ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

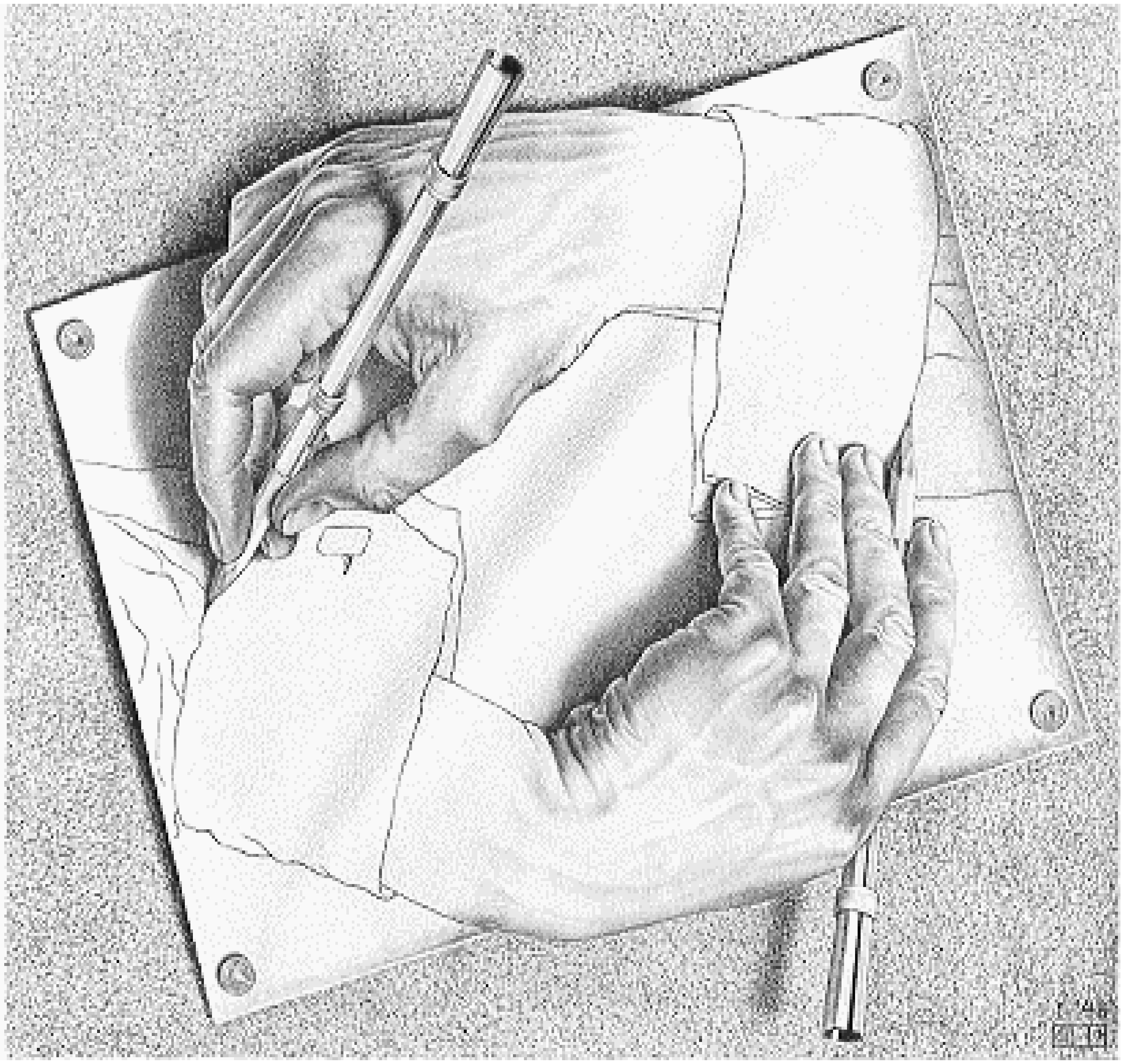
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Αυτοαναφορικοί εξελικτικοί αλγόριθμοι

Συγγραφέας:
Βασιλειάδης Παναγιώτης

Υπεύθυνος Καθηγητής:
Αλέξανδρος Αρβανιτάκης
Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Σεπτέμβριος 2022



Ευχαριστίες

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω τον κύριο Αρβανιτάκη για την κατανόηση και πολύτιμη βοήθεια του στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής. Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την Νεφέλη Κούστα και τον Κωνσταντίνο Λειβαδά για την συνεργασία μας σε αυτήν την εργασία. Επίσης, όλους μου τους φίλους που με βοηθήσαν με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους στην πορεία μου στην σχολή και όχι μόνο. Ιδιαίτερες ευχαριστίες στον αδερφό μου για την γλωσσική επιμέλεια και τις διορθώσεις του στην παρούσα εργασία.

………………………………………………….

Παναγιώτης Βασιλειάδης

Περίληψη
Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η πραγμάτευση του φαινομένου της αυτοαναφοράς, τον ρόλο που έπαιξε στην θεμελίωση των μαθηματικών και ως ένα εργαλείο για την ανάπτυξη μιας θεωρίας μάθησης. Καθώς η θεωρία αυτή έχει στον πυρήνα της την εξέλιξη θα δοθεί μια σύντομη παρουσίαση της εξέλιξης ως μια υπολογιστική μαθηματική διαδικασία
Στο κεφάλαιο 1, θα παρουσιαστούν οι κυριότερες προσπάθειες θεμελίωσης των μαθηματικών και ο ρόλος της αυτοαναφοράς στην ανάπτυξη αυτών των προγραμμάτων. Επιπλέον, θα παρουσιαστεί μια χρήση της αυτοαναφοράς στην θεωρία συνόλων
. Στο κεφάλαιο 2, δίνονται οι κυριότεροι ορισμοί για την παρουσίαση των αυτοαναφορικών αλγορίθμων.
Στο κεφάλαιο 3, παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο αυτοί οι αλγόριθμοι εξελίσσονται και διαφοροποιούνται.
Στο κεφάλαιο 4, γίνεται μια ανασκόπηση της θεωρίας της εξέλιξης και της σχέσης της με την θεωρητική πληροφορική

Λέξεις κλειδιά
Θεμελίωση των μαθηματικών, Αυτοαναφορά, Αυτοαναφορικοί αλγόριθμοι, Εξελικτική θεωρία

Περιεχόμενα

1 Αυτοαναφορά και θεμελίωση των μαθηματικών

Η εμφάνιση των μαθηματικών συναντάται σχεδόν παράλληλα με την ανάπτυξη των ανθρώπινων κοινωνιών. Αρχικά, για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων, αλλά από την αρχαία Ελλάδα ακόμη η ανάπτυξη των μαθηματικών ως αυτούσιου αντικειμένου, δηλαδή η παραγωγή αποτελεσμάτων που δεν συνδέονται αναγκαστικά με πραγματικά προβλήματα. Το μαθηματικό οικοδόμημα συνεχώς και αυξανόταν με το πέρασμα του χρόνου. Η εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης από φιλοσοφικό στοχασμό σε μια οργανωμένη και θεμελιωμένη πλέον επιστήμη με συγκεκριμένους κανόνες απασχόλησε πλήθος φιλοσόφων και μαθηματικών ανά τους αιώνες. Παρά τις επιμέρους διαφορετικές προσεγγίσεις και σχολές σκέψεις αποτελεί κοινό τόπο η θεμελίωση των μαθηματικών ως επιστήμης με αμιγώς ορθολογικό υπόβαθρο που δεν χρησιμοποιεί εμπειρικά δεδομένα βασισμένα στην παρατήρηση ή το βίωμα. Επομένως, δηλαδή, η αναζήτηση της "αλήθειας" της συγκεκριμένης επιστήμης αποτελεί μια αρκετά σύνθετη διαδικασία. Στην ίδια κατεύθυνση, δεν είναι εύκολο για τη μαθηματική επιστήμη να ερμηνεύσει τον εαυτό της, να τεκμηριώσει δηλαδή αναλυτικά την ορθότητα των κανόνων και των αποτελεσμάτων της.

Σήμερα, τα μαθηματικά διατηρούν την αυτονομία τους ως κλάδος διαφυλάσσοντας και την επιστημονική τους αυταξία και κύρος. Παράλληλα, όμως ανταποκρίνονται στις νέες ιδιαίτερες ανάγκες που καλούνται να αντιμετωπίσουν ως κυρίαρχος αρωγός για την ανάπτυξη συγγενών και όχι μόνο επιστημονικών κλάδων αλλά και της βιομηχανίας. Τελικά, αυτή τους η προσφορά τα καταξιώνει και ως τον αναπόσπαστο θεμέλιο λίθο στην οικοδόμηση του σύγχρονου κόσμου.

Εκκινώντας την αναδρομή στην προσπάθεια θεμελίωσης των μαθηματικών, η αφετηρία τοποθετείται στην πλατωνική φιλοσοφία. Στον πλατωνικό κόσμο των Ιδεών τα μαθηματικά κατέχουν την ανώτερη θέση και έναν άχρονο και ακριβή προσδιορισμό, ο οποίος δεν εξαρτάται από την παρατήρηση [1]. Διακρίνεται η αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων από τον φορμαλισμό τους, είτε αυτός είναι η χρήση σχημάτων, είτε μια αλγοριθμική διαδικασία που χρησιμοποιείται για επίλυση. Για τον Πλάτωνα, οι μαθηματικές προτάσεις προϋπάρχουν, δεν κατασκευάζονται αλλά αποκαλύπτονται.

Αυτή η ιδέα, αν και σε έναν βαθμό μεταφυσική, έχει επηρεάσει μεγάλους σύγχρονους μαθηματικούς, καθώς προβάλλει την μαθηματική εποπτεία έναντι της αισθητηριακής αντίληψη. Χαρακτηριστική απόδειξη είναι οι απόψεις του Godel και του Drake. Στον Drake οι πλατωνικές επιρροές είναι εμφανείς, καθώς θεωρεί ότι κάποια μαθηματικά αντικείμενα προϋπάρχουν της παρατήρησης, όπως διαφαίνεται και από το σχετικό απόσπασμα παρακάτω:

> "Έχω γράψει αυτό το βιβλίο από μια ασυμβίβαστη ρεαλιστική ή πλατωνική σκοπιά, δηλαδή έχω αποδεχθεί την άποψη ότι κατά κάποιο τρόπο τα σύνολα υπάρχουν, σαν αντικείμενα προς σπουδή, και ότι η θεωρία συνόλων σχετίζεται με σταθερά αντικείμενα όπως ακριβώς η θεωρία αριθμών... Μου φαίνεται πολύ δύσκολο να εξηγήσω τους λόγους για τους οποίους μελετούμε τους μεγάλους πληθαρίθμους χωρίς να αποδεχθώ μια τέτοια άποψη".[2]

Η εργασία μελετάει κυρίαρχα τρία από τα σημαντικότερα προγράμματα που ασχολούνται με τη θεμελίωση των μαθηματικών στους νεότερους χρόνους: τον Λογικισμό, τον Ιντουσιονισμό και τον Φορμαλισμό. Επιλέγονται συνειδητά αυτά τα τρία με βασικό κριτήριο τον μαθηματικό τους χαρακτήρα που καταφέρνει την υπέρβαση της πλατωνικής οντολογίας. Ομοίως, όλοι όσοι συμμετείχαν σε αυτές τις προσπάθειες πολλές φορές έκρυβαν πίσω από τις απόπειρες τους βαθύτερες φιλοσοφικές ανησυχίες ως και σκοπούς. Κι αν μια τέτοια επιλογή λανθάνει κάποιας υπεκφυγής από την αυστηρή μαθηματική σκέψη, ίσως αξίζει να αναφερθεί ότι συχνά οι ίδιοι άνθρωποι καταξιώθηκαν και ως μεγάλοι μαθηματικοί.

1.1 Λογικισμός

Η πρώτη μεγάλη προσπάθεια για μια συνολική θεώρηση των μαθηματικών ήταν ο Λογικισμός. Από τον Leibniz που θεωρούσε τα μαθηματικά προέκταση της λογικής ως τους Frege και Russel που προσπάθησαν να υλοποιήσουν την αναγωγή τους σε αυτήν με στόχο να δικαιολογήσουν την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων, ο λογικισμός αναπτύχθηκε ως φιλοσοφικό ρεύμα. Περιγράφει δηλαδή την προσπάθεια ενσωμάτωσης των μαθηματικών ως κομμάτι της λογικής. Αν πράγματι λοιπόν η λογική είναι η βάση των μαθηματικών, τότε οι μαθηματικές προτάσεις δεν αποτελούν παρά κομμάτι της και επομένως μπορούν να αποδειχθούν με την χρήση των κανόνων της.

Ένας από τους σημαντικότερους εκφραστές και πρωτεργάτες του Λογικισμού ήταν ο Frege. Υπήρξε ένας εκ των θεμελιωτών της σύγχρονης λογικής, καθώς εξέλιξε σημαντικά τη συμβολική λογική σε σχέση με την προϋπάρχουσα αριστοτελική. Έκφραση αυτής της πολύχρονης προσπάθειας καθίσταται η συγγραφή και έκδοση το 1884, του πρώτου τόμου "Θεμέλια της Αριθμητικής". Ο Frege συνέχισε αδιάκοπα την προσπάθειά του και δρομολογούσε την έκδοση του δεύτερου τόμου. Παρά τους κόπους του και τις φιλοδοξίες του όμως, οδηγήθηκε σε αδιέξοδο το 1901, όταν ο Russel του κοινοποίησε ένα παράδοξο. Το παράδοξο αυτό οφειλόταν στην αρχή της συμπερίληψης, όπως αυτή ήταν διατυπωμένη σε αυτό που αργότερα ονομάστηκε αφελής θεωρία συνόλων με θεμελιωτή τον Cantor. Στη συνέχεια, διατυπώνονται η Γενική Αρχή της Συμπερίληψης και το Παράδοξο του Russel.[3]

1.1.1 Γενική αρχή της συμπερίληψης

Για κάθε n-μελή οριστική συνθήκη P υπάρχει σύνολο

$$\mathrm{A}=\{x/P\left(x\right)\}$$

με μέλη ακριβώς τις $n-\alpha\delta\varepsilon\varsigma$ αντικειμένων που ικανοποιούν την $P\left(x\right)$έτσι ώστε για κάθε x

$$x\in A\Leftrightarrow P\left(x\right)$$

Το παράδοξο του Russel έθεσε ένα τέλος σε αυτόν τον ελκυστικό υπαγόμενο από τις διαισθήσεις ορισμό του συνόλου. Το διάσημο αυτό παράδοξο χρησιμοποιεί την αυτοαναφορά για την εξαγωγή μιας αντίφασης.

1.1.2 Παράδοξο του Russel

$$R=\{x/x\,\sigma\acute{\upsilon}\nu o\lambda o\,\kappa\alpha\iota\,x\notin x\}$$

Από τον ορισμό του R εύκολα προκύπτει η αντίφαση καθώς

$$R\in R\Leftrightarrow R\notin R$$

Στο Principia Mathematica οι Russel και Whitehead αποπειράθηκαν να θεμελιώσουν τα μαθηματικά με την αναγωγή των αριθμητικών εξισώσεων σε εξισώσεις της λογικής.

> "Το σύνολο των καθαρών μαθηματικών ασχολείται αποκλειστικά με έννοιες που μπορούν να ορισθούν από ένα πολύ μικρό αριθμό θεμελιωδών λογικών εννοιών, και ότι όλες οι προτάσεις τους μπορούν να αποδειχθούν από ένα πολύ μικρό αριθμό λογικών αρχών. Η απόδειξη της φιλοσοφικής αυτής άποψης αν δεν κάνω λάθος, έχει όλη την βεβαιότητα και ακρίβεια που οι μαθηματικές αποδείξεις μπορούν να επιδείξουν" [4]

Η προσπάθειά τους βασίζεται στο επιχείρημα, ότι όλες οι μαθηματικές προτάσεις μπορούν να αναλυθούν σε προτάσεις της λογικής και της συνολοθεωρίας. Συνεπώς, αυτοί οι δύο κλάδοι θα αποτελούν το στήριγμα και τον φορέα εγκυρότητας όλων των άλλων. Σε μια απόπειρα να αποβάλλουν τέτοιου είδους παράδοξα προχώρησαν στην δημιουργία της θεωρίας τύπων (type theory), η οποία περιόριζε σε μεγάλο βαθμό την αυτοαναφορά. Αυτή ήταν μια ad-hoc προσπάθεια που δεν μπορούσε όμως να δικαιολογηθεί με κάποιον στέρεο τρόπο και ταυτόχρονα ήταν αρκετά δύσχρηστη με αποτέλεσμα να μην καταφέρει τελικά να επικρατήσει.

Από την άλλη πλευρά, η θεωρία τύπων επηρέασε τόσο την θεωρία συνόλων όσο και τη φιλοσοφία των μαθηματικών. Το παράδοξο του Russel λειτούργησε ως τροχοπέδη στην ανάπτυξη της θεωρίας συνόλων αλλά ξεπεράστηκε με την αξιωματική θεμελίωσή της από τον Zermelo. Ο Zermelo στην αξιωματικοποίηση της θεωρίας συνόλων κατέληξε σε έναν πολύ πιο εύχρηστο τρόπο περιγραφής. Ακόμη και σήμερα τα αξιώματά του με ελάχιστες αλλαγές συνθέτουν τη βάση της ανάπτυξης της θεωρίας συνόλων. Η αξιωματικοποίηση αυτή έχει ως πρότυπο την ευκλείδεια γεωμετρία μια θεωρία κατεξοχήν αξιωματική. Η κατά Zermelo θεωρία συνόλων κατάφερε να ενσωματώσει την αυταναφορά και να την χρησιμοποιήσει ως ένα πολύ σημαντικό εργαλείο. Η αυτοαναφορά είναι εμφανής ακόμα και στο διαγώνιο επιχείρημα του Cantor, στην απόδειξη για την πληθικότητα των απείρων.

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση του Λογικισμού, η προσπάθειά τους εδράζεται στη δημιουργία του Λογισμού (1), ο οποίος είναι υπεύθυνος για την παραγωγή ορθών αποτελεσμάτων. Οι ενστάσεις του Wittgeinstein όμως έχουν βάση, όταν διατύπωνε πως αυτός ο Λογισμός δεν έχει κάποια ιδιαιτερότητα για να διαφέρει από άλλους λογισμούς. Είναι δηλαδή ένας από τους πολλούς και άρα δεν μπορεί να είναι υπεύθυνος για την παραγωγή ορθών αποτελεσμάτων. Τελικά, φαντάζει ίσως πιο σωστό το επιχείρημα ότι η λογική διέπει τα μαθηματικά αλλά δεν τα στηρίζει. [5]

1.2 Ιντουσιονισμός

Μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση ήταν τα κατασκευαστικά ή ενορατικά (ιντουσιονιστικά) μαθηματικά που εισήγαγαν έναν διαφορετικό τρόπο προσέγγισης και ερμηνείας των μαθηματικών. Σε αντίθεση με τον Λογικισμό, ο Ενορατισμός θεωρούσε ότι η λογική εδράζεται στα μαθηματικά. Ως ιδέα εντοπίζεται σε αρκετούς μεγάλους μαθηματικούς, όπως ο Poincare, ο Baire και άλλοι. Ο Brouwer υπήρξε ο κορυφαίος εκπρόσωπος αυτού του κινήματος που μαζί με τον Weyl θεωρούνται οι θεμελιωτές του. Η ενόραση αποτελεί τον πυρήνα αυτής της σχολής, πρόκειται για μια εποπτεία μέσω της οποίας κατανοούμε τα μαθηματικά. Ο Ενορατισμός θεωρεί τη γλώσσα ως κάτι ξεχωριστό από τα μαθηματικά, ένα μέσο μετάδοσης τους.

Η ενόραση είναι μια δραστηριότητα σκεπτικού χαρακτήρα, η οποία εμπεριέχει έμφυτη την έννοια της αλήθειας, προηγείται της γλώσσας χρονικά και δεν εξαρτάται από αυτήν [1]. Εδράζεται στο νου αποτελεί μια βαθύτερη έννοια, η οποία αφορά τον τρόπο με τον οποίο σκέφτεται ο άνθρωπος ανεξάρτητα από τα ερεθίσματα που δέχεται και βασίζεται σε μια χρονική επαλληλία κινήσεων μέσω της οποίας κατανοεί τα πράγματα. Οι ιντουσιονιστές ταύτιζαν την ύπαρξη με την κατασκευή που είχε ως επακόλουθο την αποδοχή κάποιων αποτελεσμάτων ως συνεπών αλλά όχι υπαρκτών. Η αλήθεια του τυπικού συστήματος βασιζόταν στην ενόραση και την κατασκευή του για αυτόν τον λόγο δεν μπορούσε να αποδειχτεί η συνέπεια ενός τυπικού συστήματος εντός του. "Δεν είναι βέβαιο ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα μπορεί είτε να λυθεί είτε να αποδειχθεί ότι δεν λύνεται " [6].

Ο Brouwer ασκούσε κριτική ακόμα και στην ιδέα της επαγωγής, ακρογωνιαίο λίθο στην αξιωματικοποίηση της αριθμητικής του Peano. Θεωρούσε ότι ακόμα και ο καθολικός ποσοδείκτης ($\forall$) εμπεριέχει έναν περιορισμό από την στιγμή που αναφέρεται σε ένα ήδη κατασκευασμένο σύνολο. Από την άλλη αποδεχόταν την απειρία των φυσικών αριθμών και την ύπαρξη μιας μεθόδου η οποία θα αποδείκνυε τις καθολικές τους ιδιότητες. Η πιο αιρετική ίσως προσπάθεια αυτού του προγράμματος ήταν η ενορατική λογική. Σε αυτήν δεν είχε θέση ο νόμος του αποκλειόμενου τρίτου ότι ισχύει Α ή $\neg$ Α όταν πρέπει να εφαρμοστεί σε άπειρα συστήματα.

Ο Brouwer ήθελε να διαχωρίσει τις προτάσεις, οι οποίες εκφράζουν αλήθεια από τις απλά συνεπείς προτάσεις. Ο Kolmogorov ήταν ο πρώτος που προσπάθησε να προβεί σε μια αξιωματικοποίηση της, πολλοί ακόμη προσπάθησαν να συνεισφέρουν σε αυτό το έργο. Ο Kleene έβλεπε με συμπάθεια αυτές τις ιδέες και προσπάθησε να προσδώσει έναν φορμαλισμό σε αυτό το τυπικό σύστημα και να αποσαφηνίσει την σχέση τους με τα κλασικά μαθηματικά. Επιλέγοντας από τα αξιώματα που είχαν προτείνει οι προηγούμενοι παρουσίασε μια αξιωματικοποίηση της. Είναι όμως χρήσιμο για την κατανόηση του Ιντουσιονισμού να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στον Brouwer, τον τρόπο που περιγράφει την εποπτεία καθώς και το ίδιο το ρεύμα.

