ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Διπλωματική Εργασία

Ευστάθεια και κώνοι προσβασιμότητας γραμμικών συστημάτων και εφαρμογές

Ποταμιάνου Πηνελόπη-Παναγιώτα

Επιβλέπων
Ψαρράκος Παναγιώτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 12 Οκτωβρίου 2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Διπλωματική Εργασία

Ευστάθεια και κώνοι προσβασιμότητας γραμμικών συστημάτων και εφαρμογές

Ποταμιάνου Πηνελόπη-Παναγιώτα

Τριμελής εξεταστική επιτροπή

Α. Αρβανιτάκης, Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Ι. Τσινιάς, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Π. Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Αθήνα, 12 Οκτωβρίου 2022

Ευχαριστίες

Με το πέρας της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Ψαρράκο Παναγιώτη, για την αξιοσημείωτη καθοδήγηση και στήριξη που μου παρείχε, τόσο κατά τη διαδικασία πραγμάτωσης της διπλωματικής εργασίας, αλλά και καθ΄ όλη τη διάρκεια της φοίτησής μου στη σχολή.

Θα ήθελα να αποδώσω, επίσης, ιδιαίτερες ευχαριστίες στους καθηγητές κύριο Αρβανιτάκη Αλέξανδρο και κύριο Τσινιά Ιωάννη, οι οποίοι έδειξαν αμέριστο ενδιαφέρον για το άτομό μου, σε ακαδημαϊκό και ανθρώπινο επίπεδο.

Τέλος, σημαντική υπήρξε η παρουσία της οικογένειας και των κοντινών μου προσώπων, που μου παρείχαν κάθε πιθανή υποστήριξη.

Περίληψη

Έστω A ένας $n \times n$ ουσιωδώς μη αρνητικός πίνακας και έστω το γραμμικό διαφορικό σύστημα $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $t \geq 0$. Δείχνουμε ότι υπάρχει μία σταθερά $h(A) > 0$ τέτοια ώστε η τροχιά που ξεκινάει από το x_0 φτάνει στο μη αρνητικό μέρος-κώνο $\mathbb{R}^n_+$ σε πεπερασμένο χρόνο $t_0 = t(x_0) \geq 0$ αν και μόνο αν η ακολουθία των σημείων που παράγεται από την προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών από το x_0, $x^{(k)} = (I + hA)^k x_0$, με βήμα $0 < h < h(A)$, φτάνει στο $\mathbb{R}^n_+$ σε πεπερασμένο δείκτη $k_0 = k(x_0) \geq 0$.

Εξαιτίας της ουσιώδους μη αρνητικότητας του πίνακα A, αν η τροχιά $x(t)$ φτάσει στο μη αρνητικό μέρος-κώνο, τότε παραμένει σε αυτόν από εκείνη τη χρονική στιγμή και μετά. Εισάγουμε την έννοια των σημείων συμβίωσης του συστήματος. Τα σημεία συμβίωσης είναι σημεία του κώνου προσβασιμότητας του μη αρνητικού μέρους-κώνου, $X_A(\mathbb{R}^n_+)$, τέτοια ώστε το διάνυσμα της τροχιάς του συστήματος σε αυτά τα σημεία ανήκει, επίσης, στον κώνο προσβασιμότητας. Αυτό σημαίνει ότι όχι μόνο η τροχιά γίνεται και παραμένει μη αρνητική, αλλά υπάρχει ένας χρόνος τέτοιος ώστε από εκεί και πέρα τα στοιχεία της τροχιάς γίνονται και παραμένουν μη φθίνοντα. Ακόμη, χαρακτηρίζουμε όλα τα σημεία συμβίωσης του συστήματος.

Αποδεικνύουμε ότι η δεξιά ιδιοτιμή του πίνακα A πρέπει να είναι πραγματική και πρέπει το αριστερό και το δεξί ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχούν σε αυτήν να είναι μη αρνητικά. Επιπλέον, για κάποιον αριθμό $a \geq 0$, ο πίνακας $A + aI$ πρέπει να είναι τελικά μη αρνητικός, δηλαδή οι δυνάμεις του θα πρέπει να γίνονται και να παραμένουν κατά στοιχείο μη αρνητικές. Οι αρχικές συνθήκες x_0 που καταλήγουν σε μη αρνητικές καταστάσεις $x(t)$ σε πεπερασμένο χρόνο αποδεικνύεται ότι σχηματίζουν έναν κυρτό κώνο που σχετίζεται με τον εκθετικό πίνακα e^{tA} και την τελική μη αρνητικότητά του.

Ο χαρακτηρισμός των αρχικών σημείων επεκτείνεται σε έναν αριθμητικό έλεγχο, όταν ο πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος: αν το $x^{(k)}$ γίνει και παραμείνει θετικό, τότε το ίδιο συμβαίνει και για την τροχιά $x(t)$· αν η $x(t)$ δεν γίνει και δεν παραμείνει θετική, τότε είτε το $x^{(k)}$ γίνεται και παραμένει αρνητικό, είτε έχει πάντα ένα αρνητικό και ένα θετικό στοιχείο. Εξαιτίας σφαλμάτων στρογγυλοποίησης, η τελευταία περίπτωση εκδηλώνεται αριθμητικά με το να συγκλίνει με αργό ρυθμό το $x^{(k)}$ σε ένα θετικό ή ένα αρνητικό διάνυσμα. Παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος υλοποιεί αυτόν τον έλεγχο, καθώς και την αριθμητική ανάλυση του αλγορίθμου και παραδείγματα. Επίσης, γίνεται συζήτηση στην περίπτωση της υποβιβασιμότητας και περιγράφεται ένας παρόμοιος έλεγχος. Τέλος, κατά την συνεισφορά μας, αναπτύχθηκε ο κώδικας του αλγορίθμου σε περιβάλλον Matlab.

Abstract

Let A be an $n \times n$ essentially nonnegative matrix and consider the linear differential system $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $t \geq 0$. We show that there exists a constant $h(A) > 0$ such that the trajectory emanating from x_0 reaches $\mathbb{R}^n_+$ at a finite time $t_0 = t(x_0) \geq 0$ if and only if the sequence of points generated by a finite differences approximation from x_0, $x^{(k)} = (I + hA)^k x_0$, with time–step $0 < h < h(A)$, reaches $\mathbb{R}^n_+$ at a finite index $k_0 = k(x_0) \geq 0$.

Due to the essential nonnegativity of A, once $x(t)$ enters the nonnegative orthant it remains in it thereafter. We introduce the notion of a symbiosis point for the system. This is a point in the reachability cone of the nonnegative orthant, $X_A(\mathbb{R}^n_+)$, such that also the velocity vector at the point is in the reachability cone. This means that not only does the trajectory become and remain nonnegative, but there comes a time such that from then on the components of the trajectory become and remain nondecreasing. We characterize all symbiosis points for the system.

It is shown that the eigenvalue of A furthest to the right must be real and must possess nonnegative right and left eigenvectors. Moreover, for some $a \geq 0$, $A + aI$ must be eventually nonnegative, that is, its powers must become and remain entrywise nonnegative. Initial conditions x_0 that result in nonnegative states $x(t)$ in finite time are shown to form a convex cone that is related to the matrix exponential e^{tA} and its eventual nonnegativity.

The characterization of initial points is extended to a numerical test when A is irreducible: if $x^{(k)}$ becomes and remains positive, then so does $x(t)$; if $x(t)$ fails to become and remain positive, then either $x^{(k)}$ becomes and remains negative or it always has a negative and a positive entry. Due to round-off errors, the latter case manifests itself numerically by $x^{(k)}$ converging with a relatively small convergence ratio to a positive or a negative vector. An algorithm (and a code on the appendix) implementing this test is provided, along with its numerical analysis and examples. The reducible case is also discussed and a similar test is described. Finally, in our contribution, the algorithm code was developed in a Matlab environment.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική μελετώνται γραμμικά διαφορικά συστήματα της μορφής

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \ \ (A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ x_0 = x(0) \in \mathbb{R}^n, \ t \geq 0),$$

των οποίων οι λύσεις επιθυμούμε να γίνονται και να παραμένουν μη αρνητικές. Η λύση τους δίνεται από την εξίσωση

$$x(t) = e^{tA}x_0, \ \forall t \geq 0.$$

Το ενδιαφέρον για τη μελέτη αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων θέλουμε να εκμαιεύσουμε ποιοτικές πληροφορίες σχετικά με την εξέλιξη των καταστάσεων. Πιο συγκεκριμένα, εξαιτίας φυσικών περιορισμών και περιορισμών μοντελοποίησης που προκύπτουν σε μηχανικές, βιολογικές, ιατρικές, συμπεριφορικές και οικονομικές εφαρμογές, μας ενδιαφέρει περισσότερο να θέσουμε ή να θεωρήσουμε συνθήκες μη αρνητικότητας για τις καταστάσεις του συστήματος.

Για τον σκοπό αυτό εξετάζουμε περιπτώσεις όπου ο πίνακας A είναι ουσιωδώς μη αρνητικός και τελικά-εκθετικά μη αρνητικός, δηλαδή μελετάμε πώς επηρεάζεται ο κώνος προσβασιμότητας του $\mathbb{R}^n_+$, $X_A(\mathbb{R}^n_+)$, σε αυτές τις περιπτώσεις. Θα δούμε θεωρητικά και αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία μας βοηθούν να χαρακτηρίσουμε τον κώνο $X_A(\mathbb{R}^n_+)$, δηλαδή δίνονται εργαλεία προκειμένου να απαντήσουμε στο ερώτημα "Για την αρχική συνθήκη του συστήματος η τροχιά καταλήγει και παραμένει στο θετικό μέρος-κώνο $\mathbb{R}^n_+$;", έχοντας στη διάθεσή μας λίγες πληροφορίες για το σύστημα.

Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο θα δούμε βασικές έννοιες γραμμικής άλγεβρας, αλλά και ανάλυσης, καθώς και συμβολισμούς που θα χρειαστούμε καθ᾽ όλη την έκταση της συγκεκριμένης εργασίας. Στο δεύτερο κεφάλαιο, θα δούμε ότι για πίνακα A ουσιωδώς μη αρνητικό, υπάρχει μία σταθερά $h(A) > 0$, έτσι ώστε η τροχιά που ξεκινάει από το x_0 φτάνει στο μη αρνητικό μέρος-κώνο $\mathbb{R}_+^n$ σε πεπερασμένο χρόνο $t_0 = t(x_0) \geq 0$ αν και μόνο αν η ακολουθία των σημείων που παράγεται από την εκτίμηση πεπερασμένων διαφορών από το x_0, με βήμα $0 < h < h(A)$, φτάνει στο $\mathbb{R}_+^n$ σε πεπερασμένο δείκτη $k_0 = k(x_0) \geq 0$. Ακόμη, βλέπουμε και την έννοια των σημείων συμβίωσης, που είναι σημεία του κώνου προσβασιμότητας $X_A(\mathbb{R}_+^n)$ τέτοια ώστε το διάνυσμα της ταχύτητας σε αυτά τα σημεία είναι, επίσης, μέσα στον κώνο προσβασιμότητας και πώς αυτά επηρεάζουν τα στοιχεία του $X_A(\mathbb{R}_+^n)$.

Στο τρίτο κεφάλαιο, αποδεικνύουμε ότι για κάποιο $a \geq 0$, ο $A + aI$ πρέπει να είναι τελικά μη αρνητικός, δηλαδή οι δυνάμεις του γίνονται και παραμένουν κατά στοιχείο μη αρνητικές. Επιπλέον, δείχνουμε ότι οι αρχικές συνθήκες x_0 που καταλήγουν σε μη αρνητικές καταστάσεις $x(t)$ σε πεπερασμένο χρόνο, σχηματίζουν έναν κυρτό κώνο που σχετίζεται με τον εκθετικό πίνακα e^{tA} και την τελική μη αρνητικότητά του.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, επεκτείνουμε τον χαρακτηρισμό του κώνου προσβασιμότητας $X_A(\mathbb{R}_+^n)$ με έναν αριθμητικό έλεγχο, στην περίπτωση που ο A είναι μη υποβιβάσιμος. Αν το στοιχείο της ακολουθίας σημείων που παράγεται από την εκτίμηση πεπερασμένων διαφορών $x^{(k)}$ γίνει και παραμείνει θετικό, τότε το ίδιο ισχύει και για την τροχιά $x(t)$. Αν η τροχιά δεν γίνει μη αρνητική, τότε έχουμε ότι είτε το $x^{(k)}$ γίνεται και παραμένει αρνητικό, είτε έχει ταυτόχρονα κάποιο αρνητικό και κάποιο θετικό στοιχείο. Λόγω σφαλμάτων στρογγυλοποίησης, το τελευταίο φαίνεται αριθμητικά, καθώς αυτό σημαίνει ότι το $x^{(k)}$ συγκλίνει με έναν σχετικά αργό ρυθμό σε ένα θετικό ή ένα αρνητικό διάνυσμα. Για το λόγο αυτό, σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο που πραγματοποιεί αυτόν τον έλεγχο.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε ορισμένες εφαρμογές από τον οικονομικό τομέα και από τον τομέα της υδρολογίας. Τέλος, στο παράρτημα διατίθεται ο κώδικας που δημιουργήσαμε βασιζόμενοι στον προαναφερθέντα αλγόριθμο, έτσι ώστε να μπορεί να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος που προείπαμε, με τη χρήση του προγράμματος Matlab.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές έννοιες

1.1 Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας

Ορισμός 1.1.1. ***Μηδενοδύναμος (nilpotent) πίνακας*** *είναι ένας τετραγωνικός πίνακας A για τον οποίο ισχύει $A^k = 0$, για κάποιον ακέραιο αριθμό k. Ο μικρότερος ακέραιος k που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση ονομάζεται* **δείκτης** *του πίνακα A, ή αλλιώς τάξη του A.*

Παράδειγμα 1.1.2.

- *Για παράδειγμα ο παρακάτω πίνακας A είναι μηδενοδύναμος με δείκτη 2, καθώς:*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Ένα ακόμη, πιο γενικό, παράδειγμα είναι οι τριγωνικοί πίνακες με την κύρια διαγώνιο να αποτελείται από μηδενικά στοιχεία. Ένας $n \times n$ τριγωνικός πίνακας, όπως τον περιγράψαμε παραπάνω, έχει δείκτη $\leq n$. Για παράδειγμα, ο πίνακας*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  είναι μηδενοδύναμος με δείκτη 3.

Ορισμός 1.1.3. *Έστω πίνακας* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- *Το* ***φάσμα*** *του πίνακα είναι το σύνολο* $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda I_\nu - A) = 0\}$.
- *Η* ***φασματική ακτίνα*** *του είναι ο μη αρνητικός αριθμός* $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$.
- *Μία ιδιοτιμή* λ *του* A *καλείται* ***κυρίαρχη (dominant eigenvalue)*** *αν* $|\lambda| = \rho(A)$, *δηλαδή είναι η ιδιοτιμή μέγιστου μέτρου του πίνακα* A, *και είναι πραγματική και μη αρνητική όταν ο* A *είναι (κατά στοιχείο) μη αρνητικός πίνακας.*
- *Η* ***φασματική τετμημένη (spectral abscissa)*** *του είναι η* $\lambda(A) = \max\{Re(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$.

Παράδειγμα 1.1.4. *Έστω ο* 3×3 *μιγαδικός πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 3.8966 - 0.2047i & -9.3111 + 4.1873i & 5.3103 + 3.5941i \\ -3.6580 - 1.0883i & -1.2251 + 5.0937i & 5.9040 + 3.1020i \\ 9.0044 + 2.9263i & -2.3688 - 4.4795i & -6.2625 - 6.7478i \end{bmatrix}.$$

Ο A *έχει ιδιοτιμές*

$$\lambda_1 = -9.8577 - 3.6003i,\ \lambda_2 = 7.2567 + 1.2582i,\ \lambda_3 = -0.9901 + 0.4833i,$$

δηλαδή, έχει φάσμα

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = -9.8577 - 3.6003i,\ \lambda_2 = 7.2567 + 1.2582i,\ \lambda_3 = -0.9901 + 0.4833i\}.$$

Η φασματική του ακτίνα είναι $\rho(A) = |\lambda_1| = 10.4946$. *Προφανώς, η κυρίαρχη ιδιοτιμή του* A *είναι η* λ_1. *Η φασματική τετμημένη του* A *είναι* $\lambda(A) = 7.2567$, *δηλαδή το πραγματικό μέρος της* λ_2.

Ορισμός 1.1.5. ***Πίνακας μετάθεσης (Permutation matrix)*** *είναι πίνακας που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο σε κάθε στήλη και κάθε γραμμή ίσο με* 1 *και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι ίσα με* 0.

Παράδειγμα 1.1.6. *Ο πίνακας*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι ένας 3×3 *πίνακας μετάθεσης.*

Ορισμός 1.1.7.

- *Ένας πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ *καλείται* ***υποβιβάσιμος πίνακας (reducible matrix)*** *αν υπάρχει πίνακας μετάθεσης* P *και φυσικός αριθμός* $r < n$ *τέτοιος ώστε*

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{r\times r} & A_{r\times(n-r)} \\ 0 & A_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}.$$

- ***Μη υποβιβάσιμος πίνακας (Irreducible matrix)*** *καλείται ένας πίνακας που δεν είναι υποβιβάσιμος.*

Παράδειγμα 1.1.8.

- *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Για

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P^T$$

έχουμε ότι

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή είναι στη μορφή

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{2\times 2} & A_{2\times 1} \\ 0 & A_{1\times 1} \end{bmatrix},$$

με $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $A_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, *και* $A_{1\times 1} = [1]$, *και άρα ο* A *είναι υποβιβάσιμος.*

- *Οποιοσδήποτε $n \times n$ μη αρνητικός πίνακας με λιγότερα από $n-1$ μηδενικά στοιχεία είναι μη υποβιβάσιμος, καθώς ένας υποβιβάσιμος πίνακας χρειάζεται τουλάχιστον $n-1$ μηδενικά στοιχεία. Για παράδειγμα, οι πίνακες*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι μη υποβιβάσιμοι, καθώς είναι και οι δύο μη αρνητικοί και, επιπλέον, ο A δεν έχει μηδενικά στοιχεία και ο B έχει ένα μηδενικό στοιχείο.

Ορισμός 1.1.9. *Ένας πίνακας $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται:*

- ***Μη αρνητικός (θετικός)*** *και συμβολίζεται με $A \geq 0$ ($A > 0$), αν*

$$a_{ij} \geq 0 \ (a_{ij} > 0), \ \forall i, \, j \, .$$

- ***Ουσιωδώς (essentially) μη αρνητικός (θετικός)*** *και συμβολίζεται με $A \overset{s}{\geq} 0$ ($A \overset{s}{>} 0$), αν*

$$a_{ij} \geq 0 \ (a_{ij} > 0), \ \forall i, \, j \text{ με } i \neq j \, .$$

- ***Τελικά (eventually) μη αρνητικός (θετικός)*** *και συμβολίζεται με $A \overset{v}{\geq} 0$ ($A \overset{v}{>} 0$), αν υπάρχει θετικός ακέραιος k_0 τέτοιος ώστε*

$$A^k \geq 0 \ (A^k > 0), \ \forall k \geq k_0 \, .$$

Συμβολίζουμε αυτόν τον ακέραιο ως $k_0 = k_0(A)$ και τον αναφέρουμε ως δείκτη δύναμης του A.

- ***Εκθετικά μη αρνητικός (θετικός)*** *αν $\forall t \geq 0$, $e^{tA} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \geq 0$ ($e^{tA} > 0$) .*

- ***Τελικά-εκθετικά μη αρνητικός (θετικός)*** *αν υπάρχει* $t_0 \in [0, +\infty)$ *τέτοιο ώστε*

$$e^{tA} \geq 0 \ (e^{tA} > 0), \ \forall t \geq t_0 \, .$$

Το συμβολίζουμε ως $t_0 = t_0(A)$ *και το αναφέρουμε ως εκθετικό δείκτη του* A.

Παράδειγμα 1.1.10. • *Ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 5 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι ένας μη αρνητικός πίνακας, ενώ ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 3 & 9 & 5 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι θετικός.

- *Ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

είναι ένας ουσιωδώς μη αρνητικός πίνακας, καθώς τα αρνητικά στοιχεία του βρίσκονται στη διαγώνιο, ενώ ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

είναι ουσιωδώς θετικός.

- *Ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι ένας τελικά μη αρνητικός πίνακας με $k_0 = k_0(A) = 2$*, καθώς*

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 1.1.11. *Λέμε ότι ο* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *έχει:*

- *Την* ***ιδιότητα Perron-Frobenius*** *αν* $\rho(A) > 0$, $\rho(A) \in \sigma(A)$ *και υπάρχει ένα μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην* $\rho(A)$*.*
- *Την* ***ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius*** *αν επιπλέον της ιδιότητας Perron-Frobenius, η* $\rho(A)$ *είναι απλή ιδιοτιμή του* A *τέτοια ώστε*

$$\rho(A) > |\lambda|,\ \forall\lambda \in \sigma(A),\ \lambda \neq \rho(A)$$

(δηλαδή η $\rho(A)$ *είναι η μοναδική μεγαλύτερη κατά μέτρο ιδιοτιμή του πίνακα* A*) και αν υπάρχει ένα αυστηρά θετικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην* $\rho(A)$*.*

Παράδειγμα 1.1.12. *Ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -0.4 & 1 & 1 \\ -0.4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius, καθώς έχει κυρίαρχη ιδιοτιμή την 8.5523 *με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το* $\begin{bmatrix} 0.1618 & 0.1211 & 0.9794 \end{bmatrix}^T$*, που είναι αυστηρά θετικό.*

Θεώρημα 1.1.13. *Οι θετικοί πίνακες και οι μη αρνητικοί και μη υποβιβάσιμοι πίνακες, ικανοποιούν την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius.*

Θεώρημα 1.1.14. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας μη αρνητικός πίνακας. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $\rho(A) \in \sigma(A)$ *και υπάρχει μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην* $\rho(A)$.

(ii) *Αν ο A είναι μη υποβιβάσιμος πίνακας, τότε η $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή που έχει θετικό ιδιοδιάνυσμα w. Ακόμη, κάθε μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα του A είναι πολλαπλάσιο του w.*

(iii) *Αν ο A είναι μη υποβιβάσιμος πίνακας, τότε ισχύει η σχέση* $(I+A)^k > 0,\ \forall k \geq n-1$.

Ορισμός 1.1.15. *Έστω ένα σύνολο $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Το Γ ονομάζεται:*

(i) ***A-αναλλοίωτο*** *(ή αναλλοίωτο υπό τον A) αν*

$$A\Gamma \subseteq \Gamma.$$

(ii) ***Θετικά αναλλοίωτο ως προς τον A*** *αν*

$$e^{tA}\Gamma \subseteq \Gamma,\ \forall t \geq 0.$$

Αν το Γ είναι θετικά αναλλοίωτο, αυτό σημαίνει ότι αν μία τροχιά που ξεκινάει από το x_0 φτάσει στο Γ σε πεπερασμένο χρόνο, τότε παραμένει στο Γ για κάθε επόμενο πεπερασμένο χρόνο.

Παράδειγμα 1.1.16. *Έστω ότι $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ και είναι το πρώτο τεταρτημόριο, δηλαδή*

$$\Gamma = \mathbb{R}^2_+$$

και

$$A = 2I.$$

Είναι προφανές ότι σε αυτήν την περίπτωση το Γ είναι A-αναλλοίωτο, καθώς για $x = [x,y]^T \in \Gamma$ έχουμε ότι $Ax = [2x,2y]^T \in \Gamma$.

