

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ



**ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΕΛΑΦΟΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ
ΦΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΑΓΓΕΛΟΣ-ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΠΟΛΛΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΣΑΒΒΑΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ



ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΕΛΑΦΟΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ
ΦΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΑΓΓΕΛΟΣ-ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΠΟΛΛΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΣΑΒΒΑΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2022

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή αυτής της διπλωματικής κ. Σάββα Τριανταφύλλου, καθώς με έφερε σε επαφή και μου παρείχε συνεχή καθοδήγηση σε ένα νέο γνωστικό αντικείμενο. Επίσης, καταλυτική ήταν η συμβολή του στην ανάπτυξη του υπολογιστικού αλγόριθμου στο MATLAB, επιτρέποντας μου έτσι να προχωρήσω στις αριθμητικές δοκιμές.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ιωάννη Τσιάπα, διδάκτορα του τομέα της Γεωτεχνικής, για τις πολύτιμες γνώσεις που μου παρείχε σε θέματα εδαφοδυναμικής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την αμέριστη στήριξη τους μέχρι και σήμερα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο πολιτικός μηχανικός οφείλει κατά τον σχεδιασμό μίας κατασκευής, να λαμβάνει υπόψη του μια πληθώρα εξωτερικών δράσεων που επενεργούν σε αυτή. Μια από αυτές τις δράσεις είναι ο σεισμός. Στον Ελλαδικό χώρο ειδικότερα (ο οποίος έρχεται πολύ συχνά αντιμέτωπος με σεισμούς) οι εντάσεις που αναπτύσσονται στα μέλη του φορέα λόγω των σεισμικών κυμάτων που διαδίδονται στο έδαφος και φθάνουν στη κατασκευή, είναι πολλές φορές τα κρισιμότερα μεγέθη σχεδιασμού. Από αυτή την άποψη, η διάδοση των σεισμικών κυμάτων και η ακριβής προσομοίωσή τους, αποτελούν ζήτημα μείζονος ενδιαφέροντος για τους γεωτεχνικούς και τους δομοστατικούς μηχανικούς.

Ιστορικά, η μελέτη της διάδοσης των κυμάτων χρονολογείται από τον 18^ο αιώνα και το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής, στο οποίο έδωσε λύση ο Ντ'Αλαμπέρ. Με την πάροδο του χρόνου, αναπτύχθηκε το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για την επίλυση ενός μεγάλου φάσματος προβλημάτων κυματικής φύσεως. Στη σύγχρονη εποχή, με την αλματώδη πρόοδο της επιστήμης της πληροφορικής, ο ηλεκτρονικός υπολογιστής χρησιμοποιείται ως το πλέον χρήσιμο εργαλείο προς επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Έτσι, έχουν αναπτυχθεί διάφορες αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης για την αξιοποίησή του.

Η παρούσα διπλωματική εργασία είναι μια προσπάθεια ανάπτυξης κώδικα σε προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB, προκειμένου να προσομοιωθούν και να επιλυθούν προβλήματα διάδοσης κυμάτων στο έδαφος. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται μια σχετικά νεοεμφανιζόμενη τεχνική, η μέθοδος των φασματικών πεπερασμένων στοιχείων (Spectral Finite Element Method) ή απλώς SFEM, η οποία επιτρέπει τη προσομοίωση του ημίχωρου χωρίς τη χρήση μεγάλων πλεγμάτων πεπερασμένων στοιχείων. Η SFEM είναι στην ουσία μια υποκατηγορία της κλασικής μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Σε αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιούνται ως συναρτήσεις βάσης πολυώνυμα που προέρχονται από παρεμβολή τύπου Legendre υψηλού βαθμού σε μη-ισαπέχοντα σημεία. Τα σημεία ολοκλήρωσης είναι τέτοια έτσι ώστε το μητρώο μάζας να είναι διαγώνιο από την κατασκευή του. Για αυτούς τους λόγους παρουσιάζονται πολλά πλεονεκτήματα, όπως εξαιρετικά υψηλή ακρίβεια, απαίτηση λίγων βαθμών ελευθερίας και ως εκ τούτου χαμηλό υπολογιστικό κόστος και ιδιαίτερη αποτελεσματικότητα στην αντιμετώπιση των μη αντανακλαστικών-απορροφητικών συνοριακών συνθηκών (τις οποίες αντιμετωπίζουμε στον εδαφικό ημίχωρο).

Λέξεις κλειδιά

μέθοδος φασματικών πεπερασμένων στοιχείων, μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων, διάδοση κυμάτων, πολυώνυμα Legendre, σημεία Gauss Lobatto Legendre, διαγώνιο μητρώο μάζας, μητρώο στιβαρότητας, διακριτοποίηση, πλέγμα, συνθήκη σύγκλισης CFL, φαινόμενο Runge, μέθοδος Newmark, προσαρμογή τύπου h , προσαρμογή τύπου p , ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία, αριθμητική ολοκλήρωση Gauss

ABSTRACT

When designing a construction, a civil engineer must take into account a multitude of external actions that act on it. One of these actions is the earthquake. Particularly in the Greek area (which is very often faced with earthquakes) the stresses developed in the members of the structure due to the seismic waves propagating through the ground and reaching the structure, are a lot of times the most critical design parameters. From this point of view, the propagation of seismic waves and their accurate simulation are a matter of major interest for geotechnical and structural engineers.

Historically, the study of wave propagation dates back to the 18th century and the vibrating string problem, which was solved by D'Alembert. Over time, the necessary theoretical background was developed to solve a wide range of wave problems. In modern times, with the leaping progress of computer science, the computer is used as the most useful tool to solve such problems. Thus, various numerical solution methods have been developed for its utilization.

This thesis is an attempt to develop code in MATLAB programming environment, in order to model and solve ground wave propagation problems. In particular, a relatively new technique is used, the Spectral Finite Element Method (SFEM), which allows the simulation of the half-space without the use of large finite element meshes. SFEM is essentially a subclass of the classical finite element method. In this method, polynomials derived from high degree Legendre type interpolation at non-equidistant points are used as basis functions. The integration points are such that the register is diagonal from its construction. For these reasons many advantages are presented, such as extremely high accuracy, requirement of few degrees of freedom and therefore lower computational cost and high efficiency in dealing with non-reflective-absorptive boundary conditions. (which we face in the ground semi-space).

Keywords

spectral finite element method, finite element method, wave propagation, Legendre polynomials, Gauss Lobatto Legendre points, diagonal mass matrix, stiffness matrix, discretization, mesh, CFL convergence condition, Runge effect, Newmark method, h-method, p-method, isoparametric finite elements, Gaussian quadrature rule

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	4
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	5
ABSTRACT.....	6
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	7
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ.....	9
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	12
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	13
1.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....	13
1.2 ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ.....	15
2. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΩΝ.....	16
2.1 ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΤΗ 1 ΔΙΑΣΤΑΣΗ.....	16
2.2 ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΤΙΣ 2 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ.....	17
2.3 ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΤΙΣ 3 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ.....	19
3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	20
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ.....	20
<i>Το φαινόμενο Runge.....</i>	<i>20</i>
<i>Κατανομή κόμβων.....</i>	<i>24</i>
3.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ.....	29
<i>Ισχυρή και ασθενής διατύπωση του προβλήματος.....</i>	<i>29</i>
3.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ.....	30
3.4 ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.....	31
3.5 ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ.....	32
3.6 ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ.....	35
<i>Επιλογή βαθμού πολυωνύμου.....</i>	<i>35</i>
<i>Σχεδιασμός πλέγματος.....</i>	<i>35</i>
<i>Ακρίβεια ολοκλήρωσης.....</i>	<i>36</i>
4. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ.....	38
4.1 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ.....	38
4.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΚΑΙ ΜΗΤΡΩΟΥ ΜΑΖΑΣ – ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.....	38
4.2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΣΧΕΣΗ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΥ ΜΕ ΦΥΣΙΚΟΥ Σ.Σ.....	38
4.2.2 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ 2 ΚΟΜΒΩΝ.....	40
<i>Συναρτήσεις σχήματος.....</i>	<i>40</i>
<i>Μητρώο παραμορφώσεως.....</i>	<i>41</i>
<i>Μητρώο στιβαρότητας.....</i>	<i>41</i>
<i>Μητρώο μάζας.....</i>	<i>42</i>
4.2.3 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.....	43
4.2.4 ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΙΚΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ.....	43
<i>Απεικόνιση Φυσικού συστήματος στο Καρτεσιανό.....</i>	<i>43</i>
<i>Συναρτήσεις σχήματος.....</i>	<i>43</i>

Μητρώο παραμορφώσεως.....	44
Μητρώο στιβαρότητας	46
Ολοκλήρωση Gauss	47
Μητρώο μάζας.....	47
4.2.5 ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΙΚΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.....	48
4.2.6 ΕΞΑΕΔΡΙΚΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	49
Συναρτήσεις σχήματος.....	49
Μητρώο παραμορφώσεως.....	50
Μητρώο στιβαρότητας	52
Μητρώο μάζας.....	52
4.2.7 ΕΞΑΕΔΡΙΚΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ	53
4.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ NEWMARK.....	55
Μέθοδοι χρονικών βημάτων	55
Μέθοδος Newmark.....	57
Ειδική περίπτωση σταθερής μέσης επιτάχυνσης	57
Γραμμικά συστήματα.....	58
Σύγκλιση – Ευστάθεια – Ακρίβεια	59
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ	60
Χαρακτηριστικά εδάφους.....	60
Εξωτερική φόρτιση	62
Διακριτοποίηση.....	67
Ευστάθεια – συνθήκη CFL	68
Σεισμός Καλαμάτας.....	70
Σεισμός Ελευσίνας	74
Σεισμός Loma Prieta	78
Σεισμός Kobe.....	82
Σύγκριση μεταξύ των σεισμών	86
6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ	88
7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	90

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1: Κτίριο - πολυβάθμιο σύστημα - σε κίνηση εδάφους.....	13
Εικόνα 2: Το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής	16
Εικόνα 3: Διάδοση κύματος σε επιφανειακή μεμβράνη	18
Εικόνα 4: Συνάρτηση σχήματος N2 για στοιχείο 4 κόμβων - παρεμβολή 3ου βαθμού	21
Εικόνα 5: Συνάρτηση σχήματος N2 για στοιχείο 5 κόμβων - παρεμβολή 4ου βαθμού	21
Εικόνα 6: Συνάρτηση σχήματος N2 για στοιχείο 6 κόμβων - παρεμβολή 5ου βαθμού	22
Εικόνα 7: Συνάρτηση σχήματος N2 για στοιχείο 7 κόμβων - παρεμβολή 6ου βαθμού	22
Εικόνα 8: Συνάρτηση σχήματος N2 για στοιχείο 8 κόμβων - παρεμβολή 7ου βαθμού	23
Εικόνα 9: Συνάρτηση σχήματος N2 για στοιχείο 9 κόμβων - παρεμβολή 8ου βαθμού	23
Εικόνα 10: Συνάρτηση σχήματος N2 για στοιχείο 10 κόμβων - παρεμβολή 9ου βαθμού	24
Εικόνα 11: Συνάρτηση σχήματος N2 για στοιχείο 11 κόμβων - παρεμβολή 10ου βαθμού	24
Εικόνα 12: Σύγκριση 4x4 κλασικού και φασματικού - Lobatto στοιχείου.....	26
Εικόνα 13: Σύγκριση 5x5 κλασικού και φασματικού - Lobatto στοιχείου.....	26
Εικόνα 14: Σύγκριση 6x6 κλασικού και φασματικού - Lobatto στοιχείου.....	26
Εικόνα 15: Σύγκριση 7x7 κλασικού και φασματικού - Lobatto στοιχείου.....	27
Εικόνα 16: Σύγκριση 8x8 κλασικού και φασματικού - Lobatto στοιχείου.....	27
Εικόνα 17: Σύγκριση 9x9 κλασικού και φασματικού - Lobatto στοιχείου.....	27
Εικόνα 18: Σύγκριση 10x10 κλασικού και φασματικού - Lobatto στοιχείου.....	28
Εικόνα 19: Προσομοίωμα ενός πεπερασμένου τμήματος εδάφους.....	29
Εικόνα 20: Διακριτοποίηση εδάφους.....	31
Εικόνα 21: Τοπικό και καθολικό πλέγμα κόμβων	33
Εικόνα 22: Προσομοίωση εδάφους με μικρότερα στοιχεία στην κορυφή του, όπου οι ταχύτητες είναι συνήθως μικρότερες, και με μεγαλύτερα στοιχεία στην βάση του, όπου οι ταχύτητες είναι συνήθως μεγαλύτερες	36
Εικόνα 23: Καρτεσιανό και φυσικό σύστημα συντεταγμένων	39
Εικόνα 24: Στοιχείο στο Καρτεσιανό και στο Φυσικό Σύστημα Συντεταγμένων	40
Εικόνα 25: Τετραπλευρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης τεσσάρων κόμβων.....	43
Εικόνα 26: Εξαεδρικό ισοπαραμετρικό πεπερασμένο στοιχείο τριδιάστατης ελαστικότητας 8 κόμβων... ..	49
Εικόνα 27: Εξαεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο 27 κόμβων	54
Εικόνα 28: Διακριτές τιμές της φόρτισης	56
Εικόνα 29: Διακριτές τιμές της μετατόπισης	56
Εικόνα 30: Σταθερή μέση επιτάχυνση	57
Εικόνα 31: Προσομοίωση εδάφους με 100 στοιχεία	60
Εικόνα 32: Προσομοίωση εδάφους με 400 στοιχεία	60
Εικόνα 33: Προσομοίωση εδάφους με 2.500 στοιχεία	60
Εικόνα 34: Προσομοίωση εδάφους με 10.000 στοιχεία	61
Εικόνα 35: Κατηγορίες εδάφους κατά τον EC8.....	61
Εικόνα 36: Επιταχυνσιογράφημα σεισμού Ελευσίνας.....	63
Εικόνα 37: Φάσμα Επιταχύνσεων σεισμού Ελευσίνας.....	63
Εικόνα 38: Επιταχυνσιογράφημα σεισμού Καλαμάτα	64
Εικόνα 39: Φάσμα Επιταχύνσεων σεισμού Καλαμάτας.....	64
Εικόνα 40: Επιταχυνσιογράφημα σεισμού Loma Prieta.....	65
Εικόνα 41: Φάσμα επιταχύνσεων σεισμού Loma Prieta.....	65

Εικόνα 42: Επιταχυνσιογράφημα σεισμού Kobe.....	66
Εικόνα 43: Φάσμα επιταχύνσεων σεισμού Kobe.....	66
Εικόνα 44: Απαιτούμενο χρονικό βήμα για ευστάθεια από τη συνθήκη CFL.....	69
Εικόνα 45: Σεισμός Καλαμάτας-Εγκάρσια μετατόπιση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας	70
Εικόνα 46: Σεισμός Καλαμάτας-Εγκάρσια ταχύτητα σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας	70
Εικόνα 47: Σεισμός Καλαμάτας-Εγκάρσια επιτάχυνση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας.....	71
Εικόνα 48: Σεισμός Καλαμάτας: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας μετατόπισης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM.....	71
Εικόνα 49: Σεισμός Καλαμάτας: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας ταχύτητας σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM.....	72
Εικόνα 50: Σεισμός Καλαμάτας: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας επιτάχυνσης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM.....	72
Εικόνα 51: Σεισμός Καλαμάτας: Μεταβολή της εγκάρσιας μετατόπισης των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους.....	73
Εικόνα 52: Σεισμός Καλαμάτας: Μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους.....	73
Εικόνα 53: Σεισμός Ελευσίνας-Εγκάρσια μετατόπιση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας	74
Εικόνα 54: Σεισμός Ελευσίνας-Εγκάρσια ταχύτητα σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας.....	74
Εικόνα 55: Σεισμός Ελευσίνας-Εγκάρσια επιτάχυνση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας	75
Εικόνα 56: Σεισμός Ελευσίνας: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας μετατόπισης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM.....	75
Εικόνα 57: Σεισμός Ελευσίνας: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας ταχύτητας σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM.....	76
Εικόνα 58: Σεισμός Ελευσίνας: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας επιτάχυνσης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM.....	76
Εικόνα 59: Σεισμός Ελευσίνας: Μεταβολή της εγκάρσιας μετατόπισης των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους.....	77
Εικόνα 60: Σεισμός Ελευσίνας: Μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους.....	77
Εικόνα 61: Σεισμός Loma Prieta-Εγκάρσια μετατόπιση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας	78
Εικόνα 62: Σεισμός Loma Prieta-Εγκάρσια ταχύτητα σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας.....	78
Εικόνα 63: Σεισμός Loma Prieta-Εγκάρσια επιτάχυνση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας	79
Εικόνα 64: Σεισμός Loma Prieta: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας μετατόπισης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM.....	79
Εικόνα 65: Σεισμός Loma Prieta: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας ταχύτητας σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM.....	80
Εικόνα 66: Σεισμός Loma Prieta: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας επιτάχυνσης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM.....	80
Εικόνα 67: Σεισμός Loma Prieta: Μεταβολή της εγκάρσιας μετατόπισης των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους.....	81
Εικόνα 68: Σεισμός Loma Prieta: Μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους.....	81
Εικόνα 69: Σεισμός Kobe-Εγκάρσια μετατόπιση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας	82
Εικόνα 70: Σεισμός Kobe-Εγκάρσια ταχύτητα σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας.....	82
Εικόνα 71: Σεισμός Kobe-Εγκάρσια επιτάχυνση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας	83
Εικόνα 72: Σεισμός Kobe: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας μετατόπισης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM.....	83

Εικόνα 73: Σεισμός Kobe: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας ταχύτητας σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM	84
Εικόνα 74: Σεισμός Kobe: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας επιτάχυνσης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM	84
Εικόνα 75: Σεισμός Kobe: Μεταβολή της εγκάρσιας μετατόπισης των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους.....	85
Εικόνα 76: Σεισμός Kobe: Μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους.....	85
Εικόνα 77: Σύγκριση αναπτυσσόμενων εγκάρσιων μετατοπίσεων ενός σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας μεταξύ των σεισμών	86
Εικόνα 78: Σύγκριση αναπτυσσόμενων εγκάρσιων ταχυτήτων ενός σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας μεταξύ των σεισμών	86
Εικόνα 79: Σύγκριση αναπτυσσόμενων εγκάρσιων επιταχύνσεων ενός σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας μεταξύ των σεισμών	87

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1: Συντεταγμένες σημείων και συντελεστές βάρους αριθμητικής ολοκλήρωσης Lobatto στο διάστημα $[-1,1]$	28
Πίνακας 2: Συναρτήσεις Σχήματος τετραπλευρικών ισοπαραμετρικών στοιχείων με 4 έως 9 κόμβους ...	48
Πίνακας 3: Απαιτούμενο μέγεθος στοιχείου ανά σεισμικό γεγονός	68
Πίνακας 4: Απαιτούμενο χρονικό βήμα για ευστάθεια από τη συνθήκη CFL	69

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

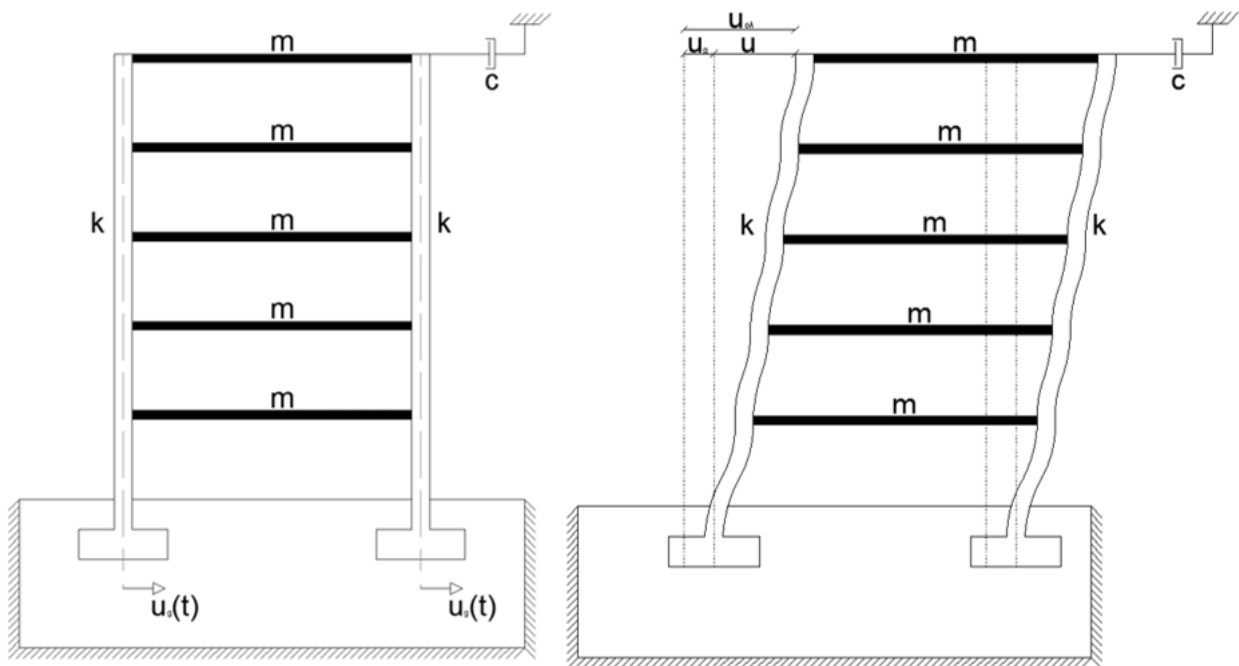
Προκειμένου να μελετηθεί η δυναμική απόκριση ενός κτιρίου όταν αυτό θα διεγερθεί από έναν σεισμό, δηλαδή για να έχουμε μια σαφή Εικόνα για το πως αυτό θα κινηθεί και πως θα παραμορφωθούν και θα καταπονηθούν τα μέλη του, πρέπει να επιλύσουμε την εξίσωση κίνησής του. Όπως γνωρίζουμε από τη δυναμική, η κίνηση ενός κτιρίου - πολυβάθμιου συστήματος – την ώρα του σεισμού, είναι μια εξαναγκασμένη ταλάντωση και περιγράφεται από μία δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση ως προς τη μεταβλητή του χρόνου. Στη γενική περίπτωση όπου το σύστημα διαθέτει μηχανισμούς ιξώδους απόσβεσης, η εξίσωση αυτή είναι

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [C] \cdot \{\dot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = \{f(t)\} \quad (1.1)$$

ή για σεισμό

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [C] \cdot \{\dot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = -[M] \cdot \{\ddot{u}_g\} \quad (1.2)$$

όπου $[M]$ είναι το μητρώο μάζας, $[C]$ το μητρώο αποσβέσεως, $[K]$ το μητρώο δυσκαμψίας, $\{u\}$ το διάνυσμα των μετατοπίσεων, $\{f(t)\}$ το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στη κατασκευή κατά τις διευθύνσεις των μετατοπίσεων και $\{\ddot{u}_g\}$ το διάνυσμα των επιταχύνσεων του εδάφους, το οποίο πολλαπλασιασμένο με το μητρώο μάζας, έχει τον ρόλο του ισοδύναμο εξωτερικού δυναμικού φορτίου. Με βάση τα προηγούμενα, παρατηρούμε πως για να μελετήσουμε την δυναμική απόκριση του φορέα, πρέπει να είναι γνωστό το επιταχυνσιογράφημα του σεισμού στη στάθμη των θεμελίων του κτιρίου, καθώς και οι αρχικές συνθήκες $\{u_0\}, \{\dot{u}_0\}$.



Εικόνα 1: Κτίριο - πολυβάθμιο σύστημα - σε κίνηση εδάφους

Οι μετρήσεις ενός επιταχυνσιογραφήματος λαμβάνουν χώρα στην επιφάνεια του εδαφικού σχηματισμού, όμως η δημιουργία των σεισμικών κυμάτων, η «πηγή» των δονήσεων δηλαδή, βρίσκεται σε κάποιο βάθος κάτω από την επιφάνεια του εδάφους. Ένα βασικό ερώτημα που εγείρεται, είναι κατά ποιο τρόπο συνδέονται τα μεγέθη της μετατόπισης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης που μετρούνται στην επιφάνεια του εδάφους, με τα αντίστοιχα μεγέθη σε ένα καθορισμένο βάθος; Γεννάται λοιπόν η ανάγκη να περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο **διαδίδονται τα κύματα στο έδαφος και γενικότερα στα στερεά σώματα.**

Οι αναλυτικές λύσεις που περιγράφουν την διάδοση κυμάτων σε στερεά μέσα έχουν διατυπωθεί από τον 18^ο αιώνα κιόλας (πρώτος ο Γάλλος μαθηματικός Ντ'Αλαμπέρ ήταν αυτός που ανακάλυψε τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση το 1746). Όμως με την ραγδαία αυξανόμενη χρήση των υπολογιστών από τους μηχανικούς για την αντιμετώπιση προβλημάτων, εμφανίστηκε και η αντίστοιχη ανάγκη για εύρεση αριθμητικών μεθόδων.

Στις αρχές του 1940 «γεννιέται», ίσως το πιο σημαντικό μαθηματικό εργαλείο αριθμητικής ανάλυσης, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων ή εν συντομία **FEM** (Finite Element Method). Το βασικό της χαρακτηριστικό είναι, πως ένα αρχικά συνεχές πεδίο διακριτοποιείται σε ένα σύνολο διακριτών υποπεδίων, τα επονομαζόμενα **πεπερασμένα στοιχεία**. Κύριοι θεμελιωτές της μεθόδου θεωρούνται οι Hrenikoff, Courant, Αργύρης, Kelsey κ.α.

Τα τελευταία χρόνια, και με ιδιαίτερο ενδιαφέρον από την κοινότητα των πολιτικών και των μηχανολόγων μηχανικών, η μέθοδος των φασματικών πεπερασμένων στοιχείων ή εν συντομία **SFEM** (Spectral Finite Element Method) έχει αναδειχθεί ως ένα ισχυρό υπολογιστικό εργαλείο για την αριθμητική προσομοίωση προβλημάτων διάδοσης κυμάτων. Η προέλευση της σήμερα χρησιμοποιούμενης SFEM μπορεί να εντοπισθεί στις φασματικές τεχνικές που εισήγαγαν οι Orszag (1980), Patera (1984) και Maday & Patera (1989), που αρχικά προτάθηκαν για προβλήματα δυναμικής ρευστών και Gazdag (1981), Kosloff & Baysal. (1982) και Kosloff et al. (1990) σε προβλήματα ελαστοδυναμικής.

Στη διάδοση των σεισμικών κυμάτων, οι μέθοδοι φασματικών στοιχείων εισήχθησαν για πρώτη φορά από τους Priolo et al. (1994) και Faccioli et al. (1996). Αργότερα οι Komatitsch και Vilotte (1998) αντικατέστησαν τα πολυώνυμα που χρησιμοποιούσαν οι Priolo et al. (1994) από τα πολυώνυμα Legendre και ενσωμάτωσαν τον κανόνα ολοκλήρωσης Gauss-Lobatto-Legendre, οδηγώντας στη τωρινή έκδοση της μεθόδου στα προβλήματα διάδοσης κυμάτων.

Σε αυτές τις μεθόδους απαιτούνται π τον αριθμό κομβικά σημεία ανά μήκος κύματος για την επίλυση του κύματος, σε σύγκριση με το 8-10 σημεία στη κλασική FEM (Ainsworth & Wajid, 2009). Είναι ακόμη λιγότερο ευαίσθητες στην αριθμητική ανισοτροπία και στην παραμόρφωση των στοιχείων. Τέλος, οδηγούν από την κατασκευή τους σε διαγώνια μητρώα μάζας.

Η **θεμελιώδης ιδέα πίσω από την SFEM** είναι η χρήση **παρεμβολής Lagrange υψηλότερης τάξης σε μη ισαπέχοντα κομβικά σημεία**, μειώνοντας το λεγόμενο φαινόμενο Runge και παράγοντας **εκθετικούς ρυθμούς σύγκλισης**. Εάν τα κομβικά σημεία, αντιστοιχούν σε έναν κανόνα ολοκλήρωσης Gauss-Lobatto-Legendre, το σύστημα που προκύπτει δίνει **διαγώνια μητρώα μάζας**, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα την αποσύζευξη των καθολικών εξισώσεων ισορροπίας για κάθε χρονική στιγμή.

Από την άλλη, ένα από τα μειονεκτήματα της φασματικής μεθόδου, είναι το γεγονός ότι πρέπει να αναπτυχθούν ειδικές μεθοδολογίες δημιουργίας πλέγματος, αφού στον αλγόριθμο της SFEM τα κομβικά σημεία πρέπει να τοποθετούνται σε ορισμένες (μη τυπικές) θέσεις μέσα στο στοιχείο και όχι σε ισαπέχουσες όπως στην FEM. Είναι επομένως ενδιαφέρον να προσδιοριστεί το εύρος των συχνοτήτων για

τις οποίες η φασματική τεχνική είναι πραγματικά πλεονεκτική σε σχέση με τις κλασικές συνθέσεις που βασίζονται σε μετατόπιση.

Αν και υπάρχουν αρκετές εργασίες που ασχολούνται με την απόδοση της φασματικής προσέγγισης στα προβλήματα διάδοσης κυμάτων (Marfurt, 1984; Dauksher & Emery, 2000; De Basabe & Sen, 2007; Ainsworth, 2005; Seriani & Oliveira, 2008; Ainsworth & Wajid, 2009; Mazzieri & Razzieri, 2012), αυτές έχουν περιοριστεί κυρίως σε προβλήματα με συγκεκριμένες οριακές συνθήκες ή, διαφορετικά, έχουν διεξαχθεί χρησιμοποιώντας αυστηρά απλουστευμένες παραδοχές.

1.2 ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ

Η παρούσα διπλωματική είναι οργανωμένη σε 4 βασικά κεφάλαια

- Αναλυτική λύση των εξισώσεων διάδοσης κυμάτων: Περιγράφεται συνοπτικά η πορεία επίλυσης και η εύρεση αναλυτικής λύσης του προβλήματος διάδοσης κυμάτων, σε μία, δύο και τρεις διαστάσεις.
- Η μέθοδος των φασματικών πεπερασμένων στοιχείων: Παρουσιάζονται τα βασικά γνωρίσματα της μεθόδου, που είναι και το κύριο αντικείμενο της εργασίας. Γίνεται αναφορά στις διάφορες ιδιαιτερότητές της, όπως τα σημεία Gauss Lobatto Legendre, θέματα πολυωνυμικής παρεμβολής παράλληλα με το φαινόμενο Runge, το διαγώνιο μητρώο μάζας, θέματα διακριτοποίησης του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων και ακρίβειας της μεθόδου.
- Επίλυση της εξίσωσης κίνησης: σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσεται η διαδικασία της επίλυσης της εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο των φασματικών πεπερασμένων στοιχείων στον H/Y. Συγκεκριμένα, γίνεται μια αναφορά στα ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία και στην παραγωγή του μητρώου δυσκαμψίας και μάζας. Τέλος παρουσιάζεται η μέθοδος Newmark η οποία και χρησιμοποιείται για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης.
- Αριθμητικά παραδείγματα: Αφού έχει αναπτυχθεί κώδικας στο MATLAB, εξετάζεται η αξιοπιστία της SEM μέσω ενός αριθμητικού παραδείγματος και συγκρίνονται τα αποτελέσματα με αυτά της FEM με μεγάλο πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων

2. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΩΝ

2.1 ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΤΗ 1 ΔΙΑΣΤΑΣΗ

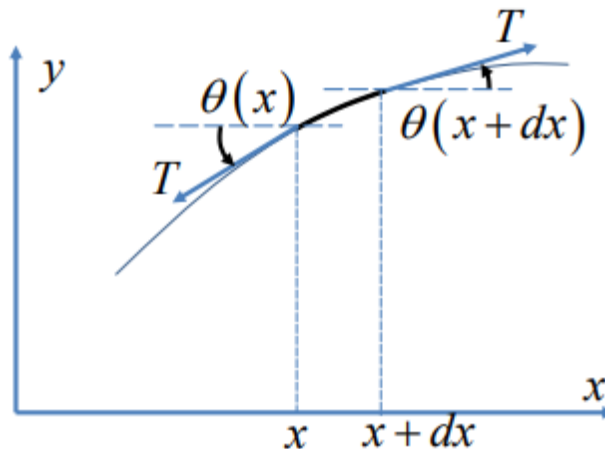
Αντικείμενο αυτής της ενότητας είναι θα η παραγωγή της κυματικής εξίσωσης για μονοδιάστατο συνεχές ελαστικό μέσο. Ένα τέτοιο μέσο θα μπορούσε να είναι μία ιδανική χορδή αμελητέας διατομής σε σχέση με το μήκος της, η οποία διαθέτει ομοιογενή γραμμική πυκνότητα μάζας, $\rho \equiv \left(\frac{dm}{dx}\right) = \text{σταθ.}$, και η οποία, όταν δεν εντείνεται με μία εξωτερική τάση, μπορεί να πάρει οποιοδήποτε σχήμα (δηλαδή, δεν διαθέτει εσωτερική τάση).

Εντείνουμε αυτή τη χορδή με ίσες και αντίθετες τάσεις T και στα δύο άκρα της, οπότε αποκτά ευθύγραμμο σχήμα, και ορίζουμε ως άξονα- x τον άξονα κατά τον οποίο εκτείνεται η χορδή. Ενώ η χορδή βρίσκεται υπό τάση, προκαλούμε, τη χρονική στιγμή $t = 0$, μία αρχική διαταραχή της χορδής, κατά τον άξονα- y ($y \perp x$). Η διαταραχή αυτή μπορεί να είναι είτε μία στιγμιαία παραμόρφωση της μορφής $y = \varphi(x)$ είτε μία στιγμιαία κατανομή ταχυτήτων στη χορδή της μορφής $\dot{y} = \psi(x)$, είτε και συνδυασμός των δύο.

Με την επιβολή αυτής της αρχικής διαταραχής, όλα τα σημεία της χορδής ξεκινούν να κινούνται. Για χρονική στιγμή $t > 0$ όλα τα σημεία- x της χορδής κινούνται έτσι ώστε η απομάκρυνση από την κατάσταση ισορροπίας, καθώς και τα παράγωγα μεγέθη, δηλαδή η ταχύτητα και η επιτάχυνση τους, να είναι συνάρτηση της θέσης τους κατά μήκος της χορδής και του χρόνου. Έτσι έχουμε $y=y(x,t)$, όπου τα x,t ορίζονται ως οι ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματός μας.

Αναζητούμε λοιπόν μία διαφορική εξίσωση, η οποία θα διέπει την κίνηση της χορδής έπειτα από την αρχική διέγερση και η λύση της οποίας θα ταυτίζεται με την $y=y(x,t)$. Αυτό θα επιτευχθεί με τη εφαρμογή του 2^{ου} Νόμου του Νεύτωνα για ένα απειροστό (διαφορικό) τμήμα της χορδής. Συγκεκριμένα εξετάζουμε ένα κομμάτι χορδής μεταξύ δύο σημείων με συντεταγμένες x και $x+dx$, το οποίο έχει μάζα $dm=\rho \cdot dx$.

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην ανάλυση κάνουμε την παραδοχή των μικρών γωνιών. Θεωρούμε δηλαδή ότι η διαταραχή της χορδής είναι επαρκώς μικρή, έτσι ώστε η γωνία που σχηματίζει οποιοδήποτε διαφορικό τμήμα της χορδής με τον άξονα- x να είναι αρκετά μικρή. Βάσει αυτής της παραδοχής ισχύει με πολύ καλή προσέγγιση πως $\theta(x, t) = \sin(\theta(x, t)) = \tan(\theta(x, t)) = \frac{dy}{dx}$



Εικόνα 2: Το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής

Σύμφωνα με τον Νεύτωνα λοιπόν **η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σ' ένα σώμα, ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος**. Εδώ η συνισταμένη δύναμη που επιταχύνει το διαφορικό τμήμα της χορδής, είναι η διαφορά των προβολών στον κατακόρυφο άξονα y των τάσεων στα άκρα του εξεταζόμενου σώματος. Η διαφορά αυτή οφείλεται στη μεταβαλλόμενη κατά μήκος καμπυλότητα της χορδής λόγω της μεταβολής της γωνίας θ . Έτσι, για την περίπτωση μας όπου έχουμε σταθερή μάζα και αντικαθιστώντας τις κατάλληλες τιμές, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \sum F_y &= \frac{d}{dt}(mv_y) \Leftrightarrow \\ T \cdot \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] &= (\rho \cdot dx) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Leftrightarrow \\ \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Η εξίσωση (2.1) είναι μία γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και περιγράφει την κίνηση της χορδής. Θετόντας ως $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ μπορούμε να την τροποποιήσουμε και να τη γράψουμε και με τη μορφή

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

όπου το μέγεθος $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ εκφράζει τη ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Τελικά, έχουμε το εξής πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y_{tt} - c^2 y_{xx} = 0 & \text{για } x, t \in \mathbb{R} \\ y(x, 0) = \phi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ y_t(x, 0) = \psi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.3)$$

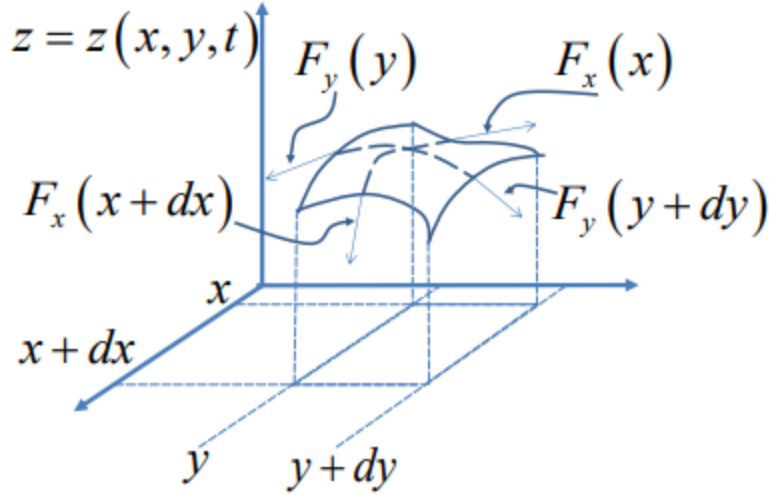
Στο πρόβλημα αυτό πρώτος έδωσε τη γενική λύση ο Γάλλος μαθηματικός και φυσικός Ζαν λε Ρον Ντ'Αλαμπέρ το 1746 καταλήγοντας στον **τύπο του Ντ'Αλαμπέρ**

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - ct) + \phi(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds \quad (2.4)$$

2.2 ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΤΙΣ 2 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Έστω μία μεμβράνη αμελητέου πάχους και διαστάσεων $L_x \times L_y$, η οποία εκτείνεται στο επίπεδο xy . Η μεμβράνη αυτή εντείνεται στα άκρα της με μια δύναμη ανά μονάδα μήκους $T_1 = \frac{F_1}{L_x}$, κάθετα στον άξονα x και με μια δύναμη ανά μονάδα μήκους $T_2 = \frac{F_2}{L_y}$, κάθετα στον άξονα y . Επίσης διαθέτει ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\rho \equiv \frac{dm}{dxdy} = \sigma \alpha \theta$.

