



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΠΛΟΙΟΥ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΕΞΕΤΑΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΠΛΟΙΟΥ ΜΕ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ  
ΜΕΘΟΔΟ**

ΣΟΦΙΑ ΔΑΜΙΑΝΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΩΣΤΑΣ Ι. ΣΠΥΡΟΥ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2023

## Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί το τελικό στάδιο για την ολοκλήρωση των ακαδημαϊκών σπουδών μου στη Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Κώστα Σπύρου, για την εμπιστοσύνη του να μου αναθέσει και να επιβλέψει την εργασία μου, αλλά και για την αμέριστη βοήθεια και καθοδήγησή του μέχρι την ολοκλήρωσή της. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ιωάννη Κοντολέφα για τη βοήθεια που μου παρείχε όσον αφορά την πραγματοποίηση του υπολογιστικού τμήματος της εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για την πολύτιμη υποστήριξή τους κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

## Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στη μελέτη της ευστάθειας απλών γεωμετρικών σωμάτων, χρησιμοποιώντας την ενεργειακή μέθοδο. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας του συστήματος που αποτελείται από το επιπλέον σώμα και το εκτοπιζόμενο ρευστό και χρησιμοποιήθηκε σε τμήμα της μελέτης του από τον Ολλανδό μαθηματικό Christiaan Huygens κατά τον 17<sup>ο</sup> αιώνα. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας, αφού παρουσιαστεί το θεωρητικό υπόβαθρο και η αναλυτική μεθοδολογία της ενεργειακής μεθόδου, θα διερευνηθεί ενεργειακά η στατική ευστάθεια των πρισμάτων της τετραγωνικής και της ημικυκλικής διατομής, με πλευρά και ακτίνα αντίστοιχα ίση με μονάδα, χρησιμοποιώντας αναλυτικούς υπολογισμούς. Με βάση τα αποτελέσματα της εφαρμογής της ενεργειακής μεθόδου στο πρίσμα της τετραγωνικής διατομής, θα σχηματιστεί το διάγραμμα γωνίας εγκάρσιας κλίσης  $\alpha$  συναρτήσεως του λόγου πυκνοτήτων στερεού – ρευστού  $r$ , γνωστό και ως διάγραμμα ισορροπίας  $\alpha - r$ . Από την ενεργειακή προσέγγιση εξέτασης της ευστάθειας του ημικυκλικού κυλίνδρου, θα προκύψουν οι θέσεις ισορροπίας του για διάφορους λόγους πυκνοτήτων  $r$ . Στη συνέχεια, ακολουθεί η αριθμητική αντιμετώπιση της ευστάθειας των πιο πάνω στερεών, που πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του λογισμικού Mathematica. Η ενεργειακή μέθοδος θα εφαρμοστεί, ακόμη, σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις φορτηγίδας, με διατομές που λήφθηκαν από σύγχρονο πλοίο μεταφοράς εμπορευματοκιβωτίων και θα προσδιοριστούν οι θέσεις ισορροπίας τους για τρεις διαφορετικές καταστάσεις φόρτωσης. Επιπλέον, θα υπολογιστεί η τιμή του μετακεντρικού ύψους (GM) για συγκεκριμένες περιπτώσεις πλεύσης της φορτηγίδας. Στο τέλος της διπλωματικής εργασίας, παρατίθενται συμπεράσματα και σχόλια σχετικά με τα προκύπτοντα αποτελέσματα της παρούσας ερευνητικής προσπάθειας.

## **Abstract**

The present thesis is focused on the stability study of certain simple solids and also of a simple barge, using the energy method. This method is based on the principle of the minimum potential energy of the floating body and the displaced liquid and was partly employed for his research by the Dutch mathematician Christiaan Huygens, in the 17<sup>th</sup> century. After the theoretical basis and mathematical methodology of the energy method is presented, it will be employed for the stability investigations of the solid prisms of square and half-circle cross section. It is found that the prism of square cross section floats in different symmetrical and asymmetrical positions with respect to the vertical plane, depending on the solid – liquid specific mass ratio. To further comprehend these results, the diagram presenting all the stable and unstable equilibrium positions of the square log for different specific solid – liquid mass ratios will be constructed. The equilibrium configurations of the half-circle cylinder floating in a liquid will be presented as well, both using methods of differential calculus and numerical analysis. Furthermore, the energy approach will be applied on the stability investigations of two simple barges, with cross sections that are existing sections of a specific modern container ship, thus defining their equilibrium positions for three different loading conditions. In addition, the metacentric height (GM) of the barges will be calculated for some of the examined cases, to provide comparison points between the methods of the energy approach and the metacentric height. Finally, conclusions and brief comments regarding the results and findings of this investigatory thesis will be quoted.

# Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων .....	5
Κατάλογος Πινάκων .....	7
1. Εισαγωγή.....	8
2. Κριτική Ανασκόπηση.....	10
3. Στόχοι .....	15
4. Περιγραφή της Ενεργειακής Μεθόδου .....	16
5. Εφαρμογές .....	21
5.1 Γενικά.....	21
5.2 Πρίσμα τετραγωνικής διατομής.....	22
5.2.1 Υπολογισμός ροπής βυθισμένου όγκου.....	22
5.2.2 Διερεύνηση ευστάθειας πρίσματος.....	24
5.2.3 Διάγραμμα Ισορροπίας $\alpha - r$ .....	30
5.3 Ημικυκλικός κύλινδρος.....	31
5.4 Αριθμητική αντιμετώπιση της ευστάθειας του ημικυκλικού κυλίνδρου .....	35
5.5 Αριθμητική αντιμετώπιση της ευστάθειας του πρίσματος τετραγωνικής διατομής ..	41
5.6 Φορτηγίδα .....	43
5.6.1 Ενεργειακή διερεύνηση της ευστάθειας της φορτηγίδας.....	43
5.6.2 Υπολογισμός του μετακεντρικού ύψους GM .....	57
6. Συζήτηση και Συμπεράσματα .....	59
Βιβλιογραφικές Αναφορές.....	62
Παράρτημα .....	63

# Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1: Εγκάρσια διατομή εξεταζόμενου πρίσματος.....	17
Σχήμα 2: Εγκάρσια διατομή πρίσματος για δύο γωνίες (A και B) βυθισμένες.....	22
Σχήμα 3: Εγκάρσια διατομή πρίσματος για μία γωνία (A) βυθισμένη.....	27
Σχήμα 4: Εγκάρσια διατομή πρίσματος για τρεις γωνίες (A,B και D) βυθισμένες.....	29
Σχήμα 5: Διάγραμμα ισορροπίας $\alpha - r$ για το πρίσμα τετραγωνικής διατομής.....	30
Σχήμα 6: Εγκάρσια διατομή ημικυκλικού κυλίνδρου .....	31
Σχήμα 7: Απεικόνιση της διατομής του ημικυκλικού κυλίνδρου στο πρόγραμμα Mathematica .....	35
Σχήμα 8: Παρουσίαση της διατομής του ημικυκλικού κυλίνδρου και του κέντρου βάρους του στο πρόγραμμα Mathematica .....	36
Σχήμα 9: Παρουσίαση της θέσης ισορροπίας του ημικυκλικού κυλίνδρου για $r = 0.3$ στο πρόγραμμα Mathematica.....	38
Σχήμα 10: Παρουσίαση της θέσης ισορροπίας του ημικυκλικού κυλίνδρου για $r = 0.5$ στο πρόγραμμα Mathematica.....	38
Σχήμα 11: Παρουσίαση των αποτελεσμάτων ευστάθειας των θέσεων ισορροπίας του ημικυκλικού κυλίνδρου για $r = 0.3$ και $r = 0.5$ στο πρόγραμμα Mathematica.....	39
Σχήμα 12: Διάγραμμα δυναμικής ενέργειας $E$ συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης $\alpha$ για το πρίσμα τετραγωνικής διατομής για $r = 0.5$ .....	41
Σχήμα 13: Διάγραμμα δυναμικής ενέργειας $E$ συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης $\alpha$ του πρίσματος τετραγωνικής διατομής για $r = 0.25$ .....	42
Σχήμα 14: Διάγραμμα ισορροπίας $\alpha - r$ για $0.15 < r < 0.33$ .....	42
Σχήμα 15: Παρουσίαση της διατομής της φορτηγίδας για τις δύο εξεταζόμενες περιπτώσεις στο πρόγραμμα Mathematica.....	43
Σχήμα 16: Διάγραμμα δυναμικής ενέργειας $E$ συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης $\alpha$ για $r = 0.1$ .....	45
Σχήμα 17α-β: Διάγραμμα δυναμικής ενέργειας $E$ συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης $\alpha$ για $r = 0.2$ και $r = 0.3$ .....	46
Σχήμα 18α-β: Διαγράμματα δυναμικής ενέργειας $E$ συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης $\alpha$ για $r = 0.4$ και $r = 0.5$ .....	46
Σχήμα 19: Μεγέθυνση του διαγράμματος $E - \alpha$ για $r = 0.5$ στην περιοχή της γωνίας $\alpha = 0^\circ$ .....	47

Σχήμα 20α-β: Διαγράμματα δυναμικής ενέργειας $E$ συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης $\alpha$ για $r = 0.6$ και $r = 0.7$ .....	47
Σχήμα 21: Διαγράμματα δυναμικής ενέργειας $E$ συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης $\alpha$ για τη φορτηγίδα 2.....	48
Σχήμα 22: Διάγραμμα δυναμικής ενέργειας $E$ συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης $\alpha$ για την περίπτωση $r = 0.7$ της φορτηγίδας 2 .....	49
Σχήμα 23: Διάγραμμα $E - \alpha$ της φορτηγίδας 1 για βύθισμα $d=12.19m$ και $KG=15.50m$ .....	54
Σχήμα 24: Διαγράμματα $E - \alpha$ της φορτηγίδας 1 για βύθισμα $d=12.19m$ και $15.75m \leq KG \leq 17m$ .....	55
Σχήμα 25: Παρουσίαση της διατομής της φορτηγίδας 1 σε όρθια θέση για την 1η κατάσταση φόρτωσης και $r = 0.4$ .....	57
Σχήμα 26: Θέσεις ισορροπίας του πρίσματος τετραγωνικής διατομής στο διάστημα $0.2113 < r < 0.2813$ .....	59

## Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1: Θέσεις ισορροπίας ημικυκλικού κυλίνδρου για διάφορες περιπτώσεις του $r$ .....	34
Πίνακας 2: Αποτελέσματα θέσεων ισορροπίας για τη φορτηγίδα της περίπτωσης 1 ( $KG = 15.50m$ ) ....	49
Πίνακας 3: Αποτελέσματα θέσεων ισορροπίας για τη φορτηγίδα της περίπτωσης 2 ( $KG = 15.50m$ ).....	50
Πίνακας 4: Αποτελέσματα θέσεων ισορροπίας για τη φορτηγίδα της περίπτωσης 1 ( $KG = 16.21m$ ).....	50
Πίνακας 5: Αποτελέσματα θέσεων ισορροπίας για τη φορτηγίδα της περίπτωσης 2 ( $KG = 16.21m$ ).....	51
Πίνακας 6: Αποτελέσματα θέσεων ισορροπίας για τη φορτηγίδα της περίπτωσης 1 ( $KG = 16.88m$ ).....	51
Πίνακας 7: Αποτελέσματα θέσεων ισορροπίας για τη φορτηγίδα της περίπτωσης 2 ( $KG = 16.88m$ ).....	52
Πίνακας 8: Συνοπτικός Πίνακας Αποτελεσμάτων 1ης Φορτηγίδας.....	53
Πίνακας 9: Συνοπτικός Πίνακας Αποτελεσμάτων 2ης Φορτηγίδας.....	53
Πίνακας 10: Συνοπτικός Πίνακας Αποτελεσμάτων 1ης Φορτηγίδας για βύθισμα $d=12.19m$ .....	56

## 1. Εισαγωγή

Η ευστάθεια των στερεών σωμάτων, και κατ' επέκταση των πλοίων, απασχόλησε πολλούς ερευνητές από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Συγκεκριμένα, η προσέγγιση του θέματος ξεκίνησε με τη μελέτη της πλευστότητας και ευστάθειας απλών γεωμετρικών στερεών σε ρευστά από τον Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.). Τα βήματά του ακολούθησαν και άλλοι επιστήμονες αργότερα, όπως ο Christiaan Huygens (1629-1695) και ο Korteweg (1848-1941), οι οποίοι επέκτειναν τη μελέτη του Αρχιμήδη και σε άλλα στερεά σώματα επιπλέοντα σε ρευστά. Σε ένα μέρος του έργου του, ο Huygens χρησιμοποιεί ως κριτήριο για τη διερεύνηση ευστάθειας την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας του συστήματος που αποτελείται από το επιπλέον σώμα και το εκτοπιζόμενο ρευστό. Στην αρχή αυτή βασίζεται η ενεργειακή προσέγγιση εξέτασης της ευστάθειας, στην οποία θα εστιάσει η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία.

Η εκτίμηση της ευστάθειας πλοίου έφτασε στο επιστημονικό προσκήνιο τον 17<sup>ο</sup> αιώνα και έγινε πρακτικά εφικτή μετά την έλευση του απειροστικού λογισμού. Οι Pierre Bouguer (1698-1758) και Leonhard Euler (1707-1783) αποτέλεσαν τους θεμελιωτές της σύγχρονης θεωρίας της ευστάθειας πλοίων, εφόσον κατέληξαν σχεδόν παράλληλα σε σπουδαία συμπεράσματα για τα κριτήρια της υδροστατικής τους ευστάθειας. Από τη μία πλευρά, ο Bouguer εισήγαγε την έννοια του μετακέντρου και της αντίστοιχης θεωρίας, ενώ ο Euler ασχολήθηκε με τον υπολογισμό της ροπής επαναφοράς για μικρές γωνίες κλίσης. Τα έργα και των δύο αυτών επιστημόνων θεωρούνται ισοδύναμης αξίας, ωστόσο η μέθοδος υπολογισμού του μετακεντρικού ύψους του Bouguer είναι αυτή που υιοθετήθηκε ως κριτήριο της ευστάθειας πλοίων και συνεχίζει να χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα.

Προς τα τέλη του 20<sup>ου</sup> αιώνα, οι μαθηματικοί Erdos, Schibler και Herdon ασχολήθηκαν με την ανάλυση του θέματος της στατικής ευστάθειας στερεών σωμάτων από ενεργειακή σκοπιά, δημοσιεύοντας το 1992 την εργασία τους με τίτλο «Floating equilibrium of symmetrical objects and the breaking of symmetry. Part 1: Prisms»<sup>[1]</sup>. Στα πλαίσια της μελέτης τους, διερεύνησαν ενεργειακά την ευστάθεια των συμμετρικών πρισματών της τετραγωνικής και τριγωνικής διατομής, επιβεβαιώνοντας την αποτελεσματικότητα της ενεργειακής μεθόδου. Παρά το συμπέρασμα αυτό και το γεγονός ότι η ενεργειακή μέθοδος είχε σχηματιστεί πριν προσδιοριστούν τα σύγχρονα κριτήρια της υδροστατικής ευστάθειας πλοίων, στον τομέα της ναυπηγικής έχει επικρατήσει ως βασικό κριτήριο ευστάθειας η μέθοδος υπολογισμού του μετακεντρικού ύψους. Κύριος στόχος της

συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας είναι να διερευνηθεί κατά πόσο θα μπορούσε να εξετασθεί ενεργειακά η ευστάθεια πλοίου.

Στο σημείο αυτό θα γίνει μία σύντομη περιγραφή της μεθόδου. Γενικά, η ενεργειακή μέθοδος εξετάζει τη δυναμική ενέργεια του συστήματος του επιπλέοντος σώματος – εκτοπιζόμενου ρευστού και σύμφωνα με αυτή οι θέσεις ισορροπίας αντιστοιχούν σε τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα της καμπύλης της δυναμικής ενέργειας. Η ευστάθεια των θέσεων ισορροπίας καθορίζεται ελέγχοντας αν η ενέργεια αυξάνεται ή μειώνεται για μικρές μετατοπίσεις των θέσεων αυτών.

Συνοπτικά, η δομή της παρούσας εργασίας ορίζεται ως εξής: Μετά το κεφάλαιο 1 (Εισαγωγή), ακολουθεί το κεφάλαιο 2, της κριτικής ανασκόπησης, στο οποίο γίνεται αναφορά στους θεμελιωτές της θεωρίας της ευστάθειας, καθώς και στην εξέλιξη των σύγχρονων μεθόδων εξέτασης ευστάθειας πλοίου. Στο κεφάλαιο 3, παρατίθενται οι βασικοί στόχοι που οδήγησαν στη συγγραφή της εργασίας αυτής και συνεχίζοντας, στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο της ενεργειακής μεθόδου και η αναλυτική μεθοδολογία της. Ακολουθεί το κεφάλαιο των εφαρμογών (κεφάλαιο 5), στο οποίο η ενεργειακή μέθοδος εφαρμόζεται στο πρίσμα τετραγωνικής διατομής (με μέτρο πλευράς ίσο με μονάδα) και σχηματίζεται με βάση τα αποτελέσματα το διάγραμμα γωνίας εγκάρσιας κλίσης συναρτήσει του λόγου πυκνοτήτων στερεού – ρευστού (διάγραμμα ισορροπίας  $\alpha - r$ ). Επίσης, εξετάζεται ενεργειακά η ευστάθεια του ημικυκλικού κυλίνδρου (με ακτίνα διατομής ίση με μονάδα) χρησιμοποιώντας, αρχικά, αναλυτικούς υπολογισμούς, και ακολούθως χρησιμοποιώντας αριθμητικούς υπολογισμούς, μέσω της ανάπτυξης κώδικα στο υπολογιστικό λογισμικό Mathematica. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η αριθμητική αντιμετώπιση της ευστάθειας του πρίσματος τετραγωνικής διατομής, κατά την οποία παρατίθενται τα διαγράμματα της δυναμικής ενέργειας συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης του πρίσματος για ορισμένους λόγους πυκνοτήτων  $r$ . Τέλος, η ενεργειακή μέθοδος εφαρμόζεται σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις φορηγίδας, με διατομές που λήφθηκαν από σύγχρονο πλοίο μεταφοράς εμπορευματοκιβωτίων, και προσδιορίζονται οι θέσεις ισορροπίας τους για διαφορετικές καταστάσεις φόρτωσης. Ακόμα, υπολογίζεται η τιμή του μετακεντρικού ύψους (GM) για συγκεκριμένες περιπτώσεις πλεύσης της φορηγίδας. Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ενεργειακή προσέγγιση εξέτασης της ευστάθειας των πρισμάτων που αναφέρθηκαν και συγκρίνεται η αποτελεσματικότητα της ενεργειακής μεθόδου με τη μέθοδο υπολογισμού του μετακεντρικού ύψους.

## 2. Κριτική Ανασκόπηση

Η συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας και η συλλογή των απαραίτητων στοιχείων για το θέμα της ευστάθειας στερεών σωμάτων στηρίχθηκε κυρίως στο δημοσιευμένο κείμενο με τίτλο «The stability of floating regular solids»<sup>[2]</sup>, του καθηγητή της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, κ. Κώστα Ι. Σπύρου. Το άρθρο αυτό παρέχει μια ολοκληρωμένη αναθεώρηση των διαφόρων μεθόδων υπολογισμού της ευστάθειας επιπλέοντων σωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν από τους θεμελιωτές της θεωρίας της ευστάθειας. Επιπλέον, για την ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη των σύγχρονων μεθόδων εξέτασης ευστάθειας πλοίου, κύρια πηγή αποτέλεσε το σύγγραμμα «Ships and Science: The Birth of Naval Architecture in the Scientific Revolution, 1600 – 1800»<sup>[3]</sup> του Larrie D. Ferreiro.

Φαίνεται πως ο πρώτος άνθρωπος που αντιμετώπισε το θέμα της πλευστότητας και ευστάθειας ομογενών στερεών σωμάτων σε ρευστά ήταν ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) με την περίφημη μελέτη του τμήματος παραβολοειδούς<sup>[2]</sup>. Η μελέτη αυτή, παρουσιάζεται στο δεύτερο τόμο του βιβλίου του Αρχιμήδη με τίτλο «Περί των εν υδάτι εφισταμένων ή περι οχουμένων», όπου αναλύει τον προσδιορισμό των καταστάσεων «ανάπαυσης» διαφόρων αξονοσυμμετρικών παραβολοειδών στην επιφάνεια υγρού, συμπεριλαμβανομένων και ασύμμετρων καταστάσεων, τόσο για περιπτώσεις όπου η βάση του παραβολοειδούς είναι πλήρως έξω από το νερό, όσο και για περιπτώσεις όπου η βάση του είναι πλήρως ή μερικώς βυθισμένη<sup>[4]</sup>. Παράλληλα, στον πρώτο τόμο του έργου του, παρατίθεται η περίφημη αρχή της άνωσης του Αρχιμήδη, σύμφωνα με την οποία για ένα σώμα οποιασδήποτε μορφής που επιπλέει μέσα σε υγρό που βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας, το βάρος του σώματος ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού.

Μετά από σχεδόν 20 αιώνες, ο Ολλανδός Christiaan Huygens (1629-1695), επέκτεινε τη μελέτη του Αρχιμήδη και σε άλλα ομογενή στερεά σώματα επιπλέοντα σε ρευστό, συνθέτοντας την εργασία του με τίτλο «De līs Quae Liquido Supernatant (Bodies Floating on Top of a Liquid)»<sup>[5]</sup>. Παρόλο που δεν δημοσίευσε ποτέ τις σημειώσεις του, η προαναφερθείσα εργασία του Huygens διασώθηκε μέσα από τρία λατινικά χειρόγραφα αρχεία, τα οποία δημοσιεύτηκαν στην αρχή του 20ού αιώνα. Γενικά μέσα από τα χειρόγραφα αυτά, ο Huygens ασχολήθηκε με τη διερεύνηση των ευσταθών θέσεων ισορροπίας της σφαίρας, του παραβολοειδούς, του κώνου, των ορθογώνιων πρισμάτων καθώς και του κυλίνδρου, χρησιμοποιώντας, σε ένα τμήμα της μελέτης του, την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας του συστήματος επιπλέοντος στερεού – ρευστού.

Αρχικά, στο πρώτο μέρος των διασωζόμενων αρχείων, όπου εξετάζεται η ευστάθεια του τμήματος της σφαίρας, του παραβολοειδούς και του κώνου, η μέθοδος που εφαρμόστηκε για τη διερεύνηση των θέσεων ισορροπίας των προαναφερθέντων επιπλέοντων σωμάτων χρησιμοποιούσε ως βάση της συνθήκης ισορροπίας την έννοια του ιδεατού έργου (virtual work). Ο Huygens παρατήρησε ότι για να αποτελεί μία θέση του σώματος, ευσταθή θέση ισορροπίας, πρέπει να ισχύει η ακόλουθη συνθήκη<sup>[5]</sup>: το ύψος του κέντρου βάρους του συστήματος στερεού – ρευστού να είναι το ελάχιστο δυνατό, δηλαδή για την εξεταζόμενη θέση να ελαχιστοποιείται η συνολική δυναμική ενέργεια. Η συνθήκη αυτή χρησιμοποιήθηκε για τη διερεύνηση ευστάθειας τόσο για γραμμικές όσο και για γωνιακές μετατοπίσεις. Ωστόσο, εστίαζε μόνο στην εύρεση των ευσταθών θέσεων ισορροπίας, εφόσον τα κριτήρια που αντιστοιχούν στις ασταθείς θέσεις ισορροπίας δεν έγιναν αντιληπτά από τότε. Στο δεύτερο και τρίτο μέρος της εργασίας του, ο Huygens ασχολήθηκε με τη διερεύνηση των θέσεων ισορροπίας του επιπλέοντος επιμήκους πρίσματος ορθογωνικής διατομής και του κυλίνδρου, εφαρμόζοντας, όμως, μία άλλη μέθοδο πιο κοντά στη γεωμετρική προσέγγιση του Αρχιμήδη.