> "Η πρώτη πράξη Ιντουσιονισμού διαχωρίζει τα μαθηματικά από την γλώσσα των μαθηματικών, ιδιαίτερα από τα φαινόμενα της γλώσσας που περιγράφονται από την θεωρητική λογική, και αναγνωρίζει πως τα ιντουσιονιστικά μαθηματικά είναι μια θεμελιώδης αγλωσσική διαδικασία του νου που έχει τις ρίζες της στην αντίληψη μίας κίνησης του χρόνου, δηλαδή της διάλυσης μίας στιγμής της ζωής σε δύο διακριτά πράγματα, που το ένα δίνει την θέση του στο άλλο διατηρούμενο όμως στην μνήμη. Αν αυτή η έτσι γεννημένη δυάδα απογυμνωθεί από κάθε ποιότητα, παραμένει η άδεια μορφή του υποβάθρου όλων των δυαδών. Αυτό ακριβώς το υπόβαθρο, αυτή η άδεια μορφή, είναι η βασική εποπτεία (ενόραση) των μαθηματικών" [7]

Όπως είναι λογικό αυτές οι απόψεις συνάντησαν και πολλούς επικριτές. Αρχικά, η ενόραση κατηγορήθηκε ως μια ψυχολογική εμπειρία, η οποία δεν αφορά τα μαθηματικά. Επομένως, τα θεμέλια πάνω στα οποία αποβλέπει να δομηθεί η νέα μαθηματική σκέψη είναι σαθρά. Ο Hilbert τους κατηγορούσε πως προβαίνουν σε ad-hoc απόλυτες απαγορεύσεις και εξοβελισμό κομματιών των μαθηματικών με σκοπό την διευκόλυνση τους. Ενέτασσε τις ιδέες ως συνέχεια του Kronecker και των απόψεων για τους φυσικούς αριθμούς[1], όμως πια τα μαθηματικά είναι αρκετά στέρεα για να ανταπεξέλθουν σε αυτούς τους κραδασμούς[8]. Τα μαθηματικά και η λογική βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν γίνεται η αναγωγή του ενός στο άλλο. Υπό μια διαφορετική σκοπιά δεν πρόκειται για νέα θεμελίωση αλλά για μια μεταρρύθμιση των μαθηματικών.

1.3 Φορμαλισμός

Ο Φορμαλισμός πέρα από ένα φιλοσοφικό κίνημα αποτέλεσε και το πιο αυστηρό πρόγραμμα για την θεμελίωση των μαθηματικών. Κυριότερος εκφραστής αυτού του προγράμματος αποτέλεσε ο μεγάλος μαθηματικός Hilbert. Στην προσπάθεια κατανόησης του Φορμαλισμού εξετάζονται τα δύο βασικά στοιχεία του όπως τα έθεσε ο Robinson το 1964 [9].

1. Οποιαδήποτε αναφορά σε άπειρες ολότητες στερείται νοήματος.
2. Πρέπει να λειτουργούμε ως αν οι άπειρες ολότητες ήδη υπάρχουν

Οι φορμαλιστές θεωρούσαν κενή νοήματος οποιαδήποτε αναφορά ακόμα και στην ύπαρξη του απείρου. Θα πρέπει να επιτευχθεί μια κάθαρση των μαθηματικών από την έννοια του απείρου. Το δεύτερο σημείο στην πρώτη ανάγνωση φαντάζει ίσως αντιφατικό ως προς το πρώτο αλλά αυτό που εννοεί είναι πως η καθιερωμένη μαθηματική πρακτική δεν πρέπει να αλλάξει. Όπως ευφάνταστα έχει διατυπωθεί δεν ήταν διατεθειμένοι να εγκαταλείψουν τον παράδεισο που είχε

[1] ο Kronecker υπήρξε μεγάλος αντίπαλος του Cantor, μεταξύ μύθου και πραγματικότητας είπε " Ο θεός έφτιαξε τους φυσικούς όλα τα άλλα είναι κατασκεύασμα του ανθρώπου

φτιάξει ο Cantor. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ορισμού χωρίς την χρήση του απείρου είναι ο ορισμός της συνέχειας.

1.3.1 Ορισμός συνέχειας Cauchy

Η συνάρτηση $f(x)$ $f: A \to R$ θα ονομάζεται συνεχής ως προς x, αν για κάθε $x \in A$ οι αριθμητικές τιμές της διαφοράς $f(x+a) - f(x)$μικραίνουν επ΄άπειρο μαζί με αυτές του α

Η $f(x)$θα παραμένει συνεχής ως προς x, αν μια απειροελάχιστη αύξηση της μεταβλητής παράγει πάντοτε μια απειροελάχιστη αύξηση της συνάρτησης

1.3.2 Ορισμός συνέχειας Weirstrass

Η συνάρτηση $f: A \to R$ θα ονομάζεται συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$υπάρχει δ τέτοιο ώστε κάθε x

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Όπως είναι εμφανές, ο δεύτερος ορισμός δεν διαφέρει νοηματικά από τον πρώτο, απλώς όμως διατυπώνεται χωρίς την αναφορά σε άπειρες ποσότητες. Τέτοιου είδους ορισμοί αποτελούν πρότυπο ορισμών για τον Hilbert.

Η αξιωματικοποίηση της ευκλείδειας γεωμετρίας από τον Hilbert, της αριθμητικής από τον Peano και της συνόλων από τον Zermelo δημιούργησαν την ανάγκη της συνέπειας. Μετά και την απόδειξη της συνέπειας της γεωμετρίας, ο Hilbert αποπειράθηκε να φτιάξει μια διαδικασία βάση της οποίας θα ορίζονταν οι αποδείξεις για την παραγωγή ορθών αποτελεσμάτων. Με λίγα λόγια, η αξιωματικοποίηση ουσιαστικά σημαίνει ότι με βάση ένα πεπερασμένο σύνολο συμβόλων, ένα πεπερασμένο λεξιλόγιο και τα εκάστοτε αξιώματα δημιουργείται ένα τυπικό σύστημα το οποίο μπορεί να εκφράσει μια θεωρία. Τα αξιώματα αυτά πρέπει να είναι απλά και να μην περιέχουν περιττά στοιχεία.

Αυτό βρισκόταν στον πυρήνα της σκέψης τους πως με πεπερασμένα και ορθά βήματα εκκινώντας από τα αξιώματα δεν δύναται να οδηγηθούμε σε αντιφάσεις. Η υπολογιστική αυτή διαδικασία θα έβαζε πάρα πολύ στέρεα θεμέλια στα μαθηματικά. Καθώς οτιδήποτε αποδεικνυόταν με αυτή την διαδικασία, αποτελούσε ένα δεύτερο στρώμα αξιωμάτων. Σχηματικά αν κάνουμε την αντίστροφη διαδικασία ("προς τα πίσω") θα καταλήγουμε πάντα στα εκάστοτε αξιώματα.

Η πίστη του Hilbert στη δύναμη των τυπικών συστημάτων βασίζονταν στην πεποίθηση, ότι όλα τα μαθηματικά προβλήματα λύνονται και πρέπει να λυθούν. Η άγνοια δεν είχε θέση στον μαθηματικό κόσμο του Hilbert. Θεμέλιο του Φορμαλισμού αποτελούσε η μη αντιφατικότητα των αξιωμάτων, η θεωρία οφείλει να είναι συνεπής και ειδικότερα η αριθμητική. Όλο το πρόγραμμα διακατέχονταν από μια μεγάλη αυστηρότητα που κρίνονταν απαραίτητη για την ορθή ανάπτυξη του.

Ο Hilbert το 1900 στο διεθνές συνέδριων μαθηματικών σε μια ιστορική διάλεξη εκφώνησε τα 23 προβλήματα για την πρόοδο των μαθηματικών στον επερχόμενο αιώνα. Ενδεικτική αυτής του της άποψης είναι η αρχή της ομιλίας του.

> "Ποίος ανάμεσα μας, δεν θα ήθελε να ανασηκώσει το πέπλο πίσω από το οποίο βρίσκεται κρυμμένο το μέλλον; Να ρίξει μια ματιά στη μελλοντική πρόοδο της επιστήμης μας και να μάθει τα μυστικά των εξελίξεων στους αιώνες που έρχονται; Να μάθει ποίοι θα είναι οι συγκεκριμένοι στόχοι προς τους οποίους οι κορυφαίες μαθηματικές διάνοιες των επερχόμενων γενεών θα στρέψουν τις προσπάθειες τους. Ποίες νέες μεθόδους και ποία νέα στοιχεία από το πλούσιο και ευρύ πεδίο της μαθηματικής σκέψης θα αποκαλύψουν οι επόμενοι αιώνες;"[10]

Αυτή η προσπάθεια έμελλε να αποτύχει και αυτή του η αποτυχία είχε την σφραγίδα του Godel. Ο Godel απέδειξε αρχικά την πληρότητα ενός συστήματος, ακολούθως έκανε την ιδιοφυή σκέψη να μην προσπαθήσει να αποδείξει τη συνέπεια της αριθμητικής αλλά την ασυνέπεια της. Στα μαθηματικά συστήματα που μελέτησε ο Godel οι προτάσεις αναφέρονται σε αριθμούς και σύνολα και όχι σε προτάσεις. Επομένως, το πρόβλημα που δημιουργείται είναι με ποιον τρόπο θα γίνει αναφορά σε εκφράσεις. Ο Godel υπερκέρασε αυτό προσδίδοντας σε κάθε πρόταση έναν κωδικό αριθμό, τον αριθμό Godel [11].

Αυτή η κωδικοποίηση κατάφερε να εντάξει τη θεμελίωση των μαθηματικών μέσα στα ίδια τα μαθηματικά, ειδικότερα στην θεωρία αριθμών [12]. Μέχρι τότε η αλήθεια συμβάδιζε με την αποδειξιμότητα (provablility), αφού εντός του τυπικού συστήματος είτε αυτή είτε η άρνηση μπορούσε να αποδειχτεί. Ο Godel κατασκεύασε μια πρόταση της μορφής "αυτή η πρόταση δεν είναι αποδείξιμη" . Αυτή η χρήση της αυτοαναφοράς παραπέμπει στον παράδοξο του ψεύτη του Επιμενίδη [13]. Ο Επιμενίδης με καταγωγή από την Κρήτη είχε διατυπώσει αυτό το παράδοξο ως " Όλοι οι Κρήτες είναι ψεύτες"

1.3.3 Παράδοξο του Ψεύτη

Θεωρώ μια πρόταση $L : L$ is false

Με μια πιο μαθηματική φόρμα $L = (L = false)$

¨Οπως γίνεται κατανοητό οδηγούμαστε σε μια αντίφαση η πρόταση Lείναι ασυνεπής

Συνεχίζοντας, λίγο ακόμα μπορούμε να θεωρήσουμε δύο προτάσεις οι οποίες είναι δίτιμες (**boolean**). Θα εκφράσουμε πάλι την ίδια πρόταση λίγο τροποποιημένη

$B(t) = T$αν η t αντιπροσωπεύει μια δυαδική έκφραση με αληθοτιμή T

αλλιώς F

$G =$ "$B\,(G) = T$"

Αν η παραπάνω πρόταση αφορά την αλήθεια, ο Godel την μετέφερε στην έννοια της αποδειξιμότητας. Έχοντας ως βάση το παραπάνω η μοναδική αλλαγή στην οποία προβαίνουμε είναι η αντικατάσταση της δυαδικής έκφρασης με "αποδείξιμη δυαδική έκφραση". Διέκρινε την αποδειξιμότητα εντός ενός τυπικού συστήματος από την αλήθεια. Η αντίφαση που προκύπτει από αυτή την πρόταση δεν οδηγεί σε αντιφατικότητα των μαθηματικών αλλά οδηγεί στο συμπέρασμα ότι θα μπορούσε μια πρόταση να είναι αληθής αλλά όχι αποδείξιμη. Τελικά, δηλαδή το τυπικό σύστημα δεν είναι τόσο ισχυρό όσο πιστεύαν ότι είναι ως τότε. Δεν είναι ικανό δηλαδή να αποδείξει όλες τις αληθείς προτάσεις. Τα μαθηματικά δεν είναι αντιφατικά όπως κάποιοι μη γνωρίζοντες ισχυρίζονται, αυτό πρέπει να καταστεί σαφές.

Η συνέπεια της αριθμητικής κατά Peano αποτελούσε πέρα από ένα μαθηματικό πρόβλημα και μια πεποίθηση για την δύναμη των μαθηματικών. Η σκέψη του Godel ήταν τόσο αιρετική που δεν μπορούσε να χωρέσει στο μυαλό πολλών συγχρόνων του μαθηματικών. Ο μεγάλος στόχος του Hilbert μπορεί να μην επετεύχθη αλλά η προσφορά του φορμαλισμού αποτυπώνεται σε πολλούς και διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών. Άλλωστε, ο Hilbert αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους μαθηματικούς του προηγούμενο αιώνα με αποτύπωμα σε μια πληθώρα μαθηματικών τομέων.

Μέχρι στιγμής, έχει εξεταστεί η αυτοαναφορά ως φορέας παραδόξων. Όντως, η αυτοαναφορά σε πολλές περιπτώσεις δημιουργεί προβλήματα, όμως δεν παύει να είναι κι ένα πολύ χρήσιμο όπλο στην επίλυση προβλημάτων. Η υπολογιστική δύναμη της αυτοαναφοράς αποτυπώνεται στις δυνατότητες που έχει η αναδρομή. Παράλληλα, είναι ενδιαφέρον να εξεταστεί η αυτοαναφορά και στη δημιουργία φράκταλ με μια πιο γεωμετρική οπτική [14]. Στο επόμενο κεφάλαιο, μελετάται η απόπειρα ανάπτυξης μιας παραγωγικής μεθόδου με βάση την αυτοαναφορά.

1.4 Αυτοαναφορά και Διαγώνια μέθοδος

Έγινε ως τώρα λόγος για την αυτοαναφορά στο παράδοξο του Russel που οδήγησε τους μαθηματικούς να ορίσουν ότι ένα σύνολο συνόλων θα αποτελεί κλάση και όχι σύνολο. Στο θεώρημα της μη πληρότητας του Godel η αυτοαναφορά οδηγεί στη διάκριση της αποδειξιμότητας από την αλήθεια. Ένας από τους πρώτους που χρησιμοποίησε την αυτοαναφορά στην σύγχρονη εποχή με εξαιρετικά αποτελέσματα ήταν ο Cantor. Η χρήση της αυτοαναφοράς στα μαθηματικά είναι συνδεδεμένη με την διαγώνια μεθόδου του Cantor, δηλαδή με την χρήση μιας διαγώνιας συνάρτησης.

Ο Cantor υπήρξε ο θεμελιωτής της θεωρίας συνόλων, η θεμελίωση αυτή ονομάστηκε αργότερα αφελής θεωρίας συνόλων. Η έννοια αφελής προκύπτει από τον ορισμό του συνόλου του Cantor –εξετάστηκαν και παραπάνω τα προβλήματα που δημιουργούσε ένας τέτοιος ορισμός. Η διαγώνια μέθοδος αναπτύσεται και στο κεφάλαιο 3 αλλά με μια διαφορετική σημασία. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε από τον Cantor για την ανάπτυξη της θεωρίας συνόλων, τα αποτελέσματα αυτής της μεθόδου υπήρξαν εντυπωσιακά και με σχετικά απλό τρόπο. Ο Cantor επέτυχε την διάκριση των απείρων σε αριθμήσιμο και υπεραριθμήσιμο με έναν συγκεκριμένο τρόπο που παρουσιάζεται αναλυτικά παρακάτω.[3]

1.4.1 Θεώρημα ένωση αριθμήσιμων συνόλων

Για κάθε ακολουθία $A_0, A_1, \ldots$ αριθμήσιμων συνόλων η ένωση

$$\mathrm{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \bigcup A_1 \bigcup \ldots$$

πιο απλά η ένωση δύο αριθμήσιμων συνόλων A, B είναι αριθμήσιμο σύνολο

Απόδειξη

Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει στην περίπτωση που κανένα από τα A_nδεν είναι κενό. Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε μια ισοδυναμία για τα αριθμήσιμα σύνολα.

1.4.2 Πρόταση ισοδυναμία αριθμήσιμων συνόλων

Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για κάθε σύνολο A

1. Το σύνολο A είναι αριθμήσιμο
2. $A \leq_c N$
3. Το A είναι κενό είτε το A επιδέχεται απαρίθμηση δηλαδή δέχεται επιμορφισμό $\pi : \mathbb{N} \mapsto A$ έτσι ώστε

$$\mathrm{A} = \pi[\mathbb{N}] = \pi(0), \pi(1), \pi(2), \ldots$$

Θα παραλείψουμε την απόδειξη για λόγους συντομίας.

Με βάση την παραπάνω πρόταση, μπορούμε να βρούμε μια απαρίθμηση π^n: $\mathbb{N} \mapsto A_n$ για κάθε A_n. Θέτουμε

$$\alpha_i^n = \pi^n(i)$$

Για να απλοποιήσουμε ως έναν βαθμό την κατάσταση για κάθε n θεωρούμε ότι κάθε A_nέχει την μορφή

$$A_n = \{a_0^n, a_1^n, \ldots\}$$

Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δημιουργείται ένας πίνακας από όλες τις απαριθμήσεις επομένως θα περιέχει όλα τα στοιχεία του A. Για την καλύτερη κατανόηση θα παρουσιάσουμε αυτόν τον πίνακα.

$$A_0: \ a_0^0 \ \ a_1^0 \ \ a_2^0 \ \ldots$$

$$A_1: \ a_0^1 \ \ a_1^1 \ \ a_2^1 \ \ldots$$

$$A_2: \ a_0^2 \ \ a_1^2 \ \ a_2^2 \ \ldots$$

$$\ldots$$

Επιλέγουμε αρχικά το πρώτο στοιχείο της πρώτης γραμμής, στην συνέχεια επιλέγουμε το πρώτο στοιχείο της δεύτερης γραμμής μαζί με το δεύτερο στοιχείο της πρώτης γραμμής και το επαναλαμβάνουμε την διαδικασία. Είναι φανερό από που προκύπτει το όνομα διαγωνοποίηση, όποτε το $A = \{a_0^0, a_0^1, a_1^0, a_0^2, a_1^1, a_2^0, \ldots\}$. Άμεση συνέπεια αυτού του θεωρήματος είναι ότι το $\mathbb{Z}$είναι αριθμήσιμο όπως και το $\mathbb{N}$. [2] Αυτό το αποτέλεσμα ήταν φοβερά καινοτόμο και έρχεται σε αντίθεση ακόμα και με την κοινή διαίσθηση, καθώς αντιλαμβανόμαστε το $\mathbb{Z}$ ως προέκταση του $\mathbb{N}$. Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε ότι και το $\mathbb{Q}$ ανήκει στην ίδια κλάση απείρου με το $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$, αυτό κι αν είναι κάτι που αντίκειται στην διαισθητική μας αντίληψη για τα σύνολα καθώς το$\mathbb{Q}$ φαντάζει αισθητά μεγαλύτερο από τον $\mathbb{N}$.

Ο Cantor διέκρινε δύο είδη απείρου, το πρώτο αφορά άπειρα σύνολα όπως το $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$που είδαμε παραπάνω και το δεύτερο που είναι ένα άπειρο μεγαλύτερης τάξης αφορά σύνολα όπως το $\mathbb{R}$, σύνολα της μορφής $(0,1)$. Το ερώτημα που τον απασχολούσε ήταν αν υπάρχει κι άλλος είδος απείρου ανάμεσα σε αυτά τα δύο είδη. Το ερώτημα του αυτό έχει μείνει στην ιστορία ως η "υπόθεση του συνεχούς".

Η διαγώνια μέθοδος αποτέλεσε πηγή έμπνευσης για αρκετούς μαθηματικούς τα επόμενα χρόνια. Το 1929 ο Ackermann απέδειξε ότι υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση που δεν είναι πρωτογενώς αναδρομική. Η Rosa Peter εφτά χρόνια αργότερα χρησιμοποιώντας την διαγώνια μέθοδο κατέληξε στο ίδιο αποτέλεσμα. Ακόμα και ο Turing για το πρόβλημα τερματισμού χρησιμοποίησε μια παραλλαγή της διαγώνιας μεθόδου.

[2] Το $\mathbb{Z}$=$\mathbb{N} \bigcup \{-1, -2, \ldots\}$και το σύνολο των αρνητικών ακεραίων είναι επίσης αριθμήσιμο με την χρήση της αντιστοιχίας ($x \rightarrow -(x+1)$)

2 Αυτοαναφορά και Εξέλιξη

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται η επισκόπηση και παρουσίαση της θεωρίας [15]. Πρόκειται για μια θεωρία μάθησης βασισμένη στην αυτοαναφορά. Κεντρικό της κομμάτι είναι οι αυτοαναφορικοί (self-edit) αλγόριθμοι, επεξεργάζεται η υπόθεση ότι ένας αλγοριθμός μπορεί να δεχθεί ως είσοδο το πρόγραμμα του. Η δυνητική αυτή ικανότητα εδράζεται στην άποψη πως εξωτερικές παρεμβάσεις μπορούν να αντικατασταθούν από εσωτερικές διεργασίες του προγράμματος.

2.1 Εισαγωγικοί Ορισμοί

Σε αυτό το σημείο θα προβούμε στον ορισμό εννοιών που είναι προαπαιτούμενοι για την κατανόηση της θεωρίας.

2.1.1 Ορισμός: Αλγόριθμος

Αλγόριθμος καλείται οποιάδηποτε καλώς ορισμένη και πεπερασμένη διαδικασία, η οποία οδηγεί στην επίλυση ενός προβλήματος.

2.1.2 Ορισμός: Υπολογισμός

Υπολογισμός ονομάζεται μια διαδικασία, κατά την οποία ξεκινώντας από κάποια τιμή ή σύνολο τιμών (**inputs**) και με βάση αυστηρά ορισμένο σύνολο κανόνων (αλγόριθμος), μεταβαίνει σε μια τελική κατάσταση με αποτέλεσμα μία τιμή ή σύνολο τιμών (**outputs**).

