differential operator with bounded and uniformly continuous coefficients is strongly elliptic, if and only if the corresponding sesquilinear form Φ is coercive on H , with respect to the pivot space V .*

The following criterion characterizes operators that have the Fredholm property [75]:

Theorem A.1.5 *Let X, Y be Banach spaces. Then, a bounded operator $F : X \rightarrow Y$ is Fredholm if and only if there exist a bounded operator $A : Y \rightarrow X$ such that $A \cdot F - I$ and $F \cdot A - I$ are both compact operators.*

We present a useful corollary of Theorem (A.1.5) in a variational formulation setting:

Corollary A.1.6 *The Fredholm property remains invariant under topological isomorphisms.*

Proof. Let X, Y be Banach spaces and $A : X \rightarrow X$, $B : X \rightarrow Y$ linear bounded operators. Also, let $T : Y \rightarrow X$ be a topological isomorphism, such that

$$A = T \cdot B$$

Suppose that A is Fredholm. Then, from Theorem (A.1.5), there exists a bounded and linear operator $F_1 : X \rightarrow X$ such that $A \cdot F_1 - I$ and $F_1 \cdot A - I$ are both compact.

A. Appendix

As a result, by applying T^{-1} to the left side and then T to the right side, we have that $K(F_1T) - I$ and $(F_1T)K - I$ are also compact. Hence from Theorem (A.1.5), K is Fredholm, since the a product of a bounded and a compact operator is a compact operator. In a similar way, we can show the inverse and the proof is complete. ■

Let H be a Hilbert space and $\Phi : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ be a sesquilinear form. Fix a $u \in H$ and define an antilinear functional $f_u : H \rightarrow \mathbb{C}$, such that

$$f_u(v) = \Phi(u, v), \quad v \in H$$

Then by means of Riesz Representation Theorem, define a linear and bounded operator $A : H \rightarrow H$ such that

$$(Au, v)_H := f_u(v), \quad \forall v \in H$$

By means of Riesz Representation Theorem, also define a linear and bounded operator $K : H \rightarrow H^*$ such that

$$\langle Ku, v \rangle_{H^* \times H} := f_u(v), \quad \forall v \in H$$

We also define $\Gamma : H^* \rightarrow H$, such that

$$\Gamma h := x,$$

where x is the unique element for which

$$h(v) = (x, v)_H$$

Proposition A.1.7 *The operator Γ is a topological isomorphism.*

Proof. Let $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ and $g_1, g_2 \in H^*$, such that $\Gamma g_1 = x_1$, $\Gamma g_2 = x_2$. Then, we have that:

$$\begin{aligned} (a_1g_1 + a_2g_2)(v) &= a_1(x_1, v)_H + a_2(x_2, v)_H \\ &= (a_1x_1, v)_H + (a_2x_2, v)_H \\ &= (a_1x_1 + a_2x_2, v) \end{aligned}$$

for all $v \in H$. Hence, $\Gamma(a_1g_1 + a_2g_2) = x_1 + x_2$, that is Γ is a linear operator. Let $h_1, h_2 \in H^*$, such that $\Gamma h_1 = \Gamma h_2 = x$. Then,

$$h_1(v) - h_2(v) = (x, v)_H - (x, v)_H = 0$$

Thus, $H^* \ni h := h_1 - h_2$, has the property $h(v) = 0$ for all $v \in H$. That is $h \equiv 0$ and hence, Γ is injective.

Let $y \in H$. We define an antilinear functional $g \in H^*$, such that $g(v) := (y, v)$. Obviously, $\Gamma g = y$ and hence Γ is surjective.

Let $h \in H^*$ such that $x = \Gamma h$. Then,

$$\begin{aligned} \|h\| &= \sup\{|h(v)| : \|v\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|(x, v)| : \|v\| \leq 1\} \\ &\leq \{\|x\|\|v\| : \|v\| \leq 1\} \\ &= \|x\| = \|\Gamma h\| \end{aligned}$$

On the other hand, if $x \neq 0$ we set $v_0 := \frac{x}{\|x\|}$. Then, $\|v_0\| = \|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$. Hence, $(x, v_0) = (x, \frac{x}{\|x\|}) = \|x\|$. As a result, $\|h\| \geq \|x\| = \|\Gamma h\|$. That is,

$$\|h\| = \|\Gamma h\| \Rightarrow \|\Gamma\| = 1$$

To summarize, Γ is linear, bijective and bounded, hence invertible by the open mapping theorem. ■

Proposition A.1.8 *Let $A : H \rightarrow H$ and $K : H^* \rightarrow H$ as defined above. Then, A has the Fredholm property if and only if K has the Fredholm property.*

Proof. Since the operators A, K satisfy the equation $A = \Gamma \cdot K$, we can apply Corollary (A.1.6) and the proof is concluded. ■