Ο Huygens<sup>[1]</sup> ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε με τα επιπλέοντα επιμήκη πρίσματα ορθογωνικής διατομής και κατέληξε στο αξιοσημείωτο συμπέρασμα ότι το ειδικό βάρος τους και ο λόγος αναλογίας των πλευρών τους συνιστούν σημαντικές παραμέτρους της υδροστατικής ευστάθειας. Επιπλέον, ανακάλυψε ότι σε συγκεκριμένα εύρη του λόγου των ειδικών βαρών στερεού – ρευστού, τα δεδομένα συμμετρικά στερεά δύνανται να επιπλεύσουν σε ασύμμετρες θέσεις ευσταθούς ισορροπίας. Αυτή η ανακάλυψη δεν ήταν ουσιαστικά καινούρια, καθώς ο Αρχιμήδης είχε ήδη επισημάνει ότι ένα συμμετρικό σώμα μπορεί να επιπλεύσει ευσταθώς σε θέση ισορροπίας ανεξάρτητη από τη συμμετρία του. Παρ' όλα αυτά, ο Huygens δεν έφτασε σε πλήρη επίλυση του προβλήματος των ορθογωνικών πρισμάτων, καθώς δεν προσδιόρισε την ύπαρξη ευσταθούς θέσης ισορροπίας στην κατάσταση κατά την οποία μία ή τρεις γωνίες είναι βυθισμένες, αλλά περιορίστηκε στην περίπτωση των δύο βυθισμένων γωνιών. Για την περίπτωση των δύο βυθισμένων γωνιών, παρατήρησε ότι το ορθογωνικό πρίσμα είναι ευσταθές για ένα μικρό μόνο εύρος του λόγου των ειδικών βαρών στερεού-ρευστού.

Το 1908, ο Korteweg<sup>[2]</sup>, έχοντας εντοπίσει το κενό στη μελέτη του Huygens, ολοκλήρωσε τη λύση του προβλήματος, κατασκευάζοντας ένα διάγραμμα με άξονες το λόγο των ειδικών βαρών στερεού-ρευστού και το λόγο των πλευρών του ορθογωνίου, στο οποίο αναπαράστησε όλες τις καμπύλες που ορίζουν τις περιοχές των διαφορετικών θέσεων ευσταθούς ισορροπίας. Στο κάτω μέρος του διαγράμματος, αναγράφονται και οι σχέσεις που εκφράζουν τις καμπύλες αυτές. Στο διάγραμμα, ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στις

τιμές του λόγου των ειδικών βαρών στερεού-ρευστού, με εύρος τιμών από 0 μέχρι 1, και ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στις τιμές του λόγου των πλευρών του ορθογωνίου, με εύρος τιμών, επίσης, από 0 μέχρι 1.

Προς παρόμοια κατεύθυνση κινήθηκαν και οι Erdos, Schibler και Herdon, οι οποίοι μελέτησαν ενεργειακά την ευστάθεια των συμμετρικών πρισμάτων της τετραγωνικής και τριγωνικής διατομής, κατασκευάζοντας τα διαγράμματα της εγκάρσιας γωνίας ισορροπίας συναρτήσει του λόγου ειδικών βαρών στερεού – ρευστού. Η μελέτη τους δημοσιεύτηκε το 1992 με τίτλο «Floating equilibrium of symmetrical objects and the breaking of symmetry.Part 1: Prisms»<sup>[1]</sup> στην επιστημονική εφημερίδα «American Journal of Physics». Στο δεύτερο μέρος της μελέτης τους «Floating equilibrium of symmetrical objects and the breaking of symmetry.Part 2: The cube, the octahedron, and the tetrahedron»<sup>[6]</sup>, ασχολούνται με την αναζήτηση θέσεων ισορροπίας τρισδιάστατων συμμετρικών στερεών (κύβος, τετράεδρο, οκτάεδρο), αξιοποιώντας την έννοια της επιφάνειας άντωσης.

Μέσα από την εργασία των Erdos, Schibler και Herdon, έχει αποδειχθεί ότι η ενεργειακή μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί αποτελεσματικά στη διερεύνηση των θέσεων ισορροπίας των επιπλεόντων σωμάτων και αποτελεί, επομένως, εναλλακτικό τρόπο της εξέτασης της στατικής τους ευστάθειας. Ωστόσο, η συγκεκριμένη μέθοδος δεν τράβηξε ποτέ το ενδιαφέρον της ναυπηγικής κοινότητας και για τους υπολογισμούς ευστάθειας πλοίων εδραιώθηκε η χρήση της πλέον διαδεδομένης μεθόδου που βασίζεται στον υπολογισμό του μετακεντρικού ύψους.

Η θεμελιώδης, για την ευστάθεια του πλοίου, μέθοδος του μετακεντρικού ύψους ξεκίνησε να σχηματίζεται στις αρχές του 17<sup>ου</sup> αιώνα, όταν ο Ολλανδός επιστήμονας Simon Stevin<sup>[3]</sup> (1548-1620) αναβίωσε τη μελέτη της υδροστατικής και την εφάρμοσε στα πλοία. Μέσα από το έργο του «De Beghinselen des Waterwichts», το οποίο εκδόθηκε στη Δανία το 1586, εισάγει την ιδέα της «υδροστατικής πίεσης» καθώς και τα στοιχειώδη της έννοιας του μετακέντρου. Ιδιαίτερα σημαντική ήταν η παρατήρησή του, ότι το κέντρο άνωσης της βυθισμένης γάστρας και το κέντρο βάρους πρέπει να βρίσκονται επί της ίδιας καθέτου. Ωστόσο, ο Stevin θεωρούσε ότι για εξασφάλιση ευστάθειας, το κέντρο βάρους πρέπει να βρίσκεται πάντα χαμηλότερα από το κέντρο άνωσης.

Στη συνέχεια, ο Γάλλος μαθηματικός Paul Hoste<sup>[3]</sup> επιδίωξε να εξετάσει από μαθηματική σκοπιά το πρόβλημα της ευστάθειας πλοίου, συνθέτοντας το έργο του «Theorie de la construction des vaisseaux (Theory of the Construction of Vessels)» το 1697. Αντιθέτως από τον Stevin, ο Hoste παρατήρησε ότι το κέντρο βάρους ενός πλοίου θα μπορούσε να βρίσκεται ψηλότερα από το κέντρο άνωσης. Παρ' όλα αυτά, στο έργο του διακρίνονται

διάφορα λάθη, ένα εκ των οποίων ήταν ο ισχυρισμός του ότι η ανύψωση του κέντρου βάρους βελτιώνει την ευστάθεια ενός πλοίου, δηλαδή θεωρούσε ότι η ευστάθεια είναι ανάλογη της απόστασης μεταξύ κέντρου βάρους και άνωσης.

Στα μέσα του 18ου αιώνα, η μελέτη της ευστάθειας πλοίου συνεχίστηκε από τους Pierre Bouguer<sup>[3]</sup> (1698-1758) και Leonhard Euler<sup>[3]</sup> (1707-1783), οι οποίοι δημοσίευσαν δύο πολύ σημαντικές εργασίες. Συγκεκριμένα, η «Traité du navire (Treatise of the ship)» δημοσιεύτηκε το 1746 από τον Γάλλο επιστήμονα Bouguer, και λίγο αργότερα, το 1749, δημοσιεύτηκε η εργασία «Scientia Navalis (Naval Science)» του Euler από την Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης. Οι παραπάνω εργασίες διαδραμάτισαν καθοριστικό ρόλο στο θέμα της ευστάθειας, καθώς μέσα από αυτές καθιερώθηκαν οι αρχές της σύγχρονης ευστάθειας πλοίου.

Ο Bouguer<sup>[3]</sup> στο έργο του εισάγει την έννοια του μετακέντρου, το οποίο ορίζει ως την τομή των δυνάμεων άνωσης στην όρθια και σε κάποια κεκλιμένη (εγκάρσια) θέση του πλοίου και εξηγεί γεωμετρικά γιατί επέλεξε το μετάκεντρο ως αρχικό κριτήριο ευστάθειας. Εξηγεί, επίσης, ότι ανάλογα με τη θέση του κέντρου βάρους του πλοίου σε σχέση με το μετάκεντρο, το ζεύγος δυνάμεων βάρους – άνωσης τείνει να ανατρέψει ή να επαναφέρει το πλοίο στην οριζόντια (όρθια) θέση. Με άλλα λόγια, ο Bouguer τονίζει τη σημαντικότητα του μετακέντρου, εξηγώντας ότι περιορίζει την καθ' ύψος θέση του κέντρου βάρους, καθιστώντας το πλοίο ευσταθές. Στην πραγματικότητα, δεν χρησιμοποιεί τους όρους «ευσταθής» ή «ασταθής», αλλά αναφέρει αντίστοιχα το κέντρο βάρους κάτωθεν ή άνωθεν του μετακέντρου. Στη συνέχεια, ο Bouguer καθιέρωσε την έννοια του μετακεντρικού ύψους  $\overline{GM}$ , δηλαδή την απόσταση του μετακέντρου από το κέντρο βάρους, ως το μέτρο ευστάθειας ενός πλοίου και περιέγραψε πώς μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το πείραμα ευστάθειας, στηριζόμενος στην αρχική ιδέα του Hoste. Ακόμη, κατάφερε να προσδιορίσει την απόσταση του κέντρου άνωσης από το μετάκεντρο (μετακεντρική ακτίνα  $\overline{BM}$ ), ως το λόγο της ροπής της ισάλου επιφανείας περί τον διαμήκη άξονα συμμετρίας προς το βυθισμένο όγκο του πλοίου, δηλαδή  $\overline{BM} = \frac{I_T}{V}$ . Επομένως, το μετακεντρικό ύψος μπορούσε πλέον να υπολογιστεί γνωρίζοντας τη θέση του κέντρου βάρους και τη γεωμετρία της γάστρας από την σχέση  $\overline{GM} = \overline{KB} + \overline{BM} - \overline{KG}$ .

Από την άλλη, ο Euler<sup>[3]</sup> κατά τη μελέτη του εστίασε στην έννοια της ροπής επαναφοράς, συνεχίζοντας το έργο του Bernoulli, και διαπίστωσε ότι συνιστά το κρίσιμο μέγεθος για την ύπαρξη ευστάθειας. Επαλήθευσε το γεγονός ότι για τις θέσεις ισορροπίας ενός ελεύθερα επιπλέοντος σώματος οι δυνάμεις βάρους και άνωσης πρέπει να επενεργούν στην ίδια κατακόρυφη ευθεία και να είναι ίσες σε μέτρο και αντίθετες σε κατεύθυνση. Στη συνέχεια,

εξέτασε τις αποκρίσεις ενός επιπλέοντος σώματος για απειροστές διαταραχές από την όρθια θέση ισορροπίας του και έθεσε το κριτήριο ευστάθειας ως εξής: «Η ευστάθεια ενός επιπλέοντος σώματος στη θέση ισορροπίας θα πρέπει να εκτιμηθεί από την ροπή επαναφοράς, αν το σώμα αποκλίνει από τη θέση ισορροπίας κατά μια απειροστή γωνία»<sup>[3]</sup>. Ο Euler επεξήγησε την αρχή αυτή, διακρίνοντας τις περιπτώσεις ασταθούς, ουδέτερης και ευσταθούς ισορροπίας, και τόνισε τη σημασία του υπολογισμού της ευστάθειας μέσω της ροπής επαναφοράς, καθώς δεν αρκεί ένα πλοίο να είναι αρχικά ευσταθές αλλά θα πρέπει και να επανέρχεται στην αρχική θέση ισορροπίας του σε περιπτώσεις διαταραχών. Τέλος, υπολόγισε τη ροπή επαναφοράς για απειροστή κλίση δισδιάστατης διατομής, με τη μέθοδο υπολογισμού σφηνών βυθιζόμενου και αναδυόμενου όγκου.

Επεκτείνοντας το έργο των Euler και Bouguer, ο Άγγλος μαθηματικός George Atwood<sup>[3]</sup> (1745-1807) και ο Γάλλος Vial Du Clairbois<sup>[3]</sup> (1733-1816) εξέτασαν την εγκάρσια κλίση πλοίων σε μεγάλες γωνίες στροφής, δημοσιεύοντας δύο εργασίες το 1796 και το 1798. Στη δεύτερη εργασία τους, παρουσίασαν αριθμητική ανάλυση των ροπών επαναφοράς πλοίου σε ένα εύρος γωνιών στροφής, εισήγαγαν τον όρο  $\overline{GZ}$  για το μοχλοβραχίονα επαναφοράς και παρατήρησαν ότι η αρχική ευστάθεια από μόνη της είναι ανεπαρκής ως μέτρο ευστάθειας. Στις αρχές του 19<sup>ου</sup> αιώνα, διάφοροι ερευνητές επιδίωξαν να μελετήσουν την ευστάθεια πλοίου, με ιδιαίτερα χαρακτηριστική την προσπάθεια του Γάλλου Charles Dupin<sup>[2]</sup> (1784-1873).

Ολοκληρώνοντας, παρατηρείται ότι μέχρι τις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα, οι ερευνητές επικεντρώθηκαν μέσα από τα έργα τους στην εξέταση ειδικότερα της ευστάθειας πλοίου, παραμερίζοντας τη μελέτη ευστάθειας των πιο απλών γεωμετρικών σωμάτων. Όμως, το πρόβλημα της ευστάθειας απλών στερεών επαναφέρθηκε στο επιστημονικό προσκήνιο, όταν ο Korteweg δημοσίευσε το 1908 την αδημοσίευτη μέχρι τότε εργασία του Huygens και οδήγησε στη δημοσίευση της μελέτης της ευστάθειας συμμετρικών πρισμάτων από τους Erdos, Schibler και Herdon με βάση την ενεργειακή μέθοδο, στην οποία θα εστιάσει η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία. Θα μπορούσε, λοιπόν, κανείς να αναρωτηθεί γιατί η ενεργειακή προσέγγιση εξέτασης της ευστάθειας δεν χρησιμοποιήθηκε στους υπολογισμούς ευστάθειας πλοίων, παρόλο που είναι προγενέστερη της μεθόδου του μετακεντρικού ύψους.

### **3. Στόχοι**

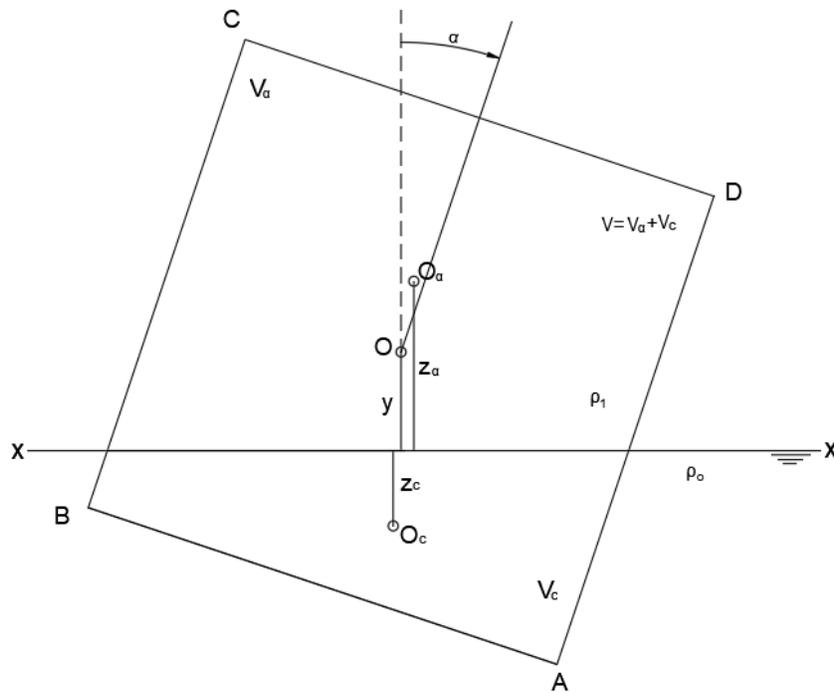
Απώτερος στόχος για την εκπόνηση της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας, είναι η διερεύνηση αν η ενεργειακή μέθοδος θα μπορούσε να εφαρμοστεί ως μέθοδος εξέτασης της ευστάθειας πλοίου και η σύγκρισή της με την επικρατέστερη μέχρι σήμερα μέθοδο, που βασίζεται στον υπολογισμό του μετακεντρικού ύψους. Άλλοι βασικοί στόχοι που οδήγησαν στη συγγραφή της εργασίας αυτής, είναι:

- Η πλήρης κατανόηση του τρόπου εφαρμογής της ενεργειακής μεθόδου για τη μελέτη της στατικής ευστάθειας ενός επιπλέοντος στερεού.
- Η μελέτη της ευστάθειας ορισμένων επιμηκών πρισμάτων και η διερεύνηση των θέσεων ισορροπίας τους εφαρμόζοντας την ενεργειακή μέθοδο.
- Η μελέτη της επίδρασης των διαφόρων παραμέτρων του προβλήματος στα χαρακτηριστικά ευστάθειας των επιπλεόντων πρισμάτων.
- Η εξοικείωση με το πολύτιμο, για την διεκπεραίωση του υπολογιστικού κομματιού της εργασίας, πρόγραμμα Mathematica.

## 4. Περιγραφή της Ενεργειακής Μεθόδου

Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα με ειδικό βάρος μικρότερο από το ειδικό βάρος ενός ρευστού, αφήνεται στην επιφάνεια του ρευστού αυτού. Λόγω της μερικής βύθισης του σώματος, εκτοπίζεται όγκος ρευστού, ο οποίος ανυψώνεται στην επιφάνεια. Θεωρείται ότι η έκταση της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού είναι πολύ μεγαλύτερη από το μέγεθος του σώματος, και έτσι όταν αυτό βυθίζεται στο ρευστό, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας δεν γίνεται αντιληπτή. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος που αποτελείται από το στερεό σώμα και το εκτοπιζόμενο ρευστό, αυξάνεται λόγω της ενέργειας που αποκτάται από τη μεταφορά του υγρού στην επιφάνεια. Η αύξηση αυτή στη δυναμική ενέργεια εξαρτάται από τον όγκο του εκτοπιζόμενου υγρού, αλλά και από την γεωμετρία και τον προσανατολισμό του όγκου που καταλάμβανε το εκτοπισμένο ρευστό (ή διαφορετικά του βυθισμένου όγκου του σώματος), εφόσον το κέντρο βάρους του δεν διατηρείται σταθερό στις διάφορες κεκλιμένες θέσεις του σώματος.

Για την περιγραφή της ενεργειακής μεθόδου, θα εξετασθεί η βύθιση ενός πρίσματος με τετραγωνική διατομή στο ρευστό, εκφράζοντας τη δυναμική ενέργεια του συνολικού συστήματος, δηλαδή του συστήματος στερεού σώματος και εκτοπιζόμενου ρευστού, συναρτήσει ορισμένων μεταβλητών. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι το εξεταζόμενο πρίσμα θεωρείται τόσο μακρύ, που επιπλέει διατηρώντας το διαμήκη άξονά του συνεχώς παράλληλο με την επιφάνεια του ρευστού. Αυτή η παραδοχή μειώνει τους βαθμούς ελευθερίας σε δύο, δηλαδή το επιπλέον σώμα είναι σε θέση να εκτελεί μόνο εγκάρσια στροφή (roll) και παράλληλη βύθιση (heave).



Σχήμα 1: Εγκάρσια διατομή εξεταζόμενου πρίσματος

Στο πιο πάνω σχήμα, παρουσιάζεται μια εγκάρσια τομή ενός επιπλέοντος πρίσματος τετραγωνικής διατομής με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

$x$ : ο άξονας της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού

$O$ : το κέντρο βάρους του σώματος

$O_a$ : το κέντρο βάρους του μη βυθισμένου τμήματος

$O_c$ : το κέντρο βάρους του βυθισμένου τμήματος

$z_a$ : η τεταγμένη του κέντρου βάρους του μη βυθισμένου τμήματος

$z_c$ : η τεταγμένη του κέντρου βάρους του βυθισμένου τμήματος

$y$ : η τεταγμένη του κέντρου βάρους του σώματος

$\rho_1$ : πυκνότητα του στερεού

$\rho_0$ : πυκνότητα του ρευστού

$r = \rho_1/\rho_0$ : λόγος πυκνοτήτων στερεού – ρευστού

$V$ : ο όγκος του σώματος

$V_a$ : ο όγκος του σώματος πάνω από την επιφάνεια του ρευστού

$V_c$ : ο όγκος του σώματος κάτω από την επιφάνεια του ρευστού

$\alpha$ : γωνία στροφής του στερεού

Αρχικά, γίνεται η παραδοχή ότι το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος στερεού – ρευστού ταυτίζεται με το επίπεδο της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού. Η δυναμική ενέργεια  $U_s$  του επιπλέοντος στερεού εκφράζεται ως εξής:

$$U_s = g\rho_1 V y \quad (4.1)$$

Η δυναμική ενέργεια  $U_f$  του εκτοπιζόμενου ρευστού δίνεται από την σχέση:

$$U_f = -g\rho_o V_c z_c \quad (4.2)$$

Η διαφορά στο πρόσημο μεταξύ των ενεργειών  $U_s$  και  $U_f$  εξηγείται από το γεγονός ότι όταν το στερεό τοποθετείται στο ρευστό, το κέντρο βάρους του μετατοπίζεται από το 0 στο  $y$ , ενώ το κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου ρευστού μετατοπίζεται από το  $z_c$  στο 0.

Η συνολική δυναμική ενέργεια προκύπτει προσθέτοντας τις σχέσεις (4.1) και (4.2) και θέτοντας  $\rho_1 = r\rho_o$ :

$$E = U_s + U_f = g\rho_o (rVy - V_c z_c) \quad (4.3)$$

Οι μεταβλητές που καθορίζουν τη θέση και τον προσανατολισμό του επιπλέοντος σώματος είναι η απόσταση  $y$  (απόσταση του κέντρου βάρους του σώματος από την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού) και η γωνία  $\alpha$ , η οποία όπως φαίνεται στο σχήμα 1 είναι η γωνία μεταξύ της κατακόρυφου που περνάει από το διαμήκη άξονα του πρίσματος και του άξονα συμμετρίας του. Η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος αποτελεί συνάρτηση του  $y$  αλλά και της μεταβλητής  $\alpha$ .

Γενικά, η δυναμική ενέργεια του συστήματος στις διάφορες θέσεις του πρίσματος εξετάζεται για την εύρεση των ενδεχόμενων θέσεων ισορροπίας του. Πιο συγκεκριμένα, η συνθήκη για να υπάρχει θέση ισορροπίας, είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών  $y$  και  $\alpha$ . Δηλαδή, πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial E(y,\alpha)}{\partial y} = 0 \quad (4.4\alpha)$$

$$\frac{\partial E(y,\alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad (4.4\beta)$$

Η πρώτη συνθήκη ισορροπίας, προκύπτει από την γνωστή Αρχή του Αρχιμήδη, η οποία απαιτεί το συνολικό βάρος του επιπλέοντος στερεού  $g\rho_1 V$  να ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου ρευστού  $g\rho_o V_c$  και επομένως, ισχύει η σχέση  $V_c = rV$ . Όταν ο βυθισμένος

όγκος του σώματος δεν περιγράφεται εύκολα και κατά συνέπεια καθίσταται δύσκολος ο υπολογισμός του, η παραπάνω συνθήκη λαμβάνει την έκφραση της σχέσης (4.4α).

