ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΡΙΑ ΕΛΕΝΗ ΝΟΥΣΙΑ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΑΧΕΙΑΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΡΩΓΜΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΗΣ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Χαράλαμπος Γ. Γεωργιάδης, Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε, Ε.Μ.Π.

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Χαράλαμπος Γ. Γεωργιάδης, Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε, Ε.Μ.Π.

Αντώνιος Ε. Γιαννακόπουλος, Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε, Ε.Μ.Π.

Αθανάσιος Ζήσης, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε, Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2023

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στον Τομέα Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου κατά το διάστημα Οκτώβριο 2021 έως Δεκέμβριο 2022. Το θέμα της εργασίας αυτής προτάθηκε από τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Χ.Γ. Γεωργιάδη.

Θα ήθελα να εκφράσω τις βαθιές μου ευχαριστίες προς τον Καθηγητή κ. Χ.Γ. Γεωργιάδη για την ευκαιρία να συνεργαστώ μαζί του στο πλαίσιο εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας, καθώς και για τις πολύτιμες γνώσεις και την υποστήριξη που μου παρείχε καθ' όλη την διάρκεια αυτής της καθοριστικής για εμένα εκπαιδευτικής εμπειρίας.

Επίσης θα ήθελα να απευθύνω τις θερμές μου ευχαριστίες προς τους Αναπληρωτές Καθηγητές κ. Ζήση και κ. Γουργιώτη για την σημαντική βοήθεια που μου παρείχαν στην εκπλήρωση της διπλωματικής αυτής εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για την αδιάκοπη υποστήριξή τους κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

Μαρία Ελένη Νούσια

Αθήνα, Φεβρουάριος 2023

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη – Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή μελετάται το πρόβλημα διάδοσης ρωγμής τύπου II σε δι-διάστατο ημι-χώρο κατά την δράση αντιτιθέμενων φορτίων στα χείλη της. Το φαινόμενο αυτό θα μελετηθεί για τις περιπτώσεις που το μέσο υπακούσει στην Κλασική Θεωρία Ελαστικότητας και στην Θεωρία Γραμμικής Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας. Πιο συγκεκριμένα, σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι ο έλεγχος και η επιβεβαίωση μίας προηγούμενης λύσης προβλήματος ταχείας διάδοσης ρωγμής, των Χ. Γ. Γεωργιάδη και Γ. Λυκοτραφίτη (*Report on moving shear cracks - Crack propagation in thermoelastic media*), στα πλαίσια της Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας. Η παρουσίαση περιλαμβάνει επίσης συνοπτικά αποτελέσματα από τις Θεωρίες Διάδοσης Κυμάτων στα υλικά, Θερμοελαστικότητας και Μηχανικής των Θραύσεων.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές αρχές της Κλασικής Θεωρίας Ελαστικότητας, λαμβάνοντας υπόψη τα αδρανειακά φαινόμενα. Συγκεκριμένα, ορίζονται οι τανυστές τάσεως και απειροστών τροπών ώστε να εξαχθούν οι εξισώσεις κίνησης οι οποίες προκύπτουν από τις Αρχές Διατήρησης της Ορμής και της Στροφορμής. Στην συνέχεια, μέσω του καταστατικού νόμου και του ορισμού της παραμορφωσιακής ενέργειας δίνονται οι περιορισμοί των υλικών σταθερών στην περίπτωση ισοτροπίας και διατυπώνεται το πρόβλημα της Ελαστοδυναμικής. Τέλος, μελετάται η περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης και δίνονται οι ορισμοί των ταχυτήτων διάδοσης διαμηκών και εγκαρσίων κυμάτων σε ελαστικό μέσο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στην Θεωρία της Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας σύμφωνα με τον Biot (1956), όπου με βάση τις γενικές αρχές της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου και της Θερμοδυναμικής των μη αντιστρεπτών μεταβολών αναπαράγονται οι βασικές εξισώσεις της θεωρίας και διατυπώνονται οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες των θερμοελαστικών προβλημάτων. Επίσης παρουσιάζεται η επίδραση της θερμικής σύζευξης στα θερμοελαστικά κύματα και η περίπτωση εξωτερικής μηχανικής διέγερσης θερμοελαστικού μέσου.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές αρχές της Θεωρίας Θραύσεων και των γενικευμένων προβλημάτων ρωγμών. Μελετώνται οι αναλυτικές λύσεις των δυναμικών ημι-άπειρων ρωγμών, στις οποίες εφαρμόζονται ομοιόμορφα φορτία και βρίσκονται σε σταθερή κατάσταση. Προσδιορίζονται λοιπόν τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων των τριών τύπων ρωγμών (εφελκυστικός τύπος I, συνεπίπεδος διατμητικός τύπος II, εγκάρσιος διατμητικός τύπος III) και δίνονται οι συντελεστές εντάσεων των τάσεων τους.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάται το δι-διάστατο πρόβλημα σταθερής διάδοσης ρωγμής τύπου II σε καθαρά ελαστικό μέσο κατά την δράση αντιτιθέμενων φορτίων στα χείλη της. Η μελέτη αυτή θα πραγματοποιηθεί για ταχύτητες διάδοσης ρωγμής στο υποηχητικό εύρος τιμών και θα εφαρμοσθούν οι μετασχηματισμοί Γαλιλαίου και Laplace ώστε να απαλειφθούν η χρονική μεταβλητή και η χωρική μεταβλητή x αντίστοιχα από τις διέπουσες εξισώσεις και τις συνοριακές συνθήκες. Επικεντρωνόμαστε στην sub-Rayleigh περιοχή ταχυτήτων, ώστε να καταλήξουμε σε μοναδική εξίσωση με μεταβλητές το πεδίο τάσεων μπροστά από το άκρο της ρωγμής και το πεδίο μετατοπίσεων πίσω από το άκρο της. Η εξίσωση που προκύπτει επιλύεται μέσω της τεχνικής Wiener-Hopf, ενώ η αντιστροφή των μετασχηματισμένων λύσεων στον χώρο των πραγματικών αριθμών πραγματοποιείται μέσω του θεωρήματος Abel-Tauber, το οποίο δίνει τις ασυμπτωτικές λύσεις ως προς το άκρο της ρωγμής. Τέλος, προσδιορίζεται ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο μελετάται το δι-διάστατο πρόβλημα σταθερής διάδοσης ρωγμής τύπου II σε θερμοελαστικό μέσο κατά την δράση αντιτιθέμενων φορτίων στα χείλη της. Το πρόβλημα θα επιλυθεί με βάση την μεθοδολογία του προηγούμενου κεφαλαίου για ταχύτητες διάδοσης ρωγμής στο υποηχητικό εύρος τιμών. Οι διέπουσες εξισώσεις του προβλήματος σύμφωνα με την θεωρία γραμμικής συζευγμένης θερμοελαστικότητας είναι ο νόμος Duhamel-Neumann, ο νόμος Fourier, οι θερμοελαστικές εξισώσεις Navier-Cauchy και η γενικευμένη εξίσωση μετάδοσης θερμότητας. Όσον αφορά τις συνοριακές συνθήκες θεωρούμε ότι η θερμοκρασία του σώματος παραμένει σταθερή κατά την διάδοση της ρωγμής, συνεπώς δεν έχουμε ροή θερμότητας. Εφαρμόζουμε λοιπόν τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου και Laplace στις διέπουσες εξισώσεις και συνοριακές συνθήκες και επικεντρωνόμαστε για ακόμα μία φορά στην sub-Rayleigh περιοχή ταχυτήτων. Καταλήγουμε σε μοναδική εξίσωση με μεταβλητές το πεδίο τάσεων μπροστά από το άκρο της ρωγμής και το πεδίο μετατοπίσεων πίσω από το άκρο της, η οποία επιλύεται μέσω της τεχνικής Wiener-Hopf. Οι μετασχηματισμένες λύσεις που προκύπτουν αντιστρέφονται μέσω του θεωρήματος Abel-Tauber, το οποίο δίνει τις ασυμπτωτικές λύσεις ως προς το άκρο της ρωγμής. Τέλος, προσδιορίζεται ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων.

