

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Παύλος Γκέσος

Μη Γραμμική Ανάλυση με Κατανε- μημένη Πλαστικότητα στη Διατομή

2022

Πίνακας περιεχομένων

1. Το Αντικείμενο της Εργασίας.....	9
2. Καταστατικές Εξισώσεις σ-ε.....	13
2.1. Σχέση σ-ε των Mander, Priestley, Park.....	13
2.1.1. Πρώτη Θλίψη (σκελετός).....	13
2.1.2. Εφελκυσμός Χωρίς Προηγούμενη Θλίψη.....	15
2.1.3. Θλιπτική Αποφόρτιση.....	15
2.1.4. Εφελκυσμός μετά από Θλίψη.....	16
2.1.5. Θλιπτική Επαναφόρτιση.....	16
2.1.5.1. Σφάλμα.....	17
2.2. Διγραμμική Σχέση Σχεδιασμού σ-ε, του ΕΚ2.....	18
2.2.1. Η σχέση του ΕΚ2.....	18
2.2.2. Γενίκευση με Εφελκυσμό και Αποφόρτιση – Επαναφόρτιση.....	19
2.3. Παραβολική Σχέση Σχεδιασμού σ-ε, του ΕΚ2.....	20
2.3.1. Η σχέση του ΕΚ2.....	20
2.3.2. Γενίκευση με Εφελκυσμό και Αποφόρτιση – Επαναφόρτιση.....	21
2.4. Σχέση σ-ε, του ΕΚ2 για τη Μη Γραμμική Ανάλυση.....	21
2.4.1. Η σχέση του ΕΚ2.....	21
2.4.2. Γενίκευση με Εφελκυσμό και Αποφόρτιση – Επαναφόρτιση.....	22
2.5. Σχέση Χάλυβα με Κινηματική Κράτυνση.....	24
2.5.1. Η σχέση.....	24
2.5.2. Γενίκευση με Εφελκυσμό και Αποφόρτιση – Επαναφόρτιση.....	25
3. Διατομή Μέλους.....	26
3.1. Προσδιορισμός Διατομής.....	26
3.2. Γεωμετρικό Κέντρο Βάρους Διατομής.....	26
3.3. Επιπεδότητα Διατομών.....	27
3.4. Ομαδοποίηση Ινών.....	27
4. Ολοκλήρωση των Ορθών Τάσεων στη Διατομή.....	29
4.1. Διπλή Ολοκλήρωση στην Επιφάνεια της Διατομής.....	29
4.1.1. Διακριτοποίηση.....	29
4.1.2. Αριθμητική Ολοκλήρωση.....	35
4.1.2.1. Αριθμητική Ολοκλήρωση της $f(x)$	35
4.1.2.1.1. Μέθοδος Ολοκλήρωσης Τραπεζίου.....	36

4.1.2.1.2. Ολοκλήρωση με Παρεμβολή Κυβικού Πολυωνύμου (Simpson 3/8)...	36
4.1.2.1.3. Ολοκλήρωση με Παρεμβολή Τετραγωνικού Πολυωνύμου (Simpson 1/3).....	37
4.1.2.1.3.1. Ειδική Περίπτωση.....	38
4.1.2.2. Αριθμητική Ολοκλήρωση της $f(x,y)$	39
4.1.2.2.1. Απλή Μέθοδος Ολοκλήρωσης Τραπεζίου.....	39
4.1.2.2.2. Σύνθετη Μέθοδος Ολοκλήρωσης Τραπεζίου.....	40
4.1.2.2.3. Ολοκλήρωση με Παρεμβολή Δύο Κυβικών Πολυωνύμων (Διπλή Simpson 3/8).....	41
4.1.2.2.4. Ολοκλήρωση Τριγώνου με Συνεισφορά και των Γειτονικών.....	43
4.2. Επικαμπύλια Ολοκλήρωση στο Σύνορο της Διατομής.....	44
4.2.1. Εξασφάλιση Συνέχειας κατά y	46
4.2.1.1. Το Σύνορο είναι Ανεξάρτητο του y	46
4.2.1.2. Απαλοιφή του y	46
4.2.1.2.1. Απαλοιφή του y Οδηγεί σε Παραπάνω από Μια Λύσεις.....	47
4.2.1.3. Αδυναμία Επίτευξης Συνέχειας.....	48
4.2.1.3.1. Διπλή Ολοκλήρωση.....	48
4.2.1.3.2. Συνοριακή Ολοκλήρωση.....	48
4.2.1.3.2.1. Έναρξη Πολυγωνικού Συνόρου στην Τομή Ακμής Πολυγωνικής και της Καμπύλης $h(y, z)=0$	48
4.2.1.3.2.2. Συνέχιση Πολυγωνικού Συνόρου επί της Καμπύλης $h(y, z)=0$	50
4.2.1.3.2.3. Τερματισμός Πολυγωνικού Συνόρου στην Τομή Ακμής Πολυγωνικής και της Καμπύλης $h(y, z)=0$	51
4.2.2. Διαχείριση Πολυγώνων.....	51
4.2.2.1. Διάσπαση της Διατομής σε Περισσότερα Τμήματα από Ευθεία.....	51
4.2.2.2. Ένωση Πολυγώνων Διατομής.....	54
4.2.2.3. Απλοποίηση Πολυγώνου.....	56
4.2.2.4. Τομή Συνόρου Μεταξύ Δύο Τμημάτων Τμηματικής Συνάρτησης με το Σύνορο της Διατομής.....	58
4.2.3. Αριθμητική Ολοκλήρωση.....	60
4.3. Άθροισμα στις Κορυφές της Διατομής.....	61
4.4. Αριθμητική Αστάθεια.....	64
4.4.1. Ορισμός Ενός Κατωφλιού για το Μηδέν.....	66
4.4.2. Αποφυγή Εξασφάλισης Συνέχειας.....	67

4.4.3. Συναρτήσεις Ορισμένου Ολοκληρώματος.....	67
4.4.4. Ολοκλήρωση πρώτα κατά z και μετά κατά y.....	68
4.5. Σύγκριση Διακριτοποίησης κατά Ολοκλήρωση.....	68
4.6. Ολοκλήρωση Διγραμμικής Σχέσης Σχεδιασμού του EK2.....	69
4.7. Ολοκλήρωση Παραβολικής Σχέσης Σχεδιασμού του EK2.....	71
4.8. Ολοκλήρωση Σχέσης για τη Μη Γραμμική Ανάλυση.....	74
4.9. Ολοκλήρωση Σχέσης Χάλυβα με Κινηματική Κράτυνση.....	76
5. Ισορροπία Διατομής.....	78
5.1. Μέθοδος Newton-Raphson.....	78
5.2. Υπολογισμός Παραγώγων.....	79
5.3. Κριτήρια Σύγκλισης.....	79
5.4. Εντατικά Μεγέθη και Παραμορφώσεις Σχετίζονται Ένα Προς Ένα;.....	80
6. Υπολογισμός M_{Rd}	82
6.1. Περιγραφή του Προβλήματος.....	82
6.1.1. Μέθοδος Πολλαπλασιαστών Lagrange με Newton-Raphson.....	82
6.1.2. Μέθοδος Πολλαπλασιαστών Lagrange με Secant.....	83
6.1.3. Αντικατάσταση με Secant.....	84
6.1.4. Γιατί Δεν Μπορούν να Χρησιμοποιηθούν οι Μέθοδοι NR και Secant.....	84
6.2. Επίλυση με διπλασιασμό και διχοτόμηση.....	86
6.3. Αλγόριθμος Εύρεσης της M_{Rd}	88
6.3.1. Τα Δεδομένα.....	88
6.3.2. Τα Ζητούμενα.....	89
6.3.3. Ο Κυρίως Αλγόριθμος.....	89
6.3.4. Δείκτης Διπλασιασμού - Διχοτόμησης.....	91
6.3.5. Απαιτούμενοι Υπολογισμοί για το Τρέχον Σημείο.....	92
6.3.6. Υπολογισμός Διανυσματικού Άλματος από Βήμα σε Βήμα.....	94
6.3.7. Πρόσημο Παραγώγου κατά τη Θετική Κατεύθυνση των Δεσμεύσεων.....	95
6.3.8. Λοιπά Σχόλια.....	95
7. Έλεγχοι.....	97
7.1. Έλεγχοι Σωστής Ολοκλήρωσης και Εξασφάλισης Συνέχειας.....	97
7.2. Μεταφορά από Mathematica σε Κώδικα C++.....	98
7.3. Διάφοροι Έλεγχοι.....	99
8. Το Λογισμικό.....	100
8.1. Γενικές Πληροφορίες.....	100

8.2. Ταχύτητα Ολοκλήρωσης.....	100
8.3. Διαλειτουργικότητα Υλικού Διατομής.....	101
8.4. Υλοποιήσεις Υλικών.....	102
8.5. Διαλειτουργικότητα Διατομής.....	103
9. Περιπτώσεις για Χρήση του Λογισμικού.....	106
9.1. Παράδειγμα Προέντασης με Προτάνυση πριν τη Σκλήρυνση.....	106
9.2. Παράδειγμα Προέντασης μετά τη Σκλήρυνση.....	107
9.3. Παράδειγμα Σύμμικτης Δοκού με Σκυροδέτηση δίχως Υποστήριξη.....	108
10. Κάποια Παραδείγματα.....	110
10.1. Διάγραμμα Αλληλεπίδρασης M-N σε Σύμμικτο Υποσύλωμα.....	110
10.2. Διάγραμμα M-θ σε Υποσύλωμα από σκυρόδεμα.....	110
11. Λογισμικό που Χρησιμοποιήθηκε.....	112

Πίνακας εικόνων

Σχήμα 2.1: Σχέση σ-ε θλιπτικής φόρτισης «σκελετού» των Mander, Priestley, Park.....	14
Σχήμα 2.2: Περισφιγμένος πυρήνας σκυροδέματος σε κυκλικό.....	14
Σχήμα 2.3: Σχέση σ-ε αποφόρτισης των Mander, Priestley, Park.....	17
Σχήμα 2.4: Εφελκυσμός μετά από θλιπτική αποφόρτιση.....	17
Σχήμα 2.5: Σχέση σ-ε θλιπτικής επαναφόρτισης.....	18
Σχήμα 2.6: Σφάλμα της δευτεροβάθμιας καμπύλης προσαρμογής.....	18
Σχήμα 2.7: Φορτίσεις και αποφορτίσεις με τη διγραμμική σχέση σ-ε.....	19
Σχήμα 2.8: Φορτίσεις και αποφορτίσεις με την παραβολική σχέση σ-ε.....	19
Σχήμα 2.9: Σύγκριση σχέσης Mander με του EC2 για μη γραμμική ανάλυση.....	22
Σχήμα 2.10: Διάγραμμα σ-ε χάλυβα με κινηματική κράτυνση και φορτίσεις, αποφορτίσεις.	25
Σχήμα 4.1: Διακριτοποίηση διατομής.....	29
Σχήμα 4.2: Κελί διακριτοποίησης με «λαιμό».....	30
Σχήμα 4.3: Κατασκευή περιγράμματος κελιού από πολλαπλές διαδρομές συνόρου.....	32
Σχήμα 4.4: Αριθμητική ολοκλήρωση μιας μεταβλητής.....	36
Σχήμα 4.5: Ολοκλήρωση τετραπλεύρου.....	39
Σχήμα 4.6: Ολοκλήρωση κανονικού κελιού.....	41
Σχήμα 4.7: Έλεγχος αν η καμπύλη τέμνει την ακμή του συνόρου της διατομής.....	49
Σχήμα 4.8: Δημιουργία πολυγωνικής επί της καμπύλης (4.19).....	49
Σχήμα 4.9: Διαίρεση πολυγώνου από ευθεία.....	51
Σχήμα 4.10: Διαίρεση διατομής ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ.....	52
Σχήμα 4.11: Διαιρεμένη διατομή.....	52
Σχήμα 4.12: Χαρακτηριστικές περιπτώσεις ένωσης πολυγώνων.....	55
Σχήμα 4.13: Δύο εφαπτόμενα τμήματα της διατομής που πρόκειται να ενωθούν σε ένα... ..	56
Σχήμα 4.14: Η ένωση των δύο τμημάτων της διατομής του σχήματος 4.13.....	56
Σχήμα 4.15: Ξεχωριστές ομάδες ινών για χάλυβα με κινηματική κράτυνση.....	57
Σχήμα 4.16: Ξεχωριστές ομάδες ινών για σκυρόδεμα με την διγραμμική σχέση του ΕΚ2..	57
Σχήμα 4.17: Το σχήμα 4.15 χωρίς απλοποίηση.....	57
Σχήμα 4.18: Το σχήμα 4.16 χωρίς απλοποίηση.....	57
Σχήμα 4.19: Τομή διατομής και συνόρου σχέσης (4.19).....	59
Σχήμα 4.20: Γραφική παράσταση Αρχικής συνάρτησης της M_z	65
Σχήμα 4.21: Περιπτώσεις διατομών για διακριτοποίηση επιφανείας, συνόρου και κορυφών	

.....	68
Σχήμα 6.1: Σχέση M-ε χάλυβα δίχως κράτυνση.....	85
Σχήμα 6.2: Σχέση M'-ε χάλυβα δίχως κράτυνση.....	85
Σχήμα 6.3: Σχέση M''-ε χάλυβα δίχως κράτυνση.....	86
Σχήμα 6.4: Η πορεία αναζήτησης της M_{Rd} στο χώρο των (a,b,c) του επιπέδου παραμόρφωσης.....	88
Σχήμα 10.1: Αλληλεπίδραση M-N σε σύμμικτο υποστύλωμα, με 1200 περίπου δείγματα.....	110
Σχήμα 10.2: Σχέση εντατικών μεγεθών, καμπυλότητας περί τον άξονα z για υποστύλωμα διατομής L.....	111

1. Το Αντικείμενο της Εργασίας

Το αντικείμενο της εργασίας είναι η κατασκευή βιβλιοθήκης λογισμικού σε γλώσσα C++23, η οποία, για μια τυχούσα διατομή από ένα ή περισσότερα υλικά (σκυρόδεμα, χάλυβας, ανθρακονήματα) και κάνοντας χρήση των μη γραμμικών εξισώσεων σ-ε κάθε υλικού, πραγματοποιεί τα παρακάτω:

— Δεδομένου του επίπεδου παραμόρφωσης της διατομής (διαξονική κάμψη με αξονική), υπολογίζει τα εντατικά μεγέθη N , M_y , M_z .

— Δεδομένων των εξωτερικών φορτίων N , M_y , M_z , υπολογίζει το επίπεδο παραμόρφωσης της διατομής.

— Δεδομένων των εξωτερικών φορτίων N , M_u (η M_u σε αυθαίρετη διεύθυνση), υπολογίζει την $M_{v, Resistance}$ σε διεύθυνση 90° αντιωρολογιακά της M_u .

— Υποστηρίζει από προεπιλογή, ανακύκλιση και γενικά ιστορία φόρτισης του υλικού.

— Υποστηρίζονται «στάδια κατασκευής», κάτι το οποίο είναι σύνηθες σε περιπτώσεις σύμμικτων δοκών όπου η σκυροδέτηση ενδεχομένως να πραγματοποιηθεί χωρίς υποστήριξη της μεταλλικής δοκού, αλλά και προέντασης, όπου κατά την τάνυση έχουμε θλίψη σε περιοχή σκυροδέματος στην οποία κατά τη λειτουργία έχουμε αποφόρτιση – ενδεχομένως και εφελκυσμό.

— Οι διατομές ορίζονται από υλικά. Το κάθε υλικό στη διατομή δίνεται ως ένα κλειστό πολυγωνικό σύνορο που μπορεί να περιλαμβάνει αριθμό από τρύπες ή «νησίδες» ή ως σημείο (π.χ. οπλισμός ή τρύπα σε σκυρόδεμα λόγω οπλισμού).

— Τα υλικά που υποστηρίζονται στην παρούσα φάση (υπάρχει η δυνατότητα προσθήκης επιπλέον υλικών χωρίς καμία αλλαγή στον κώδικα) είναι:

— Σκυρόδεμα σε κατάσταση I ή II, περισφιγμένο ή απερίσφικτο, με τη διγραμμική εξίσωση του EK2[1] ή την μη γραμμική, προσαρμοσμένες ώστε να υποστηρίζουν ανακύκλιση, κατά τη λογική των Mander, Priestley, Park[2]. Η μετατροπή από κατάσταση I σε κατάσταση II γίνεται διαφανώς από το λογισμικό χωρίς μεσολάβηση από το

πρόγραμμα-πελάτη.

— Χάλυβας με κινηματική κράτυνση ή χωρίς κράτυνση με δυνατότητα ανακύκλισης (περιορισμένης καθώς η υλοποίηση στο λογισμικό των εξισώσεων Menegotto-Pinto δεν ολοκληρώθηκε). Δομικός χάλυβας, χάλυβας οπλισμού αλλά και τένοντες προέντασης. Σαν χάλυβας μπορούν να προσομοιωθούν και τα ανθρακονήματα.

— Στόχος του λογισμικού δεν είναι απλά το «να καταφέρει να κάνει επίλυση» αλλά η υψηλή απόδοση (high performance), δηλαδή η μέτρηση ολοκληρώσεων διατομής/sec.

— Για όλα τα παραπάνω, το λογισμικό πραγματοποιεί μη γραμμική ανάλυση με κατανεμημένη πλαστικότητα, κάνοντας ολοκληρώσεις των τάσεων στη διατομή, με τις παρακάτω μεθόδους, η επιλογή των οποίων γίνεται διαφανώς από το λογισμικό χωρίς μεσολάβηση του λογισμικού-πελάτη:

— Διπλή ολοκλήρωση στην επιφάνεια της διατομής (ίνες). Η μέθοδος χρησιμοποιείται όταν καμία από τις επόμενες δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

— Ολοκλήρωση Green στο σύνορο της διατομής. Η μέθοδος χρησιμοποιείται όταν είναι δυνατή η ολοκλήρωση κατά y και όταν για την Αρχική συνάρτηση που προκύπτει μπορεί να εξασφαλιστεί συνέχεια κατά y σε όλο το σύνορο της διατομής. Η μέθοδος χρησιμοποιείται όταν δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η επόμενη.

— Ολοκλήρωση στις κορυφές του πολυγώνου. Η μέθοδος χρησιμοποιείται όταν είναι δυνατές οι ολοκληρώσεις αρχικά κατά y και έπειτα κατά z και όταν για τις Αρχικές συναρτήσεις των δύο ολοκληρώσεων μπορεί να εξασφαλιστεί συνέχεια αρχικά κατά y και έπειτα κατά z . Αν η φόρτιση είναι μονοτονικά προσαυξανόμενη (δεν υπάρχουν αποφορτίσεις) χρησιμοποιείται πάντα η συγκεκριμένη μέθοδος.

Το λογισμικό που γράφηκε σε C++[3] έχει στόχο την υψηλή απόδοση, οπότε χρησιμοποιεί αριθμητικές μεθόδους. Για ολόκληρη την έρευνα που πραγματοποιήθηκε κατά την εργασία και απαιτήθηκαν συμβολικές επιλύσεις (οι οποίες μεταφέρθηκαν κατόπιν επεξεργασίας στον κώδικα C++), χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό Wolfram Mathematica[4]. Το ίδιο λογισμικό χρησιμοποιήθηκε και σε ένα μέρος των μονάδων ελέγχου (test units).

Στο κεφάλαιο 2 αναφέρονται - προσδιορίζονται οι καταστατικές εξισώσεις $\sigma-\varepsilon$ για κάθε ίνα της διατομής, τόσο για το σκυρόδεμα όσο και για το χάλυβα. Όσον αφορά το σκυ-

ρόδεμα, αναφερόμαστε σε περισφιγμένο ή απερίσφικτο ενώ για το χάλυβα αναφερόμαστε σε χάλυβα οπλισμού, δομικό χάλυβα (περίπτωση σύμμικτης δοκού) και χάλυβα προέντασης. Λόγω της προέντασης, στις καταστατικές εξισώσεις έχει συμπεριληφθεί και η δυνατότητα αποφόρτισης και επαναφόρτισης χωρίς όμως τη βλάβη που δημιουργείται στο υλικό από κύκλους φόρτισης – επαναφόρτισης. Επίσης λόγω της μερικής προέντασης, στις καταστατικές εξισώσεις είναι δυνατό να συμπεριληφθεί εφελκυσμός μέχρι την πρώτη φορά που θα πραγματοποιηθεί ρηγμάτωση.

Στο κεφάλαιο 3 φεύγουμε από την ίνα και πάμε στη διατομή, που προσομοιώνεται για κάθε υλικό με μια κλειστή πολυγωνική που συμπεριλαμβάνει τρύπες και «νησίδες» και σημεία (π.χ. οπλισμός). Γίνεται επίσης λόγος για υπο-περιοχές του υλικού που έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά ιστορίας φορτίσεων του υλικού.

Στο κεφάλαιο 4 αναφέρονται οι τρόποι ολοκλήρωσης των τάσεων της διατομής. Για να περιορίσουμε τον υπολογιστικό φόρτο που απαιτεί η ολοκλήρωση όλων των ινών στη διατομή και να αυξήσουμε την ακρίβεια, ολοκληρώνουμε τις σχέσεις $\sigma - \varepsilon$, ώστε από διπλό ολοκληρωμα να οδηγηθούμε σε επικαμπύλιο επί του συνόρου της διατομής και στη συνέχεια ξαναολοκληρώνουμε ώστε από το επικαμπύλιο να οδηγηθούμε σε άθροισμα τιμών στις κορυφές της διατομής (την οποία με σύμβαση λαμβάνουμε ως πολυγωνική). Προφανώς στοιχεία επί της διατομής μικρής επιφάνειας, λαμβάνονται ως σημειακά (ίνες), όπως π.χ. ο χάλυβας οπλισμού και ο χάλυβας προέντασης.

Στο κεφάλαιο 5, για να επιλυθεί η ισορροπία μεταξύ εξωτερικών εντατικών μεγεθών και εσωτερικών τάσεων, χρησιμοποιούμε το μαθηματικό εργαλείο των Newton-Raphson.

Στο κεφάλαιο 6, για να υπολογίσουμε την $M_{v, Resistance}$ της διατομής, δεδομένης της N και της M_u σε έναν οποιοδήποτε άξονα \vec{u} , 90° ωρολογιακά του άξονα \vec{v} , χρησιμοποιούμε τη μέθοδο διπλασιασμού – διχοτόμησης (Bolzano) μέσα σε μια ευρύτερη πολύπλοκη διαδικασία.

Στο κεφάλαιο 7 γίνεται μια πολύ επιφανειακή αναφορά στο τι είδους ελέγχους πραγματοποιούν οι μονάδες ελέγχου (test units – πρόκειται για λογισμικό) που συντάχθηκαν προκειμένου να ελεγχθεί το λογισμικό που κατασκευάστηκε τόσο σε Mathematica, όσο και σε C++, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι περισσότερες αριθμητικές σχέσεις έχουν μέγεθος μη διαχειρίσιμο από άνθρωπο.

Στο κεφάλαιο 8 αναφέρονται οι βασικές κλήσεις διεπαφής βιβλιοθήκης λογισμικού – προγράμματος-πελάτη καθώς και λοιπά -πιο λεπτομερή- στοιχεία του λογισμικού.

Στο κεφάλαιο 9 αναφέρονται κάποιες σύνθετες περιπτώσεις δοκών (π.χ. προεντεταμένες ή σύμμικτες) όπου το λογισμικό αποτελεί εύκολη λύση για το πρόβλημα.

Τέλος στο κεφάλαιο 10 εμφανίζονται τα αποτελέσματα σε μορφή γραφήματος, από διάφορα προβλήματα που λύνει το λογισμικό.

2. Καταστατικές Εξισώσεις σ - ε

2.1. Σχέση σ - ε των Mander, Priestley, Park

Οι Mander, Priestley, Park δίνουν σχέσεις σ - ε πιο πολύπλοκες από τις σχέσεις του ΕΚ2 αλλά περιλαμβάνουν στις σχέσεις τους εφελκυσμό, αποφόρτιση και επαναφόρτιση.

Παρότι δεν υλοποιήθηκαν στο λογισμικό, αναφέρονται γιατί θα χρησιμοποιηθούν σαν οδηγός, προκειμένου να προσαρμόσουμε στις σχέσεις του ΕΚ2 και ειδικά στη σχέση για τη μη γραμμική ανάλυση, εφελκυσμό, αποφόρτιση και επαναφόρτιση.

2.1.1. Πρώτη Θλίψη (σκελετός)

Η σχέση σ - ε για περισφιγμένο σκυρόδεμα ακολουθεί παρακάτω. Η καμπύλη φαίνεται στο Σχήμα 2.1.

Στο απερίσφικτο σκυρόδεμα αντικαθίστανται στη σχέση τα f_{cc} με f_{c0} και ε_{cc} με ε_{c0} .

Επίσης, η καμπύλη για $\varepsilon_c > 2\varepsilon_{c0}$ διατηρεί κλίση $\frac{d\sigma_c}{d\varepsilon_c}(2\varepsilon_{c0})$ (η καμπύλη γίνεται ευθεία από εκεί και μέχρι να τέμνει τον άξονα x).

$$\sigma_c = f_{cc} \frac{\chi r}{r - 1 + \chi^r} \quad \text{όπου} \quad (2.1.α)$$

$$\chi = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \quad (2.1.β)$$

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c0} \left[1 + 5 \left(\frac{f_{cc}}{f_{c0}} - 1 \right) \right] \quad (2.1.γ)$$

$$r = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}} \quad (2.1.δ)$$

$$E_c \text{ (GPa)} = 5\sqrt{f_{c0}} \text{ (MPa)} \quad \text{η κλίση της καμπύλης για } \varepsilon_c = 0 \quad (2.1.ε)$$

$$E_{sec} = \frac{f_{cc}}{\varepsilon_{cc}} \quad (2.1.στ)$$

Όπου ε_{cc} η ανυγμένη παραμόρφωση όπου παρατηρείται η μέγιστη τάση f_{cc} στο περισφιγμένο σκυρόδεμα και ε_{c0} η ανυγμένη παραμόρφωση όπου παρατηρείται η μέγιστη τάση f_{c0} για απερίσφικτο σκυρόδεμα.

Για την περίσφιξη:

$$f_{cc} = f_{c0} \left(2.254 \sqrt{1 + \frac{7.94 f_i}{f_{c0}}} - 2 \frac{f_i}{f_{c0}} - 1.254 \right) \quad (2.2.α)$$

$$f_i = k_e f_l \quad (2.2.β)$$

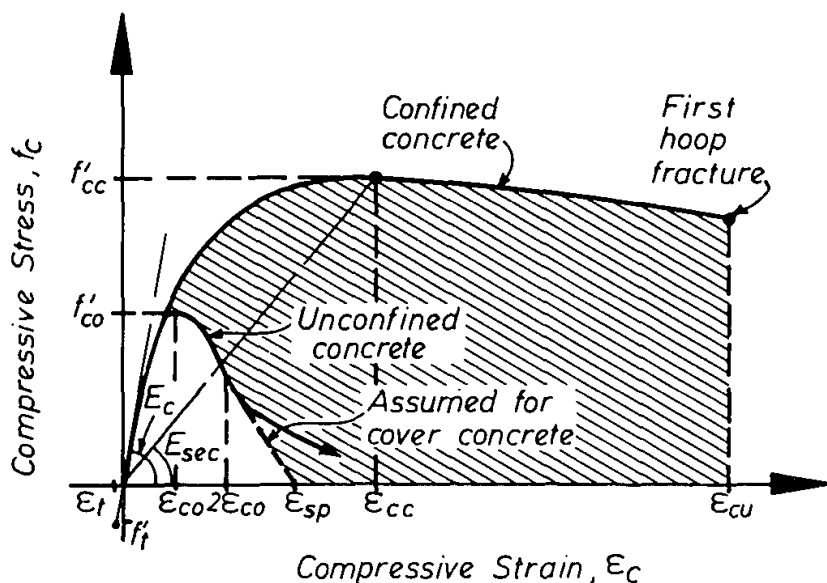
$$k_e = \frac{A_e}{A_{cc}} \quad (2.2.γ)$$

$$A_{cc} = A_c (1 - \rho_{cc}) \quad (2.2.δ)$$

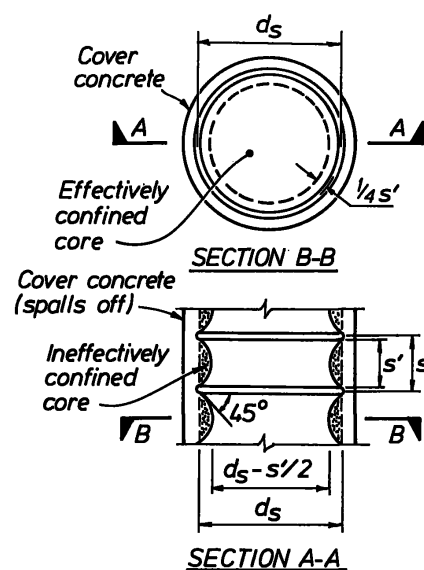
$$\rho_{cc} = \frac{A_{sl}}{A_c} \quad (2.2.ε)$$

$$f_l = 0.5 \rho_s f_{yh} \quad (2.2.στ)$$

A_e είναι ο επαρκώς περισφιγμένος πυρήνας σκυροδέματος ο οποίος είναι μικρότερος από το A_c γιατί, κατά μήκος της δοκού, μεταξύ των συνδετήρων, ο επαρκώς περισφιγμένος ο πυρήνας περικλείεται από πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με γωνία 45° στο όριο των 2 συνδετήρων. Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.1: Σχέση σ-ε θλιπτικής φόρτισης «σκελετού» των Mander, Priestley, Park



Σχήμα 2.2: Περισφιγμένος πυρήνας σκυροδέματος σε κυκλικό υποστύλωμα

A_c είναι το εμβαδό του πυρήνα σκυροδέματος εσωτερικά των συνδετήρων που ορίζεται από την νοητή γραμμή του κέντρου τους.

A_{sl} είναι το εμβαδό του διαμήκους οπλισμού.

f_l η ομοιόμορφη εγκάρσια τάση επί του πυρήνα σκυροδέματος από δίμητους συνδετήρες, ρ_s το ποσοστό του όγκου του οπλισμού συνδετήρων ως προς τον όγκο του πυρήνα σκυροδέματος $A_c s$, s η απόσταση 2 διαδοχικών συνδετήρων, κέντρο με κέντρο,

κατά μήκος της δοκού και f_{yh} η αντοχή των συνδετήρων. Η σχέση προκύπτει από ισοροπία δυνάμεων μεταξύ συνδετήρων και πυρήνα σκυροδέματος.

Για κυκλική δοκό π.χ. ισχύει $A_c = \frac{\pi d^2}{4}$ και $A_e = \frac{\pi (d-s'/2)^2}{4}$, όπου d το άνοιγμα του συνδετήρα κέντρο με κέντρο και s' η απόσταση 2 συνδετήρων κατά μήκος της δοκού, όχι κέντρο με κέντρο, αλλά παρειά με παρειά $s' = s - \varnothing_s$.

Χοντροειδώς μπορεί να τεθεί $f_{cc} = f_{cm,c}$, $\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c1,c}$, $f_{c0} = f_{cm}$, $\varepsilon_{c0} = \varepsilon_{c1}$ ή $\varepsilon_{c0} = 2\text{‰}$, $E_c = E_{cm}$ χωρίς η τελική καμπύλη να παρουσιάζει ιδιαίτερη απόκλιση.

Η σχέση δίνει ελαφρώς πιο εύκαμπτο υλικό από την (2.13.α).

2.1.2. Εφελκυσμός Χωρίς Προηγούμενη Θλίψη

Ο εφελκυσμός δίνει τάση μόνο αν δεν έχει επέλθει ρηγμάτωση, δηλαδή αν δεν έχει ξεπεραστεί ποτέ στην ιστορία του υλικού, η εφελκυστική αντοχή f_t . Η εφελκυστική σχέση $\sigma - \varepsilon$ για αρηγμάτωτο υλικό, δίνεται παρακάτω:

$$\sigma_c = E_{sec} \varepsilon_c, \text{ όπου } E_{sec} \text{ από τη σχέση (2.1.στ)} \quad (2.3)$$

2.1.3. Θλιπτική Αποφόρτιση

Κατά την αποφόρτιση, η ευθεία που διέρχεται από το σημείο από το οποίο πραγματοποιείται η αποφόρτιση, και το σημείο που έχουμε πλήρη αποφόρτιση $\sigma_c = 0$, τέμνει την ευθεία με κλίση της καμπύλης σκελετού $\sigma_c'(0)$ που διέρχεται από το σημείο $(0,0)$, σε σημείο με $\varepsilon_c = \varepsilon_a$, όπως στο Σχήμα 2.3. Οι ερευνητές προσάρμοσαν τις παρακάτω σχέσεις στα πειραματικά δεδομένα που είχαν:

$$\sigma_c = \sigma_{un} \left(1 - \frac{\chi_{un} r_{un}}{r_{un} - 1 + \chi_{un}^r} \right) \text{ με μεταβλητές όπως στη σχέση (2.1) και:} \quad (2.4.α)$$

$$\chi_{un} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{un}}{\varepsilon_{pl} - \varepsilon_{un}} \quad (2.4.β)$$

$$r_{un} = \frac{E_{un}}{E_{un} - E_{sec,un}} \quad (2.4.γ)$$

$$E_{sec,un} = \frac{f_{un}}{\varepsilon_{un} - \varepsilon_{pl}} \quad (2.4.δ)$$

$$E_{un} = b c E_c \quad (2.4.ε)$$

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_{un} - \sigma_{un} \frac{\varepsilon_{un} + \varepsilon_a}{\sigma_{un} + E_c \varepsilon_a} \quad (2.4.στ)$$

$$\varepsilon_a = a \sqrt{\varepsilon_{un} \varepsilon_{cc}} \quad (2.4.ζ)$$

$$a = \max\left(\frac{\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_{cc} + \varepsilon_{un}}, 0.09 \frac{\varepsilon_{un}}{\varepsilon_{cc}}\right) \quad (2.4.η)$$

$$b = \max\left(1, \frac{\sigma_{un}}{f_{c0}}\right) \quad (2.4.θ)$$

$$c = \min\left(1, \sqrt{\frac{\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_{un}}}\right), \text{ όπου } (\varepsilon_{un}, \sigma_{un}) \text{ το σημείο στο οποίο ξεκινάει η αποφόρτιση} \quad (2.4.ι)$$

2.1.4. Εφελκυσμός μετά από Θλίψη

Με τη θλίψη η εφελκυστική αντοχή μειώνεται με τη σχέση:

$$f_t' = \max\left(0, f_t \left(1 - \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_{cc}}\right)\right) \text{ με μεταβλητές όπως στη σχέση (2.1.γ) και (2.4.στ)} \quad (2.5)$$

Η σχέση $\sigma - \varepsilon$ ακολουθεί, ενώ γραφική παράστασή της απεικονίζεται στο Σχήμα 2.4.

$$\sigma_c = E_t (\varepsilon_c - \varepsilon_{pl}) \quad (2.6.α)$$

$$E_t = \frac{f_t'}{\varepsilon_t} \quad (2.6.β)$$

$$\varepsilon_t = \frac{f_t}{E_c}, \text{ όπου } E_c \text{ από τη σχέση (2.1.ε)} \quad (2.6.γ)$$

2.1.5. Θλιπτική Επαναφόρτιση

Η επαναφόρτιση πραγματοποιείται γραμμικά ως την ανυγμένη παραμόρφωση της πρότερης αποφόρτισης και ακολούθως, πριν επανέλθει στη σχέση $\sigma - \varepsilon$ «σκελετού» ακολουθεί ένα μικρό τμήμα παραβολικής καμπύλης. Η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2.5 ενώ οι σχέσεις ακολουθούν.

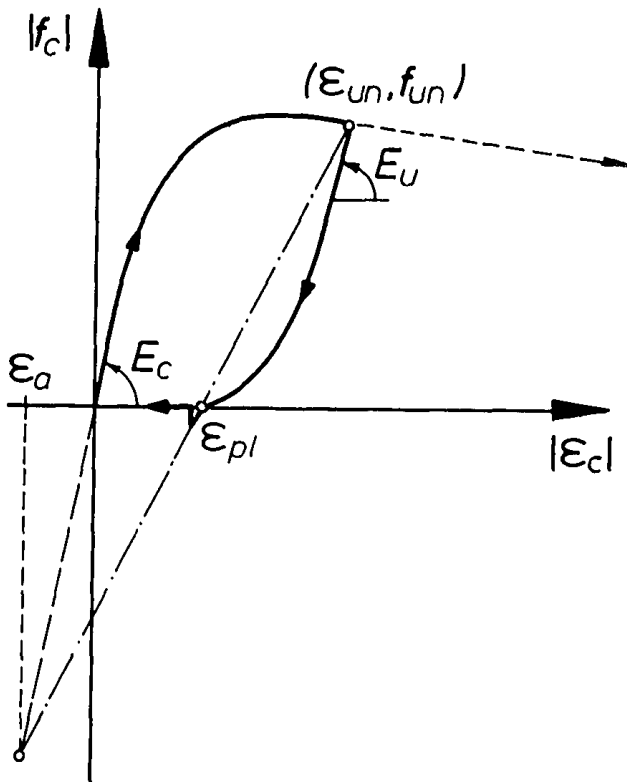
$$\sigma_c = \begin{cases} \sigma_{ro} + E_r (\varepsilon_c - \varepsilon_{ro}) & \varepsilon_{ro} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{un} \\ \sigma_{re} + E_{re} (\varepsilon_c - \varepsilon_{re}) - 0.25 \frac{E_r - E_{re}}{(\sigma_{new} - \sigma_{re}) - E_r (\varepsilon_{un} - \varepsilon_{re})} (\varepsilon_c - \varepsilon_{re})^2 & \varepsilon_{un} < \varepsilon_c < \varepsilon_{re} \end{cases}, \text{ όπου} \quad (2.7.α)$$

$$E_r = \frac{\sigma_{ro} - \sigma_{new}}{\varepsilon_{ro} - \varepsilon_{un}} \quad (2.7.β)$$

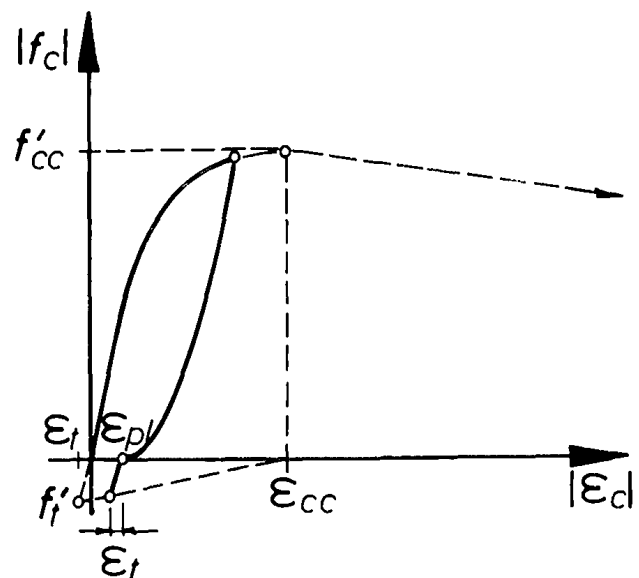
$$\sigma_{new} = 0.92 \sigma_{un} + 0.08 \sigma_{ro} \quad (2.7.γ)$$

$$\varepsilon_{re} = \varepsilon_{un} + \frac{\sigma_{un} - \sigma_{new}}{E_r \left(2 + \frac{f_{cc}}{f_{c0}} \right)} \quad (2.7.δ)$$

Όπου E_{re} και σ_{re} η εφαπτόμενη και η τάση της σχέσης σ - ε «σκελετού» στο σημείο που η επαναφόρτιση επανέρχεται στη σχέση «σκελετού» για ε_{re} .



Σχήμα 2.3: Σχέση σ - ε αποφόρτισης των Mander, Priestley, Park



Σχήμα 2.4: Εφελκυσμός μετά από θλιπτική αποφόρτιση

2.1.5.1. Σφάλμα

Το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο της θλιπτικής επαναφόρτισης (από το f_{new} στο f_{re}) είναι λανθασμένο για τους παρακάτω λόγους:

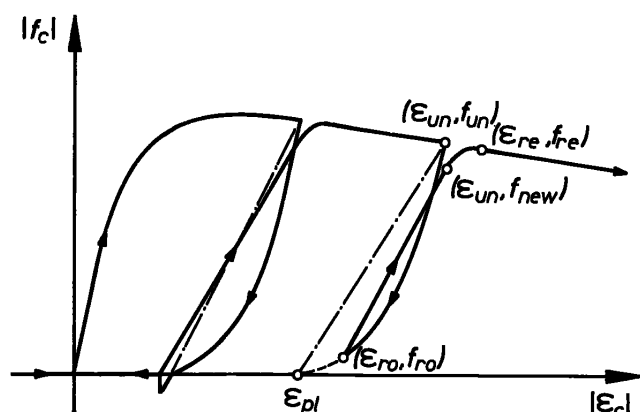
- Απαιτείται τριτοβάθμιο πολυώνυμο προκειμένου να παρεμβληθεί σωστά μεταξύ του ευθύγραμμου σκέλους της επαναφόρτισης και της σχέσης «σκελετού» και να αποδώσει συνέχεια και παραγωγισιμότητα και στα δύο άκρα του.

- Το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο που δίνεται, δεν παρέχει συνέχεια στη «συρραφή» με το ευθύγραμμο σκέλος της επαναφόρτισης.

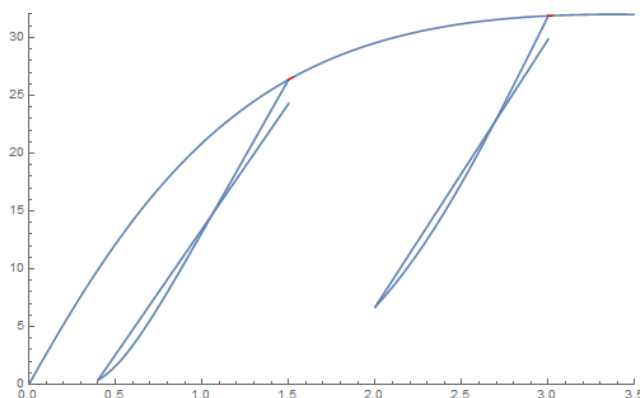
- Θα έπρεπε η καμπύλη του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου που δίνεται, να στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5. Όμως από το άκρο του ευθυγράμμου σκέλους της επαναφόρτισης, απαιτείται το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο να

στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω γιατί η προέκταση του ευθυγράμμου σκέλους τέμνει την σχέση «σκελετού» μετά το σημείο ε_{re} .

Η εκτίμηση είναι ότι και η μεταβλητή ε_{re} , αλλά και το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο προσαρμογής, ορίζονται λανθασμένα. Γραφική παράσταση του σφάλματος στο Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.5: Σχέση σ - ε θλιπτικής επαναφόρτισης



Σχήμα 2.6: Σφάλμα της δευτεροβάθμιας καμπύλης προσαρμογής.

Η κόκκινη γραμμή (για $\varepsilon=1.5$ και στο $\varepsilon=3$) είναι το πολυώνυμο προσαρμογής, το οποίο ξεκάθαρα δεν συνδέει το ευθύγραμμο τμήμα επαναφόρτισης με τη σχέση «σκελετού»

2.2. Διγραμμική Σχέση Σχεδιασμού σ - ε , του ΕΚ2

2.2.1. Η σχέση του ΕΚ2

Η σχέση σχεδιασμού σ - ε του ΕΚ2 ακολουθεί παρακάτω. Η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2.7.

$$\sigma_c = \begin{cases} E_3 \varepsilon_c & 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c3} \\ f_{cd} & \varepsilon_{c3} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu3} \end{cases} \quad \text{όπου } f_{cd} \text{ όπως σχέση (2.10.δ) και} \quad (2.8.α)$$

$$\varepsilon_{c3} (\%) = \begin{cases} 1.75 & f_{ck} < 50 \text{ MPa} \\ 1.0625 + 0.01375 f_{ck} & f_{ck} \geq 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (2.8.β)$$

$$\varepsilon_{cu3} = \varepsilon_{cu2}, \text{ όπως σχέση (2.10.γ)} \quad (2.8.γ)$$

$$E_3 = \frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c3}} \quad (2.8.δ)$$

Η παραπάνω σχέση δεν περιλαμβάνει την περίπτωση κύκλων φορτίσεων και εφελκυστικές τάσεις σκυροδέματος.

Αν θέλουμε τη χαρακτηριστική καμπύλη και όχι την καμπύλη σχεδιασμού χρησιμοποιούμε f_{ck} αντί για f_{cd} .

Για την περίσφιξη, ο ΕΚ2 δεν δίνει κάποια σχέση. Καθ' υπερβολή μπορούν να χρησι-

μποποιηθούν οι σχέσεις (2.11) όπου αντί για ε_{c2} , ε_{cu2} θα χρησιμοποιηθούν αντίστοιχα τα ε_{c3} , ε_{cu3} .