Η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας (4.4β), προκύπτει από την προϋπόθεση ότι ο διαμήκης άξονας του πρίσματος διατηρείται συνεχώς παράλληλος με την επιφάνεια του ρευστού (εφόσον το πρίσμα που εξετάζεται θεωρείται ότι έχει πολύ μεγάλο μήκος), και έτσι το πρίσμα χαρακτηρίζεται από δύο βαθμούς ελευθερίας.

Εφόσον έχουν προσδιορισθεί τα τοπικά ακρότατα της δυναμικής ενέργειας του συστήματος στερεού – ρευστού, γίνεται έλεγχος ως προς την ευστάθειά τους. Όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενο κεφάλαιο, ευσταθείς χαρακτηρίζονται οι θέσεις ισορροπίας για τις οποίες η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος ελαχιστοποιείται. Αυτό σημαίνει ότι η θέση ελάχιστης δυναμικής ενέργειας αποτελεί ευσταθή θέση ισορροπίας, όμως, θα πρέπει να εξεταστεί και αν κάποια άλλη θέση μεγαλύτερης δυναμικής ενέργειας είναι επίσης ευσταθής.

Γενικότερα, αν τα  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) εκφράζουν τις μεταβλητές του προβλήματος από τις οποίες εξαρτάται η δυναμική ενέργεια  $E$  και οι συνθήκες ισορροπίας  $\frac{\partial E}{\partial q_i} = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) καθορίζουν μία σειρά τιμών ισορροπίας των μεταβλητών, τότε η ισορροπία είναι ευσταθής αν για κάθε μικρή μεταβολή  $\delta q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) των μεταβλητών του προβλήματος, η ενέργεια αυξάνεται, δηλαδή ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\delta E = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2 E}{\partial q_i \partial q_k} \right)_{eq} \delta q_i \delta q_k > 0 \quad (4.5)$$

Η πιο πάνω ανισότητα ικανοποιείται μόνο όταν όλες οι ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα  $(\partial^2 E / \partial q_i \partial q_k)$  είναι θετικές. Συνεπώς, στο διδιάστατο πρόβλημα ευστάθειας του εξεταζόμενου πρίσματος, η ισορροπία χαρακτηρίζεται ευσταθής όταν ισχύει μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

- οι ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα  $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial y} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial y} & \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \end{pmatrix}$  είναι θετικές (4.6)

- $\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial y} \right)^2 > 0$  και ταυτόχρονα  $\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} > 0$  (4.7α)

- $\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial y} \right)^2 > 0$  και ταυτόχρονα  $\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} > 0$  (4.7β)

Μέσα από την σχέση (4.3), παρατηρείται ότι η συνολική δυναμική ενέργεια στις διάφορες περιπτώσεις θέσεων του σώματος εξαρτάται από τους όρους πυκνοτήτων  $\rho_1$  και  $\rho_0$  αποκλειστικά μέσω του όρου  $r$ . Έτσι, για να απλοποιηθούν οι εκφράσεις της ενέργειας που θα προκύψουν στη συνέχεια, θα εισαχθεί το ειδικό μέγεθος:

$$\varepsilon = \frac{E}{\rho_0 g} \quad (4.8)$$

Άρα η σχέση (4.3) γράφεται ως ακολούθως:

$$\varepsilon = rVy - V_c z_c \quad (4.9)$$

## 5. Εφαρμογές

### 5.1 Γενικά

Στα κεφάλαια που ακολουθούν, θα παρουσιαστεί αναλυτικά η διερεύνηση της ευστάθειας ορισμένων πρισμάτων, χρησιμοποιώντας την ενεργειακή μέθοδο. Συγκεκριμένα, η ενεργειακή προσέγγιση εξέτασης της ευστάθειας θα εφαρμοστεί σε πρίσμα τετραγωνικής διατομής και σε ημικυκλικό κύλινδρο, χρησιμοποιώντας αναλυτικούς υπολογισμούς. Στη συνέχεια, η εξέταση ευστάθειας των στερεών αυτών θα αντιμετωπιστεί αριθμητικά και, τέλος, η ενεργειακή μέθοδος θα εφαρμοστεί σε φορτηγίδα. Σε όλες τις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν, θα ακολουθηθεί η μεθοδολογία της ενεργειακής μεθόδου, όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας.

Αρχικά, σε πρώτο στάδιο, θα πρέπει να εκφραστεί η γενική σχέση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος στερεού σώματος – εκτοπιζόμενου ρευστού για την περίπτωση του εξεταζόμενου πρίσματος, σύμφωνα με την σχέση (4.9) του προηγούμενου κεφαλαίου, η οποία παρατίθεται και ακολούθως:

$$\varepsilon = rVy - V_c z_c \quad (5.1)$$

Όπως παρατηρείται και από την σχέση (5.1), η έκφραση της δυναμική ενέργειας προαπαιτεί τον υπολογισμό της ποσότητας  $V_c z_c$ , ως συνάρτηση των μεταβλητών  $y$  (απόσταση του κέντρου βάρους του σώματος από την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού) και  $\alpha$  (γωνία εγκάρσιας στροφής πρίσματος). Η ποσότητα  $V_c z_c$  αποτελεί τη ροπή του βυθισμένου όγκου του σώματος ως προς την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$V_c z_c = \int_{z_0}^0 A(z) z dz \quad (5.2)$$

όπου  $z_0$  είναι η τεταγμένη του χαμηλότερου σημείου του βυθισμένου όγκου  $V_c$  και  $A(z)$  η επιφάνεια της οριζόντιας τομής του στερεού με τεταγμένη  $z$ .

Στο σημείο αυτό, πρέπει να αναφερθεί ότι η ενεργειακή ανάλυση θα πραγματοποιηθεί στο πλαίσιο της διδιάστατης θεωρίας, δηλαδή οι όγκοι στις σχέσεις της δυναμικής

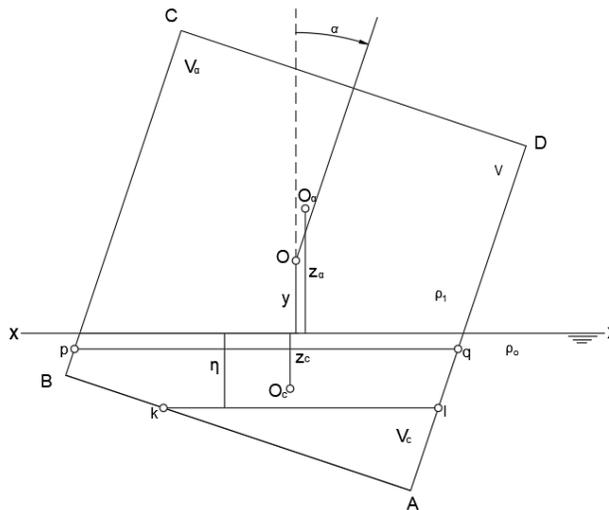
ενέργειας θα αντικαθίστανται από τα εμβαδά των αντίστοιχων διατομών, εφόσον το μήκος του πρίσματος θεωρείται άπειρο. Η απαλοιφή του μήκους από τις ενεργειακές σχέσεις μπορεί διαφορετικά να ερμηνευθεί από το γεγονός ότι υπολογίζεται ουσιαστικά η ενέργεια ανά μονάδα μήκους του πρίσματος.

## **5.2 Πρίσμα τετραγωνικής διατομής**

Η εφαρμογή της ενεργειακής μεθόδου πραγματοποιείται, αρχικά, σε ομογενές πρίσμα τετραγωνικής διατομής με πλευρά ίση με 1 και ακολουθείται η διαδικασία υπολογισμών σύμφωνα με την εργασία των Erdos, Schibler και Herdon<sup>[1]</sup>. Πρώτο στάδιο, αποτελεί ο προσδιορισμός της δυναμικής ενέργειας του συστήματος, η οποία λαμβάνει διαφορετικές εκφράσεις ανάλογα με τις γωνίες της τετραγωνικής διατομής του πρίσματος που είναι βυθισμένες. Λόγω της συμμετρίας της τετραγωνικής διατομής ως προς και τους δύο άξονες, η ενεργειακή ανάλυση δεν χρειάζεται να πραγματοποιηθεί για μία πλήρη εγκάρσια περιστροφή, αλλά το εύρος της γωνιάς  $\alpha$  θα περιοριστεί στο διάστημα  $0 \leq \alpha < \pi/2$ .

### **5.2.1 Υπολογισμός ροπής βυθισμένου όγκου**

Η εύρεση της αναλυτικής έκφρασης της ενέργειας εξαρτάται από τον υπολογισμό της ροπής του βυθισμένου όγκου  $V_c z_c$ . Δεδομένου ότι η ποσότητα  $V_c z_c$  θα υπολογιστεί ως συνάρτηση των μεταβλητών  $y$  και  $\alpha$ , χρειάζεται να παρατεθεί αναλυτικά η γεωμετρία του πρίσματος και να προσδιοριστούν οι γεωμετρικές σχέσεις που περιγράφουν την ποσότητα  $V_c z_c$  για την κάθε περίπτωση βύθισης.



Σχήμα 2: Εγκάρσια διατομή πρίσματος για δύο γωνίες (A και B) βυθισμένες

Στο Σχήμα 2 παρουσιάζεται η τετραγωνική διατομή ABCD με πλευρά 1 του εξεταζόμενου πρίσματος. Το κέντρο του τετραγώνου ABCD έχει συντεταγμένες  $O: (0, y)$ . Αν ο άξονας συμμετρίας που διχοτομεί τις πλευρές AB και CD σχηματίζει γωνιά  $\alpha$  με τον κατακόρυφο άξονα  $y$ , τότε οι συντεταγμένες  $(x_A, y_A)$ ,  $(x_B, y_B)$ ,  $(x_C, y_C)$  και  $(x_D, y_D)$  των γωνιών του τετραγώνου είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} A: & \left( \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha, -\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + y \right) \\ B: & \left( -\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha, -\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha + y \right) \\ C: & \left( -\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha, \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha + y \right) \\ D: & \left( \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha, \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + y \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Οι συντεταγμένες αυτές προέκυψαν ως ο αφφινικός μετασχηματισμός (στροφή και μεταφορά) των αρχικών συντεταγμένων των γωνιών του τετραγώνου στην όρθια θέση ισορροπίας. Σημειώνεται ότι το πρίσμα στρέφεται δεξιόστροφα με μητρώο στροφής:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Ο υπολογισμός των συντεταγμένων των γωνιών της διατομής για γωνία στροφής  $\alpha$  ήταν απαραίτητος, εφόσον αυτές θα καθορίσουν τις διάφορες περιοχές ολοκλήρωσης για τον αναλυτικό υπολογισμό του  $V_{CZ_C}$ .

Αν θεωρηθεί ότι υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα με μήκος  $\xi$  εντός του τετραγώνου ABCD, παράλληλο στον άξονα  $x$  και σε απόσταση  $\eta$  κάτω από αυτόν, τότε η ροπή  $V_{CZ_C}$  του βυθισμένου τμήματος θα είναι:

$$V_{CZ_C} = \int_{y_A}^0 \xi \eta \, d\eta$$

$$= \begin{cases} \int_{y_A}^{y_B} \xi_1 \eta \, d\eta + \int_{y_B}^0 \xi_2 \eta \, d\eta, & \text{για } y_B \leq 0, \\ \int_{y_A}^0 \xi_1 \eta \, d\eta, & \text{για } y_B \geq 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

$$(5.6)$$

όπου οι αποστάσεις  $\xi_1 = x_l - x_k$  και  $\xi_2 = x_q - x_p$  ορίζονται γεωμετρικά ως εξής:

$$\xi_1 = \frac{\eta - y_A}{\sin \alpha \cos \alpha} \quad (5.7)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (5.8)$$

Οι σχέσεις (5.5) και (5.6) καλύπτουν τις περιπτώσεις των δύο και της μίας βυθισμένης γωνίας. Στην τελευταία περίπτωση, κατά την οποία είναι βυθισμένες οι τρεις γωνίες (Α, Β και D) της διατομής, υπολογίζεται η ροπή του μη βυθισμένου τμήματος  $V_{\alpha}z_{\alpha}$ , σύμφωνα με την σχέση:

$$V_{\alpha}z_{\alpha} = \int_0^{y_c} \xi \eta \, d\eta \quad (5.9)$$

$$\text{όπου } \xi = \frac{y_c - \eta}{\sin \alpha \cos \alpha} \quad (5.10)$$

και ακολούθως υπολογίζεται η ροπή του βυθισμένου τμήματος  $V_c z_c$  από την σχέση:

$$V_c z_c = Vy - V_{\alpha}z_{\alpha} \quad (5.11)$$

Εφόσον έχουν προσδιοριστεί οι σχέσεις της ποσότητας  $V_c z_c$ , μπορούν πλέον να υπολογιστούν οι αναλυτικές σχέσεις της δυναμικής ενέργειας του συστήματος στερεού – ρευστού για τις τρεις περιπτώσεις βύθισης και στη συνέχεια να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας του πρίσματος.

### **5.2.2 Διερεύνηση ευστάθειας πρίσματος**

Η ενεργειακή ανάλυση του πρίσματος τετραγωνικής διατομής θα διαχωριστεί στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- a) Δύο γωνίες βυθισμένες (Α και Β ή Α και D)
- b) Μία γωνία βυθισμένη (Α)
- c) Τρεις γωνίες βυθισμένες (Α, Β και D)

Για κάθε περίπτωση, θα δοθούν οι σχέσεις της ροπής βυθισμένου όγκου  $V_c z_c$ , της ενέργειας του συστήματος  $\varepsilon$  και οι εξισώσεις που προκύπτουν από τις συνθήκες ισορροπίας και ευστάθειας σύμφωνα με την ενεργειακή μέθοδο.

- a) Δύο γωνίες βυθισμένες (Α και Β ή Α και D)

Για την περίπτωση όπου είναι βυθισμένες οι γωνίες Α και Β, η γωνία εγκάρσιας στροφής λαμβάνει ένα εύρος τιμών που οριοθετείται από την όρθια θέση ισορροπίας ( $\alpha=0^\circ$ ) και την τιμή εκείνη της  $\alpha$  για την οποία η γωνία Β αρχίζει να αναδύεται. Εφόσον  $y_B \leq 0$ , η ροπή του βυθισμένου όγκου θα υπολογιστεί από τη σχέση (5.5), αντικαθιστώντας τα  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  από τις σχέσεις (5.7), (5.8) και τις τεταγμένες των σημείων Α και Β από τις σχέσεις (5.3). Έτσι, η ροπή  $V_c z_c$  συναρτήσει των μεταβλητών  $\alpha$ ,  $\gamma$  θα είναι ίση με:

$$V_c Z_c = -\frac{1}{12\cos a} (6y^2 - 6y\cos a + \cos^2 a + \frac{1}{2}) \quad (5.12)$$

Η δυναμική ενέργεια για αυτή την περίπτωση υπολογίζεται αντικαθιστώντας στη σχέση (5.1), την (5.12):

$$\varepsilon = ry + \frac{1}{12\cos a} (6y^2 - 6y\cos a + \cos^2 a + \frac{1}{2}) \quad (5.13)$$

Σημειώνεται ότι το μήκος του πρίσματος απαλείφεται από τη σχέση της ενέργειας και έτσι ο όγκος  $V$  αντικαθίσταται από το συνολικό εμβαδόν της τετραγωνικής διατομής, το οποίο ισούται με 1.

Εφαρμόζοντας τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας της ενεργειακής μεθόδου, προκύπτει η πιο κάτω σχέση:

$$\frac{\partial E(y,\alpha)}{\partial a} = 0 \quad \rightarrow \quad (6y^2 - \cos^2 a + \frac{1}{2}) \sin a = 0 \quad (5.14)$$

Από τη σχέση (5.14), αρχικά, λαμβάνεται η λύση  $\sin a = 0$ , άρα  $\alpha = 0^\circ$ . Αυτό αποδεικνύει ότι η όρθια θέση αποτελεί θέση ισορροπίας για οποιαδήποτε τιμή του  $y$ . Όμως, θα πρέπει να ελεγχθεί για ποιες τιμές του  $y$ , και κατ' επέκταση του λόγου πυκνοτήτων  $r$ , είναι ευσταθής η θέση αυτή.

Αν τεθεί  $\alpha = 0^\circ$  στη σχέση της ενέργειας (5.13), θα ληφθεί η σχέση:

$$\varepsilon = ry + \frac{1}{2} (y^2 - y + \frac{1}{4}) \quad (5.15)$$

και εφαρμόζοντας την πρώτη συνθήκη ισορροπίας στην τελευταία σχέση, προκύπτει:

$$\frac{\partial E(y)}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} - r \quad (5.16)$$

Σύμφωνα με το κριτήριο ευστάθειας (σχέση 4.7β) της ενεργειακής μεθόδου, που απαιτεί:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial a \partial y}\right)^2 > 0 \quad \text{και ταυτόχρονα} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} > 0 \quad (5.17)$$

υπολογίζεται ότι η θέση ισορροπίας  $\alpha = 0^\circ$  είναι ευσταθής όταν:

$$|y| > \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad \text{δηλαδή για } r < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \text{ή} \quad r > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (5.18)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι για την περίπτωση όπου το  $r$  λαμβάνει τιμές  $r > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ , είναι βυθισμένες οι γωνίες A και D του πρίσματος.

Για  $\alpha \neq 0^\circ$ , λαμβάνεται από την σχέση (5.14) η λύση:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + 12y^2} \quad (5.19)$$

Δεδομένου ότι  $|\cos \alpha| \leq 1$ , προκύπτει το ακόλουθο όριο στις τιμές του  $y$  για τη λύση (5.19):

$$-\frac{\sqrt{3}}{6} \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (5.20)$$

Αν αντικατασταθεί η σχέση (5.19) στην (5.13), η ενέργεια συναρτήσει του  $y$  θα είναι:

$$\varepsilon = ry + \frac{\sqrt{2}}{12} (\sqrt{1 + 12y^2} - 3\sqrt{2}y) \quad (5.21)$$

και εφαρμόζοντας την πρώτη συνθήκη ισορροπίας στην τελευταία σχέση προκύπτει:

$$\frac{\partial E(y)}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad y = (1 - 2r)/2\sqrt{12r(1 - r) - 1} \quad (5.22)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.20), (5.22) και δεδομένου ότι για να είναι βυθισμένη η γωνία B απαιτείται  $y_B \leq 0$ , το  $r$  λαμβάνει τιμές εντός του πιο κάτω διαστήματος:

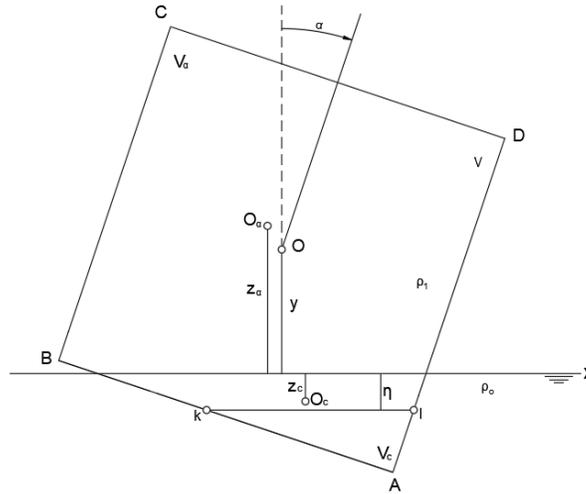
$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \leq r \leq \frac{1}{4} \quad (5.23)$$

Δηλαδή, για το συγκεκριμένο διάστημα τιμών του  $r$ , το πρίσμα τετραγωνικής διατομής θα ισορροπεί με βυθισμένες τις γωνίες A και B σε ασύμμετρες θέσεις ( $\alpha \neq 0^\circ$ ) που δίνονται από τη σχέση (5.19) για τιμές του  $y$  εντός του διαστήματος  $\frac{\sqrt{5}}{10} \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

Όταν το  $r$  λαμβάνει τιμές στο διάστημα  $\frac{3}{4} \leq r \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$  το πρίσμα θα ισορροπεί με βυθισμένες τις γωνίες A και D σε ασύμμετρες θέσεις ( $\alpha \neq 0^\circ$ ) που δίνονται από τη σχέση (5.19) για τιμές του  $y$  εντός του διαστήματος  $-\frac{\sqrt{3}}{6} \leq y \leq -\frac{\sqrt{5}}{10}$ . Σύμφωνα με τα κριτήρια ευστάθειας, οι παραπάνω θέσεις ισορροπίας χαρακτηρίζονται ευσταθείς.

b) Μία γωνία βυθισμένη (A)

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία υπολογισμών, θα συνεχιστεί η διερεύνηση ευστάθειας του πρίσματος τετραγωνικής διατομής, εξετάζοντας την περίπτωση κατά την οποία είναι βυθισμένη μόνο μία γωνία. Αυτό συμβαίνει όταν  $y_B \geq 0$ , άρα η ροπή του βυθισμένου όγκου  $V_c z_c$  υπολογίζεται από τη σχέση (5.6) και είναι ίση με:



Σχήμα 3: Εγκάρσια διατομή πρίσματος για μία γωνία (A) βυθισμένη

$$V_c z_c = \frac{1}{6 \sin \alpha \cos \alpha} \left( y - \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right)^3 \quad (5.24)$$

Στην περίπτωση της μίας βυθισμένης γωνίας είναι προτιμότερο οι υπολογισμοί να γίνουν θέτοντας μία νέα γωνία  $\beta$ , ως εξής:

$$\beta = 45^\circ - \alpha \quad (5.25)$$

Έτσι, η δυναμική ενέργεια του συστήματος συναρτήσει της γωνίας  $\beta$  υπολογίζεται ίση με:

$$\varepsilon = r y + \frac{1}{3(1-2 \cos^2 \beta)} \left( y - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta \right)^3 \quad (5.26)$$

Η εφαρμογή της δεύτερης συνθήκης ισορροπίας οδηγεί στην εξίσωση (5.27) από την οποία προκύπτουν δύο πιθανές λύσεις:

$$\frac{\partial E(y, \beta)}{\partial \beta} = 0 \rightarrow \sin \beta (\cos^2 \beta + 2\sqrt{2} y \cos \beta - \frac{3}{2}) = 0 \quad (5.27)$$

Η πρώτη λύση είναι η εξής:

$$\cos \beta = -\sqrt{2} y + \sqrt{\frac{3}{2} + 2y^2} \quad (5.28)$$

Δεδομένου ότι  $|\cos \beta| \leq 1$  και  $y_B > 0$ , τίθενται τα ακόλουθα όρια στις τιμές του  $y$ :

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \leq y < \frac{\sqrt{5}}{10} \quad (5.29)$$

Αν αντικατασταθεί η λύση (5.28) στη σχέση (5.26), η ενέργεια συναρτήσει του  $y$  θα είναι:

$$\varepsilon = ry - \frac{1}{6(-\sqrt{2}y + \sqrt{\frac{3}{2} + 2y^2})^2 - 3} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{3}{2} + 2y^2} - 2y \right)^3 \quad (5.30)$$

και εφαρμόζοντας την πρώτη συνθήκη ισορροπίας στην τελευταία σχέση προκύπτει:

$$\frac{\partial E(y)}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad y = \left( \frac{3}{2} - 4r \right) / \sqrt{9 - 16r} \quad (5.31)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.29) και (5.31) το  $r$  λαμβάνει τιμές εντός του πιο κάτω διαστήματος:

$$\frac{1}{4} < r \leq \frac{9}{32} \quad (5.32)$$

Δηλαδή, το πρίσμα τετραγωνικής διατομής θα εξακολουθεί να ισορροπεί σε ασύμμετρες θέσεις μέχρι το  $r$  να φτάσει την τιμή  $\frac{9}{32}$ . Οι ασύμμετρες θέσεις για την περίπτωση της μίας βυθισμένης γωνίας δίνονται από τη σχέση (5.28) για τιμές του  $y$  εντός των ορίων της σχέσης (5.29). Σύμφωνα με τα κριτήρια ευστάθειας, οι παραπάνω θέσεις ισορροπίας χαρακτηρίζονται ευσταθείς.

