



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ  
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

---

Ασυμπτωτική Ανάλυση Ταλαντωτικών  
Συστημάτων με χρήση του CSP

---

*Συγγραφέας:*  
Κυριάκος Δ. ΑΣΒΕΣΤΑΣ

*Επιβλέπων Καθηγητής:*  
Δημήτριος Α. ΓΚΟΥΣΗΣ

Αθήνα, 2011

---

.....

Κυριάκος Δ. Ασβεστάς

Διπλωματούχος Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Copyright©Κυριάκος Ασβεστάς, 2011.

Με επιφύλαξη παντός νομίμου δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

---

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν για την πραγματοποίηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Συγκεκριμένα, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου, Καθ. Δημήτριο Α. Γκούση, για την εμπιστοσύνη που έδειξε στο προσωπό μου αλλά και την αμέριστη συνεισφορά του και καθοδήγηση καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής. Η συνεχή του παρουσία καθώς και η ανεκτίμητη βοήθεια του, τόσο σε επίπεδο γνωστικό όσο και τεχνογνωσιακό, αποτέλεσαν πολύτιμα εργαλεία χωρίς τα οποία η πραγμάτωση της παρούσας εργασίας θα ήταν αδύνατη.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου αλλά και την Κυδωνιέως Μαριάννα, τους ανθρώπους οι οποίοι πιστέψαν σε μενα και με ενθάρρυναν καθ' ολη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στους φίλους μου για τις αμέτρητες ώρες που περάσαμε μαζί χάρη στους οποίους μπορώ με σιγουριά να πω ότι η φοίτησή μου στη Σχολή Ε.Μ.Φ.Ε. ήταν κάτι παραπάνω από απολαυστική.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Πρόλογος</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Γεωμετρικές μέθοδοι και δυναμικά συστήματα</b>	<b>4</b>
2.1	Βασικές αρχές συνήθων διαφορικών εξισώσεων . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Εισαγωγή στον αλγόριθμο CSP</b>	<b>9</b>
3.1	Τα βασικά στοιχεία του αλγορίθμου . . . . .	10
3.2	Η τροποποιημένη μέθοδος CSP . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Σύστημα συζευγμένων ταλαντωτών</b>	<b>25</b>
4.1	Κλασσική ασυμπτωτική ανάλυση . . . . .	25
4.2	Ανάλυση με χρήση του CSP . . . . .	30
4.3	Σύγκριση κλασσικής και υπολογιστικής λύσης . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Σύστημα ράβδου - εκκρεμούς</b>	<b>40</b>
5.1	Κλασσική ασυμπτωτική ανάλυση . . . . .	40
5.2	Ανάλυση με χρήση του CSP . . . . .	47
5.3	Σύγκριση κλασσικής και υπολογιστικής λύσης . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Επίλογος</b>	<b>56</b>
<b>A</b>	<b>Ανάπτυγμα Fourier</b>	<b>58</b>
<b>B</b>	<b>Προσεγγίσεις της αργής πολλαπλότητας</b>	<b>61</b>
<b>C</b>	<b>Υπενθυμίσεις - Θεωρήματα</b>	<b>63</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>65</b>

# Κεφάλαιο 1

## Πρόλογος

Παρά την ταχέως αναπτυσσόμενη υπολογιστική δύναμη των σύγχρονων επεξεργαστών και του παράλληλου υπολογιστικού σχεδιασμού, η αριθμητική επίλυση προβλημάτων πολλαπλών κλιμάκων (multi-scale), όπως αυτά συναντώνται στην χημική κινητική, βιολογική μοντελοποίηση, ατμοσφαιρικές προβλέψεις κλπ, παραμένει μια επίπονη διαδικασία, κυρίως επειδή οι χρονοκλίμακες που μας ενδιαφέρουν είναι συγκριτικά πολύ πιο αργές από τις γρήγορες χρονοκλίμακες που αναπτύσσονται σε τέτοιου είδους συστήματα. Τα μαθηματικά μοντέλα που επιχειρούν να αναπαραστήσουν αυτή τη φαινομενολογία ονομάζονται “δύσκαμπτα” (“stiff”).

Η ακαμψία εν γένει σχετίζεται με τη διασπορά στο μέτρο (i) του αρνητικού, πραγματικού μέρους των ιδιοτιμών του συστήματος, και/ή (ii) του φανταστικού μέρους αυτών· η πρώτη κατηγορία σχετιζόμενη με την παρουσία έντονων αποσβετικών διεργασιών, όπως ιξώδης διάχυση, ενώ η τελευταία με έντονη ταλαντωτική συμπεριφορά.

Συγκεκριμένα, η εργασία διαμορφώνεται ως εξής. Αρχικά, θα καθορίσουμε το πλαίσιο μέσα στο οποίο θα εργαστούμε. Στο πρώτο κεφάλαιο, θα ορίσει η μέθοδος των ιδιομορφών διαταραχών ενώ θα εισάγουμε παράλληλα μια γεωμετρική προσέγγιση στο πρόβλημα. Στη συνέχεια, στο δεύτερο κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε μια σύντομη περιγραφή της μεθόδου CSP και των βασικών στοιχείων της, καθώς είναι απαραίτητα για την κατανόηση της παρούσας ανάλυσης. Επειτα, θα αναφέρουμε και θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε τα βασικά σημεία της τροποποιημένης μεθόδου CSP, όπως αυτά πρωτοδιατυπώθηκαν από τους S.H.Lam και Δ.Α.Γκούση. Τέλος, σε δύο ξεχωριστά κεφάλαια, θα μελετήσουμε δύο πολύ συγκεκριμένα παραδείγματα, τόσο αναλυτικά με τη χρήση της κλασικής ασυμπτωτικής ανάλυσης όσο και υπολογιστικά, με τη χρήση του τροποποιημένου αλγορίθμου CSP. Το πρώτο πρόβλημα αποτελείται από τρεις μάζες που δύνανται να κινούνται επί οριζοντίου επιπέδου. Οι μάζες είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με ένα γραμμικό και ένα μη γραμμικό ελατήριο, καθώς και με δύο αποσβεστήρες. Η συζευγμένη κίνηση των τριών μαζών σε συνδυασμό με την μεγάλη διαφορά στις συχνότητες ταλάντωσης των δύο ελατηρίων κάνουν το σύστημα δύσκαμπτο, με μικρή παράμετρο τον λόγο των δύο συχνοτήτων. Το δεύτερο πρόβλημα, περιλαμβάνει ένα έλασμα-ράβδο η οποία δύναται να κινείται επί κατακορύφου άξονα. Στην άκρη της ράβδου είναι συνδεδεμένο ένα εκκρεμές.

Η συζευγμένη ταλάντωση του εκκρεμούς και της εύκαμπτης ράβδου αποτελεί ένα δύσκαμπτο σύστημα, με μικρή παράμετρο και σε αυτή την περίπτωση τον λόγο των φυσικών συχνοτήτων της ράβδου και του εκκρεμούς. Τα δύο αυτά μηχανικά συστήματα είναι ταλαντωτικής φύσεως και αποτελούν απλές προσεγγίσεις εύκαμπτου/δύσκαμπτου συστήματος.

## Κεφάλαιο 2

# Γεωμετρικές μέθοδοι και δυναμικά συστήματα

Οι γεωμετρικές μέθοδοι και η θεωρία των δυναμικών συστημάτων παίζουν κυρίαρχο ρόλο στη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων σε όλα τα επίπεδα. Για παράδειγμα, οι μέθοδοι του χώρου φάσεων διδάσκονται σε προπτυχιακά μαθήματα, ενώ θέματα όπως θεωρία αναλλοίωτης πολλαπλότητας, διακλαδώσεις και ελκυστές, διδάσκονται σε μεταπτυχιακό επίπεδο. Υπάρχει επίσης πληθώρα εργασιών που αφορούν ζητήματα γύρω από τα συστήματα που μοντελοποιούν οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και την μαθηματική θεωρία που τα περιβάλλει.

Στην παρούσα εργασία θα εστιάσουμε σε κάποιες βασικές γεωμετρικές κατασκευές για δυναμικά συστήματα της μορφής:

$$(2.0.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon) \\ \mathbf{z}' &= \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon). \end{aligned}$$

Εδώ  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  και ο τόνος δηλώνει παραγωγή ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$ . Οι συναρτήσεις  $\mathbf{f}$  και  $\mathbf{g}$  υποτίθενται  $C^\infty$  συναρτήσεις των  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{z}$  και  $\varepsilon$  στο  $U \times I$ , όπου  $U$  είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  και  $I$  ένα ανοικτό διάστημα που συμπεριλαμβάνει το  $\varepsilon = 0$ : παρόλα αυτά σημειώνουμε ότι η θεωρία που θα αναπτύξουμε ισχύει και για συναρτήσεις στο  $C^r$ ,  $r \geq 1$ .

Προβλήματα που περιλαμβάνουν δυο κλίμακες χρόνου (ή μήκους) οδηγούν κατά φυσικό τρόπο σε συστήματα της μορφής (2.0.1). Συγκεκριμένα, η παράμετρος  $\varepsilon$  αποτελεί ένα άμεσο μέτρο διαχωρισμού των δύο χρονοκλιμάκων. Εμείς ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση που το  $\varepsilon$  είναι ένας αρκετά μικρός θετικός αριθμός. Στην περίπτωση αυτή, η μεταβλητή  $\mathbf{x}$  καλείται *γρήγορη* μεταβλητή, και η  $\mathbf{z}$  καλείται *αργή* μεταβλητή. Αυτό σημαίνει ότι κατά γενικό τρόπο, η  $\mathbf{x}$  εξελίσσεται με ρυθμό  $O(1)$  ο οποίος δίνεται από την συνάρτηση  $\mathbf{f}$ : ενώ η  $\mathbf{z}$  εξελίσσεται πιο αργά, με έναν ρυθμό ανάλογο του  $\varepsilon$ .

Είναι χρήσιμο σε διάφορες φάσεις να εξετάζουμε το επαναδιατυπωμένο σύστημα (2.0.1) ως προς την μετασχηματισμένη μεταβλητή  $\tau = \varepsilon t$ :

$$(2.0.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon) \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon). \end{aligned}$$

Εδώ η τελεία δηλώνει διαφορίση ως προς τη νέα ανεξάρτητη μεταβλητή  $\tau$ . Οι ανεξάρτητες μεταβλητές  $\tau$  και  $t$  αναφέρονται ως *γρήγορος* και *αργός χρόνος*, αντίστοιχα, ενώ οι (2.0.1) και (2.0.2) καλούνται *γρήγορο* και *αργό σύστημα*, αντιστοίχως. Αυτά τα συστήματα είναι ισοδύναμα οπουδήποτε  $\varepsilon \neq 0$  και χαρακτηρίζονται προβλήματα *ιδιόμορφων διαταραχών* όταν το  $\varepsilon$  είναι αρκετά μικρή παράμετρος.

Ο όρος “ιδιόμορφη” προκύπτει από την ασυνεχή οριακή συμπεριφορά των συστημάτων καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Από την μια πλευρά, οι γρήγορες εξισώσεις (2.0.1) με  $\varepsilon = 0$  ελλατώνονται σε ένα  $m$ -διάστατο σύστημα με την μεταβλητή  $\mathbf{z}$  να παίζει τον ρόλο σταθερής παραμέτρου:

$$(2.0.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, 0) \\ \mathbf{z}' &= 0. \end{aligned}$$

Θα αναφερόμαστε στο (2.0.3) ως απλουστευμένο γρήγορο σύστημα. Από την άλλη πλευρά, το αργό σύστημα με  $\varepsilon = 0$  είναι μια διαφορική αλγεβρική εξίσωση (βλ. Παράρτημα Γ):

$$(2.0.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, 0) \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, 0). \end{aligned}$$

Εδώ η διάσταση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων μειώνεται από  $m + n$  σε  $n$ . Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε στο (2.0.4) ως απλουστευμένο αργό σύστημα.

Η σύμβαση “για αρκετά μικρό  $\varepsilon$ ” ή “στο όριο καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ ” συχνά θα αναγράφεται και ως  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Εδώ, η σχέση  $\ll$  εισάγει μια διάταξη: για παράδειγμα:  $\varepsilon^2 \ll \varepsilon$  καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ , και  $e^{-1/\varepsilon} \ll \varepsilon^n$  για κάθε  $n > 0$ , δηλώνοντας τους σχετικούς ρυθμούς μείωσης (ή αύξησης) των συναρτήσεων καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Ιδιόμορφα συστήματα της μορφής (2.0.1) απαντώνται σε αρκετές εφαρμογές: προβλήματα συνοριακών τιμών δύο σημείων, προβλήματα οδευόντων κυμάτων σε εξισώσεις αντίδρασης-διάχυσης, πρότυπες χημικές ενώσεις, διάδοση των δυναμικών της κίνησης στη νευροφυσιολογία, συζευγμένοι μηχανικοί ταλαντωτές, διαταραγμένα και αδιαβατικά Χαμιλτονιανά συστήματα, καύση, μοντελοποίηση της τριβής, οπτική, κίνηση των σωματιδίων ρευστού στη ρευστομηχανική κατά Lagrange, θεωρία ακτινών στη διάδοση κυμάτων, ουράνια μηχανική, θεωρία ελέγχου και μηχανική των υλικών, για να αναφέρουμε μερικές από αυτές.

Το υλικό που υπάρχει πάνω σε προβλήματα ιδιόμορφων διαταραχών είναι πλούσιο και αχανές, και οι αντίστοιχες μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί αντικατοπτρίζουν το γεγονός αυτό. Στην



παρούσα εργασία, θα ασχοληθούμε με μια κλάση των μεθόδων που ονομάζονται “γεωμετρικές”. Η αποκαλούμενη γεωμετρική προσέγγιση του συστήματος (2.0.1) επικεντρώνεται στην αναγνώριση των κεντρικών δυναμικών κατασκευών, όπως αναλλοίωτα σύνολα και αναλλοίωτες πολλαπλότητες οι οποίες υπάρχουν στον χώρο φάσεων των συστημάτων (2.0.1). Επιπλέον εκμεταλλεύεται τις ιδιότητές τους, όπως την ανάλυση σε αργές και γρήγορες συνισταμένες αλλά και τις τομές των διαφόρων πολλαπλοτήτων, με σκοπό να ανακαλύψει την ύπαρξη επιθυμητών περιοδικών και ετεροκλινών τροχιών αλλά και λύσεων προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Τα δύο μειωμένα, ή αδιατάρακτα, συστήματα (2.0.3) και (2.0.4) προσφέρουν διαφορετικές σκοπίες της οριακής συμπεριφοράς των τροχιών και των γεωμετρικών κατασκευών. Πράγματι, αρκετές γεωμετρικές κατασκευές στο χώρο φάσεων του (2.0.1) με  $0 < \varepsilon \ll 1$  εντοπίζονται πολύ κοντά στις αντίστοιχες του (2.0.3) οι οποίες είναι πιο εύκολο να εντοπιστούν. Επιπλέον, άλλες γεωμετρικές κατασκευές του (2.0.1) (ή αντίστοιχα του (2.0.2)) με  $0 < \varepsilon \ll 1$  κοίτονται πολύ κοντά σε αντικείμενα του χώρου φάσεων του (2.0.4). Εκμεταλλεύοντας αυτή την ανάλυση σε αργά και γρήγορα συστήματα, η γεωμετρική προσέγγιση μειώνει το πλήρες πρόβλημα ιδιόμορφων διαταραχών σε δύο επιμέρους χαμηλότερης διάστασης προβλήματα κανονικών διαταραχών.

## 2.1 Βασικές αρχές συνήθων διαφορικών εξισώσεων

Σύνολα σημείων που έχουν σημαντικές ιδιότητες σε σχέση με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις είναι σημαντικά για την μελέτη των δυναμικών συστημάτων. Τα απλούστερα τέτοια σύνολα είναι τα στάσιμα σημεία.

**Ορισμός 1.** Δεδομένης της εξίσωσης  $\mathbf{y}' = \mathbf{h}(\mathbf{y})$ , όπου  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ , στάσιμο σημείο καλείται κάθε σημείο  $\mathbf{y}$  για το οποίο η συνάρτηση  $\mathbf{h}$  εξαφανίζεται.

Τα στάσιμα σημεία αντιστοιχούν σε σημεία ισορροπίας του συστήματος που μοντελοποιείται. Ένα πιο γενικό σύνολο σημείων που μας ενδιαφέρει είναι αυτά τα οποία παραμένουν αναλλοίωτα σε σχέση με τις κυρίαρχες εξισώσεις.

**Ορισμός 2.** Ένα σύνολο  $V$  καλείται αναλλοίωτο ως προς την εξίσωση  $\mathbf{y}' = \mathbf{h}(\mathbf{y})$  εάν δεδομένου ότι  $\mathbf{y}(t_0) \in V$  για κάποιο  $t_0 \in \mathbb{R}$  συνεπάγεται ότι  $\mathbf{y}(t) \in V$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ .

Απλά παραδείγματα αναλλοίωτων συνόλων αποτελούν τα στάσιμα σημεία και οι περιοδικές τροχιές. Τέλος, ένας λιγότερο περιοριστικός ορισμός της αμεταβλητότητας είναι τα τοπικά αναλλοίωτα σύνολα.

**Ορισμός 3.** Δεδομένου ενός συστήματος  $\mathbf{y}' = \mathbf{h}(\mathbf{y})$ , ένα ανοικτό σύνολο  $V$  καλείται τοπικά αναλλοίωτο ως προς ένα ανοικτό σύνολο  $W$  εάν το  $V$  είναι υποσύνολο του  $W$  και για κάθε τροχιά που εγκαταλείπει το  $V$  εγκαταλείπει ταυτόχρονα και το  $W$ .

Τα αναλλοίωτα (και τοπικά αναλλοίωτα) σύνολα που θα μελετήσουμε έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα, για την ακρίβεια θα είναι πολλαπλότητες.

**Ορισμός 4.** Έστω  $\mathbb{R}^p$  ο  $p$ -διάστατος Ευκλείδιος χώρος. Ένα σύνολο σημείων στον  $\mathbb{R}^p$  θα καλείται ομαλή πολλαπλότητα διάστασης  $q$ , με  $q \leq p$ , εάν κάθε σημείο του συνόλου έχει περιοχή που είναι  $C^\infty$  διαφορομορφική ως προς ένα ανοικτό σύνολο του  $\mathbb{R}^q$ .

**Ορισμός 5.** Δεδομένων δύο πολλαπλοτήτων  $M$  και  $N$ , μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $f$  καλείται διαφορομορφισμός αν τόσο η  $f : M \rightarrow N$  όσο και η αντίστροφη της  $f^{-1} : N \rightarrow M$  είναι διαφορίσιμες. Εάν οι συναρτήσεις είναι  $r$  φορές συνεχώς παραγωγίσιμες τότε η  $f$  καλείται  $C^r$  διαφορομορφισμός.

Δύο πολλαπλότητες  $M$  και  $N$  είναι διαφορομορφικές (συμβολίζονται με  $\simeq$ ) εάν υπάρχει ομαλή αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $f$  από το  $M$  στο  $N$  με ομαλή αντίστροφη απεικόνιση. Είναι  $C^r$  διαφορομορφικές εάν υπάρχει μια  $r$  φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το  $M$  στο  $N$  με αντίστροφη απεικόνιση επίσης  $r$  φορές συνεχώς παραγωγίσιμη.

Τα πιο απλά παραδείγματα πολλαπλοτήτων, στον  $\mathbb{R}^3$  για παράδειγμα, είναι τα σημεία (μη-δενοδιάστατα), μη τετμημένες ομαλες καμπύλες (μονοδιάστατα) και μη τετμημένες ομαλές επιφάνειες (διδιάστατες), όπως επίπεδα και παραβολοειδή.

Όλες οι πολλαπλότητες που μελετάμε είναι συμπαγείς. Παραδείγματα συμπαγών πολλαπλοτήτων αποτελούν ο διπλός τόρος στον  $\mathbb{R}^3$ , ο οποίος είναι ασύνωρος, και ένα οποιοδήποτε κλειστό διάστημα στον  $\mathbb{R}$ , το οποίο έχει σύνορο.

**Ορισμός 6.** Έστω  $H^q$  ο κλειστός ημιχώρος

$$H^q = (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q | x_q \geq 0,$$

και έστω το σύνορό του, το οποίο ορίζεται από το υπερεπίπεδο  $\mathbb{R}^{q-1} \times 0 \subset \mathbb{R}^q$  και συμβολίζεται με  $\partial H^q$ .

Ένα υποσύνολο  $X \subset \mathbb{R}^q$  θα καλείται ομαλή  $q$ -διάστατη πολλαπλότητα με σύνορο εάν κάθε σημείο του  $X$  έχει περιοχή  $U \cap X$  η οποία είναι  $C^\infty$  διαφορομορφική ως προς ένα ανοικτό  $V \cap H^q$  του  $H^q$ . Επιπλέον, το σύνορο του  $X$ , το οποίο συμβολίζεται με  $\partial X$ , είναι το σύνολο όλων των σημείων του  $X$  που αντιστοιχούν στα σημεία του  $\partial H^q$  υπό την επίδραση ενός τέτοιου διαφορομορφισμού.

Τέλος, ορίζουμε την τοπικά αναλλοίωτη πολλαπλότητα ως εξής:

**Ορισμός 7.** Μια πολλαπλότητα θα καλείται τοπικά αναλλοίωτη πολλαπλότητα του συστήματος  $\mathbf{y}' = \mathbf{h}(\mathbf{y})$  εάν το σύνολο των σημείων που την ορίζουν είναι ένα τοπικά αναλλοίωτο σύνολο.

Μια δεύτερη ιδιότητα που παίζει εξίσου σημαντικό ρόλο σε όσα θα αναφέρουμε στη συνέχεια είναι αυτή της υπερβολικότητας.

**Ορισμός 8.** Θεωρούμε ξανά το σύστημα  $\mathbf{y}' = \mathbf{h}(\mathbf{y})$ , μαζί με την γραμμικοποίησή του  $\mathbf{w}' = J\mathbf{w}$  όπου ο  $J$  συμβολίζει την  $k \times k$  Ιακωβιανή ορίζουσα του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{h}$  ως προς  $\mathbf{y}$ . Ένα στάσιμο σημείο του συστήματος θα καλείται υπερβολικό εάν οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής υπολογιζόμενης στο σημείο αυτό έχουν μη αρνητικά πραγματικά μέρη.

Ένα οικείο παράδειγμα υπερβολικού στάσιμου σημείου είναι η ανεστραμμένη ισορροπία ενός κλασσικού μη γραμμικού εκκρεμούς

$$(2.1.1) \quad q' = p, \quad p' = -\sin q.$$

Εδώ οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής στο  $(-\pi, 0)$  είναι  $\pm 1$ , και επομένως το στάσιμο σημείο είναι υπερβολικό εξ ορισμού. Οι λύσεις που προσεγγίζουν (ή απομακρύνονται από) το στάσιμο σημείο  $(-\pi, 0)$  το κάνουν με εκθετικό ρυθμό εξαιτίας της υπερβολικότητας του.

Ένα δεύτερο παράδειγμα, πιο άμεσου ενδιαφέροντος, προσφέρεται από το σύστημα:

$$(2.1.2) \quad x' = -x, \quad z' = -\varepsilon z.$$

Αυτό το παράδειγμα είναι μια ειδική περίπτωση του (2.0.1) με  $m, n = 1$ . Η Ιακωβιανή του συστήματος είναι ένας  $2 \times 2$  διαγώνιος πίνακας με τιμές, και συνεπώς ιδιοτιμές,  $-1$  και  $-\varepsilon$ . Συνεπώς, η αρχή των αξόνων είναι ένα υπερβολικό στάσιμο σημείο για κάθε  $\varepsilon \neq 0$ . Στην πραγματικότητα, οι λύσεις φθίνουν εκθετικά καθώς προσεγγίζουμε την αρχή και απο τις δύο κατευθύνσεις, με μικρό ρυθμό ελάττωσης στην  $z$  κατεύθυνση και (σχετικά μιλώντας) μεγάλο ρυθμό ελάττωσης στην  $x$  κατεύθυνση. Ωστόσο, όταν  $\varepsilon = 0$ , η δεύτερη ιδιοτιμή είναι ίση με μηδέν. Επομένως, αυτό το παράδειγμα δείχνει μια κατάσταση στην οποία η υπερβολικότητα του σταθερού σημείου του πλήρους συστήματος χάνεται όταν  $\varepsilon = 0$ , κάτι που είναι σύνηθες στα προβλήματα ιδιόμορφων διαταραχών της μορφής (2.0.1).

Γραμμικοποιημένο σε ένα υπερβολικό στάσιμο σημείο  $\mathbf{y}_0$ , το γενικό σύστημα  $\mathbf{y}' = \mathbf{h}(\mathbf{y})$  έχει ευσταθείς και ασταθείς υποχώρους η διάσταση των οποίων είναι ίση με το πλήθος των ιδιοτιμών με αρνητικό και θετικό πραγματικό μέρος, αντίστοιχα. Οι τροχιές του γραμμικοποιημένου συστήματος στους ευσταθείς και ασταθείς υποχώρους προσεγγίζουν το στάσιμο σημείο με εκθετικό ρυθμό σε κανονικό και αντίστροφο χρόνο, αντίστοιχα. Η θεωρία των δυναμικών συστημάτων μας βεβαιώνει ότι υπάρχουν μη γραμμικά ανάλογα αυτών των υποχώρων, γνωστά και ως τοπικά ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες του υπερβολικού στάσιμου σημείου.

**Ορισμός 9.** Έστω  $V$  μια περιοχή του  $\mathbf{y}_0$ .

Η τοπικά ευσταθής πολλαπλότητα του υπερβολικού στάσιμου σημείου  $\mathbf{y}_0$  ορίζεται ως εξής:

$$(2.1.3) \quad \mathbf{W}_{loc}^S(\mathbf{y}_0) \equiv \{\mathbf{y} | \mathbf{y}(t) \in V \quad \forall t \geq 0, \mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{y}_0 \text{ εκθετικά καθώς } t \rightarrow \infty\}.$$

Όμοια, η τοπικά ασταθής πολλαπλότητα του υπερβολικού στάσιμου σημείου  $\mathbf{y}_0$  ορίζεται ως εξής:

$$(2.1.4) \quad \mathbf{W}_{loc}^U(\mathbf{y}_0) \equiv \{\mathbf{y} | \mathbf{y}(t) \in V \quad \forall t \geq 0, \mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{y}_0 \text{ εκθετικά καθώς } t \rightarrow -\infty\}.$$

Συγκεκριμένα, για ένα σύστημα  $\mathbf{y}' = \mathbf{h}(\mathbf{y})$ , όπου η συνάρτηση  $\mathbf{h}$  είναι  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) και για το οποίο το  $\mathbf{y}_0$  είναι υπερβολικό στάσιμο σημείο, το Θεώρημα Ευσταθούς Πολλαπλότητας (βλ. Παράρτημα Γ) υποδεικνύει την ύπαρξη  $C^r$  ομαλών, τοπικά ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων του  $\mathbf{y}_0$ . Επιπλέον, μας λέει ότι αυτές οι τοπικές πολλαπλότητες είναι εφαιπόμενες στους ευσταθείς και ασταθείς υποχώρους, αντίστοιχα, στο σημείο  $\mathbf{y}_0$ . Στην συνέχεια λαμβάνουμε τις ολικά ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες,  $W^S(M_0)$  και  $W^U(M_0)$ , από τις ροές των σημείων στις τοπικές πολλαπλότητες εμπρός και πίσω στο χρόνο, αντίστοιχα.

## Κεφάλαιο 3

# Εισαγωγή στον αλγόριθμο CSP

Η παρουσία αποσβετικών χρονοκλιμάκων πολύ γρηγορότερων από αυτές που μας ενδιαφέρουν είναι που κάνει τα δύσκαμπτα προβλήματα δυσεπίλυτα. Από την άλλη πλευρά, οδηγεί στην υιοθέτηση έμμεσων μεθόδων για την παράκαμψη των περιορισμών ευστάθειας που τίθενται από τις άμεσες. Πράγματι, δεδομένου ενός  $N$ -διάστατου προβλήματος, όπου  $N$  μπορεί να είναι το πλήθος των στοιχείων σε έναν χημικό μηχανισμό, ο σκοπός των γρήγορων χρονοκλιμάκων σε ένα δύσκαμπτο πρόβλημα είναι ο περιορισμός των σημειακών δυναμικών σε μια πολλαπλότητα διάστασης μικρότερης από  $N$ , μειώνοντας έτσι αποτελεσματικά τους εναπομείναντες βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς, η λύση του δύσκαμπτου προβλήματος μπορεί να αναζητηθεί κατασκευάζοντας ένα μοντέλο σε σμίκρυνση, προσεγγίζοντας το αρχικό, τέτοιο ώστε να περιγράφει επακριβώς τα σημειακά δυναμικά που περιορίζονται στην μικρότερης διαστασης πολλαπλότητα. Το υπό σμίκρυνση μοντέλο θα είναι μικρότερης διάστασης και ελεύθερο από γρήγορες χρονοκλίμακες, σε σύγκριση με το αρχικό. Καταληκτικά, η κατασκευή του υπό σμίκρυνση μοντέλου απαιτεί τον ακριβή προσδιορισμό αυτής της πολλαπλότητας. Εκείνη, προσελκύνοντας ασυμπτωτικά όλες τις τροχιές, αναφέρεται συνήθως ως *Αργή Αναλλοίωτη Πολλαπλότητα* (*Slow Invariant Manifold* ή *SIM*) του δύσκαμπτου προβλήματος. Η SIM χαρακτηρίζεται ως τόσο (i) αναλλοίωτη των δυναμικών όσο και (ii) εκθετικά ελκτική για τη ροή των τροχιών.