Αντίθετα, έστω

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Τότε, για $x = [x, y]^T \in \Gamma$ *έχουμε ότι* $Ax = [-x, -y]^T \notin \Gamma$. *Δηλαδή, το* Γ *δεν είναι* A-*αναλλοίωτο.*

Ορισμός 1.1.17. *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *και* $\mu \in \sigma(A)$. *Ο **γενικευμένος ιδιόχωρος** του* A *που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* μ *είναι ο* A-*αναλλοίωτος υπόχωρος*

$$\mathcal{N}_\mu(A) = Nul(A - I\mu)^{index_\mu(A)}.$$

Ορισμός 1.1.18. *Έστω* $A \geq 0$ *ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας. Από το Θεώρημα 1.1.14, η* $\rho(A) \in \sigma(A)$ *είναι απλή και ο* $N_{\rho(A)}(A)$ *παράγεται από ένα ιδιοδιάνυσμα* $w \in int(\mathbb{R}^n_+)$. *Αναφερόμαστε στον* $N_{\rho(A)}(A)$ *ως **ο ιδιόχωρος Perron** του* A, *και στο* w *ως **το διάνυσμα Perron** του* A. *Ακόμη, συμβολίζουμε*

$$\mathcal{L}_A = \bigoplus_{\mu\neq\rho(A)} \mathcal{N}_\mu(A),$$

όπου οι αριθμοί μ *είναι διακεκριμένες ιδιοτιμές του* A *με* $\mu \neq \rho(A)$. *Επίσης, ισχύει ότι*

$$\mathbb{C}^n = N_{\rho(A)}(A) \bigoplus \mathcal{L}_A.$$

Την ίδια ορολογία και παρόμοιο συμβολισμό χρησιμοποιούμε στην περίπτωση του μη υποβιβάσιμου πίνακα $A \overset{s}{\geq} 0$ *και των ιδιοτιμών του.*

Ορισμός 1.1.19. *Για έναν* $n \times n$ *πίνακα* $A = [a_{ij}] \overset{s}{\geq} 0$, *ορίζουμε την ποσότητα*

$$h(A) = \sup\{h | \min_{1\leq i\leq n} (1 + ha_{ii}) > 0\}.$$

Ισχύει ότι $h(A) = \sup\{h | \min_{1\leq i\leq n} (I + hA) \geq 0\} \geq 0$ *και* $h(A) = \infty$ *όταν* $A \geq 0$.

Λήμμα 1.1.20. *Ένας* $n \times n$ *πίνακας* A *είναι εκθετικά μη αρνητικός αν και μόνο αν είναι ουσιωδώς μη αρνητικός. Επιπλέον, αν ο* A *είναι μη υποβιβάσιμος, τότε ο* A *είναι εκθετικά θετικός αν και μόνο αν είναι ουσιωδώς θετικός.*

1.2 Κώνοι και σύνολα

Ορισμός 1.2.1. *(i) Ένα κυρτό σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται* ***κυρτός κώνος*** *αν*

$$aK \subseteq K, \ \forall a \geq 0\,.$$

(ii) Ένας κυρτός κώνος ονομάζεται ***πολυεδρικός*** *αν αποτελείται από όλους τους πεπερασμένους μη αρνητικούς γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου.*

(iii) Ένας κυρτός κώνος ονομάζεται ***προσανατολισμένος (pointed)*** *αν $K \cap (-K) = \{0\}$. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι ο κώνος δεν περιέχει ολόκληρη ευθεία.*

(iv) Ένας κώνος ονομάζεται ***στερεός (solid)*** *αν το τοπολογικό του εσωτερικό είναι μη κενό.*

(v) Ένας προσανατολισμένος, στερεός, κυρτός κώνος ονομάζεται ***γνήσιος (proper)*** *κώνος.*

Ορισμός 1.2.2. *Το* ***μη αρνητικό μέρος-κώνος*** *(τεταρτημόριο), $\mathbb{R}^n_+$, είναι το σύνολο όλων των (κατά στοιχείο) μη αρνητικών διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$.*

Ορισμός 1.2.3. *Έστω Γ θετικά αναλλοίωτο σύνολο ως προς $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Το σύνολο όλων των αρχικών σημείων των τροχιών που φτάνουν και παραμένουν στο Γ αναφέρεται ως* ***σύνολο προσβασιμότητας του Γ υπό τον A*** *και συμβολίζεται με $X_A(\Gamma)$ και γράφεται ως*

$$X_A(\Gamma) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n | (\exists t_0 = t(x_0) \geq 0)(\forall t \geq t_0)[e^{tA}x_0 \in \Gamma]\} = \bigcup_{t\geq 0} e^{-tA}\Gamma.$$

Παρατήρηση. *Έστω ότι $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένας κανονικός κώνος, δηλαδή, ένα κλειστό, προσανατολισμένο, στερεό σύνολο. Τότε, το $X_A(\Gamma)$ είναι κυρτός κώνος που περιέχει το Γ, αλλά δεν είναι απαραίτητα κλειστός ή προσανατολισμένος.*

1.3 Συμβολισμοί

$\mathbf{index_0(A)}$: συμβολίζει τον βαθμό του 0 ως ρίζα του ελάχιστου πολυωνύμου του πίνακα A. Επομένως όταν λέμε $index_0(A) \leq 1$, εννοούμε είτε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, είτε ότι το μέγεθος του μεγαλύτερου μηδενοδύναμου Jordan block στην κανονική μορφή Jordan του A είναι 1×1.

$\mathbb{R}^{\mathbf{n}}_{+}$: συμβολίζει το μη αρνητικό μέρος-κώνο (non-negative orthant) του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή το σύνολο των μη αρνητικών διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$.

$(\mathbf{x})_{\mathbf{i}}$: δοθέντος ενός διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$, συμβολίζει το i-οστό στοιχείο του x.

$\mathbf{int}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}_{+})$: συμβολίζει το τοπολογικό εσωτερικό του $\mathbb{R}^n_+$.

$\overline{\mathbf{X_A(\Gamma)}}$: συμβολίζει την κλειστότητα του $X_A(\Gamma)$.

Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $x \geq 0\,(x > 0)$ και $x \in \mathbb{R}^n_+\,(x \in int(\mathbb{R}^n_+))$ ισοδύναμα.

Κεφάλαιο 2

Κώνοι προσβασιμότητας και σημεία συμβίωσης

2.1 Εισαγωγή

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και έστω το γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq 0. \tag{2.1}$$

Η λύση του συστήματος είναι της μορφής

$$x(t) = e^{tA}x_0, \ \forall t \geq 0,$$

και θα αναφέρεται ως **η τροχιά του γραμμικού διαφορικού συστήματος που ξεκινάει από το $\mathbf{x_0}$**.

Έστω A ένας $n \times n$ ουσιωδώς μη αρνητικός πίνακας και έστω το γραμμικό διαφορικό σύστημα (2.1). Θα δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $h(A) > 0$ τέτοια ώστε η τροχιά που ξεκινάει από το x_0 φτάνει στο $\mathbb{R}^n_+$ σε πεπερασμένο χρόνο $t_0 = t(x_0) \geq 0$ αν και μόνο αν η ακολουθία σημείων που παράγεται από μία προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών από το x_0, με βήμα $0 < h < h(A)$, φτάνει στο $\mathbb{R}^n_+$ σε πεπερασμένο δείκτη $k_0 = k(x_0) \geq 0$.

Στη συνέχεια, εισάγουμε την έννοια των σημείων συμβίωσης για το σύστημα. Η διαφορά με τα σημεία του κώνου προσβασιμότητας είναι ότι στην περίπτωση των σημείων συμβίωσης η τροχιά, όχι μόνο γίνεται και παραμένει μη αρνητική, αλλά υπάρχει χρόνος για τον οποίο (και μετά) τα στοιχεία της τροχιάς γίνονται και παραμένουν μη φθίνοντα. Τέλος, παρουσιάζουμε χαρακτηρισμούς για όλα τα σημεία συμβίωσης του συστήματος.

2.2 Κώνοι προσβασιμότητας

Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε έναν αριθμητικό χαρακτηρισμό του $\overline{X_A(\mathbb{R}^n_+)}$. Για να το πετύχουμε αυτό, χρειαζόμαστε τις επόμενες πληροφορίες, που αφορούν στην προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών. Έστω ένας πίνακας $A \overset{s}{\geq} 0$ και έστω ότι $\hat{x}_0 = x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$ είναι ένα αρχικό σημείο των τροχιών $x(t) = e^{tA}\hat{x}_0$ και, για $h > 0$ έστω η ακολουθία Cauchy-Euler προσεγγίσεων πεπερασμένων διαφορών που παράγονται από τον λόγο

$$\frac{\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}}{h} = A\hat{x}_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots$$

Τότε,

$$\hat{x}_k = (I + hA)\hat{x}_{k-1} = \cdots = (I + hA)^k\hat{x}_0,\ k = 1, 2, \ldots$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε την ποσότητα

$$h(A) = \sup\{h > 0 | I + hA \geq 0\} = \sup\{h > 0 | 1 + ha_{ii} \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}. \tag{2.2}$$

Παρατήρηση. *Παρατηρούμε ότι αυτή η ποσότητα μπορεί να γραφεί και στην παρακάτω μορφή*

$$h(A) = \sup\{h > 0 \,|\, \min_{1\leq i\leq n}(1 + ha_{ii}) > 0\}.$$

Το $h(A)$ είναι άπειρο όταν ο πίνακας A είναι μη αρνητικός, και $\forall\ 0 < h < h(A)$ ο πίνακας $I + hA$ είναι μη αρνητικός. Για κάθε ένα h, ορίζουμε το **διακριτό σύνολο προσβασιμότητας** του $\mathbb{R}^n_+$ να είναι

$$X_{A,h}(\mathbb{R}^n_+) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \,|\, (\exists k_0 = k(x_0) \geq 0)(\forall k \geq k_0)[(I + hA)^k x_0 \geq 0]\},$$

που αποδεικνύεται ότι είναι αναλλοίωτος κώνος υπό τον πίνακα $I + hA$. Η ακολουθία διανυσμάτων $x_k = (I + hA)^k x_0,\ k = 0, 1, \ldots$ θα αναφέρεται ως **διακριτή τροχιά που ξεκινάει από το $\mathbf{x_0}$**.

Από τη θεωρία Perron-Frobenius, γνωρίζουμε ότι η ρίζα Perron είναι

$$\lambda_1 := \max\{Re(\mu) \,|\, \mu \in \sigma(A)\} \in \sigma(A).$$

Ακόμη, ο (γενικευμένος) ιδιόχωρος Perron του A ορίζεται να είναι ο $A-$αναλλοίωτος υπόχωρος

$$\mathcal{L}_A = N((\lambda_1 I - A)^p),$$

όπου p είναι η πολλαπλότητα της λ_1 στο ελάχιστο πολυώνυμο του A.

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω A ένας $n \times n$ ουσιωδώς μη αρνητικός πίνακας. Αν*

$$\mathcal{L}_A \cap int(\mathbb{R}_n^+) \neq \emptyset,$$

τότε $\forall\ 0 < h < h(A)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$1 + h\lambda_1 > |1 + h\mu|,\ \forall \mu \in \sigma(A) \backslash \{\lambda_1\},$$

ισχύει

$$\overline{X_{A,h}(\mathbb{R}_+^n)} = \overline{X_A(\mathbb{R}_+^n)}.$$

Το βήμα (timestep) h στο παραπάνω θεώρημα εξαρτάται μόνο από τον A και δεν είναι απαραίτητα μικρό. Με άλλα λόγια, το Θεώρημα 2.2.1 προσφέρει έναν τρόπο προκειμένου να εξετάσουμε αν ένα σημείο ανήκει στο $\overline{X_A(\mathbb{R}_+^n)}$, ανεξάρτητα από το πόσο διαφέρουν μεταξύ τους οι συνεχείς και διακριτές τροχιές που ξεκινούν από το x_0.

Στο παρακάτω λήμμα θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $v(w)$ για το πλήθος των θετικών στοιχείων ενός μη αρνητικού διανύσματος w.

Λήμμα 2.2.2. *Κάθε $n \times n$ μη αρνητικός πίνακας B είναι μεταθετικά όμοιος με έναν μπλοκ άνω τριγωνικό πίνακα*

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \cdots & \tilde{B}_{1p} \\ 0 & \tilde{B}_{22} & \cdots & \tilde{B}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{B}_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες. Αν $\forall\ j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ ορίσουμε

$$\tilde{B}_j = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{jj} & \cdots & \tilde{B}_{jp} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \tilde{B}_{pp} & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{q,q},$$

τότε κάθε διαγώνιο μπλοκ $\tilde{B}_{jj}$ στην (2.3) είναι μεγέθους $k_j \times k_j$, όπου

$$k_j = \max\{v(w) | w \in W_{\tilde{B}_j} \cup \mathbb{R}_+^q\},\ q = n - k_1 - \cdots - k_{j-1}$$

και έχει ένα γνήσια θετικό γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα

$$u_j \in W_{\tilde{B}_{jj}} \cup int(\mathbb{R}_+^{k_j}),$$

που αντιστοιχεί στην $\rho(\tilde{B}_{jj})$. Επιπλέον,

$$\rho(\tilde{B}_j) = \rho(\tilde{B}_{jj}),\ \rho(\tilde{B}_j) > \rho(\tilde{B}_{j+1}), \forall 1 \leq j \leq p-1$$

$$W_{\tilde{B}_j} = \{u \in \mathbb{R}^q | u = [\overline{u}^T, 0]^T,\, \overline{u} \in W_{\tilde{B}_{jj}}\}$$

$$(\tilde{B}_{jj} - \rho(\tilde{B}_{jj})I)^{m_j - 1} u_j \in \mathbb{R}_+^{k_j} \backslash \{0\},$$

όπου $m_j = index_{\rho(\tilde{B}_{jj})} \tilde{B}_{jj}$.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε, πλέον, να παραθέσουμε δύο πολύ βασικά θεωρήματα. Σε αυτά που ακολουθούν θεωρούμε ότι ο πίνακας A είναι $n \times n$ ουσιωδώς μη αρνητικός και $h(A)$ όπως ορίστηκε στην εξίσωση (2.2). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε, ακόμα, ότι ο πίνακας $B = B(h) = I + hA$ είναι ήδη στην άνω μπλοκ τριγωνική μορφή του Λήμματος 2.2.2.

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω A ένας $n\times n$ ουσιωδώς μη αρνητικός πίνακας. Τότε, $\forall\ 0 < h < h(A)$ ισχύει*

$$\overline{X_{A,h}(\mathbb{R}^n_+)} = \overline{X_A(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω A ένας $n\times n$ ουσιωδώς μη αρνητικός πίνακας. Τότε, $\forall\ 0 < h < h(A)$ τέτοια ώστε ο $B = B(h) = I + hA$ να είναι αντιστρέψιμος, έχουμε*

$$X_{A,h}(\mathbb{R}^n_+) = X_A(\mathbb{R}^n_+).$$

2.3 Σημεία συμβίωσης

Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας $n \times n$ πίνακας και έστω το γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$\dot{x} = Ax.$$

Λέμε ότι ένα αρχικό διάνυσμα x_0 είναι **σημείο συμβίωσης** αν υπάρχει χρόνος $t_0 = t(x_0)$ τέτοιος ώστε η τροχιά $x(t) = e^{tA}x_0$ που ξεκινάει από το x_0 να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\dot{x}(t) \geq 0,\ \forall\ t \geq t_0.$$

Αν το $x(t)$ παριστάνει την κατάσταση ενός φυσικού ή βιολογικού συστήματος, που χαρακτηρίζεται από την εξίσωση $\dot{x} = Ax$ και το οποίο έχει εξελιχθεί από την αρχική κατάσταση x_0, τότε η συνθήκη $\dot{x}(t) \geq 0,\ \forall\ t \geq t_0$ σημαίνει ότι κάποια στιγμή το σύστημα θα φτάσει σε μία κατάσταση τέτοια ώστε από εκείνη τη στιγμή και μετά, κάθε "συστατικό κομμάτι" πληθυσμού του συστήματος είναι μη φθίνον. Σε αυτό το κεφάλαιο θα χαρακτηρίσουμε όλα τα αρχικά σημεία του $\mathbb{R}^n$, τα οποία αντιστοιχούν σε τροχιές που τελικά φτάνουν και παραμένουν στον μη αρνητικό κώνο $\mathbb{R}^n_+$ και τα οποία είναι σημεία συμβίωσης, για διαφορικά γραμμικά συστήματα της μορφής $\dot{x} = Ax$, με A ουσιωδώς μη αρνητικό.

Είναι γνωστό ότι η ουσιώδης μη αρνητικότητα είναι ισοδύναμη με την εκθετική μη αρνητικότητα, δηλαδή,

$$A \overset{s}{\geq} 0 \iff e^{tA} \geq 0, \ \forall \ t \geq 0.$$

Έστω, τώρα, ότι ο A είναι $n \times n$ ουσιωδώς μη αρνητικός πίνακας και έστω η τροχιά $x(t) = e^{tA}x_0$, που ξεκινάει από το x_0. Αν κάποια χρονική στιγμή $t_0 = t(x_0)$ έχουμε $x(t_0) \geq 0$, τότε, αφού ο πίνακας A είναι ουσιωδώς μη αρνητικός, θα έχουμε $x(t) \geq 0$, $\forall \ t \geq t_0$, δηλαδή η τροχιά παραμένει στον μη αρνητικό κώνο για κάθε χρονική στιγμή μετά την t_0. Υπενθυμίζουμε ότι ο κώνος προσβασιμότητας του $\mathbb{R}^n_+$, $X_A(\mathbb{R}^n_+)$, είναι κυρτός κώνος που περιέχει το $\mathbb{R}^n_+$, αλλά δεν είναι απαραίτητα κλειστός ή προσανατολισμένος και είναι το σύνολο

$$X_A(\mathbb{R}^n_+) = \bigcup_{t \geq 0} e^{-tA}(\mathbb{R}^n_+).$$

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, χρησιμοποιήθηκαν πεπερασμένες διαφορές για να προσδιοριστεί αν ένα σημείο x_0 ανήκει στο $X_A(\mathbb{R}^n_+)$. Όμως, λόγω της ουσιώδους μη αρνητικότητας, η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών σε αυτό το πρόβλημα δεν απαιτεί το βήμα να γίνει πολύ μικρό, ανεξάρτητα από το πόσο διαφέρει η συνεχής τροχιά από τις διακριτές προσεγγίσεις της. Ο μόνος περιορισμός για το βήμα ήταν να είναι άνω φραγμένο από μία σταθερά που εξαρτάται μόνο από τον πίνακα A. Σε αυτήν την παράγραφο θα δείξουμε ότι αν το βήμα που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή των πεπερασμένων διαφορών ικανοποιεί το προαναφερθέν όριο, τότε η ακολουθία των πεπερασμένων διαφορών που ξεκινούν από ένα σημείο $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$, το οποίο είναι, επίσης, και σημείο συμβίωσης, γίνεται τελικά μη αρνητική και μη φθίνουσα.

Για τη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου, ο A θα θεωρείται $n \times n$ ουσιωδώς μη αρνητικός πίνακας. Η θεωρία Perron-Frobenius μας λέει ότι η φασματική τετμημένη του A, που δίνεται από την εξίσωση

$$\lambda(A) := \max\{Re(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\},$$

είναι μία ιδιοτιμή λ_1 του πίνακα A (ρίζα Perron). Αν $\lambda_1 < 0$, τότε ο A είναι ένας πίνακας ευστάθειας, δηλαδή $e^{tA}x \to 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Έτσι, η αρχή των αξόνων (origin, 0) είναι το μόνο σημείο συμβίωσης στο $X_A(\mathbb{R}^n_+)$, αφού $e^{tA}x_0 \to 0,\ \forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n$. Επομένως, μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου $\lambda_1 \geq 0$. Έστω, λοιπόν, ότι $\lambda_1 \geq 0$. Δοθέντος ενός διανύσματος $x_0 \in \mathbb{R}^n$, διαχωρίζουμε το x_0 σε

$$x_0 = x_{0+} - x_{0-},$$

όπου $x_{0+} \in \mathcal{N}$, δηλαδή ανήκει στη σύνδεση όλων των ιδιόχωρων του A που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές με μη αρνητικό πραγματικό μέρος και $x_{0-} \in \mathcal{R}$, δηλαδή τη σύνδεση όλων των ιδιόχωρων του A που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος, το οποίο είναι το ευσταθές μέρος του χώρου. Άρα η συνθήκη $x_{0-} \in \mathcal{R}$, σημαίνει $e^{tA}x_{0-} \to 0$, καθώς $t \to \infty$. Παρακάτω θα δείξουμε πρώτα ότι μία απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύει ότι το $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$ είναι το να ισχύει ότι το $x_{0+} \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$.

Για κάθε διάνυσμα $x_0 \in \mathbb{R}^n$ θεωρούμε το σύνολο δεικτών

$$\mathcal{I}(x_0) = \{i \in \langle n \rangle \,|\, (e^{tA}x_{0+})_i = (x_{0+})_i,\ \forall t \geq 0\}. \tag{2.4}$$

Στο κύριο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου βλέπουμε ότι για ένα διάνυσμα $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$, το διάνυσμα ταχύτητας του $\dot{x} = Ax \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$ αν και μόνο αν για κάθε $i \in \mathcal{I}(x_0)$ υπάρχει χρόνος t_i τέτοιος ώστε

$$0 \leq (e^{tA}x_{0-})_i \downarrow 0,\ \forall t \geq t_i.$$

Πιο συγκεκριμένα, $(x_{0+})_i = 0$ για $i \in \mathcal{I}(x_0)$ αν και μόνο αν $(e^{tA}x_{0-})_i = 0,\ \forall t \geq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, η τροχιά που ξεκινάει από το x_0 δεν μπορεί να φτάσει στο εσωτερικό του $\mathbb{R}^n_+$ και, άρα, το x_0 θα πρέπει να βρίσκεται στο δραστικό μέρος του συνόρου του $X_A(\mathbb{R}^n_+)$, που είναι το σύνολο $X_A(\mathbb{R}^n_+) \cap \partial X_A(\mathbb{R}^n_+)$.

Το παρακάτω λήμμα δίνει μία αναγκαία συνθήκη για το $x_0 \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε να ανήκει στο $X_A(\mathbb{R}^n_+)$.

Λήμμα 2.3.1. *Έστω ένας πίνακας* $A \overset{s}{\geq} 0$. *Τότε,*

$$x_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n) \Longrightarrow x_{0+} \in X_A(\mathbb{R}_+^n).$$

Το παρακάτω θεώρημα μας προσφέρει έναν χαρακτηρισμό για όλα τα σημεία συμβίωσης του διαφορικού συστήματος.

Θεώρημα 2.3.2. *Έστω ένας πίνακας* $A \overset{s}{\geq} 0$. *Τότε ένα διάνυσμα* $x_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n)$ *είναι σημείο συμβίωσης για το σύστημα* $\dot{x} = Ax$ *αν και μόνο αν υπάρχει αρκετά μεγάλο* t_0 *τέτοιο ώστε*

$$j \in \mathcal{I}(x_0) \Longrightarrow 0 \leq (x_-(t))_j \downarrow 0,\ \forall t \geq t_0,$$

όπου $\mathcal{I}(x_0)$ *όπως δόθηκε στην* (2.4). *Ακόμη, αν το* $x_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n)$ *σημείο συμβίωσης, τότε για οποιοδήποτε* $j \in \mathcal{I}(x_0)$, $(x_{0+})_j = 0$ *αν και μόνο αν* $(x(t))_j = 0,\ \forall t \geq 0$.