Η δεύτερη λύση που προκύπτει από την εξίσωση (5.27) είναι  $\sin\beta = 0$  και εφόσον ισχύει η σχέση (5.25), η γωνία  $\alpha = 45^\circ$  αποτελεί θέση ισορροπίας για οποιαδήποτε τιμή του  $y$ . Για αυτή την περίπτωση, η σχέση της ενέργειας (5.26) γίνεται:

$$\varepsilon = ry - \frac{1}{3} \left( y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \quad (5.33)$$

Εφαρμόζοντας την πρώτη συνθήκη ισορροπίας στην τελευταία σχέση, υπολογίζεται το  $y$  συναρτήσει του  $r$  ως εξής:

$$\frac{\partial E(y)}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{r} \quad (5.34)$$

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο ευστάθειας (σχέση 5.17) της ενεργειακής μεθόδου και δεδομένου ότι για την συγκεκριμένη περίπτωση απαιτείται  $y \geq 0$ , η θέση ισορροπίας  $\alpha = 45^\circ$  είναι ευσταθής όταν:

$$0 \leq y < \frac{\sqrt{2}}{8}, \quad \text{δηλαδή για } \frac{9}{32} < r \leq \frac{1}{2} \quad (5.35)$$

c) Τρεις γωνίες βυθισμένες (A,B και D)

Στην τελευταία περίπτωση διερεύνησης της ευστάθειας του εξεταζόμενου πρίσματος θα παραλειφθεί η λεπτομερής διαδικασία υπολογισμών λόγω συντομίας και θα γίνει αναφορά μόνο στα αποτελέσματα. Ωστόσο, πρέπει να αναφερθεί ότι η περίπτωση κατά την οποία είναι βυθισμένες τρεις γωνίες του στερεού σώματος, συμβαίνει για τιμές του λόγου πυκνοτήτων στερεού – ρευστού  $r > 0.5$ . Επίσης, παρατηρείται ότι οι σχέσεις που προκύπτουν στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ίδιες με τις αντίστοιχες σχέσεις της περίπτωσης της μίας βυθισμένης γωνίας, αν αντικατασταθεί σε αυτές όπου  $r$  το  $(1-r)$  και όπου  $\gamma$  το  $(-\gamma)$ .

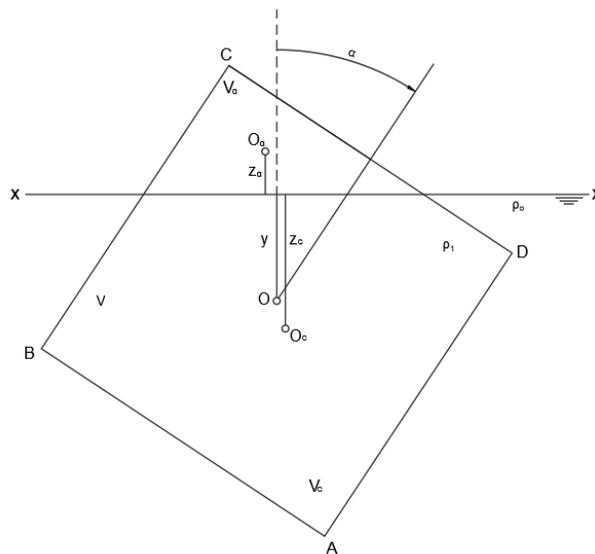
Επομένως, η ροπή του βυθισμένου όγκου που υπολογίζεται από την σχέση (5.11) είναι:

$$V_c z_c = y - \frac{1}{6 \sin \alpha \cos \alpha} \left( y + \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right)^3 \quad (5.36)$$

και η σχέση της δυναμικής ενέργειας είναι:

$$\varepsilon = (r - 1)y + \frac{1}{3(2 \cos^2 \beta - 1)} \left( y + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta \right)^3 \quad (5.37)$$

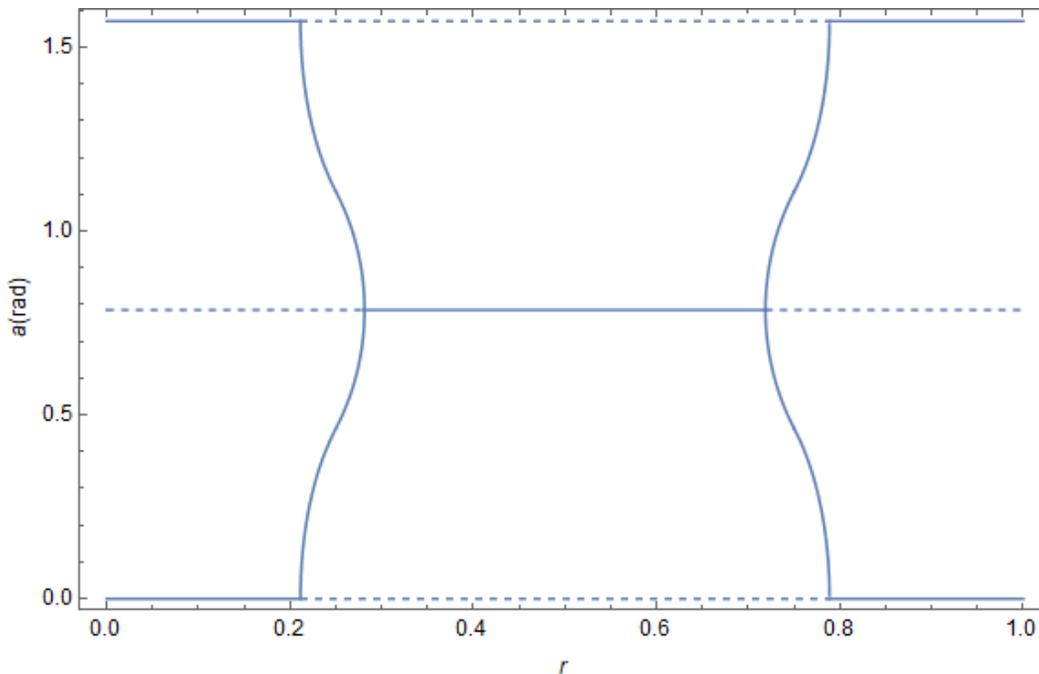
Από τη διερεύνηση ευστάθειας προκύπτει ότι η θέση ισορροπίας  $\alpha = 45^\circ$  είναι ευσταθής για  $\frac{1}{2} \leq r < \frac{23}{32}$ . Επίσης, προκύπτει ότι το πρίσμα θα ισορροπεί ευσταθώς σε ασύμμετρες θέσεις με τις τρεις γωνίες του βυθισμένες, για τιμές  $\gamma$  εντός του διαστήματος  $-\frac{\sqrt{5}}{10} < \gamma \leq -\frac{\sqrt{2}}{8}$ , δηλαδή για  $\frac{23}{32} \leq r < \frac{3}{4}$ .



Σχήμα 4: Εγκάρσια διατομή πρίσματος για τρεις γωνίες (A,B και D) βυθισμένες

### 5.2.3 Διάγραμμα Ισορροπίας $\alpha - r$

Για να γίνουν πιο κατανοητά τα αποτελέσματα της ενεργειακής διερεύνησης της ευστάθειας για το πρίσμα τετραγωνικής διατομής, σχεδιάστηκε το διάγραμμα της γωνίας εγκάρσιας στροφής  $\alpha$  συναρτήσει του λόγου πυκνοτήτων στερεού – ρευστού  $r$ . Στο διάγραμμα αυτό παρουσιάζονται όλες οι ευσταθείς και ασταθείς θέσεις ισορροπίας που υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας την ενεργειακή μέθοδο και διακρίνεται η συμμετρία των περιοχών ευστάθειας του πρίσματος. Σημειώνεται ότι στο ακόλουθο διάγραμμα, με διακεκομμένες γραμμές αποτυπώνονται τα σημεία που χαρακτηρίζουν ασταθείς θέσεις ισορροπίας, ενώ με συνεχείς γραμμές αποτυπώνονται τα σημεία ευσταθών θέσεων ισορροπίας. Οι καμπύλες που οριοθετούν τις διάφορες περιοχές ευστάθειας προκύπτουν από συναρτήσεις της μορφής  $\alpha = \alpha(r)$ , αφού απαλειφθεί ο όρος  $\gamma$  από το σύστημα συνθηκών ισορροπίας για κάθε μία από τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν.

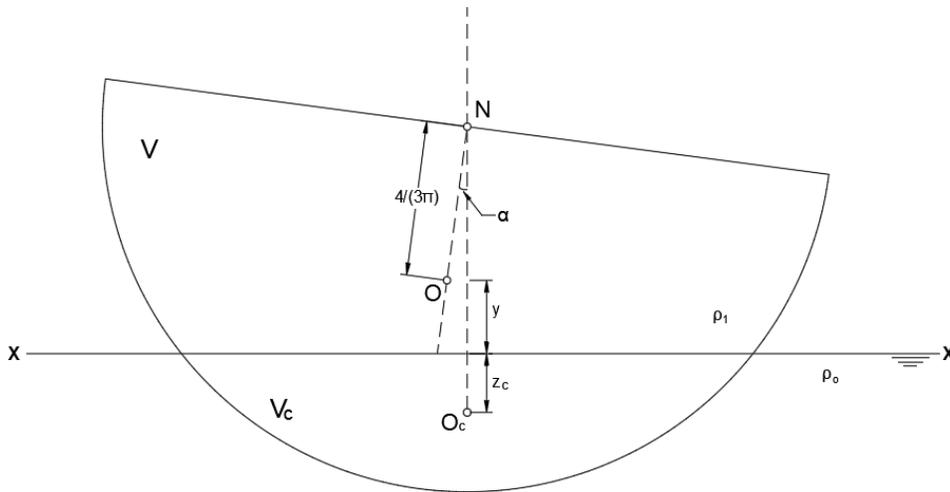


Σχήμα 5: Διάγραμμα ισορροπίας  $\alpha - r$  για το πρίσμα τετραγωνικής διατομής

### 5.3 Ημικυκλικός κύλινδρος

Η ενεργειακή προσέγγιση διερεύνησης της ευστάθειας θα εφαρμοστεί, ακολούθως, σε ομογενή ημικυκλικό κύλινδρο, χρησιμοποιώντας αναλυτικούς υπολογισμούς. Ο ημικυκλικός κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης ίση με 1 και θεωρείται ότι επιπλέει έχοντας τον διαμήκη άξονά του (δηλαδή τον άξονα που είναι κάθετος στις βάσεις του) παράλληλο με την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού. Επιπρόσθετα, γίνεται και εδώ η παραδοχή ότι το επιπλέον σώμα είναι τόσο μακρύ που απαλείφεται το μήκος από τις ενεργειακές σχέσεις και έτσι οι απαραίτητοι όγκοι του στερεού για την εφαρμογή της μεθόδου αντικαθίστανται από τα αντίστοιχα εμβαδά.

Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται η διατομή του ημικυκλικού κυλίνδρου σε γωνία εγκάρσιας στροφής  $\alpha$ , στην οποία φαίνονται τα κέντρα βάρους της συνολικής διατομής (σημείο  $O$ ) και του βυθισμένου τμήματος (σημείο  $O_c$ ), καθώς και οι αποστάσεις τους από την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού,  $y$  και  $z_c$  αντίστοιχα. Το κέντρο βάρους του ημικυκλικού κυλίνδρου με ακτίνα 1 (σημείο  $O$ ), βρίσκεται στο διαμήκη άξονα συμμετρίας του, σε απόσταση  $\frac{4}{3\pi}$  από την άνω βάση του. Το σημείο  $N$  αντιστοιχεί στην τομή της άνω πλευράς του ημικυκλικού κυλίνδρου με το διαμήκη άξονα συμμετρίας του και άρα η απόσταση  $ON$  ισούται με  $\frac{4}{3\pi}$ .



Σχήμα 6: Εγκάρσια διατομή ημικυκλικού κυλίνδρου

Για τη διερεύνηση ευστάθειας του ημικυκλικού κυλίνδρου μέσω της ενεργειακής μεθόδου, θα υπολογιστεί αρχικά η ροπή του βυθισμένου όγκου  $V_c z_c$  και στη συνέχεια θα εκφραστεί η γενική σχέση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος στερεού σώματος – εκτοπιζόμενου ρευστού από την σχέση (5.1). Εφόσον η διατομή του πρίσματος σε αυτή την περίπτωση έχει ημικυκλικό σχήμα με κέντρο το σημείο N, το εμβαδό του βυθισμένου τμήματος θα δίνεται από την πιο κάτω σχέση:

$$V_c = 2 \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 - z^2} dz \quad (5.38)$$

όπου τα όρια του ολοκληρώματος  $z_1$  και  $z_2$  θα είναι τα εξής:

$$z_1 = y + \frac{4}{3\pi} \cos \alpha \quad \text{και} \quad z_2 = 1 \quad (5.39)$$

Επομένως, η ποσότητα  $V_c$  συναρτήσει των μεταβλητών  $y$  και  $\alpha$  θα είναι ίση με:

$$V_c = \arccos \left( y + \frac{4}{3\pi} \cos \alpha \right) - \left( y + \frac{4}{3\pi} \cos \alpha \right) \sqrt{1 - \left( y + \frac{4}{3\pi} \cos \alpha \right)^2} \quad (5.40)$$

Η απόσταση  $z_c$  υπολογίστηκε ίση με:

$$z_c = y + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi} - \frac{2 \left[ 1 - \left( y + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi} \right)^2 \right]^{3/2}}{3 \left[ \arccos \left( y + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi} \right) - \left( y + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi} \right) \sqrt{1 - \left( y + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi} \right)^2} \right]} \quad (5.41)$$

Άρα, τελικά η ροπή του βυθισμένου τμήματος  $V_c z_c$  θα δίνεται από την πιο κάτω σχέση:

$$V_c z_c = \arccos \left( y + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi} \right) \left( y + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi} \right) - \frac{1}{3} \sqrt{1 - \left( y + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi} \right)^2} \left[ 2 + \left( y + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi} \right)^2 \right] \quad (5.42)$$

Για τον προσδιορισμό της έκφρασης της δυναμικής ενέργειας του συστήματος, θα πρέπει να υπολογιστεί πρώτα το συνολικό εμβαδόν της διατομής του ημικυκλικού κυλίνδρου. Εφόσον, η ημικυκλική διατομή έχει ακτίνα με μέτρο 1, το συνολικό εμβαδόν της  $V$  προκύπτει ίσο με  $\frac{\pi}{2}$ . Έτσι, αντικαθιστώντας στη σχέση (5.1) τους όρους  $V$  και  $V_c z_c$ , η σχέση της ενέργειας για την περίπτωση του ημικυκλικού κυλίνδρου θα είναι η εξής:

$$\varepsilon = \frac{\pi r y}{2} - \arccos \left( y + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi} \right) \left( y + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi} \right) + \frac{1}{3} \sqrt{1 - \left( y + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi} \right)^2} \left[ 2 + \left( y + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi} \right)^2 \right] \quad (5.43)$$

Η εφαρμογή της δεύτερης συνθήκης ισορροπίας σύμφωνα με την ενεργειακή μέθοδο οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{[27\pi^3 y(y^2-1) + 36\pi^2(3y^2-1)\cos\alpha + 144\pi y \cos^2\alpha + 64\cos^3\alpha + 9\pi^2 \arccos(y + \frac{4\cos\alpha}{3\pi}) \sqrt{-9\pi^2(y^2-1) - 24\pi y \cos\alpha - 16\cos^2\alpha}] \sin\alpha}{\sqrt{-9\pi^2(y^2-1) - 24\pi y \cos\alpha - 16\cos^2\alpha}} = 0 \quad (5.44)$$

Από τη σχέση (5.44), λαμβάνεται μόνο η λύση  $\sin\alpha = 0$ , συνεπώς  $\alpha = 0^\circ$ . Αυτό αποδεικνύει ότι η όρθια θέση αποτελεί θέση ισορροπίας του ημικυκλικού κυλίνδρου για οποιαδήποτε τιμή του  $y$ . Όμως, θα πρέπει να ελεγχθεί για ποιες τιμές του  $y$ , και κατ' επέκταση του λόγου πυκνοτήτων  $r$ , είναι ευσταθής η θέση αυτή.

Αν τεθεί  $\alpha = 0^\circ$  στη σχέση της ενέργειας (5.43), θα ληφθεί η απλοποιημένη σχέση:

$$\varepsilon = \frac{\pi r y}{2} + \frac{1}{3} \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\pi} + y\right)^2} \left[2 + \left(\frac{4}{3\pi} + y\right)^2\right] - \left(\frac{4}{3\pi} + y\right) \text{ArcCos}\left(\frac{4}{3\pi} + y\right) \quad (5.45)$$

και εφαρμόζοντας την πρώτη συνθήκη ισορροπίας στην τελευταία σχέση, προκύπτει:

$$\frac{\pi r}{2} + \frac{\frac{4}{3\pi} + y}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\pi} + y\right)^2}} + \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3\pi} + y\right) \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\pi} + y\right)^2} - \frac{\left(\frac{4}{3\pi} + y\right) \left(2 + \left(\frac{4}{3\pi} + y\right)^2\right)}{3 \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\pi} + y\right)^2}} - \text{ArcCos}\left(\frac{4}{3\pi} + y\right) = 0 \quad (5.46)$$

Μετασχηματίζοντας τη σχέση (5.46), λαμβάνεται η έκφραση του λόγου πυκνοτήτων στερεού – ρευστού  $r$  ως συνάρτηση του  $y$ :

$$r = \frac{2[64 + 144\pi y + 27\pi^3 y(y^2 - 1) + 36\pi^2(3y^2 - 1) + 9\pi^2 \sqrt{-16 - 24\pi y - 9\pi^2(y^2 - 1)} \text{ArcCos}\left(\frac{4}{3\pi} + y\right)]}{9\pi^3 \sqrt{-16 - 24\pi y - 9\pi^2(y^2 - 1)}} \quad (5.47)$$

Ο έλεγχος ευστάθειας της όρθιας θέσης ισορροπίας του ημικυκλικού κυλίνδρου θα γίνει σύμφωνα με το κριτήριο (4.6) της ενεργειακής μεθόδου, το οποίο απαιτεί οι ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα να είναι θετικές για ευσταθή θέση ισορροπίας. Έχοντας υπολογίσει της μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της ενέργειας ως προς τις μεταβλητές  $\alpha$  και  $y$  και αντικαθιστώντας  $\alpha = 0^\circ$ , προκύπτουν οι σχέσεις (5.49), οι οποίες σχηματίζουν τον Εσσιανό πίνακα ως ακολούθως:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha \partial y} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha \partial y} & \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{2\sqrt{-16 - 24\pi y - 9\pi^2(-1 + y^2)}}{3\pi}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \alpha^2} = \frac{4(3\pi y(20 + 9\pi^2(-1 + y^2)) + 2(32 + 9\pi^2 + 42\pi y + 9\pi^2 y^2 + 9\pi^2(-3 + 5y^2)) + 9\pi^2 \sqrt{-16 + 9\pi^2 - 24\pi y - 9\pi^2 y^2} \text{ArcCos}\left[\frac{4}{3\pi} + y\right])}{27\pi^3 \sqrt{-16 - 24\pi y - 9\pi^2(-1 + y^2)}}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \alpha \partial y} = 0 \quad (5.49)$$

Οι ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα που υπολογίστηκαν είναι οι εξής:

$$\lambda_1 = \frac{2\sqrt{-16+9\pi^2-24\pi y-9\pi^2 y^2}}{3\pi}$$

$$\lambda_2 = \frac{4[64-36\pi^2+144\pi y-27\pi^3 y+108\pi^2 y^2+27\pi^3 y^3+9\pi^2\sqrt{-16+9\pi^2-24\pi y-9\pi^2 y^2}\text{ArcCos}\left(\frac{4}{3\pi}+y\right)]}{27\pi^3\sqrt{-16+9\pi^2-24\pi y-9\pi^2 y^2}} \quad (5.50)$$

οι οποίες είναι θετικές όταν το  $y$  λαμβάνει τιμές εντός του διαστήματος:

$$\frac{-4}{3\pi} < y < \frac{-4}{3\pi} + 1 \quad (5.51)$$

Μέσω της σχέσης (5.47) υπολογίζεται ο λόγος πυκνοτήτων  $r$ , ο οποίος για το πιο πάνω διάστημα τιμών του  $y$  λαμβάνει τιμές από 0 έως 1. Αυτό σημαίνει ότι η όρθια θέση ισορροπίας του ημικυκλικού κυλίνδρου χαρακτηρίζεται πάντα ευσταθής.

Στον πίνακα που ακολουθεί, παρουσιάζονται οι τιμές ισορροπίας  $y_{eq}$  (για  $\alpha_{eq} = 0$ ) καθώς και η δυναμική ενέργεια του συστήματος στερεού – ρευστού, που υπολογίστηκαν από τις σχέσεις (5.45) και (5.47) για συγκεκριμένες τιμές του λόγου πυκνοτήτων  $r$ . Ο Πίνακας 1 λήφθηκε από το πρόγραμμα Mathematica.

$r$	Δυναμική Ενέργεια	$y(eq)$	$\alpha(eq)$
0.01	0.00865285	0.534322	0
0.1	0.0721789	0.38097	0
0.2	0.122416	0.262636	0
0.3	0.155521	0.160724	0
0.4	0.173355	0.0674487	0
0.5	0.176991	-0.0204404	0
0.6	0.167122	-0.104722	0
0.7	0.14422	-0.186531	0
0.8	0.108608	-0.266677	0
0.9	0.060495	-0.345792	0
1	$-1.11022 \times 10^{-16}$	-0.424413	0

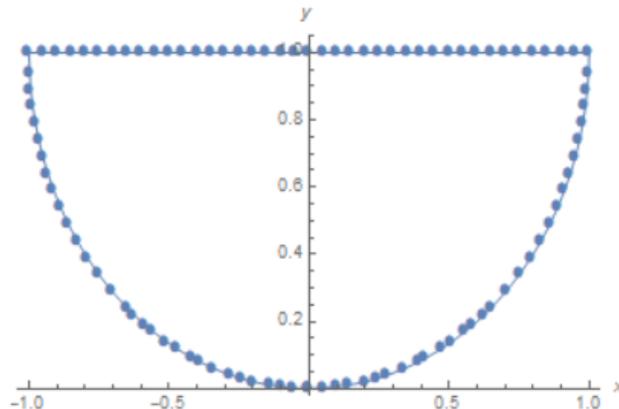
Πίνακας 1: Θέσεις ισορροπίας ημικυκλικού κυλίνδρου για διάφορες περιπτώσεις του  $r$

## 5.4 Αριθμητική αντιμετώπιση της ευστάθειας του ημικυκλικού κυλίνδρου

Επόμενο στάδιο για την εκπόνηση της διπλωματικής αυτής εργασίας αποτελεί η αριθμητική αντιμετώπιση της ευστάθειας του ημικυκλικού κυλίνδρου χρησιμοποιώντας την ενεργειακή μέθοδο, η οποία προηγουμένως είχε εξετασθεί με αναλυτικούς υπολογισμούς. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του τελευταίου κεφαλαίου, ο ημικυκλικός κύλινδρος ισορροπεί ευσταθώς στην όρθια θέση ( $\alpha = 0^\circ$ ) για οποιαδήποτε τιμή του λόγου πυκνοτήτων στερεού – ρευστού  $\gamma$ . Η μελέτη της ευστάθειάς του μέσω αριθμητικών υπολογισμών θα πρέπει να επαληθεύσει τα αποτελέσματα αυτά.