2.1.3 Ορισμός: Υπολογιστικό Σύστημα

Μια μηχανή (πραγματική ή μη) που μπορεί να υλοποιήσει υπολογισμούς καλείται **υπολογιστικό σύστημα**.

Αποδεχόμενοι την θέση των Turing-Church, θα καλούμε έναν αλγόριθμο **υπολογίσιμο** όταν μπορεί να υλοποιηθεί με μηχανιστικό τρόπο. Η διαδικασία μπορεί να υλοποεΐται διαφορετικά κάθε φορά, και θα ονομάσουμε αυτήν την διαδικασία **κωδικοποίηση**. **Κωδικοποίηση ενός συνόλου** A σε ένα σύνολο B είναι η τυχαία ένα-προς-ένα συνάρτηση c από το A στο B,

$$c : A \xrightarrow{1-1} B$$

που θεωρητικά μας επιτρέπει να ανακτήσουμε κάποιο στοιχείο $x \in A$ από τον κωδικό του $c[x]$[16]. Στο εισαγωγικό κεφάλαιο συναντήσαμε την αρίθμηση Godel, η οποία αποτελεί ένα είδος κωδικοποίησης. Βάσει του παραπάνω ορισμού, το σύνολο A θα είναι οι αλγόριθμοι και θα αντιστοιχοίζονται στο σύνολο B που είναι οι κωδικοί. Ένας **κωδικός** είναι μια ακολουθία με πεδίο ορισμού ένα αριθμήσιμο σύνολο (όπως ένα λεξικό). Οι κωδικοί θα αποτελούν τόσο την εισοδο (**input**) όσο και την έξοδο (**output**) ενός αλγοριθμού. Αυτοί οι κωδικοί που μπορούν και να ενεργοποιηθούν θα ονομάζονται **executable codes**. Ένα κωδικός μπορεί να περιέχει και κομμάτια που δεν ανήκουν σε αυτή την κατηγορία και θα αναφερόμαστε σε αυτά ως **data codes** που περιέχουν δεδομένα.

2.2 Διεύθυνση Κωδικού

2.2.1 Ορισμός: Διεύθυνση Κωδικού

Θεωρούμε ότι οι κωδικοί αποτελούνται από επιμέρους στοιχεία τα οποία καλούμε **διευθύνσεις**. Οι διευθύνσεις ενός κωδικού θα είναι nαδες φυσικών αριθμών

Οι διευθύνσεις *εφοδιάζουν με μια έννοια διάταξης* τους κωδικούς. Αναλυτικότερα μπορούμε με την χρήση παρενθέσεων να το αναπαραστήσουμε για να γίνει πιο εμφανές.

$$((11,01),(111,010),(10,(110,011,101)))$$

η διεύθυνση (3,2,1) υποδεικνύει το πρώτο μέρος του δεύτερου μέρους του τρίτου μέρους του παραπάνω κωδικού, δηλαδή το 110

Μια διεύθυνση ενός κωδικού μπορεί να περιέχει και μια αλγοριθμική συνάρτηση, π.χ. μια συνάρτηση $first\,(c)$ που μας επιστρέφει την πρώτη διεύθυνση του κωδικού c. Σε αυτό το σημείο θα εξηγήσουμε κάποιους συμβολισμούς για τις διευθύνσεις

- $c\,[(\theta)\,b]$: ο κωδικός b περιέχεται στην διεύθυνση θ του c, η χρήση του θ γίνεται για να διαχωρίσουμε το θ από το μέρος του κωδικού c
- $c\,[(\theta)\,\emptyset]$: η διεύθυνση θ του κωδικού c είναι κενή
- $c\,[\emptyset]$: ο κωδικός c περιέχει μια κενή διεύθυνση
- Έστω θ_1και θ_2διευθύνσεις, ορίζουμε ως **concatenation** την ένωση τους. Αυτό θα γίνει πιο κατανοητό με ένα παράδειγμα, π.χ.

$$[\theta_1=(0,1,0)]\wedge[\theta_2=(1)]\rightarrow\left[\theta_1\widehat{\ }\theta_2=(0,1,0,1)\right]$$

Χρειαζόμαστε ένα τρόπο να εποπτεύουμε τους αλγορίθμους, ειδικότερα την κατασκευή τους από επιμέρους αλγόριθμους. Αυτούς που μπορούμε να τους θεωρήσουμε σαν τα “βήματα” του κάθε αλγοριθμού θα τις ονομάσουμε εντολές (**instructions**). Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εξετάσουμε έναν αλγόρθμο εσωτερικά. Έτσι ένας αλγόριθμος C θα αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο εντολών που προέρχονται από ένα σύνολο $B:\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$ και η ροή (σειρά) με την οποία αυτές εκτελούνται ελέγχεται από έναν αλγόριθμο B. Θεωρούμε ότι η εντολή B_1 εκτελείται πρώτη και ο B ελέγχει ποια θα εκτελεστεί μετά. Έτσι έχουμε μια ακολουθία εντολών

$$t_1\rightarrow t_2\rightarrow\cdots\rightarrow t_n$$

αυτή την διάκριση που ελέγχεται από τον B εξαρτόμενο από τον δείκτη του t και το στάδιο του υπολογισμού που βρισκόμαστε, ορίζεται ως η ενεργοποιημένη εντολή. Δεδομένου ενός κωδικού x που λαμβάνεται ως είσοδο, μπορούμε να παρατηρήσουμε την ακολουθία κωδικών που εκτελεί ένα πρόγραμμα c το οποίο αντιστοιχεί σε έναν αλγόριθμο $alg\,(c)$.

$$x=x_1\rightarrow x_2\rightarrow\ldots$$

Ισχύει ότι:

1. Για κάθε $k=1,2,\ldots$ υπάρχει δείκτης $j_k\in[1,n]$, τέτοιος ώστε $x_{k+1}=B_{j_k}\,(x_k)$ και ο B_{j_k}θα ονομάζεται ενεργοποιημένη εντολή (activated instruction) του υπολογιστικού βήματος $x_k\rightarrow x_{k+1}$.
2. Θεωρούμε , ότι $j_1=1$, άρα $B_1\,(x_1)$.
3. Για κάθε k = 1, 2, ... το j_{k+1}είναι συνάρτηση της αμέσως προηγούμενης ενεργοποιημένης εντολής και του υπολογισμού σε αυτό το βήμα : δηλαδή j_{k+1}= $B(j_k,x_{k+1})$

Θεωρούμε ότι ο υπολογισμός $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \ldots$ περιέχει πληροφορίες για την ροή εκτέλεσης των εντολών, για αυτό και λαμβάνεται ως είσοδος. Όμως οι κωδικοί αποτελούν συνθετικά στοιχεία των αλγοριθμών, επομένως μπορούμε να επιτρέψουμε μια εντολή ενός προγράμματος να είναι επίσης πρόγραμμα με την μορφή $(C : C_1, \ldots C_m)$. Τα προγράμματα των οποίων οι εντολές είναι εμφωλευμένα προγράμματα θα τα ονομάζουμε δομημένα προγράμματα (structured programs). Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται μια δομή που θα μας βοηθήσει κατά την περαιτέρω εξέταση.

- $c\,[b]$: η εντολή b περιέχεται στον c
- $c\,[\bar{b}]$: η b είναι ενεργοποιημένη εντολή του κωδικού c
- $c\,[(+)\,\bar{h}]$: στον κωδικό c έχει προστεθεί μια νέα διεύθυνση με την ενεργοποιημένη εντολή $\bar{h}$.

Θα θεωρήσουμε δυο διευθύνσεις με τις οποίες εξασφαλίζεται η επικοινωνία με το περιβάλλον. Μια για την περιβαλλοντική είσοδος (enviromental input) και μια για την περιβαλλοντική έξοδο (enviromental output).

2.3 Proliferating Υπολογισμοί

Τα δομημένα προγράμματα –προγράμματα των οποίων οι εντολές είναι προγράμματα– δύναται να έχουν περισσότερες από μια εξόδους. Ένα βασικό παράδειγμα μιας τέτοιας εντολής είναι ο αλγόριθμος που λαμβάνοντας ως είσοδο έναν κωδικό θα επιστρέφει δύο αντίγραφα του εαυτού του. Αυτή η εντολή θα είναι της μορφής:

$$R : x \rightarrow \{x, x\}$$

Αυτό μπορεί να έρχεται σε αντίθεση με τον καθιερωμένο συμβολισμό των συνόλων, ωστόσο αποδεχόμενοι θα μπορέσουμε να αποφύγουμε ως έναν βαθμό την πολυπλοκότητα. Αν μια εντολή R αποτελείται από επιμέρους εντολές

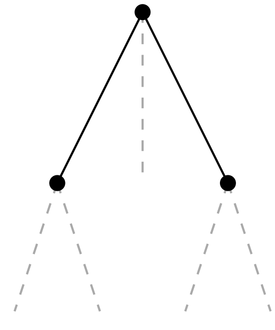
$$\{R_1, \ldots, R_k\}$$

και επιστρέφει περισσότερους από έναν κωδικούς και ισχύει:

$$\{R_1, \ldots, R_k\} : x \rightarrow \{R_1\,(x)\,, \ldots, R_k\,(x)\}$$

θα καλείται proliferating. Τα $R_1\,(x)\,, \ldots, R_k\,(x)$ θα τα ονομάσουμε τέκνα ή άμεσους απογόνους (immediate successors) του x και περιέχονται στο σύνολο $im - suc\,(c)$. Η $R = \{R_1, \ldots, R_k\}$ θα ονομάζεται ενεργοποιημένη εντολή και θα είναι η R_i ενεργοποιημένη εντολή του επιμέρους υπολογιστικού βήματος $x \rightarrow R_i\,(x)$ για $i = 1, \ldots, k$.

Figure 1: Δέντρο proliferating Υπολογισμού



Από την στιγμή που ένας κωδικός x μπορεί να έχει από μηδέν μέχρι κάποιον αριθμό n τέκνα, εύκολα επάγεται μια δενδρική δομή. Δηλαδή δοθέντος ενός κωδικού x έχουμε $(x_t)_{t \in T}$ όπου το T εμπεριέχει μια δενδρική δομή . Σαν ρίζα του δένδρου ορίζουμε την είσοδο $x = x_{\emptyset}$, και τα τέκνα εξαρτώνται από το εκάστοτε R_i. Επομένως κάθε κλαδί θα έχει την μορφή $x_{t_1} \rightarrow x_{t_2} \rightarrow \ldots$. Γενικότερα , για κάθε k , το $x_{t_{k+1}}$είναι άμεσος απόγονος του x_{t_k}.

Με αυτούς τους υπολογισμούς παρατηρείται ότι οι πιθανές εξελίξεις είναι πολλαπλές. Επιτυγχάνεται τόσο η αύξηση των κωδικών αλλά κι η διαφοροποίηση που είναι βασικό κομμάτι της εξέλιξης. Η αύξηση και η διαφοροποίηση θα αναπτυχθούν διεξοδικά και σε επόμενο κεφάλαιο.

Σε αυτό το σημείο θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε κάτι αντίστοιχο με την ενεργοποιημένη εντολή αλλά για τους κωδικούς . Έστω ένας κωδικός $c[b]$, όταν η εντολή b είναι ενεργοποιημένη , θα θεωρούμε τον $c[\bar{b}]$ ως state code . Γενικότερα ως state codes ορίζονται οι κωδικοί που βρίσκονται σε κάποια κατάσταση . Κάθε μετάβαση $x_n \ . \!\rightarrow x_{n+1}$που γίνεται με την ενεργοποίηση της b οφείλεται σε έναν αλγόριθμο $alg(b)$. Επομένως τον αλγόριθμο που είναι υπεύθυνο για την μετάβαση του state code $c[\bar{b}]$. Άρα

$$step - alg(c[\bar{b}]) = alg(c)$$

2.4 Αυτοαναφορικοί Υπολογισμοί

Στην παρούσα ενότητα επιχειρείται η ανίχνευση της δυνατότητας υπολογισμού τέτοιου είδους προγραμμάτων. Στον πυρήνα βρίσκεται η δυνατότητα των προγραμμάτων να λαμβάνουν ως είσοδο τον εαυτό τους. Έτσι, οι αλλαγές θα συμβούν εσωτερικά χωρίς κάποια εξωτερική παρέμβαση. Η μοναδική συνεισφορά του εξωτερικού περιβάλλοντος είναι να πραγματοποιήσει μια διπλή λειτουργία, με την οποία θα εκκινείται αλλά και θα ολοκληρώνεται η συνολική διαδικασία, λειτουργώντας τόσο ως πομπός στην αρχή όσο και ως δέκτης στο τέλος.

Θεωρούμε ότι η λύση ενός προβλήματος μπορεί να επιτευχθεί με την ενεργοποίηση κάποιας εντολής που βρίσκεται εντός του προγράμματος. Ένα πρόγραμμα δηλαδή να "μεταλλάσει" τον εαυτό του προβαίνοντας σε αλλαγές του. Η έννοια της αυτοαναφοράς έγκειται στην είσοδο κάθε προγράμματος καθώς είναι το ίδιο.

Ακολούθως επιχειρείται η προσπάθεια ανάπτυξης αυτής της αυτοαναφοράς σε ένα πιο φορμαλιστικό πλαίσιο.

2.4.1 Ορισμός: Αυτοαναφορικός αλγόριθμος

Αυτοαναφορικός (**self-editing**) θα καλείται ένας αλγόριθμος C, όταν μπορεί να επεξεργάζεται τον εαυτό του.

2.4.2 Ορισμός: Αυτοαναφορικό πρόγραμμα

Αυτοαναφορικό (**self-editing**) θα καλείται ένα εκτελέσιμο πρόγραμμα (**executable program**) c, το οποίο λαμβάνει σαν είσοδο τον εαυτό του και δίνει σαν έξοδο ένα ή περισσότερα εκτελέσιμα προγράμματα.

2.4.3 Ορισμός: Αυτοαναφορικός υπολογισμός

Έστω η ακολουθία c_1, c_2 από **state codes,** ο υπολογισμός

$$c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \cdots \rightarrow c_k \rightarrow \ldots$$

θα καλείται αυτοαναφορικός (**self-editing**) αν για κάθε k, ο c_k αποτελεί ταυτόχρονα και τον state-code που πραγματοποιεί τον ενδιάμεσο υπολογισμό, αλλά και τον data κωδικό που λαμβάνεται σαν είσοδος. Συμβολικά, ο c_k θα καλείται αυτοαναφορικός, αν $c_{k+1} = step - alg(c_k)(c_k)$, για κάθε $k = 1, 2, ...$ Για προφανείς λόγους, κάθε υπολογιστικό βήμα $c_k \rightarrow c_{k+1}$ ενός αυτοαναφορικού υπολογισμού θα καλείται αυτοαναφορικό βήμα και θα συμβολίζεται ως $self - ed(c_k)$, δηλαδή:

$$self - ed(c_k) = step - alg(c_k)(c_k) = c_{k+1.}$$

Θα πρέπει να σημειωθεί, ότι ο $step - alg(c_k)$ θα είναι κάποια ενεργοποιημένη εντολή που βρίσκεται σε κάποια διεύθυνση του c_k. Αν $c_k \rightarrow c_{k+1}$ ένα αυτοαναφορικό βήμα, τότε και ο **state-code** c_k και ο $step - algorithm\ step - alg(c_k)$ θα ονομάζονται αυτοαναφορικοί. Σε αυτό το σημείο είμαστε ικανοί να αναπτύξουμε την κεντρική ιδέα της θεωρίας :

Θεμελιώδες Αξίωμα της Αυτοαναφοράς (Basic Self-Editing Principle). Για κάθε αλγόριθμο B, υπάρχει ένας κωδικός b (στην πραγματικότητα ο κωδικός του), τέτοιος ώστε για κάθε κωδικό c[∅],

$$self - ed(c[\bar{b}]) = B(c[\bar{b}])$$

¨Ετσι , αν έχουμε έναν αλγόριθμο B , ο οποίος δρα πάνω στον κωδικό c ισοδυναμεί με την συμπερίληψη ενός κωδικού b στις εντολές του c και την δράση του c[$\bar{b}$] στον εαυτό του . Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται η αυτοαναφορά . . Επιπλέον, μπορούμε να παρατηρήσουμε αυτήν την ανάπτυξη θεωρώντας ότι ο b είναι μια proliferating εντολή του c .

Απόδειξη

Έστω bένας κωδικός για τον B

$$self - ed\left(c\left[\bar{b}\right]\right) = step - alg\left(c\left[\bar{b}\right]\right)\left(c\left[\bar{b}\right]\right)$$

$$= alg\left(b\right)\left(c\left[\bar{b}\right]\right)$$

$$= B\left(c\left[\bar{b}\right]\right)$$

Αξίωμα Αναπαραγωγής (Proliferating Principle) . Έστω B_1, ..., B_nαλγόριθμοι , τότε υπάρχει κωδικός b τέτοιος ώστε για κάθε κωδικό c[∅],

$$self - ed\left(c\left[\bar{b}\right]\right) = \left\{B_1\left(c\left[\bar{b}\right], ..., B_n\left(c\left[\bar{b}\right]\right)\right)\right\}$$

Επίσης αν οι αλγόριθμοι B_1, ... B_n περιγράφονται από κωδικούς b_1, ... , b_n αντίστοιχα, τότε αυτοί μπορούν να θεωρηθούν υποκωδικοί του b

Απόδειξη

Έστω B αλγόριθμος που δέχεται ως είσοδο έναν κωδικό c υπολογίζει

$$\mathrm{B}(c)=\{B_1(c), \ldots, B_n(c)\}$$

Έστω ο κωδικός b είναι ένας κωδικός για τον B . Από το θεμελιώδες αξίωμα της Αυτοαναφοράς για κάθε κωδικό c ,

$$self - ed\left(c\left[\bar{b}\right]\right) = B\left(c\left[\bar{b}\right]\right)$$

$$= \left\{B_1\left(c\left[\bar{b}\right]\right), \ldots, B_n\left(c\left[\bar{b}\right]\right)\right\}$$

Για το δεύτερο κομμάτι της απόδειξης αν $b_1, \ldots, b_n$είναι κωδικοί για τους $B_1, \ldots, B_n$αντίστοιχα θεωρούμε τον κωδικό

$$self - ed(c\left[\bar{b}\right]) = alg\left(b\right)\left(c\left[\bar{b}\right]\right)$$

$$= \left\{alg\left(b_1\right)\left(c\left[\bar{b}\right]\right), \ldots, alg\left(b_n\right)\left(c\left[\bar{b}\right]\right)\right\}$$

$$= \left\{B_1\left(c\left[\bar{b}\right]\right), \cdots, B_n\left(c\left[\bar{b}\right]\right)\right\}$$

¨Ενα παράδειγμα για την ευκολότερη κατανόηση είναι να σκεφτούμε έναν αλγόριθμο B ο οποίος υπολογίζει δύο όμοια αντίτυπα της εισόδου .

B(x)= $\{x, x\}$ όπου x κάποιος κωδικός

$$self - ed\left(c\left[\bar{b}\right]\right) = \left\{c\left[\bar{b}\right], c\left[\bar{b}\right]\right\}$$

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για όσο διάστημα η εντολή b παραμένει ενεργοποιημένη . ¨Οπως εύκολα γίνεται κατανοητό επάγεται ένα δυαδικό δένδρο . Γενικεύοντας , μπορούμε από τον proliferating αυτοαναφορικό υπολογισμό να θεωρήσουμε ότι δημιουργείται ένα δέντρο $(c_t)_{t\in T}$. Από το αξίωμα της αναπαραγωγής , αυτό το δέντρο μπορεί να έχει οποιοδήποτε αριθμό τέκνων σε κάθε βήμα . Πέρα από απλά αντίγραφα , μπορεί να προβαίνουν και σε αλλαγές από βήμα σε βήμα. Κατά αντιστοιχία με τον ορισμό (παραπάνω) θεωρούμε ότι η ρίζα του δέντρου είναι ο state code $c_{\emptyset}$. Ενώ , οι απόγονοι του κάθε κόμβου c_t υπολογίζονται από την εφαρμογή του $step - alg\left(c_t\right)$πάνω στον c_t. Δηλαδή ,κάθε κλαδί του δένδρου αναπαριστά έναν αυτοαναφορικό υπολογισμό και τελειώνει όταν τελειώνει ο υπολογισμός .

$$im - suc\left(c_t\right) = self - ed\left(c_t\right) = step - alg(c_t)\left(c_t\right)$$

για κάθε $t \in T$

Δεδομένου ενός proliferating προγράμματος $(B : B_1, \ldots, B_n)$(οι εντολές του προγράμματος είναι προγράμματα) κι ενός κωδικού x που λαμβάνεται ως είσοδο, για το δένδρο $(x_t)_{t\in T}$που επάγεται από τον υπολογισμό θα ισχύουν

1. Η είσοδος xείναι η ρίζα του δένδρου $x_{\emptyset}$
2. Για κάθε $t \in T$ υπάρχει δείκτης j_tμε $0 < j_t < n$ τέτοιος ώστε το σύνολο των επιτυχημένων απογόνων του x_t, $im - suc\left(x_t\right)$να ισούται με το $B_{j_t}\left(x_t\right)$
3. Ορίζουμε $j_{\emptyset} = 1$επομένως $im - suc\left(x_{\emptyset}\right) = B_1\left(x_{\emptyset}\right)$
4. Αν t'είναι παιδί του t τότε $j_{t'} = B\left(j_t, x_{t'}\right)$έτσι ώστε η εντολή που χρησιμοποιείται τώρα να είναι (αλγοριθμική) συνάρτηση της προηγούμενης εντολής και του τωρινού υπολογισμού

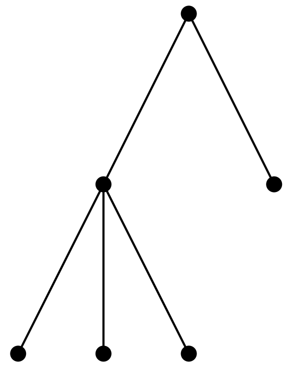
Δύο state codes καλούνται code-equivalent αν είναι state codes του ίδιου κωδικού . Αντίστοιχα δύο υπολογισμοί $(x_t)_{t\in T}$ και $(x'_t)_{t\in T'}$είναι code-equivalent αν T = T′ και για κάθε t ∈T , x_tείναι code equivalent x'_t .