Τη χρονική στιγμή $t=0$ διαταράσσουμε τη μεμβράνη κατά τον άξονα z ($z \perp xy$), οπότε η μετατόπισή της είναι συνάρτηση $z=z(x,y,t)$. Όπως στη μία διάσταση, έτσι και στις δύο διαστάσεις η αρχική διαταραχή μπορεί να είναι μια επιβαλλόμενη μετατόπιση, μια επιβαλλόμενη ταχύτητα ή συνδυασμός των δύο.



Εικόνα 3: Διάδοση κύματος σε επιφανειακή μεμβράνη

Θα εκφράσουμε πάλι τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για ένα απειροστό τμήμα της μεμβράνης το οποίο βρίσκεται μεταξύ των συντεταγμένων $x, x+dx$ κατά τον x άξονα και $y, y+dy$ κατά τον y άξονα, το οποίο έχει μάζα $dm = \rho \cdot dx \cdot dy$. Με αντικατάσταση λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \sum F_z &= \frac{d}{dt}(mv_z) \Leftrightarrow \\ T_1 \cdot dx \cdot \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y+dy} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_y \right] + T_2 \cdot dy \cdot \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_x \right] &= (\rho \cdot dx \cdot dy) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \Leftrightarrow \\ T_1 dx \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy + T_2 dy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx &= (\rho \cdot dx \cdot dy) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \Leftrightarrow \\ T_1 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + T_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Στην περίπτωση που οι δυνάμεις ανά μονάδα μήκους, που τείνουν τη μεμβράνη, είναι ίδιες και για τις δύο διευθύνσεις $\frac{F_1}{L_x} = \frac{F_2}{L_y} = T$, τότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$T \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

ή

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (2.6)$$

Η παραπάνω σχέση είναι η εξίσωση κύματος για ομοιογενές και ισότροπο υλικό 2 διαστάσεων, από την οποία φαίνεται ότι η ταχύτητα κύματος είναι $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, όπου T είναι η δύναμη ανά μονάδα μήκους και ρ είναι η επιφανειακή πυκνότητα μάζας

2.3 ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΤΙΣ 3 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Στις προηγούμενες υποενότητες είδαμε τις εξισώσεις κύματος σε 1 και 2 διαστάσεις

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2}$$

και

$$\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

αντίστοιχα, όπου οι συναρτήσεις $\eta_1 = y(x, t)$ και $\eta_2 = z(x, y, t)$, ήταν η εγκάρσια απομάκρυνση (από την κατάσταση ισορροπίας) κάθετα στη χορδή ή στην μεμβράνη, αντίστοιχα, οπότε αναφερόμαστε σε **εγκάρσια κύματα**. Στην περίπτωση όμως της ταλάντωσης σε μία χαλύβδινη ράβδο, η οποία διεγείρεται παράλληλα στον άξονά της, ή των ηχητικών κυμάτων σε στήλη αέρα, η συνάρτηση η ήταν η διαμήκης απομάκρυνση (από την κατάσταση ισορροπίας) παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Όταν μεταβούμε σε ένα ελαστικό μέσο το οποίο εκτείνεται στις 3 διαστάσεις, τότε το μέγεθος το οποίο κυμαίνεται ως συνάρτηση της θέσης, $\vec{r} = (x, y, z)$ και του χρόνου, t , θα δούμε ότι μπορεί να είναι είτε ένα βαθμωτό μέγεθος, είτε ένα διανυσματικό μέγεθος, (σε πιο σύνθετες περιπτώσεις μπορεί να είναι και ένα τανυστικό μέγεθος). Ως παραδείγματα, θα μπορούσαν να αναφερθούν, π.χ., κατά την διάδοση ηχητικών κυμάτων στον αέρα, η μεταβολή της πίεσης του αέρα $p = p(x, y, z, t)$, ή η προσανατολισμένη ταχύτητα, $\vec{u}_p = \vec{u}_p(x, y, z, t)$ των μορίων του αέρα, η οποία προκαλείται από την προηγούμενη μεταβολή της πίεσης λόγω του ήχου και προκύπτει από τη συνολική ταχύτητα $\vec{u}_{tot} = \vec{u}_{tot}(x, y, z, t)$ των μορίων του αέρα όταν αφαιρεθεί η θερμική συνιστώσα που οφείλεται στην πεπερασμένη θερμοκρασία και πίεση των μορίων του αέρα $\vec{u}_p(\vec{r}, t) = \vec{u}_{tot}(\vec{r}, t) - \vec{u}_{therm}(\vec{r}, t)$.

Ανεξάρτητα από το αν αναφερόμαστε στην διακύμανση βαθμωτού ή διανυσματικού μεγέθους, η μετάβαση από τη 1 διάσταση, στις 2 διαστάσεις, προμηνύει ότι η περαιτέρω μετάβαση στις 3-διαστάσεις θα οδηγήσει σε μια κυματική εξίσωση της μορφής

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

ή

$$\nabla^2 \eta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

όπου η συνάρτηση $\eta = \eta(\vec{r}, t)$ μπορεί να είναι είτε μία βαθμωτή συνάρτηση είτε συνιστώσα μίας διανυσματικής συνάρτησης, από την ανάλυση σε συνιστώσες της διανυσματικής έκφρασης

$$\nabla^2 \vec{\eta} \equiv \hat{x} \nabla^2 \eta_x + \hat{y} \nabla^2 \eta_y + \hat{z} \nabla^2 \eta_z = \hat{x} \frac{\partial^2 \eta_x}{\partial t^2} + \hat{y} \frac{\partial^2 \eta_y}{\partial t^2} + \hat{z} \frac{\partial^2 \eta_z}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ

Όπως είδαμε στα προηγούμενα, η ελαστική εξίσωση διάδοσης κύματος είναι μια μερική διαφορική εξίσωση, ασχέτως αν βρισκόμαστε στη μία, στις δύο ή στις τρεις διαστάσεις. Το ερώτημα που εγείρεται τώρα είναι, πως μπορούμε να την λύσουμε αριθμητικά, έτσι ώστε να εκμεταλλευτούμε την υπολογιστική ισχύ ενός Η/Υ;

Η μέθοδος των φασματικών πεπερασμένων στοιχείων (SFEM) είναι μια μορφή αριθμητικής επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων. Αποτελεί στην ουσία μια ειδική υποκατηγορία της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, η οποία βασίζεται σε παρεμβολή Lagrange ή Chebyshev υψηλής τάξης (Zienkiewicz & Taylor, 2005), αλλά με μη ισαπέχουσα κομβική κατανομή. Αρχικά η προσέγγιση της λύσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης γινόταν με σειρές Fourier ημιτονοειδούς τύπου. Όμως, για να μπορούν να συνυπολογιστούν αποτελεσματικά οι γενικές συνοριακές συνθήκες, οι σειρές Fourier αντικαταστάθηκαν με πολυώνυμα Chebyshev ή Legendre. Η παραπάνω διαφορά στη χωρική δειγματοληψία, σε σχέση με την κλασική FEM, επιδιώκει να ελαχιστοποιήσει **το φαινόμενο Runge** (Pozrikidis, 2005). Η SFEM εμφανίστηκε πρώτη φορά από τον A.T. Patera για την επίλυση προβλημάτων ροής ρευστών και είναι μέχρι τώρα η καλύτερη διαθέσιμη μέθοδος για την επίλυση των προβλημάτων διάδοσης κυμάτων.

Η μέθοδος έχει δείξει σε ποικίλα παραδείγματα ότι συνδυάζει την γεωμετρική ευελιξία μιας χαμηλής τάξεως μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων, με την ταχύτερη σύγκλιση, η οποία χαρακτηρίζει τις φασματικές μεθόδους, ακόμη κι όταν πρέπει να αντιμετωπιστούν παραμορφωμένες γεωμετρίες ή ετερογενείς ελαστικές ιδιότητες (π.χ. διαφορετικές στρώσεις εδάφους).

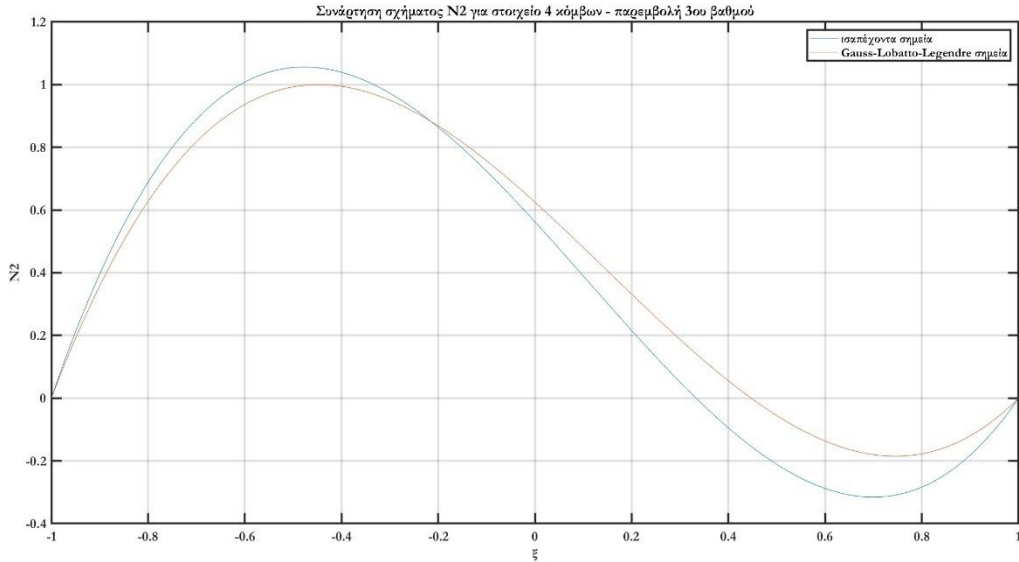
Ο όρος «φασματική» αναφέρεται στο ρυθμό σύγκλισης, αφού η μέθοδος συγκλίνει ταχύτερα από οποιαδήποτε δύναμη $1/p$, όπου p είναι η τάξη της πολωνυμικής παρεμβολής (Pozrikidis, 2005). Για απείρως παραγωγίσιμες συναρτήσεις, η σύγκλιση είναι εκθετική.

Το φαινόμενο Runge

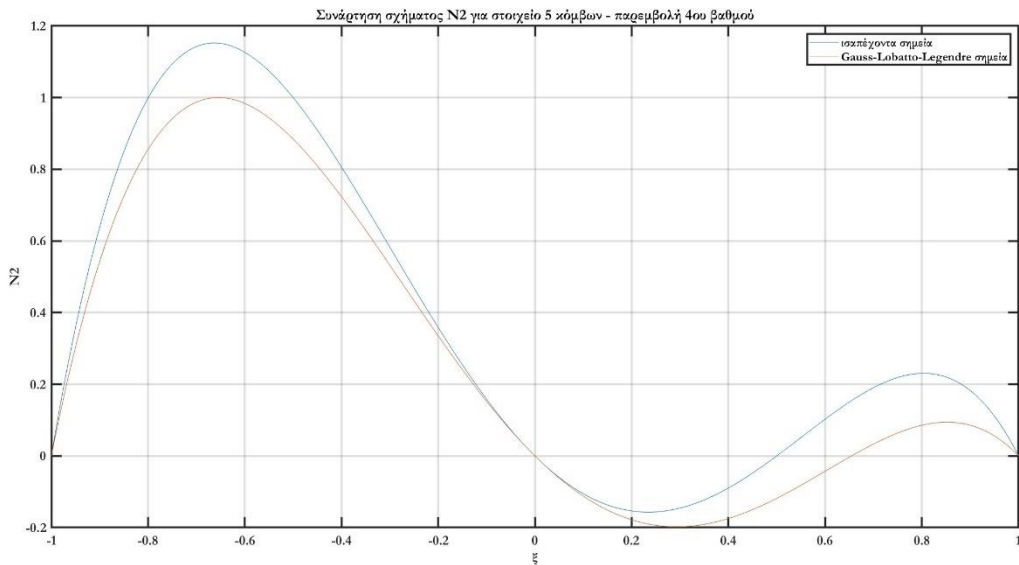
Στο μαθηματικό πεδίο της αριθμητικής ανάλυσης, το φαινόμενο του Runge είναι ένα πρόβλημα ταλάντωσης στα άκρα ενός διαστήματος που εμφανίζεται όταν χρησιμοποιείται πολωνυμική παρεμβολή με πολυώνυμα υψηλού βαθμού σε ένα σύνολο σημείων παρεμβολής που βρίσκονται σε ισαπέχουσα απόσταση. Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, αυτό το πρόβλημα έρχεται στην επιφάνεια όταν επιχειρούμε να κάνουμε **προσαρμογή τύπου p** (p refinement), δηλαδή διατηρώντας το αρχικό δίκτυο και αυξάνοντας τον βαθμό της πολωνυμικής συνάρτησης του πεδίου των μετατοπίσεων των στοιχείων. Ανακαλύφθηκε από τον Carl David Tolmé Runge (1901) όταν διερεύνησε τη συμπεριφορά των σφαλμάτων κατά τη χρήση πολωνυμικής παρεμβολής για την προσέγγιση ορισμένων συναρτήσεων. Η ανακάλυψη ήταν σημαντική γιατί δείχνει ότι η **μετάβαση σε υψηλότερους βαθμούς δεν βελτιώνει πάντα την ακρίβεια**. Το φαινόμενο είναι παρόμοιο με το φαινόμενο Gibbs στις προσεγγίσεις της σειράς Fourier. Η SFEM αντιμετωπίζει το θέμα αυτό, κάνοντας χρήση των σημείων Gauss Lobatto Legendre, τα οποία είναι μη ισαπέχοντα

Στα παρακάτω διαγράμματα συγκρίνονται οι συναρτήσεις σχήματος του $1^{ου}$ ενδιάμεσου αριστερού κόμβου ενός στοιχείου που εκτείνεται στη μία διάσταση, από $\xi=-1$ μέχρι $\xi=1$, που προέρχονται από παρεμβολή σε ισαπέχοντα σημεία και από παρεμβολή στα σημεία Gauss Lobatto Legendre. Παρατηρούμε ότι όσο

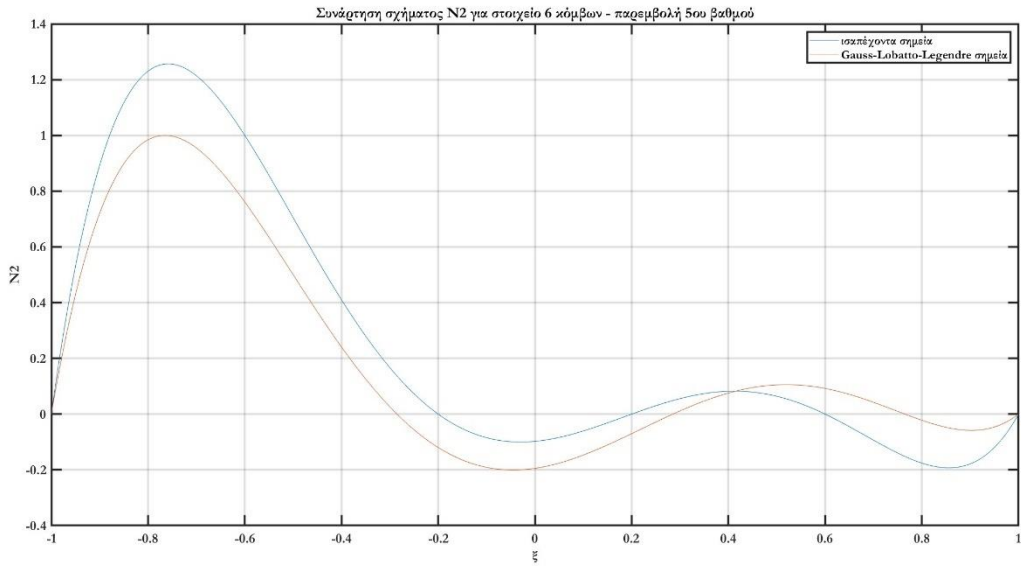
αυξάνεται τον βαθμό του πολυωνύμου παρεμβολής, τόσο αυξάνεται και η τιμή του στα άκρα, για την παρεμβολή σε ισαπέχοντα σημεία. Αυτή είναι μια πολύ ενδιαφέρουσα και κρίσιμη παρατήρηση, καθώς η SFEM στηρίζεται σε πολυώνυμα υψηλού βαθμού από την φύση της. Παρουσιάζονται οι περιπτώσεις για βαθμό πολυωνύμου από 3 μέχρι 10 (για βαθμούς 1,2 και τα αποτελέσματα είναι τα ίδια).



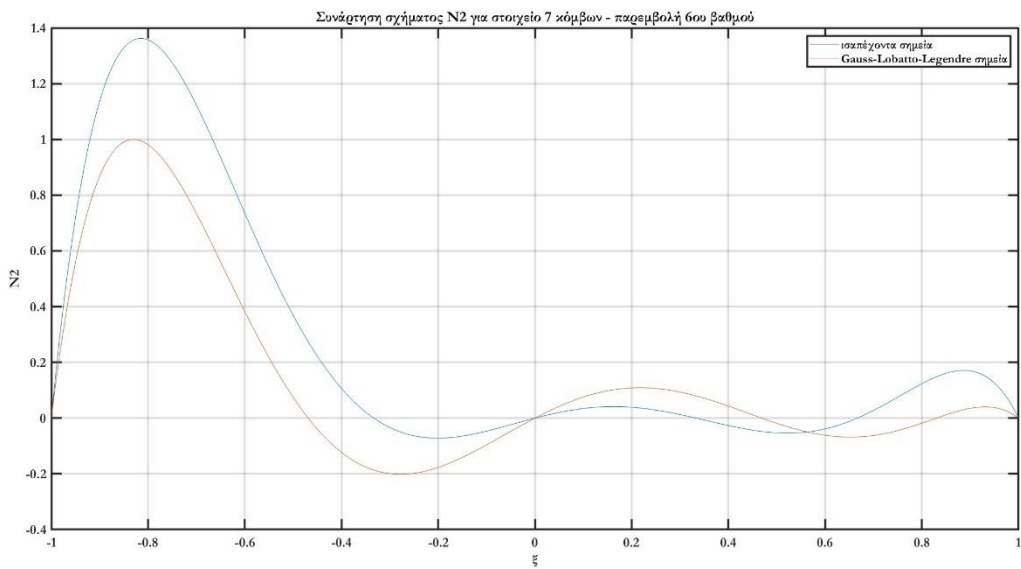
Εικόνα 4: Συνάρτηση σχήματος N_2 για στοιχείο 4 κόμβων - παρεμβολή 3ου βαθμού



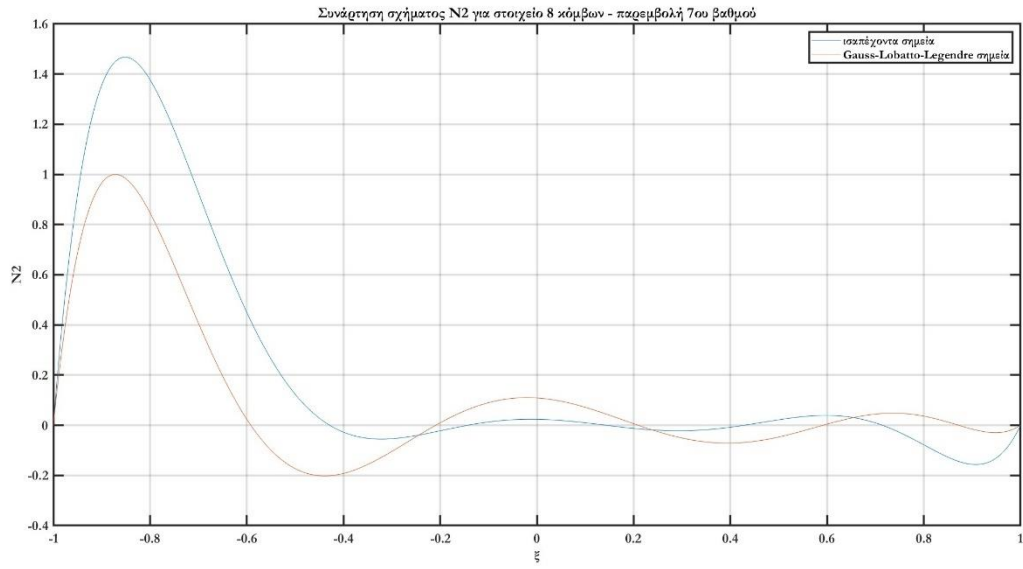
Εικόνα 5: Συνάρτηση σχήματος N_2 για στοιχείο 5 κόμβων - παρεμβολή 4ου βαθμού



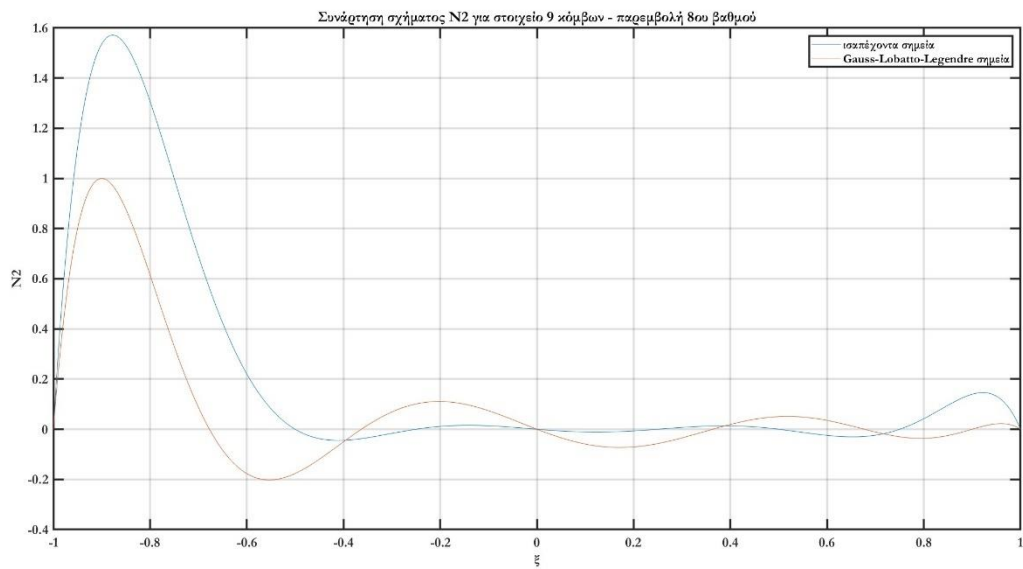
Εικόνα 6: Συνάρτηση σχήματος N_2 για στοιχείο 6 κόμβων - παρεμβολή 5ου βαθμού



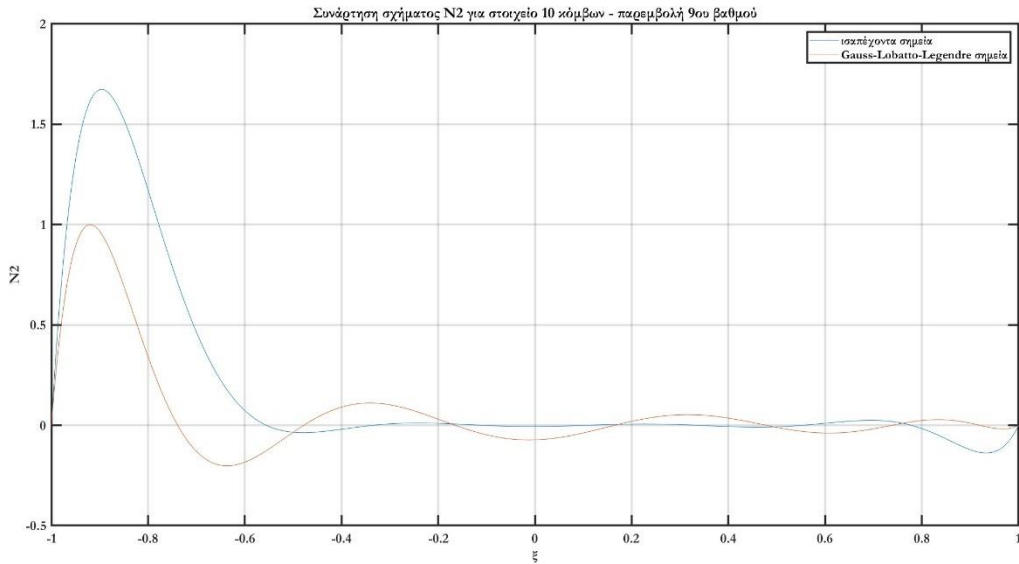
Εικόνα 7: Συνάρτηση σχήματος N_2 για στοιχείο 7 κόμβων - παρεμβολή 6ου βαθμού



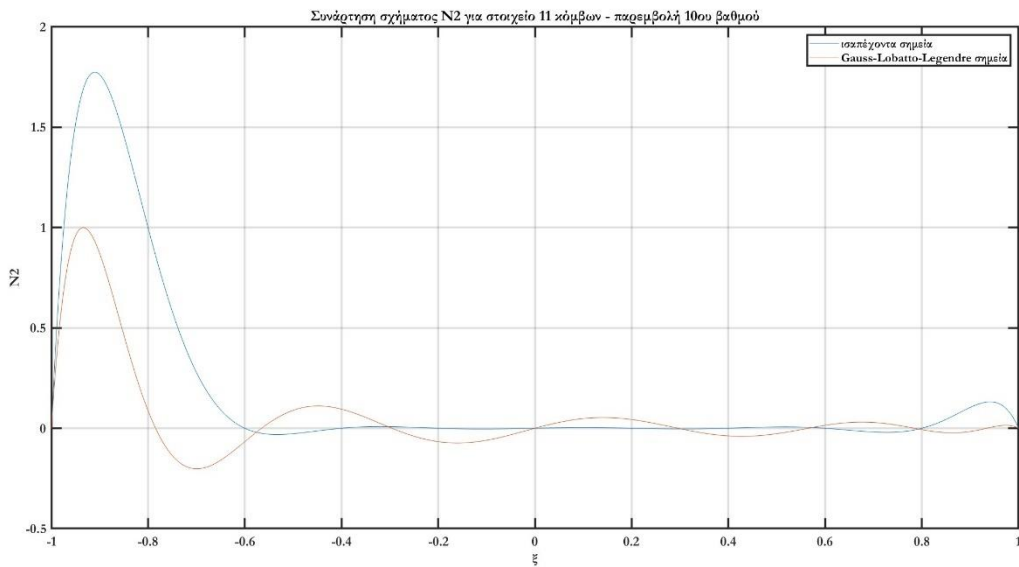
Εικόνα 8: Συνάρτηση σχήματος N_2 για στοιχείο 8 κόμβων - παρεμβολή 7ου βαθμού



Εικόνα 9: Συνάρτηση σχήματος N_2 για στοιχείο 9 κόμβων - παρεμβολή 8ου βαθμού



Εικόνα 10: Συνάρτηση σχήματος N_2 για στοιχείο 10 κόμβων - παρεμβολή 9ου βαθμού



Εικόνα 11: Συνάρτηση σχήματος N_2 για στοιχείο 11 κόμβων - παρεμβολή 10ου βαθμού

Κατανομή κόμβων

Για πολλές πρακτικές ανάγκες είναι βολικό να συμπεριληφθούν τα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης μεταξύ των δειγματοληπτικών σημείων ολοκλήρωσης. Η μέθοδος ολοκλήρωσης Gauss συμπεριλαμβάνει σημεία στο εσωτερικό του χωρίου ολοκλήρωσης, όμως υπάρχουν δύο ειδών κατανομές κόμβων που χρησιμοποιούνται συνήθως σε μεθόδους φασματικών πεπερασμένων στοιχείων και ικανοποιούν την πιο πάνω απαίτηση: η κατανομή κόμβων Chebyshev και η κατανομή κόμβων Lobatto.

Οι κόμβοι Chebyshev είναι οι ρίζες των πολυωνύμων Chebyshev του πρώτου είδους. Το προκύπτον πολυώνυμο παρεμβολής όχι μόνο ελαχιστοποιεί το φαινόμενο Runge αλλά παρέχει επίσης την καλύτερη προσέγγιση πολυώνυμο κάτω από τη μέγιστη νόρμα (Burden & Faires, 2011; Kreyszig, 1989). Τα πολυώνυμα Chebyshev του πρώτου είδους $T_n(x)$ ορίζονται ως το μοναδικό πολυώνυμο που ικανοποιεί την εξίσωση

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x)) \text{ για κάθε } n \geq 0 \text{ και } x \in [-1,1] \quad (3.1)$$

και με ρίζες

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad (3.2)$$

Ομοίως, οι κόμβοι Lobatto είναι οι ρίζες των πολυωνύμων Lobatto, που είναι η πρώτη παράγωγος των πολυωνύμων Legendre

$$L_{O_{i-1}}(x) = P'_i(x), x \in [-1,1] \quad (3.3)$$

όπου το

$$P_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^{(i)}(t^2 - 1)^i}{dt^{(i)}} \quad (3.4)$$

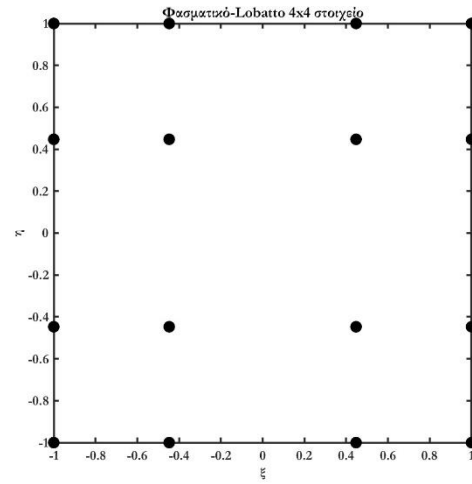
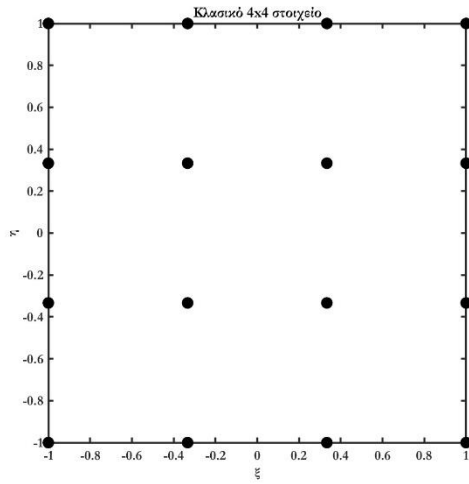
είναι το i -οστό πολυώνυμο Legendre. Οι κόμβοι Lobatto είναι επίσης τα σημεία **Fekete** για τη γραμμή, το τετράγωνο και τον κύβο. Τα σημεία Fekete σε ένα πεδίο παρεμβολής αντιστοιχούν στην κομβική κατανομή που μεγιστοποιεί την ορίζουσα του πίνακα Vandermonde (Bos et al., 2001, Pozrikidis, 2005), όπου ο πίνακας Vandermonde δίνεται από τη σχέση

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{n-1} \end{bmatrix} \text{ ή } V_{i,j} = x_i^{j-1} \quad (3.5)$$

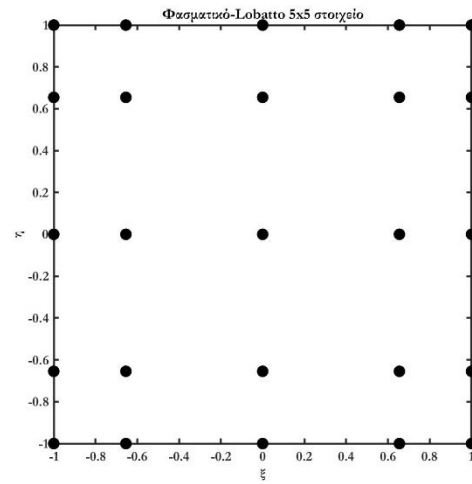
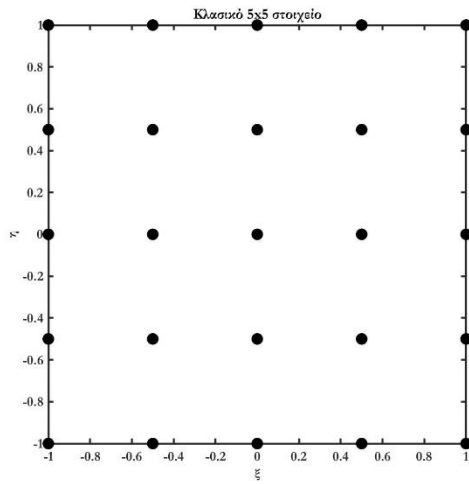
και η ορίζουσα του στην περίπτωση που είναι ορθογωνικός, δηλαδή $n=m$, καλείται και πολυώνυμο Vandermonde και δίνεται από τον τύπο

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \quad (3.6)$$

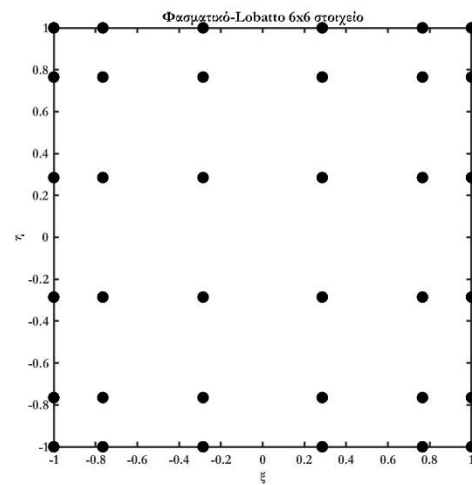
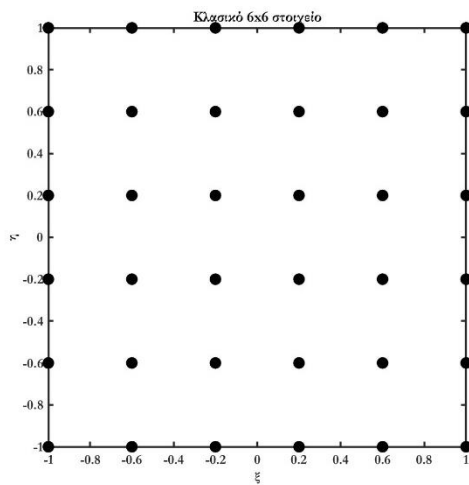
Εάν οι κόμβοι (που αντιστοιχούν στα σημεία δειγματοληψίας στο πεδίο παρεμβολής) χρησιμοποιηθούν επίσης ως σημεία για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων όγκου και επιφάνειας που προκύπτουν στην FEM, λαμβάνονται **διαγώνια μητρώα μάζας**, λόγω της συνθήκης διακριτής ορθογωνικότητας (Pozrikidis, 2005). Αυτό το τελευταίο χαρακτηριστικό της SFEM την καθιστά πολύ ελκυστική σε προβλήματα χρονικού πεδίου, καθώς αυτή η συνθήκη αποσυνδέει τις εξισώσεις ισορροπίας (**αποσύζευξη εξισώσεων ισορροπίας**). Στην κλασική FEM αυτή η διαδικασία επιβάλλεται τεχνητά, ενώ στην SFEM είναι φυσικό αποτέλεσμα. Στις επόμενες εικόνες βλέπουμε την κατανομή των κόμβων σύμφωνα με την συμβατική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (ισαπέχοντα σημεία) και με τη μέθοδο των φασματικών πεπερασμένων στοιχείων (σημεία Gauss Lobatto Legendre).



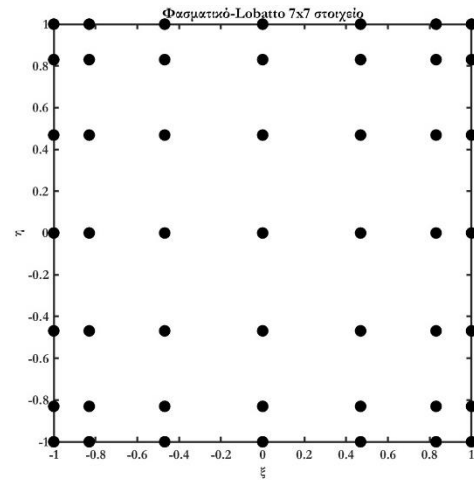
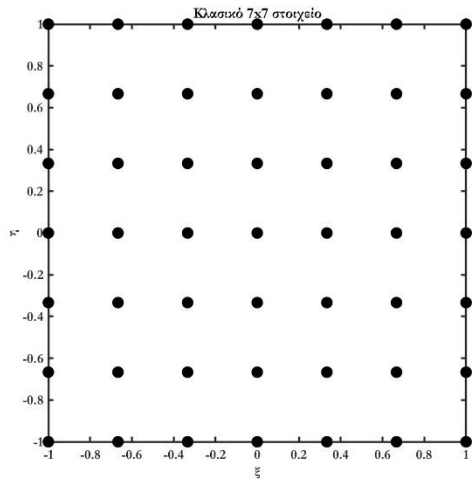
Εικόνα 12: Σύγκριση 4x4 κλασικού και φασματικού - Lobatto στοιχείου.



