



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

## Το Ευθύ Πρόβλημα Πολλαπλής Σκέδασης Ακουστικών Κυμάτων και η Αριθμητική του Επίλυση σε Περιβάλλον *Mathematica*

Διπλωματική εργασία  
της  
Φωτεινής Δελησάββα

Επιβλέπων: Δρόσος Γκιντίδης  
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή την 25/11/2011:

Δρόσος Γκιντίδης, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.  
Κυριακή Κυριάκη, Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.  
Κων/νος Χρυσάφινος, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Δρόσο Γκιντίδη για την πολύτιμη καθοδήγησή του και το ευχάριστο κλίμα συνεργασίας που αναπτύξαμε καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

## Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της μαθηματικής θεωρίας της πολλαπλής σκέδασης και ειδικότερα του ευθέως προβλήματος πολλαπλής σκέδασης των ακουστικών κυμάτων.

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε συνοπτικά μερικές βασικές έννοιες της θεωρίας σκέδασης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, εισάγουμε τον αναγνώστη στην θεωρία της απλής σκέδασης για το ευθύ πρόβλημα, παρουσιάζουμε την εξίσωση *Helmholtz* και αναφέρουμε ορισμένα θεωρήματα και ορισμούς που αποτελούν βασικά εργαλεία της θεωρίας σκέδασης.

Στο τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο προχωράμε στην εκτενή μελέτη των προσθετικών θεωρημάτων στις δύο και στις τρεις διαστάσεις, τα οποία αποτελούν τα βασικά εργαλεία της θεωρίας πολλαπλής σκέδασης σε σχέση με την εύρεση λύσεων για σκέδαση λύσεων απλής γεωμετρίας.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την μέθοδο χωρισμού μεταβλητών η οποία επιλύει επιτυχώς προβλήματα με κυλινδρικούς και σφαιρικούς σκεδαστές, μη διαπερατούς οι οποίοι πληρούν τις συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* (ηχητικά μαλακοί) ή/και *Neumann* (ηχητικά σκληροί).

Στο έκτο κεφάλαιο ολοκληρώνουμε τη μελέτη μας με ορισμένες υπολογιστικές εφαρμογές. Επιλύουμε το ευθύ πρόβλημα πολλαπλής σκέδασης στις δύο διαστάσεις με δύο εμπόδια τα οποία έχουν σχήμα κυκλικών κυλίνδρων, παρουσιάζουμε τα γραφήματα του μέτρου της έντασης του ολικού σκεδασμένου πεδίου καθώς και συγκριτικά διαγράμματα για πληθώρα παραμέτρων. Η αριθμητική επίλυση έγινε σε περιβάλλον *Mathematica*.

## *Abstract*

In this diploma thesis the purpose is study of the direct multiple scattering theory in acoustics.

The first chapter is an introduction to the theory of scattering.

In the second chapter we present the direct scattering theory, the Helmholtz equation and we refer to several theorems and definitions useful in scattering theory.

In the third and fourth chapter we deal with the multiple scattering problem using addition theorems in two and three dimensions.

In the fifth chapter we present the method based on separation of variables that solve the Dirichlet (sound soft scatterers) or Neumann (sound hard scatterers) problem for circular cylinders and spheres.

In the sixth chapter we finish our work by a numerical implementation. We solve the direct multiple scattering problem for two circular cylinders on Dirichlet boundary conditions. We present the parametric and polar plots of the scattered field and the total field. We also present comparative diagrams for several parameters. The numerical approximation has been done using *Mathematica 8*.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Απλή σκέδαση ακουστικών κυμάτων</b>	<b>12</b>
2.1	Ακουστικά κύματα . . . . .	12
2.2	Το ευθύ προβλήμα ακουστικής σκέδασης . . . . .	15
2.2.1	Σκέδαση απο ένα μη ομογενές μέσο . . . . .	15
2.2.2	Σκέδαση από ένα εμπόδιο . . . . .	16
2.3	Θεωρήματα και τύποι του Green . . . . .	18
2.4	Σφαιρικές συναρτήσεις Bessel . . . . .	21
2.5	Περίπτωση των δύο διαστάσεων . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Προσθετικά θεωρήματα στις 2 διαστάσεις</b>	<b>24</b>
3.1	Θεώρημα <i>Hobson</i> . . . . .	25
3.2	Θεωρήματα <i>Neumann</i> και <i>Graf</i> . . . . .	29
3.3	Πίνακες διαχωρισμού $S$ και $\hat{S}$ . . . . .	33
3.4	Πίνακες περιστροφής . . . . .	36
3.5	Ανάπτυγμα για δύο κέντρα . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Προσθετικά θεωρήματα στις 3 διαστάσεις</b>	<b>39</b>
4.1	Θεωρήματα <i>Legendre</i> και <i>Hobson</i> . . . . .	40
4.2	Αξονικά συμμετρικά προσθετικά θεωρήματα . . . . .	43
4.3	Πίνακες διαχωρισμού $S$ και $\hat{S}$ . . . . .	50
4.4	Ανάπτυγμα για δύο κέντρα . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Χωρισμός μεταβλητών σε πολλαπλή σκέδαση</b>	<b>54</b>
5.1	Χωρισμός μεταβλητών για ένα κυκλικό κύλινδρο . . . . .	54
5.2	Πολυπολική μέθοδος για δύο κυκλικούς κυλίνδρους . . . . .	57
5.3	Πολυπολική μέθοδος για $N$ κυκλικούς κυλίνδρους . . . . .	59
5.4	Χωρισμός μεταβλητών για μία σφαίρα . . . . .	61
5.5	Πολυπολική μέθοδος για δύο σφαίρες . . . . .	63
5.6	Πολυπολική μέθοδος για $N$ σφαίρες . . . . .	64

<b>6</b>	<b>Υπολογιστική εφαρμογή σε περιβάλλον <i>Mathematica</i></b>	<b>66</b>
6.1	Αριθμητική εφαρμογή σκέδασης ακουστικών κυμάτων από δύο ηχητικά μαλακούς κυκλικούς κυλίνδρους. . . . .	67
6.2	Εξάρτηση από τον κυματάριθμο. . . . .	72
6.3	Εξάρτηση από την ακτίνα των κυκλικών κυλίνδρων. . . . .	74
6.4	Εξάρτηση από την απόσταση μεταξύ των κυκλικών κυλίνδρων. .	75
6.5	Εξάρτηση από τη γωνία πρόσπτωσης του προσπίπτοντος κύματος. .	77
6.6	Σύγκριση της έντασης του σχεδαζόμενου πεδίου για ηχητικά μαλακούς και ηχητικά σκληρούς κυκλικούς κυλίνδρους. . . . .	81
<b>7</b>	<b>Κώδικας <i>Mathematica</i></b>	<b>83</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Η Θεωρία Σκέδασης συνέβαλε σημαντικά στην εξέλιξη της Μαθηματικής Φυσικής του 20ου αιώνα, από την εξήγηση του μπλε χρώματος του ουρανού έως και τις σύγχρονες τεχνικές ιατρικής απεικόνισης, προσέλκυσε τόσο επιστήμονες όσο και μαθηματικούς για πάνω από 100 χρόνια. Βασικό αντικείμενο μελέτης της Θεωρίας Σκέδασης είναι η επίδραση που έχει ένα ετερογενές μέσον σε ένα προσπίπτων κύμα. Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η εισαγωγή του αναγνώστη στις έννοιες των ηχητικών κυμάτων και της απλής σκέδασης. Αναφέρονται ορισμένα ενδεικτικά παραδείγματα με έμφαση στις εφαρμογές σκέδασης ακουστικών κυμάτων. Στη συνέχεια καταγράφουμε συνοπτικά το πρώτο δημοσίευμα που έδωσε το βασικό πλαίσιο της μαθηματικής θεωρίας της πολλαπλής σκέδασης και τις βασικές αρχές.

Πρίν μιλήσουμε για τα ηχητικά κύματα, αξίζει να δώσουμε μία προσέγγιση του μηχανισμού δημιουργίας του ήχου γενικότερα. Ο ήχος παράγεται αν διαταράξουμε την τυχαία κίνηση των μορίων του αέρα. Με την διαταραχή αυτή, τα μόρια του αέρα διαμορφώνονται σε πυκνώματα και αραιώματα, οπότε δημιουργείται ένα ηχητικό κύμα, που διαδίδεται προς όλες τις κατευθύνσεις, σε ένα ελαστικό μέσο, όπως είναι ο αέρας. Η δημιουργία του ήχου ταυτίζεται με τις μεταβολές της ακουστικής πίεσης  $p$ , δηλαδή με την τοπική αύξηση και μείωση της ατμοσφαιρικής πίεσης σε σχέση με τη μέση στατική πίεση. Κατά την διάδοση του ηχητικού κύματος σε ένα μέσο, δεν παρατηρείται μεταφορά των μορίων του μέσου αλλά της διαταραχής από ένα μόριο στο διπλανό του. Η διάδοση γίνεται με τη μορφή ηχητικών κυμάτων που αναπτύσσονται στα διάφορα μέσα.

Ο ορισμός του κύματος ως η διάδοση μιας διαταραχής σε κάποιο μέσο, αντανακλά το ευρύ πεδίο εφαρμογών του φαινομένου της σκέδασης. Αν συνυπολογίσουμε και τους διάφορους επιστημονικούς κλάδους στους οποίους εμπλέκεται η κυματική διάδοση, τότε γίνεται αντιληπτός ο κεντρικός ρόλος που παίζουν τα

προβλήματα σκέδασης σε ποικίλες περιοχές της επιστήμης και της τεχνολογίας. Μία ευρέως γνωστή εφαρμογή είναι η τεχνική της ιατρικής απεικόνισης, που βασίζεται στο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης υπερήχων, δηλαδή ακουστικών κυμάτων υψηλής συχνότητας. Στην περιοχή της υποθαλάσσιας έρευνας, βασικό εργαλείο είναι η τεχνική *sonar*, η οποία βασίζεται στην ανάκλαση, διάδοση και σκέδαση ακουστικών κυμάτων μέσα στο νερό. Ανάλογα λοιπόν με αυτό που ζητάμε να ανιχνεύσουμε, οι τομείς εφαρμογής ποικίλουν. Στην ωκεανογραφία, για παράδειγμα, μελετάται η μορφολογική εξερεύνηση του βυθού και η ανίχνευση ιζημάτων στον πυθμένα. Στην υποβρύχια αρχαιολογία ζητούμενο είναι η εύρεση ναυαγίων και άλλων αντικειμένων και στην αλιεία η εύρεση κοπαδιών. Επίσης, στο ναυτικό στόχος είναι η ανίχνευση ναρκών και εχθρικών υποβρυχίων. Στην περιοχή της μηχανικής είναι χαρακτηριστική η εφαρμογή στην επιστήμη των υλικών για τον μη καταστροφικό έλεγχο, μελετώντας την κυματική διάδοση υπερήχων στα στερεά. Μεγάλο πεδίο εφαρμογών υπάρχει και στην αεροναυπηγική και στην τεχνολογία οχημάτων. Στην έρευνα, στην περιοχή του αεροδυναμικού θορύβου, τα ακουστικά κύματα δημιουργούνται και σκεδάζονται από την τυρβώδη ροή του αέρα γύρω από τις διάφορες επιφάνειες.

Η ανάπτυξη και διάδοση των ηχητικών κυμάτων επιτυγχάνεται λόγω της αδράνειας και της ελαστικότητας που χαρακτηρίζουν τα ελαστικά μέσα, στερεά, υγρά και αέρια. Σχετικά με τον τρόπο διάδοσης των ηχητικών κυμάτων, διακρίνονται οι ακόλουθες περιπτώσεις. Σφαιρικά ηχητικά κύματα, όπου η διαταραχή του μέσου εξαπλώνεται στο χώρο γύρω από την ηχητική πηγή με την μορφή σφαιρικής επιφάνειας, επίπεδα ηχητικά κύματα, όπου η διαταραχή του μέσου εξαπλώνεται με την μορφή επίπεδης επιφάνειας και κυλινδρικά ηχητικά κύματα, όπου η διαταραχή του μέσου εξαπλώνεται με την μορφή κυλινδρικής επιφάνειας. Η διάκριση αυτή έχει ιδιαίτερη σημασία γιατί καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την συμπεριφορά τους στο χώρο.

Η θεωρία σκέδασης ασχολείται με την επίδραση ασυνεχειών (μεταβολές των φυσικών παραμέτρων του χώρου διάδοσης) στη διάδοση του κύματος. Ειδικότερα, εάν συμβολίσουμε με  $u_{inc}$  το προσπίπτον κύμα,  $u_{sc}$  το σκεδασμένο πεδίο και  $u$  την υπέρθεση των δύο, τότε το ευθύ πρόβλημα σκέδασης είναι ο προσδιορισμός του σκεδασμένου πεδίου εφόσον γνωρίζουμε το προσπίπτον κύμα, τις ιδιότητες του εμποδίου και τις εξισώσεις που καθορίζουν την κυματική εξίσωση. Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης είναι η ανακατασκευή του ανομοιογενούς μέσου εφόσον γνωρίζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του σκεδασμένου πεδίου.

Με τον όρο ακουστική σκέδαση εννοούμε τη σκέδαση ηχητικών ακουστικών κυμάτων. Η μαθηματική θεμελίωση του προβλήματος προσέρχεται από το σύστη-



μα εξισώσεων που περιλαμβάνει την εξίσωση *Euler*, την εξίσωση συνέχειας, την εξίσωση κατάστασης και την αδιαβατική εξίσωση. Από αυτές και με τρόπο που θα δούμε στην επόμενη ενότητα, προκύπτει η εξίσωση *Helmholtz* που μοντελοποιεί τα προβλήματα ακουστικής σκέδασης.

Για να μιλάμε για σκέδαση, απαραίτητο είναι να υπάρχει ένας σκεδαστής. Στην κλασική θεωρία σκέδασης αυτός μπορεί να είναι ένα σώμα με καθορισμένο σύνορο ή απλώς το ίδιο το μέσο διάδοσης. Στην κβαντική θεωρία μπορεί αποτελεί σκεδαστή ένα πεδίο. Και στις δύο περιπτώσεις θεωρούμε πως η πηγή της διαταραχής βρίσκεται εκτός της περιοχής του σκεδαστή, έτσι ώστε ο τελευταίος να περιβάλλεται σε κάθε περίπτωση από ένα διαφορετικό μέσο, το περιβάλλον μέσο στο οποίο παράγεται το προσπίπτον κύμα. Σε αντίθετη περίπτωση δεν θα υπήρχε ασυνέχεια κατά την διάδοση του κύματος και άρα ούτε το φαινόμενο της σκέδασης. Στα προβλήματα που θα μελετήσουμε οι σκεδαστές θα είναι μη διαπερατά στερεά σώματα και χαρακτηρίζονται από συνοριακές συνθήκες στο σύνορό τους. Το μέσον είναι ομογενές και υπάρχει μία συνοριακή συνθήκη ακτινοβολίας στο άπειρο, δηλαδή σε περιοχή μακριά από τον σκεδαστή, η οποία μας εξασφαλίζει ότι το σκεδασμένο κύμα θα απομακρύνεται από τον σκεδαστή και θα μοιάζει σε μεγάλες αποστάσεις με σφαιρικά επεκτεινόμενο κύμα.

Οι μαθηματικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση ευθέων προβλημάτων συναρτώνται άμεσα με τη συχνότητα της κυματικής διάδοσης. Ειδικότερα, εάν το μήκος κύματος  $\lambda = 2\pi/k$ , όπου  $k$  ο κυματάρθρωμος, είναι πολύ μικρό σε σχέση με τη χαρακτηριστική διάσταση  $a$  του σκεδαστή (διάμετρος της μικρότερης σφαίρας που περιέχει τον σκεδαστή), δηλαδή  $a \gg \lambda$  ή  $ka \gg 1$ , τότε πρόκειται για υψηλές συχνότητες. Ενώ, εάν  $a \ll \lambda$  ή  $ka \ll 1$  τότε πρόκειται για χαμηλές συχνότητες. Στις υψηλές συχνότητες το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα γεωμετρικής οπτικής, ενώ στις χαμηλές συχνότητες ανάγεται σε πρόβλημα θεωρίας δυναμικού. Στις ενδιάμεσες περιοχές και ειδικότερα για  $ka \sim 1$ , μελετάμε την περιοχή συντονισμού. Στην μέθοδο που θα ακολουθήσουμε στο κυρίως μέρος της εργασίας, δεν υπάρχει περιορισμός του  $ka$  αλλά οι υπολογιστικές εφαρμογές θα είναι για τιμές του κυματάρθρωμου από  $k = 1$  έως  $k = 10$ .

Στην παρούσα εργασία γίνεται μελέτη του ευθέως προβλήματος πολλαπλής σκέδασης. Ο όρος 'πολλαπλή σκέδαση' σημαίνει διαφορετικά πράγματα για διαφορετικούς επιστήμονες, όμως ένας γενικός ορισμός μπορεί να είναι 'η αλληλεπίδραση των πεδίων με δύο ή περισσότερα εμπόδια'. Για παράδειγμα, ένα τυπικό πρόβλημα πολλαπλής σκέδασης στην κλασική φυσική είναι η σκέδαση ηχητικών κυμάτων από δύο συμπαγείς σφαίρες. Στη φυσική συμπεκνωμένη ύλης υπάρχει το πρόβλημα της σκέδασης σφαιρικών κυμάτων ηλεκτρονίων από ένα σύμπλεγ-

μα ατόμων.

Τα κύματα που σκεδάζονται από ένα εμπόδιο μπορούν να μελετηθούν με διάφορες γνωστές μεθόδους, όπως τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, τη μέθοδο των T-Matrix ή τη μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Εάν έχουμε πολλά εμπόδια, τότε το πεδίο που σκεδάζεται από ένα εμπόδιο θα επιφέρει περαιτέρω σκεδασμένα πεδία από όλα τα άλλα εμπόδια, καθένα από τα οποία θα προκαλέσει περαιτέρω σκέδαση από όλα τα υπόλοιπα εμπόδια και ούτω καθεξής. Με αυτή την διαδικασία μπορούμε να υπολογίσουμε το ολικό σκεδασμένο πεδίο  $u$ , όπου κάθε βήμα ονομάζεται *τάξη σκέδασης*.

Η σκέδαση μπορεί να χωριστεί σε δύο κατηγορίες, την απλή και την ανεξάρτητη. Στην απλή σκέδαση έχουμε την απλούστερη προσέγγιση, όπου το φαινόμενο της πολλαπλής σκέδασης αγνοείται τελείως. Εδώ, το ολικό σκεδασμένο πεδίο αποτελεί το άθροισμα των σκεδασμένων πεδίων από το κάθε εμπόδιο ξεχωριστά, καθένα από τα οποία σκεδάζει το προσπίπτον κύμα σαν να είναι απομονωμένο από τα υπόλοιπα. Η προσέγγιση αυτή δίνει αξιόλογα αποτελέσματα όταν ο ενδιαμέσος χώρος είναι αρκετά μεγάλος συγκριτικά με το μέγεθος των εμποδίων και με το μήκος κύματος του εισερχόμενου κύματος. Για να κατανοήσουμε καλύτερα την ανεξάρτητη σκέδαση μπορούμε να ορίσουμε πρώτα τι είναι η εξαρτημένη σκέδαση. Τα κύματα που αλληλεπιδρούν με πολλά εμπόδια, προκαλούν ένα *φαινόμενο συνεργασίας* με αποτέλεσμα να δημιουργούνται είτε πολύ μεγάλα ολικά πεδία (ενισχυτική παρεμβολή, για παράδειγμα από μία περιοδική διάταξη όμοιων σκεδαστών σε ένα κρυσταλλικό πλέγμα) είτε πολύ μικρά πεδία (καταστροφική παρεμβολή, για παράδειγμα από μία τυχαία διάταξη σκεδαστών). Στην εξαρτημένη σκέδαση λοιπόν τα σκεδασμένα πεδία γειτονικών εμποδίων σχετίζονται μεταξύ τους.

Έστω τώρα ότι έχουμε  $N$  εμπόδια  $B_i, i = 1, 2, \dots, N$ , μη συνδεδεμένα μεταξύ τους. Το σύνορο του  $B_i$  συμβολίζεται με  $S_i$ . Δίνεται ένα προσπίπτον κύμα στα  $N$  εμπόδια και προκύπτει το πρόβλημα υπολογισμού των σκεδασμένων κυμάτων. Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε όλα τα χαρακτηριστικά του κάθε εμποδίου, όπως θέση, σχήμα, προσανατολισμό και συνοριακή συνθήκη που ικανοποιεί. Εάν τα εμπόδια είναι διαπερατά τότε υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε και την εσωτερική τους σύνθεση. Υπάρχουν όμως πολλές περιπτώσεις που δεν είναι διαθέσιμες όλες οι πληροφορίες, όπως για παράδειγμα όταν τα εμπόδια είναι τοποθετημένα με τυχαίο τρόπο. Από μαθηματική σκοπιά, το ντετερμινιστικό πρόβλημα της πολλαπλής σκέδασης μπορεί να περιγραφεί ως ένα εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών, με μία συνθήκη ακτινοβολίας στο άπειρο. Όμως η επίλυση αυτού δεν είναι εύκολη υπόθεση, κυρίως λόγω της πολύπλοξης γεωμετρίας. Ένας τρόπος προσέγγισης είναι μέσω της απλής σκέδασης ή θεωρώντας μία συνορια-

κή ολοκληρωτική εξίσωση του N-σώματος στο ολικό σύνορο  $S = U_{j=1}^N S_j$ . Αν και θα ήταν πολύ βολικό να αντιμετωπίσουμε το σύνολο των σχεδαστών ως ένα σώμα, μία τέτοια προσέγγιση ανταποκρίνεται σε περιορισμένα προβλήματα και είναι ιδιαίτερα δύσκολη από υπολογιστική άποψη.

Για απλές γεωμετρίες, όπως κυκλικούς κυλίνδρους ή σφαίρες, εφαρμόζεται με μεγάλη επιτυχία και ευκολία μία μέθοδος που συνδυάζει ξεχωριστές λύσεις της εξίσωσης *Helmholtz*, τα λεγόμενα πολύπολα (*multipoles*). Σημαντικό εργαλείο της μεθόδου είναι τα *προσθετικά θεωρήματα* (*addition theorems*) με τη χρήση των οποίων επιτυγχάνεται η επέκταση των πολυπόλων από μία αρχή συντεταγμένων σε μία άλλη. Ο πρώτος που χρησιμοποίησε αυτή τη μέθοδο ήταν ο Lord Rayleigh. Η μέθοδος του *Rayleigh* περιείχε όλα τα στοιχειώδη βήματα που περιλαμβάνει σήμερα η θεωρία πολλαπλής σκέδασης, τα οποία είναι η χρήση ενός πίνακα για το κάθε εμπόδιο σε σφαιρικές αρμονικές με τοπικό κέντρο αυτό του εμποδίου, η επέκταση των σφαιρικών αρμονικών ως προς ένα από τα άλλα κέντρα και η εξίσωση του εισερχόμενου πεδίου σε αυτό το κέντρο με το άθροισμα των εξερχόμενων πεδίων των υπόλοιπων κέντρων και του εξωτερικού πεδίου  $\psi_0$ .

Για να γενικεύσουμε την μέθοδο του *Rayleigh* και να την προσαρμόσουμε στον συμβολισμό που θα ακολουθήσουμε από εδώ και στο εξής στα υπόλοιπα κεφάλαια, θεωρούμε ένα πρόβλημα ακουστικής σκέδασης από δύο σφαίρες. Έστω ότι οι σφαίρες έχουν κέντρα τα  $O_1, O_2$  αντίστοιχα. Το σχεδασμένο πεδίο  $u_{sc}$  εκφράζεται ως προς τα εξερχόμενα πολύπολα  $\psi_n^m$  με κέντρο το  $O_1$  και με κέντρο το  $O_2$ :

$$u_{sc} = \sum_{n,m} \{a_n^m \psi_n^m(\mathbf{r}_1) + b_n^m \psi_n^m(\mathbf{r}_2)\}.$$

Οι συντελεστές  $a_n^m, b_n^m$  υπολογίζονται από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στην κάθε σφαίρα. Αυτό προϋποθέτει την επέκταση του  $\psi_n^m(\mathbf{r}_2)$  σε όρους των κανονικών σφαιρικών λύσεων με κέντρο το  $O_1, \hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_1)$ . Έτσι, χρειαζόμαστε το προσθετικό θεώρημα

$$\psi_n^m(\mathbf{r}_2) = \sum_{\nu,\mu} S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \hat{\psi}_\nu^\mu(\mathbf{r}_1),$$

που ισχύει για  $r_1 < b$ , όπου  $r_1 = |\mathbf{r}_1|$ ,  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$  και  $b = |\mathbf{b}|$  η απόσταση μεταξύ των δύο κέντρων. Ο πίνακας  $\mathbf{S} = (S_{n\nu}^{m\mu})$  καλείται *μήτρα διαχωρισμού* ή *μήτρα μετασχηματισμού* συντεταγμένων και αποτελεί σημαντικό 'συστατικό' της θεωρίας πολλαπλής σκέδασης γενικότερα. Σε επόμενα κεφάλαια θα δώσουμε ιδιαίτερη έμφαση στον υπολογισμό του  $\mathbf{S}$  σε ακουστικά προβλήματα (εξίσωση *Helmholtz*).

## Κεφάλαιο 2

# Απλή σκέδαση ακουστικών κυμάτων

### 2.1 Ακουστικά κύματα

Θεωρούμε τη διάδοση ακουστικών κυμάτων μικρού πλάτους μέσα σε ένα μη ομογενές και ιστροπικό μέσο που βρίσκεται στον  $\mathbb{R}^3$  και το λαμβάνουμε ως συμπιεστό ιδανικό ρευστό με απουσία επίδρασης εξωτερικών δυνάμεων. Ακόμη επιτρέπουμε απορρόφηση μέσα σ' αυτό. Έστω λοιπόν  $v = v(x, t)$  το πεδίο ταχύτητας ενός σωματιδίου στο σημείο  $x \in \mathbb{R}^3$ , σε χρόνο  $t$  και έστω  $p = p(x, t)$ ,  $\rho = \rho(x, t)$  και  $S = S(x, t)$  η πίεση, η πυκνότητα και η ειδική ενθαλπία του ρευστού αντίστοιχα. Η κίνησή του περιγράφεται τότε από την εξίσωση Euler

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v + \gamma v + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0,$$

την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0,$$

την εξίσωση κατάστασης

$$p = f(\rho, S)$$

και την αδιαβατική υπόθεση

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \Delta S = 0$$

όπου  $f$  συνάρτηση εξαρτώμενη από τη φύση του ρευστού. Επίσης  $\gamma$  είναι ο συντελεστής απορρόφησης του, θεωρούμενος ως τμηματικά σταθερός. Το σύστημα αυτό είναι μη γραμμικό ως προς τις άγνωστες συναρτήσεις  $v, \rho, p, S$ .

Θεωρώντας τη στατική κατάσταση  $v_o = 0, \rho = \rho_o(x), S = S_o(x)$  και  $p_o = \text{σταθερή}$ , μπορούμε να εκφράσουμε τις  $v, \rho, p, S$  ως μικρές διαταραχές της παραπάνω κατάστασης, με τον παρακάτω τρόπο :

$$v(x, t) = \varepsilon v_1(x, t) + \dots,$$

$$\rho(x, t) = \rho_o(x) + \varepsilon v_1(x, t) + \dots,$$

$$p(x, t) = p_o + \varepsilon p_1(x, t) + \dots,$$

$$S(x, t) = S_o(x) + \varepsilon S_1(x, t) + \dots,$$

όπου  $0 < \varepsilon \ll 1$  και οι τελείες υποδηλώνουν την ύπαρξη όρων του  $\varepsilon$  μεγαλύτερης τάξης.