A well known property for duals of Hilbert spaces is the following:

Lemma A.1.9 *Suppose that H_1 and H_2 are two Hilbert spaces that satisfy $H_1 \subset H_2$ and H_1 is equipped with the H_2 -norm. Then, their duals (or antilinear duals respectively) have the embedding property $H_2^* \hookrightarrow H_1^*$.*

Proof. Let $f \in H_2^*$. Then if we set $g := f|_{H_1}$, it is easy to verify that $g : H_1 \rightarrow \mathbb{C}$ is a linear (or antilinear respectively) functional on H_1 , since it inherits these properties from f . Hence, $H_2^* \hookrightarrow H_1^*$. ■

Remark A.1.10 *If the dual pairing for functionals in H_2^* is given by $f(x) = \langle f, x \rangle_{H_2^* \times H_2}$, then we notice that the dual pairing for $g := f|_{H_1}$ is given by $g(y) = f(y)|_{y \in H_1} = \langle f, y \rangle_{H_2^* \times H_2}$, for $y \in H_1$. That is,*

$$\langle g, y \rangle_{H_1^* \times H_1} = \langle f, y \rangle_{H_2^* \times H_2},$$

for $y \in H_1$.

Proposition A.1.11 *The operator $T : L^2(D_b) \rightarrow L^2(D_b)$ that is defined as*

$$Tf = v_f \in H^1(D_b), \text{ where } K_\beta(w_f, v_f) = (0, \eta_0 f) \in (\mathcal{H}(D_b))^*$$

is self-adjoint with respect to the weighted inner product

$$(f, g)_{L^2(D_b, \eta_0 dx)} := \int_{D_b} \eta_0(x) f \bar{g} dx,$$

where $f, g \in L^2(D_b)$.

Proof. Let $f, g \in L^2(D_b)$ and suppose that $(w_f, v_f), (w_g, v_g) \in \mathcal{H}(D_b)$ are the unique solutions of

$$K_\beta(w_f, v_f) = (0, \eta_0 f) \text{ and } K_\beta(w_g, v_g) = (0, \eta_0 g)$$

respectively. Then by utilizing the definitions of K_β, A_β and the self-adjointness of A_β for all $\beta \in \mathbb{R}$, we have

$$\begin{aligned} \int_{D_b} \eta_0 f \bar{v}_g dx &= \langle K_\beta(w_f, v_f), (w_g, v_g) \rangle_{\mathcal{H}^*(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= (A_\beta(w_f, v_f), (w_g, v_g))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= ((w_f, v_f), A_\beta(w_g, v_g))_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= \overline{(A_\beta(w_g, v_g), (w_f, v_f))}_{\mathcal{H}(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= \overline{\langle K_\beta(w_g, v_g), (w_f, v_f) \rangle}_{\mathcal{H}^*(D_b) \times \mathcal{H}(D_b)} \\ &= \int_{D_b} \eta_0 v_f \bar{g} dx \end{aligned}$$

A. Appendix

That is,

$$(Tf, g)_{L^2(D_b, \eta_0 dx)} = (f, Tg)_{L^2(D_b, \eta_0 dx)}$$

and this concludes the proof ■

We present a useful minimum principle for generalized eigenvalue problems:

Theorem A.1.12 (*Minimum principle for the first eigenvalue*) *Let H be a Hilbert space, $A : H \rightarrow H$ be a coercive, linear, bounded operator and $B : H \rightarrow H$ be a positive, compact, linear operator. We define the Rayleigh quotient*

$$\frac{(Af, f)}{(Bf, f)}, \quad f \in (N(B))^c \quad (\text{A.2})$$

and assume that a minimizer exists for (A.2). Then, the smallest eigenvalue of the generalized eigenvalue problem:

$$Au = \lambda Bu$$

is the minimum of the Rayleigh quotient on the set $(N(B))^c$, i.e.

$$\lambda_1 = \inf_{f \in (N(B))^c} \frac{(Af, f)}{(Bf, f)}$$

and any corresponding eigenelement u_1 serves as a minimizer, that is $\lambda_1 = \frac{(Au_1, u_1)}{(Bu_1, u_1)}$.