2.2.2. Γενίκευση με Εφελκυσμό και Αποφόρτιση – Επαναφόρτιση

Η σχέση (2.8.α) επεκτείνεται όπως παρακάτω:

$$\sigma_c = \begin{cases} 0 & \varepsilon_c < \varepsilon_a \vee \varepsilon_{cu3} < \varepsilon_c \\ \sigma_{un} + E_3(\varepsilon_c - \varepsilon_{un}) & \varepsilon_a \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_b \\ f_{cd} & \varepsilon_b < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu3} \end{cases} \quad \text{με μεταβλητές όπως στη σχέση (2.8) και} \quad (2.9.α)$$

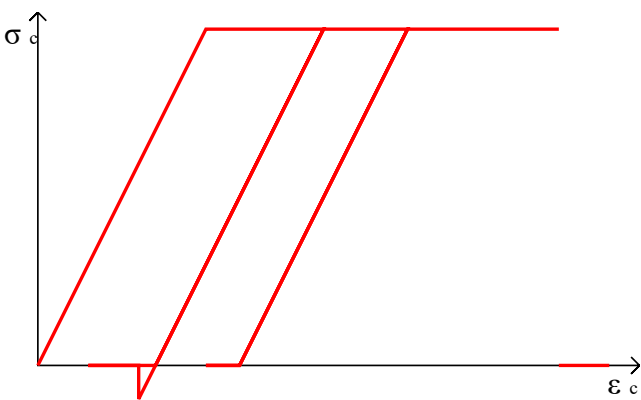
$$\varepsilon_t = -\frac{f_{ctd}}{E_3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon_t = 0 \quad (2.9.β)$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_t + \varepsilon_{un} - \frac{\sigma_{un}}{E_3} \quad (2.9.γ)$$

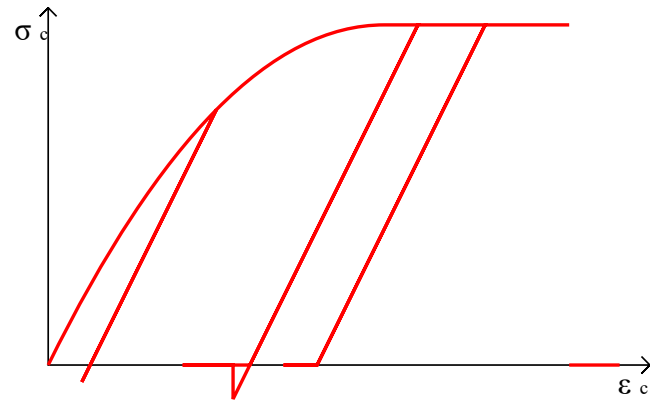
$$\varepsilon_b = \max(\varepsilon_{c3}, \varepsilon_{un}) \quad (2.9.δ)$$

$$\sigma_{un} = \sigma_c(\varepsilon_{un}) \quad \text{όπου} \quad \sigma_c \quad \text{από τη σχέση (2.8.α)} \quad (2.9.ε)$$

E_3 είναι η κλίση αποφόρτισης, επαναφόρτισης και εφελκυσμού, το οποίο δεν είναι ιδιαίτερα ακριβές, όσο π.χ. των Mander κ.α, αλλά αποδίδει επαρκώς την πραγματικότητα για μια σχέση που αφορά σχεδιασμό.



Σχήμα 2.7: Φορτίσεις και αποφορτίσεις με τη διγραμμική σχέση σ-ε



Σχήμα 2.8: Φορτίσεις και αποφορτίσεις με την παραβολική σχέση σ-ε

Η ε_{un} εισήχθη για να εξυπηρετεί την αποφόρτιση και επαναφόρτιση. Αν έχουμε αποφόρτιση και επαναφόρτιση, είναι η ανυγμένη παραμόρφωση τη στιγμή έναρξης της αποφόρτισης (unload). Πρακτικά όμως, είναι η μεγαλύτερη θλιπτική ανυγμένη παραμόρφωση στην ιστορία του υλικού μέχρι τώρα. Αν δεν έχουμε αποφόρτιση ή επαναφόρτιση τυπικά δεν ορίζεται αλλά μπορεί να λαμβάνεται μηδέν.

ε_t είναι η ανυγμένη παραμόρφωση που αντιστοιχεί στην εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος. Αν έχει πραγματοποιηθεί έστω και μια φορά στην ιστορία του υλικού υπέρβαση της εφελκυστικής αντοχής ή επιθυμούμε να αγνοήσουμε την εφελκυστική αντοχή,

τότε είναι μηδέν.

Η σχέση (2.9.α) δεν περιλαμβάνει βλάβη στο σκυρόδεμα λόγω εναλλασσόμενων κύκλων φόρτισης.

2.3. Παραβολική Σχέση Σχεδιασμού σ - ε , του ΕΚ2

2.3.1. Η σχέση του ΕΚ2

Η σχέση σχεδιασμού σ - ε του ΕΚ2 ακολουθεί παρακάτω. Η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2.8.

$$\sigma_c = \begin{cases} f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] & 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \quad \text{όπου} \\ f_{cd} & \varepsilon_{c2} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \end{cases} \quad (2.10.α)$$

$$\varepsilon_{c2} (\%) = \begin{cases} 2 & f_{ck} < 50 \text{ MPa} \\ 2 + 0.085 (f_{ck} - 50)^{0.53} & f_{ck} \geq 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (2.10.β)$$

$$\varepsilon_{cu2} (\%) = \begin{cases} 3.5 & f_{ck} < 50 \text{ MPa} \\ 2.6 + 35 (0.9 - 0.01 f_{ck})^4 & f_{ck} \geq 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (2.10.γ)$$

$$f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} f_{ck}}{\gamma_c}, \quad \text{όπου } \gamma_c = 1.5, \quad \alpha_{cc} = 0.85 \quad \text{για μακροχρόνιες δράσεις και } \alpha_{cc} = 1 \quad \text{για} \quad (2.10.δ)$$

βραχυχρόνιες δράσεις

$$n = \begin{cases} 2 & f_{ck} < 50 \text{ MPa} \\ 1.4 + 23.4 (0.9 - 0.01 f_{ck})^4 & f_{ck} \geq 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (2.10.ε)$$

Η παραπάνω σχέση δεν περιλαμβάνει την περίπτωση κύκλων φορτίσεων και εφελκυστικές τάσεις σκυροδέματος.

Αν θέλουμε τη χαρακτηριστική καμπύλη και όχι την καμπύλη σχεδιασμού χρησιμοποιούμε f_{ck} αντί για f_{cd} .

Για την περίσφιξη, ο ΕΚ2 δίνει:

$$f_{ck,c} = \begin{cases} f_{ck} \left(1 + 5 \frac{\sigma_2}{f_{ck}} \right) & \sigma_2 \leq 0.05 f_{ck} \\ f_{ck} \left(1.125 + 2.5 \frac{\sigma_2}{f_{ck}} \right) & \sigma_2 > 0.05 f_{ck} \end{cases} \quad (2.11.α)$$

$$\varepsilon_{c2,c} = \varepsilon_{c2} \left(\frac{f_{ck,c}}{f_{ck}} \right)^2 \leq \varepsilon_{cu2,c} \quad (2.11.β)$$

$$\varepsilon_{cu2,c} = \varepsilon_{cu2} + 0.2 \frac{\sigma_2}{f_{ck}}, \quad \text{όπου } \sigma_2 \text{ η ακτινική τάση περίσφιξης} \quad (2.11.γ)$$

2.3.2. Γενίκευση με Εφελκυσμό και Αποφόρτιση – Επαναφόρτιση

Η σχέση (2.10.α) επεκτείνεται όπως παρακάτω:

$$\sigma_c = \begin{cases} 0 & \varepsilon_c < \varepsilon_a \quad \vee \quad \varepsilon_{cu2} < \varepsilon_c \\ f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] & \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \\ f_{cd} & \max(\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{un}) < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \\ \sigma_{un} + E_2(\varepsilon_c - \varepsilon_{un}) & \varepsilon_a \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{un} \end{cases} \quad \text{με μεταβλητές όπως στη σχέση} \quad (2.12.α)$$

(2.10)

$$E_2 = \sigma_c'(0) = \frac{nf_{cd}}{\varepsilon_{c2}} \quad \text{όπου } \sigma_c \text{ από τη σχέση (2.10.α)} \quad (2.12.β)$$

$$\varepsilon_t = -\frac{f_{ctd}}{E_2} \quad \text{ή } \varepsilon_t = 0 \quad (2.12.γ)$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{un} + \varepsilon_t - \frac{\sigma_{un}}{E_2} \quad (2.12.δ)$$

$$\sigma_{un} = \sigma_c(\varepsilon_{un}) \quad \text{όπου } \sigma_c \text{ από τη σχέση (2.10.α)} \quad (2.12.ε)$$

E_2 όπως και το E_3 , ε_{un} και ε_t όπως και στην παράγραφο 2.2.2

Η σχέση (2.12.α) δεν περιλαμβάνει βλάβη στο σκυρόδεμα λόγω εναλλασσόμενων κύκλων φόρτισης.

2.4. Σχέση σ-ε, του ΕΚ2 για τη Μη Γραμμική Ανάλυση

2.4.1. Η σχέση του ΕΚ2

Η σχέση $\sigma - \varepsilon$ του ΕΚ2 για τη μη γραμμική ανάλυση είναι:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{(k-\eta)\eta}{1+(k-2)\eta} \quad \text{όπου } \eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}, \quad k = 1.05 E_{cm} \frac{\varepsilon_{c1}}{f_{cm}} \quad \text{και} \quad (2.13.α)$$

$$\varepsilon_{c1} (\%) = \min(2.8, 0.7 f_{cm}^{0.31}) \quad (2.13.β)$$

$$\varepsilon_{cu1} (\%) = \begin{cases} 3.5 & f_{ck} < 50 \text{ MPa} \\ 2.8 + 27(0.98 - 0.01 f_{cm})^4 & f_{ck} \geq 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (2.13.γ)$$

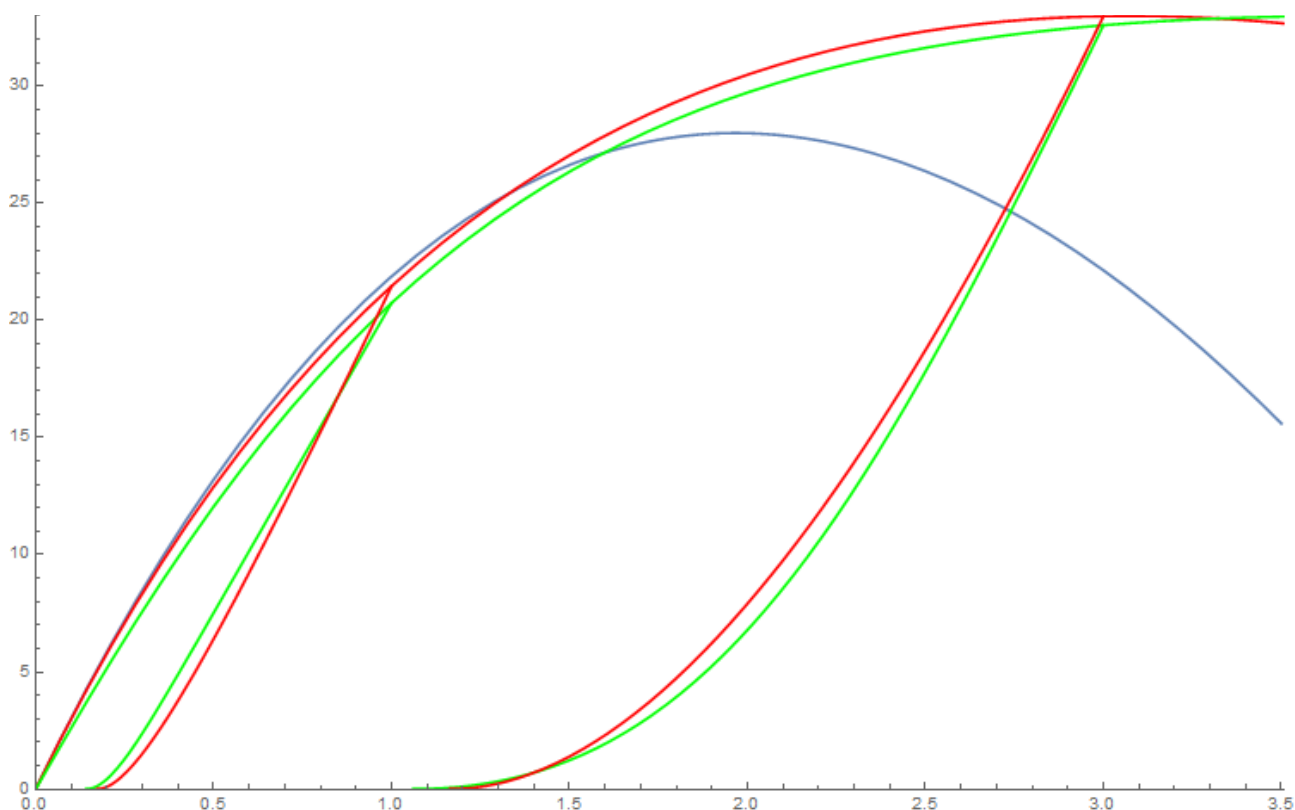
$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ (MPa)} \quad (2.13.δ)$$

$$E_{cm} \text{ (GPa)} = 22(0.1 f_{cm})^{0.3} \quad (2.13.ε)$$

Η παραπάνω σχέση δεν περιλαμβάνει την περίπτωση περισφιγμένου σκυροδέματος, κύκλους φορτίσεων και εφελκυστικές τάσεις σκυροδέματος.

Για την περίσφιξη, ο ΕΚ2 δεν δίνει κάποια σχέση. Καθ' υπερβολή μπορούν να χρησι-

μπορηθούν οι σχέσεις (2.11) όπου αντί για ε_{c2} , ε_{cu2} θα χρησιμοποιηθούν αντίστοιχα τα ε_{c1} , ε_{cu1} . Προκύπτουν τα $f_{cm,c}$, $\varepsilon_{c1,c}$, $\varepsilon_{cu1,c}$.



Σχήμα 2.9: Σύγκριση σχέσης Mander με του EC2 για μη γραμμική ανάλυση.

Η σχέση Mander κ.α. με πράσινο, η σχέση του EC2 για το ίδιο περισφιγμένο σκυρόδεμα με κόκκινο και για απερίσφικτο με μπλέ.

2.4.2. Γενίκευση με Εφελκυσμό και Αποφόρτιση – Επαναφόρτιση

Σε αντίθεση με τις δύο σχέσεις σχεδιασμού του ΕΚ2, σε αυτή θα επιχειρηθεί να αποδοθεί η αποφόρτιση και επαναφόρτιση, με μεγαλύτερη ακρίβεια. Κι επειδή η συγκεκριμένη σχέση δεν παρουσιάζει ουσιαστική διαφορά από τη σχέση «σκελετό» του Mander κ.α. που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 2.1, τόσο η αποφόρτιση όσο και η επαναφόρτιση θα προσαρμοστούν με βάση τις αντίστοιχες σχέσεις των Mander κ.α. παραλείποντας φυσικά την περίπτωση της εσφαλμένης παραβολικής προσαρμογής του Mander κ.α. που αναφέρεται στην παράγραφο 2.1.5.1 και επεκτείνοντας το προηγούμενο ευθύγραμμο τμήμα της επαναφόρτισης μέχρι την τομή της με την σχέση «σκελετού».

Η σχέση (2.13.α) επεκτείνεται όπως παρακάτω:

$$\sigma_c = \begin{cases} 0 & \varepsilon_c < \varepsilon_{pl} + \varepsilon_t \quad \vee \quad \varepsilon_{cu1} < \varepsilon_c \\ f_{cm} \frac{(k-\eta)\eta}{1+(k-2)\eta} & \max(\varepsilon_{re}, \varepsilon_{un}) \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu1} \\ \sigma_{un} \left(1 - \frac{(k_{un}-\eta_{un})\eta_{un}}{1+(k_{un}-2)\eta_{un}} \right) & \varepsilon_{pl} \leq \varepsilon_c \leq \min(\varepsilon_{lo}, \varepsilon_{un}) \\ \sigma_{lo} + E_{lo}(\varepsilon_c - \varepsilon_{lo}) & \max(\varepsilon_{pl}, \varepsilon_{lo}) < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{re} \\ E_t(\varepsilon_c - \varepsilon_{pl}) & \varepsilon_{pl} + \varepsilon_t \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{pl} \end{cases} \quad \text{με μεταβλητές όπως στη} \quad (2.14.\alpha)$$

σχέση (2.13) και

$$E_{lo} = \frac{\sigma_{lo} - \sigma_{new}}{\varepsilon_{lo} - \varepsilon_{un}} \quad (2.14.\beta)$$

$$\sigma_{new} = 0.92 \sigma_{un} + 0.08 \sigma_{lo} \quad (2.14.\gamma)$$

$$\eta_{un} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{un}}{\varepsilon_{pl} - \varepsilon_{un}} \quad (2.14.\delta)$$

$$k_{un} = E_{un} \frac{\varepsilon_{un} - \varepsilon_{pl}}{\sigma_{un}} \quad (2.14.\epsilon)$$

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_{un} - \sigma_{un} \frac{\varepsilon_{un} + \varepsilon_a}{\sigma_{un} + E_{cm} \varepsilon_a} \quad (2.14.\sigma\tau)$$

$$\varepsilon_a = a \sqrt{\varepsilon_{un} \varepsilon_{c1}} \quad (2.14.\zeta)$$

$$E_{un} = b c E_{cm} \quad (2.14.\eta)$$

$$a = \max\left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c1} + \varepsilon_{un}}, 0.09 \frac{\varepsilon_{un}}{\varepsilon_{c1}}\right) \quad (2.14.\theta)$$

$$b = \max\left(1, \frac{\sigma_{un}}{f_{cm,0}}\right) \quad (2.14.i)$$

$$c = \min\left(1, \sqrt{\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{un}}}\right) \quad (2.14.i\alpha)$$

$$\varepsilon_{re} = \varepsilon_{c1} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{με } a, b, c \text{ από τη σχέση (2.15)} \quad (2.14.i\beta)$$

$$E_t = E_{cm} \left(1 - \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_{c1}}\right) \quad (2.14.i\gamma)$$

$$\varepsilon_t = -\frac{f_{ctm}}{E_{cm}} \quad \text{ή} \quad \varepsilon_t = 0 \quad (2.14.i\delta)$$

$$\sigma_{un} = \sigma_c(\varepsilon_{un}) \quad \text{όπου } \sigma_c \text{ από τη σχέση (2.13.α)} \quad (2.14.i\epsilon)$$

$$\sigma_{lo} = \sigma_c(\varepsilon_{lo}) \quad \text{όπου } \sigma_c \text{ από τη σχέση (2.13.α)} \quad (2.14.i\sigma\tau)$$

Το ε_{un} και το ε_t ορίζονται όπως στην παράγραφο 2.2.2 ε_{pl} είναι η ανυγμένη παραμόρφωση τη στιγμή πλήρους αποφόρτισης, η οποία, αν δεν έχουμε αποφόρτιση δεν ορίζεται, αλλά μπορεί να λαμβάνεται μηδέν. ε_{lo} είναι η ανυγμένη παραμόρφωση τη στιγμή έναρξης της επαναφόρτισης (reload), η οποία, αν δεν έχουμε επαναφόρτιση δεν ορίζεται, αλλά μπορεί να λαμβάνεται ίση με ε_{un} . E_{lo} είναι το μέτρο ελαστικότητας του ευθύγραμμου τμήματος επαναφόρτισης. σ_{new} είναι η τάση μετά από επαναφόρτιση στο σημείο με ανυγ-

μένη παραμόρφωση ε_{un} . E_t είναι το μέτρο ελαστικότητας του εφελκυσμένου κλάδου.

ε_{re} είναι η ανυγμένη παραμόρφωση τη στιγμή που η επαναφόρτιση συναντά ξανά τη σχέση «σκελετού» (restore). Επιλύεται με τις πράξεις 2.15 ως τομή της σχέσης «σκελετού» με την ευθεία επαναφόρτισης. Αν δεν έχουμε επαναφόρτιση, δεν ορίζεται, αλλά μπορεί να λαμβάνεται ίση με μηδέν.

$$f_{cm} \frac{\left(k - \frac{\varepsilon_{re}}{\varepsilon_{c1}}\right) \frac{\varepsilon_{re}}{\varepsilon_{c1}}}{1 + (k-2) \frac{\varepsilon_{re}}{\varepsilon_{c1}}} = \sigma_{lo} + E_{lo}(\varepsilon_{re} - \varepsilon_{lo}) \Rightarrow a \left(\frac{\varepsilon_{re}}{\varepsilon_{c1}}\right)^2 + b \frac{\varepsilon_{re}}{\varepsilon_{c1}} + c = 0 \quad \text{όπου} \quad (2.15.\alpha)$$

$$a = (k-2) E_{lo} \varepsilon_{c1} + f_{cm} \quad (2.15.\beta)$$

$$b = (k-2)(\sigma_{lo} - E_{lo} \varepsilon_{lo}) - f_{cm} k + E_{lo} \varepsilon_{c1} \quad (2.15.\gamma)$$

$$c = \sigma_{lo} - E_{lo} \varepsilon_{lo} \quad (2.15.\delta)$$

Για περισφιγμένο σκυρόδεμα, αντικαθίστανται σε όλες τις σχέσεις τα f_{cm} με $f_{cm,c}$, ε_{c1} με $\varepsilon_{c1,c}$ και ε_{cu1} με $\varepsilon_{cu1,c}$. Το $f_{cm,0} = f_{cm}$ πάντα, ακόμα και σε περίσφιξη.

Η παραπάνω σχέση δεν περιλαμβάνει βλάβη στο σκυρόδεμα λόγω εναλλασσόμενων κύκλων φόρτισης.

2.5. Σχέση Χάλυβα με Κινηματική Κράτνυση

2.5.1. Η σχέση

Η σχέση $\sigma - \varepsilon$ ακολουθεί παρακάτω. Η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2.10.

$$\sigma = \begin{cases} -E \varepsilon_y + E_p(\varepsilon + \varepsilon_y) & -\varepsilon_u \leq \varepsilon < -\varepsilon_y \\ E \varepsilon & -\varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_y \\ E \varepsilon_y + E_p(\varepsilon - \varepsilon_y) & \varepsilon_y < \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad \text{για δομικό χάλυβα και χάλυβα οπλισμού} \quad (2.16.\alpha)$$

$$\sigma = \begin{cases} E \varepsilon & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_y \\ E \varepsilon_y + E_p(\varepsilon - \varepsilon_y) & \varepsilon_y < \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad \text{για τένοντες} \quad (2.16.\beta)$$

E είναι το μέτρο ελαστικότητας, E_p το μέτρο ελαστικότητας στην πλαστική περιοχή, που συνήθως λαμβάνεται μηδέν, ε_y η παραμόρφωση διαρροής και ε_u η παραμόρφωση θραύσης.

Η παραπάνω σχέση δεν περιλαμβάνει την περίπτωση κύκλων φορτίσεων.

2.5.2. Γενίκευση με Εφελκυσμό και Αποφόρτιση – Επαναφόρτιση

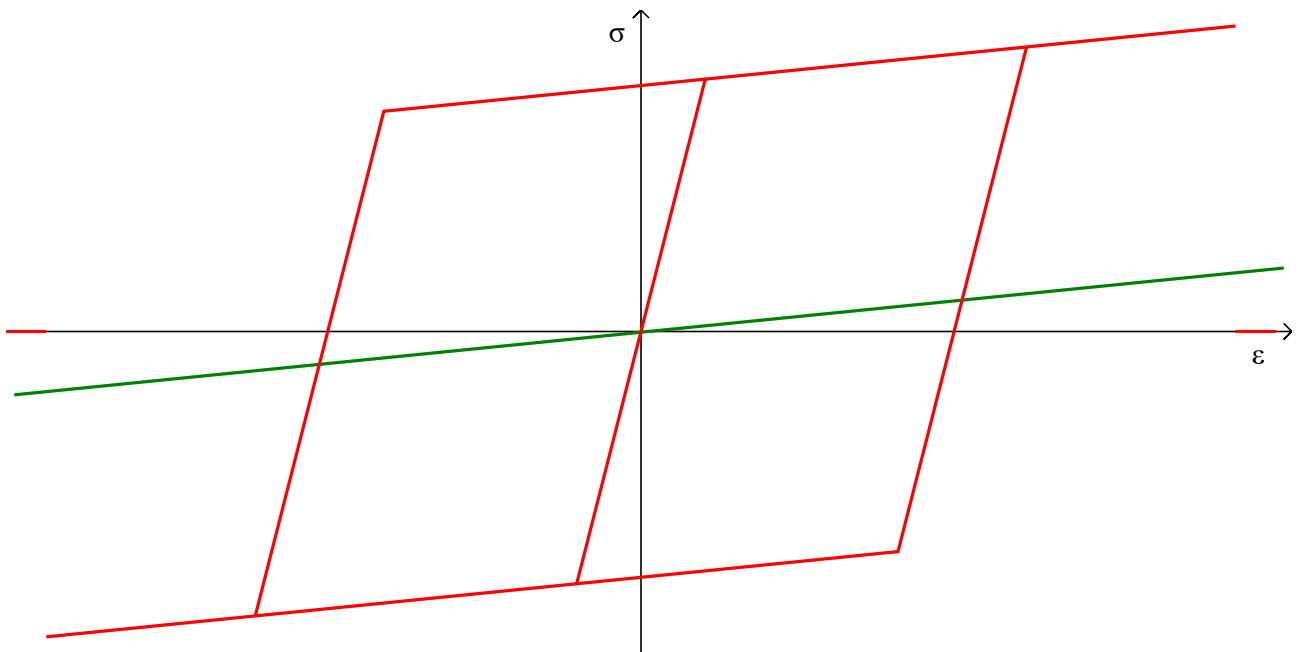
Η σχέση (2.16) επεκτείνεται όπως παρακάτω:

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \epsilon < -\epsilon_u \vee \epsilon_u < \epsilon \\ -E\epsilon_y + E_p(\epsilon + \epsilon_y) & -\epsilon_u \leq \epsilon < \epsilon_0 - \epsilon_y \\ E(\epsilon - \epsilon_0) + E_p\epsilon_0 & -\epsilon_y \leq \epsilon - \epsilon_0 \leq \epsilon_y \\ E\epsilon_y + E_p(\epsilon - \epsilon_y) & \epsilon_0 + \epsilon_y < \epsilon \leq \epsilon_u \end{cases} \text{ για δομικό χάλυβα και χάλυβα σπλισμού} \quad (2.17.\alpha)$$

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \epsilon < \left(1 - \frac{E_p}{E}\right)\epsilon_0 \vee \epsilon_u < \epsilon \\ E(\epsilon - \epsilon_0) + E_p\epsilon_0 & \left(1 - \frac{E_p}{E}\right)\epsilon_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_y + \epsilon_0 \\ E\epsilon_y + E_p(\epsilon - \epsilon_y) & \epsilon_0 + \epsilon_y < \epsilon \leq \epsilon_u \end{cases} \text{ για τένοντες} \quad (2.17.\beta)$$

Η ϵ_0 η οποία στο σχήμα απεικονίζεται με την πράσινη γραμμή, είναι η μέγιστη ή ελάχιστη παραμόρφωση στην οποία έχει φτάσει το υλικό μείον ή συν αντίστοιχα ϵ_y . Εισήχθη για να εξυπηρετεί την αποφόρτιση και επαναφόρτιση.

Η σχέση (2.17) δεν περιλαμβάνει βλάβη στο χάλυβα λόγω εναλλασσόμενων κύκλων φόρτισης.



Σχήμα 2.10: Διάγραμμα σ - ϵ χάλυβα με κινηματική κράνση και φορτίσεις, αποφορτίσεις. Η πράσινη γραμμή απεικονίζει το ϵ_0 .

3. Διατομή Μέλους

3.1. Προσδιορισμός Διατομής

Στην παρούσα εργασία επιτρέπονται αποκλειστικά διατομές πολυγωνικής μορφής. Τυχόν κυκλικές ή καμπυλόγραμμες διατομές μπορούν να παρασταθούν με επαρκή ακρίβεια μέσω της πολυγωνικής γραμμής. Για παράδειγμα μια κυκλική διατομή μπορεί να παρασταθεί με ένα 16-γωνο, ακόμα και με ένα οκτάγωνο.

Δεδομένου ότι λαμβάνουμε τον άξονα x κατά μήκος της δοκού, θα λάβουμε τους άξονες y και z για να προσδιορίζουμε κάθε σημείο της διατομής.

Η πολυγωνική πρέπει να έχει θετική φορά περί τον άξονα x .

Τρύπες είναι δυνατόν να υπάρχουν στη διατομή αλλά ορίζονται με αρνητική φορά περί τον άξονα x . Ορίζονται ως εξής: Από κορυφή του εξωτερικού συνόρου A_1 η πολυγωνική μεταπηδά σε κορυφή της τρύπας B_1 και αφού κλείσει με αρνητική φορά την τρύπα μέχρι το σημείο $B_2=B_1$, μεταπηδά στο εξωτερικό σύνορο, στην κορυφή $A_2=A_1$ από την οποία μεταπήδησε στην τρύπα. Άρα οι δύο μεταπηδήσεις προς την τρύπα και από αυτή είναι το ίδιο ευθύγραμμο τμήμα με διαφορετική φορά.

3.2. Γεωμετρικό Κέντρο Βάρους Διατομής

Η έννοια του κέντρου βάρους διατομής απαιτείται μόνο ως σημείο αναφοράς. Δηλαδή σε σχέση με αυτό το σημείο θα λαμβάνουμε τις ροπές. Οπότε το σημείο αυτό μπορούμε να το βάλουμε όπου θέλουμε εμείς. Κάτι τέτοιο, ίσως μας ενδιαφέρει σε διατομές που κατασκευάζονται σε στάδια (π.χ. σύμμικτες). Το σύνηθες όμως είναι να λαμβάνουμε σημείο αναφοράς για μέτρηση ροπών, στο κέντρο βάρους της διατομής.

Αν η διατομή αποτελείται από τις κορυφές \vec{P}_1 ως \vec{P}_n τότε το εμβαδό της διατομής, η στατική ροπή και το κέντρο βάρους δίνονται αντίστοιχα στις παρακάτω σχέσεις:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} (\vec{P}_i - \vec{P}_1) \times (\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_1) \quad (3.1.a)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{6} \sum_{i=2}^{n-1} (\vec{P}_i - \vec{P}_1) \times (\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_1) (\vec{P}_1 + \vec{P}_i + \vec{P}_{i+1}) \quad (3.1.b)$$

$$\vec{C} = \vec{S}/A \quad (3.1.γ)$$

3.3. Επιπεδότητα Διατομών

Λόγω επιπεδότητας διατομών, η παραμόρφωση είναι εξίσωση επιπέδου:

$$\varepsilon = -a y + b z + c \quad (3.2)$$

Θεωρώντας ότι το σημείο $(0,0)$ είναι κέντρο βάρους της διατομής, η καμπυλότητα της δοκού, στο σημείο της διατομής, περί τον άξονα y είναι b και περί τον άξονα z είναι a . Η μέση ανυγμένη παραμόρφωση είναι c .

Αντίστοιχα εντατικά μεγέθη των μεγεθών a , b , c είναι τα M_z , M_y , N .

Το «-» στη σχέση (3.2) εξασφαλίζει ότι θετικά μεγέθη a , b , c δίνουν θετικά εντατικά μεγέθη M_z , M_y , N . Ταυτόχρονα η παράγωγος των εντατικών μεγεθών ως προς τις μεταβλητές a , b , c , δίνουν Ιακωβιανό πίνακα συμμετρικό. Αυτό δεν θα συνέβαινε αν αντί του «-» υπήρχε «+».

Σε περίπτωση που το σημείο (y_0, z_0) είναι το κέντρο βάρους της διατομής, τότε η σχέση (3.2) μπορεί να γραφεί ως:

$$\varepsilon = -a(y - y_0) + b(z - z_0) + (c + a y_0 - b z_0) \quad (3.3)$$

όπου a και b παραμένουν αναλλοίωτες ως καμπυλότητες και η μέση ανυγμένη παραμόρφωση είναι $c' = c + a y_0 - b z_0$.

3.4. Ομαδοποίηση Ινών

Στο κεφάλαιο 2 αναφέρθηκαν οι καταστατικές εξισώσεις του υλικού. Κάθε μεταβλητή που εισήχθη, όπως π.χ. ε_c , ε_{un} κτλ, αναφέρονται σε κάθε ξεχωριστή ίνα του υλικού. Η διακριτοποίηση της διατομής όμως σε ίνες, μπορεί να είναι πολύ πυκνή με αποτέλεσμα να υπάρχουν πολλές ίνες και κατ' επέκταση και πολλά δεδομένα για τις μεταβλητές που τις περιγράφουν.

Για να αποφευχθεί αυτό, οι ίνες ομαδοποιούνται όχι κατά ίδιο ε_c , ε_{un} κτλ αλλά κατά ίδια (a, b, c) , (a_{un}, b_{un}, c_{un}) κτλ. από την εξίσωση (3.2). Έτσι ενώ το x και y κάθε ίνας αλλάζει, άρα έχει και διαφορετικό ε_c , ε_{un} κτλ, εντούτοις τα (a, b, c) , (a_{un}, b_{un}, c_{un}) κτλ δεν αλλάζουν από ίνα σε ίνα, πλην κάποιων περιπτώσεων.

Μια ομάδα ινών μπορεί να διασπαστεί σε περισσότερες. Κάθε ομάδα ινών, προκει-

μένου να οδηγηθούμε στα εντατικά μεγέθη, ολοκληρώνεται ξεχωριστά από τις υπόλοιπες.

Λόγοι που οδηγούν σε διάσπαση ομάδας ινών σε περισσότερες, είναι είτε διαφορετικά χαρακτηριστικά ινών (π.χ. a , b , c , a_{un} , b_{un} , c_{un} , ϵ_t) είτε αδυναμία συνέχειας σε ολοκληρωμένη σχέση. Αυτό εξηγείται αναλυτικά στην παράγραφο 4.2.

Είναι προφανές, ότι επιδίωξη είναι ο περιορισμός της διάσπασης των ομάδων ινών σε περισσότερες, ενώ αν κάποιες εμφανίσουν ξανά ίδια χαρακτηριστικά, κάτι που είναι μάλλον σπάνιο, συγχωνεύονται σε μία.

Παραδείγματα ομάδων ινών που προέκυψαν από διαδοχικές φορτίσεις (αυτή είναι η κυριότερη αιτία δημιουργίας ομάδων ινών) εμφανίζονται στα σχήματα 4.15 και 4.16.

4. Ολοκλήρωση των Ορθών Τάσεων στη Διατομή

4.1. Διπλή Ολοκλήρωση στην Επιφάνεια της Διατομής

Θεωρούμε τα παρακάτω μεγέθη:

$$M_{z,\sigma} = -y\sigma \quad (4.1.\alpha)$$

$$M_{y,\sigma} = z\sigma \quad (4.1.\beta)$$

$$N_\sigma = \sigma \quad (4.1.\gamma)$$

Για να οδηγηθούμε στα εντατικά μεγέθη N , M_x , M_y ολοκληρώνουμε τα παραπάνω μεγέθη στη διατομή όπως παρακάτω:

$$M_z = \iint_A M_{z,\sigma} dA \quad (4.2.\alpha)$$

$$M_y = \iint_A M_{y,\sigma} dA \quad (4.2.\beta)$$

$$N = \iint_A N_\sigma dA \quad (4.2.\gamma)$$

4.1.1. Διακριτοποίηση

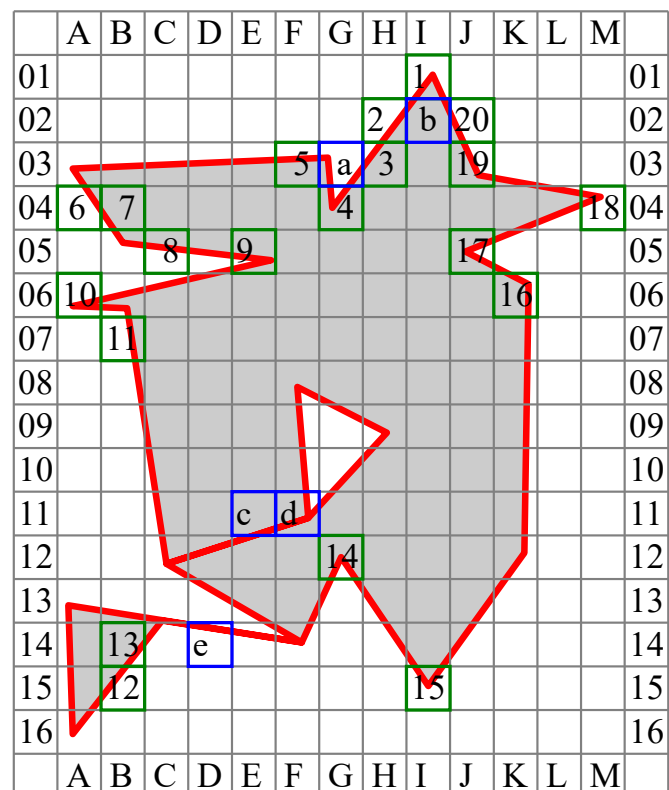
Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της διπλής ολοκλήρωσης είναι τα παρακάτω:

— Η διπλή ολοκλήρωση απαιτεί μεγάλο αριθμό δειγμάτων για την αριθμητική ολοκλήρωση.

— Απαιτείται διακριτοποίηση δύο διαστάσεων που είναι εξαιρετικά πολύπλοκη.

+ Η διακριτοποίηση πραγματοποιείται μόνο μια φορά.

+ Οι σχέσεις που αντιστοιχούν σε κάθε δείγμα είναι πολύ απλές καθώς προκύπτουν κατευθείαν από τις σχέσεις σ - ϵ του υλικού.



Σχήμα 4.1: Διακριτοποίηση διατομής

Τα κελιά με πράσινο περίγραμμα αναφέρονται σε ξεχωριστές περιπτώσεις πορείας του συνόρου μέσα στο κελί, ενώ με μπλέ αναφέρονται σε ειδικές περιπτώσεις τροποποίησης του κελιού.

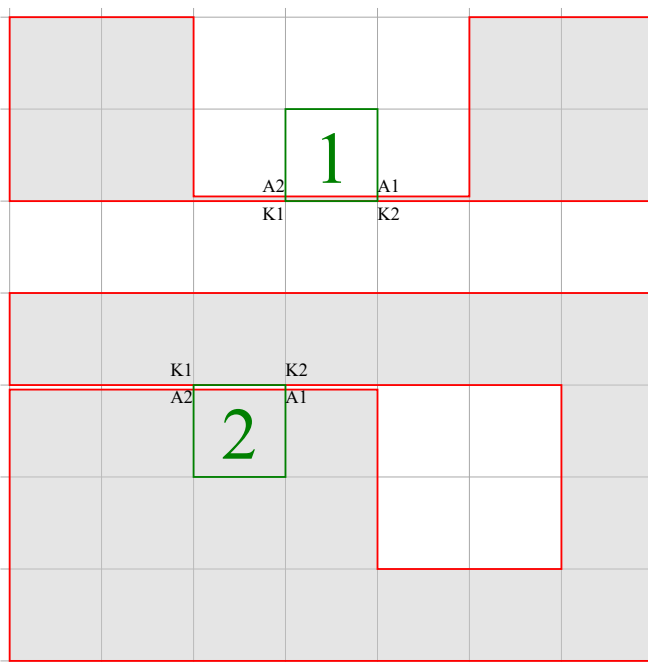
Αρκετές φορές η επιφάνεια της διατομής, είναι ορθογώνιο με πλευρές παράλληλες με τους κύριους άξονες, οπότε η διπλή αναλυτική ολοκλήρωση είναι εύκολη.

Πολλές φορές όμως η επιφάνεια της διατομής είναι αρκετά πολύπλοκη για να μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά το διπλό ολοκλήρωμα.

Η γενικευμένη διακριτοποίηση μιας διατομής, ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

— Επιλέγουμε το μήκος της πλευράς ενός κελιού της κανάβου διακριτοποίησης. Σύνηθες μήκος είναι από 1 mm ως 1 cm . Δημιουργούμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων με μονάδα το μήκος της πλευράς του κελιού και σημείο $(0,0)$ το ίδιο με το υπάρχον σύστημα συντεταγμένων.

— Αποσυνθέτουμε τυχόν τρύπες και «νησίδες» του συνόρου της διατομής σε ξεχωριστά σύνορα. Δεν θα πρέπει να υπάρχει καμία ακμή που να έχει κοινό τόπο με άλλη ακμή εκτός από τα άκρα της. Η ανάγκη για αυτό το βήμα προκύπτει διότι αν από ένα κελί διέρχονται δύο αντίθετης φοράς ακμές A και K που ταυτίζονται μέσα στο κελί, η πληροφορία για το αν αυτές οι δύο ακμές οδηγούν σε τρύπα ή σε «νησίδα» δεν υπάρχει μέσα στο κελί. Για να εξαχθεί αυτό το συμπέρασμα, αν τα σημεία εισόδου των ακμών αυτών στο κελί είναι τα A_1 και K_1 και τα σημεία εξόδου από το κελί είναι τα A_2 και K_2 (άρα $A_1=K_2$ και $A_2=K_1$), θα πρέπει να εντοπίσουμε τα σημεία A_2 και K_1 (ή τα A_1 και K_2) στο σύνορο της διατομής και να υπολογίζουμε το εμβαδό του πολυγώνου A_2 ως το K_1 (ή από το A_1 ως το K_2). Αν το εμβαδό είναι θετικό, τότε το κελί δεν ολοκληρώνεται καθώς συνδέει νησίδες. Αν το εμβαδό είναι αρνητικό, τότε το κελί ολοκληρώνεται καθώς συνδέει τρύπες. Παράδειγμα τέτοιων κελιών στο σχήμα 4.1 είναι τα κελιά e και c , ενώ η μέθοδος φαίνεται στο σχήμα 4.2. Ωστόσο επειδή η μέθοδος είναι πάρα πολύ ακριβή σε υπολογισμούς, δεδομένου ότι οι ακμές που ενώνουν τρύπες ή «νησίδες» διέρχονται από πολλά κελιά, για το



Σχήμα 4.2: Κελί διακριτοποίησης με «λαιμό»

Το κελί 1 αγνοείται καθώς το εμβαδό από το A_2 στο K_1 είναι θετικό. Το κελί 2 υπολογίζεται πλήρως καθώς το εμβαδό από το κελί A_2 στο κελί K_1 είναι αρνητικό.

λόγο αυτό προτιμάται η αποσύνθεση του συνόρου της διατομής. Το σχήμα 4.2, δείχνει ότι η αποσύνθεση της διατομής θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη ακμές με κοινό τόπο, χωρίς όμως κοινά σημεία αρχής και πέρατος. Μάλιστα είναι δυνατόν μια (όπως στο σχήμα) ή περισσότερες ακμές να έχουν κοινό τόπο με μια άλλη.

— Τα παρακάτω τα εφαρμόζουμε για κάθε ένα από τα σύνορα που προέκυψαν από την αποσύνθεση του αρχικού συνόρου της διατομής.

1. Εντοπίζουμε σε ποιο κελί A βρίσκεται η πρώτη κορυφή του συνόρου. Αν η κορυφή βρίσκεται στο όριο μεταξύ δύο ή τεσσάρων κελιών, τότε παρακολουθούμε την πορεία της πρώτης ακμής του συνόρου. Το κελί A βρίσκεται πάντα αριστερά της κατεύθυνσης της ακμής (αντιωρολογιακό σύνορο).

2. Καταγράφουμε την διαδρομή του συνόρου όσο αυτή βρίσκεται μέσα στο κελί ή στα όρια του κελιού. Μόλις η διαδρομή του συνόρου βγει εκτός κελιού, τότε μαζί με τη διαδρομή αποθηκεύουμε και τις συντεταγμένες του κελιού. Η ακμή του συνόρου που εισέρχεται σε ένα κελί, δεν είναι απαραίτητο ότι εξέρχεται κιόλας. Είναι πιθανό να εξέρχεται κάποια επόμενη ακμή (όχι απαραίτητα η αμέσως επόμενη).

3. Βγαίνοντας από το κελί το σύνορο, εισέρχεται σε κάποιο άλλο κελί από τα οκτώ γειτονικά του. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία από το βήμα 2 μέχρι να επανέλθουμε στην πρώτη κορυφή του συνόρου. Ενδεχομένως κατά τη διαδικασία, το σύνορο να διέρχεται πολλές φορές από το ίδιο κελί, όπως είναι το κελί a , d , $B6$, $L4$ κτλ, στο σχήμα 4.1. Κάθε φορά που συμβαίνει αυτό καταγράφεται ξεχωριστή διαδρομή.

4. Το πρώτο (A) και το τελευταίο κελί που αποθηκεύσαμε, υπάρχει τεράστια πιθανότητα να είναι το ίδιο κελί A . Αυτό γιατί η πρώτη κορυφή του συνόρου βρίσκεται συνήθως εντός του κελιού και όχι στο όριό του. Άρα την πρώτη φορά αποθηκεύτηκε το κελί A με τη διαδρομή του συνόρου από την πρώτη κορυφή του συνόρου μέχρι εξόδου από το κελί και την τελευταία φορά αποθηκεύτηκε το κελί A με τη διαδρομή του συνόρου από την είσοδο στο κελί μέχρι την πρώτη κορυφή του συνόρου. Το τελευταίο κελί A συγχωνεύεται με το πρώτο κελί A και οι 2 διαδρομές του συνόρου γίνονται μία. Υπάρχει πάντως πιθανότητα η πρώτη κορυφή του συνόρου να βρίσκεται πάνω στο όριο του κελιού A . Στην περίπτωση αυτή το πρώτο και το τελευταίο κελί δεν είναι ίδια και προφανώς δεν γίνεται συγχώνευση.