Αντικαθιστώντας και κρατώντας τους όρους με διαταραχή μόνο πρώτης τάξης, παίρνουμε το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \gamma v_1 + \frac{1}{\rho_o} \nabla p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_o v_1) = 0$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = c^2(x) \left[ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla \rho_o \right]$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla S_o = 0$$

όπου η ταχύτητα του ήχου  $c$  στο μέσο διάδοσης ορίζεται ως

$$c^2(x) := \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_o(x), S_o(x)).$$

Απαλείφουμε τώρα τις  $v_1, \rho_1$  από το σύστημα. Οδηγούμαστε έτσι στην κυματική εξίσωση με απόσβεση για την πίεση  $p_1$  :

$$\frac{\partial^2 p_1(x, t)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} = c^2(x) \rho_o(x) \left( \frac{1}{\rho_o(x)} \nabla p_1(x, t) \right). \quad (2.1)$$

Αγνοούμε τώρα όρους που περιέχουν το  $\nabla \rho_o$  και υποθέτουμε ότι η  $p_1$  είναι χρονικά αρμονική, δηλαδή της μορφής

$$p_1(x, t) = v(x) e^{-i\omega t}$$

με κυκλική συχνότητα  $\omega > 0$  και μία μιγαδική συνάρτηση  $v = v(x)$  η οποία εξαρτάται μόνο από τη χωρική μεταβλητή.

Αντικαθιστώντας στην (2.1), προκύπτει η εξίσωση Helmholtz με μεταβλητό το συντελεστή της  $v$ :

$$\Delta v(x) + \frac{\omega^2}{c^2(x)}(1 + i\frac{\gamma}{\omega}v(x)) = 0. \quad (2.2)$$

Γενικά, για το συντελεστή απορρόφησης ισχύει η σχέση  $\gamma = 1/\rho_o c^2$  ενώ η ποσότητα  $\frac{1}{\gamma}$  είναι γνωστή ως μέτρο συμπίεσης.

Έστω τώρα ότι η περιοχή που καταλαμβάνει το μη ομογενές μέσο περιέχεται σε μία μπάλα  $B$  του  $\mathbb{R}^3$ . Το περιβάλλον μέσο είναι λοιπόν ο  $\mathbb{R}^3 \setminus B$  και θεωρώντας τον ομογενή, έστω ότι η ταχύτητα του ακουστικού κύματος σε αυτόν είναι  $c_o = \text{σταθερή}$  για  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus B$ . Ορίζουμε έτσι τον κυματάρημο και το δείκτη διάθλασης ως εξής:

$$k := \frac{\omega}{c_o} > 0$$

και

$$n(x) := \frac{c_o}{c^2(x)}(1 + i\frac{\gamma}{\omega}).$$

Η εξίσωση Helmholtz παίρνει τώρα τη μορφή

$$\Delta v + k^2 n(x)v = 0 \quad (2.3)$$

όπου  $n = n(x)$  είναι μιγαδική συνάρτηση με  $\text{Re}n(x) \geq 0$  και  $\text{Im}n(x) \geq 0$ .

Από τις υποθέσεις που κάναμε στην παραπάνω ανάλυση για τη φύση του ρευστού ως μέσο διάδοσης ενός ακουστικού κύματος, βλέπουμε ότι αυτές είναι γενικές και αντιστοιχούν σε μία αρκετά ρεαλιστική περιγραφή του. Μπορεί για παράδειγμα το μέσο διάδοσης να θεωρηθεί ως μη απορροφητικό ( $\gamma = 0$ ) οπότε και θα ισχύει  $n(x) = c_o^2/c^2(x)$ .

Μέχρι εδώ, η ανάλυσή μας αφορά τη σκέδαση ακουστικών κυμάτων από ένα μη ομογενές μέσο. Για την ανάλυση της σκέδασης από εμπόδιο, θεωρούμε πως το μέσο διάδοσης και το περιβάλλον μέσο γύρω από το σκεδαστή ταυτίζονται και θεωρούνται ομογενή, με την ταχύτητα του ήχου  $c(x) = c_o$  σταθερή. Η εξίσωση Helmholtz γράφεται τότε

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

με  $k^2 := \omega(\omega + i\gamma)/c_o^2$ .

Διαλέγουμε το πρόσημο του  $k$  τέτοιο ώστε  $Imk \geq 0$ . Σημειώνουμε επίσης ότι το  $k$  μπορεί να είναι είτε πραγματικό, είτε μιγαδικό. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί στην απλή κυματική διάδοση ενώ η δεύτερη στη διάδοση με απορρόφηση. Επίσης είναι προφανές ότι θα πρέπει να ισχύει  $Rek > 0$ , ώστε να μπορεί να υφίσταται κυματική διάδοση.

## 2.2 Το ευθύ προβλήμα ακουστικής σκέδασης

Από τα παραπάνω αρχίζει να γίνεται φανερό πως το ευθύ πρόβλημα ακουστικής σκέδασης, στην περίπτωση που θεωρούμε αρμονική εξάρτηση ως προς τον χρόνο, περιγράφεται σε διαφορική μορφή ως ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών της εξίσωσης Helmholtz .

Θεωρώντας ότι τα προσπίπτοντα κύματα είναι επίπεδα και έχουν αρμονική εξάρτηση ως προς το χρόνο, περιγράφονται δηλαδή από τη σχέση

$$v^i(x, t) = e^{i(kx \cdot d - \omega t)}$$

όπου  $k$  είναι ο κυματάνημος,  $\omega$  η κυκλική συχνότητα,  $c_0$  η ταχύτητα του ήχου στο κενό περιβάλλον μέσο και  $d$  το μοναδιαίο διάνυσμα της διεύθυνσης διάδοσης. Τα δύο βασικά προβλήματα που προκύπτουν στη θεωρία ακουστικής σκέδασης παρουσιάζονται στη συνέχεια.

### 2.2.1 Σκέδαση από ένα μη ομογενές μέσο

Το πρόβλημα αυτό περιγράφεται ως εξής :

Βρες το συνολικό πεδίο  $u$ , τέτοιο ώστε

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \quad (2.4)$$

$$u(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{x} \cdot \hat{d}} + u(\mathbf{x}), \quad (2.5)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u_{sc}}{\partial r} - ik u_{sc} \right) = 0, \quad (2.6)$$

όπου  $r = |\mathbf{x}|$ ,  $n(x) = c_0^2/c^2(x)$  ο δείκτης διάθλασης του μέσου και  $c = c(x)$  η ταχύτητα του ήχου στο μη ομογενές μέσο. Στο πρόβλημα αυτό δεν υπάρχει κάποια συνοριακή συνθήκη στο σύνορο κάποιου σκεδαστή. Υπάρχει όμως μία συνθήκη στο άπειρο, δηλαδή «μακριά» από το σκεδαστή, η (2.6) που μας

εξασφαλίζει ότι το σχεδασμένο κύμα μακριά από το μέσο συμπεριφέρεται σαν σφαιρικά επεκτεινόμενο κύμα. Η συνθήκη αυτή είναι γνωστή ως συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld. Τονίζουμε εδώ ότι σε αυτό το πρόβλημα ο σχεδαστής δεν είναι κάποιο σώμα που παρεμβάλλεται στην διάδοση του κύματος, αλλά αντιθέτως ένα μη ομογενές μέσο στο οποίο όταν εισέρχεται το κύμα, σχεδάζεται. Υποθέτουμε ότι το μη ομογενές αυτό μέσο περιέχεται σε μία συμπαγή μπάλα  $B$  του  $\mathbb{R}^3$ .

### 2.2.2 Σκέδαση από ένα εμπόδιο

Το πρόβλημα αυτό περιγράφεται ως εξής :

Βρες το συνολικό πεδίο  $u$  , τέτοιο ώστε:

- $$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.7)$$
 στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$

- $$u(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{d}}} + u(\mathbf{x}), \quad (2.8)$$

- Συνοριακή συνθήκη, στο  $\partial D$

- $$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u_{sc}}{\partial r} - ik u_{sc} \right) = 0, \quad (2.9)$$

όπου η (2.7) είναι η εξίσωση Helmholtz.

Επίσης  $k = \omega/c_0$  ενώ ο όρος  $n(x)$  απουσιάζει απο την εξίσωση αφού είναι ίσος με 1 για την περιοχή  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$  εκτός του σχεδαστή (όπου το μέσο διάδοσης θεωρείται ομογενές).

Φυσικά, ο περιορισμός της (2.7) στον  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$  οφείλεται στην υπόθεση της μη διαπερατότητας του αντικειμένου. Παρατηρούμε εδώ ότι εκτός απο την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld (2.9), υπεισέρχεται στο πρόβλημα και μία συνοριακή συνθήκη στο σύνορο του σχεδαστή (;;).

Βλέπουμε λοιπόν ότι το ευθύ πρόβλημα ακουστικής σκέδασης από ένα εμπόδιο, περιγράφεται σε διαφορική μορφή ως ένα καθαρά μαθηματικό, εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών.



Θα δούμε τώρα τις διάφορες συνοριακές συνθήκες που μπορεί να προκύψουν στο σύνορο του σχεδαστή, καθώς και τη φυσική τους σημασία.

Αν περιγράψουμε τις τιμές της  $u$  στο σύνορο του σώματος (πρόβλημα *Dirichlet*), αυτό αντιστοιχεί από φυσική άποψη στην περιγραφή της πίεσης του ακουστικού κύματος. Έστω λοιπόν ένα δοσμένο προσπίπτον κύμα  $u^i$ . Τότε το συνολικό ακουστικό κύμα περιγράφεται από την σχέση  $u = u^i + u^s$ , όπου  $u^s$  υποδηλώνει το σχεδασμένο κύμα.

Για ένα ηχητικά μαλακό σώμα, η συνολική πίεση πρέπει να μηδενίζεται στο σύνορο, δηλαδή θα ισχύει στο  $\partial D$

$$u = 0 \Rightarrow u_{sc} = -u_{inc}.$$

Στην περίπτωση που δίνονται πληροφορίες για τη μεταβολή της  $u$  κατά την κάθετη διεύθυνση στο σύνορο (πρόβλημα *Neumann*), από φυσική άποψη αυτό αντιστοιχεί στην περίπτωση που περιγράφεται η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας του ακουστικού κύματος.

Αν έχουμε ηχητικά σκληρό σώμα, τότε πρέπει να ισχύει στο  $\partial D$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

όπου  $n$  είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του σχεδαστή.

Μία πιο ρεαλιστική, από φυσικής άποψης προσέγγιση, είναι αυτή κατά την οποία η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στο σύνορο είναι ανάλογη με τη διαφορά πίεσης πάνω σε αυτό, δηλαδή

$$n \cdot v + x(p - p_o) = 0$$

στο σύνορο  $\partial D$ , όπου ο συντελεστής  $x$  καλείται *συντελεστής ακουστικής εμπέδησης* και ορίζεται πάνω στο σύνορο. Αυτή η συνθήκη οδηγεί σε πρόβλημα συνοριακών τιμών τύπου *Robin* με συνοριακή συνθήκη  $\partial u / \partial n + ilu = 0$  στο σύνορο  $\partial D$ , όπου  $l$  θετική σταθερά.

Στην περίπτωση που σχεδαστής είναι ένα διαπερατό αντικείμενο  $D$  θεωρούμενο ως ρευστό με σταθερή πυκνότητα  $\rho_D$  και ταχύτητα ήχου μέσα σε αυτό  $c_D$ , διαφορετικά αντιστοίχως από την πυκνότητα  $\rho$  και την ταχύτητα του ήχου

$c$  στο περιβάλλον μέσο  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ , οδηγούμαστε σε ένα πρόβλημα διαπερατότητας. Εδώ, επιπρόσθετα, εκτός από την υπέρθεση  $u = u^i + u^s$  του προσπίπτοντος κύματος  $u^i$  και του σχεδασμένου κύματος  $u^s$  στον  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$  η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz με κυματάρημο  $k = \omega/c$ , έχουμε επίσης ένα κύμα  $v$  το οποίο μεταδίδεται μέσα στο  $D$  και ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz με κυματικό αριθμό  $k_D = \frac{\omega}{c_D} \neq k$ . Φυσικά η τελευταία αντιστοιχεί σε εσωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών. Η συνέχεια της πίεσης και της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας πάνω στο σύνορο οδηγεί στις συνοριακές συνθήκες μετάδοσης

$$u = v, \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\rho_D} \frac{\partial v}{\partial n}$$

στο  $\partial D$ , όπου  $n$  είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του σχεδαστή.

Το πρώτο ερώτημα που τίθεται για το ευθύ πρόβλημα σκέδασης είναι η μοναδικότητα της λύσης. Τα βασικά εργαλεία που μας εξασφαλίζουν κάτι τέτοιο είναι τα θεωρήματα του Green και η αρχή της μοναδικής συνέχισης των λύσεων μίας ελλειπτικής εξίσωσης. Εξασφαλίζοντας τη μοναδικότητα της λύσης, το επόμενο ερώτημα που τίθεται είναι η ύπαρξη της μοναδικής αυτής λύσης και η δυνατότητα να την προσεγγίσουμε αριθμητικά. Η πιο γνωστή μέθοδος που χρησιμοποιείται για το σκοπό αυτό είναι η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων.

## 2.3 Θεωρήματα και τύποι του Green

**Ορισμός 2.3.1** Έστω  $k$  ο κυματάρημος έτσι ώστε να ισχύει ότι  $\text{Im}(k) \geq 0$ . Η θεμελιώδης λύση της διαφορικής εξίσωσης Helmholtz ορίζεται ως εξής:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \quad (2.10)$$

με  $x \neq y$  και  $x, y \in \mathbb{R}^3$ . Η λύση αυτή ικανοποιεί την έκφραση:  
 $\Delta \Phi(x, y) + k^2 \Phi(x, y) = -\delta(x-y)$ , όπου  $\delta(x-y)$  η συνάρτηση Dirac.

**Ορισμός 2.3.2** Έστω το ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο  $D \subset \mathbb{R}^3$ . Θα λέμε ότι το  $D$  είναι της τάξης  $C^m$ , όπου  $m \in \mathbb{N}$ , αν για κάθε σημείο  $z \in \partial D$  υπάρχει μία περιοχή  $V_z$  του  $z$  με τις ακόλουθες ιδιότητες: η τομή  $V_z \cap \overline{D}$  μπορεί να απεικονιστεί  $1-1$  και επί πάνω στη μισή σφαίρα  $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, x_3 \geq 0\}$  και αυτή η απεικόνιση, όπως και η αντίστροφη της, είναι  $m$ -φορές συνεχώς παραγωγίσιμες και τέλος η τομή  $V_z \cap \partial D$  απεικονίζεται πάνω στο δίσκο  $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, x_3 = 0\}$ .

Υπενθυμίζουμε ότι ως  $C^m(D)$  ορίζουμε το γνωστό γραμμικό χώρο των  $m$ -φορές συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο σύνολο  $D$ .

Από τα βασικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται στη μελέτη της εξίσωσης Helmholtz είναι οι ολοκληρωτικοί τύποι του Green τους οποίους παραθέτουμε στη συνέχεια.

Έστω  $D$  ένα φραγμένο χωρίο της τάξης  $C^1$  και  $n$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο  $\partial D$ , κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό του χωρίου  $D$ . Τότε αν  $u \in C^1(\overline{D})$  ισχύει το πρώτο θεώρημα του Green :

$$\int_D (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} ds \quad (2.11)$$

και αν  $u, v \in C^2(\overline{D})$  τότε ισχύει το δεύτερο θεώρημα του Green:

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial D} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) ds \quad (2.12)$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποια βασικά, για την αναπαράσταση των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz, θεωρήματα.

**Θεώρημα 2.3.1** Έστω  $D$  ένα φραγμένο χωρίο της τάξης  $C^2$  και  $n$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα πάνω στο σύνορο  $\partial D$ , κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό του χωρίου  $D$ . Αν  $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$  μία συνάρτηση η οποία έχει κάθετη παράγωγο πάνω στο σύνορο  $\partial D$ , υπό την έννοια ότι το όριο

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = \lim_{h \rightarrow +0} n(x) \cdot \nabla u(x - hn(x))$$

όπου  $x \in \partial D$ , υπάρχει ομοιόμορφα στο  $\partial D$ , τότε έχουμε τον τύπο του Green:

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u(y)}{\partial n} \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \right\} ds(y), x \in D \quad (2.13)$$

Ο τύπος (2.13) του Green είναι γνωστός ως αναπαράσταση Helmholtz.

**Θεώρημα 2.3.2** Αν η  $u$  ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz  $\Delta u + k^2 u = 0$  σε ένα χωρίο  $D$  και είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη τότε είναι αναλυτική συνάρτηση.

Από εδώ και στο εξής λέγοντας ότι μία συνάρτηση  $u$  ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz, θα εννοούμε ότι είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και επομένως αναλυτική στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της.

Αν μία λύση  $u$  της εξίσωσης Helmholtz μηδενίζεται σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, τότε μηδενίζεται παντού. Η ιδιότητα αυτή ισχύει λόγω αναλυτικότητας της  $u$ .

**Ορισμός 2.3.3** Μία λύση  $u$  της εξίσωσης Helmholtz, όπου το πεδίο ορισμού της περιέχει το εξωτερικό κάποιας σφαίρας, θα καλείται ακτινοβόλος αν ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \quad (2.14)$$

όπου  $r = |x|$  και το όριο υπάρχει ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις  $\frac{x}{|x|}$ .

**Θεώρημα 2.3.3** Έστω ένα φραγμένο σύνολο  $D$  το οποίο είναι το ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου χωρίου της τάξης  $C^2$  και  $n$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα πάνω στο σύνορο  $\partial D$ , κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό του χωρίου  $D$ . Αν  $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$  μία ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz  $\Delta u + k^2 u = 0$  στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ , η οποία έχει κάθετη παράγωγο πάνω στο σύνορο  $\partial D$ , υπό την έννοια ότι το όριο

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = \lim_{h \rightarrow +0} n(x) \cdot \nabla u(x + hn(x)), x \in \partial D$$

υπάρχει ομοιόμορφα πάνω στο  $\partial D$ , τότε έχουμε τον τύπο του Green:

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial n} \Phi(x, y) \right\} ds(y), x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \quad (2.15)$$

Από το θεώρημα 2.3.3 είναι προφανές ότι κάθε λύση της εξίσωσης Helmholtz η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld, αυτόματα ικανοποιεί και τη σχέση:

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

καθώς  $|x| \rightarrow \infty$  ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις  $\frac{x}{|x|}$  και ότι η ισχύς της συνθήκης ακτινοβολίας είναι αμετάβλητη ως προς μετατοπίσεις και στροφές της αρχής του συστήματος συντεταγμένων.

Μια ισοδύναμη σχέση της συνθήκης ακτινοβολίας είναι η εξής:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} (|\frac{\partial u}{\partial r} - iku|^2) ds = 0$$

η οποία αν και ασθενέστερη της 2.6, όταν ισχύει, το θεώρημα 2.3.3 εξακολουθεί να εφαρμόζεται.

**Ορισμός 2.3.4** Μία λύση της εξίσωσης Helmholtz η οποία ορίζεται σε ολόκληρο τον  $\mathbb{R}^3$  καλείται *ακέραια λύση*. (Προφανώς μία τέτοια λύση, αν ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld πρέπει να μηδενίζεται παντού.)

Πλέον είμαστε σε θέση να εισάγουμε την έννοια του πλάτους σκέδασης  $u_\infty$ , το οποίο αποτελεί σημαντική συνάρτηση στη θεωρία σκέδασης.

**Θεώρημα 2.3.4** Κάθε ακτονοβόλος λύση  $u$  της εξίσωσης Helmholtz, έχει την ασυμπτωτική συμπεριφορά ενός σφαιρικά εκτεινόμενου κύματος

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} (u_\infty(\hat{x}) + O(\frac{1}{|x|})) \quad (2.16)$$

καθώς  $|x| \rightarrow \infty$ , ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις  $\frac{x}{|x|}$ , όπου η συνάρτηση  $u_\infty$  ορισμένη πάνω στη μοναδιαία σφαίρα  $\Omega$ , είναι γνωστή ως πλάτος σκέδασης της  $u$ . Για το πλάτος σκέδασης  $u_\infty$  ισχύει η αναπαράσταση:

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \{u(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x} \cdot y}}{\partial n(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial n} e^{-ik\hat{x} \cdot y}\} ds(y), \hat{x} \in \Omega \quad (2.17)$$

## 2.4 Σφαιρικές συναρτήσεις Bessel

Οι ιδιότητες των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel αποτελούν χρήσιμα εργαλεία για τη θεωρία της σκέδασης. Για το λόγο αυτό τις παρουσιάζουμε συνοπτικά.

**Ορισμός 2.4.1** Με τον όρο *σφαιρική αρμονική* εννοούμε τον περιορισμό ενός ομογενούς αρμονικού πολυωνύμου βαθμού  $n$  πάνω στη μοναδιαία σφαίρα  $\Omega$ .

**Θεώρημα 2.4.1** Υπάρχουν ακριβώς  $2n + 1$  γραμμικώς ανεξάρτητες σφαιρικές αρμονικές βαθμού  $n$ .

Το θεώρημα 2.4.1 μας επιτρέπει να ορίσουμε τη μορφή των σφαιρικών αρμονικών κάθε βαθμού  $n$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Παρόλ' αυτά όμως για την περαιτέρω μελέτη μας, είναι πιο βολικό να χρησιμοποιήσουμε τις σφαιρικές

αρμονικές σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Η γενική μορφή ενός ομογενούς πολυωνύμου σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$  είναι η εξής:  $H_n = r^n Y_n(\theta, \phi)$ . Το πολυώνυμο αυτό είναι αρμονικό, δηλαδή ισχύει ότι  $\Delta H_n = 0$ , αν ικανοποιείται η σχέση:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial Y_n}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial\phi^2} + n(n+1)Y_n = 0 \quad (2.18)$$

Ξεκινάμε αναζητώντας λύσεις της εξίσωσης Helmholtz της μορφής:

$$u(x) = f(k|x|)Y_n(\hat{x})$$

όπου οι  $Y_n$  είναι σφαιρικές αρμονικές τάξης  $n$ . Από τη διαφορική εξίσωση (2.18) για τις σφαιρικές αρμονικές είναι επόμενο ότι η  $u$  ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz, εφόσον η  $f$  είναι μία λύση της σφαιρικής διαφορικής εξίσωσης Bessel τάξης  $n$ :

$$t^2 f''(t) + 2t f'(t) + (T^2 - n(n+1))f(t) = 0.$$

Επιλύοντας τη σφαιρική διαφορική εξίσωση Bessel προκύπτουν οι σφαιρικές συναρτήσεις:

$$J_n(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^p t^{n+2p}}{2^p p! \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+2p+1)} \right) \quad (2.19)$$

$$Y_n(t) = -\frac{(2n)!}{2^n n!} \sum_{p=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^p t^{2p-n-1}}{2^p p! (-2n+1)(-2n+3) \dots (-2n+2p-1)} \right) \quad (2.20)$$

Οι (2.19) λέγονται σφαιρικές συναρτήσεις Bessel τάξης  $n$  και είναι αναλυτικές συναρτήσεις για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ . Οι (2.20) λέγονται σφαιρικές συναρτήσεις Neumann τάξης  $n$  και είναι αναλυτικές συναρτήσεις για κάθε  $t \in (0, \infty)$ .

Κατά αντιστοιχία με τις συναρτήσεις Hankel προκύπτουν και οι σφαιρικές συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους τάξης  $n$ :

$$H_n^{(1)} = J_n + iY_n$$

και

$$H_n^{(2)} = J_n - iY_n.$$

**Θεώρημα 2.4.2** Έστω η σφαιρική αρμονική  $Y_n$  τάξης  $n$ . Τότε ισχύει ότι η  $u_n(x) = J_n(k|x|)Y_n(\hat{x})$  είναι μία ακέραιη λύση της εξίσωσης Helmholtz και η  $v_n(x) = H_n^{(1)}(k|x|)Y_n(\hat{x})$  είναι μία λύση της εξίσωσης Helmholtz, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

## 2.5 Περίπτωση των δύο διαστάσεων

Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε πώς εκφράζεται σε μαθηματική μορφή η περίπτωση των δύο διαστάσεων για το πρόβλημα συνοριακών τιμών της εξίσωσης Helmholtz.

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης *Helmholtz* στις δύο διαστάσεις δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi(x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|), x \neq y. \quad (2.21)$$

και η συνθήκη ακτινοβολίας του *Sommerfeld* γίνεται:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \quad (2.22)$$

όπου  $r = |x|$  και το όριο θεωρείται ομοιόμορφο για όλες τις κατευθύνσεις  $\frac{x}{|x|}$ . Ψάχνοντας λύση της εξίσωσης Helmholtz με τη μορφή

$$u(r) = f(kr)e^{in\phi}$$

σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \phi)$ , οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση Bessel

$$t^2 f''(t) + t f'(t) + (t^2 - n^2) f(t) = 0$$

τάξης  $n = 0, 1, \dots$ . Αυτό που απαιτείται για τη μελέτη της διδιάστατης εξίσωσης Helmholtz δεν είναι η αναλυτική μελέτη της εξίσωσης Bessel αλλά η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεών της, και συγκεκριμένα η συμπεριφορά τους για «μεγάλα» ορίσματα.

## Κεφάλαιο 3

# Προσθετικά θεωρήματα στις 2 διαστάσεις

Οι περισσότερες θεωρίες πολλαπλής σκέδασης βασίζονται στα προσθετικά θεωρήματα, με τα οποία μπορούμε να μετατρέψουμε το ανάπτυγμα για ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου, σε κάποιο παρόμοιο ανάπτυγμα για ένα διαφορετικό σημείο του χώρου.

Το πιο γνωστό προσθετικό θεώρημα είναι το

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy},$$

ή για τις συναρτήσεις *Bessel* :  $J_0(x+y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(x) J_n(y)$ .

Σε ένα χώρο διαστάσεων  $q$  έχουμε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ . Έστω η ακτινική συντεταγμένη,  $r = \sqrt{\phi_q}$ , όπου  $\phi_q = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_q^2$ . Το θεώρημα *Hobson* που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια, αποτελεί βασικό εργαλείο της μεθόδου μας και χρησιμοποιείται στην εφαρμογή διαφορικών τελεστών καρτεσιανών συντεταγμένων σε συναρτήσεις της  $\phi_q$ . Συγκεκριμένα, δίνει το αποτέλεσμα της εφαρμογής του  $f_n(\nabla_q)$  στην  $F(\phi_q)$ , όπου  $f_n(\nabla_q) = f_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_q}\right)$  και  $F$  είναι οποιαδήποτε ομαλή συνάρτηση μίας μεταβλητής. Το αποτέλεσμα απλοποιείται εάν η  $f_n$  είναι ένα αρμονικό ομογενές πολυώνυμο,  $P_n$ , έτσι ώστε

$$\nabla_q^2 P_n(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0.$$

Σε αυτό το κεφάλαιο έχουμε  $q = 2$  και υπάρχουν ακριβώς δύο γραμμικά ανεξάρτητα αρμονικά πολυώνυμα βαθμού  $n$  για κάθε θετικό  $n$ . Έτσι,  $P_n^+(x, y) =$



$(x + iy)^n = r^n e^{in\theta}$ ,  $P_n^-(x, y) = (x - iy)^n = r^n e^{-in\theta}$ , με  $x = r \cos\theta$  και  $y = r \sin\theta$  πολικές συντεταγμένες.