Proof. Suppose there exists a minimizer u of the Rayleigh quotient, i.e.

$$m = \frac{(Au, u)}{(Bu, u)} = \inf_{f \in (N(B))^c} \frac{(Af, f)}{(Bf, f)}$$

Choose any $v \in (N(B))^c$ and define

$$f(\epsilon) := \frac{(A(u + \epsilon v), u + \epsilon v)}{(B(u + \epsilon v), u + \epsilon v)}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}$$

If u is the minimizer, then $f'(0) = 0$. We have that

$$f(\epsilon) = \frac{(Au, u) + 2\epsilon(Au, v) + \epsilon^2(Av, v)}{(Bu, u) + 2\epsilon(Bu, v) + \epsilon^2(Bv, v)}$$

Hence,

$$f'(0) = \frac{2(Au, v)B(u, u) - 2(Bu, v)(Av, v)}{(Bu, u)^2} = 0$$

That is, $(Au, v)(Bu, u) = (Bu, v)(Au, u)$ for all $v \in (N(B))^c$. Since $m = \frac{(Au, u)}{(Bu, u)}$, the following equation holds:

$$(Au, v) = m(Bu, v) \quad \forall v \in (N(B))^c \quad (\text{A.3})$$

Now, if we choose an $f \in N(B)$, then we have that

$$(Au, f) = m(Bu, f) = 0, \quad (\text{A.4})$$

since $Au = mBu \in R(B)$ and $R(B) \subset \overline{R(B)} \perp N(B)$. From (A.3) and (A.4), it follows that

$$(Au, v) = m(Bu, v) \quad \forall v \in H,$$

that is to say m is a generalized eigenvalue, with u being a corresponding generalized eigenelement. To finish the proof, we notice that if λ is any generalized eigenvalue, with \tilde{u} as a corresponding eigenelement, then:

$$\lambda = \frac{(A\tilde{u}, \tilde{u})}{(B\tilde{u}, \tilde{u})} \geq m$$

In other words, any other eigenvalue is larger than m . ■

We continue by presenting a characterization for strictly positive operators:

Proposition A.1.13 *Let H be a Hilbert space and $T : H \rightarrow H$ be a positive operator, i.e. $(Tu, u) \geq 0 \forall u \in H$. Then, T is strictly positive, i.e. $(Tu, u) > 0$ for all $u \neq 0$ if and only if T is an injective operator.*

Proof. Suppose that $(Tu, u) > 0$, for $u \neq 0$. Assume, to the contrary, that T is not injective, that is there exists a $0 \neq u_0 \in H$ such that $Tu_0 = 0$. Then we arrive at a contradiction, since $0 < (Tu_0, u_0) = (0, u_0) = 0$.

Conversely, assume that T is injective. Since T is positive, there exists a unique (positive) square root operator, namely $T^{\frac{1}{2}}$. That is, $T = T^{\frac{1}{2}} \cdot T^{\frac{1}{2}}$, which yields that $N(T^{\frac{1}{2}}) \subset N(T)$. As a consequence, $N(T^{\frac{1}{2}}) = \{0\}$ and thus, $(Tu, u) = (T^{\frac{1}{2}} \cdot T^{\frac{1}{2}}u, u) = (T^{\frac{1}{2}}u, T^{\frac{1}{2}}u) = \|T^{\frac{1}{2}}u\|^2 \neq 0$, for $u \neq 0$. That is, $(Tu, u) > 0$ for $u \neq 0$ and this concludes the proof. ■

The previous result grants a description for the nullspace of a positive operator:

Corollary A.1.14 *Let H be a Hilbert space and $T : H \rightarrow H$ be a positive operator. Then,*

$$N(T) = \{u \in H : (Tu, u) = 0\} \tag{A.5}$$

A.2. Galerkin scheme

Proposition A.2.1 *Let H be a Hilbert space and $A : H \rightarrow H$ be a coercive, linear operator. Let $P_N : H \rightarrow H$ be orthogonal projections with range in a finite dimensional subspace X_N . Then, $A^{(N)} := P_N A|_{X_N} : X_N \rightarrow X_N$ is a sequence of coercive, linear operators that satisfy*

$$\left\| (A^{(N)})^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq C \tag{A.6}$$

for some $C > 0$. Moreover, $\{(A^{(N)})^{-1} P_N\}_{N=1}^{\infty}$ is a sequence of positive operators.

Proof. Let $u \in X_N$. Then,

$$\begin{aligned} \left\| (A^{(N)})^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 &= \left((A^{(N)})^{\frac{1}{2}} u, (A^{(N)})^{\frac{1}{2}} u \right)_H \\ &= (A^{(N)}u, u)_H \\ &= (P_N A u, u)_H \\ &= (A u, P_N u)_H \\ &= (A u, u)_H \geq c' \|u\|^2 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Since $(A^{(N)})^{\frac{1}{2}}$ is bounded,

$$\left\| (A^{(N)})^{\frac{1}{2}} u \right\| \leq \left\| (A^{(N)})^{\frac{1}{2}} \right\| \cdot \|u\| \quad \forall u \in H \tag{A.8}$$

A. Appendix

From (A.7) and (A.8), we have the estimate:

$$\left\| (A^{(N)})^{\frac{1}{2}} \right\| \geq c' \text{ or equivalently } \left\| (A^{(N)})^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq \frac{1}{c'} = c$$

