



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**Γεωμετρικά γραφήματα με y -μονότονα και
 xy -μονότονα μονοπάτια: κατασκευή και
αναγνώριση**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΟΥ

**Κωνσταντίνου
Μάστακα**

Αθήνα, Δεκέμβριος 2022



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**Γεωμετρικά γραφήματα με y -μονότονα και
 xy -μονότονα μονοπάτια: κατασκευή και
αναγνώριση**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΟΥ

**Κωνσταντίνου
Μάστακα**

Συμβουλευτική Επιτροπή:

Αλέξανδρος Αρβανιτάκης (Επιβλέπων)
Αριστείδης Παγουρτζής
Δημήτρης Φωτάκης

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή:

.....
Αλέξανδρος Αρβανιτάκης
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Αριστείδης Παγουρτζής
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Δημήτρης Φωτάκης
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ευανθία Δούκα
Επ. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

.....
Πέτρος Στεφανέας
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Αντώνιος Χαραλαμπίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Παναγιώτης Ψαρράκος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Δεκέμβριος 2022

Η διδακτορική διατριβή αυτή εκπονήθηκε με υποτροφία από τον
Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων Έρευνας του Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Ένα σύνολο σημείων με k ρίζες P είναι ένα σύνολο σημείων όπου k σημεία του $r_1, r_2, \dots, r_k \in P$ διαφοροποιούνται από τα υπόλοιπα σημεία του P και αποκαλούνται ρίζες του P . Ένα γεωμετρικό γράφημα με k ρίζες $G = (P, E)$ είναι ένα γεωμετρικό γράφημα όπου το σύνολο των κόμβων του, P , είναι ένα σύνολο σημείων με k ρίζες και οι ρίζες του G είναι οι ρίζες του P . Ένα γεωμετρικό μονοπάτι $Q = (q_0, q_1, \dots, q_t)$ είναι y -μονότονο αν η ακολουθία των y -συντεταγμένων των σημείων του Q , δηλαδή η ακολουθία $y(q_0), y(q_1), \dots, y(q_t)$, είναι μονότονη. Ένα γεωμετρικό γράφημα με k ρίζες $G = (P, E)$ είναι y -μονότονο με k ρίζες αν κάθε ρίζα $r \in P$ και κάθε σημείο $p \in P \setminus \{r\}$ συνδέονται με κάποιο y -μονότονο μονοπάτι. Δοθέντος ενός συνόλου σημείων με k ρίζες P το y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με k ρίζες του P είναι το y -μονότονο συνδετικό γράφημα με k ρίζες του P με το ελάχιστο κόστος. Το κόστος ενός γεωμετρικού γραφήματος είναι το άθροισμα των μηκών των ακμών του. Ασχολούμαστε με το πρόβλημα της εύρεσης του y -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P . Χτίζοντας πάνω σε προηγούμενα αποτελέσματα δείχνουμε ότι το y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με ρίζα του P (i) είναι ένα δέντρο το οποίο αποκαλούμε το y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P και (ii) εξάγεται σε $O(|P| \log^2 |P|)$ χρόνο. Μελετάμε επίσης το πρόβλημα της απεικόνισης ενός δέντρου με ρίζα ως ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα. Αρχικά δίνουμε ένα γραμμικού χρόνου αλγόριθμο ο οποίος απεικονίζει ένα δέντρο με ρίζα ως ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα. Πόρισμα της προηγούμενης πρότασης είναι ότι δεν υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε ο μέγιστος βαθμός κάθε y -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα να είναι φραγμένος από τη C . Επιπλέον δείχνουμε ότι υπάρχουν δέντρα με ρίζα για τα οποία κάθε απεικόνιση στο πλέγμα ως ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα απαιτεί ένα πλέγμα με εκθετικό εμβαδό. Δίνουμε ακόμα έναν απλό 2-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα της εύρεσης του y -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος με k ρίζες ενός συνόλου σημείων με k ρίζες P . Ένα γεωμετρικό γράφημα με ρίζα G είναι ομοιόμορφα μονότονο με ρίζα αν είναι y' -μονότονο με ρίζα για κάποιον άξονα y' . Παρέχουμε έναν $O(|E| \log |P|)$ χρόνο αλγόριθμο που καθορίζει αν ένα γεωμετρικό γράφημα με ρίζα $G = (P, E)$ είναι ομοιόμορφα μονότονο με ρίζα. Επιπρόσθετα ασχολούμαστε με το πρόβλημα της εύρεσης του

ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P , όπου το ομοιόμορφα μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P είναι το ομοιόμορφα μονότονο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P με το ελάχιστο κόστος. Δείχνουμε ότι το ομοιόμορφα μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P εξάγεται σε $O(|P|^2 \log |P|)$ χρόνο.

Ένα γεωμετρικό μονοπάτι $Q = (q_0, q_1, \dots, q_t)$ είναι xy -μονότονο αν και η ακολουθία των x -συντεταγμένων των σημείων του Q , δηλαδή η ακολουθία $x(q_0), x(q_1), \dots, x(q_t)$, είναι μονότονη και η ακολουθία των y -συντεταγμένων των σημείων του Q , δηλαδή η ακολουθία $y(q_0), y(q_1), \dots, y(q_t)$, είναι μονότονη. Το γεωμετρικό μονοπάτι Q είναι $2K$ -μονότονο αν είναι $x'y'$ -μονότονο για κάποιο Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$. Ένα γεωμετρικό γράφημα $G = (P, E)$ είναι $2K$ -μονότονο αν κάθε ζευγάρι σημείων του P συνδέεται με ένα $2K$ -μονότονο μονοπάτι. Μελετάμε το πρόβλημα της παραγωγής $2K$ -μονότονων συνδετικών γραφημάτων σε σύνολα σημείων σε κυρτή θέση. Εξάγουμε ότι δοθέντος ενός συνόλου σημείων σε κυρτή θέση P παράγεται ένα $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα που έχει ως σύνολο κόμβων το P μαζί με λιγότερο από ή ίσο με ένα Steiner σημείο (δηλαδή ένα επιπρόσθετο σημείο που δεν δίνεται ως είσοδος) και έχει λιγότερες από ή ίσες με $4|P| - 8$ ακμές. Ένα γεωμετρικό γράφημα $G = (P, E)$ λέγεται xy -μονότονο αν κάθε ζευγάρι κόμβων του G συνδέεται με ένα xy -μονότονο μονοπάτι. Δοθέντος ενός συνόλου σημείων P το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P είναι το xy -μονότονο συνδετικό γράφημα του P ελάχιστου κόστους. Μελετάμε το πρόβλημα της εύρεσης του xy -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος ενός συνόλου σημείων P και το πρόβλημα της εύρεσης του xy -μονότονου συνδετικού γραφήματος με το ελάχιστο πλήθος ακμών ενός συνόλου σημείων P . Χτίζοντας πάνω σε προηγούμενα αποτελέσματα εξάγουμε εύκολα ότι δοθέντος ενός συνόλου σημείων P το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P είναι ίσο με το xy -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P και τα δύο αυτά είναι ίσα με το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής του P . Όπου το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής ενός συνόλου σημείων P είναι το γεωμετρικό γράφημα με σύνολο κόμβων το P όπου οι κόμβοι p και q συνδέονται με ακμή αν και μόνο αν το ορθογώνιο με γωνιακά σημεία τα p και q και πλευρές παράλληλες στους άξονες του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων δεν περιέχει άλλα σημεία (εκτός από τα p και q) του P . Το γεωμετρικό γράφημα G λέγεται ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο αν υπάρχει Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$ τέτοιο ώστε το G να είναι $x'y'$ -μονότονο. Το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα ενός συνόλου σημείων P είναι το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα του P ελάχιστου κόστους. Μελετάμε επίσης το πρόβλημα της εύρεσης του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος ενός συνόλου σημείων P και το πρόβλημα της εύρεσης του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου συνδετικού γραφήματος με το ελάχιστο πλήθος ακμών ενός συνόλου σημείων P . Σημειώνουμε ότι δοθέντος ενός συνόλου σημείων P το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P δεν ταυτίζεται πάντα με το ομοιόμορφα

$2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P . Όμως δείχνουμε ότι και το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P και το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P μπορούν να παραχθούν σε $O(|P|^3)$ χρόνο. Ένα γεωμετρικό γράφημα $G = (P, E)$ με ρίζα r λέγεται xy -μονότονο με ρίζα αν κάθε κόμβος του G διαφορετικός από τη ρίζα συνδέεται με την r με ένα xy -μονότονο μονοπάτι. Έστω P ένα σύνολο σημείων με ρίζα τότε το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με ρίζα του P είναι το xy -μονότονο συνδετικό γράφημα με ρίζα του P ελάχιστου κόστους. Δείχνουμε ότι το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γραφήμα με ρίζα του P είναι ένα δέντρο το οποίο αποκαλούμε το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P και το οποίο εξάγεται σε $O(|P| \log^3 |P|)$ χρόνο. Το γεωμετρικό γράφημα με ρίζα G λέγεται ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο με ρίζα αν υπάρχει Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$ τέτοιο ώστε το G να είναι $x'y'$ -μονότονο με ρίζα. Παρέχουμε έναν αλγόριθμο που καθορίζει αν ένα γεωμετρικό γράφημα με ρίζα $G = (P, E)$ είναι ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο με ρίζα σε $O(|E| \log |P|)$ χρόνο. Το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P είναι το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P ελάχιστου κόστους. Δείχνουμε ότι το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P εξάγεται σε $O(|P|^2 \log |P|)$ χρόνο.

Abstract

A point set P is k -rooted if there exist k points $r_1, r_2, \dots, r_k \in P$ distinguished from the other points of P which are called the *roots* of P . A geometric graph $G = (P, E)$ is called k -rooted if P is k -rooted and its roots are the roots of P . A geometric path $Q = (q_0, q_1, \dots, q_t)$ is called y -monotone if the sequence of the y -coordinates of the points of Q , i.e. the sequence $y(q_0), y(q_1), \dots, y(q_t)$, is monotone. A k -rooted geometric graph $G = (P, E)$ is k -rooted y -monotone if each root $r \in P$ and each point $p \in P \setminus \{r\}$ are connected by a y -monotone path. The k -rooted y -monotone minimum spanning graph of a k -rooted point set P is the k -rooted y -monotone spanning graph of P that has the minimum cost. The cost of a geometric graph is the sum of the lengths of its edges. We deal with the problem of obtaining the rooted y -monotone minimum spanning graph of a rooted point set P . Building upon previous results we show that the rooted y -monotone minimum spanning graph of P (i) is a tree which we call the *rooted y -monotone minimum spanning tree* of P and (ii) it is obtained in $O(|P| \log^2 |P|)$ time. We also study the problem of drawing a rooted tree as a rooted y -monotone minimum spanning tree. We initially give a linear-time algorithm that draws a rooted tree as a rooted y -monotone minimum spanning tree. A corollary of the previous sentence is that there is no constant number C such that the maximum degree of every rooted y -monotone minimum spanning tree to be bounded by C . We also show that there exist rooted trees for which any grid drawing as a rooted y -monotone minimum spanning tree requires a grid of exponential area. Additionally, we give a simple 2-approximation algorithm for the problem of producing the k -rooted y -monotone minimum spanning graph of a k -rooted point set P . A rooted geometric graph $G = (P, E)$ is *rooted uniform monotone* if it is rooted y' -monotone for some axis y' . We provide a $O(|E| \log |P|)$ time algorithm that determines if a rooted geometric graph $G = (P, E)$ is rooted uniform monotone. Additionally we deal with the problem of producing the rooted uniform monotone minimum spanning tree of a rooted point set P , where the *rooted uniform monotone minimum spanning tree* of P is the rooted uniform monotone spanning tree of P that has the minimum cost. We show that the rooted uniform monotone minimum spanning tree of P is obtained in $O(|P|^2 \log |P|)$ time.

A geometric path $Q = (q_0, q_1, \dots, q_t)$ is called xy -monotone if both

the sequence of the x -coordinates of the points of Q , that is the sequence $x(q_0), x(q_1), \dots, x(q_t)$, is monotone and the sequence of the y -coordinates of the points of Q , that is the sequence $y(q_0), y(q_1), \dots, y(q_t)$, is monotone. The geometric path Q is *2D-monotone* if it is $x'y'$ -monotone for a Cartesian Coordinate System $x'y'$. A geometric graph $G = (P, E)$ is *2D-monotone* if each pair of points of P is connected by a 2D-monotone path. We study the problem of producing 2D-monotone spanning graphs on convex point sets. We obtain that given a convex point set P a 2D-monotone spanning graph that has as node set the point set P along with less than or equal to one Steiner point (that is an additional point which is not given as input) and has less than or equal to $4|P| - 8$ edges is produced. A geometric graph $G = (P, E)$ is *xy-monotone* if each pair of nodes of G is connected by a xy -monotone path. The *xy-monotone minimum spanning graph* of a point set P is the xy -monotone spanning graph of P that has the minimum cost. We study the problem of producing the xy -monotone minimum spanning graph of a point set P and the problem of producing the xy -monotone spanning graph that has the least number of edges of a point set P . Building upon previous results, we easily obtain that given a point set P the xy -monotone minimum spanning graph of P is equal to the xy -monotone spanning graph that has the least number of edges of P and that both of them are equal to the rectangle of influence graph of P . Where the *rectangle of influence graph* of a point set P is the geometric graph with P as its node set where the nodes p and q are connected by an edge if and only if the rectangle with corners p and q and edges parallel to the axes of the Cartesian Coordinate System does not include any other points (except for p and q) of P . The geometric graph G is *uniform 2D-monotone* if there exists a Cartesian Coordinate System $x'y'$ such that G is $x'y'$ -monotone. The *uniform 2D-monotone minimum spanning graph* of a point set P is the uniform 2D-monotone spanning graph of P that has the minimum cost. We also study the problem of producing the uniform 2D-monotone minimum spanning graph of a point set P and the problem of producing the uniform 2D-monotone spanning graph with the least number of edges of a point set P . We note that given a point set P the uniform 2D-monotone minimum spanning graph of P does not always coincide with the uniform 2D-monotone spanning graph with the least number of edges of P . But we show that both the uniform 2D-monotone minimum spanning graph of P and the uniform 2D-monotone spanning graph with the least number of edges of P can be obtained in $O(|P|^3)$ time. A geometric graph $G = (P, E)$ with root r is called *rooted xy-monotone* if each node of G different from the root r is connected with r by a xy -monotone path. Let P be a rooted point set, the *rooted xy-monotone minimum spanning graph* of P is the rooted xy -monotone spanning graph of P that has the minimum cost. We show that the rooted xy -monotone minimum spanning graph of P is a tree which we call the *rooted xy-monotone minimum spanning tree* of P and which is obtained in $O(|P| \log^3 |P|)$ time. The rooted geometric graph G is *rooted uniform 2D-monotone* if there exists a Cartesian Coordinate System $x'y'$ such that G is rooted $x'y'$ -monotone. We

provide an algorithm that determines if a rooted geometric graph $G = (P, E)$ is rooted uniform 2D-monotone in $O(|E| \log |P|)$ time. The *rooted uniform 2D-monotone minimum spanning tree* of a rooted point set P is the rooted uniform 2D-monotone spanning tree of P that has the minimum cost. We show that the rooted uniform 2D-monotone minimum spanning tree of a point set P with root r is obtained in $O(|P|^2 \log |P|)$ time.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω το δεύτερο επιβλέποντα μου Καθηγητή Αλέξανδρο Αρβανιτάκη για την πολύτιμη καθοδήγηση και τις πολύτιμες συμβουλές του. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον αρχικό επιβλέποντα μου Καθηγητή Αντώνιο Συμβώνη για την επίβλεψη του όσο καιρό ήταν ο επιβλέπωντας μου. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Αριστείδη Παγουρτζή για τις συζητήσεις που κάναμε όσον αφορά το άρθρο [46].

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	17
1.1	Ευκλείδειο ελάχιστο συνδετικό δέντρο	17
1.2	y -μονότονα μονοπάτια σε γεωμετρικά αντικείμενα . . .	18
1.3	Γεωμετρικά γραφήματα με xy -μονότονα μονοπάτια . . .	20
1.4	Το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής	22
1.5	Οργάνωση εργασίας	22
2	Ορισμοί	25
3	Ομοιόμορφα μονότονα ελάχιστα συνδετικά δέντρα με ρίζα	27
3.1	Προπαρασκευαστικά	28
3.2	Το πρόβλημα της κατασκευής του y -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα	29
3.3	Το πρόβλημα της αναγνώρισης y -μονότονων με ρίζα γραφημάτων	32
3.4	Παραγωγή του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα	33
3.5	Το πρόβλημα της αναγνώρισης ομοιόμορφα μονότονων με ρίζα γραφημάτων	39
3.6	Το πρόβλημα της κατασκευής του xy -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα	43
3.7	Το πρόβλημα της αναγνώρισης xy -μονότονων με ρίζα γραφημάτων	44
3.8	Το πρόβλημα της κατασκευής του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα	45
3.9	Το πρόβλημα της αναγνώρισης ομοιόμορφα $2K$ -μονότονων με ρίζα γραφημάτων	47
4	Ομοιόμορφα $2K$-μονότονα ελάχιστα συνδετικά γραφήματα	51
4.1	Προπαρασκευαστικά	51
4.2	Το πρόβλημα της εύρεσης του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος	52
4.3	Ένας 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα της εύρεσης του y -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος με k ρίζες	58

5 Κατασκευάζοντας $2K$-μονότονα συνδετικά γραφήματα σε σύνολα σημείων σε κυρτή θέση	61
5.1 Προπαρασκευαστικά	61
5.2 $2K$ -μονότονα συνδετικά γραφήματα με σταθερό πλήθος Steiner σημείων και γραμμικό πλήθος ακμών σε σύνολα σημείων σε κυρτή θέση	62
6 Το πρόβλημα της απεικόνισης ενός δέντρου με ρίζα ως ένα y-μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα	71
6.1 Το πρόβλημα της απεικόνισης ενός δέντρου με ρίζα ως ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα . . .	71

Εισαγωγή

Η Υπολογιστική Γεωμετρία και η Απεικόνιση Γραφημάτων είναι κλάδοι της Επιστήμης των Υπολογιστών που ασχολούνται με γεωμετρικά αντικείμενα. Η μεν πρώτη ασχολείται, μεταξύ άλλων, με τη μελέτη, παραγωγή και αναγνώριση γεωμετρικών αντικειμένων [55], [19]. Η δε Απεικόνιση Γραφημάτων ασχολείται με την οπτικοποίηση οντοτήτων ως γεωμετρικά αντικείμενα [21] και συνήθως ως γεωμετρικά γραφήματα με μικρό εμβαδό [22].

1.1 Ευκλείδειο ελάχιστο συνδετικό δέντρο

Έστω a, b σημεία του επιπέδου. Το \overline{ab} είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα a και b . Ένα γεωμετρικό γράφημα $G = (P, L)$ είναι ένα ζεύγος από (i) ένα σύνολο σημείων P το οποίο είναι το σύνολο των κόμβων (ή κορυφών) του G και (ii) ένα σύνολο ευθύγραμμων τμημάτων L που συνδέουν σημεία του P και είναι το σύνολο των ακμών του G . Ένα γεωμετρικό μονοπάτι (p_1, p_2, \dots, p_k) είναι ένα γεωμετρικό γράφημα όπου το σύνολο των κόμβων είναι το $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ και το σύνολο των ακμών είναι το $\{\overline{p_1p_2}, \overline{p_2p_3}, \dots, \overline{p_{k-1}p_k}\}$. Ένα γεωμετρικό δέντρο $T = (P, L)$ είναι ένα γεωμετρικό γράφημα όπου κάθε δύο κόμβοι του T συνδέονται με κάποιο γεωμετρικό μονοπάτι και ισχύει ότι $|L| = |P| - 1$. Το κόστος ενός γεωμετρικού γραφήματος είναι το άθροισμα των μηκών των ακμών του.

Έστω P ένα σύνολο σημείων τότε ένα συνδετικό γράφημα του P είναι ένα γεωμετρικό γράφημα με σύνολο κόμβων το P όπου κάθε ζευγάρι σημείων του P συνδέεται με μονοπάτι.

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα τότε οι κόμβοι u και v του G λέγονται γειτονικοί αν υπάρχει η ακμή $\{u, v\}$. Το σύνολο γειτονικοί(u) είναι το σύνολο των κόμβων του G που είναι γειτονικοί του u . Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και u ένας κόμβος του G τότε ο βαθμός του u είναι το πλήθος των γειτονικών κόμβων του. Ο μέγιστος βαθμός του γραφήματος G είναι ο βαθμός του κόμβου u του G με το μεγαλύτερο πλήθος γειτονικών κόμβων.

Μια απεικόνιση ευθύγραμμων-τμημάτων D ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι μια συνάρτηση που συσχετίζει κάθε κόμβο $u \in V$ με ένα σημείο του επιπέδου και κάθε ακμή $\{u, v\} \in E$ με ένα ευθύγραμμο τμήμα του επιπέδου που συνδέει τις εικόνες των u και v . Στην εργασία αυτή

ασχολούμαστε μόνο με απεικονίσεις ευθύγραμμων-τμημάτων οπότε παραλείπουμε τον όρο ευθύγραμμων-τμημάτων. Μια απεικόνιση στο πλέγμα D ενός γραφήματος G συσχετίζει κάθε κόμβο του G με ένα σημείο του επιπέδου με ακέραιες συντεταγμένες.

Το Ευκλείδειο Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΕΣΔ), στα Αγγλικά *Euclidean Minimum Spanning Tree (EMST)*, ενός συνόλου σημείων P είναι το γεωμετρικό δέντρο με σύνολο κόμβων το P που έχει το ελάχιστο κόστος. Οι Shamos και Hoey [60] απέδειξαν ότι το ΕΕΣΔ ενός συνόλου σημείων P πληθικότητας n μπορεί να παραχθεί σε $O(n \cdot \log n)$ χρόνο. Πριν από αυτήν την ανακάλυψη, η προσέγγιση που χρησιμοποιείτο για την εύρεση του ΕΕΣΔ απαιτούσε τουλάχιστον τετραγωνική πολυπλοκότητα [60].

Το ΕΕΣΔ μελετήθηκε μετέπειτα και υπό το πρίσμα της απεικόνισης γραφημάτων [51, 25, 6]. Οι Monma και Suri [51] έδειξαν ότι δοθέντος ενός συνόλου σημείων P ένα ΕΕΣΔ του P με μέγιστο βαθμό το πολύ 5 μπορεί πάντα να βρεθεί ενώ είχαν ήδη παρατηρήσει ότι ένα ΕΕΣΔ είναι μέγιστου βαθμού το πολύ 6 [51]. Επιπλέον, απέδειξαν ότι ένα δέντρο με μέγιστο βαθμό το πολύ 5 μπορεί να απεικονιστεί αποδοτικά ως ένα ΕΕΣΔ [51]. Από την άλλη μεριά για ένα δέντρο T με μέγιστο βαθμό 6 το πρόβλημα της απεικόνισης του T ως ένα ΕΕΣΔ δείχτηκε από τους Eades και Whitesides [25] ότι είναι NP-hard. Όσον αφορά το εμβαδό που απαιτεί η απεικόνιση ενός δέντρου T , με n κόμβους, με μέγιστο βαθμό το πολύ 5 ως ένα ΕΕΣΔ ο αλγόριθμος των Monma και Suri [51] παράγει μια απεικόνιση στο πλέγμα με διαστάσεις $\Theta(2^{n^2}) \times \Theta(2^{n^2})$. Ενώ αργότερα αποδείχτηκε από τους Angelini et al. [6] ότι υπάρχουν δέντρα με μέγιστο βαθμό το πολύ 5 για τα οποία δεν μπορεί να παραχθεί καμία απεικόνιση στο πλέγμα ως ΕΕΣΔ που να έχει πολυωνυμικό εμβαδό.

1.2 y -μονότονα μονοπάτια σε γεωμετρικά αντικείμενα

Έστω p ένα σημείο στο επίπεδο τότε με $x(p)$ ($y(p)$) συμβολίζουμε τη x -συντεταγμένη (y -συντεταγμένη) του p . Η ακολουθία των σημείων του επιπέδου p_0, p_1, \dots, p_t λέγεται y -μονότονη αν η ακολουθία των y -συντεταγμένων τους, δηλαδή η ακολουθία $y(p_0), y(p_1), \dots, y(p_t)$ είναι είτε αύξουσα ή φθίνουσα. Ένα γεωμετρικό μονοπάτι $Q = (q_0, q_1, \dots, q_t)$ είναι y -μονότονο αν η ακολουθία των κόμβων του, δηλαδή η ακολουθία q_0, q_1, \dots, q_t είναι y -μονότονη. Αν το γεωμετρικό μονοπάτι Q είναι y' -μονότονο για κάποιον άξονα y' τότε το Q καλείται *μονότονο*.

Ένα κατευθυνόμενο γεωμετρικό γράφημα λέγεται *ανοδικό (upward)* αν για κάθε μονοπάτι του η ακολουθία των y -συντεταγμένων των κόμβων του μονοπατιού είναι αύξουσα. Το πρόβλημα της απεικόνισης ενός κατευθυνόμενου γραφήματος ως ένα ανοδικό γράφημα έχει ερευνηθεί εκτενώς [9, 15, 23, 28, 35, 49]. Η απεικόνιση ενός δέντρου με ρίζα n κόμβων ως ένα ανοδικό δέντρο είναι ευρέως γνωστό ότι μπορεί να γίνει σε ένα πλέγμα με $O(n \log n)$ εμβαδό [61, Κεφάλαιο

3], [18]. Ενώ πρόσφατα ο Chan [17] απέδειξε ότι ένα δέντρο με ρίζα n κόμβων μπορεί να απεικονιστεί ως ένα ανοδικό δέντρο σε πλέγμα με $n\sqrt{\log n}(\log \log n)^{O(1)}$ εμβαδό.

Πολύ έρευνα έχει πραγματοποιηθεί σχετικά με το πρόβλημα της απεικόνισης ενός δέντρου με ρίζα υπό διάφορες αισθητικές συμβάσεις [21, Ενότητα 3.1]. Το πρόβλημα της εύρεσης μιας απεικόνισης που ελαχιστοποιεί το εμβαδό είναι ευρέως μελετημένο [22]. Πρόσφατα ο Chan [17] βελτίωσε τις απαιτήσεις του εμβαδού για διάφορους τύπους απεικονίσεων δέντρων.

Έστω $G = (P, E)$ ένα γεωμετρικό γράφημα. Αν κάθε $p, q \in P$ συνδέονται με κάποιο y -μονότονο μονοπάτι τότε το G λέγεται y -μονότονο. Αν το G είναι y' -μονότονο για κάποιο άξονα y' τότε το G καλείται *ομοιόμορφα μονότονο*. Ο Angelini [5] ονόμασε τα ομοιόμορφα μονότονα γραφήματα ως 1 -μονότονα γραφήματα. Αν κάθε $p, q \in P$ συνδέονται με κάποιο μονότονο μονοπάτι τότε το G καλείται *μονότονο*. Τα μονότονα γραφήματα εισήχθηκαν από τους Angelini et al. [7]. Το πρόβλημα της απεικόνισης ενός γραφήματος ως ένα μονότονο γράφημα έχει ευρέως ερευνηθεί [5, 7, 8, 26, 30, 31, 32, 33, 36, 53].

Το πρόβλημα της εύρεσης ενός μονότονου (σε καθορισμένη κατεύθυνση) μονοπατιού (εφόσον υπάρχει) που να συνδέει δύο δοθέντα σημεία και να μην τέμνει κάποια δοθέντα εμπόδια λύθηκε αποδοτικά από τους Arkin et al. [10]. Για να το καταφέρουν αυτό, οι Arkin et al. [10] έδωσαν έναν $O(|E|^2)$ χρόνου αλγόριθμο που αποφασίζει αν σε ένα δοθέν γεωμετρικό γράφημα $G = (P, E)$ ένας καθορισμένος κόμβος συνδέεται με όλους τους άλλους κόμβους του γραφήματος με μονότονα μονοπάτια.

Ένα σύνολο σημείων με k ρίζες P είναι ένα σύνολο σημείων όπου k σημεία του $r_1, r_2, \dots, r_k \in P$ διαφοροποιούνται από τα υπόλοιπα σημεία του P και αποκαλούνται *ρίζες* του P . Ένα γεωμετρικό γράφημα με k ρίζες $G = (P, E)$ είναι ένα γεωμετρικό γράφημα όπου το σύνολο των κόμβων του, P , είναι ένα σύνολο σημείων με k ρίζες και οι ρίζες του G είναι οι ρίζες του P . Ένα γεωμετρικό γράφημα με k ρίζες $G = (P, E)$ είναι y -μονότονο με k ρίζες (k -rooted y -monotone) αν κάθε ρίζα $r \in P$ και κάθε σημείο $p \in P \setminus \{r\}$ συνδέονται με κάποιο y -μονότονο μονοπάτι. Ένα γεωμετρικό γράφημα με k ρίζες $G = (P, E)$ είναι *ομοιόμορφα μονότονο με k ρίζες* (k -rooted uniform monotone) αν είναι y' -μονότονο με k ρίζες για κάποιον άξονα y' . Ένα πολύγωνο που είναι y -μονότονο με 2 ρίζες, όπου οι ρίζες του είναι ο χαμηλότερος και ο υψηλότερος κόμβος του, μπορεί να τριγωνοποιηθεί σε γραμμικό χρόνο [27]. Οι Preparata και Suprowit [56] έδειξαν ότι δοθέντος ενός πολυγώνου μπορεί σε γραμμικό χρόνο να αποφασιστεί αν υπάρχει άξονας y' τέτοιος ώστε, αν ο χαμηλότερος και ο υψηλότερος κόμβος του πολυγώνου (με βάση τον άξονα y') θεωρηθούν ρίζες του, το πολύγωνο να είναι y' -μονότονο με 2 ρίζες. Οι Lee και Preparata [40] προεπεξεργάστηκαν μια υποδιαίρεση S του επιπέδου έτσι ώστε η περιοχή στην οποία ένα δοθέν σημείο ανήκει να μπορεί να υπολογιστεί γρήγορα χρησιμοποιώντας y -μονότονα μονοπάτια. Πιο συγκεκριμένα οι Lee και Preparata [40] (i) επέκτειναν το γεωμετρικό γράφημα που περιβάλλει την υποδιαίρεση S σε ένα y -μονότονο με 2 ρίζες γεωμετρικό γράφημα στο οποίο οι ρίζες είναι ο υψηλό-

τερος και ο χαμηλότερος κόμβος του S και (ii) κατασκεύασαν ένα σύνολο κατάλληλων y -μονότονων μονοπατιών από το χαμηλότερο στον υψηλότερο κόμβο. Επιπλέον, οι Lee και Preparata [40] σημείωσαν ότι ένα γεωμετρικό γράφημα με 2 ρίζες, όπου όλοι οι κόμβοι έχουν διαφορετικές y -συντεταγμένες, στο οποίο οι ρίζες είναι ο υψηλότερος και ο χαμηλότερος κόμβος είναι y -μονότονο με 2 ρίζες αν και μόνο αν κάθε κόμβος διαφορετικός από τις ρίζες συνδέεται με ακμή και με έναν κόμβο υψηλότερο από αυτόν και με έναν κόμβο χαμηλότερο από αυτόν. Δοθέντος ενός συνόλου σημείων με k ρίζες P το y -Μονότονο Ελάχιστο Συνδετικό Γράφημα με k ρίζες (k -rooted y -Monotone Minimum Spanning Graph) του P , εν συντομία y -ΜΕΣΓ με k ρίζες (k -rooted y -MMSG) του P , είναι το y -μονότονο συνδετικό γράφημα με k ρίζες του P με το ελάχιστο κόστος. Για $k = |P|$, το y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα (με $|P|$ ρίζες) του P είναι το y -μονότονο μονοπάτι που περνάει από όλα τα σημεία του P [48].

