



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΤΟΜΕΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

**Σχεδιασμός και Κατασκευή Μη Παραμετρικών Διαγραμμάτων Ελέγχου για την Ανίχνευση  
Μετατοπίσεων στην Παράμετρο Θέσης**

**Βασίλειος Αλεβιζάκος**

**Ιανουάριος 2023**

**ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ**

- 1 Χρήστος Κουβίνος, (Καθηγητής Ε.Μ.Π.)**
- 2 Φιλία Βόντα, (Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.)**
- 3 Χρυσή Καρώνη - Ρίτσαρντσον, (Ομ. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.)**





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Σχεδιασμός και Κατασκευή Μη Παραμετρικών Διαγραμμάτων Ελέγχου για την Ανίχνευση  
Μετατοπίσεων στην Παράμετρο Θέσης

Βασίλειος Αλεβιζάκος

Ιανουάριος 2023

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

- 1 Χρήστος Κουκουβίνος, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων Καθηγητής)
- 2 Φιλία Βόντα, Καθηγήτρια Ε.Μ.Π. (Μέλος Τριμελούς Επιτροπής)
- 3 Χρησίδης Καρώνη – Ρίτσαρντσον (Μέλος Τριμελούς Επιτροπής)
- 4 Μάρκος Κούτρας, Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς
- 5 Χαράλαμπος Ευαγγελάρας, Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς
- 6 Άγγελος Τσακανίκας, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- 7 Ιωάννης Τριανταφύλλου, Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς



*Στη μνήμη του πατέρα μου,  
Θεοδόσιου Αλεβιζάκου*



## Περίληψη

Η παρούσα διδακτορική διατριβή πραγματεύεται με τον σχεδιασμό και την κατασκευή μη παραμετρικών (ή ελεύθερης κατανομής) διαγραμμάτων ελέγχου για την ανίχνευση μετατοπίσεων στην παράμετρο θέσης μίας άγνωστης κατανομής. Το κύριο πλεονέκτημα των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου είναι ότι τα χαρακτηριστικά της εντός ελέγχου κατανομής του μήκους ροής παραμένουν ίδια για κάθε συνεχή (και σε ορισμένες περιπτώσεις συμμετρική) κατανομή. Στο πρώτο Κεφάλαιο, δίνουμε ορισμένες βασικές έννοιες αναφορικά με τα διαγράμματα ελέγχου, ενώ στο δεύτερο Κεφάλαιο, παρουσιάζουμε τη δομή και τις ιδιότητες ορισμένων γνωστών παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου σχεδιασμένα για την κανονική κατανομή και επίσης προτείνουμε δύο νέα σχήματα, ένα με τρεις εκθετικά σταθμισμένους μέσους και ένα με δύο ομοιογενώς σταθμισμένους κινούμενους μέσους. Στα επόμενα δύο Κεφάλαια, μελετάμε μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής και προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης και υπολογίζουμε τις αποδόσεις τους χρησιμοποιώντας τα χαρακτηριστικά του μήκους ροής με τη μέθοδο των προσομοιώσεων Monte Carlo. Επιπλέον, προτείνουμε νέα διαγράμματα ελέγχου τα οποία είναι πιο αποδοτικά από τα υπάρχοντα, ιδιαίτερα για μικρές μετατοπίσεις στην παράμετρο θέσης. Στο τελευταίο Κεφάλαιο, παρέχουμε τα συμπεράσματα και ορισμένα θέματα για μελλοντική έρευνα.

Λέξεις-Κλειδιά: διάγραμμα ελέγχου, εκθετικά σταθμισμένος κινούμενος μέσος, μη παραμετρικά, μήκος ροής, ομοιογενώς σταθμισμένος κινούμενος μέσος





# Abstract

This PhD dissertation deals with the design and construction of nonparametric (or distribution-free) control charts for monitoring the location parameter of an unknown distribution. The main advantage of nonparametric control charts is that their in-control run-length characteristics remain the same for every continuous (in some cases and symmetric) distribution. In the first Chapter, we give some important notions about the control charts while in the second Chapter, we present the structure and properties of some existing parametric control charts designed for the normal distribution and we also propose two new schemes, the triple exponentially weighted moving average and the double homogeneously weighted moving average. In the next two Chapters, we study nonparametric control charts based on the sign and the signed-rank statistics and we compute their performances in terms of the run-length characteristics by performing Monte Carlo simulations. We also propose some new nonparametric control charts which are more effective than the existing ones, especially for detecting small shifts in the location parameter. In the last Chapter, we give some concluding remarks and we also present some topics for future research.

Keywords: control chart, exponentially weighted moving average, nonparametric, run-length, homogeneously weighted moving average



## Ευχαριστίες

Τις θερμότερες ευχαριστίες και ευγνωμοσύνη μου οφείλω να εκφράσω στον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Χρήστο Κουκουβίνο για την αδιάκοπη και καθοριστική βοήθειά του, ο οποίος με στήριξε επιστημονικά και ακαδημαϊκά καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Επιπλέον, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστώ με τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Augusta των ΗΠΑ κ. Kashinath Chatterjee. Ήταν ιδιαίτερα μεγάλη τιμή για εμένα η εν λόγω συνεργασία.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια κ. Φιλία Βόντα και την Ομότιμη Καθηγήτρια κ. Χρυσής Καρώνη-Ρίτσαρντσον, μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, των οποίων η βοήθεια ήταν καθοριστική, όπως, επίσης, και τα υπόλοιπα μέλη της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής για το χρόνο που αφιέρωσαν για την ανάγνωση και τις χρήσιμες υποδείξεις τους σχετικά με την παρούσα διδακτορική διατριβή. Ακόμη, ευχαριστώ την υποψήφια διδάκτορα Ε.Μ.Π. κ. Αγγελική Λάππα για την άριστη συνεργασία που είχαμε όλο αυτό το διάστημα.

Ευχαριστώ τη μητέρα μου, Ορσία Αλεβιζάκου, και την αδερφή μου, Ευγενία Αλεβιζάκου, για την αμέριστη συμπαράστασή τους όλα αυτά τα χρόνια. Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω από τα βάθη της καρδιάς μου τη σύζυγό μου, Μαριτίνα Λεοντσίνη, για την ηθική και ψυχολογική στήριξη που μου προσέφερε σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διδακτορικής διατριβής, καθώς και για την κατανόηση και υπομονή της.



# Ερευνητικό Έργο

Κατά τη διάρκεια της παρούσας διδακτορικής διατριβής προέκυψαν οι παρακάτω δημοσιευμένες ή προς δημοσίευση επιστημονικές εργασίες:

- A nonparametric double generally weighted moving average signed-rank control chart for monitoring process location (with Koukouvinos, C., Chatterjee, K.). *Quality and Reliability Engineering International*, 2020, 36(7), 2441-2458.
- The triple exponentially weighted moving average control chart (with Chatterjee, K., Koukouvinos, C.). *Quality Technology & Quantitative Management*, 2021, 18(3), 326-354.
- A nonparametric triple exponentially weighted moving average sign control chart (with Chatterjee, K., Koukouvinos, C.). *Quality and Reliability Engineering International*, 2021, 37(4), 1504-1523.
- The extended homogeneously weighted moving average control chart (with Chatterjee, K., Koukouvinos, C.). *Quality and Reliability Engineering International*, 2021, 37(5), 2134-2155.
- Nonparametric triple exponentially weighted moving average signed-rank control chart for monitoring shifts in the process location (with Chatterjee, K., Koukouvinos, C.). *Quality and Reliability Engineering International*, 2021, 37(6), 2622-2645.
- An extended nonparametric homogeneously weighted moving average sign control chart (with Chatterjee, K., Koukouvinos, C.). *Quality and Reliability Engineering International*, 2021, 37(8), 3395-3416.
- On the performance and comparison of various memory-type control charts (with Chatterjee, K., Koukouvinos, C.), 2022, submitted.
- A nonparametric double homogeneously weighted moving average signed-rank control chart for monitoring location parameter (with Chatterjee, K., Koukouvinos, C.), 2022, submitted.



# Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	xv
Κατάλογος Σχημάτων	xxi
<b>1</b> Περί διαγραμμάτων ελέγχου	<b>1</b>
1.1 Εισαγωγή . . . . .	1
1.2 Σχεδιασμός και κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου . . . . .	2
1.3 Μέτρα απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου . . . . .	4
1.4 Είδη διαγραμμάτων ελέγχου . . . . .	6
<b>2</b> Παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου	<b>9</b>
2.1 Εισαγωγή . . . . .	9
2.2 Διάγραμμα ελέγχου Shewhart- $\bar{X}$ . . . . .	11
2.3 Διάγραμμα ελέγχου CUSUM- $\bar{X}$ . . . . .	14
2.4 Διάγραμμα ελέγχου EWMA- $\bar{X}$ . . . . .	16
2.5 Διάγραμμα ελέγχου DEWMA- $\bar{X}$ . . . . .	18
2.6 Διάγραμμα ελέγχου GWMA- $\bar{X}$ . . . . .	20
2.7 Διάγραμμα ελέγχου DGWMA- $\bar{X}$ . . . . .	22
2.8 Διάγραμμα ελέγχου HWMA- $\bar{X}$ . . . . .	24
2.9 Διάγραμμα ελέγχου TEWMA- $\bar{X}$ . . . . .	25
2.10 Διάγραμμα ελέγχου DHWMA- $\bar{X}$ . . . . .	29
2.11 Κριτήρια για την επιλογή ενός διαγράμματος ελέγχου . . . . .	35
2.12 Ανακεφαλαίωση . . . . .	40
<b>3</b> Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής στατιστικής συνάρτησης	<b>42</b>
3.1 Εισαγωγή . . . . .	42
3.2 Η προσημική στατιστική συνάρτηση . . . . .	45
3.3 Εύρεση της κατανομής του μήκους ροής . . . . .	46
3.4 Διάγραμμα Shewhart-SN . . . . .	47
3.5 Διάγραμμα CUSUM-SN . . . . .	50
3.6 Διάγραμμα EWMA-SN . . . . .	52

3.7	Διάγραμμα DEWMA-SN . . . . .	54
3.8	Διάγραμμα GWMA-SN . . . . .	56
3.9	Διάγραμμα DGWMA-SN . . . . .	60
3.10	Διάγραμμα HWMA-SN . . . . .	63
3.11	Διάγραμμα TEWMA-SN . . . . .	66
3.11.1	Δομή διαγράμματος TEWMA-SN . . . . .	66
3.11.2	Εντός ελέγχου κατανομή μήκους ροής του διαγράμματος TEWMA-SN . . . . .	67
3.11.3	Απόδοση διαγράμματος TEWMA-SN . . . . .	68
3.11.4	Σύγκριση διαγράμματος TEWMA-SN με άλλα διαγράμματα ελέγχου . .	70
3.11.5	Συμπεράσματα . . . . .	74
3.12	Διάγραμμα DHWMA-SN . . . . .	74
3.12.1	Δομή διαγράμματος DHWMA-SN . . . . .	74
3.12.2	Εντός ελέγχου κατανομή μήκους ροής του διαγράμματος DHWMA-SN . . . . .	76
3.12.3	Απόδοση διαγράμματος DHWMA-SN . . . . .	76
3.12.4	Σύγκριση διαγράμματος DHWMA-SN με άλλα διαγράμματα ελέγχου . .	78
3.12.5	Συμπεράσματα . . . . .	81
3.13	Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου . . . . .	82
3.14	Εφαρμογές . . . . .	91
3.14.1	Εφαρμογή 1 . . . . .	91
3.14.2	Εφαρμογή 2 . . . . .	94
3.15	Ανακεφαλαίωση . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής- βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης</b>	<b>99</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	99
4.2	Η προσημική-βαθμολογική στατιστική συνάρτηση . . . . .	101
4.3	Εύρεση της κατανομής του μήκους ροής . . . . .	102
4.4	Διάγραμμα Shewhart-SR . . . . .	103
4.5	Διάγραμμα CUSUM-SR . . . . .	104
4.6	Διάγραμμα EWMA-SR . . . . .	107
4.7	Διάγραμμα DEWMA-SR . . . . .	110



4.8	Διάγραμμα GWMA-SR . . . . .	113
4.9	Διάγραμμα DGWMA-SR . . . . .	119
4.9.1	Δομή διαγράμματος DGWMA-SR . . . . .	119
4.9.2	Κατανομή μήκους ροής του διαγράμματος DGWMA-SR . . . . .	121
4.9.3	Απόδοση διαγράμματος DGWMA-SR . . . . .	122
4.9.4	Σύγκριση διαγράμματος DGWMA-SR με άλλα διαγράμματα ελέγχου . .	125
4.9.5	Συμπεράσματα . . . . .	129
4.10	Διάγραμμα HWMA-SR . . . . .	134
4.11	Διάγραμμα TEWMA-SR . . . . .	137
4.11.1	Δομή διαγράμματος TEWMA-SR . . . . .	137
4.11.2	Εντός ελέγχου κατανομή μήκους ροής του διαγράμματος TEWMA-SR .	138
4.11.3	Απόδοση διαγράμματος TEWMA-SR . . . . .	141
4.11.4	Σύγκριση διαγράμματος TEWMA-SR με άλλα διαγράμματα ελέγχου . .	143
4.11.5	Συμπεράσματα . . . . .	147
4.12	Διάγραμμα DHWMA-SR . . . . .	150
4.12.1	Δομή διαγράμματος DHWMA-SR . . . . .	150
4.12.2	Εντός ελέγχου κατανομή μήκους ροής του διαγράμματος DHWMA-SR . . . . .	151
4.12.3	Απόδοση του διαγράμματος DHWMA-SR . . . . .	152
4.12.4	Σύγκριση διαγράμματος DHWMA-SR με άλλα διαγράμματα ελέγχου . .	157
4.12.5	Συμπεράσματα . . . . .	160
4.13	Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου . . . . .	161
4.14	Εφαρμογές . . . . .	171
4.14.1	Εφαρμογή 1 . . . . .	171
4.14.2	Εφαρμογή 2 . . . . .	171
4.15	Ανακεφαλαίωση . . . . .	175
<b>5</b>	<b>Επίλογος</b>	<b>178</b>
5.1	Συμπεράσματα . . . . .	178
5.2	Προτάσεις για μελλοντική έρευνα . . . . .	180
	<b>Παράρτημα Α</b>	<b>182</b>

Παράρτημα Β	184
Παράρτημα Γ	214
Βιβλιογραφία	242

## Κατάλογος Πινάκων

3.1	Συσχέτιση μεταξύ μετατοπίσεων $\Delta$ και $\delta$ για διάφορες συνεχείς κατανομές . . .	48
3.2	Τιμές του $ARL_0$ για το διάγραμμα Shewhart-SN για διάφορες τιμές των $n, a$ και $b$	51
3.3	Βέλτιστες τιμές παραμέτρων σχεδίασης του διαγράμματος GWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης . . . . .	59
3.4	Βέλτιστες τιμές παραμέτρων σχεδίασης του διαγράμματος DGWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης . . . . .	62
3.5	Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 5$ υπό τις συνθήκες $ARL_0 \approx 370$ και $SDRL_0 \approx 436$ . . . . .	83
3.6	Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 5$ υπό τις συνθήκες $ARL_0 \approx 370$ και $SDRL_0 \approx 400$ . . . . .	84
3.7	Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 5$ υπό τις συνθήκες $ARL_0 \approx 370$ και $SDRL_0 \leq ARL_0$ . . . . .	86
3.8	Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 10$ υπό τις συνθήκες $ARL_0 \approx 370$ και $SDRL_0 \approx 436$ . . . . .	87
3.9	Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 10$ υπό τις συνθήκες $ARL_0 \approx 370$ και $SDRL_0 \approx 399$ . . . . .	89
3.10	Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 10$ υπό τις συνθήκες $ARL_0 \approx 370$ και $SDRL_0 \leq ARL_0$ . . . . .	90
3.11	Βέλτιστες τιμές παραμέτρων σχεδίασης μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης και όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης . . . . .	92
4.1	Τιμές του $ARL_0$ για το διάγραμμα Shewhart-SR για διάφορες τιμές των $n$ και $C$	104
4.2	Βέλτιστες τιμές παραμέτρων σχεδίασης του διαγράμματος GWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή . . . . .	117

4.3	Βέλτιστες τιμές παραμέτρων σχεδίασης του διαγράμματος DGWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή . . . . .	125
4.4	Τιμές $ARL_1$ των διαγραμμάτων DGWMA-SR, DEWMA-SR, GWMA-SR και EWMA-SR για τις βέλτιστες παραμέτρους σχεδίασης όταν $n = 5$ . . . . .	131
4.5	Τιμές $ARL_1$ των διαγραμμάτων DGWMA-SR, DEWMA-SR, GWMA-SR και EWMA-SR για τις βέλτιστες παραμέτρους σχεδίασης όταν $n = 10$ . . . . .	132
4.6	Τιμές $ARL_1$ των διαγραμμάτων DGWMA-SR, DGWMA-SN και DGWMA- $\bar{X}$ με παραμέτρους σχεδίασης ( $q = 0.9, a = 0.8$ ) και όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης για $n = 10$ . . . . .	133
4.7	Τιμές $ARL$ των διαγραμμάτων TEWMA-SR, TEWMA-SN και TEWMA- $\bar{X}$ με $\lambda = 0.05$ και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 10$ . . . . .	148
4.8	Τιμές $ARL$ των διαγραμμάτων DHWMA-SR, DHWMA-SN και DHWMA- $\bar{X}$ με $\lambda = 0.15$ και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 10$ . . . . .	160
4.9	Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 5$ υπό τις συνθήκες $ARL_0 \approx 370$ και $SDRL_0 \approx 436$ . . . . .	162
4.10	Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 5$ υπό τις συνθήκες $ARL_0 \approx 370$ και $SDRL_0 \approx 400$ . . . . .	163
4.11	Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 5$ υπό τις συνθήκες $ARL_0 \approx 370$ και $SDRL_0 \leq ARL_0$ . . . . .	165
4.12	Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 10$ υπό τις συνθήκες $ARL_0 \approx 370$ και $SDRL_0 \approx 437$ . . . . .	166
4.13	Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 10$ υπό τις συνθήκες $ARL_0 \approx 370$ και $SDRL_0 \approx 399$ . . . . .	168
4.14	Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 10$ υπό τις συνθήκες $ARL_0 \approx 370$ και $SDRL_0 \leq ARL_0$ . . . . .	169
B1	Τιμές $ARL$ και $SDRL$ (εντός παρενθέσεως) για το διάγραμμα Shewhart-SN . . . . .	184

B2	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα CUSUM-SN . . . . .	185
B3	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα EWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου . . . . .	186
B4	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα EWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης . . . . .	187
B5	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου . . . . .	188
B6	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DEWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης . . . . .	189
B7	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου όταν $n = 5$ . . . . .	190
B8	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου όταν $n = 10$ . . . . .	191
B9	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης όταν $n = 5$ . . . . .	192
B10	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης όταν $n = 10$ . . . . .	193
B11	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου όταν $n = 5$ . . . . .	194
B12	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου όταν $n = 10$ . . . . .	195
B13	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης όταν $n = 5$ . . . . .	196
B14	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης όταν $n = 10$ . . . . .	197
B15	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα HWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου . . . . .	198
B16	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα HWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης και $n = 10$ . . . . .	199
B17	Τιμές της παραμέτρου $L$ για το διάγραμμα TEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα να όρια ελέγχου προκειμένου να επιτευχθεί μία καθορισμένη τιμή $ARL_0$ . . . . .	200

B18	Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα TEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου . . . . .	201
B18	(συνέχεια) . . . . .	202
B19	Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα TEWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης . . . . .	203
B19	(συνέχεια) . . . . .	204
B20	Τιμές της παραμέτρου $L$ για το διάγραμμα DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου προκειμένου να επιτευχθεί μία καθορισμένη τιμή $ARL_0$ . . . . .	205
B21	Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 5$ . . . . .	206
B22	Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 10$ . . . . .	207
B23	Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 15$ . . . . .	208
B24	Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για $n = 20$ . . . . .	209
B25	Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης για $n = 10$ . . . . .	210
B26	Δεδομένα για την εφαρμογή 1 . . . . .	211
B26	(συνέχεια) . . . . .	212
B27	Δεδομένα για την εφαρμογή 2 . . . . .	213
Γ1	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα Shewhart-SR υπό κανονική κατανομή .	214
Γ2	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα CUSUM-SR υπό την κανονική κατανομή	215
Γ3	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα EWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή . . . . .	216
Γ4	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα EWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή . . . . .	217
Γ5	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή . . . . .	218
Γ6	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DEWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή . . . . .	219

Γ7	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή όταν $n = 5$ . . . . .	220
Γ8	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή όταν $n = 10$ . . . . .	221
Γ9	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή όταν $n = 5$ . . . . .	222
Γ10	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή όταν $n = 10$ . . . . .	223
Γ11	Τιμές της παραμέτρου $L$ για το διάγραμμα DGWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης προκειμένου να επιτευχθεί $ARL_0 \approx 370$ . . . . .	224
Γ12	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή όταν $n = 5$ . . . . .	225
Γ13	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή όταν $n = 10$ . . . . .	226
Γ14	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή όταν $n = 5$ . . . . .	227
Γ15	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή όταν $n = 10$ . . . . .	228
Γ16	Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα HWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή . . . . .	229
Γ17	Τιμές της παραμέτρου $L$ για το διάγραμμα TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου προκειμένου να επιτευχθεί μία καθορισμένη τιμή $ARL_0$ . . . . .	230
Γ18	Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή . . . . .	231
Γ18	(συνέχεια) . . . . .	232
Γ19	Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα TEWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή . . . . .	233
Γ19	(συνέχεια) . . . . .	234
Γ20	Τιμές της παραμέτρου $L$ για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου προκειμένου να επιτευχθεί μία καθορισμένη τιμή $ARL_0$ . . . . .	235
Γ21	Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή για $n = 5$ . . . . .	236

Γ22	Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή για $n = 10$ . . . . .	237
Γ23	Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή για $n = 15$ . . . . .	238
Γ24	Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή για $n = 20$ . . . . .	239
Γ25	Δεδομένα για την εφαρμογή 2 . . . . .	240



## Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Τυπικό διάγραμμα ελέγχου . . . . .	3
2.1	Χαρακτηριστικές καμπύλες του Shewhart- $\bar{X}$ διαγράμματος ελέγχου . . . . .	13
3.1	Τιμές των χαρακτηριστικών του εντός ελέγχου μήκους ροής του διαγράμματος TEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς κατανομές όταν $n = 10$ . . . . .	69
3.2	Τιμές των χαρακτηριστικών του εντός ελέγχου μήκους ροής του διαγράμματος DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς κατανομές όταν $n = 10$ . . . . .	77
3.3	Διαγράμματα ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης για την εφαρμογή 1 . . . . .	93
3.4	Διαγράμματα ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης για την εφαρμογή 2 . . . . .	95
4.1	ARL τιμές για το διάγραμμα CUSUM-SR για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές . . . . .	105
4.2	ARL τιμές για το διάγραμμα EWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές . . . . .	109
4.3	ARL τιμές για το διάγραμμα DEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές . . . . .	112
4.4	ARL τιμές για το διάγραμμα GWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές . . . . .	115
4.5	ARL τιμές για το διάγραμμα DGWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές . . . . .	124
4.6	ARL τιμές για το διάγραμμα HWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και $\lambda = 0.05$ για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές . . . . .	136
4.7	Τιμές των χαρακτηριστικών του εντός ελέγχου μήκους ροής του διαγράμματος TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές όταν $n = 5$ . . . . .	139
4.8	Τιμές των χαρακτηριστικών του εντός ελέγχου μήκους ροής του διαγράμματος TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές όταν $n = 10$ . . . . .	140

4.9	ARL τιμές για το διάγραμμα TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συμμετρικές κατανομές όταν $n = 5$ . . . . .	141
4.10	ARL τιμές για το διάγραμμα TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συμμετρικές κατανομές όταν $n = 10$ . . . . .	142
4.11	Τιμές των χαρακτηριστικών του εντός ελέγχου μήκους ροής του διαγράμματος DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές όταν $n = 5$ . . . . .	153
4.12	Τιμές των χαρακτηριστικών του εντός ελέγχου μήκους ροής του διαγράμματος DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές όταν $n = 10$ . . . . .	154
4.13	ARL τιμές για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συμμετρικές κατανομές όταν $n = 5$ . . . . .	155
4.14	ARL τιμές για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συμμετρικές κατανομές όταν $n = 10$ . . . . .	156
4.15	Διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης για την εφαρμογή 1 . . . . .	172
4.16	Διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης για την εφαρμογή 2 . . . . .	174

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

---

## Περί διαγραμμάτων ελέγχου

---

### 1.1 Εισαγωγή

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (Statistical Quality Control) αποτελείται από ένα σύνολο μεθόδων στατιστικής ανάλυσης δεδομένων, οι οποίες εφαρμόζονται σε όλα τα στάδια της παραγωγής ενός προϊόντος. Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (Statistical Process Control) είναι το πιο σημαντικό εργαλείο του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας και αποσκοπεί στον εντοπισμό ειδικών αιτιών που προκαλούν μεταβλητότητα σε μία διεργασία προκειμένου να αντιμετωπίζονται αποτελεσματικά και έγκαιρα τα προβλήματα με κατάλληλες διορθωτικές ενέργειες προτού επηρεαστεί αρνητικά όλη η διεργασία.

Κάθε παραγωγική διεργασία, ανεξάρτητα από το πόσο καλά είναι σχεδιασμένη και πόσο προσεκτικά επιβλέπεται, συνοδεύεται πάντα από μία φυσική μεταβλητότητα, η οποία είναι μικρή σε μέγεθος. Όταν μία διεργασία επηρεάζεται μόνο από τη φυσική μεταβλητότητα, τότε λέγεται ότι βρίσκεται **εντός στατιστικού ελέγχου** ή πιο απλά **εντός ελέγχου** (in-control, IC). Ορισμένες φορές είναι πιθανό να εμφανίζονται περιστασιακά και άλλα είδη μεταβλητότητας σε μία διεργασία που ενδεχομένως να οφείλονται σε κακή ρύθμιση ή/και χειρισμό των μηχανημάτων, καθώς και σε ελαττωματική πρώτη ύλη. Η μεταβλητότητα αυτή καλείται **ειδική μεταβλητότητα** και έχει ως αποτέλεσμα να οδηγεί τη διεργασία σε κατάσταση **εκτός στατιστικού ελέγχου** ή πιο απλά **εκτός ελέγχου** (out-of-control, OOC).

Βασικός σκοπός του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι η έγκαιρη ανίχνευση των ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μία διεργασία προκειμένου να ληφθούν κατάλληλα διορθωτικά μέτρα πριν την παραγωγή μεγάλου αριθμού μη συμμορφούμενων με τις προδιαγραφές προϊόντων. Τα διαγράμματα ελέγχου αποτελούν το πιο σημαντικό εργαλείο του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών και χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση μίας διεργασίας σε πραγματικό χρόνο (on-line process monitoring).

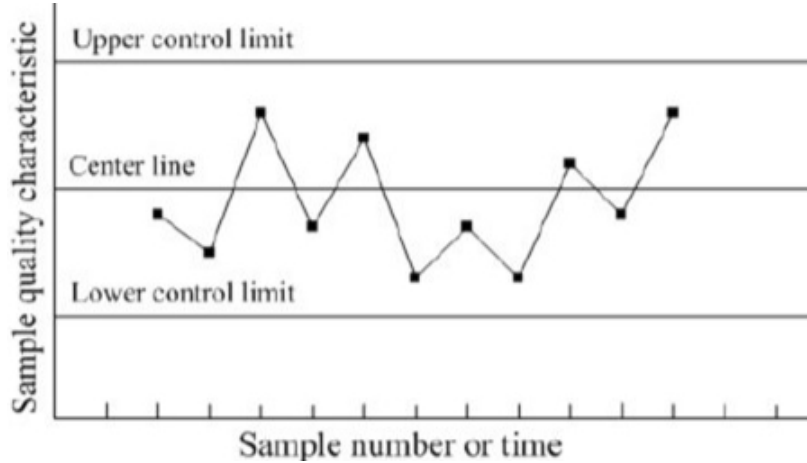
Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε τον τρόπο κατασκευής και σχεδιασμού ενός διαγράμματος ελέγχου, τα μέτρα απόδοσης που χρησιμοποιούνται, καθώς επίσης και τα διάφορα είδη διαγραμμάτων ελέγχου που υπάρχουν.

## 1.2 Σχεδιασμός και κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου

Έστω  $X$  το χαρακτηριστικό ποιότητας που παρακολουθούμε σε μία διεργασία και  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$  τυχαία δείγματα που λαμβάνονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Χρησιμοποιώντας αυτά τα τυχαία δείγματα, υπολογίζουμε την τιμή μίας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης  $W_i = g(\mathbf{X}_i), i = 1, 2, \dots$ , η οποία, όπως θα δούμε παρακάτω, στα διαγράμματα τύπου Shewhart εκτιμά την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει να παρακολουθήσουμε (π.χ. μέση τιμή, διασπορά ή τυπική απόκλιση κλπ). Στο Σχήμα 1.1 παρουσιάζεται η τυπική μορφή ενός διαγράμματος ελέγχου. Εκτός από τις τιμές της στατιστικής συνάρτησης  $W$ , οι οποίες έχουν παρασταθεί με σημεία τα οποία συνδέονται με μια τεθλασμένη γραμμή, υπάρχουν άλλες τρεις γραμμές. Η **κεντρική γραμμή** (centerline, CL) παριστάνει τη μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης  $W$  όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Οι δύο ακραίες γραμμές ονομάζονται **άνω και κάτω όριο ελέγχου** (upper and lower control limits, UCL and LCL), τοποθετούνται εκατέρωθεν της κεντρικής γραμμής και δηλώνουν το φυσικό εύρος της διακύμανσης της στατιστικής συνάρτησης  $W$ . Η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εντός ελέγχου εάν όλα τα σημεία βρίσκονται με τυχαίο τρόπο εντός των ορίων ελέγχου. Από την άλλη, σε περίπτωση που κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου ή τα σημεία εμφανίζονται με μη τυχαίο τρόπο, τότε θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου και πρέπει να την σταματήσουμε προκειμένου να διερευνήσουμε τις αιτίες της ειδικής μεταβλητότητας (assignable causes of unnatural variability).

Οι βασικότερες μορφές προτύπων ή μοτίβων (patterns) μη τυχαίου τρόπου εμφάνισης σημείων είναι τα πρότυπα κύκλου (cycles), τα μικτά πρότυπα (mixtures), τα πρότυπα αλμάτων (shifts in the process level), τα πρότυπα τάσεων (trends) και τα πρότυπα έλλειψης μεταβλητότητας (stratification).

Η κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου βασίζεται σε δύο μοντέλα, το **μοντέλο ορίων σίγμα** (sigma limits models) και το **μοντέλο ορίων πιθανότητας  $a$**  (probability limits model). Το μοντέλο ορίων σίγμα προτάθηκε από τον Shewhart (1931) και ονομάζεται διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart. Σύμφωνα με το συγκεκριμένο μοντέλο, τα όρια ελέγχου τοποθετούνται σε απόσταση  $L$  μονάδων τυπικής απόκλισης από την κεντρική γραμμή, όπως φαίνεται



Σχήμα 1.1: Τυπικό διάγραμμα ελέγχου

παρακάτω

$$\begin{aligned}
 UCL &= \mu_W + L\sigma_W, \\
 CL &= \mu_W, \\
 LCL &= \mu_W - L\sigma_W.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Στην περίπτωση που  $L = 3$ , έχουμε κατασκευή διαγράμματος ορίων τριών σίγμα (three sigma control limits). Σε ένα μοντέλο ορίων ελέγχου  $3\sigma$ , συχνά σχεδιάζονται προειδοποιητικά όρια ελέγχου (warning control limits) σε απόστάσεις  $1\sigma$  και  $2\sigma$  από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος ελέγχου. Τα προειδοποιητικά όρια ελέγχου χρησιμοποιούνται μαζί με ορισμένους κανόνες προκειμένου να αυξηθεί η ευαισθησία του διαγράμματος ελέγχου στην ανίχνευση ειδικών αιτιών μεταβλητότητας. Για περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με τους κανόνες ευαισθητοποίησης σε ένα διάγραμμα ελέγχου, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στον Montgomery (2013) (σελ. 204-205).

Το μοντέλο ορίων πιθανότητας  $a$  χρησιμοποιείται κυρίως όταν η στατιστική συνάρτηση  $W$  ακολουθεί την κανονική κατανομή ή κατά προσέγγιση την κανονική. Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή είναι

$$\begin{aligned}
 UCL &= \mu_W + z_{\alpha/2}\sigma_W, \\
 CL &= \mu_W, \\
 LCL &= \mu_W - z_{\alpha/2}\sigma_W,
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

όπου  $z_{\alpha/2}$  το άνω  $a$ -ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της στατιστικής συνάρτησης  $W$ .

Η μελέτη σχεδιασμού ενός διαγράμματος ελέγχου περιλαμβάνει δύο φάσεις, τη **Φάση I** (Phase I) και τη **Φάση II** (Phase II). Κατά την Φάση I, συλλέγονται δεδομένα από μία διε-

γασία και τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγξουν αναδρομικά εάν η διεργασία βρίσκεται εντός ή εκτός ελέγχου. Όταν η διεργασία βρεθεί εντός ελέγχου, τότε τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται για μελλοντική παρακολούθηση της διεργασίας. Είναι αρκετά σύνηθες κατά την Φάση I, όπου γίνεται χρήση ενός δείγματος αναφοράς, να εκτιμούνται οι παράμετροι της διεργασίας, οι οποίοι χρησιμοποιούνται μετέπειτα για τον καθορισμό των ορίων ελέγχου του διαγράμματος. Κατά την Φάση II, τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγξουμε εάν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου ή έχει μετατοπιστεί σε εκτός ελέγχου κατάσταση. Έτσι, λοιπόν, κάθε χρονική στιγμή που λαμβάνεται ένα δείγμα, ο διαχειριστής ελέγχει για την κατάσταση της διεργασίας αδιαφορώντας για τον τρόπο με τον οποίον προέκυψαν τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος ελέγχου.

### 1.3 Μέτρα απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου

Προτού προχωρήσουμε στην παρουσίαση ορισμένων μέτρων απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου είναι σημαντικό να ορίσουμε τις πιθανότητες του σφάλματος τύπου I και II. Το **σφάλμα τύπου I** ορίζεται ως η πιθανότητα να βρεθεί ένα απεικονιζόμενο σημείο εκτός των ορίων ελέγχου δεδομένου ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου και συμβολίζεται με  $a$ . Το **σφάλμα τύπου II** ορίζεται ως η πιθανότητα να βρεθεί ένα απεικονιζόμενο σημείο εντός των ορίων ελέγχου δεδομένου ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου και συμβολίζεται με  $\beta$ . Μαθηματικά, οι πιθανότητες  $a$  και  $\beta$  για ένα διάγραμμα τύπου Shewhart υπολογίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$a = 1 - F_W(UCL) + F_W(LCL-)$$

και

$$\beta = F_W^*(UCL) - F_W^*(LCL-),$$

όπου  $F_W(\cdot)$  και  $F_W^*(\cdot)$  είναι οι εντός και εκτός ελέγχου συναρτήσεις κατανομής της στατιστικής συνάρτησης  $W$ .

Μία από τις σημαντικότερες έννοιες που σχετίζονται με τα διαγράμματα ελέγχου είναι το **μήκος ροής** (run-length, RL) το οποίο ορίζεται ως ο αριθμός των σημείων που πρέπει να απεικονιστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου προκειμένου να δοθεί σήμα ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου. Το πιο διαδεδομένο μέτρο απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου είναι το **μέσο μήκος ροής** (average run-length, ARL) όπου είναι η μέση τιμή του μήκους ροής. Στην περίπτωση που η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου, το μέσο μήκος ροής συμβολίζεται με  $ARL_0$ , ενώ όταν η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου συμβολίζεται με  $ARL_1$ . Ένα αποδοτικό διάγραμμα

ελέγχου οφείλει να έχει μεγάλη τιμή  $ARL_0$ , ώστε η πιθανότητα ένδειξης ψευδούς συναγερμού (false alarm) να είναι μικρή, και μικρή τιμή  $ARL_1$  προκειμένου να ανιχνεύονται γρήγορα οι μετατοπίσεις στις παραμέτρους της διεργασίας. Για ένα διάγραμμα τύπου Shewhart, οι τιμές  $ARL_0$  και  $ARL_1$  δίνονται από τις σχέσεις

$$ARL_0 = \frac{1}{a}$$

και

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}.$$

Παρόλο που το ARL είναι το πιο δημοφιλές μέτρο απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου, έχει υποστεί κριτική από ορισμένους συγγραφείς, όπως τους Radson και Boyd (2005) και Chakraborti (2007), καθώς η κατανομή του μήκους ροής είναι θετικά ασύμμετρη με αποτέλεσμα το ARL που παρατηρείται στην πράξη να διαφέρει από το θεωρητικό ARL. Επιπλέον, το σχήμα της κατανομής του μήκους ροής μεταβάλλεται ανάλογα με την κατάσταση της διεργασίας. Για παράδειγμα, όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, η κατανομή του μήκους ροής είναι έντονα θετικά ασύμμετρη, ενώ όταν η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου, η κατανομή του μήκους ροής είναι λιγότερο θετικά ασύμμετρη για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις και σχεδόν συμμετρική για μεγάλες μετατοπίσεις. Μία συνήθης πρακτική είναι να συνοδεύεται η τιμή του ARL με άλλα χαρακτηριστικά του μήκους ροής, όπως η τυπική απόκλιση (standard deviation of run-length, SDRL), η διάμεσος (median run-length, MRL) και τα ποσοστιαία σημεία (percentile points) του μήκους ροής προκειμένου να έχουμε μία συνολική εικόνα επί της απόδοσης του διαγράμματος.

Η τιμή του ARL αντιπροσωπεύει την απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου για μία συγκεκριμένη μετατόπιση των παραμέτρων της διεργασίας. Πέραν τούτου και προκειμένου να υπολογίσουμε την απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου σε ένα εύρος μετατοπίσεων ( $\delta_{min} \leq \delta \leq \delta_{max}$ ) υπολογίζουμε ορισμένα συγκεντρωτικά μέτρα απόδοσης, τα οποία βοηθούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων όταν συγκρίνουμε διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου.

Η **μέση επιπρόσθετη τετραγωνική απώλεια** (average extra quadratic loss, AEQL) υπολογίζεται από τη σχέση

$$AEQL = \int_{\delta=\delta_{min}}^{\delta_{max}} \delta^2 \times ARL(\delta) f_{\delta}(\delta) d\delta,$$

όπου  $\delta$  το μέγεθος της μετατόπισης σε μονάδες τυπικής απόκλισης,  $ARL(\delta)$  η τιμή του ARL για τη μετατόπιση  $\delta$  και  $f_{\delta}(\delta)$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μετατόπισης, η οποία

θεωρούμε ότι είναι η ομοίμορφη κατανομή, ως ακολούθως

$$f_{\delta}(\delta) = \frac{1}{\delta_{max} - \delta_{min}}, \delta \in [\delta_{min}, \delta_{max}].$$

Περισσότερες πληροφορίες για το μέτρο απόδοσης AEQL παρέχονται στις εργασίες των Wu et al. (2004), Reynolds και Stroumbos (2004) και Ryu et al. (2010).

Μία παραλλαγή του μέτρου AEQL είναι η αναμενόμενη τιμή του μέσου μήκους ροής (expected average run-length, EARL), όπου υπολογίζεται από τη σχέση

$$EARL = \frac{1}{\delta_{max} - \delta_{min}} \int_{\delta=\delta_{min}}^{\delta_{max}} ARL(\delta) d\delta. \quad (1.3)$$

Όμοια, ορίζεται και η αναμενόμενη τιμή της τυπικής απόκλισης του μήκους ροής (expected standard deviation of run-length, ESDRL) ως ακολούθως

$$ESDRL = \frac{1}{\delta_{max} - \delta_{min}} \int_{\delta=\delta_{min}}^{\delta_{max}} SDRL(\delta) d\delta. \quad (1.4)$$

Πληροφορίες αναφορικά με τα μέτρα απόδοσης EARL και ESDRL παρέχονται στις εργασίες των Mukherjee και Sen (2018), Chew et al. (2020) και Shogwe et al. (2021).

Η απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου δύναται να υπολογιστεί εκτός από το ARL και από τον μέσο χρόνο σήματος (average time to signal, ATS), ο οποίος δηλώνει τον μέσο χρόνο που απαιτείται για να ενεργοποιηθεί ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας. Η τιμή του υπολογίζεται από τον τύπο

$$ATS = ARL \times h,$$

όπου  $h$  ο χρόνος που μεσολαβεί για τη λήψη δύο διαδοχικών δειγμάτων. Στην περίπτωση που η ποσότητα  $h$  δεν είναι σταθερή, δηλαδή ο ρυθμός δειγματοληψίας δεν είναι σταθερός, ο μέσος χρόνος σήματος δίνεται από την σχέση

$$ATS = ARL \times E(h),$$

όπου  $E(h)$  η αναμενόμενη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $h$ .

Στην παρούσα διατριβή υπολογίζουμε για κάθε διάγραμμα ελέγχου τις τιμές ARL, MRL (για νέα διαγράμματα ελέγχου) και SDRL για διάφορες μετατοπίσεις της παραμέτρου θέσης, καθώς επίσης και τις τιμές EARL και ESDRL χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simpson 1/3.

## 1.4 Είδη διαγραμμάτων ελέγχου

Η κατηγοριοποίηση των διαγραμμάτων ελέγχου γίνεται λαμβάνοντας υπ' όψιν ορισμένα χαρακτηριστικά που σχετίζονται με τη φύση των παρατηρήσεων και του δείγματος, αλλά και τη μορφή της στατιστικής συνάρτησης απεικόνισης.



Στην περίπτωση που το ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει να παρακολουθήσουμε περιγράφεται από μία συνεχή τυχαία μεταβλητή, τότε αναφερόμαστε στα **διαγράμματα ελέγχου για μεταβλητές** (control charts for variables), ενώ εάν το ποιοτικό χαρακτηριστικό περιγράφεται από μία διακριτή τυχαία μεταβλητή έχουμε τα **διαγράμματα ελέγχου για ιδιότητες** (control charts for attributes).

Μία άλλη διάκριση γίνεται ανάλογα με το μέγεθος του δείγματος των μετρήσεων. Έτσι, λοιπόν, εάν σε κάθε χρονική στιγμή λαμβάνεται μόνο μία παρατήρηση, τότε αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις** (control charts for individuals), ενώ εάν λαμβάνονται δείγματα μεγέθους  $n > 1$ , τότε αναφερόμαστε στα **διαγράμματα ελέγχου για δείγματα** (control charts for rational subgroups).

Επιπλέον, εάν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των μετρήσεων που λαμβάνονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, τότε αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου για αυτοσυσχετιζόμενες διεργασίες** (control charts for autocorrelated processes), ενώ εάν οι μετρήσεις που λαμβάνονται σε κάποια χρονική στιγμή είναι ανεξάρτητες από τις μετρήσεις προηγούμενων χρονικών στιγμών, τότε αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου για ασυσχέτιστες διεργασίες** (control charts for uncorrelated processes).

Μία άλλη κατηγοριοποίηση των διαγραμμάτων ελέγχου γίνεται ανάλογα με το πλήθος των ποιοτικών χαρακτηριστικών που μελετάμε. Συγκεκριμένα, εάν λαμβάνουμε μετρήσεις μόνο για ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό έχουμε τα **μονομεταβλητά διαγράμματα ελέγχου** (univariate control charts), ενώ εάν λαμβάνουμε μετρήσεις για δύο ή περισσότερα ποιοτικά χαρακτηριστικά έχουμε τα **πολυμεταβλητά διαγράμματα ελέγχου** (multivariate control charts).

Επιπρόσθετα, εάν είναι γνωστή η κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού, τότε αναφερόμαστε σε **παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου** (parametric control charts), ενώ εάν δεν υπάρχει πληροφορία επί της κατανομής ή υπάρχουν πολύ λίγες πληροφορίες, τότε αναφερόμαστε σε **μη παραμετρικά ή ελεύθερα κατανομής διαγράμματα ελέγχου** (nonparametrics or distribution-free control charts).

Η κατηγοριοποίηση των διαγραμμάτων ελέγχου γίνεται ανάλογα με τον χρόνο που λαμβάνονται τα δείγματα. Έτσι, λοιπόν, εάν τα δείγματα λαμβάνονται σε σταθερούς χρόνους, τότε αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου σταθερού χρόνου** (fixed sampling interval control charts), ενώ εάν ο χρόνος μεταβάλλεται, έχουμε τα **διαγράμματα ελέγχου μεταβλητού χρόνου** (variable sampling interval control charts).

Όμοια με την προηγούμενη κατηγοριοποίηση, ταξινομούμε τα διαγράμματα ελέγχου ανάλογα

με το εάν τα δείγματα που λαμβάνουμε σε διαφορετικές χρονικές στιγμές έχουν το ίδιο μέγεθος ή όχι. Στην περίπτωση που το μέγεθος του δείγματος είναι σταθερό έχουμε τα **διαγράμματα ελέγχου σταθερού μεγέθους δείγματος** (fixed sample size control charts), διαφορετικά έχουμε τα **διαγράμματα ελέγχου μεταβλητού μεγέθους δείγματος** (variable sample size control charts).

Τέλος, μία άλλη σημαντική ταξινόμηση των διαγραμμάτων ελέγχου έχει να κάνει με τη μνήμη που αυτά έχουν. Πιο συγκεκριμένα, εάν η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης σε κάποια χρονική στιγμή λαμβάνει υπ' όψιν μόνο τις μετρήσεις που λαμβάνονται τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη** (memoryless control charts). Από την άλλη, εάν η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης λαμβάνει υπ' όψιν και τις μετρήσεις που ελήφθησαν τις προηγούμενες χρονικές στιγμές, τότε έχουμε τα **διαγράμματα ελέγχου με μνήμη** (memory-type control charts).

Στην παρούσα διατριβή θα μελετήσουμε μονομεταβλητά, μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με και χωρίς μνήμη για ασυσχέτιστες διεργασίες όπου ο χρόνος που λαμβάνονται τα δείγματα, καθώς και το μέγεθός τους είναι σταθερά.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

---

## Παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου

---

### 2.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα διαγράμματα ελέγχου αποτελούν το πιο σημαντικό εργαλείο του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών προκειμένου να παρακολουθήσουμε μία διεργασία και να απεικονίσουμε μετατοπίσεις σε ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει.

Ο πρώτος που εισήγαγε τα διάγραμμα ελέγχου ήταν ο Shewhart (1926), ο οποίος πρότεινε το γνωστό  $\bar{X}$ -διάγραμμα για την απεικόνιση της μέσης τιμής μίας μεταβλητής που ακολουθεί την κανονική κατανομή. Το συγκεκριμένο διάγραμμα είναι δημοφιλές ακόμη και σήμερα, λόγω της εύκολης εφαρμογής του. Το εν λόγω διάγραμμα είναι ικανό στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων, όμως δεν έχει καλή απόδοση στις μικρές και μέτριες μετατοπίσεις. Γι' αυτό το λόγο προτάθηκαν τα διαγράμματα ελέγχου συσσωρευμένων αθροισμάτων (Cumulative Sum, CUSUM) και εκθετικά σταθμισμένου κινούμενου μέσου (Exponentially Weighted Moving Average, EWMA) από τους Page (1954) και Roberts (1959), αντίστοιχα. Τα συγκεκριμένα διαγράμματα είναι αρκετά ευαίσθητα στην ανίχνευση μικρών και μέτριων μετατοπίσεων.

Στη συνέχεια, αρκετοί συγγραφείς πρότειναν ορισμένες τροποποιήσεις/βελτιώσεις των διαγραμμάτων ελέγχου CUSUM και EWMA προκειμένου να βελτιώσουν την ικανότητά τους στην ανίχνευση μετατοπίσεων συγκεκριμένου εύρους. Ο Crosier (1986) πρότεινε μία παραλλαγή του διαγράμματος CUSUM, το διάγραμμα Crosier CUSUM (CCUSUM) όπως ονομάστηκε στη συνέχεια, το όποιο έχει μία στατιστική συνάρτηση απεικόνισης σε αντίθεση με το διάγραμμα CUSUM το οποίο έχει δύο. Οι Shamma et al. (1991) και Shamma και Shamma (1992) πρότειναν μία παραλλαγή του διαγράμματος EWMA εισάγοντας και διπλό εκθετικά σταθμισμένο κινούμενο μέσο (Double Exponentially Weighted Moving Average, DEWMA), ενώ οι Sheu και Lin (2003) εισήγαγαν το διάγραμμα ελέγχου γενικευμένου σταθμισμένου κινούμενου μέσου (Generally Weighted Moving Average, GWMA). Στη συνέχεια, οι Sheu και Hsieh (2009), επηρεαζόμενοι από την εργασία των Shamma et al. (1991), πρότειναν ένα διάγραμμα ελέγχου με δύο γενικευμένους

σταθμισμένους κινούμενους μέσους (Double Generally Weighted Moving Average, DGWMA). Μία δεκαετία αργότερα, ο Abbas (2018) εισήγαγε ένα νέο διάγραμμα ελέγχου με ομοιογενώς σταθμισμένο κινούμενο μέσο (Homogeneously Weighted Moving Average, HWMA), όπου σε αντίθεση με το διάγραμμα EWMA, στο οποίο τα βάρη μειώνονται εκθετικά καθώς βαίνουμε σε παλαιότερες παρατηρήσεις, δίνεται ένα συγκεκριμένο βάρος στην πιο πρόσφατη παρατήρηση και το υπόλοιπο ισομοιράζεται στις άλλες παρατηρήσεις.

Πέρα από τα ανωτέρω διαγράμματα ελέγχου, προτάθηκαν και αρκετά άλλα τα οποία είτε προκύπτουν από συνδυασμό διαφορετικών διαγραμμάτων ελέγχου είτε αποτελούν παραλλαγή του κλασσικού διαγράμματος EWMA. Ο Lucas (1982) και οι Lucas και Saccucci (1990) εισήγαγαν τα διαγράμματα Shehwart-CUSUM και Shehwart-EWMA αντίστοιχα, προκειμένου να βελτιώσουν την απόδοση των διαγραμμάτων CUSUM και EWMA στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων της μέσης τιμής. Μία παραλλαγή του διαγράμματος Shehwart-EWMA είναι το διάγραμμα με προσαρμοσμένο εκθετικά σταθμισμένο κινούμενο μέσο (Adaptive Exponentially Weighted Moving Average, AEWMA), το οποίο προτάθηκε από τους Capizzi και Masarotto (2003). Οι Zhao et al. (2005) μελέτησαν ένα διάγραμμα το οποίο συνδυάζει δύο συσσωρευμένα αθροίσματα (dual CUSUM) και έχει καλύτερη απόδοση από το κλασσικό διάγραμμα CUSUM και το διάγραμμα Shewhart-CUSUM. Οι Abbas et al. (2013) και Zaman et al. (2015) εισήγαγαν τα μεικτά διαγράμματα EWMA-CUSUM (MEC) και CUSUM-EWMA (MCE) αντίστοιχα, προκειμένου να βελτιώσουν την ευαισθησία των κλασσικών διαγραμμάτων EWMA και CUSUM στην ανίχνευση μικρών και μέτριων μετατοπίσεων, ενώ οι Ali και Haq (2018) και Abid et al. (2021) πρότειναν τα μεικτά διαγράμματα GWMA-CUSUM και HWMA-CUSUM για την περαιτέρω βελτίωση της ανιχνευτικής ικανότητας των διαγραμμάτων GWMA και HWMA αντίστοιχα σε μικρές μετατοπίσεις. Πρόσφατα, ο Haq (2022) εισήγαγε ένα νέο διάγραμμα που είναι συνδυασμός των διαγραμμάτων CCUSUM και EWMA, το CUESUM, προκειμένου να βελτιώσει την απόδοση των διαγραμμάτων CCUSUM και EWMA στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε τη δομή και τις ιδιότητες ορισμένων διαγραμμάτων ελέγχου για την ανίχνευση μετατοπίσεων στη μέση τιμή ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού ενδιαφέροντος που ακολουθεί την κανονική κατανομή θεωρώντας ότι η τιμή της διασποράς παραμένει σταθερή και εντός ελέγχου, καθώς, επίσης, θα εισάγουμε και δύο νέα διαγράμματα ελέγχου, το διάγραμμα με τρεις εκθετικά σταθμισμένους κινούμενους μέσους (Triple Exponentially Weighted Moving Average, TEWMA) και το διάγραμμα με δύο ομοιογενώς σταθμισμένους κινούμενους μέσους (Double Homogeneously Weighted Moving Average, DHWMA). Στο σημείο αυτό ε-

πισημαίνεται πως επειδή ο σκοπός της παρούσας διδακτορικής διατριβής εστιάζεται στη μελέτη μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, δεν παρέχονται αναλυτικά αποτελέσματα με πίνακες επί της απόδοσης των εν λόγω παραμετρικών διαγράμματος, αλλά παρουσιάζεται μία συνοπτική εικόνα επί της απόδοσης τους, καθώς και σημαντικές ιδιότητές τους. Στο τέλος του κεφαλαίου, γίνεται μία αναφορά στα κριτήρια που πρέπει κανείς να λαμβάνει υπ' όψιν προκειμένου να επιλέξει και να σχεδιάσει ένα διάγραμμα ελέγχου, καθώς επίσης ασκείται και μία κριτική έναντι ορισμένων συγγραφέων που εναντιώνονται στην εφαρμογή αρκετών διαγραμμάτων ελέγχου που περιγράφουμε.

## 2.2 Διάγραμμα ελέγχου Shewhart- $\bar{X}$

Τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart προτάθηκαν από τον Walter A. Shewhart (1926, 1931) και είναι τα πιο δημοφιλή εξαιτίας της εύκολης εφαρμογής τους, αλλά και της ικανότητας τους στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων. Η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάγραμμα Shewhart- $\bar{X}$  είναι η  $W_i = \bar{X}_i$  ήτοι ο δειγματικός μέσος

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}, i \geq 1,$$

ο οποίος ακολουθεί την κατανομή  $N(\mu, \sigma^2/n)$  και είναι αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμή  $\mu$  του ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$ . Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος Shewhart- $\bar{X}$  είναι τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \\ CL &= \mu_0, \\ LCL &= \mu_0 - L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

όπου  $L > 0$  μία παράμετρος σχεδιασμού του διαγράμματος, η οποία αντιπροσωπεύει την απόσταση των ορίων ελέγχου (σε μονάδες τυπικής απόκλισης) από την κεντρική γραμμή. Το διάγραμμα Shewhart- $\bar{X}$  δίνει ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου όταν κάποιο από τα απεικονιζόμενα σημεία βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου ή συμπίπτει με αυτά, δηλαδή εάν  $\bar{X}_i \leq LCL$  ή  $\bar{X}_i \geq UCL$ . Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή εάν  $LCL < \bar{X}_i < UCL$ , τότε η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εντός ελέγχου.

Η επιλογή της παραμέτρου  $L$  εξαρτάται από ορισμένα κριτήρια τα οποία σχετίζονται με την απόδοση του διαγράμματος. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$  είναι γνωστές και ίσες με  $\mu$  και  $\sigma$  αντίστοιχα, τότε το μήκος ροής  $N$  ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο  $p$ , όπου  $p$  η πιθανότητα να βρεθεί ένα

απεικονιζόμενο σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Συνεπώς, για την περίπτωση που η διεργασία είναι εντός ελέγχου, η τιμή του  $ARL_0$  ισούται με

$$ARL_0 = \frac{1}{a},$$

όπου  $a$  το σφάλμα τύπου I, το οποίο δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$a = P\left(\bar{X}_i < \mu_0 - L\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad \text{ή} \quad \bar{X}_i > \mu_0 + L\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \mid X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)\right) = 2(1 - \Phi(L)).$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή του  $ARL_0$  εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την παράμετρο  $L$ . Έτσι, λοιπόν, καθώς αυξάνεται η παράμετρος  $L$ , μειώνεται η πιθανότητα εσφαλμένης ένδειξης ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου.

Για την περίπτωση που η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου, η τιμή του  $ARL_1$  υπολογίζεται από την σχέση

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta},$$

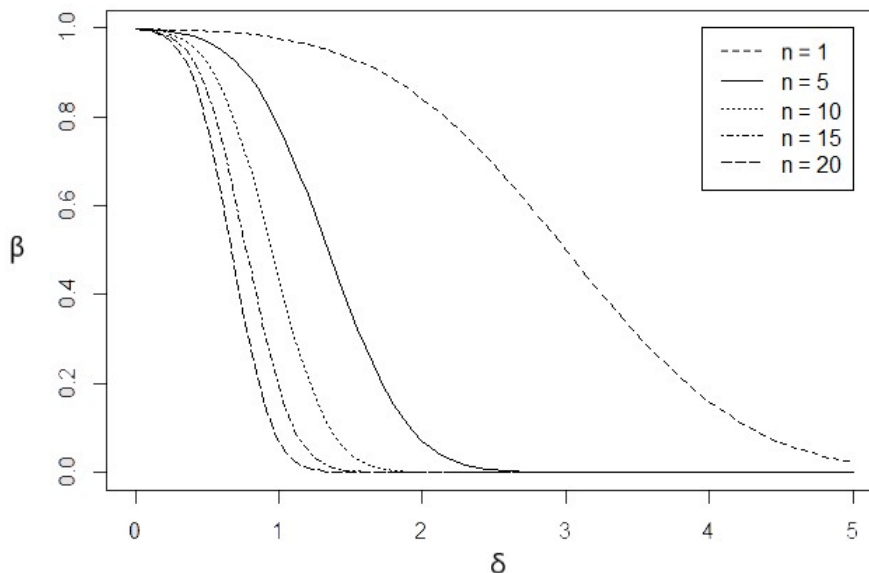
όπου  $\beta$  το σφάλμα τύπου II, το οποίο ισούται με

$$\begin{aligned} \beta &= P\left(\mu_0 - L\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_i \leq \mu_0 + L\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \mid X \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0, \sigma_0^2)\right) \\ &= \Phi(L - \delta\sqrt{n}) + \Phi(L + \delta\sqrt{n}) - 1. \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις είναι εμφανές ότι η τιμή του  $ARL_1$  εξαρτάται από την παράμετρο  $L$ , τη μετατόπιση  $\delta$  και το μέγεθος του δείγματος  $n$ .

Στο Σχήμα 2.1 απεικονίζονται οι χαρακτηριστικές καμπύλες (operating curves) του διαγράμματος Shewhart- $\bar{X}$ , δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις του  $\beta$  συναρτήσει της μετατόπισης  $\delta$  ( $0 \leq \delta \leq 5$ ) για  $n = 1, 5, 10, 15, 20$  θεωρώντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι  $L = 3$  και  $\sigma_0 = 1$ . Παρατηρούμε ότι αυξάνοντας το μέγεθος του δείγματος  $n$ , μειώνεται η πιθανότητα  $\beta$  και ως επί το πλείστον, αυξάνεται η ικανότητα του διαγράμματος να ανιχνεύει μετατοπίσεις της μέσης τιμής.

Ο Walter A. Shewhart (1926, 1931) συνέστησε τη χρήση της τιμής  $L = 3$ . Σε αυτήν την περίπτωση, η πιθανότητα να βρεθεί ένα απεικονιζόμενο σημείο εκτός των ορίων ελέγχου δεδομένου ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου είναι  $a = 0.0027$ , ενώ το  $ARL_0$  ισούται με 370. Με άλλα λόγια, το 99.73% των δειγματικών μέσων που απεικονίζονται αναμένεται να βρίσκονται εντός του εύρους  $\pm 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$  από την εντός ελέγχου μέση τιμή  $\mu_0$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή  $ARL_0=370$  είναι η πιο διαδεδομένη τιμή για την σχεδίαση διαγραμμάτων ελέγχου σε βιομηχανικές και όχι μόνο διεργασίες.



**Σχήμα 2.1:** Χαρακτηριστικές καμπύλες του Shewhart- $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου

Το διάγραμμα Shewhart- $\bar{X}$ , και γενικά τα διαγράμματα τύπου Shewhart, δεν έχουν μνήμη, καθώς η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τον δειγματικό μέσο την τρέχουσα χρονική στιγμή. Έτσι λοιπόν, η λήψη απόφασης για την κατάσταση της διεργασίας βασίζεται σε ένα μόνο δείγμα, αγνοώντας τις πληροφορίες που μπορούμε να πάρουμε από τα προηγούμενα δείγματα. Το γεγονός αυτό καθιστά το διάγραμμα Shewhart- $\bar{X}$  μη αποδοτικό σε μικρές και μέτριες μετατοπίσεις της μέσης τιμής. Προκειμένου να αυξηθεί η ευαισθησία του διαγράμματος σε αυτό το εύρος μετατοπίσεων, προτάθηκαν από την Western Electric Company (1956) κανόνες διακοπής, οι οποίοι βασίζονται στη χρήση προειδοποιητικών ορίων σε απόσταση  $1\sigma$  και  $2\sigma$  από την κεντρική γραμμή. Πέρα από τους προαναφερθέντες κανόνες, αναπτύχθηκαν και κανόνες ροών τύπου  $r$  από  $m$  συνεχόμενων σημείων, όπου η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εκτός ελέγχου όταν  $r$  από  $m$  συνεχόμενα σημεία βρίσκονται εκτός των ορίων ελέγχου. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με χρήση κανόνων ροών στο διάγραμμα Shewhart- $\bar{X}$ , ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Koutras et al. (2007) και Park και Seo (2012).

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι εάν η μέση τιμή ή/και η τυπική απόκλιση της διεργασίας δεν είναι γνωστές, τότε πρέπει να εκτιμηθούν με τη βοήθεια ενός δείγματος αναφοράς (reference sample). Στην περίπτωση αυτή, το μήκος ροής  $N$  δεν ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή, καθώς τα ενδεχόμενα εμφάνισης ένδειξης εκτός ελέγχου κατάστασης δεν είναι πια ανεξάρτητα. Στις εργασίες των Chakraborti (2000, 2007) και Jardim et al. (2019) παρέχονται πληροφορίες

αναφορικά με τη σχεδίαση και την εύρεση των χαρακτηριστικών της κατανομής του μήκους ροής σε ένα διάγραμμα Shehward- $\bar{X}$  όταν οι παράμετροι της διεργασίας είναι άγνωστοι.

### 2.3 Διάγραμμα ελέγχου CUSUM- $\bar{X}$

Η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης του διαγράμματος CUSUM βασίζεται στα συσσωρευμένα αθροίσματα των αποκλίσεων των δειγματικών μέσων από την τιμή στόχο  $\mu_0$ . Πιο συγκεκριμένα, οι στατιστικές συναρτήσεις που απεικονίζονται σε ένα δίπλευρο διάγραμμα CUSUM- $\bar{X}$  είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned} C_i^+ &= \max(0, \bar{X}_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+), \\ C_i^- &= \min(0, \bar{X}_i - (\mu_0 - K) + C_{i-1}^-), \end{aligned} \quad (2.2)$$

όπου οι τιμές εκκίνησης  $C_0^+$  και  $C_0^-$  τίθενται συνήθως ίσες με 0, ενώ η τιμή  $K$  ονομάζεται τιμή αναφοράς (reference value) και συνήθως υπολογίζεται από την σχέση

$$K = \frac{\delta\sigma_0}{2\sqrt{n}} = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2\sqrt{n}} = \frac{k\sigma_0}{\sqrt{n}},$$

όπου  $\mu_1$  μία εκτός ελέγχου μέση τιμή όπου επιθυμούμε το διάγραμμα CUSUM- $\bar{X}$  να ανιχνεύει γρήγορα, δηλαδή να είναι βέλτιστο σε αυτήν. Ένα διάγραμμα CUSUM- $\bar{X}$  δίνει ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου εάν  $C_i^+ \geq H$  ή  $C_i^- \leq -H$ , όπου  $H > 0$  το διάστημα απόφασης (decision interval) το οποίο υπολογίζεται από την σχέση  $H = \frac{h\sigma_0}{\sqrt{n}}$  με  $h > 0$ . Σε ένα διάγραμμα CUSUM- $\bar{X}$  πέραν των στατιστικών συναρτήσεων  $C_i^+$  και  $C_i^-$ , είθισται να υπολογίζονται και οι ποσότητες  $N^+$  και  $N^-$  που υποδηλώνουν τον αριθμό των συνεχόμενων περιόδων για τις οποίες οι αντίστοιχες στατιστικές συναρτήσεις λαμβάνουν μη μηδενική τιμή. Οι συγκεκριμένες ποσότητες διευκολύνουν στην ανίχνευση της χρονικής περιόδου  $i$  που άρχισε να εμφανίζεται η μετατόπιση στην εντός ελέγχου μέση τιμή.

Στην περίπτωση που υπάρχει ένδειξη ή μας ενδιαφέρει μόνο η μετατόπιση της μέσης τιμής  $\mu_0$  προς μία συγκεκριμένη κατεύθυνση  $\mu_1 > \mu_0$  ή  $\mu_1 < \mu_0$ , τότε προτείνεται η κατασκευή ενός μονόπλευρου διαγράμματος CUSUM- $\bar{X}$  απεικονίζοντας μία από τις δύο στατιστικές συναρτήσεις της εξίσωσης (2.2).

Ένα από τα πλεονεκτήματα του διαγράμματος CUSUM- $\bar{X}$  έναντι των άλλων διαγραμμάτων είναι ότι μπορούμε να αποκτήσουμε μία εκτίμηση του νέου μέσου της διεργασίας  $\mu_1$  που έχει προκύψει από τη μετατόπιση στη μέση τιμή της διεργασίας. Η τιμή αυτή υπολογίζεται χρησιμο-



ποιώντας τη σχέση

$$\hat{\mu}_1 = \begin{cases} \mu_0 + K + \frac{C_i^+}{N^+} & , \text{ εάν } C_i^+ > H, \\ \mu_0 - K - \frac{C_i^-}{N^-} & , \text{ εάν } C_i^- < -H. \end{cases} \quad (2.3)$$

Οι παράμετροι  $K$  και  $H$  είναι οι παράμετροι σχεδιασμού του διαγράμματος CUSUM- $\bar{X}$  και η επιλογή τους γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε το διάγραμμα να έχει μία καθορισμένη τιμή  $ARL_0$  και να ανιχνεύει γρήγορα μία συγκεκριμένη μετατόπιση στη μέση τιμή της διεργασίας. Το πρώτο βήμα στη σχεδίαση ενός διαγράμματος CUSUM- $\bar{X}$  είναι η εύρεση της τιμής αναφοράς  $K$ , η οποία, όπως αναφέραμε προηγουμένως, σχετίζεται άμεσα με την μετατόπιση που θέλουμε το διάγραμμα να ανιχνεύει γρήγορα. Στη συνέχεια, υπολογίζεται το διάστημα εμπιστοσύνης  $H$ , το οποίο θα προσδώσει στο διάγραμμα την επιθυμητή τιμή  $ARL_0$ . Σύμφωνα με τον Montgomery (2013) (σελ. 423), οι τιμές  $k = 0.5$  και  $h = 4$  ή  $5$  είναι οι πιο συνήθεις επιλογές για τις παραμέτρους σχεδιασμού και προσδίδουν  $ARL_0 = 168$  και  $465$ , αντίστοιχα. Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη σχεδίαση ενός διαγράμματος CUSUM- $\bar{X}$  παρέχονται στην εργασία του Hawkins (1993), ενώ οι Ruggeri et al. (2007) παρουσιάζουν μία σύνοψη της βιβλιογραφίας σχετικά με το εν λόγω διάγραμμα.

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι υπολογισμού της τιμής ARL και γενικά των υπόλοιπων χαρακτηριστικών του μήκους ροής ενός διαγράμματος CUSUM- $\bar{X}$ . Ο Page (1954) χρησιμοποίησε ολοκληρωτικές εξισώσεις προκειμένου να υπολογίσει την τιμή του ARL ενός διαγράμματος CUSUM, ενώ οι Brook και Evans (1972) εφάρμοσαν τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων. Εν συνεχεία, ο Vance (1986) δημοσίευσε έναν κώδικα για την επίλυση γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων προκειμένου να υπολογίσει την τιμή του ARL. Οι Hawkins (1992) και Siegmund (1985) (σελ. 27) πρότειναν προσεγγιστικές εξισώσεις κλειστού τύπου για την εύρεση της τιμής του ARL. Πέρα των ανωτέρω μεθόδων, σε πληθώρα δημοσιεύσεων, η εύρεση των χαρακτηριστικών του μήκους ροής πραγματοποιείται με την μέθοδο των Monte Carlo προσομοιώσεων.

Προκειμένου να αυξηθεί η ευαισθησία του διαγράμματος CUSUM- $\bar{X}$  στην αρχή της διεργασίας, οι Lucas και Crosier (1982) πρότειναν την εφαρμογή της άμεσης αρχικής αντίδρασης (fast initial response, FIR) θέτοντας τις τιμές εκκίνησης διαφορετικές από το 0, συνήθως  $C_0^+ = C_0^- = \frac{H}{2}$ . Η συγκεκριμένη διαδικασία συναντάται στη βιβλιογραφία και ως 50% HS (head-start).

Στο σημείο αυτό, επισημαίνεται ότι η μέθοδος που περιγράψαμε για τη γραφική αναπαράσταση των συσσωρευμένων αθροισμάτων ονομάζεται αλγοριθμική μέθοδος (tabular ή algorithmic).

Μία εναλλακτική μέθοδος αναπαράστασης των συσσωρευμένων αθροισμάτων είναι η V μάσκα (V mask), η οποία προτάθηκε από τον Barnard (1959). Πληροφορίες για αυτήν την μέθοδο παρουσιάζονται και στην εργασία του Lucas (1976). Η εν λόγω μέθοδος παρουσιάζει ορισμένα μειονεκτήματα έναντι της αλγοριθμικής μεθόδου και δεν προτείνεται για χρήση (Montgomery 2013, σελ. 430).

Τέλος, στην εργασία των Jones et al. (2004) μελετάται ο σχεδιασμός και η απόδοση ενός CUSUM- $\bar{X}$  διαγράμματος ελέγχου όταν οι παράμετροι της διεργασίας είναι άγνωστες.

## 2.4 Διάγραμμα ελέγχου EWMA- $\bar{X}$

Το διάγραμμα ελέγχου EWMA είναι ένα από τα πιο δημοφιλή διαγράμματα ελέγχου στον Στατιστικό Έλεγχο Διεργασιών και προτείνεται για την γρήγορη ανίχνευση μικρών και μέτριων μετατοπίσεων στη μέση τιμή μίας διεργασίας. Η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται σε ένα διάγραμμα EWMA- $\bar{X}$  είναι η ακόλουθη

$$Y_i = \lambda \bar{X}_i + (1 - \lambda)Y_{i-1}, \quad (2.4)$$

όπου η αρχική τιμή  $Y_0$  τίθεται συνήθως ίση με την εντός ελέγχου μέση τιμή  $\mu_0$  και  $0 < \lambda \leq 1$  μία σταθερά που ονομάζεται παράμετρος εξομάλυνσης (smoothing parameter), η οποία καθορίζει το βάρος που δίνουμε στην πιο πρόσφατη παρατήρηση  $\bar{X}_i$ .

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.4) μπορούμε ισοδύναμα να εκφράσουμε την απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση  $Y_i$  ως εξής

$$Y_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j \bar{X}_{i-j} + (1 - \lambda)^i Y_0. \quad (2.5)$$

Από την εξίσωση (2.5) παρατηρούμε ότι η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση  $Y_i$  είναι ένας σταθμισμένος μέσος των ποσοτήτων  $Y_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{i-1}, \bar{X}_i$  με βάρη  $(1 - \lambda)^i, \lambda(1 - \lambda)^{i-1}, \dots, \lambda(1 - \lambda), \lambda$  αντίστοιχα. Τα δε βάρη φθίνουν γεωμετρικά καθώς βαίνουμε από την πιο πρόσφατη παρατήρηση στην πιο παλιά και έχουν άθροισμα ίσο με τη μονάδα.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η εντός ελέγχου μέση τιμή και η διασπορά της στατιστικής συνάρτησης  $Y_i$  είναι αντίστοιχα ίσες με

$$E(Y_i|IC) = \mu_0$$

και

$$Var(Y_i|IC) = \frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \frac{\sigma_0^2}{n}.$$

Κατόπιν τούτου, τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος EWMA- $\bar{X}$  είναι τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} UCL_i &= \mu_0 + L\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{n(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]}, \\ CL &= \mu_0, \\ LCL_i &= \mu_0 - L\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{n(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου. Τα όρια ελέγχου της εξίσωσης (2.6) ονομάζονται ακριβή ή χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου (exact ή time-varying control limits), καθώς η διασπορά της στατιστικής συνάρτησης  $Y_i$  εξαρτάται από τον αριθμό του δείγματος  $i$  (ή τον χρόνο που λαμβάνεται το δείγμα).

Στην περίπτωση που έχει παρέλθει αρκετό χρονικό διαστήμα από την έναρξη της διεργασίας και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι  $\lim_{i \rightarrow \infty} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \rightarrow 1$ , τα όρια ελέγχου σταθεροποιούνται στις ακόλουθες τιμές

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}}, \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

οι οποίες αποτελούν τα ασυμπτωτικά όρια ελέγχου ή όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης (asymptotic ή steady-state control limits). Επισημαίνεται ότι τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου είναι προτιμητέα έναντι των ορίων ελέγχου σταθερής κατάστασης, καθώς αυξάνουν την ευαισθησία του διαγράμματος όταν συμβαίνουν μικρές μετατοπίσεις στην αρχή της διεργασίας. Ένα διάγραμμα EWMA- $\bar{X}$  δίνει ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου εάν η στατιστική συνάρτηση  $Y_i$  βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου. Το διάγραμμα Shewhart- $\bar{X}$  αποτελεί ειδική περίπτωση του διαγράμματος EWMA- $\bar{X}$  για  $\lambda = 1$ .

Η επιλογή των παραμέτρων σχεδιασμού  $\lambda$  και  $L$  ενός διαγράμματος EWMA- $\bar{X}$  γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε το διάγραμμα αφενός να έχει μία καθορισμένη τιμή  $ARL_0$ , αφετέρου να είναι αποδοτικό στην ανίχνευση συγκεκριμένου μεγέθους της μετατόπισης  $\delta$ . Στην περίπτωση ενός διαγράμματος ελέγχου με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης συνιστάται η χρήση μικρών τιμών ( $\lambda = 0.05$ ) όταν θέλουμε να ανιχνεύσουμε μικρές μετατοπίσεις και μεσαίων ( $\lambda = 0.10$ ) ή μεγαλύτερων ( $\lambda = 0.20$ ) τιμών αν επιθυμούμε να έχουμε ένα αποδοτικό διάγραμμα σε μέτριες ή μεγάλες μετατοπίσεις, αντίστοιχα (Montgomery 2013, σελ. 437). Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου προτείνεται η χρήση τιμών  $\lambda \leq 0.30$ , καθώς για

μεγαλύτερες τιμές, η αποδότη του διαγράμματος είναι ίδια με αυτήν όταν χρησιμοποιούμε όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης (Steiner 1999).

Όμοια με το διάγραμμα CUSUM- $\bar{X}$ , έτσι και για το διάγραμμα EWMA- $\bar{X}$  υπάρχουν τρεις διαφορετικές μέθοδοι υπολογισμού της τιμής του ARL. Ο Crowder (1987) υπολόγισε την τιμή του ARL ενός διαγράμματος EWMA- $\bar{X}$  με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης χρησιμοποιώντας ολοκληρωτικές εξισώσεις, ενώ οι Saccucci και Lucas (1990) και ο Steiner (1999) χρησιμοποίησαν τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων προκειμένου να υπολογίσουν την τιμή του ARL ενός διαγράμματος EWMA- $\bar{X}$  με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης και με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, αντίστοιχα. Πέρα των δύο ανωτέρω μεθόδων, είναι αρκετά διαδεδομένη και η μέθοδος των προσομοιώσεων.

Προκειμένου να αυξηθεί η απόδοση ενός διαγράμματος EWMA- $\bar{X}$ , ιδιαίτερα στην αρχή της διεργασίας, οι Lucas και Saccucci (1990) και Rhoads et al. (1996) πρότειναν τη χρήση τιμής εκκίνησης μεταξύ της τιμής στόχου και ενός εκ δύο ορίων ελέγχου ( $0\% \leq HS \leq 75\%$ ), ενώ οι Steiner (1999) και Haq et al. (2014) σχεδίασαν ένα διάγραμμα EWMA- $\bar{X}$  με στενότερα όρια ελέγχου στην αρχή χρησιμοποιώντας ένα συντελεστή εξομάλυνσης που φθίνει εκθετικά.

Τέλος, για τη σχεδίαση και μελέτη ενός διαγράμματος EWMA- $\bar{X}$  όταν οι παράμετροι της διεργασίας δεν είναι γνωστοί, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία του Jones (2002).

## 2.5 Διάγραμμα ελέγχου DEWMA- $\bar{X}$

Το διάγραμμα ελέγχου DEWMA αποτελεί μία τροποποίηση του διαγράμματος EWMA, χρησιμοποιώντας και δεύτερο κινητό μέσο με εκθετικά βάρη προκειμένου να αυξηθεί η ευαισθησία του κλασσικού διαγράμματος EWMA στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται σε ένα διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$  είναι η ακόλουθη

$$\begin{cases} Y_i = \lambda \bar{X}_i + (1 - \lambda)Y_{i-1}, \\ Z_i = \lambda Y_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \end{cases} \quad (2.8)$$

όπου οι αρχικές τιμές  $Y_0 = Z_0 = \mu_0$  και  $0 < \lambda \leq 1$  η παράμετρος εξομάλυνσης. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.5) και (2.8), η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση  $Z_i$  γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$Z_i = \lambda^2 \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} (i - j + 1) \bar{X}_j + (\lambda i + 1)(1 - \lambda)^i Z_0. \quad (2.9)$$

Αποδεικνύεται ότι η εντός ελέγχου μέση τιμή και διασπορά της στατιστικής συνάρτησης  $Z_i$  είναι αντίστοιχα ίσες με

$$E(Z_i|IC) = \mu_0$$

και

$$Var(Z_i|IC) = \frac{\lambda^4[1 + c^2 - (i + 1)^2c^i + (2i^2 + 2i - 1)c^{i+1} - i^2c^{i+2}]\sigma_0^2}{[1 - c]^3 n},$$

όπου  $c = (1 - \lambda)^2$ . Ως εκ τούτου, τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος DEWMA- $\bar{X}$  είναι τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} UCL_i &= \mu_0 + L\sqrt{Var(Z_i|IC)}, \\ CL &= \mu_0, \\ LCL_i &= \mu_0 - L\sqrt{Var(Z_i|IC)}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου. Τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης του διαγράμματος είναι τα εξής

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma_0\sqrt{\frac{\lambda(2 - 2\lambda + \lambda^2)}{n(2 - \lambda)^3}}, \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma_0\sqrt{\frac{\lambda(2 - 2\lambda + \lambda^2)}{n(2 - \lambda)^3}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ένα διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$  δίνει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου εάν  $Z_i \geq UCL_i$  ή  $Z_i \leq LCL_i$ . Επιπλέον, στην περίπτωση όπου  $\lambda = 1$ , τότε το διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$  μεταπίπτει στο διάγραμμα Shewhart- $\bar{X}$

Όπως και στο διάγραμμα EWMA- $\bar{X}$ , όμοια και στο διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$ , οι παράμετροι σχεδίασης είναι οι  $\lambda$  και  $L$ . Μικρές τιμές του  $\lambda$  είναι πιο αποδοτικές για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, ενώ μεσαίες και μεγάλες τιμές του  $\lambda$  αποδίδουν καλύτερα για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις, αντίστοιχα. Εν αντιθέσει με τα διαγράμματα CUSUM- $\bar{X}$  και EWMA- $\bar{X}$ , όπου η τιμή του ARL μπορεί να υπολογιστεί με τις μεθόδους των ολοκληρωτικών εξισώσεων ή των μακροβιανών αλυσίδων, στο διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$  οι εν λόγω μέθοδοι δεν έχουν μέχρι στιγμής εφαρμοστεί εξαιτίας της πολυπλοκότητας της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης, αλλά και των χρονικών μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχων.

Το διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$  με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα Shewhart- $\bar{X}$  για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις. Σε σύγκριση με το διάγραμμα EWMA- $\bar{X}$ , αποδίδει καλύτερα για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.25$ ), ενώ τα δύο διαγράμματα

έχουν περίπου την ίδια απόδοση για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις (Shamma και Shamma 1992, δεύτερη επιστημονική εργασία).

Οι Zhang και Chen (2005) μελέτησαν εκτενέστερα το διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$  χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου. Σε αυτήν την περίπτωση, η απόδοση του διαγράμματος είναι καλύτερη από αυτήν του διαγράμματος EWMA- $\bar{X}$  για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.50$ , ενώ για μεγαλύτερες μετατοπίσεις το διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$  αποδίδει ελαφρώς καλύτερα.

Αξίζει να αναφερθεί ότι στην εργασία τους, οι Zhang και Chen (2005) χρησιμοποίησαν διαφορετικές τιμές των παραμέτρων εξομάλυνσης για τις στατιστικές συναρτήσεις  $Y_i$  και  $Z_i$ . Κάτι τέτοιο όμως, περιπλέκει περισσότερο τη σχεδίαση του διαγράμματος χωρίς να προσδίδει ιδιαίτερα καλύτερα αποτελέσματα αναφορικά με την απόδοσή του.

Τέλος, το διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$  συναντάται στη βιβλιογραφία και ως HEWMA- $\bar{X}$  (Hybrid Exponentially Weighted Moving Average), το οποίο προτάθηκε από τον Haq (2013, 2017). Στη διεθνή βιβλιογραφία, η ονομασία DEWMA δίνεται συνήθως για διαγράμματα όπου η σταθερά εξομάλυνσης είναι ίδια για τις δύο στατιστικές συναρτήσεις  $Y_i$  και  $Z_i$ , ενώ η ονομασία HEWMA για διαγράμματα όπου οι παράμετροι εξομάλυνσης είναι διαφορετικές.

## 2.6 Διάγραμμα ελέγχου GWMA- $\bar{X}$

Το διάγραμμα ελέγχου GWMA- $\bar{X}$  αποτελεί μία γενίκευση του διαγράμματος EWMA- $\bar{X}$ , καθώς περιλαμβάνει μία επιπρόσθετη παράμετρο προσαρμογής, η οποία προσδίδει μεγαλύτερη ευαισθησία στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται σε ένα διάγραμμα GWMA- $\bar{X}$  είναι η ακόλουθη

$$G_i = \sum_{j=1}^i \left( q^{(j-1)^a} - q^{j^a} \right) \bar{X}_{i-j+1} + q^{i^a} \mu_0,$$

όπου  $0 \leq q < 1$  η παράμετρος σχεδίασης και  $a > 0$  η επιπρόσθετη παράμετρος εξομάλυνσης. Η εντός ελέγχου μέση τιμή και διασπορά της στατιστικής συνάρτησης  $G_i$  είναι ίσες με

$$E(G_i | IC) = \mu_0$$

και

$$Var(Z_i | IC) = \sum_{j=1}^i \left( q^{(j-1)^a} - q^{j^a} \right)^2 \frac{\sigma_0^2}{n}.$$

Έτσι, λοιπόν, τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος  $GWMA-\bar{X}$  είναι τα εξής

$$\begin{aligned} UCL_i &= \mu_0 + L\sigma_0 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^i (q^{(j-1)^a} - q^{j^a})^2}, \\ CL &= \mu_0, \\ LCL_i &= \mu_0 - L\sigma_0 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^i (q^{(j-1)^a} - q^{j^a})^2}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου. Από την άλλη, τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma_0 \sqrt{\frac{Q}{n}}, \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma_0 \sqrt{\frac{Q}{n}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου  $Q = \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^i (q^{(j-1)^a} - q^{j^a})^2 \right)$ . Το διάγραμμα  $GWMA-\bar{X}$  δίνει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου εάν  $G_i \geq UCL_i$  ή  $G_i \leq LCL_i$ . Σε αντίθετη περίπτωση, η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εντός ελέγχου. Το διάγραμμα  $GWMA-\bar{X}$  μεταπίπτει στο διάγραμμα  $EWMA-\bar{X}$  όταν  $q = 1 - \lambda$ , όπου  $\lambda$  η παράμετρος εξομάλυνσης του διαγράμματος  $EWMA-\bar{X}$ , και  $a = 1$ , ενώ στην περίπτωση που  $q = 0$  και  $a = 1$ , τότε μεταπίπτει στο διάγραμμα  $Shewhart-\bar{X}$ .

Οι παράμετροι σχεδιασμού ενός διαγράμματος  $GWMA-\bar{X}$  είναι οι  $q$ ,  $a$  και  $L$ . Η κατάλληλη επιλογή αυτών των παραμέτρων επιτυγχάνει την επιθυμητή τιμή  $ARL_0$ , αλλά επίσης το κάνει βέλτιστο σε κατάλληλο μέγεθος της μετατόπισης. Όπως στο διάγραμμα  $DEWMA-\bar{X}$ , όμοια και για το  $GWMA-\bar{X}$ , η εύρεση της τιμής του  $ARL$  επιτυγχάνεται αποκλειστικά με τη μέθοδο των προσομοιώσεων.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, τότε ένα διάγραμμα  $GWMA-\bar{X}$  με παραμέτρους σχεδίασης  $q$  και  $a \in [0.5, 1)$  είναι πιο αποδοτικό από ένα διάγραμμα  $EWMA-\bar{X}$  με παράμετρο εξομάλυνσης  $\lambda = 1 - q$  για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις ( $\delta \leq 1$ ), ενώ για μεγαλύτερες μετατοπίσεις είναι πιο αποδοτικό ένα διάγραμμα  $GWMA-\bar{X}$  με  $a > 1$ . Επιπλέον, για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $q$ , τιμές της παραμέτρου  $a \in [0.5, 0.75]$  είναι καταλληλότερες για την ανίχνευση μετατοπίσεων  $\delta \leq 0.75$ , ενώ η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου  $a$  αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η μετατόπιση που θέλουμε να ανιχνεύσουμε. Επισημαίνεται ότι στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου συνίσταται η χρήση

μεγάλων τιμών της παραμέτρου  $q \in [0.9, 0.95]$ . Όταν όμως χρησιμοποιούνται όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, μικρές τιμές του  $q \in [0.5, 0.6]$  είναι πιο αποδοτικές για μεγάλες μετατοπίσεις, μεσαίες τιμές  $q \in [0.7, 0.8]$  για μέτριες μετατοπίσεις και μεγάλες τιμές  $q \in [0.9, 0.95]$  για μικρές μετατοπίσεις.

Ο Chiu (2009) μελέτησε διάφορες προσεγγίσεις άμεσης αρχικής απόκρισης για το διάγραμμα  $GWMA-\bar{X}$ . Για περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με το διάγραμμα  $GWMA$ , ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παρεπέμπεται στην εργασία των Mabude et al. (2021), όπου παρέχονται λεπτομέρειες αναφορικά με τη δομή και τον σχεδιασμό διαγραμμάτων που βασίζονται στο υπόψη σχήμα.

## 2.7 Διάγραμμα ελέγχου $DGWMA-\bar{X}$

Το διάγραμμα  $DGWMA-\bar{X}$  κατασκευάζεται εφαρμόζοντας την τεχνική  $DEWMA$  στο διάγραμμα  $GWMA-\bar{X}$ . Η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται σε ένα διάγραμμα  $DGWMA-\bar{X}$  είναι η ακόλουθη

$$\begin{cases} G_i = \sum_{j=1}^i (q^{(j-1)^a} - q^{j^a}) \bar{X}_{i-j+1} + q^{i^a} \mu_0, \\ DG_i = \sum_{j=1}^i (q^{(j-1)^a} - q^{j^a}) G_i + q^{i^a} \mu_0, \end{cases} \quad (2.14)$$

όπου  $0 \leq q < 1$  και  $a > 0$  η παράμετρος σχεδίασης και η επιπρόσθετη παράμετρος εξομάλυνσης, αντίστοιχα. Συνδυάζοντας τις δύο στατιστικές συναρτήσεις της εξίσωσης (2.14), η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση  $DG_i$  γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$DG_i = \sum_{j=1}^i w_j \bar{X}_{i-j+1} + \left(1 - \sum_{j=1}^i w_j\right) \mu_0,$$

όπου

$$w_j = \sum_{k=1}^j (q^{(k-1)^a} - q^{k^a}) (q^{(j-k)^a} - q^{(j-k+1)^a}).$$

Η εντός ελέγχου μέση τιμή και διασπορά της στατιστικής συνάρτησης  $DG_i$  αποδεικνύονται ότι είναι ίσες με

$$E(DG_i|IC) = \mu_0$$

και

$$Var(DG_i|IC) = \sum_{j=1}^i w_j^2 \cdot Var(\bar{X}_{i-j+1}|IC) = W_i \frac{\sigma_0^2}{n},$$



όπου  $W_i = \sum_{j=1}^i w_j^2$ . Κατ' επέκταση, τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος DGWMA- $\bar{X}$  είναι τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} UCL_i &= \mu_0 + L\sigma_0\sqrt{\frac{W_i}{n}}, \\ CL &= \mu_0, \\ LCL_i &= \mu_0 - L\sigma_0\sqrt{\frac{W_i}{n}}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου, ενώ τα όρια ελέγχου στεθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma_0\sqrt{\frac{W}{n}}, \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma_0\sqrt{\frac{W}{n}}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

όπου  $W = \lim_{i \rightarrow \infty} W_i^2$ . Ένα διάγραμμα DGWMA- $\bar{X}$  δίνει ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου εάν  $DG_i \geq UCL_i$  ή  $DG_i \leq LCL_i$ . Από την άλλη, εάν  $LCL_i < DG_i < UCL_i$ , η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εντός ελέγχου. Το διάγραμμα DGWMA- $\bar{X}$  μεταπίπτει στο διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$  εάν  $q = 1 - \lambda$ , όπου  $\lambda$  η παράμετρος εξομάλυνσης του διαγράμματος DEWMA- $\bar{X}$ , και  $a = 1$ , ενώ στην περίπτωση που  $q = 0$  και  $a = 1$  μεταπίπτει στο διάγραμμα Shewhart- $\bar{X}$ . Περισσότερες λεπτομέρειες αναφορικά με τη δομή του διαγράμματος DGWMA- $\bar{X}$  και τον τρόπο υπολογισμού των χαρακτηριστικών του μήκους ροής του, παρέχονται στο υποκεφάλαιο 4.9, όπου παρουσιάζεται ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιώντας το εν λόγω σχήμα.

Όπως στο διάγραμμα GWMA- $\bar{X}$ , όμοια και στο διάγραμμα DGWMA- $\bar{X}$ , οι παράμετροι σχεδιασμού είναι οι  $q$ ,  $a$  και  $L$ , όπου με κατάλληλη επιλογή επιτυγχάνουμε το επιθυμητό  $ARL_0$ . Επιπλέον, ο υπολογισμός του ARL γίνεται μόνο με τη μέθοδο των προσομοιώσεων.

Οι Sheu και Hsieh (2009) σύγκριναν τα διαγράμματα DGWMA- $\bar{X}$ , GWMA- $\bar{X}$  και DEWMA- $\bar{X}$  με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό την προϋπόθεση ότι αυτά έχουν κοινές τιμές  $ARL_0$  και  $SDRL_0$  και συμπέραναν ότι το διάγραμμα GWMA- $\bar{X}$  είναι ελαφρώς πιο αποδοτικό από τα άλλα δύο για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta < 0.50$ ), ενώ το διάγραμμα DGWMA- $\bar{X}$  είναι πιο ευαίσθητο για μέτριες μετατοπίσεις ( $0.50 \leq \delta \leq 1.50$ ). Τέλος, το διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$  είναι η καλύτερη επιλογή για μεγάλες μετατοπίσεις.

Στην εργασία των Mabude et al. (2021) παρέχονται πληροφορίες αναφορικά με τη χρήση του διαγράμματος DGWMA- $\bar{X}$  σε διεργασίες που η κατανομή του χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει είναι μη κανονική.

## 2.8 Διάγραμμα ελέγχου HWMA- $\bar{X}$

Το διάγραμμα HWMA- $\bar{X}$  δίνει ένα συγκεκριμένο βάρος  $\lambda$  στην πιο πρόσφατη παρατήρηση, ενώ το υπόλοιπο βάρος  $1 - \lambda$  ισομοιράζεται στις υπόλοιπες παρατηρήσεις. Έτσι, λοιπόν, η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται σε ένα διάγραμμα HWMA- $\bar{X}$  είναι η ακόλουθη

$$H_i = \lambda \bar{X}_i + (1 - \lambda) \bar{\bar{X}}_{i-1}, \quad (2.17)$$

όπου  $0 < \lambda \leq 1$  είναι η παράμετρος εξομάλυνσης, ενώ η ποσότητα  $\bar{\bar{X}}_{i-1}$  είναι η μέση τιμή των  $i-1$  δειγματικών μέσων, δηλαδή  $\bar{\bar{X}}_{i-1} = \frac{\sum_{k=1}^{i-1} \bar{X}_k}{i-1}$ . Επιπρόσθετα, η τιμή εκκίνησης  $\bar{\bar{X}}_0$  τίθεται ίση με  $\mu_0$ . Αποδεικνύεται ότι η εντός ελέγχου μέση τιμή και διασπορά της στατιστικής συνάρτησης  $H_i$  είναι ίσες με

$$E(H_i|IC) = \mu_0$$

και

$$Var(H_i|IC) = \begin{cases} \frac{\lambda^2 \sigma_0^2}{n} & , \text{για } i = 1, \\ \left[ \lambda^2 + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \right] \frac{\sigma_0^2}{n} & , \text{για } i > 1. \end{cases}$$

Κατόπιν των ανωτέρω, τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος HWMA- $\bar{X}$  είναι

$$UCL_i/LCL_i = \begin{cases} \mu_0 \pm L \frac{\lambda \sigma_0}{\sqrt{n}} & , \text{για } i = 1, \\ \mu_0 \pm L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{\lambda^2 + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1}} & , \text{για } i > 1, \end{cases} \quad CL = \mu_0, \quad (2.18)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου. Τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L \frac{\lambda \sigma_0}{\sqrt{n}}, \\ LCL &= \mu_0 - L \frac{\lambda \sigma_0}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ένα διάγραμμα HWMA- $\bar{X}$  δίνει ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου εάν  $H_i \geq UCL_i$  ή  $H_i \leq LCL_i$ , ενώ σε περίπτωση που η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση  $H_i$  βρίσκεται εντός των ορίων ελέγχου, θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Αξίζει να σημειωθεί ότι όπως και στα προηγούμενα διαγράμματα ελέγχου, έτσι και το διάγραμμα HWMA- $\bar{X}$  μεταπίπτει στο Shewhart- $\bar{X}$  όταν  $\lambda = 1$ .

Οι παράμετροι σχεδίασης ενός διαγράμματος HWMA- $\bar{X}$  είναι ίδιες με αυτές ενός διαγράμματος EWMA- $\bar{X}$ , δηλαδή οι  $\lambda$  και  $L$ . Μέχρι στιγμής, η εύρεση της τιμής του ARL έχει υλοποιηθεί

μόνο με τη μέθοδο των προσομοιώσεων. Επιπλέον, το διάγραμμα HWMA- $\bar{X}$  είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα EWMA- $\bar{X}$  για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.50$ ), ενώ σε σύγκριση με το CUSUM- $\bar{X}$  είναι πιο ευαίσθητο σε μεγαλύτερο εύρος μετατοπίσεων ( $\delta \leq 5.00$ ).

## 2.9 Διάγραμμα ελέγχου TEWMA- $\bar{X}$

Στο πλαίσιο επαύξησης της ικανότητας των διαγραμμάτων EWMA- $\bar{X}$  και DEWMA- $\bar{X}$  στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στη μέση τιμή μίας διεργασίας, θα αναπτύξουμε ένα νέο διάγραμμα ελέγχου στο οποίο θα χρησιμοποιήσουμε τρεις κινητούς μέσους με εκθετικά βάρη. Το νέο διάγραμμα ονομάζεται TEWMA- $\bar{X}$  και η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται είναι η ακόλουθη

$$\begin{cases} Y_i = \lambda \bar{X}_i + (1 - \lambda)Y_{i-1}, \\ Z_i = \lambda Y_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \\ W_i = \lambda Z_i + (1 - \lambda)W_{i-1}, \end{cases} \quad (2.20)$$

όπου οι αρχικές τιμές  $Y_0 = Z_0 = W_0 = \mu_0$  και  $0 < \lambda \leq 1$  η παράμετρος εξομάλυνσης. Οι εξισώσεις (2.20) μπορούν ισοδύναμα να γραφούν ως

$$\begin{cases} Y_i = \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} \bar{X}_j + (1 - \lambda)^i Y_0, \\ Z_i = \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} Y_j + (1 - \lambda)^i Z_0, \\ W_i = \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} Z_j + (1 - \lambda)^i W_0. \end{cases}$$

Συνδυάζοντας τις στατιστικές συναρτήσεις  $Y_i$  και  $Z_i$  έχουμε

$$\begin{aligned} Z_i &= \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} \left[ \lambda \sum_{k=1}^j (1 - \lambda)^{j-k} \bar{X}_k + (1 - \lambda)^j Y_0 \right] + (1 - \lambda)^i Z_0 \\ &= \lambda^2 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j (1 - \lambda)^{i-k} \bar{X}_k + \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^i Y_0 + (1 - \lambda)^i Z_0 \\ &= \lambda^2 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i (1 - \lambda)^{i-k} \bar{X}_k + \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^i Y_0 + (1 - \lambda)^i Z_0 \\ &= \lambda^2 \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i (1 - \lambda)^{i-k} \bar{X}_j + \lambda i (1 - \lambda)^i Y_0 + (1 - \lambda)^i Z_0. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι  $Y_0 = Z_0$ , η στατιστική συνάρτηση  $Z_i$  (η οποία απεικονίζεται στο διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$ ) γράφεται ως

$$Z_i = \lambda^2 \sum_{k=1}^i (1 - \lambda)^{i-k} (i - k + 1) \bar{X}_k + (\lambda i + 1) (1 - \lambda)^i Z_0.$$

Παρόμοια, για την απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση  $W_i$  έχουμε

$$\begin{aligned}
W_i &= \lambda \sum_{j=1}^i (1-\lambda)^{i-j} \left[ \lambda^2 \sum_{k=1}^j (1-\lambda)^{j-k} (j-k+1) \bar{X}_k + (\lambda j + 1)(1-\lambda)^j Z_0 \right] \\
&\quad + (1-\lambda)^i W_0 \\
&= \lambda^3 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j (1-\lambda)^{i-k} (j-k+1) \bar{X}_k + \lambda \sum_{j=1}^i (1-\lambda)^i (\lambda j + 1) Z_0 + (1-\lambda)^i W_0 \\
&= \lambda^3 \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i (1-\lambda)^{i-k} (j-k+1) \bar{X}_k + \lambda \sum_{j=1}^i (1-\lambda)^i (\lambda j + 1) Z_0 + (1-\lambda)^i W_0 \\
&= \frac{\lambda^3}{2} \sum_{k=1}^i (1-\lambda)^{i-k} (i-k+1)(i-k+2) \bar{X}_k + \frac{\lambda}{2} (1-\lambda)^i i(\lambda i + \lambda + 2) Z_0 + \\
&\quad (1-\lambda)^i W_0 \\
&= \frac{\lambda^3}{2} \sum_{k=1}^i (1-\lambda)^{i-k} (i-k+1)(i-k+2) \bar{X}_k + \frac{(1-\lambda)^i}{2} [\lambda i(\lambda i + \lambda + 2) + 2] W_0.
\end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν, η στατιστική συνάρτηση  $W_i$  γράφεται ως

$$W_i = \frac{\lambda^3}{2} \sum_{k=1}^i (1-\lambda)^{i-k} (i-k+1)(i-k+2) \bar{X}_k + \frac{(1-\lambda)^i}{2} [\lambda i(\lambda i + \lambda + 2) + 2] W_0.$$

Θέτοντας  $l = i - k + 1$ , η εντός ελέγχου μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης  $W_i$  ισούται με

$$\begin{aligned}
E(W_i|IC) &= \left[ \frac{\lambda^3}{2} \sum_{k=1}^i (1-\lambda)^{i-k} (i-k+1)(i-k+2) + \frac{(1-\lambda)^i}{2} [\lambda i(\lambda i + \lambda + 2) + 2] \right] \mu_0 \\
&= \left[ \frac{\lambda^3}{2} \sum_{l=1}^i l(l+1)(1-\lambda)^{l-1} + \frac{(1-\lambda)^i}{2} [\lambda i(\lambda i + \lambda + 2) + 2] \right] \mu_0.
\end{aligned}$$

Ορίζοντας  $c = 1 - \lambda$  και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Παραρτήματος Α έχουμε

$$\begin{aligned}
E(W_i|IC) &= \left[ \frac{\lambda^3}{2} \sum_{l=1}^i l(l+1)c^{l-1} + \left( \frac{c^i}{2} \right) [\lambda i(\lambda i + \lambda + 2) + 2] \right] \mu_0 \\
&= \left[ \frac{c\lambda^3}{2} \sum_{l=1}^i l(l+1)c^{l-2} + \lambda^3 \sum_{l=1}^i l c^{l-1} + \left( \frac{c^i}{2} \right) [\lambda i(\lambda i + \lambda + 2) + 2] \right] \mu_0 \\
&= \left[ \frac{c\lambda^3}{2} \left[ -\frac{i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)} - \frac{2(i+1)c^i}{(1-c)^2} + \frac{2(1-c^{i+1})}{(1-c)^3} \right] + \right. \\
&\quad \left. \lambda^3 \left[ \frac{1-c^{i+1}}{(1-c)^2} - \frac{(i+1)c^i}{(1-c)} \right] + \frac{c^i}{2} [\lambda i(\lambda i + \lambda + 2) + 2] \right] \mu_0.
\end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν

$$\begin{aligned}
\frac{E(W_i|IC)}{\mu_0} &= -\frac{\lambda^3 i(i+1)c^i}{2(1-c)} - \frac{\lambda^3(i+1)c^{i+1}}{(1-c)^2} + \frac{\lambda^3(c-c^{i+2})}{(1-c)^3} + \lambda^3 \frac{1-c^{i+1}}{(1-c)^2} - \\
&\quad \lambda^3 \frac{(i+1)c^i}{(1-c)} + \frac{c^i}{2} [\lambda i(\lambda i + \lambda + 2) + 2] \\
&= -\frac{\lambda^2 i(i+1)c^i}{2} - \lambda(i+1)c^{i+1} + (1-\lambda)(1-c^{i+1}) + \lambda(1-c^{i+1}) - \\
&\quad \lambda^2(i+1)c^i + \frac{\lambda^2 i(i+1)c^i}{2} + (\lambda i + 1)c^i \\
&= -\lambda(i+1)c^{i+1} + (1-\lambda)(1-c^{i+1}) + \lambda(1-c^{i+1}) - \lambda^2(i+1)c^i + (\lambda i + 1)c^i \\
&= -\lambda(i+1)c^{i+1} + (1-c^{i+1}) + c^{i+1} + \lambda(i+1)c^{i+1} = 1.
\end{aligned}$$

Επομένως, προκύπτει ότι  $E(W_i|IC) = \mu_0$ .

