



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΔΠΜΣ  
«ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ»**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΠΡΟΕΝΤΕΤΑΜΕΝΩΝ ΔΟΚΩΝ**

**ΧΑΡΙΤΙΔΗΣ Σ. ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ  
Α.Μ. 11020959**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ  
ΓΕΩΡΓΙΟΣ Θ. ΜΙΧΑΛΤΣΟΣ**

**ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2011**



Για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω:

Τη μητέρα μου για τη συνεχή υποστήριξή της όλα αυτά τα χρόνια

Τον πατέρα μου λόγω του οποίου αποφάσισα να ακολουθήσω την επιστήμη του πολιτικού μηχανικού και για τα πρώτα βήματά μου σε αυτή

Την Ιωάννα για την παρουσία της και τη σοφή καθοδήγησή της

Την αδερφή μου που πάντα είναι διαθέσιμη όταν χρειάζεται

Την οικογένειά μου για το μέτρο σύγκρισης που μου προσφέρουν

Τους Αποστόλη Οικονόμου, Αργύρη Σκοπελίτη και Θοδωρή Κωνσταντακόπουλο για την πολύτιμη συμβολή τους στα θέματα του μεταπτυχιακού

Θα ήθελα ιδιαίτερα να εκφράσω το σεβασμό μου και να ευχαριστήσω τον καθηγητή κύριο Γεώργιο Μιχάλτσο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, τη γνώση που μου μετέδωσε και χωρίς τον οποίο δεν θα ήταν δυνατό να γραφεί η παρούσα εργασία

Στον Ιάσονα, τον Αλέκο και τη Δήμητρα,



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή.....	- 6 -
1.1 Προένταση των φορέων .....	- 7 -
1.2 Διερεύνηση της ελαστικής ευστάθειας των φορέων – Σύνομο ιστορικό .....	- 12 -
2. Προσδιορισμός της εντατικής κατάστασης γραμμικών φορέων .....	- 17 -
2.1 Κάμψη - Διάτμηση.....	- 17 -
2.2 Ελαστική Ευστάθεια .....	- 18 -
2.3 Στρέβλωση .....	- 21 -
2.4 Η ενεργειακή μέθοδος .....	- 22 -
3. Περιγραφή του προβλήματος.....	- 23 -
3.1 Προσδιορισμός του παραγόμενου έργου .....	- 24 -
3.1.1 Έργο της αναπτυσσόμενης παραμόρφωσης.....	- 24 -
3.1.2 Έργο των εξωτερικών δυνάμεων .....	- 24 -
3.1.2.1 Έργο της δύναμης F.....	- 24 -
3.1.2.2 Έργο της $M\dot{z}$ .....	- 27 -
3.1.2.3 Το έργο των καλωδίων .....	- 28 -
3.1.2.4 Το έργο των πλευρικών στηρίξεων.....	- 31 -
3.2 Το συνολικό έργο .....	- 33 -
3.3 Απλοποίηση και επίλυση του συστήματος .....	- 35 -
4. Αριθμητικά αποτελέσματα .....	- 38 -
5. Συμπεράσματα .....	- 48 -
6. Βιβλιογραφία - Αναφορές .....	- 49 -



## 1. Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η διερεύνηση της επιρροής της προέντασης σε μεταλλικούς φορείς που χρησιμοποιούνται στη γεφυροποιία. Ειδικότερα, θα εξεταστεί η ελαστική ευστάθεια υψίκορμων μεταλλικών δοκών (όπου οι ροπές αδράνειας των βασικών αξόνων διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους) έναντι των κρίσιμων μορφών αστοχίας τους, ήτοι την επικρατέστερη, σε αυτού του τύπου τις διατομές, μορφή λυγισμού, τη στρέβλωση.

Θα εξεταστούν αριθμητικά παραδείγματα μεμονωμένων δοκών, καθώς και δοκών που εντάσσονται σε φορείς γεφυρών όπου παρουσιάζεται σημαντική στρεπτική δυσκαμψία λόγω του φορέα του καταστρώματος.

Ο προσδιορισμός των αντοχών έναντι των παραπάνω μορφών αστοχίας θα γίνει με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων προσδιορισμού. Για την εκπόνηση των υπολογισμών θα γίνει χρήση του λογισμικού Mathcad έκδοση 5.

## 1.1 Προένταση των φορέων

Η ιδέα για τη χρήση της προέντασης ως «αντίβαρο» στις καταπονήσεις των φορέων από τα φορτία τους εμφανίστηκε ως ευρεσιτεχνία το 1888<sup>i</sup> από μηχανικούς της εποχής όπως ο P.H. Jackson και ο Charles Rabut, οι οποίοι κατοχύρωσαν τα πρώτα διπλώματα ευρεσιτεχνίας για το σχεδιασμό στοιχείων προεντεταμένου σκυροδέματος. Το σκεπτικό της ιδέας ήταν ορθά διατυπωμένο, αλλά η ελλιπής τεχνογνωσία σε τομείς που αφορούσαν στη μακροχρόνια συμπεριφορά των υλικών καθώς και η χαμηλής στάθμης τεχνολογία των υλικών και ειδικότερα του χάλυβα, δεν επέτρεπαν την πλήρη υλοποίησή της.

Αυτό το γνωστικό κενό καλύφθηκε λίγο αργότερα από τον Eugene Freyssinet ο οποίος καθόρισε και μελέτησε τα φαινόμενα του ερπυσμού και της συστολής ξήρανσης, ειδικότερα στην κατασκευή της γέφυρας Plougastel καθιστώντας έτσι σαφείς τις συνθήκες σχεδιασμού του προεντεταμένου σκυροδέματος.



Γέφυρα της Plougastel.

**Πηγή:** en.structurae.de **Φωτ.:** Nicolas Janberg

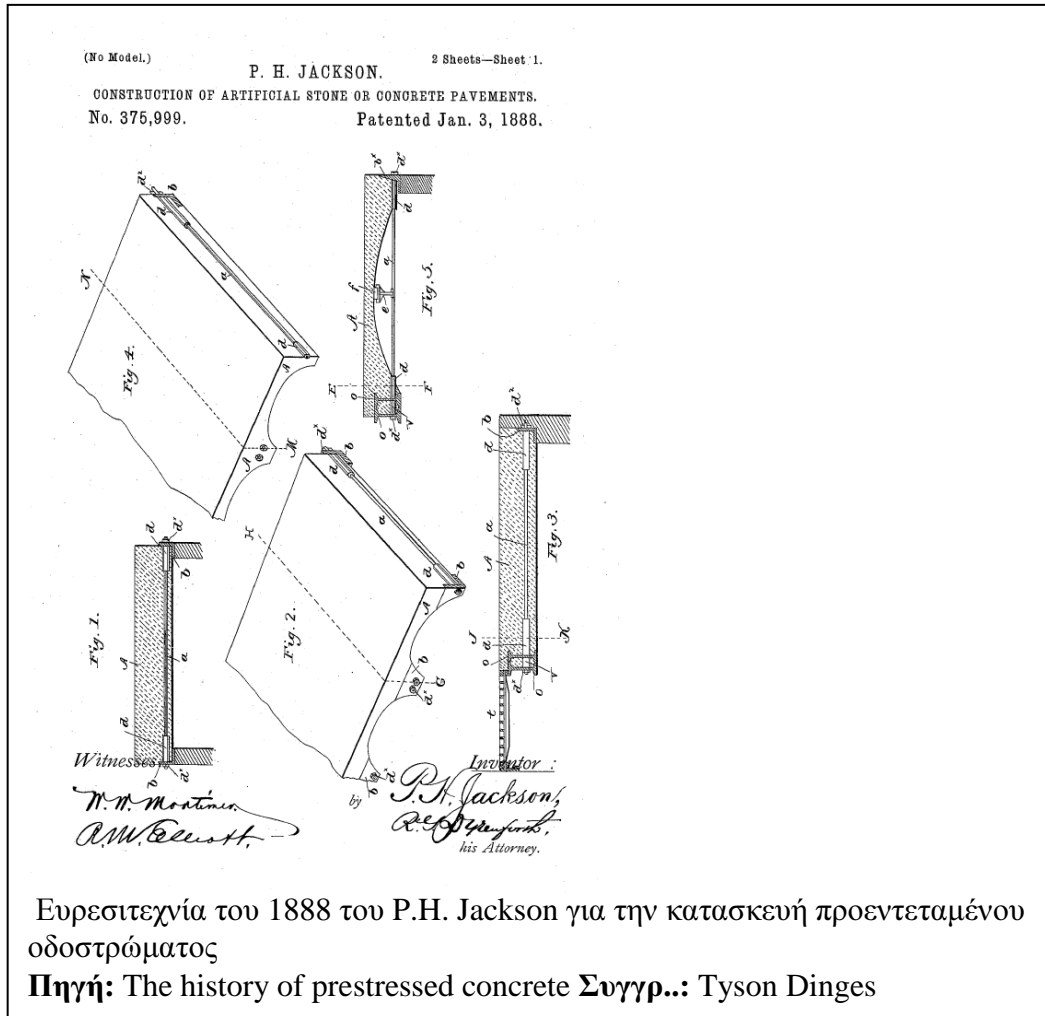


Παρόλο που ο Freyssinet ήταν ένας ευφυέστατος και εξαιρετικός μηχανικός δεν κατάφερε να μεταδώσει την απαιτούμενη γνώση στους μηχανικούς της εποχής.

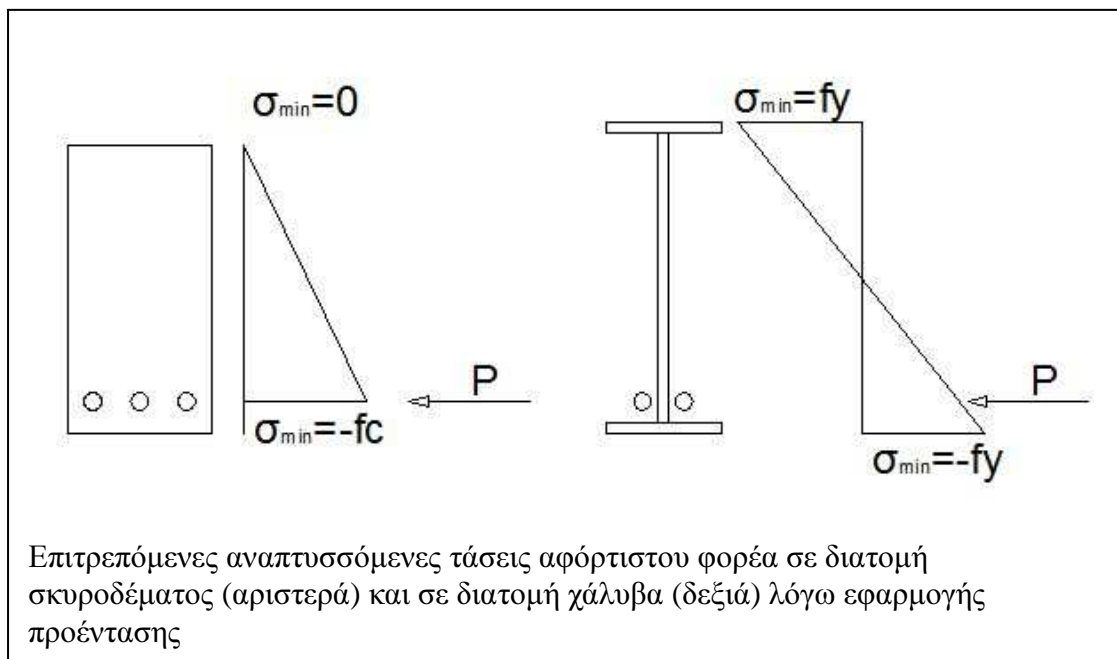
Το πρώτο κείμενο που κατηύθυνε τους μηχανικούς στο σχεδιασμό προεντεταμένων φορέων ήταν το βιβλίο του Gustave Magnel, ο οποίος έκανε ευρεία χρήση της προέντασης, κατά το σχεδιασμό και την κατασκευή, στη γέφυρα Walnut Lane στη Φιλαδέλφεια των ΗΠΑ. Ο σύγχρονός του, γερμανός, Ulrich Finsterwalder επέκτεινε τα μέχρι τότε γνωστά όρια, εισάγοντας στο χώρο επαναστατικές μεθόδους κατασκευής όπως την προβολοδόμηση.

Ο αρχικός σχεδιασμός, όπως είχε καθοριστεί από τους Freyssinet και Magnel, δεν επέτρεπε την ανάπτυξη εφελκυστικών τάσεων στο σκυρόδεμα. Λίγο καιρό αργότερα η ανάπτυξη της τεχνολογίας του χάλυβα επέτρεψε στους μηχανικούς το σχεδιασμό μερικώς προεντεταμένων φορέων, οδηγώντας έτσι την τεχνογνωσία του σπλισμένου σκυροδέματος στα σημερινά δεδομένα.

Σημαντικό περιορισμό στο σχεδιασμό προεντεταμένων φορέων από σκυρόδεμα παίζουν τα χρόνια φαινόμενα χαλάρωσης, καθώς και η αποφυγή ανάπτυξης εφελκυστικών τάσεων στην ίνα της διατομής που κατά την φόρτιση σχεδιασμού θα αναπτύξει θλιπτικές τάσεις (με δεδομένο ότι η προένταση του αφόρτιστου φορέα προκαλεί σε αυτή την ίνα εφελκυστικές τάσεις). Οι δύο αυτές σχεδιαστικές αρχές καθορίζουν τα όρια της προέντασης και εμφανίζονται στους φορείς λόγω της φύσης του σκυροδέματος.



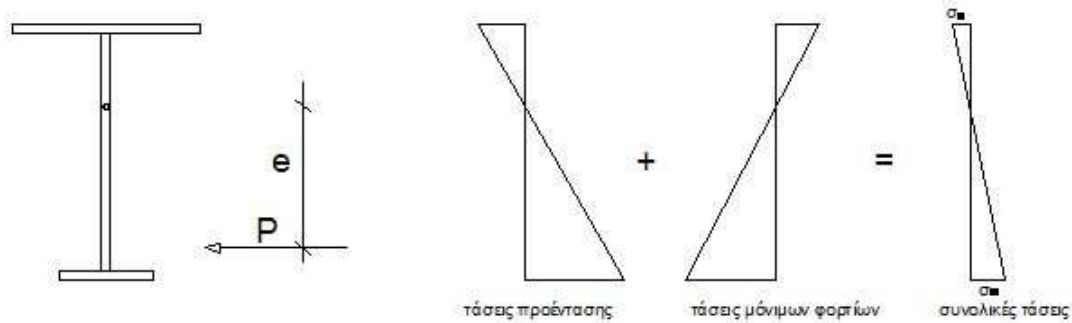
Η χρήση της προέντασης στους μεταλλικούς φορείς δεν επηρεάζεται από αυτά τα φαινόμενα διότι ο χάλυβας δεν πάσχει από φαινόμενα ερπυσμού και δεν υποφέρει από εμφάνιση ρηγματώσεων όταν εφελκύεται. Συνέπεια των χαρακτηριστικών αυτών είναι ότι οι τάσεις στην προεντεταμένη διατομή μπορούν να μεταβάλλονται σε μεγαλύτερο εύρος, ενώ ταυτόχρονα δεν εμφανίζονται απώλειες της δύναμης προέντασης, που σημαίνει ότι ο μελετητής οδηγείται σε μικρότερες διατομές με απαίτηση προέντασης που καθορίζεται αποκλειστικά από τα φορτία που καλείται να παραλάβει ο φορέας.