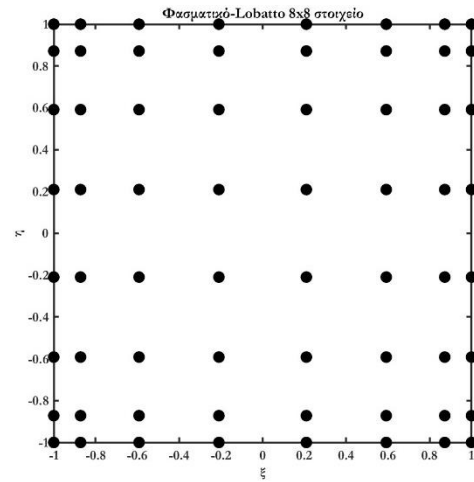
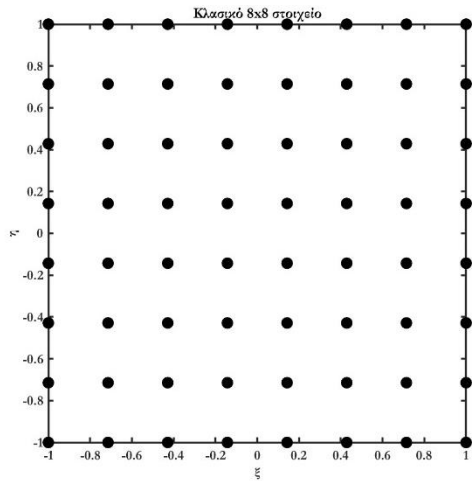
Εικόνα 13: Σύγκριση 5x5 κλασικού και φασματικού - Lobatto στοιχείου.



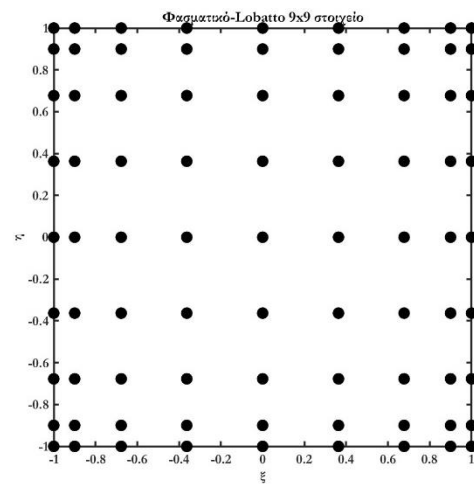
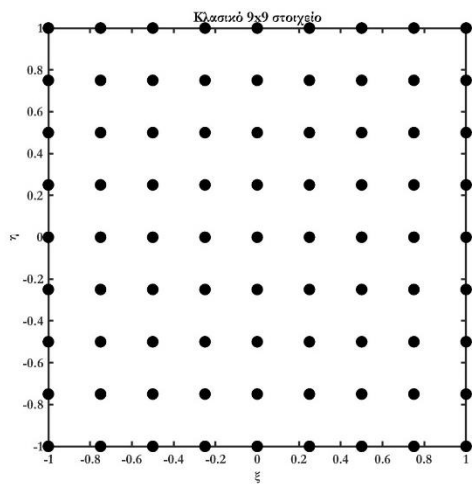
Εικόνα 14: Σύγκριση 6x6 κλασικού και φασματικού - Lobatto στοιχείου.



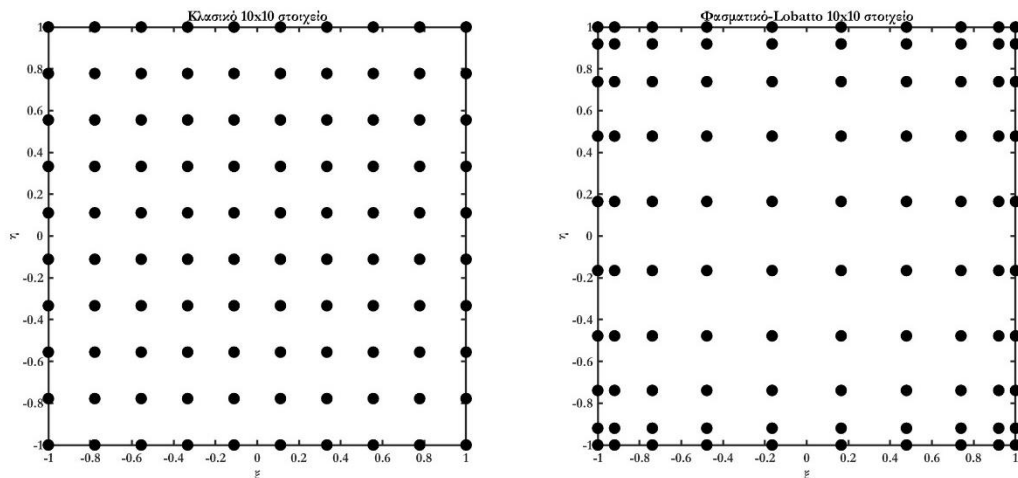
Εικόνα 15: Σύγκριση 7x7 κλασικού και φασματικού - Lobatto στοιχείου.



Εικόνα 16: Σύγκριση 8x8 κλασικού και φασματικού - Lobatto στοιχείου.



Εικόνα 17: Σύγκριση 9x9 κλασικού και φασματικού - Lobatto στοιχείου.



Εικόνα 18: Σύγκριση 10x10 κλασικού και φασματικού - Lobatto στοιχείου.

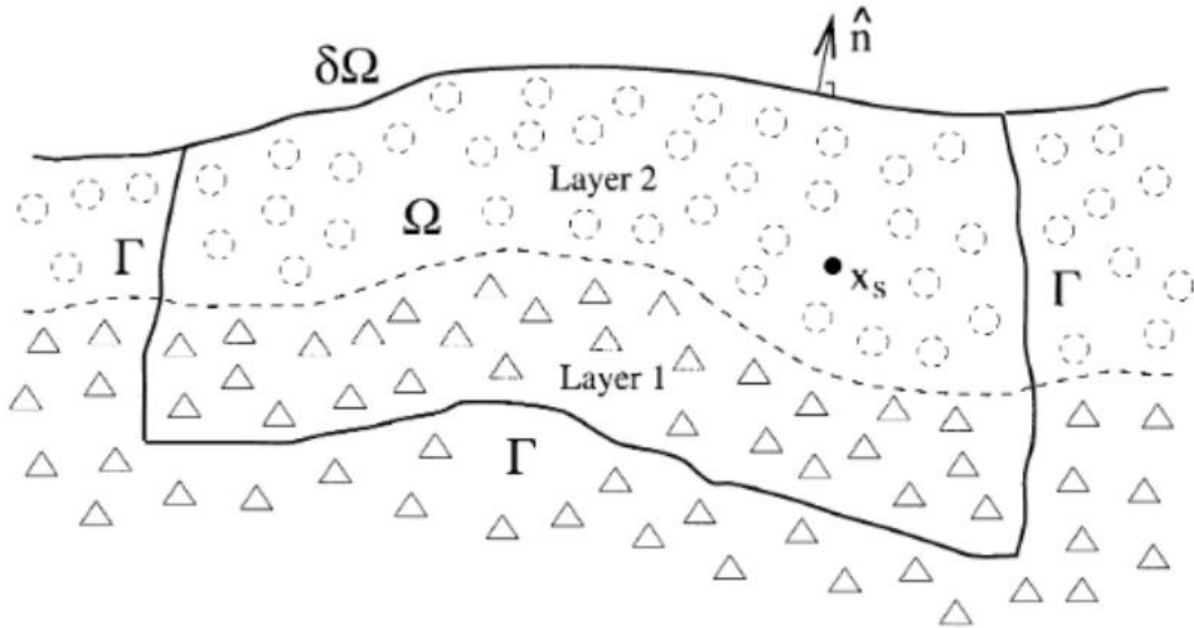
Στον πίνακα οι θέσεις ξ_i και οι αντίστοιχοι συντελεστές βάρους w_i για $n=1\div 10$ σημεία Lobatto

Πλήθος κόμβων n	Θέση ξ_i	Βάρος w_i
1	0	2
2	± 1	1
3	± 1 0	0.33333333333333333333 1.33333333333333333333
4	± 1 $\pm 0.447213595499957939282$	0.16666666666666666667 0.83333333333333333333
5	± 1 $\pm 0.654653670707977143798$ 0	0.1 0.54444444444444444444 0.71111111111111111111
6	± 1 $\pm 0.765055323929464692851$ $\pm 0.2852315164806450963142$	0.06666666666666666667 0.3784749562978469803166 0.5548583770354863530167
7	± 1 $\pm 0.830223896278566929872$ $\pm 0.468848793470714213804$ 0	0.04761904761904761904762 0.2768260473615659480107 0.431745381209862623418 0.487619047619047619048
8	± 1 $\pm 0.8717401485096066153375$ $\pm 0.5917001814331423021445$ $\pm 0.2092992179024788687687$	0.03571428571428571428571 0.210704227143506039383 0.341122692483504364764 0.412458794658703881567
9	± 1 $\pm 0.8997579954114601573124$ $\pm 0.6771862795107377534459$ $\pm 0.3631174638261781587108$ 0	0.02777777777777777777778 0.165495361560805525046 0.2745387125001617352807 0.3464285109730463451151 0.3715192743764172335601
10	± 1 $\pm 0.9195339081664588138289$ $\pm 0.7387738651055050750031$ $\pm 0.4779249498104444956612$ $\pm 0.1652789576663870246262$	0.02222222222222222222222 0.133305990851070111126 0.224889342063126452119 0.292042683679683757876 0.3275397611838974566565

Πίνακας 1: Συντεταγμένες σημείων και συντελεστές βάρους αριθμητικής ολοκλήρωσης Lobatto στο διάστημα [-1,1]

3.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Επιδιώκουμε να προσδιορίσουμε το πεδίο μετατόπισης που παράγεται από έναν σεισμό σε ένα πεπερασμένο κομμάτι γης με όγκο Ω , όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα σύνορα αυτού του όγκου περιλαμβάνουν την ελεύθερη επιφάνεια (stress free surface) $\delta\Omega$ και ένα απορροφητικό σύνορο Γ . Τα σεισμικά κύματα αντανακλώνται από την ελεύθερη επιφάνεια $\delta\Omega$ και ιδανικά απορροφώνται πλήρως από το σύνορο Γ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζει τις επιφάνειες συμβολίζεται με \hat{n} . Το προσομοίωμα μπορεί να έχει οποιοδήποτε πλήθος εσωτερικών ασυνεχειών, όπου και πάλι το μοναδιαίο διάνυσμα είναι το \hat{n} . Οι θέσεις των στοιχείων στο προσομοίωμα συμβολίζονται με το διάνυσμα θέσης $\mathbf{x}=(x,y,z)$.



Εικόνα 19: Προσομοίωμα ενός πεπερασμένου τμήματος εδάφους

Οι εξισώσεις κίνησης που διέπουν τη διάδοση των σεισμικών κυμάτων σε ένα ελαστικό ή ανελαστικό στερεό μπορούν να λυθούν με βάση είτε την ισχυρή είτε την ασθενή διατύπωση του προβλήματος. Στην ισχυρή διατύπωση, δουλεύει κανείς απευθείας με τις εξισώσεις κίνησης και τις σχετικές οριακές συνθήκες γραμμένες σε διαφορική μορφή. Αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιείται, για παράδειγμα, σε τεχνικές πεπερασμένων διαφορών ή σε καθολικές ψευδο-φασματικές τεχνικές προσομοίωσης. Στην ασθενή διατύπωση, χρησιμοποιεί κανείς μια ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων της κίνησης, όπως στις μεθόδους των πεπερασμένων στοιχείων και στις μεθόδους άμεσης ολοκλήρωσης. Η μέθοδος φασματικών στοιχείων (SEM) που μας ενδιαφέρει, βασίζεται σε μια ασθενή διατύπωση των εξισώσεων της κίνησης.

Ισχυρή και ασθενής διατύπωση του προβλήματος

Το πεδίο μετατόπισης \mathbf{s} που παράγεται από έναν σεισμό διέπεται από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{s} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} \quad (3.7)$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται και ισχυρή διατύπωση της εξίσωσης κίνησης. Η κατανομή της πυκνότητας συμβολίζεται με ρ . Ο τανυστής των τάσεων \mathbf{T} σχετίζεται γραμμικά με τη 1^η παράγωγο της μετατόπισης $\nabla \mathbf{s}$ σύμφωνα με το νόμο του Hooke, ο οποίος για ελαστικό ανισότροπο υλικό μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} : \nabla \mathbf{s} \quad (3.8)$$

Οι ελαστικές ιδιότητες του προσομοιώματος της γης καθορίζονται από τον ελαστικό τανυστή τέταρτης τάξης \mathbf{c} , ο οποίος έχει 21 ανεξάρτητα στοιχεία στην περίπτωση της γενικής ανισοτροπίας.

Στην ελεύθερη επιφάνεια $\delta\Omega$, οι τάσεις είναι μηδενικές και επομένως γράφουμε

$$\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Η κατά προσέγγιση απορροφητική οριακή συνθήκη που θα χρησιμοποιήσουμε συνδέει τις δυνάμεις έλξης με την ταχύτητα,

$$\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho[v_n(\hat{\mathbf{n}}\partial_t\mathbf{s})\hat{\mathbf{n}} + v_1(\hat{\mathbf{t}}_1\partial_t\mathbf{s})\hat{\mathbf{t}}_1 + v_2(\hat{\mathbf{t}}_2\partial_t\mathbf{s})\hat{\mathbf{t}}_2] \quad (3.10)$$

όπου τα διανύσματα $\hat{\mathbf{t}}_1$ και $\hat{\mathbf{t}}_2$ είναι ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα που εφάπτονται στο σύνορο Γ , ενώ το $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα, v_n είναι η οιονεί ταχύτητα διάδοσης των P-κυμάτων στην $\hat{\mathbf{n}}$ κατεύθυνση και v_1, v_2 είναι η οιονοί ταχύτητα διάδοσης των S-κυμάτων στις κατευθύνσεις $\hat{\mathbf{t}}_1$ και $\hat{\mathbf{t}}_2$ αντίστοιχα.

Η μοντελοποίηση της διάδοσης κυμάτων σε πλήρως ανισότροπα μέσα με κλασικές τεχνικές, όπως την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, είναι δύσκολη λόγω της χρήσης κλιμακωτών πλεγμάτων. Η SEM από την άλλη πλευρά, μπορεί να μοντελοποιήσει με ακρίβεια τα αποτελέσματα οποιασδήποτε ανισοτροπίας στα ελαστικά κύματα.

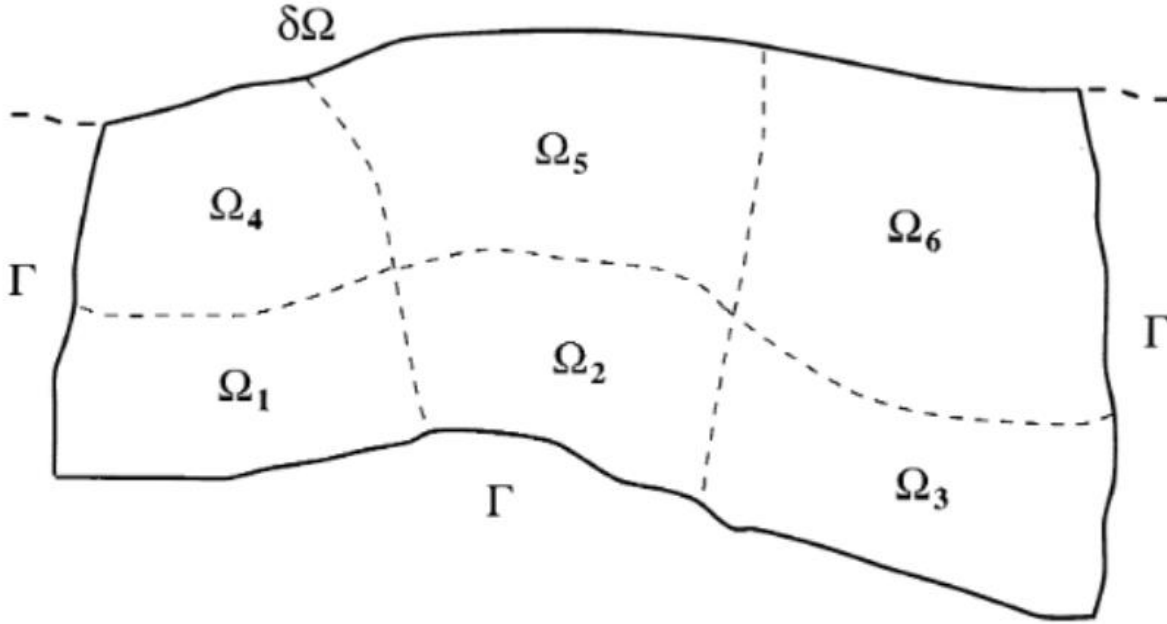
Αντί να χρησιμοποιούμε απευθείας τις εξισώσεις κίνησης και τις σχετικές οριακές συνθήκες όπως κάναμε παραπάνω, στην ισχυρή τους μορφή δηλαδή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια ολοκληρωτική έκφρασή τους. Έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \partial_t^2 \mathbf{s} d^3 \mathbf{x} = & - \int_{\Omega} \mathbf{\nabla w} : \mathbf{T} d^3 \mathbf{x} + \mathbf{M} : \mathbf{\nabla w}(\mathbf{x}_s) S(t) \\ & + \int_{\Gamma} \rho [v_n(\hat{\mathbf{n}}\partial_t\mathbf{s})\hat{\mathbf{n}} + v_1(\hat{\mathbf{t}}_1\partial_t\mathbf{s})\hat{\mathbf{t}}_1 + v_2(\hat{\mathbf{t}}_2\partial_t\mathbf{s})\hat{\mathbf{t}}_2] \cdot \mathbf{w} d^2 \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.11)$$

όπου το \mathbf{w} είναι ένα δοκιμαστικό διάνυσμα. Μαθηματικά, οι ισχυρές και οι ασθενείς διατυπώσεις είναι ισοδύναμες, επειδή η σχέση (3.11) ισχύει για οποιοδήποτε δοκιμαστικό διάνυσμα \mathbf{w} . Ωστόσο, ένα από τα καλά χαρακτηριστικά της ασθενούς διατύπωσης, είναι ότι η οριακή συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας (3.9) ικανοποιείται φυσικά, δηλαδή δεν χρειάζεται να επιβάλλεται ρητά. Η ενσωμάτωση της τοπογραφίας της ελεύθερης επιφάνειας είναι επομένως απλή και τα επιφανειακά κύματα προσομοιώνονται με μεγαλύτερη ακρίβεια από μεθόδους που βασίζονται στην ισχυρή διατύπωση του προβλήματος (Komatitsch & Vilotte 1998, Komatitsch et al. 1999c).

3.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ

Όπως και στην κλασική FEM, ο όγκος Ω υποδιαιρείται σε ένα πλήθος μη επικαλυπτόμενων στοιχείων Ω_e , $e=1,2,\dots,n_e$ έτσι ώστε $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σαν αποτέλεσμα αυτής της υποδιαίρεσης, το απορροφητικό σύνορο Γ ομοίως αναπαρίσταται ως ένα πλήθος μη επικαλυπτόμενων επιφανειακών στοιχείων Γ_b , $b=1,2,\dots,n_b$ έτσι ώστε $\Gamma = \bigcup_b \Gamma_b$.



Εικόνα 20: Διακριτοποίηση εδάφους

Στην FEM για προβλήματα στις 3 διαστάσεις, μια ποικιλία στοιχείων όπως τετράεδρα ή εξαεδρικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν, όμως στην SFEM χρησιμοποιούνται μόνο εξαεδρικά στοιχεία όγκου. Συνεπώς, το απορροφητικό όριο Γ υποδιαιρείται σε επιμέρους τετραπλευρικά επιφανειακά στοιχεία Γ_b .

3.4 ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Για να λυθεί η ασθενής μορφή των εξισώσεων κίνησης (3.10), τα ολοκληρώματα ως προς τον όγκο Ω και το απορροφητικό όριο Γ υποδιαιρούνται ως προς μικρότερα ολοκληρώματα στα στοιχεία όγκου και επιφάνειας Ω_e και Γ_b , αντίστοιχα. Αυτή η ενότητα ασχολείται με την αναπαράσταση συναρτήσεων στα στοιχεία, και με την ολοκλήρωση συναρτήσεων σε ένα στοιχείο.

Είδαμε προηγουμένως ότι το σχήμα των συνοριακών στοιχείων και των στοιχείων όγκου μπορεί να οριστεί με όρους πολωνύμων Lagrange χαμηλού βαθμού. Στη κλασική FEM, πολυώνυμα χαμηλού βαθμού χρησιμοποιούνται επίσης ως συναρτήσεις βάσης για την αναπαράσταση των πεδίων στα στοιχεία. Στη SEM, από την άλλη πλευρά, μια υψηλού βαθμού παρεμβολή Lagrange χρησιμοποιείται για να εκφράσει συναρτήσεις στα στοιχεία. Φυσικά, θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει την ίδια πολωνυμική αναπαράσταση υψηλού βαθμού για να ορίσει τη γεωμετρική χαρτογράφηση σε κάθε στοιχείο, αλλά στην πράξη τέτοια υψηλή ακρίβεια είναι περιττή, υπό την προϋπόθεση ότι οι διακυμάνσεις στη γεωμετρία των στοιχείων είναι αρκετά ομαλές.

Στα συνοριακά στοιχεία Γ_b , μια συνάρτηση f παρεμβάλλεται από διπλά γινόμενα πολωνύμων Lagrange βαθμού n_i , δηλαδή

$$f(x(\xi, \eta)) \approx \sum_{\alpha, \beta=0}^{n_i} f^{\alpha\beta} l_{\alpha}(\xi) l_{\beta}(\eta) \quad (3.11)$$

Στη SEM για προβλήματα διάδοσης κυμάτων συνήθως χρησιμοποιείται ένας πολωνυμικός βαθμός μεταξύ 5 και 10 για να αναπαραστήσει μια συνάρτηση στο στοιχείο. Ομοίως, σε κάθε στοιχείο όγκου Ω_e παρεμβάλλεται μια συνάρτηση f από τριπλά γινόμενα πολωνύμων Lagrange βαθμού n_i , δηλαδή

$$f(\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta)) \approx \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^{n_l} f^{\alpha\beta\gamma} l_\alpha(\xi) l_\beta(\eta) l_\gamma(\zeta) \quad (3.12)$$

όπου

$$f^{\alpha\beta\gamma} = f(\mathbf{x}(\xi_\alpha, \eta_\beta, \zeta_\gamma))$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την πολυωνυμική αναπαράσταση, η κλίση μιας συνάρτησης ∇f μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta)) &\approx \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \partial_i f(\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta)) \\ &= \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^{n_l} f^{\alpha\beta\gamma} [l'_\alpha(\xi) l_\beta(\eta) l_\gamma(\zeta) \partial_i \xi + l_\alpha(\xi) l'_\beta(\eta) l_\gamma(\zeta) \partial_i \eta \\ &\quad + l_\alpha(\xi) l_\beta(\eta) l'_\gamma(\zeta) \partial_i \zeta] \end{aligned} \quad (3.13)$$

όπου ο τόνος σημαίνει παραγώγιση. Όταν υπολογίζεται στα σημεία Gauss Lobatto Legendre $\mathbf{x}(\xi_{\alpha'}, \eta_{\beta'}, \zeta_{\gamma'})$, τότε η τελευταία έκφραση γράφεται

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta)) &= \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \left[\sum_{\alpha=0}^{n_l} f^{\alpha\beta'\gamma'} l'_\alpha(\xi_{\alpha'}) \partial_i \xi + \sum_{\beta=0}^{n_l} f^{\alpha'\beta\gamma'} l'_\beta(\eta_{\beta'}) \partial_i \eta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\gamma=0}^{n_l} f^{\alpha'\beta'\gamma} l'_\gamma(\zeta_{\gamma'}) \partial_i \zeta \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Σε αυτό το στάδιο, οι ολοκληρώσεις σε στοιχεία επιφάνειας Γ_b και όγκου Ω_e μπορούν να προσεγγιστούν χρησιμοποιώντας τον κανόνα ολοκλήρωσης Gauss (αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο)

$$\int_{\Gamma_b} f(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\mathbf{x}(\xi, \eta)) J_b(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{\alpha, \beta=0}^{n_l} w_\alpha w_\beta f^{\alpha\beta} J_b^{\alpha\beta} \quad (3.15)$$

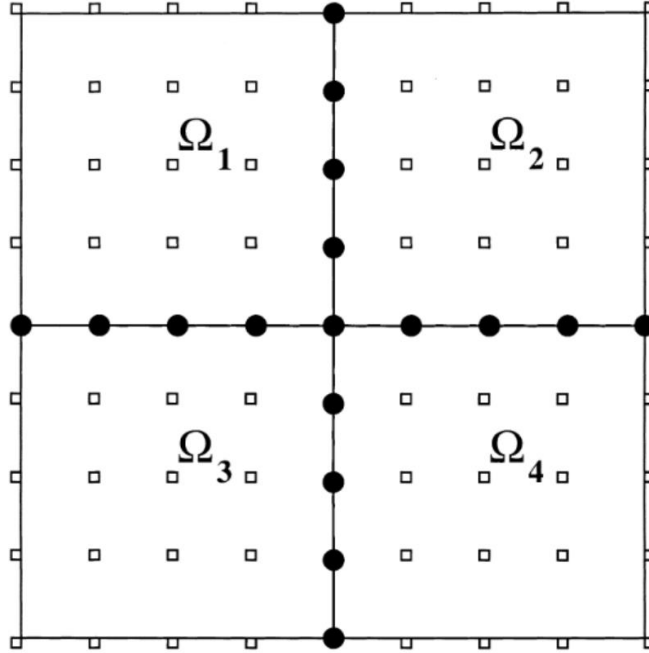
$$\int_{\Omega_e} f(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta)) J_e(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^{n_l} w_\alpha w_\beta w_\gamma f^{\alpha\beta\gamma} J_e^{\alpha\beta\gamma} \quad (3.16)$$

όπου

$$J_e^{\alpha\beta} = J_b(\xi_\alpha, \eta_\beta) \text{ και } J_e^{\alpha\beta\gamma} = J_e(\xi_\alpha, \eta_\beta, \zeta_\gamma)$$

3.5 ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Είδαμε ότι στη SEM το προσομοίωμα υποδιαιρείται ως προς έναν αριθμό εξαεδρικών ή τετραπλευρικών στοιχείων. Σε κάθε μεμονωμένο στοιχείο, υπολογίζονται οι τιμές συναρτήσεων στα δειγματοληπτικά σημεία ολοκλήρωσης Gauss-Lobatto-Legendre. Τα σημεία του πλέγματος που βρίσκονται στις πλευρές, τις άκρες ή τις γωνίες ενός στοιχείου μοιράζονται μεταξύ γειτονικών στοιχείων, όπως φαίνεται στην παρακάτω Εικόνα.



Εικόνα 21: Τοπικό και καθολικό πλέγμα κόμβων

Επομένως, προκύπτει η ανάγκη να γίνει διάκριση μεταξύ των σημείων πλέγματος που ορίζουν ένα στοιχείο, του τοπικού πλέγματος, και όλων των γραμμών πλέγματος στο προσομοίωμα, πολλές από τις οποίες μοιράζονται μεταξύ πολλών φασματικών στοιχείων, του καθολικού πλέγματος.

Πρέπει να καθοριστεί μια αντιστοίχιση μεταξύ των κόμβων στο τοπικό πλέγμα και των κόμβων στο καθολικό πλέγμα. Για το σκοπό αυτό, έχουν αναπτυχθεί από τη FEM πολύ αποτελεσματικοί αλγόριθμοι. Για να μπορέσει το σύστημα να αναλυθεί με ακρίβεια με τη πάροδο του χρόνου, πρέπει να αθροιστούν οι συνεισφορές από όλα τα στοιχεία που μοιράζονται ένα κοινό κόμβο στο καθολικό πλέγμα. Στην κλασική FEM η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως η συναρμολόγηση του συστήματος (system assembly). Υπολογιστικά, αυτό το στάδιο συναρμολόγησης είναι ένα αρκετά δαπανηρό μέρος του υπολογισμού σε παράλληλους υπολογιστές, επειδή οι πληροφορίες από μεμονωμένα στοιχεία πρέπει να μοιράζονται με γειτονικά στοιχεία, μια λειτουργία που περιλαμβάνει επικοινωνία μεταξύ διαφορετικών CPU.

Έστω U το διάνυσμα μετατοπίσεων του καθολικού συστήματος, δηλαδή το U περιέχει το διάνυσμα μετατοπίσεων σε όλους τους κόμβους του πλέγματος στο καθολικό πλέγμα και κλασικά αναφέρεται ως καθολικοί βαθμοί ελευθερίας του συστήματος. Η συνήθης διαφορική εξίσωση που διέπει την χρονική απόκριση του καθολικού συστήματος μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F \quad (3.17)$$

όπου M είναι το καθολικό μητρώο μάζας, C είναι το καθολικό μητρώο απόσβεσης (απορροφητικά όρια), K είναι το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας και F η εξωτερική διέγερση (πηγή).

Όπως έχουμε τονίσει πολλάκις, μια ιδιαίτερα επιθυμητή ιδιότητα της SEM, η οποία επιτρέπει μια πολύ σημαντική μείωση της πολυπλοκότητας και του υπολογιστικού κόστους του αλγορίθμου, είναι το γεγονός ότι το μητρώο μάζας M είναι διαγώνιο από την κατασκευή του. Ως εκ τούτου, δεν απαιτείται κάποιος δαπανηρός αλγόριθμος για την γραμμική ανάλυση του συστήματος με την παρέλευση του χρόνου. Σε επίπεδο ενός στοιχείου, το μητρώο μάζας δίνεται από τον πρώτο όρο στην ασθενή διατύπωση των εξισώσεων κίνησης (3.10):

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \partial_t^2 \mathbf{s} d^3 \mathbf{x} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho(\mathbf{x}(\xi)) \mathbf{w}(\mathbf{x}(\xi)) \cdot \partial_t^2 \mathbf{s}(\mathbf{x}(\xi), t) J(\xi) d^3 \xi \quad (3.18)$$

Για τη μετατόπιση \mathbf{s} ενός στοιχείου μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta), t) \approx \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_j \sum_{\sigma, \tau, \nu=0}^{n_l} s_j^{\sigma\tau\nu}(t) l_{\sigma}(\xi) l_{\tau}(\eta) l_{\nu}(\zeta) \quad (3.19)$$

Επίσης, επιλέγουμε δοκιμαστικές συναρτήσεις της μορφής

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta)) \approx \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^{n_l} w_i^{\alpha\beta\gamma} l_{\alpha}(\xi) l_{\beta}(\eta) l_{\gamma}(\zeta) \quad (3.20)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (3.19) και (3.20) στη σχέση (3.18) προκύπτει

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \partial_t^2 \mathbf{s} d^3 \mathbf{x} \\ & \approx \sum_{\alpha', \beta', \gamma'} w_{\alpha'} w_{\beta'} w_{\gamma'} J_e^{\alpha', \beta', \gamma'} \rho^{\alpha', \beta', \gamma'} \sum_{i, j=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_j \\ & \times \sum_{\alpha, \beta, \gamma} w_i^{\alpha\beta\gamma} l_{\alpha}(\xi_{\alpha'}) l_{\beta}(\eta_{\beta'}) l_{\gamma}(\zeta_{\gamma'}) \sum_{\sigma, \tau, \nu} \ddot{s}_j^{\sigma\tau\nu}(t) l_{\sigma}(\xi_{\alpha'}) l_{\tau}(\eta_{\beta'}) l_{\nu}(\zeta_{\gamma'}) \\ & = \sum_{\alpha', \beta', \gamma'} w_{\alpha'} w_{\beta'} w_{\gamma'} J_e^{\alpha', \beta', \gamma'} \rho^{\alpha', \beta', \gamma'} \sum_{i, j=1}^3 \delta_{ij} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} w_i^{\alpha\beta\gamma} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} \delta_{\gamma\gamma'} \\ & \quad \times \sum_{\sigma, \tau, \nu} \ddot{s}_i^{\sigma\tau\nu}(t) \delta_{\sigma\alpha'} \delta_{\tau\beta'} \delta_{\nu\gamma'} \\ & = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} w_{\alpha} w_{\beta} w_{\gamma} J_e^{\alpha\beta\gamma} \rho^{\alpha\beta\gamma} \sum_{i=1}^3 w_i^{\alpha\beta\gamma} \ddot{s}_i^{\alpha\beta\gamma}(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

όπου $\rho^{\alpha\beta\gamma} = \rho(\mathbf{x}(\xi_{\alpha}\eta_{\beta}\zeta_{\gamma}))$ και η τελεία σημαίνει παραγώγιση ως προς το χρόνο. Είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε ότι η ασθενής μορφή των εξισώσεων κίνησης, ισχύει για οποιοδήποτε δοκιμαστικό διάνυσμα \mathbf{w} . Ως εκ τούτου, η εξίσωση (3.17) στο καθολικό σύστημα δημιουργείται θέτοντας ξεχωριστά τους όρους $w_1^{\alpha\beta\gamma}, w_2^{\alpha\beta\gamma}, w_3^{\alpha\beta\gamma}$ ίσους με το 0. Αυτό που είναι αξιοσημείωτο στην εξίσωση (3.21), είναι το γεγονός ότι η τιμή της επιτάχυνσης σε κάθε σημείο, $\ddot{s}_i^{\alpha\beta\gamma}(t)$, πολλαπλασιάζεται απλώς με τον παράγοντα $w_{\alpha} w_{\beta} w_{\gamma} J_e^{\alpha\beta\gamma} \rho^{\alpha\beta\gamma}$, δηλαδή το στοιχειώδες μητρώο μάζας είναι διαγώνιο. Αυτή η ιδιότητα ισχύει επίσης για καθολικό μητρώο μάζας μετά τη συναρμολόγηση του συστήματος. Αυτή η επιθυμητή ιδιότητα είναι που έχει παρακινήσει τη χρήση παρεμβολών Lagrange για την αναπαράσταση συναρτήσεων στα στοιχεία, σε συνδυασμό με τη χρήση του κανόνα ολοκλήρωσης Gauss-Lobatto-Legendre. Να σημειωθεί ότι η πυκνότητα ρ δεν χρειάζεται να είναι σταθερή σε ένα στοιχείο, αλλά μπορεί να διαφέρει από το ένα σημείο πλέγματος στο άλλο. Επομένως, η SEM είναι σε θέση να χειρίζεται πλήρως ετερογενή μέσα.

Συχνά, η χρονική διακριτοποίηση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης (3.17) επιτυγχάνεται με βάση μια τυπική μέθοδο πεπερασμένων διαφορών δεύτερης τάξης, μετακινώντας τους όρους της δυσκαμψίας και της απόσβεσης στη δεξιά πλευρά. Μια τέτοια μέθοδος είναι υπό όρους ευσταθής και η συνθήκη ευστάθειας Courant (CFL) διέπεται από την ελάχιστη τιμή του λόγου μεταξύ του μεγέθους των στοιχείων του πλέγματος και της ταχύτητας διάδοσης των κυμάτων P . Σε ορισμένες περιπτώσεις, για παράδειγμα, όταν απαιτούνται πολύ μικρά στοιχεία σε περιοχές όπου η ταχύτητα διάδοσης κύματος είναι πολύ υψηλή, η συνθήκη σταθερότητας CFL μπορεί να είναι πολύ περιοριστική. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Newmark, γραμμένη σε μορφή πρόβλεψης-πολλαπλής διόρθωσης (Komatitsch 1997; Komatitsch et al.1999a).