Το πρόβλημα του δέντρου περιορισμένων πατέρων εισήχθη από τους Guttmann-Beck και Hassin [29]. Το πρόβλημα του δέντρου περιορισμένων πατέρων (*restricted fathers tree problem*) δέχεται ως είσοδο ένα πλήρες γράφημα με ρίζα όπου κάθε ακμή έχει ένα κόστος και κάθε κόμβος έχει μια τιμή και ο στόχος του προβλήματος είναι να βρεθεί το συνδετικό δέντρο ελάχιστου κόστους στο οποίο η ρίζα συνδέεται με κάθε άλλο κόμβο με ένα μονοπάτι στο οποίο οι τιμές των κόμβων με τη σειρά που διαπερνούνται από το μονοπάτι σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία. Οι Guttmann-Beck και Hassin [29] έδειξαν ότι το πρόβλημα του δέντρου περιορισμένων πατέρων επιλύεται άπληστα.

1.3 Γεωμετρικά γραφήματα με xy -μονότονα μονοπάτια

Ένα γεωμετρικό μονοπάτι $Q = (q_0, q_1, \dots, q_t)$ είναι xy -μονότονο αν και η ακολουθία των x -συντεταγμένων των σημείων του Q , δηλαδή η ακολουθία $x(q_0), x(q_1), \dots, x(q_t)$, είναι μονότονη και η ακολουθία των y -συντεταγμένων των σημείων του Q , δηλαδή η ακολουθία $y(q_0), y(q_1), \dots, y(q_t)$, είναι μονότονη. Το γεωμετρικό μονοπάτι Q είναι $2K$ -μονότονο αν είναι $x'y'$ -μονότονο για κάποιο Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$. Ένα γεωμετρικό γράφημα $G = (P, E)$ είναι $2K$ -μονότονο αν κάθε ζευγάρι κόμβων του G συνδέεται με ένα $2K$ -μονότονο μονοπάτι. Οι Bonichon et al. [16] ονόμασαν τα $2K$ -μονότονα μονοπάτια (γραφήματα) ως *γωνιακά-μονότονα* (*angle-monotone*) μονοπάτια (γραφήματα). Οι Bonichon et al. [16] έδειξαν ότι δοθέντος ενός γεωμετρικού γραφήματος $G = (P, E)$ μπορεί σε $O(|P| \cdot |E|^2)$ χρόνο να βρεθεί αν το G είναι $2K$ -μονότονο. Οι τριγωνοποιήσεις που δεν περιέχουν αμβλείες εσωτερικές γωνίες είναι $2K$ -μονότονα γραφήματα [20, 44]. Υπάρχουν σύνολα σημείων για τα οποία κανένα $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα τους δεν είναι επίπεδο [16]. Οι Lubiw και Mondal [43] απέδειξαν ότι δοθέντος ενός συνόλου σημείων P μπορεί να παραχθεί ένα $2K$ -μονότονο συνδετικό

γράφημα του P με ασυμπτωτικά λιγότερες από τετραγωνικού πλήθους ακμές.

Ένα γεωμετρικό γράφημα $G = (P, E)$ λέγεται xy -μονότονο αν κάθε ζευγάρι κόμβων του G συνδέεται με ένα xy -μονότονο μονοπάτι. Το G λέγεται ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο αν υπάρχει Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$ τέτοιο ώστε το G να είναι $x'y'$ -μονότονο. Έστω P ένα σύνολο σημείων. Το xy -Μονότονο Ελάχιστο Συνδετικό Γράφημα του P , εν συντομία xy -ΜΕΣΓ του P , είναι το xy -μονότονο συνδετικό γράφημα του P ελάχιστου κόστους. Παρόμοια, το Ομοιόμορφα $2K$ -Μονότονο Ελάχιστο Συνδετικό Γράφημα του P , εν συντομία $2K$ -ΟΜΕΣΓ του P , είναι το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα του P ελάχιστου κόστους. Παρόμοιους ορισμούς έχουμε και για γεωμετρικά γραφήματα με ρίζα. Πιο συγκεκριμένα, ένα γεωμετρικό γράφημα $G = (P, E)$ με ρίζα r λέγεται xy -μονότονο με ρίζα αν κάθε κόμβος του G διαφορετικός από τη ρίζα συνδέεται με την r με ένα xy -μονότονο μονοπάτι. Το G λέγεται ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο με ρίζα αν υπάρχει Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$ τέτοιο ώστε το G να είναι $x'y'$ -μονότονο με ρίζα. Έστω P ένα σύνολο σημείων με ρίζα. Το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με ρίζα του P είναι το xy -μονότονο συνδετικό γράφημα με ρίζα του P ελάχιστου κόστους. Το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με ρίζα του P είναι το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα με ρίζα του P ελάχιστου κόστους. Σε αυτήν την εργασία ασχολούμαστε με την παραγωγή του xy -ΜΕΣΓ ενός συνόλου σημείων και του $2K$ -ΟΜΕΣΓ ενός συνόλου σημείων όπως και την παραγωγή του xy -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα και του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα. Επιπλέον, μελετάμε την παραγωγή του xy -μονότονου συνδετικού γραφήματος με τις ελάχιστες ακμές ενός συνόλου σημείων όπως και του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου συνδετικού γραφήματος με τις ελάχιστες ακμές ενός συνόλου σημείων.

Ένα σύνολο σημείων P είναι σε κυρτή θέση αν κανένα σημείο $p \in P$ δεν είναι κυρτός συνδυασμός των υπολοίπων σημείων του P .

Μια καμπύλη C λέγεται καμπύλη αυξουσών-χορδών (*increasing-chord curve*) [39, 57] αν για κάθε q_1, q_2, q_3, q_4 που συναντώνται με αυτή τη σειρά στην καμπύλη το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{q_1q_4}$ είναι μεγαλύτερο από ή ίσο με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{q_2q_3}$. Οι Alamdari et al. [3] εισήγαγαν τα γραφήματα αυξουσών-χορδών που είναι τα γεωμετρικά γραφήματα στα οποία κάθε ζευγάρι κόμβων συνδέεται με ένα μονοπάτι αυξουσών-χορδών. Τα γραφήματα αυξουσών-χορδών είναι εκτενώς μελετημένα [3, 11, 20, 52]. Το πρόβλημα της παραγωγής συνδετικών γραφημάτων αυξουσών-χορδών (όπου Steiner σημεία, δηλαδή επιπρόσθετα σημεία που δεν δίνονται ως είσοδος, μπορούν να προστεθούν) ενός συνόλου σημείων μελετήθηκε στα [3, 20]. Η προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε στα [3, 20] ήταν να συνδέουν τα σημεία του δοθέντος συνόλου σημείων με $2K$ -μονότονα μονοπάτια καθώς όπως αποδείχθηκε από τους Alamdari et al. [3] τα $2K$ -μονότονα μονοπάτια είναι και μονοπάτια αυξουσών-χορδών. Πιο συγκεκριμένα, οι Alamdari et al. [3] επέκτειναν ένα σύ-

νολο σημείων P σε ένα γεωμετρικό γράφημα $G = (N, E)$ με $P \subset N$ και $|N| = O(|P|)$, το οποίο δεν είναι κατ' ανάγκη επίπεδο, και στο οποίο κάθε $p, q \in P$ συνδέονται με ένα $2K$ -μονότονο μονοπάτι. Λίγο αργότερα, οι Dehkordi et al. [20] απέδειξαν ότι δοθέντος ενός συνόλου σημείων P μπορεί να βρεθεί ένα $2K$ -μονότονο γεωμετρικό γράφημα $G = (N, E)$ με $P \subset N$ και $|N| = O(|P|)$ το οποίο είναι επίπεδο. Επιπλέον, οι Dehkordi et al. [20] απέδειξαν ότι για ένα σύνολο σημείων σε κυρτή θέση P μπορεί να παραχθεί ένα $2K$ -μονότονο γεωμετρικό γράφημα $G = (P, E)$ με $|E| = O(|P| \log |P|)$. Εμείς μελετάμε το πρόβλημα της εύρεσης ενός $2K$ -μονότονου συνδετικού γραφήματος ενός συνόλου σημείων σε κυρτή θέση P το οποίο να έχει $O(|P|)$ ακμές και σταθερού πλήθους Steiner σημεία.

1.4 Το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής

Έστω P ένα σύνολο σημείων και $p, q \in P$, τα p και q είναι ορθογώνια ορατά (*rectangularly visible*) αν το ορθογώνιο με γωνιακά σημεία τα p και q και πλευρές παράλληλες στους άξονες του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων δεν περιέχει άλλα σημεία (εκτός από τα p και q) του P . Το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής (*rectangle of influence graph*) του P είναι το συνδετικό γράφημα του P τέτοιο ώστε το \overline{pq} είναι ακμή του γραφήματος αν και μόνο αν τα p και q είναι ορθογώνια ορατά. Οι Alon et al. [4] συμβόλισαν τα ορθογώνια ορατά σημεία ως διαχωρίσιμα σημεία (*separated points*) και το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής ως το διαχωρίσιμο γράφημα (*separation graph*). Οι Overmars και Wood [54] απέδειξαν ότι το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής $G = (P, E)$ ενός συνόλου σημείων P μπορεί να παραχθεί σε $O(|P| \cdot \log |P| + |E|)$ χρόνο. Οι Alon et al. [4] έδειξαν ότι υπάρχουν σύνολα σημείων P για τα οποία το πλήθος των ακμών του γραφήματος του ορθογωνίου επιρροής του P είναι $\Omega(|P|^2)$. Οι Ichino και Sklansky [34] σημείωσαν ότι το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής δεν παραμένει το ίδιο αν το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων περιστρέφεται. Το πρόβλημα της απεικόνισης ενός γραφήματος ως γραφήματος του ορθογωνίου επιρροής μελετήθηκε από τους Liotta et al. [41]. Παραλλαγές του γραφήματος του ορθογωνίου επιρροής, στις οποίες δύο σημεία θεωρούνται ορθογώνια ορατά αν το ανοιχτό ορθογώνιο με αυτά τα σημεία ως γωνιακά ή/και όπου δεν είναι αναγκαίο δύο σημεία που είναι ορθογώνια ορατά να συνδέονται με ακμή, έχουν μελετηθεί υπό το πρίσμα της απεικόνισης γραφημάτων [1, 2, 14, 50, 58].

1.5 Οργάνωση εργασίας

Στο Κεφάλαιο 2 δίνονται βασικοί ορισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα διατριβή.

Στο Κεφάλαιο 3 ασχολούμαστε με το πρόβλημα της εύρεσης του

y -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P . Χτίζοντας πάνω σε προηγούμενα αποτελέσματα δείχνουμε ότι το y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με ρίζα του P (i) είναι ένα δέντρο (Πόρισμα 3) το οποίο αποκαλούμε το y -Μονότονο Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο με ρίζα (y -ΜΕΣΔ με ρίζα) του P και (ii) εξάγεται σε $O(|P| \log^2 |P|)$ χρόνο (Θεώρημα 1). Ύστερα ασχολούμαστε με το πρόβλημα της εύρεσης του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα του συνόλου σημείων με ρίζα P . Όπου το Ομοιόμορφα Μονότονο Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο με ρίζα (*rooted Uniform Monotone Minimum Spanning Tree*) ενός συνόλου σημείων με ρίζα P , εν συντομία ΟΜΕΣΔ με ρίζα (*rooted UMMST*) του P , είναι το ομοιόμορφα μονότονο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P με το ελάχιστο κόστος. Δείχνουμε ότι το ομοιόμορφα μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P εξάγεται σε $O(|P|^2 \log |P|)$ χρόνο (Θεώρημα 2). Παρέχουμε επίσης έναν $O(|E| \log |P|)$ χρόνου αλγόριθμο που καθορίζει αν ένα γεωμετρικό γράφημα με ρίζα $G = (P, E)$ είναι ομοιόμορφα μονότονο με ρίζα (Θεώρημα 3). Ασχολούμαστε επιπλέον με αντίστοιχα προβλήματα για δύο όμως κατευθύνσεις. Έστω P ένα σύνολο σημείων με ρίζα. Δείχνουμε ότι το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με ρίζα του P είναι ένα δέντρο (Πόρισμα 5) το οποίο αποκαλούμε το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P και το οποίο εξάγεται σε $O(|P| \log^3 |P|)$ χρόνο (Θεώρημα 4). Ακόμα δείχνουμε ότι το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P εξάγεται σε $O(|P|^2 \log |P|)$ χρόνο (Θεώρημα 5). Τέλος, παρέχουμε έναν αλγόριθμο που καθορίζει αν ένα γεωμετρικό γράφημα με ρίζα $G = (P, E)$ είναι ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο με ρίζα σε $O(|E| \log |P|)$ χρόνο (Θεώρημα 6). Το κεφάλαιο αποτελεί προϊόν συνεργασίας με τον Καθηγητή Αντώνιο Συμβώνη. Μέρος του κεφαλαίου εμφανίζεται στο [48].

Στο Κεφάλαιο 4 μελετάμε το πρόβλημα της εύρεσης του xy -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος ενός συνόλου σημείων P και το πρόβλημα της εύρεσης του xy -μονότονου συνδετικού γραφήματος με το ελάχιστο πλήθος ακμών ενός συνόλου σημείων P . Χτίζοντας πάνω σε προηγούμενα αποτελέσματα εξάγουμε εύκολα ότι δοθέντος ενός συνόλου σημείων P το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P είναι ίσο με το xy -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P και τα δύο αυτά είναι ίσα με το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής του P (Πόρισμα 7). Μελετάμε επίσης το πρόβλημα της εύρεσης του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος ενός συνόλου σημείων P και το πρόβλημα της εύρεσης του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου συνδετικού γραφήματος με το ελάχιστο πλήθος ακμών ενός συνόλου σημείων P . Σημειώνουμε ότι δοθέντος ενός συνόλου σημείων P το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P δεν ταυτίζεται πάντα με το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P . Όμως δείχνουμε ότι το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P μπορεί να παραχθεί σε $O(|P|^3)$ χρόνο (Θεώρημα 7) και σημειώνουμε ότι και το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P μπορεί να παραχθεί σε $O(|P|^3)$ χρόνο αλλάζοντας τετριμ-

μένα τον αλγόριθμο που παράγει το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα. Μελετάμε τέλος το πρόβλημα της εύρεσης του y -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος με k ρίζες ενός συνόλου σημείων με k ρίζες P και δίνουμε έναν απλό 2 -προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα της εύρεσης του y -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος με k ρίζες ενός συνόλου σημείων με k ρίζες P (Θεώρημα 8). Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Αντώνιο Συμβώνη για την πολύτιμη εισφορά του στην ανάπτυξη των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό. Μέρος του κεφαλαίου εμφανίζεται στο [45].

Στο κεφάλαιο 5 μελετάμε το πρόβλημα της παραγωγής $2K$ -μονότονων συνδετικών γραφημάτων σε σύνολα σημείων σε κυρτή θέση. Εξάγουμε ότι δοθέντος ενός συνόλου σημείων σε κυρτή θέση P παράγεται ένα $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα που έχει ως σύνολο κόμβων το P μαζί με λιγότερο από ή ίσο με ένα Steiner σημείο (δηλαδή ένα επιπρόσθετο σημείο που δεν δίνεται ως είσοδος) και έχει λιγότερες από ή ίσες με $4|P| - 8$ ακμές (Θεώρημα 9). Το κεφάλαιο αποτελεί προϊόν συνεργασίας με τον Καθηγητή Αντώνιο Συμβώνη. Μέρος του κεφαλαίου εμφανίζεται στο [47].

Στο Κεφάλαιο 6 μελετάμε το πρόβλημα της απεικόνισης ενός δέντρου με ρίζα ως ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα. Αρχικά δίνουμε ένα γραμμικού χρόνου αλγόριθμο ο οποίος απεικονίζει ένα δέντρο με ρίζα ως ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα (Θεώρημα 10). Αυτό σημαίνει ότι παρέχουμε ένα γραμμικού χρόνου αλγόριθμο ο οποίος δέχεται ως είσοδο ένα δέντρο T με ρίζα r και κατασκευάζει μια απεικόνιση ευθύγραμμων-τμημάτων Γ του T με την ακόλουθη ιδιότητα: Το y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του συνόλου σημείων με ρίζα P στο οποίο απεικονίζονται οι κόμβοι του T στο Γ είναι ισομορφικό με το T , όπου η ρίζα του P είναι το σημείο του P στο οποίο απεικονίζεται η r στο Γ . Πόρισμα της προηγούμενης πρότασης είναι ότι δεν υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε ο μέγιστος βαθμός κάθε y -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα να είναι φραγμένος από τη C (Πόρισμα 8). Επιπλέον δείχνουμε ότι υπάρχουν δέντρα με ρίζα για τα οποία κάθε απεικόνιση στο πλέγμα ως ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα απαιτεί ένα πλέγμα με εκθετικό εμβαδό (και όχι ένα πλέγμα με πολυωνυμικό εμβαδό) (Θεώρημα 11). Μέρος του κεφαλαίου εμφανίζεται στο [46].

Ορισμοί

Όλα τα γεωμετρικά αντικείμενα που αντιμετωπίζουμε βρίσκονται στο επίπεδο.

Έστω Q ένα σύνολο σημείων και c ένας πραγματικός αριθμός. Το $Q_{x \geq c}$ είναι το υποσύνολο του Q που περιέχει τα σημεία που έχουν x -συντεταγμένη μεγαλύτερη από ή ίση με c . Τα σύνολα $Q_{x \leq c}$, $Q_{y \geq c}$, $Q_{y \leq c}$, $Q_{|x| \geq c}$, $Q_{|x| \leq c}$, $Q_{|y| \geq c}$ και $Q_{|y| \leq c}$ ορίζονται ανάλογα. Το $Q_{x \geq c, y \geq c}$ είναι το σύνολο $Q_{x \geq c} \cap Q_{y \geq c}$. Τα σύνολα $Q_{x \leq c, y \geq c}$, $Q_{x \geq c, y \leq c}$ και $Q_{x \leq c, y \leq c}$ ορίζονται ανάλογα. Τα τεταρτημόρια του επιπέδου είναι τα $\mathbb{R}_{x \leq 0, y \leq 0}^2$, $\mathbb{R}_{x \geq 0, y \leq 0}^2$, $\mathbb{R}_{x \leq 0, y \geq 0}^2$ και $\mathbb{R}_{x \geq 0, y \geq 0}^2$.

Έστω a, b σημεία. Το \vec{ab} είναι το διάνυσμα από το a στο b . Έστω \vec{a} και \vec{b} διανύσματα τότε η κυρτή γωνία των \vec{a} και \vec{b} συμβολίζεται ως $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Έστω L μια ευθεία. Αν η L είναι παράλληλη στον άξονα των x τότε η κλίση της L είναι 0. Αλλιώς έστω \vec{l} ένα διάνυσμα παράλληλο προς την L με θετική y -συντεταγμένη και \vec{a} ένα διάνυσμα με κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση του άξονα των x . Τότε η κλίση της L είναι η κυρτή γωνία των \vec{l} και \vec{a} .

Έστω a, b σημεία τότε $d(a, b)$ είναι η απόσταση των a και b . Έστω Q ένα σύνολο σημείων, η $d(a, Q)$ είναι η απόσταση του a από το Q . Πιο επίσημα $d(a, Q) = \min_{b \in Q} d(a, b)$.

Έστω $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$ δυο γραφήματα τότε το G_1 είναι υπογράφημα του G_2 αν το V_1 είναι υποσύνολο του V_2 και το E_1 είναι υποσύνολο του E_2 . Έστω $G_0 = (V_0, L_0)$, $G_1 = (V_1, L_1)$, ..., $G_k = (V_k, L_k)$ γραφήματα. Η ένωση $G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_k$ των G_0, G_1, \dots, G_k είναι το $G = (V, L)$ όπου $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$ και $L = L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_k$.

Το βάθος ενός δέντρου T με ρίζα είναι το μέγιστο πλήθος ακμών που διασχίζονται σε ένα μονοπάτι από τη ρίζα του T σε ένα άλλο κόμβο του T .

Ομοιόμορφα μονότονα ε- λάχιστα συνδετικά δέντρα με ρίζα

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά μελετάμε το πρόβλημα της εύρεσης του y -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P . Χτίζοντας πάνω σε προηγούμενα αποτελέσματα δείχνουμε ότι το y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με ρίζα του P (i) είναι ένα δέντρο το οποίο αποκαλούμε το y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P και (ii) μπορεί να παραχθεί σε $O(|P| \log^2 |P|)$ χρόνο. Ύστερα μελετάμε το πρόβλημα της εύρεσης του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα του συνόλου σημείων με ρίζα P και δείχνουμε ότι αυτό μπορεί να παραχθεί σε $O(|P|^2 \log |P|)$ χρόνο. Ενώ όσον αφορά την αναγνώριση ομοιόμορφα μονότονων με ρίζα γραφημάτων δίνουμε έναν $O(|E| \log |P|)$ χρόνου αλγόριθμο που αποφασίζει αν ένα γεωμετρικό γράφημα με ρίζα $G = (P, E)$ είναι ομοιόμορφα μονότονο με ρίζα. Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε επιπλέον αντίστοιχα προβλήματα για δύο όμως κατευθύνσεις. Πιο συγκεκριμένα δείχνουμε ότι το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με ρίζα του συνόλου σημείων με ρίζα P είναι ένα δέντρο το οποίο αποκαλούμε το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P το οποίο μπορεί να παραχθεί σε $O(|P| \log^3 |P|)$ χρόνο. Ακόμα δείχνουμε ότι το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P μπορεί να παραχθεί σε $O(|P|^2 \log |P|)$ χρόνο. Τέλος, δίνουμε έναν αλγόριθμο που αποφασίζει αν ένα γεωμετρικό γράφημα με ρίζα $G = (P, E)$ είναι ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο με ρίζα σε $O(|E| \log |P|)$ χρόνο.

Στο κεφάλαιο αυτό υποθέτουμε ότι η ρίζα r ενός συνόλου σημείων με ρίζα βρίσκεται στο σημείο $(0, 0)$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι όλα τα σύνολα σημείων είναι σε γενική θέση, δηλαδή δεν υπάρχουν τρία σημεία του συνόλου που είναι συνευθειακά.

3.1 Προπαρασκευαστικά

Έστω P ένα σύνολο σημείων. Το P καλείται y -θετικό (y -αρνητικό) αν για κάθε $p \in P$ ισχύει ότι $y(p) \geq 0$ ($y(p) \leq 0$).

Το πρόβλημα του κοντινότερου σημείου (closest point problem) αρχικά διατυπώθηκε ως το πρόβλημα του ταχυδρομείου (post-office problem) από τον Knuth [38]. Στο πρόβλημα του κοντινότερου σημείου υπάρχει ένα σύνολο σημείων S που είναι στατικό, δηλαδή δεν μπορεί να μεταβληθεί εισάγοντας σημεία σε αυτό ή αφαιρώντας σημεία από αυτό και ο στόχος είναι να βρεθεί το κοντινότερο σημείο από το S σε ένα δοθέν σημείο. Το πρόβλημα του κοντινότερου σημείου συνήθως ανάγεται στο πρόβλημα της εύρεσης της περιοχής μιας υποδιαίρεσης του επιπέδου στην οποία το δοθέν σημείο βρίσκεται [59, 24]. Αποδοτικές στατικές δομές δεδομένων έχουν παραχθεί για να εντοπίζονται οι περιοχές που ανήκουν τα δοθέντα σημεία σε λογαριθμικό χρόνο εκτελώντας γρήγορους αλγορίθμους προεπεξεργασίας [42, 37]. Όσον αφορά την ημι-δυναμική παραλλαγή του προβλήματος του κοντινότερου σημείου, στην οποία επιτρέπονται εισαγωγές σημείων στο S αλλά δεν επιτρέπονται διαγραφές σημείων από αυτό, ο Bentley [12] παρήγαγε μια πολύ χρήσιμη ημι-δυναμική δομή δεδομένων.

Γεγονός 1 (Bentley [12]). *Υπάρχει μια ημι-δυναμική δομή δεδομένων που έχει μόνο δυο μεθόδους, την εισαγωγή ενός σημείου σε αυτήν και την εύρεση του κοντινότερου σημείου που περιέχεται στη δομή σε ένα δοθέν σημείο. Όπου η εύρεση του κοντινότερου σημείου που περιέχεται στη δομή σε ένα δοθέν σημείο εκτελείται σε $O(\log^2 n)$ χρόνο (όπου το n είναι το πλήθος των σημείων που περιέχει η δομή) και το να εισάγεις n σημεία σε μια αρχικά άδεια δομή παίρνει $O(n \log^2 n)$ συνολικό χρόνο.*

Μια παραλλαγή του προβλήματος του κοντινότερου σημείου που μελετήθηκε στην τέταρτη ενότητα του άρθρου του Bentley [12], μας φαίνεται πολύ χρήσιμη όταν μελετάμε το πρόβλημα της εύρεσης του xy -μόντονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα. Πιο συγκεκριμένα, σε αυτήν την παραλλαγή κάθε σημείο του S συσχετίζεται με μια αριθμητική τιμή. Ο στόχος του προβλήματος αυτού είναι, δοθέντος ενός σημείου q και ενός εύρους τιμών $[a, b]$, να βρεθεί το κοντινότερο σημείο στο q από το υποσύνολο των σημείων του S που έχουν αριθμητική τιμή στο εύρος $[a, b]$. Για τη στατική έκδοση του προβλήματος, δηλαδή όταν το S δεν μπορεί να μεταλλαχθεί, ο Bentley [12] έδωσε μια στατική δομή δεδομένων που προσθέτει ένα πολλαπλασιαστικό λογαριθμικό παράγοντα στον χρόνο προεπεξεργασίας και στον χρόνο εύρεσης του κοντινότερου σημείου σε δοθέν σημείο της στατικής δομής δεδομένων για την εύρεση του κοντινότερου σημείου. Όσον αφορά την ημι-δυναμική παραλλαγή του προβλήματος ο Bentley [12] έμμεσα έδωσε, από την στατική δομή δεδομένων που έδωσε στην τέταρτη ενότητα του άρθρου του Bentley [12] και τα αποτελεσματα του για τα αποσυντιθέμενα προβλήματα (decomposable problems) που δόθηκαν στην τρίτη

ενότητα του άρθρου του Bentley [12], μια πολύ χρήσιμη ημι-δυναμική δομή δεδομένων.

Γεγονός 2 (Bentley [12]). Υπάρχει μια ημι-δυναμική δομή δεδομένων που υποστηρίζει τις λειτουργίες (i) εισαγωγή ενός σημείου και (ii) δοθέντος ενός σημείου q και ενός εύρους τιμών $[a, b]$ την εύρεση του κοντινότερου σημείου στο q από το υποσύνολο των σημείων της δομής δεδομένων που η αριθμητική τους τιμή είναι μέσα στο εύρος $[a, b]$. Όπου η εύρεση του κοντινότερου σημείου παίρνει $O(\log^3 n)$ χρόνο (όπου n είναι το πλήθος των σημείων στη δομή δεδομένων) και η εισαγωγή n σημείων στην (αρχικά άδεια) δομή δεδομένων παίρνει $O(n \log^3 n)$ συνολικό χρόνο.

3.2 Το πρόβλημα της κατασκευής του y -μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού δέντρου με ρίζα

Στην ενότητα αυτή μελετάμε το πρόβλημα της κατασκευής του y -μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού δέντρου με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P .

Παρατήρηση 1. Έστω P ένα σύνολο σημείων με ρίζα r και $G = (P, E)$ ένα y -μονότονο συνδεδετικό γράφημα με ρίζα του P και έστω μια ακμή $\overline{p_d p_u} \in E$ με $y(p_d) < 0 < y(p_u)$. Τότε κάθε μονοπάτι από τη ρίζα r σε κάποιο σημείο $p \in P \setminus \{r\}$ που περιέχει την ακμή $\overline{p_d p_u}$ δεν είναι y -μονότονο καθώς πηγαίνει προς τα πάνω στο p_u και μετά προς τα κάτω στο p_d ή αντίστροφα.

Πόρισμα 1. Έστω P ένα σύνολο σημείων με ρίζα, $G^{opt} = (P, E)$ το y -μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό γράφημα με ρίζα του P και $p_d, p_u \in P$ τέτοια ώστε $y(p_d) < 0 < y(p_u)$. Τότε, $\overline{p_d p_u} \notin E$.

Το Πόρισμα 1 συνεπάγεται ότι η ρίζα του P χωρίζει το πρόβλημα της εύρεσης του y -μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού γραφήματος με ρίζα του P σε δύο ανεξάρτητα προβλήματα. Συγκεκριμένα στα προβλήματα της εύρεσης του y -μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού γραφήματος με ρίζα του (i) $P_{y \leq 0}$ και (ii) $P_{y \geq 0}$. Οπότε, εξάγουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 1. Έστω P ένα σύνολο σημείων με ρίζα και G^{opt} το y -μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό γράφημα με ρίζα του P . Έστω επίσης $G_{y \leq 0}^{opt}$ και $G_{y \geq 0}^{opt}$ τα y -μονότονα ελάχιστα συνδεδετικά γραφήματα με ρίζα των $P_{y \leq 0}$ και $P_{y \geq 0}$, αντίστοιχα. Τότε το G^{opt} είναι η ένωση των $G_{y \leq 0}^{opt}$ και $G_{y \geq 0}^{opt}$.

Τώρα μελετάμε το πρόβλημα της παραγωγής του y -μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού γραφήματος με ρίζα ενός y -θετικού (ή y -αρνητικού) συνόλου σημείων P με ρίζα r . Έστω $S[P, y]$ η ακολουθία των σημείων του P ταξινομημένη με βάση την απόλυτη τιμή της

y -συντεταγμένης τους και αν δύο σημεία έχουν την ίδια y -συντεταγμένη τότε αυτά είναι διατεταγμένα με βάση την απόστασή τους από τα προηγούμενα σημεία του $S[P, y]$. Πιο συγκεκριμένα, $S[P, y] = (r = p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$ έτσι ώστε $|y(p_0)| \leq |y(p_1)| \leq |y(p_2)| \leq \dots \leq |y(p_n)|$ και $|y(p_i)| = |y(p_{i+1})| \implies d(p_i, \{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}\}) \leq d(p_{i+1}, \{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}\})$ και $P = \{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Επιπλέον, καλούμε το κοντινότερο σημείο στο p_i από το σύνολο $\{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}\}$ ως το γονιό του p_i και το συμβολίζουμε ως $\text{γον}(p_i)$. Πιο επίσημα, $\text{γον}(p_i) = p_j$ αν και μόνο αν $p_j \in \{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}\}$ και $d(p_i, p_j) = d(p_i, \{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}\})$.

