ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Συστήματα αξιοπιστίας με έμφαση στη μέθοδο Universal Generating Function.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μαρία Εμ. Τζωρτζάκη

Τριμελής επιτροπή:

Γ. Κοκολάκης (Επιβλέπων Καθηγητής)
Φ. Βόντα
Μ. Λουλάκης

Αθήνα, Οκτώβριος 2011

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Συστήματα αξιοπιστίας με έμφαση στη μέθοδο Universal Generating Function.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μαρία Εμ. Τζωρτζάκη

Επιβλέπων : Γεώργιος Κοκολάκης

Καθηγητης Ε.Μ.Π

....	....	....
Γεώργιος Κοκολάκης	Φιλία Βόντα	Μιχαήλ Λουλάκης
Καθηγητής Ε.Μ.Π	Επίκουρος Καθηγήτρια Ε.Μ.Π	Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Οκτώβριος 2011

....

Μαρία Εμ. Τζωρτζάκη

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με την αξιοπιστία και τη διαθεσιμότητα συστημάτων και ιδιαίτερα μιας ειδικής κατηγορίας συστημάτων που είναι τα *k-out-of-n*. Στόχος της διπλωματικής είναι η μελέτη διαφόρων μεθόδων αξιολόγησης της αξιοπιστίας των συστημάτων και ειδικότερα της *universal generating function* μεθόδου η οποία έχει πολύ καλή εφαρμογή στα συστήματα πολλαπλής κατάστασης. Σημαντικό πλεονέκτημα της UGF έναντι άλλων μεθόδων είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση διαφόρων ειδών συστημάτων.

Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιαστούν προσομοιώσεις για *k-out-of-n* σύστημα με εφεδρικά στοιχεία σε κατάσταση κρύα, ζεστή και καυτή και θα συγκριθούν τα αποτελέσματα για να κρίνουμε πια εφεδρική κατάσταση είναι αποτελεσματικότερη.

Λέξεις κλειδιά

Αξιοπιστία, διαθεσιμότητα, *k-out-of-n* συστήματα, universal generating function.

Abstract

This thesis deals with the reliability and availability of systems and especially with the *k-out-of-n* systems. Scope of this thesis is to study several evaluation methods of the reliability of systems, especially the *universal generating function* method used for the effective reliability evaluation of multistate systems. The main advantage of the UGF method, related to other methods, is that it can be used for solving different system types.

Specifically, simulations of *k-out-of-n* systems with standby elements in cold, warm and hot condition will be represented and the results will be compared in order to find the most effective standby condition.

Key words

Reliability, availability, *k-out-of-n* systems, universal generating function.

Περιεχόμενα

Πίνακας Σχημάτων

Πίνακας Πινάκων

1 Εισαγωγή

1.1 Συστήματα και αξιοπιστία συστημάτων

Στη βιομηχανία, η αποτυχία ενός συστήματος μπορεί να προκαλέσει μεγάλη οικονομική ζημία ή ακόμα χειρότερα, την απώλεια ανθρώπινων ζωών. Για την πρόληψη και την αποφυγή των οποιοδήποτε ζημιών χρησιμοποιείται η αξιοπιστία (***reliability***) του συστήματος, ένας όρος που θα αναφερθεί εκτενώς στην παρούσα διπλωματική. Για τη βελτίωση της αξιοπιστίας αλλά και της διαθεσιμότητας (***availability***), η οποία είναι ένα μέτρο απόδοσης του συστήματος, προσαρμόστηκαν τεχνικές άμεσης παρέμβασης τις οποίες θα αναλύσουμε παρακάτω (Li *et al.*, 2008).

Ως σύστημα ορίζεται ένα σύνολο στοιχείων (εξαρτημάτων, μονάδων) τα οποία αλληλοσυνδέονται έτσι ώστε να παράγουν κάποιο συγκεκριμένο έργο (Καρώνη, 2009). Τα στοιχεία αυτά μπορεί να είναι αλληλεπιδρώντα και/ή αλληλοεξαρτώμενα. Τα περισσότερα συστήματα έχουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά, όπως:

- Δομή, η οποία ορίζεται από τα στοιχεία και τη σύνθεσή τους.
- Συμπεριφορά, η οποία περιλαμβάνει τις εισροές (*inputs*), την επεξεργασία και τα αποτελέσματα των εισροών αυτών.
- Συνδεσιμότητα, η οποία αναφέρει τις λειτουργικές και τις διαθρωτικές σχέσεις μεταξύ των μερών του συστήματος.

Κάποια συστήματα είναι δυνατό να έχουν συγκεκριμένες λειτουργίες ή ευρύτερες δυνατότητες λειτουργιών.

Ως αξιοπιστία ενός συστήματος ορίζεται η ικανότητα του να εκτελέσει και να διατηρήσει τις λειτουργίες του σε συνηθισμένες αλλά και αντίξοες ή απροσδόκητες συνθήκες. Αξιοπιστία είναι η ιδιότητα όλου του συστήματος ή οποιουδήποτε στοιχείου να είναι ικανό να εκτελέσει το προβλεπόμενο έργο του (Levitin, 2005). Η συνάρτηση αξιοπιστίας R(t) εκφράζει την πιθανότητα η διάρκεια ζωής μιας επιλεγμένης συνιστώσας του συστήματος να υπερβαίνει το χρόνο t και δίνεται από τον τύπο:

$$R(t) = P\{T > t\} \tag{1.1}$$

και συνεπώς έχουμε

$$R(t)=\int_t^\infty f(x)\,dx=1-F(t)=1-P(T\le t) \quad (1.2)$$

όπου F(t) είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) T που αντιπροσωπεύει τη διάρκεια ζωής του συστήματος ή της συνιστώσας αυτού και t είναι η διάρκεια του απαιτούμενου χρόνου λειτουργίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αξιοπιστία όταν εφαρμόζεται για την ανάλυση βιο-ιατρικών εφαρμογών αναφέρεται ως επιβίωση.

Η μηχανική αξιοπιστία (*Reliability engineering*) εκφράζει τέσσερα βασικά στοιχεία του παραπάνω ορισμού.

- Αρχικά μπορούμε να πούμε ότι αξιοπιστία είναι μία πιθανότητα. Δηλαδή, η αποτυχία θεωρείται ένα τυχαίο φαινόμενο. Γενικά, η μηχανική αξιοπιστία ασχολείται με τη διασφάλιση συγκεκριμένης πιθανότητας επιτυχίας σε συγκεκριμένο στατιστικό επίπεδο εμπιστοσύνης.
- Η αξιοπιστία συστήματος ή μονάδων συνδέεται με ή αφορά σε προβλεπόμενη λειτουργία. Γενικά αυτό σημαίνει λειτουργία χωρίς αποτυχία. Η σωστή λειτουργία του συστήματος εξαρτάται από τη σωστή λειτουργία των εξαρτημάτων του (όχι απαραίτητα όλων). Ωστόσο, υπάρχει περίπτωση το σύστημα να αποτύχει στο στόχο του ακόμη και αν δεν αποτύχει κάποιο ή κάποια συγκεκριμένα στοιχεία του συστήματος. Επίσης, η αξιοπιστία εξαρτάται και από τις αλληλεπιδράσεις και τις εξαρτήσεις των εξαρτημάτων.
- Η αξιοπιστία αναφέρεται σε συγκεκριμένη χρονική περίοδο *t*. Στην πράξη, αυτό σημαίνει ότι το σύστημα έχει προκαθορισμένη πιθανότητα ότι θα λειτουργήσει χωρίς βλάβη τουλάχιστον για χρόνο t. Η μηχανική αξιοπιστία «διασφαλίζει» ότι τα κατασκευαστικά στοιχεία και υλικά θα πληρούν τις απαιτήσεις κατά τη διάρκεια του συγκεκριμένου χρόνου.
- Η αξιοπιστία συνδέεται ή περιορίζεται στη λειτουργία υπό όρους. Αυτός ο περιορισμός είναι αναγκαίος γιατί είναι αδύνατο να σχεδιαστεί ένα σύστημα με απεριόριστες δυνατότητες.

1.1.1 Τύποι συστημάτων

Κάθε σύστημα απαιτείται να ικανοποιεί διαφορετικό επίπεδο αξιοπιστίας. Για αυτό το λόγο υπάρχουν διάφοροι τύποι συστημάτων. Μερικούς τύπους αναφέρουμε παρακάτω, (Levitin 2005).

1. Το σειριακό σύστημα.

Η σύνδεση των στοιχείων του συστήματος σε σειρά αποτελεί μία περίπτωση κατά την οποία, η αποτυχία οποιουδήποτε ατομικού στοιχείου προκαλεί τη συνολική αποτυχία του συστήματος. Δηλαδή, ένα σειριακό σύστημα λειτουργεί μόνο όταν λειτουργούν όλα τα στοιχεία του.

2. Το παράλληλο σύστημα.

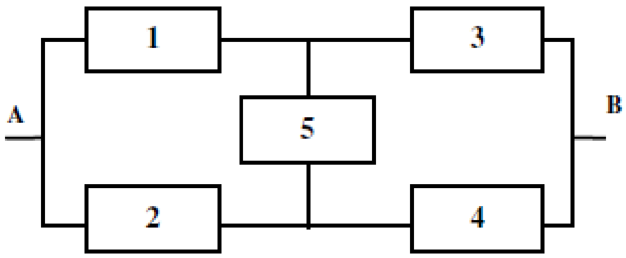
Η παράλληλη σύνδεση των στοιχείων ενός συστήματος αποτελεί την περίπτωση κατά την οποία ένα σύστημα αποτυγχάνει εάν και μόνο εάν αποτύχουν όλα τα στοιχεία του.

3. Το σύστημα *k-out-of-n*.

Για να λειτουργεί ένα *k-out-of-n* σύστημα, θα πρέπει τουλάχιστον k στοιχεία από το σύνολο n στοιχείων να λειτουργούν. Εάν $k = n$, τότε προκύπτει η περίπτωση του σειριακού συστήματος. Ενώ για την περίπτωση $k = 1$, το *k-out-of-n* σύστημα ανάγεται στην περίπτωση του παράλληλου συστήματος.

4. Το σύστημα με δομή γέφυρας.

Κάποιες φορές η αξιοπιστία δεν είναι δυνατό να περιοριστεί μόνο σε συστήματα με σειριακές και παράλληλες δομές ή το συνδυασμό αυτών. Το απλούστερο και πιο χρησιμοποιημένο σύστημα που είναι ικανό να προσπεράσει αυτό το επίπεδο είναι το σύστημα με δομή γέφυρας. Σε αυτό το σύστημα υποθέτουμε ότι τα στοιχεία 1, 3 και 2, 4 είναι στοιχεία ίδιας λειτουργικότητας και συνδέονται μεταξύ τους μέσω του στοιχείου 5 όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Δομή γέφυρας

5. Το σύστημα με δύο κατηγορίες αποτυχίας (*system with two failure modes*).

Σε αυτήν την περίπτωση, το σύστημα αποτελείται από συσκευές που μπορεί να αποτύχουν σε μία από τις δύο διαφορετικές λειτουργίες. Για παράδειγμα, τα συστήματα διακοπτών (*switching systems*) όχι μόνο ενδέχεται να αποτύχουν να κλείσουν όταν τους δίνεται η εντολή να κλείσουν, αλλά ενδέχεται επίσης να αποτύχουν να ανοίξουν όταν τους δίνεται η εντολή να ανοίξουν. Άλλα παραδείγματα τέτοιων συστημάτων είναι η βαλβίδα ροής υγρού και η ηλεκτρονική δίοδος.

6. Το σύστημα σταθμισμένης ψηφοφορίας (*weighted voting system*).

Η ψηφοφορία χρησιμοποιείται ευρέως σε συστήματα ανθρώπινης οργάνωσης, καθώς επίσης και σε συστήματα λήψης τεχνικών αποφάσεων. Ένα σύστημα σταθμισμένης ψηφοφορίας παίρνει αποφάσεις για προτάσεις βασισμένες σε αποφάσεις των *n* ανεξάρτητων μεμονωμένων μονάδων ψηφοφορίας. Οι μονάδες ψηφοφορίας μπορεί να διαφέρουν ως προς το υλικό ή το λογισμικό που χρησιμοποιείται ή και από τις διαθέσιμες πληροφορίες. Κάθε πρόταση είναι “a priori” σωστή ή λάθος, αλλά αυτή η πληροφορία δεν είναι άμεσα διαθέσιμη στις μονάδες. Οι μονάδες ενδέχεται να υποπέσουν στα τρία ακόλουθα σφάλματα:

- Στην αποδοχή μιας πρότασης η οποία θα πρέπει να απορριφθεί.
- Στην απόρριψη μιας πρότασης η οποία θα πρέπει να αποδεχθεί.
- Στην αποχή από την ψηφοφορία.

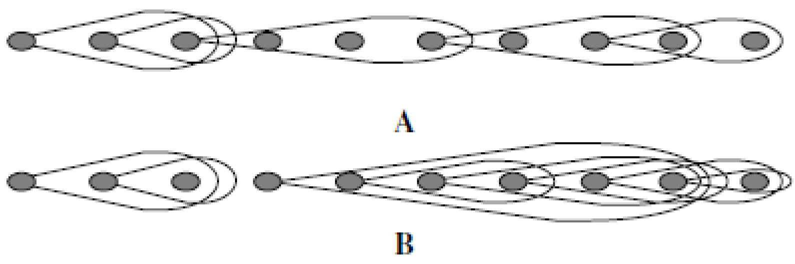
Η παραπάνω διαδικασία είναι δυνατό να μοντελοποιηθεί θεωρώντας την είσοδο του συστήματος είτε 1 είτε 0 (εάν η πρόταση θα πρέπει να αποδεχθεί ή εάν η πρόταση θα πρέπει να απορριφθεί αντίστοιχα). Η τιμή αυτή τροφοδοτείται στις μονάδες ψηφοφορίας και στη συνέχεια κάθε μονάδα παρουσιάζει την απόφαση της η οποία ενδέχεται να είναι 0, 1 ή *x* (στην περίπτωση της αποχής). Η απόφαση που πάρθηκε από κάθε μονάδα είναι λάθος εάν δεν είναι ίση με την είσοδο. Η περίπτωση της αποχής θεωρείται λανθασμένη ανεξάρτητα της εισόδου.

7. Το σύστημα πολλαπλής κατάστασης «συρόμενου παραθύρου» (multi-state sliding window system).

Το μοντέλο συστήματος συρόμενου παραθύρου είναι μία πολλαπλής κατάστασης γενίκευση του δυαδικού διαδοχικού *k-out-of-r-from-n* συστήματος, το οποίο έχει *n* διατεταγμένα στοιχεία και αποτυγχάνει εάν τουλάχιστον *k* από οποιαδήποτε *r* διαδοχικά στοιχεία αποτύχουν.

8. Το σύστημα πολλαπλών καταστάσεων με διαδοχική σύνδεση μονάδων (multi-state consecutively connected systems).

Τα γραμμικά συστήματα διαδοχικών συνδέσεων πολλαπλής κατάστασης είναι μία γενίκευση του δυαδικού διαδοχικού *k-out-of-n* συστήματος, το οποίο έχει *n* διατεταγμένα στοιχεία και αποτυγχάνει εάν τουλάχιστον *k* διαδοχικά στοιχεία αποτύχουν. Στο μοντέλο πολλαπλών καταστάσεων, τα στοιχεία είναι σε διαφορετικές καταστάσεις. Όταν ένα στοιχείο βρίσκεται στην *i* κατάσταση, τότε είναι σε θέση να παρέχει σύνδεση με *i* ακόλουθα στοιχεία, όπου $i \leq n$. Αυτό το σύστημα αποτυγχάνει εάν το πρώτο και το τελευταίο στοιχείο δεν είναι συνδεμένα. Στο *σχήμα 1.2* απεικονίζεται ένα τέτοιο σύστημα σε καταστάσεις λειτουργίας (A) και αποτυχίας (B).

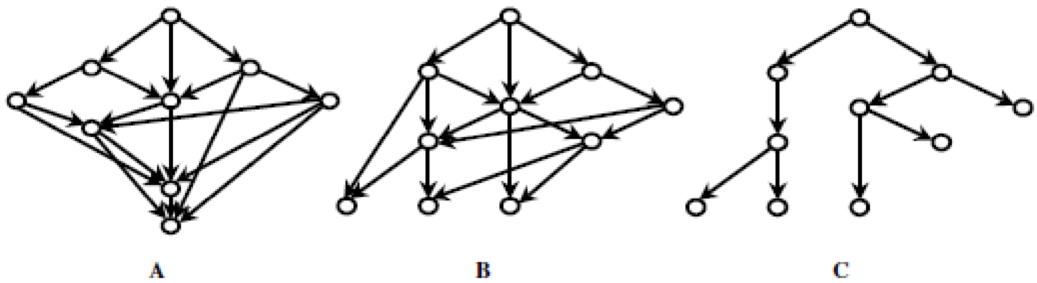


Σχήμα 1.2: Σύστημα πολλαπλών καταστάσεων με διαδοχική σύνδεση μονάδων, σε καταστάσεις λειτουργίας (Α) ή αποτυχίας (Β)

9. <u>Το σύστημα δικτύων πολλαπλής κατάστασης (multi-state networks).</u>

Τα δίκτυα είναι συστήματα που αποτελούνται από ένα σύνολο κορυφών (κόμβων) και ένα σύνολο ακμών που συνδέουν αυτές τις κορυφές. Υπάρχουν δίκτυα με κατεύθυνση ή χωρίς. Στα μη κατευθυνόμενα δίκτυα οι ακμές απλώς συνδέουν τις κορυφές χωρίς να είναι απαραίτητη κάποια πληροφορία για την κατεύθυνση. Ενώ, στα κατευθυνόμενα δίκτυα οι ακμές είναι διατεταγμένα ζεύγη κορυφών. Δηλαδή, μπορούμε να μεταβούμε από τη μια κορυφή στην άλλη με συγκεκριμένη κατεύθυνση αλλά όχι αντίστροφα, μέσω της ακμής.

Ένα παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι τα <u>μη-κυκλικά δίκτυα</u> (*acyclic networks*) στα οποία κανένα μονοπάτι δεν τερματίζει στην κορυφή από την οποία ξεκίνησε. Μονοπάτι (path) είναι μια λίστα από κορυφές όπου κάθε κορυφή έχει μια ακμή που ενώνει αυτή με μια άλλη. Ένα τέτοιο δίκτυο μπορεί να έχει ένα ενιαίο τερματικό κόμβο (A), αρκετούς τερματικούς κόμβους (B), αλλά μπορεί να είναι δομημένο και με μορφή δέντρου (C) όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1.3: Παραδείγματα μη κυκλικών δικτύων

10. <u>Το σύστημα ανοχής σφάλματος λογισμικού (fault-tolerant software systems).</u>

Αποτυχίες λογισμικού προκαλούνται από λάθη σε διάφορες φάσεις ανάπτυξης του προγράμματος. Όταν η αξιοπιστία του λογισμικού είναι ζωτικής σημασίας , ειδικές τεχνικές προγραμματισμού χρησιμοποιούνται για να επιτευχθεί η ανεκτικότητα σφάλματος. Οι δύο πιο γνωστές τεχνικές είναι η n-έκδοση προγραμματισμού (*n-version programming NVP*) και η ανάκληση μπλοκ σχήματος (*recovery block scheme RBS*), (Levitin *et al.*, 2009).

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε επίσης, ότι τα συστήματα χωρίζονται σε επισκευάσιμα και σε μη-επισκευάσιμα. Συστήματα όπως τα παραπάνω εμφανίζονται στη βιομηχανία παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, στην αεροναυπηγική, στην εξερεύνηση του διαστήματος και των δορυφορικών συστημάτων, σε τηλεπικοινωνιακά συστήματα, σε συστήματα κλωστοϋφαντουργικών κατασκευών, σε συστήματα ανάκτησης άνθρακα που χρησιμοποιείται σε εργοστάσια λιπασμάτων, σε συστήματα ανοχής σφάλματος (*fault tolerant systems*) που χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές πληροφορικής, καθώς επίσης σε συστήματα διανομής ηλεκτρικής ενέργειας. Ειδικές περιπτώσεις είναι τα συστήματα που λειτουργούν για μία μόνο φορά όπως είναι οι μπαταρίες, οι αερόσακοι και τα βλήματα (Levitin *et al.*, 2009).

Σε ένα πρόβλημα ανάλυσης αξιοπιστίας συστήματος θεωρούμε τις εξής δύο σχέσεις λειτουργίας: τη σχέση μεταξύ των στοιχείων του συστήματος και τη λειτουργία του συστήματος στο σύνολό του. Ένα στοιχείο είναι μια οντότητα που δεν υποδιαιρείται περεταίρω. Χωρίς όμως αυτό να σημαίνει πως ένα στοιχείο δε μπορεί να είναι κατασκευασμένο από επιμέρους τμήματα ή μέλη (parts). Τούτο σημαίνει ότι, ένα στοιχείο σε μια δεδομένη μελέτη αξιοπιστίας, θεωρείται ως αυτοδύναμη μονάδα και δεν αναλύεται ως προς τη λειτουργία των συστατικών του ή των επιμέρους τμημάτων του (Levitin, 2005).

1.1.2 Σημαντικά μέτρα για την αξιολόγηση της αξιοπιστίας και της διαθεσιμότητας.

Τα περισσότερα συστήματα είναι σχεδιασμένα να εκτελούν τα καθήκοντά τους σε ένα δεδομένο περιβάλλον. Ορισμένα συστήματα μπορούν να εκτελέσουν το έργο τους σύμφωνα με κάποια συγκεκριμένα επίπεδα αποδοτικότητας, γνωστά ως ποσοστό απόδοσης (*performance rate*). Ένα σύστημα το οποίο μπορεί να έχει πεπερασμένο αριθμό ποσοστού απόδοσης, ονομάζεται Σύστημα Πολλαπλής Κατάστασης (*Multi – State System*). Ένα τέτοιο σύστημα είναι δυνατό να συντεθεί από στοιχεία, τα οποία μπορεί να είναι και αυτά Πολλαπλής Κατάστασης (*multistate*). Η πιο απλή περίπτωση Συστημάτων Πολλαπλής Κατάστασης είναι τα δυαδικά συστήματα (*binary systems*) ανάλυσης αξιοπιστίας στα οποία κάθε στοιχείο τους, καθώς και ολόκληρο το σύστημα μπορεί να είναι σε δύο πιθανές καταστάσεις όπως κατάσταση τέλειας λειτουργίας (*perfect functioning / working)* ή πλήρους αποτυχίας (*complete failure*). Τα επίπεδα αποδοτικότητας του συστήματος μπορούν να εκφραστούν και με το επίπεδο απόδοσης (*performance level*) το οποίο αναφέρει τον αριθμό των στοιχείων που λειτουργούν σε μία δεδομένη χρονική στιγμή (Levitin, 2005).

Σημαντικός όρος για την αξιοπιστία συστημάτων είναι η διαθεσιμότητα. Η διαθεσιμότητα είναι ένα μέτρο απόδοσης (*performance measure*) που αντανακλά την ικανότητα ενός συστήματος παραγωγής (*manufacturing system*) να ικανοποιεί τις απαιτήσεις ζήτησης. Ένα σύστημα παραγωγής, μπορεί να έχει πεπερασμένο αριθμό επιπέδων απόδοσης. Συνεπώς, ανήκει στην κατηγορία Συστημάτων Πολλαπλής Κατάστασης. Οι καταστάσεις στις οποίες είναι πιθανό να βρίσκεται είναι: λειτουργία, μη-λειτουργία, ρελαντί και υπό επιδιόρθωση (Youssef, 2006). Η σταθερής κατάστασης διαθεσιμότητα (*steady-state availability*) είναι και αυτή ένα μέτρο απόδοσης και μας δίνει την πιθανότητα κατά την οποία ένα σύστημα κατά μέσο όρο λειτουργεί ικανοποιητικά σε εύλογο χρονικό διάστημα. Η συνάρτηση διαθεσιμότητας είναι γενικά δύσκολο να υπολογιστεί, αλλά η σταθερής κατάστασης διαθεσιμότητα χρησιμοποιείται συχνά (Levitin, 2005).

Ενώ η αξιοπιστία αντανακλά μόνο τις εσωτερικές ιδιότητες του συστήματος, η διαθεσιμότητα αντανακλά την ικανότητα του συστήματος να λειτουργήσει χωρίς αποτυχίες αλλά και την ικανότητα του περιβάλλοντος του συστήματος να επαναφέρει τα αποτυχημένα στοιχεία σε κατάσταση λειτουργίας. Εάν ένα συγκεκριμένο σύστημα λειτουργεί σε διαφορετικά περιβάλλοντα συντήρησης, θα έχει διαφορετική διαθεσιμότητα για κάθε περιβάλλον.

Μέθοδοι αξιολόγησης της σχετικής επίδρασης της διαθεσιμότητας ή της αξιοπιστίας των στοιχείων στη διαθεσιμότητα όλου του συστήματος παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες για τη σημαντικότητα αυτών των εξαρτημάτων. Τέτοιες αξιολογήσεις είναι ένα σημείο κλειδί για τη συμπεριφορά των συστημάτων και τον εντοπισμό του πιο σημαντικού εξαρτήματος. Οι αξιολογήσεις αυτές επηρεάζονται από τη διαθεσιμότητα καθώς και τη διάταξη των επιμέρους στοιχείων του συστήματος. Είναι ένα σημαντικό εργαλείο που επιτρέπει στον αναλυτή να βρει την αδυναμία στο σχεδιασμό του συστήματος και να προτείνει τροποποιήσεις για την αναβάθμιση του. Για την αξιολόγηση της σταθερής κατάστασης διαθεσιμότητας του συστήματος, θα πρέπει να ληφθούν υπ’ όψιν η αξιοπιστία κάθε εξαρτήματος όπως επίσης και τα ξεχωριστά επίπεδα επιδόσεων για τους διαφορετικούς τύπους επιδόσεων εξόδου (*different types of output performance*). Βελτίωση στην αξιοπιστία του στοιχείου με τη μεγαλύτερη βαρύτητα, προκαλεί μεγαλύτερη βελτίωση στην αξιοπιστία όλου του συστήματος. Πρώτος ο Birnbaum (1969) παρουσίασε το ποσοστό κατά το οποίο η αξιοπιστία ενός συστήματος αλλάζει σε σχέση με την αλλαγή αξιοπιστίας κάποιου συγκεκριμένου στοιχείου (Levitin, 1999).

Οι απαιτήσεις αξιοπιστίας προσδιορίζονται από τα μέτρα διαθεσιμότητας (*availability measures*).

- Ένα από τα σημαντικότερα μέτρα είναι η σταθερής κατάστασης διαθεσιμότητα (*steady-state availability*) (A), που αναφέραμε και παραπάνω.
- Άλλο ένα σημαντικό μέτρο είναι η σταθερής κατάστασης συχνότητα αποτυχίας (*steady-state failure frequency*), η οποία εκφράζει τον αριθμό των αποτυχιών ανά μονάδα χρόνου καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο και συμβολίζεται με (ω). Η σταθερής κατάστασης συχνότητα αποτυχίας είναι

ισοδύναμη με τη σταθερής κατάστασης συχνότητα επισκευής (*steady-state repair frequency*).

- Ακόμα ένα μέτρο είναι ο μέσος χρόνος κύκλου αποτυχίας-επισκευής (*mean failure-repair cycle time*), που ονομάζεται αλλιώς μέσος χρόνος κύκλου (*mean cycle time*) (MCT). Αυτό το μέτρο είναι ισοδύναμο με το μέσο χρόνο ανάμεσα στις αποτυχίες/βλάβες (*mean time between failures, MTBF*). Η αξιοπιστία αυξάνεται όσο ο MTBF αυξάνεται.
- Επίσης υπάρχει ο μέσος χρόνος λειτουργίας κατά τη διάρκεια ενός κύκλου αποτυχίας-επισκευής (*mean working time during a failure-repair cycle*),που ονομάζεται και μέσος χρόνος λειτουργίας (*mean-up time, MUT*) ή μέσος χρόνος έως την αποτυχία (*mean time to failure, MTTF*).
- Ένα επιπλέον μέτρο είναι ο μέσος χρόνος αδράνειας κατά τη διάρκεια αποτυχίας-επισκευής (*mean down time during a failure-repair cycle*) το οποίο ονομάζεται και μέσος χρόνος κατά τον οποίο ένα στοιχείο βρίσκεται σε αδράνεια λόγω αποτυχίας ή αδυναμίας λειτουργίας (*mean down time, MDT*) ή αλλιώς μέσος χρόνος για την κατασκευή (mean time to repair, MTTR).
- Τελευταίο, αλλά όχι λιγότερο σημαντικότερο μέτρο είναι ο αναμενόμενος αριθμός αποτυχιών/επιδιορθώσεων (*expected number of system failures/repairs, NSF / NSR*) κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου διαστήματος (*T*).

Όλα τα παραπάνω μέτρα είναι δυνατό να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας μόνο τη σταθερής κατάστασης διαθεσιμότητα (*A*) και τη σταθερής κατάστασης συχνότητα αποτυχίας (*ω*).

$$\begin{aligned} MCT &= MTBF = \frac{1}{\omega} \\ MUT &= MTTF = \frac{\mathrm{A}}{\omega} \\ MDT &= MTTR = \frac{U}{\omega} \\ NSF &= NSR = \frac{\mathrm{T}}{\omega} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Διαφορετικό μέτρο αξιοπιστίας υπάρχει για την ειδική περίπτωση συστημάτων τα οποία λειτουργούν μόνο για μία φορά. Το μέτρο αυτό είναι η πιθανότητα αποτυχίας ανταπόκρισης με τη ζήτηση *(probability of failure on demand*) (PFD). Αυτό το μέτρο προέρχεται από το ποσοστό αποτυχίας (*failure rate*) και το χρόνο της «αποστολής» (*mission time*) για τα μη-επισκευάσιμα συστήματα. Για ένα δεδομένο σύστημα, το μέτρο αυτό μπορεί να μην είναι μοναδικό, καθώς αυτό εξαρτάται από το είδος της ζήτησης. Σε όλες τις περιπτώσεις, οι παράμετροι αξιοπιστίας προσδιορίζονται με κατάλληλα στατιστικά διαστήματα εμπιστοσύνης (Amari, 2008).

Ο συνδυασμός του μέτρου διαθεσιμότητας καθώς και του επιπέδου εμπιστοσύνης (*confidence level*) επηρεάζει σημαντικά το κόστος ανάπτυξης αλλά και του κινδύνου, τόσο για τον πελάτη, όσο και για τον παραγωγό. Για αυτό το λόγο, θα πρέπει να γίνει η καλύτερη δυνατή επιλογή του συνδυασμού των απαιτήσεων.

1.2 Εφεδρικά στοιχεία (Redundancy)

Για την επίτευξη ενός επιθυμητού επιπέδου απόδοσης του συστήματος, χωρίς απώλειες αλλά και με το μικρότερο δυνατό κόστος, χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές άμεσης επέμβασης. Οι τεχνικές άμεσης επέμβασης αφορούν στον τρόπο διαχείρισης των εφεδρικών στοιχείων με σκοπό την άμεση αντιμετώπιση τυχούσης αποτυχίας του συστήματος. Οι τεχνικές αυτές έχουν ως αποτέλεσμα τη βελτίωση της αξιοπιστίας και της διαθεσιμότητας του συστήματος. Για να υπάρξει επιθυμητή αυτή βελτίωση συμπεριλαμβάνονται εφεδρικά/πρόσθετα στοιχεία (*redundant elements*) (Li *et al.*, 2008).

Τα εφεδρικά στοιχεία είναι σημαντικά για τη βελτίωση της αξιοπιστίας. Είναι καθολικά αποδεκτό ότι συστήματα κρίσιμης ασφάλειας (*safety critical system*) και συστήματα ανοχής σφάλματος (*fault tolerant system*) δε μπορούν να επιτύχουν την επιθυμητή αξιοπιστία χωρίς την εφαρμογή εφεδρικών στοιχείων. Υπάρχουν δύο βασικά είδη εφεδρικών στοιχείων: 1. τα ενεργά εφεδρικά στοιχεία (active redundancy) και 2. τα εφεδρικά στοιχεία που βρίσκονται σε αναμονή (standby redundancy).

Στην περίπτωση των ενεργών εφεδρικών στοιχείων, όλα τα εφεδρικά στοιχεία που δεν έχουν αποτύχει είναι σε διαρκή λειτουργία. Είναι σε λειτουργία ακόμα και όταν το σύστημα χρειάζεται μόνο μερικά από αυτά για την επιτυχή λειτουργία του. Τα ενεργά εφεδρικά στοιχεία είναι απαραίτητα όταν δεν επιτρέπεται η διακοπή για την εισαγωγή ενός νέου εφεδρικού στοιχείου μετά από βλάβη κάποιου άλλου στοιχείου.