Στην προηγούμενη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου, είδαμε ότι για οποιοδήποτε $0 < h < h(A)$ τέτοιο ώστε $\det(I + hA) \neq 0$, ένα σημείο $\hat{x}_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n)$ αν και μόνο αν υπάρχει ένας εκθέτης $k_0 = k(\hat{x}_0)$ τέτοιος ώστε $\hat{x}_k \geq 0,\ \forall k \geq k_0$. Στο παρακάτω θεώρημα θα δούμε ότι αρχικά σημεία του $X_A(\mathbb{R}_+^n)$, που είναι σημεία συμβίωσης, παράγουν ακολουθίες πεπερασμένων διαφορών, που γίνονται μη φθίνουσες στη μερική διάταξη του $\mathbb{R}^n$, συμπεριλαμβανομένου και του $\mathbb{R}_+^n$.

Θεώρημα 2.3.3. *Έστω ένας πίνακας* $A \overset{s}{\geq} 0$ *και έστω* $\hat{x}_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n)$. *Τότε, για κάθε* h *που ικανοποιεί την* $0 < h < h(A)$ *τέτοιο ώστε* $\det(I + hA) \neq 0$, *όπου* $h(A)$ *δίνεται από την* (2.2), *ισχύει ότι* $A\hat{x}_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n)$ *αν και μόνο αν υπάρχει ένας δείκτης* k_0, *ο οποίος εξαρτάται από το* $A\hat{x}_0$, *τέτοιος ώστε*

$$\hat{x}_{k+1} \geq \hat{x}_k,\ \forall k \geq k_0.$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την περίπτωση ασταθούς ευστάθειας, δηλαδή την περίπτωση που $\lambda_1 = 0$, για την οποία θα πρέπει να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 2.3.2 υπό την σκοπιά της συνδυαστικής πινάκων.

Έστω ότι ο A είναι ένας $n \times n$ ουσιωδώς μη αρνητικός ασθενώς ευσταθής πίνακας. Τότε ο πίνακας $-A$ έχει μη θετικά μη διαγώνια στοιχεία και όλες οι ιδιοτιμές του έχουν μη αρνητικό πραγματικό μέρος. Επομένως, ο πίνακας $-A$ δέχεται τη μορφή $-A = \rho(B)I - B$, όπου B είναι ένας $n \times n$ μη αρνητικός πίνακας, του οποίου η φασματική ακτίνα είναι $\rho(B)$.

Ορισμός 2.3.4. • *Ο **προσανατολισμένος γράφος (directed graph)** ενός πίνακα A, $\Gamma(A)$, είναι ένα σύνολο n κόμβων $\langle n \rangle = \{1, \ldots, n\}$ και προσανατολισμένων ακμών που ενώνουν τον κόμβο i με τον κόμβο j αν και μόνο αν $a_{ij} \neq 0$. Ταυτίζουμε τον $\Gamma(A)$ με το σύνολο των ακμών του.*

- *Για $S, T \subseteq \langle n \rangle$, λέμε ότι το **S έχει πρόσβαση στο T**, και γράφουμε $S \succeq T$, αν υπάρχει μονοπάτι στον $\Gamma(A)$ από ένα στοιχείο του S σε ένα στοιχείο του T.*

- *Μία **κλάση** του A είναι το σύνολο κόμβων που αντιστοιχούν σε ένα ισχυρά συνδεδεμένο μέρος του $\Gamma(A)$. Συμβολίζουμε τις κλάσεις του A με $a_1, \ldots, a_q$. Αν $q = 1$, τότε ο A είναι μη υποβιβάσιμος. Για $T \subseteq \langle n \rangle$ συμβολίζουμε με $A[T]$ τον κύριο υποπίνακα του A, του οποίου οι γραμμές και στήλες γράφονται υπό μορφή δεικτών από το T. Ομοίως, αν $v \in \mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με $v[T]$ το υποδιάνυσμα του v, του οποίου τα στοιχεία γράφονται υπό μορφή δεικτών από το T. Αν ο A είναι μη υποβιβάσιμος, τότε ο A είναι μεταθετικά όμοιος με μια μπλοκ άνω τριγωνική κανονική μορφή Frobenius , τα διαγώνια μπλοκ, της οποίας, είναι διαδοχικά οι μη υποβιβάσιμοι πίνακες $A[a_{i_k}]$, $k = 1, \ldots, q$.*

- *Ονομάζουμε μία κλάση a του A **ιδιάζουσα** αν το $A[a]$ είναι ιδιάζον.*

- *Μία κλάση του A ονομάζεται **τελική** αν δεν έχει πρόσβαση στις άλλες κλάσεις.*

Ορισμός 2.3.5. • *Ο **μειωμένος γράφος (reduced graph)** του A, $R(A)$, είναι το σύνολο $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}\}$.*

- *Μία **αλυσίδα κλάσεων (κόμβων)** στο $R(A)$ είναι μία ακολουθία $(k_1, \ldots, k_s)$ τέτοια ώστε $a_{k_j} \succeq a_{k_{j+1}}$, $j = 1, \ldots, s-1$.*

- *Το **μήκος μίας αλυσίδας** που ενώνει τον κόμβο i με τον κόμβο j στο $R(A)$, συμβολίζεται με $d(i,j)$, και είναι ο μεγιστικός αριθμός των ιδιαζόντων κόμβων που βρίσκονται στην αλυσίδα αυτή.*

Ορισμός 2.3.6. *Έστω $\mathcal{S} = \{i \in \langle q \rangle | a_i$ είναι ιδιάζον κόμβος $\}$. Ο **ιδιάζον γράφος (singular graph)** ενός πίνακα A, $S(A)$, έχει το σύνολο κόμβων $\mathcal{S}$ μαζί με τη μερική διάταξη της πρόσβασης που προκαλείται από το $R(A)$ στο $S(A)$ αν και μόνο αν το ίδιο ισχύει για το $R(A)$.*

Για λόγους ευκολίας θα συμβολίζουμε τις ιδιάζουσες κλάσεις του A με $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Γνωρίζουμε ότι το $\mathcal{N}$ έχει μία βάση μη αρνητικών διανυσμάτων $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$, που έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες

$$y^{(i)}[a_j] \begin{cases} \gg 0, \text{ αν } a_j \succeq \beta_i \\ = 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases}, \tag{2.5}$$

για $j = 1, \ldots, q$ και $i = 1, \ldots, m$. Επιπλέον, μία μη αρνητική βάση $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ που ικανοποιεί την (2.5) μπορεί να επιλεχθεί έτσι ώστε

$$c_{i,k} \begin{cases} > 0, \text{ αν } \beta_k \succeq \beta_i,\ \beta_k \neq \beta_i \\ = 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases}, \tag{2.6}$$

$i, k = 1, \ldots, q$, όπου τα $c_{i,k}$ καθορίζονται από την

$$Ay^{(i)} = \sum_{k \in \langle m \rangle} c_{i,k} y^{(k)},\ i = 1, \ldots, m. \tag{2.7}$$

Γενικότερα,

$$(A^r y^{(i)})[a_j] = \begin{cases} \gg 0, \text{ αν και μόνο αν } d(a_j, \beta_i) \geq r + 1 \\ 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases}.$$

Μία μη αρνητική βάση $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ που ικανοποιεί τις (2.5), (2.6), (2.7) ονομάζεται **ενδεδειγμένη (preferred)** βάση για το $\mathcal{N}$.

Έστω ότι $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ είναι μία ενδεδειγμένη βάση για το $\mathcal{N}$ και γράφουμε το x_{0+} ως τον γραμμικό συνδυασμό

$$x_{0+} = \sum_{i \in \langle m \rangle} c_i y^{(i)}.$$

Έστω

$$T_{x_{0+}} = \{i | c_i \neq 0\}.$$

Επιπλέον, έστω

$$Top(x_{0+}) = \{k \in T_{x_{0+}} | \beta_k \succeq \beta_i \text{ και } i \in T_{x_{0+}} \Longrightarrow i = k\}.$$

Σημειώνουμε ότι οι κόμβοι β_k, $k \in Top(x_0)_+$ αντιστοιχούν στις τελικές κλάσεις του επαγόμενου από το $\mathcal{S}(A)$ υπογράφου στους κόμβους β_k, $k \in T_{x_{0+}}$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω χαρακτηρισμό:

Θεώρημα 2.3.7. *Έστω ένας πίνακας $A \overset{s}{\geq} 0$ ασθενώς ευσταθής. Έστω $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ μία βάση για το $\mathcal{N}$ και το 35 μία αναπαράσταση του x_{0+} σε αυτή τη βάση. Τότε, $x_{0+} \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$ αν και μόνο αν*

$$k \in Top(x_{0+}) \Longrightarrow c_k > 0.$$

Συμβολίζουμε με $G^*(Top(x_{0+}))$ το σύνολο όλων των κλάσεων του A που έχουν πρόσβαση σε μία κλάση β_k, $k \in Top(x_{0+})$. Παρατηρούμε, ακόμη, ότι αν $k \in Top(x_{0+})$, τότε $(e^{tA}x_{0+})[\beta_k] = x_{0+}[\beta_k]$, $\forall t \geq 0$, ενώ αν $k \in G^*(Top(x_{0+}))\backslash Top(x_{0+})$, τότε όλα τα μέλη του $x_{0+}[\beta_k]$ τείνουν στο $+\infty$ καθώς $t \to \infty$. Τότε το Θεώρημα 2.3.7 μαζί με το Θεώρημα 2.3.2 καταλήγουν στον παρακάτω χαρακτηρισμό για τα σημεία συμβίωσης στην περίπτωση ασθενούς ευστάθειας:

Πόρισμα 2.3.7.1. *Έστω ένας πίνακας $A \overset{s}{\geq} 0$ και $x_{0+} \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$. Τότε, το x_0 είναι σημείο συμβίωσης για το σύστημα $\dot{x} = Ax$ αν και μόνο αν*

$$j \in \{i \in \langle n \rangle \,|\, i \notin a_k \text{ για κάποιο } a_k \in G^*(Top(x_{0+}))\} \Longrightarrow (x(t))_j = 0,\ \forall t \geq 0$$

και υπάρχει ένας χρόνος t_0 τέτοιος ώστε

$$j \in \{i \in \langle n \rangle \,|\, i \in \beta_k, k \in Top(x_{0+})\} \Longrightarrow 0 \leq (x_-(t))_j \downarrow 0,\ \forall t \geq t_0.$$

Στο τελευταίο θεώρημα αυτού του κεφαλαίου χαρακτηρίζουμε σημεία $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$ τέτοια ώστε οι παράγωγοι όλων των διατάξεων $1 \leq i \leq p_1$ των τροχιών που ξεκινάνε από αυτά να ανήκουν στο $X_A(\mathbb{R}^n_+)$.

Θεώρημα 2.3.8. *Έστω $A \overset{s}{\geq} 0$ με $\lambda_1 = 0$ και $index_0(A) = p_1$. Τότε για οποιοδήποτε $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) $A^{p_1+1}x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$.

(ii) $x_{0-} = 0$.

(iii) $A^m x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+),\ \forall m \geq 0.$

Κεφάλαιο 3

Προσβασιμότητα και διατηρησιμότητα μη αρνητικών καταστάσεων

3.1 Εισαγωγή

Υπενθυμίζουμε ότι το γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ \ A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,\ \ t \geq 0$$

έχει λύσεις της μορφής

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Σε αυτό το κεφάλαιο, αναζητούμε χαρακτηρισμούς για τις παραμέτρους του συστήματος, οι οποίες οδηγούν σε τροχιές που γίνονται μη αρνητικές (προσβασιμότητα του $\mathbb{R}^n_+$) και παραμένουν μη αρνητικές για κάθε χρόνο μετά (διατηρησιμότητα του $\mathbb{R}^n_+$). Αυτή η αναζήτηση γίνεται σε δύο βήματα:

1. Μελέτη πινάκων $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ που είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικοί, δηλαδή, πινάκων για τους οποίους υπάρχει $t_0 \in [0, \infty)$ τέτοιο ώστε $e^{tA} \geq 0$, για κάθε $t \geq t_0$.

2. Δοθέντος ενός τελικά-εκθετικά μη αρνητικού πίνακα A, μελέτη των αρχικών σημείων $x_0 \in \mathbb{R}^n$, για τα οποία υπάρχει $\hat{t} \in [0, \infty)$ τέτοιο ώστε $e^{tA}x_0 \geq 0$, για κάθε $t \geq \hat{t}$. Θα αναφερθούμε σε αυτά τα αρχικά σημεία ως **σημεία τελικής μη αρνητικότητας**.

Αξίζει να κάνουμε δύο σχόλια αναφορικά με αυτούς τους δύο στόχους, προκειμένου να γίνει κατανοητή η ανάγκη για την επίτευξή τους.

Πρώτον, οι ουσιωδώς μη αρνητικοί πίνακες είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικοί (με $t_0 = 0$). Ωστόσο, θα δούμε στην Παράγραφο 3.2 ότι οι τελικά-εκθετικά μη αρνητικοί πίνακες είναι στενά συνδεδεμένοι με τους τελικά μη αρνητικούς πίνακες. Αυτός είναι ο λόγος που οι πίνακες με αυτές τις ιδιότητες μας απασχολούν, καθώς στη θεωρία θετικών συστημάτων ελέγχου προκύπτουν τελικά μη αρνητικοί πίνακες.

Δεύτερον, το μη αρνητικό μέρος-κώνος $\mathbb{R}^n_+$ περιλαμβάνει σημεία τελικής μη αρνητικότητας, αλλά στη γενική περίπτωση τα σημεία αυτά αποτελούν έναν κυρτό κώνο που περιέχει αυστηρά το $\mathbb{R}^n_+$. Θα δούμε στην Παράγραφο 3.3 πώς τα σημεία τελικής μη αρνητικότητας και οι ασυμπτωτικές συμπεριφορές των λύσεων συνδέονται με τον εκθετικό πίνακα e^{tA} και την τελική μη αρνητικότητά του.

3.2 Τελικά-εκθετικά μη αρνητικοί πίνακες

Στο παρακάτω λήμμα παρουσιάζουμε και αποδεικνύουμε τη σχέση μεταξύ των εννοιών της εκθετικής μη αρνητικότητας και της ουσιώδους μη αρνητικότητας.

Λήμμα 3.2.1. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο A είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικός.

(ii) Υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε ο $A + aI$ να είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικός.

(iii) Για όλα τα $a \in \mathbb{R}$, ο $A + aI$ είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικός.

Απόδειξη. Οι ισοδυναμίες προκύπτουν εύκολα από το γεγονός ότι

$$e^{t(A+aI)} = e^{taI}e^{tA} = e^{ta}e^{tA}.$$

□

Υπάρχει μία γνωστή ισοδυναμία ανάμεσα στις έννοιες της εκθετικής μη αρνητικότητας και της ουσιώδους μη αρνητικότητας και είναι η παρακάτω:

Λήμμα 3.2.2. *Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι εκθετικά μη αρνητικός αν και μόνο αν $A \overset{s}{\geq} 0$.*

Απόδειξη. Αν $A \overset{s}{\geq} 0$, τότε υπάρχει $a \geq 0$ τέτοιο ώστε $A + aI \geq 0$. Επομένως, έχουμε ότι για $t \geq 0$

$$e^{tA} = e^{-taI}\, e^{t(A+aI)} = e^{-ta}\, e^{t(A+aI)} \geq 0.$$

Αντίστροφα, έστω $e^{tA} \geq 0$, $\forall t \geq 0$ και έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $a_{ij} < 0$ για κάποιο $i \neq j$. Τότε, συμβολίζοντας τα στοιχεία του πίνακα A^k με $a_{ij}^{(k)}$ έχουμε:

$$(e^{tA})_{ij} = ta_{ij} + \frac{t^2}{2!}a_{ij}^{(2)} + \frac{t^3}{3!}a_{ij}^{(3)} + \cdots .$$

Επομένως, για $t \to 0^+$, προκύπτει ότι για κάποιο $t > 0$, $(e^{tA})_{ij} < 0$. Άτοπο. □

Ως συνέπεια του παραπάνω λήμματος έχουμε ότι κάθε ουσιωδώς μη αρνητικός πίνακας A είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικός με εκθετικό δείκτη $t_0 = 0$. Προχωράμε με έναν χαρακτηρισμό των τελικά-εκθετικά θετικών πινάκων, που βασίζονται σε πρόσφατα αποτελέσματα που αποδεικνύονται στο [5].

Θεώρημα 3.2.3. *Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) Οι πίνακες A και A^T έχουν και οι δύο την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius.

(ii) Ο πίνακας A είναι τελικά θετικός.

(iii) Ο πίνακας A^T είναι τελικά θετικός.

Το κύριο αποτέλεσμά μας μέχρι τώρα είναι η επέκταση του Θεωρήματος 3.2.3 που παρουσιάζουμε παρακάτω.

Θεώρημα 3.2.4. *Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, οι επόμενες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Υπάρχει $a \geq 0$ τέτοιο ώστε οι πίνακες $A + aI$ και $A^T + aI$ να έχουν και οι δύο την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenious.*

(ii) *Ο πίνακας $A + aI$ είναι τελικά θετικός για κάποιο $a \geq 0$.*

(iii) *Ο πίνακας $A^T + aI$ είναι τελικά θετικός για κάποιο $a \geq 0$.*

(iv) *Ο πίνακας A είναι τελικά-εκθετικά θετικός.*

(v) *Ο πίνακας A^T τελικά-εκθετικά θετικός.*

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των $(i) - (iii)$ προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 3.2.3 εφαρμοσμένο για τον πίνακα $A + aI$.

Θα αποδείξουμε την ισοδυναμία του (ii) με το (iv).

Έστω ότι ο πίνακας $A + aI$ είναι τελικά θετικός και έστω k_0 ένας θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $(A + aI)^k > 0$, $\forall k \geq k_0$. Τότε, υπάρχει αρκετά μεγάλο $t_0 > 0$ τέτοιο ώστε οι πρώτοι $k_0 - 1$ όροι της σειράς

$$e^{t(A+aI)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^m (A + aI)^m}{m!}$$

να κυριαρχούνται από τους εναπομείναντες όρους καθιστώντας κάθε στοιχείο του πίνακα $e^{t(A+aI)}$ θετικό για κάθε $t \geq t_0$. Επομένως, ο $e^{tA} = e^{-ta} e^{t(A+aI)}$ είναι θετικός για κάθε $t \geq t_0$. Δηλαδή, ο A είναι τελικά-εκθετικά θετικός.

Αντίστροφα, έστω ότι ο πίνακας A είναι τελικά-εκθετικά θετικός. Καθώς $(e^A)^k = e^{kA}$, συνεπάγεται ότι ο πίνακας e^A είναι τελικά θετικός. Επομένως, από το Θεώρημα 3.2.3, ο πίνακας e^A έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius. Υπενθυμίζεται ότι $\sigma(e^A) = \{e^\lambda | \lambda \in \sigma(A)\}$ και άρα $\rho(e^A) = e^\lambda$, για κάποιο $\lambda \in \sigma(A)$. Τότε, για κάθε $\mu \in \sigma(A)$, με $\mu \neq \lambda$ έχουμε:

$$e^\lambda > |e^\mu| = \left| e^{Re\mu + iIm\mu} \right| = e^{Re\mu}.$$

Επομένως το λ είναι η φασματική τετμημένη του A, δηλαδή $\lambda > Re\mu$, για κάθε $\mu \in \sigma(A)$ με

$\mu \neq \lambda$. Κατά συνέπεια, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει αρκετά μεγάλο $a > 0$ τέτοιο ώστε

$$\lambda + a > |\mu + a|, \ \forall \mu \in \sigma(A), \ \mu \neq \lambda.$$

Καθώς ο $A + aI$ έχει τους ίδιους ιδιόχωρους με τον e^A, έχουμε ότι ο $A + aI$ έχει την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius και από το Θεώρημα 3.2.3 έχουμε ότι ο $A + aI$ είναι τελικά θετικός. Η ισοδυναμία $(iii) - (v)$ αποδεικνύεται ανάλογα. □

Παρατήρηση. *Παρατηρούμε ότι η ισοδυναμία του (ii) με το (iv) στο Θεώρημα 3.2.4 αντιπροσωπεύει μία γενίκευση του γεγονότος ότι $A \overset{s}{>} 0$ ισοδυναμεί με το ότι ο A είναι εκθετικά θετικός.*

Παράδειγμα 3.2.5. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \ A^3 = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 13 & 13 \\ 5 & 9 & 13 & 13 \\ 1 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \end{bmatrix}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο A είναι ένας τελικά θετικός πίνακας με δείκτη δύναμης $indexk_0 = 3$. Επομένως, από το Θεώρημα 3.2.4 συμπεραίνουμε ότι ο A είναι ένας τελικά-εκθετικά θετικός πίνακας. Υπολογίζοντας τον e^{tA} για $t = 1, 2$, έχουμε, αντίστοιχα:

$$\begin{bmatrix} 5.0401 & 6.3618 & 8.6836 & 8.6836 \\ 4.0401 & 7.3618 & 8.6836 & 8.6836 \\ -0.4655 & 2.7873 & 5.0401 & 4.0401 \\ 2.7873 & 3.5746 & 6.3618 & 7.3618 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 71.2660 & 134.1429 & 198.0199 & 198.0199 \\ 71.2660 & 134.1429 & 198.0199 & 198.0199 \\ 18.4960 & 45.3810 & 71.2660 & 70.2660 \\ 45.3810 & 88.7620 & 134.1429 & 135.1429 \end{bmatrix}.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις θέσεις των μη θετικών στοιχείων του A και του A^2, συμπεραίνουμε ότι ο εκθετικός δείκτης του A είναι $t_0 \in (1,2)$.

Στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε σε τελικά-εκθετικά μη αρνητικούς πίνακες και τους συνδέουμε με τελικά μη αρνητικούς πίνακες. Στα ακόλουθα, θέτουμε και αποδεικνύουμε ικανές συνθήκες έτσι ώστε ένας πίνακας να είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικός και ερευνούμε τις αναγκαίες συνθήκες. Για να το κάνουμε αυτό, πρώτα θα πρέπει να συζητήσουμε τη σχέση μεταξύ των κανονικών μορφών Frobenius των δυνάμεων ενός τελικά μη αρνητικού πίνακα. Αυτό το θέμα και η σχέση του με το φάσμα μελετώνται αναλυτικά στο [7, 6]. Παρακάτω, συνοψίζουμε και παραφράζουμε κάποια από αυτά τα αποτελέσματα.

Θεώρημα 3.2.6. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας τελικά μη αρνητικός πίνακας με $index_0(A) \le 1$. Τότε υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός q και ένας πίνακας μετάθεσης P τέτοιοι ώστε:*

(i) $A^k \ge 0$, $\forall k \ge q$.

(ii) PAP^T *και* PA^qA^T *είναι ταυτόχρονα στην κανονική μορφή Frobenius.*

(iii) $\overline{R(A)} = \overline{R(A^q)}$

Θεώρημα 3.2.7. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας τελικά μη αρνητικός πίνακας με $index_0(A) \le 1$. Τότε ο A είναι ένας τελικά-εκθετικά μη αρνητικός πίνακας.*

Απόδειξη. Για να αποφύγουμε τις τετριμμένες περιπτώσεις θεωρούμε ότι $n \ge 2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε τον πίνακα μετάθεσης $P = I$. Διαφορετικά οι υποθέσεις μας εφαρμόζονται σε έναν πίνακα μεταθετικά όμοιο με τον πίνακα A. Τότε, από το Θεώρημα 3.2.6, οι πίνακες A και A^q είναι στην κανονική μορφή Frobenius , όπως φαίνεται παρακάτω:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & \cdots & A_{1p} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{pp} \end{bmatrix} \text{ και } A^q = \begin{bmatrix} A_{11}^{(q)} & \cdots & \cdots & A_{1p}^{(q)} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{pp}^{(q)} \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Θεωρούμε τη δυναμοσειρά $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ χωρισμένη σε μπλοκ σε συμφωνία με τους πίνακες της εξίσωσης (3.1). Έστω, ακόμα, ότι το $c_{ij}(t)$ είναι το (i,j)-οστό στοιχείο του πίνακα e^{tA}. Κάνοντας ελαφριά κατάχρηση της σημειολογίας, έστω ότι το σύνολο $\{1,2,\ldots,p\}$ δηλώνει τις p ισχυρά συνδεδεμένες κλάσεις του γράφου $G(A)$ του πίνακα A, όπως υποδεικνύεται από την εξίσωση (3.1). Έστω ότι το i ανήκει στην κλάση u και το j στην κλάση v, όπου $u, v \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Προκύπτουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

Έστω ότι $p = 1$. Καθώς $n \geq 2$, ο πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος. Επομένως, για όλες τις δυνάμεις $k \geq q$, το (i, j)-οστό στοιχείο του πίνακα A^k είναι μη αρνητικό και είναι, πράγματι, θετικό για τουλάχιστον κάποιες δυνάμεις μεγαλύτερες του q. Ως συνέπεια, καθώς αυξάνεται ο χρόνος $t \geq 0$, το $c_{ij}(t)$ κυριαρχείται στη δυναμοσειρά από θετικούς όρους. Δηλαδή, το $c_{ij}(t)$ γίνεται και παραμένει θετικό για κάθε αρκετά μεγάλο χρόνο $t \geq 0$.