### 3.1 Θεώρημα Hobson

Το θεώρημα που ακολουθεί αποτελεί την απλούστερη εκδοχή του θεωρήματος του Hobson για μία διάσταση.

**Θεώρημα 3.1.1** Έστω  $\phi_1 = x^2$  και  $n$  θετικός ακέραιος. Τότε ισχύει:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} F(\phi_1) = \sum_{l=0}^n \frac{2^{n-2l}}{l!} F^{(n-l)}(\phi_1) \frac{\partial^{2l}}{\partial x^{2l}} x^n, \quad (3.1)$$

όπου  $F^{(m)}$  είναι η  $m$ -οστή παράγωγος της ομαλής συνάρτησης μίας μεταβλητής  $F$  και το άθροισμα είναι πεπερασμένο.

**Απόδειξη:**

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα με επαγωγή.

Για  $n = 1$  η σχέση είναι τετριμμένη. Εάν γνωρίζουμε το αποτέλεσμα για  $n$  τότε για  $n = n + 1$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} F(\phi_1) &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{l=0}^n \frac{2^{n-2l}}{l!} F^{(n-l)}(\phi_1) \frac{\partial^{2l}}{\partial x^{2l}} x^n \\ \Rightarrow \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} F(\phi_1) &= \sum_{l=0}^n \frac{2^{n-2l}}{l!} \left\{ 2x F^{(n+1-l)} \frac{\partial^{2l}}{\partial x^{2l}} + F^{(n-l)} \frac{\partial^{2l+1}}{\partial x^{2l+1}} x^n \right\} \\ \Rightarrow \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} F(\phi_1) &= 2^{n+1} x^{n+1} F^{(n+1)} + \sum_{l=1}^n \frac{2^{n+1-2l}}{l!} F^{(n+1-l)} \Lambda_n^l, \end{aligned}$$

όπου  $\Lambda_n^l = x \frac{\partial^{2l}}{\partial x^{2l}} x^n + 2l \frac{\partial^{2l-1}}{\partial x^{2l-1}} x^n = \frac{\partial^{2l}}{\partial x^{2l}} x^{n+1}$ .

Το αποτέλεσμα είναι αληθές για  $n = n + 1$ , άρα ισχύει για κάθε  $n$ .

□

**Λήμμα 3.1.1** Έστω  $\nabla_q^2$  η Λαπλασιανή  $q$ -διάστασης,  $(x_1, x_2, \dots, x_q)$  οι Καρτεσιανές συντεταγμένες και  $l$  θετικός ακέραιος αριθμός. Τότε ισχύει για κάθε ομαλή συνάρτηση  $P(x_1, x_2, \dots, x_q)$ :

$$\nabla_q^{2l}(x_1 P) - x_1 \nabla_q^{2l} P = 2l \nabla_q^{2l-2} \frac{\partial P}{\partial x_1},$$

όπου  $\nabla_q^{2l} = (\nabla_q^2)^l$ .

**Απόδειξη:**

Για  $l = 1$  η σχέση είναι τετριμμένη:  $\nabla_q^2(x_1P) - x_1\nabla_q^2P = 2\frac{\partial P}{\partial x_1}$ . Έστω ότι γνωρίζουμε το αποτέλεσμα για  $l$ , τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση για  $l = 1$  έχουμε:

$$\nabla_q^{2l+2}(x_1P) - x_1\nabla_q^{2l+2}P = \nabla_q^{2l}\{\nabla_q^2(x_1P)\} - x_1\nabla_q^{2l}\nabla_q^2P$$

$$\Rightarrow \nabla_q^{2l+2}(x_1P) - x_1\nabla_q^{2l+2}P = \nabla_q^{2l}\{x_1\nabla_q^2P + 2\partial P/\partial x_1\} - x_1\nabla_q^{2l}\nabla_q^2P.$$

Τότε εφαρμόζοντας τον τελεστή  $\nabla_q^2$ , το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης γίνεται:

$$2l\nabla_q^{2l-2}\partial/\partial x_1\nabla_q^2P + 2\nabla_q^{2l}\frac{\partial P}{\partial x_1} = 2(l+1)\nabla_q^{2l}\frac{\partial P}{\partial x_1}.$$

Η τελευταία σχέση είναι και η ζητούμενη.

□

Στις δύο διαστάσεις το θεώρημα *Hobson* είναι το ακόλουθο.

**Θεώρημα 3.1.2** Έστω  $\phi_2 = x^2 + y^2$  και  $f_n(x, y)$  ομογενές πολυώνυμο  $n$  τάξης, όπου  $n$  θετικός ακέραιος αριθμός. Τότε ισχύει:

$$f_n(\nabla_2)F(\phi_2) = \sum_{l=0}^{n-2} \frac{2^{n-2l}}{l!} F^{(n-l)}(\phi_2) \nabla_2^{2l} f_n(x, y) \quad (3.2)$$

όπου το άθροισμα έχει πεπερασμένους όρους και  $f_n(\nabla_2) = f_n(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$ .

**Απόδειξη:**

Και πάλι η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Για μία συνάρτηση  $\phi_2$  το Θεώρημα *Hobson* για μία διάσταση ισχύει έτσι ώστε να έχουμε για κάθε θετικό  $n$ :

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n} F(\phi_2) = \sum_{l=0}^{n-2} \frac{2^{n-2l}}{l!} F^{(n-l)}(\phi_2) \nabla_2^{2l} y^n.$$

Για  $n = 1$  το αποτέλεσμα ισχύει. Τότε, έχουμε  $f_1(x, y) = a_0x + a_1y$  και  $f_1(\nabla_2)F(\phi_2) = 2F'(\phi_2)f_1(x, y)$ .

Έστω ότι ισχύει για  $n$ . Τότε για  $n = n + 1$  έχουμε  $f_{n+1}(x, y) = xf_n(x, y) + ay^{n+1}$ , με  $a$  κάποιος συντελεστής. Τότε έχουμε:

$$f_{n+1}(\nabla_2)F(\phi_2) = \frac{\partial}{\partial x} f_n(\nabla_2)F(\phi_2) + a \frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} F(\phi_2) \Rightarrow$$

$$f_{n+1}(\nabla_2)F(\phi_2) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{l=0}^{n-2l} \frac{2^{n-2l}}{l!} F^{(n-l)}(\phi_2) \nabla_2^{2l} f_n + a \sum_{l=0}^{n+1-2l} \frac{2^{n+1-2l}}{l!} F^{(n+1-l)}(\phi_2) \nabla_2^{2l} y^{n+1}.$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της τελευταίας σχέσης είναι

$$\sum_{l=0}^{n-2l} \frac{2^{n-2l}}{l!} \{sx F^{(n+1-l)} \nabla_2^{2l} f_n + F^{(n-l)} \partial / \partial x \nabla_2^{2l} f_n\},$$

και ο δεύτερος όρος είναι

$$\sum_{l=0}^{n+1-2l} \frac{2^{n+1-2l}}{l!} F^{(n+1-l)} \nabla_2^{2l} f_{n+1} - \sum_{l=0}^{n+1-2l} \frac{2^{n+1-2l}}{l!} F^{(n+1-l)} \nabla_2^{2l} (x f_n).$$

Έτσι έχουμε

$$f_{n+1}(\nabla_2) F(\phi_2) = \sum_{l=0}^{n+1-2l} \frac{2^{n+1-2l}}{l!} F^{(n+1-l)}(\phi_2) \nabla_2^{2l} f_{n+1}(x, y) + L_n,$$

όπου

$$L_n = \sum_{l=0}^{n-2l} \frac{2^{n-2l}}{l!} (2F^{(n+1-l)} [x \nabla_2^{2l} f_n - \nabla_2^{2l} (x f_n)] + F^{(n-l)} \partial / \partial x \nabla_2^{2l} f_n).$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι  $L_n \equiv 0$ . Για  $l = 0$  προκύπτει

$$L_n = \sum_{l=1}^{n+1-2l} \frac{2^{n+1-2l}}{l!} F^{(n+1-l)} \{x \nabla_2^{2l} f_n - \nabla_2^{2l} (x f_n) + 2l \partial / \partial x \nabla_2^{2l-2} f_n\},$$

το οποίο μηδενίζεται σύμφωνα με το λήμμα 3.1.1.

□

Τα παραπάνω θεωρήματα αποτελούν ειδικές περιπτώσεις, σε μία και δύο διαστάσεις αντίστοιχα, ενός γενικού θεωρήματος τριών διαστάσεων που αποδείχτηκε από τον Hobson . Το αποτελέσμα αυτού του θεωρήματος απλοποιείται εάν η  $f_n$  είναι αρμονική συνάρτηση, όπως φαίνεται στο επόμενο πόρισμα.

**Πόρισμα 3.1.1** Έστω  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  και  $P_n(x, y)$  ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $n$ , όπου  $n$  θετικός ακέραιος. Τότε,

$$P_n(\nabla_2) F(r) = P_n(x, y) \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^n F(r).$$

Έτσι, εάν η  $f_n$  είναι αρμονική συνάρτηση τότε η πεπερασμένη σειρά του Θεωρήματος 3.1.2 μειώνεται σε ένα μόνο όρο.

Το Θεώρημα 3.1.2 εφαρμόστηκε από τον Hobson σε αρμονικές συναρτήσεις τριών διαστάσεων. Εμείς θα το εφαρμόσουμε σε κυματοσυναρτήσεις (δηλαδή λύσεις της εξίσωσης Helmholtz) στις δύο διαστάσεις.

Έστω  $Z_v(\omega)$  μία οποιαδήποτε κυλινδρική συνάρτηση βαθμού  $v$ , δηλαδή  $Z_v(\omega) = J_v(\omega), Y_v(\omega), H_n^{(1)}(\omega)$  ή  $H_v^{(2)}(\omega)$ . Τότε έχουμε,

$$\left(\frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega}\right)^m \frac{Z_v(\omega)}{\omega^v} = (-1)^m \frac{Z_{v+m}(\omega)}{\omega^{v+m}},$$

για  $m = 0, 1, 2, \dots$  και για κάθε  $v$ . Στην περίπτωση όπου  $v = 0$  και  $\omega = kr$  προκύπτει

$$\left(\frac{1}{kr} \frac{d}{dr}\right)^m Z_0(kr) = \frac{(-1)^m}{r^m} Z_m(kr).$$

**Ορισμός 3.1.1** Ορίζουμε τον διαφορικό τελεστή  $D_m^{+-}$  ως εξής:

$$D_m^+ = \left[\frac{-1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^m,$$

$$D_m^- = \left[\frac{-1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^m,$$

όπου  $m = 0, 1, 2, \dots$  και  $D_0 = I$  ο ταυτοτικός τελεστής.

Η χρήση αυτού του τελεστή πάνω σε κυλινδρικές κυματοσυναρτήσεις περιγράφεται στα επόμενα δύο θεωρήματα.

**Θεώρημα 3.1.3**

$$D_m Z_0(kr) = Z_m(kr) e^{+im\theta},$$

όπου  $m = 0, 1, 2, \dots$

Το λήμμα που ακολουθεί θα μας βοηθήσει στην απόδειξη του επόμενου θεωρήματος.

**Λήμμα 3.1.2** Εάν  $u$  είναι μια λύση της δισδιάστατης εξίσωσης Helmholtz τότε,

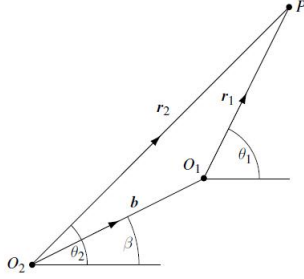
$$D_m^+ D_m^- u = D_m^- D_m^+ u = (-1)^m u.$$

**Θεώρημα 3.1.4**

$$D_m^+ Z_n(kr) e^{in\theta} = Z_{m+n}(kr) e^{i(m+n)\theta},$$

$$D_m^- Z_n(kr) e^{in\theta} = (-1)^n Z_{m-n}(kr) e^{-i(m-n)\theta} = (-1)^m Z_{n-m}(kr) e^{i(n-m)\theta},$$

όπου  $m = 0, 1, 2, \dots$  και  $n = 0, +1, +2, \dots$



Σχήμα 1. Σχηματισμός για προσθετικά θεωρήματα 2 διαστάσεων.

### Απόδειξη:

Για  $n \geq 0$  έχουμε

$$Z_{m+n}(kr)e^{i(m+n)\theta} = A = D_m^+ D_n^+ Z_0 = D_{m+n}^+ Z_0.$$

Για  $n \leq 0$  θέτουμε  $n = -l$  και προκύπτει

$$A = (-1)^l D_m^+ D_l^- Z_0.$$

Έχουμε τώρα δύο περιπτώσεις. Πρώτον για  $m \geq l$ , χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.1.2, προκύπτει

$$A = D_{m-l}^+ Z_0 = D_{m+n}^+ Z_0$$

και δεύτερον για  $m < l$ , από το 3.1.2, έχουμε

$$A = (-1)^{l+m} D_{l-m}^- Z_0 = (-1)^{l+m} Z_{l-m}(kr)e^{-i(l-m)\theta}.$$

Επειδή ισχύει  $Z_{-n} = (-1)^n Z_n$  καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Ομοίως αποδεικνύεται και η δεύτερη σχέση του Θεωρήματος.

□

## 3.2 Θεωρήματα Neumann και Graf

Θεωρούμε δύο διαφορετικές αρχές συντεταγμένων  $O_1$  και  $O_2$  και  $\mathbf{r}_j$ , με  $j = 1, 2$ , το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου  $P$  ως προς τις  $O_1$  και  $O_2$  αντίστοιχα. Έστω ότι  $\mathbf{b}$  είναι το διάνυσμα θέσης του  $O_1$  ως προς το  $O_2$ , έτσι ώστε  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{r}_j = (r_j \cos \theta_j, \sin \theta_j)$  και  $\mathbf{b} = (b \cos \beta, b \sin \beta)$  (Σχήμα 1). Το θεώρημα που ακολουθεί είναι το απλούστερο προσθετικό θεώρημα το οποίο αποδείχθηκε από τον C. Neumann το 1867.

### Θεώρημα 3.2.1

$$J_0(kr_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(kb) J_n(kr_1) e^{in(\theta_1 - \beta)} \quad (3.3)$$

$\Leftrightarrow$

$$J_0(kr_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-1)^n J_n(kb) J_n(kr_1) \cos n(\theta_1 - \beta) \quad (3.4)$$

όπου  $\epsilon_0 = 1$  και  $\epsilon_n = 2$  για  $n > 0$ .

#### Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε το προσθετικό θεώρημα *Neumann* χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των διαφορικών τελεστών  $D_m^+$ ,  $D_m^-$  που ορίσαμε παραπάνω.

Εφόσον η  $J_0(kr_2)$  είναι λύση της διδιάστατης εξίσωσης *Helmholtz*, μπορεί να γραφεί ως

$$J_0(kr_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_n(kr_1) e^{in\theta_1}.$$

Οι συντελεστές  $C_n$  προκύπτουν από την εφαρμογή του τελεστή  $D_m^+(r_2)$  για  $m > 0$ :

$$J_m(kr_2) e^{im\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n D_m^+(\mathbf{r}_2) \{J_n(kr_1) e^{in\theta_1}\}.$$

Ισχύει  $D_n^+(r_2) = D_n^+(r_1)$ . Χρησιμοποιώντας και το Θεώρημα 3.1.4 έχουμε για  $m = 0, 1, 2, \dots$

$$J_m(kr_2) e^{im\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_{m+n}(kr_1) e^{i(m+n)\theta_1}.$$

Έστω τώρα ότι  $r_1 \rightarrow 0$ , έτσι ώστε  $r_2 \rightarrow b$  και  $\theta_2 \rightarrow \beta$ . Επειδή  $J_m(0) = \delta_{0m}$ , έχουμε

$$J_m(kb) e^{im\beta} = C_{-m}.$$

Ομοίως, χρησιμοποιώντας τον τελεστή  $D_m^-(r_2)$  έχουμε

$$J_m(kr_2) e^{im\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (-1)^n J_{m-n}(kr_1) e^{-i(m-n)\theta_1}.$$

Για  $r_1$  να τείνει στο μηδέν, η σχέση  $J_m(kb) e^{im\beta} = C_{-m}$  ισχύει και για  $m < 0$ . Τέλος, αντικαθιστώντας την  $J_m(kb) e^{im\beta} = C_{-m}$  στην  $J_0(kr_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_n(kr_1) e^{in\theta_1}$  ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. □

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί ειδική περίπτωση ενός προσθετικού θεωρήματος, το οποίο δημοσιεύθηκε το 1893 από τον Graf και δίνει μια επέκταση του  $J_\nu(kr_2)e^{i\nu\theta}$ , όπου  $\nu$  τυχαίος μιγαδικός αριθμός.

### Θεώρημα 3.2.2

$$J_m(kr_2)e^{im\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kb)e^{in\beta} J_{m-n}(kr_1)e^{i(m-n)\theta_1} \quad (3.5)$$

$\Leftrightarrow$

$$J_m(kr_2)e^{im\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{m-n}(kb)e^{i(m-n)\beta} J_n(kr_1)e^{in\theta_1} \quad (3.6)$$

### Απόδειξη:

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα των *Jacobi–Anger*:  $e^{iwc\cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(w)e^{in\phi}$ , έχουμε

$$\begin{aligned} i^m J_m(kr_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr_2\cos\phi} e^{-im\phi} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr_2\cos(\theta_2-\phi)} e^{-im(\theta_2-\phi)} d\phi \\ \Rightarrow i^m J_m(kr_2) &= \frac{1}{2\pi} e^{-im\theta_2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr_1\cos(\theta_1-\phi)} e^{ikb\cos(\beta-\phi)} e^{im\phi} d\phi, \end{aligned}$$

που μπορεί να γραφεί και ως

$$J_n(kr)e^{in\theta} = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x\cos\phi+y\sin\phi)} e^{in\phi} d\phi$$

και εκφράζει κανονικές κυλινδρικές κυματοσυναρτήσεις.

□

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να προεκταθούν και για  $Y_m, H_m^{(1)}, H_m^{(2)}$ . Συγκεκριμένα, έχουμε το επόμενο θεώρημα για  $H_m^{(1)}(kr)e^{im\theta}$ .

### Θεώρημα 3.2.3 Για $r_1 < b$ ,

$$H_m^{(1)}(kr_2)e^{im\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m-n}^{(1)}(kb)e^{i(m-n)\beta} J_n(kr_1)e^{in\theta_1} \quad (3.7)$$

και για  $r_1 > b$ ,

$$H_m^{(1)}(kr_2)e^{im\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{m-n}^{(1)}(kb)e^{i(m-n)\beta} H_n^{(1)}(kr_1)e^{in\theta_1} \quad (3.8)$$

### Απόδειξη:

Έστω ότι  $r_1 < b$ . Επειδή η  $H_0^{(1)}(kr_2)$  είναι μία λύση της δισδιάστατης εξίσωσης *Helmholtz* για  $r_2 > 0$ , πρέπει να έχει μία έκφραση της μορφής:

$$H_0^{(1)}(kr_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_n(kr_1) e^{in\theta_1},$$

για κάποιους συντελεστές  $C_n$ . Εφαρμόζοντας τώρα τους τελεστές  $D_m^+(r_2)$ ,  $D_m^-(r_2)$  και για  $r_1 \rightarrow 0$ , όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος *Neumann*, προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα 3.7.

Υπάρχει και δεύτερος τρόπος απόδειξης, τον οποίο θα τον ακολουθήσουμε για να αποδείξουμε την σχέση 3.8, για  $r_1 > b$ . Πρέπει, όπως και στον πρώτο τρόπο, να υπάρχει μία έκφραση της μορφής

$$H_m^{(1)}(kr_2) e^{im\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(kr_1) e^{in\theta_1}.$$

Έστω  $r_1 \rightarrow \infty$ . Έχουμε  $r_2^2 = r_1^2 + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}_1 + b^2$  και

$$\tan\theta_2 = \frac{b\sin\beta + r_1\sin\theta_1}{b\cos\beta + r_1\cos\theta_1}.$$

Άρα,  $r_2 \sim r_1 + b\cos(\theta_1 - \beta)$  και  $\theta_2 \sim \theta_1$  καθώς  $r_1 \rightarrow \infty$ . Επίσης, είναι γνωστό ότι καθώς  $w \rightarrow \infty$  ισχύει

$$H_n^{(1)}(w) \sim \sqrt{2/(\pi w)} e^{i(w - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}.$$

Έτσι, για  $r_1 \rightarrow \infty$  στην σχέση  $H_m^{(1)}(kr_2) e^{im\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(kr_1) e^{in\theta_1}$  έχουμε

$$(-i)^m e^{ikb\cos(\theta_1 - \beta)} e^{im\theta_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (-i)^n e^{in\theta_1}.$$

Εφαρμόζοντας στην τελευταία σχέση το ανάπτυγμα των *Jacobi – Anger*:

$$e^{iw\cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(w) e^{in\phi}$$

και την σχέση  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\phi} d\phi = 2\pi\delta_{0m}$ , καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση 3.8.

□



Μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Graf είναι εκείνη για την οποία  $m = 0$ , όπου για  $r_1 < b$ ,

$$H_0^{(1)}(kr_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n H_n^{(1)}(kb) J_n(kr_1) e^{in\theta_1 - \beta} \quad (3.9)$$

και για  $r_1 > b$ ,

$$H_0^{(1)}(kr_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(kb) H_n^{(1)}(kr_1) e^{in\theta_1 - \beta} \quad (3.10)$$

Οι τελευταίες σχέσεις είναι εξαιρετικά χρήσιμες διότι η  $H_0^{(1)}$  αποτελεί στοιχειώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz στις δύο διαστάσεις.

### 3.3 Πίνακες διαχωρισμού $S$ και $\widehat{S}$

**Ορισμός 3.3.1** Έστω  $\mathbf{r} = (rcos\theta, rsin\theta)$ . Η εξερχόμενη κυλινδρική κυματοσυνάρτηση  $\psi_n$  ορίζεται ως

$$\psi_n(\mathbf{r}) = H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}$$

και η κανονική κυλινδρική κυματοσυνάρτηση  $\widehat{\psi}_n(r)$  ως

$$\widehat{\psi}_n(\mathbf{r}) = J_n(kr) e^{in\theta}.$$

Η κυματοσυνάρτηση  $\psi_n$  χαρακτηρίζεται ως εξερχόμενη επειδή ανταποκρίνεται στα εξερχόμενα κύματα στο άπειρο. Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι οι  $\psi_n(r)$  και  $\widehat{\psi}_n(r)$  ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\widehat{\psi}_n(\mathbf{r}) = (-1)^n \widehat{\psi}_n(-\mathbf{r}) = (-1)^n \overline{\widehat{\psi}_{-n}(\mathbf{r})}, \quad (3.11)$$

και

$$\psi_n(\mathbf{r}) = (-1)^n \psi_n(-\mathbf{r}). \quad (3.12)$$

Από τον ορισμό (3.1.4), το θεώρημα 3.2.2 ξαναγράφεται ως:

$$\widehat{\psi}_m(\mathbf{r}_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{S}_{mn}(\mathbf{b}) \widehat{\psi}_n(\mathbf{r}_1), \quad (3.13)$$

όπου  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$  και  $\widehat{S}_{mn}(b) = \widehat{\psi}_{m-n}(b)$ .

Ομοίως το θεώρημα 3.2.3 ξαναγράφεται, για  $r_1 < b$  ως:

$$\psi_m(\mathbf{r}_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{mn}(\mathbf{b})\widehat{\psi}_n(\mathbf{r}_1), \quad (3.14)$$

και για  $r_1 > b$  ως,

$$\psi_m(\mathbf{r}_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{S}_{mn}(\mathbf{b})\psi_n(\mathbf{r}_1), \quad (3.15)$$

όπου  $S_{mn}(\mathbf{b}) = \psi_{m-n}(\mathbf{b})$ .

Ονομάζουμε πίνακες διαχωρισμού τα  $\widehat{\mathbf{S}} = (\widehat{S}_{mn})$  και  $\mathbf{S} = (S_{mn})$ , καθώς εξαρτώνται από το  $\mathbf{b}$  το οποίο είναι η απόσταση που διαχωρίζει τα κέντρα  $O_1$  και  $O_2$ :  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$ . Οι πίνακες αυτοί παίζουν σπουδαίο ρόλο στις θεωρίες πολλαπλής σκέδασης.

Ισχύει

$$\widehat{S}_{mn} = (-1)^{m+n}\widehat{S}(-b) = (-1)^{m+n}\overline{\widehat{S}_{nm}(b)}$$

όπου  $\widehat{S}(-b) = \overline{\widehat{S}^T(b)}$ . Ο πίνακας  $\widehat{S}^T$  είναι ο ανάστροφος του  $S$ . Για την  $S$  έχουμε:  $S_{mn}(\mathbf{b}) = (-1)^{m+n}S_{mn}(-\mathbf{b})$ .

Η εξίσωση  $\widehat{\psi}_m(\mathbf{r}_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{S}_{mn}(\mathbf{b})\widehat{\psi}_n(\mathbf{r}_1)$  ξαναγράφεται με πιο συνοπτικό συμβολισμό και για κάθε  $m$  ως:

$$\widehat{\psi}(\mathbf{r}_2) = \widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b})\widehat{\psi}(\mathbf{r}_1), \quad (3.16)$$

όπου  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$ .

Εάν υποθέσουμε ότι  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3 + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  τότε,

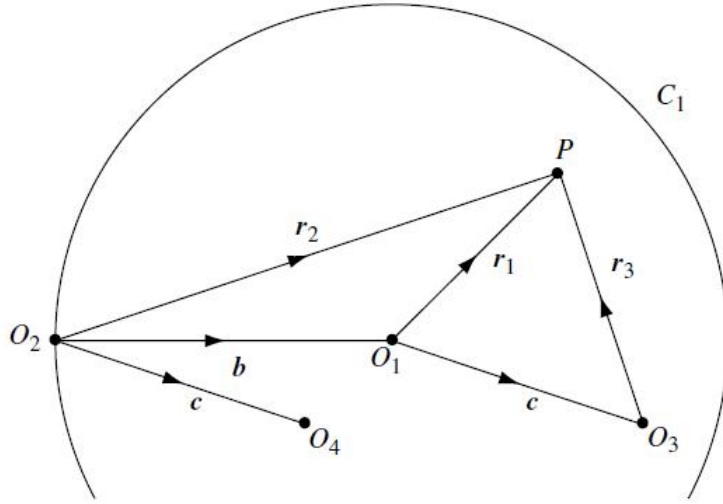
$$\widehat{\psi}(\mathbf{r}_2) = \widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b} + \mathbf{c})\widehat{\psi}(\mathbf{r}_3). \quad (3.17)$$

Ισχύει η σχέση

$$\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b})\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{c}) = \widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{c})\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b}),$$

όπου για  $\mathbf{c} = -\mathbf{b}$  έχουμε  $\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b})\widehat{\mathbf{S}}(-\mathbf{b}) = \widehat{\mathbf{S}}(-\mathbf{b})\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b}) = \widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$  χρησιμοποιώντας τη σχέση  $J_n(0) = \delta_{n0}$ . Αλλά  $\widehat{\mathbf{S}}(-\mathbf{b}) = \overline{\widehat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{b})}$  άρα,

$$\widehat{\mathbf{S}}^{-1} = \overline{\widehat{\mathbf{S}}^T},$$



Σχήμα 2. Γεωμετρία για προσθετικά θεωρήματα.

δηλαδή ο  $\widehat{S}$  πίνακας είναι ορθομοναδιαίος (unitary).