For the second part, notice that:

$$\left(A^{(N)} (A^{(N)})^{-1} P_N u, (A^{(N)})^{-1} P_N u \right) \geq c \left\| (A^{(N)})^{-1} P_N u \right\|^2 \geq 0$$

As a consequence,

$$\begin{aligned} \left(A^{(N)} (A^{(N)})^{-1} P_N u, (A^{(N)})^{-1} P_N u \right) &= \left(P_N u, (A^{(N)})^{-1} P_N u \right) \\ &= \left(u - (I - P_N) u, (A^{(N)})^{-1} P_N u \right) \\ &= \left(u, (A^{(N)})^{-1} P_N u \right) \\ &= \left((A^{(N)})^{-1} P_N u, u \right) \geq 0 \end{aligned}$$

That is,

$$\left((A^{(N)})^{-1} P_N u, u \right) \geq 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

and this concludes the proof. ■

Proposition A.2.2 *Let H be a Hilbert space, $A \in \mathcal{B}(H)$, i.e. A is a linear and bounded operator and $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a complex function, analytic on a $D \subset \mathbb{C}$. If the Taylor expansion of f around $z_0 \in D$ is given by:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z - z_0)^n}{n!}, \quad \forall |z - z_0| \leq r,$$

where $r \leq \rho$, $\|A - z_0 I\| \leq \rho$ and ρ is the radius of convergence for the Taylor expansion of f around z_0 , then we can define the operator $f(A) : H \rightarrow H$ as follows:

$$f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} (A - z_0 I)^n, \quad (\text{A.9})$$

where the convergence is in norm, in the space of linear and bounded operators $\mathcal{B}(H)$.

Proof. Let $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a complex function, analytic on a $D \subset \mathbb{C}$, with Taylor series:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z - z_0)^n}{n!}, \quad \forall |z - z_0| \leq \rho$$

Define the partial sum operators $f_k(A) : H \rightarrow H$, for $k \in \mathbb{N}$ as follows:

$$f_k(A) := \sum_{n=0}^k c_n \frac{(A - z_0 I)^n}{n!}$$

Firstly, we notice that $f_k(A) \in \mathcal{B}(H)$. A question arises on whether $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(A)$ exists in $\mathcal{B}(H)$. Since $\mathcal{B}(H)$ is a Banach space, it suffices to show that $\{f_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence. Indeed,

$$\begin{aligned} \|f_k(A) - f_m(A)\| &= \left\| \sum_{n=m}^k c_n \frac{(A - z_0 I)^n}{n!} \right\| \quad \text{for } k \geq m \\ &\leq \sum_{n=m}^k \frac{|c_n|}{n!} \|(A - z_0 I)^n\| \\ &\leq \sum_{n=m}^k \frac{|c_n|}{n!} \|A - z_0 I\|^n \\ &\leq \sum_{n=m}^k \frac{|c_n|}{n!} r^n \rightarrow 0, \quad \text{as } n, m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

since the Taylor series for an analytic function converges absolutely and thus, its tail converges to zero. Consequently, $\{f_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence and the proof is concluded, since

$$\|f_k(A) - f(A)\| \rightarrow 0, \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

■

Lemma A.2.3 *Let H be a Hilbert space and $A, A_N : H \rightarrow H$ positive operators, $N \in \mathbb{N}$. If $A_N \rightarrow A$ strongly (pointwise), then:*

$$(A_N)^{\frac{1}{2}} \rightarrow A^{\frac{1}{2}} \text{ strongly (pointwise)} \tag{A.10}$$

Proof. Without loss of generality, we can suppose that $\|A_n\| \leq 1$ and $\|A\| \leq 1$. As a result, the estimates $\|I - A_n\| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ and $\|I - A\| \leq 1$ also hold. We consider the function $\sqrt{1 - z}$, which is analytic for $|z| < 1$. Its Taylor series $\sqrt{1 - z} = 1 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$ however, converges absolutely for $z \leq 1$ [74] (Or equivalently, the power series for \sqrt{z} with center at $z_0 = 1$, converges absolutely for $|z - z_0| \leq 1$). Thus, from Proposition (A.2.2), we have the representations:

$$\begin{aligned} \sqrt{A_n} &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i (I - A_n)^i \\ \sqrt{A} &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i (I - A)^i \end{aligned}$$

It is shown in [74, pg. 195], that this is an alternative way to define square root operators. The proof will be concluded, if we show that $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sqrt{A_n}x - \sqrt{A}x\| = 0$.