Ανακαλούμε ότι το πρόβλημα του δέντρου περιορισμένων πατέρων, στο οποίο δίνεται ένα πλήρες γράφημα με ρίζα όπου κάθε ακμή έχει ένα κόστος και κάθε κόμβος έχει μια τιμή και στόχος του οποίου είναι να βρεθεί το συνδυαστικό δέντρο ελάχιστου κόστους στο οποίο η ρίζα συνδέεται με κάθε κόμβο με ένα μονοπάτι στο οποίο οι τιμές των κόμβων με τη σειρά που διαπερνούνται από το μονοπάτι σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία, επιλύεται άπληστα [29, Πόρισμα 2.6]. Πόρισμα της προηγούμενης πρότασης είναι το ακόλουθο.

Πόρισμα 2. Έστω P ένα y -θετικό (ή y -αρνητικό) σύνολο σημείων με ρίζα r και $S[P, y] = (r = p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$ τότε οι ακμές του y -μονότονου ελάχιστου συνδυαστικού γραφήματος με ρίζα του P είναι ακριβώς τα ευθύγραμμα τμήματα $\text{γον}(p_i)p_i$ για $i = 1, 2, \dots, n$.

Σημειώνουμε εδώ ότι το Πόρισμα 2 είχε εξαχθεί με διαφορετικό τρόπο στο άρθρο [48]. Όμως μετά τη δημοσίευση του [48] ο Καθηγητής Rafi Hassin επικοινωνήσε μαζί μας ενημερώνοντας μας για την ύπαρξη του άρθρου [29] και εκφράζοντας σε εμάς την άποψή του ότι το πρόβλημα της εύρεσης του y -μονότονου ελάχιστου συνδυαστικού γραφήματος με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα είναι ειδική περίπτωση του προβλήματος του δέντρου περιορισμένων πατέρων αν οι τιμές των κόμβων στο πρόβλημα του δέντρου περιορισμένων πατέρων επάγονται από την y -συντεταγμένη των σημείων. Μετά από αυτήν την επικοινωνία του Καθηγητή Rafi Hassin το Πόρισμα 2 παρουσιάζεται ως πόρισμα του [29, Πόρισμα 2.6].

Το Λήμμα 1 και το Πόρισμα 2 συνεπάγονται το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3. Το y -μονότονο ελάχιστο συνδυαστικό γράφημα με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα είναι ένα γεωμετρικό δέντρο.

Τώρα δίνουμε τον αλγόριθμο που κατασκευάζει το y -μονότονο ελάχιστο συνδυαστικό δέντρο με ρίζα ενός y -θετικού (ή y -αρνητικού) συνόλου σημείων με ρίζα P . Ο αλγόριθμος προκύπτει από το Πόρισμα 2. Για να είναι υπολογιστικά αποδοτικός χρησιμοποιεί την ημιδυναμική δομή δεδομένων για την εύρεση του κοντινότερου σημείου σε δοθέν σημείο (που έχει μόνο δύο λειτουργίες, την εισαγωγή σημείου και την εύρεση του κοντινότερου σημείου σε δοθέν σημείο) που δόθηκε από τον Bentley [12] έτσι ώστε η χρονική πολυπλοκότητα του να είναι $O(|P| \cdot \log^2 |P|)$. Ο αλγόριθμος περιγράφεται στον Αλγόριθμο 1.

Θεώρημα 1. Το y -μονότονο ελάχιστο συνδυαστικό δέντρο με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P μπορεί να παραχθεί σε $O(|P| \log^2 |P|)$ χρόνο.

Αλγόριθμος 1 Ο αλγόριθμος του y -ΜΕΣΔ με ρίζα

Είσοδος: Ένα y -θετικό (ή y -αρνητικό) σύνολο σημείων P με ρίζα r .

Έξοδος: Το y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P .

- 1: $T \leftarrow$ το γεωμετρικό γράφημα με το P ως το σύνολο των κόμβων και \emptyset ως το σύνολο των ακμών.
 - 2: Ταξινόμησε τα σημεία του P με βάση την απόλυτη τιμή των y -συντεταγμένων τους κατασκευάζοντας την ακολουθία S . Αν κάποια σημεία έχουν ίση y -συντεταγμένη διάταξε τα αυθαίρετα (η σχετική τους διάταξη μπορεί να αλλάξει αργότερα καθώς στο τέλος του αλγορίθμου η S θα είναι ίση με το $S[P, y]$). Πιο επίσημα, $S = (r = S[0], S[1], \dots, S[n])$ με $|y(S[i])| \leq |y(S[i+1])|$.
 - 3: Η ΔΔ_Εγγύτητας είναι μια (αρχικά άδεια) ημι-δυναμική δομή δεδομένων για εύρεση του κοντινότερου σημείου σε δοθέν σημείο.
 - 4: Εισήγαγε την r στη ΔΔ_Εγγύτητας.
 - 5: $i \leftarrow 1$ \triangleright Το i καταδεικνύει το δείκτη του επόμενου σημείου που θα επεξεργαστούμε, δηλαδή που θα βρούμε το γονιό του και θα το εισάγουμε στη ΔΔ_Εγγύτητας.
 - 6: **while** $i \leq n$ **do**
 - 7: $\gammaον(S[i]) \leftarrow$ το κοντινότερο σημείο στο $S[i]$ από τα σημεία της ΔΔ_Εγγύτητας, που εξάγεται καλώντας τη μέθοδο εύρεσης του κοντινότερου σημείου σε δοθέν σημείο της ΔΔ_Εγγύτητας.
 \triangleright Τώρα ελέγχουμε αν το $S[i]$ έχει τη σωστή θέση στην S , δηλαδή η θέση του στην S είναι η ίδια με τη θέση του στο $S[P, y]$. Αυτό μπορεί να μην ισχύει αν η $y(S[i])$ είναι ίση με τη $y(S[i+1])$.
 - 8: **if** $(i > n - 1)$ **or** $(y(S[i]) \neq y(S[i+1]))$ **then**
 - 9: Εισήγαγε το $S[i]$ στη ΔΔ_Εγγύτητας και εισήγαγε την ακμή $\gammaον(S[i])S[i]$ στο T .
 - 10: $i \leftarrow i + 1$
 - 11: **else** \triangleright Η $y(S[i]) = y(S[i+1])$, οπότε δεν ξέρουμε αν τα σημεία $S[i]$ και $S[i+1]$ έχουν τη σωστή θέση στην S .
 - 12: $\gammaον(S[i+1]) \leftarrow$ κοντινότερο σημείο στο $S[i+1]$ από τα σημεία που είναι στη ΔΔ_Εγγύτητας, που εξάγεται εκτελώντας μια μέθοδο εύρεσης του κοντινότερου σημείου σε δοθέν σημείο.
 \triangleright Τώρα ελέγχουμε αν τα $S[i]$ και $S[i+1]$ έχουν τη σωστή θέση στην S ή πρέπει να αντιμετωπισθούν (να γίνουν swap).
 - 13: **if** $d(\gammaον(S[i]), S[i]) > d(\gammaον(S[i+1]), S[i+1])$ **then**
 - 14: Αντιμετάθεσε (κάνε swap) τα σημεία με δείκτες i και $i+1$ στην S .
 \triangleright Έλεγχε αν ο $\gammaον(S[i+1])$ είναι το $S[i]$.
 - 15: **if** $d(S[i], S[i+1]) < d(\gammaον(S[i+1]), S[i+1])$ **then**
 - 16: $\gammaον(S[i+1]) \leftarrow S[i]$.
 - 17: Εισήγαγε τα $S[i]$ και $S[i+1]$ στη ΔΔ_Εγγύτητας.
 - 18: Εισήγαγε τις $\gammaον(S[i])S[i]$ και $\gammaον(S[i+1])S[i+1]$ στο T .
 \triangleright Και το $S[i]$ και το $S[i+1]$ επεξεργάστηκαν.
 - 19: $i \leftarrow i + 2$
 - 20: **Επέστρεψε** το T .
-

Απόδειξη. Αρχικά παράγουμε τα $P_{y \leq 0}$ και $P_{y \geq 0}$. Μετά εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του y -ΜΕΣΔ με ρίζα (Αλγόριθμος 1) στα $P_{y \leq 0}$ και $P_{y \geq 0}$ παράγοντας τα $T_{y \leq 0}$ και $T_{y \geq 0}$, αντίστοιχα. Από το Πρόβλημα 2 προκύπτει ότι το $T_{y \leq 0}$ και το $T_{y \geq 0}$ είναι τα y -μονότονα ελάχιστα συνδεδετικά δέντρα με ρίζα των $P_{y \leq 0}$ και $P_{y \geq 0}$, αντίστοιχα. Από το Γεγονός 1 και το ότι πραγματοποιούνται $O(|P|)$ εισαγωγές στην ημι-δυναμική δομή δεδομένων για την εύρεση του κοντινότερου σημείου όπως και $O(|P|)$ ευρέσεις κοντινότερου σημείου, η παραγωγή των $T_{y \leq 0}$ και $T_{y \geq 0}$ παίρνει $O(|P| \log^2 |P|)$ χρόνο. Τέλος από το Λήμμα 1 προκύπτει ότι το $T_{y \leq 0} \cup T_{y \geq 0}$ είναι το y -μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό δέντρο με ρίζα του P . \square

3.3 Το πρόβλημα της αναγνώρισης y -μονότονων με ρίζα γραφημάτων

Τώρα μελετάμε το πρόβλημα της αναγνώρισης γεωμετρικών γραφημάτων με ρίζα που είναι y -μονότονα με ρίζα. Οι Lee και Preparata [40] σημείωσαν το ακόλουθο γεγονός που αφορά γεωμετρικά γραφήματα με ρίζα, όπου η ρίζα είναι ο χαμηλότερος (υψηλότερος) κόμβος τους.

Γεγονός 3 ([40]). Έστω $G = (P, E)$ ένα γεωμετρικό γράφημα με ρίζα r όπου η ρίζα r είναι ο χαμηλότερος (υψηλότερος) κόμβος του G . Τότε το G είναι y -μονότονο με ρίζα αν και μόνο αν για κάθε $p \in P \setminus \{r\}$ ισχύει μια από τις ακόλουθες τρεις συνθήκες:

1. υπάρχει σημείο $q \in P$ γειτονικό του p με $y(q) < y(p)$ (αντίστοιχα $y(q) > y(p)$).
2. υπάρχουν $q, s \in P$ τέτοια ώστε το q είναι γειτονικό του p με $y(q) = y(p)$ και το s είναι γειτονικό του q με $y(s) < y(q)$ (αντίστοιχα $y(s) > y(q)$).
3. $y(p) = 0$ και το p είναι γειτονικό με την r .

Το Γεγονός 3 επεκτείνεται τετριμμένα στην ακόλουθη πρόταση που αφορά γεωμετρικά γραφήματα με ρίζα, όπου η ρίζα δεν είναι αναγκαία ο χαμηλότερος ή ο υψηλότερος κόμβος τους.

Πρόταση 1. Έστω $G = (P, E)$ ένα γεωμετρικό γράφημα με ρίζα r . Τότε το G είναι y -μονότονο με ρίζα αν και μόνο αν για κάθε $p \in P \setminus \{r\}$ ισχύει μια από τις ακόλουθες τρεις συνθήκες:

1. υπάρχει $q \in P$ γειτονικό του p που βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το p ως προς τον άξονα των x και ισχύει ότι $|y(q)| < |y(p)|$.
2. υπάρχουν $q, s \in P$ τέτοια ώστε το q είναι γειτονικό του p με $y(q) = y(p)$ και το s είναι γειτονικό του q με το s να βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το q (και το p) ως προς τον άξονα των x και $|y(s)| < |y(q)|$.
3. $y(p) = 0$ και το p είναι γειτονικό με την r .

Προτείνουμε ακόμα έναν απλό $O(|E|)$ χρόνου αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει αν ένα δοθέν γεωμετρικό γράφημα με ρίζα $G = (P, E)$ είναι y -μονότονο με ρίζα. Αρχικά αφαιρούμε κάποιες ακμές του G . Πιο συγκεκριμένα, έστω \overline{pq} μια ακμή του G τέτοια ώστε τα p και q βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς τον άξονα των x τότε η \overline{pq} δεν μπορεί να βρίσκεται σε κάποιο y -μονότονο μονοπάτι από τη ρίζα r σε κάποιο σημείο του $P \setminus \{r\}$ (Παρατήρηση 1). Οπότε, αφαιρούμε την ακμή \overline{pq} από το γράφημα. Τώρα εφαρμόζουμε μια διαδικασία παρόμοια με την διαδικασία που εφαρμόστηκε στην τρίτη ενότητα του άρθρου των Arkin et al. [10] που έχει επίσης κάποιες ομοιότητες με την προσέγγιση των Lee και Preparata [40] και την προσέγγιση των Guttmann-Beck και Hassin [29]. Αρχικά μετασχηματίζουμε το γράφημα G σε ένα κατευθυνόμενο γεωμετρικό γράφημα \vec{G} σε $O(|E|)$ χρόνο, δίνοντας κατεύθυνση στις εναπομείναντες ακμές του G . Το \vec{G} αρχικά περιέχει τους κόμβους του G και καθόλου ακμές. Έστω \overline{pq} μια ακμή του G . Αν $y(p) = y(q)$ τότε εισάγουμε και την ακμή \overrightarrow{pq} και την ακμή \overrightarrow{qp} στο \vec{G} . Αλλιώς, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $|y(p)| < |y(q)|$, τότε εισάγουμε την ακμή \overrightarrow{pq} στο \vec{G} . Τότε εύκολα προκύπτει ότι το G είναι y -μονότονο με ρίζα αν και μόνο αν η ρίζα r συνδέεται με όλους τους άλλους κόμβους στο \vec{G} . Το τελευταίο μπορεί να προσδιοριστεί εύκολα σε $O(|E|)$ χρόνο εκτελώντας μια αναζήτηση κατά πλάτος (breadth first search) ή μια αναζήτηση κατά βάθος (depth first search).

3.4 Παραγωγή του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα

Σε αυτήν την ενότητα μελετάμε το πρόβλημα της παραγωγής του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P . Σε αντίθεση με το πρόβλημα της εύρεσης του y -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P όπου η κατεύθυνση y της μονοτονίας ήταν καθορισμένη, στο πρόβλημα της παραγωγής του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P πρέπει να βρούμε την βέλτιστη κατεύθυνση της μονοτονίας, έστω y' , και το αντίστοιχο y' -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P . Για το πρόβλημα της παραγωγής του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P δίνουμε έναν αλγόριθμο περιστροφικής σάρωσης (rotational sweep). Η περιστροφική σάρωση είναι μια γνωστή τεχνική στην περιοχή της υπολογιστικής γεωμετρίας όπου μια (κατευθυνόμενη) γραμμή περιστρέφεται δεξιόστροφα, αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού, (ή αριστερόστροφα) και κατά τη διάρκεια της περιστροφής εξάγονται σημαντικές πληροφορίες για τη λύση του προβλήματος [19, 55].

Πρόταση 2. Αν περιστρέψουμε έναν άξονα y' δεξιόστροφα τότε το y' -ΜΕΣΔ με ρίζα του P αλλάζει μόνο όταν ο y' γίνει (αφήσει τη θέση όπου ήταν) κάθετος σε μια γραμμή που διέρχεται από δύο σημεία του P .

Απόδειξη. Αν περιστρέψουμε τον άξονα y' δεξιόστροφα τότε η ακολουθία $S[P_{y' \geq 0}, y']$ ή η ακολουθία $S[P_{y' \leq 0}, y']$ αλλάζει μόνο όταν ο y' γίνει (αφήσει τη θέση όπου ήταν) κάθετος σε μια γραμμή που διέρχεται από δύο σημεία του P . Από την προηγούμενη πρόταση, το Λήμμα 1 και το Πόρισμα 2 έχουμε την απόδειξη. \square

Παρατήρηση 2. Έστω y' και y'' άξονες με αντίθετη κατεύθυνση, τότε το y' -ΜΕΣΔ με ρίζα του P είναι το ίδιο με το y'' -ΜΕΣΔ με ρίζα του P .

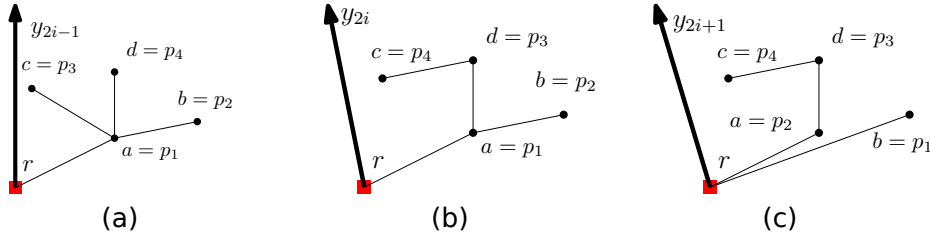
Με βάση την Πρόταση 2 και την Παρατήρηση 2 ορίζουμε το σύνολο $\Theta = \{\theta \in [0, \pi) : \theta \text{ είναι η κλίση μιας ευθείας κάθετης σε μια ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία του } P\}$. Έστω ακόμα $S[\Theta]$ η ταξινομημένη ακολουθία που περιέχει τις κλίσεις του Θ σε αύξουσα σειρά, δηλαδή $S[\Theta] = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $\theta_i < \theta_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, m-2$ και $m \leq \binom{|P|}{2}$. Επιπλέον ορίζουμε το σύνολο $\Theta_{\text{κρίσιμο}} = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}\} \cup \{\frac{\theta_0+\theta_1}{2}, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \dots, \frac{\theta_{m-2}+\theta_{m-1}}{2}, \frac{\theta_{m-1}+\pi}{2}\}$. Έστω y_{2i} ο άξονας με κλίση θ_i , $i = 0, 1, \dots, m-1$ και y_{2i+1} ο άξονας με κλίση $\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}$, $i = 0, 1, \dots, m-2$ και y_{2m-1} ο άξονας με κλίση $\frac{\theta_{m-1}+\pi}{2}$.

Λήμμα 2. Το ομοιόμορφα μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό δέντρο με ρίζα του P είναι ένα από τα y' -μονότονα ελάχιστα συνδεδετικά δέντρα με ρίζα του P όπου y' είναι ένας άξονας με κλίση στο $\Theta_{\text{κρίσιμο}}$ και πιο συγκεκριμένα το y' -μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό δέντρο με ρίζα του P που έχει το μικρότερο κόστος.

Απόδειξη. Έστω y' και y'' άξονες με κλίση θ' και θ'' , αντίστοιχα, τέτοιοι ώστε $\theta_i < \theta', \theta'' < \theta_{i+1}$ για κάποιο $0 \leq i \leq m-2$ και έστω T' και T'' το y' -μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό δέντρο με ρίζα του P και το y'' -μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό δέντρο με ρίζα του P , αντίστοιχα. Από την Πρόταση 2, προκύπτει ότι το T' είναι το ίδιο με το T'' . Οπότε, αρκεί να εξετάσουμε μόνο έναν από τους άξονες y' με κλίση θ' όπου $\theta_i < \theta' < \theta_{i+1}$. Εμείς εξετάζουμε τον άξονα y_{2i+1} . Εξετάζουμε ακόμα τον άξονα y_{2m-1} για τον οποίο το y_{2m-1} -μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό δέντρο με ρίζα του P είναι το ίδιο με το y' -μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό δέντρο με ρίζα του P για κάθε άξονα y' με κλίση στο $(\theta_{m-1}, \pi) \cup [0, \theta_0)$.

Εμείς επιπλέον εξετάζουμε και τους άξονες με κλίση θ_i , δηλαδή τους άξονες y_{2i} , $0 \leq i \leq m-1$, αφού από την Πρόταση 2, το y_{2i} -μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό δέντρο με ρίζα του P μπορεί να είναι διαφορετικό από όλα τα y' -μονότονα ελάχιστα συνδεδετικά δέντρα του P με $y' \neq y_{2i}$. Για ένα παράδειγμα δείτε το Σχήμα 3.1. \square

Τώρα περιγράφουμε τον αλγόριθμο που κατασκευάζει το ομοιόμορφα μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό δέντρο με ρίζα του συνόλου σημείων με ρίζα P . Ο αλγόριθμος είναι ένας αλγόριθμος περιστροφικής σάρωσης. Θεωρεί ένα άξονα y' , ο οποίος αρχικά ταυτίζεται με τον άξονα y_0 και μετά περιστρέφεται δεξιόστροφα εως ότου ο y'



Σχήμα 3.1: Απεικόνιση τριών συνεχόμενων αξόνων y_{2i-1} , y_{2i} και y_{2i+1} με κλίση στο $\Theta_{\text{κρίσιμο}}$ για το σύνολο σημείων $\{r, a, b, c, d\}$ όπου ο y_{2i} είναι κάθετος στις ευθείες που διέρχονται από τα ζεύγη των σημείων (a, b) και (c, d) . Στο (a) $S[P_{y_{2i-1} \geq 0}, y_{2i-1}] = (r, a = p_1, b = p_2, c = p_3, d = p_4)$ ενώ στο (b) $S[P_{y_{2i} \geq 0}, y_{2i}] = (r, a, b, d, c)$ και στο (c) $S[P_{y_{2i+1} \geq 0}, y_{2i+1}] = (r, b, a, d, c)$.

να γίνει αντίθετος από τον άξονα των x . Κατά τη διάρκεια της περιστροφής το y' -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P ανανεώνεται. Από το Λήμμα 2 προκύπτει ότι αρκεί να εξετάσουμε τα y_i -μονότονα ελάχιστα συνδετικά δέντρα με ρίζα του P όπου y_i είναι ένας άξονας με κλίση στο $\Theta_{\text{κρίσιμο}}$, $0 \leq i \leq 2m - 1$. Έστω T_i^{opt} το y_i -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P , $0 \leq i \leq 2m - 1$. Ο αλγόριθμος κατασκευής του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα του P μπορεί να διατυπωθεί πλέον ως εξής: Ο αλγόριθμος αρχικά κατασκευάζει το T_0^{opt} με βάση το Θεώρημα 1. Μετά τρέχει για $i = 1, 2, \dots, 2m - 1$ εξαγοντας στο τέλος κάθε επανάληψης το T_i^{opt} τροποποιώντας κατάλληλα το T_{i-1}^{opt} . Για να είναι αποδοτικός ο αλγόριθμος, διατηρεί ένα δέντρο T που είναι αρχικά ίσο με το T_0^{opt} και κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του αλγορίθμου το T εξελίσσεται στα $T_1^{\text{opt}}, T_2^{\text{opt}}, \dots, T_{2m-1}^{\text{opt}}$. Ανάλογα, διατηρεί τις ακολουθίες S^- και S^+ που είναι αρχικά ίσες με τις $S[P_{y_0 \leq 0}, y_0]$ και $S[P_{y_0 \geq 0}, y_0]$, αντίστοιχα και που εξελίσσονται στις $S[P_{y_i \leq 0}, y_i]$ και $S[P_{y_i \geq 0}, y_i]$, αντίστοιχα, $i = 1, 2, \dots, 2m - 1$. Επιπλέον ο αλγόριθμος διατηρεί τον άξονα στον οποίο έχει βρεθεί η βέλτιστη λύση έως τώρα στη μεταβλητή 'άξονας Ελαχιστοποίησης'. Στην τελευταία εντολή του αλγορίθμου κατασκευάζεται εκ νέου το άξονας Ελαχιστοποίησης-μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P με βάση το Θεώρημα 1 και επιστρέφει αυτό το δέντρο. Ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου κατασκευής του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα δίνεται στον Αλγόριθμο 2.

Θεώρημα 2. Το ομοιόμορφα μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P παράγεται σε $O(|P|^2 \log |P|)$ χρόνο.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2 προκύπτει ότι ο αλγόριθμος κατασκευής του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα (Αλγόριθμος 2) κατασκευάζει το ομοιόμορφα μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P . Τώρα αποδεικνύουμε ότι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $O(|P|^2 \log |P|)$. Οι άξονες $y_0, y_1, \dots, y_{2m-1}$ με κλίσεις στο $\Theta_{\text{κρίσιμο}}$ παράγονται σε $O(|P|^2 \log |P|)$ χρόνο. Έ-

Αλγόριθμος 2 Ο αλγόριθμος κατασκευής του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα

Είσοδος: Ένα σύνολο σημείων με ρίζα P .

Έξοδος: Το ομοιόμορφα μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P .

- 1: Υπολόγισε τους άξονες $y_0, y_1, \dots, y_{2m-1}$ με κλίσεις στο $\Theta_{\text{κρίσιμο}}$.
 - 2: Κατασκεύασε τα $T_0^{\text{opt}}, S[P_{y_0 \leq 0}, y_0]$ και $S[P_{y_0 \geq 0}, y_0]$ με βάση το Θεώρημα 1.
 - 3: $T \leftarrow T_0^{\text{opt}}, S^- \leftarrow S[P_{y_0 \leq 0}, y_0], S^+ \leftarrow S[P_{y_0 \geq 0}, y_0]$, ελάχιστοΚόστος \leftarrow κόστος του T_0^{opt} και άξοναςΕλαχιστοποίησης $\leftarrow y_0$.
 - 4: **for** $i \leftarrow 1$ to $2m - 1$ **do**
 - 5: Ανανέωσε τα T, S^-, S^+ έτσι ώστε το T να ισούται με το T_i^{opt} και η S^- (S^+) να ισούται με την $S[P_{y_i \leq 0}, y_i]$ (αντίστοιχα με την $S[P_{y_i \geq 0}, y_i]$).
 - 6: **if** κόστος του T < ελάχιστοΚόστος **then**
 - 7: ελάχιστοΚόστος \leftarrow κόστος του T και άξοναςΕλαχιστοποίησης $\leftarrow y_i$.
 - 8: **Επέστρεψε** το άξοναςΕλαχιστοποίησης-μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P , το οποίο υπολογίζεται με βάση το Θεώρημα 1.
-

στο k_i το πλήθος των ζευγαριών των σημείων του P που έχουν την ίδια προβολή στον άξονα y_{2i} , $0 \leq i \leq m - 1$. Τότε $\sum_{i=0}^{m-1} k_i = \binom{|P|}{2}$. Για κάθε $i = 0, 1, \dots, m - 1$, παράγουμε μια λίστα L_i που περιέχει αυτά τα k_i ζευγάρια σημείων του P που έχουν την ίδια προβολή στον άξονα y_{2i} . Όλες οι $L_i, 0 \leq i \leq m - 1$, μπορούν να παραχθούν σε $O(|P|^2 \log |P|)$ συνολικό χρόνο.

Για κάθε σημείο p στο $S^- \setminus \{r\}$ ($S^+ \setminus \{r\}$) χρησιμοποιούμε μια δομή δεδομένων $\text{PD}(p)$ που είναι ένα ισορροπημένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης το οποίο περιέχει όλα τα σημεία που είναι πριν από το p στο $S^- \setminus \{r\}$ (αντίστοιχα στο $S^+ \setminus \{r\}$) συνοδευόμενα από την αποστασή τους από το p . Πιο συγκεκριμένα έστω ότι το S^- είναι το $(r = p_0, p_1, \dots, p_s)$. Τότε για κάθε $p_j, j = 1, 2, \dots, s$, το $\text{PD}(p_j)$ περιέχει τα ζεύγη $(p_0, d(p_0, p_j)), (p_1, d(p_1, p_j)), \dots, (p_{j-1}, d(p_{j-1}, p_j))$. Το κλειδί κάθε $(p_l, d(p_l, p_j)), l = 0, 1, \dots, j - 1$, είναι η απόσταση $d(p_l, p_j)$. Παρόμοια, ορίζουμε το $\text{PD}(p)$ για κάθε $p \in S^+ \setminus \{r\}$. Χρησιμοποιούμε αυτές τις δομές δεδομένων $\text{PD}(p), p \in P \setminus \{r\}$, καθώς από τις πληροφορίες που περιέχονται σε αυτές μπορούμε να εξάγουμε το γονιό κάθε σημείου p αποδοτικά. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $p \in P \setminus \{r\}$ ο $\text{γον}(p)$ στο T μπορεί να εξαχθεί ή να ανανεωθεί σε $O(\log |P|)$ χρόνο χρησιμοποιώντας το $\text{PD}(p)$, αφού το ζεύγος $(\text{γον}(p), d(\text{γον}(p), p))$ είναι το στοιχείο του $\text{PD}(p)$ με το ελάχιστο κλειδί.

Η παραγωγή των τιμών στις οποίες αρχικοποιούνται τα T, S^-, S^+ και $\text{PD}(p), p \in P \setminus \{r\}$, γίνεται σε $O(|P|^2 \log |P|)$ χρόνο. Αυτό ισχύει καθώς τα $T_0^{\text{opt}}, S[P_{y_0 \leq 0}, y_0]$ και $S[P_{y_0 \geq 0}, y_0]$ παράγονται σε $O(|P| \cdot \log^2 |P|)$ χρόνο (Θεώρημα 1). Επιπλέον, η παραγωγή του $\text{PD}(p_j)$ για κάποιο

p_j στο $S^- \setminus \{r\}$ ($S^+ \setminus \{r\}$) όταν το S^- (αντίστοιχα S^+) ισούται με το $S[P_{y_0 \leq 0}, y_0]$ (αντίστοιχα $S[P_{y_0 \geq 0}, y_0]$) παίρνει $O(|P| \log |P|)$ χρόνο καθώς εισάγονται σε αυτό όλα τα ζεύγη $(p_i, d(p_i, p_j))$, με $i < j$ και κάθε τέτοια εισαγωγή παίρνει $O(\log |P|)$ χρόνο. Οπότε, ο συνολικός χρόνος παραγωγής όλων των $PD(p), p \in P \setminus \{r\}$, είναι $O(|P|^2 \log |P|)$.