Τώρα μπορούμε να ξαναγράψουμε το Θεώρημα 3.15 του Graf ως

$$\psi(\mathbf{r}_2) = \mathbf{S}(\mathbf{b})\widehat{\psi}(\mathbf{r}_1), \quad (3.18)$$

όπου  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$  και  $r_1 < b$ . Παρατηρούμε ότι η 3.18 ισχύει για κάθε σημείο  $P$  στο εσωτερικό ενός κύκλου  $C_1$  με κέντρο  $O_1$  και ακτίνα  $b$ . Έστω τώρα ότι έχουμε ένα τρίτο κέντρο  $O_3$  στο εσωτερικό του κύκλου  $C_1$  με  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3 + \mathbf{c}$ . Το σημείο  $P$  έχει διανύσματα θέσης  $\mathbf{r}_j$  ως προς τα κέντρα  $O_j, j = 1, 2, 3$ . Επίσης, το  $O_3$  έχει διανύσματα θέσης  $\mathbf{c}$  και  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$  ως προς τα κέντρα  $O_1$  και  $O_2$  αντίστοιχα. Καθώς το  $O_3$  βρίσκεται εντός του  $C_1$ , έχουμε  $b > c$  (Σχήμα 2). Από την 3.16 έχουμε  $\widehat{\psi}(\mathbf{r}_1) = \widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{c})\widehat{\psi}(\mathbf{r}_3)$  και από την 3.18:

$$\psi(\mathbf{r}_2) = \mathbf{S}(\mathbf{b})\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{c})\widehat{\psi}(\mathbf{r}_3). \quad (3.19)$$

Αλλά,  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ , έτσι η 3.15 δίνει για  $r_3 < |\mathbf{b} + \mathbf{c}|$ ,

$$\psi(\mathbf{r}_2) = \mathbf{S}(\mathbf{b} + \mathbf{c})\widehat{\psi}(\mathbf{r}_3). \quad (3.20)$$

Συγκρίνοντας τις 3.19 και 3.20 στη γειτονιά του  $O_3$  παίρνουμε για  $c < b$ ,

$$\mathbf{S}(\mathbf{b})\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{c}) = \mathbf{S}(\mathbf{b} + \mathbf{c}). \quad (3.21)$$

Στην 3.19 χρησιμοποιήσαμε μία κανονική επέκταση του  $\psi(\mathbf{r}_2)$  για το  $O_3$  μέσω μιας κανονικής επέκτασης για το  $O_1$ . Έστω ότι έχουμε ένα τέταρτο κέντρο  $O_4$

με διάνυσμα θέσης  $\mathbf{c}$  ως προς το  $O_2$  (Σχήμα 2). Τότε, το  $O_1O_2O_3O_4$  είναι ένα παραλληλόγραμμο με πλευρές  $b$  και  $c$ . Εάν επεκτείνουμε την  $\psi(\mathbf{r}_2)$  έξω από τον κύκλο  $C_4$  με κέντρο το  $O_4$  και ακτίνα  $c$ , έχουμε

$$\psi(\mathbf{r}_2) = \widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{c})\psi(\mathbf{r}_4)$$

για  $r_4 > c$ , όπου  $\mathbf{r}_4$  είναι το διάνυσμα θέσης του  $P$  ως προς το  $O_4$ . Αλλά,  $\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_3 + \mathbf{b}$  και υποθέτοντας ότι  $b > c$ , το  $O_3$  βρίσκεται έξω από τον κύκλο  $C_4$ , οπότε έχουμε

$$\psi(\mathbf{r}_2) = \widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{c})\mathbf{S}(\mathbf{b})\widehat{\psi}(\mathbf{r}_3).$$

Συγκρίνοντας τώρα με την σχέση 3.20 βλέπουμε ότι για  $c < b$  ισχύει:

$$\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{c})\mathbf{S}(\mathbf{b}) = \mathbf{S}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

και λόγω της 3.21 καταλήγουμε στην σχέση

$$\mathbf{S}(\mathbf{b})\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{c}) = \mathbf{S}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{c})\mathbf{S}(\mathbf{b}).$$

### 3.4 Πίνακες περιστροφής

Έστω ότι περιστρέφουμε το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  κατά γωνία  $\alpha$  στο  $Ox'y'$ . Τότε οι συντεταγμένες  $x', y'$  ορίζονται ως:  $x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$  και  $y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha$ . Για τις πολικές συντεταγμένες  $\theta$  και  $\theta'$  ισχύει  $\theta = \theta' + \alpha$ . Εάν  $\widehat{x}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα των  $x$  τότε έχουμε

$$S_{mn}(b\widehat{x}) = H_{m-n}^{(1)}(kb)$$

και

$$\widehat{S}_{mn}(b\widehat{x}) = J_{m-n}(kb).$$

Αυτοί οι πίνακες διαχωρισμού χρησιμοποιούνται για μετατροπές στον  $x$ -άξονα, για μία γενική κατεύθυνση που δίνεται από το  $\mathbf{b}$ .

Για να λάβουμε την γενική περίπτωση συνδυάζουμε δύο περιστροφές με την ειδική περίπτωση. Συγκεκριμένα, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Περιστροφή των αξόνων  $O_2x_2y_2$  κατά  $\beta$  στους  $O_2x'_2y'_2$ , έτσι ώστε το  $O_1$  να βρίσκεται στο  $(x'_2, y'_2, \theta'_2) = (b, 0, 0)$ .
2. Μετατροπή από το  $O_2$  στο  $O_1$  χρησιμοποιώντας τον πίνακα  $\widehat{\mathbf{S}}(b\widehat{x})$  ή τον  $\mathbf{S}(b\widehat{x})$ .
3. Περιστροφή των αξόνων  $O_1x'_1y'_1$  κατά  $-\beta$  στους  $O_1x_1y_1$ .

Για παράδειγμα, έχουμε

$$\begin{aligned}
J_m(kr_2)e^{im\theta_2} &= e^{im\beta} J_m(kr_2)e^{im\theta'_2} \\
\Rightarrow J_m(kr_2)e^{im\theta_2} &= e^{im\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{S}_{mn}(b\hat{x}) J_n(kr_1)e^{in\theta'_1} \\
\Rightarrow J_m(kr_2)e^{im\theta_2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{e^{im\beta} \widehat{S}_{mn}(b\hat{x}) e^{-in\beta} J_n(kr_1)e^{in\theta_1}\}
\end{aligned}$$

Στο συμβολισμό πινάκων έχουμε,

$$\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b}) = \mathbf{D}(\beta)\widehat{\mathbf{S}}(b\hat{x})\mathbf{D}(-\beta)$$

όπου  $\mathbf{D}(\beta) = \text{diag}e^{im\beta}$  ένας διαγώνιος πίνακας, ο πίνακας περιστροφής. Προφανώς,

$$\mathbf{D}(-\beta) = \overline{\mathbf{D}(\beta)} = [\overline{\mathbf{D}(\beta)}]^T = [\mathbf{D}(\beta)]^{-1}$$

και

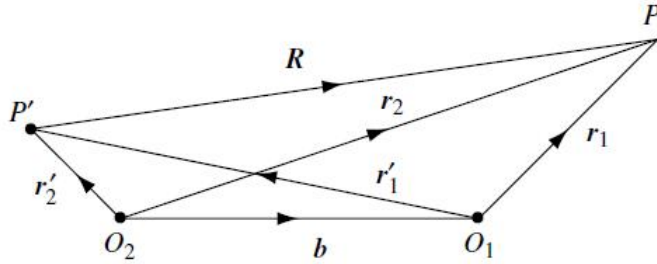
$$\mathbf{S}(\mathbf{b}) = \mathbf{D}(\beta)\mathbf{S}(b\hat{x})\mathbf{D}(-\beta).$$

### 3.5 Ανάπτυγμα για δύο κέντρα

Μέχρι τώρα, μελετήσαμε περιπτώσεις όπου ένα σημείο  $P$  αναφέρεται σε δύο ή περισσότερα κέντρα  $O_j$ . Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου μας ενδιαφέρουν δύο σημεία  $P$  και  $P'$  ως προς δύο κέντρα  $O_1$  και  $O_2$ . Για παράδειγμα, έστω ότι το σημείο  $P$  βρίσκεται κοντά στην περιοχή του  $O_1$  και το  $P'$  κοντά στο  $O_2$  (Σχήμα 3). Έστω ότι υπάρχει μία πηγή κυμάτων στο  $P$  και θέλουμε να την επεκτείνουμε στο  $P'$ . Ένας τρόπος για να το επιτύχουμε αυτό, είναι να κάνουμε μία τοπική επέκταση για το  $O_1$  και στη συνέχεια να το ξανα-επεκτείνουμε για το  $O_2$ . Αυτή η προσέγγιση είναι υπολογιστικά αποτελεσματική όταν έχουμε πηγές σε πολλά σημεία  $P_i$  και θέλουμε να υπολογίσουμε την επίδρασή τους στα σημεία  $P'_j$ . Πρόκειται για την βασική ιδέα των λεγόμενων *γρήγορων πολυπολικών μεθόδων* (*fast multipole methods*) που χρησιμοποιούνται στην επίλυση συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων στη θεωρία σχεδιάσεων.

Χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό όπως και πριν. Έτσι,  $\mathbf{r}_j$  και  $\mathbf{r}'_j$  είναι τα διανύσματα θέσης των  $P$  και  $P'$  αντίστοιχα, ως προς τα κέντρα  $O_j, j = 1, 2$ . Το διάνυσμα θέσης του  $O_1$  ως προς το  $O_2$  είναι  $\mathbf{b}$ . Το διάνυσμα θέσης του  $P$  ως προς το  $P'$  είναι

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b} - \mathbf{r}'_2.$$



Σχήμα 3. Γεωμετρία για επέκταση 2 κέντρων.

Το θεώρημα 3.7 δίνει για  $r_1 < r_1'$  :

$$H_0^{(1)}(kR) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}_{-m}(\mathbf{r}_1) \psi_m(-\mathbf{r}_1')$$

και για  $b > r_2'$  :

$$\psi_m(-\mathbf{r}_1') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{mn}(\mathbf{b}) \widehat{\psi}_n(-\mathbf{r}_2').$$

Εάν ικανοποιούνται και οι δύο ανισότητες τότε ισχύει

$$H_0^{(1)}(kR) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} S_{mn}(\mathbf{b}) \overline{\widehat{\psi}_m(\mathbf{r}_1)} \widehat{\psi}_n(\mathbf{r}_2').$$

Αποδείξαμε με αυτό τον τρόπο το ακόλουθο θεώρημα που δίνει το ανάπτυγμα για 2 κέντρα.

**Θεώρημα 3.5.1** Έστω  $\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ . Τότε ισχύει για  $a = |\mathbf{a}| < |\mathbf{b} + \mathbf{c}|$  και  $c = |\mathbf{c}| < b = |\mathbf{b}|$ ,  $a + c < b$

$$H_0^{(1)}(kR) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^m S_{mn}(\mathbf{b}) \overline{\widehat{\psi}_m(\mathbf{a})} \widehat{\psi}_n(\mathbf{c})$$

## Κεφάλαιο 4

### Προσθετικά θεωρήματα στις 3 διαστάσεις

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη θεωρία επίλυσης προβλημάτων πολλαπλής σκέδασης τριών διαστάσεων που στηρίζεται στα αντίστοιχα προσθετικά θεωρήματα του κεφαλαίου 3. Προτού ξεκινήσουμε αξίζει να αναφερθούμε συνοπτικά στις σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις.

Στο σύστημα σφαιρικών πολικών συντεταγμένων  $(r, \theta, \phi)$ , όπου  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ , και  $z = r \cos \theta$ , η Λαπλασιανή τριών διαστάσεων είναι

$$\nabla_3^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \partial u / \partial r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \partial u / \partial \theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

Τότε με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, η εξίσωση Laplace  $\nabla_3^2 u = 0$  έχει λύσεις τις  $r^n P_n^m(\cos \theta) e^{+im\phi}$  και  $r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) e^{+im\phi}$ , για  $n = 0, 1, 2, \dots$  και  $m = 0, 1, \dots, n$ . Ο περιορισμός των σχέσεων αυτών σε σφαιρικές επιφάνειες  $r$  δίνει τις λεγόμενες σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις  $Y_n^m$ .

Οι συναρτήσεις  $P_n^m$  λέγονται συναρτήσεις Legendre και ορίζονται από τον Ferrers ως:

$$P_n^m(t) = \frac{(1-t^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}} (t^2-1)^n.$$

Για αρνητικές τιμές του  $m$ , με  $|m| \leq n$ , έχουμε

$$P_n^{-m}(t) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t).$$

**Ορισμός 4.0.1** Οι μη κανονικοποιημένες σφαιρικές συναρτήσεις ορίζονται από τη σχέση

$$\tilde{Y}_n^m(\hat{r}) = \tilde{Y}_n^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

και οι κανονικοποιημένες σφαιρικές συναρτήσεις ορίζονται ως:

$$Y_n^m(\hat{r}) = Y_n^m(\theta, \phi) = (4\pi)^{-1/2} A_n^m \tilde{Y}_n^m(\theta, \phi),$$

όπου  $m = -n, \dots, 0, 1, 2, \dots, n$  και  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Ο συντελεστής κανονικοποίησης είναι  $A_n^m = (-1)^m \sqrt{2n+1} \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$  και το μοναδιαίο διάνυσμα είναι  $\hat{r} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ . Για αρνητικό  $m$  έχουμε

$$Y_n^{-m}(\hat{r}) = (-1)^m \overline{Y_n^m(\hat{r})},$$

όπου  $\overline{Y_n^m(\hat{r})}$  είναι ο συζυγής μιγαδικός. Τέλος, για  $\theta = \pi - \theta$  και  $\phi = + - \pi$  έχουμε

$$Y_n^m(-\hat{r}) = (-1)^n Y_n^m(\hat{r}).$$

## 4.1 Θεωρήματα Legendre και Hobson

Έστω δύο μοναδιαία διανύσματα  $\hat{r}_1 = (\sin\theta_1\cos\phi_1, \sin\theta_1\sin\phi_1, \cos\theta_1)$ ,  $\hat{r}_2 = (\sin\theta_2\cos\phi_2, \sin\theta_2\sin\phi_2, \cos\theta_2)$  και η μεταξύ τους γωνία  $\gamma$  που ορίζεται από τη σχέση  $\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 = \cos\gamma = \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2$ . Τότε ισχύει το προσθετικό θεώρημα του Legendre:

### Θεώρημα 4.1.1

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta_1) P_n^m(\cos\theta_2) \cos m(\phi_1 - \phi_2),$$

όπου  $P_n$  το πολώνυμο Legendre.

**Θεώρημα 4.1.2** Έστω  $\phi_3 = x^2 + y^2 + z^2$  και  $f_n(x, y, z)$  ομογενές πολώνυμο  $n$  βαθμού, όπου  $n$  θετικός ακέραιος. Τότε για  $f_n(\nabla_3) = f_n(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  ισχύει:

$$f_n(\nabla_3) F(\phi_3) = \sum_{l=0}^n \frac{2^{n-2l}}{l!} F^{(n-l)}(\phi_3) \nabla_3^{2l} f_n(x, y, z),$$

όπου το άθροισμα έχει πεπερασμένους όρους.

### Απόδειξη:

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή και είναι παρόμοια με το αντίστοιχο Θεώρημα (3.1.2) στην περίπτωση των δύο διαστάσεων.

□



**Πόρισμα 4.1.1** Έστω  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  και  $H_n(x, y, z)$  αρμονικό ομογενές πολυώνυμο  $n$  βαθμού, με  $n$  θετικό ακέραιο αριθμό. Τότε,

$$H_n(\nabla_3)F(r) = H_n(x, y, z)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^n F(r).$$

**Πόρισμα 4.1.2** Έστω  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $x_i = x, y, z$  και  $H_n(x, y, z)$  αρμονικό ομογενές πολυώνυμο  $n$  βαθμού, με  $n$  θετικό ακέραιο αριθμό. Τότε,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H_n(\nabla_3)F(r) = x_i H_n(x, y, z) \frac{\partial}{\partial r} F(r) + \frac{\partial}{\partial x_i} H_n(x, y, z) \frac{\partial}{\partial r} F(r).$$

Είδαμε ότι οι σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις μπορούν να κατασκευαστούν από επαναλαμβανόμενη διαφορίση του  $1/r$  σε Καρτεσιανές συντεταγμένες. Η αντίστοιχη κατασκευή κυματοσυναρτήσεων δεν είναι τόσο άμεση. Αρχικά, ορίζουμε σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις της μορφής  $z_n(w)$ , οποιαδήποτε σφαιρική συνάρτηση τάξεως  $n$ , ώστε  $z_n = j_n(w), y_n(w), h_n^{(1)}(w)$  ή  $h_n^{(2)}(w)$ . Εξ' ορισμού,  $z_n(w) = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{w} Z_{n+1/2}(w)$ , όπου  $Z_n$  η αντίστοιχη κυλινδρική συνάρτηση:  $Z_n = J_n(w), Y_n(w), H_n^{(1)}(w)$  ή  $H_n^{(2)}(w)$ . Ακολουθεί ο ορισμός των γενικών σφαιρικών κυματοσυναρτήσεων  $\tilde{\Omega}_n^m(x, y, z)$ . Στη συνέχεια ορίζουμε χρήσιμους διαφορικούς τελεστές.

**Ορισμός 4.1.1** Η μη κανονικοποιημένη σφαιρική κυματοσυνάρτηση ορίζεται ως

$$\tilde{\Omega}_n^m(x, y, z) = z_n(kr) \tilde{Y}_n^m(\theta, \phi) = z_n(kr) P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

για  $0 \leq |m| \leq n$ . Για  $|m| \geq n$ ,  $\tilde{\Omega}_n^m \equiv 0$  αφού  $P_n^{|m|} \equiv 0$ .

Η κανονικοποιημένη σφαιρική κυματοσυνάρτηση ορίζεται ως

$$\Omega_n^m(x, y, z) = z_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi)$$

για  $0 \leq |m| \leq n$ .

Η κανονικοποιημένη κανονική σφαιρική κυματοσυνάρτηση ορίζεται ως

$$\hat{\Omega}_n^m(x, y, z) = j_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi).$$

**Ορισμός 4.1.2** Ορίζουμε τους διαφορικούς τελεστές:

$$y_n^m = H_n^m\left(\frac{-1}{k}\nabla_3\right) = \frac{(-1)^n}{k^n} H_n^m(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) \quad (4.1)$$

και

$$\tilde{y}_n^m = \tilde{H}_n^m\left(\frac{-1}{k}\nabla_3\right) = \frac{(-1)^n}{k^n} \tilde{H}_n^m(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z). \quad (4.2)$$

**Θεώρημα 4.1.3** Για  $0 \leq |m| \leq n$  ισχύει:

$$y_n^m \{z_0(kr)\} = \Omega_n^m = z_n(kr)Y_n^m(\theta, \phi), \quad (4.3)$$

$$\tilde{y}_n^m \{z_0(kr)\} = \tilde{\Omega}_n^m = z_n(kr)P_n^m(\cos\theta)(\theta, \phi)e^{im\phi}. \quad (4.4)$$

**Απόδειξη:**

Εφαρμόζουμε το πόρισμα 4.1.1 στην  $F(r) = z_0(kr)$  με  $H_n = (-1/k)^n H_n^m(x, y, z)$ , για  $0 \leq |m| \leq n$ , και καταλήγουμε στην 4.3. Για  $m < 0$  έχουμε

$$\begin{aligned} y_n^m z_0 &= (-1)^m \overline{y_n^{-m}} z_0 = (-1)^m (-1/k)^n \overline{H_n^{-m}(\nabla_3)} z_0 \\ \Rightarrow y_n^m z_0 &= (-1)^m (-1/k)^n \overline{H_n^{-m}(x, y, z)} (-k/r)^n z_n = z_n (-1)^m \overline{Y_n^{-m}} \\ &\Rightarrow y_n^m z_0 = z_n Y_n^m. \end{aligned}$$

Ομοίως καταλήγουμε στην 4.4 χρησιμοποιώντας τη σχέση  $H_n = (-1/k)^n \tilde{H}_n^m(x, y, z)$ . □

**Θεώρημα 4.1.4** Έστω  $\xi$  μία σταθερά και  $0 \leq |m| \leq n$ . Τότε ισχύει

$$y_n^m \{e^{ik\xi\hat{\mathbf{r}}_1}\} = (-i\xi)^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_1) e^{ik\xi\hat{\mathbf{r}}_1}.$$

**Απόδειξη:**

Έστω  $\Phi = e^{ik\xi\hat{\mathbf{r}}_1}$ . Τότε,

$$\begin{aligned} y_n^m \Phi &= (-k)^{-n} H_n^m(\nabla_3) \Phi = (-k)^{-n} H_n^m(ik\xi\hat{\mathbf{r}}_1) \Phi \\ \Rightarrow y_n^m \Phi &= (-i\xi)^n H_n^m(\hat{\mathbf{r}}_1) \Phi = (-i\xi)^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_1) \Phi, \end{aligned}$$

καθώς ισχύει ότι  $H_n^m(x, y, z) = r^n Y_n^m(\theta, \phi)$  άρα στην περίπτωση μας,  $H_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})$ . □

**Θεώρημα 4.1.5** Για  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq |m| \leq n$  και  $\Omega$  η μοναδιαία σφαίρα, έχουμε

$$j_n(kr)Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{(-i)^n}{4\pi} \int_{\Omega} e^{ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_1} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_1) d\Omega(\hat{\mathbf{r}}_1) = \frac{i^n}{4\pi} \int_{\Omega} e^{ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_1} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_1) d\Omega(\hat{\mathbf{r}}_1). \quad (4.5)$$

Η σχέση (4.5) καλείται σχέση *Funk – Hecke* και δίνει την αναπαράσταση μιας κανονικής σφαιρικής κυματοσυνάρτησης σε όρους επίπεδων κυμάτων.

**Θεώρημα 4.1.6** Για  $0 \leq |m| \leq n$ ,

$$D_1^0 \tilde{\Omega}_n^m = \frac{n-m+1}{2n+1} \tilde{\Omega}_{n+1}^m - \frac{n+m}{2n+1} \tilde{\Omega}_{n-1}^m,$$

$$D_1^0 \Omega_n^m = \sqrt{\frac{(n+1)^2 - m^2}{(2n+1)(2n+3)}} \Omega_{n+1}^m - \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}} \Omega_{n-1}^m,$$

όπου  $D_1^0 = -k^{-1}(\partial/\partial z)$ .

Για  $n \geq 0$  έχουμε,

$$D_1^0 \tilde{\Omega}_n^n = (2n+1)^{-1} \tilde{\Omega}_{n+1}^n, D_1^0 \tilde{\Omega}_n^{-n} = \tilde{\Omega}_{n+1}^{-n} \text{ και } D_1^0 \Omega_n^{+n} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \Omega_{n+1}^{+n}.$$

**Θεώρημα 4.1.7** Για  $0 \leq |m| \leq n$ ,

$$D_1^+ \tilde{\Omega}_0^0 = \tilde{\Omega}_1^1, D_1^- \tilde{\Omega}_0^0 = -2\tilde{\Omega}_1^{-1},$$

$$D_1^+ \tilde{\Omega}_n^m = 1/(2n+1)(\tilde{\Omega}_{n-1}^{m+1} + \tilde{\Omega}_{n-1}^{m-1}),$$

$$D_1^- \tilde{\Omega}_n^m = -\frac{(n+m)(n+m-1)}{2n+1} \tilde{\Omega}_{n-1}^{m-1} - \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2n+1} \tilde{\Omega}_{n+1}^{m-1},$$

όπου οι διαφορικοί τελεστές ορίζονται ως  $D_1^+ = \frac{-1}{k}(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$ ,  $D_1^- = \frac{-1}{k}(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$ ,  $D_1^0 = \frac{-1}{k}(\partial/\partial z)$ .

Για το  $\Omega_n^m$  έχουμε,

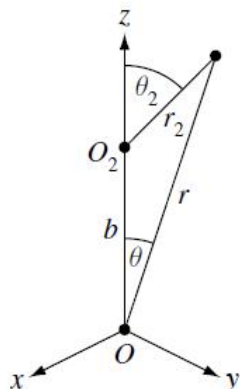
$$D_1^+ \Omega_n^m = -\sqrt{\frac{(n+m+2)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)}} \Omega_{n+1}^{m+1} - \sqrt{\frac{(n-m)(n-m-1)}{4n^2-1}} \Omega_{n-1}^{m+1}$$

και

$$D_1^- \Omega_n^m = -\sqrt{\frac{(n-m+2)(n-m+1)}{(2n+1)(2n+3)}} \Omega_{n+1}^{m-1} - \sqrt{\frac{(n+m)(n+m-1)}{4n^2-1}} \Omega_{n-1}^{m-1}.$$

## 4.2 Αξονικά συμμετρικά προσθετικά θεωρήματα

Σ' αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε ορισμένα προσθετικά θεωρήματα για σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις. Έστω δύο σημεία  $O, O_2$  που απέχουν απόσταση  $b$ . Επιλέγουμε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x, y, z)$  έτσι ώστε το  $O$  να βρίσκεται στο κέντρο και το  $O_2$  στο  $(0, 0, \beta)$ . Επιλέγουμε ένα παρόμοιο σύστημα συντεταγμένων  $(x_2, y_2, z_2)$  με κέντρο το  $O_2$  και άξονες παράλληλους με αυτούς του συστήματος στο  $O$ . Επίσης, έχουμε δύο συστήματα σφαιρικών πολικών



Σχήμα 4. Γεωμετρία για αξονο-συμμετρικά προσθετικά θεωρήματα.

συντεταγμένων,  $(r, \theta, \phi)$  στο  $O$  και  $(r_2, \theta_2, \phi_2)$  στο  $O_2$ . Έτσι, το  $O_2$  βρίσκεται στο  $r = b, \theta = 0$  (Σχήμα 4). Σκοπός μας είναι να επεκτείνουμε κυματοσυναρτήσεις με κέντρο το  $O_2$  στο  $O$ . Η απλούστερη περίπτωση είναι η επέκταση της  $z_0(kr_2)$  σε συνάρτηση που εξαρτάται από τα  $r, \theta, \phi$ . Πράγματι, καθώς η  $z_0(kr_2)$  είναι μία αξονικά συμμετρική κυματοσυνάρτηση, έχει μία επέκταση της μορφής

$$z_0(kr_2) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n j_n(kr) P_n(\cos\theta) \quad (4.6)$$

για  $r < b$ . Αυτό που μένει είναι ο προσδιορισμός των συντελεστών  $A_n$ , οι οποίοι εξαρτώνται από το  $kb$  και όχι από το  $\theta$ . Έτσι, προκύπτει τελικά το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 4.2.1** Έστω  $r_2 = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta}$ . Τότε για  $r < b$ ,

$$z_0(kr_2) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) z_n(kb) j_n(kr) P_n(\cos\theta).$$

**Απόδειξη:**

Εφαρμόζουμε την  $\tilde{y}_m^0$  στην 4.6. Επειδή οι Καρτεσιανοί άξονες στα δύο συστήματα είναι παράλληλοι έχουμε,

$$z_m(kr_2) P_m(\cos\theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tilde{y}_m^0 \{j_n(kr) P_n(\cos\theta)\} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tilde{y}_m^0 \tilde{y}_n^0 \{j_0(kr)\},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα 4.4. Θέτοντας το  $r \rightarrow 0$ , έτσι ώστε  $r_2 \rightarrow b$  και  $\theta_2 \rightarrow \pi$ , παίρνουμε

$$(-1)^m z_m(kb) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n L_{mn},$$

όπου  $L_{mn} = \lim_{r \rightarrow 0} \tilde{y}_m^0 \tilde{y}_n^0 \{j_0(kr)\} = (-1)^n (2n+1)^{-1} \delta_{mn}$ . Τελικά,

$$A_n = (2n+1) z_n(kb).$$

□

Μπορούμε να γενικεύσουμε το προηγούμενο θεώρημα. Θεωρούμε δύο κέντρα  $O_1, O_2$  και ένα σημείο  $P$  με διανύσματα θέσης  $\mathbf{r}_j$  ως προς τα κέντρα  $O_j, j = 1, 2$ . Έστω ότι το  $O_1$  έχει διάνυσμα θέσης  $\mathbf{b}$  ως προς το  $O_2$ , έτσι ώστε  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$ . Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα θεωρήματα.