A. Appendix

We have that

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sqrt{A_n} x - \sqrt{A} x \right\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i (I - A_n)^i x - \sum_{i=1}^{\infty} c_i (I - A)^i x \right\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k c_i \left[(I - A_n)^i - (I - A)^i \right] x \right\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=0}^k c_i \left[(I - A_n)^i - (I - A)^i \right] x \right\| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k |c_i| \cdot \left\| \left[(I - A_n)^i - (I - A)^i \right] x \right\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k a_i(n) \tag{A.11}
\end{aligned}$$

where $a_i(n) := |c_i| \cdot \left\| \left[(I - A_n)^i - (I - A)^i \right] x \right\|$.

Since $A_n \rightarrow A$ strongly, we also have that $I - A_n \rightarrow I - A$ strongly. Hence,

$$(I - A_n)^i \rightarrow (I - A)^i \text{ strongly, } \forall i \in \mathbb{N} \tag{A.12}$$

It remains to show that the limits in (A.11) can be interchanged, since (A.12) implies that $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i(n) = 0$. This can be achieved by using Tannery's Lemma (Corollary of Dominated Convergence theorem).

Lemma A.2.4 *Consider the sequence $S_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n)$ and suppose that the terms $a_i(n)$ converge in the sense that $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i(n) = b_i$, for $i \in \mathbb{N}$. If*

$$|a_i(n)| \leq M_i \quad \text{and} \quad \sum_{i=0}^{\infty} M_i < +\infty,$$

then:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$$

We apply Lemma (A.2.4) to (A.11), by setting

$$S_n := \sum_{i=0}^{\infty} |c_i| \cdot \left\| \left[(I - A_n)^i - (I - A)^i \right] x \right\| = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n)$$

Since $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i(n) = 0$, we set $b_i := 0$. Then,

$$\begin{aligned}
a_i(n) &= |a_i(n)| = |c_i| \cdot \left\| \left[(I - A_n)^i - (I - A)^i \right] x \right\| \\
&\leq |c_i| \left[\left\| (I - A_n)^i x \right\| + \left\| (I - A)^i x \right\| \right] \\
&\leq |c_i| \left[\left\| (I - A_n)^i \right\| + \left\| (I - A)^i \right\| \right] \cdot \|x\| \\
&\leq |c_i| \|x\| \left[\|I - A_n\|^i + \|I - A\|^i \right]
\end{aligned}$$

Since $\|I - A_n\| \leq 1$ and $\|I - A\| \leq 1$ for all $n \in \mathbb{N}$, we also have the estimates $\|I - A_n\|^i \leq 1$ and $\|I - A\|^i \leq 1$, for all $i \in \mathbb{N}$. Thus,

$$|a_i(n)| \leq 2|c_i|\|x\| := M_i$$

and

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i(n)| \leq 2\|x\| \sum_{i=0}^{\infty} |c_i| = \sum_{i=0}^{\infty} M_i$$

The Taylor series

$$\sqrt{1-z} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \quad \text{converges absolutely for } |z| \leq 1$$

Hence,

$$\sum_{i=0}^{\infty} |c_i| < \infty$$

and thus,

$$\sum_{i=0}^{\infty} M_i < +\infty$$

Consequently, from Tannery's lemma we have that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i = 0$$

and this concludes the proof, since the limits in (A.11) can be interchanged:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sqrt{A_n}x - \sqrt{A}x \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \rightarrow 0$$

■

List of Figures

| | | |
|------|--|----|
| 1.1. | Scattering from a non penetrable, sound soft obstacle D | 15 |
| 1.2. | Scattering from a penetrable inhomogeneous medium $(D, \eta(x))$ | 16 |
| 2.1. | The Stekloff eigenvalue problem | 25 |
| 2.2. | The modified transmission eigenvalue problem for an artificial meta- material background | 28 |
| 6.1. | Modified transmission eigenvalues for the unit disk with $\eta = 4$, $\eta_0 = 1$, $a = 1$ and $k = 1$, from the first four Bessel functions. Negative roots are shown on the left and the (only) positive on the right | 65 |
| 6.2. | Plots of the first three modified transmission eigenvalues versus the refractive index η , for $k = 0.35$, $a = 1$ and $\eta_0 = 1$ | 67 |
| 6.3. | Reconstructions of the unknown refractive index for unit disks. The material properties (η, η_0, a) for the above examples are $(0.8, 2, 1)$, $(4, 1, 2)$, $(7.2, 3, 1)$ and $(15.8, 6, 4)$ respectively. | 67 |
| 7.1. | The first two modified transmission eigenvalues versus the Cauchy data at the boundary, for refractive indices $\eta \in [0.1, 10]$ and order $l = 0$ | 84 |
| 7.2. | The first two modified transmission eigenvalues versus the Cauchy data at the boundary, for refractive indices $\eta \in [0.1, 10]$ and order $l = 1$ | 84 |
| 7.3. | The first two modified transmission eigenvalues versus the Cauchy data at the boundary, for refractive indices $\eta \in [0.1, 10]$ and order $l = 2$ | 85 |