Έστω τώρα ότι το T είναι ίσο με το T_{i-1}^{opt} και έστω ότι το S^- (S^+) είναι ίσο με το $S[P_{y_{i-1} \leq 0}, y_{i-1}]$ (αντίστοιχα το $S[P_{y_{i-1} \geq 0}, y_{i-1}]$) τότε το T και το S^- (αντίστοιχα το S^+) μπορούν να ενημερωθούν έτσι ώστε το T να γίνει ίσο με το T_i^{opt} και το S^- (αντίστοιχα το S^+) να γίνει ίσο με το $S[P_{y_i \leq 0}, y_i]$ (αντίστοιχα το $S[P_{y_i \geq 0}, y_i]$) σε:

1. $O(k_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \log |P|)$ χρόνο αν το i είναι άρτιο και ο άξονας y_i δεν είναι κάθετος σε γραμμή που διέρχεται από τη ρίζα r και κάποιο άλλο σημείο του P .
2. $O(k_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \log |P|)$ χρόνο αν το i είναι περιττό και ο άξονας y_{i-1} δεν είναι κάθετος σε γραμμή που διέρχεται από τη ρίζα r και κάποιο άλλο σημείο του P .
3. $O(|P| \log |P|)$ χρόνο αν το i είναι άρτιο και ο άξονας y_i είναι κάθετος σε γραμμή που διέρχεται από τη ρίζα r και κάποιο άλλο σημείο του P .
4. $O(|P| \log |P|)$ χρόνο αν το i είναι περιττό και ο άξονας y_{i-1} είναι κάθετος σε γραμμή που διέρχεται από τη ρίζα r και κάποιο άλλο σημείο του P .

Αναλύουμε πως χειριζόμαστε την περίπτωση 1 σε $O(k_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \log |P|)$ χρόνο. Αφού ο άξονας y_i δεν είναι κάθετος σε γραμμή που διέρχεται από τη ρίζα r και κάποιο άλλο σημείο του P τότε ισχύει ότι $P_{y_i \leq 0} = P_{y_{i-1} \leq 0}$ και $P_{y_i \geq 0} = P_{y_{i-1} \geq 0}$. Οπότε κανένα νέο σημείο δεν εισάγεται στο (ή αφαιρείται από το) S^- ή το S^+ . Όμως κάποια σημεία που είχαν διαφορετικές προβολές στον άξονα y_{i-1} τώρα έχουν την ίδια προβολή στον άξονα y_i .

Εξηγούμε μόνο πως χειριζόμαστε τα σημεία στο S^+ καθώς τα σημεία στο S^- τα χειριζόμαστε παρόμοια. Ανακαλούμε ότι η $L_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}$ περιέχει τα $k_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}$ ζευγάρια σημείων του P που έχουν την ίδια προβολή στον άξονα y_i . Έστω $S^+ = (r = p_0, p_1, \dots, p_s)$ και έστω $(p_{j_1}, p_{j_1+1}), (p_{j_2}, p_{j_2+1}), \dots, (p_{j_k}, p_{j_k+1})$ με $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ τα k ζευγάρια σημείων του S^+ που ανήκουν στο $L_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}$, δηλαδή που η ευθεία που διέρχεται από αυτά είναι κάθετη στον άξονα y_i . Τότε κάθε σημείο $p \in S^+ \setminus \{p_{j_1}, p_{j_1+1}, p_{j_2}, p_{j_2+1}, \dots, p_{j_k}, p_{j_k+1}\}$ έχει την ίδια σχετική θέση με όλα τα άλλα σημεία του S^+ σε σχέση και με τον άξονα y_i και με τον άξονα y_{i-1} . Οπότε, το p έχει τη σωστή θέση στο S^+ , ο γονιός του p στο T παραμένει ο ίδιος (Πόρισμα 2) και το $PD(p)$ δε χρειάζεται να ενημερωθεί.

Οπότε, οι μόνες αλλαγές που χρειάζεται να γίνουν αφορούν τα σημεία του $\{p_{j_1}, p_{j_1+1}, p_{j_2}, p_{j_2+1}, \dots, p_{j_k}, p_{j_k+1}\}$. Για αυτά τα σημεία μπορεί να χρειάζεται να επαναυπολογίσουμε το γονιό τους στο T . Μπορεί επίσης να χρειάζεται να αντιμετωπίσουμε (κάνουμε swar) κάποια p_{j_l} και $p_{j_l+1}, l = 1, 2, \dots, k$, στο S^+ . Επίσης, μπορεί να χρειάζεται να ενημερώσουμε κάποια $PD(p_{j_l})$ και $PD(p_{j_l+1}), l = 1, 2, \dots, k$.

Για κάθε $l = 1, 2, \dots, k$ κάνουμε τα ακόλουθα: Υπολογίζουμε την απόσταση $d(p_{j_l+1}, \{p_0, p_1, \dots, p_{j_l-1}\})$ σε $O(\log |P|)$ χρόνο χρησιμοποιώντας το $\text{PD}(p_{j_l+1})$. Αν $d(p_{j_l+1}, \{p_0, p_1, \dots, p_{j_l-1}\}) \geq d(p_{j_l}, \text{γον}(p_{j_l}))$, τότε δε χρειάζεται να ενημερώσουμε τίποτα καθώς τα σημεία p_{j_l} και p_{j_l+1} έχουν τη σωστή θέση στην S^+ . Αντίθετα, αν $d(p_{j_l+1}, \{p_0, p_1, \dots, p_{j_l-1}\}) < d(p_{j_l}, \text{γον}(p_{j_l}))$ τότε αφαιρούμε τις ακμές $\text{γον}(p_{j_l})p_{j_l}$ και $\text{γον}(p_{j_l+1})p_{j_l+1}$ από το T . Μετά αντιμετωπίζουμε (κάνουμε swap) τα σημεία p_{j_l+1} και p_{j_l} στην S^+ , δηλαδή αν προηγουμένως η S^+ ήταν ίση με $(r = p_0, p_1, \dots, p_{j_l}, p_{j_l+1}, \dots, p_n)$ τώρα η S^+ γίνεται ίση με $(r = p_0, p_1, \dots, p'_{j_l}, p'_{j_l+1}, \dots, p_n)$ όπου το p'_{j_l} είναι ίσο με το p_{j_l+1} και το p'_{j_l+1} είναι ίσο με το p_{j_l} . Μετά εισάγουμε το ζευγάρι $(p'_{j_l}, d(p'_{j_l}, p'_{j_l+1}))$ στο $\text{PD}(p'_{j_l+1})$ και αφαιρούμε το ζευγάρι $(p'_{j_l+1}, d(p'_{j_l+1}, p'_{j_l}))$ από το $\text{PD}(p'_{j_l})$. Τέλος, στο T συνδέουμε το σημείο p'_{j_l} (p'_{j_l+1}) με το σημείο p για το οποίο το ζευγάρι $(p, d(p, p'_{j_l}))$ (αντίστοιχα $(p, d(p, p'_{j_l+1}))$) έχει το μικρότερο κλειδί στο $\text{PD}(p'_{j_l})$ (αντίστοιχα στο $\text{PD}(p'_{j_l+1})$) και ενημερώνουμε το γονιό του p'_{j_l} (αντίστοιχα του p'_{j_l+1}) κατάλληλα. Χρησιμοποιώντας τα $\text{PD}(p'_{j_l})$ και $\text{PD}(p'_{j_l+1})$ όλη αυτή η διαδικασία που αφορά ένα ζευγάρι σημείων παίρνει $O(\log |P|)$ χρόνο. Οπότε, η διαδικασία για όλα τα $k_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}$ ζευγάρια σημείων παίρνει $O(k_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \log |P|)$ χρόνο.

Την περίπτωση 2 τη χειριζόμαστε παρόμοια με την περίπτωση 1.

Τώρα εξηγούμε πως χειριζόμαστε την περίπτωση 3. Αυτή η περίπτωση συμβαίνει ακριβώς $|P| - 1$ φορές, δηλαδή μια φορά για κάθε ζευγάρι $(r, p), p \in P \setminus \{r\}$. Στην περίπτωση αυτή είτε το $P_{y_{i-1} \leq 0}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $P_{y_i \leq 0}$ ή το $P_{y_{i-1} \geq 0}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $P_{y_i \geq 0}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το $P_{y_{i-1} \geq 0}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $P_{y_i \geq 0}$ και ότι $y_{i-1}(q) < 0$ ενώ $y_i(q) = 0$, δηλαδή ότι το q ανήκει μόνο στο S^- για τον άξονα y_{i-1} ενώ ανήκει και στο S^+ και στο S^- για τον άξονα y_i .

Τώρα αναλύουμε πως αντιμετωπίζουμε την εισαγωγή του q στο $P_{y_i \geq 0}$. Αρχικά εισάγουμε το q στην S^+ ακριβώς μετά από την r . Δε χρειάζεται να ενημερώσουμε το $\text{PD}(q)$ καθώς ήδη περιέχει μόνο το ζευγάρι $(r, d(r, q))$. Δε χρειάζεται επίσης να ενημερώσουμε το γονιό του q στο T . Ύστερα, για κάθε σημείο $p \in S^+$ με $p \notin \{r, q\}$ εισάγουμε το ζευγάρι $(q, d(q, p))$ στο $\text{PD}(p)$ και αν η απόσταση $d(q, p)$ είναι το μικρότερο κλειδί στο $\text{PD}(p)$ τότε αφαιρούμε την ακμή $\text{γον}(p)p$ από το T και εκχωρούμε το q στο γονιό του p και εισάγουμε την ακμή \overline{pq} στο T . Έχουμε ολοκληρώσει πλέον τις ενέργειες που σχετίζονται με το q . Όλες οι ενέργειες που περιγράψαμε προηγουμένως και σχετίζονται με το ζευγάρι (r, q) παίρνουν $O(|P| \log |P|)$ χρόνο.

Μετά, για τα ζευγάρια σημείων που έχουν την ίδια προβολή στον άξονα y_i , εκτός από το ζευγάρι (r, q) , εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία που δόθηκε στην περίπτωση 1. Όπως αποδείχθηκε στην περίπτωση αυτή, η διαδικασία πραγματοποιείται σε $O(k_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \log |P|) = O(|P| \log |P|)$ χρόνο καθώς $k_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} < |P|$.

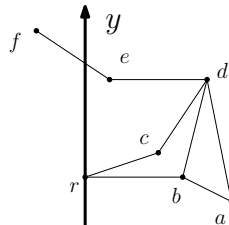
Την περίπτωση 4 τη χειριζόμαστε παρόμοια με την περίπτωση 3.

Καθώς $\sum_{i=0}^{m-1} k_i = O(|P|^2)$, ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $O(|P|^2 \log |P|)$. \square

3.5 Το πρόβλημα της αναγνώρισης ομοιόμορφα μονότονων με ρίζα γραφημάτων

Στην ενότητα αυτή μελετάμε το πρόβλημα της αναγνώρισης ομοιόμορφα μονότονων με ρίζα γραφημάτων. Όπως κάναμε και με το πρόβλημα της παραγωγής του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδυαστικού δέντρου με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα και στο πρόβλημα της αναγνώρισης ομοιόμορφα μονότονων με ρίζα γραφημάτων δίνουμε έναν αλγόριθμο περιστροφικής σάρωσης (rotational sweep).

Αρχικά ορίζουμε κάποια βοηθητικά σύνολα. Έστω $G = (P, E)$ ένα συνδεδεμένο (connected) γεωμετρικό γράφημα με ρίζα r . Έστω p ένα σημείο του $P \setminus \{r\}$ τότε με $A(p, y)$ συμβολίζουμε το σύνολο των σημείων που είναι γειτονικά στο p και είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο με το p ως προς τον άξονα των x και είναι πιο κοντά στον άξονα των x από το p . Πιο επίσημα, $A(p, y) = \{q : \text{το } q \text{ είναι γειτονικό του } p \text{ και το } q \text{ βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το } p \text{ ως προς τον άξονα των } x \text{ και } |y(q)| < |y(p)|\}$. Έστω $B(y)$ το σύνολο $\{p : p \in P \setminus \{r\} \text{ και } A(p, y) \neq \emptyset\}$. Έστω $C(y)$ το σύνολο που αποτελείται από τα σημεία $p \in P \setminus \{r\}$ τα οποία (i) δεν ανήκουν στο $B(y)$ και (ii) είναι συνδεδεμένα με ακμή με κάποιο άλλο σημείο q του $P \setminus \{r\}$ με την ίδια y -συντεταγμένη τέτοιο ώστε $A(q, y) \neq \emptyset$. Πιο επίσημα, $C(y) = \{p : p \in P \setminus (B(y) \cup \{r\}) \text{ για τα οποία υπάρχει } q \in P \setminus \{r\} \text{ γειτονικό του } p \text{ με } y(q) = y(p) \text{ και } A(q, y) \neq \emptyset\}$. Επιπλέον, $D(y) = \{p : p \in P \setminus \{r\} \text{ με } y(p) = 0 \text{ και } \overline{pr} \in E\}$. Ένα παράδειγμα των προηγούμενων ορισθέντων συνόλων ενός γεωμετρικού γραφήματος με ρίζα δίνεται στο Σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: $A(a, y) = \{b\}$, $A(b, y) = \emptyset$, $A(c, y) = \{r\}$, $A(d, y) = \{b, c\}$, $A(e, y) = \emptyset$ και $A(f, y) = \{e\}$. $B(y) = \{a, c, d, f\}$, $C(y) = \{e\}$ και $D(y) = \{b\}$.

Η Πρόταση 1 μπορεί να επαναδιατυπωθεί χρησιμοποιώντας τα σύνολα $B(y)$, $C(y)$ και $D(y)$ ως εξής: Το G είναι y -μονότονο με ρίζα αν και μόνο αν $|B(y)| + |C(y)| + |D(y)| = |P| - 1$.

Πρόταση 3. Έστω $G = (P, E)$ ένα συνδεδεμένο γεωμετρικό γράφημα με ρίζα. Αν περιστρέψουμε έναν άξονα y' δεξιόστροφα (αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού) τότε το G μπορεί να γίνει y' -μονότονο με ρίζα ενώ προηγουμένως δεν ήταν, ή αντίστροφα, μόνο όταν ο άξονας y' γίνει (ή αφήσει τη θέση όπου ήταν) κάθετος σε μια ακμή του G ή σε μια γραμμή που διέρχεται από τη ρίζα r και ένα σημείο του $P \setminus \{r\}$.

Απόδειξη. Αν περιστρέψουμε τον άξονα y' δεξιόστροφα, τότε το $B(y')$ ή το $C(y')$ ή το $D(y')$ αλλάζει μόνο όταν ο άξονας y' γίνει (ή αφήσει τη θέση όπου ήταν) κάθετος σε μια ακμή του G ή σε μια γραμμή που διέρχεται από τη ρίζα r και ένα σημείο του $P \setminus \{r\}$. Από την προηγούμενη πρόταση και την Πρόταση 1 εξάγουμε την απόδειξη. \square

Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με αυτά που δόθηκαν για τη λύση του προβλήματος της εύρεσης του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα, ορίζουμε ένα σύνολο κρίσιμων κλίσεων και κατάλληλων αξόνων που χρειάζεται να ελέγξουμε ώστε να αποφασίσουμε αν το συνδεδεμένο γεωμετρικό γράφημα με ρίζα $G = (P, E)$ είναι ομοιόμορφα μονότονο με ρίζα. Έστω $\Theta = \{\theta \in [0, \pi) : \theta \text{ είναι η κλίση μιας ευθείας κάθετης είτε σε μια ακμή του } G \text{ ή σε μια ευθεία που διέρχεται από τη ρίζα } r \text{ και κάποιο άλλο σημείο του } P\}$. Η $S[\Theta]$ είναι η ταξινομημένη ακολουθία που περιέχει τις κλίσεις του Θ σε αύξουσα σειρά, δηλαδή $S[\Theta] = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $\theta_i < \theta_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, m-2$ και $m < |E| + |P|$. Έστω $\Theta_{\text{κρίσιμο}} = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}\} \cup \{\frac{\theta_0+\theta_1}{2}, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \dots, \frac{\theta_{m-2}+\theta_{m-1}}{2}, \frac{\theta_{m-1}+\pi}{2}\}$. Έστω επίσης y_{2i} ο άξονας με κλίση θ_i , $0 \leq i \leq m-1$. Επιπλέον, έστω y_{2i+1} ο άξονας με κλίση $\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}$, $0 \leq i \leq m-2$ και y_{2m-1} ο άξονας με κλίση $\frac{\theta_{m-1}+\pi}{2}$. Σε αντιστοιχία με το Λήμμα 2 εξάγουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3. *Το γεωμετρικό γράφημα με ρίζα G είναι ομοιόμορφα μονότονο με ρίζα αν και μόνο αν το G είναι y' -μονότονο με ρίζα για κάποιον άξονα y' με κλίση στο $\Theta_{\text{κρίσιμο}}$.*

Τώρα δίνουμε έναν αλγόριθμο περιστροφικής σάρωσης που αποφασίζει αν ένα δοθέν συνδεδεμένο γεωμετρικό γράφημα με ρίζα $G = (P, E)$ είναι ομοιόμορφα μονότονο με ρίζα. Στον αλγόριθμο αναγνώρισης ομοιόμορφα μονότονων με ρίζα γραφημάτων περιστρέφεται ένας άξονας y' που αρχικά ταυτίζεται με τον άξονα y_0 έως ότου να γίνει αντίθετος με τον άξονα των x . Κατά τη διάρκεια της περιστροφής εξετάζεται αν το γεωμετρικό γράφημα με ρίζα G γίνεται σε κάποια φάση y' -μονότονο με ρίζα. Από το Λήμμα 3 προκύπτει ότι ο αλγόριθμος αναγνώρισης ομοιόμορφα μονότονων με ρίζα γραφημάτων αρκεί να εξετάσει αν το γεωμετρικό γράφημα με ρίζα G είναι y_i -μονότονο με ρίζα για κάποιο $i = 0, 1, \dots, 2m-1$. Ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου αναγνώρισης ομοιόμορφα μονότονων με ρίζα γραφημάτων δίνεται στον Αλγόριθμο 3.

Θεώρημα 3. *Έστω $G = (P, E)$ ένα συνδεδεμένο γεωμετρικό γράφημα με ρίζα. Τότε μπορούμε να αποφασίσουμε σε $O(|E| \log |P|)$ χρόνο αν το G είναι ομοιόμορφα μονότονο με ρίζα.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3 προκύπτει ότι ο αλγόριθμος αναγνώρισης ομοιόμορφα μονότονων με ρίζα γραφημάτων (Αλγόριθμος 3) αποφασίζει αν το G είναι ομοιόμορφα μονότονο με ρίζα. Τώρα αποδεικνύουμε ότι ο χρόνος εκτέλεσης του είναι $O(|E| \log |P|)$. Ο υπολογισμός των αξόνων $y_0, y_1, \dots, y_{2m-1}$, με κλίσεις στο $\Theta_{\text{κρίσιμο}}$ γίνεται σε $O(|E| \log |P|)$ χρόνο. Κάθε άξονας y_{2i} που είναι κάθετος σε μια γραμμή που διέρχεται από τη ρίζα r και ένα σημείο του $P \setminus \{r\}$, έστω το q , συνοδεύεται

Αλγόριθμος 3 Αλγόριθμος αναγνώρισης ομοιόμορφα μονότονων με ρίζα γραφημάτων

Είσοδος: Ένα συνδεδεμένο γεωμετρικό γράφημα με ρίζα $G = (P, E)$.

Έξοδος: Ο άξονας μονοτονίας αν υπάρχει αλλιώς null.

- 1: άξοναςΜονοτονίας \leftarrow null
 - 2: Υπολόγισε τους άξονες $y_0, y_1, \dots, y_{2m-1}$ με κλίσεις στο $\Theta_{\text{κρίσιμο}}$.
 - 3: **if** G είναι y_0 -μονότονο με ρίζα **then** άξοναςΜονοτονίας $\leftarrow y_0$
 - 4: **for** $i \leftarrow 1$ to $2m - 1$ **do**
 - 5: **if** G είναι y_i -μονότονο με ρίζα **then** άξοναςΜονοτονίας $\leftarrow y_i$
 - 6: **Επέστρεψε** άξοναςΜονοτονίας
-

από το σημείο q . Έστω k_i το πλήθος των ζευγαριών των σημείων του P που συνδέονται με ακμή κάθετη στον άξονα y_{2i} , $0 \leq i \leq m - 1$. Τότε $\sum_{i=0}^{m-1} k_i = |E|$. Για κάθε $i = 0, 1, \dots, m - 1$ κατασκευάζουμε μια λίστα L_i που περιέχει τα k_i ζευγάρια σημείων του P που είναι συνδεδεμένα με ακμή κάθετη στον άξονα y_{2i} . Όλες οι λίστες L_i , $0 \leq i \leq m - 1$, μπορούν να παραχθούν σε $O(|E| \log |P|)$ συνολικό χρόνο.

Έστω y_i ο τελευταίος άξονας που εξετάζουμε. Ο αλγόριθμος μας διατηρεί για κάθε $p \in P \setminus \{r\}$ μια δομή δεδομένων $A(p)$ που αναπαριστά το σύνολο $A(p, y_i)$ (που είναι υποσύνολο του συνόλου των γειτονικών κόμβων του p). Η δομή δεδομένων $A(p)$ περιέχει τους δείκτες των σημείων του P που ανήκουν στο $A(p, y_i)$. Η δομή δεδομένων $A(p)$ μπορεί να υλοποιηθεί από οποιαδήποτε δομή δεδομένων που υποστηρίζει τις λειτουργίες εισαγωγή, διαγραφή και ανάκτηση (retrieve) σε $O(\log |P|)$ χρόνο (για παράδειγμα ένα 2-3 δέντρο). Ο αλγόριθμος επιπλέον διατηρεί τη δομή δεδομένων B που αναπαριστά το σύνολο $B(y_i)$. Για να εκτελούμε τις λειτουργίες της εισαγωγής και της διαγραφής σε $O(1)$ χρόνο στο B , το B υλοποιείται ως ένα διάνυσμα από λογικές τιμές (boolean) μεγέθους $O(|P|)$.

Έστω p ένα σημείο του $P \setminus \{r\}$ τότε ο υπολογισμός του $A(p)$ έτσι ώστε το $A(p)$ να ισούται με το $A(p, y_0)$ παίρνει $O(|\text{γειτονικοί}(p)| \log |P|)$ χρόνο καθώς όλα τα σημεία q που είναι γειτονικά του p ελέγχονται και αν το q ανήκει στο ίδιο ημιεπίπεδο με το p ως προς τον άξονα των x_0 (δηλαδή τον άξονα που είναι κάθετος στον y_0 και που ταυτίζεται με τον y_0 αν τον περιστρέψουμε δεξιόστροφα κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$) και $|y_0(q)| < |y_0(p)|$ τότε το q εισάγεται στο $A(p)$ σε $O(\log |P|)$ χρόνο. Οπότε ο υπολογισμός όλων των $A(p)$, $p \in P \setminus \{r\}$, παίρνει $O(|E| \log |P|)$ συνολικό χρόνο. Έχοντας υπολογίσει όλα τα $A(p)$, $p \in P \setminus \{r\}$, ο υπολογισμός του B έτσι ώστε το B να είναι ίσο με το $B(y_0)$ παίρνει $O(|P|)$ χρόνο, δηλαδή παίρνει $O(1)$ χρόνο για να ελέγξουμε αν $A(p) \neq \emptyset$ για κάθε $p \in P \setminus \{r\}$.

Τώρα μελετάμε το χρόνο μετάβασης από τον άξονα y_{i-1} στον άξονα y_i . Όταν μεταβαίνουμε από τον άξονα y_{i-1} στον άξονα y_i οι αναγκαίες ενημερώσεις που πρέπει να κάνουμε έτσι ώστε για κάθε $p \in P \setminus \{r\}$ το $A(p)$ να αναπαριστά το σύνολο $A(p, y_i)$ και το B να αναπαριστά το $B(y_i)$ παίρνουν:

1. $O(k_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \log |P|)$ χρόνο αν το i είναι άρτιο και δεν υπάρχει σημείο $p \in P \setminus \{r\}$ με προβολή ίδια με την προβολή της ρίζας r στον άξονα y_i
2. $O(k_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \log |P|)$ χρόνο αν το i είναι περιττό και δεν υπάρχει σημείο $p \in P \setminus \{r\}$ με προβολή ίδια με την προβολή της ρίζας r στον άξονα y_{i-1}
3. $O((|\gamma_{\text{γειτονικοί}}(q)| + k_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}) \log |P|)$ χρόνο αν το i είναι άρτιο και ο άξονας y_i είναι κάθετος στη γραμμή που διέρχεται από τη ρίζα r και το σημείο $q \in P \setminus \{r\}$
4. $O((|\gamma_{\text{γειτονικοί}}(q)| + k_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}) \log |P|)$ χρόνο αν το i είναι περιττό και ο άξονας y_{i-1} είναι κάθετος στη γραμμή που διέρχεται από τη ρίζα r και το σημείο $q \in P \setminus \{r\}$

Οι περιπτώσεις 1,2,3 και 4 αποδεικνύονται παρόμοια με τις περιπτώσεις 1,2,3 και 4 στο Θεώρημα 2.

Επιπλέον σημειώνουμε ότι αν έχουν δοθεί τα $B(y_{2i})$ και κάθε $A(p, y_{2i})$, $p \in P \setminus \{r\}$, το να υπολογιστεί το σύνολο $C(y_{2i})$, $0 \leq i \leq m-1$, παίρνει $O(k_i)$ χρόνο χρησιμοποιώντας τη λίστα L_i . Επιπρόσθετα, αν έχουμε και το B ίσο με το $B(y_i)$ και το C ίσο με το $C(y_i)$ και γνωρίζουμε αν ο άξονας y_i είναι κάθετος σε κάποια γραμμή που διέρχεται από τη ρίζα r και κάποιο άλλο σημείο p του $P \setminus \{r\}$ με $\overline{pr} \in E$ τότε μπορούμε να εξετάσουμε αν το G είναι y_i -μονότονο με ρίζα σε $O(1)$ χρόνο (Πρόταση 1).

Αφού $\sum_{i=0}^{m-1} k_i = |E|$ και $\sum_{q \in P \setminus \{r\}} |\gamma_{\text{γειτονικοί}}(q)| = O(|E|)$ ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $O(|E| \log |P|)$. \square

Σημειώνουμε ότι για να παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο αναγνώρισης ομοιόμορφα μονότονων με ρίζα γραφημάτων όσο το δυνατόν ευκολότερα για κάθε $p \in P \setminus \{r\}$ αποθηκεύσαμε το σύνολο $A(p, y')$. Σημειώνουμε όμως ότι είναι αρκετό να αποθηκεύσουμε την πληθικότητα του $A(p, y')$, δηλαδή το πλήθος των γειτονικών σημείων του p που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το p ως προς τον άξονα των x' (δηλαδή τον άξονα που είναι κάθετος στον y' και που ταυτίζεται με τον y' αν τον περιστρέψουμε δεξιόστροφα κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$) και είναι αυστηρά πιο κοντά στον άξονα των x' από το p για κάθε $p \in P \setminus \{r\}$. Αυτή η αλλαγή δεν θα άλλαζε το χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου αναγνώρισης ομοιόμορφα μονότονων με ρίζα γραφημάτων αλλά μετά τον υπολογισμό των αξόνων με κλίσεις στο $\Theta_{\text{κρίσιμο}}$ και των λιστών L_i , $0 \leq i \leq m-1$, η διαδικασία που θα εκτελούνταν θα είχε πλέον $O(|E|)$ συνολικό χρόνο εκτέλεσης.

Σημειώνουμε ότι η προσέγγιση που πήραμε για να αποφασίσουμε αν ένα δοθέν συνδεδεμένο γεωμετρικό γράφημα με ρίζα είναι ομοιόμορφα μονότονο με ρίζα έχει κάποιες ομοιότητες με την προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε στην τρίτη ενότητα του άρθρου των Arkin et al. [10].

3.6 Το πρόβλημα της κατασκευής του xy -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα

Σε αυτήν την ενότητα μελετάμε το πρόβλημα της εύρεσης του xy -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα. Η προσέγγιση μας είναι ανάλογη με την προσέγγιση που είχαμε για το πρόβλημα της εύρεσης του y -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα.

Σε αναλογία με την Παρατήρηση 1 εξάγουμε την ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 3. Έστω P ένα σύνολο σημείων με ρίζα και $G = (P, E)$ ένα xy -μονότονο συνδετικό γράφημα με ρίζα του P και έστω $pp' \in E$ όπου είτε (i) τα p και p' βρίσκονται σε διαφορετικό τεταρτημόριο του επιπέδου ή (ii) τα p και p' βρίσκονται στο ίδιο τεταρτημόριο του επιπέδου και ισχύει ότι $(|x(p)| - |x(p')|)(|y(p)| - |y(p')|) < 0$. Τότε κάθε μονοπάτι από τη ρίζα r σε κάποιο σημείο $q \in P \setminus \{r\}$ που περιέχει την ακμή $\overline{pp'}$ δεν είναι xy -μονότονο.

Πόρισμα 4. Έστω P ένα σύνολο σημείων με ρίζα και G^{opt} το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με ρίζα του P . Έστω p και q σημεία του P που δεν ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο του επιπέδου, τότε το G^{opt} δεν περιέχει την ακμή \overline{pq} .

Το προηγούμενο πόρισμα συνεπάγεται ότι η κατασκευή του xy -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος με ρίζα του συνόλου σημείων με ρίζα P μπορεί να χωριστεί σε τέσσερα ανεξάρτητα προβλήματα. Πιο συγκεκριμένα, την κατασκευή του xy -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος με ρίζα των (i) $P_{x \leq 0, y \leq 0}$, (ii) $P_{x \geq 0, y \geq 0}$, (iii) $P_{x \leq 0, y \geq 0}$ και (iv) $P_{x \geq 0, y \leq 0}$. Αυτό διατυπώνεται πιο επίσημα στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4. Έστω P ένα σύνολο σημείων με ρίζα και G^{opt} το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με ρίζα του P . Έστω $G_{x \leq 0, y \leq 0}^{opt}$, $G_{x \geq 0, y \geq 0}^{opt}$, $G_{x \leq 0, y \geq 0}^{opt}$ και $G_{x \geq 0, y \leq 0}^{opt}$ το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με ρίζα του $P_{x \leq 0, y \leq 0}$, $P_{x \geq 0, y \geq 0}$, $P_{x \leq 0, y \geq 0}$ και $P_{x \geq 0, y \leq 0}$, αντίστοιχα. Τότε το G^{opt} είναι ίσο με το $G_{x \leq 0, y \leq 0}^{opt} \cup G_{x \geq 0, y \geq 0}^{opt} \cup G_{x \leq 0, y \geq 0}^{opt} \cup G_{x \geq 0, y \leq 0}^{opt}$.

Έστω P ένα σύνολο σημείων με ρίζα που περιέχεται ολόκληρο σε ένα τεταρτημόριο του επιπέδου. Ορίζουμε $S[P, y, x]$ την ακολουθία που περιέχει τα σημεία του P τέτοια ώστε τα σημεία της $S[P, y, x]$ είναι ταξινομημένα ως προς τις απόλυτες y -συντεταγμένες τους και αν δύο σημεία έχουν την ίδια y -συντεταγμένη τότε είναι ταξινομημένα ως προς τις απόλυτες x -συντεταγμένες τους. Πιο επίσημα, $S[P, y, x] = (r = p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$ έτσι ώστε $|y(p_0)| \leq |y(p_1)| \leq |y(p_2)| \leq \dots \leq |y(p_n)|$ και αν $|y(p_i)| = |y(p_{i+1})|$ τότε $|x(p_i)| < |x(p_{i+1})|$ και $P = \{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Εύκολα εξάγεται το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 5. Έστω P ένα σύνολο σημείων με ρίζα που περιέχεται ολόκληρο σε ένα τεταρτημόριο του επιπέδου και $S[P, y, x] = (r = p_0, p_1, p_2,$

$\dots, p_n)$ και G ένα γεωμετρικό γράφημα με σύνολο κόμβων το P . Τότε το G είναι το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με ρίζα του P αν και μόνο αν (i) το p_n συνδέεται με ακμή μόνο με το σημείο $p_j \in P \setminus \{p_n\}$ για το οποίο $|x(p_j)| \leq |x(p_n)|$ και $d(p_n, p_j) = d(p_n, P_{|x| \leq |x(p_n)|} \setminus \{p_n\})$ και (ii) το $G \setminus \{p_n\}$ είναι το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με ρίζα του $P \setminus \{p_n\}$.