Η εντός ελέγχου διασπορά της στατιστικής συνάρτησης  $W_i$  είναι

$$Var(W_i|IC) = \left[ \frac{\lambda^6}{4} \sum_{k=1}^i (i-k+1)^2 (i-k+2)^2 (1-\lambda)^{2(i-k)} \right] \frac{\sigma_0^2}{n}.$$

Θέτοντας  $c = (1-\lambda)^2$  και  $l = i - k + 1$  και με τη βοήθεια των σχέσεων του Παραρτήματος Α, έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{nVar(W_i|IC)}{\sigma_0^2} &= \frac{\lambda^6}{4} \sum_{l=1}^i l^2 (l+1)^2 c^{l-1} = \frac{\lambda^6}{4} \sum_{l=1}^i [l^4 + 2l^3 + l^2] \theta^{l-1} \\
&= \frac{c^3 \lambda^6}{4} \sum_{l=1}^i l(l-1)(l-2)(l-3)c^{l-4} + \frac{8c^2 \lambda^6}{4} \sum_{l=1}^i l(l-1)(l-2)c^{l-3} + \\
&\quad \frac{14c \lambda^6}{4} \sum_{l=1}^i l(l-1)c^{l-2} + \frac{4\lambda^6}{4} \sum_{l=1}^i l c^{l-1} \\
&= \frac{c^3 \lambda^6}{4} \sum_{l=1}^i l(l-1)(l-2)(l-3)c^{l-4} + 2c^2 \lambda^6 \sum_{l=1}^i l(l-1)(l-2)c^{l-3} + \\
&\quad \frac{7c \lambda^6}{2} \sum_{l=1}^i l(l-1)c^{l-2} + \lambda^6 \sum_{l=1}^i l c^{l-1} \\
&= \frac{c^3 \lambda^6}{4} \left[ -\frac{i(i^2-1)(i-2)c^{i-3}}{1-c} - \frac{4i(i^2-1)c^{i-2}}{(1-c)^2} - \frac{12i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{24(i+1)c^i}{(1-c)^4} + \frac{24(1-c^{i+1})}{(1-c)^5} \right] + 2c^2 \lambda^6 \left[ -\frac{i(i^2-1)c^{i-2}}{1-c} - \right. \\
&\quad \left. \frac{3i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)^2} - \frac{6(i+1)c^i}{(1-c)^3} + \frac{6(1-c^{i+1})}{(1-c)^4} \right] + \\
&\quad \frac{7c \lambda^6}{2} \left[ -\frac{i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)} - \frac{2(i+1)c^i}{(1-c)^2} + \frac{2(1-c^{i+1})}{(1-c)^3} \right] + \\
&\quad \lambda^6 \left[ \frac{1-c^{i+1}}{(1-c)^2} - \frac{(i+1)c^i}{1-c} \right].
\end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν, η κεντρική γραμμή και τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου του διαγράμματος TEWMA- $\bar{X}$  είναι τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} UCL_i &= \mu_0 + L\sqrt{Var(W_i|IC)}, \\ CL &= \mu_0, \\ LCL_i &= \mu_0 - L\sqrt{Var(W_i|IC)}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου. Τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma_0\sqrt{\frac{1}{n} \left[ \frac{6(1-\lambda)^6\lambda}{(2-\lambda)^5} + \frac{12(1-\lambda)^4\lambda^2}{(2-\lambda)^4} + \frac{7(1-\lambda)^2\lambda^3}{(2-\lambda)^3} + \frac{\lambda^4}{(2-\lambda)^2} \right]}, \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma_0\sqrt{\frac{1}{n} \left[ \frac{6(1-\lambda)^6\lambda}{(2-\lambda)^5} + \frac{12(1-\lambda)^4\lambda^2}{(2-\lambda)^4} + \frac{7(1-\lambda)^2\lambda^3}{(2-\lambda)^3} + \frac{\lambda^4}{(2-\lambda)^2} \right]}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ένα διάγραμμα ελέγχου TEWMA- $\bar{X}$  δίνει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου εάν  $W_i \geq UCL_i$  ή  $W_i \leq LCL_i$ . Σε αντίθετη περίπτωση, θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Το εν λόγω διάγραμμα μεταπίπτει στο διάγραμμα Shewhart- $\bar{X}$  όταν  $\lambda = 1$ .

Όπως στα διαγράμματα EWMA- $\bar{X}$  και DEWMA- $\bar{X}$ , όμοια και στο διάγραμμα TEWMA- $\bar{X}$ , οι παράμετροι σχεδίασης είναι οι  $\lambda$  και  $L$ . Επειδή η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση και τα όρια ελέγχου είναι πολύπλοκα, τα χαρακτηριστικά του μήκους ροής υπολογίζονται μέσω προσομοιώσεων.

Χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και συγκρίνοντας το νέο διάγραμμα με τα διαγράμματα EWMA- $\bar{X}$ , DEWMA- $\bar{X}$  και GWMA- $\bar{X}$ , προκύπτει ότι το διάγραμμα TEWMA- $\bar{X}$  είναι πιο αποδοτικό από το EWMA- $\bar{X}$  σχεδόν σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων ( $0 < \delta \leq 3.00$ ), ενώ υπερσχύει και του διαγράμματος GWMA- $\bar{X}$  για μετατοπίσεις  $\delta \geq 0.10$ . Σε σχέση με το διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$  και για μικρές τιμές του  $\lambda$ , παρατηρούμε ότι το διάγραμμα TEWMA- $\bar{X}$  είναι πιο ευαίσθητο σε μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.25$ ), ενώ το διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$  είναι πιο ευαίσθητο σε μέτριες μετατοπίσεις ( $0.50 \leq \delta \leq 1.00$ ). Τα δύο διαγράμματα έχουν σχεδόν την ίδια απόδοση σε μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Επιπρόσθετα, συμπεραίνουμε ότι καθώς αυξάνεται η τιμή του  $\lambda$ , αυξάνεται και η υπεροχή του νέου διαγράμματος έναντι των υπολοίπων.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν κάνοντας χρήση των ορίων ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι διαφορετικά. Σε αυτήν την περίπτωση, ένα διάγραμμα GWMA- $\bar{X}$  με παραμέτρους  $g = 0.95$  και  $a \in [0.5, 0.8]$  είναι πιο ευαίσθητο στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων ( $\delta \leq 0.25$ ), ενώ το διάγραμμα EWMA- $\bar{X}$  αποδίδει ελαφρώς καλύτερα για μέτριες μετατοπίσεις ( $0.50 \leq \delta \leq 1.00$ ). Η απόδοση των διαγραμμάτων είναι παρόμοια για μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Ένα άλλο συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda$  για την

ανίχνευση συγκεκριμένης μετατόπισης μετακινείται σε υψηλότερες τιμές, καθώς χρησιμοποιούμε πιο πολύπλοκο σχήμα. Για παράδειγμα, η βέλτιστη τιμή  $\lambda$  για την ανίχνευση μίας μετατόπισης  $\delta = 1.25$  όταν χρησιμοποιούμε μεμονωμένες παρατηρήσεις ( $n = 1$ ) είναι 0.45 για ένα διάγραμμα TEWMA- $\bar{X}$ , 0.35 για ένα διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$  και 0.20 για ένα διάγραμμα EWMA- $\bar{X}$ .

Πέρα από τη σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου αναφορικά με την απόδοση τους, πραγματοποιούμε μία επιπρόσθετη μελέτη/σύγκριση σε σχέση με τη συμπεριφορά τους στην περίπτωση που ορισμένες τιμές της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης είναι κοντά στο ένα όριο ελέγχου, αλλά η μετατόπιση που προκύπτει είναι προς το άλλο όριο ελέγχου. Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται ως πρόβλημα αδράνειας (inertia problem). Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη μεθοδολογία που εφάρμοσαν οι Khoo και Teh (2009) για τη μελέτη του προβλήματος της αδράνειας στα άνω μονόπλευρα διαγράμματα CUSUM- $\bar{X}$  και EWMA- $\bar{X}$  με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, εισάγουμε αρχικές τιμές  $Y_0, Z_0, W_0$  και  $G_0$  στα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης ίσες με  $-0.2w, -0.4w, -0.6w$  και  $-0.8w$ , όπου  $w = \mu_0 - LCL$ . Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι (α) το πρόβλημα είναι λιγότερο έντονο, καθώς αυξάνεται η παράμετρος  $\lambda$  ή μειώνεται η παράμετρος  $q$  για το GWMA- $\bar{X}$  και (β) για ίδια τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  και για  $q = 1 - \lambda$ , το νέο διάγραμμα εμφανίζει πολύ καλύτερη συμπεριφορά σε σχέση με τα υπόλοιπα διαγράμματα.

Τέλος, μία άλλη ιδιότητα που μελετάμε είναι η ευρωστία του διαγράμματος ελέγχου, δηλαδή η ανθεκτικότητα ενός διαγράμματος ελέγχου στην παραβίαση της κανονικότητας των αρχικών παρατηρήσεων. Χρησιμοποιώντας λοιπόν δεδομένα από μη κανονικές κατανομές, υπολογίζουμε τις τιμές ARL για  $\lambda = 0.05, 0.10$  και  $0.25$ . Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το νέο διάγραμμα είναι αρκετά ανθεκτικό για τις τιμές  $\lambda = 0.05$  και  $0.10$ , καθώς η τιμή του  $ARL_0$  κυμαίνεται σε ένα εύρος  $\pm 7\%$  από την επιθυμητή τιμή. Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τα αποτελέσματα στην δεύτερη επιστημονική εργασία, προκύπτει ότι το διάγραμμα TEWMA- $\bar{X}$  είναι πιο εύρωστο από το διάγραμμα DEWMA- $\bar{X}$ , ενώ και τα δύο προαναφερόμενα διαγράμματα είναι αρκετά πιο εύρωστα από το διάγραμμα EWMA- $\bar{X}$ .

## 2.10 Διάγραμμα ελέγχου DHWMA- $\bar{X}$

Οι Abid et al. (2020) εισήγαγαν το διάγραμμα DHWMA- $\bar{X}$  προκειμένου να αυξήσουν την απόδοση του διαγράμματος HWMA- $\bar{X}$  σε μικρές μετατοπίσεις της μέσης τιμής. Η απεικονιζόμενη

στατιστική συνάρτηση που πρότειναν είναι η ακόλουθη

$$\begin{cases} H_i = \lambda \bar{X}_i + (1 - \lambda) \bar{\bar{X}}_{i-1}, \\ DH_i = \lambda H_i + (1 - \lambda) \bar{\bar{X}}_{i-1}, \end{cases} \quad (2.23)$$

όπου  $0 < \lambda \leq 1$  η παράμετρος εξομάλυνσης. Συνδυάζοντας τις δύο στατιστικές συναρτήσεις της (2.23) προκύπτει ότι

$$DH_i = \lambda^2 \bar{X}_i + (1 - \lambda^2) \bar{\bar{X}}_{i-1}. \quad (2.24)$$

Από τις εξισώσεις (2.17) και (2.24), παρατηρούμε ότι η στατιστική συνάρτηση  $DH_i$  έχει την ίδια μορφή με τη στατιστική συνάρτηση  $H_i$ , όπου η παράμετρος εξομάλυνσης είναι  $\lambda^2$  αντί  $\lambda$ . Τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος που πρότειναν είναι

$$UCL_i/LCL_i = \begin{cases} \mu_0 \pm L \frac{\lambda^2 \sigma_0}{\sqrt{n}} & , \text{ για } i = 1, \\ \mu_0 \pm L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{\lambda^4 + \frac{(1-\lambda^2)^2}{i-1}} & , \text{ για } i > 1, \end{cases} \quad CL = \mu_0,$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου. Είναι εμφανές λοιπόν ότι η απόδοση ενός διαγράμματος DHWMA- $\bar{X}$ , με τη μορφή που προτάθηκε από τους Abid et al. (2020) με παράμετρο εξομάλυνσης  $\lambda$  έχει την ίδια απόδοση με το διάγραμμα HWMA- $\bar{X}$  με παράμετρο εξομάλυνσης  $\lambda^2$ .

Οι Adeoti και Koleoso (2020) μελέτησαν τη σχεδίαση ενός υβριδικού HWMA- $\bar{X}$  (HHWMA- $\bar{X}$ ) διαγράμματος όπου όρισαν την απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση ως

$$\begin{cases} H_i = \lambda_2 \bar{X}_i + (1 - \lambda_2) \bar{\bar{X}}_{i-1}, \\ HH_i = \lambda_1 H_i + (1 - \lambda_1) \bar{\bar{H}}_{i-1}, \end{cases} \quad (2.25)$$

όπου  $0 < \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$ , ενώ η ποσότητα  $\bar{\bar{H}}_{i-1}$  είναι η μέση τιμή των  $i - 1$  στατιστικών συναρτήσεων  $H_i$ , δηλαδή

$$\bar{\bar{H}}_{i-1} = \frac{\sum_{k=1}^{i-1} H_k}{i-1}. \quad (2.26)$$

Οι Adeoti και Koleoso (2020) απέδειξαν ότι η εντός ελέγχου μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης  $HH_i$  είναι ίση με  $\mu_0$ , ενώ υπολόγισαν ότι η εντός ελέγχου τιμή της διασποράς είναι ίση με

$$Var(HH_i|IC) = \begin{cases} \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^2 \sigma_0^2}{n} & , \text{ για } i = 1, \\ \left[ (\lambda_1 \lambda_2)^2 + \frac{(\lambda_1(1-\lambda_2))^2}{i-1} + \frac{(\lambda_2(1-\lambda_1))^2}{i-1} + \frac{(1-\lambda_1)^2(1-\lambda_2)^2}{(i-1)^2} \right] \frac{\sigma_0^2}{n} & , \text{ για } i > 1. \end{cases}$$



Επισημαίνεται ότι η διασπορά που περιγράφεται από την παραπάνω εξίσωση δεν είναι σωστή, καθώς οι Adeoti και Koleoso (2020) θεώρησαν ότι η συνδυασπορά μεταξύ των στατιστικών συναρτήσεων  $H_i$  και  $\bar{H}_{i-1}$  είναι ίση με μηδέν. Προφανώς κάτι τέτοιο δεν ισχύει, αφού η στατιστική συνάρτηση  $H_i$  εξαρτάται από τις τιμές των δειγματικών μέσων  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_i$ , ενώ η στατιστική συνάρτηση  $\bar{H}_{i-1}$  εξαρτάται από τις τιμές των δειγματικών μέσων  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{i-1}$ .

Κατόπιν των ανωτέρω, θα αναπτύξουμε το διάγραμμα DHWMA- $\bar{X}$  εφαρμόζοντας την τεχνική DEWMA, όπως προτάθηκε από τους Shamma et al. (1991). Η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης στο νέο διάγραμμα είναι η ακόλουθη

$$\begin{cases} H_i = \lambda \bar{X}_i + (1 - \lambda) \bar{\bar{X}}_{i-1}, \\ DH_i = \lambda H_i + (1 - \lambda) \bar{H}_{i-1}, \end{cases} \quad (2.27)$$

όπου  $\bar{\bar{X}}_0 = \bar{H}_0 = \mu_0$  και η ποσότητα  $\bar{H}_{i-1}$  δίνεται από την εξίσωση (2.26). Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε την εντός ελέγχου μέση τιμή και διασπορά της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης.

- Για  $i = 1$ , έχουμε

$$DH_1 = \lambda H_1 + (1 - \lambda) \bar{H}_0 = \lambda^2 \bar{X}_1 + \lambda(1 - \lambda) \bar{\bar{X}}_0 + (1 - \lambda) \bar{H}_0 = \lambda^2 \bar{X}_1 + (1 - \lambda^2) \mu_0.$$

Έτσι λοιπόν, η εντός ελέγχου μέση τιμή της  $DH_1$  είναι ίση με

$$E(DH_1|IC) = E(\lambda^2 \bar{X}_1 + (1 - \lambda^2) \mu_0) = \lambda^2 E(\bar{X}_1) + (1 - \lambda^2) \mu_0 = \mu_0,$$

ενώ η εντός ελέγχου τιμή της διασποράς είναι

$$Var(DH_1|IC) = Var(\lambda^2 \bar{X}_1 + (1 - \lambda^2) \mu_0) = \lambda^4 Var(\bar{X}_1) = \frac{\lambda^4 \sigma_0^2}{n}.$$

- Για  $i = 2$ , έχουμε

$$\begin{aligned} DH_2 &= \lambda H_2 + (1 - \lambda) \bar{H}_1 = \lambda (\lambda \bar{X}_2 + (1 - \lambda) \bar{\bar{X}}_1) + (1 - \lambda) \bar{H}_1 \\ &= \lambda^2 \bar{X}_2 + \lambda(1 - \lambda) \bar{X}_1 + (1 - \lambda) (\lambda \bar{X}_1 + (1 - \lambda) \mu_0) \\ &= \lambda^2 \bar{X}_2 + 2\lambda(1 - \lambda) \bar{X}_1 + (1 - \lambda)^2 \mu_0. \end{aligned}$$

Η εντός ελέγχου μέση τιμή της  $DH_2$  είναι

$$\begin{aligned} E(DH_2|IC) &= E(\lambda^2 \bar{X}_2 + 2\lambda(1 - \lambda) \bar{X}_1 + (1 - \lambda)^2 \mu_0) \\ &= \lambda^2 E(\bar{X}_2) + 2\lambda(1 - \lambda) E(\bar{X}_1) + (1 - \lambda)^2 \mu_0 \\ &= (\lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2) \mu_0 = \mu_0, \end{aligned}$$

ενώ η εντός ελέγχου τιμή της διασποράς είναι

$$\begin{aligned}
Var(DH_2|IC) &= Var(\lambda^2\bar{X}_2 + 2\lambda(1-\lambda)\bar{X}_1 + (1-\lambda)^2\mu_0) \\
&= \lambda^4 Var(\bar{X}_2) + 4\lambda^2(1-\lambda)^2 Var(\bar{X}_1) \\
&= \lambda^2(\lambda^2 + 4(1-\lambda)^2) \frac{\sigma_0^2}{n}.
\end{aligned}$$

- Τέλος, για  $i > 2$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
DH_i &= \lambda H_i + (1-\lambda)\bar{H}_{i-1} = \lambda(\lambda\bar{X}_i + (1-\lambda)\bar{\bar{X}}_{i-1}) + \frac{1-\lambda}{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} H_k \\
&= \lambda^2\bar{X}_i + \lambda(1-\lambda)\bar{\bar{X}}_{i-1} + \frac{1-\lambda}{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} (\lambda\bar{X}_k + (1-\lambda)\bar{\bar{X}}_{k-1}) \\
&= \lambda^2\bar{X}_i + 2\lambda(1-\lambda)\bar{\bar{X}}_{i-1} + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} \bar{\bar{X}}_{k-1} \\
&= \lambda^2\bar{X}_i + 2\lambda(1-\lambda)\bar{\bar{X}}_{i-1} + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \sum_{k=0}^{i-2} \bar{\bar{X}}_k \\
&= \lambda^2\bar{X}_i + 2\lambda(1-\lambda)\bar{\bar{X}}_{i-1} + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \sum_{k=1}^{i-2} \bar{\bar{X}}_k + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \mu_0 \\
&= \lambda^2\bar{X}_i + 2\lambda(1-\lambda)\bar{\bar{X}}_{i-1} + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \sum_{k=1}^{i-2} \frac{1}{k} \sum_{u=1}^k \bar{X}_u + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \mu_0 \\
&= \lambda^2\bar{X}_i + 2\lambda(1-\lambda)\bar{\bar{X}}_{i-1} + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \sum_{u=1}^{i-2} \left( \sum_{k=u}^{i-2} \frac{1}{k} \right) \bar{X}_u + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \mu_0 \\
&= \lambda^2\bar{X}_i + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{i-1} \bar{\bar{X}}_{i-1} + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{i-1} \sum_{u=1}^{i-2} \bar{X}_u + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \sum_{u=1}^{i-2} \left( \sum_{k=u}^{i-2} \frac{1}{k} \right) \bar{X}_u + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \mu_0 \\
&= \lambda^2\bar{X}_i + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{i-1} \bar{\bar{X}}_{i-1} + \frac{(1-\lambda)}{i-1} \sum_{u=1}^{i-2} \left( 2\lambda + (1-\lambda) \sum_{k=u}^{i-2} \frac{1}{k} \right) \bar{X}_u + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \mu_0.
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, η εντός ελέγχου μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης  $DH_i$  είναι

$$\begin{aligned}
E(DH_i|IC) &= \lambda^2 E(\bar{X}_i) + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{i-1} E(\bar{X}_{i-1}) + \frac{1-\lambda}{i-1} \sum_{u=1}^{i-2} \left( 2\lambda + (1-\lambda) \sum_{k=u}^{i-2} \frac{1}{k} \right) E(\bar{X}_u) \\
&\quad + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \mu_0 \\
&= \left[ \lambda^2 + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{i-1} + \frac{2\lambda(1-\lambda)(i-2)}{i-1} + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \sum_{u=1}^{i-2} \left( \sum_{k=u}^{i-2} \frac{1}{k} \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{(1-\lambda)^2}{i-1} \right] \mu_0 \\
&= [\lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2] E(\bar{X}_i) = \mu_0,
\end{aligned}$$

ενώ η εντός ελέγχου τιμή της διασποράς είναι

$$Var(DH_i|IC) = \left[ \lambda^4 + \frac{4\lambda^2(1-\lambda)^2}{(i-1)^2} + \frac{(1-\lambda)^2}{(i-1)^2} \sum_{u=1}^{i-2} \left( 2\lambda + (1-\lambda) \sum_{k=u}^{i-2} \frac{1}{k} \right)^2 \right] \frac{\sigma_0^2}{n}.$$

Γενικεύοντας, έχουμε ότι η εντός ελέγχου μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης  $DH_i$  είναι ίση με  $\mu_0$  για κάθε  $i \geq 1$ , ενώ η εντός ελέγχου τιμή της διασποράς είναι ίση με

$$Var(DH_i|IC) = \begin{cases} \frac{\lambda^4 \sigma_0^2}{n} & , \text{ για } i = 1, \\ \lambda^2 (\lambda^2 + 4(1-\lambda)^2) \frac{\sigma_0^2}{n} & , \text{ για } i = 2, \\ \left[ \lambda^4 + \frac{4\lambda^2(1-\lambda)^2}{(i-1)^2} + \frac{(1-\lambda)^2}{(i-1)^2} \sum_{u=1}^{i-2} \left( 2\lambda + (1-\lambda) \sum_{k=u}^{i-2} \frac{1}{k} \right)^2 \right] \frac{\sigma_0^2}{n} & , \text{ για } i > 2. \end{cases} \quad (2.28)$$

Έτσι λοιπόν, τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος DHWMA- $\bar{X}$  είναι

$$UCL_i/LCL_i = \mu_0 \pm L\sqrt{Var(DH_i|IC)}, CL = \mu_0, \quad (2.29)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου. Τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned}
UCL &= \mu_0 + L \frac{\lambda^2 \sigma_0}{\sqrt{n}}, \\
LCL &= \mu_0 - L \frac{\lambda^2 \sigma_0}{\sqrt{n}}.
\end{aligned} \quad (2.30)$$

Ένα διάγραμμα DHWMA- $\bar{X}$  δίνει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου εάν  $DH_i \leq LCL_i$  ή  $DH_i \geq UCL_i$ , ενώ σε αντίθετη περίπτωση θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου.

Όπως και στην πλειοψηφία των διαγραμμάτων ελέγχου που αναφερθήκαμε προηγουμένως, οι παράμετροι σχεδίασης στο νέο διάγραμμα είναι οι  $\lambda$  και  $L$ , ενώ τα χαρακτηριστικά του μήκους ροής υπολογίζονται αποκλειστικά και μόνο μέσω προσομοιώσεων.

Χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και τιμές  $\lambda \in \{0.05, 0.09(0.01) 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.40, 0.50, 0.75\}$  σχεδιάζουμε διαγράμματα DHWMA- $\bar{X}$  με  $ARL_0 = 500$  για μεμονωμένες παρατηρήσεις που ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή, όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου και υπολογίζουμε τις τιμές ARL, MRL και SDRL. Από τα αποτελέσματα είναι εμφανές ότι η απόδοση του διαγράμματος είναι καλύτερη για μικρές τιμές του  $\lambda$ , η οποία όμως συνοδεύεται από μεγάλες τιμές  $SDRL_0$  και μικρές τιμές  $MRL_0$ , καθιστώντας την κατανομή του μήκους ροής αρκετή λοξή προς τα δεξιά. Συγκεκριμένα, η τιμή του  $SDRL_0$  είναι αρκετά υψηλή για  $\lambda = 0.05$  (1744.80), φθίνει μέχρι την τιμή  $\lambda = 0.25$  (346.33) κι εν συνεχεία αυξάνεται δίχως να υπερβεί την τιμή του  $ARL_0$ . Όσον αφορά την τιμή του  $MRL_0$ , λαμβάνει πάρα πολύ χαμηλή τιμή για  $\lambda = 0.05$  (4), στη συνέχεια αυξάνεται έως  $\lambda = 0.20$  (459) κι έπειτα φθίνει. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι υψηλές τιμές  $SDRL_0$  έχουν ως αποτέλεσμα υψηλή διασπορά στην κατανομή του εντός ελέγχου μήκους ροής με αποτέλεσμα την αναξιοπιστία των αποτελεσμάτων αναφορικά με την αποδοτικότητα των διαγραμμάτων (Chan και Zang 2000), εισηγούμαστε τη χρήση του διαγράμματος DHWMA- $\bar{X}$  για τιμές  $\lambda \geq 0.14$ , όταν τα δείγματα είναι μεγέθους  $n = 1$ .

Κατόπιν σύγκρισης του διαγράμματος DHWMA- $\bar{X}$  με άλλα διαγράμματα ελέγχου με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου παρατηρούμε ότι το νέο διάγραμμα με τιμή  $\lambda = 0.14$  ή  $0.15$  είναι αρκετά πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα CUSUM- $\bar{X}$ , EWMA- $\bar{X}$ , GWMA- $\bar{X}$  και HWMA- $\bar{X}$  σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων ( $0 < \delta \leq 3.00$ ), ενώ υπερिशύει του διαγράμματος DEWMA- $\bar{X}$  για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.25$ ).

Στη συνέχεια, μελετάμε την ευρωστία του διαγράμματος DHWMA- $\bar{X}$  χρησιμοποιώντας διάφορες μη κανονικές κατανομές και τη συγκρίνουμε με αυτή άλλων διαγραμμάτων. Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι το νέο διάγραμμα είναι πιο εύρωστο για μικρές τιμές του  $\lambda$ . Επιπλέον, έχει καλύτερες ιδιότητες ευρωστίας σε σχέση με το διάγραμμα HWMA- $\bar{X}$  για όλες τις μη κανονικές κατανομές που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς επίσης και έναντι των διαγραμμάτων CUSUM- $\bar{X}$  και GWMA- $\bar{X}$  αποκλειστικά και μόνο όταν η πραγματική κατανομή των μεμονωμένων παρατηρήσεων είναι η γάμμα. Σε όλες τις άλλες κατανομές, τα δύο προαναφερθέντα διαγράμματα είναι πιο εύρωστα από το νέο. Τέλος, τα διαγράμματα EWMA- $\bar{X}$  και DEWMA- $\bar{X}$  είναι αρκετά πιο εύρωστα από το διάγραμμα DHWMA- $\bar{X}$ .

Τα παραπάνω αποτελέσματα δημοσιεύτηκαν στην τέταρτη επιστημονική εργασία. Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι Malela-Majika et al. (2021) μελέτησαν εκ νέου το διάγραμμα  $HHWMA-\bar{X}$  που προτάθηκε από τους Adeoti και Koleoso (2021) διόρθωντας το λάθος στη διασπορά της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης  $HH_i$ . Η συγκεκριμένη εργασία όμως δημοσιεύτηκε και όπως φαίνεται εκπονήθηκε ύστερα από την τέταρτη επιστημονική εργασία, στην οποία δημοσιεύτηκαν τα αποτελέσματα αυτού του υποκεφαλαίου.

## 2.11 Κριτήρια για την επιλογή ενός διαγράμματος ελέγχου

Όπως αναφέραμε στο υποκεφάλαιο 2.1, τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewart είναι τα πιο δημοφιλή διαγράμματα εξαιτίας της απλότητας στην κατασκευή τους, αλλά και της ικανότητάς τους να ανιχνεύουν γρήγορα μεγάλες μετατοπίσεις. Όμως, σε υψηλής ποιότητας διεργασίας, μας ενδιαφέρει συνήθως η γρήγορη ανίχνευση μίας μικρής μετατοπίσης στην κρίσιμη ποσότητα ενός χαρακτηριστικού  $X$ . Γι' αυτό τον λόγο, αναπτύχθηκαν τα διαγράμματα CUSUM και EWMA, τα οποία λαμβάνουν υπ' όψιν όχι μόνο την τρέχουσα παρατήρηση, αλλά και τις παρελθοντικές, με αποτέλεσμα να έχουν πολύ καλή απόδοση στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Στην προσπάθεια βελτίωσης της ανιχνευτικής ικανότητας αυτών των διαγραμμάτων σε μικρές μετατοπίσεις, προτάθηκαν διάφορες τροποποιήσεις ή βελτιώσεις τους, ορισμένες από τις οποίες αναλύσαμε στο παρόν κεφάλαιο. Ως εκ τούτου, είναι εύλογο να διερωτάται κανείς πιο είναι το καταλληλότερο διάγραμμα ελέγχου. Στο σημείο αυτό, η απάντηση ίσως είναι ότι δεν υπάρχει κάποιο βέλτιστο διάγραμμα ελέγχου, αλλά το κάθε ένα έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά του.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι δεν πρέπει να θεωρείται ως βέλτιστο κριτήριο για την επιλογή ενός διαγράμματος ελέγχου μόνο η μικρότερη τιμή  $ARL_1$  σε μία συγκεκριμένη μετατόπιση ή σε ένα εύρος μετατοπίσεων, αλλά θα πρέπει να συνυπολογίζονται και άλλα κριτήρια, όπως η επίδραση που έχει σε ένα διάγραμμα ελέγχου το πρόβλημα της αδράνειας (effect of inertia problem), η ευρωστία (robustness), η χρονική στιγμή εμφάνισης της μετατοπίσης, καθώς επίσης και το εάν οι παράμετροι της κατανομής είναι γνωστοί ή πρέπει να υπολογιστούν από ένα δείγμα αναφοράς.

Παρόλο που αρκετοί συγγραφείς υποστηρίζουν ότι τα διαγράμματα CUSUM και EWMA είναι ισοδύναμα ιδιαίτερα όταν σχεδιάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι βέλτιστα στην ανίχνευση συγκεκριμένου μεγέθους μίας μετατόπισης, τα εν λόγω διαγράμματα έχουν διαφορετική συμπεριφορά και ιδιότητες στα κριτήρια που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Ενώ το διάγραμμα EWMA είναι πιο εύκολο στον σχεδιασμό του σε σχέση με το διάγραμμα CUSUM, εντούτοις επηρεάζεται

περισσότερο από το πρόβλημα της αδράνειας, ιδιαίτερα για μικρές τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda$  (Woodall και Mahmoud 2005, Khoo και Teh 2009). Ένας τρόπος επίλυσης αυτού του προβλήματος είναι η χρήση πολυπλοκότερων διαγραμμάτων ελέγχου, όπως τα διαγράμματα DEWMA και TEWMA, τα οποία έχουν καλύτερες αδρανειακές ιδιότητες. Από την άλλη, όπως προκύπτει από την δεύτερη επιστημονική εργασία, ένα διάγραμμα GWMA με παραμέτρους  $q = 1 - \lambda$  και  $a = 0.8$  εμφανίζει χειρότερη αδρανειακή συμπεριφορά σε σχέση με ένα διάγραμμα EWMA με παράμετρο  $\lambda$ . Η συμπεριφορά των διαγραμμάτων DGWMA, HWMA και DHWMA στο πρόβλημα της αδράνειας δεν έχει μελετηθεί αναλυτικά μέχρι στιγμής, εκτιμάται όμως ότι το διάγραμμα DGWMA θα έχει καλύτερη συμπεριφορά στο εν λόγω πρόβλημα σε σχέση με το διάγραμμα GWMA λόγω της τεχνικής DEWMA στην οποία βασίζεται η δομή του.

Αναφορικά με την ευρωστία των διαγραμμάτων ελέγχου, δηλαδή την ικανότητά τους στο να παραμένουν ανθεκτικά στην παραβίαση της κανονικότητας, σύμφωνα με τους Borror et al. (1999) και Human et al. (2011), ένα διάγραμμα EWMA είναι αρκετά εύρωστο για μικρές τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ , ενώ η ιδιότητά του αυτή χάνεται, καθώς αυξάνεται η τιμή. Αντίθετα, τα διαγράμματα ελέγχου DEWMA και TEWMA παρουσιάζουν καλύτερες ιδιότητες ευρωστίας από το διάγραμμα EWMA. Επιπρόσθετα, ενώ τα διαγράμματα HWMA και DHWMA έχουν καλύτερη απόδοση από πολλά άλλα διαγράμματα ελέγχου, ιδιαίτερα σε μικρές μετατοπίσεις της μέσης τιμής, υστερούν σε ανθεκτικότητα έναντι της παραβίασης της κανονικότητας.

Ένα άλλο πλεονέκτημα του διαγράμματος CUSUM έναντι των υπολοίπων διαγραμμάτων, πέρα της δυνατότητας να αποκτήσουμε μία εκτίμηση του νέου μέσου της διεργασίας που έχει προκύψει από μία μετατόπιση, αλλά και της καλής αδρανειακής συμπεριφοράς του, είναι η δυνατότητα ανίχνευσης της χρονικής περιόδου που άρχισε να εμφανίζεται η μετατόπιση μέσω του υπολογισμού των ποσοτήτων  $N^+$  και  $N^-$ .

Σημαντικό ρόλο στην απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου παίζει η χρονική στιγμή που συμβαίνει η μετατόπιση. Εάν η μετατόπιση συμβαίνει στην αρχή (zero-state), τότε σύμφωνα με τους Hawkins και Wu (2014), το διάγραμμα EWMA υπερέχει έναντι του διαγράμματος CUSUM ανεξάρτητα του μεγέθους της μετατόπισης. Το αυτό ισχύει και για τα υπόλοιπα διαγράμματα ελέγχου που αναφερθήκαμε προηγουμένως αναλόγως όμως του μεγέθους της μετατόπισης. Γενικά, τα διαγράμματα ελέγχου με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου χρησιμοποιούνται όταν υπάρχει υπόνοια ότι η μετατόπιση συμβαίνει στην αρχή της διεργασίας (Steiner 1999). Εάν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου στην αρχή και η μετατόπιση συμβαίνει έπειτα από ορισμένο χρονικό διάστημα (steady-state), τότε είθισται να χρησιμοποιούμε τα όρια ελέγχου σταθερές

κατάστασης και σε αυτήν την περίπτωση η επιλογή των παραμέτρων σχεδίασης πρέπει να γίνεται με προσεκτικό τρόπο, καθώς ένα διάγραμμα που είναι βέλτιστο για μία μικρή μετατόπιση δεν θα ανιχνεύσει έγκαιρα μία μέτρια ή μεγάλη μετατόπιση. Για παράδειγμα, το διάγραμμα TEWMA- $\bar{X}$  ( $\lambda = 0.05, L = 1.781$ ) με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης έχει  $ARL_1=213.21$  και  $18.85$  για  $\delta = 0.05$  και  $1.00$ , αντίστοιχα, όταν το μέγεθος του δείγματος είναι  $n = 5$ . Από την άλλη, εάν χρησιμοποιήσουμε τιμές παραμέτρων ( $\lambda = 0.75, L = 3.051$ ), τότε έχουμε  $ARL_1=2.94$  για μετατόπιση  $\delta = 1.00$ .

Ένα άλλο κριτήριο που επίσης πρέπει να λαμβάνουμε σοβαρά υπ' όψιν τόσο κατά τον σχεδιασμό ενός διαγράμματος, όσο και κατά τη σύγκριση διαφορετικών διαγραμμάτων ελέγχου είναι η τιμή  $SDRL_0$ . Είναι κοινά αποδεκτό ότι προκειμένου να εξάγουμε ορθά συμπεράσματα από τη σύγκριση διαφορετικών διαγραμμάτων ελέγχου, η επιλογή των παραμέτρων σχεδίασης πρέπει να γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε τα διαγράμματα να έχουν ίδια ή παρόμοια τιμή  $ARL_0$ . Σύμφωνα όμως, με τους Chan και Zhang (2000), χρησιμοποιώντας μόνο αυτό το κριτήριο μπορεί να οδηγηθούμε στο σχεδιασμό διαγραμμάτων με υψηλή τιμή  $SDRL_0$ , η οποία έχει ως απόρροια υψηλή πιθανότητα ένδειξης ψευδούς ένδειξης ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Γι' αυτό το λόγο πρότειναν κατά το σχεδιασμό ενός διαγράμματος, να χρησιμοποιούνται παράμετροι σχεδίασης, οι οποίοι δίνουν τιμή  $SDRL_0$  μικρότερη ή ίση από την τιμή  $ARL_0$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι ορισμένοι συγγραφείς, όπως για παράδειγμα οι Sheu και Hsieh (2009) σύγκριναν διαφορετικά διαγράμματα σχεδιάζοντας τα με τέτοιο τρόπο ούτως ώστε αυτά να έχουν ίδιες ή παραπλήσιες τιμές  $ARL_0$  και  $SDRL_0$ .

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα ελέγχου που περιγράψαμε προηγουμένως, πέρα των CUSUM και EWMA, έχουν κατακριθεί από τους Knoth et al. (2021), Knoth, Woodall και Tercero-Gómez (2022) και Knoth, Saleh, Mahmoud, Woodall και Tercero-Gómez (2022), υποστηρίζοντας ότι έχουν καλή απόδοση μόνο όταν η μετατόπιση συμβαίνει στην αρχή της διεργασίας. Επίσης, οι Knoth, Mahmoud, Saleh, Tercero-Gómez και Woodall (2022) παρουσίασαν πολύ συνοπτικά τα μειονεκτήματα που εκτιμούν αυτοί ότι έχουν τα διαγράμματα ελέγχου που αναφέραμε προηγουμένως.

Οι Knoth, Woodall και Tercero-Gómez (2022) υποστηρίζουν ότι το διάγραμμα GWMA δεν πρέπει να χρησιμοποιείται για διάφορους λόγους τους οποίους συνοπτικά θα σχολιάσουμε στη συνέχεια.

Κατ' αρχάς θεωρούν ότι η έλλειψη αναδρομικού τύπου εξίσωσης για την απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση έχει ως αποτέλεσμα την αποθήκευση όλων των δεδομένων και τη συνεχή χρησιμοποίησή τους για τον υπολογισμό των στατιστικών συναρτήσεων. Επιπλέον, αναφέρουν

ότι δεν μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των μαρκοβιανών αλυσίδων για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών μεγεθών του μήκους ροής κι έτσι ο χρήστης οδηγείται στη μέθοδο των προσομοιώσεων. Βέβαια, τη σημερινή εποχή, οι περισσότεροι ενασχολούμενοι στο χώρο του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι εξοικειωμένοι με τη μέθοδο των προσομοιώσεων κι έτσι, τα ανωτέρω επιχειρήματα δεν μπορούν να αποτρέψουν κάποιον στο να χρησιμοποιήσει το διάγραμμα GWMA.

Στη συνέχεια, συγκρίνουν ορισμένα διαγράμματα GWMA και EWMA χρησιμοποιώντας ως κριτήριο την ισότητα των ασυμπτωτικών τιμών της διασποράς των απεικονιζόμενων στατιστικών συναρτήσεων θεωρώντας ότι έτσι επιτυγχάνεται ίδιο βάρος στις παρελθοντικές παρατηρήσεις. Η συγκεκριμένη μέθοδος δεν έχει εντοπιστεί σε άλλα άρθρα. Πιο συγκεκριμένα, συγκρίνουν τα διαγράμματα EWMA με παραμέτρους  $\lambda = 0.152$  και  $0.206$  με τα διαγράμματα GWMA με παραμέτρους  $q = 0.75$  και  $a = 0.5, 0.75, 0.8, 0.9$  χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και μεμονομένες παρατηρήσεις. Η σύγκριση δείχνει την υπεροχή του διαγράμματος EWMA με  $\lambda = 0.152$  έναντι των διαγραμμάτων GWMA σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων, καθώς επίσης και την υπεροχή του διαγράμματος EWMA με  $\lambda = 0.206$  για μετατοπίσεις  $\delta \geq 0.75$ . Επισημαίνουμε ότι τα ανωτέρω διαγράμματα έχουν  $ARL_0$  και  $SDRL_0$  περίπου ίσα με 500, όπως επίσης και το διάγραμμα GWMA ( $q = 0.85, a = 0.9, L = 2.9265$ ). Όμως, το τελευταίο διάγραμμα έχει πολύ καλύτερη απόδοση από τα προαναφερθέντα διαγράμματα EWMA σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Τέλος, σε όλες τις εργασίες που μελετάται το διάγραμμα GWMA με χρήση είτε χρονικών μεταβαλλόμενων είτε σταθερής κατάστασης ορίων ελέγχου αποδεικνύεται η υπεροχή αυτού του διαγράμματος έναντι του διαγράμματος EWMA. Άλλωστε το τελευταίο διάγραμμα αποτελεί μία ειδική περίπτωση του διαγράμματος GWMA όταν οι παράμετροι  $q$  και  $a$  είναι ίσοι με  $1 - \lambda$  και  $1$ , αντίστοιχα.

Οι Knoth et al. (2021) χρησιμοποιώντας ίδια περίπου επιχειρηματολογία και το κριτήριο περί ίσων ασυμπτωτικών τιμών της διασποράς, υποστηρίζουν ότι το διάγραμμα HWMA δεν πρέπει να χρησιμοποιείται στην πράξη θεωρώντας ότι το διάγραμμα EWMA έχει καλύτερη απόδοση. Για παράδειγμα, το διάγραμμα EWMA ( $\lambda = 0.02, L = 2.353$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα HWMA ( $\lambda = 0.10, L = 2.940$ ). Ο ισχυρισμός τους είναι μεν σωστός, αλλά το μεν πρώτο έχει  $SDRL_0 = 558.34$ , ενώ το δεύτερο 408.32. Συγκρίνοντας, λοιπόν, το εν λόγω διάγραμμα HWMA με διαγράμματα EWMA με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και τιμές  $SDRL_0$  μικρότερες ή ίσες από 500, διαπιστώνουμε την υπεροχή του HWMA σε όλες τις μετατοπίσεις για την περίπτωση όπου η μετατόπιση ξεκινάει στην αρχή της διεργασίας. Τέλος, οι Knoth, Saleh, Mahmoud, Woodall και Tercero-Gómez (2022) χρησιμοποιούν την ίδια μεθοδολογία για να δείξουν ότι το



διάγραμμα EWMA υπερέρχει έναντι των διαγραμμάτων DEWMA και TEWMA.

Γενικεύοντας τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τις παραπάνω τρεις εργασίες που ασκούν κριτική επί των τροποποιήσεων/βελτιώσεων του διαγράμματος EWMA, παρατηρούμε ότι κατ' αρχάς οι συγγραφείς συγκρίνουν διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου των οποίων οι παράμετροι σχεδιασμού ( $\lambda, q, a$ ) προκύπτουν εξισώνοντας τις τιμές των ασυμπτωτικών διασπορών των στατιστικών συναρτήσεων. Επιπλέον, η σύγκριση διαφορετικών διαγραμμάτων ελέγχου γίνεται υπό μία καθορισμένη τιμή  $ARL_0$  χωρίς να λαμβάνουν υπ' όψιν άλλα χαρακτηριστικά του μήκους ροής. Οι συγγραφείς καταλήγουν στο γενικό συμπέρασμα ότι ένα διάγραμμα EWMA με κατάλληλες παραμέτρους σχεδίασης δύναται να είναι πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα GWMA, HWMA, DEWMA και TEWMA τόσο για zero-state όσο και steady-state καταστάσεις.

Στην έβδομη επιστημονική εργασία παρουσιάζονται τρεις περιπτώσεις όπου το διάγραμμα EWMA συγκρίνεται με τα διαγράμματα (α) GWMA, (β) DEWMA, TEWMA και QEWM (στο εν λόγω διάγραμμα χρησιμοποιούνται τέσσερις κινητοί μέσοι με εκθετικά βάρη, Alevizakos et al. 2022) και (γ) HWMA. Οι παράμετροι σχεδιασμού των διαγραμμάτων ελέγχου επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ούτως ώστε τα διαγράμματα να έχουν σχεδόν τις ίδιες ιδιότητες επί της εντός ελέγχου κατανομής του μήκους ροής, ήτοι παραπλήσιες τιμές  $ARL_0$ ,  $SDRL_0$ , 5 $\sigma$ , 25 $\sigma$ , 50 $\sigma$ , 75 $\sigma$ , 95 $\sigma$  ποσοστιαία σημεία, καθώς και πιθανότητες  $P(RL \leq 25)$ . Από τα αποτελέσματα προκύπτει το συμπέρασμα ότι τα διαγράμματα GWMA, DEWMA, TEWMA και QEWM με κατάλληλες παραμέτρους σχεδίασης είναι πιο αποδοτικά από το διάγραμμα EWMA για μικρές και υπό προϋποθέσεις μέτριες μετατοπίσεις τόσο στην zero-state, όσο και στην steady-state κατάσταση. Αναφορικά με το διάγραμμα HWMA, αυτό έχει καλύτερη απόδοση από το διάγραμμα EWMA για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις στην zero-state κατάσταση, όμως έχει πολύ κακή απόδοση στην steady-state κατάσταση. Επιπρόσθετα, τα διαγράμματα GWMA, DEWMA, TEWMA και QEWM έχουν καλύτερες ιδιότητες ευρωστίας από τα διαγράμματα EWMA και HWMA. Ένα άλλο συμπέρασμα που προέκυψε από την εν λόγω εργασία είναι ότι τα διαγράμματα GWMA και DEWMA εμφανίζουν καλύτερες αδρανειακές ιδιότητες από ότι το διάγραμμα EWMA.

Εν κατακλείδι, το βασικό συμπέρασμα αυτού του υποκεφαλαίου είναι ότι κατά την επιλογή ενός διαγράμματος ελέγχου για την απεικόνιση μίας διεργασίας θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψιν πέρα από την απόδοσή τους και άλλα κριτήρια, όπως το πρόβλημα αδράνειας, η ευρωστία, η γνώση παραμέτρων της κατανομής εκ των προτέρων, καθώς και τυχόν υπόδειξη για εμφάνιση της μετατόπισης στην αρχή. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, εάν για παράδειγμα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα EWMA με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης και υπάρχει υπόνοια

για παραβίαση της κανονικότητας της κατανομής, τότε ίσως είναι προτιμότερο να σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα TEWMA, το οποίο μπορεί μεν να υστερεί στην απόδοση, όμως είναι περισσότερο εύρωστο.

## 2.12 Ανακεφαλαίωση

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε ορισμένα από τα πιο διαδεδομένα διαγράμματα ελέγχου για την απεικόνιση μετατοπίσεων στη μέση τιμή μίας διεργασίας της οποίας το ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει ακολουθεί την κανονική κατανομή και η διασπορά παραμένει σταθερή κι εντός ελέγχου. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάσαμε τη δομή των ήδη γνωστών διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart- $\bar{X}$ , CUSUM- $\bar{X}$ , EWMA- $\bar{X}$ , DEWMA- $\bar{X}$ , GWMA- $\bar{X}$ , DGWMA- $\bar{X}$  και HWMA- $\bar{X}$ , καθώς επίσης εισάγαμε και δύο νέα διαγράμματα ελέγχου: το TEWMA- $\bar{X}$  και το DHWMA- $\bar{X}$ . Πέρα από τη δομή των εν λόγω διαγραμμάτων, περιγράψαμε συνοπτικά την απόδοσή τους για διάφορες τιμές των παραμέτρων σχεδίασης, καθώς επίσης αναφερθήκαμε και στα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα καθενός από αυτά. Τα διαγράμματα DEWMA- $\bar{X}$ , DGWMA- $\bar{X}$  και DHWMA- $\bar{X}$  εμφανίζονται πιο αποδοτικά από τα διαγράμματα EWMA- $\bar{X}$ , GWMA- $\bar{X}$  και HWMA- $\bar{X}$  αντίστοιχα σε συγκεκριμένα εύρη μετατοπίσεων όταν σχεδιάζονται με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η μετατόπιση εμφανίζεται στην αρχή της διεργασίας. Είναι σημαντικό η σύγκριση διαφορετικών διαγραμμάτων ελέγχου να μη γίνεται μόνο υπό μία καθορισμένη τιμή  $ARL_0$ , αλλά να λαμβάνονται υπ' όψιν και άλλα χαρακτηριστικά της εντός ελέγχου κατανομής του μήκους ροής (κατ' ελάχιστον η τιμή  $SDRL_0$ ) προκειμένου να μη προβούμε σε λανθασμένα συμπεράσματα. Τέλος, περιγράψαμε τα κριτήρια που πρέπει να λαμβάνει κανείς υπ' όψιν κατά την επιλογή ενός διαγράμματος. Αξίζει να σημειωθεί, ότι σε αυτό το κεφάλαιο συζητήσαμε για παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, τα οποία με κατάλληλες τροποποιήσεις θα αποτελέσουν τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, τα οποία θα περιγράψουμε στα επόμενα δύο κεφάλαια.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

---

## Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής στατιστικής συνάρτησης

---

### 3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρουσιάσαμε τη δομή και τις ιδιότητες ορισμένων διαγραμμάτων ελέγχου για την ανίχνευση μετατόπισης στη μέση τιμή ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού ενδιαφέροντος υποθέτοντας ότι αυτό ακολουθεί την κανονική κατανομή. Σε πολλές διεργασίες, όμως, υπάρχουν ελάχιστες πληροφορίες αναφορικά με την κατανομή του χαρακτηριστικού ενδιαφέροντος και ως εκ τούτου, η χρήση παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα για την κατάσταση της διεργασίας, σύμφωνα με τους Chakraborti και Graham (2019a). Στο πλαίσιο αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος, αναπτύχθηκαν τα μη παραμετρικά ή ελεύθερης κατανομής διαγράμματα ελέγχου, των οποίων οι ιδιότητες δεν εξαρτώνται από την κατανομή που ακολουθεί το χαρακτηριστικό ενδιαφέροντος. Επισημαίνεται ότι ο όρος **μη παραμετρικά** δεν δηλώνει την απουσία παραμέτρων κατά τον σχεδιασμό του διαγράμματος ελέγχου, αλλά τη μη εξάρτησή του από τις παραμέτρους της κατανομής. Για την ανάπτυξη των εν λόγω διαγραμμάτων χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές συμπερασματολογίας που αντιμετωπίζουν το πρόβλημα του ελέγχου υποθέσεων όταν η κατανομή δεν είναι γνωστή. Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου για την ανίχνευση μετατοπίσεων στην παράμετρο θέσης έναντι των αντίστοιχων παραμετρικών είναι ότι κατ' αρχάς δεν απαιτείται καμία απολύτως γνώση για την κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού ενδιαφέροντος και κατά δεύτερον, δεν χρειάζεται να είναι γνωστή η διακύμανση της διεργασίας.

Υπάρχουν δύο είδη στατιστικών συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται για τα μη παραμετρικά διαγράμματα Φάσης I: (α) η προσημική στατιστική συνάρτηση (sign test statistic), όπου απαιτείται μόνο η υπόθεση της συνέχειας για την κατανομή της υπό μελέτης διεργασίας και (β) η

προσημική-βαθμολογική στατιστική συνάρτηση (signed-rank statistic), όπου απαιτείται και η υπόθεση της συμμετρίας της κατανομής. Η προσημική στατιστική συνάρτηση είναι η διαφορά των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες από μία τιμή στόχο και των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από αυτήν, ενώ η συνήθης προσημική στατιστική (usual sign statistic) μετράει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες από την τιμή στόχο. Αυτές οι δύο στατιστικές συναρτήσεις σχετίζονται άμεσα μεταξύ τους, όπως θα αναλύσουμε στο επόμενο υποκεφάλαιο, και έχουν αναπτυχθεί μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται και στα δύο είδη των εν λόγω προσημικών συναρτήσεων.

Στη συνέχεια, θα παραθέσουμε μία συνοπτική παρουσίαση της βιβλιογραφίας που αφορά τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής στατιστικής συνάρτησης για την ανίχνευση μετατοπίσεων στην παράμετρο θέσης.

Το πρώτο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου προτάθηκε από τους McGilchrist και Woodyer (1975) και αφορά ένα διάγραμμα τύπου CUSUM για την ανίχνευση μετατοπίσεων μίας διεργασίας που σχετίζεται με την βροχόπτωση. Έπειτα, οι Amin et al. (1995) μελέτησαν διαγράμματα τύπου Shewhart και CUSUM με χρήση της προσημικής στατιστικής συνάρτησης, ενώ οι Khilare και Shirke (2010) παρουσίασαν ένα συνθετικό μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart-SN. Οι Yang και Cheng (2011) και Yang et al. (2011) μελέτησαν διαγράμματα τύπου CUSUM και EWMA με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης (εφεξής θα αναφέρονται ως διαγράμματα CUSUM-SN και EWMA-SN, αντίστοιχα), ενώ οι Graham et al. (2011a) μελέτησαν το διάγραμμα EWMA-SN για δεδομένα όπου το μέγεθος δείγματος είναι ίσο με  $n = 1$ . Ο Lu (2015) παρουσίασε το μη παραμετρικό διάγραμμα GWMA με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης (GWMA-SN), το οποίο βρέθηκε να είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα EWMA-SN για μικρές μετατοπίσεις. Έπειτα, οι Riaz και Abbasi (2016) μελέτησαν ένα μη παραμετρικό διάγραμμα τύπου DEWMA χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό τόξου ημιτόνου στη συνήθη προσημική στατιστική συνάρτηση, το οποίο βρέθηκε να έχει καλύτερη απόδοση από τα διαγράμματα CUSUM-SN και EWMA-SN. Το ίδιο διάγραμμα ελέγχου, αλλά δίχως τον μετασχηματισμό στη συνήθη προσημική στατιστική συνάρτηση, μελετήθηκε αργότερα από τους Raza et al. (2022), οι οποίοι το βρήκαν πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα CUSUM-SN και EWMA-SN, ιδιαίτερα στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Οι Celano et al. (2016) μελέτησαν το διάγραμμα Shewhart με χρήση της προσημικής στατιστικής συνάρτησης για πληθυσμούς με μικρό δείγμα, ενώ οι Abbasi et al. (2018) μελέτησαν ένα μη παραμετρικό διάγραμμα τύπου MEC με χρήση του μετασχηματισμού του τόξου ημιτόνου στη συνήθη προσημική

στατιστική συνάρτηση (MEC-SN) προκειμένου να βελτιώσουν την ανιχνευτική ικανότητα των αντίστοιχων διαγραμμάτων τύπου CUSUM και EWMA σε μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Ο Lu (2018) παρουσίασε το διάγραμμα DGWMA με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης (DGWMA-SN) προκειμένου να αυξήσει την ευαισθησία του διαγράμματος GWMA-SN σε μικρές μετατοπίσεις. Ο Haq (2019) πρότεινε ένα συνθετικό διάγραμμα τύπου EWMA με χρήση του μετασχηματισμού του τόξου ημιτόνου στη συνήθη προσημική στατιστική συνάρτηση προκειμένου να βελτιώσει την ευαισθησία του διαγράμματος EWMA-SN. Οι Castagliola et al. (2019) πρότειναν μία παραλλαγή του διαγράμματος EWMA με χρήση της προσημικής στατιστικής συνάρτησης, όπου τα βάρη των παρελθοντικών παρατηρήσεων είναι φυσικοί αριθμοί, ενώ η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση είναι ακέραιος αριθμός (αναφέρεται ως CEWMA-SN). Το συγκεκριμένο διάγραμμα βρέθηκε πιο ικανοποιητικό από τα διαγράμματα CUSUM-SN, EWMA-SN και GWMA-SN, ιδιαίτερα για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Στη συνέχεια, οι Tang et al. (2019) παρουσίασαν μία παραλλαγή του διαγράμματος CEWMA-SN χρησιμοποιώντας το σχήμα AEWMA (αναφέρεται ως AEWMA-SN), το οποίο υπερισχύει των διαγραμμάτων EWMA-SN, GWMA-SN και CEWMA-SN σε ορισμένα εύρη των μετατοπίσεων. Οι Raza, Nawaz και Han (2020) μελέτησαν το διάγραμμα HWMA με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης (HWMA-SN), το οποίο και βρέθηκε πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα CUSUM-SN και EWMA-SN. Πρόσφατα, οι Godase και Mahadik (2022) μελέτησαν το διάγραμμα Shewhart-CUSUM χρησιμοποιώντας τη συνήθη προσημική στατιστική συνάρτηση, το οποίο έχει απόδοση που κυμαίνεται μεταξύ των αποδόσεων των διαγραμμάτων Shewhart-SN και CUSUM-SN. Μία συνοπτική περιγραφή των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου Φάσης I και II παρέχεται από τους Chakraborti et al. (2001) και Chaktaborti και Graham (2019a), ενώ οι Chakraborti και Graham (2019b) και Koutras και Triantafyllou (2020) παρέχουν μία εκτενή ανάλυση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου. Τέλος, οι Triantafyllou και Ram (2021a,b) παρουσιάζουν μια εκτενή αναφορά σε διάφορα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στα σχήματα CUSUM και EWMA.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε τις ιδιότητες των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart-SN, CUSUM-SN, EWMA-SN, DEWMA-SN, GWMA-SN, DGWMA-SN και HWMA-SN και θα εισάγουμε δύο νέα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης τα οποία βασίζονται στα σχήματα TEWMA και DHWMA (αναφέρονται ως TEWMA-SN και DHWMA-SN, αντίστοιχα). Επιπρόσθετα, θα συγκρίνουμε τις αποδόσεις των ανωτέρω διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιώντας χρονικά μετα-

βαλλόμενα και σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου.

### 3.2 Η προσημική στατιστική συνάρτηση

Ας υποθέσουμε ότι  $X$  είναι το ποιοτικό χαρακτηριστικό που παρακολουθούμε σε μία διεργασία, το οποίο ακολουθεί μία άγνωστη και συνεχής κατανομή με παράμετρο θέσης  $\theta$ , η οποία συνηθίζεται να είναι η διάμεσος της διεργασίας. Η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου εάν  $\theta = \theta_0$ , όπου  $\theta_0$  η εντός ελέγχου τιμή της διαμέσου ή η τιμή στόχος, η οποία είναι γνωστή εκ των προτέρων. Στην περίπτωση που η κατανομή είναι συμμετρική, τότε η διάμεσος είναι ίση με τη μέση τιμή, δηλαδή  $\theta_0 = \mu_0$ . Έστω  $\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\}$ , όπου  $n \geq 1$ , ένα δείγμα που λαμβάνουμε τη χρονική στιγμή  $i$ . Συγκρίνοντας τις παρατηρήσεις  $X_{ij}, j = 1, 2, \dots, n$ , με την τιμή  $\theta_0$ , καταγράφουμε τον αριθμό των παρατηρήσεων οι οποίες είναι μεγαλύτερες από  $\theta_0$  ( $n_i^+$ ) και μικρότερες από  $\theta_0$  ( $n_i^-$ ). Η προσημική στατιστική συνάρτηση ορίζεται ως ακολούθως

$$SN_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(X_{ij} - \theta_0), i = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

όπου  $\text{sign}(x) = -1, 0, 1$  εάν  $x < 0, x = 0$  ή  $x > 0$ , αντίστοιχα και παίρνει τιμές  $\{-n, -n + 2, \dots, n - 2, n\}$ . Εξ ορισμού προκύπτει ότι η τιμή της προσημικής στατιστικής συνάρτησης στο  $i$ -οστό δείγμα είναι ίση με τη διαφορά των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες από  $\theta_0$  και των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από  $\theta_0$ , δηλαδή  $SN_i = n_i^+ - n_i^-$ . Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι  $n = n_i^+ + n_i^-$ , τότε προκύπτει ότι  $n_i^+ = \frac{SN_i + n}{2}$ . Ένας άλλος τρόπος γραφής της ποσότητας  $n_i^+$  είναι

$$n_i^+ = T_i = \sum_{j=1}^n I_{ij}, i = 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

όπου

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{εάν } X_{ij} - \theta_0 > 0 \\ 0, & \text{αλλιού} \end{cases} \quad (3.3)$$

Όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου, τότε  $P(X_{ij} < \theta_0 | \theta = \theta_0) = P(X_{ij} > \theta_0 | \theta = \theta_0) = p_0 = 0.5$ , ενώ επειδή η κατανομή είναι συνεχής, ισχύει  $P(X_{ij} = \theta_0 | \theta = \theta_0) = 0$ . Συνεπώς, όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου, η συνήθης προσημική στατιστική συνάρτηση  $T_i$  ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους  $n$  και  $p_0 = 0.5$ , δηλαδή  $T_i \sim \text{Bin}(n, 0.5)$ . Ως εκ τούτου, η εντός ελέγχου μέση τιμή και διασπορά της στατιστικής συνάρτησης  $T_i$  είναι  $n/2$  και  $n/4$  αντίστοιχα, ενώ οι αντίστοιχες τιμές της προσημικής στατιστικής συνάρτησης  $SN_i$  είναι 0 και  $n$ .

Στη διεθνή βιβλιογραφία που αφορά τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής στατιστικής συνάρτησης συνηθίζεται να χρησιμοποιείται η μεταβλητή  $T_i$  αντί της  $SN_i$ . Βέβαια, όποια και από τις δύο στατιστικές συναρτήσεις χρησιμοποιήσουμε, τα αποτελέσματα είναι ίδια. Γι' αυτό το λόγο, τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που θα παρουσιάσουμε στο παρόν κεφάλαιο θα βασίζονται στη χρήση της στατιστικής συνάρτησης  $T_i$ .

Περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με τις ιδιότητες της προσημικής στατιστικής συνάρτησης και τη χρήση αυτής σε μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου παρέχονται από τους Gibbons και Chakraborti (2010) (σελ. 168-170).

### 3.3 Εύρεση της κατανομής του μήκους ροής

Στα υποκεφάλαια που ακολουθούν, θα μελετήσουμε τη σχεδίαση και την κατασκευή ορισμένων μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης. Τα σχήματα που θα μελετήσουμε είναι αυτά που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για το διάγραμμα τύπου Shewhart, το μέσο μήκος ροής και η τυπική απόκλισή του υπολογίζονται εύκολα με τη χρήση εξισώσεων κλειστού τύπου, ενώ τα εν λόγω χαρακτηριστικά για τα υπόλοιπα διαγράμματα θα υπολογιστούν μέσω προσομοιώσεων Monte Carlo στη γλώσσα προγραμματισμού R. Τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα ακόλουθα:

**Βήμα 1<sup>ο</sup>:** Καθορισμός του μεγέθους του δείγματος  $n$  και της μετατόπισης  $\delta$  (σε μονάδες τυπικής απόκλισης) της εντός ελέγχου τιμής της παραμέτρου θέσης  $\theta_0$ .

**Βήμα 2<sup>ο</sup>:** Δημιουργία 10000 τυχαίων δειγμάτων από οποιαδήποτε συνεχή κατανομή (κανονική, λογιστική, Laplace, γάμμα κτλ).

**Βήμα 3<sup>ο</sup>:** Καθορισμός των παραμέτρων σχεδίασης του διαγράμματος προκειμένου να επιτευχθεί η επιθυμητή τιμή  $ARL_0 \approx 370$ .

**Βήμα 4<sup>ο</sup>:** Υπολογισμός των στατιστικών συναρτήσεων  $T_i, i = 1, 2, \dots, 10000$ , και των απεικονιζόμενων στατιστικών συναρτήσεων.

**Βήμα 5<sup>ο</sup>:** Υπολογισμός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος και σύγκριση των απεικονιζόμενων στατιστικών συναρτήσεων με αυτά.

**Βήμα 6<sup>ο</sup>:** Καταγραφή του αριθμού των δειγμάτων που απαιτούνται μέχρι να βρεθεί η πρώτη ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου.

**Βήμα 7<sup>ο</sup>:** Επανάληψη των βημάτων 1 έως 6 50000 φορές.

Έτσι, λοιπόν, τα χαρακτηριστικά του μήκους ροής υπολογίζονται από τις 50000 τιμές των μηκών ροής. Για την εύρεση των εντός ελέγχου χαρακτηριστικών του μήκους ροής, θέτουμε  $\delta = 0$  στο



1<sup>ο</sup> βήμα.

Καθώς τα συγκεκριμένα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου μπορούν να εφαρμοστούν σε δεδομένα που ακολουθούν οποιαδήποτε συνεχή κατανομή, μία παραλλαγή του παραπάνω αλγορίθμου, είναι η αντικατάσταση των βημάτων 1 και 2, με τη δημιουργία 10000 τυχαίων μεταβλητών  $T_i$  που ακολουθούν τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους  $n$  και  $p$  και προφανώς η απαλοιφή του 4ου βήματος. Σε αυτήν την περίπτωση, τα εντός ελέγχου χαρακτηριστικά του μήκους ροής υπολογίζονται για  $p = p_0$  και τα εκτός ελέγχου για  $p = p_1$ .

Τα χαρακτηριστικά του εκτός ελέγχου μήκους ροής υπολογίζονται για διάφορες τιμές της μετατόπισης  $\Delta = p_1 - p_0$ . Στον Πίνακα 3.1 παρουσιάζεται η αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ των μετατοπίσεων  $\Delta$  και  $\delta = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma_0}$  για τις ακόλουθες κατανομές: (α) τυποποιημένη κανονική κατανομή  $N(0, 1)$ , (β) κατανομή  $t - Student$  με 4 και 8 βαθμούς ελευθερίας, (γ) λογιστική κατανομή  $LG\left(0, \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)$ , (δ) διπλή εκθετική ή Laplace κατανομή  $L\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , (ε) ομοιόμορφη κατανομή  $U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ , (στ) γάμμα κατανομή  $G(a, b)$  με  $a = 1, 3, 5$  και  $b = 1$ , (ζ) Weibull κατανομή  $W(a, b)$  με  $a = 0.5, 1.5, 5$  και  $b = 1$  (η) λογαριθμοκανονική κατανομή  $LN(\mu, \sigma)$  με  $\mu = 0$  και  $\sigma = 0.25, 0.5, 1$ . Όλες οι κατανομές έχουν παραμετροποιηθεί ούτως ώστε να έχουν μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση ένα.

Έτσι, λοιπόν, όταν  $p_1 = P(X_{ij} > \theta_0 | \theta = \theta_1) = 0.65$  ήτοι  $\Delta = 0.15$ , τότε αυτό αντιστοιχεί σε μία μετατόπιση της  $\theta_0$  κατά 0.385 ήτοι  $\theta_1 = 0.385$ , όταν η κατανομή της διεργασίας είναι η  $N(0, 1)$  και σε  $\theta_1 = 0.252$  όταν η κατανομή της διεργασίας είναι η  $L\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

### 3.4 Διάγραμμα Shewhart-SN

Το μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart με χρήση της προσημικής στατιστικής συνάρτησης μελετήθηκε αρχικά από τους Amin et al. (1995). Γενικά, στο σύνολο σχεδόν της βιβλιογραφίας, μελετάται το συγκεκριμένο διάγραμμα με τη χρήση της προσημικής στατιστικής συνάρτησης. Για λόγους πληρότητας, θα παρουσιάσουμε τη δομή και τις ιδιότητες του εν λόγω διαγράμματος χρησιμοποιώντας και τις δύο στατιστικές συναρτήσεις, εστιάζοντας κατά κύριο λόγο στη στατιστική συνάρτηση  $T_i$ .

Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση  $SN_i$ , τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος Shewhart-SN είναι τα ακόλουθα

$$UCL = C,$$

$$CL = 0,$$

$$LCL = -C,$$

**Πίνακας 3.1:** Συσχέτιση μεταξύ μετατοπίσεων  $\Delta$  και  $\delta$  για διάφορες συνεχείς κατανομές

$\Delta$	$N(0, 1)$	$t_4$	$t_8$	$LG\left(0, \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)$	$L\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$G(1, 1)$	$G(3, 1)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.01	0.025	0.019	0.022	0.022	0.014	0.035	0.020	0.041
0.03	0.075	0.057	0.067	0.066	0.044	0.104	0.062	0.124
0.05	0.126	0.095	0.112	0.111	0.075	0.173	0.105	0.209
0.10	0.253	0.191	0.227	0.224	0.158	0.346	0.223	0.431
0.15	0.385	0.293	0.346	0.341	0.252	0.520	0.357	0.673
0.20	0.524	0.402	0.473	0.467	0.361	0.693	0.511	0.942
0.30	0.842	0.665	0.770	0.764	0.648	1.039	0.916	1.605
0.40	1.282	1.084	1.210	1.211	1.138	1.386	1.609	2.648
$\Delta$	$G(5, 1)$	$W(0.5, 1)$	$W(1.5, 1)$	$W(5, 1)$	$LN(0, 0.25)$	$LN(0, 0.5)$	$LN(0, 1)$	
0	0	0	0	0	0	0	0	
0.01	0.054	0.028	0.015	0.005	0.006	0.013	0.025	
0.03	0.164	0.090	0.046	0.016	0.019	0.038	0.078	
0.05	0.275	0.157	0.077	0.027	0.032	0.065	0.134	
0.10	0.566	0.359	0.160	0.053	0.065	0.135	0.288	
0.15	0.878	0.622	0.256	0.080	0.101	0.212	0.470	
0.20	1.219	0.969	0.349	0.109	0.140	0.300	0.689	
0.30	2.050	2.110	0.590	0.171	0.234	0.523	1.320	
0.40	3.323	4.821	0.961	0.252	0.378	0.898	2.602	

όπου  $C$  ένας θετικός ακέραιος αριθμός και συγκεκριμένα  $C \in \{2, 4, \dots, n\}$ , εάν  $n$  άρτιος και  $C \in \{1, 3, \dots, n\}$ , εάν  $n$  περιττός. Ένα διάγραμμα Shewhart-SN δίνει ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου, εάν  $|SN_i| \geq C$ . Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή εάν  $-C < SN_i < C$ , τότε θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Επίσης, σύμφωνα με τους Chakraborti et al. (2011), προτείνεται η χρήση  $C = n$  ώστε να περιορίζεται ο αριθμός των ψευδών ενδείξεων συναγερού.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η στατιστική συνάρτηση  $SN_i$  είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν, καθώς και το γεγονός ότι  $T_i \sim Bin(n, 0.5)$ , το μήκος ροής  $N$  ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο  $p'$ , όπου  $p'$  η πιθανότητα να βρεθεί ένα απεικονιζόμενο σημείο εκτός ορίων ελέγχου.

Για την περίπτωση που η διεργασία είναι εντός ελέγχου, η μέση τιμή του μήκους ροής είναι ίση με

$$ARL_0 = \frac{1}{a},$$

όπου  $a$  το σφάλμα τύπου I το οποίο ισούται με

$$\begin{aligned} a &= P(|SN_i| \geq C | \theta = \theta_0) = \sum_{i=\frac{C+n}{2}}^n \binom{n}{i} 0.5^n + \sum_{i=0}^{\frac{n-C}{2}} \binom{n}{i} 0.5^n \\ &= 0.5^n \left[ \sum_{i=\frac{C+n}{2}}^n \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{\frac{n-C}{2}} \binom{n}{i} \right]. \end{aligned}$$

Επισημαίνεται ότι λόγω των τιμών που παίρνει το  $C$ , οι ποσότητες  $\frac{C+n}{2}$ ,  $\frac{n-C}{2}$  είναι πάντα ακέραιες.

Στην περίπτωση που η διεργασία είναι εκτός ελέγχου και η παράμετρος θέσης έχει μετατοπιστεί σε μία νέα τιμή  $\theta = \theta_1 \neq \theta_0$ , τότε η στατιστική συνάρτηση  $T_i$  ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους  $n$  και  $p_1 \neq p_0$ , όπου  $p_1 = P(X_{ij} > \theta_0 | \theta = \theta_1) \neq P(X_{ij} < \theta_0 | \theta = \theta_1)$ . Σε αυτήν την περίπτωση, το σφάλμα τύπου II είναι ίσο με

$$\beta = P(-C < SN_i < C | \theta = \theta_1) = \sum_{i=\frac{n-C}{2}}^{\frac{C+n}{2}} \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i}$$

και η μέση τιμή του μήκους ροής είναι ίση με

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta}.$$

Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε το διάγραμμα Shewhart-SN κάνοντας χρήση της στατιστικής συνάρτησης  $T_i$ . Σε αυτήν την περίπτωση, τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος ελέγχου είναι ίσα με

$$\begin{aligned} UCL &= n - b, \\ CL &= \frac{n}{2}, \\ LCL &= a, \end{aligned} \tag{3.4}$$

όπου  $a, b$  θετικοί ακέραιοι που κυμαίνονται μεταξύ 0 και  $n$ . Η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εκτός ελέγχου εάν  $T_i \leq LCL$  ή  $T_i \geq UCL$ . Σε διαφορετική περίπτωση, η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εντός ελέγχου. Το σφάλμα τύπου I ισούται με

$$\begin{aligned} a &= P(T_i \leq LCL \text{ ή } T_i \geq UCL | T \sim Bin(n, 0.5)) \\ &= 1 - 0.5^n \left[ \sum_{i=0}^{\lfloor LCL \rfloor} \binom{n}{i} - \sum_{i=0}^{\lceil UCL \rceil} \binom{n}{i} \right], \end{aligned}$$

όπου  $\lfloor x \rfloor$  ο μέγιστος θετικός ακέραιος, ο οποίος δεν υπερβαίνει την τιμή  $x$  και  $\lceil x \rceil$  ο ελάχιστος

θετικός ακέραιος, ο οποίος υπερβαίνει την τιμή  $x$ . Το δε σφάλμα τύπου II είναι ίσο με

$$\begin{aligned}\beta &= P(LCL < T_i < UCL | T \sim \text{Bin}(n, 0.5)) \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor UCL \rfloor} \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i} - \sum_{i=0}^{\lfloor LCL \rfloor} \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i}.\end{aligned}$$

Υπενθυμίζεται ότι το μήκος ροής  $N$  ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο  $p' = 1 - \beta$  (αντίστοιχα  $p' = a$  όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου) κι ως εκ τούτου, η συνάρτηση πιθανότητας μάζας είναι  $f_N(l) = P(N = l) = (1 - \beta)\beta^l$ , η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας  $F_N(l) = P(N \leq l) = 1 - \beta^l$ , όπου  $l = 1, 2, \dots$ , ενώ το μέσο μήκος ροής και η τυπική απόκλιση του μήκους ροής ισούνται αντίστοιχα με

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta}$$

και

$$SDRL = \frac{\sqrt{\beta}}{1 - \beta}.$$

Στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζονται οι τιμές  $ARL_0$  του διαγράμματος Shewhart-SN για διάφορες τιμές των  $a$ ,  $b$  και  $n$ . Παρατηρούμε, ότι για  $n \leq 8$ , η τιμή του  $ARL_0$  είναι αρκετά μικρή, ενώ για  $n \geq 9$ , έχουμε τιμές του  $ARL_0$  μεγάλες και κοντά σε αυτές που χρησιμοποιούνται στις περισσότερες διεργασίες. Παρά ταύτα, και καθώς η στατιστική συνάρτηση  $T_i$  ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή, δεν καθίσταται εφικτό να επιτύγουμε τιμές  $ARL_0$  αρκετά κοντά στις συνηθισμένες (200, 370, 500). Έτσι, λοιπόν, η χρήση του διαγράμματος Shewhart-SN δεν ενδείκνυται για τιμές  $n \leq 8$ .

Στον Πίνακα B1 παρουσιάζονται οι τιμές  $ARL$  και  $SDRL$  του διαγράμματος Shewhart-SN για  $n = 9(1)15$ , όπου παρατηρούμε ότι η απόδοση του είναι σχετικά ικανοποιητική για  $\Delta \geq 0.30$ . Επιπλέον, συγκρίνοντας τις τιμές  $ARL$  για  $n = 9$  και 12, διαπιστώνουμε, όπως ήταν και αναμενόμενο, ότι καθώς μεγαλώνει η τιμή του  $n$ , το διάγραμμα ανιχνεύει πιο γρήγορα συγκεκριμένη μετατόπιση.

Περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με το διάγραμμα Shewhart-SN παρέχονται από τους Chakraborti και Graham (2019a), (σελ. 189-196), ενώ οι Human et al. (2010) μελέτησαν το εν λόγω διάγραμμα με χρήση κανόνων ροής.

### 3.5 Διάγραμμα CUSUM-SN

Το διάγραμμα ελέγχου CUSUM-SN μελετήθηκε από τους Amin et al. (1995) με χρήση της στατιστικής συνάρτησης  $SN_i$ , ενώ οι Yang και Chen (2011) μελέτησαν τις ιδιότητες και την απόδοση

**Πίνακας 3.2:** Τιμές του  $ARL_0$  για το διάγραμμα Shewhart-SN για διάφορες τιμές των  $n, a$  και  $b$

$n$	$a$	$b$	$ARL_0$	$n$	$a$	$b$	$ARL_0$
3	0	0	4	11	0	0	1024
4	0	0	8	12	0	1	292.57
5	0	0	16	12	1	0	292.57
6	0	0	32	13	1	1	292.57
7	0	0	64	13	1	0	546.13
8	0	0	128	14	0	2	153.12
9	0	0	256	14	1	1	546.13
10	0	0	512	15	0	2	268.59
11	0	1	157.54	15	1	1	1024

του εν λόγω διαγράμματος κάνοντας χρήση της στατιστικής συνάρτησης  $T_i$ . Οι απεικονιζόμενες στατιστικές συναρτήσεις ενός διαγράμματος CUSUM-SN είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned} C_i^+ &= \max \left[ 0, C_{i-1}^+ + T_i - \left( \frac{n}{2} + k \right) \right], \\ C_i^- &= \min \left[ 0, C_{i-1}^- + T_i - \left( \frac{n}{2} - k \right) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

όπου οι τιμές εκκίνησης είναι  $C_0^+ = C_0^- = 0$  και η τιμή αναφοράς υπολογίζεται από τον τύπο  $k = \frac{n\Delta}{2}$ , όπου  $\Delta$  η μετατόπιση που θέλουμε το διάγραμμα να είναι βέλτιστο. Το διάγραμμα ελέγχου CUSUM-SN δίνει ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου εάν  $C_i^+ \geq H$  ή  $C_i^- \leq -H$ , όπου  $H$  το διάστημα απόφασης.

Τόσο οι Amin et al. (1995), όσο και οι Yang και Chen (2011) υπολόγισαν τις τιμές ARL του διαγράμματος CUSUM-SN με τη χρήση των μαρκοβιανών αλυσίδων. Στον Πίνακα B2 παρουσιάζονται οι τιμές ARL και SDRL του διαγράμματος CUSUM-SN για  $n = 5$  και 10, το οποίο σχεδιάστηκε, ώστε να είναι βέλτιστο για την ανίχνευση των μετατοπίσεων  $\Delta = 0.01, 0.05, 0.10$  και 0.15. Οι τιμές με έντονη γραφή υποδεικνύουν τις μικρότερες τιμές  $ARL_1$  για συγκεκριμένη μετατόπιση και μέγεθος δείγματος  $n$  (το αυτό ισχύει για όλους τους πίνακες που παρουσιάζονται σε αυτήν τη διατριβή). Από τον εν λόγω πίνακα, παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει η μετατόπιση  $\Delta$  για την οποία θέλουμε το διάγραμμα να είναι βέλτιστο, μεγαλώνει και η τιμή του  $SDRL_0$  χωρίς όμως να υπερβαίνει την τιμή  $ARL_0$ . Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι για μεγαλύτερες τιμές του  $\Delta$  και κατ' επέκταση της τιμής αναφοράς  $k$  δεν επιτυγχάνεται η επιθυμητή τιμή  $ARL_0$ . Τέλος, και αναφορικά με τη συγκεντρωτική απόδοση του διαγράμματος, η μικρότερη τιμή EARL επι-

τυγχάνεται όταν το διάγραμμα σχεδιάζεται να είναι βέλτιστο για την ανίχνευση της μετατόπισης  $\Delta = 0.10$  όταν  $n = 5$  και  $\Delta = 0.05$  όταν  $n = 10$ , ενώ η μικρότερη τιμή ESDRL επιτυγχάνεται όταν το διάγραμμα είναι βέλτιστο για  $\Delta = 0.01$ .

Στην τελευταία γραμμή του Πίνακα B2 απεικονίζεται η ελάχιστη τιμή  $ARL_1$  που μπορεί να αποδώσει ένα διάγραμμα CUSUM-SN. Προκειμένου το διάγραμμα να δώσει ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου πρέπει  $C_i^+ \geq H$  ή  $C_i^- \leq -H$ . Η μέγιστη (ελάχιστη) τιμή που μπορεί να πάρει η στατιστική συνάρτηση  $T_i$  είναι  $n$  ( $-n$ ) και προκύπτει εάν όλες οι παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερες (ή μικρότερες) από την εντός ελέγχου τιμή  $\theta_0$ . Έτσι, λοιπόν, στην περίπτωση που η μετατόπιση είναι προς τα πάνω, έχουμε  $C_1^+ = \frac{n}{2} - k$ ,  $C_2^+ = n - 2k$  και γενικά  $C_i^+ = i(\frac{n}{2} - k)$ . Κατόπιν τούτου, το διάγραμμα CUSUM-SN δίνει ένδειξη για πρώτη φορά ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου στον αριθμό του δείγματος που ικανοποιεί την ανισότητα

$$i \geq \frac{H}{\frac{n}{2} - k}.$$

Από τον Πίνακα B2 διαπιστώνουμε ότι όσο μεγαλώνει το μέγεθος του δείγματος και η μετατόπιση  $\Delta$  για την οποία σχεδιάζεται το διάγραμμα να είναι βέλτιστο, τόσο μικραίνει η τιμή  $\min(ARL_1)$ .

### 3.6 Διάγραμμα EWMA-SN

Οι Yang et al. (2011) μελέτησαν το διάγραμμα EWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης χρησιμοποιώντας τη στατιστική συνάρτηση  $T_i$ . Επισημαίνεται ότι λόγω ενός τυπογραφικού λάθους στα όρια ελέγχου και πιο συγκεκριμένα στη διασπορά της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης, ο Abbasi (2012) διόρθωσε τα όρια ελέγχου του διαγράμματος. Έτσι, λοιπόν, η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση σε ένα διάγραμμα EWMA-SN είναι η ακόλουθη

$$Y_i = \lambda T_i + (1 - \lambda)Y_{i-1}, \quad (3.6)$$

όπου η αρχική τιμή  $Y_0$  τίθενται ίση με  $\frac{n}{2}$  και  $0 < \lambda \leq 1$  η παράμετρος εξομάλυνσης. Τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος EWMA-SN είναι

$$\begin{aligned} UCL_i &= \frac{n}{2} + L \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \frac{n}{4}}, \\ CL &= \frac{n}{2}, \\ LCL_i &= \frac{n}{2} - L \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \frac{n}{4}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου, ενώ τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{n}{2} + L\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}\frac{n}{4}}, \\ LCL &= \frac{n}{2} - L\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}\frac{n}{4}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου εάν η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης  $Y_i$  συμπίπτει με τα όρια ελέγχου ή βρίσκεται εκτός αυτών. Σε αντίθετη περίπτωση, θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Το διάγραμμα Shewhart-SN αποτελεί ειδική περίπτωση του διαγράμματος EWMA-SN για  $n = 1$ .

Λόγω του γεγονότος ότι η διωνυμική κατανομή είναι ασύμμετρη για μικρές και μεσαίες τιμές  $n$ , δεν είναι πάντα εφικτό να επιτύχουμε την επιθυμητή τιμή  $ARL_0$ . Έτσι, οι Yang et al. (2011) εφάρμοσαν τον μετασχηματισμό του τόξου ημιτόνου στη συνήθη προσημική στατιστική συνάρτηση, ήτοι  $M_i = \arcsin \sqrt{\frac{T_i}{n}}$ . Σε αυτήν την περίπτωση, η μεταβλητή  $M_i$  ακολουθεί προσεγγιστικά την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\arcsin \sqrt{0.5}$  και διασπορά  $\frac{1}{4n}$ . Η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση δίνεται από την εξίσωση (3.6), όπου η ποσότητα  $T_i$  αντικαθίσταται από την ποσότητα  $M_i$  και στα όρια ελέγχου των εξισώσεων (3.7) και (3.8), οι ποσότητες  $\frac{n}{2}$  και  $\frac{n}{4}$  αντικαθίστανται από τις ποσότητες  $\arcsin \sqrt{0.5}$  και  $\frac{1}{4n}$ , αντίστοιχα.

Στους Πίνακες B3 και B4 παρουσιάζεται η απόδοση ενός διαγράμματος EWMA-SN για  $n = 5$  και 10 με χρονικά μεταβαλλόμενα και σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου, αντίστοιχα. Οι τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι  $\lambda = 0.05, 0.10, 0.25, 0.50$  και  $0.75$ . Από τον Πίνακα B3 είναι εμφανές ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή του  $\lambda$ , τόσο καλύτερη είναι η απόδοση του διαγράμματος σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Αυτή η υπεροχή συνοδεύεται όμως και από μία σχετικά υψηλή τιμή  $SDRL_0$ , η οποία φθίνει, καθώς αυξάνεται η τιμή του  $\lambda$ . Από την άλλη, παρατηρώντας τον Πίνακα B4, διαπιστώνουμε ότι ένα διάγραμμα με τιμή  $\lambda = 0.05$  υπερτερεί έναντι των άλλων διαγραμμάτων με μεγαλύτερες τιμές  $\lambda$  για την ανίχνευση μετατοπίσεων  $\Delta \leq 0.10$ , ενώ όσο αυξάνεται η τιμή του  $\lambda$  μικραίνει η απόδοση του διαγράμματος για μικρές μετατοπίσεις, αλλά αυξάνεται σε μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Σε αντίθεση με την περίπτωση των χρονικών μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου, η τιμή του  $SDRL_0$  αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η τιμή του  $\lambda$  χωρίς να υπερβαίνει την τιμή του  $ARL_0$ . Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι η καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση των διαγραμμάτων επιτυγχάνεται για  $\lambda = 0.05$ . Τέλος, από την τελευταία γραμμή που παρουσιάζεται η ελάχιστη τιμή  $ARL_1$  που μπορεί να αποδώσει ένα διάγραμμα EWMA-SN και προκύπτει από την ελάχιστη τιμή  $i$  που ικανοποιεί την ανισότητα

$\lambda n \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j + (1-\lambda)^i \frac{n}{2} \geq UCL_i$ , παρατηρούμε ότι με την χρήση χρονικών μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου επιτυγχάνουμε μικρότερες τιμές  $\min(ARL_1)$  σε σχέση με τη χρήση ορίων ελέγχου σταθερής κατάστασης.

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα EWMA-SN (με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης) και CUSUM-SN, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα CUSUM-SN που είναι βέλτιστο στην ανίχνευση πολύ μικρών μετατοπίσεων είναι πιο αποδοτικό για το συγκεκριμένο εύρος ( $\Delta \leq 0.03$  όταν  $n = 5$  και  $\Delta = 0.01$  όταν  $n = 10$ ) έναντι του διαγράμματος EWMA-SN με  $\lambda = 0.05$ , το οποίο όμως υπερτερεί για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Ενδεικτικό είναι ότι το διάγραμμα CUSUM-SN που είναι βέλτιστο στην ανίχνευση της μετατόπισης  $\Delta = 0.10$  έχει τιμή  $ARL_1=33.84$  για τη συγκεκριμένη μετατόπιση όταν  $n = 5$  και  $ARL_1=20.29$  όταν  $n = 10$ , ενώ το διάγραμμα EWMA-SN με  $\lambda = 0.05$  έχει αντίστοιχες τιμές 31.00 και 19.15. Λαμβάνοντας υπ' όψιν αποκλειστικά και μόνο τη συγκεντρωτική απόδοση, το διάγραμμα EWMA-SN με  $\lambda = 0.05$  υπερτερεί έναντι όλων των διαγραμμάτων CUSUM-SN. Τέλος, το διάγραμμα EWMA-SN αποδίδει μικρότερες τιμές  $\min(ARL_1)$  σε σχέση με το διάγραμμα CUSUM-SN. Για παράδειγμα, όταν  $n = 10$ , το διάγραμμα CUSUM-SN ( $k = 0.05, H = 31.68$ ) έχει  $\min(ARL_1) = 7$ , ενώ το διάγραμμα EWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 2.491$ ) έχει  $\min(ARL_1) = 3$ .

Για περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με το διάγραμμα EWMA-SN, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στους Chakraborti και Graham (2019a) (σελ. 208-214), όπου μεταξύ άλλων περιγράφεται και ο τρόπος εύρεσης του ARL με τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων. Επίσης, οι Graham et al. (2011a) μελέτησαν το διάγραμμα EWMA-SN για την περίπτωση των μεμονομένων παρατηρήσεων. Τέλος, οι Aslam et al. (2014) και Ali et al. (2020) μελέτησαν τις ιδιότητες του διαγράμματος EWMA-SN για τις περιπτώσεις που εφαρμόζονται η επαναλαμβανόμενη δειγματοληψία (repetitive sampling) και η δειγματοληψία κατάταξης συνόλου (ranked set sampling), αντίστοιχα.

### 3.7 Διάγραμμα DEWMA-SN

Οι Raza et al. (2022) μελέτησαν το διάγραμμα DEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου χρησιμοποιώντας τη συνήθη στατιστική συνάρτηση  $T_i$  και διαφορετικές τιμές για τις παραμέτρους εξομάλυνσης. Η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση σε ένα διάγραμμα DEWMA-SN είναι η ακόλουθη

$$\begin{cases} Y_i = \lambda T_i + (1 - \lambda)Y_{i-1}, \\ Z_i = \lambda Y_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \end{cases} \quad (3.9)$$



όπου  $Y_0 = Z_0 = \frac{n}{2}$  και  $0 < \lambda \leq 1$  η παράμετρος εξομάλυνσης. Η στατιστική συνάρτηση  $Z_i$  δύναται να γραφεί και ως

$$Z_i = \lambda^2 \sum_{j=1}^i (1-\lambda)^{i-j} (i-j+1) T_j + (\lambda i + 1)(1-\lambda)^i \frac{n}{2}. \quad (3.10)$$

Τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος DEWMA-SN είναι

$$\begin{aligned} UCL_i &= \frac{n}{2} + L\sqrt{Var(Z_i|IC)}, \\ CL &= \frac{n}{2}, \\ LCL_i &= \frac{n}{2} - L\sqrt{Var(Z_i|IC)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου. Η εντός ελέγχου τιμή της διασποράς της στατιστικής συνάρτησης  $Z_i$  δίνεται από τον τύπο

$$Var(Z_i|IC) = \frac{\lambda^4 [1 + c^2 - (i+1)^2 c^i + (2i^2 + 2i - 1)c^{i+1} - i^2 c^{i+2}] n}{[1 - c]^3 4},$$

με  $c = (1 - \lambda)^2$ . Τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{n}{2} + L\sqrt{\frac{\lambda(2 - 2\lambda + \lambda^2) n}{(2 - \lambda)^3 4}}, \\ LCL &= \frac{n}{2} - L\sqrt{\frac{\lambda(2 - 2\lambda + \lambda^2) n}{(2 - \lambda)^3 4}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εντός ελέγχου εάν η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης  $Z_i$  βρίσκεται εντός των ορίων ελέγχου, δηλαδή  $LCL_i < Z_i < UCL_i$ . Σε διαφορετική περίπτωση, η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εκτός ελέγχου. Το διάγραμμα DEWMA-SN μεταπίπτει στο διάγραμμα Shewhart-SN για  $\lambda = 1$ .

Στους Πίνακες B5 και B6 παρουσιάζεται η απόδοση ενός διαγράμματος DEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα και σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τις ίδιες τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης με αυτές στο προηγούμενο υποκεφάλαιο. Όμοια, με το διάγραμμα EWMA-SN, από τον Πίνακα B5, παρατηρούμε ότι η απόδοση ενός διαγράμματος DEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου είναι καλύτερη όσο μικραίνει η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , η οποία όμως συνοδεύεται και από μία μεγάλη τιμή  $SDRL_0$ . Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του Πίνακα B5 με αυτά του Πίνακα B3, διαπιστώνουμε ότι για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , το διάγραμμα DEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου έχει καλύτερη απόδοση από το διάγραμμα EWMA-SN σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Όμως,

οφείλουμε να επιστημόνουμε ότι αυτή η υπεροχή του διαγράμματος DEWMA-SN συνοδεύεται και από μία ελαφρώς μεγαλύτερη τιμή  $SDRL_0$  σε σχέση με αυτή του διαγράμματος EWMA-SN, ιδιαίτερα για μικρές τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ .

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα ελέγχου DEWMA-SN και EWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης (Πίνακες B4 και B6), παρατηρούμε ότι για τιμές του  $\lambda = 0.05$  και  $0.10$ , η τιμή  $SDRL_0$  του διαγράμματος DEWMA-SN είναι μικρότερη από αυτή του διαγράμματος EWMA-SN, ενώ για μεγαλύτερες τιμές του  $\lambda$  ισχύει το αντίστροφο. Σε καμία όμως περίπτωση δεν παραβιάζεται η συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ . Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις βέλτιστες τιμές  $ARL_1$  των δύο διαγραμμάτων, το διάγραμμα DEWMA-SN αποδίδει καλύτερα από το διάγραμμα EWMA-SN για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.05$ ), ενώ για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις υπερέχει οριακά το διάγραμμα EWMA-SN. Επίσης, παρόλη την υπεροχή του διαγράμματος DEWMA-SN σε μικρές μετατοπίσεις, το διάγραμμα EWMA-SN εμφανίζει συγκεντρωτικά καλύτερη απόδοση αφού έχει χαμηλότερες τιμές EARL και ESDRL. Το γεγονός αυτό οφείλεται ότι για μικρές και μεσαίες τιμές του  $\lambda$ , το διάγραμμα DEWMA-SN έχει μεγάλες τιμές  $\min(ARL_1)$ . Για παράδειγμα, για  $n = 5$  και  $\lambda = 0.05$ , το διάγραμμα DEWMA-SN έχει  $\min(ARL_1) = 10$ , ενώ το διάγραμμα EWMA-SN έχει 4.

Επιπλέον, συγκρίνοντας το διάγραμμα DEWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης με το διάγραμμα CUSUM-SN διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα DEWMA-SN εμφανίζει μικρότερες βέλτιστες τιμές  $ARL_1$  εκτός από την περίπτωση όπου  $\Delta = 0.01$  στην οποία το διάγραμμα CUSUM-SN είναι πιο αποδοτικό.

### 3.8 Διάγραμμα GWMA-SN

Ο Lu (2015) μελέτησε το διάγραμμα GWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης. Η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση ενός διαγράμματος GWMA-SN είναι η εξής

$$G_i = \sum_{j=1}^i \left( q^{(j-1)^a} - q^{j^a} \right) T_{i-j+1} + q^{i^a} \frac{n}{2}, \quad (3.13)$$

όπου  $0 \leq q < 1$  η παράμετρος σχεδίασης και  $a > 0$  η επιπρόσθετη παράμετρος εξομάλυνσης. Τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος GWMA-SN

είναι

$$\begin{aligned}
 UCL_i &= \frac{n}{2} + L \sqrt{\frac{n}{4} \sum_{j=1}^i (q^{(j-1)^a} - q^{j^a})^2}, \\
 CL &= \frac{n}{2}, \\
 LCL_i &= \frac{n}{2} - L \sqrt{\frac{n}{4} \sum_{j=1}^i (q^{(j-1)^a} - q^{j^a})^2},
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου, ενώ τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned}
 UCL &= \frac{n}{2} + L \sqrt{\frac{n}{4} Q}, \\
 LCL &= \frac{n}{2} - L \sqrt{\frac{n}{4} Q},
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

όπου  $Q = \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^i (q^{(j-1)^a} - q^{j^a})^2 \right)$ . Η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εκτός ελέγχου εάν η στατιστική συνάρτηση  $G_i$  βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου, ενώ αν  $LCL_i < G_i < UCL_i$ , τότε θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Επιπλέον, το διάγραμμα EWMA-SN αποτελεί ειδική περίπτωση του διαγράμματος GWMA-SN όταν  $q = 1 - \lambda$  και  $a = 1$ , ενώ σε περίπτωση που  $q = 0$  και  $a = 1$ , τότε το διάγραμμα GWMA-SN μεταπίπτει στο διάγραμμα Shewhart-SN.

Ο Lu (2015) υπολόγισε τις τιμές ARL του διαγράμματος GWMA-SN με παραμέτρους σχεδιασμού  $q = 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 0.95$  και  $a = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$  για δείγματα μεγέθους  $n = 10$  και  $n = 20$  χρησιμοποιώντας, όπως αναφέραμε προηγουμένως, όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το εν λόγω διάγραμμα είναι πιο αποδοτικό από το EWMA-SN για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.10$  όταν  $n = 10$  και  $\Delta \leq 0.05$  όταν  $n = 20$ ), ενώ για μεγαλύτερες μετατοπίσεις τα δύο διαγράμματα είναι σχεδόν ισοδύναμα.

Σε αυτό το υποκεφαλαίο μελετάμε την απόδοση του διαγράμματος GWMA-SN με παραμέτρους σχεδίασης  $q = 0.50, 0.75, 0.90, 0.95$  και  $a = 0.5, 0.7, 0.8, 0.9, 1.2$  για δείγματα μεγέθους  $n = 5$  και  $n = 10$  χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα και σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους Πίνακες B7-B10. Από τους Πίνακες B7 και B8, όπου παρουσιάζεται η απόδοση του διαγράμματος GWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, διαπιστώνουμε ότι η τιμή  $q = 0.95$  προσφέρει υψηλή ανιχνευτική ικανότητα σε σχέση με μικρότερες τιμές αυτής, ενώ η βέλτιστη τιμή  $a$  εξαρτάται από το μέγεθος της μετατόπισης. Πιο συγκεκριμένα, ένα διάγραμμα με  $q = 0.95$  και  $a = 0.5$  έχει πολύ καλή απόδοση για  $\Delta = 0.01$ , ενώ η τιμή  $a = 0.7$  αποδίδει τις χαμηλότερες τιμές  $ARL_1$  για  $\Delta = 0.03$  και  $0.05$ . Για μεγαλύτερες μετατοπίσεις, οι τιμές  $a = 0.8$  και  $0.9$  προσφέρουν καλύτερα αποτελέσματα. Στο ίδιο

συμπέρασμα καταλήγουμε και για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου  $q$ , δηλαδή μικρές τιμές της παραμέτρου  $a$  αποδίδουν καλύτερα για μικρές μετατοπίσεις, μεσαίες τιμές για μέτριες μετατοπίσεις και μεγάλες τιμές για μεγάλες μετατοπίσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή της παραμέτρου  $a$ , τόσο μεγαλύτερη είναι και η τιμή του  $SDRL_0$ , η οποία κυμαίνεται μεταξύ 370 και 400. Επιπλέον, και για τις δύο τιμές  $n$  που μελετάμε, το διάγραμμα GWMA-SN εμφανίζει συγκεντρωτικά καλύτερη απόδοση για  $q = 0.95$  και  $a = 0.7$ . Τέλος, οι τιμές  $\min(ARL_1)$  του διαγράμματος είναι 2 για  $n = 5$  και 1 για  $n = 10$ .