**Θεώρημα 4.2.2** Έστω  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$ . Τότε για  $r_1 < b$ ,

$$z_0(kr_2) = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^n z_n(kb) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{b}})} j_n(kr_1) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_1),$$

και για  $r_1 > b$ ,

$$z_0(kr_2) = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^n j_n(kb) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{b}})} z_n(kr_1) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_1).$$

**Θεώρημα 4.2.3** Έστω  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$ . Τότε για  $r_1 < b$ ,

$$z_0(kr_2) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n z_n(kb) \int_{\Omega} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{b}}) d\Omega(\hat{\mathbf{r}}).$$

**Λήμμα 4.2.1**

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{y}_m^0 \tilde{y}_n^0 \{j_0(kr)\} = \frac{(-1)^n}{2n+1} \delta_{mn},$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} y_m^0 y_n^0 \{j_0(kr)\} = \frac{(-1)^n}{4\pi} \delta_{mn}.$$

Το λήμμα 4.2.1 είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στην απόδειξη άλλων σημαντικών αποτελεσμάτων στη θεωρία πολλαπλής σκέδασης. Ένα από αυτά είναι και το ακόλουθο θεώρημα που είναι γνωστό ως *ανάπτυγμα Rayleigh*. Οι φυσικοί στερεάς κατάστασης το ονομάζουν *ταυτότητα Bauer* ενώ οι συγγραφείς *Colton* και *Kress* το αναφέρουν ως *Jacobi – Anger ανάπτυγμα*.

**Θεώρημα 4.2.4** Για  $0 \leq \theta \leq \pi$  και  $r \geq 0$ ,

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(kr) P_n(\cos \theta). \quad (4.7)$$

**Απόδειξη:**

Λόγω του ότι πρόκειται για μία αξονικά συμμετρική κυματοσυνάρτηση έχουμε

$$e^{ikr \cos \theta} = e^{ikr \cdot \hat{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n j_n(kr) Y_n^0(\hat{r}),$$

όπου  $A_n$  είναι συντελεστές και  $\hat{z} = (0, 0, 1)$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα των  $z$ . Εφαρμόζοντας την  $y_m^0$  σε αυτή την εξίσωση, σε συνδυασμό με τα θεωρήματα 4.3, 4.1.4 έχουμε

$$(-i)^m Y_m^0(\hat{z}) e^{ikr \cdot \hat{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n y_m^0 y_n^0 \{j_0(kr)\}.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το λήμμα 4.2.1 για  $r \rightarrow 0$  καταλήγουμε στη σχέση

$$(-i)^m Y_m^0(\hat{z}) = (-1)^m A_m / (4\pi)$$

έτσι ώστε  $A_n Y_n^0(\hat{r}) = 4\pi i^n Y_n^0(\hat{z}) Y_n^0(\hat{r}) = (2n+1) i^n P_n(\cos \theta)$  που είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Ισχύει ότι  $Y_n^0(\hat{r}) = [(2n+1)/(4\pi)]^{1/2} P_n(\cos \theta)$  και  $P_n(1) = 1$ .

□

Η φόρμουλα γραμμικοποίησης σφαιρικών αρμονικών δίνεται στο επόμενο θεώρημα. Το αποτέλεσμα είναι ένα ανάπτυγμα του γινομένου  $Y_n^m Y_\nu^\mu$  σε μορφή απειροσειράς ως προς  $q$  της  $Y_q^{m+\mu}$ .

**Θεώρημα 4.2.5** *Γραμμικοποίηση του  $Y_n^m$ : Έστω  $n, \nu$  μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Τότε,*

$$Y_n^m(\hat{r}) Y_\nu^\mu(\hat{r}) = \sum_q G(n, m; \nu, \mu; q) Y_q^{m+\mu}(\hat{r}), \quad (4.8)$$

όπου  $G$  ο συντελεστής *Gaunt*. Το άθροισμα είναι από  $q = |n-\nu|$  έως  $q = n+\nu$ , με βήματα του 2.

**Θεώρημα 4.2.6** Σύνθεση του  $y_n^m$ : Έστω  $n, \nu$  μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Τότε,

$$y_n^m y_\nu^\mu = \sum_q G(n, m; \nu, \mu; q) k^{q-n-\nu} y_q^{m+\mu} (\nabla_3^2)^{(n+\nu-q)/2},$$

όπου το άθροισμα είναι από  $q = q_0(n, m; \nu, \mu)$  έως  $q = n + \nu$ ,  $\mu \in \beta\eta\mu\alpha\tau\alpha$  του 2.

Το  $q_0$  ορίζεται ως:  $q_0(n, m; \nu, \mu) =$

- $|n - \nu|$ , εάν  $|n - \nu| \geq |m + \mu|$
- $|m + \mu|$ , εάν  $|n - \nu| < |m + \mu|$  και  $n + \nu + |m + \mu|$  άρτιος
- $|m + \mu| + 1$ , εάν  $|n - \nu| < |m + \mu|$  και  $n + \nu + |m + \mu|$  περιττός.

**Απόδειξη:**

Πολλαπλασιάζοντας την 4.8 με  $r^{n+\nu}$  παίρνουμε

$$H_n^m H_\nu^\mu = \sum_q G(n, m; \nu, \mu; q) H_q^{m+\mu} r^{n+\nu-q},$$

όπου  $H_n^m(x, y, z) = r^n Y_n^m(\theta, \phi)$ . Πολλαπλασιάζοντας στη συνέχεια με  $(-1/k)^{n+\nu}$  και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του  $y_n^m$  καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Τα επόμενα πορίσματα προκύπτουν άμεσα.

**Πόρισμα 4.2.1** Έστω  $\Phi$  μία αρμονική συνάρτηση, έτσι ώστε  $\nabla_3^2 \Phi = 0$ . Τότε,

$$y_n^m y_\nu^\mu \Phi = G(n, m; \nu, \mu; n + \nu) y_{n+\nu}^{m+\mu} \Phi. \quad (4.9)$$

**Πόρισμα 4.2.2** Έστω  $u$  μία συνάρτηση, έτσι ώστε  $\nabla_3^2 u + k^2 u = 0$ . Τότε,

$$y_n^m y_\nu^\mu u = \sum_q G(n, m; \nu, \mu; q) (-1)^{(n+\nu-q)/2} y_q^{m+\mu} u. \quad (4.10)$$

Με το παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε να δώσουμε μία απόδειξη του λήμματος 4.2.1. Συγκεκριμένα, προκύπτει ένα γενικότερο αποτέλεσμα το οποίο δίνεται από το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 4.2.7**

$$\lim_{r \rightarrow 0} y_n^m y_\nu^\mu \{j_0(kr)\} = \frac{(-1)^{n+m}}{4\pi} \delta_{n\nu} \delta_{m+\mu, 0}.$$

### Απόδειξη:

Χρησιμοποιώντας το πόρισμα 4.10 και το θεώρημα 4.3 παίρνουμε

$$y_n^m y_\nu^\mu \{j_0(kr)\} = \sum_q G(n, m; \nu, \mu; q) (-1)^{(n+\nu-q)/2} j_q(kr) Y_q^{m+\mu}(\mathbf{r}).$$

Όμως,  $j_q(0) = \delta_{q0}$  και  $Y_0^0 = (4\pi)^{-1/2}$ . Το παραπάνω άθροισμα ξεκινάει από  $q = |n - \nu|$  και έτσι έχουμε,

$$\lim_{r \rightarrow 0} y_n^m y_\nu^\mu \{j_0(kr)\} = \delta_{n\nu} \delta_{m+\mu, 0} (-1)^n (4\pi)^{-1/2} G(n, m; n, -m; 0).$$

Ο συντελεστής *Gaunt* δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} G(n, m; \nu, \mu; q) &= (-1)^{m+\mu} \int_{\Omega} Y_n^m Y_\nu^\mu Y_q^{-m-\mu} d\Omega \Rightarrow \\ &G(n, m; \nu, \mu; q) = \\ &\frac{(-1)^{m+\mu}}{2} S \sqrt{\frac{(n-m)!(\nu-\mu)!(q+m+\mu)!}{(n+m)!(\nu+\mu)!(q-m-\mu)!}} \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_\nu^\mu(x) P_q^{-m-\mu}(x) dx. \end{aligned}$$

Έτσι, ισχύει για  $q = 0$ :

$$\begin{aligned} G(n, m; \nu, \mu; 0) &= \frac{2n+1}{2\sqrt{4\pi}} \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^{-m}(x) dx \\ &\Rightarrow G(n, m; \nu, \mu; 0) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{4\pi}}, \end{aligned}$$

από την οποία καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Στη συνέχεια γενικεύουμε το Θεώρημα 4.2.2.

**Θεώρημα 4.2.8** Έστω  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$ . Τότε,

$$j_n(kr_2) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \hat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) j_\nu(kr_1) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_1).$$

### Απόδειξη:

Από το Θεώρημα 4.5, γνωστό και ως φόρμουλα *Funk – Hecke*, έχουμε

$$j_n(kr_2) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_2) = \frac{i^{-1}}{4\pi} \int_{\Omega} e^{(ik\mathbf{r}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})} e^{(ik\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{r}})} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) d\Omega(\hat{\mathbf{r}}).$$



Αλλά, από το Θεώρημα 4.7 μαζί με το προσθετικό θεώρημα *Legendre* έχουμε,

$$e^{i\mathbf{kr}\cdot\hat{\mathbf{r}}} = \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1)i^p j_p(kr) P_p(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_1)$$

$$\Rightarrow e^{i\mathbf{kr}\cdot\hat{\mathbf{r}}} = 4\pi \sum_{p=0}^{\infty} i^p J_p(kr) \sum_{l=-p}^p Y_p^l(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_p^l(\hat{\mathbf{r}}_1)},$$

αφού  $P_n(\hat{\mathbf{r}}_1\cdot\hat{\mathbf{r}}_2) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_1) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_2)}$ . Αντικαθιστώντας λοιπόν τα εκθετικά παίρνουμε,

$$\widehat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) = 4\pi i^{\nu-n} \sum_{q=0}^{\infty} i^q j_q(kb) Y_q^{m-\mu}(\hat{\mathbf{b}}) \int_{\Omega} Y_n^m \overline{Y_q^{m-\mu}} \overline{Y_{\nu}^{\mu}} d\Omega.$$

Χρησιμοποιώντας και τους συντελεστές *Gaunt*,  $G$ , καταλήγουμε στη σχέση:

$$\widehat{S}(\mathbf{b}) = 4\pi i^{\nu-n} \sum_q i^q (-1)^m j_q(kb) \overline{Y_q^{\mu-m}(\hat{\mathbf{b}})} G(n, m; \nu, -\mu; q),$$

όπου εφαρμόστηκε η ιδιότητα:

$$G(n, m; \nu, \mu; q) = G(\nu, \mu; n, m; q) =$$

$$G(n, -m; \nu, -\mu; q) = (-1)^m G(n, m; q, -m - \mu; \nu).$$

□

Στην παραπάνω απόδειξη, η κανονική σφαιρική κυματοσυνάρτηση  $j_n Y_n^m$  αναπτύχθηκε σε επίπεδα κύματα, όπου ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων είναι τετριμμένος. Στις εφαρμογές θα χρειαστούμε προσθετικά θεωρήματα για την σφαιρική κυματοσυνάρτηση  $h_n^{(1)}$ , που μπορούν να προκύψουν από τη χρήση της παραπάνω απόδειξης, και παρουσιάζονται στο επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 4.2.9** Έστω  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$ . Τότε για  $r_1 < b$ ,

$$h_n^{(1)}(kr_2) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) j_{\nu}(kr_1) Y_{\nu}^{\mu}(\hat{\mathbf{r}}_1),$$

και για  $r_1 > b$ ,

$$h_n^{(1)}(kr_2) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \widehat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) h_{\nu}^{(1)}(kr_1) Y_{\nu}^{\mu}(\hat{\mathbf{r}}_1),$$

### 4.3 Πίνακες διαχωρισμού $S$ και $\widehat{S}$

Είδαμε ότι τα προσθετικά θεωρήματα για  $j_n Y_n^m$  και  $h_n^{(1)} Y_n^m$  περιλαμβάνουν τους πίνακες διαχωρισμού  $\widehat{\mathbf{S}} = (\widehat{S}_{n\nu}^{m\mu})$  και  $\mathbf{S} = (S_{n\nu}^{m\mu})$  αντίστοιχα. Οι εκφράσεις αυτών των πινάκων είναι αρκετά πολύπλοκες. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ένα συμβολισμό για τις σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις αντίστοιχο αυτού που χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση των δύο διαστάσεων.

**Ορισμός 4.3.1** Η εξερχόμενη σφαιρική κυματοσυνάρτηση  $\psi_n^m$  ορίζεται ως

$$\psi_n^m(\mathbf{r}) = h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\widehat{\mathbf{r}}),$$

όπου  $0 \leq |m| \leq n$  και  $n \geq 0$ . Ομοίως, η κανονική σφαιρική κυματοσυνάρτηση  $\widehat{\psi}_n^m$  ορίζεται ως

$$\widehat{\psi}_n^m(\mathbf{r}) = j_n(kr) Y_n^m(\widehat{\mathbf{r}}).$$

Οι κυματοσυναρτήσεις  $\widehat{\psi}_n^m$  και  $\psi_n^m$  ικανοποιούν τη σχέση

$$\widehat{\psi}_n^m(\mathbf{r}) = (-1)^n \widehat{\psi}_n^m(-\mathbf{r}) = (-1)^m \overline{\widehat{\psi}_n^{-m}(\mathbf{r})} \quad (4.11)$$

και  $\psi_n^m(\mathbf{r}) = (-1)^n \psi_n^m(-\mathbf{r})$  αντίστοιχα.

Οι πίνακες ορίζονται ως

$$\begin{aligned} \widehat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) &= 4\pi i^{\nu-n} \sum_q i^q j_q(kb) \overline{Y_q^{\mu-m}(\widehat{\mathbf{b}})} G(n, m; q, \mu - m; \nu) \\ \Rightarrow \widehat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) &= 4\pi i^{\nu-n} \sum_q i^q (-1)^m \overline{Y_q^{\mu-m}(\widehat{\mathbf{b}})} G(n, m; \nu, -\mu; q). \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) &= 4\pi i^{\nu-n} \sum_q i^q h_q^{(1)}(kb) \overline{Y_q^{\mu-m}(\widehat{\mathbf{b}})} G(n, m; q, \mu - m; \nu) \\ \Rightarrow S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) &= 4\pi i^{\nu-n} \sum_q i^q (-1)^m h_q^{(1)}(kb) \overline{Y_q^{\mu-m}(\widehat{\mathbf{b}})} G(n, m; \nu, -\mu; q). \end{aligned}$$

Κάνοντας τα όρια του αθροίσματος σαφή, έχουμε

$$\widehat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) = 4\pi (-1)^{\mu+\nu+Q} \sum_{q=0}^Q (-1)^q \widehat{\psi}_{q_0+2q}^{m-\mu}(\mathbf{b}) G(n, m; \nu, -\mu; q_0+2q) \quad (4.12)$$

όπου  $Q = (n + \nu - q_0)/2$ ,  $q_0 = q_0(n, m; \nu, -\mu)$  και  $q_0(n, m; \nu, \mu) =$

- $|n - \nu|$ , εάν  $|n - \nu| \geq |m + \mu|$
- $|m + \mu|$ , εάν  $|n - \nu| < |m + \mu|$  και  $n + \nu + |m + \mu|$  άρτιος

- $|m + \mu| + 1$ , εάν  $|n - \nu| < |m + \mu|$  και  $n + \nu + |m + \mu|$  περιττός.

Έτσι, προκύπτουν εύκολα οι σχέσεις

$$\widehat{S}_{\nu n}^{m\mu}(\mathbf{b}) = (-1)^{n+\nu} \overline{\widehat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b})}, \quad (4.13)$$

$$\widehat{S}_{n\nu}^{-m,-\mu}(\mathbf{b}) = (-1)^{m+\mu} \overline{\widehat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b})}, \quad (4.14)$$

και

$$\widehat{S}_{n\nu}^{m\mu}(-b) = (-1)^{n+\nu} \widehat{S}_{n\nu}^{m\mu}(b) = \overline{\widehat{S}_{\nu n}^{m\mu}(b)}. \quad (4.15)$$

Ορίζουμε τώρα τα διανύσματα  $\psi = (\psi_n^m)$  και  $\widehat{\psi} = (\widehat{\psi}_n^m)$ . Με αυτό τον συμβολισμό μπορούμε να ξαναγράψουμε το θεώρημα 4.2.8 ως

$$\widehat{\psi}(\mathbf{r}_2) = \widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b})\widehat{\psi}(\mathbf{r}_1),$$

όπου  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$ . Τότε, ακριβώς όπως και στο κεφάλαιο των προσθετικών θεωρημάτων για τις δύο διαστάσεις, βρίσκουμε

$$\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b})\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{c}) = \widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{c})\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b}).$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να αξιοποιηθεί στην επίδραση δύο μετατροπών. Συγκεκριμένα, για  $\mathbf{c} = -\mathbf{b}$  προκύπτει

$$\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b})\widehat{\mathbf{S}}(-\mathbf{b}) = \widehat{\mathbf{S}}(-\mathbf{b})\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b}) = \mathbf{I},$$

άρα  $[\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{b})]^{-1} = \widehat{\mathbf{S}}(-\mathbf{b})$ , και μέσω της 4.15 έχουμε  $\widehat{\mathbf{S}}^{-1} = \overline{\widehat{\mathbf{S}}^T}$ , δηλαδή ο  $\widehat{\mathbf{S}}$  είναι ορθομοναδιαίος πίνακας ("unitary"). Έτσι, ισχύει η σχέση

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \widehat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \overline{\widehat{S}_{N\nu}^{M\mu}(\mathbf{b})} = \delta_{nN} \delta_{mM}.$$

Ανάλογα με την 4.12 έχουμε:

$$S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) = 4\pi(-1)^{\mu+\nu+Q} \sum_{q=0}^Q (-1)^q \widehat{\psi}_{q_0+2q}^{m-\mu}(b) G(n, m; \nu, -\mu; q_0 + 2q).$$

Μετά από υπολογισμούς καταλήγουμε:

$$S_{n\nu}^{m\mu} = (-1)^{n+\nu} S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b})$$

και

$$S_{\nu n}^{-\mu,-m} = (-1)^{m+\mu} S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}),$$

όπου  $S_{n\nu}^{m\mu} = (-1)^{n+m+\nu+\mu} S_{\nu\mu}^{-m,-\mu}(\mathbf{b})$ . Ακριβώς όπως και στο κεφάλαιο 2, βρίσκουμε ότι ισχύει για  $c < b$ :

$$\mathbf{S}(\mathbf{b})\widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{c}) = \mathbf{S}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \widehat{\mathbf{S}}(\mathbf{c})\mathbf{S}(\mathbf{b}).$$

Μία επιπλέον σχέση μεταξύ των δύο πινάκων δίνει το ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 4.3.1**  $S_{\nu n}^{m\mu} + \overline{S_{\nu n}^{\mu m}(-\mathbf{b})} = 2\widehat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b})$ .

## 4.4 Ανάπτυγμα για δύο κέντρα

Ανάλογα με την περίπτωση των 2 διαστάσεων θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο συμβολισμό για το ανάπτυγμα δύο σημείων  $P, P'$  σε δύο κέντρα  $O_1, O_2$  στις 3 διαστάσεις. Έτσι, τα διανύσματα θέσης είναι  $\mathbf{r}_j, \mathbf{r}'_j$  των  $P, P'$  ως προς τα κέντρα  $O_j, j = 1, 2$ . και το διάνυσμα θέσης μεταξύ των δύο σημείων είναι  $\mathbf{R}$  (Σχήμα 3). Για τις περισσότερες των περιπτώσεων είναι βολικό να θεωρούμε ότι το  $P$  βρίσκεται στη γειτονιά του  $O_1$  και το  $P'$  στη γειτονιά του  $O_2$ .

Από το θεώρημα 4.2.2 και για  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1$  έχουμε

$$\frac{e^{ikR}}{kR} = 4\pi \sum_{n,m} (-1)^{m+n} \widehat{\psi}_n^{-m}(\mathbf{r}_1) \psi_n^m(-\mathbf{r}'_1),$$

όπου  $r_1 < r'_1$ ,  $n \geq 0$  και  $|m| \leq n$ .

Ομοίως, το θεώρημα 4.2.9 για  $-\mathbf{r}'_1 = \mathbf{b} - \mathbf{r}'_2$  δίνει για  $r'_2 < b$ :

$$\psi_n^m(-\mathbf{r}'_1) = \sum_{\nu, \mu} \nu, \mu S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \widehat{\psi}_\nu^\mu(-\mathbf{r}'_2).$$

Εάν ισχύουν και οι 2 ανισότητες τότε προκύπτει η σχέση

$$\frac{e^{ikR}}{kR} = 4\pi \sum_{n,m} \sum_{\nu, \mu} (-1)^{n+\nu} S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \widehat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_1) \widehat{\psi}_\nu^\mu(\mathbf{r}'_2).$$

Έτσι, αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 4.4.1** Έστω  $\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ . Τότε,

$$\frac{e^{ikR}}{kR} = 4\pi \sum_{n,m} \sum_{\nu, \mu} (-1)^{n+\nu} S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \widehat{\psi}_n^m(\mathbf{a}) \widehat{\psi}_\nu^\mu(\mathbf{c}).$$

όπου  $a = |\mathbf{a}| < |\mathbf{b} + \mathbf{c}|$  και  $c = |\mathbf{c}| < b = |\mathbf{b}|$ . Και οι δύο ανισότητες ισχύουν εάν  $a + c < b$ .

Με το ανάπτυγμα 2 σημείων θα αποδείξουμε τώρα, το θεώρημα 4.2.9.

**Απόδειξη:**

Εφόσον  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1$ , το θεώρημα 4.2.2 δίνει για  $r_1 > r'_1$

$$h_0^{(1)}(kR) = 4\pi \sum_{\nu, \mu} (-1)^\mu \widehat{\psi}_\nu^\mu(\mathbf{r}'_1) \psi_\nu^{-\mu}(\mathbf{r}_1).$$

Τότε για  $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{b}$ , το θεώρημα 4.2.8 δίνει

$$\widehat{\psi}_\nu^\mu(\mathbf{r}'_1) = \sum_{n,m} \widehat{S}_{\nu n}^{\mu m}(-\mathbf{b}) \widehat{\psi}_n^m(\mathbf{r}'_2),$$

οπότε έχουμε

$$h_0^{(1)}(kR) = 4\pi \sum_{n,m} \widehat{\psi}_n^m(\mathbf{r}'_2) \sum_{\nu,\mu} (-1)^\mu \widehat{S}_{\nu n}^{\mu m}(-\mathbf{b}) \psi_\nu^{-\mu}(\mathbf{r}_1).$$

Εναλλακτικά, υποθέτουμε ότι  $r_2 > r'_2$  με  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2$ , οπότε προκύπτει

$$h_0^{(1)}(kR) = 4\pi \sum_{n,m} (-1)^m \widehat{\psi}_n^m(\mathbf{r}'_2) \psi_n^{-m}(\mathbf{r}_2).$$

Συγκρίνοντας αυτά τα δύο αναπτύγματα στην γειτονιά του  $O_2$  καταλήγουμε στην σχέση

$$(-1)^m \psi_n^{-m}(\mathbf{r}_2) = \sum_{\nu,\mu} (-1)^\mu \widehat{S}_{\nu n}^{\mu m}(-\mathbf{b}) \psi_\nu^{-\mu}(\mathbf{r}_1).$$

Αλλάζοντας τα  $m$  και  $\mu$  και γνωρίζοντας ότι ισχύει ο τύπος

$$(-1)^{m+\mu} \widehat{S}_{\nu n}^{-\mu, -m}(-\mathbf{b}) = \widehat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}),$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$\psi_n^m(\mathbf{r}_2) = \sum_{\nu,\mu} \widehat{S}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \psi_\nu^\mu(\mathbf{r}_1),$$

για  $r_1 > b$  που αποδεικνύει την πρώτη σχέση του θεωρήματος 4.2.9.

Για την δεύτερη σχέση του 4.2.9 ανταλλάσσουμε τα  $\mathbf{r}_1$  και  $\mathbf{b}$  έτσι ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} \psi_n^m(\mathbf{r}_2) &= \sum_{N,M} \widehat{S}_{nN}^{mM}(\mathbf{r}_1) \psi_N^M(\mathbf{b}) \\ \Rightarrow \psi_n^m(\mathbf{r}_2) &= \sum_{\nu,\mu} S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \widehat{\psi}_\nu^\mu(\mathbf{r}_1) \end{aligned}$$

που αποδεικνύει την ζητούμενη σχέση για  $r_1 < b$ .

□

## Κεφάλαιο 5

# Χωρισμός μεταβλητών σε πολλαπλή σκέδαση

Η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την μελέτη ακουστικής σκέδασης για ένα εμπόδιο. Η εξίσωση Helmholtz χωρίζεται σε 11 συστήματα τριών διαστάσεων, από τα οποία τα 6 είναι χρήσιμα: ο κύκλος και η έλλειψη στις 2 διαστάσεις, η σφαίρα, τα ωοειδή σφαιροειδή, τα πλατυσμένα σφαιροειδή και τα ελλειψοειδή στις 3 διαστάσεις. Για 2 ή περισσότερα εμπόδια, προχωρούμε στην επίλυση του προβλήματος συνδυάζοντας τις κατάλληλες λύσεις χωρισμένων μεταβλητών με τον κατάλληλο προσθετικό θεώρημα. Η μέθοδος αυτή είναι ακριβής και οδηγεί σε πεπερασμένο αριθμό ταυτόχρονων αλγεβρικών εξισώσεων. Θα παρουσιάσουμε την μέθοδο επίλυσης της εξίσωσης Helmholtz όταν το εμπόδιο είναι 1,2 και  $N$  κυκλικοί κυλίνδροι στις 2 διαστάσεις και όταν το εμπόδιο είναι 1 και 2 σφαίρες στις 3 διαστάσεις.

### 5.1 Χωρισμός μεταβλητών για ένα κυκλικό κύλινδρο

Έστω κυκλικός κύλινδρος ακτίνας  $a$ , σε πολικό σύστημα συντεταγμένων  $(r, \theta)$  έτσι ώστε  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , όπου  $(x, y)$  καρτεσιανές συντεταγμένες με αρχή συντεταγμένων το  $O$ . Έστω ότι ένα προσπίπτον, στον κύλινδρο, επίπεδο κύμα είναι της μορφής:

$$u_{inc} = e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} = e^{ikr \cos(\theta - \alpha)},$$

όπου  $\alpha$  η γωνία πρόσπτωσης.