Ανακεφαλαιώνοντας, έχει μελετηθεί η λειτουργία του εξωτερικού περιβάλλοντος ως πομπού. Ταυτόχρονα όμως, το εξωτερικό περιβάλλον πρέπει να αξιολογεί τους υπολογισμούς. Άλλωστε, αυτός είναι και ο τρόπος που σταματάει ένας αυτοαναφορικός υπολογισμός και τελειώνει το αντίστοιχο κλαδί. Αξίζει να επισημανθεί, ότι κάθε κόμβος είναι ένας κωδικός. Κάθε απόγονος έχει την ικανότητα να διαφοροποιείται από τον πρόγονο του και οι αλλαγές που έχουν συμβεί εμφανίζονται στην διεύθυνση enviromental output. Συνεπώς, το περιβάλλον θα κρίνει την επιβίωση ή όχι του κωδικού. Αυτή η κρίση γίνεται με μια μορφή επιλογής (selection). Όσο ένας κωδικός επιβιώνει συνεχίζει τους υπολογισμούς και παράγει τέκνα.

2.4.4 Ορισμός Επιζώσα Ακολουθία

Ένα κλαδί του οποίου οι κωδικοί έχουν επιβιώσει θα καλείται επιζώσα ακολουθία (**surviving sequence**) **.**

Figure 2: Επιζώσα Ακολουθία



Το αριστερό κλαδί αναπαριστά επιζώσες ακολουθίες καθώς συνεχίζει τους υπολογισμούς, ενώ το δεξιά έχει σταματήσει τους υπολογισμούς.

Η επιζώσα ακολουθία βασίζεται στην επιλογή που θέσαμε παραπάνω. Στη διεξοδικότερη ανάλυση θα χρειαστεί και μια μεγαλύτερη εποπτεία πάνω στις επιζώσες ακολουθίες. Για αυτόν τον λόγο είναι ανάγκη να οριστεί η έννοια της επιτυχημένης υπακολουθίας (succesful subsequence), κάτι που θα γίνει στο κεφάλαιο 3.

2.5 Αυτοαναφορικοί Υπολογισμοί Πλήρους Μνήμης

Έχει ως τώρα σημειωθεί ότι οι κωδικοί διαφοροποιούνται με βάση αυτοαναφορικά υπολογιστικά βήματα. Η εξέλιξη είναι προϊόν μιας αυτοαναφορικής διαδικασίας και επομένως οι ίδιοι πρέπει να είναι σε θέση να ανακαλέσουν το υπολογιστικό κλαδί τους. Σε αυτήν την κατεύθυνση, υπεισέρχεται στην επιφάνεια μια έννοια μνήμης με την οποία πρέπει να είναι εφοδιασνμένοι οι κωδικοί μας. Άλλωστε, πάρα πολλές πληροφορίες μπορεί να είναι κρυμμένες στις προηγούμενες μορφές του κωδικού.

2.5.1 Ορισμός Ιστορία κωδικού

Έστω $(c_t)_{t\in T}$;ένας αυτοαναφορικός υπολογισμός . Ιστορία (**history**) του c_tορίζουμε την ακολουθία

$$hist(c) = c_{t_1} \to c_{t_2} \to ... \to c_{t_n}$$

Προφανώς, $c_{t_1} = c_\emptyset$η ρίζα του δένδρου και για κάθε $i < n$ ισχύει $c_{t_{i+1}}$τέκνο του c_{t_i}

2.5.2 Ορισμός Αυτοαναφορικού Υπολογισμό Πλήρους Μνήμης

Έστω ένας state-code $c = c_\emptyset$θα ονομάζουμε αυτοαναφορικό υπολογισμό πλήρους μνήμης (complete memory self-editing computation), ένα δένδρο $(c_t)_{t\in T}$, τέτοιο ώστε για κάθε $t \in T$

$$im - suc(c_t) = step - alg(c_t)(hist(c))$$

Τα τέκνα κάθε state code υπολογίζονται από την εφαρμογή των κωδικών πάνω στην ιστορία του.

2.5.3 Ορισμός εντολή πλήρους μνήμης

Εντολή πλήρους μνήμης ονομάζεται ένας αλγόριθμος Βπου λαμβάνει ως είσοδο την ιστορία του c_tκαι υπολογίζει τα τέκνα του c_t

2.5.4 Ορισμός Πρόγραμμα πλήρους μνήμης

Πρόγραμμα πλήρους μνήμης θα καλείται ένα πρόγραμμα που χρησιμοποιεί εντολές πλήρους μνήμης

Είμαστε σε θέση να συνδυάσουμε το Θεμελιώδες αξίωμα της αυτοαναφοράς με τους υπολογισμούς πλήρους μνήμης

Θεμελιώδες Αξίωμα της Αυτοαναφοράς (έκδοση πλήρους μνήμης) . Έστω ένας αλγόριθμος Βμε κωδικό b. Έστω $c_1, ..., c_n$η ιστορία του c_nσε ένα υπολογιστικό δένδρο. Αν ο κωδικός b είναι ενεργοποιημένος στο c_n, τότε ο αυτοαναφορικός υπολογισμός πλήρους μνήμης του c_nισούται με το Β$(c_1, ..., c_n)$.

Σε μια πιο απλή ερμηνεία, αυτό το αξίωμα βεβαιώνει πως αν προβούμε σε μια αλγοριθμική αλλαγή στην ιστορία ενός κωδικού c_n, ο c_nμπορεί να πράξει το ίδιο με έναν αυτοαναφορικό υπολογισμό με την προϋπόθεση ότι αυτή η αλλαγή υπάρχει σαν ενεργοποιημένη εντολή στον c και ο c_nδιαβάζει την ιστορία του.

Παρατήρηση : Εκ πρώτης όψεως ένας αυτοαναφορικός υπολογισμός πλήρους μνήμης φαντάζει ισχυρότερος από έναν απλό. Όμως πρόκειται για ισοδύναμους υπολογισμούς αν οι απλοί αυτοαναφορικοί είχαν την ικανότητα να αποθηκεύουν μνήμη.

2.5.5 Ορισμός υπολογισμοί εφοδιασμένοι με μνήμη (memory storing)

Υπολογισμοί της μορφής :

$$[c_1], [c_1, c_2] \ldots, [c_1, c_2, \ldots, c_n]$$

θα ονομάζονται memory storing

Υποθέτοντας ότι ο $[c_1]$λαμβάνεται ως είσοδος, ο υπολογισμός έχει ως εξής

$$step - alg\left([c_1]\right)(c_1) \to [c_1, c_2]$$

Επομένως χρειαζόμαστε μια εντολή η οποία βρίσκεται σε κάποια διεύθυνση του κωδικού c_n και λαμβάνοντας ως είσοδο την ιστορία ενός κωδικού υπολογίζε τον επόμενο και τον συνδέει στην ιστορία.Αυτή η εντολή πρέπει να είναι ενεργοποιημένη μόνο στην τελευταία διεύθυνση του εκάστοτε κωδικού. Θεωρώντας m μια τέτοια εντολή σχηματικά $[c_1, c_2\,[\bar{m}]] \to [c_1, c_2, c_3]$

Η απαιτούμενη γενίκευση αυτών των αντιστοιχίσεων μας προσφέρεται από το λήμμα Μνήμης

2.5.6 Λήμμα μνήμης

Έστω ένας αυτοαναφορικός αλγόριθμος πλήρους μνήμης$(c_t)_{t\in T}$. Τότε υπάρχει κωδικός m ,τέτοιος ώστε η ρίζα $c_\emptyset\,[(+)\,\bar{m}]$να δίνει τον υπολογισμό $(x_t)_{t\in T}$, όπου για κάθε $t \in T$, αν $c_1, c_2, \ldots, c_n = c_t$η ιστορία του c_tστο $(x_t)_{t\in T}$, τότε

$$x_t = [c_1\,[(+)\,\bar{m}], \ldots, c_n\,[(+)\,\bar{m}]]$$

Ολοκληρώνοντας το τρίτο κεφάλαιο, σε μεγάλο βαθμό έχουν τεθεί οι βάσεις για την απόπειρα της μελέτης. Εφεξής ενώ θα εξετάζονται αυτοαναφορικοί υπολογισμοί πλήρους μνήμης θα μελετώνται μέσω απλών αυτοαναφορικών αλγορίθμων που αποθηκεύουν μνήμη.

3 Διαγωνιοποίηση

Μέχρι στιγμής παρά την ως τώρα συζήτηση του θέματος ενυπάρχει ένας βαθμός αυθαιρεσίας όσον αφορά τουλάχιστον την εξέλιξη των κωδίκων. Είναι λοιπόν σημαντικό να βρεθεί ένας μηχανισμός ο οποίος συμβάλει στην εξέλιξη. Πιο συγκεκριμένα, θα επιχειρηθεί η εξέταση της εξέλιξης μέσα από μια διαδικασία αναγνώρισης μοτίβων –όπως είναι πολύ συνηθισμένο στην επιστήμη των υπολογιστών. Αυτήν την διαδικασία ονομάζουμε διαγωνιοποίηση (diagonalization), την αναγνώριση δηλαδή μοτίβων σε έναν πληθυσμό κωδικών.

Μέσω διαγωνιοποίησης επιτυγχάνεται η εξέλιξη των κωδικών με στόχο την καλύτερη προσαρμογή στις απαιτήσεις του περιβάλλοντος. Με τον όρο διαγωνιοποίηση αναφερόμαστε σε μια "θετικά προσημασμένη διαδικασία" βάση της οποίας εξελίσσονται οι αυτοαναφορικοί αλγόριθμοι. Η διαγωνιοποίηση θα εφαρμόζεται τόσο στις επιζώσες όσο και σε επιτυχημένες ακολουθίες.

Στο σημείο αυτό κρίνεται απαραίτητη μια διευκρίνηση. Πρέπει να τονιστεί ότι ο όρος διαγωνιοποίηση δεν θα πρέπει να συγχέεται με την διαγώνια μέθοδο του Cantor που αναπτύχθηκε στο πρώτο κεφάλαιο.

Έστω μια επιτυχημένη ακολουθία ή ένα κλαδί το οποίο έχει επιβιώσει στο δένδρο του υπολογισμού.

$$c_1 \to c_2 \to \cdots \to c_n$$

Παρατηρώντας την ακολουθία μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την εξέλιξη της και την επιβίωση της αγνοώντας τη λειτουργία του περιβάλλοντος. Η διάδραση με το περιβάλλον γίνεται με δύο τρόπους· καταρχάς με τη φυσική επιλογή (ποιοι κωδικοί είναι σε θέση να επιβιώσουν εντός του περιβάλλοντος) και κατά δεύτερον με μια μορφή βαθμονόμησης (όπου το περιβάλλον αξιολογεί τους κωδικούς επιβραβεύοντας τους ανάλογα με την επίδοση τους).

Μέσα από την διαγωνιοποίηση, στόχος είναι να αναπαραχθούν μοτίβα τα οποία αποδείχθηκαν επιτυχημένα στους προγόνους του. Κατ' επέκταση, ένας κωδικός βασίζεται στους προγόνους για την μεταβολή του με σκοπό την επιβίωση του. Από την στιγμή που γίνεται λόγος για αυτοαναφορικούς υπολογισμούς η διαδικασία πρέπει να περιέχεται ως εντολή στον κωδικό, άρα πέρα από τους προγόνους να αναζητεί και μοτίβα στον εαυτό του. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ακόμα και η διαδικασία που είναι υπεύθυνη για την εξέλιξη, να υπόκειται σε εξέλιξη. Σε μια πιο απλή διατύπωση –που όμως είναι ικανή να αποτυπώσει αυτό που θέλουμε– "είναι ο κωδικός όχι απλά θα μαθαίνει, αλλά και θα μαθαίνει πως να μαθαίνει" [17].

Όπως έχει ήδη αναφερθεί διαγωνιοποίηση μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αλγόριθμος αναγνωρίζει μοτίβα. Αυτή η διατύπωση φαντάζει αρκετά γενική και δεν προσφέρεται για περαιτέρω ανάλυση. Παρόλα αυτά, δεδομένου ότι η διαγωνιοποίηση είναι σε θέση να διαγωνοποιεί τον εαυτό της, η αρχική επιλογή είναι ήσσονος σημασίας, διότι θα εξελιχθεί σύμφωνα με τις επιταγές του περιβάλλοντος. Η ικανότητα αυτή της διαγωνιοποίησης βρίσκεται στον πυρήνα της θεωρίας, ότι μια διαδικασία τέτοιας μορφής είναι ικανή να εξελίσσει τον εαυτό της με το πέρασμα του χρόνου.

Με τον όρο μοτίβο νοείται ένας αλγόριθμος R τέτοιος ώστε για κάθε $k < n$, $R(c_k) \subseteq c_{k+1}$.Δηλαδή ο c_nεφαρμόζει αλγορίθμους δοκιμαστικά πάνω στους κωδικούς c_kτης ιστορίας του, ελέγχοντας αν αυτοί είναι ευθύνονται για τον υπολογισμό του υπολογιστικού βήματος $c_k \to c_{k+1}$.

Παράδειγμα : Θεωρούμε έναν κωδικό του οποίου ένα κομμάτι παραμένει κοινό. Πιο συγκεκριμένα βρίσκεται σε μια διεύθυνση θ. Ο παραπάνω αλγόριθμος R θα μπορούσε να είναι ένας αλγόριθμος που θα αντιγράφει την θ διεύθυνση της εισόδου, στην θ διευθύνση της εξόδου.

¨Εστω μια ακολουθία κωδικών προϊόν ενός αυτοαναφορικού υπολογισμού και Δ ο αλγόριθμος της διαγωνοποίησης $\Delta = alg\left(\delta_n\right)$

$$c_1\left[\delta_1\right], c_2\left[\delta_2\right], \ldots, c_n\left[\bar{\delta}_n\right]$$

Λαμβάνοντας την ακολουθία αυτή ως είσοδο αναμένουμε από τον Δ να προβεί σε μια αναγνώριση εξελικτών μοτίβων στην ακολουθία. Όμως ο Δ έχει την δυνατότητα να αναγνωρίζει μοτίβα εξέλιξης και μεταξύ των $\delta_1, \ldots, \delta_n$

3.1 Αποφάσεις ενός αυτοαναφορικού αλγορίθμου

Η διαγωνοποίηση θα ελέγχει κωδικούς ώστε να βρει ποιος ταιριάζει στους προγόνους του. Μέσω της διαγωνιοποίησης υπολογίζεται ένας κωδικός για τον οποίο ο αυτοαναφορικός αλγόριθμος c καλείται να αποφασίσει πως θα τον χρησιμοιήσει. Θα διακρίνουμε τις πιθανές αποφάσεις που μπορεί να πάρει ο αλγόριθμος για τον εκάστοτε κωδικό.

- Αποθηκευτικές αποφάσεις (**Storing Decisions**) : Έστω r και c κωδικοί και μια αλγοριθμική συνάρτηση $B(r)$ η οποία δέχεται ως είσοδο τον κωδικό c

$$B(r): c \rightarrow \left\{ [c_1, \ldots, c_n] \; \alpha\nu \; c = [c_1, \ldots, c_n] \quad [c, r] \; \delta\iota\alpha\varphi\text{ορετικά} \right.$$

Το οποίο προσθέτει τον r στον c. Από το Θεμελιώδες Αξίωμα της Αυτοαναφοράς έχουμε ότι αν ο c είναι αυτοαναφορικός, $b = b[r]$ είναι ένας κωδικός για τον $B(r)$ και $c = c\left[\boxed{b}\right]$ η αντίστοιχη κατάσταση του c στην οποία η εντολή b είναι ενεργοποιημένη , τότε το αυτοαναφορικό βήμα του c είναι αυτό που περιγράφει η παραπάνω σχέση. Η διεύθυνση που χρησιμοποιείται από τον $B(r)$ για να αποθηκεύσει τον κωδικό r είναι μια καινούργια διεύθυνση η οποία δεν υπήρχε πριν στον c. Τέτοιου είδους διευθύνσεις θα τις καλούμε διαθέσιμες διευθύνσεις μέσω των οποίων θα λαμβάνουμε το αντίστοιχο αυτοαναφορικό βήμα σαν αποτέλεσμα εντολών της μορφής

Αποθηκεύσε τον κωδικό r σε μια διαθέσιμη διεύθυνση.

- Προσωρινές αποφάσεις (**Temporary Decisions**) : Ο c αποφασίζει να εφαρμόσει έναν κωδικό r στο περιεχόμενο μιας καινούργιας διεύθυνσης θ, χωρίς να καταχωρεί τον κωδικό σε αυτήν την διεύθυνση. Ο κωδικός r θα ονομάζεται temporary differentiating.

  Έστω r και c κωδικοί και θ μια διαθέσιμη διεύθυνση στον c. Έστω επίσης $s = s[r]$ είναι ένας κωδικός που περιγράφει αλγόριθμους της μορφής :

  Θεωρούμε ότι ως είσοδο λαμβάνεται το $c[(+\theta)\overline{s}]$

  'Εστω x_1η είσοδος

  Έστω x_2το αποτέλεσμα της διαγραφής της διευθύνσης θ από τονx_1

  Έπεστρεψε $alg(r)(x_2)$

Το αυτοαναφορικό υπολογιστικό βήμα του $c\left[(+\theta)\,\overline{s}\right]$υπολογίζεται από τον $alg(r)(x_2)$. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα καλούμε τον κωδικό r temporary differantiating.

Όμως έχουμε την δυνατότητα να εκφράσουμε τέτοιου είδους υπολογισμούς με την χρήση ενός αυτοαναφορικού αλγορίθμου

Έστω $b = b[r]$ είναι ένας κωδικός για τον υπολογισμό

$$c\left[(+\theta)\,\emptyset\right] \rightarrow c\left[(+\theta)\,s\left[r\right]\right] \rightarrow alg\left(r\right)\left(c\right)$$

Από το Θεμελιώδες αξίωμα της αυτοαναφοράς το αυτοαναφορικό βήμα του $c\left[\boxed{b}\right]$θα οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα με τον υπολογισμό.

- Μόνιμες αποφάσεις (**Permanent Decisions**) : Ο c αποφασίζει να καταχωρήσει τον κωδικό r σε μια καινούργια διεύθυνση. Ο κωδικός r θα ονομάζεται permanent differentiating.
- φ-differentiating Αποφάσεις : Ο c αποφασίζει να χρησιμοποιήσει έναν κωδικό r για να διαφοροποιήσει την δοσμένη φ διεύθυνση του, δηλαδή να δράσει με τον $alg\,(r)$ στο περιεχόμενο της φ.

Παρατηρήσεις

1. Οι $\varphi - differentiating$ αποφάσεις μπορούν να είναι μόνιμες ή προσωρινές.
2. Μια προσωρινή απόφαση μπορεί να επαναλαμβάνεται οπότε να "συμπεριφέρεται" σαν μόνιμη . Όμως αυτό θα κόστιζε την επαναλαμβανόμενη πολυπλοκότητα της προσωρινής απόφασης να εκτελεστεί.

3.2 Μορφές διαγωνιοποίησης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προβούμε σε μια περαιτέρω διερεύνηση της διαγωνιοποίησης. Θα μελετήσουμε τρεις μορφές της. Την ακολουθιακή (**sequential**), στατιστική (**statistical**) και την παράλληλη (**parallel**).

Ακολουθιακή Διαγωνιοποίηση. Αυτή είναι η μορφή της διαγωνιοποίησης που έχουμε θίξει μέχρι στιγμής.

3.2.1 Ορισμός Σύστημα απόφασης

> Αν ο αλγόριθμος Δ αποτελείται από δύο μέρη, τον searcher Δ_sκαι τον tester Δ_t, και παίρνει μια απόφαση D , ο Δ θα καλείται σύστημα απόφασης.

Αρχικά, ο searcher προτείνει κάποιους κωδικούς $r_1, r_2, \ldots$ τον έναν μετά τον άλλον , αυτοί οι κωδικοί θα ονομάζονται προτεινόμενοι κωδικοί (**proposed codes**). Οι προτεινόμενοι κωδικοί κατασκευάζονται από ένα αρχικό σύνολο κωδικών, με την χρήση ενός πεπερασμένου σύνολου κανόνων για την κατασκευή νέων κωδικών(π.χ. σύνθεση) από ένα δοθέν σύνολο. Το σύνολο των προτεινόμενων κωδικών μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο. Η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι κωδικοί στην ακολουθία από αυτό το σύνολο προσφέρονται βάσει της προτεραιότητας (**priority**) του. Η έννοια της προτεραιότητας είναι μεγάλης σημασίας καθώς οι σημαντικότεροι από αυτούς θα προσφερόνται νωρίτερα από άλλους. Ένα κωδικό με μεγάλη προτεραιότητα τον ονομάζουμε απλό (**simple**).

Ο tester Δ_tείναι διαλέξει τον πιο απλό από τους κωδικούς προτείνει ο Δ_s, με την χρήση ενός αλγοριθμικού τεστ T (ένας αλγόριθμος που επιστρέφει $true$ ή $false$) έτσι ώστε $T\,(r) = true$. Ο Tθα επιλέξει τον πρώτο r που ικανοποιεί την συνθήκη $T\,(r) = true$. Ο T θα ονομάζεται αλγόριθμος ελέγχου (**testing algorithm**) του Δ_t.

Δεδομένου ενός αλγόριθμου Sπου λαμβάνει σαν είσοδο την ιστορία ενός κωδικού c και δίνει σαν έξοδο μια επιλεγμένη υποακολουθία αυτής, θα αναφερόμαστε στον εξής αλγόριθμο ελέγχου T:

> Έστω $c_1, c_2, \ldots, c_n$η έξοδος του S. Διάλεξε τον πιο απλό κωδικό r από την ακολουθία κωδικών r_1, r_2που προτείνονται από τον searcher Δ_t, έτσι ώστε το r να ταιριάζει στην ακολουθία $c_1, c_2, \ldots, c_n$δηλαδή
>
> $$\gamma\iota\alpha\,\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\, i < n, alg(r)(c_i) \subseteq c_{i+1}$$
>
> και χρησιμοποίησε τον σαν temporary permanent ή differantiating κωδικό.

Ένα σύστημα απόφασης $\Delta = (\Delta_t, \Delta_s)$όπου ο Δ_tχρησιμοποιεί τέτοιου είδους τεστ αποτελούν αυτό που καλούμε ακολουθιακή διαγωνιοποίηση . Η ακολουθία $c_1, c_2 \ldots, c_n$ονομάζεται ακολουθία ελέγχου της διαγωνιοποίησης.