Η προένταση σε μεταλλικούς φορείς είναι σαφώς περιορισμένη σε σχέση με φορείς από σκυρόδεμα. Κύριος λόγος είναι ότι δεν έχει αναπτυχθεί ένα σαφές κανονιστικό πλαίσιο που καθοδηγεί τους μηχανικούς καθώς και ότι δεν υπάρχει η απαιτούμενη τεχνογνωσία σε επίπεδο κατασκευής. Παρόλαυτά πλέον υπάρχουν εφαρμογές στα πεδία της ενίσχυσης παλαιών κατασκευών ώστε αυτές να ανταποκρίνονται στις νέες απαιτήσεις, ενώ γίνονται βήματα και στην ανέγερση νέων προεντεταμένων μεταλλικών κατασκευών<sup>ii</sup> (Gulliver Commercial Center - Lucchina multiplex- Ρώμη).

Πρακτικά η χρήση της προέντασης συνίσταται στην επιβολή φορτίων τα οποία προκαλούν εντατική κατάσταση αντίστροφη από αυτή που καλείται να παραλάβει ο φορέας κατά τη λειτουργία του. Εάν θεωρήσουμε μία ισοστατική δοκό (άρθρωση – κύλιση και λάβουμε

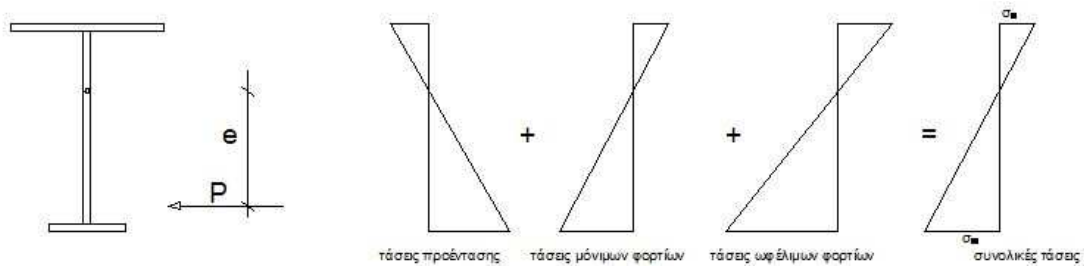
υπόψη μας την προένταση ως μία αξονική δύναμη η οποία δρα έκκεντρα σε σχέση με το κέντρο βάρους της δοκού και τα μόνιμα φορτία έχουμε:



όπου θα πρέπει να ισχύει:

$$\sigma^o_i = -\frac{P}{A} - \frac{Pe}{W_i} + \frac{M_{\min}}{W_i} \leq f_y$$

Εάν λάβουμε υπόψη μας και την επιβολή των ωφέλιμων φορτίων θα ισχύει:



όπου:

$$\sigma^1_s = -\frac{P}{A} + \frac{Pe}{W_s} - \frac{M_{\max}}{W_s} \leq f_y$$

και:

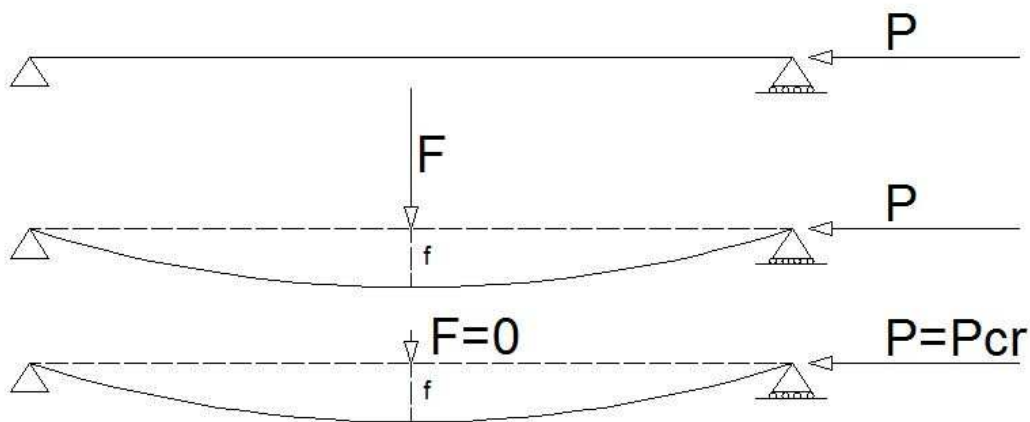
$$\sigma^1_i = -\frac{P}{A} - \frac{Pe}{W_i} + \frac{M_{\max}}{W_i} \leq f_y$$

Μετατρέποντας τις παραπάνω ανισώσεις σε ισότητες μπορούμε να αξιάσουμε την απαιτούμενη δύναμη προέντασης για δεδομένη εκκεντρότητα, ή την απαιτούμενη εκκεντρότητα για δεδομένη δύναμη προέντασης<sup>iii</sup>.

## 1.2 Διερεύνηση της ελαστικής ευστάθειας των φορέων – Σύντομο ιστορικό

Η μελέτη της λυγισμικής και μετα-λυγισμικής θεωρίας ξεκίνησε από τον L. Euler το 1744 ο οποίος μελέτησε το φαινόμενο επί θλιβόμενων δοκών. Η έρευνα στο πεδίο της ελαστικής ευστάθειας έγινε σημαντική περίπου έναν αιώνα αργότερα όταν η εκτεταμένη χρήση δομικού χάλυβα στις κατασκευές του πολιτικού μηχανικού εισήγαγε τη χρήση λεπτότερων μελών με μικρότερες τιμές δυσκαμψίας και επιρρεπείς σε λυγισμικά φαινόμενα. Η αναγκαιότητα για την ανάπτυξη μίας μη γραμμικής θεωρίας για τη μελέτη των φαινομένων του λυγισμού εισήχθη στο χώρο των μηχανικών το 1930. Το 1945 ο Koiter με τη διατριβή του θεμελίωσε ότι οι ατέλειες των υλικών οδηγούσαν σε σημαντική μείωση του υπολογισμένου κρίσιμου φορτίου και γεφύρωσε τις αποκλίσεις που εμφανίζονταν ανάμεσα στα αποτελέσματα, που ήταν προϊόν υπολογισμών γραμμικών θεωριών και τα πειράματα σε μεταλλικά κελύφη. Η ανάπτυξη τομέων όπως η αεροπλοΐα καθώς και τα διαστημικά προγράμματα διαφόρων χωρών έδωσαν σημαντική ώθηση στη μελέτη του αντικειμένου το 1960, όπου και αναπτύχθηκε πληθώρα θεωριών που εξηγούσαν το φαινόμενο. Πρακτικά η μελέτη της ευστάθειας των φορέων είναι για ένα μαθηματικό πρόβλημα και παρόλο που οι δύο κλάδοι της επιστήμης που ασχολούνται με το πρόβλημα έχουν εξελιχθεί, συχνά, εν μέσω, αμοιβαίας, άγνοιας, το πρωτοποριακό έργο των Poincare, Lyapunov και Schmidt παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη συνεχών συστημάτων που αφορούν στον μελετητή μηχανικό<sup>iv</sup>.

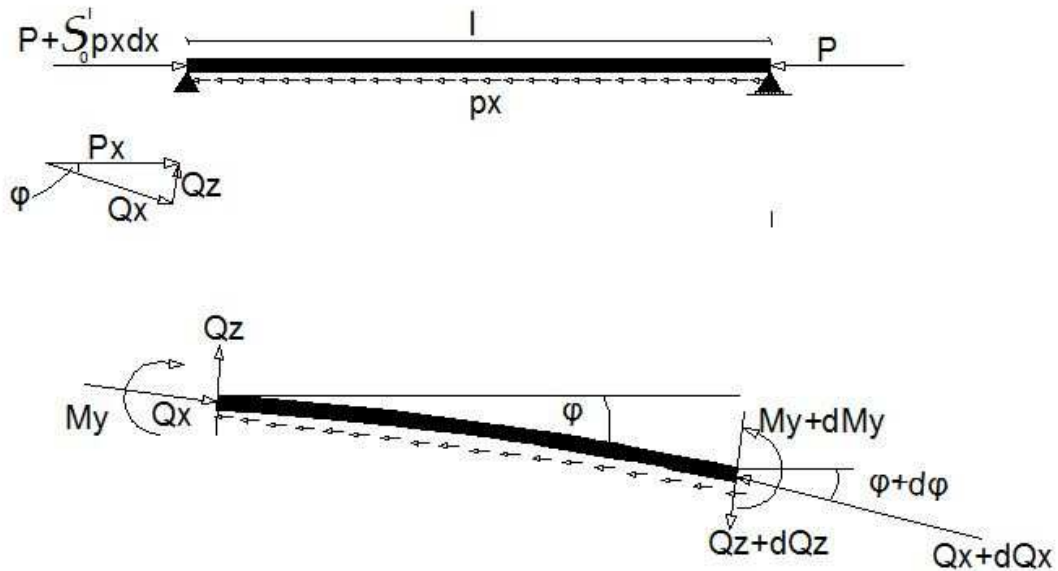
Θεωρούμε μία ισοστατική (άρθρωση – κύλιση), κεντρικά θλιβόμενη ράβδο μέσω μίας δύναμης  $P$  η οποία ασκείται στο ελεύθερο άκρο της. Η άσκηση μίας δύναμης  $F$ , εγκάρσιας στο διαμήκη άξονα της ράβδου, θα προκαλέσει ροπή  $M$  η οποία θα την αναγκάσει να καμπυλωθεί και να αποκτήσει ένα βέλος κάμψης  $f$ . Λόγω αυτού του βέλους κάμψης η δύναμη  $P$  πλέον δρα έκκεντρα στον άξονα της δοκού ασκώντας μία επιπλέον ροπή  $P \times f$  η οποία αναπτύσσει επιπλέον καμπυλότητα επί της δοκού. Θεωρούμε ότι η δύναμη  $P$  κάποια στιγμή θα αποκτήσει την τιμή  $P_{cr}$  όπου για δεδομένη αξονική δύναμη θα απαιτείται πρακτικά μηδενική τιμή για τη ροπή  $M$  ώστε η δοκός να καμπυλωθεί και μόλις αυτό συμβεί η αντοχή της διατομής θα εξαντληθεί άμεσα. Η τιμή αυτή  $P_{cr}$  ονομάζεται φορτίο λυγισμού της ράβδου.



Θεωρώντας την ίδια ράβδο μήκους  $l$ , υπό την επιβολή αξονικού ομοιόμορφου φορτίου στο διαμήκη άξονά της, ήτοι  $p_x$  και αξονικό θλιπτικό φορτίο  $P$ , αυτή θα αναπτύξει, κατά την εκτροπή της λόγω

λυγισμού, βέλος κάμψης  $w$ , ενώ από την ισορροπία στοιχειώδους τμήματος της δοκού θα έχουμε:

$$\cos \phi \cong 1 \Rightarrow Q_x = P_x \text{ και } Q_z = P_x \sin \phi = P_x \phi$$



Η ισορροπία ροπών δίνει:

$$dM_y = Q_z dx$$

ή

$$M'_y = Q_z$$

Επίσης έχουμε:

$$w' = \tan \phi \cong \phi$$

και

$$M_y = -EJ_y w''$$

τελικά:

$$M''_y = (-EJ_y w'')' = Q'_z = (P_x \phi)' = (P_x w')'$$

Η τελική μορφή της εξίσωσης είναι:

$$(-EJ_y w''')' + (P_x w')' = 0$$

εάν θέσουμε:

$$\xi = x/l \text{ και } \bar{w}(\xi) = \frac{w(x)}{l}$$

για την ισορροπία της δοκού θα πρέπει να ισχύει: <sup>v</sup>

$$\frac{d \left( EJ_y \frac{d^2 \bar{w}}{d \xi^2} \right)}{d \xi^2} + \frac{d \left( P_x l^2 \frac{d^2 \bar{w}}{d \xi} \right)}{d \xi} = 0$$

Για  $J_y$  σταθερό και  $p_x=0$  θα ισχύει:

$$\frac{d^4 \bar{w}}{d \xi^4} + \frac{Pl^2}{EJ_y} \frac{d^2 \bar{w}}{d \xi^2} = 0$$

Η λύση της εξίσωσης είναι:

$$\bar{w}(\xi) = c_1 + c_2 \xi + c_3 \sin \left( \frac{Pl^2}{EJ_y} \xi \right) + c_4 \cos \left( \frac{Pl^2}{EJ_y} \xi \right)$$

όπου οι σταθερές  $c_{1,2,3,4}$  καθορίζονται από τις συνθήκες στήριξης. Εάν εξετάσουμε την αμφιαρθρωτή δοκό όπου για τις συνοριακές συνθήκες ισχύει:

$$\bar{w}(0) = \bar{w}(1) = \bar{w}''(0) = \bar{w}''(1) = 0$$

θα λάβουμε το σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_4 &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 \sin \mu + c_4 \cos \mu &= 0 \\ -\mu^2 c_4 &= 0 \\ -\mu^2 c_3 \sin \mu - \mu^2 c_4 \cos \mu &= 0 \end{aligned} \right\}$$

όπου  $\mu^2 = Pl^2/EJ_y$



Για να έχει λύση το παραπάνω σύστημα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών του να είναι ίση με μηδέν. Η ορίζουσα είναι  $D = -\mu^4 \sin \mu$  και επειδή το  $\mu$  είναι ποσότητα διάφορη του μηδενός πρέπει να ισχύει:

$$\sin \mu = 0$$

Άρα πρέπει να ισχύει  $\mu = n\pi$ , ( $n=1,2,3,\dots$ ).