Λέξεις – Κλειδιά

Συζευγμένη θερμοελαστικότητα, διάδοση κυμάτων, μηχανική θραύσεων, τύπος II ρωγμών, υποηχητική περιοχή ταχυτήτων, συντελεστής έντασης τάσεων, αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace, θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων, τεχνική Wiener-Hopf, θεώρημα Abel-Tauber

Abstract – Introduction

The present study examines the propagation of a two-dimensional semi-infinite crack due to the action of in-plane shearing loading conditions (mode II) that travel with the crack. This phenomenon will be examined at the subsonic range for two types of medium’ a pure elastic one which is governed by the Linear Elastodynamic Theory and a thermoelastic one which is governed by the Linear Coupled Thermoelasticity Theory. The purpose of this study is to inspect and confirm a previous solution of the rapid crack propagation problem from H.G. Georgiadis and G. Lykotrafitis (*Report on moving shear cracks - Crack propagation in thermoelastic media*), within the framework of Coupled Thermoelasticity. This presentation briefly includes results from the Crack Propagation Theory in materials, Thermoelasticity and Fracture Mechanics.

In the first chapter the foundations of the Linear Elastodynamic Theory are presented. In particular we define the stress and strain tensors, while the equations of motion are developed by using the principles of conservation of linear and angular momentum. Next, by introducing the constitutive law and the strain energy for isotropic materials, we give the restrictions for the material constants and the problem statement in dynamic elasticity. Finally, we study the two-dimensional state of strain and define the velocity of longitudinal and transverse waves which propagate in elastic materials.

In the second chapter the foundations of the Coupled Thermoelasticity Theory by Biot (1956) are introduced. Using the principles of Continuum Mechanics and Thermodynamics of irreversible processes we develop the equations of motion for linear thermoelastic materials and present the initial and boundary conditions which can be used to describe phenomena based on this theory. We also study the effects of thermoelastic coupling in propagating thermoelastic waves, as well as the case of external mechanical excitation of a thermoelastic medium.

In the third chapter we present the foundations of Fracture Theory and formulate general crack problems. Particularly, we describe the analytical solutions of dynamic crack problems where semi-infinite cracks are propagating in a steady state under uniform loading. We determine the stress and displacement fields for every crack mode (opening mode I, in-plane

shearing mode II, anti-plane shearing mode III) and define the stress intensity factors of each case.

In the fourth chapter we examine the two-dimensional problem of steady crack growth in a pure elastic medium. The semi-infinite crack is propagating under opposing anti-plane shearing loading conditions on the crack faces (mode II) in the subsonic velocity range. Firstly, we apply the Galilean and two-sided Laplace transforms to the governing equations and the boundary conditions of the problem in order to eliminate the time variable t and the space variable x respectively. We focus on the sub-Rayleigh velocity range in order to acquire an equation which includes the stress field in front of the crack tip and the displacement field behind it as its variables. The equation can be solved by using the Wiener-Hopf technique and the real asymptotic solutions near the crack tip can be determined by applying the Abel-Tauber theorem to the solutions in the transformed domain. Lastly, we measure the stress intensity factor for the mode II crack propagation in the pure elastic medium.

In the fifth chapter we examine the two-dimensional problem of steady crack growth in a medium governed by the Linear Coupled Thermoelastic Theory. The semi-infinite crack is propagating under opposing anti-plane shearing loading conditions on the crack faces (mode II) in the subsonic velocity range and it will be solved by using the methodology from the previous chapter. The governing equations of this problem are the Duhamel-Neumann law, the Fourier's law, the thermoelastic Navier-Cauchy equations and the generalized heat-conduction equation. As for the boundary conditions, we consider that the temperature of the medium remains unaffected by the crack propagation, therefore the heat flux equals to zero. Taking everything into consideration, we apply the Galilean and two-sided Laplace transformations to the governing equations and the boundary conditions and focus on the sub-Rayleigh velocity range. Once again, we acquire an equation which includes the stress field in front of the crack tip and the displacement field behind it as its variables. We solve the equation by using the Wiener-Hopf technique and apply the Abel-Tauber theorem to the solutions in the transformed domain in order to determine the real asymptotic solutions near the crack tip. Lastly, we measure the stress intensity factor for the mode II crack propagation in the thermoelastic medium.