Αξίωμα της Ακολουθιακής Διαγωνιοποίησης (απλή μορφή). Έστω Δ ένας αλγόριθμος ακολουθιακής διαγωνιοποίησης με κωδικό $\delta = \delta_n$και $c = c\left[\bar{\delta}\right]$αυτοαναφορικός κωδικός. Υποθέτουμε ότι

$$c_1\left[\bar{\delta}_1\right], c_2\left[\bar{\delta}_2\right], \ldots, c_n\left[\bar{\delta}_n\right] = c\left[\bar{\delta}\right]$$

είναι η ιστορία του c. Τότε,

$$self - ed\left(c\left[\bar{\delta}\right]\right) = \Delta\left(c_1\left[\delta_1\right], c_2\left[\delta_2\right], \ldots, c_n\left[\bar{\delta}_n\right] = c\left[\bar{\delta}\right]\right)$$

Απόδειξη : Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του Θεμελιώδους Αξιώματος της Αυτοαναφοράς (για υπολογισμούς πλήρους μνήμης) και του λήμματος Μνήμης.

Για να γίνει πιο κατανοητή η λειτουργία της ακολουθιακής διαγωνοποίησης θα προβούμε στην παρουσίαση ενός παραδείγματος

Παράδειγμα

Σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε αν ένας αυτοαναφορικός κωδικός μπορεί να βρει την συνέχεια της ακολουθίας $0, 1, 2, \ldots$. Η απάντηση θα βρίσκεται στην διεύθυνση του enviromental output που έχουμε ορίσει παραπάνω και συμβολίζουμε με θ_e. Θεωρούμε ότι τα τρία πρώτα στοιχεία της ακολουθίας έχουν βρεθεί με κάποιο τρόπο. Επομένως, για την ακολουθία κωδικών c_0, c_1, c_2έχουμε για $i = 0, 1, 2$ $c_i = c_i\left[(\theta_e)\, i\right]$. Δηλαδή ο c_0αποθηκεύει 0 στην διεύθυνση θ_e, ο c_1αποθηκεύει 1 στην διεύθυνση θ_e και ο c_2 2 αντίστοιχα.

Ο κωδικός $add(1)$ που αυξάνει κάτά ένα ένα δεδομένο ακέραιο είναι μια $\theta_e differentiating$ απόφαση που ταιριάζει στην ακολουθία c_0, c_1, c_2. Όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω από την στιγμή που είναι μια θ $differentiating$ απόφαση μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνιμη ή ως προσωρινή. Με την χρήση της διαγωνοποίησης με ενεργοποιημένη την εντολή c_2το αυτοαναφορικό βήμα $c_2 \to c_3$θα δημιουργήσει το c_3έτσι ώστε $c_3 = c_3\left[(\theta_e)\, 3\right]$δηλαδή θα επιστρέφει την τιμή 3. Επαγωγικά η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί, στην περίπτωση της προσωρινής απόφασης θα επαναλαμβάνει την διαγωνοποίηση ενώ στην περίπτωση της μόνιμης απόφασης θα χρησιμοποιεί τον κωδικό χωρίς την διαγωνοποίηση.

Στατιστική διαγωνιοποίηση : Πρόκειται για μια γενικευμένη μορφής της ακολουθιακής διαγωνιοποίησης, όπου επιλέγουμε το r εκείνο που ταιριάζει σε κάποιες μεταβάσεις $c_i \to c_{i+1}$, για $i < n$ και το χρησιμοποιούμε με την αντίστοιχη συχνότητα στην ακολουθία. Για τους proliferating υπολογισμούς αφορά την συχνότητα χρήσης του κατά τον υπολογισμό των απογόνων ενώ για τους nonproliferating υπολογισμούς την πιθανότητα με την οποία χρησιμοποιείται ο r . Συγκεκριμένα, δοθέντος ενός searcher Δ_s(ίδιο με της ακολουθιακής διαγωνιοποίησης) αλλάζουμε τον tester Δ_tώστε να ελέγχει την σχετική συχνότητα με την οποία ο προτεινόμενος κωδικός r ταιριάζει στις μεταβάσεις $c_i \to c_{i+1}$, $i < n$ της ακολουθίας $c_1, c_2, \ldots, c_n$και να αποφασίζει να χρησιμοποιήσει τον r με την ίδια σχετική συχνότητα ως differentiating κωδικού. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό όταν η στατιστική διαγωνιοποίηση εφαρμόζεται σε proliferating υπολογισμούς οδηγεί σε απογόνους με μικρές διαφοροποιήσεις μεταξύ τους. Έτσι εξασφαλίζεται η απαιτούμενη ποικιλομορφία στο σύνολο των απογόνων.

Δεδομένου ενός searcher Δ_s, μπορούμε να τροποποιήσουμε τον tester να ελέγχει την σχετική συχνότητα με την οποία ένας προτεινόμενος κωδικός r ταιριάζει στις μεταβολές $c_i \to c_{i+1}$, $i < n$ μιας γνωστής ακολουθίας $c_1, \ldots, c_n$να αποφασίσει να χρησιμοποιήσει τον r με την ίδια σχετική συχνότητα στους απογόνους για proliferating υπολογισμούς και σαν differentiating κωδικό.

Η εισαγωγή της στατιστικής διαγωνοποίησης μας βοηθάει να αποφύγουμε την αναγκαιότητα και είναι διαισθητικά αυτή με την μεγαλύτερη χρησιμοποίηση. Ο κωδικός r μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν προσωρινή ή σαν μόνιμη επιλογή ανάλογα με το μέγεθος της σύντομης μνήμης στην οποία ο r ταιριάζει. Θεωρητικά η στατιστική διαγωνοποίηση μπορεί να παραχθεί από την ακολουθιακή αντιλαμβανόμενη την χρήση ενός μοτίβου με μια σχετική συχνότητα στην ιστορία του κωδικού και να το επαναλάβει με την ίδια συχνότητα. Κάτι τέτοιο θα προϋπέθετε να είχε προηγηθεί μια επιλογή επομένως να παρατηρήσει κάτι τέτοιο σε επιτυχημένες ή επιζώσες ακολουθίες.

Παράλληλη διαγωνιοποίηση : Σε αντίθεση με την ακολουθιακή διαγωνιοποίηση, όπου η σειρά στην ακολουθία έπαιζε σημαίνοντα ρόλο στον εντοπισμό των εξελικτικών βημάτων της ίδιας μορφής σε έναν αυτοαναφορικό κωδικό καθώς και στις ομαλές μεταβολές του περιβάλλοντος, στην παράλληλη διαγωνιοποίηση δεν εργαζόμαστε πάνω σε ακολουθία κωδικών. Για την καλύτερη κατανόηση θα προχωρήσουμε στην παρουσίαση ενός παραδείγματος. Ειδικότερα, υποθέτουμε τον αυτοαναφορικό κωδικό c και θέλουμε να αναζητήσουμε εξελικτικά μοτίβα στην ιστορία του $c_1, c_2, \ldots, c_n = c$. Συμβολίζουμε με θ_iτην διεύθυνση που αποθηκεύεται η είσοδος που λαμβάνει από το περιβάλλον και με θ_oτην έξοδο που επιστρέφει στο περιβάλλον. Με c $\restriction \vartheta$ συμβολίζουμε την τιμή του περιεχομένου της διεύθυνσης θ του c. Σε αυτό τι σημείο θα κάνουμε μια απόπειρα να παραμετρικοποιήσουμε την απαίτηση του περιβάλλοντος, θα θεωρήσουμε ότι αυτή περιγράφεται από μια σχέση R μεταξύ της εισόδου και της εξόδου αυτή η σχέση θα παραμένει χρονικά αναλλοίωτη στα πλαίσια αυτού του παραδείγματος. Εφόσον η $c_1, c_2, \ldots, c_n = c$ είναι επιζώσα ακολουθία, για κάθε $k < n$ το περιεχόμενο του c_kστην διεύθυνση θ_iθα συνδέεται με την σχέση R με το περιεχόμενο του c_{k+1}στην διεύθυνση θ_0. Χρησιμοποιώντας συμβολισμούς

$$R\left(c_k \restriction \theta_i\right)=c_{k+1} \restriction \theta_0 \gamma\iota\alpha\, \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\, k < n$$

Η αναζήτηση του κωδικού r θα πραγματοποιηθεί πάνω σε ένα σύνολο μεταβάσεων $\{c_k \to c_{k+1} : k < n\}=\{c_1 \to c_2, c_2 \to c_3, \ldots, c_{n-1} \to c_n\}$

Ο κωδικός r πρέπει να ικανοποιοεί την συνθήκη : για κάθε $k < n$, $alg\,(r)\,(c_k) \subseteq c_{k+1}$.

Έστω $\{s_1, \ldots, s_n\}$από υποκωδικούς ενός αυτοαναφορικού κωδικού c. Η παράλληλη διαγωνιοποίηση εφαρμοσμένη πάνω σε αυτό το σύνολο $\{s_1, \ldots, s_n\}$ανιχνεύει κοινά στοιχεία στους υποκωδικούς $s_1, \ldots, s_n$. Η έννοια της παράλληλης διαγωνιοποίησης συνδέεται με μια διαδικασία αφαίρεσης δημιουργώντας κατά κάποιο τρόπο κλάσεις για να προβεί σε συμπεράσματα. Αν υποθέσουμε ότι οι κωδικοί μας είναι εφοδιασμένοι με μια εσωτερική αναπαράσταση του περιβάλλοντος. Η παράλληλη διαγωνιοποίηση πάνω στα περιβαλλοντικά αντικείμενα $s_1, \ldots, s_n$ μπορεί να οδηγήσει στην ανάδυση της κοινής τους φύσης. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι κάθε ένα από τα $s_1, \ldots, s_n$αποτελεί ένα ζεύγος αντικειμένων, τότε διαγωνοποιώντας πάνω στο σύνολο $\{s_1, \ldots, s_n\}$ο κωδικός μπορεί να δημιουργήσει την έννοια του αριθμού 2.

3.3 Διαγωνοποίηση πάνω σε επιτυχημένες υποακολουθίες

3.3.1 Ορισμός επιτυχημένη υποακολουθία

Επιτυχημένη υποακολουθία (**succesful sub-sequence**) θα καλούμε την ακολουθία κωδικών που προκύπτει από μια εσωτερική επιλογή αυτοαναφορικού αλγορίθμου πάνω στους επιτυχημένους (με βάση τη δική του κρίση) υπολογισμούς του.

Κατά κάποιο τρόπο η επιτυχημένη ακολουθία μας δίνει μια πιο βελτιωμένη εκδοχή της επιζώσας ακολουθίας.

Προκύπτει το ερώτημα αν μπορούμε να εφαρμόσουμε την διαγωνιοποίηση σε επιτυχημένες υποακολουθίες. Για να μπορεί να πραγματοποιηθεί αυτό χρειάζεται η δυνατότητα του αλγορίθμου c να επιλέγει την ακολουθία ελέγχου (**testing sequence**) στην οποία θα δράσει η διαγωνοποίηση. Αυτό συνεπάγεται την δυνατότητα του c να προσθέτει στην ακολουθία ελέγχου οποιονδήποτε c_k από την ιστορία του. Αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί με μια αλγοριθμική διαδικασία

Υποθέτουμε $\delta' = \delta\left[(+\theta_t)\, x_1, \ldots, x_m\right]$ο κωδικός ενός αλγορίθμου διαγωνιοποίησης με ακολουθία αλγόριθμου $x_1, \ldots, x_m$έτσι ώστε ο αλγόριθμος $alg\left(\delta'\right)$να βρίσκει το πιο απλό κωδικό r που ταιριάζει στην ακολουθία $x_1, \ldots, x_m$.

Αν $c_1, \ldots, c_n = c_\theta\left[(\theta)\,\delta'\right]$είναι η ιστορία του κωδικού c_n και $k < n$ τότε η συνάρτηση $c_1, \ldots, c_k, \ldots, c_n = c_n\left[\left(\widehat{\bar{\theta}\,\theta_t}\right) x_1, \ldots, x_m\right] \to c_n\left[\left(\overbrace{\theta\,\theta_t}\right) x_1, \ldots, x_m, c_k\right]$με την χρήση του concatation προσθέτουμε στην ακολουθία ελέγχου τουςc_kαυτό που ζητήσαμε. Η διαδικασία αυτή είναι αλγοριθμική επομένως ο c μπορεί να την εκτελέσει (λόγω του θεμελιώδους αξιώματος της αυτοαναφοράς)

Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n = x$ η ιστορία του κωδικού x και R μια αλγοριθμική διαδικασία. Θεωρούμε ότι οι υπολογισμοί αποθηκεύουν μνήμη σε κάθε βήμα, δηλαδή για κάθε k $x_k = [c_1, \ldots, c_n]$. Επομένως οι υπολογισμοί

$$[c_1, \ldots, c_n] \to R\left(c_1\right) \kappa\alpha\iota\, [c_1, \ldots, c_n] \to [c_1, \ldots, c_n, R\left(c_1\right)]$$

είναι αλγοριθμικοί και μπορούν να εκτελεστούν αυτοαναφορικά από τον c_n. Παρατηρούμε ότι ο απόγονος κατά την διαδικασία του υπολογισμού θα συνδέεται με τον c_1.Η μοναδική διαφορά των δύο υπολογισμών είναι ότι ο πρώτος διαγράφει την μνήμη του ενώ ο δεύτερος την διατηρεί Υπολογισμούς αυτής μορφής θα ονομάζουμε κύκλους(**cycle**).

3.3.2 Ορισμός σύνθετη ακολουθία

Σύνθετη ακολουθία ή ακολουθία από κύκλους θα ονομάζουμε ακολουθίες της μορφής

$$\left(c_1, c_1^1, \ldots, c_1^{n_1}\right), \left(c_2, c_2^1, \ldots, c_2^{n_2}\right), \ldots, \left(c_k, c_k^1, \ldots, c_k^{n_k}\right)$$

όπου κάθε επιμέρους υπολογισμός στο στοιχείο της ακολουθίας είναι non-proliferating ενώ ο τελευταίος υπολογισμός που εκτελεί ο $c_k^{n_i}$είναι proliferating.

Για να θεωρούμε μια ακολουθία σύνθετη θα πρέπει να πληροί τις παρακάτω ιδιότητες

1. Για κάθε $i \leq k$ ο υπολογισμός $c_i \to c_i^1 \to c_i^2 \to \cdots \to c_i^{n_i}$δεν περιλαμβάνει proliferating υπολογιστικά βήματα. Δηλαδή δεν προβαίνει σε δημιουργία απογόνων.

2. Για κάθε $i < k$ το βήμα $c_i^{n_i} \to c_{i+1}$είναι ένας κύκλος δηλαδή ο c_{i+1}να υπολογίζεται από τον $c_i^{n_i}$ως μια παραλλαγή του c_iαντί του εαυτού του.

3. Για κάθε $i < k$ το αυτοαναφορικό βήμα του $c_i^{n_i}$είναι proliferating και άρα η $c_1, c_2 \ldots, c_k$είναι μια επιζώσα ακολουθία .

Αυτό που προσπαθούμε να επετύχουμε με την εισαγωγή των σύνθετων ακολουθιών είναι η δημιουργία μιας ιεραρχίας για τα επιμέρους υπολογιστικά βήματα. Τα διακρίνουμε σε βέβαια (**certain**) και αβέβαια (**uncertain**), τα βέβαια αποτελούν προϊόν επιλογής σε αντίθεση με τα αβέβαια. Τα βέβαια βήματα εκτελούνται με proliferating υπολογισμούς καθώς χρειαζόμαστε από αυτά να δημιουργούν απογόνους. Ενώ τα αβέβαια βήματα με non-proliferating υπολογισμούς. Τα αβέβαια βήματα μπορούν να είναι επιτυχημένα επομένως ένα επιτυχημένο μοτίβο που έχει αναγνωριστεί σε αυτό αναπαράγεται στα επόμενα. Τα αβέβαια βήματα αποτελούν τις δοκιμές με τις οποίες προσεγγίζουμε την λύση ή οποίες μπορεί να είναι και λάθος. Θα αποτελούσε πλάνη και αντιφατικό με την αίσθηση μας να θεωρούσαμε ένα λάθος καταδικαστικό για την εξέλιξη. Επομένως, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η ανατροφοδότηση που λαμβάνει από το περιβάλλον είναι με την μορφή κάποιας αξιολόγησης. Δηλαδή, κάθε κύκλος $c_1, \ldots, c_i^{n_i}$να περιέχει λανθασμένς απαντήσεις οι οποίες όμως δεν θα περιέχονται κατά την διαδικασία της διαγωνοποίησης (ακολουθιακής) , άρα η ακολουθία ελέγχου του αβέβαιου βήματος $c_i^m \to c_i^{m+1}$δεν θα περιέχει την ακολουθία $c_i, \ldots, c_i^m$ αλλά μια υποακολουθία της που περιέχει τις ορθές απαντήσεις. Με βάση όλο αυτά θα μπορούσαμε θα αντικαταστήσουμε στο 3 την επιζώσα ακολουθία με την επιτυχημένη ακολουθία.

Σε αυτό το σημείο θα κάνω μια απόπειρα να παρομοιάσω αυτήν την διαδικασία με μια πραγματική. Μπορούμε να φανταστούμε την προετοιμασία για μια εξέταση , προετοιμαζόμαστε λύνοντας ασκήσεις. Η αποτυχία επίλυσης μιας άσκησης δεν είναι καταδικαστική για το αποτέλεσμα της εξέτασης. Κατά την διάρκεια της εξέτασης δεν χρησιμοποιούμε όλες τις μεθόδους που δοκιμάσαμε αλλά μόνο αυτές που αποδείχθηκαν επιτυχημένες. Το αποτέλεσμα της εξέτασης θα κρίνει την επιτυχία ή την αποτυχία.

3.4 Παρατηρήσεις για την διαγωνιοποίηση

Η διαγωνοποίηση είναι καταλυτικής σημασίας στην θεωρία. Επομένως, θα θέλαμε να αναφερθούμε σε κάποιες δυνατότητες της.

1. Είναι σε θέση να ελέγξει τις παραμέτρους της.

    - Όπως έχουμε δει η διαγωνιοποίηση συνδέεται με την προτεραιότητα των κωδικών την σειρά εμφάνισης των προτεινόμενων κωδικών από τον tester. Η έννοια της προτεραιότητας μοιάζει κατανοητή την συναντάμε σε διάφορους τομείς όπως την πληροφορική που χρησιμοποιούμε το κλειδί για την έξοδο περιεχομένων. Θα προβούμε σε μια πιο λεπτομερή περιγραφή της. Όμως κατά την διαγωνιοποίηση δύναται να αλλάζει η προτεραιότητα ανάλογα με την εξέλιξη. Αν ένας αλγόριθμος $B\left(r\right)$επεμβαίνει στην προτεραιότητα ενός κωδικού r σε έναν searcher δ_s, από το θεμελιώδες θεώρημα της αυτοαναφοράς, ο $B(r)$ μπορεί να βρίσκεται σαν εντολή μέσα στον αλγόριθμο της διαγωνιοποίησης άρα η διαγωνιοποίηση μπορεί να επέμβει σε αυτόν. Η προτεραιότητα ενός κωδικού εντοπίζεται σε κάποια διεύθυνση του αυτοαναφορικού αλγορίθμου. Η διαγωνιοποίηση εξετάζοντας την ιστορία του αυτοαναφορικού αλγορίθμου μπορεί να εντοπίσει μοτίβα σε αυτήν. Επομένως, μοτίβα που επαναλαμβάνονται έχουν μεγαλύτερη προτεραιότητα από άλλα που δεν χρησιμοποιούνται τόσο.Ένα παράδειγμα θα μπορούσε να είναι το ακόλουθο

    Έστω θ η διεύθυνση που περιέχει την προτεραιότητα ενός κωδικού w και έστω

    $$c\left[\left(\theta\right)w\right], c\left[\left(\theta\right)w+1,\right], c\left[\left(\theta\right)w+2\right]$$

    μια επιτυχημένη ακολουθία του c. Τότε, ο c διαγωνιοποιώντας πάνω σε αυτήν την ακολουθία μπορεί να αναγνωρίσει την αύξηση της προτεραιότητας και να την εφαρμόσει στον επόμενο υπολογισμό. Γενικότερα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η προτεραιότητα μπορεί να αυξάνεται κάθε φορά που ένας προτεινόμενος κωδικός αποδεικνύεται επιτυχημένος.

- Μια άλλη παραμέτρος στην οποία πρέπει να μπορεί να επέμβει η διαγωνιοποίηση είναι το μήκος της ακολουθίας k_d στο οποίο πρέπει να ταιριάζει ένας προτεινόμενος κωδικός ώστε ο d να αποφασίσει να τον εφαρμόσει. Χρειαζόμαστε αυτήν την νέα παράμετρο γιατί αλλιώς η πιθανότητα να εφαρμοστεί μια σωστή απόφαση θα ήταν ελάχιστη.

2. ¨Εχουμε αναφέρει και παραπάνω για την δυνατότητα του αλγορίθμου να περιέχει μια αναπαράσταση του περιβαλλόντος. Καθώς μέσα από την χρήση της διαγωνοποίησης αναγνωρίζει μοτίβα στο περιβάλλον επομένως είναι σε θέση να κατασκευάσει μια τέτοια αναπαράσταση. Επομένως, η διαγωνιοποίηση μπορεί να προβλέψει ομαλές αλλαγές του περιβάλλοντος αλλά και να συνεχίσει να λειτουργεί ορθά αν αυτές συνέβησαν χωρίς να τις προβλέψει

3. Ο tester μπορεί να έχει διαφορετικές μορφές . Η πιο συνηθισμένη είναι με έναν αλγόριθμο με έξοδο $\mathbf{T}$(true) ή $\mathbf{F}$(false) που αποφαίνεται αν ένας προτεινόμενος κωδικός ταιριάζει ή όχι στην ακολουθία ελέγχου. ¨Εχουμε δει όμως ότι η έξοδος μπορεί να είναι διαφορετική, να προσφέρει δηλαδή κάποια αξιολόγηση του προτεινόμενου κωδικού. Η έξοδος θα μας δείχνει το πόσο καλά ταιριάζει ο προτεινόμενος αλγόριθμος r στην ακολουθία κωδικών. Μπορούμε να φανταστούμε μια τέτοια έξοδος με την μορφή ενός ποσοστού.