Το Λήμμα 4 μαζί με το Λήμμα 5 οδηγούν στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 5. Το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P είναι ένα γεωμετρικό δέντρο.

Έστω P ένα σύνολο σημείων με ρίζα που περιέχεται ολόκληρο σε ένα τεταρτημόριο του επιπέδου και έστω $S[P, y, x] = (r = p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$. Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, καλούμε το κοντινότερο σημείο στο p_i από το $\{p_0, p_1, \dots, p_{i-1}\}_{|x| \leq |x(p_i)|}$ ως το γονιό του p_i και εν συντομία γον(p_i). Τότε το Λήμμα 5 έχει ως συνέπεια το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 6. Οι ακμές του xy -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα του P είναι ακριβώς τα ευθύγραμμα τμήματα γον(p_i) p_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Το προηγούμενο πόρισμα συνεπάγεται έναν $O(|P|^2)$ χρόνου αλγόριθμο που παράγει το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P . Όμως χρησιμοποιώντας την ημι-δυναμική δομή δεδομένων για την εύρεση του κοντινότερου σημείου με αριθμητική τιμή σε δοθέν εύρος που έμμεσα δόθηκε από τον Bentley [12], ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου της κατασκευής του xy -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα γίνεται $O(|P| \cdot \log^3 |P|)$.

Θεώρημα 4. Το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P μπορεί να κατασκευαστεί σε $O(|P| \cdot \log^3 |P|)$ χρόνο.

Απόδειξη. Αρχικά παράγουμε τα $P_{x \leq 0, y \leq 0}$, $P_{x \geq 0, y \geq 0}$, $P_{x \leq 0, y \geq 0}$ και $P_{x \geq 0, y \leq 0}$. Μετά εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο κατασκευής του xy -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα στα $P_{x \leq 0, y \leq 0}$, $P_{x \geq 0, y \geq 0}$, $P_{x \leq 0, y \geq 0}$ και $P_{x \geq 0, y \leq 0}$ και παράγονται τα δέντρα $T_{x \leq 0, y \leq 0}^{\text{opt}}$, $T_{x \geq 0, y \geq 0}^{\text{opt}}$, $T_{x \leq 0, y \geq 0}^{\text{opt}}$ και $T_{x \geq 0, y \leq 0}^{\text{opt}}$, αντίστοιχα. Από το Γεγονός 2 και καθώς πραγματοποιούνται $O(|P|)$ εισαγωγές και $O(|P|)$ ευρέσεις κοντινότερου σημείου σε δοθέν εύρος, ο υπολογισμός των $T_{x \leq 0, y \leq 0}^{\text{opt}}$, $T_{x \geq 0, y \geq 0}^{\text{opt}}$, $T_{x \leq 0, y \geq 0}^{\text{opt}}$ και $T_{x \geq 0, y \leq 0}^{\text{opt}}$ παίρνει $O(|P| \cdot \log^3 |P|)$ χρόνο. Στο τέλος, επιστρέφουμε την ένωση των $T_{x \leq 0, y \leq 0}^{\text{opt}}$, $T_{x \geq 0, y \geq 0}^{\text{opt}}$, $T_{x \leq 0, y \geq 0}^{\text{opt}}$ και $T_{x \geq 0, y \leq 0}^{\text{opt}}$ που από το Λήμμα 4 είναι το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P . \square

3.7 Το πρόβλημα της αναγνώρισης xy -μονότονων με ρίζα γραφημάτων

Σε αυτήν την ενότητα μελετάμε το πρόβλημα της αναγνώρισης xy -μονότονων με ρίζα γραφημάτων.

Προτείνουμε έναν απλό $O(|E|)$ χρόνου αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει αν ένα συνδεδεμένο γεωμετρικό γράφημα με ρίζα $G = (P, E)$ είναι xy -μονότονο με ρίζα και ο οποίος είναι ανάλογος με τον αλγόριθμο που αναγνωρίζει y -μονότονα με ρίζα γραφήματα στην τελευταία παράγραφο της Ενότητας 3.3. Αρχικά μετασχηματίζουμε το G σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα \vec{G} σε $O(|E|)$ χρόνο. Έστω \overline{pq} μια ακμή του G . Αν τα p και q βρίσκονται στο ίδιο τεταρτημόριο του επιπέδου και ισχύει ότι $|x(p)| \leq |x(q)|$ και $|y(p)| \leq |y(q)|$ (αντίστοιχα $|x(q)| \leq |x(p)|$ και $|y(q)| \leq |y(p)|$) κατευθύνουμε την ακμή \overline{pq} από το p στο q (αντίστοιχα από το q στο p). Από την Παρατήρηση 3 προκύπτει ότι όλες οι άλλες ακμές δεν μπορούν να διαπεραστούν σε ένα xy -μονότονο μονοπάτι που συνδέει την r με ένα άλλο σημείο του P . Οπότε αφαιρούμε όλες τις άλλες ακμές. Τότε το G είναι xy -μονότονο με ρίζα αν και μόνο αν η ρίζα r συνδέεται με όλα τα άλλα σημεία του P στο \vec{G} . Μπορούμε να αποφασίσουμε το τελευταίο σε $O(|E|)$ χρόνο εφαρμόζοντας μια αναζήτηση κατά πλάτος (breadth first search) ή μια αναζήτηση κατά βάθος (depth first search).

3.8 Το πρόβλημα της κατασκευής του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού δέντρου με ρίζα

Σε αυτήν την ενότητα μελετάμε το πρόβλημα της κατασκευής του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού δέντρου με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P . Προτείνουμε έναν $O(|P|^2 \log |P|)$ χρόνου αλγόριθμο περιστροφικής σάρωσης (rotational sweep) που παράγει το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό δέντρο με ρίζα του P . Ο αλγόριθμος αυτός είναι ανάλογος με τον αλγόριθμο κατασκευής του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού δέντρου με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα που δόθηκε στην Ενότητα 3.4.

Παρατήρηση 4. Αν περιστρέψουμε ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$ δεξιόστροφα (αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού) τότε το $x'y'$ -μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό δέντρο με ρίζα του συνόλου σημείων P με ρίζα r αλλάζει μόνο όταν ο άξονας y' γίνει (ή αφήσει τη θέση όπου προηγουμένως ήταν) κάθετος ή παράλληλος σε κάποια γραμμή που διέρχεται από δύο σημεία του P .

Παρατήρηση 5. Έστω x', y' και x'', y'' άξονες δύο διαφορετικών Καρτεσιανών Συστημάτων Συντεταγμένων, τέτοιοι ώστε ο x'' (y'') σχηματίζει με τον x' (αντίστοιχα με τον y') μια δεξιόστροφη γωνία ίση με $k\frac{\pi}{2}$, $k = 1, 2, 3$. Τότε το $x'y'$ -μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό δέντρο με ρίζα του P ταυτίζεται με το $x''y''$ -μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό δέντρο με ρίζα του P .

Με βάση την Παρατήρηση 4 και την Παρατήρηση 5 ορίζουμε το σύνολο $\Theta = \{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) : \text{μια γραμμή με κλίση } \theta \text{ είναι είτε κάθετη ή παράλληλη σε μια γραμμή που διέρχεται από δύο σημεία του } P\}$. Έστω $S[\Theta]$ η ταξινομημένη ακολουθία που περιέχει τις κλίσεις του Θ σε αύξουσα σειρά, δηλαδή $S[\Theta] = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $\theta_i < \theta_{i+1}$, $0 \leq i \leq m-2$

και $m \leq \binom{|P|}{2}$. Ορίζουμε το κρίσιμο σύνολο των κλίσεων $\Theta_{\text{κρίσιμο}} = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}\} \cup \{\frac{\theta_0+\theta_1}{2}, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \dots, \frac{\theta_{m-2}+\theta_{m-1}}{2}, \frac{\theta_{m-1}+\frac{\pi}{2}}{2}\}$. Έστω $x_0y_0, x_1y_1, \dots, x_{2m-1}y_{2m-1}$ τα Καρτεσιανά Συστήματα Συντεταγμένων τέτοια ώστε ο άξονας y_{2i} έχει κλίση $\theta_i, 0 \leq i \leq m-1$, ο άξονας y_{2i+1} έχει κλίση $\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}, 0 \leq i \leq m-2$ και ο άξονας y_{2m-1} έχει κλίση $\frac{\theta_{m-1}+\frac{\pi}{2}}{2}$.

Ανάλογα με το Λήμμα 2 εξάγουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 6. Το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του συνόλου σημείων με ρίζα P είναι ένα από τα x_iy_i -μονότονα ελάχιστα συνδετικά δέντρα με ρίζα του $P, i = 0, 1, 2, \dots, 2m-1$, και πιο συγκεκριμένα αυτό με το μικρότερο κόστος.

Θεώρημα 5. Το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα P μπορεί να κατασκευαστεί σε $O(|P|^2 \log |P|)$ χρόνο.

Απόδειξη. Δίνουμε έναν αλγόριθμο που κατασκευάζει το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P . Ο αλγόριθμος κατασκευής του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα είναι ένας αλγόριθμος περιστροφικής σάρωσης ανάλογος του αλγορίθμου κατασκευής του ομοιόμορφα μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα που δόθηκε στην Ενότητα 3.4. Στον αλγόριθμο κατασκευής του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$ που αρχικά ταυτίζεται με το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων x_0y_0 περιστρέφεται δεξιόστροφα έως ότου ταυτιστεί με το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων xy , δηλαδή με το δοθέν Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων. Κατά τη διάρκεια της περιστροφής, ανανεώνεται το $x'y'$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P . Από το Λήμμα 6 προκύπτει ότι αρκεί να υπολογίσουμε τα x_iy_i -μονότονα ελάχιστα συνδετικά δέντρα με ρίζα του P για τα Καρτεσιανά Συστήματα Συντεταγμένων $x_iy_i, i = 0, 1, 2, \dots, 2m-1$. Έστω T_i^{opt} το x_iy_i -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του $P, i = 0, 1, \dots, 2m-1$. Τότε ο αλγόριθμος κατασκευής του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα επαναδιατυπώνεται ως εξής. Ο αλγόριθμος αρχικά παράγει τα Καρτεσιανά Συστήματα Συντεταγμένων $x_0y_0, x_1y_1, \dots, x_{2m-1}y_{2m-1}$ σε $O(|P|^2 \log |P|)$ χρόνο. Ο αλγόριθμος επίσης παράγει για κάθε $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ μια λίστα L_i που περιέχει τα ζευγάρια των σημείων του P για τα οποία η ευθεία που διέρχεται από αυτά είναι είτε κάθετη ή παράλληλη στον άξονα y_{2i} . Όλες οι $L_i, 0 \leq i \leq m-1$, μπορούν να παραχθούν σε $O(|P|^2 \log |P|)$ συνολικό χρόνο. Μετά παράγει το T_0^{opt} χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4. Μετά τρέχει για $i = 1, 2, \dots, 2m-1$, παράγοντας τα $T_1^{\text{opt}}, T_2^{\text{opt}}, \dots, T_{2m-1}^{\text{opt}}$ με αυτήν την σειρά. Κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης αποθηκεύει το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων x Ελάχιστου y Ελάχιστου στο οποίο βρήκε έως τώρα τη λύση ελάχιστου κόστους. Στο τέλος, επιστρέφει το x Ελάχιστου y Ελάχιστου-μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P που επαναυπολογίζεται χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.

Από το Λήμμα 6 προκύπτει ότι ο αλγόριθμος κατασκευής του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα πα-

ράγει το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P . Οπότε αρκεί να αναλύσουμε την χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου. Χρησιμοποιούμε παρόμοιες δομές δεδομένων $PD(p), p \in P \setminus \{r\}$, με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στο Θεώρημα 2. Πιο συγκεκριμένα για κάθε σημείο $p \in P \setminus \{r\}$ η δομή δεδομένων $PD(p)$ είναι ένα ισορροπημένο δυαδικό δέντρο αναζήτησης που περιέχει τα ζευγάρια $(q, d(p, q))$ για όλα τα σημεία $q \in P \setminus \{p\}$ για τα οποία το ευθύγραμμο τμήμα \overline{pq} μπορεί να διασχιστεί σε ένα $x_i y_i$ -μονότονο μονοπάτι από το p στο r , όπου i είναι ο δείκτης της τρέχουσας επανάληψης του αλγορίθμου. Τότε χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στο Θεώρημα 2 ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $O(|P|^2 \log |P|)$. \square

3.9 Το πρόβλημα της αναγνώρισης ομοιόμορφα $2K$ -μονότονων με ρίζα γραφημάτων

Τώρα μελετάμε το πρόβλημα της αναγνώρισης ομοιόμορφα $2K$ -μονότονων με ρίζα γραφημάτων, δηλαδή δοθέντος ενός συνδεδεμένου γεωμετρικού γραφήματος $G = (P, E)$ με ρίζα r το πρόβλημα της απόφασης αν το G είναι ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο με ρίζα. Η αντιμετώπιση που έχουμε στο πρόβλημα αυτό είναι ανάλογη με την αντιμετώπιση που είχαμε για το πρόβλημα της αναγνώρισης ομοιόμορφα μονότονων με ρίζα γραφημάτων που δόθηκε στην Ενότητα 3.5.

Για κάθε $p \in P \setminus \{r\}$ έστω $A(p, x, y)$ το σύνολο $\{q : \text{το } q \text{ είναι γειτονικό του } p \text{ και το } q \text{ βρίσκεται στο ίδιο τεταρτημόριο του επιπέδου με το } p \text{ και ισχύει ότι } |x(q)| \leq |x(p)| \text{ και } |y(q)| \leq |y(p)|\}$. Έστω $B(x, y)$ το σύνολο $\{p : p \in P \setminus \{r\} \text{ με } A(p, x, y) \neq \emptyset\}$. Τότε ανάλογα με την Πρόταση 1 εξάγουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4. Το G είναι xy -μονότονο με ρίζα αν και μόνο αν $|B(x, y)| = |P| - 1$.

Παρόμοια με την Παρατήρηση 4 εξάγουμε την ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 6. Αν περιστρέψουμε ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$ δεξιόστροφα τότε το G μπορεί να γίνει $x'y'$ -μονότονο με ρίζα ενώ προηγουμένως δεν ήταν, ή αντίστροφα, μόνο όταν ο άξονας y' γίνει (ή αφήσει τη θέση όπου προηγουμένως ήταν) κάθετος ή παράλληλος σε μια ακμή του G ή όταν ο άξονας y' γίνει (ή αφήσει τη θέση όπου προηγουμένως ήταν) κάθετος ή παράλληλος σε μια γραμμή που διέρχεται από τη ρίζα r και ένα άλλο σημείο του P .

Από την προηγούμενη παρατήρηση προκύπτει ότι αρκεί να εξετάσουμε τα Καρτεσιανά Συστήματα Συντεταγμένων $x_0 y_0, x_1 y_1, \dots, x_{2m-1} y_{2m-1}$, $m < |E| + |P|$ τέτοια ώστε οι άξονες $y_0, y_2, \dots, y_{2m-2}$ είναι όλοι οι άξονες που είναι είτε (i) κάθετοι ή παράλληλοι σε κάποια ακμή του G ή (ii) κάθετοι ή παράλληλοι σε κάποια γραμμή που διέρχεται από την r και ένα άλλο σημείο του P . Η κλίση κάθε άξονα y_{2i} είναι

$\theta_i, 0 \leq i \leq m-1$ και ισχύει ότι $0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < \frac{\pi}{2}$. Επιπλέον η κλίση κάθε άξονα y_{2i+1} είναι ίση με $\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2}, i = 0, 1, \dots, m-2$ και η κλίση του y_{2m-1} είναι ίση με $\frac{\theta_{m-1} + \frac{\pi}{2}}{2}$. Παρόμοια με το Λήμμα 3 εξάγουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 7. *Το G είναι ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο με ρίζα αν και μόνο αν το G είναι $x_i y_i$ -μονότονο με ρίζα για κάποιο Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x_i y_i, i = 0, 1, \dots, 2m-1$.*

Θεώρημα 6. *Έστω $G = (P, E)$ ένα συνδεδεμένο γεωμετρικό γράφημα με ρίζα τότε μπορούμε να αποφασίσουμε σε $O(|E| \log |P|)$ χρόνο αν το G είναι ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο με ρίζα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 3. Δίνουμε έναν αλγόριθμο περιστροφικής σάρωσης που αποφασίζει αν το G είναι ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο με ρίζα. Από το Λήμμα 7 προκύπτει ότι ο αλγόριθμος αναγνώρισης ομοιόμορφα $2K$ -μονότονων με ρίζα γραφημάτων αποφασίζει αν το G είναι ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο με ρίζα εξετάζοντας αν το G είναι $x_i y_i$ -μονότονο με ρίζα για κάποιο Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x_i y_i, i = 0, 1, \dots, 2m-1$. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης ομοιόμορφα $2K$ -μονότονων με ρίζα γραφημάτων εξετάζει τα Καρτεσιανά Συστήματα Συντεταγμένων σε αύξουσα σειρά ως προς την κλίση του κάθετου αξονά τους (δηλαδή του άξονα y_i), δηλαδή εξετάζει πρώτα το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x_0 y_0$ μετά το $x_1 y_1, \dots$, και στο τέλος εξετάζει το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x_{2m-1} y_{2m-1}$.

Τώρα αποδεικνύουμε ότι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $O(|E| \log |P|)$. Τα Καρτεσιανά Συστήματα Συντεταγμένων $x_0 y_0, x_1 y_1, \dots, x_{2m-1} y_{2m-1}$ παράγονται σε $O(|E| \log |P|)$ χρόνο. Κάθε Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x_{2i} y_{2i}$ για το οποίο ο άξονας y_{2i} είναι κάθετος ή παράλληλος σε μια γραμμή που διέρχεται από τη ρίζα r και ένα σημείο του $P \setminus \{r\}$, έστω το q , συνοδεύεται από το σημείο q . Για κάθε $i = 0, 1, \dots, m-1$ κατασκευάζουμε μια λίστα L_i που περιέχει τα ζευγάρια των σημείων του P που είναι συνδεδεμένα με ακμή κάθετη ή παράλληλη στον άξονα y_{2i} . Όλες οι λίστες $L_i, 0 \leq i \leq m-1$, μπορούν να παραχθούν σε $O(|E| \log |P|)$ συνολικό χρόνο. Ο αλγόριθμος διατηρεί για κάθε $p \in P \setminus \{r\}$ μια δομή δεδομένων $A(p)$ που αναπαριστά το σύνολο $A(p, x_i, y_i)$ (όταν ο αλγόριθμος εξετάζει το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x_i y_i$) και μπορεί να υλοποιηθεί ως ένα 2-3 δέντρο που αποθηκεύει τους δείκτες των σημείων που περιέχει. Ο αλγόριθμος διατηρεί ακόμα μια δομή δεδομένων B που αναπαριστά το σύνολο $B(x_i, y_i)$ (όταν ο αλγόριθμος εξετάζει το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x_i y_i$) και υλοποιείται ως ένα διάνυσμα από λογικές τιμές (boolean) μεγέθους $O(|P|)$. Χρησιμοποιώντας παρόμοια ανάλυση με εκείνη που δόθηκε στο Θεώρημα 3 η αρχική κατασκευή όλων των $A(p), p \in P \setminus \{r\}$, έτσι ώστε το $A(p)$ να ισούται με το $A(p, x_0, y_0)$ παίρνει $O(|E| \log |P|)$ συνολικό χρόνο. Έχοντας κατασκευάσει όλα τα $A(p), p \in P \setminus \{r\}$, η παραγωγή του B έτσι ώστε το B να ισούται με το $B(x_0, y_0)$ παίρνει $O(|P|)$ χρόνο, δηλαδή $O(1)$ χρόνο για να εξεταστεί αν το $A(p) \neq \emptyset$ και να εισαχθεί το p στο B για κάθε $p \in P \setminus \{r\}$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με αυτά που δόθηκαν

στο Θεώρημα 3, οι ανανεώσεις όλων των $A(p), p \in P \setminus \{r\}$, και του B σε όλη τη διάρκεια του αλγορίθμου παίρνουν $O(|E| \log |P|)$ συνολικό χρόνο. Επιπλέον, από την Πρόταση 4, έχοντας το B ίσο με το $B(x_i, y_i)$ μπορεί να αποφασιστεί σε $O(1)$ χρόνο αν το G είναι $x_i y_i$ -μονότονο με ρίζα. Οπότε η εκτέλεση όλων των ελέγχων, δηλαδή το αν το G είναι $x_i y_i$ -μονότονο με ρίζα για κάθε $i = 0, 1, \dots, 2m - 1$, χρησιμοποιώντας τη δομή δεδομένων B παίρνει $O(|E|)$ συνολικό χρόνο. Από όλα τα προηγούμενα προκύπτει ότι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $O(|E| \log |P|)$. \square

Σημειώνουμε εδώ ότι όπως κάναμε και στον αλγόριθμο αναγνώρισης ομοιόμορφα μονότονων με ρίζα γραφημάτων, στον αλγόριθμο αναγνώρισης ομοιόμορφα $2K$ -μονότονων με ρίζα γραφημάτων για κάθε $p \in P \setminus \{r\}$ αποθηκεύσαμε περισσότερες πληροφορίες από όσες ήταν αναγκαίες για να παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο όσο το δυνατόν ευκολότερα. Πιο συγκεκριμένα στον αλγόριθμο αναγνώρισης ομοιόμορφα $2K$ -μονότονων με ρίζα γραφημάτων για κάθε $p \in P \setminus \{r\}$ αποθηκεύσαμε το σύνολο $A(p, x', y')$. Παρ' όλα αυτά αντί να αποθηκεύσουμε όλο το σύνολο $A(p, x', y')$ μπορούσαμε να αποθηκεύσουμε μόνο την πληθικότητα του $A(p, x', y')$. Σημειώνουμε ακόμα ότι θα μπορούσαμε αντί να έχουμε αποθηκεύσει το σύνολο $B(x', y')$ (στη δομή δεδομένων B) να έχουμε μόνο την πληθικότητα του $B(x', y')$. Αυτές οι αλλαγές δεν αλλάζουν το χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου αναγνώρισης ομοιόμορφα $2K$ -μονότονων με ρίζα γραφημάτων όμως μετά τον υπολογισμό των Καρτεσιανών Συστημάτων Συντεταγμένων (που γίνεται σε $O(|E| \log |P|)$ συνολικό χρόνο) και των λιστών $L_i, 0 \leq i \leq m - 1$, (που γίνεται και αυτό σε $O(|E| \log |P|)$ συνολικό χρόνο) τα υπόλοιπα βήματα του αλγορίθμου παίρνουν $O(|E|)$ συνολικό χρόνο.

Ομοιόμορφα $2K$ –μονότονα ελάχιστα συνδετικά γραφήματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε το πρόβλημα της εύρεσης του xy –μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος ενός συνόλου σημείων P και το πρόβλημα της εύρεσης του xy –μονότονου συνδετικού γραφήματος με το ελάχιστο πλήθος ακμών ενός συνόλου σημείων P . Χτίζοντας πάνω σε προηγούμενα αποτελέσματα εξάγουμε εύκολα ότι δοθέντος ενός συνόλου σημείων P το xy –μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P είναι ίσο με το xy –μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P και τα δύο αυτά είναι ίσα με το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής του P . Μελετάμε ακόμα το πρόβλημα της εύρεσης του ομοιόμορφα $2K$ –μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος ενός συνόλου σημείων P και το πρόβλημα της εύρεσης του ομοιόμορφα $2K$ –μονότονου συνδετικού γραφήματος με το ελάχιστο πλήθος ακμών ενός συνόλου σημείων P . Σημειώνουμε ότι δοθέντος ενός συνόλου σημείων P το ομοιόμορφα $2K$ –μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P δεν ταυτίζεται πάντα με το ομοιόμορφα $2K$ –μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P . Όμως δείχνουμε ότι και το ομοιόμορφα $2K$ –μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P και το ομοιόμορφα $2K$ –μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P μπορούν να παραχθούν σε $O(|P|^3)$ χρόνο. Μελετάμε επίσης το πρόβλημα της εύρεσης του y –μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος με k ρίζες ενός συνόλου σημείων με k ρίζες P . Δίνουμε έναν απλό 2–προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα της εύρεσης του y –μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος με k ρίζες ενός συνόλου σημείων με k ρίζες P .

4.1 Προπαρασκευαστικά

Ο Angelini [5] σημείωσε το ακόλουθο γεγονός για τα y –μονότονα γραφήματα.

Γεγονός 4 (Angelini [5]). Έστω $G = (P, E)$ ένα y -μονότονο γράφημα όπου δεν υπάρχουν δύο σημεία του P που έχουν την ίδια y -συντεταγμένη και έστω $p, q \in P$ τέτοια ώστε για κάθε $r \in P \setminus \{p, q\}$ η ακολουθία p, r, q δεν είναι y -μονότονη. Τότε τα p και q είναι γειτονικά στο G .

Το Γεγονός 4 εύκολα επεκτείνεται στο πλαίσιο των xy -μονότονων γραφημάτων. Πιο συγκεκριμένα, έστω $G = (P, E)$ ένα xy -μονότονο γράφημα και $p, q \in P$ τέτοια ώστε για κάθε $r \in P \setminus \{p, q\}$ η ακολουθία των σημείων p, r, q δεν είναι xy -μονότονη (όπου η ακολουθία των σημείων a, b, c είναι xy -μονότονη αν (i) η ακολουθία των x -συντεταγμένων τους δηλαδή η ακολουθία $x(a), x(b), x(c)$ είναι μονότονη και (ii) η ακολουθία των y -συντεταγμένων τους δηλαδή η ακολουθία $y(a), y(b), y(c)$ είναι μονότονη) τότε τα p και q είναι γειτονικά στο G . Οι Alon et al. [4] σημείωσαν ότι τα σημεία p, q ενός συνόλου σημείων P είναι ορθογώνια ορατά αν και μόνο αν για κάθε $r \in P \setminus \{p, q\}$ η ακολουθία των σημείων p, r, q δεν είναι xy -μονότονη. Οπότε το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής του P είναι υπογράφημα του G .

Οι Liotta et al. [41, Λήμμα 2.1] έδειξαν ότι το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής ενός συνόλου σημείων είναι ένα xy -μονότονο γράφημα¹.

Από τις προηγούμενες δύο προτάσεις, που αφορούν το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής εξάγουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 7. Έστω P ένα σύνολο σημείων. Το xy -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P και το xy -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P ταυτίζονται και είναι και τα δύο ίσα με το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής του P .

Ανακαλούμε ότι το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής $G = (P, E)$ του P μπορεί να παραχθεί σε $O(|P| \cdot \log |P| + |E|)$ χρόνο [54] το οποίο είναι βέλτιστο [54] και ότι υπάρχουν σύνολα σημείων P για τα οποία το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής έχει $\Omega(|P|^2)$ πλήθος ακμών [4] όπως επίσης και ότι υπάρχουν σύνολα σημείων για τα οποία το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής έχει γραμμικό πλήθος ακμών [4].

4.2 Το πρόβλημα της εύρεσης του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος

Σε αυτήν την ενότητα μελετάμε το πρόβλημα της εύρεσης του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος ενός συνόλου σημείων όπως επίσης και το πρόβλημα της εύρεσης του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου συνδετικού γραφήματος με το ελάχιστο

¹Για την ακρίβεια οι Liotta et al. [41, Λήμμα 2.1] έδειξαν ότι το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής ενός συνόλου σημείων είναι ένα γράφημα τέτοιο ώστε κάθε δύο κόμβοι του συνδέονται με ένα μονοπάτι που περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζεται από αυτούς τους δύο κόμβους. Όμως με προσεκτικό διάβασμα το μονοπάτι που εξάγεται στην απόδειξη των Liotta et al. [41, Λήμμα 2.1] είναι xy -μονότονο.

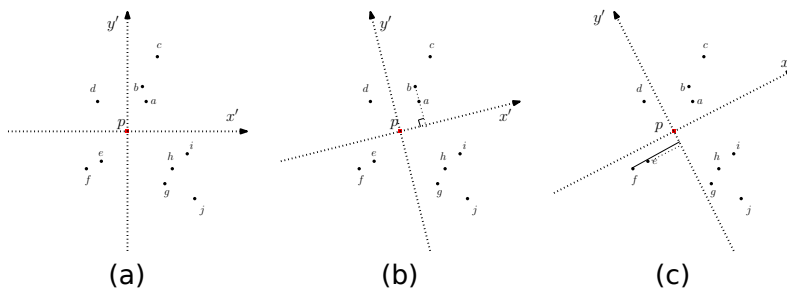
πλήθος ακμών ενός συνόλου σημείων. Αρχικά δείχνουμε ότι το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα ενός συνόλου σημείων P μπορεί να παραχθεί σε $O(|P|^3)$ χρόνο. Για την παραγωγή του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος ενός συνόλου σημείων χρησιμοποιούμε την τεχνική της περιστροφικής σάρωσης (rotational sweep). Η προσέγγιση που χρησιμοποιούμε για την παραγωγή του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος ενός συνόλου σημείων είναι παρόμοια με την προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα ενός συνόλου σημείων με ρίζα που δόθηκε στην Ενότητα 3.8.

Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν τρία σημεία του P που να είναι συνηθειασκά και ότι δεν υπάρχουν δύο ευθύγραμμα τμήματα \overline{pq} και $\overline{p'q'}$, $p, p', q, q' \in P$ που να είναι παράλληλα ή κάθετα μεταξύ τους.

Έστω P ένα σύνολο σημείων και p ένα σημείο του P . Έστω επίσης $RV(p, x', y')$ το υποσύνολο των σημείων του P που είναι ορθογώνια ορατά από το p ως προς το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$. Για παράδειγμα δείτε το Σχήμα 4.1(a).

Πρόταση 5. Αν περιστρέψουμε ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$ δεξιόστροφα (αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού) τότε το $x'y'$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P αλλάζει μόνο όταν ο άξονας y' γίνει (ή αφήσει τη θέση όπου προηγουμένως ήταν) κάθετος ή παράλληλος σε κάποια ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία του P .