Στη συνέχεια, έστω ότι $p > 1$. Τα μπλοκ του κάτω τριγωνικού μέρους της μπλοκ-κατανομής κάθε πίνακα A^k πρέπει να είναι 0, δηλαδή, αν $u > v$, τότε $c_{ij}(t) = 0$ για κάθε χρόνο $t \geq 0$. Αν $u = v$, δηλαδή, αν τα i, j ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, τότε τα μπλοκ A_{uu} και $A_{uu}^{(q)}$ είναι είτε ταυτόχρονα ίσα με τον 1×1 μηδενικό πίνακα, είτε ταυτόχρονα μη υποβιβάσιμοι πίνακες. Στην πρώτη περίπτωση $(u > v)$, το $c_{ij}(t) = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Στη δεύτερη περίπτωση $(u = v)$, το $c_{ij}(t)$ γίνεται και παραμένει θετικό για κάθε αρκετά μεγάλο $t \geq 0$, όπως γίνεται, ανάλογα, και στην περίπτωση που $p = 1$.

Τέλος, θα μελετήσουμε το πρόσημο του $C_{ij}(t)$ όταν $u < v$. Έστω ότι $a_{ij}^{(k)}$ δηλώνει το (i, j)-οστό στοιχείο του πίνακα A^k. Αν $a_{ij}^{(k)} = 0$ για κάθε $k < q$, τότε πρέπει να υπάρχει μονοπάτι από τον κόμβο i στον κόμβο j του γράφου $G(A)$. Επομένως, υπάρχει μονοπάτι από τον κόμβο i στον j του γράφου $R(A)$. Από το Θεώρημα 3.2.6, $\overline{R(A)} = \overline{R(A^q)}$ και άρα πρέπει να υπάρχει μονοπάτι από τον κόμβο i στον j του γράφου $R(A^q)$. Συνεπάγεται ότι υπάρχει τέτοιο μονοπάτι και στον γράφο $G(A^q)$. Με τη σειρά του, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μία δύναμη $m \geq q$ τέτοια ώστε $a_{ij}^{(m)} > 0$. Καθώς $a_{ij}^{(k)} \geq 0$ για κάθε $k \geq q$, έχουμε ότι το $c_{ij}(t)$ κυριαρχείται από θετικούς όρους της δυναμοσειράς και, άρα, γίνεται και παραμένει θετικό για αρκετά μεγάλους χρόνους $t \geq 0$.

Συμπερασματικά, δείξαμε ότι κάθε στοιχείο $c_{ij}(t)$ του πίνακα e^{tA} γίνεται και παραμένει μη αρνητικό για κάθε αρκετά μεγάλο χρόνο $t \geq 0$, δηλαδή αποδείξαμε ότι ο πίνακας A είναι τελικά-εκθετικά θετικός. $\square$

Πόρισμα 3.2.7.1. *Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $A + aI$ να είναι* *τελικά μη αρνητικός για όλα τα* $a \in [a_1, a_2]$ $(a_1 < a_2)$. *Τότε ο* A *είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικός πίνακας.*

Απόδειξη. Εφόσον $\sigma(A)$ είναι πεπερασμένο σύνολο, υπάρχει $a \in [a_1, a_2]$ τέτοιο ώστε $A + aI$ να είναι αντιστρέψιμος. Επομένως, $index_0(A + aI) = 0$ και άρα από Θεώρημα 3.2.7, $A + aI$ είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικός. Από Λήμμα 3.2.1, συνεπάγεται ότι ο A είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικός. □

Παράδειγμα 3.2.8. *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

για τον οποίο έχουμε ότι

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}, \ A^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 11 & 9 \\ 1 & 0 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 16 & 16 \end{bmatrix}.$$

Ο A *είναι υποβιβάσιμος, τελικά μη αρνητικός, και έχει δείκτη δύναμης* $indexk_0 = 2$. *Εφόσον* $index_0(A) = 1$, *από το Θεώρημα 3.2.7 συνεπάγεται ότι ο* A *είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικός πίνακας. Πράγματι, αν υπολογίσουμε τον* e^{tA} *για* $t = 1, 2$ *έχουμε αντίστοιχα*

$$\begin{bmatrix} 1.5431 & 1.1752 & 2.3404 & -0.0100 \\ 1.1752 & 1.5431 & 4.0487 & 2.9625 \\ 0 & 0 & 4.1945 & 3.1945 \\ 0 & 0 & 3.1945 & 4.1945 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3.7622 & 3.6269 & 18.1543 & 10.9006 \\ 3.6269 & 3.7622 & 35.4439 & 29.9195 \\ 0 & 0 & 27.7991 & 26.7991 \\ 0 & 0 & 26.7991 & 27.7991 \end{bmatrix}.$$

γεγονός που μας επιβεβαιώνει ότι ο A είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικός πίνακας με $t_0 \in (1, 2)$.

Η αποτυχία να καταλήξουμε σε τελικά-εκθετικά μη αρνητικό πίνακα ξεκινώντας από τελικά μη αρνητικό που παρατηρήσαμε στο παραπάνω παράδειγμα, μπορεί να παρατηρηθεί ακόμα και αν ο A είναι μη υποβιβάσιμος, όπως θα δούμε στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 3.2.9. *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και η ακολουθία δυνάμεών του

$$A^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} & k2^{k-1} & k2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} & k2^{k-1} & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{bmatrix} \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Ο πίνακας A είναι τελικά μη αρνητικός με $k_0 = 2$ και $index_0(A) = 2$. Καθώς οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.2.7 δεν ικανοποιούνται, μπορούμε να καταλήξουμε στο ότι ο A δεν είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικός. Το $(2, 1)$ μπλοκ του A^k είναι 0 για κάθε $k \geq 2$, ενώ το αντίστοιχο του A δεν είναι και περιέχει αρνητικά στοιχεία. Επομένως ο A δεν είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικός. Πράγματι,

$$e^A = \begin{bmatrix} 4.1945 & 3.1945 & 7.3891 & 7.3891 \\ 3.1945 & 4.1945 & 7.3891 & 7.3891 \\ -1 & 1 & 4.1945 & 3.1945 \\ 1 & -1 & 3.1945 & 4.1945 \end{bmatrix}, \; e^{3A} = \begin{bmatrix} 202.2 & 201.2 & 1210.3 & 1210.3 \\ 201.2 & 202.2 & 1210.3 & 1210.3 \\ -3 & 3 & 202.2 & 201.2 \\ 3 & -3 & 201.2 & 202.2 \end{bmatrix}.$$

Θα ασχοληθούμε, τώρα, με τις αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένας πίνακας τελικά-εκθετικά μη αρνητικός. Τα επόμενα δύο θεωρήματα έχουν αποδειχθεί και ληφθεί από το [5].

Θεώρημα 3.2.10. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας τελικά μη αρνητικός πίνακας, ο οποίος δεν είναι μηδενοδύναμος. Τότε ο A και ο A^T έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius.*

Θεώρημα 3.2.11. *Έστω ότι οι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και A^T έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius. Αν η $\rho(A)$ είναι απλή και η μόνη κυρίαρχη ιδιοτιμή του A, τότε*

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^k = xy^T,$$

όπου x και y είναι, αντίστοιχα, δεξί και αριστερό μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\rho(A)$ και ικανοποιούν τη σχέση $x^Ty = 1$.

Με τη χρήση αυτών των θεωρημάτων, μπορούμε, πλέον, να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.12. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας τελικά-εκθετικά μη αρνητικός πίνακας. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) Οι πίνακες e^A και e^{A^T} έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius.

(ii) Αν η $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του e^A και $\rho(e^A) = e^{\rho(A)}$, τότε υπάρχει $a_0 \geq 0$ τέτοιο ώστε $\lim_{k\to\infty}((A+aI)/(\rho(A+aI))^k) = xy^T$, $\forall a > a_0$, όπου x και y είναι, αντίστοιχα, το δεξί και το αριστερό μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\rho(A)$ και ικανοποιούν τη σχέση $x^Ty = 1$.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι ο πίνακας A είναι τελικά-εκθετικά μη αρνητικός. Αφού $(e^A)^k = e^{kA}$, συνεπάγεται ότι ο e^A είναι τελικά μη αρνητικός πίνακας. Επομένως, από το Θεώρημα 3.2.10 και εφόσον οι πίνακες e^A και e^{A^T} δεν είναι μηδενοδύναμοι, έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius.

(ii) Από το (i) έχουμε $\rho(e^A) \in \sigma(e^A)$. Έστω ότι x, y είναι, αντίστοιχα, το δεξί και το αριστερό μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\rho(e^A)$ και είναι κανονικοποιημένα έτσι ώστε $x^Ty = 1$. Έχουμε ότι $\rho(e^A) = e^\lambda$, για κάποιο $\lambda \in \sigma(A)$ με

$\lambda > Re\mu$, $\forall \mu \in \sigma(A)\backslash\{\lambda\}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει αρκετά μεγάλο $a_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $a \geq a_0$,

$$\rho(A + aI) = \lambda + a > |\mu + a|, \ \forall \mu \in \sigma(A), \ \mu \neq \lambda.$$

Καθώς οι πίνακες $A+aI$ και e^A έχουν κοινά ιδιοδιανύσματα, έχουμε ότι για κάθε $a > a_0$, οι πίνακες $A+aI$ και A^T+aI έχουν την ιδιότητα Perron-Frobenius, με την $\lambda+a$ να είναι απλή και η μόνη κυρίαρχη ιδιοτιμή τους. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.11 στον πίνακα $A+aI$, έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\rho(A+aI)^k}(A+aI)^k = xy^T \geq 0. \tag{3.2}$$

$\square$

Παρατήρηση. *Από την εξίσωση* (3.2) *έχουμε ότι αν* $(xy^T)_{ij} > 0$, *τότε* $((A+aI)^k)_{ij} > 0$ *για όλα τα αρκετά μεγάλα* k. *Πιο συγκεκριμένα, αν* $xy^T > 0$, *τότε ο πίνακας* $A+aI$ *είναι τελικά μη αρνητικός για όλα τα* $a > a_0$. *Αν, ωστόσο,* $xy^T \geq 0$, *τότε ο πίνακας* $A+aI$ *δεν μπορεί να είναι τελικά μη αρνητικός για όλα τα* $a \in \mathbb{R}$, *όπως είδαμε και στο Παράδειγμα 3.2.9.*

3.3 Σημεία τελικής μη αρνητικότητας

Σε αυτήν την παράγραφο θα θεωρούμε τον πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ να είναι ένας τελικά-εκθετικά μη αρνητικός πίνακας με εκθετικό δείκτη $t_0 = t_0(A) \geq 0$. Θα μελετήσουμε τα σημεία τελικής μη αρνητικότητας, δηλαδή, το σύνολο

$$X_A(\mathbb{R}^n_+) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n | (\exists \hat{t} = \hat{t}(x_0) \geq 0)(\forall t \geq \hat{t})[e^{tA}x_0 \geq 0]\}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι το θετικό μέρος-κώνος $\mathbb{R}^n_+$ είναι γνήσιος κώνος. Ακόμα, είναι πολυεδρικός, καθώς αποτελείται από όλους τους πεπερασμένους συνδυασμούς της κανονικοποιημένης διανυσματικής βάσης. Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ της μορφής $K = S\mathbb{R}^n_+$, όπου S ένας αντιστρέψιμος πίνακας, είναι γνήσιος πολυεδρικός κώνος και αναφερόμαστε σε αυτόν ως simplicial κώνος.

Έστω ένας τελικά-εκθετικά μη αρνητικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με εκθετικό δείκτη $t_0 = t_0(A) \geq 0$. Ορίζουμε τον simplicial κώνο

$$K = e^{t_0 A}\mathbb{R}^n_+ = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \,|\, (\exists y \geq 0)[x_0 = e^{t_0 A}y]\}$$

και θεωρούμε τα σύνολα

$$Y_A(K) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \,|\, (\exists \hat{t} = \hat{t}(x_0) \geq 0)[e^{\hat{t}A}x_0 \in K]\}$$

και

$$X_A(K) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \,|\, (\exists \hat{t} = \hat{t}(x_0) \geq 0)(\forall t \geq \hat{t})[e^{tA}x_0 \in K]\}.$$

Λήμμα 3.3.1. *Έστω $K, Y_A(K)$ όπως ορίστηκαν παραπάνω. Τότε $K \subseteq \mathbb{R}^n_+ \subseteq Y_A(K)$.*

Απόδειξη. Εχουμε ότι $K \subseteq \mathbb{R}^n_+$ αφού $e^{t_0 A} \geq 0$. Αν $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, τότε για $\hat{t} = 2t_0$, $e^{\hat{t}A}x_0 = e^{t_0 A}(e^{t_0 A}x_0) \in K$. Επομένως $\mathbb{R}^n_+ \subseteq Y_A(K)$. □

Παρατήρηση. *Τα σύνολα $Y_A(K)$, $X_A(K)$ και $X_A(\mathbb{R}^n_+)$ είναι κυρτοί κώνοι, αλλά δεν είναι απαραίτητα κλειστά σύνολα.*

Παράδειγμα 3.3.2. *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε $e^{tA} = I + tA = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, αφού $A^n = 0$, $\forall n \geq 2$. Επομένως,

$$X_A(\mathbb{R}^2_+) = \{x_0 \in \mathbb{R}^2 | (\exists t_0 = t(x_0) \geq 0)(\forall t \geq t_0)[e^{tA}x_0 \in \mathbb{R}^2_+]\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\},$$

καθώς για $y < 0$ δεν υπάρχει κατάλληλο t. Πράγματι, έστω $x_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, όπου $a \in \mathbb{R}$ και $b < 0$. Τότε $e^{tA}x_0 = \begin{bmatrix} a+bt \\ b \end{bmatrix}$. Σε αυτήν την περίπτωση, για κάθε t δεν έχουμε μη αρνητικό διάνυσμα. Εύκολα παρατηρούμε ότι το παραπάνω $X_A(\mathbb{R}^2_+)$ είναι κυρτός κώνος, αλλά όχι κλειστό σύνολο.

Πρόταση 3.3.3. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας τελικά-εκθετικά μη αρνητικός πίνακας με εκθετικό δείκτη $t_0 = t_0(A) \geq 0$ και έστω ο κώνος $K = e^{t_0 A}\mathbb{R}^n_+$. Τότε*

$$Y_A(K) = X_A(\mathbb{R}^n_+) = X_A(K).$$

Απόδειξη. Αρχικά, θα δείξουμε την πρώτη ισότητα. Αν $x_0 \in Y_A(K)$, τότε υπάρχει $\hat{t} \geq 0$ και $y \geq 0$ τέτοια ώστε $e^{\hat{t}A}x_0 = e^{t_0 A}y$. Επομένως, $x_0 = e^{(t_0-\hat{t})A}y$ και άρα $e^{tA}x_0 = e^{(t+t_0-\hat{t})A}y \geq 0$, αν $t + t_0 - \hat{t} \geq t_0$, δηλαδή $\forall t \geq \hat{t}$. Συνεπάγεται ότι $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$, δηλαδή $Y_A(K) \subseteq X_A(\mathbb{R}^n_+)$. Για τον αντίθετο εγκλεισμό, έστω $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$, δηλαδή υπάρχει $\hat{t} \geq 0$ τέτοιο ώστε $e^{tA}x_0 \geq 0$, $\forall t \geq \hat{t}$. Έστω $\tilde{t} = \hat{t}+t_0$. Τότε $e^{\tilde{t}A}x_0 = e^{t_0 A}(e^{\hat{t}A}x_0) \in K$, και άρα $X_A(\mathbb{R}^n_+) \subseteq Y_A(K)$. Επομένως, ισχύει η ισότητα.

Για τη δεύτερη ισότητα, έχουμε $X_A(K) \subseteq X_A(\mathbb{R}^n_+)$, αφού $K \subseteq \mathbb{R}^n_+$. Για να δείξουμε τον αντίθετο εγκλεισμό, έστω $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$. Τότε, υπάρχει $\hat{t} \geq 0$ τέτοιο ώστε $e^{t_0 A}e^{sA}x_0 \in K$, $\forall s \geq \hat{t}$. Δηλαδή, $e^{tA}x_0 \in K$, $\forall t \geq t_0 + \hat{t}$ και επομένως $x_0 \in X_A(K)$. □

Παρατήρηση. *Αναφορικά με την Πρόταση 3.3.3, θα πρέπει να γίνουν οι παρακάτω παρατηρήσεις:*

(i) Αν $t_0 = 0$ (δηλαδή, αν $A \overset{s}{\geq} 0$, ή ισοδύναμα αν $e^{tA} \geq 0, \forall t \geq 0$), τότε $K = \mathbb{R}^n_+$. Σε αυτήν την περίπτωση, το $X_A(\mathbb{R}^n_+)$ συμπίπτει με τον κώνο προσβασιμότητας του μη αρνητικού μέρους-κώνου $\mathbb{R}^n_+$ για έναν ουσιωδώς μη αρνητικό πίνακα, όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο.

(ii) Η ισότητα $X_A(\mathbb{R}^n_+) = X_A(K)$, μπορεί να ερμηνευθεί ως ότι ο simplicial κώνος $K = e^{t_0 A}\mathbb{R}^n_+$ εξυπηρετεί ως ελκυστής για τροχιές που ξεκινούν από σημεία τελικής μη αρνητικότητας. Με άλλα λόγια, οι τροχιές που ξεκινούν από το $X_A(\mathbb{R}^n_+)$ πάντα φτάνουν και μένουν στο $K \subseteq \mathbb{R}^n_+$ σε πεπερασμένο χρόνο.

(iii) *Οι παρατηρήσεις μας μέχρι στιγμής συνεπάγονται ότι η τροχιά που ξεκινάει από σημείο τελικής μη αρνητικότητας θα εισέλθει στον κώνο K. Ωστόσο, μπορεί να εξέλθει από αυτόν, ενώ παραμένει μη αρνητική, και τελικά θα εισέλθει ξανά και θα παραμείνει στον K για όλους τους πεπερασμένους χρόνους από εκεί και πέρα.*

Παράδειγμα 3.3.4. *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 0.3929 & -0.8393 & 1.1071 & 1.3393 \\ 1.0357 & 0.6964 & -0.5357 & 0.8036 \\ 1.0357 & -0.3036 & 0.4643 & 0.8036 \\ 1.4643 & 1.0536 & -0.9643 & 0.4464 \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες A και A^T έχουν την ισχυρή ιδιότητα Perron-Frobenius, και άρα από τα Θεωρήματα 3.2.3 και 3.2.4, ο A είναι τελικά-εκθετικά θετικός πίνακας. Υπολογίζεται ότι ο εκθετικός δείκτης του A είναι $t_0 = t_0(A) = 2.64378$. Έχουμε:

$$e^A = \begin{bmatrix} 3.6277 & -0.7991 & 1.4260 & 3.1345 \\ 3.0.341 & 2.2579 & -0.6987 & 2.7958 \\ 3.0341 & -0.4604 & 2.0196 & 2.7958 \\ 3.3050 & 1.4836 & -0.9696 & 3.5701 \end{bmatrix}$$

και

$$e^{t_0 A} = \begin{bmatrix} 91.902 & 3.5982 & 14.0615 & 88.299 \\ 91.499 & 18.162 & 0.3981 & 87.801 \\ 91.499 & 4.0959 & 14.4643 & 87.801 \\ 91.897 & 17.494 & 0 & 88.469 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, ο κώνος $K = e^{t_0 A}\mathbb{R}^n_+$ είναι ο κώνος που παράγεται από τις στήλες του παραπάνω πίνακα $e^{t_0 A}$. Έστω, τώρα, τα ακόλουθα τροχιακά σημεία $x(t) = e^{tA}x(0)$:

$$x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} -1.1617 \\ 0.6014 \\ 0.9693 \\ 1.0887 \end{bmatrix}, \; x(1) = e^A x_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 1.2 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x(2) = e^{2A} x_0 = \begin{bmatrix} 1.9141 \\ -0.0834 \\ 2.6348 \\ -0.5363 \end{bmatrix},$$

$$e^{(t_0+1)A}x_0 = \begin{bmatrix} 26.7836 \\ 13.2600 \\ 27.3263 \\ 12.6884 \end{bmatrix}, \; e^{(t_0+2)A}x_0 = \begin{bmatrix} 165.3049 \\ 127.5845 \\ 165.8206 \\ 126.9949 \end{bmatrix}, \; e^{(2t_0+1)A}x_0 = \begin{bmatrix} 4013.8 \\ 3816.4 \\ 4014.3 \\ 3815.8 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $e^{(t_0+1)A}x_0 \in K$, εφόσον $e^{A}x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, $e^{(t_0+2)A}x_0 \notin K$ αφού $e^{2A}x_0 \notin \mathbb{R}^n_+$ και $e^{(2t_0+1)A}x_0 \in K$ δεδομένου ότι $e^{(t_0+1)A}x_0 \in \mathbb{R}^n_+$. Δηλαδή, για κάθε $t \geq 2t_0 + 1$ έχουμε ότι τα τροχιακά σημεία $x(t)$ βρίσκονται στο K. Με άλλα λόγια, οι τροχιές που ξεκινούν από το x_0 εισέρχονται, εξέρχονται και εισέρχονται ξανά στο K και παραμένουν σε αυτό για όλους τους χρόνους από εκεί και πέρα.