4. Η διαγωνοποίηση είναι σε θέση να αντιληφθεί μια απαίτηση του περιβάλλοντος με τοπικό χαρακτήρα. Αυτό γίνεται εφικτό αφού η διαγωνοποίηση είναι σε θέση να αναγνωρίσει αν κάτι συμβαίνει στην πρόσφατη ιστορία του c. Επομένως, η διαγωνοποίηση μπορεί να ακολουθήσει μια πιο συντηρητική στρατηγική, κληρονομώντας αυτόν τον κωδικό σε ένα μέρος των απογόνων του ανάλογα με το μήκος της ακολουθίας. Αυτό μας εγγυάται ότι αν πάψει αυτή η απαίτηση ένας αριθμός τέκνων θα συνεχίσει να επιβιώνει. Η τοπική απαίτηση αντικατοκτρίζεται στο ότι ο κωδικός δεν κληρονομείται σε όλους τους απογόνους.

5. Αντίστοιχα, αν ένας κωδικός εντοπίζεται σε όλη την ακολουθία προγόνων, η διαγωνοποίηση θα αποφασίζει την εφαρμογή του στο σύνολο των απογόνων. Θα μπορούσε η απαίτηση να είναι αν η διαγωνοποίηση εντοπίσει κομμάτια του κωδικού που επαναλαμβάνονται για ένα επαρκές χρονικό διάστημα (μήκος ακολουθίας προγόνων) να αποφασίσει να εφαρμόσει τον κωδικό σε όλους τους απογόνους.

Διαγωνοποίηση και πρόβλημα τερματισμού

¨Ενα ερώτημα που μπορεί να έχει απασχολήσει και τον αναγνώστη είναι πότε τερματίζει η αναζήτηση για το εάν ένας προτεινόμενος κωδικός r ταιριάζει στην ακολουθία ελέγχου. Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι μη αποφασίσιμο. Ωστόσο, μπορούμε να θωρακίσουμε την θεωρία μας από τέτοια προβλήματα επιλέγοντας ένα άνω φράγμα για τα υπολογιστικά βήματα του υπολογισμού $alg\left(r\right)\left(c_k\right) \subseteq c_{k+1}$. Μια τέτοια συνθήκη φαντάζει αναμενόμενη και λογική καθώς μια διαδικασία που δεν ολοκληρώνεται δεν θα ήταν σε θέση να δημιουργήσει απογόνους . Εντός ενός φυσικού περιβάλλοντος, μπορούμε να θεωρήσουμε αυτό το άνω φράγμα ως συνάρτηση του οφέλους που θα αποκόμιζε από την εκτέλεση του υπολογισμού.

Διαγωνοποίηση και απόφαση

Σε αυτό το σημείο θα θέλαμε να δούμε με έναν πιο λεπτομερή τρόπο πως λαμβάνεται η απόφαση από την διαγωνοποίηση. Αρχικά, θέλουμε να μελετήσουμε πως η διαγωνοποίηση θα εφαρμόσει την απόφαση να χρησιμοποιήσει κάποιον r από τους προτεινόμενους κωδικούς με την χρήση του κωδικού απόφασης $s\left[r\right]$. Ο $s\left(r\right)$ θα χρησιμοποιείται όταν ο r ικανοποιεί κάποιες απαιτήσεις. Αυτές οι απαιτήσεις καθορίζονται από τον αλγόριθμου ελέγχου T με έξοδο $true$ ή $false$.

Υποθέτουμε μια σύνθετη ακολουθία η οποία είναι επιζώσα ή επιτυχημένη .

$$\left(c_1, c_1^1, \ldots, c_1^{n_1}\right), \left(c_2, c_2^1, \ldots, c_2^{n_2}\right), \ldots, \left(c_k, c_k^1, \ldots, c_k^{n_k}\right)$$

Θεωρούμε ότι ο κωδικός t του αλγόριθμου ελέγχου περιέχει δύο κενές διευθύνσεις, στην πρώτη θα αναφέρεται ο κωδικός r ενώ ο δεύτερος θα περιέχει την συνθήκη βάση της οποίας θα διενεργείται ο έλεγχος. Ανατρέχοντας στο συμβολισμό που ορίσαμε στην υποενότητα 2.2 $t\,[\emptyset, \emptyset]$. Αντίστοιχα, ο κωδικός s της απόφασης θα περιέχει μια κενή διεύθυνση για τον κωδικό r, $s\,[\emptyset]$. Η συνθήκη του ελέγχου μπορεί να είναι εσωτερική ή εξωτερική να τίθεται δηλαδή από το περιβάλλον. Σε κάθε περίπτωση θεωρούμε ότι η συνθήκη υπάρχει κωδικοποιημένη στον c επομένως ο c θα καταλάβει την δεύτερη διεύθυνση.

Η επιβίωση κι η ανάπτυξη των αυτοαναφορικών αλγορίθμων βασίζεται στην διαγωνοποίηση και στις αποφάσεις της. Αν ο προτεινόμενος κωδικός r ικανοποιεί την συνθήκη , ο αλγόριθμος ελέγχου εμφανίζει στην έξοδο του $true$, τότε ο r θα πρέπει να εφαρμοστεί στο επόμενο υπολογιστικό βήμα (proliferating ή μη) . Η εφαρμογή μπορεί να είναι τοπική ή καθολική όπως είδαμε παραπάνω.

Αν στην παραπάνω ακολουθία για κάποιο $i \leq k$ και $j < n$ ισχύει

$$alg\,(t)\left(r, c_i^j\right) = true$$

τότε ο $alg\,(s)\,(r)$θα πρέπει να ταιριάζει στο υπολογιστικό βήμα $c_i^j \rightarrow c_i^{j+1}$

Αρχικά, υποθέτουμε ότι κάτι τέτοιο θα συμβεί τυχαία αλλά τελικά ο κωδικός m για τον αλγόριθμο M της μορφής :

> Αν για κάποιο r, $alg\,(t)\,(r, c) = true$, τότε πάρε την απόφαση $alg\,(s)\,(r)$για αυτό το r

θα ταιριάζει στο υπολογιστικό βήμα $c_i^j \rightarrow c_i^{j+1}$για κάθε $i \leq k$ και $j < n_i$και λόγω της διαγωνοποίησης θα μπορεί να διαπιστωθεί σε κάθε υπολογιστικό βήμα από κει και πέρα. Όπως έχουμε αναφέρει η διαγωνοποίηση είναι σε θέση να ελέγχει τις συμπεριφορές της στις επιζώσες ή επιτυχημένες ακολουθίες που εφαρμόζεται. Δηλαδή, αν ο searcher προτείνει έναν κωδικό r καθώς και το0ν κωδικό της απόφασης για να εφαρμοστεί αυτός αν η διαγωνοποίηση αποφανθεί ότι ταιριάζει.

Διαγωνοποίηση και εξειδίκευση

Θεωρούμε ότι η διαγωνοποίηση έχει την δυνατότητα να εξειδικεύεται , θα προσπαθήσουμε να σκιαγραφήσουμε αυτήν την δυνατότητα εξειδίκευσης. Ας υποθέσουμε ένα συγκεκριμένο τεστ $T = alg(t)$, ότι ο c είναι ένας αυτοαναφορικός κωδικός που χρησιμοποιεί έναν αλγόριθμο απόφασης με κωδικό $\delta\,[t'] = [\delta_s, \delta_t\,[t']]$ όπου t′ είναι ο κωδικός του αλγόριθμου ελέγχου. Θεωρούμε ένα κώδικο απόφασης $d\,[\emptyset]$ο οποίος βρίσκεται σε κάποια διεύθυνση θ του $c = c\,[d\,[(\theta)\,\emptyset]]$και προσθέτουμε μια ελεύθερη διεύθυνση φ του κωδικού c. Συμβολικά αυτό που περιγράψαμε έχει ως εξής

$$c = c\,[\delta\,[t'], (\theta)\,\emptyset, (+\varphi)\,\emptyset]$$

Αντιγράφοντας τον $\delta\,[t] = [\delta_s, \delta_t\,[t]]$στην διεύθυνση φ ο searcher θα έχει την δυνατότητα να εξειδικευθεί σε $\theta - diffentiating$ κωδικούς. Η αντικατάσταση του t'με το t υποδηλώνει το συγκεκριμένο τεστ που ορίσαμε.

Διαγωνοποίηση και προτεραιότητα

Από την στιγμή που έχουμε μιλήσει για την δυνατότητα της διαγωνοποίησης να επεμβαίνει στον εαυτό της έχει ενδιαφέρον να το συνδυάσουμε και με την προτεραιότητα των κωδικών που προτείνονται από τον searcher. Αν θεωρήσουμε ότι οι κωδικοί που προτείνονται από τον searcher κατασκευάζονται από τον συνδυασμό επιμέρους απλών εντολών εξαρτώμενων από συνθήκες βάση μιας πιθανότητας. Ας εξετάσουμε αυτή την περίπτωση λίγο πιο αναλυτικά, αν ο $B(r)$ είναι ένας αλγόριθμος που επεμβαίνει στην αλλαγή της προτεραιότητας ενός κωδικού r στον searcher με κωδικό δ_s, όμως ο δ_sείναι υποκωδικός του αυτοαναφορικού κωδικού που χρησιμοποεί η διαγωνοποίηση, από το Θεμελιώδες Αξίωμα της Αυτοαναφοράς έχουμε ότι ο αυτοαναφορικός κωδικός μπορεί να λάβει την απόφαση να αλλάξει την προτεραιότητα ενός κωδικού.

Έστω $x \to x'$ το αυτοαναφορικό βήμα στο οποίο ο x αποφασίζει τυχαία να αυξήσει την προτεραιότητα του r όπως αυτός προτείνεται από την διαγωνοποίηση. Υποθέτουμε ότι η απόφαση αυτή είναι επιτυχημένη. Αν

$$\left\{\left(x_1, x_1^1, \ldots, x_1^{n_1}\right), \left(x_2, x_2^1, \ldots, x_2^{n_2}\right), \ldots, \left(x_k, x_k^1, \ldots, x_k^{n_k}\right)\right\}$$

είναι το σύνολο των υπολογισμών της διαγωνοποίησης στην ιστορία του x, αναμένουμε η σχετική συχνότητα των περιπτώσεων στις οποίες ο r ικανοποιεί την ακολουθία ελέγχου υπερβαίνει την σχετική προτεραιότητα με την οποία προτείνεται ο κωδικός r από τον searcher. Αυτό είναι σωστό καθώς έχουμε θεωρήσει την αύξηση της προτεραιότητας ως μια επιτυχημένη απόφαση.

Επομένως, αν $c_i \to c'_i$, $i = 1, \ldots, m$ είναι επιτυχημένα αυτοαναφορικά βήματα στην ιστορία του αυτοαναφορικού κωδικού c, στα οποία οι προτεραιότητες των προτεινόμενων κωδικών r_i,$i = 1, \ldots, m$ αυξάνονται αντίστοιχα, τότε για κάθε $i = 1, \ldots, m$ ανήκει στην κατηγορία που περιγράψαμε παραπάνω. Ένας κωδικός που ταιριάζει σε αλγορίθμους της μορφής :

> Αν η σχετική συχνότητα αποδοχής ενός κωδικού r κατά την διάρκεια της διαγωνοποίησης, είναι μεγαλύτερη από την σχετική προτεραιότητα που προτείνεται, τότε άλλαξε αντίστοιχα την προτεραιότητα

θα πρέπει να ταιριάζει τόσο σε επιζώσες όσο και επιτυχημένες υποακολουθίες της ιστορίας του c. Επομένως μια τέτοια εντολή μπορεί να καθιερωθεί. Με αυτό το παράδειγμα γίνεται φανερό πως με βάση την αυτοαναφορά η διαγωνοποίηση μπορεί να βελτιώσει τον εαυτό της

4 Εξέλιξη

Προτού ξεκινήσει το τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο είναι απαραίτητες κάποιες διευκρινήσεις. Σκοπός του κεφαλαίου –όπως και ολόκληρης της εργασίας– δεν τίθεται η εξέταση της εξέλιξης μέσω της οπτικής της βιολογίας αλλά πολύ περισσότερο μέσω μιας μαθηματικής οπτικής στην οποία σίγουρα διακρίνονται επιρροές από την επιστήμη των υπολογιστών (computer science). Η θεωρία της εξέλιξης παρά την αποδοχή από την πλειοψηφία των ανθρώπων και την εξοικείωση της μεγαλύτερης μερίδας των επιστημόνων με αυτήν, δεν σταματάει να παραμένει μυστηριώδης και να γεννάει διαρκώς νέους προβληματισμούς.

Η αδυναμία εξήγησης βασικών παραμέτρων της εξελικτικής θεωρίας κάθε άλλο παρά μειώνει την ισχύ της. Άλλωστε, αυτή είναι δεδομένη βάσει αποτελεσμάτων. Και ακριβώς αυτή η αδυναμία παραμένει μια πρόκληση για την έρευνα διευρύνοντας το πεδίο της. Υπό αυτήν την σκοπιά, λοιπόν, θα εξεταστούν διάφορα φαινόμενα χωρίς την εστίαση σε όρους της βιολογικής επιστήμης αλλά σίγουρα με την επιστράτευση και την παράθεση των πορισμάτων της, όπου αυτό είναι απαραίτητο.

Η βάση για την μελέτη της εξέλιξης τίθεται στο γονίδιο [18]. Η καινούργια αυτή σκοπιά προσανατολίζεται από τη διάθεση διεπιστημονικής έρευνας και στηρίζεται στη συνάντηση διαφορετικών επιστημονικών κλάδων όπως η εξελικτική βιολογία, η επιστήμη υπολογιστών, η θεωρία παιγνίων κ.ά. Η μελέτη της εξέλιξης από μια τέτοια οπτική έχει την αφετηρία της στον Von Neumann. Στην κατεύθυνση της σαφήνειας στην διευθέτηση του ζητήματος κρίνεται απαραίτητη καταρχάς η παράθεση μερικών σχετικών ορισμών που θα φανούν χρήσιμοι στη συνέχεια [19].

4.0.1 Ορισμός γονίδιο

Η μονάδα κληρονομικότητας και βάση του DNA που κωδικοποιεί μια λειτουργία. Η μονάδα πάνω στην οποία θα μελετήσουμε την εξέλιξη.

4.0.2 Ορισμός αλληλόμορφα

Ένα γονίδιο αποτελείται από δύο ή περισσότερα αλληλόμορφα. Επομένως, θα αποτελούν τις υπομονάδες της μελέτης

4.0.3 Ορισμός Καταλληλότητα

Καταλληλότητα (**fitness**) ορίζουμε την ικανότητα επιβίωσης και αναπαραγωγής, μέτρο της καταλληλότητας θεωρούμε τον προσδοκώμενο αριθμό απογόνων.

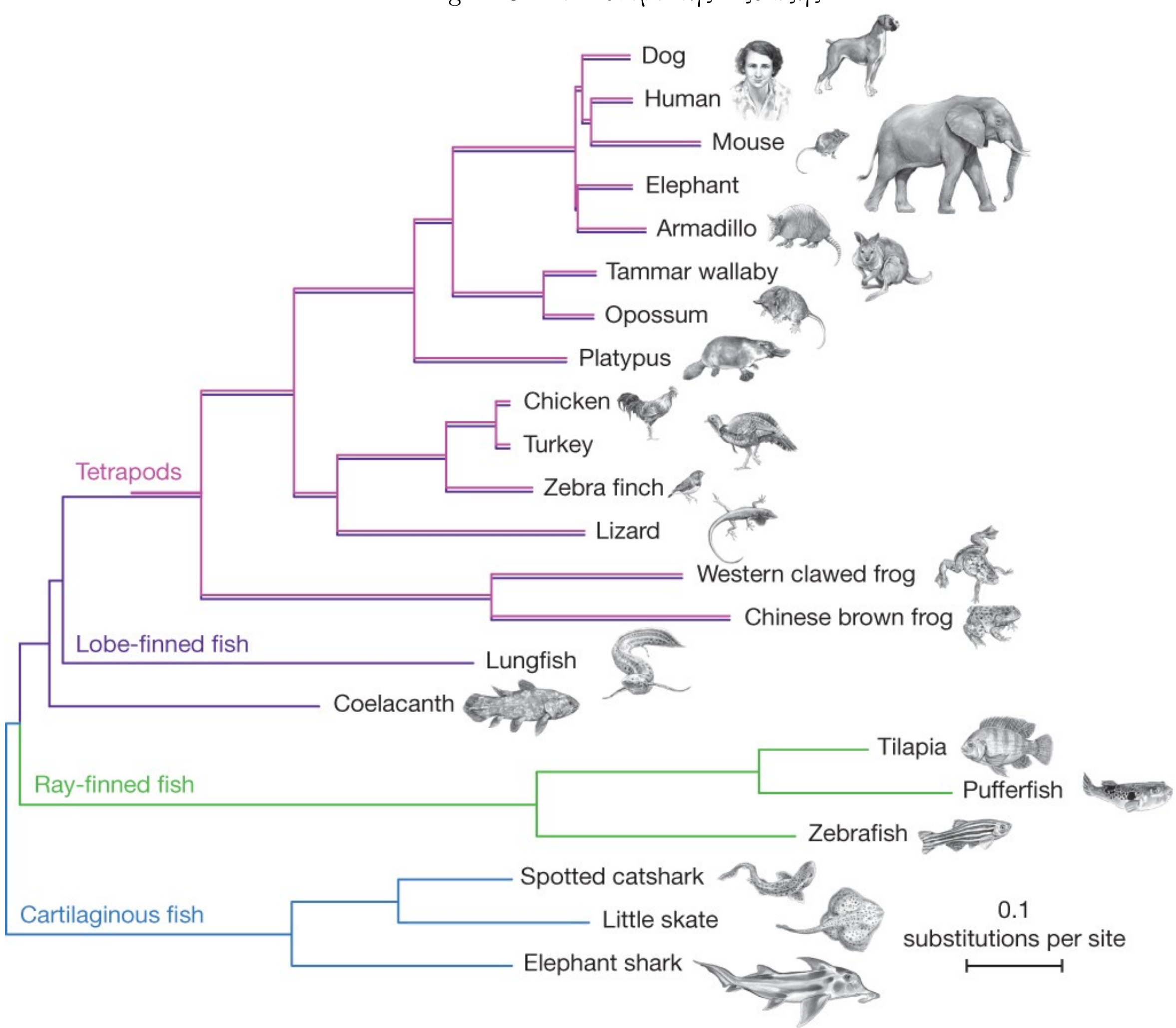
Η καταγωγή του ανθρώπου αποτελεί ένα από τα πρώτα ερωτήματα των ανθρώπινων κοινωνιών. Μέχρι τότε η άποψη για τα είδη είναι πως είναι διακριτά μεταξύ τους, σε θεολογικές εξηγήσεις της καταγωγής θεωρούνται πλάσματα που φτιάχτηκαν από τον δημιουργό του κόσμου. Η ιδέα της εξέλιξης υπήρχε στην σκέψη αρκετών μελετητών, οι οποίοι μέσω αυτής προσπαθούσαν να ερμηνεύσουν την ποικιλομορφία της φύσης. Ο πρώτος που προέβη σε μια αναλυτική παρουσίαση της εξέλιξης ήταν ο Darwin με την έκδοση της "Καταγωγής των ειδών".

Η εισαγωγή της εξέλιξης ως όρο άλλαξε συλλήβδην το εννοιολογικό οπλοστάσιο με το οποίο εξηγούσαν τα είδη μέχρι εκείνη την στιγμή. Τα καινοτόμα αποτελέσματα της άλλαξαν μια για πάντα τον τρόπο που προσεγγίζεται η εξέλιξη τόσο των ανθρώπων όσο και γενικότερα όλων ειδών. Τα βασικά στοιχεία της θεωρίας του ήταν η αναγνώριση της φυσικής επιλογής ως μηχανισμό της εξέλιξης και η υπόθεση του κοινού προγόνου. Η ιδέα δηλαδή, ότι διαφορετικά είδη προέρχονται από κάποιο κοινό πρόγονο και προεκτείνοντας αυτή την σκέψη ένα βήμα παραπέρα ότι όλη η ζωή προέρχεται από έναν πρόγονο

Παρότι ο Darwin με την θεωρία του προσέφερε μια στέρεη εξήγηση της εξέλιξης πολλά κομμάτια της παρέμειναν στο σκοτάδι. Τα δύο κυριότερα σημεία που δεν μπορούσαν να δικαιολογηθούν ήταν ο ρόλος του ανασυνδυασμού στην εξέλιξη και ο τρόπος που εμφανίζεται κάτι διαφορετικό στην εξέλιξη. Για την κατανόηση της τελευταίας πρότασης βοηθάει η επιστράτευση του παραδείγματος της δημιουργίας του ματιού. Μέσω της θεωρίας της εξέλιξης είναι εφικτό από την μια να εξηγηθεί η διαδικασία με την οποία το ένα μάτι εξελίχθηκε σε δύο αλλά όχι και της εμφάνισης του ματιού από την αρχή. Ακόμη και ο ίδιος ο Darwin αδυνατούσε να βρει έναν τρόπο να το εξηγήσει. Ομοίως, για το φαινόμενο του ανασυνδυασμού αναγνώριζε ότι βρίσκεται σε ένα βαθύ σκοτάδι όσον αφορά την χρησιμότητά του. Σε αυτό το πλαίσιο, η εξέλιξη των ειδών μπορεί να αναπαρασταθεί από μια δεντρική δομή. Την παρατήρηση αυτή την είχε κάνει και ο ίδιος ο Darwin, όπως αποδεικνύεται και από τα χειρόγραφά του στα οποία σώζονται σχεδιαγράμματα που αναπαραστούν την εξέλιξη υπό την μορφή δέντρου.

Παράλληλα, ο Mendel με πειράματα τα οποία έκανε σε ένα είδους μπιζελιού κατέληξε σε σημαντικά αποτελέσματα όσον αφορά την κληρονομικότητα. Τα αποτελέσματα του Mendel έμειναν στην αφάνεια για μεγάλο χρονικό διάστημα. Μόνο με την εκ νέου παρατήρηση της κληρονομικότητας αναγνωρίστηκε στον ίδιο η καθοριστική συμβολή που διαδραμάτισε η έρευνά του στην κατανόηση της κληρονομικότητας.