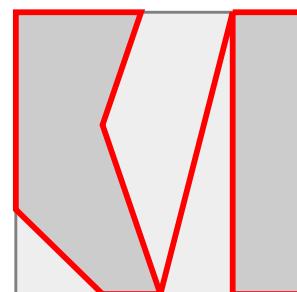
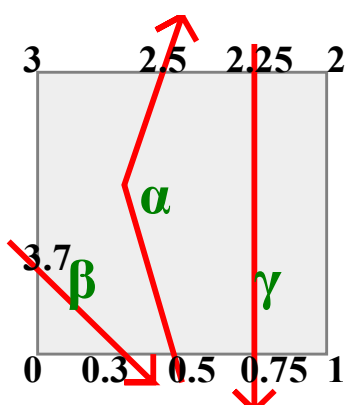
Είσοδος	Έξοδος	Παρ.	Ενέργεια
πάνω	πάνω, αριστερότερα	4	AB
πάνω	πάνω, δεξιότερα	15	-
πάνω	αριστερά	3	A
πάνω	κάτω	11	A
πάνω	δεξιά	6	-
αριστερά	πάνω	12	-
αριστερά	αριστερά, πιο πάνω	18	-
αριστερά	αριστερά, πιο κάτω	9	A
αριστερά	κάτω	7	A
αριστερά	δεξιά	8	-
κάτω	πάνω	16	B
κάτω	αριστερά	20	-
κάτω	κάτω, αριστερότερα	1	-
κάτω	κάτω, δεξιότερα	14	AB
κάτω	δεξιά	13	B
δεξιά	πάνω	19	B
δεξιά	αριστερά	5	-
δεξιά	κάτω	2	-
δεξιά	δεξιά, πιο πάνω	17	B
δεξιά	δεξιά, πιο κάτω	10	-

Πίνακας 4.1: Ενέργειες με βάση τον τρόπο εισόδου και εξόδου του συνόρου σε ένα κελί

— Διευκρινιστικό: Τα κελιά που τέμνονται από το σύνορο, χαρακτηρίζονται κελιά συνόρου ενώ τα κελιά που ανήκουν στη διατομή αλλά δεν τέμνονται από το σύνορο χαρακτηρίζονται ως εσωτερικά. Τα κελιά που αποθηκεύσαμε στο προηγούμενο βήμα, με το τμήμα του συνόρου εντός τους είναι προφανώς κελιά συνόρου. Από τον πίνακα 4.1 και με βάση το σημείο εισόδου και εξόδου της διαδρομής του συνόρου στο κελί, χαρακτηρίζουμε τη διαδρομή ότι δεν απαιτεί καμία ενέργεια ή απαιτεί ενέργεια A, B ή AB (A και B) Το παράδειγμα του πίνακα 4.1 αναφέρεται στο ομώνυμο κελί του σχήματος 4.1. Η ενέργεια A σημαίνει ότι ένα οριζόντιο εύρος εσωτερικών κελιών ξεκινάει αμέσως μετά το κελί. Η ενέργεια B σημαίνει ότι ένα οριζόντιο εύρος εσω-

τερικών κελιών τελειώνει ακριβώς πριν το κελί. Για παράδειγμα το κελί 9 (E5) απαιτεί ενέργεια A και το κελί 17 (J5) απαιτεί ενέργεια B, άρα υπάρχει ένα οριζόντιο εύρος εσωτερικών κελιών από το F5 ως το I5.

— Για κάθε κελί συνόρου που αποθηκεύσαμε εκτελούμε τις παρακάτω ενέργειες οι οποίες αναπαρίστανται στο σχήμα 4.3:



Σχήμα 4.3: Κατασκευή περιγράμματος κελιού από πολλαπλές διαδρομές συνόρου Σύμφωνα με τον πίνακα 4.1, η διαδρομή α δίνει ενέργεια B, η διαδρομή β ενέργεια A και η γ ενέργεια A. Επειδή οι διαδρομές α και β ανήκουν στο ίδιο κλειστό πολύγωνο οι ενέργειές τους υπόκεινται σε σύζευξη $A \wedge B = \emptyset$ οπότε δεν δίνουν καμία ενέργεια. Ωστόσο επειδή η διαδρομή γ ανήκει από μόνη της σε άλλο κλειστό πολύγωνο, τελικώς το κελί μένει με την ενέργεια A.

1. Δημιουργούμε ένα διάστημα $[0,4)$ όπου το 0 είναι η

κάτω αριστερά κορυφή του κελιού, το 1 η κάτω δεξιά, το 2 η πάνω δεξιά και το 3 η πάνω αριστερά.

2. Ελέγχουμε αν το κελί υπάρχει παραπάνω από μία φορά αποθηκευμένο. Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχει περίπτωση από το ίδιο κελί να διέρχεται πολλές ξεχωριστές φορές το σύνορο (π.χ. κελί a, d, B6, L4 κτλ, στο σχήμα 4.1). Στο σχήμα 4.3 το κελί θα είναι τρεις φορές αποθηκευμένο καθώς έχει 3 διελεύσεις του συνόρου.

3. Για κάθε μία από τις αποθηκευμένες διαδρομές του συνόρου στο κελί, αποθηκεύουμε στο διάστημα $[0,4)$ το σημείο έναρξης της αποθηκευμένης διαδρομής. Στο σχήμα 4.3 αυτές είναι το 0.5 , 2.25 , 3.7 .

4. Θα κατασκευάσουμε το περίγραμμα του κελιού που βρίσκεται εντός της διατομής, όπως παρακάτω, ξεκινώντας από την πρώτη αποθηκευμένη διαδρομή του κελιού που στο σχήμα 4.3 έχει σημείο έναρξης το 0.5 :

α. Κρατάμε την πρώτη κορυφή της διαδρομής του συνόρου στο διάστημα $[0,4)$.

β. Στο περίγραμμα του κελιού προσθέτουμε την διαδρομή του συνόρου.

γ. Εντοπίζουμε τη θέση του σημείου εξόδου της διαδρομής αυτής στο διάστημα $[0,4)$.

δ. Από το σημείο εξόδου, κινούμενοι αντιωρολογιακά (αρχικά προς το 4 αλλά αν το ξεπεράσουμε επανερχόμαστε στο 0 και συνεχίζουμε θετικά), προσθέτουμε στη διαδρομή ότι σημείο έχουμε προηγουμένως τοποθετήσει σε αυτό το διάστημα:

— Αν το σημείο είναι μια από τις τέσσερις κορυφές του κελιού, το προσθέτουμε στο περίγραμμα του κελιού.

— Αν το σημείο είναι η κορυφή έναρξης μιας επιπλέον διαδρομής συνόρου επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία από το βήμα β. Οι ενέργειες των διαδρομών ενώνονται με σύζευξη.

— Αν το σημείο είναι η κορυφή έναρξης της αρχικής διαδρομής (βήμα α) τότε αν υπάρχουν και άλλες διαθέσιμες διαδρομές ή αν υπήρξαν προηγουμένως κι άλλα κλειστά πολύγωνα εκτός από το τρέχον, κλείνουμε το πολύγωνο και πηγαί-

νουμε στο βήμα α.

5. Διαγράφουμε όλες τις άλλες εκδόσεις του κελιού που εξετάζουμε και αφήνουμε μόνο την πρώτη που περιέχει το περίγραμμα του κελιού.

— Από τα κελιά συνόρου του προηγούμενου βήματος, με τις ενέργειες που το κάθε ένα έχει (ενέργεια A, B, AB ή καμία) δημιουργούμε ένα οριζόντιο εύρος για κάθε γραμμή της κανάβου.

— Οι ενέργειες που πραγματοποιούνται με βάση το σημείο εισόδου και εξόδου του συνόρου σε κελί με όνομα i ακολουθούν. Κάθε παράγραφος ενεργειών έχει προτεραιότητα έναντι των επόμενων. Δηλαδή η πρώτη παράγραφος της ενέργειας A έχει προτεραιότητα σε σχέση με τη δεύτερη. Αν ικανοποιούνται και οι δύο, τότε θα συμβεί η πρώτη.

— **Ενέργεια A:** Το κελί ορίζεται ως αρχή ενός διαστήματος:

— Αν στη γραμμή στην οποία ανήκει του κελί i έχει προηγουμένως δημιουργηθεί διάστημα εσωτερικών κελιών της μορφής $A=[a,b)$ $a,b \in \mathbb{Z}$ $i \in A$, τότε το διάστημα A γίνεται $A=[a,+\infty)$ και δημιουργούμε ένα επιπλέον διάστημα εσωτερικών κελιών B για τη γραμμή $B=[i+1,b)$.

— Αν στη γραμμή στην οποία ανήκει του κελί i έχει προηγουμένως δημιουργηθεί διάστημα εσωτερικών κελιών της μορφής $A=(-\infty,b)$ $b \in \mathbb{Z}$ $i \in A$, τότε το διάστημα A γίνεται $A=[i+1,b)$.

— Αν στη γραμμή στην οποία ανήκει του κελί i δεν έχει προηγουμένως δημιουργηθεί διάστημα εσωτερικών κελιών, τότε δημιουργούμε ένα διάστημα εσωτερικών κελιών B για τη γραμμή $B=[i+1,+\infty)$.

— **Ενέργεια B:** Το κελί ορίζεται ως πέρασ ενός διαστήματος:

— Αν στη γραμμή στην οποία ανήκει του κελί i έχει προηγουμένως δημιουργηθεί διάστημα εσωτερικών κελιών της μορφής $B=[a,b)$ $a,b \in \mathbb{Z}$ $i \in B$, τότε το διάστημα B γίνεται $B=(-\infty,b)$ και δημιουργούμε ένα επιπλέον διάστημα εσωτερικών κελιών A για τη γραμμή $A=[a,i)$.

— Αν στη γραμμή στην οποία ανήκει του κελί i έχει προηγουμένως δη-

μιουργηθεί διάστημα εσωτερικών κελιών της μορφής $B=[a,+\infty)$ $a \in \mathbb{Z}$ $i \in B$, τότε το διάστημα B γίνεται $B=[a,i)$.

— Αν στη γραμμή στην οποία ανήκει του κελί i δεν έχει προηγουμένως δημιουργηθεί διάστημα εσωτερικών κελιών, τότε δημιουργούμε ένα διάστημα εσωτερικών κελιών A για τη γραμμή $A=(-\infty,i)$.

— **Ενέργεια AB:** Το κελί ορίζεται ως τέλος ενός διαστήματος και αρχή ενός άλλου:

— Εφαρμόζουμε την ενέργεια A και ακολούθως την ενέργεια B για το κελί.

— Μετά την ολοκλήρωση της διακριτοποίησης, σε κάποιες γραμμές μπορεί να έχουν προκύψει διαστήματα της μορφής $A=[a,b)$ $a, b \in \mathbb{Z}$ $a \geq b$ τα οποία αφαιρούνται αφού είναι κενά. Παράδειγμα στο σχήμα 4.1 είναι το μπλε κελί b και το κελί $F13$.

— Έχουν δημιουργηθεί οι οριζόντιες γραμμές των εσωτερικών κελιών και στο επόμενο βήμα τοποθετούμε και τα κελιά συνόρου στις αντίστοιχες οριζόντιες γραμμές που ανήκουν.

— Για κάθε κελί, εσωτερικό ή συνόρου, δημιουργούμε τις κορυφές του. Οι κορυφές ενός κελιού συνήθως είναι κοινόχρηστες και με άλλα κελιά, όμως δημιουργούνται μια και μοναδική φορά και για όλα τα κελιά που τις χρησιμοποιούν είναι οι ίδιες κορυφές. Οι κορυφές αυτές θα εμπλουτιστούν με ειδικά δεδομένα του υλικού μεταγενέστερα και πάνω σε αυτές θα υπολογίζονται τα μεγέθη των σχέσεων (4.1) και ενδεχομένως οι παράγωγοι αυτών κατά τα a , b , c . Επίσης δημιουργούμε τα κελιά ώστε να χρησιμοποιούν ως κορυφές τις κοινόχρηστες που δημιουργήσαμε. Ενώ οι τιμές των σχέσεων (4.1) λαμβάνονται στις κορυφές των κελιών, εντούτοις η ολοκλήρωση γίνεται επί των κελιών.

4.1.2. Αριθμητική Ολοκλήρωση

4.1.2.1. Αριθμητική Ολοκλήρωση της $f(x)$

Παρότι στη διπλή ολοκλήρωση οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι δύο, θα γίνει μια αναφορά στην ολοκλήρωση με μια ανεξάρτητη μεταβλητή.

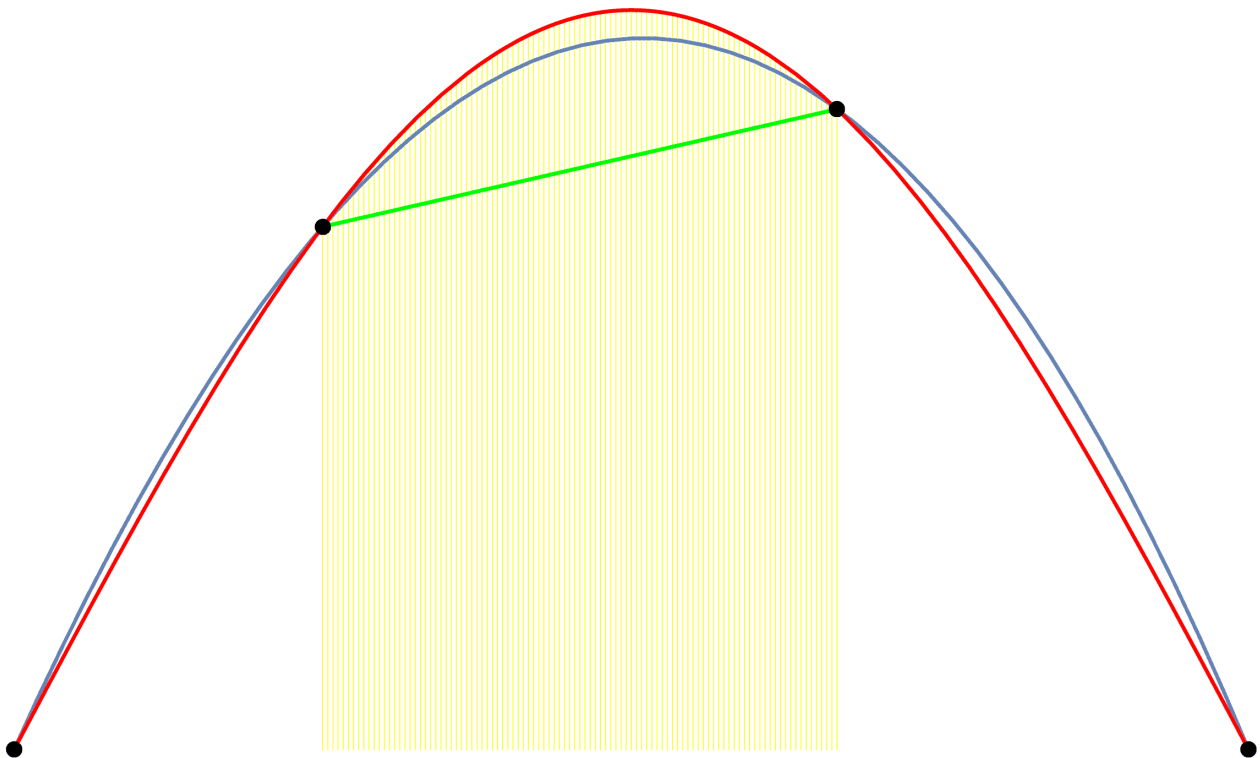
4.1.2.1.1. Μέθοδος Ολοκλήρωσης Τραπεζίου

Αν θέλουμε το αριθμητικό ολοκλήρωμα από το σημείο x_1 στο σημείο x_2 για τα οποία γνωρίζουμε τις τιμές $y_1=f(x_1)$ και $y_2=f(x_2)$ τότε η μέθοδος ολοκλήρωσης τραπεζίου δίνει την παρακάτω τιμή:

$$S_{12}=(x_2-x_1)\frac{y_1+y_2}{2} \quad (4.3)$$

4.1.2.1.2. Ολοκλήρωση με Παρεμβολή Κυβικού Πολυώνυμου (Simpson 3/8)

Αν έχουμε και άλλα δύο σημεία x_0 και x_3 με γνωστές τις $y_0=f(x_0)$ και $y_3=f(x_3)$ τότε μπορούμε να προσομοιώσουμε τη συνάρτηση $f(x)$ με ένα κυβικό πολυώνυμο $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ και να υπολογίσουμε τα a , b , c , d από τα τέσσερα γνωστά σημεία $(x_i, f(x_i))$. Ακολούθως ολοκληρώνουμε από το σημείο x_1 στο σημείο x_2 . Η προσαρμογή φαίνεται στο σχήμα 4.4.



Σχήμα 4.4: Αριθμητική ολοκλήρωση μιας μεταβλητής

Ενδιαφερόμαστε για την ολοκλήρωση της κίτρινης περιοχής και έχουμε 4 δείγματα από την πραγματική συνάρτηση $f(x)=\sin(x)$ με το κόκκινο χρώμα. Με μπλε χρώμα προσομοίωση της $f(x)$ με ένα κυβικό πολυώνυμο $P(x)$ που διέρχεται από τα 4 αυτά σημεία. Με πράσινο χρώμα, η μέθοδος ολοκλήρωσης τραπεζίου.

Αν τα σημεία x_0 , x_1 , x_2 και x_3 ισαπέχουν κατά h , τότε το ολοκλήρωμα από το σημείο x_1 στο σημείο x_2 δίνεται από τη σχέση (4.4.α), το ολοκλήρωμα από το σημείο x_0 στο σημείο x_1 (σε περίπτωση που είμαστε στο άκρο) δίνεται από τη σχέση (4.4.β) και το

ολοκλήρωμα από το σημείο x_2 στο σημείο x_3 (πάλι σε περίπτωση που είμαστε στο άκρο) δίνεται από τη σχέση (4.4.γ). Το άθροισμα των τριών ολοκληρωμάτων, δηλαδή το ολοκλήρωμα από το σημείο x_0 στο σημείο x_3 , είναι ο κανόνας ολοκλήρωσης 3/8 του Simpson και δίνεται από τη σχέση (4.4.δ).

$$S_{12} = -h \frac{y_0 - 13(y_1 + y_2) + y_3}{24} \quad (4.4.α)$$

$$S_{01} = h \frac{9y_0 + 19y_1 - 5y_2 + y_3}{24} \quad (4.4.β)$$

$$S_{23} = h \frac{y_0 - 5y_1 + 19y_2 + 9y_3}{24} \quad (4.4.γ)$$

$$S_{03} = \frac{3}{8} h (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) \quad (4.4.δ)$$

Αν τα σημεία x_0 , x_1 , x_2 και x_3 δεν ισαπέχουν, τότε οι σχέσεις των ολοκληρωμάτων είναι εξαιρετικά πιο πολύπλοκες. Το ολοκλήρωμα από το σημείο x_1 στο σημείο x_2 δίνεται από τη σχέση (4.5.α), το ολοκλήρωμα από το σημείο x_0 στο σημείο x_1 (σε περίπτωση που είμαστε στο άκρο) δίνεται από τη σχέση (4.5.β) και το ολοκλήρωμα από το σημείο x_2 στο σημείο x_3 (πάλι σε περίπτωση που είμαστε στο άκρο) δίνεται από τη σχέση (4.5.γ).

$$S_{12} = -h_{12} \left(-h_2^2 (h_2 - 2h_3) h_{23} h_3 y_{01} + h_1^4 (h_3 y_{20} + h_2 y_{03}) + h_1 h_2 (2h_2^2 h_3 y_{10} + 4h_3^3 (y_0 + y_1 + y_2) - 3h_2 h_3^2 (y_0 + 2y_1 + y_2) + h_3^3 y_{03}) + h_1^3 (3h_3^2 y_{02} + 2h_2 h_3 y_{20} + h_2^2 y_{30}) + h_1^2 (2h_3^3 y_{20} + 3h_2^2 h_3 (2y_0 + y_1 + y_2) - 3h_2 h_3^2 (y_0 + y_1 + 2y_2) + h_2^3 y_{30}) \right) / (12h_1 h_2 h_{13} h_{23} h_3) \quad (4.5.α)$$

$$S_{01} = h_1 \left(6h_2^2 h_{23} h_3^2 (y_0 + y_1) - 4h_1 h_2 h_{23} h_3 (h_2 + h_3) (2y_0 + y_1) + h_1^4 (h_3 y_{20} + h_2 y_{03}) + h_1^2 (3h_2^2 h_3 \cdot (3y_0 + y_1) - 3h_2 h_3^2 (3y_0 + y_1) + 2h_3^3 y_{20} + 2h_2^3 y_{03}) + 3h_1^3 (h_2^2 y_{02} + h_2^2 y_{30}) \right) / (12h_{12} h_2 h_{13} h_{23} h_3) \quad (4.5.β)$$

$$S_{23} = h_{23} \left(-h_2 h_2^2 h_3 (h_2 + h_3) y_{01} + 2h_1^3 (h_2^2 y_{02} + h_2^2 y_{03} - 2h_2 h_3 (y_0 + y_2 + y_3)) - 3h_1^2 (h_2 + h_3) \cdot (h_3^2 y_{02} + h_2^2 y_{03} - h_2 h_3 (2y_0 + y_2 + y_3)) + h_1 (2h_2 h_3^3 y_{02} + h_3^4 y_{02} + h_3^4 y_{03} + 2h_2^3 h_3 y_{03} - 3h_2^2 h_3^2 \cdot (2y_0 + y_2 + y_3)) \right) / (12h_1 h_{12} h_2 h_{13} h_3) \quad (4.5.γ)$$

Όπου $h_i = x_i - x_0$, $h_{ij} = h_i - h_j$ και $y_{ij} = y_i - y_j$.

4.1.2.1.3. Ολοκλήρωση με Παρεμβολή Τετραγωνικού Πολυωνύμου (Simpson 1/3)

Αν έχουμε άλλο ένα σημείο x_0 με γνωστή την $y_0 = f(x_0)$ τότε μπορούμε να προσομοιώσουμε τη συνάρτηση $f(x)$ με ένα τετραγωνικό πολυώνυμο $P(x) = ax^2 + bx + c$ και να υπολογίσουμε τα a , b , c από τα τρία γνωστά σημεία $(x_i, f(x_i))$. Ακολούθως ολοκληρώνουμε από το σημείο x_0 στο σημείο x_1 ή από το σημείο x_1 στο σημείο x_2 .

Η μέθοδος αυτή δεν παρέχει την ίδια ακρίβεια με τη μέθοδο του κυβικού πολυωνύμου. Δεν υπάρχει κανένας λόγος χρήσης της σε συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής. Ωστόσο αναφέρεται επειδή θα χρειαστεί ακολούθως στη διπλή ολοκλήρωση (ολοκλήρωση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών), όταν δεν θα υπάρχουν επαρκείς κορυφές κελιών.

Αν τα σημεία x_0 , x_1 και x_2 ισαπέχουν κατά h , τότε το ολοκλήρωμα από το σημείο x_0 στο σημείο x_1 δίνεται από τη σχέση (4.6.α) και το ολοκλήρωμα από το σημείο x_1 στο σημείο x_2 δίνεται από τη σχέση (4.6.β). Το άθροισμα των τριών ολοκληρωμάτων, δηλαδή το ολοκλήρωμα από το σημείο x_0 στο σημείο x_2 , είναι ο κανόνας ολοκλήρωσης 1/3 του Simpson και δίνεται από τη σχέση (4.6.γ).

$$S_{01} = h \frac{5y_0 + 8y_1 - y_2}{12} \quad (4.6.α)$$

$$S_{12} = h \frac{-y_0 + 8y_1 + 5y_2}{12} \quad (4.6.β)$$

$$S_{02} = \frac{1}{3} h (y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (4.6.γ)$$

Αν τα σημεία x_0 , x_1 και x_2 δεν ισαπέχουν, τότε οι σχέσεις των ολοκληρωμάτων είναι πιο πολύπλοκες. Το ολοκλήρωμα από το σημείο x_0 στο σημείο x_1 δίνεται από τη σχέση (4.7.α) και το ολοκλήρωμα από το σημείο x_1 στο σημείο x_2 δίνεται από τη σχέση (4.7.β).

$$S_{01} = h_1 \frac{-3h_2^2(y_0 + y_1) + 2h_1h_2(2y_0 + y_1) + h_1^2y_2}{6h_1h_2} \quad (4.7.α)$$

$$S_{12} = h_{12} \frac{h_2^2y_{01} + h_1^2y_{02} - 2h_1h_2(y_0 + y_1 + y_2)}{6h_1h_2} \quad (4.7.β)$$

Όπου $h_i = x_i - x_0$, $h_{ij} = h_i - h_j$ και $y_{ij} = y_i - y_j$.

4.1.2.1.3.1. Ειδική Περίπτωση

Μια ειδική περίπτωση που θα χρειαστεί στη διπλή ολοκλήρωση είναι η ακόλουθη.

Έχουμε δεδομένα τα τρία σημεία κατά τα γνωστά αλλά θέλουμε να ολοκληρώσουμε από το σημείο x_1 στο σημείο x_A του οποίου δεν γνωρίζουμε την $f(x_A)$ ή από το σημείο x_A στο σημείο x_1 .

Αν τα σημεία x_0 , x_A , x_1 και x_2 ισαπέχουν κατά h , τότε το ολοκλήρωμα από το σημείο x_A στο σημείο x_1 δίνεται από τη σχέση (4.8.α). Αν τα σημεία x_0 , x_1 , x_A και x_2 ισα-

πέχουν κατά h , τότε το ολοκλήρωμα από το σημείο x_1 στο σημείο x_A δίνεται από τη σχέση (4.8.β).

$$S_{A1} = h \frac{5y_0 + 39y_1 - 8y_2}{36} \quad (4.8.α)$$

$$S_{1A} = h \frac{-8y_0 + 39y_1 + 5y_2}{36} \quad (4.8.β)$$

Αν τα σημεία x_0 , x_A , x_1 και x_2 δεν ισαπέχουν, τότε το ολοκλήρωμα από το σημείο x_A στο σημείο x_1 δίνεται από τη σχέση (4.9.α). Αν τα σημεία x_0 , x_1 , x_A και x_2 δεν ισαπέχουν, τότε το ολοκλήρωμα από το σημείο x_1 στο σημείο x_A δίνεται από τη σχέση (4.9.β).

$$S_{A1} = h_{1A} \left(h_2(3h_2 - 2h_A)h_A y_{01} + h_1^3 y_{20} + h_1^2(2h_2(2y_0 + y_1) + h_A y_{20}) - h_1(2h_2 h_A y_{01} + 3h_2^2(y_0 + y_1) + 2h_A^2 y_{20}) \right) / (6h_1 h_{12} h_2) \quad (4.9.α)$$

$$S_{1A} = h_{1A} \left(-h_2(3h_2 - 2h_A)h_A y_{01} + h_1^3 y_{02} - h_1^2(2h_2(2y_0 + y_1) + h_A y_{20}) + h_1(2h_2 h_A y_{01} + 3h_2^2(y_0 + y_1) + 2h_A^2 y_{20}) \right) / (6h_1 h_{12} h_2) \quad (4.9.β)$$

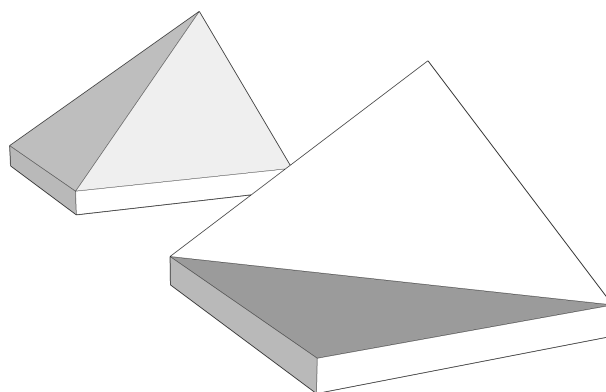
Όπου $h_i = x_i - x_0$, $h_{ij} = h_i - h_j$ και $y_{ij} = y_i - y_j$.

4.1.2.2. Αριθμητική Ολοκλήρωση της $f(x,y)$

4.1.2.2.1. Απλή Μέθοδος Ολοκλήρωσης Τραπεζίου

Στα διπλά ολοκληρώματα, τα κελιά της διακριτοποίησης είναι συνήθως τετράγωνα και ορθογώνια αν πρόκειται για εσωτερικά κελιά της διατομής ή πολυγωνικά αν πρόκειται για κελιά συνόρου.

Σε κάθε περίπτωση τα κελιά είναι κλειστά πολύγωνα της μορφής ABCDE... και ως εκ τούτου, αποτελούνται από ένα ή περισσότερα τρίγωνα ABC, ACD, ADE, ...



Σχήμα 4.5: Ολοκλήρωση τετραπλεύρου
Αναλόγως ποιο είναι το ζεύγος των τριγώνων, το αποτέλεσμα είναι διαφορετικό. Προτιμάται ο μέσος όρος των δύο περιπτώσεων

Η μέθοδος υιοθετεί την ονομασία της από την περίπτωση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής καθώς για δύο ανεξάρτητες μεταβλητές η έννοια του τραπεζίου δεν υπάρχει.

Το πιο κοντινό στη μέθοδο του τραπεζίου, είναι να βρεθεί ο προσημασμένος όγκος που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x,y)$ και το επίπεδο $z=0$ με πεδίο ορισμού (x,y)

το κάθε τρίγωνο του πολυγώνου του κελιού. Αυτός ο προσημασμένος όγκος προκύπτει ως άθροισμα του προσημασμένου όγκου τριών τετραέδρων.

Ο προσημασμένος όγκος τετραέδρου με κορυφές \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} δίνεται από την παρακάτω σχέση. Τα $(\vec{b}-\vec{a})$, $(\vec{c}-\vec{a})$, $(\vec{d}-\vec{a})$ πρέπει να αποτελούν τους άξονες x , y , z αντίστοιχα, ενός δεξιόστροφου συστήματος συντεταγμένων.

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \frac{1}{6}(\vec{b}-\vec{a}) \cdot (\vec{c}-\vec{a}) \times (\vec{d}-\vec{a}) \quad (4.10)$$

Το ολοκλήρωμα μιας ιδιότητας $z=f(x, y)$ σε πεδίο ορισμού (x, y) τρίγωνο με συντεταγμένες κορυφών $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c}=(x_3, y_3, z_3)$, με θετική φορά περί τον άξονα z , και βάσης $\vec{a}_0=(x_1, y_1, 0)$, $\vec{b}_0=(x_2, y_2, 0)$, $\vec{c}_0=(x_3, y_3, 0)$, μπορεί να δοθεί σαν άθροισμα όγκου τριών τετραέδρων, που τελικά καταλήγει στην παρακάτω σχέση:

$$V_3(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = V(\vec{a}_0, \vec{a}, \vec{b}_0, \vec{c}_0) + V(\vec{b}_0, \vec{b}, \vec{a}, \vec{c}_0) + V(\vec{c}_0, \vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = \frac{z_1+z_2+z_3}{6} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.11)$$

Άρα ο όγκος ενός πολυγώνου n κορυφών P_i , μπορεί να αποδοθεί ως:

$$V_{\text{polygon}} = \sum_{j=2}^{n-1} V_{\text{triangle}}(P_1, P_j, P_{j+1}) \quad (4.12)$$

4.1.2.2.2. Σύνθετη Μέθοδος Ολοκλήρωσης Τραπεζίου

Στο Σχήμα 4.5, φαίνεται δύο φορές, το ίδιο τετράγωνο κελί. Τα δύο τρίγωνα που το αποτελούν, έχουν διαφορετική διάταξη κάθε φορά. Από το σχήμα γίνεται εμφανές ότι αυτή η διαφορετική διάταξη δίνει εντελώς διαφορετικά αποτελέσματα στον όγκο. Για να αποφευχθεί αυτό, η σύνθετη μέθοδος τραπέζιου λαμβάνει το μέσο όρο και των δύο εκδοχών.

Το ολοκλήρωμα μιας ιδιότητας z σε πεδίο ορισμού τετράπλευρο με συντεταγμένες κορυφών (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , (x_4, y_4, z_4) , με θετική φορά περί τον άξονα z , μπορεί να δοθεί σαν άθροισμα δύο όγκων με πεδίο ορισμού τρίγωνο, όπως οι σχέσεις (4.13.α) και (4.13.β). Ο τελικός όγκος είναι ο μέσος όρος αυτών των δύο όγκων, όπως δίνεται από τη σχέση (4.13.γ).

$$V_{4,a}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = V_3(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + V(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) \quad (4.13.α)$$

$$V_{4,b}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = V_3(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) + V(\vec{b}, \vec{d}, \vec{a}) \quad (4.13.β)$$

$$V_4(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \frac{V_{4,a}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) + V_{4,b}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})}{2} \quad (4.13.\gamma)$$

Σε ένα τετράγωνο ABCD λοιπόν, υπολογίστηκε ο όγκος του από τα τρίγωνα ABC, ACD και ακολούθως από τα τρίγωνα BCD, BDA και λήφθηκε ο μέσος όρος.

Σε ένα πολύγωνο n κορυφών P_i , αυτή η ενέργεια θα έπρεπε να γίνει n φορές και συνολικά να υπολογιστεί ο όγκος $n(n-2)$ τριγώνων. Δηλαδή για ένα δεκάγωνο απαιτούνται υπολογισμοί 80 τριγώνων, κάτι το οποίο είναι μάλλον απαγορευτικό. Η απλή μέθοδος απαιτούσε τον υπολογισμό μόνο οκτώ τριγώνων.

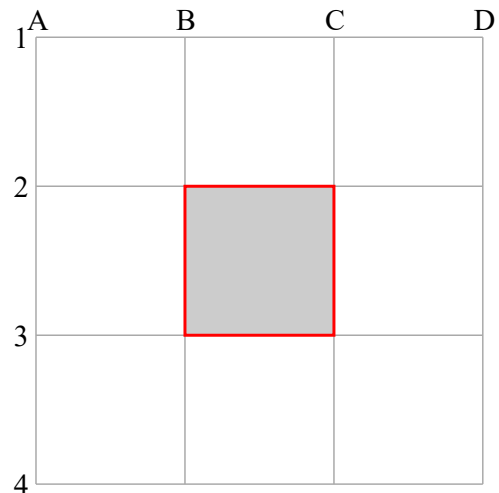
Οι σχέσεις περιγράφονται παρακάτω:

$$V_{\text{polygon},i} = \sum_{j=i+1}^{n+i-2} V_{\text{triangle}}(P_i, P_j, P_{j+1}) \quad \text{για } i \in \{1, n\} \quad (4.14.\alpha)$$

$$V_{\text{polygon}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{\text{polygon},i} \quad (4.14.\beta)$$

Όπου αν κάποιος από τους δείκτες των P_j, P_{j+1} γίνει μεγαλύτερος από n τότε ανακυκλώνεται από το μηδέν.

Πολλοί ήδη υπολογισμένοι όγκοι τριγώνων ανακυκλώνονται. Για το λόγο αυτό καλό είναι να αποθηκεύεται η τιμή του όγκου κάθε τριγώνου και να μπορεί να αναζητηθεί από το A/A των κορυφών του τριγώνου. Π.χ. σε ένα πεντάγωνο ($n=5$), για $i=1$ και $j=2$ έχουμε το τρίγωνο $(P_1 P_2 P_3)$ ενώ για $i=3$ και $j=5+1=1$ έχουμε το τρίγωνο $(P_3 P_1 P_2)$ που είναι το ίδιο και με την ίδια φορά.



Σχήμα 4.6: Ολοκλήρωση κανονικού κελιού

4.1.2.2.3. Ολοκλήρωση με Παρεμβολή Δύο Κυβικών Πολυωνύμων (Διπλή Simpson 3/8)

Η μέθοδος αυτή αφορά αποκλειστικά «κανονικά» κελιά, δηλαδή τετράγωνα ή ορθογώνια κελιά σε κάναβο.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να ολοκληρώσουμε το κόκκινο κελί του σχήματος 4.6. Εφόσον το κελί είναι κανονικό, θεωρούμε ότι οι τέσσερις κορυφές του B2, B3, C2 και C3 υπάρχουν.

Ας υποθέσουμε ακόμα ότι υπάρχουν πολλές από τις υπόλοιπες δώδεκα κορυφές που δεν είναι κορυφές του κελιού που εξετάζουμε. Υπάρχουν ως συνέπεια της ύπαρξης των αντίστοιχων κελιών των οποίων αποτελούν κορυφές.

Διπλό ολοκλήρωμα σημαίνει δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις. Πρώτα προς τη μία διεύθυνση (επιλέγουμε την οριζόντια) και μετά στην κάθετη.

Εφόσον επιλέξαμε πρώτα την οριζόντια διεύθυνση, σε κάθε γραμμή εξετάζουμε πόσες κορυφές έχουμε. Αν έχουμε μία, εφαρμόζουμε στη γραμμή ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης. Μία κορυφή μπορεί να έχουμε μόνο στη γραμμή 1 και 4. Αν έχουμε δύο, εφαρμόζουμε στη γραμμή μέθοδο τραπεζίου. Αν έχουμε τρεις, εφαρμόζουμε μέθοδο τετραγωνικού πολυωνύμου και αν έχουμε τέσσερις, εφαρμόζουμε μέθοδο κυβικού πολυωνύμου. Το ολοκλήρωμα που θα υπολογίσουμε θα είναι μεταξύ των στηλών B και C.

A	B	C	D	Μέθοδος
x	x	x	x	Δεν υπολογίζεται ολοκλήρωμα
x	x	x	✓	Εμβαδό ορθογωνίου
x	x	✓	x	
x	✓	x	x	
✓	x	x	x	
x	✓	✓	x	Εφαρμογή σχέσης (4.3)
✓	✓	x	x	Εφαρμογή σχέσης (4.3) αλλά θα πρέπει πρώτα να υπολογιστεί η f στο B και στο C με παρεμβολή επί της ευθείας που σχηματίζουν οι δύο υπαρκτές κορυφές
x	x	✓	✓	
✓	x	x	✓	
✓	x	✓	x	
x	✓	x	✓	Εφαρμογή σχέσης (4.4.α) ή (4.5.α)
✓	✓	✓	✓	
✓	✓	✓	x	Εφαρμογή σχέσης (4.6.β) ή (4.7.β)
x	✓	✓	✓	Εφαρμογή σχέσης (4.6.α) ή (4.7.α)
✓	x	✓	✓	Εφαρμογή σχέσης (4.8.α) ή (4.9.α)
✓	✓	x	✓	Εφαρμογή σχέσης (4.8.β) ή (4.9.β)

Πίνακας 4.2: Μέθοδος ολοκλήρωσης με βάση τις διαθέσιμες κορυφές

Ο πίνακας 4.2 δείχνει με βάση τις υπαρκτές κορυφές της γραμμής, ποια μέθοδος θα εφαρμοστεί.

Αφού ολοκληρώσουμε οριζόντια σε κάθε γραμμή, θα έχουμε δύο, τρεις ή τέσσερις τιμές. Οι γραμμές 2 και 3 θα έχουν σίγουρα τιμή ενώ οι γραμμές 1 και 4 ενδέχεται να έχουν, ενδέχεται και όχι.

Ολοκληρώνοντας αυτές τις 2 ως 4 τιμές με βάση τα όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 4.1.2.1, επάνω, για το διάστημα μεταξύ των γραμμών 2 και 3, έχουμε την τιμή της διπλής ολοκλήρωσης του κανονικού κελιού.

Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μεθόδου:

- Απαιτεί τοπολογικές σχέσεις των κορυφών με τις γειτονικές τους.
- Πιο αργή από την απλή μέθοδο ολοκλήρωσης τραπεζίου.
- + Εξαιρετική ακρίβεια σε σχέση με την απλή μέθοδο ολοκλήρωσης τραπεζίου, διότι γίνεται χρήση της επιρροής των γειτονικών κελιών (των κορυφών τους).

4.1.2.2.4. Ολοκλήρωση Τριγώνου με Συνεισφορά και των Γειτονικών

Σε περίπτωση μη κανονικών κελιών, η ολοκλήρωση αναγκαστικά θα πραγματοποιηθεί τρίγωνο – τρίγωνο, όπως ήδη έχει αναφερθεί. Στην περίπτωση αυτή, θα μπορούσε να βελτιωθεί η ακρίβεια κάνοντας χρήση των γειτονικών τριγώνων.

Η υπόθεση που θα κάνουμε απαιτεί ένα μη κανονικό δίκτυο τριγώνων ή TIN (triangulated irregular network). Θα πρέπει όλα τα τρίγωνα να είναι αντιωρολογιακά, κάτι που στην περίπτωση μας ισχύει μόνο για κυρτά κελιά. Αυτός είναι σημαντικός περιορισμός.

Η μέθοδος θα αναπτυχθεί επιγραμματικά.

Για τις όλες κορυφές των τριγώνων έχουμε την τιμή $z=f(x, y)$. Άρα για όλα τα τρίγωνα μπορούμε να υπολογίσουμε το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο του τριγώνου με τη συνιστώσα $z=1$.

Για κάθε κορυφή λαμβάνουμε το μέσο όρο όλων των κάθετων διανυσμάτων των τριγώνων που μοιράζονται την κορυφή.

Σε ένα τρίγωνο:

— Έχουμε τα $z_1=f(x_1, y_1)$, $z_2=f(x_2, y_2)$, $z_3=f(x_3, y_3)$ των κορυφών του.

— Από το μέσο όρο των κάθετων στα τρίγωνα διανυσμάτων, έχουμε

με τα $\begin{bmatrix} \partial_x f(x_1, y_1) \\ \partial_y f(x_1, y_1) \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \partial_x f(x_2, y_2) \\ \partial_y f(x_2, y_2) \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \partial_x f(x_3, y_3) \\ \partial_y f(x_3, y_3) \\ 1 \end{bmatrix}$ των κορυφών του.

— Συνολικά έχουμε εννιά τιμές.

— Δημιουργούμε ένα πολυώνυμο με το τρίγωνο του Pascal, τέτοιο ώστε να μπορεί

	0	1	2	3
0	✓	✓	✓	✓
1	✓		✓	
2	✓	✓		
3	✓			

Πίνακας 4.3: Τρίγωνο Pascal για το πολυώνυμο του τριγώνου

να αποδώσει κυβικά πολυώνυμα σε τρεις διαφορετικές κατευθύνσεις, όποιες κι αν είναι αυτές. Οι εννέα όροι που επιλέγονται φαίνονται στον πίνακα 4.3.

— Υπολογίζουμε τους σταθερούς όρους του πολυωνύμου και το ολοκληρώνουμε διπλά με πεδίο ορισμού το τρίγωνο.

4.2. Επικαμπύλια Ολοκλήρωση στο Σύνορο της Διατομής

Σύμφωνα με το θεώρημα Green μπορούμε να ολοκληρώσουμε στο σύνολο της διατομής επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αντί για διπλό. Θα χρησιμοποιήσουμε τον μισό τύπο του θεωρήματος Green όπως παρακάτω:

$$\oint_L (\underbrace{L dy}_0 + M dz) = \iint_A (\underbrace{\partial_y M - \partial_z L}_0) dA \Rightarrow \oint_L M dz = \iint_A \partial_y M dA \quad (4.15)$$

Σαν συναρτήσεις $\partial_y M$ θα χρησιμοποιηθούν οι συναρτήσεις N_σ , $M_{y,\sigma}$, $M_{z,\sigma}$ από τη σχέση (4.1).