Απόδειξη. Αν περιστρέψουμε το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$ δεξιόστροφα τότε το $RV(p, x', y')$ για ένα σημείο $p \in P$ αλλάζει μόνο όταν ο άξονας y' γίνει (ή αφήσει τη θέση όπου προηγουμένως ήταν) κάθετος ή παράλληλος σε κάποια ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία του P , δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 4.1. Από την προηγούμενη πρόταση και αφού το $RV(p, x', y'), p \in P$ ισούται με το σύνολο των γειτονικών κόμβων του p στο $x'y'$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P (Πόρισμα 7), εξάγουμε την πρόταση. \square



Σχήμα 4.1: Στο (a) $RV(p, x', y') = \{a, b, d, e, g, h, i\}$. Στο (b) ο άξονας y' γίνεται παράλληλος στο ευθύγραμμο τμήμα \overline{ab} και πλέον το b δεν είναι ορθογώνια ορατό από το p . Τελικά, στο (c) ο άξονας y' έχει αφήσει τη θέση όπου προηγουμένως ήταν κάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα \overline{ef} και πλέον το f γίνεται ορθογώνια ορατό από το p .

Έστω $S = \{s \in [0, \frac{\pi}{2}) : \text{η γραμμή με κλίση } s \text{ είναι κάθετη ή παράλληλη σε μια γραμμή που διέρχεται από δύο σημεία του } P\}$. Έστω ότι το $S = \{s_1, s_2, \dots, s_l\}$ με $l = \binom{|P|}{2}$ τέτοια ώστε $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_l < \frac{\pi}{2}$. Τώρα ορίζουμε το σύνολο $S_{\text{ικανό}}$ που είναι ίσο με το $\{s_1, \frac{s_1+s_2}{2}, s_2, \frac{s_2+s_3}{2}, \dots, s_l, \frac{s_l+\frac{\pi}{2}}{2}\}$. Έστω $x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_{2l}y_{2l}$ τα Καρτεσιανά Συστήματα Συντεταγμένων στα οποία ο κάθετος άξονας (δηλαδή ο άξονας y_i) έχει κλίση στο $S_{\text{ικανό}}$, ταξινομημένα ως προς την κλίση των κάθετων αξόνων τους.

Θεώρημα 7. Το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα ενός συνόλου σημείων P μπορεί να υπολογιστεί σε $O(|P|^3)$ χρόνο.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 5 και τους προηγούμενους ορισμούς εξαγάγουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 6. Το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P είναι ένα από τα $x'y'$ -μονότονα ελάχιστα συνδετικά γράφημα του P όπου στο Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$ ο άξονας y' έχει κλίση στο $S_{\text{ικανό}}$.

Τώρα δίνουμε έναν $O(|P|^3)$ χρόνου αλγόριθμο περιστροφικής σάρωσης. Ο αλγόριθμος αρχικά υπολογίζει το x_1y_1 -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P και μετά εξάγει κάθε $x_{i+1}y_{i+1}$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P από το x_iy_i -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P . Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x^{\text{opt}}y^{\text{opt}}$ στο οποίο ο αλγόριθμος συνάντησε τη λύση ελάχιστου κόστους ως την τρέχουσα στιγμή αποθηκεύεται. Στο τελευταίο βήμα του ο αλγόριθμος επαναυπολογίζει το $x^{\text{opt}}y^{\text{opt}}$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P το οποίο αφού είναι ίσο με το γράφημα του ορθογώνιου επιρροής $G = (P, E)$ ως προς το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x^{\text{opt}}y^{\text{opt}}$ (Πόρισμα 7) μπορεί να υπολογιστεί σε $O(|P| \cdot \log |P| + |E|)$ χρόνο [54]. Η καίρια πρόταση (την οποία αποδεικνύουμε αργότερα) που κάνει την χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου ίση με $O(|P|^3)$ είναι ότι κάθε μετάβαση από το x_iy_i -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P στο $x_{i+1}y_{i+1}$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P παίρνει $O(|P|)$ χρόνο.

Για κάθε δύο σημεία p, q του P έστω $I(p, q, x_i, y_i)$ το πλήθος των σημείων του $P \setminus \{p, q\}$ που περιέχονται στο ορθογώνιο με γωνιακά σημεία τα p και q και πλευρές παράλληλες στους άξονες του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων x_iy_i . Τότε το $RV(q, x_i, y_i)$ μπορεί ισοδύναμα να ορισθεί χρησιμοποιώντας τις ποσότητες $I(p, q, x_i, y_i), p \in P \setminus \{q\}$, ως εξής: $p \in RV(q, x_i, y_i)$ αν $I(p, q, x_i, y_i) = 0$.

Αποθηκεύουμε το $RV(q, x_i, y_i), q \in P, i = 1, 2, \dots, 2l$ στη δομή δεδομένων $rv(q)$ που υλοποιείται ως ένα διάνυσμα από $|P|$ λογικές τιμές (boolean). Επιπλέον αποθηκεύουμε τις τιμές $I(p, q, x_i, y_i), p, q \in P, i = 1, 2, \dots, 2l$ στη μεταβλητή $I(p, q)$.

Ο υπολογισμός των Καρτεσιανών Συστημάτων Συντεταγμένων $x_iy_i, i = 1, 2, \dots, 2l$ μπορεί να γίνει σε $O(|P|^2 \log |P|)$ χρόνο. Κάθε Καρτεσιανό

Σύστημα Συντεταγμένων $x_i y_i$ συνοδεύεται από το ζευγάρι των σημείων (p_i, q_i) για το οποίο το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{p_i q_i}$ είναι είτε παράλληλο ή κάθετο στον άξονα y_i ή στον άξονα y_{i-1} .

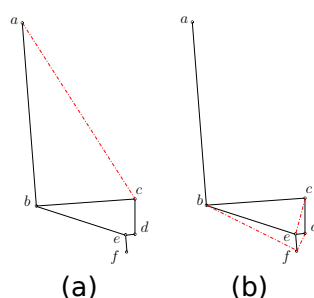
Οι Ichino και Sklansky [34] σημείωσαν ότι με το να χρησιμοποιήσουμε ένα δέντρο εύρους (range tree) [12, 13, 19] που περιέχει τα σημεία του P μπορούμε να υπολογίσουμε i) το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής του P και ii) τις ποσότητες $I(p, q, x, y), p, q, \in P$, για ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων xy . Όπου το δέντρο εύρους [12, 13, 19] είναι μια δομή δεδομένων στην οποία έχει προεπεξεργαστεί ένα στατικό σύνολο σημείων έτσι ώστε να μπορούν να βρεθούν αποδοτικά τα σημεία του συνόλου που περικλείονται σε ένα δοθέν ορθογώνιο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο που περιγράφηκε στην προπροηγούμενη πρόταση, και σημειώθηκε από τους Ichino και Sklansky [34], εξάγονται i) το γράφημα του ορθογωνίου επιρροής του P ως προς το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x_1 y_1$ (που από το Πρόσχημα 7 ισούται με το $x_1 y_1$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P) και ii) οι ποσότητες $I(p, q, x_1, y_1), p, q, \in P$.

Τώρα δείχνουμε ότι μπορούμε να ενημερώσουμε όλα τα $rv(p), p \in P$, έτσι ώστε από ίσα με $RV(p, x_{i-1}, y_{i-1}), p \in P$, να γίνουν ίσα με $RV(p, x_i, y_i), p \in P$, σε $O(|P|)$ συνολικό χρόνο. Για κάθε $p \in P \setminus \{p_i, q_i\}$ η ενημέρωση του $rv(p)$ παίρνει $O(1)$ χρόνο. Αυτό ισχύει καθώς μόνο τα σημεία p_i και q_i πρέπει να εξεταστούν για εισαγωγή στο ή αφαίρεση από το $rv(p)$. Πιο συγκεκριμένα, πρέπει να εξετάσουμε αν για ένα από αυτά, έστω για το p_i , το ορθογώνιο με γωνιακά σημεία τα p και p_i και πλευρές παράλληλες με τους άξονες του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων $x_i y_i$ περιέχει (ή δεν περιέχει) το q_i ενώ το ορθογώνιο με γωνιακά σημεία τα p και p_i και πλευρές παράλληλες με τους άξονες του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων $x_{i-1} y_{i-1}$ δεν περιέχει (ή περιέχει) το q_i . Αν αυτό ισχύει τότε το $I(p_i, p)$ αλλάζει και πρέπει να εξετάσουμε αν το p_i ανήκει στο $rv(p)$ και πρέπει να εισαχθεί στο ή να αφαιρεθεί από το $rv(p)$. Όσον αφορά το $rv(p_i)$ η ενημέρωση παίρνει $O(|P|)$ χρόνο καθώς πρέπει να εξετάσουμε για κάθε άλλο σημείο $q \in P \setminus \{p_i, q_i\}$ αν το ορθογώνιο με γωνιακά σημεία τα q και p_i και πλευρές παράλληλες προς τους άξονες του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων $x_i y_i$ περιέχει (ή δεν περιέχει) το q_i ενώ το ορθογώνιο με γωνιακά σημεία τα q και p_i και πλευρές παράλληλες προς τους άξονες του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων $x_{i-1} y_{i-1}$ δεν περιέχει (ή περιέχει) το q_i . Αν αυτό ισχύει τότε πρέπει να ενημερωθεί το $I(q, p_i)$ και να εξεταστεί η ύπαρξη του q στο $rv(p_i)$. Παρόμοια το $rv(q_i)$ μπορεί να ενημερωθεί σε $O(|P|)$ χρόνο. \square

Σημειώνουμε ότι η διαδικασία της παραγωγής του ομοιόμορφα $2K$ -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος ενός συνόλου σημείων μπορεί να τροποποιηθεί τετριμμένα έτσι ώστε να παράγει το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών ενός συνόλου σημείων P σε $O(|P|^3)$ χρόνο. Αφού για αυθαίρετο Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x' y'$ το $x' y'$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P ισούται με το $x' y'$ -μονότονο συν-

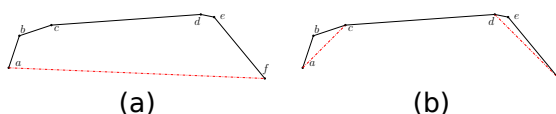
δετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P (Πόρισμα 7), η μόνη τροποποίηση που είναι αναγκαία είναι στη μετάβαση από το Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x_i y_i$ στο Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x_{i+1} y_{i+1}$ να ελέγχουμε αν το $x_{i+1} y_{i+1}$ -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P έχει το ελάχιστο πλήθος ακμών μεταξύ όλων των κατασκευασμένων λύσεων έως τότε.

Στο Σχήμα 4.2 δίνουμε ένα σύνολο σημείων P για το οποίο το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P είναι διαφορετικό από το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P .



Σχήμα 4.2: Τα σημεία a, b και c σχηματίζουν μια ορθή γωνία. Επιπλέον τα σημεία d, e και f σχηματίζουν μια ορθή γωνία. Η κλίση της \overline{de} είναι μικρότερη από την κλίση της \overline{bc} . Το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P εξάγεται όταν ο άξονας y' είναι παράλληλος στο \overline{de} και απεικονίζεται στο (a). Από την άλλη μεριά το ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο ελάχιστο συνδετικό γράφημα του P εξάγεται όταν ο άξονας y' είναι παράλληλος στο \overline{bc} και απεικονίζεται στο (b).

Στο Σχήμα 4.3 δίνουμε ένα σύνολο σημείων P για το οποίο το (μη-ομοιόμορφα) $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P δεν ταυτίζεται με το (μη-ομοιόμορφα) $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο κόστος του P .



Σχήμα 4.3: Η κλίση του \overline{ac} είναι $\frac{\pi}{4}$ ενώ η κλίση του \overline{fd} είναι $\frac{3\pi}{4}$. Στην (a) απεικονίζεται το $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο πλήθος ακμών του P . Στην (b) απεικονίζεται το $2K$ -μονότονο συνδετικό γράφημα με το ελάχιστο κόστος του P .

Τώρα ασχολούμαστε με το πρόβλημα της αναγνώρισης ομοιόμορφα $2K$ -μονότονων γραφημάτων. Σημειώνουμε ότι ο $O(|E| \cdot \log |P|)$ χρόνος αλγόριθμος περιστροφικής σάρωσης που δόθηκε στην Ενότητα 3.9 και αποφασίζει αν ένα γεωμετρικό γράφημα $G = (P, E)$ με ένα καθορισμένο κόμβο r ως ρίζα είναι ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο με

ρίζα μπορεί εύκολα να επεκταθεί σε ένα $O(|P|^2 \cdot \log |P| + |P| \cdot |E|)$ χρόνου αλγόριθμο περιστροφικής σάρωσης που αποφασίζει αν το G είναι ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο. Πιο συγκεκριμένα, για να αποφασίσουμε αν το G είναι ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο θεωρούμε τα $|P|$ γεωμετρικά γραφήματα με ρίζα $(p_1, G), (p_2, G), \dots, (p_{|P|}, G)$ όπου το (p_i, G) είναι το γεωμετρικό γράφημα G με ρίζα p_i και $\{p_1, p_2, \dots, p_{|P|}\}$ είναι το σύνολο των κόμβων του G . Ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$ περιστρέφεται δεξιόστροφα. Από την Παρατήρηση 6 εξάγεται ότι ένα από αυτά τα $|P|$ γεωμετρικά γραφήματα με ρίζα γίνεται $x'y'$ -μονότονο με ρίζα ενώ προηγουμένως δεν ήταν, ή αντίστροφα, μόνο όταν ο άξονας y' γίνει (ή αφήσει τη θέση όπου προηγουμένως ήταν) παράλληλος ή κάθετος σε μια γραμμή που διέρχεται από δύο σημεία του P . Οπότε, $O(|P|^2)$ Καρτεσιανά Συστήματα Συντεταγμένων χρειάζεται να θεωρηθούν, τα οποία μπορούν να υπολογιστούν σε $O(|P|^2 \log |P|)$ χρόνο. Κάθε Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων για το οποίο ο κάθετος άξονας (δηλαδή ο άξονας y') είναι παράλληλος ή κάθετος σε μια γραμμή που διέρχεται από δύο σημεία του P , έστω τα p και q , συνοδεύεται από αυτά τα p και q . Όταν ο άξονας y' γίνει (ή αφήσει τη θέση όπου προηγουμένως ήταν) παράλληλος ή κάθετος σε μια γραμμή που διέρχεται από τα σημεία $p, q \in P$ τότε από την Παρατήρηση 6 προκύπτει ότι η κατάσταση, δηλαδή αν είναι $x'y'$ -μονότονα με ρίζα, των γεωμετρικών γραφημάτων με ρίζα (p, G) και (q, G) μπορεί να αλλάξει. Οπότε εκτελούνται τα βήματα του αλγορίθμου της αναγνώρισης ομοιόμορφα $2K$ -μονότονων με ρίζα γραφημάτων που δόθηκε στην Ενότητα 3.9 για το χειρισμό του γεγονότος που σχετίζεται με το τρέχων Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$ για τα γεωμετρικά γραφήματα με ρίζα (p, G) και (q, G) . Επιπρόσθετα αν $\overline{pq} \in E$ τότε από την Παρατήρηση 6 προκύπτει ότι η κατάσταση, δηλαδή αν είναι $x'y'$ -μονότονα με ρίζα, κάθε $(r, G), r \in P \setminus \{p, q\}$, μπορεί να αλλάξει. Τότε για κάθε $(r, G), r \in P \setminus \{p, q\}$, εκτελούνται τα βήματα του αλγορίθμου της αναγνώρισης ομοιόμορφα $2K$ -μονότονων με ρίζα γραφημάτων που δόθηκε στην Ενότητα 3.9 για το χειρισμό του γεγονότος που σχετίζεται με το τρέχων Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων $x'y'$. Τα εναπομείναντα βήματα, δηλαδή τα βήματα μετά τον υπολογισμό των ικανών Καρτεσιανών Συστημάτων Συντεταγμένων (δηλαδή των Καρτεσιανών Συστημάτων Συντεταγμένων που αρκεί να εξετάσουμε για να αποφασίσουμε αν το γεωμετρικό γράφημα με ρίζα είναι ομοιόμορφα $2K$ -μονότονο με ρίζα) και τον υπολογισμό των λιστών L_i , του αλγορίθμου της αναγνώρισης ομοιόμορφα $2K$ -μονότονων με ρίζα γραφημάτων που δόθηκε στην Ενότητα 3.9 για οποιοδήποτε από αυτά τα $|P|$ γεωμετρικά γραφήματα με ρίζα παίρνουν $O(|E|)$ συνολικό χρόνο (Ενότητα 3.9). Οπότε το να εκτελεστούν τα εναπομείναντα βήματα για όλα αυτά τα $|P|$ γεωμετρικά γραφήματα με ρίζα παίρνει $O(|P| \cdot |E|)$ συνολικό χρόνο.

4.3 Ένας 2–προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα της εύρεσης του y –μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού γραφήματος με k ρίζες

Τώρα μελετάμε το πρόβλημα της εύρεσης του y –μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού γραφήματος με k ρίζες ενός συνόλου σημείων με k ρίζες P , όπου $1 < k < |P|$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν δύο σημεία με ίδια y –συντεταγμένη.

Έστω P ένα σύνολο σημείων και $a, b \in \mathbb{R}$ τότε με $P_{a < y < b}$ συμβολίζουμε το υποσύνολο του P για το οποίο οι y –συντεταγμένες των σημείων του είναι μεταξύ του a και του b . Παρόμοια ορίζονται τα υποσύνολα $P_{a < y \leq b}$, $P_{a \leq y < b}$ και $P_{a \leq y \leq b}$.

Στο Λήμμα 1 σημειώνουμε ότι το y –μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό δέντρο με ρίζα ενός συνόλου σημείων P με ρίζα r είναι η ένωση του (i) y –μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού δέντρου με ρίζα του $P_{y \leq y(r)}$ και του (ii) y –μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού δέντρου με ρίζα του $P_{y \geq y(r)}$. Το προηγούμενο λήμμα επεκτείνεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 8. Έστω P ένα σύνολο σημείων με k ρίζες, με $1 < k < |P|$, όπου r_1, r_2, \dots, r_k είναι οι ρίζες του P τέτοιες ώστε $y(r_1) < y(r_2) < \dots < y(r_k)$. Τότε το y –μονότονο ελάχιστο συνδεδετικό γράφημα με k ρίζες του P είναι η ένωση

1. του y –μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού δέντρου με ρίζα του $P_{y \leq y(r_1)}$.
2. του y –μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού δέντρου με ρίζα του $P_{y \geq y(r_k)}$.
3. του y –μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού γραφήματος με 2 ρίζες του $P_{y(r_i) \leq y \leq y(r_{i+1})}$, $1 \leq i \leq k-1$.

Θεώρημα 8. Δοθέντος ενός συνόλου σημείων P με k ρίζες, με $1 < k < |P|$, μπορούμε να εξάγουμε σε $O(|P| \cdot \log^2 |P|)$ χρόνο ένα y –μονότονο συνδεδετικό γράφημα με k ρίζες του P με κόστος το πολύ δύο φορές το κόστος του y –μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού γραφήματος με k ρίζες του P .

Απόδειξη. Για ένα σύνολο σημείων P με 2 ρίζες τις r_1 και r_2 που είναι το χαμηλότερο και το υψηλότερο σημείο του P , αντίστοιχα, αποδεικνύουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 9. Δοθέντος ενός συνόλου σημείων P με 2 ρίζες τις r_1 και r_2 που είναι το χαμηλότερο και το υψηλότερο σημείο του P , αντίστοιχα, μπορούμε να εξάγουμε σε $O(|P| \cdot \log^2 |P|)$ χρόνο ένα y –μονότονο συνδεδετικό γράφημα με 2 ρίζες του P με κόστος το πολύ δύο φορές το κόστος του y –μονότονου ελάχιστου συνδεδετικού γραφήματος με 2 ρίζες του P .

Απόδειξη. Αρχικά εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1 στο P θεωρώντας ότι το P έχει μόνο μία ρίζα την r_1 και εξάγουμε το γεωμετρικό γράφημα G_1 . Μετά, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1 στο P θεωρώντας ότι το

P έχει μόνο μία ρίζα την r_2 και εξάγουμε το γεωμετρικό γράφημα G_2 . Στο τελικό βήμα επιστρέφουμε την ένωση των G_1 και G_2 . Το γεωμετρικό γράφημα $G_1 \cup G_2$ είναι y -μονότονο με 2 ρίζες καθώς το G_1 (G_2) είναι y -μονότονο με ρίζα την r_1 (αντίστοιχα την r_2). Τώρα αποδεικνύουμε ότι το $G_1 \cup G_2$ έχει κόστος το πολύ δύο φορές το κόστος του y -μονότονου ελάχιστου συνδετικού γραφήματος με 2 ρίζες G^{opt} του P . Αφού στο G^{opt} όλα τα σημεία συνδέονται με την r_1 (r_2) με y -μονότονα μονοπάτια τότε προκύπτει ότι το κόστος του G^{opt} είναι μεγαλύτερο από ή ίσο με το κόστος του G_1 (αντίστοιχα του G_2). Οπότε, το κόστος του $G_1 \cup G_2$ που είναι μικρότερο από ή ίσο με το άθροισμα των κοστών του G_1 και του G_2 είναι το πολύ δύο φορές το κόστος του G^{opt} . \square

Από το Λήμμα 8, το Θεώρημα 1 και το Λήμμα 9 εξάγουμε το θεώρημα. \square

Ένα γεωμετρικό γράφημα $G = (P, E)$ με 2 ρίζες τις r_1, r_2 για τις οποίες ισχύει ότι $y(r_1) < y(p) < y(r_2), p \in P \setminus \{r_1, r_2\}$, είναι ένα y -μονότονο με 2 ρίζες γράφημα αν και μόνο αν για κάθε $p \in P \setminus \{r_1, r_2\}$ υπάρχουν q_1, q_2 γειτονικά του p με $y(q_1) < y(p) < y(q_2)$ [40]. Επιπρόσθετα, ένα γεωμετρικό γράφημα $G = (P, E)$ με μία ρίζα r που δεν είναι ούτε το υψηλότερο ούτε το χαμηλότερο σημείο του P είναι y -μονότονο με ρίζα αν και μόνο αν για κάθε $p \in P \setminus \{r\}$ υπάρχει q γειτονικό του p τέτοιο ώστε το $y(q)$ να είναι μεταξύ του $y(r)$ (συμπεριλαμβανομένου του $y(r)$) και του $y(p)$ (Πρόταση 1). Επεκτείνουμε τις προηγούμενες δύο προτάσεις στον ακόλουθο ισοδύναμο χαρακτηρισμό των y -μονότονων με k ρίζες γραφημάτων όπου ο χαρακτηρισμός αυτός συνεπάγεται έναν αποδοτικό αλγόριθμο αναγνώρισης y -μονότονων με k ρίζες γραφημάτων.

Πρόταση 7. Έστω $G = (P, E)$ ένα γεωμετρικό γράφημα με k ρίζες, όπου $1 < k < |P|$ και όπου οι ρίζες είναι οι r_1, r_2, \dots, r_k τέτοιες ώστε $y(r_1) < y(r_2) < \dots < y(r_k)$. Τότε το G είναι y -μονότονο με k ρίζες αν και μόνο αν

1. για κάθε $p \in P_{y < y(r_1)}$ υπάρχει q γειτονικό του p με $y(q) \in (y(p), y(r_1))$.
2. για κάθε $p \in P_{y > y(r_k)}$ υπάρχει q γειτονικό του p με $y(q) \in [y(r_k), y(p))$.
3. για κάθε $p \in P_{y(r_i) < y < y(r_{i+1})}$ υπάρχουν q_1, q_2 γειτονικά του p με $y(q_1) \in [y(r_i), y(p))$ και $y(q_2) \in (y(p), y(r_{i+1}))$, $i = 1, 2, \dots, k - 1$.
4. υπάρχει q γειτονικό του r_1 με $y(q) \in (y(r_1), y(r_2))$.
5. υπάρχει q γειτονικό του r_k με $y(q) \in [y(r_{k-1}), y(r_k))$.
6. υπάρχουν q_1, q_2 γειτονικά του r_i με $y(q_1) \in [y(r_{i-1}), y(r_i))$ και $y(q_2) \in (y(r_i), y(r_{i+1}))$, $2 \leq i \leq k - 1$.

Κατασκευάζοντας $2K$ –μονότονα συνδετικά γραφήματα σε σύνολα σημείων σε κυρτή θέση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε το πρόβλημα της παραγωγής $2K$ –μονότονων συνδετικών γραφημάτων σε σύνολα σημείων σε κυρτή θέση. Αποδεικνύουμε ότι για κάθε σύνολο σημείων σε κυρτή θέση P μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα $2K$ –μονότονο συνδετικό γράφημα που αποτελείται από το P , το πολύ ένα Steiner σημείο (δηλαδή ένα επιπρόσθετο σημείο που δεν δίνεται ως είσοδος) και το πολύ $4|P| - 8$ ακμές.

Στο κεφάλαιο αυτό υποθέτουμε ότι τα σύνολα σημείων που μελετάμε είναι σε γενική θέση, δηλαδή δεν περιέχουν 3 σημεία συνευθειακά.

5.1 Προπαρασκευαστικά

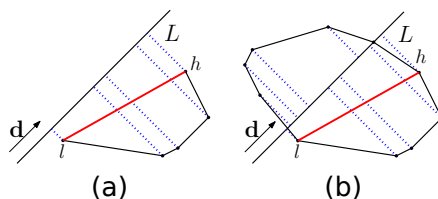
Ένα σύνολο σημείων P είναι σε κυρτή θέση αν κανένα σημείο $p \in P$ δεν είναι κυρτός συνδυασμός των υπολοίπων σημείων του P .

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό των μονόπλευρων (ως προς μια ευθεία) συνόλων σημείων σε κυρτή θέση που χρησιμοποιήθηκε στο άρθρο των Dehkordi et al. [20]. Έστω P ένα σύνολο σημείων σε κυρτή θέση, L μια γραμμή και $l, h \in P$ τα σημεία με τις ακραίες προβολές l', h' στην L , δηλαδή για τα οποία η προβολή p' στην L κάθε σημείου $p \in P$ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{l'h'}$. Το P είναι μονόπλευρο (one-sided) ως προς την L αν τα l και h είναι γειτονικά στο σύνορο της κυρτής θήκης του P . Το P είναι μονόπλευρο αν υπάρχει γραμμή L τέτοια ώστε το P να είναι μονόπλευρο ως προς την L . Παρόμοια με τον ορισμό των συνόλων σημείων σε κυρτή θέση που είναι μονόπλευρα ως προς μια ευθεία, το σύνολο σημείων σε κυρτή θέση P είναι μονόπλευρο ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος \vec{d} αν είναι μονόπλευρο ως προς μία ευθεία παράλληλη στο \vec{d} .

Θεωρήστε για παράδειγμα το σύνολο σημείων σε κυρτή θέση που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.1(a). Το σύνολο σημείων είναι μονόπλευρο ως προς την ευθεία L και αφού η L είναι παράλληλη με το διάνυσμα \vec{d} τότε το σύνολο σημείων είναι επίσης μονόπλευρο ως προς την κατεύθυνση του \vec{d} .

Γεγονός 5 ([20]). Έστω P ένα σύνολο σημείων σε κυρτή θέση, \vec{d} ένα διάνυσμα και $l, h \in P$ τα σημεία με τις ακραίες προβολές σε μια γραμμή L παράλληλη με το \vec{d} . Τότε το σύνολο των σημείων του P που διασχίζονται καθώς μετακινούμαστε σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού από το l στο h (αντίστοιχα από το h στο l) στο σύνορο της κυρτής θήκης του P είναι μονόπλευρο ως προς την κατεύθυνση του \vec{d} . Το σύνολο παραμένει μονόπλευρο ακόμα και αν ένα από ή και το l και το h αφαιρεθούν.

Δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 5.1(b). Το σύνολο των σημείων που διασχίζονται καθώς μετακινούμαστε σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού από το l στο h (αντίστοιχα από το h στο l) στο σύνορο της κυρτής θήκης του συνόλου σημείων σε κυρτή θέση P είναι μονόπλευρο ως προς την κατεύθυνση του \vec{d} .



Σχήμα 5.1: Παραδείγματα μονόπλευρων συνόλων σημείων σε κυρτή θέση.

Γεγονός 6 (Λήμμα 1 στο [20]). Έστω P ένα μονόπλευρο σύνολο σημείων σε κυρτή θέση τότε ένα επίπεδο $2K$ -μονότονο¹ γράφημα μπορεί να κατασκευαστεί με το P ως το σύνολο των κόμβων εισάγοντας $2|P| - 3$ ακμές. $|P|$ από αυτές τις ακμές που εισάγονται είναι ακμές στο σύνορο της κυρτής θήκης του P ενώ οι υπόλοιπες $|P| - 3$ είναι διαγώνιοι του κυρτού πολυγώνου με κόμβους τα σημεία του P .

5.2 $2K$ -μονότονα συνδεδετικά γραφήματα με σταθερό πλήθος Steiner σημείων και γραμμικό πλήθος ακμών σε σύνολα σημείων σε κυρτή θέση

Σε αυτήν την ενότητα αποδεικνύουμε ότι δοθέντος ενός συνόλου σημείων σε κυρτή θέση P στο επίπεδο μπορούμε να εξάγουμε ένα

¹Στην πραγματικότητα οι Dehkordi et al. [20] στο Λήμμα 1 τους έγραψαν ότι το γράφημα είναι ένα γράφημα αυξουσών-χορδών όμως διαβάζοντας την αποδειξη τους το γράφημα που παράγουν οι Dehkordi et al. [20] είναι $2K$ -μονότονο.

$2K$ -μονότονο γράφημα με το P και το πολύ ένα Steiner σημείο ως το σύνολο των κόμβων του και το πολύ $4|P| - 8$ ακμές.

Στο Λήμμα 10 αρχικά δείχνουμε ότι για την ειδική περίπτωση των συνόλων σημείων σε κυρτή θέση P για τα οποία όλα τα σύνολα σημείων $P_{x \leq 0}, P_{x > 0}, P_{y \leq 0}, P_{y > 0}$ είναι μονόπλευρα μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα $2K$ -μονότονο γράφημα για το οποίο το σύνολο των κόμβων του αποτελείται από το P και το πολύ ένα Steiner σημείο και περιέχει το πολύ $4|P| - 8$ ακμές. Κάποια από τα βήματα που παίρνουμε στην απόδειξη μας είναι παρόμοια με τα βήματα που πήραν οι Dehkordi et al. [20] ώστε να εξάγουν το δεύτερο θεώρημα τους, δηλαδή το θεώρημα τους που σχετίζεται με τα σύνολα σημείων σε κυρτή θέση.