Από το ανάπτυγμα Jacobi:  $e^{i w \cos \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(w) e^{in\phi}$  προκύπτει  $e^{i w \cos \phi} =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(w) \cos n\phi$ , όπου  $\epsilon_n$  είναι ο παράγοντας Neumann:  $\epsilon_0 = 1$  και  $\epsilon_n = 2$  για  $n \geq 2$ . Έτσι, το προσπίπτον κύμα γίνεται

$$u_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in(\theta-\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) \cos n(\theta - \alpha).$$

Οι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz σε πολικές συντεταγμένες είναι οι  $J_n(kr)e^{+in\theta}$ ,  $Y_n(kr)e^{+in\theta}$ ,  $J_n(kr)e^{-in\theta}$ ,  $Y_n(kr)e^{-in\theta}$  οι οποίες συνδυάζονται στην  $J_n(kr) + iY_n(kr)e^{in\theta} \equiv H_n^1(kr)e^{in\theta}$  ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη ακτινοβολίας (radiation condition). Η εξίσωση Hankel  $H_n^1 = H_n$  ικανοποιεί την  $H_n(w) \sim \sqrt{2/(pw)} e^{i(w-n\pi/2-\pi/4)}$  καθώς  $w \rightarrow \infty$ . Για το σκεδαζόμενο κύμα προκύπτει για  $r > a$ :

$$u_{sc} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n B_n H_n(kr) \cos n(\theta - \alpha),$$

το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz και την συνθήκη ακτινοβολίας για κάθε συντελεστή  $B_n$ . Τέλος, πρέπει να οριστεί η συνοριακή συνθήκη. Η συνθήκη Neumann για ηχητικά σκληρά σώματα (sound-hard bodies) είναι

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0,$$

για  $r = a$  και  $u = u_{inc} + u_{sc}$  το γενικό πεδίο. Έτσι, η συνοριακή συνθήκη δίνει την σχέση

$$\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n k i^n \{J'_n(ka) + B_n H'_n(ka)\} \cos n(\theta - \alpha) = 0.$$

Επειδή  $-\pi \leq \theta < \pi$ , η σχέση μέσα στις αγκύλες πρέπει να είναι μηδέν, από όπου προκύπτει η σχέση που δίνει τους συντελεστές  $B_n$ :

$$B_n = -\frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)}.$$

Το ολικό πεδίο παίρνει την απλοποιημένη μορφή:

$$u(a, \theta) = \frac{2i}{\pi ka} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{H'_n(ka)} \cos n(\theta - \alpha).$$

Η συνθήκη Dirichlet για ηχητικά μαλακά σώματα (sound-soft bodies) είναι

$$u = 0$$

για  $r = a$  και δίνουν τους αντίστοιχους συντελεστές  $B_n = -\frac{J_n(ka)}{H_n(ka)}$ .

Το απομακρυσμένο πεδίο (far field) είναι το σχεδάζόμενο πεδίο που ανιχνεύεται πολύ μακριά από τον κύλινδρο. Για προβλήματα δύο διαστάσεων το απομακρυσμένο πεδίο  $f$  ορίζεται ως:

$$u_{sc}(\mathbf{r}) \sim \sqrt{2/\pi} e^{-i\pi/4} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} f(\hat{r})$$

όπου  $r$  το διάνυσμα θέσης ενός σημείου με συντεταγμένες  $(x, y)$  ως προς το κέντρο  $O$ ,  $r \rightarrow \infty$  και  $\hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ . Σε πολικές συντεταγμένες, για ένα επίπεδο κύμα και για αρχική γωνία πρόσπτωσης  $\alpha$ , το απομακρυσμένο πεδίο είναι  $f(\hat{r}) = f(\theta; \alpha)$  και

$$f(\theta, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n B_n \cos n(\theta - \alpha),$$

στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος  $\hat{r} = (\cos\theta, \sin\theta)$ .

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην σκέδαση από ένα κύλινδρο έχει σημασία η συμμετρία του προβλήματος γι' αυτό και χρησιμοποιούνται τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπου η  $\cos\theta$  είναι συμμετρική για  $\theta = 0$  και η  $\sin\theta$  είναι αντισυμμετρική για  $\theta = 0$ . Όμως στην πολλαπλή σκέδαση η συμμετρία δεν παίζει και τόσο σημαντικό ρόλο. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τη έκφραση των κυματοσυναρτήσεων με εκθετικούς όρους που είναι συντομότερη και πιο απλή. Έτσι έχουμε από το κεφάλαιο 2 την εξερχόμενη κυλινδρική και κανονική κυλινδρική κυματοσυνάρτηση αντίστοιχα:  $\psi_n(r) = H_n(kr)e^{in\theta}$ ,  $\hat{\psi}_n(r) = J_n(kr)e^{in\theta}$ ,  $n = 0, +1, +2, \dots$

Με τον νέο συμβολισμό το πρόβλημα για ένα κυκλικό κύλινδρο γράφεται ως εξής:

$$u_{inc} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m \hat{\psi}_m(\mathbf{r}),$$

όπου  $d_m = i^m e^{-im\alpha}$  και

$$u_{sc} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \psi_m(\mathbf{r}).$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη Neumann προκύπτει για  $r = a$  η ακόλουθη σχέση

$$c_m H'_m(ka) + d_m J'_m(ka) = 0$$



απο την οποία καθορίζουμε τους συντελεστές  $c_m$  εφόσον οι συντελεστές  $d_m$  είναι γνωστοί:

$$c_m = \sum_n T_{mn} d_n,$$

όπου

$$T_{mn} = -\left[\frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)}\right]\delta_{mn}$$

με  $\delta_{ij}$  το γνωστό Δέλτα του Kronecker . Ο πίνακας  $T$  με στοιχεία  $T_{mn}$  είναι διαγώνιος και καλείται πίνακας μετάβασης (transition matrix ). Για τη συνοριακή συνθήκη Dirichlet ο πίνακας μετάβασης είναι  $T_{mn} = -\left[\frac{J_m(ka)}{H_m(ka)}\right]\delta_{mn}$ . Το απομακρυσμένο πεδίο είναι της μορφής

$$f(\theta) = \sum_n \sum_m (-i)^n e^{in\theta} T_{nm} d_m.$$

## 5.2 Πολυπολική μέθοδος για δύο κυκλικούς κυλίνδρους

Έστω Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων με κέντρο το  $O$  στο οποίο κάθε σημείο έχει διάνυσμα θέσης  $\mathbf{r} = (x, y)$ . Θεωρούμε 2 ομογενείς, μη διαπερατούς κυκλικούς κυλίνδρους  $S_j$  που η διατομή τους βρίσκεται στο επίπεδο  $(x, y)$  με κέντρα  $O_j$  και ακτίνες  $a_j$ , όπου  $j = 1, 2$ . Τα διανύσματα θέσης των κέντρων ως προς την αρχή  $O$  είναι  $\mathbf{b}_j$ . Για ένα τυχαίο σημείο  $P$  με διάνυσμα θέσης  $r$  ισχύει  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_j + \mathbf{b}_j$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Ορίζοντας πολικές συντεταγμένες έχουμε  $(r_j, \theta_j)$  με  $\mathbf{r}_j = r_j(\cos\theta, \sin\theta)$ .

Το επίπεδο προσπίπτον κύμα  $u_{inc}$  προσπίπτει υπό γωνία  $\beta$ , σχεδιάζεται από τους κυλίνδρους και υποθέτουμε ότι στη γειτονιά κοντά στον κάθε κύλινδρο το προσπίπτον κύμα αποτελεί κανονική λύση της εξίσωσης Helmholtz έτσι ώστε

$$u_{inc} = \sum_m d_m^j \hat{\psi}(\mathbf{r}_j), \quad (5.1)$$

όπου  $j = 1, 2$  και οι συντελεστές  $d_m^j$  δίνονται από τη σχέση  $d_m^j = e^{ik\beta \cdot \mathbf{b}_j} e^{im(\frac{\pi}{2} - \beta)}$ .

Το σχεδιαζόμενο πεδίο εκφράζεται ως άπειρο άθροισμα πολυπόλων στο κέντρο κάθε κύκλου:

$$u_{sc} = \sum_m c_m^1 \psi_m(\mathbf{r}_1) + \sum_m c_m^2 \psi_m(\mathbf{r}_2). \quad (5.2)$$

Μένει τώρα να υπολογίσουμε τους συντελεστές  $c_m^1, c_m^2$  εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στον κάθε κύλινδρο. Θεωρούμε τον κύλινδρο  $S_1$ . Για να

χρησιμοποιήσουμε την συνοριακή συνθήκη στο  $r_1 = a_1$  πρέπει να εκφράσουμε τον κάθε όρο ως συνάρτηση του  $\theta_1$ , και την  $\psi_m(\mathbf{r}_2)$  σε όρους συναρτήσεων ως προς  $\mathbf{r}_1$ . Στην γειτονιά του κέντρου  $O_1$  η  $\psi_m(\mathbf{r}_2)$  αποτελεί κανονική λύση της εξίσωσης Helmholtz και γι' αυτό μπορεί να επεκταθεί σε όρους της  $\hat{\psi}_n(\mathbf{r}_1)$ . Όταν  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$  είναι το διάνυσμα θέσης του  $P$  ως προς το κέντρο  $O_2$  και  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$  το διάνυσμα θέσης του κέντρου  $O_1$  ως προς το  $O_2$ , τότε για  $r_1 < b$  έχουμε το προσθετικό θέωρημα του Graf:

$$\psi_m(\mathbf{r}_2) = \sum_n S_{mn}(\mathbf{b}) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}_1). \quad (5.3)$$

Ο πίνακας  $\mathbf{S}(\mathbf{b})$  είναι ένας πίνακας διαχωρισμού με στοιχεία  $S_{mn}(\mathbf{b}) = \psi_{m-n}(\mathbf{b}) = H_{m-n}(kb)e^{i(m-n)\beta}$ , όπου  $b = (b\cos\beta, b\sin\beta)$  και  $\beta$  η γωνία του  $b$ .

Το ολικό πεδίο  $u = u_{inc} + u_{sc}$  χρησιμοποιώντας το προσθετικό θέωρημα γίνεται:

$$u = \sum_m \{d_m^1 \hat{\psi}_m(\mathbf{r}_1) + c_m^1 \psi_m(\mathbf{r}_1)\} + \sum_m c_m^2 \sum_n S_{mn}(\mathbf{b}) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}_1)$$

$$\Rightarrow u = \sum_m \{d_m^1 \hat{\psi}_m(\mathbf{r}_1) + \hat{\psi}_m(\mathbf{r}_1) \sum_n S_{nm}(\mathbf{b}) c_n^2\},$$

για  $r_1 < b$ . Εφαρμόζοντας τώρα την συνοριακή συνθήκη στον κύλινδρο  $S_1$  που υποθέτουμε ότι είναι η συνθήκη Neumann για  $r_1 = a_1$  παίρνουμε:

$$c_m^1 H'_m(ka_1) + J'_m(ka_1) \sum_n S_{nm}(\mathbf{b}) c_n^2 = -d_m^1 J'_m(ka_1). \quad (5.4)$$

Αντίστοιχα, εάν και ο κύλινδρος  $S_2$  ικανοποιεί τη συνθήκη Neumann προκύπτει:

$$c_m^2 H'_m(ka_2) + J'_m(ka_2) \sum_n S_{nm}(-\mathbf{b}) c_n^1 = -d_m^2 J'_m(ka_2). \quad (5.5)$$

Το παραπάνω ζεύγος εξισώσεων αποτελεί ένα άπειρο σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τους συντελεστές  $c_m^1$  και  $c_m^2$ , για

$$m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Εάν ικανοποιούσαν και οι δύο κύλινδροι την συνθήκη Dirichlet, τότε το αντίστοιχο σύστημα υπολογισμού των συντελεστών θα ήταν:

$$c_m^1 H_m(ka_1) + J_m(ka_1) \sum_n S_{nm}(\mathbf{b}) c_n^2 = -d_m^1 J_m(ka_1) \quad (5.6)$$

$$c_m^2 H_m(ka_2) + J_m(ka_2) \sum_n S_{nm}(-\mathbf{b}) c_n^1 = -d_m^2 J_m(ka_2). \quad (5.7)$$

### 5.3 Πολυπολική μέθοδος για $N$ κυκλικούς κυλίνδρους

Η μέθοδος που περιγράφηκε στην ενότητα 5.2, για τον υπολογισμό του σκεδαζόμενου πεδίου από δύο κυκλικούς κυλίνδρους, μπορεί να επεκταθεί και για  $N$  κυκλικούς κυλίνδρους,  $S_j$  όπου  $j = 1, 2, \dots, N$ . Κάθε κύκλος της διατομής του  $S_j$  έχει ακτίνα  $a_j$  και κέντρο  $O_j$  στο σημείο  $(x, y) = (\xi_j, \eta_j)$ . Όπως και πριν ορίζονται πολικές συντεταγμένες  $(r_j, \theta_j)$  με  $\theta_j = 0$  στο οριζόντιο άξονα  $x$ . Το σκεδαζόμενο πεδίο είναι:

$$u_{sc} = \sum_{j=1}^N c_m^j \psi_m(\mathbf{r}_j)$$

το οποίο είναι ένας άπειρος αριθμός εξερχομένων κυλινδρικών κυματοσυναρτήσεων στο κέντρο κάθε κύκλου, με άγνωστους συντελεστές  $c_m^j$ . Χρησιμοποιώντας το προσθετικό θεώρημα του Graf το ολικό πεδίο στην περιοχή του  $S_k$ , για  $r_k < b_k$ ,  $b_k = \min_{1 \leq j \leq N} |b_{kj}|$  και  $j \neq k$  είναι:

$$u = \sum_m \{ d_m^k \hat{\psi}_m(\mathbf{r}_k) + c_m^k \psi_m(\mathbf{r}_k) + \hat{\psi}_m(\mathbf{r}_k) \sum_{j=1}^N \sum_n S_{nm}(\mathbf{b}_{kj}) c_n^j \}$$

όπου  $b_{kj}$  είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου  $O_k$  ως προς το  $O_j$ , έτσι ώστε  $\mathbf{b}_{jk} = -\mathbf{b}_{kj}$ .

Εάν όλοι οι κύλινδροι ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη Dirichlet, τότε για τον καθένα κύλινδρο  $S_k$  έχουμε:

$$c_m^k H_m(ka_k) + J_m(ka_k) \sum_{j=1}^N \sum_n S_{nm}(\mathbf{b}_{kj}) c_n^j = -d_m^k J_m(ka_k),$$

για  $k = 1, 2, \dots, N$  και  $m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ . Έτσι, προκύπτει ένα αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων που επιλύοντάς το υπολογίζουμε τους συντελεστές  $c_m^k$ .

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές  $c_m^k$  είναι ανάλογοι του  $J_m(ka_k)$ . Συγκεκριμένα, οι  $c_m^k$  και  $c_{-m}^k$  μηδενίζονται για κάθε  $ka_k$  τέτοιο ώστε  $J_m(ka_k) = 0$ . Ορίζονται για αυτό το λόγο οι τροποποιημένοι συντελεστές  $\tilde{c}_m^k$ , σύμφωνα με τη σχέση  $c_m^k = \tilde{c}_m^k J_m(ka_k)$ . Έτσι, το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα γίνεται:

$$\tilde{c}_m^k H_m(ka_k) + \sum_{j=1}^N \sum_n S_{nm}(b_{kj}) J_n(ka_j) \tilde{c}_n^j = -d_m^k$$

και το ολικό πεδίο γύρω από το  $S_k$  δίνεται για  $r_k < b_k$ , από τη σχέση:

$$u = \sum_m \{d_m^k \widehat{\psi}_m(r_k) + \tilde{c}_m^k J_m(ka_k) \psi_m(r_k) + \widehat{\psi}_m(r_k) \sum_{j=1}^N \sum_n S_{nm}(b_{kj}) J_n(ka_j) \tilde{c}_n^j\}$$

$$\Rightarrow u = \sum_m \tilde{c}_m^k \{J_m(ka_k) \psi_m(r_k) - H_m(ka_k) \widehat{\psi}_m(r_k)\}.$$

Για την αριθμητική επίλυση τέτοιων συστημάτων θα αναφερθούμε στο κεφάλαιο 6. Στο σημείο αυτό αξίζει απλώς να αναφέρουμε ότι είναι απαραίτητος περιορισμός της απειροσειράς που εμφανίζεται στο σύστημα σε κάποιο πεπερασμένο αριθμό  $M$ . Το σύστημα τώρα γίνεται

$$\tilde{c}_m^k H_m(ka_k) + \sum_{j=1}^N \sum_{n=-M}^M S_{nm}(b_{kj}) J_n(ka_j) \tilde{c}_n^j = -d_m^k$$

για  $m = -M, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, M$  και  $k = 1, 2, \dots, N$ . Πρόκειται για ένα σύστημα  $N(2M+1)$  εξισώσεων με  $N(2M+1)$  αγνώστους. Περαιτέρω απλοποιήσεις είναι εφικτές ανάλογα με την συμμετρία του προβλήματος. Για παράδειγμα, για 2 όμοιους κύλινδρους ακτίνας  $a$ , με κέντρα  $O_1 = (x, y) = (0, b/2)$  και  $O_2 = (x, y) = (0, -b/2)$  αντίστοιχα, το προσπίπτον κύμα προέκυψε από γραμμική πηγή στο  $(x, y) = (x_0, 0)$  έτσι ώστε

$$u_{inc}(x, y) = H_0^{(1)}(k\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}).$$

Για τη συγκεκριμένη συμμετρική διαμόρφωση ισχύει ότι

$$c_n^k = c_{-n}^k$$

και το αλγεβρικό σύστημα για τον υπολογισμό των συντελεστών όταν και οι 2 κύλινδροι ακολουθούν τη συνθήκη Dirichlet είναι:

$$c_m^1 H_m(ka) + J_m(ka) \sum_{n=-M}^M S_{nm}(b) c_{-n}^1 = -d_m^1 J_m(ka)$$

και

$$c_m^2 H_m(ka) + J_m(ka) \sum_{n=-M}^M S_{nm}(b) c_{-n}^2 = -d_m^2 J_m(ka),$$

όπου  $m = -M, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, M$ ,  $ka = 2$ ,  $M = 6$  και  $b/a = \pi$ . Το παράδειγμα αυτό είχε πραγματοποιηθεί το 1953 από τον Row με χειρόγραφους υπολογισμούς και τα αποτελέσματα ήταν σε πλήρη συμφωνία με το πείραμα. Επίσης έχει μελετηθεί και αποδειχθεί ότι για  $M = 6$  τα αποτελέσματα είναι ακριβή, εφόσον οι κύλινδροι δεν είναι πολύ κοντά μεταξύ τους. Τέλος, αναφέρουμε ότι εκτός από την άμεση επίλυση του συστήματος για τον υπολογισμό των συντεταγμένων μπορεί κανείς να το λύσει επαναληπτικά.

## 5.4 Χωρισμός μεταβλητών για μία σφαίρα

Σ' αυτή την περίπτωση το εμπόδιο στο οποίο σκεδάζεται το προσπίπτον κύμα  $u_{sc} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}\cdot\hat{\alpha}}$  είναι μία σφαίρα ακτίνας  $a$ . Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$  με  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  και αρχή των αξόνων στο κέντρο της σφαίρας. Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{\alpha}$  έχει την κατεύθυνση της διάδοσης του κύματος. Εάν επιλεγεί το  $\hat{\alpha}$  να έχει κατεύθυνση κατά τη διεύθυνση του  $z$ -άξονα, οι υπολογισμοί απλοποιούνται σημαντικά. Αλλά θα κάνουμε μία πιο γενική προσέγγιση του προβλήματος για οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Το προσπίπτον και το σκεδαζόμενο κύμα είναι αντίστοιχα,

$$u_{inc}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^n j_n(kr) Y_n^m(\hat{r}) Y_n^{m\bar{}}(\hat{\alpha})$$

και

$$u_{sc}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^n B_n^m h_n(kr) Y_n^m(\hat{r}) Y_n^{m\bar{}}(\hat{\alpha})$$

όπου  $h_n(w) \equiv h_n^{(1)}(w)$  και  $B_n^m$  οι συντελεστές που πρέπει να υπολογιστούν. Προφανώς, η  $u_{sc}$  ικανοποιεί την τρισδιάστατη εξίσωση Helmholtz και την συνθήκη ακτινοβολίας για κάθε επιλογή των  $B_n^m$ .

Εφαρμόζοντας την συνοριακή συνθήκη Neumann στο ολικό πεδίο  $u = u_{sc} + u_{inc}$  καταλήγουμε στη σχέση  $B_n^m = -\frac{j_n'(ka)}{h_n'(ka)}$ . Χρησιμοποιώντας το προσθετικό θεώρημα Legendre και την Wronskian σχέση για σφαιρικές συναρτήσεις Bessel:  $j_n(w)y_n'(w) - y_n(w)j_n'(w) = w^{-2}$ , το ολικό πεδίο σε μία σφαίρα γίνεται:

$$u(a, \theta, \phi) = \frac{i}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)i^n}{h_n'(ka)} P_n(\hat{r}\cdot\hat{\alpha}).$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις κυματοσυναρτήσεων  $\psi_n^m(\mathbf{r}) = h_n(kr)Y_n^m(\hat{r})$  και  $\hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}) = j_n(kr)Y_n^m(\hat{r})$ , το προσπίπτον και το σκεδαζόμενο κύμα ξαναγράφονται ως:

$$u_{inc} = \sum_{n,m} d_n^m \hat{\psi}_n^m(\mathbf{r})$$

και

$$u_{sc} = \sum_{n,m} c_n^m \psi_n^m(\mathbf{r}),$$

όπου  $\sum_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n$  και  $d_n^m = 4\pi i^n \tilde{Y}_n^m(\hat{\alpha})$ . Οι συντελεστές  $c_n^m$  καθορίζονται από την συνοριακή συνθήκη Neumann:  $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ , η οποία μας οδηγεί στην σχέση:  $c_n^m h_n'(ka) + d_n^m j_n'(ka) = 0$ . Έτσι,

$$c_n^m = \sum_{\nu,\mu} T_{n\nu}^{m\mu} d_{\nu}^{\mu}.$$

Ο πίνακας  $T$  έχει στοιχεία που προκύπτουν από την σχέση

$$T_{n\nu}^{m\mu} = -[j_n'(ka)/h_n'(ka)]\delta_{n\nu}\delta_{m\mu}.$$

Οπότε, το ολικό πεδίο πάνω σε μία σφαίρα ακτίνας  $a$  είναι:

$$u(a, \theta, \phi) = \sum_{n,m} (d_n^m \hat{\psi}_n^m + c_n^m \psi_n^m) = \frac{i}{(ka)^2} \sum_{n,m} \frac{d_n^m}{h_n'(ka)} Y_n^m(\theta, \phi).$$

Το απομακρυσμένο πεδίο  $f$  στα προβλήματα τριών διαστάσεων ορίζεται από τη σχέση:

$$u_{sc}(\mathbf{r}) \sim (ikr)^{-1} e^{ikr} f(\hat{r}),$$

καθώς το  $r$  τείνει στο άπειρο. Για ένα προσπίπτον κύμα με κατεύθυνση αυτή του μοναδιαίου διανύσματος  $\hat{\alpha}$ , το απομακρυσμένο πεδίο έχει τη μορφή:

$$f(\hat{r}; \hat{\alpha}) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) B_n^m P_n(\hat{r} \cdot \hat{\alpha})$$

ενώ χρησιμοποιώντας τον πίνακα  $T$  έχουμε:

$$f(\hat{r}) = \sum_{n,m} \sum_{\nu,\mu} (-1)^n Y_n^m(\hat{r}) T_{n\nu}^{m\mu} d_{\nu}^{\mu}.$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί του απομακρυσμένου πεδίου αφορούσαν μία σφαίρα με το κέντρο της στο σημείο  $O$  που βρίσκεται η πηγή του σκεδαζόμενου κύματος. Έστω τώρα, ότι μετακινούμε τη σφαίρα-σκεδαστή έτσι ώστε το κέντρο της να βρίσκεται στο σημείο  $O_1$  με διάνυσμα θέσης  $\mathbf{b}_1$  ως προς το  $O$ , έτσι ώστε να ισχύει  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}_1$ . Τότε, το προσπίπτον κύμα δίνεται από τη σχέση  $u_{inc} = e^{ik\mathbf{r} \cdot \hat{\alpha}} = e^{ik\mathbf{b}_1 \cdot \hat{\alpha}} e^{ik\mathbf{r}_1 \cdot \hat{\alpha}}$  και το σκεδαζόμενο κύμα ισούται ασυμπτωτικά με  $u_{sc} = e^{ik\mathbf{b}_1 \cdot \hat{\alpha}} \frac{e^{ikr_1}}{ikr_1} f(\hat{r}_1; \hat{\alpha})$  καθώς  $r_1 = |\mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$ . Αλλά  $r_1 \sim r - \mathbf{b}_1 \cdot \hat{r}$  και  $\hat{r}_1 \sim \hat{r}$  καθώς  $r_1 \rightarrow \infty$ , άρα ισχύει ότι

$$f_1(\hat{r}; \hat{\alpha}) = e^{\{ik\mathbf{b}_1 \cdot (\hat{\alpha} - \hat{r})\}} f(\hat{r}; \hat{\alpha}).$$

Καταλήγουμε στο ότι εάν μεταφέρουμε τον σχεδαστή (που δεν χρειάζεται να είναι σφαιρικός απαραίτητα) η φάση του απομακρυσμένου πεδίου δεν αλλάζει σημαντικά. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση των προβλημάτων σε δύο διαστάσεις.

Σε περίπτωση που έχουμε το ίδιο πρόβλημα σκέδασης, αλλά ψάχνουμε να βρούμε το απομακρυσμένο πεδίο ως προς το σημείο  $O_1$  του κέντρου του σχεδαστή, το σκεδαζόμενο πεδίο είναι  $u_{sc} \sim f(\hat{r}_1; \mathbf{b}_1) \frac{e^{ikr_1}}{ikr_1}$  καθώς το  $r_1$  τείνει στο άπειρο. Έτσι, προκύπτει το απομακρυσμένο πεδίο

$$f(\hat{r}_1; \mathbf{b}_1) = f(\hat{r}_1) e^{i\mathbf{k}\mathbf{b}_1 \cdot \hat{r}_1}.$$

## 5.5 Πολυπολική μέθοδος για δύο σφαίρες

Έστω σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων με αρχή το  $O$ , έτσι ώστε κάθε σημείο να έχει διάνυσμα θέσης  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  ως προς το  $O$ . Θεωρούμε δύο σφαίρες  $S_j$ ,  $j = 1, 2$ , με ακτίνα  $a_j$  και κέντρο  $O_j$  στο σημείο  $\mathbf{b}_j$ . Χρησιμοποιούμε πολικές σφαιρικές συντεταγμένες  $(r_j, \theta_j, \phi_j)$  στο  $O_j$ , ώστε  $\bar{\mathbf{r}} = \bar{r}_j + \bar{\mathbf{b}}_j$  με  $\mathbf{r}_j = r_j(\sin\theta_j \cos\phi_j, \sin\theta_j \sin\phi_j, \cos\theta_j)$ . Έστω προσπίπτον κύμα  $u_{inc}$  το οποίο σκεδάζεται από την κάθε σφαίρα. Υποθέτουμε ότι στη γειτονιά κάθε σφαίρας το προσπίπτον κύμα αποτελεί κανονική λύση της εξίσωσης Helmholtz έτσι ώστε:

$$u_{inc} = \sum_{n,m} d_{nj}^m \hat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_j).$$

Το σκεδαζόμενο κύμα μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα πολυπόλων στο κέντρο κάθε σφαίρας:

$$u_{sc} = \sum_{n,m} \{c_{n1}^m \psi_n^m(\mathbf{r}_1) + c_{n2}^m \psi_n^m(\mathbf{r}_2)\}.$$

Μ' αυτό τον τρόπο παίρνουμε την ακτινική λύση της εξίσωσης Helmholtz για κάθε συμβατή επιλογή των συντελεστών  $c_{n1}^m, c_{n2}^m$ . Ο καθορισμός των συντελεστών αυτών θα προκύψει από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών σε κάθε σφαίρα.