Η πολυπλοκότητα των σύγχρονων προβλημάτων παρακίνησε την έρευνα για την ανάπτυξη αλγορίθμων προκειμένου τον υπολογιστικό προσδιορισμό της SIM. Από τη δράση αυτή, δύο κύριες κατηγορίες προσεγγίσεων αναδείχθηκαν, η μία στοχεύοντας στην αναγνώριση του γεωμετρικού τόπου των σημείων επι του χώρου των φάσεων που ανήκαν στο SIM, η άλλη προσπαθώντας να προσδιορίσει τόσο την πολλαπλότητα SIM όσο και τις κύριες γεωμετρικές ιδιότητες της, ούτως ειπείν τους αναλλοίωτους υπόχωρους και τις χαρακτηριστικές χρονοκλίμακες που σχετίζονται με αυτούς.

Η υπολογιστική μέθοδος CSP (Computational Singular Perturbation), που αναπτύχθηκε απο κοινού απο τους S.H.Lam και Δ.Α.Γκουση [1, 2, 4, 6, 14, 15, 16], ανήκει στην δεύτερη κατηγορία προσεγγίσεων. Δεδομένου ενός  $N$ -διάστατου προβλήματος, η CSP παρέχει μια γεωμετρική περιγραφή της SIM, προσδιορίζοντας το σύνολο των “γρήγορων” διανύματων βάσης,

$A_r$ , καθώς και το αντίστοιχο σύνολο των δεικτών τους,  $B^r$ , το οποίο παράγει τον  $M$ -διάστατο “γρήγορο” υπόχωρο (με  $M < N$ ), που είναι τοπικά ορθογώνιος προς το  $(N - M)$ -διάστατο SIM.

Το βασικό κομμάτι της μεθόδου CSP περιλαμβάνει μια επαναληπτική διαδικασία, ειδικά σχεδιασμένη να προσδιορίζει τα διανύσματα βάσης που παράγουν τους δύο υποχώρους, στους οποίους δρουν οι γρήγορες και αργές χρονοκλίμακες αντίστοιχα· ο τελευταίος να είναι ταυτοτικά ίδιος με την SIM. Η διαδικασία ξεκινάει με μια τυχαία αρχική εκτίμηση των “γρήγορων” διανυσμάτων βάσης  $A_r$ , τα οποία ακολούθως θα παράγουν των γρήγορο υπόχωρο, καθώς και τα δεικτά τους  $B^r$ . Μετά από κάθε επανάληψη, καλύτερες προσεγγίσεις των “γρήγορων”, και των συμπληρωματικών τους “αργών”, υποχώρων λαμβάνονται. Για το σκοπό αυτό, υπάρχουν δύο ειδών επαναλήψεις ανεξάρτητες μεταξύ τους: η  $A_r$ - και  $B^r$ -refinement. Η  $B^r$ -refinement βελτιώνει την ακρίβεια της περιγραφής του SIM, με το να προσεγγίζει καλύτερα τον “γρήγορο” υπόχωρο, ενώ η  $A_r$ -refinement εξαλείφει την ακαμψία του προβλήματος προσεγγίζοντας καλύτερα τον “αργό” υπόχωρο. Υπό διαφορετική σκοπιά, η  $B^r$ -refinement μειώνει την επίδραση των αργών χρονοκλιμάκων στην προσέγγιση του “γρήγορου” υποχώρου, ενώ η  $A_r$ -refinement μειώνει την επίδραση των γρήγορων χρονοκλιμάκων στην προσέγγιση του “αργού” υποχώρου.

Με κάθε επανάληψη, η βελτίωση στην προσέγγιση των  $A_r$  και  $B^r$  διανυσμάτων βάσης επιτυγχάνεται λαμβάνοντας υπ’ όψη τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πολλαπλότητας (όπως η καμπυλότητα και όροι υψηλότερης τάξης). Η βελτιωμένη ακρίβεια μετά από κάθε επανάληψη είναι της τάξης του  $\varepsilon$ , της μικρής παραμέτρου στην ιδιόμορφη διαταραχή που υλοποιεί η CSP.

Οι επιτυχείς προσεγγίσεις των διανυσμάτων βάσης, που λαμβάνονται έπειτα από κάθε επανάληψη του αλγορίθμου, συγκλίνουν (i) στα τοπικά ιδιοδιανύσματα της Ιακωβιανής του δυναμικού συστήματος εάν η συνεισφορά των όρων υψηλής τάξης, υπολογισμένη από τα refinement, λόγω της χρονικής μεταβολής των διανυσμάτων βάσης, αγνοηθεί, παρέχοντας έτσι μια προσέγγιση πρώτης τάξης του SIM, ή (ii) στη σωστή ασυμπτωτική αναπαράσταση του SIM, σε δυνάμεις του  $\varepsilon$ , εάν η συνεισφορά αυτή ληφθεί υπ’ όψη.

### 3.1 Τα βασικά στοιχεία του αλγορίθμου

Θεωρείστε την εξέλιξη ενός φυσικού φαινομένου που περιγράφεται από το σύστημα  $N$  συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$(3.1.1) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

όπου  $\mathbf{y}$  είναι το  $N$ -διάστατο διάνυσμα των εξαρτημένων μεταβλητών και  $\mathbf{g}$  μια αλγεβρική εξίσωση του  $\mathbf{y}$ . Υποθέτουμε ότι η εξίσωση (3.1.1) είναι δύσκαμπτη· ούτως ειπείν κάποιες από τις χρονοκλίμακες του προβλήματος είναι πολύ πιο γρήγορες από τις χρονοκλίμακες που μας

ενδιαφέρουν.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο CSP, σε κάθε σημείο του χώρου των φάσεων, το διάνυσμα  $\mathbf{g}$  αναλύεται σε δύο συνισταμένες προβάλλοντας το στους  $M$ -διάστατο γρήγορο και  $(N - M)$ -διάστατο αργό υποχώρους (δηλ. στους υποχώρους επί τους οποίους δρουν οι γρήγορες και οι αργές χρονοκλίμακες, αντίστοιχα) οι οποίοι παράγονται από τα CSP διανύσματα  $\mathbf{a}_i (i = 1, \dots, M)$  και  $\mathbf{a}_j (j = M + 1, \dots, N)$ , και τα οποία μπορούν να συλλεχθούν στους  $N \times M$  και  $N \times (N - M)$ -διάστατους πίνακες  $A_r(k, m)$  και  $A_s(k, m)$  που ορίζονται ως εξής:

$$(3.1.2) \quad \begin{aligned} A_r(k, m) &= [\mathbf{a}_1(k, m), \dots, \mathbf{a}_M(k, m)], \\ A_s(k, m) &= [\mathbf{a}_{M+1}(k, m), \dots, \mathbf{a}_N(k, m)], \end{aligned}$$

όπου  $k$  και  $m$  είναι ο αριθμός των επαναλήψεων από τα δύο είδη των refinements, που θα συζητηθούν στη συνέχεια. Κάθε διάνυσμα βάσης  $\mathbf{a}_i$  (ή mode) αντιστοιχεί σε μια χρονοκλίμακα που δρα στην αντίστοιχη διεύθυνση. Τα modes κατατάσσονται σύμφωνα με την ταχύτητά τους: το πρώτο mode αντιστοιχεί στην πιο γρήγορη χρονοκλίμακα και το τελευταίο στην πιο αργή.

Θεωρήστε τώρα ένα δεύτερο σύνολο CSP διανυσμάτων βάσης που ορίζονται ως  $\mathbf{b}^i (i = 1, \dots, M)$  και  $\mathbf{b}^j (j = M + 1, \dots, N)$  και τα οποία συλλέγονται στους  $M \times N$  και  $(N - M) \times N$ -διάστατους πίνακες  $B^r(k, m)$  και  $B^s(k, m)$  ως εξής:

$$(3.1.3) \quad B^r(k, m) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1(k, m) \\ \mathbf{b}^2(k, m) \\ \vdots \\ \mathbf{b}^M(k, m) \end{bmatrix}, \quad B^s(k, m) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{M+1}(k, m) \\ \mathbf{b}^{M+2}(k, m) \\ \vdots \\ \mathbf{b}^N(k, m) \end{bmatrix}.$$

Τα διανύσματα  $\mathbf{b}^i$  είναι τα δυνάμεις των διανυσμάτων  $\mathbf{a}_i$ . Επομένως, λόγω ορθογωνιότητας, οι τέσσερις πίνακες ικανοποιούν τις εξής σχέσεις:

$$(3.1.4) \quad \begin{aligned} B^r(k, m)A_r(k, m) &= I_M^M, & B^r(k, m)A_s(k, m) &= \mathbf{0}_{N-M}^M, \\ B^s(k, m)A_r(k, m) &= \mathbf{0}_M^{N-M}, & B^s(k, m)A_s(k, m) &= I_{N-M}^{N-M} \end{aligned}$$

και

$$(3.1.5) \quad A_r(k, m)B^r(k, m) + A_s(k, m)B^s(k, m) = I_N^N,$$

όπου  $I_N^N$  είναι ο  $N$ -διάστατος μοναδιαίος πίνακας και  $\mathbf{0}_\nu^\mu$  ο  $\mu \times \nu$  μηδενικός πίνακας.

Προβάλλοντας το δεξιό μέλος της εξίσωσης (3.1.1) στους δύο υποχώρους (αργό και γρήγορο) δίνει

$$(3.1.6) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = A_r(k, m)\mathbf{f}^r(k, m) + A_s(k, m)\mathbf{f}^s(k, m),$$

όπου τα  $M$  και  $(N - M)$ -διάστατα διανύσματα  $\mathbf{f}^r(k, m)$  και  $\mathbf{f}^s(k, m)$  ορίζονται ως εξής

$$(3.1.7) \quad \mathbf{f}^r(k, m) = \begin{bmatrix} f^1(k, m) \\ f^2(k, m) \\ \vdots \\ f^M(k, m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^s(k, m) = \begin{bmatrix} f^{M+1}(k, m) \\ f^{M+2}(k, m) \\ \vdots \\ f^N(k, m) \end{bmatrix},$$

όπου κάθε εύρος διανύσματος (mode amplitude)  $f^i$  ορίζεται ως

$$(3.1.8) \quad f^i(k, m) = \mathbf{b}^i(k, m) \cdot \mathbf{g}.$$

Οπουδήποτε, στο χώρο των φάσεων, τα εύρη των  $M$  πιο γρήγορων διανυσμάτων βάσης λαμβάνουν αμελητέο μέτρο, ούτως ειπείν ισχύει η κάτωθι αλγεβρική εξίσωση:

$$(3.1.9) \quad \mathbf{f}^r(k, m) = B^r(k, m)\mathbf{g} \approx \mathbf{0}_1^M,$$

τότε η εξίσωση (3.1.9) περιγράφει τη μορφή του SIM, το οποίο έχει διάσταση  $(N - M)$ . Τότε, οι αντίστοιχες  $M$  γρήγορες χρονοκλίμακες δεν παίζουν κανένα ρόλο στα σημειακά δυναμικά και η τοπική χαρακτηριστική χρονοκλίμακα είναι αργή. Αυτό σημαίνει ότι τα σημειακά δυναμικά δεν μπορούν να κινηθούν κατά μήκος καμιάς τροχιάς με συνιστώσα στις “γρήγορες” κατευθύνσεις,  $\mathbf{a}_i (i = 1, \dots, M)$ , όντας κατά συνέπεια περιορισμένα να κινούνται κατά μήκος των “αργών”  $\mathbf{a}_j (j = M + 1, \dots, N)$ : δηλαδή, κατά μήκος του SIM, σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$(3.1.10) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} \approx A_s(k, m)\mathbf{f}^s(k, m) = [I - A_r(k, m)B^r(k, m)]\mathbf{g},$$

όπου η δεύτερη ισότητα προέκυψε από την σχέση ορθοκανονικότητας (3.1.5). Το απλοποιημένο σύστημα δεν είναι δύσκαμπτο, μιας και τα modes που σχετίζονται με τις  $M$  γρηγορότερες χρονοκλίμακες έχουν εξαληφθεί.

Όπως φαίνεται από τις σχέσεις (3.1.9) και (3.1.10), για την κατασκευή των εξισώσεων που περιγράφουν τόσο το manifold όσο και το απλοποιημένο σύστημα, είναι αρκετό να γνωρίζουμε μονάχα τα γρήγορα διανύσματα  $A_r$  και  $B^r$ .

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, υπάρχουν δύο είδη CSP refinement. Το πρώτο μεταβάλλει το  $B^r$  και το  $A_s$  (και ορίστηκε ως  $B^r$ -refinement), αφήνοντας τα  $B^s$  και  $A_r$  ανεπηρέαστα, ενώ σχετίζεται με την ακρίβεια στην περιγραφή του manifold. Το δεύτερο μεταβάλλει το  $A_r$  και το  $B^s$  (ορίστηκε αντίστοιχα ως  $A_r$ -refinement), αφήνοντας τώρα τα  $B^r$  και  $A_s$  ανεπηρέαστα, ενώ σχετίζεται με την μη-ακαμψία του απλοποιημένου προβλήματος. Οι δύο αυτές επαναληπτικές διαδικασίες λειτουργούν ανεξάρτητα, συνεπώς οποιοσδήποτε αριθμός απο αυτά μπορεί να εφαρμοστεί [4]. Οι σχέσεις που δίνουν τον αλγόριθμο των δύο refinement είναι:

$$(3.1.11) \quad B^r(k_1 + 1, m_1) = T_r^r(k_1, m_1) \left( \frac{dB^r(k_1, m_1)}{dt} + B^r(k_1, m_1)J \right),$$

$$(3.1.12) \quad A_r(k_1 + 1, m_1) = A_r(k_1, m_1),$$

$$(3.1.13) \quad B^s(k_1 + 1, m_1) = B^s(k_1, m_1),$$

$$(3.1.14) \quad A_s(k_1 + 1, m_1) = [I - A_r(k_1 + 1, m_1)B^r(k_1 + 1, m_1)]A_s(k_1, m_1),$$

όπου

$$(3.1.15) \quad T_r^r(k_1, m_1) = [A_r^r(k_1, m_1)]^{-1} = \left[ \left( \frac{dB^r(k_1, m_1)}{dt} + B^r(k_1, m_1)J \right) A_r(k_1, m_1) \right]^{-1},$$

και

$$(3.1.16) \quad A_r(k_2, m_2 + 1) = \left[ -\frac{dA^r(k_2, m_2)}{dt} + JA_r(k_2, m_2) \right] T_r^r(k_2, m_2),$$

$$(3.1.17) \quad B^r(k_2, m_2 + 1) = B^r(k_2, m_2),$$

$$(3.1.18) \quad B^s(k_2, m_2 + 1) = B^s(k_2, m_2)[I - A_r(k_2, m_2 + 1)B^r(k_2, m_2 + 1)],$$

$$(3.1.19) \quad A_s(k_2, m_2 + 1) = A_s(k_2, m_2),$$

όπου

$$(3.1.20) \quad T_r^r(k_2, m_2) = [A_r^r(k_2, m_2)]^{-1} = \left[ \left( \frac{dB^r(k_2, m_2)}{dt} + B^r(k_2, m_2)J \right) A_r(k_2, m_2) \right]^{-1},$$

και τα  $k_i, m_i$  φανερώνουν τον αριθμό των  $B^r$ - και  $A_r$ -refinement, αντίστοιχα, που έχουν ήδη πραγματοποιηθεί. Η υπόστιξη  $i$  εισήχθει εδώ με σκοπό να δηλώσει ότι οποιοσδήποτε αριθμός από  $B^r$ - ή  $A_r$ -refinement μπορεί να ακολουθηθεί από ένα επιπλέον  $B^r$ - ή  $A_r$ -refinement· ο πίνακας  $T_r^r$  να ανανεώνεται αντίστοιχα. Βέβαια, και τα δύο είδη refinement (3.1.11)-(3.1.15) και (3.1.16)-(3.1.20) διατηρούν την ορθογωνιότητα των CSP διανυσμάτων, σχέσεις (3.1.4) και (3.1.5). Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, τα  $B^r$ - και  $A_r$ -refinement, αντίστοιχα, ελλατώνουν την επιρροή των αργών και γρήγορων κλιμάκων χρόνου στην υπολογιζόμενη προσέγγιση των “γρήγορου” και “αργού” υποχώρων στο  $(k, m)$ -οστό βήμα. Σαν αποτέλεσμα, η εξάρτηση των πλατών στα  $\mathbf{f}^r$  και  $\mathbf{f}^s$ , αντίστοιχα, από τις γρήγορες χρονοκλίμακες θα μειώνεται. Η εξέλιξη αυτή επιτρέπει στις γρήγορες κλίμακες χρόνου να οδηγήσουν τα  $\mathbf{f}^r$  σε ακόμη χαμηλότερες τιμές, ενώ παράλληλα ενισχύει τον έλεγχο των αργών χρονοκλιμάκων επί των  $\mathbf{f}^s$ , κάνοντας το απλοποιημένο πρόβλημα, όπως ορίστηκε από τις σχέσεις (3.1.9) και (3.1.10), πιο ακριβές και μη-δύσκαμπτο.

Για να αποδείξουμε τον αλγόριθμο των δύο αυτών refinement, αρχικά ας παρατηρήσουμε ότι η εξέλιξη των mode amplitude  $f^i$  υπόκειται στις εξισώσεις:

$$(3.1.21) \quad \frac{df^i}{dt} = \sum_{j=1, N} \Lambda_j^i f^j, \quad i = 1, N.$$

Δεδομένου ενός συνόλου διανυσμάτων βάσης στο  $(k, m)$ -οστό refinement και της εξίσωσης (3.1.21), η εξέλιξη των γρήγορων πλατών  $f^r$  μπορεί να γραφεί ως

$$(3.1.22) \quad \frac{d\mathbf{f}^r(k, m)}{dt} = \Lambda_r^r(k, m)\mathbf{f}^r(k, m) + \Lambda_s^r(k, m)\mathbf{f}^s(k, m),$$



όπου

$$(3.1.23) \quad \Lambda_r^r(k, m) = \left( \frac{dB^r(k, m)}{dt} + B^r(k, m)J \right) A_r(k, m),$$

$$(3.1.24) \quad \Lambda_s^r(k, m) = \left( \frac{dB^r(k, m)}{dt} + B^r(k, m)J \right) A_s(k, m),$$

και  $T_r^r(k, m)$  είναι ο αντίστροφος πίνακας του  $\Lambda_r^r(k, m)$ . Ξαναγράφοντας την εξίσωση (3.1.22) ως

$$(3.1.25) \quad \frac{d\mathbf{f}^r(k, m)}{dt} = \Lambda_r^r(k, m)(\mathbf{f}^r(k, m) + T_r^r(k, m)\Lambda_s^r(k, m)\mathbf{f}^s(k, m)),$$

παρατηρούμε ότι το ασυμπτωτικό όριο του  $\mathbf{f}^r(k, m)$  είναι

$$(3.1.26) \quad \mathbf{f}^r(k, m) \approx -T_r^r(k, m)\Lambda_s^r(k, m)\mathbf{f}^s(k, m).$$

Επιθυμώντας να κάνουμε τα εύρη των  $f^r$  όσο το δυνατόν μικρότερα, στο χρονικό διάστημα κατά το οποίο οι γρήγορες κλίμακες χρόνου εξαλείφονται, η εξίσωση (3.1.25) υποδεικνύει την εισαγωγή ενός νέου συνόλου γρήγορων πλατών, που ορίζονται ως

$$(3.1.27) \quad \mathbf{f}^r(k+1, m) = \mathbf{f}^r(k, m) + T_r^r(k, m)\Lambda_s^r(k, m)\mathbf{f}^s(k, m).$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το να ορίσουμε ένα νέο σύνολο διανυσμάτων βάσης ως εξής

$$(3.1.28) \quad B^r(k+1, m) = T_r^r(k, m) \left( \frac{dB^r(k, m)}{dt} + B^r(k, m)J \right),$$

$$(3.1.29) \quad A_r(k+1, m) = A_r(k, m),$$

$$(3.1.30) \quad B^s(k+1, m) = B^s(k, m),$$

$$(3.1.31) \quad A_s(k+1, m) = [I_r^r - A_r(k+1, m)B^r(k+1, m)]A_s(k, m),$$

όπου η τελευταία σχέση απαιτείται για να επαναφέρει την ορθογωνιότητα μεταξύ των  $A_s(k+1, m)$  και του καινούριου, περιστραμμένου  $B^r(k+1, m)$  διανύσματος βάσης. Οι σχέσεις (3.1.28)-(3.1.31) αποτελούν, όπως παρατηρούμε, τον αλγόριθμο του  $B_r$ -refinement.

Για τον αντίστοιχο αλγόριθμο του  $A_r$ -refinement, σύμφωνα με την εξίσωση (3.1.21), στο  $(k, m)$ -οστό refinement, η εξέλιξη των αργών πλατών υπόκειται στις εξισώσεις:

$$(3.1.32) \quad \frac{d\mathbf{f}^s(k, m)}{dt} = \Lambda_r^s(k, m)\mathbf{f}^r(k, m) + \Lambda_s^s(k, m)\mathbf{f}^s(k, m),$$

όπου

$$(3.1.33) \quad \Lambda_r^s(k, m) = \left( \frac{dB^s(k, m)}{dt} + B^s(k, m)J \right) A_r(k, m),$$

$$(3.1.34) \quad \Lambda_s^s(k, m) = \left( \frac{dB^s(k, m)}{dt} + B^s(k, m)J \right) A_s(k, m).$$

Επιθυμώντας να περιορίσουμε την επίδραση των γρήγορων χρονοκλιμάκων στην εξέλιξη των αργών πλατών, η εξίσωση (3.1.32) ξαναγράφεται ως

$$(3.1.35) \quad \begin{aligned} & \frac{d[\mathbf{f}^s(k, m) - \Lambda_r^s(k, m)T_r^r(k, m)\mathbf{f}^r(k, m)]}{dt} \\ &= -\frac{d\Lambda_r^s(k, m)T_r^r(k, m)}{dt}\mathbf{f}^r(k, m) + [\Lambda_s^s(k, m) - \Lambda_r^s(k, m)T_r^r(k, m)\Lambda_s^r(k, m)]\mathbf{f}^s(k, m) \end{aligned}$$

υποδεικνύοντας την εισαγωγή ενός νέου συνόλου αργών πλατών ορισμένα ως εξής:

$$(3.1.36) \quad \mathbf{f}^s(k, m+1) = \mathbf{f}^s(k, m) - \Lambda_r^s(k, m)T_r^r(k, m)\mathbf{f}^r(k, m).$$

Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με τον ορισμό ενός νέου συνόλου διανυσμάτων βάσης της μορφής

$$(3.1.37) \quad A_r(k, m+1) = \left[ -\frac{dA^r(k, m)}{dt} + JA_r(k, m) \right] T_r^r(k, m),$$

$$(3.1.38) \quad B^r(k, m+1) = B^r(k, m),$$

$$(3.1.39) \quad B^s(k, m+1) = B^s(k, m)[I_r^r - A_r(k, m+1)B^r(k, m+1)],$$

$$(3.1.40) \quad A_s(k, m+1) = A_s(k, m),$$

Οι σχέσεις (3.1.37)-(3.1.40) αποτελούν όπως διαπιστώνουμε τον αλγόριθμο εφαρμογής του  $A_r$ -refinement.

Η δράση των δύο αυτών επαναληπτικών αλγορίθμων - βελτιώσεων, όπως αυτές ορίστηκαν από τις σχέσεις (3.1.11)-(3.1.14) ή (3.1.24-3.1.27) και (3.1.16) -(3.1.19) ή (3.1.31)-(3.1.34), αντίστοιχα, μπορεί να φανεί ξεκάθαρα κοιτάζοντας το μέτρο των πινάκων  $\Lambda_r^r(k, m)$ ,  $\Lambda_s^r(k, m)$ ,  $\Lambda_r^s(k, m)$ ,  $\Lambda_s^s(k, m)$  για αύξουσες τιμές των επιπέδων βελτίωσης “k” και “m”. Όπως δείξαμε προηγουμένως, στο  $(k, m)$ -οστό refinement τα γρήγορα και τα αργά εύρη υπόκεινται στις εξισώσεις:

$$(3.1.41) \quad \frac{d\mathbf{f}^r(k, m)}{dt} = \Lambda_r^r(k, m)\mathbf{f}^r(k, m) + \Lambda_s^r(k, m)\mathbf{f}^s(k, m),$$

$$(3.1.42) \quad \frac{d\mathbf{f}^s(k, m)}{dt} = \Lambda_r^s(k, m)\mathbf{f}^r(k, m) + \Lambda_s^s(k, m)\mathbf{f}^s(k, m).$$

Στο σημείο αυτό θεωρούμε ότι

$$(3.1.43) \quad \|T_r^r(k, m)\| \approx O(\tau_M), \quad \|\Lambda_s^s(k, m)\| \approx O(1/\tau_{M+1}),$$

όπου  $\tau_i$  είναι η  $i$ -οστή χρονοκλίμακα του προβλήματος.

Ένα  $B^r$ -refinement δίνει

$$(3.1.44) \quad \Lambda_r^r(k+1, m) = \Lambda_r^r(k, m) + T_r^r(k, m)\Lambda_s^r(k, m)\Lambda_r^s(k, m),$$

$$(3.1.45) \quad \Lambda_s^r(k+1, m) = \frac{d[T_r^r(k, m)\Lambda_s^r(k, m)]}{dt} + [T_r^r(k, m)\Lambda_s^r(k, m)]\Lambda_s^s(k+1, m),$$

$$(3.1.46) \quad \Lambda_r^s(k+1, m) = \Lambda_r^s(k, m),$$

$$(3.1.47) \quad \Lambda_s^s(k+1, m) = \Lambda_s^s(k, m) - \Lambda_r^s(k, m)T_r^r(k, m)\Lambda_r^r(k, m).$$

Σύμφωνα με τις εκτιμήσεις (3.1.43) και το γεγονός ότι η γρηγορότερη μη-εξαλειφόμενη χρονοκλίμακα είναι η  $\tau_{M+1}$ , η εξίσωση (3.1.45) υποδεικνύει ότι

$$(3.1.48) \quad \|\Lambda_s^r(k+1, m)\| \approx O\left(\frac{\tau_M}{\tau_{cur}}\Lambda_s^r(k, m)\right) + O\left(\frac{\tau_M}{\tau_{M+1}}\Lambda_s^r(k, m)\right),$$

όπου οι δύο όροι του δεξιού μέλους αντιστοιχούν στους δύο όρους του δεξιού μέλους της εξίσωσης (3.1.45) και το  $\tau_{cur}$  είναι η τρέχουσα κυρίαρχη χρονοκλίμακα. Εφόσον οι  $M$  γρηγορότερες χρονοκλίμακες έχουν εξαλειφθεί, έπεται ότι  $\tau_{cur} \geq \tau_{M+1}$ . Συνεπώς η εξίσωση (3.1.48) απλοποιείται σε

$$(3.1.49) \quad \|\Lambda_s^r(k+1, m)\| \approx O(\varepsilon\Lambda_s^r(k, m)),$$

όπου  $\varepsilon = \tau_M/\tau_{M+1}$  αποτελεί ένα μέτρο διαχωρισμού των γρήγορων/αργών χρονοκλιμάκων. Η σχέση (3.1.49) δηλώνει ότι η σύζευξη των γρήγορων πλατών στις αργές στη σχέση (3.1.41) μειώνεται κατά έναν παράγοντα  $\varepsilon$  κάθε φορά που εκτελείται ένα  $B^r$ -refinement. Αντίθετα, η σύζευξη των αργών επί των γρήγορων στη σχέση (3.1.42) παραμένει ανεπηρέαστη. Εφόσον, όπως φανερώνει η σχέση (3.1.26), η ασυμπτωτική τιμή του  $\mathbf{f}^r(k, m)$  είναι

$$(3.1.50) \quad \mathbf{f}^r(k, m) \approx -T_r^r(k, m)\Lambda_s^r(k, m)\mathbf{f}^s(k, m),$$

ένα επιπλέον  $B^r$ -refinement επιτρέπει στα γρήγορα εύρη να ελαττωθούν σε μια μικρότερη τιμή. Υπό τη σκοπιά του απλοποιημένου προβλήματος (3.1.10), ένα τέτοιο refinement επιτρέπει τον υπολογισμό μιας πιο ακριβούς λύσης.

Ομοίως, ένα  $A_r$ -refinement δίνει

$$(3.1.51) \quad \Lambda_r^r(k, m+1) = \Lambda_r^r(k, m) + T_r^r(k, m)\Lambda_s^r(k, m)\Lambda_r^s(k, m)T_r^r(k, m),$$

$$(3.1.52) \quad \Lambda_s^r(k, m+1) = \Lambda_s^r(k, m)$$

$$(3.1.53) \quad \Lambda_r^s(k, m+1) = \frac{d[\Lambda_r^s(k, m)T_r^r(k, m)]}{dt} + \Lambda_s^s(k, m+1)[\Lambda_r^s(k, m)T_r^r(k, m)],$$

$$(3.1.54) \quad \Lambda_s^s(k, m+1) = \Lambda_s^s(k, m) - \Lambda_r^s(k, m)T_r^r(k, m)\Lambda_r^r(k, m).$$

Οι σχέσεις αυτές υποδεικνύουν ότι

$$(3.1.55) \quad \|\Lambda_r^s(k, m+1)\| \approx O(\varepsilon\Lambda_r^s(k, m)),$$

ούτως ειπείν η σύζευξη των αργών πλατών στα γρήγορα όπως φαίνεται στη σχέση (3.1.42) μειώνεται κατά μια τάξη μεγέθους  $\varepsilon$  κάθε φορά που εκτελείται ένα  $A_r$ -refinement, κάνοντας το απλοποιημένο πρόβλημα (3.1.10) λιγότερο δύσκαμπτο. Ωστόσο, μιας και η σύζευξη των γρήγορων πλατών επί των αργών παραμένει αναλλοίωτη, η ακρίβεια του απλοποιημένου προβλήματος δεν βελτιώνεται.