Λήμμα 10. *Δοθέντος ενός συνόλου σημείων σε κυρτή θέση P στο επίπεδο τέτοιο ώστε όλα τα σύνολα σημείων $P_{x \leq 0}, P_{x > 0}, P_{y \leq 0}, P_{y > 0}$ είναι μονόπλευρα μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα $2K$ -μονότονο γράφημα με το P και το πολύ ένα Steiner σημείο ως το σύνολο των κόμβων του και το πολύ $4|P| - 8$ ακμές.*

Απόδειξη. Αν ένα από τα σύνολα σημείων $P_{x \leq 0}, P_{x > 0}, P_{y \leq 0}$ ή $P_{y > 0}$ περιέχει το πολύ 2 σημεία μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα $2K$ -μονότονο γράφημα με το P ως το σύνολο των κόμβων του και το πολύ $4|P| - 10$ ακμές. Για αυτό υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το $P_{x \leq 0}$ περιέχει το πολύ 2 σημεία και ότι $|P_{x \leq 0}| \leq \min\{|P_{x > 0}|, |P_{y \leq 0}|, |P_{y > 0}|\}$. Τότε αφού το σύνολο σημείων $P_{x > 0}$ είναι μονόπλευρο χρησιμοποιούμε το Γεγονός 6 και συνδέουμε κάθε ζευγάρι σημείων στο $P_{x > 0}$ με ένα $2K$ -μονότονο μονοπάτι εισάγοντας $2|P_{x > 0}| - 3$ ακμές. Τώρα θεωρούμε τις περιπτώσεις όπου $|P_{x \leq 0}| = 0$, $|P_{x \leq 0}| = 1$ και $|P_{x \leq 0}| = 2$.

Αν $|P_{x \leq 0}| = 0$ τότε το P ταυτίζεται με το $P_{x > 0}$. Αφού χρησιμοποιήσαμε το Γεγονός 6 κατασκευάσαμε ένα $2K$ -μονότονο γράφημα με το P ως το σύνολο των κόμβων του και $2|P| - 3$ ακμές.

Αν $|P_{x \leq 0}| = 1$ τότε $|P_{x > 0}| = |P| - 1$. Έστω ότι $P_{x \leq 0} = \{p\}$. Εισάγουμε $|P| - 1$ επιπρόσθετες ακμές συνδέοντας το p με όλα τα σημεία του $P_{x > 0}$. Υπενθυμίζουμε ότι αφού το σύνολο σημείων $P_{x > 0}$ είναι μονόπλευρο έχουμε χρησιμοποιήσει το Γεγονός 6 και έχουμε συνδέσει κάθε ζευγάρι σημείων στο $P_{x > 0}$ με ένα $2K$ -μονότονο μονοπάτι εισάγοντας $2|P_{x > 0}| - 3 = 2|P| - 5$ ακμές. Οπότε κατασκευάζουμε ένα $2K$ -μονότονο γράφημα με το P ως το σύνολο των κόμβων του και $2|P_{x > 0}| - 3 + |P| - 1 = 3|P| - 6$ ακμές.

Αν $|P_{x \leq 0}| = 2$ τότε $|P_{x > 0}| = |P| - 2$. Έστω ότι $P_{x \leq 0} = \{p, q\}$. Αρχικά εισάγουμε την ακμή \overline{pq} . Μετά συνδέουμε τα σημεία p και q με όλα τα σημεία του $P_{x > 0}$ με ακμές εισάγοντας $2(|P| - 2)$ επιπρόσθετες ακμές. Υπενθυμίζουμε ότι αφού το σύνολο σημείων $P_{x > 0}$ είναι μονόπλευρο έχουμε χρησιμοποιήσει το Γεγονός 6 και έχουμε συνδέσει κάθε ζευγάρι σημείων στο $P_{x > 0}$ με ένα $2K$ -μονότονο μονοπάτι εισάγοντας $2|P_{x > 0}| - 3 = 2|P| - 7$ ακμές. Οπότε κατασκευάζουμε ένα $2K$ -μονότονο γράφημα με το P ως το σύνολο των κόμβων του και $2|P_{x > 0}| - 3 + 1 + 2(|P| - 2) = 4|P| - 10$ ακμές.

Στο υπόλοιπο της απόδειξης θεωρούμε ότι κάθε σύνολο σημείων $P_{x \leq 0}, P_{x > 0}, P_{y \leq 0}$ και $P_{y > 0}$ περιέχει τουλάχιστον 3 σημεία. Σε αυτήν την

περίπτωση εισάγουμε ένα Steiner σημείο που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, είναι δηλαδή το σημείο $O = (0, 0)$, και κατασκευάζουμε ένα $2K$ -μονότονο γράφημα με το P και την αρχή των αξόνων O ως το σύνολο των κόμβων του και $4|P| - 8$ ακμές.

Θεωρήστε για παράδειγμα το σύνολο σημείων σε κυρτή θέση P που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2(a). Και το $P_{x \leq 0}$ και το $P_{x > 0}$ που απεικονίζονται στο Σχήμα 5.2(a) είναι μονόπλευρα ως προς τον άξονα των y . Το σύνολο σημείων $P_{y > 0}$ που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2(b) δεν είναι μονόπλευρο ως προς τον άξονα των x . Όμως και το $P_{y \leq 0}$ και το $P_{y > 0}$ που απεικονίζονται στο Σχήμα 5.2(b) είναι μονόπλευρα ως προς τη διχοτόμο των αξόνων, δηλαδή την ευθεία με εξίσωση $y = x$.

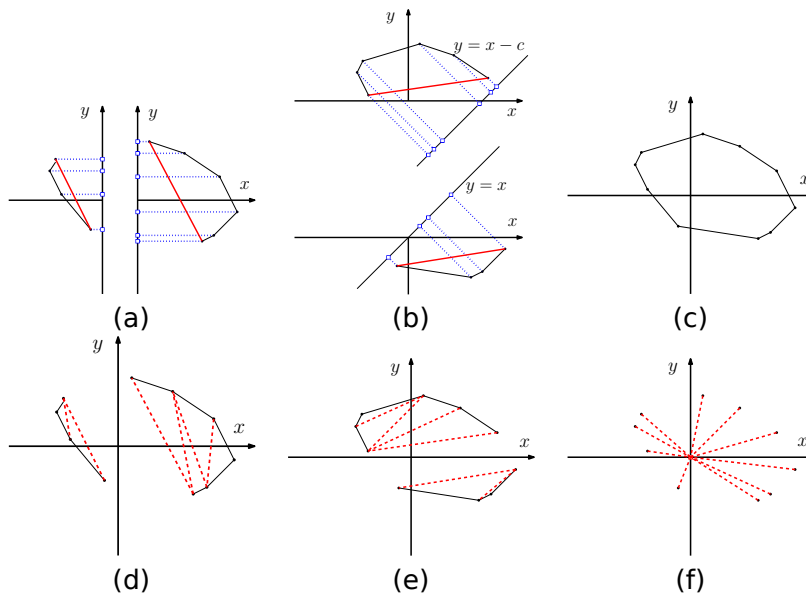
Το πρώτο βήμα που κάνουμε είναι να εισάγουμε όλες τις $|P|$ ακμές που βρίσκονται στο σύνολο της κυρτής θήκης του P . Δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 5.2(c).

Έστω Q οποιοδήποτε από τα $P_{x \leq 0}, P_{x > 0}, P_{y \leq 0}$ και $P_{y > 0}$. Έστω $a, b \in Q$ τέτοια ώστε το Q είναι το σύνολο των σημείων του P που διασχίζονται καθώς μετακινούμαστε σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού από το a στο b στο σύνολο της κυρτής θήκης του P . Τότε $|Q| - 1$ ακμές που είναι στο σύνολο της κυρτής θήκης του Q έχουν ήδη εισαχθεί καθώς είναι επίσης στο σύνολο της κυρτής θήκης του P (και έχουμε εισάγει όλες τις ακμές που βρίσκονται στο σύνολο της κυρτής θήκης του P). Η μόνη ακμή στο σύνολο της κυρτής θήκης του Q που δεν έχει ήδη εισαχθεί είναι η ακμή \overline{ab} . Οπότε χρησιμοποιώντας το Γεγονός 6 συνδέουμε κάθε ζευγάρι σημείων του Q με ένα $2K$ -μονότονο μονοπάτι εισάγοντας $|Q| - 2$ επιπρόσθετες ακμές, δηλαδή ακμές που δε βρίσκονται στο σύνολο της κυρτής θήκης του P .

Αφού και το $P_{x \leq 0}$ και το $P_{x > 0}$ είναι μονόπλευρα χρησιμοποιούμε το Γεγονός 6 και συνδέουμε κάθε ζευγάρι σημείων του $P_{x \leq 0}$ όπως και κάθε ζευγάρι σημείων του $P_{x > 0}$ με ένα $2K$ -μονότονο μονοπάτι εισάγοντας $|P_{x \leq 0}| - 2 + |P_{x > 0}| - 2 = |P| - 4$ επιπρόσθετες ακμές, δηλαδή ακμές που δε βρίσκονται στο σύνολο της κυρτής θήκης του P . Δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 5.2(d) όπου οι ακμές που εισάγονται είναι διακεκομμένες.

Με ανάλογο τρόπο, χρησιμοποιώντας το Γεγονός 6 κάθε ζευγάρι σημείων του $P_{y \leq 0}$ και κάθε ζευγάρι σημείων του $P_{y > 0}$ συνδέεται με ένα $2K$ -μονότονο μονοπάτι εισάγοντας $|P| - 4$ επιπρόσθετες ακμές, δηλαδή ακμές που δε βρίσκονται στο σύνολο της κυρτής θήκης του P . Δείτε το Σχήμα 5.2(e) όπου οι ακμές που εισάγονται είναι διακεκομμένες.

Μέχρι τώρα έχουμε εισάγει $3|P| - 8$ ακμές. Για να κατασκευάσουμε ένα $2K$ -μονότονο γράφημα χρειάζεται μόνο να συνδέσουμε κάθε σημείο του $P_{x \leq 0} \cap P_{y \leq 0}$ (αντίστοιχα του $P_{x \leq 0} \cap P_{y > 0}$) με κάθε σημείο του $P_{x > 0} \cap P_{y > 0}$ (αντίστοιχα του $P_{x > 0} \cap P_{y \leq 0}$) με ένα $2K$ -μονότονο μονοπάτι. Για να το πετύχουμε αυτό εισάγουμε το Steiner σημείο που είναι η αρχή των αξόνων O . Μετά συνδέουμε κάθε σημείο του P με το O με ακμή εισάγοντας $|P|$ ακμές ακόμα. Για ένα παράδειγμα δείτε το Σχήμα 5.2(f) όπου οι ακμές που εισάγονται είναι διακεκομμένες. Με αυτόν τον τρόπο κάθε σημείο u του $P_{x \leq 0} \cap P_{y \leq 0}$ (αντίστοιχα του $P_{x \leq 0} \cap P_{y > 0}$) συνδέεται με κάθε σημείο v του $P_{x > 0} \cap P_{y > 0}$ (αντίστοιχα του



Σχήμα 5.2: Οπτικοποίηση του Λήμματος 10 για ένα αυθαίρετο σύνολο σημείων σε κυρτή θέση P τέτοιο ώστε τα σύνολα σημείων $P_{x \leq 0}$, $P_{x > 0}$, $P_{y \leq 0}$ και $P_{y > 0}$ είναι μονόπλευρα.

$P_{x > 0} \cap P_{y \leq 0}$ με το μονοπάτι (u, O, v) το οποίο είναι xy -μονότονο. Οπότε κατασκευάσαμε ένα $2K$ -μονότονο γράφημα με το P και την αρχή των αξόνων ως το σύνολο των κόμβων του και $4|P| - 8$ ακμές. \square

Σημειώνουμε ότι το Λήμμα 10 δεν απαιτεί το $P_{x \leq 0}$ και το $P_{x > 0}$ (αντίστοιχα το $P_{y \leq 0}$ και το $P_{y > 0}$) να είναι μονόπλευρα ως προς τον άξονα των y (αντίστοιχα ως προς τον άξονα των x). Το Λήμμα 10 απαιτεί κάθε ένα από τα $P_{x \leq 0}$, $P_{x > 0}$, $P_{y \leq 0}$ και $P_{y > 0}$ να είναι μονόπλευρο ως προς κάποια ευθεία που όμως αυτή η ευθεία δεν είναι αναγκαία ένας από τους άξονες και μπορεί επίσης να είναι διαφορετική για κάθε ένα από αυτά. Για παράδειγμα, το $P_{y > 0}$ στο Σχήμα 5.2(b) δεν είναι μονόπλευρο ως προς τον άξονα των x , όμως είναι μονόπλευρο ως προς τη διχοτόμο των αξόνων, δηλαδή την ευθεία με εξίσωση $y = x$.

Στο Λήμμα 11 δείχνουμε ότι για κάθε σύνολο σημείων σε κυρτή θέση P μπορούμε να εισάγουμε ένα κατάλληλο Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων με νέους άξονες x' και y' έτσι ώστε όλα τα σύνολα σημείων $P_{x' \leq 0}$, $P_{x' > 0}$, $P_{y' \leq 0}$ και $P_{y' > 0}$ να είναι μονόπλευρα σύνολα σημείων σε κυρτή θέση. Χρησιμοποιούμε παρόμοια τεχνική με αυτή που χρησιμοποιήθηκε από τους Dehkordi et al. [20] στο Λήμμα 5 τους. Χρησιμοποιούμε εκτενώς το Γεγονός 5.

Λήμμα 11. Δοθέντος ενός συνόλου σημείων σε κυρτή θέση P στο επίπεδο μπορούμε να ορίσουμε νέους άξονες x' και y' έτσι ώστε τα σύνολα σημείων $P_{x' \leq 0}$, $P_{x' > 0}$, $P_{y' \leq 0}$ και $P_{y' > 0}$ να είναι μονόπλευρα σύνολα σημείων σε κυρτή θέση.

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο άξονας

των y δεν είναι κάθετος σε καμμία ακμή στο σύνορο της κυρτής θήκης του P . Έστω \vec{d} ένα διάνυσμα με ίδια κατεύθυνση με αυτή του άξονα των y και l, h το χαμηλότερο και το υψηλότερο σημείο του P ως προς την κατεύθυνση του \vec{d} , δηλαδή με τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη y -συντεταγμένη, αντίστοιχα. Απαριθμούμε τα σημεία του P που διασχίζονται καθώς μετακινούμαστε σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού από το l στο h (αντίστοιχα από το h στο l) στο σύνορο της κυρτής θήκης του P ως $a_0 = l, a_1, a_2, \dots, a_k = h$ (αντίστοιχα ως $b_0 = h, b_1, b_2, \dots, b_m = l$). Δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 5.3(a).

Τώρα ορίζουμε το νέο άξονα y' . Ο νέος άξονας y' είναι η κατευθυνόμενη γραμμή που διέρχεται από το l και το h και είναι κατευθυνόμενη από το l στο h . Δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 5.3(a). Το σύνολο των σημείων $P_{x' \leq 0}$ (αντίστοιχα το $P_{x' > 0}$) είναι το σύνολο των σημείων του P που διασχίζονται καθώς μετακινούμαστε σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού από το l στο h (αντίστοιχα από το επόμενο σημείο του h στο προηγούμενο σημείο του l) στο σύνορο της κυρτής θήκης του P . Από το Γεγονός 5 και το $P_{x' \leq 0}$ και το $P_{x' > 0}$ είναι μονόπλευρα ως προς την κατεύθυνση του \vec{d} .

Σημειώνουμε ότι το $P_{x' \leq 0}$ και το $P_{x' > 0}$ δεν είναι αναγκαία μονόπλευρα ως προς το νέο άξονα y' .

Τώρα προσδιορίζουμε το νέο άξονα x' . Παρόμοια με τους Dehkordi et al. [20] περιστρέφουμε το διάνυσμα \vec{d} σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού έως ότου το \vec{d} να έχει αντίθετη κατεύθυνση με τον άξονα των y . Κάθε φορά που το \vec{d} γίνεται κάθετο σε κάποια ακμή στο σύνορο της κυρτής θήκης του P το ζευγάρι του χαμηλότερου και του υψηλότερου σημείου του P ως προς την κατεύθυνση του \vec{d} αλλάζει [20]. Η ιδέα της προσέγγισης μας είναι να βρούμε διαδοχικά ζευγάρια χαμηλότερου και υψηλότερου σημείου (l', h') και (l'', h'') ως προς την κατεύθυνση του \vec{d} τέτοια ώστε $\angle(\vec{l}'h', \vec{l}h) < \frac{\pi}{2}$ και $\angle(\vec{l}''h'', \vec{l}h) \geq \frac{\pi}{2}$. Τότε ορίζουμε σημεία p_l και p_h στα ευθύγραμμα τμήματα $\vec{l}'l''$ και $\vec{h}'h''$, αντίστοιχα, τέτοια ώστε η κατευθυνόμενη γραμμή από το p_l στο p_h να είναι κάθετη στον άξονα y' . Αυτή η γραμμή θα είναι ο νέος άξονας x' . Σημειώνουμε ξανά ότι το σύνολο σημείων $P_{y' \leq 0}$ και το $P_{y' > 0}$ δεν θα είναι αναγκαία μονόπλευρο ως προς το νέο άξονα x' . Όμως και τα δύο θα είναι μονόπλευρα ως προς την κατεύθυνση του \vec{d} μετά απο κατάλληλη περιστροφή του \vec{d} .

Έστω \vec{d}_0 το διάνυσμα που είναι ίσο με το \vec{d} όταν έχει ίδια κατεύθυνση με τον άξονα των y . Έστω \vec{d}_i το διάνυσμα που είναι ίσο με το \vec{d} την i -στή φορά που το \vec{d} γίνεται κάθετο σε ακμή του συνόρου της κυρτής θήκης του P κατά τη διάρκεια της περιστροφής του \vec{d} . Πιο συγκεκριμένα έστω $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_f$ τα διανύσματα που είναι ίσα με το \vec{d} την πρώτη, δεύτερη, ..., τελική φορά, αντίστοιχα, που γίνεται κάθετο σε ακμή του συνόρου της κυρτής θήκης του P . Έστω επίσης η ακολουθία των χαμηλότερων, υψηλότερων ζευγαριών σημείων $(l_0, h_0) = (l = a_0, h = b_0), (l_1, h_1), (l_2, h_2), \dots, (l_f, h_f)$ που εξάγονται ως προς την κατεύθυνση του \vec{d} καθώς το \vec{d} περιστρέφεται. Τότε $(l_f, h_f) = (h = a_k, l = b_m)$ [20]. Έστω $(l_i, h_i) = (a_j, b_r)$ για κάποια j και

r τότε όπως σημειώθηκε από τους Dehkordi et al. [20] το (l_{i+1}, h_{i+1}) είναι ίσο με:

- (a_{j+1}, b_r) : αν το $\overrightarrow{d_{i+1}}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{a_j a_{j+1}}$ και δεν είναι κάθετο στο $\overrightarrow{b_r b_{r+1}}$
- (a_j, b_{r+1}) : αν το $\overrightarrow{d_{i+1}}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{b_r b_{r+1}}$ και δεν είναι κάθετο στο $\overrightarrow{a_j a_{j+1}}$
- (a_{j+1}, b_{r+1}) : αν το $\overrightarrow{d_{i+1}}$ είναι κάθετο και στο $\overrightarrow{a_j a_{j+1}}$ και στο $\overrightarrow{b_r b_{r+1}}$

Δείτε για παράδειγμα τα Σχήματα 5.3(b)-5.3(e). Τα ζευγάρια των χαμηλότερων, υψηλότερων σημείων $(l_1, h_1) - (l_4, h_4)$ παράγονται όπως επίσης και η ακολουθία των διανυσμάτων $\overrightarrow{d_1}, \dots, \overrightarrow{d_4}$ καθώς το διάνυσμα \overrightarrow{d} περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Τα σημεία l_i, h_i συνδέονται με ένα διακεκομμένο διάνυσμα από το χαμηλότερο (l_i) στο υψηλότερο (h_i). Κάθε φορά που το \overrightarrow{d} γίνεται κάθετο σε μια ακμή στο σύνορο της κυρτής θήκης του συνόλου σημείων το \overrightarrow{d} εκχωρείται στο $\overrightarrow{d_i}$ με ουρά σε αυτήν την ακμή.

Βασιζόμενοι στο Γεγονός 5 οι Dehkordi et al. [20] σημείωσαν επίσης ότι το σύνολο των σημείων του P που διασχίζονται καθώς μετακινούμαστε σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού από το l_i στο h_i (αντίστοιχα από το h_i στο l_i) στο σύνορο της κυρτής θήκης του P συμπεριλαμβανομένων και των l_i και h_i ή ενός από τα l_i και h_i ή χωρίς να συμπεριληφθεί κανένα από τα l_i και h_i για $i = 1, 2, \dots, f$ είναι μονόπλευρο ως προς την κατεύθυνση κάθε διανύσματος $\overrightarrow{d'}$ ίσου με το \overrightarrow{d} καθώς το \overrightarrow{d} περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού από το $\overrightarrow{d_i}$ στο $\overrightarrow{d_{i+1}}$ μη συμπεριλαμβανομένων των $\overrightarrow{d_i}$ και $\overrightarrow{d_{i+1}}$, δηλαδή τέτοιου ώστε $\angle(\overrightarrow{d_i}, \overrightarrow{d_0}) < \angle(\overrightarrow{d'}, \overrightarrow{d_0}) < \angle(\overrightarrow{d_{i+1}}, \overrightarrow{d_0})$.

Έστω i_0 δείκτης τέτοιος ώστε $\angle(\overrightarrow{l_{i_0} h_{i_0}}, \overrightarrow{l h}) < \frac{\pi}{2}$ και $\angle(\overrightarrow{l_{i_0+1} h_{i_0+1}}, \overrightarrow{l h}) \geq \frac{\pi}{2}$. Αφού $\angle(\overrightarrow{l_0 h_0}, \overrightarrow{l h}) = 0 < \frac{\pi}{2}$ και $\angle(\overrightarrow{l_f h_f}, \overrightarrow{l h}) = \pi > \frac{\pi}{2}$ τέτοιος δείκτης υπάρχει. Για παράδειγμα στα Σχήματα 5.3(b)-5.3(d) έχουμε ότι $\angle(\overrightarrow{l_i h_i}, \overrightarrow{l h}) < \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, 3$ ενώ $\angle(\overrightarrow{l_4 h_4}, \overrightarrow{l h}) > \frac{\pi}{2}$ (Σχήμα 5.3(e)), οπότε $i_0 = 3$.

Αν $\angle(\overrightarrow{l_{i_0+1} h_{i_0+1}}, \overrightarrow{l h}) = \frac{\pi}{2}$ τότε θέτουμε $p_l = l_{i_0+1}$ και $p_h = h_{i_0+1}$, δηλαδή ο άξονας x' είναι η κατευθυνόμενη γραμμή από το p_l στο p_h . Τότε το $P_{y' \leq 0}$ (αντίστοιχα το $P_{y' > 0}$) είναι το σύνολο των σημείων του P που διασχίζονται καθώς μετακινούμαστε σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού από το h_{i_0+1} στο l_{i_0+1} (αντίστοιχα από το επόμενο του l_{i_0+1} στο προηγούμενο του h_{i_0+1}) στο σύνορο της κυρτής θήκης του P . Οπότε από το Γεγονός 5 προκύπτει ότι και το $P_{y' \leq 0}$ και το $P_{y' > 0}$ είναι μονόπλευρα.

Αλλιώς έστω $(l_{i_0}, h_{i_0}) = (a_j, b_r)$. Τότε σύμφωνα με τους Dehkordi et al. [20] το (l_{i_0+1}, h_{i_0+1}) είναι ίσο ή με το (a_{j+1}, b_r) ή με το (a_j, b_{r+1}) ή με το (a_{j+1}, b_{r+1}) . Θεωρούμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις για την τιμή (l_{i_0+1}, h_{i_0+1}) . Για κάθε περίπτωση καθορίζουμε τα σημεία p_l και p_h οπότε βρίσκουμε τον άξονα x' που είναι η κατευθυνόμενη γραμμή από το p_l στο p_h .

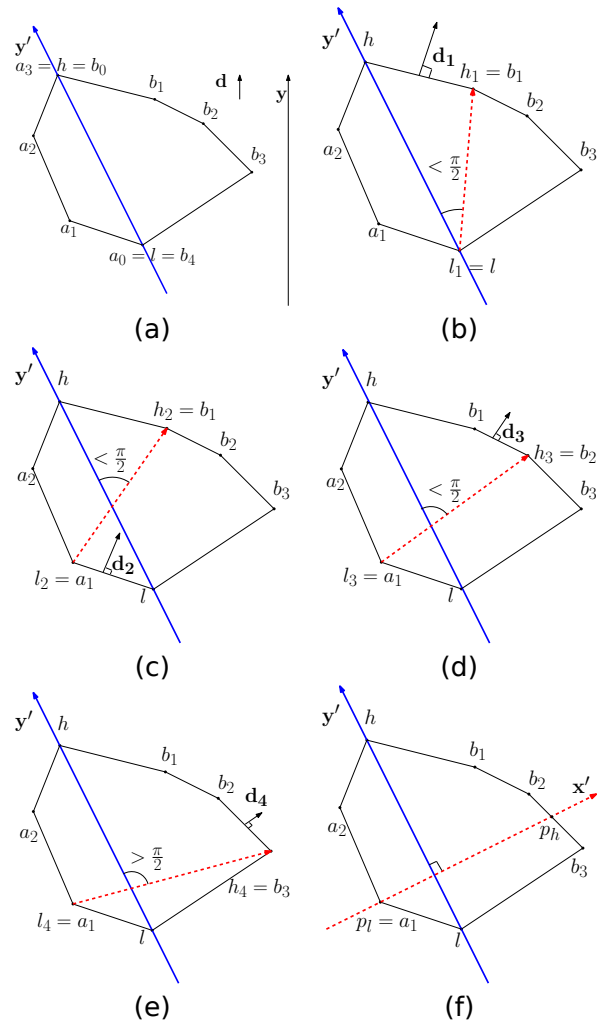
Αν $(l_{i_0+1}, h_{i_0+1}) = (a_{j+1}, b_r)$ τότε θέτουμε $p_h = b_r$ και p_l το σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{a_j a_{j+1}}$ για το οποίο $\angle(\overrightarrow{p_l p_h}, \overrightarrow{lh})$ είναι ίση με $\frac{\pi}{2}$. Τότε το σύνολο $P_{y' \leq 0}$ (αντίστοιχα το $P_{y' > 0}$) είναι το σύνολο των σημείων του P που διασχίζονται καθώς μετακινούμαστε σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού από το $h_{i_0+1} = b_r$ στο προηγούμενο του l_{i_0+1} , δηλαδή στο a_j (αντίστοιχα από το $l_{i_0+1} = a_{j+1}$ στο προηγούμενο του h_{i_0+1}) στο σύνορο της κυρτής θήκης του P . Τότε από το Γεγονός 5 και το $P_{y' \leq 0}$ και το $P_{y' > 0}$ είναι μονόπλευρα.

Αν $(l_{i_0+1}, h_{i_0+1}) = (a_j, b_{r+1})$ τότε θέτουμε $p_l = a_j$ και p_h το σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{b_r b_{r+1}}$ τέτοιο ώστε $\angle(\overrightarrow{p_l p_h}, \overrightarrow{lh}) = \frac{\pi}{2}$, δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 5.3(f). Τότε το σύνολο $P_{y' \leq 0}$ (αντίστοιχα το $P_{y' > 0}$) είναι το σύνολο των σημείων του P που διασχίζονται καθώς μετακινούμαστε σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού από το $h_{i_0+1} = b_{r+1}$ στο $l_{i_0+1} = a_j$ (αντίστοιχα από το επόμενο του l_{i_0+1} στο προηγούμενο του h_{i_0+1}) στο σύνορο της κυρτής θήκης του P . Τότε από το Γεγονός 5 προκύπτει ότι και το $P_{y' \leq 0}$ και το $P_{y' > 0}$ είναι μονόπλευρα.

Η τελευταία περίπτωση είναι όταν $(l_{i_0+1}, h_{i_0+1}) = (a_{j+1}, b_{r+1})$. Αν $\angle(\overrightarrow{a_j b_{r+1}}, \overrightarrow{lh}) \geq \frac{\pi}{2}$ τότε θέτουμε $p_l = a_j$ και p_h το σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{b_r b_{r+1}}$ τέτοιο ώστε $\angle(\overrightarrow{p_l p_h}, \overrightarrow{lh}) = \frac{\pi}{2}$. Τότε το σύνολο $P_{y' \leq 0}$ (αντίστοιχα το $P_{y' > 0}$) είναι το σύνολο των σημείων του P που διασχίζονται καθώς μετακινούμαστε σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού από το h_{i_0+1} στο προηγούμενο του l_{i_0+1} (αντίστοιχα από το l_{i_0+1} στο προηγούμενο του h_{i_0+1}) στο σύνορο της κυρτής θήκης του P . Από το Γεγονός 5 προκύπτει ότι και το $P_{y' \leq 0}$ και το $P_{y' > 0}$ είναι μονόπλευρα. Αλλιώς αν $\angle(\overrightarrow{a_j b_{r+1}}, \overrightarrow{lh}) < \frac{\pi}{2}$ τότε αφού $\angle(\overrightarrow{a_{j+1} b_{r+1}}, \overrightarrow{lh}) > \frac{\pi}{2}$ θέτουμε $p_h = b_{r+1}$ και p_l το σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{a_j a_{j+1}}$ τέτοιο ώστε $\angle(\overrightarrow{p_l p_h}, \overrightarrow{lh}) = \frac{\pi}{2}$. Παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση από το Γεγονός 5 και το $P_{y' \leq 0}$ και το $P_{y' > 0}$ είναι μονόπλευρα. \square

Από το Λήμμα 10 και το Λήμμα 11 εξάγουμε το κύριο αποτέλεσμα του κεφαλαίου αυτού:

Θεώρημα 9. Δοθέντος ενός συνόλου σημείων σε κυρτή θέση P στο επίπεδο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα $2K$ -μονότονο γράφημα για το οποίο το σύνολο των κόμβων του αποτελείται από το P και το πολύ ένα Steiner σημείο και έχει το πολύ $4|P| - 8$ ακμές.



Σχήμα 5.3: Εισάγοντας ένα κατάλληλο Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων για ένα αυθαίρετο σύνολο σημείων σε κυρτή θέση.

Το πρόβλημα της απεικόνισης ενός δέντρου με ρίζα ως ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα

Στο κεφάλαιο αυτό δίνουμε ένα γραμμικού χρόνου αλγόριθμο ο οποίος απεικονίζει ένα δέντρο με ρίζα ως ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα. Αυτό σημαίνει ότι παρέχουμε ένα γραμμικού χρόνου αλγόριθμο ο οποίος δέχεται ως είσοδο ένα δέντρο T με ρίζα r και κατασκευάζει μια απεικόνιση ευθύγραμμων-τμημάτων Γ του T με την ακόλουθη ιδιότητα: Το y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του συνόλου σημείων με ρίζα P στο οποίο απεικονίζονται οι κόμβοι του T στο Γ είναι ισομορφικό με το T , όπου η ρίζα του P είναι το σημείο του P στο οποίο απεικονίζεται η r στο Γ . Πόρισμα της προηγούμενης πρότασης είναι ότι δεν υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε ο μέγιστος βαθμός κάθε y -μονότονου ελάχιστου συνδετικού δέντρου με ρίζα να είναι φραγμένος από τη C . Επιπλέον δείχνουμε ότι υπάρχουν δέντρα με ρίζα για τα οποία κάθε απεικόνιση στο πλέγμα ως ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα απαιτεί ένα πλέγμα με εκθετικό εμβαδό (και όχι ένα πλέγμα με πολυωνυμικό εμβαδό).