Keywords

Coupled thermoelasticity, crack propagation, fracture mechanics, mode II crack, subsonic velocity range, stress intensity factor, two-sided Laplace transformation, theory of complex variables, Wiener-Hopf technique, Abel-Tauber theorem

Κεφάλαιο 1: Στοιχεία Ελαστοδυναμικής Θεωρίας

1.1 Γενικά

Η Θεωρία Ελαστικότητας αποτελεί έναν από τους βασικούς κλάδους της ευρύτερης περιοχής της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου, εφόσον δίνει λύση σε ένα μεγάλο πλήθος προβλημάτων της Μηχανικής των Υλικών και των Κατασκευών, της Υπολογιστικής Μηχανικής, της Μηχανικής των Επαφών και των Θραύσεων και πολλών άλλων περιοχών της Μηχανικής. Αντικείμενο της Γραμμικής Θεωρίας Ελαστικότητας είναι ο προσδιορισμός των τάσεων και των παραμορφώσεων που αναπτύσσονται σε ένα σώμα υπό την επίδραση μηχανικών ή θερμικών φορτίων, υπό την προϋπόθεση ότι όταν αυτά αφαιρεθούν το σώμα θα επιστρέψει στην αρχική του κατάσταση. Προσθέτοντας στην ανάπτυξη της Θεωρίας Ελαστικότητας αδρανειακά φαινόμενα οδηγούμαστε στο πεδίο της Θεωρίας Ελαστοδυναμικής, το οποίο μελετάει την διάδοση ελαστικών κυμάτων στα υλικά. Η Θεωρία Ελαστικότητας και η Θεωρία Ελαστοδυναμικής αποτελούν το βασικό πλαίσιο πάνω στο οποίο βασίζεται η Σεισμολογία και πολλά από τα προβλήματα και τις μεθόδους τους εφαρμόζονται σε αυτό τον κλάδο (Φαρμάκης, 2017).

Στόχος του παρακάτω κεφαλαίου είναι η διατύπωση των εξισώσεων κίνησης, καθώς και των συνοριακών και αρχικών συνθηκών για ένα παραμορφώσιμο στερεό υπό τη θεώρηση του ως συνεχές μέσο (π.χ. Fung 1965) στα πλαίσια της Γραμμικής Θεωρίας Ελαστοδυναμικής.

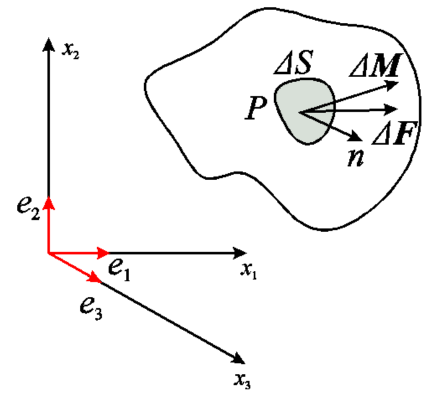
Αναφέρεται ότι στοιχεία του παρόντος κεφαλαίου έχουν αντληθεί από την μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία του κ. Φαρμάκη «*Πρόβλημα κινούμενου συγκεντρωμένου φορτίου στην επιφάνεια ελαστοδυναμικού ημι-χώρου*» (Αθήνα, 2017).

1.2 Τανυστής τάσεων

Χρειάζεται να σημειωθεί ότι κατά την ανάπτυξη των επόμενων κεφαλαίων θα αξιοποιηθεί η σύμβαση της άθροισης, διαφορετικά η σύμβαση Einstein, σύμφωνα με την οποία ένας δείκτης που εμφανίζεται δύο φορές δηλώνει άθροιση για όλες τις τιμές του.

Θεωρούμε σταθερό ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή O και $\left(x_1, x_2, x_3\right)$ τις συντεταγμένες ενός σημείου P, όπου $x = x_i e_i$ το διάνυσμα θέσης του P και $\left\{e_i\right\}_{i=1}^{3}$ τα διανύσματα βάσης.

Έστω παραμορφώσιμο στερεό όγκου V και επιφάνειας S σε ισορροπία (απουσία αδρανειακών φαινομένων) υπό την επίδραση επιφανειακών και καθολικών δυνάμεων. Συμβολίζουμε με ΔS ένα στοιχείο επιφάνειας στο εσωτερικό του σώματος ή στην επιφάνεια του και με $\mathbf{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που καθορίζει τον προσανατολισμό του (σχήμα 1). Η συνιστώσα δύναμη και ροπή που ασκούνται στο ΔS συμβολίζονται ως ΔF και ΔM αντιστοίχως. Η έννοια της τάσεως γίνεται φανερή θεωρώντας την επιφάνεια ΔS να τείνει στο μηδέν, με άλλα λόγια θεωρούμε τα όρια



Σχήμα 1: Στοιχείο επιφανείας του σώματος με **n** το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, Δ**F** η συνιστώσα δύναμη και Δ**M** η συνιστώσα ροπή. (Φαρμάκης, 2017)

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} = T^{(n)} \tag{1.1}$$

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta S} = 0 \tag{1.2}$$

όπου το διάνυσμα $T^{(n)}$ ονομάζεται ελκυστής (traction) ή διάνυσμα τάσεως (stress vector) και εκφράζει τη δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας στην θέση P που ασκείται σε ένα απειροστό στοιχείο επιφανείας με καθορισμένο προσανατολισμό $\mathbf{n}$. Για τον ελκυστή $T^{(n)}$ ισχύουν οι παρακάτω δύο σχέσεις

$$-T^{(n)} = T^{(-n)} \tag{1.3}$$

$$T_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j ,\; i, j = 1,2,3 \tag{1.4}$$

Η σχέση (1.3) εκφράζει το νόμο δράσης-αντίδρασης του Newton ενώ η σχέση (1.4) το θεώρημα του Cauchy για τις τάσεις, σύμφωνα με το οποίο ο ελκυστής $T^{(n)}$ είναι γραμμική συνάρτηση του **n**. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται ένας τανυστής **σ** δεύτερης τάξης ανεξάρτητος του **n**, ο οποίος ονομάζεται τανυστής τάσεως και έχει συνιστώσες σ_{ij} . Γενικά οι συνιστώσες σ_{ij} είναι συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου, δηλαδή $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\left(x,t\right)$ (Χ. Γ. Γεωργιάδης, 2003).