Λήμμα 3.3.5. *Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $K = S\mathbb{R}^n_+$, όπου $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε, υπάρχει $a \geq 0$ τέτοιο ώστε $(A+aI)K \subseteq K$ αν και μόνο αν $e^{tA}K \subseteq K$, $\forall t \geq 0$.*

Απόδειξη. Έχουμε τον μετασχηματισμό ομοιότητας $B = S^{-1}AS$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $a \geq 0$ τέτοιο ώστε $(A+aI)K \subseteq K$ αν και μόνο αν $B \overset{s}{\geq} 0$. Πράγματι, αν $(A+aI)K \subseteq K$, τότε

$$(B + aI)\mathbb{R}^n_+ = S^{-1}(A + aI)S\mathbb{R}^n_+ = S^{-1}(A + aI)K \subseteq S^{-1}K = \mathbb{R}^n_+.$$

Αντίστροφα, αν $B \overset{s}{\geq} 0$, τότε υπάρχει $a \geq 0$ τέτοιο ώστε $B + aI = S^{-1}(A + aI)S \geq 0$. Επομένως, για κάθε $x \in K$ υπάρχει $y \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$S^{-1}(A + aI)x = S^{-1}(A + aI)Sy = z \geq 0.$$

Δηλαδή, $(A+aI)Sy = Sz \in K$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $e^{tA}K \subseteq K$, $\forall t \geq 0$ αν και μόνο αν $e^{tB} \geq 0$, $\forall t \geq 0$. □

Πόρισμα 3.3.5.1. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας τελικά-εκθετικά μη αρνητικός πίνακας, με εκθετικό δείκτη $t_0 = t_0(A) \geq 0$. Έστω $K = e^{t_0 A}\mathbb{R}^n_+$. Τότε, $e^{tA}K \subseteq K$, $\forall t \geq 0$ αν και μόνο αν $t_0 = 0$ (ή αντίστοιχα, αν και μόνο αν $A \overset{s}{\geq} 0$).*

Απόδειξη. Αν $t_0 = 0$, τότε $K = \mathbb{R}^n_+$ και $e^{tA} \geq 0$, $\forall t \geq 0$. Αντίστροφα, έστω $e^{tA}K \subseteq K$, $\forall t \geq 0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $t_0 = 0$. Έστω $y \geq 0$ και $x_o = e^{t_0 A}y \in K$. Εφόσον $e^{tA}x_0 \in K$, $\forall t \geq 0$, θα υπάρχει $z \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$e^{(t+t_0)A}y = e^{t_0 A}z, \; \forall t \geq 0.$$

Αυτό, όμως, σημαίνει ότι $e^{tA}y = z \geq 0, \ \forall t \geq 0$. Αφού το y επιλέχθηκε αυθαίρετα από το $\mathbb{R}^n_+$, έχουμε ότι $e^{tA}\mathbb{R}^n_+ \subseteq \mathbb{R}^n_+, \ \forall t \geq 0$, δηλαδή $t_0 = 0$. $\square$

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικός χαρακτηρισμός του κώνου προσβασιμότητας για έναν ουσιωδώς μη αρνητικό πίνακα

4.1 Εισαγωγή

Ανακαλούμε ότι οι λύσεις του γραμμικού διαφορικού συστήματος

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ \ A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,\ \ t \geq 0$$

είναι της μορφής

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Σε αυτό το κεφαλαίο θεωρούμε ότι ο πίνακας A είναι ουσιωδώς μη αρνητικός και επιχειρούμε τον αριθμητικό χαρακτηρισμό των μελών του $X_A(\mathbb{R}^n_+)$. Όπως έχουμε αναφέρει $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$ αν και μόνο αν οι επαναλήψεις $x^{(k)} = (I + hA)^k x_0$ γίνονται και παραμένουν μη αρνητικές, όπου h είναι κάποια θετική, όχι απαραίτητα μικρή παράμετρος, η οποία εξαρτάται από τα διαγώνια στοιχεία του A. Όταν ο A είναι υποβιβάσιμος, αναπτύσσουμε έναν περιεκτικό αριθμητικό έλεγχο ως εξής: Αν $x^{(k)}$ γίνει θετικό, τότε γίνεται θετικό και το $x(t)$. Αν $x(t)$ δεν γίνει και δεν παραμείνει θετικό, τότε υπάρχουν δύο πιθανότητες. Είτε $x^{(k)}$ γίνεται και παραμένει αρνητικό ή έχει πάντα ένα αρνητικό και ένα θετικό στοιχείο. Λόγω σφαλμάτων στρογγυλοποίησης, η τελευταία περίπτωση αναδεικνύεται αριθμητικά με τη σύγκλιση του $x^{(k)}$ με έναν σχετικά μικρό λόγο σύγκλισης σε ένα θετικό ή αρνητικό διάνυσμα. Ένας αλγόριθμος που υλοποιεί αυτόν τον έλεγχο παρέχεται, μαζί με τη θεωρητική του βάση, την αριθμητική ανάλυση και παραδείγματα. Επιπλέον αναφέρεται και η περίπτωση υποβιβασιμότητας και περιγράφονται πιθανοί αντίστοιχοι έλεγχοι.

Στην Παράγραφο 2, περιγράφουμε τους συνεχείς και διακριτούς κώνους προσβασιμότητας του $\mathbb{R}^n_+$ που σχετίζονται με έναν ουσιωδώς μη αρνητικό πίνακα. Στην Παράγραφο 3, μελετάμε τη σχέση μεταξύ των συνεχών και των διακριτών τροχιών στην περίπτωση μη-υποβιβασιμότητας. Στην Παράγραφο 4, παρέχεται και αναλύεται αριθμητικά ένας αλγόριθμος με τον οποίο αποφασίζεται ποια είναι τα μέλη του $X_A(\mathbb{R}^n_+)$ όταν ο A είναι μη υποβιβάσιμος. Στην Παράγραφο 5 περιέχονται αριθμητικά παραδείγματα. Τέλος, στην Παράγραφο 6 γίνεται συζήτηση για τη γενική περίπτωση (πιθανά για την περίπτωση υποβιβασιμότητας) και περιγράφονται οι απαιτήσεις για την προσαρμογή του αλγορίθμου για αυτήν την περίπτωση.

4.2 Κώνοι προσβασιμότητας

Υπενθυμίζουμε, εν συντομία ότι

- Η συνεχής τροχιά που ξεκινάει από το x_0 είναι το σύνολο $\{x(t) = e^{tA}x_0 | t \in [0, \infty)\}$.
- Ο (συνεχής) κώνος προσβασιμότητας (του $\mathbb{R}^n_+$ υπό τον A) είναι το σύνολο

$$X_A(\mathbb{R}^n_+) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n | (\exists t_0 = t(x_0) \geq 0)(\forall t \geq t_0)[e^{tA}x_0 \in \mathbb{R}^n_+]\}.$$

- Η διακριτή τροχιά που ξεκινάει από το x_0 είναι η ακολουθία

$$x^{(k)} = (I + hA)^k x_0,\ k = 0, 1, \ldots$$

- Ο διακριτός κώνος προσβασιμότητας (του $\mathbb{R}^n_+$ υπό τον A) είναι το σύνολο

$$X_{A,h}(\mathbb{R}^n_+) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n | (\exists k_0 = k(x_0) \geq 0)(\forall k \geq k_0)[(I + hA)^k x_0 \in \mathbb{R}^n_+]\}.$$

Ο συνεχής και ο διακριτός κώνος προσβασιμότητας του $int(\mathbb{R}^n_+)$ υπό τον A ορίζονται α- νάλογα, απαιτώντας από τις τροχιές να γίνονται και να παραμένουν **θετικές**. Συμβολίζονται με $X_A(int(\mathbb{R}^n_+))$ και $X_{A,h}(int(\mathbb{R}^n_+))$ αντίστοιχα.

Ακολουθεί μία περίληψη αποτελεσμάτων από το [4], εκφραζόμενα, εδώ, για την προσβασιμότητα και του $\mathbb{R}^n_+$ και του $-\mathbb{R}^n_+$.

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω A ένας $n \times n$ ουσιωδώς μη αρνητικός πίνακας και έστω $h \in (0, h(A))$ τέτοιο ώστε ο $(I + hA)$ να είναι αντιστρέψιμος. Τότε*

$$X_A(\mathbb{R}^n_+) = X_{A,h}(\mathbb{R}^n_+) \text{ και } X_A(-\mathbb{R}^n_+) = X_{A,h}(-\mathbb{R}^n_+). \tag{4.1}$$

Αν, επιπλέον, A είναι μη υποβιβάσιμος, τότε

$$X_A(\mathbb{R}^n_+)\backslash\{0\} = X_A(int(\mathbb{R}^n_+)) = X_{A,h}(int(\mathbb{R}^n_+)) = X_{A,h}(\mathbb{R}^n_+)\backslash\{0\} \tag{4.2}$$

και

$$X_A(-\mathbb{R}^n_+)\backslash\{0\} = X_A(-int(\mathbb{R}^n_+)) = X_{A,h}(-int(\mathbb{R}^n_+)) = X_{A,h}(-\mathbb{R}^n_+)\backslash\{0\}.$$

Απόδειξη. Η πρώτη εξίσωση του (4.1) είναι το Θεώρημα 2.2.4. Η δεύτερη εξίσωση του (4.1) προκύπτει από την παρατήρηση ότι $X_A(-\mathbb{R}^n_+) = -X_A(\mathbb{R}^n_+)$ και όμοια για τους διακριτούς κώνους προσβασιμότητας. Αν A είναι υποβιβάσιμος, τότε από Θεώρημα 1.1.14 έχουμε ότι $(I + hA)^k > 0$ για κάθε $k \geq n - 1$. Ακόμα, από Λήμμα 1.1.20 $e^{tA} > 0$ για κάθε $t > 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
X_A(\mathbb{R}^n_+)\backslash\{0\} &= X_A(int(\mathbb{R}^n_+)) \\
&= int(X_A(\mathbb{R}^n_+)) \text{ (από ([4], Λήμμα 3.2))} \\
&= int(X_{A,h}(\mathbb{R}^n_+)) \text{ (από Θεώρημα 4.2.1)} \\
&= X_{A,h}(int(\mathbb{R}^n_+)) \text{ (από ([4], Λήμμα 3.2))} \\
&= X_{A,h}(\mathbb{R}^n_+)\backslash\{0\},
\end{aligned}$$

που είναι η (4.2). Η τελευταία εξίσωση προκύπτει παρόμοια με την τελευταία εξίσωση του (4.1). □

Το Θεώρημα 4.2.1 προτείνει έναν αριθμητικό έλεγχο για να εξεταστεί αν ένα δοθέν αρχικό σημείο x_0 ανήκει στο $X_A(\mathbb{R}^n_+)$:

1. διαλέγουμε ένα θετικό $h < h(A)$ τέτοιο ώστε ο πίνακας $I + hA$ να είναι αντιστρέψιμος

2. ελέγχουμε αν για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο k, $x^{(k)} = (I + hA)^k x_0$ είναι μη αρνητικό, που σε αυτήν την περίπτωση $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$. Διαφορετικά, καταλήγουμε στο ότι η $x^{(k)}$ δεν θα γίνει ποτέ μη αρνητική, δηλαδή $x_0 \notin X_A(\mathbb{R}^n_+)$.

Με βάση αυτήν την προσέγγιση προκύπτουν άμεσα κάποιες ερωτήσεις: Πώς θα μπορούσαμε να αποφασίσουμε για το αν η $x^{(k)}$ δεν θα γίνει ποτέ μη αρνητική; Ποια είναι τα αριθμητικά αποτελέσματα για την παραγωγή της $x^{(k)}$ για να πάρουμε αυτήν την απόφαση; Αυτές είναι μερικές ερωτήσεις που θα απαντηθούν παρακάτω.

4.3 Κύρια θεωρητικά αποτελέσματα σε περίπτωση μη-υποβιβασιμότητας

Σε αυτήν την παράγραφο δίνεται περαιτέρω ανάλυση στη σχέση μεταξύ της συνεχούς και διακριτής τροχιάς, η οποία θα μας οδηγήσει σε έναν αλγοριθμικό χαρακτηρισμό του $X_A(\mathbb{R}^n_+)$ όταν ο πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος.

Λήμμα 4.3.1. *Έστω B ένας $n \times n$ μη υποβιβάσιμος μη αρνητικός πίνακας. Τότε $\mathcal{L}_B = R(\rho(B)I - B)$, όπου $R(\cdot)$ συμβολίζει το πεδίο τιμών (range) του πίνακα.*

Απόδειξη. Έστω $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ μία βάση για το $\mathbb{C}^n$, όπου w_1 είναι το διάνυσμα Perron του B και $Span\{w_2, w_3, \ldots, w_n\} = \mathcal{L}_B$. Έστω $x \in R(\rho(B)I - B)$ τέτοιο ώστε

$$x = (\rho(B)I - B)y, \text{ , όπου } y = \sum_{j=1}^{n} c_j w_j, \ c_j \in \mathbb{C} \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Αυτό σημαίνει, εφόσον ο $\mathcal{L}_B$ είναι B-αναλλοίωτος υπόχωρος, ότι υπάρχει $q_j \in \mathbb{C}$ $(j = 2, 3, \ldots, n)$ τέτοιο ώστε

$$x = \sum_{j=2}^{n} q_j w_j \in \mathcal{L}_B.$$

Επομένως, $R(\rho(B)I - B) \subseteq \mathcal{L}_B$. Καθώς η $\rho(B)$ είναι απλή ιδιοτιμή, και οι δύο υπόχωροι έχουν διάσταση $n - 1$ και άρα $\mathcal{L}_B = R(\rho(B)I - B)$. □

Πρόταση 4.3.2. *Έστω B ένας $n \times n$ μη υποβιβάσιμος, μη αρνητικός πίνακας τέτοιος ώστε $\rho(B) > |\mu|$ για όλες τις ιδιοτιμές μ του πίνακα B, με $\mu \neq \rho(B)$. Τότε $\mathcal{L}_B \cap \mathbb{R}^n_+ = \{0\}$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι το $\mathcal{L}_B$ δεν περιέχει θετικά διανύσματα. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $0 < x \in \mathcal{L}_B$. Από το Λήμμα 4.3.1, ισχύει ότι υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $x = (\rho(B)I - B)y > 0$. Τότε, για κάθε αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$, ισχύει η σχέση

$$((\rho(B) + \varepsilon)I - B)y = x + \varepsilon y > 0.$$

Εφόσον ο πίνακας $C = (\rho(B) + \varepsilon)I - B$ είναι αντιστρέψιμος, έχουμε ότι $C^{-1} > 0$. Επομένως, $y = C^{-1}(x + \varepsilon y) > 0$ και καθώς $x > 0$ έχουμε ότι

$$\rho(B)y > By, \ y > 0.$$

Από τις τελευταίες ανισώσεις συνεπάγεται ότι $\rho(B) > \rho(B)$, το οποίο είναι άτοπο και μας δείχνει ότι $\mathcal{L}_B \cap int(\mathbb{R}^n) = \emptyset$.

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό του θεωρήματος, θεωρούμε $0 \neq x \in \mathcal{L}_B \cap \mathbb{R}^n_+$. Καθώς ο πίνακας B είναι πρωταρχικός (δηλαδή μία δύναμή του είναι θετικός πίνακας) και το $\mathcal{L}_B$ είναι B-αναλλοίωτο, ισχύει $B^{n-1}x \in \mathcal{L}_B \cap int(\mathbb{R}^n) = \emptyset$. Άτοπο. Άρα $\mathcal{L}_B \cap int(\mathbb{R}^n) = \{0\}$. □

Το παρακάτω λήμμα αποδεικνύει ολοκληρωμένα ένα απλό γεγονός: Όταν ένας πίνακας Y έχει μία κυρίαρχη ιδιοτιμή $\mu > 0$ και όταν $a > 0$, τότε η μόνη κυρίαρχη ιδιοτιμή του πίνακα $Y + aI$ είναι η $\mu + a$.

Λήμμα 4.3.3. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας ουσιωδώς μη αρνητικός πίνακας. Τότε για κάθε $h \in (0, h(A))$ έχουμε ότι $1 + h\lambda(A) > |1 + h\mu|$ για κάθε $\mu \in \sigma(A)$ με $\mu \neq \lambda(A)$.*

Απόδειξη. Έστω $a(A) := \min\{a \geq 0 \,|\, A + aI \geq 0\}$ και παρατηρούμε ότι καθώς $a(A) = h(A)^{-1}$, προκειμένου να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτού του λήμματος, αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda(A) + a > |\mu + a|$, για κάθε $\mu \in \sigma(A)\backslash\{\lambda(A)\}$ και κάθε $a > a(A)$.

Προφανώς, $\rho(A + a(A)I) = \lambda(A) + a(A)$ και άρα $\lambda(A) + a(A) \geq |\mu + a(A)|$, για κάθε $\mu \in \sigma(A)\backslash\{\lambda(A)\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι αυτή η ανισότητα είναι αυστηρή για όλα τα $a > a(A)$.

Αν $\lambda(A)+a(A) > |\mu + a(A)|$, για κάθε $\mu \in \sigma(A)\backslash\{\lambda(A)\}$, έχουμε αποδείξει το ζητούμενο. Διαφορετικά, υπάρχει $\omega \in \sigma(A)\backslash\{\lambda(A)\}$ τέτοιο ώστε

$$\lambda(A) + a(A) = |\omega + a(A)|.$$

Θέτουμε $\tau = \lambda(A) + a(A)$ και $\xi = \omega + a(A)$, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ αυθαίρετο και συγκρίνουμε $\tau + \varepsilon$ με $|\xi + \varepsilon|$. Αν $\omega \in \mathbb{R}$, εφόσον $\omega \neq \lambda(A)$, έχουμε $\tau = -\xi$. Τότε

$$\tau + \varepsilon = -\xi + \varepsilon > -\xi - \varepsilon = |\xi + \varepsilon|.$$

Όταν $\omega = a + ib \in \mathbb{C}$, με $b \neq 0$, έχουμε

$$|\xi + \varepsilon|^2 = (a + a(A) + \varepsilon)^2 + b^2 = (a + a(A))^2 + 2(a + a(A))\varepsilon + \varepsilon^2 + b^2. \tag{4.3}$$

Αφού $\tau = |\xi|$ από υπόθεση, $\tau^2 = (a + a(A))^2 + b^2$ και ως συνέπεια της (4.3)

$$|\xi + \varepsilon|^2 = \tau^2 + \varepsilon^2 + 2(a + a(A))\varepsilon.$$

Ωστόσο, $(\tau + \varepsilon)^2 = \tau^2 + \varepsilon^2 + 2\tau\varepsilon$ και αφού $\tau = |\xi| > Re(\xi) = a + a(A)$, συνεπάγεται ότι

$$\lambda(A) + a = \lambda(A) + (a(A) + \varepsilon) = \tau + \varepsilon > |\xi + \varepsilon| = |\omega + (a(A) + \varepsilon)| = |\omega + a|.$$

Επομένως $\lambda(A) + a > |\mu + a|$, για κάθε $\mu \in \sigma(A)\backslash\{\lambda(A)\}$ και κάθε $a > a(A)$. $\square$

Παρατήρηση. *Έστω ένας πίνακας $A \overset{s}{\geq} 0$. Τότε έχουμε τις παρακάτω χρήσιμες παρατηρήσεις:*

1. *Όσον αφορά στο Λήμμα 4.3.3 και το Θεώρημα 1.1.14, αν ο A είναι μη υποβιβάσιμος, τότε για κάθε βήμα $h \in (0, h(A))$, η φασματική ακτίνα του πίνακα $I + hA$ είναι απλή και η μόνη κυρίαρχη ιδιοτιμή του $I + hA$. Δηλαδή, ο $I + hA$ είναι πρωταρχικός πίνακας.*

2. *Καθώς $\sigma(I + hA) = 1 + h\sigma(A)$, αληθεύει ότι για όλα εκτός από πεπερασμένο πλήθος τέτοιων $h \in (0, h(A))$, ο $I + hA$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας.*

Θεώρημα 4.3.4. *Έστω A ένας $n \times n$ μη υποβιβάσιμος, ουσιωδώς μη αρνητικός πίνακας και έστω $h \in (0, h(A))$, τέτοιο ώστε ο $B = I + hA$ είναι αντιστρέψιμος. Έστω $\Gamma = \mathbb{R}^n_+ \cup (-\mathbb{R}^n_+)$. Τότε*

$$X_A(int(\Gamma)) \cup \{0\} = X_A(\Gamma) = (\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{L}_B) \cup \{0\}.$$

Απόδειξη. Έστω πίνακας A και αριθμός h όπως τα περιγράψαμε στον ισχυρισμό του θεωρήματος και έστω w το διάνυσμα Perron του πίνακα $B = I + hA$, και άρα του A. Αφού $B \geq 0$, τα $\mathbb{R}^n_+$ και $-\mathbb{R}^n_+$ είναι αναλλοίωτα υπό τον B. Ακόμη, από το Λήμμα 1.1.20, τα $\mathbb{R}^n_+$ και $-\mathbb{R}^n_+$ είναι θετικά αναλλοίωτα υπό τον A. Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
X_A(\Gamma) &= X_A(\mathbb{R}^n_+ \cup (-\mathbb{R}^n_+)) \\
&= X_A(\mathbb{R}^n_+) \cup X_A(-\mathbb{R}^n_+) \text{ (αφού } \mathbb{R}^n_+ \text{ και } (-\mathbb{R}^n_+) \text{ είναι θετικά αναλλοίωτα)} \\
&= X_{A,h}(\mathbb{R}^n_+) \cup X_{A,h}(-\mathbb{R}^n_+) \text{ (από Θεώρημα 4.2.1)} \\
&= X_{A,h}(int(\mathbb{R}^n_+)) \cup X_{A,h}(int(-\mathbb{R}^n_+)) \cup \{0\} \text{ (αφού } B = I + hA \text{ είναι πρωταρχικός)} \\
&= X_A(int(\mathbb{R}^n_+)) \cup X_A(int(-\mathbb{R}^n_+)) \cup \{0\} \text{ (από Θεώρημα 4.2.1)} \\
&= X_A(int(\Gamma)) \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\mu \in \sigma(B)} \mathcal{N}_\mu(B)$, για κάθε μη μηδενικό αρχικό διάνυσμα $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{L}_B$, από τη μέθοδο των δυνάμεων [9], και από το πρώτο μέρος της Παρατήρησης 4.3, το $B^k x_0$ συγκλίνει στο cw, καθώς το $k \to \infty$, όπου c είναι ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός. Κατά συνέπεια, οι διακριτές (και άρα, από Θεώρημα 4.2.1, οι συνεχείς) τροχιές που ξεκινάνε από το x_0 αναγκαστικά είτε θα μπαίνουν και θα παραμένουν στο $\mathbb{R}^n_+$ (αν $c > 0$) είτε θα μπαίνουν και θα παραμένουν στο $-\mathbb{R}^n_+$ (αν $c < 0$). Δηλαδή,

$$(\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{L}_B) \cup \{0\} \subseteq X_A(\Gamma).$$

Από το Λήμμα 4.3.3, η $\rho(B)$ είναι η μοναδική κυρίαρχη ιδιοτιμή του B. Επομένως, από την Πρόταση 4.3.2, προκύπτει ότι $\mathcal{L}_B \cap int(\mathbb{R}^n_+) = \emptyset$. Συνεπάγεται ότι

$$X_A(\Gamma) \subseteq (\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{L}_B) \cup \{0\},$$

που είναι το ζητούμενο. $\square$

4.4 Αλγοριθμικός χαρακτηρισμός του $X_A(\mathbb{R}^n_+)$ για μη-υποβιβάσιμο πίνακα A

Στόχος μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να αναπτύξουμε και να αναλύσουμε έναν επαναληπτικό αλγόριθμο για τον εντοπισμό στοιχείων του $X_A(\mathbb{R}^n_+)$, βασιζόμενοι στην ακόλουθη ερμηνεία του Θεωρήματος 4.3.4.

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω A ένας $n \times n$ μη υποβιβάσιμος, ουσιωδώς μη αρνητικός πίνακας και $h \in (0, h(A))$ τέτοιο ώστε ο $B = (I + hA)$ αντιστρέψιμος. Έστω, επιπλέον, τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και διανύσματα $x^{(k)} = B^k x_0$ $(k = 0, 1, \dots)$. Τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:*

(i) $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$ *και υπάρχει ακέραιος* $k_0 \geq 0$ *τέτοιος ώστε* $x^{(k)} > 0$ *για όλα τα* $k \geq k_0$.

(ii) $x_0 \notin X_A(\mathbb{R}^n_+) \cup \mathcal{L}_B$ *και υπάρχει ακέραιος* $k_0 \geq 0$ *τέτοιος ώστε* $x^{(k)} < 0$ *για όλα τα* $k \geq k_0$.