Οι παραπάνω συναρτήσεις πρέπει να ολοκληρωθούν αόριστα κατά y προκειμένου να οδηγηθούμε στις συναρτήσεις M που θα τις ονομάσουμε αντίστοιχα N_M , $M_{y,M}$ και $M_{z,M}$ και δεν έχουν κάποια φυσική σημασία.

$$N_M(y, z) = \int N_\sigma(y, z) dy \quad (4.16.a)$$

$$M_{y,M}(y, z) = \int M_{y,\sigma}(y, z) dy \quad (4.16.b)$$

$$M_{z,M}(y, z) = \int M_{z,\sigma}(y, z) dy \quad (4.16.c)$$

Οι συναρτήσεις M πρέπει να είναι συνεχείς κατά y κάτι που δεν είναι πάντα εφικτό. Η εξασφάλιση συνέχειας αναφέρεται λεπτομερώς πιο κάτω στην παράγραφο 4.2.1

Με αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης από y σε ε , είναι δυνατή μια γενικευμένη ολοκλήρωση για κάθε συνάρτηση $\sigma(\varepsilon)$ και οι σχέσεις (4.16) γίνονται:

$$N_M = \int \sigma dy = \int \sigma \frac{dy}{d\varepsilon} d\varepsilon = -\frac{1}{a} \int \sigma d\varepsilon = -\frac{1}{a} \sigma^y \text{ για } a \neq 0 \quad (4.17.a.i)$$

$$N_M = \int \sigma dy = \sigma \int dy = y \sigma \text{ για } a = 0 \quad (4.17.a.ii)$$

$$M_{y,M} = z N_M \text{ σε κάθε περίπτωση} \quad (4.17.b)$$

$$M_{z,M} = - \int y \sigma dy = - \int \frac{bz+c-\varepsilon}{a} \sigma \frac{dy}{d\varepsilon} d\varepsilon = \frac{bz+c-\varepsilon}{a^2} \sigma^y + \frac{1}{a^2} \sigma^{yy} = \frac{y}{a} \sigma^y + \frac{1}{a^2} \sigma^{yy} \quad (4.17.c.i)$$

για $a \neq 0$

$$M_{z,M} = - \int y \sigma dy = - \sigma \int y dy = - \sigma \frac{y^2}{2} \text{ για } a=0 \quad (4.17.γ.ii)$$

$$\sigma^y = \int \sigma d\varepsilon, \quad \sigma^{yy} = \int \sigma^y d\varepsilon \text{ (συντημήσεις)} \quad (4.17.δ)$$

Κατ' αντιστοιχία, οι συναρτήσεις M πρέπει να είναι συνεχείς κατά ε αλλά μόνο όταν αποτελούν συνάρτηση του y δηλαδή για $a \neq 0$. Οι ενδιάμεσες συναρτήσεις σ^y και σ^{yy} δεν είναι απαραίτητο να είναι συνεχείς, εκτός κι αν χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις (4.35) οι οποίες βασίζονται σε αυτές. Σε αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση $\sigma^{n \cdot y}$ αφού ολοκληρωθεί n φορές κατά ε , θα πρέπει να εξασφαλιστεί η συνέχειά της.

Αν η συνάρτηση σ είναι της μορφής $\sigma(\varepsilon, \varepsilon_{un})$ τότε:

— Για $a \neq 0$ ισχύει $\sigma = \sigma(\varepsilon, \varepsilon_{un}) = \sigma\left(\varepsilon, -a_{un} \frac{bz+c-\varepsilon}{a} + b_{un}z + c_{un}\right)$ και ολοκληρώνουμε κατά ε με την ίδια διαδικασία των σχέσεων (4.17) για $a \neq 0$.

— Για $a=0$, $a_{un} \neq 0$ ισχύει $\sigma = \sigma(\varepsilon_{un})$ και ολοκληρώνουμε κατά ε_{un} με την ίδια διαδικασία των σχέσεων (4.17) για $a \neq 0$, αντικαθιστώντας τα ε , a , b , c , $\frac{dy}{d\varepsilon}$ με τα ε_{un} , a_{un} , b_{un} , c_{un} , $\frac{dy}{d\varepsilon_{un}} = -\frac{1}{a_{un}}$.

— Για $a=a_{un}=0$ ολοκληρώνουμε κατά y με την ίδια διαδικασία των σχέσεων (4.17) για $a=0$.

Η επικαμπύλια ολοκλήρωση έχει την παρακάτω μορφή:

$$N = \oint_L N_M(y(z), z) dz \quad (4.18.α)$$

$$M_y = \oint_L M_{y,M}(y(z), z) dz \quad (4.18.β)$$

$$M_z = \oint_L M_{z,M}(y(z), z) dz \quad (4.18.γ)$$

Το $\oint_L M dz$ πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα L παράλληλο στον άξονα y είναι 0 γιατί $dz=0$. Άρα δεν συμπεριλαμβάνουμε στην ολοκλήρωση τμήματα του συνόρου που είναι παράλληλα στον άξονα y .

4.2.1. Εξασφάλιση Συνέχειας κατά y

Η ολοκλήρωση κατά Green (σχέση 4.15) απαιτεί η ολοκληρωμένη συνάρτηση M να είναι συνεχής κατά y .

Μια τμηματική συνάρτηση $M_0(y, z) = \begin{cases} f_1(y, z) & h(y, z) < 0 \\ f_2(y, z) & h(y, z) \geq 0 \end{cases}$ που μόλις έχει προκύψει

από ολοκλήρωση κατά y δεν εξασφαλίζει συνέχεια στο σύνορο:

$$h(y, z) = 0 \quad (4.19)$$

4.2.1.1. Το Σύνορο είναι Ανεξάρτητο του y

Αν η σχέση (4.19) είναι ανεξάρτητη του y , δηλαδή είναι της μορφής $h(z) = 0$, τότε η M είναι συνεχής κατά y στο σύνορο (4.19).

Τέτοια περίπτωση π.χ. είναι στις σχέσεις (4.17) για $a = 0$.

4.2.1.2. Απαλοιφή του y

Για να πραγματοποιηθεί απαλοιφή του y θα πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα να λυθεί ως προς y το σύνορο όπως παρακάτω:

$$h(y, z) = 0 \Rightarrow y = k(z) \quad (4.20)$$

Θεωρούμε τότε ότι η συνεχής M είναι $M(y, z) = \begin{cases} f_1(y, z) + g_1(z) & h(y, z) < 0 \\ f_2(y, z) + g_2(z) & h(y, z) \geq 0 \end{cases}$, όπου

λαμβάνουμε ως στάθμη και μηδενίζουμε την $g_1(z) = 0$.

Για να εξασφαλίσει συνέχεια εξισώνουμε τα δύο σκέλη στο σύνορο, δηλαδή:

$$f_1(k(z), z) + g_1(z) = f_2(k(z), z) + g_2(z) \Rightarrow g_2(z) = f_1(k(z), z) - f_2(k(z), z) \text{ και } g_1(z) = 0 \quad (4.21)$$

Άρα η συνεχής M είναι:

$$M(y, z) = \begin{cases} f_1(y, z) & h(y, z) < 0 \\ f_2(y, z) + f_1(k(z), z) - f_2(k(z), z) & h(y, z) \geq 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Η διαδικασία είναι ίδια όσα σκέλη κι αν έχει η συνάρτηση M .

Επίσης, ακόμα κι αν δεν είναι εφικτό το να λυθεί το σύνορο ως προς y , αν είναι δυνατό να απαλειφθεί το y στη σχέση (4.21) κάνοντας χρήση της σχέσης του συνόρου (4.19), μπορούμε να οδηγηθούμε σε συνέχεια.

Πολύ σημαντικό ρόλο παίζει το ποιο σκέλος της συνάρτησης θα χρησιμοποιήσουμε ως στάθμη. Κακή επιλογή αρχικού σκέλους μπορεί να αυξήσει γεωμετρικά τα σκέλη της ολοκληρωμένης συνάρτησης. Γενικά ξεκινάμε με κλάδο ως στάθμη, εκεί που αλλάζει ο συντελεστής του y στο σύνορο. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση της σχέσης (4.23.α), τα σκέλη 1-2 και 2-3 έχουν σύνορο που οδηγεί στη σχέση (4.23.γ), ενώ τα σκέλη 3-4 και 4-5 έχουν σύνορο που οδηγεί στη σχέση (4.23.β).

— Αν ξεκινήσουμε την δημιουργία συνέχειας από το σκέλος 3, τότε το σκέλος 3 θα έχει μια μορφή, τα σκέλη 1 και 2 θα έχουν δύο μορφές έκαστα, μια για $a - a_{un} \neq 0$ και μια για $a - a_{un} = 0$ και τα σκέλη 4 και 5 θα έχουν επίσης δύο μορφές έκαστα, μια για $a \neq 0$ και μια για $a = 0$. Συνολικά δηλαδή η συνάρτηση f θα έχει εννέα σκέλη.

— Αν ξεκινήσουμε την δημιουργία συνέχειας από το σκέλος 1, τότε το σκέλος 1 θα έχει μια μορφή, τα σκέλη 2 και 3 θα έχουν δύο μορφές έκαστα, μια για $a - a_{un} \neq 0$ και μια για $a - a_{un} = 0$ και τα σκέλη 4 και 5 θα έχουν τέσσερις μορφές έκαστα, για $a - a_{un} \neq 0$, για $a - a_{un} = 0$, για $a \neq 0$ και για $a = 0$. Συνολικά δηλαδή η συνάρτηση f θα έχει δεκατρία σκέλη.

$$f(y, z) = \begin{cases} 1 & \varepsilon_c - \varepsilon_{un} < \varepsilon_a \\ 2 & \varepsilon_a \leq \varepsilon_c - \varepsilon_{un} < \varepsilon_b \\ 3 & \varepsilon_b + \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_c < \varepsilon_c \\ 4 & \varepsilon_c \leq \varepsilon_c < \varepsilon_d \\ 5 & \varepsilon_d \leq \varepsilon_c \end{cases} \quad (4.23.α)$$

$$y = \frac{bz + c - \varepsilon_i}{a} \quad \text{για } i = \{c, d\} \quad (4.23.β)$$

$$y = \frac{(b - b_{un})z + (c - c_{un}) - \varepsilon_i}{a - a_{un}} \quad \text{για } i = \{a, b\} \quad (4.23.γ)$$

4.2.1.2.1. Απαλοιφή του y Οδηγεί σε Παραπάνω από Μια Λύσεις

Αν π.χ. η καμπύλη (4.19) είναι δευτέρου βαθμού ως προς y , τότε υπάρχουν 2 λύσεις της μορφής $y = k_1(z)$ και $y = k_2(z)$. Υπάρχει περίπτωση και οι δύο λύσεις να συμβαίνουν εντός του πεδίου ορισμού της διατομής. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορεί να επιτευχθεί συνέχεια για τη συνάρτηση M στο σύνορο (4.19) γιατί η ίδια συνάρτηση $g_2(z)$ πρέπει να δίνει δύο διαφορετικές τιμές για διαφορετικά y αλλά αυτό δεν είναι δυνατό γιατί είναι ανεξάρτητη του y . Οπότε η κατάσταση αντιμετωπίζεται όπως παρακάτω.

4.2.1.3. Αδυναμία Επίτευξης Συνέχειας

Σε περίπτωση που δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί απαλοιφή του y , όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ή το y δεν ορίζεται μονοσήμαντα μέσα στο πεδίο ορισμού της διατομής, δεν μπορούμε να έχουμε συνέχεια.

4.2.1.3.1. Διπλή Ολοκλήρωση

Η μη ύπαρξη συνέχειας στη συνάρτηση M μπορεί να αντιμετωπιστεί με διπλή ολοκλήρωση (παράγραφος 4.1) στη διατομή.

Το μόνο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής, είναι ότι η διακριτοποίηση πραγματοποιείται μόνο μια φορά στην αρχή του προβλήματος και παραμένει η ίδια.

4.2.1.3.2. Συνοριακή Ολοκλήρωση

Η μη ύπαρξη συνέχειας στη συνάρτηση M μπορεί να αντιμετωπιστεί με συνοριακή ολοκλήρωση σε δύο σύνορα ξεχωριστά. Στο σύνορο που περικλείει το ένα σκέλος της συνάρτησης M και στο σύνορο που περικλείει το άλλο σκέλος. Προφανώς τα δύο σύνορα, έχουν κοινό τόπο τη σχέση (4.19).

Πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι δεν απαιτείται διακριτοποίηση δύο διαστάσεων και μεγάλος αριθμός δειγμάτων.

Ισχυρά μειονεκτήματα της μεθόδου είναι ότι απαιτείται χάραξη του συνόρου σε κάθε επανάληψη και επιπλέον κάθε σημείο της πολυγωνικής του συνόρου επί της καμπύλης (4.19), απαιτεί επαναληπτική διαδικασία για να βρεθεί, αν και συνήθως εντοπίζεται με το πρώτο ή δεύτερο βήμα.

Θα πρέπει για την καμπύλη (4.19):

- Να βρεθεί ποιες ακμές της διατομής τέμνει και που.
- Να προσδιοριστούν συνεχόμενα σημεία επί της καμπύλης τα οποία θα αποτελέσουν τις κορυφές πολυγωνικής που θα προσδιορίζει το σύνορο για την ολοκλήρωση.

4.2.1.3.2.1. Έναρξη Πολυγωνικού Συνόρου στην Τομή Ακμής Πολυγωνικής και της Καμπύλης $h(y, z)=0$

Οι ακμές της πολυγωνικής του συνόρου της διατομής έχουν μια από τις μορφές της παρακάτω σχέσης. Με δείκτη a αναφέρεται το σημείο αρχής της ακμής \vec{A}_a και με δείκτη b το σημείο πέρατος \vec{A}_b .

$$y=dz+e \text{ για κάθε } z \in [z_a, z_b] \quad (4.24.\alpha)$$

$$z=z_0 \text{ για κάθε } y \in [y_a, y_b] \quad (4.24.\beta)$$

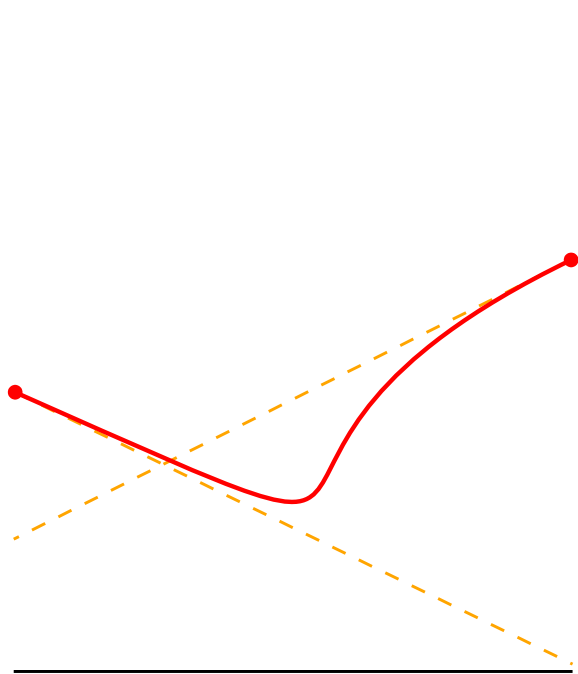
Η τομή της ακμής και της καμπύλης δίνονται αντίστοιχα από τις παρακάτω σχέσεις:

$$h(dz+e, z)=0 \text{ για } z_a \leq z \leq z_b \quad (4.25.\alpha)$$

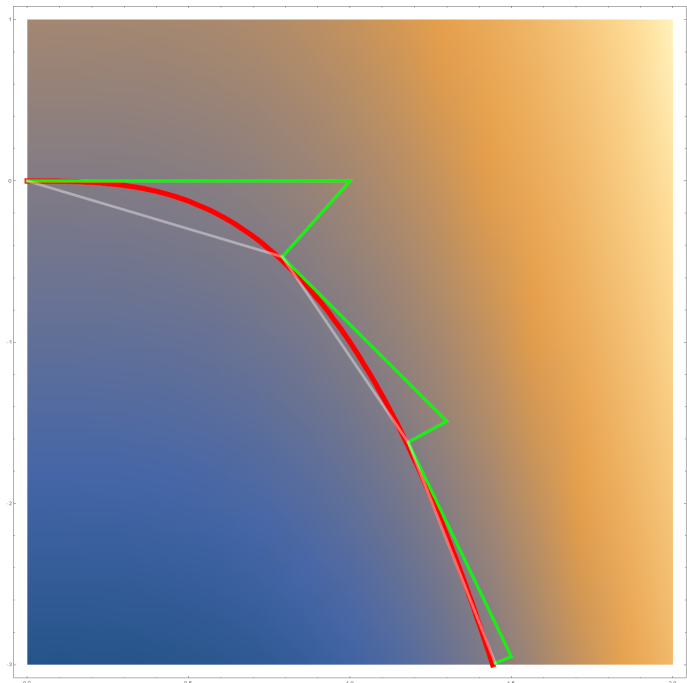
$$h(y, z_0)=0 \text{ για } y_a \leq y \leq y_b \quad (4.25.\beta)$$

Οι σχέσεις (4.25) ενδεχομένως να λύνονται αναλυτικά.

Στην περίπτωση που δεν λύνονται αναλυτικά για να προσδιοριστεί αν η καμπύλη τέμνει την ακμή της πολυγωνικής:



Σχήμα 4.7: Έλεγχος αν η καμπύλη τέμνει την ακμή του συνόρου της διατομής
Με μαύρο η ακμή, με κόκκινο η καμπύλη και με πορτοκαλί οι εφαπτόμενες στην καμπύλη στην αρχή και στο πέρας της ακμής. Αν η καμπύλη είναι συνάρτηση μέχρι τρίτου βαθμού και οι εφαπτόμενες δεν τέμνουν την ακμή, τότε η καμπύλη δεν τέμνει την ακμή.



Σχήμα 4.8: Δημιουργία πολυγωνικής επί της καμπύλης (4.19)
Με κόκκινο είναι η καμπύλη (4.19), με πράσινο η εφαπτόμενη μηδενικής κλίσης και ο δρόμος μέγιστης κλίσης ώστε να επανέλθουμε στην καμπύλη. Για την επαναφορά στην καμπύλη ίσως χρειαστούν πάνω από ένα βήματα. Το χρωματικό υπόβαθρο αναπαριστά τις τιμές της συνάρτησης $h(y,z)$. Με άσπρο ημιδιαφανές χρώμα το παραγόμενο πολυγωνικό σύνορο.

— Αν ισχύει το θεώρημα Bolzano $h(\vec{A}_a)h(\vec{A}_b) \leq 0$ τότε υπάρχει τομή.

— Αν δεν ισχύει το θεώρημα Bolzano και οι σχέσεις (4.25) είναι το πολύ τρίτου βαθμού ως προς z ή y αντίστοιχα (συμπεριλαμβάνονται δυνάμεις π.χ. 2.4), τότε αν οι εφαπτόμενες της $h(y, z)$ στα σημεία $h(\vec{A}_a)$ και $h(\vec{A}_b)$ δεν τέμνουν την ακμή της πολυγωνικής, δεν υπάρχει τομή. Αυτό φαίνεται σχηματικά στο σχήμα 4.7.

Αν προσδιοριστεί ότι υπάρχει τομή ή πιθανόν να υπάρχει, εφαρμόζεται η μέθοδος Newton-Raphson εφαρμόζοντας την δύο φορές για κάθε ακμή, με σημεία εκκίνησης τα δύο άκρα της ακμής. Λόγω του είδους των συναρτήσεων, αυτές δεν τέμνουν μια ακμή πάνω από δύο φορές. Αν η συνάρτηση λόγω της μορφής της μπορεί να τέμνει την ακμή μόνο μια φορά, τότε εφαρμόζουμε τη μέθοδο NR μόνο μια φορά από οποιαδήποτε κορυφή της ακμής. Η εφαρμογή NR γίνεται επαναληπτικά όπως παρακάτω:

$$0 - h(dz_i + e, z_i) = \partial_z h(dz_i + e, z_i)(z - z_i) \Rightarrow z_{i+1} = z_i - \partial_z h(dz_i + e, z_i)^{-1} h(dz_i + e, z_i) \quad (4.26.a)$$

$$0 - h(y_i, z_0) = \partial_y h(y_i, z_0)(y - y_i) \Rightarrow y_{i+1} = y_i - \partial_y h(y_i, z_0)^{-1} h(y_i, z_0) \quad (4.26.b)$$

4.2.1.3.2.2. Συνέχιση Πολυγωνικού Συνόρου επί της Καμπύλης $h(y, z)=0$

Αφού βρεθεί η τομή της καμπύλης (4.19) με την πολυγωνική του συνόρου της διατομής, θα πρέπει να δημιουργηθεί ένα σύνορο πάνω σε αυτή την καμπύλη. Η διαδικασία αναπαρίσταται στο σχήμα 4.8.

Αν \vec{A}_0 το σημείο τομής πολυγωνικού συνόρου με καμπύλη, τότε για να οδηγηθούμε στο επόμενο σημείο επί της καμπύλης που θα είναι το \vec{A}_1 θα πρέπει να ακολουθήσουμε πορεία με μηδενική κλίση. Δηλαδή θα βρούμε ένα διάνυσμα $\vec{n} = A_0 \vec{A}_{1,0}$ για το οποίο να ισχύει:

$$\vec{\nabla} h(\vec{A}_0) \cdot \vec{n} = 0 \quad (4.27.a)$$

$$|\vec{n}| \approx s \quad (4.27.b)$$

s είναι μια τυπική απόσταση κορυφών πολυγωνικής μεταξύ τους. Π.χ. 1 cm . Το $|\vec{n}|$ δεν είναι απαραίτητο να είναι ίσο με s αλλά της ίδιας τάξης μεγέθους. Π.χ. αν $s=1\text{ cm}$ το $|\vec{n}|$ θα μπορούσε να είναι 0.1 cm ή και 4 cm . Στο σχήμα 4.8 είναι η πράσινη ευθεία.

Υπάρχουν δύο διαδρομές με μηδενική κλίση. Μία προς το εσωτερικό της διατομής και μια προς το εξωτερικό. Για να εντοπίσουμε αυτή προς το εσωτερικό της διατομής που μας ενδιαφέρει, πρέπει η τρίτη συνιστώσα του παρακάτω εξωτερικού γινομένου να είναι θετική:

$$A_a \vec{A}_b \times A_a \vec{A}_{1,0} > 0 \quad (4.28)$$

Το σημείο $\vec{A}_{1,0}$ δεν ανήκει στην καμπύλη (4.19), γιατί κατά το διάνυσμα \vec{n} η κλίση αλλάζει και δεν παραμένει μηδέν. Είναι όμως αρκετά κοντά στη λύση. Κινούμαστε από το σημείο $\vec{A}_{1,0}$ προς τη λύση $\vec{A}_{1,n} \equiv \vec{A}_1$ ακολουθώντας τη μέγιστη κλίση, δηλαδή:

$$A_{1,i+1} \vec{A}_{1,i} = \vec{A}_{1,i} + \lambda_i \vec{\nabla} h(\vec{A}_{1,i}) \quad (4.29.a)$$

$$0 - h(\vec{A}_{0,i}) = (\vec{\nabla} h(\vec{A}_{0,i}))^2 \lambda_i \Rightarrow \lambda_i = -\frac{h(\vec{A}_{1,i})}{(\vec{\nabla} h(\vec{A}_{1,i}))^2} \quad (4.30.\beta)$$

Επειδή είμαστε κοντά στη λύση, συνήθως δεν απαιτούνται επαναλήψεις για να πετύχουμε μεγάλη ακρίβεια. Όχι πάνω από δύο. Στο σχήμα 4.8 είναι η μπλε ευθεία.

Για τα επόμενα σημεία \vec{A}_2 κτλ εφαρμόζουμε την ίδια μεθοδολογία με μια εξαίρεση. Για να επιλέξουμε διαδρομή με μηδενική κλίση (προς τη μια ή την άλλη κατεύθυνση), αφού απομακρυνθούμε από το εξωτερικό σύνορο της διατομής (δηλαδή από το σημείο \vec{A}_1 στο \vec{A}_2 και εξής), δεν ελέγχουμε την σχέση (4.28) αλλά την παρακάτω:

$$A_{i-1} \vec{A}_i \cdot A_i \vec{A}_{i+1,0,a} > 0 \quad (4.31)$$

Αν η σχέση ισχύει, επιλέγουμε ως $A_{i+1,0} \equiv A_{i+1,0,a}$, ενώ αν δεν ισχύει $A_{i+1,0} \equiv A_{i+1,0,b}$, όπου οι δείκτες a, b συμβολίζουν σημεία προς τις δύο φορές της διεύθυνσης όπου παρατηρείται η μηδενική παράγωγος.

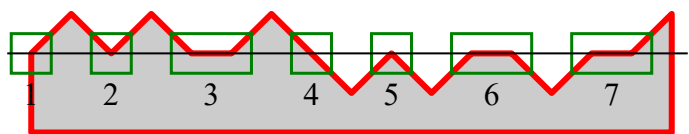
4.2.1.3.2.3. Τερματισμός Πολυγωνικού Συνόρου στην Τομή Ακμής Πολυγωνικής και της Καμπύλης $h(y, z)=0$

Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα $A_i \vec{A}_{i+1}$ του συνόρου που δημιουργείται ελέγχουμε αν τέμνει κάποια από τις ακμές του συνόρου της διατομής. Αν τέμνει, εντοπίζουμε το σημείο τομής και ακολούθως συνεχίζουμε επί του συνόρου της διατομής.

Για να αυξηθεί η ταχύτητα επεξεργασίας:

— Αγνοούνται οι ακμές του συνόρου της διατομής που έχουν ελεγχθεί μέχρι τώρα.

— Αγνοούνται οι ακμές του συνόρου της διατομής που το ελάχιστο ορθογώνιο που τις περικλείει, με πλευρές παράλληλες στους άξονες y, z , δεν έχει κοινό τόπο με το αντίστοιχο ελάχιστο ορθογώνιο που περικλείει το ευθύγραμμο τμήμα $A_i \vec{A}_{i+1}$.



Σχήμα 4.9: Διαίρεση πολυγώνου από ευθεία

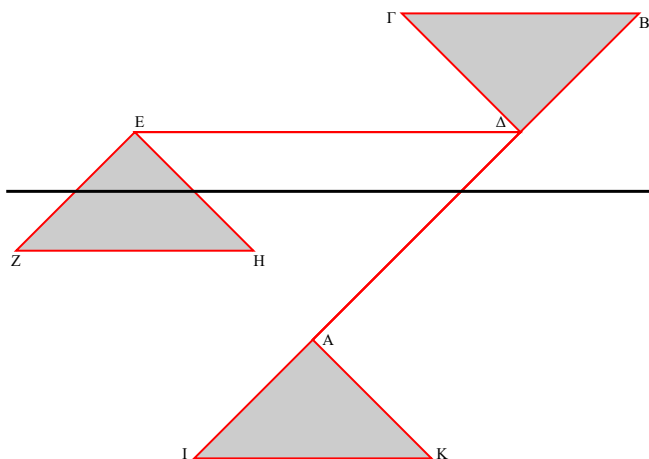
Με μαύρο η ευθεία που τέμνει το κόκκινο πολυγωνικό σύνορο της διατομής. Με πράσινο 7 χαρακτηριστικές περιπτώσεις.

4.2.2. Διαχείριση Πολυγώνων

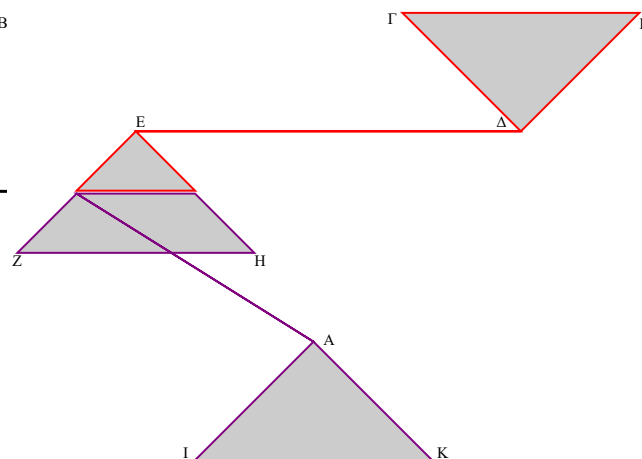
4.2.2.1. Διάσπαση της Διατομής σε Περισσότερα Τμήματα από Ευθεία

Ας υποθέσουμε ότι σε μια παρθένα διατομή σκυροδέματος έχει εφαρμοστεί παραμόρφωση $\varepsilon = y + 2z - 0.5$. Η διατομή αυτή θα πρέπει να διαχωριστεί σε αρκετά τμήματα

πριν εφαρμοστεί η επόμενη φόρτιση. Δυο προφανείς περιοχές είναι η κατάσταση I και κατάσταση II, δηλαδή αν το σκυρόδεμα έχει ρηγματωθεί εφελκυστικά. Η ρηγμάτωση συμβαίνει για $\varepsilon_c = \varepsilon_t$ δηλαδή στην ευθεία $y + 2z - 0.5 = \varepsilon_t$. Με βάση αυτή την ευθεία θα διαχωρίσουμε αρχικά τη διατομή σκυροδέματος σε δύο τμήματα.



Σχήμα 4.10: Διαίρεση διατομής ABΓΔΕΖΗΕΔΙΚ.



Σχήμα 4.11: Διαιρεμένη διατομή. Είναι εμφανείς κάποιες απλοποιήσεις που έκανε ο αλγόριθμος στα δύο τελικά πολύγωνα.

Στο σχήμα 4.9 μια ευθεία διαιρεί ένα πολύγωνο σε δύο άλλα πολύγωνα. Στα σχήματα 4.10 και 4.11 φαίνεται ένα παράδειγμα διαίρεσης πολυγώνου από ευθεία πριν και μετά τη διαίρεση.

Ο αλγόριθμος είναι αρκετά απλός. Αν η εξίσωση της ευθείας είναι $f(x, y) = 0$, τότε:

- Δημιουργούμε δύο κενά πολύγωνα. Ένα για τα σημεία του πολυγώνου με $f(x, y) \leq 0$ και το δεύτερο για τα σημεία του πολυγώνου με $f(x, y) \geq 0$,
- Κρατάμε την τελευταία κορυφή του αρχικού πολυγώνου που προστέθηκε σε ένα από τα δύο πολύγωνα. Αρχικά είναι κενή αφού δεν έχει προστεθεί τίποτα. Η τιμή $f(x, y)$ για την κορυφή αυτή, έχει ένα πρόσημο (-1 ή 1) το οποίο επίσης κρατάμε. Εφόσον αρχικά δεν υπάρχει κρατημένη κορυφή, δεχόμαστε ότι το πρόσημο είναι ουδέτερο (0).
- Για κάθε κορυφή του πολυγώνου $P(y, z)$, ελέγχουμε το πρόσημο της $f(x, y)$.
- Αν το τρέχον πρόσημο είναι θετικό και το κρατημένο πρόσημο είναι...
 - ...θετικό, τότε προσθέτουμε την τρέχουσα κορυφή στο δεύτερο πολύγωνα και ενημερώνουμε την κρατημένη κορυφή με την τρέχουσα κορυφή.
 - ...μηδέν, τότε προσθέτουμε τις κορυφές από την κρατημένη (όχι),

μέχρι την τρέχουσα (ναι) στο δεύτερο πολύγωνο και ενημερώνουμε την κρατημένη κορυφή με την τρέχουσα κορυφή.

— ...αρνητικό, τότε προσθέτουμε το σημείο τομής πολυγώνου – ευθείας (πρόκειται για σημείο με $f(x,y)=0$ της ακμής της οποίας η τρέχουσα κορυφή αποτελεί πέρας) και στα δύο πολύγωνα και την τρέχουσα κορυφή στο δεύτερο πολύγωνο. Επίσης ενημερώνουμε την κρατημένη κορυφή με την τρέχουσα κορυφή.

— Αν το τρέχον πρόσημο είναι αρνητικό και το κρατημένο πρόσημο είναι...

— ...αρνητικό ή μηδέν, τότε προσθέτουμε την κορυφή στο πρώτο πολύγωνο και ενημερώνουμε την κρατημένη κορυφή με την τρέχουσα κορυφή.

— ...μηδέν, τότε προσθέτουμε τις κορυφές από την κρατημένη (όχι), μέχρι την τρέχουσα (ναι) στο πρώτο πολύγωνο και ενημερώνουμε την κρατημένη κορυφή με την τρέχουσα κορυφή.

— ...θετικό, τότε προσθέτουμε το ενδιάμεσο σημείο τομής πολυγώνου – ευθείας (πρόκειται για σημείο με $f(x,y)=0$ της ακμής της οποίας η τρέχουσα κορυφή αποτελεί πέρας) και στα δύο πολύγωνα και την τρέχουσα κορυφή στο πρώτο πολύγωνο. Επίσης ενημερώνουμε την κρατημένη κορυφή με την τρέχουσα κορυφή.

— Αν το τρέχον πρόσημο είναι μηδέν (βρίσκεται πάνω στη γραμμή) και το κρατημένο πρόσημο είναι...

— ...θετικό, τότε προσθέτουμε την κορυφή στο δεύτερο πολύγωνο και δεν ενημερώνουμε την κρατημένη κορυφή με την τρέχουσα κορυφή.

— ...αρνητικό, τότε προσθέτουμε την κορυφή στο πρώτο πολύγωνο και δεν ενημερώνουμε την κρατημένη κορυφή με την τρέχουσα κορυφή.

— ...μηδέν, τότε δεν κάνουμε καμία ενέργεια.

— Ελέγχουμε αν κάποιο από τα δύο πολύγωνα παραμένει κενό και αν ναι, τότε το πολύγωνο της διατομής δεν τέμνεται από την ευθεία και παραμένει ως έχει. Σε αντίθετη περίπτωση (που έχουμε δύο ξεχωριστά πολύγωνα), πραγματοποιούμε απλοποίηση των δύο πολυγώνων. Η απλοποίηση είναι ξεχωριστός αλγόριθμος με σκοπό την μείωση των περιττών κορυφών των πολυγώνων.

Οι περιπτώσεις 2, 3, 5 και 6 του σχήματος 4.9 δεν θεωρούμε ότι τέμνουν την ευθεία ενώ οι περιπτώσεις 1, 4 και 7 την τέμνουν.

Παραδείγματα διατομών μετά από πολλαπλές διαιρέσεις του πολυγώνου της διατομής φαίνονται στα σχήματα 4.15 και 4.16 πιο κάτω.

4.2.2.2. Ένωση Πολυγώνων Διατομής

Αφού η διατομή διασπαστεί, ενδέχεται κάποια στιγμή, μετά από ιστορία φορτίσεων, δύο ή περισσότερα από τα διασπασμένα τμήματα της διατομής να έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά και να γειτνιάζουν, δηλαδή τα σύνορά τους να έχουν κοινό τόπο. Στην περίπτωση αυτή, πραγματοποιείται ένωση των τμημάτων ανά δύο.

Το πρόβλημα εδώ δεν είναι γενικευμένο. Δεν ενώνονται δύο τυχαία πολύγωνα, αλλά δύο πολύγωνα που προηγουμένως ήταν ένα και διασπάστηκε σε περισσότερα. Αυτό σημαίνει ότι:

- Δεν υπάρχει περίπτωση το ένα πολύγωνο να εισέρχεται εντός του άλλου.
- Στις περιοχές επαφής τους, οι κορυφές των δύο πολυγώνων είναι οι ίδιες και στα δύο πολύγωνα.

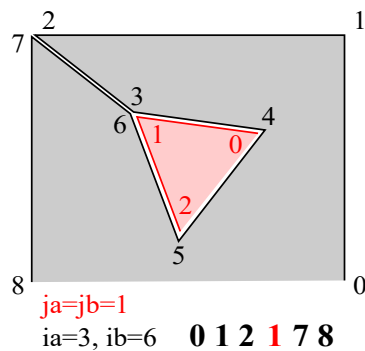
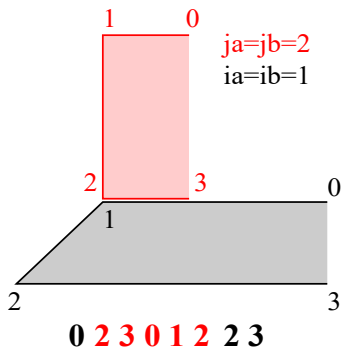
Δύο πολύγωνα που εφάπτονται υπό τις παραπάνω συνθήκες, για να ενωθούν, αφαιρείται ένας και μόνο ένας, κοινός, συνεχόμενος, αντίθετης φοράς, αριθμός ακμών.

Λέγοντας παραπάνω «αριθμός ακμών», αυτός θα μπορούσε να είναι ακόμα και ολόκληρο το ένα από τα δύο πολύγωνα. Δηλαδή το ένα πολύγωνο να είναι πλήρως εγκλωβισμένο μέσα στο άλλο, όπως φαίνεται και στο σχήμα σχήμα 4.12, περιπτώσεις 2, 3 και 4. Επίσης θα μπορούσε να μην είναι «αριθμός ακμών» αλλά ένα και μόνο σημείο, όπως φαίνεται και στο σχήμα σχήμα 4.12, περίπτωση 1.

Η δεύτερη παραδοχή που αναφέρθηκε, παρότι δεν είναι αληθής, εντούτοις χρησιμοποιείται. Αν έπρεπε ο αλγόριθμος να εντοπίζει περιοχές επαφής χωρίς κοινές κορυφές, θα ήταν εξαιρετικά πιο αργός. Πολύγωνα με περιοχή επαφής χωρίς κοινές κορυφές, έχουν την τάση να ενώνονται μετά από κάποιες διαδοχικές φορτίσεις, όταν μια διχοτόμηση πολυγώνων διχοτομήσει τα δύο αυτά πολύγωνα σε τέσσερα, με την τομή να διέρχεται από την κοινή περιοχή τους.

Στα σχήματα 4.13 και 4.14 εμφανίζονται δύο τμήματα διατομής πριν την ένωση και

μετά την ένωση. Στο σχήμα 4.12 εμφανίζονται όλες οι περιπτώσεις που μπορούν να απαντηθούν σε ένωση δύο τμημάτων διατομής.



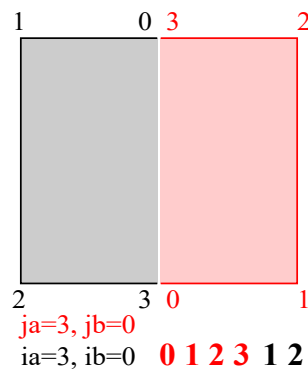
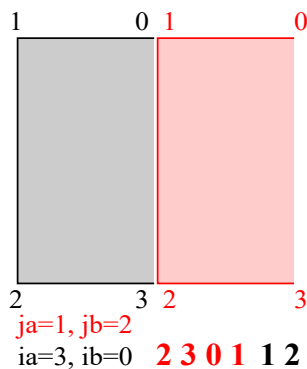
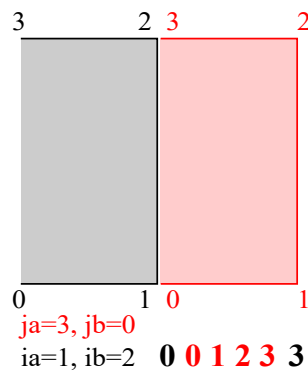
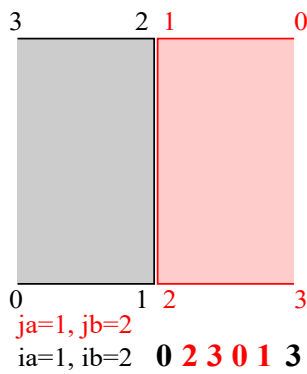
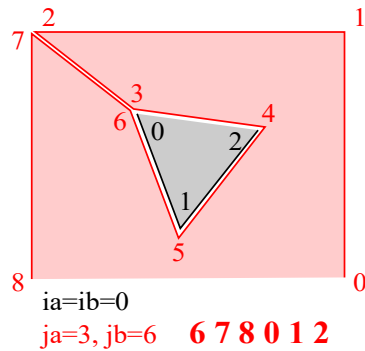
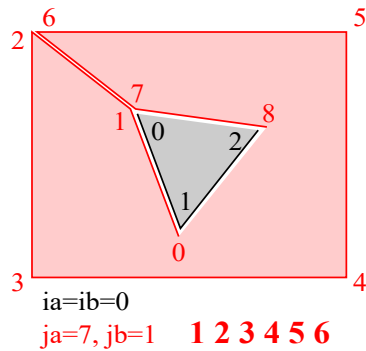
Σχήμα 4.12: Χαρακτηριστικές περιπτώσεις ένωσης πολυγώνων. Πρόκειται για όλες οι περιπτώσεις που μπορεί να συμβούν (πλην αυτών που η ένωση αποτυγχάνει).

Με μαύρο χρώμα εμφανίζεται το πρώτο πολύγωνο και με κόκκινο το δεύτερο.

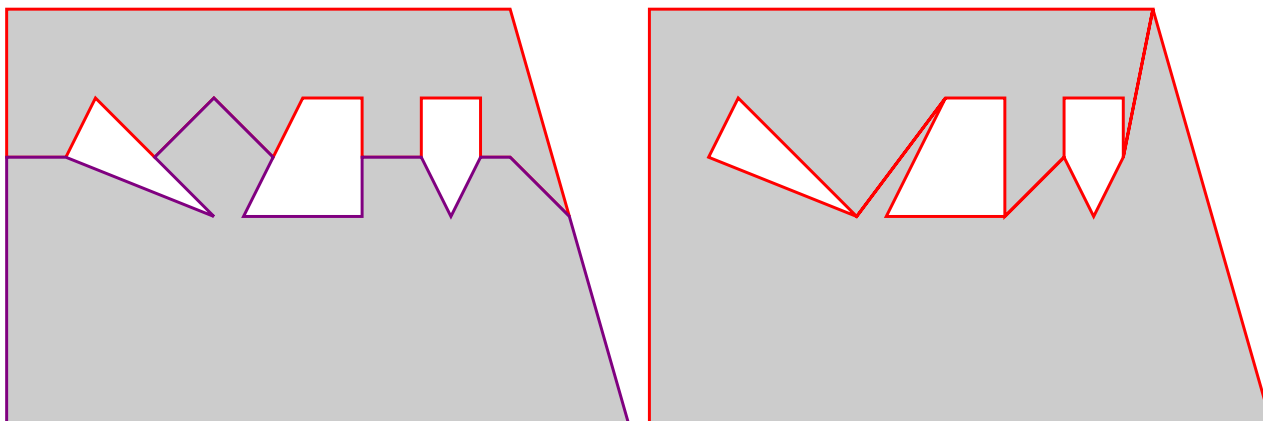
Στο πρώτο πολύγωνο, οι δείκτες ia, ib δείχνουν την αρχή και το πέρας της κοινής ακμής στην οποία θα ενωθούν τα δύο πολύγωνα και αντίστοιχα στο δεύτερο πολύγωνο οι δείκτες ja, jb .

Το αποτέλεσμα της ένωσης εμφανίζεται με την ακολουθία των αριθμών των κορυφών. Οι μαύροι αριθμοί αντιστοιχούν σε κορυφές του πρώτου πολυγώνου και οι κόκκινοι του δεύτερου.

Το αποτέλεσμα της ένωσης ξεκινάει πάντα από την κορυφή 0 του πρώτου πολυγώνου (αρκεί αυτή να υπάρχει στο αποτέλεσμα).



Ο αλγόριθμος ένωσης είναι ελαφρώς πιο απαιτητικός σε επεξεργαστική ισχύ από τον αλγόριθμο διάσπασης από ευθεία.



Σχήμα 4.13: Δύο εφαπτόμενα τμήματα της διατομής που πρόκειται να ενωθούν σε ένα.

Σχήμα 4.14: Η ένωση των δύο τμημάτων της διατομής του σχήματος 4.13.

Αφαιρέθηκε μια κοινή, αντίθετης φοράς, συνεχόμενη σειρά ακμών.

Κοινές, αντίθετης φοράς, συνεχόμενες σειρές ακμών, απλοποιήθηκαν.

Αν οι εκατέρωθεν αυτών ακμές ήταν συνευθειακές αλλά αντίθετης φοράς πραγματοποιήθηκε περαιτέρω απλοποίηση.

Μετά από την ένωση δύο πολυγώνων της διατομής, εκτελείται ένας αλγόριθμος απλοποίησης του παραγόμενου πολυγώνου.

4.2.2.3. Απλοποίηση Πολυγώνου

Πολλαπλές διαιρέσεις ενός πολυγώνου και εν συνεχεία επανενώσεις, μπορούν να οδηγήσουν σε πολύγωνα με πάρα πολλές περιπτές κορυφές και ακμές. Και επειδή ολοκληρώνουμε είτε κατά μήκος των ακμών, είτε στις κορυφές, αυτό αυξάνει πολύ το χρόνο ολοκλήρωσης. Τέτοια περίπτωση φαίνεται στα σχήματα 4.15 ως 4.19.

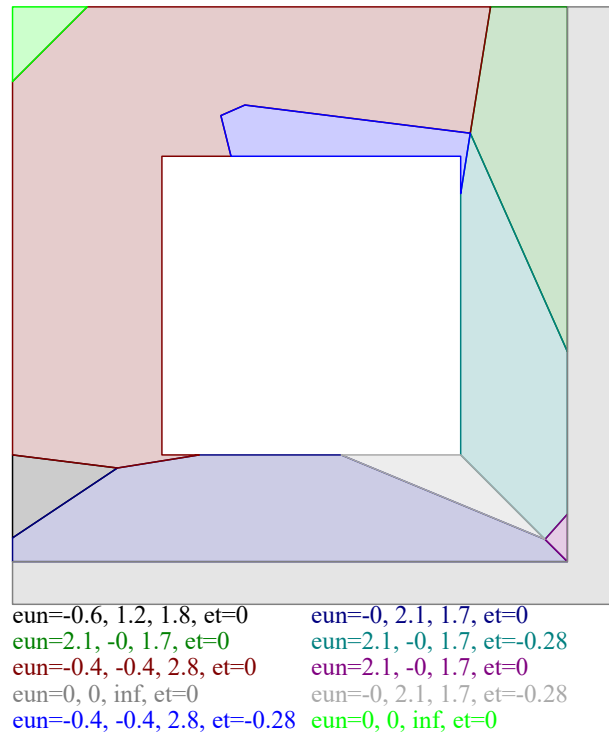
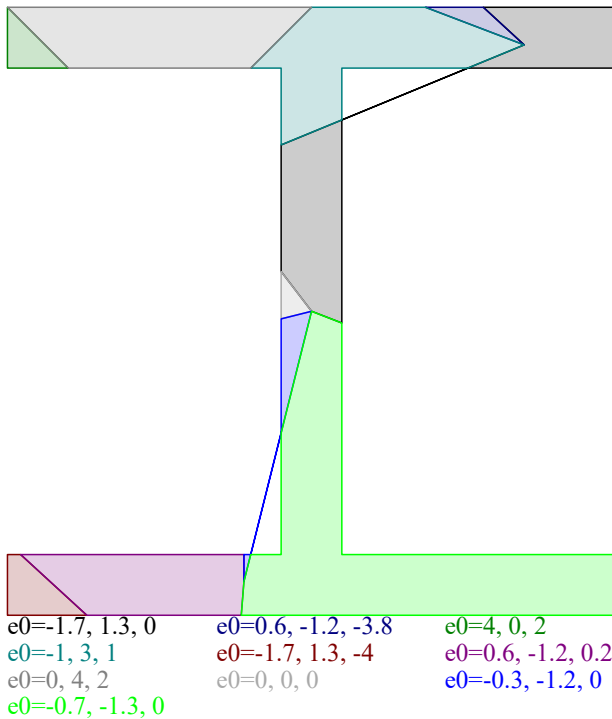
Απαιτείται λοιπόν, ένας αλγόριθμος που θα απλοποιεί ένα πολύγωνο, αφαιρώντας του περιπτές κορυφές.