Η αριθμητική εξέταση της ευστάθειας του ημικυκλικού κυλίνδρου πραγματοποιήθηκε μέσω του υπολογιστικού λογισμικού Mathematica<sup>[7]</sup>. Αναλυτικότερα, αναπτύχθηκε κώδικας στο συγκεκριμένο πρόγραμμα, μέσα από τον οποίο υπολογίζονται οι θέσεις ισορροπίας του πρίσματος, όπως ορίζει η ενεργειακή μέθοδος, και πραγματοποιείται έλεγχος της ευστάθειάς τους. Ο κώδικας που αναπτύχθηκε, χωρίζεται σε δύο μέρη: το πρώτο αφορά τη διερεύνηση της ευστάθειας της όρθιας θέσης ισορροπίας, ενώ το δεύτερο μέρος αφορά την διερεύνηση ευστάθειας του πρίσματος για γωνίες  $\alpha \neq 0^\circ$ .

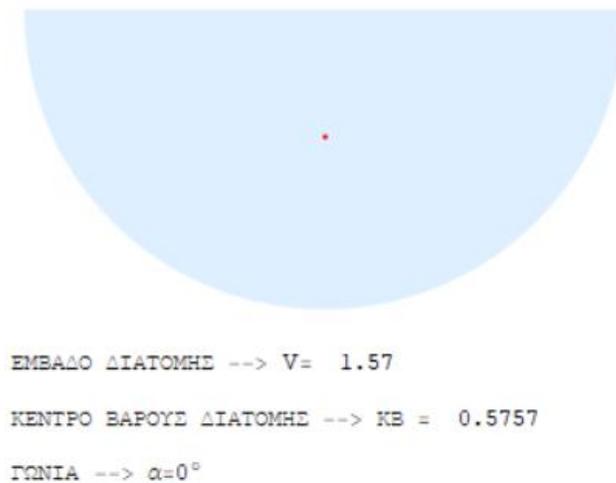
Αρχικά, πρέπει να σημειωθεί ότι η αριθμητική μελέτη της ευστάθειας του πρίσματος θα πραγματοποιηθεί στο πλαίσιο της διδιάστατης θεωρίας, όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια, και έτσι η γεωμετρία του ημικυκλικού κυλίνδρου θα εισαχθεί στον κώδικα μέσω της διατομής του. Πιο συγκεκριμένα, η διατομή του ημικυκλικού κυλίνδρου περιγράφεται από μία ομάδα σημείων με συντεταγμένες  $(x, y)$ . Στο ακόλουθο σχήμα, παρουσιάζεται η διατομή του ημικυκλικού κυλίνδρου σε διάγραμμα αξόνων  $(x - y)$ , όπως προκύπτει από το πρόγραμμα Mathematica, αν εισαχθούν τα σημεία που την περιγράφουν (η διατομή σχηματίστηκε από 100 σημεία).



Σχήμα 7: Απεικόνιση της διατομής του ημικυκλικού κυλίνδρου στο πρόγραμμα Mathematica

Επόμενο βήμα για την εφαρμογή της ενεργειακής μεθόδου στο πρόγραμμα Mathematica, αποτελεί ο υπολογισμός του συνολικού εμβαδού της διατομής του ημικυκλικού κυλίνδρου  $V$  και της κατακόρυφης απόστασης του κέντρου βάρους του. Για τον προσδιορισμό των στοιχείων αυτών, χρησιμοποιήθηκαν οι αντίστοιχες εντολές του προγράμματος Mathematica και τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 8, όπου παρουσιάζεται η ημικυκλική διατομή του πρίσματος και το κόκκινο σημείο αντιπροσωπεύει το κέντρο βάρους της. Θα μπορούσε, βέβαια, η ημικυκλική διατομή να χωριστεί σε  $n$  επιμέρους τραπέζια με βάσεις παράλληλες στον άξονα  $y$  και ύψος παράλληλο στον άξονα  $x$ , και έτσι το συνολικό εμβαδό να υπολογιστεί προσθέτοντας τα επιμέρους εμβαδά των τραπεζίων ( $v_i$ ). Αντίστοιχα, υπολογίζοντας το κέντρο βάρους των επιμέρους τραπεζίων ( $κβ_i$ ) θα μπορούσε να προσδιοριστεί το συνολικό κέντρο βάρους της διατομής από τη σχέση:

$$KB = \frac{\sum_{i=1}^n κβ_i v_i}{\sum_{i=1}^n v_i} \quad (5.52)$$



Σχήμα 8: Παρουσίαση της διατομής του ημικυκλικού κυλίνδρου και του κέντρου βάρους του στο πρόγραμμα Mathematica

Τελικά,  $V = 1.57$  και  $KB = 0.5757$ . Παρατηρείται ότι παρουσιάζεται μία ελάχιστη απόκλιση των τιμών αυτών σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές που χρησιμοποιήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι οποίες ήταν  $V = \frac{\pi}{2} = 1.5708$  και  $KB = 0.5756$ . Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι στην περίπτωση της αριθμητικής εξέτασης της ευστάθειας, τα στοιχεία της διατομής δεν λαμβάνονται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που αφορούν τη γεωμετρία του ημικυκλίου.

Στη συνέχεια, θα περιγραφεί ο τρόπος λειτουργίας του κώδικα που αναπτύχθηκε στο πρόγραμμα Mathematica για την αριθμητική διερεύνηση της ευστάθειας της όρθιας θέσης του πρίσματος. Αρχικώς, πρέπει να επιλεχθεί ο λόγος πυκνοτήτων στερεού – ρευστού  $r$ , εντός του διαστήματος  $0 < r < 1$ . Με δεδομένες τις τιμές του λόγου  $r$  και του εμβαδού  $V$ , υπολογίζεται η δυναμική ενέργεια του συστήματος στερεού σώματος – εκτοπιζόμενου ρευστού από τη σχέση (5.1) για διάφορες περιπτώσεις βύθισης του σώματος. Πρέπει να σημειωθεί ότι το σώμα διατηρείται στην όρθια θέση και εκτελεί κατακόρυφες μετατοπίσεις, επομένως δεν αλλάζει ο προσανατολισμός του, αλλά μεταβάλλεται μόνο η καθ' ύψος θέση του μέσα στο ρευστό. Υπολογίζεται, δηλαδή, η ενέργεια του συστήματος καθώς το σώμα εκτελεί παράλληλη βύθιση. Εφόσον κατά την παράλληλη βύθιση του σώματος αυξάνεται το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού, αυξάνεται και ο όγκος του βυθισμένου τμήματος του στερεού ( $V_c$ ) και μεταβάλλονται η απόσταση του κέντρου βάρους του, καθώς και η απόσταση του κέντρου βάρους του βυθισμένου όγκου από την ελεύθερη επιφάνεια (αποστάσεις  $y$  και  $z_c$  αντίστοιχα).

Οι μερικές παράγωγοι της ενέργειας του συστήματος στερεού – ρευστού ως προς τις μεταβλητές του προβλήματος  $\alpha$  και  $y$ , οι οποίες χρειάζονται για να εκφραστούν οι συνθήκες ισορροπίας της ενεργειακής μεθόδου, θα προσεγγιστούν στα πλαίσια της αριθμητικής ανάλυσης από ηλίκα πεπερασμένων διαφορών. Δηλαδή:

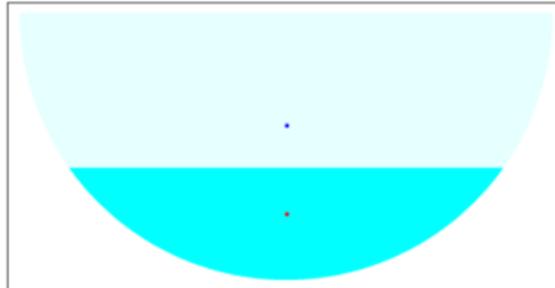
$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} \approx \frac{\Delta E}{\Delta \alpha} \quad \text{και} \quad \frac{\partial E}{\partial y} \approx \frac{\Delta E}{\Delta y} \quad (5.53)$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση όπου εξετάζεται η ευστάθεια της όρθιας θέσης του πρίσματος θα εφαρμοστεί μόνο το κριτήριο ισορροπίας ως προς τη μεταβλητή  $y$  (εφόσον η γωνία στροφής  $\alpha$  δεν μεταβάλλεται). Δηλαδή, καθώς το επιπλέον σώμα μετατοπίζεται κατακόρυφα στο ρευστό, υπολογίζεται το ηλίκο  $\frac{\Delta E}{\Delta y}$  και όταν αυτό μηδενιστεί, υποδεικνύεται η θέση ισορροπίας του σώματος. Στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι οι παρονομαστές στα ηλίκα πεπερασμένων διαφορών πρέπει να έχουν πολύ μικρές τιμές, και έτσι στον κώδικα του προγράμματος η κατακόρυφη βύθιση του σώματος στο ρευστό πραγματοποιείται θεωρώντας ότι το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας αυξάνεται με βήμα 0.01.

Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί για διαφορετικές τιμές του λόγου πυκνοτήτων στερεού – ρευστού  $r$ , δίνοντας κάθε φορά τη θέση στην οποία θα ισορροπήσει το πρίσμα (για  $\alpha = 0^\circ$ ). Στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζονται οι θέσεις ισορροπίας για τις περιπτώσεις λόγου πυκνοτήτων  $r = 0.3$  και  $r = 0.5$ . Το μπλε σημείο που απεικονίζεται, εκφράζει τη θέση του κέντρου βάρους του πρίσματος, ενώ το κόκκινο

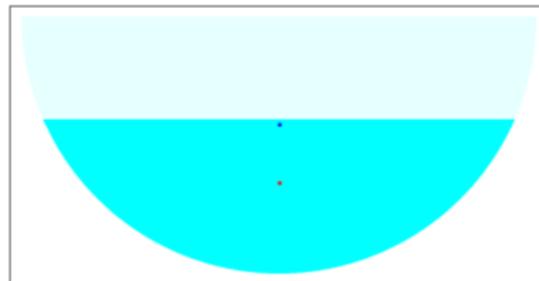
σημείο εκφράζει το κέντρο βάρους του βυθισμένου όγκου. Επίσης, στα σχήματα η επιφάνεια του βυθισμένου τμήματος της διατομής παρουσιάζεται με σκουρότερο χρώμα.

```
EQUILIBRIUM (a=0 degrees) FOR r = 0.3:  
vythisma = 0.42  
Vc = 0.47909  
y = 0.1557  
zc = -0.1714  
DYNAMIC ENERGY = 0.15543
```



Σχήμα 9: Παρουσίαση της θέσης ισορροπίας του ημικυκλικού κυλίνδρου για  $r = 0.3$  στο πρόγραμμα Mathematica

```
EQUILIBRIUM (a=0 degrees) FOR r = 0.5:  
vythisma = 0.6  
Vc = 0.79206  
y = -0.02431  
zc = -0.2474  
DYNAMIC ENERGY = 0.17687
```



Σχήμα 10: Παρουσίαση της θέσης ισορροπίας του ημικυκλικού κυλίνδρου για  $r = 0.5$  στο πρόγραμμα Mathematica

Όπως φαίνεται και στα αποτελέσματα των πιο πάνω σχημάτων, στην περίπτωση όπου ο λόγος πυκνοτήτων στερεού – ρευστού είναι ίσος με  $r = 0.3$ , ο ημικυκλικός κύλινδρος (με ακτίνα διατομής ίση με 1) θα ισορροπήσει σε γωνία  $\alpha = 0^\circ$ , σε βύθισμα ίσο με 0.42, για  $y = 0.1557$  και  $z_c = -0.1714$ . Το βυθισμένο τμήμα του πρίσματος θα έχει εμβαδό διατομής ίσο με  $V_c = 0.47909$  και η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα ισούται με  $\epsilon = 0.15543$ . Στην

περίπτωση όπου  $r = 0.5$ , ο ημικυκλικός κύλινδρος θα ισορροπήσει σε γωνία  $\alpha = 0^\circ$ , σε βύθισμα ίσο με 0.6, για  $y = -0.02431$  και  $z_c = -0.2474$ . Η βυθισμένη διατομή θα έχει εμβαδό ίσο με  $V_c = 0.79206$  και η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα ισούται με  $\varepsilon = 0.17687$ .

Εφόσον έχει προσδιοριστεί η θέση ισορροπίας του πρίσματος για μία συγκεκριμένη τιμή του λόγου  $r$ , γίνεται έλεγχος ευστάθειας της θέσης αυτής, δηλαδή ελέγχεται αν ικανοποιούνται τα κριτήρια ευστάθειας (4.7):

$$D = \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha \partial y} \right)^2 > 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha^2} > 0 \quad \text{ή}$$

$$D = \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha \partial y} \right)^2 > 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} > 0 \quad (5.54)$$

Ειδικότερα, υπολογίζεται στο πρόγραμμα η δυναμική ενέργεια του συστήματος για μικρές μεταβολές των μεταβλητών  $\alpha$  και  $y$  (ως προς την εξεταζόμενη θέση ισορροπίας) και εκφράζονται αριθμητικά οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης  $\frac{\partial^2 E}{\partial \alpha^2}$ ,  $\frac{\partial^2 E}{\partial \alpha \partial y}$  και  $\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}$ . Αν ικανοποιείται ένα από τα πιο πάνω κριτήρια ευστάθειας, τότε η εξεταζόμενη θέση ισορροπίας χαρακτηρίζεται ευσταθής.

Μετά από έλεγχο της όρθιας θέσης ισορροπίας του ημικυκλικού κυλίνδρου για διάφορες περιπτώσεις του λόγου πυκνοτήτων στερεού – ρευστού  $r$ , προκύπτει ότι είναι πάντα ευσταθής. Ακολούθως, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ευστάθειας για τις περιπτώσεις του λόγου πυκνοτήτων  $r = 0.3$  και  $r = 0.5$ , όπως προέκυψαν στο πρόγραμμα Mathematica.

<code>dE2/dy2 = 1.62811</code>	<code>dE2/dy2 = 1.83252</code>
<code>dE2/da2 = 0.0000618416</code>	<code>dE2/da2 = 0.000102401</code>
<code>D = 0.000100673</code>	<code>D = 0.000187639</code>
<code>EQUILIBRIUM STABLE</code>	<code>EQUILIBRIUM STABLE</code>

Σχήμα 11: Παρουσίαση των αποτελεσμάτων ευστάθειας των θέσεων ισορροπίας του ημικυκλικού κυλίνδρου για  $r = 0.3$  και  $r = 0.5$  στο πρόγραμμα Mathematica

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η αριθμητική διερεύνηση της ευστάθειας του ημικυκλικού κυλίνδρου στο πρόγραμμα Mathematica χρησιμοποιώντας την ενεργειακή μέθοδο για γωνίες  $\alpha \neq 0^\circ$ . Η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα υπολογιστεί για διάφορες θέσεις του πρίσματος με εγκάρσια κλίση, και στη συνέχεια θα εξεταστεί ως προς τη μεταβλητή  $\alpha$ . Για την εύρεση των θέσεων ισορροπίας, το πρίσμα στρέφεται διατηρώντας τον όγκο του βυθισμένου τμήματος σταθερό.

Η αριθμητική αυτή ανάλυση ξεκινά με την εισαγωγή στο πρόγραμμα των σημείων που σχηματίζουν τη διατομή του ημικυκλικού κυλίνδρου και την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού. Να σημειωθεί εδώ ότι, αρχικά, η απόσταση  $y$  είναι ίση με 0, δηλαδή η ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού βρίσκεται στο ύψος του κέντρου βάρους του πρίσματος. Αφού έχει εισαχθεί η γεωμετρία του εξεταζόμενου πρίσματος στο πρόγραμμα, υπολογίζεται το συνολικό εμβαδό της διατομής ( $V$ ) όπως πραγματοποιήθηκε και στην περίπτωση διερεύνησης ευστάθειας της όρθιας θέσης. Σε αυτό το σημείο, πρέπει να επιλεγεί ο λόγος πυκνοτήτων στερεού – ρευστού  $r$  εντός του διαστήματος  $0 < r < 1$  και να καθοριστεί το διάστημα γωνιών  $\alpha$  στροφής του πρίσματος. Καθώς, το στερεό στρέφεται διατηρώντας σταθερό το βυθισμένο τμήμα της διατομής του ( $V_c$ ), μεταβάλλεται η απόσταση του κέντρου βάρους του από την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού, καθώς και η θέση του κέντρου άνωσης της βυθισμένης διατομής, δηλαδή μεταβάλλονται οι ποσότητες  $y$  και  $z_c$  αντίστοιχα. Ακολούθως, υπολογίζεται η δυναμική ενέργεια του συστήματος για κάθε γωνία στροφής  $\alpha$  από την σχέση (5.1) και προσδιορίζεται το πηλίκο πεπερασμένων διαφορών  $\frac{\Delta E}{\Delta \alpha}$ . Εφόσον η στροφή του πρίσματος πραγματοποιείται διατηρώντας σταθερό τον βυθισμένο όγκο του, ικανοποιείται αυτόματα η πρώτη συνθήκη ισορροπίας της ενεργειακής μεθόδου, η οποία σε αυτή την περίπτωση λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$V_c = rV \quad (5.55)$$

Όταν μηδενιστεί το πηλίκο  $\frac{\Delta E}{\Delta \alpha}$  υποδεικνύεται η θέση ισορροπίας του πρίσματος εντός του διαστήματος γωνίας  $\alpha$  που έχει οριστεί και για τον συγκεκριμένο λόγο πυκνοτήτων στερεού – ρευστού  $r$ .

Μετά από δοκιμές στο πρόγραμμα για διάφορες τιμές του λόγου πυκνοτήτων  $r$  και διαφορετικά διαστήματα γωνιών στροφής  $\alpha$ , δεν βρέθηκαν άλλες θέσεις ισορροπίας για τον ημικυκλικό κύλινδρο εκτός από την όρθια θέση ( $\alpha = 0^\circ$ ). Επομένως, επαληθεύονται τα αποτελέσματα της διερεύνησης ευστάθειας μέσω αναλυτικών υπολογισμών (που έγιναν στο υποκεφάλαιο 5.3), σύμφωνα με τα οποία ο ημικυκλικός κύλινδρος ισορροπεί στην όρθια θέση για κάθε τιμή του λόγου  $r$ .

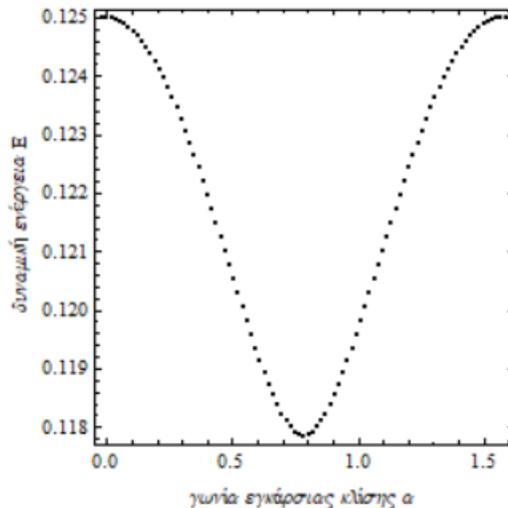
Η ευστάθεια του ημικυκλικού κυλίνδρου μελετήθηκε, επίσης, για γωνίες  $\alpha \neq 0^\circ$ , διατηρώντας σταθερή κατά την στροφή τη μεταβλητή  $y$  (και όχι τον βυθισμένο όγκο του πρίσματος  $V_c$ ), και παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α που βρίσκεται στο τέλος της διπλωματικής αυτής εργασίας.

## 5.5 Αριθμητική αντιμετώπιση της ευστάθειας του πρίσματος τετραγωνικής διατομής

Πέρα από την αριθμητική εφαρμογή της ενεργειακής μεθόδου στον ημικυκλικό κύλινδρο, θα διερευνηθεί αριθμητικά και η ευστάθεια του πρίσματος της τετραγωνικής διατομής. Αυτό θα γίνει εισάγοντας τη γεωμετρία της διατομής του συγκεκριμένου πρίσματος στον ίδιο κώδικα που αναπτύχθηκε στο πρόγραμμα Mathematica και μελετήθηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο. Στόχος είναι να αναπαραχθεί το διάγραμμα ισοροπίας  $\alpha - r$  (Σχήμα 5) για το πρίσμα της τετραγωνικής διατομής, το οποίο προηγουμένως είχε σχηματιστεί χρησιμοποιώντας αναλυτικούς υπολογισμούς.

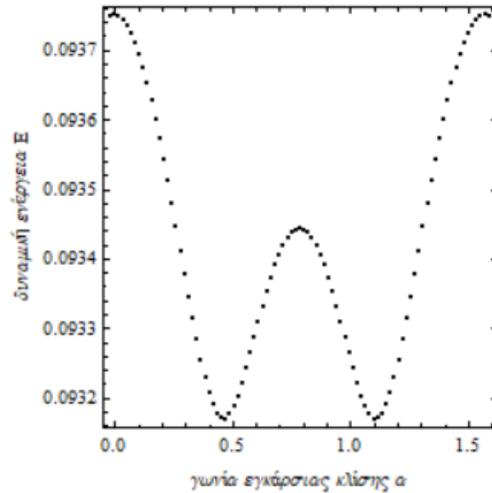
Εισάγοντας στον κώδικα το λόγο πυκνοτήτων στερεού – ρευστού εντός του διαστήματος  $0 < r < 1$  και το διάστημα στροφής του στερεού  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , προσδιορίζονται μέσω της ενεργειακής μεθόδου οι θέσεις ισοροπίας του πρίσματος.