Στην περίπτωση των εφεδρικών στοιχείων που βρίσκονται σε αναμονή, τα στοιχεία αυτά τίθενται σε λειτουργία μόνο όταν υπάρχει έλλειψη στοιχείων σε λειτουργία, ως αποτέλεσμα βλαβών. Με άλλα λόγια, τα σε αναμονή στοιχεία τίθενται σε λειτουργία μόνο όταν αποτύχουν στοιχεία τα οποία είναι ήδη σε λειτουργία. Όταν τα εφεδρικά στοιχεία είναι σε κατάσταση αναμονής (ανενεργή κατάσταση), δεν εκτίθενται πλήρως σε λειτουργικές/επιχειρησιακές πιέσεις (*operational stresses*). Επομένως, στις περισσότερες περιπτώσεις, τα ποσοστά αποτυχίας των σε αναμονή στοιχείων (*standby failure rate*) είναι μικρότερα από τα ποσοστά αποτυχίας των στοιχείων σε λειτουργία (*operational failure rate*). Συνεπώς, όταν είναι εφικτό, τα σε αναμονή εφεδρικά στοιχεία είναι προτιμότερα από τα ενεργά εφεδρικά στοιχεία επειδή βελτιώνουν τη ζωή του συστήματος αποτελεσματικότερα.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η κατάσταση στην οποία βρίσκονται τα εφεδρικά στοιχεία μπορεί να είναι: κρύα (cold), ζεστή (warm) και καυτή (hot). Όταν τα εφεδρικά στοιχεία είναι σε κατάσταση *cold standby* τότε είναι ανενεργά κι έχουν μηδενικό ποσοστό αποτυχίας. Στην *hot standby* κατάσταση, τα εφεδρικά στοιχεία του συστήματος έχουν το ίδιο ποσοστό αποτυχίας με τα ενεργά (*active*) στοιχεία. Συνεπώς, όταν δεν υπάρχουν καθυστερήσεις διακοπής ή αποτυχίας στοιχείων, τότε τα μαθηματικά μοντέλα για τις ρυθμίσεις των *hot standby* είναι ισοδύναμα με τα μοντέλα των ενεργών εφεδρικών στοιχείων. Τέλος, για τη *warm standby* κατάσταση προκύπτει ότι το ποσοστό αποτυχίας των ανενεργών στοιχείων βρίσκεται ανάμεσα στα ποσοστά αποτυχίας των cold και hot, συμπεριλαμβανομένων και των ακραίων αυτών καταστάσεων. Επομένως, τα *hot* όπως επίσης και τα *cold standby* στοιχεία είναι ειδικές περιπτώσεις των warm standby (Levitin *et al*., 2009).

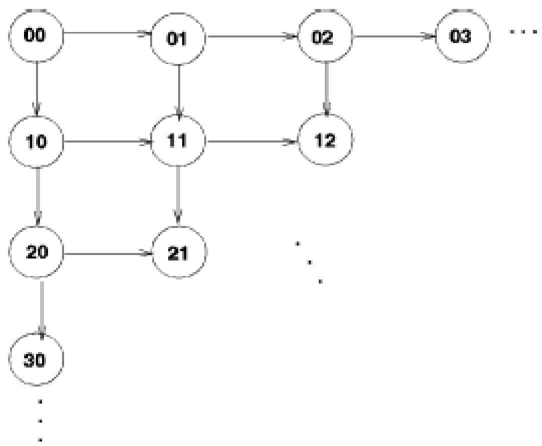
Τα συστήματα τα οποία έχουν εφεδρικά στοιχεία σε αναμονή ταξινομούνται σε αυτά που έχουν επισκευάσιμα και σε αυτά που έχουν μη-επισκευάσιμα στοιχεία. Όταν έχουν επισκευάσιμα στοιχεία τότε η αξιοπιστία τους είναι δυνατό να βελτιωθεί. Σε κάποια συστήματα, είναι δυνατό να υπάρξει προληπτική ή διορθωτική συντήρηση των στοιχείων. Η διορθωτική συντήρηση εφαρμόζεται μετά την αποτυχία κάποιου στοιχείου. Εάν όμως η συντήρηση γίνει πριν την αποτυχία κάποιου στοιχείου, τότε η μονάδα υποβάλλεται σε προληπτική συντήρηση. Αυτό συμβαίνει στις προγραμματισμένες προληπτικές εργασίες καθώς και στη συντήρηση που πραγματοποιείται ως αποτέλεσμα της επιθεώρησης (Yearout et al., 1986).

Το πρόβλημα συνολικής ελαχιστοποίησης κόστους-επένδυσης, που υπόκεινται σε περιορισμούς αξιοπιστίας/διαθεσιμότητας, είναι γνωστό σαν πρόβλημα βελτιστοποίησης πλεονασμού. Απευθύνεται σε πολλά ερευνητικά έργα, όπως για παράδειγμα όταν η αξιοπιστία θεωρείται δυαδικής κατάστασης (Levitin *et al*., 1998).

1.2.1 Διαδικασία υπολογισμού επιπέδου επίδοσης

Επίπεδο επίδοσης (*performance level*) ενός συστήματος ορίζεται ως ο αριθμός των στοιχείων που είναι σε λειτουργία κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Για να είναι ένα σύστημα στο υψηλότερο επίπεδο επίδοσης, θα πρέπει ο αριθμός όλων των στοιχείων που έχει αντικατασταθεί εξ’ αιτίας κάποιας αποτυχίας να είναι μικρότερος ή ίσος από m, όπου m είναι ο αριθμός των στοιχείων που αποτελούν τα εφεδρικά στοιχεία, ενώ ο αριθμός όλων των στοιχείων του συστήματος είναι $n+m$. Το συγκεκριμένο σύστημα λειτουργεί αρχικά με n στοιχεία. Εάν αποτύχει οποιοδήποτε από αυτά τα n στοιχεία, τότε αυτό θα αντικατασταθεί με ένα από τα m εφεδρικά στοιχεία.

Ως ένα παράδειγμα υπολογισμού του επιπέδου επίδοσης, θεωρούμε ένα σύστημα δύο μονάδων το οποίο έχει ένα άπειρο αριθμό εφεδρικών στοιχείων. Στο παράδειγμα αυτό έχουμε δύο κατηγορίες εφεδρικών στοιχείων, τα καθολικά εφεδρικά (*global spare*) και τα τοπικά εφεδρικά (*local spare*) στοιχεία. Ένα καθολικό εφεδρικό στοιχείο μπορεί να αντικαταστήσει οποιοδήποτε άλλο στοιχείο, ενώ ένα τοπικό εφεδρικό στοιχείο μπορεί να αντικαταστήσει μόνο μία ειδική κατηγορία στοιχείων σε ένα σύστημα. Κάθε κατάσταση του συστήματος μπορεί να καθοριστεί από τις τιμές των δύο μη-αρνητικών ακέραιων τυχαίων μεταβλητών X_1 και X_2, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των αντικαταστάσεων που έχουν γίνει στις αντίστοιχες μονάδες 1 και 2 κατά τη διάρκεια χρόνου *t*. Έτσι έχουμε την κατάσταση (00) (δηλαδή $X_1 = 0$ και $X_2 = 0$) που σημαίνει ότι σε καμία μονάδα δεν έγινε αντικατάσταση. Ενώ, η κατάσταση (12) (δηλαδή $X_1 = 1$ και $X_2 = 2$ υποδηλώνει ότι στη μονάδα 1 έγινε μία αντικατάσταση και στη μονάδα 2 έγιναν δύο αντικαταστάσεις. Το σύστημα αυτό απεικονίζεται στο *σχήμα 1.4* που ακολουθεί.



Σχήμα 1.4: Χώρος καταστάσεων συστήματος δύο μονάδων

Γενικότερα, εάν θεωρήσουμε ένα σύστημα *n*-μονάδων, τότε ο χώρος καταστάσεων γίνεται *n*-διάστατος. Κάθε διάσταση αντιπροσωπεύει τη διαδικασία αντικατάστασης μίας μονάδας. Κάθε διαδικασία αντικατάστασης αντιπροσωπεύεται από την τυχαία μεταβλητή X_i με $1 \le i \le n$. Η τυχαία μεταβλητή X_i παίρνει μη-αρνητικές ακέραιες τιμές. Οι διαδικασίες αντικατάστασης, δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες. Μια κατάσταση ενός συστήματος *n*-μονάδων, συμβολίζεται με $\left(a_1 a_2 ... a_n\right)$ και καθορίζεται από τις τιμές των *n*-ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών X_i. Η πιθανότητα κατά την οποία το σύστημα είναι σε αυτήν την κατάσταση είναι:

$$\prod_{i=1}^{n} P\left\{X_i = a_i\right\} \tag{1.4}$$

Συμβολίζουμε με p_{a_i} την πιθανότητα $P\{X_i = a_i\}$. Οι τιμές των a_i, $0 \le a_i \le m$ μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση

$$F^{(a_i)}(t) - F^{(a_i+1)}(t). \tag{1.5}$$

Το επίπεδο επίδοσης για μία συγκεκριμένη κατάσταση εξαρτάται από το συνολικό αριθμό των αντικαταστάσεων που έχουν συμβεί καθώς και από τη σειρά εμφάνισής τους. Καταστάσεις στις οποίες ο συνολικός αριθμός των αντικαταστάσεων δεν είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των καθολικών εφεδρικών στοιχείων βρίσκονται στο υψηλότερο επίπεδο επίδοσης. Άλλες καταστάσεις είναι δυνατό να έχουν ένα υποβαθμισμένο επίπεδο επιδόσεων ή ακόμα και να είναι αποτυχημένες. Δηλαδή, είναι πιθανό να έχουμε επίπεδο επίδοσης ίσο με μηδέν. Για παράδειγμα στο προηγούμενο σχήμα, εάν είναι διαθέσιμο μόνο ένα πλεονάζον στοιχείο ($m=1$), τότε οι καταστάσεις (00), (01), (10) βρίσκονται στο υψηλότερο επίπεδο επίδοσης και όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις είναι είτε σε υποβαθμισμένο επίπεδο επίδοσης, είτε αντιστοιχούν σε αποτυχημένες καταστάσεις.

Η πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα στο υψηλότερο επίπεδο επίδοσης δίνεται από το άθροισμα πιθανοτήτων των καταστάσεων με την ιδιότητα ότι ο συνολικός αριθμός των αντικαταστάσεων είναι μικρότερος από τον αριθμό των εφεδρικών στοιχείων. Δηλαδή, εάν η κατάσταση $(a_1 a_2 ... a_n)$ είναι στο επίπεδο υψηλότερης επίδοσης, τότε έχει την ιδιότητα:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \le m \tag{1.6}$$

και η πιθανότητα κατά την οποία τα σύστημα είναι σε αυτήν την κατάσταση είναι:

$$\prod_{i=1}^{n} p_{a_i} \tag{1.7}$$

Στην περίπτωση του συστήματος δύο μονάδων που αναλύσαμε παραπάνω οι καταστάσεις κατά τις οποίες το σύστημα είναι στο υψηλότερο επίπεδο επίδοσης, είναι οι πρώτες $m+1$ καταστάσεις της πρώτης γραμμής από (00) έως ($0m$), οι πρώτες m καταστάσεις της δεύτερης γραμμής,…, μέχρι την πρώτη κατάσταση στην γραμμή ($m+1$), η οποία είναι η κατάσταση ($m0$). Έτσι, η πιθανότητα ότι το παραπάνω σύστημα δύο μονάδων είναι στο υψηλότερο επίπεδο απόδοσης είναι η εξής:

$$\sum_{a_1=0}^{m}\sum_{a_2=0}^{m-a_1} p_{a_1}p_{a_2} =$$
$$p_0p_0 + p_0p_1 + p_0p_2 + p_0p_3 + ... + p_0p_m + \qquad (1.8)$$
$$p_1p_0 + p_1p_1 + p_1p_2 + p_1p_3 + ... + p_1p_{m-1}$$
$$+ ... + p_mp_0$$

Στο παραπάνω άθροισμα υπάρχουν $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ όροι και η πολυπλοκότητα υπολογισμού της πιθανότητας υψηλότερου επιπέδου απόδοσης από την άμεση αξιολόγηση της σχέσης (1.8) είναι $O(m^2)$. Γενικότερα, για ένα σύστημα n-μονάδων υπάρχουν $\binom{n+m}{m}$όροι, όπου $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}$. Δεδομένου ότι αυτός ο αριθμός είναι σε εκθετική μορφή ως προς *n*, *m* ή (*n*+*m*), η άμεση αξιολόγηση της πιθανότητας υψηλότερου επιπέδου απόδοσης, απαιτεί εκθετικής μορφής χρόνο (Yin *et al*., 2000).

1.3 Συστήματα k-out-of-n

Τα *k-out-of-n* συστήματα αξιοπιστίας είναι από τα πιο δημοφιλή και τα πιο ευρέως διαδεδομένα σε πρακτικές εφαρμογές. Αυτά τα συστήματα έχουν μελετηθεί εκτενώς στο πλαίσιο του υπολογισμού αξιοπιστίας, της βελτιστοποίησης συστημάτων, σε κοινά αίτια αποτυχιών (*common cause failures*), όπως και της επισκευής εγκατάστασης για τη διόρθωση των αποτυχημένων στοιχείων. Ακόμα, έχουν γίνει μελέτες για την εφαρμογή τους σε περιπτώσεις όπου τα εφεδρικά στοιχεία είναι μέγιστης σημασίας. Τα εφεδρικά στοιχεία είναι απαραίτητα για την παράταση της λειτουργίας του συστήματος, αλλά και για την επίτευξη μιας ορισμένης αξιοπιστίας (Chakravarthy, 2006). Τα εφεδρικά στοιχεία εισήχθηκαν για πρώτη φορά από τους Birnbaum *et al*., (1961) στα *k-out-of-n* συστήματα. Τα συστήματα αυτά, χωρίζονται σε αυτά που έχουν ενεργά εφεδρικά στοιχεία και σε αυτά που έχουν εφεδρικά στοιχεία σε αναμονή.

Αν συγκρίνουμε συστήματα με δομή άμεσης επέμβασης (*standby*), με τη δομή των συνήθη συστημάτων, τότε οδηγούμαστε στα εξής αποτελέσματα:

- Ο μέσος χρόνος έως την αποτυχία των συστημάτων αναμονής είναι μεγαλύτερος από αυτόν των συνήθη συστημάτων.
- Στα συνήθη συστήματα με *n* στοιχεία, απαιτείται η επίλυση συστήματος 2^n διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού, ενώ στα συστήματα με δομή αναμονής, χρειαζόμαστε το πολύ $2^{n-2}+1$, που είναι λιγότερες από αυτές των συνήθη συστημάτων (Azaron *et al*., 2004).

Ένα σύστημα *k-out-of-n* αποτελείται από *n* ανεξάρτητα στοιχεία σε δυαδική μορφή τα οποία μπορούν να εκπληρώσουν την αποστολή τους εάν και μόνο εάν τουλάχιστον *k* από αυτά είναι σε κατάσταση λειτουργίας. Το σύστημα αποτυγχάνει εάν *n-k+1* ή περισσότερα στοιχεία αποτύχουν.

Τα *k-out-of-n* συστήματα χρησιμοποιούνται ευρέως σε διάφορες τεχνικές εφαρμογές. Για παράδειγμα, ένα αεροπλάνο μπορεί να σωθεί εάν δεν καταστραφούν περισσότερες από δύο από τις τέσσερις μηχανές του. Ένα ακόμα παράδειγμα είναι ένα σύστημα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας το οποίο μπορεί να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις ζήτησης όταν τουλάχιστον τρείς από τις πέντε γεννήτριές του λειτουργούν (Levitin, 2005).

Δύο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις του *k-out-of-n* συστήματος είναι τα συστήματα διαδοχικών συνδέσεων και η γενίκευση αυτών, τα συστήματα διαδοχικών συνδέσεων πολλαπλής κατάστασης οι οποίες έχουν αναφερθεί και παραπάνω.

Τα συστήματα διαδοχικών συνδέσεων εισήχθησαν για πρώτη φορά από τον Kontoleon (1980) και έχουν χρησιμοποιηθεί στη μοντελοποίηση τηλεπικοινωνιών, σε αγωγούς πετρελαίου, σε επιταχυντές, σε δίκτυα δακτυλίων υπολογιστών και σε σταθμούς αναμετάδοσης. Ένα σύστημα διαδοχικών συνδέσεων αποτελείται από *n* στοιχεία διατεταγμένα σε μια γραμμή ή σε ένα κύκλο. Κάθε στοιχείο ενός τέτοιου συστήματος ενδέχεται να είναι σε μία από τις δύο πιθανές καταστάσεις, λειτουργίας (up/working) ή μη-λειτουργίας (down/failed). Το σύστημα αποτυγχάνει το στόχο του εάν και μόνο εάν αποτύχουν τουλάχιστον *k* διαδοχικά στοιχεία (Kim, 2000).

Στη δεύτερη περίπτωση, δηλαδή στα συστήματα διαδοχικών συνδέσεων πολλαπλής κατάστασης, το σύστημα αλλά και τα στοιχεία του είναι δυνατό να βρεθούν σε περισσότερες από δύο καταστάσεις. Δηλαδή, ενδέχεται να λειτουργούν κανονικά, να λειτουργούν μερικώς ή να αποτύχουν. Ένα τέτοιο μοντέλο παρέχει μεγαλύτερη ευελιξία για τη μοντελοποίηση των συνθηκών του εξοπλισμού (Huang *et al.*, 2000).

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα αναλύσουμε τα επισκευάσιμα *k-out-of-n* συστήματα. Θα γίνει η χρήση των παρακάτω συμβολισμών:

- n : αριθμός των στοιχείων του συστήματος
- k : ελάχιστος αριθμός των στοιχείων που πρέπει να λειτουργούν, ώστε να λειτουργεί το *k-out-of-n* σύστημα.
- p_i : αξιοπιστία του στοιχείου *i*, όπου $i = 1, 2, ..., n$
- p : αξιοπιστία κάθε στοιχείου, όταν όλα τα στοιχεία είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν την ίδια κατανομή (*independent and identically distributed, i.i.d.*).
- q_i : αναξιοπιστία του στοιχείου *i*, $q_i = 1 - p_i$, όπου $i = 1, 2, ..., n$
- q : αναξιοπιστία κάθε στοιχείου, όταν όλα τα στοιχεία είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν την ίδια κατανομή, $q = 1 - p$.

- $R_e(k,n)$: η πιθανότητα να λειτουργούν ακριβώς k από τα n στοιχεία του συστήματος.
- $R(k,n)$: αξιοπιστία του *k-out-of-n* συστήματος ή η πιθανότητα ότι λειτουργούν τουλάχιστον *k* από τα *n* στοιχεία του συστήματος, όπου $0 \le k \le n$ με τα *k, n* να είναι ακέραιοι.
- $Q(k,n)$: αναξιοπιστία του *k-out-of-n* συστήματος ή η πιθανότητα ότι λειτουργούν λιγότερα από *k* στοιχεία, $Q(k,n) = 1 - R(k,n)$.

1.3.1 Επισκευάσιμα *k-out-of-n* συστήματα

Στην ενότητα αυτή, θεωρούμε ένα *k-out-of-n* επισκευάσιμο σύστημα το οποίο ικανοποιεί τις παρακάτω παραδοχές:

- Τα μη αποτυχημένα στοιχεία λειτουργούν διαρκώς, ανεξάρτητα από την κατάσταση του συστήματος.
- Για κάθε στοιχείο υπάρχει η σταθερής κατάστασης διαθεσιμότητα (*steady-state availability*). Αυτή η υπόθεση είναι ασθενής κι είναι δυνατό να αγνοηθεί εάν είτε η κατανομή αποτυχίας είτε η κατανομή επιδιόρθωσης είναι μη-ντετερμινιστική. Ειδικότερα, η υπόθεση ικανοποιείται εάν η κατανομή αποτυχίας είτε η κατανομή επιδιόρθωσης είναι μη-δικτυωτή (*non-lattice*).

Ένα επισκευάσιμο *k-out-of-n* σύστημα αποτυγχάνει μόνο εάν ο συνολικός αριθμός των αποτυχημένων στοιχείων του σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή φτάσει ή ξεπεράσει το $(n-k+1)$.Υποθέτουμε ότι όλα τα στοιχεία του συστήματος λειτουργούν κατά τη χρονική στιγμή $t=0$. Επομένως, το σύστημα είναι σε κατάσταση λειτουργίας κατά τη χρονική στιγμή 0. Είναι αναμενόμενο με την πάροδο του χρόνου να αποτυγχάνουν κάποια στοιχεία. Σε αυτά τα στοιχεία εφαρμόζονται εργασίες επισκευής. Εάν τα στοιχεία τα οποία αποτυγχάνουν, αποτύχουν ταυτόχρονα και ο αριθμός τους φτάσει το $(n-k+1)$, τότε το σύστημα μεταβαίνει από την κατάσταση λειτουργίας, στην κατάσταση αποτυχίας. Ενώ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση αποτυχίας, οι επισκευές των αποτυχημένων στοιχείων συνεχίζονται και το σύστημα θα επιστρέψει στην κατάσταση λειτουργίας, μόλις ο αριθμός τους γίνει μικρότερος του $(n-k+1)$, (Amari, 2008).

1.3.1.1 Επισκευάσιμα k-out-of-n συστήματα με ανεξάρτητα στοιχεία τα οποία ακολουθούν ίδια κατανομή

Σε ένα *k-out-of-n* σύστημα το οποίο έχει ανεξάρτητα στοιχεία που ακολουθούν ίδια κατανομή, ο αριθμός των στοιχείων που λειτουργούν θα ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους *n* και *p*. Έτσι, η πιθανότητα να λειτουργούν ακριβώς *i* στοιχεία είναι:

$$P\left(\text{λειτουργούν ακριβώς i στοιχεία}\right) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i} . \tag{1.9}$$

Η αξιοπιστία του συστήματος είναι ίση με την πιθανότητα ότι ο αριθμός των στοιχείων που λειτουργούν είναι μεγαλύτερος ή ίσος του *k* και δίνεται από τη σχέση:

$$R\left(k,n\right) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} . \tag{1.10}$$

Η σχέση (1.10) είναι αναλυτική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση του *k-out-of-n* συστήματος. Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο ο οποίος αναπτύχθηκε από τον Rushdi:

$$R\left(i,j\right) = p_j R\left(i-1, j-1\right) + q_j R\left(i, j-1\right) \tag{1.11}$$

όπου $1 \le i \le k,\ \ 1 \le j \le n$, η αξιοπιστία ενός *k-out-of-n* συστήματος μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} R\left(k,n\right) &= pR\left(k-1,n-1\right) + \left(1-p\right)R\left(k,n-1\right) \\ &= p\left(R\left(k-1,n-1\right) - R\left(k,n-1\right)\right) + R\left(k,n-1\right) \\ &= pP\left(\text{λειτουργούν ακριβώς } k-1 \text{ από τα } n-1 \text{ στοιχεία}\right) \\ &\quad + R\left(k,n-1\right) \\ &= \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} + R\left(k,n-1\right) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους στον τύπο (1.12) παίρνουμε την εξίσωση:

$$R\left(k,n\right) - R\left(k,n-1\right) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}, \quad \text{για } n \ge k . \tag{1.13}$$

Η εξίσωση (1.13) εκφράζει τη βελτίωση στην αξιοπιστία του συστήματος με την αύξηση του αριθμού των στοιχείων του συστήματος από $n-1$ σε n. Όσο αυξάνεται το n, τόσο θα μειώνεται η βελτίωση αυτή.

Ο τύπος (1.12) μπορεί να χρησιμοποιηθεί αναδρομικά για την αξιολόγηση της αξιοπιστίας τους συστήματος υπό την οριακή συνθήκη:

$$R(k,n)=0 \quad \text{για} \quad n<k. \tag{1.14}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.13) και την οριακή συνθήκη (1.14) μπορούμε να εκφράσουμε την αξιοπιστία ενός *k-out-of-n* συστήματος ως εξής:

$$R(k,n)=\sum_{i=k}^{n}\left[R(k,i)-R(k,i-1)\right]=p^k\sum_{i=k}^{n}\binom{i-1}{k-1}q^{i-k} \tag{1.15}$$

Από τις εξισώσεις της αξιοπιστίας συστήματος που δίνονται παραπάνω παρατηρούμε ότι η αξιοπιστία ενός συστήματος *k-out-of-n* το οποίο έχει ανεξάρτητα και με ίδια κατανομή στοιχεία είναι μια συνάρτηση των *n, k* και *p*. Η αύξηση του *n* ή του *p* ή και των δύο ή η μείωση του *k* έχουν ως αποτέλεσμα τη βελτίωση της αξιοπιστίας του συστήματος. Για κάθε μονάδα μείωσης του *k,* δίνεται παρακάτω η έκφραση για τη βελτίωση της αξιοπιστίας του συστήματος:

$$\begin{aligned}R(k,n)&=P(\text{λειτουργούν τουλάχιστον } k \text{ στοιχεία})\\&=P(\text{λειτουργούν τουλάχιστον } k-1 \text{ στοιχεία})\\&\quad-P(\text{λειτουργούν ακριβώς } k-1 \text{ στοιχεία})\\&=R(k-1,n)-\binom{n}{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}\end{aligned} \tag{1.16}$$

Ή ισοδύναμα έχουμε

$$R(k-1,n)-R(k,n)=\binom{n}{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}. \tag{1.17}$$

Με τις διάφορες εκφράσεις που έχουμε αναφέρει έως τώρα για την αξιοπιστία $R(k,n)$ μπορούμε εύκολα να βρούμε αντίστοιχες εκφράσεις για την αναξιοπιστία $Q(k,n)$ του *k-out-of-n* συστήματος. Για παράδειγμα η παρακάτω έκφραση προκύπτει από την (1.10):

$$Q(k,n)=1-R(k,n)=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}p^iq^{n-1} \tag{1.18}$$

Τέλος μπορούμε να ορίσουμε την <u>ευαισθησία</u> (*sensitivity*) της αξιοπιστίας του συστήματος ως προς την αξιοπιστία των στοιχείων του, ως την πρώτη παράγωγο της $R(k,n)$ ως προς p και δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{dR(k,n)}{dp} = k\binom{n}{k}p^{k-1}q^{n-k} \tag{1.19}$$

(Kuo et al., 2002).

1.3.1.2 *Επισκευάσιμα k-out-of-n συστήματα με ανεξάρτητα στοιχεία τα οποία δεν ακολουθούν ίδια κατανομή*

Προκειμένου να αναλύσουμε την περίπτωση του k-out-of-n συστήματος με ανεξάρτητα στοιχεία αλλά τα οποία δεν ακολουθούν απαραίτητα την ίδια κατανομή θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια των <u>συνόλων ελάχιστης διαδρομής</u> (*minimal path sets*), (Kuo et al., 2002).

Η αξιοπιστία οποιουδήποτε συστήματος είναι ίση με την πιθανότητα ότι λειτουργεί τουλάχιστον ένα από τα σύνολα ελάχιστης διαδρομής. Ενώ, η αναξιοπιστία του συστήματος είναι ίση με την πιθανότητα ότι ένα <u>σύνολο ελάχιστης τομής</u> (*minimal cut set*) αποτυγχάνει. Για να λειτουργεί ένα σύνολο ελάχιστης διαδρομής, θα πρέπει να λειτουργεί κάθε στοιχείο του συνόλου. Για να αποτύχει ένα σύνολο ελάχιστης τομής, θα πρέπει να αποτύχουν όλα τα στοιχεία του συνόλου. Σε ένα *k-out-of-n* σύστημα υπάρχουν $\binom{n}{k}$ σύνολα ελάχιστης διαδρομής και $\binom{n}{n-k+1}$ σύνολα ελάχιστης τομής. Κάθε σύνολο ελάχιστης διαδρομής περιέχει ακριβώς k διαφορετικά στοιχεία, ενώ κάθε σύνολο ελάχιστης διαδρομής $(n-k+1)$ στοιχεία. Συνεπώς, όλα τα σύνολα ελάχιστης διαδρομής και τα σύνολα ελάχιστης τομής είναι γνωστά. Όμως, θα πρέπει να βρεθεί η πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένα σύνολο ελάχιστης διαδρομής περιέχει μόνο στοιχεία τα οποία λειτουργούν ή η πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένα σύνολο ελάχιστης τομής αποτελείται μόνο από στοιχεία τα οποία δε λειτουργούν.

Η αξιολόγηση της αξιοπιστίας ενός συστήματος το οποίο έχει ανεξάρτητα στοιχεία μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο:

$$R(k,n) = \sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\binom{i-1}{k-1}\sum_{j_1<j_2<\ldots<j_i}\prod_{l=1}^{i}p_{j_l} \tag{1.20}$$

όπου για κάθε τιμή του i το εσωτερικό του πρώτου αθροίσματος μας δίνει την πιθανότητα ότι i στοιχεία λειτουργούν κατάλληλα, ανεξάρτητα από το αν τα υπόλοιπα $n-i$ στοιχεία λειτουργούν ή όχι. Ο συνολικός αριθμός των όρων που αθροίζονται είναι ίσος με $\binom{n}{i}$, (Kuo et al., 2002).

1.3.2 Μη-επισκευάσιμα *k-out-of-n* συστήματα

Μερικές φορές είναι αδύνατο να επισκευαστεί ένα σύστημα έως ότου ολοκληρωθεί η αποστολή του. Στην περίπτωση αυτή η αξιοπιστία είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς το χρόνο. Στην παρούσα ενότητα υποθέτουμε ότι το σύστημα αποτελείται από *n* ανεξάρτητα στοιχεία. Αρχικά (κατά τη χρονική στιγμή $t=0$), όλα τα στοιχεία είναι καινούρια και λειτουργούν. Είναι απαραίτητο να παρουσιάσουμε τους συμβολισμούς που θα χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση των μη επισκευάσιμων συστημάτων:

- T_i : τυχαία μεταβλητή που ορίζει τη διάρκεια ζωής του στοιχείου *i*.
- T_s : τυχαία μεταβλητή που ορίζει τη διάρκεια ζωής του συστήματος.
- $R_i(t)$: συνάρτηση αξιοπιστίας του στοιχείου *i*, $P(T_i \geq t)$
- $R(t)$: συνάρτηση αξιοπιστίας κάθε στοιχείου όταν τα στοιχεία είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν ίδια κατανομή.
- $Q_i(t)$: συνάρτηση αναξιοπιστίας του στοιχείου *i*, $Q_i(t)=1-R_i(t)$.
- $Q(t)$: συνάρτηση αναξιοπιστίας κάθε στοιχείου όταν τα στοιχεία είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν ίδια κατανομή.
- $f_i(t)$: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διάρκειας ζωής του στοιχείου *i*.
- $f(t)$: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διάρκειας ζωής κάθε στοιχείου όταν τα στοιχεία είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν ίδια κατανομή.
- $h_i(t)$: συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας του στοιχείου *i*.
- $h(t)$: συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας κάθε στοιχείου όταν τα στοιχεία είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν ίδια κατανομή.
- $R_s(t)$: συνάρτηση αξιοπιστίας του συστήματος.
- $Q_s(t)$: συνάρτηση αναξιοπιστίας του συστήματος.
- $f_s(t)$: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του συστήματος.
- $h_s(t)$: συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας του συστήματος.
- $R(t;k,n)$: συνάρτηση αξιοπιστίας του *k-out-of-n* συστήματος.

- $MTTF_s$: μέσος χρόνος έως την αποτυχία του συστήματος.
- $MTTF(k,n)$: μέσος χρόνος έως την αποτυχία του *k-out-of-n* συστήματος.

1.3.2.1 Μη επισκευάσιμα k-out-of-n συστήματα με ανεξάρτητα στοιχεία τα οποία ακολουθούν ίδια κατανομή

Όταν τα στοιχεία του συστήματος είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν την ίδια κατανομή , η συνάρτηση αξιοπιστίας δίνεται ως εξής:

$$R_s(t)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}R(t)^i\,Q(t)^{n-i} \tag{1.21}$$

Η συγκεκριμένη εξίσωση λαμβάνεται απευθείας από την εξίσωση (1.10), αντικαθιστώντας το *p* με $R(t)$ και το q με $F(t)$. Όμοια, η συνάρτηση αναξιοπιστίας του συστήματος δίνεται από τον τύπο:

$$Q_s(t)=1-R_s(t)=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}R(t)^i\,Q(t)^{n-i}\,. \tag{1.22}$$

και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διάρκειας ζωής του συστήματος είναι:

$$f_s(t)=\frac{dQ_s}{dt}=k\binom{n}{k}f(t)Q(t)^{n-k}\,R(t)^{k-1} \tag{1.23}$$

Συνήθως, κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του συστήματος τα στοιχεία αποτυγχάνουν το ένα μετά το άλλο. Το σύστημα αποτυγχάνει μόλις αποτύχει και το $(n-k+1)$-οστό στοιχείο. Εάν, με t_i συμβολίζεται η διάρκεια ζωής του στοιχείου *i*, τότε η διάρκεια ζωής του συστήματος είναι ίση με το μικρότερο $(n-k+1)$-οστό t_i. Η αναμενόμενη διάρκεια ζωής του συστήματος, ή αλλιώς μέσος χρόνος έως την αποτυχία μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$MTTF_s=\int_0^\infty tf_s(t)\,dt=\int_0^\infty R_s(t)\,dt\,. \tag{1.24}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν τα στοιχεία είναι ανεξάρτητα, ακολουθούν την ίδια κατανομή και έχουν ίδιο ρυθμό αποτυχίας (*identical failure rate*, IFR) ή ακόμα και σταθερό ρυθμό αποτυχίας, τότε το σύστημα έχει ίδιο ρυθμό αποτυχίας (IFR).