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα GWMA-SN και EWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα GWMA-SN έχει καλύτερη απόδοση για  $\Delta \leq 0.15$  όταν  $n = 5$  και  $\Delta \leq 0.10$  όταν  $n = 10$ , ενώ για μεγαλύτερες μετατοπίσεις το διάγραμμα EWMA-SN υπερέχει ελαφρώς. Σε παρόμοιο συμπέρασμα καταλήγουμε και από τη σύγκριση με το διάγραμμα DEWMA-SN. Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$  και  $SDRL_0 \approx 376$ , το διάγραμμα GWMA-SN ( $q = 0.9, a = 0.5, L = 2.746$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DEWMA-SN ( $\lambda = 0.25, L = 2.610$ ) για μετατοπίσεις  $\Delta \leq 0.10$ , ενώ το διάγραμμα DEWMA-SN υπερέχει για μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Το αυτό ισχύει και από τη σύγκριση των διαγραμμάτων GWMA-SN ( $q = 0.95, a = 0.8, L = 2.560$ ) και DEWMA-SN ( $\lambda = 0.10, L = 2.245$ ) τα οποία είναι σχεδιασμένα για  $n = 10$  και έχουν  $SDRL_0 \approx 393$ .

Διαφορετικά είναι τα συμπεράσματα που καταλήγουμε από την μελέτη του διαγράμματος με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης. Από τους Πίνακες B9 και B10, παρατηρούμε ότι όλες οι τιμές  $SDRL_0$  είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες τιμές  $ARL_0$  όταν  $n = 5$ , ενώ στην περίπτωση που  $n = 10$ , διαπιστώνουμε ότι οι τιμές  $SDRL_0$  είναι ελαφρώς μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες τιμές  $ARL_0$  όταν  $q = 0.50$ . Οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3.

Από τον Πίνακα 3.3, είναι εμφανές ότι οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων σχεδίασης όταν χρησιμοποιούνται όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι διαφορετικές από τις αντίστοιχες όταν τα όρια ελέγχου είναι χρονικά μεταβαλλόμενα. Μία μεγάλη τιμή της παραμέτρου  $q$  (0.95) αποδίδει πολύ καλά για μικρές και μικρές προς μέτριες μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.10$ ), ενώ μεσαίες ( $q = 0.75 - 0.90$ ) και μικρές ( $q = 0.50$ ) τιμές της εν λόγω παραμέτρου αποδίδουν πολύ καλά για μέτριες ( $0.15 \leq \Delta \leq 0.30$ ) και μεγάλες ( $\Delta = 0.40$ ) μετατοπίσεις, αντίστοιχα. Στο συμπέρασμα αυτό οδηγούμαστε και από το γεγονός ότι για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $a$ , η τιμή  $\min(ARL_1)$  παραμένει σταθερή ή μικραίνει, καθώς μικραίνει η τιμή της παραμέτρου  $q$ . Επιπρόσθετα, μικρές τιμές της παραμέτρου  $a$  (0.5-0.7) ενδείκνυται να χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με

**Πίνακας 3.3:** Βέλτιστες τιμές παραμέτρων σχεδίασης του διαγράμματος GWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης

$\Delta$	$n = 5$				$n = 10$			
	$q$	$a$	$L$	$ARL_1$	$q$	$a$	$L$	$ARL_1$
0.01	0.95	0.5	2.635	305.19	0.95	0.7	2.550	265.35
0.03	0.95	0.7	2.532	144.59	0.95	0.7	2.550	97.74
0.05	0.95	0.7	2.532	79.56	0.95	0.8	2.507	50.30
0.10	0.95	1.0	2.477	31.00	0.95	1.2	2.514	18.90
0.15	0.95	1.2	2.513	17.20	0.90	1.2	2.694	10.25
0.20	0.90	1.2	2.680	11.07	0.75	1.0	2.862	6.63
0.30	0.75	1.0	2.822	5.82	0.75	1.2	2.857	3.43
0.40	0.50	0.8	2.751	3.28	0.50	0.7	2.871	1.92

μεγάλες τιμές της παραμέτρου  $q$  για τη γρήγορη ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, ενώ μεσαίες και μεγάλες τιμές ( $a \geq 0.8$ ) για την ανίχνευση μέτριων και μεγάλων μετατοπίσεων, αντίστοιχα. Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι τιμές της παραμέτρου  $a \geq 1$  προσδίδουν αρκετά καλά αποτελέσματα όταν συνδυάζονται με μεγάλες τιμές της παραμέτρου  $q$  για την ανίχνευση μέτριων μετατοπίσεων. Όπως και στην περίπτωση των χρονικών μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου, έτσι κι εδώ, το διάγραμμα GWMA-SN εμφανίζει συγκεντρωτικά καλύτερη απόδοση για  $q = 0.95$  και  $a = 0.7$ . Τέλος, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των Πινάκων 3.3, B9 και B10 με αυτά του Πίνακα B6, όπου παρουσιάζεται η απόδοση του διαγράμματος DEWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα GWMA-SN όχι μόνο έχει καλύτερες βέλτιστες τιμές  $ARL_1$ , ιδιαίτερα για μικρές μετατοπίσεις, αλλά έχει και καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση. Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$ , το διάγραμμα GWMA-SN ( $q = 0.95, a = 0.7, L = 2.532$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DEWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 1.863$ ) σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Το ίδιο προκύπτει και από τη σύγκριση των διαγραμμάτων GWMA-SN (με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης) και CUSUM-SN. Για παράδειγμα, το παραπάνω διάγραμμα GWMA-SN είναι πιο ευαίσθητο από τα διαγράμματα CUSUM-SN με  $k = 0.025, 0.125$  και  $0.25$ .

Προκειμένου να βελτιωθεί περαιτέρω η απόδοση του διαγράμματος GWMA-SN στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, οι Chen et al. (2022) μελέτησαν το συγκεκριμένο διάγραμμα εφαρμόζοντας την τεχνική της επαναλαμβανόμενης δειγματοληψίας.

### 3.9 Διάγραμμα DGWMA-SN

Το διάγραμμα ελέγχου DGWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης μελετήθηκε από τον Lu (2018). Η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης ενός διαγράμματος DGWMA-SN είναι η ακόλουθη

$$\begin{cases} G_i = \sum_{j=1}^i (q^{(j-1)^a} - q^{j^a}) T_{i-j+1} + q^{i^a} \frac{n}{2}, \\ DG_i = \sum_{j=1}^i (q^{(j-1)^a} - q^{j^a}) G_i + q^{i^a} \frac{n}{2}, \end{cases} \quad (3.16)$$

όπου  $0 \leq q < 1$  και  $a > 0$  η παράμετρος σχεδίασης και η επιπρόσθετη παράμετρος εξομάλυνσης, αντίστοιχα. Συνδυάζοντας τις δύο στατιστικές συναρτήσεις της εξίσωσης (3.16), η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση  $DG_i$  γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$DG_i = \sum_{j=1}^i w_j T_{i-j+1} + \left(1 - \sum_{j=1}^i w_j\right) \frac{n}{2},$$

όπου

$$w_j = \sum_{k=1}^j (q^{(k-1)^a} - q^{k^a}) (q^{(j-k)^a} - q^{(j-k+1)^a}).$$

Τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος DGWMA-SN είναι τα εξής

$$\begin{aligned} UCL_i &= \frac{n}{2} + L \sqrt{\frac{n}{4} W_i}, \\ CL &= \frac{n}{2}, \\ LCL_i &= \frac{n}{2} - L \sqrt{\frac{n}{4} W_i}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου και  $W_i = \sum_{j=1}^i w_j^2$ . Τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{n}{2} + L \sqrt{\frac{n}{4} W}, \\ LCL &= \frac{n}{2} - L \sqrt{\frac{n}{4} W}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

όπου  $W = \lim_{i \rightarrow \infty} W_i^2$ . Η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εντός ελέγχου εάν η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης  $DG_i$  είναι εντός των ορίων ελέγχου, ενώ σε αντίθετη περίπτωση θεωρείται ότι βρίσκεται εκτός ελέγχου. Το διάγραμμα DGWMA-SN μεταπίπτει στο διάγραμμα DEWMA-SN για  $q = 1 - \lambda$  και  $a = 1$  και στο διάγραμμα Shewhart-SN για  $q = 0$  και  $a = 1$ .

Ο Lu (2018) υπολόγισε την απόδοση ενός διαγράμματος DGWMA-SN με παραμέτρους σχεδίασης  $q = 0.5, 0.7, 0.9$  και  $a = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2, 1.5$  για δείγματα μεγέθους  $n = 5, 10, 15$  και 20 χρησιμοποιώντας όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης και κατέληξε στο

συμπέρασμα ότι το διάγραμμα DGWMA-SN υπερέρχει έναντι του διαγράμματος DEWMA-SN, ιδιαίτερα για μικρές μετατοπίσεις. Επιπλέον, κατόπιν σύγκρισης με τα διαγράμματα GWMA-SN και EWMA-SN, συμπεράνε ότι το διάγραμμα DGWMA-SN με παραμέτρους  $0.7 \leq q \leq 0.9$  και  $0.7 \leq a \leq 0.9$  εμφανίζει καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα, κυρίως για μετατοπίσεις  $\Delta \leq 0.10$ .

Σε αυτό το υποκεφαλαίο μελετάμε την απόδοση του διαγράμματος DGWMA-SN με παραμέτρους σχεδίασης  $q = 0.50, 0.75, 0.90, 0.95$  και  $a = 0.5, 0.7, 0.8, 0.9, 1.2$  για δείγματα μεγέθους  $n = 5$  και  $n = 10$  χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα και σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους Πίνακες B11-B14. Από τους Πίνακες B11 και B12, όπου παρουσιάζεται η απόδοση του διαγράμματος DGWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, παρατηρούμε ότι ένα διάγραμμα με παραμέτρους  $q = 0.95$  και  $a = 0.5$  έχει την καλύτερη απόδοση σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Όμως, η υπεροχή αυτή συνδυάζεται και με μία πολύ υψηλή τιμή  $SDRL_0$  (780.46 για  $n = 5$  και 751.47 για  $n = 10$ ), η οποία μπορεί να οδηγήσει σε υψηλό αριθμό ψευδών συναγερωμών ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου. Εάν συγκρίνουμε τα διαγράμματα DGWMA-SN και GWMA-SN για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων σχεδίασης  $q$  και  $a$ , θα παρατηρήσουμε την καθολική υπεροχή του διαγράμματος DGWMA-SN. Όμως, η συγκεκριμένη σύγκριση οδηγεί σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Εάν, όμως, συγκρίνουμε τα διαγράμματα για ίδιες τιμές  $ARL_0$  και  $SDRL_0$ , τότε θα οδηγηθούμε σε ασφαλή συμπεράσματα. Πιο συγκεκριμένα, από την σύγκριση των διαγραμμάτων GWMA-SN ( $q = 0.95, a = 0.75, L = 2.571$ ) και DGWMA-SN ( $q = 0.95, a = 1.12, L = 2.071$ ) για  $n = 5$  (τα εν λόγω διαγράμματα έχουν  $SDRL_0 \approx 400$ ) προκύπτει ότι το διάγραμμα GWMA-SN είναι πιο αποδοτικό για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.05$ ), ενώ το διάγραμμα DGWMA-SN αποδίδει καλύτερα σε όλο το υπόλοιπο εύρος των μετατοπίσεων (βλέπε Πίνακα 3.6). Επιπλέον, συγκρίνοντας τα διαγράμματα GWMA-SN ( $q = 0.95, a = 0.7, L = 2.612$ ) και DGWMA-SN ( $q = 0.90, a = 0.88, L = 2.160$ ) για  $n = 10$  (τα εν λόγω διαγράμματα έχουν  $SDRL_0 \approx 399$ ) διαπιστώνουμε την υπεροχή του πρώτου διαγράμματος για πολύ μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.03$ ), ενώ το διάγραμμα DGWMA-SN είναι πιο ευαίσθητο στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων (βλέπε Πίνακα 3.9). Σε παρόμοια συμπεράσματα καταλήγουμε και από τη σύγκριση των διαγραμμάτων υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$  (βλέπε Πίνακες 3.7 και 3.10). Συγκρίνοντας τα διαγράμματα DGWMA-SN και CUSUM-SN υπό την τελευταία συνθήκη, διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα CUSUM-SN είναι πιο ευαίσθητο για  $\Delta \leq 0.10$  όταν  $n = 5$  και για  $\Delta \leq 0.05$  όταν  $n = 10$ , ενώ το διάγραμμα DGWMA-SN έχει καλύτερη απόδοση για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις (βλέπε Πίνακες 3.7 και 3.10).

Εν κατακλείδι, λοιπόν, χρησιμοποιώντας τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, τα διαγράμ-

ματα GWMA-SN και CUSUM-SN υπερέχουν έναντι του DGWMA-SN για μικρές μετατοπίσεις, ενώ το DGWMA-SN εμφανίζεται πιο αποδοτικό για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Τέλος, επισημαίνουμε ότι το διάγραμμα DGWMA-SN έχει  $\min(ARL_1) = 1$  πέρα των περιπτώσεων όπου  $q = 0.75$  και  $0.50$  για  $n = 5$ .

Από τους Πίνακες B13 και B14, που παρουσιάζεται η απόδοση του διαγράμματος DGWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, διαπιστώνουμε, όπως και στο διάγραμμα GWMA-SN, ότι οι τιμές  $SDRL_0$  είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες τιμές  $ARL_0$  εκτός από τις περιπτώσεις όπου  $q = 0.50$  και  $a = 0.7 - 0.9$  για  $n = 10$ , στις οποίες οι τιμές  $SDRL_0$  είναι ελαφρώς μεγαλύτερες από τις τιμές  $ARL_0$ . Στον Πίνακα 3.4, παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων σχεδίασης.

**Πίνακας 3.4:** Βέλτιστες τιμές παραμέτρων σχεδίασης του διαγράμματος DGWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης

$\Delta$	$n = 5$				$n = 10$			
	$q$	$a$	$L$	$ARL_1$	$q$	$a$	$L$	$ARL_1$
0.01	0.95	0.5	1.205	296.56	0.90	0.5	1.837	249.91
0.03	0.90	0.5	1.838	135.31	0.90	0.5	1.837	92.54
0.05	0.90	0.7	1.945	76.44	0.90	0.8	2.034	49.73
0.10	0.90	0.9	2.123	31.45	0.75	0.7	2.577	18.93
0.15	0.75	0.8	2.572	17.18	0.75	1.0	2.612	10.32
0.20	0.75	1.0	2.604	11.12	0.50	0.9	2.859	6.65
0.30	0.50	0.8	2.826	5.83	0.50	1.2	2.857	3.42
0.40	0.50	0.9	2.826	3.69	0.50	1.2	2.857	2.35

Από τον Πίνακα 3.4, διαπιστώνουμε ότι αφενός οι βέλτιστες παράμετροι σχεδιασμού στην περίπτωση των ορίων ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι διαφορετικές από αυτές στην περίπτωση των χρονικών μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου, αφετέρου εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος  $n$ . Γενικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα διάγραμμα DGWMA-SN με μία μεγάλη τιμή της παραμέτρου  $q$  (0.90-0.95) σε συνδυασμό με μία μικρή τιμή της παραμέτρου  $a$  (0.5) αποδίδει ικανοποιητικά για πολύ μικρές μετατοπίσεις ( $0.01 \leq \Delta \leq 0.03$ ), ενώ σε συνδυασμό με μία μεσαία τιμή της παραμέτρου  $a$  (0.7-0.9) δίνει καλά αποτελέσματα για μετατοπίσεις  $0.05 \leq \Delta \leq 0.10$  όταν  $n = 5$  και για  $\Delta = 0.05$  όταν  $n = 10$ . Στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για την γρήγορη ανίχνευση μέτρων μετατοπίσεων προτείνεται η χρήση παραμέτρων  $q = 0.75$  και  $a = 0.7 - 1.0$ ,



ενώ η χρήση παραμέτρων  $q = 0.50$  και  $a = 0.8 - 1.2$  ενδείκνυται για την ανίχνευση μεγαλύτερων μετατοπίσεων. Άλλωστε, γι' αυτές τις τιμές των παραμέτρων, το διάγραμμα εμφανίζει και τις μικρότερες τιμές  $\min(ARL_1)$ . Επιπλέον, από τους Πίνακες B13 και B14, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα DGWMA-SN εμφανίζει συγκεντρωτικά καλύτερη απόδοση για  $q = 0.90$  και  $a = 0.5$ , η οποία είναι σχεδόν ίδια με αυτήν που εμφανίζει το διάγραμμα GWMA-SN για τιμές παραμέτρων  $q = 0.95$  και  $a = 0.7$ .

Έτσι, λοιπόν, όπως και στο διάγραμμα GWMA-SN, η επιπρόσθετη παράμετρος σχεδιασμού  $a$  προσδίδει μία ευελιξία στην ανιχνευτική ικανότητα του διαγράμματος DEWMA-SN. Συγκρίνοντας τις τιμές του Πίνακα 3.4 με αυτές του Πίνακα 3.3 παρατηρούμε ότι το διάγραμμα DGWMA-SN είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα GWMA-SN σε μικρές μετατοπίσεις  $\Delta \leq 0.05$ , ενώ για μεγαλύτερες μετατοπίσεις, τα δύο διαγράμματα είναι σχεδόν ισοδύναμα. Επιπλέον, οι βέλτιστες τιμές  $ARL_1$  του διαγράμματος DGWMA-SN είναι χαμηλότερες από τις αντίστοιχες του διαγράμματος CUSUM-SN.

### 3.10 Διάγραμμα HWMA-SN

Η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης του διαγράμματος HWMA-SN είναι η ακόλουθη

$$H_i = \lambda T_i + (1 - \lambda) \bar{T}_{i-1}, \quad (3.19)$$

όπου  $0 < \lambda \leq 1$  είναι η παράμετρος εξομάλυνσης και  $\bar{T}_{i-1} = \frac{\sum_{k=1}^{i-1} T_k}{i-1}$ . Επιπρόσθετα, η τιμή εκκίνησης  $\bar{T}_0$  τίθεται ίση με  $\frac{n}{2}$ . Τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος HWMA-SN είναι

$$UCL_i/LCL_i = \begin{cases} \frac{n}{2} \pm L\lambda\sqrt{\frac{n}{4}} & , \text{για } i = 1, \\ \frac{n}{2} \pm L\sqrt{\left(\lambda^2 + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1}\right)\frac{n}{4}} & , \text{για } i > 1, \end{cases} CL = \frac{n}{2}, \quad (3.20)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου, ενώ τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{n}{2} + L\lambda\sqrt{\frac{n}{4}}, \\ LCL &= \frac{n}{2} - L\lambda\sqrt{\frac{n}{4}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εντός ελέγχου εάν η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης  $H_i$  βρίσκεται εντός των ορίων ελέγχου, ενώ σε διαφορετική περίπτωση, δηλαδή εάν  $H_i \geq UCL_i$  ή  $H_i \leq LCL_i$ , τότε θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου.

Οι Raza, Nawaz και Aslam (2020) μελέτησαν την απόδοση του διαγράμματος HWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $\lambda = 0.05$  και  $0.10$  χρησιμοποιώντας δείγματα μεγέθους  $n = 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 22, 25$  και  $30$ . Από τους πίνακες που παραθέτουν προκύπτει το συμπέρασμα ότι για την περίπτωση όπου  $\lambda = 0.05$ , η τιμή του  $SDRL_0$  ξεκινάει από  $347.2$  (για  $n = 6$ ) και φθίνει, καθώς μεγαλώνει το μέγεθος του δείγματος  $n$ , ενώ για την περίπτωση όπου  $\lambda = 0.10$ , η τιμή του  $SDRL_0$  ξεκινάει από  $505.2$  (για  $n = 6$ ), φθίνει καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος  $n$  και καταλήγει να λαμβάνει την τιμή  $299.9$  όταν  $n = 30$ . Στη συνέχεια, για  $n = 10$ , συγκρίνουν το διάγραμμα HWMA-SN με τα διαγράμματα EWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 2.490$ ) και όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης και CUSUM-SN ( $k = 0.5, H = 10.65$ ), το οποίο είναι βέλτιστο για μετατόπιση  $\Delta = 0.10$ , και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι το διάγραμμα HWMA-SN υπερέχει έναντι των άλλων δύο σε όλες τις μετατοπίσεις.

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι υπάρχουν σημαντικές μεταβολές στην τιμή του  $SDRL_0$ , η οποία λαμβάνει διαφορετικές τιμές ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  και του μεγέθους του δείγματος  $n$ . Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι από όλες τις μελέτες που έχουν γίνει για το διάγραμμα HWMA, μόνο οι Chan et al. (2021) μελέτησαν το υπ' όψιν σχήμα κάνοντας χρήση των ορίων ελέγχου σταθερής κατάστασης. Πιο συγκεκριμένα, οι συγγραφείς μελέτησαν το σχήμα HWMA με χρονικά μεταβαλλόμενα, αλλά και με σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου για διεργασίες που η κατανομή και οι παράμετροί τους είναι άγνωστες και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, οι εντός ελέγχου ιδιότητες της κατανομής του μήκους ροής είναι χειρότερες από ότι είναι στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, δηλαδή οι τιμές του  $SDRL_0$  και του 95ου εκατοστημρίου είναι αρκετά υψηλότερες, ενώ οι τιμές του 5ου, 25ου, 50ου και 75ου εκατοστημρίου είναι σημαντικά χαμηλότερες, με αποτέλεσμα το διάγραμμα να παρέχει υψηλό αριθμό ψευδών ενδείξεων.

Σε αυτό το υποκεφάλαιο, θα μελετήσουμε την απόδοση του διαγράμματος HWMA-SN για χρονικά μεταβαλλόμενα και σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου για διάφορες τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda$  και για  $n = 5$  και  $10$ . Στον Πίνακα B15 παρουσιάζεται η απόδοση του διαγράμματος HWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου. Για την περίπτωση όπου  $n = 5$ , υπολογίσαμε την απόδοση του διαγράμματος για  $\lambda = 0.05$  και  $0.10$ , καθώς για τιμές μεγαλύτερες από  $0.10$  αυξάνεται πάρα πολύ η τιμή του  $SDRL_0$ . Από τον εν λόγω πίνακα, παρατηρούμε ότι για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , όσο μεγαλώνει η τιμή του  $n$ , μικραίνει η τιμή του  $SDRL_0$ . Για  $n = 5$  και υπό την συνθήκη  $SDRL_0 \approx 436$ , το διάγραμμα

HWMA-SN ( $\lambda = 0.051, L = 2.2265$ ) είναι πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα DGWMA-SN με παραμέτρους ( $q = 0.9, a = 0.74, L = 2.095$ ) και ( $q = 0.95, a = 0.93, L = 1.896$ ) για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.05$ ), ενώ στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων υπερσχύουν τα διαγράμματα DGWMA-SN (βλέπε Πίνακα 3.5). Το συγκεκριμένο διάγραμμα HWMA-SN έχει και καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση από τα διαγράμματα DGWMA-SN. Επίσης, το διάγραμμα HWMA-SN ( $\lambda = 0.10, L = 2.3403$ ) έχει τιμή  $SDRL_0=919.13$  και καλύτερη απόδοση από το διάγραμμα HWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 2.218$ ) για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.05$ ). Αξίζει να σημειωθεί ότι συγκρίνοντας το υπ' όψιν διάγραμμα με το διάγραμμα DGWMA-SN με παραμέτρους ( $q = 0.95, a = 0.5, L = 1.794$ ), το οποίο έχει τιμή  $SDRL_0=780.46$ , προκύπτει η καθολική υπεροχή του τελευταίου σε ολόκληρο το εύρος των μετατοπίσεων. Λόγω των υψηλών τιμών  $SDRL_0$  που έχει το διάγραμμα HWMA-SN για  $n = 5$ , δεν θεωρείται ασφαλής και αξιόπιστη η σύγκρισή του με τα υπόλοιπα διαγράμματα ελέγχου.

Για την περίπτωση όπου  $n = 10$ , παρατηρούμε ότι το διάγραμμα HWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 2.372$ ) όχι μόνο έχει την καλύτερη απόδοση έναντι άλλων διαγραμμάτων HWMA-SN με υψηλότερη τιμή  $\lambda$ , αλλά, επίσης, έχει και την χαμηλότερη τιμή  $SDRL_0 (=309.65)$ , η οποία αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ . Το συγκεκριμένο διάγραμμα έχει καλύτερη απόδοση από τα διαγράμματα CUSUM-SN και EWMA-SN σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Επίσης, όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 3.10, το εν λόγω διάγραμμα HWMA-SN υπερέχει έναντι των διαγραμμάτων GWMA-SN ( $q = 0.75, a = 0.7, L = 2.871$ ) και DGWMA-SN ( $q = 0.6, a = 0.7, L = 2.812$ ) αντίστοιχα, τα οποία έχουν  $SDRL_0 \approx 370$ , σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων.

Στον Πίνακα B16 παρουσιάζεται η απόδοση του διαγράμματος HWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης για  $n = 10$  και τιμές  $\lambda = 0.20, 0.25, 0.50$  και  $0.75$ . Δεν παρατίθεται η απόδοση του διαγράμματος για  $n = 5$ , καθώς αυτό παρουσιάζει υψηλές τιμές  $SDRL_0$  κι ως εκ τούτου, η χρήση του θα οδηγήσει σε υψηλό αριθμό ψευδών συναγερωμών. Για  $n = 5$ , ένα διάγραμμα HWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης και παραμέτρους σχεδίασης  $(\lambda, L)=(0.05, 7.180), (0.10, 3.575)$  και  $(0.25, 2.370)$  έχει τιμές  $(ARL_0, SDRL_0)=(160.15, 1770.43), (101.85, 1407.72)$  και  $(338.46, 3544.48)$ , αντίστοιχα. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του Πίνακα B16 με αυτά του Πίνακα B15, διαπιστώνουμε ότι για συγκεκριμένη τιμή  $\lambda \geq 0.25$ , ένα διάγραμμα HWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου έχει χαμηλότερη τιμή  $SDRL_0$  από ένα διάγραμμα HWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης και είναι πιο αποδοτικό για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.03$ ), ενώ για μεγαλύτερες μετατοπίσεις το διάγραμμα με όρια ελέγχου

σταθερής κατάστασης είναι πιο ευαίσθητο. Επιπρόσθετα, ένα διάγραμμα HWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης και  $\lambda = 0.20$  έχει πολύ καλή ανιχνευτική ικανότητα για μετατοπίσεις  $\Delta \geq 0.05$ , η οποία όμως συνοδεύεται και από μία πολύ υψηλή τιμή  $SDRL_0$  (=816). Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αντίθεση με τα υπόλοιπα διαγράμματα ελέγχου που έχουν μελετηθεί μέχρι στιγμής, στο διάγραμμα HWMA-SN, η χρήση των χρονικών μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου προσδίδει αρκετά χαμηλότερες τιμές  $SDRL_0$  σε σχέση με τη χρήση των ορίων ελέγχου σταθερής κατάστασης. Λαμβάνοντας, λοιπόν, υπ' όψιν την υψηλή τιμή  $SDRL_0$ , δεν προτείνεται η εφαρμογή του διαγράμματος HWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης για τιμές  $n = 5$  και  $10$ . Ως εκ τούτου, προτείνεται η χρήση του διαγράμματος αποκλειστικά για την περίπτωση όπου η μετατόπιση εμφανίζεται στην αρχή της διεργασίας, καθώς η απόδοση του διαγράμματος για την steady-state κατάσταση δεν είναι καθόλου καλή.

### 3.11 Διάγραμμα TEWMA-SN

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα μελετήσουμε ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου με τη χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης, το TEWMA-SN.

#### 3.11.1 Δομή διαγράμματος TEWMA-SN

Η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση του εν λόγω διαγράμματος είναι η ακόλουθη

$$\begin{cases} Y_i = \lambda T_i + (1 - \lambda)Y_{i-1}, \\ Z_i = \lambda Y_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \\ W_i = \lambda Z_i + (1 - \lambda)W_{i-1}, \end{cases} \quad (3.22)$$

όπου  $Y_0 = Z_0 = W_0 = \frac{n}{2}$  και  $0 < \lambda \leq 1$  η παράμετρος εξομάλυνσης. Οι στατιστικές συναρτήσεις  $Y_i$ ,  $Z_i$  και  $W_i$  δύναται να γραφούν και ως

$$Y_i = \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} T_j + (1 - \lambda)^i \frac{n}{2}, \quad (3.23)$$

$$Z_i = \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} Y_j + (1 - \lambda)^i \frac{n}{2} \quad (3.24)$$

και

$$W_i = \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} Z_j + (1 - \lambda)^i \frac{n}{2}. \quad (3.25)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.23)-(3.25), η στατιστική συνάρτηση  $W_i$  μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως

$$W_i = \frac{\lambda^3}{2} \sum_{j=1}^i (1-\lambda)^{i-j} (i-j+1)(i-j+2)T_j + \left( \frac{(1-\lambda)^i}{2} \right) [\lambda i(\lambda i + \lambda + 2) + 2] \frac{n}{2}. \quad (3.26)$$

Ως εκ τούτου, η εντός ελέγχου μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης  $W_i$  εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι ίση με  $\frac{n}{2}$ , ενώ η εντός ελέγχου τιμή της διασποράς ισούται με

$$\begin{aligned} Var(W_i|IC) = & \left[ \frac{c^3 \lambda^6}{4} \left[ -\frac{i(i^2-1)(i-2)c^{i-3}}{1-c} - \frac{4i(i^2-1)c^{i-2}}{(1-c)^2} - \frac{12i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)^3} - \right. \right. \\ & \left. \frac{24(i+1)c^i}{(1-c)^4} + \frac{24(1-c^{i+1})}{(1-c)^5} \right] + 2c^2 \lambda^6 \left[ -\frac{i(i^2-1)c^{i-2}}{1-c} - \right. \\ & \left. \frac{3i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)^2} - \frac{6(i+1)c^i}{(1-c)^3} + \frac{6(1-c^{i+1})}{(1-c)^4} \right] + \\ & \frac{7c\lambda^6}{2} \left[ -\frac{i(i+1)c^{i-1}}{1-c} - \frac{2(i+1)c^i}{(1-c)^2} + \frac{2(1-c^{i+1})}{(1-c)^3} \right] + \\ & \left. \lambda^6 \left[ \frac{1-c^{i+1}}{(1-c)^2} - \frac{(i+1)c^i}{1-c} \right] \right] \frac{n}{4}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

όπου  $c = (1-\lambda)^2$ . Έτσι, λοιπόν, τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος TEWMA-SN είναι τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} UCL_i &= \frac{n}{2} + L\sqrt{Var(W_i|IC)}, \\ CL &= \frac{n}{2}, \\ LCL_i &= \frac{n}{2} - L\sqrt{Var(W_i|IC)}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου, ενώ τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{n}{2} + L\sqrt{\left[ \frac{6(1-\lambda)^6\lambda}{(2-\lambda)^5} + \frac{12(1-\lambda)^4\lambda^2}{(2-\lambda)^4} + \frac{7(1-\lambda)^2\lambda^3}{(2-\lambda)^3} + \frac{\lambda^4}{(2-\lambda)^2} \right] \frac{n}{4}}, \\ LCL &= \frac{n}{2} - L\sqrt{\left[ \frac{6(1-\lambda)^6\lambda}{(2-\lambda)^5} + \frac{12(1-\lambda)^4\lambda^2}{(2-\lambda)^4} + \frac{7(1-\lambda)^2\lambda^3}{(2-\lambda)^3} + \frac{\lambda^4}{(2-\lambda)^2} \right] \frac{n}{4}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εκτός ελέγχου εάν  $W_i \geq UCL_i$  ή  $W_i \leq LCL_i$ . Σε αντίθετη περίπτωση, η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εντός ελέγχου. Επισημαίνεται ότι το διάγραμμα TEWMA-SN μεταπίπτει στο διάγραμμα Shewhart-SN για  $\lambda = 1$ .

### 3.11.2 Εντός ελέγχου κατανομή μήκους ροής του διαγράμματος TEWMA-SN

Προκειμένου να μελετήσουμε την κατανομή του μήκους ροής όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου, χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο που περιγράφεται στο υποκεφάλαιο 3.3 θέτοντας  $\delta = 0$  ή

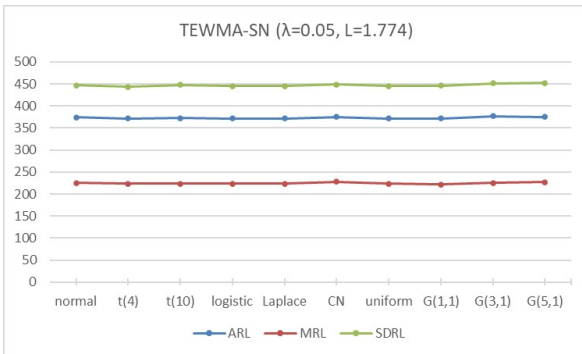
$p = 0.5$ . Στον Πίνακα B17 παρουσιάζονται οι τιμές της παραμέτρου  $L$  για διάφορους συνδυασμούς της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda$  και του μεγέθους δείγματος  $n$  για το διάγραμμα TEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου προκειμένου να επιτευχθεί μία συγκεκριμένη τιμή  $ARL_0$ . Από τον εν λόγω πίνακα, παρατηρούμε ότι για μεγάλες τιμές του  $\lambda$ , ήτοι  $\lambda = 0.50$  και  $0.75$ , η τιμή του  $L$  ελαφρώς αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η τιμή του  $n$  προκειμένου να επιτύχουμε την επιθυμητή τιμή  $ARL_0$ , ενώ για μικρότερες τιμές του  $\lambda$  δεν παρατηρείται κάποια ιδιαίτερη τάση.

Καθώς το νέο διάγραμμα είναι μη παραμετρικό, αναμένεται η εντός ελέγχου κατανομή του μήκους ροής και τα χαρακτηριστικά της να παραμένουν αμετάβλητα για όλες τις συνεχείς κατανομές. Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά  $ARL_0$ ,  $MRL_0$  και  $SDRL_0$  της κατανομής του μήκους ροής του διαγράμματος TEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου όταν  $n = 10$  για διάφορες συνεχείς κατανομές. Τα συγκεκριμένα διαγράμματα είναι σχεδιασμένα έτσι ώστε να έχουν  $ARL_0 \approx 370$ . Από το εν λόγω σχήμα, είναι εμφανές ότι για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , οι τιμές των χαρακτηριστικών της εντός ελέγχου κατανομής του μήκους ροής είναι σχεδόν ίδιες για όλες τις κατανομές. Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι μειώνεται η τιμή  $SDRL_0$  του διαγράμματος, καθώς αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ . Την αντίθετη συμπεριφορά εμφανίζει η τιμή  $MRL_0$ , η οποία σε όλες τις περιπτώσεις είναι μικρότερη από την αντίστοιχη τιμή του  $ARL_0$ . Έτσι, λοιπόν, η εντός ελέγχου κατανομή του μήκους ροής είναι θετικά ασύμμετρη.

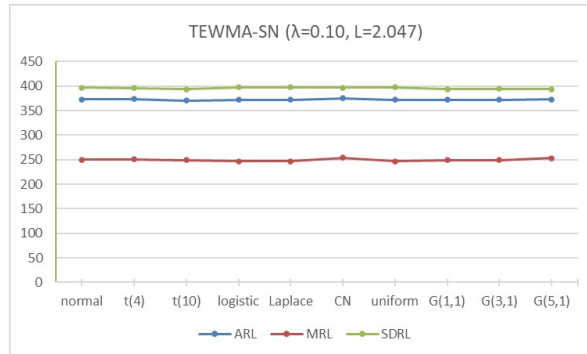
### 3.11.3 Απόδοση διαγράμματος TEWMA-SN

Στους Πίνακες B18 και B19 παρουσιάζεται η απόδοση του διαγράμματος TEWMA-SN για  $\lambda = 0.05, 0.10, 0.25, 0.50, 0.75$  και  $n = 5, 10, 15, 20$  με χρονικά μεταβαλλόμενα και σταθερές κατάστασης όρια ελέγχου, αντίστοιχα. Από τον Πίνακα B18, παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρή είναι η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , τόσο καλύτερη είναι η απόδοση του διαγράμματος, η οποία, όμως, συνδυάζεται και από μία υψηλότερη τιμή  $SDRL_0$ , όπως αναφέραμε και προηγουμένως. Επιπρόσθετα είναι εμφανές ότι η απόδοση του διαγράμματος είναι καλύτερη όσο αυξάνεται η τιμή του δείγματος  $n$ .

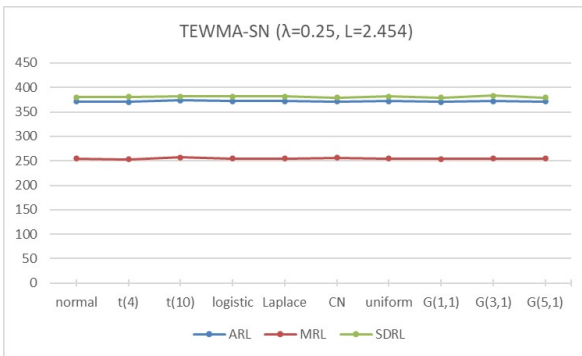
Αναφορικά με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον Πίνακα B19 παρατηρούμε ότι μικρές τιμές του  $\lambda$  ανιχνεύουν γρηγορότερα μικρές μετατοπίσεις, ενώ μεσαίες και μεγάλες τιμές ενδείκνυται για την ανίχνευση μέτριων και μεγάλων μετατοπίσεων, αντίστοιχα. Επιπρόσθετα, η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  για την οποία το διάγραμμα TEWMA-SN είναι βέλτιστο εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος  $n$ . Για παράδειγμα, η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  για την οποία ένα διάγραμμα είναι βέλτιστο στην ανίχνευση της μετατόπισης  $\Delta = 0.05$  είναι  $0.05$  για  $n = 5$  και  $0.10$



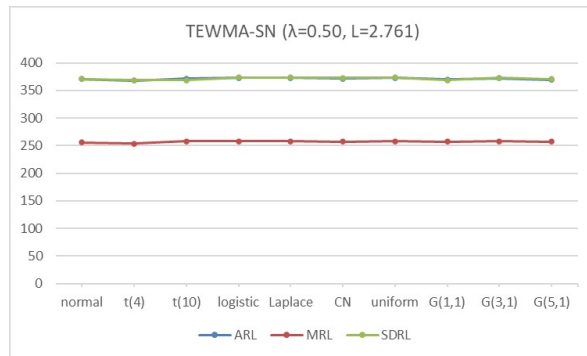
( $\alpha$ )



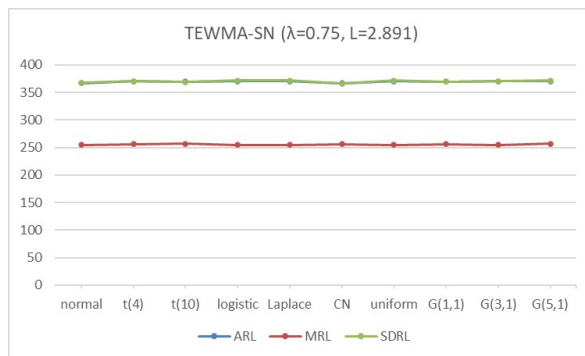
( $\beta$ )



( $\gamma$ )



( $\delta$ )



( $\epsilon$ )

Σχήμα 3.1: Τιμές των χαρακτηριστικών του εντός ελέγχου μήκους ροής του διαγράμματος TEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς κατανομές όταν  $n = 10$

για  $n \geq 10$ . Τέλος, διαπιστώνουμε ότι για συγκεκριμένη τιμή του  $\lambda$ , η τιμή του  $\min(ARL_1)$  μικραίνει, καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος  $n$ .

### 3.11.4 Σύγκριση διαγράμματος TEWMA-SN με άλλα διαγράμματα ελέγχου

Στη συνέχεια, θα συγκρίνουμε το νέο διάγραμμα TEWMA-SN με άλλα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση χρονικών μεταβαλλόμενων και σταθερής κατάστασης ορίων ελέγχου.

Χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, διαπιστώνουμε ότι για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , το διάγραμμα TEWMA-SN είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα EWMA-SN, ιδιαίτερα για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.20$ ). Βέβαια, αυτή η υπεροχή συνοδεύεται και από μία μεγαλύτερη τιμή  $SDRL_0$  για το διάγραμμα TEWMA-SN, κυρίως για μικρές τιμές του  $\lambda$ . Καθώς αυξάνεται η τιμή του  $\lambda$ , η διαφορά μεταξύ των τιμών  $SDRL_0$  των δύο διαγραμμάτων μικραίνει αρκετά και διαπιστώνουμε ότι η υπεροχή του νέου διαγράμματος είναι σημαντικά υψηλότερη. Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$ , το διάγραμμα EWMA-SN ( $\lambda = 0.25, L = 2.824$ ) έχει  $SDRL_0 = 369.93$  και  $EARL = 21.39$ , ενώ το διάγραμμα TEWMA-SN ( $\lambda = 0.25, L = 2.444$ ) έχει  $SDRL_0 = 376.22$  και  $EARL = 17.54$ .

Στη συνέχεια, συγκρίνοντας το διάγραμμα TEWMA-SN με το διάγραμμα DEWMA-SN για  $\lambda = 0.05$ , διαπιστώνουμε ότι στην περίπτωση όπου  $n = 5$ , το διάγραμμα TEWMA-SN είναι πιο ευαίσθητο για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.05$ ), ενώ το διάγραμμα DEWMA-SN υπερέχει στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Για την περίπτωση, όπου  $n = 10$  και  $\lambda = 0.05$ , το διάγραμμα TEWMA-SN είναι πιο ευαίσθητο για μικρότερο εύρος μικρών μετατοπίσεων σε σχέση με πριν, ήτοι  $\Delta \leq 0.03$ , καθώς επίσης υπερέχει ελαφρώς και για μεγάλες μετατοπίσεις ( $\Delta \geq 0.20$ ), ενώ το διάγραμμα DEWMA-SN είναι πιο ευαίσθητο για μέτριες μετατοπίσεις ( $0.05 \leq \Delta \leq 0.15$ ). Όπως και προηγουμένως, αυτή η υπεροχή του διαγράμματος TEWMA-SN συνδυάζεται και από μία μεγαλύτερη τιμή  $SDRL_0$ . Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι για μεγαλύτερες τιμές του  $\lambda$ , το διάγραμμα TEWMA-SN υπερέχει έναντι του διαγράμματος DEWMA-SN σε μεγαλύτερο εύρος μετατοπίσεων. Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$  και  $\lambda = 0.25$ , τότε τα διαγράμματα TEWMA-SN και DEWMA-SN έχουν  $SDRL_0 \approx 376$ , όμως το πρώτο υπερισχύει του δεύτερου για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.20$ ).

Κατόπιν σύγκρισης με το διάγραμμα GWMA-SN, διαπιστώνουμε ότι το εύρος μετατοπίσεων για το οποίο το διάγραμμα TEWMA-SN υπερέχει, εξαρτάται τόσο από την τιμή  $SDRL_0$  των συγκρινόμενων διαγραμμάτων, όσο και από την τιμή του δείγματος  $n$ . Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$  και η σύγκριση των διαγραμμάτων γίνεται υπό  $SDRL_0 \approx 403$ , τότε το διάγραμμα TEWMA-SN



( $\lambda = 0.10, L = 2.057$ ) είναι πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα GWMA-SN με παραμέτρους ( $q = 0.95, a = 0.5, L = 2.698$ ) και ( $q = 0.95, a = 0.7, L = 2.590$ ) για μετατοπίσεις  $\Delta \geq 0.10$  και  $\Delta \geq 0.30$  αντίστοιχα, ενώ όταν η σύγκριση γίνεται υπό  $SDRL_0 \approx 376$ , τότε το διάγραμμα TEWMA-SN ( $\lambda = 0.25, L = 2.444$ ) υπερέρχει έναντι του διαγράμματος GWMA-SN ( $q = 0.9, a = 0.5, L = 2.746$ ) για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις ( $\Delta \geq 0.15$ ). Από την άλλη, χρησιμοποιώντας μία τιμή δείγματος  $n = 10$  και συγκρίνοντας τα διαγράμματα υπό  $SDRL_0 \approx 399$ , το διάγραμμα TEWMA-SN ( $\lambda = 0.088, L = 1.992$ ) είναι πιο ευαίσθητο από τα διαγράμματα GWMA-SN με παραμέτρους ( $q = 0.95, a = 0.5, L = 2.773$ ) και ( $q = 0.95, a = 0.7, L = 2.612$ ) για μετατοπίσεις  $\Delta \geq 0.05$  και  $\Delta \geq 0.15$ , αντίστοιχα (βλέπε Πίνακα 3.9). Συγκρίνοντας, όμως, τα διαγράμματα για  $n = 10$  και υπό  $SDRL_0 \approx 379$ , το διάγραμμα TEWMA-SN ( $\lambda = 0.25, L = 2.454$ ) υπερέρχει έναντι του διαγράμματος GWMA-SN ( $q = 0.9, a = 0.8, L = 2.736$ ) για μετατοπίσεις  $\Delta \geq 0.20$ .

Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα των Πινάκων 3.5-3.10, το διάγραμμα DGWMA-SN είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα TEWMA-SN σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων, οποιαδήποτε συνθήκη κι αν θέσουμε για την τιμή  $SDRL_0$ . Μοναδική εξαίρεση, αποτελεί η περίπτωση στην οποία  $n = 10$  και  $SDRL_0 \approx 436$ , στην οποία το διάγραμμα TEWMA-SN ( $\lambda = 0.0568, L = 1.825$ ) είναι ελαφρώς πιο ευαίσθητο από το διάγραμμα DGWMA-SN ( $q = 0.9, a = 0.68, L = 2.056$ ) μόνο για μεγάλες μετατοπίσεις ( $\Delta \geq 0.30$ ).

Τέλος, από τη σύγκριση του διαγράμματος TEWMA-SN με το διάγραμμα HWMA-SN διαπιστώνουμε ότι το πρώτο υπερέρχει μόνο για μεγάλες μετατοπίσεις όταν  $n = 5$ , ενώ για  $n = 10$ , τα αποτελέσματα εξαρτώνται από την επιλογή των παραμέτρων σχεδίασης. Λόγω των υψηλών τιμών  $SDRL_0$  που έχει το διάγραμμα HWMA-SN για  $n = 5$  και  $\lambda \geq 0.10$ , θα συγκρίνουμε τα δύο διαγράμματα υπό  $SDRL_0 \approx 436$ . Σε αυτή, λοιπόν, την περίπτωση το διάγραμμα HWMA-SN ( $\lambda = 0.051, L = 2.2265$ ) υπερέρχει έναντι του διαγράμματος TEWMA-SN ( $\lambda = 0.0455, L = 1.717$ ) για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.20$ ), ενώ ισχύει το αντίστροφο για μεγάλες μετατοπίσεις (βλέπε Πίνακα 3.5). Στην περίπτωση όπου  $n = 10$ , τότε, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, το διάγραμμα HWMA-SN παρουσιάζει τη χαμηλότερη τιμή  $SDRL_0$  ( $=309.65$ ), αλλά και την καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα, για  $\lambda = 0.05$ . Δεδομένου, ότι το διάγραμμα TEWMA-SN δεν εμφανίζει τόσο χαμηλή τιμή  $SDRL_0$  για κανένα συνδυασμό των παραμέτρων σχεδίασης, η σύγκριση των δύο διαγραμμάτων θα γίνει για διάφορες τιμές  $\lambda$  του διαγράμματος TEWMA-SN. Έτσι, λοιπόν, η υπεροχή του διαγράμματος TEWMA-SN μικραίνει και εξαλείφεται τελείως όσο μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ . Για παράδειγμα, το διάγραμμα TEWMA-SN ( $\lambda = 0.0568, L = 1.825$ ), το οποίο έχει  $SDRL_0=436.23$ , είναι πιο αποδοτικό από το

διάγραμμα HWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 2.372$ ) σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων (βλέπε Πίνακα 3.8), ενώ το διάγραμμα TEWMA-SN ( $\lambda = 0.088, L = 1.992$ ), το οποίο έχει  $SDRL_0 = 399.43$ , υπερέρχει του διαγράμματος HWMA-SN για μετατοπίσεις  $\Delta \geq 0.20$  (βλέπε Πίνακα 3.9). Τέλος, για μεγαλύτερες τιμές του  $\lambda$  για το διάγραμμα TEWMA-SN, το διάγραμμα HWMA-SN έχει καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων.

Τα αποτελέσματα των συγκρίσεων που αναφέρθηκαν προηγουμένως ήταν για την περίπτωση που χρησιμοποιούνται χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου. Αυτά διαφέρουν σημαντικά από τα αποτελέσματα της σύγκρισης των διαγραμμάτων με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης και τα οποία θα παραθέσουμε στη συνέχεια. Προτού, όμως, προβούμε στη σύγκριση του διαγράμματος TEWMA-SN με τα υπόλοιπα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση των ορίων ελέγχου σταθερής κατάστασης, επισημαίνουμε ότι σε όλα τα διαγράμματα, πέραν του διαγράμματος HWMA-SN, οι τιμές  $SDRL_0$  είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες τιμές  $ARL_0$ , ήτοι 370, κι ως εκ τούτου δεν θα προβούμε σε αναφορά επί των εν λόγω τιμών.

Συγκρίνοντας, λοιπόν, τα διαγράμματα TEWMA-SN και CUSUM-SN, διαπιστώνουμε ότι εάν επιλέξουμε για σύγκριση διαγράμματα βέλτιστα σε συγκεκριμένη μετατόπιση, το διάγραμμα TEWMA-SN υπερέρχει στο εύρος μετατοπίσεων γύρω από τη συγκεκριμένη μετατόπιση, όμως το διάγραμμα CUSUM-SN είναι πιο αποδοτικό στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$ , συγκρίνοντας τα διαγράμματα TEWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 1.623$ ) και CUSUM-SN ( $k = 0.025, H = 24.11$ ), τα οποία είναι βέλτιστα στην ανίχνευση της μετατόπισης  $\Delta = 0.01$ , διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα TEWMA-SN είναι πιο αποδοτικό για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.15$ ), ενώ το διάγραμμα CUSUM-SN υπερέρχει σε μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Από την άλλη, συγκρίνοντας τα διαγράμματα TEWMA-SN ( $\lambda = 0.25, L = 2.439$ ) και CUSUM-SN ( $k = 0.375, H = 7.24$ ), τα οποία είναι βέλτιστα στην ανίχνευση της μετατόπισης  $\Delta = 0.15$ , το διάγραμμα TEWMA-SN είναι πιο ευαίσθητο για μετατοπίσεις  $0.03 \leq \Delta \leq 0.15$ , ενώ το διάγραμμα CUSUM-SN υπερέρχει κυρίως για μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Παρόμοια συμπεράσματα, προκύπτουν για  $n = 10$ . Για παράδειγμα, το διάγραμμα TEWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 1.624$ ) έχει καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.05$ ) από το διάγραμμα CUSUM-SN ( $k = 0.05, H = 31.65$ ), ενώ το τελευταίο υπερέρχει στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων.

Στη συνέχεια, από τη σύγκριση των διαγραμμάτων TEWMA-SN και EWMA-SN προκύπτει ότι το πρώτο διάγραμμα είναι πιο αποδοτικό για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.05$  για  $n = 5$  και  $\Delta \leq 0.03$  για  $n = 10$ ), ενώ το διάγραμμα EWMA-SN υπερέρχει ιδιαίτερα για μέτριες μετατοπίσεις ( $0.10 \leq \Delta \leq 0.20$ ) όταν  $n = 5$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι οι τιμές  $\min(ARL_1)$  του διαγράμματος

TEWMA-SN είναι αρκετά υψηλότερες από τις αντίστοιχες τιμές του διαγράμματος EWMA-SN, ιδιαίτερα για μικρές και μεσαίες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  ( $\leq 0.25$ ). Βέβαια, αυτό δεν επηρεάζει σημαντικά την απόδοση του διαγράμματος TEWMA-SN σε μεγάλες μετατοπίσεις, καθώς οι βέλτιστες τιμές  $ARL_1$  εμφανίζονται σε μεγάλες τιμές  $\lambda$ .

Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων TEWMA-SN και DEWMA-SN και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις βέλτιστες τιμές  $ARL_1$  των δύο διαγραμμάτων, προκύπτει ότι το διάγραμμα TEWMA-SN έχει ελαφρώς καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα για  $\Delta = 0.01$  και αποδίδει σχεδόν το ίδιο για  $\Delta \geq 0.30$  και  $\Delta \geq 0.40$  όταν  $n = 5$  και  $n = 10$  αντίστοιχα, ενώ το διάγραμμα DEWMA-SN υπερέχει στο υπόλοιπο εύρος των μετατοπίσεων. Στο σημείο αυτό, όμως, παρατηρούμε ότι αν συγκρίνουμε δύο διαγράμματα τα οποία είναι βέλτιστα σε μία μέτρια ή μεγάλη μετατόπιση, το διάγραμμα DEWMA-SN υπερέχει για μετατοπίσεις μεγαλύτερες ή ίσες της βέλτιστης, όμως το διάγραμμα TEWMA-SN υπερέχει για μετατοπίσεις μικρότερες της βέλτιστης. Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$ , αν συγκρίνουμε τα διαγράμματα TEWMA-SN ( $\lambda = 0.25, L = 2.439$ ) και DEWMA-SN ( $\lambda = 0.25, L = 2.604$ ), τα οποία έχουν την καλύτερη απόδοση για  $\Delta = 0.15$  και  $0.20$ , παρατηρούμε ότι το διάγραμμα TEWMA-SN υπερέχει σημαντικά για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.10$ ), αποδίδει εξίσου το ίδιο για  $\Delta = 0.15$ , ενώ υστερεί σε μετατοπίσεις  $\Delta \geq 0.20$ . Επιπλέον, το διάγραμμα DEWMA-SN έχει μικρότερες τιμές  $\min(ARL_1)$  από το διάγραμμα TEWMA-SN για  $\lambda \leq 0.25$ .

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη σύγκριση του διαγράμματος TEWMA-SN με τα διαγράμματα GWMA-SN και DGWMA-SN είναι πιο εμφανή από τις άλλες συγκρίσεις. Η υπεροχή των τελευταίων δύο διαγραμμάτων είναι καθολική σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων και ιδιαίτερα για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις. Αυτό διαπιστώνεται και από τη μεγάλη διαφορά των τιμών EARL. Για παράδειγμα, όταν  $n = 10$ , το διάγραμμα GWMA-SN ( $q = 0.95, a = 0.7, L = 2.550$ ), το οποίο έχει  $EARL=11.77$ , είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα TEWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 1.624$ ), το οποίο έχει  $EARL=16.96$ , όχι μόνο για μικρές μετατοπίσεις, στις οποίες και τα δύο είναι βέλτιστα, αλλά και σε μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Επιπλέον, όταν  $n = 10$ , συγκρίνοντας τα διαγράμματα DGWMA-SN ( $q = 0.75, a = 0.7, L = 2.577$ ) και TEWMA-SN ( $\lambda = 0.25, L = 2.437$ ), τα οποία είναι βέλτιστα για  $\Delta = 0.10$ , διαπιστώνουμε την καθολική υπεροχή του πρώτου διαγράμματος σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων.

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα TEWMA-SN και HWMA-SN για  $n = 10$ , διαπιστώνουμε ότι παρόλο που το διάγραμμα TEWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 1.624$ ) έχει αρκετά χαμηλότερη τιμή  $SDRL_0$  από τα διαγράμματα HWMA-SN με παραμέτρους ( $\lambda = 0.50, L = 2.6877$ ) και ( $\lambda = 0.75, L = 2.5765$ ), υπερέχει στην ανίχνευση πολύ μικρών μετατοπίσεων ( $\Delta \leq 0.03$ ).

### 3.11.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το υποκεφάλαιο παρουσιάσαμε ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης, το TEWMA-SN. Μελετήθηκε η εντός ελέγχου κατανομή του μήκους ροής και υπολογίστηκε η απόδοση του διαγράμματος με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, αλλά και όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης για διάφορες τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda$  και τιμές δείγματος  $n$ . Το νέο διάγραμμα υπερέρχει έναντι του διαγράμματος CUSUM-SN σε μία περιοχή μετατοπίσεων γύρω από την βέλτιστη μετατόπιση για την οποία είναι σχεδιασμένο το διάγραμμα CUSUM-SN και επίσης υπερτερεί έναντι των διαγραμμάτων EWMA-SN και DEWMA-SN κυρίως για μικρές μετατοπίσεις. Η υπεροχή αυτή του διαγράμματος TEWMA-SN αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η τιμή  $\lambda$ . Επιπρόσθετα, το νέο διάγραμμα ελέγχου με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου έχει καλύτερη απόδοση από το διάγραμμα GWMA-SN για μεγάλες και υπό προϋποθέσεις μέτριες μετατοπίσεις, ενώ στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, το διάγραμμα GWMA-SN υπερτερεί σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Το νέο διάγραμμα είναι λιγότερο αποδοτικό από τα διαγράμματα DGWMA-SN και HWMA-SN, τα οποία έχουν καλύτερη απόδοση ιδιαίτερα σε μικρές και μεγάλες μετατοπίσεις.

Μέρος των αποτελεσμάτων αυτού του υποκεφαλαίου παρουσιάστηκαν στην τρίτη επιστημονική εργασία.

## 3.12 Διάγραμμα DHWMA-SN

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα παρουσιάσουμε ένα δεύτερο νέο διάγραμμα ελέγχου με τη χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης, το DHWMA-SN.

### 3.12.1 Δομή διαγράμματος DHWMA-SN

Η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται σε ένα διάγραμμα DHWMA-SN είναι η ακόλουθη

$$\begin{cases} H_i = \lambda T_i + (1 - \lambda)\bar{T}_{i-1}, \\ DH_i = \lambda H_i + (1 - \lambda)\bar{H}_{i-1}, \end{cases} \quad (3.30)$$

όπου  $0 < \lambda \leq 1$  είναι η παράμετρος εξομάλυνσης,  $\bar{T}_{i-1} = \frac{\sum_{k=1}^{i-1} T_k}{i-1}$ ,  $\bar{H}_{i-1} = \frac{\sum_{k=1}^{i-1} H_k}{i-1}$  και  $\bar{T}_0 = \bar{H}_0 = \frac{n}{2}$ .

- Για  $i = 1$ , έχουμε

$$DH_1 = \lambda^2 T_1 + (1 - \lambda^2) \frac{n}{2}.$$

- Για  $i = 2$ , έχουμε

$$DH_2 = \lambda^2 T_2 + 2\lambda(1 - \lambda)T_1 + (1 - \lambda)^2 \frac{n}{2}.$$

- Για  $i > 2$ , η στατιστική συνάρτηση  $DH_i$  γράφεται ως εξής

$$DH_i = \lambda^2 T_i + \frac{2\lambda(1 - \lambda)}{i - 1} T_{i-1} + \frac{(1 - \lambda)}{i - 1} \sum_{u=1}^{i-2} \left( 2\lambda + (1 - \lambda) \sum_{k=u}^{i-2} \frac{1}{k} \right) T_u + \frac{(1 - \lambda)^2}{i - 1} \frac{n}{2}. \quad (3.31)$$

Έτσι, λοιπόν, η εντός ελέγχου μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης  $DH_i$  αποδεικνύεται ότι είναι ίση με  $\frac{n}{2}$ , ενώ η εντός ελέγχου τιμή της διασποράς είναι ίση με

$$Var(DH_i|IC) = \begin{cases} \lambda^4 \frac{n}{4} & , \text{για } i = 1, \\ \lambda^2 (\lambda^2 + 4(1 - \lambda)^2) \frac{n}{4} & , \text{για } i = 2, \\ \left[ \lambda^4 + \frac{4\lambda^2(1 - \lambda)^2}{(i - 1)^2} + \frac{(1 - \lambda)^2}{(i - 1)^2} \sum_{u=1}^{i-2} \left( 2\lambda + (1 - \lambda) \sum_{k=u}^{i-2} \frac{1}{k} \right)^2 \right] \frac{n}{4} & , \text{για } i > 2. \end{cases} \quad (3.32)$$

Ως εκ τούτου, τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος DHWMA-SN είναι τα ακόλουθα

$$UCL_i/LCL_i = \frac{n}{2} \pm L\sqrt{Var(DH_i|IC)}, CL = \frac{n}{2}, \quad (3.33)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου, ενώ τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{n}{2} + L\lambda^2 \sqrt{\frac{n}{4}}, \\ LCL &= \frac{n}{2} - L\lambda^2 \sqrt{\frac{n}{4}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εντός ελέγχου εάν η στατιστική συνάρτηση  $DH_i$  βρίσκεται εντός των ορίων ελέγχου, ενώ σε διαφορετική περίπτωση θεωρούμε ότι βρίσκεται εκτός ελέγχου. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η δομή του διαγράμματος που περιγράψαμε είναι διαφορετική από αυτή του διαγράμματος που παρουσιάζουν οι Riaz et al. (2021), όπου το διάγραμμα που πρότειναν είναι στην ουσία ένα διάγραμμα HWMA-SN με παράμετρο εξομάλυνσης  $\lambda^2$ . Επιπρόσθετα, το διάγραμμα DHWMA-SN μεταπίπτει στο διάγραμμα Shewhart-SN για  $\lambda = 1$ .

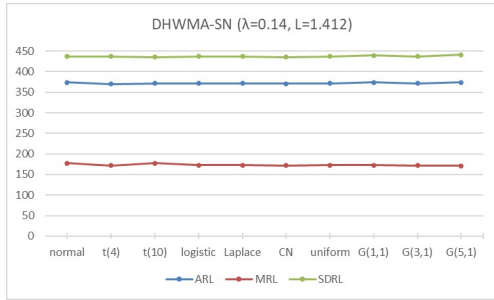
### 3.12.2 Εντός ελέγχου κατανομή μήκους ροής του διαγράμματος DHWMA-SN

Όπως και στο διάγραμμα TEWMA-SN, ομοίως, η εντός ελέγχου κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος DHWMA-SN υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που περιγράφεται στο υποκεφάλαιο 3.3 θέτοντας  $\delta = 0$  ή  $p = 0.5$ . Ο Πίνακας B20 παρουσιάζει τις τιμές της παραμέτρου  $L$  για διάφορους συνδυασμούς της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda$  και του μεγέθους δείγματος  $n$  για το διάγραμμα DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου προκειμένου να επιτευχθεί μία επιθυμητή τιμή  $ARL_0$ . Εκτός από τις τιμές  $L$ , στον εν λόγω πίνακα παρουσιάζονται και οι τιμές  $ARL_0$  και  $SDRL_0$  των υπό όψιν διαγραμμάτων. Από τα αποτελέσματα του Πίνακα B20, διαπιστώνουμε ότι για  $\lambda \geq 0.14$ , η τιμή της παραμέτρου  $L$  αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η τιμή  $n$  προκειμένου να επιτύχουμε την επιθυμητή τιμή  $ARL_0$ , ενώ για  $\lambda = 0.10$  και  $n = 10$ , η τιμή του  $L$  μικραίνει, καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος  $n$ . Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι η τιμή  $SDRL_0$  είναι αρκετά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή  $ARL_0$  όταν  $\lambda = 0.10$ , στη συνέχεια μικραίνει και λαμβάνει την χαμηλότερη τιμή όταν η παράμετρος  $\lambda$  κυμαίνεται μεταξύ 0.20 και 0.30 και έπειτα συνεχίζει να αυξάνεται. Επιπλέον, για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , η τιμή  $SDRL_0$ , η οποία αντιστοιχεί σε καθορισμένη τιμή  $ARL_0$ , μικραίνει, καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος  $n$ . Για παράδειγμα, όταν  $\lambda = 0.10$  και  $ARL_0 \approx 370$ , οι τιμές  $SDRL_0$  είναι ίσες με 797.60, 684.24, 656.53 και 642.74 για  $n = 5, 10, 15$  και 20, αντίστοιχα. Γι' αυτόν τον λόγο, προτείνεται η χρήση ενός διαγράμματος DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και τιμές  $0.16 \leq \lambda \leq 0.30$  όταν  $n = 5$  και  $0.14 \leq \lambda \leq 0.40$  για  $n \geq 10$ .

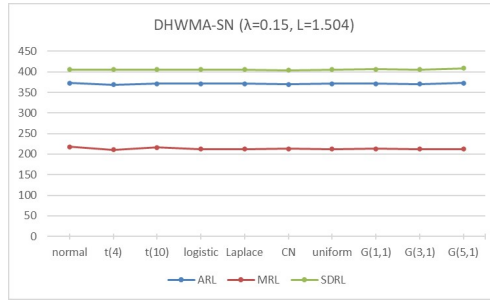
Στο Σχήμα 3.2 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά  $ARL_0$ ,  $MRL_0$  και  $SDRL_0$  της κατανομής του μήκους ροής του διαγράμματος DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου όταν  $n = 10$  για διάφορες συνεχείς κατανομές. Η επιλογή των παραμέτρων σχεδίασης έγινε έτσι ώστε τα διαγράμματα να έχουν  $ARL_0 \approx 370$ . Παρατηρούμε ότι για συγκεκριμένη τιμή  $\lambda$ , οι τιμές των χαρακτηριστικών της εντός ελέγχου κατανομής του μήκους ροής παραμένουν σχεδόν ίδιες για όλες τις κατανομές.

### 3.12.3 Απόδοση διαγράμματος DHWMA-SN

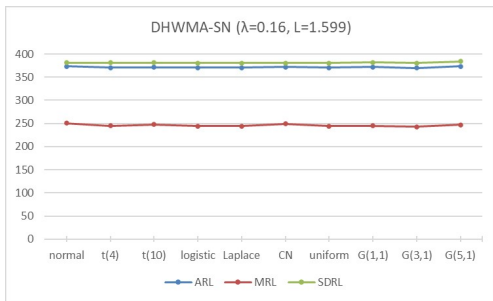
Στους Πίνακες B21-B24 παρουσιάζεται η απόδοση του διαγράμματος DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $\lambda = 0.10, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.20, 0.25, 0.30, 0.40$  και  $n = 5, 10, 15, 20$ . Από τους εν λόγω πίνακες, διαπιστώνουμε ότι για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , η ανιχνευτική ικανότητα του διαγραμμάτος βελτιώνεται, καθώς αυξάνεται η



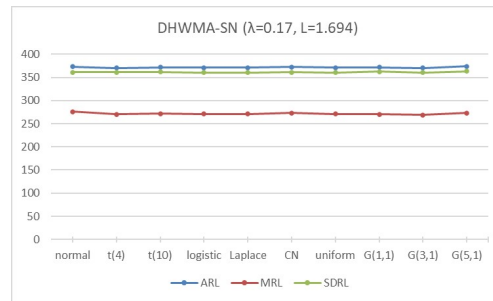
(α)



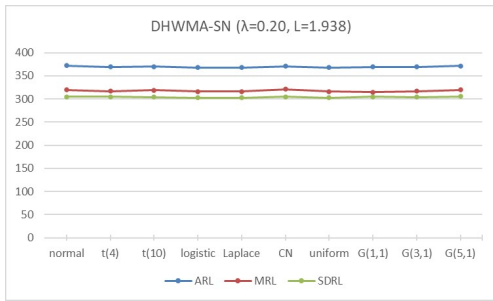
(β)



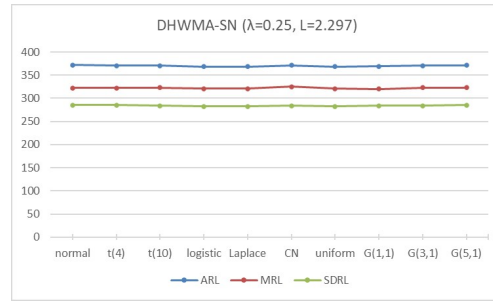
(γ)



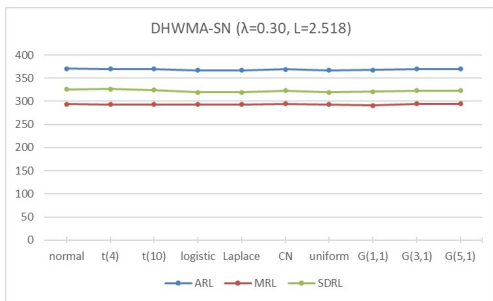
(δ)



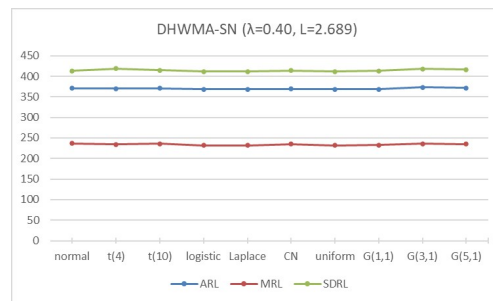
(ε)



(σ)



(ζ)



(η)

**Σχήμα 3.2:** Τιμές των χαρακτηριστικών του εντός ελέγχου μήκους ροής του διαγράμματος DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς κατανομές όταν  $n = 10$

τιμή του μεγέθους του δείγματος  $n$ . Για παράδειγμα, όταν  $\lambda = 0.15$ , τότε οι τιμές EARL του διαγράμματος DHWMA-SN είναι ίσες με 11.86, 9.30, 7.68 και 6.67 για  $n = 5, 10, 15$  και 20, αντίστοιχα. Επιπλέον, μία μικρή τιμή του  $\lambda$  αποδίδει μικρότερες  $ARL_1$  τιμές από ότι μία μεγάλη τιμή του  $\lambda$ . Ως εκ τούτου, ένα διάγραμμα DHWMA-SN με  $\lambda = 0.10$  έχει την καλύτερη απόδοση, η οποία συνοδεύεται και από μία αρκετά υψηλή τιμή  $SDRL_0$ . Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι για  $n = 5$ , οι τιμές  $ARL_1$  που αντιστοιχούν σε μικρές μετατοπίσεις αυξάνονται, καθώς αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  μέχρι αυτή να λάβει την τιμή 0.25 και εν συνεχεία μικραίνουν δίχως όμως να είναι μικρότερες από αυτές που αντιστοιχούν σε ένα διάγραμμα με  $\lambda = 0.10$ .

Στον Πίνακα B25 παρουσιάζεται η απόδοση του διαγράμματος DHWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης για  $n = 10$  και τιμές  $\lambda = 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.75$  και 0.80. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για  $n = 5$ , καθώς γι' αυτή την περίπτωση, το διάγραμμα εμφανίζει πάρα πολύ υψηλές τιμές  $SDRL_0$ . Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ανάλογα με αυτά που παρουσιάστηκαν για το διάγραμμα HWMA-SN. Κατ' αρχάς, για  $\lambda = 0.30$ , το διάγραμμα έχει πολύ υψηλή τιμή  $SDRL_0$  ( $\approx 2500$ ), η οποία, όμως, μειώνεται, καθώς αυξάνεται η τιμή του  $\lambda$ . Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των Πινάκων B22 και B25, διαπιστώνουμε ότι ένα διάγραμμα DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου όχι μόνο έχει μικρότερη τιμή  $SDRL_0$  από ένα διάγραμμα με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, αλλά και καλύτερη συγκεντρωτική ανιχνευτική ικανότητα. Για παράδειγμα, το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.20, L = 1.938$ ) και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου έχει  $EARL=10.85$ , ενώ το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.60, L = 2.853$ ) και όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης έχει  $EARL=12.69$ . Λαμβάνοντας λοιπόν, υπ' όψιν την υψηλή τιμή  $SDRL_0$ , δεν προτείνεται η χρήση του διαγράμματος DHWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης για τιμές  $n = 5$  και 10. Αντί αυτού, λοιπόν, είναι προτιμότερη η χρήση των χρονικών μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου, καθώς και καλύτερη απόδοση προσδίδουν, αλλά και χαμηλότερες τιμές  $SDRL_0$ .

#### 3.12.4 Σύγκριση διαγράμματος DHWMA-SN με άλλα διαγράμματα ελέγχου

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της σύγκρισης του διαγράμματος DHWMA-SN με τη χρήση των χρονικών μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου με τα υπόλοιπα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που εξετάσαμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Συγκρίνοντας, λοιπόν, τα διαγράμματα DHWMA-SN και CUSUM-SN, διαπιστώνουμε την υπεροχή του πρώτου σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$ , το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.20, L = 1.785$ ), το οποίο έχει  $SDRL_0=369.08$ , έχει αρκετά



καλύτερη απόδοση σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων σε σχέση με τα διαγράμματα CUSUM-SN του Πίνακα Β2. Μάλιστα, είναι χαρακτηριστικό, ότι το εν λόγω διάγραμμα έχει  $EARL=13.48$ , ενώ οι αντίστοιχες τιμές των διαγραμμάτων CUSUM-SN κυμαίνονται από 17.57 έως 20.92. Το αυτό ισχύει και όταν  $n = 10$ . Για παράδειγμα, το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.17, L = 1.694$ ), το οποίο έχει  $SDRL_0=360.93$ , υπερέρχει έναντι όλων των διαγραμμάτων CUSUM-SN του Πίνακα Β2, σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων, ενώ το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.20, L = 1.938$ ), το οποίο έχει  $SDRL_0=303.82$ , είναι πιο ευαίσθητο από τα διαγράμματα CUSUM-SN για  $\Delta \geq 0.03$ , ενώ το διάγραμμα CUSUM-SN ( $k = 0.05, H = 31.68$ ) έχει καλύτερη απόδοση για  $\Delta = 0.01$ .

Επιπλέον, το διάγραμμα DHWMA-SN είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα EWMA-SN σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$ , το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.20, L = 1.785$ ) είναι αρκετά πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα EWMA-SN του Πίνακα Β3. Όμοια και για την περίπτωση όπου  $n = 10$ , το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.17, L = 1.694$ ), το οποίο έχει τιμή  $SDRL_0$  χαμηλότερη από αυτή των διαγραμμάτων EWMA-SN, υπερέρχει έναντι των διαγραμμάτων EWMA-SN καθολικά. Η υπεροχή του διαγράμματος DHWMA-SN έναντι του διαγράμματος EWMA-SN είναι εντονότερη για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.15$ ).

Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων DHWMA-SN και DEWMA-SN προκύπτει ότι το πρώτο διάγραμμα είναι πιο αποδοτικό από το δεύτερο, ιδιαίτερα σε μετατοπίσεις  $\Delta \leq 0.10$ . Συγκρίνοντας, λοιπόν για  $n = 5$ , τα διαγράμματα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.17, L = 1.560$ ) και DEWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 1.963$ ), τα οποία έχουν τιμές  $SDRL_0$  ίσες με 412.43 και 421.65 αντίστοιχα, διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα DHWMA-SN είναι αρκετά πιο αποδοτικό για μετατοπίσεις  $\Delta \leq 0.10$ , υπερέρχει ελαφρώς για μέτριες μετατοπίσεις ( $0.15 \leq \Delta \leq 0.20$ ) και έχει ίδια απόδοση με το διάγραμμα DEWMA-SN για μεγάλες μετατοπίσεις. Η υπεροχή του διαγράμματος DHWMA-SN επεκτείνεται σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων, όταν η σύγκριση γίνεται χρησιμοποιώντας μικρότερη τιμή  $SDRL_0$ . Για παράδειγμα, το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.20, L = 1.785$ ) είναι πολύ πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα DEWMA-SN με  $\lambda = 0.50$  και  $0.75$  σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε συγκρίνοντας τα διαγράμματα για  $n = 10$ .

Στη συνέχεια, συγκρίνουμε το διάγραμμα DHWMA-SN με το διάγραμμα GWMA-SN, όπου και παρατηρούμε ότι ένα διάγραμμα DHWMA-SN με χαμηλότερη τιμή  $SDRL_0$  από ένα διάγραμμα GWMA-SN είναι ταυτόχρονα και πιο αποδοτικό. Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$  και υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \approx 400$ , το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.176, L = 1.607$ ) έχει καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα από το διάγραμμα GWMA-SN ( $q = 0.95, a = 0.75, L = 2.571$ ) σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων (βλέπε Πίνακα 3.6). Επιπλέον, το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.20, L =$

1.785), το οποίο έχει  $SDRL_0=369.08$  και  $EARL=13.48$ , έχει συγκεντρωτικά καλή ανιχνευτική ικανότητα από το διάγραμμα GWMA-SN ( $q = 0.95, a = 0.7, L = 2.590$ ), το οποίο έχει αντίστοιχα  $SDRL_0=403.53$  και  $EARL=13.71$ . Το συγκεκριμένο διάγραμμα DHWMA-SN υπερέρχει έναντι όλων των άλλων διαγραμμάτων GWMA-SN σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων και μάλιστα οι διαφορές μεταξύ των τιμών  $ARL_1$  είναι αρκετά μεγάλες. Από την άλλη, όταν  $n = 10$  και υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \approx 399$ , το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.1525, L = 1.527$ ) είναι πιο αποδοτικό έναντι των διαγραμμάτων GWMA-SN με παραμέτρους ( $q = 0.95, a = 0.5, L = 2.773$ ) και ( $q = 0.95, a = 0.7, L = 2.612$ ) σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων (βλέπε Πίνακα 3.9). Τέλος, τα διαγράμματα DHWMA-SN με παραμέτρους ( $\lambda = 0.17, L = 1.694$ ) και ( $\lambda = 0.25, L = 2.297$ ), τα οποία έχουν  $SDRL_0=360.93$  και  $284.28$ , είναι πιο αποδοτικά από τα διαγράμματα GWMA-SN με  $q = 0.90$  και  $0.75$  αντίστοιχα, σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων.

Προκειμένου να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα από τη σύγκριση των διαγραμμάτων DHWMA-SN και DGWMA-SN, δεν θα λάβουμε καθόλου υπ' όψιν τον συνδυασμό παραμέτρων ( $q = 0.95, a \leq 0.8$ ) και ( $q = 0.9, a = 0.5$ ) για το τελευταίο διάγραμμα, καθώς αποδίδουν υψηλή τιμή  $SDRL_0$ . Για  $n = 5$  και συγκρίνοντας τα διαγράμματα υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \approx 436$ , το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.16, L = 1.480$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DGWMA-SN ( $q = 0.9, a = 0.74, L = 2.095$ ) για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.05$ ), ενώ για το υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων τα δύο διαγράμματα έχουν σχεδόν την ίδια απόδοση (βλέπε Πίνακα 3.5). Επίσης, το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.20, L = 1.785$ ) υπερέρχει σε όλο το εύρος μετατοπίσεων έναντι των διαγραμμάτων DGWMA-SN με  $q = 0.75$  και  $0.50$  παρόλο που έχει μικρότερη τιμή  $SDRL_0$  από αυτά. Από την άλλη, για  $n = 10$  και υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \approx 436$ , το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.14, L = 1.412$ ) έχει ελαφρώς καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα για μετατοπίσεις  $\Delta \geq 0.10$  από το διάγραμμα DGWMA-SN ( $q = 0.9, a = 0.68, L = 2.056$ ), ενώ για μικρότερες μετατοπίσεις το δεύτερο διάγραμμα ελαφρώς υπερέρχει (βλέπε Πίνακα 3.8). Επιπρόσθετα, το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.17, L = 1.694$ ), το οποίο έχει  $SDRL_0=360.93$ , έχει καλύτερη απόδοση από όλα τα διαγράμματα DGWMA-SN με παραμέτρους ( $q = 0.9, a \geq 0.9$ ), καθώς και  $q = 0.75, 0.5$ , των οποίων η τιμή  $SDRL_0$  κυμαίνεται από 369 έως 397.

Στη συνέχεια, θα προβούμε στη σύγκριση των διαγραμμάτων DHWMA-SN και HWMA-SN. Συγκρίνοντας λοιπόν τα διαγράμματα για  $n = 5$  και υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \approx 436$ , διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα HWMA-SN ( $\lambda = 0.051, L = 2.2265$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.16, L = 1.480$ ) για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.05$ ), ενώ το δεύτερο υπερέρχει σε μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις (βλέπε Πίνακα 3.5). Η σύγκριση των δύο

διαγραμμάτων για  $n = 5$  και διαφορετικές τιμές του  $SDRL_0$  δεν είναι εφικτή λόγω των πολύ υψηλών τιμών  $SDRL_0$  που έχει το διάγραμμα HWMA-SN για μέτριες και μεγάλες τιμές  $\lambda$ . Ως εκ τούτου, το διάγραμμα DHWMA-SN προτείνεται για χρήση έναντι του διαγράμματος HWMA-SN για  $n = 5$ . Για  $n = 10$  και υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.165, L = 1.646$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα HWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 2.372$ ) σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων εκτός από  $\Delta = 0.01$  (βλέπε Πίνακα 3.10). Βέβαια, διαγράμματα DHWMA-SN με μικρότερες τιμές  $\lambda$  υπερέρχουν καθολικά έναντι του συγκεκριμένου διαγράμματος HWMA-SN έχοντας όμως και υψηλότερες τιμές  $SDRL_0$ .

Τέλος, συγκρίνοντας τα διαγράμματα DHWMA-SN και TEWMA-SN διαπιστώνουμε την υπεροχή του πρώτου διαγράμματος, ιδιαίτερα για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.20$ ). Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$  και υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \approx 436$ , το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.16, L = 1.480$ ) είναι πιο αποδοτικό για μετατοπίσεις  $\Delta \leq 0.20$  από το διάγραμμα TEWMA-SN ( $\lambda = 0.0455, L = 1.717$ ), ενώ τα δύο διαγράμματα έχουν την ίδια απόδοση για μεγάλες μετατοπίσεις (βλέπε Πίνακα 3.5). Επιπλέον, το διάγραμμα DHWMA-SN ( $\lambda = 0.20, L = 1.785$ ) είναι πιο αποδοτικό έναντι όλων των διαγραμμάτων TEWMA-SN με παράμετρο  $\lambda \geq 0.10$ , παρόλο που έχει αρκετά χαμηλότερη τιμή  $SDRL_0$ . Όταν  $n \geq 10$ , ένα διάγραμμα DHWMA-SN με  $\lambda = 0.14$  είναι πιο αποδοτικό για μετατοπίσεις  $\Delta \leq 0.20$ , αλλά έχει και χαμηλότερη τιμή  $SDRL_0$ , από ένα διάγραμμα TEWMA-SN με  $\lambda = 0.05$ , ενώ το διάγραμμα DHWMA-SN με  $\lambda = 0.17$  έχει καλύτερη απόδοση από όλα τα διαγράμματα TEWMA-SN με  $\lambda \geq 0.10$ .

### 3.12.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το υποκεφάλαιο, παρουσιάσαμε ένα δεύτερο νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης, το DHWMA-SN. Μελετήθηκε η εντός ελέγχου κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος για διάφορες τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda$ , αλλά και του μεγέθους δείγματος  $n$ , καθώς και η απόδοσή του. Λόγω των υψηλών τιμών  $SDRL_0$  που έχει το διάγραμμα όταν σχεδιάζεται με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, δεν προτείνεται η συγκεκριμένη σχεδίαση του. Αντίθετα, όταν χρησιμοποιούμε χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, το διάγραμμα εμφανίζει χαμηλές τιμές  $SDRL_0$ . Το νέο διάγραμμα DHWMA-SN εμφανίζεται αρκετά πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα CUSUM-SN, EWMA-SN, DEWMA-SN, GWMA-SN και TEWMA-SN σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων, όχι μόνο όταν συγκρίνονται υπό καθορισμένη τιμή  $SDRL_0$ , αλλά και όταν το διάγραμμα DHWMA-SN έχει χαμηλότερη τιμή  $SDRL_0$  από αυτά. Το διάγραμμα DHWMA-SN έχει καλύτερη ανιχνευτική ικα-

νότητα από το διάγραμμα DGWMA-SN πέρα της περίπτωσης όπου η σύγκριση γίνεται υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \approx 436$ , στην οποία ένα διάγραμμα DGWMA-SN με κατάλληλες παραμέτρους σχεδίασης υπερέρχει ελαφρώς για μεγάλες (όταν  $n = 5$ ) ή μικρές μετατοπίσεις (όταν  $n = 10$ ). Επιπρόσθετα, το διάγραμμα HWMA-SN υπερέρχει έναντι του διαγράμματος DHWMA-SN για πολύ μικρές μετατοπίσεις, όμως το διάγραμμα HWMA-SN δεν δύναται να χρησιμοποιηθεί όταν  $n = 5$  και επιθυμούμε μία χαμηλή τιμή  $SDRL_0$ .

Μέρος των αποτελεσμάτων αυτού του υποκεφαλαίου παρουσιάστηκαν στην έκκτη επιστημονική εργασία.

### 3.13 Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα συγκρίνουμε μεταξύ τους όλα τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που μελετήθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο με χρονικά μεταβαλλόμενα και σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου για  $n = 5$  και 10 υπό καθορισμένες τιμές  $ARL_0$  και  $SDRL_0$ .

Αναφορικά με τη χρήση χρονικών μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου, οι παράμετροι σχεδίασης όλων των διαγραμμάτων ελέγχου έχουν επιλεγεί με τέτοιο τρόπο, ώστε τα διαγράμματα να έχουν  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 436, 400$  ή  $399$  για  $n = 5$  και 10 αντίστοιχα, καθώς και τιμές  $SDRL_0 \leq ARL_0$ . Επισημαίνεται ότι διαγράμματα ελέγχου τα οποία δεν δύναται να έχουν την επιθυμητή τιμή  $SDRL_0$ , δεν συμπεριλαμβάνονται στη σύγκριση. Επιπρόσθετα, στη σύγκριση δεν συμπεριλαμβάνονται τα διαγράμματα EWMA-SN και DEWMA-SN, καθώς αφενός αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των διαγραμμάτων GWMA-SN και DGWMA-SN, τα οποία είναι πιο αποδοτικά, αφετέρου για λόγους ευκολίας επί της εξαγωγής των συμπερασμάτων. Οι τιμές με έντονη γραφή σε κάθε πίνακα υποδηλώνουν την μικρότερη τιμή  $ARL_1$  για κάθε μετατόπιση.

Στον Πίνακα 3.5 παρουσιάζονται οι τιμές  $ARL$  και  $SDRL$  (εντός παρενθέσεως) των διαγραμμάτων DGWMA-SN, HWMA-SN, TEWMA-SN και DHWMA-SN για  $n = 5$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 436$ . Από τον εν λόγω πίνακα, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα HWMA-SN υπερέρχει έναντι των άλλων διαγραμμάτων ελέγχου για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.05$ ) με το διάγραμμα DHWMA-SN να ακολουθεί, ενώ για μετατοπίσεις  $0.10 \leq \Delta \leq 0.15$ , το διάγραμμα DHWMA-SN είναι το πιο ευαίσθητο με απόδοση ελαφρώς καλύτερη από αυτήν του διαγράμματος DGWMA-SN ( $g = 0.9, a = 0.74, L = 2.095$ ). Το τελευταίο διάγραμμα εμφανίζει την καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα για μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Επιπλέον, το διάγραμμα TEWMA-SN υπερέρχει μόνο έναντι του διαγράμματος HWMA-SN για μεγάλες μετατοπίσεις ( $\Delta \geq 0.30$ ). Το διάγραμμα HWMA-SN εμφανίζει την καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση, καθώς

έχει EARL=12.20, ενώ το διάγραμμα DHWMA-SN έχει την αμέσως καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση με EARL=12.35.

**Πίνακας 3.5:** Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 5$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 436$

	DGWMA-SN $q = 0.9, a = 0.74$	DGWMA-SN $q = 0.95, a = 0.93$	HWMA-SN $\lambda = 0.051$	TEWMA-SN $\lambda = 0.0455$	DHWMA-SN $\lambda = 0.16$
$\Delta$	$L = 2.095$	1.896	2.2265	1.717	1.480
0	370.34 (436.14)	369.59 (436.41)	370.94 (436.60)	370.83 (435.60)	370.93 (436.24)
0.01	297.38 (342.76)	296.03 (345.77)	<b>278.26</b> (309.11)	299.90 (345.45)	290.99 (350.35)
0.03	124.17 (131.62)	123.44 (130.23)	<b>112.04</b> (105.44)	125.04 (130.69)	117.16 (134.33)
0.05	61.13 (58.90)	60.84 (59.33)	<b>59.27</b> (52.66)	64.22 (60.43)	59.70 (64.75)
0.10	20.49 (18.03)	20.73 (18.36)	21.21 (17.41)	23.32 (20.04)	<b>20.35</b> (20.25)
0.15	10.33 (8.56)	10.48 (8.82)	11.00 (8.47)	12.07 (10.38)	<b>10.31</b> (9.47)
0.20	<b>6.16</b> (4.80)	6.27 (5.02)	6.84 (4.88)	7.23 (6.17)	6.33 (5.35)
0.30	<b>2.98</b> (2.04)	3.00 (2.11)	3.56 (2.27)	3.27 (2.59)	3.15 (2.31)
0.40	<b>1.69</b> (0.97)	<b>1.69</b> (0.98)	2.09 (1.40)	1.75 (1.13)	1.78 (1.17)
EARL	12.58	12.56	12.20	13.10	12.35
ESDRL	13.10	13.24	11.94	13.58	13.77
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1

Οι τιμές ARL και SDRL των διαγραμμάτων GWMA-SN, DGWMA-SN, TEWMA-SN και DHWMA-SN για  $n = 5$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 400$  παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.6. Από τον συγκεκριμένο πίνακα διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα DHWMA-SN υπερρέχει έναντι όλων των άλλων διαγραμμάτων ελέγχου, ιδιαίτερα για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.20$ ), αποδίδει σχεδόν το ίδιο με το διάγραμμα DGWMA-SN για μετατόπιση  $\Delta = 0.30$ , ενώ το τελευταίο διάγραμμα αποδίδει ελαφρώς καλύτερα για  $\Delta = 0.40$ . Αξίζει να σημειώσουμε ότι το διάγραμμα DHWMA-SN έχει την καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση με EARL=12.90, ενώ ακολουθεί το διάγραμμα GWMA-SN με EARL=13.83, το οποίο έχει καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα από τα διαγράμματα DGWMA-SN και TEWMA-SN για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.05$ ).

Τέλος, όπως και προηγουμένως, το διάγραμμα TEWMA-SN υπερισχύει μόνο έναντι του διαγράμματος GWMA-SN για μεγάλες μετατοπίσεις ( $\Delta \geq 0.30$ ).

**Πίνακας 3.6:** Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 5$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 400$

	GWMA-SN $q = 0.59, a = 0.75$ $L = 2.571$	DGWMA-SN $q = 0.95, a = 1.12$ $L = 2.071$	TEWMA-SN $\lambda = 0.12$ $L = 2.138$	DHWMA-SN $\lambda = 0.176$ $L = 1.607$
$\Delta$				
0	370.06 (400.43)	369.84 (399.65)	370.19 (400.80)	370.35 (400.62)
0.01	306.92 (331.04)	316.03 (346.62)	323.03 (348.69)	<b>296.70</b> (328.88)
0.03	134.94 (129.03)	148.88 (154.08)	159.48 (164.95)	<b>123.91</b> (132.24)
0.05	69.09 (58.94)	73.42 (70.47)	79.80 (76.63)	<b>64.05</b> (65.10)
0.10	24.33 (18.14)	24.26 (19.94)	26.15 (20.80)	<b>22.00</b> (20.86)
0.15	12.88 (8.71)	12.54 (9.73)	13.65 (10.00)	<b>11.13</b> (9.86)
0.20	8.09 (4.94)	7.54 (5.79)	8.45 (6.13)	<b>6.80</b> (5.58)
0.30	4.20 (2.11)	3.46 (2.61)	3.99 (2.92)	<b>3.41</b> (2.40)
0.40	2.68 (0.90)	<b>1.80</b> (1.20)	2.09 (1.47)	2.00 (1.30)
EARL	13.83	14.16	14.95	12.90
ESDRL	12.84	14.15	14.68	13.37
$\min(ARL_1)$	2	1	1	1

Στον Πίνακα 3.7 παρουσιάζονται οι αποδόσεις των διαγραμμάτων CUSUM-SN, GWMA-SN, DGWMA-SN, TEWMA-SN και DHWMA-SN για  $n = 5$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \leq ARL_0$ . Από τα αποτελέσματα του εν λόγω πίνακα είναι εμφανές ότι το διάγραμμα DHWMA-SN έχει την καλύτερη απόδοση σε όλο το εύρος μετατοπίσεων. Μάλιστα η διαφορά στην απόδοση του συγκεκριμένου διαγράμματος με τα άλλα είναι αρκετά μεγάλη, καθώς έχει EARL=13.48, ενώ το διάγραμμα CUSUM-SN ( $k = 0.25, H = 9.57$ ), το οποίο είναι το αμέσως πιο αποδοτικό διάγραμμα, έχει EARL=17.57. Τα διαγράμματα CUSUM-SN έχουν τη δεύτερη καλύτερη απόδοση στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων ( $\Delta \leq 0.10$ ), ενώ το διάγραμμα DGWMA-SN ( $q = 0.7, a = 0.7, L = 2.788$ ) είναι αρκετά αποδοτικό σε μέτριες και μεγάλες με-

τατοπίσεις ( $\Delta \geq 0.15$ ). Επιπλέον, το διάγραμμα GWMA-SN ( $q = 0.75, a = 0.5, L = 2.755$ ), το οποίο έχει παρόμοια συγκεντρωτική απόδοση με τα διαγράμματα CUSUM-SN, υπερτερεί έναντι των διαγραμμάτων DGWMA-SN στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων ( $\Delta \leq 0.10$ ), όμως υστερεί στην ανίχνευση μεγαλύτερων μετατοπίσεων. Επίσης, τα διαγράμματα CUSUM-SN, τα οποία είναι σχεδιασμένα για τη βέλτιστη ανίχνευση μετατοπίσεων  $\Delta = 0.05$  και  $0.10$ , έχουν πολύ υψηλή τιμή  $\min(ARL_1)$  (7 και 5), ενώ τα διαγράμματα GWMA-SN, DGWMA-SN και TEWMA-SN έχουν  $\min(ARL_1) = 2$ . Επισημαίνεται ότι το διάγραμμα DHWMA-SN εκτός του ότι είναι το πιο αποδοτικό, έχει και τη μικρότερη τιμή  $\min(ARL_1)$ .

**Πίνακας 3.7:** Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 5$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \leq ARL_0$

$\Delta$	CUSUM-SN		CUSUM-SN		GWMA-SN		GWMA-SN		DGWMA-SN		TEWMA-SN		DHWMA-SN			
	$k = 0.125$	$k = 0.25$	$k = 0.75, a = 0.5$	$k = 0.75, a = 0.9$	$q = 0.5, a = 0.5$	$q = 0.7, a = 0.7$	$\lambda = 0.65$	$\lambda = 0.20$	$H = 14.35$	$L = 2.755$	$L = 2.819$	$q = 0.5, a = 0.5$	$q = 0.7, a = 0.7$	$\lambda = 0.65$	$\lambda = 0.20$	
0	366.92 (330.62)	370.61 (355.73)	370.01 (369.04)	370.67 (366.12)	370.01 (365.29)	370.62 (370.05)	370.70 (369.41)	370.72 (369.08)								
0.01	312.83 (276.28)	329.73 (311.36)	328.10 (321.77)	348.06 (344.25)	341.35 (338.80)	342.95 (345.85)	358.89 (359.17)	<b>301.19</b> (307.03)								
0.03	155.06 (120.05)	178.99 (160.57)	190.67 (181.07)	239.76 (236.29)	217.41 (215.32)	220.02 (219.12)	278.91 (278.02)	<b>130.70</b> (128.11)								
0.05	86.55 (56.01)	95.13 (77.28)	104.49 (91.47)	143.52 (139.75)	124.33 (118.72)	122.37 (116.95)	190.78 (189.71)	<b>68.81</b> (64.55)								
0.10	37.22 (16.14)	33.84 (19.67)	37.49 (28.09)	45.43 (40.49)	39.98 (32.78)	37.77 (32.51)	69.34 (67.16)	<b>24.11</b> (21.37)								
0.15	23.38 (7.89)	19.35 (8.51)	19.15 (12.99)	20.34 (15.99)	19.17 (13.85)	17.32 (12.92)	29.30 (26.93)	<b>12.22</b> (10.27)								
0.20	17.03 (4.65)	13.46 (4.72)	11.65 (7.30)	11.31 (7.65)	11.21 (7.06)	10.10 (6.50)	14.73 (12.38)	<b>7.42</b> (5.89)								
0.30	11.01 (2.19)	8.34 (2.01)	5.67 (3.05)	5.30 (2.67)	5.47 (2.77)	4.90 (2.40)	5.67 (3.54)	<b>3.60</b> (2.57)								
0.40	8.17 (1.02)	6.16 (0.93)	3.24 (3.34)	3.16 (1.18)	3.21 (1.27)	3.01 (1.03)	3.14 (1.24)	<b>2.02</b> (1.35)								
EARL	17.62	17.57	17.68	20.57	19.10	18.74	25.03	13.48								
ESDRL	11.30	13.51	15.55	19.21	17.51	17.48	24.28	12.91								
$\min(ARL_1)$	7	5	2	2	2	2	2	1								



Οι τιμές ARL και SDRL των διαγραμμάτων DGWMA-SN, TEWMA-SN και DHWMA-SN για  $n = 10$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 436$  παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.8. Στον συγκεκριμένο πίνακα παρέχεται και η απόδοση του διαγράμματος HWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 2.372$ ), το οποίο έχει  $SDRL_0 = 309.65$ , για λόγους σύγκρισης. Από τον εν λόγω πίνακα παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα DGWMA-SN και DHWMA-SN έχουν την ίδια συγκεντρωτική απόδοση, με το πρώτο διάγραμμα να υπερτερεί οριακά στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων ( $\Delta \leq 0.05$ ) και το δεύτερο στην ανίχνευση μέτριων και μεγάλων μετατοπίσεων. Επιπλέον, τα διαγράμματα DGWMA-SN, TEWMA-SN και DHWMA-SN υπερισχύουν έναντι του διαγράμματος HWMA-SN σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων.

**Πίνακας 3.8:** Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 10$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 436$

	DGWMA-SN $q = 0.9, a = 0.68$ $L = 2.056$	HWMA-SN $\lambda = 0.05$ 2.372	TEWMA-SN $\lambda = 0.0568$ 1.825	DHWMA-SN $\lambda = 0.14$ 1.412
0	370.76 (435.80)	370.52 (309.65)	370.78 (436.23)	369.68 (436.55)
0.01	<b>244.87</b> (279.29)	260.66 (224.44)	256.97 (295.33)	247.19 (303.68)
0.03	<b>73.53</b> (72.78)	87.70 (71.13)	81.64 (82.19)	74.63 (87.24)
0.05	<b>34.42</b> (31.68)	42.69 (32.97)	39.33 (35.65)	34.58 (38.18)
0.10	11.07 (9.24)	14.31 (10.11)	13.58 (11.74)	<b>11.01</b> (10.90)
0.15	<b>5.57</b> (4.14)	7.47 (4.69)	6.74 (5.90)	<b>5.57</b> (5.00)
0.20	3.48 (2.27)	4.83 (2.70)	3.93 (3.41)	<b>3.44</b> (2.88)
0.30	1.89 (0.90)	2.65 (1.45)	1.76 (1.32)	<b>1.70</b> (1.25)
0.40	1.27 (0.47)	1.55 (0.92)	<b>1.10</b> (0.40)	<b>1.10</b> (0.40)
EARL	8.90	10.14	9.61	8.92
ESDRL	9.16	8.11	10.08	10.27
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1

Στον Πίνακα 3.9 παρουσιάζονται οι αποδόσεις των διαγραμμάτων GWMA-SN, DGWMA-SN, TEWMA-SN και DHWMA-SN για  $n = 10$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 399$ .

Επιπλέον, παρουσιάζεται και η απόδοση του διαγράμματος HWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 2.372$ ). Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το διάγραμμα DHWMA-SN είναι το πιο αποδοτικό σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Το διάγραμμα GWMA-SN ( $q = 0.95, a = 0.5, L = 2.773$ ) αποδίδει το ίδιο με το διάγραμμα DHWMA-SN για  $\Delta = 0.01$ , ενώ το διάγραμμα GWMA-SN ( $q = 0.95, a = 0.7, L = 2.612$ ) έχει τη δεύτερη καλύτερη απόδοση για  $\Delta = 0.03$ . Επιπρόσθετα, το διάγραμμα DGWMA-SN ( $q = 0.9, a = 0.88, L = 2.160$ ) είναι το αμέσως επόμενο πιο αποδοτικό διάγραμμα στην ανίχνευση μετατοπίσεων  $\Delta \geq 0.05$ . Επισημαίνεται ότι το διάγραμμα GWMA-SN ( $q = 0.95, a = 0.7, L = 2.612$ ) υπερσχύει έναντι των διαγραμμάτων DGWMA-SN στην ανίχνευση πολύ μικρών μετατοπίσεων ( $\Delta \leq 0.03$ ). Επιπλέον, το διάγραμμα HWMA-SN παρόλο που έχει χαμηλότερη τιμή  $SDRL_0$ , υπερσχύει έναντι των διαγραμμάτων GWMA-SN ( $q = 0.95, a = 0.7, L = 2.612$ ) και TEWMA-SN στην ανίχνευση μετατοπίσεων  $\Delta \geq 0.10$  και  $\Delta \leq 0.15$ , αντίστοιχα, ενώ είναι πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα DGWMA-SN μόνο για  $\Delta = 0.03$ . Τέλος, όπως είναι φυσικό, το διάγραμμα DHWMA-SN έχει την καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση, ενώ ακολουθούν τα διαγράμματα GWMA-SN ( $q = 0.95, a = 0.7, L = 2.612$ ) και DGWMA-SN ( $q = 0.9, a = 0.88, L = 2.160$ ).