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει λύσεις για ιδιαίτερες τιμές του  $\mu$ . Έτσι το πρόβλημα καθίσταται «ίδιον» και αποτελεί ένα πρόβλημα ιδιοτιμών. Από τις δυνατές τιμές του  $\mu$  σημασία έχει μόνο η μικρότερη αφού αυτή θα αποτελεί και το μικρότερο δυνατό φορτίο λυγισμού. έτσι για  $n=1$  έχουμε<sup>v</sup>:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}$$

Η τιμή αυτή για το φορτίο λυγισμού καθορίστηκε από τον Euler και αφορά λυγισμό κατά το οποίο η διατομή μίας ράβδου υφίσταται μόνο μετάθεση κατά τον ένα των κυρίων αξόνων. Σημαντικό όμως είναι και το φαινόμενο του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού κατά το οποίο μία διατομή κατά την αστοχία σε λυγισμό μπορεί να υφίσταται δύο μετακινήσεις κατά τους κυρίους αξόνες και μία στροφή περι τον άξονα του κέντρου διατμησεως.

## 2. Προσδιορισμός της εντατικής κατάστασης γραμμικών φορέων

### 2.1 Κάμψη - Διάτμηση

Θεωρούμε μία δοκό συγκεκριμένης διατομής, με καθορισμένο ορθογώνιο κεντροβαρικό σύστημα συντεταγμένων,  $S$  το κέντρο βάρους αυτής και  $M$  το κέντρο διάτμησης αυτής. Συμβολίζουμε με  $u$  τη μετακίνηση του  $S$  κατά τον άξονα  $y$ , με  $v$  τη μετακίνηση του  $S$  κατά τον άξονα  $z$  και με  $\phi$  τη στροφή του  $S$  περί τον άξονα  $x$

Θα ισχύει: <sup>v</sup>

$$J_z = \int_{A_b} y_B^2 dA_b$$

$$J_y = \int_{A_b} z_B^2 dA_b$$

$$J_y = \oint z^2 t \cdot ds$$

$$J_{yz} = \oint yz t \cdot ds$$

$$S_z = \int_0^s y t \cdot ds$$

$$S_y = \int_0^s z t \cdot ds$$

όπου για δοκό φορτιζόμενη στο επίπεδο  $Oxz$  και για τον προσδιορισμό των ορθών και διατμητικών τάσεων επί της διατομής θα ισχύει:

$$\sigma_x = \frac{Q_x}{F} + \frac{M_y}{J_y} z$$

$$\text{και } \tau = -\frac{Q_z S_y}{J_y t}$$

## 2.2 Ελαστική Ευστάθεια

Η εύρεση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού αποτελεί ένα πρόβλημα ιδιοτιμών. Η μικρότερη λύση του προβλήματος είναι αυτή που μας δίνει το κρίσιμο φορτίο έναντι αστάθειας του φορέα.

Για τις δύο επικρατέστερες μορφές λυγισμού των φορέων, ήτοι καμπτικό λυγισμό, όπου η διατομή του φορέα υφίσταται μετάθεση και στρεπτοκαμπτικό λυγισμό, όπου η διατομή του φορέα υφίσταται δύο μετακινήσεις και μία στροφή, για αξονικά θλιβόμενη ράβδο έχουμε κατά τα γνωστά<sup>v</sup>:

$$P_y = EJ_y \left( \frac{\lambda}{\beta} \right)^2$$

$$P_z = EJ_z \left( \frac{\lambda}{\beta} \right)^2$$

$$P_T = \frac{1}{i^2_M} \left[ EC_T \left( \frac{\lambda}{\beta_0} \right)^2 + GJ_D \right]$$

όπου  $\lambda = n\pi/l$  και  $n=1,2,3,\dots$

ενώ τα  $\beta$  και  $\beta_0$  μεταβάλλονται ανάλογα με τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος και είναι:

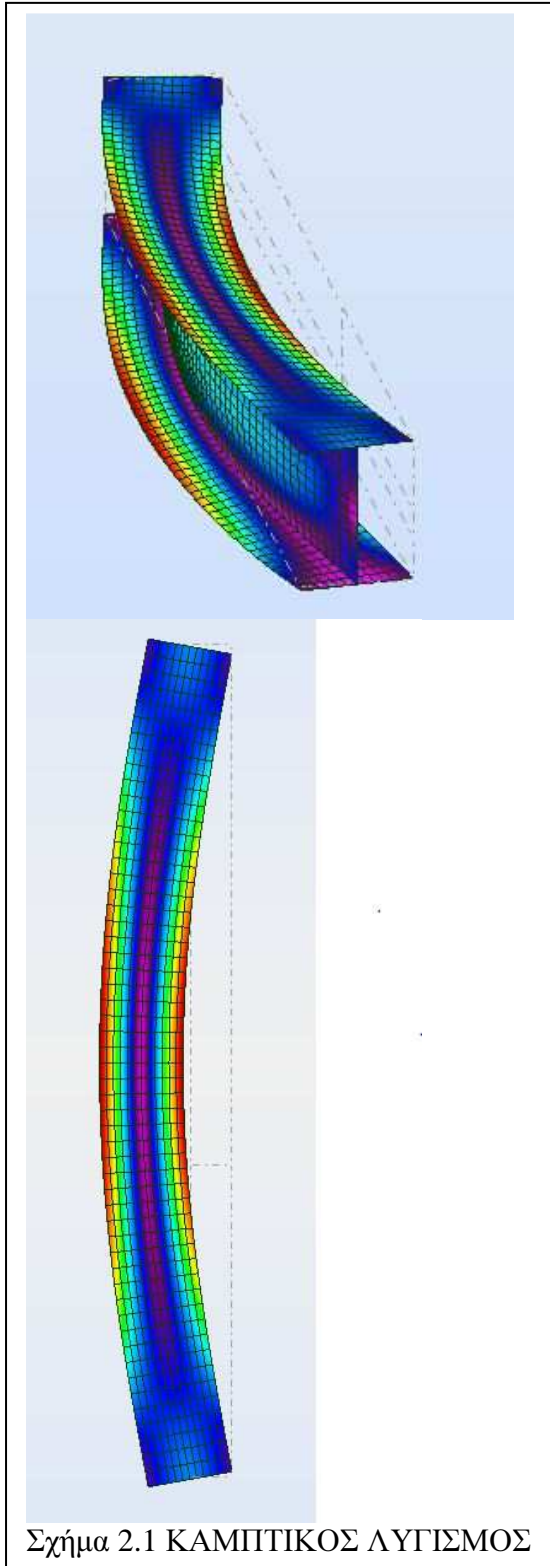
$\beta = \beta_0 = 1$  για αμφιαρθρωτό φορέα

$\beta = \beta_0 = 0,5$  για αμφίπακτο φορέα

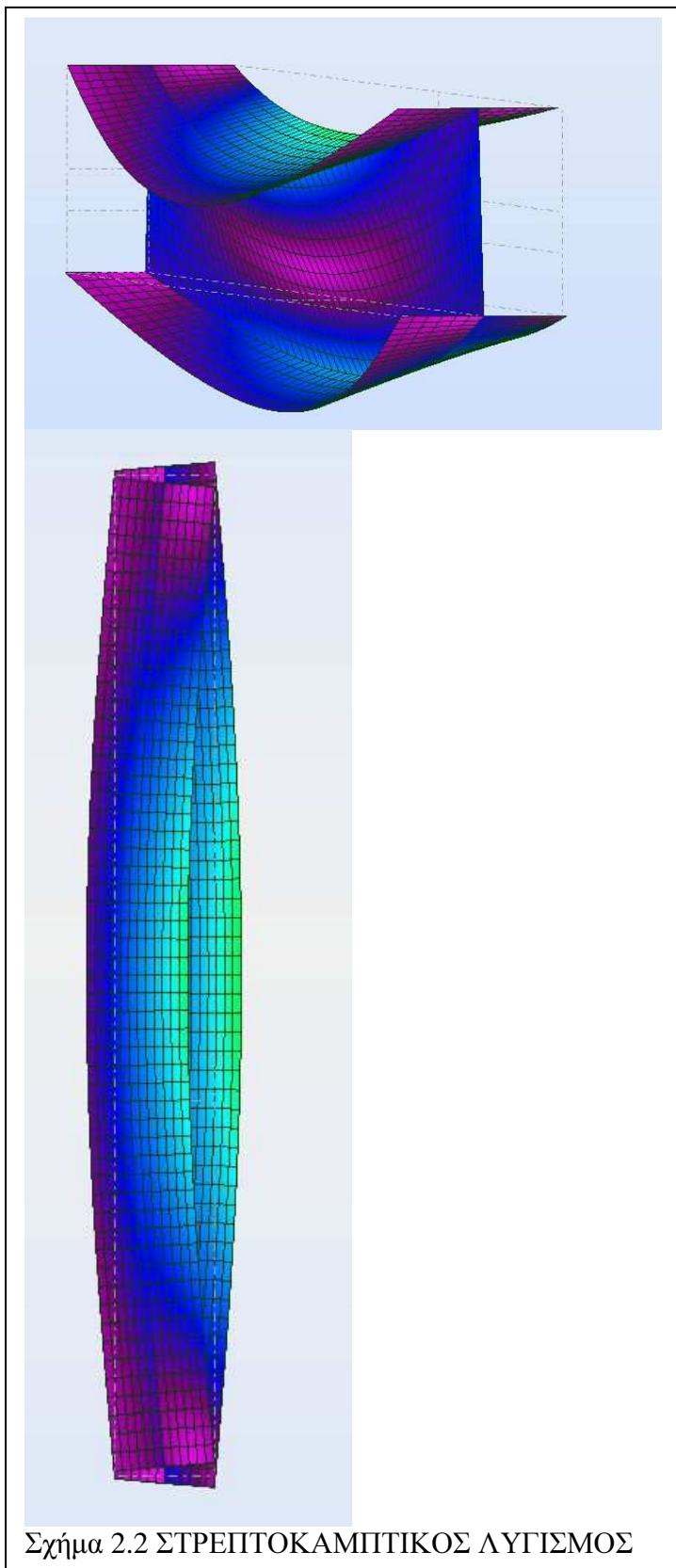
$\beta = \beta_0 = 2$  για πρόβολο

$\beta = \beta_0 = 0,707$  για μονόπακτο φορέα

Θεωρητικά εάν θέλαμε να απεικονίσουμε γραφικά τις δύο αυτές βασικές μορφές λυγισμού θα είχαμε τα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 2.1 ΚΑΜΠΤΙΚΟΣ ΛΥΓΙΣΜΟΣ

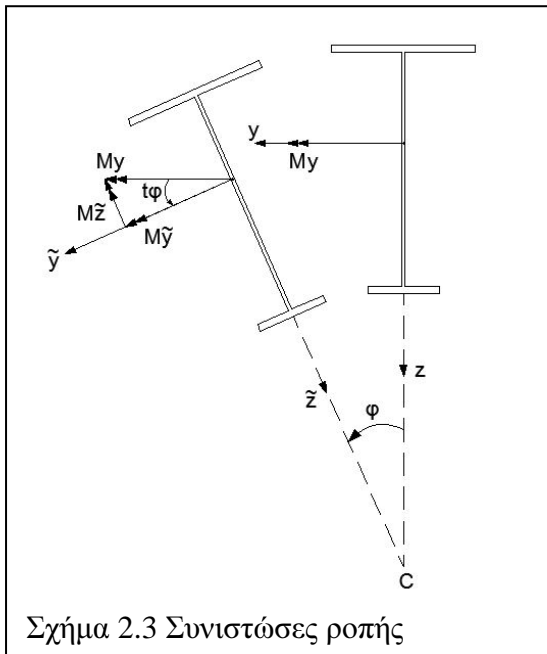


Σχήμα 2.2 ΣΤΡΕΠΤΟΚΑΜΠΤΙΚΟΣ ΛΥΓΙΣΜΟΣ

### 2.3 Στρέβλωση

Μία ιδιαίτερη μορφή πλαγιοστρεπτικού λυγισμού είναι η στρέβλωση, η οποία εμφανίζεται σε φορείς των οποίων η ροπή αδράνειας του ασθενούς άξονα είναι σημαντικά μικρότερη από αυτή του ισχυρού. Ισχύει δηλαδή  $J_y \gg J_z$ .

Για τη στρέβλωση, οι παραμορφώσεις, τη στιγμή της απώλειας ευστάθειας, κατά τον άξονα  $z$  είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις παραμορφώσεις κατά τον άξονα  $y$  και αγνοούνται



$$(w \ll v)$$

Η ροπή που προκαλείται από τα εξωτερικά φορτία, λόγω της στροφής της διατομής αναλύεται σε:

$$M_{\bar{y}} = M_y \cos \varphi \cong M_y$$

εξ. (2.1)

$$M_{\bar{z}} = M_y \sin \varphi \cong -M_y \varphi$$

εξ. (2.2)

## 2.4 Η ενεργειακή μέθοδος

Για τον προσδιορισμό της ευστάθειας των φορέων έναντι λυγισμικών φαινομένων θα γίνει χρήση της ενεργειακής μεθόδου, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας που περιέχει ένας φορέας σε κατάσταση ισορροπίας είναι μηδενική<sup>v</sup>. Ως ενέργεια που περιέχει ένας φορέας, ή σαν δυναμικό του φορέα, ορίζουμε το άθροισμα του έργου των εξωτερικών δυνάμεων και του έργου που προκύπτει από την αναπτυσσόμενη παραμόρφωση (ή αλλιώς το έργο των εσωτερικών δυνάμεων).