(Δεν υποθέτουμε ότι η διάρκεια ζωής των στοιχείων ακολουθεί κάποια συγκεκριμένη κατανομή). Εάν η συνάρτηση αξιοπιστίας το συστήματος είναι η

$$R_s(t) = \int_t^{\infty} f_s(x)\,dx,$$

τότε, για τη συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας τους συστήματος έχουμε:

$$\frac{1}{h_s(t)} = \frac{R_s(t)}{f_s(t)} = \frac{\int_t^{\infty} f(x)Q(x)^{n-k} R(x)^{k-1}\,dx}{f(t)Q(t)^{n-k} R(t)^{k-1}}$$
$$= \frac{1}{f(t)} \int_t^{\infty} f(x) \left(\frac{Q(x)}{Q(t)} \right)^{n-k} \left(\frac{R(x)}{R(t)} \right)^{k-1} dx$$

Εάν θέσουμε $y = R(x)/R(t)$, τότε $dy = -\left[f(t)/R(t) \right] dx$, οπότε:

$$\frac{1}{h_s(t)} = \frac{1}{h(t)} \int_0^1 \left(\frac{1 - yR(t)}{Q(t)} \right)^{n-k} y^{k-1} dy\,. \tag{1.25}$$

Εφόσον το κλάσμα $\left[1 - yR(t)\right]/Q(t)$ μειώνεται ως προς t και $h(t)$είναι ο ίδιος ρυθμός αποτυχίας (IFR), βασιζόμενοι στην εξίσωση (1.25), συμπεραίνουμε ότι η $h_s(t)$ αυξάνεται ως προς t. Αυτό δείχνει ότι εάν όλα τα στοιχεία έχουν ίδιο ρυθμό αποτυχίας (IFR), τότε η δομή *k-out-of-n* διατηρεί αυτήν την ιδιότητα (δηλαδή όλα τα στοιχεία εξακολουθούν να έχουν ίδιο ρυθμό αποτυχίας, IFR). Εάν όλα τα στοιχεία έχουν σταθερό ρυθμό αποτυχίας, τότε το *k-out-of-n* σύστημα θα έχει ίδιο ρυθμό αποτυχίας (IFR) όσο $k \neq n$ και σταθερό ρυθμό αποτυχίας για $k = n$.

Γενικά είναι αδύνατο να βρεθούν πιο συγκεκριμένες εκφράσεις για τα μέτρα επίδοσης του *k-out-of-n* συστήματος, με εξαίρεση την περίπτωση όπου τα στοιχεία ακολουθούν εκθετική κατανομή, από την οποία είναι δυνατό να προκύψουν κάποια σαφή αποτελέσματα. Όταν όλα τα στοιχεία ακολουθούν εκθετική κατανομή διάρκειας ζωής με $Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, τότε η αξιοπιστία αλλά και η αναξιοπιστία του συστήματος δίνονται από:

$$R_s(t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \left(e^{-\lambda t}\right)^i \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-i} \tag{1.26}$$

$$Q_s(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \left(e^{-\lambda t}\right)^i \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-i} \tag{1.27}$$

αντίστοιχα. Σύμφωνα με την εξίσωση (1.16), παίρνοντας $k \geq 2$ μπορούμε να βρούμε το μέσο χρόνο έως την αποτυχία ως εξής:

$$R_s\left(t;k,n\right) = R\left(t;k-1,n\right) - \binom{n}{k-1} e^{-\lambda t(k-1)}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{n-k+1} \tag{1.28}$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε την αναδρομική εξίσωση που ακολουθεί:

$$\begin{aligned} MTTF\left(k,n\right) &= MTTF\left(k-1,n\right) - \int_0^{\infty} \binom{n}{k-1} e^{-\lambda t(k-1)}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{n-k+1} dt \\ &= \mathrm{MTTF}\left(k-1,n\right) - \frac{1}{\lambda}\binom{n}{k-1}\sum_{j=0}^{n-k+1}\binom{n-k+1}{j}\frac{(-1)^j}{k-1+j} \\ &= \mathrm{MTTF}\left(k-1,n\right) - \frac{1}{\lambda(k-1)} \end{aligned} \tag{1.29}$$

Για τον παραπάνω υπολογισμό χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση:

$$\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}\frac{(-1)^j}{a+j} = \frac{N!}{(N+a)!} \quad \text{για } a \geq 1 \tag{1.30}$$

Στην περίπτωση όπου έχουμε $MTTF\left(1,n\right)$, η $MTTF$ εκφράζει το μέσο χρόνο έως την αποτυχία για ένα παράλληλο σύστημα και είναι

$$MTTF\left(1,n\right) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω οριακή συνθήκη και εφαρμόζοντας την εξίσωση (1.29) αναδρομικά, βρίσκουμε:

$$MTTF\left(k,n\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}. \tag{1.31}$$

Αντικαθιστώντας με $k = n$ στην εξίσωση (1.31), παίρνουμε το μέσο χρόνο έως την αποτυχία ενός σειριακού συστήματος και είναι $1/(n\lambda)$.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.25) είναι δυνατό να εκφράσουμε το ρυθμό αποτυχίας του συστήματος ως:

$$h_s(t) = \frac{\lambda}{\int_0^1 y^{k-1}\left[\left(1-ye^{-\lambda t}\right)/\left(1-e^{-\lambda t}\right)\right]^{n-k} dy}. \tag{1.32}$$

1.3.2.2 *Μη επισκευάσιμα k-out-of-n συστήματα με ανεξάρτητα στοιχεία τα οποία δεν ακολουθούν ίδια κατανομή*

Γενικά είναι δύσκολο να εκφραστεί κάποια εξίσωση για την αξιοπιστία ενός *k-out-of-n* συστήματος όταν τα στοιχεία δεν ακολουθούν ίδια κατανομή διάρκειας ζωής. Είναι δυνατό όμως να βρεθεί η εξίσωση της αξιοπιστίας για απλές περιπτώσεις. Μια τέτοια περίπτωση αποτελεί το σύστημα του οποίου τα στοιχεία ακολουθούν εκθετικά κατανεμημένη διάρκεια ζωής, όπως το στοιχείο *i* το οποίο έχει σταθερό ρυθμό αποτυχίας λ_i, $\left(1 \le i \le n\right)$. Για παράδειγμα έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις αξιοπιστίας του συστήματος αλλά και του μέσου χρόνου έως την αποτυχία για ένα 2-σύστημα out-of-3:

$$R_s(t;2,3) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t} + e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t} - 2e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} \tag{1.33}$$

$$MTTF(2,3) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1+\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2+\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \tag{1.34}$$

(Kuo et al., 2002).

1.3.3 Πρακτική εφαρμογή

Μία ενδιαφέρουσα πρακτική εφαρμογή παρουσιάστηκε από τους Pandey *et al.,* (1996). Μελέτησαν το σχέδιο λειτουργίας ενός αργαλειού με κρύα εφεδρικά στοιχεία (*cold standby*). Η λειτουργία του αργαλειού ο οποίος αποτελείται από δύο μονάδες παραπέμπει σε μια κοινή βιομηχανική επιχείρηση μικρής κλίμακας.

Ο αργαλειός αποτελείται από δύο μονάδες *A* και *B(n)* οι οποίες είναι συνδεμένες σε σειρά. Η μονάδα *B(n)* έχει *n* εφεδρικά στοιχεία συνδεμένα παράλληλα, τα οποία μεταφέρουν νήματα διαφορετικών ποικιλιών και χρωμάτων στην μονάδα *A*. Η μονάδα *A* είναι η στρατηγική μονάδα, η οποία υφαίνει αυτά τα νήματα και παράγει ένα μακρύ κομμάτι υφάσματος συγκεκριμένου μεγέθους. Η αποτυχία της μονάδας *A* μπορεί να προκαλέσει και την αποτυχία ολόκληρου του συστήματος. Από την άλλη πλευρά όμως, η αποτυχία *k* από *n* στοιχείων στη μονάδα *B(n)* έχει ως αποτέλεσμα την υποβαθμισμένη λειτουργία του συστήματος. Η λειτουργία θεωρείται υποβαθμισμένη εάν η ποιότητα του προϊόντος είναι κατώτερη από αυτή που θα έπρεπε να είναι. Πιο συγκεκριμένα, εξ αιτίας των k υπολειπόμενων νημάτων από τη μονάδα $B(n)$, η υφή του υφάσματος που προέρχεται από τη μονάδα A θα είναι κατώτερης ποιότητας. Ως εκ τούτου, η επιλογή του αριθμού k των νημάτων εξαρτάται από το ανεκτό όριο το οποίο καθορίζεται από τον έλεγχο ποιότητας. Υποθέτοντας ότι οι χειριστές του αργαλειού είναι συνήθως ανεπαρκώς εκπαιδευμένοι υφαντές και ότι δεν εργάζονται υπό τις κατάλληλες προϋποθέσεις, είναι απαραίτητο να ληφθεί υπ' όψιν το κρίσιμο ανθρώπινο λάθος (*critical human error CHE*), όπως επίσης και τα κοινά αίτια αποτυχίας του μοντέλου (*common cause failures CCF*), διαφορετικά η αξιοπιστία του συστήματος θα ήταν υπερεκτιμημένη.

Για την επίλυση του συστήματος, θεωρούμε τις εξής προϋποθέσεις:

1. Αρχικά όλες οι μονάδες του συστήματος είναι σε τέλεια κατάσταση.
2. Οι διακόπτες είναι τέλειοι, έτσι ώστε μία εφεδρική μονάδα να ξεκινήσει τη λειτουργία της άμεσα, χωρίς αποτυχία.
3. Συμπεριλαμβάνονται το κρίσιμο ανθρώπινο λάθος και τα κοινά αίτια αποτυχίας τα οποία είναι ικανά να προκαλέσουν την ολοκληρωτική αποτυχία του συστήματος.
4. Τα ποσοστά επισκευής είναι σταθερά από τις καταστάσεις 2 και 3 και ακολουθούν μια γενική κατανομή από τις καταστάσεις F, H και C. F είναι η αποτυχία του συστήματος όταν αυτή οφείλεται σε βλάβη δύο ή περισσότερων στοιχείων της μονάδας B ή/και λόγω της αποτυχίας τόσο της μονάδας A όσο και της αποτυχίας της εφεδρικής μονάδας S για την αντικατάσταση της A.
5. και της μη-λειτουργίας των πλεοναζόντων για την αντικατάσταση των A, H είναι η αποτυχία του συστήματος λόγω του κρίσιμου ανθρώπινου λάθους και τέλος, C είναι η αποτυχία του συστήματος λόγω των αίτιων αποτυχίας του μοντέλου.
6. Μια επιδιορθωμένη μονάδα λειτουργεί σαν καινούργια.

Σημείωση

$P_j(t)$: πιθανότητα να είναι το σύστημα στην κατάσταση j, (j =0, 1, 2, 3, F, C, H) κατά τη χρονική στιγμή t.

$P_j(x, t)$: πιθανότητα πυκνότητας (σε σχέση με το χρόνο επισκευής) να είναι το αποτυχημένο σύστημα στην κατάσταση i και να έχει μεσολαβήσει χρόνος επισκευής x (j= F,C,H)

P_j: σταθερής κατάστασης πιθανότητα να είναι το σύστημα στην κατάσταση j όπου (j =0, 1, 2, 3, F, C, H)

n: αριθμός στοιχείων της μονάδας B

λ : σταθερό ποσοστό αποτυχίας ενός στοιχείου της μονάδας B

λ_A: σταθερό ποσοστό αποτυχίας του υποσυστήματος A

λ_s : σταθερό ποσοστό αποτυχίας των στοιχείων σε αναμονή του υποσυστήματος A

$\lambda_{c(j+1)}$ / $\lambda_{h(j+1)}$: σταθερά ποσοστά αποτυχίας από τις καταστάσεις j (j=0,1,2,3) στις καταστάσεις C, H.

μ : σταθερά ποσοστά επιδιόρθωσης της μονάδας *A* από τις καταστάσεις 2 στις 0/3 στην 1.
α(x), β(x), γ(x) : ποσοστά επιδιόρθωσης από τις καταστάσεις *F, H, C* στην κατάσταση 0,

$$S_k(s) = \int k(x) \exp\left\{ -sx - \int_0^x k(x)\,dx \right\} dx$$ όπου *k= α, β, γ*.

<u>Διαμόρφωση μοντέλου</u>:

Σύμφωνα με την τεχνική συμπληρωματικών μεταβλητών και το διάγραμμα κατάστασης του μοντέλου που δίνεται στο *σχήμα 1.5*, παίρνουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων καθώς και τις οριακές συνθήκες.

$$\left(\frac{d}{dt} + n\lambda + \lambda_{h_1} + \lambda_{c_1} + \lambda_A \right) P_0(t) =$$

$$= \mu P_2(t) + \int P_F(x,t)\, a(x)\, dx + \int P_H(x,t)\, \beta(x)\, dx + \int P_C(x,t)\, \gamma(x)\, dx$$

$$\left(\frac{d}{dt} + (n-1)\lambda + \lambda_{h_2} + \lambda_{c_2} + \lambda_{\mathrm{A}} \right) P_1(t) = n\lambda P_0(t) + \mu P_3(t)$$

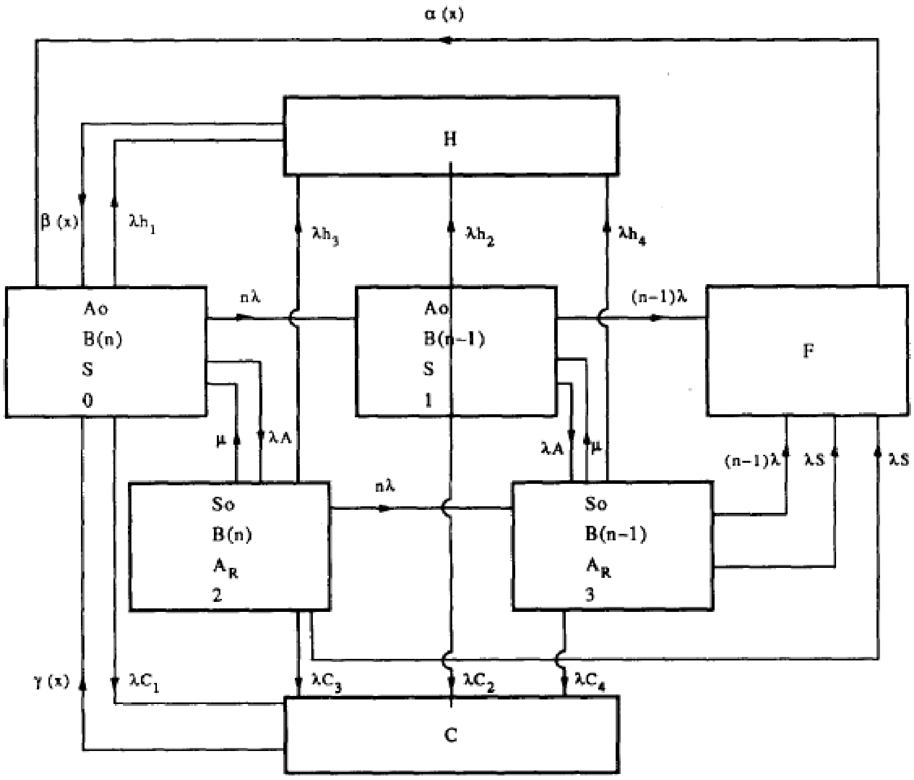
$$\left(\frac{d}{dt} + n\lambda + \lambda_{h_3} + \lambda_{c_3} + \mu + \lambda_s \right) P_2(t) = \lambda_{\mathrm{A}} P_0(t)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + (n-1)\lambda + \lambda_{h_4} + \lambda_{c_4} + \mu + \lambda_s \right) P_3(t) = n\lambda P_2(t) + \lambda_{\mathrm{A}} P_1(t)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + a(x) \right) P_F(x,t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \beta(x) \right) P_H(x,t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \gamma(x) \right) P_C(x,t) = 0$$



Σχήμα 1.5: Διάγραμμα κατάστασης μετάβασης

<u>Οριακές συνθήκες:</u>

$$P_F\left(0,t\right)=\left(n-1\right)\lambda P_1\left(t\right)+\lambda_s P_2\left(t\right)+\left\{\left(n-1\right)\lambda+\lambda_s\right\}P_3\left(t\right)$$

$$P_H\left(0,t\right)=\lambda_{h_1}P_0\left(t\right)+\lambda_{h_2}P_1\left(t\right)+\lambda_{h_3}P_2\left(t\right)+\lambda_{h_4}P_3\left(t\right)$$

$$P_c\left(0,t\right)=\lambda_{c_1}P_0\left(t\right)+\lambda_{c_2}P_1\left(t\right)+\lambda_{c_3}P_2\left(t\right)+\lambda_{c_4}P_3\left(t\right)$$

<u>Αρχικές συνθήκες</u>:

$$P_0\left(t\right)=1, \qquad P_j\left(0\right)=0\,, \qquad \left(j=1,2,3,F,H,C\right)$$

Το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων λύνεται με τη μέθοδο μετασχηματισμών Laplace.

2 Μέθοδοι για τον υπολογισμό αξιοπιστίας των k-out-of-n συστημάτων

Κατά το δεύτερο μισό του τελευταίου αιώνα, πολλοί ερευνητές διερεύνησαν την αξιοπιστία συστημάτων και ανέπτυξαν ποικίλες μεθόδους για το συγκεκριμένο τομέα. Οι μέθοδοι αξιολόγησης αξιοπιστίας που έχουν αναπτυχθεί έως τώρα, κατασκευάζονται συνήθως σύμφωνα με κάποιες παραδοχές οι οποίες είναι αρκετά περιοριστικές και δεν είναι ικανές να αναλύσουν όλα τα πραγματικά συστήματα. Λόγω της σπουδαιότητας των συστημάτων άμεσης επέμβασης και της ανάγκης για την εύρεση αποτελεσματικών μεθόδων για την ανάλυσή τους αρκετοί ερευνητές έστρεψαν την προσοχή τους στη μοντελοποίηση και την ανάλυση των συστημάτων αυτών (Levitin *et al.*, 1998).

Οι Li *et al.* (2009) μελέτησαν την ανομοιογένεια των στοιχείων με ρυθμό αναλογικής διακινδύνευσης *(proportional hazard rates)* σε ένα σύστημα αναμονής. Οι Amari *et al.* (2003) καθώς και οι Boudali *et al.* (2006) πρότειναν μια νέα μέθοδο επίλυσης για την ανάλυση των συστημάτων αναμονής χρησιμοποιώντας δυναμικά δέντρα σφάλματος (*dynamic fault trees*) τα οποία είναι επέκταση των δέντρων σφάλματος (*fault trees*). Επίσης, οι Azaron *et al.* (2004) ανέλυσαν δίκτυα αξιοπιστίας με τη βοήθεια την έννοιας των στοχαστικών Ε-δικτύων *(stochastic E-networks).* Ακόμα, οι Distefano *et al.* (2006) πρότειναν την επέκταση του διαγράμματος αξιοπιστίας *(reliability block diagram*) σε δυναμικό διάγραμμα αξιοπιστίας *(dynamic reliability block diagram).* Ωστόσο, οι υπάρχουσες μέθοδοι περιορίζονται σε ειδικές περιπτώσεις όπως η εκθετική κατανομή και τα μοντέλα αναλογικών ποσοστών κινδύνου. Αξίζει να σημειώσουμε ότι το μοντέλο της αναλογικής διακινδύνευσης μετατρέπεται σε εκθετικό μοντέλο στο πλαίσιο της μετατροπής του χρόνου, (Levitin *et al*., 2009).

Μία εξίσου σημαντική μέθοδος την οποία θα μελετήσουμε εκτενέστερα στη συνέχεια είναι η universal generating function *(UGF).* Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μεθοδολογία δυναμικού διαγράμματος ροής *(dynamic flow graph methodology DFM)* η οποία είναι βασισμένη σε δέντρα αποφάσεων *(decision trees),* (Levitin *et al*., 2009).

2.1 Ρυθμός αναλογικής διακινδύνευσης (proportional hazard rates)

Κατά τις τελευταίες δύο δεκαετίες, το μοντέλο αναλογικής διακινδύνευσης το οποίο οφείλεται στον Cox, χρησιμοποιείται ευρέως για την μοντελοποίηση συστήματος με μη-πανομοιότυπα στοιχεία, εξ αιτίας της ευελιξίας του και της μαθηματικής συνέπειάς του (Li et al., 2009). Το συγκεκριμένο μοντέλο αναπτύχτηκε για την εκτίμηση των επιδράσεων των διάφορων συμμεταβλητών που επηρεάζουν το χρόνο έως την αποτυχία ενός συστήματος. Χρησιμοποιήθηκε ευρέως στον τομέα της βιοϊατρικής και πρόσφατα φαίνεται να υπάρχει πολύ ενδιαφέρον για την εφαρμογή του στην αξιοπιστία της μηχανικής. Στην αρχική του μορφή το μοντέλο είναι μη-παραμετρικό. Έχει χρησιμοποιηθεί από την ALTA (*Accelerated Life Testing Data Analysis Software Tool*), όπου ο ρυθμός αναλογικής διακινδύνευσης περιλαμβάνεται σε παραμετρική μορφή και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση δεδομένων έως και οκτώ μεταβλητών. Το μοντέλο ρυθμού αναλογικής διακινδύνευσης είναι μια γενίκευση της εκθετικής κατανομής, (Collett, 2003).

2.1.1 Ημιπαραμετρικό μοντέλο αναλογικής διακινδύνευσης του Cox

Το ημιπαραμετρικό μοντέλο αναλογικής διακινδύνευσης ονομάζεται έτσι γιατί δεν προσδιορίζεται η συνάρτηση διακινδύνευσης $h_0(t)$. Το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης για να επιβεβαιωθεί ότι δεν υπάρχει καμία διαφορά μεταξύ των συναρτήσεων κινδύνου για δύο ομάδες χρόνων επιβίωσης.

Η <u>συνάρτηση διακινδύνευσης</u> συμβολίζεται ως $h(t)$ και εκφράζει την τάση προς την αποτυχία ενός στοιχείου στο χρονικό διάστημα $(t, t+\delta t]$, με δεδομένη την αξιοπιστία του μέχρι τη χρονική στιγμή *t*, και εκφράζεται ως εξής:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \tag{2.1}$$

Η <u>σωρευτική συνάρτηση διακινδύνευσης</u> συμβολίζεται ως $H(t)$ και δίνεται από τον τύπο:

$$H(t) = \int_0^t h(u)du \tag{2.2}$$

Κάνοντας πράξεις προκύπτει ότι $H(t) = -\ln S(t)$. Ως εκ τούτου,

$$S(t) = \exp\{-H(t)\} \tag{2.3}$$

Για τη μελέτη του μοντέλου αυτού θεωρούμε δύο ομάδες, την ομάδα Ι και την ομάδα ΙΙ. Ο αριθμός των στοιχείων στις δύο ομάδες που αποτυγχάνουν κατά τη *j*-οστή διατεταγμένη χρονική στιγμή $t_{(j)}, j = 1, 2, ..., r$ θα συμβολίζονται με d_{1j} και

d_{2j}, αντίστοιχα. Όμοια, ο αριθμός των στοιχείων σε κίνδυνο στις δύο ομάδες κατά τη χρονική στιγμή $t_{(j)}$, ορίζονται ως n_{1j} και n_{2j}, αντίστοιχα.

Ορίζουμε τώρα τη μεταβλητή *X* να είναι ίση με τη μονάδα όταν ένα στοιχείο ανήκει στην ομάδα Ι, ενώ ίση με το μηδέν όταν ένα στοιχείο ανήκει στην ομάδα ΙΙ. Το μοντέλο αναλογικής διακινδύνευσης για το *i*-οστό στοιχείο μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$h_i(t) = e^{\beta x_i} h_0(t) \tag{2.4}$$

όπου x_i είναι η τιμή του *X* για το *i*-οστό στοιχείο, $i = 1, 2, ..., n$. Όταν δεν υπάρχουν συνδεμένες παρατηρήσεις, δηλαδή όταν δεν ισχύει η σχέση $d_j = d_{1j} + d_{2j} = 1$, τότε το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της <u>εκτιμήτριας μέγιστης πιθανοφάνειας</u> $\hat{\beta}$. Θεωρώντας την τιμή της *X* για το στοιχείο το οποίο αποτυγχάνει κατά τη χρονική στιγμή $t_{(j)}$ με τιμή $x_{(j)}$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από

$$L(\beta) = \prod_{j=1}^{r} \frac{e^{\beta x_{(j)}}}{\sum_{l=1}^{n_j} e^{\beta x_l}} \tag{2.5}$$

αφού υπάρχουν $n_j = n_{1j} + n_{2j}$ στοιχεία σε κίνδυνο. Ο λογάριθμος της πιθανοφάνειας είναι:

$$\log L(\beta) = \sum_{j=1}^{r} \beta x_{(j)} - \sum_{j=1}^{r} \log\left\{\sum_{l=1}^{n_j} e^{\beta x_l}\right\} \tag{2.6}$$

Αφού η τιμή της $x_{(j)}$ είναι μηδέν για τα στοιχεία της ομάδας ΙΙ, το άθροισμα $\sum_{j=1}^{r} \beta x_{(j)}$ του τύπου (2.6) αφορά μόνο τους χρόνους αποτυχίας για την ομάδα Ι. Οπότε έχουμε

$$\sum_{j=1}^{r} \beta x_{(j)} = d_1 \beta,$$

όπου $d_1 = \sum_{j=1}^{r} d_{1j}$ είναι ο αριθμός των συνολικών αποτυχιών της ομάδας Ι. Επίσης, ισχύει

$$\sum_{l=1}^{n_j} e^{\beta x_l} = n_{1j} e^{\beta} + n_{2j} \tag{2.7}$$

επομένως,

$$\log L(\beta) = d_1 \beta - \sum_{j=1}^{r} \log\left(n_{1j} e^{\beta} + n_{2j}\right) \tag{2.8}$$

Η εκτιμήτρια $\hat{\beta}$ μπορεί να βρεθεί μεγιστοποιώντας την συνάρτηση (2.8) ως προς *β*. Έπειτα, ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης $\beta = 0$ μπορεί να ελεγχθεί συγκρίνοντας την τιμή της $-2\log \hat{L}\left(\hat{\beta}\right)$ με την $-2\log \hat{L}(0) = 2\sum_{j=1}^{r} \log n_j$.

Ο υπολογισμός της $\hat{\beta}$ μπορεί να αποφευχθεί εάν χρησιμοποιηθεί ένας έλεγχος σκορ (*score test*) για τη μηδενική υπόθεση $\beta = 0$. Η συγκεκριμένη διαδικασία βασίζεται στο στατιστικό έλεγχο $\dfrac{u^2(0)}{i(0)}$, όπου

$$u(\beta) = \frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta} \tag{2.9}$$

είναι το αποτελεσματικό σκορ (*efficient score*), και

$$i(\beta) = -\frac{\partial^2 \log L(\beta)}{\partial \beta^2} \tag{2.10}$$

είναι η παρατηρούμενη συνάρτηση πληροφορίας (*observed information function*) του Fisher. Υπό τη μηδενική υπόθεση $\beta = 0$, η $\dfrac{u^2(0)}{i(0)}$ ακολουθεί την κατανομή χ^2, με ένα βαθμό ελευθερίας.

Τώρα, από την εξίσωση (2.8) έχουμε:

$$\frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta} = \sum_{j=1}^{r} \left(d_{1j} - \frac{n_{1j} e^{\beta}}{n_{1j} e^{\beta} + n_{2j}} \right) \tag{2.11}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \log L(\beta)}{\partial \beta^2} &= -\sum_{j=1}^{r} \frac{\left(n_{1j}e^{\beta} + n_{2j}\right) n_{1j}e^{\beta} - \left(n_{1j}e^{\beta}\right)^2}{\left(n_{1j}e^{\beta} + n_{2j}\right)^2} \\ &= -\sum_{j=1}^{r} \frac{n_{1j}n_{2j}e^{\beta}}{\left(n_{1j}e^{\beta} + n_{2j}\right)^2}\end{aligned} \tag{2.12}$$

όμως το αποτελεσματικό σκορ και η παρατηρούμενη συνάρτηση πληροφορίας αξιολογούνται για $\beta = 0$, οπότε δίνονται από τις σχέσεις:

$$u(0) = \sum_{j=1}^{r} \left(d_{1j} - \frac{n_{1j}}{n_{1j} + n_{2j}} \right) \tag{2.13}$$

και

$$i(0) = \sum_{j=1}^{r} \frac{n_{1j}n_{2j}}{\left(n_{1j} + n_{2j}\right)^2} \tag{2.14}$$

(Collett, 2003).

2.1.2 Παραμετρικό μοντέλο αναλογικής διακινδύνευσης

Όταν το μοντέλο παλινδρόμησης του Cox χρησιμοποιείται για την ανάλυση των δεδομένων αξιοπιστίας ή επιβίωσης, δεν είναι απαραίτητο να θεωρηθεί κάποια συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας για τους χρόνους επιβίωσης. Ως αποτέλεσμα, η συνάρτηση διακινδύνευσης δεν περιορίζεται σε ένα συγκεκριμένο τύπο συνάρτησης, και το μοντέλο έχει ευελιξία και εκτενή εφαρμοσιμότητα. Από την άλλη πλευρά όμως, αν ισχύει κάποια συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας για τα δεδομένα, τότε τα συμπεράσματα είναι πιο ακριβή. Στην περίπτωση αυτή, οι εκτιμήσεις ποσοτήτων όπως ο διάμεσος των χρόνων επιβίωσης και η σχετική διακινδύνευση θα έχουν μικρότερο τυπικό σφάλμα, από ότι θα είχαν εάν δεν ίσχυε κάποια συγκεκριμένη κατανομή. Μοντέλα για τα οποία ισχύει κάποια συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας για τους χρόνους επιβίωσης είναι γνωστά ως παραμετρικά μοντέλα. Σημαντική κατανομή για τέτοιες περιπτώσεις είναι η Weibull.

Προχωρώντας στην περιγραφή του παραμετρικού μοντέλου, ορίζουμε τη συνάρτηση επιβίωσης αλλά και τη συνάρτηση διακινδύνευσης αντίστοιχα, ως εξής:

$$S(t) = 1 - \int_0^t f(u)du \tag{2.15}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt}\{\log S(t)\} \tag{2.16}$$

όπου $f(t)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των χρόνων επιβίωσης. Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι να ορίσουμε ένα τύπο συνάρτησης για τη συνάρτηση διακινδύνευσης από τον οποίο η συνάρτηση επιβίωσης και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, θα μπορούν να δίνονται ως εξής:

$$S(t) = \exp\{-H(t)\} \tag{2.17}$$

και

$$f(t) = h(t)S(t) = -\frac{dS(t)}{dt} \tag{2.18}$$

όπου,

$$H(t) = \int_0^t h(u)du \tag{2.19}$$

είναι η ολοκληρωμένη συνάρτηση διακινδύνευσης, (Collett, 2003).

2.1.2.1 Η εκθετική κατανομή

Το απλούστερο μοντέλο για τη συνάρτηση διακινδύνευσης επιτυγχάνεται όταν η συνάρτηση αυτή θεωρείται σταθερή ως προς το χρόνο. Η διακινδύνευση της αποτυχίας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι επομένως η ίδια, ανεξάρτητα με το χρόνο που παρήλθε. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η συνάρτηση διακινδύνευσης μπορεί να γραφτεί ως:

$$h(t) = \lambda \tag{2.20}$$

για $0 \le t < \infty$. Η παράμετρος λ είναι μια θετική σταθερά η οποία προσδιορίζεται προσαρμόζοντας το μοντέλο στα δεδομένα που παρατηρήθηκαν. Από την εξίσωση (2.17), προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση επιβίωσης:

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda du\right) = e^{-\lambda t} \tag{2.21}$$

αλλά και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των χρόνων επιβίωσης για $0 \le t < \infty$ η οποία είναι:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \tag{2.22}$$

(Collett, 2003)

2.1.2.2 Η κατανομή Weibull

Πρακτικά, η υπόθεση σταθερής συνάρτησης διακινδύνευσης είναι σπάνια εφαρμόσιμη. Ένας πιο γενικός τύπος για τη συνάρτηση διακινδύνευσης είναι ο

$$h(t) = \lambda \gamma t^{\gamma - 1} \tag{2.23}$$

για $0 \le t < \infty$. Η συνάρτηση αυτή εξαρτάται από τις δύο παραμέτρους *λ* και *γ*, οι οποίες είναι μεγαλύτερες του μηδενός. Στην περίπτωση όπου $\gamma = 1$, η συνάρτηση διακινδύνευσης παίρνει τη σταθερή τιμή *λ*, και οι χρόνοι επιβίωσης ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Για άλλες τιμές του *γ*, η συνάρτηση διακινδύνευσης αυξάνεται ή μειώνεται μονοτονικά. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης διακινδύνευσης εξαρτάται από την τιμή της *γ*, και για αυτό το λόγο το *γ* ονομάζεται παράμετρος σχήματος, ενώ το *λ* ονομάζεται παράμετρος κλίμακας.