**Πίνακας 3.9:** Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημιακής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 10$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 399$

$\Delta$	GWMA-SN	GWMA-SN	DGWMA-SN	DGWMA-SN	HWMA-SN	TEWMA-SN	DHWMA-SN
	$q = 0.95, a = 0.5$ $L = 2.773$	$q = 0.95, a = 0.7$	$q = 0.9, a = 0.88$	$q = 0.95, a = 1.092$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.088$	$\lambda = 0.1525$
0	370.03 (398.42)	369.96 (398.80)	369.83 (399.32)	370.09 (399.24)	370.52 (309.65)	370.13 (399.43)	370.20 (398.68)
0.01	256.14 (254.33)	257.63 (268.56)	270.51 (286.59)	270.72 (285.79)	260.66 (224.44)	274.53 (293.21)	<b>256.10</b> (289.35)
0.03	93.47 (76.65)	85.91 (75.22)	90.17 (86.40)	91.74 (87.45)	87.70 (71.13)	92.95 (89.69)	<b>80.72</b> (88.68)
0.05	47.70 (35.34)	41.62 (32.74)	41.28 (35.95)	42.11 (36.10)	42.69 (32.97)	43.43 (37.07)	<b>37.59</b> (39.36)
0.10	17.25 (11.38)	14.57 (9.95)	13.29 (10.18)	13.91 (10.54)	14.31 (10.11)	14.88 (11.16)	<b>11.90</b> (11.36)
0.15	9.20 (5.47)	7.69 (4.63)	6.65 (4.75)	7.03 (5.12)	7.47 (4.69)	7.61 (5.73)	<b>5.99</b> (5.23)
0.20	5.84 (3.23)	4.94 (2.65)	4.06 (2.68)	4.27 (2.93)	4.83 (2.70)	4.55 (3.38)	<b>3.70</b> (3.00)
0.30	3.02 (1.39)	2.71 (1.13)	2.06 (1.10)	2.11 (1.18)	2.65 (1.45)	2.14 (1.34)	<b>1.85</b> (1.37)
0.40	1.85 (0.76)	1.76 (0.64)	1.29 (0.51)	1.29 (0.52)	1.55 (0.92)	1.30 (0.54)	<b>1.13</b> (0.51)
EARL	10.67	10.06	10.08	10.20	10.14	10.44	9.39
ESDRL	9.11	9.08	9.70	9.76	8.11	10.08	10.05
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1

Οι αποδόσεις των διαγραμμάτων CUSUM-SN, GWMA-SN, DGWMA-SN, HWMA-SN, TEWMA-SN και DHWMA-SN για  $n = 10$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \leq ARL_0$  παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.10. Το πιο αποδοτικό διάγραμμα στην ανίχνευση της μετατόπισης  $\Delta = 0.01$  είναι το HWMA-SN, ενώ για το υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων είναι το DHWMA-SN και ακολουθεί το HWMA-SN. Επιπλέον, το διάγραμμα CUSUM-SN ( $k = 0.25, H = 16.96$ ) είναι το τρίτο στη σειρά πιο αποδοτικό στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων ( $\Delta \leq 0.05$ ), ενώ το διάγραμμα DGWMA-SN ( $q = 0.6, a = 0.7, L = 2.812$ ) έπεται του διαγράμματος HWMA-SN στην ανίχνευση μέτριων και μεγάλων μετατοπίσεων ( $\Delta \geq 0.10$ ). Τέλος, την καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση μετά τα διαγράμματα DHWMA-SN και HWMA-SN έχει το διάγραμμα CUSUM-SN ( $k = 0.25, H = 16.96$ ).

**Πίνακας 3.10:** Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 10$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \leq ARL_0$

	CUSUM-SN $k = 0.25$ $H = 16.96$	CUSUM-SN $k = 0.5$ 10.65	GWMA-SN $q = 0.75, a = 0.7$ $L = 2.871$	DGWMA-SN $q = 0.6, a = 0.7$ 2.812	HWMA-SN $\lambda = 0.05$ 2.372	TEWMA-SN $\lambda = 0.75$ 2.891	DHWMA-SN $\lambda = 0.165$ 1.646
0	370.48 (342.12)	371.64 (359.92)	369.75 (369.60)	370.15 (369.94)	370.52 (309.65)	370.35 (369.68)	370.17 (369.65)
0.01	288.07 (260.77)	315.15 (302.40)	316.10 (313.86)	322.66 (318.71)	<b>260.66</b> (224.44)	351.34 (351.31)	263.88 (277.98)
0.03	109.49 (84.20)	138.84 (125.68)	157.03 (153.60)	152.98 (148.07)	87.70 (71.13)	244.79 (243.05)	<b>85.99</b> (89.58)
0.05	55.35 (34.18)	63.65 (51.96)	74.60 (67.49)	71.36 (66.45)	42.69 (32.97)	148.51 (148.06)	<b>40.36</b> (40.32)
0.10	22.76 (9.15)	20.29 (11.41)	21.55 (16.28)	19.61 (15.24)	14.31 (10.11)	42.51 (40.84)	<b>12.78</b> (11.82)
0.15	14.20 (4.37)	11.36 (4.65)	10.34 (6.66)	9.18 (5.92)	7.47 (4.69)	15.95 (14.16)	<b>6.38</b> (5.48)
0.20	10.35 (2.64)	7.87 (2.59)	6.22 (3.51)	5.55 (3.09)	4.83 (2.70)	7.76 (6.06)	<b>3.90</b> (3.15)
0.30	6.76 (1.16)	4.91 (1.12)	3.12 (1.42)	2.86 (1.24)	2.65 (1.45)	3.11 (1.70)	<b>1.91</b> (1.44)
0.40	5.02 (0.71)	3.63 (0.58)	1.88 (0.78)	1.79 (0.67)	1.55 (0.92)	1.79 (0.70)	<b>1.15</b> (0.58)
EARL	13.16	13.64	13.93	13.65	10.14	19.99	9.79
ESDRL	8.95	11.08	12.69	12.55	8.11	19.46	9.89
$\min(ARL_1)$	4	3	1	1	1	1	1

Από τα παραπάνω αποτελέσματα που προέκυψαν από την σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου

με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και διάφορες τιμές  $SDRL_0$  διαπιστώνουμε ότι υπό οποιαδήποτε συνθήκη, το διάγραμμα DHWMA-SN είναι το πιο αποδοτικό σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων πέραν της περίπτωσης όπου  $n = 5$  και  $SDRL_0 \approx 436$ , στην οποία τα διαγράμματα HWMA-SN και DGWMA-SN έχουν την καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα για μικρές και μεγάλες μετατοπίσεις, αντίστοιχα. Επιπλέον, το διάγραμμα HWMA-SN εμφανίζει τη δεύτερη στη σειρά καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα για την περίπτωση όπου  $n = 10$  και η σύγκριση γίνεται υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ . Τα διαγράμματα GWMA-SN και DGWMA-SN εμφανίζονται αρκετά αποδοτικά για μικρές και μέτριες προς μεγάλες μετατοπίσεις αντίστοιχα, όταν η σύγκριση γίνεται υπό  $SDRL_0 \approx 400$ . Τέλος, στην περίπτωση που η σύγκριση γίνεται υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , τα διαγράμματα CUSUM-SN και DGWMA-SN εμφανίζονται αρκετά ευαίσθητα για μικρές και μέτριες προς μεγάλες μετατοπίσεις, αντίστοιχα.

Στη συνέχεια θα προβούμε σε μία σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης. Σε αυτήν την περίπτωση, δεν συμπεριλαμβάνουμε καθόλου τα διαγράμματα HWMA-SN και DHWMA-SN, καθώς έχουν πολύ υψηλές τιμές  $SDRL_0$ . Τα υπόλοιπα διαγράμματα έχουν τιμές  $SDRL_0$  μικρότερες ή περίπου ίσες με τις αντίστοιχες τιμές  $ARL_0$ . Στον Πίνακα 3.11 παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων σχεδίασης των διαγραμμάτων ελέγχου, καθώς και οι αντίστοιχες τιμές  $ARL_1$  σε κάθε μετατόπιση για  $n = 5$  και  $10$ . Από τον εν λόγω πίνακα διαπιστώνουμε ότι και για τις δύο τιμές του  $n$ , ένα διάγραμμα DGWMA-SN με  $q = 0.9 - 0.95$  και  $a = 0.5 - 0.8$  αποδίδει πολύ ικανοποιητικά για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.05$ ), ενώ διάφορα σχήματα με κυρίαρχο αυτό του GWMA-SN αποδίδουν βέλτιστα για μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Σε αντίθεση, λοιπόν, με την περίπτωση όπου ο σχεδιασμός των διαγραμμάτων ελέγχου γίνεται με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, ένα διάγραμμα DGWMA-SN αποδίδει καλύτερα από ένα διάγραμμα GWMA-SN σε μικρές μετατοπίσεις και το αντίθετο για μεγαλύτερες μετατοπίσεις.

### 3.14 Εφαρμογές

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα παρουσιάσουμε δύο εφαρμογές των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου που μελετήσαμε σε αυτό το κεφάλαιο.

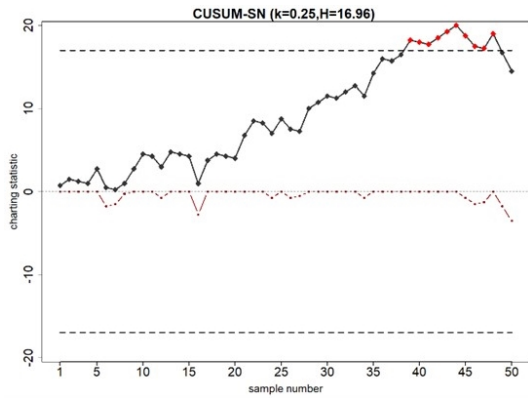
#### 3.14.1 Εφαρμογή 1

Έστω μία διεργασία, όπου το ποιοτικό χαρακτηριστικό  $X$  ακολουθεί την λογιστική κατανομή με παράμετρο θέσης  $\mu = 0.111$  και παράμετρο διασποράς  $s = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$ . Η διεργασία θεωρούμε

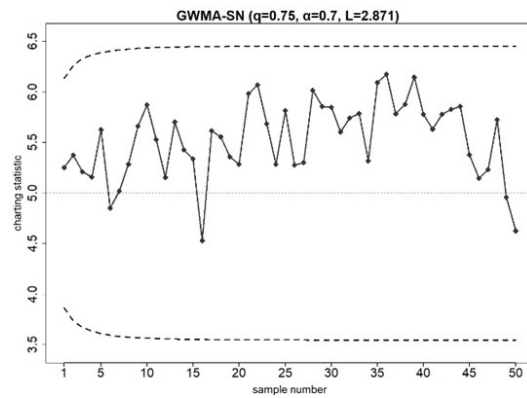
**Πίνακας 3.11:** Βέλτιστες τιμές παραμέτρων σχεδίασης μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης και όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης

$\Delta$	$n = 5$						$n = 10$					
	διάγραμμα	$q$	$a$	$\lambda$	$L$	$ARL_1$	διάγραμμα	$q$	$a$	$\lambda$	$L$	$ARL_1$
0.01	DGWMA-SN	0.95	0.5	-	1.205	296.56	DGWMA-SN	0.9	0.5	-	1.837	249.91
0.03	DGWMA-SN	0.9	0.5	-	1.838	135.31	DGWMA-SN	0.9	0.5	-	1.837	92.54
0.05	DGWMA-SN	0.9	0.7	-	1.945	76.44	DGWMA-SN	0.9	0.8	-	2.034	49.73
0.10	EWMA-SN	-	-	0.05	2.477	31.00	GWMA-SN	0.95	1.2	-	2.514	18.90
0.15	DGWMA-SN	0.75	0.8	-	2.572	17.18	GWMA-SN	0.9	1.2	-	2.694	10.25
0.20	GWMA-SN	0.9	1.2	-	2.680	11.07	TEWMA-SN	-	-	0.50	2.757	6.62
0.30	EWMA-SN	-	-	0.25	2.822	5.82	DGWMA-SN	0.5	1.2	-	2.857	3.42
0.40	GWMA-SN	0.5	0.8	-	2.751	3.28	GWMA-SN	0.5	0.7	-	2.871	1.92

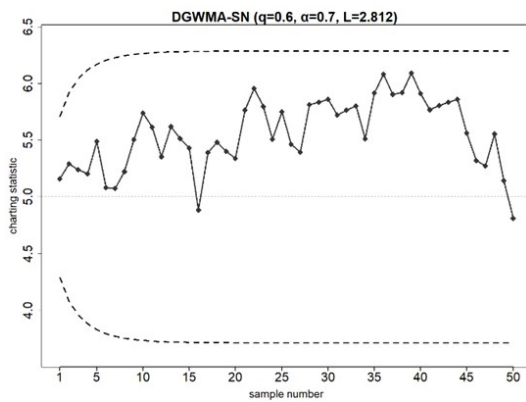
ότι βρίσκεται σε κατάσταση εντός ελέγχου εάν η τιμή της διαμέσου είναι ίση με  $\theta_0 = 0$  και η παράμετρος της διασποράς ίση με  $s = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$ . Έστω, λοιπόν, ότι συλλέγουμε 50 δείγματα μεγέθους  $n = 10$  το καθένα, από μία τέτοια διεργασία. Οι τιμές των δειγμάτων παρουσιάζονται στον Πίνακα B26. Τα δεδομένα μπορούν να θεωρηθούν ως παρατηρήσεις από μία εκτός ελέγχου διεργασία όπου η μετατόπιση είναι ίση με  $\delta = 0.111$  (ή  $\Delta = 0.05$  σύμφωνα με τα διαλαμβανόμενα του Πίνακα 3.1). Θέτοντας τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , κατασκευάζουμε τα διαγράμματα CUSUM-SN ( $k = 0.25, H = 16.96$ ), GWMA-SN ( $q = 0.75, a = 0.7, L = 2.871$ ), DGWMA-SN ( $q = 0.6, a = 0.7, L = 2.812$ ), HWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 2.372$ ), TEWMA-SN ( $\lambda = 0.75, L = 2.891$ ) και DHWMA-SN ( $\lambda = 0.165, L = 1.646$ ). Οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης  $T_i$  εμφανίζονται στον Πίνακα B26. Επίσης, στον συγκεκριμένο πίνακα παρουσιάζονται και οι τιμές της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης  $SR_i$ , οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στην εφαρμογή του επόμενου κεφαλαίου. Τα διαγράμματα ελέγχου εμφανίζονται στο Σχήμα 3.3. Από το εν λόγω σχήμα διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα CUSUM-SN ανιχνεύει την μετατόπιση έπειτα από 39 δείγματα, το διάγραμμα HWMA-SN έπειτα από 35 δείγματα και το διάγραμμα DHWMA-SN έπειτα από 28 δείγματα. Τα υπόλοιπα διαγράμματα ελέγχου δεν ανιχνεύουν την μετατόπιση. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με τις θεωρητικές τιμές  $ARL_1$  των εν λόγω διαγραμμάτων για  $\Delta = 0.05$  που φαίνονται στον Πίνακα 3.10, παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα που δεν ανιχνεύουν την μετατόπιση χρειάζονται περισσότερες από 50 παρατηρήσεις για να την εντοπίσουν, ενώ τα διαγράμματα CUSUM-SN, HWMA-SN και DHWMA-SN χρειάζονται 56, 43 και 41 δείγματα, αντίστοιχα.



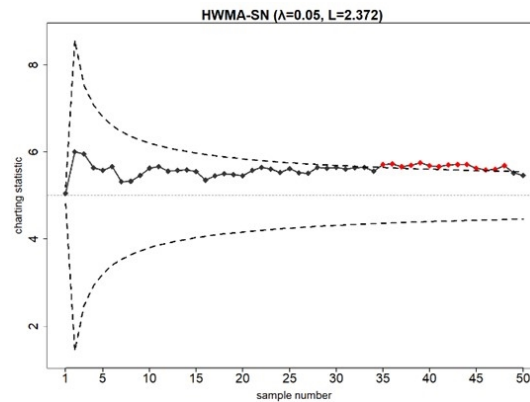
( $\alpha$ )



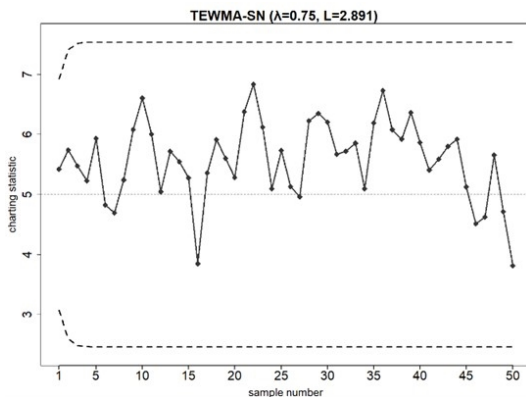
( $\beta$ )



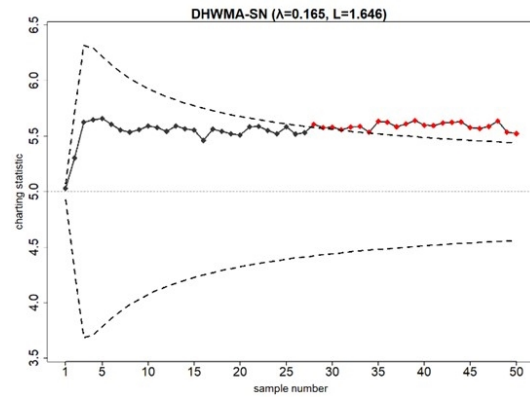
( $\gamma$ )



( $\delta$ )



( $\epsilon$ )



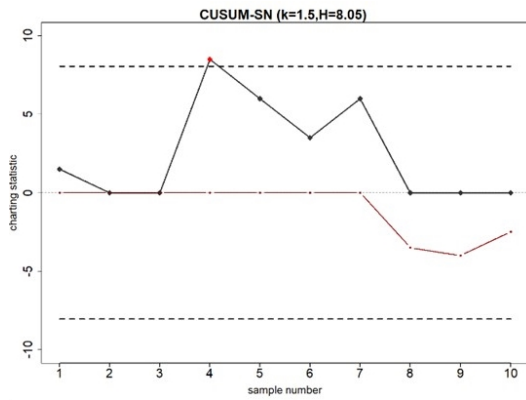
( $\sigma\tau$ )

Σχήμα 3.3: Διαγράμματα ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης για την εφαρμογή 1

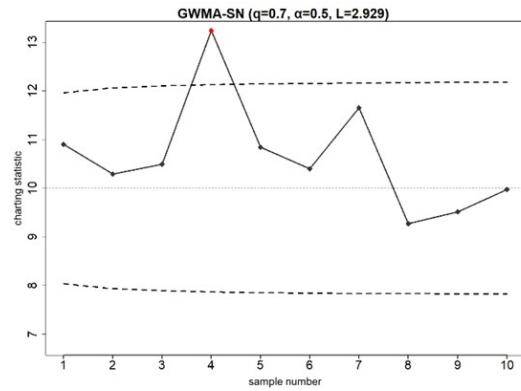
### 3.14.2 Εφαρμογή 2

Σε αυτήν την εφαρμογή τα δεδομένα προέρχονται από την εργασία των Celano et al. (2016), όπου το ποιοτικό χαρακτηριστικό ενδιαφέροντος αφορά τα ακτινικά σφάλματα που εντοπίζονται σε μηχανουργικές διεργασίες διάνοιξης οπών σε διάφορα εξαρτήματα. Τα εν λόγω ακτινικά σφάλματα συχνά θεωρείται ότι ακολουθούν την Rayleigh κατανομή. Στην συγκεκριμένη εφαρμογή, η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται σε κατάσταση εντός ελέγχου εάν η τιμή της διαμέσου για τα ακτινικά σφάλματα είναι ίση με  $\theta_0 = 0.388\text{mm}$ . Προκειμένου να εξετάσουμε εάν η διεργασία βρίσκεται εντός ή εκτός ελέγχου, συλλέγουμε 10 δείγματα μεγέθους  $n = 20$  το καθένα. Τα δεδομένα παρουσιάζονται στον Πίνακα B27. Θέτοντας τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , κατασκευάζουμε τα διαγράμματα GWMA-SN ( $q = 0.7, a = 0.5, L = 2.929$ ), DGWMA-SN ( $q = 0.6, a = 0.7, L = 2.814$ ), HWMA-SN ( $\lambda = 0.05, L = 2.411$ ), TEWMA-SN ( $\lambda = 0.75, L = 2.924$ ) και DHWMA-SN ( $\lambda = 0.17, L = 1.726$ ). Επιπλέον, κατασκευάζουμε το διάγραμμα CUSUM-SN ( $k = 1.5, H = 11.62$ ), το οποίο έχει  $ARL_0 = 379.89$  και  $SDRL_0 = 373.02$  (λόγω διακριτότητας της μεταβλητής  $T_i$ , δεν είναι εφικτή η εύρεση παραμέτρων σχεδίασης που να δίνουν πλησιέστερη τιμή  $ARL_0$ ). Οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης  $T_i$  παρουσιάζονται στον Πίνακα B27, ενώ τα διαγράμματα ελέγχου απεικονίζονται στο Σχήμα 3.4. Παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα CUSUM-SN, GWMA-SN, DGWMA-SN και TEWMA-SN ανιχνεύουν την μετατόπιση έπειτα από 4 παρατηρήσεις, ενώ τα διαγράμματα HWMA-SN και DHWMA-SN έπειτα από 5 παρατηρήσεις.

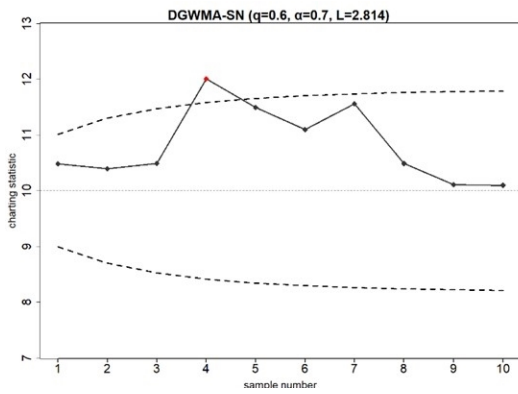




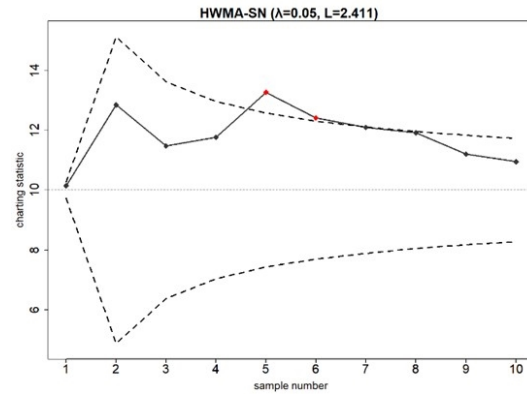
( $\alpha$ )



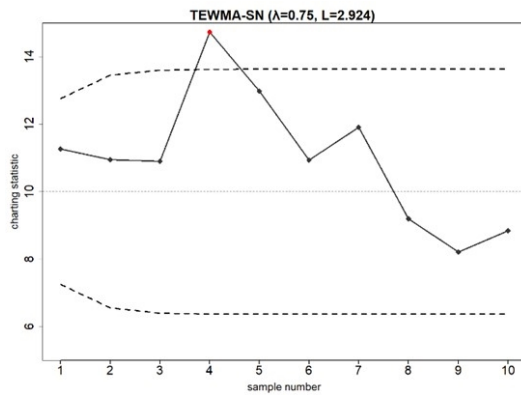
( $\beta$ )



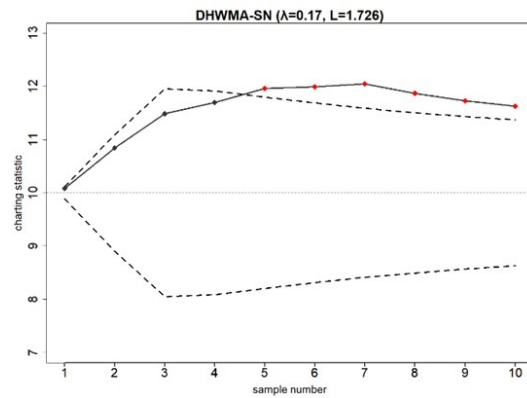
( $\gamma$ )



( $\delta$ )



( $\epsilon$ )



( $\sigma\tau$ )

Σχήμα 3.4: Διαγράμματα ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης για την εφαρμογή 2

### 3.15 Ανακεφαλαίωση

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάσαμε τη δομή ορισμένων μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με τη χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης και μελετήσαμε την απόδοσή τους χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα και σταθερές κατάστασης όρια ελέγχου. Συγκεκριμένα μελετήσαμε τα ήδη υπάρχοντα διαγράμματα ελέγχου Shewhart-SN, CUSUM-SN, EWMA-SN, DEWMA-SN, GWMA-SN, DGWMA-SN και HWMA-SN για  $n = 5$  και  $n = 10$ . Επιπρόσθετα, παρουσιάσαμε δύο νέα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, τα TEWMA-SN και DHWMA-SN.

Από τη μελέτη των διαγραμμάτων ελέγχου με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου προέκυψαν αρκετά ενδιαφέροντα συμπεράσματα, τα σημαντικότερα εκ των οποίων είναι τα κάτωθι:

1. Τα διαγράμματα GWMA-SN και DGWMA-SN είναι πιο αποδοτικά από τα διαγράμματα EWMA-SN και DEWMA-SN, αντίστοιχα, ιδιαίτερα για μικρές μετατοπίσεις. Επίσης, το διάγραμμα GWMA-SN είναι πιο ευαίσθητο από το διάγραμμα DGWMA-SN για μικρές μετατοπίσεις, ενώ ισχύει το αντίστροφο για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις.
2. Το διάγραμμα TEWMA-SN υπερέχει έναντι των διαγραμμάτων EWMA-SN και DEWMA-SN, κυρίως για μικρές μετατοπίσεις, ενώ είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα GWMA-SN για μεγάλες και υπό προϋποθέσεις μέτριες μετατοπίσεις. Επιπλέον, υστερεί έναντι των διαγραμμάτων DGWMA-SN, HWMA-SN και DHWMA-SN σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων.
3. Το διάγραμμα DHWMA-SN είναι αρκετά πιο αποδοτικό από όλα τα διαγράμματα ελέγχου, εκτός από την περίπτωση όπου  $n = 5$  και η σύγκριση γίνεται υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \approx 436$ , όπου υπερισχύει το διάγραμμα HWMA-SN για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.05$ ). Η υπεροχή του διαγράμματος DHWMA-SN είναι ιδιαίτερα εμφανής όταν η σύγκριση γίνεται υπό τις συνθήκες  $SDRL_0 \approx 400$  ή  $SDRL_0 \leq ARL_0$ .
4. Λόγω υψηλών τιμών  $SDRL_0$  που εμφανίζει το διάγραμμα DHWMA-SN για ορισμένες τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda$ , προτείνεται η χρήση των τιμών  $0.16 \leq \lambda \leq 0.30$  όταν  $n = 5$  και  $0.14 \leq \lambda \leq 0.40$ , όταν  $n = 10$ .
5. Το διάγραμμα HWMA-SN εμφανίζει αρκετά υψηλές τιμές  $SDRL_0$  όταν  $n = 5$ , ενώ το νέο διάγραμμα DHWMA-SN δεν αντιμετωπίζει αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας κατάλληλες τιμές παραμέτρων σχεδίασης, οι οποίες μάλιστα το καθιστούν και ιδιαίτερα αποδοτικό.

Από την άλλη, ο σχεδιασμός των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης έχει ως αποτέλεσμα μία διαφορετική συμπεριφορά των διαγραμμάτων. Τα συμπεράσματα συνοψίζονται ως εξής:

1. Το διάγραμμα CUSUM-SN είναι αρκετά αποδοτικό για ένα εύρος μετατοπίσεων γύρω από την βέλτιστη μετατόπιση την οποία είναι σχεδιασμένο να ανιχνεύει.
2. Τα διαγράμματα HWMA-SN και DHWMA-SN εμφανίζουν υψηλές τιμές  $SDRL_0$  κι ως εκ τούτου δεν προτείνονται για χρήση.
3. Το διάγραμμα TEWMA-SN είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα CUSUM-SN σε ένα εύρος μετατοπίσεων γύρω από την βέλτιστη μετατόπιση την οποία είναι σχεδιασμένο το CUSUM-SN να ανιχνεύει, ενώ είναι λιγότερο αποδοτικό στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων.
4. Το διάγραμμα TEWMA-SN υπερέχει έναντι του διαγράμματος EWMA-SN για μικρές μετατοπίσεις, ενώ αποδίδει ελαφρώς καλύτερα από το διάγραμμα DEWMA-SN για πολύ μικρές μετατοπίσεις. Συγκρίνοντας όμως τα διαγράμματα TEWMA-SN και DEWMA-SN, τα οποία είναι βέλτιστα στην ανίχνευση μίας μέτριας ή μεγάλης μετατόπισης, διαπιστώνουμε την υπεροχή του διαγράμματος TEWMA-SN σε μετατοπίσεις μικρότερες από την βέλτιστη.
5. Τα διαγράμματα GWMA-SN και DGWMA-SN είναι πιο αποδοτικά από τα διαγράμματα EWMA-SN και DEWMA-SN αντίστοιχα, ιδιαίτερα για μικρές μετατοπίσεις. Επίσης, το διάγραμμα DGWMA-SN υπερτερεί έναντι του διαγράμματος GWMA-SN για μικρές μετατοπίσεις ( $\Delta \leq 0.05$ ), ενώ τα δύο διαγράμματα είναι σχεδόν ισοδύναμα για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις.

Συνοψίζοντας, λοιπόν, το νέο διάγραμμα DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου έχει πολύ καλή ανιχνευτική ικανότητα και υπερισχύει έναντι των υπολοίπων διαγραμμάτων ελέγχου σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων, ενώ η χρήση του με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης δεν συνιστάται. Επιπλέον, το νέο διάγραμμα TEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου είναι πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα EWMA-SN και DEWMA-SN για μικρές μετατοπίσεις και υπερέχει έναντι του διαγράμματος GWMA-SN, ιδιαίτερα για μεγάλες μετατοπίσεις. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, τα διαγράμματα DGWMA-SN και GWMA-SN εμφανίζουν καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα από τα υπόλοιπα διαγράμματα.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

---

## Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης

---

### 4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, μελετήσαμε τη δομή και την απόδοση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης, τα οποία μπορούν να εφαρμοστούν σε οποιαδήποτε διεργασία υπό την προϋπόθεση ότι η κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού είναι συνεχής. Μία άλλη κατηγορία μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου Φάσης Ι για την παράμετρο θέσης είναι εκείνα τα οποία χρησιμοποιούν την προσημική-βαθμολογική στατιστική συνάρτηση. Η εφαρμογή των εν λόγω διαγραμμάτων απαιτεί την επιπρόσθετη υπόθεση της συμμετρίας για την κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού. Ως εκ τούτου, τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης είναι πιο αποδοτικά από τα αντίστοιχα διαγράμματα με χρήση της (συνήθους) προσημικής στατιστικής συνάρτησης με το μειονέκτημα όμως να μην μπορούν να εφαρμοστούν για μη συμμετρικές κατανομές.

Στη συνέχεια, θα παραθέσουμε μία συνοπτική περιγραφή των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης για την ανίχνευση μετατοπίσεων στην παράμετρο θέσης.

Οι Bakir και Reynolds (1979) παρουσίασαν ένα διάγραμμα τύπου CUSUM με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης (CUSUM-SR), ενώ οι Amin και Searcy (1991) ανέπτυξαν το αντίστοιχο διάγραμμα EWMA (EWMA-SR). Ο Bakir (2004) παρουσίασε το διάγραμμα Shewhart με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης (Shewhart-SR) και υπολόγισε την απόδοσή του για διάφορες συμμετρικές κατανομές, όπου και

βρέθηκε για ορισμένες περιπτώσεις πιο αποδοτικό από το διάγραμμα Shewhart- $\bar{X}$ . Στη συνέχεια, οι Chakraborti και Eryilmaz (2007) παρουσίασαν μονόπλευρα και δίπλευρα διάγράμματα Shewhart- $\bar{X}$  με κανόνες ροών προκειμένου να αυξήσουν περαιτέρω την απόδοση του διαγράμματος Shewhart- $\bar{X}$ . Οι Graham et al. (2011b) μελέτησαν εκτενέστερα το διάγραμμα EWMA-SR και υπολόγισαν τα χαρακτηριστικά της κατανομής του μήκους ροής με τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων. Κατά τη σύγκριση με τα διαγράμματα EWMA-SN, EWMA- $\bar{X}$  και Shewhart-SR (με και χωρίς κανόνες ροών), το διάγραμμα EWMA-SR βρέθηκε να έχει την ίδια ή και καλύτερη απόδοση. Οι Chakraborty et al. (2016) παρουσίασαν το μη παραμετρικό διάγραμμα GWMA με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης (GWMA-SR) προκειμένου να βελτιώσουν περαιτέρω την απόδοση του διαγράμματος EWMA-SR στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Οι Raza, Nawaz, Aslam, Bhatti και Sherwani (2020) μελέτησαν το διάγραμμα DEWMA με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης (DEWMA-SR) το οποίο βρέθηκε πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα EWMA-SN, EWMA-SR, MEC-SN και DEWMA-SN στην ανίχνευση μικρών και υπό ορισμένες προϋποθέσεις μέτριων μετατοπίσεων. Οι Raza, Nawaz και Han (2020) παρουσίασαν το διάγραμμα HWMA με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης (HWMA-SR), το οποίο παρουσιάζει καλύτερη απόδοση από τα διαγράμματα EWMA-SN, EWMA-SR και HWMA-SN για μικρές μετατοπίσεις. Οι Perdakis, Psarakis, Castagliola και Celano (2021) παρουσίασαν το διάγραμμα CEWMA με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης (CEWMA-WSR), το οποίο είναι μία παραλλαγή του διαγράμματος EWMA-SR. Το συγκεκριμένο διάγραμμα βρέθηκε πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα EWMA-SN, CUSUM-SN, GWMA-SN και CEWMA-SN για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Στη συνέχεια, οι Perdakis, Psarakis, Castagliola και Maravelakis (2021) παρουσίασαν το διάγραμμα C-WRS EWMA, το οποίο είναι μία παραλλαγή του διαγράμματος EWMA-SR, όπου χρησιμοποίησαν έναν μετασχηματισμό για την προσημική-βαθμολογική στατιστική συνάρτηση. Τέλος, οι Tang et al. (2022), επηρεαζόμενοι από την εργασία των Perdakis, Psarakis, Castagliola και Celano (2021), παρουσίασαν το διάγραμμα ADSEWMA-SR, το οποίο βασίζεται στο σχήμα AEWMA και είναι αποδοτικότερο από τα διαγράμματα EWMA-SR και CEWMA-WSR σε συγκεκριμένα εύρη μετατοπίσεων. Μία συνοπτική περιγραφή των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης παρατίθεται από τους Chakraborti και Graham (2021a,b), καθώς και από τους Triantafyllou και Ram (2021a,b).

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε τα - αντίστοιχα με το προηγούμενο κεφάλαιο - μη

παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης, προτείνοντας τρία νέα διάγραμματα, τα οποία βασίζονται στα σχήματα DGWMA, TEWMA και DHWMA. Η μελέτη των αποδόσεων των εν λόγω διαγραμμάτων θα γίνει χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα και σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές, εστιάζοντας ιδιαίτερα στην κανονική κατανομή.

## 4.2 Η προσημική-βαθμολογική στατιστική συνάρτηση

Ας υποθέσουμε ότι  $X$  είναι το ποιοτικό χαρακτηριστικό που παρακολουθούμε σε μία διεργασία, το οποίο ακολουθεί μία άγνωστη, αλλά συνεχής κατανομή, η οποία είναι συμμετρική γύρω από την εντός ελέγχου μέση τιμή  $\mu_0$ . Αφού η κατανομή είναι συμμετρική, τότε η μέση τιμή είναι ίση με τη διαμέσο κι ως εκ τούτου  $\mu_0 = \theta_0$ . Έστω  $\{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\}$ , όπου  $n \geq 1$ , ένα δείγμα που λαμβάνουμε τη χρονική στιγμή  $i$  και  $R_{ij}$  ο βαθμός της ποσότητας  $|X_{ij} - \theta_0|$  μεταξύ των  $|X_{i1} - \theta_0|, |X_{i2} - \theta_0|, \dots, |X_{in} - \theta_0|$ , όπου  $i = 1, 2, \dots$  και  $j = 1, 2, \dots, n$ . Η Wilcoxon προσημική-βαθμολογική στατιστική συνάρτηση ορίζεται ως εξής

$$SR_i^+ = \sum_{j=1}^n I_{ij} R_{ij}, i = 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

όπου  $I_{ij}$  δίνεται από την εξίσωση (3.1). Εν ολίγοις, η ποσότητα  $SR_i^+$  είναι το άθροισμα των βαθμών των απολύτων τιμών των αποκλίσεων που αντιστοιχούν σε θετικές αποκλίσεις (δηλαδή  $X_{ij} - \mu_0 > 0$ ). Στη συνέχεια, ορίζουμε την ακόλουθη στατιστική συνάρτηση

$$SR_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(X_{ij} - \theta_0) R_{ij}, i = 1, 2, \dots, \quad (4.2)$$

η οποία είναι ίση με τη διαφορά μεταξύ του αθροίσματος των βαθμών που αντιστοιχούν σε θετικές αποκλίσεις και των βαθμών που αντιστοιχούν σε αρνητικές αποκλίσεις. Οι τιμές που παίρνει η στατιστική συνάρτηση  $SR_i$  είναι  $\{-\frac{n(n+1)}{2}, -\frac{n(n+1)}{2} + 2, \dots, \frac{n(n+1)}{2} - 2, \frac{n(n+1)}{2}\}$ . Επιπλέον, η τιμή μηδέν συμπεριλαμβάνεται στο πεδίο τιμών εάν η ποσότητα  $\frac{n(n+1)}{2}$  είναι άρτιος αριθμός. Η συνάρτηση  $SR_i$  συνδέεται γραμμικώς με την Wilcoxon προσημική-βαθμολογική στατιστική συνάρτηση  $SR_i^+$  μέσω της σχέσης

$$SR_i = 2SR_i^+ - \frac{n(n+1)}{2}, \quad (4.3)$$

καθώς  $SR_i^+ + SR_i^- = \frac{n(n+1)}{2}$ , όπου  $SR_i^-$  το άθροισμα των βαθμών των απολύτων τιμών των αποκλίσεων που αντιστοιχούν σε αρνητικές διαφορές. Όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου,

η μέση τιμή και η διασπορά της στατιστικής συνάρτησης  $SR_i^+$  είναι  $n(n+1)/4$  και  $n(n+1)(2n+1)/24$ , ενώ οι αντίστοιχες τιμές της στατιστικής συνάρτησης  $SR_i$  είναι 0 και  $n(n+1)(2n+1)/6$ .

Στη διεθνή βιβλιογραφία που αφορά τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης συνηθίζεται να χρησιμοποιείται η  $SR_i$  έναντι της  $SR_i^+$ , καθώς η πρώτη είναι συμμετρική γύρω από το 0 και είναι πιο εύκολη στην εφαρμογή. Έτσι, λοιπόν, τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που θα παρουσιάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο θα βασίζονται στη χρήση της στατιστικής συνάρτησης  $SR_i$ .

Περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με την συνάρτηση πυκνότητας μάζας της μεταβλητής  $SR_i^+$  και τις ιδιότητες αυτής παρουσιάζονται από τους McCornack (1965) και Bennett (1972), οι οποίες συνοψίζονται στην εργασία των Perdikis, Psarakis, Castagliola και Celano (2021), καθώς επίσης και από τους Gibbons και Chakraborti (2010) (σελ. 195-217). Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι ο Reynolds (1975) παρουσιάζει έναν έλεγχο όταν η διεργασία τυχαίων μεταβλητών είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν με τη χρήση των προσημικών διαδοχικών βαθμών (sequential signed-rank test).

### 4.3 Εύρεση της κατανομής του μήκους ροής

Στα επόμενα υποκεφάλαια θα μελετήσουμε τη δομή και την απόδοση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου βάσει της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης τύπου Wilcoxon. Όπως και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, έτσι κι εδώ, το μέσο μήκος ροής και η τυπική απόκλιση του υπολογίζονται μέσω προσομοιώσεων Monte Carlo με έναν αλγόριθμο όμοιο με αυτόν που περιγράφεται στο υποκεφάλαιο 3.3, με τη διαφορά ότι η κατανομή που επιλέγεται στο 1<sup>ο</sup> βήμα είναι συνεχής και συμμετρική, ενώ στο 4<sup>ο</sup> βήμα, υπολογίζονται οι στατιστικές συναρτήσεις  $SR_i$  (αντί των  $T_i$ ).

Η απόδοση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης υπολογίζεται για διάφορες συμμετρικές και συνεχείς κατανομές. Στην παρούσα διατριβή, η απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου υπολογίζεται για τις συμμετρικές κατανομές του Πίνακα 3.1, καθώς επίσης και για την μεικτή κανονική κατανομή  $(1-a)N(0, \sigma_1^2) + aN(0, \sigma_2^2)$  με  $a = 0.05$  και  $\sigma_1/\sigma_2 = 2$ , εστιάζοντας στα αποτελέσματα που προκύπτουν από την κανονική κατανομή.



#### 4.4 Διάγραμμα Shewhart-SR

Ο Bakir (2004) παρουσίασε το μη παραμετρικό διάγραμμα Shewhart-SR, όπου η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης είναι η  $SR_i$ , ενώ τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή είναι τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}UCL &= C, \\CL &= 0, \\LCL &= -C,\end{aligned}\tag{4.4}$$

όπου  $C$  ένας θετικός αριθμός, τέτοιος ώστε  $0 < C \leq \frac{n(n+1)}{2}$ . Η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εκτός ελέγχου, εάν  $|SR_i| \geq C$ , ενώ σε αντίθετη περίπτωση θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου.

Η ακριβής κατανομή του μήκους ροής για το διάγραμμα Shewhart-SR μπορεί να υπολογιστεί θεωρητικά, όμως είναι αρκετά πολύπλοκη, καθώς, σε αντίθεση με τη συνήθη προσημική στατιστική συνάρτηση  $T_i$ , η κατανομή του  $SR_i$  δεν είναι κλειστής μορφής. Έτσι, λοιπόν, είναι πιο σύνηθες να εφαρμόζεται η μέθοδος των προσομοιώσεων και των μαρκοβιανών αλυσίδων προκειμένου να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά του μήκους ροής ενός διαγράμματος Shewhart-SR.

Ο Πίνακας 4.1 παρουσιάζει τις τιμές  $ARL_0$  για το διάγραμμα Shewhart-SR για διάφορες τιμές των  $n$  και  $C$  χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία των Chakraborti και Graham (2019a) (σελ. 198-199). Συγκεκριμένα, για δοθείσες τιμές μεγέθους  $n$  και πιθανότητα  $P_{\mu_0|IC}(SR_i^+ \geq t)$ , υπολογίζονται τα όρια ελέγχου και οι τιμές  $ARL_0$ . Από τον εν λόγω πίνακα, παρατηρούμε ότι η τιμή του  $ARL_0$  είναι αρκετά μικρή για  $n \leq 8$ , ενώ για μεγαλύτερες τιμές  $n$  είναι αρκετά κοντά στις συνήθεις τιμές. Ως εκ τούτου, όπως και με το διάγραμμα Shewhart-SN, δεν ενδείκνυται η χρήση του για τιμές  $n \leq 8$ .

Στον Πίνακα Γ1 παρουσιάζονται οι τιμές ARL και SDRL του διαγράμματος Shewhart-SR υπό την κανονική κατανομή για  $n = 8(1)12$ . Από τον εν λόγω πίνακα παρατηρούμε ότι το διάγραμμα Shewhart-SR αποδίδει ικανοποιητικά για  $\delta \geq 1.25$ , ενώ η απόδοσή του βελτιώνεται σημαντικά, ιδιαίτερα για μετατοπίσεις  $\delta \geq 0.10$ , καθώς αυξάνεται η τιμή του  $n$ .

Για περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με το διάγραμμα Shewhart-SR, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στους Chakraborti και Graham (2019a) (σελ. 196-202). Επιπλέον, οι Chakraborti και Eryilmaz (2007) μελέτησαν το διάγραμμα Shewhart-SR με χρήση κανόνων ροής προκειμένου να βελτιώσουν την ανιχνευτική του ικανότητα.

**Πίνακας 4.1:** Τιμές του  $ARL_0$  για το διάγραμμα Shewhart-SR για διάφορες τιμές των  $n$  και  $C$

$n$	$C$	$ARL_0$	$n$	$C$	$ARL_0$	$n$	$C$	$ARL_0$	$n$	$C$	$ARL_0$
2	3	2	7	28	62	10	51	167	12	66	167
2	1	1	7	26	31	10	49	100	12	64	100
3	6	4	8	36	125	10	47	71	12	62	83
3	4	2	8	34	62	11	64	500	12	60	62
4	10	8	8	32	42	11	60	200	13	81	500
4	8	4	9	45	250	11	58	167	13	77	250
5	15	16	9	43	125	11	56	100	13	75	167
5	13	8	9	41	83	11	54	71	13	73	125
6	21	31	10	55	500	12	72	400	13	71	100
6	19	16	10	53	250	12	68	200	13	69	71

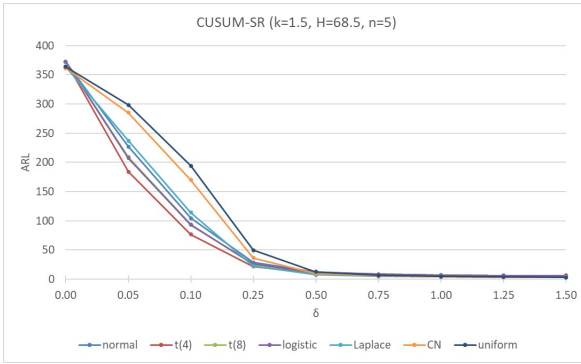
#### 4.5 Διάγραμμα CUSUM-SR

Οι απεικονιζόμενες στατιστικές συναρτήσεις του διαγράμματος CUSUM-SR είναι οι ακόλουθες

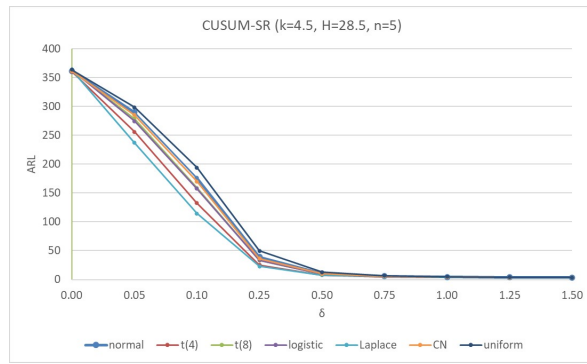
$$\begin{aligned}
 C_i^+ &= \max(0, C_{i-1}^+ + SR_i - k), \\
 C_i^- &= \min(0, C_{i-1}^- + SR_i + k),
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

όπου οι τιμές εκκίνησης είναι  $C_0^+ = C_0^- = 0$  και  $k$  η τιμή αναφοράς. Ένα διάγραμμα CUSUM-SR δίνει ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου εάν  $C_i^+ \geq H$  ή  $C_i^- \leq -H$ , όπου  $H$  το διάστημα απόφασης. Επισημαίνεται ότι η βέλτιστη τιμή  $k$  που αντιστοιχεί στην ανίχνευση μίας μικρής μετατόπισης εξαρτάται τόσο από το μέγεθος του δείγματος  $n$ , όσο και από την κατανομή που ακολουθεί το χαρακτηριστικό ποιότητας. Για παράδειγμα, όταν  $n = 10$  και η μετατόπιση για την οποία το διάγραμμα θέλουμε να είναι βέλτιστο είναι  $\delta = 0.20$ , τότε η τιμή αναφοράς είναι  $k = 5.81$  για την περίπτωση της κανονικής κατανομής και  $k = 7.34$  για την περίπτωση της Laplace κατανομής. Από την άλλη, όταν το διάγραμμα θέλουμε να είναι βέλτιστο σε μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις, η τιμή αναφοράς  $k$  εξαρτάται μόνο από την τιμή  $n$ .

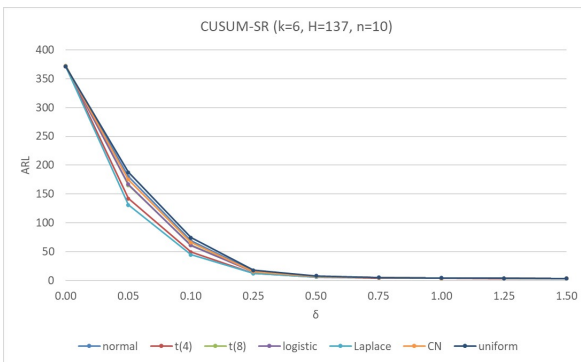
Στον Πίνακα Γ2 παρουσιάζονται οι τιμές ARL και SDRL του διαγράμματος CUSUM-SR υπό κανονική κατανομή για  $n = 5$  και  $n = 10$ . Οι τιμές αναφορές  $k$  επιλέχθηκαν ούτως ώστε το διάγραμμα να είναι βέλτιστο στην ανίχνευση των μετατοπίσεων  $\delta = 0.20, 0.60, 1.00, 1.25$  όταν  $n = 5$  και  $\delta = 0.20, 0.60, 0.75, 1.50$  όταν  $n = 10$ . Τα συμπεράσματα που εξάγονται είναι παρόμοια με τα συμπεράσματα που προήλθαν από τη μελέτη του διαγράμματος CUSUM-SN. Κατ'



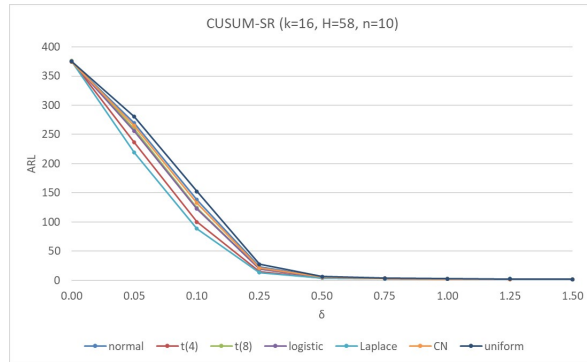
(α)



(β)



(γ)



(δ)

**Σχήμα 4.1:** ARL τιμές για το διάγραμμα CUSUM-SR για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές

αρχάς, όσο αυξάνεται η μετατόπιση  $\delta$  για την οποία το διάγραμμα θέλουμε να είναι βέλτιστο, αυξάνεται και η τιμή του  $SDRL_0$  χωρίς όμως να υπερβαίνει την αντίστοιχη τιμή  $ARL_0$ . Επιπλέον, δεν επιτυγχάνεται η επιθυμητή τιμή  $ARL_0$ , καθώς αυξάνεται η τιμή αναφοράς  $k$ . Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι ένα διάγραμμα που σχεδιάζεται να είναι βέλτιστο για μικρές (μεγάλες) μετατοπίσεις έχει κακή ανιχνευστική ικανότητα για μεγάλες (μικρές) μετατοπίσεις, ενώ η ελάχιστη τιμή  $\min(ARL_1)$  που μπορεί να αποδώσει ένα διάγραμμα CUSUM-SR παρουσιάζεται στην περίπτωση που σχεδιάζεται ώστε να είναι βέλτιστο σε μεγάλες μετατοπίσεις και μειώνεται καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος  $n$ . Επιπρόσθετα, η καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση επιτυγχάνεται όταν το διάγραμμα σχεδιάζεται να είναι βέλτιστο στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, ήτοι  $\delta = 0.20$ .

Στο Σχήμα 4.1 παρουσιάζονται οι τιμές ARL τεσσάρων διαγραμμάτων CUSUM-SR, για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές. Επισημαίνεται ότι οι τιμές  $ARL_1$  που αντιστοιχούν

στην  $t_8$  κατανομή είναι παραπλήσιες με αυτές που αντιστοιχούν στην λογιστική κατανομή. Παρατηρούμε ότι οι χαμηλότερες τιμές  $ARL_1$  εμφανίζονται για  $\delta \leq 0.75$  όταν η κατανομή της διεργασίας είναι η  $t_4$  ή η Laplace. Για μεγαλύτερες μετατοπίσεις, η απόδοση του διαγράμματος είναι περίπου η ίδια ανεξαρτήτως της κατανομής.

Τέλος, οι Abid et al. (2018) μελέτησαν το συγκεκριμένο διάγραμμα εφαρμόζοντας την δειγματοληψία κατάταξης συνόλου.

#### 4.6 Διάγραμμα EWMA-SR

Το διάγραμμα EWMA-SR προτάθηκε αρχικά από τους Amin και Searcy (1991), ενώ μελετήθηκε με περισσότερη λεπτομέρεια από τους Graham et al. (2011b). Επισημαίνεται ότι και στις δύο εργασίες μελετήθηκε το συγκεκριμένο διάγραμμα με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης. Η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση του διαγράμματος EWMA-SR είναι η εξής

$$Y_i = \lambda SR_i + (1 - \lambda)Y_{i-1}, \quad (4.6)$$

όπου η αρχική τιμή  $Y_0$  είναι ίση με 0 και  $0 < \lambda \leq 1$  η παράμετρος εξομάλυνσης. Τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος EWMA-SR είναι

$$\begin{aligned} UCL_i &= +L\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}, \\ CL &= 0, \\ LCL_i &= -L\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου, ενώ τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= +L\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}, \\ LCL &= -L\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

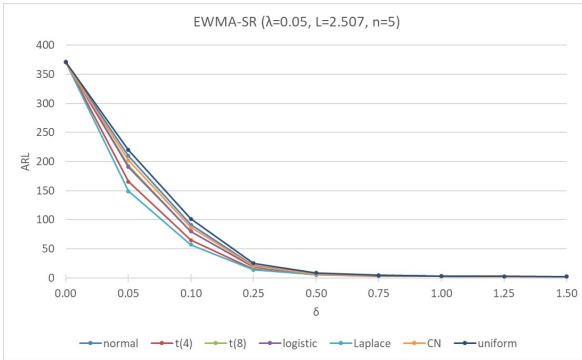
Η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εκτός ελέγχου εάν η στατιστική συνάρτηση  $Y_i$  υπερβαίνει τα όρια ελέγχου, ενώ εάν βρίσκεται εντός αυτών, θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Στην περίπτωση που  $\lambda = 1$ , τότε το διάγραμμα EWMA-SR μεταπίπτει στο διάγραμμα Shewhart-SR.

Στους Πίνακες Γ3 και Γ4 παρουσιάζεται η απόδοση του διαγράμματος EWMA-SR υπό κανονική κατανομή με χρονικά μεταβαλλόμενα και σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου, αντίστοιχα. Οι τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  που χρησιμοποιήθηκαν είναι 0.05, 0.10, 0.25, 0.50 και 0.75. Από τον Πίνακα Γ3 διαπιστώνουμε ότι η ανιχνευτική ικανότητα του διαγράμματος EWMA-SR είναι καλύτερη όσο μικραίνει η τιμή του  $\lambda$ , η οποία βέβαια συνοδεύεται και από μία μεγαλύτερη τιμή  $SDRL_0$ . Από την άλλη, όταν χρησιμοποιούμε όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, όπως φαίνεται και από τον Πίνακα Γ4, ένα διάγραμμα EWMA-SR με  $\lambda = 0.05$  έχει πολύ καλή ανιχνευτική ικανότητα για μικρές μετατοπίσεις, ήτοι  $\delta \leq 0.25$  όταν  $n = 5$  και  $\delta \leq 0.10$  όταν  $n = 10$ , ενώ όσο αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  μικραίνει η απόδοσή του στις μικρές μετατοπίσεις, αλλά

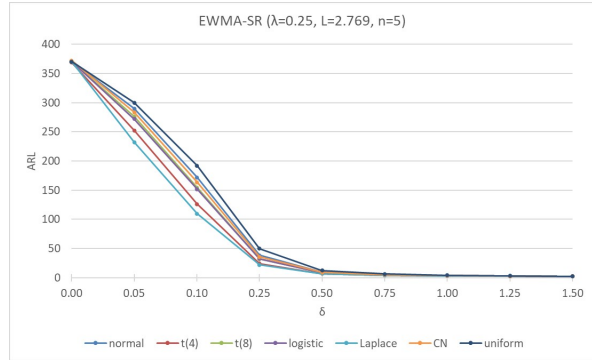
αυξάνεται σημαντικά στις μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Όπως και στην περίπτωση του διαγράμματος EWMA-SN, η καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση εμφανίζεται για  $\lambda = 0.05$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι οι τιμές  $\min(ARL_1)$  του διαγράμματος EWMA-SR είναι ίσες ή μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες του διαγράμματος EWMA-SN. Για παράδειγμα, όπως προκύπτει από τους Πίνακες B4 και Γ4, οι τιμές  $\min(ARL_1)$  του διαγράμματος EWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης για  $n = 5$  και  $\lambda = 0.05, 0.10, 0.25, 0.50, 0.75$  είναι 4, 4, 3, 2, 2, ενώ οι αντίστοιχες τιμές του διαγράμματος EWMA-SR είναι 5, 4, 3, 3, 2.

Στο Σχήμα 4.2 παρουσιάζονται οι τιμές ARL των διαγραμμάτων EWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $\lambda = 0.05, 0.25$  και  $n = 5, 10$  για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές. Είναι εμφανές ότι η απόδοση του διαγράμματος και ιδιαίτερα για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.75$ ) εξαρτάται από την κατανομή της διεργασίας, ενώ οι τιμές  $ARL_0$  παραμένουν αμετάβλητες. Όπως και στο διάγραμμα CUSUM-SR, οι μικρότερες τιμές  $ARL_1$  εμφανίζονται για τις κατανομές  $t_4$  και Laplace.

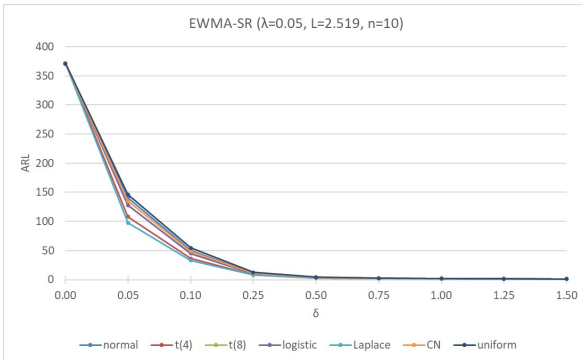
Συγκρίνοντας τα διαγράμματα EWMA-SR (με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης) και CUSUM-SR υπό την κανονική κατανομή, διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα EWMA-SR έχει καλύτερη απόδοση για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.50$  και για τις δύο τιμές του  $n$ . Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$ , το διάγραμμα CUSUM-SR ( $k = 1.5, H = 68.5$ ), το οποίο είναι βέλτιστο στην ανίχνευση μετατόπισης  $\delta = 0.20$ , έχει  $ARL_1=28.82$  για  $\delta = 0.25$ , ενώ το διάγραμμα EWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 2.481$ ) έχει αντίστοιχη τιμή  $ARL_1=25.83$ . Από την άλλη, όταν  $n = 5$ , το διάγραμμα CUSUM-SR έχει ελαφρώς καλύτερη απόδοση στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων, αν και το διάγραμμα CUSUM-SR ( $k = 9, H = 11$ ) έχει  $ARL_0=344.99$  (η πλησιέστερη δυνατή τιμή κοντά στην επιθυμητή). Για την περίπτωση όπου  $n = 10$ , το διάγραμμα CUSUM-SR έχει ελαφρώς καλύτερη απόδοση για μέτριες μετατοπίσεις ( $\delta = 0.75$  και  $1.00$ ), ενώ το διάγραμμα EWMA-SR υπερέχει για μεγαλύτερες μετατοπίσεις, καθώς έχει τιμή  $\min(ARL_1) = 1$  έναντι 2 που έχει το διάγραμμα CUSUM-SR ( $k = 25, H = 31$ ). Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη συγκεντρωτική απόδοση, το διάγραμμα EWMA-SR υπερέχει έναντι του CUSUM-SR, όταν αυτά σχεδιάζονται για την ανίχνευση μικρών ή μέτριων μετατοπίσεων, ενώ όταν σχεδιάζονται για την ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων ισχύει το αντίστροφο. Για παράδειγμα, όταν  $n = 10$ , το διάγραμμα EWMA-SR ( $\lambda = 0.10, L = 2.686$ ) έχει  $EARL_1=28.87$ , ενώ το διάγραμμα CUSUM-SR ( $k = 6, H = 137$ ) έχει  $EARL_1=30.19$ . Επιπρόσθετα, το εν λόγω διάγραμμα EWMA-SR είναι πιο αποδοτικό σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Από την άλλη, το διάγραμμα CUSUM-SR ( $k = 25, H = 31$ ) έχει  $EARL_1=50.17$ , ενώ το διάγραμμα EWMA-SR ( $\lambda = 0.75, L = 2.732$ ) έχει  $EARL_1=55.66$ .



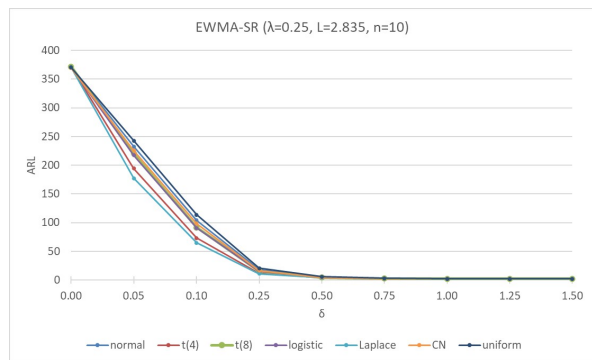
(α)



(β)



(γ)



(δ)

**Σχήμα 4.2:** ARL τιμές για το διάγραμμα EWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές

Τα αποτελέσματα είναι παραπλήσια όταν η σύγκριση γίνεται υπό μία άλλη συμμετρική κατανομή.

Το διάγραμμα EWMA-SR έχει μελετηθεί από αρκετούς μελετητές. Οι Graham et al. (2011b), όπως και Chakraborti και Graham (2019a) (σελ. 214-219), περιγράφουν τον τρόπο εύρεσης των χαρακτηριστικών του μήκους ροής με τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων. Οι Abid et al. (2017) εφάρμοσαν τη δειγματοληψία κατάταξης συνόλου στο διάγραμμα EWMA-SR, ενώ οι Pedikis, Psarakis, Castagliola και Maravelakis (2021) πρότειναν ένα τροποποιημένο άνω διάγραμμα EWMA-SR, όπου μετασχηματίζεται το στατιστικό  $SR_i$ , και υπολόγισαν την απόδοσή του με τη μέθοδο των μαρκοβιανών αλυσίδων.

#### 4.7 Διάγραμμα DEWMA-SR

Οι Raza, Nawaz, Aslam, Bhatti και Sherwani (2020) μελέτησαν το διάγραμμα DEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου χρησιμοποιώντας διαφορετικές τιμές για την παράμετρο εξομάλυνσης των στατιστικών συναρτήσεων  $Y_i$  και  $Z_i$  ( $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0.25$ ). Σε αυτό το υποκεφάλαιο, θα μελετήσουμε το εν λόγω διάγραμμα θεωρώντας  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης ενός διαγράμματος DEWMA-SR είναι η ακόλουθη

$$\begin{cases} Y_i = \lambda SR_i + (1 - \lambda)Y_{i-1}, \\ Z_i = \lambda Y_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \end{cases} \quad (4.9)$$

όπου οι αρχικές τιμές είναι  $Y_0 = Z_0 = 0$  και  $0 < \lambda \leq 1$ . Η στατιστική συνάρτηση  $Z_i$  δύναται να γραφεί και ως

$$Z_i = \lambda^2 \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} (i - j + 1) SR_j. \quad (4.10)$$

Τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος DEWMA-SR είναι

$$\begin{aligned} UCL_i &= +L \sqrt{\frac{\lambda^4 [1 + c^2 - (i + 1)^2 c^i + (2i^2 + 2i - 1)c^{i+1} - i^2 c^{i+2}] n(n + 1)(2n + 1)}{[1 - c]^3 6}}, \\ CL &= 0, \\ LCL_i &= -L \sqrt{\frac{\lambda^4 [1 + c^2 - (i + 1)^2 c^i + (2i^2 + 2i - 1)c^{i+1} - i^2 c^{i+2}] n(n + 1)(2n + 1)}{[1 - c]^3 6}}, \end{aligned} \quad (4.11)$$



όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου και  $c = (1 - \lambda)^2$ . Τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι τα ακόλουθα

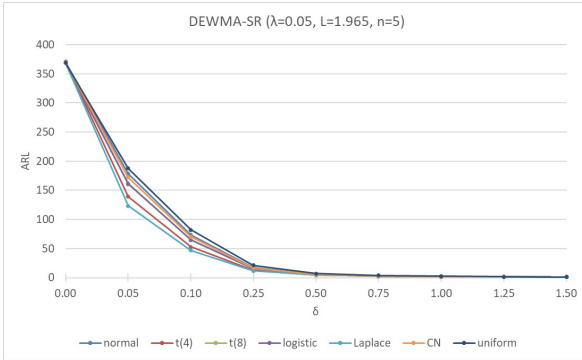
$$\begin{aligned} UCL &= +L \sqrt{\frac{\lambda(2 - 2\lambda + \lambda^2) n(n+1)(2n+1)}{(2-\lambda)^3 \cdot 6}}, \\ LCL &= -L \sqrt{\frac{\lambda(2 - 2\lambda + \lambda^2) n(n+1)(2n+1)}{(2-\lambda)^3 \cdot 6}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου εάν η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση  $Z_i$  βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου. Σε αντίθετη περίπτωση, θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Το διάγραμμα Shewhart-SR αποτελεί ειδική περίπτωση του διαγράμματος DEWMA-SR για  $\lambda = 1$ .

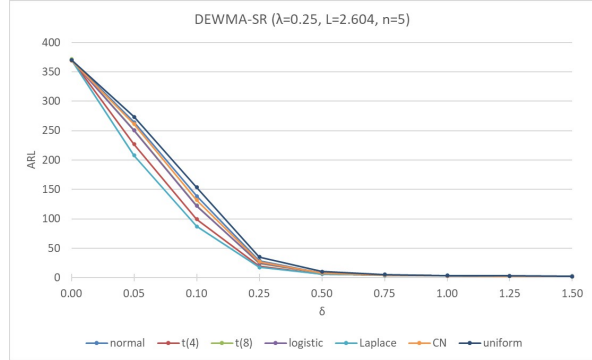
Η απόδοση του διαγράμματος DEWMA-SR υπό κανονική κατανομή με χρονικά μεταβαλλόμενα και σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου για  $\lambda = 0.05, 0.10, 0.25, 0.50$  και  $0.75$ , παρουσιάζεται στους Πίνακες Γ5 και Γ6, αντίστοιχα. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τους δύο πίνακες είναι παρόμοια με αυτά που προέκυψαν από τη μελέτη του διαγράμματος DEWMA-SN. Από τον Πίνακα Γ5 διαπιστώνουμε ότι η απόδοση του διαγράμματος είναι μεγαλύτερη όσο μικραίνει η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , η οποία όμως συνοδεύεται και από μία μεγαλύτερη τιμή  $SDRL_0$ . Από την άλλη, παρατηρώντας τα αποτελέσματα του Πίνακα Γ6 διαπιστώνουμε ότι ένα διάγραμμα με μικρή τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  είναι αποδοτικό μόνο για μικρές μετατοπίσεις, ενώ όσο αυξάνει η τιμή  $\lambda$  μικραίνει η ευαισθησία του διαγράμματος σε μικρές μετατοπίσεις, αλλά αυξάνεται στις μέτριες (για μεσαίες τιμές  $\lambda$ ) και μεγάλες μετατοπίσεις (για μεγάλες τιμές  $\lambda$ ). Η καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση εμφανίζεται όταν  $\lambda = 0.05$  για χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και  $\lambda = 0.10$  για όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης. Επιπλέον, επισημαίνεται ότι οι τιμές  $\min(ARL_1)$  του διαγράμματος DEWMA-SR είναι ίσες ή μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες τιμές του διαγράμματος DEWMA-SN, ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου τα δύο διαγράμματα έχουν σχεδιαστεί με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης.

Στο Σχήμα 4.3 παρουσιάζονται οι τιμές  $ARL$  των διαγραμμάτων DEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $\lambda = 0.05, 0.25$  και  $n = 5, 10$  για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές. Όμοια με προηγουμένως, παρατηρούμε ότι η τιμή  $ARL_0$  παραμένει σταθερή ανεξάρτητα από την κατανομή της διεργασίας, ενώ οι τιμές  $ARL_1$  που αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.75$  είναι διαφορετικές, καθώς εξαρτώνται από την κατανομή. Οι μικρότερες τιμές  $ARL_1$  εμφανίζονται για τις κατανομές  $t_4$  και Laplace.

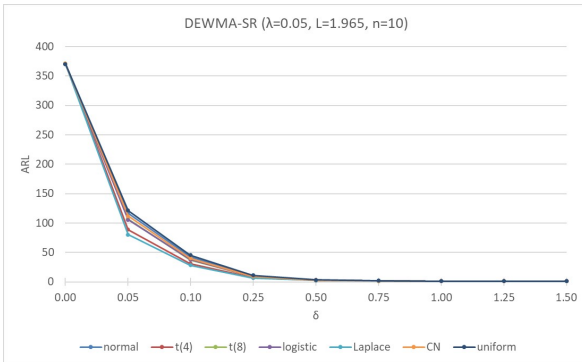
Συγκρίνοντας τα διαγράμματα EWMA-SR και DEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια



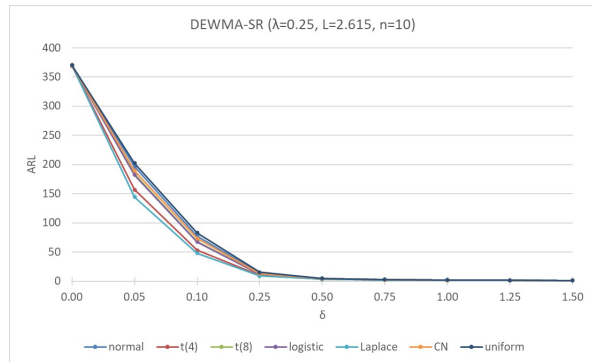
(α)



(β)



(γ)



(δ)

**Σχήμα 4.3:** ARL τιμές για το διάγραμμα DEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές

ελέγχου (Πίνακες Γ3 και Γ5), διαπιστώνουμε ότι για συγκεκριμένη τιμή του  $\lambda$ , το διάγραμμα DEWMA-SR είναι πιο αποδοτικό σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων, όμως για μικρές τιμές του  $\lambda$  (0.05 και 0.10), έχει μεγαλύτερες τιμές  $SDRL_0$  από αυτές του διαγράμματος EWMA-SR. Από την άλλη, συγκρίνοντας τα δύο διαγράμματα με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης (Πίνακες Γ4 και Γ6), παρατηρούμε ότι το διάγραμμα DEWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.10$ ), ενώ η απόδοση των δύο διαγραμμάτων είναι σχεδόν ίδια για μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Επισημαίνεται ότι και τα δύο διαγράμματα ικανοποιούν την συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , όπου μάλιστα για συγκεκριμένη τιμή του  $\lambda$ , οι τιμές  $SDRL_0$  του διαγράμματος DEWMA-SR είναι μικρότερες από αυτές του διαγράμματος EWMA-SR. Επιπρόσθετα, οι τιμές  $\min(ARL_1)$  του διαγράμματος DEWMA-SR είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες τιμές του διαγράμματος EWMA-SR. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την υπεροχή του διαγράμματος EWMA-SR σε μεγάλες μετατοπίσεις, όταν αυτό σχεδιάζεται για την γρήγορη ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης και για  $n = 5$ , το διάγραμμα DEWMA-SR ( $\lambda = 0.10, L = 2.205$ ) υπερέρχει έναντι του διαγράμματος EWMA-SR ( $\lambda = 0.10, L = 2.668$ ) σε μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.25$ ), όμως το διάγραμμα EWMA-SR είναι αρκετά πιο αποδοτικό για μεγαλύτερες μετατοπίσεις.

Τέλος, συγκρίνοντας τα διαγράμματα DEWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης και CUSUM-SR παρατηρούμε ότι το διάγραμμα DEWMA-SR έχει μικρότερες βέλτιστες τιμές  $ARL_1$  για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.50$ . Επιπλέον, συγκρίνοντας τα δύο διαγράμματα που είναι σχεδιασμένα για τη γρήγορη ανίχνευση μίας μικρής μετατόπισης  $\delta^*$ , το διάγραμμα DEWMA-SR αποδίδει καλύτερα για μετατοπίσεις  $\delta \leq \delta^*$ , ενώ το διάγραμμα CUSUM-SR είναι πιο ευαίσθητο στο υπόλοιπο εύρος του διαστήματος. Για παράδειγμα, συγκρίνοντας τα διαγράμματα DEWMA-SR ( $\lambda = 0.10, L = 2.205$ ) και CUSUM-SR ( $k = 1.5, H = 4.5$ ), τα οποία είναι σχεδιασμένα για την γρήγορη ανίχνευση της μετατοπίσης  $\delta^* = 0.25$  για  $n = 5$ , παρατηρούμε ότι το διάγραμμα DEWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.25$ , ενώ το CUSUM-SR αποδίδει καλύτερα στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων.

#### 4.8 Διάγραμμα GWMA-SR

Το διάγραμμα GWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης μελετήθηκε από τους Chakraborty et al. (2016). Η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση του εν λόγω διαγράμματος είναι η

ακόλουθη

$$G_i = \sum_{j=1}^i \left( q^{(j-1)^a} - q^{j^a} \right) SR_{i-j+1}, \quad (4.13)$$

όπου  $0 \leq q < 1$  η παράμετρος σχεδίασης και  $a > 0$  η επιπρόσθετη παράμετρος εξομάλυνσης. Τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος GWMA-SR είναι

$$\begin{aligned} UCL_i &= +L \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sum_{j=1}^i \left( q^{(j-1)^a} - q^{j^a} \right)^2}, \\ CL &= 0, \\ LCL_i &= -L \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sum_{j=1}^i \left( q^{(j-1)^a} - q^{j^a} \right)^2}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

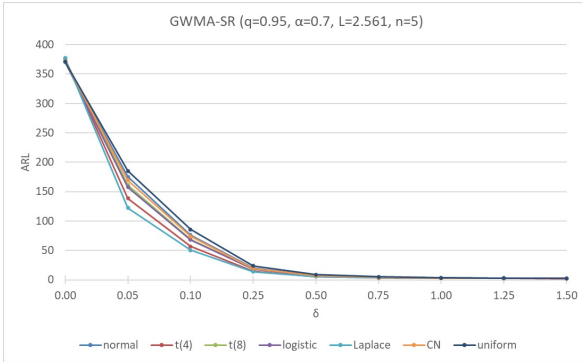
όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου, ενώ τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= +L \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} Q, \\ LCL &= -L \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} Q, \end{aligned} \quad (4.15)$$

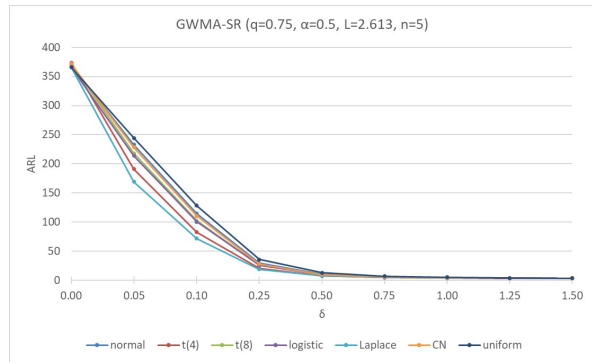
όπου  $Q = \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^i \left( q^{(j-1)^a} - q^{j^a} \right)^2 \right)$ . Η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου εάν η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου. Το διάγραμμα GWMA-SR μεταπίπτει στο διάγραμμα EWMA-SR όταν  $q = 1 - \lambda$  και  $a = 1$ , ενώ για  $q = 0$  και  $a = 1$ , τότε το διάγραμμα GWMA-SR μεταπίπτει στο διάγραμμα Shewhart-SR.

Οι Chakraborty et al. (2016) υπολόγισαν τις τιμές ARL του διαγράμματος GWMA-SR χρησιμοποιώντας όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης και παραμέτρους  $q = 0.5(0.1)0.9$  και  $a = 0.1(0.1)1.5$  για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το διάγραμμα GWMA-SR με κατάλληλες παραμέτρους υπερέχει έναντι του διαγράμματος EWMA-SR, ιδιαίτερα για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.25$ ). Επίσης, είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα GWMA-SN για όλες τις συμμετρικές κατανομές εκτός από την περίπτωση που το ποιοτικό χαρακτηριστικό ακολουθεί την Laplace κατανομή.

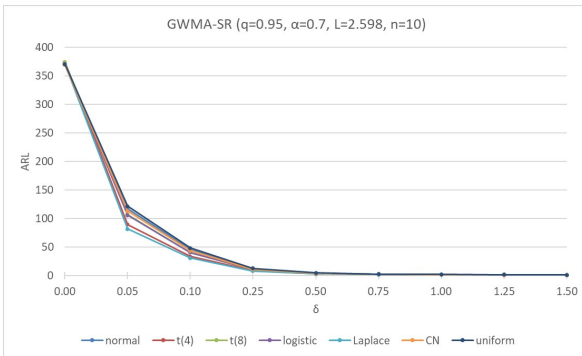
Σε αυτό το υποκεφάλαιο μελετάμε την απόδοση του διαγράμματος GWMA-SR με παραμέτρους σχεδίασης  $q = 0.50, 0.75, 0.90, 0.95$  και  $a = 0.5, 0.7, 0.8, 0.9, 1.2$  για  $n = 5$  και  $10$  χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα και σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου. Στους Πίνακες Γ7-Γ10 παρουσιάζονται οι τιμές ARL και SDRL του εν λόγω διαγράμματος υπό κανονική κατανομή. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τους συγκεκριμένους πίνακες είναι παραπλήσια με αυτά που προέκυψαν από τη μελέτη του διαγράμματος GWMA-SN. Από τους Πίνακες Γ7 και



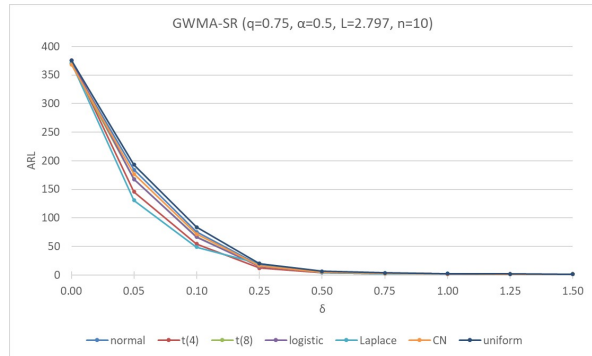
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 4.4: ARL τιμές για το διάγραμμα GWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές

Γ8, όπου παρουσιάζεται η απόδοση του διαγράμματος GWMA-SR υπό κανονική κατανομή με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 5$  και  $10$  αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι ένα διάγραμμα με παραμέτρους σχεδίασης  $q = 0.95$  και  $a = 0.7 - 0.9$  έχει την καλύτερη απόδοση. Πιο συγκεκριμένα, ένα διάγραμμα με  $q = 0.95$  και  $a = 0.7$  έχει πολύ καλή απόδοση για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων ( $\delta \leq 0.10$ ), η τιμή  $a = 0.8$  είναι η πιο αποδοτική για  $\delta = 0.25$ , ενώ η τιμή  $a = 0.9$  αποδίδει τα καλύτερα αποτελέσματα για  $\delta \geq 0.50$ . Γενικά, για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $q$ , καθώς αυξάνεται η τιμή του  $a$ , μετατοπίζεται η ευαισθησία του διαγράμματος σε μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Τέλος, οι τιμές  $\min(ARL_1)$  του διαγράμματος GWMA-SR είναι 2 ή 3 και 1 ή 2 για  $n = 5$  και  $n = 10$ , αντίστοιχα.

Στο Σχήμα 4.4 παρουσιάζονται οι τιμές ARL του διαγράμματος GWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και παραμέτρους ( $q = 0.95, a = 0.7$ ) και ( $q = 0.75, a = 0.5$ ) για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές. Είναι εμφανές ότι το πρώτο ζεύγος παραμέτρων είναι πιο αποδοτικό, ιδιαίτερα για μικρές μετατοπίσεις, καθώς επίσης οι μικρότερες τιμές  $ARL_1$  εμφανίζονται για τις κατανομές  $t_4$  και Laplace.

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα GWMA-SR και EWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου διαπιστώνουμε την υπεροχή του διαγράμματος GWMA-SR, ιδιαίτερα για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.50$ , ενώ για μεγαλύτερες μετατοπίσεις το διάγραμμα EWMA-SR υπερέχει ελαφρώς. Επιπλέον, το διάγραμμα GWMA-SR είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DEWMA-SR για μικρές μετατοπίσεις, ενώ για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις αποδίδει καλύτερα το διάγραμμα DEWMA-SR. Για παράδειγμα, για  $n = 5$ , συγκρίνοντας τα διαγράμματα GWMA-SR ( $q = 0.95, a = 0.9, L = 2.517$ ) και DEWMA-SR ( $\lambda = 0.10, L = 2.238$ ), τα οποία έχουν  $SDRL_0 \approx 380$ , διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα GWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.25$ , ενώ το διάγραμμα DEWMA-SR υπερέχει ελαφρώς για μετατοπίσεις  $\delta \geq 0.75$ . Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε συγκρίνοντας τα διαγράμματα GWMA-SR ( $q = 0.95, a = 0.8, L = 2.553$ ) και DEWMA-SR ( $\lambda = 0.10, L = 2.246$ ), τα οποία είναι σχεδιασμένα για  $n = 10$  και έχουν  $SDRL_0 \approx 390$ .

Όπως και με το διάγραμμα GWMA-SN, έτσι κι εδώ, τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά όταν χρησιμοποιούμε όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης. Στον Πίνακα 4.2 παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων σχεδίασης του διαγράμματος GWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή. Από τον συγκεκριμένο πίνακα διαπιστώνουμε ότι ένα διάγραμμα GWMA-SR με παραμέτρους  $q = 0.95$  και  $a = 0.7 - 0.8$  έχει πολύ καλή απόδοση στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων ( $\delta \leq 0.10$ ). Οι παράμετροι  $q = 0.75 - 0.90$

( $q = 0.50 - 0.75$ ) και  $a = 1.2$  αποδίδουν πολύ καλά για μέτριες μετατοπίσεις όταν  $n = 5$  ( $n = 10$ ), ενώ στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για την ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων προτείνεται η χρήση των παραμέτρων  $q = 0.50$  και  $a = 1.2$ . Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι τιμές της παραμέτρου  $a > 1$  δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα όταν συνδυάζονται με μία τιμή  $q = 0.50$  στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων. Η καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση του διαγράμματος GWMA-SR εμφανίζεται για  $q = 0.95$  και  $a = 0.7$ . Εν κατακλείδι, η επιπρόσθετη παράμετρος σχεδίασης  $a$  προσδίδει μεγαλύτερη ευελιξία στο διάγραμμα, όπου τιμές  $a < 1$  αποδίδουν καλύτερα για μικρές μετατοπίσεις, ενώ τιμές  $a > 1$  για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξαν και οι Chakraborty et al. (2016) χρησιμοποιώντας μεγαλύτερο εύρος παραμέτρων σχεδίασης.

**Πίνακας 4.2:** Βέλτιστες τιμές παραμέτρων σχεδίασης του διαγράμματος GWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή

$\delta$	$n = 5$				$n = 10$			
	$q$	$a$	$L$	$ARL_1$	$q$	$a$	$L$	$ARL_1$
0.05	0.95	0.7	2.507	188.07	0.95	0.7	2.534	130.29
0.10	0.95	0.7	2.507	88.17	0.95	0.8	2.502	54.64
0.25	0.95	1.0	2.481	25.83	0.90	1.0	2.686	15.05
0.50	0.90	1.2	2.673	9.74	0.75	1.2	2.832	5.56
0.75	0.75	1.2	2.773	5.74	0.50	1.2	2.830	3.27
1.00	0.75	1.2	2.773	4.16	0.50	1.2	2.830	2.37
1.25	0.50	1.2	2.667	3.13	0.50	1.2	2.830	2.08
1.50	0.50	1.2	2.667	2.64	0.50	1.2	2.830	2.01

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα GWMA-SR και DEWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης (Πίνακες Γ6, Γ9, Γ10 και 4.2) διαπιστώνουμε ότι οι βέλτιστες τιμές  $ARL_1$  του διαγράμματος GWMA-SR που αντιστοιχούν σε μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.10$ ) είναι καλύτερες όταν  $n = 5$ , ενώ είναι ελαφρώς χαμηλότερες για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Στην περίπτωση όπου  $n = 10$  διαπιστώνουμε ότι οι βέλτιστες τιμές  $ARL_1$  του διαγράμματος GWMA-SR είναι ελαφρώς χαμηλότερες από τις αντίστοιχες του διαγράμματος DEWMA-SR σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Επιπρόσθετα, ένα διάγραμμα GWMA-SR που είναι βέλτιστο στην ανίχνευση μίας συγκεκριμένης μετατόπισης εμφανίζει καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση από ένα διάγραμμα DEWMA-SR που είναι βέλτιστο στην ανίχνευση της ίδιας μετατόπισης. Για παράδειγμα, όταν

$n = 10$ , το διάγραμμα GWMA-SR ( $q = 0.95, a = 1.2, L = 2.510$ ), το οποίο είναι βέλτιστο στην ανίχνευση της μετατόπισης  $\delta = 0.25$ , έχει  $EARL_1=29.16$ , ενώ το διάγραμμα DEWMA-SR ( $\lambda = 0.25, L = 2.606$ ), το οποίο είναι βέλτιστο στην ίδια μετατόπιση, έχει  $EARL_1=31.46$ . Επισημαίνεται ότι το εν λόγω διάγραμμα GWMA-SR είναι αρκετά πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DEWMA-SR για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.25$ , ενώ το διάγραμμα DEWMA-SR υπερέχει στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Τέλος, από τη σύγκριση με το διάγραμμα CUSUM-SR διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα GWMA-SR έχει χαμηλότερες βέλτιστες τιμές  $ARL_1$ , ιδιαίτερα για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.50$ , ενώ εμφανίζει καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση όταν συγκρίνεται με ένα διάγραμμα CUSUM-SR που είναι βέλτιστο στην ίδια μετατόπιση. Για παράδειγμα, όταν  $n = 10$ , το διάγραμμα GWMA-SR ( $q = 0.50, a = 1.2, L = 2.830$ ), το οποίο είναι βέλτιστο στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων, έχει  $EARL_1=41.48$ , ενώ το διάγραμμα CUSUM-SR ( $k = 25, H = 31$ ) έχει  $EARL_1=50.17$ .



## 4.9 Διάγραμμα DGWMA-SR

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα μελετήσουμε ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης, το DGWMA-SR, δίνοντας έμφαση κυρίως στην απόδοση του με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης.

### 4.9.1 Δομή διαγράμματος DGWMA-SR

Η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση του νέου διαγράμματος είναι η ακόλουθη

$$\begin{cases} G_i = \sum_{j=1}^i (q_1^{(j-1)^a} - q_1^{j^a}) SR_{i-j+1}, \\ DG_i = \sum_{j=1}^i (q_2^{(j-1)^\beta} - q_2^{j^\beta}) G_{i-j+1}, \end{cases} \quad (4.16)$$

όπου  $0 \leq q_1, q_2 < 1$  είναι οι παράμετροι σχεδίασης και  $a, \beta > 0$  είναι οι επιπρόσθετοι παράμετροι εξομάλυνσης.

Θέτοντας  $u = i - j + 1$ , έχουμε  $j - 1 = i - u$  και  $j = i - u + 1$ . Ως εκ τούτου

$$G_i = \sum_{u=1}^i (q_1^{(i-u)^a} - q_1^{(i-u+1)^a}) SR_u.$$

Ομοίως

$$DG_i = \sum_{v=1}^i (q_2^{(i-v)^\beta} - q_2^{(i-v+1)^\beta}) G_v.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο εξισώσεις, έχουμε

$$\begin{aligned} DG_i &= \sum_{v=1}^i (q_2^{(i-v)^\beta} - q_2^{(i-v+1)^\beta}) \left[ \sum_{u=1}^v (q_1^{(v-u)^a} - q_1^{(v-u+1)^a}) SR_u \right] \\ &= \sum_{v=1}^i \sum_{u=1}^v (q_2^{(i-v)^\beta} - q_2^{(i-v+1)^\beta}) (q_1^{(v-u)^a} - q_1^{(v-u+1)^a}) SR_u \\ &= \sum_{u=1}^i \left[ \sum_{v=u}^i (q_2^{(i-v)^\beta} - q_2^{(i-v+1)^\beta}) (q_1^{(v-u)^a} - q_1^{(v-u+1)^a}) \right] SR_u. \end{aligned}$$

Θέτοντας  $l = i - v + 1$ , έχουμε

$$\begin{aligned} DG_i &= \sum_{u=1}^i \sum_{l=1}^{i-u+1} (q_1^{(l-1)^a} - q_1^{l^a}) (q_2^{(i-u-l+1)^\beta} - q_2^{(i-u-l+2)^\beta}) SR_u \\ &= \sum_{u=1}^i \sum_{l=1}^u (q_1^{(l-1)^a} - q_1^{l^a}) (q_2^{(u-l)^\beta} - q_2^{(u-l+1)^\beta}) SR_{i-u+1}. \end{aligned}$$

Κατόπιν ανωτέρω, η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης του διαγράμματος DGWMA-SR είναι η ακόλουθη

$$DG_i = \sum_{j=1}^i w_j SR_{i-j+1}, \quad (4.17)$$

όπου

$$w_i = \sum_{j=1}^i \left( q_1^{(j-1)^a} - q_1^{j^a} \right) \left( q_2^{(i-j)^\beta} - q_2^{(i-j+1)^\beta} \right). \quad (4.18)$$

Η εντός ελέγχου μέση τιμή και διασπορά της στατιστικής συνάρτησης  $DG_i$  είναι

$$E(DG_i|IC) = \sum_{j=1}^i w_j E(SR_{i-j+1}|IC) = 0$$

και

$$Var(DG_i|IC) = \sum_{j=1}^i w_j^2 Var(SR_{i-j+1}|IC) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} W_i,$$

όπου  $W_i = \sum_{j=1}^i w_j^2$  είναι το άθροισμα των τετραγώνων των βαρών. Τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος DGWMA-SR είναι

$$\begin{aligned} UCL_i &= +L \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} W_i}, \\ CL &= 0, \\ LCL_i &= -L \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} W_i}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

όπου  $L > 0$ , το εύρος των ορίων ελέγχου. Τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= +L \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} W}, \\ LCL &= -L \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} W}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

όπου  $W = \lim_{t \rightarrow \infty} W_t$ . Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις αναφορικά με την επιλογή των παραμέτρων σχεδίασης του διαγράμματος DGWMA-SR: (α) για  $q_1 = q_2 = q$ ,  $0 < q < 1$  και  $a = \beta$ , το διάγραμμα DGWMA-SR είναι ένας συνδυασμός δύο διαγραμμάτων GWMA-SR, (β) για  $q_1 = q_2 = q$ ,  $0 < q < 1$  και  $\beta = 1$ , το διάγραμμα DGWMA-SR είναι ένας συνδυασμός των διαγραμμάτων EWMA-SR και GWMA-SR, (γ) για  $a = \beta = 1$  και  $0 < q_1, q_2 < 1$ , το διάγραμμα DGWMA-SR μεταπίπτει στο διάγραμμα DEWMA-SR με παραμέτρους εξομάλυνσης  $\lambda_1 = 1 - q_1$  και  $\lambda_2 = 1 - q_2$ , και (δ) για  $q_1 = 0$ ,  $a = 1$  ή  $q_2 = 0$  και  $\beta = 1$ , το διάγραμμα DGWMA-SR μεταπίπτει στο διάγραμμα GWMA-SR. Ακολουθώντας το πνεύμα των εργασιών των Sheu και Hsieh (2009) και Lu (2018) και για λόγους απλοποίησης της εφαρμογής του εν λόγω διαγράμματος, θα μελετήσουμε την πρώτη περίπτωση, όπου  $q_1 = q_2 = q$  και  $a = \beta$ .

Ένα διάγραμμα DGWMA-SR δίνει ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου εάν η στατιστική συνάρτηση βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου. Σε αντίθετη περίπτωση, θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου.

#### 4.9.2 Κατανομή μήκους ροής του διαγράμματος DGWMA-SR

Έστω  $R$  η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το μήκος ροής και  $A_i$  το ενδεχόμενο ένδειξης ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου όταν επιλέγεται το  $i$ -οστό δείγμα. Επιπλέον, ορίζουμε ως  $A_i^c$  το ενδεχόμενο η διεργασία να βρίσκεται εντός ελέγχου. Βάσει των ορισμών, προκύπτει

$$A_i = [DG_i \leq LCL \text{ ή } DG_i \geq UCL] \text{ και } A_i^c = [LCL < DG_i < UCL], \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

όπου  $UCL$  και  $LCL$  τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $R$  μπορεί να περιγραφεί ως εξής

$$P(R = r) = P([\cap_{i=1}^{r-1} A_i^c] \cap A_r) = P([\cap_{i=1}^{r-1} A_i^c]) - P([\cap_{i=1}^r A_i^c]).$$

Εν συνεχεία, έχουμε

$$\begin{aligned} A_1^c &= [LCL < DG_1 < UCL] = \left[ \frac{LCL}{(1-q_1)(1-q_2)} < SR_1 < \frac{UCL}{(1-q_1)(1-q_2)} \right]. \\ A_i^c &= [LCL < DG_i < UCL] = \left[ LCL < \sum_{j=1}^i w_j SR_{i-j+1} < UCL \right] \\ &= \left[ \frac{LCL - \sum_{j=2}^i w_u SR_{i-j+1}}{(1-q_1)(1-q_2)} < SR_i < \frac{UCL - \sum_{j=2}^i w_j SR_{i-j+1}}{(1-q_1)(1-q_2)} \right], \quad j = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{LCL}{(1-q_1)(1-q_2)}, \quad U_1 = \frac{UCL}{(1-q_1)(1-q_2)}, \\ L_i &= \frac{LCL - \sum_{j=2}^i w_j SR_{i-j+1}}{(1-q_1)(1-q_2)}, \\ U_i &= \frac{UCL - \sum_{j=2}^i w_j SR_{i-j+1}}{(1-q_1)(1-q_2)}, \quad i = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Επιπλέον, ορίζουμε

$$I_r = P([\cap_{i=1}^r A_i^c]).$$

Κατόπιν των ανωτέρω, η κατανομή του μήκους ροής εκφράζεται ως

$$P(R = 1) = P(A_1) = 1 - P(A_1^c) = 1 - I_1.$$

Για  $r = 2, 3, \dots$ , έχουμε

$$P(R = r) = P([\cap_{i=1}^{r-1} A_i^c]) - P([\cap_{i=1}^r A_i^c]) = I_{r-1} - I_r.$$

Καθώς τα δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, τότε οι στατιστικές συναρτήσεις  $SR_i$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.3), η ποσότητα  $I_r$  μπορεί να γραφεί ως

$$I_r = \sum_{L_1}^{U_1} \sum_{L_2}^{U_2} \dots \sum_{L_r}^{U_r} \left( \prod_{i=1}^r P \left( SR_i^+ = \frac{2s_i + n(n+1)}{4} \right) \right),$$

όπου  $s_i$  είναι η τιμή της στατιστικής συνάρτησης  $SR_i$ . Το μέσο μήκος ροής είναι

$$\begin{aligned} ARL &= \sum_{r=1}^{\infty} rP(R = r) = P(R = 1) + \sum_{r=2}^{\infty} rP(R = r) \\ &= 1 - I_1 + \sum_{r=2}^{\infty} r(I_{r-1} - I_r) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} I_r. \end{aligned}$$

Επειδή η εντός ελέγχου κατανομή της στατιστικής συνάρτησης  $SR_i^+$  είναι ανεξάρτητη από την κατανομή που ακολουθεί το ποιοτικό χαρακτηριστικό, η τιμή του  $ARL_0$ , η οποία εξαρτάται από την ποσότητα  $I_r$ , είναι η ίδια για όλες τις συνεχείς και συμμετρικές κατανομές. Έτσι, λοιπόν, το διάγραμμα DGWMA-SR είναι μη παραμετρικό.

Κατόπιν των ανωτέρω, η κλειστού τύπου έκφραση της τιμής του  $ARL$  περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό αθροισμάτων, όπου μεγαλώνει, καθώς μεγαλώνει το  $r$ . Επιπρόσθετα, η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης  $SR_i^+$  όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου είναι άγνωστη. Έτσι, λοιπόν, ο υπολογισμός του μήκους ροής με την ακριβή μέθοδο είναι αρκετά χρονοβόρος. Γι' αυτόν τον λόγο, τα χαρακτηριστικά της κατανομής του μήκους ροής του διαγράμματος DGWMA-SR θα υπολογιστούν με τη μέθοδο Monte Carlo χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που παρουσιάζεται στο υποκεφάλαιο 4.3

#### 4.9.3 Απόδοση διαγράμματος DGWMA-SR

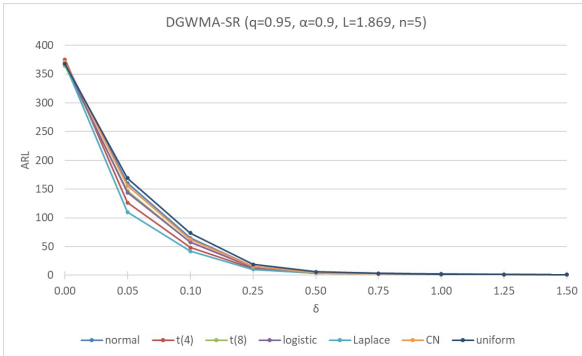
Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, η απόδοση του διαγράμματος DGWMA-SR υπολογίζεται με τη μέθοδο Monte Carlo. Στον Πίνακα Γ11, παρουσιάζονται οι τιμές της παραμέτρου  $L$  του διαγράμματος DGWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης και παραμέτρους σχεδίασης  $q = 0.50, 0.60, 0.70, 0.75, 0.80, 0.90, 0.95$  και  $a = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2, 1.5$  για  $n = 5, 10, 15, 20$  προκειμένου να επιτευχθεί η τιμή  $ARL_0=370$ . Από τον συγκεκριμένο πίνακα, παρατηρούμε ότι για συγκεκριμένες τιμές  $n$  και  $a$ , η τιμή του  $L$  μικραίνει, καθώς αυξάνεται η τιμή

του  $q$  ώστε να επιτύχουμε την επιθυμητή τιμή  $ARL_0$ , ενώ δεν παρατηρείται κάποια συγκεκριμένη τάση για δοθείσες τιμές  $n$  και  $q$ .

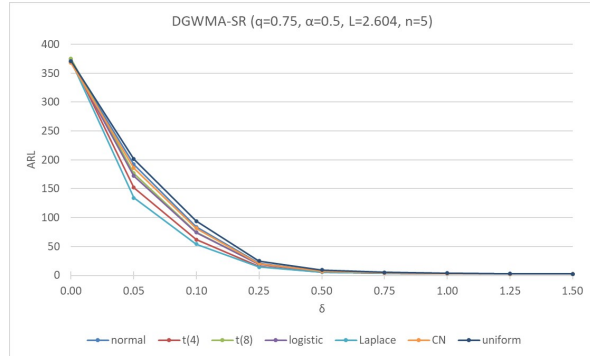
Η απόδοση του διαγράμματος DGWMA-SR τόσο με χρονικά μεταβαλλόμενα όσο και με σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου υπολογίζεται για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων σχεδίασης  $(q, a)$  και για  $n = 5$  και  $10$ . Πάρα ταύτα, και προκειμένου να περιοριστεί ο αριθμός των πινάκων, στους Πίνακες Γ12-Γ15 παρουσιάζεται η απόδοση του διαγράμματος για  $q = 0.50, 0.75, 0.90, 0.95$  και  $a = 0.5, 0.7, 0.8, 0.9, 1.2$  υπό κανονική κατανομή. Όμως, οι βέλτιστες τιμές  $ARL_1$  για το διάγραμμα DGWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης παρατίθενται λαμβάνοντας υπ όψιν όλο το εύρος των παραμέτρων σχεδίασης. Από τους Πίνακες Γ12 και Γ13, όπου παρουσιάζεται η απόδοση του διαγράμματος με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, παρατηρούμε ότι ένα διάγραμμα DGWMA-SR με  $q = 0.95$  και  $a = 0.5$  έχει την καλύτερη απόδοση για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.50$  όταν  $n = 5$  και  $\delta \leq 0.25$  όταν  $n = 10$ , ενώ ένα διάγραμμα με παραμέτρους  $q = 0.95$  και  $a = 0.7$  παρουσιάζει την καλύτερη απόδοση για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Όμως, οι συγκεκριμένοι συνδυασμοί παραμέτρων σχεδίασης δίνουν αρκετά υψηλές τιμές  $SDRL_0$  με αποτέλεσμα την υψηλή πιθανότητα ένδειξης ψευδούς συναγερμού ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι για συγκεκριμένη τιμή  $q$  ( $a$ ), η συγκεντρωτική απόδοση του διαγράμματος μικραίνει (αύξηση της τιμής  $EARL_1$ ), καθώς αυξάνεται (μικραίνει) η παράμετρος  $a$  ( $q$ ). Αυτή η μείωση της συγκεντρωτικής απόδοσης συνοδεύεται βέβαια και από χαμηλότερες τιμές  $SDRL_0$ . Τέλος, η τιμή  $\min(ARL_1)$  είναι 1 για  $q = 0.95$  και  $a \leq 0.9$  όταν  $n = 5$  και  $q \geq 0.75$  όταν  $n = 10$  και 2 για τους υπόλοιπους συνδυασμούς παραμέτρων σχεδίασης πέρα από την περίπτωση όπου  $(q = 0.5, a = 0.5, n = 5)$  στην οποία  $\min(ARL_1) = 3$ .