## 3.2 Η τροποποιημένη μέθοδος CSP

α) Περιγραφή του SIM [6]

Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι το SIM είναι μια  $(N - M)$ -διάστατη επιφάνεια στον  $N$ -διάστατο χώρο των φάσεων. Εξ ορισμού, οι  $M$  γρηγορότερες χρονοκλίμακες σχετιζόμενες με όλα τα διανύσματα θέσεως που ανήκουν στο SIM, έχουν εξαληφθεί. Έστω τώρα  $s^j$  ( $j = 1, N - M$ ) ομαλές συναρτήσεις του  $\mathbf{y}$ , τέτοιες ώστε

$$(3.2.1) \quad s^j = s^j(\mathbf{y}) = s^j(y^1, \dots, y^N), \quad j = 1, N - M$$

και το διάνυσμα θέσεως στο SIM να μπορεί να υπολογιστεί από

$$(3.2.2) \quad y^i = y^i(\mathbf{s}) = y^i(s^1, \dots, s^{N-M}), \quad i = 1, N,$$

όπου  $\mathbf{s} = (s^1, \dots, s^{N-M})^T$ . Η διανυσματική συνάρτηση  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{y})$  είναι μια απεικόνιση του διανύσματος θέσεως από τον  $N$ -διάστατο χώρο φάσεων στο  $(N - M)$ -διάστατο SIM. Παραγωγίζοντας την σχέση (3.2.2) ως προς τον χρόνο έχουμε:

$$(3.2.3) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Y}_s \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{y}),$$

όπου

$$(3.2.4) \quad \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{S}_y \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{S}_y \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

και οι  $\mathbf{Y}_s, \mathbf{S}_y$  είναι  $N \times (N - M)$  και  $(N - M) \times N$  πίνακες, αντίστοιχα:

$$\mathbf{Y}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial s^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial s^{N-M}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^N}{\partial s^1} & \cdots & \frac{\partial y^N}{\partial s^{N-M}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial s^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial s^1}{\partial y^N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial s^{N-M}}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial s^{N-M}}{\partial y^N} \end{bmatrix}$$

που ικανοποιούν τη σχέση

$$\mathbf{S}_y \mathbf{Y}_s = \mathbf{I}_s^s,$$

με  $\mathbf{I}_s^s$  τον  $(N - M) \times (N - M)$  μοναδιαίο πίνακα. Αντικατάσταση της σχέσης (3.2.4) στην (3.2.3), δίνει το  $N$ -διάστατο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

$$(3.2.5) \quad [\mathbf{I}_N^N - \mathbf{Y}_s \mathbf{S}_y] \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Από την τελευταία σχέση, μόνο  $M$  συνιστώσες είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ικανές για να περιγράψουν το SIM. Έπεται, λοιπόν, άμεσα ότι η λύση πάνω στο SIM θα υπόκειται στο  $N$ -διάστατο σύστημα

$$(3.2.6) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Y}_s \mathbf{S}_y \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

από το οποίο μόνο  $(N - M)$  συνιστώσες είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

*β) Ο αλγόριθμος IE - Η αδιάστατη εξίσωση [6]*

Για να παραθέσουμε και να εξετάσουμε εν συνεχεία την τροποποιημένη μέθοδο CSP, θα πρέπει πρώτα να αναφέρουμε κάποια βασικά στοιχεία μιας άλλης υπολογιστικής μεθόδου του SIM, της IE[13].

Έστω ότι οι ομαλές συναρτήσεις  $s^j$  είναι οι  $N - M$  τελευταίες συνιστώσες του  $\mathbf{y}$

$$(3.2.7) \quad \mathbf{s} = (y^{M+1}, \dots, y^N)^T$$

και ορίζουμε το  $M$ -διάστατο διάνυσμα  $\mathbf{z}$  ως εξής:

$$(3.2.8) \quad \mathbf{z} = (y^1(\mathbf{s}), \dots, y^M(\mathbf{s})) = \mathbf{z}(\mathbf{s}).$$

Τότε η σχέση (3.2.5) γράφεται ως

$$(3.2.9) \quad \mathbf{g}^r(\mathbf{z}, \mathbf{s}) - \mathbf{G}_s^r(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \mathbf{g}^s(\mathbf{z}, \mathbf{s}) = \mathbf{0},$$

όπου  $\mathbf{g}^r = (g^1, \dots, g^M)^T$  και  $\mathbf{g}^s = (g^{M+1}, \dots, g^N)^T$  είναι τα  $M$ - και  $(N - M)$ -διάστατα διανύσματα που αποτελούνται από τα πρώτα  $M$  και τα τελευταία  $N - M$  στοιχεία, αντίστοιχα, του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{g}$ . Ο  $M \times (N - M)$  πίνακας  $\mathbf{G}_s^r$  περιλαμβάνει τις μερικές παραγώγους των  $M$  συνιστωσών του  $\mathbf{y}$  στο  $\mathbf{z}$  ως προς τις υπόλοιπες  $N - M$  συνιστώσες του  $\mathbf{y}$  στο  $\mathbf{s}$ :

$$(3.2.10) \quad \mathbf{G}_s^r(\mathbf{z}, \mathbf{s}) = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial s^1} & \dots & \frac{\partial z^1}{\partial s^{N-M}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z^M}{\partial s^1} & \dots & \frac{\partial z^M}{\partial s^{N-M}} \end{bmatrix}.$$

Η σχέση (3.2.9) ονομάζεται “αδιάστατη εξίσωση” και αποτελείται από  $M$  εξισώσεις με  $M$  αγνώστους (τις συνιστώσες του  $\mathbf{z}$ .) Σύμφωνα με τον αλγόριθμο IE, η  $(n + 1)$ -οστή επανάληψη  $\mathbf{z}_{n+1}$  υπολογίζεται, για δοσμένο  $\mathbf{s}$  και αρχική εκτίμηση  $\mathbf{z}_0$ , από την πεπλεγμένη συνάρτηση

$$(3.2.11) \quad \mathbf{g}^r(\mathbf{z}_{n+1}, \mathbf{s}) - \mathbf{G}_s^r(\mathbf{z}_n, \mathbf{s}) \mathbf{g}^s(\mathbf{z}_{n+1}, \mathbf{s}) = \mathbf{0},$$

ή, σύμφωνα και με το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης (βλ. Παράρτημα Γ), από μια αναλυτική συνάρτηση της μορφής

$$(3.2.12) \quad \mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{H}(\mathbf{z}_n, \mathbf{s}),$$

όπου οι παράγωγοι του πίνακα  $\mathbf{G}_s^r(\mathbf{z}_n, \mathbf{s})$  υπολογίζονται αριθμητικά, πιθανόν με πεπερασμένες διαφορές. Κατά κανόνα, με κάθε επανάληψη, η εξίσωση (3.2.12) παρέχει μια περιγραφή του  $(N - M)$ -διάστατου SIM με επαυξημένη ακρίβεια. Ωστόσο, η σύγκλιση της ακολουθίας αυτής δεν είναι εγγυημένη ή μπορεί να μην είναι μονότονη. Βέβαια, η σύγκλιση εξαρτάται από το μέτρο της Ιακωβιανής

$$(3.2.13) \quad \mathbf{J}_H = \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{z}_n, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{z}}.$$

Το επαναληπτικό σχήμα (3.2.12) συγκλίνει εάν  $\|\mathbf{J}_H\| < 1$ , μονότονα για  $0 < \mathbf{J}_H < 1$  και ταλαντωτικά για  $-1 < \mathbf{J}_H < 0$ . Διάφορες μέθοδοι έχουν προταθεί για να σταθεροποιηθεί η σύγκλιση του επαναληπτικού αυτού αλγορίθμου, κυρίως χρησιμοποιώντας μια “ψευδο-βηματική” διαδικασία.

Ωστόσο, μέχρις σε αυτό το σημείο, ο αλγόριθμος IE δεν προσφέρει κανένα κανόνα ως προς τον διαχωρισμό του διανύσματος θέσεως  $\mathbf{y}$  σε  $\mathbf{s}$  και  $\mathbf{z}$ , δηλαδή σε αργές και γρήγορες συνιστώσες, αντίστοιχα, ούτε προτείνει την κατάλληλη μορφή της συνάρτησης  $\mathbf{H}(\mathbf{z}_n, \mathbf{s})$  ούτως ώστε να επιτυγχάνεται σύγκλιση.

γ) Κατασκευή του απλοποιημένου συστήματος με χρήση του πίνακα  $\mathbf{G}_s^r$ . [6]

Το γεγονός ότι η αδιάστατη εξίσωση (3.2.9) μπορεί να γραφεί ως

$$(3.2.14) \quad [\mathbf{I}_r^r, -\mathbf{G}_s^r] \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \\ \mathbf{g}^s(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

υποδεικνύει τον ορισμό των πινάκων

$$(3.2.15) \quad \mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{R}_r^s \\ -\mathbf{R}_r^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix},$$

$$(3.2.16) \quad \mathbf{B}^r = [\mathbf{I}_r^r, -\mathbf{G}_s^r], \quad \mathbf{B}^s = [\mathbf{R}_r^s, \mathbf{I}_s^s - \mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r],$$

όπου ο  $M \times (N - M)$  πίνακας  $\mathbf{G}_s^r$  έχει οριστεί από τη σχέση (3.2.10) και ο  $(N - M) \times M$  πίνακας  $\mathbf{R}_r^s$  θα οριστεί στη συνέχεια, όταν μιλήσουμε για την μη-ακαμψία του απλοποιημένου συστήματος. Οι διαστάσεις των πινάκων  $\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_s, \mathbf{B}^r$  και  $\mathbf{B}^s$  είναι  $N \times M, N \times (N - M), M \times N$  και  $(N - M) \times N$ , αντίστοιχως, ενώ ικανοποιούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας:

$$[\mathbf{A}_r \mathbf{A}_s] \begin{bmatrix} \mathbf{B}^r \\ \mathbf{B}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^r \\ \mathbf{B}^s \end{bmatrix} [\mathbf{A}_r \mathbf{A}_s] = \mathbf{I}_N^N.$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (3.2.15)-(3.2.16), το αρχικό πρόβλημα (3.1.1) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(3.2.17) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}_r \mathbf{F}^r + \mathbf{A}_s \mathbf{F}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{R}_r^s \\ -\mathbf{R}_r^s \end{bmatrix} \mathbf{F}^r + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix} \mathbf{F}^s,$$

όπου τα πλάτη  $\mathbf{F}^r$  και  $\mathbf{F}^s$  ορίζονται ως εξής:

$$(3.2.18) \quad \mathbf{F}^r = \mathbf{B}^r \mathbf{g} = [\mathbf{I}_r, -\mathbf{G}_s^r] \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^s \end{bmatrix} = (\mathbf{g}^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{g}^s),$$

$$(3.2.19) \quad \mathbf{F}^s = \mathbf{B}^s \mathbf{g} = [\mathbf{R}_r^s, \mathbf{I}_s^s - \mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r] \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^s \end{bmatrix} = \mathbf{R}_r^s \mathbf{g}^r + (\mathbf{I}_s^s - \mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r) \mathbf{g}^s.$$

Όταν η λύση βρίσκεται πάνω στο manifold, η αδιάστατη εξίσωση (3.2.9) ικανοποιείται αυτόματα και διασφαλίζει ότι το  $\mathbf{F}^r$  είναι ταυτοτικά ίσο με το μηδέν, δηλαδή

$$(3.2.20) \quad \mathbf{F}^r = \mathbf{g}^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{g}^s = \mathbf{0}$$

με συνέπεια, μόνο ο “αργός” όρος που περιλαμβάνει το  $\mathbf{F}^s$  να διατηρείται στην εξίσωση (3.2.17):

$$(3.2.21) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix} (\mathbf{R}_r^s \mathbf{g}^r + (\mathbf{I}_s^s - \mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r) \mathbf{g}^s).$$

Οι εξισώσεις (3.2.20) και (3.2.21) περιγράφουν το SIM και την απλοποιημένη μη-δύσκαμπτη εξίσωση στην οποία υπόκειται η κίνηση της λύσης πάνω στο SIM, αντίστοιχα.

δ) Ο συσχετισμός των δύο αλγορίθμων για την κατασκευή του απλοποιημένου συστήματος. [6]

Αρχικά ας παρατηρήσουμε ότι οι πίνακες που περιλαμβάνουν τα CSP διανύσματα βάσης μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$(3.2.22) \quad A_r = \begin{bmatrix} A_r^r \\ A_r^s \end{bmatrix}, \quad A_s = \begin{bmatrix} A_s^r \\ A_s^s \end{bmatrix},$$

$$(3.2.23) \quad B^r = [B_r^r, B_r^s], \quad B^s = [B_r^s, B_s^s],$$

όπου  $A_r^r$  και  $B_r^r$  είναι  $M \times M$  πίνακες,  $A_r^s$  και  $B_r^s$  είναι  $(N - M) \times M$ ,  $A_s^r$  και  $B_s^r$  είναι  $M \times (N - M)$  και  $A_s^s$ ,  $B_s^s$  είναι  $(N - M) \times (N - M)$  πίνακες. Τότε, η σχέση (3.1.6) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(3.2.24) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} A_r^r \\ A_r^s \end{bmatrix} \mathbf{f}^r + \begin{bmatrix} A_s^r \\ A_s^s \end{bmatrix} \mathbf{f}^s,$$

όπου εδώ

$$(3.2.25) \quad \mathbf{f}^r = B^r \mathbf{g} = [B_r^r, B_r^s] \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^s \end{bmatrix} = (B_r^r \mathbf{g}^r + B_r^s \mathbf{g}^s),$$

$$(3.2.26) \quad \mathbf{f}^s = B^s \mathbf{g} = [B_r^s, B_s^s] \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^s \end{bmatrix} = (B_r^s \mathbf{g}^r + B_s^s \mathbf{g}^s).$$

Τότε, οι εξισώσεις που περιγράφουν το SIM και το απλοποιημένο μη-δύσκαμπτο σύστημα είναι:

$$(3.2.27) \quad B_r^r \mathbf{g}^r + B_s^r \mathbf{g}^s = \mathbf{0},$$

$$(3.2.28) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} A_s^r \\ A_s^s \end{bmatrix} (B_r^s \mathbf{g}^r + B_s^s \mathbf{g}^s).$$

Είναι άμεσο, λοιπόν, να δείξουμε πως οι δύο μορφές της αρχικής εξίσωσης (3.1.1), δηλαδή οι σχέσεις (3.2.17) και (3.2.24) είναι πανομοιότυπες όταν:

$$(3.2.29) \quad \mathbf{G}_s^r = A_s^r (A_s^s)^{-1} = -(B_r^r)^{-1} B_s^r,$$

$$(3.2.30) \quad \mathbf{R}_s^r = A_s^s B_r^r = -A_s^r B_r^r$$

δεδομένου ότι οι πίνακες  $(A_s^s)^{-1}$  και  $(B_r^r)^{-1}$  υπάρχουν. Είναι επομένως εύκολο να δειχθεί ότι οι εξισώσεις που περιγράφουν το SIM και το απλοποιημένο μη-δύσκαμπτο πρόβλημα

$$(3.2.31) \quad \mathbf{g}^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{g}^s = \mathbf{0},$$

$$(3.2.32) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix} (\mathbf{R}_r^s \mathbf{g}^r + (\mathbf{I}_s^s - \mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r) \mathbf{g}^s),$$

$$(3.2.33) \quad B_r^r \mathbf{g}^r + B_s^r \mathbf{g}^s = \mathbf{0},$$

$$(3.2.34) \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} A_s^r \\ A_s^s \end{bmatrix} (B_r^s \mathbf{g}^r + B_s^s \mathbf{g}^s)$$

είναι επίσης πανομοιότυπες. Προκειμένου να εξετάσουμε το νόημα των δύο αυτών μετασχηματισμών, δηλαδή των εξισώσεων (3.2.29) και (3.2.30), σημειώνουμε ότι με χρήση της σχέσης (3.2.29) παίρνουμε τους εξής συσχετισμούς μεταξύ των καινούριων διανυσμάτων βάσης που ορίσαμε εδώ, δηλαδή των εξισώσεων (3.2.15) και (3.2.16), και των CSP διανυσμάτων βάσης:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^r &= (B_r^r)^{-1} B^r, & \mathbf{A}_r &= A_r B_r^r + A_s \mathbf{N}_r^s, \\ \mathbf{B}^s &= \mathbf{M}_r^s B^r + A_s^s B^s, & \mathbf{A}_s &= A_s (A_s^s)^{-1}, \end{aligned}$$

όπου

$$\mathbf{N}_r^s = -(A_s^s)^{-1} [\mathbf{R}_r^s + A_s^r B_r^r], \quad \mathbf{M}_r^s = [\mathbf{R}_r^s + A_s^r B_r^r] (B_r^r)^{-1},$$

δηλαδή, τα διανύσματα στα  $\mathbf{B}^r$  και  $\mathbf{A}_s$  παράγουν τους ίδιους υποχώρους με εκείνα των  $B^r$  και  $A_s$ , αντίστοιχα· τα δύο τελευταία σύνολα είναι αυτά που επηρεάζονται από το CSP  $B^r$ -refinement. Ωστόσο, τα διανύσματα στα  $\mathbf{B}^s$  και  $\mathbf{A}_r$  δεν παράγουν τον ίδιο υπόχωρο με αυτά των  $B^s$  και  $A_r$ , αντίστοιχως· τα τελευταία είναι αυτά που επηρεάζονται από το CSP  $A^r$ -refinement.

Από την άλλη πλευρά, αντικαθιστώντας τον πίνακα  $\mathbf{R}_r^s$ , όπως ορίστηκε από τη σχέση (3.2.30), στους ορισμούς των καινούριων διανυσμάτων βάσης, σχέσεις (3.2.15)-(3.2.16), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^r &= [\mathbf{I}_r^r, -\mathbf{G}_s^r], & \mathbf{A}_r &= A_r B_r^r + \begin{bmatrix} (A_s^r - \mathbf{G}_s^r A_s^s) B_r^s \\ \mathbf{0}_r^s \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}^s &= [\mathbf{0}_r^s, A_s^s (B_r^r \mathbf{G}_s^r + B_s^r)] + A_s^s B^s, & \mathbf{A}_s &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix}, \end{aligned}$$



δηλαδή, κανένα σύνολο διανυσμάτων στα  $\mathbf{B}^r, \mathbf{A}_s, \mathbf{B}^s$  και  $\mathbf{A}_r$  δεν παράγει τον ίδιο υπόχωρο με αυτόν που παράγουν τα σύνολα των διανυσμάτων στα  $B^r, A_s, B^s$  και  $A_r$ , αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση μετασχηματισμού (3.2.29), η αδιάστατη εξίσωση (3.2.31), παρέχει μια ακριβή περιγραφή του SIM όπως και το συγκλίνον CSP  $B^r$ -refinement. Ωστόσο, το απλοποιημένο μη-δύσκαμπτο σύστημα που κατασκευάζει η CSP δεν μπορεί να αναπαραχθεί. Αυτό επιτυγχάνεται μόνον όταν και οι δύο εξισώσεις μετασχηματισμού (3.2.29) και (3.2.30) εφαρμοστούν, στην οποία περίπτωση τα CSP διανύσματα βάσης και αυτά που εισήχθησαν εδώ, σχετίζονται ως εξής

$$(3.2.35) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{B}^r \\ \mathbf{B}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_r^r)^{-1} & \mathbf{0}_s^r \\ \mathbf{0}_r^s & A_s^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^r \\ B^s \end{bmatrix},$$

$$(3.2.36) \quad [\mathbf{A}_r \mathbf{A}_s] = [A_r \quad A_s] \begin{bmatrix} B_r^r & \mathbf{0}_s^r \\ \mathbf{0}_r^s & (A_s^s)^{-1} \end{bmatrix}$$

δείχνοντας ότι τα διανύσματα στα  $\mathbf{B}^r, \mathbf{A}_s, \mathbf{B}^s$  και  $\mathbf{A}_r$ , είναι ακριβώς τα CSP διανύσματα βάσης  $B^r, A_s, B^s$  και  $A_r$ , αντίστοιχα, αποκλιμακόμενα όπως δείχνεται. Αυτά τα καινούρια διανύσματα ορίζουν μια τροποποιημένη εκδοχή της μεθόδου CSP, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί μόνον όταν το διάνυσμα θέσεως  $\mathbf{y}$  διαμεριστεί κατάλληλα στις  $\mathbf{s}$  και  $\mathbf{z}$  συνιστώσες.

Για τον προσδιορισμό του SIM και την κατασκευή του απλοποιημένου συστήματος, ο τροποποιημένος αυτός CSP αλγόριθμος απαιτεί τον υπολογισμό των πινάκων  $\mathbf{G}_s^r$  και  $\mathbf{R}_r^s$ .

ε) Υπολογισμός του πίνακα  $\mathbf{G}_s^r$ . [6]

Ο πίνακας  $\mathbf{G}_s^r$  κατά κανόνα μπορεί να υπολογιστεί με διάφορους τρόπους, οι οποίοι όμως μπορεί να οδηγήσουν σε αρκετές αριθμητικές δυσκολίες. Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του  $\mathbf{G}_s^r$  προκύπτει παραγωγίζοντας την αδιαστάτη εξίσωση  $\mathbf{B}^r \mathbf{g} = \mathbf{0}$  ως προς τον χρόνο:

$$(3.2.37) \quad \Lambda_r^r \mathbf{F}^r + \Lambda_s^r \mathbf{F}^s = \mathbf{0},$$

όπου

$$(3.2.38) \quad \Lambda_r^r = \left( \frac{d\mathbf{B}^r}{dt} + \mathbf{B}^r \mathbf{J} \right) \mathbf{A}_r, \quad \Lambda_s^r = \left( \frac{d\mathbf{B}^r}{dt} + \mathbf{B}^r \mathbf{J} \right) \mathbf{A}_s$$

από το οποίο έπεται:

$$(3.2.39) \quad \frac{d\mathbf{B}^r}{dt} + \mathbf{B}^r \mathbf{J} = \Lambda_r^r \mathbf{B}^r + \Lambda_s^r \mathbf{B}^s.$$

Εφόσον, επί της πολλαπλότητας ισχύουν  $\mathbf{F}^r = \mathbf{B}^r \mathbf{g} = \mathbf{0}$  και  $\mathbf{F}^s \neq \mathbf{0}$ , η σχέση (3.2.37) υποδεικνύει ότι  $\Lambda_s^r = \mathbf{0}_s^r$  έτσι ώστε η εξίσωση (3.2.39) να απλοποιείται σε:

$$(3.2.40) \quad \frac{d\mathbf{B}^r}{dt} + \mathbf{B}^r \mathbf{J} = \Lambda_r^r \mathbf{B}^r.$$

Σημειώνουμε ότι αυτή η εξίσωση είναι όμοια με εκείνη στην οποία υπόκειται η εξέλιξη των CSP διανυσμάτων  $B_r^r$ , σχέση (3.1.11 ή 3.1.28). Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του  $\mathbf{B}^r$ , σχέση (3.2.16), και ξαναγράφοντας την Ιακωβιανή ορίζουσα  $\mathbf{J}$  του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{g}$  στη μορφή:

$$(3.2.41) \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_r^r & \mathbf{J}_s^r \\ \mathbf{J}_r^s & \mathbf{J}_s^s \end{bmatrix}$$

η σχέση (3.2.40) υποδεικνύει την διανυσματική εξίσωση:

$$(3.2.42) \quad \left[ \mathbf{0}_s^r, -\frac{d\mathbf{G}_s^r}{dt} \right] + [\mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_r^s, \mathbf{J}_s^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_s^s] = \Lambda_r^r [\mathbf{I}_r^r, -\mathbf{G}_s^r]$$

οι δύο συνιστώσες της οποίας δίνουν

$$(3.2.43) \quad \mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_r^s = \Lambda_r^r,$$

$$(3.2.44) \quad \frac{d\mathbf{G}_s^r}{dt} + \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_s^s - \mathbf{J}_s^r = \Lambda_r^r \mathbf{G}_s^r.$$

Έτσι, λαμβάνουμε την ακόλουθη εξίσωση εξέλιξης του πίνακα  $\mathbf{G}_s^r$ :

$$(3.2.45) \quad \frac{d\mathbf{G}_s^r}{dt} + \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_s^s - \mathbf{J}_s^r = [\mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_r^s] \mathbf{G}_s^r.$$

Η εξίσωση (3.2.45), όντας δύκαμπτη, μπορεί να λυθεί επαναληπτικά ως εξής:

$$(3.2.46) \quad \mathbf{G}_s^r(n+1) = (\mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r(n) \mathbf{J}_r^s)^{-1} \left[ \mathbf{G}_s^r(n) \mathbf{J}_s^s - \mathbf{J}_s^r + \frac{d\mathbf{G}_s^r(n)}{dt} \right].$$

Έχοντας διαμορφώσει την εξίσωση εξέλιξης του πίνακα  $\mathbf{G}_s^r$  (3.2.45), μια άμεση απόδειξη ότι ο αλγόριθμος CSP και η τροποποιημένη μέθοδος που παρουσιάστηκε εδώ περιγράφουν το SIM με ίδια ακρίβεια είναι η ακόλουθη. Θεωρώντας τα γρήγορα CSP διανύσματα στη μορφή  $B^r = [B_r^r, B_s^r]$ , η εξίσωση εξέλιξης (1.1.28) δίνει:

$$(3.2.47) \quad \frac{d[B_r^r, B_s^r]}{dt} + [B_r^r, B_s^r] J = \Lambda_r^r [B_r^r, B_s^r]$$

οι δύο συνιστώσες της οποίας δίνουν:

$$(3.2.48) \quad \frac{dB_r^r}{dt} + B_r^r \mathbf{J}_r^r + B_s^r \mathbf{J}_r^s = \Lambda_r^r B_r^r,$$

$$(3.2.49) \quad \frac{dB_s^r}{dt} + B_r^r \mathbf{J}_s^r + B_s^r \mathbf{J}_s^s = \Lambda_r^r B_s^r.$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την σχέση (3.2.49) με  $(B_r^r)^{-1}$  έχουμε

$$(3.2.50) \quad \frac{d[(B_r^r)^{-1} B_s^r]}{dt} + (B_r^r)^{-1} B_s^r \mathbf{J}_s^r + \mathbf{J}_s^s = \left( \frac{d(B_r^r)^{-1}}{dt} B_r^r + (B_r^r)^{-1} \Lambda_r^r B_r^r \right) (B_r^r)^{-1} B_s^r.$$

Αντικαθιστώντας από την εξίσωση (1.2.48) προκύπτει τελικά

$$\frac{d[(B_r^r)^{-1}B_s^r]}{dt} + (B_r^r)^{-1}B_s^r\mathbf{J}_s^s + \mathbf{J}_s^r = (\mathbf{J}_r^r + (B_r^r)^{-1}B_s^r\mathbf{J}_r^s) (B_r^r)^{-1}B_s^r.$$

Εισάγωντας τον μετασχηματισμό (3.2.29), δηλαδή  $\mathbf{G}_s^r = -(B_r^r)^{-1}B_s^r$ , λαμβάνουμε την εξίσωση εξέλιξης του πίνακα  $\mathbf{G}_s^r$ , σχέση (3.2.45). Αναφορικά με την περιγραφή με του SIM, αυτό δείχνει ότι και οι δύο εξισώσεις εξέλιξης των  $B^r$  και  $\mathbf{G}_s^r$ , δηλαδή οι σχέσεις (3.1.28) και (3.2.45), παρέχουν την ίδια ακριβώς αναπαράσταση. Τα επαναληπτικά τους αντίστοιχα, σχέσεις (3.1.28) και (3.2.46), αναμένουν να παρέχουν αντίστοιχη περιγραφή με όμοια ακρίβεια για τον ίδιο αριθμό επαναλήψεων· πιθανές διαφορές ίσως υπάρξουν σχετιζόμενες με τις αρχικές εκτιμήσεις τον επαναληπτικών διαδικασιών.

## Κεφάλαιο 4

# Σύστημα συζευγμένων ταλαντωτών

### 4.1 Κλασσική ασυμπτωτική ανάλυση

α) Δήλωση του προβλήματος.

Θεωρούμε ένα γραμμικό ταλαντωτή συζευγμένο σε σειρά με ένα μη γραμμικό ταλαντωτή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1 [8]. Έστω  $u_0, u, u_1$  οι μετατοπίσεις των μαζών  $m_0, m, m_1$  αντιστοίχως από τη θέση φυσικού μήκους των ελατηρίων. Έστω, επίσης, ότι η μεταβολή της κεντρικής μάζας  $m_0$  περιγράφεται από  $u_0(t) = \rho(t)$ , όπου η  $\rho(t)$  έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Έστω  $k$  και  $\delta$  οι συντελεστές ακαμψίας και απόσβεσης αντιστοίχως του γραμμικού ελατηρίου και του αποσβεστήρα που συνδέουν τις μάζες  $m_0, m$ . Έστω,  $-k_1$  και  $k_2$  οι συντελεστές γραμμικής και μη γραμμικής ακαμψίας του μη γραμμικού ελατηρίου που συνδέει τις μάζες  $m, m_1$ . Επίσης, έστω  $\delta_1$  ο συντελεστής απόσβεσης του αποσβεστήρα που συνδέει τις ίδιες μάζες.