1.3 Τανυστής απειροστών τροπών

Ο τανυστής απειροστών τροπών περιγράφει την παραμόρφωση ενός συνεχούς μέσου. Αν $u\left(x,t\right)$ είναι το διάνυσμα της μετατόπισης τότε η κίνηση του συνεχούς μέσου μπορεί να εκφραστεί ως συνδυασμός παραγώγων του $u\left(x,t\right)$, υπό την προϋπόθεση ότι τα τετράγωνα και τα γινόμενα τους μπορούν να αμεληθούν (Fung, 1965). Συνεπώς, σύμφωνα με την γραμμική θεωρία των παραμορφώσεων έχουμε την γραμμικοποιημένη έκφραση του τανυστή τροπής

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),\; i, j = 1,2,3 \tag{1.5}$$

καθώς και τον τανυστή στροφών **ω** με συνιστώσες

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right),\; i, j = 1,2,3 \tag{1.6}$$

όπου $\left(\;\right)_{,l} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\;\right)$

Ο **ε** είναι ένας δεύτερης τάξης συμμετρικός τανυστής ενώ ο **ω** είναι ένας δεύτερης τάξης αντισυμμετρικός τανυστής, δηλαδή

$$\varepsilon_{ij}\left(x,t\right) = \varepsilon_{ji}\left(x,t\right) \tag{1.7}$$

$$\omega_{ij}\left(x,t\right) = -\omega_{ji}\left(x,t\right) \tag{1.8}$$

1.4 Εξισώσεις συμβιβαστού

Αποδεικνύεται ότι οι εξισώσεις συμβιβαστού των τροπών ε_{ij} αποτελούν την αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι οι μετατοπίσεις $u_i\left(x,t\right)$ μονότιμες και συνεχείς συναρτήσεις σε απλώς-συνεκτικό (χωρίς οπές) σώμα (Fung, 1965).

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \tag{1.9}$$

Η παραπάνω έκφραση αναπαριστά 81 εξισώσεις, οι οποίες αποτελούν τη μαθηματική διατύπωση της συνέχειας ενός παραμορφώσιμου στερεού. Στην γενική τρισδιάστατη περίπτωση έχουμε 6 εξισώσεις ανεξάρτητες εξισώσεις συμβιβαστού, ενώ οι υπόλοιπες είναι ταυτοτικά ίδιες λόγω συμμετρίας του τανυστή των τροπών (Χ. Γ. Γεωργιάδης, 2003).

1.5 Αρχή Διατήρησης της Ορμής

Έστω κλειστό τμήμα ενός σώματος με όγκο V και σύνορο S. Στην επιφάνεια S ασκείται μία κατανομή επιφανειακών ελκυστών $T^{(n)}\left(x,t\right)$ ενώ σε κάθε στοιχείο όγκου του σώματος εφαρμόζεται ένα καθολικό πεδίο δυνάμεων $f\left(x,t\right)$ ανά μονάδα όγκου. Σύμφωνα με την Αρχή Διατήρησης της Ορμής, ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ορμής του τμήματος του σώματος ισούται με την ολική δύναμη που του ασκείται την συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Αν ρ είναι η πυκνότητα του υλικού τότε σύμφωνα με την γραμμική θεωρία

$$\int_S \mathbf{T}^{(n)}\left(\mathbf{x},t\right) dS + \int_V \rho \mathbf{f}\left(\mathbf{x},t\right) dV = \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}}\left(\mathbf{x},t\right) dV \tag{1.10}$$

όπου $\dot{(\ )} = \frac{\partial}{\partial t}(\ )$

Σε μορφή δεικτών η παραπάνω εξίσωση λαμβάνει την μορφή

$$\int_s T_i^{(n)}\left(\mathbf{x},t\right)dS + \int_V \rho f_i\left(\mathbf{x},t\right)dV = \int_V \rho \ddot{u}_i\left(\mathbf{x},t\right)dV \tag{1.11}$$

Εξαιτίας του θεωρήματος Green-Gauss ισχύει για το επιφανειακό ολοκλήρωμα ότι

$$\int_S \sigma_{ji} n_j dS = \int_V \sigma_{ji,j} dV \tag{1.12}$$

και γνωρίζοντας ότι $T_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$ η (1.11) θα γίνει

$$\int_V \left(\sigma_{ji,j} + \rho f_i - \rho \ddot{u}_i\right) dV = 0 \tag{1.13}$$

Η τελευταία σχέση (1.13) ισχύει για τυχαίο όγκο V ενώ η ολοκληρωτέα ποσότητα θεωρείται συνεχής, συνεπώς

$$\sigma_{ji,j} + \rho f_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \text{ για } i, j = 1,2,3 \tag{1.14}$$

Οι εξισώσεις (1.14) αποτελούν την 1η εξίσωση κίνησης του Cauchy (Achenbach, 1973).

1.6 Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής

Σύμφωνα με την Θεωρία Γραμμικής Ελαστοδυναμικής η Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής διατυπώνεται ως εξής

$$\int_S \mathbf{x} \times \mathbf{T}^{(n)} dS + \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{f} dV = \int_V \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathbf{x} \times \mathbf{u}\right) dV \tag{1.15}$$

ενώ με χρήση δεικτών απλοποιούμε το δεξί μέρος της εξίσωσης (1.15) ως

$$\int_S e_{klm} x_l T_m^{(n)} dS + \int_V e_{klm} x_l f_m dV = \int_V \rho e_{klm} x_i \ddot{u}_i dV \tag{1.16}$$

όπου e_{klm} είναι το σύμβολο εναλλαγής ή σύμβολο Levi-Civita. Απαλείφοντας τον ελκυστή από το επιφανειακό ολοκλήρωμα και εφαρμόζοντας το θεώρημα Green-Gauss έχουμε

$$\int_S e_{klm} x_l T_m^{(n)} dS = \int_S e_{klm} x_l \sigma_{jm} n_j dS = \int_V \left(e_{klm} x_l \sigma_{jm} \right)_{,j} dV \qquad (1.17)$$

και η εξίσωση η (1.16) μέσω της (1.17) γίνεται

$$\int_V \left(e_{klm} x_l \sigma_{jm} \right)_{,j} dV = \int_V \left(\rho e_{klm} x_l \ddot{u}_i - e_{klm} x_l f_m \right) dV$$

$$\Rightarrow \int_V e_{klm} \delta_{lj} \sigma_{jm} dV + \int_V e_{klm} x_l \sigma_{jm,j} dV = \int_V e_{klm} x_l (\rho \ddot{u}_i - f_m) dV$$

$$\Rightarrow \int_V e_{klm} \sigma_{lm} dV + \int_V e_{klm} x_l \left(\sigma_{jm,j} + \rho f_m - \rho \ddot{u}_i \right) dV = 0 \qquad (1.18)$$

όπου $x_{i,j} = \delta_{ij}$ το δέλτα του Kronecker. Εφόσον ισχύουν οι εξισώσεις κίνησης (1.14) τότε η (1.18) θα γίνει

$$\int_V e_{klm} \sigma_{lm} dV = 0 \qquad (1.19)$$

Η σχέση (1.19) ισχύει για τυχαίο όγκο V και η ολοκληρωτέα ποσότητα θεωρείται συνεχής, συνεπώς

$$e_{klm} \sigma_{lm} = 0 \text{ ή } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad (1.20)$$