Στο Σχήμα 4.5 παρουσιάζονται οι τιμές  $ARL$  του διαγράμματος DGWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και παραμέτρους  $(q = 0.95, a = 0.9)$  και  $(q = 0.75, a = 0.5)$  για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές. Από το συγκεκριμένο σχήμα παρατηρούμε ότι οι τιμές  $ARL_1$  για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.75$  εξαρτώνται από την κατανομή που ακολουθεί το ποιοτικό χαρακτηριστικό. Οι μικρότερες τιμές εμφανίζονται για τις  $t_4$  και Laplace κατανομές, ενώ οι μεγαλύτερες για την κανονική και ομοιόμορφη.

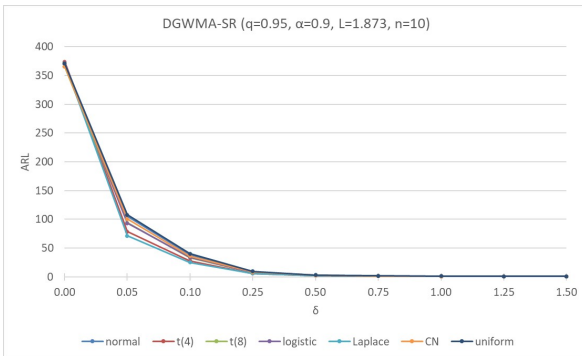
Οι Πίνακες Γ14-Γ15 παρουσιάζουν την απόδοση του διαγράμματος DGWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής απόδοσης υπό την κανονική κατανομή, ενώ ο Πίνακας 4.3 τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων σχεδίασης του διαγράμματος. Τα αποτελέσματα σε σχέση με αυτά χρησιμοποιώντας τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου είναι εντελώς διαφορετικά. Κατ' αρχάς η επιλογή της παραμέτρου  $q = 0.95$  δεν δίνει καλά αποτελέσματα για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων



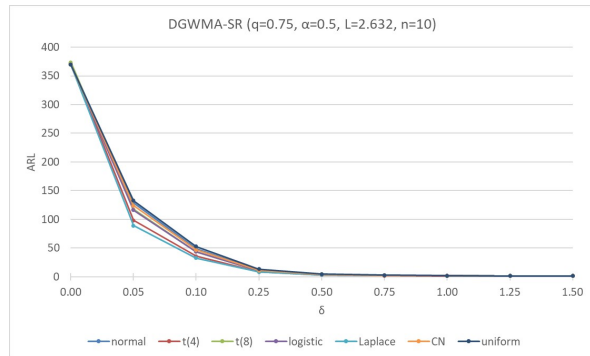
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 4.5: ARL τιμές για το διάγραμμα DGWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές

( $\delta \leq 0.25$ ), όπου είναι προτιμότερες οι τιμές  $q = 0.75 - 0.90$  και  $a = 0.5 - 0.8$ . Για την ανίχνευση μέτρων μετατοπίσεων ( $0.50 \leq \delta \leq 1.00$ ), οι παράμετροι  $q = 0.50 - 0.70$  και  $a = 0.9 - 1.2$  δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα όταν  $n = 5$ , ενώ στην περίπτωση όπου  $n = 10$  προτείνονται οι τιμές  $q = 0.50$  και  $a = 0.9 - 1.5$ . Τέλος, ένα διάγραμμα DGWMA-SR με παραμέτρους ( $q = 0.50, a = 1.5$ ) είναι το πιο αποδοτικό στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων. Άλλωστε, οι τιμές  $\min(ARL_1)$  μικραίνουν, καθώς μικραίνει η παράμετρος  $q$  για συγκεκριμένη τιμή  $a$ . Τέλος, το διάγραμμα DGWMA-SR εμφανίζει την καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση για τιμές παραμέτρων  $q = 0.75$  και  $a = 0.5$ .

**Πίνακας 4.3:** Βέλτιστες τιμές παραμέτρων σχεδίασης του διαγράμματος DGWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή

$\delta$	$n = 5$				$n = 10$			
	$q$	$a$	$L$	$ARL_1$	$q$	$a$	$L$	$ARL_1$
0.05	0.90	0.5	1.834	176.37	0.90	0.5	1.845	123.06
0.10	0.90	0.6	1.864	84.46	0.90	0.8	2.037	53.83
0.25	0.80	0.7	2.432	25.94	0.75	0.8	2.573	14.98
0.50	0.70	0.9	2.658	9.75	0.50	0.9	2.833	5.55
0.75	0.50	0.9	2.774	5.73	0.50	1.2	2.830	3.34
1.00	0.50	1.2	2.765	4.10	0.50	1.5	2.826	2.59
1.25	0.50	1.5	2.747	3.39	0.50	1.5	2.826	2.23
1.50	0.50	1.5	2.747	3.11	0.50	1.5	2.826	2.06

#### 4.9.4 Σύγκριση διαγράμματος DGWMA-SR με άλλα διαγράμματα ελέγχου

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα συγκρίνουμε το νέο μη παραμετρικό διάγραμμα DGWMA-SR με άλλα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, αλλά και με το παραμετρικό διάγραμμα DGWMA- $\bar{X}$ , χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα, αλλά και σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, το διάγραμμα DEWMA-SR αποτελεί ειδική περίπτωση του διαγράμματος DGWMA-SR για  $q = 1 - \lambda$  και  $a = 1$ . Συγκρίνοντας τα δύο διαγράμματα με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου (Πίνακες Γ5, Γ12 και Γ13) παρατηρούμε ότι η επιπρόσθετη παράμετρος  $a$  προσδίδει μία ευελξία καθιστώντας το διάγραμμα DGWMA-SR πιο ευαίσθητο, ιδιαίτερα για μικρές μετατοπίσεις. Η σύγκριση ενός διαγράμματος DGWMA-SR με  $q = 0.95$  και  $a < 1$  με το διάγραμμα DEWMA-SR με  $\lambda = 0.05$  οδηγεί σε εσφαλμένα συμπεράσματα, καθώς

τα διαγράμματα διαφέρουν σημαντικά στην τιμή του  $SDRL_0$ . Όμως, συγκρίνοντας διαγράμματα DGWMA-SR με παραμέτρους ( $q \leq 0.90, a = 0.9$ ) και DEWMA-SR με παράμετρο  $\lambda = 1 - q$ , τα οποία έχουν παραπλήσιες τιμές  $SDRL_0$ , διαπιστώνουμε την υπεροχή του νέου διαγράμματος ιδιαίτερα σε μικρές μετατοπίσεις. Για παράδειγμα, από τη σύγκριση των διαγραμμάτων DGWMA-SR ( $q = 0.75, a = 0.9, L = 2.593$ ) και DEWMA-SR ( $\lambda = 0.25, L = 2.604$ ) για  $n = 5$  (τα εν λόγω διαγράμματα έχουν  $SDRL_0 \approx 370$ ) προκύπτει ότι το διάγραμμα DGWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.25$ ), ενώ υπερέχει ελαφρώς στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Επιπλέον, συγκρίνοντας τα διαγράμματα DGWMA-SR ( $q = 0.75, a = 0.9, L = 2.600$ ) και DEWMA-SR ( $\lambda = 0.25, L = 2.615$ ) για  $n = 10$  (τα εν λόγω διαγράμματα έχουν  $SDRL_0 \approx 370$ ), διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα DGWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.10$ , ενώ τα δύο διαγράμματα έχουν την ίδια απόδοση στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Επισημαίνεται ότι ένα διάγραμμα DEWMA-SR με παράμετρο  $\lambda$  είναι πιο ευαίσθητο από ένα διάγραμμα DGWMA-SR με παραμέτρους ( $q = 1 - \lambda, a > 1$ ) για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις.

Από τη σύγκριση με το διάγραμμα GWMA-SR χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και παραπλήσιες τιμές  $SDRL_0$ , διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα GWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.10$  όταν τα δύο διαγράμματα συγκρίνονται υπό  $SDRL_0 \approx 400$ , ενώ στην περίπτωση που συγκρίνονται υπό την συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , το διάγραμμα DGWMA-SR είναι πιο αποδοτικό σχεδόν σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων όταν  $n = 5$  και για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.25$ ) όταν  $n = 10$ . Για παράδειγμα, συγκρίνοντας τα διαγράμματα DGWMA-SR ( $q = 0.90, a = 0.865, L = 2.149$ ) και GWMA-SR ( $q = 0.95, a = 0.67, L = 2.572$ ) για  $n = 5$  (τα εν λόγω διαγράμματα έχουν  $SDRL_0 \approx 400$ ), το διάγραμμα GWMA-SR είναι πιο ευαίσθητο για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.10$ , ενώ το διάγραμμα DGWMA-SR υπερέχει στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων (βλέπε Πίνακα 4.10). Το αυτό ισχύει και από τη σύγκριση των διαγραμμάτων DGWMA-SR με ( $q = 0.95, a = 1.15, L = 2.094$ ) και ( $q = 0.90, a = 0.92, L = 2.194$ ) και GWMA-SR ( $q = 0.95, a = 0.7, L = 2.598$ ) για  $n = 10$ , τα οποία κι αυτά έχουν  $SDRL_0 \approx 399$  (βλέπε Πίνακα 4.13). Από την άλλη, συγκρίνοντας τα διαγράμματα DGWMA-SR ( $q = 0.70, a = 0.8, L = 2.661$ ) και GWMA-SR ( $q = 0.75, a = 0.7, L = 2.715$ ) για  $n = 5$  (για τα οποία ισχύει η συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ ) παρατηρούμε ότι το διάγραμμα DGWMA-SR είναι πιο αποδοτικό σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων (βλέπε Πίνακα 4.11), ενώ από τη σύγκριση των διαγραμμάτων DGWMA-SR ( $q = 0.75, a = 0.9, L = 2.600$ ) και GWMA-SR ( $q = 0.90, a = 1.2, L = 2.692$ ) για  $n = 10$  διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα DGWMA-SR είναι πιο ευαίσθητο σε μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.25$ ) και έχουν την ίδια απόδοση στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων.



Τέλος, συγκρίνοντας τα διαγράμματα CUSUM-SR και DGWMA-SR υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$  παρατηρούμε ότι ένα διάγραμμα CUSUM-SR το οποίο είναι βέλτιστο στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων υπερισχύει έναντι του διαγράμματος DGWMA-SR στην ανίχνευση μετατοπίσεων  $\delta \leq 0.10$ , ενώ το διάγραμμα DGWMA-SR είναι πιο αποδοτικό στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Για παράδειγμα, για  $n = 5$ , από τη σύγκριση των διαγραμμάτων CUSUM-SR ( $k = 1.5, H = 68.5$ ) και DGWMA-SR ( $q = 0.70, a = 0.8, L = 2.661$ ) προκύπτει ότι το διάγραμμα CUSUM-SR είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DGWMA-SR για  $\delta \leq 0.10$ , ενώ ισχύει το αντίστροφο για μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Επισημαίνεται ότι συγκρίνοντας το συγκεκριμένο διάγραμμα DGWMA-SR με διαγράμματα CUSUM-SR βέλτιστα στην ανίχνευση μέτριων ή μεγάλων μετατοπίσεων προκύπτει η υπεροχή του διαγράμματος DGWMA-SR σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων.

Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε το διάγραμμα DGWMA-SR με τα υπόλοιπα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιώντας όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης. Από τους Πίνακες Γ6, Γ14 και Γ15, όπου παρουσιάζεται η απόδοση των διαγραμμάτων DEWMA-SR και DGWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, παρατηρούμε ότι ένα διάγραμμα DGWMA-SR με παραμέτρους ( $q, a < 1$ ) είναι αρκετά πιο αποδοτικό από ένα διάγραμμα DEWMA-SR με παράμετρο  $\lambda = 1 - q$  για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.50$ , ενώ το διάγραμμα DEWMA-SR έχει ελαφρώς καλύτερη απόδοση στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Από την άλλη, τιμές  $a > 1$  προσδίδουν στο διάγραμμα DGWMA-SR καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα σε μέτριες προς μεγάλες μετατοπίσεις.

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα GWMA-SR και DGWMA-SR με ίδιες τιμές παραμέτρων σχεδίασης ( $q, a$ ) διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα DGWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για μικρές μετατοπίσεις, ενώ το διάγραμμα GWMA-SR υπερέχει στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Το εύρος μετατοπίσεων που υπερισχύει το διάγραμμα DGWMA-SR έναντι του διαγράμματος GWMA-SR μεγαλώνει, καθώς αυξάνεται η τιμή  $a$  (ιδιαίτερα για μεγάλες τιμές  $q$ ), αλλά και καθώς μειώνεται η τιμή  $q$ . Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$ , το διάγραμμα DGWMA-SR ( $q = 0.90, a = 0.7, L = 1.944$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα GWMA-SR ( $q = 0.90, a = 0.7, L = 2.669$ ) για  $\delta \leq 0.10$ , ενώ το διάγραμμα DGWMA-SR ( $q = 0.90, a = 1.2, L = 2.340$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα GWMA-SR ( $q = 0.90, a = 1.2, L = 2.673$ ) για  $\delta \leq 0.25$ . Από την άλλη, συγκρίνοντας τα διαγράμματα με  $q = 0.50$  και ίδια τιμή  $a$ , το DGWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για μετατοπίσεις  $\delta \leq 1.00$ .

Τέλος, από τη σύγκριση με το διάγραμμα CUSUM-SR διαπιστώνουμε ότι ένα διάγραμμα DGWMA-SR με κατάλληλες παραμέτρους σχεδίασης είναι πιο αποδοτικό από ένα διάγραμμα CUSUM-SR το οποίο είναι βέλτιστο στην ανίχνευση μικρών ή μέτριων μετατοπίσεων σε όλο

το εύρος των μετατοπίσεων. Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$ , τα διάγραμμα DGWMA-SR με παραμέτρους ( $q = 0.75, a = 0.5, L = 2.576$ ) και ( $q = 0.50, a = 0.7, L = 2.765$ ) είναι πιο αποδοτικά από τα διαγράμματα CUSUM-SR με παραμέτρους ( $k = 1.5, H = 68.5$ ) και ( $k = 4.5, H = 28.5$ ) αντίστοιχα, σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Το αυτό ισχύει και από τη σύγκριση των διαγραμμάτων DGWMA-SR ( $q = 0.75, a = 0.5, L = 2.596$ ) και CUSUM-SR ( $k = 6, H = 137$ ) για  $n = 10$ . Από την άλλη, το διάγραμμα DGWMA-SR ( $q = 0.50, a = 1.2, L = 2.830$ ) υπερέχει έναντι του διαγράμματος CUSUM-SR ( $k = 25, H = 31$ ) για  $\delta \leq 0.50$ , ενώ το διάγραμμα CUSUM-SR υπερέχει ελαφρώς στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων.

Στους Πίνακες 4.4 και 4.5 παρουσιάζονται οι τιμές  $ARL_1$  των διαγραμμάτων DGWMA-SR, DEWMA-SR, GWMA-SR και EWMA-SR για τις βέλτιστες παραμέτρους σχεδίασης όταν  $n = 5$  και  $n = 10$ , αντίστοιχα. Οι συγκεκριμένες παράμετροι σχεδίασης αντιστοιχούν στις βέλτιστες τιμές  $ARL_1$  όταν η κατανομή του χαρακτηριστικού ποιότητας είναι η κανονική. Πάρα ταύτα, έχουν υπολογιστεί και οι τιμές  $ARL_1$  που αντιστοιχούν και σε άλλες συμμετρικές κατανομές. Από τους συγκεκριμένους πίνακες διαπιστώνουμε ότι οι βέλτιστες τιμές  $ARL_1$  του διαγράμματος DGWMA-SR που αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.10$  είναι χαμηλότερες από τις αντίστοιχες τιμές των υπολοίπων διαγραμμάτων, ενώ τα διαγράμματα αποδίδουν σχεδόν το ίδιο για μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Επιπρόσθετα, συγκρίνοντας διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου τα οποία είναι βέλτιστα στην ανίχνευση μίας μικρής μετατοπίσης ( $\delta = 0.05$  ή  $0.10$ ), παρατηρούμε ότι το διάγραμμα DGWMA-SR υπερέχει έναντι του διαγράμματος DEWMA-SR σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων, ενώ η υπεροχή του έναντι των διαγραμμάτων GWMA-SR και EWMA-SR περιορίζεται μόνο στις μικρές μετατοπίσεις με τα άλλα δύο διαγράμματα να είναι πιο αποδοτικά σε μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Για παράδειγμα, συγκρίνοντας τα διαγράμματα που είναι βέλτιστα στην ανίχνευση της μετατοπίσης  $\delta = 0.10$  όταν  $n = 10$ , παρατηρούμε ότι το διάγραμμα DGWMA-SR ( $q = 0.90, a = 0.8, L = 2.037$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DEWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 1.863$ ) σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων και μάλιστα υπερέχει σημαντικά σε μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις, ενώ είναι πιο ευαίσθητο από τα διαγράμματα GWMA-SR ( $q = 0.95, a = 0.8, L = 2.502$ ) και EWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 2.487$ ) μόνο για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.10$ . Τα άλλα δύο διαγράμματα υπερέχουν σημαντικά για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις με το διάγραμμα GWMA-SR να έχει συγκεντρωτικά καλύτερη απόδοση. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι τα διαγράμματα GWMA-SR και EWMA-SR έχουν  $\min(ARL_1) = 3$ , ενώ οι αντίστοιχες τιμές των διαγραμμάτων DGWMA-SR και DEWMA-SR είναι 6 και 9.

Στον Πίνακα 4.6 παρουσιάζονται οι αποδόσεις των διαγραμμάτων DGWMA-SR, DGWMA-

SN και DGWMA- $\bar{X}$  με παραμέτρους σχεδίασης ( $q = 0.9, a = 0.8$ ) και όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές όταν  $n = 10$ . Από τον εν λόγω πίνακα, παρατηρούμε ότι οι τιμές  $ARL_0$  των διαγραμμάτων DGWMA-SR και DGWMA-SN είναι σχεδόν ίσες με την επιθυμητή τιμή για όλες τις κατανομές, ενώ αυτές του διαγράμματος DGWMA- $\bar{X}$ , το οποίο είναι σχεδιασμένο για κανονική κατανομή, διαφέρουν από την επιθυμητή τιμή και εξαρτώνται από την κατανομή του χαρακτηριστικού ποιότητας. Για τις περιπτώσεις όπου η κατανομή είναι  $t_8$  ή Laplace, παρατηρούμε ότι οι τιμές  $ARL_0$  είναι ίσες με 370. Επιπρόσθετα, το διάγραμμα DGWMA-SR είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DGWMA-SN σχεδόν σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων για όλες τις κατανομές εκτός από την Laplace, όπου το διάγραμμα DGWMA-SN αποδίδει καλύτερα για  $\delta \leq 0.25$ . Σε σύγκριση με το διάγραμμα DGWMA- $\bar{X}$  διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα DGWMA-SR αποδίδει καλύτερα για μικρές μετατοπίσεις, όταν η κατανομή της διεργασίας είναι  $t_4, t_8$ , logistic ή Laplace. Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι οι τιμές  $ARL_1$  του διαγράμματος DGWMA- $\bar{X}$  που αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις  $\delta \geq 0.10$  είναι ίδιες ανεξάρτητα από την κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού. Τέλος, το διάγραμμα DGWMA- $\bar{X}$  αποδίδει καλύτερα από τα αντίστοιχα μη παραμετρικά διαγράμματα για  $\delta \geq 0.75$  λόγω του περιορισμού του ελάχιστου αριθμού δειγμάτων που χρειάζεται ένα μη παραμετρικό διάγραμμα για να ανιχνεύσει μία μετατόπιση.

#### 4.9.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το υποκεφάλαιο παρουσιάσαμε ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου με τη χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης, το DGWMA-SR. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάσαμε τη δομή του διαγράμματος, αποδείξαμε τη μη παραμετρική του συμπεριφορά και υπολογίσαμε την απόδοσή του με χρονικά μεταβαλλόμενα και σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές, εστιάζοντας στην κανονική. Δείξαμε ότι η επιπρόσθετη παράμετρος σχεδίασης  $a$  προσδίδει ευελεξία στην ανιχνευτική ικανότητα του διαγράμματος DEWMA-SR.

Χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \approx 400$ , το διάγραμμα GWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για μικρές μετατοπίσεις, ενώ υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , το νέο διάγραμμα είναι πιο ευαίσθητο από το διάγραμμα GWMA-SR σχεδόν σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων και υπερέχει έναντι ενός διαγράμματος CUSUM-SR - βέλτιστο στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων - σε μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις.

Από την άλλη, χρησιμοποιώντας όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης διαπιστώσαμε την υπε-

ροχή του νέου διαγράμματος έναντι των διαγραμμάτων DEWMA-SR, GWMA-SR και EWMA-SR κυρίως σε μικρές μετατοπίσεις, ενώ εμφανίζεται πιο αποδοτικό σε μεγαλύτερο εύρος μετατοπίσεων σε σχέση με το διάγραμμα CUSUM-SR.

Τέλος, το διάγραμμα DGWMA-SR έχει καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα από το διάγραμμα DGWMA-SN ιδιαίτερα για μικρές μετατοπίσεις για όλες τις κατανομές εκτός της Laplace, όπου το διάγραμμα DGWMA-SN εμφανίζεται πιο αποδοτικό στις μικρές μετατοπίσεις.

Μέρος των αποτελεσμάτων αυτού του υποκεφαλαίου παρουσιάζονται στην πρώτη επιστημονική εργασία.

**Πίνακας 4.4:** Τιμές  $ARL_1$  των διαγραμμάτων DGWMA-SR, DEWMA-SR, GWMA-SR και EWMA-SR για τις βέλτιστες παραμέτρους σχεδίασης όταν  $n = 5$

$\delta$	διάγραμμα	$q$	$a$	$L$	$N(0, 1)$	$t_4$	$t_8$	$LG\left(0, \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)$	$L\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$CN(a = 0.05)$	$U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
0.05	DGWMA-SR	0.90	0.50	1.834	176.37	142.11	161.71	161.20	127.88	171.09	185.26
	DEWMA-SR	0.95	1.00	1.862	194.49	155.16	179.91	178.08	139.61	190.00	201.91
	GWMA-SR	0.95	0.70	2.507	188.07	150.06	173.42	172.26	135.48	182.17	198.62
	EWMA-SR	0.95	1.00	2.481	212.87	170.73	197.62	195.96	155.03	207.97	223.75
0.10	DGWMA-SR	0.90	0.60	1.864	84.46	66.02	77.29	76.82	59.57	81.98	92.58
	DEWMA-SR	0.95	1.00	1.862	88.16	66.88	80.09	79.57	60.56	85.18	97.73
	GWMA-SR	0.95	0.70	2.507	88.17	67.36	80.04	78.98	60.21	85.42	97.36
	EWMA-SR	0.95	1.00	2.481	96.51	70.42	86.02	85.93	62.59	92.88	107.24
0.25	DGWMA-SR	0.80	0.70	2.432	25.94	19.66	23.15	23.11	18.43	24.78	29.56
	DEWMA-SR	0.90	1.00	2.205	26.52	20.51	23.90	24.05	19.42	25.46	30.39
	GWMA-SR	0.95	0.90	2.481	26.25	20.07	23.56	23.55	18.79	25.18	29.89
	EWMA-SR	0.95	1.00	2.481	25.83	19.53	23.15	23.23	18.39	24.75	29.84
0.50	DGWMA-SR	0.70	0.90	2.658	9.75	7.76	8.95	8.92	7.73	9.34	11.65
	DEWMA-SR	0.70	1.00	2.664	9.77	7.65	8.92	8.92	7.64	9.36	11.84
	GWMA-SR	0.90	1.20	2.673	9.74	7.77	8.94	8.92	7.71	9.33	11.65
	EWMA-SR	0.90	1.00	2.668	10.00	8.10	9.22	9.22	8.02	9.60	11.71
0.75	DGWMA-SR	0.50	0.90	2.774	5.73	4.72	5.27	5.30	4.84	5.48	6.90
	DEWMA-SR	0.60	1.00	2.744	5.73	4.84	5.34	5.34	4.95	5.48	6.70
	GWMA-SR	0.80	1.20	2.765	5.73	4.79	5.32	5.32	4.91	5.46	6.73
	EWMA-SR	0.75	1.00	2.767	5.75	4.79	5.34	5.34	4.90	5.51	6.82
1.00	DGWMA-SR	0.50	1.20	2.765	4.10	3.67	3.90	3.89	3.79	3.93	4.55
	DEWMA-SR	0.50	1.00	2.771	4.13	3.74	3.97	3.97	3.86	4.01	4.56
	GWMA-SR	0.70	1.20	2.767	4.10	3.69	3.92	3.92	3.81	3.96	4.57
	EWMA-SR	0.70	1.00	2.755	4.17	3.74	3.98	3.98	3.85	4.03	4.65
1.25	DGWMA-SR	0.50	1.50	2.747	3.39	3.29	3.34	3.35	3.36	3.31	3.47
	DEWMA-SR	0.50	1.00	2.771	3.49	3.36	3.44	3.45	3.44	3.42	3.58
	GWMA-SR	0.50	1.20	2.667	3.13	2.82	3.00	3.01	2.94	3.00	3.39
	EWMA-SR	0.60	1.00	2.707	3.47	3.32	3.41	3.41	3.40	3.40	3.59
1.50	DGWMA-SR	0.50	1.50	2.747	3.11	3.13	3.12	3.12	3.15	3.08	3.05
	DEWMA-SR	0.50	1.00	2.771	3.20	3.18	3.20	3.20	3.23	3.16	3.12
	GWMA-SR	0.50	1.20	2.667	2.64	2.52	2.59	2.60	2.61	2.56	2.58
	EWMA-SR	0.60	1.00	2.707	3.17	3.15	3.17	3.17	3.20	3.14	3.10

**Πίνακας 4.5:** Τιμές  $ARL_1$  των διαγραμμάτων DGWMA-SR, DEWMA-SR, GWMA-SR και EWMA-SR για τις βέλτιστες παραμέτρους σχεδίασης όταν  $n = 10$

$\delta$	διάγραμμα	$q$	$a$	$L$	$N(0, 1)$	$t_4$	$t_8$	$LG\left(0, \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)$	$L\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$CN(a = 0.05)$	$U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
0.05	DGWMA-SR	0.90	0.50	1.845	123.06	98.08	113.54	112.77	91.01	118.85	126.47
	DEWMA-SR	0.95	1.00	1.863	131.21	102.53	120.75	120.65	95.02	126.39	136.85
	GWMA-SR	0.95	0.70	2.534	130.29	101.46	118.63	117.35	93.08	125.52	133.55
	EWMA-SR	0.95	1.00	2.487	145.65	113.74	133.99	133.80	103.66	140.74	152.21
0.10	DGWMA-SR	0.90	0.80	2.037	53.83	41.41	48.49	48.64	38.29	51.61	56.78
	DEWMA-SR	0.95	1.00	1.863	54.95	43.21	49.70	48.90	40.21	52.11	58.27
	GWMA-SR	0.95	0.80	2.502	54.64	41.73	49.41	49.29	38.26	52.14	57.92
	EWMA-SR	0.95	1.00	2.487	56.18	41.59	50.43	50.49	38.24	53.69	60.19
0.25	DGWMA-SR	0.75	0.80	2.573	14.98	11.52	13.63	13.59	11.09	14.27	16.52
	DEWMA-SR	0.80	1.00	2.513	15.17	11.55	13.73	13.73	11.17	14.46	16.83
	GWMA-SR	0.95	1.20	2.510	15.09	11.79	13.77	13.77	11.35	14.40	16.55
	EWMA-SR	0.90	1.00	2.686	15.05	11.47	13.71	13.64	10.97	14.37	16.68
0.50	DGWMA-SR	0.50	0.90	2.833	5.55	4.39	5.07	5.05	4.40	5.30	6.40
	DEWMA-SR	0.60	1.00	2.770	5.54	4.52	5.13	5.11	4.54	5.33	6.27
	GWMA-SR	0.80	1.20	2.807	5.53	4.46	5.08	5.09	4.48	5.31	6.30
	EWMA-SR	0.75	1.00	2.833	5.58	4.45	5.13	5.11	4.48	5.34	6.40
0.75	DGWMA-SR	0.50	1.20	2.830	3.34	2.96	3.19	3.18	3.02	3.25	3.67
	DEWMA-SR	0.50	1.00	2.830	3.36	2.98	3.21	3.20	3.04	3.27	3.70
	GWMA-SR	0.60	1.50	2.850	3.21	2.71	3.00	3.00	2.79	3.07	3.68
	EWMA-SR	0.60	1.00	2.837	3.26	2.79	3.08	3.07	2.88	3.14	3.67
1.00	DGWMA-SR	0.50	1.50	2.826	2.59	2.42	2.53	2.53	2.48	2.53	2.75
	DEWMA-SR	0.50	1.00	2.830	2.67	2.50	2.61	2.60	2.55	2.61	2.83
	GWMA-SR	0.50	1.50	2.841	2.33	2.20	2.29	2.28	2.25	2.28	2.48
	EWMA-SR	0.50	1.00	2.812	2.42	2.28	2.36	2.36	2.33	2.36	2.57
1.25	DGWMA-SR	0.50	1.50	2.826	2.23	2.20	2.23	2.23	2.24	2.19	2.27
	DEWMA-SR	0.50	1.00	2.830	2.29	2.25	2.28	2.28	2.30	2.25	2.33
	GWMA-SR	0.50	1.50	2.841	2.08	2.06	2.07	2.07	2.08	2.05	2.07
	EWMA-SR	0.50	1.00	2.812	2.11	2.10	2.11	2.11	2.12	2.09	2.12
1.50	DGWMA-SR	0.50	1.50	2.826	2.06	2.09	2.09	2.08	2.11	2.05	2.02
	DEWMA-SR	0.50	1.00	2.830	2.09	2.12	2.11	2.11	2.14	2.07	2.03
	GWMA-SR	0.50	1.50	2.841	2.01	2.02	2.01	2.01	2.02	2.01	2.00
	EWMA-SR	0.50	1.00	2.812	2.02	2.04	2.03	2.03	2.05	2.01	2.01

**Πίνακας 4.6:** Τιμές  $ARL_1$  των διαγραμμάτων DGWMA-SR, DGWMA-SN και DGWMA- $\bar{X}$  με παραμέτρους σχεδίασης ( $q = 0.9, a = 0.8$ ) και όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης για  $n = 10$

$\delta$	διάγραμμα	$q$	$a$	$L$	$N(0, 1)$	$t_4$	$t_8$	$LG\left(0, \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)$	$L\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$CN(a = 0.05)$	$U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
0	DGWMA-SR	0.9	0.8	2.037	370.00	369.40	370.34	369.78	371.01	370.62	369.45
	DGWMA-SN	0.9	0.8	2.034	370.28	370.58	370.12	369.80	369.81	371.04	369.81
	DGWMA- $\bar{X}$	0.9	0.8	2.033	370.13	378.07	369.71	373.02	369.72	427.83	365.84
0.05	DGWMA-SR	0.9	0.8	2.037	131.77	101.90	119.96	119.32	93.42	126.63	135.40
	DGWMA-SN	0.9	0.8	2.034	157.86	113.39	139.53	137.87	82.75	152.56	214.11
	DGWMA- $\bar{X}$	0.9	0.8	2.033	123.09	124.95	121.98	121.88	121.80	126.10	121.70
0.10	DGWMA-SR	0.9	0.8	2.037	53.83	41.41	48.49	48.64	38.29	51.61	56.78
	DGWMA-SN	0.9	0.8	2.034	66.91	46.15	57.66	56.52	35.05	64.22	103.17
	DGWMA- $\bar{X}$	0.9	0.8	2.033	49.93	50.32	49.51	49.71	49.86	50.17	49.60
0.25	DGWMA-SR	0.9	0.8	2.037	18.49	15.35	17.28	17.24	14.91	17.91	19.77
	DGWMA-SN	0.9	0.8	2.034	21.96	16.58	19.56	19.34	14.50	21.14	31.34
	DGWMA- $\bar{X}$	0.9	0.8	2.033	17.20	17.23	17.19	17.22	17.21	17.13	17.22
0.50	DGWMA-SR	0.9	0.8	2.037	10.22	9.07	9.80	9.79	9.12	10.00	10.97
	DGWMA-SN	0.9	0.8	2.034	11.52	9.47	10.64	10.56	9.12	11.23	14.93
	DGWMA- $\bar{X}$	0.9	0.8	2.033	9.23	9.25	9.26	9.26	9.25	9.23	9.26
0.75	DGWMA-SR	0.9	0.8	2.037	7.88	7.34	7.68	7.68	7.44	7.75	8.35
	DGWMA-SN	0.9	0.8	2.034	8.56	7.44	8.06	8.04	7.44	8.38	10.39
	DGWMA- $\bar{X}$	0.9	0.8	2.033	6.72	6.72	6.72	6.72	6.72	6.71	6.72
1.00	DGWMA-SR	0.9	0.8	2.037	6.87	6.58	6.78	6.78	6.70	6.79	7.12
	DGWMA-SN	0.9	0.8	2.034	7.18	6.54	6.89	6.89	6.63	7.06	8.20
	DGWMA- $\bar{X}$	0.9	0.8	2.033	5.42	5.41	5.43	5.42	5.42	5.43	5.42
1.25	DGWMA-SR	0.9	0.8	2.037	6.27	6.20	6.25	7.07	7.08	7.05	7.01
	DGWMA-SN	0.9	0.8	2.034	6.42	6.11	6.28	6.28	6.20	6.34	6.87
	DGWMA- $\bar{X}$	0.9	0.8	2.033	4.62	4.61	4.62	4.61	4.61	4.62	4.62
1.50	DGWMA-SR	0.9	0.8	2.037	6.03	6.03	6.04	6.04	6.07	6.02	6.01
	DGWMA-SN	0.9	0.8	2.034	6.03	5.91	5.99	5.99	5.98	5.99	6.03
	DGWMA- $\bar{X}$	0.9	0.8	2.033	4.07	4.07	4.07	4.07	4.07	4.06	4.07

#### 4.10 Διάγραμμα HWMA-SR

Οι Raza, Nawaz και Han (2020) μελέτησαν το διάγραμμα HWMA-SR, στην ίδια εργασία που μελέτησαν και το διάγραμμα HWMA-SN. Η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης ενός διαγράμματος HWMA-SR είναι η ακόλουθη

$$H_i = \lambda SR_i + (1 - \lambda) \overline{SR}_{i-1}, \quad (4.21)$$

όπου  $0 < \lambda \leq 1$  είναι η παράμετρος εξομάλυνσης,  $\overline{SR}_{i-1} = \frac{\sum_{k=1}^{i-1} SR_k}{i-1}$  και η τιμή εκκίνησης  $\overline{SR}_0 = 0$ . Τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος HWMA-SR είναι

$$UCL_i/LCL_i = \begin{cases} \pm L\lambda \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} & , \text{ για } i = 1, \\ \pm L\sqrt{\left(\lambda^2 + \frac{(1-\lambda)^2}{i-1}\right) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} & , \text{ για } i > 1, \end{cases} \quad CL = 0, \quad (4.22)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου, ενώ τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= +L\lambda \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}, \\ LCL &= -L\lambda \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου εάν η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης  $H_i$  βρίσκεται εντός των ορίων ελέγχου, ενώ σε διαφορετική περίπτωση θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου.

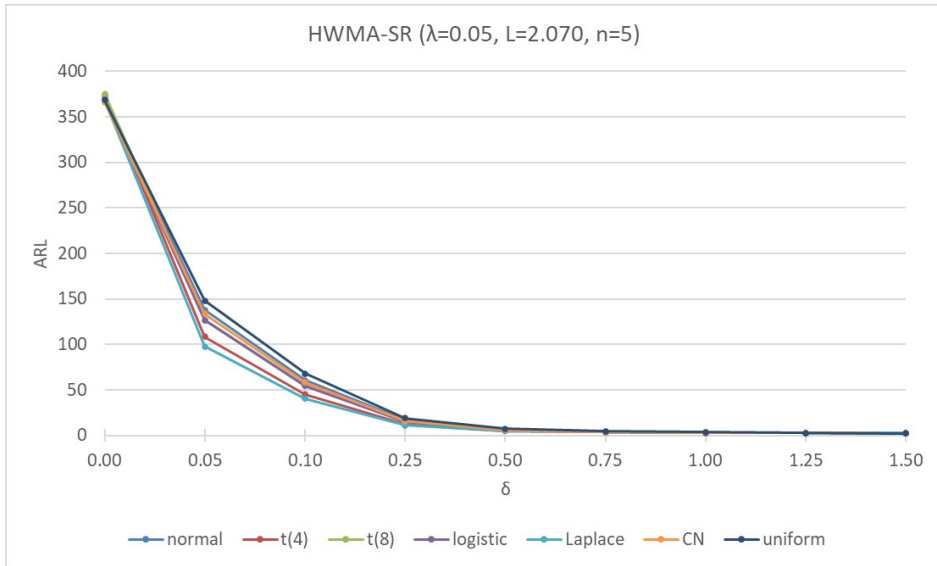
Οι Raza, Nawaz και Han (2020) παρέθεσαν την απόδοση του διαγράμματος HWMA-SR με  $\lambda = 0.10$  και  $n = 10$  για τις ίδιες συμμετρικές κατανομές που μελετάμε στην παρούσα διατριβή. Επιπλέον, από τη σύγκριση που παρουσιάσανε για  $\lambda = 0.05$  και  $n = 10$  προέκυψε το συμπέρασμα ότι το διάγραμμα HWMA-SR είναι πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα EWMA-SN, EWMA-SR και EWMA- $\overline{X}$  σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων, ενώ υπερέχει έναντι του διαγράμματος HWMA- $\overline{X}$  σε μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.50$  εκτός από τις περιπτώσεις όπου το ποιοτικό χαρακτηριστικό ακολουθεί την κανονική ή έναν συνδυασμό κανονικών κατανομών. Στην εργασία τους, οι Raza, Nawaz και Han (2020) δεν παραθέτουν πληροφορίες αναφορικά με τις διακυμάνσεις της τιμής  $SDRL_0$  σε σχέση με την παράμετρο  $\lambda$  και το μέγεθος του δείγματος  $n$ .

Σε αυτό το υποκεφάλαιο, θα μελετήσουμε την απόδοση του διαγράμματος HWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 5$  και  $10$ . Τα αποτελέσματα για την περίπτωση όπου το ποιοτικό χαρακτηριστικό ακολουθεί την κανονική κατανομή παρουσιάζονται στον Πίνακα Γ16, ενώ στο Σχήμα 4.6 παρουσιάζονται οι τιμές ARL του διαγράμματος με  $\lambda = 0.05$  για διάφορες

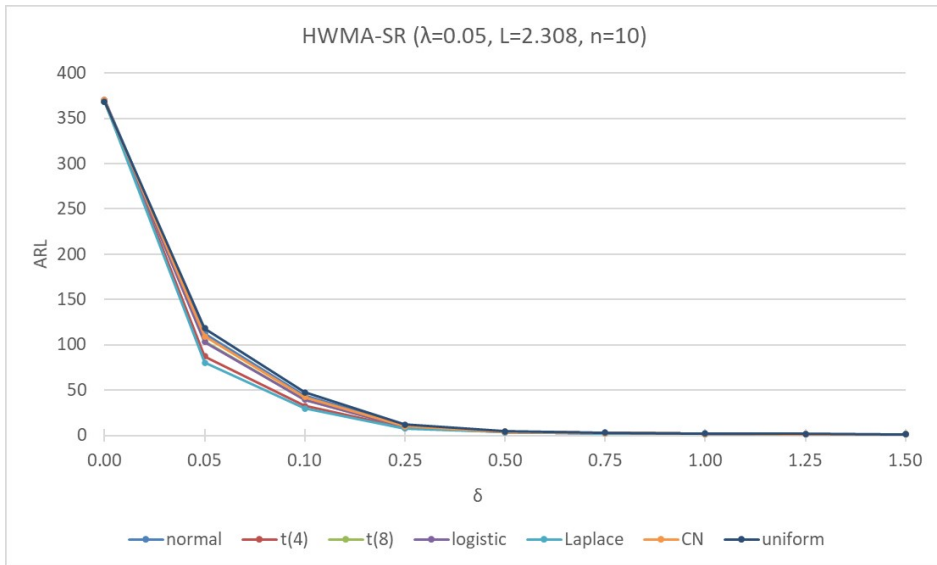


συνεχείς και συμμετρικές κατανομές. Λόγω των υψηλών τιμών  $SDRL_0$  που έχει το εν λόγω διάγραμμα όταν χρησιμοποιούνται όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, όπως συμβαίνει και με το διάγραμμα HWMA-SN, δεν προτείνεται η εφαρμογή του με τον υπ' όψιν σχεδιασμό. Έτσι, λοιπόν, από τον Πίνακα Γ16 παρατηρούμε ότι για  $n = 5$ , το διάγραμμα HWMA-SR έχει αρκετά υψηλές τιμές  $SDRL_0$ , οι οποίες αυξάνονται καθώς αυξάνεται η τιμή του  $\lambda$ . Συγκρίνοντας το διάγραμμα HWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 2.070$ ), το οποίο έχει  $SDRL_0 = 524.58$ , με το διάγραμμα DGWMA-SR ( $q = 0.90, a = 0.5, L = 2.092$ ), το οποίο έχει  $SDRL_0 = 514.05$ , παρατηρούμε ότι το διάγραμμα DGWMA-SR έχει καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων.

Για την περίπτωση όπου  $n = 10$ , παρατηρούμε ότι οι τιμές  $SDRL_0$  είναι χαμηλές και αυξάνονται, καθώς αυξάνεται η παράμετρος  $\lambda$ . Επισημαίνεται ότι το διάγραμμα HWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 2.308$ ) είναι πιο αποδοτικό από τα υπόλοιπα διαγράμματα HWMA-SR με υψηλότερες τιμές  $\lambda$  κι επίσης έχει τη χαμηλότερη τιμή  $SDRL_0$  ( $= 322.32$ ). Το συγκεκριμένο διάγραμμα έχει καλύτερη απόδοση από τα διαγράμματα CUSUM-SR σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων, ενώ υπερέρχει έναντι των διαγραμμάτων EWMA-SR και DEWMA-SR με  $\lambda = 0.25$  (τα οποία έχουν  $SDRL_0 \approx 370$ ) κυρίως για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.25$ ). Επιπρόσθετα, υπερέρχει έναντι των διαγραμμάτων DGWMA-SR ( $q = 0.75, a = 0.9, L = 2.600$ ) και GWMA-SR ( $q = 0.90, a = 1.2, L = 2.692$ ), τα οποία έχουν  $SDRL_0 \approx 370$ , ιδιαίτερα για μικρές μετατοπίσεις.



( $\alpha$ )



( $\beta$ )

Σχήμα 4.6: ARL τιμές για το διάγραμμα HWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και  $\lambda = 0.05$  για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές

## 4.11 Διάγραμμα TEWMA-SR

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα μελετήσουμε ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης, το TEWMA-SR.

### 4.11.1 Δομή διαγράμματος TEWMA-SR

Η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση του νέου διαγράμματος είναι η ακόλουθη

$$\begin{cases} Y_i = \lambda SR_i + (1 - \lambda)Y_{i-1}, \\ Z_i = \lambda Y_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \\ W_i = \lambda Z_i + (1 - \lambda)W_{i-1}, \end{cases} \quad (4.24)$$

όπου οι αρχικές τιμές είναι  $Y_0 = Z_0 = W_0 = 0$  και  $0 < \lambda \leq 1$  η παράμετρος εξομάλυνσης. Οι στατιστικές συναρτήσεις  $Y_i$ ,  $Z_i$  και  $W_i$  γράφονται και ως εξής

$$Y_i = \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} SR_j, \quad (4.25)$$

$$Z_i = \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} Y_j \quad (4.26)$$

και

$$W_i = \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} Z_j. \quad (4.27)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.25)-(4.27), η στατιστική συνάρτηση  $W_i$  γράφεται ισοδύναμα ως

$$W_i = \frac{\lambda^3}{2} \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} (i - j + 1)(i - j + 2) SR_j. \quad (4.28)$$

Έτσι, λοιπόν, η εντός ελέγχου μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης  $W_i$  είναι ίση με 0, ενώ η εντός ελέγχου τιμή της διασποράς ισούται με

$$\begin{aligned} Var(W_i|IC) = & \left[ \frac{c^3 \lambda^6}{4} \left[ -\frac{i(i^2 - 1)(i - 2)c^{i-3}}{1 - c} - \frac{4i(i^2 - 1)c^{i-2}}{(1 - c)^2} - \frac{12i(i + 1)c^{i-1}}{(1 - c)^3} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{24(i + 1)c^i}{(1 - c)^4} + \frac{24(1 - c^{i+1})}{(1 - c)^5} \right] + 2c^2 \lambda^6 \left[ -\frac{i(i^2 - 1)c^{i-2}}{1 - c} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{3i(i + 1)c^{i-1}}{(1 - c)^2} - \frac{6(i + 1)c^i}{(1 - c)^3} + \frac{6(1 - c^{i+1})}{(1 - c)^4} \right] + \right. \\ & \left. \frac{7c\lambda^6}{2} \left[ -\frac{i(i + 1)c^{i-1}}{1 - c} - \frac{2(i + 1)c^i}{(1 - c)^2} + \frac{2(1 - c^{i+1})}{(1 - c)^3} \right] + \right. \\ & \left. \lambda^6 \left[ \frac{1 - c^{i+1}}{(1 - c)^2} - \frac{(i + 1)c^i}{1 - c} \right] \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}, \right. \end{aligned} \quad (4.29)$$

όπου  $c = (1 - \lambda)^2$ . Τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος TEWMA-SR είναι τα εξής

$$\begin{aligned} UCL_i &= +L\sqrt{Var(W_i|IC)}, \\ CL &= 0, \\ LCL_i &= -L\sqrt{Var(W_i|IC)}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου, ενώ τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

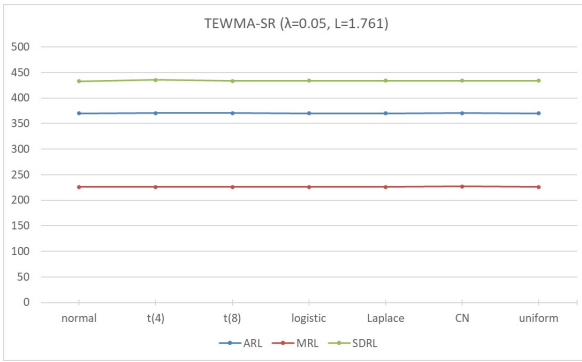
$$\begin{aligned} UCL &= +L\sqrt{\left[\frac{6(1-\lambda)^6\lambda}{(2-\lambda)^5} + \frac{12(1-\lambda)^4\lambda^2}{(2-\lambda)^4} + \frac{7(1-\lambda)^2\lambda^3}{(2-\lambda)^3} + \frac{\lambda^4}{(2-\lambda)^2}\right] \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}, \\ LCL &= -L\sqrt{\left[\frac{6(1-\lambda)^6\lambda}{(2-\lambda)^5} + \frac{12(1-\lambda)^4\lambda^2}{(2-\lambda)^4} + \frac{7(1-\lambda)^2\lambda^3}{(2-\lambda)^3} + \frac{\lambda^4}{(2-\lambda)^2}\right] \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εντός ελέγχου εάν η στατιστική συνάρτηση  $W_i$  βρίσκεται εντός των ορίων ελέγχου, ενώ σε διαφορετική περίπτωση θεωρούμε ότι βρίσκεται εκτός ελέγχου. Επιπλέον, το διάγραμμα TEWMA-SR μεταπίπτει στο διάγραμμα Shewhart-SR για  $\lambda = 1$ .

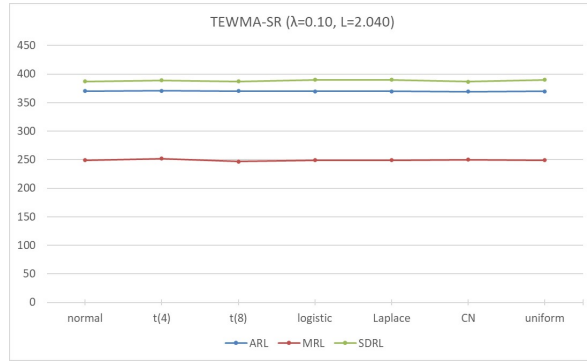
#### 4.11.2 Εντός ελέγχου κατανομή μήκους ροής του διαγράμματος TEWMA-SR

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που περιγράφεται στο υποκεφάλαιο 4.3, υπολογίζουμε την εντός ελέγχου κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος TEWMA-SR τόσο με χρονικά μεταβαλλόμενα όσο και με σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου. Στον Πίνακα Γ17 παρουσιάζονται οι τιμές της παραμέτρου  $L$  για το διάγραμμα TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και  $\lambda = 0.05, 0.10, 0.25, 0.50, 0.75$  για  $n = 5, 10, 15, 20$  προκειμένου να επιτευχθεί μία συγκεκριμένη τιμή  $ARL_0$ . Όπως και με το διάγραμμα TEWMA-SN, παρατηρούμε ότι για  $\lambda = 0.50$  και  $0.75$ , η τιμή της παραμέτρου  $L$  αυξάνεται, καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος  $n$  προκειμένου να επιτύχουμε την επιθυμητή τιμή  $ARL_0$ , ενώ δεν παρατηρείται κάποια άλλη τάση για μικρότερες τιμές του  $\lambda$ .

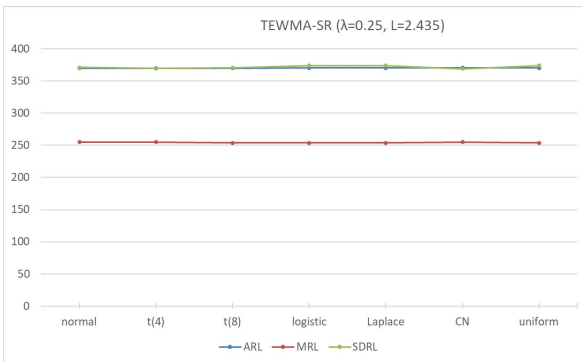
Στα Σχήματα 4.7 και 4.8 παρουσιάζονται οι τιμές των  $ARL_0$ ,  $MRL_0$  και  $SDRL_0$  του διαγράμματος TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και  $\lambda = 0.05, 0.10, 0.25, 0.50$  για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές όταν  $n = 5$  και  $10$ , αντίστοιχα. Από τα εν λόγω σχήματα παρατηρούμε ότι τα χαρακτηριστικά του εντός ελέγχου μήκους ροής είναι σχεδόν ίδια για όλες τις κατανομές. Επιπρόσθετα, διαπιστώνουμε ότι η τιμή  $MRL_0$  αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , ενώ η τιμή του  $SDRL_0$  μειώνεται. Όπως και στα



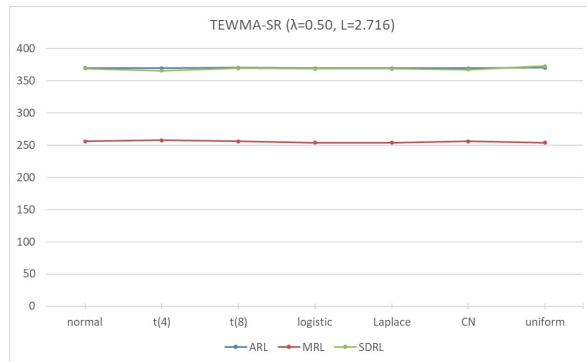
(α)



(β)



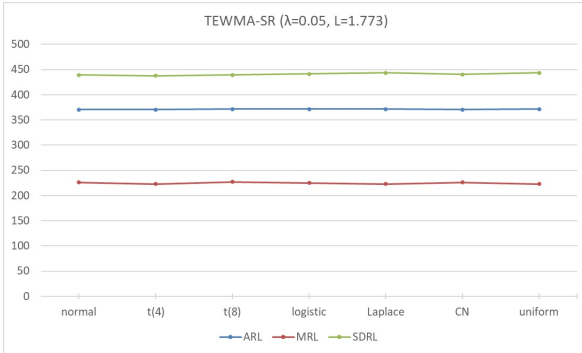
(γ)



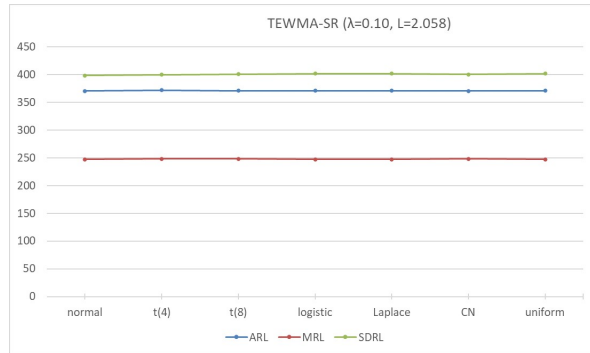
(δ)

**Σχήμα 4.7:** Τιμές των χαρακτηριστικών του εντός ελέγχου μήκους ροής του διαγράμματος TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές όταν  $n = 5$

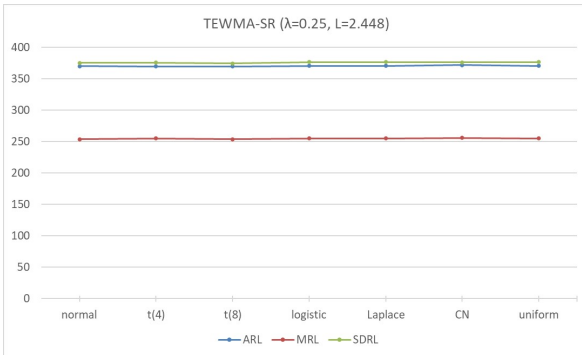
υπόλοιπα διαγράμματα ελέγχου που έχουν παρουσιαστεί σε αυτή την διατριβή, έτσι και στο διάγραμμα TEWMA-SR, η κατανομή του μήκους ροής είναι θετικά ασύμμετρη.



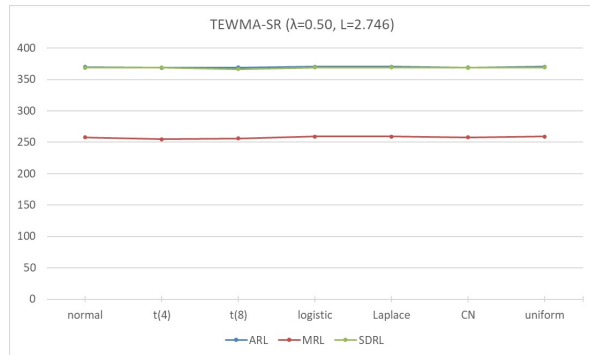
( $\alpha$ )



( $\beta$ )

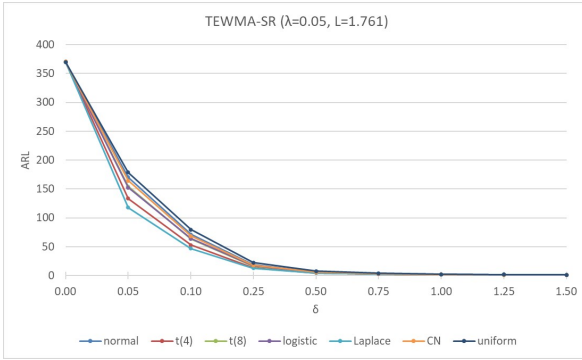


( $\gamma$ )

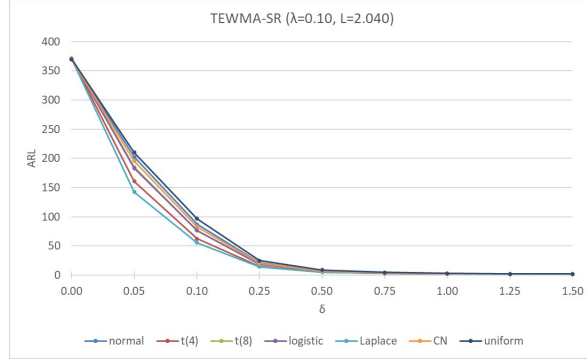


( $\delta$ )

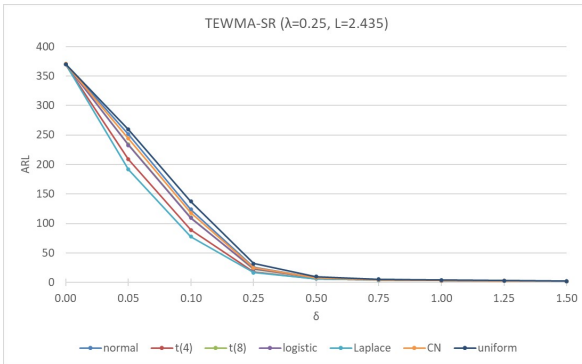
**Σχήμα 4.8:** Τιμές των χαρακτηριστικών του εντός ελέγχου μήκους ροής του διαγράμματος TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές όταν  $n = 10$



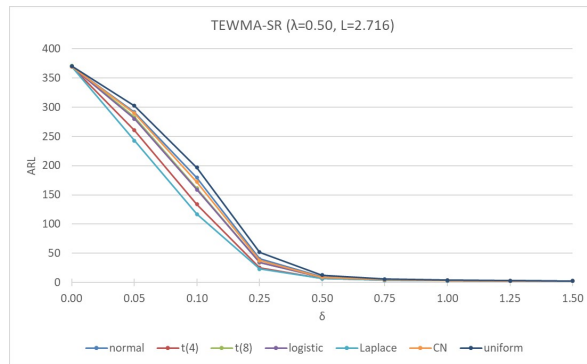
(α)



(β)



(γ)



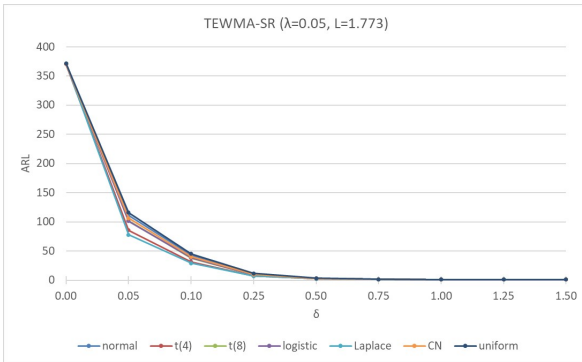
(δ)

**Σχήμα 4.9:** ARL τιμές για το διάγραμμα TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συμμετρικές κατανομές όταν  $n = 5$

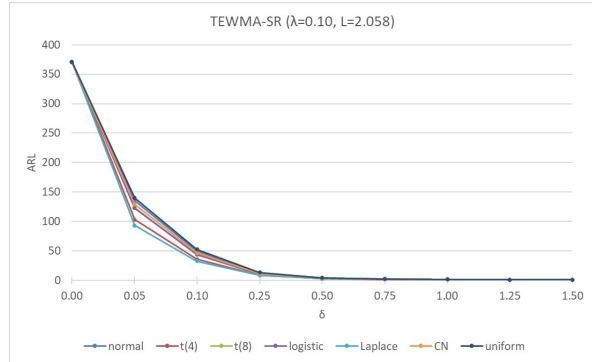
#### 4.11.3 Απόδοση διαγράμματος TEWMA-SR

Η απόδοση του διαγράμματος TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή για  $\lambda = 0.05, 0.10, 0.25, 0.50, 0.75$  και  $n = 5, 10, 15, 20$  παρουσιάζεται στον Πίνακα Γ18, ενώ οι αντίστοιχες τιμές  $ARL_1$  για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές όταν  $n = 5$  και 10 παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.9 και 4.10, αντίστοιχα. Από τον Πίνακα Γ18 παρατηρούμε ότι η απόδοση του διαγράμματος είναι καλύτερη όσο μικρότερη είναι η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ . Βέβαια, αυτή η υπεροχή συνοδεύεται και από μία υψηλή τιμή  $SDRL_0$ . Επιπλέον, η απόδοση του διαγράμματος βελτιώνεται σημαντικά, καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος  $n$ . Από τα Σχήματα 4.9 και 4.10 διαπιστώνουμε ότι οι υψηλότερες τιμές  $ARL_1$  εμφανίζονται όταν η κατανομή της διεργασίας είναι κανονική ή ομοιόμορφη, ενώ οι χαμηλότερες τιμές όταν η κατανομή είναι  $t_4$  ή Laplace.

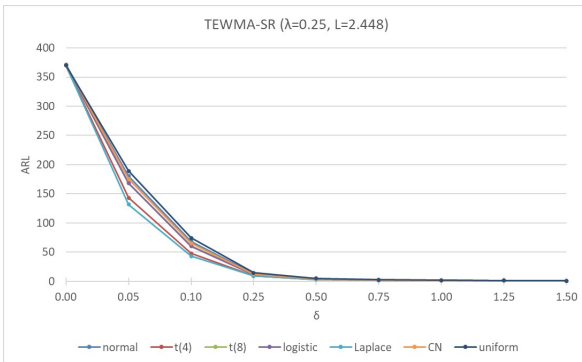
Στον Πίνακα Γ19 παρουσιάζεται η απόδοση του διαγράμματος TEWMA-SR με όρια ελέγχου



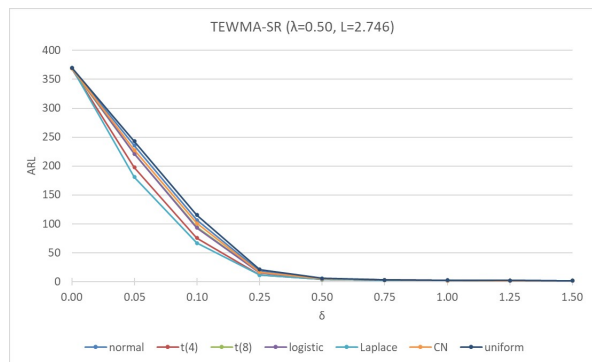
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 4.10: ARL τιμές για το διάγραμμα TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συμμετρικές κατανομές όταν  $n = 10$



σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή. Παρατηρούμε ότι μικρές τιμές του  $\lambda$  (0.05 ή 0.10) αποδίδουν καλύτερα στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων ( $\delta \leq 0.10$ ), ενώ μεγαλύτερες τιμές στην ανίχνευση μέτριων και μεγάλων μετατοπίσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι για  $n = 15$  και 20, η τιμή  $\lambda = 0.75$  παρουσιάζει την καλύτερη απόδοση για μετατοπίσεις  $\delta \geq 0.50$ . Η καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση εμφανίζεται για  $\lambda = 0.25$ , ενώ για πολύ μικρές ( $\lambda = 0.05$ ) και μεγάλες τιμές ( $\lambda = 0.75$ ), η συγκεντρωτική απόδοση είναι χαμηλή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για  $\lambda = 0.05$ , το διάγραμμα έχει πολύ καλή απόδοση μόνο για μικρές μετατοπίσεις, ενώ για  $\lambda = 0.75$ , το διάγραμμα έχει καλή απόδοση μόνο για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Τέλος, παρατηρούμε ότι για συγκεκριμένη τιμή του  $\lambda$ , η τιμή  $\min(ARL_1)$  μικραίνει, καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος  $n$ .

#### 4.11.4 Σύγκριση διαγράμματος TEWMA-SR με άλλα διαγράμματα ελέγχου

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα συγκρίνουμε το νέο διάγραμμα TEWMA-SR με άλλα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, καθώς και με το παραμετρικό διάγραμμα TEWMA- $\bar{X}$  χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα και σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου.

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα TEWMA-SR και EWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, παρατηρούμε ότι για συγκεκριμένη τιμή  $\lambda$ , το νέο διάγραμμα είναι πιο αποδοτικό για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις ( $\delta \leq 1.00$ ). Όμως, αυτή η υπεροχή συνοδεύεται και από μία μεγαλύτερη τιμή  $SDRL_0$ , κυρίως για μικρές τιμές του  $\lambda$ . Για μεγαλύτερες τιμές του  $\lambda$ , αυξάνεται η υπεροχή του διαγράμματος TEWMA-SR έναντι του EWMA-SR. Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$ , το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.25, L = 2.435$ ) έχει  $EARL=39.95$ , ενώ το διάγραμμα EWMA-SR ( $\lambda = 0.25, L = 2.769$ ) έχει  $EARL=48.73$ . Επίσης, όταν  $n = 10$ , το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.50, L = 2.746$ ) έχει  $EARL=33.95$ , ενώ το διάγραμμα EWMA-SR ( $\lambda = 0.50, L = 2.813$ ) έχει  $EARL=43.88$ . Επισημαίνεται ότι τα ανωτέρω διαγράμματα έχουν  $SDRL_0 \approx 370$ .

Κατόπιν σύγκρισης των διαγραμμάτων TEWMA-SR και DEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  (0.05 ή 0.10), το διάγραμμα TEWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.10$ ), ενώ το διάγραμμα DEWMA-SR είναι πιο ευαίσθητο για μέτριες μετατοπίσεις ( $0.25 \leq \delta \leq 0.50$ ). Τα δύο διαγράμματα αποδίδουν το ίδιο για μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Η υπεροχή του διαγράμματος TEWMA-SR για μικρές τιμές του  $\lambda$  συνοδεύεται και από μία μεγαλύτερη τιμή  $SDRL_0$ . Καθώς αυξάνεται η τιμή του  $\lambda$ , επεκτείνεται η υπεροχή του διαγράμματος TEWMA-SR σε μεγαλύτερο εύρος μετατοπίσεων, καθώς επίσης εξαλείφεται η διαφορά μεταξύ των τιμών  $SDRL_0$  των δύο

διαγραμμάτων. Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$ , το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 1.761$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DEWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 1.965$ ) για  $\delta \leq 0.10$ , ενώ ισχύει το αντίστροφο για μετατοπίσεις  $0.25 \leq \delta \leq 0.50$ . Τα δύο διαγράμματα αποδίδουν το ίδιο για μετατοπίσεις  $\delta \geq 0.75$ . Από την άλλη, το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.25, L = 2.435$ ) υπερέχει έναντι του διαγράμματος DEWMA-SR ( $\lambda = 0.25, L = 2.604$ ) για  $\delta \leq 0.25$ , ενώ τα δύο διαγράμματα έχουν την ίδια απόδοση για μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Τέλος, το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.75, L = 2.725$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DEWMA-SR ( $\lambda = 0.75, L = 2.611$ ) για  $\delta \leq 1.00$ .

Στη συνέχεια, από τη σύγκριση των διαγραμμάτων TEWMA-SR και GWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου διαπιστώνουμε ότι η υπεροχή του νέου διαγράμματος εξαρτάται τόσο από την τιμή  $SDRL_0$  που έχουν τα υπό σύγκριση διαγράμματα όσο και από την τιμή  $n$ . Γενικά, το διάγραμμα TEWMA-SR έχει καλύτερη απόδοση για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Για παράδειγμα, για  $n = 5$ , το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.25, L = 2.435$ ) υπερέχει του διαγράμματος GWMA-SR ( $q = 0.75, a = 0.5, L = 2.613$ ) για  $\delta \geq 0.25$  (τα δύο διαγράμματα έχουν  $SDRL_0 \approx 371.2$ ). Από την άλλη, συγκρίνοντας τα δύο διαγράμματα για  $n = 5$  και υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.28, L = 2.484$ ) υπερέχει έναντι των διαγραμμάτων GWMA-SR ( $q = 0.75, a = 0.7, L = 2.715$ ) και ( $q = 0.75, a = 0.8, L = 2.743$ ) σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων (βλέπε Πίνακα 4.11). Συγκρίνοντας τα διαγράμματα για  $n = 10$  και υπό  $SDRL_0 \approx 400$ , παρατηρούμε ότι το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.092, L = 2.022$ ) έχει καλύτερη απόδοση από το διάγραμμα GWMA-SR ( $q = 0.95, a = 0.7, L = 2.598$ ) για  $\delta \geq 0.50$ . Το αυτό ισχύει και για τα διαγράμματα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.25, L = 2.448$ ) και GWMA-SR ( $q = 0.90, a = 0.7, L = 2.742$ ), τα οποία έχουν  $SDRL_0 \approx 375$ . Τέλος, συγκρίνοντας τα διαγράμματα για  $n = 10$  και υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , παρατηρούμε ότι το διάγραμμα GWMA-SR ( $q = 0.90, a = 1.12, L = 2.692$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.43, L = 2.684$ ) για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.25$ ), ενώ έχουν την ίδια απόδοση για μεγαλύτερες μετατοπίσεις (βλέπε Πίνακα 4.14).

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα TEWMA-SR και DGWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, παρατηρούμε ότι γενικά το διάγραμμα DGWMA-SR είναι πιο αποδοτικό, ιδιαίτερα σε μικρές μετατοπίσεις, υπό οποιαδήποτε τιμή  $SDRL_0$  γίνει η σύγκριση. Εξαιρέση αποτελούν οι περιπτώσεις όπου η σύγκριση γίνεται για  $n = 10$  και υπό  $SDRL_0 \approx 437$ , όπου το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.051, L = 1.781$ ) έχει ελαφρώς καλύτερη απόδοση από το διάγραμμα DGWMA-SR ( $q = 0.95, a = 0.93, L = 1.899$ ) για  $\delta \geq 0.75$ , ενώ όταν η σύγκριση γίνεται υπό

$SDRL_0 \approx 399$ , το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.092, L = 2.022$ ) αποδίδει καλύτερα από τα διαγράμματα DGWMA-SR με ( $q = 0.95, a = 1.15, L = 2.598$ ) και ( $q = 0.90, a = 0.92, L = 2.194$ ) για πολύ μικρή μετατοπίση  $\delta = 0.05$ .

Η σύγκριση των διαγραμμάτων TEWMA-SR και HWMA-SR θα γίνει μόνο για την περίπτωση όπου  $n = 10$ , καθώς το τελευταίο διάγραμμα παρουσιάζει υψηλές τιμές  $SDRL_0$  για  $n = 5$ . Επισημαίνεται ότι το διάγραμμα HWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 2.308$ ) έχει την καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα σε σχέση με τα υπόλοιπα διαγράμματα HWMA-SR με υψηλότερες τιμές  $\lambda$ , καθώς επίσης και την χαμηλότερη τιμή  $SDRL_0$ . Έτσι, λοιπόν, το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 1.773$ ) είναι πιο αποδοτικό από το εν λόγω διάγραμμα HWMA-SR σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων, ενώ το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.10, L = 2.058$ ) υπερέρχει για μετατοπίσεις  $\delta \geq 0.50$ . Τέλος, για μεγαλύτερες τιμές του  $\lambda$  για το διάγραμμα TEWMA-SR, το διάγραμμα HWMA-SR είναι πιο αποδοτικό σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων.

Στη συνέχεια, θα συγκρίνουμε το διάγραμμα TEWMA-SR με τα υπόλοιπα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου αυτού του κεφαλαίου χρησιμοποιώντας όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης. Σε όλες τις περιπτώσεις οι τιμές  $SDRL_0$  ικανοποιούν το κριτήριο  $SDRL_0 \leq ARL_0$  και ως εκ τούτου δεν θα αναφερθούμε σε αυτές.

Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων TEWMA-SR και CUSUM-SR διαπιστώνουμε ότι εάν επιλέξουμε για σύγκριση διαγράμματα που είναι βέλτιστα στην ανίχνευση μικρής ή μέτριας μετατόπισης, το διάγραμμα TEWMA-SR υπερέρχει σε ένα εύρος μετατοπίσεων γύρω από τη συγκεκριμένη περιοχή, ενώ εάν επιλέξουμε για σύγκριση διαγράμματα βέλτιστα στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων, το διάγραμμα TEWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις. Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$ , συγκρίνοντας τα διαγράμματα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.25, L = 2.424$ ) και CUSUM-SR ( $k = 1.5, H = 68.5$ ), τα οποία είναι αρκετά αποδοτικά στην ανίχνευση  $\delta = 0.20 - 0.25$ , παρατηρούμε ότι το διάγραμμα TEWMA-SR είναι πιο ευαίσθητο για μετατοπίσεις  $0.25 \leq \delta \leq 1.00$ , ενώ το διάγραμμα CUSUM-SR υπερέρχει για μικρότερες μετατοπίσεις. Τα δύο διαγράμματα αποδίδουν το ίδιο για μεγάλες μετατοπίσεις. Ομοίως, όταν  $n = 10$ , συγκρίνοντας τα διαγράμματα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.50, L = 2.744$ ) και CUSUM-SR ( $k = 16, H = 58$ ), τα οποία είναι αρκετά αποδοτικά στην ανίχνευση  $\delta = 0.50 - 0.60$ , το διάγραμμα TEWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για  $\delta \leq 0.50$ , ενώ το διάγραμμα CUSUM-SR υπερέρχει στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Από την άλλη, για  $n = 5$ , συγκρίνοντας τα διαγράμματα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.75, L = 2.724$ ) και CUSUM-SR ( $k = 9, H = 11$ ), τα οποία αποδίδουν πολύ καλά σε μεγάλες μετατοπίσεις, διαπιστώνουμε την υπεροχή του διαγράμματος TEWMA-SR για μετατοπίσεις  $0.10 \leq \delta \leq 0.75$ ,

ενώ το διάγραμμα CUSUM-SR είναι πιο αποδοτικό στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Επιπλέον, συγκρίνοντας τα διαγράμματα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.75, L = 2.847$ ) και CUSUM-SR ( $k = 25, H = 31$ ), τα οποία είναι βέλτιστα στην ανίχνευση  $\delta = 1.50$  για  $n = 10$ , παρατηρούμε ότι το διάγραμμα TEWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για  $\delta \leq 0.50$ , ενώ τα δύο διαγράμματα αποδίδουν εξίσου το ίδιο για μεγαλύτερες μετατοπίσεις.

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα TEWMA-SR και EWMA-SR και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις βέλτιστες τιμές  $ARL_1$ , παρατηρούμε ότι το διάγραμμα TEWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για πολύ μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.10$  όταν  $n = 5$  και  $\delta = 0.05$  όταν  $n = 10$ ), ενώ για το εύρος των μετατοπίσεων  $0.25 \leq \delta \leq 1.25$  όταν  $n = 5$  και  $0.10 \leq \delta \leq 1.00$  όταν  $n = 10$ , το διάγραμμα EWMA-SR έχει ελαφρώς χαμηλότερες τιμές  $ARL_1$ . Επιπλέον, το διάγραμμα EWMA-SR αποδίδει καλύτερα για μεγάλες μετατοπίσεις, καθώς έχει αρκετά χαμηλότερες τιμές  $\min(ARL_1)$ . Η κακή ανιχνευτική ικανότητα του διαγράμματος TEWMA-SR σε μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις για μικρές τιμές του  $\lambda$  ( $\leq 0.10$ ) έχουν ως αποτέλεσμα την καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση του διαγράμματος EWMA-SR για τις συγκεκριμένες τιμές του  $\lambda$ .

Στη συνέχεια, συγκρίνοντας τα διαγράμματα TEWMA-SR και DEWMA-SR παρατηρούμε ότι οι βέλτιστες τιμές  $ARL_1$  του διαγράμματος DEWMA-SR είναι ελαφρώς χαμηλότερες από αυτές του διαγράμματος TEWMA-SR ιδιαίτερα για μετατοπίσεις  $\delta = 0.10$  και  $0.25$ . Επιπλέον, συγκρίνοντας διαγράμματα τα οποία είναι βέλτιστα στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων, το διάγραμμα DEWMA-SR εμφανίζεται πιο αποδοτικό κυρίως για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις, ενώ συγκρίνοντας διαγράμματα τα οποία είναι βέλτιστα στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα TEWMA-SR υπερέχει για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις. Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$ , το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 1.619$ ) έχει ελαφρώς χαμηλότερη τιμή  $ARL_1$  για  $\delta = 0.05$  από το διάγραμμα DEWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 1.862$ ), το οποίο όμως υπερέχει στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Από την άλλη, το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.75, L = 2.724$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DEWMA-SR ( $\lambda = 0.75, L = 2.611$ ) για  $\delta \leq 0.75$ . Επιπρόσθετα, το διάγραμμα DEWMA-SR έχει χαμηλότερες τιμές  $\min(ARL_1)$  από το διάγραμμα TEWMA-SR γεγονός που καθιστά τη συγκεντρωτική του συμπεριφορά καλύτερη από αυτή του διαγράμματος TEWMA-SR, ιδιαίτερα για μικρές τιμές του  $\lambda$ .

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη σύγκριση του διαγράμματος TEWMA-SR με τα διαγράμματα GWMA-SR και DGWMA-SR είναι παρόμοια με αυτά της σύγκρισης των αντίστοιχων μη παραμετρικών διαγραμμάτων με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, τα διαγράμματα GWMA-SR και DGWMA-SR είναι πιο αποδοτικά σε

όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Επιπρόσθετα, όταν συγκρίνουμε ένα διάγραμμα TEWMA-SR με ένα διάγραμμα GWMA-SR ή DGWMA-SR βέλτιστα στην ανίχνευση μίας μικρής ή μέτριας μετατοπίσης, η υπεροχή των τελευταίων διαγραμμάτων είναι καθολική και μάλιστα έχουν πολύ χαμηλότερες τιμές  $ARL_1$  σε μεγάλες μετατοπίσεις.

Συνοψίζοντας και συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του Πίνακα Γ19 με αυτά των Πινάκων 4.4 και 4.5, παρατηρούμε ότι χρησιμοποιώντας όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, το διάγραμμα TEWMA-SR υπερέχει έναντι του διαγράμματος EWMA-SR μόνο για πολύ μικρές μετατοπίσεις, ενώ τα διαγράμματα DEWMA-SR, GWMA-SR και DGWMA-SR εμφανίζουν χαμηλότερες βέλτιστες τιμές  $ARL_1$  σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων.

Ο Πίνακας 4.7 παρουσιάζει τις τιμές  $ARL$  των διαγραμμάτων TEWMA-SR, TEWMA-SN και TEWMA- $\bar{X}$  με  $\lambda = 0.05$  και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές όταν  $n = 10$ . Όπως είναι αναμενόμενο, οι τιμές  $ARL_0$  των διαγραμμάτων TEWMA-SR και TEWMA-SN παραμένουν σταθερές και ίσες με την επιθυμητή τιμή, ενώ αυτές του διαγράμματος TEWMA- $\bar{X}$  εξαρτώνται από την κατανομή της διεργασίας. Επίσης, το διάγραμμα TEWMA-SR είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα TEWMA-SN για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.50$  για όλες τις κατανομές εκτός από την Laplace, όπου το διάγραμμα TEWMA-SN αποδίδει καλύτερα για  $\delta \leq 0.25$ . Επιπρόσθετα, το διάγραμμα TEWMA-SR είναι πιο ευαίσθητο από το διάγραμμα TEWMA- $\bar{X}$  για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.25$ ) όταν η κατανομή είναι  $t_4, t_8$ , logistic ή Laplace, ενώ για τις υπόλοιπες κατανομές, το διάγραμμα TEWMA- $\bar{X}$  είναι πιο αποδοτικό. Αξίζει να σημειωθεί ότι όλα τα διαγράμματα έχουν σχεδόν την ίδια απόδοση για μετατοπίσεις  $\delta \geq 1.00$ . Τέλος, η απόδοση του διαγράμματος TEWMA- $\bar{X}$  για  $\delta \geq 0.10$  είναι η ίδια για όλες τις κατανομές.

#### 4.11.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το υποκεφάλαιο παρουσιάσαμε ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης, το TEWMA-SR. Παρουσιάσαμε τη δομή του τόσο με χρονικά μεταβαλλόμενα όσο και με σταθερής κατάστασης όρια ελέγχου και υπολογίσαμε την απόδοση του για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές, εστιάζοντας κυρίως στην κανονική κατανομή.

Χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, το διάγραμμα TEWMA-SR υπερέχει έναντι του διαγράμματος EWMA-SR για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις, ενώ είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DEWMA-SR για μικρές μετατοπίσεις. Η υπεροχή του νέου διαγράμματος

**Πίνακας 4.7:** Τιμές ARL των διαγραμμάτων TEWMA-SR, TEWMA-SN και TEWMA- $\bar{X}$  με  $\lambda = 0.05$  και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 10$

$\delta$	διάγραμμα	$L$	$N(0, 1)$	$t_4$	$t_8$	$LG\left(0, \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)$	$L\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$CN(a = 0.05)$	$U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
0	TEWMA-SR	1.773	370.71	370.32	371.50	371.75	371.75	370.57	371.75
	TEWMA-SN	1.774	370.65	369.08	368.98	370.48	370.48	371.49	370.48
	TEWMA- $\bar{X}$	1.761	370.31	378.00	365.57	366.34	368.59	425.74	365.30
0.05	TEWMA-SR	1.773	111.13	85.42	102.17	101.11	77.70	106.18	115.98
	TEWMA-SN	1.774	135.28	94.83	118.69	115.90	66.23	129.65	192.00
	TEWMA- $\bar{X}$	1.761	102.68	105.01	103.54	102.70	102.90	105.26	103.18
0.10	TEWMA-SR	1.773	42.69	31.60	38.05	38.30	29.06	40.28	45.14
	TEWMA-SN	1.774	53.12	35.75	45.53	44.56	25.67	50.43	84.27
	TEWMA- $\bar{X}$	1.761	39.00	39.58	39.03	39.29	39.27	39.33	39.16
0.25	TEWMA-SR	1.773	10.40	7.46	9.29	9.26	7.09	9.84	11.58
	TEWMA-SN	1.774	13.53	8.61	11.39	11.15	6.65	12.78	22.36
	TEWMA- $\bar{X}$	1.761	9.34	9.34	9.45	9.38	9.38	9.31	9.40
0.50	TEWMA-SR	1.773	3.12	2.35	2.82	2.78	2.35	2.95	3.60
	TEWMA-SN	1.774	4.13	2.60	3.43	3.36	2.34	3.89	7.04
	TEWMA- $\bar{X}$	1.761	2.72	2.69	2.72	2.69	2.69	2.67	2.72
0.75	TEWMA-SR	1.773	1.62	1.39	1.53	1.52	1.43	1.55	1.83
	TEWMA-SN	1.774	2.02	1.45	1.75	1.73	1.44	1.92	3.24
	TEWMA- $\bar{X}$	1.761	1.43	1.41	1.43	1.42	1.41	1.41	1.43
1.00	TEWMA-SR	1.773	1.18	1.12	1.16	1.16	1.15	1.15	1.24
	TEWMA-SN	1.774	1.34	1.14	1.24	1.24	1.16	1.29	1.81
	TEWMA- $\bar{X}$	1.761	1.10	1.09	1.10	1.09	1.09	1.09	1.10
1.25	TEWMA-SR	1.773	1.04	1.04	1.05	1.04	1.05	1.03	1.04
	TEWMA-SN	1.774	1.11	1.04	1.08	1.08	1.06	1.09	1.23
	TEWMA- $\bar{X}$	1.761	1.01	1.02	1.02	1.02	1.02	1.01	1.01
1.50	TEWMA-SR	1.773	1.01	1.01	1.01	1.01	1.02	1.01	1.01
	TEWMA-SN	1.774	1.03	1.01	1.02	1.02	1.02	1.02	1.03
	TEWMA- $\bar{X}$	1.761	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

έναντι των άλλων δύο προαναφερθέντων μεγαλώνει, καθώς αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ . Επιπλέον, το διάγραμμα TEWMA-SR είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα GWMA-SR κυρίως για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις, ενώ τα διαγράμματα DGWMA-SR και HWMA-SR έχουν καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα σε όλο σχεδόν το εύρος μετατοπίσεων.

Συγκρίνοντας το διάγραμμα TEWMA-SR με τα υπόλοιπα διαγράμματα χρησιμοποιώντας όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα TEWMA-SR υπερτερεί έναντι του διαγράμματος CUSUM-SR σε ένα εύρος μετατοπίσεων γύρω από την βέλτιστη μετατόπιση την οποία είναι σχεδιασμένα να ανιχνεύουν, ενώ επίσης είναι πιο αποδοτικό και από το διάγραμμα EWMA-SR μόνο για μικρές μετατοπίσεις. Τα διαγράμματα DEWMA-SR, GWMA-SR και

DGWMA-SR παρουσιάζουν καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα από το διάγραμμα TEWMA-SR.

Τέλος, το διάγραμμα TEWMA-SR είναι πιο ευαίσθητο από το διάγραμμα TEWMA-SN κυρίως για μικρές μετατοπίσεις πέρα από την περίπτωση όπου η κατανομή της διεργασίας είναι η Laplace στην οποία το διάγραμμα TEWMA-SN εμφανίζεται πιο αποδοτικό για μικρές μετατοπίσεις, ενώ για ορισμένες μη κανονικές κατανομές, το διάγραμμα TEWMA-SR εμφανίζεται πιο ικανό από το διάγραμμα TEWMA- $\bar{X}$ .

Μέρος των αποτελεσμάτων αυτού του υποκεφαλαίου παρουσιάστηκαν στην δεύτερη επιστημονική εργασία.

## 4.12 Διάγραμμα DHWMA-SR

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα παρουσιάσουμε ένα νέο διάγραμμα ελέγχου με τη χρήση της προσημιακής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης, το DHWMA-SR.

### 4.12.1 Δομή διαγράμματος DHWMA-SR

Η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης σε ένα διάγραμμα DHWMA-SR είναι η ακόλουθη

$$\begin{cases} H_i = \lambda SR_i + (1 - \lambda) \overline{SR}_{i-1}, \\ DH_i = \lambda H_i + (1 - \lambda) \overline{H}_{i-1}, \end{cases} \quad (4.32)$$

όπου  $0 < \lambda \leq 1$  είναι η παράμετρος εξομάλυνσης,  $\overline{SR}_{i-1} = \frac{\sum_{k=1}^{i-1} SR_k}{i-1}$ ,  $\overline{H}_{i-1} = \frac{\sum_{k=1}^{i-1} H_k}{i-1}$  και οι αρχικές τιμές  $\overline{SR}_0 = \overline{H}_0 = 0$ .

- Για  $i = 1$ , έχουμε

$$DH_1 = \lambda^2 SR_1.$$

- Για  $i = 2$ , έχουμε

$$DH_2 = \lambda^2 SR_2 + 2\lambda(1 - \lambda)SR_1.$$

- Για  $i > 2$ , η στατιστική συνάρτηση  $DH_i$  γράφεται ως ακολούθως

$$DH_i = \lambda^2 SR_i + \frac{2\lambda(1 - \lambda)}{i - 1} SR_{i-1} + \frac{(1 - \lambda)}{i - 1} \sum_{u=1}^{i-2} \left( 2\lambda + (1 - \lambda) \sum_{k=u}^{i-2} \frac{1}{k} \right) SR_u. \quad (4.33)$$

Έτσι, λοιπόν, αποδεικνύεται ότι η εντός ελέγχου μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης  $DH_i$  είναι ίση με 0, ενώ η εντός ελέγχου τιμή της διασποράς είναι ίση με

$$Var(DH_i|IC) = \begin{cases} \lambda^4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & , \text{ για } i = 1, \\ \lambda^2 (\lambda^2 + 4(1 - \lambda)^2) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & , \text{ για } i = 2, \\ \left[ \lambda^4 + \frac{4\lambda^2(1 - \lambda)^2}{(i - 1)^2} + \frac{(1 - \lambda)^2}{(i - 1)^2} \sum_{u=1}^{i-2} \left( 2\lambda + (1 - \lambda) \sum_{k=u}^{i-2} \frac{1}{k} \right)^2 \right] \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & , \text{ για } i > 2. \end{cases} \quad (4.34)$$



Τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος DHWMA-SR είναι τα ακόλουθα

$$UCL_i/LCL_i = \pm L\sqrt{Var(DH_i|IC)}, CL = 0, \quad (4.35)$$

όπου  $L > 0$  το εύρος των ορίων ελέγχου, ενώ τα όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} UCL &= +L\lambda^2\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}, \\ LCL &= -L\lambda^2\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου εάν η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης  $DH_i$  βρίσκεται εντός των ορίων ελέγχου. Διαφορετικά, θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου. Το διάγραμμα DHWMA-SR μεταπίπτει στο διάγραμμα Shewhart-SR για  $\lambda = 1$ .

#### 4.12.2 Εντός ελέγχου κατανομή μήκους ροής του διαγράμματος DHWMA-SR

Η εντός ελέγχου κατανομή του μήκους ροής του διαγράμματος DHWMA-SR υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που περιγράφεται στο υποκεφάλαιο 4.3. Στον Πίνακα Γ20 παρουσιάζονται οι τιμές  $L$ , καθώς και οι αντίστοιχες τιμές  $ARL_0$  και  $SDRL_0$ , για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και  $\lambda = 0.10, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.20, 0.25, 0.30, 0.40$  για  $n = 5, 10, 15, 20$  προκειμένου να επιτευχθεί μία συγκεκριμένη τιμή  $ARL_0$ . Από τον εν λόγω πίνακα διαπιστώνουμε ότι για συγκεκριμένη τιμή  $\lambda$  ( $n$ ), η παράμετρος  $L$  αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η τιμή του δείγματος  $n$  (ή της παραμέτρου  $\lambda$ , αντίστοιχα) προκειμένου να επιτύχουμε την επιθυμητή τιμή  $ARL_0$ . Επιπλέον, οι τιμές  $SDRL_0$  που αντιστοιχούν σε  $n = 5$  είναι μεγάλες σε σύγκριση με τις αντίστοιχες τιμές  $ARL_0$ , αλλά μικραίνουν, καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος  $n$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι οι εν λόγω τιμές  $SDRL_0$  είναι υψηλότερες από τις αντίστοιχες του διαγράμματος DHWMA-SN. Επιπλέον, για συγκεκριμένη τιμή  $n$ , παρατηρούμε ότι η τιμή  $SDRL_0$  είναι αρκετά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή  $ARL_0$  για  $\lambda = 0.10$ , στη συνέχεια μικραίνει καθώς αυξάνεται το  $\lambda$ , λαμβάνει την ελάχιστη τιμή για  $\lambda = 0.20 - 0.25$  όταν  $n = 5$  και  $\lambda = 0.25 - 0.30$  για  $n = 10, 15, 20$  και έπειτα συνεχίζει και αυξάνεται. Για παράδειγμα, όταν  $ARL_0 \approx 370$  και  $n = 5$ , η τιμή  $SDRL_0$  είναι ίση με 850.96, 429.72 και 931.93 για  $\lambda = 0.10, 0.25$  και  $0.40$ , αντίστοιχα, ενώ όταν  $n = 10$ , οι αντίστοιχες τιμές είναι 696.43, 284.58 και 336.01. Κατόπιν των ανωτέρω και λαμβάνοντας υπ' όψιν το σύνολο των τιμών  $SDRL_0$  που παρουσιάζονται στον Πίνακα Γ20, προτείνεται η χρήση ενός διαγράμματος

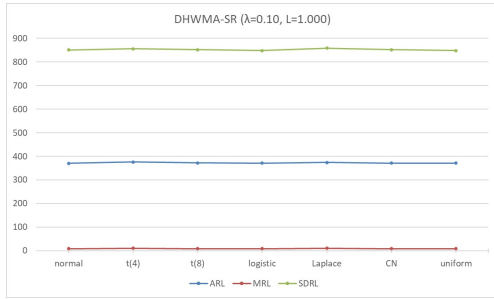
DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda = 0.20 - 0.25$  όταν  $n = 5$  και  $\lambda \geq 0.15$  για  $n \geq 10$ .

Στα Σχήματα 4.11 και 4.12 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά  $ARL_0$ ,  $MRL_0$  και  $SDRL_0$  της κατανομής του μήκους ροής του διαγράμματος DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές για  $n = 5$  και  $10$ , αντίστοιχα. Από τα εν λόγω σχήματα παρατηρούμε ότι τα ανωτέρω χαρακτηριστικά του μήκους ροής παραμένουν σταθερά για όλες τις κατανομές. Συγκρίνοντας τα δύο σχήματα και λαμβάνοντας υπ' όψιν τα αποτελέσματα των Πινάκων Γ21 και Γ22, που θα συζητηθούν αναλυτικότερα στην ενότητα 4.12.3, διαπιστώνουμε ότι για συγκεκριμένη τιμή του  $\lambda$ , οι τιμές  $MRL_0$  για  $n = 5$  είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες τιμές όταν  $n = 10$ . Επιπλέον, για συγκεκριμένη τιμή του  $n$ , η τιμή  $MRL_0$  αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η τιμή του  $\lambda$ , λαμβάνει τη μέγιστη τιμή για  $\lambda = 0.25$  και έπειτα μικραίνει.

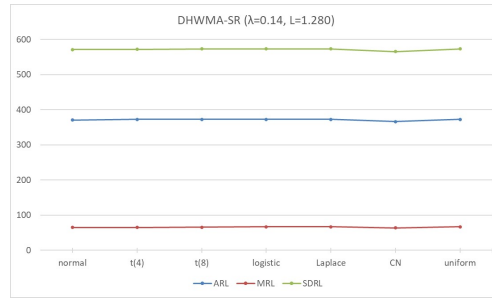
#### 4.12.3 Απόδοση του διαγράμματος DHWMA-SR

Η απόδοση του διαγράμματος DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή για  $n = 5, 10, 15, 20$  παρουσιάζεται στους Πίνακες Γ21 έως Γ24. Από τους εν λόγω πίνακες παρατηρούμε ότι για  $n = 5$ , οι τιμές  $ARL_1$  που αντιστοιχούν σε μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.25$ ) αυξάνονται, καθώς αυξάνεται η τιμή  $\lambda$  και μέχρι να λάβει την τιμή  $0.25$  κι εν συνεχεία μικραίνουν. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, η συγκεντρωτική απόδοση του διαγράμματος να μειώνεται κι εν συνεχεία να αυξάνεται. Από την άλλη, για  $n \geq 10$ , διαπιστώνουμε ότι η απόδοση του διαγράμματος μικραίνει, καθώς αυξάνεται η τιμή  $\lambda$ . Βέβαια, όπως αναφέραμε προηγούμενως, η καλή ανιχνευτική ικανότητα του διαγράμματος για χαμηλές τιμές  $\lambda$  συνοδεύεται κι από μία αυξημένη πιθανότητα ένδειξης ψευδούς συναγερού ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου. Επιπρόσθετα, η ανιχνευτική ικανότητα του διαγράμματος DHWMA-SR βελτιώνεται, καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος  $n$ .

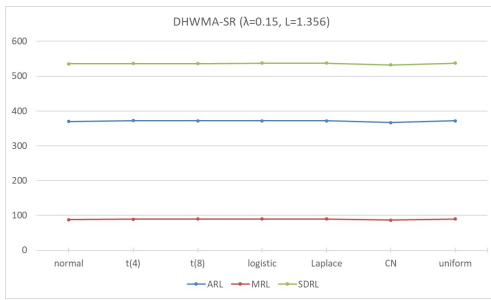
Στα Σχήματα 4.13 και 4.14 παρουσιάζονται οι τιμές  $ARL$  του διαγράμματος DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και  $\lambda = 0.14, 0.15, 0.17, 0.25$  για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές όταν  $n = 5$  και  $10$ , αντίστοιχα. Όπως και στα υπόλοιπα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης, παρατηρούμε ότι οι υψηλότερες τιμές  $ARL_1$  εμφανίζονται για την κανονική και ομοιόμορφη κατανομή, ενώ οι χαμηλότερες για τις  $t_4$  και Laplace κατανομές. Επιπλέον, είναι εμφανές ότι με την μείωση της παραμέτρου  $\lambda$  ή την αύξηση του μέγεθους του δείγματος  $n$ , αυξάνεται και η απόδοση του διαγράμματος.



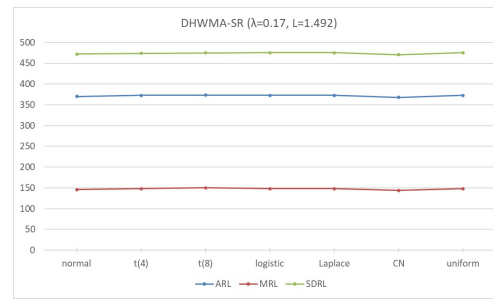
(α)



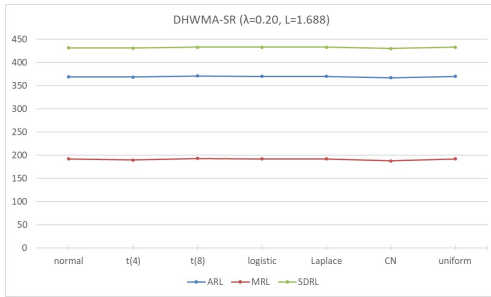
(β)



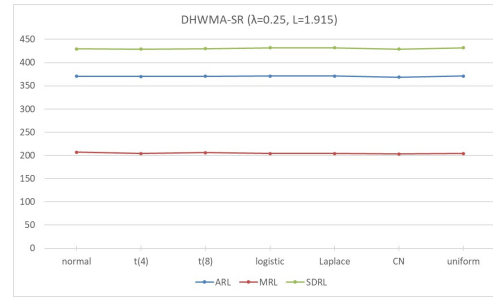
(γ)



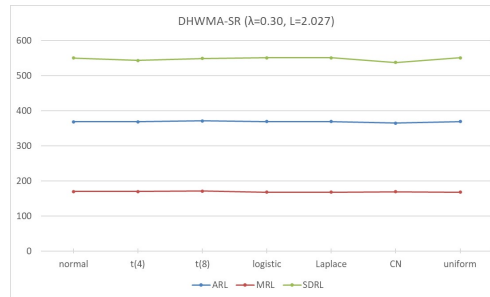
(δ)



(ε)

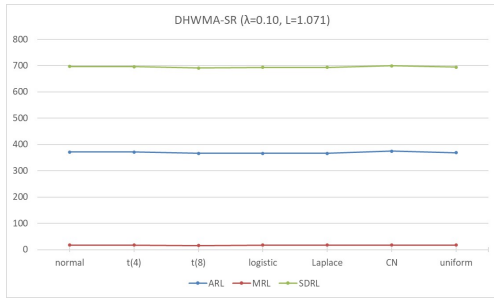


(σ)

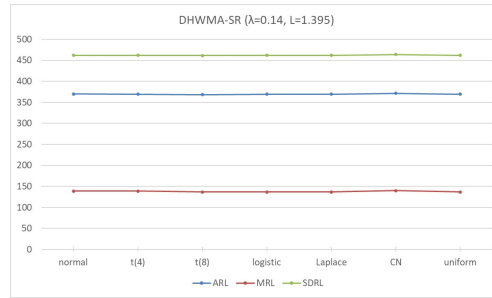


(ζ)

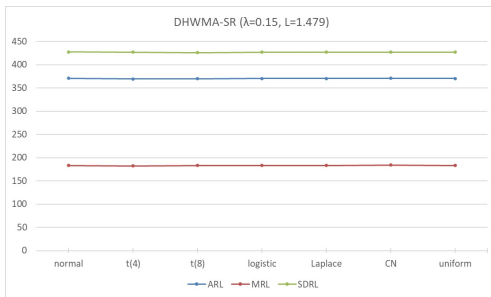
Σχήμα 4.11: Τιμές των χαρακτηριστικών του εντός ελέγχου μήκους ροής του διαγράμματος DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές όταν  $n = 5$



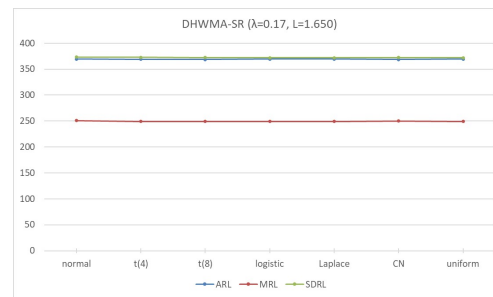
(α)



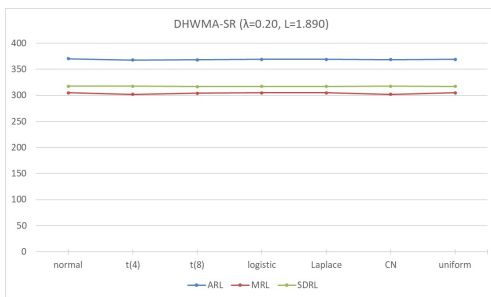
(β)



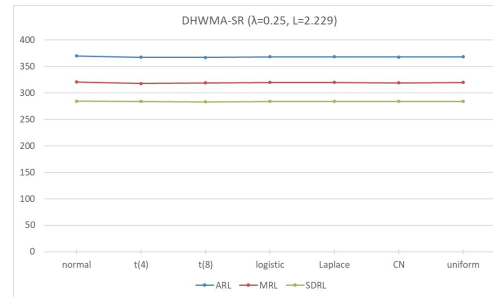
(γ)



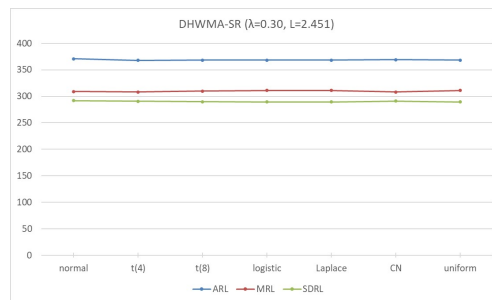
(δ)



(ε)

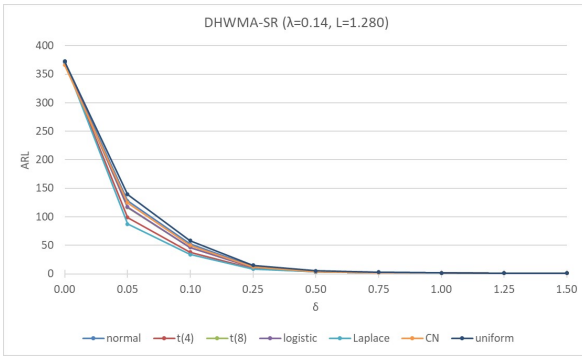


(σ)

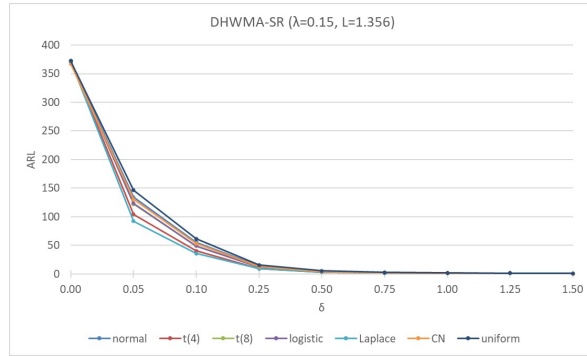


(ζ)

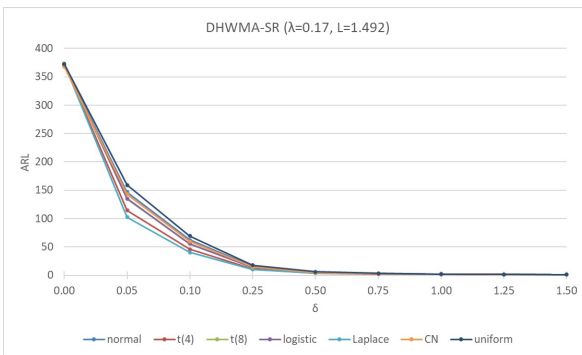
Σχήμα 4.12: Τιμές των χαρακτηριστικών του εντός ελέγχου μήκους ροής του διαγράμματος DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές όταν  $n = 10$



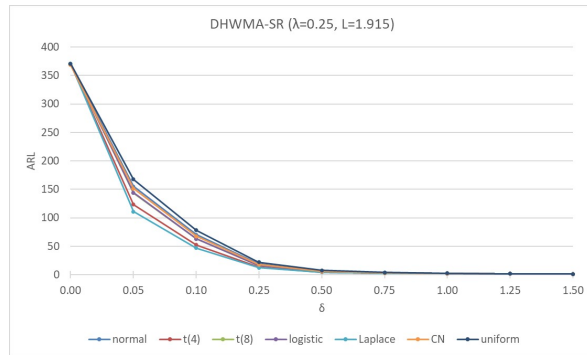
( $\alpha$ )



( $\beta$ )



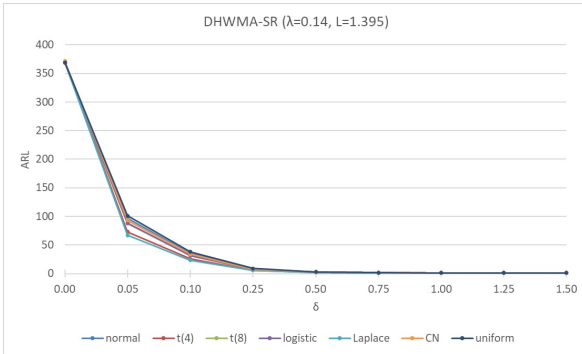
( $\gamma$ )



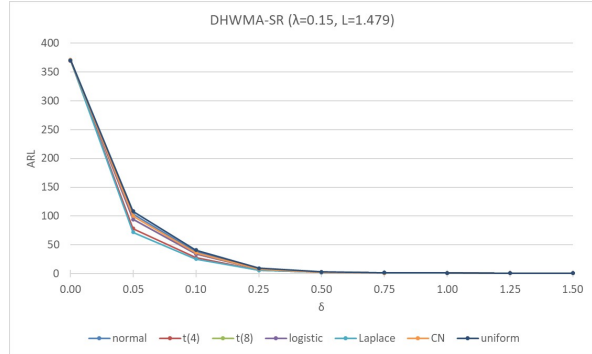
( $\delta$ )

**Σχήμα 4.13:** ARL τιμές για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συμμετρικές κατανομές όταν  $n = 5$

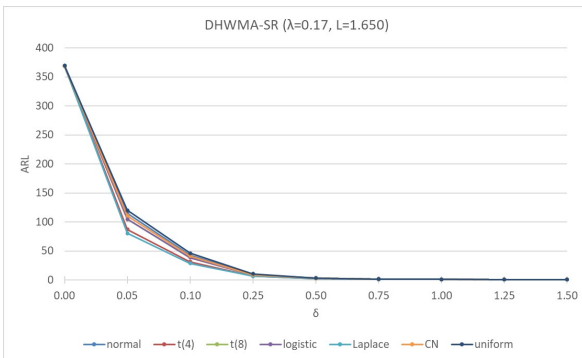
Στο σημείο αυτό, επισημαίνεται ότι δεν μελετάται η απόδοση του διαγράμματος με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης λόγω των πολύ υψηλών τιμών  $SDRL_0$  που εμφανίζονται.