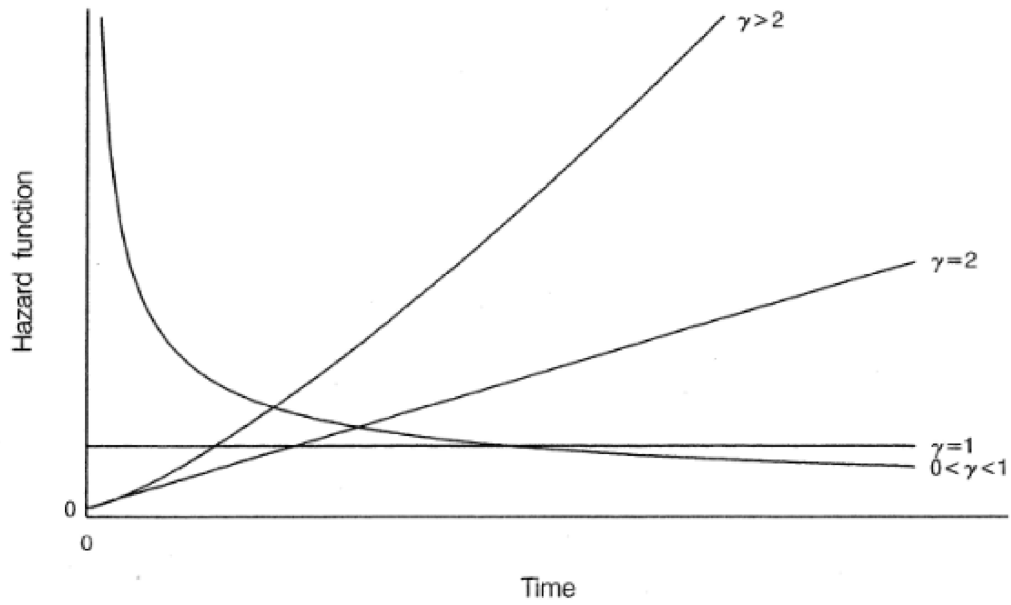
Για τη συνάρτηση διακινδύνευσης που δίνεται από τον τύπο (2.23), έχουμε την παρακάτω συνάρτηση επιβίωσης:

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda \gamma u^{\gamma-1} du\right) = \exp\left(-\lambda t^{\gamma}\right) \tag{2.24}$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για $0 \le t < \infty$ είναι

$$f(t) = \lambda \gamma t^{\gamma-1} \exp\left(-\lambda t^{\gamma}\right) \tag{2.25}$$

η οποία είναι η πυκνότητα μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί κατανομή Weibull, με παράμετρο κλίμακας *λ* και παράμετρο σχήματος *γ*. Η γενική μορφή της συνάρτησης διακινδύνευσης για διάφορες τιμές του γ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



2.1 Η μορφή της Weibull συνάρτησης διακινδύνευσης

2.2 Αναπαράσταση δέντρων σφάλματος και αναπαράσταση δυναμικών δέντρων σφάλματος (Fault trees and dynamic fault trees)

2.2.1 Δέντρα σφάλματος (Fault trees)

Η ανάλυση αναπαράστασης δέντρων σφάλματος (*fault tree analysis*) (FTA) αναπτύχθηκε αρχικά το 1962 στα εργαστήρια Bell από τον H.A. Watson στα πλαίσια μιας σύμβασης με το τμήμα βαλλιστικών συστημάτων της Αμερικανικής πολεμικής αεροπορίας για την αξιολόγηση του συστήματος ελέγχου εκτόξευσης των διηπειρωτικών βαλλιστικών πυραύλων (Intercontinental Ballistic Missile) (ICBM). Η ανάλυση αναπαράστασης δέντρων σφάλματος στοχεύει στη διαμόρφωση και την ανάλυση διαδικασιών αποτυχίας μηχανικών και βιολογικών συστημάτων. Η αναπαράσταση αυτή αποτελείται από λογικά διαγράμματα τα οποία απεικονίζουν την κατάσταση του συστήματος και κατασκευάζεται με τη χρήση γραφικών τεχνικών σχεδιασμού.

Η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να περιγραφεί με απλά λόγια ως μια τεχνική η οποία αρχικά καθορίζει μια ανεπιθύμητη κατάσταση του συστήματος (συνήθως μια κατάσταση που είναι κρίσιμη ως προς την ασφάλεια και την αξιοπιστία). Στη συνέχεια το σύστημα αναλύεται στο πλαίσιο του περιβάλλοντός του αλλά και της λειτουργίας του ώστε να βρεθούν όλοι οι ρεαλιστικοί τρόποι κατά τους οποίους η ανεπιθύμητη περίπτωση μπορεί να εκδηλωθεί. Γενικότερα, η αναπαράσταση δέντρων σφάλματος περιγράφει τις λογικές σχέσεις των βασικών γεγονότων που οδηγούν σε ανεπιθύμητες περιπτώσεις, δηλαδή στο κορυφαίο γεγονός του δέντρου σφάλματος. Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι ένα γραφικό μοντέλο που αποτελείται από διάφορους παράλληλους ή/και διαδοχικούς συνδυασμούς βλαβών και έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση των ανεπιθύμητων προκαθορισμένων γεγονότων. Τα σφάλματα μπορεί να είναι γεγονότα τα οποία σχετίζονται με αποτυχίες των συνιστωσών υλικού (*component hardware failures*), ανθρώπινα λάθη, σφάλματα λογισμικού, ή οποιοδήποτε άλλο σχετικό γεγονός το οποίο μπορεί να προκαλέσει ανεπιθύμητη κατάσταση.

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι ένα δέντρο σφάλματος δεν είναι ένα μοντέλο για όλες τις πιθανές αποτυχίες του συστήματος ή για όλες τις πιθανές αιτίες που μπορεί να προκαλέσουν την αποτυχία του συστήματος. Ένα δέντρο σφάλματος προσαρμόζεται στο «κορυφαίο γεγονός» το οποίο αντιστοιχεί σε κάποια συγκεκριμένη λειτουργία αποτυχίας του συστήματος. Συνεπώς, το δέντρο σφάλματος περιλαμβάνει μόνο εκείνα τα σφάλματα τα οποία συμβάλουν σε αυτό το κορυφαίο γεγονός. Επιπλέον τα σφάλματα αυτά, δεν είναι εντελώς περιοριστικά, αλλά καλύπτουν μόνο εκείνες τις βλάβες οι οποίες χαρακτηρίζονται ως ρεαλιστικές.

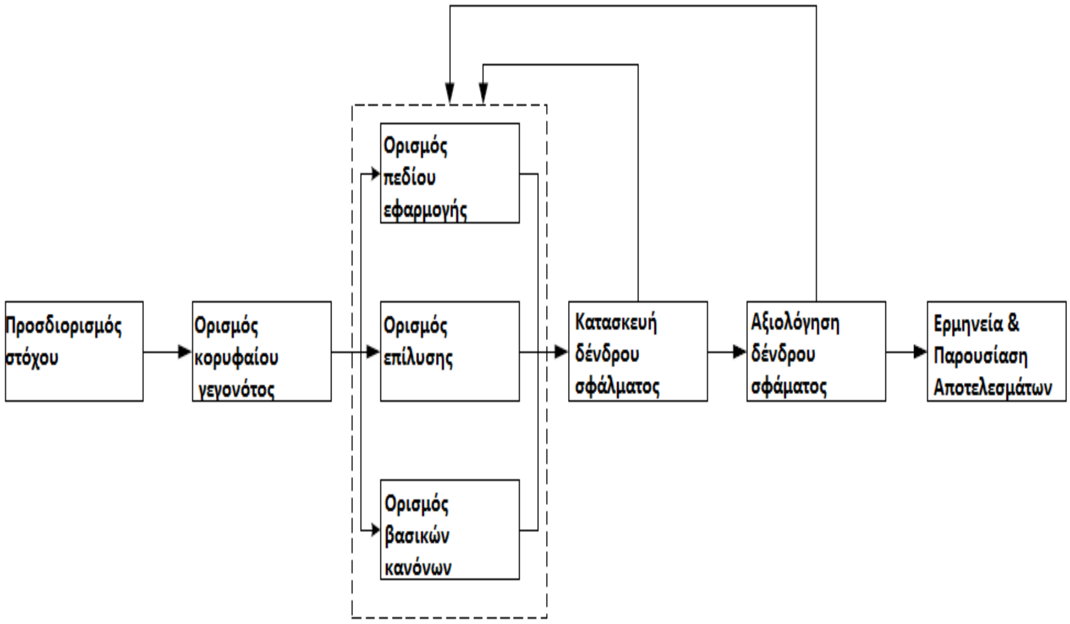
Αξιοσημείωτο είναι ότι τα δέντρα σφάλματος δεν είναι ποσοτικά μοντέλα. Πρόκειται για ποιοτικά μοντέλα τα οποία μπορούν να αξιολογηθούν και ποσοτικά. Φυσικά, αυτή η ποιοτική πτυχή τους ισχύει για όλα σχεδόν τα είδη συστημάτων. Το γεγονός ότι ένα δέντρο σφάλματος είναι ένα μοντέλο ικανό να αξιολογηθεί ποσοτικά, δεν αλλοιώνει τον ποιοτικό χαρακτήρα του (Stamatelopoulos, 2002).

2.2.1.1 Βήματα κατά την εφαρμογή των δέντρων σφάλματος

Η ανάλυση ενός επιτυχημένου δέντρου σφάλματος απαιτεί την πραγματοποίηση των ακόλουθων λειτουργιών:

1. Προσδιορισμός του στόχου για το δένδρο σφάλματος
2. Ορισμός του κορυφαίου γεγονότος
3. Ορισμός του πεδιού εφαρμογής
4. Ορισμός επίλυσης
5. Ορισμός βασικών κανόνων
6. Κατασκευή δένδρου σφάλματος
7. Αξιολόγηση δένδρου σφάλματος
8. Ερμηνεία και παρουσάση των αποτελεσμάτων

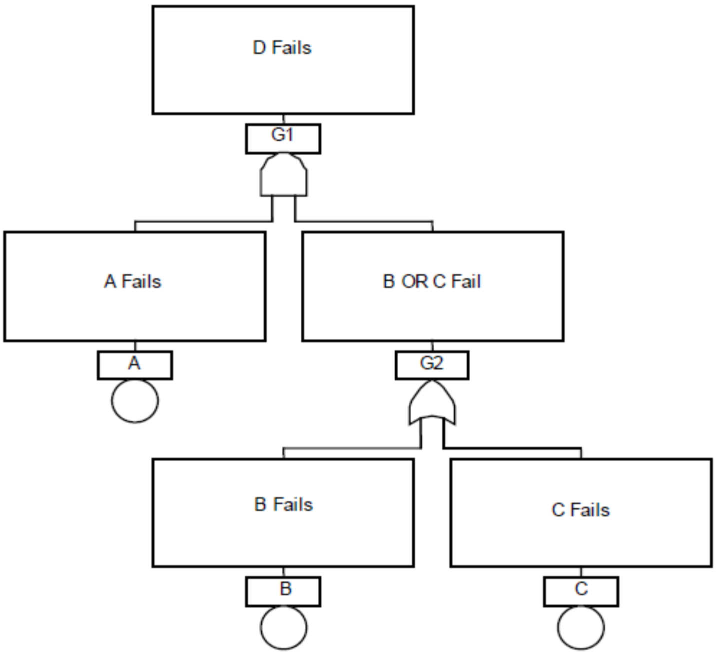
Τα πρώτα πέντε βήματα αφορούν τη διαμόρφωση του προβλήματος. Τα υπόλοιπα αφορούν την κατασκευή του ίδιου του δένδρου σφάλματος, την αξιολόγησή του, καθώς και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων του. Ενώ τα περισσότερα βήματα εκτελούνται διαδοχικά, τα 3-5 μπορούν να προχωρήσουν ταυτόχρονα. Είναι σύνηθες τα βήματα 4 και 5 να τροποποιούνται κατά τα βήματα 6 και 7. Η ανατοφοδότηση και η αλληλεξάρτηση των βημάτων φαίνονται στο *σχήμα 2.2* που απεικονίζεται παρακάτω.



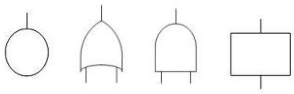
Σχήμα 2.2: Βήματα ανάλυσης δέντρου σφάλματος

2.2.1.2 Μοντέλο δένδρου σφάλματος

Βασική αρχή για τα δέντρα σφάλματος είναι ότι το αποτέλεσμα είναι σε δυαδική μορφή, δηλαδή είτε επιτυχία, είτε αποτυχία. Τα δέντρα αυτά συγκροτούνται από ένα σύνολο φορέων που ονομάζονται «πύλες» *(gates)* και χρησιμοποιούνται για να επιτρέψουν ή να εμποδίσουν τη διέλευση του λογικού σφάλματος μέχρι το δέντρο. Οι πύλες παρουσιάζουν τις σχέσεις των γεγονότων που απαιτούνται για την εμφάνιση ενός «υψηλότερου» γεγονότος. Το «υψηλότερο» γεγονός είναι η έξοδος (*output*) από την πύλη, ενώ το «χαμηλότερο» γεγονός είναι οι εισροές/είσοδοι (*input*) στην πύλη. Το σύμβολο της πύλης δηλώνει το είδος της σχέσης των γεγονότων εισόδου που απαιτείται για να έχουμε γεγονός εξόδου. Παρακάτω παραθέτουμε ένα απλό τυπικό δέντρο σφάλματος:



Σχήμα 2.3:Τυπικό δέντρο σφάλματος

Όπου  είναι το σύμβολα βασικού γεγονότος, πύλης «ή» (*or*), πύλης «και» (*and*) , ενδιάμεσου γεγονότος αντίστοιχα.

- Βασικό γεγονός: Παράλειψη ή λάθος σε ένα στοιχείο του συστήματος (πχ ένας διακόπτης κόλλησε σε ανοιχτή θέση)
- Πύλη «ή» *(or)*: Η έξοδος συμβαίνει, αν συμβεί οποιαδήποτε είσοδος
- Πύλη «και» *(and)*: Η έξοδος συμβαίνει μόνο εάν συμβούν όλες οι είσοδοι. (Οι είσοδοι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.)
- Ενδιάμεσο γεγονός: Μια τέτοια πύλη μπορεί να χρησιμοποιηθεί αμέσως πάνω από μια πρωταρχική εκδήλωση για την παροχή περισσοτερου χώρου για την περιγραφή του γεγονότος.

Υπάρχουν περισσότερα σύμβολα τα οποία εμφανίζονται σε πιο πολύπλοκα, σύνθετα και μεγαλύτερα δέντρα σφάλματος (Stamatelopoulos, 2002).

Τα στατικά δέντρα σφάλματος αναλύονται χρησιμοποιώντας συνδυαστικές μεθόδους όπως η προσομοίωση Monte Carlo (*Monte Carlo simulation*) ή μεθόδους βασισμένους σε τομή συνόλων (*cut-sets*) (ή άλλες αλγεβρικές Μπουλιανές μεθόδους/*Boolean algebraic methods*). Πρόσφατες εξελίξεις στην ανάλυσή στατικών δέντρων σφάλματος περιλαμβάνουν την αποτελεσματική χρήση του διαγράμματος δυαδικής απόφασης (*binary decision diagram*), όπως και της μεθόδου ρύθμισης γραμμικού χρόνου (*linear-time modularization method*), (Amari *et al*., 2003).

2.2.1.3 Βασικοί κανόνες για την κατασκευή ενός δένδρου σφάλματος

Η κατασκευή δέντρων σφάλματος είναι μία διαδικασία η οποία έχει εξελιχθεί σταδιακά σε διάστημα περίπου 50 ετών. Αρχικά, η κατασκευή τους γινόταν αυθαίρετα, αλλά στη συνέχεια διαπιστώθηκε ότι τα αποτελεσματικότερα δέντρα σφάλματος είναι εκείνα τα οποία σχεδιάζονται σύμφωνα με ένα σύνολο κανόνων. Στις ακόλουθες παραγράφους θα εξετάσουμε τους βασικούς αυτούς κανόνες για την επιτυχή ανάλυση δέντρων σφάλματος.

Όταν έχουμε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα είναι απαραίτητο να περιγράψουμε κάθε γεγονός με ακρίβεια. Η σωστή διαδικασία για να γίνει αυτό, αποτελεί τον **κανόνα 1:** Οι καταστάσεις που καταχωρούνται στα πλαίσια γράφονται σαν σφάλματα. Θα πρέπει να αναφέρεται επακριβώς ποιο είναι το σφάλμα και ποιες οι συνθήκες υπό τις οποίες μπορεί να συμβεί. Δε θα πρέπει να συγχέονται οι επιτυχίες με τα σφάλματα.

Το επόμενο βήμα της διαδικασίας αυτής είναι να καθοριστούν τα αναγκαία και ικανά γεγονότα τα οποία καταλήγουν σε σφάλμα, το οποίο περιγράφεται στα πλαίσια ενδιάμεσων γεγονότων. Για την ανάπτυξη της παρούσας λογικής δομής χρησιμοποιούμε ένα κρίσιμο ερώτημα. Είναι το σφάλμα, σφάλμα στην «κατάσταση ενός στοιχείου», ή πρόκειται για σφάλμα στην «κατάσταση του συστήματος»; Το σφάλμα στην «κατάσταση ενός στοιχείου» είναι ένα σφάλμα το οποίο εντοπίζεται σε ένα συγκεκριμένο στοιχείο. Ενώ το σφάλμα στην «κατάσταση του συστήματος» δεν εντοπίζεται απαραίτητα σε ένα συγκεκριμένο στοιχείο αλλά μπορεί να αφορά ένα ελάττωμα σε κάποιο επίπεδο του συστήματος, ή την εμφάνιση πολλών σφαλμάτων. Έτσι, καταλήγουμε στον **κανόνα 2:** Εάν η απάντηση στο ερώτημα «*Είναι σφάλμα μιας αποτυχίας στοιχείου;*» είναι *ναι*, τότε κατηγοριοποιούμε το γεγονός σαν σφάλμα στην κατάσταση στοιχείου. Εάν η απάντηση είναι *όχι*, τότε το κατηγοριοποιούμε σαν σφάλμα στην κατάσταση του συστήματος.

Εκτός από τους παραπάνω κανόνες, υπάρχει μια σειρά άλλων διαδικαστικών καταστάσεων που έχουν αναπτυχθεί. Έτσι έχουμε τον **κανόνα 3:** Εάν η φυσιολογική λειτουργία ενός στοιχείου μεταδίδει μια ακολουθία σφαλμάτων, τότε θεωρείται ότι το στοιχείο λειτουργεί κανονικά. Σύμφωνα με την ανάλυση συστήματος, αυτή η μετάδοση ακολουθίας σφαλμάτων θα μπορούσε να αποκλειστεί από μια απροσδόκητη αποτυχία κάποιου στοιχείου.

Υπάρχουν δύο επιπλέον κανόνες για την αντιμετώπιση των κινδύνων της μη μεθοδικότητας και της προσπάθειας συντόμευσης της διαδικασίας της ανάλυσης. Ο **πρώτος κανόνας** είναι: Όλες οι είσοδοι σε μία συγκεκριμένη πύλη θα πρέπει να οριστούν πλήρως πριν από την περεταίρω ανάλυση κάθε μιας από αυτές που έχουν ήδη αναληφθεί. Ο **δεύτερος κανόνας** είναι: Οι πύλες εισόδου θα πρέπει να καθορίζουν κατάλληλα τα γεγονότα σφάλματος, και οι πύλες αυτές δε θα πρέπει να συνδέονται άμεσα με άλλες πύλες (Stamatelopoulos, 2002).

2.2.2 Δυναμικά δέντρα σφάλματος (dynamic fault trees)

Τα δυναμικά δέντρα σφάλματος επεκτείνουν τα απλά δέντρα σφάλματος για το χειρισμό της σειράς αποτυχιών και των λειτουργικών εξαρτήσεων. Τα παραδοσιακά μοντέλα τα οποία ονομάζονται και στατικά ή πρότυπα είναι συνδυαστικά μοντέλα. Ένα συνδυαστικό μοντέλο καταγράφει μόνο το συνδυασμό των γεγονότων και όχι τη διαδοχική σειρά τους. Τα συνδυαστικά μοντέλα γίνονται επομένως ανεπαρκή για τα σημερινά πολύπλοκα δυναμικά δέντρα συστημάτων. Τα δυναμικά δέντρα σφάλματος καθορίζουν ειδικές πύλες οι οποίες συλλαμβάνουν μια ποικιλία από αλληλουχία αποτυχιών και λειτουργικών εξαρτήσεων. Αυτές οι πύλες οι οποίες εισήχθηκαν από τους ερευνητές είναι οι δυναμικές πύλες και συμβάλλουν στην καταγραφή των μηχανισμών αποτυχίας του συστήματος.

Οι ειδικού σκοπού πύλες δυναμικών δέντρων σφάλματος είναι ικανές να μοντελοποιήσουν:

- Τη δυναμική αντικατάσταση των αποτυχημένων στοιχείων από σύνολα ανταλλακτικών.
- Τις βλάβες που προκύπτουν μόνο εάν συμβούν άλλες βλάβες σε συγκεκριμένες εντολές.
- Τις εξαρτήσεις που διαδίδουν την αποτυχία από ένα στοιχείο σε άλλα.
- Τις καταστάσεις στις οποίες βλάβες μπορεί να συμβούν μόνο σε μια προκαθορισμένη σειρά (Dugan *et al.*, 2000).

Τα δέντρα σφάλματος με δυναμικές πύλες λύνονται με την αυτόματη μετατροπή τους σε αντίστοιχα μοντέλα Markov. Σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προσομοίωση Monte Carlo για την επίλυση των δυναμικών δέντρων σφάλματος, αποφεύγοντας τη μετατροπή τους σε μοντέλα Markov. Εν τούτοις, γενικά η προσομοίωση απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό χρόνο για να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια.

Εάν ένα δυναμικό δέντρο σφαλμάτων έχει *n* βασικά γεγονότα, τότε μπορούν να υπάρξουν έως S_n+1 καταστάσεις στην ισοδύναμη Μαρκοβιανή αλυσίδα, όπου $S_i=(S_{i-1}+1)*i$, $S_0=1$. Ο συνολικός αριθμός των καταστάσεων είναι $N=n^n$. Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, κάποιες καταστάσεις είναι δυνατό να συγχωνευτούν ώστε να μειωθεί ο χώρος καταστάσεων των Μαρκοβιανών αλυσίδων.

Αφού μετατραπούν τα δυναμικά δέντρα σφαλμάτων σε Μαρκοβιανά μοντέλα, τα Μαρκοβιανά μοντέλα μπορούν επιλυθούν με καταστάσεις πιθανοτήτων. Γενικά, υπάρχουν δύο ήδη μεθόδων για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων αυτών.

1. Μέθοδοι βασισμένες σε διαφορικές εξισώσεις όπως η μέθοδος Runge – Kutta.

2. Μέθοδοι πιθανοτήτων ειδικών Μαρκοβιανών αλυσίδων όπως η μέθοδος τυχαιοποίησης (*Randomization methods*).

Η υπολογιστική πολυπλοκότητα αυτών των μεθόδων είναι $O\left(K \cdot N^3\right) = O\left(K \cdot \left(n^n\right)^3\right) = O\left(K \cdot \left(n^{3n}\right)\right)$, όπου *K* είναι ο αριθμός των επαναλήψεων ή των χρονικών βημάτων. Το Κ εξαρτάται από την επιθυμητή ακρίβεια και το χρόνο της αποστολής.

Η Dugan και οι συνεργάτες της πρότειναν μια μέθοδο βασισμένη στα πλεονεκτήματα μιας πρόσφατης έρευνας για την εύρεση ενοτήτων δέντρων σφάλματος (*modules in fault trees*) σε γραμμικό χρόνο, καθώς και μια νέα προσέγγιση επίλυσης των στατικών δέντρων σφάλματος χρησιμοποιώντας διαγράμματα δυαδικής απόφασης (ΔΔΑ). Ο αλγόριθμος που πρότειναν αρχικά βρίσκει *s*-ανεξάρτητα υπό-δέντρα (*s-independent subtrees*). Εάν ένα *s*-ανεξάρτητο υπό-δέντρο περιέχει μια δυναμική πύλη, τότε αυτό επιλύεται χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο Markov. Διαφορετικά, επιλύεται χρησιμοποιώντας διαγράμματα δυαδικής απόφασης, και η επίλυσή τους θα ενσωματωθεί για να προκύψει η λύση όλου του δέντρου σφάλματος.

Το πλεονέκτημα της χρησιμοποίησης διαφόρων μοντέλων Markov και διαγραμμάτων δυαδικής απόφασης είναι ότι θα είναι σημαντικά μικρότερα σε μέγεθος από το ενιαίο μοντέλο Markov ή τα ΔΔΑ για ολόκληρο το δέντρο σφάλματος. (Amari *et al.*, 2003)

2.3 Μπλοκ διαγράμματα αξιοπιστίας (reliability block diagrams, RBD) και δυναμικά μπλοκ διαγράμματα αξιοπιστίας (dynamic reliability block diagrams, DRBD)

2.3.1 Μπλοκ διαγράμματα αξιοπιστίας (reliability block diagrams, RBD)

Τα διαγράμματα αξιοπιστίας RBD είναι επαγωγικά μοντέλα στα οποία ένα σύστημα διαιρείται σε τμήματα που αντιπροσωπεύουν διακριτά στοιχεία όπως είναι τα στοιχεία ή τα υποσυστήματα του συστήματος. Στη συνέχεια αυτά τα στοιχειώδη τμήματα συνδυάζονται σύμφωνα με τα «μονοπάτια συστήματος επιτυχίας». Γενικά, τα διαγράμματα αυτά χρησιμοποιούνται για την αντιπροσώπευση των ενεργών στοιχείων ενός συστήματος έτσι ώστε να επιτρέπεται η πλήρης αναζήτηση και ο εντοπισμός όλων των πιθανών «μονοπατιών» προς την επιτυχία. Οι εξαρτήσεις μεταξύ των στοιχείων είναι δυνατό να εξεταστούν. Οι ευκολία των RBD έγκειται στο ότι είναι εύκολο να διαβαστούν (Stamatelopoulos, 2002).

Ειδικότερα, στα διαγράμματα αξιοπιστίας RBD υπάρχουν διατεταγμένα διαγράμματα λογικής ώστε να υποδεικνύουν ποιοι συνδυασμοί αποτυχημένων στοιχείων οδηγούν στην αποτυχία του συστήματος, ή ποιοι συνδυασμοί των στοιχείων που λειτουργούν κατάλληλα διατηρούν το σύστημα σε λειτουργία. Ως εκ τούτου, τα RBD βασίζονται στο σχεδιασμό, στη λειτουργία και στις διαδικασίες συντήρησης, αλλά και στην ανάλυση των αποτελεσμάτων των αποτυχημένων στοιχείων του συστήματος. Ένα τμήμα (*block*) των RBD αντιπροσωπεύει τη φυσική και καλή λειτουργία των στοιχείων. Η αποτυχία ενός στοιχείου, υποδηλώνει την απομάκρυνση του τμήματος στο οποίο ανήκε το στοιχείο αυτό. Εάν από ένα RBD αφαιρεθούν αρκετά τμήματα, με αποτέλεσμα να διακόπτεται η σύνδεση μεταξύ των σημείων εισόδου και εξόδου, τότε το σύστημα αποτυγχάνει. Με άλλα λόγια, εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που συνδέει τα σημεία εισόδου και εξόδου, τότε το σύστημα εξακολουθεί να λειτουργεί.

Στα μπλοκ διαγράμματα αξιοπιστίας, καθιερώνονται δύο βασικοί τύποι σύνδεσης μεταξύ δύο ή περισσότερων στοιχείων. Έτσι δημιουργούνται τμήματα που περιέχουν στοιχεία σε σειριακή ή παράλληλη δομή. Έπειτα, τα τμήματα που δημιουργήθηκαν συγχωνεύονται σε ένα νέο τμήμα. Χρησιμοποιώντας τέτοιους συνδυασμούς, κάθε σειριακό-παράλληλο σύστημα μπορεί τελικά να συγχωνευθεί σε ένα τμήμα και η αξιοπιστία του μπορεί εύκολα να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τέτοιες εξισώσεις. Γενικά, τα RBD έχουν χρησιμοποιηθεί κυρίως για μη-επιδιορθώσιμα συστήματα (Distefano *et al.*, 2006).

2.3.2 Δυναμικά μπλοκ διαγράμματα αξιοπιστίας (dynamic reliability block diagrams, DRBD)

Η ανάγκη να επεκταθεί και να επαναπροσδιορισθεί ο φορμαλισμός των RBD προκύπτει από την ανικανότητα της μοντελοποίησης, έκφρασης και αναπαράστασης της δυναμικής συμπεριφοράς του συνολικού συστήματος. Αυτή η ανάγκη παρακινείται επίσης από την απλότητα, την ευελιξία και την εκφραστική δύναμη των εργαλείων μοντελοποίησης, αναφορικά με παρουσίαση των ιδιαιτεροτήτων ενός συστήματος. Ο ορός δυναμική συμπεριφορά αντιπροσωπεύει την εξέλιξη της τοπολογίας ενός συστήματος από την οπτική γωνία της αξιοπιστίας. Σε ένα μοντέλο DRBD, η τοπολογία και η διαμόρφωση του συστήματος θεωρούνται χρονικά μεταβαλλόμενες, σχετικές με την εξέλιξη των καταστάσεων των στοιχείων από μια ακολουθία συμβάντων. Η επέκταση αυτή (σε δυναμικό μοντέλο) επίσης επιτρέπει την δυνατότητα παρουσίασης των εφεδρικών στοιχείων και των δυνατοτήτων του διαμοιρασμού φορτίου.

Μια εξάρτηση ενός δυναμικού διαγράμματος αξιοπιστίας (DRBD) ορίζει τη σχέση αξιοπιστίας ανάμεσα σε δύο στοιχεία που εκφράζεται από μια συγκεκριμένη σύνδεση η οποία αντιπροσωπεύει τη λογική συνθήκη που εφαρμόζεται από ένα στοιχείο οδηγό σε ένα στοιχείο στόχο. Όταν συμβεί ένα καθορισμένο γεγονός στο στοιχείο οδηγό, τότε η συνθήκη εξάρτησης εφαρμόζεται στο στοιχείο στόχο. Το γεγονός το οποίο προκαλεί την εξάρτηση η οποία συμβαίνει στο στοιχείο οδηγό ονομάζεται ενέργεια ή ώθηση, ενώ το γεγονός που συνδέει το στοιχείο στόχο ορίζεται ως αντίδραση. Χαρακτηρίζοντας το επακόλουθο γεγονός ως ενεργοποίηση και την αδράνεια ή την αποτυχία ως απενεργοποίηση, τότε προσδιορίζονται δύο τύποι ώθησης: ενεργοποίηση και απενεργοποίηση ώθησης.

- Ενεργοποίηση ή δραστηριοποίηση: η εξάρτηση αυτή εφαρμόζεται στο στοιχείο στόχο όταν το γεγονός ενεργοποίησης ώθησης «ειδοποιεί» το στοιχείο οδηγό. Η εφαρμογή παύει όταν ένα γεγονός απενεργοποίησης συμβεί στο στοιχείο οδηγό.
- Απενεργοποίηση ή αποτυχία: η εξάρτηση εφαρμόζεται στο στοιχείο στόχο όταν ένα γεγονός απενεργοποίησης ώθησης «ειδοποιεί» τον οδηγό. Η εφαρμογή αυτή παύει όταν ένα γεγονός ενεργοποίησης συμβεί στο στοιχείο οδηγό.

Συνήθως, μια εξάρτηση απενεργοποίησης ή αποτυχίας τίθεται σε ισχύ όταν το στοιχείο οδηγός αλλάζει την κατάστασή του από ενεργή σε κατάσταση αναμονής ή αποτυχίας. Για την περίπτωση της εξάρτησης ενεργοποίησης ισχύουν τα αντίστροφα. Η πιο αυστηρή εκδοχή επαναπροσδιορίζει τις παραπάνω συνθήκες, θεωρώντας μόνο τις μεταβάσεις του στοιχείου οδηγού από και προς την αποτυχημένη κατάσταση (Distefano *et al.*, 2006).

2.3.3 Μέθοδοι επίλυσης των RBD και DRBD

Τα παραδοσιακά στατικά διαγράμματα αξιοπιστίας RBD, επιλύονται αναλυτικά εφαρμόζοντας κανόνες σειριακών, παράλληλων και πολύπλοκων δομών, αλλά και εξισώσεων στα τμήματά τους, αποκτώντας έτσι τη συνολική εξίσωση αξιοπιστίας. Δυστυχώς όμως, αυτή η μέθοδος δεν μπορεί να εφαρμοστεί ή να επεκταθεί σε εξαρτημένα στοιχεία. Επομένως, για να λυθεί ένα δυναμικό διάγραμμα αξιοπιστίας DRBD είναι απαραίτητο να απεικονιστεί σε πεδίο ορισμού, το οποίο μπορεί να είναι αναλυτικό ή κατά προσέγγιση (προσομοιώσεις). Κατά τη διαδικασία αυτή, όλες οι καταστάσεις κάθε στοιχείου του διαγράμματος DRBD θα πρέπει να προσδιοριστούν και οι εξαρτήσεις που έχουν καθοριστεί, θα πρέπει να εξεταστούν.

Σύμφωνα με μελέτες που έχουν γίνει, για την ανάλυση ενός DRBD είναι διαθέσιμο ένα ευρύ φάσμα δυνατοτήτων:

1. Μια απλή αλλά ισχυρή προσέγγιση για την επίλυση των μοντέλων αξιοπιστίας είναι να αξιοποιηθούν οι αλυσίδες Markov (όπως και στην περίπτωση των DFT, *dynamic fault trees*). Το κύριο μειονέκτημα της προσέγγισης αυτής αφορά τις περιορισμένες κατανομές αξιοπιστίας.

2. Ένα πιο γενικό και αναλυτικό εργαλείο μοντελοποίησης είναι τα δίκτυα Petri (Petri nets), συμφώνα με τα οποία ορισμένες από τις υπάρχουσες προσεγγίσεις αφαιρούν έξυπνα τους περιορισμούς από τις συναρτήσεις αξιοπιστίας καθώς και το μοντέλο πλεονάσματος και τις πτυχές διανομής φορτίου.
3. Ακόμα μία εναλλακτική λύση είναι η προσομοίωση επειδή επιτρέπει τη μοντελοποίηση κάθε κατανομής αξιοπιστίας, αλλά και επιτρέπει συμπεριφορές οι οποίες αποκλείονται από τις περισσότερες αναλυτικές λύσεις. Το κύριο μειονέκτημα της προσομοίωσης είναι ότι απαιτεί αρκετό χρόνο ώστε να επιτευχθεί υψηλή ακρίβεια. Ωστόσο, η χρήση τεχνικών μείωσης διακύμανσης επιτρέπουν την επίτευξη δραματικής μείωσης του χρόνου λύσης. Η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo εφαρμόζεται σε αρκετές περιπτώσεις.