Figure 3: Το Δένδρο της Εξέλιξης



Πηγή: Standford Encyclopedia of Philosophy
https://plato.stanford.edu/entries/phylogenetic-inference/

Τόσο η έρευνα του Mendel όσο και του Darwin αποτελούν τομή για την αλλαγή παραδείγματος στον τομέα της βιολογίας, όπως ορίζει ο Tomas Kuhn[20]. Τα αποτελέσματα τους άλλαξαν τον τρόπο που εξετάζεται η βιολογία και εισήγαγαν νέες έννοιες στην μελέτη της. Μέχρι ενός σημείου η έρευνα για την μεντελιανή κληρονομικότητα περιορίζονταν στα εργαστήρια και στην μελέτη φυτών, ενώ οι συνεχιστές του Darwin μελετούσαν μεγάλους πληθυσμούς ειδών. Τα σημαντικότερα αποτελέσματα αναδύθηκαν στην επιφάνεια, όταν συνδυάστηκαν τα δύο παραδείγματα σε αυτό που έμεινε αργότερα γνωστό ως modern synthesis.

Η κυριότερη ιδέα αυτής της modern synthesis είναι η χρήση της μεντελιανής κληρονομικότητας για την εξήγηση της λειτουργίας της δαρβινικής φυσικής επιλογής. Δεν αποτελεί θεωρία ενός ερευνητή αλλά όπως γίνεται κατανοητό και από το όνομα για έναν συνδυασμό αποτελεσμάτων διαφορετικών ερευνητών, οι οποίοι συχνά μπορεί και να διαφωνούσαν μεταξύ τους. Αυτή η προσπάθεια αποτελεί την βάση κατανόησης και διδασκαλίας της εξελικτικής θεωρίας μέχρι σήμερα.

Στην κατεύθυνση αυτής της προσπάθειας, γεννήθηκε και η χρήση της στατιστικής με την δουλειά του σημαντικού μαθηματικού στο πεδίο της στατιστικής Fischer. Ο Fischer πρότεινε την θέαση της φυσικής επιλογής ως το αποτέλεσμα συνδυαστικών αλλαγών σε διακριτά στάδια σε αντίθεση με την μέχρι τότε θέαση της φυσικής επιλογής ως κάτι συνεχές [21].Ακόμη, μια άλλη προσωπικότητα με σημαντική συνεισφορά σε αυτό το ρεύμα ήταν ο Dobzhansky, ο οποίος θεωρούσε την εξέλιξη ως την αλλαγή συχνότητας εντός ενός γεννητικού συνόλου [22]. Μετά την ανάπτυξη της θεωρίας αρχίσαμε να μελετάμε την γενετική των πλυθησμών (**population genetics**) με άλλα λόγια την ποικιλία των γονιδιών εντός ενός πλυθησμού και πως διαφορετικά αλληλόμορφα συμπεριφέρονται προϊόντως του χρόνου αλλά και την βιοστατιστική κυρίως χάρις την δουλειά του Fischer, Haldane και Wright. Αποτέλεσμα αυτής της θεωρίας είναι και η παρατήρηση του Mayr για τον ορισμό του είδους, σαν είδος όριζε τα μέλη τα οποία μπορούν να δημιουργήσουν απογόνους μόνο μεταξύ τους[23].

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η εξέλιξη αποτελείται από 3 στοιχεία την επιλογή (**selection**), ανασυνδυασμός (**recombination/sex**) και μετάλλαξη (**mutation**) .

Αρχικά, μια μετάλλαξη μπορεί να είναι τυχαία (**random**) ή μη τυχαία (**nonrandom**) μετάλλαξη. Μια μη τυχαία μετάλλαξη οφείλεται στην εξέλιξη και πραγματοποιείται από τον ίδιο τον οργανισμό. Αυτή η μετάλλαξη θα λαμβάνει χώρα στα γονίδια, τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η μετάλλαξη αποτελεί τη έξοδο μιας υπολογιστικής διαδικασίας, η οποία λαμβάνει ως είσοδο αλληλόμορφα από διαφορετικά γονίδια. Η καινούργια μετάλλαξη μπορεί να αποτελέσει την είσοδο στον υπολογισμό μιας νέας μετάλλαξης[24]. Η αλληλεπίδραση των γονιδιών γίνεται μέσω των αλληλόμορφων του. Η μετάλλαξη είναι μια διαδικασία βάσει της οποίας επικοινωνούν αλληλόμορφα από διαφορετικούς γενετικούς τόπους και το αποτέλεσμα καταγράφεται σε έναν ή περισσότερους γενετικούς τόπους. . Η μετάλλαξη έχει την δυνατότητα να κληρονομείται και στις επόμενες γενιές. Η αλληλεπίδραση αυτή είναι ο ανασυνδυασμός μέσω του οποίου έρχονται σε επαφή διαφορετικά αλληλόμορφα. Οι νέο-Δαρβινιστές θεωρούσαν ότι μια μετάλλαξη συμβαίνει τυχαία και η φυσική επιλογή αποφασίζει για την επιτυχία της ή όχι. Συνήθως τυχαίες μεταλλάξεις θεωρείται ότι συμβαίνουν από κάποια λανθασμένη αντιγραφή ή κάποιο άλλο σφάλμα και μπορεί να ευνοηθούν τελικά από την φυσική επιλογή. Από μια πιο μαθηματική σκοπιά, ακόμα κι αν υποθέσουμε την τυχαιότητα τους κάποια πρέπει να είναι η αιτία της. Θα ήταν παραγωγικότερο αν σκεφτόμασταν αυτές τις μεταλλάξεις σαν τις εξόδους τυχαιοπημένων αλγοριθμών[19].

4.1 Sex the queen of problems in evolution

Ένα από τα σημαντικότερα ερωτήματα της εξέλιξης είναι ο ανασυνδυασμός (sex). Δεν έχει επιτευχθεί μια εξήγηση για αυτό το φαινόμενο, για αυτό άλλωστε φέρει και το περίφημο όνομα η βασίλισσα των προβλημάτων στην εξελικτική βιολογία [21]. Ο ανασυνδυασμός αποτελεί καθολικό φαινόμενο, το οποίο συναντάται από τους ανθρώπους, τα φυτά μέχρι και τους μύκητες. Στον πυρήνα της εξέλιξης βρίσκεται ένας απλός ορισμός, είναι η διαδικασία σάρωσης των γονιδίων με σκοπό την δημιουργία ενός απογόνου διαφορετικού από τους προγόνους του . Δεδομένου ότι οι απόγονοι κληρονομούν χαρακτηριστικά και από τους δύο προγόνους τους.

Συνοπτικά δηλαδή, οι άνθρωποι έχουν 46 χρωμοσώματα, αποτελούμενα από 23 ζεύγη. Κάθε ζεύγος αποτελείται από ένα χρωμόσωμα που κληρονομήθηκε από την μητέρα και ένα χρωμόσωμα που κληρονομήθηκε από τον πατέρα. Αυτά τα ζεύγη αποτελούν ουσιαστικά μια αντιστοιχία ένα προς ένα από τα χρωμοσώματα του κάθε προγόνου σε αυτά του άλλου.

Τα περισσότερα είδη λειτουργούν με αυτό τον τρόπο. Όσα δεν χρησιμοποιούν μια τέτοια διαδικασία είναι ελάχιστα και ονομάζονται asexual. Αξίζει να σημειωθεί, ότι ακόμα και είδη που δεν αναπαράγονται με τον ανασυνδυασμό έχουν κάποιο τέτοιο πρόγονο ή θα εξελιχθούν, ώστε να έχουν έναν απόγονο που θα αναπαράγεται με αυτό τον τρόπο. Μια εύκολη εξήγηση θα μπορούσε να είναι ότι συμβάλει σε μεγάλη ποικιλομορφία και με αυτό τον τρόπο είναι απαραίτητο για την εξέλιξη. Σε μια πιο εξαντλητική παρατήρηση όμως, θα φανεί ότι η ίδια λειτουργία μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο. Η ύπαρξη ενός πολύ επιτυχημένου γονότυπου δεν μπορεί να διαιωνιστεί αυτούσια, καθώς κάθε απόγονος θα κληρονομήσει τα μισά του γονίδια από αυτόν. Αυτό αποτελεί τον κυριότερο λόγο για τον οποίο δεν μπορεί να εξηγηθεί το φαινόμενο του sex μόνο με την χρήση της καταλληλότητας.

Γενικότερα, ενώ σε asex πληθυσμούς τα γονίδια που ευνοούνται παραπάνω από την φυσική επιλογή, διαιωνίζονται και μεταφέρουν την προσαρμογή τους στις επόμενες γενιές και είναι αυτά με την μεγαλύτερη καταλληλότητα. Παρόλα αυτά, ο ανασυνδυασμός εμποδίζει τα γονίδια με υψηλή καταλληλότητα. Επομένως δεν αρκεί η καταλληλότητα για να εξετάσουμε την συμπεριφορά πληθυσμών που χρησιμοποιούν ανασυνδυασμό για την αναπαραγωγή τους.

Η πρόταση που έκαναν ο Adi Livnat, Παπαδημητρίου κ.ά.[22] είναι η εισαγωγή ενός νέου μέτρου το οποίο αναπαριστά την ικανότητα των αλληλόμορφων να λειτουργούν σωστά υπό διαφορετικούς συνδυασμούς(**mixablity**). Η κυριότερη ιδέα αυτής της πρότασης είναι πως η επιλογή που γίνεται μέσω του ανασυνδυασμού ευνοεί τα γονίδια τα οποία μπορούν να ανταπεξέρχονται αποδοτικά με αλλά γονίδια και όχι το δυνατότερο από αυτά. Με αυτό τον τρόπο ότι μέσα από τον ανασυνδυασμό δεν ευνοούνται οι πιο ισχυροί συνδυασμοί δεν αποτελεί πρόβλημα. Για να κατανοήσουμε παραπάνω αυτήν την ιδέα ας την εξετάσουμε μέσα από ένα παράδειγμα. Στον παρακάτω πίνακα οι γραμμές αναπαριστάν τα αλληλόμορφα ενός γονιδίου και οι στήλες τα αλληλόμορφα του άλλου γονιδίου. Η τιμή κάθε θέσης είναι η καταλληλότητα αυτού του συνδυασμού αλληλόμορφων.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Σε asex πλυθησμούς θα ευνοούνταν από την εξέλιξη οι συνδυασμοί με την μεγαλύτερη καταλληλότητα στο παράδειγμα $[3, 1]$ και $[2, 2]$. Η διαφορετική ιδέα εδράζεται στην υπόθεση ότι λόγω του ανασυνδυασμού θα ευνοηθούν το τέταρτο αλληλόμορφο του πρώτου και το τέταρτου του δευτέρου, δηλαδή η τέταρτη γραμμή και στήλη αντίστοιχα. επιλέγονται οι στήλες με τον μεγαλύτερο μέσο όρο. Δηλαδή επιλέγονται τα αλληλόμορφα εκείνα που παρότι δεν επιτυγχάνουν υψηλούς αριθμούς καταλληλότητας μπορούν να συνδυαστούν αποδοτικότερα με τα άλλα. Μακροπροθέσμα, η δυνατότητα συνεργασίας φαντάζει σημαντικότερη από την ικανότητα παραγωγής απογόνων.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να σκεφτούμε τι θα συνεβαίνε αν θέλαμε να εξετάσουμε αν μια μετάλλαξη λειτουργεί καλύτερα από την προηγούμενη έκδοση της σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς. Η μετάλλαξη θα πραγματοποιηθεί στο αλληλόμορφο ενός γονιδίου. Σε πλυθησμούς που δεν χρησιμοποιούν τον ανασυνδυασμό θα έπρεπε να αντικαθιστούμε την μετάλλαξη στο καθένα ξεχωριστά και να μελετήσουμε τους απογόνους του. Η διαδικασία θα έπρεπε να επαναληφθεί για κάθε αλληλόμορφο ξεχωριστά. Αντίθετα σε πλυθησμούς με ανασυνδυασμό εισάγοντας την μετάλλαξη σε ένα αλληλόμορφο και θεωρώντας ότι αυτό μπορεί να αλληλεπιδράσει με n άλλα. Μετά από $logn$ γενιές θα έχουν δημιουργηθεί όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί[19]. Με τον ανασυνδυασμό των γονιδιών ένα αλληλόμορφο το οποίο ευνοείται μέσα από την φυσική επιλογή μπορεί να οδηγήσει στην αύξηση του πλυθησμού καθώς επικοινωνεί παράλληλα με άλλα αλληλόμορφα από διαφορετικούς γενετικούς τόπους, ενώ χωρίς το συνδυασμό κάτι τέτοιο θα συνεβαίνε σειριακά [23].

¨Ενας άλλος τρόπος που μπορούμε να εξετάσουμε τον ανασυνδυασμό είναι η τυχαιότητα που εμπεριέχει μέσα της η διαδικασία. Η τυχαιότητα χρησιμοποιείται σε αρκετούς κλάδους με στόχο να μην δημιουργούνται μοτίβα. Μπορούμε να κατανοήσουμε αυτή την τυχαιότητα αναλογιζόμενοι την πληθώρα των συνδυασμών που όπως έχουμε δει δημιουργούνται. Μέσα από αυτή την διαδικασία η φυσική επιλογή θα ευνοήσει ένα αλληλόμορφο που αντιδρά καλά σε αυτούς τους συνδυασμούς. Όμως η καλή συνεργασία αυτού του αλληλόμορφου μπορεί να επεκταθεί και στην καλή ανταπόκριση του σε μελλοντικούς συνδυασμούς.[27].

4.2 Θεωρία παιγνιών και εξέλιξη

Αρχικά, θα γίνει μια εισαγωγή στην θεωρία παιγνίων και την κατανόηση κάποιων βασικών όρων της. Η θεωρία παιγνίων μελετάει στρατηγικές, οι οποίες έχουν μια σχέση αλληλεξάρτησης μεταξύ τους. Δηλαδή, η επιλογή μιας στρατηγικής επηρεάζει το αποτέλεσμα και των δύο παικτών σε ένα παιχνίδι με δύο παίκτες. Η λέξη παιχνίδι παραπέμπει σε έναν νικητή κι έναν χαμένο, όμως στην θεωρία παιγνίων πέρα από την επικράτηση σε βάρος του αντίπαλου στόχος του παίκτη μπορεί να είναι κι η συνολική νίκη όχι μόνο η ατομική.

Ένα από τα πιο διάσημα και απλά παραδείγματα για την κατανόηση της θεωρίας παιγνίων είναι το δίλημμα του φυλακισμένου. Στο παράδειγμα αυτό υποθέτουμε ότι η αστυνομία έχει συλλάβει δύο υπόπτους για μια ληστεία, η αστυνομία ανακρίνει τους υπόπτους. Έστω παίκτης Α, παίκτης Β και η αστυνομία τους ζητάει να ομολογήσουν ότι έλαβαν μέρος. Θεωρούμε ότι ο στόχος και των δύο είναι να περάσουν οι ίδιοι όσο το δυνατόν λιγότερο χρόνο στην φυλακή. Τα πιθανά ενδεχόμενα είναι τα εξής:

- Ο παίκτης Α ομολογεί ενώ ο Β αρνείται, τότε ο παίκτης Β εκτίει 12 μήνες φυλακή ενώ ο Α αφήνεται ελεύθερος (όμοια σε περίπτωση που αντιστραφούν οι απαντήσεις τους)
- Ομολογούν και οι δύο καταδικάζονται σε 8 μήνες φυλακή
- Αρνούνται και οι δύο καταδικάζονται σε 1 μήνα φυλακή έκαστος

Για την ευκολότερη κατανόηση θα τις αποτυπώσουμε σε έναν πίνακα.

$$\begin{array}{cc} -1,-1 & -12,0 \\ 0,-12 & -8,-8 \end{array}$$

Παρατηρείται ότι η καλύτερη επιλογή που έχει να κάνει ένας παίκτης είναι να ομολογήσει καθώς ανεξάρτητα της επιλογής του άλλου είναι μεγαλύτερο. Αν υποθέσουμε ότι ο παίκτης Α αποφασίζει να ομολογήσει τότε το καλύτερο για τον Β είναι να ομολογήσει κι αυτός. Αντίστοιχα αν ο παίκτης Β σωπάσει πιο συμφέρον για τον Α είναι να ομολογήσει. Οι στρατηγικές αυτού του είδους όπου υπάρχει μια στρατηγική η οποία οδηγεί σε καλύτερο αποτέλεσμα από οποιαδήποτε άλλη και ανεξαρτήτως της επιλογής του άλλου παίκτη ονομάζονται αυστηρά κυρίαρχες (strictly dominant). Όπως φαίνεται και στον πίνακα παρατηρείται ότι αν σωπαίναν και οι δύο θα είχαν καλύτερη κατάληξη. Επομένως, γεννάται το ερώτημα γιατί δεν είναι αυτή η καλύτερη στρατηγική. Η απάντηση έχει ως εξής, ο καθένας από τους δύο αν γνωρίζει ότι ο άλλος σώπασε μπορεί να επιτύχει μεγαλύτερο όφελος ομολογώντας και άρα μια τέτοια στρατηγική δεν είναι σταθερή.

Η εξελικτική βιολογία εδώ και αρκετά χρόνια έχει σχέση με την θεωρία παιγνίων. Τις περισσότερες φορές που χρησιμοποιείται η θεωρία παιγνίων είναι για να εξηγήσει την ανάπτυξη μιας ατομικής στρατηγικής υπό το πρίσμα της εξέλιξης. Η ανάπτυξη αυτών των στρατηγικών τις περισσότερες φορές είναι σε σύγκρουση με άλλες εντός ενός περιβάλλοντος. Εξελικτικά σταθερή στρατηγική (evolution stable strategy) είναι μια στρατηγική, η οποία αν υιοθετηθεί από τα περισσότερα μέλη του πληθυσμού δεν μπορεί να νικηθεί από καμία άλλη στρατηγική [29]. Μια εξελικτικά σταθερή διαδικασία μπορεί να γίνει κατανοητή μέσα από ένα παράδειγμα.

Το παιχνίδι έχει ως εξής θεωρούμε έναν πληθυσμό, ο οποίος χωρίζεται σε Γεράκια και Περιστέρια. Η διαφοροποίηση είναι συμβατική με βάση την εικόνα που έχουμε ως άνθρωποι, θεωρούμε ότι η εξωτερική εμφάνιση τους είναι ίδια. Τα γεράκια δίνουν μάχες για την τροφή μέχρι να κερδίσουν ή να τραυματιστούν βαριά, ενώ τα περιστέρια δεν μπαίνουν στην διαδικασία μάχης. Όταν ένα γεράκι συναντάει ένα άλλο γεράκι δίνουν μάχη μέχρι να επικρατήσει το ένα, όταν ένα περιστέρι συναντάει ένα γεράκι υποχωρεί και όταν δύο περιστέρια συναντιούνται δεν μπαίνουν σε διαδικασία μάχης μετά από ένα χρονικό διάστημα το ένα υποχωρεί χωρίς να υπάρχει σύγκρουση. Ο Maynard με την δουλειά του απέδειξε ότι μια εξελικτικά σταθερή στρατηγική που μπορεί να αναπτυχθεί είναι μια στρατηγική που επιλέγει την τακτική βασιζόμενη στον αντίπαλο. Μια τέτοια στρατηγική ονομάζεται αντεκδικητής και συμπεριφέρεται σαν γεράκι στα γεράκια και σαν περιστέρι στα περιστέρια. Το παράδειγμα δεν αναπαριστά ένα πραγματικό περιβάλλον παρόλα αυτά αποτελεί μια εξήγηση για το πως εμφανίζονται διαφορετικές στρατηγικές που ευνοούνται από την εξέλιξη.

Ο τρόπος που εξετάζεται η εξέλιξη παρακάτω δεν αφορά ένα περιβάλλον συγκρούσεων με ανταγωνιστικές στρατηγικές. Δεν σχετίζεται με την υιοθέτηση ατομικών στρατηγικών επιβίωσης αλλά με την μελέτη των δυναμικών που αναπτύσσονται εντός ενός πληθυσμού μέσω της αναπαραγωγής του με την διαδικασία του ανασυνδυασμού. Οι στρατηγικές που εφαρμόζονται δεν έρχονται σε σύγκρουση μεταξύ τους και απλώς κρίνονται από το περιβάλλον μέσω μιας διαδικασίας επιλογής. θα ορίσουμε την έννοια της ασθενούς επιλογής καλούμε συστήματα όπου η συνάρτηση της φυσικής επιλογής έχει ως έξοδο δύο τιμές $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ που μας δείχνουν την καταλληλότητα κάθε φορά[30]. Προφανώς αν ανταποκρίνεται καλά θα έχει την τιμή $(1+\varepsilon)$. Η ιδέα πίσω από αυτό είναι ότι η εξέλιξη δεν γίνεται με άλματα αλλά με μικρές διαφοροποιήσεις [31].

Το 2013 οι Chastain κ.ά.[32] έδειξαν ότι η εξέλιξη σε καταστάσεις ασθενούς επιλογής μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα παιχνίδι. Στο συγκεκριμένο παιχνίδι οι παίκτες είναι τα γονίδια, οι στρατηγικές είναι τα αλληλόμορφα, το ώφελος είναι η αύξηση της καταλληλότητας του οργανισμού και οι πιθανότητες είναι οι συχνότητες των αλληλόμορφων. Το παιχνίδι αυτό παίζεται μέσω του αλγόριθμου MWUA. Αυτός ο αλγόριθμος έχει αποδειχθεί πολύ χρήσιμος στην οικονομία, στην στατιστική και στην επιστήμη των υπολογιστών. Επιπλέον χρησιμοποιείται ευρέως και στον κλάδο του machine learning όπου αποκαλείται “no regret learning”. Αυτός ο αλγόριθμος είναι αρκετά απλός κι αυτό μάλλον αποτελεί το κλειδί για την επιτυχία του. Ας προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε τον αλγόριθμο.

4.2.1 Multiple Weight Update Algorithm (MWUA)

Μια από τις πιο συχνές εξηγήσεις για αυτόν τον αλγόριθμο βασίζεται σε αυτό που ονομάζεται Πρόβλημα των ειδικών[33]. Θεωρούμε ότι έχουμε n ειδικούς στο χρηματιστήριο οι οποίοι κάνουν προβλέψεις. Σκοπός μας είναι να βρούμε έναν τρόπο ώστε να μας αποφέρει κέρδος. Αν η επιλογή μας κάθε φορά ήταν τυχαία το προσδοκώμενο όφελος μας θα ήταν αυτού του μέσου ειδικού. Αν θεωρήσουμε ότι κάποιοι είναι πιο ικανοί θα θέλαμε με κάποιο τρόπο να ενισχύουμε αυτούς ώστε να είναι πιο πιθανό να επιλέγουν στο μέλλον.