Για παράδειγμα, αν  $r = 0.5$ , οι θέσεις ισοροπίας που υπολογίζονται μέσω του κώδικα είναι οι ακόλουθες:  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$  και  $\alpha = 90^\circ$ . Μετά από τον έλεγχο ευστάθειας, παρατηρείται ότι μόνο η γωνία  $\alpha = 45^\circ$  αποτελεί ευσταθή θέση ισοροπίας, ενώ οι άλλες δύο γωνίες χαρακτηρίζονται ασταθείς. Τα αποτελέσματα αυτά γίνονται κατανοητά και από την καμπύλη της δυναμικής ενέργειας  $E$  συναρτήσεως της γωνίας στροφής  $\alpha$  για την περίπτωση  $r = 0.5$ , η οποία έχει την εξής μορφή:



Σχήμα 12: Διάγραμμα δυναμικής ενέργειας  $E$  συναρτήσεως της γωνίας εγκάρσιας κλίσης  $\alpha$  για το πρίσμα τετραγωνικής διατομής για  $r = 0.5$

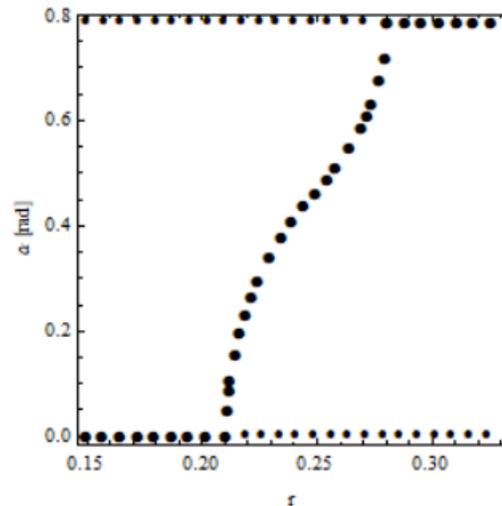
Για  $r = 0.25$ , το πρίσμα βρίσκεται στην περιοχή ασύμμετρων θέσεων ισορροπίας και το διάγραμμα της δυναμικής ενέργειας  $E$  συναρτήσει της γωνίας στροφής  $\alpha$  λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:



Σχήμα 13: Διάγραμμα δυναμικής ενέργειας  $E$  συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης  $\alpha$  του πρίσματος τετραγωνικής διατομής για  $r = 0.25$

Σε αυτή την περίπτωση το πρίσμα ισορροπεί ευσταθώς στις  $\alpha = 26.56^\circ$  και  $\alpha = 63.44^\circ$ , ενώ ασταθείς θέσεις ισορροπίας αποτελούν οι γωνίες  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$  και  $\alpha = 90^\circ$ .

Μετά από την αριθμητική εφαρμογή της ενεργειακής μεθόδου για διάφορες τιμές του  $r$  εντός του διαστήματος  $0.15 < r < 0.33$ , αναπαράχθηκε τμήμα του διαγράμματος ισορροπίας  $\alpha - r$  για το πρίσμα τετραγωνικής διατομής:



Σχήμα 14: Διάγραμμα ισορροπίας  $\alpha - r$  για  $0.15 < r < 0.33$

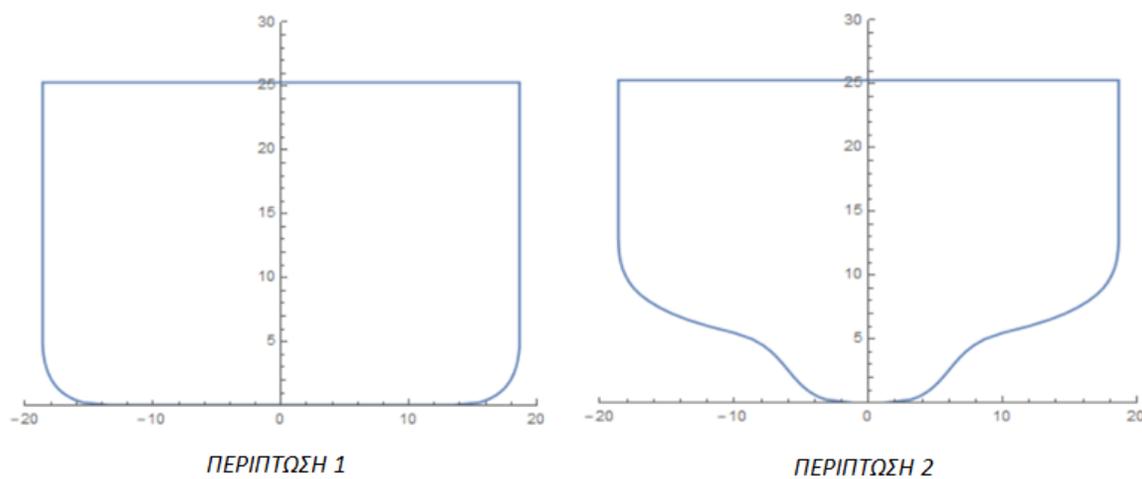
Στο Σχήμα 14, με μεγαλύτερο μέγεθος κουκκίδας αποτυπώνονται τα ευσταθή σημεία ισορροπίας, ενώ με μικρότερο μέγεθος τα ασταθή.

## 5.6 Φορτηγίδα

### 5.6.1 Ενεργειακή διερεύνηση της ευστάθειας της φορτηγίδας

Έχοντας ολοκληρώσει την αριθμητική διερεύνηση της ευστάθειας του ημικυκλικού κυλίνδρου, επόμενο στάδιο για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας αποτελεί η εφαρμογή της ενεργειακής μεθόδου σε φορτηγίδα διατομής ενός σύγχρονου πλοίου εμπορευματοκιβωτίων (container ship). Τα στοιχεία του container ship που θα χρειαστούν για την ενεργειακή εξέταση της ευστάθειας της φορτηγίδας λήφθηκαν από τη διπλωματική εργασία με τίτλο «Πιθανοτική Αξιολόγηση του Κριτηρίου Δυναμικής Ευστάθειας Δεύτερης Γενιάς (Level 2 Deadship Condition failure mode)»<sup>[8]</sup> του Κυριακόπουλου Π. Εφόσον η ενεργειακή ανάλυση θα πραγματοποιηθεί στα πλαίσια της διδιάστατης θεωρίας, όπως και στις περιπτώσεις εξέτασης των πρισμάτων τετραγωνικής και ημικυκλικής διατομής, δεν χρειάζεται να είναι γνωστή η ακριβής μορφή του πλοίου εμπορευματοκιβωτίων, αλλά είναι απαραίτητη μόνο η γεωμετρία των εγκάρσιων τομών του.

Συγκεκριμένα, θα επιλεγθούν δύο εγκάρσιες τομές από τα σχέδια ναυπηγικών γραμμών του εν λόγω container ship, των οποίων η γεωμετρία θα εισαχθεί ως ένα σύνολο από ζεύγη σημείων της μορφής  $(y, z)$  στον κώδικα που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας. Οι εγκάρσιες τομές που επιλέχθηκαν είναι η μέση τομή (διαμήκης θέση  $x = 119.175$  m) και άλλη μία τομή που βρίσκεται πρύμνηθεν της μέσης τομής του container ship (διαμήκης θέση  $x = 41.711$  m). Επομένως, η ευστάθεια της φορτηγίδας θα εξετασθεί ενεργειακά για δύο περιπτώσεις και σε κάθε περίπτωση η διατομή της θα έχει, αντίστοιχα, την ακόλουθη μορφή:



Σχήμα 15: Παρουσίαση της διατομής της φορτηγίδας για τις δύο εξεταζόμενες περιπτώσεις στο πρόγραμμα Mathematica

Το συνολικό εμβαδόν της διατομής της φορτηγίδας για την περίπτωση 1 υπολογίστηκε ίσο με  $V = 934.71 \text{ m}^2$ , ενώ για την περίπτωση 2 υπολογίστηκε ίσο με  $V = 775.93 \text{ m}^2$ .

Απαραίτητο στοιχείο για την εφαρμογή της ενεργειακής μεθόδου, αποτελεί η θέση του κέντρου βάρους της φορτηγίδας. Εφόσον δεν είναι γνωστά τα λεπτομερή χαρακτηριστικά της κατάστασης φόρτωσης της φορτηγίδας και επομένως δεν μπορεί να προσδιοριστεί το κατακόρυφο ύψος του κέντρου βάρους της, θα ληφθούν από τη διπλωματική εργασία του Κυριακόπουλου Π.<sup>[8]</sup> (σελίδα 30) χαρακτηριστικές θέσεις κέντρου βάρους του container ship για τρεις διαφορετικές καταστάσεις φόρτωσης. Τα κατακόρυφα ύψη κέντρου βάρους ( $\overline{KG}$ ) για τις καταστάσεις φόρτωσης παρουσιάζονται ακολούθως:

1<sup>η</sup> Κατάσταση Φόρτωσης:  $KG = 15.50 \text{ m}$

2<sup>η</sup> Κατάσταση Φόρτωσης:  $KG = 16.21 \text{ m}$

3<sup>η</sup> Κατάσταση Φόρτωσης:  $KG = 16.88 \text{ m}$

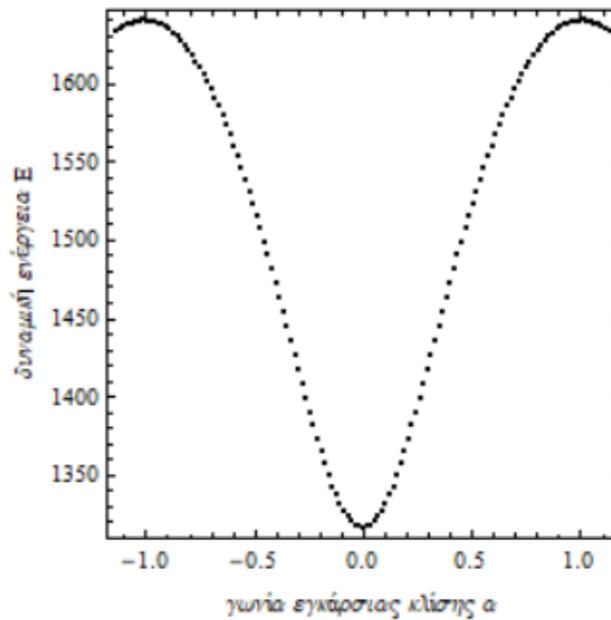
Η ενεργειακή μελέτη της ευστάθειας της φορτηγίδας θα πραγματοποιηθεί και για τις τρεις διαφορετικές καταστάσεις φόρτωσης. Με αυτό τον τρόπο, θα διερευνηθεί κατά πόσο επηρεάζονται τα αποτελέσματα της ενεργειακής μεθόδου από την κατακόρυφη θέση του κέντρου βάρους.

Έχοντας εισάγει στον κώδικα την θέση του κέντρου βάρους της διατομής, μένει να οριστεί η τιμή του λόγου  $r$  και το διάστημα γωνιών  $\alpha$  εγκάρσιας στροφής της φορτηγίδας. Η εφαρμογή της ενεργειακής μεθόδου για την κάθε κατάσταση φόρτωσης της φορτηγίδας θα πραγματοποιηθεί για επτά περιπτώσεις της τιμής του  $r$ , εντός του διαστήματος  $0.1 \leq r \leq 0.7$ . Η φορτηγίδα κατά τις παραπάνω εφαρμογές θα πραγματοποιεί εγκάρσια στροφή για γωνίες  $\alpha$  από  $-85^\circ$  μέχρι  $85^\circ$ , με βήμα  $\delta\alpha = 1^\circ$ . Στις περιοχές των θέσεων ισορροπίας, θα επαναλαμβάνεται η διαδικασία με βήμα εγκάρσιας στροφής  $\delta\alpha = 0.1^\circ$ , έτσι ώστε να λαμβάνονται πιο ακριβή αποτελέσματα.

Επομένως, για κάθε τιμή  $r$  αναμένεται να προσδιοριστούν οι γωνίες  $\alpha$  εντός του διαστήματος  $-85^\circ \leq \alpha \leq 85^\circ$ , που ικανοποιούν τις συνθήκες ισορροπίας της ενεργειακής μεθόδου και αποτελούν, έτσι, θέσεις ισορροπίας της φορτηγίδας. Μετά από τον έλεγχο ευστάθειας σύμφωνα με την ενεργειακή μέθοδο, οι θέσεις ισορροπίας που έχουν υπολογιστεί χαρακτηρίζονται ευσταθείς ή ασταθείς.

Αρχικά, θα παρουσιαστεί αναλυτικά η εφαρμογή της ενεργειακής μεθόδου στη φορτηγίδα 1, παραθέτοντας τα διαγράμματα της δυναμικής ενέργειας συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης για κάθε τιμή του λόγου  $r$ . Στα διαγράμματα αυτά διακρίνονται οι θέσεις ισορροπίας της φορτηγίδας ως σημεία τοπικών μεγίστων και ελαχίστων της καμπύλης. Επιπλέον, διακρίνεται αν τα σημεία αυτά αντιστοιχούν σε ευσταθή ή ασταθή θέση ισορροπίας, ανάλογα με το αν αποτελούν τοπικά ελάχιστα ή μέγιστα της καμπύλης.

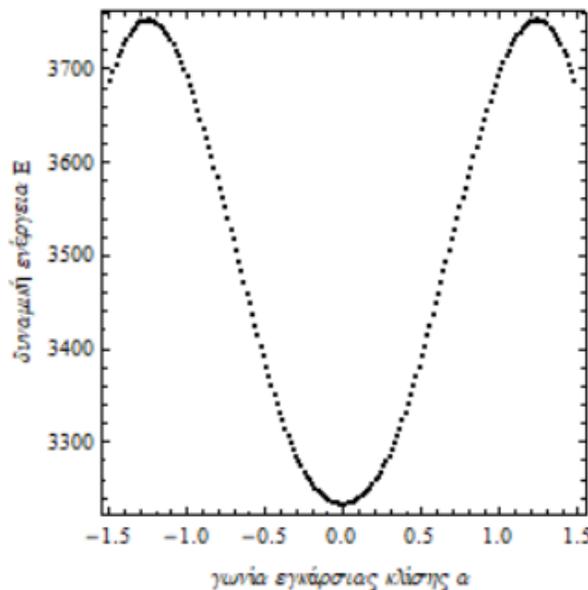
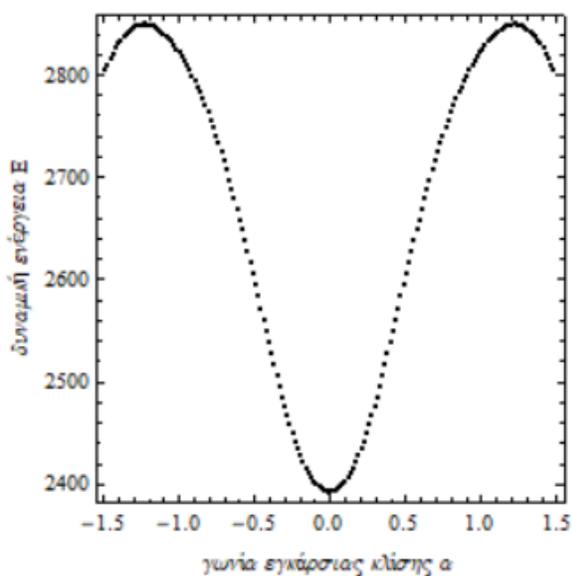
Στο Σχήμα 16 παρουσιάζεται το διάγραμμα ενέργειας - γωνίας ( $E - \alpha$ ) για την 1<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης ( $KG = 15.50 \text{ m}$ ) της φορτηγίδας 1 και για  $r = 0.1$ :



Σχήμα 16: Διάγραμμα δυναμικής ενέργειας  $E$  συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης  $\alpha$  για  $r = 0.1$

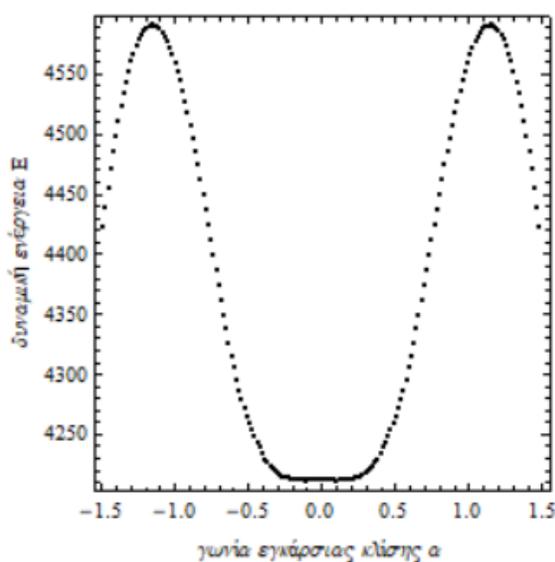
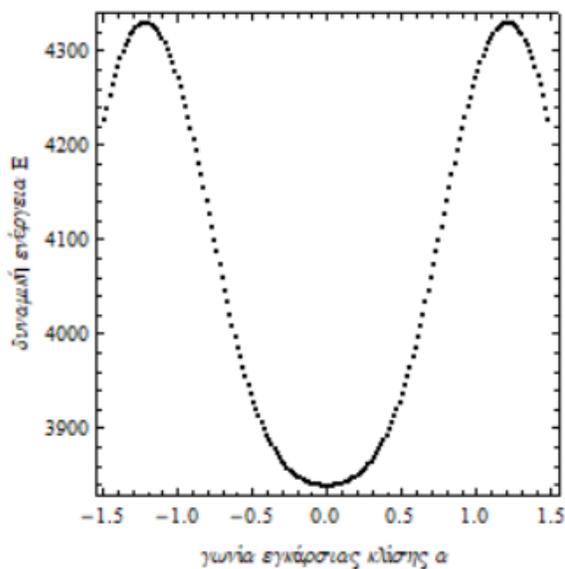
Θέσεις ισορροπίας για την περίπτωση  $r = 0.1$  της φορτηγίδας αποτελούν οι γωνίες  $\alpha = 0^\circ$  και  $\alpha = \pm 57.5^\circ$ . Η πρώτη είναι ευσταθής θέση ισορροπίας εφόσον αποτελεί ελάχιστο της καμπύλης, ενώ οι γωνίες  $\alpha = \pm 57.5^\circ$  χαρακτηρίζονται ασταθείς.

Ακολουθούν τα διαγράμματα  $E - \alpha$  για τις περιπτώσεις  $r = 0.2$ ,  $r = 0.3$ ,  $r = 0.4$ ,  $r = 0.5$ ,  $r = 0.6$  και  $r = 0.7$  της φορτηγίδας 1 στην 1<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης:



Σχήμα 17α-β: Διάγραμμα δυναμικής ενέργειας  $E$  συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης  $\alpha$  για  $r = 0.2$  και  $r = 0.3$

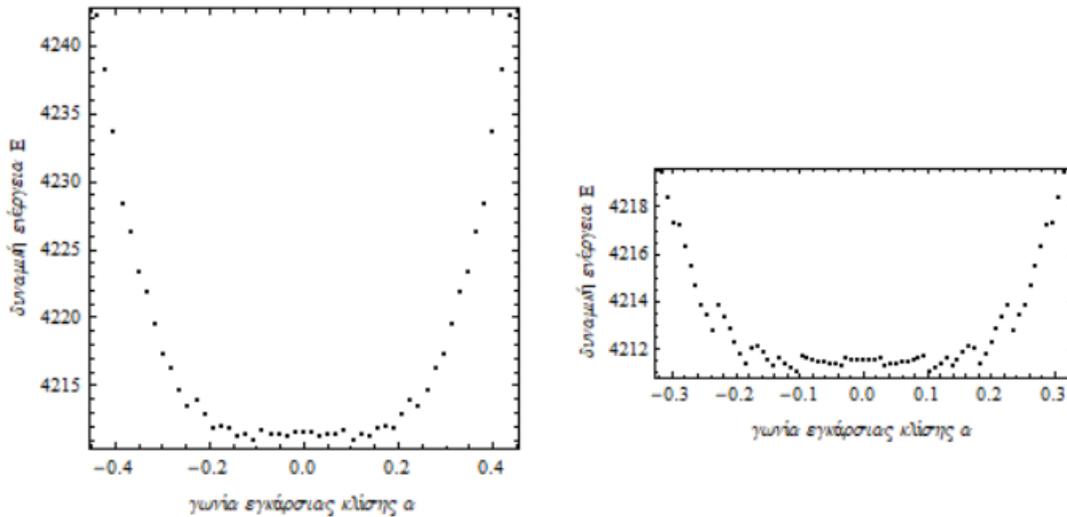
Για  $r = 0.2$ , η φορτηγίδα ισορροπεί ευσταθώς στην όρθια θέση  $\alpha = 0^\circ$  και ασταθώς στις γωνίες  $\alpha = \pm 70.1^\circ$ , ενώ για  $r = 0.3$  ισορροπεί ευσταθώς στην όρθια θέση  $\alpha = 0^\circ$  και ασταθώς στις γωνίες  $\alpha = \pm 71.3^\circ$ .



Σχήμα 18α-β: Διαγράμματα δυναμικής ενέργειας  $E$  συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης  $\alpha$  για  $r = 0.4$  και  $r = 0.5$

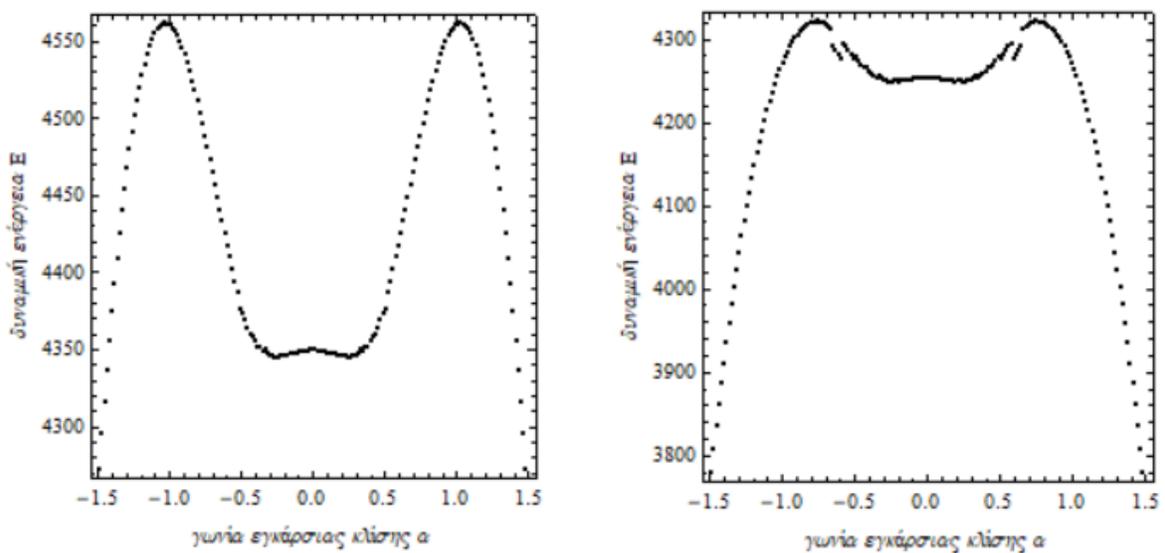
Για  $r = 0.4$ , υπολογίζονται θέσεις ισορροπίας στις γωνίες  $\alpha = 0^\circ$  (ευσταθής) και  $\alpha = \pm 69.5^\circ$  (ασταθής).