6.1 Το πρόβλημα της απεικόνισης ενός δέντρου με ρίζα ως ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα

Τώρα δίνουμε τον αλγόριθμο μας που απεικονίζει ένα δέντρο T με ρίζα r ως ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα. Ο αλγόριθμος μας είναι αναδρομικός. Αρχικά απεικονίζει τα υποδέντρα T_1, T_2, \dots, T_M με ρίζες p_1, p_2, \dots, p_M , αντίστοιχα, που συνδέονται με ακμή με τη ρίζα r , ως y -μονότονα ελάχιστα συνδετικά δέντρα με ρίζα

ζα και μετά υπολογίζει κατάλληλα διανύσματα $\overrightarrow{rp_1}, \overrightarrow{rp_2}, \dots, \overrightarrow{rp_M}$ έτσι ώστε η τελική απεικόνιση να είναι ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα. Ο αλγόριθμος τοποθετεί τη ρίζα r χαμηλότερα από τους υπόλοιπους κόμβους. Επιπλέον τοποθετεί τους άλλους κόμβους έτσι ώστε για κάθε κόμβο u του T με $u \neq r$ ο γονιός του u να είναι το κοντινότερο σημείο κάτω από το u στο u και ο u να μη συνδέεται με ακμή με κανέναν άλλο κόμβο κάτω από αυτόν. Οπότε από το Πρόσχημα 2 η απεικόνιση είναι ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα. Σε κάθε κόμβο $u \neq r$ του T εκχωρούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{p(u)u}$ όπου με $p(u)$ συμβολίζεται ο γονιός του u στο T . Επιπλέον σε κάθε κόμβο u του T αποθηκεύουμε το πλάτος ($\text{πλάτος}(u)$) και το ύψος ($\text{ύψος}(u)$) του φράσσοντος ορθογωνίου, δηλαδή του ορθογωνίου με πλευρές παράλληλες στους άξονες του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων που περικλείει την απεικόνιση του υποδέντρου του T με ρίζα το u και έχει το μικρότερο εμβαδό.

Αν το T έχει βάθος 0, δηλαδή το T αποτελείται μόνο από τη ρίζα r , τότε εκχωρούμε $\text{πλάτος}(r) = \text{ύψος}(r) = 0$.

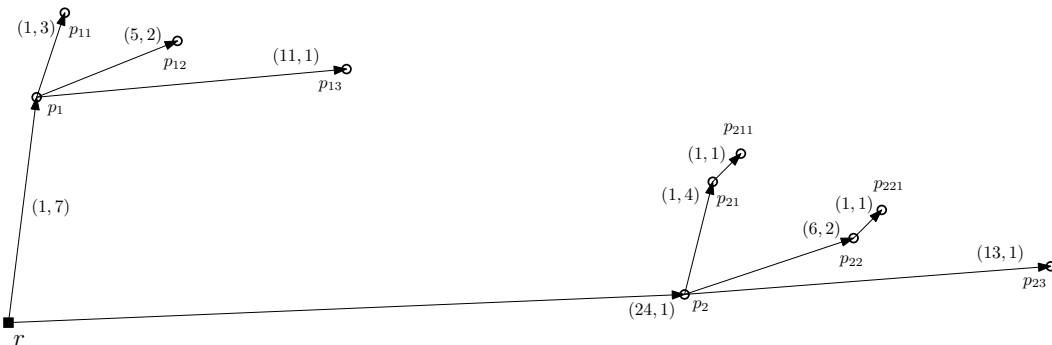
Τώρα δίνουμε το επαγωγικό βήμα όπου το δέντρο T έχει βάθος τουλάχιστον 1. Έστω p_1, p_2, \dots, p_M τα παιδιά του r και T_1, T_2, \dots, T_M τα αντίστοιχα υποδέντρα. Υποθέτουμε ότι τα υποδέντρα T_1, T_2, \dots, T_M έχουν απεικονιστεί ως y -μονότονα ελάχιστα συνδετικά δέντρα με ρίζα και τώρα εκχωρούμε τις τιμές των διανυσμάτων $\overrightarrow{rp_1}, \overrightarrow{rp_2}, \dots, \overrightarrow{rp_M}$. Έστω ότι $\overrightarrow{rp_i} = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, M$, τότε $y_M = 1$, $y_{i-1} = y_i + \text{ύψος}(p_i) + 1$, $i = M, M-1, \dots, 2$ οπότε το υποδέντρο T_{i-1} απεικονίζεται πάνω από το υποδέντρο T_i . Τώρα στρέφουμε την προσοχή μας στις x -συντεταγμένες των διανυσμάτων. Πρέπει να επιλέξουμε x -συντεταγμένες έτσι ώστε το κοντινότερο σημείο κάτω από κάθε κόμβο $u \neq r$ του T στο u να είναι ο γονιός του u . Επιλέγουμε τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο: $x_1 = 1$ και $x_{i+1} = \max\{x_i + \lceil \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \rceil, x_i + \text{πλάτος}(p_i) + \lceil \sqrt{\text{πλάτος}^2(p_i) + \text{ύψος}^2(p_i)} \rceil\}$, $i = 1, 2, \dots, M-1$. Οι x -συντεταγμένες των διανυσμάτων ικανοποιούν αυτόν τον αναδρομικό τύπο καθώς (i) η x_{i+1} είναι μεγαλύτερη από ή ίση με $x_i + \lceil \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \rceil$, $i = 1, 2, \dots, M-1$, έτσι ώστε για κάθε κόμβο u του $T_{i+1} \cup T_{i+2} \cup \dots \cup T_M$ να ισχύει $d(p_i, u) \geq \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + 1} > d(p_i, r)$ οπότε το κοντινότερο σημείο κάτω από το p_i στο p_i είναι ο γονιός του, δηλαδή η r , και το p_i δεν συνδέεται με ακμή με κανένα άλλο σημείο κάτω από αυτό και (ii) η x_{i+1} είναι μεγαλύτερη από ή ίση με $x_i + \text{πλάτος}(p_i) + \lceil \sqrt{\text{πλάτος}^2(p_i) + \text{ύψος}^2(p_i)} \rceil$, $i = 1, 2, \dots, M-1$, έτσι ώστε για κάθε κόμβο u_i του $T_i \setminus \{p_i\}$ και κάθε κόμβο u του $T_{i+1} \cup T_{i+2} \cup \dots \cup T_M$ να ισχύει ότι $d(u_i, u) \geq \sqrt{(x_{i+1} - x_i - \text{πλάτος}(p_i))^2 + 1} > d(u_i, p_i) \geq d(u_i, p(u_i))$ οπότε ο γονιός $p(u_i)$ του u_i παραμένει (μετά και το επαγωγικό βήμα) και το κοντινότερο σημείο κάτω από το u_i στο u_i και το μοναδικό σημείο κάτω από το u_i με το οποίο συνδέεται με ακμή το u_i . Για ένα παράδειγμα δείτε το Σχήμα 6.1. Τότε το $\text{ύψος}(r) = y_1 + \text{ύψος}(p_1)$ και $\text{πλάτος}(r) = x_M + \text{πλάτος}(p_M)$.

Είναι εύκολο να αποδείξουμε με επαγωγή ότι ο αλγόριθμος εκτελείται σε γραμμικό χρόνο. Το βήμα της βάσης της επαγωγής, όπου το δέντρο έχει βάθος 0 είναι τετριμμένο. Για το επαγωγικό βήμα

θεωρούμε ότι ο χρόνος που χρειάστηκε για να παράξουμε τις απεικονίσεις των T_1, T_2, \dots, T_M είναι $O(|E(T_1)|), O(|E(T_2)|), \dots, O(|E(T_M)|)$, αντίστοιχα, όπου με $E(G)$ συμβολίζεται το σύνολο των ακμών του γραφήματος G . Τότε παράγουμε τα διανύσματα $\vec{rp}_i, i = 1, 2, \dots, M$ και τις τιμές ύψος(r) και πλάτος(r). Η εκχώρηση όλων των διανυσμάτων $\vec{rp}_i, i = 1, 2, \dots, M$ από τον αναδρομικό τύπο που δόθηκε προηγουμένως παίρνει γραμμικό χρόνο, δηλαδή $O(M)$ χρόνο, καθώς οι τιμές ύψος(p_i) και πλάτος(p_i), $i = 1, 2, \dots, M$ έχουν ήδη υπολογιστεί. Μετά το ύψος(r) και το πλάτος(r) υπολογίζονται σε σταθερό χρόνο. Οπότε το επαγωγικό βήμα παίρνει χρόνο $O(M)$, δηλαδή χρόνο γραμμικό ως προς το πλήθος των ακμών με άκρο την r . Οπότε ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $O(M) + O(|E(T_1)|) + O(|E(T_2)|) + \dots + O(|E(T_M)|) = O(|E(T)|)$.

Επιπλέον η απεικόνιση είναι ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα από το Πόρισμα 2, το ότι η ρίζα r απεικονίζεται χαμηλότερα από όλους τους άλλους κόμβους και τέλος επειδή κάθε κόμβος διαφορετικός της ρίζας συνδέεται με ακμή με ένα μόνο κόμβο κάτω από αυτόν, τον κοντινότερο κόμβο από κάτω του, που είναι ο γονιός του.

Από όλη την προηγούμενη συζήτηση εξάγουμε το ακόλουθο θεώρημα.



Σχήμα 6.1: Όταν απεικονίζεται το υποδέντρο με ρίζα την p_2 , για το διάνυσμα $\vec{p_2p_{22}} = (x_{22}, y_{22})$ ισχύει ότι $x_{22} = x_{21} + \lceil \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2} \rceil = 1 + \lceil \sqrt{1^2 + 4^2} \rceil = 6$. Στην τελική απεικόνιση, για το διάνυσμα $\vec{rp_2} = (x_2, y_2 = 1)$ ισχύει ότι $x_2 = x_1 + \text{πλάτος}(p_1) + \lceil \sqrt{\text{πλάτος}^2(p_1) + \text{ύψος}^2(p_1)} \rceil = 1 + 11 + \lceil \sqrt{11^2 + 3^2} \rceil = 24$.

Θεώρημα 10. Μπορούμε να απεικονίσουμε ένα δέντρο με ρίζα ως ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα σε γραμμικό χρόνο.

Το προηγούμενο θεώρημα συνδυασμένο με το γεγονός ότι ένα αστέρι, δηλαδή ένα γράφημα με έναν κεντρικό κόμβο s που συνδέεται με όλους τους άλλους κόμβους και που όλοι οι κόμβοι διαφορετικοί του s συνδέονται μόνο με τον s , $M + 1$ κόμβων έχει μέγιστο βαθμό M συνεπάγεται το ακόλουθο πόρισμα.

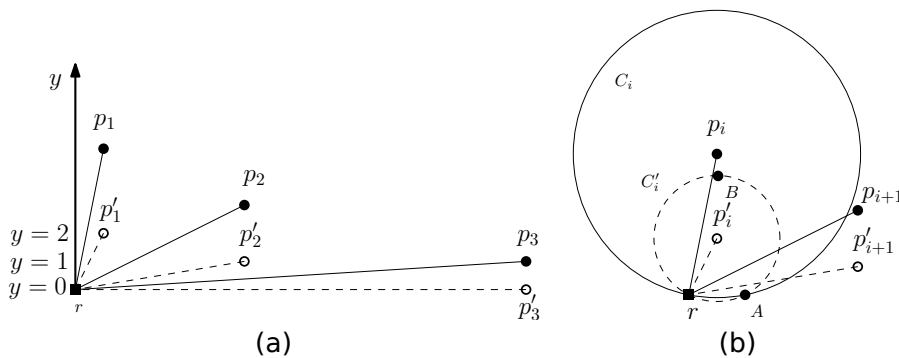
Πόρισμα 8. Για κάθε $M \in \mathbb{N}$ υπάρχει σύνολο σημείων με ρίζα P με $M+1$ σημεία τέτοιο ώστε το y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα του P να έχει μέγιστο βαθμό M .

Τώρα δείχνουμε ότι κάποια δέντρα με ρίζα δεν μπορούν να απεικονιστούν ως y -μονότονα ελάχιστα συνδετικά δέντρα με ρίζα σε πλέγμα πολυωνυμικού εμβαδού, δηλαδή κάθε απεικόνισή τους ως y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα σε πλέγμα απαιτεί εκθετικό εμβαδό.

Θεώρημα 11. Υπάρχουν δέντρα με ρίζα για τα οποία κάθε απεικόνιση στο πλέγμα ως y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα απαιτεί ένα πλέγμα με εκθετικό εμβαδό.

Απόδειξη. Έστω $K_{1,4n+1}$ το δέντρο που αποτελείται από μία ρίζα r και $4n+1$ φύλλα που είναι γειτονικά μόνο με τη ρίζα r . Εμείς δείχνουμε ότι η απεικόνιση του $K_{1,4n+1}$ ως ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα στο πλέγμα απαιτεί εκθετικό πλάτος. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η ρίζα r απεικονίζεται στην αρχή του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων δηλαδή στο σημείο $(0,0)$. Τότε από την αρχή της περιστροφωλιάς τουλάχιστον $n+1$ από τους κόμβους απεικονίζονται όλοι στο ίδιο τεταρτημόριο του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι αυτό το τεταρτημόριο είναι το πρώτο τεταρτημόριο, δηλαδή το τεταρτημόριο που περιέχει τα σημεία με θετικές x - και y -συντεταγμένες. Από το Πόρισμα 2 προκύπτει ότι δεν υπάρχουν δύο κόμβοι που απεικονίζονται σε σημεία του πρώτου τεταρτημορίου του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων με την ίδια x -συντεταγμένη. Έστω p_1, p_2, \dots, p_{n+1} με $x(p_i) < x(p_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n$ τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων όπου απεικονίζονται οι κόμβοι του $K_{1,4n+1}$. Από το Πόρισμα 2 και καθώς όλα τα σημεία p_1, p_2, \dots, p_{n+1} βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων προκύπτει ότι $y(p_1) > y(p_2) > \dots > y(p_{n+1})$ και άρα $y(p_i) \geq n+1-i$. Τώρα δείχνουμε ότι η απεικόνιση D περιορισμένη στο πρώτο τεταρτημόριο του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων έχει εκθετικό εμβαδό. Αυτό το πετυχαίνουμε ως εξής: Πρώτα δείχνουμε ότι η D έχει περισσότερο εμβαδό από μια άλλη απεικόνιση D' , όπου η D' είναι ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα, και ύστερα δείχνουμε ότι η D' έχει εκθετικό πλάτος. Η προσέγγισή μας διαισθητικά είναι ότι "μεταφέρουμε" τα σημεία p_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$ μόνο στην y -συντεταγμένη όσο το δυνατόν πιο κάτω ώστε να εξάγουμε την D' . Πιο συγκεκριμένα, η D' αποτελείται από τη ρίζα που απεικονίζεται στην αρχή του Καρτεσιανού Συστήματος Συντεταγμένων και τα σημεία p'_i όπου $x(p'_i) = x(p_i)$ και $y(p'_i) = n+1-i$, $i = 1, 2, \dots, n+1$ και τα ευθύγραμμα τμήματα rp'_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$. Για ένα παράδειγμα δείτε το Σχήμα 6.2(a). Ξεκάθαρα το εμβαδό της D' είναι μικρότερο από ή ίσο με το εμβαδό της D . Τώρα δείχνουμε ότι $d(p'_i, p'_{i+1}) > d(p'_i, r)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Οπότε από το Πόρισμα 2 προκύπτει ότι η D' είναι ένα y -μονότονο ελάχιστο συνδετικό δέντρο με ρίζα. Έστω C_i ο κύκλος με κέντρο το p_i και ακτίνα $d(p_i, r)$

και C'_i ο κύκλος με κέντρο το p'_i και ακτίνα $d(p'_i, r)$. Οι κύκλοι C_i και C'_i έχουν δύο κοινά σημεία, τη ρίζα r και το σημείο $A = (2x(p_i), 0)$ (δείτε το Σχήμα 6.2(b)). Το σημείο $B = (x(p'_i), n + 1 - i + d(p'_i, r))$ βρίσκεται πάνω στον κύκλο C'_i και είναι στο εσωτερικό του C_i . Οπότε το τόξο του C'_i με άκρα τα r και A που περιέχει το B βρίσκεται στο εσωτερικό του C_i . Αφού και το p_{i+1} και το p'_{i+1} βρίσκονται εκτός του C_i τότε από την προηγούμενη πρόταση είναι επίσης εκτός του C'_i και άρα $d(p'_i, p'_{i+1}) > d(p'_i, r)$. Στην απεικόνιση D' είναι εύκολο να δείξουμε ότι το πλάτος είναι εκθετικό. Πιο συγκεκριμένα καθώς $d^2(p'_i, p'_{i+1}) > d^2(p'_i, r) \iff (x(p'_{i+1}) - x(p'_i))^2 + 1 > x(p'_i)^2 + (n + 1 - i)^2$, προκύπτει ότι $x(p'_{i+1}) > 2x(p'_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. \square



Σχήμα 6.2: Οπτικοποίηση του Θεωρήματος 11. Στην (a) δίνεται η νέα απεικόνιση ενώ στην (b) φαίνεται ότι $d(p'_i, p'_{i+1}) > d(p'_i, r)$ χρησιμοποιώντας τους κύκλους C_i και C'_i .

Βιβλιογραφία

- [1] S. Alamdari and T. C. Biedl. Planar open rectangle-of-influence drawings with non-aligned frames. In M. J. van Kreveld and B. Speckmann, editors, *Graph Drawing - 19th International Symposium, GD 2011, Eindhoven, The Netherlands, September 21-23, 2011, Revised Selected Papers*, volume 7034 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 14-25. Springer, 2011.
- [2] S. Alamdari and T. C. Biedl. Open rectangle-of-influence drawings of non-triangulated planar graphs. In W. Didimo and M. Patrignani, editors, *Graph Drawing - 20th International Symposium, GD 2012, Redmond, WA, USA, September 19-21, 2012, Revised Selected Papers*, volume 7704 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 102-113. Springer, 2012.
- [3] S. Alamdari, T. M. Chan, E. Grant, A. Lubiw, and V. Pathak. Self-approaching graphs. In W. Didimo and M. Patrignani, editors, *Graph Drawing - GD 2012*, volume 7704 of *LNCS*, pages 260-271. Springer, 2013.
- [4] N. Alon, Z. Füredi, and M. Katchalski. Separating pairs of points by standard boxes. *Eur. J. Comb.*, 6(3):205-210, 1985.
- [5] P. Angelini. Monotone drawings of graphs with few directions. *Inf. Process. Lett.*, 120:16-22, 2017.
- [6] P. Angelini, T. Bruckdorfer, M. Chiesa, F. Frati, M. Kaufmann, and C. Squarcella. On the area requirements of Euclidean minimum spanning trees. *Comput. Geom.*, 47(2):200-213, 2014.
- [7] P. Angelini, E. Colasante, G. Di. Battista, F. Frati, and M. Patrignani. Monotone drawings of graphs. *J. Graph Algorithms Appl.*, 16(1):5-35, 2012.
- [8] P. Angelini, W. Didimo, S. Kobourov, T. Mchedlidze, V. Roselli, A. Symvonis, and S. Wismath. Monotone drawings of graphs with fixed embedding. *Algorithmica*, 71(2):233-257, 2015.
- [9] P. Angelini, F. Frati, M. Geyer, M. Kaufmann, T. Mchedlidze, and A. Symvonis. Upward geometric graph embeddings into point sets. In U. Brandes and S. Cornelsen, editors, *Graph Drawing - 18th International Symposium, GD 2010, Konstanz, Germany*,

September 21-24, 2010. *Revised Selected Papers*, volume 6502 of *LNCS*, pages 25-37. Springer Berlin Heidelberg, 2011.

- [10] E. M. Arkin, R. Connelly, and J. S. B. Mitchell. On monotone paths among obstacles with applications to planning assemblies. In K. Mehlhorn, editor, *Proceedings of the Fifth Annual Symposium on Computational Geometry, Saarbrücken, Germany, June 5-7, 1989*, SCG '89, pages 334-343. ACM, 1989.
- [11] Y. Bahoo, S. Durocher, S. Mehrpour, and D. Mondal. Exploring increasing-chord paths and trees. In J. Gudmundsson and M. Smid, editors, *Proceedings of the 29th Canadian Conference on Computational Geometry, CCCG 2017*, pages 19-24. Carleton University, Ottawa, Ontario, Canada, 2017.
- [12] J. L. Bentley. Decomposable searching problems. *Inf. Process. Lett.*, 8(5):244-251, 1979.
- [13] J. L. Bentley and H. A. Maurer. Efficient worst-case data structures for range searching. *Acta Inf.*, 13:155-168, 1980.
- [14] T. C. Biedl, A. Bretscher, and H. Meijer. Rectangle of influence drawings of graphs without filled 3-cycles. In J. Kratochvíl, editor, *Graph Drawing, 7th International Symposium, GD'99, Stirín Castle, Czech Republic, September 1999, Proceedings*, volume 1731 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 359-368. Springer, 1999.
- [15] C. Binucci, E. Di Giacomo, W. Didimo, A. Estrella-Balderrama, F. Frati, S. G. Kobourov, and G. Liotta. Upward straight-line embeddings of directed graphs into point sets. *Computational Geometry*, 43(2):219-232, 2010.
- [16] N. Bonichon, P. Bose, P. Carmi, I. Kostitsyna, A. Lubiw, and S. Verdonschot. Gabriel triangulations and angle-monotone graphs: Local routing and recognition. In Y. Hu and M. Nöllenburg, editors, *Graph Drawing and Network Visualization - 24th International Symposium, GD 2016, Athens, Greece, September 19-21, 2016, Revised Selected Papers*, volume 9801 of *LNCS*, pages 519-531. Springer, 2016.
- [17] T. M. Chan. Tree drawings revisited. *Discret. Comput. Geom.*, 63(4):799-820, 2020.
- [18] P. Crescenzi, G. Di Battista, and A. Piperno. A note on optimal area algorithms for upward drawings of binary trees. *Comput. Geom.*, 2:187-200, 1992.
- [19] M. de Berg, O. Cheong, M. J. van Kreveld, and M. H. Overmars. *Computational geometry: algorithms and applications*. Springer, 3rd edition, 2008.

- [20] H. R. Dehkordi, F. Frati, and J. Gudmundsson. Increasing-chord graphs on point sets. *J. Graph Algorithms Appl.*, 19(2):761-778, 2015.
- [21] G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, and I. G. Tollis. *Graph Drawing: Algorithms for the Visualization of Graphs*. Prentice-Hall, 1999.
- [22] G. Di Battista and F. Frati. Drawing trees, outerplanar graphs, series-parallel graphs, and planar graphs in a small area. In János Pach, editor, *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, pages 121-165, New York, NY, 2013. Springer New York.
- [23] G. Di Battista and R. Tamassia. Algorithms for plane representations of acyclic digraphs. *Theor. Comput. Sci.*, 61:175-198, 1988.
- [24] D. P. Dobkin and R. J. Lipton. Multidimensional searching problems. *SIAM J. Comput.*, 5(2):181-186, 1976.
- [25] P. Eades and S. Whitesides. The realization problem for Euclidean minimum spanning trees is NP-hard. *Algorithmica*, 16(1):60-82, 1996.
- [26] S. Felsner, A. Igamberdiev, P. Kindermann, B. Klemz, T. Mchedlidze, and M. Scheucher. Strongly monotone drawings of planar graphs. In S. P. Fekete and A. Lubiw, editors, *32nd International Symposium on Computational Geometry, SoCG 2016, June 14-18, 2016, Boston, MA, USA*, volume 51 of *LIPICs*, pages 37:1-37:15. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2016.
- [27] M. R. Garey, D. S. Johnson, F. P. Preparata, and R. E. Tarjan. Triangulating a simple polygon. *Inf. Process. Lett.*, 7(4):175-179, 1978.
- [28] A. Garg and R. Tamassia. On the computational complexity of upward and rectilinear planarity testing. *SIAM Journal on Computing*, 31(2):601-625, 2001.
- [29] N. Guttmann-Beck and R. Hassin. On two restricted ancestors tree problems. *Inf. Process. Lett.*, 110(14-15):570-575, 2010.
- [30] D. He and X. He. Nearly optimal monotone drawing of trees. *Theoretical Computer Science*, 654:26 - 32, 2016.
- [31] D. He and X. He. Optimal monotone drawings of trees. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 31(3):1867-1877, 2017.
- [32] X. He and D. He. Monotone drawings of 3-connected plane graphs. In N. Bansal and I. Finocchi, editors, *Algorithms - ESA 2015 - 23rd Annual European Symposium, Patras, Greece, September 14-16, 2015, Proceedings*, volume 9294 of *LNCS*, pages 729-741. Springer Berlin Heidelberg, 2015.

- [33] Md. I. Hossain and Md. S. Rahman. Monotone grid drawings of planar graphs. In J. Chen, J. E. Hopcroft, and J. Wang, editors, *Frontiers in Algorithmics - 8th International Workshop, FAW 2014, Zhangjiajie, China, June 28-30, 2014. Proceedings*, volume 8497 of *LNCS*, pages 105-116. Springer, 2014.
- [34] M. Ichino and J. Sklansky. The relative neighborhood graph for mixed feature variables. *Pattern Recognition*, 18(2):161-167, 1985.
- [35] M. Kaufmann, T. Mchedlidze, and A. Symvonis. On upward point set embeddability. *Computational Geometry*, 46(6):774-804, 2013.
- [36] P. Kindermann, A. Schulz, J. Spoerhase, and A. Wolff. On monotone drawings of trees. In C. A. Duncan and A. Symvonis, editors, *Graph Drawing - 22nd International Symposium, GD 2014, Würzburg, Germany, September 24-26, 2014, Revised Selected Papers*, volume 8871 of *LNCS*, pages 488-500. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
- [37] D. G. Kirkpatrick. Optimal search in planar subdivisions. *SIAM J. Comput.*, 12(1):28-35, 1983.
- [38] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volume III: Sorting and Searching*. Addison-Wesley, 1973.
- [39] D. G. Larman and P. McMullen. Arcs with increasing chords. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 72:205-207, September 1972.
- [40] D. T. Lee and F. P. Preparata. Location of a point in a planar subdivision and its applications. *SIAM J. Comput.*, 6(3):594-606, 1977.
- [41] G. Liotta, A. Lubiw, H. Meijer, and S. Whitesides. The rectangle of influence drawability problem. *Comput. Geom.*, 10(1):1-22, 1998.
- [42] R. J. Lipton and R. E. Tarjan. Applications of a planar separator theorem. *SIAM J. Comput.*, 9(3):615-627, 1980.
- [43] A. Lubiw and D. Mondal. Construction and local routing for angle-monotone graphs. *J. Graph Algorithms Appl.*, 23(2):345-369, 2019.
- [44] A. Lubiw and J. O'Rourke. Angle-monotone paths in non-obtuse triangulations. In J. Gudmundsson and M. Smid, editors, *Proceedings of the 29th Canadian Conference on Computational Geometry, CCCG 2017*, pages 25-30. Carleton University, Ottawa, Ontario, Canada, 2017.

- [45] K. Mastakas. Uniform 2d-monotone minimum spanning graphs. In S. Durocher and S. Kamali, editors, *Proceedings of the 30th Canadian Conference on Computational Geometry, CCCG 2018, August 8-10, 2018, University of Manitoba, Winnipeg, Manitoba, Canada*, pages 318-325, 2018.
- [46] K. Mastakas. Drawing a rooted tree as a rooted y -monotone minimum spanning tree. *Inf. Process. Lett.*, 166:106035, 2021.
- [47] K. Mastakas and A. Symvonis. On the construction of increasing-chord graphs on convex point sets. In *6th Int. Conf. on Information, Intelligence, Systems and Applications, IISA 2015, Corfu, Greece, July 6-8, 2015*, pages 1-6. IEEE, 2015.
- [48] K. Mastakas and A. Symvonis. Rooted uniform monotone minimum spanning trees. In D. Fotakis, A. Pagourtzis, and V. Th. Paschos, editors, *Algorithms and Complexity - 10th International Conference, CIAC 2017, Athens, Greece, May 24-26, 2017, Proceedings*, volume 10236 of LNCS, pages 405-417, 2017. Full Version:arXiv:1607.03338v2, 2017.
- [49] T. Mchedlidze. Upward planar embedding of an n -vertex oriented path on $O(n^2)$ points. *Computational Geometry*, 46(8):1003-1008, 2013.
- [50] K. Miura, T. Matsuno, and T. Nishizeki. Open rectangle-of-influence drawings of inner triangulated plane graphs. *Discret. Comput. Geom.*, 41(4):643-670, 2009.
- [51] C. L. Monma and S. Suri. Transitions in geometric minimum spanning trees. *Discrete & Computational Geometry*, 8:265-293, 1992.
- [52] M. Nöllenburg, R. Prutkin, and I. Rutter. On self-approaching and increasing-chord drawings of 3-connected planar graphs. *Journal of Computational Geometry*, 7(1):47-69, 2016.
- [53] A. Oikonomou and A. Symvonis. Simple compact monotone tree drawings. In F. Frati and K.-L. Ma, editors, *Graph Drawing and Network Visualization - 25th International Symposium, GD 2017, Boston, MA, USA, September 25-27, 2017, Revised Selected Papers*, volume 10692 of LNCS, pages 326-333. Springer, 2017.
- [54] M. H. Overmars and D. Wood. On rectangular visibility. *J. Algorithms*, 9(3):372-390, 1988.
- [55] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational Geometry: An Introduction*. Texts and monographs in computer science. Springer-Verlag, 1988.
- [56] F. P. Preparata and K. J. Supowit. Testing a simple polygon for monotonicity. *Inf. Process. Lett.*, 12(4):161-164, 1981.

- [57] G. Rote. Curves with increasing chords. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 115:1-12, January 1994.
- [58] S. Sadasivam and H. Zhang. Closed rectangle-of-influence drawings for irreducible triangulations. *Comput. Geom.*, 44(1):9-19, 2011.
- [59] M. I. Shamos. Geometric complexity. In W. C. Rounds, N. Martin, J. W. Carlyle, and M. A. Harrison, editors, *Proceedings of the 7th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, May 5-7, 1975, Albuquerque, New Mexico, USA*, pages 224-233. ACM, 1975.
- [60] M. I. Shamos and D. Hoey. Closest-point problems. In *16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Berkeley, California, USA, October 13-15, 1975*, pages 151-162. IEEE Computer Society, 1975.
- [61] Y. Shiloach. *Linear and Planar Arrangement of Graphs*. PhD thesis, Weizmann Institute of Science, 1976.