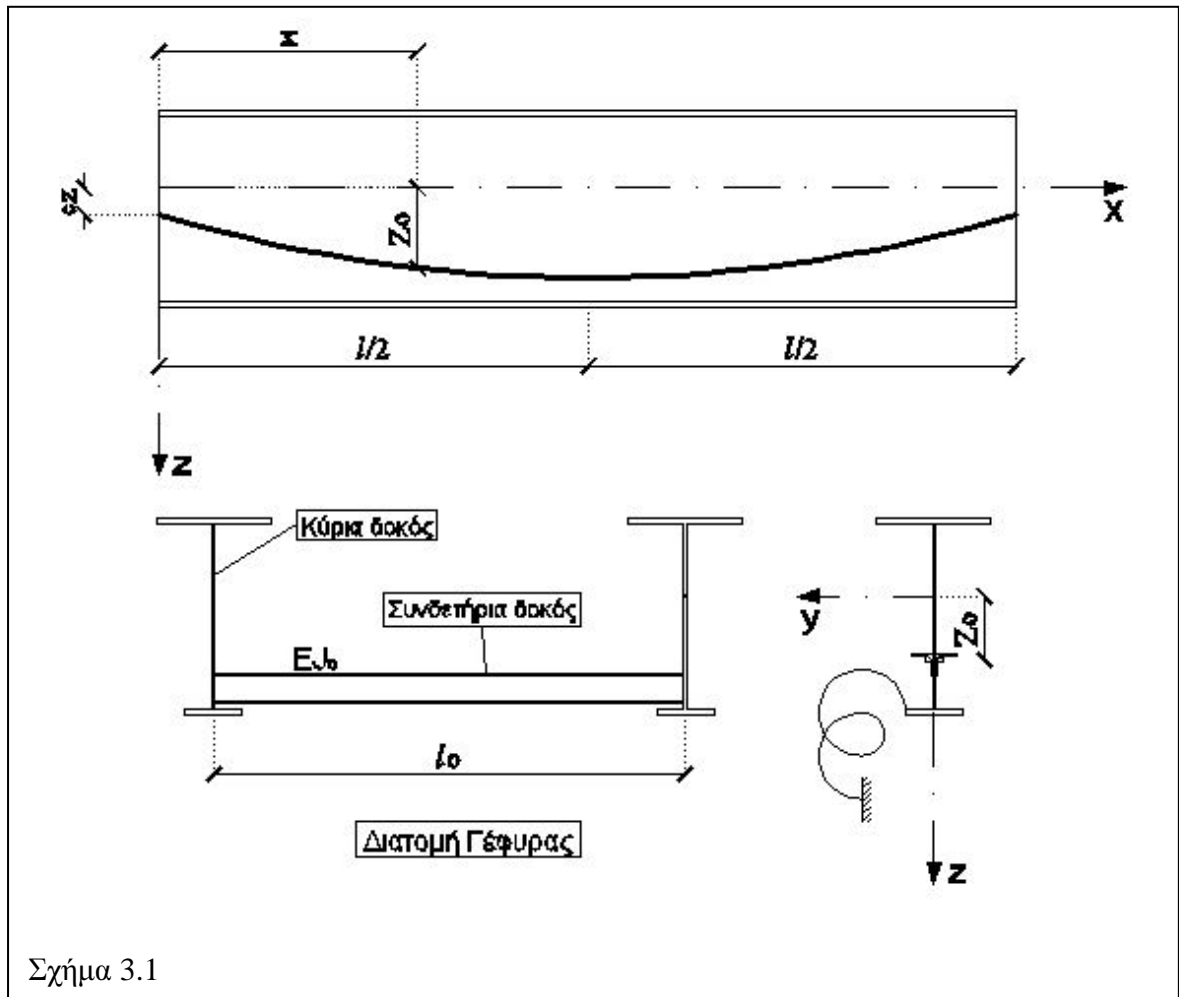
$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_e$$

Ενώ για την κατάσταση ισορροπίας ανάμεσα σε δύο γειτονικές θέσεις ενός σώματος ( $\alpha$  και  $\delta\alpha$ ) θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{\partial \varepsilon(\alpha)}{\partial \alpha} \delta\alpha = 0$$

### 3. Περιγραφή του προβλήματος

Θεωρούμε τη δοκό του σχήματος 3.1, η οποία έστω ότι (χωρίς περιορισμό της γενικότητας της λύσης) αποτελεί τμήμα του φορέα μίας μεταλλικής προεντεταμένης γέφυρας. Το κατάστρωμα της γέφυρας εδράζεται σε τεγίδες διατεταγμένες κατά μήκος της κύριας δοκού, οι οποίες προσφέρουν στρεπτική δυσκαμψία σε αυτή. Οι δυνάμεις που ασκούνται στην κύρια δοκό είναι μια θλιπτική δύναμη  $F$ , και η ροπή κάμψης  $M_y$ . Η προένταση ασκείται μέσω καλωδίων, αγκυρωμένων στα άκρα της δοκού, σε εκκεντρότητα  $e_z$  από το κέντρο βάρους αυτής.



Σχήμα 3.1



### 3.1 Προσδιορισμός του παραγόμενου έργου

#### 3.1.1 Έργο της αναπτυσσόμενης παραμόρφωσης

Λαμβάνοντας υπόψη μας τη στροφή της διατομής, το έργο της αναπτυσσόμενης παραμόρφωσης είναι:

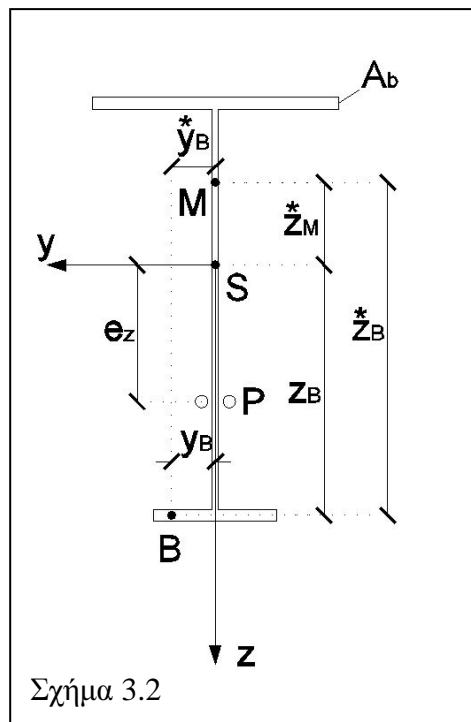
$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} \int_0^l (EJ_z v''^2 + EJ_w \varphi''^2 + GJ_d \varphi'^2) dx$$

(εξ. 3.1)

#### 3.1.2 Έργο των εξωτερικών δυνάμεων

##### 3.1.2.1 Έργο της δύναμης F

Λόγω της δύναμης F( όπου F θεωρούμε τη δύναμη προέντασης που ασκείται με εκκεντρότητα  $e_z$  επί του κέντρου βάρους, ), για το τυχαίο σημείο B( $y_B, z_B$ ) του σχήματος 3.2 θα ισχύει:



Σχήμα 3.2

$$\sigma_B = -F_x \left( \frac{1}{A_b} + \frac{z_B}{J_y} e_z \right)$$

εξ. (3.2)

ενώ το μήκος της αντίστοιχης ίνας θα είναι:

$$\frac{1}{2} \int_0^l (v_B'^2 + w_B'^2) dx$$

εξ. (3.3)

Το αναπτυσσόμενο έργο θα είναι:

$$\varepsilon_F = -\frac{F_x}{2} \int_0^l \oint_{A_b} \left( \frac{1}{A_b} + \frac{z_B}{J_y} e_z \right) (v_B'^2 + w_B'^2) dA_b dx$$

εξ. (3.4)

Η μετατόπιση του σημείου B, λόγω της στροφής  $\varphi$ , σε σχέση με τη μετατόπιση  $v$  του κέντρου βάρους της διατομής, θα είναι:

$$v_B = v - z_B^* \varphi$$

εξ. (3.5)

Όπου το  $z_B^*$  φαίνεται στο σχήμα 3.2.

Οι συντεταγμένες του σημείου B είναι:

$$z_B = z_M - z_B^*$$

εξ. (3.6)

Λόγω των εξ. (3.5) και (3.6) έχουμε:

$$v_B = v - (z_B - z_M) \varphi$$

εξ. (3.7)

Επίσης:

$$w_B = y_B \varphi \Rightarrow w_B' = y_B \varphi'$$

εξ. (3.8)

ή

$$v'_B{}^2 = v'^2 + (z_B{}^2 + z_M{}^2 - 2z_M z_B) \varphi'^2 - 2v' \varphi' (z_B - z_M)$$

εξ. (3.9)

Με δεδομένο ότι

$$\int_{A_b} y_B dA_b = \int_{A_b} z_B dA_b = \int_{A_b} y_B z_B dA_b = 0$$

εξ. (3.10)

Θέτουμε

$$J_p = i_p{}^2 A_b = J_y + J_z$$

εξ. 3.11α)

$$i_M{}^2 = i_p{}^2 + z_M{}^2$$

εξ. (3.11β)

$$V_y = \oint_{A_b} z_B (y_B{}^2 + z_B{}^2) dA_b$$

εξ. (3.11γ)

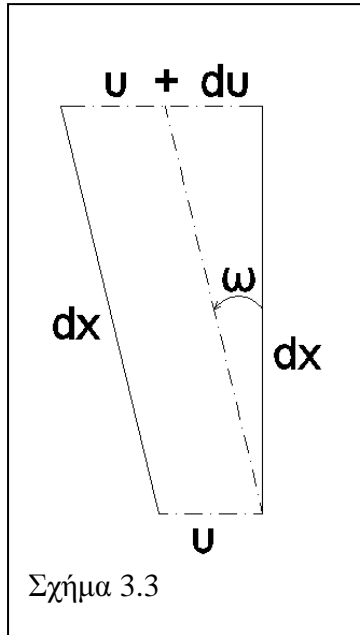
Από τις εξ. (3.9), (3.11α), (3.11β) και (3.11γ) η εξ. (3.4) γίνεται

$$\varepsilon_F = -\frac{F_x}{2} \int_0^l (v'^2 + i_M{}^2 \varphi'^2 + 2z_M v' \varphi') dx - \frac{F_x}{2A_b} \int_0^l [(V_y - 2z_M J_y) \varphi'^2 - 2J_y v' \varphi'] \frac{e_z}{J_y} dx$$

εξ. (3.12)

### 3.1.2.2 Έργο της $M_z$

Έστω  $\omega$  η γωνία στροφής του άξονα  $x$  της ράβδου. Κατά το σχήμα 3.3, για στοιχειώδες τμήμα  $dx$  και επειδή η  $\omega$  είναι πολύ μικρή, θα ισχύει θα ισχύει:



$$\tan \omega \cong \omega = \frac{dv}{dx} = v' \Leftrightarrow \frac{d\omega}{dx} = v'' \Leftrightarrow d\omega = v'' dx \Leftrightarrow -M_z d\omega = -M_z v'' dx \Leftrightarrow d\varepsilon_{M_z} = -M_z v'' dx$$

εξ. (3.13)

Όπως περιγράφηκε στην παράγραφο 2.3 εξ. (2.2) και εξ. (2.3), λόγω του σχήματος 2.3 έχουμε:

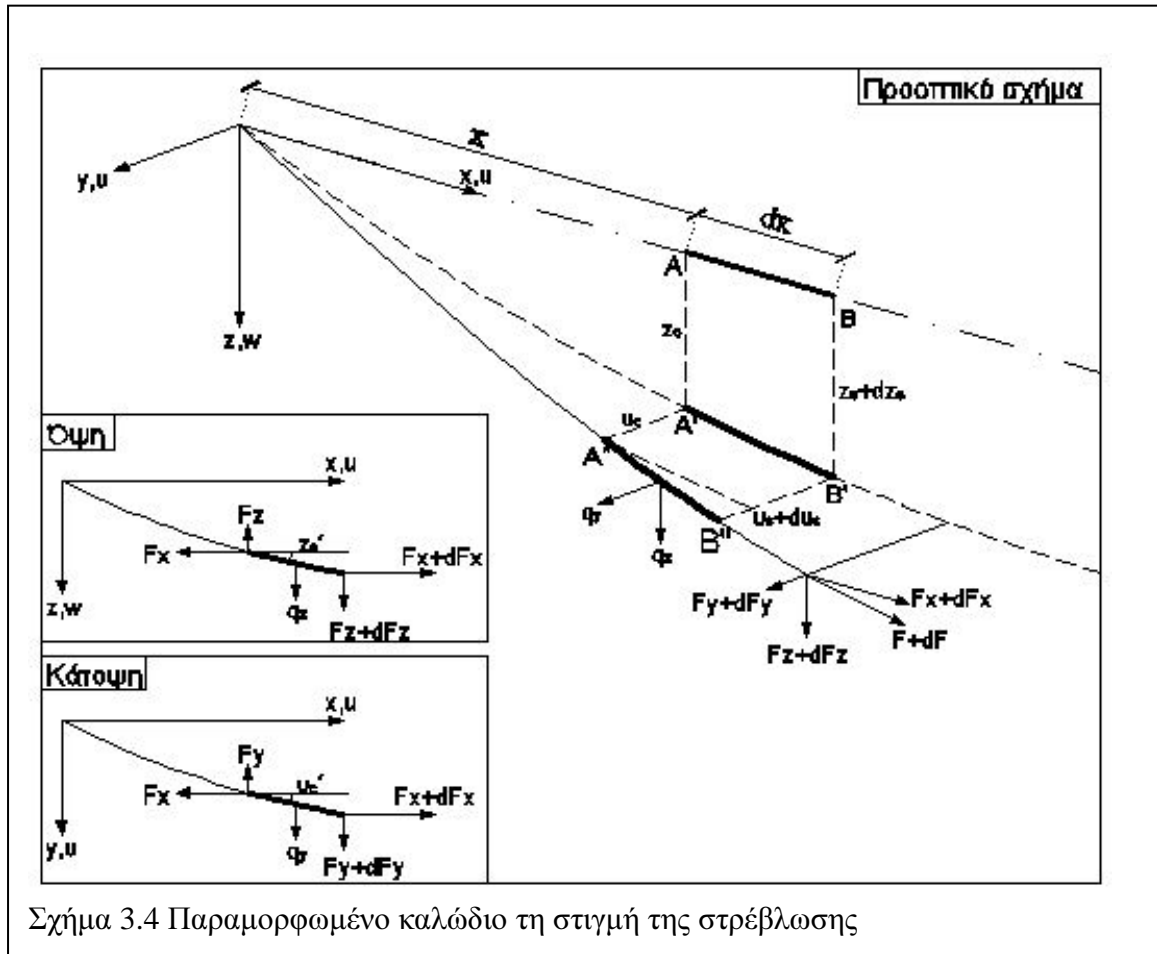
$$\varepsilon_M = - \int_0^l M_z v'' dx ,$$

ή λόγω της εξ.(3.13)

$$\varepsilon_M = - \int_0^l M_z v'' dx = \int_0^l M_y v'' \varphi dx$$

εξ. (3.14)

### 3.1.2.3 Το έργο των καλωδίων



Σχήμα 3.4 Παραμορφωμένο καλώδιο τη στιγμή της στρέβλωσης

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η παραμορφωμένη κατάσταση ενός καλωδίου τη στιγμή της στρέβλωσης. Στην παραμορφωμένη κατάσταση το καλώδιο επιδρά στη δοκό πέρα από την  $q_z$  και με την  $q_y$  η οποία προκαλείται από την παραμόρφωση της δοκού και αντιδρά σε αυτήν. Η μετατόπιση  $v_c$  του καλωδίου συνδέεται με τη μετατόπιση  $v$  του  $S$  με τη σχέση:

$$v_c = v - z_0 \phi$$

εξ. (3.15)

**a) Το έργο της  $q_y$**

Από το σχήμα 3.4 έχουμε:

$$\begin{aligned} F_x &= \text{σταθερή} \\ F_y &= F_x v_c' \\ dF_y &= -q_y dy \end{aligned}$$

**εξ. (3.16)**

και τελικά:

$$q_y = -F_x v_c''$$

**εξ. (3.17)**

Ομοίως για την  $q_z$

$$q_z = -F_x z_o''$$

**εξ. (3.18)**

Άρα εφ' όσον:

$$\varepsilon_{F_1} = \int_0^l (q_y v_c + q_z w_c) dx \cong -F_x \int_0^l v_c v_c'' dx$$

**εξ. (3.19)**

Λόγω της εξ. (3.15) η εξ. (3.19) γίνεται:

$$\varepsilon_{F_1} = -F_x \int_0^l (v v'' - z_o v \varphi'' - z_o \varphi v'' + z_o^2 \varphi \varphi'') dx$$

**εξ. (3.20)**

**b) Το έργο που παράγεται από το καλώδιο**

Λόγω της παραμόρφωσης της διατομής και της μετατόπισης του κέντρου βάρους της, ο τένοντας της προέντασης ακολουθεί τη γεωμετρία του διαμήκη άξονα της διατομής και κατά συνέπεια μεταβάλλει το μήκος του. Η μεταβολή του μήκους έχει ως συνέπεια την αύξηση της ορθής τάσης του τένοντα λόγω του νόμου του Hooke. Η αύξηση της ορθής τάσης συνεπάγεται παραγωγή έργου η οποία λαμβάνεται υπόψη σύμφωνα με τα παρακάτω.