Οι ενέργειες που εκλαμβάνονται ως απλοποιήσεις είναι οι παρακάτω:

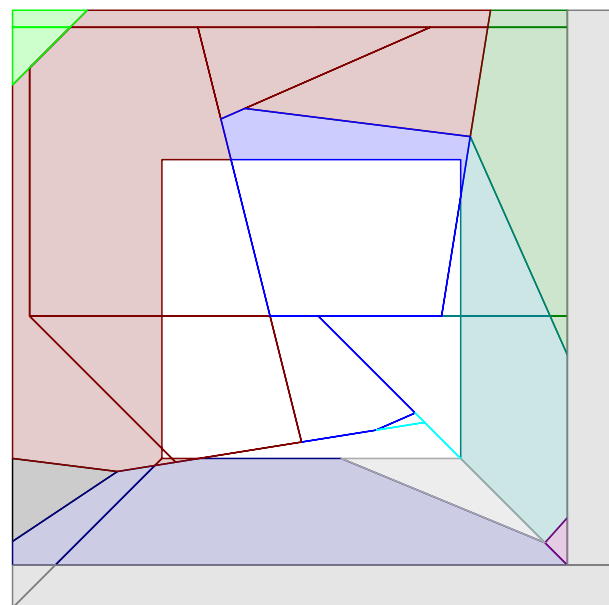
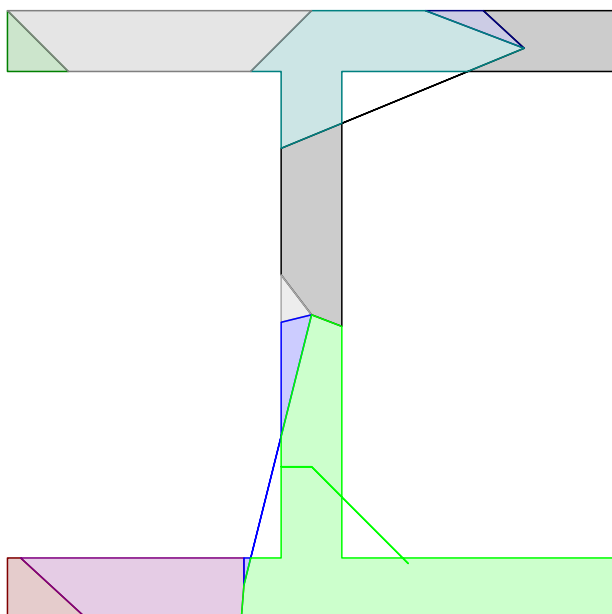
- Συνεχόμενες συνευθειακές ακμές (ομόρροπες ή αντίρροπες) απλοποιούνται σε μια ακμή. Η ενέργεια αυτή απαλοφεί και τμήματα του πολυγώνου που αφού κάνουν ένα ταξίδι, επιστρέφουν στην κορυφή από την οποία τα εξετάζουμε, έχοντας συνολικό περικλειόμενο εμβαδό μηδενικό.

- «Λαιμοί» που ενώνουν τρύπες (π.χ. σχήμα 4.13) ή «νησίδες» (π.χ. σχήμα 4.10) θα πρέπει να αποτελούνται από μία μόνο ακμή στον πηγαισμό και μία μόνο στην επιστροφή. Αν αποτελούνται από παραπάνω, όπως στο σχήμα 4.13, απλοποιούνται σε μία πηγαί-

μού και μία ερχομού.



Σχήμα 4.15: Ξεχωριστές ομάδες ινών για χάλυβα με κινηματική κράτνυση
 Σχήμα 4.16: Ξεχωριστές ομάδες ινών για σκυρόδεμα με την διγραμμική σχέση του EK2
 Κάθε ομάδα ινών καθώς και τα χαρακτηριστικά της, αντιπροσωπεύεται με διαφορετικό χρώμα. Ο διαχωρισμός είναι αποτέλεσμα διαδοχικών φορτίσεων. Εδώ τα χαρακτηριστικά είναι η τάση αποφόρτισης καθώς και αν η ομάδα ινών είναι σε κατάσταση 1 ή 2.



Σχήμα 4.17: Το σχήμα 4.15 χωρίς απλοποίηση

Σχήμα 4.18: Το σχήμα 4.16 χωρίς απλοποίηση

— Αν ακμές εκτός του λαιμού, των οποίων το ένα άκρο τους είναι άκρο και του λαιμού, είναι συνευθειακές (ομόρροπες ή αντίρροπες), απλοποιούνται μέχρι να μην είναι συνευθειακές. Αυτό φαίνεται στα σχήματα 4.13 και 4.14, όπου βλέπουμε τους λαιμούς μετά

την απλοποίηση να έχουν αλλάξει κορυφές αρχής και πέρατος. Ειδική προσοχή απαιτείται όταν οι δύο κορυφές αρχής και/ή οι δύο κορυφές πέρατος του λαιμού, δεν ταυτίζονται μεταξύ τους, όπως στο κάτω σχήμα του σχήματος 4.2. Αν σε αυτό το σχήμα απλοποιηθούν οι αντίρροπες ακμές, στα αριστερά του σχήματος, εκτός του λαιμού, όπως έγινε στο σχήμα 4.14, το πολύγωνο θα καταστραφεί.

— Αν ένας λαιμός ενώνει δύο νησίδες (δεν ισχύει για τρύπες) και οι δύο νησίδες εφάπτονται σε έναν αριθμό αντίρροπων ακμών (ή τουλάχιστον ένα σημείο) τότε όλο το πολύγωνο ανακατασκευάζεται. Ο λαιμός αφαιρείται και οι δύο νησίδες ενώνονται στην πολυγωνική γραμμή (ή σημείο) επαφής τους.

Ο αλγόριθμος απλοποίησης απαιτεί υπολογίσιμη επεξεργαστική ισχύ σε σχέση με τη διαίρεση και την ένωση πολυγώνων.

4.2.2.4. Τομή Συνόρου Μεταξύ Δύο Τμημάτων Τμηματικής Συνάρτησης με το Σύνορο της Διατομής

Άλλη περίπτωση είναι η πολυγωνική του συνόρου της σχέσης (4.19) που τέμνει την πολυγωνική του συνόρου της διατομής. Παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 4.19.

1. Απαριθμούμε τις ακμές i του συνόρου της διατομής μέχρι να βρεθεί τομή της καμπύλης και της ακμής που εξετάζουμε (τουλάχιστον μία).

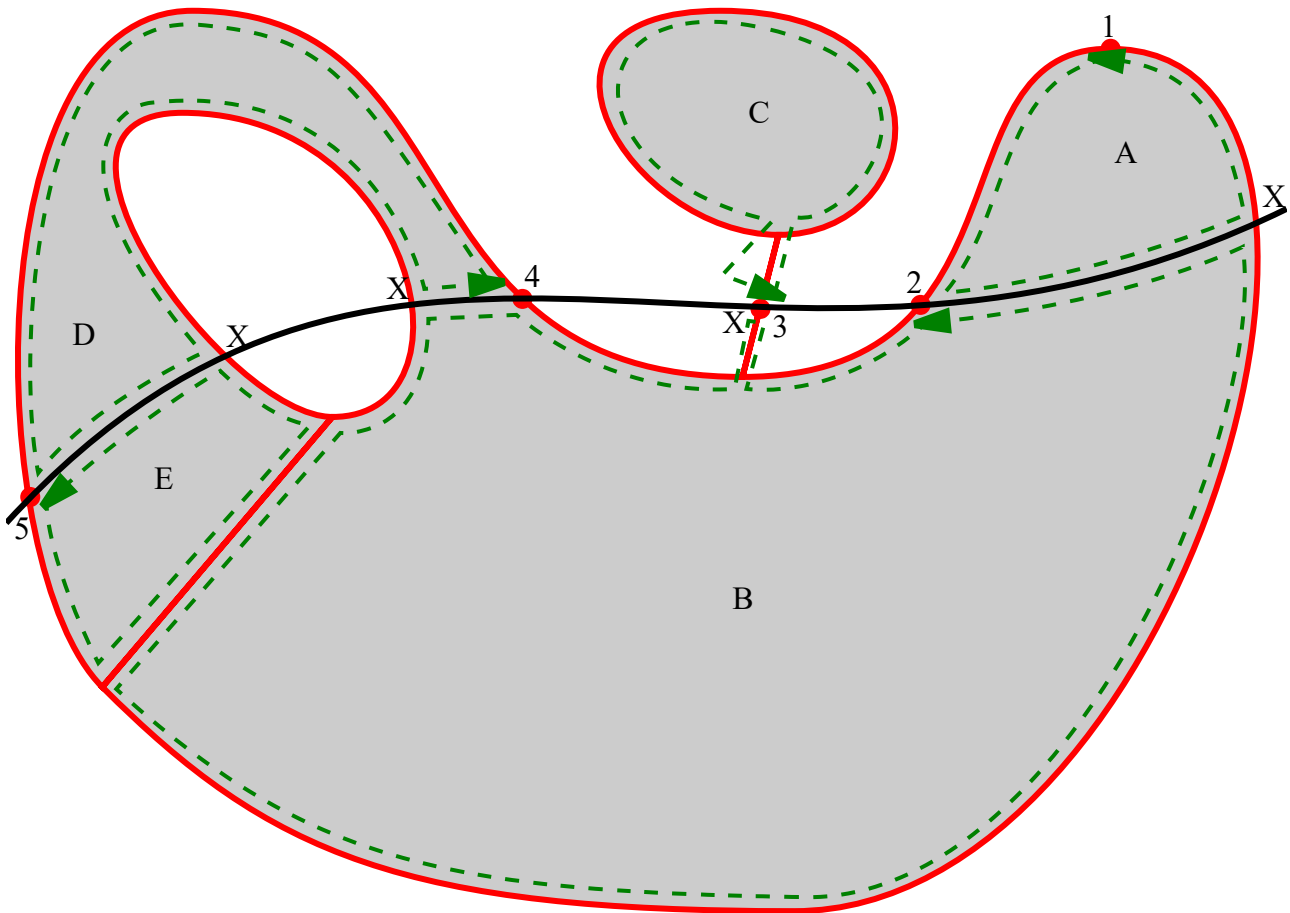
α. Κάθε ακμή i που απαριθμούμε την προσθέτουμε στο νέο σύνορο.

β. Την ακμή με την τομή, την προσθέτουμε στο νέο σύνορο, από την αρχή της μέχρι το εγγύτερο στην αρχή της σημείο τομής.

γ. Το σημείο τομής που θα βρεθεί το κρατάμε και για αργότερα. Ενδέχεται να βρεθούν πολλά κατά τη διάρκεια της διαδικασίας.

δ. Αν δεν υπάρχουν άλλες ακμές διαθέσιμες πάμε στο βήμα 3.

2. Δημιουργούμε και ακολουθούμε την πολυγωνική της καμπύλης. Κάθε ακμή της καμπύλης που δημιουργούμε, ελέγχουμε αν τέμνει κάποια ακμή του συνόρου της διατομής από το i και εξής (τις προηγούμενες δεν τις τέμνει γιατί έχουν ελεγχθεί).



Σχήμα 4.19: Τομή διατομής και συνόρου σχέσης (4.19)

Με κόκκινο το σύνορο της διατομής, με μαύρο το σύνορο της σχέσης (4.19), οι αριθμοί δείχνουν το σημείο έναρξης κάθε παραγόμενου συνόρου, τα X σημαίνουν ένα σημείο ότι δεν μπορεί να αποτελέσει έναρξη παραγόμενου συνόρου (γιατί το σύνορο έχει ήδη παραχθεί), με πράσινο τα παραγόμενα σύνορα και με γράμματα η σειρά παραγωγής των παραγόμενων συνόρων.

- α. Αν δεν τέμνει καμία, προσθέτουμε την ακμή της καμπύλης στο νέο σύνορο.
- β. Αν τέμνει, προσθέτουμε την ακμή της καμπύλης στο νέο σύνορο, από την αρχή της μέχρι το σημείο τομής.
- γ. Την πολυγωνική της καμπύλης που δημιουργήθηκε, την κρατάμε και για αργότερα. Ενδέχεται να δημιουργηθούν πολλές κατά τη διάρκεια της διαδικασίας.
- δ. Θεωρούμε ως i την ακμή που τέμνεται, από το σημείο τομής μέχρι το πέρας της και συνεχίζουμε από το βήμα 1.

3. Ολοκληρώθηκε η εύρεση του νέου συνόρου. Θα πρέπει τώρα να βρεθούν και τα υπόλοιπα νέα σύνορα. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία από το 1 ξεκινώντας από το πρώτο σημείο τομής που έχουμε κρατήσει. Το βήμα 3 θα επαναληφθεί για όσα σημεία το-

μής έχουμε κρατήσει. Ενδέχεται να δημιουργηθούν και επιπρόσθετα σημεία τομής καθώς και επιπρόσθετες πολυγωνικές καμπύλης. Αυτές όμως που έχουν δημιουργηθεί μέχρι τώρα, δεν τις ξανακατασκευάζουμε αλλά τις χρησιμοποιούμε με την αντίστροφη φορά μόλις τις συναντήσουμε καθώς το σημείο πέρατός τους είναι ευρεθέν σημείο τομής συνόρου διατομής και καμπύλης.

4.2.3. Αριθμητική Ολοκλήρωση

Η αριθμητική ολοκλήρωση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής έχει ήδη αναφερθεί στην παράγραφο 4.1.2.1, επάνω, καθώς ήταν προαπαιτούμενο για την αριθμητική ολοκλήρωση δύο ανεξαρτήτων μεταβλητών. Εδώ θα αναφερθούν οι «αθροιστικοί» κανόνες ολοκλήρωσης Simpson.

Στο σύνορο της διατομής η ολοκλήρωση είναι τεχνικά πολύ πιο εύκολη απ' ό τι στο επίπεδο της διατομής.

Πραγματοποιείται διακριτοποίηση στο σύνορο ανά σταθερές αποστάσεις. Μια τυπική πυκνή απόσταση είναι $h=1\text{ cm}$. Στην περίπτωση μας, το σύνορο είναι μια κλειστή πολυγωνική γραμμή. Άρα διακριτοποιείται κάθε ευθύγραμμο τμήμα του συνόρου από x_0 στο x_n , σε n διαστήματα μήκους h . Τότε σύμφωνα με τους κανόνες του Simpson το ολοκλήρωμα της f πάνω στο σύνορο είναι:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right] \quad (\text{Simpson 1/3}) \quad (4.32.\alpha)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} \left[f(x_0) + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3k}}^{n-1} f(x_i) + 3 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{3}} f(x_{3j}) + f(x_n) \right], \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{Simpson 3/8}) \quad (4.32.\beta)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right] \quad (\text{κανόνας τραπεζίου}) \quad (4.32.\gamma)$$

$$n = \frac{x_n - x_0}{h} \quad (4.32.\delta)$$

$$x_j = x_0 + jh \quad (4.32.\epsilon)$$

Ο κανόνας Simpson 1/3 απαιτεί $2m+1$ σημεία, ο κανόνας Simpson 3/8 απαιτεί $3m+1$ σημεία και ο κανόνας τραπεζίου απαιτεί $m+1$ σημεία, όπου $m \in \mathbb{N}^*$.

4.3. Άθροισμα στις Κορυφές της Διατομής

Εφόσον η διατομή είναι πολυγωνική, τότε κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει εξίσωση:

$$y(z) = dz + e \quad (4.33)$$

Ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα στον άξονα y δεν μπορούν να αποδοθούν από την παραπάνω εξίσωση αλλά επειδή σε αυτά $dz=0$, το ολοκλήρωμα είναι μηδέν, οπότε τέτοια τμήματα τα αγνοούμε.

Αντικαθιστούμε το y από την εξίσωση (4.33) στις συναρτήσεις N_M , $M_{y,M}$ και $M_{z,M}$ που δίνονται στις εξισώσεις (4.16) (και για τις οποίες πρέπει να έχει εξασφαλιστεί η συνέχεια κατά y) και τις ολοκληρώνουμε αόριστα κατά z , οπότε και οδηγούμαστε στις εξισώσεις N_{MM} , $M_{y,MM}$ και $M_{z,MM}$ που δεν έχουν κάποια φυσική σημασία.

$$N_{MM}(z) = \int N_M(y(z), z) dz \quad (4.34.a)$$

$$M_{y,MM}(z) = \int M_{y,M}(y(z), z) dz \quad (4.34.β)$$

$$M_{z,MM}(z) = \int M_{z,M}(y(z), z) dz \quad (4.34.γ)$$

Η συνέχεια κατά z των συναρτήσεων N_{MM} , $M_{y,MM}$, $M_{z,MM}$ πρέπει να εξασφαλιστεί στα σύνορα των κλάδων. Ισχύει κι εδώ ότι αναφέρθηκε προηγουμένως στην παράγραφο 4.2.1 με τη διαφορά ότι εδώ η συνέχεια εξασφαλίζεται κατά z . Επιπλέον η συνέχεια δεν επιτυγχάνεται προσθέτοντας συνάρτηση $f(z)$ σε κάθε σκέλος της συνάρτησης αλλά προσθέτοντας έναν σταθερό αριθμό.

Με αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης από z σε ε_c και συνεχίζοντας από τις σχέσεις (4.17), είναι δυνατή μια γενικευμένη ολοκλήρωση για κάθε συνάρτηση $\sigma(\varepsilon)$ και οι σχέσεις (4.34) γίνονται:

$$N_{MM} = \int \frac{1}{a} \sigma_c^y dz = \frac{1}{a} \int \sigma_c^y \frac{dz}{d\varepsilon_c} d\varepsilon_c = \frac{1}{a(b+ad)} \int \sigma_c^y d\varepsilon_c = \frac{1}{a(b+ad)} \sigma_c^{yz} \quad \text{για } a(b+ad) \neq 0 \quad (4.35.a.i)$$

$$\begin{aligned} N_{MM} &= \int y \sigma_c dz = \int (dz + e) \sigma_c \frac{dz}{d\varepsilon_c} d\varepsilon_c = \frac{1}{b} \int (dz + e) \sigma_c d\varepsilon_c = \frac{1}{b} \int \frac{d\varepsilon + be - cd}{b} \sigma_c d\varepsilon_c = \\ &= \frac{1}{b^2} \int (d\varepsilon + be - cd) \sigma_c d\varepsilon_c = \frac{(d\varepsilon + be - cd) \sigma_c^z - d \sigma_c^{zz}}{b^2} = \frac{y}{b} \sigma_c^z - \frac{d}{b^2} \sigma_c^{zz} \end{aligned} \quad (4.35.a.ii)$$

για $a=0$, $b+ad \neq 0$

$$N_{MM} = \int \frac{1}{a} \sigma_c^y dz = \frac{1}{a} \sigma_c^y \int dz = \frac{z}{a} \sigma_c^y \quad \text{για } a \neq 0, b+ad=0 \quad (4.35.a.iii)$$

$$N_{MM} = \int y \sigma_c dz = \int (dz+e) \sigma_c dz = \sigma_c \int (dz+e) dz = \frac{dz+2e}{2} z \sigma_c \quad \text{για } a=0, b+ad=0 \quad (4.35.\alpha.iv)$$

$$\begin{aligned} M_{y,MM} &= \int \frac{z}{a} \sigma_c^y dz = \int \frac{\varepsilon_c - (c+ae)}{a(b+ad)} \sigma_c^y \frac{dz}{d\varepsilon_c} d\varepsilon_c = \int \frac{\varepsilon_c - (c+ae)}{a(b+ad)^2} \sigma_c^y d\varepsilon_c = \\ &= \frac{[\varepsilon_c - (c+ae)] \sigma_c^{yz} - \sigma_c^{yzz}}{a(b+ad)^2} \quad \text{για } a(b+ad) \neq 0 \quad (4.35.\beta.i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{y,MM} &= \int y z \sigma_c dz = \int (dz+e) z \sigma_c \frac{dz}{d\varepsilon_c} d\varepsilon_c = \int \frac{(dz+e)z}{b} \sigma_c d\varepsilon_c = \\ &= \int \frac{d\varepsilon_c^2 + (be-2cd)\varepsilon_c + c(cd-be)}{b^3} \sigma_c d\varepsilon_c = \\ &= \frac{d}{b^3} (\varepsilon_c^2 \sigma_c^z - 2\varepsilon_c \sigma_c^{zz} + 2\sigma_c^{zzz}) + \frac{be-2cd}{b^3} (\varepsilon_c \sigma_c^z - \sigma_c^{zz}) + \frac{c(cd-be)}{b^3} \sigma_c^z = \\ &= \frac{2d\sigma_c^{zzz} - (2d\varepsilon_c + be-2cd)\sigma_c^z + [d\varepsilon_c^2 + (be-2cd)\varepsilon_c + c(cd-be)]\sigma_c^z}{b^3} \end{aligned} \quad (4.35.\beta.ii)$$

για $a=0, b+ad \neq 0$

$$M_{y,MM} = \int \frac{z}{a} \sigma_c^y dz = \frac{1}{a} \sigma_c^y \int z dz = \frac{z^2}{2a} \sigma_c^y \quad \text{για } a \neq 0, b+ad=0 \quad (4.35.\beta.iii)$$

$$M_{y,MM} = \int y z \sigma_c dz = \sigma_c \int (dz+e) z dz = \frac{2dz^2+3e}{6} z \sigma_c \quad \text{για } a=0, b+ad=0 \quad (4.35.\beta.iv)$$

$$\begin{aligned} M_{z,MM} &= \int \left(\frac{\varepsilon - bz - c}{a^2} \sigma_c^y - \frac{1}{a^2} \sigma_c^{yy} \right) dz = \frac{1}{a^2} \int [(\varepsilon - bz - c) \sigma_c^y - \sigma_c^{yy}] \frac{dz}{d\varepsilon_c} d\varepsilon_c = \\ &= \frac{1}{a^2(b+ad)} \int [(\varepsilon - bz - c) \sigma_c^y - \sigma_c^{yy}] d\varepsilon_c = \frac{1}{a^2(b+ad)} \int \left(a \frac{d\varepsilon_c + be - cd}{b+ad} \sigma_c^y - \sigma_c^{yy} \right) d\varepsilon_c = \\ &= \frac{(d\varepsilon_c + be - cd) \sigma_c^{yz} - d\sigma_c^{yzz}}{a(b+ad)^2} - \frac{1}{a^2(b+ad)} \sigma_c^{yyz} \end{aligned} \quad (4.35.\gamma.i)$$

για $a(b+ad) \neq 0$

$$\begin{aligned} M_{z,MM} &= \int \frac{y^2}{2} \sigma_c dz = \int \frac{(dz+e)^2}{2} \sigma_c \frac{dz}{d\varepsilon_c} d\varepsilon_c = \int \frac{(d\varepsilon_c + be - cd)^2}{2b^2} \sigma_c \frac{dz}{d\varepsilon_c} d\varepsilon_c = \\ &= \int \frac{(d\varepsilon_c + be - cd)^2}{2b^3} \sigma_c d\varepsilon_c = \int \frac{d^2\varepsilon_c^2 + 2d(be-cd)\varepsilon_c + (be-cd)^2}{2b^3} \sigma_c d\varepsilon_c = \\ &= \frac{d^2}{2b^3} (\varepsilon_c^2 \sigma_c^z - 2\varepsilon_c \sigma_c^{zz} + 2\sigma_c^{zzz}) + \frac{2d(be-cd)}{2b^3} (\varepsilon_c \sigma_c^z - \sigma_c^{zz}) + \frac{(be-cd)^2}{2b^3} \sigma_c^z = \\ &= \frac{2d^2\sigma_c^{zzz} - (d\varepsilon_c + be - cd)2d\sigma_c^{zz} + [d^2\varepsilon_c^2 + (be-cd)2d\varepsilon_c + (be-cd)^2]\sigma_c^z}{2b^3} \end{aligned} \quad (4.35.\gamma.ii)$$

για $a=0, b+ad \neq 0$

$$M_{z,MM} = \int \left(\frac{\varepsilon - bz - c}{a^2} \sigma_c^y - \frac{1}{a^2} \sigma_c^{yy} \right) dz = \frac{\sigma_c^y}{a^2} \int a y dz - \frac{z}{a^2} \sigma_c^{yy} = \frac{\sigma_c^y}{a} \int (dz + e) dz - \frac{z}{a^2} \sigma_c^{yy} =$$

$$= \frac{z}{a} \left(\frac{dz + 2e}{2} \sigma_c^y - \frac{1}{a} \sigma_c^{yy} \right) \quad (4.35.\gamma.iii)$$

για $a \neq 0$, $b + ad = 0$

$$M_{z,MM} = \int \frac{y^2}{2} \sigma_c dz = \frac{\sigma_c}{2} \int (dz + e)^2 dz = \frac{\sigma_c}{2} \int (d^2 z^2 + 2de z + e^2) dz = \frac{d^2 z^2 + 3de z + 3e^2}{6} z \sigma_c \quad (4.35.\gamma.iv)$$

για $a = 0$, $b + ad = 0$

$$\sigma_c^z = \int \sigma_c d\varepsilon_c, \quad \sigma_c^{zz} = \int \sigma_c^z d\varepsilon_c, \quad \sigma_c^{zzz} = \int \sigma_c^{zz} d\varepsilon_c,$$

$$\sigma_c^{yz} = \int \sigma_c^y d\varepsilon_c, \quad \sigma_c^{yyz} = \int \sigma_c^{yy} d\varepsilon_c, \quad \sigma_c^{yzz} = \int \sigma_c^{yz} d\varepsilon_c \quad (\text{συντημήσεις}) \quad (4.35.\delta)$$

Κατ' αντιστοιχία, οι συναρτήσεις MM πρέπει να είναι συνεχείς κατά ε_c αλλά μόνο όταν αποτελούν συνάρτηση του z δηλαδή για $b + ad \neq 0$. Οι ενδιάμεσες συναρτήσεις των σχέσεων (4.35.δ) δεν είναι απαραίτητο να είναι συνεχείς. Η συνάρτηση $\sigma_c^{n,y,m,z}$ αφού ολοκληρωθεί n φορές κατά ε_c , αν $a \neq 0$ θα πρέπει να εξασφαλιστεί η συνέχειά της, ακολούθως αφού ολοκληρωθεί m φορές κατά ε_c , αν $b + ad \neq 0$ θα πρέπει να εξασφαλιστεί η συνέχειά της.

Αν η συνάρτηση $\sigma_c^{n,y}$ για $n = \{0, 1, 2\}$, είναι της μορφής $\sigma_c^{n,y}(\varepsilon_c, \varepsilon_{un})$ τότε:

$$\text{— Για } b + ad \neq 0 \text{ ισχύει } \sigma_c^{n,y} = \sigma_c^{n,y}(\varepsilon_c, \varepsilon_{un}) = \sigma_c^{n,y} \left(\varepsilon_c, \frac{(b_{un} + a_{un}d)[\varepsilon_c - (c + ae)]}{b + ad} + c_{un} + a_{un}e \right)$$

και ολοκληρώνουμε κατά ε_c με την ίδια διαδικασία των σχέσεων (4.35) για $b + ad \neq 0$.

— Για $b + ad = 0$, $b_{un} + a_{un}d \neq 0$ ισχύει $\sigma_c^{n,y} = \sigma_c^{n,y}(\varepsilon_{un})$ και ολοκληρώνουμε κατά ε_{un} με την ίδια διαδικασία των σχέσεων (4.35) για $b + ad \neq 0$, αντικαθιστώντας τα ε_c , a , b , c ,

$$\frac{dz}{d\varepsilon_c} \text{ με τα } \varepsilon_{un}, a_{un}, b_{un}, c_{un}, \frac{dz}{d\varepsilon_{un}} = \frac{1}{b_{un} + a_{un}d}.$$

— Για $b + ad = b_{un} + a_{un}d = 0$ ολοκληρώνουμε κατά z με την ίδια διαδικασία των σχέσεων (4.35) για $b + ad = 0$.

Κατά την ολοκλήρωση θα πρέπει να αποφευχθούν περιττοί περιορισμοί, οι οποίοι θα εκτοξεύσουν τον αριθμό των σκελών της ολοκληρωμένης συνάρτησης. Για κάθε περιττό περιορισμό, τα σκέλη της συνάρτησης σχεδόν διπλασιάζονται. Ακολουθεί παράδειγμα ενός περιττού περιορισμού ($d \neq 0$ και $d = 0$) καθώς και της αντιμετώπισής του.

$$\int y^2 dz = \int (dz+e)^2 dz = \frac{(dz+e)^3}{3d} \quad (4.36.α)$$

$$\int y^2 dz = \int (dz+e)^2 dz = \int (d^2 z^2 + 2de z + e^2) dz = d^2 \frac{z^3}{3} + 2de \frac{z^2}{2} + e^2 z \quad (4.36.β)$$

Τα εντατικά μεγέθη δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις. Το i απαριθμεί όλα τα ευθύγραμμα τμήματα της πολυγωνικής του συνόρου της διατομής, εκτός από αυτά που είναι παράλληλα στον άξονα y . Τα $z_{i,a}$ και $z_{i,b}$ είναι τα z στην αρχή και στο πέρασ αντίστοιχα, του ευθυγράμμου τμήματος i .

$$N = \sum_{\substack{i=1 \\ * y}}^n [N_{MM}(z_{i,b}) - N_{MM}(z_{i,a})] \quad (4.37.α)$$

$$M_y = \sum_{\substack{i=1 \\ * y}}^n [M_{y,MM}(z_{i,b}) - M_{y,MM}(z_{i,a})] \quad (4.37.β)$$

$$M_z = - \sum_{\substack{i=1 \\ * y}}^n [M_{z,MM}(z_{i,b}) - M_{z,MM}(z_{i,a})] \quad (4.37.γ)$$

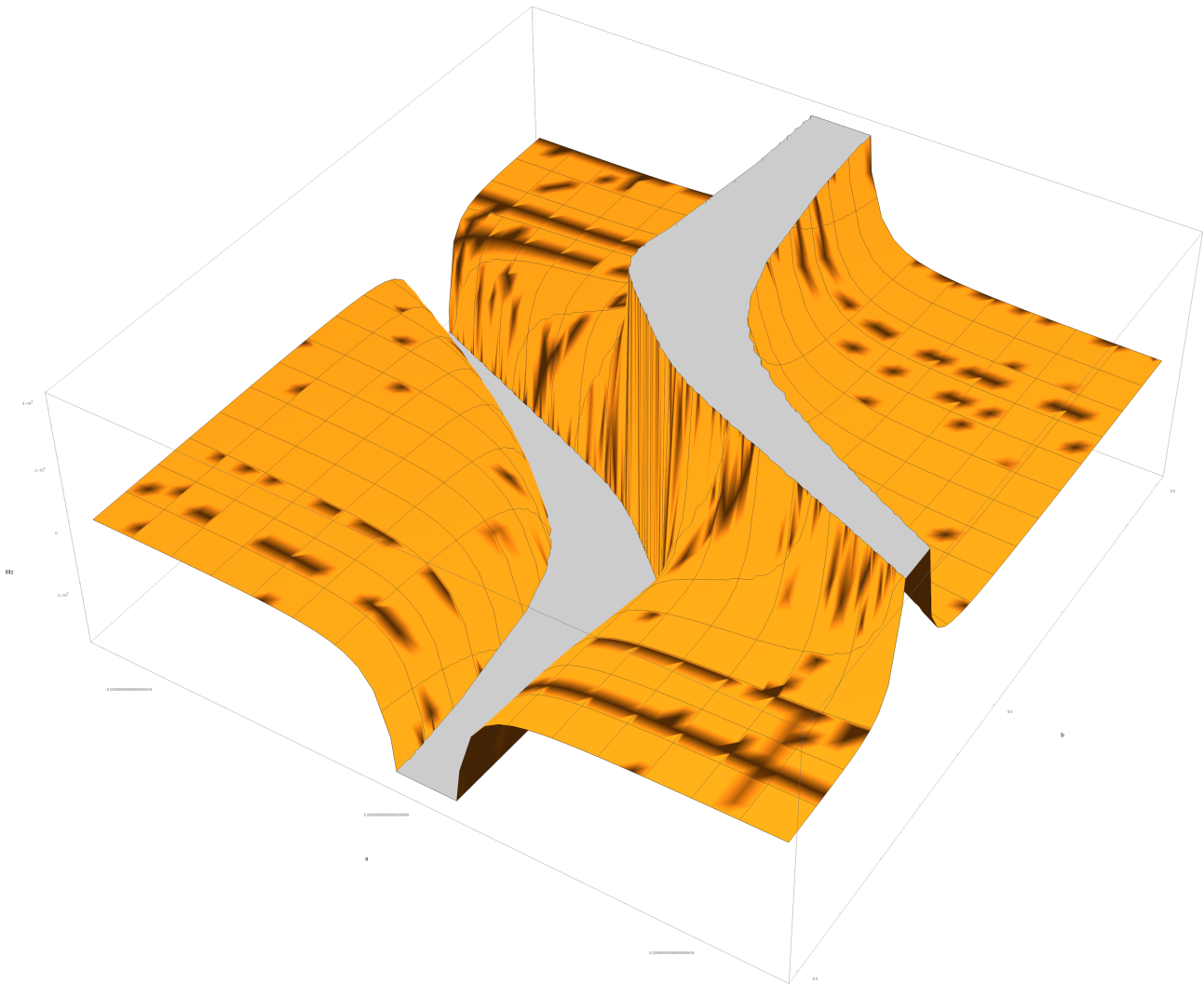
4.4. Αριθμητική Αστάθεια

Το κεφάλαιο αυτό αφορά την επικαμπύλια Αρχική συνάρτηση που προκύπτει από αόριστη ολοκλήρωση κατά y και την επί των κορυφών Αρχική συνάρτηση που προκύπτει από την επικαμπύλια με ολοκλήρωση κατά z .

Για τις συναρτήσεις αυτές, επειδή είναι τμηματικές, αναφέρθηκε ότι εξασφαλίζουμε τη συνέχειά τους στα σύνορα των τμημάτων τους. Η εξασφάλιση της συνέχειας, οδηγεί τις αρχικές συναρτήσεις να έχουν ρητή μορφή με παρανομαστή που συνήθως είναι a και δυνάμεις του και ή $b-ad$ και δυνάμεις του. Κι άλλοι πιο σπάνιοι παρανομαστές μπορούν να προκύψουν όπως π.χ. $a-a_0$, $b-b_0-(a-a_0)d$ και άλλοι ακόμα σπανιότερα.

Όταν κάποιος από αυτούς τους παρανομαστές παίρνει πολύ μικρή απόλυτη τιμή, αλλά όχι μηδέν, π.χ. της τάξης του 10^{-9} , τότε η αρχική συνάρτηση παίρνει πολύ μεγάλη τιμή της τάξης του 10^{20} ως 10^{60} .

Αν λοιπόν μεταξύ δύο σημείων το μέγεθος που εξετάζουμε (π.χ. η N) είναι $1KN$ τότε έχουμε στο ένα σημείο $10^{40}+0.001$ και στο άλλο 10^{40} . Η διαφορά της αρχικής σε αυτά τα δύο σημεία θα μας δώσει $0.001MN=1KN$.



Σχήμα 4.20: Γραφική παράσταση Αρχικής συνάρτησης της M_z
 Ολοκληρώνοντας αόριστα την σχέση σ - ϵ του EK2 για τη μη γραμμική ανάλυση, μια φορά κατά y και μία κατά z , προκύπτει η Αρχική συνάρτηση, από την οποία με αφαίρεση μεταξύ δύο κορυφών, προκύπτει η M_z .
 Η γραφική παράσταση αφορά την Αρχική συνάρτηση για σημείο $y=z=0$, ακμή με $d=9$, $f_{cm}=20.7\text{MPa}$, $\epsilon_t=-0.28$, $\epsilon_{c1}=1.75$, $\epsilon_{cu1}=3.6$, $E_{cm}=30.2$, $c=\epsilon_{cu1} - 0.13$.
 Στη γραφική παράσταση, οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η $a \in [-0.02, 0.02]$ και $b \in [-0.5, 0.5]$. Το μη αποκοπώμενο τμήμα της Αρχικής είναι το $[-4 \cdot 10^7, 4 \cdot 10^7]$

Ισχύει όμως αυτό; Ο παρακάτω πίνακας περιέχει στοιχεία από την υποστήριξη αριθμών κινητής υποδιαστολής από σύγχρονους επεξεργαστές καθώς και κάποια χαρακτηριστικά τους, όπως αυτά καθορίζονται από το IEEE 754 (IEEE standard for floating point arithmetic).

bits	8	16	32	64	80	128
C++ ονομασία	-	-	float	double	long double	-
mantissa bits	3+1	10+1	23+1	52+1	63+1	110+1
Σημαντικά ψηφία	1	3	7	16	19	33
Χρήση σε	GPUs	GPUs	παντού	CPUs και κάποιες GPUs	x86 CPUs	CPUs υπερυπολογιστών

Στον παραπάνω πίνακα τα σημαντικά ψηφία προκύπτουν ως $\log_{10}(2^{\text{mantissa_bits}})$.

Γίνεται ξεκάθαρο ότι αν η αρχική έχει τιμή $10^{40}+0.001$ τότε είναι αδύνατο να αποκτήσουμε το αποτέλεσμα της διαφοράς με το 10^{40} καθώς απαιτεί τύπο αριθμού κινητής υποδιαστολής με $40+3$ δεκαδικά ψηφία και τέτοιος τύπος δεν υπάρχει.

4.4.1. Ορισμός Ενός Κατώφλιού για το Μηδέν

Ο τύπος που χρησιμοποιείται στον C++ κώδικα είναι ο `double`. Μπορεί να αποδώσει 15.96 σημαντικά δεκαδικά ψηφία.

Παρατηρώντας το Σχήμα 4.20 διαπιστώνουμε ότι υπάρχει ένας στενός διάδρομος όπου η αρχική συνάρτηση παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Αυτό είναι φυσιολογικό για κάθε ρητή συνάρτηση όταν ο παρανομαστής πλησιάζει το μηδέν.

Θα μπορούσε κάποιος να θυσιάσει ένα μέρος της ακρίβειας, όταν οι παρανομαστές πλησιάζουν στο μηδέν (π.χ. το a ή το $b-ad$), και να επιλέξει το σκέλος της συνάρτησης με περιορισμό $a=0$ ή $b-ad=0$. Επειδή δεν είναι εντελώς μηδέν αυτοί οι όροι, τα αποτελέσματα θα έχουν μια μικρή απόκλιση από τα πραγματικά. Σε αντίθετη περίπτωση όμως τα αποτελέσματα θα ήταν ακριβώς μηδέν, λόγω αποκοπής.

Από το Σχήμα 4.20 και παρόμοια γραφήματα από άλλες αρχικές συναρτήσεις και άλλα υλικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ως κατώφλι του μηδέν οτιδήποτε μικρότερο, κατ' απόλυτη τιμή, του αριθμού 0.005% . Τότε αναμένουμε ότι η αρχική συνάρτηση δεν θα ξεπεράσει το $\pm 10^{12}$ ενώ συνήθης τιμή είναι το $\pm 10^7$.

Με τα 16 σημαντικά ψηφία του `double` μπορούμε να αποδώσουμε ακρίβεια τουλάχιστον στον τρίτων ψηφίων μετά την υποδιαστολή, το οποίο είναι υπεραρκετό. Η ακρίβεια που χάνεται εξαιτίας της παραδοχής π.χ. ότι η τιμή $a=0.005\%$ ισούται με $a=0$ δεν είναι πολύ σημαντική αφού πρόκειται για 5 δεκαδικό ψηφίο.

Κάθε περιορισμός έχει διαφορετικό κατώφλι για το μηδέν. Για παράδειγμα αν το a έχει κατώφλι το 0.005% το $b-ad$ έχει το 0.0005% . Επίσης ο όρος $a(b-ad)$ θα έπρεπε να έχει λίγο μεγαλύτερο κατώφλι, παρόλα αυτά το 0.005% έχει επιλεγεί αρκετά μεγάλο ώστε να το καλύπτει.

4.4.2. Αποφυγή Εξασφάλισης Συνέχειας

Ο συνήθης λόγος που εμφανίζονται παρανομαστές στις σχέσεις των αρχικών συναρτήσεων είναι η εξασφάλιση συνέχειας στα όρια των τμημάτων των τμηματικών συναρτήσεων.

Το πρόβλημα της αριθμητικής αστάθειας λύνεται εντελώς, αν αποφύγουμε να αποκαταστήσουμε τη συνέχεια μεταξύ των τμημάτων και κάνουμε ξεχωριστή ολοκλήρωση για κάθε τμήμα της διατομής που ανήκει σε συγκεκριμένο τμήμα της τμηματικής συνάρτησης.

Η προσέγγιση αυτή του προβλήματος έχει τα παρακάτω πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα:

- + Δεν εμφανίζονται προβλήματα αριθμητικής αστάθειας καθώς τυπικές τιμές των αρχικών συναρτήσεων είναι π.χ. 2000 , 20 , 50000 .

- + Οι τμηματικές αρχικές συναρτήσεις έχουν ελάχιστα τμήματα αφού δεν υπάρχουν καθόλου οι περιορισμοί $a \neq 0$ κτλ. Το ακριβές είναι ότι για κάποιες χαρακτηριστικές σχέσεις σ-ε υπάρχουν και δεν οφείλονται στην εξασφάλιση της συνέχειας.

- + Τα τμήματα των τμηματικών αρχικών συναρτήσεων στην περίπτωση αυτή είναι πολύ πιο μικρά και άρα υπολογίζονται αρκετά πιο γρήγορα.

- Αντί να ολοκληρώνεται ολόκληρη η διατομή με ολοκλήρωση επί των κορυφών της πολυγωνικής του συνόρου, απαιτείται να σπάσει η πολυγωνική σε τμήματα, ένα για κάθε τμήμα της τμηματικής αρχικής συνάρτησης, με βάση τα σύνορα του συγκεκριμένου τμήματος της τμηματικής συνάρτησης. Υπάρχουν συνολικά 3+6 αρχικές συναρτήσεις, αλλά τα σύνορα των τμημάτων τους είναι ίδια και για τις 9. Η διάσπαση αυτή και η ολοκλήρωση κάθε τμήματος χωριστά, μειώνει το πλεονέκτημα σε σχέση με την επιφανειακή ολοκλήρωση. Ωστόσο η μέθοδος παραμένει πιο γρήγορη.

4.4.3. Συναρτήσεις Ορισμένου Ολοκληρώματος

Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε είναι αόριστο ολοκλήρωμα κατά y και κατόπιν κατά z , όπως πολλές φορές αναφέρθηκε μέχρι τώρα.

Δεδομένου ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα υπολογίζεται επί ακμής από z_1 σε z_2 , θα μπορούσε η συνάρτηση αορίστου ολοκληρώματος να μετατραπεί σε συνάρτηση ορισμένου

ολοκληρώματος με συνδυασμό του κάθε κλάδου της συνάρτησης για z_1 με κάθε κλάδο της συνάρτησης για z_2 .

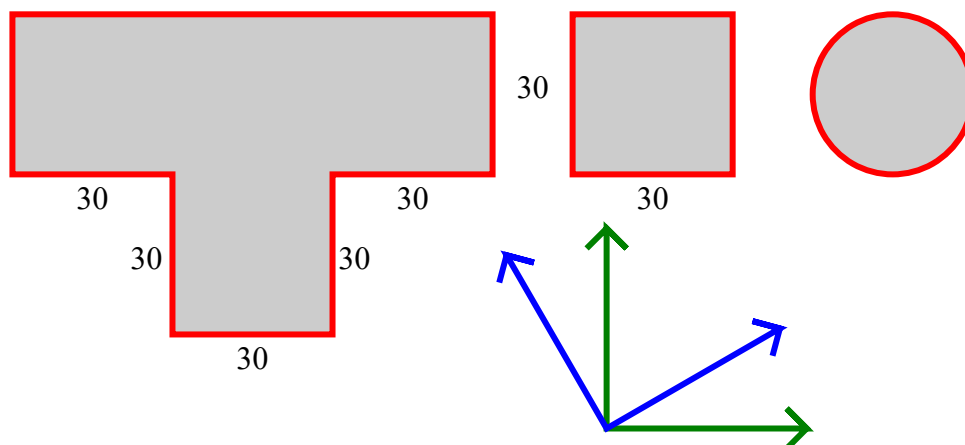
Αυτό δημιουργεί πάρα πολλούς κλάδους για τη συνάρτηση ορισμένου ολοκληρώματος αλλά εκτιμάται ότι οι απλοποιήσεις θα απαλείψουν το φαινόμενο της αριθμητικής αστάθειας. Παραμένει όμως μια εκτίμηση και όχι γεγονός.