(iii) $x_0 \in \mathcal{L}_B$ *και για όλους τους ακέραιους* $k \geq 0$, *το* $x^{(k)}$ *έχει ένα θετικά και ένα αρνητικά προσημασμένο στοιχείο.*

Σε αυτήν την παράγραφο ο A είναι ένας $n \times n$ μη υποβιβάσιμος, μη αρνητικός πίνακας και ο πίνακας $B = I + hA$, με $h \in (0, h(A))$, επιλέγεται έτσι ώστε ο B να είναι αντιστρέψιμος. Σύμφωνα με το πρώτο μέρος της Παρατήρησης 4.3, ο B είναι μη υποβιβάσιμος, μη αρνητικός πίνακας, του οποίου η φασματική ακτίνα, $\rho(B)$, είναι απλή και η μοναδική κυρίαρχη ιδιοτιμή του B. Συνεπώς, θεωρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα B με την εξής διάταξη:

$$\mu_1 > |\mu_2| \geq |\mu_3| \geq \cdots \geq |\mu_n|,$$

όπου $\mu_1 = \rho(B) = 1 + h\lambda(A)$.

Έστω $w_1, \dots, w_n$ μια βάση Jordan του $\mathbb{C}^n$, αποτελούμενη από τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα B (και κατ' επέκταση του πίνακα A). Στην παραπάνω βάση παίρνουμε $w_1 > 0$ να είναι το διάνυσμα Perron του B, το οποίο αντιστοιχεί στην απλή ιδιοτιμή μ_1. Έπεται πως:

$$Span\{w_2, w_3, \dots, w_n\} = \mathcal{L}_A = \bigoplus_{\mu \neq \rho(B)} \mathcal{N}_\mu(B).$$

Ας εξετάσουμε, τώρα, το αρχικό διάνυσμα

$$x_0 = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_n w_n \in \mathbb{R}^n \text{ , όπου} c_j \in \mathbb{C},\ j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.4}$$

και την ακολουθία επαναλήψεων

$$x^{(k)} = B^k x_0 = c_1 B^k w_1 + c_2 B^k w_2 + \cdots + c_n B^k w_n,\ k = 0, 1, \ldots \tag{4.5}$$

Αν $c_1 \neq 0$ στην (4.4), από Μέθοδο Δυνάμεων [9], η ακολουθία $\{x^{(k)}\}$ συγκλίνει στον υπόχωρο που παράγεται από το w_1, με λόγο σύγκλισης $\frac{\mu_2}{\mu_1}$. Αν η $\{x^{(k)}\}$ γίνεται θετικό διάνυσμα, καταλήγουμε πως $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$. Ενώ αν $\{x^{(k)}\}$ γίνεται αρνητικό καταλήγουμε πως $x_0 \notin X_A(\mathbb{R}^n_+)$.

Αν $c_1 = 0$ στην (4.4), τότε, θεωρητικά,$\{x^{(k)}\} \in \mathcal{L}_B$, (για όλα τα $k = 0, 1, \ldots$). Στην πράξη, ωστόσο, η διεύθυνση του w_1 θα εισέλθει στο $x^{(k)}$ λόγω σφαλμάτων στρογγυλοποίησης. Αυτό είναι, για $k \geq 1$, $\{x^{(k)}\} \in Span\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$, με τον συντελεστή του w_1 να είναι μικρού μέτρου, συνήθως της τάξης της ανοχής (tolerance). Με άλλα λόγια, η $\{x^{(k)}\}$ θα εξακολουθεί να συγκλίνει είτε σε θετικό είτε σε αρνητικό πολλαπλάσιο του w_1.

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει πως κατά την υλοποίηση ενός αλγόριθμου ελέγχου αν το x_0 ανήκει στο $X_A(\mathbb{R}^n_+)$ ή όχι, οφείλουμε να είμαστε σε θέση να διακρίνουμε αν η σύγκλιση σε θετικό διάνυσμα έπεται από σφάλμα στρογγυλοποίησης ή όχι. Πιο συγκεκριμένα, αν $\{x^{(k)}\}$ συγκλίνει σε θετικό διάνυσμα είμαστε υποχρεωμένοι να αποφασίσουμε αν $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$ ή $x_0 \in \mathcal{L}_B$. Αναπτύσσουμε στη συνέχεια μια μέθοδο για να το καταφέρουμε.

Υποθέτουμε πως στην (4.5), το $\{x^{(k)}\} = B^k x_0$ γίνεται θετικό ή αρνητικό στο $k = k_0 \geq 0$ για πρώτη φορά. Αν $x^{(k_0)} < 0$, τότε σαφώς $x_0 \notin X_A(\mathbb{R}^n_+)$. Αν $x^{(k_0)} > 0$, κατά συνέπεια $x^{(k)} > 0$ για όλα τα $k \geq k_0$. Θεωρούμε, τότε

$$y_0 := x^{(k_0)} = f_1 w_1 + f_2 w_2 + \cdots + f_n w_n,\ f_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ f_j \in \mathbb{C},\ j = 2, 3, \ldots, n, \tag{4.6}$$

καθώς και την επανάληψη

$$y^{(k)} = B^k y_0,\ k = 0, 1, \ldots \tag{4.7}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- **Περίπτωση 1: $\mathbf{index}_{\mu_2}(\mathbf{B}) = \mathbf{1}$**

Εδώ υποθέτουμε m να είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα του μ_2 και έχουμε

$$B^k y_0 = f_1 \mu_1^k w_1 + \mu_2 \sum_{j=2}^{m+1} f_j w_j + \mathcal{O}(\mu_{m+2}^k) w, \tag{4.8}$$

όπου w ανήκει στον γενικευμένο ιδιόχωρο του μ_{m+2}. Αφού $f_1 \neq 0$, θεωρούμε (για $k = 1, 2, \dots$) την ποσότητα

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1^{(k)} &:= \frac{(B^k y_0)_i}{(B^{k-1} y_0)_i} = \frac{f_1 \mu_1^k (w_1)_i + \left(\sum_{j=2}^{m+1} f_j w_j\right)_i \mu_2^k + \mathcal{O}(\mu_{m+2}^k)}{f_1 \mu_1^{k-1} (w_1)_i + \left(\sum_{j=2}^{m+1} f_j w_j\right)_i \mu_2^{k-1} + \mathcal{O}(\mu_{m+2}^{k-1})} \\ &= \mu_1 + \frac{\left(\sum_{j=2}^{m+1} f_j w_j\right)_i (\mu_2 - \mu_1)}{f_1 (w_1)_i} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{k-1} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mu_{m+2}}{\mu_1}\right)^{k-1}\right),\end{aligned} \tag{4.9}$$

όπου $(y_0)_i = \max_j (y_0)_j$. Το $\hat{\mu}_1^{(k)}$ αποτελεί εκτίμηση του μ_1 με σφάλμα εκτίμησης τάξης $\mathcal{O}\left(\left(\frac{\mu_{m+2}}{\mu_1}\right)^{k-1}\right)$.

Λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (4.5), εφόσον $w_1 > 0$ και $x^{(k_0)} > 0$ (ή < 0), καθώς το $x^{(k_0-1)}$ είναι ούτε αρνητικό ούτε θετικό, έχουμε ότι υπάρχει δείκτης l τέτοιος ώστε

$$\left| c_1 \mu_1^{k_0-1} (w_1)_l \right| \leq \left| \sum_{j=2}^{m+1} c_j (w_j)_l \mu_2^{(k_0-1)} \right|$$

και

$$\left| c_1 \mu_1^{k_0} (w_1)_l \right| > \left| \sum_{j=2}^{m+1} c_j (w_j)_l \mu_2^{(k_0)} \right|.$$

Επομένως, για

$$a_j = \frac{(w_j)_l}{(w_1)_l},\ j = 2, 3, \ldots, m+1,$$

έχουμε

$$\left|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right|^{k_0} < \left|\frac{c_1}{\sum_{j=2}^{m+1} a_j c_j}\right| \leq \left|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right|^{k_0-1}.$$

Δηλαδή, το $\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{k_0}$ εκτιμά σε μέγεθος την ποσότητα $\frac{c_1}{\sum_{j=2}^{m+1} a_j c_j}$ και, επομένως, μπορεί να παίξει τον ρόλο του μέτρου για το αν το c_1 είναι αποτέλεσμα σφάλματος στρογγυλοποίησης ή όχι. Αν είναι κοντά στην τιμή της ανοχής, tol, τότε συμπεραίνουμε ότι $x_0 \in \mathcal{L}_A$. Αν είναι μακριά από το tol, τότε καταλήγουμε ότι $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$ (ή $x_0 \notin X_A(\mathbb{R}^n_+) \cup \mathcal{L}_B$).

Προκειμένου να υπολογίσουμε τον λόγο $\frac{\mu_2}{\mu_1}$, θεωρούμε τη διαφορά μεταξύ δύο όρων της (4.9):

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_1^{(k)} - \hat{\mu}_1^{(k-1)} &= \frac{\left(\sum_{j=2}^{m+1} f_j w_j\right)_i (\mu_2 - \mu_1)}{f_1 (w_1)_i} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{k-1} - \frac{\left(\sum_{j=2}^{m+1} f_j w_j\right)_i (\mu_2 - \mu_1)}{f_1 (w_1)_i} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{k-2} \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mu_{m+2}}{\mu_1}\right)^{k-1}\right) \\
&= \frac{\left(\sum_{j=2}^{m+1} f_j w_j\right)_i (\mu_2 - \mu_1)}{f_1 (w_1)_i} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right) \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{k-2} \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mu_{m+2}}{\mu_1}\right)^{k-1}\right).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Τότε ο λόγος δύο συνεχόμενων διαφορών είναι

$$
r^{(k)} := \frac{\hat{\mu}_1^{(k)} - \hat{\mu}_1^{(k-1)}}{\hat{\mu}_1^{(k-1)} - \hat{\mu}_1^{(k-2)}} = \frac{\frac{\left(\sum_{j=2}^{m+1} f_j w_j\right)_i (\mu_2-\mu_1)}{f_1(w_1)_i}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}-1\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{k-2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mu_{m+2}}{\mu_1}\right)^{k-1}\right)}{\frac{\left(\sum_{j=2}^{m+1} f_j w_j\right)_i (\mu_2-\mu_1)}{f_1(w_1)_i}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}-1\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{k-3} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mu_{m+2}}{\mu_1}\right)^{k-2}\right)}
$$

$$
= \frac{\mu_2}{\mu_1} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mu_{m+2}}{\mu_1}\right)^{k-3}\right). \tag{4.11}
$$

Στην τελευταία εξίσωση έχουμε θεωρήσει ότι όχι όλα τα $f_2, f_3, \ldots, f_{m+1}$ είναι 0. Διαφορετικά, η μεθοδολογία προσεγγίζει το $\frac{\mu_{m+2}}{\mu_1}$, που μπορεί να παίξει τον ίδιο ρόλο στην απόφαση του αν το γεγονός ότι $x^{(k_0)}$ είναι θετικό είναι αποτέλεσμα σφάλματος στρογγυλοποίησης ή όχι.

Θεωρούμε τους λόγους $r^{(k)}$ ως εκτιμήσεις του $\frac{\mu_2}{\mu_1}$. Πρακτικά, μπορούμε να πραγματοποιήσουμε κάποιες επιπλέον επαναλήψεις μετά το k_0 και να υπολογίζουμε συνεχόμενες τιμές του $r^{(k)}$. Όταν δύο συνεχόμενοι όροι διαφέρουν κατά έναν προκαθορισμένο μικρό αριθμό δεκαδικών ψηφίων (1 ή 2), τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το $r^{(k)}$ για να αποφασίσουμε αν $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$ ή όχι.

- **Περίπτωση 2: $\mathbf{index}_{\mu_2}(\mathbf{B}) = \mathbf{m} > \mathbf{1}$**

Έστω $\mu_2 \neq 0$, αλλιώς $x^{(k)}$ θα ανήκει στον ιδιόχωρο Perron για όλα τα $k \geq m$. Επιπλέον, για λόγους απλότητας στην παρουσίαση, θα υλοποιήσουμε την ανάλυση για την περίπτωση που έχουμε $m = 2$ και την αλγεβρική πολλαπλότητα του $\mu_2 \neq 0$ να είναι, επίσης, 2. Η ανάλυση για αρκετά Jordan μπλοκ που αντιστοιχούν στο μ_2 και $m > 2$ είναι ανάλογη. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, το διάνυσμα w_3 είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του μ_2. Τότε, η (4.8) γράφεται ως

$$
B^k y_0 = f_1 \mu_1^k w_1 + \left[\left(f_2 + \frac{f_3}{\mu_2}k\right) w_2 + f_3 w_3\right] \mu_2^k + \mathcal{O}(\lambda_4^k) w, \tag{4.12}
$$

όπου w ανήκει στον γενικευμένο ιδιόχωρο του μ_4. Όπως προηγουμένως

$$
\begin{aligned}
r^{(k)} &= \frac{\hat{\mu}_1^{(k)} - \hat{\mu}_1^{(k-1)}}{\hat{\mu}_1^{(k-1)} - \hat{\mu}_1^{(k-2)}} \\
&= \frac{[(f_2\mu_2 + f_3(k-1))(w_2)_i + f_3\mu_2(w_3)_i]\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right) + f_3(w_2)_i\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}{[(f_2\mu_2 + f_3(k-2))(w_2)_i + f_3\mu_2(w_3)_i]\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right) + f_3(w_2)_i\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)} \frac{\mu_2}{\mu_1} \\
&+ \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mu_3}{\lambda_2}\right)^{k-3}\right).
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

Ξαναγράφουμε την (4.13) ως

$$
r^{(k)} = \frac{\hat{\mu}_1^{(k)} - \hat{\mu}_1^{(k-1)}}{\hat{\mu}_1^{(k-1)} - \hat{\mu}_1^{(k-2)}} = \frac{f_1' + f_2'(k-1)}{f_1' + f_2'(k-2)} \frac{\mu_2}{\mu_1} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mu_3}{\lambda_2}\right)^{k-3}\right). \tag{4.14}
$$

Ο συντελεστής του $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ δεν είναι 1. Ωστόσο, τείνει στο 1 όταν το k τείνει στο άπειρο. Αυτό σημαίνει πως η σύγκλιση τελείται με βραδύτερο ρυθμό στη συγκεκριμένη περίπτωση. Ωστόσο, το $r^{(k)}$ είναι εφικτό να διατελέσει και εδώ έναν καταλυτικό ρόλο.

Δίνουμε, στην επόμενη σελίδα, τον αλγόριθμο (σε ψευδοκώδικα), ο οποίος υλοποιεί την προαναφερθείσα ανάλυση:

Algorithm (deciding membership in $X_A(\mathbb{R}^n_+)$)

Input: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (irreducible essentially nonnegative), $x(0) \in \mathbb{R}^n, \varepsilon$
% ε is the desired precision for the estimate $\mu 2/\mu 1$ (e.g. 10^{-2})
% tol below denotes the machine precision (e.g. eps in Matlab)

compute $h(A) = \sup\{h| \min_j(1 + ha_{jj}) > 0\}$
determine $h \in (0, h(A))$ such that $B = I + hA$ is invertible
compute $x^{(k)} = Bx^{(k-1)}$ $(k = 1, 2, \dots)$
until $x^{(k)}$ is positive or negative at $k = k_0$.
if $x^{(k_0)} < 0$ then
  Output: $x^{(0)} \notin X_A(\mathbb{R}^n_+)$; stop
else
  % Check if positivity is due to round−off error
  reset $x^{(0)} = x^{(k_0)}$; $i =$ index of $\max_j((x^{(0)})_j)$
  compute $x^{(k)} = Bx^{(k-1)}$ $(k = 1, 2, \dots)$

$$\hat{\mu}_1^{(k)} = \frac{(x^{(k)})_i}{(x^{(k-1)})_i}$$

$$r^{(k)} = \frac{\hat{\mu}_1^{(k)} - \hat{\mu}_1^{(k-1)}}{\hat{\mu}_1^{(k-1)} - \hat{\mu}_1^{(k-2)}}$$

  until $(\left|r^{(k)} - r^{(k)-1}\right| \le \varepsilon \left|r^{(k)}\right|)$;
  if $(r^{(k)})^{k_0} \sim tol$ then
  Output: $x^{(0)} \notin X_A(\mathbb{R}^n_+)$; stop;
else
  Output: $x^{(0)} \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$; stop;
  end if
end if
end

4.5 Αριθμητική αναπαράσταση

Σε αυτήν την παράγραφο εφαρμόζουμε την επαναληπτική μέθοδο, η οποία αποδείχτηκε στο Θεώρημα 4.4.1 και υλοποιήθηκε στον αλγόριθμο της Παραγράφου 4.5.

Παράδειγμα 4.5.1. *Έστω ο μη υποβιβάσιμος και ουσιωδώς μη αρνητικός πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 3 & 2 \\ 2 & -1/4 & 1 \\ 3 & 3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε πως $h(A) = 4$, καθώς για να έχουμε $1+ha_{ii} > 0 \Longrightarrow 1-h1/4 > 0 \Longrightarrow h < 4$, και άρα πρέπει να διαλέξουμε $h \in (0,4)$ τέτοιο ώστε ο $B = I + hA$ να είναι αντιστρέψιμος. Αφού οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 4.6047$, $\lambda_2 = -2.4890$ και $\lambda_3 = -1.6990$, έπεται πως ο B είναι αντιστρέψιμος για κάθε $h \in (0, h(A))$ εκτός από $h = 1/2.4890$ και $h = 1/1.6990$. Θέτουμε $h = 3$ και δουλεύουμε με τον μη αρνητικό, μη υποβιβάσιμο πίνακα

$$B = I + hA = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 6 \\ 6 & 1/4 & 3 \\ 9 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε πως οι ιδιοτιμές του B είναι $\mu_1 = 14.8140 > |\mu_2| = |-6.4671| > |\mu_3| = |-4.0970|$ και κατά συνέπεια ο B έχει, όπως αναμενόταν, μία κυρίαρχη ιδιοτιμή. Επιθυμούμε να θεωρήσουμε και τις 3 διαφορετικές περιπτώσεις του Θεωρήματος 4.4.1 και του αλγόριθμου. Εκκινούμε με την επιλογή αρχικού σημείου $x_0 = (0, -1, 10)^T$. Συνεχίζουμε με το σχήμα μας και λαμβάνουμε

$$x^{(1)} = Bx_0 = \begin{bmatrix} 51 \\ 29.75 \\ 11 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3_+,$$

δηλαδή, σε μόλις μία επανάληψη η ακολουθία $x^{(k)}$ έγινε θετική και, έτσι, πιθανώς έχουμε $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^3_+)$. Αν και η κατάσταση είναι αρκετά ξεκάθαρη, συνεχίζουμε με τα υπόλοιπα βήματα του αλγορίθμου ώστε να παρουσιάσουμε τον τρόπο λειτουργίας του στο σύνολό του.

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των δυνάμεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(1)}$ κανονικοποιημένο ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Έπειτα υπολογίζουμε $r^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, προκειμένου να υπολογίσουμε τον λόγο $\frac{\mu_2}{\mu_1}$. Μετά από 9 επαναλήψεις παρατηρούμε σύγκλιση των $r^{(k)}$ σε δύο δεκαδικά ψηφία, $r^{(9)} \approx -0.44$. το οποίο είναι μακριά από το tol. Έτσι επιβεβαιώνουμε πως $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^3_+)$. Σημειώνουμε πως αφού το ενδιαφέρον μας στρέφεται πρωτίστως σε μια ποιοτική περιγραφή των στοιχείων του $x^{(k)}$ (και όχι της σύγκλισης), δεν ρυθμίζουμε το μέτρο των επαναληπτικών διανυσμάτων.

Ας θεωρήσουμε τώρα το αρχικό διάνυσμα $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & -80 & 12 \end{bmatrix}^T$. *Δρώντας τον* B *στο* x_0 *μόλις δύο φορές, λαμβάνουμε ένα κατά στοιχείο αρνητικό διάνυσμα:*

$$x^{(1)} = Bx_0 = \begin{bmatrix} -648 \\ 16 \\ -696 \end{bmatrix},\ x^{(2)} = Bx^{(1)} = \begin{bmatrix} -5328 \\ -5972 \\ -7080 \end{bmatrix}.$$

Έπεται, σαν συνέπεια του Θεωρήματος 4.4.1 και του αλγόριθμου, πως $x \notin X_A(\mathbb{R}^n_+) \cup \mathcal{L}_B$.

Στη συνέχεια, επιλέγουμε $x_0 = w_2 + w_3$, *όπου* w_2 *και* w_3 *είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις* μ_2 *και* μ_3 *αντίστοιχα, δηλαδή, το* x_0 *είναι στοιχείο του* $\mathcal{L}_B$. *Το σχήμα μας παράγει το αναμενόμενο αποτέλεσμα: για όλες τις επαναλήψεις έως την 44η, τα διανύσματα* $x^{(k)}$ *έχουν θετικά και αρνητικά στοιχεία, τα οποία ποικίλουν ανάλογα με το αν η δύναμη του* B *είναι περιττή ή άρτια. Συγκεκριμένα,* $(x^{(k)})_1 > 0$ *και* $(x^{(k)})_{2,3} < 0$ *αν η δύναμη είναι περιττή,* $(x^{(k)})_1 < 0$ *και* $(x^{(k)})_{2,3} > 0$ *αν η δύναμη είναι άρτια:*

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 5.1022 \\ -1.5762 \\ -4.5204 \end{bmatrix},\ x^{(2)} = \begin{bmatrix} -32.7236 \\ 16.6129 \\ 21.0730 \end{bmatrix}, \textit{κ.ο.κ.}$$

Όμως, με την εισαγωγή της κατεύθυνσης του w_1 *λόγω σφάλματος στρογγυλοποίησης, κατά το 44ο βήμα, η επανάληψη γίνεται θετική.*

Ο αλγόριθμος, έπειτα, εφαρμόζει τη μέθοδο των δυνάμεων με αρχικό διάνυσμα το κανονικοποιημένο $x^{(44)}$ *ώστε να εκτιμηθεί ο λόγος* $\frac{\mu_2}{\mu_1}$. *Κατά την 7η επανάληψη της μεθόδου των δυνάμεων, επιτυγχάνεται σύγκλιση σε δύο δεκαδικά ψηφία:* $r^{(7)} \approx -0.44$. *Συνεπώς το* $(-0.44)^{44} = -2.0508e - 0.16$ *είναι της τάξης της ανοχής του μηχανήματος (δουλεύοντας σε*

Matlab). Ως εκ τούτου έχουμε $x_0 \in \mathcal{L}_B$.

Τέλος, εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία στο $x_0 = w_2 + w_3$ *με* w_2 *και* w_3 *με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων. Δηλαδή,* $x_0 = \begin{bmatrix} -0.7992 & 0.0732 & 1.0070 \end{bmatrix}^T$. *Βρίσκουμε θετικό διάνυσμα για πρώτη φορά στην 13η επανάληψη και εκτιμούμε τον λόγο στην 8η επανάληψη της μεθόδου των δυνάμεων σε ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων* $r^{(8)} = -0.44$. *Καθώς* $(-0.44)^{13} = -2.3168e-005$, *το οποίο είναι μακριά από το* tol, *καταλήγουμε πως* $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^3_+)$. *Αυτό είναι, πράγματι, το αναμενόμενο αποτέλεσμα, διότι η αποκοπή των* w_2 *και* w_3 *που χρησιμοποιήσαμε (στα 4 δεκαδικά ψηφία), εισήγαγε μια κατεύθυνση σαν του* w_1.

Εφόσον ο έλεγχος, τυπικά, μας παρέχει ένα κατά στοιχείο θετικό ή αρνητικό διάνυσμα σε λιγοστές επαναλήψεις, δοθέντος ενός διανύσματος το οποίο παράγει ένα προβλέψιμο μοτίβο στην μεταβολή των πρόσημων για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, είναι ένα καλό σημάδι πως το διάνυσμα δεν ανήκει στο $X_A(\mathbb{R}^n_+)$.