Η καλύτερη δυνατή λύση προκύπτει από την αξιοποίηση των συγκρίσεων αρκετών διαφορετικών μεθόδων. Η αξιολόγηση των αναλυτικών μεθόδων εξαρτάται από την πολυπλοκότητα του αρχικού μοντέλου. Επίσης, λαμβάνονται υπ όψιν οι καταστάσεις των στοιχείων του DRBD.

Εν τούτοις, η βέλτιστη λύση δίνεται από το συνδυασμό των παραπάνω τεχνικών, σύμφωνα με τον οποίο το DRBD αναλύεται σε ανεξάρτητα τμήματα. Τα τμήματα που συμπεριλαμβάνουν τις εξαρτήσεις ή τα εφεδρικά στοιχεία χαρακτηρίζονται ως <u>δυναμικά.</u> Τα υπόλοιπα ονομάζονται <u>στατικά</u> τμήματα. Τα στατικά τμήματα μπορούν να αναλυθούν χρησιμοποιώντας την κλασική αναλυτική λύση. Ενώ, τα δυναμικά αναλύονται με την εφαρμογή μιας από τις προτεινόμενες εναλλακτικές λύσεις λαμβάνοντας υπ όψιν τη φύση της συνάρτησης αξιοπιστίας και της πολυπλοκότητας του τμήματος (Distefano *et al.*, 2006).

2.4 Στοχαστικά Ε-δίκτυα (stochastic E-networks)

Εφαρμόζοντας την ανάλυση συντομότερης διαδρομής σε στοχαστικά δίκτυα οι Azaron *et al.*, (2005) εισήγαγαν μια νέα προσέγγιση για τον υπολογισμό της συνάρτησης αξιοπιστίας για συστήματα που περιέχουν εφεδρικά στοιχεία σε αναμονή και που εξαρτώνται από το χρόνο. Αρχικά, κατασκεύασαν ένα <u>κατευθυνόμενο δίκτυο</u> (*directed network*), από το γράφημα της αξιοπιστίας του συστήματος. Το συγκεκριμένο δίκτυο είναι στοχαστικό και ονομάζεται <u>E-network</u> (*equivalent network*, δηλαδή <u>ισοδύναμο δίκτυο</u>). Σε αυτό το δίκτυο, κάθε <u>διαδρομή/μονοπάτι</u> *(path)* αντιστοιχεί σε μια ελάχιστη τομή *(minimal cut)* του γραφήματος αξιοπιστίας. Στη συνέχεια, πήραν τη συνάρτηση κατανομής της <u>ελάχιστης διαδρομής</u> *(shortest path)* από την <u>πηγή</u> *(source)* έως τον καταληκτικό <u>κόμβο</u> *(sink node)* του E-network σύμφωνα με τη μέθοδο που ανέπτυξε ο Kulkarni. Γενικά, ο μέσος χρόνος έως την αποτυχία (MTTF) των συστημάτων με στοιχεία σε αναμονή είναι μεγαλύτερος από εκείνο των συνηθισμένων συστημάτων, όπου όλα τα στοιχεία θέτονται σε λειτουργία ταυτόχρονα κατά τη χρονική στιγμή μηδέν. Κατά συνέπεια, τα συστήματα αυτά λειτουργούν σαφώς καλύτερα σε σύγκριση με τα συνήθη. Ως εκ τούτου, αυτό που έκανε την έρευνα τους ξεχωριστή είναι ότι:

- «Χαλάρωσαν» την υπόθεση όπου όλα τα στοιχεία τίθενται σε λειτουργία ταυτόχρονα από την αρχή.
- Η μέθοδος αυτή είναι νέα και βασίζεται στη συντομότερη διαδρομή των στοχαστικών E-networks.

Ενδιαφέρον παρουσιάζεται στον τρόπο λειτουργίας των συστημάτων που αναφέραμε και παραπάνω. Στην αρχή, λειτουργούν μόνο όσα στοιχεία είναι απαραίτητα ώστε να λειτουργήσει το σύστημα. Κανένα από τα στοιχεία σε αναμονή δεν τίθεται σε λειτουργία παρά μόνο εάν αποτύχει ένα ενεργό στοιχείο. Στο πλαίσιο των γραφημάτων, κατά τη χρονική στιγμή μηδέν είναι σε λειτουργία μονό τα στοιχεία της πρώτης διαδρομής. Δηλαδή, το γράφημα αξιοπιστίας λειτουργεί επειδή η είσοδος και η έξοδος του συνδέονται μέσω αυτής της διαδρομής/μονοπατιού. Μόλις αποτύχει ένα από τα στοιχεία της πρώτης διαδρομής, τότε ενεργοποιείται η δεύτερη διαδρομή του συστήματος και συνεπώς όλα τα στοιχεία της δεύτερης αυτής διαδρομής τίθενται αυτόματα σε λειτουργία. Η ίδια διαδικασία συνεχίζεται έως ότου να διακοπούν όλες οι συνδέσεις μεταξύ των εισόδων και εξόδων και ως αποτέλεσμα, το σύστημα αποτυγχάνει.

Θα πρέπει όμως να εξασφαλιστεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι λειτουργίας ανάμεσα σε δύο δεδομένους κόμβους του γραφήματος αξιοπιστίας του συστήματος. Για τον υπολογισμό της πιθανότητας ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι, ο Fishman πρότεινε ένα σχέδιο δειγματοληψίας Monte Carlo, το οποίο χρησιμοποιεί κατώτερα και ανώτερα όρια για την αύξηση της ακρίβειας και της αποτελεσματικότητας. Οι Manzi et al. έδωσαν μια αναλυτική και σαφή περιγραφή για τη μέθοδο του Fishman. Κατ’ αυτόν τον τρόπο επέκτειναν τη μέθοδό του για τον υπολογισμό της συνολικής αξιοπιστίας του δικτύου (δηλαδή ότι το δίκτυο είναι συνδεδεμένο).

Για τον προσδιορισμό της ελάχιστης διαδρομής των στοχαστικών δικτύων, ο Martin εισήγαγε μια μέθοδο για την εύρεση της συνάρτησης κατανομής της, καθώς και της αναμενόμενης τιμή της. Έπειτα ο Frank υπολόγισε την πιθανότητα ότι η διάρκεια της συντομότερης διαδρομής σε ένα στοχαστικό δίκτυο είναι μικρότερη από μια συγκεκριμένη τιμή, όταν τα μήκη τόξου είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Ο Mirchandani ανέπτυξε μια άλλη μέθοδο, η οποία έχει το πλεονέκτημα ότι δεν είναι απαραίτητη η λύση πολλαπλών ολοκληρωμάτων. Ωστόσο, αυτή η μέθοδος λειτουργεί μόνο εάν τα μήκη τόξου είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Ο Kulkarni τον οποίο αναφέραμε και νωρίτερα, παρουσίασε ένα αλγόριθμο για την εύρεση της συνάρτησης κατανομής της συντομότερης διαδρομής σε κατευθυνόμενα στοχαστικά δίκτυα (*directed stochastic networks*), όταν τα μήκη τόξου είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με εκθετική κατανομή. Η συγκεκριμένη μέθοδος κατασκευάστηκε στο πλαίσιο συνεχούς χρόνου Μαρκοβιανών ανελίξεων. Τέλος, οι Sigal et al. χρησιμοποίησαν τις ομοιόμορφες κατευθυνόμενες τομές (*uniformly directed cuts*) για την ανάλυση των συντομότερων μονοπατιών.

Το πλεονέκτημα του προτεινόμενου αλγόριθμου από την πλευρά της διαχείρισης, προέρχεται έμμεσα από τις παραδοχές του. Αυτή η νέα αναλυτική προσέγγιση αναπτύχθηκε για τη λήψη της συνάρτησης αξιοπιστίας των συστημάτων εξαρτώμενων από το χρόνο, εξετάζοντας τη δομή της αναμονής και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι δε χρειάζεται να λειτουργούν όλα τα στοιχεία από την αρχή. Από τη στιγμή που δεν απαιτείται η περιοριστική αυτή υπόθεση, η προτεινόμενη προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλούς τύπους συστημάτων αξιοπιστίας, τα οποία δε μπορούν να επιλυθούν σύμφωνα με τις ήδη υπάρχουσες μεθόδους.

Όσο για τα στοιχεία του συστήματος, οι Azaron et al. υπέθεσαν ότι η διάρκεια ζωής κάθε στοιχείου ακολουθεί τη συνάρτηση εκθετικής κατανομής. Η ανάπτυξη της θεωρίας αξιοπιστίας, έχει βασιστεί σε ένα μεγάλο βαθμό στο νόμο εκθετικής αποτυχίας (*exponential failure law*) εξ αιτίας της μαθηματικής του συνέπειας. Είναι κατάλληλο μοντέλο για χρησιμοποιημένα αλλά και για καινούρια στοιχεία (όπως ασφάλειες και πολλά άλλα ηλεκτρονικά εξαρτήματα) λόγω μιας σημαντικής ιδιότητας της εκθετικής κατανομής. Η ιδιότητα αυτή είναι ότι η εκθετική κατανομή δεν έχει μνήμη (Azaron *et al.*, 2005).

2.4.1 Γραφήματα αξιοπιστίας

Μια αποτελεσματική μέθοδος για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας ενός συστήματος είναι να το εκφράσουμε σαν γράφημα. Τα γραφήματα αξιοπιστίας αποτελούνται από ένα σύνολο τόξων. Κάθε τόξο αντιπροσωπεύει ένα στοιχείο του συστήματος. Τα τόξα ενώνονται μέσω των κόμβων και σχηματίζουν τη δομή του συστήματος. Εάν υποθέσουμε ότι με *i*, $(i = 1, 2, ..., n)$ συμβολίζεται το *i*-οστό τόξο του γραφήματος αξιοπιστίας, τότε υπάρχει μια εκθετική τυχαία μεταβλητή T_i, με παράμετρο λ_i, η οποία αντιπροσωπεύει τη διάρκεια ζωής του κάθε τόξου *i*. Αυτές οι τυχαίες μεταβλητές T_i είναι ανεξάρτητες, αφού τα στοιχεία λειτουργούν ανεξάρτητα. Εάν ένα σύστημα έχει *i* μονοπάτια, τα οποία συμβολίζονται με P_i, τότε υπάρχει σύνδεση μεταξύ των κόμβων εισόδου και εξόδου εάν ένα τουλάχιστον μονοπάτι παραμείνει άθικτο/ανέπαφο.

Εξ ορισμού τομή (*cut*) του γραφήματος είναι ένα σύνολο τόξων το οποίο διακόπτει όλες τις συνδέσεις εισόδου και εξόδου όταν απομακρύνεται από το γράφημα. Η ελάχιστη τομή (*minimal cut*) είναι η τομή του γραφήματος που περιέχει τον ελάχιστο αριθμό όρων. Συμπληρωματικά, ελάχιστη τομή είναι η τομή της οποίας κανένα υποσύνολο δεν αποτελεί τομή του γραφήματος. Κάθε αποτυχία του συστήματος μπορεί να αντιπροσωπευθεί με την αφαίρεση μιας τουλάχιστον ελάχιστης τομής από το γράφημα.

Εάν C_j είναι η *j*-οστή ελάχιστη τομή του γραφήματος αξιοπιστίας, με $j = 1, 2, ..., m$, X_j είναι ο χρόνος αποτυχίας της *j*-οστής ελάχιστης τομής του γραφήματος αξιοπιστίας, T_i η διάρκεια ζωής του *i*-οστού στοιχείου του συστήματος και T η συνολική διάρκεια ζωής του συστήματος, το ακόλουθο λήμμα είναι αρκετά χρήσιμο.

<u>Λήμμα</u>: Για $j = 1, 2, ..., m$ τότε ισχύει η εξής σχέση: $X_j = \sum_{i \in C_j} T_i$.

<u>Απόδειξη:</u> Λαμβάνοντας υπ όψιν τη δομή αναμονής του συστήματος, σε περίπτωση διακοπής οποιουδήποτε στοιχείου της *j*-οστής ελάχιστης τομής, το σύστημα ενεργοποιείται στο επόμενο μονοπάτι. Κατά συνέπεια, ανά πάσα στιγμή μόνο ένα στοιχείο αυτής της ελάχιστης τομής είναι ενεργοποιημένο. Επομένως, ο χρόνος αποτυχίας αυτής της τομής είναι το άθροισμα του χρόνου ζωής όλων των στοιχείων (Azaron *et al.*, 2003).

2.4.2 E-networks (equivalent networks, ισοδύναμα δίκτυα)

Ένα E-network, είναι ένα κατευθυνόμενο δίκτυο. Έστω ότι το δίκτυο έχει *m* μονοπάτια, από τα οποία το *j*-οστό μονοπάτι αντιστοιχεί στην *j*-οστή ελάχιστη τομή του γραφήματος αξιοπιστίας του συστήματος ($j = 1, 2, ..., m$). Είναι σαφές σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα ότι, το μήκος κάθε μονοπατιού είναι ίσο με το χρόνο αποτυχίας της αντίστοιχης τομής. Ο ακόλουθος κανόνας περιγράφει την κατασκευή ενός E-network.

<u>Κανόνας</u>: Το τόξο *i* ανήκει στη *j*-οστή διαδρομή του κατευθυνόμενου δικτύου εάν και μόνο εάν $i \in C_j$.

Έστω $F(t)$ η συνάρτηση κατανομής της συντομότερης διαδρομής/ μονοπατιού (από την πηγή έως τον καταληκτικό κόμβο) στο E-network και $R_s(t)$ η συνάρτηση αξιοπιστίας του συστήματος αναμονής. Η σχέση μεταξύ της $F(t)$ και της $R_s(t)$ δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεώρημα</u>: Η διάρκεια ζωής *T* του συστήματος είναι μια τυχαία μεταβλητή και ορίζεται ως εξής:

$$T = \min_{j=1,2,...m} \left\{ X_j \right\} \tag{2.26}$$

Επομένως,

$$\mathrm{R_s(t) = 1 - F(t)} \tag{2.27}$$

Απόδειξη: Μετά την αποτυχία της πρώτης ελάχιστης τομής του γραφήματος αξιοπιστίας του συστήματος, διακόπτονται όλες οι συνδέσεις εισόδου και εξόδου και κατά συνέπεια, το σύστημα αποτυγχάνει. Έτσι, η διάρκεια ζωής του συστήματος, είναι ίση με το χρόνο αποτυχίας της πρώτης ελάχιστης τομής (2.26)**.** Η σχέση (2.27) προέρχεται από τον ορισμό των $F(t)$ και $R_s(t)$.

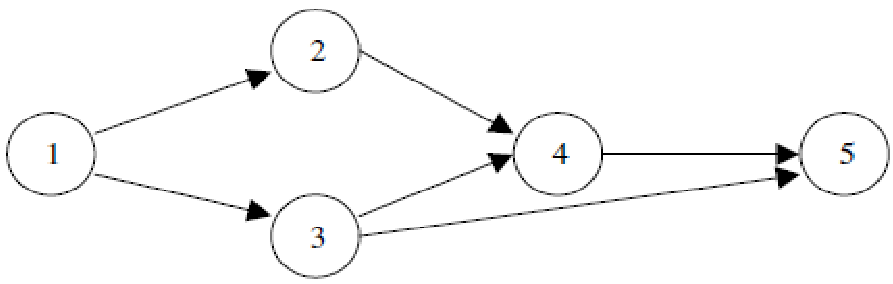
Για την κατασκευή της κατάλληλης στοχαστικής διαδικασίας είναι σκόπιμο να απεικονιστεί το στοχαστικό δίκτυο, ως ένα δίκτυο επικοινωνίας με τους κόμβους ως σταθμούς ικανούς να λαμβάνουν και να μεταδίδουν μηνύματα, και τα τόξα ως μονόδρομες συνδέσεις επικοινωνίας οι οποίες συνδέουν τα ζεύγη των κόμβων. Τα μηνύματα θεωρούνται ότι κινούνται με μοναδιαία ταχύτητα, ώστε το $T_{(u,v)}$ να υποδηλώνει το χρόνο ταξιδιού από τον κόμβο *u* στον κόμβο *v*. Μόλις ένας κόμβος λάβει ένα μήνυμα από τα εισερχόμενα τόξα, το διαβιβάζει κατά μήκος όλων των εξερχόμενων τόξων και ο ίδιος απενεργοποιείται. Δηλαδή, χάνει την ικανότητα να λάβει και να διαβιβάσει μελλοντικά μηνύματα. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου το μήνυμα φτάσει στον καταληκτικό κόμβο *t*. Ανά πάσα στιγμή μπορεί να υπάρχουν κάποιοι «άχρηστοι» κόμβοι ή κάποια «άχρηστα» τόξα για την πορεία του μηνύματος προς τον καταληκτικό κόμβο. Αυτό σημαίνει ότι ακόμα κι εάν τα μηνύματα που λαμβάνονται και διαβιβάζονται από αυτούς τους κόμβους, και μεταφέρονται από αυτά τα τόξα, τα μηνύματα αυτά θα φτάσουν μόνο σε απενεργοποιημένους κόμβους. Υποτίθεται ότι όλοι αυτοί οι «άχρηστοι» κόμβοι είναι και απενεργοποιημένοι επίσης, και τα μηνύματα τα οποία «ταξιδεύουν» με αυτά τα τόξα ματαιώνονται. Εάν, Z(t) είναι το σύνολο όλων των απενεργοποιημένων κόμβων σε χρόνο t, τότε το Z(t) ονομάζεται η κατάσταση του συστήματος σε χρόνο t.

Ορισμός 1: Για να περιγραφεί η εξέλιξη της στοχαστικής διαδικασίας $\{Z(t), t \geq 0\}$, για κάθε υποσύνολο κόμβων $\mathrm{X} \subset V$, όπου η πηγή $s \in X$ και ο καταληκτικός κόμβος $t \in \bar{X} = V - X$, ορίζονται τα παρακάτω σύνολα:

- $\bar{X}_1 \subset \bar{X}$, ένα σύνολο κόμβων $\bar{X}_1$ που δεν συμπεριλαμβάνονται στο *X*, έχει την ιδιότητα ότι κάθε μονοπάτι το οποίο συνδέει κάθε κόμβο αυτού του συνόλου με τον καταληκτικό κόμβο *t*, περιέχει τουλάχιστον ένα μέλος του *X*.
- $S(X) = X \cup \bar{X}_1$

όπου V είναι το σύνολο των κόμβων, s είναι η πηγή και t οι καταληκτικοί κόμβοι του συστήματος. Επίσης, το A το οποίο θα δούμε παρακάτω αντιπροσωπεύει το σύνολο των τόξων του δικτύου και $G=(V,A)$ είναι το κατευθυνόμενο δίκτυο. Το μήκος τόξου $(u,v)\in A$ υποδηλώνεται από το $T_{(u,v)}$, το οποίο είναι μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda_{(u,v)}$.

Παράδειγμα: Στο δίκτυο που απεικονίζεται παρακάτω, εάν θεωρήσουμε $X=(1,2)$, δηλαδή $\bar{X}=(3,4,5)$ τότε $\bar{X}_1=\varnothing$ και $S(X)=(1,2)$. Ωστόσο, εάν θεωρήσουμε $X=(1,4)$, δηλαδή $\bar{X}=(2,3,5)$ τότε το μόνο μονοπάτι που συνδέει τον κόμβο (2) με τον κόμβο (5) είναι αυτό που περνάει από τον κόμβο (4). Ο κόμβος (3) δεν ανήκει στο $\bar{X}_1$ γιατί μπορεί να συνδεθεί άμεσα με τον κόμβο (5) και το μονοπάτι 3-5 δεν περιλαμβάνει κανένα κόμβο του Χ. Έτσι, $\bar{X}_1=(2)$ και $S(X)=(1,2,4)$.



Σχήμα 2.4: Γράφημα παραδείγματος

Ορισμός 2:

$$\Omega=\{X\subset V,\ X=S(X)\} \tag{2.28}$$

$$\Omega^*=\Omega\cup V \tag{2.29}$$

Για το παραπάνω παράδειγμα ισχύει:

$\Omega^*=\{(1),(1,2),(1,3),(1,2,3),(1,2,4),(1,2,3,4),(1,2,3,4,5)\}$, όπου τα πρώτα έξι στοιχεία του Ω^* είναι στοιχεία του Ω, ενώ το τελευταίο στοιχείο του Ω^* είναι το V.

<u>*Ορισμός 3*</u>: Εάν $X \subset V$ τέτοιο ώστε $s \in X$ και $t \in \bar{X}$, τότε μια τομή (cut) ορίζεται ως $C\left(X,\bar{X}\right)=\left\{(u,v)\in A,\ \ u\in X, v\in \bar{X}\right\}$, όπου *A* είναι το σύνολο τόξων.

Υπάρχει μια μοναδική ελάχιστη τομή στο $C\left(X,\bar{X}\right)$ και ορίζεται ως $C\left(X\right)$. Εάν $X \in \Omega$ τότε $C\left(X,\bar{X}\right)=C\left(X\right)$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι $\left\{Z\left(t\right), t\geq 0\right\}$ είναι μια συνεχής ως προς το χρόνο ανέλιξη Markov, με χώρο καταστάσεων Ω^*. Συνεπώς, σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ανά πάσα στιγμή πριν φτάσει το μήνυμα στον καταληκτικό κόμβο, θα πρέπει ο κόμβος πηγή *s* (*source node*) να ανήκει στο X, και ο καταληκτικός κόμβος *t* να ανήκει στο $\bar{X}$.

Ο απειροστικός <u>γεννήτορας πίνακας</u> (*generator matrix*) αυτής της διαδικασίας, ορίζεται από τη σχέση

$$Q=\left[q\left(X,Y\right)\right],\left(X,Y\in\Omega^*\right) \tag{2.30}$$

όπου:

$$q\left(X,Y\right)=\begin{cases}\sum\limits_{(u,v)\in C(X)}\lambda_{(u,v)}, & \text{εάν } \mathrm{Y}=\Sigma\left(\mathrm{X}\cup\{u\}\right)\\ -\sum\limits_{(u,v)\in C(X)}\lambda_{(u,v)}, & \text{εάν } \mathrm{Y}=\mathrm{X}\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases} \tag{2.31}$$

Οι καταστάσεις του Ω^* ταξινομούνται ώστε εάν $s_1 < s_2$, τότε το s_1 γίνεται s_2. Επομένως, ο παραπάνω πίνακας γίνεται άνω τριγωνικός. Έτσι η κατάσταση που συμβολίζεται με 1 αντιπροσωπεύει τον κόμβο πηγή, ενώ το *V* συμβολίζεται με *N*.

Έστω ότι το *T* αντιπροσωπεύει το μήκος της συντομότερης διαδρομής σε αυτό το E-network. Κατά συνέπεια, είναι σαφές ότι $T=\min\left\{t>0: Z\left(t\right)=N,\ \ Z\left(0\right)=1\right\}$. Συνεπώς, το μήκος τη συντομότερης διαδρομής του δικτύου είναι ίσο με το χρονικό διάστημα μέχρι το $\left\{Z\left(t\right),t\geq 0\right\}$ να απορροφηθεί στην τελική κατάσταση *N*, ξεκινώντας από την κατάσταση 1. Στόχος είναι να υπολογιστεί το $F\left(T\right)=P\left\{T\leq t\right\}$, δηλαδή η συνάρτηση κατανομής του στοχαστικού δικτύου.

Οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov μπορούν να εφαρμοστούν για τον υπολογισμό της $F\left(T\right)$. Ορίζεται, $P_i\left(t\right)=P\left\{Z\left(t\right)=N,\ \ Z\left(0\right)=i\right\}, i=1,2,...,N$. Επομένως, $F\left(T\right)=P_1\left(t\right)$.

Χρησιμοποιώντας το backward αλγόριθμο των Chapman-Kolmogorov, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων για το διάνυσμα $P(t)=\left[P_1(t),P_2(t),...,P_N(t)\right]^T$ δίνεται από $\dot{P}(t)=Q\cdot P(t)$, $P(0)=[0,0,...,1]^T$. Εδώ, το $P(t)$ αντιπροσωπεύει το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος και το Q είναι ο απειροστικός γεννήτορας πίνακας της στοχαστικής διαδικασίας $\{Z(t),t\geq 0\}$. Χρησιμοποιώντας το πλεονέκτημα της δομής του άνω τριγωνικού πίνακα Q , οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν εύκολα.

Αφού υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής της συντομότερης διαδρομής του E-network, $F(T)$, μπορεί να υπολογιστεί και η συνάρτηση αξιοπιστίας του συστήματος σε αναμονή σύμφωνα με τη σχέση (2.27).

Ο περιορισμός της συγκεκριμένης μεθόδου είναι ότι ο χώρος κατάστασης της συνεχούς ως προς το χρόνο ανέλιξης Markov μπορεί να αυξηθεί εκθετικά με το μέγεθος δικτύου. Έτσι, για μια πλήρη κατασκευή δικτύου με l κόμβους και $l(l-1)$ τόξα, το μέγεθος του χώρου καταστάσεων θα είναι $2^{l-2}+1$. Θα πρέπει να σημειώσουμε ακόμα, ότι για πολύ μεγάλα δίκτυα κάθε μέθοδος παραγωγής ικανοποιητικής ακρίβειας απαντήσεων είναι «απαγορευτικά» δαπανηρή.

Το συγκεκριμένο μοντέλο είναι δυνατό να επεκταθεί σε συστήματα εξαρτώμενα από το χρόνο, όταν τα στοιχεία δεν έχουν σταθερό ρυθμό διακινδύνευσης. Είναι επίσης δυνατό να βελτιστοποιηθεί ένα σύστημα στο οποίο οι ρυθμοί διακινδύνευσης των στοιχείων του ενδέχεται να είναι ελεγχόμενοι. Εάν η τιμή αγοράς του κάθε στοιχείου εξαρτάται από τη διάρκεια ζωής του, τότε είναι δυνατόν να μεγιστοποιηθεί ο μέσος χρόνος έως την αποτυχία του συστήματος σε σχέση με το συνολικό κόστος αγοράς των στοιχείων, (Azaron *et al.*, 2003).

3 Η "UGF" μέθοδος

Το παρόν κεφάλαιο είναι βασισμένο στο βιβλίο του Gregory Levitin "The Universal Generating Function in Reliability Analysis and Optimization, 2005.

Αφθονία μεθόδων βελτιστοποίησης έχει χρησιμοποιηθεί για την επίλυση διάφορων προβλημάτων αξιοπιστίας. Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι είτε ευρετικοί (*heuristics*), είτε συγκεκριμένες διαδικασίες που βασίζονται κυρίως σε τροποποιήσεις του δυναμικού ή γραμμικού προγραμματισμού. Οι περισσότερες μέθοδοι είναι ιδιαίτερα προσανατολισμένες για συγκεκριμένα προβλήματα, δηλαδή έχουν σχεδιαστεί για την επίλυση ορισμένων μόνο προβλημάτων και δεν είναι δυνατό να προσαρμοστούν για την επίλυση άλλων προβλημάτων.

Τα τελευταία χρόνια, πολλές μελέτες οι οποίες σχετίζονται με τη βελτιστοποίηση της αξιοπιστίας χρησιμοποιούν μια καθολική (*universal*) προσέγγιση που βασίζεται σε metaheuristics αλγόριθμους (ο όρος metaheuristics σημαίνει την επίλυση ευρέος φάσματος προβλημάτων βελτιστοποίησης). Με αυτήν την καθολική προσέγγιση θα ασχοληθούμε στο συγκεκριμένο κεφάλαιο.

Οι metaheuristics δύσκολα εξαρτώνται από την ιδιαιτερότητα του προβλήματος, για αυτό μπορούν να προσαρμοστούν για την επίλυση μεγάλης ποικιλίας προβλημάτων βελτιστοποίησης. Σημαντικό γνώρισμά τους είναι ότι βασίζονται σε τεχνητή λογική (*artificial reasoning*) και όχι στον κλασικό μαθηματικό προγραμματισμό. Κύριο πλεονέκτημά τους είναι ότι δεν απαιτούν καμία πληροφορία για την αντικειμενική συνάρτηση (*objective function*), εκτός από τις τιμές της που αντιστοιχούν στα σημεία του χώρου λύσεων. Όλοι οι *metaheuristics* χρησιμοποιούν την ιδέα της τυχαιότητας κατά την εκτέλεση μιας αναζήτησης. Επίσης χρησιμοποιούν προηγούμενες γνώσεις ώστε να καθοδηγήσουν την αναζήτηση. Αλγόριθμοι αναζήτησης τέτοιου είδους είναι γνωστοί σαν τεχνικές τυχαιοποιημένης αναζήτησης (*randomized search techniques*).

UGF είναι τα αρχικά της τεχνικής *Universal Generating function* και ανήκει στους *metaheuristics*. Η τεχνική αυτή εισήχθηκε για πρώτη φορά από τον Ushakov *et al.*, (1986) και αποδείχθηκε πολύ αποτελεσματική για την αξιολόγηση της διαθεσιμότητας των συστημάτων πολλαπλής κατάστασης (*Multi-state-systems*) (MSS). Επομένως, μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και για την αξιολόγηση αξιοπιστίας δυαδικών συστημάτων. Ενώ δεν είχε προταθεί ακόμη κάποια γενική συστηματική προσέγγιση για το ευρύ φάσμα τύπων συστήματος, ο Levitin στο βιβλίο του απέδειξε την ικανότητα της UGF προσέγγισης να χειριστεί ποικίλα προβλήματα αξιολόγησης αξιοπιστίας για τους διαφορετικούς τύπους δυαδικών συστημάτων.

3.1 Γενετικοί Αλγόριθμοι (Genetic Algorithms)

Η οικογένεια των γενετικών αλγορίθμων (*genetic algorithms, GAs*) βασίζεται στην απλή αρχή της εξελικτικής αναζήτησης στο χώρο λύσεων. Είναι εμπνευσμένοι από τη διαδικασία βελτιστοποίησης που υπάρχει στη φύση – το βιολογικό φαινόμενο της εξέλιξης. Η ιδέα αναπτύχθηκε από τον John Holland (1975) στο πανεπιστήμιο του Michigan και περιγράφηκε για πρώτη φορά σε βιβλίο του.

Η εφαρμογή των γενετικών αλγορίθμων επιτρέπει την επίλυση πρακτικών προβλημάτων στα οποία υπάρχουν συστήματα με πολλά διαφορετικά στοιχεία αλλά δεν υπάρχουν διαθέσιμες αλληλεξαρτήσεις ή πληροφορίες για τα στοιχεία αυτά (κάθε στοιχείο χαρακτηρίζεται από την ικανότητα, την αξιοπιστία του και το κόστος του). Οι γενετικοί αλγόριθμοι για παράδειγμα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε προβλήματα ελαχιστοποίησης κόστους. Στα συγκεκριμένα προβλήματα, ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος του συστήματος που υπόκεινται στην απαίτηση να καλυφθεί το επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας. Οι αλγόριθμοι αυτοί συνήθως χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με την *universal generating function* σε συστήματα πολλαπλών καταστάσεων. Η UGF, χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της αξιοπιστίας, ενώ οι GA χρησιμοποιούνται για τη βελτιστοποίηση των λύσεων, ιδιαίτερα όταν δεν υπάρχουν πληροφορίες για τις λύσεις αυτές, (Levitin *et al.*, 1996). Η εφαρμογή των γενετικών αλγορίθμων είναι ευρέως διαδεδομένη, αφού παρουσιάζουν τα ακόλουθα πλεονεκτήματα:

- Μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν και να εφαρμοστούν.
- Συνήθως συγκλίνουν γρήγορα σε ικανοποιητικές λύσεις.
- Μπορούν εύκολα να χειριστούν προβλήματα βελτιστοποίησης τα οποία έχουν πολλούς περιορισμούς.
- Παράγουν ταυτόχρονα μια ποικιλία ικανοποιητικών λύσεων, η οποία είναι σημαντική για τη διαδικασία «λήψης απόφασης» (Levitin, 2005).

Οι γενετικοί αλγόριθμοι ανήκουν στην κατηγορία των ευρετικών αλγορίθμων αναζήτησης, οι οποίοι χρειάζονται μόνο εκτιμήσεις ποιοτικών λύσεων και δεν χρειάζονται πληροφορίες παραγώγων για να καθορίσουν την επόμενη κατεύθυνση αναζήτησης. Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι οι περισσότερο χρησιμοποιημένοι ευρετικοί αλγόριθμοι και είναι ένα αποτελεσματικό εργαλείο βελτιστοποίησης για πολλές εφαρμογές. Στη μηχανική αξιοπιστία έχουν εφαρμοστεί αποτελεσματικά για την επιλογή του επιπέδου βελτιστοποίησης αξιοπιστίας του στοιχείου αλλά και για τη βελτιστοποίηση των εφεδρικών στοιχείων του συστήματος. Παρόλο που οι γενετικοί αλγόριθμοι δε μπορούν να εγγυηθούν θεωρητικά ότι έχει ληφθεί η ακριβής βέλτιστη λύση για τα συνδυαστικά πρακτικά προβλήματα μετρίου μεγέθους, παρέχουν την καλύτερη δυνατή λύση (Levitin, 2005).