Από το σχήμα 3.4 έχουμε τις ακόλουθες συντεταγμένες:

$$A'(x, v_c, z_o)$$

$$B'(x+dx, v_c+dv_c, z_o+dz_o)$$

Το μήκος  $A'B'$  είναι:

$$\overline{A'B'} = \sqrt{dx^2 + dv_c^2 + dz_o^2} = dx\sqrt{1 + v_c'^2 + z_o'^2} = dx\left(1 + \frac{v_c'^2}{2} + \frac{z_o'^2}{2}\right)$$

**εξ. (3.21)**

Το τελικό μήκος ενός στοιχειώδους τμήματος  $dx$  του καλωδίου θα είναι:

$$ds = \left(1 + \frac{v_c'^2}{2} + \frac{z_o'^2}{2}\right) dx$$

και το συνολικό μήκος του καλωδίου θα είναι:

$$s = \int_0^l \left(1 + \frac{v_c'^2}{2} + \frac{z_o'^2}{2}\right) dx$$

**εξ. (3.22)**

Γνωρίζουμε επίσης ότι η επιμήκυνση ενός καλωδίου συνολικού μήκους  $s$  και διατομής  $A_c$  θα είναι:

$$\Delta s = \frac{F}{A_c E} s$$

**εξ. (3.23)**

Θεωρώντας ότι η ορθή τάση του καλωδίου είναι  $\sigma_c$  και λαμβάνοντας υπόψη μας την εξ. (25) το συνολικό έργο του καλωδίου θα είναι:

$$\varepsilon_{F_2} = \frac{F\sigma_c}{E} \int_0^l \left(1 + \frac{(\nu - z_o\varphi)^2}{2} + \frac{z_o'^2}{2}\right) dx$$

εξ. (3.24)

### 3.1.2.4 Το έργο των πλευρικών στηρίξεων

Θεωρούμε ότι οι δοκοί που στηρίζουν το κατάστρωμα προσφέρουν μία επιπλέον στρεπτική δυσκαμψία στη δοκό, μέσω της ημιάκαμπτης σύνδεσής τους με αυτή. Λαμβάνοντας υπόψη τη ροπή που μπορούν αυτές να παραλάβουν έχουμε  $M=K\varphi$ , κατά συνέπεια:

$$d\varepsilon_s = \frac{1}{2} \varphi M dx = \frac{1}{2} K \varphi^2 dx$$

και τελικά

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2} \int_0^l K \varphi^2 dx$$

εξ. (3.25)

Για τον προσδιορισμό της σταθεράς  $K$  θεωρούμε ότι έχουμε  $n$  δοκούς μήκους  $l_o$  (ίσο με το άνοιγμα μεταξύ των δύο κύριων δοκών των οποίων την ευστάθεια εξετάζουμε), με ροπή αδράνειας περί του ισχυρού άξονά τους  $J_o$ . Η σταθερά της σύνδεσης είναι  $r$ . Κατ'έκταση θα έχουμε:

$$M_1 = \frac{n}{l} r \frac{4EJ_o}{l_o} \varphi = M = K\varphi$$

και τελικά:



$$K = r \frac{4nEJ_o}{l_o}$$

**εξ. (3.26)**

Η σταθερά της σύνδεσης εξαρτάται από τη μορφή και το είδος της. Για κοχλιωτές ημιαρθρωτές συνδέσεις είναι  $0 \leq r \leq 0,25$ . Στην παρούσα εργασία θα ληφθεί  $r=5\%$  .

### 3.2 Το συνολικό έργο

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση και τις εξ.(3.1), (3.12), (3.14), (3.20), (3.24), (3.25) το συνολικά παραγόμενο έργο είναι:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2} \int_0^l (EJ_z v''^2 + EJ_w \varphi''^2 + GJ_d \varphi') dx - \\ & - \frac{F_x}{2} \int_0^l (v'^2 + i_M^2 \varphi'^2 + 2z_M v' \varphi') dx - \\ & - \frac{F_x}{2A_b} \int_0^l [(V_y - 2z_M J_y) \varphi'^2 - 2J_y v' \varphi'] \frac{e_z}{J_y} dx + \\ & + \int_0^l M_y v'' \varphi dx - \\ & - F_x \int_0^l (v v'' - z_o v \varphi'' - z_o \varphi v'' + z_o^2 \varphi \varphi'') dx + \\ & + \frac{F \sigma_c}{E} \int_0^l (1 + \frac{(v - z_o \varphi)^2}{2} + \frac{z_o'^2}{2}) dx + \frac{1}{2} \int_0^l K \varphi^2 dx = 0 \end{aligned}$$

Πρέπει να ισχύει:

$$\delta \varepsilon = 0$$

Μετά από, κατά παράγοντες, ολοκλήρωση παίρνουμε ολοκληρωμένες παραστάσεις οι οποίες δείχνουν τις συνοριακές συνθήκες, και παραστάσεις προς ολοκλήρωση οι οποίες αποτελούν τις διαφορικές εξισώσεις του προβλήματος.

Οι προς ολοκλήρωση παραστάσεις είναι:

$$E I_z v'''' - (F C_o - \frac{F^2}{EA_c})v'' + FC_o(z_M - \frac{e_z}{A_b})\varphi'' + (2FC_o + \frac{F^2}{EA_c})(z_o\varphi)'' + (M_y\varphi)'' = 0$$

$$E I_\omega \varphi'''' - (G I_d - i_M^2 FC_o)\varphi'' + (z_M FC_o + 2z_o FC_o - \frac{e_z FC_o}{A_b} + \frac{z_o F^2}{EA_c})v'' +$$

$$+ \frac{e_z FC_o}{A_b I_y} (V_y - 2z_M I_y)\varphi'' + \frac{e_z FC_o}{A_b I_y} (V_y - 2z_M I_y)\varphi'' - (2FC_o + \frac{F^2}{EA_c})z_o(z_o\varphi)'' + K\varphi + M_y v'' = 0$$

όπου:  $C_o = \frac{\sqrt{\ell^2 - 16f^2}}{\ell}$  κατ' επέκταση  $F_x = F \cos \varphi = F C_o$

**εξ. (3.27)**

σημειώνεται ότι συνήθως  $C_o=1$ .

### 3.3 Απλοποίηση και επίλυση του συστήματος

Οι εξισώσεις της παραγράφου 3.2 αποτελούν ένα μη γραμμικό σύστημα και κατά συνέπεια δεν μπορούν να επιλυθούν με στοιχειώδεις μεθόδους. Για να μην οδηγηθούμε σε επιλύσεις διαφορικών συναρτήσεων ανωτέρου βαθμού όσον αφορά τη ροπή που αναπτύσσεται επί της δοκού θα επιλέξουμε ένα φορέα με σταθερή εξωτερικά επιβαλλόμενη ροπή σε όλο το μήκος του.

Θεωρούμε μία αμφίερειστη δοκό διπλής συμμετρίας ( $z_M=0, V_y=0$ ) η οποία καταπονείται από ζεύγος ρομών στα άκρα της και προεντείνεται με ευθύγραμμο καλώδιο σταθερής εκκεντρότητας  $e_z$ . Θεωρούμε ότι η δοκός αυτή αντιστηρίζεται πλευρικά από τεγίδες που προσφέρουν την, παραπάνω υπολογισθείσα, πρόσθετη στρεπτική αντίσταση σταθεράς  $K$ .

Σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα ( $z_M=0, V_y=0$  και  $z_0= e_z=σταθερή$ ) οι εξισώσεις (3.27) της παραγράφου 3.2 παίρνουν τη μορφή:

$$\left. \begin{aligned} EI_z v'''' - \left(F - \frac{F^2}{EA_\zeta}\right) v'' + \left(F + \frac{F^2}{EA_\zeta}\right) e_z \phi'' + M_y \phi'' &= 0 \\ EI_\omega \phi'''' - (GI_d - i_M^2 F) \phi'' + e_z \left(F + \frac{F^2}{EA_\zeta}\right) v'' - \left(2F + \frac{F^2}{EA_\zeta}\right) e_z^2 \phi'' + K\phi + M_y v'' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

εξ. (3.28)

Θεωρούμε λύσεις, οι οποίες να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες, της μορφής:

$$\left. \begin{aligned} v &= V \cdot \text{Sin} \frac{\pi x}{\ell} \quad , \quad \phi = \Phi \cdot \text{Sin} \frac{\pi x}{\ell} \end{aligned} \right\}$$

εξ. (3.29)

Οι εξισώσεις (3.28) γίνονται:

$$\left. \begin{aligned} E I_z \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^4 V + \left( F - \frac{F^2}{EA_c} \right) \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 V - \left( F + \frac{F^2}{EA_c} \right) e_z \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \Phi - M_y \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \Phi &= 0 \\ E I_\omega \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^4 \Phi + (G I_d - i_M^2 F) \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \Phi - e_z \left( F + \frac{F^2}{EA_c} \right) \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 V + \left( 2F + \frac{F^2}{EA_c} \right) e_z^2 \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \Phi + \\ &+ K\Phi - M_y \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 V = 0 \end{aligned} \right\}$$

**εξ. (3.30)**

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.2 το κρίσιμο φορτίο καμπτικού και πλαγιοστρεπτικού λυγισμού είναι αντίστοιχα:

$$\left. \begin{aligned} E I_z \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 = P_e \quad , \quad \frac{1}{i_M^2} \left[ E I_\omega \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 + G I_d \right] = P_T \end{aligned} \right\}$$

**εξ. (3.31)**

Βάσει των εξ. (3.31) το σύστημα των εξισώσεων (3.30) που καλούμαστε να επιλύσουμε γίνεται:

$$\left. \begin{aligned} A \cdot V + (B - M_y) \cdot \Phi &= 0 \\ (\Gamma - M_y) \cdot V + \Delta \cdot \Phi &= 0 \end{aligned} \right\}$$

**εξ. (3.32)**

όπου:

$$\begin{aligned} A &= P_e + F - \frac{F^2}{EA_c} \quad , \quad B = -e_z \left( F + \frac{F^2}{EA_c} \right) \\ \Gamma &= B \quad , \quad \Delta = i_M^2 (P_T - F) + F e_z^2 \left( 2 + \frac{F}{EA_c} \right) + K \frac{l^2}{\pi^2} \end{aligned}$$

Για να έχει το παραπάνω σύστημα λύση πρέπει η ορίζουσά του να είναι ίση με το μηδέν.

Η ορίζουσα του συστήματος είναι:

$$D = -M_y^2 + M_y(B + \Gamma) + (A\Delta - \Gamma B) = 0$$

Επιλύοντας το πολυώνυμο 2<sup>ου</sup> βαθμού ως προς τη  $M_y$  αυτή η συνθήκη μας δίνει την χαρακτηριστική εξίσωση της ροπής σε σχέση με τους παραπάνω παράγοντες:

$$M_y = \frac{1}{2} \left( (B + \Gamma) + \sqrt{(B - \Gamma)^2 + 4A\Delta} \right)$$

εξ. (3.33)

Στην παραπάνω εξίσωση για  $F=0$  έχουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της δοκού χωρίς αξονική δύναμη, ενώ για  $e_z=0$  παίρνουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού της δοκού για ταυτόχρονη δράση ροπής και θλιπτικής αξονικής δύναμης χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη μας την επίδραση της προέκτασης στο φορέα.

$$F = 0 \Rightarrow M_y = \sqrt{P_e (i_M^2 P_T + K \frac{l^2}{\pi^2})}, \text{ ενώ}$$

εξ. (3.34)