Παράδειγμα 4.5.2. *Θεωρούμε τον μη υποβιβάσιμο και ουσιωδώς μη αρνητικό πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 4/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Αφού $h(A) = 3$, *διαλέγουμε* $h \in (0, 3)$ *τέτοιο ώστε ο* $B = I + hA$ *να είναι αντιστρέψιμος. Καθώς έχουμε τις ιδιοτιμές του* A *να είναι* $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, *συνεπάγεται ότι ο* B *αντιστρέψιμος για όλα τα* $h \in (0, h(A))$, *εκτός από* $h = 1$. *Θέτουμε* $h = 2$ *και εργαζόμαστε με τον μη αρνητικό και μη υποβιβάσιμο πίνακα*

$$B = I + hA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 10/3 & 1/3 & 4/3 \\ 2/3 & 8/3 & 5/3 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές του B *είναι* $\mu_1 = 5$ *και* $\mu_2 = \mu_3 = -1$ *με* $index_{\mu_2}(B) = 2$. *Πρώτα, επιλέγουμε* $x_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$ *και βρίσκουμε* $x^{(1)} = Ax_0 > 0$. *Δηλαδή, σε απλώς 1 επανάληψη είμαστε σε θέση να αποφανθούμε πως* $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^3_+)$. *Η διαδικασία προσδιορισμού* *του λόγου $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ συγκλίνει στην 9η επανάληψη στο -0.23.*

Έπειτα, επιλέγουμε $x_0 = w_2 + w_3$, όπου w_2 και w_3 είναι το ιδιοδιάνυσμα και το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του μ_2 αντίστοιχα, δηλαδή $x_0 \in \mathcal{L}_B$. Λαμβάνουμε πως το $x^{(k)}$ γίνεται θετικό για πρώτη φορά στο $k = 27$. Η εφαρμογή του δεύτερου μέρους της διαδικασίας μας εκτιμά τον λόγο $r^{(k)}$ σε δύο δεκαδικά ψηφία στο $k = 6$ να είναι $r^{(6)} = -0.21$. Αφού $(-0.21)^{27} = -5.0110e-019$, επιβεβαιώνουμε ότι $x_0 \in \mathcal{L}_B$. Σημειώνουμε πως αν και $index_{\mu_2}(B) = 2$, το δεύτερο μέρος της διαδικασίας μας συγκλίνει γρήγορα (6 επαναλήψεις) συγκριτικά με τη βραδύτερη συμπεριφορά του πρώτου μέρους (27 επαναλήψεις).

4.6 Η γενική περίπτωση

Όταν $A \overset{s}{\geq} 0$ είναι πιθανώς υποβιβάσιμος, ένας αλγοριθμικός χαρακτηρισμός του $X_A(\mathbb{R}^n_+)$ μέσω του πίνακα $B = I + hA$ συνεχίζει να είναι εφικτός, καθώς παραμένει σε ισχύ η $X_A(\mathbb{R}^n_+) = X_{A,h}(\mathbb{R}^n_+)$. Όμως, η ανάπτυξη ενός τέτοιου αλγόριθμου περιπλέκεται από ποικίλους παράγοντες, όπως:

- Η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα, καθώς και ο δείκτης του $\rho(B)$ μπορούν είναι μεγαλύτερα της μονάδας.
- Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο $\rho(B)$ μπορούν να επιλεγούν μη αρνητικά, όχι, όμως, και απαραίτητα θετικά.
- Μπορεί να υπάρχουν μη αρνητικά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μη κυρίαρχες ιδιοτιμές του B.

Κατά συνέπεια των παραπάνω επιπλοκών, είναι εφικτό, άλλα αξιοσημείωτα δυσκολότερο, να σχεδιαστεί ένας «Black Box» αλγόριθμος ελέγχου της ιδιότητας μέλους του $X_A(\mathbb{R}^n_+)$ στη γενική περίπτωση. Εδώ θα περιοριστούμε να περιγράψουμε τις πιθανές περιπτώσεις.

Στο σημείο αυτό υπενθυμίζουμε κάποιος ορισμούς. Θεωρούμε έναν πίνακα B είναι σε **κανονική μορφή Frobenius** όταν οι κορυφές του προσανατολισμένου γράφου του είναι διαχωρισμένες σε κλάσεις ισοδυναμίας. Μία κλάση καλείται **βασική** αν το αντίστοιχο μπλοκ της κανονικής μορφής Frobenius έχει φασματική ακτίνα ίση με $\rho(B)$. Μία κλάση καλείται **τελική** αν καμία άλλη κλάση δεν έχει πρόσβαση σε αυτήν στον μειωμένο γράφο του B [8].

Από Λήμμα 4.3.3 μπορούμε να υποθέσουμε πως ο πίνακας B έχει p διαφορετικές ιδιοτιμές, διατεταγμένες με τον ακόλουθο τρόπο

$$\rho(B) = \mu_1 > |\mu_2| \geq |\mu_3| \geq \cdots \geq |\mu_p|$$

με πολλαπλότητες $m_1, \ldots, m_p$ αντίστοιχα. Έστω, επιπλέον, $w_1, \ldots, w_n$ μία βάση Jordan του $\mathbb{C}^n$, αποτελούμενη από (γενικευμένα) ιδιοδιανύσματα του B. Μπορούμε να διαλέξουμε τη συγκεκριμένη βάση έτσι ώστε όλα τα $w_1, \ldots, w_{m_1}$ να είναι μη αρνητικά [8]. Έπεται πως

$$Span\{w_{m+1}, w_{m+2}, \ldots, w_n\} = \mathcal{L}_B = \bigoplus_{\mu \neq \rho(B)} \mathcal{N}_\mu(B).$$

Θεωρούμε, τώρα, ένα αρχικό διάνυσμα x_0 και επαναλήψεις $x^{(k)}$ όπως στις (4.4) και (4.5), αντίστοιχα.

Για λόγους ευκολίας συμβολίζουμε τους συντελεστές της (4.4) που σχετίζονται με το $\rho(B)$ ως

$$\hat{c} = (c_1 c_2 \ldots _{\mu_1})^T.$$

Περίπτωση 1: $index_{\rho(B)} = 1$

Αν $\hat{c} \neq 0$, η ακολουθία $\{x^{(k)}\}$ πλησιάζει τον υπόχωρο που δημιουργείται από τα $\{w_1, \ldots, w_{m_1}\}$ με λόγο σύγκλισης $\left|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right|$. Στην υποβιβάσιμη περίπτωση, το $x^{(k)}$ δεν γίνεται απαραίτητα θετικό ή αρνητικό. Για να γίνει θετικό, πρέπει $\hat{c} > 0$ και όλες οι τελικές κλάσεις της κανονικής μορφής Frobenius του πίνακα B πρέπει να είναι βασικές κλάσεις [8].

Αν $\hat{c} \geq 0$, $\hat{c} \neq 0$, είναι δυνατόν να υπάρχουν στοιχεία του $x^{(k)}$ τα οποία τείνουν στο μηδέν. Αυτά τα στοιχεία αντιστοιχούν σε κλάσεις που είναι τελικές και όχι βασικές. Αν για αρκετά μεγάλα k όλα τα στοιχεία που τείνουν στο μηδέν είναι θετικά, τότε $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$. Αν υπάρχει αρνητικό στοιχείο ή στοιχείο το οποίο αλλάζει πρόσημο με περιοδικό τρόπο τότε $x_0 \notin X_A(\mathbb{R}^n_+)$.

Αν $\hat{c} \ngeq 0$, το $x^{(k)}$ δεν θα γίνει μη αρνητικό διάνυσμα στο όριο. Σε αυτήν την περίπτωση τα σφάλματα στρογγυλοποίησης δεν διενεργούν κάποιον ρόλο.

Συνεπώς, από τις παραπάνω παρατηρήσεις, ένας αριθμητικός έλεγχος για την απόφαση αν $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$ ή όχι θα πρέπει να βρίσκεται παρακάτω:

1. Αν $\{x^{(k)}\}$ γίνεται θετικό διάνυσμα, καταλήγουμε πως $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$. Αλλιώς

2. Ελέγχουμε αν τα στοιχεία που τείνουν στο μηδέν είναι θετικά ή όχι. Ο λόγος σύγκλισης είναι το πολύ $\left|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right|$. Άρα, για αρκετά μεγάλο k, οποιοδήποτε στοιχείο τείνει στο μηδέν γίνεται μικρότερο από την ανοχή κατ' απόλυτη τιμή. Αν είναι αρνητικό εκείνη τη στιγμή, καταλήγουμε $x_0 \notin X_A(\mathbb{R}^n_+)$. Αν είναι θετικό το αντικαθιστούμε με μηδέν (δηλαδή το όριο του) και συνεχίζουμε τις επαναλήψεις της μεθόδου των δυνάμεων. Με αυτόν τον τρόπο, σε κάποια επανάληψη k, όλα τα στοιχεία που τείνουν στο μηδέν θα αντικατασταθούν με μηδέν.

3. Θεωρούμε τα στοιχεία που αντιστοιχούν σε βασικές κλάσεις. Εφαρμόζουμε την διαδικασία στην μη υποβιβάσιμη περίπτωση ώστε να εκτιμήσουμε τον λόγο $\frac{\mu_2}{\mu_1}$. Αν $\{x^{(k)}\}$ γίνεται μη αρνητικό, ελέγχουμε αν αυτό οφείλεται σε σφάλμα στρογγυλοποίησης όπως στην μη υποβιβάσιμη περίπτωση. Αν παραμένουν κάποια αρνητικά στοιχεία όταν $\left|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right|^k < tol$, καταλήγουμε πως $x_0 \notin X_A(\mathbb{R}^n_+)$.

Αν $\hat{c} = 0$, τότε, θεωρητικά, $x^{(k)} \in \mathcal{L}_B(k = 0, 1, \dots)$. Η μέθοδος των δυνάμεων θα συγκλίνει στο άθροισμα των ιδιόχωρων που αντιστοιχούν στην πιο κυρίαρχη ιδιοτιμή της (4.4). Δεδομένου ότι B μη υποβιβάσιμος, μια ιδιοτιμή μ_j $(j \geq 2)$ μπορεί να έχει μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα. Έτσι, είναι εφικτό $x_0 \in X_A(\mathbb{R}^n_+)$. Για να αποφασίσουμε, εφαρμόζουμε τον αριθμητικό έλεγχο που περιγράφεται παραπάνω για $\hat{c} \neq 0$.

Περίπτωση 2: $index_{\rho(B)} > 1$

Σε αυτήν την περίπτωση, η συμπεριφορά της μεθόδου των δυνάμεων διαφέρει σε έναν βαθμό. Υποθέτουμε, αρχικά, πως υπάρχει μόνο ένα μπλοκ στην κανονική μορφή Jordan που αντιστοιχεί στην μ_1, οπότε $s = m_1$. Έπειτα

$$
\begin{aligned}
x^{(k)} &= B^k x_0 = c_1 B^k w_1 + c_2 B^k w_2 + \dots + c_s B^k w_s + \dots + c_n B^k w_n \\
&= c_1 \mu_1^k w_1 + c_2 \left(\mu_1^k w_2 + \binom{k}{1} \mu_1^{k-1} w_1 \right) + \dots \\
&+ c_s \left(\mu_1^k w_s + \binom{k}{1} \mu_1^{k-1} w_{s-1} + \dots + \binom{k}{s-1} \mu_1^{k-s+1} w_1 \right) \\
&+ c_{m_1+1} \mu_2^k w_{m_1+1} + \dots + c_n \mu_p^k w_n \ (k = 0, 1, \dots).
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Εμφανώς, η μέθοδος των δυνάμεων συγκλίνει στο κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα w_1, αλλά η σύγκλιση είναι ιδιαίτερα αργή. Αν κανονικοποιήσουμε το $x^{(k)}$ διαιρώντας με $\binom{k}{s-1}\mu_1^{k-s+1}$, θα συγκλίνει όπως το $1/k$. Αυτή η σύγκλιση συμβαίνει για τα στοιχεία του $x^{(k)}$, για τα οποία μερικά γενικευμένα ιδιοδιανύσματα έχουν αντίστοιχες θετικές τιμές. Ο λόγος σύγκλισης των στοιχείων του $x^{(k)}$ που αντιστοιχούν σε μη βασικές κλάσεις είναι επίσης το πολύ $\left|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right|$. Έτσι, γίνονται μικρότερα από το *tol* γρήγορα και αντικαθίστανται από μηδενικά. Τα εναπομείναντα μη μηδενικά στοιχεία αντιστοιχούν σε βασικές κλάσεις της κανονικής μορφής Jordan. Εύκολα διαπιστώνουμε πως ο κυρίαρχος όρος της (4.15) είναι

$$
c_s \left(\mu_1^k w_s + \binom{k}{1} \mu_1^{k-1} w_{s-1} + \dots + \binom{k}{s-1} \mu_1^{k-s+1} w_1 \right) \tag{4.16}
$$

και, έτσι, το κανονικοποιημένο όριο του $x^{(k)}$ είναι $c_s w_1$. Αυτό σημαίνει πως το κοινό πρόσημο όλων των στοιχείων του $x^{(k)}$ που αντιστοιχούν σε μη μηδενικά στοιχεία του διανύσματος (4.16) καθορίζεται από το πρόσημο του c_s. Αν $c_s = 0$, τότε το πρόσημο καθορίζεται από c_{s-1} κλπ. Στην περίπτωση κατά την οποία έχουμε πολλά Jordan μπλοκ, σε κάθε μπλοκ αντιστοιχεί ένα σύνολο στοιχείων, των οποίων το πρόσημο καθορίζεται από το συντελεστή με το μεγαλύτερο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα στην αλυσίδα Jordan. Για να αποφανθούμε αν $x_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n)$ ή όχι, μπορούμε να προσαρμόσουμε και να εφαρμόσουμε τον αριθμητικό έλεγχο της περίπτωσης 1. Το βήμα καθορισμού του πρόσημου των στοιχείων που τείνουν στο μηδέν λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο. Στο βήμα εκτίμησης του λόγου $\frac{\mu_2}{\mu_1}$, αφού η σύγκλιση είναι σαν $1/k$, μπορεί να δειχθεί πως ο λόγος $r(k)$ τείνει στη μονάδα σαν $\frac{k-s-2}{k-s}$. Αυτό μας πληροφορεί πως βρισκόμαστε σε υποβιβάσιμη μορφή με $index_{\mu_1}(B) > 1$. Το αποτέλεσμα είναι πως η απόφαση αν $x_0 \in X_A(\mathbb{R}_+^n)$ μπορεί να παρθεί, όμως απαιτείται μεγάλος αριθμός επαναλήψεων.

Κεφάλαιο 5

Μοντέλα εφαρμογών

5.1 Ανάλυση εισόδου-εξόδου (**Input-output analysis**)

Η δομή της ανάλυσης εισόδου-εξόδου είναι ένα θετικό γραμμικό σύστημα σε ισορροπία και χρησιμοποιήθηκε, αρχικά, από τον οικονομολόγο Wassily Leontief για να ερμηνεύσει τα δεδομένα της παραγωγής των Ηνωμένων Πολιτειών. Το μοντέλο δεν εξηγεί τη δυναμική των τιμών και της παραγωγής, αλλά επιτρέπει την αξιολόγηση των επιπέδων παραγωγής που εγγυώνται την κάλυψη της συνολικής ζήτησης του οικονομικού συστήματος.

Σε αυτήν την παράγραφο, παρουσιάζουμε, πρώτα, την ανάλυση εισόδου-εξόδου στην απλούστερη μορφή της και, στη συνέχεια, πραγματοποιούμε κάποιες σκέψεις σχετικά με τη δυναμική των τιμών και της παραγωγής σε ένα οικονομικό σύστημα. Ωστόσο, προκειμένου να συζητήσουμε το τελευταίο θέμα υπό την έννοια των θετικών συστημάτων, είμαστε υποχρεωμένοι να κάνουμε αρκετά ισχυρές υποθέσεις για τους μηχανισμούς παραγωγής και τη διαμόρφωση των τιμών. Παρόλο που κάνουμε αυτές τις απλοποιήσεις, βλέπουμε ότι τα μοντέλα ερμηνεύουν, με αρκετά ικανοποιητικό τρόπο, τη δυναμική πραγματικών οικονομικών συστημάτων.

Η ανάλυση εισόδου-εξόδου είναι, εν συντομία, ένα ισοζύγιο μάζας αγαθών που παράγονται και καταναλώνονται σε ένα σύστημα που χαρακτηρίζεται από n κλάδους. Αν η ποσότητα ενός αγαθού που παράγεται σε μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο από έναν τομέα i συμβολίζεται με x_i, τότε το ισοζύγιο επιβάλλει ότι μια τέτοια ποσότητα καλύπτει τη ζήτηση $b_i \geq 0$ και τη συναλλαγή των παραγωγών όλων των κλάδων, δηλαδή

$$x_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} z_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ i = 1, \ldots, n, \tag{5.1}$$

όπου $z_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι η ποσότητα του αγαθού i που αγοράστηκε από τον κλάδο j. Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν επεμβάσεις στην παραγωγή, δηλαδή, το z_{ij} εξαρτάται μόνο από το x_j, οι αγορασθείσες ποσότητες z_{ij} δίνονται από την εξίσωση

$$z_{ij} = a_{ij} x_j, \tag{5.2}$$

όπου a_{ij} είναι ένας τεχνολογικός συντελεστής που αντιπροσωπεύει, σε κατάλληλες μονάδες, την ποσότητα του αγαθού i που χρειαζόταν για να παραχθεί μια μονάδα αγαθού j. Προφανώς, $a_{ij} \geq 0$ για να είναι ο πίνακας $A = [a]_{ij}$ μη αρνητικός. Εισάγοντας το διάνυσμα παραγωγής $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T$ και το διάνυσμα κατανάλωσης $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}^T$, οι εξισώσεις (5.1) και (5.2) μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$x = Ax + b. \tag{5.3}$$

Προκειμένου να αποφύγουμε περιπτώσεις που δεν έχουν νόημα οικονομικά, από εδώ και πέρα θα θεωρούμε τα A και b θετικά.

Η ανάλυση εισόδου-εξόδου αποτελείται από δύο φάσεις. Η πρώτη είναι η εκτίμηση των τεχνολογικών συντελεστών a_{ij}, χρησιμοποιώντας όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες και δεδομένα, και της ζήτησης b_i, ενώ η δεύτερη είναι ο υπολογισμός των επιπέδων παραγωγής μέσω της (5.3). Η πρώτη φάση είναι, μακράν, η πιο λεπτή και δύσκολη και βασίζεται, σε πολύ μεγάλο βαθμό, σε κατάλληλη στατιστική ανάλυση. Στην περίπτωση πολύ ομαδοποιημένων μελετών, ο πίνακας A μπορεί να είναι πολύ μεγάλος και ο εντοπισμός του μπορεί να περιλαμβάνει ολόκληρα ιδρύματα ή ερευνητικές ομάδες που συχνά είναι υπεύθυνα και για την ενημέρωση των τεχνολογικών συντελεστών καθώς και τς ζήτησης. Αυτά τα θέματα απαιτούν εξειδίκευση στην τεχνολογική καινοτομία και στα κοινωνικοοικονομικά συστήματα και είναι, επομένως, πολύ πέρα από τους στόχους αυτού του βιβλίου. Αντίθετα, η δεύτερη φάση της ανάλυσης σχετίζεται αυστηρά με θετικά συστήματα.

Ίσως, το πιο θεμελιώδες ερώτημα που μπορεί να θέσει κάποιος είναι το να γνωρίζει εάν ένα σύστημα παραγωγής μπορεί να λειτουργεί μόνιμα (δηλαδή σε ισορροπία) με όλους τους κλάδους του ενεργούς. Αυτό ισοδυναμεί με το ερώτημα εάν η εξίσωση (5.3) δέχεται μία αυστηρά θετική λύση x. Επιπλέον, μπορεί κανείς να αναρωτηθεί πώς μια τέτοια λύση μπορεί να αξιολογηθεί αριθμητικά και πόσο ευαίσθητη είναι στις παραλλαγές που προκαλούνται από την τεχνολογική καινοτομία ή από κοινωνικοοικονομικές αλλαγές. Για να απαντήσουμε σε αυτά τα ερωτήματα, μπορούμε να θεωρήσουμε την έκφραση (5.3) ως τη σχέση που ικανοποιείται από το θετικό γραμμικό σύστημα

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t), \tag{5.4}$$

σε ισορροπία $[x(t) = x(t+1) = x]$, δεδομένου ότι η είσοδος είναι μοναδιαία ($u(t) = 1$). Εμείς, ωστόσο, δεν επιτρέπεται να φανταστούμε ότι το σύστημα (5.4) έχει κάποιο νόημα υπό την έννοια της δυναμικής της παραγωγής. Δεδομένου ότι δεν υπάρχουν περιορισμοί στη δομή των συστημάτων παραγωγής ή στις τιμές των τεχνολογικών συντελεστών, το σύστημα (5.4) είναι ένα γενικό θετικό σύστημα. Αυτό σημαίνει ότι η ανάλυση εισόδου-εξόδου δεν είναι τίποτα άλλο, θεωρητικά, παρά, το ζήτημα της αυστηρής θετικότητας της ισορροπίας ενός θετικού γραμμικού συστήματος. Εφόσον ένα τέτοιο θέμα περιλαμβάνει τη σταθερότητα του συστήματος, οι θεωρητικές συνεισφορές στην ανάλυση εισόδου-εξόδου θα πρέπει να θεωρούνται ως γενικές συνεισφορές στη θεωρία της σταθερότητας και της θετικότητας της ισορροπίας θετικών συστημάτων. Σε πραγματικές καταστάσεις, το σύστημα (5.4) είναι διεγέρσιμο, αφού οι απαιτήσεις b_i είναι όλες θετικές. Αυτό συνεπάγεται ότι σε μια τέτοια περίπτωση η (5.3) δέχεται αυστηρά θετικό διάνυσμα παραγωγής εάν και μόνο εάν η ιδιοτιμή Frobenius λ_F του A είναι < 1. Σαφώς, η συνθήκη $\lambda_F < 1$, υποδηλώνει ότι η λύση του (5.3) μπορεί να ληφθεί αριθμητικά, χρησιμοποιώντας αναδρομικά την εξίσωση (5.4) με οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $x(0) \geq 0$. Τέλος, η συνιστώσα της μέγιστης σχετικής ευαισθησίας, μπορεί να ερμηνευθεί με όρους ανάλυσης εισόδου-εξόδου, λέγοντας ότι μια διατάραξη της ζήτησης του αγαθού i ή των τεχνολογικών συντελεστών $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ επηρεάζει περισσότερο την παραγωγή του κλάδου i από την παραγωγή οποιουδήποτε άλλου κλάδου.

Προφανώς, η εξίσωση (5.3) θα πρέπει να τροποποιηθεί αν οι παραγωγές μετρώνται σε διαφορετικές μονάδες. Για παράδειγμα, οι παραγωγές μπορεί να μετρώνται σε νομισματικές μονάδες

$z_i,\ i = 1, \ldots, n$, δεδομένου ότι υπάρχει ένα σύνολο τιμών (των αγαθών) $p_1, \ldots, p_n$, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν αναφορά.