3.6 ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Επιλογή βαθμού πολωνύμου

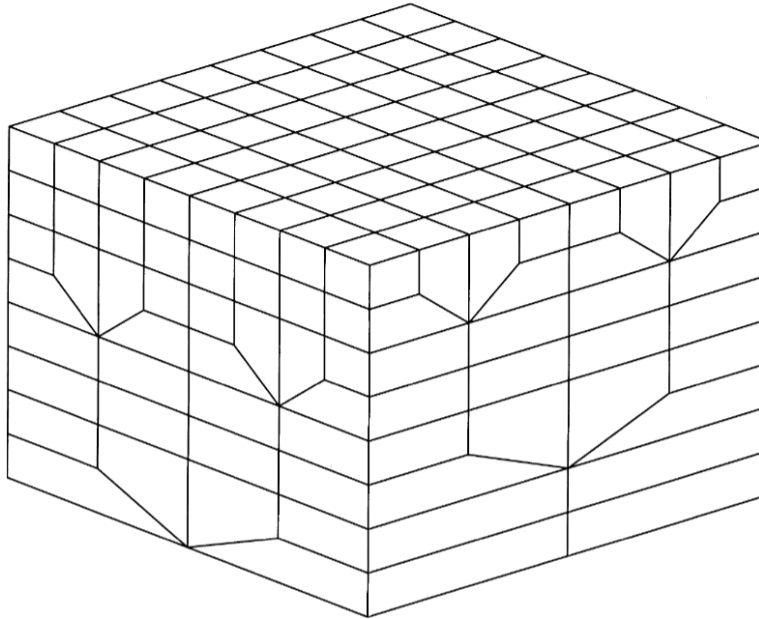
Στη SEM, η χωρική ανάλυση ελέγχεται από δύο παραμέτρους: το τυπικό μέγεθος ενός στοιχείου Δh και τον πολωνυμικό βαθμό που χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση συναρτήσεων σε ένα στοιχείο n_i , οπότε κάθε στοιχείο περιέχει n_i+1 σημεία σε κάθε κατεύθυνση. Από αυτή την άποψη, οι SEMs σχετίζονται με τις FEMs που βασίζονται σε υψηλό πολωνυμικό βαθμό, τη λεγόμενη h - p έκδοση της FEM (Guo & Babuska1986) (συνδυασμός των μεθόδων h + p προσαρμογής, όπου μετά τη βελτίωση του αρχικού δικτύου με τη μέθοδο h ακολουθεί η προσαρμογή τύπου p της οποίας η αποτελεσματικότητα βελτιώνεται σημαντικά). Στην πράξη, εάν ο πολωνυμικός βαθμός είναι πολύ μικρός, π.χ. μικρότερος από το τυπικό 4, η SEM εμφανίζει τις ίδιες ανακρίβειες με αυτές που παρατηρούνται σε μια τυπική FEM που εφαρμόζεται σε προβλήματα διάδοσης κυμάτων (Marfurt 1984). Από την άλλη, αν ο πολωνυμικός βαθμός είναι πολύ μεγάλος, π.χ. μεγαλύτερος από 15, η μέθοδος είναι χωρικά πολύ ακριβής, αλλά οι υπολογιστικές απαιτήσεις γίνονται απαγορευτικές. Ο λόγος για αυτό είναι ότι ο υπολογισμός του μητρώου στιβαρότητας σε στοιχειακό επίπεδο έχει υπολογιστικό κόστος $O(n_i^4)$ στις 3 διαστάσεις, λόγω των πολλαπλασιασμών των πινάκων που εμπλέκονται. Συνήθως, οι πολωνυμικοί βαθμοί μεταξύ 5 και 10 είναι βέλτιστοι για τη SEM που εφαρμόζεται σε προβλήματα διάδοσης κυμάτων, επειδή αυτοί παρέχουν την καλύτερη αντιστάθμιση μεταξύ ακρίβειας και κόστους (Seriani & Priolo 1994). Για να ληφθούν ακριβή αποτελέσματα, το Δh πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε ο μέσος αριθμός σημείων ανά ελάχιστο μήκος κύματος λ_{\min} σε ένα στοιχείο, $\lambda_{\min}=(n_i+1)/\Delta h$, να είναι περίπου ίσος με 5 για το βέλτιστο εύρος πολωνυμικών βαθμών που αναφέρονται παραπάνω (Seriani & Priolo 1994, Faccioli et al.1997). Επομένως, η SEM συγκρίνεται ευνοϊκά με μια μέθοδο FD υψηλής τάξης, όσον αφορά τον απαιτούμενο αριθμό σημείων ανά μήκος κύματος.

Σχεδιασμός πλέγματος

Στη SEM, όπως και σε κάθε μέθοδο που βασίζεται σε ένα πλέγμα στοιχείων, ο σχεδιασμός του πλέγματος είναι ένα κρίσιμο και δύσκολο βήμα. Η χρήση εξαεδρικών στοιχείων που απαιτούνται στη SEM-απαγορεύονται τα τετραέδρα- περιπλέκει περαιτέρω τα πράγματα. Απαιτείται κάποια τεχνογνωσία στον σχεδιασμό πλέγματος ή στην προ-επεξεργασία του μοντέλου για να διασφαλιστεί ότι η ανάλυση που παρέχεται από το πλέγμα, ιδίως ο αριθμός των σημείων πλέγματος ανά μήκος κύματος, θα είναι επαρκής για το πρόβλημα. Για παράδειγμα, συνήθως απαιτείται πυκνωση του πλέγματος κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια, σε περιοχές με αργή ταχύτητα κύματος ή έντονες αντιθέσεις στην ταχύτητα κύματος, σε περιοχές με απότομη τοπογραφία ή κοντά σε ρήγματα. Στην πράξη, γενικά σχεδιάζεται το πλέγμα έτσι ώστε να προσμοιώνει την ελεύθερη επιφάνεια και τα κύρια γεωλογικά όρια εντός του μοντέλου. Όπως σε μια τυπική FEM, η καμπυλότητα των στοιχείων θα πρέπει να είναι μέτρια, έτσι ώστε η Ιακωβιανή της αντιστοίχισης στο τμήμα αναφοράς να μεταβάλλεται ομαλά σε οποιοδήποτε δεδομένο στοιχείο και να μην μηδενίζεται ποτέ.

Επειδή η ταχύτητα του σεισμικού παλμού γενικά αυξάνεται με το βάθος, συχνά χρειάζεται να πυκνώνεται το πλέγμα στα βαθύτερα μέρη του προσομοιώματος για να διατηρηθεί παρόμοιος αριθμός σημείων

πλέγματος ανά μήκος κύματος. Ένας απλός τρόπος για να επιτευχθεί αυτό σε δύο στάδια συνίσταται στον διπλασιασμό του πλέγματος πρώτα σε μία οριζόντια διάσταση και, στη συνέχεια, σε μεγαλύτερο βάθος, στη δεύτερη οριζόντια διάσταση, όπως απεικονίζεται στο Σχ. [6]. Ωστόσο, αυτό το απλό συμμορφούμενο πλέγμα δεν είναι το βέλτιστο επειδή περιέχει γωνίες 45° και επομένως υψηλές τοπικές μεταβολές στο μέγεθος και το σχήμα των φασματικών στοιχείων. Ένας τομέας ενεργούς έρευνας περιλαμβάνει τη χρήση μη συμμορφούμενων πλεγμάτων, στα οποία δύο ή περισσότερα στοιχεία μοιράζονται το ίδιο άκρο με ένα άλλο, μεγαλύτερο στοιχείο ή ο συνδυασμός αλγορίθμων φασματικών στοιχείων με άλλες τεχνικές όπως τη κλασική FEM. (Bernardi et al.1990; Lahaye et al., 1997· Chaljub & Vilotte 1998). Αυτές οι προσεγγίσεις απλοποιούν σημαντικά τη πυκνωση ενός πλέγματος, αλλά είναι πολύ πιο δύσκολο να εφαρμοστούν.



Εικόνα 22: Προσομοίωση εδάφους με μικρότερα στοιχεία στην κορυφή του, όπου οι ταχύτητες είναι συνήθως μικρότερες, και με μεγαλύτερα στοιχεία στην βάση του, όπου οι ταχύτητες είναι συνήθως μεγαλύτερες

Ακρίβεια ολοκλήρωσης

Είδαμε ότι η χρήση παρεμβολών Lagrange για την αναπαράσταση συναρτήσεων σε ένα στοιχείο, σε συνδυασμό με τη χρήση μιας αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Lobatto-Legendre, έχει ως αποτέλεσμα ένα διαγώνιο μητρώο μάζας, το οποίο με τη σειρά του οδηγεί σε μια απλή ολοκλήρωση στο χρόνο. Αυτό έχει επιτευχθεί με βάση τον κανόνα ολοκλήρωσης Gauss-Lobatto-Legendre, αντί του πιο κλασικού κανόνα Gauss που χρησιμοποιείται στη FEM. Ωστόσο, ακόμη και σε ένα τετράγωνο με ομοιογενείς ελαστικές ιδιότητες, ο κανόνας Gauss-Lobatto-Legendre είναι ακριβής μόνο για πολυώνυμα βαθμού $2n_i-1$.

Κάθε ολοκλήρωση στο εκάστοτε στοιχείο αναφοράς περιλαμβάνει το γινόμενο δύο πολυωνύμων βαθμού n_i : τη μετατόπιση και τη συνάρτηση δοκιμής. Η ολοκλήρωση του προκύπτοντος πολυωνύμου βαθμού $2n_i$ δεν είναι ποτέ ακριβής, ακόμη και σε αυτή την απλή περίπτωση. Για παραμορφωμένα στοιχεία υπάρχουν πρόσθετα σφάλματα που σχετίζονται με την καμπυλότητα (Maday & Rønquist 1990). Το ίδιο ισχύει και για στοιχεία με ετερογενείς ιδιότητες υλικού. Έτσι, ένα διαγώνιο μητρώο μάζας έχει ληφθεί με μια διαδικασία υπο-ολοκλήρωσης. Από αυτή την άποψη, η SEM σχετίζεται με τη FEM στην οποία χρησιμοποιείται συγκεντρωμένη μάζα για να αποφευχθεί η δαπανηρή ανάλυση του μη διαγώνιου συστήματος που προκύπτει από τη χρήση του τετράγωνου Gauss (Cohen et al.1993).

Αξίζει να σημειωθεί ότι παρόλο που η SEM παρουσιάζει υψηλή χωρική ακρίβεια, το χρονικό διάστημα που χρησιμοποιούμε για να λύσουμε την προκύπτουσα συνήθη διαφορική εξίσωση στο χρόνο (32) είναι ένα απλό σύστημα πεπερασμένων διαφορών δεύτερης τάξης. Επομένως, μακροπρόθεσμα, η συνολική ακρίβεια της προσομοίωσης συχνά διέπεται κυρίως από το χρονικό βήμα.

4. ΕΠΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

4.1 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Είναι γνωστό από τη δυναμική, πως η εξίσωση κίνησης ενός πολυβάθμιου συστήματος (χωρίς απόσβεση) το οποίο εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση έχει τη μορφή

$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = \{f(t)\} \quad (4.1)$$

όπου:

$[M]$: Μητρώο Μάζας

$[K]$: Μητρώο Στιβαρότητας

$\{u\}$: Διάνυσμα Μετατοπίσεων

$\{f(t)\}$: Διάνυσμα εξωτερικών δυνάμεων

Στην περίπτωση μάλιστα όπου η εξωτερική διέγερση είναι η αναπτυσσόμενη επιτάχυνση λόγω σεισμού, τότε ισχύει $\{f(t)\} = -[M] \cdot \{\ddot{u}_g\}$ και η παραπάνω σχέση γράφεται

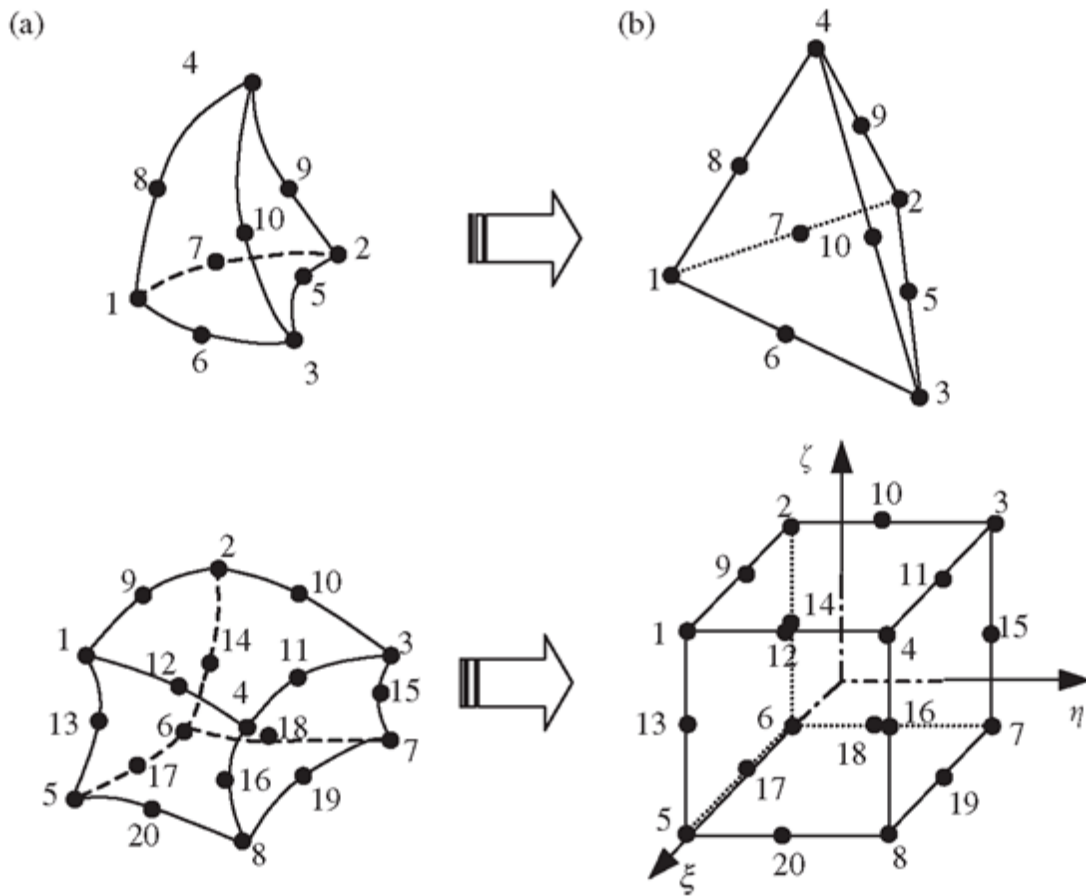
$$[M] \cdot \{\ddot{u}\} + [K] \cdot \{u\} = -[M] \cdot \{\ddot{u}_g\} \quad (4.2)$$

Για να λυθεί το παραπάνω πρόβλημα είναι σε κάθε περίπτωση αναγκαίος ο υπολογισμός τόσο του μητρώου στιβαρότητας όσο και του μητρώου μάζας. Παρακάτω παρουσιάζεται η διαδικασία υπολογισμού τους. Για τον υπολογισμό χρησιμοποιούνται ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία δικτυώματος και επίπεδης ελαστικότητας.

4.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΚΑΙ ΜΗΤΡΩΟΥ ΜΑΖΑΣ – ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

4.2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΣΧΕΣΗ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΥ ΜΕ ΦΥΣΙΚΟΥ Σ.Σ.

Πολλές φορές η γεωμετρία ενός μοντέλου μας επιβάλλει να χρησιμοποιήσουμε στοιχεία τα οποία δεν είναι ορθογωνικά, αλλά έχουν καμπύλα σύνορα/πλευρές. Δεδομένου όμως της μεγαλύτερης ευχέρειας χειρισμού των ορθογωνικών στοιχείων οι Taig και Irons επινόησαν μια μέθοδο με την οποία απεικονίζεται το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y,z) αμφι-μονοσήμαντα σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων (σ.σ.), το οποίο καλείται **φυσικό σύστημα** (ξ,η,ζ). Η συσχέτιση μεταξύ του καρτεσιανού και του φυσικού σ.σ. γίνεται με την βοήθεια του Ιακωβιανού μητρώου μετασχηματισμού [J] και της ορίζουσας αυτού $\det(J)$.



Εικόνα 23: Καρτεσιανό και φυσικό σύστημα συντεταγμένων

Ο στοιχειώδης όγκος dV ενός παραλληλεπίπεδου στοιχείου στο Καρτεσιανό σ.σ. εκφράζεται ως

$$dV = \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (4.3a)$$

όπου

$$\det[J] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (4.3b)$$

Αντίστοιχα στην περίπτωση της διδιάστατης απεικόνισης, το στοιχειώδες εμβαδόν dA ενός παραλληλογράμμου στοιχείου στο Καρτεσιανό σ.σ. εκφράζεται ως

$$dA = \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (4.4a)$$

όπου

$$\det[J] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (4.4b)$$

ενώ στη περίπτωση της μονοδιάστατης απεικόνισης, το στοιχειώδες μήκος dx ενός ευθύγραμμου τμήματος στο Καρτεσιανό σ.σ. εκφράζεται ως

$$dx = \det[J] \cdot d\xi \quad (4.5a)$$

όπου

$$\det[J] = \left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| \quad (4.5b)$$

Εφόσον η Ιακωβιανή ορίζουσα σχετίζεται με τον γραμμικό μετασχηματισμό ενός διανυσματικού χώρου σε έναν άλλον, μας παρέχει τις εξής πληροφορίες: πρώτον, το πρόσημό της δείχνει κατά πόσο έχει αλλάξει ο προσανατολισμός του εμβαδού ή του όγκου (+διατηρείται, -δεν διατηρείται) και δεύτερον η απόλυτη τιμή της δείχνει την κλίμακα με την οποία το εμβαδόν ή ο όγκος αυτός πολλαπλασιάζεται.

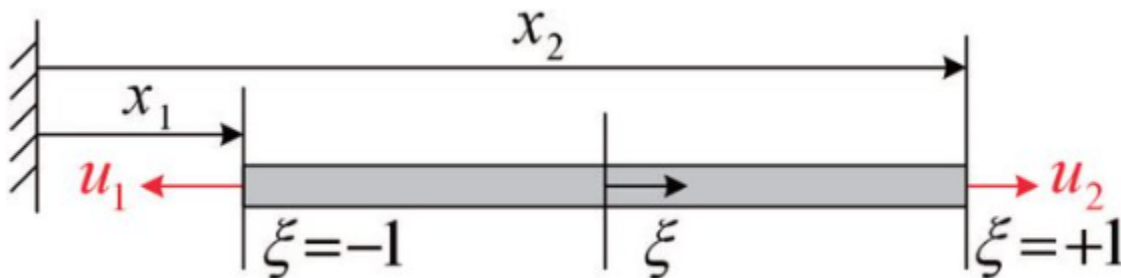
Για τον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας σε ισοπαραμετρικά στοιχεία, απαιτείται **αριθμητική ολοκλήρωση** του γνωστού τύπου, καθώς συνήθως οι πράξεις είναι δυσχερείς ή αδύνατες.

Ο όρος **ισοπαραμετρικά** προκύπτει από το γεγονός ότι η παρεμβολή της γεωμετρίας (x,y,z) περιγράφεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με την παρεμβολή της μετατόπισης $u(u,v,w)$

4.2.2 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ 2 ΚΟΜΒΩΝ

Συναρτήσεις σχήματος

Έστω ένα πεπερασμένο στοιχείο ράβδου με 2 κόμβους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ράβδος κείται πάνω στο άξονα x στο καρτεσιανό σύστημα με κόμβο αρχής στο $x=x_1$ και κόμβο πέρας στο $x=x_2$. Ενώ στο φυσικό σύστημα βρίσκεται μεταξύ $\xi=-1$ και $\xi=+1$.



Εικόνα 24: Στοιχείο στο Καρτεσιανό και στο Φυσικό Σύστημα Συντεταγμένων

Η άμεση απόρροια της ισοπαραμετρικής θεώρησης με μαθηματική έκφραση είναι η εξής:

$$x = \sum_{i=1}^2 N_i x_i \quad (4.6)$$

$$u = \sum_{i=1}^2 N_i u_i \quad (4.7)$$

όπου

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$
(4.8)

Μητρώο παραμορφώσεως

Το μητρώο παραμορφώσεως $[B]$ συνδέει τις ανηγμένες παραμορφώσεις με τις επικόμβιες μετατοπίσεις σύμφωνα με τη σχέση

$$\varepsilon_x = [B] \cdot \{d\}$$
(4.9)

Ακόμη από τον ορισμό της ανηγμένης παραμόρφωσης και με τη χρήση του κανόνα της αλυσίδας, παίρνουμε

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx}$$
(4.10)

Από την σχέση (4.7) όμως προκύπτει ότι

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{d \sum_{i=1}^2 N_i u_i}{d\xi} = \frac{u_2 - u_1}{2}$$
(4.11)

ενώ από τη (4.6)

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{d \sum_{i=1}^2 N_i x_i}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2}$$
(4.12)

Επομένως αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4.11),(4.12) στην εξίσωση (4.10)

$$\varepsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{2} \cdot \frac{2}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
(4.13)

Άρα εξ ορισμού

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$
(4.14)

Μητρώο στιβαρότητας

Επειδή γενικά το μητρώο παραμορφώσεως υπολογίζεται συναρτήσσει των φυσικών συντεταγμένων, δεν είναι δηλαδή σταθερή ποσότητα, και η ολοκλήρωση που απαιτείται να γίνει για τον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας γίνεται ως προς τις φυσικές συντεταγμένες, έχουμε:

$$[k] = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV_e$$
(4.15)

Με αντικατάσταση της τιμής του μητρώου παραμορφώσεως και με την υπόθεση σταθερού μέτρου ελαστικότητας E , η παραπάνω σχέση γίνεται

$$[k] = \int_{V_e} \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dV_e$$
(4.16)

Ισχύει επίσης ότι

$$dV_e = \det[J] \cdot d\xi \cdot dy \cdot dz$$

άρα

$$[k] = \int_A \left(\int_{-1}^{+1} \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \frac{1}{L} [-1 \ 1] \det[J] \cdot d\xi \right) dydz \quad (4.17)$$

και με την υπόθεση της πρισματικής ράβδου εγκάρσιας διατομής A έχουμε

$$[k] = E \cdot A \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{L} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi$$

ή

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

η οποία είναι και η γνωστή σχέση που δίνει το μητρώο στιβαρότητας ραβδωτού στοιχείου. Εδώ υπολογίσαμε αναλυτικά το μητρώο στιβαρότητας. Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως, αυτό δεν μπορεί να συμβεί και καταφεύγουμε σε διάφορες μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης με συνηθέστερη την μέθοδο Gauss (βλ. εδάφιο 4.2.5 ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΙΚΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ). Έτσι το μητρώο στιβαρότητας γράφεται

$$[k] = \int_{-1}^1 [B(\xi)]^T [E][B(\xi)] t \det[J] d\xi$$

ή

$$[k] = \sum_{i=1}^{n_g} w_i [B(\xi)]^T [E][B(\xi)] t \det[J] \quad (4.19)$$

όπου t είναι το πάχος της ράβδου και n_g τα σημεία Gauss-Lobatto-Legendre στα οποία γίνεται η ολοκλήρωση.

Μητρώο μάζας

Όσον αφορά στο μητρώο μάζας, αυτό στην παρούσα εργασία υπολογίζεται με την παραδοχή κατανεμημένης μάζας στο στοιχείο (consistent mass matrix). Για να γίνει αυτό θα κάνουμε χρήση των συναρτήσεων σχήματος. Επομένως, αν υποθέσουμε ότι το στοιχείο έχει σταθερή πυκνότητα μέτρου ρ , τότε προκύπτει

$$[M] = \int_{V_e} [N] \rho [N]^T dV \quad (4.20)$$

όπου το μητρώο [N] περιέχει τις συναρτήσεις σχήματος, δηλαδή είναι διαστάσεων [πλήθος κόμβων x 1]. Το ολοκλήρωμα γενικά θα υπολογίζεται με την αριθμητική μέθοδο Gauss, όπως και στη περίπτωση του μητρώου στιβαρότητας. Έτσι, με την υπόθεση σταθερής διατομής A το μητρώο μάζας γράφεται

$$[M] = \int_{-1}^1 [N] \rho [N]^T A \det[J] d\xi \quad (4.21)$$

ή

$$[M] = \sum_{i=1}^{n_g} w_i [N(\xi_i)] \rho [N(\xi_i)]^T \text{Adet}[J] \quad (4.22)$$

Στην ειδική περίπτωση του πρισματικού ραβδωτού στοιχείου μήκους L με 2 κόμβους προκύπτει

$$[M] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

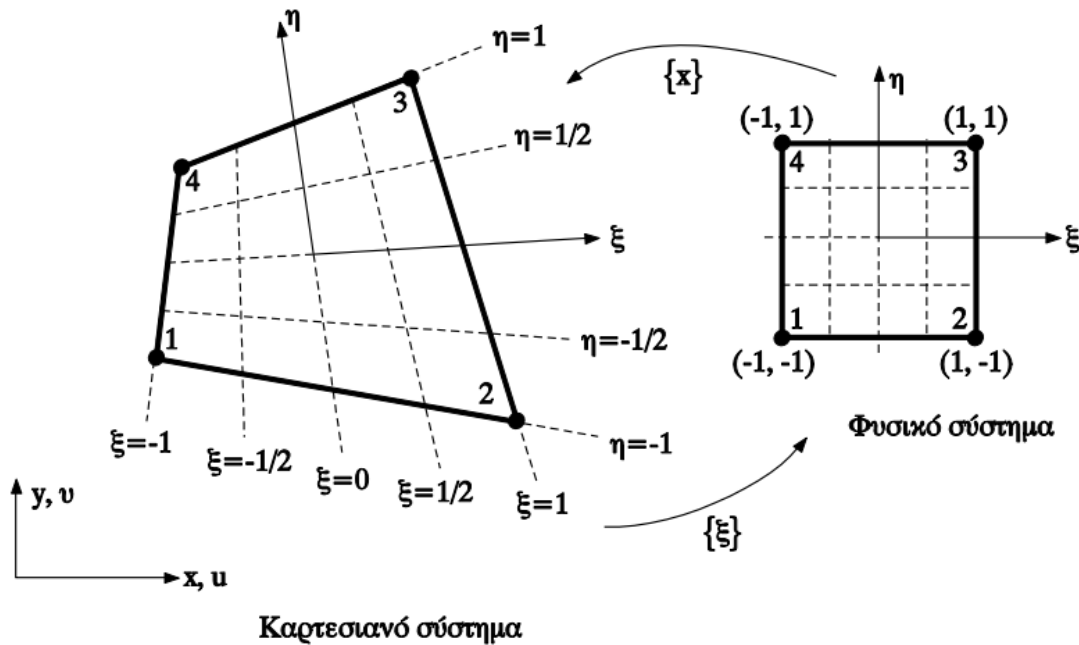
4.2.3 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε στο προηγούμενο εδάφιο, γενικεύεται και σε στοιχεία 3,4,... κόμβων. Το μόνο που αλλάζει στη περίπτωση αυτή είναι η συναρτήσεις σχήματος, οι οποίες πλέον γίνονται πολυώνυμα 2^{ου},3^{ου},... βαθμού.

4.2.4 ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΙΚΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Απεικόνιση Φυσικού συστήματος στο Καρτεσιανό

Στο σχήμα παρακάτω φαίνεται ένα τετραπλευρικό στοιχείο τεσσάρων κόμβων στο Καρτεσιανό και στο Φυσικό σ.σ.



Εικόνα 25: Τετραπλευρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο επίπεδης έντασης-παραμόρφωσης τεσσάρων κόμβων

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η απεικόνιση του φυσικού συστήματος στο καρτεσιανό είναι ένα ορθογωνικό σύστημα αξόνων. Αυτό συμβαίνει, γιατί ουσιαστικά έχουμε την περίπτωση της ράβδου με τους 2 κόμβους και στις δύο διευθύνσεις, επομένως η παρεμβολή της γεωμετρίας (οι συναρτήσεις σχήματος δηλαδή) είναι γραμμική. Πάντως γενικά η απεικόνιση δεν είναι ορθογωνική.

Συναρτήσεις σχήματος

Όπως και στη μία διάσταση, έτσι και στις δύο γράφουμε για τις καρτεσιανές συντεταγμένες

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \quad \text{και} \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \quad (4.24)$$

ή

$$x = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ και } y = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

και για τις μετατοπίσεις αντίστοιχα

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i \quad (4.26)$$

ή

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

ή

$$\{u\} = [N]\{d\} \quad (4.28)$$

όπου οι συναρτήσεις σχήματος προκύπτουν από τον κατάλληλο συνδυασμό των αντίστοιχων συναρτήσεων στη μία διάσταση

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi)\frac{1}{2}(1-\eta) \Leftrightarrow N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1+\xi)\frac{1}{2}(1-\eta) \Leftrightarrow N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{2}(1+\xi)\frac{1}{2}(1+\eta) \Leftrightarrow N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{2}(1-\xi)\frac{1}{2}(1+\eta) \Leftrightarrow N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Μητρώο παραμορφώσεως

Όπως και στη μία διάσταση, το μητρώο παραμορφώσεως $[B]$ συνδέει τις ανηγμένες παραμορφώσεις με τις επικόμβιες μετατοπίσεις σύμφωνα με τη σχέση

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{d\}$$

Στις δύο διαστάσεις το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων $\{\varepsilon\}$ δίνεται από τη σχέση ανηγμένων παραμορφώσεων – μετατοπίσεων της επίπεδης ελαστικότητας\

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

ή

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Άρα αρκεί να υπολογίσουμε τις παραγώγους των μετατοπίσεων u, v συναρτήσεων των καρτεσιανών συντεταγμένων x, y . Όμως τις μετατοπίσεις τις έχουμε εκφράσει συναρτήσεων των φυσικών συντεταγμένων ξ, η μέσω των συναρτήσεων σχήματος. Επομένως ο υπολογισμός θα γίνει έμμεσα. Θα δείξουμε την διαδικασία για την μετατόπιση – συνάρτηση $u(\xi, \eta)$. Ομοίως γίνεται και για την $v(\xi, \eta)$.

Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση u ως προς ξ και η :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

ή σε μητρική μορφή

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

και από τη σχέση (4.4b)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

και τελικά

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Αναλυτικότερα, το Ιακωβιανό μητρώο υπολογίζεται από τη σχέση

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

ή

$$[J] = [D_N] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

όπου το μητρώο $[D_N]$ περιέχει τις παραγώγους των συναρτήσεων σχήματος ως προς ξ και η .

Από την άλλη το μητρώο $[J]^{-1}$ δίνεται από τη σχέση

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Επεκτείνοντας τη σχέση παίρνουμε

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

ή αν ορίσουμε

$$[B_1] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

τότε

$$\{\varepsilon\} = [B_1]\{u_{,\xi,\eta}\} \quad (4.39)$$

Οι μερικές παράγωγοι των u, v προκύπτουν από τη μερική παραγωγή της σχέσης (4.28)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

ή αν ορίσουμε

$$[B_2] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

τότε προκύπτει

$$\{u_{,\xi,\eta}\} = [B_2]\{d\} \quad (4.42)$$

και με αντικατάσταση στην (4.39) παίρνουμε

$$\{\varepsilon\} = [B_1][B_2]\{d\} \quad (4.43)$$

Από την τελευταία σχέση υπολογίζεται το μητρώο παραμορφώσεως ως

$$[B] = [B_1][B_2] \quad (4.44)$$

Μητρώο στιβαρότητας

Κατά τα γνωστά το μητρώο στιβαρότητας υπολογίζεται από τη σχέση (4.15)

$$[k] = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV_e$$

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούνται στοιχεία επίπεδης έντασης επομένως το μητρώο ελαστικότητας [E] σε αυτή την περίπτωση είναι

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

ενώ θεωρώντας σταθερό πάχος t για το στοιχείο παίρνουμε τελικά

$$[k] = \int_{A_e} [B]^T [E] [B] t dA_e \quad (4.46)$$

ή

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [E] [B(\xi, \eta)] t \det[J] d\xi d\eta \quad (4.47)$$

Ολοκλήρωση Gauss

Στις περιπτώσεις στις οποίες το τετραπλευρικό στοιχείο δεν είναι ορθογώνιο ή όταν έχει και ενδιάμεσους κόμβους (π.χ. στοιχεία 8 ή 9 κόμβων), τότε ο αναλυτικός υπολογισμός του ολοκληρώματος από το οποίο θα προκύψει το μητρώο στιβαρότητας είναι πολύ δυσχερές. Για αυτό το λόγο καταφεύγουμε σε μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης και κυρίως στην μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss. Σύμφωνα με τη μέθοδο Gauss υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης f σε συγκεκριμένα δειγματοληπτικά σημεία και την πολλαπλασιάζουμε με τυποποιημένους συντελεστές βάρους w_i w_j . Το αλγεβρικό άθροισμα των συνεισφορών $w_i w_j f(\xi_i, \eta_j)$ μας δίνει το μητρώο στιβαρότητας [K]. Η γενική φιλοσοφία της μεθόδου αυτής περιγράφεται από τη σχέση

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (4.48)$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα το ολοκλήρωμα αυτό θα υπολογιστεί αριθμητικά με τη μέθοδο Gauss και έτσι παίρνουμε

$$[k] = \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} w_i w_j [B(\xi_i, \eta_j)]^T [E] [B(\xi_i, \eta_j)] t \det[J] \quad (4.49)$$

όπου για την SFEM τα n_g είναι τα σημεία Gauss Lobatto Legendre

Μητρώο μάζας

Επεκτείνοντας τον τύπο (4.20) από τη μία στις δύο διαστάσεις λαμβάνουμε το μητρώο μάζας. Αξίζει να σημειωθεί όμως ότι πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα ο όρος της πυκνότητας και του μητρώου συναρτήσεων σχήματος, προκειμένου να λάβουμε το σωστό μητρώο μάζας, καθώς έχουμε πλέον 2 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο.

Η πυκνότητα θα είναι ένα μοναδιαίο μητρώο διαστάσεων (2 x 2) (όσοι και οι βαθμοί ελευθερίας ανά κόμβο) πολλαπλασιασμένο βαθμωτά με την αριθμητική τιμή της πυκνότητας, δηλαδή

$$[\rho] = \rho \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Οι συναρτήσεις σχήματος θα είναι μητρώα διαστάσεων (2·κόμβοι x 2), δηλαδή για την περίπτωση των 4 κόμβων

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$[M] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N][\rho][N]^T t \det[J] d\xi d\eta \quad (4.52)$$

$$[M] = \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} w_i w_j [N(\xi_i, \eta_j)]^T [\rho] [N(\xi_i, \eta_j)] t \det[J] \quad (4.53)$$

4.2.5 ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΙΚΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Για τον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας ακολουθείται η πάγια διαδικασία που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο εδάφιο. Η μόνη διαφορά τώρα είναι ότι όσο προστίθενται κόμβοι στο στοιχείο, θα πρέπει να προστίθενται και οι αντίστοιχοι όροι στις ήδη υπάρχουσες συναρτήσεις σχήματος και φυσικά και οι καινούργιες συναρτήσεις παρεμβολής. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται στις στήλες για i=5 μέχρι 9 οι όροι που θα πρέπει να προστεθούν (εφόσον υπάρχει ο αντίστοιχος κόμβος) στην συνάρτηση σχήματος της πρώτης στήλης.

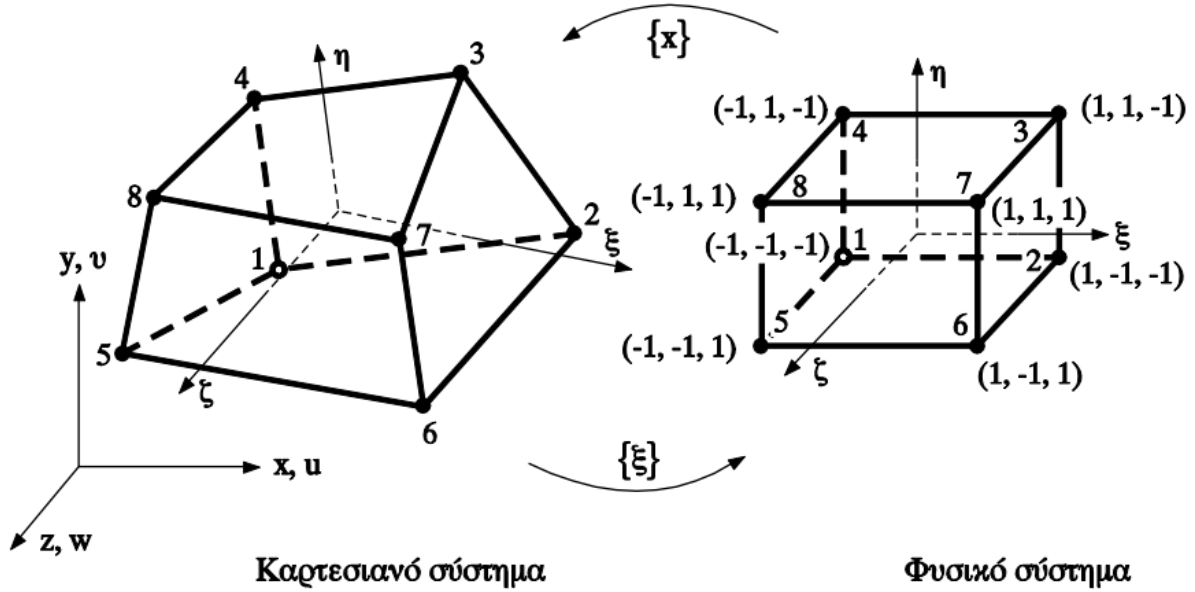
	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9
$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$			$-\frac{1}{2}N_8$	$-\frac{1}{4}N_9$
$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$			$-\frac{1}{4}N_9$
$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$		$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$		$-\frac{1}{4}N_9$
$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$			$-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{2}N_8$	$-\frac{1}{4}N_9$
$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_9 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$					

Πίνακας 2: Συναρτήσεις Σχήματος τετραπλευρικών ισοπαραμετρικών στοιχείων με 4 έως 9 κόμβους

4.2.6 ΕΞΑΕΔΡΙΚΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Απεικόνιση Φυσικού συστήματος στο Καρτεσιανό

Στο σχήμα παρακάτω φαίνεται ένα εξαεδρικό στοιχείο οκτώ κόμβων στο Καρτεσιανό και στο Φυσικό σ.σ.



Εικόνα 26: Εξαεδρικό ισοπαραμετρικό πεπερασμένο στοιχείο τριδιάστατης ελαστικότητας 8 κόμβων

Συναρτήσεις σχήματος

Όπως στη μία και στις δύο διαστάσεις, έτσι και στις τρεις γράφουμε για τις καρτεσιανές συντεταγμένες

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i \text{ και } y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \text{ και } z = \sum_{i=1}^8 N_i z_i \quad (4.53)$$

ή

$$x = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \text{ και } y = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$\text{και } z = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \end{bmatrix}$$

και για τις μετατοπίσεις αντίστοιχα

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i \text{ και } v = \sum_{i=1}^8 N_i v_i \text{ και } w = \sum_{i=1}^8 N_i w_i \quad (4.55)$$

ή

$$\{u\} = [N]\{d\} \quad (4.56)$$

Το μητρώο $[N]$ έχει όρους τις συναρτήσεις σχήματος που δίνονται παρακάτω

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta), N_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta), N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta), N_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta), N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Μητρώο παραμορφώσεως

Για τον υπολογισμό του μητρώου παραμορφώσεως πρέπει να προηγηθεί ο υπολογισμός του Ιακωβιανού μητρώου. Έχουμε ήδη δείξει ότι

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Επίσης, κατ' αντιστοιχία με το τετραπλευρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

όπου τα στοιχεία του αντίστροφου Ιακωβιανού μητρώου $[J]^{-1}$ μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά συναρτήσει των στοιχείων του μητρώου $[J]$ και της ορίζουσας του.