Έστω η σφαίρα  $S_1$ . Επεκτείνουμε την κυματοσυνάρτηση  $\psi_n^m(\mathbf{r}_2)$  κοντά στο κέντρο  $O_1$  σε όρους κανονικών κυματοσυναρτήσεων  $\hat{\psi}_\nu^\mu(\mathbf{r}_1)$ . Έτσι, με  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}$  και  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$ , έχουμε για  $r_1 < b$

$$\psi_n^m(\bar{r}_2) = \sum_{\nu,\mu} S_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{b}) \hat{\psi}_\nu^\mu(\mathbf{r}_1).$$

Ο πίνακας  $S(\bar{b})$  έχει στοιχεία  $S_{n\nu}^{m\mu}$  που είναι γνωστά. Η σχέση αυτή είναι ουσιαστικά το προσθετικό θεώρημα αυτού του προβλήματος, το οποίο όταν εφαρμοστεί στο σκεδάζόμενο πεδίο τότε η έκφραση του ολικού πεδίου  $u = u_{inc} + u_{sc}$  γίνεται:

$$u = \sum_{n,m} \{d_{n1}^m \widehat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_1) + c_{n1}^m \psi_n^m(\mathbf{r}_1) + \widehat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_1) \sum_{\nu,\mu} S_{\nu n}^{m\mu}(\mathbf{b}) c_{\nu 2}^\mu\}.$$

Υποθέτοντας ότι η σφαίρα  $S_1$  ικανοποιεί τη συνθήκη Neumann καταλήγουμε στη σχέση:

$$c_{n1}^m h'_n(ka_1) + j'_n(ka_1) \sum_{\nu,\mu} S_{\nu n}^{m\mu}(\mathbf{b}) c_{\nu 2}^\mu = -d_{n1}^m j'_n(ka_1),$$

όπου  $n = 0, 1, 2, \dots$  και  $m = -n, \dots, n$ . Ομοίως για την σφαίρα  $S_2$ : έχουμε

$$c_{n2}^m h'_n(ka_2) + j'_n(ka_2) \sum_{\nu,\mu} S_{\nu n}^{m\mu}(-\mathbf{b}) c_{\nu 1}^\mu = -d_{n2}^m j'_n(ka_2).$$

Οι τελευταίες δύο εξισώσεις αποτελούν ένα σύστημα άπειρων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, η επίλυση του οποίου δίνει τους ζητούμενους συντελεστές  $c_{n1}^m$  και  $c_{n2}^m$ .

Μπορούμε να απλοποιήσουμε αρκετά το σύστημα αυτό εάν επιλέξουμε το διάλυμα  $\bar{b}$  να βρίσκεται στην κατεύθυνση του άξονα των  $z$ ,  $\bar{b} = b\hat{z}$ . Τότε, τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{S}(\mathbf{b})$  δίνονται από τη σχέση

$$S_{n\nu}^{m\mu}(b\hat{z}) = (-1)^n S_{n\nu}^m(kb) \delta_{m\mu} = (-1)^{n+\nu} S_{n\nu}^{m\mu}(-b\hat{z})$$

και το σύστημα υπολογισμού των συντελεστών γίνεται:

$$c_{n1}^m h'_n(ka_1) + j'_n(ka_1) \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu S_{\nu n}^m(kb) c_{\nu 2}^m = -d_{n1}^m j'_n(ka_1),$$

$$c_{n2}^m h'_n(ka_2) + (-1)^n j'_n(ka_2) \sum_{\nu=0}^{\infty} S_{\nu n}^m(kb) c_{\nu 1}^m = -d_{n2}^m j'_n(ka_2).$$

## 5.6 Πολυπολική μέθοδος για $N$ σφαίρες

Η μέθοδος μπορεί να γενικευθεί για  $N$  σφαίρες,  $S_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  ακτίνων  $a_j$  με κέντρα  $O_j$  στις θέσεις με διανύσματα  $\mathbf{r} = \mathbf{b}_j$ . Όπως και πριν ορίζουμε



πολικές σφαιρικές συντεταγμένες  $(r_j, \theta_j, \phi_j)$  ως προς  $O_j$ , όπου  $\theta_j = 0$  στην κατεύθυνση του άξονα των  $z$ . Το σκεδαζόμενο πεδίο είναι

$$u_{sc} = \sum_{j=1}^N \sum_{n,m} c_{nj}^m \psi_n^m(\bar{r}_j).$$

Χρησιμοποιώντας το προσθετικό θεώρημα, για κάθε σφαίρα  $S_l$  το ολικό πεδίο είναι:

$$u = \sum_{n,m} \{d_{nl}^m \widehat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_l) + c_{nl}^m \psi_n^m(\mathbf{r}_l) + \widehat{\psi}_n^m(\mathbf{r}_l) \sum_{j=1}^N \sum_{\nu,\mu} S_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{b}_{lj}) c_{\nu j}^\mu\},$$

όπου  $r_l < b_l$ ,  $b_l = \min_{1 \leq j \leq N} |\bar{b}_{lj}|$  και  $\bar{b}_{lj}$  το διάλυσμα θέσης του  $O_l$  ως προς το  $O_j$ .

Υποθέτοντας πως όλες οι σφαίρες ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη Neumann, προκύπτει για κάθε σφαίρα  $S_l$ :

$$c_{nl}^m h_n'(ka_l) + j_n'(ka_l) \sum_{j=1}^N S_{\nu n}^m(\mathbf{b}_{lj}) c_{\nu j}^\mu = -d_{nl}^m j_n'(ka_l)$$

για  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = -n, \dots, n$  και  $l = 1, 2, \dots, N$ . Αυτό είναι ένα αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων για τους συντελεστές  $c_{nl}^m$ . Εάν το σύστημα είναι επιλύσιμο, τότε θα έχουμε την ακριβή λύση για πολλαπλή σκέδαση από  $N$  σφαίρες.

Οι συντελεστές  $c_{nl}^m$  πρέπει να είναι ανάλογοι του  $j_n'(ka_l)$ , γι' αυτό ορίζονται οι τροποποιημένοι συντελεστές  $\tilde{c}_{nl}^m$  έτσι ώστε

$$c_{nl}^m = \tilde{c}_{nl}^m j_n'(ka_l).$$

Το σύστημα εύρεσης των συντελεστών γίνεται τώρα,

$$\tilde{c}_{nl}^m h_n'(ka_l) + \sum_{j=1}^N S_{\nu,\mu}(\mathbf{b}_{lj}) j_\nu'(ka_j) \tilde{c}_{\nu j}^\mu = -d_{nl}^m.$$

Το απομακρυσμένο πεδίο,  $f(\hat{\mathbf{r}})$ , για  $N$  σφαίρες ορίζεται ως:

$$u_{sc}(\mathbf{r}) \sim (ikr)^{-1} e^{ikr} f(\hat{\mathbf{r}})$$

καθώς το  $r \rightarrow \infty$ . Για  $r_j > b_j$  η κυματοσυνάρτηση είναι  $\psi_n^m(\mathbf{r}_j) = \sum_{\nu,\mu} (-1)^{n+\nu} \widehat{S}_{\nu n}^{m\mu}(\mathbf{b}_j) \psi_\nu^\mu(\mathbf{r})$  και το σκεδαζόμενο πεδίο δίνεται από τη σχέση:

$$f(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{j=1}^N \sum_{n,m} (-1)^n c_{nj}^m \sum_{\nu,\mu} i^\nu \widehat{S}_{\nu n}^{m\mu}(\mathbf{b}_j) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}).$$

## Κεφάλαιο 6

# Υπολογιστική εφαρμογή σε περιβάλλον *Mathematica*

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε την αριθμητική επίλυση του προβλήματος σκέδασης ακουστικών κυμάτων από ηχητικά μαλακούς ή ηχητικά σκληρούς κυκλικούς κυλίνδρους, στις δύο διαστάσεις, σε περιβάλλον *Mathematica*. Η κατανόηση τέτοιων προβλημάτων προϋποθέτει την γνώση της επιρροής διαφόρων φυσικών και γεωμετρικών παραμέτρων στις αλληλεπιδράσεις του προσπίπτοντος κύματος με τους σχεδαστές. Για το σκοπό αυτό, διερευνήθηκε το μέτρο της έντασης του σχεδασμένου πεδίου ως προς όλες τις γωνίες της διεύθυνσης παρατήρησης, από 0 έως  $2\pi$ , σε διαφορετικές αποστάσεις από το κέντρο των αξόνων, ως προς διαφορετικές παραμέτρους.

Επειδή θα επιλύσουμε το πρόβλημα για δύο σχεδαστές, με σύνορα  $B_1, B_2$ , ισχύει:

- $\Delta u_{\mathbf{x}} + k^2 u(\mathbf{x}) = 0$ , ( $R^2 - \overline{\Omega_-}$ ,  $\Omega_- = \bigcup_{i=1}^2 B_i$ )
- $u(\mathbf{x}) = 0$  (ηχητικά μαλακός σχεδαστής) ή  $\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{v}} = 0$  (ηχητικά σκληρός σχεδαστής), όπου  $\mathbf{x} \in \partial\Omega_-$  και  $\mathbf{v}$  το μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα κάθετο στο σύνορο  $\partial\Omega_-$
- $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \sqrt{|\mathbf{x}|} (\nabla u_{\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}} - iku(\mathbf{x})) = 0$  η συνθήκη ακτινοβολίας του *Sommerfeld*.

Η πολυπολική μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε βασίζεται στα προσθετικά θεωρήματα του κεφαλαίου 3. Στην ενότητα 5.2 επιλύθηκε αναλυτικά το παραπάνω πρόβλημα για δύο κυκλικούς κυλίνδρους. Το σχεδασζόμενο πεδίο δίνεται από τη σχέση:

$$u_{sc} = \sum_m c_m^1 \psi_m(\mathbf{r}_1) + \sum_m c_m^2 \psi_m(\mathbf{r}_2), \quad (6.1)$$

όπου  $\psi_m(\mathbf{r}_i) = H_m^{(1)}(k\mathbf{r}_i)e^{im\theta_i}$  οι τοπικές κυλινδρικές κυματοσυναρτήσεις για τον σκεδαστή  $i$ . Οι συντελεστές  $c_m^1, c_m^2$  θα προκύψουν από την συνοριακή συνθήκη που ικανοποιεί ο εκάστοτε σκεδαστής. Συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας την συνοριακή συνθήκη *Neumann* στους κυλίνδρους  $S_1$  και  $S_2$  προκύπτει το σύστημα:

$$c_m^1 H_m'(ka_1) + J_m'(ka_1) \sum_n S_{nm}(\mathbf{b}) c_n^2 = -d_m^1 J_m'(ka_1). \quad (6.2)$$

$$c_m^2 H_m'(ka_2) + J_m'(ka_2) \sum_n S_{nm}(-\mathbf{b}) c_n^1 = -d_m^2 J_m'(ka_2). \quad (6.3)$$

Εάν ικανοποιούν και οι δύο κυκλικοί κύλινδροι την συνοριακή συνθήκη *Dirichlet*, τότε το αντίστοιχο σύστημα υπολογισμού των συντελεστών θα είναι:

$$c_m^1 H_m(ka_1) + J_m(ka_1) \sum_n S_{nm}(\mathbf{b}) c_n^2 = -d_m^1 J_m(ka_1) \quad (6.4)$$

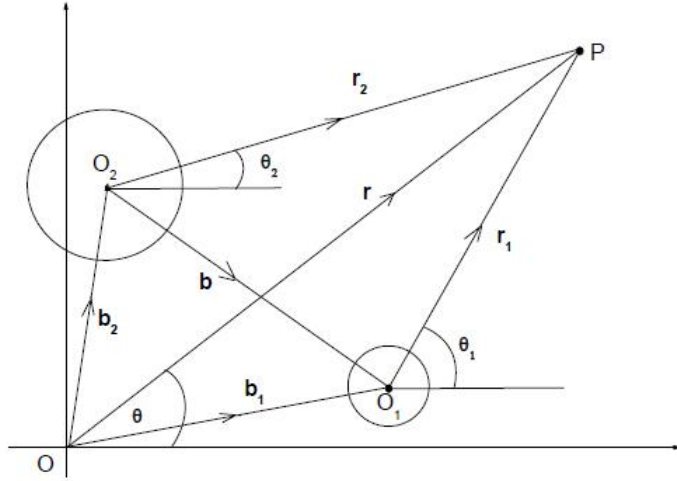
$$c_m^2 H_m(ka_2) + J_m(ka_2) \sum_n S_{nm}(-\mathbf{b}) c_n^1 = -d_m^2 J_m(ka_2). \quad (6.5)$$

Για να επιλυθεί το πρόβλημα, η σειρά πρέπει να αποκοπεί στα παραπάνω συστήματα, όπως και στον τύπο της σκεδαζόμενης έντασης  $u_{sc}$ , σε έναν πεπερασμένο αριθμό  $N$  έτσι ώστε το γραμμικό σύστημα με αγνώστους τους συντελεστές  $c_n^i, i = 1, 2$  να είναι ένα σύστημα  $(2N + 1)$  εξισώσεων. Ο αριθμός  $N$  πρέπει να προσαρμοστεί έτσι ώστε να διασφαλιστεί η σωστή προσέγγιση. Στα αριθμητικά πειράματα θεωρήσαμε  $N = k * a + 2$ .

Η αριθμητική εφαρμογή έγινε για δύο σκεδαστές σε διάφορες τιμές του κυματάρθρου  $k = \omega/c$ . Εφαρμόσαμε τη μέθοδο για δύο κυκλικούς κυλίνδρους και όχι για περισσότερους, διότι για πολλούς σκεδαστές το σύστημα υπολογισμού των συντελεστών γίνεται πολύ μεγάλο και απαιτεί τη διάθεση τεράστιας μνήμης αποθήκευσης. Επίσης, ο χρόνος επίλυσης του συστήματος γίνεται ιδιαίτερα μεγάλος [1].

## 6.1 Αριθμητική εφαρμογή σκέδασης ακουστικών κυμάτων από δύο ηχητικά μαλακούς κυκλικούς κυλίνδρους.

Έστω Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων με κέντρο το  $O$  στο οποίο κάθε σημείο έχει διάνυσμα θέσης  $\mathbf{r} = (x, y)$ . Θεωρούμε 2 κυκλικούς κυλίνδρους  $S_j$  που η διατομή τους βρίσκεται στο επίπεδο  $(x, y)$  με κέντρα  $O_j$  και ακτίνες  $a_j$ ,



Σχήμα 5. Γεωμετρία των δύο σκεδαστών.

όπου  $j = 1, 2$ . Τα διανύσματα θέσης των κέντρων ως προς την αρχή  $O$  είναι  $\mathbf{b}_j$ . Για ένα τυχαίο σημείο  $P$  με διάνυσμα θέσης  $\mathbf{r}$  ισχύει  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_j + \mathbf{b}_j$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 5, όπου  $\mathbf{r}_j = r_j(\cos\theta, \sin\theta)$ .

Τοποθετούμε τους δύο δίσκους στα σημεία  $(5, 0)$  και  $(0, 5)$ , οπότε  $\mathbf{b}_1 = (5, 0)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (0, 5)$  και  $\mathbf{b} = \sqrt{50}$ . Ως διεύθυνση του προσπίπτοντος κύματος θεωρούμε την  $\mathbf{d} = (1, 0)$  η οποία αντιστοιχεί για γωνία πρόσπτωσης  $\beta = 0$ . Οι ακτίνες των σκεδαστών είναι  $a_1 = 1, a_2 = 1$  και ο κυματάρθρωπος έχει την τιμή  $k = 4$ . Εάν  $\mathbf{r}_j = |\mathbf{r}_j|(\cos\theta_j, \sin\theta_j)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\mathbf{r} = |\mathbf{r}|(\cos\theta, \sin\theta)$  και δεδομένου ότι  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_j + \mathbf{b}_j$ , τότε η θέση των σκεδαστών θα δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις οι οποίες προκύπτουν από το Νόμο των συνημιτόνων και την γεωμετρία του σχήματος 5.

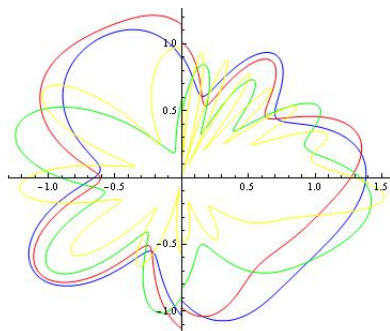
$$r_1^2 = r^2 + 25 - 10r\cos\theta,$$

$$r_2^2 = r^2 + 25 - 10r\sin\theta,$$

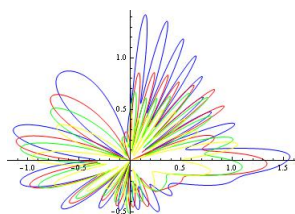
$$\tan\theta_1 = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta - 5},$$

$$\tan\theta_2 = \frac{r\sin\theta - 5}{r\cos\theta}.$$

Στο σχήμα 6 έχει σχεδιαστεί το μέτρο της έντασης του σκεδασμένου πεδίου ως προς όλες τις γωνίες παρατήρησης από  $0$  έως  $2\pi$ , για ένα επίπεδο ηχητικό κύμα



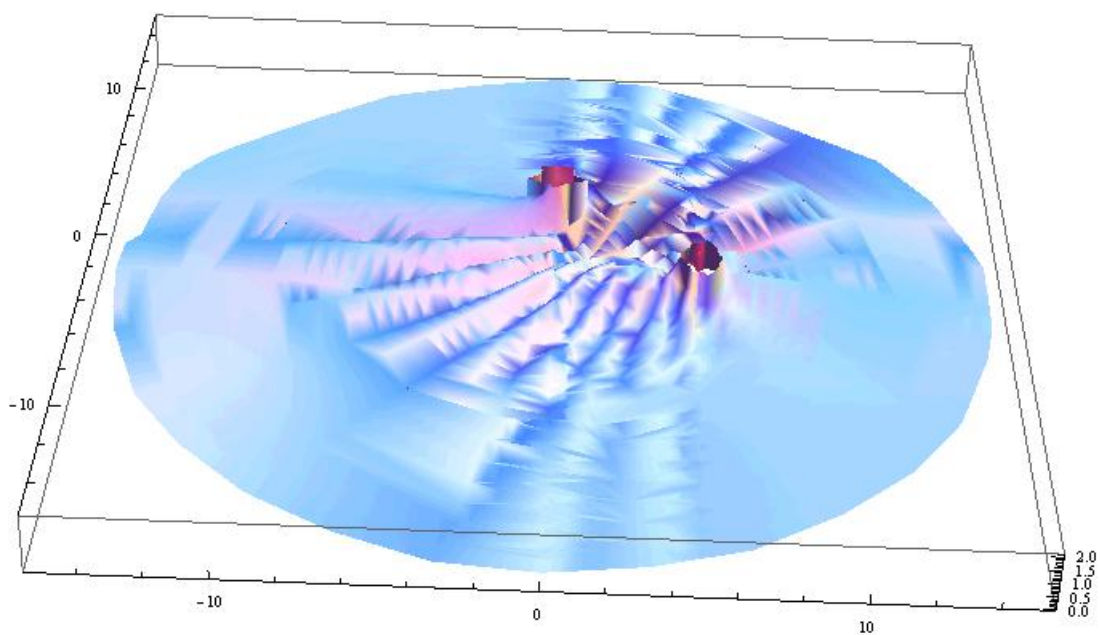
Σχήμα 6. Το μέτρο της έντασης του πεδίου όταν  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $k = 4$  και  $r = 1.2$  (μπλε),  $1.4$  (κόκκινο),  $2$  (πράσινο),  $3.8$  (κίτρινο), για όλες τις γωνίες από  $0$  έως  $2\pi$ .



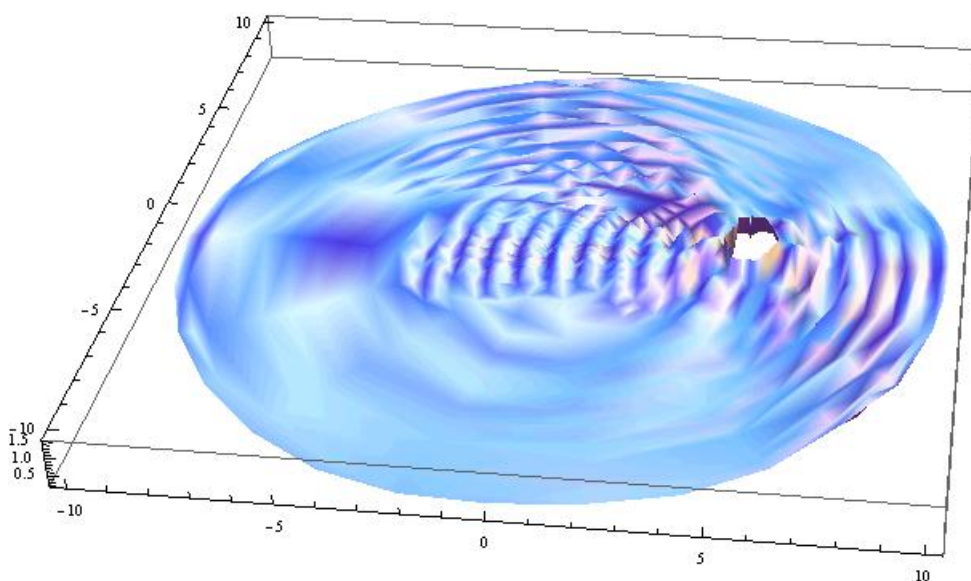
Σχήμα 7. Το μέτρο της έντασης του πεδίου όταν  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $k = 4$  και  $r = 6.2$  (μπλε),  $8$  (κόκκινο),  $10$  (πράσινο),  $15$  (κίτρινο), για όλες τις γωνίες από  $0$  έως  $2\pi$ .

που προσπίπτει υπό γωνία  $\beta = 0$  με κυματάριθμο  $k = 4$ . Οι κυκλικοί κύλινδροι έχουν ακτίνες  $a_1 = a_2 = 1$  και ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη *Dirichlet*, δηλαδή είναι ηχητικά μαλακοί. Καταγράφηκαν τέσσερα διαγράμματα για μικρές απόστασεις παρατήρησης από την αρχή των αξόνων:  $r = 1.2$  (μπλε),  $1.4$  (κόκκινο),  $2$  (πράσινο),  $3.8$  (κίτρινο). Στο σχήμα 7 έχει σχεδιαστεί, αντίστοιχα με το σχήμα 6, το μέτρο της έντασης του σχεδασμένου πεδίου για μεγαλύτερες τιμές της απόστασης παρατήρησης:  $r = 6.2$  (μπλε),  $8$  (κόκκινο),  $10$  (πράσινο) και  $15$  (κίτρινο).

Παρατηρούμε ότι η πολική αναπαράσταση του πεδίου έχει διαφορετικές διακυμάνσεις για απόσταση  $r$  κοντά στην αρχή των αξόνων σε σύγκριση με την αντίστοιχη αναπαράσταση για μεγαλύτερα  $r$ . Επίσης, καθώς μεγαλώνει το σημείο παρατήρησης, το οποίο αντιστοιχεί στο διάνυσμα θέσης  $r$ , το μέτρο της έντασης του πεδίου μειώνεται. Το σχεδασμένο πεδίο δεν είναι συμμετρικό και παρατηρούμε ότι υπάρχουν αρκετές γωνίες παρατήρησης με μέγιστες τιμές. Μία τρισδιάστατη εικόνα του πεδίου φαίνεται στο σχήμα 8. Το μέτρο της έντασης του ολικού πεδίου που αποτελείται από το προσπίπτον και το σχεδασόμενο πεδίο γύρω από τον κυκλικό κύλινδρο  $S_1$ , ο οποίος βρίσκεται στη θέση  $(5, 0)$ , φαίνεται στο σχήμα 9.



Σχήμα 8. Το μέτρο της έντασης του σχεδιασμένου πεδίου, όταν  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $k = 4$  και η γωνία του προσπίπτοντος κύματος είναι  $\beta = 0$ , ως προς όλες τις γωνίες της διεύθυνσης παρατήρησης. Είναι εμφανείς οι θέσεις των δύο κυκλικών κυλίνδρων στα σημεία  $(5, 0)$  και  $(0, 5)$ .

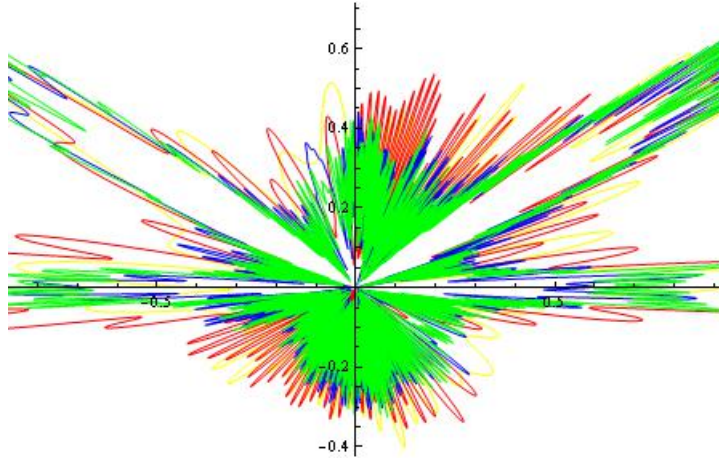


Σχήμα 9. Το μέτρο της έντασης του ολικού πεδίου γύρω από τον σχεδαστή 1, ο οποίος βρίσκεται στη θέση  $(5, 0)$ , για  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $k = 4$  και η γωνία του προσπίπτοντος κύματος είναι  $\beta = 0$ , ως προς όλες τις γωνίες της διεύθυνσης παρατήρησης.

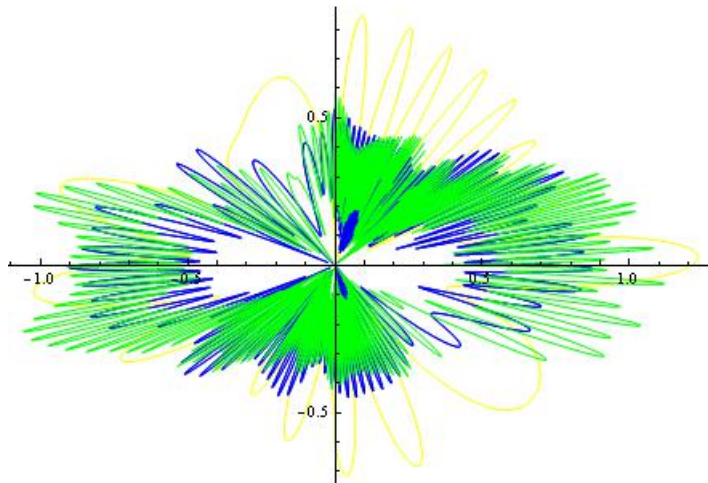
## 6.2 Εξάρτηση από τον κυματάριθμο.

Μέσω του τύπου 6.1 διαπιστώνουμε την εξάρτηση του σχεδασμένου πεδίου από τον κυματάριθμο  $k$  και επομένως από την συχνότητα του προσπίπτοντος κύματος. Διατηρώντας σταθερή την ακτίνα των κυκλικών δίσκων στις τιμές  $a_1 = a_2 = 1$  και την κατεύθυνση του επίπεδου κύματος να προσπίπτει υπό γωνία  $\beta = 0$ , έγιναν οι μετρήσεις και η αναπαράσταση του σχεδασμένου πεδίου για  $k = 10, 20, 50, 100$ . Στο σχήμα 10 φαίνεται το μέτρο της έντασης του σχεδασμένου πεδίου σε απόσταση παρατήρησης  $r = 2$  και στο σχήμα 11 σε απόσταση παρατήρησης  $r = 10$  για τιμές του κυματάριθμου  $k = 10$  (κίτρινο),  $k = 20$  (κόκκινο),  $k = 50$  (μπλε) και  $k = 100$  (πράσινο). Παρατηρούμε πως διατηρείται η κατεύθυνση των μέγιστων απόλυτων τιμών του σχεδασμένου πεδίου για πολύ μεγάλους κυματάριθμους ( $k = 20, 50, 100$ ). Καθώς όμως αυξάνεται ο κυματάριθμος, η ένταση του πεδίου μειώνεται σε μικρές αποστάσεις παρατήρησης και αυξάνεται σε μεγαλύτερες αποστάσεις παρατήρησης.