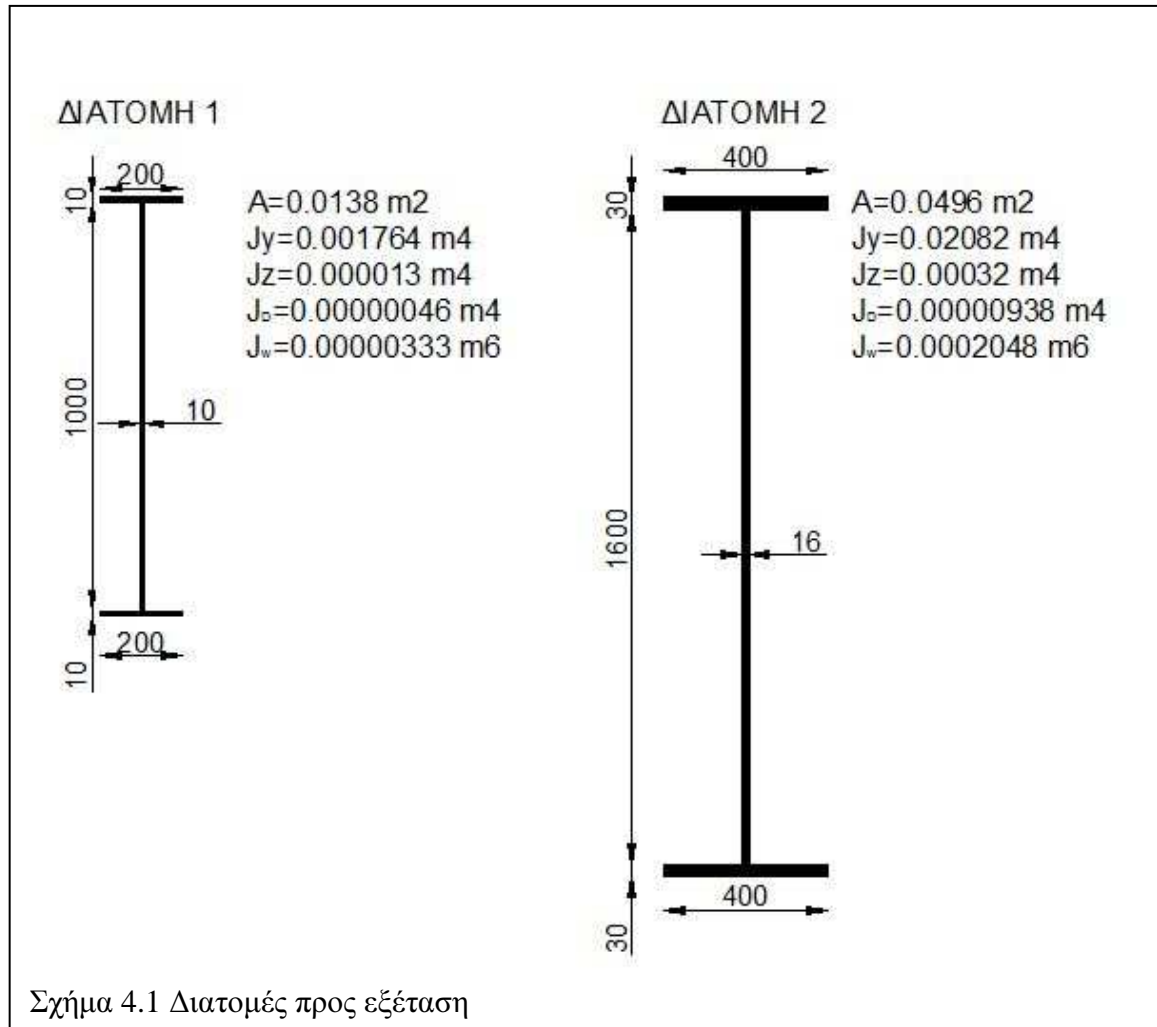
$$e_z = 0 \Rightarrow M_y = \sqrt{(P_e - F) [i_M^2 (P_T - F) + K \frac{l^2}{\pi^2}]}$$

εξ. (3.35)

#### 4. Αριθμητικά αποτελέσματα

Για τον υπολογισμό των παραπάνω μεγεθών θα γίνει χρήση του παρακάτω προγράμματος το οποίο μας δίνει αποτελέσματα μέσα από το λογισμικό Mathcad.

Θα εξετάσουμε δύο διατομές με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:



Για τη διατομή 1 ο έλεγχος θα γίνει για μήκη 10 και 15 μέτρα, ενώ για τη διατομή 2 ο έλεγχος θα γίνει για μήκη 10 και 20 μέτρα.

Η εκκεντρότητα του τένοντα θα ληφθεί για τη διατομή 1 ίση με 0 και 0.35 μέτρα, ενώ για τη διατομή 2 θα ληφθεί ίση με 0 και 0.6 μέτρα.

Για τις πλευρικές στηρίξεις των δοκών του καταστρώματος θα ληφθούν υπόψη τεγίδες με ροπή αδράνειας 0,0002313 m<sup>4</sup> κάθε 3 μέτρα.

Πρόγραμμα επίλυσης (οι τιμές είναι ενδεικτικές)

```

ClearAll[Eb, Gb, Jy, Jz, Jw, Jd, Jp, Ab, Jo, Lo, Ac, n, ip, iM, zM, co,
  f, L, ez, zo1, zo2, My, My1, My2, Mys, F, n, x, Pe, PT, k, r, I1, I2, I3,
  I4, I5, I6, A, B, Γ, Δ, H1, H2, H3]
L = 20;
Lo = 7;
Jy = 0.02082;
Jz = 0.00032;
Ab = 0.0496;
Jw = 0.0002048;
Jd = 0.0938 * 10-4;
Jo = 0.0002313;
Ac = 0.001;
Eb = 2.1 * 108;
Gb = 0.8 * 108;
zM = 0;
n = L / 3;
r = 0.05
ez = 0.5;

ip =  $\sqrt{\frac{Jy + Jz}{Ab}}$ ;
iM =  $\sqrt{ip^2 + zM^2}$ ;
Pe =  $\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 * Eb * Jz$ 
PT =  $\frac{1}{iM^2} * \left(Eb * Jw * \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + Gb * Jd\right)$ 
k =  $r * 4 * n * Eb * Jo / (L * Lo)$ ;
A =  $Pe + F - \frac{F^2}{Eb * Ac}$ ;
B =  $ez * \left(-F - \frac{F^2}{Eb * Ac}\right)$ ;
Γ = B;
Δ =  $iM^2 * (PT - F) + ez^2 * \left(2 * F + \frac{F^2}{Eb * Ac}\right) + k * \left(\frac{L}{\pi}\right)^2$ ;

My1 =  $iM * \sqrt{Pe * \left(PT + \frac{k}{iM^2} * \left(\frac{L}{\pi}\right)^2\right)}$ 
My2 =  $iM * \sqrt{(Pe - F) * \left(PT - F + \frac{k}{iM^2} * \left(\frac{L}{\pi}\right)^2\right)}$ 
Mys =  $\frac{1}{2} * ((B + \Gamma) + \sqrt{(B - \Gamma)^2 + 4 * A * \Delta})$ ;

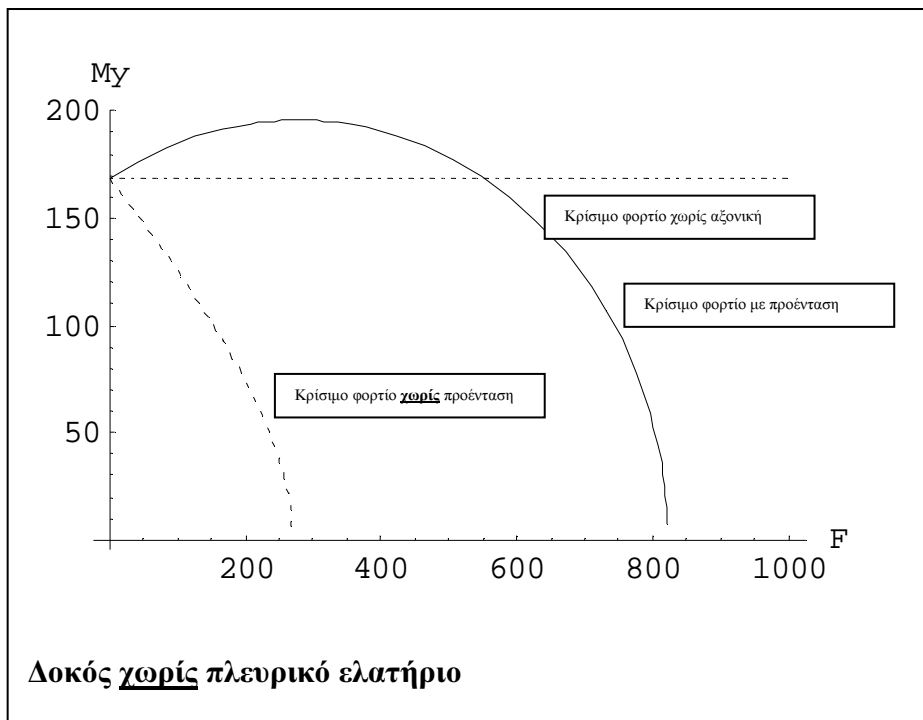
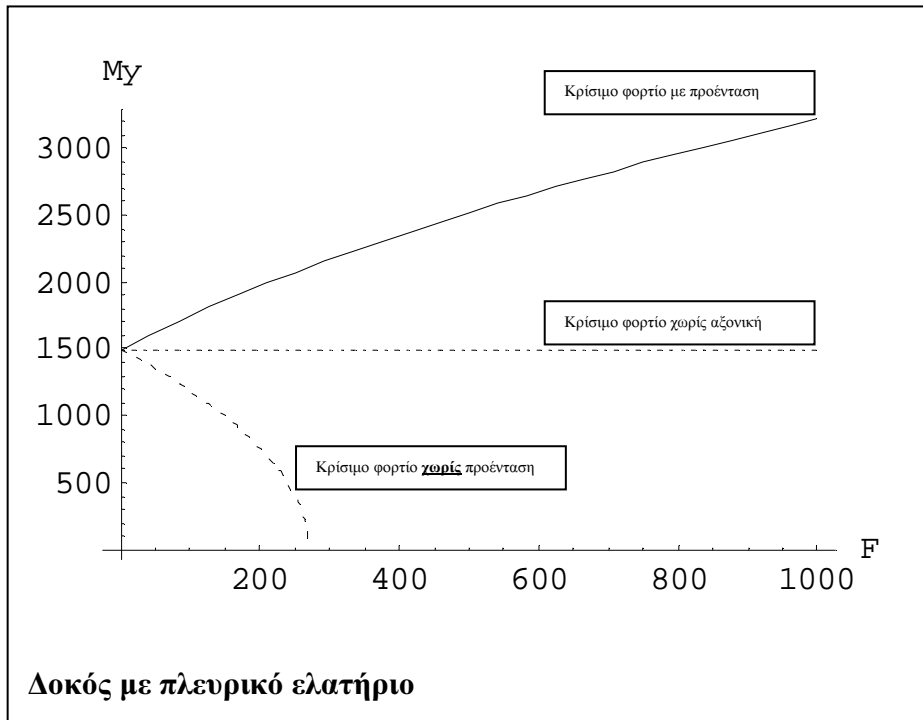
H1 = Plot[My1, {F, 0, 8000},
  PlotStyle -> {Dashing[{0.005, 0.01}], Thickness[0.004]},
  AxesLabel -> {"F", "My1"}]
H2 = Plot[My2, {F, 0, 3000},
  PlotStyle -> {Dashing[{0.008, 0.015}], Thickness[0.004]},
  AxesLabel -> {"F", "My2"}]
H3 = Plot[Mys, {F, 0, 12000}, AxesLabel -> {"F", "Mys"}]
Show[H1, H2, H3, AxesLabel -> {"F", "My"}]
Null

```



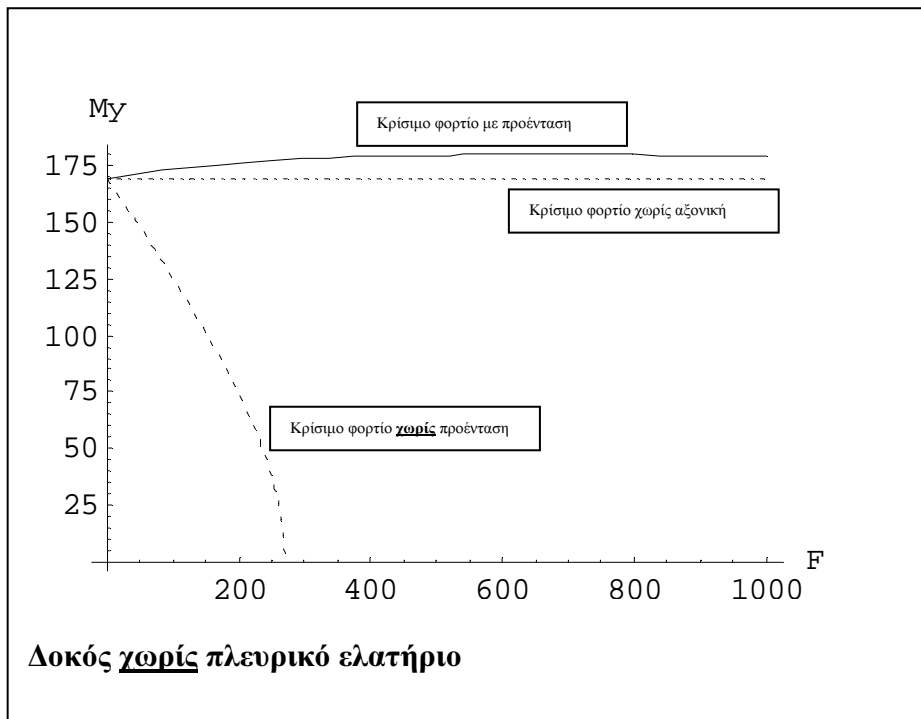
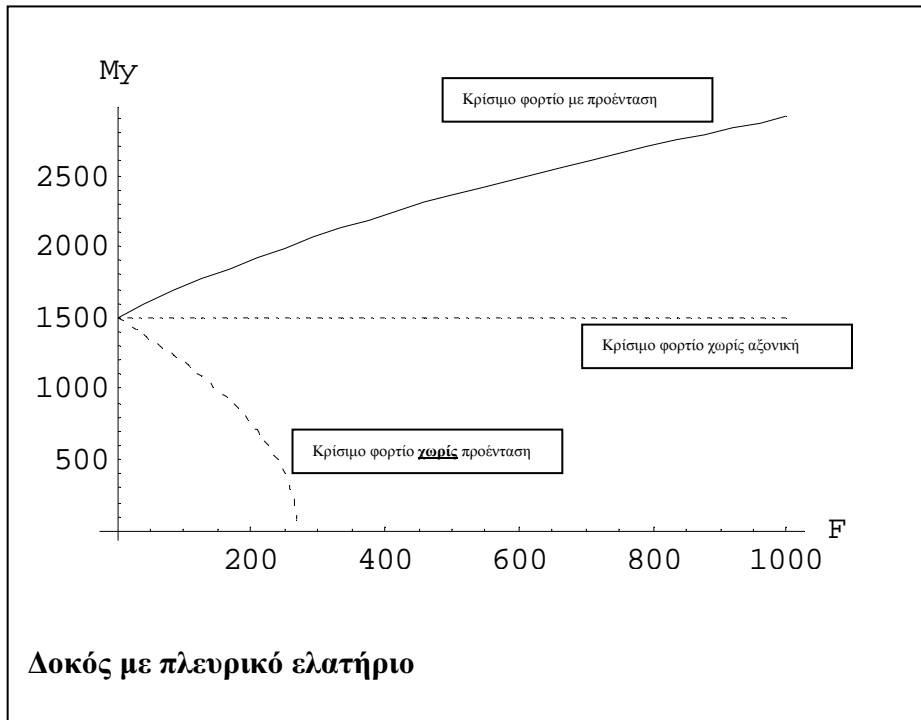
### Αποτελέσματα διατομής 1