List of Tables

| | |
|--|----|
| 6.1. Approximation of modified transmission eigenvalues for disks with different material properties and fixed wavenumber $k = 0.35$ | 66 |
| 6.2. Convergence for the first three modified transmission eigenvalues, for a disk with $\eta = 4$, $\eta_0 = 1$, $a = 2$ and $k = 0.35$ | 66 |
| 6.3. Reconstruction of a piecewise constant refractive index from modified transmission eigenvalues. | 69 |
| 6.4. Reconstruction of a piecewise constant refractive index from modified transmission eigenvalues corresponding to one and five wave numbers respectively. | 70 |

Bibliography

- [1] Aktosun T., Gintides D. and Papanikolaou V. G. (2011), The uniqueness in the inverse problem for transmission eigenvalues for the spherically symmetric variable-speed wave equation, *Inverse Problems* **27** 115004
- [2] An J. and Shen J. (2013), A spectral-element method for transmission eigenvalue problems, *J. Sci. Comput.* **57** 670-688
- [3] An J. and Shen J. (2015), Spectral approximation to a transmission eigenvalue problem and its applications to an inverse problem, *Comput. Math. Appl.* **69** 1132-1143
- [4] Audibert L., Cakoni F. and Haddar H. (2017), New sets of eigenvalues in inverse scattering for inhomogeneous media and their determination from scattering data, *Inverse Problems* **33** 125011
- [5] Baricz A. (2010) Bounds for modified Bessel functions of the first and second kinds, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **53** 575-599
- [6] Bonnet-Ben Dhia A.S., Carvalho C., Chesnel L. and Ciarlet P. Jr. (2016) On the use of perfectly matched layers at corners for scattering problems with sign-changing coefficients, *J. Comput. Phys.* **322**
- [7] Buterin S. A., Yang C. F. and Yurko V. A. (2015), On an open question in the inverse transmission eigenvalue problem, *Inverse Problems* **31** 045003
- [8] Cakoni F, Colton D. and Haddar H (2010), On the determination of Dirichlet or transmission eigenvalues from far field data, *Comptes Rendus Mathematique* **348** 379-383
- [9] Cakoni F, Colton D and Haddar H (2016), *Inverse Scattering Theory and Transmission Eigenvalues*, vol. **88** of CBMS Series (Philadelphia: SIAM Publications)
- [10] Cakoni F., Colton D. and Haddar H. (2009), The computation of lower bounds for the norm of the index of refraction in an anisotropic media, *J. Integral Equations and Applications* **21** 203-227
- [11] Cakoni F., Colton D., Meng S. and Monk P. (2016), Stekloff eigenvalues in inverse scattering, *SIAM J. Math. Anal.* **76** 1737-1763
- [12] Cakoni F., Colton D. and Monk P. (2007), On the use of transmission eigenvalues to estimate the index of refraction from far field data, *Inverse Problems* **23** 507-522
- [13] Cakoni F., Colton D. and Gintides D. (2010), The Interior Transmission Eigenvalue Problem *SIAM J. Math. Anal.* **42** 2912-2921

Bibliography

- [14] Cakoni F. and Gintides D. (2010), New results on transmission eigenvalues, *Inverse Problems Imaging* **4** 39-48
- [15] Cakoni F., Gintides D. and Haddar H. (2010), The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues *SIAM J. Math. Anal.* **42** 237–55
- [16] Cakoni F. and Haddar H. (2012), Transmission eigenvalues in inverse scattering theory *Inverse Problems and Applications: Inside Out II (MSRI Publications 60)* ed G. Uhlmann (Cambridge: Cambridge University Press) 527-578
- [17] Cakoni F. and Haddar H. (2013), Special issue on transmission eigenvalues, *Inverse Problems* **29** 100201
- [18] Cakoni F. and Haddar H. (2009), On the existence of transmission eigenvalues in an inhomogeneous medium, *Applicable Analysis* **88** 475-493
- [19] Cakoni F., Harris I. and Sun J. (2014), Transmission eigenvalues and nondestructive testing of anisotropic magnetic materials with voids, *Inverse Problems* **30** 035016
- [20] Cakoni F. and Kress R. (2017), A boundary integral equation method for the transmission eigenvalue problem, *Applicable Analysis* **96** 23-38
- [21] Cakoni F., Monk P. and Sun J. (2014), Error analysis for the finite element approximation of transmission eigenvalues, *Comput. Methods Appl. Math.* **14** 419-427
- [22] Camaño J., Lackner C. and Monk P. (2017), Electromagnetic Stekloff eigenvalues in inverse scattering, *SIAM J. Math. Anal.* **49** 4376–4401
- [23] Cakoni F., Cayoren M. and Colton D. (2008), Transmission eigenvalues and the nondestructive testing of dielectrics, *Inverse Problems* **24** 065016
- [24] Cheng X. and Yang J. (2015), Computational method for transmission eigenvalues for a spherically stratified medium, *J. Opt. Soc. Am. A* **32** 1243-1246
- [25] Cogar S. (2019) *New Eigenvalue Problems in Inverse Scattering*, PhD Thesis (University of Delaware)
- [26] Cogar S., Colton D., Meng S. and Monk P. (2017), Modified transmission eigenvalues in inverse scattering theory, *Inverse Problems* **33** 125002
- [27] Cogar S. and Monk P. (2020), Modified electromagnetic transmission eigenvalues in inverse scattering theory, *SIAM J. Math. Anal.* **52**, 6412–6441
- [28] Colton D., and Kirsch A. (1984), Dense sets and far field patterns in acoustic wave propagation, *SIAM J. Math. Anal.* **15**, 996–1006
- [29] Colton D. and Kress R. (2013), *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, 3rd edn (New York: Springer)
- [30] Colton D. and Kirsch A. (1996), A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region, *Inverse Problems* **12** 383-393