Αν θεωρήσουμε τώρα τις σχετικές μετατοπίσεις

$$\eta \equiv u - u_0, \quad \xi \equiv u_1 - u,$$

οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση των δύο συζευγμένων ταλαντωτών δίνονται από

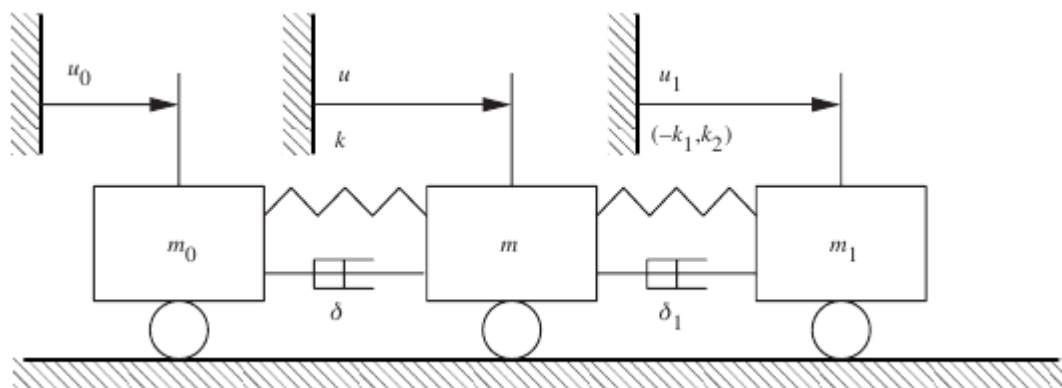
$$(4.1.1) \quad (m + m_1)\eta'' + m_1\xi'' + \delta\eta' + k\eta = -(m + m_1)u_0'',$$

$$(4.1.2) \quad m_1\eta'' + m_1\xi'' + \delta_1\xi - k_1\xi + k_2\xi^3 = -m_1u_0'',$$

όπου ο τόνος (') δηλώνει διαφορίση ως προς το χρόνο  $t'$  (τον φυσικό χρόνο). Η χρήση της μεθόδου των ιδιόμορφων διαταραχών ενδείκνυται στην περίπτωση που η ασύζευκτη φυσική συχνότητα  $\omega \equiv \sqrt{k/m}$  του γραμμικού ταλαντωτή είναι πολύ μεγαλύτερη από την φυσική "συχνότητα"  $\omega_1 \equiv \sqrt{k_1/m_1}$  του μη γραμμικού ταλαντωτή.

Για το σκοπό αυτό, μετασχηματίζουμε τον χρόνο  $t'$  στις εξισώσεις (4.1.1), (4.1.2) σε  $t = \omega_1 t'$  και εισάγουμε την παράμετρο  $\varepsilon$  που ορίζεται ως

$$\varepsilon \equiv \frac{\omega_1}{\omega} = \sqrt{\frac{mk_1}{m_1k}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}},$$



Σχήμα 4.1: Συζευγμένοι ταλαντωτές

όπου  $\beta = m_1/m$  είναι ο λόγος των μαζών, και  $\kappa = k_1/k$  είναι ο λόγος των γραμμικών ακαμψιών. Τέλος, ορίζοντας

$$(4.1.3) \quad \xi = X_1, \quad \dot{\xi} = X_2,$$

$$(4.1.4) \quad \Psi_1 = \cos(\Omega t), \quad \Psi_2 = \sin(\Omega t),$$

$$(4.1.5) \quad \eta = \varepsilon^2 Z_1, \quad \dot{\eta} = \varepsilon Z_2,$$

το σύστημα (4.1.1),(4.1.2) μετασχηματίζεται στο ακόλουθο ιδιόμορφο διαταραγμένο σύνολο συνήθων διαφορικών εξισώσεων [8]

$$(4.1.6) \quad \begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2, \\ \dot{X}_2 &= (1 + \beta)(X_1 - 2\zeta X_2 - \gamma X_1^3) + Z_1 + 2\eta Z_2, \end{aligned}$$

$$\dot{\Psi}_1 = -\Omega \Psi_2,$$

$$(4.1.7) \quad \dot{\Psi}_2 = \Omega \Psi_1,$$

$$\varepsilon \dot{Z}_1 = Z_2,$$

$$(4.1.8) \quad \varepsilon \dot{Z}_2 = -Z_1 - 2\rho Z_2 + \beta(-X_1 + 2\zeta X_2 + \gamma X_1^3) + \alpha \Psi_1,$$

όπου  $\zeta = \delta_1/2\sqrt{m_1 k_1}$ , και  $\rho = \delta/2\sqrt{mk}$  είναι οι συντελεστές γραμμικής απόσβεσης του γραμμικού και μη γραμμικού ταλαντωτή αντίστοιχα:  $\gamma = k_2/k_1$  είναι η ένταση του κανονικοποιημένου μη γραμμικού συντελεστή, και  $\alpha \equiv U\Omega^2$  το πλάτος της ταλάντωσης της μάζας  $m_0$ , η οποία χαρακτηρίζεται αρμονική:  $u_0(t) = U\cos(\Omega t)$ . Επιπλέον, οι δυναμικές μεταβλητές ικανοποιούν τον περιορισμό  $\Psi_1^2 + \Psi_2^2 = 1$ .

*β) Ανάλυση του προβλήματος.*

Στην περίπτωση που εξετάζουμε, θεωρούμε ότι η μάζα  $m_0$  είναι πρακτικά ακίνητη, οπότε  $\alpha = 0$ , και οι εξισώσεις που τελικά περιγράφουν την κίνηση του συστήματος θα αποτελούνται από τις σχέσεις (4.1.6)-(4.1.8), δηλαδή

$$(4.1.9) \quad \begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2, \\ \dot{X}_2 &= (1 + \beta)(X_1 - 2\zeta X_2 - \gamma X_1^3) + Z_1 + 2\eta Z_2, \end{aligned}$$

$$(4.1.10) \quad \begin{aligned} \varepsilon \dot{Z}_1 &= Z_2, \\ \varepsilon \dot{Z}_2 &= -Z_1 - 2\rho Z_2 + \beta(-X_1 + 2\zeta X_2 + \gamma X_1^3) + \alpha \Psi_1. \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό των εξισώσεων έχει τρεις καταστάσεις ισορροπίας [8]:

$$(4.1.11) \quad C_{-1} \equiv (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{Z}_1, \hat{Z}_2) = (-1/\sqrt{\gamma}, 0, 0, 0),$$

$$(4.1.12) \quad S \equiv (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{Z}_1, \hat{Z}_2) = (0, 0, 0, 0),$$

$$(4.1.13) \quad C_1 \equiv (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{Z}_1, \hat{Z}_2) = (1/\sqrt{\gamma}, 0, 0, 0).$$

Στο συζευγμένο σύστημα (4.1.6)-(4.1.8), για σταθερή αναλογία μαζών  $\beta$ , ο γραμμικός ταλαντωτής (4.1.8) είναι ασθενώς συνδεδεμένος με τον μη γραμμικό ταλαντωτή (4.1.6) εάν η ασύζευκτη φυσική συχνότητα του τελευταίου είναι αρκούντως μικρότερη του πρώτου, ούτως ειπείν, ο λόγος συχνοτήτων  $\varepsilon$  είναι αρκετά μικρός. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι ο λόγος  $\varepsilon$  εμφανίζεται ως “μικρή παράμετρος” στην ασυμπτωτική ανάλυση των εξισώσεων της κίνησης. Τα υποσυστήματα του εν λόγω ασθενώς συζευγμένου συστήματος, δηλαδή του γραμμικού και του μη γραμμικού ταλαντωτή θα ονομάζονται *εύκαμπτο* και *δύσκαμπτο* αντιστοίχως.

Ας δούμε, όμως, τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε εκτελώντας τη σχετική ανάλυση στο σύστημα (4.1.6)-(4.1.8) [8], το οποίο γράφουμε στη μορφή:

$$(4.1.14) \quad \dot{X} = \mathbf{F}(X, \Psi, Z),$$

$$(4.1.15) \quad \dot{\Psi} = \mathbf{R}\Psi,$$

$$(4.1.16) \quad \varepsilon \dot{Z} = \mathbf{G}(X, \Psi, Z).$$

Το σύστημα αυτό έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: (1) Είναι γραμμικό ως προς  $\Psi$ : ο πίνακας  $\mathbf{R}$  είναι αντισυμμετρικός με στοιχεία  $\pm i\Omega = O(1)$ . (2) Έχει τρεις θέσεις ισορροπίας. (3) Υπάρχει μοναδικό συναρτησιακό  $\mathbf{H}_0(X, \Psi)$ , γραμμικό ως προς  $\Psi$ , τέτοιο ώστε  $\mathbf{G}(H, \Psi, \mathbf{H}_0(X, \Psi)) = 0$  και  $\partial_Z \mathbf{G}(H, \Psi, \mathbf{H}_0(X, \Psi))$  έχει ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος  $\leq b_0 \leq 0$ .

Έπεται άμεσα από τη *Θεωρία Αναλλοίωτης Πολλαπλότητας (Invariant Manifold Theory)* [11] ότι η ανωτέρω εξίσωση επιδέχεται μια ελκτική αναλλοίωτη πολλαπλότητα, γνωστή ως αργή αναλλοίωτη πολλαπλότητα (slow invariant manifold ή SIM),

$$\mathcal{W}_\varepsilon = \{(X, \Psi, Z) | Z = \mathbf{H}(X, \Psi, \varepsilon)\},$$

όπου

- $\mathbf{H}(X, \Psi, \varepsilon)$  είναι λεία ως προς  $(X, \Psi)$  και  $\varepsilon$ ,
- $\mathbf{H}(X, \Psi, 0) = \mathbf{H}_0(X, \Psi)$ ,
- $\mathcal{W}_\varepsilon$  είναι εκθετικά ελκτικό,
- $\mathcal{W}_\varepsilon$  περιέχει τις λύσεις ισορροπίας,
- $\mathcal{W}_\varepsilon$  είναι γραμμικό ως προς  $\Psi$ .

Η δυναμική του  $\mathcal{W}_\varepsilon$  περιγράφεται απο τη δυναμική του συστήματος

$$(4.1.17) \quad \begin{aligned} \dot{X} &= \mathbf{F}(X, \Psi, \mathbf{H}(X, \Psi, \varepsilon)), \\ \dot{\Psi} &= \mathbf{R}\Psi \end{aligned}$$

μαζί με  $Z = \mathbf{H}(X, \Psi, \varepsilon)$ .

Η δυναμική, τώρα, του μειωμένου συστήματος (4.1.17) μπορεί να προσεγγισθεί από τη δυναμική του οριακού ( $\varepsilon = 0$ ) συστήματος

$$(4.1.18) \quad \begin{aligned} \dot{X} &= \mathbf{F}(X, \Psi, \mathbf{H}_0(X, \Psi)), \\ \dot{\Psi} &= \mathbf{R}\Psi \end{aligned}$$

μαζί με  $Z = \mathbf{H}_0(X, \Psi)$ .

Οι λύσεις του συστήματος (4.1.18) βρίσκονται στην επονομαζόμενη οριακή ( $\varepsilon = 0$ ) αργή πολλαπλότητα

$$\mathcal{W}_0 = \{(X, \Psi, Z) | Z = \mathbf{H}_0(X, \Psi)\}$$

ενώ οι λύσεις του αρχικού συστήματος (4.1.14)- (4.1.16) προσεγγίζονται απο τις λύσεις του (4.1.18) μόνο για χρόνους  $t > t_0 > 0$ , δηλαδή όχι στην αρχική φάση. Αυτή η αρχική φάση, όπου οι λύσεις τείνουν στο  $\mathcal{W}_\varepsilon$  εκθετικά γρήγορα περιγράφονται καλύτερα, με την χρονοκλίμακα  $\tau = t/\varepsilon$ , από το σύστημα

$$(4.1.19) \quad X' = \varepsilon \mathbf{F}(X, \Psi, Z),$$

$$(4.1.20) \quad \Psi' = \varepsilon \mathbf{R}\Psi,$$

$$(4.1.21) \quad Z' = \mathbf{G}(X, \Psi, Z),$$

για πεπερασμένο  $\tau$ , ενώ προσεγγίζονται από το οριακό ( $\varepsilon = 0$ ) σύστημα

$$(4.1.22) \quad X' = 0,$$

$$(4.1.23) \quad \Psi' = 0,$$

$$(4.1.24) \quad Z' = \mathbf{G}(X, \Psi, Z).$$

Εφόσον το  $\mathbf{H}(X, \Psi, \varepsilon)$  είναι λείο ως προς  $\varepsilon$ , μπορεί να αναπτυχθεί σε δυνάμεις του  $\varepsilon$ . Κατόπιν, εισάγωντας το ανάπτυγμα

$$(4.1.25) \quad \mathbf{H}(X, \Psi, \varepsilon) = \mathbf{H}_0(X, \Psi) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \mathbf{H}_j(X, \Psi)$$

στην αδιάστατη εξίσωση

$$(4.1.26) \quad \varepsilon[\partial_X \mathbf{H}(X, \Psi, \varepsilon) \mathbf{F}(X, \Psi, Z) + \partial_\Psi \mathbf{H}(X, \Psi, \varepsilon) \mathbf{R} \Psi] = \mathbf{G}(X, \Psi, \mathbf{H}(X, \Psi, \varepsilon))$$

προκύπτει ένας αναδρομικός αλγόριθμος. Η εξίσωση (4.1.26) προέρχεται από την εκτέλεση των πράξεων και της εφαρμογής του κανόνα της αλυσίδας στη σχέση (4.1.21)

Η αργή πολλαπλότητα  $\mathcal{W}_\varepsilon$  αποτελείται από δύο συνιστώσες  $\mathcal{W}_{1\varepsilon}$  και  $\mathcal{W}_{2\varepsilon}$  οι οποίες αναπαριστώνται αντίστοιχα από τα γραφήματα των συνιστωσών  $H_1$  και  $H_2$  του  $\mathbf{H}$ . Έστω  $\mathcal{W}_\varepsilon^m$  η  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$  προσέγγιση της πολλαπλότητας, η οποία περιγράφεται πλήρως από το γράφημα της  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$  προσέγγισης του  $\mathbf{H}$  που προσδιορίζεται από

$$(4.1.27) \quad \mathbf{H}^m(X, \Psi, \varepsilon) = \mathbf{H}_0(X, \Psi) + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j \mathbf{H}_j(X, \Psi)$$

.

γ) Υπολογισμός της πολλαπλότητας.

Αρχικά ας θεωρήσουμε το σύστημα μας (4.1.6)-(4.1.8) υπο μορφή πινάκων [8]

$$(4.1.28) \quad \dot{X} = \mathbf{A}X + \mathbf{B}Z + \mathbf{N}(X) + \mathbf{P}_1 \Psi,$$

$$(4.1.29) \quad \dot{\Psi} = \mathbf{R} \Psi,$$

$$(4.1.30) \quad \varepsilon \dot{Z} = \mathbf{C}Z + \mathbf{Q}X + \mathbf{M}(X) + \mathbf{P}_2 \Psi,$$

όπου οι πίνακες  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  καθώς και οι μη γραμμικές συναρτήσεις  $\mathbf{M}(X)$  και  $\mathbf{N}(X)$  προσδιορίζονται εύκολα. Δεδομένου ότι  $\mathcal{W}_\varepsilon = \{(X, \Psi, Z) | Z = \mathbf{H}(X, \Psi, \varepsilon)\}$ , η σχέση (4.1.30) σύμφωνα με την διαδικασία που ακολουθήθηκε για την σχέση (4.1.26) παίρνει τη μορφή

$$(4.1.31)$$

$$\varepsilon[\partial_X \mathbf{H}(X, \Psi, \varepsilon) \{\mathbf{A}X + \mathbf{B}Z + \mathbf{N}(X) + \mathbf{P}_1 \Psi\} + \partial_\Psi \mathbf{H}(X, \Psi, \varepsilon) \mathbf{R} \Psi] = \mathbf{C}Z + \mathbf{Q}X + \mathbf{M}(X) + \mathbf{P}_2 \Psi.$$

Αντικαθιστώντας στην (4.1.31) την (4.1.25) και έχοντας ότι για το οριακό ( $\varepsilon = 0$ ) σύστημα



ισχύουν οι σχέσεις (4.1.22)-(4.1.24), προκύπτει ο αναδρομικός αλγόριθμος [8]

$$(4.1.32) \quad \mathbf{C}\mathbf{H}_0 = -\mathbf{Q}X - \mathbf{M}(X) - \mathbf{P}_2\Psi,$$

$$(4.1.33) \quad \mathbf{C}\mathbf{H}_1 = \partial_X \mathbf{H}_0[\mathbf{A}X + \mathbf{B}\mathbf{H}_0 + \mathbf{N}(X)] + [\partial_X \mathbf{H}_0 \mathbf{P}_1 + \partial_\Psi \mathbf{H}_0 \mathbf{R}]\Psi,$$

$$(4.1.34) \quad \mathbf{C}\mathbf{H}_2 = \partial_X \mathbf{H}_1[\mathbf{A}X + \mathbf{B}\mathbf{H}_0 + \mathbf{N}(X)] + [\partial_X \mathbf{H}_1 \mathbf{P}_1 + \partial_\Psi \mathbf{H}_1 \mathbf{R}]\Psi + \partial_X \mathbf{H}_0 \mathbf{B}\mathbf{H}_1,$$

⋮

$$(4.1.35) \quad \begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{H}_n &= \partial_X \mathbf{H}_{n-1}[\mathbf{A}X + \mathbf{B}\mathbf{H}_0 + \mathbf{N}(X)] + [\partial_X \mathbf{H}_{n-1} \mathbf{P}_1 + \partial_\Psi \mathbf{H}_{n-1} \mathbf{R}]\Psi \\ &+ \sum_{j=0, n-1}^{k+j=n-1} \partial_X \mathbf{H}_j \mathbf{B}\mathbf{H}_k. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του  $\varepsilon$  μπορούμε να προσδιορίσουμε τους προσεγγιστικούς όρους  $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \dots$ . Συγκεκριμένα, παραθέτουμε τους δύο πρώτους αυτούς όρους:

Προσεγγιστικός όρος  $\mathbf{H}_0$ :

$$(4.1.36) \quad H_{01}(X, \Psi) = \beta(-X_1 + 2\zeta X_2 + \gamma X_1^3),$$

$$(4.1.37) \quad H_{02}(X, \Psi) = 0.$$

Προσεγγιστικός όρος  $\mathbf{H}_1$ :

$$(4.1.38) \quad H_{11}(X, \Psi) = -2H_{12}(X, \Psi),$$

$$(4.1.39) \quad H_{12}(X, \Psi) = \hat{H}_{12}(X) + 4\beta\zeta^2 X_2 + 2\beta\zeta(\gamma X_1^3 - X_1) + \alpha(-2\beta\zeta\Psi_1 + \Omega\Psi_2),$$

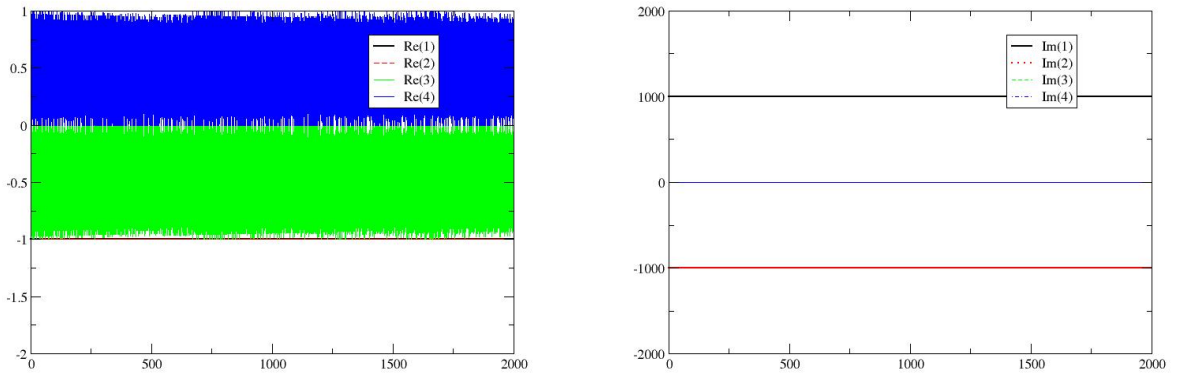
όπου  $\hat{H}_{12}(X) = \beta(3\gamma X_1^2 - 1)X_2$ .

Στην περίπτωση που η μάζα  $m_0$  θεωρείτε ακίνητη, έχουμε ότι  $\alpha = 0$  και οι  $H(X, \Psi)$  είναι συναρτήσεις μόνο του  $X = (X_1, X_2)$ .

## 4.2 Ανάλυση με χρήση του CSP

Σύμφωνα με τον τροποποιημένο αλγόριθμο CSP, πριν την εφαρμογή του πρέπει να επιλεχθούν κατάλληλα το σύνολο των αργών και γρήγορων μεταβλητών. Λανθασμένη επιλογή αυτών μπορεί να οδηγήσει στην ανάγκη για περισσότερες επαναλήψεις του αλγορίθμου προκειμένου να εξασφαλιστεί η απαιτούμενη ακρίβεια, ακόμα και σε αναπόφευκτα λανθασμένα αποτελέσματα. Προκειμένου να βρούμε το πλήθος των γρηγορών και αργών μεταβλητών εξετάζουμε τις ιδιοτιμές της Ιακωβιανής ορίζουσας του προβλήματος. Στο Σχ.(4.2) απεικονίζεται το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των ιδιοτιμών ως συνάρτηση του χρόνου. Παρατηρούμε ότι οι δύο

πρώτες ιδιοτιμές διαφέρουν από τις δύο τελευταίες κατά μια τάξη μεγέθους  $O(1/\varepsilon)$ , όπου στην επίλυση που ακολουθεί έχουμε επιλέξει  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Εφόσον η διαφορά αυτή παρατηρείται ανάμεσα στην δεύτερη και τρίτη ιδιοτιμή, τα αποτελέσματα του Σχ.(4.2) συνιστούν ότι πρέπει να υπάρχουν δύο γρήγορες μεταβλητές και δύο αργές. Το αποτέλεσμα αυτό συμβαδίζει με την επιλογή που έχουμε κάνει κατά την εφαρμογή της κλασικής ανάλυσης. Εξάλλου, μια γρήγορη ματιά στο πρόβλημά μας, επιβεβαιώνει ότι το διάνυσμα  $Z = (Z_1, Z_2)$  είναι η γρήγορη μεταβλητή ενώ το  $X = (X_1, X_2)$  είναι η αργή.



Σχήμα 4.2: (α) Το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών,  $Re(i)$ , (β) το φανταστικό μέρος των ιδιοτιμών,  $Im(i)$

Προκειμένου όμως να επιβεβαιώσουμε των ανωτέρω ισχυρισμό, εξετάζουμε τα γρήγορα εύρη (fast amplitudes) της μεθόδου CSP για την ταξινόμηση που επιθυμούμε. Στην παράγραφο (3.2.8) δείξαμε ότι οι δύο εξισώσεις που περιγράφουν το manifold

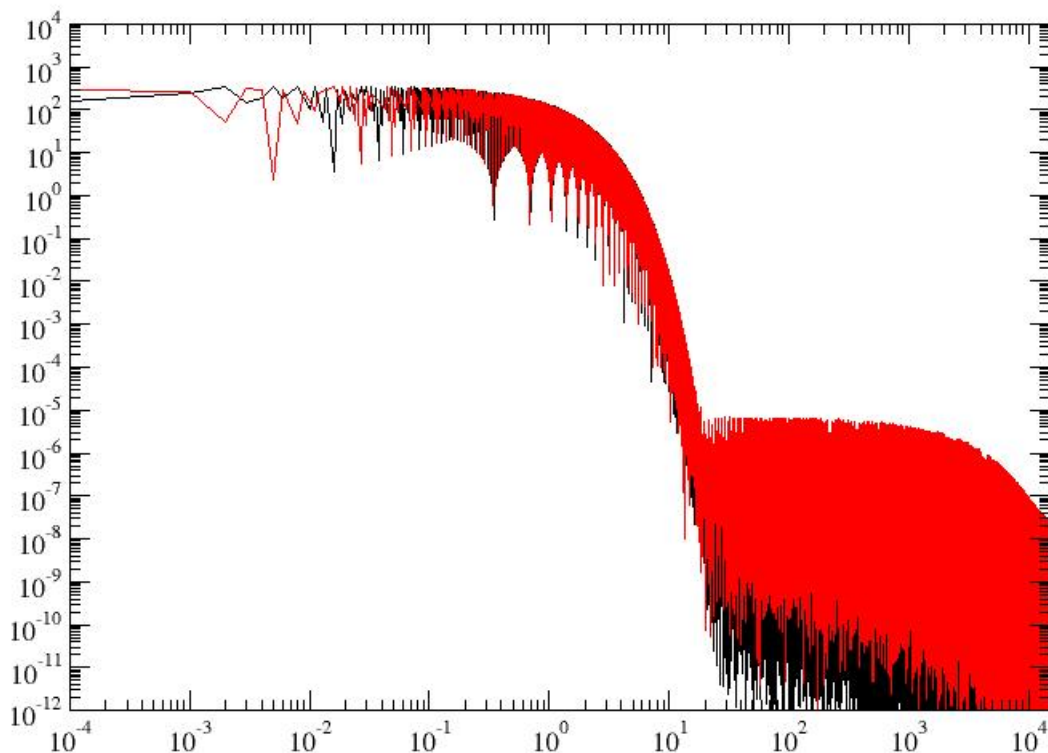
$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{g}^s &= \mathbf{0}, \\
 B_r^r \mathbf{g}^r + B_s^r \mathbf{g}^s &= \mathbf{0},
 \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμες. Επομένως, τα γρήγορα εύρη της μεθόδου CSP δίνονται από τη σχέση

$$\mathbf{f}^r = \mathbf{g}^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{g}^s.$$

Στο Σχ.(4.3) απεικονίζεται η εξέλιξη των γρήγορων πλατών στο χρονικό διάστημα  $t \in (0, 10^4)$  έπειτα από 3  $B^r$ -refinements. Όπως παρατηρούμε, τα εύρη των γρήγορων μεταβλητών για την τυχαία επιλογή των αρχικών συνθηκών που έχουμε κάνει τείνουν στο μηδέν καθώς  $t \rightarrow \infty$ , γεγονός που επιβεβαιώνει το ορθό της απόφασής μας.

Το βασικό στοιχείο του τροποποιημένου αυτού αλγορίθμου είναι ο υπολογισμός του  $\mathbf{G}_s^r$  είτε από την διαφορική εξίσωση (3.2.45) είτε από την επαναληπτική σχέση (3.2.46). Έτσι, για



Σχήμα 4.3: Γραφική παράσταση των δύο γρήγορων πλατών για το χρονικό διάστημα  $T = (0, 10^4)$  έπειτα από 3  $B^r$ -refinements. Στον οριζόντιο άξονα είναι ο χρόνος και στον κάθετο άξονα η απόλυτη τιμή των πλατών.