Προκύπτει δηλαδή ότι ο τανυστής τάσεως είναι συμμετρικός (Achenbach, 1973). Συνεπώς οι εξισώσεις κίνησης ως προς τις τάσεις θα έχουν τη μορφή

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \text{ για } i, j = 1, 2, 3 \qquad (1.21)$$

1.7 Καταστατικός νόμος Hooke

Η γραμμική σχέση μεταξύ των συνιστωσών του τανυστή τάσεως και του τανυστή τροπών διατυπώνεται μέσω του τέταρτης τάξης τανυστή ελαστικότητας **C** (moduli) από τον γενικευμένο νόμο του Hooke (Nowacki, 1976)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{1.22}$$

ενώ ισχύουν οι παρακάτω συμμετρίες

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} = C_{ijlk} \tag{1.23}$$

Συνεπώς ο **C** έχει 21 ανεξάρτητες συνιστώσες από τις 81. Θεωρούμε ότι το υλικό είναι ομογενές αν οι συντελεστές C_{ijkl} είναι σταθερές και ισότροπο όταν οι ελαστικές σταθερές είναι ανεξάρτητες από τον προσανατολισμό του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, σύμφωνα με το οποίο υπολογίζονται οι συνιστώσες σ_{ij} και ε_{ij}. Αποδεικνύεται λόγω ισοτροπίας ότι ο τανυστής ελαστικότητας μπορεί να εκφραστεί ως

$$C_{ijkl} = \lambda\left(\delta_{ij}\delta_{kl}\right) + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{1.24}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στη γνωστή μορφή του νόμου του Hooke της γραμμικής ελαστικότητας για ένα ομογενές και ισότροπο παραμορφώσιμο σώμα

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{1.25}$$

όπου λ, μ οι σταθερές του Lamé. Λύνοντας την εξίσωση (1.25) ως προς ε_{ij} θα έχουμε

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda\delta_{ij}}{2\mu\left(3\lambda + 3\mu\right)}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} \tag{1.26}$$

Γίνεται φανερό λοιπόν ότι το ε_{ij} μπορεί να εκφραστεί μονότιμα ως προς το σ_{ij} μόνο αν

$$\mu \neq 0 \text{ και } 3\lambda + 2\mu \neq 0 \tag{1.27}$$

Για την αποφυγή μη-μηδενικών τροπών στην περίπτωση πεπερασμένων τάσεων πρέπει να ισχύει ότι

$$|\mu| < \infty \text{ και } |3\lambda + 2\mu| < \infty \tag{1.28}$$

ενώ εξετάζοντας κάποιες ειδικές περιπτώσεις εντατικής κατάστασης μπορούμε να βρούμε κι άλλους περιορισμούς για τις ελαστικές σταθερές *λ* και *μ* (Achenbach, 1973).

(I) Απλή Διάτμηση

Υποθέτοντας ότι $\sigma_{12} \neq 0$ και τα υπόλοιπα $\sigma_{ij}=0$ οδηγούμαστε στην απλή διάτμηση, στην οποία θεωρούμε το μ ως το μέτρο διατμήσεως και συνδέει τα σ_{12} και ε_{12} μέσω της σχέσης

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$$

Έχει παρατηρηθεί πειραματικά ότι για μικρές παραμορφώσεις τα $\sigma_{12}, \varepsilon_{12}$ έχουν την ίδια κατεύθυνση, συνεπώς

$$\mu>0 \tag{1.29}$$

(II) Υδροστατική Πίεση

Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ και βρίσκουμε ότι $p = -B\varepsilon_{kk}$, όπου $B = \lambda + 2\mu/3$ το μέτρο διόγκωσης.

Για απειροστές τροπές ο όρος ε_{kk} εκφράζει την μεταβολή του όγκου ενός στοιχείου και επειδή η υδροστατική πίεση μειώνει τον όγκο του σώματος, συνεπάγεται ότι *B*>0 ή

$$\lambda + \frac{2}{\mu} > 0 \tag{1.30}$$

Συνοψίζοντας λοιπόν τους παραπάνω περιορισμούς για τις ελαστικές σταθερές *λ, μ* έχουμε

$$0 < \lambda + \frac{2}{3}\mu < \infty,\ 0 < \mu < \infty \tag{1.31}$$

Άλλες ελαστικές σταθερές που εμφανίζονται στη Θεωρία Ελαστικότητας είναι το μέτρο Young ή μέτρο ελαστικότητας *E* και ο λόγος Poisson *ν*. Οι σχέσεις μεταξύ αυτών των μεγεθών είναι (Fung, 1965)

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \text{και} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.32}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \qquad \text{και} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{1.33}$$

1.8 Ενέργεια παραμόρφωσης

Από τον ορισμό της ολικής παραμορφωσιακής ενέργειας *U* (ενέργεια ανά μονάδα όγκου) έχουμε

$$U = \int_V \left(\int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \, d\varepsilon_{ij} \, dV \right) \tag{1.34}$$

Εφόσον ισχύει ο νόμος του Hooke (1.25) η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας για την περίπτωση της ισότροπης γραμμικής ελαστικότητας ύστερα από ολοκλήρωση της σχέσης (1.34) είναι (Χ. Γεωργιάδης, 2020)

$$U\left(\varepsilon_{ij}\right) = \int_V \left[\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\lambda\left(\varepsilon_{kk}\right)^2 \right] dV = \int_V \left[\frac{1}{4\mu}\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{4\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{kk}{}^2 \right] dV \tag{1.35}$$

1.9 Το πρόβλημα της ελαστοδυναμικής

Έστω παραμορφώσιμο σώμα B που καταλαμβάνει την περιοχή V στον χώρο R^3. Το σύστημα των εξισώσεων που διέπουν την κίνηση ενός ομογενούς, ισότροπου και γραμμικά ελαστικού σώματος αποτελείται από τις εξισώσεις κίνησης ως προς τις τάσεις (1.21), το νόμο του Hooke (1.25) και τις σχέσεις τροπών-μετατοπίσεων (1.5).

Ο συνδυασμός των παραπάνω εξισώσεων δίνει τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης ως προς τις μετατοπίσεις ή τις ελαστοδυναμικές εξισώσεις κύματος, οι οποίες πιο απλά καλούνται εξισώσεις κίνησης.