-
- [31] Colton D. and Kress R. (1978), The construction of solutions to acoustic scattering problems in a spherically stratified medium II, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **32** 53-62
- [32] Colton D. and Leung Y. J. (2013), Complex eigenvalues and the inverse spectral problem for transmission eigenvalues, *Inverse Problems* **29** 104008
- [33] Colton D. and Monk M. (1988), The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in an inhomogeneous medium, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **41** 97-125
- [34] Colton D., Monk P. and Sun J. (2010), Analytical and computational methods for transmission eigenvalues, *Inverse Problems* **26** 045011
- [35] Colton D. and Päivärinta L. (1990), Far-field patterns for electromagnetic waves in an inhomogeneous medium, *SIAM J. Math. Anal.* **21** 1537–1549
- [36] Colton D. and Päivärinta L. (1992), The uniqueness of a solution to an inverse scattering problem for electromagnetic waves, *Arch. Rational Mech. Anal.* **119**, 59–70
- [37] Colton D., Päivärinta L. and Sylvester J. (2007), The interior transmission problem, *Inverse Problems Imaging* **1** 13-28
- [38] Erdélyi A. (1956), *Asymptotic Expansions*, (New York: Dover)
- [39] Davis P.J. (1975), *Interpolation and Approximation*, Dover, New York
- [40] Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F. and Tricomi F. (1954), *Higher Transcendental Functions*, vol 2 (New York: McGraw-Hill).
- [41] Geng H., Ji X., Sun J. and Xu L. (2016), C^0 IP Methods for the transmission eigenvalue problem, *J. Sci. Comput.* **68** 326-338
- [42] Gintides D. and Pallikarakis N. (2013), A computational method for the inverse transmission eigenvalue problem, *Inverse Problems* **29** 104010
- [43] Gintides D. and Pallikarakis N. (2017), The inverse transmission eigenvalue problem for a discontinuous refractive index, *Inverse Problems* **33** 055006
- [44] Gintides D., Pallikarakis N. and Stratouras K. (2021), On the modified transmission eigenvalue problem with an artificial metamaterial background, *Res. Math. Sci.* **8** 40
- [45] Gintides D., Pallikarakis N. and Stratouras K. (2021), A computational approach for the inverse problem of reconstructing a spherically symmetric refractive index using modified transmission eigenvalues, *2021 XXXIVth General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science (URSI GASS)*
- [46] Gohberg I., Goldberg S. and Kaashoek M. (2003), *Basic Classes of Linear Operators*, (Basel: Birkhauser)