Έτσι προκύπτει ότι

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & 0 & 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

ή

$$\{\varepsilon\} = [B_1]\{u_{,\xi,\eta,\zeta}\} \quad (4.60)$$

Οι μερικές παράγωγοι των u,v,w και κατ' επέκταση το διάνυσμα $\{u_{,\xi,\eta,\zeta}\}$ προκύπτουν από τη μερική παραγωγή της σχέσης (4.56)

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & \dots & N_{8,\xi} & 0 & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & \dots & N_{8,\eta} & 0 & 0 \\ N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & 0 & \dots & N_{8,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & \dots & 0 & N_{8,\xi} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & \dots & 0 & N_{8,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & \dots & 0 & N_{8,\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & \dots & 0 & 0 & N_{8,\xi} \\ 0 & 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & \dots & 0 & 0 & N_{8,\eta} \\ 0 & 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & \dots & 0 & 0 & N_{8,\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,1} \\ v_{,1} \\ w_{,1} \\ u_{,2} \\ v_{,2} \\ w_{,2} \\ \vdots \\ u_{,8} \\ v_{,8} \\ w_{,8} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

ή αν ορίσουμε

$$[B_2] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & \dots & N_{8,\xi} & 0 & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & \dots & N_{8,\eta} & 0 & 0 \\ N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & 0 & \dots & N_{8,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & \dots & 0 & N_{8,\xi} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & \dots & 0 & N_{8,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & \dots & 0 & N_{8,\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & \dots & 0 & 0 & N_{8,\xi} \\ 0 & 0 & N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & \dots & 0 & 0 & N_{8,\eta} \\ 0 & 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & \dots & 0 & 0 & N_{8,\zeta} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

τότε προκύπτει

$$\{u_{,\xi,\eta,\zeta}\} = [B_2]\{d\} \quad (4.63)$$

και με αντικατάσταση στην (4.60) παίρνουμε

$$\{\varepsilon\} = [B_1][B_2]\{d\} \quad (4.64)$$

Από την τελευταία σχέση υπολογίζεται το μητρώο παραμορφώσεως ως

$$[B] = [B_1][B_2] \quad (4.65)$$

Μητρώο στιβαρότητας

Κατά τα γνωστά το μητρώο στιβαρότητας υπολογίζεται από τη σχέση (4.15)

$$[k] = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV_e$$

και τελικά προκύπτει

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta, \zeta)]^T [E] [B(\xi, \eta, \zeta)] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (4.66)$$

ή

$$[k] = \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} \sum_{k=1}^{n_g} w_i w_j w_k [B(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)]^T [E] [B(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)] \det[J] \quad (4.67)$$

όπου για τριδιάστατα στοιχεία το μητρώο ελαστικότητας δίδεται από τη σχέση

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Μητρώο μάζας

Επεκτείνοντας τον τύπο [2] από τις δύο στις τρεις διαστάσεις λαμβάνουμε το μητρώο μάζας. Πρέπει πάλι να τροποποιηθεί κατάλληλα ο όρος της πυκνότητας και του μητρώου συναρτήσεων σχήματος, προκειμένου να λάβουμε το σωστό μητρώο μάζας, καθώς έχουμε πλέον 3 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο.

Η πυκνότητα θα είναι ένα μοναδιαίο μητρώο διαστάσεων (3 x 3) (όσοι και οι βαθμοί ελευθερίας ανά κόμβο) πολλαπλασιασμένο βαθμωτά με την αριθμητική τιμή της πυκνότητας, δηλαδή

$$[\rho] = \rho \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Οι συναρτήσεις σχήματος θα είναι μητρώα διαστάσεων (3-κόμβοι x 3), δηλαδή για την περίπτωση των 8 κόμβων

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \\ N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \\ N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_4 \\ N_5 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 \\ N_6 & 0 & 0 \\ 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_6 \\ N_7 & 0 & 0 \\ 0 & N_7 & 0 \\ 0 & 0 & N_7 \\ N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

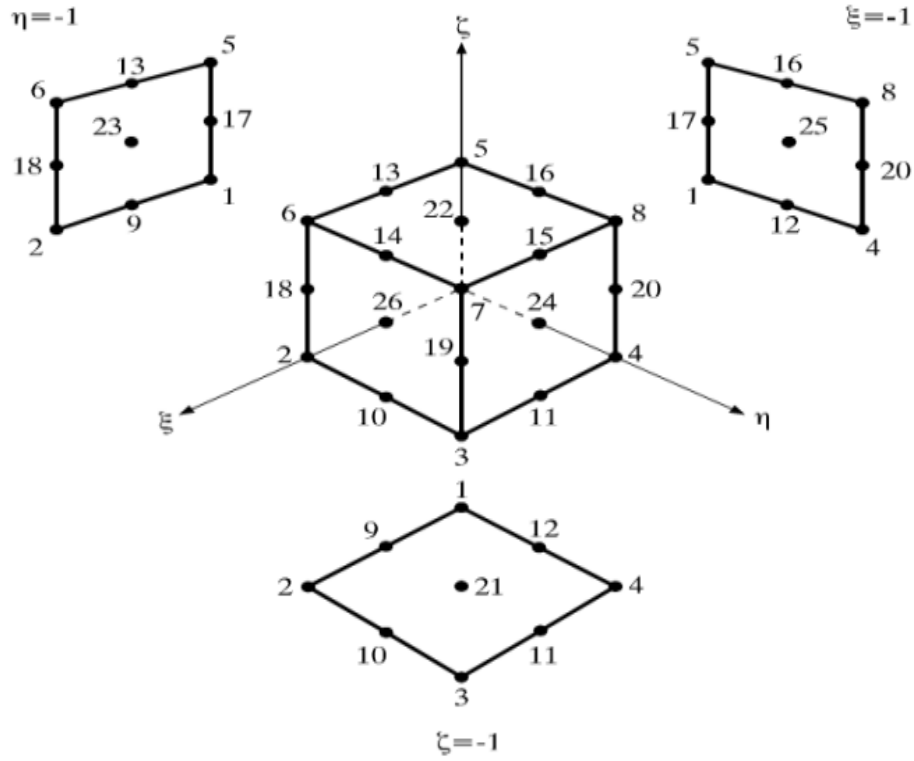
ή

$$[M] = \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} \sum_{k=1}^{n_g} w_i w_j w_k [N(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)]^T [\rho] [N(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)] \det[J] \quad (4.71)$$

4.2.7 ΕΞΑΕΔΡΙΚΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Σε αυτή την υποενότητα δίνονται οι συναρτήσεις σχήματος για στοιχείο τύπου Serendipity δευτέρου βαθμού, δηλαδή 20 κόμβων. Οι συναρτήσεις σχήματος παράγονται με ανάλογο τρόπο προς αυτό των αντίστοιχων συναρτήσεων σχήματος των επίπεδων ισοπαραμετρικών στοιχείων (βλ. Πίνακας 2: Συναρτήσεις Σχήματος τετραπλευρικών ισοπαραμετρικών στοιχείων με 4 έως 9 κόμβους). Το μητρώο στιβαρότητας και το μητρώο μάζας υπολογίζονται όπως και στη παράγραφο 4.2.6 ΕΞΑΕΔΡΙΚΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ. Για στοιχεία μεγαλύτερης τάξης, πάλι απαιτείται η επιλογή και ο συνδυασμός των κατάλληλων συναρτήσεων σχήματος από το στοιχείο ράβδου.

Κόμβος 27 στη θέση $\xi=\eta=\zeta=0$



Εικόνα 27: Εξαεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο 27 κόμβων

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi-\eta-\zeta-2) \\
 N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(\xi-\eta-\zeta-2) \\
 N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(\xi+\eta-\zeta-2) \\
 N_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(-\xi+\eta-\zeta-2) \\
 N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(-\xi-\eta+\zeta-2) \\
 N_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(+\xi-\eta+\zeta-2) \\
 N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(+\xi+\eta+\zeta-2) \\
 N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(-\xi+\eta+\zeta-2) \\
 N_9 &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta) \\
 N_{10} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi)(1-\zeta) \\
 N_{11} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta) \\
 N_{12} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi)(1-\zeta)
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
N_{13} &= \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\
N_{14} &= \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi)(1 + \zeta) \\
N_{15} &= \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\
N_{16} &= \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 - \xi)(1 + \zeta) \\
N_{17} &= \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 - \xi)(1 - \eta) \\
N_{18} &= \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi)(1 - \eta) \\
N_{19} &= \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi)(1 + \eta) \\
N_{20} &= \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 - \xi)(1 + \eta)
\end{aligned}$$

4.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ NEWMARK

Επιστρέφουμε σε αυτό το σημείο στην εξίσωση κίνησης (4.2). Εφόσον η εξωτερική διέγερση δεν περιγράφεται από μία συνάρτηση, αλλά μεταβάλλεται αυθαίρετα με το χρόνο, προφανώς για την επίλυση της θα χρησιμοποιηθούν αριθμητικές μέθοδοι. Τέτοιου είδους προβλήματα αντιμετωπίζονται με αριθμητικές μεθόδους χρονικών βημάτων για την ολοκλήρωση διαφορικών εξισώσεων. Παρακάτω δίνουμε έμφαση σε μια συγκεκριμένη, τη μέθοδο Newmark, καθώς αυτή χρησιμοποιείται και στον κώδικα της εργασίας. Στο εξής, η γραφή με **έντονα** γράμματα θα προσδίδει την ιδιότητα του μητρώου, π.χ. **u**.

Μέθοδοι χρονικών βημάτων

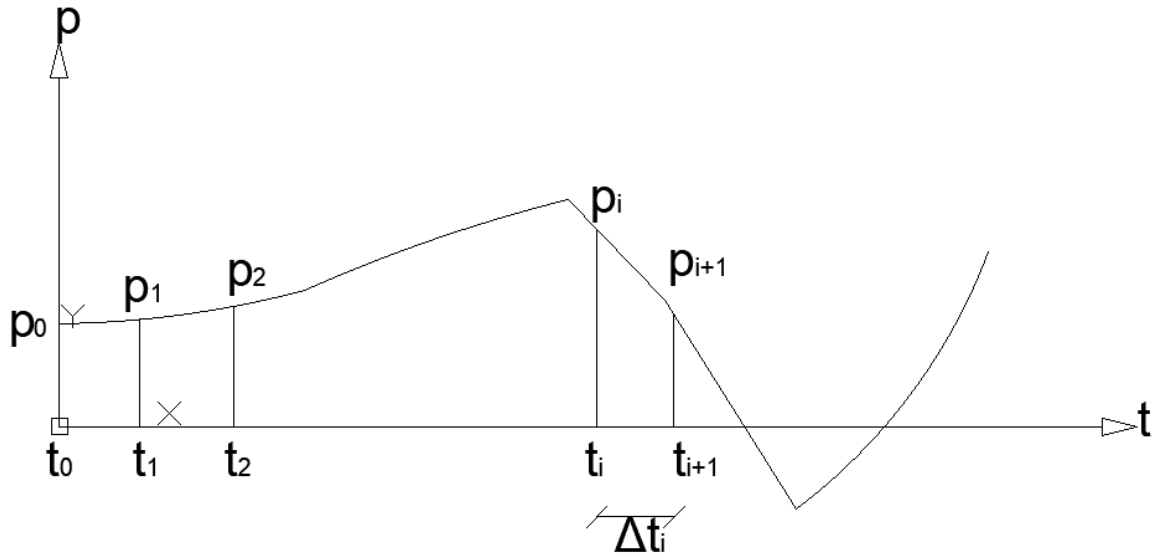
Για ένα ελαστικό σύστημα η εξίσωση κίνησης **χωρίς απόσβεση** που πρέπει να επιλυθεί αριθμητικά είναι:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (4.73a)$$

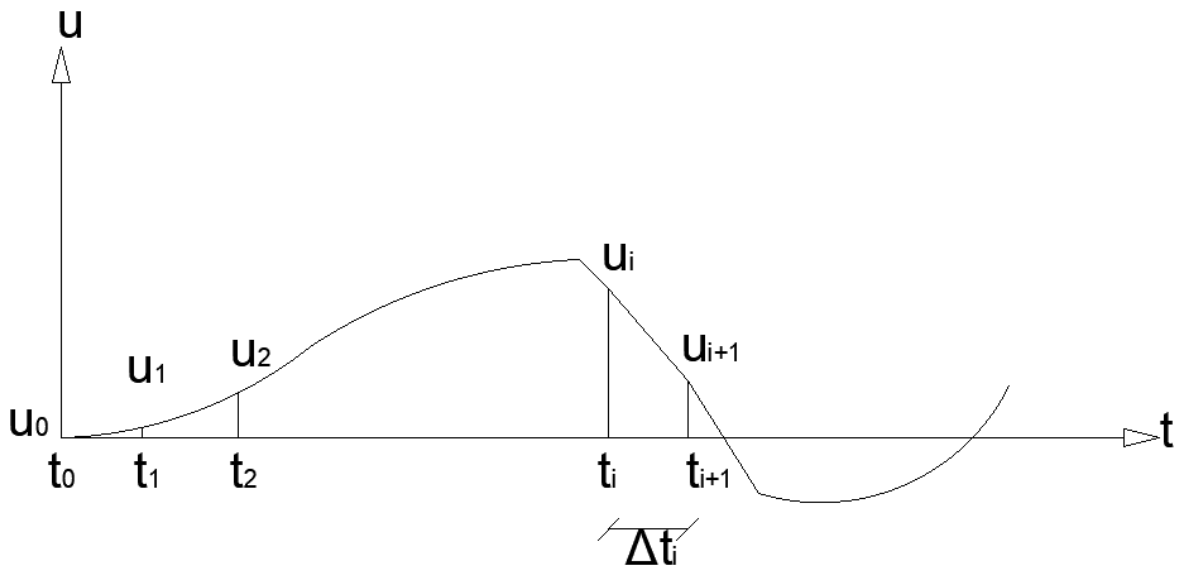
με αρχικές συνθήκες:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0) \quad \dot{\mathbf{u}}_0 = \dot{\mathbf{u}}(0) \quad (4.73b)$$

Η σεισμική διέγερση δίνεται από μία σεισμική καταγραφή, ένα επιταχυνσιογράφημα δηλαδή, και αποτελείται από ένα πλήθος διακριτών τιμών $\ddot{u}_{g,i} = \ddot{u}_g(t_i)$, με $i=0,1,2,\dots,N$, όπου N είναι το πλήθος των καταγραφών. Στη γενική περίπτωση έχουμε μια εξωτερική φόρτιση $p(t)$.



Εικόνα 28: Διακριτές τιμές της φόρτισης



Εικόνα 29: Διακριτές τιμές της μετατόπισης

Το χρονικό διάστημα είναι συνήθως σταθερό και λαμβάνεται ίσο με

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad (4.74)$$

Έτσι η απόκριση προσδιορίζεται για τις διακριτές χρονικές στιγμές t_i . Τη χρονική στιγμή i η μετατόπιση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του συστήματος είναι u_i , \dot{u}_i , \ddot{u}_i αντιστοίχως και ικανοποιούν την εξίσωση (4.73)

$$m\ddot{u}_i + k u_i = -m\ddot{u}_{g,i} \quad (4.75)$$

Με τη μέθοδο Newmark, την οποία και θα παρουσιάσουμε στο επόμενο εδάφιο, θα προσδιορίσουμε τα μεγέθη της απόκρισης την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή $i+1$, u_{i+1} , \dot{u}_{i+1} , \ddot{u}_{i+1} τα οποία με τη σειρά τους θα ικανοποιούν την εξίσωση (4.73)

$$m\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + k\mathbf{u}_{i+1} = -m\ddot{\mathbf{u}}_{g,i+1} \quad (4.76)$$

Λύνοντας την εξίσωση (4.73) για διαδοχικές χρονικές στιγμές, μέχρι τη χρονική στιγμή N, λαμβάνουμε την επιθυμητή απόκριση.

Μέθοδος Newmark

Η μέθοδος Newmark βασίζεται στην έκφραση πεπερασμένων διαφορών της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Η ταχύτητα και η επιτάχυνση δίνονται ως εξής:

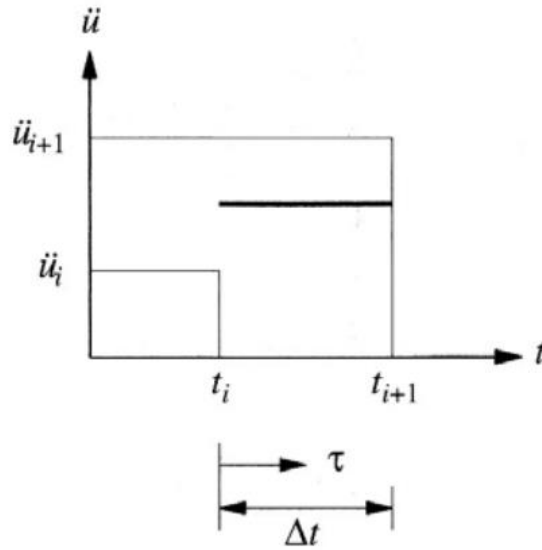
$$\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + [(1 - \gamma)\Delta t]\ddot{\mathbf{u}}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} \quad (4.77a)$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + (\Delta t)\dot{\mathbf{u}}_i + [(0,5 - \beta)(\Delta t)^2]\ddot{\mathbf{u}}_i + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} \quad (4.77b)$$

Οι παράμετροι β και γ ορίζουν την μεταβολή της επιτάχυνσης σε ένα χρονικό βήμα και προσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά της ευστάθειας και της ακρίβειας της μεθόδου. Εδώ επιλέγουμε $\gamma=0,50$ και $\beta=0,25$. Έτσι, κάνοντας χρήση των τριών τελευταίων εξισώσεων, μπορούμε να υπολογίσουμε τα μεγέθη \mathbf{u}_{i+1} , $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$, $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$. Βέβαια απαιτούνται επαναλήψεις, διότι ο άγνωστος $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$ εμφανίζεται και στο δεξιό μέλος των εξισώσεων της μεθόδου Newmark.

Παρόλα αυτά για γραμμικά συστήματα, όπως στη περίπτωση μας, και με διαφορετική διατύπωση των εξισώσεων του Newmark, μπορούμε να επιλύσουμε τις εξισώσεις χωρίς επαναληπτική διαδικασία.

Ειδική περίπτωση σταθερής μέσης επιτάχυνσης



Εικόνα 30: Σταθερή μέση επιτάχυνση

Υποθέτουμε ότι η μεταβολή της επιτάχυνσης σε ένα χρονικό βήμα είναι σταθερή και ίση με τη μέση επιτάχυνση, άρα

$$\ddot{\mathbf{u}}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \ddot{\mathbf{u}}_i) \quad (4.78)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση ως προς τ , υπολογίζουμε τη μεταβολή της ταχύτητας στο χρονικό βήμα

$$\dot{\mathbf{u}}(\tau) = \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\tau}{2}(\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \ddot{\mathbf{u}}_i) \quad (4.79)$$

Αντικαθιστώντας στη τελευταία $\tau=\Delta t$, υπολογίζουμε την ταχύτητα στο επόμενο βήμα, δηλαδή στη χρονική στιγμή $i+1$

$$\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \ddot{\mathbf{u}}_i) \quad (4.80)$$

Με εκ νέου ολοκλήρωση της εξίσωσης (4.79) παίρνουμε τη μεταβολή της μετατόπισης στο χρονικό βήμα

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_i + \tau\dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\tau^2}{4}(\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \ddot{\mathbf{u}}_i) \quad (4.81)$$

και αντικαθιστώντας $\tau=\Delta t$ υπολογίζουμε την μετατόπιση στο επόμενο βήμα

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \ddot{\mathbf{u}}_i) \quad (4.82)$$

Παρατήρηση: Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (4.80) και (4.82) με την εξίσωση (4.77) παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις του Newmark με $\gamma = \frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{4}$ είναι ίδιες με αυτές που προέκυψαν με την υπόθεση της σταθερής μέσης επιτάχυνσης.

Γραμμικά συστήματα

Όταν αντιμετωπίζουμε γραμμικά συστήματα, όπως στη περίπτωση μας, μπορούμε να τροποποιήσουμε την αρχική διατύπωση των εξισώσεων του Newmark, έτσι ώστε να μην χρειάζεται επαναληπτική διαδικασία για την επίλυση των εξισώσεων (4.76) και (4.77).

Από την εξίσωση (4.77b), εκφράζουμε το $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$ συναρτήσει του \mathbf{u}_{i+1} :

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{u}}_i \quad (4.83)$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία εξίσωση στην (4.77a) παίρνουμε το $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$ συναρτήσει του $\dot{\mathbf{u}}_i$

$$\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\mathbf{u}}_i + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{u}}_i \quad (4.84)$$

Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις στην εξίσωση (4.76) η οποία και περιγράφει την δυναμική απόκριση του συστήματος στην χρονική στιγμή $i+1$, παίρνουμε

$$\hat{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{p}}_{i+1} \quad (4.85)$$

όπου

$$\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{c} + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\mathbf{m} \quad (4.86)$$

και

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}_{i+1} = \mathbf{p}_{i+1} + & \left[\frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\mathbf{m} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{c}\right]\mathbf{u}_i + \left[\frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{m} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\mathbf{c}\right]\dot{\mathbf{u}}_i \\ & + \left[\left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\mathbf{m} + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\mathbf{c}\right]\ddot{\mathbf{u}}_i \end{aligned} \quad (4.87)$$

ή για τη περίπτωση μας όπου δεν έχουμε απόσβεση

$$\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\mathbf{m} \quad (4.88)$$

και

$$\hat{\mathbf{p}}_{i+1} = \mathbf{p}_{i+1} + \left[\frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\mathbf{m}\right]\mathbf{u}_i + \left[\frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{m}\right]\dot{\mathbf{u}}_i + \left[\left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\mathbf{m}\right]\ddot{\mathbf{u}}_i \quad (4.89)$$

Τώρα πλέον γνωρίζουμε τα $\hat{\mathbf{k}}$ και $\hat{\mathbf{p}}_{i+1}$, αφού γνωρίζουμε τόσο το μητρώο στιβαρότητας \mathbf{k} όσο και το μητρώο μάζας \mathbf{m} , τις παραμέτρους γ και β του αλγορίθμου (εμείς τις έχουμε επιλέξει), καθώς και τη μετατόπιση \mathbf{u}_i , τη ταχύτητα $\dot{\mathbf{u}}_i$ και την επιτάχυνση $\ddot{\mathbf{u}}_i$ του συστήματος τη χρονική στιγμή i . Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη μετατόπιση τη χρονική στιγμή $i+1$ ως

$$\mathbf{u}_{i+1} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_{i+1}}{\hat{\mathbf{k}}} \quad (4.90)$$

Με το \mathbf{u}_{i+1} καταφεύγουμε στις εξισώσεις (4.84) και (4.87) για να υπολογίσουμε την ταχύτητα $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$ και την επιτάχυνση $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$ τη χρονική στιγμή $i+1$.

Η επιτάχυνση μπορεί να υπολογιστεί και με χρήση της εξίσωσης κίνησης τη χρονική στιγμή $i+1$, δηλαδή

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \frac{\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} - \mathbf{k}\mathbf{u}_{i+1}}{\mathbf{m}} \quad (4.91)$$

Σύγκλιση – Ευστάθεια – Ακρίβεια

Προκειμένου μια αριθμητική μέθοδος να μπορέσει να αντικαταστήσει μια αναλυτική επίλυση θα πρέπει να **συγκλίνει**, δηλαδή όσο μικραίνει το χρονικό βήμα, τόσο η αριθμητική λύση να πλησιάζει την ακριβή, να είναι **ευσταθής**, δηλαδή να μην επηρεάζεται από αριθμητικά σφάλματα στρογγυλοποίησης και να είναι **ακριβής**, δηλαδή να παρέχει αποτελέσματα που βρίσκονται αρκετά κοντά στην ακριβή λύση.

Η μέθοδος Newmark είναι ευσταθής αν

$$\frac{\Delta t}{T_n} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \quad (4.92)$$

Η συνθήκη αυτή για $\gamma=0,50$ και $\beta=0,25$ δίνει

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \infty \quad (4.93)$$

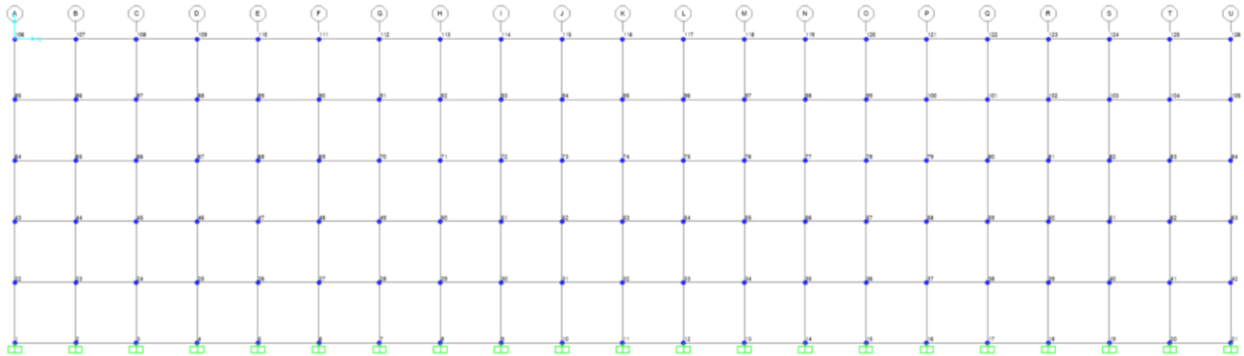
Άρα η μέθοδος της μέσης επιτάχυνσης είναι **πάντα ευσταθής**, ανεξαρτήτως του χρονικού βήματος Δt . Ωστόσο μικρή σημασία έχει αυτή η πληροφορία, καθώς για να είναι **ακριβής** η μέθοδος, απαιτούνται πολύ μικρότερα Δt . Τυπικά επιλέγεται ένα βήμα έτσι ώστε να είναι τουλάχιστον 10 φορές μικρότερο από την πρώτη ιδιοπερίοδο του συστήματος, δηλαδή

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0,1 \quad (4.94)$$

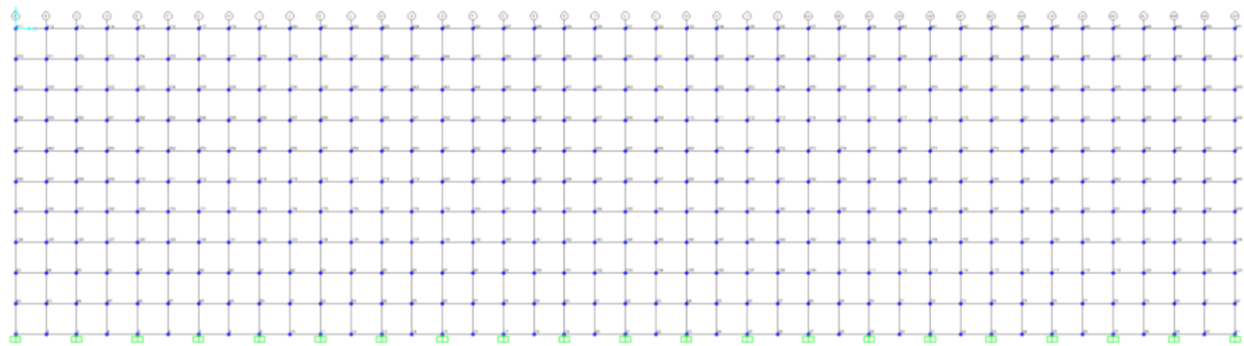
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Χαρακτηριστικά εδάφους

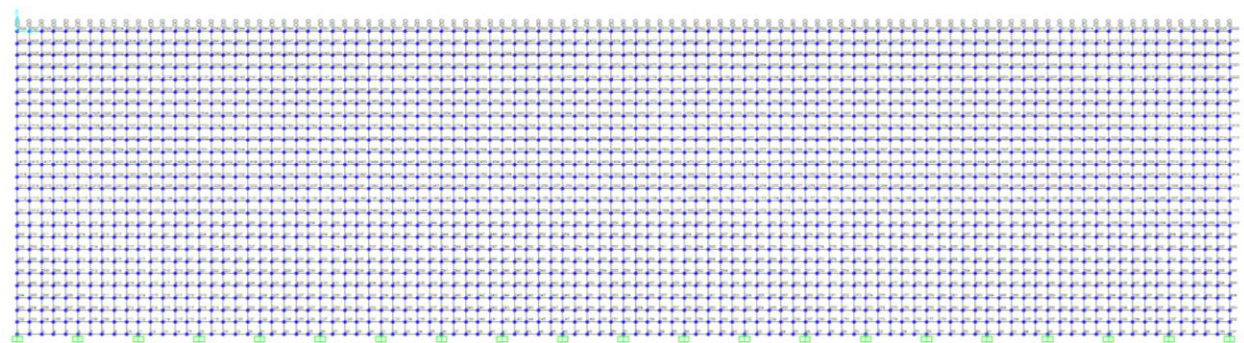
Για να ελέγξουμε την ακρίβεια της μεθόδου των φασματικών στοιχείων, δημιουργούμε μια εδαφική επιφάνεια -εδαφική τομή- διαστάσεων 20m πλάτους και 5m βάθους. Η επιφάνεια αυτή προσομοιώνεται με έναν κানাβο πεπερασμένων στοιχείων. Ο κানাβος αυτός μπορεί να αποτελείται από 100, 400, 2.500 ή 10.000 πεπερασμένα στοιχεία κάθε φορά. Ακόμη θεωρούμε συνθήκες πάκτωσης στη βάση του.



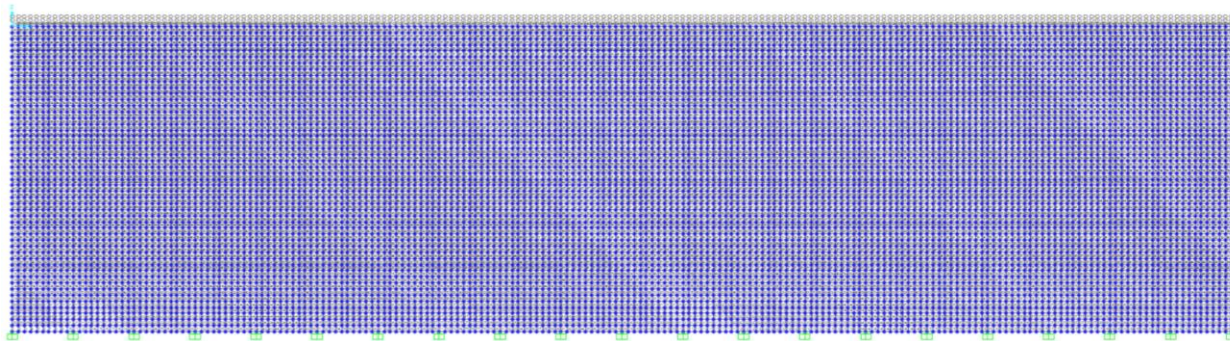
Εικόνα 31: Προσομοίωση εδάφους με 100 στοιχεία



Εικόνα 32: Προσομοίωση εδάφους με 400 στοιχεία



Εικόνα 33: Προσομοίωση εδάφους με 2.500 στοιχεία



Εικόνα 34: Προσομοίωση εδάφους με 10.000 στοιχεία

Προκειμένου το πρόβλημα να γίνει πιο ρεαλιστικό, αποδίδουμε στα στοιχεία μέτρο ελαστικότητας E , πυκνότητα ρ και λόγο του Poisson ν . Υποθέτουμε ότι το έδαφος αποτελείται από πυκνή άμμο, δηλαδή κατηγορίας C κατά τον EC8. Έτσι, παίρνουμε μια μέση τιμή για την ταχύτητα διάδοσης διατμητικών κυμάτων στο έδαφος $v_{s,30} = 250\text{m/s}$

Κατάταξη εδαφών				
Κατηγορία εδάφους	Περιγραφή στρωματογραφίας	Παράμετροι		
		$v_{s,30}$	N_{SPT}	c_u (kPa)
A	Βράχος ή άλλος βραχώδης γεωλογικός σχηματισμός που περιλαμβάνει το πολύ 5 m ασθενέστερου επιφανειακού υλικού	> 800	–	–
B	Αποθέσεις πολύ πυκνής άμμου, χαλικών, ή πολύ σκληρής αργίλου, πάχους τουλάχιστον αρκετών δεκάδων μέτρων, που χαρακτηρίζονται από βαθμιαία βελτίωση των μηχανικών ιδιοτήτων με το βάθος	360 - 800	> 50	> 250
C	Βαθιές αποθέσεις πυκνής ή μετρίως πυκνής άμμου, χαλικών ή σκληρής αργίλου πάχους από δεκάδες έως πολλές εκατοντάδες μέτρων	180 - 360	15 - 50	70 - 250
D	Αποθέσεις χαλαρών έως μετρίως χαλαρών μη συνεκτικών υλικών (με ή χωρίς κάποια μαλακά στρώματα συνεκτικών υλικών), ή κυρίως μαλακά έως μετρίως σκληρά συνεκτικά υλικά	< 180	< 15	< 70
E	Εδαφική τομή που αποτελείται από ένα επιφανειακό στρώμα ύψους με τιμές v_s κατηγορίας C ή D και πάχους που ποικίλλει μεταξύ περίπου 5 m και 20 m, με υπόστρωμα από πιο σκληρό υλικό με $v_s > 800\text{ m/s}$			
S_1	Αποθέσεις που αποτελούνται ή που περιέχουν ένα στρώμα πάχους τουλάχιστον 10 m μαλακών αργίλων/ιλών με υψηλό δείκτη πλαστικότητας ($PI > 40$) και υψηλή περιεκτικότητα σε νερό	< 100 (ενδεικτικό)	–	10 - 20
S_2	Στρώματα ρευστοποιήσιμων εδαφών, ευαίσθητων αργίλων, ή οποιαδήποτε άλλη εδαφική τομή που δεν περιλαμβάνεται στους τύπους A – E ή S_1			

Εικόνα 35: Κατηγορίες εδάφους κατά τον EC8

Για πυκνότητα εδάφους $\rho=2.000\text{kg/m}^3$ υπολογίζουμε το διατμητικό μέτρο ελαστικότητας G από τη σχέση

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (5.1)$$

ή

$$G = \rho \cdot v_s^2 \Leftrightarrow G = 2.000 \cdot 250^2$$

και τελικά $G=125\text{MPa}$.

Η παραπάνω εξίσωση δίνει το άνω όριο του διατμητικού μέτρου ελαστικότητας G_{\max} : καθώς αυξάνει η παραμόρφωση, η δυσκαμψία του εδάφους μειώνεται. Ο συντελεστής μείωσης του μέτρου ελαστικότητας, δηλαδή ο λόγος G/G_{\max} , εξαρτάται από περιβαλλοντικούς παράγοντες και από τις συνθήκες φόρτισης. Επιπλέον, η στρωματογραφία των εδαφών είναι συχνά ετερογενής και μπορεί να χρειαστούν γεωτρήσεις για να προσδιοριστούν τα στρώματα, το πάχος τους αλλά και η ταχύτητα διάδοσης των διατμητικών κυμάτων.

Από πρόσφατες γεωτεχνικές μελέτες γνωρίζουμε πως κατά τη διάρκεια ισχυρών δονήσεων οι παραμορφώσεις του εδάφους ενδέχεται να φτάσουν την τιμή $\gamma=5 \times 10^{-3}$ ή ακόμη μεγαλύτερη, οδηγώντας σε λόγο διατμητικού μέτρου ελαστικότητας $G/G_{\max}=1/10$.