4.4.4. Ολοκλήρωση πρώτα κατά z και μετά κατά y

Στο θεώρημα Green ολοκληρώσαμε αόριστα κατά y και ακολούθως επί της ακμής κατά z . Κάνοντας και το αντίστροφο, έχουμε τη δυνατότητα όταν π.χ. το $a \approx 0$, να εφαρμόζουμε τους άλλους κλάδους της ολοκλήρωσης με την άλλη σειρά. Αυτό όμως δεν δίνει ολοκληρωτική λύση γιατί η άλλη σειρά ολοκλήρωσης είναι επιρρεπής π.χ. στο $b \approx 0$ και αν έχουμε $a \approx 0 \wedge b \approx 0$ εμφανίζεται το ίδιο πρόβλημα.

4.5. Σύγκριση Διακριτοποίησης κατά Ολοκλήρωση

Παρότι οι τύποι που προκύπτουν από την ολοκλήρωση στις κορυφές είναι εξαιρετικά μεγάλου μεγέθους, προτιμάται αυτή η ολοκλήρωση όπου



είναι δυνατόν, γιατί *Σχήμα 4.21: Περιπτώσεις διατομών για διακριτοποίηση επιφάνειας, συνόρου και κορυφών* έχει πολύ εύκολη

διακριτοποίηση και διακριτοποιείται σε ελάχιστα σχετικά στοιχεία.

Θεωρώντας ότι η διακριτοποίηση πραγματοποιείται με στοιχεία επιφάνειας διαστάσεων 1×1 , και στοιχεία συνόρου διαστάσεων 1 , προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα για τα δύο ξεχωριστά συστήματα συντεταγμένων.

Διατομή	Επιφανειακά Στοιχεία	Συνοριακά Στοιχεία	Στοιχεία Κορυφών	Συνοριακά Στοιχεία	Στοιχεία Κορυφών
T	3600	120	4	300	8
□	900	60	2	120	4
Ο	788	94	94	94	94

Είναι φανερό, ότι όταν δεν έχουμε καμπύλο σύνορο διατομής που απαιτεί να προσομοιωθεί με πυκνή σε κορυφές πολυγωνική, η ευκολία που παρέχει η διακριτοποίηση συνόρου και κορυφών καθώς και το πλήθος των στοιχείων κορυφών, είναι νικητές στην επιλογή.

Όταν έχουμε καμπύλο σύνορο διατομής, η επιλογή συνοριακού ολοκληρώματος εξασφαλίζει ευκολία διακριτοποίησης καθώς και μικρότερες σχέσεις σε σχέση με τα στοιχεία κορυφών. Ωστόσο η χρήση στοιχείων κορυφών, εξασφαλίζει μικρότερο αριθμητικό σφάλμα. Για το λόγο αυτό, θα ήταν δυνατό με στοιχεία κορυφών, η διακριτοποίηση να είναι πιο αραιή.

4.6. Ολοκλήρωση Διγραμμικής Σχέσης Σχεδιασμού του ΕΚ2

Επειδή όπως αναφέρθηκε, δεν είναι δυνατόν να πετύχουμε συνέχεια, στην ολοκληρωμένη συνάρτηση, στα όρια μεταξύ των $\varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{c3}$, $\varepsilon_{c3} < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{cu3}$ και $\varepsilon_{cu3} < \varepsilon_{un}$, θα επαναλάβουμε τη σχέση (2.9), τρεις φορές, μια για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις. Ακολούθως όλες οι ολοκληρώσεις θα επαναλαμβάνονται για κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις.

Για την περίπτωση $\varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{c3}$ η σχέση (2.9) τροποποιείται όπως στη σχέση (4.39.α).

Για την περίπτωση $\varepsilon_{c3} < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{cu3}$ η σχέση (2.9) τροποποιείται όπως στη σχέση (4.39.β) αλλά χρησιμοποιούμε για τη σχέση (3.2) ως a , b , c , $\varepsilon_c(y, z)$, τα αντίστοιχα τενυσμένα της σχέσης (4.38).

Για την περίπτωση $\varepsilon_{cu3} < \varepsilon_{un}$ η διατομή έχει αστοχήσει και όλα τα εντατικά μεγέθη είναι μηδέν.

$$a' = a - a_{un} \quad (4.38.α)$$

$$b' = b - b_{un} \quad (4.38.β)$$

$$c' = c - c_{un} + \varepsilon_{c3} \quad (4.38.γ)$$

$$\varepsilon_c'(y, z) = a' y + b' z + c' \quad (4.38.δ)$$

Για λόγους μεγέθους, πλέον, οι συναρτήσεις π.χ. $\varepsilon_c(y, z)$ θα αποτυπώνονται απλά ως ε_c , χωρίς τις ανεξάρτητες μεταβλητές τους.

$$\sigma_{c,0} = \begin{cases} 0 & \varepsilon_c < \varepsilon_t \quad \vee \quad \varepsilon_{cu3} < \varepsilon_c \\ E_3 \varepsilon_c & \varepsilon_t \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c3} \\ f_{cd} & \varepsilon_{c3} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu3} \end{cases} \quad \text{για } \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{c3} \quad (4.39.\alpha)$$

$$\sigma_{c,1} = \begin{cases} 0 & \varepsilon_c < \varepsilon_t \quad \vee \quad \varepsilon_{cu3} + \varepsilon_{c3} - \varepsilon_{un} < \varepsilon_c \\ E_3 \varepsilon_c & \varepsilon_t \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c3} \\ f_{cd} & \varepsilon_{c3} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu3} + \varepsilon_{c3} - \varepsilon_{un} \end{cases} \quad \text{για } \varepsilon_{c3} < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{cu3} \quad (4.39.\beta)$$

Από τις σχέσεις (4.39) για να αποκτήσουμε αξονική και ροπές υπολογίζουμε τα μεγέθη των σχέσεων (4.1). Οι σχέσεις αυτές χρησιμοποιούνται όταν έχουμε σημειακές επιφάνειες. Για παράδειγμα θέλουμε να αφαιρέσουμε την συνεισφορά του σκυροδέματος εκεί που βρίσκεται διαμήκης οπλισμός ή τένοντες.

Για να πάμε σε ολοκλήρωση επί του συνόρου (επικαμπύλιο) ολοκληρώνουμε αόριστα κατά y τις σχέσεις (4.1) και προκύπτουν οι επικαμπύλιες σχέσεις για τις οποίες η συνέχεια στα σύνορα των περιοχών $\varepsilon_c < \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c3}$, $\varepsilon_{c3} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu3}$, $\varepsilon_{cu3} < \varepsilon_c$ έχει εξασφαλιστεί. Όχι όμως και στα σύνορα των περιοχών $\varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{c3}$, $\varepsilon_{c3} < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{cu3}$ και $\varepsilon_{cu3} < \varepsilon_{un}$.

Οι επικαμπύλιες σχέσεις δεν αναφέρονται γραπτώς στην παρούσα εργασία. Υπάρχουν μόνο στον κώδικα Mathematica που συνοδεύει την εργασία.

Για να πάμε σε ολοκλήρωση επί των κορυφών του συνόρου, αντικαθιστούμε το y όπως στη σχέση (4.33) και ολοκληρώνουμε αόριστα κατά z τις επικαμπύλιες σχέσεις, οπότε προκύπτουν οι σχέσεις επί των κορυφών του συνόρου. Για τη συνέχεια, ισχύει κι εδώ ότι αναφέρθηκε προηγουμένως για τις επικαμπύλιες σχέσεις.

Οι σχέσεις επί των κορυφών του συνόρου δεν αναφέρονται γραπτώς στην παρούσα εργασία. Υπάρχουν μόνο στον κώδικα Mathematica και στον κώδικα C++ που συνοδεύει την εργασία. Το μέγεθός τους δεν είναι εύκολα διαχειρίσιμο από άνθρωπο καθώς δε χωράνε σε κόλλα A1. Στον κώδικα C++ βρίσκονται στο αρχείο `concreteEC2c_formulas.cpp`, στην κλήση:

```
std::array<double, 9> // NMM, MyMM, MzMM και οι παράγωγοί τους
ConcreteEC2c::iistress(
    const std::array<double, 2> &p, // συντεταγμένες y,z της κορυφής
    const std::array<double, 2> &de, // d,e της ακμής y=d*z+e
    double et, // παραμόρφωση στην εφελκυστική αντοχή
    // μέγιστη παραμόρφωση μέχρι τώρα στην ιστορία του υλικού
    const std::array<double, 3> &strain_unload,
    const std::array<double, 3> &strain, // a,b,c του επιπέδου παραμόρφωσης
    const IntegrationSettings &settings // ρυθμίσεις ολοκλήρωσης
) const;
```

Η ιστορία του υλικού ενημερώνεται με επιβαλλόμενες παραμορφώσεις στο υλικό, ξεχωριστά για κάθε ομάδα ινών:

— Υποθέτουμε ότι στην ομάδα ινών Ω επιβάλλουμε την παραμόρφωση $\varepsilon_c(y, z)$ με συντελεστές a , b , c ενώ η προηγούμενη επιβεβλημένη ήταν η $\varepsilon_{un}(y, z)$ με συντελεστές a_{un} , b_{un} , c_{un} . Αν προηγουμένως το υλικό ήταν «παρθένο» τότε $a_{un}=b_{un}=c_{un}=0 \Rightarrow \varepsilon_{un}(y, z)=0$ (σχέση 3.2).

— Σε περιοχή A της ομάδας ινών Ω , όπου $\varepsilon_{cu3} < \varepsilon_c(y, z)$ για κάθε (x, y) , θέτουμε $a_{un}=0$, $b_{un}=0$, $c_{un}=+\infty$ δηλαδή $\varepsilon_{un}(y, z)=+\infty$.

— Σε περιοχή B της ομάδας ινών $\Omega \setminus A$, όπου $\varepsilon_{un}(y, z) \leq \varepsilon_{c3} < \varepsilon_c(y, z)$ ή $\varepsilon_{c3} \leq \varepsilon_{un}(y, z) < \varepsilon_c(y, z)$ για κάθε (x, y) , θέτουμε $a_{un}=a$, $b_{un}=b$, $c_{un}=c$ δηλαδή $\varepsilon_{un}(y, z)=\varepsilon_c(y, z)$.

— Σε περιοχή C της ομάδας ινών $\Omega \setminus (A \cup B)$, όπου $\varepsilon_c(y, z) \leq \varepsilon_t$ για κάθε (x, y) , θέτουμε $\varepsilon_t=0$.

— Την περιοχή $D = \Omega \setminus (A \cup B \cup C)$ την αφήνουμε ως έχει.

Από το παραπάνω φαίνεται ότι η ιστορία του υλικού, μπορεί να διαιρέσει μια ομάδα ινών σε άλλες τέσσερις το πολύ ομάδες ινών.

4.7. Ολοκλήρωση Παραβολικής Σχέσης Σχεδιασμού του ΕΚ2

Επειδή δεν είναι δυνατόν να πετύχουμε συνέχεια, στην ολοκληρωμένη συνάρτηση, στα όρια μεταξύ των $\varepsilon_{un} \leq 0$, $0 < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{c2}$, $\varepsilon_{c2} < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{cu2}$ και $\varepsilon_{cu2} < \varepsilon_{un}$, θα επαναλάβουμε τη σχέση (2.12), τέσσερις φορές, μια για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις. Ακολουθως όλες οι ολοκληρώσεις θα επαναλαμβάνονται για κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις.

Για την περίπτωση $\varepsilon_{un} \leq 0$ η σχέση (2.12) τροποποιείται όπως στη σχέση (4.40.α).

Για την περίπτωση $0 < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{c2}$ η σχέση (2.12) τροποποιείται όπως στη σχέση (4.40.β).

Για την περίπτωση $\varepsilon_{c2} < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{cu2}$ η σχέση (2.12) τροποποιείται όπως στη σχέση (4.40.γ).

Για την περίπτωση $\varepsilon_{cu2} < \varepsilon_{un}$ η διατομή έχει αστοχήσει και όλα τα εντατικά μεγέθη είναι μηδέν.

$$\sigma_c = \begin{cases} 0 & \varepsilon_c < \varepsilon_t \quad \vee \quad \varepsilon_{cu2} < \varepsilon_c \\ E_2 \varepsilon_c & \varepsilon_t \leq \varepsilon_c < 0 \\ f_{cd} \lambda(\varepsilon_c) & 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \\ f_{cd} & \varepsilon_{c2} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \end{cases} \quad \text{για } \varepsilon_{un} \leq 0 \quad (4.40.\alpha)$$

$$\sigma_c = \begin{cases} 0 & \varepsilon_c < \varepsilon_a \quad \vee \quad \varepsilon_{cu2} < \varepsilon_c \\ f_{cd} \lambda(\varepsilon_{un}) + E_2(\varepsilon_c - \varepsilon_{un}) & \varepsilon_a \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{un} \\ f_{cd} \lambda(\varepsilon_c) & \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \\ f_{cd} & \varepsilon_{c2} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \end{cases} \quad \text{για } 0 < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{c2} \quad (4.40.\beta)$$

$$\sigma_c = \begin{cases} 0 & \varepsilon_c < \varepsilon_b \quad \vee \quad \varepsilon_{cu2} < \varepsilon_c \\ f_{cd} + E_2(\varepsilon_c - \varepsilon_{un}) & \varepsilon_b \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{un} \\ f_{cd} & \varepsilon_{un} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \end{cases} \quad \text{για } \varepsilon_{c2} < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{cu2} \quad (4.40.\gamma)$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_t + \varepsilon_{un} - \frac{\varepsilon_{c2}}{n} \lambda(\varepsilon_{un}) \quad (4.40.\delta)$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_t + \varepsilon_{un} - \frac{\varepsilon_{c2}}{n} \quad (4.40.\epsilon)$$

$$\lambda(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}}\right)^n \quad (4.40.\sigma\tau)$$

Από τις σχέσεις (4.40) για να αποκτήσουμε αξονική και ροπές υπολογίζουμε τα μεγέθη των σχέσεων (4.1). Οι σχέσεις αυτές χρησιμοποιούνται όταν έχουμε σημειακές επιφάνειες. Για παράδειγμα θέλουμε να αφαιρέσουμε την συνεισφορά του σκυροδέματος εκεί που βρίσκεται διαμήκης οπλισμός.

Η σχέση (4.41) που αποτελεί σύνορο μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου σκέλους της συνάρτησης (4.40.β) είναι μη γραμμική για τα y, z . Για σκυροδέματα με $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ μπορεί να επιλυθεί ως προς y γιατί είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ($n=2$). Όπως αναφέρθηκε στις παραγράφους 4.2.1.2.1 και 4.2.1.3 δεν μπορεί να εξασφαλιστεί συνέχεια στην ολοκληρωμένη συνάρτηση σε αυτό το σύνορο.

$$g(y, z) = \varepsilon_c - \varepsilon_a = 0 \quad (4.41)$$

Όπως αναλυτικά αναφέρεται στην παράγραφο 4.2.1.3 είτε θα ολοκληρώσουμε με διπλό ολοκλήρωμα όλη τη διατομή, είτε το σύνορο της σχέσης (4.41) θα χωρίσει το σύνορο της διατομής σε δύο ξεχωριστά σύνορα, εκ των οποίων θα ολοκληρώσουμε το ένα και το άλλο θα το αγνοήσουμε γιατί είναι μηδέν.

Για να πάμε σε ολοκλήρωση επί του συνόρου (επικαμπύλιο) ολοκληρώνουμε αόριστα κατά y τις σχέσεις (4.1). Για τη συνέχεια αναφέρθηκε το τι ισχύει.

Οι επικαμπύλιες σχέσεις δεν αναφέρονται γραπτώς στην παρούσα εργασία γιατί το μέγεθός τους είναι αρκετά μεγάλο. Είναι διαθέσιμες σε κώδικα C++, στην παρακάτω κλήση του αρχείου `concreteEC2b_integration_formulas.cpp`.

```
std::array<double, 12> // NM, MyM, MzM και οι παράγωγοί τους
ConcreteEC2bArea::istress(
  const std::array<double, 2> &p, // συντεταγμένες y,z της κορυφής
  const std::array<double, 3> &strain, // a,b,c του επιπέδου παραμόρφωσης
  const Settings &settings) const; // ρυθμίσεις ολοκλήρωσης
```

Για να πάμε σε ολοκλήρωση επί των κορυφών του συνόρου, αντικαθιστούμε το y όπως στη σχέση (4.33) και ολοκληρώνουμε αόριστα κατά z τις επικαμπύλιες σχέσεις. Για τη συνέχεια αναφέρθηκε το τι ισχύει.

Αντίστοιχα, οι σχέσεις επί των κορυφών του συνόρου δεν αναφέρονται πουθενά γραπτώς στην παρούσα εργασία γιατί το μέγεθός τους δεν είναι διαχειρίσιμο από άνθρωπο. Είναι διαθέσιμες σε κώδικα C++, στην παρακάτω κλήση του αρχείου `ConcreteEC2b_integration_formulas.cpp`.

```
std::array<double, 12> // NMM, MyMM, MzMM και οι παράγωγοί τους
ConcreteEC2bArea::iistress(
  const std::array<double, 2> &p, // συντεταγμένες y,z της κορυφής
  const std::array<double, 2> &de, // d,e της ακμής y=d*z+e
  const std::array<double, 3> &strain, // a,b,c του επιπέδου παραμόρφωσης
  const Settings &settings) const; // ρυθμίσεις ολοκλήρωσης
```

Ο αλγόριθμος επιβολής παραμορφώσεων έχει ως ακολούθως, προκειμένου να βοηθάει τις μαθηματικές πράξεις:

— Αρχικά το «παρθένο» υλικό έχει σε όλη τη διατομή, δηλαδή σε όλη την ομάδα ινών Ω που είναι μια και μοναδική $a_{un}=b_{un}=c_{un}=0 \Rightarrow \varepsilon_{un}(y,z)=0$ (σχέση 3.2).

— Κάθε φορά που η διατομή παραμορφώνεται, οδηγείται σε $\varepsilon_c(y,z)$.

— Για κάθε ομάδα ινών Ω της διατομής η ολοκλήρωση στα εντατικά μεγέθη γίνεται ανεξάρτητα, σε τέσσερις (το πολύ) περιοχές που καθορίζονται από τις σχέσεις $\varepsilon_{un} \leq 0$, $0 < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{c3}$, $\varepsilon_{c3} < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{cu3}$ και $\varepsilon_{cu3} < \varepsilon_{un}$.

— Αφού γίνει η ολοκλήρωση και πάρουμε τα εντατικά μεγέθη, τότε, σε περιοχή A της ομάδας ινών Ω , όπου $\varepsilon_{un}(y,z) \leq \varepsilon_c(y,z)$ για κάθε (x,y) και σε περιοχή B της ομάδας ινών Ω , όπου $\varepsilon_{un}(y,z) > \varepsilon_c(y,z)$ για κάθε (x,y) , θέτουμε $a_{un}=a$, $b_{un}=b$, $c_{un}=c$ δηλα-

δη $\varepsilon_{un}(y, z) = \varepsilon_c(y, z)$. Επίσης ονομάζουμε περιοχή $C = \Omega \setminus (A \cup B)$.

— Αν $C \neq \emptyset \wedge A \cup B \neq \emptyset$, τότε η ομάδα ινών Ω διαχωρίζεται σε δύο ομάδες ινών: την C και την $A \cup B$.

Υπενθυμίζεται ότι αν δυο ομάδες ινών βρεθούν να έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά (a_{un}, b_{un}, c_{un}) και ε_t επανενώνονται σε μία.

4.8. Ολοκλήρωση Σχέσης για τη Μη Γραμμική Ανάλυση

Επαναλαμβάνουμε τη σχέση (2.14), τέσσερις φορές, μια για κάθε μια από τις περιπτώσεις $\varepsilon_{un} \leq 0$, $0 < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{cu1} \wedge \varepsilon_{lo} = \varepsilon_{un}$, $0 < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{cu1} \wedge \varepsilon_{pl} + \varepsilon_t \leq \varepsilon_{lo} < \varepsilon_{un}$ και $\varepsilon_{cu1} < \varepsilon_{un}$.

Για την περίπτωση $\varepsilon_{un} \leq 0$ η σχέση (2.14) τροποποιείται όπως στη σχέση (4.42.α).

Για την περίπτωση $0 < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{cu1} \wedge \varepsilon_{lo} = \varepsilon_{un}$ η σχέση (2.14) τροποποιείται όπως στη σχέση (4.42.β).

Για την περίπτωση $0 < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{cu1} \wedge \varepsilon_{pl} + \varepsilon_t \leq \varepsilon_{lo} < \varepsilon_{un}$ η σχέση (2.14) τροποποιείται όπως στη σχέση (4.42.γ).

Για την περίπτωση $\varepsilon_{cu3} < \varepsilon_{un}$ η διατομή έχει αστοχήσει και όλα τα εντατικά μεγέθη είναι μηδέν.

$$\sigma_c = \begin{cases} 0 & \varepsilon_c < \varepsilon_t \vee \varepsilon_{cu1} < \varepsilon_c \\ E_{cm} \varepsilon_c & \varepsilon_t \leq \varepsilon_c < 0 \\ \lambda(\varepsilon_c) & 0 \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{cu1} \end{cases} \quad \text{για } \varepsilon_{un} \leq 0 \quad (4.42.\alpha)$$

$$\sigma_c = \begin{cases} 0 & \varepsilon_c < \varepsilon_{pl} + \varepsilon_t \vee \varepsilon_{cu1} < \varepsilon_c \\ E_t(\varepsilon_c - \varepsilon_{pl}) & \varepsilon_{pl} + \varepsilon_t \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{pl} \\ \lambda_{un}(\eta_{un}) & \varepsilon_{pl} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{un} \\ \lambda(\varepsilon_c) & \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu1} \end{cases} \quad \text{για } 0 < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{cu1} \wedge \varepsilon_{lo} = \varepsilon_{un} \quad (4.42.\beta)$$

$$\sigma_c = \begin{cases} 0 & \varepsilon_c < \varepsilon_{pl} + \varepsilon_t \vee \varepsilon_{cu1} < \varepsilon_c \\ E_t(\varepsilon_c - \varepsilon_{pl}) & \varepsilon_{pl} + \varepsilon_t \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{pl} \\ \lambda_{un}(\eta) & \varepsilon_{pl} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{lo} \\ \sigma_{lo} + E_{lo}(\varepsilon_c - \varepsilon_{lo}) & \varepsilon_{lo} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{re} \\ \lambda(\varepsilon_c) & \varepsilon_{re} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu1} \end{cases} \quad \text{για } 0 < \varepsilon_{un} \leq \varepsilon_{cu1} \wedge \varepsilon_{pl} + \varepsilon_t \leq \varepsilon_{lo} < \varepsilon_{un} \quad (4.42.\gamma)$$

$$\lambda(\varepsilon_c) = f_{cm} \frac{(k \varepsilon_{c1} - \varepsilon_c) \varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}^2 + \varepsilon_{c1}(k-2)\varepsilon_c} \quad (4.42.\delta)$$

$$\lambda_{un}(\eta_{un}) = \sigma_{un} \left(1 - \frac{(k_{un} - \eta_{un})\eta_{un}}{1 + (k_{un} - 2)\eta_{un}} \right) \quad (4.42.ε)$$

Από τις σχέσεις (4.42) για να αποκτήσουμε αξονική και ροπές υπολογίζουμε τα μεγέθη των σχέσεων (4.1). Οι σχέσεις αυτές χρησιμοποιούνται όταν έχουμε σημειακές επιφάνειες. Για παράδειγμα θέλουμε να αφαιρέσουμε την συνεισφορά του σκυροδέματος εκεί που βρίσκεται διαμήκης οπλισμός ή τένοντες.

Οι περιπτώσεις (4.42.β) και (4.42.γ) δεν μπορούν να ολοκληρωθούν κατά y . Οπότε σε περιπτώσεις αποφόρτισης και επαναφόρτισης χρησιμοποιούμε αναγκαστικά διπλή ολοκλήρωση στη διατομή.

Για να πάμε σε ολοκλήρωση επί του συνόρου (επικαμπύλιο) για τη σχέση (4.42.α), ολοκληρώνουμε αόριστα κατά y τις σχέσεις (4.1) και προκύπτουν οι επικαμπύλιες σχέσεις για τις οποίες η συνέχεια στα σύνορα των περιοχών $\varepsilon_c < \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \leq \varepsilon_c < 0$, $0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu1}$, $\varepsilon_{cu1} < \varepsilon_c$ έχει εξασφαλιστεί.

Οι επικαμπύλιες σχέσεις δεν αναφέρονται γραπτώς στην παρούσα εργασία. Υπάρχουν μόνο στον κώδικα Mathematica που συνοδεύει την εργασία.

Για να πάμε σε ολοκλήρωση επί των κορυφών του συνόρου για τη σχέση (4.42.α), αντικαθιστούμε το y όπως στη σχέση (4.33) και ολοκληρώνουμε αόριστα κατά z τις επικαμπύλιες σχέσεις οπότε προκύπτουν οι σχέσεις επί των κορυφών του συνόρου. Για τη συνέχεια, ισχύει κι εδώ ότι αναφέρθηκε προηγουμένως για τις επικαμπύλιες σχέσεις.

Οι σχέσεις επί των κορυφών του συνόρου δεν αναφέρονται γραπτώς στην παρούσα εργασία. Υπάρχουν μόνο στον κώδικα Mathematica και στον κώδικα C++ που συνοδεύει την εργασία. Το μέγεθός τους δεν είναι εύκολα διαχειρίσιμο από άνθρωπο. Ούτε χωράνε σε κόλλα A1. Στον κώδικα C++ βρίσκονται στο αρχείο concreteEC2a_formulas.cpp, στην κλήση:

```
std::array<double, 9> // NMM, MyMM, MzMM και οι παράγωγοί τους
ConcreteEC2a::iistress(
    const std::array<double, 2> &p, // συντεταγμένες y,z της κορυφής
    const std::array<double, 2> &de, // d,e της ακμής y=d*z+e
    const std::array<double, 3> &strain, // a,b,c του επιπέδου παραμόρφωσης
    const IntegrationSettings &settings // ρυθμίσεις ολοκλήρωσης
) const;
```

Η ιστορία του υλικού ενημερώνεται με επιβαλλόμενες παραμορφώσεις στο υλικό. Με

την πρώτη επιβολή παραμόρφωσης στο υλικό, η διατομή διακριτοποιείται σε δύο διαστάσεις (επιφανειακά) και μετά από αυτό τα εντατικά μεγέθη προκύπτουν από διπλή ολοκλήρωση. Η ολοκλήρωση επί των κορυφών δηλαδή, ισχύει μόνο για την πρώτη φόρτιση της διατομής ή για φορτίσεις μονοτονικά προσαυξητικές.

4.9. Ολοκλήρωση Σχέσης Χάλυβα με Κινηματική Κράτυνση

Όταν πρόκειται για χάλυβα σπλισμού και χάλυβα προέντασης, δεν απαιτείται ολοκλήρωση σε επικαμπύλιες συναρτήσεις και συναρτήσεις στις κορυφές του συνόρου γιατί δεν υπάρχει σύνορο. Θεωρούμε ότι οι ράβδοι τόσο του χάλυβα σπλισμού, όσο και οι τένοντες είναι σημειακοί και χρησιμοποιούμε τάση επί επιφάνεια διατομής.

Για το δομικό χάλυβα όμως μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη σχέση (2.17.α).

Δεν είναι δυνατόν να πετύχουμε συνέχεια, στην ολοκληρωμένη συνάρτηση, για περιοχές της διατομής με διαφορετικό ε_0 . Οπότε κάθε περιοχή με διαφορετικό ε_0 ολοκληρώνεται ξεχωριστά.

Για να πάμε σε ολοκλήρωση επί του συνόρου (επικαμπύλιο) ολοκληρώνουμε αόριστα κατά y τις σχέσεις (4.1) και προκύπτουν οι επικαμπύλιες σχέσεις για τις οποίες η συνέχεια στα σύνορα των περιοχών $\varepsilon < -\varepsilon_u$, $-\varepsilon_u \leq \varepsilon < -\varepsilon_y$, $-\varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_y$, $\varepsilon_y < \varepsilon \leq \varepsilon_u$, $\varepsilon_u < \varepsilon$ έχει εξασφαλιστεί.

Οι επικαμπύλιες σχέσεις δεν αναφέρονται γραπτώς στην παρούσα εργασία. Υπάρχουν μόνο στον κώδικα Mathematica που συνοδεύει την εργασία.

Για να πάμε σε ολοκλήρωση επί των κορυφών του συνόρου, αντικαθιστούμε το y όπως στη σχέση (4.33) και ολοκληρώνουμε αόριστα κατά z τις επικαμπύλιες σχέσεις οπότε προκύπτουν οι σχέσεις επί των κορυφών του συνόρου. Για τη συνέχεια, ισχύει κι εδώ ότι αναφέρθηκε προηγουμένως για τις επικαμπύλιες σχέσεις.

Οι σχέσεις επί των κορυφών του συνόρου δεν αναφέρονται γραπτώς στην παρούσα εργασία. Υπάρχουν μόνο στον κώδικα Mathematica και στον κώδικα C++ που συνοδεύει την εργασία. Το μέγεθός τους δεν είναι εύκολα διαχειρίσιμο από άνθρωπο. Ούτε χωράνε σε κόλλα A1. Στον κώδικα C++ βρίσκονται στο αρχείο `SteelKinematicHardening_formulas.cpp`, στην κλήση:

```

std::array<double, 9>          // NMM, MyMM, MzMM και οι παράγωγοί τους
SteelKinematicHardeningArea::iistress(
  const std::array<double, 2> &p,      // συντεταγμένες y,z της κορυφής
  const std::array<double, 2> &de,    // d,e της ακμής y=d*z+e
  // Χαρακτηριστική της ιστορίας του υλικού
  const std::array<double, 3> &plastic_strain,
  const std::array<double, 3> &strain, // a,b,c του επιπέδου παραμόρφωσης
  const IntegrationSettings &settings // ρυθμίσεις ολοκλήρωσης
) const;

```

Η ιστορία του υλικού ενημερώνεται με επιβαλλόμενες παραμορφώσεις στο υλικό, ξεχωριστά για κάθε ομάδα ινών:

— Υποθέτουμε ότι στην ομάδα ινών Ω επιβάλλουμε την παραμόρφωση $\varepsilon(y, z)$ με συντελεστές a, b, c . Η ομάδα ινών Ω είχε προηγούμενη «ιστορία» $\varepsilon_0(y, z)$ με συντελεστές a_0, b_0, c_0 . Αν προηγουμένως το υλικό ήταν «παρθένο» τότε $a_0=b_0=c_0=0 \Rightarrow \varepsilon_0(y, z)=0$ (σχέση 3.2).

— Σε περιοχή A της ομάδας ινών Ω , όπου $\varepsilon_u < \varepsilon(y, z)$ ή $\varepsilon(y, z) < -\varepsilon_u$ για κάθε (x, y) , θέτουμε $a_0=0, b_0=0, c_0=+\infty$ δηλαδή $\varepsilon_0(y, z)=+\infty$.

— Σε περιοχή B της ομάδας ινών $\Omega \setminus A$, όπου $\varepsilon_0(x, y) + \varepsilon_y < \varepsilon(y, z)$ για κάθε (x, y) , θέτουμε $a_0=a, b_0=b, c_0=c - \varepsilon_y$ δηλαδή $\varepsilon_0(y, z) = \varepsilon(y, z) - \varepsilon_y$.

— Σε περιοχή C της ομάδας ινών $\Omega \setminus (A \cup B)$, όπου $\varepsilon(y, z) < \varepsilon_0(x, y) - \varepsilon_y$ για κάθε (x, y) , θέτουμε $a_0=a, b_0=b, c_0=c + \varepsilon_y$ δηλαδή $\varepsilon_0(y, z) = \varepsilon(y, z) + \varepsilon_y$.

— Την περιοχή $D = \Omega \setminus (A \cup B \cup C)$ την αφήνουμε ως έχει.

Από το παραπάνω φαίνεται ότι η ιστορία του υλικού, μπορεί να διαιρέσει μια ομάδα ινών σε άλλες τέσσερις το πολύ ομάδες ινών.

5. Ισορροπία Διατομής

5.1. Μέθοδος Newton-Raphson

Στην παράγραφο 4 προσδιορίσαμε τις συναρτήσεις με τις οποίες οδηγούμαστε από το διάνυσμα $\vec{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, όπου $\varepsilon = -ay + bz + c$ στα μεγέθη του διανύσματος $\vec{F} = \begin{bmatrix} M_z \\ M_y \\ N \end{bmatrix}$. Αν λοιπόν το \vec{X} είναι γνωστό, μπορούμε να προσδιορίσουμε το \vec{F} .

Αν τώρα εφαρμόσουμε κάποια εντατικά μεγέθη επί της διατομής, θα πρέπει να προσδιορίσουμε την ανυγμένη παραμόρφωση. Δηλαδή αν είναι γνωστό το \vec{F} θα πρέπει να προσδιορίζουμε το \vec{X} .

Ο προσδιορισμός αυτός προκύπτει με επαναλήψεις της μεθόδου NR:

$$\vec{F} - \vec{F}_0 = [\nabla \vec{F}_0] \cdot (\vec{X} - \vec{X}_0) \Rightarrow [\nabla \vec{F}_0] \cdot \vec{X} = \vec{F} - \vec{F}_0 + [\nabla \vec{F}_0] \cdot \vec{X}_0 \Rightarrow \vec{X} = [\nabla \vec{F}_0]^{-1} \cdot (\vec{F} - \vec{F}_0) + \vec{X}_0 \quad (5.1)$$

Σαν αρχικές συνθήκες λαμβάνουμε πάντα την κατάσταση της προηγούμενης φόρτισης στην ιστορία του υλικού. Δηλαδή για παρθένο υλικό $\vec{X}_0 = \vec{F}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$. Ειδάλλως υπάρχει σημαντικός κίνδυνος να μην έχουμε σύγκλιση σε σημείο ισορροπίας.

Η τρίτη μορφή της σχέσης δίνει τη λύση ως προς \vec{X} , αλλά επειδή η αντιστροφή πίνακα είναι αντιαποδοτική, προτιμάται η δεύτερη μορφή της σχέσης, όπου λύνεται ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων 3×3 .

Συνήθως απαιτούνται ελάχιστες επαναλήψεις (4-8) για να επιτευχθεί μια ακρίβεια έκτου ψηφίου. Εξαίρεση αποτελούν δυνάμεις πολύ κοντά στα όρια αντοχής της διατομής, όπου ενδέχεται να χρειαστούν ίσως και 40 επαναλήψεις.

Η έκφραση (5.2) απαιτεί να υπολογιστούν οι παράγωγοι κατά a , b , c , όλων των σχέσεων που υπολογίστηκαν μέχρι τώρα στο κεφάλαιο 4

$$[\nabla \vec{F}] = \begin{bmatrix} \partial_a M_z & \partial_b M_z & \partial_c M_z \\ \partial_a M_y & \partial_b M_y & \partial_c M_y \\ \partial_a N & \partial_b N & \partial_c N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_a M_z & & sym \\ \partial_a M_y & \partial_b M_y & \\ \partial_a N & \partial_b N & \partial_c N \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

5.2. Υπολογισμός Παραγώγων

Για τις επικαμπύλιες σχέσεις, όσο και για τις σχέσεις κορυφών συνόρου, οι μερικές παράγωγοι μπορούν να υπολογιστούν:

- Από τη σχέση $\sigma - \varepsilon$ με παραγωγή και μετά με ολοκλήρωση με εξασφάλιση συνέχειας. Η μέθοδος αυτή είναι πιο κοπιώδης για τον μηχανικό, αλλά δίνει μικρότερες σε μέγεθος σχέσεις. Τα αόριστα ολοκληρώματα των συναρτήσεων που θα προκύψουν θα είναι συμμετρικός πίνακας.

- Από τις ολοκληρωμένες σχέσεις με απλή παραγωγή. Δεν απαιτείται εξασφάλιση συνέχειας. Η μέθοδος αυτή δίνει μεγαλύτερες σε μέγεθος σχέσεις. Τα αόριστα ολοκληρώματα των συναρτήσεων που θα προκύψουν δεν θα είναι συμμετρικός πίνακας. Ωστόσο το ορισμένο ολοκλήρωμα που θα προκύψει ως διαφορά τιμών του αόριστου, θα είναι.

Οι συναρτήσεις των παραγώγων (αόριστο ολοκλήρωμα) που θα προκύψουν από τις δύο μεθόδους δεν θα είναι ίδιες, αλλά επειδή αυτό που ενδιαφέρει είναι η διαφορά (ορισμένο ολοκλήρωμα) και όχι η ίδια η συνάρτηση, δεν μας επηρεάζει.

Δεν παρέχονται γραπτώς στην εργασία οι μερικές παράγωγοι από κανένα υλικό και για καμία συνάρτηση. Όπως προαναφέρθηκε και για τις ίδιες τις συναρτήσεις, οι παράγωγοι παρέχονται μέσω του κώδικα C++. Για παράδειγμα η συνάρτηση `iistress()` του κάθε υλικού, επιστρέφει 9 τιμές. Οι τρεις πρώτες είναι οι τιμές των συναρτήσεων $M_{z,MM}$, $M_{y,MM}$, N_{MM} και οι υπόλοιπες έξι είναι $\partial_a M_{z,MM}$, $\partial_a M_{y,MM}$ ($= \partial_b M_{z,MM}$), $\partial_b M_{y,MM}$, $\partial_a N_{MM}$ ($= \partial_c M_{z,MM}$), $\partial_b N_{MM}$ ($= \partial_c M_{y,MM}$), $\partial_c N_{MM}$.

5.3. Κριτήρια Σύγκλισης

Τα κριτήρια σύγκλισης είναι τα γενικά της μεθόδου NR αλλά και ειδικά που αφορούν το πρόβλημα που εξετάζεται και που εδώ είναι η ισορροπία διατομής.

Τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται είναι τα παρακάτω:

- Αριθμός επαναλήψεων. Αποτελεί γενικό κριτήριο της μεθόδου. Αν ξεπεραστεί π.χ. ένας αριθμός 100 επαναλήψεων, η μέθοδος θεωρείται ότι δεν συγκλίνει. Το κριτήριο αυτό χρησιμοποιείται στον κώδικα αλλά δεν είναι ιδιαίτερα απαραίτητο.

- Η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα είναι μηδέν. Αποτελεί γενικό κριτήριο της με-

θόδου. Θεωρείται ότι δεν έχουμε σύγκλιση.

— Το αποτέλεσμα της μεθόδου δίνει εντατικά μεγέθη πολύ κοντά στα ζητούμενα. Αποτελεί γενικό κριτήριο της μεθόδου. Υπάρχουν δύο τρόποι για να εξακριβωθεί αυτό:

— Κάνοντας χρήση ενός κατωφλιού t , το οποίο είναι ένας μικρός θετικός αριθμός, ασήμαντος για το αποτέλεσμά μας, π.χ. $t=1Nt=10^{-6}$. Τότε αν ισχύει η σχέση $\max(|N-N_i|, |M_y-M_{y,i}|, |M_z-M_{z,i}|) < t$ έχουμε το σωστό αποτέλεσμα.

— Κάνοντας χρήση ενός κατωφλιού t και ενός λόγου k . Και τα δύο είναι μικροί θετικοί αριθμοί, π.χ. 10^{-20} και 10^{-6} αντίστοιχα. Ο λόγος k έχει νόημα αν π.χ. το αποτέλεσμα είναι πολύ μεγάλο, π.χ. της τάξεως του $1GN$ να μην επιδιώκουμε λύση ακρίβειας $1Nt$ αλλά $1GN \cdot k$. Έχουμε το σωστό αποτέλεσμα αν ισχύει η σχέση $|N-N_i| < kN+t \wedge |M_y-M_{y,i}| < kM_y+t \wedge |M_z-M_{z,i}| < kM_z+t$.

— Η διαφορά στο αποτέλεσμα κάθε βήματος είναι το πολύ k φορές μεγαλύτερη από τη πιο μικρή διαφορά με το πραγματικό αποτέλεσμα, σε όλα τα βήματα μέχρι τώρα. Αποτελεί ειδικό κριτήριο που αφορά μόνο την ισορροπία. Οφείλεται στο γεγονός ότι οι παράγωγοι όσο είμαστε στο μηδέν είναι πολύ απότομες, ενώ όσο απομακρυνόμαστε από το μηδέν μαλακώνουν και κάποια στιγμή μηδενίζονται. Κατόπιν όταν η αντοχή ξεπεραστεί γίνονται αρνητικές. Στην περιοχή αυτή δεν είναι δυνατόν να υπάρξει ισορροπία. Τέλος ξαναμηδενίζονται όταν ολοκληρη η διατομή έχει αστοχήσει. Το κριτήριο λέει ότι δεν μπορεί να επιτευχθεί σύγκλιση αν ισχύει για κάθε $j=0 \dots i-1$. $|N-N_i| > k \cdot \min(|N-N_j|) \wedge |M_y-M_{y,i}| > k \cdot \min(|M_y-M_{y,j}|) \wedge |M_z-M_{z,i}| > k \cdot \min(|M_z-M_{z,j}|)$. Μπορούμε να λάβουμε $k=8$ και είναι πολύ υπέρ της ασφαλείας έναντι εσφαλμένης διακοπής χωρίς σύγκλιση.

5.4. Εντατικά Μεγέθη και Παραμορφώσεις Σχετίζονται Ένα Προς Ένα;

Ένας από τους ελέγχους που μπορούμε να κάνουμε για να εξασφαλίσουμε ότι δεν υπάρχει κάποιο σφάλμα σε υπολογισμούς και σχέσεις, είναι να λαμβάνουμε τυχαίες παραμορφώσεις A και ολοκληρώνοντας τη διατομή να λάβουμε τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη B . Ακολουθώντας να εφαρμόσουμε στη διατομή τα εντατικά μεγέθη B και να πάρουμε παραμόρφωση στη διατομή Γ . Ο έλεγχος θα ελέγχει αν ισχύει $A=\Gamma$ οπότε αν αυτό επαναληφθεί για πάρα πολλές τυχαίες αρχικές παραμορφώσεις A , για τις οποίες όμως μπορεί να

συγκλίνει η ισορροπία, τότε μπορούμε να πούμε με σχετική βεβαιότητα ότι δεν υπάρχει κάποιο λάθος στην εργασία μας.

Προϋπόθεση για να ισχύει $A=G$, είναι τα εντατικά μεγέθη και οι παραμορφώσεις να σχετίζονται με σχέση 1-1. Είναι όμως αυτό αληθές;

Για το χάλυβα είναι. Για σκυρόδεμα που είναι ολόκληρο σε κατάσταση 2, είναι. Για σκυρόδεμα όμως που βρίσκεται σε κατάσταση 1 δεν είναι. Γύρω από την περιοχή του ορίου εφελκυστικής ρηγματώσεως μπορούν διαφορετικές παραμορφώσεις να δώσουν τα ίδια εντατικά μεγέθη.

Άρα ο έλεγχος δεν είναι σωστός. Θα πρέπει να αντιστραφεί: Λαμβάνοντας τυχαία εντατικά μεγέθη A οδηγούμαστε σε παραμορφώσεις B . Εφαρμόζοντας τις παραμορφώσεις B στη διατομή, θα πρέπει να λαμβάνουμε εντατικά μεγέθη ίδια με τα A .

6. Υπολογισμός M_{Rd}

6.1. Περιγραφή του Προβλήματος

Το διάνυσμα των εντατικών μεγεθών που ασκούνται στη διατομή είναι $\vec{F}=[N \ M \ M_{Rd}]^T$. Στο διάνυσμα αυτό, είναι γνωστά τα N και M (συνθήκες ή δεσμεύσεις) και άγνωστο το M_{Rd} για το οποίο αναζητούμε την ακρότατη τιμή που μπορεί να λάβει. Άρα έχουμε υπολογισμό ακροτάτου υπό συνθήκες. Ας θεωρήσουμε ότι ο άξονας στον οποίο έχουμε τη ροπή M είναι ο $\vec{u}=[u_y \ u_z]^T$ και ο άξονας $\vec{v}=[v_y \ v_z]^T=[-u_z \ u_y]^T$ της M_{Rd} είναι 90° αντιωρολογιακά του \vec{u} .

6.1.1. Μέθοδος Πολλαπλασιαστών Lagrange με Newton-Raphson

Ο υπολογισμός ακροτάτου υπό συνθήκες οδηγεί στη χρήση της μεθόδου πολλαπλασιαστών Lagrange. Η μέθοδος είναι δυνατό να εφαρμοστεί με τη μέθοδο Newton-Raphson, επαναληπτικά.