τον διαχωρισμό των μεταβλητών που κάναμε, οι παραπάνω σχέσεις παίρνουν αντίστοιχα την μορφή

$$(4.2.1) \quad \frac{d\mathbf{G}_s^r}{dt} + \mathbf{G}_s^r \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1+\beta)(1-3\gamma X_1^2) & -2(1+\beta)\zeta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\beta(1-3\gamma X_1^2)}{\varepsilon} & \frac{2\beta\zeta}{\varepsilon} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} \\ -\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{2\rho}{\varepsilon} \end{bmatrix} - \right. \\ \left. -\mathbf{G}_s^r \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2\rho \end{bmatrix} \right) \mathbf{G}_s^r$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_s^r(n+1) &= \left( \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} \\ -\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{2\rho}{\varepsilon} \end{bmatrix} - \mathbf{G}_s^r(n) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2\rho \end{bmatrix} \right)^{-1} \left( \mathbf{G}_s^r(n) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1+\beta)(1-3\gamma X_1^2) & -2(1+\beta)\zeta \end{bmatrix} - \right. \\
 (4.2.2) \quad & \left. - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\beta(1-3\gamma X_1^2)}{\varepsilon} & \frac{2\beta\zeta}{\varepsilon} \end{bmatrix} + \frac{d\mathbf{G}_s^r(n)}{dt} \right)
 \end{aligned}$$

Ξεκινώντας με  $\mathbf{G}_s^r(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , η σχέση (4.2.2) μας δίνει:

(4.2.3)

$$\mathbf{G}_s^r(1) = \begin{pmatrix} -\beta(1-3\gamma X_1^2) & 2\beta\zeta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(4.2.4)

$$\mathbf{G}_s^r(2) = \begin{pmatrix} \beta(3\gamma X_1(4\varepsilon\rho(X_1\zeta - X_2) + X_1) - 4\varepsilon\rho\zeta - 1) & 2\beta(\varepsilon\rho(-3\gamma X_1^2 + 4\zeta^2 + 1) + \zeta) \\ 2\beta\varepsilon(3\gamma X_1(X_2 - X_1\zeta) + \zeta) & \beta\varepsilon(3\gamma X_1^2 - 4\zeta^2 - 1) \end{pmatrix}$$

⋮

ενώ τα αντίστοιχα γρήγορα εύρη, όπως ορίστηκαν από την εξίσωση (3.2.18), δίνονται από:

(4.2.5)

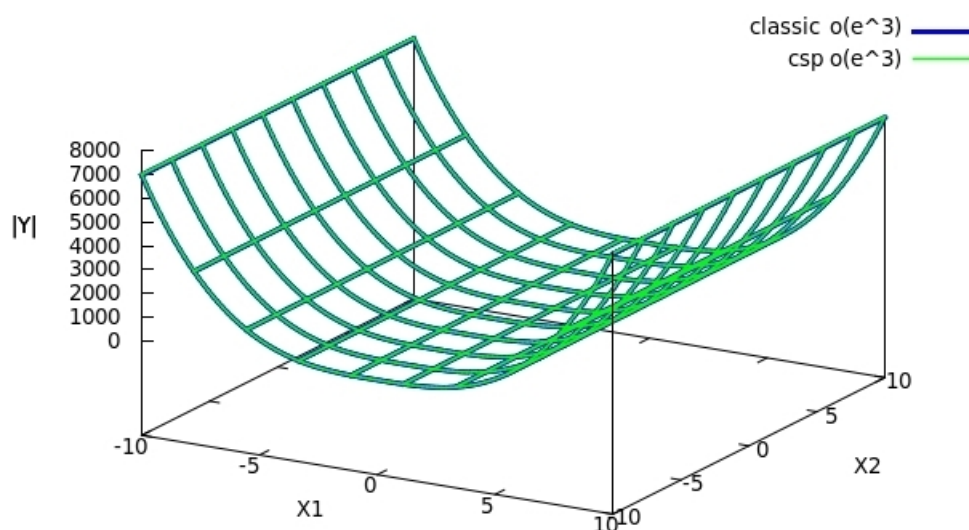
$$\underline{\mathbf{F}}(1) = \begin{pmatrix} -2\beta\zeta((\beta+1)(-\gamma X_1^3 + X_1 - 2X_2\zeta) + 2\rho Y_2 + Y_1) + \beta X_2(1 - 3\gamma X_1^2) + \frac{Y_2}{\varepsilon} \\ \frac{-\beta(-\gamma X_1^3 + X_1 - 2X_2\zeta) - 2\rho Y_2 - Y_1}{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{F}}(2) &= \begin{pmatrix} -2\beta(\beta\rho(-3\gamma X_1^2 + 4\zeta^2 + 1) + \zeta)(-\beta+1)(\gamma X_1^3 - X_1 + 2X_2\zeta) + 2\rho Y_2 + Y_1 + \\ \frac{-\beta(-\gamma X_1^3 + X_1 - 2X_2\zeta) + 2\rho Y_2 + Y_1}{\varepsilon} - 2\beta\varepsilon X_2(3\gamma X_1(X_2 - X_1\zeta) + \zeta) - \\ + \beta X_2(-3\gamma X_1(4\varepsilon\rho X_1\zeta - 4\varepsilon\rho X_2 + X_1) + 4\varepsilon\rho\zeta + 1) + \frac{Y_2}{\varepsilon} \\ (4.2.6) \quad -\beta\varepsilon(3\gamma X_1^2 - 4\zeta^2 - 1)(-\beta+1)(\gamma X_1^3 - X_1 + 2X_2\zeta) + 2\rho Y_2 + Y_1 \end{pmatrix}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Όταν η λύση βρίσκεται πάνω στην πολλαπλότητα, η σχέση (3.2.20) ικανοποιείται ενώ αυτόματα το δεξιό μέλος των εξισώσεων (4.2.5),(4.2.6) ισούται εκ ταυτότητος με το μηδέν, επιτρέποντας, έπειτα από την λύση  $\underline{\mathbf{F}}^r = 0$ , τον υπολογισμό των  $Y_1 = Y_1(X_1, X_2)$ ,  $Y_2 = Y_2(X_1, X_2)$ .

### 4.3 Συγκριση κλασσικής και υπολογιστικής λύσης

Μελετώντας παράλληλα το πρόβλημα, τόσο απο θεωρητική σκοπιά όσο και από υπολογιστική, καταλήξαμε στον υπολογισμό των πολλαπλοτήτων από δύο διαφορετικούς δρόμους. Ενδιαφέροντα ωστόσο υπήρξαν τα αποτελέσματα των δύο αυτών προσεγγίσεων, όταν αυτές παρουσιάζονται στον χώρο των φάσεων με συντεταγμένες  $X_1, X_2$  και  $|Y| = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}$ .

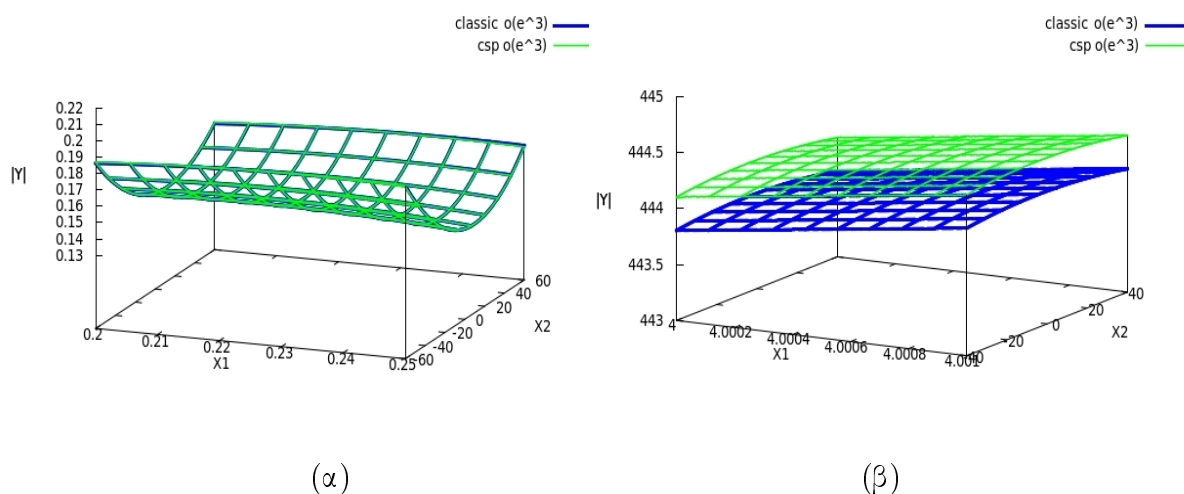


Σχήμα 4.4: Γραφική αναπαράσταση των δύο πολλαπλοτήτων στο χώρο φάσεων  $X_1, X_2, |Y|$ . Με  $O(\varepsilon^3)$  νοείται η προσέγγιση της πολλαπλότητας κρατώντας τους 3 πρώτους όρους στο ανάπτυγμα ως προς “ $\varepsilon$ ”.

Αρχικά, μια πρώτη εκτίμηση θα υποδείκνυε ότι και οι δύο πολλαπλότητες περιγράφουν την ακριβή λύση με την ίδια τάξης ακρίβεια. Στο Σχ.4.5 παρουσιάζονται οι δύο πολλαπλότητες για δύο περιοχές: η μία κοντά στο  $(X_1, X_2) = (0, 0)$  και η άλλη μακριά από αυτό. Στην πρώτη περίπτωση οι δύο επιφάνειες περιγράφουν την αναμενόμενη σωστή λύση και σχεδόν ταυτίζονται. Απομακρυνόμενοι όμως από την περιοχή του μηδενός, η οι δύο επιφάνειες αποκλίνουν και οι αντίστοιχες πολλαπλότητες παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές.

Το γεγονός αυτό αποτελεί εφαλτήριο για περαιτέρω μελέτη. Άραγε ποιά από τις δύο περιγραφές είναι η σωστή και ποιά η λανθασμένη; Είναι μήπως και οι δύο λάθος; Προκειμένου να λύσουμε αυτές τις απορίες θα πρέπει να δούμε πως συμπεριφέρεται η ακριβής λύση του προβλήματος σε σχέση με τις δύο πολλαπλότητες. Επειδή όμως το δυναμικό σύστημα που περιγράφει την κίνηση των δύο (τριών, στην περίπτωση της μη εξαναγκασμένης κίνησης) ταλαντωτών είναι δύσκαμπτο, η ακριβής λύση θα προσδιοριστεί αριθμητικά. Κάνοντας χρήση του υπολογιστικού πακέτου LSODE της FORTRAN, υπολογίσαμε τις τροχιές της λύσης στον χώρο των φάσεων για διάφορες αρχικές συνθήκες και τις αναπαραστήσαμε μαζί με τις δύο επιφάνειες που περιγράφουν τις αντίστοιχες πολλαπλότητες.

Στο Σχ.(4.6) και (4.7) παρουσιάζονται οι τροχιές της ακριβούς λύσης για δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες και για  $t \in [0, 30]$ . Σημειώνουμε ότι το πρόβλημα έχει τρεις καταστάσεις



Σχήμα 4.5: Γραφική αναπαράσταση των δύο πολλαπλοτήτων στο χώρο φάσεων  $X_1, X_2, |Y|$  (α) κοντά στο  $(0,0)$  και (β) μακριά από το  $(0,0)$ . Όπως είναι προφανές, οι δυο πολλαπλότητες διαφέρουν σημαντικά καθώς απομακρυνόμαστε από την αρχή των αξόνων, κάτι που δεν συμβαίνει κοντά στο σημείο  $(0,0)$ . Με  $O(\epsilon^3)$  νοείται η προσέγγιση της πολλαπλότητας κρατώντας τους 3 πρώτους όρους στο ανάπτυγμα ως προς “ $\epsilon$ ”.

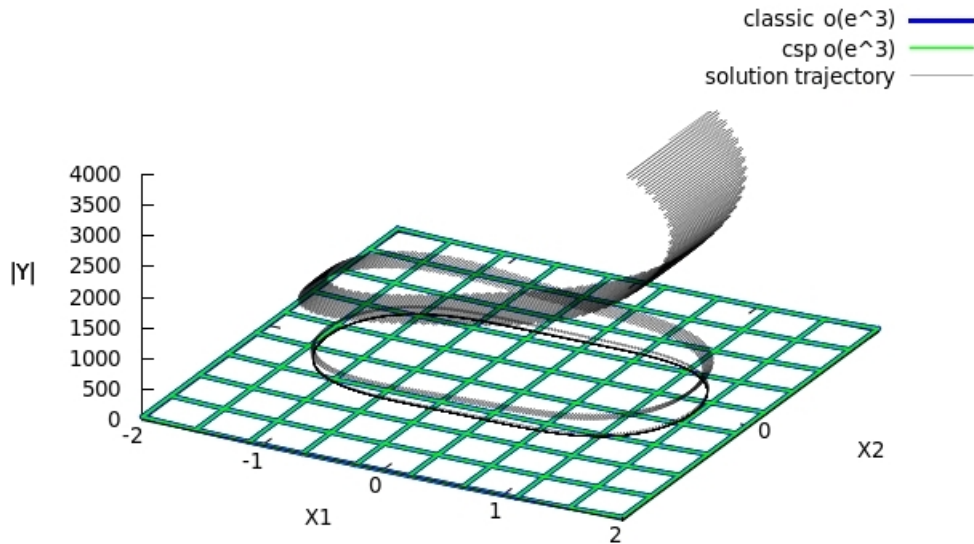
ισορροπίας

$$(4.3.1) \quad C_{-1} \equiv (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{Z}_1, \hat{Z}_2) = (-1/\sqrt{\gamma}, 0, 0, 0),$$

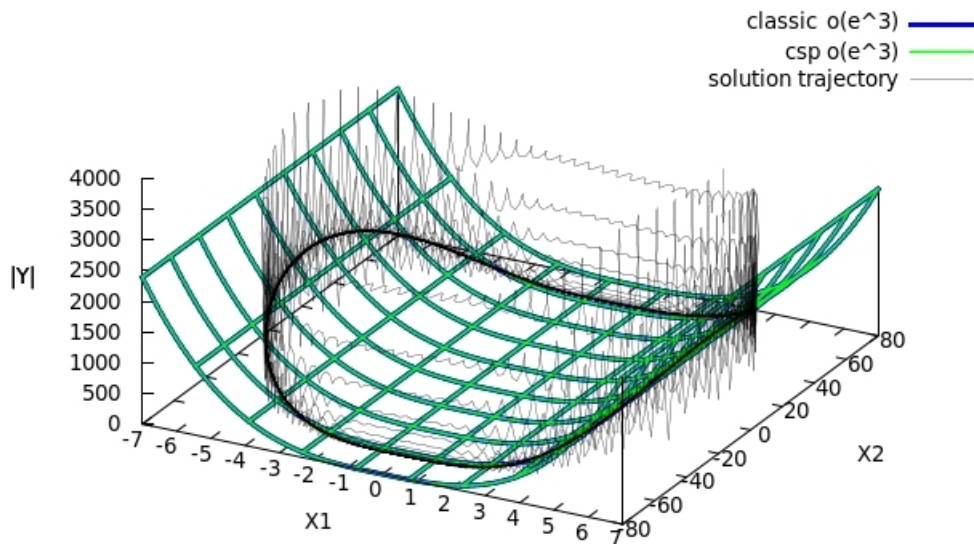
$$(4.3.2) \quad S \equiv (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{Z}_1, \hat{Z}_2) = (0, 0, 0, 0),$$

$$(4.3.3) \quad C_1 \equiv (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{Z}_1, \hat{Z}_2) = (1/\sqrt{\gamma}, 0, 0, 0).$$

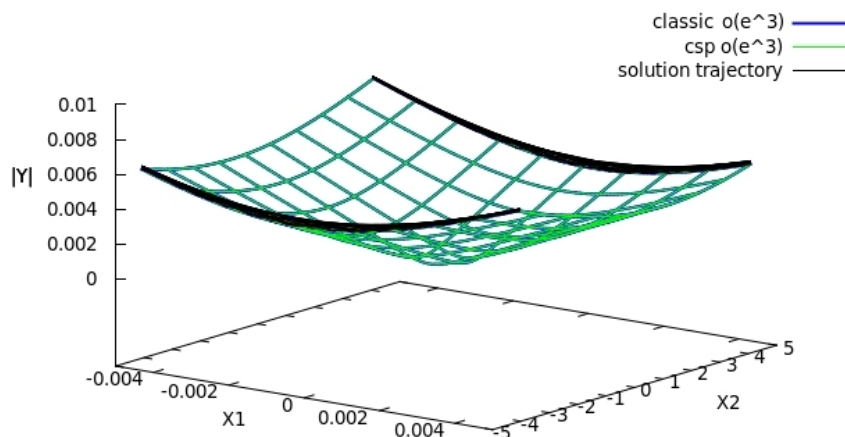
Παρατηρούμε ότι οι τροχιές έλκονται από τις δύο πολλαπλότητες, στην πρώτη περίπτωση εκθετικά ενώ στην δεύτερη η λύση ταλαντούται γύρω από την επιφάνεια προτού πέσει πάνω της. Και στις δύο περιπτώσεις όμως οι τροχιές συγκλίνουν σε έναν οριακό κύκλο (*limit cycle*) που κείται επί των πολλαπλοτήτων. Μια προσεκτικότερη ανάλυση επαληθεύει το γεγονός ότι για μια περιοχή κοντά στο  $(X_1, X_2) = (0, 0)$ , οι δύο επιφάνειες είναι ταυτόσημες, καθώς η λύση που έχουμε πάρει κείται επί των δύο πολλαπλοτήτων (Σχ.4.7). Ωστόσο, δεν συμβαίνει το ίδιο μακριά από το μηδέν. Όπως είδαμε προηγουμένως, οι δύο επιφάνειες που περιγράφουν αντίστοιχα τις δύο πολλαπλότητες διαφέρουν καθώς απομακρυνόμαστε από την αρχή των αξόνων. Αυτό όμως που δεν γνωρίζαμε είναι ποιά από τις δύο επιφάνειες έλκει τις τροχιές των λύσεων. Στο Σχ.(4.9) φαίνεται ο χώρος των λύσεων για μια περιοχή μακριά από το  $(X_1, X_2) = (0, 0)$ . Παρατηρούμε ότι η τροχιά της λύσης για τις τυχαίες αρχικές συνθήκες μακριά από το  $(0, 0)$  που έχουμε ορίσει συγκλίνει και κείται τελικά επί της επιφάνειας που περιγράφει την πολλαπλότητα της CSP.



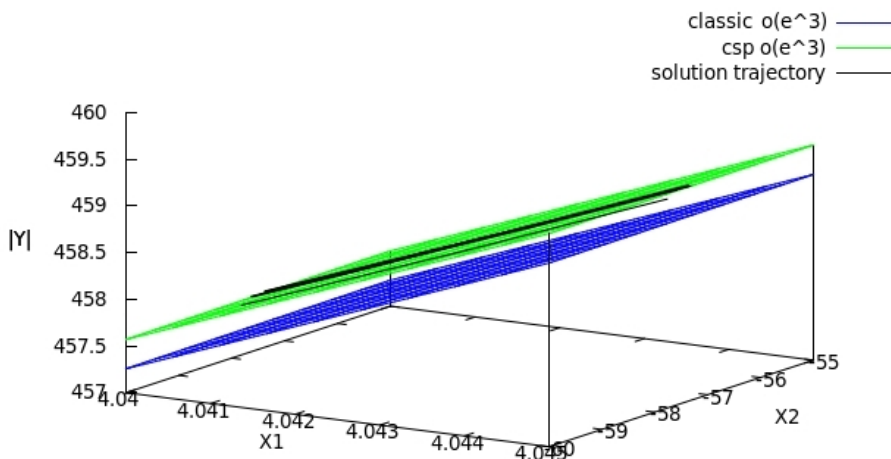
Σχήμα 4.6: Γραφική αναπαράσταση της ακριβούς λύσης για  $t < 30$  και των δύο πολλαπλοτήτων στο χώρο φάσεων  $X_1, X_2, |Y|$  κοντά στο  $(0,0)$ . Η αρχική συνθήκη έχει επιλεγεί ως  $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2\} = \{0.5, 0.5, 3500, 1\}$  ενώ με  $O(\varepsilon^3)$  νοείται η προσέγγιση της πολλαπλότητας κρατώντας τους 3 πρώτους όρους στο ανάπτυγμα ως προς “ $\varepsilon$ ”.



Σχήμα 4.7: Γραφική αναπαράσταση της ακριβούς λύσης για  $t < 30$  και των δύο πολλαπλοτήτων στο χώρο φάσεων  $X_1, X_2, |Y|$  μακριά από το  $(0,0)$ . Η αρχική συνθήκη έχει επιλεγεί ως  $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2\} = \{4, 40, 3500, 1\}$  ενώ με  $O(\varepsilon^3)$  νοείται η προσέγγιση της πολλαπλότητας κρατώντας τους 3 πρώτους όρους στο ανάπτυγμα ως προς “ $\varepsilon$ ”.



Σχήμα 4.8: Γραφική αναπαράσταση της ακριβούς λύσης για  $t < 30$  και των δύο πολλαπλοτήτων στο χώρο φάσεων  $X_1, X_2, |Y|$  κοντά στο  $(0,0)$ . Η τροχιά κείται και επί των δύο πολλαπλοτήτων με ακρίβεια μικρότερη του  $O(\epsilon)$ . Η αρχική συνθήκη έχει επιλεγεί ως  $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2\} = \{4, 40, 3500, 1\}$  ενώ με  $O(\epsilon^3)$  νοείται η προσέγγιση της πολλαπλότητας κρατώντας τους 3 πρώτους όρους στο ανάπτυγμα ως προς “ $\epsilon$ ”.



Σχήμα 4.9: Γραφική αναπαράσταση της ακριβούς λύσης για  $t < 30$  και των δύο πολλαπλοτήτων στο χώρο φάσεων  $X_1, X_2, |Y|$  μακριά από το  $(0,0)$ . Η τροχιά κείται και επί της επιφάνειας που περιγράφει την CSP πολλαπλότητα με ακρίβεια μικρότερη του  $O(\epsilon)$ . Η αρχική συνθήκη έχει επιλεγεί ως  $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2\} = \{4, 40, 3500, 1\}$  ενώ με  $O(\epsilon^3)$  νοείται η προσέγγιση της πολλαπλότητας κρατώντας τους 3 πρώτους όρους στο ανάπτυγμα ως προς “ $\epsilon$ ”.

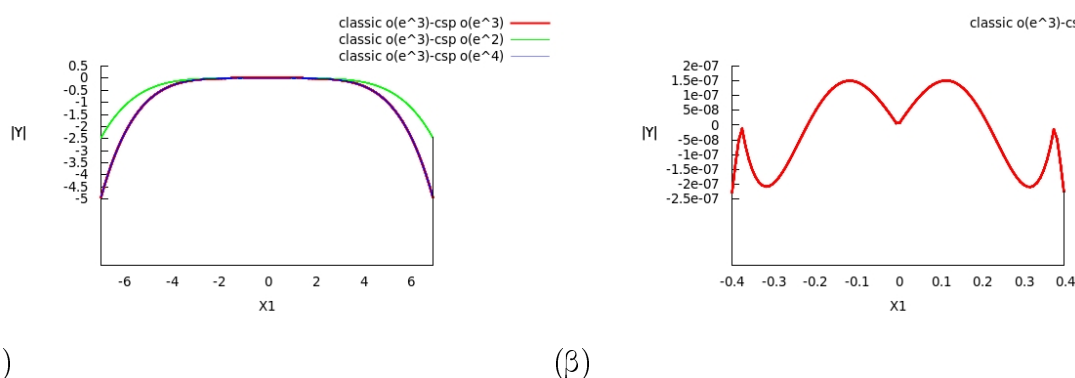
Για να εξετάσουμε περισσότερο αυτό το φαινόμενο, θεωρούμε τις αρχικές συνθήκες του προ-



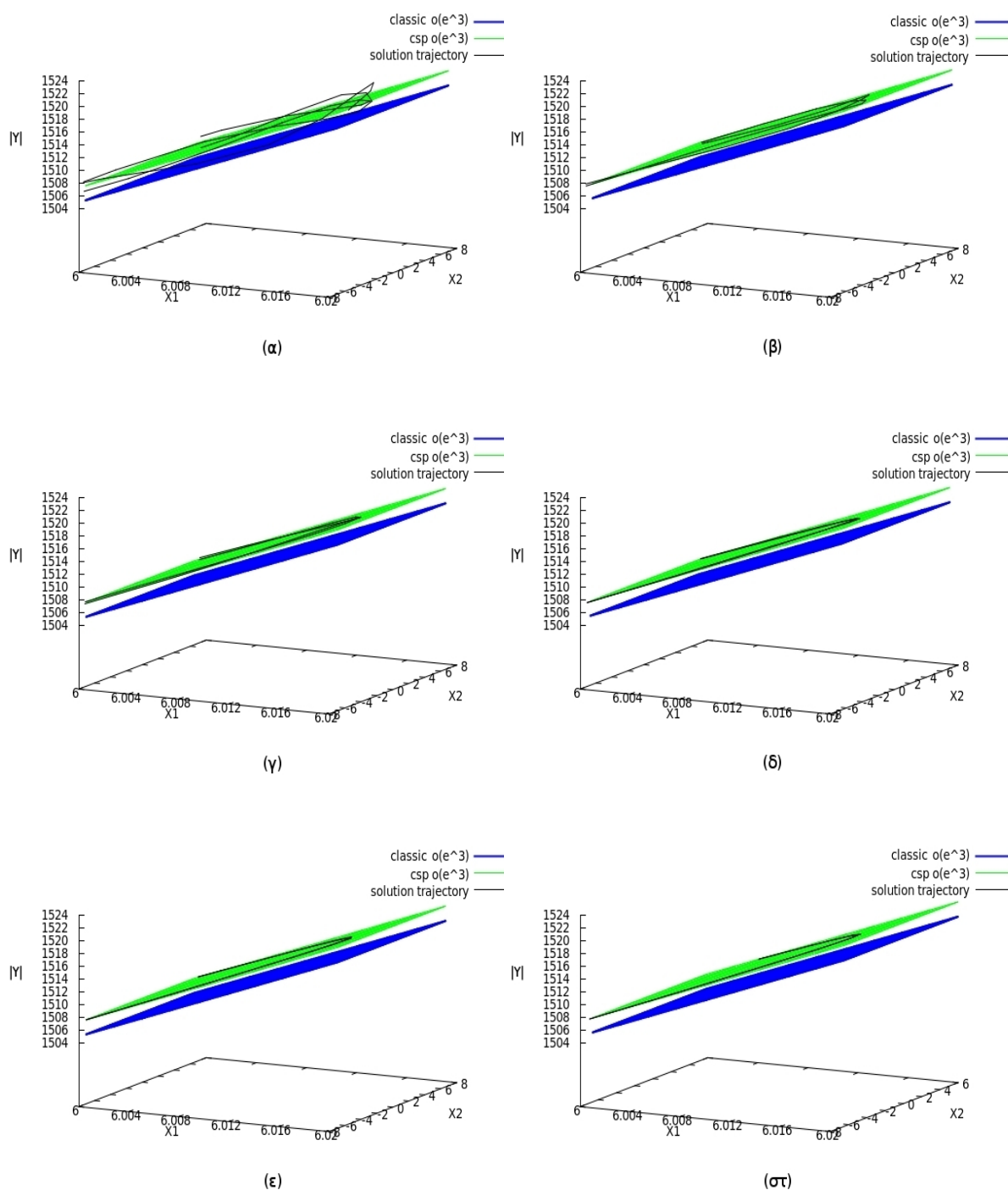
βλήματος ακριβώς πάνω στην πολλαπλότητα που ορίζει η κλασσική ασυμπτωτική ανάλυση. Θα περιμέναμε η λύση να παρέμενε πάνω στην επιφάνεια αυτή και, κινούμενη επί ενός οριακού κύκλου, να συνέκλινε τελικά σε κάποιο οριακό σημείο ισορροπίας του προβλήματος. Στο Σχ.(4.11) απεικονίζεται η τροχιά της λύσης για κάποια περιοχή μακριά από το  $(X_1, X_2) = (0, 0)$  και για τις πρώτες έξι χρονικές στιγμές διαδοχικά.

Όπως παρατηρούμε, η τροχιά της λύσης αποκλίνει από την κλασσική πολλαπλότητα καθώς έλκεται από την πολλαπλότητα της μεθόδου CSP. Ξεκάθαρα, η προσέγγιση που παίρνουμε από την κλασσική ασυμπτωτική ανάλυση υστερεί σε σχέση με την αντίστοιχη της υπολογιστικής μεθόδου.

Θα επιδιώξουμε να εξηγήσουμε αυτό το γεγονός. Η εφαρμογή της κλασσικής ασυμπτωτικής ανάλυσης στηρίζεται στην σωστή προσέγγιση των γρήγορων μεταβλητών μέσω της συνάρτησης **H**. Όμως η ακρίβεια στην προσέγγιση εξαρτάται μόνο από την τάξη του αναπτύγματος (4.1.27). Αντίθετα, η μέθοδος CSP σε κάθε επανάληψη (refinement) υπολογίζει εκ νέου τις ιδιοτιμές του προβλήματος για κάθε χρονική στιγμή  $t_0$ . Ο δυναμικός αυτός επαναπροσδιορισμός των διανυσμάτων βάσης των δύο υποχώρων - στους οποίους δρουν αντίστοιχα οι γρήγορες και αργές χρονοκλίμακες - επιτρέπει στην μέθοδο CSP να υπολογίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια την γεωμετρία των πολλαπλοτήτων. Το Σχ.(4.10) αποδίδει αυτή την φαινομενολογία. Είναι προφανές ότι κοντά στις καταστάσεις ισορροπίας του προβλήματος αρχικών τιμών, οι δύο μέθοδοι διαφέρουν κατά μία τάξη μεγέθους  $O(\epsilon^3)$ . Μακριά όμως από τις καταστάσεις ισορροπίας οι δύο πολλαπλότητες αποκλίνουν και οι διαφορές που παρουσιάζουν είναι σημαντικές.



Σχήμα 4.10: Γραφική παράσταση στον χώρο των φάσεων  $X_1, |Y|$  για δεδομένο  $\{X_2 = -1.6\}$  της διαφοράς των πολλαπλοτήτων: (α) της κλασσικής ανάλυσης  $O(\epsilon^3)$  με την υπολογιστική για  $O(\epsilon^2), O(\epsilon^3), O(\epsilon^4)$ , (β) της κλασσικής ανάλυσης  $O(\epsilon^3)$  με την αντίστοιχη  $O(\epsilon^3)$  της αριθμητικής ανάλυσης. Οι καταστάσεις ισορροπίας του προβλήματος έχουν υπολογιστεί ως:  $\{x = 0, x = -1/\sqrt{7} = -0.378, x = 1/\sqrt{7} = 0.378\}$



Σχήμα 4.11: Γραφική αναπαράσταση της ακριβούς λύσης και των δύο πολλαπλοτήτων στο χώρο φάσεων  $X_1, X_2, |Y|$  μακριά από το  $(0,0)$  για (α)  $t \in [0, 1]$ , (β)  $t \in [1, 2]$ , (γ)  $t \in [2, 3]$ , (δ)  $t \in [3, 4]$ , (ε)  $t \in [4, 5]$ , (στ)  $t \in [5, 6]$ . Η αρχική συνθήκη έχει θεωρηθεί επί της κλασικής πολλαπλότητας, η οποία απεικονίζεται με μπλε χρώμα. Έπειτα απο 6 χρονικές στιγμές, η λύση κείται επί της πολλαπλότητας που ορίζει η CSP.