$e_z=0$ ,  $L=10$ , Άνοιγμα καταστρώματος 4m



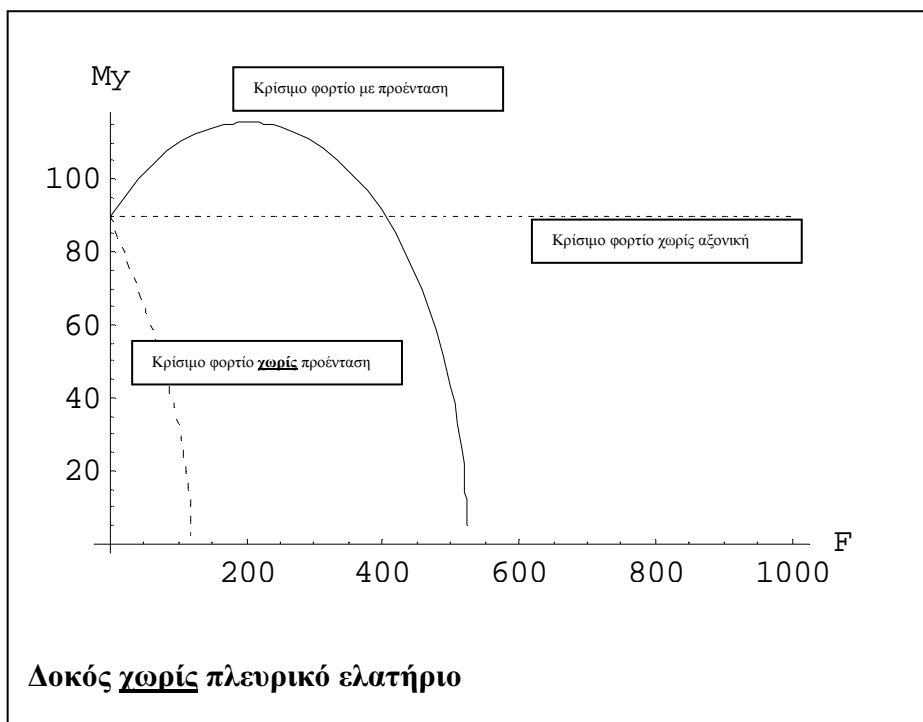
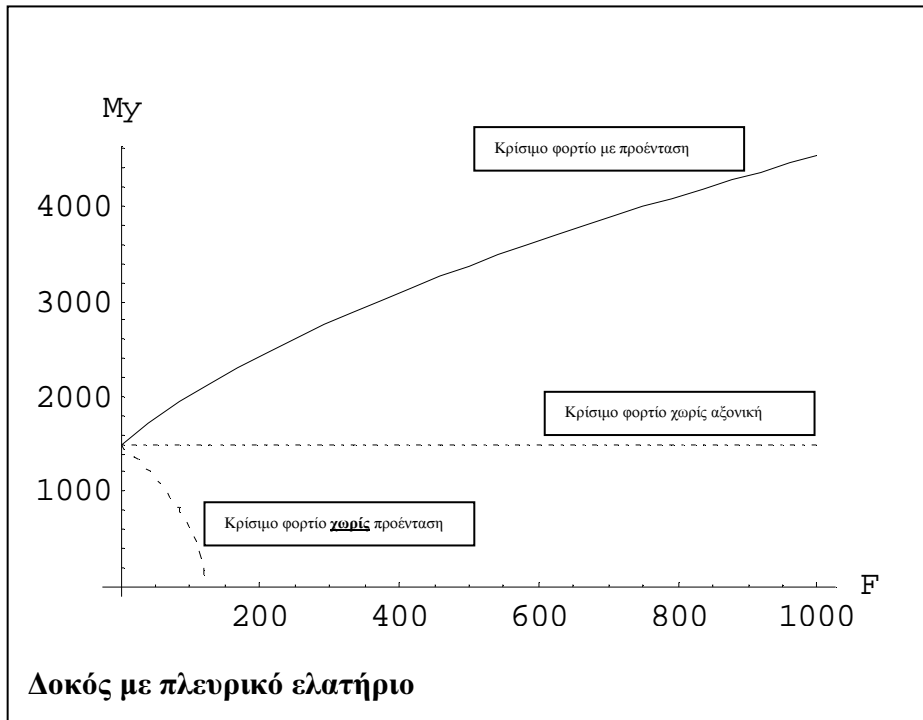
## Αποτελέσματα διατομής 1

$e_z=0.35, L=10$ , Άνοιγμα καταστρώματος 4m



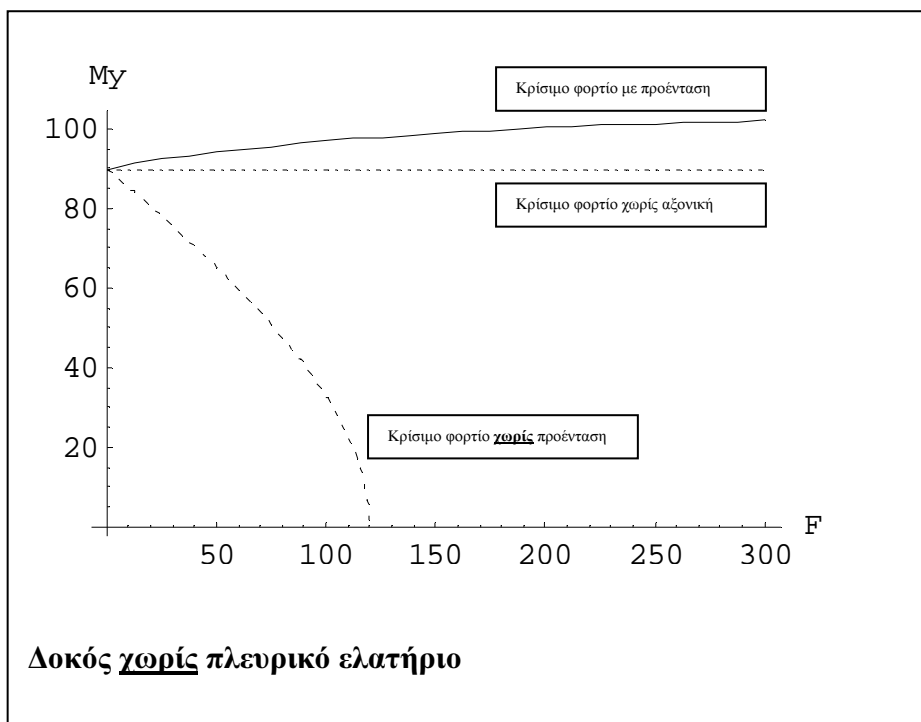
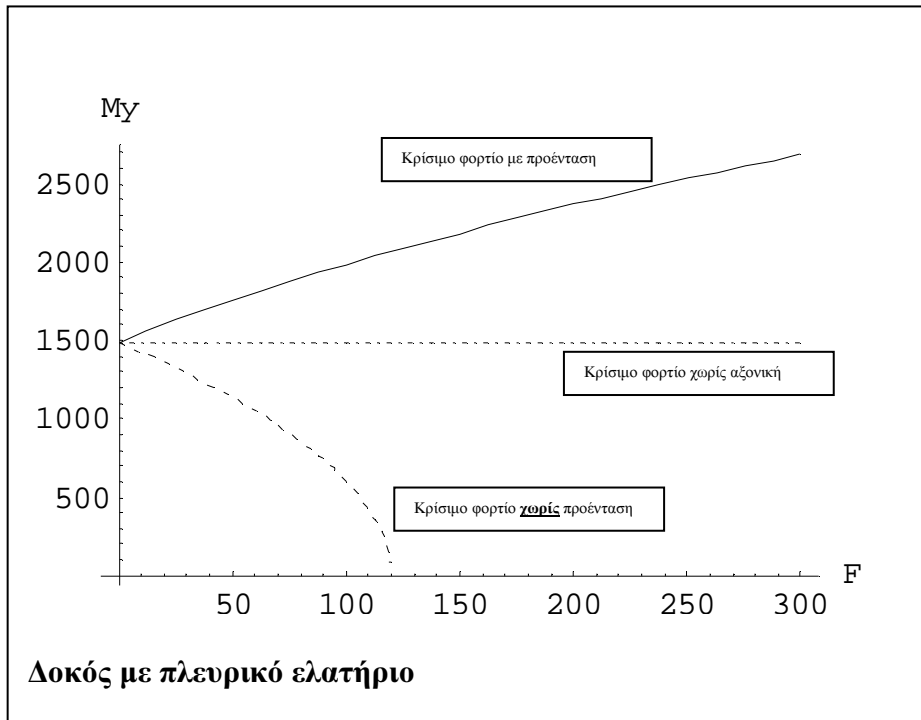
### Αποτελέσματα διατομής 1

$e_z=0$ ,  $L=15$ , Άνοιγμα καταστρώματος 4m



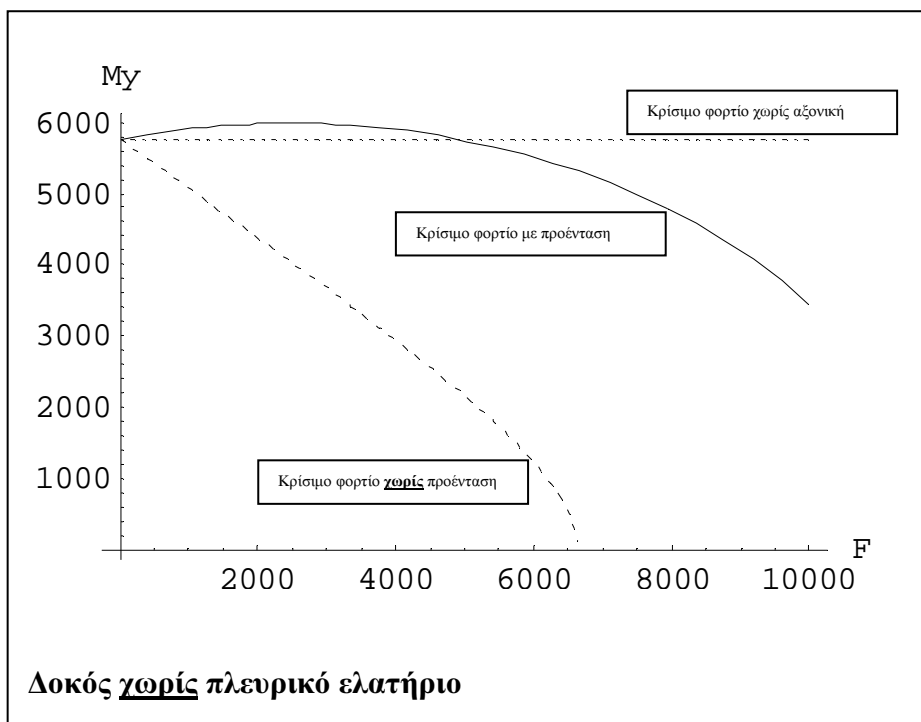
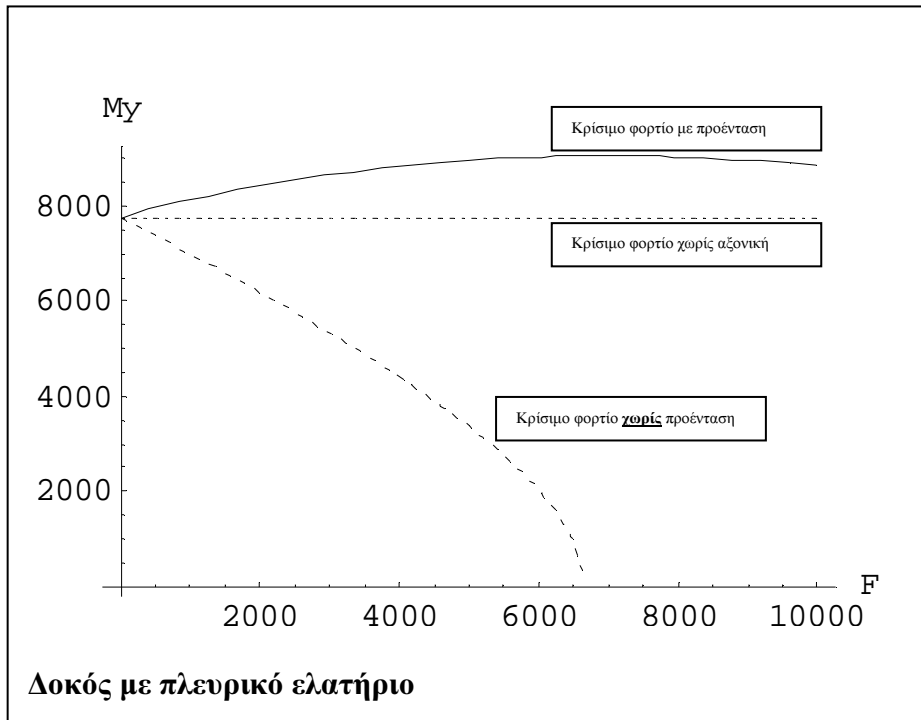
## Αποτελέσματα διατομής 1