Στις εφαρμογές της παρούσας εργασίας εξετάζουμε την διάδοση κυμάτων από ισχυρές σεισμικές δονήσεις. Ο σκοπός όμως των εφαρμογών είναι να μελετηθεί η αξιοπιστία της μεθόδου των φασματικών στοιχείων. Επομένως, δεν μας ενδιαφέρει σε μεγάλο βαθμό η ενδεδειγμένη προσομοίωση των μηχανικών ιδιοτήτων του εδάφους, ειδικά όταν αυτές αφορούν την πλαστική περιοχή. Έτσι, για τους υπολογισμούς μας υποθέτουμε ότι **το έδαφος παραμένει στην ελαστική περιοχή και δεν διαθέτει απόσβεση** – έχει μικρές διατμητικές παραμορφώσεις - και λαμβάνουμε ένα διατμητικό μέτρο ελαστικότητας ίσο με το μισό που υπολογίσαμε από την σχέση (5.1), επομένως

$$G = 0.50G_{\max} \quad (5.2)$$

ή

$$G = 62,5\text{MPa}$$

Για λόγο του Poisson $\nu=0,3$ και από το νόμο του Hook υπολογίζουμε το μέτρο ελαστικότητας E ως εξής:

$$E = 2 \cdot G \cdot (1 + \nu) \quad (5.3)$$

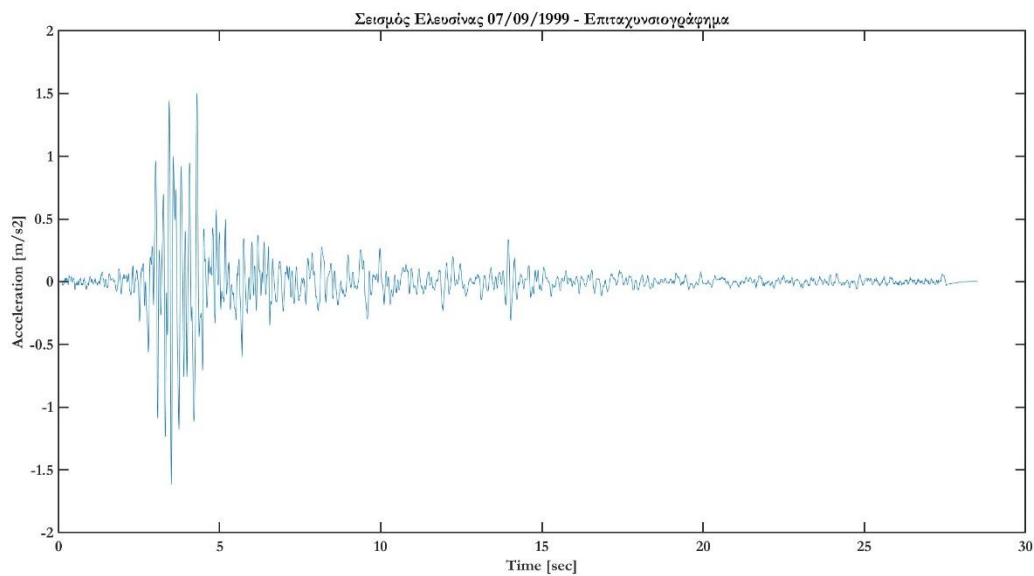
ή

$$E = 2 \cdot 62,5 \cdot (1 + 0,3)$$

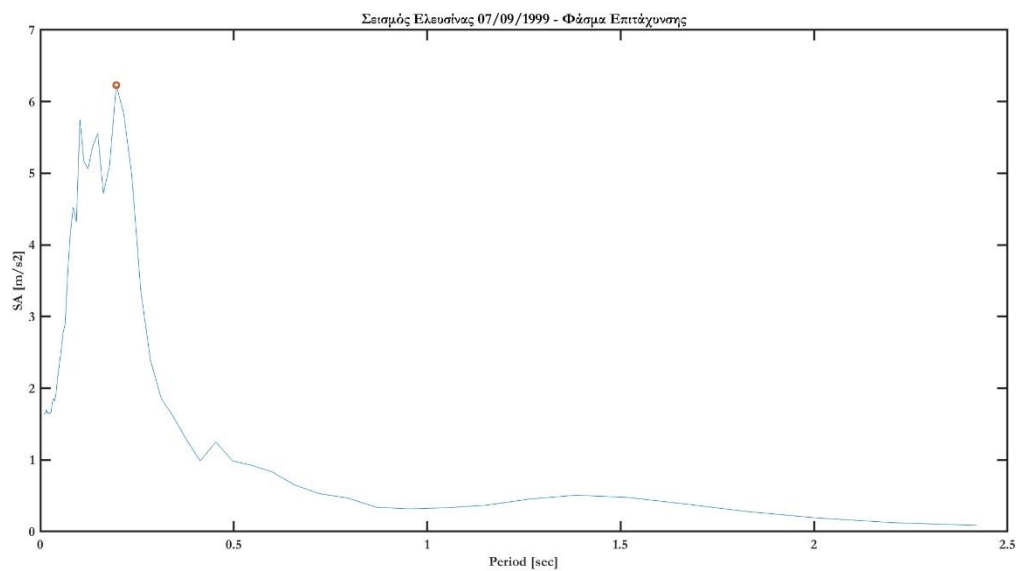
και τελικά $E=162,5\text{MPa}$.

Εξωτερική φόρτιση

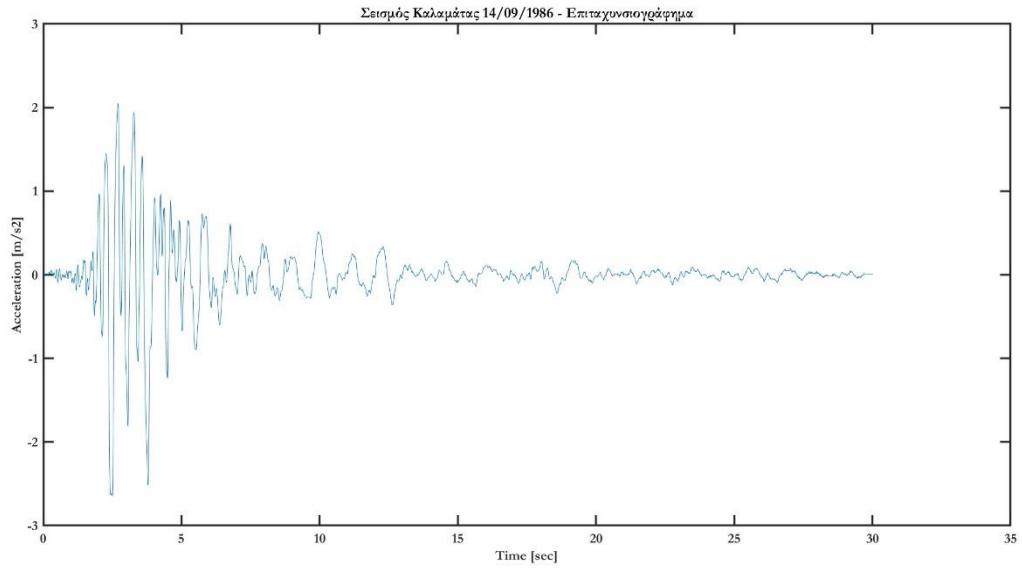
Εξετάζουμε 4 διαφορετικά σεισμικά γεγονότα, 2 από τον Ελλαδικό χώρο και 2 από το εξωτερικό. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε επιλέξει τους σεισμούς που έγιναν στην Καλαμάτα(KAL1) στις 14/09/1986, στην Ελευσίνα στις 07/09/1999, στο San Francisco-Loma Prieta(APEEL 10 - Skyline) των Η.Π.Α στις 17/10/1989 και στο Kobe(Abeno) της Ιαπωνίας στις 17/01/1995. Ακολουθούν τα επιταχυνσιογραφήματα και τα φάσματα επιταχύνσεων του κάθε σεισμού.



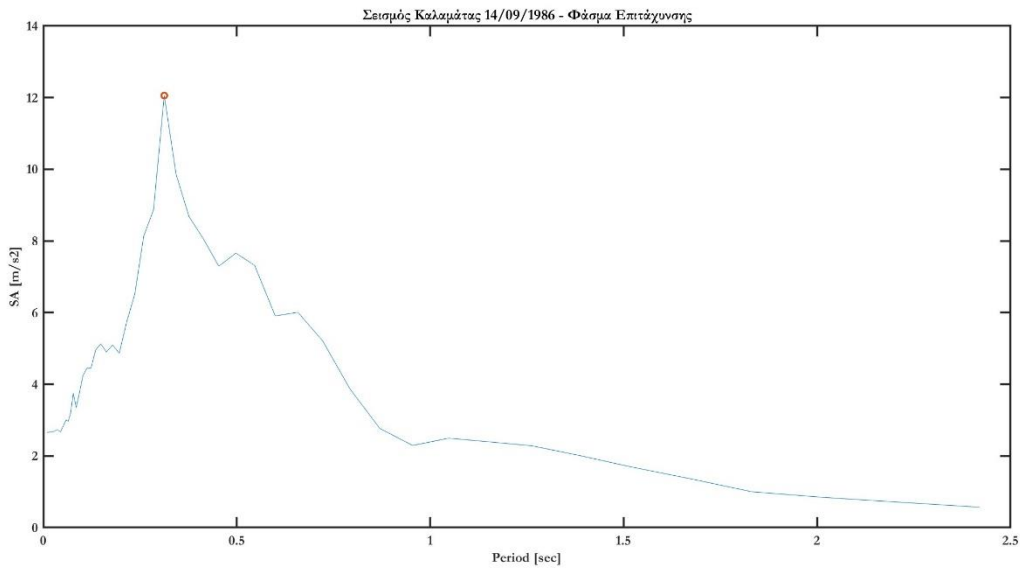
Εικόνα 36: Επιταχυνσιογράφημα σεισμού Ελευσίνας



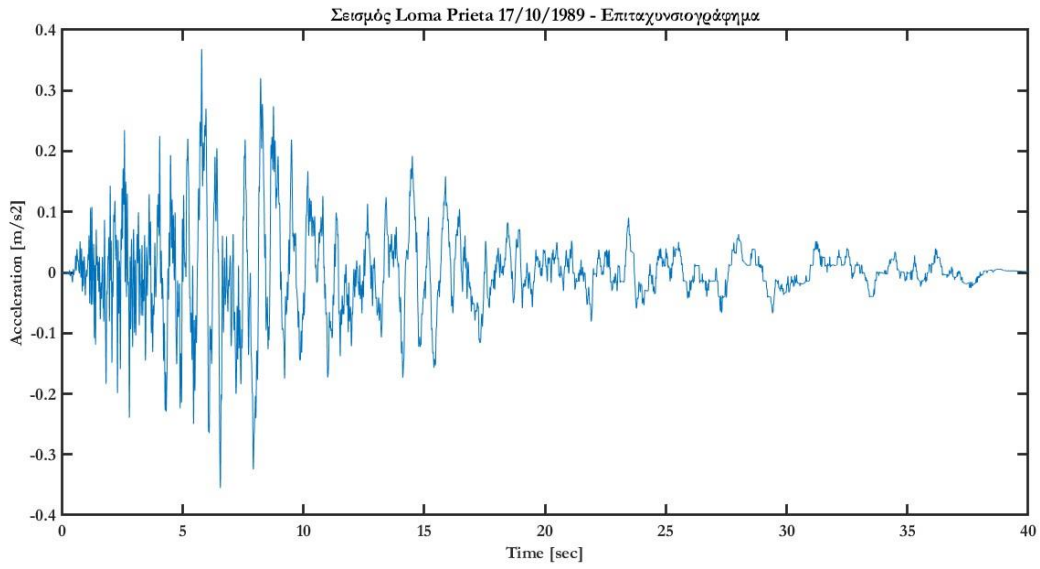
Εικόνα 37: Φάσμα Επιταχύνσεων σεισμού Ελευσίνας



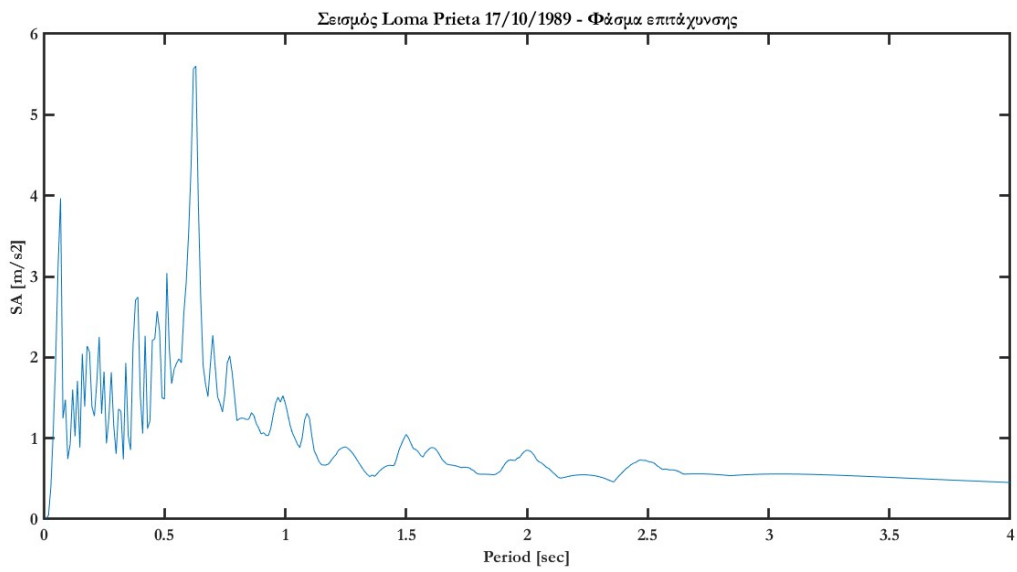
Εικόνα 38: Επιταχυνσιογράφημα σεισμού Καλαμάτα



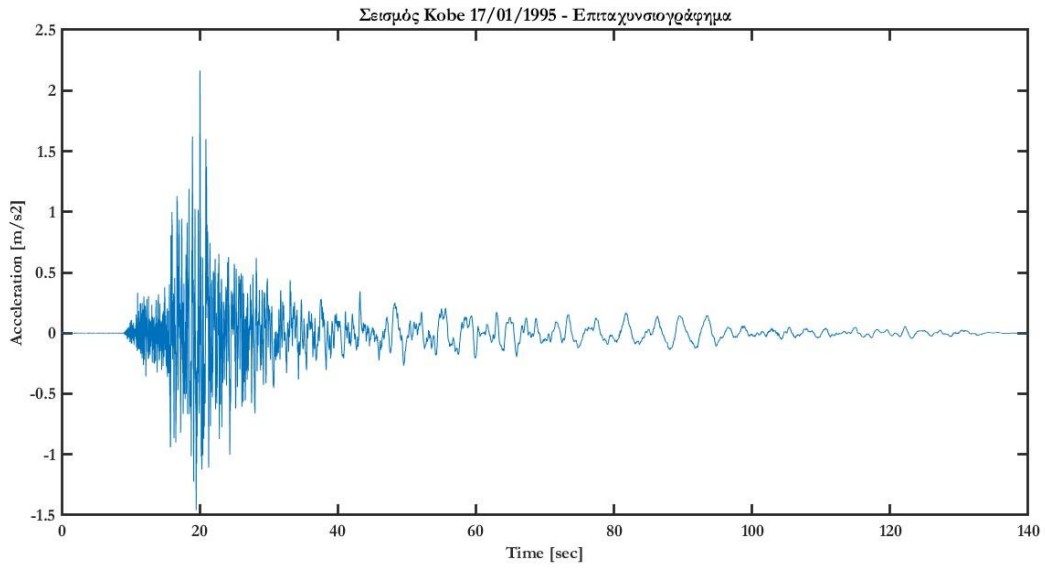
Εικόνα 39: Φάσμα Επιταχύνσεων σεισμού Καλαμάτας



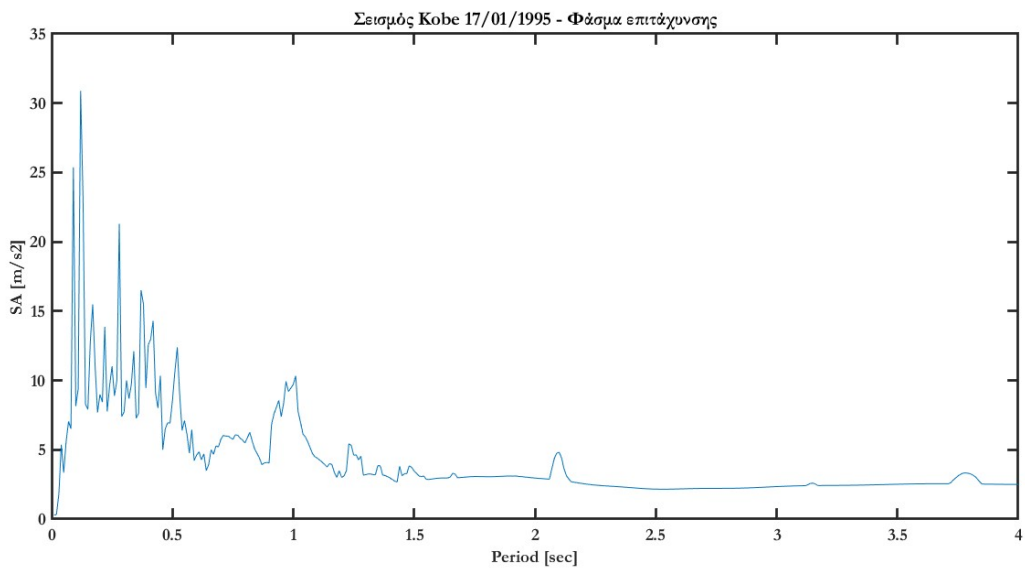
Εικόνα 40: Επιταχυνσιογράφημα σεισμού Loma Prieta



Εικόνα 41: Φάσμα επιταχύνσεων σεισμού Loma Prieta



Εικόνα 42: Επιταχυνσιογράφημα σεισμού Kobe



Εικόνα 43: Φάσμα επιταχύνσεων σεισμού Kobe

Διακριτοποίηση

Στις κλασικές εφαρμογές της SEM, επιλέγονται πολυώνυμα τάξης N, με $4 \leq N \leq 8$. Για τέτοιες τιμές, χρειάζονται τουλάχιστον πέντε κόμβοι GLL ανά μήκος κύματος, παντού στην περιοχή για να περιγράψουν σωστά το σεισμικό κύμα (π.χ. Komatitsch & Vilotte 1998). Αυτό σημαίνει ότι το μέγεθος των στοιχείων d και η πολυωνμική τάξη N περιορίζονται και τα δύο από το μικρότερο μήκος κύματος λ_{min} που διαδίδεται στο μέσο. Αυτή η συνθήκη μπορεί να συνοψιστεί με την ακόλουθη σχέση:

$$d \leq \frac{N}{5} \lambda_{min} \quad (5.4)$$

όπου

$$\lambda_{min}[m] = \frac{Velocity [m/s]}{Frequency [Hz]} \quad (5.5a)$$

ή

$$\lambda_{min}[m] = Velocity \left[\frac{m}{s} \right] \cdot Period [sec] \quad (5.5b)$$

Πρώτα επανα-υπολογίζουμε τη ταχύτητα διάδοσης των δευτερευόντων s κυμάτων, για να είναι συμβατό με το απομειωμένο διατμητικό μέτρο ελαστικότητας

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

ή

$$v_s = \sqrt{\frac{62,5MPa}{\frac{2.000kg}{m^3}}}$$

και τελικά $v_s = 176,77 \frac{m}{s}$.

Έπειτα, υπολογίζουμε τη ταχύτητα διάδοσης των κύριων p κυμάτων, σύμφωνα με τον τύπο της εδαφοδυναμικής

$$v_p = v_s \sqrt{\frac{1 - \nu}{0.5 - \nu}} \quad (5.6)$$

ή

$$v_p = 176,77 \sqrt{\frac{1 - 0,3}{0.5 - 0,3}}$$

και τελικά $v_p = 330,71 \frac{m}{s}$

Τα αποτελέσματα για κάθε σεισμικό γεγονός και για N=1 παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα. Η δεσπόζουσα ιδιοπερίοδος εκτιμάται από την συχνότητα που αντιστοιχεί στη μέγιστη επιτάχυνση του φάσματος.

Όνομα γεγονότος	Δεσπόζουσα Ιδιοπερίοδος [sec]	λ_{\min} [m]	d [m]
KOBE	0,56	261,9	52,38
LOMAPRIETA	0,34	159,02	31,8
ΕΛΕΥΣΙΝΑ	0,20	66,142	13,23
ΚΑΛΑΜΑΤΑ	0,31	102,52	20,5

Πίνακας 3: Απαιτούμενο μέγεθος στοιχείου ανά σεισμικό γεγονός

Στην περίπτωση μας, λόγω των μικρών διαστάσεων του εδαφικού όγκου δεν είναι κρίσιμη η παραπάνω σχέση για τον προσδιορισμό της μέγιστης διάστασης ενός στοιχείου, όπως καταδεικνύει και ο πίνακας άλλωστε. Έτσι οι διαστάσεις των στοιχείων λαμβάνονται ίσες με 1m x 1m.

Ευστάθεια – συνθήκη CFL

Μιας και χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Newmark για την αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης της κίνησης, δεν υπάρχει κάποια απαίτηση ευστάθειας. Παρόλα αυτά για λόγους πληρότητας, παρουσιάζεται εδώ η συνθήκη σύγκλισης CFL.

Στα μαθηματικά, η σύγκλιση των Courant–Friedrichs–Lewy είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τη σύγκλιση κατά την επίλυση ορισμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων (συνήθως υπερβολικών) αριθμητικά. Προκύπτει κατά την ρητή αριθμητική ολοκλήρωση στο χρόνο συστημάτων, όταν αυτά χρησιμοποιούνται για την αριθμητική λύση. Κατά συνέπεια, το χρονικό βήμα πρέπει να είναι μικρότερο από έναν ορισμένο χρόνο, διαφορετικά η προσομοίωση παράγει εσφαλμένα αποτελέσματα. Η συνθήκη πήρε το όνομά της από τους Richard Courant, Kurt Friedrichs και Hans Lewy που την περιέγραψαν στην εργασία τους το 1928.

Η **ευστάθεια** σε ρητά χρονικά σχήματα καθορίζεται από τον αριθμό CFL ο οποίος είναι ο λόγος της απόστασης που διανύει ένα κύμα σε ένα χρονικό βήμα προς τη μικρότερη απόσταση των κόμβων GLL

$$CFL = \frac{v_p \cdot dt}{\min(dx)} \quad (5.7)$$

Επομένως, η συνθήκη CFL εκφράζει ότι η απόσταση που διανύει οποιαδήποτε πληροφορία κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος εντός του πλέγματος πρέπει να είναι μικρότερη από την απόσταση μεταξύ των στοιχείων του πλέγματος. Με άλλα λόγια, οι πληροφορίες από ένα δεδομένο στοιχείο πλέγματος πρέπει να διαδίδονται μόνο στους άμεσους γείτονές του.

Ο αριθμός CFL πρέπει να είναι μικρότερος από μια κρίσιμη τιμή που εξαρτάται από το χρονοδιάγραμμα. Γενικά είναι κοντά στο 0,85 στη μια διάσταση ενώ για τις 2 διαστάσεις, το διαιρούμε με $\sqrt{2}$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η απόσταση των κόμβων GLL δεν είναι ομοιόμορφη και ότι καθώς αυξάνεται το πλήθος τους, τόσο μικραίνει η μικρότερη απόσταση dx και συνεπακόλουθα το χρονικό βήμα dt. Αυτό οδηγεί σε ταχύτατη αύξηση του υπολογιστικού όγκου καθώς απαιτούνται περισσότερα βήματα για ένα σύστημα περισσότερων βαθμών ελευθερίας. Γι' αυτό επιλέγουμε το πολύ 10 σημεία.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε για κάθε περίπτωση να υπολογίσουμε το χρονικό βήμα έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις ευστάθειας.

Για το μέγιστο επιτρεπτό χρονικό βήμα, πρέπει να ικανοποιείται η ανισότητα

$$CFL < \frac{0.85}{\sqrt{2}} \quad (5.8)$$

ή αντικαθιστώντας τη σχέση (5.7) στην (5.8)

$$\frac{v_p \cdot dt}{\min(dx)} < \frac{0.85}{\sqrt{2}} \quad (5.9a)$$

ή

$$dt < \frac{0.85 \cdot \min(dx)}{\sqrt{2} \cdot v_p} \quad (5.9b)$$

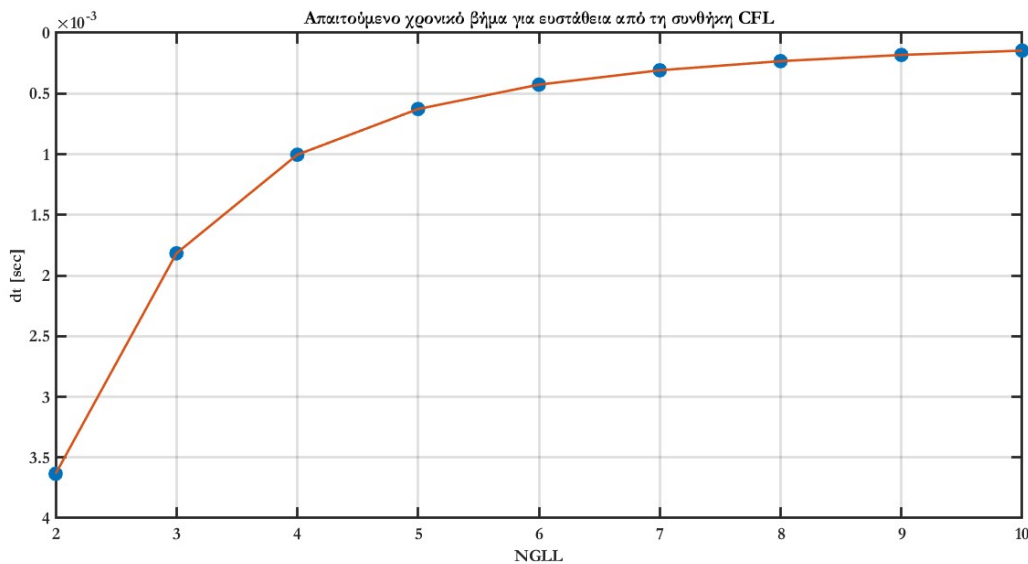
ή

$$dt < \frac{0.85 \cdot \min(dx)}{\sqrt{2} \cdot 330,71 \frac{m}{s}} \quad (5.9c)$$

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα

NGLL	min(dx) [m]	dt [sec]
2	2	0.003634753
3	1	0.001817376
4	0.552786405	0.001004621
5	0.345346329	0.000627624
6	0.234944676	0.000426983
7	0.169776104	0.000308547
8	0.128259851	0.000233096
9	0.100242005	0.000182177
10	0.080466092	0.000146237

Πίνακας 4: Απαιτούμενο χρονικό βήμα για ευστάθεια από τη συνθήκη CFL

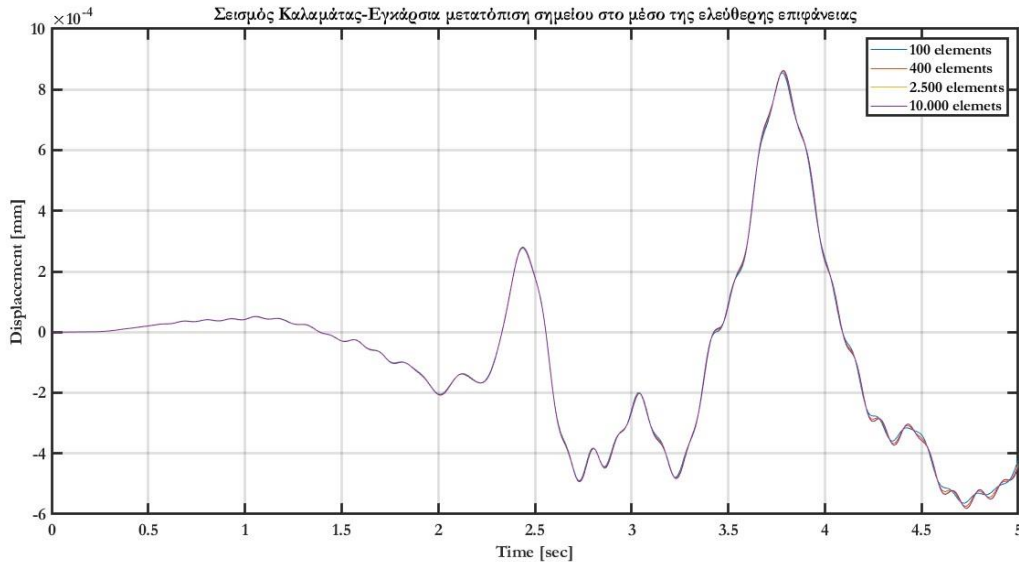


Εικόνα 44: Απαιτούμενο χρονικό βήμα για ευστάθεια από τη συνθήκη CFL

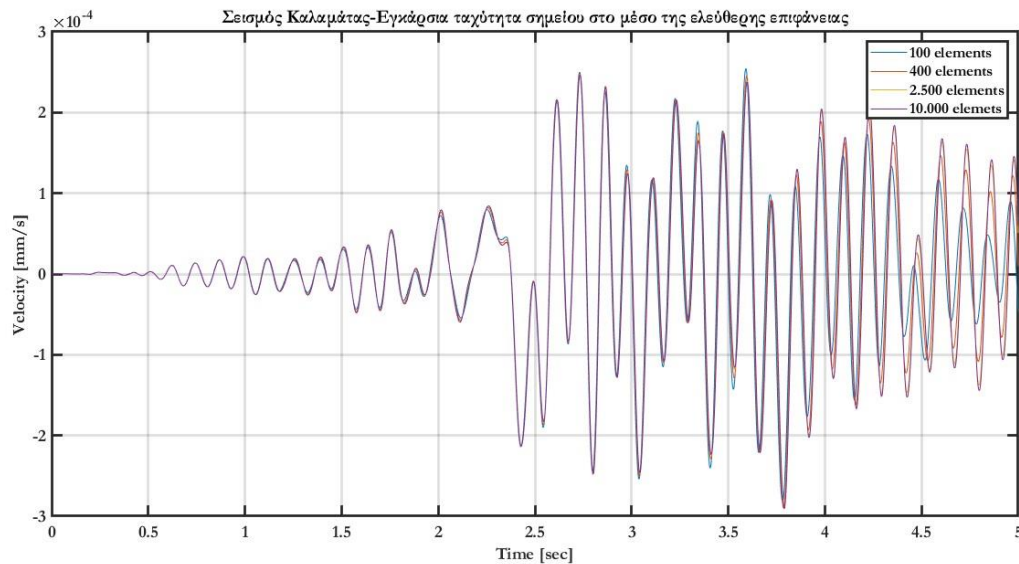
Τα παραπάνω αποτελέσματα καταδεικνύουν την αξία της μεθόδου Newmark. Παρατηρούμε ότι για παρεμβολή υψηλής τάξης απαιτείται πολύ μικρό – απαγορευτικό- βήμα. Ακόμη, η αύξηση του πλήθους των σημείων παρεμβολής, αυξάνει από μόνη της τον υπολογιστικό όγκο. Συνυπολογίζοντας και τους δύο αυτούς παράγοντες, καταλήγουμε στο ότι ιδανικά χρησιμοποιούμε πολυώνυμα τάξης 4 με 8, όπως έχουμε τονίσει και άλλες φορές στην παρούσα εργασία.

Σεισμός Καλαμάτας

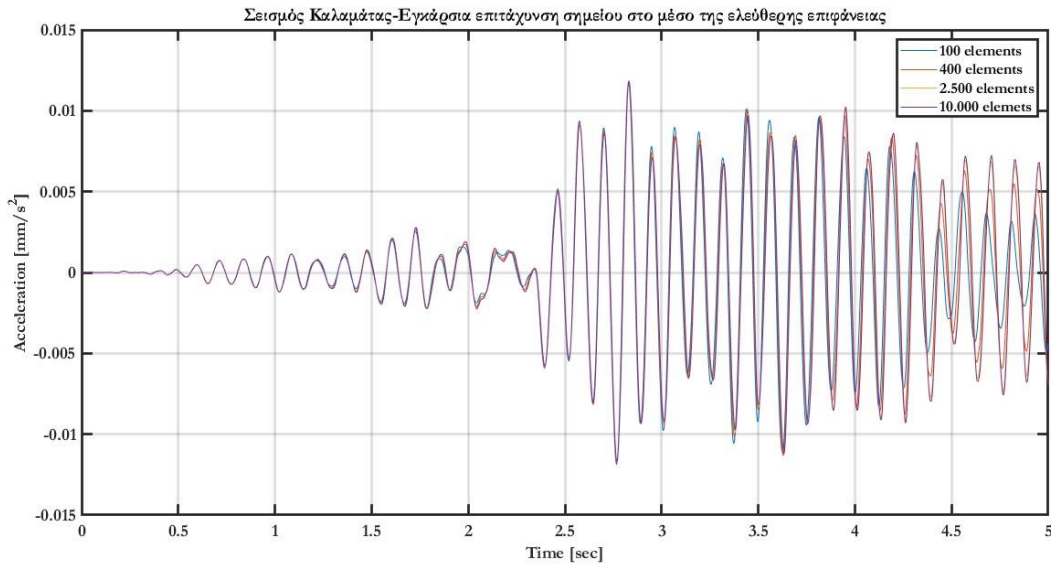
Για το σεισμό της Καλαμάτας απομονώθηκαν τα πρώτα 5 sec από το επιταχυνσιογράφημα και ασκήθηκαν σαν εξωτερική φόρτιση σε 2.000 βήματα ($dt=0,0025$ sec). Αρχικά ελέγχουμε με προσαρμογή τύπου h, δηλαδή πυκνώνοντας το πλέγμα, τη σύγκλιση των αποτελεσμάτων. Εξετάζουμε την αναπτυσσόμενη εγκάρσια μετατόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση στο μέσο του εδαφικού χωρίου, στην ελεύθερη επιφάνεια του.



Εικόνα 45: Σεισμός Καλαμάτας-Εγκάρσια μετατόπιση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας

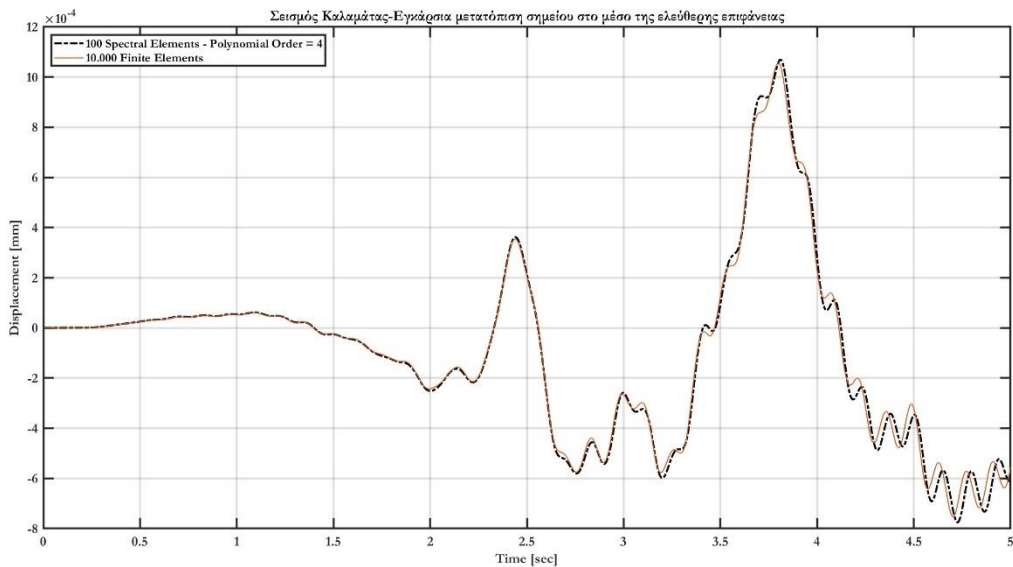


Εικόνα 46: Σεισμός Καλαμάτας-Εγκάρσια ταχύτητα σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας

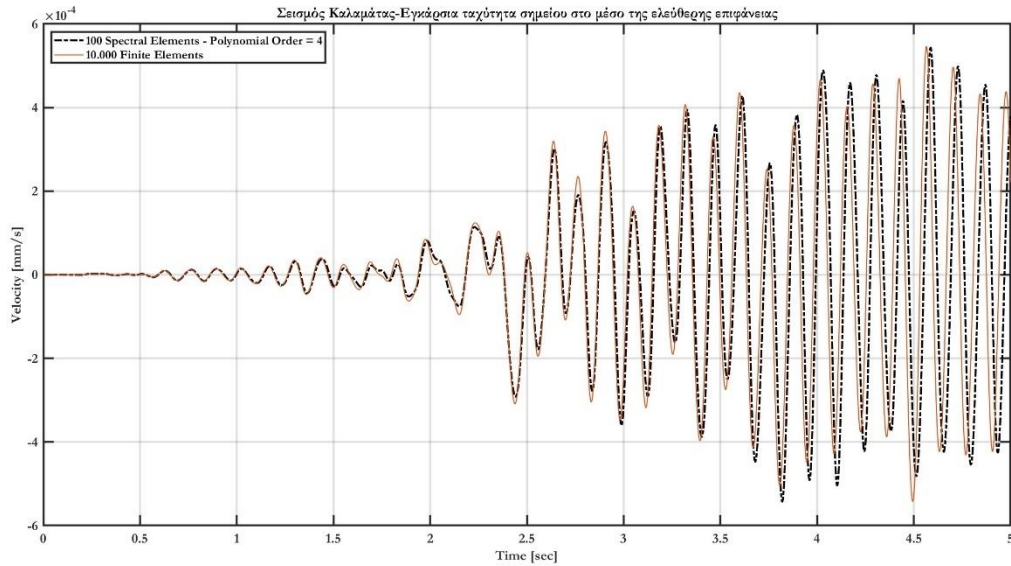


Εικόνα 47: Σεισμός Καλαμάτας-Εγκάρσια επιτάχυνση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας

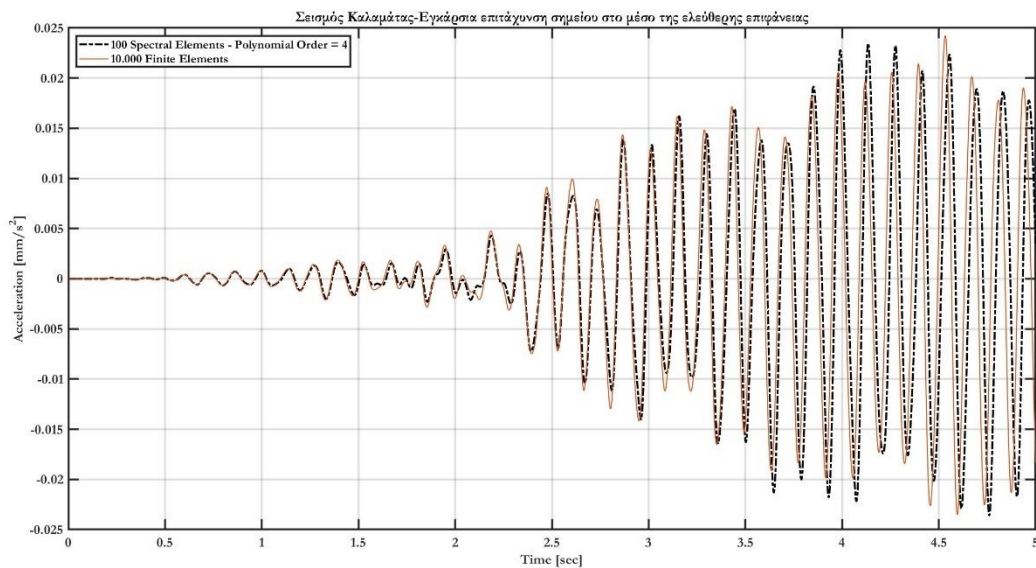
Παρατηρούμε ότι αν και στον υπολογισμό της μετατόπισης παίρνουμε αρκετά ακριβή αποτελέσματα, στον υπολογισμό της ταχύτητας και ειδικά της επιτάχυνσης έχουμε μεγάλες αποκλίσεις για το προσομοίωμα των 100 και των 400 στοιχείων. Το προσομοίωμα των 2.500 στοιχείων φαίνεται να είναι πολύ κοντά με αυτό των 10.000. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε το προσομοίωμα των 10.000 σημείων ως αξιόπιστο και να προχωρήσουμε ελέγχοντας τα αποτελέσματα της SFEM. Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα για κάναβο 100 φασματικών στοιχείων 4^{ου} βαθμού.