# Κεφάλαιο 5

## Σύστημα ράβδου - εκκρεμούς

### 5.1 Κλασσική ασυμπτωτική ανάλυση

α) Δήλωση του προβλήματος

Έστω εκκρεμές μάζας  $M_p$  και φυσικού μήκους  $L_p$  συνδεδεμένο στο άκρο  $B$  ελαστικής ράβδου διατομής  $A_r$  και μήκους  $L_r$ , η οποία δύναται να μετακινείται επί κατακόρυφου αξόνου, όπως φαίνεται στο Σχ (5.1) [5]. Το άνω άκρο  $A$  της ράβδου υπόκειται σε δεδομένη κίνηση  $x_A(t)$ . Το εκκρεμές δύναται να κινείται στο επίπεδο που ορίζεται από το ζεύγος  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  των ορθοκανονικών μοναδιαίων διανυσμάτων. Το υλικό της ράβδου έχει πυκνότητα  $\rho_r$ : ήτοι είναι γραμμικό ιξωδοελαστικό που υπακούει στο μοντέλο τάσεων-παραμορφώσεων Kelvin-Voigt, όπου τα  $E_r$  και  $C_r$  είναι οι συντελεστές ελαστικότητας και ιξώδους, αντίστοιχα. Η σταθερά  $C_p$  δηλώνει το συντελεστή ελαστικότητας (ανά μονάδα μήκους) του εκκρεμούς, και  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Έστω ότι  $\theta$  και  $u$  δηλώνουν αντίστοιχα την γωνιακή μετατόπιση του εκκρεμούς από τον κατακόρυφο άξονα  $e_1$  και το πεδίο μετατοπίσεων της ελαστικής ράβδου ως προς την απαράμορφωτη κατάσταση του ασύζευκτου συστήματος συναρτήσει του  $x$ . Έστω  $\ddot{x}_A$  η επιτάχυνση του ελεύθερου άκρου  $A$  ως προς την αρχή των αξόνων  $O$  και  $\ddot{u}_B$  η σχετική επιτάχυνση του συζευγμένου άκρου  $B$  της ράβδου ως προς το  $A$ .

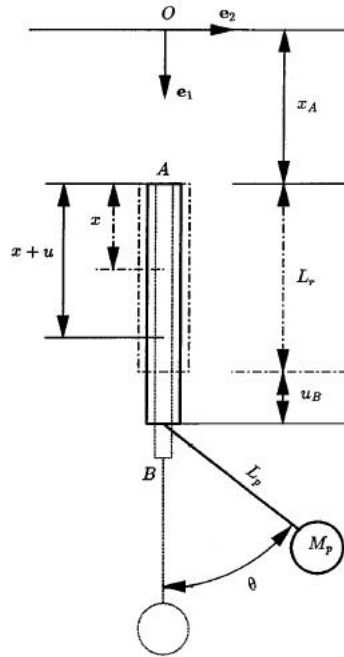
Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος ράβδου/εκκρεμούς περιγράφονται από τα ακόλουθα [5]:

$$(5.1.1a) \quad M_p L_p \ddot{\theta} + M_p [g - \ddot{x}_A - \ddot{u}_B] \sin \theta + C_p L_p \dot{\theta} = 0,$$

$$(5.1.1b) \quad A_r \rho_r \ddot{u}(x, t) - A_r E_r u''(x, t) - A_r C_r \dot{u}''(x, t) = A_r \rho_r [g - \ddot{x}_A(t)],$$

$$(5.1.1c) \quad u(x = 0, t) = 0, \quad A_r E_r u'(x = L_r, t) = A_r E_r u'_B(t) = T_p \cos \theta$$

όπου  $(\cdot)$  και  $(\dot{\cdot})$  δηλώνουν μερική διαφορίση ως προς το χρόνο  $t$  και το μήκος  $x$ , αντίστοιχα. Η επιτάχυνση  $\ddot{x}_A$  δίνεται από τις εξωτερικές δυνάμεις ενώ η επιτάχυνση  $\ddot{u}_B$  καθορίζεται από τη λύση του συστήματος.



Σχήμα 5.1: Το συζευγμένο σύστημα ελαστικής ράβδου/εκκρέμους. Η διακεκομμένη γραμμή δηλώνει την κατάσταση ισοροπίας του αφόρτιστου συστήματος.

Το εκκρεμές (5.1.1a) συνδέεται με τη ράβδο (5.1.1b) μέσω της μη ομογενούς συνοριακής συνθήκης (5.1.1c), όπου

$$(5.1.2) \quad T_p = M_p L_p \dot{\theta}^2 + M_p [g - \ddot{x}_A - \ddot{u}_B] \cos \theta$$

είναι η τάση που δρα κατά μήκος του δύσκαμπτου νήματος του εκκρεμούς.

Για να κανονικοποιήσουμε τις συζευγμένες εξισώσεις (5.1.1) εισάγουμε τις παρακάτω αδιάστατες ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές:

$$\xi = \frac{x}{L_r}, \quad \tau = \omega_p t,$$

$$X_A = \frac{x_A}{L_p}, \quad U = \frac{u}{L_p}, \quad U_B = \frac{u_B}{L_p}$$

και τις ακόλουθες αδιάστατες παραμέτρους:

$$\mu = \frac{\omega_p}{\omega_1}, \quad \mu_m = \frac{\omega_1}{\omega_m} = \frac{1}{2m-1},$$

$$\beta = \frac{M_p}{A_r \rho_r L_r}, \quad \gamma = \frac{L_p}{L_r}, \quad \kappa = \frac{E_r A_r}{\rho_r M_p},$$

$$\zeta_p = \frac{1}{2\omega_p} \frac{C_p}{M_p}, \quad \zeta_r = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\pi^2 C_r}{4L_r^2 \rho_r},$$

όπου

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{L_p}}, \quad \omega_m = \frac{\pi(2m-1)}{L_r} \sqrt{\frac{E_r}{\rho_r}}, \quad m = 1, 2, \dots, \infty$$

είναι η φυσική συχνότητα του ασύζευκτου εκκρεμούς και το φάσμα των φυσικών συχνοτήτων της ασύζευκτης ράβδου, αντίστοιχα· με  $\zeta_p, \zeta_r$  οι αντίστοιχοι συντελεστές απόσβεσης.

Οι ευσταθείς και ασταθείς καταστάσεις ισορροπίας του συστήματος δίνονται από:

$$(5.1.3) \quad \begin{aligned} C : \hat{\theta} &= 0, & \hat{U}(\xi) &= \frac{\mu^2 \pi^2}{8} [2(1+\beta)\xi - \xi^2], \\ S_{\pm 1} : \hat{\theta} &= \pm \pi, & \hat{U}(\xi) &= \frac{\mu^2 \pi^2}{8} [2(1+\beta)\xi - \xi^2]. \end{aligned}$$

Οι κανονικοποιημένες εξισώσεις κίνησης του συζευγμένου συστήματος δίνονται από το ακόλουθο σύστημα ΣΔΕ/ΜΔΕ [5]:

$$(5.1.4a) \quad \ddot{\theta} + [1 - \ddot{V}_B(\tau) - \ddot{X}_A(\tau)] \sin \theta + 2\zeta_p \dot{\theta} = 0,$$

$$(5.1.4b) \quad \frac{\mu^2 \pi^2}{4} \ddot{V}(\xi, \tau) - V''(\xi, \tau) - 2\zeta_r \mu \dot{V}''(\xi, \tau) = -\frac{\mu^2 \pi^2}{4} \ddot{X}_A(\tau),$$

$$(5.1.4c) \quad V(\xi = 0, \tau) = 0, \quad V'(\xi = 1, \tau) = -\frac{\mu^2 \beta \pi^2}{4} [1 - T \cos \theta],$$

όπου

$$V(\xi, \tau) = U(\xi, \tau) - \hat{U}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad -\infty < \tau < +\infty.$$

Στη σχέση (5.1.4c), το  $T$  είναι η κανονικοποιημένη τάση του εκκρεμούς, η οποία δίνεται από:

$$(5.1.5) \quad T \equiv \frac{T_p}{M_p L_p \omega_p^2} = \dot{\theta}^2 + [1 - \ddot{X}_A(\tau) - \ddot{V}_B(\tau)] \cos \theta.$$

Παρατηρούμε την παρουσία της παραμέτρου  $\mu$  τόσο στην ΜΔΕ (5.1.4b) όσο και στις σχετιζόμενες συνοριακές συνθήκες (5.1.4c). Αυτό μας λέει ότι η ένταση της σύζευξης μεταξύ του εκκρεμούς και της ράβδου εξαρτάται από το μέγεθος της παραμέτρου  $\mu$ . Επιπλέον, οι συνοριακές συνθήκες (5.1.4c) δείχνουν ότι η ζεύξη εξαρτάται και από το λόγο των μαζών  $\beta$ .

Τώρα, για δεδομένο λόγο μαζών  $\beta$ , το όριο του συστήματος (5.1.4) καθώς το  $\mu \rightarrow 0$  είναι

$$(5.1.6a) \quad \ddot{\theta} + [1 - \ddot{X}_A(\tau)] \sin \theta + 2\zeta_p \dot{\theta} = 0,$$

$$(5.1.6b) \quad V(\xi, \tau) = 0.$$

Η εξίσωση (5.1.6a) περιγράφει την κίνηση του παραμετροποιημένου ασύζευκτου εκκρεμούς ενώ η (5.1.6b) μας δείχνει ότι η ράβδος είναι τελείως δύσκαμπτη. Το απειροδιάστατο σύστημα

(5.1.4) έχει ελαττωθεί σε ένα σύστημα με έναν βαθμό ελευθερίας. Επιθυμούμε να μελετήσουμε την δυναμική του συστήματος εκκρεμούς/ράβδου, δηλαδή όταν το  $\mu \neq 0$ , για δεδομένο λόγο μαζών  $\beta$ . Προφανώς, η οριακή συνθήκη  $\mu \rightarrow 0$  υποδεικνύει ότι η δυναμική του συζευγμένου συνεχούς συστήματος (5.1.4) πιθανόν να κυριαρχείται από το εκκρεμές για αρκούντως μικρά  $(\mu, \beta)$ .

Η μορφή του (5.1.4) μας οδηγεί να το επιλύσουμε με τη μέθοδο των ιδιάζουσων διαταραχών, για αρκετά μικρό  $\mu$ . Αναπτύσσοντας την μετατόπιση  $V$  ως εξής

$$(5.1.7) \quad V(\xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m(\tau) \phi_m(\xi)$$

όπου  $\phi_m$  είναι οι κανονικοί τρόποι του ομογενούς προβλήματος συνοριακών συνθηκών (5.1.4b), μετατρέπουμε το σύστημα (5.1.4) σε ένα σύστημα συζευγμένων ταλαντωτών. Στο Παράρτημα Α αναπτύσσουμε σε κανονικούς τρόπους το σύστημα  $\Sigma\Delta E/M\Delta E$  στο ακόλουθο σύστημα συζευγμένων ταλαντωτών [5]:

$$(5.1.8a) \quad \begin{aligned} I_N(\theta)\ddot{\theta} = & - \left[ 1 + 2\beta N(1 - \dot{\theta}^2 \cos \theta) + \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} \left( \frac{\eta_j}{\mu^2 \mu_j^2} + 2\zeta_r \frac{\dot{\eta}_j}{\mu \mu_j^2} \right) \right] \sin \theta \\ & + \left[ 1 - 2I_N(\theta) + \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^N (-1)^j \mu_j \right] \ddot{X}_A(\tau) \sin \theta - 2\zeta_p I_N(\theta) \dot{\theta}, \end{aligned}$$

$$(5.1.8b) \quad \begin{aligned} I_N(\theta)\ddot{\eta}_m = & - I_{N-1}(\theta) \left[ \frac{\eta_m}{\mu^2 \mu_m^2} + 2\zeta_r \frac{\dot{\eta}_m}{\mu \mu_m^2} \right] \\ & + 2\beta \cos^2 \theta \sum_{j=1, j \neq m}^N (-1)^{m+j+2} \left[ \frac{\eta_j}{\mu^2 \mu_j^2} + 2\zeta_r \frac{\dot{\eta}_j}{\mu \mu_j^2} \right] \\ & + (-1)^{m+1} 2\beta \left[ \dot{\theta}^2 \cos \theta - \sin^2 \theta \right] \\ & - \frac{4}{\pi} \left[ \mu_m I_N(\theta) + (-1)^m 2\beta \cos^2 \theta \sum_{j=1}^N (-1)^j \mu_j \right] \ddot{X}_A(\tau), \end{aligned}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, N \rightarrow \infty,$$

όπου  $I_N(\theta) \equiv 1 + 2\beta N \cos^2 \theta \neq 0$ . Υποθέτουμε ότι η κινηματική διέγερση του άκρου Α της ράβδου είναι αρμονική: δηλαδή  $\ddot{X}_A(\tau) \equiv a \cos \Omega \tau$ , όπου το  $\Omega$  είναι της τάξης του  $O(1)$ , ήτοι ίδια τάξη μεγέθους με την φυσική συχνότητα του εκκρεμούς, η οποία κανονικοποιήθηκε για  $\omega_p = 1$ .

*β) Ανάλυση του προβλήματος*

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση του προβλήματος (5.1.8), και συνεπώς του αρχικού προβλήματος  $\Sigma\Delta E/M\Delta E$  (5.1.4), θεωρώντας αρχικά την περίπτωση που η πρώτη φυσική συχνότητα της

ράβδου είναι πολύ μεγαλύτερη από την φυσική συχνότητα του εκκρεμούς. Αυτό έπεται ότι ο λόγος συχνοτήτων  $\mu$  είναι μικρός. Ένας φυσικός τρόπος να μελετήσουμε τη δυναμική του δύσκαμπτου/εύκαμπτου συστήματος είναι να θεωρήσουμε τις εξισώσεις κίνησης σαν ιδιόμορφη διαταραχή της εύκαμπτης υποκατασκευής. Για το δεδομένο πρόβλημα, το εκκρεμές παίζει το ρόλο της εύκαμπτης υποκατασκευής ενώ η ράβδος της δύσκαμπτης.

Η μορφή των σχέσεων (5.1.8) υποδεικνύει άμεσα τον ακόλουθο γραμμικό μετασχηματισμό:

$$(5.1.9a) \quad \theta = \Psi_1, \quad \dot{\theta} = \Psi_2,$$

$$(5.1.9b) \quad \eta_m = \mu^2 \mu_m^2 Z_{2m-1}, \quad \dot{\eta}_m = \mu \mu_m^2 Z_{2m}.$$

Ο μετασχηματισμός αυτός επεκτείνει τα πλάτη και τις ταχύτητες κάθε τρόπου ταλάντωσης και έτσι μετασχηματίζει το σύστημα (5.1.8) στο ακόλουθο σύνολο ΣΔΕ πρώτης τάξης [5]:

$$(5.1.10a) \quad \begin{aligned} \dot{\Psi}_1 &= \Psi_2, \\ I_N(\Psi_1) \dot{\Psi}_2 &= - \left[ 1 + 2\beta N(1 - \Psi_2^2 \cos \Psi_1) + \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} (Z_{2j-1} + 2\zeta_r Z_{2j}) \right] \sin \Psi_1 \\ &\quad + \left[ 1 - 2I_N(\Psi_1) + \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^N (-1)^j \mu_j \right] \alpha \Psi_3 \sin \theta - 2\zeta_p I_N(\Psi_1) \Psi_2, \\ \dot{\Psi}_3 &= -\Omega \Psi_4, \\ \dot{\Psi}_4 &= \Omega \Psi_3, \end{aligned}$$

$$(5.1.10b) \quad \begin{aligned} \mu \dot{Z}_{2m-1} &= Z_{2m}, \\ \mu \mu_m^2 I_N(\Psi_1) \dot{Z}_{2m} &= - I_{N-1}(\Psi_1) [Z_{2m-1} + 2\zeta_r Z_{2m}] \\ &\quad + 2\beta \cos^2 \Psi_1 \sum_{j=1, j \neq m}^N (-1)^{m+j+2} [Z_{2j-1} + 2\zeta_r Z_{2j}] \\ &\quad + (-1)^{m+1} 2\beta [\Psi_2^2 \cos \Psi_1 - \sin^2 \Psi_1] \\ &\quad - \frac{4}{\pi} \left[ \mu_m I_N(\Psi_1) + (-1)^{m+1} 2\beta \cos^2 \Psi_1 \sum_{j=1}^N (-1)^j \mu_j \right] \alpha \Psi_3, \end{aligned}$$

$$(5.1.10c) \quad m = 1, 2, 3, \dots, N \rightarrow \infty,$$

όπου  $I_N(\Psi_1) \equiv 1 + 2\beta N \cos^2 \Psi_1 \neq 0$ .

Σημειώνουμε ότι για να κάνουμε το σύστημα αυτόνομο, εισάγαμε τις ακόλουθες κυκλικές μεταβλητές:

$$\Psi_3 = \cos \Omega \tau, \quad \Psi_4 = \sin \Omega \tau.$$

Εφόσον  $\Psi_3^2 + \Psi_4^2 = 1$  έχουμε εισάγει μόνο μια επιπλέον μεταβλητή για να απαλείψουμε τον χρόνο  $\tau$ .

Οι ευσταθείς και ασταθείς καταστάσεις ισορροπίας του μη εξαναγκασμένου σκεδαστικού συστήματος ( $\alpha \equiv 0$ ) των συζευγμένων ταλαντωτών (5.1.10) δίνονται, αντίστοιχα, από:

$$(5.1.11) \quad \begin{aligned} C &= \left( \{\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2\}, \{\hat{Z}_1, \hat{Z}_2\}, \dots, \{\hat{Z}_{2N-1}, \hat{Z}_{2N}\} \right) = (\{0, 0\}, \{0, 0\}, \dots, \{0, 0\}), \\ S_{\pm 1} &= \left( \{\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2\}, \{\hat{Z}_1, \hat{Z}_2\}, \dots, \{\hat{Z}_{2N-1}, \hat{Z}_{2N}\} \right) = (\{\pm\pi, 0\}, \{0, 0\}, \dots, \{0, 0\}). \end{aligned}$$

Οι σχέσεις (5.1.11) αποτελούν τα διακριτοποιημένα ανάλογα των καταστάσεων ισορροπίας (5.1.3) του συνεχούς συστήματος.

Οι εξισώσεις (5.1.10), ισοδύναμες με το αρχικό συζευγμένο σύστημα ΣΔΕ/ΜΔΕ (5.1.4), αποτελούν ιδιόμορφη διαταραχή των εξισώσεων κίνησης του ασύζευκτου εκκρεμούς (5.1.6α). Η σχέση (5.1.10a) αναπαριστά το συζευγμένο εκκρεμές, ενώ η (5.1.10b) τη συζευγμένη ελαστική ράβδο. Προφανώς, ο λόγος συχνοτήτων  $\mu$ , ο οποίος σχετίζεται με τις υπόλοιπες αδιάστατες παραμέτρους μέσω

$$(5.1.12) \quad \frac{\pi\sqrt{\beta\gamma\kappa}}{2}\mu = 1,$$

παίζει το ρόλο της μικρής παραμέτρου. Η ανάλυση που ακολουθεί είναι έγκυρη για αρκούντως μικρό  $\mu$ , δηλαδή για ένα δύσκαμπτο/εύκαμπτο σύστημα. Ωστόσο, η διατύπωση είναι έγκυρη για οποιοδήποτε αποδεκτό  $\mu$ , και ένα από τα πλεονεκτήματα της είναι ότι δείχνει ξεκάθαρα πως ο λόγος  $\mu$  αποτελεί μέτρο σύζευξης ανάμεσα στη ράβδο και το εκκρεμές. Επιπλέον, δείχνει ότι η αδρανειακή σύζευξη μεταξύ του  $m$ -οστού τρόπου ταλάντωσης της ράβδου και του εκκρεμούς ελλατώνεται καθώς  $\mu_m^2 \equiv 1/(2m-1)^2$ .

Για ευκολία και αποτελεσματικότητα στην υπολογιστική επίλυση, ξαναγράφουμε τους ταλαντώντες (5.1.10) στη μορφή:

$$(5.1.13a) \quad \dot{\Psi} = \mathbf{F}(\Psi; N) + \mathbf{A}(\Psi; N)Z,$$

$$(5.1.13b) \quad \mu\dot{Z} = \mathbf{B}(\Psi; N)Z + \mathbf{G}(\Psi; N),$$

όπου

$$\Psi \equiv (\{\Psi_1, \Psi_2\}, \{\Psi_3, \Psi_4\}),$$

$$Z \equiv (\{Z_1, Z_2\}, \{Z_3, Z_4\}, \dots, \{Z_{2m-1}, Z_{2m}\}), \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Για μικρό  $\mu$ , αποκαλούμε την  $\Psi$  αργή μεταβλητή ενώ την  $Z$  γρηγορή μεταβλητή. Οι όροι  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{G}$  είναι μητρικές συναρτήσεις της αργής μεταβλητής  $\Psi$  με διαστάσεις  $2N \times 1$ ,  $2N \times 2N$ ,  $2N \times 2N$ ,  $2N \times 1$ , αντίστοιχα. Ο αντίστροφος του πίνακα  $\mathbf{B}$  ορίζεται για κάθε  $\Psi$ . Παρατηρούμε ότι η σχέση (5.1.13) δεν αποτελεί κανονική ιδιόμορφη διαταραχή καθώς ο πίνακας  $\mathbf{B}$  δεν είναι σταθερός αλλά εξαρτάται από την μεταβλητή  $\Psi$ .



γ) Υπολογισμός της πολλαπλότητας

Για μη μηδενική και μικρή σύζευξη, δηλαδή για  $0 < \mu < \hat{\mu} \ll 1$ , υποθέτουμε την ύπαρξη μιας ολικής αναλλοίωτης αργής πολλαπλότητας. Έστω ότι είναι διδιάστατη για το μη εξαναγκασμένο σύστημα και τριδιάστατη για το αρμονικά εξαναγκασμένο σύστημα. Κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις, η ύπαρξη της εν λόγω πολλαπλότητας εγγυάται από την Θεωρία της Γεωμετρικής Ιδιόμορφης Διαταραχής [10]. Ωστόσο, το πρόβλημα μας διαφέρει από ένα συνιθισμένο ιδιόμορφα διαταραγμένο πρόβλημα καθώς το γραμμικό κομμάτι των δύσκαμπτων εξισώσεων (5.1.13b) εξαρτάται από την αργή μεταβλητή. Αρχικά, λοιπόν, θα υπολογίσουμε αναλυτικές προσεγγίσεις της αργής πολλαπλότητας για πεπερασμένο  $N$  και στη συνέχεια θα επεκτείνουμε για  $N = \infty$ , δηλαδή για το συζευγμένο σύστημα ράβδου/εκκρεμούς.

Μια αναλλοίωτη πολλαπλότητα  $W_\mu(N)$  του συστήματος (5.1.13) θα καλείται αργή αν μπορεί να περιγραφεί από το γράφημα μιας διανυσματικής συνάρτησης  $\mathbf{H}^\mu$  της αργής μεταβλητής  $\Psi$ , δηλαδή, την κατάσταση του εκκρεμούς  $\{\Psi_1, \Psi_2\}$  και το δυναμικό της αρμονικής εξαναγκασμένης δύναμης  $\{\Psi_3, \Psi_4\}$ , το μέγεθος της ανάλυσης  $N$ , και την παράμετρο  $\mu$ : ήτοι, όλα τα σημεία  $P = (\Psi, Z)$  επί της πολλαπλότητας ικανοποιούν τη σχέση:

$$(5.1.14) \quad Z - \mathbf{H}^\mu(\Psi; N) = 0,$$

όπου

$$\mathbf{H}^\mu = (\{H_1^\mu, H_2^\mu\}, \{H_3^\mu, H_4^\mu\}, \dots, \{H_{2m-1}^\mu, H_{2m}^\mu\})^T, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την συνάρτηση  $\mathbf{H}^\mu$ , και κατά συνέπεια την αργή πολλαπλότητα, διαμορφώνουμε την επονομαζόμενη *συνθήκη αργής πολλαπλότητας*

$$(5.1.15) \quad \mathbf{B}(\Psi; N)\mathbf{H}^\mu(\Psi; N) + \mathbf{G}(\Psi; N) = \mu D_\Psi \mathbf{H}^\mu(\Psi; N)[\mathbf{A}(\Psi; N)\mathbf{H}^\mu(\Psi; N) + \mathbf{F}(\Psi; N)],$$

όπου η  $D_\Psi$  δηλώνει διαφορίση ως προς  $\Psi$ . Αυτή είναι μια διαδικασία ορθογωνοποίησης [5] και λαμβάνεται πρώτα αντικαθιστώντας την (5.1.14) στην (5.1.13b), και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την (5.1.13a). Η συνθήκη (5.1.15) εγγυάται ότι η αργή πολλαπλότητα θα είναι αναλλοίωτη. Επιλύουμε προσεγγιστικά την ανωτέρω εξίσωση υποθέτωντας

$$(5.1.16) \quad \mathbf{H}^\mu(\Psi; N) = \mathbf{H}^0(\Psi; N) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j \mathbf{H}^j(\Psi; N),$$

όπου

$$\mathbf{H}^j \equiv (\{H_1^j, H_2^j\}, \{H_3^j, H_4^j\}, \dots, \{H_{2m-1}^j, H_{2m}^j\})^T, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Αντικαθιστώντας το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα (5.1.16) στη συνθήκη πολλαπλότητας (5.1.15) και εξισώνοντας τους συντελεστές των ιδίων δυνάμεων του  $\mu$  με το μηδέν, λαμβάνουμε τις

ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις για τους προσεγγιστικούς όρους  $\mathbf{H}^j$  [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\Psi; N)\mathbf{H}^0 &= -\mathbf{G}(\Psi; N), \\ \mathbf{B}(\Psi; N)\mathbf{H}^1 &= D_\Psi\mathbf{H}^0\mathbf{F}(\Psi; N) + D_\Psi\mathbf{H}^0\mathbf{A}(\Psi; N)\mathbf{H}^0, \\ \mathbf{B}(\Psi; N)\mathbf{H}^2 &= D_\Psi\mathbf{H}^1\mathbf{F}(\Psi; N) + D_\Psi\mathbf{H}^1\mathbf{A}(\Psi; N)\mathbf{H}^0 + D_\Psi\mathbf{H}^0\mathbf{A}(\Psi; N)\mathbf{H}^1, \\ &\vdots \\ \mathbf{B}(\Psi; N)\mathbf{H}^n &= D_\Psi\mathbf{H}^{n-1}\mathbf{F}(\Psi; N) + \sum_{j=0}^{n-1} D_\Psi\mathbf{H}^j\mathbf{A}(\Psi; N)\mathbf{H}^k, \quad k+j=n-1. \end{aligned}$$

Στο Παράρτημα Β έχουμε υπολογίσει τους πρώτους τρεις προσεγγιστικούς όρους  $\mathbf{H}^0, \mathbf{H}^1, \mathbf{H}^2$ . Έτσι, η αργή πολλαπλότητα  $W^\mu$  του συστήματος ράβδου/εκκρεμούς ( $N = \infty$ ) περιγράφεται από το γράφημα της ακόλουθης διανυσματικής συνάρτησης:

$$(5.1.17) \quad \mathbf{H}^\mu(\Psi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{H}^\mu(\Psi; N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbf{H}^0(\Psi; N) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j \mathbf{H}^j(\Psi; N) \right],$$

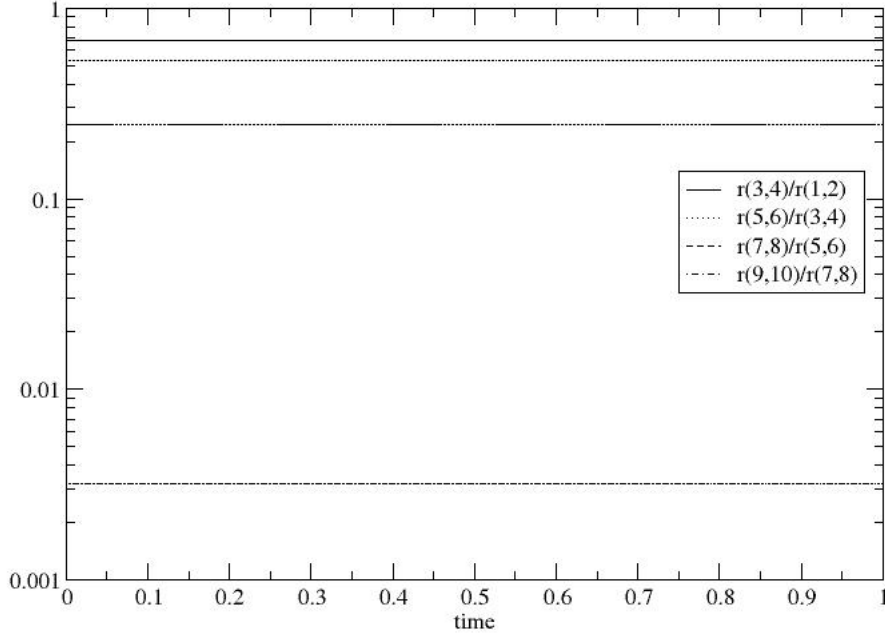
όπου

$$\mathbf{H}^\mu = (\{H_1^\mu, H_2^\mu\}, \{H_3^\mu, H_4^\mu\}, \dots, \{H_{2m-1}^\mu, H_{2m}^\mu\})^T, \quad m = 1, 2, \dots, N \rightarrow \infty.$$

## 5.2 Ανάλυση με χρήση του CSP

Όπως και στο πρώτο πρόβλημα του Κεφ.4, έτσι και εδώ, προτού προχωρήσουμε θα πρέπει να προσδιορίσουμε σωστά τα σύνολα των γρήγορων και αργών μεταβλητών του προβλήματος που λαμβάνονται υπ' όψιν από την τροποποιημένη μέθοδο CSP. Ήδη έχουμε προχωρήσει, στην κλασική ασυμπτωτική ανάλυση που προηγήθηκε, σε έναν αρχικό διαχωρισμό σύμφωνα με τον οποίο οι μεταβλητές του προβλήματος χωρίζονται στις  $\Psi \equiv (\Psi_1, \Psi_2)$  αργές και  $Z \equiv (\{Z_1, Z_2\}, \{Z_3, Z_4\}, \dots, \{Z_{2m-1}, Z_{2m}\})$  γρήγορες. Στην ανάλυση που ακολουθεί, θεωρούμε ότι  $\varepsilon = 10^{-3}$  και  $m = 4$ , συνεπώς υπάρχουν όροι μέχρι και  $\{Z_7, Z_8\}$ . Θα επιβεβαιώσουμε ότι ο διαχωρισμός αυτός είναι δόκιμος.