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \tag{1.36}$$

όπου $u_i = u_i(x,t)$ και $x \in V \subset R^3, t > 0$ (Achenbach, 1973)

Στο σύνορο S του παραμορφώσιμου σώματος B θα πρέπει να ισχύουν κάποιες συνοριακές συνθήκες, με τις πιο συχνές στα προβλήματα ελαστοδυναμικής να δίνονται παρακάτω

(I) Συνοριακές Συνθήκες Μετατοπίσεων

Τα στοιχεία μετατόπισης u_i είναι γνωστά στο σύνορο S

$$u_i(\mathbf{x},t) = U_i(\mathbf{x},t) \text{ για } \mathbf{x} \in S,\ t > 0 \tag{1.37}$$

(II) Συνοριακές Συνθήκες Τάσεων

Τα στοιχεία τάσεων σ_{ij} είναι γνωστά στο σύνορο S

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t) = \Sigma_{ij}(\mathbf{x},t) \text{ για } \mathbf{x} \in S,\ t > 0 \tag{1.38}$$

(III) Μεικτές Συνοριακές Συνθήκες

Συνοριακές συνθήκες μετατοπίσεων στο σύνορο S_1 και συνοριακές συνθήκες μετατοπίσεων στο $S - S_1$

$$u_i(\mathbf{x},t) = U_i(\mathbf{x},t) \text{ για } \mathbf{x} \in S_1,\ t > 0 \tag{1.39}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t) = \Sigma_{ij}(\mathbf{x},t) \text{ για } \mathbf{x} \in S_2 = S - S_1,\ t > 0 \tag{1.40}$$

Τέλος, χρειάζεται να διατυπώσουμε και τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Για $x \in V, t = 0$

$$u_i\left(\mathbf{x},0\right) = h_i\left(\mathbf{x}\right) \tag{1.41}$$

$$\frac{d}{dt}u_i\left(\mathbf{x},0\right) = g_i(\mathbf{x}) \tag{1.42}$$

όπου h_i, g_i γνωστές συναρτήσεις (Achenbach, 1973)

1.10 Προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης

Στα προβλήματα δύο διαστάσεων οι καθολικές δυνάμεις και οι συνιστώσες του τανυστή τάσεως είναι ανεξάρτητες από μία από τις τρεις χωρικές μεταβλητές (έστω την x_3), άρα $\partial/\partial x_3 = 0$. Μία ειδική περίπτωση επίπεδων προβλημάτων είναι τα προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης, στα οποία η διάσταση x_3 είναι πολύ μεγαλύτερη από τις x_1, x_2 και κατ' επέκταση η τροπή κατά τη διεύθυνση αυτή μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Με αυτόν τον τρόπο η ανάλυση μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ένα αποκομμένο επίπεδο μοναδιαίου πάχους κατά τον άξονα x_3 εφόσον η φόρτιση είναι ομοιόμορφη κατά αυτόν τον άξονα (Σχήμα 2).

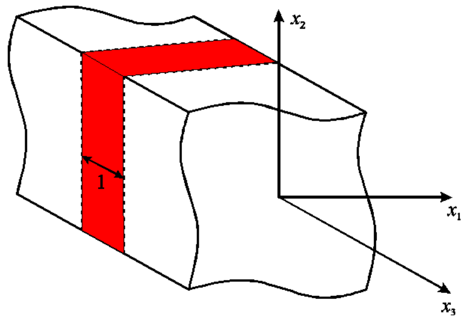
Συνεπώς, τα υπό μελέτη μεγέθη είναι ανεξάρτητα του x_3 και

$$u_3 \equiv 0\,,\ u_1 = u_1\left(x_1, \mathrm{x}_2, t\right),\ u_2 = u_2\left(x_1, x_2, t\right) \tag{1.43}$$

Θέτοντας λοιπόν $u_3 \equiv 0$ και $\partial/\partial x_3 = 0$ στις εξισώσεις κίνησης (1.36) προκύπτει ότι

$$\mu u_{i,jj} + \left(\lambda + \mu\right)u_{j,ji} + \rho f_i = \rho\ddot{u}_i \qquad \text{για } i, j = 1,2 \tag{1.44}$$

(Fung, 1965)



Σχήμα 2: Περίπτωση Επίπεδης Παραμόρφωσης (Φαρμάκης, 2017)

1.11 Ελαστικά κύματα

Οι εξισώσεις κίνησης σε διανυσματική μορφή με απουσία καθολικών δυνάμεων μπορούν να γραφτούν από την σχέση (1.36) ως εξής

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})+\mu\nabla^2\mathbf{u}=\rho\ddot{\mathbf{u}} \tag{1.45}$$

όπου $\nabla=\left(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3\right)$ ο τελεστής βαθμίδας και

$\nabla^2=\left(\partial^2/\partial x_1^2\right)+\left(\partial^2/\partial x_2^2\right)+\left(\partial^2/\partial x_3^2\right)$ ο τελεστής Laplace

Σε ένα ελαστικό μέσο μπορούμε να διακρίνουμε δύο ειδών κύματα χώρου, τα διαμήκη και τα εγκάρσια (Achenbach, 1973).

1.11.1 Διαμήκη ελαστικά κύματα

Τα διαμήκη ελαστικά κύματα αφορούν την διάδοση της μεταβολής του όγκου ή της πυκνότητας. Με εφαρμογή του διαφορικού τελεστή απόκλισης $div(\ )\equiv\nabla\cdot(\ )$ και των σχέσεων $\nabla\nabla=\nabla^2$, $\nabla\nabla^2(\mathbf{u})=\nabla^2(\nabla\mathbf{u})$ στην (1.47) θα έχουμε ότι

$$\nabla^2(\nabla\cdot\mathbf{u})=\frac{1}{{v_L}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\cdot\mathbf{u}) \tag{1.46}$$

Προκύπτει δηλαδή η μερική διαφορική εξίσωση κύματος ως προς τη μεταβολή του όγκου ή διασταλτικότητα

$$\Delta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{1.47}$$

Η ταχύτητα διάδοσης αυτών των κυμάτων είναι $v_L = \left[(\lambda + 2\mu)/\rho\right]^{1/2}$. Ένα κύμα που περιγράφεται από την (1.46) ονομάζεται διάμηκες ή **P** ή πρωτεύων, διότι έχει τη μεγαλύτερη ταχύτητα από τα υπόλοιπα είδη κυμάτων. Κατά τη διάδοση των **P**-κυμάτων σε ελαστικό μέσο, τα υλικά σημεία αυτού ταλαντώνονται κατά την παράλληλη διεύθυνση προς τη διεύθυνση του κύματος (Achenbach, 1973).