1. Θεωρούμε ότι οι ειδικοί εκφράζονται από την μεταβλητή i
2. Αρχικοποιούμε το βάρος όλων των ειδικών $w_i^1 = 1$
3. Θεωρούμε μια διακριτή μετάβλητη t που υποδηλώνει τον χρόνο
4. Θεωρούμε ότι το ώφελος εκφράζεται από ένα πίνακαM του οποίου το κάθε στοιχείο $M\left(i,t\right)$ περιέχει το ώφελος του συγκεκριμένου ειδικού εκείνη την στιγμή t . Επιπλέον, θεωρούμε $M\left(i,t\right) \in [-l,p]$ όπου $l \leq p$
5. Για κάθε στιγμή t δημιουργούμε την κατανομή $D^t = \{p_1^t, p_2^t, \ldots, p_n^t\}$ για τους ειδικούς με $p_i^t = w_i^t / \sum_n w_k^t$.
6. Σε κάθε χρονική στιγμή επιλέγουμε τον ειδικό βάση της κατανομής D^t
7. Ανάλογα με το ώφελος προβαίνουμε στις παρακάτω τροποιήσεις

$$w_i^{t+1} = \begin{cases} w_i^t\left(1-\varepsilon\right)^{\text{-}M\left(i,t\right)/p} & M\left(i,t\right) \leq 0 \\ w_i^t(1+\varepsilon)^{M\left(i,t\right)/p} & M(i,t) > 0 \end{cases}$$

Στο παράδειγμα με τους ειδικούς με αυτό τον τρόπο έχει αποδειχθεί ότι μπορούμε με αυτό τον τρόπο να επιτύχουμε κέρδος όπως ο καλύτερος από τους ειδικούς. Παρατηρώντας, καταλαβαίνουμε ότι δημιουργούνται γέφυρες οι οποίες ενισχυόνται αν μια κίνηση είναι επιτυχημένη.

Ας επιστρέψουμε όμως στο παιχνίδι που παίζουν τα γονίδια. Ο σκοπός είναι η επιβίωση του οργανισμού επομένως ο σκοπός του είναι κοινός και υπάρχουν συγκρούσεις μεταξύ τους. Οι συχνότητες των αλληλόμορφων είναι τυχαίες. Τα γονίδια βλέπουν τα αλληλόμορφα τους σαν τους ειδικούς στο παραπάνω παράδειγμα και αλλάζουν τα βάρη τους ανάλογα με την επίδοση τους στον συγκεκριμένο συνδυασμό. Ο συνδυασμός προκύπτει από την στρατηγική που εφαρμόζουν τα γονίδια τους, δηλαδή από τα αλληλόμορφα. Όπως, παραπάνω το όφελος αναπαρίσταται από έναν πίνακα, έτσι κι εδώ ο πίνακας έχει ως γραμμές και στήλες τα αλληλόμορφα του κάθε γονιδίου.

Το ερώτημα της ποικιλομορφίας όμως παραμένει καθώς είναι χαρακτηριστικό της εξέλιξης. Το ενδιαφέρον εντοπίζεται αν μελετήσουμε τι μεγιστοποιεί ο αλγόριθμος. Η μεγιστοποίηση είναι ένας συνδυασμός της καταλληλότητας, η οποία αποτελεί και το όφελος του παιχνιδιού και της εντροπίας της κατανομής. Η εντροπία εξαρτάται από το ε που χρησιμοποιούμε στον αλγόριθμο βάση της ασθενούς επιλογής. Η κατανομή μας θέλουμε να έχει αυτήν την ικανότητα ώστε να αποφύγουμε μια συγκεκριμένη επιλογή. Αυτό γίνεται φανερό από τις αλλαγές στις οποίες προβαίνουμε στα βάρη. Αν για παράδειγμα αντί να είναι εκθέτης, το όφελος πολλαπλασίαζε το βάρος, μια πολύ καλή συμβουλή θα οδηγούσε σε μονοπώληση του συγκεκριμένου ειδικού στις επόμενες επιλογές. Αντίστοιχα ένα μεγάλο ε θα είχε το ίδιο αποτέλεσμα.

Για να συνδυαστεί και με όσα αναλύθηκαν παραπάνω, η ποσότητα βάση της οποίας αλλάζουμε τα βάρη είναι η ικανότητα συνδυασμού (mixablity). Θα μπορούσε ίσως αυτός να είναι κι ο ρόλος του ανασυνδυασμού στην εξέλιξη, δηλαδή ότι επιτρέπει την χρήση ενός αλγορίθμου σαν MWUA. Προφανώς στην ανάπτυξη του μοντέλου υπάρχουν πολλές παραδοχές που έγιναν. Αρχικά, δεν λήφθηκαν υπόψιν οι μεταλλάξεις κάτι πολύ βασικό στην θεωρία της εξέλιξης όπως επίσης και ότι αναφερόμαστε σε έναν μη πεπερασμένο πληθυσμό. Εξηγεί όμως συμπεριφορές που στην αρχή φαντάζουν παράδοξες. Μέσω αυτής της οπτικής μπορεί να εξηγήσει την ποικιλομορφία μέσα από την κατανομή και την εντροπία της. Ο ανασυνδυασμός δεν οδηγεί αναγκαστικά σε μια αύξηση της ποικιλομορφίας καθώς σε κάποιες περιπτώσεις η ποικιλομορφία δεν ευνοείται από την εξέλιξη.

Εξέλιξη και κληρονομικότητα

Ένα ερώτημα το οποίο παραμένει προς συζήτηση είναι αν ένα χαρακτηριστικό μπορεί να κληρονομηθεί. Αυτή η συζήτηση γυρνάει στις απαρχές της εξελικτικής θεωρίας. Η κληρονομικότητα των χαρακτηριστικών που πρότεινε ο Lamark αποδείχθηκε λανθασμένη. Στα μετέπειτα χρόνια ο Lamark λοιδορήθηκε και έχει μείνει γνωστός μόνο για τις λανθασμένες προβλέψεις που έκανε. Το πιο ενδιαφέρον κομμάτι είναι αν σκεφτούμε μια αλλαγή με σκοπό την καλύτερη ανταπόκριση στο περιβάλλον. Η αλλαγή προφανώς και κληρονομείται το ερώτημα είναι αν αυτή η αλλαγή παραμένει όσο διαρκούν αυτές οι διαφορετικές συνθήκες του περιβάλλοντος.

Ο Waddingthon το 1952 [34]διεξήγαγε ένα πείραμα για να μελετήσει τέτοιες συμπεριφορές. Χρησιμοποίησε ένα είδος εντόμου με φτερά, χάριν ευκολίας ας θεωρήσουμε μύγες. Αρχικά τα υπέβαλε σε υψηλή θερμοκρασία, εκεί παρατήρησε ότι ένα ποσοστό από αυτές ανέπτυξε μια διαφοροποίηση στα φτερά. Έπειτα, επιτρέποντας μόνο σε αυτές να αναπαράγονται κατάφερε σχεδόν όλοι οι απόγονοι να εμφανίζουν αυτή την διαφοροποίηση. Όταν όμως επανέφερε τις αρχικές συνθήκες του πειράματος, ενώ οι περισσότερες επέστρεψαν στην προηγούμενη κατάσταση ένα κομμάτι του πληθυσμού διατηρούσε αυτήν την διαφοροποίηση στα φτερά. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν αυτή η αλλαγή αυτή μπορεί να σταθεροποιηθεί σε έναν πληθυσμό.

Επηρεασμένοι από αυτό το πείραμα ο Παπαδημητρίου κ.ά. [35] έδειξαν ότι μια οποιαδήποτε Boolean συνάρτηση των γονιδίων η οποία υποδηλώνει ένα πλεονέκτημα σε κατάσταση ασθενούς επιλογής θα επικρατεί με μεγάλη πιθανότητα σε έναν πληθυσμό. Το αποτέλεσμα αυτό θα μπορούσε να μας εξηγήσει πως ένα χαρακτηριστικό διασπείρεται στον πληθυσμό και τελικά επικρατεί σε αυτόν. Διαφοροποιείται από την άποψη ότι συμβαίνει μια “τυχερή” μετάλλαξη η οποία επικρατεί στον πληθυσμό, γιατί κατόρθωσε να δημιουργήσει ισχυρούς οργανισμούς. Θεωρεί ότι αυτό συμβαίνει με την μεταβολή των συχνοτήτων που έχουν τα αλληλόμορφα στα γονίδια που οδηγεί στην επικράτηση αυτών που αποκτούν το επιπλέον προβάδισμα που λαμβάνεται από την συνάρτηση.

5 Επίλογος

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάστηκε μια επισκόπηση των αποπειρών θεμελίωσης των μαθηματικών, απόπειρες οι οποίες επιχειρήθηκαν κατά κύριο λόγο από μαθηματικούς. Παρατηρήθηκε ο ρόλος που έπαιξε η αυτοαναφορά σε αυτά τα προγράμματα έχοντας στα περισσότερα από αυτά έναν καταλυτικό ρόλο στην αποτυχία τους. Εν συνέχεια, μελετήθηκε η χρήση της αυτοαναφοράς για την παραγωγή θεμελιωδών αποτελεσμάτων στα μαθηματικά όπως αυτά του Cantor με την χρήση της διαγώνιας μεθόδου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο έγινε μια παρουσίαση των βασικών όρων που διέπουν την θεωρία μάθησης που παρουσιάζεται και τα βασικά αξιώματά της.

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετήθηκε η διαγωνιοποίηση, ο τρόπος με τον οποίο εξελίσσονται οι κωδικοί. Η διαγωνιοποίηση αποτελεί την σημαντικότερη λειτουργία της θεωρίας καθώς βάση αυτής εξελίσσονται και διαφοροποιούνται.

Στο τέταρτο κεφάλαιο επιχειρήθηκε η προσέγγιση της δαρβινικής θεωρίας της εξέλιξης μέσα από ένα πιο θεωρητικό μαθηματικό πρίσμα. Παρουσιάστηκαν μερικά από τα σημαντικότερα αποτελέσματα αυτής της προσπάθειας, όπως επίσης και οι διαφορετικές οπτικές βάσει των οποίων είναι δυνατόν να μελετηθεί η εξέλιξη υπό μια εναλλακτική οπτική.

Στο σημείο αυτό και έπειτα από όλα όσα εκτέθηκαν παραπάνω, φαίνεται εφικτή η προσπάθεια συγκριτικής ανάγνωσης και σκιαγράφησης κάποιων κοινών σημείων των δύο θεωριών πουπαρουσιάστηκαν. Αρχικά, λοιπόν μπορεί να θεωρηθεί ότι η στατιστική διαγωνιοποίηση είναι σε θέση να λειτουργήσει με έναν αλγόριθμο όπως ο MWUA. Δεδομένου ότι η στατιστική διαγωνιοποίηση πρέπει να λειτουργεί με έναν τέτοιο τρόπο, ώστε να μην υπάρχει μονοπώληση από κάποιον κωδικό, η ίδια η διαγωνιοποίηση μπορεί να ελέγχει τις λειτουργίες της, για να τροποποιεί τα βάρη ανάλογα με την επιτυχία. Αυτό είναι κάτι που φάνηκε και στο κεφάλαιο 3, κατά την μελέτη της διαγωνιοποίηση και της δυνατότητάς της να επεμβαίνει στις προτεραιότητες των κωδικών. Ο αλγόριθμος MWUA άλλωστε λειτουργεί με αυτόν ακριβώς τον τρόπο. Ένα άλλο ενδιαφέρον κομμάτι είναι η εξέταση των μεταλλάξεων μέσα από τους αυτοαναφορικούς υπολογισμούς, εξετάζοντας ίσως την διαγωνιοποίηση ως τον μηχανισμό με τον οποίο δημιουργούνται οι μεταλλάξεις. Εξάλλου, η διαγωνιοποίηση έχει την δυνατότητα να εξελίσσει τον εαυτό της άποψη που υποστηρίζεται και για τον μηχανισμό που δημιουργεί τις μεταλλάξεις [19]. Η μετάλλαξη δημιουργείται μέσα στον ίδιο τον κωδικό και μέσω της παράλληλης διαγωνιοποίησης καταφέρνει να επικοινωνηθεί με άλλους κωδικούς.

Το αποτέλεσμα [31] που περιγράφηκε παραπάνω έχει ένα ενδιαφέρον αν το εξετάσουμε σε συνδυασμό με τον tester Δ_t . Ο tester είναι επίσης μια Boolean συνάρτηση και η αλλαγή στην οποία θα έπρεπε να προβούμε είναι όσα επιτυγχάνουν να αποκτούν το πλεονέκτημα $(1+\varepsilon)$. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να εξηγήσει και την προτεραιότητα με την οποία προτείνονται οι κωδικοί από τον searcher, καθώς όσοι κωδικοί λαμβάνουν το εξελικτικό πλεονέκτημα αυξάνουν την προτεραιότητα τους.

Το μεγάλο ερώτημα είναι ποιος θα μπορούσε να είναι ο ρόλος του ανασυνδυασμού στην θεωρία [15]. Μια πρώτη υπόθεση που θα μπορεί να γίνει είναι ότι προκύπτει από έναν συνδυασμό της ακολουθιακής και της παράλληλης διαγωνιοποίησης. Μια άλλη άποψη θα ήταν με την αποθήκευση σε μια διεύθυνση ενός ζεύγους αντικειμένων μετά από μια διαδικασία επιλογής, όπου το ένα θα κρινόταν ως επικρατές, όπως συμβαίνει στα γονίδια. Θα δημιουργούσε, δηλαδή, ένα νέο κωδικό ο οποίος θα είχε την δυνατότητα της μνήμης. Η παρομοίωση του κωδικού με το γονίδιο δεν φαντάζει υπερβολική, διότι τα γονίδια είναι εξοπλισμένα με την δυνατότητα της μνήμης, υπόκεινται σε εξέλιξη και δεν αποτελούν την μικρότερη μονάδα μελέτης της εξέλιξης.

Η μελέτη έγινε σε ένα καθαρά θεωρητικό περιβάλλον. Απώτερος στόχος είναι η δυνατότητα προγραμματισμού αυτοαναφορικών αλγοριθμών και η παρατήρηση της συμπεριφοράς. Από προηγούμενη δουλειά που έχει γίνει στους αυτοαναφορικούς αλγορίθμους είναι γνωστό ότι είναι κλειστοί ως προς την σύνθεση, την πρωταρχική αναδρομή και την ελαχιστοποίηση. Επομένως, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκμάθηση μιας γλώσσας [17, 37].

Ας αναλογιστούμε την προσπάθεια που γίνεται για την κατανόηση της λειτουργίας του ανθρώπινου νου, τόσο μέσω της χρήσης υπολογιστικών μοντέλων σε υπολογιστές όσο και με την μελέτη του ανθρώπινου εγκεφάλου. Όσα διαφορετικά εργαλεία κι αν χρησιμοποιούμε για την επίλυση αυτού του προβλήματος σε τελική ανάλυση παραμένει μια αυτοαναφορική διαδικασία, καθώς προσπαθούμε να εξηγήσουμε την λειτουργία με την χρήση του.

Φτάνοντας στο τέλος αυτής της εργασία και ολοκληρώνοντας το τελευταίο κομμάτι του επιλόγου, ταιριάζει η αναφορά στην μέθοδο εκμαίευσης της γνώσης του Σωκράτη, όπως την αποτυπώνει ο Πλάτωνας στην πραγματεία του Μέμνων[36]. Η θέαση της γνώσης σ-τον Πλάτωνα μπορεί να θεωρηθεί ως μια αυτοαναφορική διαδικασία, καθώς βάση κάποιας λειτουργίας. Θεωρούσαν ότι η γνώση ήταν αθάνατη και μεταφερόταν από γενιά σε γενιά. Η άποψη αυτή τεκμηριώνεται με το παράδειγμα ενός δούλου, ο οποίος δεν είχε εκπαίδευση. Σε αυτόν γίνονται κάποιες κατευθυνόμενες ερωτήσεις χάρις στις οποίες εκμαιεύτηκε η σωστή απάντηση. Το παράδειγμα που χρησιμοποιείται είναι ποια είναι η πλευρά ενός τετραγώνου με το διπλάσιο εμβαδόν, δηλαδή ένα καθαρά μαθηματικό πρόβλημα. Προφανώς, απόψεις ότι η γνώση είναι αθάνατη δεν έχουν θέση στην νεοτερική σκέψη, ούτε είμαι σε θέση να υποστηρίξω κάτι τέτοιο. Αφήνοντας κατά μέρους αυτήν την άποψη, μπορούμε να παρατηρήσουμε την μάθηση με έναν τρόπο παρόμοιο με αυτόν που αναπτύξαμε. Ο δούλος στο παράδειγμα χρησιμοποιεί έναν αυτοαναφορικό αλγόριθμο για να καταλήξει στα συμπεράσματα του. Με μιας μορφής διαγωνιοποίησης καταφέρνει να εξελίσσει την σκέψη με βάση τις πληροφορίες που λαμβάνει από τον Σωκράτη.

Βιβλιογραφία

1. Διονύσης Α.Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών. Νεφέλη
2. F.R. Drake, Set Theory: An Introduction to Large Cardinals . North Holland
3. Γιάννης Ν. Μοσχοβάκης, Σημειώσεις στην συνολοθεωρία
4. B.Russell, Principles of Mathematics . George Allen and Unwin
5. Ludwig Wittgeinstein "Παρατηρήσεις για την θεμελίωση των μαθηματικών " Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
6. Γαρυφαλλιά Βαφειάδου & Joan Rand Moschovakis"Τα ενορατικά μαθηματικά και η λογική τους" , στο Διονύσης Αναπολιτάνος Στιγμές και διάρκειες: 13 κείμενα φιλοσοφίας και ιστορίας των μαθηματικών και της λογικής
7. A. Heyting L.E.G. Brouwer : Collected Works. North Holland
8. BARDHYL SULA "David Hilbert και η Θεμελίωση των Μαθηματικών" Διπλωματική εργασία ΕΚΠΑ
9. A. Robinson "Formalism 64" στό Υ. Bar-Hiller (Ed.) Logic, Methodology and Philosophy of Science. North-Holland , 228-246,
10. "Mathematical Problems: Lecture Delivered Before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900", μετφρ. Mary F. Winston (1902), Bulletin of the American Mathematical Society, 8, 437-479
11. Ryan Smullyan , Ο Σατανάς, ο Cantor και το Άπειρο , μτφ Στάμος Τσιτσώνης. Κάτοπτρο
12. Douglas R. Hofstadter "Analogies and Metaphors to Explain Gödel's Theorem", The Two-Year College Mathematics Journal, 13:2, 98-114, DOI: 10.1080/00494925.1982.11972588
13. Hehner, E.C.R. "Epimenides, Gödel, Turing: An Eternal Gölden Twist". SN COMPUT. SCI. 1, 308 . https://doi.org/10.1007/s42979-020-00318-5
14. Kauffmam L. H. (1987) "Self-reference and recursive forms". Journal of Social and Biological Structures 10: 53-72
15. Arvanitakis A.D. Recursion, Evolution and Conscious Self. May 2021.
16. Γιάννης Ν. Μοσχοβάκης. Αναδρομή και Υπολογισιμότητα.
17. Κούστα Μαρία Νεφέλη, "Γλώσσα και Αναδρομή: Οι αυτοαναφορικοί αλγόριθμοι στην τεχνητή νοημοσύνη" Διπλωματική ΕΜΠ 2022
18. Richard Dawkins, Το εγωιστικό γονίδιο", μτφ Παναγιώτης Δεληβοριάς, Κάτοπτρο
19. Adi Livnat , Christos Papadimitriou, "Sex as an algorithm: the theory of evolution under the lens of computation" Communications of the ACM Volume 59 Issue 11 November 2016 pp 84–93 https://doi.org/10.1145/2934662
20. Thomas Kuhn, "Η δομή των επιστημονικών επαναστάσεων" Σύγχρονα Θέματα 2020
21. Ronald Fisher, "The Genetical Theory of Natural Selection" Oxford University Press 1930

22. Theodosius Dobzhansky “Genetics and the Origin of Species” Columbia University Press 1937

23. Ernst Mayr “Systematics and the Origin of Species” Harvard University Press 1942

24. Livnat, A. “Interaction-based evolution: How natural selection and nonrandom mutation work together”. Biology Direct, 8:24, 2013.

25. G Bell The Masterpiece of Nature: the Evolution and Genetics of Sexuality (Univ California Press, Berkeley, 1982).

26. Livnat, A., Papadimitriou, C., Dushoff, J. and Feldman, M. W. “A mixability theory for the role of sex in evolution.” Proceedings of the National Academy of Sciences,, 105:19803-808, 2008. DOI: 10.1073/pnas.0803596105

27. Vasylenko, L., Feldman, M. W. , Papadimitriou, C. and Livnat, A.” Sex: The power of randomization.” Theoretical Population Biology, 129:41-53, 2019.

28. Martin J Osborne “An Introduction to Game Theory” Oxford University Press 2000

29. J. Maynard Smith “ Evolution and the Theory of Games: In situations characterized by conflict of interest, the best strategy to adopt depends on what others are doing ” American Scientist Vol. 64, No. 1 (January-February 1976), pp. 41-45

30. Thomas Nagylaki “The evolution of multilocus systems under weak selection”.Genetics134(2) :627–647.

31. Crow, J.F. and Kimura, M. An introduction in Population Genetics Theory. Harper and Row, New York. 1970

32. Erick Chastain, Adi Livnat, Christos Papadimitriou, and Umesh Vazirani “Algorithms, games, and evolution” Proceedings of the National Academy of Sciences, 111:10620-23, 2014.

33. Sanjeev Arora Elad Hazan Satyen Kale “ The multiplicative weights update method: A meta-algorithm and applications” .Theory Computing 8 :121–164

34. C. H. Waddington “Genetic Assimilation of an Acquired Character” Evolution Vol. 7, No. 2 , pp. 118-126

35. Adi Livnat, Christos Papadimitriou, Aviad Rubinstein, Gregory Valiant, Andrew Wan “Satisfiability and Evolution”Source arXiv DOI:10.1109/FOCS.2014.62

36. ΠΛΑΤΩΝ “ΜΕΝΩΝ” Εκδόσεις Εστία 2016

37. Νικήτας Σταθάτος. “Αναδρομή και εξέλιξη συστημάτων τεχνητής νοημοσύνης”. Διπλωματική Εργασία. Ε.Μ.Π.