$e_z=0.35$ ,  $L=15$ , Άνοιγμα καταστρώματος 4m



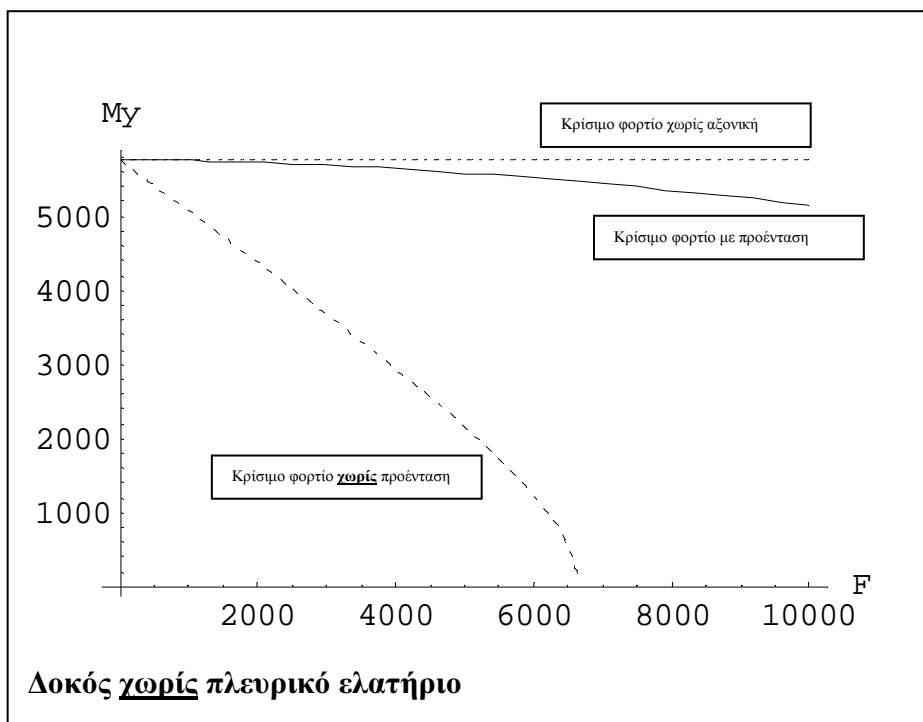
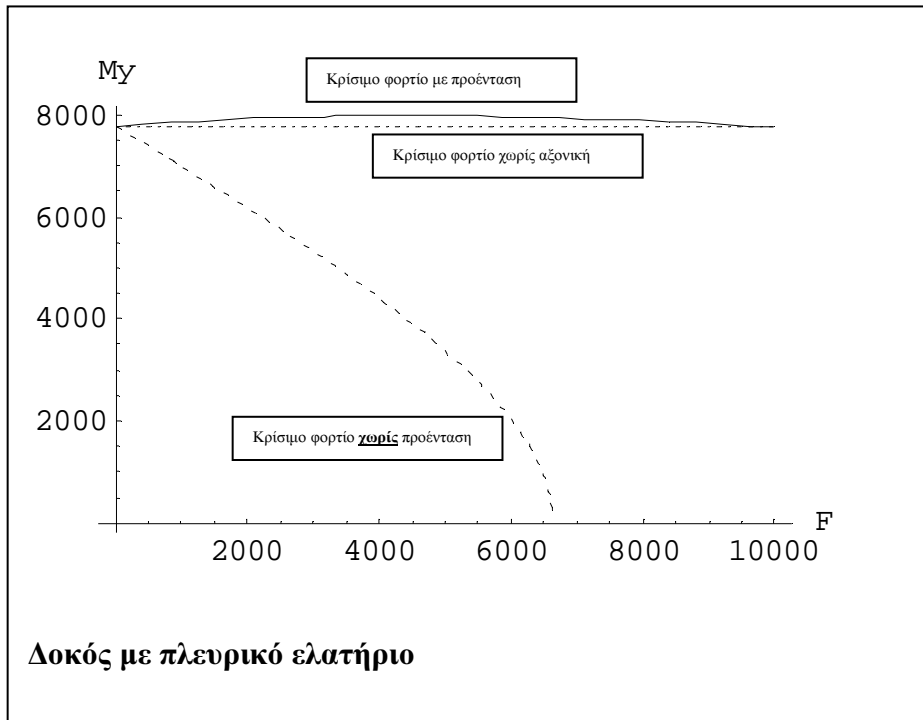
## Αποτελέσματα διατομής 2

$e_z=0, L=10$ , Άνοιγμα καταστρώματος  $8m$



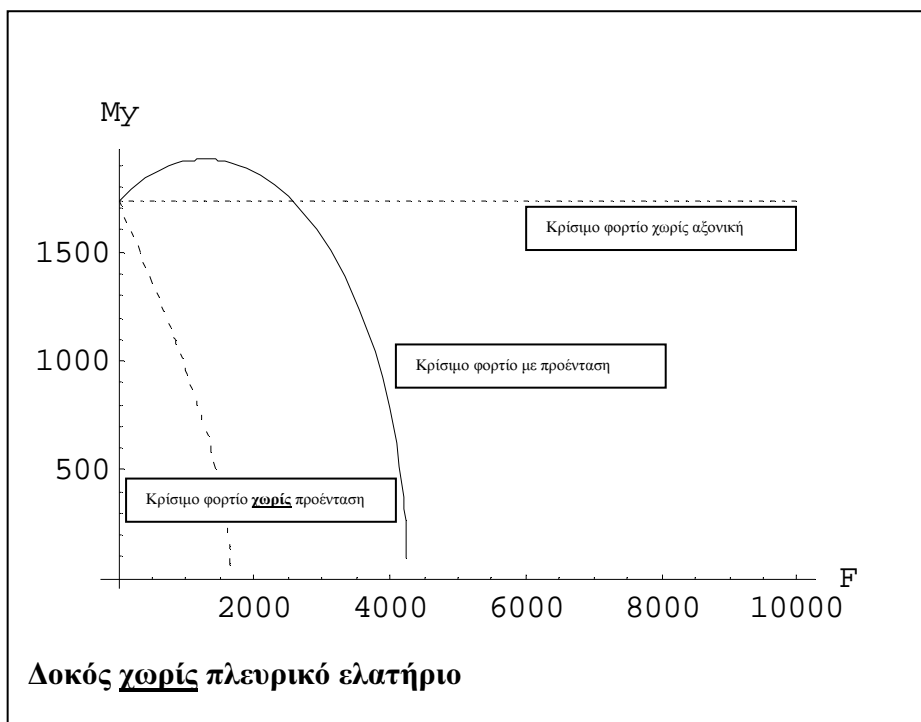
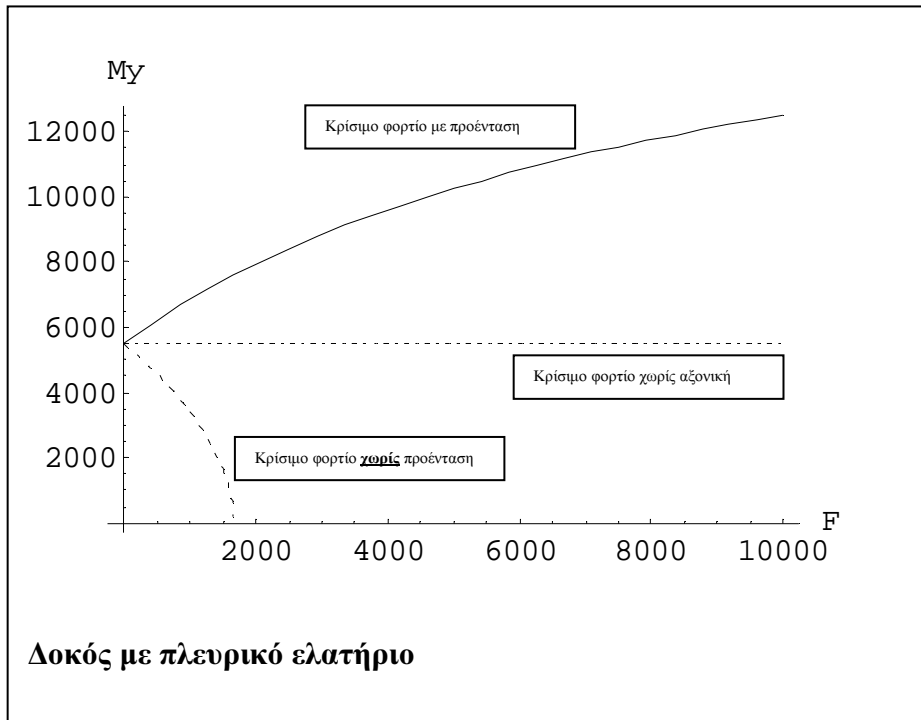
## Αποτελέσματα διατομής 2

$e_z=0.60, L=10$ , Άνοιγμα καταστρώματος 8m



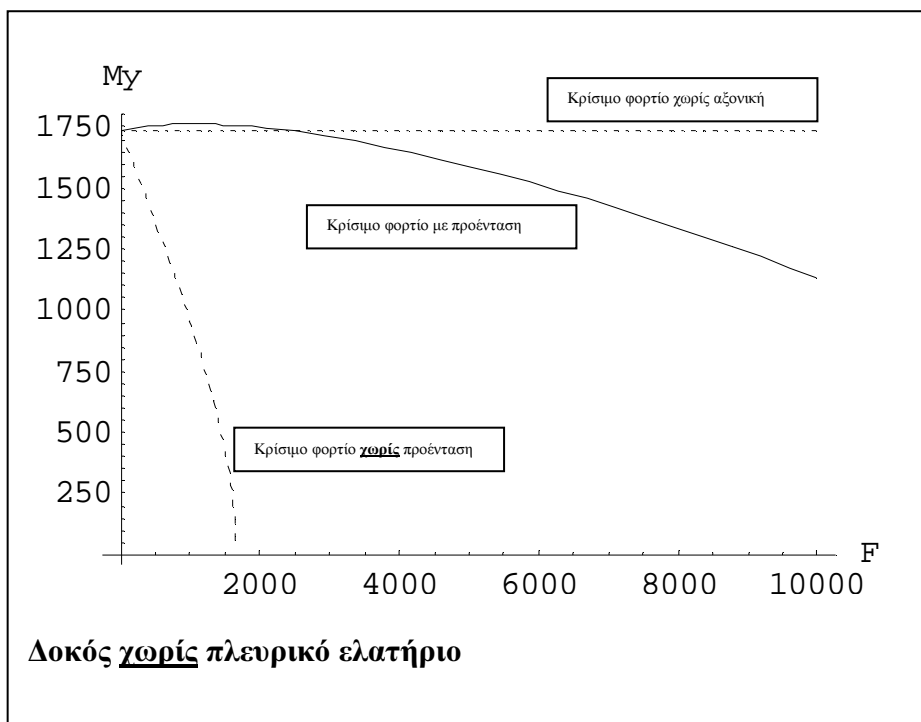
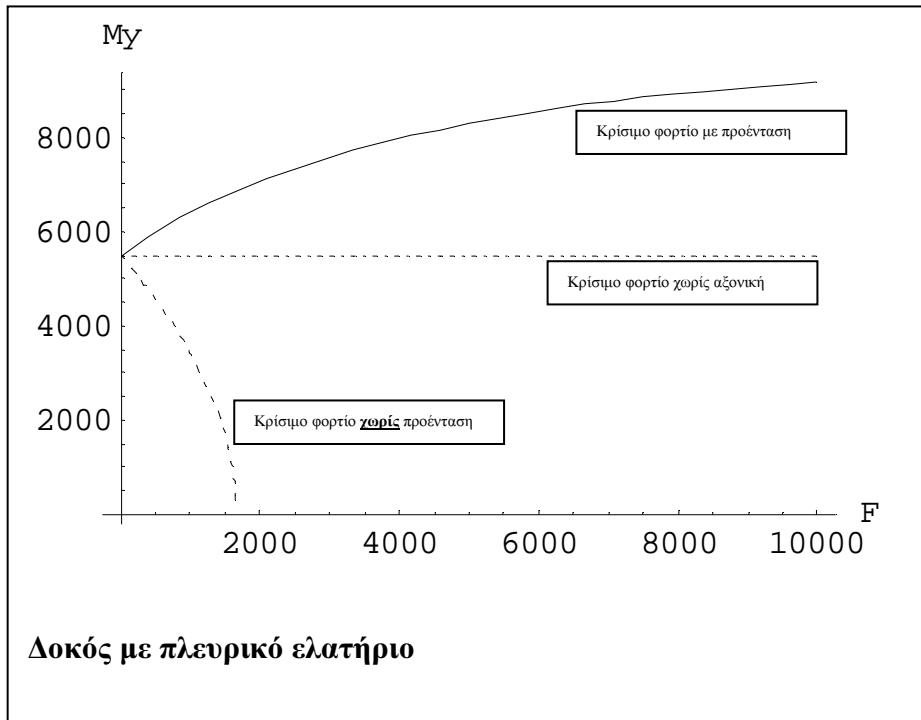
## Αποτελέσματα διατομής 2

$e_z=0, L=20$ , Άνοιγμα καταστρώματος 8m



## Αποτελέσματα διατομής 2

$e_z=0,60$ ,  $L=20$ , Άνοιγμα καταστρώματος 8m





## **5. Συμπεράσματα**

Σημαντικό ρόλο στην αντοχή σε στρέβλωση παίζει η ύπαρξη των πλευρικών στηρίξεων που προσφέρουν οι τεγίδες του καταστρώματος, καθώς τα αριθμητικά αποτελέσματα αλλάζουν δραματικά όταν τις λαμβάνουμε υπόψη.

Παρόλαυτά από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση η ύπαρξη της προέντασης βελτιώνει σημαντικά την ευστάθεια του φορέα έναντι λυγισμού, ενώ η τάξη μεγέθους αύξησης της αντοχής είναι πολλαπλάσια της αρχικής.

## 6. Βιβλιογραφία - Αναφορές

- [1] NUNZIATA VINC., “STRUTTURE IN ACCIAIO PRECOMPRESSO”, 1999, PALERMO, EDITORE DARIO FLOCCAVIO.
- [2] TROITSKY M.S. “PRESTRESSED STEEL BRIDGES”, 1990, VAN NOSTRAD CO, N. YORK.
- [3] SAADATMANESH H. “EXPERIMENTAL STUDY: PRESTRESSED COMPOSITE BEAMS”, J. STR. ENG. ASCE, 1989, 115(9), 2348-2363.
- [4] AYYUB B.M, SOHN Y.G, SAADATMANESH H., “PRESTRESSED COMPOSITE GIRDERS UNDER POSITIVE MOMENTS”, J. STR. ENG. ASCE, 1990, 116(11), 2931-2951.
- [5] HAMBLY E.C, “BRIDGE DECK BEHAVIOUR’ 2ND ED. E&FNSPON, 1986.
- [6] SUNKYN PARK, KIM T., KIM K., HANG S-H., “FLEXURAL BEHAVIOUR OF STEEL I-BEAM PRESTRESSED WITH EXTERNALLY UNBONDED TENDONS” J. OF CONSTR. STEEL RESEARCH, 2010, 66, 125-132

---

<sup>i</sup> «THE HISTORY OF PRESTRESSED CONCRETE: 1888 TO 1963» - TYSON DINGES

<sup>ii</sup> «PRESTRESSED STEEL STRUCTURES: HISTORICAL AND TECHNOLOGICAL ANALYSIS».A. MASULLO - V. NUNZIATA

<sup>iii</sup> “PRESTRESSED STEEL STRUCTURES DESIGN: A NEW FRONTIER FOR STRUCTURAL ENGINEERING” V. NUNZIATA

<sup>iv</sup> «BUCKLING AND POST-BUCKLING», J. ARBOCZ, M. POTIER-FERRY, J. SINGER, V. TVERGAARD – ΕΚΔΟΣΕΙΣ SPRINGER – VERLAG

<sup>v</sup> Γ.Θ. ΜΙΧΑΛΤΣΟΣ: «ΕΛΑΦΡΕΣ ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ – ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ» ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΥΜΕΩΝ - 2<sup>Η</sup> ΕΚΔΟΣΗ – 2008 – I SBN 978-960-7888-87-7, ΚΕΦ.2