1.11.2 Εγκάρσια ελαστικά κύματα

Τα εγκάρσια ελαστικά κύματα αφορούν τη μεταβολή του σχήματος του συνεχές μέσου. Εφαρμόζοντας τον διαφορικό τελεστή στροφής $\mathrm{rot}(\;) = \nabla\times(\;)$ στην (1.45) θα έχουμε ότι

$$\nabla \times \left[\left(\lambda + \mu\right)\nabla\nabla\mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u}\right] = \nabla \times \left(\rho\ddot{\mathbf{u}}\right) \tag{1.48}$$

Ωστόσο, γνωρίζουμε από την διανυσματική ανάλυση ότι $\nabla \times \left(\nabla\nabla\mathbf{u}\right) = \mathbf{0}$. Συνεπώς, η σχέση (1.48) θα γίνει

$$\nabla^2\left(\nabla \times \mathbf{u}\right) = \frac{1}{v_{\mathrm{T}}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\nabla \times \mathbf{u}\right) \tag{1.49}$$

όπου $v_{\mathrm{T}} = \left(\mu/\rho\right)^{1/2}$ η ταχύτητα διάδοσης.

Κύματα που περιγράφονται από την (1.48) ονομάζονται εγκάρσια ή **S** ή δευτερεύοντα επειδή καταφθάνουν ύστερα από τα διαμήκη $\left(v_L > v_{\mathrm{T}}\right)$. Κατά τη διάδοση **S**-κυμάτων σε ελαστικό μέσο, τα υλικά σημεία αυτού ταλαντώνονται κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος κατά τέτοιο τρόπο ώστε το μέσο να υπόκειται μόνο σε διατμητική παραμόρφωση (Achenbach, 1973).

Χρειάζεται να αναφερθεί ότι σε ένα ισότροπο, ελαστικό μέσο άπειρων διαστάσεων μπορούν να διαδοθούν μόνο οι δύο παραπάνω τύποι κυμάτων. Ωστόσο, στην περίπτωση που βρισκόμαστε σε ελαστικό ημι-χώρο (ελαστικό μέσο με σύνορο) υπάρχει η πιθανότητα να σχηματισθούν επιφανειακά κύματα κατά μήκος της ελεύθερης επιφάνειας του, με άλλα λόγια παροδικές διαταραχές οι οποίες περιορίζονται σε μία λεπτή στρώση του συνόρου του σώματος. Τα κύματα αυτά διερευνήθηκαν για πρώτη φορά από τον Lord Rayleigh (1887), ο οποίος έθεσε ως κριτήριο θεώρησης των επιφανειακών κυμάτων Rayleigh την εκθετική μείωση της μετατόπισής τους ως προς την απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια του υλικού. Τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου διάδοσης των επιφανειακών κυμάτων Rayleigh κινούνται σε ελλειπτική τροχιά, της οποίας ο μεγάλος άξονας είναι κάθετος στην ελεύθερη επιφάνεια, ενώ η ταχύτητα διάδοσής τους είναι μικρότερη από την αντίστοιχη των εγκαρσίων κυμάτων. Η επίλυση του προβλήματος διάδοσης κυμάτων σε επίπεδο μέτωπο, σε ελαστικό μέσο με επίπεδο αφόρτιστο σύνορο (stress free boundary condition) στο οποίο οι διαταραχές περιορίζονται στην γειτονιά του συνόρου δίνεται στην βιβλιογραφία (Achenbach, 1973) (Fung, 1965).

1.12 Δυναμικά μετατόπισης

Αναφέρεται ότι οι εξισώσεις (1.46) και (1.48) υπονοούν ότι η διάδοση μίας αυθαίρετης παραμόρφωσης αποτελεί συνδυασμό διαμηκών και εγκαρσίων κυμάτων. Το γεγονός αυτό μπορεί να φανεί άμεσα διαχωρίζοντας την διανυσματική έκφραση της μετατόπισης σε

$$u = \nabla\varphi + \nabla\times\boldsymbol{\psi} \qquad (1.50)$$

όπου $\varphi(x,t)$ βαθμωτή συνάρτηση και $\boldsymbol{\psi}(x,t)$ διανυσματική συνάρτηση με $\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0$

Αντικαθιστώντας την έκφραση (1.50) στην εξίσωση (1.45) προκύπτει ότι

$$\mu\nabla^2[\nabla\varphi + \nabla\times\boldsymbol{\psi}] + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot[\nabla\varphi+\nabla\times\boldsymbol{\psi}] = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\nabla\varphi+\nabla\times\boldsymbol{\psi}] \qquad (1.51)$$

και εφόσον $\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi$, και $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{\psi}=0$, η αναδιάταξη των όρων της σχέσης (1.51) δίνει (Achenbach, 1973)

$$\nabla[(\lambda+2\mu)\nabla^2\varphi-\rho\ddot{\varphi}]+\nabla\times[\mu\nabla^2\boldsymbol{\psi}-\rho\ddot{\boldsymbol{\psi}}]=0 \tag{1.52}$$

Η έκφραση (1.52) της μετατόπισης ικανοποιεί την εξίσωση (1.45) αν τα $\varphi(x,t)$ και $\boldsymbol{\psi}(x,t)$ αποτελούν λύσεις των κυματικών εξισώσεων

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{\mathrm{v}_{\mathrm{L}}^2}\ddot{\varphi} \tag{1.53α}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{\psi}=\frac{1}{\mathrm{v}_{\mathrm{T}}^2}\ddot{\boldsymbol{\psi}} \tag{1.53β}$$

Με άλλα λόγια το βαθμωτό δυναμικό $\varphi(x,t)$ αντιστοιχεί στα διαμήκη κύματα και το διανυσματικό δυναμικό $\boldsymbol{\psi}(x,t)$ αντιστοιχεί στα εγκάρσια (Achenbach, 1973).