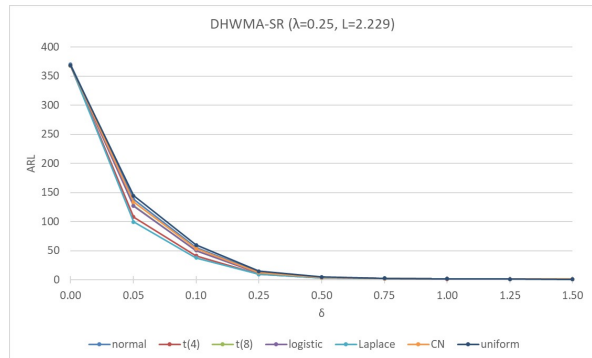
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχήμα 4.14: ARL τιμές για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συμμετρικές κατανομές όταν  $n = 10$

#### 4.12.4 Σύγκριση διαγράμματος DHWMA-SR με άλλα διάγραμματα ελέγχου

Στη συνέχεια, θα συγκρίνουμε το νέο διάγραμμα DHWMA-SR με τα υπόλοιπα διάγραμματα ελέγχου που παρουσιάσαμε σε αυτό το κεφάλαιο, καθώς και με τα διάγραμματα DHWMA-SN και DHWMA- $\bar{X}$  χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου. Προκειμένου να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα, η σύγκριση θα γίνει υπό καθορισμένες τιμές  $SDRL_0$ .

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα DHWMA-SR και CUSUM-SR για  $n = 10$ , παρατηρούμε ότι ένα διάγραμμα DHWMA-SR με παράμετρο  $\lambda = 0.20 - 0.40$ , του οποίου η τιμή  $SDRL_0$  κυμαίνεται από 317.69 έως 336.01, υπερέρχει σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων και ιδιαίτερα για  $\delta \leq 0.50$  έναντι όλων των διαγραμμάτων CUSUM-SR που παρουσιάστηκαν στο υποκεφάλαιο 4.5. Η μεγάλη υπεροχή του διαγράμματος DHWMA-SR έναντι του διαγράμματος CUSUM-SR φαίνεται και από τη μεγάλη διαφορά που υπάρχει μεταξύ των τιμών EARL. Για παράδειγμα, οι τιμές EARL των ανωτέρω διαγραμμάτων DHWMA-SR κυμαίνονται από 21.86 έως 24.43, ενώ αυτές των διαγραμμάτων CUSUM-SR από 30.19 έως 50.17.

Επιπρόσθετα, το διάγραμμα DHWMA-SR είναι πιο ευαίσθητο από το διάγραμμα EWMA-SR σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Για παράδειγμα, όταν  $n = 10$  και υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \approx 373$ , το διάγραμμα DHWMA-SR ( $\lambda = 0.17, L = 1.650$ ) είναι αρκετά πιο αποδοτικό από το διάγραμμα EWMA-SR ( $\lambda = 0.10, L = 2.697$ ) σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Μάλιστα, το συγκεκριμένο διάγραμμα DHWMA-SR υπερέρχει έναντι και του διαγράμματος EWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 2.519$ ) παρόλο που το τελευταίο έχει  $SDRL_0 = 384.08$ .

Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων DHWMA-SR και DEWMA-SR διαπιστώνουμε ότι το νέο διάγραμμα είναι πιο αποδοτικό ιδιαίτερα για μικρές μετατοπίσεις όταν η σύγκριση γίνεται υπό μία μεγάλη τιμή  $SDRL_0$ , ενώ η υπεροχή του επεκτείνεται σε μεγαλύτερο εύρος μετατοπίσεων ( $\delta \leq 1.00$ ) όταν η σύγκριση γίνεται υπό  $SDRL_0 \approx 370$ . Για παράδειγμα, όταν  $n = 10$ , συγκρίνοντας τα διαγράμματα DHWMA-SR ( $\lambda = 0.16, L = 1.569$ ) και DEWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 1.965$ ), τα οποία έχουν τιμές  $SDRL_0$  ίσες με 400.02 και 419.70 αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα DHWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.25$ ), ενώ αποδίδει σχεδόν το ίδιο με το διάγραμμα DEWMA-SR στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Από την άλλη, το διάγραμμα DHWMA-SR ( $\lambda = 0.173, L = 1.678$ ), το οποίο έχει  $SDRL_0 = 369.34$ , υπερέρχει σημαντικά έναντι των διαγραμμάτων DEWMA-SR με  $\lambda \geq 0.25$ .

Στη συνέχεια, συγκρίνοντας τα διαγράμματα DHWMA-SR και GWMA-SR διαπιστώνουμε ότι το νέο διάγραμμα είναι πιο αποδοτικό για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις ( $\delta \leq 1.00$ ), ενώ υπερέρχει ακόμη και σε περιπτώσεις που έχει χαμηλότερη τιμή  $SDRL_0$ . Έτσι, λοιπόν, για  $n = 10$  και υπό τη

συνθήκη  $SDRL_0 \approx 399$ , το διάγραμμα DHWMA-SR ( $\lambda = 0.161, L = 1.576$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα GWMA-SR ( $q = 0.95, a = 0.7, L = 2.598$ ) ιδιαίτερα για μικρές και μέτριες μετατοπίσεις ( $\delta \leq 1.00$ ) (βλέπε Πίνακα 4.13), ενώ συγκρίνοντας τα διαγράμματα υπό  $SDRL_0 \approx 370$ , διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα DHWMA-SR ( $\lambda = 0.173, L = 1.678$ ) υπερέρχει έναντι του διαγράμματος GWMA-SR ( $q = 0.90, a = 0.8, L = 2.723$ ) στο ίδιο εύρος μετατοπίσεων. Επιπλέον, επισημαίνεται ότι το συγκεκριμένο διάγραμμα DHWMA-SR υπερέρχει έναντι όλων των διαγραμμάτων GWMA-SR που παρουσιάστηκαν στο υποκεφάλαιο 4.8 και τα οποία έχουν τιμές  $SDRL_0$  μεγαλύτερες ή περίπου ίσες με αυτήν του διαγράμματος DHWMA-SR.

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα DHWMA-SR και DGWMA-SR διαπιστώνουμε ότι για  $n = 5$  και υπό την συνθήκη  $SDRL_0 \approx 436$ , το διάγραμμα DHWMA-SR ( $\lambda = 0.195, L = 1.655$ ) έχει ελαφρώς καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση από τα διαγράμματα DGWMA-SR με παραμέτρους ( $q = 0.90, a = 0.692, L = 2.0545$ ), ( $q = 0.94, a = 0.91, L = 1.9585$ ) και ( $q = 0.95, a = 0.95, L = 1.914$ ), η οποία οφείλεται στην καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα που έχει για  $\delta = 0.05$ , καθώς στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων, τα διαγράμματα αποδίδουν το ίδιο (βλέπε Πίνακα 4.9). Από την άλλη, συγκρίνοντας τα διαγράμματα για  $n = 10$ , το διάγραμμα DGWMA-SR είναι πιο αποδοτικό για μικρές μετατοπίσεις όταν η σύγκριση γίνεται υπό μία μεγάλη τιμή  $SDRL_0$ , ενώ για μικρότερες τιμές  $SDRL_0$ , η υπεροχή του νέου διαγράμματος επεκτείνεται σε μεγαλύτερο εύρος μετατοπίσεων. Για παράδειγμα, υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \approx 437$ , το διάγραμμα DHWMA-SR ( $\lambda = 0.148, L = 1.4655$ ) υπερέρχει έναντι του διαγράμματος DGWMA-SR ( $q = 0.95, a = 0.93, L = 1.899$ ) για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.25$ ) (βλέπε Πίνακα 4.12), υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \approx 399$ , το διάγραμμα DHWMA-SR ( $\lambda = 0.161, L = 1.576$ ) είναι πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα DGWMA-SR με παραμέτρους ( $q = 0.90, a = 0.92, L = 2.194$ ) και ( $q = 0.95, a = 1.15, L = 2.0935$ ) για  $\delta \leq 0.50$  (βλέπε Πίνακα 4.13), ενώ υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , το διάγραμμα DHWMA-SR ( $\lambda = 0.173, L = 1.678$ ) έχει καλύτερη απόδοση από το διάγραμμα DGWMA-SR ( $q = 0.75, a = 0.90, L = 2.600$ ) σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων (βλέπε Πίνακα 4.14).

Από τη σύγκριση των διαγραμμάτων DHWMA-SR και HWMA-SR προκύπτει ότι γενικά το διάγραμμα DHWMA-SR είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα HWMA-SR για μετατοπίσεις  $\delta \geq 0.10$ . Πιο συγκεκριμένα, για  $n = 5$ , το διάγραμμα DHWMA-SR ( $\lambda = 0.16, L = 1.432$ ), το οποίο έχει  $SDRL_0 = 508.64$ , είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα HWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 2.070$ ), το οποίο έχει  $SDRL_0 = 524.58$ , για  $\delta \geq 0.10$ , ενώ για  $\delta = 0.05$ , το διάγραμμα HWMA-SR εμφανίζεται πιο αποδοτικό. Η σύγκριση των δύο διαγραμμάτων για  $n = 5$  και υπό διαφορετικές



τιμές του  $SDRL_0$  δεν καθίσταται εφικτή λόγω των πολύ υψηλών τιμών  $SDRL_0$  που έχει το διάγραμμα HWMA-SR για μεγαλύτερες τιμές  $\lambda$ . Συγκρίνοντας τα δύο διαγράμματα για  $n = 10$  και υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , το διάγραμμα DHWMA-SR ( $\lambda = 0.173, L = 1.678$ ) υπερέρχει έναντι του διαγράμματος HWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 2.308$ ) για μετατοπίσεις  $\delta \geq 0.25$ , αποδίδει ελαφρώς καλύτερα για  $\delta = 0.10$ , ενώ έχει χαμηλότερη τιμή  $ARL_1$  για  $\delta = 0.05$  (βλέπε Πίνακα 4.14).

Τέλος, συγκρίνοντας τα διαγράμματα DHWMA-SR και TEWMA-SR παρατηρούμε ότι το διάγραμμα DHWMA-SR είναι πιο αποδοτικό κυρίως για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.50$ , ενώ υπερέρχει ελαφρώς στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Για παράδειγμα, για  $n = 5$  και υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \approx 436$ , το διάγραμμα DHWMA-SR ( $\lambda = 0.195, L = 1.655$ ) είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.049, L = 1.753$ ) για  $\delta \leq 0.50$ , ενώ έχει ελαφρώς καλύτερη απόδοση στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Το αυτό ισχύει όταν η σύγκριση γίνεται για  $n = 10$  και υπό τις συνθήκες  $SDRL_0 \approx 437$  και  $SDRL_0 \approx 399$ , όπου τα διαγράμματα DHWMA-SR με παραμέτρους ( $\lambda = 0.148, L = 1.4655$ ) και ( $\lambda = 0.161, L = 1.576$ ) είναι πιο αποδοτικά για  $\delta \leq 0.50$  από τα διαγράμματα TEWMA-SR με παραμέτρους ( $\lambda = 0.051, L = 1.781$ ) και ( $\lambda = 0.092, L = 2.022$ ), αντίστοιχα (βλέπε Πίνακες 4.12 και 4.13). Τέλος, από τη σύγκριση των διαγραμμάτων για  $n = 10$  και υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , το διάγραμμα DHWMA-SR ( $\lambda = 0.173, L = 1.678$ ) αποδίδει καλύτερα από το διάγραμμα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.43, L = 2.684$ ) σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων (βλέπε Πίνακα 4.14).

Στον Πίνακα 4.8 παρουσιάζονται οι τιμές  $ARL$  των διαγραμμάτων DHWMA-SR, DHWMA-SN και DHWMA- $\bar{X}$  με  $\lambda = 0.15$  και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές όταν  $n = 10$ . Από τον συγκεκριμένο πίνακα, παρατηρούμε ότι οι τιμές  $ARL_0$  των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου είναι σταθερές και ίσες με την επιθυμητή τιμή, ενώ αυτές του διαγράμματος DHWMA- $\bar{X}$  κυμαίνονται από 295.79 έως 417.71 ανάλογα με την κατανομή της διεργασίας. Επιπλέον, το διάγραμμα DHWMA-SR είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DHWMA-SN για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.50$  για όλες τις κατανομές εκτός από την Laplace όπου το διάγραμμα DHWMA-SN εμφανίζεται πιο ευαίσθητο για  $\delta \leq 0.10$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα DHWMA-SR και DHWMA- $\bar{X}$  αποδίδουν σχεδόν το ίδιο υπό την κανονική κατανομή παρόλο που το δεύτερο διάγραμμα είναι σχεδιασμένο γι' αυτήν, ενώ για όλες τις άλλες κατανομές πέραν της ομοιόμορφης, το διάγραμμα DHWMA-SR αποδίδει καλύτερα για  $\delta \leq 0.25$ . Στην περίπτωση της ομοιόμορφης κατανομής, το διάγραμμα DHWMA- $\bar{X}$  αποδίδει καλύτερα από το διάγραμμα DHWMA-SR για  $\delta \leq 0.50$  παρόλη την υψηλότερη τιμή  $ARL_0$  που

έχει.

**Πίνακας 4.8:** Τιμές ARL των διαγραμμάτων DHWMA-SR, DHWMA-SN και DHWMA- $\bar{X}$  με  $\lambda = 0.15$  και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 10$

$\delta$	διάγραμμα	$L$	$N(0, 1)$	$t_4$	$t_8$	$LG\left(0, \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)$	$L\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$CN(a = 0.05)$	$U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
0	DHWMA-SR	1.479	370.63	369.30	369.79	370.47	370.47	370.63	370.47
	DHWMA-SN	1.504	372.69	368.86	371.16	370.89	370.89	369.90	370.89
	DHWMA- $\bar{X}$	1.551	370.51	295.79	347.46	353.25	335.31	414.71	386.46
0.05	DHWMA-SR	1.479	103.71	78.42	94.36	94.37	72.05	100.05	108.54
	DHWMA-SN	1.504	212.55	93.78	116.86	115.81	66.19	129.55	190.18
	DHWMA- $\bar{X}$	1.551	104.61	103.08	104.99	105.28	104.71	107.83	105.94
0.10	DHWMA-SR	1.479	38.14	27.77	34.03	34.05	25.32	36.54	40.87
	DHWMA-SN	1.504	52.12	33.66	44.10	43.43	23.78	50.21	84.02
	DHWMA- $\bar{X}$	1.551	38.33	38.64	37.94	38.27	38.41	38.70	38.55
0.25	DHWMA-SR	1.479	8.53	6.24	7.59	7.62	5.96	8.12	9.49
	DHWMA-SN	1.504	11.90	7.55	9.83	9.82	5.98	11.46	20.50
	DHWMA- $\bar{X}$	1.551	8.38	8.27	8.19	8.29	8.30	8.25	8.31
0.50	DHWMA-SR	1.479	2.85	2.23	2.61	2.61	2.26	2.71	3.25
	DHWMA-SN	1.504	3.93	2.70	3.40	3.31	2.47	3.74	6.32
	DHWMA- $\bar{X}$	1.551	2.70	2.65	2.71	2.66	2.67	2.65	2.69
0.75	DHWMA-SR	1.479	1.58	1.36	1.49	1.50	1.40	1.51	1.78
	DHWMA-SN	1.504	2.17	1.59	1.92	1.90	1.58	2.05	3.20
	DHWMA- $\bar{X}$	1.551	1.46	1.42	1.46	1.45	1.45	1.43	1.46
1.00	DHWMA-SR	1.479	1.15	1.10	1.13	1.13	1.12	1.12	1.21
	DHWMA-SN	1.504	1.46	1.20	1.35	1.34	1.23	1.39	1.98
	DHWMA- $\bar{X}$	1.551	1.09	1.09	1.09	1.09	1.09	1.08	1.09
1.25	DHWMA-SR	1.479	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.02	1.03
	DHWMA-SN	1.504	1.16	1.06	1.11	1.11	1.08	1.12	1.33
	DHWMA- $\bar{X}$	1.551	1.01	1.02	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01
1.50	DHWMA-SR	1.479	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.00	1.00
	DHWMA-SN	1.504	1.04	1.02	1.03	1.03	1.02	1.03	1.03
	DHWMA- $\bar{X}$	1.551	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

#### 4.12.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το υποκεφάλαιο, παρουσιάσαμε ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης, το DHWMA-SR. Μελετήσαμε την εντός ελέγχου κατανομή για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές και υπολογίσαμε την απόδοσή του, εστιάζοντας κυρίως στην κανονική κατανομή. Το διάγραμμα DHWMA-SR μελετήθηκε χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, καθώς εμφανίζει πολύ υψηλές τιμές  $SDRL_0$  όταν η σχεδιάσή του γίνεται με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης. Επιπλέον,

λόγω των υψηλών τιμών  $SDRL_0$  που εμφανίζει το διάγραμμα με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για ορισμένες τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda$ , προτείνεται η χρήση των τιμών  $\lambda = 0.20 - 0.25$  για  $n = 5$  και  $\lambda \geq 0.15$  για  $n \geq 10$ .

Το διάγραμμα DHWMA-SR είναι αρκετά πιο αποδοτικό από τα διαγράμματα CUSUM-SR και EWMA-SR σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων, ενώ υπερτερεί έναντι των διαγραμμάτων DEWMA-SR, GWMA-SR και TEWMA-SR για μικρές και υπό προϋποθέσεις μέτριες μετατοπίσεις. Σε σχέση με το διάγραμμα DGWMA-SR, τα δύο διαγράμματα εμφανίζονται σχεδόν ισοδύναμα για  $n = 5$ , ενώ για  $n = 10$ , το διάγραμμα DHWMA-SR εμφανίζεται πιο αποδοτικό κυρίως για μικρές μετατοπίσεις όταν η σύγκριση γίνεται υπό μία μεγάλη τιμή  $SDRL_0$ . Η υπεροχή του διαγράμματος DHWMA-SR έναντι του διαγράμματος DGWMA-SR επεκτείνεται σε μεγαλύτερο εύρος μετατοπίσεων όταν η σύγκριση γίνεται υπό μικρότερες τιμές  $SDRL_0$ . Επιπλέον, το νέο διάγραμμα DHWMA-SR είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα HWMA-SR ιδιαίτερα για μέτριες μετατοπίσεις.

Τέλος, το διάγραμμα DHWMA-SR είναι πιο αποδοτικό από το διάγραμμα DHWMA-SN για μικρές προς μέτριες μετατοπίσεις για όλες τις υπό μελέτη συμμετρικές κατανομές πέραν της Laplace, όπου το διάγραμμα DHWMA-SN εμφανίζεται πιο αποδοτικό για μικρές μετατοπίσεις. Επιπλέον, το διάγραμμα DHWMA-SR έχει σχεδόν την ίδια απόδοση με το διάγραμμα DHWMA- $\bar{X}$  όταν η κατανομή της διεργασίας είναι η κανονική, ενώ έχει καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα σε μικρές μετατοπίσεις υπό άλλες μη κανονικές συμμετρικές κατανομές.

Μέρος των αποτελεσμάτων αυτού του υποκεφαλαίου παρουσιάστηκαν στην τέταρτη επιστημονική εργασία.

#### 4.13 Σύγκριση διαγραμμάτων ελέγχου

Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο θα προβούμε σε μία σύγκριση όλων των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου που μελετήθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο για  $n = 5$  και  $10$  υπό καθορισμένες τιμές  $ARL_0$  και  $SDRL_0$ . Πιο συγκεκριμένα, συγκρίνουμε διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου, όπου οι παράμετροι σχεδίασής τους έχουν επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 436, 400$  για  $n = 5$  και  $437, 399$  για  $n = 10$ . Επίσης, και για τις δύο τιμές  $n$ , συγκρίνουμε διαγράμματα ελέγχου για τα οποία ισχύει η συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ . Η σύγκριση δεν περιλαμβάνει τα διαγράμματα EWMA-SR και DEWMA-SR, καθώς θεωρούνται ειδικές περιπτώσεις των διαγραμμάτων GWMA-SR και DGWMA-SR, αντίστοιχα, όπως επίσης και το διάγραμμα HWMA-SR για  $n = 5$  λόγω των υψη-

λών τιμών  $SDRL_0$ . Τέλος, η κατανομή που επιλέχθηκε είναι η τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Στον Πίνακα 4.9 παρουσιάζονται οι τιμές ARL και SDRL (εντός παρενθέσεως) των διαγραμμάτων DGWMA-SR, TEWMA-SR και DHWMA-SR για  $n = 5$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 436$ . Από τον εν λόγω πίνακα, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα DHWMA-SR έχει ελαφρώς καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση από τα διαγράμματα DGWMA-SR λόγω της καλύτερης ανιχνευτικής ικανότητας που έχει για μία μικρή μετατόπιση ( $\delta = 0.05$ ), ενώ και τα δύο σχήματα είναι πιο ευαίσθητα από το διάγραμμα TEWMA-SR για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.50$ . Επισημαίνεται ότι το διάγραμμα DGWMA-SR ( $q = 0.9, a = 0.692, L = 2.0545$ ) έχει την καλύτερη απόδοση για μετατοπίσεις  $\delta = 0.10$  και  $0.25$ , όμως υστερεί στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων ( $\delta \geq 1.00$ ), καθώς έχει  $\min(ARL_1) = 2$ , ενώ τα άλλα διαγράμματα έχουν τιμή ίση με 1.

**Πίνακας 4.9:** Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 5$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 436$

$\delta$	DGWMA-SR	DGWMA-SR	DGWMA-SR	TEWMA-SR	DHWMA-SR
	$q = 0.9, a = 0.692$ $L = 2.0545$	$q = 0.94, a = 0.91$	$q = 0.95, a = 0.95$	$\lambda = 0.049$	$\lambda = 0.195$
0	370.28 (436.55)	370.34 (435.72)	370.50 (436.23)	370.57 (434.42)	369.79 (436.20)
0.05	161.24 (178.98)	170.69 (193.59)	168.49 (192.52)	169.38 (189.53)	<b>153.05</b> (176.49)
0.10	<b>65.92</b> (65.06)	69.17 (70.79)	68.31 (70.17)	70.92 (70.15)	66.40 (71.03)
0.25	<b>16.22</b> (13.44)	16.84 (14.50)	16.81 (14.58)	18.89 (16.49)	16.82 (16.26)
0.50	5.51 (3.71)	5.51 (4.32)	<b>5.49</b> (4.37)	6.14 (5.29)	5.51 (4.69)
0.75	3.22 (1.61)	2.95 (2.03)	<b>2.92</b> (2.04)	3.14 (2.46)	2.99 (2.34)
1.00	2.45 (0.82)	2.01 (1.19)	1.99 (1.18)	2.05 (1.35)	<b>1.96</b> (1.48)
1.25	2.15 (0.43)	1.57 (0.78)	1.55 (0.77)	1.58 (0.84)	<b>1.45</b> (0.97)
1.50	2.04 (0.21)	1.33 (0.56)	1.32 (0.54)	1.33 (0.58)	<b>1.19</b> (0.61)
EARL	27.27	27.73	27.53	28.48	26.58
ESDRL	26.84	28.71	28.64	29.26	28.57
$\min(ARL_1)$	2	1	1	1	1

Στη συνέχεια, συγκρίνουμε τα διαγράμματα GWMA-SR, DGWMA-SR και TEWMA-SR για  $n = 5$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 400$ . Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.10, όπου παρατηρούμε ότι το διάγραμμα GWMA-SR είναι πιο αποδοτικό στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων ( $\delta \leq 0.10$ ), το διάγραμμα DGWMA-SR στην ανίχνευση μέτριων μετατοπίσεων ( $0.25 \leq \delta \leq 0.75$ ), ενώ το διάγραμμα TEWMA-SR έχει την καλύτερη απόδοση στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το διάγραμμα TEWMA-SR έχει  $\min(ARL_1) = 1$ , ενώ τα άλλα δύο διαγράμματα έχουν τιμή ίση με 2. Τέλος, διαπιστώνουμε ότι τα διαγράμματα GWMA-SR και DGWMA-SR έχουν την ίδια συγκεντρωτική απόδοση, ήτοι οι τιμές EARL είναι ίσες με 30.82 και 30.92 αντίστοιχα, ενώ το διάγραμμα TEWMA-SR έχει EARL=31.37.

**Πίνακας 4.10:** Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 5$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 400$

	GWMA-SR $q = 0.95, a = 0.67$	DGWMA-SR $q = 0.9, a = 0.865$	TEWMA-SR $\lambda = 0.094$
$\delta$	$L = 2.057$	2.149	2.0225
0	370.19 (401.17)	370.57 (399.85)	369.71 (402.43)
0.05	<b>173.20</b> (166.56)	191.11 (199.32)	194.48 (207.00)
0.10	<b>76.18</b> (65.25)	80.29 (77.00)	82.82 (81.26)
0.25	20.47 (14.15)	<b>19.03</b> (14.69)	20.51 (16.14)
0.50	7.49 (4.02)	<b>6.37</b> (4.16)	7.00 (5.32)
0.75	4.50 (1.98)	<b>3.62</b> (1.89)	3.63 (2.70)
1.00	3.30 (1.17)	2.65 (1.00)	<b>2.32</b> (1.59)
1.25	2.73 (0.78)	2.26 (0.56)	<b>1.71</b> (1.03)
1.50	2.42 (0.58)	2.09 (0.32)	<b>1.38</b> (0.70)
EARL	30.82	30.92	31.37
ESDRL	26.11	28.65	30.53
$\min(ARL_1)$	2	2	1

Ο Πίνακας 4.11 παρουσιάζει τις αποδόσεις των διαγραμμάτων CUSUM-SR, GWMA-SR,

DGWMA-SR και TEWMA-SR για  $n = 5$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \leq ARL_0$ . Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα CUSUM-SR ( $k = 1.5, H = 68.5$ ), το οποίο είναι βέλτιστο στην ανίχνευση της μετατόπισης  $\delta = 0.20$ , είναι το πιο αποδοτικό διάγραμμα στην ανίχνευση μετατοπίσεων  $\delta \leq 0.10$ , ενώ ακολουθούν τα διαγράμματα DGWMA-SR ( $q = 0.7, a = 0.8, L = 2.661$ ) και TEWMA-SR ( $\lambda = 0.28, L = 2.484$ ). Το εν λόγω διάγραμμα DGWMA-SR είναι το πιο αποδοτικό στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων με το διάγραμμα TEWMA-SR να έχει ελαφρώς χαμηλότερες τιμές  $ARL_1$ , ενώ το τρίτο πιο αποδοτικό διάγραμμα είναι το DGWMA-SR ( $q = 0.6, a = 0.7, L = 2.7535$ ). Επιπλέον, τα διαγράμματα GWMA-SR υστερούν έναντι των διαγραμμάτων DGWMA-SR σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Τέλος, το διάγραμμα DGWMA-SR ( $q = 0.7, a = 0.8, L = 2.661$ ) έχει την καλύτερη συγκεντρωτική συμπεριφορά με τιμή  $EARL=40.21$ , ενώ ακολουθούν τα διαγράμματα TEWMA-SR ( $\lambda = 0.28, L = 2.484$ ) και CUSUM-SR ( $k = 1.5, H = 68.5$ ) με τιμές  $EARL=41.23$  και  $42.28$ , αντίστοιχα.

**Πίνακας 4.1.1:** Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμμάτων ελέγχου με χρήση προσημιακής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 5$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \leq ARL_0$

$\delta$	CUSUM-SR		CUSUM-SR		CUSUM-SR		CUSUM-SR		CUSUM-SR		CUSUM-SR		CUSUM-SR		CUSUM-SR		
	$k = 1.5$	$k = 4.5$	$k = 4.5$	$k = 4.5$	$k = 4.5$	$k = 4.5$	$k = 4.5$	$k = 4.5$	$k = 4.5$	$k = 4.5$	$k = 4.5$	$k = 4.5$	$k = 4.5$	$k = 4.5$	$k = 4.5$	$k = 4.5$	
	$H = 68.5$	$H = 68.5$	$L = 2.7145$	$L = 2.7145$	$L = 2.7145$	$L = 2.7145$	$L = 2.7145$	$L = 2.7145$	$L = 2.7145$	$L = 2.7145$	$L = 2.7145$	$L = 2.7145$	$L = 2.7145$	$L = 2.7145$	$L = 2.7145$	$L = 2.7145$	
	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	$q = 0.75, a = 0.8$	
	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	$q = 0.6, a = 0.7$	
	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	$q = 0.7, a = 0.8$	
	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	$\lambda = 0.28$	
0	371.95 (349.81)	361.26 (354.67)	370.05 (368.32)	370.05 (368.32)	370.36 (368.64)	370.36 (368.64)	370.47 (370.32)	370.47 (370.32)	370.71 (370.70)	370.71 (370.70)	370.71 (370.70)	370.71 (370.70)	370.71 (370.70)	370.71 (370.70)	370.71 (370.70)	370.71 (370.70)	370.71 (370.70)
0.05	<b>226.95</b> (205.12)	289.64 (283.91)	260.71 (257.81)	260.71 (257.81)	272.33 (270.52)	272.33 (270.52)	265.28 (263.53)	265.28 (263.53)	251.56 (247.35)	251.56 (247.35)	251.56 (247.35)	251.56 (247.35)	251.56 (247.35)	251.56 (247.35)	251.56 (247.35)	251.56 (247.35)	251.56 (247.35)
0.10	<b>104.83</b> (85.59)	175.50 (168.83)	136.43 (129.76)	136.43 (129.76)	148.45 (143.01)	148.45 (143.01)	139.26 (134.00)	139.26 (134.00)	126.04 (123.48)	126.04 (123.48)	126.04 (123.48)	126.04 (123.48)	126.04 (123.48)	126.04 (123.48)	126.04 (123.48)	126.04 (123.48)	126.04 (123.48)
0.25	28.82 (14.74)	38.92 (33.26)	30.50 (23.32)	30.50 (23.32)	32.66 (26.68)	32.66 (26.68)	29.64 (24.02)	29.64 (24.02)	<b>26.63</b> (21.17)	<b>26.63</b> (21.17)	<b>26.63</b> (21.17)	<b>26.63</b> (21.17)	<b>26.63</b> (21.17)	<b>26.63</b> (21.17)	<b>26.63</b> (21.17)	<b>26.63</b> (21.17)	<b>26.63</b> (21.17)
0.50	12.75 (3.84)	10.28 (5.74)	9.55 (5.35)	9.55 (5.35)	9.44 (5.59)	9.44 (5.59)	8.73 (5.07)	8.73 (5.07)	<b>8.07</b> (4.65)	<b>8.07</b> (4.65)	<b>8.07</b> (4.65)	<b>8.07</b> (4.65)	<b>8.07</b> (4.65)	<b>8.07</b> (4.65)	<b>8.07</b> (4.65)	<b>8.07</b> (4.65)	<b>8.07</b> (4.65)
0.75	8.78 (1.84)	5.89 (2.13)	5.48 (2.33)	5.48 (2.33)	5.27 (2.41)	5.27 (2.41)	4.95 (2.22)	4.95 (2.22)	<b>4.60</b> (2.13)	<b>4.60</b> (2.13)	<b>4.60</b> (2.13)	<b>4.60</b> (2.13)	<b>4.60</b> (2.13)	<b>4.60</b> (2.13)	<b>4.60</b> (2.13)	<b>4.60</b> (2.13)	<b>4.60</b> (2.13)
1.00	7.15 (1.06)	4.45 (1.13)	4.02 (1.25)	4.02 (1.25)	3.72 (1.39)	3.72 (1.39)	3.55 (1.25)	3.55 (1.25)	<b>3.31</b> (1.19)	<b>3.31</b> (1.19)	<b>3.31</b> (1.19)	<b>3.31</b> (1.19)	<b>3.31</b> (1.19)	<b>3.31</b> (1.19)	<b>3.31</b> (1.19)	<b>3.31</b> (1.19)	<b>3.31</b> (1.19)
1.25	6.40 (0.61)	3.78 (0.76)	3.40 (0.71)	3.40 (0.71)	3.00 (0.93)	3.00 (0.93)	2.91 (0.82)	2.91 (0.82)	<b>2.72</b> (0.79)	<b>2.72</b> (0.79)	<b>2.72</b> (0.79)	<b>2.72</b> (0.79)	<b>2.72</b> (0.79)	<b>2.72</b> (0.79)	<b>2.72</b> (0.79)	<b>2.72</b> (0.79)	<b>2.72</b> (0.79)
1.50	6.10 (0.31)	3.41 (0.56)	3.14 (0.39)	3.14 (0.39)	2.60 (0.68)	2.60 (0.68)	2.56 (0.62)	2.56 (0.62)	<b>2.41</b> (0.57)	<b>2.41</b> (0.57)	<b>2.41</b> (0.57)	<b>2.41</b> (0.57)	<b>2.41</b> (0.57)	<b>2.41</b> (0.57)	<b>2.41</b> (0.57)	<b>2.41</b> (0.57)	<b>2.41</b> (0.57)
EARL	42.28	50.08	43.33	43.33	45.03	45.03	42.97	42.97	40.21	40.21	40.21	40.21	40.21	40.21	40.21	40.21	40.21
ESDRL	28.63	43.94	37.57	37.57	40.19	40.19	38.33	38.33	35.93	35.93	35.93	35.93	35.93	35.93	35.93	35.93	35.93
$\min(ARL_1)$	6	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Στον Πίνακα 4.12 παρουσιάζονται οι αποδόσεις των διαγραμμάτων DGWMA-SR, TEWMA-SR και DHWMA-SR για  $n = 10$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 437$ . Επιπλέον, παρέχεται και η απόδοση του διαγράμματος HWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 1.899$ ), το οποίο έχει  $SDRL_0 = 322.32$  για λόγους σύγκρισης. Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα DHWMA-SR είναι το πιο αποδοτικό στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων ( $\delta \leq 0.25$ ), ενώ έχει ελαφρώς χαμηλότερες τιμές  $ARL_1$  από τα διαγράμματα DGWMA-SR και TEWMA-SR στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Και τα τρία προαναφερθέντα διαγράμματα υπερτερούν έναντι του διαγράμματος HWMA-SR καθολικά. Επιπλέον, το διάγραμμα DGWMA-SR είναι πιο ευαίσθητο από το διάγραμμα TEWMA-SR για  $\delta \leq 0.50$ , ενώ για μεγαλύτερες μετατοπίσεις, το διάγραμμα TEWMA-SR έχει ελαφρώς καλύτερη απόδοση.

**Πίνακας 4.12:** Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 10$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 437$

$\delta$	DGWMA-SR	HWMA-SR	TEWMA-SR	DHWMA-SR
	$q = 0.95, a = 0.93$ $L = 1.899$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.051$	$\lambda = 0.148$
0	369.93 (437.03)	370.14 (322.32)	370.10 (437.11)	369.41 (436.99)
0.05	109.79 (117.16)	112.74 (97.21)	111.36 (116.83)	<b>101.07</b> (122.79)
0.10	39.89 (37.36)	44.22 (35.24)	42.80 (38.84)	<b>37.26</b> (42.37)
0.25	9.05 (7.52)	10.81 (7.34)	10.44 (9.05)	<b>8.44</b> (8.29)
0.50	2.91 (2.06)	4.09 (2.06)	3.13 (2.63)	<b>2.80</b> (2.37)
0.75	1.67 (0.91)	2.56 (1.24)	1.62 (1.09)	<b>1.53</b> (1.14)
1.00	1.24 (0.50)	1.83 (0.98)	1.18 (0.49)	<b>1.13</b> (0.53)
1.25	1.08 (0.27)	1.38 (0.72)	1.04 (0.22)	<b>1.02</b> (0.21)
1.50	<b>1.00</b> (0.14)	1.14 (0.45)	<b>1.00</b> (0.09)	<b>1.00</b> (0.08)
EARL	19.38	21.00	20.01	18.49
ESDRL	19.58	16.58	20.19	20.55
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1

Οι αποδόσεις των διαγραμμάτων GWMA-SR, DGWMA-SR, TEWMA-SR και DHWMA-



SR για  $n = 10$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 399$  παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.13. Επίσης, στον ίδιο πίνακα παρέχεται και η απόδοση του διαγράμματος HWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 1.899$ ) για λόγους σύγκρισης. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το διάγραμμα DHWMA-SR έχει τις χαμηλότερες τιμές  $ARL_1$  σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων, και προφανώς την καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση με  $EARL=19.41$ . Την αμέσως καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση έχουν τα διαγράμματα HWMA-SR και GWMA-SR με τιμές  $EARL=21.00$  και  $21.43$ , αντίστοιχα. Επιπρόσθετα, διαπιστώνουμε ότι την δεύτερη καλύτερη απόδοση στην ανίχνευση μετατοπίσεων  $\delta \leq 0.10$  έχει το διάγραμμα HWMA-SR, στην ανίχνευση των μετατοπίσεων  $\delta = 0.25$  και  $0.50$  το διάγραμμα DGWMA-SR ( $q = 0.9, a = 0.92, L = 2.194$ ) και στην ανίχνευση μετατοπίσεων  $\delta \geq 0.75$  το διάγραμμα TEWMA-SR. Το διάγραμμα GWMA-SR υπερέχει έναντι των διαγραμμάτων DGWMA-SR στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων ( $\delta \leq 0.10$ ), ενώ ισχύει το αντίστροφο στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων.

Τέλος, στον Πίνακα 4.14 παρουσιάζονται οι αποδόσεις των διαγραμμάτων CUSUM-SR, GWMA-SR, DGWMA-SR, HWMA-SR, TEWMA-SR και DHWMA-SR για  $n = 10$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \leq ARL_0$ . Από τον συγκεκριμένο πίνακα παρατηρούμε ότι το διάγραμμα HWMA-SR είναι το πιο ευαίσθητο στην ανίχνευση μίας μικρής μετατόπισης  $\delta = 0.05$ , ενώ το διάγραμμα DHWMA-SR είναι το πιο αποδοτικό στην ανίχνευση μεγαλύτερων μετατοπίσεων. Αυτά τα δύο διαγράμματα έχουν και την καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση, καθώς το DHWMA-SR έχει  $EARL=20.26$ , ενώ η αντίστοιχη τιμή του HWMA-SR είναι  $21.00$ . Τα υπόλοιπα διαγράμματα έχουν τιμές  $EARL$  από  $27$  έως  $40$ . Επιπλέον, το διάγραμμα CUSUM-SR ( $k = 6, H = 137$ ) έχει την τρίτη καλύτερη απόδοση για μετατοπίσεις  $\delta \leq 0.10$ , ενώ το διάγραμμα DGWMA-SR ( $q = 0.75, a = 0.9, L = 2.600$ ) έχει την τρίτη καλύτερη απόδοση για  $\delta \geq 0.25$ .

**Πίνακας 4.13:** Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 10$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 399$

	GWMA-SR $q = 0.95, a = 0.7$ $L = 2.598$	DGWMA-SR $q = 0.9, a = 0.92$	DGWMA-SR $q = 0.95, a = 1.15$	HWMA-SR $\lambda = 0.05$	TEWMA-SR $\lambda = 0.092$	DHWMA-SR $\lambda = 0.161$
$\delta$	$L = 2.598$	2.194	2.0935	2.308	2.022	1.576
0	370.52 (398.99)	370.61 (398.96)	370.19 (398.78)	370.14 (322.32)	370.06 (401.65)	369.96 (399.15)
0.05	117.39 (109.61)	133.96 (132.76)	136.19 (136.18)	112.74 (97.21)	131.74 (133.54)	<b>109.06</b> (123.06)
0.10	45.54 (37.23)	47.99 (42.81)	49.36 (43.82)	44.22 (35.24)	48.28 (42.11)	<b>40.73</b> (43.39)
0.25	11.33 (7.46)	10.66 (7.79)	11.34 (8.32)	10.81 (7.34)	11.71 (8.66)	<b>9.17</b> (8.61)
0.50	4.09 (2.14)	3.51 (2.22)	3.67 (2.53)	4.09 (2.06)	3.73 (2.75)	<b>3.01</b> (2.47)
0.75	2.43 (1.08)	1.98 (1.02)	1.96 (1.15)	2.56 (1.24)	1.93 (1.23)	<b>1.63</b> (1.21)
1.00	1.77 (0.70)	1.44 (0.61)	1.38 (0.63)	1.83 (0.98)	1.34 (0.64)	<b>1.16</b> (0.59)
1.25	1.42 (0.53)	1.18 (0.40)	1.14 (0.37)	1.38 (0.72)	1.11 (0.34)	<b>1.03</b> (0.24)
1.50	1.22 (0.42)	1.06 (0.25)	1.04 (0.21)	1.14 (0.45)	1.03 (0.17)	<b>1.01</b> (0.10)
EARL	21.43	21.88	22.25	21.00	22.01	19.41
ESDRL	18.68	20.27	20.73	16.58	20.66	20.07
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1

**Πίνακας 4.14:** Σύγκριση μη παραμετρικών διαγραμμμάτων ελέγχου με χρήση προσημιακής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 10$  υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \leq ARL_0$

$\delta$	CUSUM-SR		CUSUM-SR	GWMA-SR	DGWM-SR	HWMA-SR	TEWMA-SR	DHWMA-SR
	$k = 6$ $H = 137$	$k = 16$ $L = 2.692$	$k = 58$	$q = 0.9, a = 1.2$ $L = 2.692$	$q = 0.75, a = 0.9$ $L = 2.600$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.43$	$\lambda = 0.173$
0	370.85 (356.40)	374.05 (370.79)	374.05 (370.79)	369.82 (369.80)	370.06 (370.03)	370.14 (322.32)	370.54 (369.73)	370.50 (369.34)
0.05	180.21 (167.74)	269.47 (266.10)	269.47 (266.10)	199.50 (199.71)	185.45 (184.79)	<b>112.74</b> (97.21)	222.52 (221.50)	115.74 (122.24)
0.10	68.82 (56.90)	138.12 (134.17)	138.12 (134.17)	77.92 (73.53)	69.92 (65.05)	44.22 (35.24)	95.20 (92.13)	<b>43.91</b> (44.06)
0.25	16.17 (7.83)	22.95 (19.35)	22.95 (19.35)	13.90 (10.33)	13.07 (9.37)	10.81 (7.34)	16.02 (12.85)	<b>9.88</b> (8.88)
0.50	7.09 (1.99)	5.66 (2.86)	5.66 (2.86)	4.38 (2.29)	4.26 (2.25)	4.09 (2.06)	4.65 (2.45)	<b>3.21</b> (2.54)
0.75	4.93 (0.94)	3.28 (1.11)	3.28 (1.11)	2.56 (1.11)	2.50 (1.07)	2.56 (1.24)	2.66 (1.17)	<b>1.73</b> (1.27)
1.00	4.08 (0.56)	2.50 (0.63)	2.50 (0.63)	1.86 (0.69)	1.84 (0.67)	1.83 (0.98)	1.91 (0.75)	<b>1.21</b> (0.64)
1.25	3.65 (0.51)	2.15 (0.37)	2.15 (0.37)	1.52 (0.55)	1.52 (0.54)	1.38 (0.72)	1.53 (0.57)	<b>1.04</b> (0.28)
1.50	3.31 (0.46)	2.03 (0.17)	2.03 (0.17)	1.30 (0.46)	1.30 (0.46)	1.14 (0.45)	1.31 (0.48)	<b>1.01</b> (0.11)
EARL	30.19	40.01	40.01	28.78	27.22	21.00	31.89	20.26
ESDRL	22.29	36.33	36.33	26.04	24.51	16.58	29.35	19.63
$\min(ARL_1)$	3	2	2	1	1	1	1	1

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι στις περιπτώσεις όπου χρησιμοποιούνται συνθήκες που ικανοποιούν τα διαγράμματα HWMA-SR και DHWMA-SR, αυτά τα δύο διαγράμματα εμφανίζουν την καλύτερη συγκεντρωτική απόδοση με το διάγραμμα DHWMA-SR να υπερέχει σε μεγαλύτερο εύρος μετατοπίσεων. Επιπλέον, τα διαγράμματα GWMA-SR και DGWMA-SR έχουν αρκετά καλή απόδοση με το πρώτο διάγραμμα να υπερέχει σε μικρές μετατοπίσεις όταν η σύγκριση γίνεται υπό  $SDRL_0=400$  ή  $399$ , ενώ στην περίπτωση που η σύγκριση γίνει υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , το διάγραμμα DGWMA-SR είναι πιο αποδοτικό σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων.

Η σύγκριση των διαγραμμάτων EWMA-SR, DEWMA-SR, GWMA-SR και DGWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης παρουσιάστηκε αναλυτικά στο υποκεφάλαιο 4.9, ενώ η σύγκριση του διαγράμματος TEWMA-SR με τα υπόλοιπα διαγράμματα παρουσιάστηκε στο υποκεφάλαιο 4.11

## 4.14 Εφαρμογές

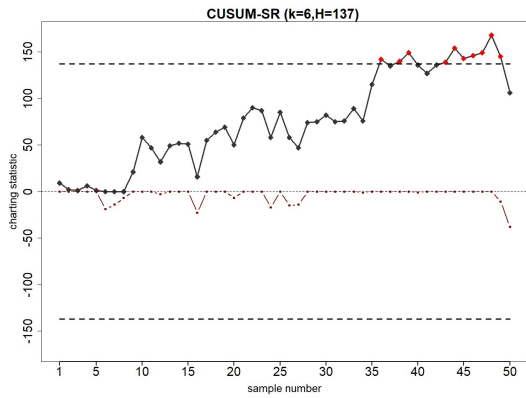
Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα παρουσιάσουμε δύο εφαρμογές των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου που μελετήσαμε σε αυτό το κεφάλαιο. Στην πρώτη εφαρμογή χρησιμοποιούνται τα προσομοιωμένα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στην αντίστοιχη εφαρμογή του προηγούμενου κεφαλαίου προκειμένου να συγκρίνουμε ίδια σχήματα με διαφορετική στατιστική συνάρτηση. Στη δεύτερη εφαρμογή χρησιμοποιούμε πραγματικά δεδομένα διαφορετικά από αυτά που χρησιμοποιήσαμε στην αντίστοιχη εφαρμογή του προηγούμενου κεφαλαίου, καθώς βρέθηκε ότι υπάρχει θετική ασυμμετρία.

### 4.14.1 Εφαρμογή 1

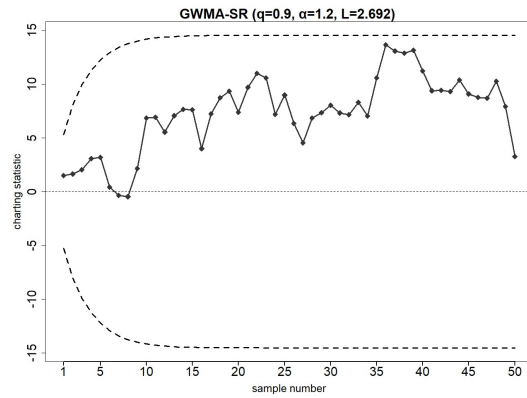
Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που παρουσιάζονται στον Πίνακα B26, όπου στην τελευταία του στήλη δίνονται οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης  $SR_i$ , και θέτοντας τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , κατασκευάζουμε τα διαγράμματα CUSUM-SR ( $k = 6, H = 137$ ), GWMA-SR ( $q = 0.9, a = 1.2, L = 2.692$ ), DGWMA-SR ( $q = 0.75, a = 0.9, L = 2.600$ ), HWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 2.308$ ), TEWMA-SR ( $\lambda = 0.43, L = 2.684$ ) και DHWMA-SR ( $\lambda = 0.173, L = 1.678$ ), τα οποία απεικονίζονται στο Σχήμα 4.15. Το διάγραμμα CUSUM-SR ανιχνεύει την μετατόπιση έπειτα από 36 δείγματα, το διάγραμμα HWMA-SR έπειτα από 35 δείγματα, ενώ το διάγραμμα DHWMA-SR έπειτα από 33 δείγματα. Παρόλο που τα υπόλοιπα διαγράμματα ελέγχου δεν ανιχνεύουν την μετατόπιση, παρατηρούμε ότι οι τιμές των απεικονιζόμενων στατιστικών συναρτήσεων τους για  $i = 36, 37, 38, 39$  βρίσκονται κοντά στο άνω όριο ελέγχου. Επιπλέον, το διάγραμμα CUSUM-SR ανιχνεύει την μετατόπιση πιο γρήγορα από το διάγραμμα CUSUM-SN, ενώ το διάγραμμα DHWMA-SR πιο αργά από το διάγραμμα DHWMA-SN. Τα διαγράμματα HWMA-SN και HWMA-SR ανιχνεύουν την μετατόπιση στο ίδιο σημείο, ενώ τα διαγράμματα GWMA-SR, DGWMA-SR και TEWMA-SR έχουν παρατηρήσεις πλησιέστερα στο άνω όριο ελέγχου από ότι έχουν τα αντίστοιχα σχήματα που χρησιμοποιούν τη συνήθη προσημική στατιστική συνάρτηση.

### 4.14.2 Εφαρμογή 2

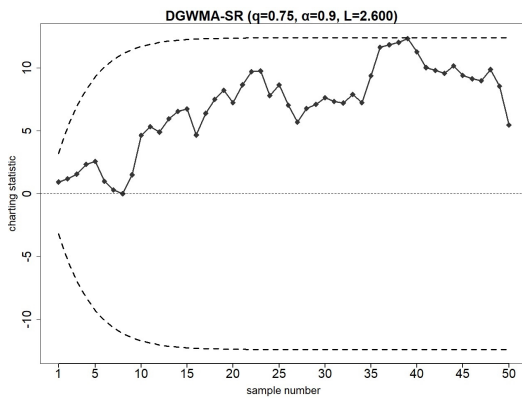
Σε αυτήν την εφαρμογή τα δεδομένα προέρχονται από τον Montgomery (2013) (σελ.259-260), όπου το ποιοτικό χαρακτηριστικό ενδιαφέροντος αφορά το μήκος της εσωτερικής διαμέτρου δακτυλίων εμβόλου που χρησιμοποιούνται σε μηχανές αυτοκινήτων. Η διεργασία θεωρείται ότι βρίσκεται εντός ελέγχου εάν η τιμή της διαμέσου είναι ίση με  $\theta_0 = 74\text{mm}$ . Προκειμένου να εξετάσουμε εάν η διεργασία βρίσκεται εντός ή εκτός ελέγχου, συλλέγουμε 15 δε-



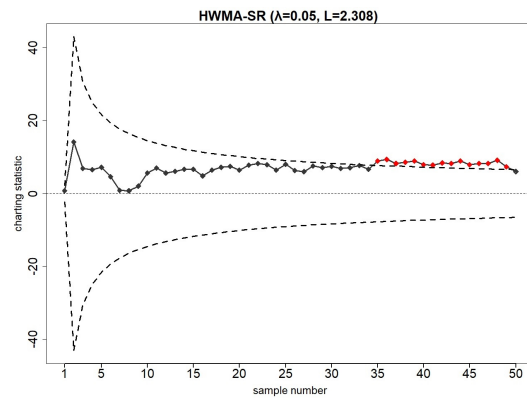
( $\alpha$ )



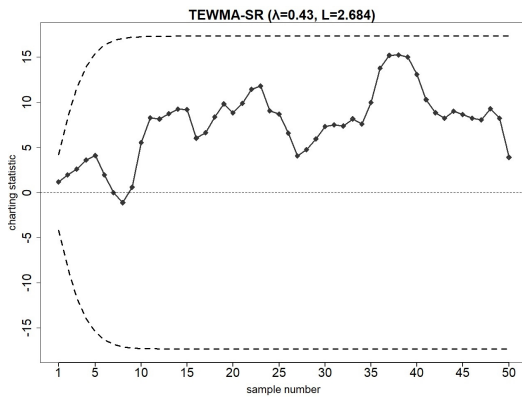
( $\beta$ )



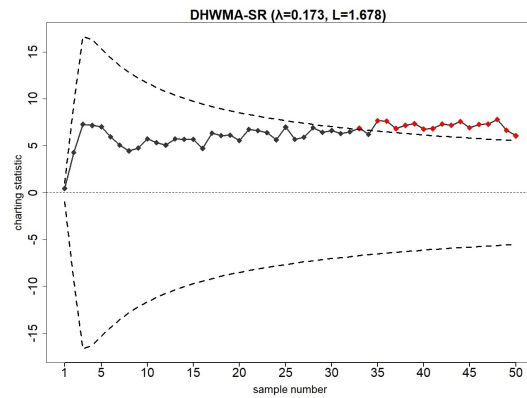
( $\gamma$ )



( $\delta$ )



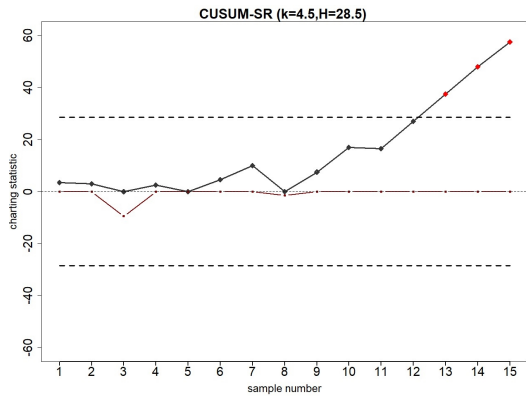
( $\epsilon$ )



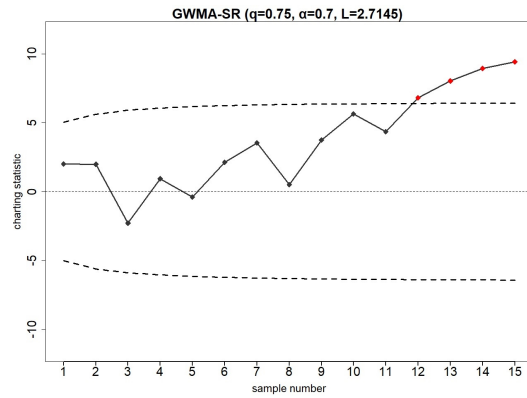
( $\sigma\tau$ )

Σχήμα 4.15: Διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης για την εφαρμογή 1

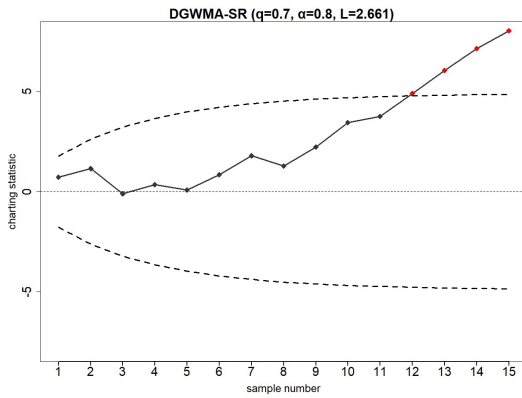
ίγματα μεγέθους  $n = 5$  το καθένα. Τα δεδομένα παρουσιάζονται στον Πίνακα Γ25. Επισημαίνεται ότι επειδή ο συντελεστής ασυμμετρίας είναι ίσος με 0.16 ( $\beta_1 = \frac{M_3}{M_2^{1.5}}$ , όπου  $M_2$  και  $M_3$  οι ροπές δεύτερης και τρίτης τάξης), μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα δεδομένα ακολουθούν μία συμμετρική κατανομή κι έτσι να εφαρμόσουμε τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης σε αντίθεση με τα δεδομένα της εφαρμογής 2 του προηγούμενου κεφαλαίου όπου ο συντελεστής είναι ίσος με 1.15. Θέτοντας τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , κατασκευάζουμε τα διαγράμματα CUSUM-SR ( $k = 4.5, H = 28.5$ ), GWMA-SR ( $q = 0.75, a = 0.7, L = 2.7145$ ), DGWMA-SR ( $q = 0.7, a = 0.8, L = 2.661$ ) και TEWMA-SR ( $\lambda = 0.28, L = 2.484$ ). Επίσης, κατασκευάζουμε τα διαγράμματα HWMA-SR ( $\lambda = 0.05, L = 2.070$ ) και DHWMA-SR ( $\lambda = 0.40, L = 2.092$ ) για λόγους σύγκρισης παρόλο που δεν ικανοποιούν τις προαναφερθείσες συνθήκες. Τα διαγράμματα ελέγχου απεικονίζονται στο Σχήμα 4.16 από όπου παρατηρούμε ότι τα GWMA-SR, DGWMA-SR, HWMA-SR και DHWMA-SR ανιχνεύουν την μετατόπιση έπειτα από 12 παρατηρήσεις, ενώ τα CUSUM-SR και TEWMA-SR έπειτα από 13 παρατηρήσεις.



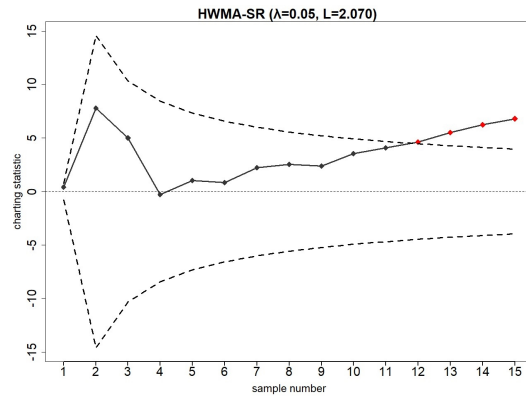
( $\alpha$ )



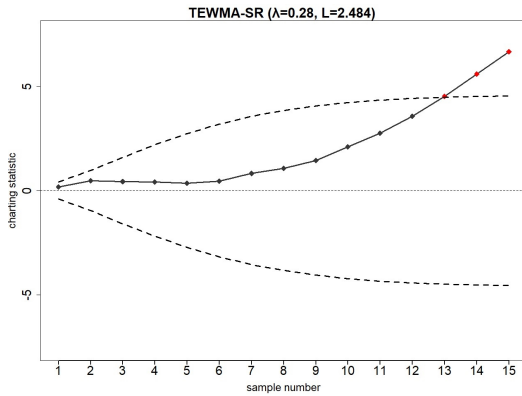
( $\beta$ )



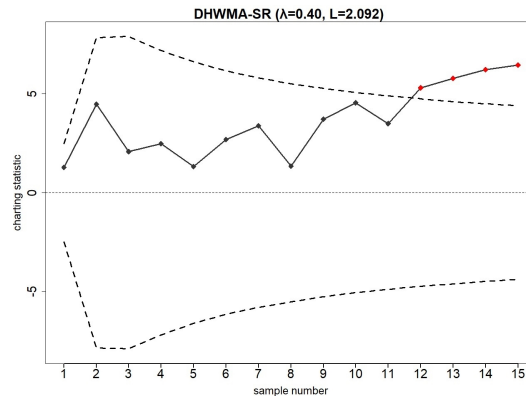
( $\gamma$ )



( $\delta$ )



( $\epsilon$ )



( $\sigma\tau$ )

Σχήμα 4.16: Διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης για την εφαρμογή 2



#### 4.15 Ανακεφαλαίωση

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε και μελετήσαμε μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, μελετήσαμε και συγκρίναμε μεταξύ τους τα ήδη γνωστά διαγράμματα Shewhart-SR, CUSUM-SR, EWMA-SR, DEWMA-SR, GWMA-SR και HWMA-SR, αλλά και παρουσιάσαμε τρία νέα διαγράμματα, τα DGWMA-SR, TEWMA-SR και DHWMA-SR. Η απόδοση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου αυτού του κεφαλαίου μελετήθηκε για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές, εστιάζοντας περισσότερο στην κανονική κατανομή.

Από τη μελέτη των παραπάνω μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου προέκυψαν ορισμένα συμπεράσματα παραπλήσια με αυτά από τη μελέτη των αντίστοιχων διαγραμμάτων με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, τα διαγράμματα GWMA-SR και DGWMA-SR είναι πιο αποδοτικά από τα διαγράμματα EWMA-SR και DEWMA-SR αντίστοιχα, για μικρές μετατοπίσεις, ενώ έχουν την ίδια ανιχνευτική ικανότητα για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Επίσης, από τη μεταξύ τους σύγκριση υπό μία μεγάλη τιμή  $SDRL_0$ , το διάγραμμα GWMA-SR είναι πιο ευαίσθητο για μικρές μετατοπίσεις, ενώ το διάγραμμα DGWMA-SR υπερέχει σε μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Από την άλλη, όταν συγκρίνουμε τα διαγράμματα υπό τη συνθήκη  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , το διάγραμμα DGWMA-SR είναι πιο αποδοτικό σε όλο το εύρος των μετατοπίσεων. Επιπλέον, το νέο διάγραμμα TEWMA-SR έχει καλύτερη απόδοση από τα διαγράμματα EWMA-SR και DEWMA-SR για μικρές μετατοπίσεις και υπερέχει έναντι του διαγράμματος GWMA-SR για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Το διάγραμμα HWMA-SR είναι πιο αποδοτικό από όλα τα άλλα διαγράμματα ελέγχου, κυρίως για μικρές μετατοπίσεις, ενώ το νέο διάγραμμα DHWMA-SR εμφανίζει πολύ καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα από όλα τα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου σε όλο σχεδόν το εύρος μετατοπίσεων. Αξίζει να σημειώσουμε ότι λόγω των υψηλών τιμών  $SDRL_0$  που έχει το διάγραμμα HWMA-SR για  $n = 5$ , προτείνεται η χρήση του για μεγαλύτερες τιμές του μεγέθους του δείγματος  $n$ .

Η σχεδίαση των διαγραμμάτων ελέγχου με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης προσδίδει διαφορετική ανιχνευτική ικανότητα από ότι η σχεδίαση με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου. Κατ' αρχάς, λόγω των υψηλών τιμών  $SDRL_0$  που εμφανίζουν τα διαγράμματα HWMA-SR και DHWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης δεν προτείνονται καθόλου για χρήση. Χρησιμοποιώντας τις βέλτιστες τιμές παραμέτρων σχεδίασης, διαπιστώνουμε ότι το διάγραμμα DGWMA-SR αποδίδει καλύτερα από τα διαγράμματα EWMA-SR, DEWMA-SR και GWMA-SR

για μικρές μετατοπίσεις ( $\delta \leq 0.10$ ), ενώ έχουν όλα την ίδια απόδοση για μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Επιπλέον, το διάγραμμα CUSUM-SR εμφανίζεται αρκετά αποδοτικό μόνο για ένα εύρος μετατοπίσεων γύρω από την βέλτιστη μετατόπιση την οποία έχει σχεδιαστεί να ανιχνεύει, ενώ το διάγραμμα TEWMA-SR εμφανίζεται να υπερισχύει μόνο έναντι του διαγράμματος EWMA-SR για μικρές μετατοπίσεις.

Τέλος, συγκρίνοντας τα νέα διαγράμματα ελέγχου DGWMA-SR, TEWMA-SR και DHWMA-SR με τα αντίστοιχα DGWMA-SN, TEWMA-SN και DHWMA-SN και DGWMA- $\bar{X}$ , TEWMA- $\bar{X}$  και DHWMA- $\bar{X}$ , παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα με την προσημική-βαθμολογική στατιστική συνάρτηση αποδίδουν καλύτερα από τα αντίστοιχα τους με τη συνήθη προσημική στατιστική συνάρτηση, πέρα της περίπτωσης όπου η κατανομή της διεργασίας είναι η Laplace, ενώ εμφανίζονται πιο αποδοτικά και από τα αντίστοιχα παραμετρικά (σχεδιασμένα για κανονική κατανομή) για μικρές μετατοπίσεις υπό άλλες μη κανονικές κατανομές.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

---

## Επίλογος

---

### 5.1 Συμπεράσματα

Το αντικείμενο της παρούσας διδακτορικής διατριβής είναι η μελέτη μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου για την ανίχνευση μετατοπίσεων στην παράμετρο θέσης μίας διεργασίας όταν η τιμή στόχος  $\theta_0$  είναι εκ των προτέρων γνωστή. Ειδικότερα, μελετήθηκαν ήδη γνωστά, αλλά και παρουσιάστηκαν νέα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιώντας την συνήθη προσημική και την προσημική-βαθμολογική στατιστική συνάρτηση.

Αρχικά, στο Κεφάλαιο 1, παρουσιάζονται ορισμένες βασικές έννοιες αναφορικά με τα διαγράμματα ελέγχου, ο τρόπος κατασκευής τους, τα μέτρα απόδοσης και τα διάφορα είδη διαγραμμάτων που υπάρχουν. Το πιο διαδεδομένο μέτρο απόδοσης ενός διαγράμματος είναι το μέσο μήκος ροής (ARL). Όμως, είναι αρκετά σύνηθες να υπολογίζονται και άλλα χαρακτηριστικά της κατανομής του μήκους ροής, όπως η τυπική απόκλιση και ορισμένα ποσοστιαία σημεία, προκειμένου να έχουμε μία ολοκληρωμένη εικόνα επί της απόδοσης ενός διαγράμματος. Επιπρόσθετα, η αναμενόμενη τιμή του μέσου μήκους ροής (EARL) χρησιμοποιείται ως ένα συγκεντρωτικό μέτρο απόδοσης.

Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 2, παρουσιάζεται η δομή των παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, CUSUM, EWMA, DEWMA, GWMA, DGWMA και HWMA για την απεικόνιση μετατοπίσεων στη μέση τιμή μίας μεταβλητής που ακολουθεί την κανονική κατανομή. Επιπλέον, εισάγουμε δύο νέα διαγράμματα ελέγχου, το TEWMA και DHWMA. Σε αυτό το κεφάλαιο, δεν παρέχονται πίνακες με αποτελέσματα επί της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου, αλλά παρουσιάζεται μία συνοπτική σύγκριση της απόδοσής τους. Επίσης, παραθέτουμε τα κριτήρια που πρέπει να λαμβάνει κανείς υπό όψιν για την επιλογή ενός παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου, όπως το πρόβλημα της αδράνειας, η ευρωστία, η χρονική στιγμή εμφάνισης της μετατόπισης, καθώς και η γνώση των παραμέτρων της κατανομής που ακολουθεί το ποιοτικό χαρακτηριστικό ενδιαφέροντος. Τέλος, ασχέεται μία κριτική επί ορισμένων εργασιών οι οποίες θεωρούν ότι ένα διάγραμμα EWMA με κατάλληλες παραμέτρους σχεδίασης δύναται να είναι πιο αποδοτικό

από τα προηγμένα διαγράμματα ελέγχου που αναφέραμε προηγουμένως. Στις εργασίες αυτές, το διάγραμμα EWMA συγκρίνεται με τα διαγράμματα GWMA, DEWMA, TEWMA και HWMA χρησιμοποιώντας ένα αυθαίρετο κριτήριο επιλογής των παραμέτρων σχεδίασης λαμβάνοντας υπό όψιν αποκλειστικά και μόνο τις τιμές ARL. Όμως, συγκρίνοντας διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου με παραπλήσιες ιδιότητες της εντός ελέγχου κατανομής του μήκους ροής, διαπιστώνουμε την υπεροχή των διαγραμμάτων GWMA, DEWMA και TEWMA έναντι του διαγράμματος EWMA για μικρές και υπό προϋποθέσεις μέτριες μετατοπίσεις τόσο στην zero-state, όσο και στην steady-state κατάσταση. Αξίζει να σημειωθεί ότι το διάγραμμα HWMA είναι αρκετά πιο αποδοτικό από το διάγραμμα EWMA σε μικρές και μέτριες μετατοπίσεις στην zero-state κατάσταση, όμως υστερεί σημαντικά σε απόδοση στην steady-state κατάσταση.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετώνται οι ιδιότητες των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης Shewhart-SN, CUSUM-SN, EWMA-SN, DEWMA-SN, GWMA-SN, DGWMA-SN και HWMA-SN και επίσης, παρουσιάζουμε δύο νέα διαγράμματα, τα TEWMA-SN και DHWMA-SN. Τα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση μετατοπίσεων στην παράμετρο θέσης (διάμεσο) μίας διεργασίας, όταν η τιμή στόχος  $\theta_0$  είναι εκ των προτέρων γνωστή και η κατανομή που ακολουθεί το ποιοτικό χαρακτηριστικό είναι συνεχής.

Χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, τα οποία συνίσταται όταν η μετατόπιση εμφανίζεται στην αρχή της διεργασίας, διαπιστώνουμε ότι τα διαγράμματα GWMA-SN και DGWMA-SN είναι πιο αποδοτικά από τα διαγράμματα EWMA-SN και DEWMA-SN αντίστοιχα, για μικρές μετατοπίσεις, ενώ το GWMA-SN είναι πιο ευαίσθητο από το DGWMA-SN για μικρές μετατοπίσεις και το αντίστροφο για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις. Επιπλέον, το νέο διάγραμμα TEWMA-SN έχει καλύτερη ανιχνευτική ικανότητα από τα EWMA-SN και DEWMA-SN για μικρές μετατοπίσεις, ενώ υπερέχει έναντι του GWMA-SN για μεγάλες και υπό προϋποθέσεις μέτριες μετατοπίσεις. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι το νέο διάγραμμα DHWMA-SN είναι πιο αποδοτικό από όλα τα διαγράμματα ελέγχου όταν η σύγκριση γίνεται υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 400$  ή  $SDRL_0 \leq ARL_0$ , ενώ στην περίπτωση που η σύγκριση γίνεται υπό τις συνθήκες  $ARL_0 \approx 370$  και  $SDRL_0 \approx 436$  για  $n = 5$ , το διάγραμμα HWMA-SN είναι πιο αποδοτικό για μικρές μετατοπίσεις.

Από την άλλη, όταν χρησιμοποιούμε όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης, τα οποία προτείνονται όταν η διεργασία βρίσκεται στην αρχή σε κατάσταση εντός ελέγχου για ορισμένα δείγματα και η μετατόπιση εμφανίζεται μετέπειτα, τα διαγράμματα HWMA-SN και DHWMA-SN δεν εν-

δείχνεται για εφαρμογή λόγω των πολύ υψηλών τιμών  $SDRL_0$  που έχουν. Άλλωστε, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, τα συγκεκριμένα διαγράμματα ελέγχου δεν είναι καθόλου αποδοτικά στην steady-state κατάσταση. Επιπρόσθετα, το διάγραμμα DGWMA-SN υπερέρχει έναντι του GWMA-SN για μικρές μετατοπίσεις, ενώ είναι σχεδόν ισοδύναμο στο υπόλοιπο εύρος μετατοπίσεων. Τέλος, το διάγραμμα TEWMA-SN είναι πιο αποδοτικό από το CUSUM-SN σε ένα εύρος μετατοπίσεων γύρω από την βέλτιστη μετατόπιση την οποία είναι σχεδιασμένο το τελευταίο διάγραμμα να ανιχνεύει γρήγορα, ενώ είναι πιο ευαίσθητο από τα EWMA-SN και DEWMA-SN για μικρές και πολύ μικρές μετατοπίσεις, αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 4, μελετώνται τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης, τα οποία εφαρμόζονται στην περίπτωση που η κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού είναι συνεχής και συμμετρική γύρω από την τιμή στόχο  $\theta_0$ . Εκτός από τα ήδη γνωστά διαγράμματα Shewhart-SR, CUSUM-SR, EWMA-SR, DEWMA-SR, GWMA-SR και HWMA-SR, παρουσιάζουμε τρία νέα διαγράμματα, τα DGWMA-SR, TEWMA-SR και DHWMA-SR. Η απόδοση των παραπάνω διαγραμμάτων ελέγχου υπολογίζεται για διάφορες συνεχείς και συμμετρικές κατανομές, ενώ τα συμπεράσματα από τη μεταξύ τους σύγκριση βασίζονται στην απόδοση που έχουν όταν η κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού είναι η τυποποιημένη κανονική και είναι παραπλήσια με αυτά του προηγούμενου κεφαλαίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι το διάγραμμα HWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου εμφανίζει υψηλές τιμές  $SDRL_0$  για  $n = 5$  κι ως εκ τούτου, προτείνεται η χρήση του για πιο μεγάλες τιμές του μεγέθους δείγματος. Επιπλέον, από τη σύγκριση των διαγραμμάτων με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης προκύπτει ότι το διάγραμμα DGWMA-SR είναι το πιο αποδοτικό για μικρές μετατοπίσεις, ενώ για μέτριες και μεγάλες μετατοπίσεις, τα διαγράμματα EWMA-SR, DEWMA-SR, GWMA-SR και DGWMA-SR είναι ισοδύναμα. Τέλος, τα διαγράμματα με τη χρήση της προσημικής-βαθμολογικής στατιστικής συνάρτησης είναι πιο αποδοτικά από τα αντίστοιχα σχήματα με τη χρήση της συνήθους προσημικής στατιστικής συνάρτησης, εκτός από την περίπτωση που το ποιοτικό χαρακτηριστικό ακολουθεί την Laplace κατανομή, ενώ εμφανίζονται πιο αποδοτικά από τα αντίστοιχα παραμετρικά διαγράμματα για μικρές μετατοπίσεις υπό μη κανονικές κατανομές.

## 5.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Τα τελευταία χρόνια, αρκετοί ερευνητές ασχολούνται με τη μελέτη των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα αυτών των διαγραμμάτων είναι ότι απαιτούνται

ελάχιστες πληροφορίες αναφορικά με την κατανομή που ακολουθεί το ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Σε αυτήν τη διατριβή εξετάσαμε μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου για την ανίχνευση μετατοπίσεων στην παράμετρο θέσης, όπου η εντός ελέγχου τιμή  $\theta_0$  είναι γνωστή εκ των προτέρων. Σε αρκετές περιπτώσεις, όμως, η συγκεκριμένη τιμή δεν είναι γνωστή και εκτιμάται από ένα δείγμα αναφοράς (Φάση I). Οι στατιστικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται σε αυτήν την περίπτωση είναι η Wilcoxon ανθροιστική βαθμολογική (Wilcoxon rank-sum, WRS) και η Mann-Whitney (MW), στις οποίες λαμβάνονται υπ' όψιν οι παρατηρήσεις των Φάσεων I και II. Έτσι, λοιπόν, ορισμένα από τα σχήματα που μελετήσαμε στην παρούσα διατριβή θα μπορούσαν να μελετηθούν χρησιμοποιώντας τις στατιστικές συναρτήσεις WRS και MW.

Επιπλέον, αρκετά μη παραμετρικά διαγράμματα τύπου Shewhart, CUSUM και EWMA έχουν μελετηθεί για την ταυτόχρονη ανίχνευση μετατοπίσεων στις παραμέτρους θέσης και διασποράς όταν αυτές είναι άγνωστες χρησιμοποιώντας τις στατιστικές συναρτήσεις Cucconi, Lepage, Cramér-von Mises (CvM) και Kolmogorov-Smirnov (KS). Ως εκ τούτου, τα προηγμένα διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτήν τη διατριβή, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να βελτιωθεί η απόδοση των κλασικών διαγραμμάτων ελέγχου για μικρές μετατοπίσεις.

## Παράρτημα Α

Οι παρακάτω ταυτότητες χρησιμοποιούνται για την εύρεση της εντός ελέγχου μέσης τιμής και διασποράς της στατιστική συνάρτησης  $W_i$ . Για  $\forall c \in [0, 1)$  ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^i l c^{l-1} &= \frac{d}{dc} \left( \sum_{l=1}^i c^l \right) = \frac{d}{dc} \left( \sum_{l=0}^i c^l - 1 \right) = \frac{d}{dc} \left( \frac{1 - c^{i+1}}{1 - c} \right) \\ &= \left[ \frac{-(1-c)(i+1)c^i + (1 - c^{i+1})}{(1-c)^2} \right] \\ &= \left[ \left( \frac{1 - c^{i+1}}{(1-c)^2} \right) - \left( \frac{(i+1)c^i}{(1-c)} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^i l(l-1)c^{l-2} &= \sum_{l=2}^i l(l-1)c^{l-2} = \frac{d^2}{dc^2} \left( \sum_{l=2}^i c^l \right) \\ &= \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \sum_{l=0}^i c^l - c - 1 \right) = \frac{d^2}{dc^2} \left( \frac{1 - c^{i+1}}{1 - c} \right) \\ &= \frac{d}{dc} \left[ \left( \frac{1 - c^{i+1}}{(1-c)^2} \right) - \left( \frac{(i+1)c^i}{(1-c)} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dc} \left( \frac{1 - c^{i+1}}{(1-c)^2} \right) - \frac{d}{dc} \left( \frac{(i+1)c^i}{(1-c)} \right) \\ &= \left[ \frac{-(1-c)^2(i+1)c^i + 2(1-c)(1 - c^{i+1})}{(1-c)^4} \right] \\ &\quad - \left[ \frac{(1-c)i(i+1)c^{i-1} + (i+1)c^i}{(1-c)^2} \right] \\ &= \left[ \frac{2(1 - c^{i+1})}{(1-c)^3} \right] - \left[ \frac{(i+1)c^i}{(1-c)^2} \right] - \left[ \frac{i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)} \right] - \left[ \frac{(i+1)c^i}{(1-c)^2} \right] \\ &= - \left[ \frac{i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)} \right] - \left[ \frac{2(i+1)c^i}{(1-c)^2} \right] + \left[ \frac{2(1 - c^{i+1})}{(1-c)^3} \right]. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^i l(l-1)(l-2)c^{l-3} &= \sum_{l=3}^i l(l-1)(l-2)c^{l-3} = \frac{d^3}{dc^3} \sum_{l=3}^i c^l = \frac{d^3}{dc^3} \left[ \sum_{l=0}^i c^l - c - c^2 \right] \\
&= \frac{d^3}{dc^3} \sum_{l=0}^i c^l = \frac{d^3}{dc^3} \left[ \frac{1-c^{i+1}}{1-c} \right] = \frac{d}{dc} \left[ \frac{d^2}{dc^2} \left[ \frac{1-c^{i+1}}{1-c} \right] \right] \\
&= \frac{d}{dc} \left[ - \left[ \frac{i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)} \right] - \left[ \frac{2(i+1)c^i}{(1-c)^2} \right] + \left[ \frac{2(1-c^{i+1})}{(1-c)^3} \right] \right] \\
&= -\frac{d}{dc} \left[ \frac{i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)} \right] - \frac{d}{dc} \left[ \frac{2(i+1)c^i}{(1-c)^2} \right] + \frac{d}{dc} \left[ \frac{2(1-c^{i+1})}{(1-c)^3} \right] \\
&= - \left[ \frac{i(i^2-1)c^{i-2}}{1-c} \right] - \left[ \frac{i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)^2} \right] - 2 \left[ \frac{i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)^2} \right] - \\
&\quad 4 \left[ \frac{(i+1)c^i}{(1-c)^3} \right] - 2 \left[ \frac{(i+1)c^i}{(1-c)^3} \right] + 6 \left[ \frac{(1-c^{i+1})}{(1-c)^4} \right] \\
&= - \left[ \frac{i(i^2-1)c^{i-2}}{1-c} \right] - 3 \left[ \frac{i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)^2} \right] - 6 \left[ \frac{(i+1)c^i}{(1-c)^3} \right] + \\
&\quad 6 \left[ \frac{(1-c^{i+1})}{(1-c)^4} \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^i l(l-1)(l-2)(l-3)c^{l-4} \\
&= \sum_{l=4}^i l(l-1)(l-2)(l-3)c^{l-4} = \frac{d^4}{dc^4} \sum_{l=4}^i c^l = \frac{d^4}{dc^4} \left[ \sum_{l=0}^i c^l - c - c^2 - c^3 \right] = \frac{d^4}{dc^4} \sum_{l=0}^i c^l \\
&= \frac{d}{dc} \left[ \frac{d^3}{dc^3} \left[ \frac{1-c^{i+1}}{1-c} \right] \right] = \frac{d}{dc} \left[ - \left[ \frac{i(i^2-1)c^{i-2}}{1-c} \right] - 3 \left[ \frac{i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)^2} \right] - 6 \left[ \frac{(i+1)c^i}{(1-c)^3} \right] + \right. \\
&\quad \left. 6 \left[ \frac{(1-c^{i+1})}{(1-c)^4} \right] \right] = -\frac{d}{dc} \left[ \frac{i(i^2-1)c^{i-2}}{1-c} \right] - 3 \frac{d}{dc} \left[ \frac{i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)^2} \right] - 6 \frac{d}{dc} \left[ \frac{(i+1)c^i}{(1-c)^3} \right] + \\
&\quad 6 \frac{d}{dc} \left[ \frac{(1-c^{i+1})}{(1-c)^4} \right] \\
&= - \left[ \frac{i(i^2-1)(i-2)c^{i-3}}{1-c} \right] - \left[ \frac{i(i^2-1)c^{i-2}}{(1-c)^2} \right] - 3 \left[ \frac{i(i^2-1)c^{i-2}}{(1-c)^2} \right] - 6 \left[ \frac{i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)^3} \right] - \\
&\quad 6 \left[ \frac{i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)^3} \right] - 18 \left[ \frac{(i+1)c^i}{(1-c)^4} \right] - 6 \left[ \frac{(i+1)c^i}{(1-c)^4} \right] + 24 \left[ \frac{(1-c^{i+1})}{(1-c)^5} \right] \\
&= - \left[ \frac{i(i^2-1)(i-2)c^{i-3}}{1-c} \right] - 4 \left[ \frac{i(i^2-1)c^{i-2}}{(1-c)^2} \right] - 12 \left[ \frac{i(i+1)c^{i-1}}{(1-c)^3} \right] - 24 \left[ \frac{(i+1)c^i}{(1-c)^4} \right] + \\
&\quad 24 \left[ \frac{(1-c^{i+1})}{(1-c)^5} \right].
\end{aligned}$$

## Παράρτημα Β

**Πίνακας Β1:** Τιμές ARL και SDRL (εντός παρενθέσεως) για το διάγραμμα Shewhart-SN

$n$	$a$	$b$	$\Delta$								
			0	0.01	0.03	0.05	0.10	0.15	0.20	0.30	0.40
9	0	0	256.00	252.36	226.30	186.50	96.71	48.10	24.77	7.45	2.58
			(255.50)	(251.86)	(225.80)	(186.00)	(96.21)	(47.60)	(24.26)	(6.93)	(2.02)
10	0	0	512.00	502.93	439.59	348.01	162.56	74.13	35.39	9.31	2.87
			(511.50)	(502.43)	(439.09)	(347.51)	(162.06)	(73.63)	(34.89)	(8.80)	(2.31)
11	0	1	157.54	134.87	97.89	71.00	33.03	16.50	8.85	3.10	1.43
			(157.04)	(134.37)	(97.39)	(70.50)	(32.53)	(16.00)	(8.34)	(2.56)	(0.79)
12	0	1	292.57	245.64	171.37	119.65	51.00	23.56	11.76	3.64	1.52
			(292.07)	(245.14)	(170.87)	(119.14)	(50.50)	(23.05)	(11.25)	(3.10)	(0.89)
13	1	1	292.57	286.18	242.89	184.24	78.35	33.78	15.70	4.28	1.61
			(292.07)	(285.68)	(242.39)	(183.73)	(77.85)	(33.27)	(15.20)	(3.75)	(0.99)
14	1	1	546.13	531.90	438.20	318.51	122.60	48.71	21.06	5.05	1.71
			(545.63)	(531.40)	(437.70)	(318.01)	(122.10)	(48.21)	(20.56)	(4.53)	(1.10)
15	0	2	268.59	215.68	140.90	93.82	36.88	16.20	7.88	2.51	1.23
			(268.09)	(215.18)	(140.40)	(93.32)	(36.38)	(15.69)	(7.37)	(1.95)	(0.53)

Πίνακας Β2: Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα CUSUM-SN

$\Delta$	$n = 5$				$n = 10$			
	$k = 0.025$ $H = 24.11$	0.125	0.25	0.375	0.05	0.25	0.5	0.75
0	370.82 (266.78)	366.92 (330.62)	370.61 (355.73)	362.70 (353.31)	370.33 (279.59)	370.48 (342.12)	371.64 (359.92)	378.58 (373.70)
0.01	314.02 (216.10)	<b>312.83</b> (276.28)	329.73 (311.36)	334.97 (328.01)	<b>271.55</b> (191.05)	288.07 (260.77)	315.15 (302.40)	340.07 (331.08)
0.03	161.68 (89.77)	<b>155.06</b> (120.05)	178.99 (160.57)	203.62 (190.87)	114.33 (58.63)	<b>109.49</b> (84.20)	138.84 (125.68)	174.57 (167.86)
0.05	100.50 (45.05)	<b>86.55</b> (56.01)	95.13 (77.28)	111.13 (99.70)	68.60 (26.95)	<b>55.35</b> (34.18)	63.65 (51.96)	81.71 (74.15)
0.10	50.90 (15.84)	37.22 (16.14)	<b>33.84</b> (19.67)	35.62 (25.38)	33.98 (9.26)	22.76 (9.15)	<b>20.29</b> (11.41)	21.88 (15.52)
0.15	33.85 (8.36)	23.38 (7.89)	19.35 (8.51)	<b>18.33</b> (9.89)	22.51 (4.85)	14.20 (4.37)	11.36 (4.65)	<b>10.73</b> (5.55)
0.20	25.46 (5.15)	17.03 (4.65)	13.46 (4.72)	<b>12.06</b> (5.07)	16.96 (2.96)	10.35 (2.64)	7.87 (2.59)	<b>6.99</b> (2.85)
0.30	16.98 (2.58)	11.01 (2.19)	8.34 (2.01)	<b>7.11</b> (2.10)	11.43 (1.45)	6.76 (1.16)	4.91 (1.12)	<b>4.15</b> (1.06)
0.40	12.68 (1.24)	8.17 (1.02)	6.16 (0.93)	<b>4.94</b> (0.98)	8.65 (0.74)	5.02 (0.71)	3.63 (0.58)	<b>3.06</b> (0.55)
EARL	20.92	17.62	17.57	18.34	15.51	13.16	13.64	15.14
ESDRL	9.34	11.30	13.51	15.46	7.00	8.95	11.08	13.37
$\min(ARL_1)$	10	7	5	4	7	4	3	2

**Πίνακας Β3:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα EWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου

$\Delta$	$n = 5$					$n = 10$				
	$\lambda = 0.05$ $L = 2.510$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
0	370.00 (387.47)	370.79 (374.69)	370.57 (369.93)	370.09 (366.01)	370.14 (367.95)	370.50 (392.73)	369.73 (372.50)	369.93 (372.30)	370.26 (368.78)	370.96 (366.88)
0.01	323.67 (339.34)	335.91 (336.86)	350.07 (349.51)	359.42 (356.22)	362.82 (362.32)	284.51 (296.96)	310.67 (309.32)	337.89 (337.58)	351.00 (349.85)	357.68 (352.11)
0.03	156.96 (154.86)	193.18 (191.27)	247.61 (243.42)	291.37 (286.00)	304.46 (302.09)	100.99 (97.63)	130.34 (126.42)	185.53 (181.49)	246.05 (246.01)	283.97 (282.22)
0.05	79.18 (72.75)	101.68 (95.97)	153.79 (150.19)	208.91 (208.40)	232.42 (232.55)	45.65 (40.32)	58.98 (53.49)	93.93 (90.08)	149.46 (148.54)	197.46 (196.24)
0.10	25.70 (20.31)	31.50 (25.72)	49.57 (45.73)	82.27 (80.29)	101.11 (98.82)	14.30 (10.65)	17.02 (12.36)	24.59 (21.16)	43.57 (41.89)	68.78 (66.95)
0.15	12.92 (9.28)	15.19 (10.61)	21.39 (17.57)	35.78 (33.48)	45.21 (43.25)	7.10 (4.92)	8.38 (5.20)	10.47 (7.49)	16.49 (14.38)	27.09 (25.95)
0.20	7.83 (5.15)	9.18 (5.61)	11.60 (8.18)	18.02 (15.92)	22.27 (20.23)	4.32 (2.80)	5.19 (2.85)	6.02 (3.62)	8.18 (6.19)	12.33 (10.89)
0.30	3.91 (2.09)	4.63 (2.22)	5.31 (2.73)	6.53 (4.46)	7.47 (5.48)	2.14 (1.18)	2.74 (1.17)	2.95 (1.36)	3.34 (1.81)	3.99 (2.76)
0.40	2.47 (0.88)	2.93 (0.94)	3.17 (1.18)	3.33 (1.51)	3.51 (1.74)	1.30 (0.53)	1.76 (0.64)	1.79 (0.69)	1.89 (0.81)	1.94 (0.94)
EARL	14.82	16.95	21.39	27.21	30.17	10.75	12.46	15.57	20.17	24.80
ESDRL	13.97	15.62	20.21	26.39	29.49	10.24	11.40	14.66	19.57	24.19
$\min(ARL_1)$	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1

**Πίνακας Β4:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα EWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης

$\Delta$	$n = 5$					$n = 10$				
	$\lambda = 0.05$ $L = 2.477$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
0	369.69 (359.72)	369.60 (363.34)	370.33 (366.93)	370.24 (365.93)	370.14 (367.95)	369.95 (356.85)	369.53 (362.68)	370.73 (369.26)	369.46 (366.32)	370.96 (366.88)
0.01	<b>324.73</b> (314.39)	335.69 (327.33)	349.38 (345.95)	359.57 (356.14)	362.82 (362.32)	<b>289.60</b> (274.53)	312.91 (301.99)	339.13 (335.66)	350.07 (347.56)	357.68 (352.11)
0.03	<b>163.21</b> (145.64)	195.04 (186.55)	247.78 (242.33)	291.51 (285.96)	304.46 (302.09)	<b>108.39</b> (92.43)	133.72 (124.40)	187.15 (181.01)	245.08 (243.74)	283.97 (282.22)
0.05	<b>85.73</b> (69.40)	104.41 (94.17)	154.31 (149.20)	209.11 (208.38)	232.42 (232.55)	<b>51.90</b> (37.68)	61.80 (52.43)	95.04 (89.59)	149.27 (147.36)	197.46 (196.24)
0.10	<b>31.00</b> (18.79)	33.90 (25.10)	50.32 (45.57)	82.41 (80.27)	101.11 (98.82)	<b>19.15</b> (9.41)	19.20 (11.88)	25.32 (21.04)	43.76 (41.66)	68.78 (66.95)
0.15	17.64 (8.28)	<b>17.26</b> (10.06)	22.04 (17.44)	35.88 (33.47)	45.21 (43.25)	11.40 (4.27)	<b>10.42</b> (4.81)	11.13 (7.40)	16.76 (14.31)	27.09 (25.95)
0.20	12.18 (4.58)	<b>11.15</b> (5.19)	12.15 (8.07)	18.09 (15.93)	22.27 (20.23)	8.12 (2.46)	7.09 (2.60)	<b>6.63</b> (3.47)	8.46 (6.13)	12.33 (10.89)
0.30	7.53 (1.91)	6.46 (2.01)	<b>5.82</b> (2.60)	6.56 (4.47)	7.47 (5.48)	5.20 (1.09)	4.34 (1.10)	<b>3.55</b> (1.22)	3.60 (1.75)	3.99 (2.76)
0.40	5.51 (0.95)	4.65 (0.83)	3.72 (1.00)	<b>3.33</b> (1.52)	3.51 (1.74)	3.92 (0.54)	3.22 (0.45)	2.43 (0.58)	2.28 (0.57)	<b>1.94</b> (0.94)
EARL	16.49	17.71	21.59	27.24	30.17	12.34	13.23	15.86	20.22	24.80
ESDRL	13.01	15.18	20.04	26.39	29.49	9.46	11.10	14.55	19.42	24.19
$\min(ARL_1)$	4	4	3	2	2	3	3	2	2	1

**Πίνακας Β5:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου

$\Delta$	$n = 5$					$n = 10$				
	$\lambda = 0.05$ $L = 1.963$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
0	370.48 (421.65)	370.89 (386.47)	370.22 (376.40)	370.37 (371.23)	370.73 (366.14)	370.79 (420.27)	370.18 (392.53)	370.39 (373.48)	370.43 (371.97)	369.48 (367.70)
0.01	308.42 (352.22)	326.06 (339.40)	342.39 (342.57)	355.46 (354.86)	362.65 (360.52)	263.59 (290.51)	287.05 (297.11)	318.93 (316.77)	344.84 (346.49)	354.00 (349.26)
0.03	132.52 (139.68)	162.03 (161.31)	217.94 (215.64)	266.48 (264.11)	301.13 (298.02)	83.38 (81.91)	104.29 (102.35)	152.21 (149.41)	208.46 (204.94)	263.51 (262.97)
0.05	65.88 (63.58)	81.65 (76.06)	120.90 (116.75)	176.14 (172.85)	224.61 (223.81)	38.59 (34.44)	46.53 (41.60)	69.45 (65.85)	112.77 (110.59)	168.33 (168.04)
0.10	22.24 (18.81)	26.09 (20.64)	36.57 (32.32)	61.68 (59.04)	95.64 (93.58)	12.70 (10.31)	14.48 (10.76)	18.53 (14.80)	29.44 (27.02)	52.54 (51.30)
0.15	11.35 (9.26)	13.21 (9.31)	16.51 (12.38)	25.75 (23.27)	42.56 (40.92)	6.34 (4.91)	7.27 (5.10)	8.59 (5.63)	11.65 (9.30)	20.06 (18.37)
0.20	6.81 (5.39)	8.09 (5.32)	9.61 (6.13)	13.09 (10.44)	20.95 (19.15)	3.83 (2.74)	4.41 (2.97)	5.20 (2.99)	6.25 (4.14)	9.52 (7.87)
0.30	3.18 (2.32)	4.01 (2.27)	4.72 (2.27)	5.35 (3.12)	7.06 (5.22)	1.95 (1.05)	2.13 (1.23)	2.67 (1.22)	2.92 (1.35)	3.54 (2.14)
0.40	1.74 (1.08)	2.47 (0.91)	2.97 (0.98)	3.09 (1.13)	3.38 (1.63)	1.27 (0.48)	1.29 (0.53)	1.73 (0.61)	1.79 (0.69)	1.90 (0.84)
EARL	13.28	15.08	18.49	23.53	29.27	9.69	10.89	13.36	17.03	21.92
ESDRL	13.71	14.22	17.30	22.60	28.57	9.71	10.38	12.46	16.34	21.35
$\min(ARL_1)$	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1

**Πίνακας Β6:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DEWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης

$\Delta$	$n = 5$					$n = 10$				
	$\lambda = 0.05$ $L = 1.863$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
0	370.26 (345.78)	370.66 (360.13)	370.61 (369.63)	370.17 (368.46)	370.73 (366.14)	370.04 (343.01)	370.34 (358.66)	369.73 (363.49)	370.45 (369.80)	370.44 (367.44)
0.01	<b>313.55</b> (290.62)	329.46 (317.17)	342.91 (335.77)	355.04 (351.52)	362.55 (360.52)	<b>272.65</b> (248.03)	292.54 (278.26)	320.80 (311.16)	344.94 (343.34)	354.87 (349.40)
0.03	<b>146.99</b> (121.17)	168.84 (152.38)	219.24 (212.62)	266.91 (263.16)	301.13 (298.02)	<b>98.34</b> (73.42)	111.91 (96.58)	154.52 (147.08)	209.35 (203.63)	263.94 (262.95)
0.05	<b>79.92</b> (55.56)	88.45 (72.63)	122.70 (115.21)	176.90 (172.13)	224.61 (223.81)	<b>51.56</b> (29.14)	52.93 (38.91)	71.87 (64.86)	113.74 (110.24)	168.72 (168.09)
0.10	34.44 (14.31)	<b>31.62</b> (18.67)	38.52 (31.92)	62.41 (58.63)	95.64 (93.58)	24.65 (7.22)	<b>20.12</b> (8.72)	20.30 (14.41)	30.18 (26.90)	52.80 (51.30)
0.15	23.36 (6.31)	18.69 (7.47)	<b>18.09</b> (11.99)	26.47 (23.16)	42.56 (40.92)	17.78 (3.39)	13.14 (3.55)	<b>10.32</b> (5.08)	12.26 (9.25)	20.27 (18.37)
0.20	18.53 (3.59)	13.81 (3.82)	<b>11.12</b> (5.65)	13.72 (10.32)	20.95 (19.15)	14.52 (2.07)	10.28 (1.99)	7.04 (2.41)	<b>6.82</b> (4.03)	9.70 (7.86)
0.30	13.90 (1.66)	9.77 (1.57)	6.44 (1.84)	<b>5.94</b> (3.00)	7.06 (5.22)	11.15 (1.02)	7.64 (0.92)	4.67 (0.89)	<b>3.45</b> (1.24)	3.73 (2.05)
0.40	11.52 (0.85)	7.90 (0.79)	4.78 (0.79)	3.70 (0.99)	<b>3.38</b> (1.63)	9.34 (0.55)	6.29 (0.49)	3.69 (0.54)	2.35 (0.54)	<b>2.28</b> (0.58)
EARL	17.72	17.31	19.13	23.77	29.27	13.80	13.13	14.12	17.27	22.03
ESDRL	11.29	13.14	16.93	22.44	28.57	8.18	9.50	12.14	16.21	21.34
$\min(ARL_1)$	10	7	4	3	2	8	5	3	2	2