Για την περίπτωση  $r = 0.5$  θα πρέπει να μεγεθυνθεί το διάγραμμα  $E - \alpha$ , για να αναλυθεί η μορφή της καμπύλης στην περιοχή της όρθιας θέσης. Επομένως, αν μεγεθυνθεί το Σχήμα 18β στην περιοχή της γωνίας  $\alpha = 0^\circ$ , λαμβάνονται τα εξής διαγράμματα:



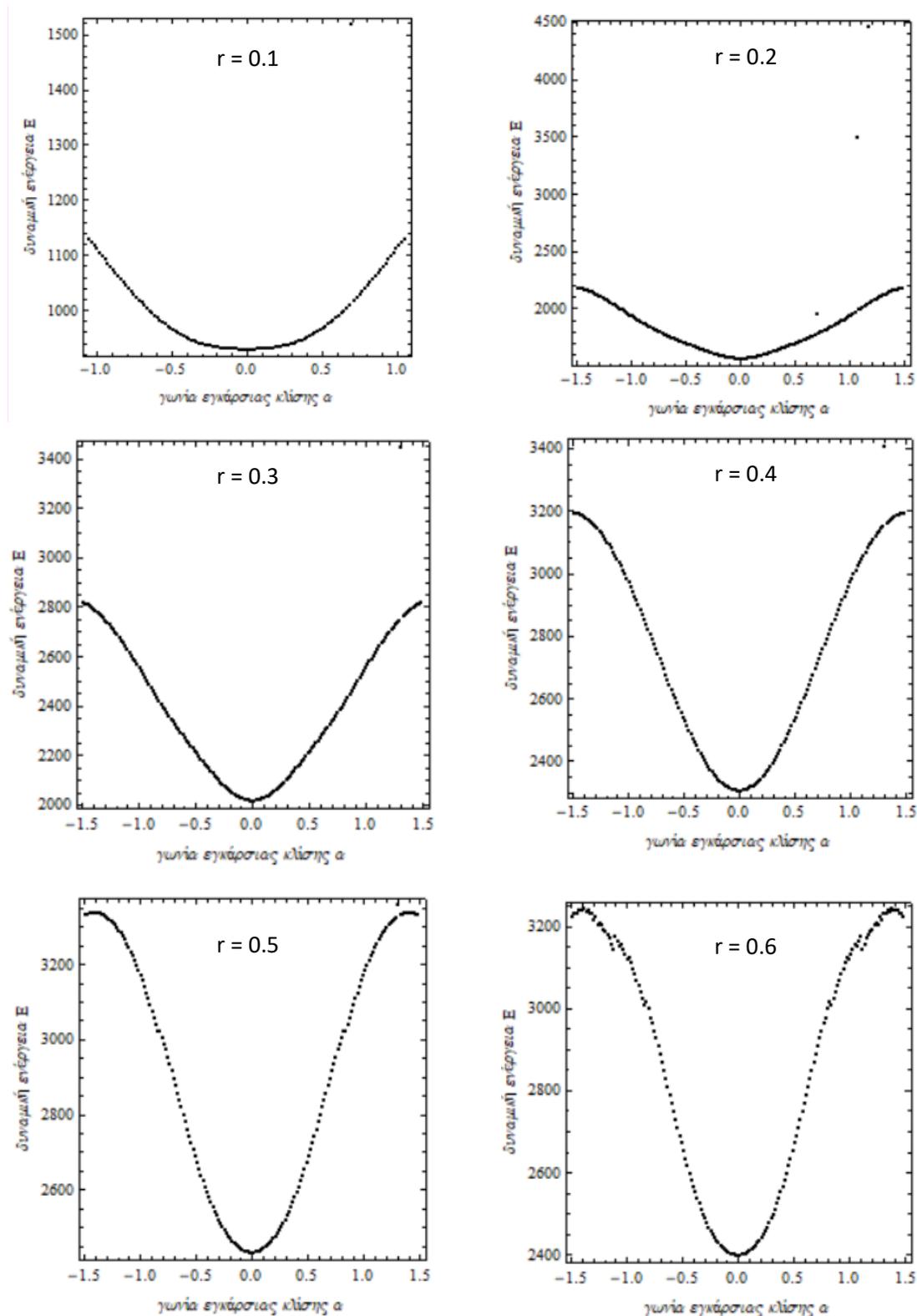
Σχήμα 19: Μεγέθυνση του διαγράμματος  $E - \alpha$  για  $r = 0.5$  στην περιοχή της γωνίας  $\alpha = 0^\circ$

Παρόλο που η καμπύλη σε αυτή την περιοχή του διαγράμματος δεν είναι συνεχής και δεν έχει ευδιάκριτη μορφή, αν ληφθεί υπόψη η μορφή της καμπύλης στο Σχήμα 20α που αφορά την επόμενη εξεταζόμενη περίπτωση ( $r = 0.6$ ), συμπεραίνεται ότι για  $r = 0.5$  οι θέσεις ισορροπίας βρίσκονται στις γωνίες  $\alpha = 0^\circ$  (ασταθής),  $\alpha = \pm 5.9^\circ$  (ευσταθείς) και  $\alpha = \pm 65.7^\circ$  (ασταθείς).

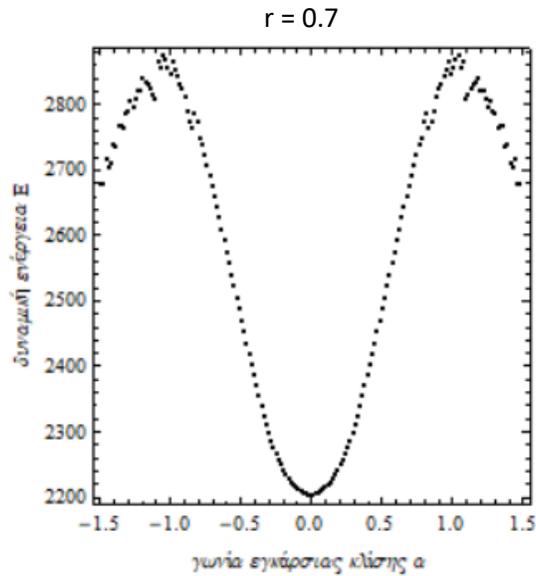


Σχήμα 20α-β: Διαγράμματα δυναμικής ενέργειας  $E$  συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης  $\alpha$  για  $r = 0.6$  και  $r = 0.7$

Τα αντίστοιχα διαγράμματα για την 1<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης ( $KG = 15.50m$ ) της φορτηγίδας 2 παρουσιάζονται ακολούθως:



Σχήμα 21: Διαγράμματα δυναμικής ενέργειας  $E$  συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης  $\alpha$  για τη φορτηγίδα 2



Σχήμα 22: Διάγραμμα δυναμικής ενέργειας  $E$  συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης  $\alpha$  για την περίπτωση  $r = 0.7$  της φορτηγίδας 2

Συνοπτικά τα πιο πάνω αποτελέσματα της ενεργειακής μεθόδου στο διάστημα γωνίας  $-85^\circ \leq \alpha \leq 85^\circ$  για την 1<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης των δύο φορτηγίδων παρατίθενται στους ακόλουθους πίνακες:

**ΦΟΡΤΗΓΙΔΑ 1 - 1η Κατάσταση Φόρτωσης (KG=15.50m)**

$r = 0.1$	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 57.5^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ )
$r = 0.2$	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 70.1^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ )
$r = 0.3$	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 71.3^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ )
$r = 0.4$	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 69.5^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ )
$r = 0.5$	$\alpha = 0^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 5.9^\circ$ (ευσταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 65.7^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ )
$r = 0.6$	$\alpha = 0^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 14.2^\circ$ (ευσταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 58.8^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ )
$r = 0.7$	$\alpha = 0^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 14.2^\circ$ (ευσταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 42.5^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ )

Πίνακας 2: Αποτελέσματα θέσεων ισορροπίας για τη φορτηγίδα της περίπτωσης 1 (KG = 15.50 m)

ΦΟΡΤΗΓΙΔΑ 2 - 1η Κατάσταση Φόρτωσης (KG=15.50m)

r = 0.1	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.2	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.3	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.4	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.5	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 80.5^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.6	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 78.6^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.7	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 60^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)

Πίνακας 3: Αποτελέσματα θέσεων ισορροπίας για τη φορτηγίδα της περίπτωσης 2 (KG =15.50 m)

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι θέσεις ισορροπίας που προσδιορίστηκαν στο διάστημα  $-85^\circ \leq \alpha \leq 85^\circ$  για τη 2<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης (KG = 16.21m) των δύο φορτηγίδων:

ΦΟΡΤΗΓΙΔΑ 1 - 2η Κατάσταση Φόρτωσης (KG=16.21m)

r = 0.1	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 54.2^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.2	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 64^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.3	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 66.3^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.4	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 64.2^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.5	$\alpha=0^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 16.9^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 59.5^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.6	$\alpha=0^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 24.7^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 50.2^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.7	$\alpha=0^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)

Πίνακας 4: Αποτελέσματα θέσεων ισορροπίας για τη φορτηγίδα της περίπτωσης 1 (KG =16.21 m)

ΦΟΡΤΗΓΙΔΑ 2 - 2η Κατάσταση Φόρτωσης (KG=16.21m)

r = 0.1	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.2	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.3	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.4	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 79.9^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.5	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 72.9^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.6	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 63.2^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.7	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 56^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)

Πίνακας 5: Αποτελέσματα θέσεων ισορροπίας για τη φορτηγίδα της περίπτωσης 2 (KG =16.21 m)

Τέλος, παρουσιάζονται οι θέσεις ισορροπίας που προσδιορίστηκαν στο διάστημα  $-85^\circ \leq \alpha \leq 85^\circ$  για την 3<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης (KG = 16.88m) των δύο φορτηγίδων:

ΦΟΡΤΗΓΙΔΑ 1 - 3η Κατάσταση Φόρτωσης (KG=16.88m)

r = 0.1	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 51.4^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.2	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 57.2^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.3	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 61.4^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.4	$\alpha=0^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 10.5^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 59.1$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.5	$\alpha=0^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 25.2^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 53.5^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.6	$\alpha=0^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 28.9^\circ$ (ευσταθής $\Theta$ .I.) $\alpha=\pm 32.7^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)
r = 0.7	$\alpha=0^\circ$ (ασταθής $\Theta$ .I.)

Πίνακας 6: Αποτελέσματα θέσεων ισορροπίας για τη φορτηγίδα της περίπτωσης 1 (KG =16.88 m)

ΦΟΡΤΗΓΙΔΑ 2 - 3η Κατάσταση Φόρτωσης (KG=16.88m)

r = 0.1	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.)
r = 0.2	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.)
r = 0.3	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 81.7^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)
r = 0.4	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 73.4^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)
r = 0.5	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 66^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)
r = 0.6	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=56.2^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)
r = 0.7	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 47.2^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)

Πίνακας 7: Αποτελέσματα θέσεων ισορροπίας για τη φορτηγίδα της περίπτωσης 2 (KG =16.88 m)

Με στόχο να συγκριθούν τα παραπάνω αποτελέσματα της ενεργειακής μεθόδου, παρατίθενται συνολικά στους πίνακες που ακολουθούν.

	<b>ΦΟΡΤΗΓΙΔΑ 1</b> <b>KG = 15.50m</b>	<b>ΦΟΡΤΗΓΙΔΑ 1</b> <b>KG = 16.21m</b>	<b>ΦΟΡΤΗΓΙΔΑ 1</b> <b>KG = 16.88m</b>
r = 0.1	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 57.5^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 54.2^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 51.4^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)
r = 0.2	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 70.1^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 64^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 57.2^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)
r = 0.3	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 71.3^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 66.3^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 61.4^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)
r = 0.4	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 69.5^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha=0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 64.2^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha=0^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 10.5^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 59.1^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)
r = 0.5	$\alpha=0^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 5.9^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 65.7^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha=0^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 16.9^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 59.5^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha=0^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 25.2^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 53.5^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)
r = 0.6	$\alpha=0^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 14.2$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 58.8^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha=0^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 24.7^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 50.2^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha=0^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 28.9^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha=\pm 32.7^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)

$r = 0.7$	$\alpha = 0^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.) $\alpha = \pm 14.2^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha = \pm 42.5^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)
-----------	--	---	---

Πίνακας 8: Συνοπτικός Πίνακας Αποτελεσμάτων 1<sup>ης</sup> Φορτηγίδας

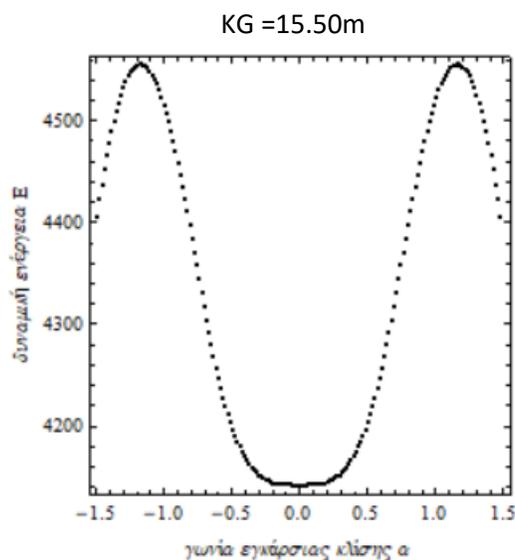
	<b>ΦΟΡΤΗΓΙΔΑ 2</b> <b>KG = 15.50m</b>	<b>ΦΟΡΤΗΓΙΔΑ 2</b> <b>KG = 16.21m</b>	<b>ΦΟΡΤΗΓΙΔΑ 2</b> <b>KG = 16.88m</b>
$r = 0.1$	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.)
$r = 0.2$	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.)
$r = 0.3$	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha = \pm 81.7^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)
$r = 0.4$	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha = \pm 79.9^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha = \pm 73.4^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)
$r = 0.5$	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha = \pm 80.5^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha = \pm 72.9^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha = \pm 66^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)
$r = 0.6$	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha = \pm 78.6^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha = \pm 63.2^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha = \pm 56.2^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)
$r = 0.7$	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha = \pm 60^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha = \pm 56^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\theta$ .I.) $\alpha = \pm 47.2^\circ$ (ασταθής $\theta$ .I.)

Πίνακας 9: Συνοπτικός Πίνακας Αποτελεσμάτων 2<sup>ης</sup> Φορτηγίδας

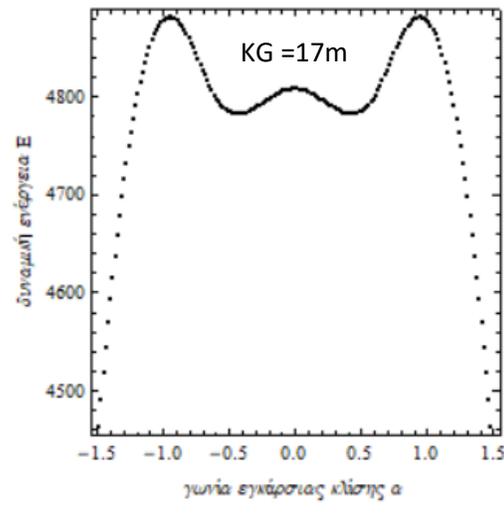
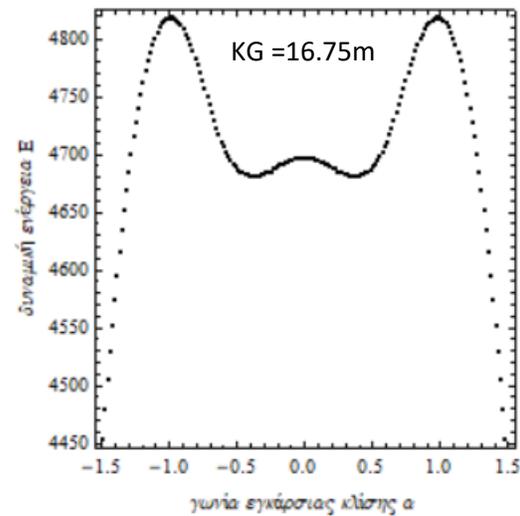
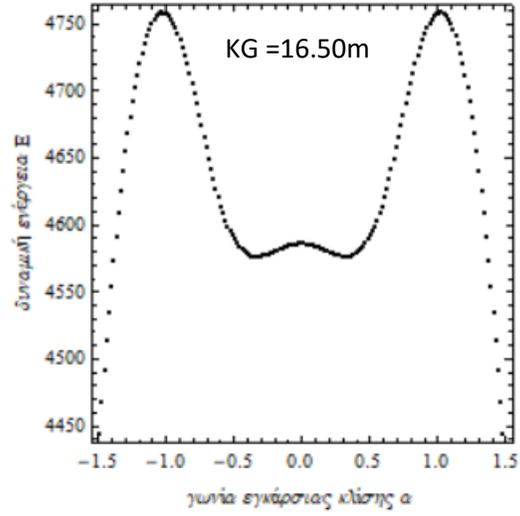
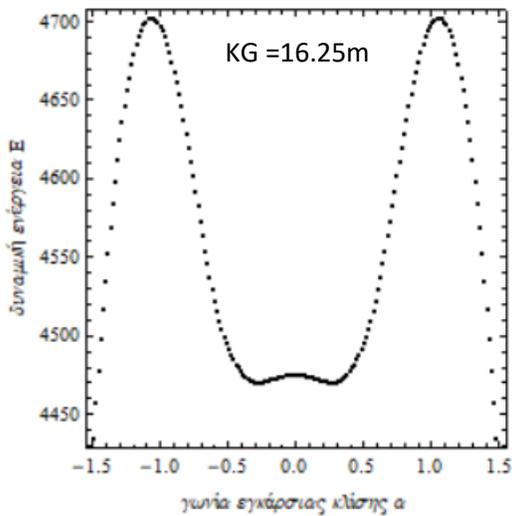
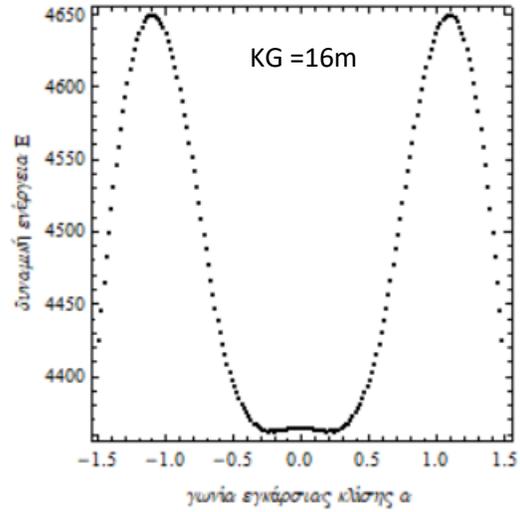
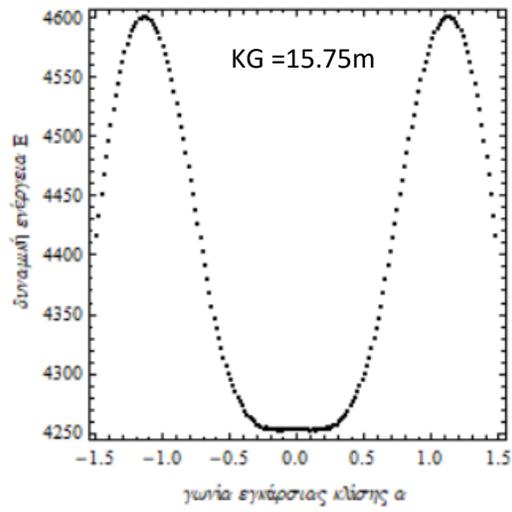
Αρχικά, είναι φανερό το γεγονός ότι η συμμετρία των θέσεων ισορροπίας ως προς τη γωνία  $\alpha = 0^\circ$  οφείλεται στη συμμετρία της φορτηγίδας ως προς τον διαμήκη άξονά της. Για την περίπτωση της 2<sup>ης</sup> φορτηγίδας, η όρθια θέση ισορροπίας είναι πάντα ευσταθής. Αυτό δεν ισχύει για τη φορτηγίδα 1, εφόσον για  $r \geq 0.5$  η όρθια θέση γίνεται ασταθής και η φορτηγίδα ισορροπεί ευσταθώς σε άλλες γωνίες. Για την 3<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης της φορτηγίδας 1, όπου το ύψος του κέντρου βάρους της λαμβάνει τη μεγαλύτερη τιμή (KG=16.88m), η όρθια θέση γίνεται ασταθής από  $r \geq 0.4$ . Για την περίπτωση της φορτηγίδας 2, καθώς αυξάνεται η απόσταση KG παρουσιάζεται ασταθής θέση ισορροπίας σε όλο και μικρότερους λόγους  $r$ . Επιπλέον, καθώς αυξάνεται ο λόγος  $r$ , η φορτηγίδα 2 ισορροπεί ασταθώς σε όλο και μικρότερες γωνίες. Τέλος, παρατηρείται ότι με αύξηση του κατακόρυφου ύψους του κέντρου βάρους μειώνεται η μεγαλύτερη, σε μέτρο, γωνία ισορροπίας  $\alpha$  για κάθε περίπτωση  $r$ .

Προκειμένου να εξετασθεί ένα πιο ρεαλιστικό σενάριο, η ενεργειακή μέθοδος θα εφαρμοστεί στη φορτηγίδα 1 για συγκεκριμένο λόγο  $r$  που αντιστοιχεί στο βύθισμά της για την 1<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης ( $KG = 15.50m$ ). Σύμφωνα με τα στοιχεία του πλοίου εμπορευματοκιβωτίων που δίνονται στη διπλωματική εργασία του Κυριακόπουλου Π.<sup>[8]</sup> (σελίδα 30), η κατάσταση φόρτωσης με κατακόρυφο ύψος κέντρου βάρους ίσο με  $KG = 15.50m$  αντιστοιχεί σε βύθισμα  $d = 12.19m$ . Για το βύθισμα αυτό, το εμβαδόν βυθισμένης διατομής της φορτηγίδας 1 υπολογίζεται ίσο με  $V_c = 444.264 m^2$ . Επομένως, ο λόγος  $r$  προκύπτει ίσος με  $r = 0.475296$  από τη σχέση  $r = V_c/V$ , όπου το συνολικό εμβαδόν της διατομής της φορτηγίδας 1 είναι ίσο με  $V = 934.71 m^2$ . Αφού υπολογιστούν οι θέσεις ισορροπίας της φορτηγίδας 1 για τη συγκεκριμένη κατάσταση φόρτωσης, η ενεργειακή μέθοδος θα εφαρμοστεί ξανά για διαφορετικές τιμές του κατακόρυφου ύψους κέντρου βάρους, διατηρώντας το βύθισμα σταθερό. Με αυτό τον τρόπο, θα διερευνηθεί πώς επηρεάζονται οι θέσεις ισορροπίας της φορτηγίδας για σταθερό εκτόπισμα, αλλά μεταβάλλοντας την κατανομή του φορτίου και κατ' επέκταση τη θέση του κέντρου βάρους.

Ειδικότερα, η ενεργειακή ανάλυση ευστάθειας της φορτηγίδας 1 θα πραγματοποιηθεί για την απόσταση  $KG$  να λαμβάνει τιμές από  $15.50m$  μέχρι  $17m$ , για σταθερό βύθισμα  $d = 12.19m$ , δηλαδή για  $r = 0.475296$ . Θα παρατεθούν τα διαγράμματα δυναμικής ενέργειας συναρτήσει της γωνίας εγκάρσιας κλίσης, για κάθε εξεταζόμενη περίπτωση, και τα αποτελέσματα θέσεων ισορροπίας σε πίνακα στο τέλος της ανάλυσης.