Προκειμένου να εξετάσουμε την ακαμψία που εισάγει ο πηγαίος όρος  $\mathbf{g}$ , υπολογίσαμε τις ιδιοτιμές της Ιακωβιανής ορίζουσας σε όλο το υπολογιστικό πεδίο. Στο Σχ.(5.2) απεικονίζεται ο λόγος των διαδοχικών (σε μέγεθος) ιδιοτιμών ως συνάρτηση του χρόνου. Παρατηρούμε ότι ενώ οι οκτώ πρώτες ιδιοτιμές είναι της ίδιας τάξης μεγέθους, ένα μεγάλο άλμα υπάρχει ανάμεσα στην όγδοη και την ένατη ιδιοτιμή. Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφ.3, αυτή η διαφορά είναι που προκαλεί την ακαμψία λόγω του πηγαίου όρου. Ο λόγος των δύο αυτών ιδιοτιμών αποτελεί ένα μέτρο ακαμψίας εξαιτίας του  $\mathbf{g}$ . Εφόσον, λοιπόν, η διαφορά αυτή παρατηρείται ανάμεσα στην όγδοη και ένατη ιδιοτιμή, τα αποτελέσματα του Σχ.(5.2) συνιστούν ότι πρέπει να υπάρχουν οκτώ γρήγορες μεταβλητές και δύο αργές.



Σχήμα 5.2: Οι λόγοι των μέτρων των ιδιοτιμών.  $r(i, j)$  είναι η  $i$ -οστή και  $j$ -οστή ιδιοτιμή, οι οποίες είναι ίσες μεταξύ τους.

Προκειμένου να επιβεβαιώσουμε των ανωτέρω ισχυρισμό, εξετάζουμε τα γρήγορα εύρη (fast amplitudes) της μεθόδου CSP για την ταξινόμηση που επιθυμούμε. Στην παράγραφο (3.2.δ) δείξαμε ότι οι δύο εξισώσεις που περιγράφουν το manifold

$$(5.2.1) \quad \mathbf{g}^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{g}^s = \mathbf{0},$$

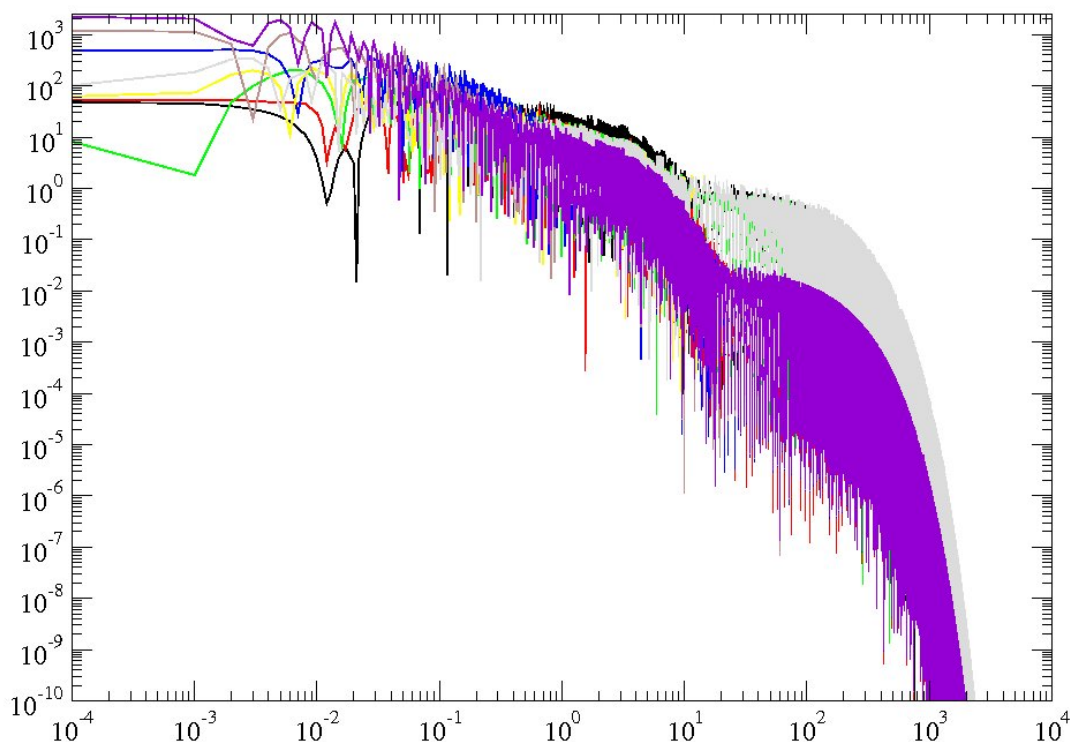
$$(5.2.2) \quad B_r^r \mathbf{g}^r + B_s^r \mathbf{g}^s = \mathbf{0},$$

είναι ισοδύναμες. Επομένως, τα γρήγορα εύρη της μεθόδου CSP δίνονται από τη σχέση

$$(5.2.3) \quad \mathbf{f}^r = \mathbf{g}^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{g}^s.$$

Στα Σχ.(5.3) απεικονίζεται η εξέλιξη των γρήγορων πλατών στο χρονικό διάστημα  $t \in (0, 10^4)$  έπειτα από 3  $B^r$ -refinements. Όπως παρατηρούμε, τα εύρη των γρήγορων μεταβλητών για την τυχαία επιλογή των αρχικών συνθηκών που έχουμε κάνει τείνουν στο μηδέν καθώς  $t \rightarrow \infty$ , γεγονός που επιβεβαιώνει το ορθό της απόφασής μας.

Αφού έχουμε επιλέξει, λοιπόν, κατάλληλα τις γρήγορες και αργές μεταβλητές του προβλήματος, θα υπολογίσουμε τον πίνακα  $\mathbf{G}_s^r$  είτε από την διαφορική εξίσωση (3.2.45) είτε από τον



Σχήμα 5.3: Γραφική παράσταση των 8 γρήγορων πλατών για το χρονικό διάστημα  $T = (0, 10^4)$  έπειτα από 3  $B^r$ -refinements. Στον οριζόντιο άξονα είναι ο χρόνος και στον κάθετο άξονα η απόλυτη τιμή των πλατών.

επαναληπτικό αλγόριθμο (3.2.46). Έτσι, για τον διαχωρισμό που έχουμε υποθέσει και για αρχική τιμή

$$\mathbf{G}_2^8(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

προκύπτουν οι προσεγγίσεις  $\mathbf{G}_2^8(1), \mathbf{G}_2^8(2), \dots$  του πίνακα  $\mathbf{G}_2^8$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Λόγω αρκετά μεγάλου μεγέθους το οποίο υπερέβαινε κατά πολύ τις διαστάσεις τις παρούσας σελίδας, οι εκφράσεις των προσεγγίσεων  $\mathbf{G}_2^8(2), \dots$  δεν ήταν δυνατόν να ανατυπωθούν. Επίσης, στα επόμενα που ακολουθούν,  $\Psi_1=Y_1$  και  $\Psi_2=Y_2$ .

Ενδεικτικά, η πρώτη προσέγγιση δίνεται από τη σχέση:

$$(5.2.4) \quad \mathbf{G}_2^8(1) = \begin{pmatrix} \frac{2\beta(\gamma_1+\gamma_2)\sin\Psi_1}{1+8\beta\cos^2\Psi_1} & 4\beta\Psi_2\cos\Psi_1 \\ 0 & 0 \\ -\frac{2\beta(\gamma_1+\gamma_2)\sin\Psi_1}{1+8\beta\cos^2\Psi_1} & -4\beta\Psi_2\cos\Psi_1 \\ 0 & 0 \\ \frac{2\beta(\gamma_1+\gamma_2)\sin\Psi_1}{1+8\beta\cos^2\Psi_1} & 4\beta\Psi_2\cos\Psi_1 \\ 0 & 0 \\ -\frac{2\beta(\gamma_1+\gamma_2)\sin\Psi_1}{1+8\beta\cos^2\Psi_1} & -4\beta\Psi_2\cos\Psi_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -2(1+8\beta+Z_1-Z_3+Z_5-Z_7+2(-Z_8+Z_2-Z_4+Z_6)\zeta_\rho)\cos\Psi_1 \\ \gamma_2 &= \Psi_2^2(-1+4\beta\cos 2\Psi_1) \end{aligned}$$

και τα αντίστοιχα γρήγορα εύρη δίνονται από:

$$(5.2.5) \quad \underline{\mathbf{F}}(1) = \begin{pmatrix} \frac{Z_2}{\varepsilon} + \frac{2\beta\Psi_2}{1+8\beta\cos^2\Psi_1} \left[ \varphi_0 + \sum_{k=1}^3 \varphi_k \sin k\Psi_1 \right] \\ \dot{Z}_2 \\ \frac{Z_4}{\varepsilon} - \frac{2\beta\Psi_2}{1+8\beta\cos^2\Psi_1} \left[ \varphi_0 + \sum_{k=1}^3 \varphi_k \sin k\Psi_1 \right] \\ \dot{Z}_4 \\ \frac{Z_6}{\varepsilon} + \frac{2\beta\Psi_2}{1+8\beta\cos^2\Psi_1} \left[ \varphi_0 + \sum_{k=1}^3 \varphi_k \sin k\Psi_1 \right] \\ \dot{Z}_6 \\ \frac{Z_8}{\varepsilon} - \frac{2\beta\Psi_2}{1+8\beta\cos^2\Psi_1} \left[ \varphi_0 + \sum_{k=1}^3 \varphi_k \sin k\Psi_1 \right] \\ \dot{Z}_8 \end{pmatrix}$$

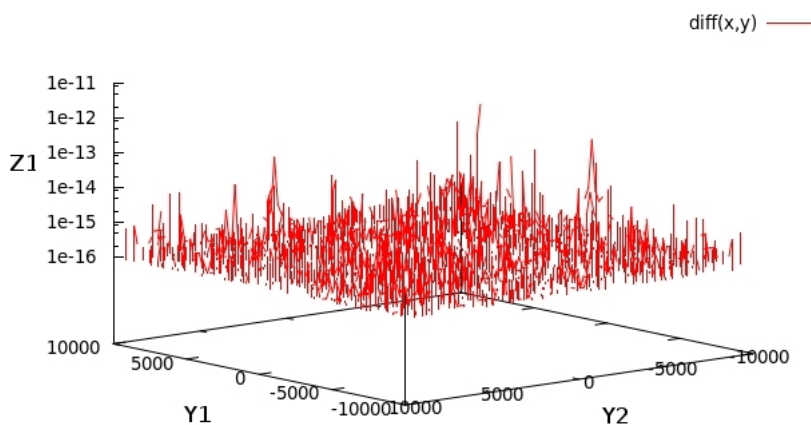
όπου

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 4(1+6\beta)\Psi_2\zeta_\rho\cos\Psi_1 + 8\beta\Psi_2\zeta_\rho\cos 3\Psi_1 \\ \varphi_1 &= (1-6\beta)\Psi_2^2 \\ \varphi_2 &= 2(1+8\beta+Z_1-Z_3+Z_5-Z_7+2(-Z_8+Z_2-Z_4+Z_6)\zeta_\rho) \\ \varphi_3 &= -6\beta\Psi_2^2 \end{aligned}$$

Όταν η λύση βρίσκεται πάνω στο υπερεπίπεδο, η σχέση (3.2.20) ικανοποιείται ενώ αυτόματα το δεξιό μέλος των εξισώσεων (5.2.5) ισούται εκ ταυτότητας με το μηδέν, επιτρέποντας, έπειτα από την λύση  $\underline{\mathbf{F}}^r = 0$ , τον υπολογισμό των  $Z_n = Z_n(Y_1, Y_2)$ ,  $n = 1, 2, \dots, 8$ .

### 5.3 Σύγκριση κλασικής και υπολογιστικής λύσης

Όπως και στο Κεφ.4, έτσι και εδώ, μελετήσαμε παράλληλα το πρόβλημα, τόσο από θεωρητική σκοπιά όσο και από υπολογιστική και καταλήξαμε στον υπολογισμό των πολλαπλοτήτων από



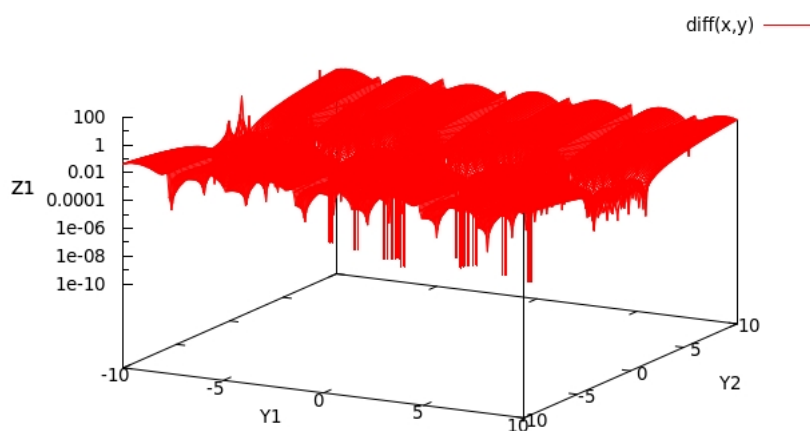
Σχήμα 5.4: Γραφική παράσταση του σχετικού σφάλματος των δύο προσεγγίσεων στο χώρο φάσης  $[-10^4, 10^4] \times [-10^4, 10^4]$ . Η τάξη ακρίβειας και των δύο είναι  $O(\varepsilon)$ . Η απόλυτη τιμή του σχετικού σφάλματος κυμαίνεται στο  $10^{-16}$ , την ακρίβεια του συστήματος.

δύο διαφορετικούς δρόμους. Για να συγκρίνουμε τις δύο πολλαπλότητες θεωρούμε τον χώρο των φάσεων με συντεταγμένες  $Y_1, Y_2$  και  $Z_n$ , για  $n = 1, 2, \dots, 8$  και μελετούμε τις διάφορες συνιστώσες των εκάστοτε πολλαπλοτήτων. Στα σχήματα που ακολουθούν αναπαριστούμε την πρώτη εκ των συνιστωσών  $Z_1$ , όμως τα αποτελέσματα ισχύουν και για όλες τις υπόλοιπες.

Αρχικά, μια πρώτη εκτίμηση υποδεικνύει ότι και οι δύο προσεγγίσεις περιγράφουν την ακριβή λύση με την ίδια τάξης ακρίβεια. Υποθέτωντας πρώτης τάξης ακρίβεια  $O(\varepsilon)$ , τόσο για την πολλαπλότητα που λαμβάνουμε από την κλασική ανάλυση όσο και για την πολλαπλότητα που λαμβάνουμε από την μέθοδο CSP, η αρχική μας εκτίμηση επιβεβαιώνεται, όπως φαίνεται και από το Σχ.(5.4). Στο χώρο των φάσεων που ορίζεται για  $-10^4 \leq Y_1 \leq 10^4$  και  $-10^4 \leq Y_2 \leq 10^4$ , αναπαριστούμε την συνάρτηση “diff”, η οποία ορίζεται ως  $diff = \|1 - csp/classic\|$ , είναι δηλαδή το σχετικό σφάλμα των δύο προσεγγίσεων. Όπως διαπιστώνουμε, σε μια λογαριθμική κλίμακα το σχετικό σφάλμα κυμαίνεται στις τιμές κοντά στο  $10^{-16}$ , την ακρίβεια δηλαδή του συστήματος που κάναμε την μελέτη. Το συμπέρασμα είναι ότι οι δύο προσεγγίσεις μπορούν να θεωρηθούν καθολικά ίδιες. Εξάλλου, επιλύοντας το σύστημα  $\underline{F}^r = 0$  ως προς την πρώτη από τις οχτώ συνιστώσες του manifold, λαμβάνουμε τη σχέση:

$$\mathbf{H}_1^u = 2\beta(-1 + \Psi_2^2 \cos \Psi_1 + \cos^2 \Psi_1) + \varepsilon (4\beta\Psi_2^3 \zeta_\rho \sin \Psi_1 + 16\beta\Psi_2 \zeta_\rho \cos \Psi_1 (\sin \Psi_1 + \Psi_2 \zeta_\rho)),$$

είναι δηλαδή η ίδια αλγεβρική έκφραση που λαμβάνουμε από την κλασική ασυμπτωτική ανάλυση για την πρώτη συνιστώσα!



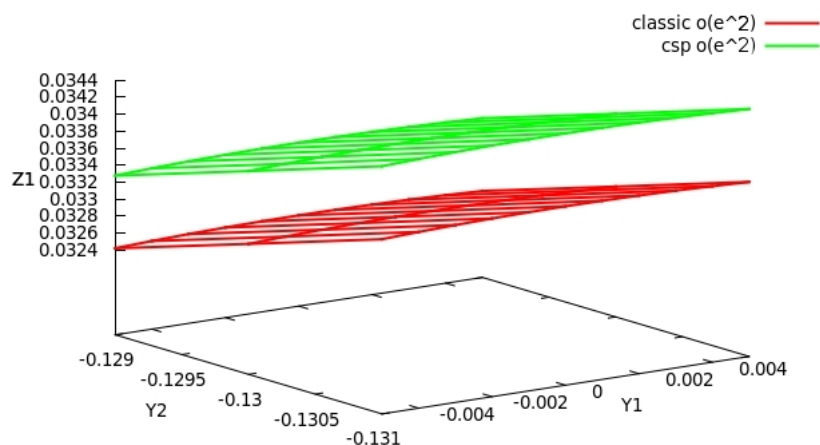
Σχήμα 5.5: Γραφική παράσταση του σχετικού σφάλματος των δύο προσεγγίσεων στο χώρο φάσης  $[-10, 10] \times [-10, 10]$ . Η τάξη ακρίβειας και των δύο είναι  $O(\epsilon^2)$ . Η απόλυτη τιμή του σχετικού σφάλματος κυμαίνεται κοντά στο  $10^{-2}$ .

Αν υποθέσουμε τώρα δεύτερης τάξης ακρίβεια  $O(\epsilon^2)$  και για τις δύο πολλαπλότητες, παρατηρούμε ότι η αρχική εκτίμηση δεν ευσταθεί. Για τον χώρο των φάσεων που ορίζεται από  $-10 \leq Y_1 \leq 10$  και  $-10 \leq Y_2 \leq 10$ , η συνάρτηση  $diff$  - δηλαδή το σχετικό σφάλμα - σε μια λογαριθμική κλίμακα κυμαίνεται στις τιμές ανάμεσα στο  $[10^{-4}, 1]$ , όπως διαπιστώνουμε και στο Σχ.(5.5).

Εδώ το συμπέρασμα είναι ότι οι δύο προσεγγίσεις δεν μπορούν να θεωρηθούν ταυτοτικές όπως στην πρώτη τάξη ακρίβεια. Το γεγονός αυτό φαίνεται και στο Σχ.(5.6) όπου έχουμε αναπαραστήσει τις δύο πολλαπλότητες σε γραμμική κλίμακα.

Η διαφορά αυτή μας επιτρέπει να προχωρήσουμε σε περαιτέρω μελέτη του προβλήματος. Για να δούμε ποιά από τις δύο προσεγγίσεις περιγράφει το πρόβλημα καλύτερα, θα πρέπει να δούμε πως συμπεριφέρεται η ακριβής λύση του προβλήματος σε σχέση με τις δύο πολλαπλότητες. Επειδή όμως το δυναμικό σύστημα που περιγράφει την κίνηση του εκκρεμούς και των οκτώ διαφορετικών τρόπων ταλάντωσης είναι δύσκαμπτο, η ακριβής λύση θα προσδιοριστεί αριθμητικά. Κάνοντας χρήση του υπολογιστικού πακέτου LSODE της FORTRAN, υπολογίσαμε τις τροχιές της λύσης στον χώρο των φάσεων για διάφορες αρχικές συνθήκες και τις αναπαραστήσαμε μαζί με τις δύο επιφάνειες που περιγράφουν τις αντίστοιχες πολλαπλότητες.

Στο Σχ.(5.7α,β) παρουσιάζονται οι τροχιές της ακριβούς λύσης για δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες και για  $t \in [0, 100]$ . Καθώς  $t \rightarrow \infty$  οι τροχιές συγκλίνουν στα σημεία ισορροπίας



Σχήμα 5.6: Γραφική παράσταση των δύο προσεγγίσεων δεύτερης τάξης ακρίβειας  $O(\epsilon^2)$  σε ένα τυχαίο υποσύνολο του χώρου των φάσεων  $Y_1, Y_2, Z_1$ .

του προβλήματος

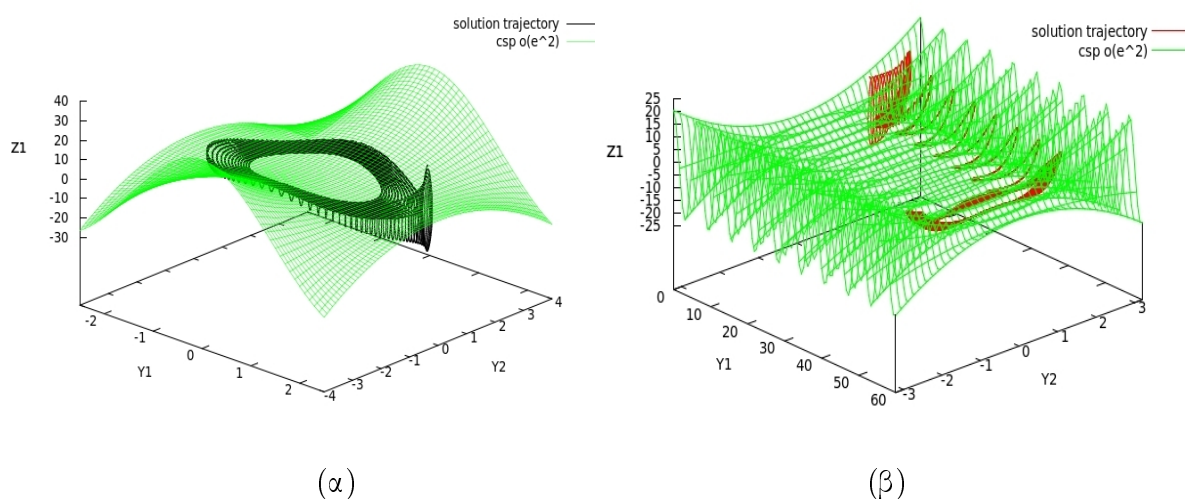
$$C = \left( \{\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2\}, \{\hat{Z}_1, \hat{Z}_2\}, \dots, \{\hat{Z}_{2N-1}, \hat{Z}_{2N}\} \right) = (\{0, 0\}, \{0, 0\}, \dots, \{0, 0\}),$$

$$(5.3.1) \quad S_{\pm 1} = \left( \{\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2\}, \{\hat{Z}_1, \hat{Z}_2\}, \dots, \{\hat{Z}_{2N-1}, \hat{Z}_{2N}\} \right) = (\{\pm \kappa \pi, 0\}, \{0, 0\}, \dots, \{0, 0\}).$$

όπου  $\kappa = 1, 2, \dots, \infty$  Όπως παρατηρούμε, η μετάβαση της τροχιάς πάνω στην πολλαπλότητα ποικίλει ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Στο Σχ.(5.7 α) η τροχιά της λύσης κινείται ταλαντωτικά γύρω από το manifold συγκλίνοντας σε έναν οριακό κύκλο που κείται επί της επιφάνειας που περιγράφει την πολλαπλότητα. Σε αντίθεση με την πρώτη περίπτωση, στο Σχ.(5.7 β) η μετάβαση δεν είναι ομαλή. Συγκεκριμένα, η λύση παρουσιάζει “χαοτικές” κινήσεις γύρω από την πολλαπλότητα του συστήματος πρώτου η δυναμική του προβλήματος της επιτρέπει να πέσει πάνω σε αυτήν και τελικά σε έναν οριακό κύκλο, περί του εκάστοτε σημείου ισορροπίας. Σημειώνουμε ότι υπάρχει μια οριακή τιμή για τις αρχικές συνθήκες η οποία διαχωρίζει την ομαλή απο την χαοτική μετάβαση της λύσης προς το manifold [7].

Όπως όμως είδαμε προηγουμένως, οι δύο εκφράσεις δεύτερης τάξης ακρίβειας  $O(\epsilon^2)$  που περιγράφουν την γεωμετρική πολλαπλότητα του συστήματος, δηλαδή η αναλυτική και η αριθμητική, διαφέρουν κατά μια τάξη μεγέθους που κυμαίνεται από  $O(\epsilon)$  μέχρι και  $O(1)$ . Στο Σχ.(5.8) έχουμε αναπαραστήσει τις δύο αυτές προσεγγίσεις μαζί με την ακριβή λύση και την πρώτης τάξης ακρίβειας προσέγγιση(η οποία είναι ταυτοτικά ίση με την πρώτη προσέγγιση της μεθόδου CSP), για ένα χρονικό διάστημα  $T = [\alpha, \beta] : \alpha > 1500$  κατά το οποίο η λύση βρίσκεται πάνω στο manifold με ακρίβεια  $O(< 10^{-6})$ . Διαπιστώνουμε ότι η  $O(\epsilon^2)$  αναλυτική



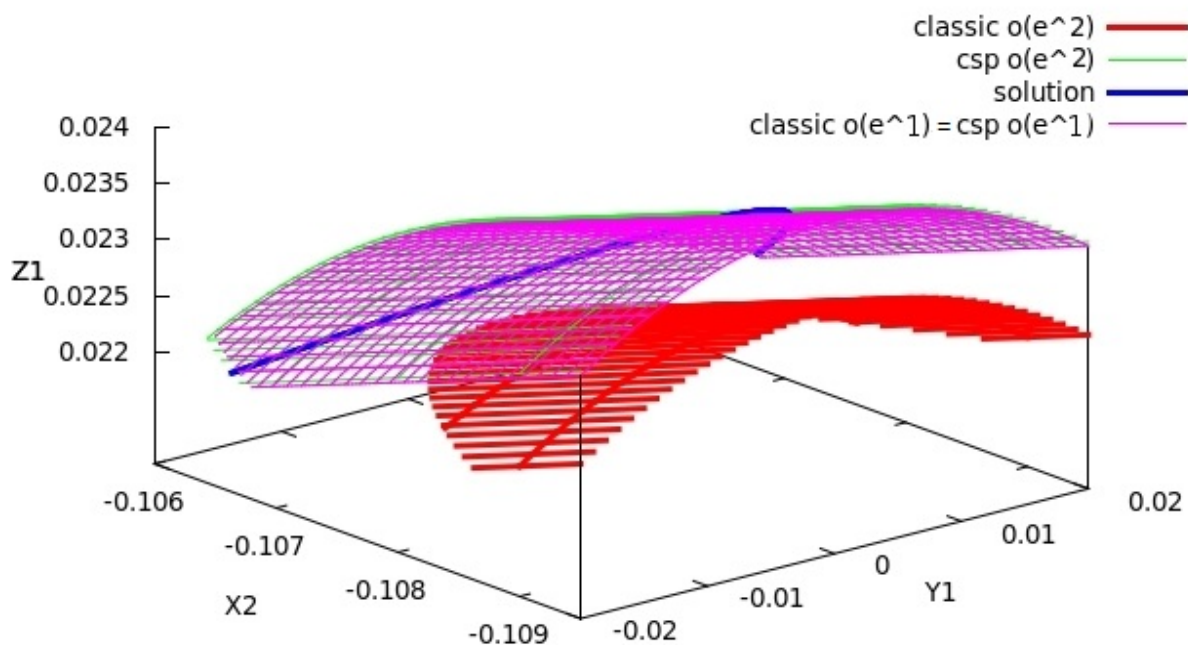


Σχήμα 5.7: Γραφική αναπαράσταση της τροχιάς της ακριβούς λύσης στο χώρο φάσεων  $Y_1, Y_2, Z_1$  (α) με αρχικές συνθήκες  $(2, 0.5)$  και (β) με αρχικές συνθήκες  $(2, 2.5)$  για  $t \in [0, 100]$ .

λύση της πολλαπλότητας προσεγγίζει την ακριβή κατά μια τάξη μεγέθους  $O(10^{-3})$ , όταν οι υπόλοιπες προσεγγίζουν την ακριβή λύση με ακρίβεια μεγαλύτερη από  $O(10^{-4})$ . Το γεγονός αυτό μπορεί να οφείλεται σε διάφορους παράγοντες όπως πιθανή λανθασμένη έκφραση της  $O(\varepsilon^2)$  αναλυτικής λύσης ή ακόμα και λανθασμένος χειρισμός της από τον συγγραφέα μέσω των υπολογιστικών πακέτων της Fortran και της Mathematica. Σε κάθε περίπτωση, η παρουσία τέτοιων ανακριβών αποτελεσμάτων δεν αποτελεί αντικείμενο για περαιτέρω ανάλυση και συνεπώς η συγκριτική μελέτη των δύο προσεγγίσεων θα σταματήσει σε αυτό το σημείο.