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα οι γενετικοί αλγόριθμοι εμπνεύστηκαν από τη βιολογική γενετική. Λειτουργούν με χρωμοσωμική (*chromosomal*) εκπροσώπηση των λύσεων. Η χρωμοσωμική εκπροσώπηση αποτελεί την κωδικοποίηση της λύσης σαν μια πεπερασμένη συμβολοσειρά. Οι γενετικοί αλγόριθμοι διατηρούν ένα πληθυσμό διαφορετικών λύσεων που τους επιτρέπει να «ζευγαρώσουν», να παράγουν απόγονους, να μεταλλάσσονται και να αγωνίζονται για την επιβίωση. Σε αντίθεση με διάφορα είδη εποικοδομητικών αλγορίθμων που χρησιμοποιούν εξελιγμένες μεθόδους για την απόκτηση μιας καλής μοναδικής λύσης, οι γενετικοί αλγόριθμοι ασχολούνται με μια σειρά λύσεων η οποία ονομάζεται πληθυσμός και τείνει να χειραγωγήσει κάθε λύση με τον απλούστερο τρόπο. Παρακάτω παραθέτουμε βασικά βήματα του γενετικού αλγόριθμου:

1. Πριν από όλα δημιουργείται ένας αρχικός πληθυσμός από N_s τυχαία κατασκευασμένες λύσεις (σειρές).
2. Επιλέγονται τυχαία δύο λύσεις και παράγουν μια νέα, η οποία ονομάζεται απόγονος (*offspring*), χρησιμοποιώντας μια διαδικασία διασταύρωσης (*crossover*) που παρέχει την κληρονομικότητα κάποιων βασικών ιδιοτήτων από τις γονεϊκές σειρές (*parent strings*) στους απόγονους.
3. Επιτρέπεται η μετάλλαξη των απόγονων με πιθανότητα p_m. Η μετάλλαξη έχει ως αποτέλεσμα μικρές αλλαγές στη δομή των απογόνων, αλλά διατηρούν την ποικιλομορφία των λύσεων. Η διαδικασία αυτή αποτρέπει την πρόωρη σύγκλιση σε ένα τοπικό βέλτιστο και διευκολύνει «άλματα» στο χώρο λύσης.
4. Αποκωδικοποιούνται οι αλγόριθμοι για την απόκτηση των κατάλληλων τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτές οι τιμές είναι ένα μέτρο ποιότητας το οποίο χρησιμοποιείται για τη σύγκριση διάφορων τιμών.
5. Εφαρμόζεται μια διαδικασία επιλογής που συγκρίνει τον καινούριο απόγονο με αυτόν που έχει τη χειρότερη λύση στον πληθυσμό. Έπειτα, επιλέγεται αυτός που έχει την καλύτερη λύση. Ο απόγονος με την καλύτερη λύση εντάσσεται στον πληθυσμό και αυτός με τη χειρότερη απορρίπτεται. Εάν ο πληθυσμός περιέχει ισοδύναμες λύσεις μετά τη διαδικασία επιλογής, τότε το πλεόνασμα απορρίπτεται και ως εκ τούτου το μέγεθος του πληθυσμού μειώνεται.
6. Δημιουργούνται νέες τυχαία κατασκευασμένες λύσεις για την ανασυγκρότηση του πληθυσμού μετά τα επαναλαμβανόμενα βήματα 2 έως 5, N_{rep} φορές (ή μέχρι ο πληθυσμός να περιέχει μια ενιαία λύση ή λύσεις ίδιας ποιότητας). «Τρέχει» ένας νέος γενετικός κύκλος (επιστρέφει στο βήμα 2).
7. Τερματίζεται ο γενετικός αλγόριθμος έπειτα από N_c γενετικούς κύκλους.

Ο τελικός πληθυσμός περιέχει την καλύτερη από όλες τις λύσεις που παράχθηκε κατά τη διάρκεια της γενετικής διαδικασίας αλλά και διαφορετικές σχεδόν βέλτιστες λύσεις οι οποίες μπορεί να έχουν ενδιαφέρον για τη λήψη αποφάσεων, (Levitin *et al*., 1998).

3.2 Ορισμός της UGF

Για να παρουσιάσουμε την *universal generating function* μέθοδο, θα αναφέρουμε αρχικά κάποιους απλούς ορισμούς της θεωρίας πιθανοτήτων.

Θεωρούμε λοιπόν μια τυχαία μεταβλητή X η οποία μπορεί να πάρει πεπερασμένο αριθμό τιμών.

- Η κατανομή πιθανότητας της μεταβλητής αυτής μπορεί να αντιπροσωπευθεί από το πεπερασμένο διάνυσμα $X=(x_0,...,x_k)$ το οποίο αποτελείται από τις πιθανές τιμές του X και από το πεπερασμένο διάνυσμα p το οποίο αποτελείται από τις αντίστοιχες πιθανότητες $p_i = P(X=x_i)$. Είναι γνωστό ότι $\sum_{i=0}^{k} p_i = 1$.
- Η <u>αναμενόμενη τιμή</u> *(expected value)* της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως ο <u>σταθμισμένος μέσος</u> *(weighted average)* των τιμών που παίρνει η X και δίνεται από τον τύπο:

$$\sum_{i=0}^{k} x_i p_i \tag{3.1}$$

- Η <u>ροπογεννήτρια συνάρτηση</u> (*moment-generating function*), $m(t)$ της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται για όλες τις τιμές του t ως:

$$m(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{i=0}^{k} e^{tx_i} p_i \tag{3.2}$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάστηκε *moment-generating function* γιατί μπορούμε να λάβουμε επιτυχώς όλες τις ροπές (moments) της τυχαίας μεταβλητής X διαφορίζοντας την $m(t)$,για την τιμή $t=0$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} &m'(0) = E(X) \\ &m''(0) = E\left(X^2\right),..., \\ &m^{(n)}(0) = E\left(X^n\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση e^t στη σχέση (3.2) με τη μεταβλητή z, παίρνουμε ακόμα μία συνάρτηση που σχετίζεται με την τυχαία μεταβλητή X και προσδιορίζει μοναδικά τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Παίρνουμε δηλαδή την :

$$\omega(z) = E\left(z^x\right) = \sum_{i=0}^{k} z^{x_i} p_i \tag{3.4}$$

Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται συνήθως γεννήτρια συνάρτησης πιθανότητας ή αλλιώς z-μετασχηματισμός *(z-transform)* της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X. Η *z-transform* διατηρεί κάποιες βασικές ιδιότητες της $m(t)$. Μια τέτοια ιδιότητα είναι ότι η πρώτη παράγωγος της $\omega(z)$ είναι ίση με $E(X)$ για $z=1$. Δηλαδή, $\omega'(1)=E(X)$.

Για τον ορισμό της *Universal Generating Function* θα θεωρήσουμε *n* ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι οι $X_1,...,X_n$. Υποθέτουμε ότι κάθε τυχαία μεταβλητή X_i έχει συνάρτηση πιθανότητας και αντιπροσωπεύεται από τα διανύσματα x_i, p_i. Για την αξιολόγηση μιας οποιασδήποτε συνάρτησης $f(X_1,...,X_n)$ θα πρέπει να υπολογιστούν τα διανύσματα y και q. Το διάνυσμα y δίνει όλες τις δυνατές τιμές της $f(X_1,...,X_n)$, ενώ το διάνυσμα q εκφράζει την πιθανότητα που έχει η συνάρτηση να πάρει τις τιμές αυτές.

Κάθε πιθανή τιμή της συνάρτησης f αντιστοιχεί σε ένα συνδυασμό των τιμών $X_1,...,X_n$. Ο συνολικός αριθμός των πιθανών συνδυασμών είναι:

$$K=\prod_{i=1}^{n}(k_i+1) \tag{3.5}$$

όπου (k_i+1) είναι ο αριθμός των διαφορετικών πραγματοποιήσεων (*realizations*) των τυχαίων μεταβλητών X_i.

Η πιθανότητα του j^{th} συνδυασμού των πραγματοποιήσεων των μεταβλητών δίνεται ως εξής:

$$q_j=\prod_{i=1}^{n} p_{ij_i} \tag{3.6}$$

όπου p_{ij_i} είναι η πιθανότητα του στοιχείου *i* να βρίσκεται στην κατάσταση j_i,

και η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης είναι:

$$f_j=f\left(x_{1j_1},...,x_{nj_n}\right) \tag{3.7}$$

Κάποιοι διαφορετικοί συνδυασμοί είναι πιθανό να παράγουν ίδιες τιμές για τη συνάρτηση f. Τότε οι συνδυασμοί αυτοί αλληλοπροστίθενται. Επομένως, η πιθανότητα να πάρει η συνάρτηση κάποια τιμή είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των συνδυασμών που παράγουν αυτή την τιμή. Έστω A_h το σύνολο των συνδυασμών που παράγουν την f_h. Εάν ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών συνδυασμών της συνάρτησης $f\left(X_1,...,X_n\right)$ είναι H, τότε η συνάρτηση πιθανότητας της συνάρτησης είναι:

$$y=\left(f_h:1\le h\le H\right),\ q=\left(\sum_{\left(x_{1j_1},...,x_{nj_n}\right)\in A_h}\prod_{i=1}^{n}p_{ij_i}:1\le h\le H\right) \tag{3.8}$$

Η z-transform κάθε τυχαίας μεταβλητής X_i παρουσιάζει τη συνάρτηση πιθανότητάς της $\left(x_{i0},...,x_{ik_i}\right)$, $\left(p_{i0},...,p_{ik_i}\right)$ στην πολυωνυμική μορφή:

$$u_i\left(z\right)=\sum_{j=0}^{k_i}p_{ij}z^{x_{ij}} \tag{3.9}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα $\omega_{\sum_{i=1}^{n}X_i}=\prod_{i=1}^{n}\omega_{X_i}\left(z\right)$, το γινόμενο των z-transform πολυωνύμων που αντιστοιχεί στις μεταβλητές $X_1,...,X_n$ προσδιορίζει τη συνάρτηση πιθανότητας του αθροίσματος των μεταβλητών αυτών.

Ομοίως, μπορούμε να εξασφαλίσουμε την z-transform πολυωνύμων που αντιστοιχεί στην αυθαίρετη συνάρτηση *f*, αντικαθιστώντας το γινόμενο των πολυωνύμων με ένα πιο γενικό και σύνθετο τελεστή $\underset{f}{\otimes}$ πάνω από τις z-transform αντιστοιχίες της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας *n* ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών:

$$\underset{f}{\otimes}\left(\sum_{j_i=0}^{k_i}p_{ij_i}z^{x_{ij_i}}\right)=\sum_{j_1=0}^{k_1}\sum_{j_2=0}^{k_2}...\sum_{j_n=0}^{k_n}\left(\prod_{i=0}^{n}p_{ij_i}z^{f\left(x_{ij_1},...,x_{nj_n}\right)}\right) \tag{3.10}$$

Η τεχνική που βασίζεται στη χρήση της z-transform όπως επίσης και σε σύνθετους τελεστές $\underset{f}{\otimes}$ ονομάζεται **universal z-transform** ή **universal (moment) generating function UGF** . Στο πλαίσιο αυτής της τεχνικής, η z-transform μιας τυχαίας μεταβλητής για την οποία έχει οριστεί ο τελεστής $\underset{f}{\otimes}$, αναφέρεται σαν η u-function της. Θα αναφερόμαστε στη u-function της τυχαίας μεταβλητής X_i σαν $u_i\left(z\right)$ και στην u-function της συνάρτησης $f\left(X_1,...,X_n\right)$ σαν $U\left(z\right)$. Ως εκ τούτου, θα ισχύει:

$$U\left(z\right)=\underset{f}{\otimes}\left(u_1\left(z\right),u_2\left(z\right),...,u_n\left(z\right)\right) \tag{3.11}$$

όπου $u_i(z)$ παίρνει τη μορφή $\sum_{j=0}^{k} p_{ij} z^{x_{ij}}$

και η $U(z)$ τη μορφή (3.10).

Για παράδειγμα, εάν έχουμε δύο u-functions τις $u_1(z)$, $u_2(z)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο εναλλακτικούς συμβολισμούς:

$$U(z) = \underset{f}{\otimes}\big(u_1(z), u_2(z)\big) = u_1(z) \otimes u_2(z) \tag{3.12}$$

Οι U-functions έχει αποδειχτεί ότι είναι πολύ αποτελεσματικές για συνδυαστικά προβλήματα μεγάλων διαστάσεων καθώς οι συναρτήσεις αυτές επεκτείνουν την ευρέως γνωστή ροπογεννήτρια συνάρτηση.

Η u-function μπορεί να μοιάζει με πολυώνυμο, αλλά δεν είναι και αυτό ισχύει διότι:

- Οι συντελεστές και οι εκθέτες της δεν είναι κατ' ανάγκη βαθμωτές μεταβλητές, αλλά μπορεί να είναι μαθηματικά αντικείμενα (πχ διανύσματα).

- Οι τελεστές που ορίζονται πάνω στις u-functions μπορεί να διαφέρουν από τον τελεστή του γινομένου πολυωνύμων. (Σε αντίθεση με τη συνήθη z-transform, όπου ορίζεται μόνο το γινόμενο πολυωνύμων.)

Όταν η u-function $U(z)$ αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας συνάρτησης $f(X_1, ..., X_n)$, η αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης αυτής μπορεί να εξασφαλιστεί ως η πρώτη παράγωγος της $U(z)$ για $z = 1$ (σαν μια αναλογία με την κανονική z-transform).

Γενικά οι u-functions δε χρησιμοποιούνται μόνο για τον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών. Υπάρχουν κι άλλες εφαρμογές στις οποίες οι συντελεστές των όρων στις u-functions αντιπροσωπεύουν χαρακτηριστικά πιθανοτήτων κάποιων αντικειμένων ή κωδικοποιημένων καταστάσεων μέσω του εκθέτη των όρων αυτών.

Πολύ σημαντικό για τις u-functions είναι το γεγονός ότι έχουν μια κοινή ιδιότητα με τα πολυώνυμα. Η ιδιότητα αυτή είναι η αναγωγή ομοίων όρων. Πράγματι, εάν μια u-function η οποία αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής *X*, περιέχει τους όρους $p_k z^{x_k}$ και $p_m z^{x_m}$ για τους οποίους ισχύει ότι $x_k = x_m$, τότε αυτοί οι δύο όροι μπορούν να αντικατασταθούν από ένα μόνο όρο, τον $(p_k + p_m) z^{x_m}$, αφού σε αυτήν την περίπτωση:

$$P\{X = x_k\} + P\{X = x_m\} = p_k + p_m \tag{3.13}$$

Η τεχνική που περιγράψαμε η οποία προσδιορίζει τη συνάρτηση πιθανότητας των συναρτήσεων βασίζεται σε μια προσέγγιση απαρίθμησης η οποία απαιτεί υπερβολική κατανάλωση πόρων. Η u-function που προκύπτει περιέχει K όρους σύμφωνα με τον τύπο $K = \prod_{i=1}^{n}(k_i + 1)$ που αναφέραμε και παραπάνω και χρειάζεται υπερβολικά μεγάλο χώρο αποθήκευσης. Για να φτάσουμε στην $U(z)$ πρέπει να εκτελέσουμε $(n-1)\cdot K$ διαδικασίες πολλαπλασιασμού πιθανοτήτων και K διαδικασίες αξιολόγησης συνάρτησης. Ευτυχώς, πολλές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στη μηχανική αξιοπιστία (reliability engineering) παράγουν τις ίδιες τιμές για διαφορετικούς συνδυασμούς τιμών των παραμέτρων τους. Ο συνδυασμός αναδρομικών (επαναλαμβανόμενων) προσδιορισμών των συναρτήσεων με τεχνικές απλούστευσης που βασίζεται στην αναγωγή ομοίων όρων, μας επιτρέπει να περιορίσουμε σημαντικά την υπολογιστική επιβάρυνση που σχετίζεται με την αξιολόγηση της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας πολύπλοκων ή σύνθετων συναρτήσεων.

Το πρόβλημα ανάλυσης αξιοπιστίας του συστήματος περιλαμβάνει συνήθως την αξιολόγηση της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας κάποιων τυχαίων τιμών που χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά του συστήματος. Οι τιμές αυτές μπορεί να είναι σύνθετες συναρτήσεις μεγάλου αριθμού τυχαίων μεταβλητών. Η σαφής παραγωγή αυτών των συναρτήσεων είναι ένα εξαιρετικά περίπλοκο έργο. Η Universal Generating Function μέθοδος όμως, επιτρέπει την απόκτηση της u-function του συστήματος αναδρομικά (κατ' επανάληψη). Η ιδιότητα αυτή της Universal Generating Function μεθόδου βασίζεται στην προσεταιριστική ιδιότητα πολλών συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται στη μηχανική αξιοπιστία. Η αναδρομική προσέγγιση προϋποθέτει την απόκτηση u-functions υποσυστημάτων που περιέχουν διάφορα βασικά στοιχεία και στη συνέχεια την αντιμετώπιση του υποσυστήματος σαν ένα ενιαίο στοιχείο με τη u-function που λαμβάνεται κατά τον υπολογισμό της u-function ενός υποσυστήματος που βρίσκεται στο υψηλότερο επίπεδο. Συνδυάζοντας την αναδρομική προσέγγιση με την τεχνική απλούστευσης μειώνεται ο αριθμός των όρων των ενδιάμεσων u-functions και έτσι παρέχεται η δραστική μείωση του υπολογιστικού φόρτου.

3.3 Ιδιότητες του σύνθετου τελεστή $\underset{f}{\otimes}$ και των u-functions

Οι ιδιότητες του σύνθετου τελεστή $\underset{f}{\otimes}$ εξαρτώνται αυστηρά από τις ιδιότητες της συνάρτησης $f(X_1,...,X_n)$. Δεδομένου ότι η διαδικασία πολλαπλασιασμού πιθανοτήτων αυτού του τελεστή είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική, ο τελεστής αυτός γενικά κατέχει αυτές τις ιδιότητες εάν τις διαθέτει η συνάρτηση. Εάν:

$$f(X_1,...,X_n) = f\left(f(X_1,X_2,...,X_{n-1}),X_n\right) \tag{3.14}$$

Τότε

$$U(z) = \underset{f}{\otimes}\left(u_1(z),u_2(z),...,u_n(z)\right) = \underset{f}{\otimes}\left(\underset{f}{\otimes}\left(u_1(z),u_2(z),...,u_{n-1}(z)\right),u_n(z)\right) \tag{3.15}$$

Επομένως μπορούμε να λάβουμε τη u-function $U(z)$ αναθέτοντας $U_1(z)=u_1(z)$ και εφαρμόζοντας τον τελεστή $\underset{f}{\otimes}$ διαδοχικά:

$$U_j(z) = \underset{f}{\otimes}\left(U_{j-1}(z),u_j(z)\right),\ \gamma\iota\alpha\ 2\le j\le n \tag{3.16}$$

έτσι ώστε τελικά να έχουμε $U(z)=U_n(z)$.

Εάν για κάθε *j* η συνάρτηση f έχει την προσεταιριστική ιδιότητα:

$$f\left(X_1,...,X_j,X_{j+1},...,X_n\right) = f\left(f\left(X_1,...,X_j\right), f\left(X_{j+1},...,X_n\right)\right) \tag{3.17}$$

Τότε ο τελεστής $\underset{f}{\otimes}$ έχει επίσης τη συγκεκριμένη ιδιότητα. Δηλαδή:

$$\underset{f}{\otimes}\left(u_1(z),...,u_n(z)\right) = \underset{f}{\otimes}\left(\underset{f}{\otimes}\left(u_1(z),...,u_j(z)\right)\underset{f}{\otimes}\left(u_{j+1}(z),...,u_n(z)\right)\right) \tag{3.18}$$

Εάν εκτός από την ιδιότητα (3.15), η συνάρτηση f είναι και αντιμεταθετική για κάθε *j*:

$$f\left(X_1,...,X_j,X_{j+1},...,X_n\right) = f\left(X_1,...,X_{j+1},X_j,...,X_n\right) \tag{3.19}$$

Τότε και για τον τελεστή $\underset{f}{\otimes}$ θα ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$\underset{f}{\otimes}\left(u_1(z),...,u_j(z),u_{j+1}(z),...,u_n(z)\right)=\underset{f}{\otimes}\left(u_1(z),...,u_{j+1}(z),u_j(z),...,u_n(z)\right) \tag{3.20}$$

Η σειρά των παραμέτρων της συνάρτησης $f\left(X_1,...,X_n\right)$ δεν είναι ουσιαστικής σημασίας και η u-function $U(z)$ μπορεί να βρεθεί με τη χρήση των επαναληπτικών διαδικασιών (3.14) και (3.16).

Εάν μια συνάρτηση έχει την εξής αναδρομική μορφή,

$$f\left(f_1\left(X_1,...,X_j\right),f_2\left(X_{j+1},...,X_h\right),...,f_m\left(X_l,...,X_n\right)\right) \tag{3.21}$$

Τότε, η αντίστοιχη u-function $U(z)$ μπορεί επίσης να ληφθεί αναδρομικά:

$$\underset{f}{\otimes}\left(\underset{f_1}{\otimes}\left(u_1(z),...,u_j(z),\underset{f_2}{\otimes}\left(u_{j+1}(z),...,u_h(z)\right),...,\underset{f_m}{\otimes}\left(u_l(z),...,u_n(z)\right)\right)\right) \tag{3.22}$$

Θεωρούμε τώρα μια τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας η οποία αντιπροσωπεύεται από τη u-function $u_X(z)=\sum_{j=0}^{k}p_j z^{x_j}$. Για να βρούμε τη u-function της συνάρτησης πιθανότητας της συνάρτησης $f(X,c)$ της μεταβλητής X και της σταθεράς c, εφαρμόζουμε τον παρακάτω τύπο:

$$U(z)=u_X(z)\underset{f}{\otimes}c=\left(\sum_{j=0}^{k}p_j z^{x_j}\right)\underset{f}{\otimes}c=\sum_{j=0}^{k}p_j z^{f(x_j,c)} \tag{3.23}$$

Αυτό αποδεικνύεται εύκολα εάν θεωρήσουμε τη σταθερά c σαν μια τυχαία μεταβλητή C, η οποία μπορεί να πάρει την τιμή του c με πιθανότητα 1. Η u-function μιας τέτοιας μεταβλητής παίρνει τη μορφή $u_c(z)=z^c$. Τέλος, εφαρμόζοντας τον τελεστή $\underset{f}{\otimes}$ στις συναρτήσεις $u_X(z)$, $u_c(z)$ παίρνουμε την (3.23).

3.4 Πως υιοθετείται η universal generating function τεχνική για την επίλυση διάφορων προβλημάτων.

Όπως έχουμε αναφέρει και νωρίτερα, σε ένα δυαδικό σύστημα ανάλυσης αξιοπιστίας κάθε στοιχείο όπως επίσης και ολόκληρο το σύστημα μπορεί να βρίσκεται σε δύο πιθανές καταστάσεις, λειτουργίας ή μη-λειτουργίας. Επομένως, η κατάσταση κάθε στοιχείου ή του συστήματος αντιπροσωπεύεται από μία δυαδική τυχαία μεταβλητή. Η τυχαία μεταβλητή X_j εκφράζει την κατάσταση του στοιχείου *j*. Επομένως, η X_j, παίρνει την τιμή $X_j = 1$ εάν το στοιχείο *j* βρίσκεται σε κατάσταση λειτουργίας και $X_j = 0$ εάν το στοιχείο *j* αποτυγχάνει. Όσο για την κατάσταση ολόκληρου του συστήματος έχουμε την τυχαία μεταβλητή X και είναι $X = 1$εάν το σύστημα λειτουργεί, διαφορετικά είναι $X = 0$.

Οι καταστάσεις όλων των *n* στοιχείων που συνθέτουν το σύστημα αντιπροσωπεύονται από το διάνυσμα κατάστασης στοιχείου (*element state vector*) $X_1,...,X_n$. Θεωρείται ότι οι καταστάσεις όλων των στοιχείων του συστήματος (η πραγματοποίηση του διανύσματος κατάστασης στοιχείου) αδιαμφισβήτητα προσδιορίζουν την κατάσταση του συστήματος. Έτσι, η σχέση που συνδέει το διάνυσμα κατάστασης στοιχείου $X_1,...,X_n$ με τη μεταβλητή κατάστασης του συστήματος X είναι η συνάρτηση:

$$X = \varphi\left(X_1,...,X_n\right) \tag{3.24}$$

και ονομάζεται συνάρτηση δομής του συστήματος (*system structure function*). Πολλές φορές, για να παρουσιαστεί η φύση της σχέσης μεταξύ των στοιχείων στο σύστημα, χρησιμοποιούνται τα μπλοκ διαγράμματα αξιοπιστίας.

Όταν ένα σύστημα έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει το έργο του, τότε η αξιοπιστία του συστήματος και των στοιχείων του ορίζεται σαν η πιθανότητα το σύστημα να εκπληρώσει την αποστολή του κατά τη διάρκεια του καθορισμένου χρόνου του, υπό καθορισμένες συνθήκες εργασίας. Η αξιοπιστία κάθε στοιχείου *j* του συστήματος θα είναι p_j και δίνεται από τον τύπο:

$$p_j = P\left\{X_j = 1\right\} \tag{3.25}$$

και για ολόκληρο το σύστημα η αξιοπιστία του *R* θα είναι:

$$R = P\left\{X = 1\right\} \tag{3.26}$$

Παρατηρούμε ότι η αξιοπιστία μπορεί να εκφραστεί και σαν η αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής της κατάστασης του συστήματος ή της κατάστασης των στοιχείων του συστήματος. Δηλαδή,

$$p_j = E\left(X_j\right) \text{ και } R = E\left(X\right) \tag{3.27}$$

Οι αξιοπιστίες των στοιχείων συνθέτουν το διάνυσμα αξιοπιστίας του στοιχείου (*element reliability vector*) $p = (p_1, ..., p_n)$. Συνήθως αυτό το διάνυσμα είναι γνωστό και μας ενδιαφέρει να βρούμε την αξιοπιστία του συστήματος συναρτήσει του *p*:

$$R = R(p) = R(p_1, ..., p_n) \tag{3.28}$$

Όταν ένα σύστημα λειτουργεί για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα χωρίς να έχει προσδιοριστεί ο χρόνος για την ολοκλήρωση της αποστολής, τότε θα πρέπει να ξέρουμε πως αλλάζει με την πάροδο του χρόνου η ικανότητα του συστήματος να εκτελέσει την αποστολή του. Και σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείται το δυναμικό μέτρο που λέγεται συνάρτηση αξιοπιστίας. Η συνάρτηση αξιοπιστίας του στοιχείου *j* είναι $p_j(t)$, ενώ ολόκληρου του συστήματος είναι $R(t)$ και ορίζεται ως η πιθανότητα του στοιχείου ή του συστήματος να εκπληρώσει την αποστολή του πέρα της χρονικής στιγμής *t*, υποθέτοντας ότι κατά την έναρξη της αποστολής το στοιχείο ή το σύστημα είναι σε κατάσταση λειτουργίας $p_j(0) = R(0) = 1$.

Εάν έχουμε λοιπόν συναρτήσεις αξιοπιστίας $p_j(t)$ με $(1 \le j \le n)$, συστήματος με ανεξάρτητα στοιχεία, τότε μπορούμε να πάρουμε την αξιοπιστία του συστήματος $R(t)$ χρησιμοποιώντας τη σχέση $R(p)$, την οποία ορίσαμε παραπάνω για καθορισμένο χρόνο αποστολής, αντικαθιστώντας όπου p_j, το $p_j(t)$.

Είναι γνωστό ότι σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις, τα στοιχεία του συστήματος που έχουν αποτύχει μπορούν να επιδιορθωθούν. Ενώ, οι αποτυχίες φέρνουν τα στοιχεία σε μία κατάσταση μη-λειτουργίας, οι επιδιορθώσεις που εκτελούνται σε αυτά τα επαναφέρουν σε κατάσταση λειτουργίας. Κατά τον τρόπο αυτό, η κατάσταση κάθε στοιχείου και η κατάσταση ολόκληρου του συστήματος μπορεί να αλλάξουν μεταξύ 0 και 1 πολλές φορές κατά τη διάρκεια της αποστολής του συστήματος. Εδώ, η πιθανότητα του στοιχείου ή του συστήματος να είναι ικανό να εκπληρώσει το έργο του σε δεδομένο χρόνο *t* εκφράζεται από τη συνάρτηση διαθεσιμότητας του στοιχείου ή του συστήματος αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} a_j(t) &= P\{X_j = 1\} \\ A(t) &= P\{X = 1\} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Για ένα επιδιορθώσιμο σύστημα, οι τυχαίες μεταβλητές $X_j = 1$ ή $X = 1$ υποδεικνύουν ότι το στοιχείο *j* ή το σύστημα αντίστοιχα μπορούν να φέρουν σε πέρας την αποστολή τους σε χρόνο *t* ανεξάρτητα από τις καταστάσεις που συνέβησαν πριν τη χρονική στιγμή *t*. Μια ιδιότητα που δεν αναφέραμε ως τώρα για τη διαθεσιμότητα είναι ότι εάν έχει περάσει αρκετός χρόνος από την αρχή της λειτουργίας του συστήματος, τότε η αρχική κατάσταση του συστήματος δεν έχει ουσιαστική επίδραση στη διαθεσιμότητα του. Ως εκ τούτου, οι διαθεσιμότητες των στοιχείων του συστήματος γίνονται συνεχείς. Δηλαδή:

$$a_j = \lim_{t\to\infty} a_j(t) \tag{3.30}$$

Έχοντας το <u>μακροπρόθεσμο μέσο όρο</u> (*long-run average*) των (σταθερής κατάστασης) διαθεσιμοτήτων των στοιχείων του συστήματος, μπορούμε να βρούμε τη σταθερής κατάστασης διαθεσιμότητα A του συστήματος αντικαθιστώντας στη σχέση $R = R(p) = R(p_1,...,p_n)$ το R με A και το p_j με a_j.

Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι επειδή όλα τα μέτρα αξιοπιστίας που παρουσιάζονται είναι πιθανότητες, η ίδια διαδικασία απόκτησης του μέτρου αξιοπιστίας του συστήματος από τα μέτρα αξιοπιστίας των στοιχείων του, μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις περιπτώσεις. Αυτή η διαδικασία προϋποθέτει:

- Την απόκτηση των πιθανοτήτων κάθε συνδυασμού καταστάσεων του στοιχείου από το διάνυσμα αξιοπιστίας του στοιχείου.
- Την απόκτηση της τιμής της μεταβλητής της κατάστασης του συστήματος για κάθε συνδυασμό καταστάσεων του στοιχείου (την πραγματοποίηση του διανύσματος κατάστασης του στοιχείου), χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση δομής του στοιχείου.
- Τον υπολογισμό την αναμενόμενης τιμής της μεταβλητής της κατάστασης του συστήματος από τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας που ορίζεται από το συνδυασμό πιθανοτήτων της κατάστασης του στοιχείου και τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης δομής.

Η διαδικασία που μόλις αναλύσαμε μπορεί να τυποποιηθεί χρησιμοποιώντας τη *universal generating function* μέθοδο. Στην πραγματικότητα, το διάνυσμα αξιοπιστίας στοιχείου $(p_1,...,p_n)$ προσδιορίζει τη συνάρτηση πιθανότητας κάθε δυαδικού στοιχείου και μπορεί να παρουσιαστεί με τη μορφή των u-functions:

$$u_j(z) = (1-p_j)z^0 + p_j z^1 \text{ για } 1 \le j \le n \tag{3.31}$$

Έχοντας τις u-functions των στοιχείων του συστήματος που αντιπροσωπεύουν τη συνάρτηση πιθανότητας των διακριτών τυχαίων μεταβλητών $X_1,...,X_n$ και τη συνάρτηση δομής του συστήματος $X = \varphi(\mathrm{X}_1,...,\mathrm{X}_n)$, μπορούμε να φτάσουμε στη u-function που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση πιθανότητας της μεταβλητής της κατάστασης του συστήματος X χρησιμοποιώντας το σύνθετο τελεστή $\underset{\varphi}{\otimes}$ στις u-functions των επιμέρους στοιχείων του συστήματος:

$$U(z) = \underset{\varphi}{\otimes}\left(u_1(z),...,u_n(z)\right) \tag{3.32}$$

Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε στο μέτρο αξιοπιστίας του συστήματος ως:

$$E(X) = U'(1) \tag{3.33}$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι η ίδια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί για οποιοδήποτε μέτρο αξιοπιστίας κι εάν θεωρήσουμε. Το μέτρο αξιοπιστίας του συστήματος (η αξιοπιστία αποστολής συγκεκριμένου χρόνου, η τιμή της συνάρτησης αξιοπιστίας σε μια συγκεκριμένη στιγμή ή η διαθεσιμότητα) αντιστοιχεί στα μέτρα αξιοπιστίας που χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν τις πιθανότητες κατάστασης των στοιχείων. Επομένως, χρησιμοποιούμε τον όρο αξιοπιστία και εννοούμε ότι οποιοδήποτε μέτρο αξιοπιστίας μπορεί να θεωρηθεί στη θέση της αξιοπιστίας (εάν κάποιο μέτρο δεν είναι ρητά ορισμένο).

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο συνολικός αριθμός των συνδυασμών των καταστάσεων των στοιχείων σε ένα σύστημα με *n* στοιχεία είναι ίσος με 2^n. Για συστήματα με μεγάλο αριθμό στοιχείων η τεχνική που παρουσιάστηκε σχετίζεται με τεράστιο αριθμό αξιολογήσεων της τιμής της συνάρτησης δομής (η u-function της μεταβλητής της κατάστασης του συστήματος X πριν την αναγωγή ομοίων όρων περιέχει 2^n όρους). Ευτυχώς, η συνάρτηση δομής μπορεί εύκολα να οριστεί αναδρομικά και η συνάρτηση πιθανότητας των ενδιάμεσων μεταβλητών που αντιστοιχούν σε ορισμένα υποσυστήματα μπορούν να ληφθούν.