Σχήμα 23: Διάγραμμα  $E - \alpha$  της φορτηγίδας 1 για βύθισμα  $d=12.19m$  και  $KG=15.50m$



Σχήμα 24: Διαγράμματα  $E - \alpha$  της φορτηγίδας 1 για βύθισμα  $d=12.19m$  και  $15.75m \leq KG \leq 17m$

ΦΟΡΤΗΓΙΔΑ 1 - ΒΥΘΙΣΜΑ  $d = 12.19m$

KG = 15.50m	$\alpha = 0^\circ$ (ευσταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 66.8^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ )
KG = 15.75m	$\alpha = 0^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 5.9^\circ$ (ευσταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 64.8^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ )
KG = 16.00m	$\alpha = 0^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 10.5^\circ$ (ευσταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 62.7^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ )
KG = 16.25m	$\alpha = 0^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 14.2^\circ$ (ευσταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 60.6^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ )
KG = 16.50m	$\alpha = 0^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 19.3^\circ$ (ευσταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 58.5^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ )
KG = 16.75m	$\alpha = 0^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 20.9^\circ$ (ευσταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 56.4^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ )
KG = 17.00m	$\alpha = 0^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 25^\circ$ (ευσταθής $\Theta.I.$ ) $\alpha = \pm 54.2^\circ$ (ασταθής $\Theta.I.$ )

Πίνακας 10: Συνοπτικός Πίνακας Αποτελεσμάτων 1<sup>ης</sup> Φορτηγίδας για βύθισμα  $d=12.19m$

Η όρθια θέση ισορροπίας είναι αρχικά ευσταθής, αλλά με αύξηση του KG γίνεται ασταθής. Αυτό φαίνεται και από τα διαγράμματα E – α των Σχημάτων 23 – 24, όπου η όρθια θέση μετατρέπεται από ελάχιστο σε μέγιστο της καμπύλης, καθώς αυξάνεται η θέση του κέντρου βάρους. Ταυτόχρονα, προκύπτουν ευσταθείς θέσεις ισορροπίας σε όλο και μεγαλύτερες γωνίες με αύξηση του KG. Επιπλέον, εμφανίζονται σε κάθε περίπτωση ασταθείς θέσεις ισορροπίας που αντιστοιχούν σε μέγιστα της καμπύλης E – α και των οποίων το μέτρο μειώνεται με αύξηση του KG. Τέλος, παρατηρείται ότι αυξάνοντας το KG αυξάνονται και τα επίπεδα δυναμικής ενέργειας στις περιοχές των θέσεων ισορροπίας.

### 5.6.2 Υπολογισμός του μετακεντρικού ύψους GM

Με στόχο να πραγματοποιηθεί μία σύγκριση της ενεργειακής μεθόδου με την καθιερωμένη μέθοδο εξέτασης της ευστάθειας πλοίων, θα υπολογιστεί το μετακεντρικό ύψος της φορτηγίδας για δύο από τις περιπτώσεις που εξετάσθηκαν στο τελευταίο υποκεφάλαιο. Συγκεκριμένα, οι υπολογισμοί του μετακεντρικού ύψους θα γίνουν για  $r = 0.4$ , για την 1<sup>η</sup> και 3<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης της φορτηγίδας 1.

Είναι γνωστό ότι το μετακεντρικό ύψος πλοίου ( $\overline{GM}$ ) μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως<sup>[4]</sup>:

$$\overline{GM} = \overline{KB} + \overline{BM} - \overline{KG} \quad (5.56)$$

όπου

$\overline{KB}$  είναι η απόσταση του κέντρου άντωσης από τη βασική γραμμή του πλοίου  
 $\overline{KG}$  η απόσταση του κέντρου βάρους από τη βασική γραμμή του πλοίου  
 $\overline{BM}$  ή αλλιώς μετακεντρική ακτίνα, είναι η απόσταση του κέντρου άντωσης από το μετάκεντρο και ισούται με το λόγο της δεύτερης ροπής της ισάλου επιφανείας περί τον διαμήκη άξονα συμμετρίας προς το βυθισμένο όγκο του πλοίου, δηλαδή  
 $\overline{BM} = \frac{I_T}{\nabla}$

Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζεται η διατομή της φορτηγίδας 1 σε όρθια θέση ισορροπίας για  $r = 0.4$  και για την 1<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης. Στο σχήμα φαίνονται, επίσης, τα σημεία κέντρου βάρους και άντωσης της φορτηγίδας.



Σχήμα 25: Παρουσίαση της διατομής της φορτηγίδας 1 σε όρθια θέση για την 1<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης και  $r = 0.4$

Οι αποστάσεις  $\overline{KG}$  και  $\overline{KB}$  ισούνται αντίστοιχα με  $\overline{KG} = 15.5 \text{ m}$  και  $\overline{KB} = 5.23 \text{ m}$ , ενώ το βύθισμα της φορτηγίδας και το εμβαδό του βυθισμένου τμήματος της διατομής της ισούνται με  $T = 10.26 \text{ m}$  και  $V_c = 373.885 \text{ m}^2$ .

Για τον προσδιορισμό του μετακεντρικού ύψους χρειάζεται να υπολογιστεί η μετακεντρική ακτίνα ( $\overline{BM}$ ), η οποία δίνεται από την εξής σχέση<sup>[4]</sup>:

$$\overline{BM} = \frac{I_T}{\nabla} \quad (5.57)$$

Ο βυθισμένος όγκος της φορτηγίδας ( $\nabla$ ) ισούται με το γινόμενο του εμβαδού του βυθισμένου τμήματος της διατομής της ( $V_c$ ) επί το μήκος της, το οποίο θα θεωρηθεί ίσο με  $L = 238.35 \text{ m}$  (δηλαδή όσο είναι το μήκος μεταξύ καθέτων του πλοίου εμπορευματοκιβωτίων). Άρα,  $\nabla = 89115.49 \text{ m}^3$ .

Εφόσον η επιφάνεια ισάλου της φορτηγίδας είναι ορθογωνική, η ροπή  $I_T$  θα υπολογιστεί από την ακόλουθη σχέση<sup>[2]</sup>:

$$I_T = \frac{1}{12}LB^3 \quad (5.58)$$

Όπου  $L = 238.35 \text{ m}$  και  $B = 37.3 \text{ m}$ . Επομένως,  $I_T = 1\,030\,766.76 \text{ m}^4$ . Τελικά, η μετακεντρική ακτίνα σύμφωνα με τη σχέση (5.57) θα είναι ίση με  $\overline{BM} = 11.57 \text{ m}$  και το μετακεντρικό ύψος υπολογίζεται από τη σχέση (5.56) ίσο με  $\overline{GM} = 1.3 \text{ m}$ .

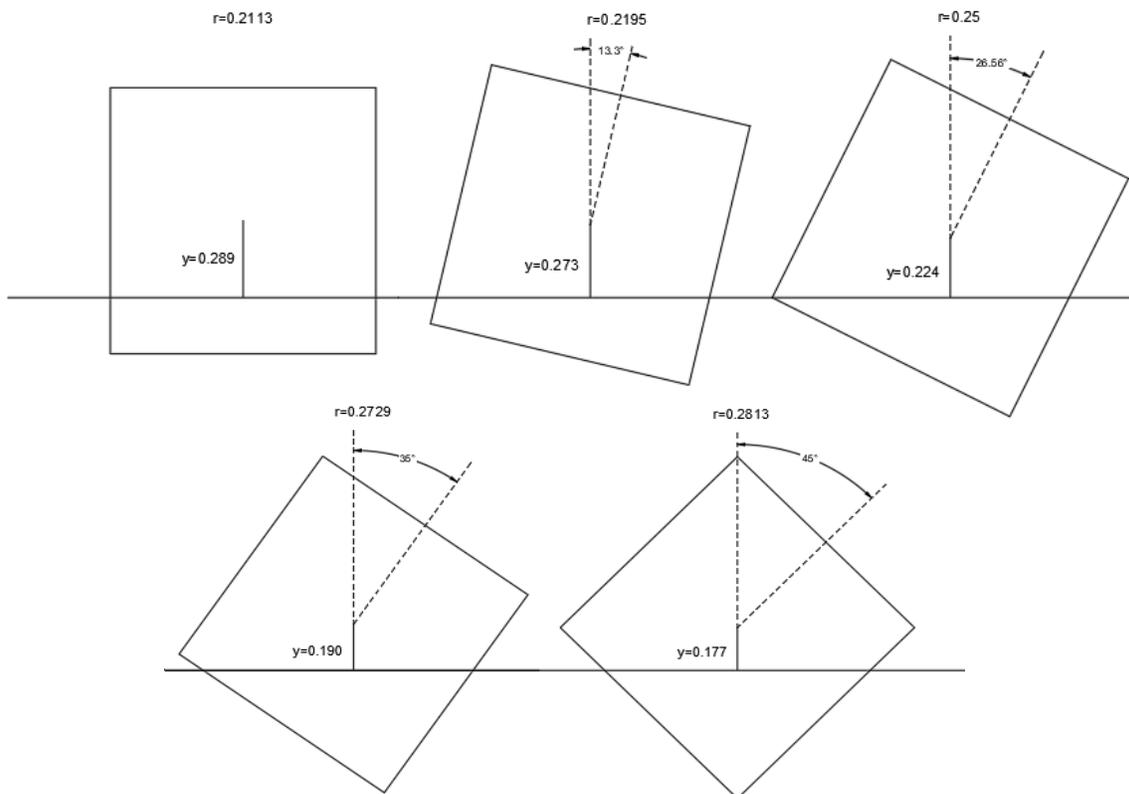
Για την περίπτωση της όρθιας θέσης της φορτηγίδας 1 στην 3<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης και για  $r = 0.4$ , το μόνο στοιχείο που αλλάζει στην σχέση (5.56) είναι το κατακόρυφο ύψος του κέντρου βάρους. Το νέο  $\overline{KG}$  ισούται με  $\overline{KG} = 16.88 \text{ m}$  και επομένως το μετακεντρικό ύψος υπολογίζεται ίσο με  $\overline{GM} = -0.08 \text{ m}$ .

Παρατηρείται ότι στην 1<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης το  $\overline{GM}$  είναι θετικό, ενώ στη 3<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης αρνητικό. Εφόσον, το αρνητικό  $\overline{GM}$  σημαίνει αδυναμία διατήρησης της όρθιας θέσης ισορροπίας, η θέση  $\alpha = 0^\circ$  για την 3<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης της φορτηγίδας καθίσταται ασταθής. Αντιθέτως, στην 1<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης η όρθια θέση ισορροπίας είναι ευσταθής. Έτσι, τα αποτελέσματα της ενεργειακής μεθόδου που αφορούν την όρθια θέση ισορροπίας της φορτηγίδας κρίνονται ικανοποιητικά.

Γενικά, το μετακεντρικό ύψος συνιστά κριτήριο της αρχικής ευστάθειας ενός πλοίου, δηλαδή της ευστάθειάς του σε μικρές γωνίες κλίσης. Η μελέτη μόνο της τιμής του  $\overline{GM}$  δεν επαρκεί για να εξαχθούν σαφή συμπεράσματα για την ευστάθεια, αλλά τα χαρακτηριστικά στατικής ευστάθειας σε μεγάλα εύρη γωνιών προβλέπονται με τη βοήθεια του μοχλοβραχίονα επαναφοράς  $\overline{GZ}$ .

## 6. Συζήτηση και Συμπεράσματα

Από την ενεργειακή διερεύνηση της ευστάθειας του πρίσματος τετραγωνικής διατομής γίνεται σαφές το γεγονός ότι ένα συμμετρικό στερεό σώμα μπορεί να ισορροπήσει όχι μόνο σε συμμετρικές αλλά και σε ασύμμετρες θέσεις, ανάλογα με το λόγο της πυκνότητάς του ως προς την πυκνότητα του ρευστού. Η ασυμμετρία αυτή στις θέσεις ισορροπίας συμβαίνει για μικρή περιοχή του λόγου πυκνοτήτων  $r$ . Στο εδάφιο 5.2.3, σχηματίστηκε το διάγραμμα της γωνίας εγκάρσιας κλίσης  $\alpha$  συναρτήσει του λόγου πυκνοτήτων στερεού – ρευστού  $r$  (διάγραμμα ισορροπίας  $\alpha - r$ ), στο οποίο διακρίνονται οι περιοχές ασύμμετρων θέσεων ισορροπίας του πρίσματος. Ειδικότερα, για τιμές του λόγου πυκνοτήτων στερεού – ρευστού εντός των διαστημάτων  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} < r < \frac{9}{32}$  και  $\frac{23}{32} < r < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ , ή αλλιώς για  $0.2113 < r < 0.28125$  και  $0.71875 < r < 0.7887$  αντίστοιχα, το πρίσμα ισορροπεί ευσταθώς σε ασύμμετρες θέσεις με τη γωνία εγκάρσιας κλίσης να λαμβάνει τιμές από  $0^\circ$  έως  $90^\circ$ . Στο ακόλουθο σχήμα, παρουσιάζονται μερικές από τις θέσεις ισορροπίας του πρίσματος στο πιο πάνω διάστημα του  $r$ :



Σχήμα 26: Θέσεις ισορροπίας του πρίσματος τετραγωνικής διατομής στο διάστημα  $0.2113 < r < 0.28125$

Ένα άλλο σημείο που παρατηρήθηκε από το διάγραμμα ισορροπίας  $\alpha - r$  του πρίσματος είναι η συμμετρία που παρουσιάζουν οι περιοχές ευστάθειας ως προς τη γωνία  $\alpha = 45^\circ$  αλλά και ως προς την τιμή του λόγου πυκνοτήτων  $r = 0.5$ . Αυτό οφείλεται στη συμμετρία της τετραγωνικής διατομής του πρίσματος, ως προς και τους δύο άξονες.

Σύμφωνα με την επόμενη εφαρμογή της ενεργειακής μεθόδου που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας, ο ημικυκλικός κύλινδρος ισορροπεί στην όρθια θέση (ευσταθώς) για κάθε τιμή του λόγου πυκνοτήτων  $r$  και δεν παρουσιάζονται θέσεις ισορροπίας σε άλλες γωνίες.

Η ευστάθεια του ημικυκλικού κυλίνδρου αλλά και του πρίσματος τετραγωνικής διατομής διερευνήθηκε και μέσω αναλυτικών αλλά και μέσω αριθμητικών υπολογισμών, καταλήγοντας στα ίδια αποτελέσματα και με τις δύο προσεγγίσεις. Ωστόσο, η ενεργειακή μέθοδος χρησιμοποιώντας αναλυτικούς υπολογισμούς αποδείχθηκε πιο εύκολη στην εφαρμογή στα απλά αυτά γεωμετρικά στερεά.

Ακολούθησε η ενεργειακή εξέταση της ευστάθειας δύο περιπτώσεων φορτηγίδας. Στην πρώτη περίπτωση, η φορτηγίδα έχει ως διατομή τη μέση τομή ενός σύγχρονου πλοίου εμπορευματοκιβωτίων, ενώ στη δεύτερη περίπτωση έχει ως διατομή μία άλλη εγκάρσια τομή του εν λόγω πλοίου. Και οι δύο φορτηγίδες διερευνήθηκαν για τρεις διαφορετικές καταστάσεις φόρτωσης, δηλαδή για τρεις διαφορετικές τιμές του κατακόρυφου ύψους του κέντρου βάρους ( $\overline{KG}$ ) και για επτά περιπτώσεις του λόγου  $r$ . Προσδιορίστηκαν, έτσι, οι ευσταθείς και ασταθείς θέσεις ισορροπίας για κάθε εξεταζόμενη περίπτωση της φορτηγίδας. Γενικά με βάση τα αποτελέσματα της ενεργειακής αυτής ανάλυσης, παρατηρήθηκαν τα εξής:

- Η όρθια θέση δεν αποτελεί πάντα ευσταθή θέση ισορροπίας.
- Με αύξηση του κατακόρυφου ύψους του κέντρου βάρους ( $\overline{KG}$ ) μειώνεται η μεγαλύτερη, σε μέτρο, γωνία ισορροπίας  $\alpha$  για κάθε περίπτωση  $r$ .

Επίσης, η ευστάθεια της πρώτης φορτηγίδας διερευνήθηκε διατηρώντας σταθερό το εκτόπισμα που αντιστοιχεί σε βύθισμα  $d = 12.19\text{m}$  και μεταβάλλοντας τη θέση του κέντρου βάρους. Έτσι, προέκυψαν κάποια συμπεράσματα σχετικά με την εξάρτηση των θέσεων ισορροπίας από την κατακόρυφη απόσταση  $\overline{KG}$ . Αναλυτικότερα, με αύξηση του  $\overline{KG}$ :

- Η όρθια θέση ισορροπίας από ευσταθής γίνεται ασταθής.
- Προκύπτουν ευσταθείς θέσεις ισορροπίας σε όλο και μεγαλύτερες γωνίες.
- Προκύπτουν ασταθείς θέσεις ισορροπίας σε όλο και μικρότερες γωνίες.
- Τα επίπεδα δυναμικής ενέργειας στις περιοχές των θέσεων ισορροπίας αυξάνονται.

Στη συνέχεια, υπολογίστηκε η τιμή του μετακεντρικού ύψους ( $\overline{GM}$ ) της πρώτης φορτηγίδας μόνο για τις περιπτώσεις της 1<sup>ης</sup> και 3<sup>ης</sup> κατάστασης φόρτωσης, για την όρθια θέση και για  $r = 0.4$ . Η θετική και αρνητική τιμή του  $\overline{GM}$  για την 1<sup>η</sup> και 3<sup>η</sup> κατάσταση φόρτωσης αντίστοιχα, επαλήθευσε τα αποτελέσματα της ενεργειακής μεθόδου σχετικά με την όρθια θέση ισορροπίας για το λόγο  $r = 0.4$ . Επαληθεύτηκε δηλαδή η ευστάθεια της όρθιας θέσης ισορροπίας στην πρώτη περίπτωση και η αστάθειά της στην δεύτερη περίπτωση.

Εφόσον η μέθοδος υπολογισμού του μετακεντρικού ύψους αποτελεί κριτήριο της αρχικής ευστάθειας ενός πλοίου, δηλαδή της ευστάθειάς του σε μικρές γωνίες κλίσης, δεν μπορούν να ελεγχθούν τα αποτελέσματα της ενεργειακής μεθόδου που αφορούν μεγάλες τιμές της γωνίας  $\alpha$ . Επομένως, σε μελλοντική μελέτη θα μπορούσαν να συγκριθούν οι θέσεις ισορροπίας που υπολογίζονται μέσω της ενεργειακής μεθόδου σε μεγάλα εύρη γωνιών με τα αποτελέσματα ευστάθειας που προκύπτουν μέσω του μοχλοβραχίονα επαναφοράς  $\overline{GZ}$ .

Συμπερασματικά, η ενεργειακή μέθοδος αποδείχθηκε εύκολη στην διαδικασία και ιδιαίτερα αποτελεσματική, ειδικά στην εφαρμογή της στα απλά πρίσματα της τετραγωνικής και της ημικυκλικής διατομής. Όσον αφορά την εξέταση ευστάθειας της φορτηγίδας, η εφαρμογή της μεθόδου απέδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα, προσδιορίζοντας με ακρίβεια τις θέσεις ισορροπίας της. Ωστόσο θα πρέπει να εφαρμοστεί και σε πιο περίπλοκες μορφές πλοίων πέρα από την περίπτωση της φορτηγίδας, για να εξετασθεί ουσιαστικά αν θα μπορούσε να αποτελέσει εναλλακτικό τρόπο διερεύνησης της ευστάθειας πλοίων.

## Βιβλιογραφικές Αναφορές

- [1] Erdős, P., Schibler, G. & Herndon, R. C. (1992a). Floating equilibrium of symmetrical objects and the breaking of symmetry. Part 1: Prisms. *American journal of physics*, 60, 335, DOI:10.1119/1.16877.
- [2] Spyrou, K. J. (2022). The stability of floating regular solids. *Ocean Engineering*, 257, 111615. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111615>.
- [3] Ferreiro, L.D. (2010). *Ships and Science: The Birth of Naval Architecture in the Scientific Revolution, 1600-1800 (Transformations: Studies in the History of Science and Technology)*. The MIT Press; Illustrated Edition, ISBN-10: 9780262514156.
- [4] Σπύρου, Κ. (2015). Δυναμική ευστάθεια πλοίου. Αθήνα: Κάλλιπος
- [5] Huygens, H.C. (1907). *Traité: De iis quae liquido supernatant*. *Nature*, 76, 381 (1907). <https://doi.org/10.1038/076381a0>.
- [6] Erdős, P., Schibler, G. & Herndon, R. C. (1992b). Floating equilibrium of symmetrical objects and the breaking of symmetry. Part 2: The cube, the octahedron, and the tetrahedron. *American journal of physics*, 60, 345, DOI:10.1119/1.17130.
- [7] Θεμελής, Ν. (2013). Σημειώσεις για το πρόγραμμα Mathematica (Σημειώσεις για το μάθημα: Ευστάθεια διατοιχισμού πλοίου και υπόβαθρο κανονισμών)
- [8] Κυριακόπουλος, Π. (2022). Πιθανοτική Αξιολόγηση του Κριτηρίου Δυναμικής Ευστάθειας Δεύτερης Γενιάς «Level 2 Deadship Condition failure mode». Διπλωματική Εργασία Ε.Μ.Π

## Παράρτημα

### A. Αριθμητική διερεύνηση της ευστάθειας του ημικυκλικού κυλίνδρου για γωνίες $\alpha \neq 0^\circ$ , διατηρώντας σταθερή κατά την στροφή του πρίσματος τη μεταβλητή $y$

Στο Παράρτημα A η αριθμητική διερεύνηση της ευστάθειας του ημικυκλικού κυλίνδρου στο πρόγραμμα Mathematica χρησιμοποιώντας την ενεργειακή μέθοδο για γωνίες  $\alpha \neq 0^\circ$ , πραγματοποιείται διατηρώντας σταθερή κατά την στροφή του πρίσματος τη μεταβλητή  $y$ , δηλαδή την απόσταση του κέντρου βάρους του πρίσματος από την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού.

Σε αυτή την περίπτωση, εκτός από την επιλογή του λόγου πυκνοτήτων στερεού – ρευστού  $r$  και του διαστήματος γωνιών  $\alpha$  στροφής του πρίσματος, θα πρέπει να καθοριστεί και να εισαχθεί στο πρόγραμμα και η μεταβλητή  $y$ . Καθώς το στερεό στρέφεται διατηρώντας σταθερή την απόσταση  $y$ , μεταβάλλεται το βυθισμένο τμήμα της διατομής του και το κέντρο άνωσης του, δηλαδή μεταβάλλονται οι ποσότητες  $V_c$  και  $z_c$ . Υπολογίζεται η δυναμική ενέργεια του συστήματος για κάθε περίπτωση γωνίας  $\alpha$  από την σχέση (5.1) και προσδιορίζεται το πηλίκο πεπερασμένων διαφορών  $\frac{\Delta E}{\Delta \alpha}$ . Όταν μηδενιστεί το πηλίκο  $\frac{\Delta E}{\Delta \alpha}$  υποδεικνύεται μία πιθανή θέση ισορροπίας του πρίσματος. Όμως, θα πρέπει να γίνει έλεγχος και του πρώτου κριτηρίου ισορροπίας της ενεργειακής μεθόδου, που και σε αυτή την περίπτωση λαμβάνει τη μορφή της σχέσης (5.55).

Εάν η συνθήκη (5.55) δεν ικανοποιείται για την εξεταζόμενη θέση του πρίσματος που μηδενίζει το πηλίκο  $\frac{\Delta E}{\Delta \alpha}$ , τότε η θέση αυτή δεν αποτελεί θέση ισορροπίας.

Δεν βρέθηκαν άλλες θέσεις ισορροπίας για γωνίες  $\alpha \neq 0^\circ$ , ούτε με αυτή την προσέγγιση εφαρμογής της ενεργειακής μεθόδου. Επομένως, επαληθεύονται και εδώ τα αποτελέσματα της διερεύνησης ευστάθειας μέσω αναλυτικών υπολογισμών (που έγιναν στο υποκεφάλαιο 5.3), σύμφωνα με τα οποία ο ημικυκλικός κύλινδρος ισορροπεί πάντα στην όρθια θέση.