Έχουμε μια συνάρτηση $f(\vec{X})$ που στην περίπτωση μας είναι η βαθμωτή σχέση $M_{\vec{v}}(a, b, c)$, τριών ανεξαρτήτων μεταβλητών. Αναζητούμε το ακρότατο της συνάρτησης αυτής, υπό τις δεσμεύσεις $\vec{\varphi}(\vec{X})=\vec{0}$ που στην περίπτωση μας είναι οι δύο βαθμωτές σχέσεις $N(a, b, c)-N=0$ και $M_{\vec{u}}(a, b, c)-M=0$, τριών ανεξαρτήτων μεταβλητών. Ορίζουμε μια συνάρτηση $F(\vec{X}, \vec{\lambda})=f(\vec{X})+\vec{\lambda} \cdot \vec{\varphi}(\vec{X})$ που στην περίπτωση μας είναι $F(a, b, c, \lambda_1, \lambda_2)=M_{\vec{v}}(a, b, c)+\lambda_1(N(a, b, c)-N)+\lambda_2(M_{\vec{u}}(a, b, c)-M)$, πέντε ανεξαρτήτων μεταβλητών. Τα ακρότατα πρέπει να αναζητηθούν στις λύσεις της εξίσωσης $\vec{\nabla}_{\vec{X}, \vec{\lambda}} F(\vec{X}, \vec{\lambda})=\vec{0}$

που στην περίπτωση μας είναι

$$\begin{bmatrix} \partial_a M_{\vec{v}} + \lambda_1 \partial_a N + \lambda_2 \partial_a M_{\vec{u}} \\ \partial_b M_{\vec{v}} + \lambda_1 \partial_b N + \lambda_2 \partial_b M_{\vec{u}} \\ \partial_c M_{\vec{v}} + \lambda_1 \partial_c N + \lambda_2 \partial_c M_{\vec{u}} \\ N(a, b, c) - N \\ M_{\vec{u}} - M = 0 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Επειδή η παραπάνω εξίσωση είναι μη γραμμική δεν μπορεί να λυθεί. Για να λυθεί πρέπει να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος NR και η μέθοδος να προσαρμοστεί όπως παρακάτω:

$$\vec{X} = [a \ b \ c]^T \quad (6.1.\alpha)$$

$$\vec{\phi}(\vec{X}) = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \partial_a N_i(a-a_i) + \partial_b N_i(b-b_i) + \partial_c N_i(c-c_i) + N_i - N \\ \partial_a M_{\bar{u},i}(a-a_i) + \partial_b M_{\bar{u},i}(b-b_i) + \partial_c M_{\bar{u},i}(c-c_i) + M_{\bar{u},i} - M \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (6.1.\beta)$$

$$f(\vec{X}) = M_{\bar{v},i+1} = \partial_a M_{\bar{v},i}(a-a_i) + \partial_b M_{\bar{v},i}(b-b_i) + \partial_c M_{\bar{v},i}(c-c_i) + M_{\bar{v},i} \quad (6.1.\gamma)$$

$$F(\vec{X}) = F_{i+1} = \partial_a M_{\bar{v},i}(a-a_i) + \partial_b M_{\bar{v},i}(b-b_i) + \partial_c M_{\bar{v},i}(c-c_i) + M_{\bar{v},i} + \lambda_1(\partial_a N_i(a-a_i) + \partial_b N_i(b-b_i) + \partial_c N_i(c-c_i) + N_i - N) + \lambda_2(\partial_a M_{\bar{u},i}(a-a_i) + \partial_b M_{\bar{u},i}(b-b_i) + \partial_c M_{\bar{u},i}(c-c_i) + M_{\bar{u},i} - M) \quad (6.1.\delta)$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{X}, \vec{\lambda}} F(\vec{X}, \vec{\lambda}) = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ \partial_a N_i(a-a_i) + \partial_b N_i(b-b_i) + \partial_c N_i(c-c_i) + N_i - N \\ \partial_a M_{\bar{u},i}(a-a_i) + \partial_b M_{\bar{u},i}(b-b_i) + \partial_c M_{\bar{u},i}(c-c_i) + M_{\bar{u},i} - M \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (6.1.\epsilon)$$

$$A = \partial_a^2 M_{\bar{v},i}(a-a_i) + \partial_{b,a} M_{\bar{v},i}(b-b_i) + \partial_{c,a} M_{\bar{v},i}(c-c_i) + \partial_a M_{\bar{v},i} + \lambda_1(\partial_a^2 N_i(a-a_i) + \partial_{b,a} N_i(b-b_i) + \partial_{c,a} N_i(c-c_i) + \partial_a N_i) + \lambda_2(\partial_a^2 M_{\bar{u},i}(a-a_i) + \partial_{b,a} M_{\bar{u},i}(b-b_i) + \partial_{c,a} M_{\bar{u},i}(c-c_i) + \partial_a M_{\bar{u},i}) \quad (6.1.\sigma\tau)$$

Τα B και C προκύπτουν παραγωγίζοντας την F με b και c αντίστοιχα της A .

Επιλύοντας επαναληπτικά το παραπάνω σύστημα γραμμικών εξισώσεων με NR, μέχρι το \vec{F} να σταθεροποιηθεί, οδηγούμαστε στην M_{Rd} .

Η μέθοδος δεν δύναται να χρησιμοποιηθεί για τους παρακάτω λόγους:

— Απαιτεί αναλυτικές σχέσεις για τις δεύτερες μερικές παραγώγους (π.χ. $\partial_a^2 M_z$, $\partial_{a,b} M_z$ κτλ) κάτι που είναι εξαιρετικά δύσκολο να υπολογιστεί και στην παρούσα εργασία δεν υπολογίζεται.

— Έχει μεγάλο αριθμό εξισώσεων και αγνώστων (σύστημα 5x5).

— Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί μέθοδος υπολογισμού του επόμενου βήματος, βασισμένη στην παράγωγο. Σχετικά στην παράγραφο 6.1.4.

6.1.2. Μέθοδος Πολλαπλασιαστών Lagrange με Secant

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τις δεύτερες παραγώγους με τη μέθοδο Secant. Σε κάθε βήμα απαιτείται να λαμβάνουμε έξι δείγματα των πρώτων παραγώγων, που σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύστημα πέντε αξόνων. Δηλαδή έξι ολοκληρώσεις για κάθε βήμα.

Η μέθοδος δεν δύναται να χρησιμοποιηθεί για τους παρακάτω λόγους:

- Έχει μεγάλο αριθμό εξισώσεων και αγνώστων (σύστημα 5x5).
- Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί μέθοδος υπολογισμού του επόμενου βήματος, βασισμένη στην παράγωγο. Σχετικά στην παράγραφο 6.1.4.

6.1.3. Αντικατάσταση με Secant

Αν αντί να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο πολλαπλασιαστών Lagrange, αντικαθιστούσαμε τις σχέσεις (6.1.β) στη σχέση (6.1.γ), τότε θα είχαμε μια συνάρτηση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής αντί για πέντε.

Τότε με τη μέθοδο Secant θα βρίσκαμε που θα μηδενίζονταν η παράγωγός της και άρα θα εντοπίζαμε το ακρότατό.

Η μέθοδος δεν δύναται να χρησιμοποιηθεί γιατί δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί μέθοδος υπολογισμού του επόμενου βήματος, βασισμένη στην παράγωγο. Σχετικά στην παράγραφο 6.1.4.

6.1.4. Γιατί Δεν Μπορούν να Χρησιμοποιηθούν οι Μέθοδοι NR και Secant

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η $M_{\bar{v}}(a, b, c)$ είναι βαθμωτή συνάρτηση τριών ανεξαρτήτων μεταβλητών, έχοντας δύο δεσμεύσεις για την N και $M_{\bar{u}}$, δηλαδή δύο σχέσεις, οδηγούμαστε σε συνάρτηση μιας μεταβλητής $M_{\bar{v}}(a \text{ ή } b \text{ ή } c)$ ή εναλλακτικά $M_{\bar{v}}(\varepsilon)$.

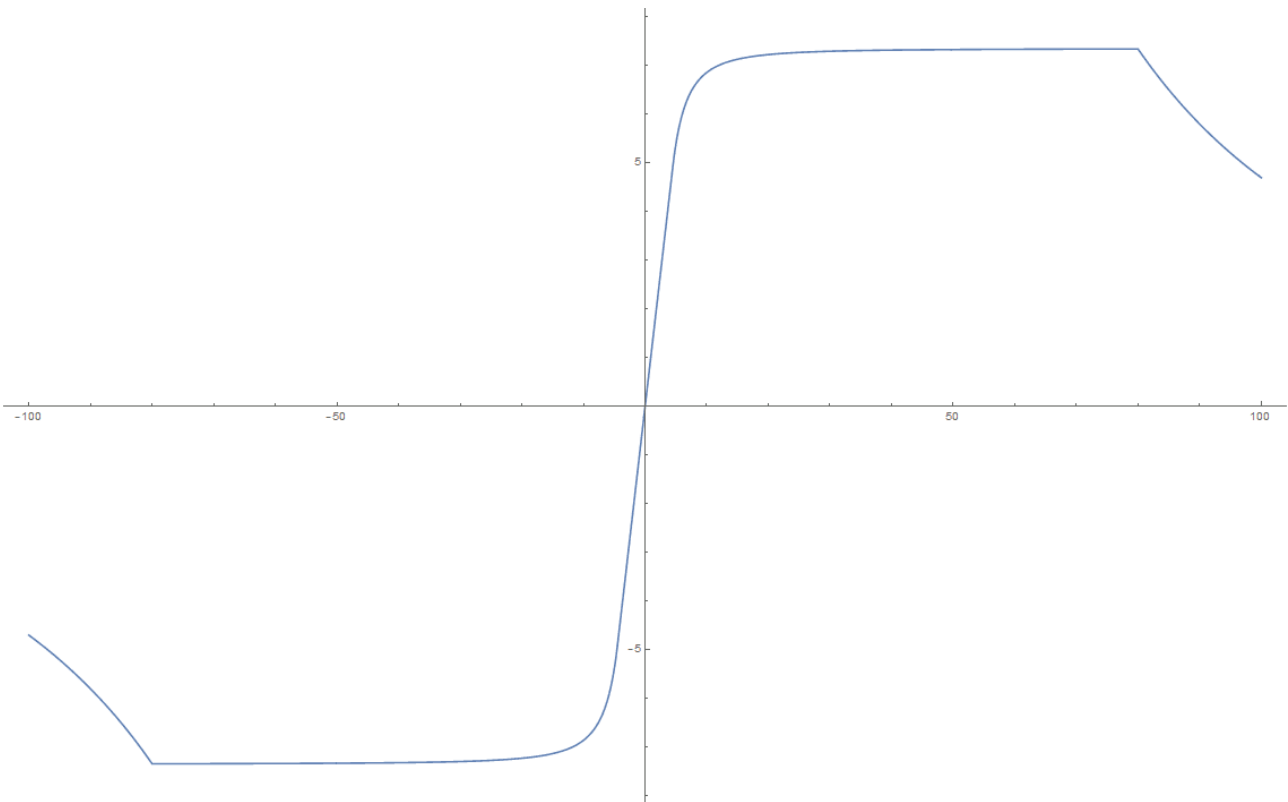
Για να έχουμε μια εικόνα τι αντιμετωπίζουμε, στα σχήματα 6.1, 6.2 και 6.3 αντίστοιχα, παρουσιάζονται τα διαγράμματα της $M_{\bar{v}}(\varepsilon)$, της $M'_{\bar{v}}(\varepsilon)$ και της $M''_{\bar{v}}(\varepsilon)$ μιας εφαρμογής. Απλοποιητικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι οι $\sin(x)$, $\cos(x)$ και $-\sin(x)$ αντίστοιχα.

Η M_{Rd} παρουσιάζεται στη μέγιστη τιμή, δηλαδή για $\varepsilon=80\%$. Σε εκείνο το σημείο η παράγωγός της είναι μηδέν, όπως αναμένονταν και η δεύτερη παράγωγος αρνητική, όπως αναμένονταν (αν και σχεδόν μηδέν).

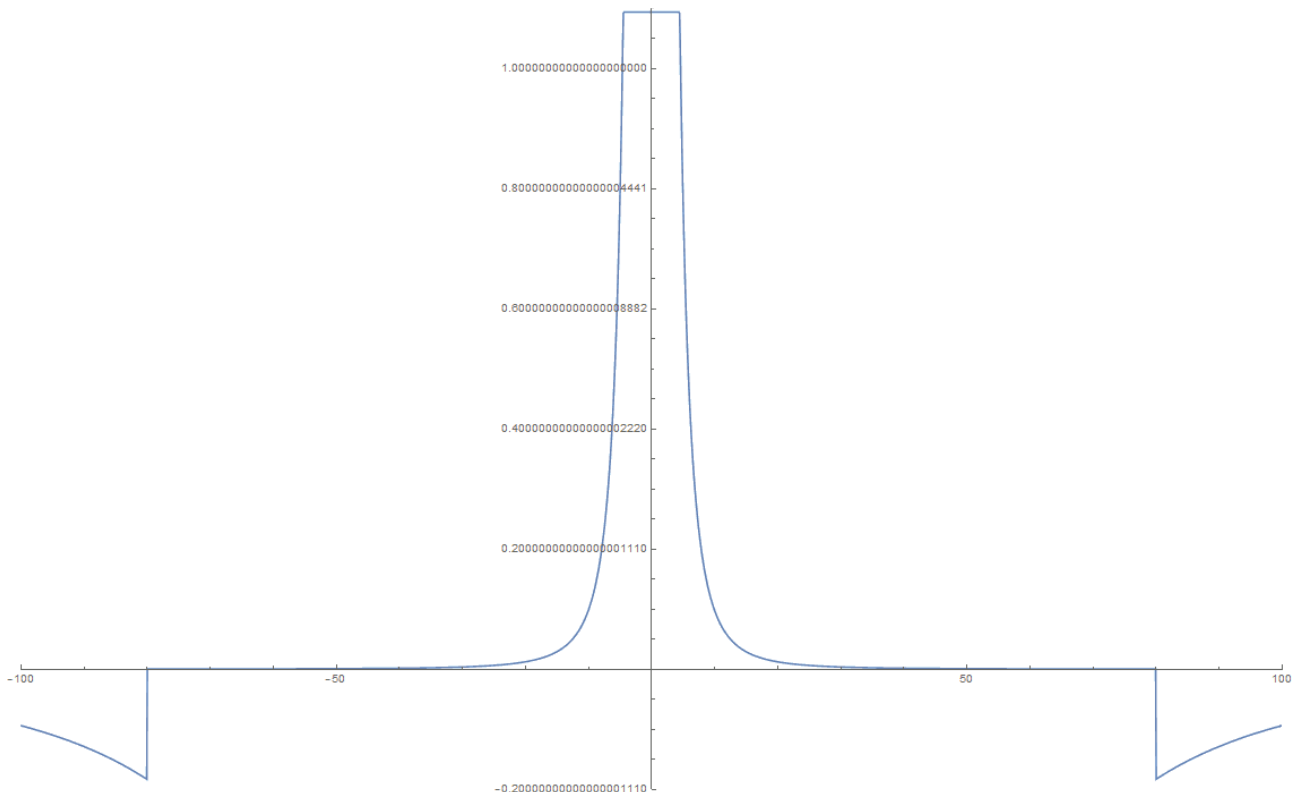
Παρατηρώντας την παράγωγο, διαπιστώνουμε ότι δεν μπορούμε να την αξιοποιήσουμε ιδιαίτερα:

- Αν ξεκινήσουμε από το σημείο $\varepsilon=0$ και πάρουμε την εφαπτομένη στην παράγωγο για να βρούμε που μηδενίζει (μέθοδος Newton-Raphson), διαπιστώνουμε ότι αυτή

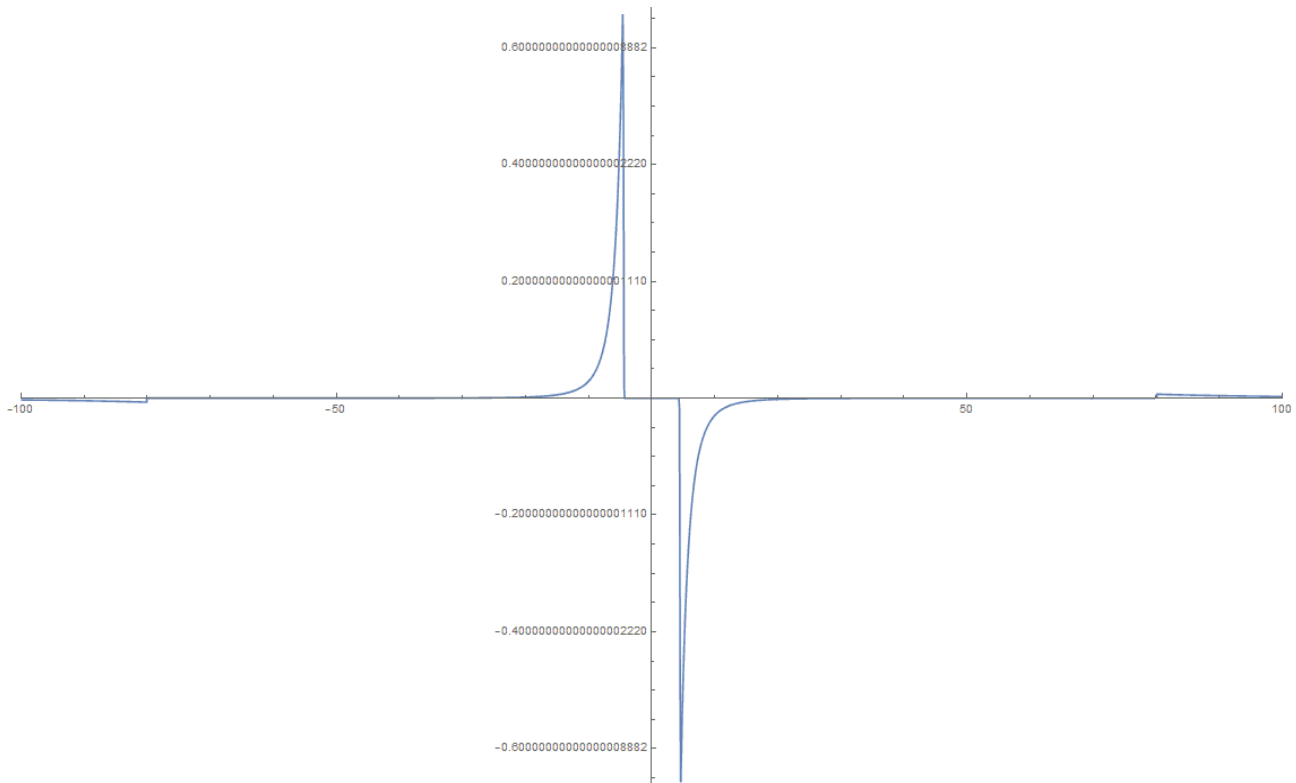
μηδενίζει στο $+\infty$ γιατί η διατομή στην αρχή είναι εντελώς ελαστική άρα έχει πρώτη παράγωγο σταθερή και δεύτερη παράγωγο μηδενική.



Σχήμα 6.1: Σχέση M-ε χάλυβα δίχως κράτυνση
Αφορά τετράγωνη δοκό, πλευράς 50cm, με $E=210GPa$, $f_y=235MPa$, $\epsilon_u=20\%$



Σχήμα 6.2: Σχέση M'-ε χάλυβα δίχως κράτυνση



Σχήμα 6.3: Σχέση M'' - ε χάλυβα δίχως κράτυνση

— Αν ξεκινήσουμε από ένα σημείο μετά την ελαστικότητα αλλά πριν την M_{Rd} , η σύγκλιση θα είναι εξαιρετικά αργή λόγω του πως διαμορφώνεται η πρώτη παράγωγος. Επιπλέον αρχικά δε γνωρίζουμε ένα τέτοιο σημείο για να το κάνουμε σημείο εκκίνησης.

— Αν ξεκινήσουμε από ένα σημείο μετά την M_{Rd} αλλά πριν την αστοχία, η σύγκλιση μας οδηγεί στην αστοχία όπου $M_{\bar{\nu}}=0$ και όχι στην M_{Rd} . Και πάλι δεν γνωρίζουμε ένα τέτοιο σημείο για να το κάνουμε σημείο εκκίνησης.

Η παραπάνω διαπίστωση έχει σημαντικό αντίκτυπο στη μέθοδο που θα ακολουθηθεί. Αποδεικνύει ότι δεν πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους που βασίζονται στην παράγωγο για την εύρεση του επόμενου βήματος. Άρα η μέθοδος Newton-Raphson και Secant δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

6.2. Επίλυση με διπλασιασμό και διχοτόμηση

Έχουμε καταλήξει, ότι με αντικατάσταση των σχέσεων (6.1.β) στη σχέση (6.1.γ), μετατρέπουμε τη συνάρτηση $M_{\bar{\nu}}$ σε συνάρτηση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής.

Επίσης έχουμε καταλήξει, ότι όποια επαναληπτική μέθοδο κι αν χρησιμοποιήσουμε, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε παράγωγο για τον προσδιορισμό του σημείου του

επομένου βήματος.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, μέθοδος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί, είναι η μέθοδος της διχοτόμησης Bolzano ή και η Regula Falsi.

Όμως δεν έχουμε κάποιο κλειστό διάστημα για να την εφαρμόσουμε. Έχουμε ένα σημείο το οποίο είναι η τελευταία κατάσταση στην ιστορία της διατομής, που για «παρθένο» υλικό είναι το σημείο μηδέν.

Η μέθοδος που περιγράφεται παρακάτω, αποτελεί τη γενικευμένη μέθοδο διπλασιασμού – διχοτόμησης. Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε στον αλγόριθμο εύρεσης της M_{Rd} βασίζεται πάνω σε αυτή αλλά είναι τροποποιημένη.

1. Βρισκόμαστε σε ένα δοσμένο αρχικό σημείο. Στην περίπτωση μας, αυτό είναι το σημείο της τελευταίας κατάστασης στην ιστορία της διατομής, που για «παρθένο» υλικό είναι το σημείο μηδέν.

2. Ελέγχουμε αν στο αρχικό σημείο έχουμε αστοχία. Αν ναι, τερματίζουμε με αποτυχία.

3. Έχουμε την τιμή L ενός αρχικού άλματος από το αρχικό σημείο στο επόμενο. Στην περίπτωση μας, επειδή το άλμα είναι σε μονάδες παραμόρφωσης, καλές τιμές είναι από 0.1 ως 3. Κάθε θετική τιμή είναι αποδεκτή αλλά η τιμή π.χ. 10^{100} ή 10^{-100} θα αργήσει πολύ να συγκλίνει σε λύση. Οποσδήποτε όμως θα συγκλίνει.

4. Αν το L είναι πολύ μικρό, τερματίζουμε με επιτυχία.

5. Μετακινούμαστε στο επόμενο σημείο το οποίο γίνεται τρέχον, και το οποίο απέχει από το προηγούμενο απόσταση L .

6. Ελέγχουμε αν στο τρέχον σημείο έχουμε αστοχία.

— Αν έχουμε αστοχία, τότε:

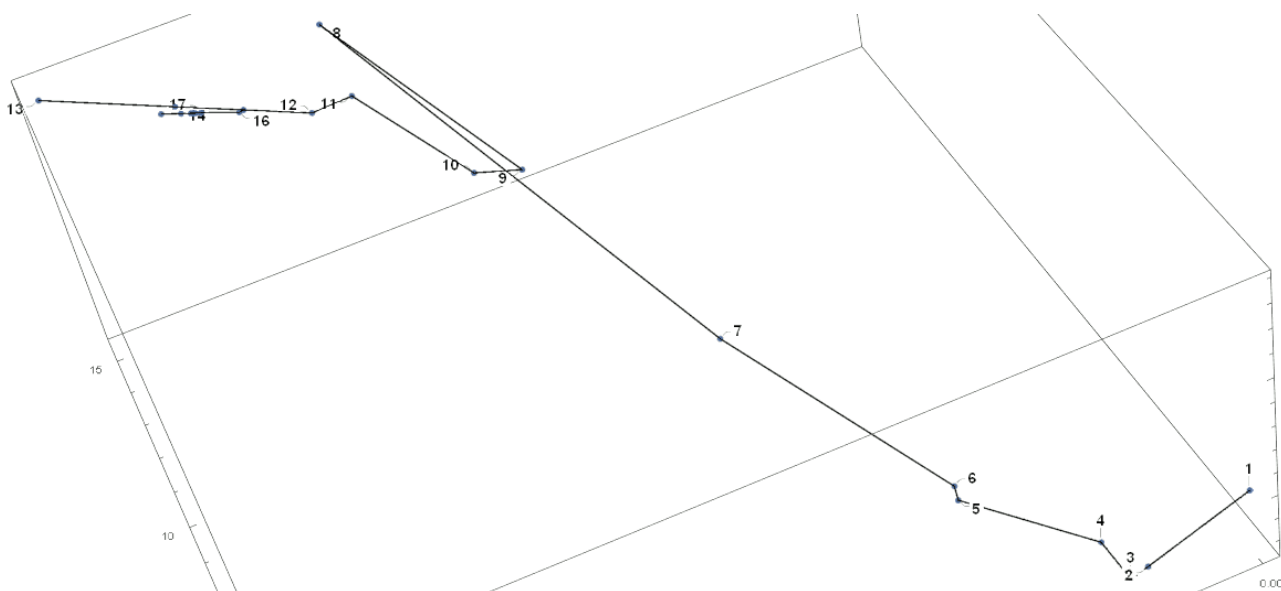
— Θέτουμε $L=L/2$.

— Διαγράφουμε το τρέχον σημείο και τρέχον σημείο γίνεται το προηγούμενο.

- Πάμε στο βήμα 4.
- Αν δεν έχουμε αστοχία, τότε:
 - Θέτουμε $L=2L$.
- Πάμε στο βήμα 5.

Η μέθοδος του διπλασιασμού αυξάνει γεωμετρικά την παραμόρφωση άρα πολύ σύντομα θα φτάσουμε στην περιοχή των μεγάλων παραμορφώσεων, όπου βρίσκεται η M_{Rd} .

6.3. Αλγόριθμος Εύρεσης της M_{Rd}



Σχήμα 6.4: Η πορεία αναζήτησης της M_{Rd} στο χώρο των (a,b,c) του επιπέδου παραμόρφωσης. Πρόκειται για τετράγωνη διατομή πλευράς 50cm από οπλισμένο σκυρόδεμα και οκτώ ράβδους χάλυβα $\Phi 18$, συμμετρικά τοποθετημένους, με επικάλυψη 5cm.

Σκυρόδεμα με τη μη γραμμική σχέση του ΕΚ2, με $f_{ck}=20\text{MPa}$, χωρίς περίσφιξη και αρχική κατάσταση II. Χάλυβας οπλισμού με $\epsilon_y=2\%$, $E=200\text{GPa}$, $\epsilon_s=20\%$, $k=0.05$.

Οι δεσμεύσεις είναι $N=-2000\text{KN}$ και $M_y=10\text{KNm}$. Αναζητούμε την M_{Rd} στον θετικό ημιάξονα z.

6.3.1. Τα Δεδομένα

- Η αρχική παραμόρφωση της διατομής, σε συντελεστές $\vec{\epsilon}_0=[a_0 \ b_0 \ c_0]^T$, που είναι η τελευταία κατάσταση στην ιστορία της διατομής, δηλαδή για «παρθένο» υλικό είναι το σημείο μηδέν.

- Οι δεσμεύσεις υπό της οποίες αναζητούμε την M_{Rd} , δηλαδή $[N \ M]^T$.

- Ο άξονας $\vec{u}=[u_y \ u_z]^T$ της ροπής M . Αναφέρθηκε και παραπάνω ότι ο άξονας $\vec{v}=[v_y \ v_z]^T=[-u_z \ u_y]^T$ της M_{Rd} είναι 90° αντιωρολογιακά του \vec{u} .

— Η απόσταση L του άλματος από το σημείο του πρώτου βήματος, στο σημείο του δεύτερου βήματος.

6.3.2. Τα Ζητούμενα

— Το διάνυσμα $[N_i \ M_i \ M_{Rd}]^T$ που δίνει την M_{Rd} αλλά και το πόσο ικανοποιήθηκαν οι δεσμεύσεις στο τελευταίο βήμα του υπολογισμού. N_i και M_i είναι σχεδόν ίσες με τα N και M αντίστοιχα.

— Η παραμόρφωση της διατομής, σε συντελεστές $\vec{\varepsilon}_i = [a_i \ b_i \ c_i]^T$ υπό τα εντατικά μεγέθη $[N_i \ M_i \ M_{Rd}]^T$.

— Η κατάσταση με την οποία ολοκληρώθηκε ο αλγόριθμος (επιτυχία ή ο λόγος αποτυχίας).

6.3.3. Ο Κυρίως Αλγόριθμος

1. Θέτουμε το δείκτη διπλασιασμού (παράγραφος 6.3.4) σε κατάσταση διπλασιασμού $D=1$.

2. Κάνουμε τους απαιτούμενους υπολογισμούς (παράγραφος 6.3.5) για το τρέχον σημείο στο οποίο βρισκόμαστε ($i=0$ άρα για το $\vec{\varepsilon}_0$).

3. Υπολογίζουμε το διάνυσμα \vec{d}_i , τέτοιο ώστε $|\vec{d}_i|=L$ (παράγραφος 6.3.6), το οποίο αν το προσθέσουμε στο σημείο του τρέχοντος βήματος $\vec{\varepsilon}_i$ θα πάρουμε το σημείο του επόμενου βήματος $\vec{\varepsilon}_{i+1} = \vec{\varepsilon}_i + \vec{d}_i$. Το d_i υπολογίζεται με γνώμονα το επόμενο σημείο ε_{i+1} να βρίσκεται πάνω στην καμπύλη γραμμή των δεσμεύσεων. Σε περίπτωση που το L είναι μικρότερο από την απόσταση του σημείου $\vec{\varepsilon}_i$ από την καμπύλη γραμμή των δεσμεύσεων, τότε επιλέγεται το κοντύτερο, στο $\vec{\varepsilon}_i$, σημείο επί της καμπύλης γραμμής των δεσμεύσεων, ως ε_{i+1} και το L τροποποιείται σε $L = |\vec{d}_i|$, δηλαδή αυξάνει, ενώ παράλληλα θεωρούμε ότι $\mu=1$, ενώ αλλιώς θεωρούμε ότι $\mu=0$.

4. Τρέχον σημείο γίνεται το επόμενο ($i=i+1$).

5. Αν ο αριθμός των ολοκληρώσεων της διατομής μέχρι τώρα, έχει φτάσει το όριο, τερματίζουμε με το αντίστοιχο σφάλμα.

6. Κάνουμε τους απαιτούμενους υπολογισμούς για το τρέχον σημείο στο οποίο

βρισκόμαστε.

7. Αν $\mu=1$, τότε:

α. Αν η απόσταση του σημείου i από την καμπύλη των δεσμεύσεων, είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του σημείου $i-1$, σημαίνει ότι δεν είναι δυνατή η εξασφάλιση ισορροπίας στη διατομή με τις δοσμένες δεσμεύσεις και τερματίζουμε με το αντίστοιχο σφάλμα (παράγραφος 6.3.8).

β. Ειδάλλως διαγράφουμε από την ιστορία το προηγούμενο σημείο $i-1$ αφού το τρέχον i είναι πιο κοντά στην καμπύλη των δεσμεύσεων (παράγραφος 6.3.8).

8. Ελέγχουμε αν το τρέχον σημείο είναι έγκυρο. Αυτό περιλαμβάνει τους παρακάτω ελέγχους οι οποίοι πρέπει να ισχύουν όλοι. Αν έστω και ένας δεν ισχύει, το σημείο δεν είναι έγκυρο και εκτελούμε τα βήματα α και εξής.

i. Η παράγωγος κατά κατεύθυνση στη θετική κατεύθυνση της καμπύλης γραμμής των περιορισμών πρέπει να είναι θετική (παράγραφος 6.3.7).

ii. $\mu=1$ ή $i=0$ ή $M_{\bar{v},i} \geq M_{\bar{v},i-1}$ (παράγραφος 6.3.8).

α. Ελέγχουμε αν $i>0$:

— Αν ισχύει:

— Αν $\mu=1$, τότε $L=|\vec{\epsilon}_i - \vec{\epsilon}_{i-1}|$.

— Το τρέχον σημείο i καταργείται ως μη έγκυρο και επιστρέφουμε στο σημείο $i-1$, το οποίο γίνεται τρέχον i .

— Αν δεν ισχύει, τότε αν $|N - N_i| + |M_{\bar{u}} - M_{\bar{u},i}| \approx 0$, λαμβάνοντας υπόψη ότι είμαστε ακόμα στο πρώτο σημείο $i=0$, έχουμε αποτυχία καθώς με την αρχική $M_{\bar{v}}$ δεν στάθηκε ικανό να πετύχουμε θετική παράγωγό της, προκειμένου να μπορέσουμε να την αυξήσουμε. Τερματίζουμε με το αντίστοιχο σφάλμα.

β. Θέτουμε το δείκτη διπλασιασμού σε κατάσταση διχοτόμησης $D=-2$.

γ. Μετακινούμαστε στο βήμα 10.β.

9. Αν $i>0$ και $|N - N_i| + |M_{\bar{u}} - M_{\bar{u},i}| \approx 0$ και $M_{\bar{v},i} \approx M_{\bar{v},i-1}$, τότε έχουμε πιάσει το στόχο

μας και τερματίζουμε με επιτυχία.

$$10. \text{ Ελέγχουμε αν } i=0 \text{ ή } |N - N_i| + |M_{\vec{u}} - M_{\vec{u},i}| \approx 0 \text{ ή } |N - N_i| + |M_{\vec{u}} - M_{\vec{u},i}| < M_{\vec{v},i} - M_{\vec{v},i-1}.$$

Αν ο έλεγχος ισχύει τότε:

α. Αν $D < 0$ θέτουμε $D = D + 1$.

β. Αν $D > 0$ τότε θέτουμε $L = 2L$, αν $D < 0$ θέτουμε $L = L/2$ ενώ αν $D = 0$ αφήνουμε το L ως έχει.

γ. Μετακινούμαστε στο βήμα 3.

11. Στο διάνυσμα \vec{d} προσθέτουμε το διάνυσμα \vec{d}' (παράγραφος 6.3.6) το οποίο είναι το διάνυσμα από το σημείο που βρισκόμαστε \vec{e}_i προς το εγγύτερο σε αυτό σημείο της καμπύλης γραμμής των δεσμεύσεων, δηλαδή $\vec{d} = \vec{d} + \vec{d}'$.

12. Το τρέχον σημείο i καταργείται διότι βρίσκεται σε μη αποδεκτή απόσταση από την καμπύλη γραμμή των δεσμεύσεων και επιστρέφουμε στο σημείο $i-1$, το οποίο γίνεται τρέχον i .

13. Μετακινούμαστε στο βήμα 4.

6.3.4. Δείκτης Διπλασιασμού - Διχοτόμησης

Το σχόλιο αναφέρεται στα βήματα 1, 8.β., 10.α. και 10.β. του αλγορίθμου.

Ο δείκτης διπλασιασμού – διχοτόμησης λειτουργεί διαφορετικά από το γενικευμένο αλγόριθμο διπλασιασμού – διχοτόμησης.

Αν είναι θετικός, διπλασιάζει την απόσταση του άλματος. Αν είναι αρνητικός διχοτομεί την απόσταση του άλματος. Αν είναι μηδέν, αφήνει την απόσταση του άλματος ως έχει.

Επειδή με τις παραγώγους, σε κάθε βήμα, η καμπύλη γραμμή των δεσμεύσεων θεωρείται ως ευθεία στο χώρο, ενδέχεται ακολουθώντας την ευθεία να προκύψει σε μια απόσταση L μη έγκυρο σημείο. Παράδειγμα στο σχήμα 6.4 είναι το σημείο 8. Στο σημείο αυτό σταματούμε το διπλασιασμό και ξεκινάμε τη διχοτόμηση με $D = -2$. Όμως, αν αυτή η απόσταση ήταν προς σημείο επί της καμπύλης γραμμής, το σημείο αυτό θα μπορούσε να ήταν έγκυρο και μάλιστα έγκυρα να ήταν και σημεία με απόσταση μεγαλύτερη του L . Για παράδειγμα στο σχήμα 6.4, ενώ το σημείο 8 δεν είναι έγκυρο, το σημείο 17, όπου και έχου-

με την M_{Rd} απέχει από το σημείο 7, περισσότερο απ' όσο απέχει το σημείο 8 από το σημείο 7. Αυτό σημαίνει ότι ακολουθώντας μετά το σημείο 8 διχοτόμηση για πάντα, δε θα φτάναμε ποτέ στο σημείο 17, καθώς $\sum_{i=1}^{+\infty} 0.5^i L = L$.

Για να αποφευχθεί αυτό, αν βρισκόμαστε σε κατάσταση διχοτόμησης και δύο διαδοχικά σημεία είναι έγκυρα, τότε η κατάσταση διχοτόμησης διακόπτεται και το L δε διχοτομείται άλλο (μέχρι κάποιο επόμενο σημείο να μην είναι έγκυρο).

6.3.5. Απαιτούμενοι Υπολογισμοί για το Τρέχον Σημείο

Η σήμανση υπο-διανυσμάτων και υπο-πινάκων έχει ως εξής:

— $\vec{F}_{[1,2]}$ είναι τα δύο πρώτα στοιχεία του διανύσματος \vec{F} .

— $\vec{F}_{(1,4...7)}$ είναι όλα τα στοιχεία του διανύσματος \vec{F} εκτός από το πρώτο και εκτός από το τέταρτο ως και το ένατο.

— $[M]_{[1,2]}$ είναι οι δύο πρώτες γραμμές του πίνακα $[M]$ ενώ $[M]_{[:,1,2]}$ οι δύο πρώτες στήλες. $[M]_{[3...5; 1,2]}$ είναι πίνακας τριών γραμμών και δύο στηλών.

— $[M]_{(1;2)}$ είναι ο πίνακας $[M]$ χωρίς την πρώτη γραμμή και τη δεύτερη στήλη.

Το σχόλιο αναφέρεται στα βήματα 2 και 6 του αλγορίθμου.

Ακολουθεί η διαδικασία των απαιτούμενων υπολογισμών για το τρέχον σημείο.

1. Ολοκληρώνουμε τη διατομή με βάση το επίπεδο παραμόρφωσης του τρέχοντος σημείου $\vec{\varepsilon}_i = [a_i \ b_i \ c_i]^T$. Από την ολοκλήρωση έχουμε τα $\vec{F}_i = [M_{z,i} \ M_{y,i} \ N_i]^T$ αλλά και τις αντίστοιχες παραγώγους σε πίνακα 3×3 $D = [\nabla \vec{F}]_i$.

2. Δημιουργούμε ένα πίνακα P 2×4 , τέτοιον ώστε $P_{[1;1...3]} = D_{[3]}$, $P_{[1,4]} = N - N_i$, $P_{[2;1...3]} = D_{[2]} u_y + D_{[1]} u_z$ και $P_{[2,4]} = M - (M_{y,i} u_y + M_{z,i} u_z)$.

3. Μετατρέπουμε τον πίνακα P σε ανυγμένο κλιμακωτό.

4. Βρίσκουμε σε ποια γραμμή το στοιχείο της κύριας διαγωνίου του ορθογωνικού πίνακα P είναι μηδενικό. Αν σε καμία από τις δύο γραμμές του πίνακα δεν είναι μηδενικό,

τότε θεωρούμε ότι είναι στην τρίτη (ανύπαρκτη) γραμμή. Με βάση τη γραμμή αυτή, ένα ως τρία, η ανεξάρτητη μεταβλητή για το συγκεκριμένο σημείο είναι αντίστοιχα η a , b , c .

5. Εδώ θα υπολογιστεί ένα διάνυσμα, συναρτήσει της ανεξάρτητης μεταβλητής, που θα δείχνει από το τρέχον σημείο, την καμπύλη γραμμή των δεσμεύσεων. Δηλαδή αν το προσθέσουμε στο τρέχον σημείο, θα μετακινηθούμε πάνω στην καμπύλη γραμμή των δεσμεύσεων. Αυτό δεν είναι ακριβές. Το πρόβλημα είναι μη γραμμικό, αλλά εμείς βασιζόμαστε στις τιμές του ιακωβιανού πίνακα D στο τρέχον σημείο για να εξάγουμε τα αποτελέσματα, άρα βλέπουμε το πρόβλημα γραμμικό. Η εικόνα που έχουμε για την καμπύλη γραμμή των δεσμεύσεων είναι ότι πρόκειται για μια ευθεία γραμμή. Το διάνυσμα που δίνει αυτή την ευθεία γραμμή συναρτήσει της ανεξάρτητης μεταβλητής, εμφανίζεται παρακάτω για κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή. Ο πίνακας P , στις σχέσεις, είναι ο ανυγμένος κλιμακωτός.

$$\vec{d}(a) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 \\ P_{[1;4]} \\ P_{[2;4]} \end{bmatrix} \quad (6.2.a)$$

$$\vec{d}(b) = \begin{bmatrix} -P_{[1;2]} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} P_{[1;4]} \\ 0 \\ P_{[2;4]} \end{bmatrix} \quad (6.2.β)$$

$$\vec{d}(c) = \begin{bmatrix} -P_{[1;3]} \\ -P_{[3;3]} \\ 1 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} P_{[1;4]} \\ P_{[2;4]} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.2.γ)$$

6. Υπολογίζουμε την $\vec{\nabla} M_{\vec{v}} = \vec{D}_{[1]} u_y - \vec{D}_{[2]} u_z$.

7. Υπολογίζουμε τα εντατικά μεγέθη $\begin{bmatrix} N_i \\ M_{\vec{u},i} \\ M_{\vec{v},i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ M_{y,i} u_y + M_{z,i} u_z \\ M_{z,i} u_y - M_{y,i} u_z \end{bmatrix}$.

8. Στο προηγούμενο βήμα δίνεται το διάνυσμα \vec{d} που απεικονίζει την ευθεία γραμμή των δεσμεύσεων. Αυτό χωρίζεται σε δύο τμήματα. Το πρώτο τμήμα \vec{d}_1 που είναι συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής, είναι παράλληλο με την ευθεία των δεσμεύσεων. Εισάγεται η μεταβλητή s . Αυτό που δεν είναι γνωστό, είναι αν η θετική διεύθυνση των δεσμεύσεων είναι η \vec{d}_1 , δηλαδή προκύπτει για θετική ανεξάρτητη μεταβλητή ($s=1$) ή η θετική διεύθυνση των δεσμεύσεων είναι η $-\vec{d}_1$, δηλαδή προκύπτει για αρνητική ανεξάρτητη μεταβλητή ($s=-1$).

— Για το βήμα 2 του αλγορίθμου ή αλλιώς για το πρώτο σημείο του αλγορίθμου, ο εντοπισμός της θετικής κατεύθυνσης των δεσμεύσεων υπολογίζεται ως εξής: Αν ισχύει $\vec{d}_{1,0} \cdot (\vec{\nabla} M_{\vec{v}})_0 \geq 0$ τότε $s_0=1$ διαφορετικά $s_0=-1$. Με άλλα λόγια επιλέγουμε μια από τις δύο κατευθύνσεις με βάση το ποια κατεύθυνση από τις δύο έχει θετική παράγωγο κατά κατεύθυνση της $M_{\vec{v}}$ άρα προς τα εκεί αυξάνει η $M_{\vec{v}}$ άρα προς τα εκεί θα βρεθεί η M_{Rd} .

— Για το βήμα 6 του αλγορίθμου ή αλλιώς για όλα τα σημεία εκτός από το πρώτο σημείο του αλγορίθμου, ο εντοπισμός της θετικής κατεύθυνσης των δεσμεύσεων υπολογίζεται ως εξής: Αν ισχύει $\vec{d}_{1,i} \cdot \vec{d}_{1,i-1} \cdot s_{i-1} \geq 0$ τότε $s_i=1$ διαφορετικά $s_i=-1$. Με άλλα λόγια, η κατεύθυνση που κινείται κατά τη φορά της θετικής κατεύθυνσης του προηγούμενου βήματος, είναι η θετική. Δεν αναμένουμε δηλαδή, από βήμα σε βήμα, να αλλάξει η θετική κατεύθυνση πάνω από 90° γωνία από την προηγούμενη.

6.3.6. Υπολογισμός Διανυσματικού Άλματος από Βήμα σε Βήμα

Το σχόλιο αναφέρεται στα βήματα 3 και 11 του αλγορίθμου, αλλά παρακάτω αναπτύσσεται η μεθοδολογία μόνο για το βήμα 3.

Έχουμε την απόσταση L του άλματος αλλά δεν έχουμε το διάνυσμα \vec{d} που θα έχει μέτρο L και κατά το οποίο θα προσαυξηθεί το $\vec{\varepsilon}_i = [a_i \ b_i \ c_i]^T$ για να μας δώσει το $\vec{\varepsilon}_{i+1}$ του επομένου βήματος.