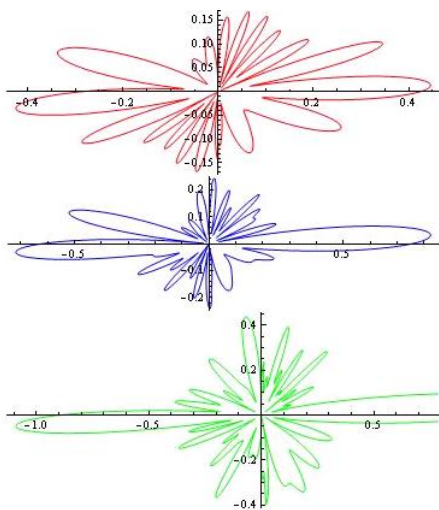




Σχήμα 10. Το μέτρο της έντασης του σχεδασμένου πεδίου από δύο κυκλικούς κυλίνδρους με ακτίνες  $a_1 = a_2 = 1$  ως προς όλες τις γωνίες της διεύθυνσης παρατήρησης για απόσταση παρατήρησης  $r = 2$ . Η γωνία του προσπίπτοντος κύματος είναι  $\beta = 0$  και ο κυματάρηθος έχει τιμές  $k = 10$  (κίτρινο),  $k = 20$  (κόκκινο),  $k = 50$  (μπλε) και  $k = 100$  (πράσινο).



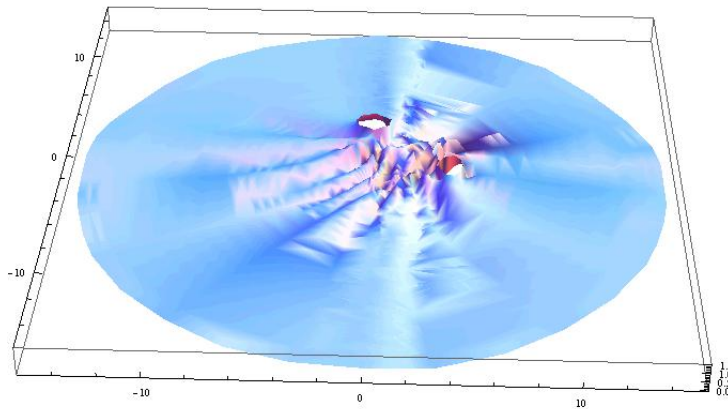
Σχήμα 11. Το μέτρο της έντασης του σχεδασμένου πεδίου από δύο κυκλικούς κυλίνδρους με ακτίνες  $a_1 = a_2 = 1$  ως προς όλες τις γωνίες της διεύθυνσης παρατήρησης για απόσταση παρατήρησης  $r = 10$ . Η γωνία του προσπίπτοντος κύματος είναι  $\beta = 0$  και ο κυματάρηθος έχει τιμές  $k = 10$  (κίτρινο),  $k = 20$  (κόκκινο),  $k = 50$  (μπλε) και  $k = 100$  (πράσινο).



Σχήμα 12. Σύγκριση για 3 διαφορετικές τιμές της ακτίνας των κυκλικών κυλίνδρων  $a = 1$  (κόκκινο),  $2$  (μπλε),  $3$  (πράσινο) όταν  $k = 4$  και  $r = 100$ , ως προς όλες τις γωνίες παρατήρησης.

### 6.3 Εξάρτηση από την ακτίνα των κυκλικών κυλίνδρων.

Για την μελέτη του σχεδασμένου πεδίου όταν αλλάζει η ακτίνα των κυκλικών σχεδαστών, διατηρήσαμε σταθερές τις εξής παραμέτρους: τον κυματάριθμο ( $k = 4$ ), την απόσταση μεταξύ των σχεδαστών ( $b = \sqrt{50}$ ) και την πρόσπτωση του κύματος υπό γωνία  $\beta = 0$ . Αυξάνοντας τις ακτίνες των σχεδαστών είδαμε αρκετές αλλαγές στο αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα, έγιναν πειράματα για ακτίνες  $a_1 = a_2 = 2$  και  $a_1 = a_2 = 3$ . Παρατηρούμε ότι η ένταση του πεδίου αυξάνεται καθώς αυξάνεται η ακτίνα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 12 όπου συγκρίνουμε την ένταση του σχεδασμένου πεδίου για διαφορετικές ακτίνες των κυκλικών κυλίνδρων  $a_i = 1, 2, 3$ , με κυματάριθμο  $k = 4$ , σε απόσταση παρατήρησης  $r = 100$ .



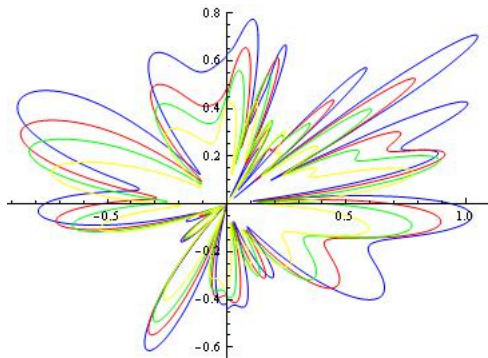
Σχήμα 13. Το σκεδαζόμενο πεδίο για  $k = 4$ ,  $a = 1$  και  $\delta \sim \lambda$  ως προς όλες τις γωνίες παρατήρησης.

## 6.4 Εξάρτηση από την απόσταση μεταξύ των κυκλικών κυλίνδρων.

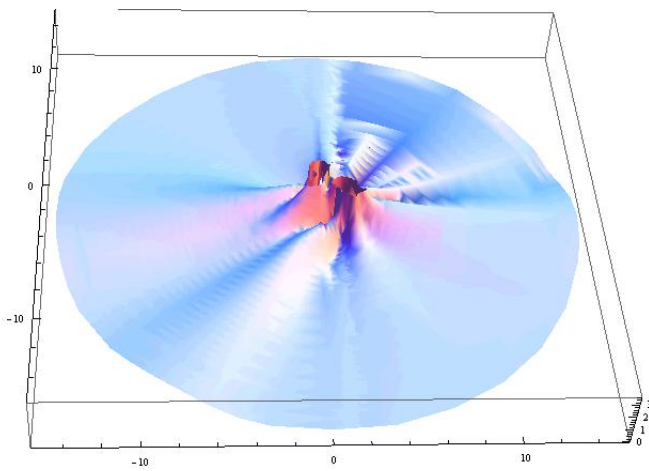
Εάν  $b$  είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των κυκλικών δίσκων τότε η απόσταση μεταξύ των σκεδατών  $\delta$ , ισούται με  $\delta = b - a$ , όπου  $a = a_1 = a_2$  η ακτίνα τους. Για επίπεδο προσπίτον κύμα με κυματάρημο  $k = 4$  και ακτίνες των κυκλικών κυλίνδρων  $a = 1$  μελετήσαμε 3 περιπτώσεις:

1.  $\delta \sim 6 > \lambda$ , όπου  $\lambda = 2\pi/k \sim 1,6$ ,  $k = 4$
2.  $\delta \sim 1,8 \sim \lambda$
3.  $\delta \sim 1,1 < \lambda$

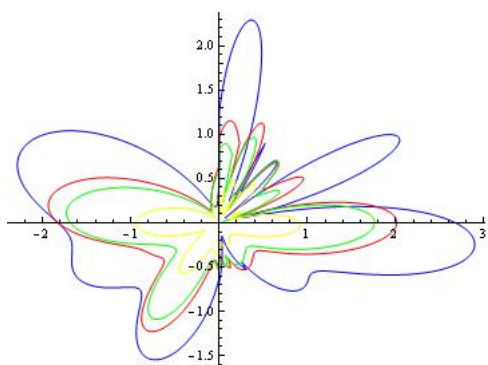
Η πρώτη περίπτωση φαίνεται στα σχήματα 6, 7, 8 και 9. Η δεύτερη περίπτωση απεικονίζεται στα σχήματα 13 και 14, ενώ η τρίτη περίπτωση φαίνεται στα σχήματα 15 και 16.



Σχήμα 14. Το μέτρο της έντασης του πεδίου όταν  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $k = 4$ ,  $\delta \sim \lambda$  και  $r = 6.2$  (μπλε), 8 (κόκκινο), 10 (πράσινο), 15 (κίτρινο), για όλες τις γωνίες από 0 έως  $2\pi$ .



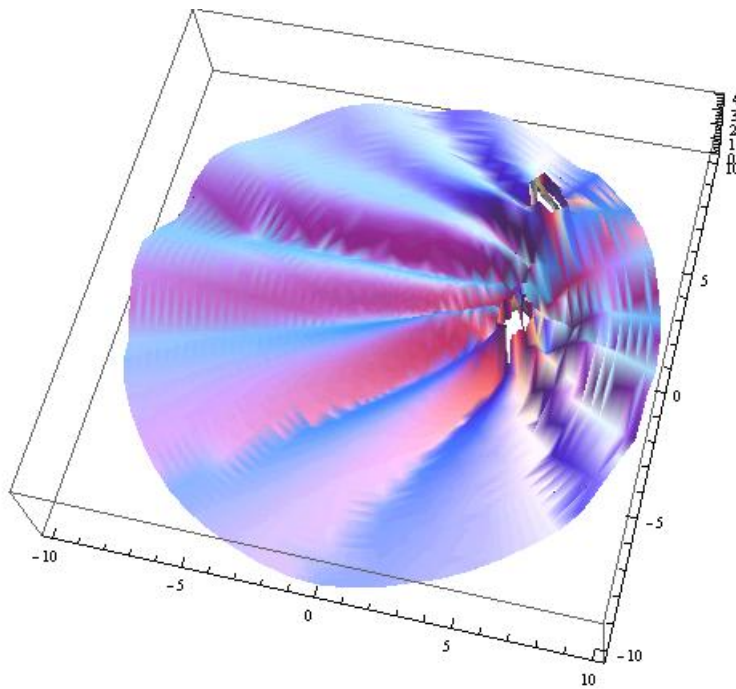
Σχήμα 15. Το σχεδαζόμενο πεδίο για  $k = 4$ ,  $a = 1$  και  $\delta \sim \lambda$  ως προς όλες τις γωνίες παρατήρησης.



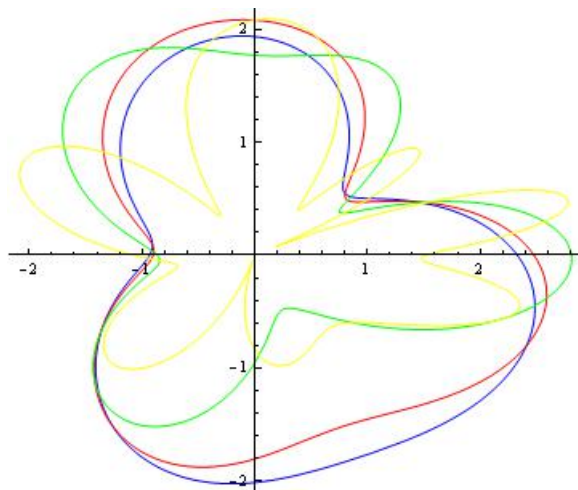
Σχήμα 16. Το μέτρο της έντασης του πεδίου όταν  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $k = 4$ ,  $\delta < \lambda$  και  $r = 3$  (μπλε), 6 (κόκκινο), 8 (πράσινο), 10 (κίτρινο), για όλες τις γωνίες από 0 έως  $2\pi$ .

## 6.5 Εξάρτηση από τη γωνία πρόσπτωσης του προσπίπτοντος κύματος.

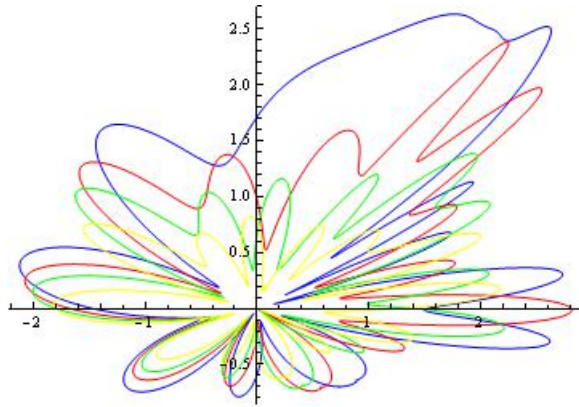
Σε όλους τους προηγούμενους υπολογισμούς η γωνία πρόσπτωσης του προσπίπτοντος κύματος ήταν  $\beta = 0$ . Στα σχήματα 17, 18, 19 απεικονίζεται το μέτρο της έντασης του σχεδασμένου πεδίου για γωνία του προσπίπτοντος κύματος  $\beta = \pi/4$  και σχήματα 20, 21, 22 για γωνία πρόσπτωσης  $3\pi/4$  αντίστοιχα. Παρατηρούμε πως η γωνία πρόσπτωσης επηρεάζει το μέτρο της έντασης του σχεδασμένου πεδίου, τις κατευθύνσεις των μέγιστων τιμών και την ένταση των διακυμάνσεων ως προς τη γωνία παρατήρησης.



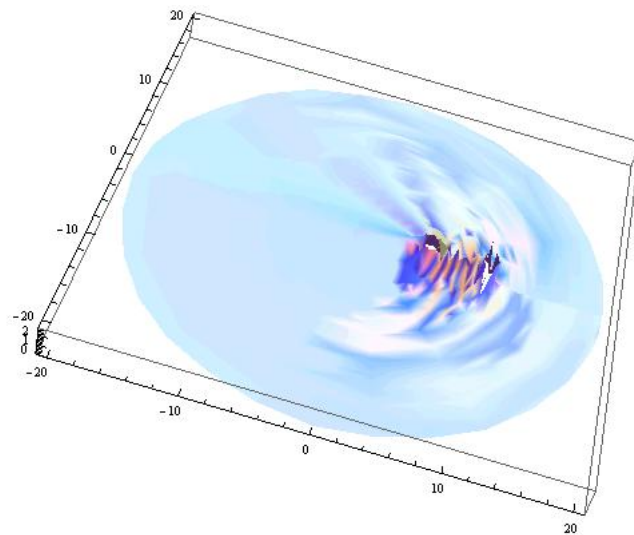
Σχήμα 17. Το μέτρο της έντασης του σχεδασμένου πεδίου για  $k = 4$ ,  $a_1 = a_2 = 1$  και γωνία του προσπίπτοντος κύματος  $\beta = \pi/4$ .



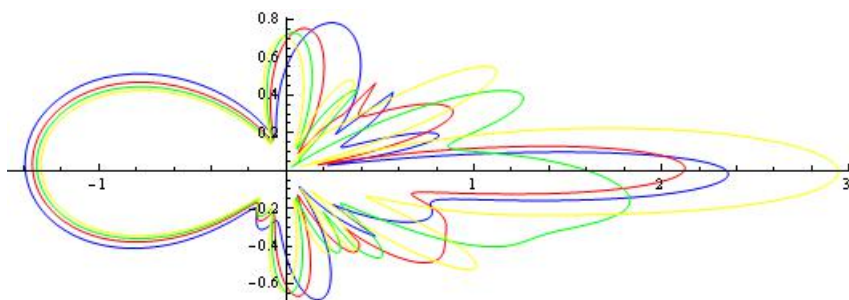
Σχήμα 18. Το μέτρο της έντασης του πεδίου όταν  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $k = 4$ ,  $\beta = \pi/4$  και  $r = 1.2$  (μπλε),  $1.4$  (κόκκινο),  $2$  (πράσινο),  $3.8$  (κίτρινο), για όλες τις γωνίες από  $0$  έως  $2\pi$ .



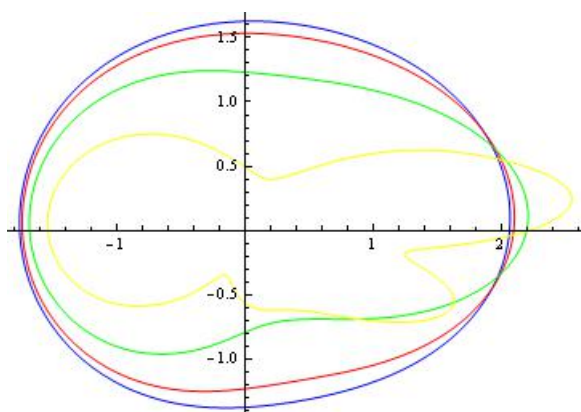
Σχήμα 19. Το μέτρο της έντασης του πεδίου όταν  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $k = 4$ ,  $\beta = \pi/4$  και  $r = 6.2$  (μπλε), 8 (κόκκινο), 10 (πράσινο), 15 (κίτρινο), για όλες τις γωνίες από 0 έως  $2\pi$ .



Σχήμα 20. Το μέτρο της έντασης του σχεδασμένου πεδίου για  $k = 4$ ,  $a_1 = a_2 = 1$  και γωνία του προσπίπτοντος κύματος  $\beta = 3\pi/4$ .



Σχήμα 21. Το μέτρο της έντασης του πεδίου όταν  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $k = 4$ ,  $\beta = 3\pi/4$  και  $r = 6.2$  (μπλε), 7 (κόκκινο), 7.5 (πράσινο), 8 (κίτρινο), για όλες τις γωνίες από 0 έως  $2\pi$ .



Σχήμα 22. Το μέτρο της έντασης του πεδίου όταν  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $k = 4$ ,  $\beta = 3\pi/4$  και  $r = 1.2$  (μπλε), 1.4 (κόκκινο), 2 (πράσινο), 3.8 (κίτρινο), για όλες τις γωνίες από 0 έως  $2\pi$ .

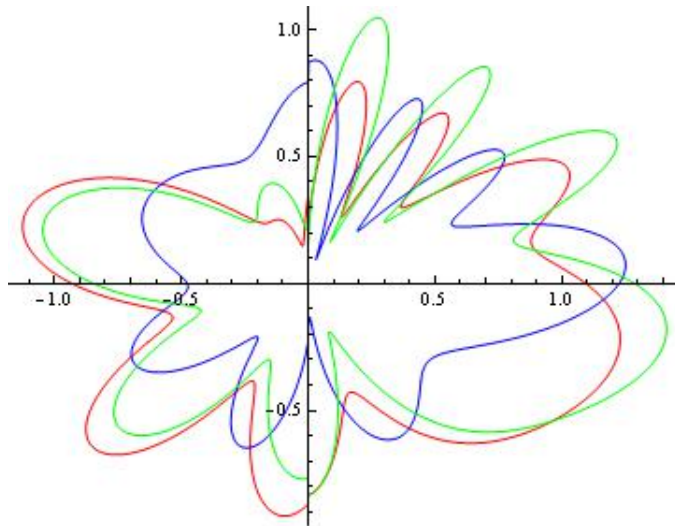


## 6.6 Σύγκριση της έντασης του σχεδαζόμενου πεδίου για ηχητικά μαλακούς και ηχητικά σκληρούς κυκλικούς κυλίνδρους.

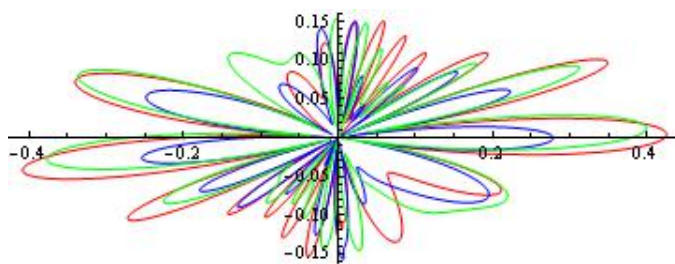
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκριση της έντασης του πεδίου για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών. Για δύο σχεδαστές που βρίσκονται στις θέσεις  $(5, 0)$  και  $(0, 5)$ , με κυματάριθμο  $k = 4$ , γωνία πρόσπτωσης  $\beta = 0$  και ακτίνες  $a_1 = a_2 = 1$  εξετάζουμε την ένταση του σχεδασμένου πεδίου για όλες τις γωνίες παρατήρησης όταν:

1. και οι δύο σχεδαστές είναι ηχητικά μαλακοί (κόκκινο γραφημα)
2. και οι δύο σχεδαστές είναι ηχητικά σκληροί (μπλε γράφημα)
3. ο ένας σχεδαστής είναι ηχητικά μαλακός και ο δεύτερος ηχητικά σκληρός (πράσινο γραφημα).

Τα αποτελέσματα φαίνονται στα σχήματα 23 και 24 για αποστάσεις  $r = 2$  και  $r = 100$  αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν κάποιες διακυμάνσεις και δεν ταυτίζονται απόλυτα.



Σχήμα 23. Το μέτρο της έντασης του σχεδασμένου πεδίου για  $k = 4$ ,  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $\beta = 0$  και  $r = 2$  σε όλες τις γωνίες παρατήρησης, όταν και οι δύο σχεδαστές είναι ηχητικά μαλακοί (κόκκινο), ηχητικά σκληροί (μπλε), ο ένας ηχητικά μαλακός και ο δεύτερος ηχητικά σκληρός (πράσινο).



Σχήμα 24. Το μέτρο της έντασης του σχεδασμένου πεδίου για  $k = 4$ ,  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $\beta = 0$  και  $r = 100$  σε όλες τις γωνίες παρατήρησης, όταν και οι δύο σχεδαστές είναι ηχητικά μαλακοί (κόκκινο), ηχητικά σκληροί (μπλε), ο ένας ηχητικά μαλακός και ο δεύτερος ηχητικά σκληρός (πράσινο).

## Κεφάλαιο 7

### Κώδικας *Mathematica*

Σκέδαση από δύο κυκλικούς κυλίνδρους όπου και οι δύο ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη *Dirichlet*:

% Καθορισμός της θέσης των κυκλικών δίσκων, της ακτίνας τους, της γωνίας των διανυσμάτων θέσης τους και του κυματάριθμου  $\kappa$ .

$a1 = 1; a2 = 1; b = \text{Sqrt}[50]; k = 4; f = \text{Pi}/4; g = \text{Pi}/4;$

$r1[r_, t_] := \text{Sqrt}[r^2 + 25 - 10 * r * \text{Cos}[t]]; r2[r_, t_] := \text{Sqrt}[r^2 + 25 - 10 * r * \text{Sin}[t];$

$t1[r_, t_] := \text{ArcTan}[(r * \text{Sin}[t]) / (r * \text{Cos}[t] - 5)]; t2[r_, t_] := \text{ArcTan}[(r * \text{Sin}[t] - 5) / (r * \text{Cos}[t]);$

% Επίλυση του γραμμικού συστήματος μεγέθους  $2 * (k * a + 2) + 1$  για τον προσδιορισμό των συντελεστών  $c_1$  και  $c_2$ .

$ccdir = \text{NSolve}[\text{Join}[\text{Table}[c1[m] * (\text{BesselJ}[m, k * a1] + I * \text{BesselY}[m, k * a1]) + \text{BesselJ}[m, k * a1] * \text{Sum}[c2[n] * \text{BesselJ}[m - n, k * b] + I * \text{BesselY}[m - n, k * b] * \text{Exp}[I * (m - n) * f], n, -6, 6] == -I^m * (\text{BesselJ}[m, k * a1]), m, -6, 6], \text{Table}[c2[s] * (\text{BesselJ}[s, k * a2] + I * \text{BesselY}[s, k * a2]) + \text{BesselJ}[s, k * a2] * \text{Sum}[c1[t] * (\text{BesselJ}[t - s, k * b] + I * \text{BesselY}[t - s, k * b]) * \text{Exp}[I * (t - s) * g], t, -6, 6] == -I^s * (\text{BesselJ}[s, k * a2]), s, -6, 6], \text{Join}[\text{Table}[c1[m], m, -6, 6], \text{Table}[c2[s], s, -6, 6]]]$

% Διαχωρισμός των συντελεστών σε δύο ξεχωριστούς πίνακες.

$\text{Table}[c1dir[n] = ccdir[[1]][[n+7]][[2]], n, -6, 6] \text{Table}[c2dir[n] = ccdir[[1]][[n+20]][[2]], n, -6, 6]$

% Υπολογισμός του σκεδασμένου πεδίου.

```
Udir[r_, t_] := Sum[c1dir[i] * (BesselJ[i, k * r1[r, t]] + I * BesselY[i, k * r1[r, t]]) * Exp[I * i * t1[r, t]] + c2dir[i] * (BesselJ[i, k * r2[r, t]] + I * BesselY[i, k * r2[r, t]]) * Exp[I * i * t2[r, t]], i, -6, 6];
```

% Τρισδιάστατο γράφημα του μέτρου της έντασης του σκεδασμένου πεδίου σε απόσταση από 0 έως 15 και για όλες τις γωνίες παρατήρησης.

```
ParametricPlot3D[r * Cos[t], r * Sin[t], Abs[Udir[r, t]], r, 0, 15, t, 0, 2 * Pi, Mesh -> None]
```

% Πολικό γράφημα της έντασης του σκεδασμένου πεδίου για απόσταση  $r = 10$  και σε όλες τις γωνίες παρατήρησης.

```
PolarPlot[Abs[Udir[10, t]], t, 0, 2Pi]
```

% Υπολογισμός της έντασης του ολικού πεδίου γύρω από τον σκεδαστή που βρίσκεται στη θέση (5, 0).

```
Udirtotal1[r_, t_] := Sum[Exp[I * k * (anglex * b1x + angley * b1y)] * Exp[I * i * (Pi/2) - angle] * BesselJ[i, k * r1[r, t]] * Exp[I * i * t1[r, t]] + c1dir[i] * (BesselJ[i, k * r1[r, t]] + I * BesselY[i, k * r1[r, t]]) * Exp[I * i * t1[r, t]] + (BesselJ[i, k * r1[r, t]] * Exp[I * i * t1[r, t]]) * Sum[c2dir[n] * BesselJ[n - i, k * b] + I * BesselY[n - i, k * b] * Exp[I * (n - i) * angb], n, -nmax1, nmax1], i, -nmax, nmax];
```

% Τρισδιάστατο γράφημα του ολικού πεδίου για απόσταση από 0 έως 10, σε όλες τις γωνίες παρατήρησης.

```
ParametricPlot3D[r * Cos[t], r * Sin[t], Abs[Udirtotal1[r, t]], r, 0, 10, t, 0, 2 * Pi, Mesh -> None]
```

# Βιβλιογραφία

- [1] Antoine X., Chniti C., Ramdani K.: *On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders*, Journal of Computational Physics 227 (2008) 1754-1771
- [2] Colton D., and Kress R.: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin (1998)
- [3] Eremin Y. A.: *Scattering Theory*, Moscow State University, Elsevier Ltd., (2005)
- [4] Korringa J.: *Early History of Multiple Scattering Theory for Ordered Systems*, Physics Reports 238, No. 6, 241-360 (1994)
- [5] Martin P. A.: *Multiple Scattering: Interaction of Time-Harmonic Waves with N Obstacles*, Cambridge University Press (2006)
- [6] Δασιος Γ., Κυριάκη Κ.: *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Αθήνα (1994)
- [7] Μανωλόπουλος Μ.: *Σκέδαση Ακουστικών Κυμάτων από Ομαλούς Σκεδαστές- Εφαρμογή στη Mathematica*, Διπλωματική εργασία, Αθήνα (2009)
- [8] Τραντόπουλος Κ.: *Το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης Ακουστικών Κυμάτων και η Αριθμητική του Επίλυση*, Διπλωματική εργασία, Αθήνα (2005)