Αυτό όμως που μπορούμε και αξίζει να παρατηρήσουμε είναι η προσδοκώμενη βελτίωση της ακρίβειας από την πρώτη προσέγγιση της μεθόδου CSP στην δεύτερη. Στον Πίνακα (4.1) που ακολουθεί έχουμε συλλέξει τις τιμές των δύο προσεγγίσεων για δέκα διαφορετικά σημεία επί του χώρου φάσεων και τις έχουμε συγκρίνει με τις τιμές της ακριβούς τροχιάς όπως αυτές δίνονται από τον αλγόριθμο της DLSODE. Για το χρονικό διάστημα  $T$  που έχουμε επιλέξει, επισημαίνουμε ότι η τιμές της λύσης συμπίπτουν με αυτές της ακριβούς πολλαπλότητας με ακρίβεια μικρότερη από  $O(10^{-6})$ . Επομένως η σύγκριση αυτών των τιμών παρέχει μια πολύ καλή εικόνα για την ακρίβεια των δύο προσεγγίσεων.

Όπως αναμενόταν, η  $G_2$  προσέγγιση παρέχει έναν πιο καλό προσδιορισμό της τιμής της λύσης, με ακρίβεια που κυμαίνεται από δύο μέχρι και τρία δεκαδικά ψηφία σε σχέση με την  $G_1$  προσέγγιση. Σε κάθε περίπτωση, η τάξη της ακρίβειας και των δύο προσεγγίσεων συμβαδίζει με τα προβλεπόμενα, όντας  $O(\varepsilon)$  και  $O(\varepsilon^2)$ , αντίστοιχα. Το γεγονός αυτό είναι πέρα από ικανοποιητικό, αν συνυπολογίσουμε και την τάξη μεγέθους της ίδιας της λύσης, η οποία για το διάστημα αυτό που έχουμε επιλέξει, εντοπίζεται σε  $O(10^{-6})$  με  $O(10^{-7})$ .



Σχήμα 5.8: Γραφική παράσταση των 4 πολλαπλοτήτων μαζί με την ακριβή λύση για ένα χρονικό διάστημα  $T = \{[\alpha, \beta] : \alpha > 1500\}$ .

Σημεία $(Y_1, Y_2)$	$G_1$ προσέγγιση	$G_2$ προσέγγιση	Ακριβής τιμή
(1)	$2.00981 * 10^{-6}$	$2.01251 * 10^{-6}$	$2.01251 * 10^{-6}$
(2)	$1.71343 * 10^{-6}$	$1.71571 * 10^{-6}$	$1.71571 * 10^{-6}$
(3)	$0.91707 * 10^{-6}$	$0.91827 * 10^{-6}$	$0.91828 * 10^{-6}$
(4)	$0.93926 * 10^{-6}$	$0.94051 * 10^{-6}$	$0.94051 * 10^{-6}$
(5)	$0.10653 * 10^{-6}$	$0.10669 * 10^{-6}$	$0.10669 * 10^{-6}$
(6)	$-1.08982 * 10^{-6}$	$-1.09126 * 10^{-6}$	$-1.09127 * 10^{-6}$
(7)	$-0.42809 * 10^{-6}$	$-0.42864 * 10^{-6}$	$-0.42864 * 10^{-6}$
(8)	$-0.77532 * 10^{-6}$	$-0.77634 * 10^{-6}$	$-0.77634 * 10^{-6}$
(9)	$0.31523 * 10^{-6}$	$0.31563 * 10^{-6}$	$0.31564 * 10^{-6}$
(10)	$0.79613 * 10^{-6}$	$0.79721 * 10^{-6}$	$0.79721 * 10^{-6}$

Πίνακας 5.1: Συγκεντρωτικός πίνακας δέκα διαφορετικών σημείων και οι αντίστοιχες τιμές των προσεγγίσεων. Η προσδοκώμενη βελτίωση στην ακρίβεια είναι της τάξης του  $O(\epsilon)$ .

## Κεφάλαιο 6

### Επίλογος

Στην παρούσα εργασία, ασχοληθήκαμε με μια ιδιαίτερη κατηγορία δυναμικών συστημάτων, τα δύσκαμπτα (stiff), τα οποία χαρακτηρίζονται από δύο διαφορετικές κλίμακες χρόνου. Βασιζόμενοι στη θεωρία των ιδιαζουσών διαταραχών, εκμεταλλευτήκαμε την μεγάλη διαφορά μεγέθους των δύο αυτών χρονοκλιμάκων και μετασχηματίζοντας τα σε κατάλληλες μορφές, προχωρήσαμε στην επίλυση τους τόσο αναλυτικά όσο και αριθμητικά.

Για την αναλυτική επίλυση, στηριχθήκαμε στη *Θεωρία των Αναλλοίωτων Πολλαπλοτήτων*, ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δύο δυναμικών συστημάτων. Η κλασική ανάλυση των προβλημάτων δεν αποτέλεσε, ωστόσο, το αντικείμενο της παρούσας μελέτης αλλά υποστήριξε σε κάθε περίπτωση τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της υπολογιστικής ανάλυσης.

Η αριθμητική επίλυση των προβλημάτων είχε ως σκοπό την μελέτη της συμπεριφοράς της υπολογιστικής μεθόδου CSP, η οποία αναπτύχθηκε από κοινού από τους S.H.Lam και Δ.Α.Γκούση. Η CSP αποτελεί ένα πολύ καλό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων της μορφής

$$\frac{dy}{dt} = \frac{f(y)}{\varepsilon},$$

είτε αυτά βρίσκονται σε διαστατοποιημένη είτε σε αδιάστατη μορφή. Αναλύσαμε και αποδείξαμε τα βασικά σημεία της μεθόδου καθώς επίσης και της τροποποιημένης εκδοχής της.

Έτσι, χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη μέθοδο CSP μελετήσαμε δύο δύσκαμπτα προβλήματα ταλαντωτικής φύσεως τεσσάρων και δέκα διαστάσεων, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα ήταν συναρπαστικά. Στο πρώτο κατά σειρά πρόβλημα των τεσσάρων διαστάσεων, η  $O(\varepsilon^2)$  προσέγγιση της μεθόδου, όχι μόνο κατάφερε να επιτύχει ακρίβεια μεγαλύτερη από  $O(\varepsilon^2)$  για περιοχές κοντά στα στάσιμα σημεία του δυναμικού προβλήματος, αλλά διατήρησε την ίδια ακρίβεια και για όλα τα υπόλοιπα σημεία του χώρου φάσεων. Αντίθετα, η εφαρμογή της κλασικής ασυμπτωτικής ανάλυσης κρίθηκε ικανοποιητική μόνο για τις περιοχές κοντά στα σημεία ισορροπίας του προβλήματος, αδυνατώντας να ακολουθήσει την ίδια ακρίβεια για όλες τις περιοχές του χώρου των φάσεων. Χαρακτηριστικά, επιλέξαμε συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες

οι οποίες κοίτωνταν επί του επιπέδου που περιέγραφε την αναλυτική πολλαπλότητα. Το αποτέλεσμα ήταν η λύση να απομακρυνθεί από την “κλασική” πολλαπλότητα καθώς έλκονταν από την ‘υπολογιστική’.

Στο δεύτερο κατά σειρά πρόβλημα των δέκα διαστάσεων, οι συνθήκες δεν επέτρεψαν μια άμεση σύγκριση των δύο διαφορετικών προσεγγίσεων. Παρατηρήσαμε πως η  $O(\varepsilon^2)$  πολλαπλότητα της κλασικής ασυμπτωτικής ανάλυσης υστερούσε σε ακρίβεια έναντι της  $O(\varepsilon)$ , πράγμα που αναχαίτισε την περαιτέρω μελέτη. Όμως αποτέλεσε ευκαιρία για να συγκρίνουμε την προσδοκώμενη βελτίωση της ακρίβειας της μεθόδου CSP μεταβαίνοντας από την  $O(\varepsilon)$  στην  $O(\varepsilon^2)$  προσέγγιση. Πράγματι, η τροποποιημένη μέθοδος CSP πιστή στις δυνατότητες της κατάφερε να επιτύχει βελτιωμένη ακρίβεια για οποιοδήποτε σημείο του χώρου των φάσεων, είτε αυτό κείτονταν κοντά στα στάσιμα σημεία του συστήματος είτε μακριά από αυτά.

Καταληκτικά, τα συμπεράσματα που εξάγονται έπειτα από την μελέτη της συμπεριφοράς της μεθόδου CSP σε προβλήματα ταλαντωτικής φύσεως είναι πέρα απο ενθαρρυντικά. Και στις δύο περιπτώσεις η (τροποποιημένη) μέθοδος CSP επέδειξε ακρίβεια στην προσέγγιση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών συγκρίσιμη και πολλές φορές καλύτερη από την αντίστοιχη κλασική ασυμπτωτική ανάλυση. Τα δύο μελετηθέντα προβλήματα ανέδειξαν στο μέγιστο τις δυνατότητες της υπολογιστικής αυτής μεθόδου, αφήνοντας τον συγγραφέα και τον επιβλέποντα καθηγητή του ικανοποιημένους με το αποτέλεσμα.

# Παράρτημα Α

## Ανάπτυγμα Fourier

Θα μετασχηματίσουμε το σύστημα (4.1.4) σε σύστημα συζευγμένων ταλαντωτών. Η μετατόπιση  $V$  δέχεται την ακόλουθη αναπαράσταση:

$$(A.0.1) \quad V(\xi, \tau) = V_h(\xi, \tau) + v(\xi, \tau),$$

όπου  $V_h$  είναι η λύση του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών με ομογενείς συνοριακές συνθήκες:

$$(A.0.2a) \quad \frac{\mu^2 \pi^2}{4} \ddot{V}_h(\xi, \tau) - V_h''(\xi, \tau) - 2\zeta_r \mu \dot{V}_h''(\xi, \tau) = -\frac{\mu^2 \pi^2}{4} \ddot{X}_A(\tau),$$

$$(A.0.2b) \quad V_h(\xi = 0, \tau) = 0, \quad V_h'(\xi = 1, \tau) = 0.$$

Η μετατόπιση  $v$  είναι μοναδική και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (4.1.4c). Προκύπτει ότι

$$(A.0.3) \quad v(\xi, \tau) = -\frac{\mu^2 \beta \pi^2}{4} [1 - T \cos \theta] \xi.$$

Οι συναρτήσεις σχήματος και οι φυσικές ιδιοσυχνότητες του ομογενούς προβλήματος συνοριακών τιμών (A.0.2) δίνονται από:

$$(A.0.4) \quad \phi_m(\xi) = \sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2}\xi\right), \quad \hat{\omega}_m^2 = \frac{1}{\mu^2 \mu_m^2}, \quad \mu_m \equiv \frac{1}{2m-1}.$$

Οι μετατοπίσεις στην (A.0.1) αναπτύσσονται ως εξής:

$$(A.0.5) \quad \begin{aligned} V(\xi, \tau) &= \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m(\tau) \phi_m(\xi), & V_h(\xi, \tau) &= \sum_{m=1}^{\infty} \nu_m(\tau) \phi_m(\xi), \\ v(\xi, \tau) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m(\tau) \phi_m(\xi). \end{aligned}$$

Επιπλέον, ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$(A.0.6) \quad \langle V(\xi, \tau), \phi_m(\xi) \rangle \equiv 2 \int_0^1 V(\xi, \tau) \phi_m(\xi) d\xi.$$

Εφόσον  $V'' = V_h''$ , η ΜΔΕ (4.1.4b) γίνεται:

$$(A.0.7) \quad \frac{\mu^2 \pi^2}{4} \ddot{V}(\xi, \tau) - V_h''(\xi, \tau) - 2\zeta_r \mu \dot{V}''(\xi, \tau) = -\frac{\mu^2 \pi^2}{4} \ddot{X}_A(\tau).$$

Προβάλλοντας την (A.0.7) στα  $\phi_m$ , λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$(A.0.8) \quad \ddot{\eta}_m + \frac{\nu_m}{\mu^2 \mu_m^2} + 2\zeta_r \frac{\dot{\eta}_m}{\mu \mu_m^2} = -\frac{4\mu_m}{\pi} \ddot{X}_A(\tau).$$

Τώρα, λαμβάνοντας υπ'όψιν τις παρακάτω σχέσεις:

$$(A.0.9) \quad \nu_m = \eta_m - \sigma_m,$$

$$(A.0.10) \quad \sigma_m = \langle \nu(\xi, \tau), \psi_m(\xi) \rangle = (-1)^m \frac{8}{\pi^2} \beta \mu^2 \mu_m^2 [1 - T \cos \theta],$$

$$(A.0.11) \quad T = \dot{\theta}^2 + \left[ 1 - \ddot{X}_A(\tau) - \ddot{V}_B(\tau) \right] \cos \theta,$$

$$(A.0.12) \quad \ddot{V}_B(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \ddot{\eta}_j(\tau),$$

η εξίσωση (A.0.8) ανάγεται σε μια σχέση που εξαρτάται μόνο από τον συντελεστή  $\eta_m$ .

Τελικά, το συζευγμένο σύστημα (4.1.4) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο απειροσύνολο συζευγμένων ταλαντωτών:

$$(A.0.13a) \quad \ddot{\theta} + \left[ 1 - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \ddot{\eta}_j - \ddot{X}_A(\tau) \right] \sin \theta + 2\zeta_p \dot{\theta} = 0,$$

$$(A.0.13b) \quad L_m(\theta) \ddot{\eta}_j + \frac{\eta_m}{\mu^2 \mu_m^2} + 2\zeta_r \frac{\dot{\eta}_m}{\mu \mu_m^2} - (-1)^{m+1} 2\beta \left[ \dot{\theta}^2 \cos \theta - \sin^2 \theta \right] \\ = - \left[ \frac{4\mu_m}{\pi} + (-1)^{m+1} 2\beta \cos^2 \theta \right] \ddot{X}_A(\tau),$$

όπου  $L_m$  είναι ένας απειροδιάστατος γραμμικός τελεστής που εξαρτάται μη γραμμικά από το  $\theta$  ο οποίος δίνεται από:

$$(A.0.14) \quad L_m(\theta) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} [\delta_{mj} + (-1)^{m+j+2} 2\beta \cos^2 \theta].$$

Αντιστρέφοντας την (A.0.13b) και λύνοντας ως προς τους αδρανειακούς συντελεστές  $\ddot{\eta}_m$ , λαμβάνουμε τους συζευγμένους ταλαντωτές για το αρχικό σύστημα (4.1.4):

$$(A.0.15a) \quad I_N(\theta)\ddot{\theta} = - \left[ 1 + 2\beta N(1 - \dot{\theta} \cos \theta) + \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} \left( \frac{\eta_j}{\mu^2 \mu_j^2} + 2\zeta_r \frac{\dot{\eta}_j}{\mu \mu_j^2} \right) \right] \sin \theta \\ + \left[ 1 - 2I_N(\theta) + \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^N (-1)^j \mu_j \right] \ddot{X}_A(\tau) \sin \theta - 2\zeta_p I_N(\theta) \dot{\theta},$$

$$(A.0.15b) \quad I_N(\theta)\ddot{\eta}_m = - I_{N-1}(\theta) \left[ \frac{\eta_m}{\mu^2 \mu_m^2} + 2\zeta_r \frac{\dot{\eta}_m}{\mu \mu_m^2} \right] \\ + 2\beta \cos^2 \theta \sum_{j=1, j \neq m}^N (-1)^{m+j+2} \left[ \frac{\eta_j}{\mu^2 \mu_j^2} + 2\zeta_r \frac{\dot{\eta}_j}{\mu \mu_j^2} \right] \\ + (-1)^{m+1} 2\beta \left[ \dot{\theta}^2 \cos \theta - \sin^2 \theta \right] \\ - \frac{4}{\pi} \left[ \mu_m I_N(\theta) + (-1)^m 2\beta \cos^2 \theta \sum_{j=1}^N (-1)^j \mu_j \right] \ddot{X}_A(\tau), \\ m = 1, 2, 3, \dots, N \rightarrow \infty,$$

όπου

$$I_N(\theta) \equiv 1 + 2\beta N \cos^2 \theta \neq 0.$$

## Παράρτημα Β

### Προσεγγίσεις της αργής πολλαπλότητας

Το όριο, καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ , της δύσκαμπτης εξίσωσης (4.1.13b) δίνει μια αλγεβρική εξίσωση η οποία μπορεί εύκολα να επιλυθεί για τις καταστάσεις  $\{Z_{2m-1}, Z_{2m}\}_{m=1}^N$ , των τρόπων ταλάντωσης της ράβδου συναρτήσει της ταλάντωσης του εκκρεμούς. Συγκεκριμένα, για τον  $m$ -οστό τρόπο ταλάντωσης της ράβδου λαμβάνουμε:

(B.0.1)

$$\{Z_{2m-1}, Z_{2m}\} = \{H_{2m-1}^0(\Psi; N), H_{2m}^0(\Psi; N)\} = (-1)^{m+1} \left[ \sum_{k=0}^2 P_m^{0k}(\Psi; N) \cos^k(\Psi_1), 0 \right],$$

όπου

$$(B.0.2) \quad P_m^{00}(\Psi; N) = -2\beta \frac{4\mu_m}{\pi} \alpha \Psi_3, \quad P_m^{01}(\Psi; N) = 2\beta \Psi_2^2, \quad P_m^{02}(\Psi; N) = 2\beta(1 - \alpha \Psi_3).$$

Η  $m$ -οστή συνιστώσα του  $O(\varepsilon)$  προσεγγιστικού όρου  $\mathbf{H}^2$  δίνεται από:

(B.0.3)

$$\{H_{2m-1}^1(\Psi; N), H_{2m}^1(\Psi; N)\} = (-1)^{m+1} \left[ \sum_{k=0}^2 P_m^{1k}(\Psi; N) \cos^k(\Psi_1), \sum_{k=0}^2 V_m^{1k}(\Psi; N) \cos^k(\Psi_1) \right].$$

Οι άνωθεν συντελεστές δίνονται από τις σχέσεις:

$$P_m^{10}(\Psi; N) = \zeta_r \left[ -(-1)^{m+1} \frac{8\mu_m}{\pi} \Omega \alpha \Psi_4 + 4\beta \sin(\Psi_1) \Psi_2^3 \right],$$

$$P_m^{11}(\Psi; N) = 16\beta \zeta_r \Psi_2 (\zeta_p \Psi_2 + \sin(\Psi_1)),$$

$$P_m^{12}(\Psi; N) = -4\beta \zeta_r \Omega \alpha \Psi_4,$$

$$V_m^{10}(\Psi; N) = (-1)^{m+1} \frac{4\mu_m}{\pi} \Omega \alpha \Psi_4 - 2\beta \sin(\Psi_1) \Psi_2^3,$$

$$V_m^{11}(\Psi; N) = -8\beta \zeta_r \Psi_2 (\zeta_p \Psi_2 + \sin(\Psi_1)),$$

$$V_m^{12}(\Psi; N) = 2\beta \zeta_r \Omega \alpha \Psi_4.$$



Η  $m$ -οστή συνιστώσα του  $O(\varepsilon^2)$  προσεγγιστικού όρου  $\mathbf{H}^2$  δίνεται από:  
(B.0.4)

$$\{H_{2m-1}^2(\Psi; N), H_{2m}^2(\Psi; N)\} = (-1)^{m+1} \left[ \sum_{k=0}^5 P_m^{2k}(\Psi; N) \cos^k(\Psi_1), \sum_{k=0}^5 V_m^{2k}(\Psi; N) \cos^k(\Psi_1) \right],$$

όπου οι συντελεστές δίνονται από τις κάτωθι σχέσεις:

$$\begin{aligned} P_m^{20}(\Psi; N) &= \left[ (-1)^m \frac{4\mu_m^3}{\pi} \Omega^2 (4\zeta_r^2 \mu_m^2 - 1) - 6\beta \mu_m^2 (4\zeta_r^2 \mu_m^2 - 1) \Psi_2^2 \right] \alpha \Psi_3 \\ &\quad - 20\beta \zeta_p \mu_m^2 \sin(\Psi_1) (4\zeta_r^2 \mu_m^2 - 1) \Psi_2^3 - 14\beta \mu_m^2 (4\zeta_r^2 \mu_m^2 - 1) \Psi_2^2, \\ P_m^{21}(\Psi; N) &= -2\beta (4\zeta_r^2 - \mu_m^2) (4 + 8\zeta_p \sin(\Psi_1) \Psi_2) \alpha \Psi_3 \\ &\quad - 2\beta (4\zeta_r^2 - \mu_m^2) (4 + 2\Psi_2 \sin(\Psi_1) (8\zeta_p - \Omega \alpha \Psi_4) + 8\zeta_p^2 \Psi_2^2 (\zeta_p^2 - \Psi_2^2)), \\ P_m^{22}(\Psi; N) &= -2 \left[ 2\beta \Omega^2 (4\zeta_r^2 - \mu_m^2) + \frac{4\beta}{\pi} \sigma_2(N) + 6\beta (-2\beta \sigma_1(N) - 4\zeta_r^2 + \mu_m^2) \Psi_2^2 \right] \alpha \Psi_3 \\ &\quad - 2\beta (-14\beta \sigma_1(N) - 44\zeta_r^2 + 11\mu_m^2) \Psi_2^2 + 40\beta^2 \zeta_p \sin(\Psi_1) \sigma_1(N) \Psi_2^3, \\ P_m^{23}(\Psi; N) &= -[-32\beta \zeta_r^2 + 8\beta \mu_m^2 - 16\beta^2 \sigma_1(N) (1 + 2\zeta_p \Psi_2 \sin(\Psi_1))] \alpha \Psi_3 \\ &\quad - 8\beta (-4\zeta_r^2 + \mu_m^2 - 2\beta \sigma_1(N)) - 8\beta^2 \sigma_1(N) \Psi_2 \sin(\Psi_1) (\Omega \alpha \Psi_4 - 8\zeta_p) \\ &\quad - 4\beta^2 \sigma_1(N) \Psi_2^2 (\Psi_2^2 - 16\zeta_p^2), \\ P_m^{24}(\Psi; N) &= -4\beta^2 \sigma_1(N) [(3\Psi_2^2 - \Omega^2) \alpha \Psi_3 + 11\Psi_2^2], \\ P_m^{25}(\Psi; N) &= -16\beta^2 \sigma_1(N) (1 + \alpha \Psi_3), \\ V_m^{20}(\Psi; N) &= - \left[ -12\beta \zeta_r^2 \Psi_2^2 - (-1)^m \frac{8\mu_m}{\pi} \zeta_r \Omega^2 \right] \alpha \Psi_3 \\ &\quad + 4\beta \zeta_r \Psi_2^2 (7 + 10\zeta_p \Psi_2 \sin(\Psi_1)), \\ V_m^{21}(\Psi; N) &= 16\beta \zeta_r (1 + 2\zeta_p \Psi_2 \sin(\Psi_1)) \alpha \Psi_3 \\ &\quad + 2\beta \zeta_r (8 - (4\Omega \alpha \Psi_4 - 32\zeta_p) \Psi_2 \sin(\Psi_1) + 32\zeta_p^2 \Psi_2^2 - 2\Psi_2^4), \\ V_m^{22}(\Psi; N) &= -4\beta \zeta_r (3\Psi_2^2 - \Omega^2) \alpha \Psi_3 - 44\beta \zeta_r \Psi_2^2, \\ V_m^{23}(\Psi; N) &= -16\beta \zeta_r (1 + \alpha \Psi_3). \end{aligned}$$

Σημειώνουμε εδώ ότι ο προσεγγιστικός όρος  $\mathbf{H}^2$  εξαρτάται άμεσα από την τάξη αποκοπής  $N$  μέσω των συγκλινουσών σειρών των λόγων συχνοτήτων  $\mu_m$ :

$$(B.0.5) \quad \sigma_1(N) \equiv \sum_{m=1}^N \mu_m^2 = \sum_{m=1}^N \frac{1}{(2m-1)^2}, \quad \sigma_2(N) \equiv \sum_{m=1}^N (-1)^m \mu_m^3 = \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^m}{(2m-1)^3}.$$

# Παράρτημα C

## Υπενθυμίσεις - Θεωρήματα

**Ορισμός 1.** (Διαφορική αλγεβρική εξίσωση)

Οι διαφορικές αλγεβρικές εξισώσεις (ΔΑΕ) αποτελούν γενικευμένα συστήματα διαφορικών εξισώσεων για διανυσματικές συναρτήσεις “ $x$ ” με μία ανεξάρτητη μεταβλητή “ $t$ ”,

$$F(\dot{x}(t), x(t), t) = 0$$

όπου  $x : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^n$  είναι διάνυσμα των ανεξάρτητων μεταβλητών  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  και το σύστημα έχει ίσες το πλήθος εξισώσεις,  $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathcal{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{R}^n$ . Διαφέρουν από τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) ως προς το ότι μια ΔΑΕ δεν είναι πλήρως επιλύσιμη ως προς όλες τις συνιστώσες της συνάρτησης “ $x$ ”.

**Θεώρημα 1.** (Ευσταθούς Πολλαπλότητας)

Έστω

$$f : U \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$$

μια ομαλή απεικόνιση με υπερβολικό στάσιμο σημείο στο  $p$ . Ορίζουμε ως  $W^s(p)$  το ευσταθές σύνολο και ως  $W^u(p)$  το ασταθές σύνολο του  $p$ . Τότε,

- το  $W^s(p)$  είναι μια ομαλή πολλαπλότητα και ο εφαπτόμενος χώρος της έχει ίδια διάσταση με τον ευσταθή χώρο της γραμμικοποίησης της  $f$  στο  $p$ .
- το  $W^u(p)$  είναι μια ομαλή πολλαπλότητα και ο εφαπτόμενος χώρος της έχει ίδια διάσταση με τον ασταθή χώρο της γραμμικοποίησης της  $f$  στο  $p$ .

Συνεπώς, το  $W^s(p)$  είναι μια ευσταθής πολλαπλότητα και το  $W^u(p)$  μια ασταθής πολλαπλότητα.

**Θεώρημα 2.** (Πεπλεγμένης Συνάρτησης)

Έστω  $f : \mathcal{R}^{n+m} \rightarrow \mathcal{R}^m$  συνεχής και διαφορίσιμη συνάρτηση και έστω ότι ο  $\mathcal{R}^m$  έχει συντεταγμένες  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Θεωρούμε σημείο στον  $\mathcal{R}^m$  με συντεταγμένες  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) =$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  τέτοιο ώστε  $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{c}$ , όπου  $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^m$ . Εάν ο Ιακωβιανός πίνακας  $[(df_i/dy_j)(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$  είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο  $U$  που περιέχει το  $\mathbf{a}$ , ένα ανοικτό σύνολο  $V$  που περιέχει το  $\mathbf{b}$  και μοναδική συνεχή και διαφορίσιμη συνάρτηση  $g : U \rightarrow V$  τέτοια ώστε:

$$\{(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) | \mathbf{x} \in U\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V | f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}\}$$

# Βιβλιογραφία

- [1] M. Valorani, H. N. Najm, D. A. Goussis, *CSP analysis of a transient flame-vortex interaction: time scales and manifolds*, Comb. and Flame 134 (2003) 35-53.
- [2] M. Hadjinicolaou, D. A. Goussis, *Asymptotic solution of stiff PDEs with the CSP method: the reaction diffusion equation*, J. Sci. Comput., Vol. 20, No. 3, pp. 781-810.
- [3] G. Haller, T. Sapsis, *Localized Instability and Attraction along Invariant Manifolds*, 2008.
- [4] M. Valorani, D. A. Goussis, F. Creta, H. N. Najm, *High order corrections in the approximation of low-dimensional manifolds and the construction of simplified problems with the CSP method*, J. Comp. Phys. 209 (2005) 754-786.
- [5] I. T. Georgiou, I. B. Schwartz, *Dynamics of large scale coupled structural/mechanical systems: a singular perturbation/proper orthogonal decomposition approach*, J. Appl. Math., Vol. 59, No. 4, pp. 1178-1207.
- [6] D. A. Goussis, M. Valorani, *An efficient iterative algorithm for the approximation of the fast and slow dynamics of the stiff systems*, J. Comp. Phys. 214 (2006) 316-346.
- [7] I. B. Schwartz, I. T. Georgiou, *Instant chaos and hysteresis in coupled linear-nonlinear oscillators*, Phys. Letters A 242 (1998) 307-312.
- [8] I. T. Georgiou, M. J. Corless, A. K. Bajaj, *Dynamics of nonlinear structures with multiple equilibria: A singular perturbation-invariant manifold approach*, Z. angew. Math. Phys. 50 (1999) 892-924.
- [9] J. D. Logan, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, 2005, Παν. Εκδ. Κρητης.
- [10] N. Fenichel, *Geometric Singular Perturbation Theory for Ordinary Differential Equations*, J. Diff. Equations 31, p.53-98, 1979
- [11] N. Fenichel, *Persistence and Smoothnes of Invariant Manifolds for Flows*, Indiana University Mathematics Journal, Vol.21, No.3 (1971)

- [12] T.J.Kaper, *An Introduction to Geometric Methods and Dynamical Systems Theory for Singular Perturbation Problems*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol.51, 1999
- [13] S.J. Fraser, *The steady state and equilibrium approximations: a geometrical picture*, J. Chem. Phys. 88 (1988) 4732-4738.
- [14] S.H. Lam and D.A. Goussis, *Understanding Complex Chemical Kinetics with Computational Singular Perturbation*, Proc. Comb. Institute, 22:931-941, 1988
- [15] S.H. Lam and D.A. Goussis, *The CSP Method for Simplifying Kinetics*, Int. J. Chem. Kinet., 26:461-486, 1994
- [16] D.A. Goussis and S.H. Lam, *A Study of Homogeneous Methanol Oxidation Kinetics Using CSP*, Proc. Comb. Institute, 24: 113-120, 1992