**Πίνακας Β7:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου όταν  $n = 5$

$\Delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.698$	2.590	2.552	2.522	2.530	2.746	2.724	2.715	2.706	2.686
0	370.05 (403.84)	369.68 (403.52)	370.70 (396.96)	370.20 (389.78)	370.03 (373.09)	370.20 (376.67)	370.36 (379.48)	370.07 (375.22)	370.22 (371.63)	370.53 (373.81)
0.01	<b>298.27</b> (306.22)	302.61 (325.39)	310.41 (333.76)	316.59 (332.04)	335.43 (341.67)	310.26 (306.06)	315.45 (316.70)	322.77 (322.88)	331.04 (333.72)	341.94 (345.59)
0.03	134.09 (117.64)	<b>131.51</b> (123.99)	138.32 (131.77)	146.93 (142.17)	186.02 (184.78)	149.45 (132.84)	156.03 (146.85)	168.39 (162.92)	182.17 (177.52)	219.52 (214.37)
0.05	72.83 (56.46)	<b>67.90</b> (56.96)	70.58 (60.87)	74.55 (65.78)	95.20 (89.14)	81.39 (63.85)	80.87 (68.27)	85.52 (75.18)	92.96 (85.31)	121.95 (116.08)
0.10	28.12 (19.26)	<b>24.45</b> (18.01)	24.48 (18.35)	24.93 (19.03)	28.94 (23.50)	30.90 (21.30)	28.35 (20.31)	28.73 (21.25)	29.67 (22.77)	36.99 (32.62)
0.15	15.56 (9.73)	13.08 (8.64)	<b>12.80</b> (8.75)	12.85 (8.94)	14.07 (10.01)	16.77 (10.52)	14.94 (9.56)	14.80 (9.62)	14.85 (10.03)	16.66 (12.54)
0.20	9.93 (5.65)	8.29 (4.92)	7.99 (4.91)	<b>7.93</b> (4.92)	8.49 (5.41)	10.54 (6.10)	9.41 (5.43)	9.26 (5.37)	9.13 (5.48)	9.73 (96.28)
0.30	5.21 (2.52)	4.37 (2.15)	4.15 (2.05)	<b>4.11</b> (1.99)	4.24 (2.18)	5.42 (2.68)	4.92 (2.26)	4.84 (2.18)	4.65 (2.21)	4.75 (2.31)
0.40	3.15 (1.21)	2.77 (1.01)	<b>2.67</b> (0.88)	<b>2.67</b> (0.87)	2.68 (0.89)	3.22 (1.28)	3.08 (1.06)	3.07 (1.03)	2.93 (0.94)	2.94 (0.97)
EARL	14.38	13.71	13.99	14.38	16.32	15.40	15.19	15.65	16.28	18.58
ESDRL	12.35	12.60	13.00	13.30	15.20	12.96	13.30	13.91	14.78	17.35
$\min(ARL_1)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$\Delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.755$	2.796	2.808	2.819	2.827	2.653	2.727	2.751	2.769	2.803
0	370.01 (369.04)	370.50 (367.08)	370.36 (367.27)	370.67 (366.12)	370.50 (371.23)	369.91 (367.13)	369.25 (366.07)	369.38 (368.59)	369.81 (368.65)	370.64 (369.34)
0.01	328.10 (321.77)	341.57 (338.62)	348.67 (345.93)	348.06 (344.25)	352.60 (348.70)	346.88 (341.77)	351.90 (348.35)	354.11 (351.91)	352.91 (348.30)	360.61 (359.57)
0.03	190.67 (181.07)	217.34 (215.84)	230.93 (228.90)	239.76 (236.29)	263.30 (260.21)	244.45 (241.17)	267.82 (264.45)	274.83 (269.83)	282.33 (278.44)	299.21 (297.82)
0.05	104.49 (91.47)	124.09 (118.36)	133.79 (129.03)	143.52 (139.75)	170.48 (166.95)	150.22 (146.57)	178.03 (177.33)	188.78 (190.12)	198.14 (198.42)	219.81 (221.59)
0.10	37.49 (28.09)	39.72 (32.61)	42.22 (36.41)	45.43 (40.49)	58.00 (55.19)	50.81 (44.43)	63.43 (59.62)	69.83 (66.63)	76.11 (73.09)	92.54 (89.93)
0.15	19.15 (12.99)	19.06 (13.78)	19.49 (14.69)	20.34 (15.99)	24.54 (21.63)	23.5 (18.30)	27.78 (23.98)	30.25 (27.22)	33.07 (30.49)	40.61 (38.55)
0.20	11.65 (7.30)	11.16 (7.00)	11.18 (7.24)	11.31 (7.65)	12.61 (9.90)	13.17 (9.30)	14.39 (11.21)	15.39 (12.71)	16.76 (14.28)	20.00 (18.00)
0.30	5.67 (3.05)	5.47 (2.75)	5.37 (2.68)	5.30 (2.67)	5.27 (2.98)	5.93 (3.44)	5.99 (3.61)	6.07 (3.78)	6.28 (4.10)	6.86 (5.00)
0.40	3.24 (3.34)	3.21 (1.26)	3.19 (1.22)	3.16 (1.18)	3.07 (1.12)	3.27 (1.39)	3.27 (1.39)	3.26 (1.40)	3.28 (1.43)	3.33 (1.56)
EARL	17.68	19.08	19.89	20.57	22.93	21.49	23.91	24.98	25.99	28.68
ESDRL	15.55	17.48	18.44	19.21	21.87	20.01	22.83	24.11	25.09	28.06
$\min(ARL_1)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2



**Πίνακας Β8:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου όταν  $n = 10$

$\Delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.773$	2.612	2.560	2.530	2.530	2.829	2.764	2.736	2.715	2.700
0	370.03 (398.42)	369.96 (398.80)	370.26 (393.28)	371.51 (387.99)	371.18 (377.54)	370.77 (387.12)	369.96 (374.97)	370.75 (378.35)	369.90 (372.31)	370.63 (373.93)
0.01	<b>256.14</b> (254.33)	257.63 (268.56)	264.14 (272.31)	273.53 (279.13)	304.01 (309.55)	274.21 (268.62)	282.81 (281.64)	293.75 (294.97)	301.67 (301.04)	320.58 (320.23)
0.03	93.47 (76.65)	<b>85.91</b> (75.22)	88.36 (79.77)	93.16 (84.89)	121.16 (117.31)	104.95 (87.88)	103.43 (92.15)	108.84 (100.47)	118.56 (111.69)	151.16 (147.97)
0.05	47.70 (35.34)	<b>41.62</b> (32.74)	41.91 (33.83)	43.45 (35.64)	53.57 (48.11)	52.78 (39.34)	49.28 (39.12)	50.52 (41.46)	53.89 (46.34)	69.31 (63.44)
0.10	17.25 (11.38)	14.57 (9.95)	<b>14.19</b> (10.03)	14.29 (10.21)	15.79 (11.73)	18.80 (12.33)	16.59 (11.39)	16.41 (11.42)	16.63 (11.88)	18.68 (14.72)
0.15	9.20 (5.47)	7.69 (4.63)	7.33 (4.59)	<b>7.27</b> (4.67)	7.77 (4.97)	9.92 (5.89)	8.60 (5.19)	8.37 (5.09)	8.29 (5.15)	8.73 (5.70)
0.20	5.84 (3.23)	4.94 (2.65)	4.67 (2.60)	<b>4.57</b> (2.60)	4.81 (2.76)	6.21 (3.37)	5.39 (2.97)	5.26 (2.87)	5.16 (2.84)	5.30 (2.94)
0.30	3.02 (1.39)	2.71 (1.13)	2.55 (1.06)	<b>2.48</b> (1.03)	2.54 (1.10)	3.17 (1.46)	2.81 (1.26)	2.78 (1.21)	2.74 (1.16)	2.77 (1.18)
0.40	1.85 (0.76)	1.76 (0.64)	1.72 (0.58)	<b>1.70</b> (0.55)	<b>1.70</b> (0.56)	1.88 (0.79)	1.77 (0.65)	1.77 (0.65)	1.76 (0.64)	1.76 (0.64)
EARL	10.67	10.06	10.15	10.44	11.87	11.51	11.24	11.53	11.92	13.41
ESDRL	9.11	9.08	9.23	9.49	11.04	9.74	9.88	10.32	10.76	12.40
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\Delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.871$	2.871	2.869	2.865	2.859	2.862	2.871	2.879	2.883	2.892
0	370.36 (373.13)	369.75 (369.60)	370.25 (371.19)	370.17 (373.42)	369.96 (377.10)	370.19 (371.94)	369.65 (371.95)	370.78 (373.10)	369.66 (371.90)	370.43 (373.10)
0.01	312.04 (308.85)	316.10 (313.86)	327.89 (326.60)	330.96 (332.85)	341.38 (342.73)	346.36 (343.61)	347.90 (345.47)	351.06 (350.35)	348.33 (347.39)	348.85 (347.88)
0.03	144.65 (132.24)	157.03 (153.60)	167.69 (165.38)	175.13 (173.22)	201.01 (199.89)	222.49 (223.58)	234.94 (237.74)	238.50 (239.71)	240.58 (242.13)	253.16 (254.35)
0.05	71.09 (59.27)	74.60 (67.49)	80.62 (74.86)	86.79 (82.51)	107.36 (105.10)	125.91 (121.30)	135.92 (134.70)	140.57 (140.13)	145.15 (144.39)	156.78 (156.77)
0.10	22.90 (16.05)	21.55 (16.28)	22.25 (17.75)	23.15 (19.33)	28.09 (25.54)	37.06 (32.00)	38.50 (35.28)	40.18 (37.56)	41.60 (39.47)	46.85 (45.32)
0.15	11.31 (7.12)	10.34 (6.66)	10.27 (6.83)	10.27 (7.08)	11.27 (8.75)	15.84 (12.25)	15.31 (12.53)	15.45 (12.98)	16.00 (13.81)	17.81 (16.32)
0.20	6.88 (3.96)	6.22 (3.51)	6.08 (3.47)	5.99 (3.48)	6.17 (3.91)	8.70 (6.01)	8.12 (5.67)	8.04 (5.84)	8.12 (6.02)	8.54 (6.99)
0.30	3.33 (1.65)	3.12 (1.42)	3.00 (1.40)	2.96 (1.36)	2.94 (1.34)	3.67 (2.14)	3.49 (1.89)	3.38 (1.81)	3.39 (1.82)	3.25 (1.90)
0.40	1.90 (0.82)	1.88 (0.78)	1.79 (0.69)	1.79 (0.69)	1.79 (0.68)	1.93 (0.91)	1.92 (0.87)	1.89 (0.82)	1.90 (0.82)	1.80 (0.72)
EARL	13.76	13.93	14.52	14.95	16.57	18.58	19.14	19.51	19.76	20.74
ESDRL	12.11	12.69	13.45	14.05	15.88	17.53	18.39	18.87	19.16	20.29
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

**Πίνακας Β9:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης όταν  $n = 5$

$\Delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.635$	2.532	2.499	2.482	2.513	2.723	2.709	2.701	2.692	2.680
0.00	370.58 (350.89)	370.48 (349.39)	370.18 (358.94)	369.91 (357.64)	370.45 (359.70)	369.43 (355.84)	370.54 (362.48)	370.42 (361.88)	370.21 (360.64)	370.92 (369.17)
0.01	<b>305.19</b> (274.29)	307.77 (283.36)	309.62 (294.83)	316.73 (305.47)	337.67 (330.92)	312.01 (287.76)	318.08 (302.11)	323.79 (312.72)	330.34 (322.40)	342.42 (340.63)
0.03	145.50 (111.92)	<b>144.59</b> (115.78)	147.72 (123.59)	156.08 (135.89)	189.03 (178.96)	154.91 (127.09)	162.05 (143.72)	172.15 (158.73)	183.50 (171.56)	220.25 (211.84)
0.05	82.76 (55.63)	<b>79.56</b> (54.15)	79.68 (56.87)	82.13 (62.11)	99.10 (86.40)	86.89 (62.60)	86.14 (67.18)	89.58 (73.64)	96.02 (83.16)	123.31 (114.45)
0.10	34.25 (19.49)	32.39 (17.40)	31.58 (17.27)	<b>31.09</b> (17.63)	32.40 (22.63)	34.57 (21.04)	32.32 (19.67)	32.02 (20.51)	32.48 (22.19)	38.69 (32.04)
0.15	19.58 (10.00)	18.94 (8.73)	18.47 (8.38)	18.05 (8.19)	<b>17.20</b> (9.08)	19.44 (10.50)	18.05 (9.36)	17.55 (9.26)	17.29 (9.51)	18.15 (12.29)
0.20	13.02 (6.04)	12.94 (5.16)	12.76 (4.92)	12.51 (4.73)	11.57 (4.64)	12.77 (6.22)	12.01 (5.38)	11.68 (5.22)	11.41 (5.13)	<b>11.07</b> (5.88)
0.30	7.21 (2.70)	7.59 (2.29)	7.63 (2.16)	7.63 (2.02)	7.22 (1.76)	7.02 (2.71)	6.83 (2.33)	6.72 (2.22)	6.66 (2.05)	6.18 (1.99)
0.40	4.61 (1.36)	5.19 (1.13)	5.36 (1.04)	5.49 (0.98)	5.41 (0.85)	4.53 (1.31)	4.52 (1.20)	4.49 (1.16)	4.73 (0.90)	4.44 (0.75)
EARL	16.04	15.89	15.90	16.17	17.54	16.41	16.33	16.61	17.12	19.12
ESDRL	11.62	11.50	11.87	12.40	14.61	12.45	12.88	13.52	14.30	17.04
$\min(ARL_1)$	3	4	4	4	4	3	3	3	4	4
$\Delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.752$	2.792	2.805	2.817	2.825	2.652	2.727	2.751	2.769	2.803
0	370.79 (364.55)	370.50 (363.88)	370.02 (364.17)	371.00 (364.29)	369.97 (367.70)	369.08 (364.57)	369.70 (365.95)	369.60 (368.48)	369.94 (368.56)	370.65 (369.33)
0.01	328.48 (318.04)	340.55 (334.85)	348.20 (342.02)	348.41 (342.71)	352.76 (346.73)	346.04 (339.33)	352.34 (348.18)	354.28 (351.82)	353.10 (348.27)	360.62 (359.56)
0.03	192.78 (180.40)	217.80 (213.92)	231.09 (226.53)	239.56 (234.24)	263.60 (259.14)	243.98 (239.71)	268.29 (264.27)	275.06 (269.74)	282.63 (278.74)	299.22 (297.81)
0.05	106.03 (90.73)	124.60 (116.89)	134.36 (128.26)	144.23 (139.24)	170.81 (166.00)	150.40 (146.04)	178.70 (177.39)	188.97 (190.06)	198.27 (198.42)	219.82 (221.58)
0.10	38.81 (27.86)	40.75 (32.48)	43.19 (36.27)	46.25 (40.33)	58.62 (54.89)	51.12 (44.14)	63.74 (59.54)	70.00 (66.65)	76.14 (73.07)	92.54 (89.93)
0.15	20.35 (12.89)	19.99 (13.56)	20.31 (14.51)	21.06 (15.84)	25.25 (21.56)	23.96 (18.18)	28.09 (23.96)	30.40 (27.20)	33.14 (30.49)	40.63 (38.55)
0.20	12.68 (7.22)	12.04 (6.89)	11.95 (7.11)	11.96 (7.50)	13.22 (9.80)	13.65 (9.19)	14.71 (11.22)	15.53 (12.72)	16.80 (14.27)	20.01 (18.00)
0.30	6.55 (2.99)	6.25 (2.65)	6.11 (2.53)	5.96 (2.52)	<b>5.85</b> (2.84)	6.50 (3.29)	6.23 (3.64)	6.14 (3.80)	6.30 (4.09)	6.86 (5.00)
0.40	4.06 (1.28)	4.00 (1.17)	3.97 (1.10)	3.89 (1.02)	3.69 (0.97)	3.99 (1.27)	3.99 (1.48)	<b>3.28</b> (1.41)	3.29 (1.44)	3.33 (1.56)
EARL	18.10	19.36	20.16	20.83	23.14	21.64	24.03	25.03	26.01	28.68
ESDRL	15.33	17.28	18.26	19.09	21.73	19.87	22.83	24.11	25.09	28.06
$\min(ARL_1)$	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2

**Πίνακας B10:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης όταν  $n = 10$

$\Delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.709$	2.550	2.507	2.493	2.514	2.806	2.745	2.720	2.702	2.694
0.00	370.17 (350.90)	369.82 (346.58)	369.36 (351.14)	370.14 (353.16)	369.62 (360.88)	369.66 (360.47)	370.60 (359.24)	370.67 (365.47)	369.89 (360.92)	370.22 (366.62)
0.01	267.93 (235.68)	<b>265.35</b> (239.41)	269.66 (245.91)	278.43 (256.32)	307.03 (298.91)	278.50 (255.53)	286.65 (269.75)	296.91 (284.36)	304.48 (291.68)	321.44 (316.73)
0.03	104.39 (74.45)	<b>97.74</b> (70.91)	98.31 (74.78)	101.88 (81.92)	125.13 (113.52)	110.86 (85.45)	108.45 (89.35)	113.83 (99.04)	122.47 (109.35)	153.54 (147.01)
0.05	55.64 (35.05)	51.08 (31.26)	<b>50.30</b> (31.71)	50.58 (33.48)	57.29 (46.68)	57.53 (38.78)	53.82 (37.76)	54.36 (40.26)	57.29 (45.53)	71.37 (63.02)
0.10	21.79 (11.74)	20.48 (9.99)	20.07 (9.61)	19.63 (9.45)	<b>18.90</b> (10.85)	21.81 (12.46)	19.90 (10.97)	19.38 (11.00)	19.15 (11.34)	20.25 (14.42)
0.15	12.23 (5.83)	12.05 (4.92)	11.90 (4.64)	11.71 (4.41)	10.82 (4.27)	11.97 (6.03)	11.23 (5.10)	10.92 (4.91)	10.66 (4.82)	<b>10.25</b> (5.29)
0.20	8.03 (3.45)	8.26 (2.92)	8.28 (2.73)	8.26 (2.56)	7.73 (2.27)	7.77 (3.52)	7.54 (2.93)	7.39 (2.75)	7.24 (2.65)	6.82 (2.58)
0.30	4.34 (1.59)	4.89 (1.32)	5.06 (1.24)	5.17 (1.18)	5.13 (0.98)	4.18 (1.57)	4.35 (1.33)	4.38 (1.22)	4.37 (1.16)	4.23 (1.02)
0.40	2.72 (0.79)	3.43 (0.61)	3.59 (0.63)	3.71 (0.63)	4.02 (0.45)	2.69 (0.78)	2.93 (0.70)	3.08 (0.60)	3.09 (0.60)	3.19 (0.41)
EARL	12.05	11.77	11.83	12.04	13.01	12.35	12.22	12.46	12.78	14.01
ESDRL	8.71	8.38	8.52	8.84	10.58	9.43	9.52	9.99	10.45	12.21
$\min(ARL_1)$	2	3	3	3	3	2	2	2	2	3
$\Delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.866$	2.869	2.866	2.862	2.857	2.861	2.871	2.877	2.883	2.891
0	369.80 (367.34)	370.73 (366.40)	369.68 (367.12)	370.57 (371.43)	369.58 (374.70)	369.75 (370.08)	369.92 (371.82)	370.10 (370.99)	370.85 (372.07)	370.38 (371.56)
0.01	312.32 (304.42)	319.29 (312.77)	327.80 (323.02)	331.32 (330.41)	341.54 (341.05)	346.20 (342.45)	348.34 (345.48)	349.94 (346.98)	349.56 (347.67)	348.78 (347.04)
0.03	145.53 (130.75)	159.00 (153.13)	168.58 (164.64)	176.22 (172.83)	201.85 (199.06)	222.47 (222.43)	235.36 (237.82)	237.92 (238.13)	241.37 (242.14)	252.83 (253.35)
0.05	72.52 (58.81)	75.91 (67.04)	81.51 (74.32)	87.76 (81.77)	108.32 (105.04)	125.90 (120.55)	136.19 (134.67)	140.72 (139.73)	145.78 (144.46)	156.76 (156.15)
0.10	24.01 (15.90)	22.64 (16.15)	23.10 (17.47)	23.89 (19.04)	28.72 (25.46)	37.36 (31.84)	38.66 (35.30)	40.46 (37.46)	42.00 (39.57)	47.19 (45.35)
0.15	12.19 (7.05)	11.17 (6.52)	11.01 (6.69)	11.03 (6.96)	11.80 (8.69)	16.12 (12.21)	15.44 (12.52)	15.72 (12.90)	16.25 (13.76)	18.11 (16.28)
0.20	7.62 (3.89)	6.97 (3.44)	6.77 (3.36)	6.70 (3.32)	<b>6.69</b> (3.81)	8.94 (5.96)	8.21 (5.68)	8.31 (5.78)	8.34 (5.99)	8.85 (6.95)
0.30	3.91 (1.61)	3.69 (1.40)	3.62 (1.34)	3.63 (1.27)	<b>3.43</b> (1.21)	3.89 (2.17)	3.52 (1.91)	3.67 (1.73)	3.58 (1.72)	3.55 (1.79)
0.40	2.48 (0.72)	2.43 (0.62)	2.42 (0.60)	2.45 (0.60)	2.35 (0.53)	2.04 (1.00)	<b>1.92</b> (0.87)	2.35 (0.61)	2.27 (0.56)	2.26 (0.54)
EARL	14.07	14.30	14.79	15.23	16.79	18.66	19.19	19.58	19.91	20.84
ESDRL	11.95	12.62	13.30	13.92	15.79	17.46	18.40	18.74	19.15	20.21
$\min(ARL_1)$	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2

**Πίνακας B11:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου όταν  $n = 5$

$\Delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 1.794$	1.718	1.783	1.868	2.139	2.106	2.078	2.123	2.187	2.359
0.00	370.52 (780.46)	369.51 (553.07)	370.62 (492.45)	369.88 (443.94)	370.24 (398.55)	369.87 (522.26)	369.39 (444.01)	370.07 (425.84)	369.91 (409.32)	370.59 (375.24)
0.01	<b>218.67</b> (410.66)	260.88 (379.55)	280.10 (366.11)	294.11 (350.52)	321.30 (348.41)	267.09 (362.78)	294.29 (349.81)	302.78 (346.26)	314.90 (350.01)	335.66 (336.79)
0.03	<b>70.26</b> (102.91)	90.85 (114.02)	105.96 (121.50)	119.97 (127.62)	159.61 (166.27)	99.81 (114.32)	119.24 (127.49)	130.75 (136.48)	145.49 (151.41)	191.54 (187.78)
0.05	<b>34.16</b> (43.69)	44.49 (51.32)	51.62 (54.18)	59.47 (58.47)	79.22 (76.25)	48.57 (50.02)	58.60 (57.00)	64.64 (61.98)	71.50 (68.98)	99.35 (92.99)
0.10	<b>12.51</b> (13.48)	15.17 (15.87)	17.65 (17.20)	20.16 (18.11)	25.77 (20.91)	17.29 (15.78)	19.76 (17.70)	21.44 (18.40)	23.29 (19.65)	30.41 (24.93)
0.15	<b>6.56</b> (6.10)	7.60 (7.14)	8.80 (7.96)	10.15 (8.59)	13.35 (9.92)	8.94 (7.33)	9.90 (8.34)	10.88 (8.85)	11.79 (9.28)	14.87 (10.33)
0.20	<b>4.16</b> (3.42)	4.66 (3.97)	5.29 (4.43)	6.10 (4.86)	8.16 (5.94)	5.58 (4.18)	5.93 (4.64)	6.49 (5.01)	7.04 (5.35)	9.10 (5.64)
0.30	<b>2.26</b> (1.40)	2.37 (1.59)	2.60 (1.82)	2.96 (2.05)	3.86 (2.76)	2.85 (1.85)	2.90 (1.94)	3.09 (2.17)	3.28 (2.37)	4.58 (2.47)
0.40	<b>1.49</b> (0.66)	<b>1.49</b> (0.68)	1.56 (0.80)	1.69 (0.98)	2.06 (1.40)	1.67 (0.94)	1.68 (0.95)	1.71 (1.01)	1.75 (1.10)	2.81 (1.10)
EARL	8.55	10.25	11.34	12.37	14.82	10.93	12.28	13.01	13.88	16.75
ESDRL	13.54	13.24	13.24	13.24	14.64	12.87	13.10	13.42	14.04	15.45
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
$\Delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.628$	2.574	2.583	2.593	2.648	2.796	2.824	2.828	2.828	2.818
0	369.94 (387.65)	369.75 (375.56)	370.47 (375.70)	370.10 (375.42)	370.35 (375.45)	370.01 (365.29)	370.91 (368.19)	370.59 (371.37)	370.95 (372.63)	370.21 (369.28)
0.01	313.30 (323.24)	331.22 (339.61)	336.23 (341.35)	336.25 (335.72)	345.40 (347.21)	341.35 (338.80)	352.37 (350.95)	351.89 (350.56)	351.92 (347.89)	359.84 (359.25)
0.03	145.24 (135.33)	175.16 (171.87)	190.90 (189.30)	204.92 (201.68)	238.59 (235.55)	217.41 (215.32)	243.84 (238.50)	251.61 (246.15)	261.20 (257.59)	282.54 (280.36)
0.05	74.80 (63.10)	89.11 (81.00)	98.80 (92.21)	109.33 (104.09)	141.92 (137.45)	124.33 (118.72)	148.00 (144.50)	158.73 (153.62)	167.85 (163.87)	192.00 (190.06)
0.10	26.02 (18.96)	28.22 (21.87)	30.51 (24.60)	33.16 (27.83)	44.67 (41.40)	39.98 (32.78)	47.30 (42.71)	51.74 (47.95)	56.48 (53.75)	70.54 (67.62)
0.15	13.65 (8.95)	14.01 (9.68)	14.77 (10.38)	15.57 (11.28)	19.11 (15.47)	19.17 (13.85)	20.85 (16.70)	22.46 (18.74)	23.98 (21.01)	29.99 (27.87)
0.20	9.13 (5.06)	8.59 (5.30)	8.94 (5.47)	9.29 (5.81)	10.62 (7.36)	11.21 (7.06)	11.45 (7.84)	11.95 (8.72)	12.37 (9.57)	14.93 (12.47)
0.30	4.53 (2.09)	4.39 (2.03)	4.51 (2.16)	4.63 (2.22)	5.00 (2.43)	5.47 (2.77)	5.30 (2.69)	5.31 (2.79)	5.25 (2.94)	5.75 (3.59)
0.40	2.91 (0.91)	2.88 (0.84)	2.89 (0.86)	2.92 (0.93)	3.08 (1.08)	3.21 (1.27)	3.16 (1.18)	3.14 (1.15)	3.07 (1.12)	3.18 (1.23)
EARL	14.00	15.86	16.72	17.51	20.26	19.10	21.01	21.86	22.66	25.26
ESDRL	12.96	14.57	15.45	16.19	19.16	17.51	19.73	20.61	21.57	24.40
$\min(ARL_1)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

**Πίνακας B12:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου όταν  $n = 10$

$\Delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 1.796$	1.730	1.789	1.884	2.131	2.104	2.064	2.112	2.175	2.367
0	369.32 (751.47)	370.88 (556.48)	369.56 (493.25)	369.35 (453.85)	370.67 (385.20)	370.24 (520.61)	370.09 (433.33)	372.25 (422.90)	370.47 (396.59)	369.62 (377.68)
0.01	<b>165.05</b> (248.52)	210.07 (292.36)	229.27 (289.91)	248.46 (299.48)	286.83 (297.08)	219.32 (277.73)	248.34 (278.01)	259.75 (282.84)	273.08 (289.83)	304.60 (308.80)
0.03	<b>44.07</b> (58.20)	57.58 (68.88)	65.91 (72.68)	73.97 (78.44)	102.19 (98.04)	63.22 (66.73)	75.59 (75.65)	83.51 (82.01)	92.37 (89.26)	125.24 (121.85)
0.05	<b>21.20</b> (24.61)	26.38 (29.95)	30.45 (30.90)	34.34 (32.98)	46.49 (40.40)	29.55 (28.40)	35.00 (31.64)	38.42 (33.42)	42.27 (36.47)	55.74 (51.57)
0.10	<b>7.49</b> (7.12)	8.59 (8.41)	9.87 (9.23)	11.19 (10.00)	15.13 (11.02)	10.13 (8.29)	11.38 (9.32)	12.47 (9.85)	13.58 (10.27)	16.50 (12.21)
0.15	<b>4.01</b> (3.26)	4.30 (3.70)	4.85 (4.12)	5.45 (4.63)	7.73 (5.42)	5.30 (3.78)	5.70 (4.21)	6.21 (4.53)	6.80 (4.81)	8.25 (5.37)
0.20	<b>2.62</b> (1.89)	2.70 (2.06)	2.97 (2.32)	3.26 (2.62)	4.69 (3.21)	3.93 (2.15)	3.52 (2.33)	3.80 (2.54)	4.14 (2.75)	5.08 (3.21)
0.30	<b>1.47</b> (0.78)	<b>1.47</b> (0.79)	1.53 (0.90)	1.59 (1.01)	2.24 (1.34)	1.89 (0.89)	1.90 (0.91)	1.96 (1.01)	2.07 (1.12)	2.41 (1.47)
0.40	<b>1.07</b> (0.28)	<b>1.07</b> (0.28)	1.08 (0.29)	1.08 (0.32)	1.32 (0.58)	1.28 (0.47)	1.28 (0.47)	1.28 (0.48)	1.29 (0.51)	1.33 (0.62)
EARL	6.11	7.42	8.17	8.91	10.95	8.05	9.04	9.59	10.22	12.06
ESDRL	8.42	9.40	9.43	9.80	10.33	8.99	9.18	9.47	9.82	11.33
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\Delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.638$	2.586	2.587	2.594	2.661	2.869	2.856	2.855	2.854	2.859
0	370.55 (386.07)	370.29 (375.75)	369.61 (374.23)	369.79 (375.81)	370.45 (377.15)	370.29 (365.80)	370.33 (369.74)	369.14 (372.42)	370.12 (368.61)	370.77 (370.63)
0.01	272.40 (277.75)	296.62 (301.73)	307.64 (310.99)	311.49 (313.53)	329.85 (333.48)	320.58 (317.94)	333.43 (334.20)	337.62 (337.83)	340.61 (336.72)	344.48 (340.20)
0.03	94.28 (83.99)	112.13 (107.46)	123.58 (118.59)	135.63 (132.18)	171.50 (168.96)	156.52 (150.67)	176.92 (174.22)	186.97 (186.56)	197.43 (197.65)	223.25 (224.03)
0.05	44.64 (35.43)	50.71 (43.28)	56.38 (50.30)	62.29 (57.41)	83.46 (79.54)	74.55 (67.76)	88.18 (84.28)	95.94 (93.32)	103.69 (101.98)	126.65 (125.69)
0.10	15.03 (10.34)	15.61 (11.12)	16.36 (12.00)	17.21 (13.10)	21.53 (17.93)	21.62 (16.32)	23.37 (19.47)	25.01 (21.55)	27.06 (24.13)	34.32 (32.59)
0.15	7.85 (4.72)	7.86 (4.83)	8.06 (4.98)	8.27 (5.23)	9.48 (6.60)	10.36 (6.66)	10.30 (7.14)	10.56 (7.73)	10.98 (8.28)	12.92 (10.82)
0.20	4.97 (2.68)	4.92 (2.76)	5.01 (2.82)	5.09 (2.86)	5.60 (3.18)	6.25 (3.53)	6.01 (3.53)	6.00 (3.64)	6.10 (3.81)	6.74 (4.81)
0.30	2.71 (1.13)	2.58 (1.16)	2.60 (1.18)	2.65 (1.17)	2.87 (1.28)	3.13 (1.44)	2.96 (1.37)	2.92 (1.34)	2.94 (1.36)	2.99 (1.44)
0.40	1.76 (0.63)	1.70 (0.55)	1.71 (0.56)	1.73 (0.59)	1.79 (0.68)	1.88 (0.77)	1.80 (0.69)	1.80 (0.68)	1.80 (0.68)	1.79 (0.69)
EARL	10.60	11.52	12.14	12.65	14.60	14.02	15.09	15.68	16.30	18.10
ESDRL	9.47	10.55	11.19	11.75	13.78	12.75	14.17	14.88	15.50	17.44
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

**Πίνακας B13:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης όταν  $n = 5$

$\Delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 1.205$	1.401	1.570	1.726	2.087	1.838	1.945	2.033	2.123	2.344
0	369.68 (317.45)	370.05 (325.87)	369.57 (334.48)	370.16 (342.51)	370.12 (349.90)	370.73 (331.95)	370.44 (346.16)	370.33 (351.05)	369.86 (347.93)	370.58 (360.21)
0.01	<b>296.56</b> (245.81)	299.14 (251.50)	301.58 (260.71)	306.03 (277.70)	325.60 (312.74)	298.97 (259.85)	304.48 (271.93)	310.89 (291.15)	317.25 (305.05)	338.51 (328.29)
0.03	135.81 (89.61)	135.81 (91.71)	138.06 (99.48)	141.80 (109.62)	167.54 (149.99)	<b>135.31</b> (96.06)	139.83 (108.62)	146.56 (122.18)	156.72 (136.85)	194.19 (181.47)
0.05	79.84 (42.38)	79.47 (41.97)	78.35 (44.09)	78.13 (48.96)	88.28 (70.44)	77.39 (45.60)	<b>76.44</b> (49.34)	77.68 (54.36)	82.25 (63.08)	102.92 (90.37)
0.10	37.78 (14.76)	39.07 (13.65)	37.82 (13.44)	36.07 (13.68)	33.18 (17.85)	34.62 (15.36)	33.16 (14.88)	32.04 (15.41)	<b>31.45</b> (16.83)	33.86 (23.93)
0.15	24.30 (7.69)	26.51 (6.87)	25.97 (6.58)	24.74 (6.34)	20.96 (6.83)	21.58 (7.87)	21.16 (7.11)	20.23 (6.98)	19.34 (7.09)	18.18 (9.03)
0.20	17.79 (4.72)	20.43 (4.18)	20.33 (3.93)	19.56 (3.73)	16.40 (3.48)	15.46 (4.74)	15.68 (4.12)	15.12 (3.94)	14.45 (3.81)	12.80 (4.22)
0.30	11.54 (2.23)	14.46 (1.97)	14.79 (1.86)	14.50 (1.75)	12.46 (1.52)	9.76 (2.19)	10.65 (1.87)	10.49 (1.75)	10.16 (1.64)	8.95 (1.49)
0.40	8.51 (1.08)	11.39 (0.99)	11.91 (0.95)	11.88 (0.89)	10.50 (0.76)	7.06 (1.04)	8.22 (0.93)	8.27 (0.85)	8.12 (0.82)	7.34 (0.72)
EARL	17.03	17.87	17.86	17.74	17.98	16.26	16.45	16.55	16.80	18.25
ESDRL	9.73	9.70	10.00	10.63	12.82	10.26	10.67	11.39	12.22	14.75
$\min(ARL_1)$	7	10	10	10	9	6	7	7	7	6
$\Delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.595$	2.558	2.572	2.586	2.645	2.793	2.821	2.826	2.826	2.817
0	370.14 (359.06)	370.01 (360.40)	369.97 (362.91)	370.16 (368.46)	369.55 (369.48)	369.66 (360.51)	370.49 (363.24)	370.16 (369.55)	369.77 (368.13)	370.19 (367.34)
0.01	313.36 (299.16)	332.69 (326.86)	337.45 (332.00)	337.68 (330.24)	346.02 (344.67)	340.90 (335.27)	350.79 (345.95)	350.54 (345.96)	351.24 (345.41)	360.10 (357.96)
0.03	153.01 (130.82)	178.69 (166.00)	193.32 (184.62)	207.22 (198.85)	238.78 (233.43)	218.33 (213.76)	242.26 (235.17)	251.23 (244.51)	261.18 (256.34)	282.89 (279.37)
0.05	82.22 (60.89)	93.23 (79.38)	101.96 (90.38)	111.93 (102.75)	143.00 (136.18)	125.09 (117.59)	148.13 (142.79)	159.09 (152.72)	168.74 (163.40)	192.46 (189.73)
0.10	31.51 (18.08)	31.81 (21.05)	33.17 (24.03)	35.44 (27.52)	45.85 (41.08)	41.02 (32.63)	47.97 (42.25)	52.28 (47.63)	57.14 (53.43)	71.06 (67.46)
0.15	18.08 (8.73)	17.28 (9.00)	<b>17.18</b> (9.73)	17.53 (10.92)	20.23 (15.34)	20.12 (13.70)	21.52 (16.60)	23.02 (18.65)	24.74 (20.95)	30.56 (27.74)
0.20	12.29 (5.03)	11.60 (4.82)	11.28 (4.93)	<b>11.15</b> (5.27)	11.61 (7.07)	12.08 (6.96)	12.04 (7.71)	12.47 (8.61)	13.00 (9.46)	15.39 (12.46)
0.30	7.27 (2.14)	6.98 (1.96)	6.81 (1.85)	6.62 (1.82)	6.24 (2.00)	6.24 (2.66)	5.91 (2.54)	<b>5.83</b> (2.67)	<b>5.83</b> (2.80)	6.17 (3.50)
0.40	5.10 (1.03)	4.94 (0.96)	4.92 (0.92)	4.87 (0.85)	4.61 (0.75)	3.99 (1.16)	3.85 (0.99)	3.72 (1.00)	<b>3.69</b> (0.97)	<b>3.69</b> (1.06)
EARL	16.03	17.02	17.65	18.31	20.70	19.41	21.17	22.01	22.89	25.44
ESDRL	12.26	14.06	14.99	15.87	18.92	17.33	19.45	20.41	21.44	24.32
$\min(ARL_1)$	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3

Πίνακας B14: Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης όταν  $n = 10$

$\Delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 1.207$	1.402	1.569	1.729	2.088	1.837	1.941	2.034	2.123	2.348
0	369.71 (323.94)	370.22 (325.60)	370.16 (332.70)	369.62 (335.86)	369.71 (351.53)	370.08 (335.19)	370.48 (346.23)	370.28 (351.27)	370.13 (355.40)	370.17 (357.07)
0.01	252.03 (198.78)	254.27 (208.29)	256.73 (216.09)	264.38 (231.26)	291.23 (275.40)	<b>249.91</b> (208.02)	261.23 (229.84)	270.40 (245.90)	279.88 (262.14)	309.63 (297.06)
0.03	95.44 (54.83)	95.07 (55.23)	94.18 (58.51)	95.04 (64.52)	110.55 (93.43)	<b>92.54</b> (58.22)	93.20 (65.04)	96.40 (73.24)	102.52 (83.47)	130.16 (118.34)
0.05	55.23 (25.50)	55.49 (24.12)	53.82 (24.60)	52.33 (26.24)	53.74 (36.89)	51.77 (26.70)	50.02 (27.35)	<b>49.73</b> (29.66)	50.52 (33.54)	60.01 (49.61)
0.10	25.92 (8.73)	28.07 (7.80)	27.40 (7.46)	26.13 (7.28)	22.35 (8.07)	23.06 (8.89)	22.54 (8.10)	21.64 (8.05)	20.75 (8.23)	19.95 (10.87)
0.15	16.73 (4.46)	19.46 (3.95)	19.41 (3.72)	18.76 (3.53)	15.78 (3.25)	14.48 (4.47)	14.85 (3.87)	14.37 (3.68)	13.76 (3.58)	12.16 (3.81)
0.20	12.33 (2.78)	15.25 (2.46)	15.51 (2.31)	15.20 (2.19)	12.98 (1.89)	10.47 (2.75)	11.29 (2.34)	11.09 (2.18)	10.72 (2.06)	9.43 (1.91)
0.30	8.01 (1.33)	10.91 (1.21)	11.44 (1.14)	11.47 (1.08)	10.19 (0.92)	6.65 (1.29)	7.84 (1.09)	7.93 (1.03)	7.83 (0.97)	7.13 (0.85)
0.40	5.94 (0.69)	8.66 (0.65)	9.31 (0.60)	9.48 (0.59)	8.70 (0.55)	4.85 (0.68)	6.13 (0.59)	6.35 (0.54)	6.36 (0.52)	6.04 (0.41)
EARL	12.89	13.82	13.85	13.85	13.94	12.10	12.49	12.63	12.80	13.77
ESDRL	7.05	7.08	7.25	7.65	9.27	7.34	7.76	8.23	8.81	10.64
$\min(ARL_1)$	5	7	8	8	8	4	5	5	5	5
$\Delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.608$	2.577	2.581	2.591	2.656	2.868	2.863	2.864	2.859	2.857
0	370.08 (355.45)	369.47 (355.94)	370.33 (363.19)	370.10 (363.72)	370.62 (371.65)	369.42 (365.69)	370.25 (373.85)	370.73 (377.41)	369.58 (374.90)	369.26 (368.05)
0.01	274.33 (254.22)	300.79 (289.20)	311.62 (303.47)	315.09 (306.88)	329.58 (327.66)	317.54 (309.52)	334.67 (337.51)	339.46 (339.34)	342.98 (340.76)	344.04 (338.40)
0.03	101.69 (70.90)	117.97 (103.93)	128.67 (117.83)	140.89 (132.44)	171.93 (166.07)	158.17 (152.42)	180.25 (176.44)	190.66 (186.98)	199.40 (196.00)	223.39 (223.09)
0.05	51.16 (33.62)	55.27 (42.76)	59.69 (49.40)	65.18 (56.44)	84.90 (79.40)	76.11 (67.29)	90.39 (84.21)	99.04 (93.82)	105.94 (101.98)	127.21 (125.45)
0.10	19.68 (10.05)	<b>18.93</b> (10.56)	18.98 (11.44)	19.39 (12.66)	22.69 (17.81)	22.77 (16.30)	24.53 (20.01)	26.15 (22.13)	28.07 (24.68)	34.76 (32.32)
0.15	11.48 (4.74)	10.84 (4.42)	10.54 (4.49)	<b>10.37</b> (4.72)	10.68 (6.28)	11.19 (6.59)	11.09 (7.21)	11.34 (7.86)	11.64 (8.46)	13.40 (10.84)
0.20	7.89 (2.75)	7.59 (2.42)	7.36 (2.37)	7.18 (2.34)	6.90 (2.68)	6.96 (3.45)	6.66 (3.39)	6.66 (3.52)	<b>6.65</b> (3.72)	7.15 (4.71)
0.30	4.76 (1.25)	4.84 (1.05)	4.78 (0.98)	4.73 (0.93)	4.51 (0.85)	3.69 (1.40)	3.56 (1.24)	3.53 (1.21)	3.43 (1.21)	<b>3.42</b> (1.29)
0.40	3.37 (0.57)	3.63 (0.57)	3.63 (0.57)	3.65 (0.55)	3.60 (0.53)	2.43 (0.62)	2.44 (0.58)	2.43 (0.58)	<b>2.35</b> (0.53)	<b>2.35</b> (0.53)
EARL	11.88	12.67	13.15	13.57	15.12	14.27	15.47	16.12	16.66	18.25
ESDRL	8.75	10.13	10.88	11.45	13.51	12.57	14.27	14.95	15.58	17.34
$\min(ARL_1)$	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2

**Πίνακας Β15:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα HWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου

$\Delta$	$n = 5$		$n = 10$				
	$\lambda = 0.05$ $L = 2.218$	0.10	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
0	369.97 (430.30)	370.29 (919.13)	370.52 (309.65)	370.34 (352.65)	369.51 (447.55)	370.04 (472.79)	370.48 (476.46)
0.01	278.60 (308.38)	229.55 (301.81)	260.66 (224.44)	261.98 (226.73)	280.25 (343.91)	309.23 (420.91)	322.44 (439.41)
0.03	112.18 (105.57)	99.97 (88.77)	87.70 (71.13)	94.85 (72.86)	98.94 (86.27)	100.73 (103.38)	105.06 (120.05)
0.05	59.28 (52.67)	56.77 (45.58)	42.69 (32.97)	47.35 (33.44)	51.54 (43.67)	55.61 (48.78)	54.96 (49.51)
0.10	21.21 (17.41)	22.24 (15.87)	14.31 (10.11)	16.52 (10.27)	16.60 (11.55)	22.52 (20.78)	24.21 (21.44)
0.15	11.00 (8.47)	12.11 (7.94)	7.47 (4.69)	8.75 (4.85)	8.48 (5.10)	9.96 (8.47)	13.02 (11.35)
0.20	6.84 (4.88)	7.73 (4.66)	4.83 (2.70)	5.63 (2.77)	5.32 (2.83)	5.43 (3.79)	7.60 (6.26)
0.30	3.56 (2.27)	4.20 (1.96)	2.65 (1.45)	3.15 (1.29)	2.90 (1.19)	2.58 (1.24)	3.20 (2.09)
0.40	2.09 (1.40)	2.79 (1.00)	1.55 (0.92)	1.98 (0.86)	1.86 (0.75)	1.70 (0.57)	1.78 (0.73)
EARL	12.20	11.28	10.14	10.73	11.24	12.33	13.06
ESDRL	11.92	11.92	8.11	8.26	11.32	13.96	14.98
$\min(ARL_1)$	1	2	1	1	1	1	1



**Πίνακας Β16:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα HWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης και  $n = 10$

	$\lambda = 0.20$	0.25	0.50	0.75
$\Delta$	$L = 3.1683$	3.1295	3.6877	2.5765
0	370.22 (816.00)	370.41 (677.23)	368.93 (482.46)	369.28 (477.29)
0.01	280.78 (621.75)	345.07 (666.21)	334.51 (458.57)	325.69 (445.20)
0.03	65.18 (159.09)	119.72 (284.79)	118.45 (166.03)	108.48 (132.89)
0.05	21.09 (39.59)	30.30 (55.04)	51.61 (52.99)	54.19 (50.06)
0.10	5.76 (7.40)	6.91 (9.73)	18.46 (20.01)	23.76 (21.38)
0.15	3.24 (2.66)	3.45 (3.21)	7.61 (7.73)	12.82 (11.31)
0.20	2.47 (1.20)	2.48 (1.36)	4.12 (3.17)	7.52 (6.23)
0.30	2.05 (0.27)	1.94 (0.42)	2.21 (0.87)	3.20 (2.08)
0.40	2.00 (0.04)	1.65 (0.48)	1.66 (0.50)	1.78 (0.73)
EARL	8.57	10.84	12.41	13.09
ESDRL	17.40	20.24	15.41	15.25
$\min(ARL_1)$	2	1	1	1

**Πίνακας B17:** Τιμές της παραμέτρου  $L$  για το διάγραμμα TEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου προκειμένου να επιτευχθεί μία καθορισμένη τιμή  $ARL_0$

$n$	$\lambda$	$ARL_0$			
		200	300	370	500
5	0.05	1.497	1.675	1.755	1.886
	0.10	1.792	1.965	2.057	2.185
	0.25	2.216	2.362	2.444	2.556
	0.50	2.535	2.674	2.744	2.840
	0.75	2.649	2.756	2.807	2.888
10	0.05	1.510	1.682	1.774	1.897
	0.10	1.807	1.962	2.047	2.172
	0.25	2.211	2.371	2.454	2.563
	0.50	2.543	2.689	2.761	2.862
	0.75	2.707	2.830	2.891	2.977
15	0.05	1.512	1.684	1.777	1.883
	0.10	1.807	1.964	2.052	2.177
	0.25	2.210	2.365	2.446	2.562
	0.50	2.547	2.697	2.769	2.868
	0.75	2.722	2.849	2.914	3.002
20	0.05	1.512	1.685	1.777	1.884
	0.10	1.791	1.966	2.054	2.180
	0.25	2.215	2.369	2.453	2.569
	0.50	2.550	2.698	2.770	2.874
	0.75	2.730	2.859	2.924	3.015
50	0.05	1.512	1.686	1.762	1.891
	0.10	1.793	1.969	2.051	2.176
	0.25	2.213	2.371	2.453	2.566
	0.50	2.556	2.702	2.776	2.880
	0.75	2.744	2.874	2.944	3.040

**Πίνακας B18:** Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα TEWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου

$\Delta$	$n = 5$					$n = 10$				
	$\lambda = 0.05$ $L = 1.755$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
0	370.16 226 (433.64)	370.66 244 (403.07)	370.71 255 (376.22)	370.00 256 (373.11)	369.67 260 (367.82)	370.65 224 (441.63)	370.66 247 (395.10)	370.39 252 (379.72)	370.52 254 (375.53)	370.35 255 (369.68)
0.01	300.06 189 (343.98)	317.07 209 (343.76)	341.92 236 (344.07)	354.05 244 (356.39)	360.66 249 (358.70)	254.20 157 (297.47)	280.36 189 (293.48)	316.88 219 (320.57)	337.88 233 (337.71)	351.34 243 (351.31)
0.03	127.36 90 (132.82)	150.59 104 (154.96)	201.57 140 (198.79)	254.57 176 (252.52)	294.33 205 (291.34)	80.02 61 (80.63)	97.51 72 (93.13)	137.44 96 (135.97)	189.41 133 (186.49)	244.79 169 (243.05)
0.05	65.39 52 (61.43)	75.51 56 (71.44)	108.16 77 (103.51)	160.73 112 (158.19)	215.10 149 (213.85)	38.63 31 (35.43)	45.03 36 (38.35)	61.44 44 (57.89)	97.16 69 (94.36)	148.51 103 (148.06)
0.10	23.63 19 (20.07)	25.58 22 (20.33)	32.90 25 (27.87)	52.56 37 (49.29)	88.43 63 (86.50)	13.34 10 (11.91)	15.25 13 (11.10)	17.26 14 (13.23)	24.83 18 (22.07)	42.51 30 (40.84)
0.15	12.29 10 (10.43)	13.51 12 (10.12)	15.61 13 (11.13)	21.94 16 (18.87)	38.79 27 (36.72)	6.56 5 (5.93)	7.84 7 (5.68)	8.43 8 (5.50)	10.23 8 (7.67)	15.95 12 (14.16)
0.20	7.37 6 (6.22)	8.32 7 (6.20)	9.40 8 (5.81)	11.65 9 (8.65)	19.31 14 (17.46)	3.77 3 (3.37)	4.72 4 (3.38)	5.16 5 (3.25)	5.77 5 (3.56)	7.76 6 (6.06)
0.30	3.34 3 (2.64)	3.90 3 (2.87)	4.71 4 (2.49)	5.15 5 (2.69)	6.74 5 (4.80)	1.68 1 (1.24)	2.19 2 (1.37)	2.44 2 (1.52)	2.84 3 (1.30)	3.11 3 (1.70)
0.40	1.76 1 (1.15)	2.07 1 (1.43)	2.86 2 (1.16)	3.10 3 (1.10)	3.34 3 (1.54)	1.09 1 (0.36)	1.30 1 (0.55)	1.35 1 (0.66)	1.77 2 (0.66)	1.79 2 (0.70)
EARL	13.22	14.51	17.54	21.99	28.08	9.47	10.72	12.72	15.70	19.99
ESDRL	13.62	14.25	16.34	21.04	27.34	10.10	10.17	12.04	14.94	19.46
$\min(ARL_1)$	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1

Πίνακας Β18: (συνέχεια)

$\Delta$	$n = 15$					$n = 20$				
	$\lambda = 0.05$ $L = 1.777$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
0	370.70 218 (449.35)	369.88 244 (399.31)	370.29 252 (377.00)	370.34 252 (374.92)	370.13 256 (365.41)	370.50 219 (448.60)	370.24 244 (399.13)	370.27 253 (378.88)	370.76 254 (373.87)	369.66 256 (370.10)
0.01	219.87 140 (255.79)	247.97 168 (259.72)	288.58 201 (290.22)	321.63 223 (321.85)	338.79 234 (340.07)	194.79 126 (223.39)	227.70 153 (238.20)	270.61 188 (269.87)	307.58 213 (309.20)	331.12 229 (332.03)
0.03	60.02 47 (58.86)	71.94 54 (66.49)	102.60 72 (99.79)	151.47 105 (149.91)	206.69 144 (206.11)	49.10 39 (46.48)	57.96 45 (52.31)	81.10 59 (77.81)	124.90 88 (122.48)	176.19 122 (175.08)
0.05	28.66 23 (25.91)	32.56 27 (26.46)	42.64 31 (38.19)	68.19 48 (66.07)	109.25 77 (108.13)	23.06 18 (20.55)	25.92 22 (20.27)	32.82 25 (28.10)	51.55 36 (49.13)	85.20 60 (83.34)
0.10	9.48 7 (8.54)	10.95 9 (8.09)	12.13 11 (8.31)	15.87 12 (13.36)	26.66 19 (24.92)	7.39 6 (6.71)	8.63 7 (6.45)	9.47 8 (6.18)	11.75 9 (9.12)	18.71 14 (17.00)
0.15	4.51 3 (4.09)	5.48 4 (4.10)	6.15 6 (3.73)	6.80 6 (4.63)	9.69 7 (7.92)	3.46 2 (3.09)	4.23 3 (3.20)	4.84 4 (2.94)	5.29 5 (3.21)	6.86 5 (5.24)
0.20	2.58 1 (2.24)	3.24 3 (2.36)	3.82 3 (2.20)	3.96 4 (2.28)	4.96 4 (3.42)	2.01 1 (1.63)	2.48 2 (1.78)	2.96 3 (1.77)	3.24 3 (1.63)	3.66 3 (2.30)
0.30	1.26 1 (0.69)	1.54 1 (0.88)	1.92 2 (0.97)	1.95 2 (0.98)	2.29 2 (0.98)	1.12 1 (0.42)	1.25 1 (0.58)	1.48 1 (0.71)	1.73 2 (0.72)	1.75 2 (0.76)
0.40	1.01 1 (0.13)	1.06 1 (0.26)	1.19 1 (0.42)	1.19 1 (0.42)	1.47 1 (0.53)	1.00 1 (0.06)	1.01 1 (0.11)	1.04 1 (0.21)	1.13 1 (0.34)	1.13 1 (0.34)
EARL	7.75	8.79	10.50	12.95	16.34	6.70	7.71	9.21	11.35	14.19
ESDRL	8.26	8.38	9.78	12.37	15.84	7.06	7.35	8.52	10.78	13.72
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

**Πίνακας Β19:** Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα TEWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης

	$n = 5$					$n = 10$				
	$\lambda = 0.05$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
$\Delta$	$L = 1.623$	1.991	2.439	2.742	2.807	1.624	1.992	2.437	2.757	2.889
0	370.51 266 (335.53)	369.84 261 (350.64)	369.64 257 (364.05)	369.80 255 (270.67)	369.67 260 (367.82)	370.13 267 (331.05)	369.92 263 (350.58)	370.46 259 (362.23)	370.48 252 (371.83)	369.52 255 (366.55)
0.01	<b>312.19</b> 225 (278.76)	321.67 228 (304.29)	341.38 238 (332.75)	354.06 245 (353.83)	360.66 249 (358.70)	<b>271.00</b> 197 (235.12)	285.83 204 (264.54)	319.13 225 (307.92)	337.07 234 (334.22)	350.63 243 (348.70)
0.03	<b>148.15</b> 114 (111.04)	160.91 115 (139.15)	203.27 143 (192.97)	254.68 178 (249.51)	294.33 205 (291.34)	<b>102.05</b> 82 (66.35)	106.70 81 (85.70)	140.85 100 (131.86)	190.53 135 (185.48)	244.10 169 (240.53)
0.05	<b>84.81</b> 70 (49.72)	85.94 66 (65.12)	110.58 80 (100.63)	161.69 113 (157.15)	215.10 149 (213.85)	59.19 52 (25.66)	<b>53.71</b> 43 (34.18)	65.12 48 (56.26)	98.20 70 (93.50)	148.52 103 (146.83)
0.10	43.68 41 (12.51)	<b>34.60</b> 30 (16.19)	35.55 27 (27.12)	53.49 38 (49.12)	88.43 63 (86.50)	34.48 33 (6.57)	24.45 23 (7.42)	<b>19.99</b> 16 (12.17)	25.72 19 (21.88)	42.89 30 (40.69)
0.15	33.19 32 (5.79)	23.19 22 (6.39)	<b>18.04</b> 15 (10.18)	22.70 17 (18.76)	38.79 27 (36.72)	27.34 27 (3.34)	18.03 17 (3.20)	11.38 10 (4.22)	<b>11.06</b> 9 (7.48)	16.39 12 (14.12)
0.20	28.17 28 (3.50)	18.70 18 (3.40)	<b>12.08</b> 11 (4.72)	12.31 10 (8.53)	19.31 14 (17.46)	23.61 23 (2.12)	15.12 15 (1.92)	8.53 8 (2.03)	<b>6.62</b> 6 (3.28)	8.17 6 (6.02)
0.30	22.88 23 (1.72)	14.58 14 (1.54)	8.03 8 (1.55)	<b>5.88</b> 5 (2.44)	6.74 5 (4.80)	19.47 19 (1.09)	12.14 12 (0.95)	6.31 6 (0.84)	3.86 4 (0.98)	<b>3.48</b> 3 (1.62)
0.40	19.96 20 (0.89)	12.48 12 (0.78)	6.51 6 (0.67)	4.06 4 (0.82)	<b>3.34</b> 3 (1.54)	17.11 17 (0.60)	10.50 10 (0.55)	5.24 5 (0.44)	3.08 3 (0.29)	<b>2.27</b> 2 (0.53)
EARL	20.86	18.40	18.60	22.28	28.08	16.96	14.44	14.06	16.06	20.10
ESDRL	10.58	12.22	15.63	20.84	27.34	7.67	8.83	11.37	14.73	19.30
$\min(ARL_1)$	18	11	6	3	2	16	9	5	3	2

Πίνακας Β19: (συνέχεια)

$\Delta$	$n = 15$					$n = 20$				
	$\lambda = 0.05$ $L = 1.626$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
0	370.75 266 (335.83)	370.66 260 (353.49)	370.50 255 (365.21)	370.27 253 (369.22)	369.98 257 (364.69)	370.76 265 (335.45)	370.76 261 (350.22)	370.76 258 (364.85)	370.05 254 (368.92)	370.11 257 (368.74)
0.10	<b>240.48</b> 177 (204.55)	257.34 184 (236.01)	291.00 206 (281.27)	321.41 224 (317.56)	338.41 234 (338.73)	<b>216.81</b> 160 (181.50)	235.19 169 (214.38)	273.32 193 (260.80)	306.77 213 (304.40)	331.55 230 (331.17)
0.03	<b>81.72</b> 68 (47.17)	81.96 64 (61.66)	105.65 76 (97.11)	152.76 107 (148.44)	206.90 144 (205.63)	70.04 60 (35.76)	<b>67.42</b> 53 (47.23)	84.49 62 (75.73)	125.79 89 (121.76)	176.60 123 (174.57)
0.05	49.29 45 (17.23)	<b>41.41</b> 35 (22.44)	45.45 34 (36.97)	69.24 49 (65.12)	109.44 78 (107.79)	43.75 41 (12.66)	<b>34.71</b> 30 (16.23)	35.57 27 (27.14)	52.30 37 (48.38)	85.66 61 (83.20)
0.10	30.59 30 (4.67)	20.80 20 (4.84)	<b>14.73</b> 13 (7.22)	16.80 13 (13.18)	26.95 19 (24.87)	28.25 28 (3.75)	18.80 18 (3.66)	<b>12.23</b> 11 (5.00)	12.56 10 (8.95)	19.07 14 (17.03)
0.15	24.65 24 (2.48)	15.92 16 (2.28)	9.22 9 (2.58)	<b>7.67</b> 6 (4.30)	9.93 8 (7.88)	22.96 23 (2.03)	14.66 14 (1.83)	8.15 8 (1.86)	<b>6.10</b> 5 (2.92)	7.15 6 (5.20)
0.20	21.42 21 (1.61)	13.53 13 (1.42)	7.27 7 (1.34)	<b>4.95</b> 4 (1.88)	5.18 4 (3.37)	20.03 20 (1.33)	12.54 12 (1.16)	6.59 6 (1.04)	4.18 4 (1.28)	<b>3.94</b> 3 (2.21)
0.30	17.78 18 (0.85)	10.98 11 (0.74)	5.55 5 (0.63)	3.27 3 (0.59)	<b>2.53</b> 2 (0.90)	16.69 17 (0.72)	10.25 10 (0.61)	5.13 5 (0.49)	2.94 3 (0.51)	<b>2.17</b> 2 (0.60)
0.40	15.67 16 (0.54)	9.54 10 (0.52)	4.77 5 (0.44)	2.65 3 (0.48)	<b>1.82</b> 2 (0.45)	14.77 15 (0.47)	9.00 9 (0.47)	4.24 4 (0.43)	2.23 2 (0.41)	<b>1.61</b> 2 (0.49)
EARL	15.02	12.56	11.77	13.36	16.43	13.74	11.36	10.50	11.71	14.34
ESDRL	6.32	7.31	9.30	12.13	15.78	5.46	6.35	8.08	10.57	13.67
$\min(ARL_1)$	14	9	4	2	1	13	8	4	2	1

**Πίνακας Β20:** Τιμές της παραμέτρου  $L$  για το διάγραμμα DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου προκειμένου να επιτευχθεί μία καθορισμένη τιμή  $ARL_0$

$n$	$\lambda$	$L$	$ARL_0$	$SDRL_0$	$L$	$ARL_0$	$SDRL_0$	$L$	$ARL_0$	$SDRL_0$	$L$	$ARL_0$	$SDRL_0$
5	0.10	0.901	199.42	476.86	0.992	300.25	670.25	1.044	369.85	797.60	1.122	500.72	1027.77
	0.14	1.203	200.34	341.48	1.336	299.70	487.07	1.343	383.58	528.23	1.414	500.30	641.28
	0.15	1.283	200.52	321.93	1.345	300.36	401.04	1.398	370.20	464.72	1.499	500.43	597.32
	0.16	1.341	188.48	290.08	1.409	300.58	365.54	1.480	370.93	436.24	1.583	500.30	563.37
	0.17	1.362	200.96	252.32	1.485	299.89	343.09	1.560	369.67	412.43	1.664	499.24	536.44
	0.20	1.556	200.59	208.64	1.707	299.87	300.58	1.785	370.72	369.08	1.889	500.45	499.88
	0.25	1.870	199.37	181.77	2.009	299.61	287.67	2.070	370.98	371.33	2.140	499.27	545.24
	0.30	2.094	200.47	189.75	2.183	299.42	331.38	2.216	370.28	462.08	2.247	499.64	730.36
	0.40	2.261	200.74	331.38	2.282	300.42	663.93	2.293	370.77	847.22	2.308	499.76	1115.59
10	0.10	0.940	199.89	422.95	1.049	300.56	581.84	1.110	370.17	684.24	1.206	500.05	866.57
	0.14	1.257	199.54	303.54	1.334	299.55	373.94	1.412	369.68	436.55	1.537	500.35	547.44
	0.15	1.267	200.87	257.13	1.419	300.96	346.90	1.504	369.95	405.48	1.640	500.68	512.20
	0.16	1.342	200.96	239.46	1.504	299.65	323.14	1.599	370.59	380.59	1.742	499.76	483.03
	0.17	1.415	200.89	223.91	1.592	299.84	304.84	1.694	370.86	360.93	1.845	499.57	461.39
	0.20	1.649	200.68	192.26	1.856	299.84	268.31	1.938	369.84	303.82	2.092	499.79	391.91
	0.25	1.983	200.66	156.70	2.191	299.58	227.47	2.297	370.69	284.28	2.440	500.59	399.77
	0.30	2.260	200.97	151.11	2.435	299.44	243.77	2.518	369.63	324.33	2.637	500.42	443.81
	0.40	2.527	200.98	190.00	2.624	300.61	340.77	2.689	370.25	414.24	2.805	500.28	501.50
15	0.10	0.939	199.90	408.65	1.047	300.82	560.52	1.109	370.76	656.53	1.204	499.83	825.34
	0.14	1.245	199.43	291.70	1.346	300.75	369.46	1.428	370.99	429.06	1.560	500.48	533.89
	0.15	1.291	205.70	260.94	1.432	300.70	342.07	1.522	369.68	398.55	1.666	499.91	499.10
	0.16	1.346	199.31	235.88	1.521	299.89	318.84	1.619	370.14	374.43	1.772	499.21	471.08
	0.17	1.426	200.96	222.78	1.612	300.36	301.44	1.717	370.02	354.92	1.846	499.65	427.83
	0.20	1.664	200.69	191.94	1.851	300.14	252.39	1.965	369.73	296.79	2.134	500.18	379.45
	0.25	2.004	200.70	158.22	2.228	299.58	226.36	2.337	370.06	267.86	2.501	500.35	355.16
	0.30	2.285	200.96	155.95	2.485	299.82	225.61	2.590	370.18	275.99	2.725	500.46	380.94
	0.40	2.578	200.56	169.71	2.747	300.09	248.71	2.813	369.99	320.49	2.877	500.71	533.05
20	0.10	0.938	199.82	404.74	1.041	299.96	547.36	1.101	369.81	642.74	1.198	500.87	806.98
	0.14	1.237	200.38	285.24	1.351	299.41	365.31	1.434	370.65	425.95	1.567	499.83	530.00
	0.15	1.318	199.76	266.35	1.436	299.60	338.00	1.529	370.18	395.51	1.674	500.12	494.87
	0.16	1.358	200.93	235.75	1.528	300.87	317.39	1.627	370.29	370.71	1.781	499.59	466.49
	0.17	1.432	200.68	220.26	1.620	300.91	298.83	1.726	370.12	351.05	1.859	500.74	424.31
	0.20	1.672	200.68	190.06	1.862	299.59	249.33	1.978	370.14	294.34	2.151	500.19	376.97
	0.25	2.016	200.89	157.61	2.239	300.65	220.04	2.356	370.59	265.14	2.519	499.84	357.60
	0.30	2.290	199.24	149.17	2.506	300.69	222.54	2.606	370.27	280.67	2.744	500.98	389.09
	0.40	2.600	200.52	164.39	2.741	299.94	278.14	2.820	370.26	343.59	2.931	499.83	449.73

**Πίνακας B21:** Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 5$

	$\lambda = 0.10$	0.14	0.15	0.16	0.17	0.20	0.25	0.30	0.40
$\Delta$	$L = 1.044$	1.343	1.398	1.480	1.560	1.785	2.070	2.216	2.2929
0	369.85	383.58	370.20	370.93	369.67	370.72	370.98	370.28	370.77
	9	110	150	181	204	248	244	197	114
	(797.60)	(528.23)	(464.72)	(436.24)	(412.43)	(369.08)	(371.33)	(462.08)	(847.22)
0.01	222.20	285.24	285.51	290.99	294.11	301.19	299.41	280.23	218.05
	9	93	125	150	168	203	203	169	103
	(469.25)	(399.20)	(366.11)	(350.35)	(336.32)	(307.03)	(300.95)	(324.11)	(373.97)
0.03	69.04	105.26	111.11	117.16	121.30	130.70	131.00	118.88	91.81
	8	48	60	70	78	96	101	90	67
	(125.68)	(137.00)	(134.21)	(134.33)	(133.05)	(128.21)	(119.56)	(109.47)	(88.39)
0.05	33.26	52.35	56.11	59.70	62.31	68.81	71.10	66.01	53.95
	7	28	34	38	42	52	57	54	43
	(4.96)	(63.96)	(64.03)	(64.75)	(65.02)	(64.55)	(61.01)	(55.45)	(44.41)
0.10	11.65	17.72	19.09	20.35	21.37	24.11	26.09	25.36	22.53
	5	11	12	14	15	19	21	21	19
	(16.36)	(19.57)	(19.84)	(20.25)	(20.67)	(21.37)	(21.15)	(19.83)	(16.77)
0.15	6.13	8.98	9.63	10.31	10.80	12.22	13.47	13.37	12.35
	4	6	7	7	8	10	11	11	10
	(7.53)	(9.10)	(9.28)	(9.47)	(9.73)	(10.27)	(10.45)	(9.95)	(8.50)
0.20	3.96	5.53	5.88	6.33	6.59	7.42	8.22	8.27	7.88
	1	4	4	5	5	6	7	7	7
	(4.39)	(5.18)	(5.28)	(5.35)	(5.52)	(5.89)	(6.13)	(5.94)	(4.95)
0.30	2.07	2.74	2.87	3.15	3.24	3.60	3.95	4.00	4.15
	1	2	2	3	3	3	4	4	4
	(2.01)	(2.21)	(2.26)	(2.31)	(2.40)	(2.57)	(2.77)	(2.76)	(2.10)
0.40	1.26	1.62	1.65	1.78	1.80	2.02	2.16	2.16	2.69
	1	1	1	1	1	1	1	1	2
	(0.91)	(1.00)	(1.04)	(1.17)	(1.20)	(1.35)	(1.52)	(1.52)	(0.92)
EARL	8.46	11.52	11.86	12.35	12.66	13.48	13.80	13.05	10.88
ESDRL	13.78	14.79	14.05	13.77	13.51	12.91	12.60	12.76	13.28
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	2



**Πίνακας B22:** Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 10$

	$\lambda = 0.10$	0.14	0.15	0.16	0.17	0.20	0.25	0.30	0.40
$\Delta$	$L = 1.110$	1.412	1.504	1.599	1.694	1.938	2.297	2.518	2.689
0	370.17	369.68	369.95	370.59	370.86	369.84	370.69	369.63	370.25
	15	172	213	246	272	318	323	295	235
	(684.24)	(436.55)	(405.48)	(380.59)	(360.93)	(303.82)	(284.28)	(324.33)	(414.24)
0.01	190.11	247.19	254.25	261.00	266.75	278.55	284.65	278.39	272.17
	14	120	144	165	183	224	239	226	190
	(351.38)	(303.68)	(291.85)	(282.15)	(273.95)	(242.03)	(224.12)	(230.05)	(280.58)
0.03	48.44	74.63	79.57	84.03	88.05	99.61	108.67	108.37	104.80
	10	43	50	56	62	79	90	90	83
	(78.29)	(87.24)	(88.50)	(89.35)	(89.93)	(87.68)	(85.27)	(83.83)	(85.27)
0.05	22.36	34.58	36.99	39.31	41.48	48.15	53.98	54.53	53.00
	7	21	25	27	30	39	46	46	43
	(32.96)	(38.18)	(39.15)	(40.02)	(40.71)	(41.01)	(40.62)	(39.74)	(40.65)
0.10	7.47	11.01	11.73	12.44	13.13	15.50	18.05	18.69	17.99
	4	7	8	9	10	13	16	16	16
	(9.19)	(10.90)	(11.27)	(11.65)	(12.01)	(12.50)	(12.81)	(12.58)	(11.74)
0.15	4.00	5.57	5.92	6.22	6.53	7.70	9.08	9.51	9.32
	1	4	5	5	5	6	8	8	8
	(4.31)	(5.00)	(5.17)	(5.38)	(5.58)	(5.83)	(6.09)	(6.09)	5.51)
0.20	2.58	3.44	3.67	3.82	3.98	4.68	5.55	5.80	5.81
	1	3	3	3	4	4	5	5	5
	(2.57)	(2.88)	(2.97)	(3.09)	(3.22)	(3.32)	(3.50)	(3.57)	(3.15)
0.30	1.38	1.70	1.85	1.89	1.93	2.32	2.75	2.84	3.03
	1	1	1	1	1	2	3	3	3
	(1.07)	(1.25)	(1.36)	1.42)	(1.47)	1.46)	(1.65)	(1.69)	(1.36)
0.40	1.03	1.10	1.13	1.15	1.15	1.35	1.50	1.57	1.87
	1	1	1	1	1	1	1	1	2
	(0.28)	(0.40)	(0.51)	(0.57)	(0.58)	(0.67)	(0.89)	(0.97)	(0.78)
EARL	6.68	8.92	9.30	9.64	9.95	10.85	11.62	11.59	11.36
ESDRL	11.12	10.27	10.09	9.95	9.84	9.16	8.80	8.93	9.97
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	2

**Πίνακας B23:** Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 15$

	$\lambda = 0.10$	0.14	0.15	0.16	0.17	0.20	0.25	0.30	0.40
$\Delta$	$L = 1.109$	1.428	1.522	1.619	1.717	1.965	2.337	2.590	2.813
0	370.76	370.99	369.68	370.14	370.02	369.73	370.06	370.18	369.99
	20	183	221	254	278	325	331	318	285
	(656.53)	(429.06)	(398.55)	(374.43)	(354.92)	(296.79)	(267.86)	(275.99)	(320.49)
0.01	160.87	214.02	222.17	229.24	235.18	251.09	261.16	266.31	272.42
	17	110	131	149	164	202	220	220	208
	(284.95)	(260.24)	(253.44)	(247.33)	(241.53)	(217.59)	(201.92)	(208.43)	(236.39)
0.03	37.58	56.36	60.07	63.49	66.78	77.19	85.99	88.90	92.02
	11	34	39	44	48	62	73	75	73
	(56.74)	(64.22)	(65.42)	(66.20)	(66.98)	(66.20)	(64.87)	(65.17)	(73.98)
0.05	17.04	25.34	27.05	28.79	30.46	35.90	41.15	42.84	43.01
	7	16	18	20	22	29	35	37	36
	(23.23)	(27.19)	(27.95)	(28.71)	(29.38)	(29.90)	(29.90)	(29.57)	(31.07)
0.10	5.71	7.95	8.44	8.92	9.41	11.22	13.28	14.16	14.00
	4	6	6	7	7	9	11	13	12
	(6.38)	(7.54)	(7.82)	(8.11)	(8.39)	(8.75)	(9.04)	(8.97)	(8.69)
0.15	3.09	4.05	4.28	4.48	4.67	5.58	6.66	7.17	7.12
	1	3	4	4	4	5	6	6	6
	(3.05)	(3.49)	(3.61)	(3.75)	(3.91)	(4.05)	(4.22)	(4.26)	(4.07)
0.20	1.99	2.52	2.66	2.77	2.86	3.43	4.13	4.42	4.41
	1	1	1	1	1	3	4	4	4
	(1.80)	(2.04)	(2.12)	(2.21)	(2.30)	(2.35)	(2.40)	(2.46)	(2.36)
0.30	1.15	1.30	1.35	1.40	1.41	1.66	2.12	2.19	2.20
	1	1	1	1	1	1	2	2	2
	(0.62)	(0.78)	(0.86)	(0.94)	(0.96)	(1.05)	(1.15)	(1.20)	(1.17)
0.40	1.00	1.02	1.02	1.02	1.03	1.07	1.23	1.24	1.24
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	(0.10)	(0.15)	(0.17)	(0.22)	(0.24)	(0.31)	(0.53)	(0.56)	(0.54)
EARL	5.57	7.36	7.68	7.98	8.24	9.08	9.85	10.15	10.30
ESDRL	8.83	8.35	8.25	8.17	8.09	7.58	7.26	7.40	8.14
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

**Πίνακας B24:** Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SN με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για  $n = 20$

	$\lambda = 0.10$	0.14	0.15	0.16	0.17	0.20	0.25	0.30	0.40
$\Delta$	$L = 1.101$	1.434	1.529	1.627	1.726	1.978	2.356	2.606	2.820
0	369.81	370.65	370.18	370.29	370.12	370.14	370.59	370.27	370.26
	24	185	226	257	282	327	333	316	275
	(642.74)	(425.95)	(395.51)	(370.71)	(351.05)	(294.34)	(265.14)	(280.67)	(343.59)
0.01	140.74	189.43	197.76	205.62	211.75	227.46	239.33	241.66	243.44
	20	99	118	135	149	183	201	199	188
	(240.36)	(229.18)	(224.76)	(220.83)	(216.67)	(197.41)	(184.85)	(187.61)	(208.45)
0.03	30.78	45.71	48.89	51.90	54.59	63.45	71.49	73.59	74.88
	11	28	32	36	40	51	61	63	61
	(44.31)	(51.17)	(52.24)	(53.18)	(53.84)	(53.95)	(53.25)	(52.97)	(57.91)
0.05	13.88	20.13	21.56	22.95	24.26	28.66	33.24	34.63	34.36
	7	13	15	16	18	23	29	30	29
	(17.82)	(21.12)	(21.77)	(22.44)	(23.01)	(23.58)	(23.74)	(23.44)	23.90
0.10	4.74	6.30	6.69	7.07	7.43	8.84	10.54	11.23	11.13
	3	5	5	5	6	7	9	10	10
	(4.93)	(5.81)	(6.01)	(6.24)	(6.48)	(6.79)	(7.06)	(7.06)	(6.68)
0.15	2.58	3.23	3.41	3.58	3.72	4.41	5.29	5.66	5.69
	1	2	3	3	3	4	5	5	5
	(2.38)	(2.71)	(2.81)	(2.92)	(3.03)	(3.15)	(3.28)	(3.34)	(3.10)
0.20	1.69	2.01	2.12	2.21	2.28	2.70	3.27	3.47	3.56
	1	1	1	1	1	2	3	3	3
	(1.39)	(1.58)	(1.66)	(1.73)	(1.80)	(1.88)	(1.94)	(2.00)	(1.79)
0.30	1.07	1.13	1.15	1.16	1.19	1.33	1.62	1.66	1.84
	1	1	1	1	1	1	1	1	2
	(0.41)	(0.50)	(0.53)	(0.59)	(0.65)	(0.74)	(0.91)	(0.96)	(0.85)
0.40	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.05	1.04	1.14
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	(0.04)	(0.06)	(0.07)	(0.07)	(0.08)	(0.14)	(0.25)	(0.27)	(0.36)
EARL	4.87	6.38	6.67	6.95	7.18	7.91	8.62	8.82	8.88
ESDRL	7.42	7.15	7.08	7.03	6.98	6.58	6.34	6.41	6.94
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

**Πίνακας B25:** Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SN με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης για  $n = 10$

	$\lambda = 0.30$	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80
$\Delta$	$L = 3.2554$	3.167	3.038	2.853	2.687	2.6425	2.608
0	373.35	370.95	369.80	370.93	369.35	370.39	370.08
	3	9	106	186	180	182	180
	(2499.12)	(794.91)	(544.89)	(488.49)	(482.61)	(480.29)	(479.16)
0.01	82.33	277.11	389.43	348.65	335.33	333.21	328.39
	2	9	81	158	144	144	142
	(344.09)	(610.63)	(648.67)	(473.04)	(460.00)	(454.16)	(448.21)
0.03	17.22	58.60	133.37	155.02	119.69	114.86	110.62
	2	7	30	61	63	65	65
	(48.74)	(126.92)	(263.88)	(253.69)	(167.39)	(152.64)	(140.02)
0.05	8.44	21.21	38.96	51.67	52.15	53.39	54.02
	2	5	14	30	36	38	39
	(17.07)	(37.15)	(57.12)	(62.71)	(53.36)	(51.89)	(50.61)
0.10	3.87	6.18	9.26	13.85	18.73	21.27	23.12
	2	3	4	8	12	15	17
	(4.27)	(7.47)	(11.44)	(16.35)	(20.11)	(21.12)	(21.40)
0.15	2.74	3.46	4.31	5.69	7.76	9.72	11.84
	2	2	2	4	5	6	8
	(1.75)	(2.74)	(3.98)	(5.36)	(7.81)	(9.88)	(11.09)
0.20	2.31	2.58	2.81	3.38	4.18	5.01	6.43
	2	2	2	2	3	4	4
	(0.88)	(1.27)	(1.77)	(2.39)	(3.25)	(4.25)	(5.68)
0.30	2.04	2.08	1.98	2.07	2.21	2.38	2.67
	2	2	2	2	2	2	2
	(0.23)	(0.32)	(0.51)	(0.67)	(0.89)	(1.07)	(1.43)
0.40	2.00	2.04	1.65	1.66	1.66	1.68	1.72
	2	2	2	2	2	2	2
	(0.04)	(0.05)	(0.48)	(0.49)	(0.50)	(0.53)	(0.60)
EARL	3.52	8.48	12.39	12.69	12.48	12.74	12.94
ESDRL	12.26	16.72	19.70	16.67	15.48	15.38	15.28
$\min(ARL_1)$	2	2	1	1	1	1	1

Πίνακας B26: Δεδομένα για την εφαρμογή 1

$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$T_i$	$SR_i$
1	0.453	-0.366	-1.006	1.641	0.046	1.800	0.387	-0.543	1.209	-0.874	6	15
2	-0.928	-1.124	0.494	3.247	-1.336	-0.820	0.405	0.247	1.053	0.371	6	-1
3	0.381	0.192	0.641	-1.021	1.528	0.523	-0.211	-1.215	-0.003	-0.213	5	5
4	0.648	0.163	-0.001	-1.029	-0.180	4.335	0.181	-0.968	-0.004	1.349	5	11
5	0.395	0.230	0.414	-0.766	-2.724	0.517	0.639	-0.671	0.368	0.374	7	1
6	-1.322	-0.263	-1.941	-2.903	1.041	0.154	0.659	-0.161	-0.606	-0.066	3	-25
7	-0.407	-0.697	0.250	-0.015	-1.216	0.447	-0.415	1.149	0.610	0.183	5	-1
8	0.412	0.157	0.467	0.548	-0.064	0.756	-0.597	0.120	-1.051	-1.088	6	1
9	1.250	-0.728	2.104	-0.245	2.257	2.236	0.184	-0.863	0.596	0.005	7	27
10	0.713	1.636	-0.132	-0.042	0.712	-0.192	0.442	0.511	0.961	0.292	7	43
11	0.329	-0.085	0.187	-0.491	-0.318	1.087	-0.736	0.488	-1.472	0.316	5	-5
12	-0.468	-0.340	0.119	1.814	0.878	-0.146	-0.873	-1.765	-1.134	0.503	4	-9
13	0.922	-0.703	-1.571	1.927	0.350	-0.302	0.636	0.416	0.740	0.594	7	23
14	0.624	-1.050	-0.409	1.440	-0.291	-0.061	0.564	0.672	1.280	-1.842	5	9
15	2.367	0.270	-0.245	0.674	-0.866	0.351	-0.675	-1.426	-0.025	1.159	5	5
16	0.373	-0.422	1.099	-1.058	-1.045	-0.597	-0.327	-0.483	-0.922	-0.018	2	-29
17	0.720	0.431	0.861	1.569	1.275	0.513	0.086	-0.262	-0.140	0.395	8	45
18	0.525	-0.363	0.551	0.753	0.071	-0.134	0.290	1.035	-0.378	-0.937	6	15
19	0.425	-0.274	0.177	-0.670	-0.090	-0.306	-0.134	0.260	1.098	1.378	5	11
20	-0.412	1.320	-1.887	-0.691	-2.460	0.008	0.114	-0.096	0.341	0.154	5	-13
21	0.613	0.602	0.701	1.174	0.608	1.306	0.891	0.190	-0.054	-1.262	8	35
22	-0.866	0.141	0.922	0.228	-0.229	0.507	-0.699	2.011	0.119	0.436	7	17
23	1.028	-1.175	-0.674	-0.618	-0.559	-0.102	0.829	0.874	0.521	0.542	5	3
24	-0.861	0.594	-1.224	-0.671	-1.407	0.285	-2.548	0.949	-0.004	0.369	4	-23
25	-1.084	1.298	0.192	0.551	-0.237	-0.111	1.275	0.352	2.805	0.297	7	33
26	0.215	-1.209	-1.142	-1.771	-0.893	0.693	0.438	2.714	-1.236	-0.641	4	-21
27	0.805	-0.491	-0.763	0.763	0.409	0.441	-1.389	-0.188	-1.259	1.029	5	-5
28	0.397	0.739	0.457	1.250	1.032	-0.737	0.084	2.318	-0.534	0.487	8	33
29	-0.931	0.346	0.582	-0.137	0.562	-0.435	0.811	0.519	-1.035	0.403	6	7
30	0.355	1.502	0.822	0.437	-0.517	-0.891	-0.854	-0.158	1.735	0.458	6	13
31	-2.211	0.206	1.194	0.675	-0.912	0.135	-0.342	0.806	-0.099	-0.446	5	-1
32	0.325	1.457	-1.515	1.335	-1.513	-0.623	1.209	0.190	-0.035	1.259	6	7
33	-0.219	1.584	1.408	0.103	1.768	0.172	0.253	-0.095	-1.278	-0.582	6	19
34	-1.101	-0.100	1.789	1.427	-0.894	0.466	-0.386	-1.182	-1.735	0.100	4	-7
35	-0.229	0.339	0.784	3.021	0.380	0.405	0.339	1.312	-0.105	0.075	8	45
36	0.528	0.072	1.292	1.271	-0.690	1.038	1.188	0.991	-0.120	-0.916	7	33
37	-0.251	-0.509	0.268	-0.382	-1.390	1.270	1.102	-0.936	0.934	0.095	5	-1
38	0.613	0.966	0.353	-0.123	0.328	-0.591	-1.379	0.251	-0.611	0.934	6	11
39	0.262	0.183	0.292	-0.067	0.155	-0.929	0.103	0.386	-1.324	0.872	7	15
40	-0.924	0.210	0.221	-1.311	0.350	-0.289	-0.271	1.461	-1.498	1.060	5	-7

**Πίνακας Β26:** (συνέχεια)

$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$T_i$	$SR_i$
41	0.560	-1.633	-1.141	-0.385	0.317	0.305	-0.044	0.013	1.165	-0.300	5	-3
42	0.073	0.839	-0.173	1.717	1.343	-1.352	-0.627	-0.666	0.704	0.225	6	15
43	-1.134	-0.196	-0.524	0.733	0.092	0.605	0.038	0.468	0.906	-0.466	6	9
44	0.782	-1.215	-0.297	-0.458	1.604	-0.812	0.904	1.435	1.351	0.056	6	21
45	-1.243	-0.777	2.464	0.337	-0.264	-0.140	-0.755	-0.062	0.687	0.512	4	-5
46	-0.257	0.741	-0.979	0.897	1.197	1.240	-0.306	-0.553	-0.246	-0.251	4	9
47	1.044	0.376	-0.244	2.925	-1.808	-0.838	-0.457	0.517	-0.436	1.394	5	9
48	0.380	-3.575	1.072	0.425	0.034	1.457	-0.254	3.089	1.397	-0.354	7	25
49	1.027	-0.217	-0.199	0.464	-0.211	-1.334	-0.794	-0.480	0.501	-0.633	3	-17
50	-3.162	-0.056	-0.496	-0.807	-0.282	-0.656	0.632	0.015	0.224	-0.328	3	-33

Πίνακας B27: Δεδομένα για την εφαρμογή 2

$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$	$x_{16}$	$x_{17}$	$x_{18}$	$x_{19}$	$x_{20}$	$T_i$
1	0.289	0.380	0.483	0.288	0.544	0.390	0.567	0.512	0.433	0.168	0.128	0.428	0.081	0.575	0.396	0.574	0.730	0.407	0.367	0.452	13
2	0.447	0.599	0.207	0.317	0.256	0.433	0.218	0.329	0.432	0.674	0.233	0.570	0.748	0.364	0.372	0.798	0.218	0.405	0.060	0.632	10
3	0.081	0.368	0.435	0.216	0.246	0.229	0.623	0.455	0.394	0.616	0.116	0.611	0.666	0.262	0.410	0.234	0.692	0.719	1.033	0.376	11
4	0.954	0.537	0.621	0.513	1.540	0.609	0.801	1.080	1.069	0.954	0.852	0.425	1.389	0.794	1.081	0.900	0.521	0.576	0.761	0.535	20
5	0.316	0.237	0.286	0.879	0.190	0.104	0.570	0.448	0.269	0.746	0.344	0.191	0.366	0.315	0.408	0.522	0.598	0.232	0.671	0.448	9
6	0.342	0.378	0.287	0.328	0.589	0.233	0.255	0.119	0.284	0.499	0.410	0.668	0.385	0.594	0.390	0.265	0.409	0.434	0.628	0.316	9
7	0.370	0.391	0.525	0.459	1.280	0.470	0.482	0.032	0.525	0.628	0.686	0.584	0.300	0.245	0.555	0.113	0.194	0.932	0.597	0.523	14
8	0.352	0.264	0.759	0.154	0.256	0.426	0.363	0.310	0.303	0.316	0.807	0.235	0.173	0.183	1.105	0.068	0.368	0.736	0.097	0.060	5
9	0.305	0.352	0.468	0.224	0.739	0.234	0.171	0.250	0.308	0.431	0.092	0.326	0.455	0.569	0.354	0.475	0.530	0.312	0.102	0.651	8
10	0.603	0.363	0.628	0.314	0.029	0.436	0.207	0.553	0.645	0.122	0.759	0.296	0.691	0.425	0.441	0.323	0.287	0.310	0.194	0.582	10

## Παράρτημα Γ

Πίνακας Γ1: Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα Shewhart-SR υπό κανονική κατανομή

$n$	$C$	$\delta$								
		0	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50
8	36	125.13	122.30	108.88	58.52	18.83	7.78	4.00	2.45	1.73
		(124.87)	(121.52)	(107.32)	(58.31)	(18.34)	(7.12)	(3.48)	(1.88)	(1.12)
9	45	254.52	240.57	208.06	98.36	27.52	10.07	4.74	2.74	1.85
		(254.46)	(239.07)	(207.25)	(97.84)	(26.81)	(9.44)	(4.23)	(2.22)	(1.27)
9	43	126.41	120.48	105.04	51.26	14.96	5.83	2.91	1.84	1.36
		(126.22)	(119.13)	(104.69)	(51.12)	(14.37)	(5.27)	(2.34)	(1.28)	(0.71)
10	55	508.34	467.95	392.55	166.58	40.12	13.09	5.65	3.08	1.98
		(507.48)	(467.24)	(391.57)	(166.15)	(40.03)	(12.48)	(5.18)	(2.53)	(1.40)
10	53	252.08	234.85	195.76	87.31	21.33	7.51	3.43	2.02	1.43
		(249.68)	(234.80)	(194.16)	(86.31)	(20.80)	(6.98)	(2.90)	(1.46)	(0.79)
11	64	507.97	468.95	380.47	144.21	31.28	9.58	4.02	2.23	1.51
		(498.24)	(462.64)	(376.93)	(144.17)	(30.99)	(8.98)	(3.47)	(1.66)	(0.89)
11	60	205.31	190.37	155.20	63.28	14.88	5.11	2.43	1.54	1.19
		(204.79)	(189.69)	(153.01)	(62.98)	(14.19)	(4.58)	(1.86)	(0.92)	(0.48)
12	72	409.64	375.57	296.09	103.54	20.89	6.41	2.81	1.66	1.24
		(408.10)	(375.01)	(295.38)	(103.23)	(21.20)	(5.86)	(2.28)	(1.07)	(0.54)
12	68	205.40	189.10	148.73	55.54	12.38	4.23	2.07	1.37	1.11
		(204.36)	(188.85)	(148.21)	(54.86)	(11.75)	(3.70)	(1.49)	(0.73)	(0.36)



Πίνακας Γ2: Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα CUSUM-SR υπό την κανονική κατανομή

$\delta$	$n = 5$				$n = 10$			
	$k = 1.5$	4.5	6	9	6	16	20	25
	$H = 68.5$	28.5	21	11	137	58	44	31
0	371.95 (349.81)	361.26 (354.67)	363.45 (361.20)	344.99 (340.90)	370.85 (356.40)	374.05 (370.79)	349.67 (347.08)	377.24 (376.71)
0.05	<b>226.95</b> (205.12)	289.64 (283.91)	307.32 (303.11)	313.46 (312.14)	<b>180.21</b> (167.74)	269.47 (266.10)	272.77 (270.25)	308.19 (309.00)
0.10	<b>104.83</b> (85.59)	175.50 (168.83)	207.99 (204.54)	246.30 (245.57)	<b>68.82</b> (56.90)	138.12 (134.17)	157.75 (156.09)	192.25 (190.52)
0.25	<b>28.82</b> (14.74)	38.92 (33.26)	52.12 (48.35)	86.41 (84.38)	<b>16.17</b> (7.83)	22.95 (19.35)	29.03 (26.35)	39.54 (37.65)
0.50	12.75 (3.84)	<b>10.28</b> (5.74)	11.56 (7.93)	18.53 (16.21)	7.09 (1.99)	<b>5.66</b> (2.86)	5.95 (3.63)	6.99 (5.07)
0.75	8.78 (1.84)	5.89 (2.13)	<b>5.76</b> (2.63)	7.10 (4.89)	4.93 (0.94)	3.28 (1.11)	<b>3.14</b> (1.23)	3.20 (1.48)
1.00	7.15 (1.06)	4.45 (1.13)	<b>4.10</b> (1.30)	4.19 (2.11)	4.08 (0.56)	2.50 (0.63)	2.34 (0.59)	<b>2.30</b> (0.60)
1.25	6.40 (0.61)	3.78 (0.76)	3.43 (0.72)	<b>3.12</b> (1.16)	3.65 (0.51)	2.15 (0.37)	2.07 (0.27)	<b>2.06</b> (0.25)
1.50	6.10 (0.31)	3.41 (0.56)	3.14 (0.39)	<b>2.63</b> (0.75)	3.31 (0.46)	2.03 (0.17)	<b>2.01</b> (0.10)	<b>2.01</b> (0.08)
EARL	42.28	50.08	56.54	68.94	30.19	40.01	42.59	50.17
ESDRL	28.63	43.94	51.83	65.95	22.29	36.33	39.55	47.64
$\min(ARL_1)$	6	3	3	2	3	2	2	2

**Πίνακας Γ3:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα EWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή

$\delta$	$n = 5$					$n = 10$				
	$\lambda = 0.05$ $L = 2.507$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
0	369.95 (379.22)	370.68 (372.12)	370.54 (370.13)	370.40 (366.67)	370.30 (366.24)	370.59 (384.08)	369.99 (372.13)	370.44 (369.53)	369.96 (368.62)	370.21 (369.05)
0.05	207.94 (208.74)	242.02 (239.82)	287.91 (283.99)	319.42 (315.37)	337.06 (334.49)	139.62 (136.69)	172.19 (170.15)	232.23 (228.47)	280.65 (278.23)	313.52 (313.11)
0.10	90.44 (84.39)	116.14 (111.29)	170.20 (166.78)	225.22 (223.47)	265.02 (264.16)	50.48 (44.04)	64.23 (58.52)	103.22 (100.30)	159.04 (156.24)	211.21 (209.58)
0.25	21.05 (15.44)	25.04 (19.24)	38.02 (33.82)	64.27 (61.86)	96.89 (95.80)	11.28 (7.68)	12.89 (8.84)	17.69 (14.21)	30.36 (28.17)	53.50 (52.19)
0.50	7.15 (4.10)	8.06 (4.50)	9.77 (6.38)	14.41 (11.84)	23.03 (21.02)	3.91 (2.10)	4.33 (2.24)	5.01 (2.64)	6.39 (4.31)	9.98 (8.56)
0.75	4.16 (1.88)	4.65 (2.00)	5.14 (2.42)	6.26 (3.90)	8.90 (6.94)	2.32 (0.99)	2.53 (1.07)	2.91 (1.07)	3.21 (1.42)	3.91 (2.55)
1.00	3.04 (1.07)	3.42 (1.13)	3.64 (1.33)	4.00 (1.84)	4.97 (3.09)	1.73 (0.65)	1.86 (0.69)	2.25 (0.51)	2.35 (0.63)	2.37 (1.14)
1.25	2.53 (0.69)	2.85 (0.75)	2.95 (0.87)	3.08 (1.08)	3.48 (1.66)	1.42 (0.52)	1.52 (0.54)	2.05 (0.22)	2.08 (0.29)	1.81 (0.70)
1.50	2.26 (0.48)	2.54 (0.58)	2.57 (0.64)	2.62 (0.74)	2.79 (1.04)	1.22 (0.42)	1.30 (0.46)	2.01 (0.07)	2.01 (0.11)	1.52 (0.55)
EARL	33.49	38.68	48.73	61.94	76.22	22.83	26.10	33.82	43.88	55.66
ESDRL	29.53	34.09	44.51	58.53	73.60	20.28	23.19	30.47	40.98	53.81
$\min(ARL_1)$	2	2	2	2	2	1	1	2	2	1

**Πίνακας Γ4:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα EWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή

$\delta$	$n = 5$					$n = 10$				
	$\lambda = 0.05$ $L = 2.481$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
0	370.18 (354.28)	370.10 (361.66)	370.27 (367.19)	370.26 (365.86)	370.30 (366.24)	370.31 (356.61)	370.50 (360.59)	370.83 (367.44)	369.91 (368.32)	370.21 (369.05)
0.05	<b>212.87</b> (198.12)	243.09 (233.91)	288.11 (282.19)	319.21 (314.49)	337.06 (334.49)	<b>145.65</b> (129.54)	175.32 (166.22)	232.85 (227.28)	280.61 (277.83)	313.52 (313.11)
0.10	<b>96.51</b> (80.80)	118.61 (109.22)	170.84 (165.64)	225.33 (223.04)	265.02 (264.16)	<b>56.18</b> (41.99)	67.10 (1.02)	104.13 (99.87)	159.12 (155.96)	211.21 (209.58)
0.25	<b>25.83</b> (14.34)	27.26 (18.71)	38.72 (33.64)	64.43 (61.76)	96.89 (95.80)	15.66 (6.92)	<b>15.05</b> (8.30)	18.34 (14.10)	30.49 (28.09)	53.50 (52.19)
0.50	11.07 (3.67)	<b>10.00</b> (4.11)	10.33 (6.26)	14.62 (11.80)	23.03 (21.02)	7.27 (1.90)	6.24 (1.95)	<b>5.58</b> (2.50)	6.53 (4.30)	9.98 (8.56)
0.75	7.57 (1.74)	6.50 (1.82)	<b>5.75</b> (2.32)	6.53 (3.85)	8.90 (6.94)	5.14 (0.92)	4.28 (0.93)	3.47 (1.02)	<b>3.31</b> (1.42)	3.91 (2.55)
1.00	6.15 (1.01)	5.15 (1.03)	<b>4.24</b> (1.21)	4.33 (1.75)	4.97 (3.09)	4.29 (0.51)	3.49 (0.58)	2.72 (0.63)	2.42 (0.68)	<b>2.37</b> (1.14)
1.25	5.47 (0.63)	4.52 (0.66)	3.59 (0.75)	3.52 (0.89)	<b>3.48</b> (1.66)	4.00 (0.26)	3.12 (0.33)	2.32 (0.48)	2.11 (0.33)	<b>1.81</b> (0.70)
1.50	5.15 (0.38)	4.19 (0.42)	3.26 (0.49)	3.20 (0.49)	<b>2.79</b> (1.04)	3.87 (0.34)	3.01 (0.12)	2.10 (0.30)	2.02 (0.14)	<b>1.52</b> (0.55)
EARL	38.93	41.38	49.62	62.35	76.22	27.65	28.87	34.55	44.00	55.66
ESDRL	27.83	33.11	44.10	58.29	73.60	18.90	17.77	30.39	40.94	53.81
$\min(ARL_1)$	5	4	3	3	2	3	3	2	2	1

**Πίνακας Γ5:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή

$\delta$	$n = 5$					$n = 10$				
	$\lambda = 0.05$ $L = 1.965$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
0	369.96 (424.83)	370.54 (380.72)	370.57 (368.70)	369.75 (368.29)	370.11 (365.19)	370.58 (419.70)	370.28 (390.58)	370.23 (370.56)	369.63 (368.84)	370.44 (369.50)
0.05	178.17 (197.20)	212.84 (216.44)	263.95 (262.90)	302.53 (299.08)	327.81 (322.89)	116.20 (120.35)	143.50 (143.87)	196.14 (196.10)	253.05 (252.03)	295.93 (294.89)
0.10	72.98 (73.19)	93.25 (89.61)	137.06 (133.82)	195.30 (191.78)	247.58 (246.52)	42.18 (38.46)	51.26 (46.33)	76.91 (72.83)	123.42 (121.25)	180.30 (178.72)
0.25	17.75 (14.99)	21.09 (15.90)	28.54 (24.06)	47.88 (44.97)	79.86 (78.24)	9.78 (7.88)	11.24 (8.00)	13.72 (10.16)	20.92 (18.22)	37.79 (16.06)
0.50	5.76 (4.50)	7.08 (4.42)	8.27 (4.89)	10.96 (8.11)	18.02 (15.83)	3.10 (2.21)	3.71 (2.34)	4.38 (2.31)	5.14 (2.94)	7.31 (5.49)
0.75	3.04 (2.16)	3.94 (2.10)	4.64 (2.14)	5.32 (2.82)	7.27 (5.17)	1.72 (0.98)	2.05 (1.10)	2.53 (1.10)	2.89 (1.07)	3.35 (1.65)
1.00	2.03 (1.24)	2.80 (1.15)	3.33 (1.22)	3.64 (1.41)	4.30 (2.33)	1.25 (0.52)	1.46 (0.64)	1.85 (0.68)	2.24 (0.50)	2.37 (0.69)
1.25	1.57 (0.80)	2.32 (0.66)	2.74 (0.81)	2.93 (0.87)	3.18 (1.27)	1.08 (0.28)	1.18 (0.41)	1.53 (0.54)	2.04 (0.21)	2.08 (0.29)
1.50	1.33 (0.57)	2.12 (0.37)	2.42 (0.58)	2.56 (0.63)	2.65 (0.80)	1.02 (0.13)	1.06 (0.25)	1.30 (0.46)	2.00 (0.07)	2.01 (0.11)
EARL	28.69	33.78	42.19	53.92	68.77	20.11	22.81	28.50	37.18	48.23
ESDRL	29.07	30.59	38.19	50.19	65.75	19.64	21.05	25.90	34.24	41.41
$\min(ARL_1)$	1	2	2	2	2	1	1	1	2	2

**Πίνακας Γ6:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DEWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή

$\delta$	$n = 5$					$n = 10$				
	$\lambda = 0.05$ $L = 1.862$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
0	369.93 (344.12)	370.01 (353.30)	370.21 (360.60)	369.61 (366.13)	370.11 (365.19)	370.13 (343.20)	370.80 (355.76)	370.17 (362.23)	370.09 (367.78)	370.44 (369.50)
0.05	<b>194.49</b> (170.27)	218.57 (203.88)	264.74 (257.55)	302.93 (297.39)	327.81 (322.89)	<b>131.21</b> (105.21)	151.22 (135.41)	198.03 (191.88)	253.70 (251.21)	295.93 (294.89)
0.10	<b>88.16</b> (63.77)	99.64 (84.77)	138.98 (131.91)	195.86 (191.08)	247.58 (246.52)	<b>54.95</b> (32.50)	57.50 (43.50)	78.92 (71.60)	124.15 (120.98)	180.30 (178.72)
0.25	30.22 (11.00)	<b>26.52</b> (13.99)	30.19 (23.61)	48.43 (44.88)	79.86 (78.24)	21.63 (5.31)	16.90 (6.11)	<b>15.39</b> (9.60)	21.45 (18.19)	37.79 (16.06)
0.50	17.50 (2.94)	12.84 (3.05)	<b>9.86</b> (4.39)	11.38 (8.03)	18.02 (15.83)	13.60 (1.65)	9.55 (1.56)	6.27 (1.78)	<b>5.57</b> (2.84)	7.31 (5.49)
0.75	13.95 (1.47)	9.80 (1.40)	6.45 (1.62)	<b>5.76</b> (2.70)	7.27 (5.17)	11.08 (0.87)	7.59 (0.78)	4.60 (0.75)	3.36 (1.00)	<b>3.35</b> (1.65)
1.00	12.36 (0.90)	8.55 (0.82)	5.34 (0.85)	<b>4.13</b> (1.27)	4.30 (2.33)	9.95 (0.55)	6.73 (0.55)	4.04 (0.39)	2.67 (0.60)	<b>2.37</b> (0.69)
1.25	11.53 (0.61)	7.93 (0.57)	4.82 (0.59)	3.49 (0.72)	<b>3.18</b> (1.27)	9.27 (0.45)	6.20 (0.40)	3.78 (0.42)	2.29 (0.46)	<b>2.08</b> (0.29)
1.50	11.13 (0.34)	7.53 (0.52)	4.49 (0.52)	3.20 (0.44)	<b>2.65</b> (0.80)	9.02 (0.13)	6.02 (0.13)	3.49 (0.50)	2.09 (0.28)	<b>2.01</b> (0.11)
EARL	45.22	42.09	44.83	54.65	68.77	34.49	30.88	31.46	37.79	48.23
ESDRL	23.89	28.05	37.11	49.85	65.75	16.31	19.03	25.00	34.23	41.41
$\min(ARL_1)$	11	7	4	3	2	9	6	3	2	2