Εικόνα 48: Σεισμός Καλαμάτας: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας μετατόπισης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM

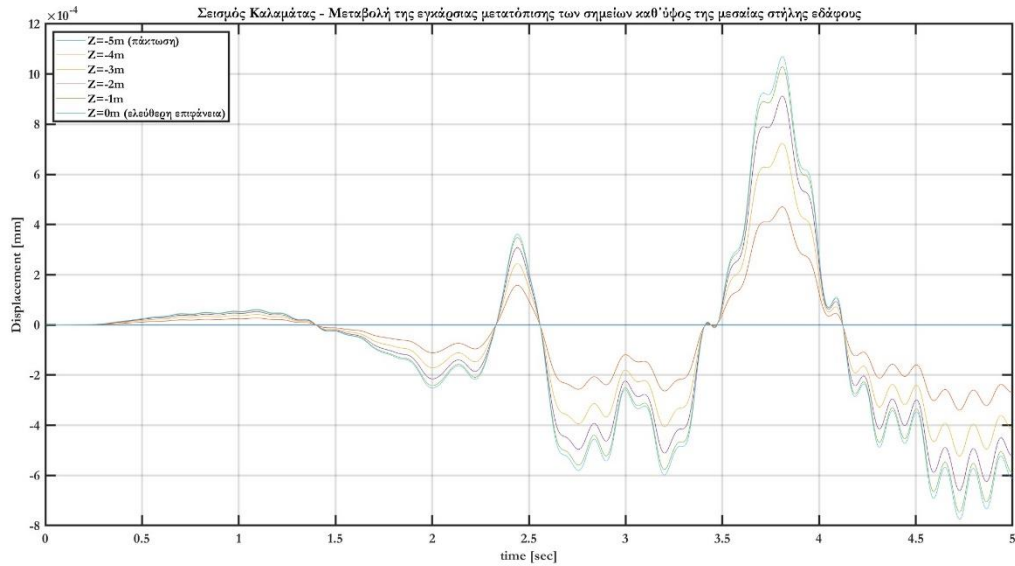


Εικόνα 49: Σεισμός Καλαμάτας: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας ταχύτητας σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM

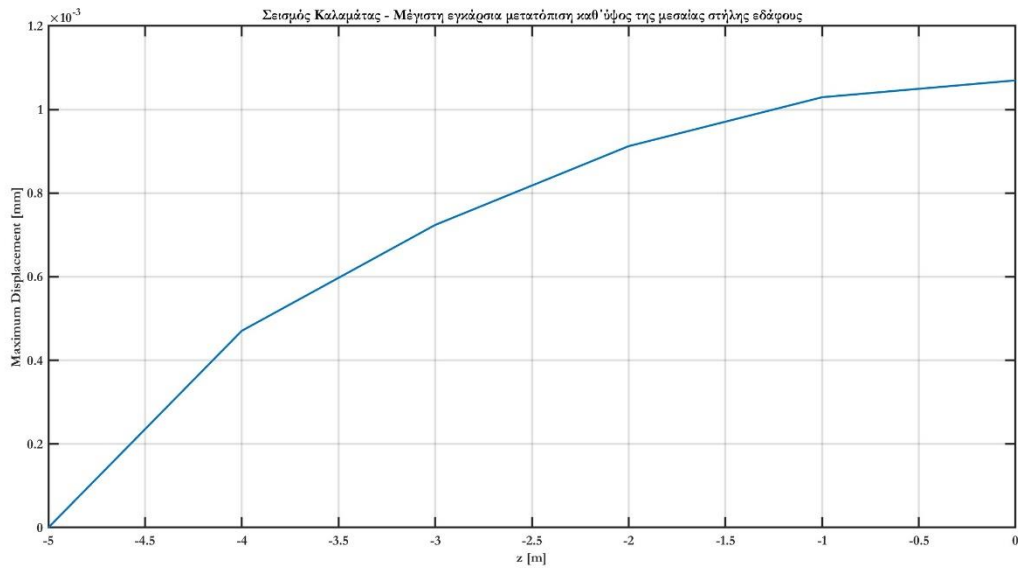


Εικόνα 50: Σεισμός Καλαμάτας: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας επιτάχυνσης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM

Παρατηρούμε ότι μόλις με 100 φασματικά στοιχεία μπορούμε να προσομοιώσουμε επακριβώς το ίδιο πρόβλημα αντί να χρησιμοποιήσουμε 10.000 κλασικά πεπερασμένα στοιχεία. Αυτό είναι σημαντικό πλεονέκτημα γιατί για παράδειγμα ακόμη και τα 400 στοιχεία έχουν μεγάλες αποκλίσεις ως προς τη χρονοϊστορία της αναπτυσσόμενης ταχύτητας και επιτάχυνσης σε σχέση με τα 2.500 και τα 10.000 στοιχεία. Τα αποτελέσματα που δίνει η SFEM σχεδόν ταυτίζονται με αυτά της FEM, με την μεγάλη διαφορά του πολύ μικρότερου υπολογιστικού κόστους, καθώς στη περίπτωση της SFEM έχουμε 3.402 βαθμούς ελευθερίας και άρα εξισώσεις προς επίλυση, ενώ στη FEM 20.502.



Εικόνα 51: Σεισμός Καλαμάτας: Μεταβολή της εγκάρσιας μετατόπισης των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους

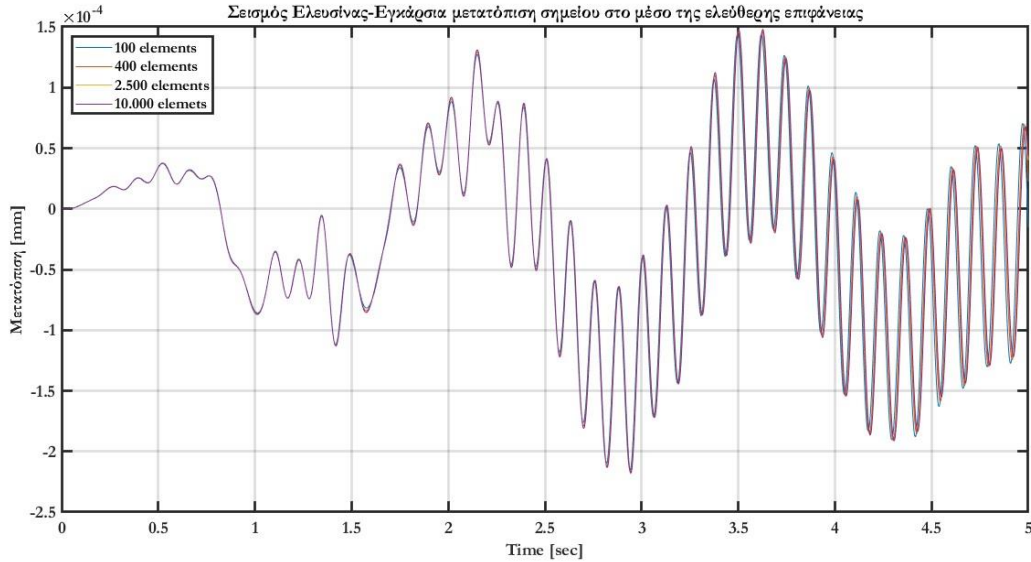


Εικόνα 52: Σεισμός Καλαμάτας: Μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους

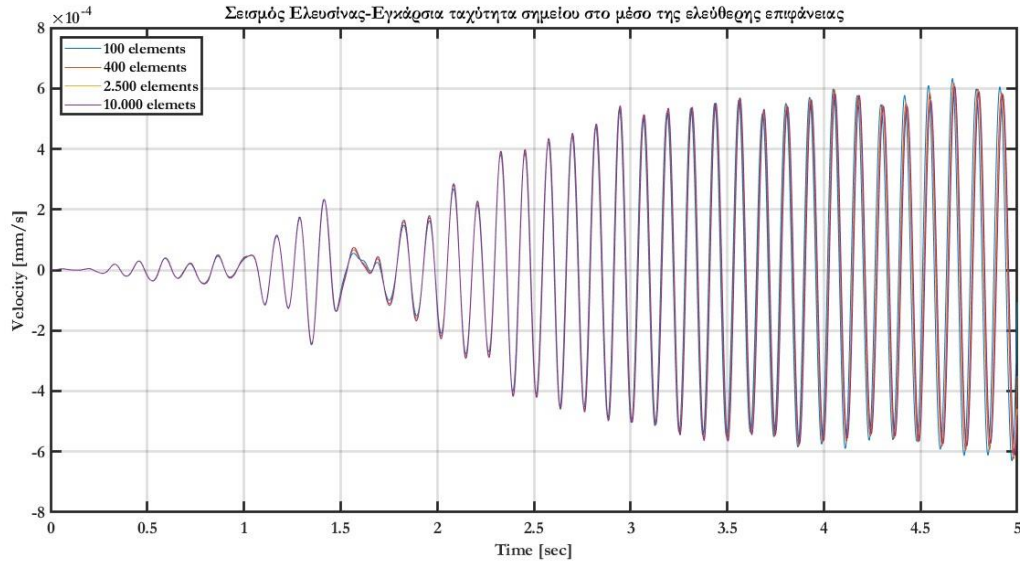
Οι παραπάνω εικόνες δείχνουν αφενός ότι καθ' ύψος της μεσαίας εδαφικής λωρίδας (αλλά και για οποιαδήποτε άλλη) τα σωματίδια βρίσκονται σε φάση και αφετέρου φαίνεται η κατανομή της μέγιστης μετρούμενης εγκάρσιας μετατόπισης καθ' ύψος της μεσαίας στήλης του εδάφους.

Σεισμός Ελευσίνας

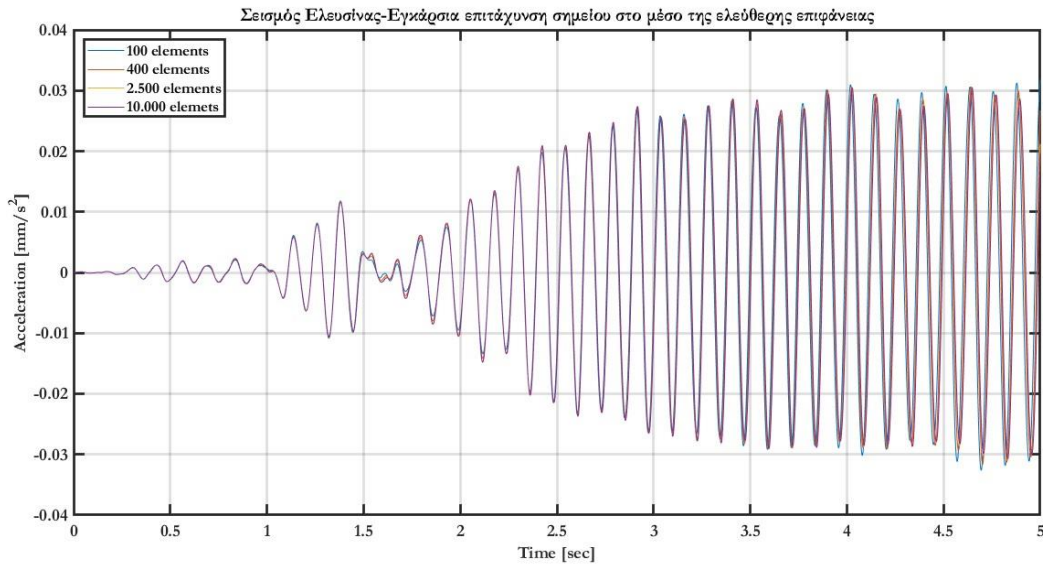
Για το σεισμό της Ελευσίνας απομονώθηκε το επιταχυνσιογράφημα από 2 sec μέχρι 7 sec και ασκήθηκε σαν εξωτερική φόρτιση σε 2.000 βήματα ($dt=0,0025\text{sec}$). Αρχικά ελέγχουμε με προσαρμογή τύπου h, δηλαδή πυκνώνοντας το πλέγμα, τη σύγκλιση των αποτελεσμάτων. Εξετάζουμε την αναπτυσσόμενη εγκάρσια μετατόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση στο μέσο του εδαφικού χωρίου, στην ελεύθερη επιφάνεια του.



Εικόνα 53: Σεισμός Ελευσίνας-Εγκάρσια μετατόπιση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας

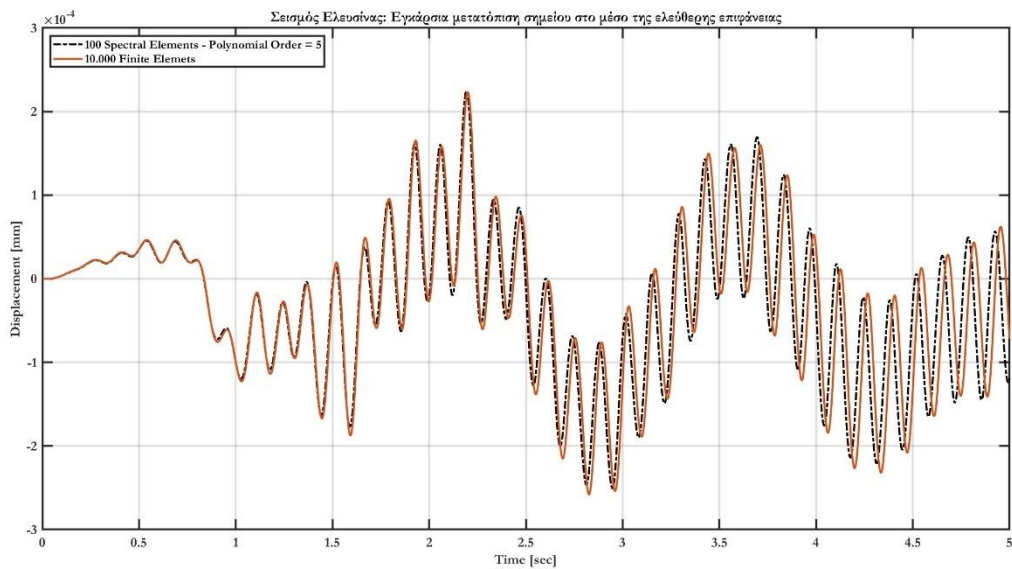


Εικόνα 54: Σεισμός Ελευσίνας-Εγκάρσια ταχύτητα σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας

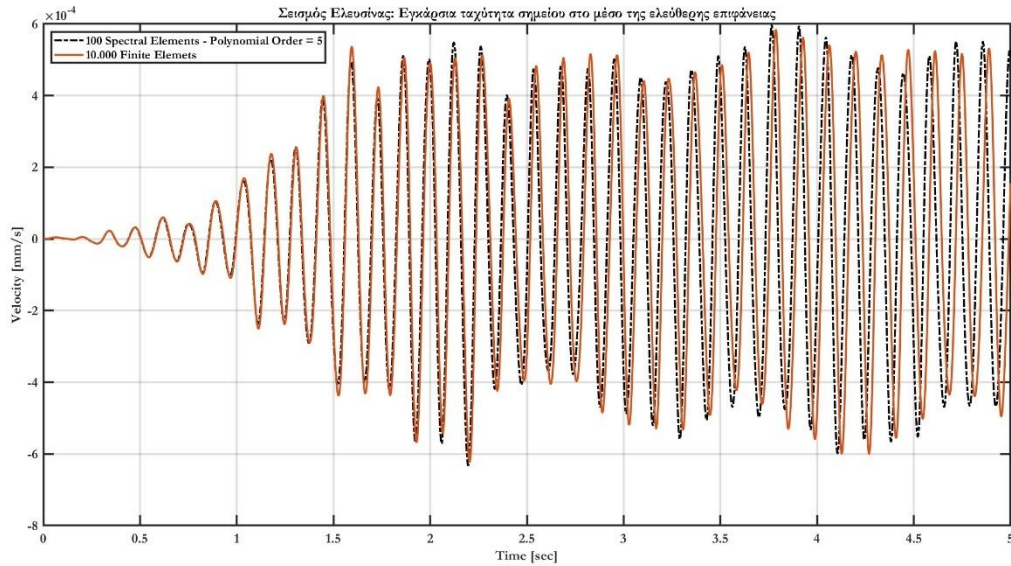


Εικόνα 55: Σεισμός Ελευσίνιας-Εγκάρσια επιτάχυνση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας

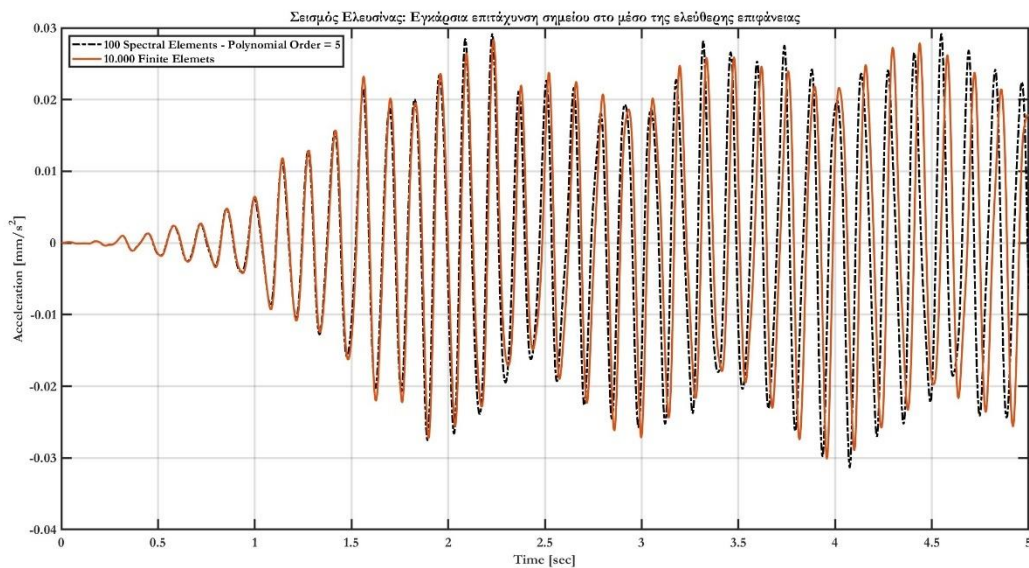
Παρατηρούμε ότι όλα τα προσομοιώματα συγκλίνουν και για τις μετατοπίσεις και για τις ταχύτητες και για τις επιταχύνσεις. Οποιοδήποτε προσομοίωμα και να χρησιμοποιήσουμε για την σύγκριση των μεθόδων δεν θα βλάψει τη γενικότητα των συμπερασμάτων. Επιλέγουμε όπως και πριν αυτό των 10.000 πεπερασμένων στοιχείων. Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα για κάρναβο 100 φασματικών στοιχείων 5^{ου} βαθμού.



Εικόνα 56: Σεισμός Ελευσίνιας: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας μετατόπισης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM

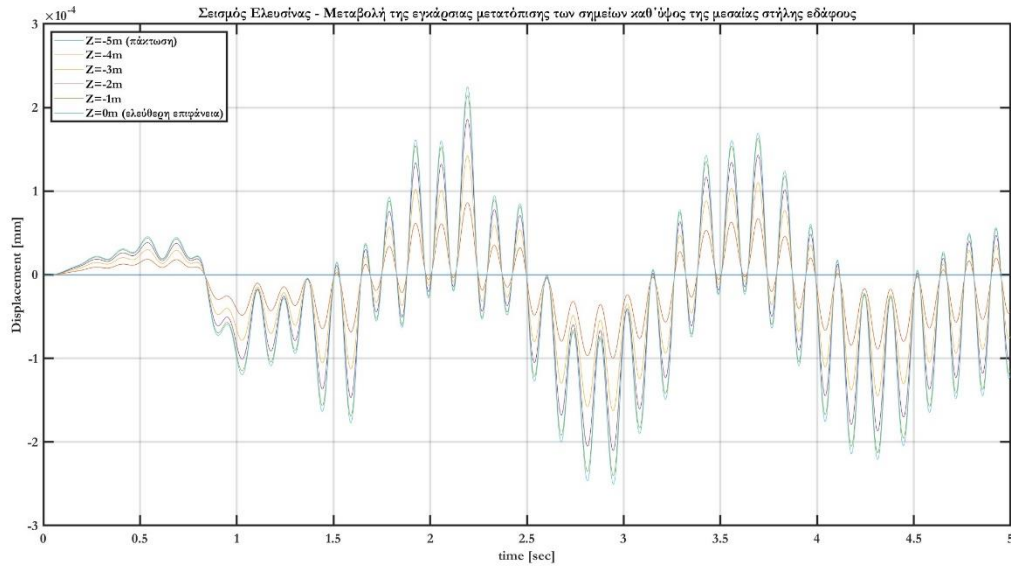


Εικόνα 57: Σεισμός Ελευσίνας: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας ταχύτητας σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM

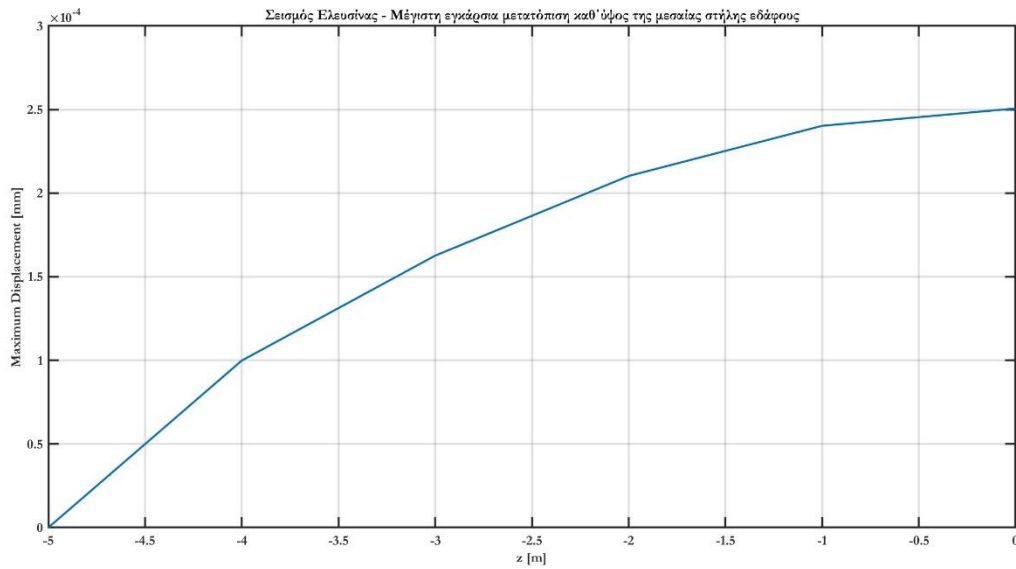


Εικόνα 58: Σεισμός Ελευσίνας: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας επιτάχυνσης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM

Όπως φαίνεται και από τα παραπάνω διαγράμματα, ένας κάναβος που αποτελείται από 100 φασματικά στοιχεία 5^{ου} βαθμού, αρκούν για να περιγράψουν ακριβώς την απόκριση του εδαφικού σχηματισμού στον σεισμό της Ελευσίνας. Στο από κάτω διάγραμμα φαίνεται η χρονοϊστορία της απόκρισης σε όρους εγκάρσιας μετατόπισης, για την μεσαία στήλη του εδάφους.



Εικόνα 59: Σεισμός Ελευσίνας: Μεταβολή της εγκάρσιας μετατόπισης των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους

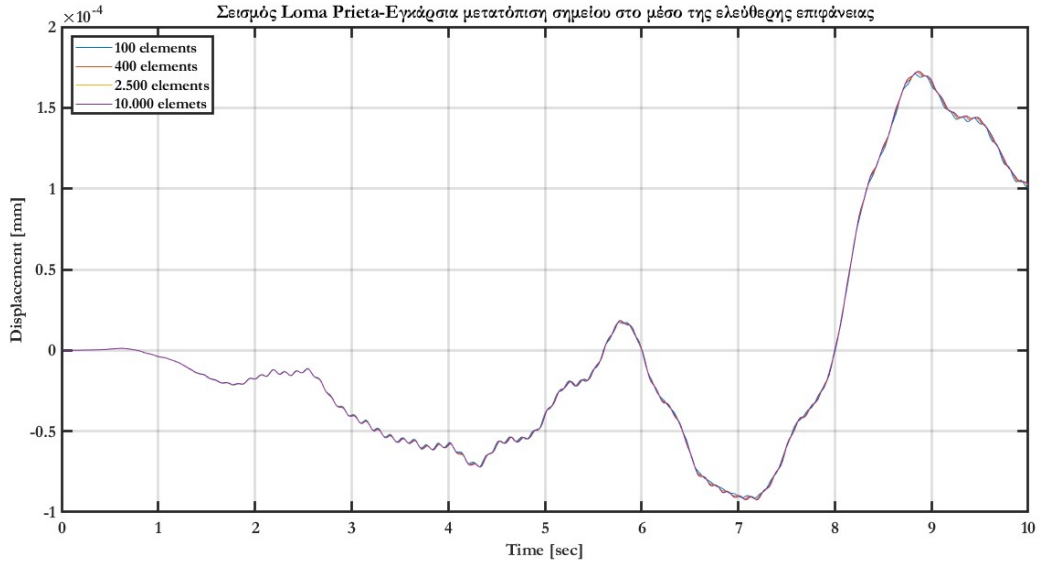


Εικόνα 60: Σεισμός Ελευσίνας: Μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους

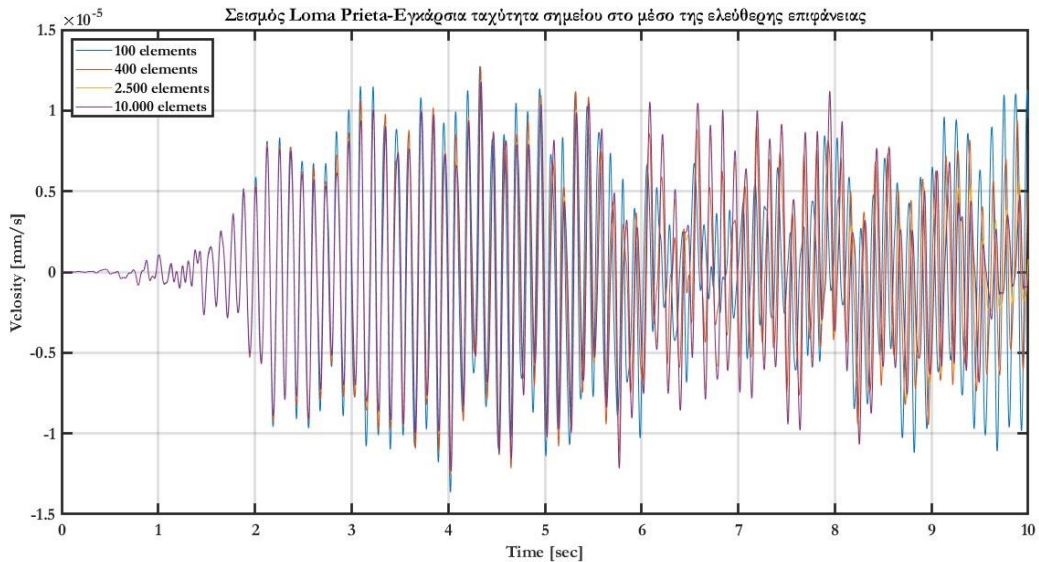
Οι παραπάνω εικόνες δείχνουν αφενός ότι καθ' ύψος της μεσαίας εδαφικής λωρίδας (αλλά και για οποιαδήποτε άλλη) τα σωματίδια βρίσκονται σε φάση και αφετέρου φαίνεται η κατανομή της μέγιστης μετρούμενης εγκάρσιας μετατόπισης καθ' ύψος της μεσαίας στήλης του εδάφους.

Σεισμός Loma Prieta

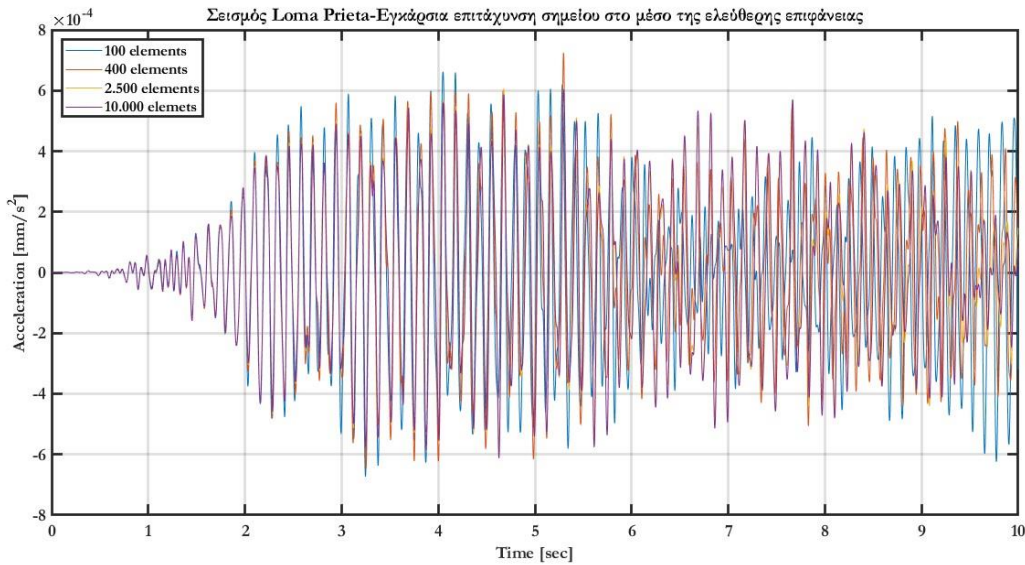
Για το σεισμό του Loma Prieta απομονώθηκαν τα πρώτα 10 sec από το επιταχυνσιογράφημα και ασκήθηκαν σαν εξωτερική φόρτιση σε 4.000 βήματα ($dt=0,0025\text{sec}$). Αρχικά ελέγχουμε με προσαρμογή τύπου h, δηλαδή πυκνώνοντας το πλέγμα, τη σύγκλιση των αποτελεσμάτων. Εξετάζουμε την αναπτυσσόμενη εγκάρσια μετατόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση στο μέσο του εδαφικού χωρίου, στην ελεύθερη επιφάνεια του.



Εικόνα 61: Σεισμός Loma Prieta-Εγκάρσια μετατόπιση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας

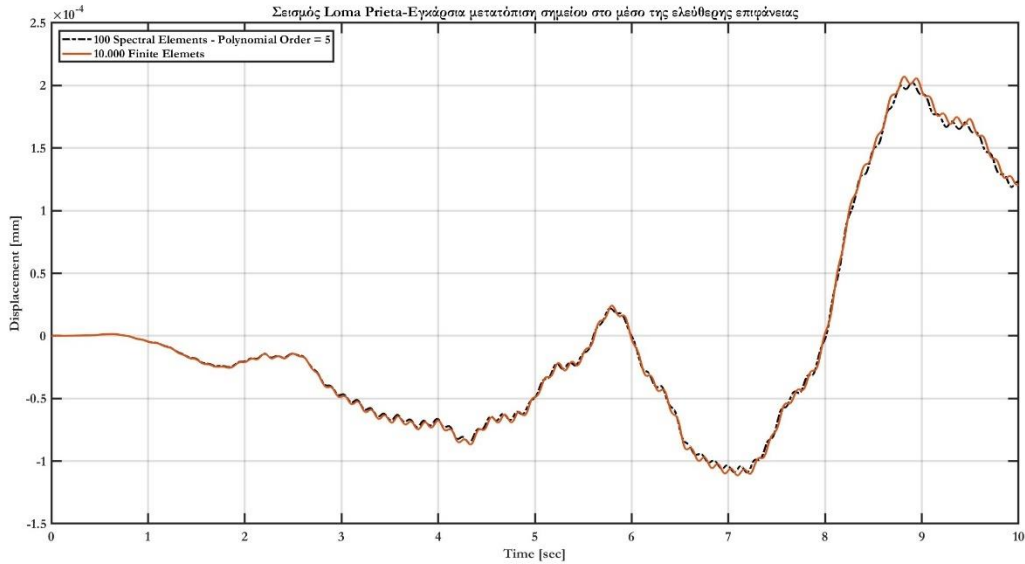


Εικόνα 62: Σεισμός Loma Prieta-Εγκάρσια ταχύτητα σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας

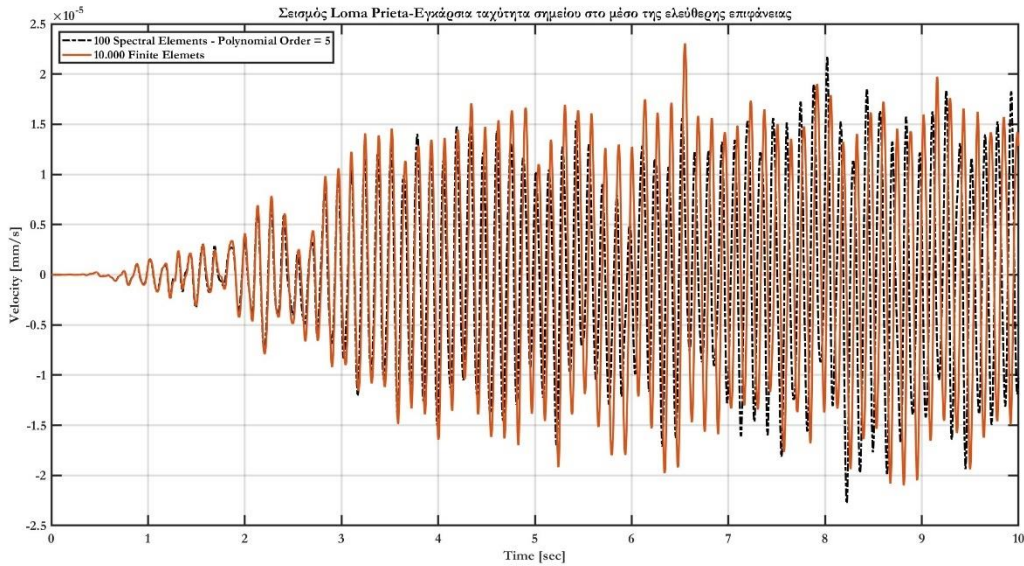


Εικόνα 63: Σεισμός Loma Prieta-Εγκάρσια επιτάχυνση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας

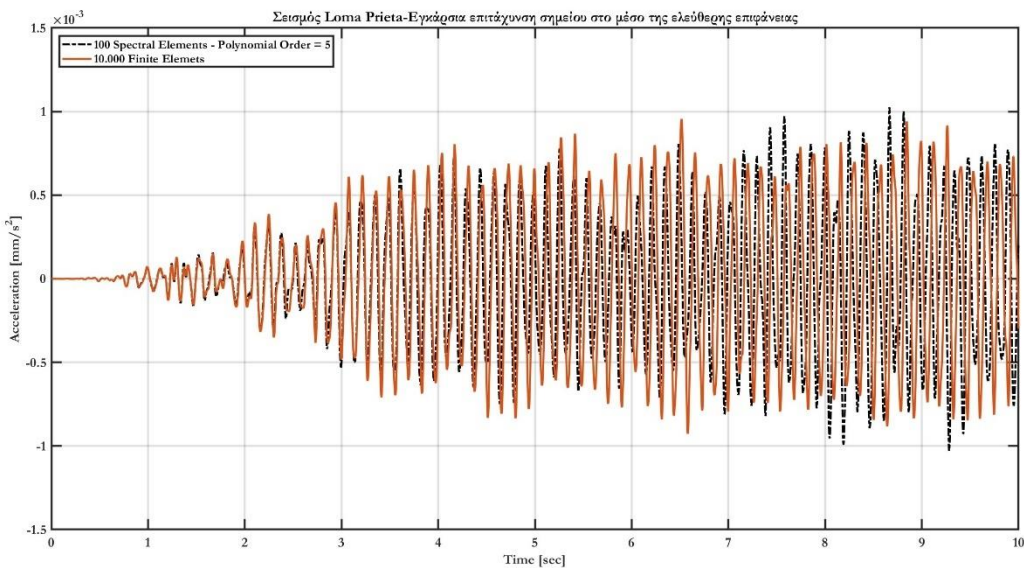
Όπως και με τη περίπτωση της Καλαμάτας, στον υπολογισμό της μετατόπισης παίρνουμε αρκετά ακριβή αποτελέσματα, όμως στον υπολογισμό της ταχύτητας και ειδικά της επιτάχυνσης έχουμε μεγάλες αποκλίσεις από το προσομοίωμα των 10.000 στοιχείων. Παρακάτω συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της SFEM για κάναβο 100 φασματικών στοιχείων 5^{ου} βαθμού.