Επιλύουμε τη σχέση (6.2) $|\vec{d}|=L$ ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή. Οι λύσεις μπορεί να είναι καμία (διακρίνουσα αρνητική), μια (διακρίνουσα μηδέν) ή δύο (διακρίνουσα θετική). Όσα δηλαδή είναι τα σημεία τομής κύκλου ακτίνας L και ευθείας.

Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική τη λαμβάνουμε μηδενική προκειμένου να υπάρχει λύση και αντίστοιχα προσαυζάνουμε το L .

Αν η διακρίνουσα είναι θετική, υπάρχουν δύο λύσεις. Θα πρέπει να ληφθεί μόνο η μία και η άλλη να απορριφθεί. Επιλέγεται η λύση \vec{d} για την οποία $\vec{d} \cdot \vec{d}_{1,i} \cdot s_i \geq 0$ όπου τα $\vec{d}_{1,i}$ και s_i προκύπτουν από το βήμα 8 της παραγράφου 6.3.5. Δηλαδή επιλέγεται η λύση που είναι προς τη θετική κατεύθυνση των δεσμεύσεων.

Για την περίπτωση του βήματος 11, δεν χρησιμοποιούμε, ούτε τροποποιούμε το L . Θεωρούμε ότι η διακρίνουσα είναι μηδέν και υπολογίζουμε την αντίστοιχη ανεξάρτητη μετα-

βλητή που θα μας δώσει το \vec{d} .

6.3.7. Πρόσημο Παραγώγου κατά τη Θετική Κατεύθυνση των Δεσμεύσεων

Το σχόλιο αναφέρεται στον έλεγχο 8.i.

Αν η παράγωγος κατά κατεύθυνση στη θετική κατεύθυνση της καμπύλης γραμμής των περιορισμών δεν είναι θετική, αυτό σημαίνει ότι πιο πριν υπήρχε μεγαλύτερη $M_{\vec{v}}$ απ' ό,τι στο τρέχον σημείο, άρα προσπεράσαμε την M_{Rd} .

Αν ισχύει $\vec{d}_{1,i} \cdot (\vec{\nabla} M_{\vec{v}})_i \cdot s_i > 0$ όπου τα $\vec{d}_{1,i}$ και s_i προκύπτουν από το βήμα 8 της παραγράφου 6.3.5, τότε το πρόσημο της παραγώγου είναι θετικό, ειδάλλως δεν είναι θετικό.

Επειδή στην πλήρη αστοχία έχουμε $(\vec{\nabla} M_{\vec{v}})_i = \vec{0}$ δεχόμαστε μόνο το θετικό πρόσημο ενώ για αρνητικό και μηδέν λαμβάνεται ως μη έγκυρο το σημείο i .

6.3.8. Λοιπά Σχόλια

Στο βήμα 7.α επιδιώκουμε να κινηθούμε κάθετα στη γραμμή των δεσμεύσεων και προς αυτή, προκειμένου να βρεθούμε εγγύτερα σε αυτή. Αν αυτό δε συμβεί και τελικά βρεθούμε μακρύτερα, σημαίνει ότι υπάρχει αδυναμία προσέγγισης που οφείλεται στο γεγονός ότι η διατομή δεν μπορεί να ισοροπήσει στις δοσμένες δεσμεύσεις, άρα το πρόβλημα είναι λανθασμένα τοποθετημένο.

Από το βήμα 7.β φαίνεται ότι μας ενδιαφέρει η ιστορία των προηγούμενων σημείων και άρα κρατάμε όλα τα προηγούμενα σημεία μέχρι τώρα.

Στον έλεγχο 8.ii, αν $M_{\vec{v},i} < M_{\vec{v},i-1}$, σημαίνει ότι η ροπή $M_{\vec{v}}$ στο τρέχον σημείο είναι μικρότερη από το προηγούμενο άρα προσπεράσαμε την M_{Rd} . Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση που $\mu=1$. Στην περίπτωση αυτή κινούμαστε κάθετα στην καμπύλη γραμμή των δεσμεύσεων άρα σύμφωνα με τις παραγώγους δεν περιμένουμε καμία αλλαγή στην $M_{\vec{v}}$, ωστόσο επειδή έχουμε μη γραμμικότητα, ενδέχεται να υπάρξει μια αλλαγή είτε θετική είτε αρνητική. Στη δεύτερη (αρνητική) περίπτωση, το νέο σημείο θα λαμβάνονταν εσφαλμένα σαν μη έγκυρο.

Στα βήματα 8.α, 9 και 10, η σχέση $|N - N_i| + |M_{\vec{u}} - M_{\vec{u},i}| \approx 0$ σημαίνει ότι σε όρους εντατικών μεγεθών, το τρέχον σημείο i βρίσκεται «σχεδόν» πάνω στην καμπύλη γραμμή των

δεσμεύσεων.

Στο βήμα 10, ο έλεγχος $|N - N_i| + |M_{\bar{u}} - M_{\bar{u},i}| < M_{\bar{v},i} - M_{\bar{v},i-1}$ εξασφαλίζει ότι σε όρους εντατικών μεγεθών, το σημείο θα βρίσκεται πιο κοντά στην καμπύλη γραμμή των δεσμεύσεων, απ' ότι η $M_{\bar{v}}$ του τρέχοντος από το προηγούμενο σημείο. Με τον τρόπο αυτό απαγορεύεται η μεγάλη απομάκρυνση από την καμπύλη γραμμή των δεσμεύσεων όταν πια η $M_{\bar{v}}$ από βήμα σε βήμα δεν αυξάνει πάρα πολύ που σημαίνει ότι πλησιάζουμε την M_{Rd} .

7. Έλεγχοι

Οι μεγάλοι μεγέθους σχέσεις, απαιτούν ένα ισχυρό πλέγμα διαδοχικών ελέγχων και δοκιμών ορθότητας.

Όλες οι δοκιμές πραγματοποιήθηκαν με μονάδες ελέγχου (test units) δηλαδή λογισμικό γραμμένο ώστε να εκτελεί κάποιον αριθμό δοκιμών, ακραίων και μη, και να ελέγχει τα αποτελέσματα.

Οι μονάδες ελέγχου γράφηκαν τόσο σε Mathematica για να πραγματοποιηθεί ο έλεγχος στις αναλυτικές πράξεις, όσο και σε C++ προκειμένου να ελεγχθούν διαδικασίες τόσο «χαμηλού» όσο και «υψηλού» επιπέδου, αλλά και η σωστή μεταφορά των αναλυτικής μορφής σχέσεων από το Mathematica σε κώδικα C++. Ο κώδικας των μονάδων ελέγχου είναι διαθέσιμος.

Οι δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν είναι οι παρακάτω:

7.1. Έλεγχοι Σωστής Ολοκλήρωσης και Εξασφάλισης Συνέχειας

Για να εξασφαλιστεί η σωστή ολοκλήρωση και η εξασφάλιση συνέχειας των ολοκληρωμένων εκφράσεων, δημιουργήθηκαν δύο διατομές:

— Τετραγωνική με πολυγωνική συνόρου $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ και $d=0$ για

τη σχέση (4.33). Εσκεμμένα το κέντρο βάρους δεν είναι το σημείο $(0,0)$ ώστε πιθανές απαλοيفές να μην συμβαίνουν στο τελικό αποτέλεσμα, κάτι που ενδεχομένως να οδηγούσε σε απόκρυψη σφαλμάτων.

— Τριγωνική με πολυγωνική συνόρου $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ και $d \neq 0$ για τη σχέση

(4.33). Ομοίως το κέντρο βάρους δεν είναι το σημείο $(0,0)$.

Για κάθε μια από τις διατομές υπολογίστηκε:

- Το επιφανειακό ολοκλήρωμα.
- Το συνοριακό ολοκλήρωμα και
- Το ολοκλήρωμα επί των κορυφών.

Εξασφαλίστηκε ότι αυτά προκύπτουν ίσα.

Επειδή όμως οι συναρτήσεις αυτές είναι τμηματικές, ελέγχθηκε κάθε μια περίπτωση τμήματος ξεχωριστά, δηλαδή π.χ. για a και $b+ad$ ίσο ή διάφορο του μηδέν και για $\varepsilon(y, z)$ σε κάθε τμήμα της τμηματικής συνάρτησης.

Επειδή όμως έπρεπε να ελεγχθεί και η συνέχεια στα όρια των τμημάτων των τμηματικών συναρτήσεων, επιλέχθηκε π.χ. το ένα σημείο ολοκλήρωσης κορυφής να ανήκει στο ένα τμήμα της συνάρτησης και το επόμενο σε άλλο τμήμα της συνάρτησης. Αποτέλεσμα είναι, οι έλεγχοι να ελέγχουν κάθε πιθανή περίπτωση ασυνέχειας και εσφαλμένης ολοκλήρωσης.

Τέλος σαν μεταβλητές (π.χ. f_{cd} , n , ε_{c2} , a , b , c) επιλέχθηκαν αριθμοί οι οποίοι πιθανοτικά δύσκολα θα μπορούσαν να αποκρύψουν κάποιο σφάλμα. Π.χ. αντί για $n=\varepsilon_{c2}=2$ το οποίο θα μπορούσε να αποκρύψει την εκ παραδρομής μη τοποθέτηση ενός $\frac{n}{\varepsilon_{c2}}$ σε κάποια σχέση, επιλέχθηκαν $\varepsilon_{c2}=1.75$ και $n=0.75$.

Τόσο η δημιουργία των συνθηκών για κάθε έλεγχο, όσο και ο ίδιος έλεγχος όλων αυτών των περιπτώσεων, λόγω του όγκου εργασίας που απαιτούνταν, πραγματοποιήθηκε στο μεγαλύτερο μέρος του με κώδικα.

7.2. Μεταφορά από Mathematica σε Κώδικα C++

Κατά τη μεταφορά των ολοκληρωμένων εκφράσεων αλλά και των παραγώγων τους, από το λογισμικό Mathematica σε κώδικα C++, οι εκφράσεις δεν μεταφέρθηκαν αυτούσιες αλλά με σημαντικές τροποποιήσεις. Οι τροποποιήσεις αφορούσαν προϋπολογισμό επαναλαμβανόμενων εκφράσεων μέσα στις τελικές εκφράσεις. Για παράδειγμα, αν μια έκφραση ήταν της μορφής $A=3a^2+3b^2+6ab+3a+5b+c$ θα μετατρέπονταν σε κώδικα C++ σε:

```
double ab = a + b;
double A = 3 * ab * (ab + 1) + 2 * b + c;
```

Κατά τη διαδικασία αυτή, η πιθανότητα λάθους ήταν αρκετά μεγάλη, με αποτέλεσμα να απαιτούνται δοκιμές του τελικού αποτελέσματος σε σχέση με το αρχικό.

Έτσι, πάλι, για κάθε περίπτωση κλάδου των συναρτήσεων υπολογίζονταν η τιμή της έκφρασης όπως προέκυψε στο λογισμικό Mathematica και αντίστοιχα η τιμή της έκφρασης μετά από μεταγλώττιση του κώδικα C++ και οι δύο τιμές ελέγχονταν αν είναι ίσες.

7.3. Διάφοροι Έλεγχοι

Ένα μεγάλο πλήθος μονάδων ελέγχου (test units) γράφηκαν σε C++, τα οποία ελέγχουν κάθε αλγόριθμο που περιγράφεται στα προηγούμενα κεφάλαια.

Για παράδειγμα, μονάδα ελέγχου για διχοτόμηση πολυγώνου, για ένωση δύο πολυγώνων, για απλοποίηση πολυγώνου κτλ.

Παράλληλα πραγματοποιήθηκαν έλεγχοι υψηλότερου επιπέδου όπως επαναλαμβανόμενες φορτίσεις μη μονοτονικά προσαναυζανόμενες και ελέγχθηκαν τα αποτελέσματα εποπτικά, για τυχόν προφανή σφάλματα ή καταστάσεις που δεν είχαν προβλεφθεί.

8. Το Λογισμικό

8.1. Γενικές Πληροφορίες

Ο κώδικας γράφηκε σε γλώσσα C++ χρησιμοποιώντας δυνατότητες της C++23. Οι μοναδικοί μεταγλωττιστές C++ με τους οποίους μπορεί να μεταγλωττιστεί το πρόγραμμα είναι ο GNU g++ 12 και ο clang 15, οι οποίοι είναι και οι δύο ελεύθεροι και ανοικτού κώδικα. Αντιθέτως μέχρι και το καλοκαίρι του 2022, δεν μπορεί να μεταγλωττιστεί με τον Microsoft Visual C++, τον Intel C++ καθώς και κανέναν άλλο εμπορικό μεταγλωττιστή, καθώς δεν υποστηρίζουν τις απαραίτητες δυνατότητες της C++23.

Αποτελείται από περίπου 12000 γραμμές κώδικα.

Ο κώδικας έχει γραφεί με δυνατότητα να μπορεί να παραλληλιστεί ώστε να τρέχει σε πολλούς πυρήνες επεξεργαστή, προκειμένου να πετυχαίνει μικρότερους χρόνους. Η δυνατότητα αυτή επιτυγχάνεται χάρη στη διαλειτουργικότητα OpenMP. Ωστόσο, επειδή ο κώδικας παραμένει σε κατάσταση ελέγχου, η λειτουργία αυτή είναι απενεργοποιημένη, κάτι που βοηθάει στην αποσφαλμάτωση του κώδικα.

8.2. Ταχύτητα Ολοκλήρωσης

Επειδή τόσο η ισορροπία όσο και η εύρεση της M_{Rd} απαιτούν έναν άγνωστο αριθμό ολοκληρώσεων, ο καλύτερος δείκτης απόδοσης είναι ο χρόνος που απαιτείται για την ολοκλήρωση της διατομής. Η πραγματικότητα είναι ότι για διαφορετικά επίπεδα διατομής, διαφορετικοί κλάδοι συναρτήσεων υπολογίζονται, οι οποίοι έχουν διαφορετική απαίτηση υπολογιστικού χρόνου για τον υπολογισμό. Ωστόσο επαναλαμβάνοντας το πείραμα εκατομμύρια φορές με τυχαίες παραμέτρους, με ασφάλεια μπορούμε να υποθέσουμε ομοιόμορφη κατανομή.

Η μέτρηση της ταχύτητας ολοκλήρωσης πραγματοποιήθηκε σε υπολογιστή Intel i5 6600 Skylake (2016), κάνοντας χρήση ενός μόνο πυρήνα.

Για την παραγωγή του εκτελέσιμου αρχείου ενεργοποιήθηκαν όλες οι βελτιστοποιήσεις του μεταγλωττιστή C++, ακόμα και οι πιο ακριβείς, πλην της κατανομής εργασίας σε πολλούς πυρήνες επεξεργασίας.

Υπολογίστηκαν για κάθε τυχαίο επίπεδο παραμόρφωσης, τα εντατικά μεγέθη και ο ιακωβιανός πίνακας αυτών. Για κάθε υπολογισμό, το υλικό θεωρήθηκε ότι ξεκινούσε από την «παρθένα» του κατάσταση, δηλαδή δεν είχε φορτιστεί ποτέ στο παρελθόν.

Οι διατομές που υπολογίστηκαν ήταν οι παρακάτω. Οι ποσότητες είναι ολοκληρώσεις ανά δευτερόλεπτο.

— Τετράγωνη διατομή από χάλυβα, με κινηματική κράτυνση ή χωρίς και ολοκλήρωση στις κορυφές: 3.3M ως 4.4M.

— Τετράγωνη διατομή από σκυρόδεμα, με διγραμμική ή μη γραμμική σχέση σ - ϵ και 8 ράβδους οπλισμού με κινηματική κράτυνση ή χωρίς κράτυνση και ολοκλήρωση στις κορυφές: 900K – 2M.

— Τετράγωνη διατομή από σκυρόδεμα, με διγραμμική ή μη γραμμική σχέση σ - ϵ και 8 ράβδους οπλισμού με κινηματική κράτυνση ή χωρίς κράτυνση και επιφανειακή ολοκλήρωση $50 \times 50 = 2500$ κελιών: 13K – 15K.

— Για την παραπάνω διακριτοποίηση απαιτήθηκαν $140 \mu sec$ (χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο διακριτοποίησης που αναφέρθηκε προηγουμένως και όχι κάνοντας χρήση της πληροφορίας ότι η διατομή είναι τετράγωνη, άρα η διακριτοποίηση μπορεί να πραγματοποιηθεί με ευκολότερο τρόπο).

Τα παραπάνω αποτελέσματα είναι ιδιαίτερως ενθαρρυντικά. Αν υποθέσουμε ότι η ισοροπία διατομής απαιτεί κατά μέσο όρο 6 ολοκληρώσεις, και λαμβάνουμε δείγμα από 5 διατομές της κάθε δοκού, και ότι για την μη γραμμική στατική ανάλυση του φορέα απαιτούνται 10 βήματα για τη σύγκλιση, τότε αν ο φορέας διαθέτει 6600 δοκούς θα υπολογιστεί σε ένα δευτερόλεπτο. Στην συλλογιστική αυτή βέβαια λαμβάνεται σαν χρόνος μόνο ο χρόνος της ολοκλήρωσης και τίποτε άλλο.

8.3. Διαλειτουργικότητα Υλικού Διατομής

Κάθε τμήμα της διατομής, κληρονομεί από την κλάση `SectionPart` και υλοποιεί τις παρακάτω συναρτήσεις:

Η παρακάτω συνάρτηση ορίζει την ιστορία του υλικού. Κάθε φορά που την καλούμε θέτει το υλικό στο δοσμένο επίπεδο παραμόρφωσης.

```
virtual void
set_strain(
    const std::array<double, 3> &strain, // a,b,c του επιπέδου παραμόρφωσης
    const HistorySettings &settings); // ρυθμίσεις της ιστορίας
```

Η παρακάτω συνάρτηση ολοκληρώνει τις τάσεις στη διατομή σε εντατικά μεγέθη, χωρίς όμως να επηρεάζει την ιστορία του υλικού.

```
virtual void
integrate(
    const std::array<double, 3> &strain, // a,b,c του επιπέδου παραμόρφωσης
    // τα 3 εντατικά μεγέθη και οι 6 τιμές των αντίστοιχων παραγώγων τους
    std::array<double, 9> &values,
    const IntegrationSettings &settings // ρυθμίσεις ολοκλήρωσης
) const;
```

Οι παρακάτω συναρτήσεις μετασχηματίζουν τη διατομή.

Η `translate` μετατοπίζει τη διατομή σε ένα νέο σημείο κατά ένα διάνυσμα `delta`.

```
virtual void translate(const std::array<double, 2> &delta);
```

Η `rotate` στρέφει τη διατομή κατά γωνία φ της οποίας δίνεται το $\cos(\varphi)$ και $\sin(\varphi)$ μέσω του διανύσματος `cs`.

```
virtual void rotate(const std::array<double, 2> &cs);
```

Η `transform` μετασχηματίζει τη διατομή. Επιτρέπεται μόνο μετατόπιση και στροφή. Ο μετασχηματισμός πραγματοποιείται μητρικά, με χρήση ομογενών συντεταγμένων. Ο πίνακας μετασχηματισμού `mat` είναι 2×3 .

```
virtual void transform(const mathematics::matrix<double, 2, 3> &mat);
```

8.4. Υλοποιήσεις Υλικών

Αναφέρονται εδώ κάποιες από τις υλοποιήσεις:

- `concreteEC2a`: Περιλαμβάνει επιφάνεια της διατομής που περικλείεται από πολυγωνικό σύνορο αλλά και τρύπες μικρής διαμέτρου. Το υλικό είναι σκυρόδεμα με τη μη γραμμική σχέση σ - ϵ του ΕΚ2. Οι τρύπες στη διατομή, αφορούν χάλυβα οπλισμού ή προέντασης.

- `concreteEC2b`: Περιλαμβάνει επιφάνεια της διατομής που περικλείεται από πο-

λυγωνικό σύνορο αλλά και τρύπες μικρής διαμέτρου. Το υλικό είναι σκυρόδεμα με την παραβολική σχέση σ-ε του ΕΚ2. Οι τρύπες στη διατομή, αφορούν χάλυβα οπλισμού ή προέντασης.

— `concreteEC2c`: Περιλαμβάνει επιφάνεια της διατομής που περικλείεται από πολυγωνικό σύνορο αλλά και τρύπες μικρής διαμέτρου. Το υλικό είναι σκυρόδεμα με την διγραμμική σχέση σ-ε του ΕΚ2. Οι τρύπες στη διατομή, αφορούν χάλυβα οπλισμού ή προέντασης.

— `SteelKinematicHardeningArea`: Περιλαμβάνει επιφάνεια της διατομής που περικλείεται από πολυγωνικό σύνορο. Το υλικό είναι χάλυβας με διγραμμική σχέση σ-ε και κινηματική κράτυνση.

— `SteelKinematicHardeningPoints`: Περιλαμβάνει μία ή περισσότερες κυκλικές επιφάνειες μικρής διαμέτρου. Το υλικό είναι χάλυβας με διγραμμική σχέση σ-ε και κινηματική κράτυνση. Οι κυκλικές επιφάνειες, αφορούν χάλυβα οπλισμού ή προέντασης.

— `GroupOfMaterials`: Πρόκειται για βοηθητική υλοποίηση που περιλαμβάνει ένα ή περισσότερα άλλα αντικείμενα. Π.χ. από ένα αντικείμενο τύπου `concreteEC2a` και `SteelKinematicHardeningPoints`. Προωθεί όλες τις συναρτήσεις στα αντικείμενα που περιλαμβάνει.

— `MaterialWithInitialStrain`: Πρόκειται για βοηθητική υλοποίηση που περιλαμβάνει ένα άλλο αντικείμενο, π.χ. `GroupOfMaterials`. Χρησιμοποιεί ένα συγκεκριμένο επίπεδο παραμόρφωσης ως στάθμη αναφοράς. Κάθε φορά που καλείται η συνάρτηση `set_strain` ή `integrate`, προσθέτει στο επίπεδο παραμόρφωσης της συνάρτησης το επίπεδο παραμόρφωσης αναφοράς και προωθεί στο αντικείμενο που περιλαμβάνει το αποτέλεσμα της πρόσθεσης.

8.5. Διαλειτουργικότητα Διατομής

Η διατομή δεν είναι παρά μια ομάδα από υλικά, δηλαδή θα μπορούσε να είναι το ψευτο-υλικό `GroupOfMaterials` διατηρώντας όλη την διαλειτουργικότητα υλικού. Αυτό όσον αφορά τις ολοκληρώσεις που μας οδηγούν από επίπεδο παραμόρφωσης σε εντατικά μεγέθη.

Για την ισορροπία της διατομής, που μας οδηγεί από τα εξωτερικά εντατικά μεγέθη

στο επίπεδο παραμόρφωσης της διατομής, οι διαθέσιμες συναρτήσεις είναι, για τρία εντατικά μεγέθη (συνήθεις περιπτώσεις):

```

template<
    mafematics::Vector T1,
    typename T2,
    mafematics::MutableVector T3,
    mafematics::NR::NRMultivariateGenericCriteria<T1> GCriteria,
    mafematics::NR::NRMultivariateSpecializedCriteria<T1,
        std::remove_reference_t<T2>> SCriteria>
requires(
    mafematics::fixed_size<std::remove_reference_t<T2>> == 3
    && mafematics::fixed_size<T1> == 3
    && mafematics::MutableVector<std::remove_reference_t<T2>>
    && mafematics::fixed_size<T3> == 3
    && std::is_same_v<typename std::remove_reference_t<T2>::value_type, double>
    && std::is_same_v<std::remove_const_t<typename T1::value_type>, double>
    && std::is_same_v<typename T3::value_type, double>)
    signed char // Τι συνέβη με τη μέθοδο N-R. 0 σημαίνει επιτυχία.
    section_equilibrium(
        const SectionPart &section,           // Η διατομή
        const T1 &forces,                     // Τα εξωτερικά εντατικά μεγέθη
        T3 *forceso, // Τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη που επιστρέφει η N-R
        T2 &&strain, // Τα a,b,c του επιπέδου παραμόρφωσης που επιστρέφει η N-R
        GCriteria &&generic_criteria,         // Γενικευμένα κριτήρια διακοπής της N-R
        SCriteria &&specialized_criteria,     // «Ειδικά» κριτήρια διακοπής
        const EquilibriumSettings &settings); // ρυθμίσεις ισορροπίας

```

και για ένα εντατικό μέγεθος – αξονική δύναμη (περίπτωση τάνυσης τένοντα ώστε να είναι υπό τάνυση όταν θα περιβληθεί από τη διατομή σκυροδέματος):

```

template<
    mafematics::NR::NRSingleVariableGenericCriteria<double> GCriteria,
    mafematics::NR::NRSingleVariableSpecializedCriteria<double> SCriteria>
    signed char // Τι συνέβη με τη μέθοδο N-R. 0 σημαίνει επιτυχία.
    section_equilibrium(
        const SectionPart &section,           // Η διατομή
        double axial_force,                   // Η εξωτερική αξονική δύναμη
        double *axial_forceo, // Η εσωτερική αξονική δύναμη που επιστρέφει η N-R
        double &strain, // Το c του επιπέδου παραμόρφωσης που επιστρέφει η N-R
        GCriteria &&generic_criteria,         // Γενικευμένα κριτήρια διακοπής της N-R
        SCriteria &&specialized_criteria,     // «Ειδικά» κριτήρια διακοπής
        const EquilibriumSettings &settings); // ρυθμίσεις ισορροπίας

```

Για τον υπολογισμό της M_v , Resistance σε έναν τυχαίο άξονα \vec{v} της διατομής, δεδομένων των N , M_u , όπου \vec{u} ο άξονας 90° ωρολογιακά του άξονα \vec{v} , η διαθέσιμη συνάρτηση είναι:


```

template<
    mafematics::Vector T1,
    typename T2,
    mafematics::Vector T3,
    bool Count>
requires(
    mafematics::fixed_size<T1> == 2
    && mafematics::fixed_size<T3> == 2
    && mafematics::fixed_size<std::remove_reference_t<T2>> == 3
    && std::is_same_v<std::remove_const_t<typename T1::value_type>, double>
    && std::is_same_v<std::remove_const_t<typename T3::value_type>, double>
    && std::is_same_v<std::remove_const_t<typename
        std::remove_reference_t<T2>::value_type>, double>)
signed char // Τι συνέβη με τον αλγόριθμο. 0 σημαίνει επιτυχία.
section_extrema(
    const SectionPart &section, // Η διατομή
    // Τα a,b,c του επιπέδου παραμόρφωσης που επιστρέφει ο αλγόριθμος...
    // και συμβαίνουν όταν ισχύουν τα δοσμένα εντατικά μεγέθη N, Mu...
    // και το ζητούμενο Mn,Resistance
    std::array<double, 3> &strain,
    const T1 &forces, // Τα δοσμένα εντατικά μεγέθη N και Mu
    // Τα εντατικά μεγέθη Mn,Resistance, Mu και N που επιστρέφει ο αλγόριθμος
    T2 &&forces0,
    const T3 &axis, // Ο άξονας v
    extrema_counter<Count> counter, // Κριτήριο διακοπής
    const ExtremaSettings &settings); // Ρυθμίσεις αλγόριθμου

```

9. Περιπτώσεις για Χρήση του Λογισμικού

Για τα παρακάτω παραδείγματα, δεν πραγματοποιήθηκε κάποια δοκιμή από το λογισμικό, ώστε να είναι δυνατή η παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Αναφέρονται όμως γιατί εντάσσονται στο πλαίσιο δυνατοτήτων του λογισμικού.

9.1. Παράδειγμα Προέντασης με Προτάνυση πριν τη Σκλήρυνση

Περιγράφεται ένα παράδειγμα δοκού από σκυρόδεμα με ένα τένοντα.

- Δημιουργούμε ως `SteelKinematicHardeningPoints` τον τένοντα `tendon` στο σημείο $(0,0)$.
- Εφαρμόζουμε ισορροπία διατομής με εντατικά μεγέθη N (τάνυση) στον τένοντα `tendon` για να εντοπίσουμε την ανυγμένη του παραμόρφωση ϵ_t .
- Εκτελούμε στον `tendon` την `set_strain` με ϵ_t για να θέσουμε την ιστορία στον τένοντα.
- Δημιουργούμε ως `MaterialWithInitialStrain` το βοηθητικό `tendon0` με παραμόρφωση αναφοράς το ϵ_t και περιλαμβανόμενο αντικείμενο τον τένοντα `tendon`.
- Μεταφέρουμε τον `tendon` με την `translate` στη θέση που πρέπει να βρίσκεται στη διατομή σκυροδέματος.
- Δημιουργούμε ως `concreteEC2a` το σκυρόδεμα της διατομής `concrete` στη θέση που πρέπει να βρίσκεται στη διατομή σκυροδέματος.
- Δημιουργούμε ως `SteelKinematicHardeningPoints` τον διαμήκη οπλισμό `rebars` στις θέσεις που πρέπει να βρίσκονται στη διατομή σκυροδέματος.
- Δημιουργούμε ως `GroupOfMaterials` την ομάδα υλικών `section` η οποία περιλαμβάνει τα υλικά `tendon0`, `concrete` και `rebars`.
- Εφαρμόζουμε ισορροπία διατομής με εντατικά μεγέθη $(0,0,0)$ για να εντοπίσουμε το επίπεδο παραμόρφωσης της διατομής ϵ_s . Η διατομή θα παραμορφωθεί γιατί ο τένοντας βρίσκεται ήδη σε τάνυση. Άρα με την εφαρμογή μηδενικών εντατικών μεγεθών, ο

τένοντας θα χαλαρώσει και το σκυρόδεμα θα θλιβεί. Το επίπεδο παραμόρφωσης της διατομής ε_s θα είναι γενικά θλιπτικό, πιθανότατα με αύξηση καμπυλοτήτων.

— Εκτελούμε στο `section` την `set_strain` με ε_s για να θέσουμε την ιστορία στη διατομή.

Εδώ μπορούμε να ξαναχρησιμοποιήσουμε ένα νέο αντικείμενο `MaterialWithInitialStrain` για ολόκληρη τη διατομή προκειμένου να ξαναμηδενίσουμε το φαινόμενο επίπεδο παραμόρφωσης, ή μπορούμε να το κάνουμε αυτό, αφού εφαρμόσουμε το ίδιο βάρος της δοκού σαν εντατικά μεγέθη σε κάθε διατομή. Μπορούμε επίσης να αφήσουμε το αντικείμενο `section` ως έχει.

9.2. Παράδειγμα Προέντασης μετά τη Σκλήρυνση

Περιγράφεται ένα παράδειγμα δοκού από σκυρόδεμα με ένα τένοντα. Σε μια συγκεκριμένη διατομή το φορτίο του τένοντα είναι N .

— Δημιουργούμε ως `SteelKinematicHardeningPoints` τον τένοντα `tendon` στο σημείο $(0,0)$.

— Εφαρμόζουμε ισορροπία διατομής με εντατικά μεγέθη N (τάνυση) στον τένοντα `tendon` για να εντοπίσουμε την ανυγμένη του παραμόρφωση ε_t .

— Εκτελούμε στον `tendon` την `set_strain` με ε_t για να θέσουμε την ιστορία στον τένοντα.

— Δημιουργούμε ως `MaterialWithInitialStrain` το βοηθητικό `tendon0` με παραμόρφωση αναφοράς το ε_t και περιλαμβανόμενο αντικείμενο τον τένοντα `tendon`.

— Μεταφέρουμε τον `tendon` με την `translate` στη θέση που πρέπει να βρίσκεται στη διατομή σκυροδέματος.

— Δημιουργούμε ως `MaterialWithInitialStrain` το βοηθητικό `tendon0` με παραμόρφωση αναφοράς το ε_t και περιλαμβανόμενο αντικείμενο τον τένοντα `tendon`.

— Δημιουργούμε ως `ConcreteEC2a` το σκυρόδεμα της διατομής `concrete` στη θέση που πρέπει να βρίσκεται στη διατομή σκυροδέματος.

- Δημιουργούμε ως `SteelKinematicHardeningPoints` τον διαμήκη οπλισμό `rebars` στις θέσεις που πρέπει να βρίσκονται στη διατομή σκυροδέματος.
- Δημιουργούμε ως `GroupOfMaterials` την ομάδα υλικών `reinforced_concrete`, η οποία περιλαμβάνει τα υλικά `concrete` και `rebars`.
- Εφαρμόζουμε ισορροπία διατομής με εντατικά μεγέθη $-N$ (θλίψη) αλλά και τις αντίστοιχες ροπές M_y , M_z που προκύπτουν από τη θέση του τένοντα στη διατομή, στο `reinforced_concrete` για να εντοπίσουμε το επίπεδο ανυγμένης παραμόρφωσης ε_c .
- Εκτελούμε στο `reinforced_concrete` την `set_strain` με ε_c για να θέσουμε την ιστορία στο υλικό.
- Δημιουργούμε ως `MaterialWithInitialStrain` το βοηθητικό `reinforced_concrete0` με παραμόρφωση αναφοράς το ε_c και περιλαμβανόμενο αντικείμενο το `reinforced_concrete`.
- Δημιουργούμε ως `GroupOfMaterials` την ομάδα υλικών `section`, η οποία περιλαμβάνει τα υλικά `tendon0` και `reinforced_concrete0`.

9.3. Παράδειγμα Σύμμικτης Δοκού με Σκυροδέτηση δίχως Υποστήριξη

- Δημιουργούμε ως `SteelKinematicHardeningArea` τη μεταλλική δοκό `steel` ώστε το γεωμετρικό κέντρο βάρους να βρίσκεται στο σημείο $(0,0)$.
- Εφαρμόζουμε ισορροπία διατομής στη μεταλλική δοκό `steel`, με εντατικά μεγέθη όπως προκύπτουν από το ίδιο της βάρος και το ίδιο βάρος του νωπού σκυροδέματος, προκειμένου να εντοπίσουμε την ανυγμένη του παραμόρφωση ε_s .
- Εκτελούμε στη μεταλλική δοκό `steel` την `set_strain` με ε_s για να θέσουμε την ιστορία στη μεταλλική δοκό.
- Δημιουργούμε ως `MaterialWithInitialStrain` το βοηθητικό `steel0` με παραμόρφωση αναφοράς το ε_s και περιλαμβανόμενο αντικείμενο τον τένοντα `steel`.
- Μεταφέρουμε τη μεταλλική δοκό `steel` με την `translate` στη νέα θέση, με βάση το μηχανικό κέντρο βάρους της συνολικής σύμμικτης διατομής. Σημειώνεται εδώ ότι όταν

έχουμε μη γραμμικότητα, δεν υπάρχει μηχανικό κέντρο βάρους. Πάντως το μετακινούμε εκεί με βάση την υπάρχουσα μεθοδολογία κατά τα γνωστά.

— Δημιουργούμε ως `concreteEC2a` το σκυρόδεμα της διατομής `concrete` στη θέση που πρέπει να βρίσκεται στη συνολική σύμμικτη διατομή.

— Δημιουργούμε ως `groupOfMaterials` την ομάδα υλικών `composite`, η οποία περιλαμβάνει τα υλικά `concrete` και `steel0`.

10. Κάποια Παραδείγματα

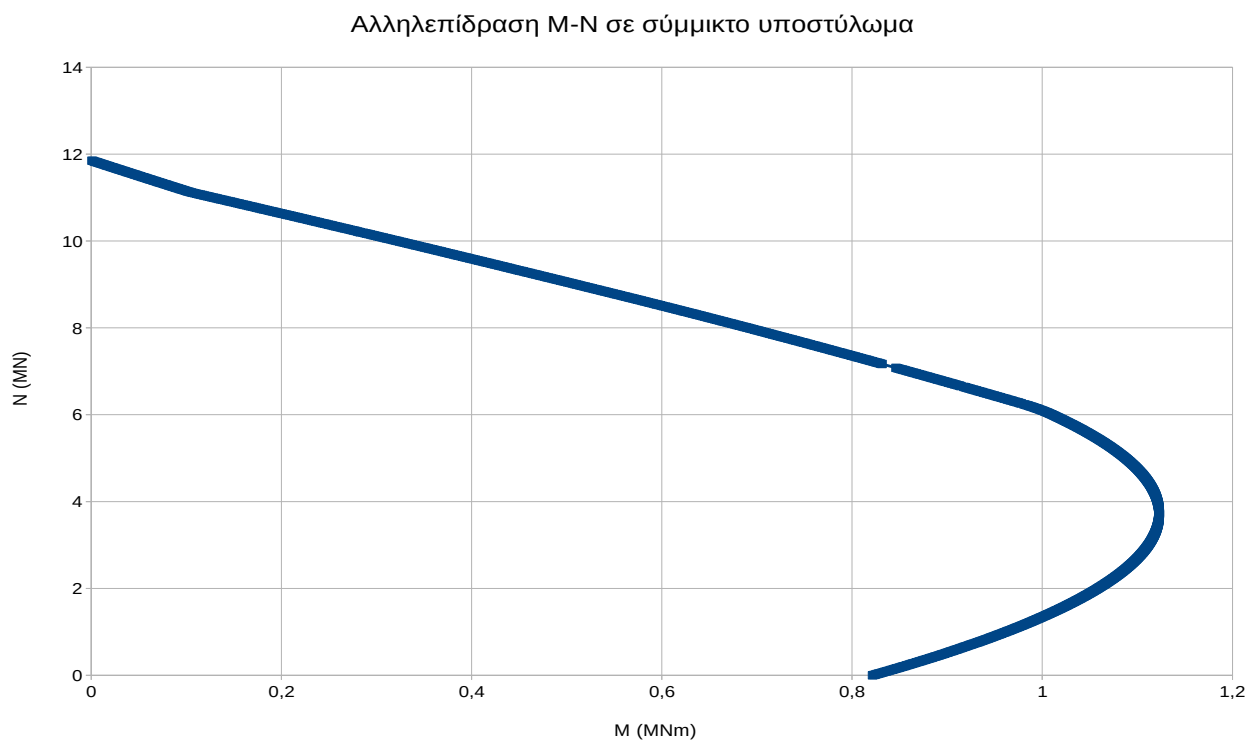
10.1. Διάγραμμα Αλληλεπίδρασης M-N σε Σύμμικτο Υποστούλωμα

Έχουμε διατομή σύμμικτου υποστυλώματος με τετράγωνη κοίλη διατομή χάλυβα από χαλυβδόφυλλο πάχους 1cm και εξωτερικές διαστάσεις 50x50cm. Εσωτερικά σκυροδετημένο δίχως οπλισμό (διαστάσεις 49x49cm).

Ο χάλυβας έχει μηχανικά χαρακτηριστικά $E=210\text{ GPa}$, $f_y=235\text{ MPa}$, $\epsilon_u=20\%$. Η εξίσωση σ - ϵ που χρησιμοποιείται είναι η ελαστική – απολύτως πλαστική.

Το σκυρόδεμα έχει μηχανικά χαρακτηριστικά $f_{ck}=25\text{ MPa}$ και θεωρείται περισφιγμένο κατά 2% f_{ck} . Η εξίσωση σ - ϵ που χρησιμοποιείται είναι η μη γραμμική του ΕΚ2.

Θεωρώντας μηδενική την ροπή στον ένα κύριο άξονα, το διάγραμμα αλληλεπίδρασης ροπής (στον άλλο κύριο άξονα) – αξονικής εμφανίζεται στο σχήμα 10.1.



Σχήμα 10.1: Αλληλεπίδραση M-N σε σύμμικτο υποστούλωμα, με 1200 περίπου δείγματα

10.2. Διάγραμμα M-θ σε Υποστούλωμα από σκυρόδεμα

Έχουμε διατομή σκυροδέματος τύπου L (στραμμένη κατά 180°) με εξωτερικές δια-

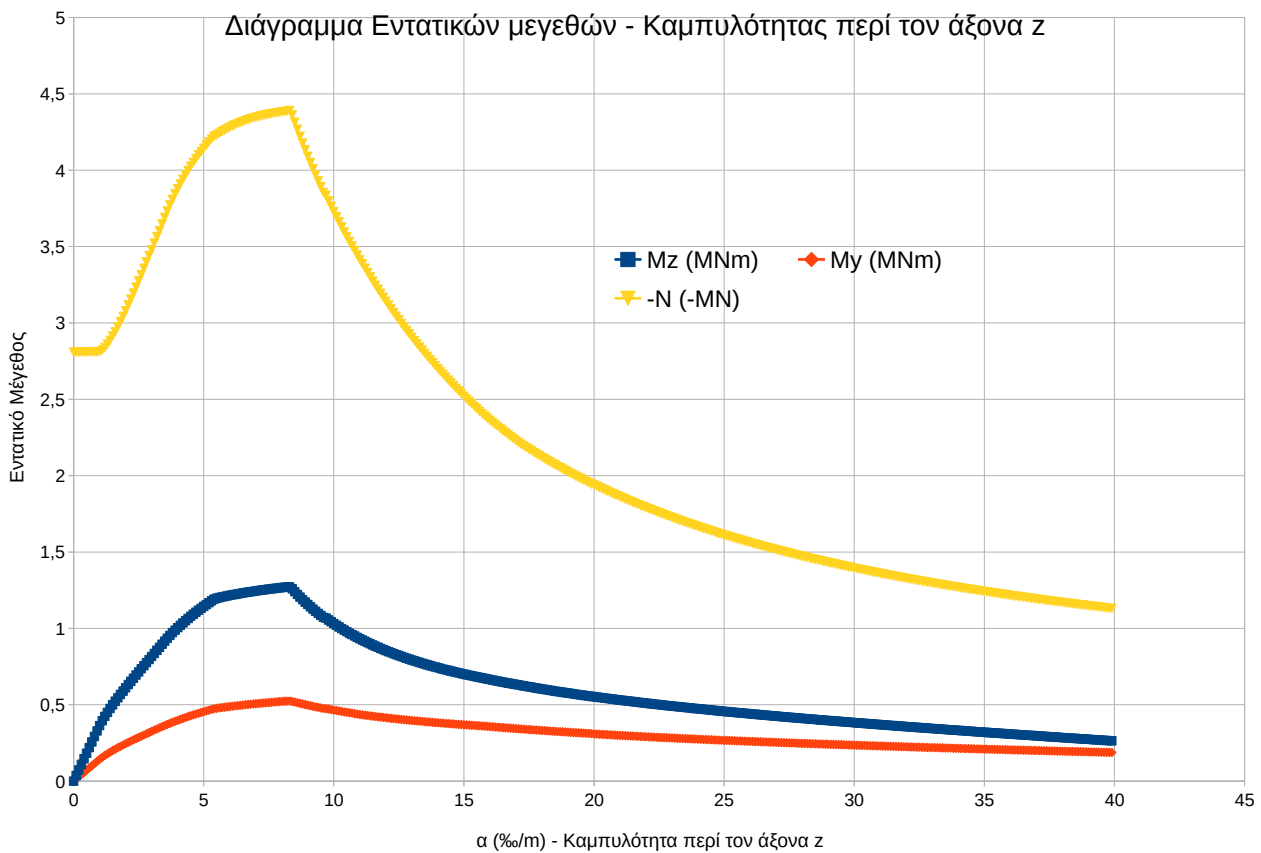
στάσεις 90x90cm και εσωτερικές 50x50cm (πάχος δηλαδή 40cm).

Ο οπλισμός είναι $\Phi 20$ με 6 ράβδους στις εξωτερικές παρειές (ανά 16cm) και 4 ράβδους στις εσωτερικές παρειές (ανά 16.7cm). Η επικάλυψη είναι 5cm. Συνολικά είναι 18 ράβδοι $\Phi 20$ ($6+(6-1)+4+(4-1)=18$).

Οι μηχανικές ιδιότητες του σκυροδέματος είναι $f_{ck}=20\text{ MPa}$, απερίσφικτο (για ευκολία – θα μπορούσαν να υπάρχουν δύο υλικά: περισφιγμένο εντός πυρήνα και απερίσφικτο εκτός). Η εξίσωση σ - ϵ που χρησιμοποιείται είναι η διγραμμική του EK2 (σχεδίαση).

Ο οπλισμός αποτελείται από χάλυβα με $f_{yk}=500\text{ MPa}$, $E=200\text{ GPa}$. Η εξίσωση σ - ϵ που χρησιμοποιείται είναι η ελαστική – απολύτως πλαστική για σχεδίαση.

Θεωρώντας για το επίπεδο παραμόρφωσης $c=-0.5\text{‰}$ και $b=0$ το γράφημα των εντατικών μεγεθών σε σχέση με την καμπυλότητα a ($\text{‰}/m$) περί τον άξονα z , του επιπέδου παραμόρφωσης, απεικονίζεται στο σχήμα 10.2.



Σχήμα 10.2: Σχέση εντατικών μεγεθών, καμπυλότητας περί τον άξονα z για υποστυλώμα διατομής L

11. Λογισμικό που Χρησιμοποιήθηκε

Για τους αναλυτικούς μαθηματικούς υπολογισμούς έγινε ευρεία χρήση του Wolfram Mathematica.

Το κείμενο συντάχθηκε σε LibreOffice Writer και η παρουσίαση σε LibreOffice Impress.

Οι διανυσματικές εικόνες συντάχθηκαν με τον κειμενογράφο Notepad3.

Ο κώδικας C++ συντάχθηκε στο ολοκληρωμένο περιβάλλον ανάπτυξης Code::Blocks.

Βιβλιογραφία

1: Ευροκώδικας 2

2: Mander, Priestley, Park, Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete, 1988

3: <https://www.cppreference.com>

4: <https://reference.wolfram.com/language/>