- [47] Gould S. (1995), *Variational Methods for Eigenvalue Problems: An Introduction to the Methods of Rayleigh, Ritz, Weinstein, and Aronszajn*, (New York: Dover)
- [48] Harris I. (2015), *Non-destructive testing of anisotropic materials*, PhD Thesis, University of Delaware
- [49] Harris I. (2021), Approximation of the inverse scattering Steklov eigenvalues and the inverse spectral problem, *Res. Math. Sci.* **8** 31
- [50] Harris I., Kleefeld A. (2020) Analysis and computation of the transmission eigenvalues with a conductive boundary condition, *Applicable Analysis* **101** 1880-1895
- [51] Henrot A. (2006), *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators* (Basel: Birkhäuser)
- [52] Hsiao G. C., Liu F., Sun J. and Xu L. (2011), A coupled BEM and FEM for the interior transmission problem in acoustics, *J. Comput. Appl. Math.* **235** 5213–5221
- [53] Huang R., Struthers A., Sun J. and Zhang R. (2016), Recursive integral method for transmission eigenvalues, *J. Comput. Phys.* **327** 830-840
- [54] Huang T.-M., Huang W.-Q. and Lin W.-W. (2015), A robust numerical algorithm for computing Maxwell's transmission eigenvalue problems, *SIAM J. Sci. Comput.* **37** 2403–2423
- [55] Ji X., Sun J. and Turner T. (2012), Algorithm 922: A mixed finite element method for Helmholtz transmission eigenvalues, *ACM T. Math. Software* **38** 1-8
- [56] Ji X., Sun J. and Xie H. (2014), A multigrid method for Helmholtz transmission eigenvalue problems, *J. Sci. Comput.* **60** 276-294
- [57] Kirsch A. (1986), The denseness of the far field patterns for the transmission problem, *IMA J. Appl. Math.* **37** 213-225
- [58] Kirsch A. (2009), On the existence of transmission eigenvalues, *Inverse Problems Imaging* **3** 155-172
- [59] Kleefeld A. (2013), A numerical method to compute interior transmission eigenvalues, *Inverse Problems* **29** 104012
- [60] Kleefeld A., Pieronek L. (2018), The method of fundamental solutions for computing acoustic interior transmission eigenvalues, *Inverse Problems* **34** 035007
- [61] Kleefeld A., Pieronek L. (2018), Computing interior transmission eigenvalues for homogeneous and anisotropic media, *Inverse Problems* **34** 105007
- [62] Lax P.D., and Phillips R.S. (1967), *Scattering Theory* Academic Press, New York.

-
- [63] Lechleiter A. and Peters S. (2015), Determining transmission eigenvalues of anisotropic inhomogeneous media from far field data, *Commun. Math. Sci.* **13** 1803 – 1827
- [64] Li T., Huang W.-Q., Lin W.-W. and Liu J. (2015), On spectral analysis and a novel algorithm for transmission eigenvalue problems, *J. Sci. Comput.* **64** 83–108
- [65] McLean W. (2000), *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, (Cambridge: Cambridge University Press)
- [66] McLaughlin J. R. and Polyakov P. L. (1994), On the uniqueness of a spherically symmetric speed of sound from transmission eigenvalues, *J. Differ. Eqns* **107** 351-82
- [67] Monk P. and Sun J. (2012), Finite element methods for Maxwell transmission eigenvalues, *SIAM J. Sci. Comput.* **34** 247–264
- [68] Nachman A. (1988), Reconstructions from boundary measurements, *Annals of Math.* **128**, 531–576
- [69] Nachmann A., Sylvester J. and Uhlmann G. (1988), An n-Dimensional Borg-Levinson Theorem, *Communications in Mathematical Physics* **115** 595-605
- [70] Novikov R. (1988), Multidimensional inverse spectral problems for the equation $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$, *Translations in Func. Anal. and its Appl.* **22**, 263–272
- [71] Pallikarakis N. (2017), *The Inverse Spectral Problem for the Reconstruction of the Refractive Index from the Interior Transmission Problem*, PhD Thesis (NTUA)
- [72] Päiväranta L. and Sylvester J. (2008), Transmission eigenvalues, *SIAM J. Math. Anal.* **40** 738-753
- [73] Ramm A.G. (1988), Recovery of the potential from fixed energy scattering data, *Inverse Problems* **4**, 877–886
- [74] Reed M. and Simon B. (1980) *Methods of Mathematical Physics Vol.1: Functional Analysis*, (New York: Academic Press)
- [75] Schechter M. *Principles of Functional Analysis* (Graduate Studies in Mathematics vol. 36), 2nd edn (American Mathematical Society)
- [76] Shakarchi R. and Stein E. M. (2003), *Complex Analysis*, (Princeton: Princeton University Press)
- [77] Sun J. (2011), Iterative methods for transmission eigenvalues, *SIAM J. Numer. Anal.* **49** 1860-1874
- [78] Sun J. and Xu L. (2013), Computation of Maxwell’s transmission eigenvalues and its applications in inverse medium problems, *Inverse Problems* **29** 104013

Bibliography

- [79] Weisstein E. *Bessel Function Zeros*, From MathWorld—A Wolfram Web Resource <https://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionZeros.html>
- [80] Wu X. and Chen W. (2013), Error estimates of the finite element method for interior transmission problems, *J. Sci. Comput.* **57** 331–348
- [81] Xu X. C., Yang C. F., Buterin S. and Yurko V. (2019), Estimates of complex eigenvalues and an inverse spectral problem for the transmission eigenvalue problem, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* **38** 1-15
- [82] Zeng F., Sun J. and Xu L. (2016), A spectral projection method for transmission eigenvalues, *Sci. China Math.* **59** 1613–1622
- [83] Zeng F., Turner T. and Sun J. (2015), Some results on electromagnetic transmission eigenvalues, *Math. Meth. Appl. Sci.* **38** 155–163