Εικόνα 64: Σεισμός Loma Prieta: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας μετατόπισης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM

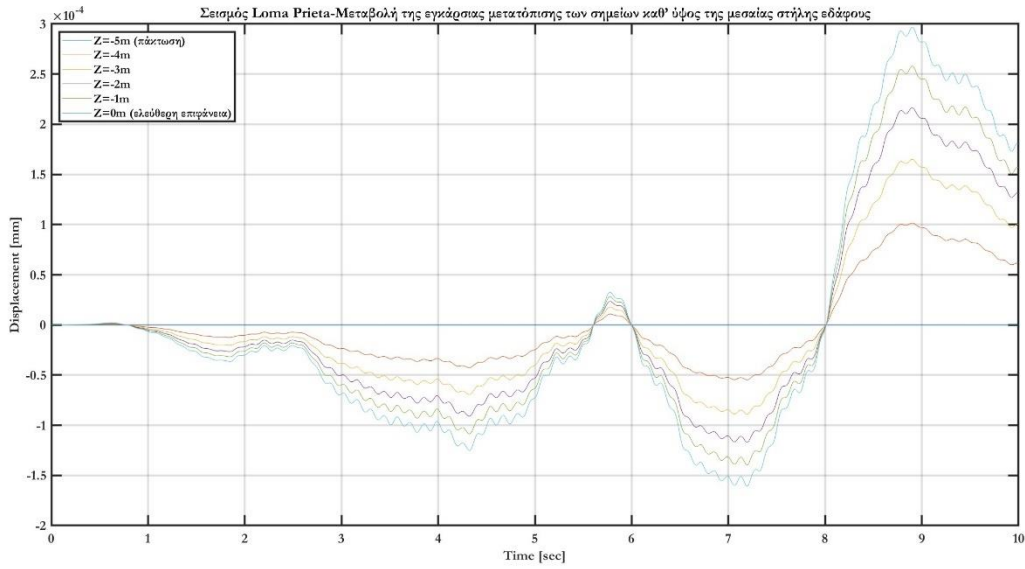


Εικόνα 65: Σεισμός Loma Prieta: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας ταχύτητας σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM

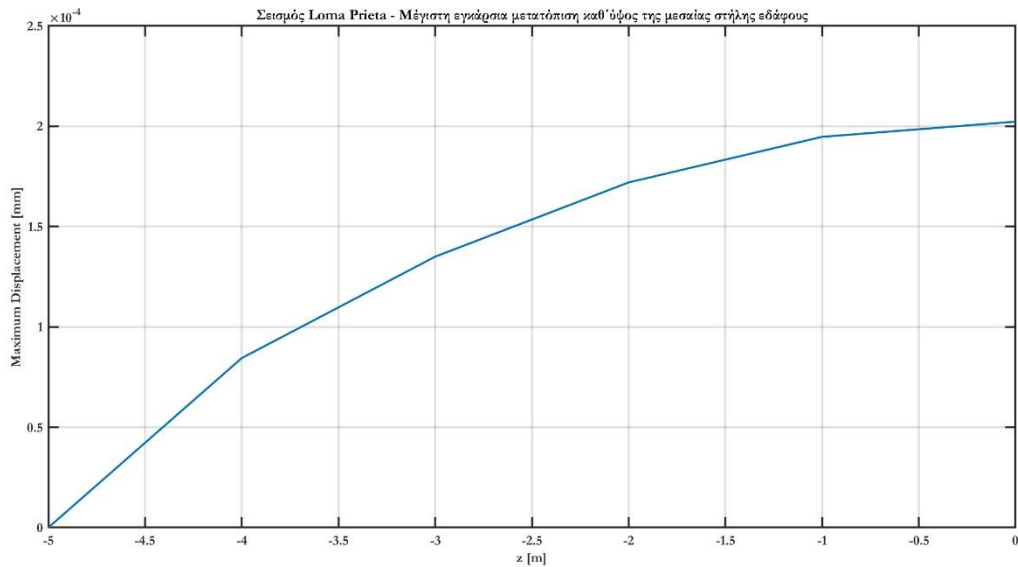


Εικόνα 66: Σεισμός Loma Prieta: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας επιτάχυνσης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM

Στην περίπτωση του σεισμού του Loma Prieta παρατηρούμε από τα διαγράμματα ότι τα φασματικά στοιχεία δεν αντιμετωπίζουν πρόβλημα να προσομοιώσουν την χρονοϊστορία της μετατόπισης. Παρόλα αυτά, πιθανώς απαιτείται μικρότερο χρονικό βήμα από 0,0025 sec που έχει επιλεγεί, καθώς η χρονοϊστορία ταχύτητας και επιτάχυνσης δεν συμφωνούν απόλυτα με αυτά που υπολογίστηκαν από την FEM και τα 10.000 στοιχεία. Ακόμη θα μπορούσαμε να εξετάσουμε και την πύκνωση του κανόβου υποδιαιρώντας το κάθε φασματικό στοιχείο σε 4 επιμέρους, διαστάσεων 0,50x0,50 το καθένα.



Εικόνα 67: Σεισμός Loma Prieta: Μεταβολή της εγκάρσιας μετατόπισης των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους

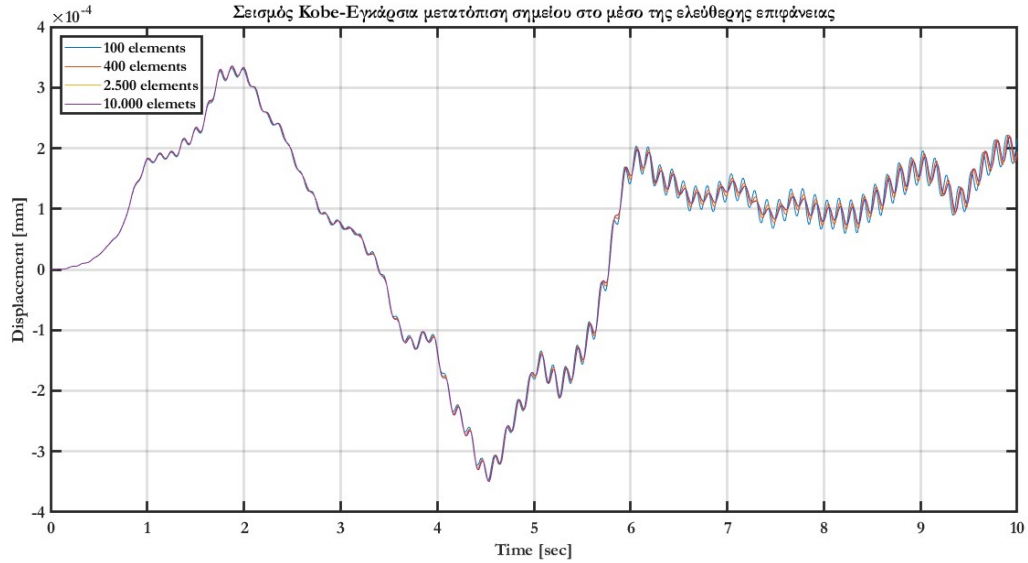


Εικόνα 68: Σεισμός Loma Prieta: Μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους

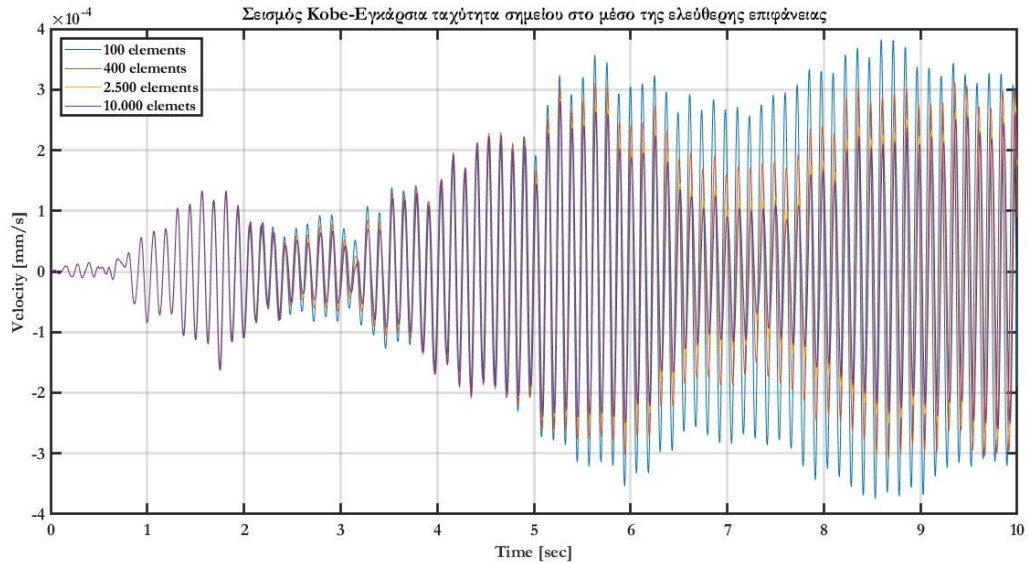
Οι παραπάνω εικόνες δείχνουν αφενός ότι καθ' ύψος της μεσαίας εδαφικής λωρίδας (αλλά και για οποιαδήποτε άλλη) τα σωματίδια βρίσκονται σε φάση και αφετέρου φαίνεται η κατανομή της μέγιστης μετρούμενης εγκάρσιας μετατόπισης καθ' ύψος της μεσαίας στήλης του εδάφους.

Σεισμός Kobe

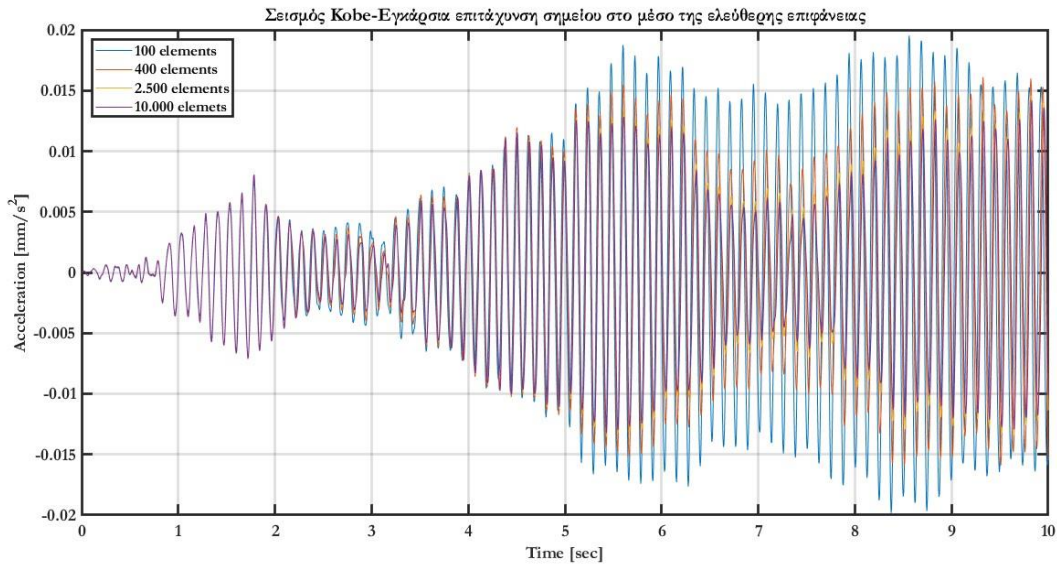
Για το σεισμό του Kobe απομονώθηκαν τα πρώτα 10 sec από το επιταχυνσιογράφημα και ασκήθηκαν σαν εξωτερική φόρτιση σε 2.000 βήματα ($dt=0,005\text{sec}$). Αρχικά ελέγχουμε με προσαρμογή τύπου h , δηλαδή πυκνώνοντας το πλέγμα, τη σύγκλιση των αποτελεσμάτων. Εξετάζουμε την αναπτυσσόμενη εγκάρσια μετατόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση στο μέσο του εδαφικού χωρίου, στην ελεύθερη επιφάνεια του.



Εικόνα 69: Σεισμός Kobe-Εγκάρσια μετατόπιση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας

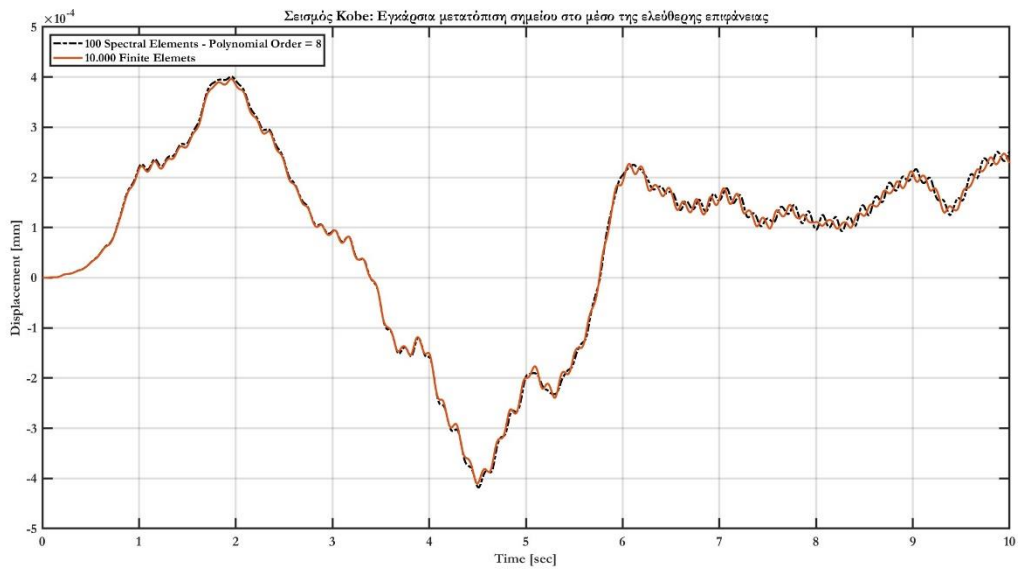


Εικόνα 70: Σεισμός Kobe-Εγκάρσια ταχύτητα σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας

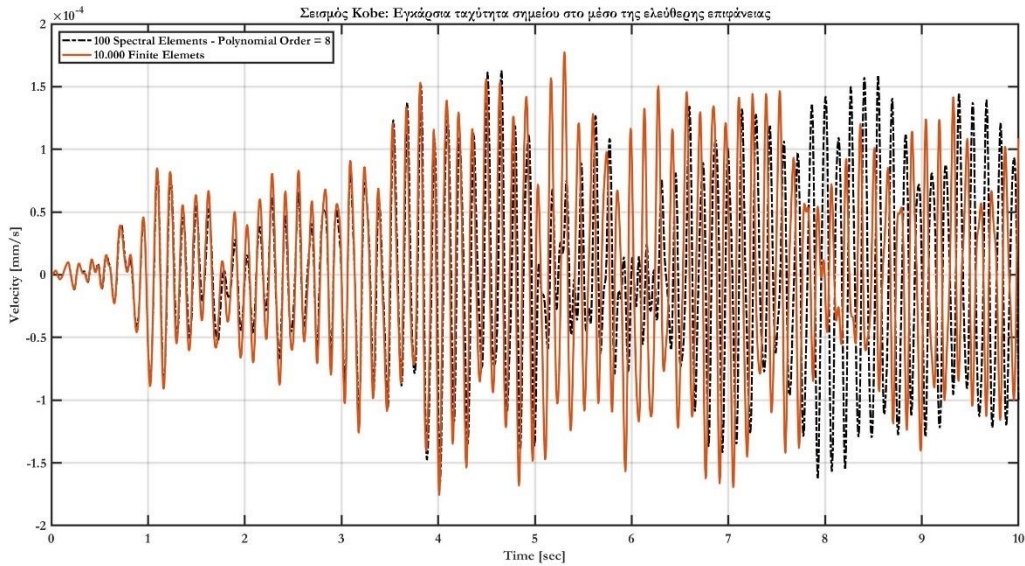


Εικόνα 71: Σεισμός Kobe-Εγκάρσια επιτάχυνση σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας

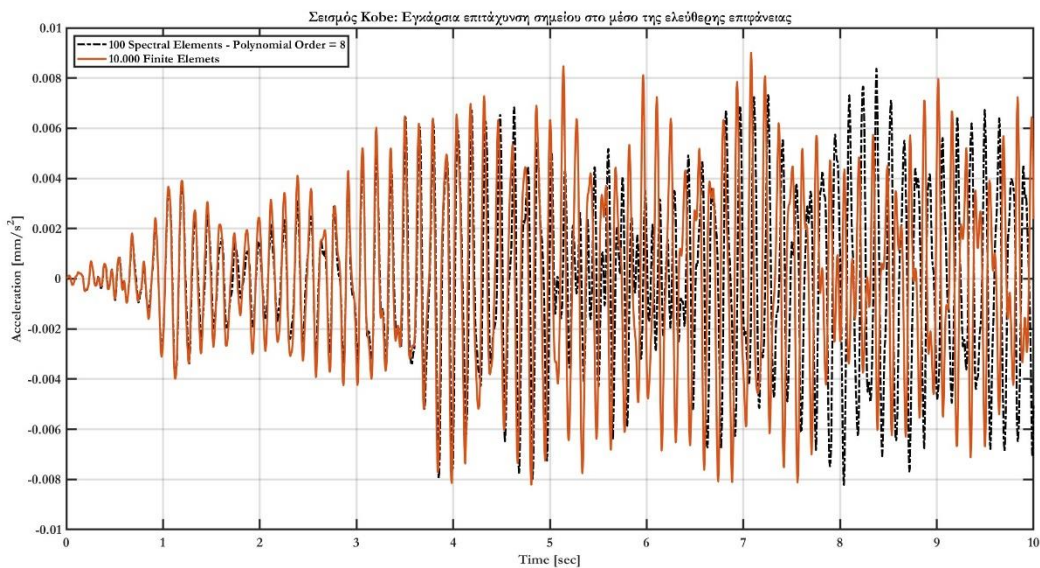
Παρατηρούμε ότι μόνο το πλέγμα των 2.500 στοιχείων προσεγγίζει σε ικανοποιητικό βαθμό αυτό των 10.000 στοιχείων, ιδίως στις περιπτώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Σε αυτή τη περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε για τον κানাβο των 100 φασματικών στοιχείων, στοιχεία 8^{ου} βαθμού.



Εικόνα 72: Σεισμός Kobe: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας μετατόπισης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM

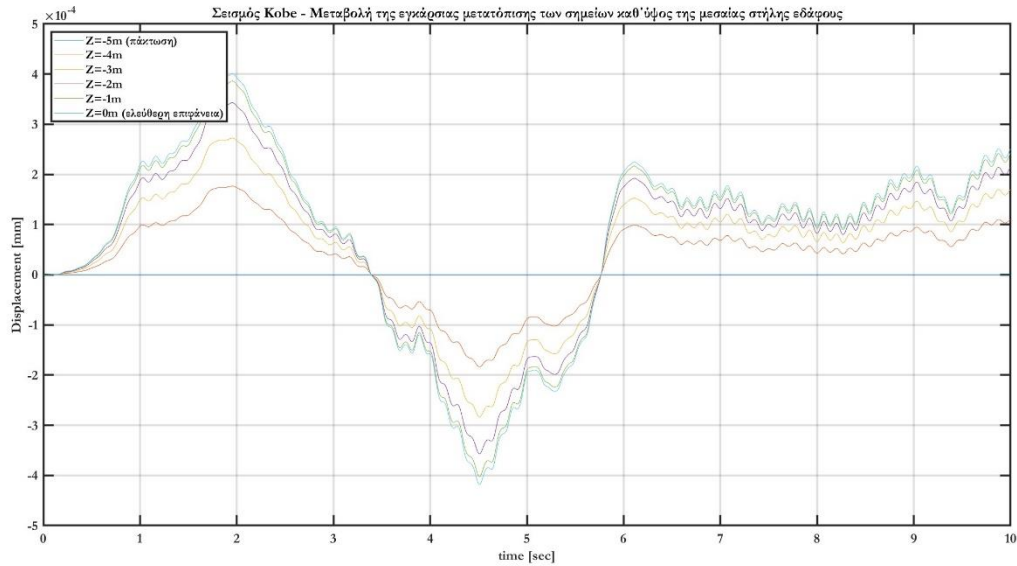


Εικόνα 73: Σεισμός Kobe: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας ταχύτητας σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM

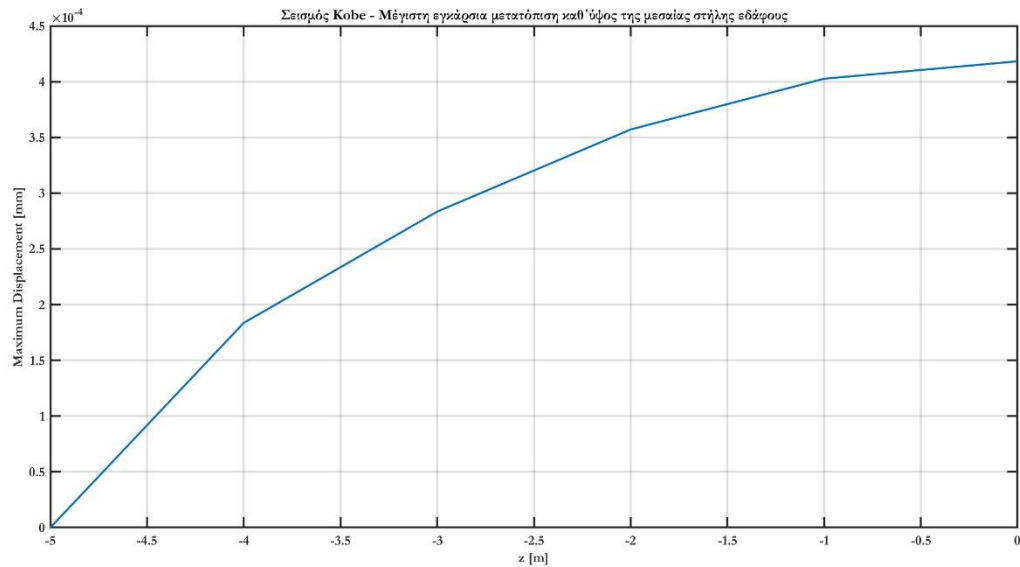


Εικόνα 74: Σεισμός Kobe: Σύγκριση της υπολογισθείσας εγκάρσιας επιτάχυνσης σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας με την SFEM και την FEM

Μετά τα 5 δευτερόλεπτα εμφανίζονται διαφοροποιήσεις μεταξύ των 2 προσομοιωμάτων. Φαίνεται σαν το προσομοίωμα των φασματικών στοιχείων να «καθυστερεί» χρονικά, έναντι αυτού των κλασικών πεπερασμένων στοιχείων. Η διαφορά αυτή είναι πιο αισθητή στη περίπτωση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, όπως ίσχυε και στην προηγούμενη σύγκριση



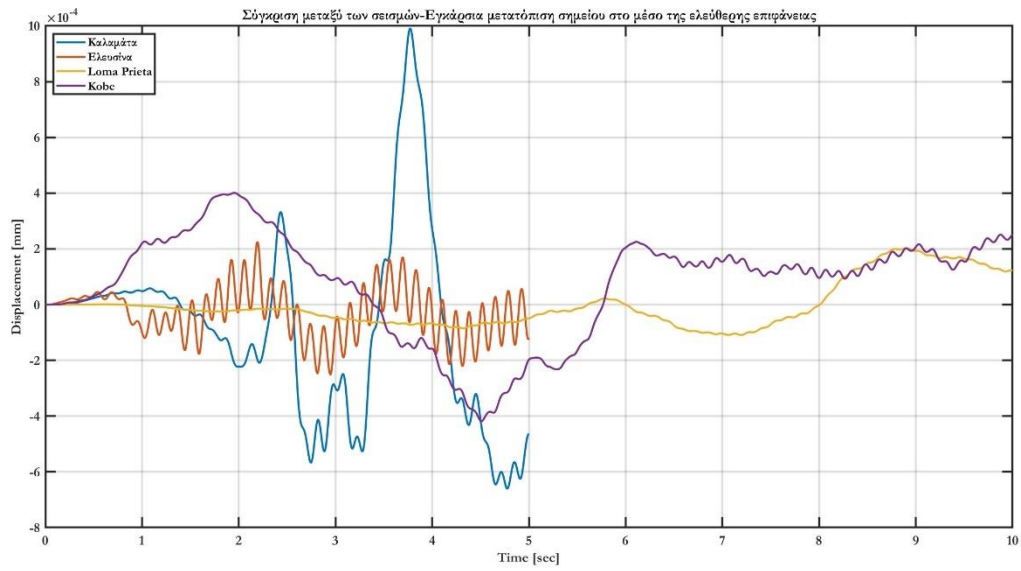
Εικόνα 75: Σεισμός Kobe: Μεταβολή της εγκάρσιας μετατόπισης των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους



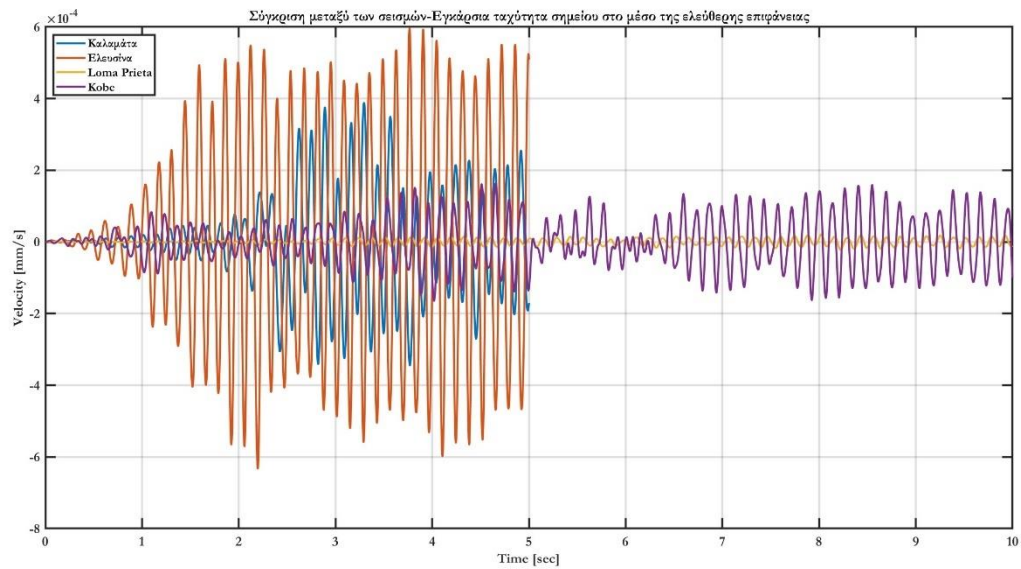
Εικόνα 76: Σεισμός Kobe: Μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση των σημείων καθ' ύψος της μεσαίας στήλης εδάφους

Οι παραπάνω εικόνες δείχνουν αφενός ότι καθ' ύψος της μεσαίας εδαφικής λωρίδας (αλλά και για οποιαδήποτε άλλη) τα σωματίδια βρίσκονται σε φάση και αφετέρου φαίνεται η κατανομή της μέγιστης μετρούμενης εγκάρσιας μετατόπισης καθ' ύψος της μεσαίας στήλης του εδάφους.

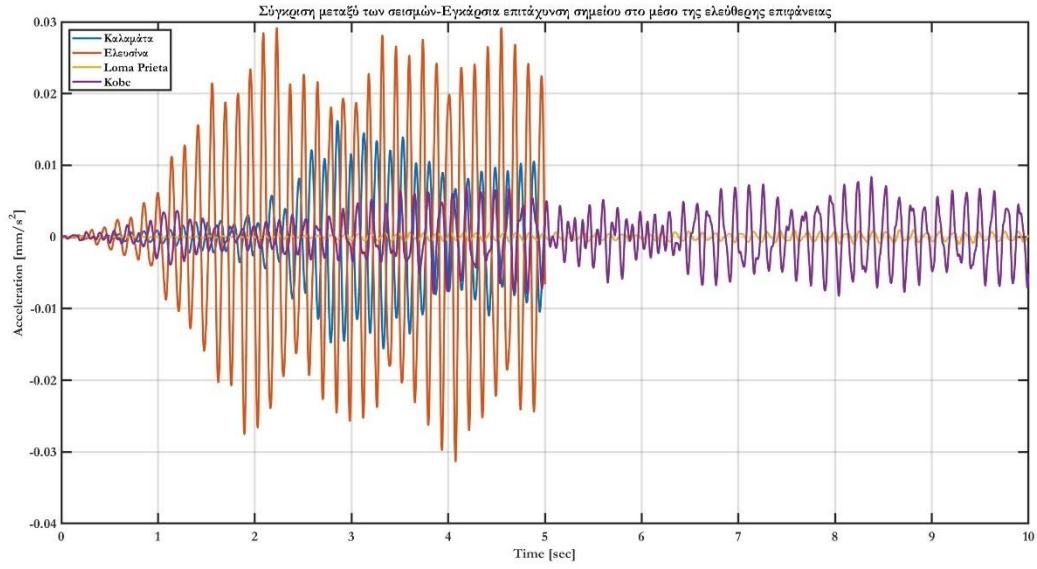
Σύγκριση μεταξύ των σεισμών



Εικόνα 77: Σύγκριση αναπτυσσόμενων εγκάρσιων μετατοπίσεων ενός σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας μεταξύ των σεισμών



Εικόνα 78: Σύγκριση αναπτυσσόμενων εγκάρσιων ταχυτήτων ενός σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας μεταξύ των σεισμών



Εικόνα 79: Σύγκριση αναπτυσσόμενων εγκάρσιων επιταχύνσεων ενός σημείου στο μέσο της ελεύθερης επιφάνειας μεταξύ των σεισμών

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, παρουσιάστηκαν τα βασικά σημεία της θεωρίας της μεθόδου των φασματικών πεπερασμένων στοιχείων, κοινώς SFEM. Δόθηκε έμφαση στη χρήση της SFEM για την επίλυση προβλημάτων διάδοσης σεισμικών κυμάτων στο έδαφος, θέμα που άπτεται άμεσα στο αντικείμενο του πολιτικού μηχανικού. Ακολούθησαν αριθμητικά παραδείγματα, όπου μια επιφάνεια εδάφους (κατακόρυφη τομή) διαστάσεων 20m x 5m (πλάτος x βάθος) διεγείρεται από 4 διαφορετικές σεισμικές δονήσεις. Οι δονήσεις αυτές προέρχονταν από τα πραγματικά σεισμικά γεγονότα στις περιοχές της Καλαμάτας, της Ελευσίνας, του Loma Prieta και του Kobe. Το έδαφος προσομοιώθηκε με 2 τρόπους:

α) με έναν κানাβο πεπερασμένων στοιχείων, ο οποίος κάθε φορά πύκνωνε, ξεκινώντας από τα 100 και καταλήγοντας στα 10.000 στοιχεία, και

β) με έναν κানাβο αποτελούμενο από 100 φασματικά πεπερασμένα στοιχεία, τα οποία είχαν ως συναρτήσεις βάσης πολυώνυμα Lagrange υψηλού βαθμού, από παρεμβολή στα σημεία Gauss Lobatto Legendre. Ο βαθμός του πολυωνύμου ήταν από 4 έως 9, όπως και συνηθίζεται στις πιο πολλές εφαρμογές της SFEM.

Κατά την εκτέλεση των αναλύσεων για να μελετηθεί η απόκριση του εδάφους, φάνηκε το μεγάλο πλεονέκτημα της SFEM έναντι της FEM, το οποίο δεν είναι άλλο από τη διαγωνοποίηση του μητρώου μάζας. Το γεγονός αυτό καθιστά την ανάλυση πολύ πιο γρήγορη και ελαττώνει αισθητά το υπολογιστικό κόστος, ειδικά όταν υπάρχουν πολλοί βαθμοί ελευθερίας στο πρόβλημα. Αυτό σημαίνει ότι για το ίδιο πλήθος βαθμών ελευθερίας η SFEM εκτελεί την ανάλυση πιο γρήγορα από μια κλασική FEM.

Εφόσον κάποιος επιθυμεί να προγραμματίσει στον Η/Υ μια μέθοδο που θα χρησιμοποιεί φασματικά πεπερασμένα στοιχεία, θα πρέπει να είναι ιδιαίτερα προσεκτικός αν και εφόσον θελήσει να συμπυκνώσει τους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας στο κάθε στοιχείο. Συμπυκνώνοντάς τους, συμπυκνώνεται κατά συνέπεια και το διαγώνιο μητρώο μάζας, και μένει ένα 8 x 8 για τις 2 διαστάσεις ή ένα 24x24 για τις τρεις διαστάσεις μητρώο με όρους, τη σταθμισμένη μάζα των ακραίων κόμβων, η οποία είναι πολύ μικρή λόγω της πολύ μικρής τιμής του συντελεστή βάρους στους ακραίους κόμβους. Έτσι, εφόσον ασκηθεί μετά η σεισμική εξωτερική δύναμη, αυτή δε θα ανταποκρίνεται στη πραγματικότητα, καθώς είναι ανάλογη της μάζας του κόμβου στον οποίον ασκείται.

Επίσης, η επιλογή των σημείων Gauss Lobatto Legendre για την πραγματοποίηση της παρεμβολής των συναρτήσεων βάσεως, προσδίδει αξιοπιστία και ταχύτατη σύγκλιση στη μέθοδο.

Τα παραδείγματα που μελετήθηκαν στην εργασία ήταν σχετικά απλά, όμως αρκούσαν για να αναδείξουν την χρησιμότητα της μεθόδου. Όπως όμως είναι αντιληπτό, ένα πραγματικό έδαφος δεν αποτελείται από ένα μόνο τύπο εδάφους, αλλά από απανωτές εναποθέσεις πολλών διαφορετικών τύπων. Θα είχε ενδιαφέρον λοιπόν να μελετηθεί ένα έδαφος με μεταβαλλόμενες μηχανικές ιδιότητες καθ' ύψος, όπως μέτρο ελαστικότητας E και πυκνότητα ρ .

Ένα άλλο ζήτημα είναι τα όρια του συστήματος. Στην πραγματικότητα υπάρχουν δύο όρια στο εδαφικό τμήμα:

- 1) μία ελεύθερη επιφάνεια, που είναι το πάνω μέρος του εδαφικού τμήματος, και
- 2) όλες οι υπόλοιπες πλευρές, που είναι απορροφητικά σύνορα, καθώς τα κύματα δεν ανακλώνται εκεί, αλλά συνεχίζουν την πορεία τους εκτός του θεωρούμενου συστήματος

Έτσι όσον αφορά στη διάδοση σεισμικών κυμάτων στο έδαφος, αυτοί οι δύο παράγοντες θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη για την ακριβέστερη προσομοίωση του συστήματος στον Η/Υ.

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Μ. Παπαδρακάκης: Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων
2. Χ.Γ. Προβατίδης: Πεπερασμένα στοιχεία στην ανάλυση κατασκευών
3. Μιχάλης Παπαδημητράκης: Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
4. Ιωάννης Θ. Κατσικαδέλης: Δυναμική Ανάλυση των Κατασκευών
5. n. c Joel Feldman. 2007: Solution of the Wave Equation by Separation of Variables
6. William E. Boyce / Richard C. DiPrima: Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών
7. Karl F. Graff: Wave Motion in Elastic Solids (Dover Books on Physics)
8. D'Alembert: Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration
9. Prof. S. S. Deshpande and S.R. Rawat, N.P.Bandewar, M. Y. Soman: consistent and lumped mass matrices in dynamics and their impact on finite element analysis results
10. N.M. Newmark (1959), "A method of computation for structural dynamics"
11. Anil K. Chopra: Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 2017.
12. Dimitri Komatitsch and Jeroen Tromp: Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation
13. Michael n. Fardis, Eduardo Carvalho, Amr Elnashai, Ezio Faccioli, Paolo Pinto, Andre Plumier: Οδηγός σχεδιασμού σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 8: Αντισεισμικός σχεδιασμός Κατασκευών
14. Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., Zang, T. A. (1988): Spectral methods in Fluid Dynamics.
15. Dimitri Komatitsch, Jean-Pierre Vilotte: The Spectral Element Method: An Efficient Tool to Simulate the Seismic Response of 2D and 3D Geological Structures
16. Karniadakis G., Sherwin Spencer: Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics: Second Edition
17. Runge Carl (1901): "Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten", Zeitschrift für Mathematik und Physik
18. Lawrence C. Evans: Partial differential equations
19. Nicolas Guarin-Zapata and Juan Gomez: Evaluation of the Spectral Finite Element Method With the Theory of Phononic Crystals
20. Orszag, S., 1980: Spectral methods for problems in complex geometries, Journal of Computational Physics

21. Paul Cupillard, Elise Delavaud, Gael Burgos, Gaetano Festa, Jean-Pierre Vilotte, Yann Capdeville and Jean-Paul Montagner: RegSEM: a versatile code based on the Spectral Element Method to compute seismic wave propagation at the regional scale
22. Γεώργιος Δ. Μπουκοβάλας: Σημειώσεις εδαφοδυναμικής: Θεωρία και εφαρμογές Γεωτεχνικής Σεισμικής Μηχανικής
23. Zienkiewicz O. & Taylor R., 2005: The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics.
24. Pozrikidis C., 2005: Introduction to Finite And Spectral Element Methods Using Matlab , Chapman & Hall/CRC.
25. Bos, L., Taylor, M., & Wingate, B., 2001: Tensor product Gauss-Lobatto points are Fekete points for the cube
26. Guo B. & Babuška I., 1986: The h-p version of the finite element method
27. Marfurt K.J., 1984: Accuracy of finite difference and finite element modelling of the scalar wave equation
28. Seriani G. & Priolo E., 1994: Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media, Finite Elements in Analysis and Design
29. Faccioli, E., Maggio, F., Paolucci, R. & Quarteroni, A., 1997. 2D and 3D elastic wave propagation by a pseudo-spectral domain decomposition method
30. Bernardi, C., Debit, N. & Maday, Y., 1990: Coupling finite element and spectral methods: first results
31. Lahaye, D.J.P., Maggio, F. & Quarteroni, A., 1997: Hybrid finite element-spectral element approximation of wave propagation problems
32. Chaljub, E. & Vilotte, J.P., 1998: 3D wave propagation in a spherical earth model using the spectral element method
33. Maday, Y. & Rønquist, E.M., 1990: Optimal error analysis of spectral methods with emphasis on non-constant coefficients and deformed geometries