Προκειμένου να μειωθεί ο αριθμός αριθμητικών πράξεων στο πλαίσιο εκτέλεσης διαδικασιών πολλαπλασιασμού όταν αποκτούνται οι u-functions των μεταβλητών του συστήματος, η u-function των δυαδικών στοιχείων που παίρνει τη μορφή:

$$u_j(z) = p_j z^1 + (1 - p_j) z^0 \tag{3.34}$$

μπορεί να αντιπροσωπευθεί από τον τύπο:

$$u_j(z) = p_j (z^1 + q_j z^0) \text{ όπου } q_j = p_j^{-1} - 1 \tag{3.35}$$

Παραγοντοποιώντας την πιθανότητα p_j από την $u_j(z)$ οδηγεί σε λιγότερους υπολογισμούς που σχετίζονται με τους τελεστές $U(z) \underset{\varphi}{\otimes} u_j(z)$ για κάθε $U(z)$ γιατί οι πολλαπλασιασμοί με 1 είναι σιωπηροί (*implicit*) . Η μέθοδος απλούστευσης που παρουσιάσαμε είναι αποτελεσματική σε αριθμητικές διαδικασίες.

Εφαρμογή 1

Θεωρούμε ένα σύστημα κλιματισμού το οποίο αποτελείται από δύο κλιματιστικά που τροφοδοτούνται από μία πηγή ενέργειας. Το σύστημα αποτυγχάνει εάν δε λειτουργεί ούτε ένα κλιματιστικό.

Τα δύο κλιματιστικά αποτελούν ένα υποσύστημα το οποίο αποτυγχάνει εάν και μόνο εάν αποτύχουν όλα τα στοιχεία του. Υποσυστήματα τέτοιου είδους ονομάζονται παράλληλα.

Υποθέτουμε ότι οι δύο δυαδικές τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 αντιπροσωπεύουν τις καταστάσεις των κλιματιστικών και η δυαδική τυχαία μεταβλητή X_c αντιπροσωπεύει την κατάσταση του υποσυστήματος. Η συνάρτηση δομής του υποσυστήματος μπορεί να εκφραστεί ως:

$$X_c = \varphi_{par}(X_1, X_2) = \max(X_1, X_2) = 1-(1-X_1)(1-X_2)$$

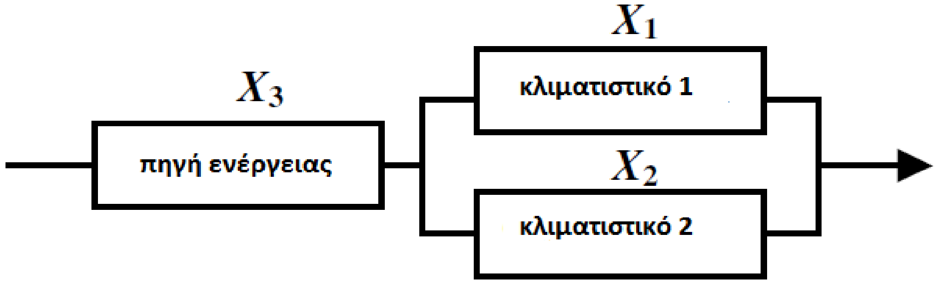
Η αποτυχία ολόκληρου του συστήματος μπορεί να προέλθει εάν αποτύχει είτε η πηγή ενέργειας, είτε το υποσύστημα με τα κλιματιστικά. Άρα, θα πρέπει να λειτουργούν και η πηγή ενέργειας και το υποσύστημα των κλιματιστικών. Ένα τέτοιο σύστημα που λειτουργεί εάν και μόνο εάν λειτουργούν όλα τα στοιχεία του ονομάζεται σειριακό. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η τυχαία δυαδική μεταβλητή X_3 εκφράζει την κατάσταση της πηγής ενέργειας. Η συνάρτηση δομής ολόκληρου του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$X = \varphi_{ser}(X_3, X_c) = \min(X_3, X_c) = X_3 X_c$$

Συνθέτοντας τους δύο παραπάνω τύπους παίρνουμε

$$\begin{aligned} X &= \varphi_{ser}(X_3, X_c) = \varphi_{ser}\big(X_3, \varphi_{par}(X_1, X_2)\big) \\ &= \min\big(X_3, \max(X_1, X_2)\big) = X_3\big(1-(1-X_1)(1-X_2)\big) \end{aligned}$$

Παραθέτουμε το μπλοκ διάγραμμα αξιοπιστίας το οποίο παρουσιάζει τη φύση της σχέσης μεταξύ των στοιχείων του συστήματος:



Σχήμα 3.1:Μπλοκ διάγραμμα αξιοπιστίας του συστήματος κλιματισμού

Υποθέτουμε ότι οι αξιοπιστίες των στοιχείων του συστήματος είναι γνωστές και τις συμβολίζουμε με p_1, p_2 και p_3. Αφού τα στοιχεία μας είναι ανεξάρτητα μπορούμε να λάβουμε την πιθανότητα κάθε πραγματοποίησης του διανύσματος κατάστασης στοιχείου $(X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3)$ ως

$$P\{X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap X_3 = x_3\} =$$
$$p_1^{x_1}(1-p_1)^{1-x_1}\ p_2^{x_2}(1-p_2)^{1-x_2}\ p_3^{x_3}(1-p_3)^{1-x_3}$$

Έχοντας τη συνάρτηση δομής του συστήματος $X = \min(X_3, \max(X_1, X_2))$ και την πιθανότητα κάθε πραγματοποίησης του διανύσματος κατάστασης στοιχείου μπορούμε να λάβουμε τις πιθανότητες κάθε κατάστασης του συστήματος η οποία ορίζει τη συνάρτηση πιθανότητας της μεταβλητής της κατάστασης του συστήματος.

Πίνακας 3.1: Συνάρτηση πιθανότητας της κατάστασης του συστήματος

Πραγματοποίηση του (X_1, X_2, X_3)	Πραγματοποίηση πιθανότητας	Πραγματοποίηση του X
0,0,0	$(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$	0
0,0,1	$(1-p_1)(1-p_2)p_3$	0
0,1,0	$(1-p_1)p_2(1-p_3)$	0
0,1,1	$(1-p_1)p_2p_3$	1
1,0,0	$p_1(1-p_2)(1-p_3)$	0
1,0,1	$p_1(1-p_2)p_3$	1
1,1,0	$p_1p_2(1-p_3)$	0
1,1,1	$p_1p_2p_3$	1

Η αξιοπιστία του συστήματος μπορεί τώρα να οριστεί ως η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X (η οποία είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των καταστάσεων που αντιστοιχούν στο $X = 1$):

$$R = E(X) = (1-p_1)p_2p_3 + p_1(1-p_2)p_3 + p_1p_2p_3$$
$$= \left[(1-p_1)p_2 + p_1(1-p_2) + p_1p_2\right]p_3 = (p_1 + p_2 - p_1p_2)p_3$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι οι συναρτήσεις αξιοπιστίας των στοιχείων του συστήματος είναι:

$$p_1(t) = e^{-\lambda_1 t}, \quad p_2(t) = e^{-\lambda_2 t}, \quad p_3(t) = e^{-\lambda_3 t}$$

Έτσι, η συνάρτηση αξιοπιστίας του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$R(t)=E\left(X(t)\right)=\left(p_1(t)+p_2(t)-p_1(t)\,p_2(t)\right)p_3(t)$$
$$=\left(e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_2 t}-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right)e^{-\lambda_3 t}$$

Οι u-functions των στοιχείων του συστήματος είναι:

$$u_1(z)=(1-p_1)z^0+p_1z^1,\quad u_2(z)=(1-p_2)z^0+p_2z^1,\quad u_3(z)=(1-p_3)z^0+p_3z^1$$

Χρησιμοποιώντας το σύνθετο τελεστή λαμβάνουμε τη u-function του συστήματος η οποία αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X:

$$U(z)=\underset{\varphi}{\otimes}\left(u_1(z),u_2(z),u_3(z)\right)$$

$$=\underset{\varphi}{\otimes}\left(\sum_{i=0}^{1}p_1^{\,i}(1-p_1)^{1-i}z^i,\sum_{k=0}^{1}p_2^{\,k}(1-p_2)^{1-k}z^k,\sum_{m=0}^{1}p_3^{\,m}(1-p_3)^{1-m}z^m\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\sum_{m=0}^{1}p_1^{\,i}(1-p_1)^{1-i}\,p_2^{\,k}(1-p_2)^{1-k}\,p_3^{\,m}(1-p_3)^{1-m}\,z^{\min\left(\max(i,k),m\right)}$$

Η u-function που προκύπτει έχει τη μορφή

$$U(z)=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)z^{\min\left(\max(0,0),0\right)}+(1-p_1)(1-p_2)p_3z^{\min\left(\max(0,0),1\right)}$$

$$+(1-p_1)p_2(1-p_3)z^{\min\left(\max(0,1),0\right)}+(1-p_1)p_2p_3z^{\min\left(\max(0,1),1\right)}$$

$$+p_1(1-p_2)(1-p_3)z^{\min\left(\max(1,0),0\right)}+p_1(1-p_2)p_3z^{\min\left(\max(1,0),1\right)}$$

$$+p_1p_2(1-p_3)z^{\min\left(\max(1,1),0\right)}+p_1p_2p_3z^{\min\left(\max(1,1),1\right)}$$

$$=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)z^0+(1-p_1)(1-p_2)p_3z^0+(1-p_1)p_2(1-p_3)z^0$$

$$+(1-p_1)p_2p_3z^1+p_1(1-p_2)(1-p_3)z^0+p_1(1-p_2)p_3z^1$$

$$+p_1p_2(1-p_3)z^0+p_1p_2p_3z^1$$

Αφού εφαρμόσουμε την αναγωγή ομοίων όρων έχουμε:

$$U(z)=\left[(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)+(1-p_1)(1-p_2)p_3\right.$$

$$\left.+(1-p_1)p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)(1-p_3)+p_1p_2(1-p_3)\right]z^0$$

$$+\left[p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3+p_1p_2p_3\right]z^1$$

Η αξιοπιστία του συστήματος είναι ίση με την αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής X η οποία έχει συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από τη u-function $U(z)$. Όπως ξέρουμε, αυτή η αναμενόμενη τιμή λαμβάνεται από την πρώτη παράγωγο της $U(z)$ για $z=1$:

$$R=E(X)=U'(1)$$

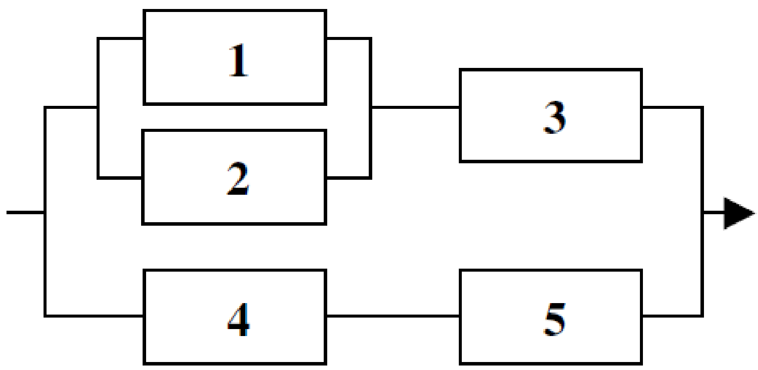
$$=p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3+p_1p_2p_3$$

$$=(p_1+p_2-p_1p_2)p_3$$

Εφαρμογή 2

Σε αυτή την εφαρμογή θεωρούμε και πάλι ένα σύστημα με σειριακές και παράλληλες συνδέσεις αλλά το οποίο αποτελείται από περισσότερα στοιχεία από πριν και απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Η συνάρτηση δομής ολόκληρου του συστήματος είναι

$$X=\varphi(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_3,\mathrm{X}_4,\mathrm{X}_5)=\max\left(\max(X_1,X_2)X_3,X_4,X_5\right)$$



Σχήμα 3.2:Μπλοκ διάγραμμα αξιοπιστίας του σειριακού-παράλληλου συστήματος

Οι u-functions των στοιχείων θα έχουν τη μορφή $u_j(z)=\left(1-p_j\right)z^0+p_jz^1$ για $1\leq j\leq 5$. Δηλαδή θα είναι οι:

$$u_1(z)=(1-p_1)z^0+p_1z^1,\quad u_2(z)=(1-p_2)z^0+p_2z^1,\quad u_3(z)=(1-p_3)z^0+p_3z^1$$

$u_4(z) = (1 - p_4)z^0 + p_4 z^1$, $u_5(z) = (1 - p_5)z^0 + p_5 z^1$

Η άμεση εφαρμογή του σύνθετου τελεστή $\underset{\varphi}{\otimes}$ για τον υπολογισμό της $U(z) = \underset{\varphi}{\otimes}\left(u_1(z), u_2(z), u_3(z), u_4(z), u_5(z)\right)$ απαιτεί $2^5 = 32$ αξιολογήσεις της συνάρτησης δομής του συστήματος.

Η συνάρτηση δομής του συστήματος μπορεί να οριστεί αναδρομικά. Για το υποσύστημα που ορίζεται από τα στοιχεία 1 και 2 τα οποία συνδέονται μεταξύ τους παράλληλα έχουμε μια νέα μεταβλητή, την X_6. Αυτή η νέα μεταβλητή είναι μεταβλητή κατάστασης των 1 και 2 και είναι $X_6 = \max(X_1, X_2)$. Ένα ακόμα υποσύστημα δημιουργείται από τα στοιχεία 1, 2 τα οποία συνδέονται σειριακά με το στοιχείο 3 και έτσι προκύπτει η μεταβλητή $X_7 = X_6 X_3$. Στο σύστημα μας υπάρχει άλλο ένα υποσύστημα με σειριακή σύνδεση. Αυτό, αποτελείται από τα στοιχεία 4 και 5 και η μεταβλητή κατάστασής του είναι η $X_8 = X_4 X_5$. Επειδή τα υποσυστήματα X_7 και X_8 συνδέονται μεταξύ τους παράλληλα, προκύπτει η μεταβλητή κατάστασης του συστήματος να είναι η $X = \max(X_7, X_8)$. Συνοψίζοντας τα παραπάνω ο αναδρομικός ορισμός της συνάρτησης δομής είναι:

$$X_6 = \max(X_1, X_2)$$

$$X_7 = X_6 X_3$$

$$X_8 = X_4 X_5$$

$$X = \max(X_7, X_8)$$

Οι u-functions που αντιστοιχούν στις μεταβλητές X_6, X_7 και X_8 αποτελούνται από δύο όρους (μετά την αναγωγή ομοίων όρων). Το ίδιο ισχύει και για τις u-functions που αντιστοιχούν στις δυαδικές τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, X_3, X_4, X_5. Ο αριθμός των αξιολογήσεων των συναρτήσεων δομής που αντιπροσωπεύουν τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας των μεταβλητών X_6, X_7, X_8 και X είναι 4. Ως εκ τούτου, ο συνολικός αριθμός των αξιολογήσεων θα είναι 16. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι συναρτήσεις δομής που αξιολογήθηκαν για τις ενδιάμεσες μεταβλητές είναι πολύ πιο απλές από τη συνάρτηση δομής ολόκληρου του συστήματος που πρέπει να αξιολογηθεί όταν εφαρμόζουμε την άμεση προσέγγιση.

Ακολουθεί η διαδικασία υπολογισμού της αξιοπιστίας του συστήματος χρησιμοποιώντας την αναδρομική προσέγγιση :

$$U_6(z) = u_1(z) \underset{\max}{\otimes} u_2(z) = \left[p_1 z^1 + (1 - p_1)z^0\right] \underset{\max}{\otimes} \left[p_2 z^1 + (1 - p_2)z^0\right]$$

$$= p_1p_2z^{\max(1,1)} + p_1(1-p_2)z^{\max(1,0)} + (1-p_1)p_2z^{\max(0,1)} + (1-p_1)(1-p_2)z^{\max(0,0)}$$

$$= p_1p_2z^1 + p_1(1-p_2)z^1 + (1-p_1)p_2z^1 + (1-p_1)(1-p_2)z^0$$

$$= (p_1 + p_2 - p_1p_2)z^1 + (1-p_1)(1-p_2)z^0$$

$$U_7(z) = U_6(z)\underset{\times}{\otimes}u_3(z)$$

$$= \left[(p_1 + p_2 - p_1p_2)z^1 + (1-p_1)(1-p_2)z^0\right]\underset{\times}{\otimes}\left[(1-p_3)z^0 + p_3z^1\right]$$

$$= (p_1 + p_2 - p_1p_2)p_3z^{1\times1} + (1-p_1)(1-p_2)p_3z^{0\times1}$$

$$+(p_1 + p_2 - p_1p_2)(1-p_3)z^{1\times0} + (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)z^{0\times0}$$

$$= (p_1 + p_2 - p_1p_2)p_3z^1 + \left[(1-p_1)(1-p_2) + (p_1 + p_2 - p_1p_2)(1-p_3)\right]z^0$$

$$U_8(z) = u_4\underset{\times}{\otimes}u_5$$

$$= \left[(1-p_4)z^0 + p_4z^1\right]\underset{\times}{\otimes}\left[(1-p_5)z^0 + p_5z^1\right]$$

$$= p_4p_5z^{1\times1} + p_4(1-p_5)z^{1\times0} + (1-p_4)p_5z^{0\times1} + (1-p_4)(1-p_5)z^{0\times0}$$

$$= p_4p_5z^1 + (1-p_4p_5)z^0$$

$$U(z) = U_7(z)\underset{\max}{\otimes}U_8(z)$$

$$= \left\{(p_1 + p_2 - p_1p_2)p_3z^1 + \left[(1-p_1)(1-p_2) + (p_1 + p_2 - p_1p_2)(1-p_3)\right]z^0\right\}\underset{\max}{\otimes}$$

$$\left[p_4p_5z^1 + (1-p_4p_5)z^0\right]$$

$$= (p_1 + p_2 - p_1p_2)p_3p_4p_5z^{\max(1,1)} + (p_1 + p_2 - p_1p_2)p_3(1-p_4p_5)z^{\max(1,0)}$$

$$+\left[(1-p_1)(1-p_2) + (p_1 + p_2 - p_1p_2)(1-p_3)\right]p_4p_5z^{\max(0,1)}$$

$$\left[(1-p_1)(1-p_2) + (p_1 + p_2 - p_1p_2)(1-p_3)\right](1-p_4p_5)z^{\max(0,0)}$$

$$=\left\{\left(p_1+p_2-p_1p_2\right)p_3+\left[\left(1-p_1\right)\left(1-p_2\right)+\left(p_1+p_2-p_1p_2\right)\left(1-p_3\right)p_4p_5\right]\right\}z^1$$

$$+\left[\left(1-p_1\right)\left(1-p_2\right)+\left(p_1+p_2-p_1p_2\right)\left(1-p_3\right)\right]\left(1-p_4p_5\right)z^0$$

Αφού υπολογίσαμε τη $U(z)$, βρίσκουμε εύκολα την αξιοπιστία (διαθεσιμότητα) του συστήματος παίρνοντας την πρώτη παράγωγό της για $z=1$ όπως φαίνεται παρακάτω:

$$R=E(X)=U'(1)$$

$$=\left(p_1+p_2-p_1p_2\right)p_3+\left(1-p_1\right)\left(1-p_2\right)+\left(p_1+p_2-p_1p_2\right)\left(1-p_3\right)p_4p_5$$

Θα προχωρήσουμε με μία εφαρμογή όσων αναφέραμε μέχρι στιγμής, υποθέτοντας ότι οι συναρτήσεις αξιοπιστίας του συστήματος μας παίρνουν τις εξής αριθμητικές τιμές:

$$p_1=0{,}8\ ,\ p_2=0{,}9\ ,\ p_3=0{,}7\ ,\ p_4=0{,}9\ ,\ p_5=0{,}7$$

Σύμφωνα με τις συγκεκριμένες τιμές οι u-functions που προκύπτουν για τα στοιχεία του συστήματος είναι:

$$u_1(z)=0{,}8z^1+0{,}2z^0\ ,\ \ u_2(z)=u_4(z)=0{,}9z^1+0{,}1z^0,\ \ u_3(z)=u_5(z)=0{,}7z^1+0{,}3z^0$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις u-functions για να καταλήξουμε στον υπολογισμό της αξιοπιστίας του συστήματος.

$$U_6(z)=u_1(z)\underset{\max}{\otimes}u_2(z)=\left(0{,}8z^1+0{,}2z^0\right)\underset{\max}{\otimes}\left(0{,}9z^1+0{,}1z^0\right)$$

$$=0{,}8\cdot 0{,}9z^1+0{,}8\cdot 0{,}1z^1+0{,}2\cdot 0{,}9z^1+0{,}2\cdot 0{,}1z^0$$

$$=0{,}98z^1+0{,}02z^0$$

$$U_7=U_6(z)\underset{\times}{\otimes}u_3(z)$$

$$=\left(0{,}98z^1+0{,}02z^0\right)\underset{\times}{\otimes}\left(0{,}7z^1+0{,}3z^0\right)$$

$$=0{,}98\cdot 0{,}7z^1+0{,}98\cdot 0{,}3z^0+0{,}02\cdot 0{,}7z^0+0{,}02\cdot 0{,}3z^0$$

$$=0{,}686z^1+0{,}314z^0$$

$$U_8(z) = u_4 \underset{\times}{\otimes} u_5$$

$$= \left(0,9z^1 + 0,1z^0\right) \underset{\times}{\otimes} \left(0,7z^1 + 0,3z^0\right)$$

$$= 0,9 \cdot 0,7z^1 + 0,9 \cdot 0.3z^0 + 0,1 \cdot 0,7z^0 + 0,1 \cdot 0,3z^0$$

$$= 0,63z^1 + 0,37z^0$$

$$U(z) = U_7(z) \underset{\max}{\otimes} U_8(z)$$

$$= \left(0,686z^1 + 0,314z^0\right) \underset{\max}{\otimes} \left(0,63z^1 + 0,37z^0\right)$$

$$= 0,686 \cdot 0,63z^1 + 0,686 \cdot 0,37z^1 + 0,314 \cdot 0,63z^1 + 0,314 \cdot 0,37z^0$$

$$= 0,88382z^1 + 0,11618z^0$$

Έτσι φτάσαμε στην αξιοπιστία του συστήματος:

$$R = U'(1) = 0,88382 \approx 0,884$$

Για να καταλήξουμε σε αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιήσαμε για τις u-functions τον τύπο $u_j(z) = p_j z^1 + \left(1 - p_j\right) z^0$. Εάν αντί για αυτόν τον τύπο χρησιμοποιήσουμε τον $u_j(z) = p_j\left(z^1 + q_j z^0\right)$ με $q_j = p_j^{-1} - 1$ θα έχουμε και πάλι το ίδιο αποτέλεσμα, αλλά με λιγότερους υπολογισμούς, δηλαδή:

$$u_1(z) = 0,8\left(z^1 + 0,25z^0\right),\ \ u_2(z) = u_4(z) = 0,9\left(z^1 + 0,111z^0\right),$$

$$u_3(z) = u_5(z) = 0,7\left(z^1 + 0,429z^0\right)$$

Οπότε, σύμφωνα με τους τύπους που έχουν ήδη αναφερθεί, έχουμε:

$$U_6(z) = u_1(z) \underset{\max}{\otimes} u_2(z) = 0,8\left(z^1 + 0,25z^0\right) \underset{\max}{\otimes} 0,9\left(z^1 + 0,111z^0\right)$$

$$= 0,8 \cdot 0,9\left(z^1 + 0,111z^1 + 0,25z^1 + 0,25 \cdot 0,111z^0\right)$$

$$= 0,72\left(1,361z^1 + 0,02775z^0\right) \approx 0,72\left(1,361z^1 + 0,028z^0\right)$$

$$U_7 = U_6(z) \underset{\times}{\otimes} u_3(z)$$

$$= 0,72\left(1,361z^1 + 0,028z^0\right) \underset{\times}{\otimes} 0,7\left(z^1 + 0,429z^0\right)$$

$$= 0,72 \cdot 0,7\left(1,361z^1 + 1,361 \cdot 0,429z^0 + 0,028z^0 + 0,028 \cdot 0,429z^0\right)$$

$$= 0,504\left(1,,361z^1 + 0,623881z^0\right) \approx 0,504\left(1,,361z^1 + 0,623z^0\right)$$

$$U_8(z) = u_4 \underset{\times}{\otimes} u_5$$

$$= 0,9\left(z^1 + 0,111z^0\right) \underset{\times}{\otimes} 0,7\left(z^1 + 0,429z^0\right)$$

$$= 0,9 \cdot 0,7\left(z^1 + 0,429z^0 + 0,111z^0 + 0,111 \cdot 0,429z^0\right)$$

$$= 0,63\left(z^1 + 0,587619z^0\right) \approx 0,63\left(z^1 + 0,588z^0\right)$$

$$U(z) = U_7(z) \underset{\max}{\otimes} U_8(z)$$

$$= 0,504\left(1,361z^1 + 0,623z^0\right) \underset{\max}{\otimes} 0,63\left(z^1 + 0,588z^0\right)$$

$$= 0,504 \cdot 0,63\left(1,361z^1 + 1,361 \cdot 0,588z^1 + 0,623z^1 + 0,623 \cdot 0,588z^0\right)$$

$$= 0,31752\left(2,784268z^1 + 0,366324z^0\right) \approx 0,3175\left(2,784z^1 + 0,366z^0\right)$$

Με αυτόν τον τρόπο καταλήξαμε με λιγότερες πράξεις στην αξιοπιστία του συστήματος:

$$R = U'(1) = 0,3175 \cdot 2.784 \approx 0.884$$

4 Η universal generating function μέθοδος εφαρμοσμένη σε k-out-of-n συστήματα

Όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο, ένα *k-out-of-n* σύστημα λειτουργεί εάν και μόνο εάν λειτουργούν τουλάχιστον τα *k* από τα *n* στοιχεία του. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος που απαιτείται από το σύστημα για να ολοκληρώσει το έργο του, ο οποίος ονομάζεται και χρόνος αποστολής, είναι *T* και τον χωρίζουμε σε *m* ίσα διαστήματα τα οποία θα έχουν διάρκεια $\Delta = \frac{T}{m}$. Έχοντας την έκφραση για την κατανομή του χρόνου αποτυχίας κάθε στοιχείου *j* στη μορφή της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής του (*cumulative distribution function*) μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα p_{ji} κατά την οποία το στοιχείο *j* αποτυγχάνει στο διάστημα *i* (χρόνος ανάμεσα σε $\Delta \cdot (i-1)$ και $\Delta \cdot i$) . Για παράδειγμα, για τον εκθετικά κατανεμημένο χρόνο αποτυχίας με ποσοστό αποτυχίας λ_j ισχύει:

$$p_{ji} = \left[\exp\left(\lambda_j \Delta\right) - 1\right] \exp\left(-\lambda_j \Delta i\right) \tag{4.1}$$

Ενώ για την Weibull κατανομή με παραμέτρους *η* και *β* ισχύει:

$$p_{ij} = \exp\left\{-\left[\Delta(i-1)/\eta\right]^{\beta}\right\} - \exp\left\{-\left[\Delta i/\eta\right]^{\beta}\right\} \tag{4.2}$$

Αντί για τον τυχαίο συνεχή χρόνο έως την αποτυχία του στοιχείου *j*, θεωρούμε το τυχαίο διακριτό διάστημα αποτυχίας I_j του στοιχείου αυτού. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας του I_j, παρουσιάζεται με τη μορφή των ζευγών $\left(i,\ p_{ji} = P\left\{I_j = i\right\}\right)$ για $1 \le i \le m$.

Οι *u-functions* μιας ανεξάρτητης τυχαίας μεταβλητής *X* ορίζονται ως εξής:

$$u(z) = \sum_{k=1}^{K} q_k z^{x_k} \tag{4.3}$$

όπου η μεταβλητή *X* έχει *K* πιθανές τιμές και q_k είναι η πιθανότητα το *X* να είναι ίσο με x_k. Για να αξιολογηθεί η πιθανότητα ότι η τυχαία μεταβλητή *X* δεν είναι μικρότερη από την τιμή *w*, θα πρέπει να προστεθούν οι συντελεστές του πολυωνύμου $u(z)$ για κάθε όρο για τον οποίο ισχύει $x_j \geq w$:

$$P\{X \geq w\} = \sum_{x_k > w} q_k \tag{4.4}$$

Αυτό μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τελεστή δ στην $u(z)$:

$$\delta\big(u(z), w\big) = \delta\left(\sum_{k=1}^{K} q_k z^{x_k}, w\right) = \sum_{k=1}^{K} \delta\left(q_k z^{x_k}, w\right) \tag{4.5}$$

όπου για το μεμονωμένο όρο $q_k z^{x_k}$ έχουμε:

$$\delta\left(q_k z^{x_k}, w\right) = \begin{cases} q_k, & x_k \geq w \\ 0, & x_k < w \end{cases} \tag{4.6}$$

Στην περίπτωσή μας το πολυώνυμο $u_j(z)$ μπορεί να ορίσει το διάστημα στο οποίο το στοιχείο *j* αποτυγχάνει (συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας ακέραιης μεταβλητής I_j). Έτσι, η κατανομή του διαστήματος αποτυχίας του στοιχείου *j* μπορεί να δοθεί από τον ακόλουθο τύπο:

$$u_j(z) = \sum_{i=1}^{m} p_{j,i} z^i \,. \tag{4.7}$$

Προκειμένου να βρούμε τη u-function η οποία αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση πιθανότητας των συνδυασμών των *k* τυχαίων μεταβλητών I_j, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους σύνθετους τελεστές $\otimes$ οι οποίοι εφαρμόζουν απλές αλγεβρικές πράξεις στις επιμέρους u-functions των βασικών στοιχείων. Αυτοί οι τελεστές είναι βασισμένοι στο γεγονός ότι η πιθανότητα οποιουδήποτε συνδυασμού πραγματοποίησης $I_j = i_j$, $1 \leq j \leq k$ είναι ίση με το γινόμενο $\prod_{j=1}^{k} p_{j,i_j}$.

Ο συνδυασμός των διαστημάτων αποτυχίας για *k* παράλληλα στοιχεία εκφράζεται από το τυχαίο διάνυσμα $I = \{I_1, ..., I_k\}$. Η πιθανότητα κάθε πραγματοποίησης αυτού του διανύσματος $I = \{I_1, ..., I_k\}$ είναι ίση με το γινόμενο $\prod_{j=1}^{m} p_{j,i_j}$. Εάν έχουμε δύο στοιχεία τότε ο τελεστής θα πάρει τη μορφή:

$$U_{\{1,2\}}(z) = u_1(z) \underset{add}{\otimes} u_2(z) = \sum_{i_1=0}^{m} \sum_{i_2=0}^{m} p_{1,i_1} p_{2,i_2} z^{(i_1, i_2)} \tag{4.8}$$

Εάν είναι γνωστή η u-function η οποία αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $I = \{I_1, ..., I_h\}$ και δίνεται από τον τύπο:

$$U_{\{1,...,h\}}(z) = \sum_{s=0}^{S} p_s z^{(i_{1s}, ..., i_{hs})} \tag{4.9}$$

τότε μπορούμε να βρούμε τη u-function που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος $I = \{I_1, ..., I_h, I_{h+1}\}$ χρησιμοποιώντας τον τελεστή $\underset{add}{\otimes}$:

$$U_{\{1,...,h+1\}}(z) = U_{\{1,...,h\}}(z) \underset{add}{\otimes} u_{h+1}(z) = \sum_{s=0}^{S} \sum_{i_{h+1}}^{m} p_{h+1,i_{h+1}} p_s z^{(i_{1s}, ..., i_{hs}, i_{h+1})} \tag{4.10}$$

Έτσι, η συνάρτηση πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος I μπορεί να βρεθεί αναδρομικά χρησιμοποιώντας την ακόλουθη διαδικασία:

$$\begin{aligned} &U_{\{1,2\}}(z) = u_1(z) \underset{add}{\otimes} u_2(z) \\ &U_{\{1,...,h+1\}}(z) = U_{\{1,...,h\}}(z) \underset{add}{\otimes} u_{h+1}(z), \quad \text{για } h = 2, ..., k-1 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Για το πρόβλημά μας δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε διαφορετικές παραλλαγές ή συγκεκριμένες πραγματοποιήσεις του τυχαίου διανύσματος I (πρέπει να ξέρουμε μόνο πόσα στοιχεία από τα k στοιχεία του συστήματος αποτυγχάνουν σε κάθε διάστημα i). Εάν έχουμε για παράδειγμα το διάνυσμα $I = \{2,3,5\}$, δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε ποιο συγκεκριμένο στοιχείο αποτυγχάνει στο διάστημα 2, 3 ή 5. Επομένως οι πραγματοποιήσεις $\{2,3,5\}$, $\{2,5,3\}$, $\{3,5,2\}$, $\{3,2,5\}$, $\{5,2,3\}$, $\{5,3,2\}$ μπορούν να αντιμετωπιστούν σαν ίδιος συνδυασμός των διαστημάτων αποτυχίας. Η πιθανότητα αυτού του συνδυασμού είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των πιθανών μεταθέσεων (γιατί οι συγκεκριμένες μεταθέσεις είναι αλληλοαναιρούμενα γεγονότα).