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$z_i = p_i x_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

άρα η (5.3) γίνεται

$$z = A^* z + b^*, \tag{5.5}$$

με

$$a^*_{ij} = \frac{p_i}{p_j} a_{ij} \quad b^*_i = p_i b_i.$$

Το ενδιαφέρον της (5.5) βρίσκεται στο γεγονός ότι το άθροισμα c^+_j των στοιχείων της j-οστής στήλης του πίνακα A^* έχει μία ακριβή οικονομική σημασία. Πράγματι,

$$c^*_j = \sum_{i=1}^{n} a^*_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i a_{ij}}{p_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij}}{p_j},$$

έτσι ώστε το c^*_j να είναι ο λόγος ανάμεσα στο κόστος παραγωγής $\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij}$ μίας μονάδας του αγαθού j και της οικονομικής αξίας p_j της ίδιας μονάδας. Συνεπάγεται ότι η συνθήκη

$$c^*_j < 1$$

υπονοεί ότι ο τομέας j είναι «αποτελεσματικός» με την κλασική οικονομική έννοια (έσοδα μεγαλύτερα από το κόστος). Έτσι, αν όλοι οι τομείς ενός οικονομικού συστήματος είναι αποτελεσματικοί, τότε η ιδιοτιμή Frobenius του A^* είναι < 1, έτσι ώστε η (5.5) (και, άρα, η (5.3)) δέχεται μια αυστηρά θετική λύση.

Παράδειγμα 5.1.1. *Προσδιορίστε εάν η αποτελεσματικότητα όλων των τομέων παραγωγής ενός οικονομικού συστήματος είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη λύσης $x \gg 0$ του* (5.3). *Στη συνέχεια, δώστε μια οικονομική ερμηνεία του αποτελέσματος.*

Ας δείξουμε, τώρα, πώς είναι δυνατόν να αποκτηθούν επίσημα συστήματα για τη διερμηνεία της δυναμικής ενός οικονομικού συστήματος. Για το σκοπό αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι οι υποθέσεις που μπορεί κανείς να κάνει για τους μηχανισμούς παραγωγής και διαμόρφωσης τιμών είναι πολλές και αρκετά διαφοροποιημένες. Κυμαίνονται από αφελείς, που αντιστοιχούν σε μοντέλα που είναι απλά στην ανάλυση, σε μάλλον ρεαλιστικές, που αντιστοιχούν, ωστόσο, σε αρκετά εξελιγμένα μοντέλα από τα οποία δεν είναι δυνατόν να εξαχθούν γενικές αρχές σχετικά με τη δυναμική συμπεριφορά των οικονομικών συστημάτων. Μεταξύ των απλούστερων μοντέλων, υπάρχουν δύο μοντέλα που παρουσιάζονται παρακάτω: ένα για τη δυναμική των τιμών και το άλλο για τη δυναμική της παραγωγής. Αυτά τα δύο μοντέλα έχουν το χαρακτηριστικό του διαχωρισμού και το πλεονέκτημα της αναφοράς στη θεωρία των θετικών γραμμικών συστημάτων.

Ξεκινάμε με το μοντέλο τιμής, υποθέτοντας ότι οι τιμές $p_i(t), \ldots, p_n(t)$ *μπορεί να ποικίλλουν με την πάροδο του χρόνου, και ότι η παραγωγή δεν είναι στιγμιαία, αλλά χρειάζεται (λόγω εργασίας και χρόνου διανομής) μία μονάδα χρόνου, ας πούμε 1 έτος. Τα έσοδα ανά μονάδα αγαθού* j *που παράγεται (και πωλείται) κατά τη διάρκεια του έτους* $(t+1)$ *είναι, επομένως,* $p_j(t+1)$*, ενώ το κόστος του των αγαθών που απαιτούνται για την παραγωγή μιας τέτοιας μονάδας, είναι*

$$p_1(t)a_{1j} + p_2(t)a_{2j} + \cdots + p_n(t)a_{nj},$$

δεδομένου ότι η ποσότητα a_{ij} *του αγαθού* i *αγοράζεται κατά τη διάρκεια του έτους* t *στην τιμή* $p_i(t)$*. Αν η διαφορά* v_j *μεταξύ εσόδων και κόστους, που ονομάζεται προστιθέμενη μοναδιαία αξία, θεωρείται ότι είναι σταθερή με την πάροδο του χρόνου, έχουμε*

$$p_j(t+1) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i(t) + v_j$$

ή σε μορφή πινάκων

$$p(t+1) = A^T p(t) + v, \tag{5.6}$$

όπου $p(t)$ *και* v *είναι τα διανύσματα των τιμών και των προστιθέμενων μοναδιαίων αξιών. Εφόσον τα ιδιοδιανύσματα του* A^T *συμπίπτουν με αυτά του* A*, συνεπάγεται ότι το σύστημα* (5.6) *είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν η ιδιοτιμή Frobenius του* A *είναι* < 1*, δηλαδή, αν και μόνο αν η ανάλυση εισόδου-εξόδου του* (5.3) *έχει μία λύση* $x \gg 0$*. Επιπλέον, αν το διάνυσμα* v *είναι γνήσια θετικό, το σύστημα* (5.6) *είναι διεγέρσιμο, έτσι ώστε το διάνυσμα τιμών να τείνει ασυμπτωτικά σε μία γνησίως θετική ισορροπία με γεωμετρικό ρυθμό σύγκλισης* (λ_F^t).

Χρησιμοποιώντας παρόμοια συλλογιστική, μπορούμε να προτείνουμε ένα μοντέλο για τη δυναμική παραγωγής. Για αυτό, ας φανταστούμε ότι η παραγωγή $x_i(t)$ *κάθε αγαθού* i *κατά τη διάρκεια του έτους* t *ικανοποιεί τη ζήτηση* b_i *(θεωρώντας ότι είναι σταθερή διαχρονικά) και τη ζήτηση των κλάδων παραγωγής που καθορίζουν την παραγωγή του επόμενου έτους, δηλαδή,*

$$x_i(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j(t+1) + b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ή, σε μορφή πινάκων,

$$x(t) = Ax(t+1) + b. \tag{5.7}$$

Η εξίσωση (5.7) *δεν είναι η τυπική καταστατική εξίσωση ενός δυναμικού συστήματος, καθώς έχουν εναλλαχθεί τα* t *και* $t+1$*. Επιτρέπει σε κάποιον να υπολογίσει την προηγούμενη κατάσταση από την παρούσα κατάσταση. Αυτό σημαίνει ότι, αν αναδιατάξουμε τα έτη με ένα δείκτη* τ*, ο οποίος αυξάνεται καθώς ο χρόνος πηγαίνει πίσω, η παραγωγή θα περιγραφόταν από το θετικό γραμμικό σύστημα*

$$x(\tau+1) = Ax(\tau) + b, \tag{5.8}$$

που δέχεται ισορροπία $\bar{x}$*, δηλαδή, η παραγωγή καθορίζεται χρησιμοποιώντας ανάλυση εισόδου-εξόδου* (5.3)*. Επομένως, η δυναμική παραγωγής είναι σταθερή ως προς* τ*, δηλαδή πίσω στο χρόνο. Η πορεία των τροχιών* $x(\tau)$ *του συστήματος* (5.8) *είναι πολύ παρόμοια με προηγουμένως για τις τιμές, εκτός από το ότι η ευθεία που διέρχεται από την ισορροπία* $\bar{x}$ *καθορίζεται από τα ιδιοδιανύσματα του* A *αντί για του* A^T*. Αντιστρέφοντας την κατεύθυνση της κίνησης κατά μήκος τροχιών, έχουμε την πραγματική πορεία της παραγωγής στο σύστημα* (5.7).

Το σύστημα (5.7) *δεν είναι θετικό, καθώς υπάρχουν αρχικές καταστάσεις* $x(0) \geq 0$*, οι οποίες δημιουργούν τροχιές που φεύγουν από τον θετικό κώνο. Επιπλέον, υπάρχει μόνο μία τροχιά* *στην οποία παραμένουν οι παραγωγές θετικές για πάντα, δηλαδή, η τροχιά που καθορίζεται από το ιδιοδιάνυσμα Frobenius του A. Κατά μήκος αυτής της τροχιάς, που μερικές φορές αποκαλείται η κόψη του ξυραφιού, το οικονομικό σύστημα αναπτύσσεται και όλες οι παραγωγές αναπτύσσονται επ΄ αόριστον με τον ίδιο ρυθμό* $(1/\lambda_F)^t$*. Αλλά ακόμη και μικρές αποκλίσεις από την κόψη του ξυραφιού αργά ή γρήγορα θα οδηγήσουν στην κατάρρευση κάποιου κλάδου παραγωγής. Προφανώς, αυτό θα ήταν αλήθεια εάν η υπόθεση για το μοντέλο (5.7) περιέγραφε τέλεια τους πραγματικούς μηχανισμούς παραγωγής. Είναι, ωστόσο, εύλογο ότι τα πραγματικά συστήματα δεν είναι τόσο «ακραία» και τείνουν να παραμείνουν κοντά στην κόψη του ξυραφιού, επειδή κάποιο είδος προσαρμογής του μηχανισμού της παραγωγής θα εγγυηθεί ότι όλοι οι τομείς θα παραμείνουν ενεργοί.*

5.2 Διαμερισματικά συστήματα (Compartmental systems)

Τα διαμερισματικά συστήματα είναι συστήματα τα οποία έχουν συντεθεί από διασυνδεδεμένες δεξαμενές. Χρησιμοποιούνται συχνά στην υδρολογία ούτως ώστε να περιγράψουν φυσικά και τεχνητά δίκτυα δεξαμενών σχεδιασμένα για παροχή ηλεκτρικής ενέργειας, πρόληψη πλημμυρών ή για αγροτικές χρήσεις. Μοντέλα του ίδιου τύπου χρησιμοποιούνται από βιολόγους και βιομηχανικούς για την περιγραφή διαδικασιών μεταφοράς, συσσώρευσης και αποχέτευσης ποικίλων στοιχείων και ενώσεων όπως ορμόνες, γλυκόζη, ινσουλίνη και μέταλλα στον ανθρώπινο σώμα. Σε αυτήν την περίπτωση, δεξαμενές αποτελούν τα όργανα ή οι ιστοί και καλούνται διαμερίσματα. Άλλα παραδείγματα διαμερισματικών συστημάτων είναι συστήματα αποθήκευσης και βιομηχανικά συστήματα τα οποία περιέχουν χημικούς αντιδραστήρες, εναλλάκτες θερμότητας, στήλες απόσταξης και άλλες διαδικασίες.

Θα περιοριστούμε σε περιπτώσεις συστημάτων τα οποία είναι γραμμικά, συνεχούς χρόνου, μοναδικής εισόδου-μοναδικής εξόδου. Έτσι, ένα διαμερισματικό σύστημα συντίθεται από n διασυνδεμένες δεξαμενές που περιγράφονται από μία πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση και έναν μετασχηματισμό εξόδου

$$\dot{x}_i(t) = -\alpha_i x_i(t) + w_i(t) \tag{5.9}$$

$$y_i(t) = \beta_i x_i(t), \tag{5.10}$$

όπου $x_i(t)$ η παρούσα ποσότητα πόρου στην i-οστή δεξαμενή την χρονική στιγμή t, w_i η εισροή, y_i η εκροή και $\alpha_i x_i$ το άθροισμα εκροής και απώλειας πόρου στη δεξαμενή. Όλες οι παράμετροι και οι μεταβλητές στις (5.9), (5.10) και (5.12) είναι μη αρνητικές και

$$\alpha_i \geq \beta_i \,, \tag{5.11}$$

όπου η ισότητα ισχύει όταν δεν υπάρχουν απώλειες. Στην περίπτωση λιμνών ή τεχνητών δεξαμενών, η (5.11) ισχύει με αυστηρή ανισότητα, καθώς υπάρχουν απώλειες λόγω εξάτμισης. Η συνάρτηση μεταφοράς της κάθε δεξαμενής είναι

$$G_i(s) = \frac{\mu_i}{s + T_i} \,,$$

όπου το όφελος μ_i και η σταθερά του χρόνου T_i σχετίζονται με τις παραμέτρους α_i και β_i στις (5.9), (5.10) και (5.12) με τις εξισώσεις

$$\mu_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i} \qquad T_i = \frac{1}{\alpha_i} \,.$$

Η συνθήκη (5.11) είναι συνεπώς ισοδύναμη με $\mu_i \leq 1$.

Ένα διαμερισματικό σύστημα λέγεται ακυκλικό όταν δεν υπάρχουν κύκλοι δεξαμενών (π.χ. αρδευτικά συστήματα) και κυκλικό όταν υπάρχουν (π.χ. χημικές διεργασίες με ανακυκλώσεις). Οι διασυνδέσεις μεταξύ των n δεξαμενών περιγράφονται από την εξάρτηση κάθε εισροής w_i από τις εκροές $y_1, \ldots, y_n$ και την εξωτερική εισροή $u(t)$, η οποία τροφοδοτεί συνολικά το σύστημα,

$$w_i(t) = \sum_{j=1}^{n} d_{ji} y_j(t) + b_i u(t). \tag{5.12}$$

Η παράμετρος b_i είναι το κλάσμα της εισόδου απευθείας στην i-οστή δεξαμενή τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 1, \qquad 0 \leq b_i \leq 1\,, \tag{5.13}$$

όπου οι παράμετροι d_{ji} ικανοποιούν τις ανισότητες

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ji} \leq 1, \qquad 0 \leq d_{ji} \leq 1\,. \tag{5.14}$$

Αφού d_{ji} είναι το κλάσμα της εκροής της j-οστής δεξαμενής η οποία τροφοδοτεί την i-οστή δεξαμενή. Η τελευταία σχέση είναι αυστηρή ανισότητα αν η j-οστή δεξαμενή αποβάλλει τμήμα του πόρου εκτός συστήματος, όπως στην περίπτωση δεξαμενής νερού σε αρδευτική χρήση. Όλες οι προηγούμενες εκφράσεις δηλώνουν πως οι πόροι μπορούν μόνο να μεταφερθούν, αποθηκευτούν και αποβληθούν όχι όμως να δημιουργηθούν. Αυτό σημαίνει πως βιολογικά συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από αναπαραγωγικές διαδικασίες δεν μπορούν, εν γένει, να περιγραφούν από διαμερισματικά μοντέλα.

Οι εξισώσεις (5.9), (5.10) και (5.12) είναι οι καταστατικές εξισώσεις ενός διαμερισματικού συστήματος και μπορούν να γραφούν σε συνοπτική μορφή ως

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),$$

όπου ο πίνακας A είναι ουσιωδώς μη αρνητικός, αφού οι (5.13) και (5.14) συνεπάγονται $\alpha_{ij} = \beta_j d_{ji} \geq 0$ για $i \neq j$ και $b \geq 0$. Ένα διαμερισματικό σύστημα είναι, συνεπώς ένα θετικό σύστημα. Μία από τις ιδιότητες του είναι πως έχει μη θετικές τιμές στις διαγώνιο του πίνακα A. Πιο συγκεκριμένα το άθροισμα c_i^+ των στοιχείων της i-οστής στήλης του A είναι

$$c_i^+ = -\alpha_i + \beta_i \sum_{j=1}^{n} d_{ji}\,,$$

έτσι ώστε μέσω των (5.11) και (5.14) έχουμε

$$c_i^+ \leq 0 \qquad i = 0, \ldots, n\,. \tag{5.15}$$

Η κυρίαρχη ιδιοτιμή λ_F είναι, λοιπόν, μηδενική ή αρνητική και, στην τελευταία περίπτωση, το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Η περίπτωση $\lambda_F = 0$ μπορεί να εξαιρεθεί αν δεν υπάρχουν «εκφυλλισμένοι» κύκλοι δεξαμενών, δηλαδή, κύκλοι όπου μία σταθερή ποσότητα πόρου μπορεί να ρέει εσαεί χωρίς εξωτερική εισροή $[u(t) \equiv 0]$. Τέτοιοι εκφυλισμοί προκύπτουν όταν όλες οι δεξαμενές οι οποίες συνθέτουν κύκλους δεν έχουν απώλειες και δεν εκρέουν. Αφού, προφανώς, αυτό δεν συμβαίνει στην πράξη, μπορούμε να συμπεράνουμε πως τα διαμερισματικά συστήματα είναι ασυμπτωτικά ευσταθή γραμμικά συστήματα που ικανοποιούν τον περιορισμό (5.15) (με αυστηρή ανισότητα για τουλάχιστον ένα i). Όμως, είναι εφικτό να δείξουμε πως ο περιορισμός αυτός δεν είναι πολύ σημαντικός. Στην πραγματικότητα, ένα οποιοδήποτε ασυμπτωτικά ευσταθές θετικό σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),$$

το οποίο δεν ικανοποιεί την συνθήκη (5.15) μπορεί να μετασχηματιστεί, μέσω μιας αλλαγής συντεταγμένων

$$z = Tx,$$

όπου T ένας διαγώνιος πίνακας με θετικά στοιχεία στην διαγώνιο, σε ένα νέο σύστημα

$$\dot{z}(t) = A^* z(t) + b^* u(t),$$

όπου $A^* = TAT^{-1}$ που ικανοποιεί τον περιορισμό (5.15). Αυτό σημαίνει πως ένα οποιοδήποτε ευσταθές θετικό σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ισοδύναμο ενός διαμερισματικού και ο μετασχηματισμός $z = Tx$, που πραγματοποιεί μία τέτοια ισοδυναμία, δεν είναι τίποτα περισσότερο από μία αλλαγή στις μονάδες μέτρησης της ποσότητας του πόρου που είναι αποθηκευμένη σε κάθε δεξαμενή.

Παράδειγμα 5.2.1. *(διακριτό μοντέλο ενός υδροφορέα)*

Η ροή ύδατος εντός ενός υδροφορέα περιγράφεται από μερικές διαφορικές εξισώσεις, οι *οποίες συνήθως επιλύονται μόνο αριθμητικά δεδομένου αρχικών και συνοριακών συνθηκών. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του ισοτροπικού, ομογενούς και μονοδιάστατου υδροφορέα η κεφαλή πίεσης* $h(l,t)$ *περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση*

$$k\frac{\partial^2 h}{\partial l^2} = \sigma\frac{\partial h}{\partial t}, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq l \leq L \tag{5.16}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$-k\left[\frac{\partial h}{\partial l}\right]_{l=0} = \sigma u(t) \qquad -k\left[\frac{\partial h}{\partial l}\right]_{l=L} = \sigma y(t) \qquad t \geq 0$$

και αρχικές συνθήκες

$$h(l,0) = h_0(l), \quad 0 \leq l \leq L.$$

Οι συντελεστές k *(μεταδοτικότητα) και* σ *(συντελεστής αποθήκευσης) είναι θετικοί και εξαρτώνται από τον τύπο του εδάφους. Για να λάβουμε ένα εύχρηστο μοντέλο μπορούμε να προβούμε σε χωρική διακριτοποίηση διαιρώντας το διάστημα* $[0,L]$, *το οποίο καθορίζει τον υδροφορέα, σε* n *διαστήματα μήκους* $\Delta = L/n$. *Θέτοντας*

$$x_i(t) = h\left(i\Delta - \frac{\Delta}{2}, t\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

και θεωρώντας το n *αρκετά μεγάλο,*

$$\frac{\partial^2 h}{\partial l^2}\left(i\Delta - \frac{\Delta}{2}, t\right) \cong \frac{1}{\Delta^2}(x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)).$$

Οι εξισώσεις (5.16) *μπορούν να προσεγγιστούν από τις ακόλουθες* n *συνήθεις διαφορικές εξισώσεις*

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{k}{\sigma\Delta^2}x_1(t) + \frac{k}{\sigma\Delta^2}x_2(t) + \frac{1}{\Delta}u(t)$$

$$\dot{x}_i(t) = \frac{k}{\sigma\Delta^2}x_{i-1}(t) + \frac{2k}{\sigma\Delta^2}x_i(t) + \frac{k}{\sigma\Delta^2}x_{i+1}(t) \quad i = 2, \ldots, n-1$$

$$\dot{x}_n(t) = \frac{k}{\sigma\Delta^2}x_{n-1}(t) + \frac{2k}{\sigma\Delta^2}x_n(t).$$

Η σταθερά του χρόνου της πρώτης δεξαμενής είναι $T_1 = \sigma\Delta^2/k$, *ενώ όλες οι υπόλοιπες δεξαμενές έχουν σταθερά χρόνου* $T_2 = \sigma\Delta^2/2k$.

Παράρτημα Α΄

Πρόγραμμα Matlab

```matlab
function membership = is_member(A, x0, e)
  v = max(-1./diag(A));
  hA = max(v(~isinf(v)));  % h = max{-1/a_{j j}: a_{j j} != 0}
  h = hA*rand;             % random number in (0, h(A))
  B = eye(length(A)) + h*A;
  tol = 1.0e-15;
  while abs(det(B)) < tol      %elegxoume an i orizousa einai mideniki me kapoia anoxi se uplogistika sfalmata
    h = hA*rand;
    B = eye(length(A)) + h*A;
  end

  x = B*x0;
  k0 = 1;
  while any(x < 0) && any(x > 0)
    x = B*x;
    k0 = k0 + 1;
  end

  if any(x < 0)
    membership = false;
```

```
 else
%elegxos gia to an einai thetiko logw sfalmatos strogggulopoihsis
  x = x0;
  indexes = find(x==max(x));
  i = indexes(1);

  x1 = B*x;
  x2 = B*x1;
  x3 = B*x2;
  x4 = B*x3;
  m1_1 = x1(i)/x0(i);
  m1_2 = x2(i)/x1(i);
  m1_3 = x3(i)/x2(i);
  m1_4 = x4(i)/x3(i);
  r3 = (m1_3 - m1_2)/(m1_2 - m1_1);
  r4 = (m1_4 - m1_3)/(m1_3 - m1_2);
  while abs(r4-r3) > e*abs(r4)
    x1 = x2;
    x2 = x3;
    x3 = x4;
    x4 = B*x4;
    m1_1 = x1(i)/x0(i);
    m1_2 = x2(i)/x1(i);
    m1_3 = x3(i)/x2(i);
    m1_4 = x4(i)/x3(i);
    r3 = (m1_3 - m1_2)/(m1_2 - m1_1);
    r4 = (m1_4 - m1_3)/(m1_3 - m1_2);
  end

  if r4^k0 < 2*tol
    membership = false;
  else
    membership = true;
```

```
        end
    end
end
```

Βιβλιογραφία

[1] Noutsos Dimitrios, Tsatsomeros Michael J, *On the numerical characterization of the reachability cone for an essentially nonnegative matrix*, Linear Algebra and Its Applications, DOI 10.1016/j.laa.2008.10.028, ISSN 00243795 1350-1363, 430, 4, 2009.

[2] Noutsos Dimitrios, Tsatsomeros Michael J, *Reachability and holdability of nonnegative states*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, DOI 10.1137/070693850, ISSN 08954798 700-712, 30, 2, 2008.

[3] Neumann Michael, Tsatsomeros Michael J, *SYMBIOSIS POINTS FOR LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS*, Linear and Multilinear Algebra, DOI 10.1080/03081089108818087 49-59, 30, 1-2, 1991.

[4] Neumann Michael, Stern Ronald J, Tsatsomeros Michael J, *THE REACHABILITY CONES OF ESSENTIALLY NONNEGATIVE MATRICES*, Linear and Multilinear Algebra, DOI 10.1080/03081089108818045 213-224, 28, 4, 1991.

[5] Noutsos Dimitrios, *On Perron-Frobenius property of matrices having some negative entries*, Linear Algebra and Its Applications, 132–153, 412 2005.

[6] S. Carnochan Naqvi, J. J. McDonald, *The combinatorial structure of eventually non-negative matrices*, Electron. J. Linear Algebra, DOI 10.1080/03081089108818045 255–269, 9, 2002.

[7] S. Carnochan Naqvi, J. J. McDonald, *Eventually nonnegative matrices are similar to semi-nonnegative matrices*, Linear Algebra and Its Applications, 245–258, 381, 2004.

[8] A. Berman, B. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[9] D. Watkins, *Fundamentals of Matrix Computations*, Wiley-Interscience, New York, 2002.

[10] Farina Lorentzo, Rinaldi Sergio, *Positive Linear Systems*, Pure and applied mathematics, ISBN 0-471-38456-9 2000.