Πίνακας Γ7: Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή όταν  $n = 5$

$\delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.624$	2.561	2.532	2.517	2.528	2.652	2.685	2.687	2.683	2.679
0	369.89 (401.14)	370.35 (397.14)	370.72 (392.17)	369.66 (380.61)	369.57 (374.41)	370.66 (378.12)	370.04 (378.79)	370.47 (379.32)	369.63 (374.80)	370.18 (371.28)
0.05	176.32 (162.54)	<b>175.36</b> (170.49)	184.26 (182.11)	197.50 (199.20)	235.79 (237.26)	191.25 (172.71)	203.83 (199.10)	216.01 (213.25)	230.02 (227.47)	264.37 (260.79)
0.10	81.18 (64.62)	<b>76.43</b> (65.83)	79.41 (69.96)	84.99 (77.74)	109.60 (105.82)	89.43 (71.35)	91.76 (80.16)	98.73 (90.82)	107.49 (101.30)	137.53 (133.31)
0.25	23.14 (14.88)	20.29 (14.14)	<b>20.11</b> (14.38)	20.44 (14.82)	23.45 (18.15)	24.93 (15.96)	23.23 (15.75)	23.44 (16.40)	24.02 (17.46)	28.94 (24.10)
0.50	8.68 (4.49)	7.38 (3.99)	7.12 (4.01)	<b>7.08</b> (4.02)	7.54 (4.37)	9.24 (4.66)	8.26 (4.37)	8.09 (4.34)	8.03 (4.38)	8.31 (4.84)
0.75	5.17 (2.23)	4.44 (1.95)	4.24 (1.92)	<b>4.19</b> (1.91)	4.35 (2.04)	5.55 (2.22)	4.89 (2.11)	4.79 (2.06)	4.72 (2.04)	4.74 (2.12)
1.00	3.73 (1.37)	3.27 (1.14)	3.10 (1.11)	<b>3.07</b> (1.09)	3.13 (1.17)	4.12 (1.26)	3.55 (1.23)	3.50 (1.19)	3.45 (1.16)	3.44 (1.17)
1.25	3.01 (0.94)	2.72 (0.76)	2.56 (0.73)	<b>2.55</b> (0.71)	2.57 (0.75)	3.48 (0.75)	2.92 (0.83)	2.90 (0.80)	2.87 (0.77)	2.85 (0.76)
1.50	2.61 (0.70)	2.42 (0.57)	<b>2.27</b> (0.50)	<b>2.27</b> (0.49)	2.28 (0.51)	3.19 (0.45)	2.57 (0.64)	2.56 (0.62)	2.55 (0.60)	2.54 (0.58)
EARL	32.61	30.86	31.29	32.41	37.10	34.92	34.59	35.72	37.17	42.43
ESDRL	26.31	26.25	27.08	28.42	33.31	27.08	28.99	30.66	32.34	38.06
$\min(ARL_1)$	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
$\delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.613$	2.715	2.743	2.759	2.774	2.457	2.551	2.586	2.614	2.667
0	369.67 (371.19)	370.05 (368.32)	370.36 (368.64)	370.65 (371.08)	370.21 (375.21)	369.52 (368.61)	370.77 (365.92)	370.41 (366.38)	370.64 (368.32)	370.26 (361.40)
0.05	232.98 (223.13)	260.71 (257.81)	272.33 (270.52)	281.98 (280.52)	299.06 (294.41)	283.84 (275.82)	307.46 (305.57)	314.95 (315.21)	320.96 (320.08)	325.89 (324.32)
0.10	114.57 (99.66)	136.43 (129.76)	148.45 (143.01)	159.57 (155.47)	191.07 (190.19)	165.79 (157.79)	193.59 (191.22)	204.55 (202.30)	215.50 (212.58)	239.03 (237.78)
0.25	29.01 (20.03)	30.50 (23.32)	32.66 (26.68)	35.24 (30.15)	45.85 (43.04)	40.04 (33.22)	49.32 (45.64)	54.37 (51.36)	59.73 (57.31)	74.70 (72.26)
0.50	9.98 (5.34)	9.55 (5.35)	9.44 (5.59)	9.51 (5.83)	10.53 (7.50)	11.39 (7.04)	11.86 (8.48)	12.48 (9.40)	13.42 (10.65)	16.46 (14.27)
0.75	5.83 (2.44)	5.48 (2.33)	5.27 (2.41)	5.22 (2.41)	5.28 (2.70)	6.24 (2.93)	5.91 (3.17)	5.96 (3.31)	6.12 (3.61)	6.83 (4.68)
1.00	4.27 (1.37)	4.02 (1.25)	3.72 (1.39)	3.68 (1.36)	3.63 (1.38)	4.46 (1.59)	3.96 (1.72)	3.96 (1.76)	3.99 (1.81)	4.16 (2.15)
1.25	3.57 (0.83)	3.40 (0.71)	3.00 (0.93)	2.97 (0.90)	2.93 (0.87)	3.72 (0.95)	3.09 (1.07)	3.08 (1.07)	3.09 (1.08)	3.13 (1.19)
1.50	3.24 (0.51)	3.14 (0.39)	2.60 (0.68)	2.59 (0.66)	2.57 (0.63)	3.38 (0.63)	3.38 (0.75)	2.63 (0.74)	2.63 (0.74)	2.64 (0.77)
EARL	40.19	43.33	45.03	46.95	52.86	49.75	54.85	57.35	59.97	66.33
ESDRL	32.87	37.57	40.19	42.53	49.36	43.6	50.88	53.76	56.55	63.17
$\min(ARL_1)$	3	3	3	2	2	3	2	2	2	2

Πίνακας Γ8: Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή όταν  $n = 10$

$\delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.726$	2.598	2.553	2.530	2.531	2.778	2.742	2.723	2.707	2.692
0	369.60 (398.89)	370.52 (398.99)	370.87 (389.45)	369.65 (384.00)	369.82 (371.82)	370.15 (377.21)	370.38 (376.95)	369.69 (370.28)	370.18 (370.91)	369.82 (369.80)
0.05	123.25 (106.91)	<b>117.39</b> (109.61)	122.67 (118.33)	130.73 (127.71)	162.84 (159.58)	138.32 (120.25)	141.87 (132.52)	149.61 (142.98)	159.94 (154.62)	199.50 (199.71)
0.10	51.18 (38.57)	<b>45.54</b> (37.23)	46.01 (38.40)	48.00 (41.06)	59.64 (54.60)	57.28 (43.19)	54.47 (43.99)	56.41 (47.82)	60.17 (53.36)	77.92 (73.53)
0.25	13.56 (8.37)	11.33 (7.46)	<b>11.03</b> (7.38)	11.10 (7.56)	12.05 (8.40)	14.69 (9.13)	12.99 (8.31)	12.76 (8.35)	12.77 (8.56)	13.90 (10.33)
0.50	4.93 (2.48)	4.09 (2.14)	3.94 (2.08)	<b>3.89</b> (2.07)	4.04 (2.20)	5.21 (2.65)	4.61 (2.29)	4.46 (2.23)	4.39 (2.21)	4.38 (2.29)
0.75	2.90 (1.23)	2.43 (1.08)	2.36 (1.02)	<b>2.33</b> (1.00)	2.36 (1.04)	3.01 (1.29)	2.75 (1.11)	2.67 (1.07)	2.63 (1.04)	2.56 (1.11)
1.00	2.11 (0.76)	1.77 (0.70)	1.74 (0.66)	<b>1.73</b> (0.65)	1.74 (0.66)	2.16 (0.81)	2.04 (0.68)	2.00 (0.64)	1.99 (0.62)	1.86 (0.69)
1.25	1.73 (0.57)	1.42 (0.53)	1.42 (0.52)	<b>1.41</b> (0.51)	1.42 (0.52)	1.75 (0.60)	1.71 (0.54)	1.70 (0.52)	1.69 (0.51)	1.52 (0.55)
1.50	1.50 (0.52)	<b>1.22</b> (0.42)	<b>1.22</b> (0.41)	<b>1.22</b> (0.41)	<b>1.22</b> (0.42)	1.50 (0.52)	1.49 (0.51)	1.49 (0.51)	1.49 (0.50)	1.30 (0.46)
EARL	23.16	21.43	21.61	22.13	24.91	24.76	24.09	24.50	25.29	28.78
ESDRL	19.01	18.68	18.96	19.56	22.22	19.87	20.17	20.84	21.89	26.04
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.797$	2.828	2.833	2.836	2.833	2.752	2.781	2.794	2.805	2.830
0	370.85 (373.48)	370.82 (367.70)	370.44 (368.04)	370.63 (368.74)	370.16 (369.04)	370.55 (373.19)	369.90 (371.34)	369.70 (373.99)	370.47 (374.23)	369.86 (368.09)
0.05	184.14 (173.94)	202.87 (197.77)	211.50 (206.69)	223.14 (218.18)	248.42 (247.55)	254.14 (256.13)	265.01 (163.27)	270.32 (269.21)	278.16 (278.20)	292.13 (293.73)
0.10	75.46 (62.59)	83.51 (76.52)	89.60 (83.86)	96.68 (92.07)	118.65 (114.88)	127.95 (122.11)	141.00 (139.80)	147.35 (148.59)	154.21 (152.67)	171.08 (168.01)
0.25	17.25 (11.51)	16.31 (11.41)	16.45 (12.12)	17.01 (13.18)	20.19 (17.31)	25.24 (20.40)	26.14 (22.72)	27.38 (24.65)	28.96 (26.42)	34.14 (32.20)
0.50	5.67 (2.98)	5.24 (2.64)	5.11 (2.59)	5.04 (2.61)	5.09 (2.86)	6.67 (4.09)	6.26 (3.96)	6.20 (4.00)	6.30 (4.14)	6.71 (4.89)
0.75	3.15 (1.41)	3.07 (1.16)	3.00 (1.12)	2.94 (1.09)	2.89 (1.08)	3.42 (1.70)	3.19 (1.52)	3.13 (1.49)	3.23 (1.41)	3.20 (1.49)
1.00	2.22 (0.87)	2.34 (0.59)	2.30 (0.56)	2.26 (0.53)	2.23 (0.50)	2.31 (0.98)	2.21 (0.87)	2.18 (0.84)	2.37 (0.66)	2.32 (0.63)
1.25	1.77 (0.63)	2.08 (0.28)	2.06 (0.25)	2.05 (0.23)	2.04 (0.21)	1.80 (0.68)	1.77 (0.62)	1.75 (0.60)	2.09 (0.30)	2.06 (0.26)
1.50	1.51 (0.53)	2.01 (0.11)	2.01 (0.09)	2.01 (0.08)	2.00 (0.06)	1.52 (0.55)	1.51 (0.52)	1.50 (0.52)	2.01 (0.12)	2.01 (0.09)
EARL	29.22	30.62	31.49	32.72	36.40	38.96	40.54	41.53	43.07	46.30
ESDRL	24.65	26.46	27.61	29.07	33.30	35.80	33.03	39.38	40.39	43.71
$\min(ARL_1)$	1	2	2	2	2	1	1	1	2	2

**Πίνακας Γ9:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή όταν  $n = 5$

$\delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.567$	2.507	2.488	2.481	2.511	2.632	2.669	2.674	2.672	2.673
0	370.28 (348.65)	370.04 (348.49)	370.18 (349.77)	370.64 (353.48)	370.07 (359.13)	370.38 (357.16)	370.05 (362.89)	370.27 (362.47)	370.43 (365.59)	369.62 (364.63)
0.05	189.64 (153.93)	<b>188.07</b> (158.40)	195.10 (172.33)	205.01 (187.96)	238.94 (230.14)	196.93 (166.83)	210.62 (195.67)	221.21 (209.24)	233.10 (223.28)	264.81 (255.17)
0.10	91.27 (62.97)	<b>88.17</b> (63.08)	88.99 (66.44)	91.73 (72.60)	113.20 (102.60)	94.81 (70.09)	96.20 (77.00)	102.51 (87.90)	110.41 (98.55)	139.34 (131.70)
0.25	28.57 (15.27)	27.47 (13.94)	26.88 (13.71)	<b>26.25</b> (13.86)	26.50 (17.26)	28.29 (16.05)	26.86 (15.37)	26.60 (15.86)	26.74 (16.91)	30.47 (23.68)
0.50	11.58 (4.70)	11.74 (4.17)	11.64 (3.96)	11.39 (3.77)	10.50 (3.66)	11.17 (4.79)	10.78 (4.30)	10.53 (4.15)	10.28 (4.08)	<b>9.74</b> (4.45)
0.75	7.26 (2.30)	7.69 (2.05)	7.76 (1.93)	7.72 (1.85)	7.24 (1.63)	6.93 (2.29)	6.88 (2.05)	6.79 (1.96)	6.67 (1.88)	6.21 (1.80)
1.00	5.54 (1.37)	6.03 (1.21)	6.17 (1.11)	6.20 (1.07)	5.98 (0.93)	5.30 (1.32)	5.36 (1.21)	5.32 (1.15)	5.27 (1.09)	4.96 (0.97)
1.25	4.70 (0.86)	5.23 (0.80)	5.45 (0.67)	5.48 (0.67)	5.38 (0.58)	4.53 (0.78)	4.61 (0.76)	4.59 (0.73)	4.59 (0.70)	4.39 (0.60)
1.50	4.30 (0.54)	4.79 (0.61)	5.13 (0.36)	5.15 (0.38)	5.10 (0.32)	4.21 (0.47)	4.25 (0.48)	4.24 (0.47)	4.24 (0.46)	4.12 (0.34)
EARL	37.57	37.45	37.86	38.39	41.40	37.85	38.25	39.13	40.28	44.58
ESDRL	24.88	24.57	25.34	26.63	31.82	26.39	28.11	29.68	31.45	37.14
$\min(ARL_1)$	4	4	5	5	5	4	4	4	4	4
$\delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.610$	2.713	2.741	2.758	2.773	2.457	2.551	2.585	2.613	2.667
0	369.64 (367.07)	370.28 (365.07)	370.57 (366.16)	370.42 (368.38)	369.69 (373.11)	369.93 (368.48)	369.75 (362.61)	370.34 (364.72)	369.86 (366.92)	370.35 (361.42)
0.05	234.37 (221.29)	261.24 (256.08)	272.80 (267.84)	282.92 (278.68)	299.68 (293.72)	284.31 (275.66)	306.66 (303.67)	314.82 (314.01)	320.11 (318.07)	325.99 (324.31)
0.10	115.41 (98.47)	137.43 (128.88)	149.78 (141.59)	160.96 (155.18)	191.86 (189.80)	166.18 (157.72)	193.80 (190.49)	204.77 (201.70)	214.52 (210.13)	239.06 (237.77)
0.25	30.13 (19.93)	31.42 (23.05)	33.55 (26.49)	36.00 (29.95)	46.37 (42.89)	40.27 (33.25)	49.49 (45.41)	54.65 (51.28)	59.82 (57.18)	74.73 (72.25)
0.50	10.72 (5.34)	10.30 (5.29)	10.18 (5.44)	10.16 (5.69)	10.98 (7.39)	11.57 (7.01)	12.17 (8.45)	12.76 (9.32)	13.65 (10.53)	16.48 (14.27)
0.75	6.39 (2.47)	6.12 (2.29)	5.97 (2.26)	5.84 (2.27)	<b>5.74</b> (2.57)	6.38 (2.93)	6.26 (3.09)	6.26 (3.23)	6.40 (3.53)	6.84 (4.68)
1.00	4.70 (1.45)	4.57 (1.29)	4.44 (1.28)	4.32 (1.25)	<b>4.16</b> (1.24)	4.55 (1.60)	4.37 (1.59)	4.32 (1.62)	4.34 (1.68)	<b>4.16</b> (2.14)
1.25	3.90 (0.95)	3.85 (0.84)	3.72 (0.82)	3.64 (0.79)	3.51 (0.73)	3.77 (0.97)	3.60 (0.90)	3.54 (0.88)	3.54 (0.90)	<b>3.13</b> (1.19)
1.50	3.47 (0.65)	3.47 (0.60)	3.34 (0.55)	3.29 (0.52)	3.21 (0.44)	3.40 (0.64)	3.25 (0.54)	3.21 (0.50)	3.21 (0.50)	<b>2.64</b> (0.77)
EARL	41.10	44.28	46.16	47.99	53.63	49.98	55.31	57.84	60.25	66.35
ESDRL	32.66	37.33	39.72	42.18	49.07	43.59	50.49	53.46	56.05	63.17
$\min(ARL_1)$	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2



**Πίνακας Γ10:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα GWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή όταν  $n = 10$

$\delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.662$	2.534	2.502	2.487	2.510	2.757	2.722	2.706	2.693	2.684
0	369.99 (348.27)	370.05 (347.58)	370.50 (348.83)	369.56 (352.12)	370.12 (354.59)	370.74 (353.73)	369.67 (358.14)	370.18 (353.75)	370.29 (355.76)	369.77 (355.39)
0.05	135.10 (102.98)	<b>130.29</b> (102.77)	132.62 (109.11)	139.01 (120.59)	167.71 (154.35)	145.01 (116.80)	147.00 (127.26)	154.63 (138.30)	164.59 (151.68)	201.22 (195.18)
0.10	59.43 (37.90)	55.33 (35.24)	<b>54.64</b> (35.83)	54.99 (38.30)	63.73 (53.14)	62.05 (42.24)	58.73 (42.37)	60.14 (45.97)	63.29 (51.65)	80.24 (72.63)
0.25	17.45 (8.82)	16.82 (7.56)	16.52 (7.21)	16.10 (7.04)	<b>15.09</b> (7.49)	17.32 (9.24)	15.97 (8.07)	15.55 (7.95)	15.26 (8.07)	15.45 (9.97)
0.50	6.91 (2.67)	7.27 (2.29)	7.36 (2.14)	7.36 (2.02)	6.97 (1.75)	6.64 (2.72)	6.59 (2.31)	6.51 (2.17)	6.40 (2.06)	5.99 (1.92)
0.75	4.26 (1.32)	4.78 (1.14)	4.99 (4.01)	5.10 (0.98)	5.09 (0.85)	4.06 (1.33)	4.27 (1.11)	4.30 (1.05)	4.30 (0.99)	4.19 (0.87)
1.00	3.21 (0.81)	3.76 (0.71)	4.01 (0.66)	4.20 (0.57)	4.30 (0.49)	3.02 (0.82)	3.40 (0.60)	3.44 (0.60)	3.47 (0.60)	3.46 (0.56)
1.25	2.68 (0.62)	3.27 (0.47)	3.50 (0.53)	3.80 (0.46)	4.04 (0.20)	2.52 (0.60)	3.09 (0.29)	3.10 (0.31)	3.12 (0.33)	3.12 (0.33)
1.50	2.35 (0.49)	3.06 (0.24)	3.18 (0.39)	3.47 (0.50)	4.00 (0.04)	2.21 (0.42)	3.01 (0.10)	3.01 (0.11)	3.01 (0.11)	3.01 (0.12)
EARL	26.70	26.58	26.79	27.21	29.16	27.16	27.05	27.45	28.12	31.19
ESDRL	18.00	17.26	18.28	18.23	21.00	19.23	19.25	19.93	21.08	25.24
$\min(ARL_1)$	2	3	3	3	4	2	3	3	3	3
$\delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.792$	2.825	2.830	2.834	2.832	2.751	2.781	2.793	2.805	2.830
0	370.27 (367.48)	370.88 (364.46)	370.43 (364.50)	370.26 (365.50)	370.43 (367.58)	370.25 (372.57)	370.04 (370.09)	370.03 (373.11)	370.12 (373.57)	369.70 (367.35)
0.05	184.71 (170.53)	203.91 (196.48)	212.33 (204.45)	224.31 (217.39)	249.24 (247.31)	254.52 (255.34)	265.46 (262.84)	270.81 (268.75)	278.51 (278.08)	191.96 (293.26)
0.10	76.82 (62.33)	84.71 (76.15)	90.46 (83.19)	97.71 (91.68)	119.63 (114.79)	128.63 (122.28)	141.67 (139.72)	147.96 (148.53)	154.69 (152.71)	171.09 (167.82)
0.25	18.26 (11.40)	17.18 (11.25)	17.26 (11.95)	17.74 (13.04)	20.76 (17.29)	25.58 (20.30)	26.45 (22.65)	27.67 (24.65)	29.15 (26.42)	34.27 (32.16)
0.50	6.33 (2.96)	5.92 (2.59)	5.78 (2.51)	5.67 (2.49)	<b>5.56</b> (2.76)	6.94 (4.02)	6.51 (3.90)	6.44 (3.96)	6.45 (4.13)	6.81 (4.88)
0.75	3.70 (1.39)	3.60 (1.20)	3.56 (1.12)	3.52 (1.07)	3.40 (1.00)	3.71 (1.62)	3.46 (1.44)	3.37 (1.41)	3.33 (1.41)	<b>3.27</b> (1.49)
1.00	2.71 (0.80)	2.72 (0.73)	2.74 (0.69)	2.74 (0.66)	2.70 (0.61)	2.66 (0.75)	2.53 (0.75)	2.47 (0.71)	2.44 (0.69)	<b>2.37</b> (0.67)
1.25	2.27 (0.50)	2.29 (0.49)	2.32 (0.49)	2.33 (0.49)	2.32 (0.47)	2.24 (0.48)	2.16 (0.40)	2.13 (0.36)	2.12 (0.35)	<b>2.08</b> (0.29)
1.50	2.08 (0.28)	2.09 (0.29)	2.11 (0.31)	2.11 (0.32)	2.10 (0.30)	2.07 (0.26)	2.04 (0.19)	2.03 (0.16)	2.02 (0.15)	<b>2.01</b> (0.09)
EARL	30.17	31.41	32.27	33.51	37.09	39.50	41.05	42.02	43.25	41.48
ESDRL	24.24	26.38	27.45	29.00	33.32	35.57	37.70	39.18	40.39	43.66
$\min(ARL_1)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

**Πίνακας Γ11:** Τιμές της παραμέτρου  $L$  για το διάγραμμα DGWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης προκειμένου να επιτευχθεί  $ARL_0 \approx 370$

$n$	$a$	$q$						
		0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95
5	0.5	2.713	2.729	2.660	2.576	2.434	1.834	1.206
	0.6	2.746	2.747	2.657	2.562	2.421	1.864	1.255
	0.7	2.765	2.751	2.651	2.562	2.432	1.944	1.403
	0.8	2.771	2.748	2.651	2.569	2.450	2.033	1.569
	0.9	2.774	2.746	2.658	2.581	2.480	2.122	1.724
	1.0	2.771	2.744	2.664	2.597	2.509	2.205	1.862
	1.2	2.765	2.741	2.678	2.633	2.569	2.340	2.089
	1.5	2.747	2.733	2.703	2.677	2.643	2.498	2.323
10	0.5	2.824	2.800	2.696	2.596	2.447	1.845	1.210
	0.6	2.831	2.791	2.674	2.574	2.425	1.867	1.259
	0.7	2.835	2.784	2.665	2.570	2.433	1.949	1.403
	0.8	2.833	2.777	2.664	2.573	2.455	2.037	1.571
	0.9	2.833	2.771	2.664	2.586	2.481	2.123	1.727
	1.0	2.830	2.770	2.671	2.606	2.513	2.208	1.863
	1.2	2.830	2.779	2.696	2.643	2.579	2.352	2.089
	1.5	2.826	2.798	2.746	2.710	2.663	2.511	2.332
15	0.5	2.855	2.812	2.704	2.602	2.449	1.840	1.204
	0.6	2.853	2.798	2.676	2.573	2.428	1.863	1.255
	0.7	2.848	2.786	2.663	2.563	2.429	1.944	1.397
	0.8	2.848	2.776	2.659	2.570	2.447	2.034	1.568
	0.9	2.846	2.779	2.669	2.584	2.477	2.127	1.725
	1.0	2.844	2.781	2.679	2.609	2.510	2.208	1.860
	1.2	2.845	2.792	2.708	2.652	2.577	2.341	2.086
	1.5	2.850	2.809	2.741	2.722	2.672	2.507	2.320
20	0.5	2.875	2.828	2.710	2.608	2.453	1.845	1.210
	0.6	2.870	2.812	2.682	2.576	2.422	1.866	1.258
	0.7	2.863	2.796	2.669	2.567	2.430	1.940	1.403
	0.8	2.858	2.792	2.669	2.575	2.454	2.034	1.571
	0.9	2.859	2.789	2.673	2.591	2.485	2.122	1.723
	1.0	2.860	2.792	2.683	2.609	2.516	2.200	1.860
	1.2	2.863	2.798	2.714	2.662	2.589	2.349	2.086
	1.5	2.870	2.826	2.768	2.730	2.683	2.518	2.330

Πίνακας Γ12: Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή όταν  $n = 5$

$\delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 1.778$	1.727	1.779	1.869	2.128	2.092	2.058	2.107	2.174	2.357
0	370.76 (770.34)	370.31 (558.82)	369.83 (489.41)	370.66 (451.12)	370.34 (381.92)	369.87 (514.05)	370.03 (434.89)	369.90 (407.25)	370.08 (386.47)	370.87 (375.47)
0.05	<b>96.18</b> (150.49)	123.71 (168.07)	142.13 (174.48)	160.31 (184.51)	210.59 (214.90)	136.13 (162.63)	163.17 (180.19)	178.93 (188.91)	197.01 (204.99)	239.66 (238.72)
0.10	<b>38.94</b> (50.62)	49.15 (59.79)	57.67 (63.33)	65.01 (67.47)	92.36 (88.04)	55.90 (58.32)	66.50 (65.65)	74.14 (71.61)	84.23 (81.63)	114.59 (110.89)
0.25	<b>10.31</b> (10.29)	11.82 (12.29)	13.94 (13.30)	15.90 (14.20)	21.69 (16.05)	14.32 (11.92)	16.37 (13.52)	17.94 (14.25)	19.60 (14.93)	24.44 (18.90)
0.50	<b>3.92</b> (2.94)	3.95 (3.43)	4.61 (3.75)	5.20 (4.17)	7.45 (4.86)	5.24 (3.30)	5.55 (3.74)	6.00 (4.01)	6.56 (4.27)	8.04 (4.64)
0.75	2.37 (1.38)	<b>2.22</b> (1.58)	2.57 (1.68)	3.21 (1.49)	4.10 (2.38)	3.21 (1.49)	3.23 (1.62)	3.42 (1.79)	3.70 (1.96)	4.59 (2.35)
1.00	1.77 (0.84)	<b>1.57</b> (0.91)	1.84 (0.97)	2.48 (0.80)	2.86 (1.31)	2.48 (0.80)	2.45 (0.83)	2.53 (0.93)	2.69 (1.06)	3.21 (1.38)
1.25	1.47 (0.60)	<b>1.27</b> (0.56)	1.50 (0.65)	1.54 (0.73)	2.34 (0.73)	2.17 (0.44)	2.15 (0.43)	2.18 (0.48)	2.27 (0.59)	2.58 (0.86)
1.50	1.30 (0.48)	<b>1.12</b> (0.36)	1.31 (0.50)	1.32 (0.54)	2.12 (0.40)	2.05 (0.23)	2.04 (0.22)	2.05 (0.25)	2.09 (0.32)	2.26 (0.55)
EARL	19.61	21.95	24.39	26.77	33.88	24.76	27.46	29.37	31.72	38.14
ESDRL	29.72	27.93	27.60	27.94	30.69	26.49	26.94	27.64	29.17	34.20
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
$\delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.604$	2.581	2.584	2.593	2.636	2.716	2.766	2.772	2.775	2.765
0	369.68 (383.39)	369.91 (378.42)	370.58 (374.18)	370.68 (371.90)	370.02 (372.89)	370.56 (370.62)	370.00 (369.89)	370.61 (375.56)	369.82 (369.17)	370.08 (362.48)
0.05	192.09 (187.76)	226.24 (228.16)	240.99 (241.20)	253.14 (250.70)	282.62 (282.01)	260.97 (258.29)	286.77 (286.05)	292.20 (289.46)	299.58 (296.27)	311.09 (306.81)
0.10	84.03 (73.01)	101.86 (96.52)	113.80 (109.45)	126.65 (124.51)	162.55 (161.80)	137.06 (129.49)	164.89 (161.02)	176.82 (173.86)	188.42 (187.81)	213.51 (210.23)
0.25	21.39 (14.97)	22.92 (17.02)	24.35 (18.80)	26.43 (21.43)	34.40 (30.09)	30.82 (23.49)	36.59 (31.68)	40.14 (36.36)	44.46 (41.32)	56.26 (54.13)
0.50	7.54 (4.12)	7.55 (4.29)	7.74 (4.45)	7.94 (4.61)	8.98 (5.53)	9.59 (5.40)	9.64 (6.02)	9.94 (6.56)	10.36 (7.22)	12.21 (9.77)
0.75	4.50 (1.98)	4.40 (2.04)	4.44 (2.09)	4.52 (2.16)	4.98 (2.28)	5.49 (2.34)	5.22 (2.44)	5.21 (2.52)	5.27 (2.66)	5.57 (3.20)
1.00	3.29 (1.16)	3.17 (1.18)	3.17 (1.20)	3.20 (1.24)	3.57 (1.27)	4.02 (1.25)	3.67 (1.36)	3.64 (1.35)	3.64 (1.37)	3.70 (1.52)
1.25	2.73 (0.77)	2.59 (0.78)	2.59 (0.78)	2.60 (0.80)	2.93 (0.85)	3.40 (0.71)	2.97 (0.89)	2.95 (0.88)	2.94 (0.88)	2.95 (0.91)
1.50	2.42 (0.57)	2.28 (0.52)	2.28 (0.52)	2.29 (0.53)	2.57 (0.64)	3.14 (0.39)	2.59 (0.66)	2.58 (0.65)	2.57 (0.64)	2.57 (0.64)
EARL	32.58	35.93	38.00	40.17	46.80	43.49	47.93	49.99	52.33	58.02
ESDRL	27.64	31.93	33.98	36.26	42.99	37.66	43.61	46.08	48.69	54.47
$\min(ARL_1)$	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2

Πίνακας Γ13: Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή όταν  $n = 10$

$\delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 1.794$	1.722	1.784	1.873	2.137	2.111	2.074	2.108	2.184	2.371
0	371.17 (759.47)	369.91 (544.27)	370.32 (482.71)	369.90 (451.79)	370.94 (393.77)	370.78 (518.79)	370.95 (446.47)	370.28 (407.55)	369.88 (403.39)	369.67 (376.80)
0.05	<b>63.66</b> (87.86)	82.05 (101.31)	93.68 (107.10)	105.02 (114.24)	142.08 (141.45)	87.51 (98.85)	106.05 (111.50)	116.06 (118.03)	130.90 (130.77)	172.57 (171.14)
0.10	<b>24.29</b> (28.10)	29.81 (33.28)	34.26 (35.04)	38.33 (36.90)	51.69 (46.03)	33.04 (32.20)	38.70 (36.16)	42.21 (38.13)	46.92 (42.05)	63.42 (58.75)
0.25	<b>6.05</b> (5.16)	6.67 (6.10)	7.65 (6.76)	8.64 (7.37)	11.79 (8.43)	7.92 (6.14)	8.71 (6.96)	9.55 (7.37)	10.46 (7.77)	12.78 (8.83)
0.50	2.36 (1.48)	<b>2.33</b> (1.59)	2.55 (1.77)	2.77 (2.02)	3.83 (2.64)	2.92 (1.72)	2.94 (1.90)	3.17 (2.03)	3.41 (2.22)	4.30 (2.59)
0.75	1.50 (0.71)	<b>1.45</b> (0.72)	1.53 (0.78)	1.58 (0.88)	2.02 (1.22)	1.78 (0.85)	1.72 (0.88)	1.82 (0.93)	1.90 (1.03)	2.33 (1.28)
1.00	1.18 (0.40)	<b>1.15</b> (0.38)	1.19 (0.43)	1.20 (0.46)	1.40 (0.67)	1.34 (0.53)	1.29 (0.52)	1.35 (0.56)	1.36 (0.59)	1.59 (0.76)
1.25	1.05 (0.23)	<b>1.04</b> (0.19)	1.05 (0.23)	1.05 (0.23)	1.14 (0.38)	1.13 (0.34)	1.10 (0.30)	1.13 (0.35)	1.13 (0.36)	1.26 (0.49)
1.50	<b>1.01</b> (0.11)	<b>1.01</b> (0.09)	<b>1.01</b> (0.11)	<b>1.01</b> (0.11)	1.04 (0.21)	1.04 (0.20)	1.03 (0.16)	1.04 (0.20)	1.04 (0.20)	1.10 (0.31)
EARL	15.03	16.46	17.69	18.85	22.90	17.57	19.08	20.13	21.51	25.81
ESDRL	22.75	19.97	19.47	19.61	21.16	19.45	19.25	19.14	20.17	23.47
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.632$	2.591	2.590	2.600	2.649	2.827	2.836	2.834	2.834	2.831
0	370.54 (383.73)	370.26 (373.16)	370.22 (372.52)	370.06 (370.03)	369.97 (366.33)	370.52 (367.75)	370.29 (367.74)	370.61 (370.31)	369.87 (367.55)	369.72 (369.11)
0.05	129.03 (121.91)	153.95 (149.26)	168.73 (167.49)	185.45 (184.79)	218.31 (215.38)	202.39 (198.37)	226.44 (222.65)	236.69 (232.98)	246.62 (247.07)	263.75 (263.25)
0.10	48.99 (39.91)	56.45 (50.05)	62.98 (57.87)	69.92 (65.05)	92.53 (88.99)	83.56 (76.23)	99.99 (96.00)	108.68 (105.99)	116.49 (112.87)	138.30 (135.07)
0.25	11.76 (7.73)	12.01 (8.23)	12.43 (8.67)	13.07 (9.37)	15.71 (12.57)	16.37 (11.50)	17.35 (13.67)	18.44 (15.26)	19.75 (16.84)	24.31 (21.96)
0.50	4.17 (2.15)	4.06 (2.19)	4.13 (2.22)	4.26 (2.25)	4.64 (2.47)	5.23 (2.65)	5.03 (2.64)	5.02 (2.70)	5.07 (2.82)	5.38 (3.34)
0.75	2.50 (1.05)	2.37 (1.05)	2.41 (1.07)	2.50 (1.07)	2.67 (1.19)	3.07 (1.16)	2.93 (1.09)	2.90 (1.08)	2.89 (1.08)	2.92 (1.14)
1.00	1.85 (0.67)	1.74 (0.67)	1.75 (0.68)	1.84 (0.67)	1.91 (0.75)	2.34 (0.59)	2.26 (0.52)	2.24 (0.50)	2.23 (0.50)	2.24 (0.50)
1.25	1.52 (0.54)	1.42 (0.52)	1.42 (0.53)	1.52 (0.54)	1.54 (0.57)	2.08 (0.28)	2.05 (0.23)	2.05 (0.21)	2.04 (0.21)	2.04 (0.21)
1.50	1.30 (0.46)	1.22 (0.42)	1.22 (0.42)	1.30 (0.46)	1.30 (0.47)	2.01 (0.11)	2.01 (0.08)	2.01 (0.07)	2.00 (0.06)	2.00 (0.07)
EARL	22.47	24.22	25.59	27.22	31.39	30.60	33.21	34.64	36.03	39.71
ESDRL	19.27	21.34	22.97	24.51	28.68	26.49	29.70	31.41	32.97	36.84
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2

Πίνακας Γ14: Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή όταν  $n = 5$

$\delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 1.206$	1.403	1.569	1.724	2.089	1.834	1.944	2.033	2.122	2.340
0	370.61 (320.08)	370.05 (325.43)	370.32 (334.81)	369.50 (339.23)	369.64 (347.99)	369.55 (334.90)	370.45 (347.74)	370.02 (349.28)	369.69 (348.22)	370.81 (362.32)
0.05	176.48 (126.82)	176.76 (130.86)	179.41 (141.18)	186.94 (157.88)	218.72 (200.51)	<b>176.37</b> (136.19)	185.40 (157.70)	193.97 (171.92)	205.67 (188.24)	241.55 (230.49)
0.10	87.77 (49.13)	87.29 (49.26)	86.17 (52.54)	85.83 (56.86)	100.01 (83.29)	85.11 (53.19)	<b>84.83</b> (58.94)	87.24 (65.79)	92.79 (75.76)	117.70 (106.77)
0.25	33.04 (12.05)	34.59 (11.00)	33.51 (10.71)	31.85 (10.63)	28.44 (13.26)	29.90 (12.44)	28.76 (11.73)	27.65 (11.93)	26.84 (12.72)	27.67 (17.92)
0.50	16.46 (3.91)	19.20 (3.46)	19.15 (3.26)	18.49 (3.08)	15.53 (2.81)	14.21 (3.88)	14.58 (3.38)	14.08 (3.19)	13.46 (3.07)	11.81 (3.26)
0.75	11.65 (1.98)	14.57 (1.76)	14.86 (1.66)	14.57 (1.57)	12.52 (1.38)	9.87 (1.95)	10.72 (1.68)	10.56 (1.57)	10.22 (1.49)	8.98 (1.36)
1.00	9.58 (1.19)	12.50 (1.06)	12.93 (1.01)	12.81 (0.95)	11.20 (0.84)	8.01 (1.15)	9.07 (1.00)	9.04 (0.92)	8.84 (0.87)	7.87 (0.80)
1.25	8.55 (0.74)	11.45 (0.67)	11.94 (0.68)	11.90 (0.65)	10.49 (0.58)	7.09 (0.77)	8.24 (0.63)	8.30 (0.57)	8.20 (0.51)	7.32 (0.52)
1.50	8.05 (0.48)	10.94 (0.47)	11.37 (0.51)	11.36 (0.50)	10.13 (0.34)	6.58 (0.59)	7.81 (0.51)	7.97 (0.38)	7.91 (0.40)	7.07 (0.27)
EARL	42.31	45.80	45.93	45.64	45.47	39.47	40.65	40.88	41.40	44.10
ESDRL	20.83	20.70	21.51	22.65	27.44	21.98	23.31	24.52	26.20	32.16
$\min(ARL_1)$	7	10	11	11	10	6	7	7	7	7
$\delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.576$	2.562	2.569	2.581	2.633	2.713	2.765	2.771	2.774	2.765
0	370.05 (354.21)	370.11 (359.54)	370.47 (360.44)	369.83 (360.97)	370.49 (368.96)	369.45 (365.72)	370.53 (368.09)	370.24 (373.11)	369.41 (367.21)	370.77 (362.19)
0.05	200.07 (179.15)	227.90 (218.69)	242.14 (234.14)	253.91 (245.43)	283.26 (278.19)	260.26 (255.42)	287.72 (284.09)	293.04 (287.80)	300.22 (295.31)	312.02 (306.58)
0.10	91.77 (70.40)	105.36 (92.38)	115.93 (105.50)	128.31 (121.06)	164.03 (160.96)	137.66 (128.27)	166.26 (160.65)	178.10 (173.38)	189.21 (187.44)	214.22 (210.02)
0.25	26.63 (14.38)	<b>26.20</b> (16.16)	26.91 (18.13)	28.40 (20.78)	35.57 (29.84)	31.67 (23.27)	37.33 (31.52)	40.76 (36.26)	44.98 (41.16)	56.72 (54.06)
0.50	11.15 (4.04)	10.47 (3.80)	10.15 (3.84)	<b>9.93</b> (4.00)	10.03 (5.19)	10.27 (5.32)	10.23 (5.87)	10.46 (6.44)	10.82 (7.12)	12.55 (9.75)
0.75	7.34 (1.95)	7.06 (1.74)	6.86 (1.67)	6.64 (1.65)	6.25 (1.82)	6.07 (2.32)	5.82 (2.31)	5.74 (2.39)	<b>5.73</b> (2.53)	5.89 (3.13)
1.00	5.80 (1.15)	5.73 (0.97)	5.63 (0.91)	5.47 (0.88)	5.07 (0.90)	4.48 (1.32)	4.30 (1.23)	4.20 (1.23)	4.16 (1.24)	<b>4.10</b> (1.40)
1.25	5.04 (0.77)	5.11 (0.62)	5.07 (0.58)	4.94 (0.58)	4.54 (0.60)	3.74 (0.85)	3.63 (0.77)	3.55 (0.75)	3.52 (0.73)	<b>3.40</b> (0.73)
1.50	4.62 (0.60)	4.80 (0.50)	4.79 (0.48)	4.64 (0.52)	4.25 (0.44)	3.34 (0.57)	3.29 (0.51)	3.23 (0.47)	3.21 (0.44)	<b>3.13</b> (0.38)
EARL	37.80	39.95	41.50	43.19	48.76	44.20	48.95	50.89	53.10	58.67
ESDRL	26.30	30.30	32.52	34.95	42.23	37.33	43.27	45.75	48.40	54.30
$\min(ARL_1)$	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3

**Πίνακας Γ15:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα DGWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή όταν  $n = 10$

$\delta$	$q = 0.95$					$q = 0.90$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 1.210$	1.403	1.571	1.727	2.089	1.845	1.949	2.037	2.123	2.352
0	370.80 (318.69)	369.51 (324.62)	370.01 (332.80)	370.35 (341.94)	370.05 (355.42)	369.45 (330.85)	370.84 (345.16)	370.00 (347.48)	370.89 (353.41)	370.67 (358.02)
0.05	124.26 (80.84)	123.46 (82.22)	123.92 (87.84)	127.04 (97.39)	151.01 (132.18)	<b>123.06</b> (86.45)	126.89 (97.12)	131.77 (107.32)	140.11 (120.06)	177.35 (165.08)
0.10	58.97 (28.52)	58.95 (27.35)	57.27 (27.83)	55.80 (29.71)	58.99 (42.32)	55.74 (29.95)	54.06 (31.01)	<b>53.83</b> (33.68)	55.27 (38.28)	67.33 (56.19)
0.25	22.11 (6.74)	24.44 (5.98)	24.03 (5.69)	22.96 (5.45)	19.34 (5.61)	19.51 (6.79)	19.29 (6.10)	18.49 (5.95)	17.63 (5.97)	16.25 (7.35)
0.50	11.16 (2.21)	14.06 (1.97)	14.42 (1.86)	14.17 (1.75)	12.22 (1.51)	9.45 (2.14)	10.35 (1.84)	10.22 (1.73)	9.91 (1.63)	8.78 (1.49)
0.75	7.96 (1.12)	10.84 (1.02)	11.39 (0.97)	11.39 (0.92)	10.14 (0.80)	6.64 (1.09)	7.80 (0.93)	7.88 (0.88)	7.78 (0.83)	7.09 (0.75)
1.00	6.61 (0.67)	9.40 (0.61)	10.02 (0.61)	10.14 (0.55)	9.21 (0.46)	5.47 (0.65)	6.69 (0.61)	6.87 (0.57)	6.86 (0.54)	6.31 (0.49)
1.25	6.02 (0.40)	8.71 (0.50)	9.27 (0.45)	9.44 (0.51)	8.83 (0.40)	4.97 (0.40)	6.13 (0.34)	6.27 (0.45)	6.29 (0.46)	6.03 (0.18)
1.50	5.68 (0.48)	8.18 (0.39)	9.02 (0.12)	9.05 (0.22)	8.38 (0.49)	4.66 (0.48)	6.01 (0.09)	6.03 (0.17)	6.03 (0.18)	6.00 (0.03)
EARL	31.19	34.72	35.14	34.96	34.36	28.87	30.15	30.25	30.51	32.36
ESDRL	14.88	14.73	15.06	15.77	18.67	15.48	16.04	16.76	17.83	21.71
$\min(ARL_1)$	5	8	9	9	8	4	6	6	6	6
$\delta$	$q = 0.75$					$q = 0.50$				
	$\alpha = 0.5$	0.7	0.8	0.9	1.2	0.5	0.7	0.8	0.9	1.2
	$L = 2.596$	2.570	2.573	2.586	2.643	2.824	2.835	2.833	2.833	2.830
0	370.62 (353.18)	370.21 (350.58)	370.78 (356.43)	369.52 (358.60)	370.22 (360.78)	369.70 (363.79)	370.85 (365.77)	370.94 (368.89)	370.52 (366.72)	369.71 (368.17)
0.05	137.25 (114.91)	159.15 (143.64)	172.65 (162.65)	187.16 (178.65)	219.80 (212.74)	203.46 (196.59)	227.67 (222.22)	237.84 (232.59)	247.61 (246.39)	264.50 (263.53)
0.10	55.72 (38.08)	60.85 (48.49)	66.24 (55.91)	72.75 (63.93)	94.17 (87.95)	84.76 (75.79)	101.16 (95.90)	109.60 (105.77)	117.28 (112.46)	138.86 (135.38)
0.25	16.03 (7.47)	15.18 (7.49)	<b>14.98</b> (7.98)	15.05 (8.74)	16.88 (12.26)	17.23 (11.34)	18.08 (13.59)	19.09 (15.25)	20.32 (16.74)	24.76 (21.93)
0.50	6.98 (2.15)	6.78 (1.87)	6.60 (1.80)	6.41 (1.76)	6.05 (1.93)	5.89 (2.60)	5.62 (2.52)	5.56 (2.59)	<b>5.55</b> (2.71)	5.74 (3.26)
0.75	4.66 (1.07)	4.80 (0.89)	4.75 (0.83)	4.68 (0.79)	4.44 (0.71)	3.59 (1.19)	3.49 (1.05)	3.45 (1.02)	3.41 (1.01)	<b>3.34</b> (1.05)
1.00	3.72 (0.67)	4.04 (0.52)	4.07 (0.45)	4.07 (0.42)	3.95 (0.41)	2.72 (0.72)	2.72 (0.65)	2.72 (0.63)	2.70 (0.61)	<b>2.65</b> (0.59)
1.25	3.25 (0.45)	3.64 (0.50)	3.76 (0.44)	3.79 (0.42)	3.64 (0.48)	2.29 (0.49)	2.31 (0.48)	2.33 (0.48)	2.32 (0.48)	<b>2.29</b> (0.46)
1.50	3.06 (0.23)	3.31 (0.46)	3.45 (0.50)	3.49 (0.50)	3.32 (0.47)	2.09 (0.29)	2.10 (0.30)	2.11 (0.31)	2.10 (0.30)	<b>2.09</b> (0.25)
EARL	26.67	28.17	29.23	30.41	33.91	31.37	34.01	35.39	36.73	40.25
ESDRL	18.10	20.20	21.88	23.49	27.94	26.36	29.70	31.43	32.95	36.92
$\min(ARL_1)$	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2

**Πίνακας Γ16:** Τιμές ARL και SDRL για το διάγραμμα HWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή

$\delta$	$n = 5$		$n = 10$				
	$\lambda = 0.05$ $L = 2.070$	0.10	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
0	370.19 (524.58)	370.60 (1100.53)	370.14 (322.32)	370.19 (329.79)	370.11 (375.48)	370.60 (371.13)	370.09 (380.10)
0.05	137.84 (143.98)	111.84 (121.11)	112.74 (97.21)	120.73 (100.48)	147.91 (142.85)	242.70 (248.26)	289.72 (285.71)
0.10	60.38 (55.16)	53.49 (47.53)	44.22 (35.24)	48.61 (35.72)	56.81 (48.95)	108.04 (105.75)	200.43 (203.77)
0.25	16.32 (12.58)	15.97 (11.56)	10.81 (7.34)	12.38 (7.63)	12.69 (8.39)	19.63 (16.78)	45.22 (43.72)
0.50	6.09 (3.47)	6.16 (3.41)	4.09 (2.06)	4.58 (2.13)	4.46 (2.16)	4.99 (3.11)	8.63 (7.21)
0.75	3.85 (1.62)	3.88 (1.58)	2.56 (1.24)	2.91 (1.20)	2.74 (1.08)	2.69 (1.17)	3.51 (2.20)
1.00	3.01 (0.99)	3.02 (0.94)	1.83 (0.98)	2.14 (0.99)	2.03 (0.82)	1.99 (0.63)	2.22 (0.96)
1.25	2.58 (0.71)	2.59 (0.67)	1.38 (0.72)	1.63 (0.83)	1.60 (0.66)	1.69 (0.51)	1.75 (0.61)
1.50	2.34 (0.54)	2.35 (0.52)	1.14 (0.45)	1.30 (0.61)	1.32 (0.51)	1.49 (0.50)	1.51 (0.53)
EARL	26.29	24.42	21.00	22.46	24.42	34.87	51.34
ESDRL	25.89	34.76	16.58	17.04	21.10	32.76	49.89
$\min(ARL_1)$	2	2	1	1	1	1	1

**Πίνακας Γ17:** Τιμές της παραμέτρου  $L$  για το διάγραμμα TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου προκειμένου να επιτευχθεί μία καθορισμένη τιμή  $ARL_0$

$n$	$\lambda$	$ARL_0$			
		200	300	370	500
5	0.05	1.517	1.684	1.761	1.888
	0.10	1.794	1.970	2.040	2.166
	0.25	2.190	2.353	2.435	2.547
	0.50	2.512	2.649	2.716	2.808
	0.75	2.583	2.679	2.725	2.789
10	0.05	1.519	1.680	1.773	1.887
	0.10	1.796	1.970	2.058	2.179
	0.25	2.209	2.367	2.448	2.560
	0.50	2.538	2.678	2.746	2.843
	0.75	2.672	2.787	2.848	2.926
15	0.05	1.516	1.673	1.761	1.885
	0.10	1.790	1.964	2.048	2.175
	0.25	2.205	2.364	2.445	2.560
	0.50	2.542	2.686	2.758	2.857
	0.75	2.700	2.823	2.884	2.991
20	0.05	1.513	1.673	1.759	1.882
	0.10	1.793	1.960	2.050	2.171
	0.25	2.207	2.367	2.448	2.564
	0.50	2.549	2.692	2.764	2.865
	0.75	2.717	2.841	2.902	2.991



**Πίνακας Γ18:** Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα TEWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή

$\delta$	$n = 5$					$n = 10$				
	$\lambda = 0.05$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
	$L = 1.761$	2.040	2.435	2.716	2.725	1.773	2.058	2.448	2.746	2.848
0	370.21 226 (432.77)	370.40 249 (387.42)	370.04 255 (371.26)	369.95 256 (369.19)	370.06 258 (369.04)	370.71 226 (439.11)	370.56 247 (398.14)	370.18 254 (375.22)	369.77 258 (368.49)	371.01 257 (368.91)
0.05	170.21 113 (190.12)	202.43 139 (207.07)	251.08 173 (248.36)	291.44 203 (288.10)	323.99 227 (319.24)	111.13 80 (116.80)	135.11 94 (136.85)	180.52 126 (180.15)	235.41 164 (233.08)	284.70 197 (283.66)
0.10	71.18 55 (70.30)	87.08 64 (81.89)	123.74 87 (120.31)	179.59 125 (176.65)	235.83 164 (233.52)	42.69 34 (38.75)	49.19 39 (42.90)	68.40 50 (63.64)	106.39 74 (103.75)	162.80 114 (160.35)
0.25	18.95 15 (16.49)	21.41 19 (15.83)	26.12 20 (20.92)	40.52 29 (37.04)	69.65 49 (67.82)	10.40 8 (9.05)	11.81 10 (8.61)	13.21 11 (9.23)	17.80 13 (14.95)	30.78 22 (28.80)
0.50	6.16 5 (5.30)	7.41 6 (5.07)	8.21 7 (4.68)	9.68 8 (6.62)	15.30 11 (13.07)	3.12 2 (2.62)	3.79 3 (2.76)	4.44 4 (2.53)	4.78 4 (2.59)	6.24 5 (4.32)
0.75	3.15 2 (2.47)	4.03 3 (2.47)	4.71 4 (2.28)	5.03 4 (2.44)	6.39 5 (4.23)	1.62 1 (1.08)	1.96 2 (1.25)	2.45 2 (1.28)	2.74 3 (1.12)	3.08 3 (1.36)
1.00	2.06 2 (1.36)	2.79 2 (1.31)	3.36 3 (1.35)	3.55 3 (1.28)	3.97 3 (1.92)	1.18 1 (0.49)	1.34 1 (0.65)	1.69 2 (0.78)	2.03 2 (0.67)	2.28 2 (0.57)
1.25	1.58 1 (0.85)	2.30 2 (0.71)	2.72 3 (0.88)	2.91 3 (0.83)	3.04 3 (1.07)	1.04 1 (0.22)	1.11 1 (0.34)	1.33 1 (0.53)	1.71 2 (0.53)	2.05 2 (0.24)
1.50	1.33 1 (0.58)	2.10 2 (0.39)	2.39 2 (0.61)	2.56 2 (0.62)	2.60 2 (0.70)	1.01 1 (0.09)	1.03 1 (0.17)	1.14 1 (0.36)	1.50 1 (0.51)	2.01 2 (0.08)
EARL	28.56	32.94	39.95	50.11	64.41	19.99	22.30	26.82	33.95	44.40
ESDRL	29.28	29.93	35.79	46.23	61.26	20.21	20.82	24.37	31.28	41.68
$\min(ARL_1)$	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2

Πίνακας Γ18: (συνέχεια)

$\delta$	$n = 15$					$n = 20$				
	$\lambda = 0.05$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
	$L = 1.761$	2.048	2.445	2.758	2.884	1.759	2.050	2.448	2.764	2.902
0	370.92	370.56	370.39	370.60	369.87	369.41	370.56	370.99	370.50	369.68
	231	247	257	258	258	227	247	258	258	256
	(433.72)	(398.62)	(373.77)	(367.28)	(366.44)	(438.16)	(398.27)	(375.97)	(371.98)	(372.25)
0.05	83.23	100.52	141.17	195.46	251.83	67.16	79.75	113.93	167.00	222.63
	62	72	98	136	175	52	59	80	116	156
	(82.92)	(98.10)	(138.85)	(193.06)	(253.30)	(65.26)	(75.45)	(111.09)	(165.08)	(222.11)
0.10	30.96	34.69	46.04	73.81	118.80	24.64	27.24	35.21	55.90	92.15
	25	29	34	52	82	20	23	26	40	64
	(27.05)	(28.53)	(41.09)	(71.45)	(117.50)	(21.35)	(21.38)	(30.49)	(53.53)	(90.98)
0.25	7.20	8.31	9.14	11.19	18.04	5.53	6.46	7.16	8.26	12.37
	5	7	8	9	13	4	5	7	7	9
	(6.26)	(6.12)	(5.85)	(8.61)	(16.10)	(4.82)	(4.84)	(4.43)	(5.82)	(10.62)
0.50	2.15	2.57	3.10	3.34	3.85	1.69	1.98	2.40	2.64	2.89
	2	2	3	3	3	1	1	2	2	3
	(1.62)	(1.80)	(1.76)	(1.66)	(2.32)	(1.14)	(1.32)	(1.37)	(1.26)	(1.55)
0.75	1.25	1.41	1.72	1.95	2.07	1.10	1.18	1.37	1.56	1.64
	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2
	(0.59)	(0.73)	(0.85)	(0.81)	(0.85)	(0.35)	(0.46)	(0.60)	(0.64)	(0.66)
1.00	1.04	1.09	1.24	1.42	1.51	1.01	1.02	1.07	1.16	1.21
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	(0.22)	(0.31)	(0.47)	(0.54)	(0.56)	(0.09)	(0.15)	(0.25)	(0.38)	(0.42)
1.25	1.00	1.01	1.06	1.15	1.21	1.00	1.00	1.01	1.03	1.04
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	(0.07)	(0.11)	(0.23)	(0.36)	(0.41)	(0.02)	(0.04)	(0.08)	(0.16)	(0.19)
1.50	1.00	1.00	1.01	1.04	1.06	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	(0.01)	(0.03)	(0.09)	(0.19)	(0.24)	(0.00)	(0.01)	(0.02)	(0.05)	(0.06)
EARL	16.61	18.15	21.50	27.04	35.10	14.76	15.91	18.55	23.19	29.82
ESDRL	16.41	16.70	19.28	24.90	33.38	14.64	14.48	16.54	21.31	28.28
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

**Πίνακας Γ19:** Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα TEWMA-SR με όρια ελέγχου σταθερής κατάστασης υπό κανονική κατανομή

$\delta$	$n = 5$					$n = 10$				
	$\lambda = 0.05$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
	$L = 1.619$	1.989	2.424	2.715	2.724	1.623	1.994	2.431	2.744	2.847
0	369.80 266 (335.11)	369.56 262 (348.44)	369.79 259 (359.27)	370.11 259 (365.42)	369.47 258 (367.25)	370.04 269 (330.68)	370.07 263 (350.02)	370.90 260 (363.52)	370.61 260 (364.74)	370.36 257 (367.88)
0.05	<b>192.30</b> 144 (156.60)	210.68 151 (189.68)	252.58 177 (241.64)	292.92 205 (287.59)	323.24 227 (317.46)	<b>132.47</b> 103 (95.98)	143.63 106 (122.72)	183.62 130 (176.00)	237.26 167 (232.89)	284.34 197 (282.85)
0.10	<b>92.41</b> 75.73 (57.39)	95.83 90. (75.35)	126.14 126 (116.95)	180.14 163 (175.08)	235.59 54 (232.58)	62.19 46 (28.49)	<b>57.75</b> 53 (37.93)	71.60 75 (62.62)	107.74 114 (103.39)	162.73  (159.83)
0.25	39.77 38 (9.67)	30.15 27 (12.14)	<b>28.50</b> 22 (20.14)	41.27 30 (36.90)	69.74 49 (67.60)	31.43 31 (4.96)	21.57 20 (5.26)	<b>15.76</b> 13 (8.19)	18.55 14 (14.70)	30.93 22 (28.71)
0.50	27.04 27 (2.92)	17.77 17 (2.78)	11.00 10 (3.66)	<b>10.39</b> 8 (6.46)	15.52 11 (13.01)	22.51 22 (1.70)	14.33 14 (1.52)	7.85 8 (1.51)	<b>5.61</b> 5 (2.28)	6.38 5 (4.30)
0.75	22.94 23 (1.52)	14.62 14 (1.37)	8.04 8 (1.39)	<b>5.79</b> 5 (2.17)	6.65 5 (4.18)	19.38 19 (0.92)	12.08 12 (0.80)	6.26 6 (0.71)	3.77 4 (0.83)	<b>3.21</b> 3 (1.36)
1.00	21.00 721 (0.94)	13.21 13 (0.84)	6.97 7 (0.80)	4.47 4 (1.00)	<b>4.29</b> 4 (1.82)	17.89 18 (0.59)	11.08 11 (0.48)	5.55 6 (0.54)	3.19 3 (0.42)	<b>2.37</b> 2 (0.61)
1.25	19.99 20 (0.64)	12.46 12 (0.58)	6.43 6 (0.56)	3.95 4 (0.61)	<b>3.46</b> 3 (0.90)	17.11 17 (0.32)	10.49 10 (0.51)	5.13 5 (0.34)	3.02 3 (0.15)	<b>2.09</b> 2 (0.29)
1.50	19.37 19 (0.50)	12.10 12 (0.31)	6.14 6 (0.35)	3.67 4 (0.52)	<b>3.15</b> 3 (0.45)	16.91 17 (0.30)	10.08 10 (0.27)	5.01 5 (0.11)	3.00 3 (0.04)	<b>2.01</b> 2 (0.11)
EARL	57.34	47.41	44.50	51.37	64.73	46.37	36.46	31.94	35.57	44.50
ESDRL	22.29	26.02	34.07	45.72	60.90	15.23	17.69	23.11	30.76	41.58
$\min(ARL_1)$	19	12	6	3	3	16	10	5	3	2

Πίνακας Γ19: (συνέχεια)

$\delta$	$n = 15$					$n = 20$				
	$\lambda = 0.05$	0.10	0.25	0.50	0.75	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
	$L = 1.617$	1.991	2.431	2.754	2.883	1.620	1.989	2.431	2.760	2.901
0	369.75	369.90	370.72	369.91	369.64	370.93	370.74	370.26	370.38	369.62
	269	263	261	259	258	270	263	261	259	256
	(329.11)	(348.60)	(361.73)	(362.88)	(365.15)	(333.08)	(349.97)	(361.33)	(367.89)	(370.85)
0.05	<b>104.01</b>	110.22	144.66	196.22	251.91	<b>88.40</b>	89.87	117.27	167.84	223.08
	82	82	102	137	175	72	69	84	117	156
	(69.10)	(89.85)	(135.56)	(191.55)	(252.53)	(54.26)	(69.24)	(107.67)	(163.18)	(221.40)
0.10	50.72	<b>43.44</b>	49.03	74.82	119.09	44.96	<b>36.08</b>	37.89	56.86	92.51
	46	36	37	53	82	42	31	29	41	65
	(18.41)	(24.51)	(40.24)	(70.77)	(117.23)	(13.60)	(17.52)	(29.37)	(52.95)	(90.64)
0.25	27.89	18.52	<b>11.88</b>	12.01	18.33	25.84	16.85	10.13	<b>9.08</b>	12.67
	27	18	11	9	13	25	16	9	7	9
	(3.54)	(3.43)	(4.66)	(8.43)	(16.02)	(2.85)	(2.66)	(3.23)	(5.62)	(10.59)
0.50	20.34	12.79	6.74	4.32	<b>4.12</b>	19.04	11.85	6.13	3.72	<b>3.19</b>
	20	13	7	4	3	19	12	6	4	3
	(1.27)	(1.12)	(1.02)	(1.30)	(2.25)	(1.06)	(0.92)	(0.82)	(0.90)	(1.43)
0.75	17.62	10.89	5.47	3.20	<b>2.42</b>	16.53	10.16	5.09	2.92	<b>2.12</b>
	18	11	5	3	2	16	10	5	3	2
	(0.71)	(0.63)	(0.56)	(0.47)	(0.70)	(0.61)	(0.49)	(0.37)	(0.41)	(0.42)
1.00	16.29	10.40	5.03	2.93	<b>2.05</b>	15.28	9.25	4.63	2.46	<b>1.93</b>
	16	10	5	3	2	15	9	5	2	2
	(0.47)	(0.31)	(0.19)	(0.29)	(0.23)	(0.45)	(0.43)	(0.49)	(0.50)	(0.28)
1.25	15.73	9.58	4.96	2.71	<b>2.00</b>	14.92	9.00	4.11	2.09	<b>1.77</b>
	16	10	5	3	2	15	9	4	2	2
	(0.45)	(0.49)	(0.19)	(0.45)	(0.05)	(0.28)	(0.05)	(0.31)	(0.29)	(0.42)
1.50	15.08	9.08	4.79	2.39	<b>2.00</b>	14.21	9.00	4.00	2.01	<b>1.53</b>
	15	9	5	2	2	14	9	4	2	2
	(0.28)	(0.27)	(0.41)	(0.49)	(0.01)	(0.41)	(0.00)	(0.06)	(0.08)	(0.50)
EARL	41.37	31.80	26.70	28.80	35.79	38.58	29.02	23.41	24.79	30.55
ESDRL	12.61	14.39	18.27	24.47	33.02	11.30	12.45	15.68	20.97	28.17
$\min(ARL_1)$	15	9	4	2	2	14	9	4	2	1

**Πίνακας Γ20:** Τιμές της παραμέτρου  $L$  για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου προκειμένου να επιτευχθεί μία καθορισμένη τιμή  $ARL_0$

$n$	$\lambda$	$L$	$ARL_0$	$SDRL_0$	$L$	$ARL_0$	$SDRL_0$	$L$	$ARL_0$	$SDRL_0$	$L$	$ARL_0$	$SDRL_0$
5	0.10	0.895	200.76	542.39	0.953	300.48	719.63	1.000	370.56	850.96	1.068	501.13	1069.23
	0.14	1.135	200.00	357.30	1.221	301.45	481.80	1.280	370.53	571.41	1.366	499.66	737.39
	0.15	1.204	199.41	334.40	1.291	299.86	447.18	1.356	369.85	535.34	1.446	501.08	698.89
	0.16	1.243	200.27	298.26	1.364	300.30	422.30	1.432	370.88	508.64	1.510	500.24	648.27
	0.17	1.308	200.40	281.19	1.437	300.86	403.23	1.492	370.26	471.94	1.582	500.39	622.16
	0.20	1.490	200.49	240.64	1.622	299.63	350.93	1.688	369.35	431.92	1.765	499.76	573.15
	0.25	1.755	200.50	211.33	1.867	299.85	332.52	1.915	370.45	429.72	1.972	500.26	646.10
	0.30	1.937	200.21	222.90	2.007	300.32	406.06	2.027	368.72	549.86	2.056	500.58	861.51
	0.40	2.062	199.16	439.04	2.082	301.13	761.24	2.092	370.51	931.93	2.108	500.74	1186.21
10	0.10	0.941	200.66	449.81	1.028	300.94	604.80	1.071	371.65	696.43	1.156	500.56	877.81
	0.14	1.195	199.73	295.83	1.328	300.40	399.48	1.395	370.16	462.14	1.506	499.88	576.73
	0.15	1.270	199.70	275.68	1.403	299.96	366.20	1.479	370.63	427.32	1.598	500.42	532.81
	0.16	1.337	200.55	255.40	1.482	300.78	340.62	1.569	370.10	400.02	1.689	500.18	494.95
	0.17	1.404	200.99	237.49	1.567	300.93	321.16	1.650	369.54	373.04	1.783	499.28	468.39
	0.20	1.617	200.80	198.81	1.795	300.90	270.29	1.890	370.28	317.69	2.035	500.16	406.86
	0.25	1.944	200.78	165.76	2.134	299.74	234.83	2.229	369.93	284.58	2.363	500.25	382.83
	0.30	2.199	199.85	155.73	2.373	300.56	234.75	2.451	370.61	291.90	2.555	500.08	405.03
	0.40	2.470	198.91	170.26	2.592	300.92	267.38	2.643	369.86	336.01	2.705	500.44	477.33
15	0.10	0.944	199.79	428.91	1.035	300.99	576.19	1.088	370.58	670.08	1.172	500.33	833.46
	0.14	1.208	199.31	287.15	1.348	299.45	386.03	1.422	370.32	445.94	1.539	500.11	551.99
	0.15	1.281	199.63	265.42	1.426	299.60	354.71	1.508	369.73	412.43	1.637	500.52	511.73
	0.16	1.354	199.64	247.09	1.508	299.68	329.97	1.595	370.50	383.01	1.731	500.45	475.83
	0.17	1.424	200.20	229.89	1.591	301.25	308.39	1.683	370.09	359.11	1.824	500.07	446.85
	0.20	1.641	199.68	193.76	1.833	299.70	260.99	1.936	369.49	306.87	2.092	499.62	391.44
	0.25	1.980	200.19	161.72	2.188	299.48	227.86	2.296	370.71	276.34	2.444	499.51	366.22
	0.30	2.245	199.63	152.86	2.438	299.52	228.74	2.531	369.39	284.89	2.656	499.53	389.60
	0.40	2.534	200.53	169.74	2.675	300.98	264.10	2.739	369.18	330.90	2.827	500.76	463.03
20	0.10	0.946	201.05	423.62	1.045	300.25	567.64	1.096	369.95	656.88	1.181	499.98	815.99
	0.14	1.216	199.67	284.08	1.352	299.37	377.87	1.432	370.57	439.06	1.554	500.45	543.56
	0.15	1.286	199.66	261.61	1.436	299.87	348.74	1.521	369.89	405.17	1.650	499.28	500.45
	0.16	1.357	199.77	242.70	1.520	301.01	324.97	1.609	370.29	376.39	1.750	500.73	467.90
	0.17	1.431	200.30	226.28	1.603	299.89	303.08	1.700	370.01	353.18	1.846	500.89	439.68
	0.20	1.652	200.99	190.93	1.850	300.10	257.17	1.959	370.07	302.36	2.120	499.88	384.59
	0.25	1.998	200.63	159.77	2.212	299.52	224.25	2.324	370.13	271.69	2.481	500.67	361.55
	0.30	2.269	200.18	151.54	2.470	300.12	225.50	2.568	370.46	280.05	2.699	499.42	384.61
	0.40	2.565	200.96	167.84	2.714	300.65	261.14	2.785	370.46	330.72	2.877	499.78	455.98

**Πίνακας Γ21:** Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή για  $n = 5$

	$\lambda = 0.10$	0.14	0.15	0.16	0.17	0.20	0.25	0.30	0.40
$\delta$	$L = 1.000$	1.280	1.356	1.432	1.492	1.688	1.915	2.027	2.092
0	370.56	370.53	369.85	370.88	370.26	369.35	370.45	368.72	370.51
	9	65	88	111	146	192	207	170	88
	(850.96)	(571.41)	(535.34)	(508.64)	(471.94)	(431.92)	(429.72)	(549.86)	(931.39)
0.05	91.48	127.75	134.33	139.94	146.89	154.45	155.41	141.80	103.25
	8	41	51	60	76	95	106	96	63
	(179.61)	(187.26)	(187.12)	(187.27)	(184.05)	(177.01)	(162.85)	(148.36)	(123.43)
0.10	35.62	52.40	55.66	58.59	62.38	67.33	70.30	66.17	51.54
	7	23	27	31	37	46	53	50	37
	(60.58)	(69.99)	(71.12)	(72.09)	(71.93)	(71.30)	(66.38)	(59.39)	(48.56)
0.25	9.13	12.87	13.64	14.38	15.44	17.12	18.92	18.88	16.12
	4	7	8	9	10	12	15	15	13
	(12.16)	(14.73)	(15.18)	(15.60)	(15.83)	(16.39)	(16.00)	(14.70)	(12.37)
0.50	3.37	4.35	4.56	4.77	5.10	5.60	6.36	6.65	6.06
	1	3	3	4	4	4	5	6	5
	(3.53)	(4.16)	(4.29)	(4.42)	(4.50)	(4.78)	(4.78)	(4.39)	(3.81)
0.75	1.95	2.39	2.49	2.61	2.79	3.01	3.49	3.84	3.62
	1	1	1	1	2	3	3	3	3
	(1.78)	(2.05)	(2.13)	(2.20)	(2.21)	(2.38)	(2.37)	(2.03)	(1.78)
1.00	1.36	1.60	1.65	1.74	1.87	1.97	2.35	2.82	2.71
	1	1	1	1	1	1	2	2	2
	(1.02)	(1.21)	(1.27)	(1.35)	(1.36)	(1.48)	(1.51)	(1.14)	(0.98)
1.25	1.12	1.25	1.27	1.33	1.42	1.46	1.77	2.37	2.32
	1	1	1	1	1	1	1	2	2
	(0.55)	(0.73)	(0.77)	(0.87)	(0.89)	(0.97)	(1.08)	(0.69)	(0.60)
1.50	1.03	1.09	1.10	1.13	1.18	1.20	1.43	2.15	2.14
	1	1	1	1	1	1	1	2	2
	(0.27)	(0.41)	(0.43)	(0.53)	(0.57)	(0.61)	(0.78)	(0.42)	(0.37)
EARL	18.39	22.78	23.62	24.43	25.49	26.82	28.02	27.49	23.61
ESDRL	34.14	30.88	30.46	30.24	29.46	28.60	27.43	27.73	32.06
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	2	2

**Πίνακας Γ22:** Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή για  $n = 10$

	$\lambda = 0.10$	0.14	0.15	0.16	0.17	0.20	0.25	0.30	0.40
$\delta$	$L = 1.071$	1.395	1.479	1.569	1.650	1.890	2.229	2.451	2.643
0	371.65	370.16	370.63	370.10	369.54	370.28	369.93	370.61	369.86
	17	139	183	218	251	305	321	309	280
	(696.43)	(462.14)	(427.32)	(400.02)	(373.04)	(317.69)	(284.58)	(291.90)	(336.01)
0.05	66.86	96.72	103.71	109.14	114.66	127.97	138.24	140.16	142.48
	13	48	59	68	77	98	112	113	108
	(112.83)	(122.89)	(123.66)	(123.88)	(123.00)	(119.61)	(114.78)	(114.52)	(125.71)
0.10	23.90	35.26	38.14	40.51	43.04	49.69	55.72	57.19	56.63
	8	20	24	27	30	39	46	48	46
	(35.33)	(41.38)	(42.36)	(43.23)	(43.68)	(44.14)	(43.47)	(42.65)	(44.43)
0.25	5.86	7.94	8.53	9.03	9.60	11.26	13.25	14.02	13.70
	4	5	6	7	7	9	11	12	12
	(6.64)	(7.94)	(8.20)	(8.49)	(8.69)	(9.15)	(9.40)	(9.20)	(8.72)
0.50	2.16	2.68	2.85	2.98	3.15	3.69	4.40	4.76	4.76
	1	1	2	2	3	3	4	4	4
	(1.97)	(2.29)	(2.36)	(2.45)	(2.51)	(2.62)	(2.70)	(2.65)	(2.44)
0.75	1.30	1.50	1.58	1.62	1.71	2.01	2.45	2.70	2.79
	1	1	1	1	1	1	2	3	3
	(0.89)	(1.09)	(1.15)	(1.20)	(1.25)	(1.36)	(1.43)	(1.39)	(1.22)
1.00	1.06	1.12	1.15	1.16	1.20	1.35	1.63	1.85	2.00
	1	1	1	1	1	1	1	2	2
	(0.37)	(0.51)	(0.55)	(0.59)	(0.63)	(0.76)	(0.92)	(0.95)	(0.83)
1.25	1.01	1.02	1.03	1.03	1.04	1.10	1.24	1.39	1.58
	1	1	1	1	1	1	1	1	2
	(0.13)	(0.20)	(0.22)	(0.25)	(0.28)	(0.38)	(0.56)	(0.66)	(0.64)
1.50	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.02	1.07	1.15	1.32
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	(0.04)	(0.07)	(0.08)	(0.09)	(0.10)	(0.17)	(0.31)	(0.41)	(0.50)
EARL	14.98	17.98	18.77	19.37	20.03	21.86	23.67	24.31	24.43
ESDRL	23.81	20.83	20.40	20.08	19.65	18.70	17.98	18.01	19.32
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

**Πίνακας Γ23:** Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή για  $n = 15$

	$\lambda = 0.10$	0.14	0.15	0.16	0.17	0.20	0.25	0.30	0.40
$\delta$	$L = 1.088$	1.422	1.508	1.595	1.683	1.936	2.296	2.531	2.739
0	370.58	370.32	369.73	370.50	370.09	369.49	370.71	369.39	369.18
	20	164	208	247	274	318	329	314	280
	(670.08)	(445.94)	(412.43)	(383.01)	(359.11)	(306.87)	(276.34)	(284.89)	(330.90)
0.05	51.25	75.09	80.11	85.36	89.78	101.27	111.52	114.19	117.58
	13	41	49	57	63	79	92	94	91
	(81.38)	(91.16)	(91.94)	(92.31)	(92.49)	(91.23)	(88.73)	(88.48)	(98.69)
0.10	17.77	26.05	27.99	30.08	31.94	37.07	42.57	44.10	43.82
	7	16	18	21	23	30	36	38	36
	(24.57)	(29.22)	(29.95)	(30.56)	(31.10)	(31.90)	(31.92)	(31.30)	(32.25)
0.25	4.34	5.78	6.14	6.57	6.96	8.16	9.71	10.39	10.27
	3	4	5	5	5	7	8	9	9
	(4.62)	(5.47)	(5.65)	(5.82)	(5.98)	(6.33)	(6.59)	(6.50)	(6.13)
0.50	1.64	1.98	2.07	2.19	2.29	2.68	3.23	3.53	3.59
	1	1	1	1	3	2	3	3	3
	(1.37)	(1.60)	(1.66)	(1.71)	(1.77)	(1.88)	(1.95)	(1.91)	(1.73)
0.75	1.10	1.19	1.21	1.26	1.29	1.46	1.75	1.96	2.10
	1	1	1	1	1	1	1	2	2
	(0.49)	(0.64)	(0.68)	(0.73)	(0.77)	(0.90)	(1.04)	(1.06)	(0.95)
1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.04	1.09	1.20	1.32	1.46
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	(0.13)	(0.20)	(0.22)	(0.25)	(0.27)	(0.37)	(0.52)	(0.61)	(0.62)
1.25	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.04	1.07	1.15
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	(0.03)	(0.05)	(0.06)	(0.07)	(0.08)	(0.12)	(0.21)	(0.29)	(0.38)
1.50	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.04
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	(0.00)	(0.01)	(0.01)	(0.01)	(0.02)	(0.03)	(0.07)	(0.11)	(0.19)
EARL	13.18	15.43	15.93	16.51	16.99	18.37	19.92	20.46	20.68
ESDRL	20.12	17.05	16.59	16.17	15.84	15.03	14.50	14.62	15.95
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1



**Πίνακας Γ24:** Τιμές ARL, MRL και SDRL για το διάγραμμα DHWMA-SR με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου υπό κανονική κατανομή για  $n = 20$

	$\lambda = 0.10$	0.14	0.15	0.16	0.17	0.20	0.25	0.30	0.40
$\delta$	$L = 1.096$	1.432	1.521	1.609	1.700	1.959	2.324	2.568	2.785
0	369.95	370.57	369.89	370.29	370.01	370.07	370.13	370.46	370.46
	22	166	212	247	275	321	329	315	282
	(656.88)	(439.06)	(405.17)	(376.39)	(353.18)	(302.36)	(271.69)	(280.05)	(330.72)
0.05	41.88	61.52	66.12	70.67	74.82	84.95	94.06	96.79	100.35
	12	34	41	47	53	67	78	81	79
	(64.50)	(73.15)	(74.29)	(74.86)	(75.34)	(74.89)	(72.96)	(72.74)	(81.72)
0.10	14.25	20.73	22.35	24.04	25.66	29.94	34.56	36.10	36.08
	6	13	15	17	19	24	29	31	30
	(18.92)	(22.63)	(23.34)	(23.90)	(24.43)	(25.26)	(25.33)	(24.91)	(25.70)
0.25	3.52	4.60	4.89	5.22	5.53	6.46	7.70	8.30	8.28
	1	4	4	4	5	5	7	7	7
	(3.54)	(4.19)	(4.33)	(4.46)	(4.59)	(4.87)	(5.08)	(5.04)	(4.76)
0.50	1.37	1.60	1.67	1.76	1.84	2.12	2.57	2.82	2.90
	1	1	1	1	1	1	2	3	3
	(1.00)	(1.21)	(1.26)	(1.31)	(1.36)	(1.48)	(1.56)	(1.54)	(1.39)
0.75	1.03	1.07	1.08	1.11	1.13	1.21	1.39	1.54	1.66
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	(0.27)	(0.37)	(0.41)	(0.45)	(0.48)	(0.60)	(0.75)	(0.81)	(0.77)
1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.02	1.06	1.11	1.17
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	(0.05)	(0.08)	(0.10)	(0.11)	(0.12)	(0.17)	(0.28)	(0.36)	(0.41)
1.25	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.03
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	(0.00)	(0.02)	(0.02)	(0.02)	(0.02)	(0.04)	(0.07)	(0.11)	(0.16)
1.50	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.01)	(0.02)	(0.05)
EARL	12.16	13.96	14.39	14.86	15.28	16.41	17.67	18.18	18.42
ESDRL	18.19	15.03	14.56	14.14	13.82	13.04	12.51	12.66	14.04
$\min(ARL_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

**Πίνακας Γ25:** Δεδομένα για την εφαρμογή 2

$i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$SR_i$
1	74.012	74.015	74.030	73.986	74.000	8
2	73.995	74.010	73.990	74.015	74.001	4
3	73.987	73.999	73.985	74.000	73.990	-14
4	74.008	74.010	74.003	73.991	74.006	7
5	74.003	74.000	74.001	73.986	73.997	-3
6	73.994	74.003	74.015	74.020	74.004	9
7	74.008	74.002	74.018	73.995	74.005	10
8	74.001	74.004	73.990	73.996	73.998	-6
9	74.015	74.000	74.016	74.025	74.000	12
10	74.030	74.005	74.000	74.016	74.012	14
11	74.001	73.990	73.995	74.010	74.024	4
12	74.015	74.020	74.024	74.005	74.019	15
13	74.035	74.010	74.012	74.015	74.026	15
14	74.017	74.013	74.036	74.025	74.026	15
15	74.010	74.005	74.029	74.000	74.020	14



## Βιβλιογραφία

- [1] Abbas, N. (2018). Homogeneously weighted moving average control chart with an application in substrate manufacturing process. *Computers & Industrial Engineering*, **120**, 460-470.
- [2] Abbas, N., Riaz, M., and Does, R.J.M.M. (2013). Mixed exponentially weighted moving average-cumulative sum charts for process monitoring. *Quality and Reliability Engineering International*, **29** (3), 345-356.
- [3] Abbasi, S.A. (2012). A new nonparametric EWMA sign control chart. *Expert Systems with Applications*, **39** (9), 8503.
- [4] Abbasi, A., Aslam, M., and Saghir, A. (2018). A mixed nonparametric control chart for efficient process monitoring. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **99** (8), 2549-2561.
- [5] Abid, M., Mei, S., Nazir, H.Z., Riaz, M., and Hussain, S. (2021). A mixed HWMA-CUSUM mean chart with an application to manufacturing process. *Quality and Reliability Engineering International*, **37** (2), 618-631.
- [6] Abid, M., Nazir, H.Z., Riaz, M., and Lin, Z. (2017). An efficient nonparametric EWMA Wilcoxon signed-rank chart for monitoring location. *Quality and Reliability Engineering International*, **33** (3), 669-685.
- [7] Abid, M., Nazir, H.Z., Tahir, M., and Riaz, M. (2018). On designing a new cumulative sum Wilcoxon signed rank chart for monitoring process location. *PLoS One*, **13** (4), e0195762.
- [8] Abid, M., Shabbir, A., Nazir, H.Z., Sherwani, R.A.K., and Riaz, M. (2020). A double homogeneously weighted moving average control chart for monitoring of the process mean. *Quality and Reliability Engineering International*, **36** (5), 1513-1527.
- [9] Adeoti, O.A. and Koleoso, S.O. (2020). A hybrid homogeneously weighted moving average control chart for process monitoring. *Quality and Reliability Engineering International*, **36** (6), 2170-2186.

- [10] Alevizakos, V., Chatterjee, K., and Koukouvinos, C. (2022). The quadruple exponentially weighted moving average control chart. *Quality Technology and Quantitative Management*, **19** (1), 50-73.
- [11] Ali, R. and Haq, A. (2018). A mixed GWMA–CUSUM control chart for monitoring the process mean. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **47** (15), 3779-3801.
- [12] Ali, S., Abbas, Z., Nazir, H.Z., Riaz, M., Zhang, X., and Li, Y. (2020). On designing non-parametric EWMA sign chart under ranked set sampling scheme with application to industrial process. *Mathematics*, **8** (9), 1497.
- [13] Amin, R.W., Reynolds, M.R., and Bakir, S. (1995). Nonparametric quality control charts based on the sign statistic. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **24** (6), 1597-1623.
- [14] Amin, R.W. and Searcy, A.J. (1991). A nonparametric exponentially weighted moving average control scheme. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **20** (4), 1049-1072.
- [15] Aslam M., Azam, M., and Jun, C.-H. (2014). A new exponentially weighted moving average sign chart using repetitive sampling. *Journal of Process Control*, **24** (7), 1149-1153.
- [16] Bakir, S.T. (2004). A distribution-free Shewhart quality control chart based on signed-ranks. *Quality Engineering*, **16** (4), 613-623.
- [17] Bakir, S.T. and Reynolds, M.R. (1979). A nonparametric procedure for process control based on within-group ranking. *Technometrics*, **21** (2), 175-183.
- [18] Barnard, G.A. (1959). Control charts and stochastic processes. *Journal of the Royal Statistical Society (B)*, **21** (2), 239-271.
- [19] Bennett, B. (1972). On the non-null distribution of Wilcoxon's signed rank test. *Metrika*, **19** (1), 36-38.
- [20] Borrór, C.M., Montgomery, D.C., and Runger, G.C. (1999). Robustness of the EWMA control chart to non-normality. *Journal of Quality Technology*, **31** (3), 309-316.

- [21] Brook, D. and Evans, D.A. (1972). An approach to the probability distribution of cusum run length. *Biometrika*, **59** (3), 539-549.
- [22] Capizzi, G. and Masarotto, G. (2003). An adaptive exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics*, **45** (3), 199-207.
- [23] Castagliola, P., Tran, K.P., Celano, G., Rakitzis, A.C., and Maravelakis, P.E. (2019). An EWMA-type sign chart with exact run length properties. *Journal of Quality Technology*, **51** (1), 51-63.
- [24] Celano, G., Castagliola, P., Chakraborti, S., and Nenes, G. (2016) On the implementation of the Shewhart sign control chart for low-volume production. *International Journal of Production Research*, **54** (19), 5886-5900.
- [25] Chakraborti, S. (2000). Run length, average run length and false alarm rate of shewhart x-bar chart: exact derivations by conditioning. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **29** (1), 61-81.
- [26] Chakraborti, S. (2007). Run length distribution and percentiles: the Shewhart chart with unknown parameters. *Quality Engineering*, **19** (2), 119-127.
- [27] Chakraborti, S. and Eryilmaz, S. (2007). A nonparametric Shewhart-type signed rank control chart based on runs. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **36** (2), 335-356.
- [28] Chakraborti, S. and Graham, M.A. (2019a). *Nonparametric statistical process control*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ. .
- [29] Chakraborti, S. and Graham, M.A. (2019b). Nonparametric (distribution-free) control charts: An updated overview and some results. *Quality Engineering*, **31** (4), 523-544.
- [30] Chakraborti, S., Human, S.W., and Graham, M.A. (2011). Nonparametric (distribution-free) quality control charts. In *Handbook of methods and applications of statistics: Engineering, quality control, and physical sciences*, ed. N. Balakrishnan, 298–329. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- [31] Chakraborti, S., Van der Laan, P., and Bakir, S.T. (2001). Nonparametric control charts: An overview and some results. *Journal of Quality Technology*, **33** (3), 304-315.

- [32] Chakraborty, N., Chakraborti, S., Human, S.W., and Balakrishnan, N. (2016). A generally weighted moving average signed-rank control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, **32** (8), 2835-2845.
- [33] Chan, L.K. and Zhang, J. (2000). Some issues in the design of EWMA charts. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **29** (1), 201-217.
- [34] Chan, K.M., Mukherjee, A., Chong, Z.L, and Lee, H.C. (2021). Distribution-free double exponentially and homogeneously weighted moving average Lepage schemes with an application in monitoring exit rate. *Computers & Industrial Engineering*, **161**, 107370.
- [35] Chen, J.-H., Lu, S.-L., and Sheu, S.-H. (2022). A nonparametric generally weighted moving average sign chart based on repetitive sampling. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **51** (3), 1137-1156.
- [36] Chew, X.Y., Khaw, K.W., and Yeong, W.C. (2020). The efficiency of run rules schemes for the multivariate coefficient of variation: A Markov chain approach. *Journal of Applied Statistics*, **47** (3), 460-80.
- [37] Chiu, W.-C. (2009). Generally weighted moving average control charts with fast initial response features. *Journal of Applied Statistics*, **36** (3), 255-275.
- [38] Crosier, R.B. (1986). A new two-sided cumulative sum quality control scheme. *Technometrics*, **28** (3), 187-194.
- [39] Crowder, S.V. (1987). A simple method for studying run - length distributions of exponentially weighted moving average charts. *Technometrics* **29** (4), 401-407.
- [40] Gibbons, J.D. and Chakraborti, S. (2010). *Nonparametric Statistical Inference*, 5th ed. CRC Press, Boca Raton, FL.
- [41] Godase, D.G. and Mahadik, S.B. (2022). The combined Shewhart-CUSUM sign charts. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, doi:10.1080/03610918.2021.2020287.
- [42] Graham, M.A., Chakraborti, S., and Human, S.W. (2011a) A nonparametric EWMA sign chart for location based on individual measurements. *Quality Engineering*, **23** (3), 227-241.

- [43] Graham, M.A., Chakraborti, S., and Human, S.W. (2011b). A nonparametric exponentially weighted moving average signed-rank chart for monitoring location. *Computational Statistics & Data Analysis*, **55** (8), 2490-2503.
- [44] Haq, A. (2013). A new hybrid exponentially weighted moving average control chart for monitoring process mean. *Quality and Reliability Engineering International*, **29** (7), 1015-1025.
- [45] Haq, A. (2017). A new hybrid exponentially weighted moving average control chart for monitoring process mean:discussion. *Quality and Reliability Engineering International*, **33** (7), 1629-1631.
- [46] Haq, A. (2019). A new nonparametric synthetic EWMA control chart for monitoring process mean. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **48** (6), 1665-1676.
- [47] Haq, A. (2022). A novel cumulative EWMA-sum mean chart. *Quality and Reliability Engineering International*, **38** (1), 472-483.
- [48] Haq, A., Brown, J., and Moltchanova, E. (2014). Improved fast initial response features for exponentially weighted moving average and cumulative sum control charts. *Quality and Reliability Engineering International*, **30** (5), 697-710.
- [49] Hawkins, D.M. (1992) A fast accurate approximation for average run lengths of CUSUM control charts. *Journal of Quality Technology*, **24** (1), 37-43.
- [50] Hawkins, D.M. (1993). Cumulative sum control charting: an underutilized SPC tool. *Quality Engineering*, **5** (3), 463-477.
- [51] Hawkins, D.M. and Wu, Q. (2014). The CUSUM and the EWMA head-to-head. *Quality Engineering*, **26** (2), 215-222.
- [52] Human, S.W., Chakraborti, S., and Smit, C.F. (2010). Nonparametric Shewhart-type sign control charts based on runs. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **39** (11), 2046-2062.
- [53] Human, S.W., Kritzing, P., and Chakraborti, S. (2011). Robustness of the EWMA control chart for individual observations. *Journal of Applied Statistics*, **38** (10), 2071-2087.



- [54] Jardim, F.S., Chakraborti, S., and Epprecht, E.K. (2019).  $\bar{X}$  chart with estimated parameters: the conditional *ARL* distribution and new insights. *Productions and Operations Management*, **28** (6), 1545-1557.
- [55] Jones, L.A. (2002) The statistical design of EWMA control charts with estimated parameters. *Journal of Quality Technology*, **34** (3), 277-288.
- [56] Jones, L.A., Champ, C.W., and Rigdon, S.E. (2004). The run length distribution of the CUSUM with estimated parameters. *Journal of Quality Technology*, **36** (1), 95-108.
- [57] Khilare, S.K. and Shirke, D.T. (2010). A Nonparametric synthetic control chart using sign statistic. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **39** (18), 3282-3293.
- [58] Khoo, M.B.C. and Teh, S.Y. (2009). A study on the effects of trends due to inertial on EWMA and CUSUM charts. *Journal of Quality Measurement and Analysis*, **5** (2), 73-80.
- [59] Knoth, S., Tercero-Gómez, V.G., Khakifirooz, M., and Woodall, W.H. (2021). The impracticality of homogeneously weighted moving average and progressive mean control chart approaches. *Quality and Reliability Engineering International*, **37** (8):3779-3794.
- [60] Knoth, S., Mahmoud, M.A., Saleh, N.A., Tercero-Gómez, V.G., and Woodall, W.H. (2022). Letter on statistical process monitoring research: Misdirections and recommendations. *Quality and Reliability Engineering International*, **38** (4), 2198-2199.
- [61] Knoth, S., Woodall, W.H., and Tercero-Gómez, V.G. (2022). The case against generally weighted moving average (GWMA) control charts. *Quality Engineering*, **34** (1), 75-81.
- [62] Knoth, S., Saleh, N.A., Mahmoud, M.A., Woodall, W.H., and Tercero-Gómez, V.G. (2022). A critique of a variety of "memory-based" process monitoring methods, *Journal of Quality Technology*, doi:10.1080/00224065.2022.2034487
- [63] Koutras, M.V., Bersimis, S., and Maravelakis, P.E. (2007). Statistical process control using Shewhart control charts with supplementary runs rules. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **9** (207), 207-224.
- [64] Koutras, M.V. and Triantafyllou, I.S. (2020). *Distribution-free Methods for Statistical Process Monitoring and Control* Switzerland: Springer, doi: 10.1007/978-3-030-25081-2.

- [65] Lu, S.-L. (2015). An extended nonparametric exponentially weighted moving average sign control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, **31** (1), 3-13.
- [66] Lu, S.-L. (2018). Non parametric double generally weighted moving average sign charts based on process proportion. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **47** (11), 2684-2700.
- [67] Lucas, J.M. (1976). The design and use of V-Mask control schemes. *Journal of Quality Technology*, **8** (1), 1-12.
- [68] Lucas, J.M. (1982). Combined Shewhart-CUSUM quality control schemes. *Journal of Quality Technology*, **14** (2), 51-59.
- [69] Lucas, J.M. and Crosier, R.B. (1982). Fast initial response for CUSUM quality-control schemes: give your CUSUM a head start. *Technometrics*, **24** (3), 199-205.
- [70] Lucas, J.M. and Saccucci, M.S. (1990). Exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements. *Technometrics*, **32** (1), 1-12.
- [71] Mabude, K., Malela-Majika, J.-C., Castagliola, P., and Shongwe, S.C. (2021). Generally weighted moving average monitoring schemes: Overview and perspectives. *Quality and Reliability Engineering International*, **37** (2), 409-432.
- [72] Malela-Majika, J.-C., Shongwe, S.C. and Adeoti, O.A. (2021). A hybrid homogeneously weighted moving average control chart for process monitoring: Discussion. *Quality and Reliability Engineering International*, **37** (8), 3314-3322
- [73] McCornack, R. (1965). Extended tables of the Wilcoxon matched pair signed rank statistic. *Journal of the American Statistical Association*, **60** (311), 864-871.
- [74] McGilchrist, C.A. and Woodyer, K.D. (1975). Note on a Distribution-free CUSUM Technique. *Technometrics*, **17** (3), 321-325.
- [75] Montgomery, D.C. (2013). *Introduction to Statistical Quality Control* 7th ed. Wiley, New York, NY.
- [76] Mukherjee, A. and Sen, R. (2018). Optimal design of Shewhart-Lepage type schemes and its application in monitoring service quality. *European Journal of Operational Research*, **266** (1), 147-67.

- [77] Page, E.S. (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika*, **41** (1), 100-115.
- [78] Park, J.-Y. and Seo, S.-K. (2012).  $\bar{X}$  control chart with runs-rules. *Journal of the Korean Society for Quality Management*, **40** (2), 176-185.
- [79] Perdakis, T., Psarakis, S., Castagliola, P., and Celano, G. (2021). An EWMA-type chart based on signed ranks with exact run length properties. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **91** (4), 732-751.
- [80] Perdakis, T., Psarakis, S., Castagliola, P., and Maravelakis, P.E. (2021). An EWMA signed ranks control chart with reliable run length performances. *Quality and Reliability Engineering International*, **37** (3), 1266-1284.
- [81] Radson, D. and Boyd, A.H. (2005). Graphical representation of run length distributions. *Quality Engineering*, **17** (2), 301-308.
- [82] Raza, M.A., Aslam, M., Farooq, M., Sherwani, R.A.K., Bhatti, S.H., and Ahmad, T. (2022). A new nonparametric composite exponentially weighted moving average sign control chart. *Scientia Iranica E*, **29** (1), 290-302.
- [83] Raza, M.A., Nawaz, T., Aslam, M., Bhatti, S.H., and Sherwani, R.A.K. (2020). A new nonparametric double exponentially weighted moving average control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, **36** (1), 68-87.
- [84] Raza, M.A., Nawaz, T., and Han, D. (2020). On designing distribution-free homogeneously weighted moving average control charts. *Journal of Testing and Evaluation*, **48** (4), 3154-3171.
- [85] Reynolds, M.R. (1975). A sequential signed-rank test for symmetry. *The Annals of Statistics*, **3** (2), 382-400.
- [86] Reynolds, M.R. and Stoumbos, Z.G. (2004). Control charts and the efficient allocation of sampling resources. *Technometrics*, **46** (2), 200-214.
- [87] Rhoads, T.R., Montgomery, D.C., and Mastrangelo, C.M. (1996). A fast initial response scheme for the exponentially weighted moving average control chart. *Quality Engineering*, **9** (2), 317-327.

- [88] Riaz, M. and Abbasi, S.A. (2016). Nonparametric double EWMA control chart for process monitoring. *Revista Colombiana de Estadística*, **39** (2), 167-184.
- [89] Riaz, M., Abid, M., Shabbir, A., Nazir, H.Z., Abbas, Z., and Abbasi, S.A. (2021). A non-parametric double homogeneously weighted moving average control chart under sign statistic. *Quality and Reliability Engineering International*, **37** (4), 1544-1560.
- [90] Roberts, S.W. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics*, **1** (3), 239-250.
- [91] Ruggeri, F., Kenett, R.S., and Faltin, F.W. (2007). Cumulative sum (CUSUM) chart. *Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability*, 1, 466-469. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY.
- [92] Ryu, J.H., Wan, H., and Kim, S. (2010). Optimal design of a CUSUM chart for a mean shift of unknown size. *Journal of Quality Technology*, **42** (3), 311-326.
- [93] Saccucci, M.S. and Lucas, J.M. (1990). Average run lengths for exponentially weighted moving average control schemes using the Markov chain approach. *Journal of Quality Technology*, **22** (2), 154-162.
- [94] Shamma, S.E., Amin, R.W., and Shamma, A.K. (1991). A double exponentially weighted moving average control procedure with variable sampling intervals. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **20** (2-3), 511-528.
- [95] Shamma, S.E. and Shamma, A.K. (1992). Development and evaluation of control charts using double exponentially weighted moving averages. *International Journal of Quality & Reliability Management*, **9** (6), 18-25.
- [96] Sheu, S.-H. and Hsieh, Y.-T. (2009). The extended GWMA control chart. *Journal of Applied Statistics*, **36** (2), 135-147.
- [97] Sheu, S.H. and Lin, T.C. (2003). The generally weighted moving average control chart for detecting small shifts in the process mean. *Quality Engineering*, **16** (2), 209-231.
- [98] Shewhart, W.A. (1926). Quality control charts. *Bell System Technical Journal*, **5** (4), 593-603.

- [99] Shewhart, W.A. (1931). *Economic Control of Quality of Manufactured Product*, Van Nostrand, New York, NY.
- [100] Shogwe, S.C., Malela-Majika, J.-C., and Castagliola, P. (2021). A combined mixed-skip sampling strategy to reduce the effect of autocorrelation on the  $\bar{X}$  scheme with and without measurement errors. *Journal of Applied Statistics*, **48** (7), 1243-1268.
- [101] Siegmund, D. (1985). *Sequential analysis: tests and confidence intervals*, Springer-Verlag, New York, NY.
- [102] Steiner, S.H. (1999). EWMA control charts with time-varying control limits and fast initial response. *Journal of Quality Technology*, **31** (1), 75-86.
- [103] Tang, A., Ma, Y., Hu, X., and Huang, W. (2022). The exact statistical properties of a signed-rank-based adaptive exponential weighted moving average chart. *Quality and Reliability Engineering International*, **38** (5), 2781-2794.
- [104] Tang, A., Sun, J., Hu, X., and Castagliola, P. (2019). A new nonparametric adaptive EWMA control chart with exact run length properties. *Computers & Industrial Engineering*, **130**, 404-419.
- [105] Triantafyllou, I.S. and Ram, M. (2021a). Nonparametric EWMA-Type control charts for monitoring industrial processes: an overview. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*, **6** (3), 708-751.
- [106] Triantafyllou, I.S. and Ram, M. (2021b). Distribution-free CUSUM-type control charts for monitoring industrial processes: an overview. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*, **6** (4), 975-1008.
- [107] Vance, L.C. (1986). Average run lengths of cumulative cum control charts for controlling normal means. *Journal of Quality Technology*, **18** (3), 189-193.
- [108] Western Electric Company (1956). *Statistical Quality Control Handbook*, Western Electric Corporation, Indianapolis, IN.
- [109] Woodall, W.H. and Mahmoud, M.A. (2005) The inertial properties of quality control charts. *Technometrics*, **47** (4), 425-436.

- [110] Wu, Z., Shamsuzzaman, M., and Pan, E.S. (2004). Optimization design of the control charts based on Taguchi's loss function and random process shifts. *International Journal of Production Research*, **42** (2), 379-390.
- [111] Yang, S.F. and Cheng, S.W. (2011). A new non-parametric CUSUM mean chart. *Quality and Reliability Engineering International*, **27** (7), 867-875.
- [112] Yang, S.F., Lin, J.S., and Cheng, S.W. (2011). A new nonparametric EWMA sign control chart. *Expert Systems with Applications*, **38** (5), 6239-6243.
- [113] Zaman, B., Riaz, M., Abbas, N., and Does, R.J.M.M. (2015). Mixed cumulative sum-exponentially weighted moving average control charts: An efficient way of monitoring process location. *Quality and Reliability Engineering International*, **31** (8), 1407-1421.
- [114] Zhang, L. and Chen, G. (2005). An extended EWMA mean chart. *Quality Technology & Quantitative Management*, **2** (1), 39-52.
- [115] Zhao, Y., Tsung, F., and Wang, Z. (2005). Dual CUSUM control schemes for detecting a range of mean shifts. *IIE Transactions*, **37** (11), 1047-1057.