Συνεπώς, κάθε συνδυασμός διαστημάτων αποτυχίας $(i_1, ..., i_k)$ μπορεί να αντιπροσωπευθεί από τη διάταξή του που είναι η $ord(i_1, ..., i_k)$, στην οποία για $1 \le f \le k$ ισχύει $i_f \le i_{f+1}$ και όλοι οι συνδυασμοί που έχουν την ίδια διάταξη $(x_1, ..., x_n)$ μπορούν να αντιμετωπιστούν ως η ίδια ακολουθία αποτυχίας. Η πιθανότητα κάθε πραγματοποίησης του $I=(i_1,...,i_k)$ είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των συνδυασμών που έχουν την ίδια διάταξη $(i_1,...,i_k)$ και θα πρέπει να ληφθεί υπόψη συλλέγοντας τους ίδιους όρους (κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων) όταν εφαρμόζεται ο σύνθετος τελεστής. Ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών όρων (διακεκριμένων συνδυασμών διαστήματος αποτυχίας) είναι $\sum_{i_1=0}^{m}\sum_{i_2=0}^{m}...\sum_{i_{k-1}=i_{k-2}}^{m}(m+1-i_{k-1})$ και είναι πολύ μικρότερος από m^k. Η διαφορά τους αυξάνεται κατά μεγάλο βαθμό καθώς αυξάνονται τα *k* και *m*.

Αντικαθιστώντας στη διαδικασία (4.11) τον τελεστή $\underset{add}{\otimes}$ με τον ακόλουθο τελεστή $\underset{ord}{\otimes}$ έχουμε:

$$U_{\{1,...,h+1\}}(z)=U_{\{1,...,h\}}(z)\underset{ord}{\otimes}u_{h+1}(z)=\sum_{s=0}^{S}\sum_{i_{h+1}}^{m}p_{h+1,i_{h+1}}p_s z^{ord(i_{1s},...,i_{hs},i_{h+1})} \qquad (4.12)$$

Έπειτα, κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων στις u-functions που προκύπτουν παίρνουμε την «συμπυκνωμένη» έκφραση της συνάρτησης μάζας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος *I*.

Θεωρούμε κάθε πραγματοποίηση του διανύσματος *I* στη μορφή $(x,V_f)=ord(i_1,...,i_k)$, όπου το $x=i_1$ αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα όπου έγινε η πρώτη αποτυχία ενός από τα *k* στοιχεία και το V_f αντιστοιχεί στο συνδυασμό διαστημάτων αποτυχίας για τις υπόλοιπες αποτυχίες. Ο αριθμός των διαφορετικών συνδυασμών του V_f εξαρτάται από την τιμή του *x*. Εάν για παράδειγμα $x=m$ (δηλαδή εάν η πρώτη αποτυχία συμβεί στο τέλος του χρόνου αποστολής), τότε η μοναδική πιθανή τιμή του V_f είναι $(m,m,...,m)$, ενώ εάν είναι $x=1$, τότε V_f μπορεί να είναι οποιαδήποτε διατεταγμένη μετάθεση των *k-1* αριθμών που παίρνουν τιμές από 1 έως *m*. Ο αριθμός των διαφορετικών πιθανών συνδυασμών V_f προσδιορίζεται αυτόματα μετά την αναγωγή ομοίων όρων στις u-functions που υπολογίσαμε, χρησιμοποιώντας τους σύνθετους τελεστές. Για να παρουσιάσουμε την απαρίθμηση όλων των πιθανών διακεκριμένων συνδυασμών που αντιστοιχούν σε κάθε συγκεκριμένο *x*, θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση $\sum_f V_f$. Επίσης, για συντομία θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $U(z)$ αντί για $U_{\{1,...,k\}}(z)$. Αφού εφαρμόσουμε την αναδρομική διαδικασία (4.11) χρησιμοποιώντας τον σύνθετο τελεστή $\underset{ord}{\otimes}$ η u-function που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος *I* παίρνει τη μορφή:

$$U(z) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{f} w_{i,f} z(i, V_f) \tag{4.13}$$

Κάθε φορά που αποτυγχάνει κάποιο από τα *k* στοιχεία τα οποία είναι σε λειτουργία, αυτό το στοιχείο (το οποίο αποτυγχάνει) θα αντικαθιστάται από ένα στοιχείο το οποίο βρίσκεται στη διατεταγμένη λίστα αναμονής. Υποθέτουμε ότι η αποτυχία συμβαίνει στο διάστημα *i* και το στοιχείο που βρίσκεται σε κατάσταση αναμονής και αντικαθιστά το στοιχείο που απέτυχε θα αποτύχει στο διάστημα Y , όπου *Y* είναι μια ακέραιη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από τη u-function $u_s(z)$.

Για διαφορετικές καταστάσεις αναμονής το διάστημα αποτυχίας του στοιχείου το οποίο αντικατέστησε το αποτυχημένο στοιχείο του συστήματος, μπορεί να εκφραστεί σαν μια συνάρτηση του *i* και του *Y*: $\varphi(i,Y)$. Για κάθε πραγματοποίηση $Y = y$, ο συνδυασμός των διαστημάτων αποτυχίας μετά την αντικατάσταση παίρνει τη μορφή $ord(\varphi(i,y),V_f)$. Επομένως, η συνάρτηση πιθανότητας του διανύσματος *I* μετά την αντικατάσταση μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας τον ακόλουθο σύνθετο τελεστή στις $U(z)$ και $u_s(z)$:

$$\begin{aligned} U_1(z) &= U_0(z) \underset{\varphi}{\otimes} u_s(z) = \\ &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{f} w_{i,f} z^{(i,V_f)} \underset{\varphi}{\otimes} \sum_{y=0}^{m} p_y z^y \\ &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{y=0}^{m} \sum_{f} p_y w_{i,f} z^{ord[\varphi(i,y),V_f]} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Εάν το στοιχείο που έχει κάνει την αντικατάσταση βρίσκεται σε *cold* κατάσταση αναμονής, τότε ξεκινάει τη λειτουργία του στο διάστημα *i* και ως αποτέλεσμα ο χρόνος αποτυχίας του είναι: $\varphi(i,Y) = \max(i+Y,m)$. Εάν το στοιχείο αυτό βρίσκεται σε *hot* κατάσταση αναμονής, τότε ξεκινάει τη λειτουργία του στο διάστημα 1 και ως εκ τούτου ο χρόνος αποτυχίας του είναι : $\varphi(i,Y) = \max(i,Y,m)$. Στην πιο γενική περίπτωση, όταν δηλαδή το στοιχείο βρίσκεται σε *warm* κατάσταση αναμονής, σύμφωνα με το <u>μοντέλο επιταχυνόμενου χρόνου αποτυχίας</u> *(accelerated failure time model - AFTM),* χρησιμοποιούμε τον επιβραδυνόμενο παράγοντα *θ* και ορίζουμε:

$$\varphi(i,y;\theta) = \begin{cases} i, & \text{εάν } \mathrm{y} \le \mathrm{i}\theta \\ \max(m,[i+y-i\theta]), & \text{εάν } y \ge i\theta,\ y \le m-i(1-\theta) \end{cases} \tag{4.15}$$

Ανάλογα με τον τύπο των σύνθετων τελεστών, μπορούν να προσαρμοστούν κάποιες διαδικασίες για τον υπολογισμό τους προκειμένου να αυξηθεί η υπολογιστική τους απόδοση.

Έστω ότι η λίστα αντικατάστασης περιέχει *n* στοιχεία σε αναμονή και οι κατανομές των διαστημάτων αποτυχίας αυτών υπολογίζονται από τις u-functions $u_{s1}(z), u_{s2}(z), ..., u_{sn}(z)$. Για την εύρεση της συνάρτησης πιθανότητας του διανύσματος *I* που αντιπροσωπεύει τους συνδυασμούς του χρόνου αποτυχίας των *k* λειτουργούντων στοιχείων μετά από *n* αντικαταστάσεις, εφαρμόζεται η αναδρομική διαδικασία που ακολουθεί:

$$U_l(z) = U_{l-1}(z) \underset{\varphi_l}{\otimes} u_{sl}(z) \text{ για l=1,..., n} \tag{4.16}$$

όπου η συνάρτηση φ_l θα πρέπει να επιλεγεί σύμφωνα με την κατάσταση αναμονής.

Η u-function που προκύπτει $U_n(z) = \sum_{d=0}^{D} \pi_d z^{(i_{1d},...,i_{kd})}$ αντιπροσωπεύει τη σχέση μεταξύ όλων των πιθανών συνδυασμών των διαστημάτων αποτυχίας και τις πιθανότητες πραγματοποίησης αυτών των διαστημάτων. Για κάθε διάστημα *s* μπορούμε να πάρουμε την πιθανότητα ότι *k* στοιχεία είναι σε λειτουργία για τουλάχιστον *s* διαστήματα (αξιοπιστία συστήματος *R(s)*) χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τελεστή:

$$R(s) = \delta(U_n(z), s) = \delta\left(\sum_{d=0}^{D} \pi_d z^{(i_{1d},...,i_{kd})}, s\right) = \sum_{d=0}^{D} \pi_d \varepsilon\left[s, (i_{1d}, ..., i_{nd})\right] \tag{4.17}$$

όπου:

$$\varepsilon\left[s, (i_{1d}, ..., i_{nd})\right] = \begin{cases} 1, & \text{εάν για κάθε } 1 \le j \le k,\ i_{jd} \ge s \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{4.18}$$

Πράγματι, η συνάρτηση $R(s)$ η οποία εκφράζεται και ως $R(\Delta s) = R(T)$ αποτελεί την αθροιστική συνάρτηση κατανομής όλου του συστήματος. Η πιθανότητα ότι το σύστημα δεν αποτυγχάνει καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του $R(T) = R(m)$ είναι ίση με την συνιστώσα του $U_n(z)$ που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $(m, m, ..., m)$, (Levitin *et al*., 2009).

5 Εφαρμογή με τη Mathematica

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε διάφορα συστήματα αλλά και μεθοδολογία από τη δημοσίευση των Levitin *et al.* (2009). Η υλοποίηση του αλγορίθμου έγινε στο προγραμματιστικό περιβάλλον της Mathematica 5. Στόχος είναι η εύρεση της συνάρτησης αξιοπιστίας

$$S(T) = P(\text{το σύστημα λειτουργεί τη χρονική στιγμή T}).$$

Όπως αναφέραμε και στο Κεφάλαιο 4, εξετάζουμε την πιθανότητα ένα *k-out-of-n* σύστημα να είναι ακόμα σε λειτουργία μετά από ένα προκαθορισμένο χρόνο αποστολής *T*. Διαιρώντας το διάστημα $[0, \mathrm{T})$ σε *m* ίσα υποδιαστήματα μήκους $\Delta = \mathrm{T}/m$ μετατρέπουμε το πρόβλημα συνεχούς χρόνου σε διακριτού. Στη δημοσίευσή τους οι Levitin *et al.* (2009) μελέτησαν *k-out-of-n* συστήματα, όπου *k* στοιχεία λειτουργούν στο ξεκίνημα της λειτουργίας του συστήματος, ενώ *n-k* στοιχεία είναι εφεδρικά. Τα εφεδρικά στοιχεία ενδέχεται να είναι:

- *Hot,* τα οποία λειτουργούν συνέχεια.
- *Warm,* τα οποία λειτουργούν αλλά με μικρότερο ρυθμό αποτυχίας έως ότου χρησιμοποιηθούν στο σύστημα.
- *Cold,* τα οποία μπαίνουν σε λειτουργία μόνο όταν χρειάζεται να αντικαταστήσουν κάποιο αποτυχημένο στοιχείο.

Εμείς θα μελετήσουμε την περίπτωση του *2-out-of-3* συστήματος, δηλαδή με $k = 2,\ n = 3$. Μεταβάλλοντας τις τιμές των παραμέτρων *T, m* θα δούμε πώς αλλάζει η ακρίβεια της προσέγγισης για τα *hot, warm* και *cold* εφεδρικά στοιχεία. Αφού λοιπόν έχουμε σύστημα *2-out-of-3,* θεωρούμε ότι τα δύο στοιχεία θα λειτουργούν και 1 στοιχείο θα είναι εφεδρικό. Σύμφωνα με τον *Πίνακα 5.1*, τα δύο στοιχεία τα οποία λειτουργούν στο ξεκίνημα (*active*) έχουν διάρκειες ζωής που ακολουθούν κατανομές Weibull, ενώ το εφεδρικό στοιχείο το οποίο μπορεί να είναι *hot, warm* ή *cold,* θα λειτουργεί ακολουθώντας την εκθετική κατανομή.

Πίνακας 5.1 Παράμετροι των στοιχείων για k-out-of-n συστήματα.

Element ID	Element type	Distribution	Operational parameters	Standby parameters
1	Active	Weibull	η=1000, β=2	NA
2	Active	Weibull	η=1500, β=2.5	NA
3	Hot standby	Exponential	θ=2000	θ_s=2000
4	Warm standby	Exponential	θ=1500	θ_s=3000
5	Warm standby	Exponential	θ=1200	θ_s=4800
6	Cold standby	Exponential	θ=1000	NA: $\theta_s=\infty$

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι τα στοιχεία λειτουργούν ανεξάρτητα. Ζητούμενο είναι να βρεθεί η συνάρτηση αξιοπιστίας $S(T)$, η οποία αναλύεται ως εξής (θέτοντας E_1, E_2, E_3 τα στοιχεία 1, 2 και 3 αντίστοιχα):

$$\begin{aligned}&P[\text{το σύστημα λειτουργεί τη χρονική στιγμή T}]=\\&P[E_1 \text{ λειτουργεί στο T } \cap \text{ E}_2 \text{ λειτουργεί στο T}]+\\&P[E_1 \text{ δε λειτουργεί στο T } \cap \text{ E}_2 \text{ λειτουργεί στο T } \cap \text{ E}_3 \text{ λειτουργεί στο T}]+\\&P[E_1 \text{ λειτουργεί στο T } \cap \text{ E}_2 \text{ δε λειτουργεί στο T } \cap \text{ E}_3 \text{ λειτουργεί στο T}]\end{aligned} \tag{5.1}$$

Για τον πρώτο όρο της συνάρτησης (5.1), θα έχουμε

$$P[E_1 \text{ λειτουργεί στο T } \cap \text{ E}_2 \text{ λειτουργεί στο T}]=S_1(T)S_2(T) \tag{5.2}$$

όπου $S_i(T)$, $i=1,2$ είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας ή αλλιώς επιβίωσης του στοιχείου E_i. Για τα στοιχεία αυτά όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η συνάρτηση αξιοπιστίας ακολουθεί κατανομή Weibull.

Οι υπόλοιποι όροι της συνάρτησης (5.1) εξαρτώνται από τον τύπο του εφεδρικού στοιχείου. Στην περίπτωση που το εφεδρικό στοιχείο είναι *hot*, ο δεύτερος όρος γίνεται

$$F_1(T)S_2(T)S_3(T) \tag{5.3}$$

και ο τρίτος όρος

$$S_1(T)F_2(T)S_3(T) \tag{5.4}$$

όπου $S_3(T)$ είναι συνάρτηση αξιοπιστίας που ακολουθεί την εκθετική κατανομή, ενώ $F_1(T)$, $F_2(T)$ είναι οι συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας των στοιχείων 1 και 2, αντίστοιχα.

Δηλαδή εάν το εφεδρικό στοιχείο είναι *hot*, η συνάρτηση αξιοπιστίας γίνεται:

$$\begin{aligned}&P[\text{το σύστημα λειτουργεί τη χρονική στιγμή T}]=\\&S_1(T)S_2(T)+F_1(T)S_2(T)S_3(T)+S_1(T)F_2(T)S_3(T)\end{aligned} \tag{5.5}$$

Στην περίπτωση όπου τα εφεδρικά στοιχεία είναι *warm* ή *cold* θα πρέπει να γνωρίζουμε πότε αποτυγχάνει το E_1 για το δεύτερο όρο ή το E_2 για τον τρίτο όρο της εξίσωσης (5.1) αντίστοιχα. Δηλαδή ο δεύτερος όρος γράφεται ως:

$$S_2\left(T\right)P\left[E_1 \text{ δε λειτουργεί στο T } \bigcap \text{ E}_3 \text{ λειτουργεί στο T}\right] \qquad (5.6)$$

Η πιθανότητα $P\left[E_1 \text{ δε λειτουργεί στο T } \bigcap \text{ E}_3 \text{ λειτουργεί στο T}\right]$ εκφράζει το ενδεχόμενο το E_1 να έχει αποτύχει, και επομένως το E_3 τίθεται σε λειτουργία ως εφεδρικό στοιχείο.

$$\begin{aligned}
&S_2\left(T\right)P\left[E_1 \text{ δε λειτουργεί στο T } \bigcap \text{ E}_3 \text{ λειτουργεί στο T}\right] \\
&= S_2\left(T\right)\sum_{i=1}^{m} P\begin{bmatrix} E_1 \text{ παύει να λειτουργήσει στο διάστημα } i \bigcap \text{ E}_3 \text{ λειτουργεί στο διάστημα } i \bigcap \\ E_3 \text{ συνεχίζει να λειτουργεί μέχρι το T} \end{bmatrix} \\
&= S_2\left(T\right)\sum_{i=1}^{m} p_{1i}S_{3s}\left(t_i\right)S_{3o}\left(T-t_i\right)
\end{aligned}$$

όπου:

- t_i είναι η χρονική στιγμή στο διάστημα i στην οποία το E_3 τίθεται σε λειτουργία προς αντικατάσταση του αποτυχημένου στοιχείου.
- Το p_{ji} δίνεται από τον τύπο

$$p_{ji} = \exp\left\{-\left[\Delta\cdot\left(i-1\right)/\eta\right]^{\beta} - \exp\left\{-\left[\Delta\cdot i/\eta\right]^{\beta}\right\}\right\}, \text{για } j=1,\ 2\,.$$

- S_{3s} ορίζεται η συνάρτηση αξιοπιστίας του εφεδρικού στοιχείου E_3 όταν βρίσκεται σε κατάσταση αναμονής (*standby*). Στην περίπτωση που το στοιχείο E_3 είναι *cold* τότε $S_{3s}\left(t_i\right)=1$. Στις περιπτώσεις που το στοιχείο E_3 είναι *warm* ή *hot* η S_{3s} ακολουθεί την εκθετική κατανομή.
- S_{3o} είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας του στοιχείου E_3 όταν αυτό βρίσκεται σε λειτουργία. Ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Ο τρίτος όρος γράφεται ως

$$S_1\left(T\right)P\left[E_2 \text{ δε λειτουργεί } \bigcap \text{ E}_3 \text{ λειτουργεί στο T}\right] \qquad (5.7)$$

και είναι

$$
\begin{aligned}
&S_1(T)\,P\left[E_2 \text{ δε λειτουργεί } \bigcap \text{ E}_3 \text{ λειτουργεί στο T}\right] \\
&= S_1(T)\sum_{i=1}^{m} P\left[\begin{array}{l} E_2 \text{ παύει να λειτουρήσει στο διάστημα } i \bigcap \text{ E}_3 \text{ λειτουργεί στο διάστημα } i \\ \bigcap \text{ E}_3 \text{ συνεχίζει να λειτουργεί μέχρι το T} \end{array}\right] \\
&= S_1(T)\sum_{i=1}^{m} p_{2i} S_{3s}(t_i) S_{3o}(T-t_i)
\end{aligned}
$$

Η ανάλυση του τρίτου είναι όμοια με αυτή του δεύτερου. Το διάστημα *i* είναι από τη χρονική στιγμή $(i-1)\cdot\Delta$ έως τη χρονική στιγμή $i\cdot\Delta$. Ως χρονική στιγμή t_i συνήθως ορίζεται είτε η στιγμή $i\cdot\Delta$ είτε η στιγμή $i\cdot\Delta-\Delta/2$, δηλαδή το τέλος ή το ενδιάμεσο σημείο του *i* διαστήματος. Για διευκόλυνση θα θεωρήσουμε $t_i = i\cdot\Delta-\Delta/2$.

<u>Προσομοίωση *2-out-of-3* συστήματος με *hot* εφεδρικό στοιχείο:</u>

```
Off[General::"spell1"]
Off[NIntegrate::"nintp"]
<<Graphics`Legend`
<<Statistics`ContinuousDistributions`
sweib[beta_,eta_,T_]:=1-
CDF[WeibullDistribution[beta,eta],T];
sexp[lamda_,T_]:=1-CDF[ExponentialDistribution[lamda],T]

beta1=2
eta1=1000
beta2=2.5
eta2=1500

T=500
lamda=1/2000

term1=sweib[beta1,eta1,T]*sweib[beta2,eta2,T]
term2=CDF[WeibullDistribution[beta1,eta1],T]*sweib[beta2,
eta2,T]*sexp[lamda,T]
term3=sweib[beta1,eta1,T]*CDF[WeibullDistribution[beta2,e
ta2],T]*sexp[lamda,T]

Psystoper=term1+term2+term3
```

Για την παραπάνω προσομοίωση θέσαμε τιμές από τον *Πίνακα 5.1*. Η αξιοπιστία που παίρνουμε ως αποτέλεσμα όταν τρέξουμε τον αλγορίθμου ισούται με 0.929663.

<u>Προσομοίωση *2-out-of-3* συστήματος με *warm* εφεδρικό στοιχείο:</u>

```
Off[General::"spell1"]
Off[NIntegrate::"nintp"]
<<Statistics`ContinuousDistributions`
sweib[beta_,eta_,t_]:=1-
CDF[WeibullDistribution[beta,eta],t];
sexp[lamda_,t_]:=1-CDF[ExponentialDistribution[lamda],t]
beta1=2
eta1=1000
beta2=2.5
eta2=1500
lamda1=1/3000
lamda2=1/1500
m=250
T=500
delta=T/m
deltah=delta/2
t=Array[a,m]
ii=Table[i,{i,m}]
a[1]=deltah
Do[
  If[a[i]<T, a[i+1]=a[i]+delta], {i,m}]
Print[{ii,t}]

sweib[beta1,eta1,T]
sweib[beta2,eta2,T]


sweib[beta2,eta2,delta*(ii-1)]
sweib[beta2,eta2,delta*(ii)]
p2i=sweib[beta2,eta2,delta*(ii-1)]-
sweib[beta2,eta2,delta*(ii)]
p2i

beta1
delta
eta1

sweib[beta1,eta1,delta*(ii-1)]
sweib[beta1,eta1,delta*(ii)]
p1i=sweib[beta1,eta1,delta*(ii-1)]-
sweib[beta1,eta1,delta*(ii)]
p1i

term1=sweib[beta1,eta1,T]*sweib[beta2,eta2,T]

sexp[lamda1,t]
sexp[lamda2,T-t]
```

```
term2=sweib[beta2,eta2,T]*(Apply[Plus,p1i*sexp[lamda1,t]*
sexp[lamda2,T-t]])

term3=sweib[beta1,eta1,T]*(Apply[Plus,p2i*sexp[lamda1,t]*
sexp[lamda2,T-t]])

papprox=term1+term2+term3
```

Η παραπάνω προσομοίωση μας δίνει την αξιοπιστία ενός *2-out-of-3* συστήματος με *warm* εφεδρικό στοιχείο. Αρχικά θέτουμε $m = 250, T = 500$. Στη συνέχεια, υλοποιήσαμε άλλες προσομοιώσεις, μειώνοντας τον αριθμό διαστημάτων m και αυξάνοντας έτσι το διάστημα Δ. Ακολουθούν πολλές προσομοιώσεις για διάφορους χρόνους αποστολής T. Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στον *Πίνακα 5.2*.

Παρατηρούμε ότι για συγκεκριμένο T, καθώς μειώνεται το m, μειώνεται και η εκτίμηση της αξιοπιστίας του συστήματος. Ωστόσο η μεταβολή της εκτίμησης είναι πολύ μικρή, γεγονός που σημαίνει ότι σε αυτό το απλό σύστημα, η προσέγγιση της αξιοπιστίας μέσω διακριτών διαστημάτων λειτουργεί πολύ καλά.

Πίνακας 5.2 Αποτελέσματα αλγορίθμου για warm εφεδρικό στοιχείο.

	m				
T	250	100	50	20	10
500	0.935250	0.935250	0.935248	0.935237	0.935196
750	0.800667	0.800667	0.800666	0.800655	0.800617
1000	0.605118	0.605118	0.605117	0.605110	0.605086
1250	0.399652	0.399652	0.399651	0.399648	0.399636
1500	0.231113	0.231113	0.231112	0.231111	0.231107

<u>Προσομοίωση *2-out-of-3* συστήματος με *cold* εφεδρικό στοιχείο:</u>

```
Off[General::"spell1"]
Off[NIntegrate::"nintp"]
<<Graphics`Legend`
<<Statistics`ContinuousDistributions`
sweib[beta_,eta_,t_]:=1-
CDF[WeibullDistribution[beta,eta],t];
sexp[lamda_,t_]:=1-CDF[ExponentialDistribution[lamda],t]
beta1=2
eta1=1000
beta2=2.5
eta2=1500
```

```
lamda=1/2000
m=250
T=500
delta=T/m
deltah=delta/2
t=Array[a,m]
ii=Table[i,{i,m}]
a[1]=deltah
Do[
  If[a[i]<T, a[i+1]=a[i]+delta], {i,m}]
Print[{ii,t}]

sweib[beta2,eta2,delta*(ii-1)]
sweib[beta2,eta2,delta*(ii)]
p2i=sweib[beta2,eta2,delta*(ii-1)]-
sweib[beta2,eta2,delta*(ii)]
beta1
delta
eta1

sweib[beta1,eta1,delta*(ii-1)]
sweib[beta1,eta1,delta*(ii)]
p1i=sweib[beta1,eta1,delta*(ii-1)]-
sweib[beta1,eta1,delta*(ii)]
p1i


sweib[beta1,eta1,T]
sweib[beta2,eta2,T]
term1=sweib[beta1,eta1,T]*sweib[beta2,eta2,T]
sexp[lamda,T-t]
term2=sweib[beta2,eta2,T]*(Apply[Plus,p1i*sexp[lamda,T-
t]])
term3=sweib[beta1,eta1,T]*(Apply[Plus,p2i*sexp[lamda,T-
t]])
papprox=term1+term2+term3
```

Από την τελευταία προσομοίωση που παραθέσαμε, προκύπτει η συνάρτηση αξιοπιστίας για ένα *2-out-of-3* σύστημα με *cold* εφεδρικό στοιχείο. Προσομοιώνοντας τον αλγόριθμο για διαφορετικές τιμές των *m*, *T* συγκεντρώσαμε τα αποτελέσματα στον *Πίνακα 5.3* και καταλήξαμε στα ίδια συμπεράσματα με την προηγούμενη περίπτωση. Δηλαδή, η εκτίμηση της αξιοπιστίας μειώνεται καθώς το *m* μειώνεται έχοντας σταθερό *T*. Ωστόσο, οι μεταβολές είναι πολύ μικρές.

Πίνακας 5.3 Αποτελέσματα αλγορίθμου για cold εφεδρικό στοιχείο.

	m				
T	250	100	50	20	10
500	0.965890	0.965889	0.965886	0.965866	0.965795
750	0.875270	0.875270	0.875267	0.875247	0.875177
1000	0.715035	0.715034	0.715032	0.715019	0.714969
1250	0.514955	0.514955	0.514954	0.514947	0.514922
1500	0.324164	0.324164	0.324164	0.324161	0.324153

6 Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αρχικά μελετήθηκαν η αξιοπιστία, η διαθεσιμότητα καθώς και κάποια μέτρα για την αξιολόγηση αυτών. Επίσης αναλύθηκαν εκτενέστερα κάποια είδη συστημάτων. Ειδικότερα μελετήθηκαν τα k-out-of-n συστήματα που παρουσιάζουν την ιδιότητα των εφεδρικών στοιχείων.

Στη συνέχεια αναφέραμε διάφορες μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό αξιοπιστίας. Η μέθοδος αναλογικής διακινδύνευσης χρησιμοποιείται ευρέως για τη μοντελοποίηση συστήματος με μη-πανομοιότυπα στοιχεία. Σημαντικές εφαρμογές της συγκεκριμένης μεθόδου έχουν υπάρξει στη βιοϊατρική. Άλλη μια μέθοδος είναι τα δέντρα σφάλματος τα οποία στοχεύουν στη διαμόρφωση και την αναπαράσταση διαδικασιών αποτυχίας μηχανικών και βιολογικών συστημάτων. Εξίσου σημαντική μέθοδος είναι τα μπλοκ διαγράμματα αξιοπιστίας τα οποία αποτελούνται από διατεταγμένα διαγράμματα λογικής που υποδεικνύουν ποιοι συνδυασμοί αποτυχημένων στοιχείων οδηγούν στην αποτυχία του συστήματος ή ποιοι συνδυασμοί στοιχείων που λειτουργούν κατάλληλα διατηρούν τη λειτουργία του συστήματος.

Τέλος, αναλύθηκε η μέθοδος *universal generating function* η οποία είναι αποτελεσματικότερη για συστήματα πολλαπλής κατάστασης και μπορεί να προσαρμοστεί σε διαφορετικά προβλήματα. Έπειτα υλοποιήθηκαν προσομοιώσεις βασισμένες στην UGF μέθοδο για διαφορετικούς τύπους εφεδρικών στοιχείων. Ο προσεγγιστικός υπολογισμός της αξιοπιστίας για διάφορα διαστήματα $\Delta = T/m$ δείχνει πολύ μικρή εξάρτηση από τον αριθμό διαστημάτων *m* για δεδομένο χρόνο αποστολής *T*.

Σαν περαιτέρω μελέτη μπορεί να προταθεί η εφαρμογή των γενετικών αλγορίθμων σε συνδυασμό με την προσομοιωμένη UGF.

Βιβλιογραφία:

Amari S. V., Dill G. & Howald E. (2003). A new approach to solve dynamic fault trees. *Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium*, 374-379.

Amari S.V., Zuo M. J. & Dill G. (2008). O(kn) algorithms for analyzing repairable and non-repairable k-out-of-n systems. *Handbook of Performability Engineering,* Part F, 1039-1064.

Azaron A., Katagiri H., Sakawa M. & Modarres M. (2004). Reliability function of a class of time-dependent systems with standby redundancy. *European Journal of Operational Research 164,* 378-386.

Azaron A., Katagiri H., Kato K. & Sakawa M. (2005). Reliability evaluation and optimization of dissimilar-component cold-standby redundant systems. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 48, 71-88.

Birnbaum Z.W, Esary J.D. & Saunders S.C. (1961). Multi-component systems and structures and their reliability. *Technometrics* 3, 55-77.

Birnbaum Z.W. (1969). *On the importance of different components in a multi-component system*. University of Washington Technical Report No.54.

Boudali H. & Dugan J. B., (2006). A continuous-time Bayesian network reliability modeling and analysis framework. *IEEE Transactions on Reliability,* 55, 86-97.

Chakravarthy S.R. (2006). Analysis of a k-out-of-N system with spares, repairs, and a probabilistic rule. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis,* Volume 2006, 1-23.

Collett D., (2003). *Modeling survival data in medical research*. Chapman & Hall, London.

Distefano S. & Xing L. (2006). A new approach to modeling the system reliability: Dynamic reliability block diagrams. *Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium,* 189-195.

Dugan J. B., Sullivan K. J. & Coppit D. (2000). Developing a low-cost high-quality software tool for dynamic fault tree analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, 49, 49-59

Holland J. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems*. MIT Press, Cambridge MA.

Huang J, Zuo M. & Fang Z. (2003), Multi-state consecutive-k-out-of-n systems. *IIE Transactions, 35,* 527-534.

Kim G.R. (2000). *Repairable consecutive-k-out-of-n:F system with (k-1)-step Markov dependence.* Pusan, Korea.

Kuo W. & Zuo M. (2002). *Optimal reliability modeling*, Wiley, New York.

Levitin G., Lisnianski A., Ben-Haim H. & Elmakis D. (1998). Redundancy optimization from series-parallel multi-state systems. *IEEE Transactions on Reliability*, 49, 165-172.

Levitin G. & Lisnianski A., (1999). Importance and sensitivity analysis of multi-state systems using the universal generating function method. *Reliability Engineering and System Safety 65*, 271-282.

Levitin G., (2005). *The universal generating function in reliability analysis and optimization*. Springer, London.

Levitin G. & Amari S. V. (2009). Approximation algorithm for evaluating time-to-failure distribution of k-out-of-n system with shared standby elements. *Reliability Engineering and System Safety 95,* 396-401.

Li X., Yan R. & Zuo M. (2009). Evaluating a warm standby system with components having proportional hazard rates. *Operations Research Letters 37*, 56-60

Lisnianski A., Levitin G, Ben-Haim H. & Elmakis D. (1996). Power system structure optimization subject to reliability constraints. *Electric Power Systems Research 39*, 145-152.

Pandey D., Jacob M. & Yadav J., (1996). Reliability analysis of a powerloom plant with cold standby for its strategic unit. *Microelectron Reliability*, 36, 115-119,

Stamatelopoulos M. (2002). *Fault tree handbook with aerospace applications*. NASA, Washington.

Ushakov, I.A. (1986). A universal generating function, *Soviet Journal of Computing System Science* 5, 118-129.

Yearout R.D., Reddy P. & Grosh D.L. (1986). Standby redundancy in reliability – a review. *IEEE Transactions on Reliability*, 35, 285-292.

Yin M.L., Blough D.M. & Bic L. (2000). A dependability analysis for systems with global spares. *IEEE Transactions on Computers,* 49, 958-963.

Youssef A.M.A., Mohib A. & ElMaraghy H.A. (2006) Availability assessment of multi-state manufacturing systems using universal generating function. *Annals of the CIRP*, 55, 445-448.

Καρώνη Χ. (2009). *Μοντέλα αξιοπιστίας και επιβίωσης.* Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.