Τέλος, για την περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης οι σχέσεις μεταξύ των δυναμικών μετατόπισης με τα μη μηδενικά στοιχεία μετατοπίσεων και τάσεων είναι (Ravi-Chandar, 2004)

$$u_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial x_2} \tag{1.54α}$$

$$u_2=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial x_2} \tag{1.54β}$$

και

$$\sigma_{11}=\lambda\nabla^2\varphi+2\mu\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right] \tag{1.55α}$$

$$\sigma_{22}=\lambda\nabla^2\varphi+2\mu\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right] \tag{1.55β}$$

$$\sigma_{11}=\mu\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\right] \tag{1.55γ}$$

Κεφάλαιο 2: Στοιχεία Θεωρίας Θερμοελαστικότητας

2.1 Γενικά

Τα περισσότερα υλικά υφίστανται σημαντικές αλλαγές στον όγκο τους όταν υποβάλλονται σε μεταβολές θερμοκρασίας. Αν οι θερμικές διαστολές ή συστολές δεν επιτρέπονται ελεύθερα στο σώμα τότε αναπτύσσονται θερμικές τάσεις, ενώ αντίστροφα μία μεταβολή του όγκου (συμπίεση ή διαστολή) συνοδεύεται από μία ανάλογη μεταβολή θερμοκρασίας (θέρμανση ή ψύξη αντίστοιχα). Αντικείμενο της Θεωρίας της Θερμοελαστικότητας είναι η επιρροή της θερμοκρασίας σε ένα ελαστικό στερεό κατά την κατανομή των τάσεων και των παραμορφώσεών του, καθώς και το αντίστροφο φαινόμενο παραμόρφωσής του υλικού αυτού κατά την κατανομή θερμοκρασίας (Achenbach, 1973).

Το φαινόμενο αυτό μελετήθηκε για πρώτη φορά τον Duhamel (1838), ο οποίος εξήγαγε εξισώσεις για την κατανομή των παραμορφώσεων ενός ελαστικού μέσου συμπεριλαμβάνοντας βαθμίδες θερμοκρασίας. Τα αποτελέσματα του Duhamel δόθηκαν ανεξάρτητα από αρκετούς συγγραφείς, ενώ ο Neumann (1835) απέδειξε ότι οι όροι στις συνιστώσες του τανυστή τροπών που οφείλονται στην μη ομαλή κατανομή θερμοκρασίας μπορούν να ερμηνευθούν ισοδύναμα ως το αποτέλεσμα εφαρμογής μίας καθολικής δύναμης ανάλογης της βαθμίδας θερμοκρασίας.

Παρά το γεγονός ότι η βασική αυτή θεωρία εφαρμόσθηκε για έναν μεγάλο αριθμό προβλημάτων και συνέβαλλε καθοριστικά στην ανάπτυξη τεχνικών επίλυσης θερμοελαστικών κυμάτων, οδηγούσε στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι η διαδικασία της θερμικής επαγωγής ήταν ανεξάρτητη της εντατικής κατάστασης του στερεού. Το αποτέλεσμα αυτό εμφανίζεται κυρίως όταν το μελετώμενο μέσο βρίσκεται σε κατάσταση μηχανικής και θερμικής ισορροπίας, ενώ η εφαρμογή της ανάλυσης Duhamel-Neumann σε προβλήματα παροδικού τύπου δεν δίνει ικανοποιητικές λύσεις. Φαίνεται πως οι Duhamel και Neumann είχαν επίγνωση των ελλείψεων της θερμοελαστικής θεωρίας τους, εφόσον και οι δύο πρότειναν να προστεθεί εμπειρικά ένας νέος όρος στην εξίσωση θερμικής επαγωγής, ανάλογος του ρυθμού μεταβολής της ανηγμένης κυβικής συστολής/διαστολής (dilatation).

Οι Voight (1895), Jeffreys (1930) και Lessen (1957) ασχολήθηκαν με την εξαγωγή μιας γενικευμένης θερμοδυναμικής ανάλυσης και κατ' επέκταση μίας εξίσωσης θερμικής επαγωγής η οποία θα περιείχε την προτεινόμενη από τους Duhamel και Neumann σύζευξη μεταξύ μηχανικών παραμορφώσεων και θερμοκρασιακού πεδίου. Παρά το γεγονός ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις προσπάθειές τους είναι ορθά, καμία από τις μεθόδους που αξιοποιήθηκε δεν μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά την μη αντιστρεπτή φύση της μετάδοσης θερμότητας. O Biot (1955), εισάγοντας τη Θεωρία της Θερμοδυναμικής των Αντιστρεπτών Μεταβολών σε ελαστικό μέσο έδειξε ότι σε χρονικά εξαρτώμενα προβλήματα η αλληλεπίδραση της θερμικής κατάστασης και των παραμορφώσεων είναι τέτοια ώστε τα δύο φαινόμενα να μην είναι δυνατόν να μπορούν να εξετασθούν ξεχωριστά (Chadwick, 1960).

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι αρχές της Θεωρίας Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας σύμφωνα με τον Biot και εξάγονται οι βασικές σχέσεις και εξισώσεις που την χαρακτηρίζουν. Συγκεκριμένα, στα πλαίσια της θεωρίας του Biot διατυπώνονται η Γενικευμένη Θεωρία Θερμικής Επαγωγής και Θερμικών Τάσεων, καθώς και ερμηνεύονται οι μεταβολές στην θερμοκρασία που οφείλονται σε παραμόρφωση. Ερμηνεύεται επίσης η διάδοση θερμοελαστικών κυμάτων σε ένα ελαστικό μέσο και το φαινόμενο της θερμοελαστικής απώλειας (dissipation), το οποίο οδηγεί σε εσωτερική απόσβεση του πλάτους ταλάντωσης. Στο τέλος του κεφαλαίου αυτού μελετάται το πρόβλημα επίδρασης εξωτερικής διέγερσης μηχανικής φύσεως σε σώμα με βάση την Θεωρία Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας και την Κλασική Θεωρία Ελαστικότητας.

Αναφέρεται ότι στοιχεία του παρόντος κεφαλαίου έχουν αντληθεί από την μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία του κ. Αναγνώστου «*Διάδοση Θερμοελαστικών Κυμάτων λόγω Θερμικής Πηγής*» (Αθήνα, 2005).

2.2 Βασικές Εξισώσεις

Έστω παραμορφώσιμο, τελείως ελαστικό, ομογενές, αρχικά απαραμόρφωτο στερεό, το οποίο είναι ελεύθερο τάσεων και βρίσκεται υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων αλλά και εξωτερικής θέρμανσης/ψύξης. Θεωρούμε ότι δεν εμφανίζονται τοπικά ροπές στο σώμα και ότι προτού εφαρμοσθούν οι εξωτερικές δυνάμεις βρίσκεται σε απόλυτη θερμοκρασία T_0. Εφαρμόζοντας λοιπόν εξωτερικό πεδίο δυνάμεων ή/και μεταβάλλοντας την θερμοκρασία του περιβάλλοντος το σώμα οδηγείται σε μία καινούργια κατάσταση, η οποία χαρακτηρίζεται από ένα πεδίο μετατοπίσεων $u_i\,(i=1,2,3)$ και μία μη ομαλή κατανομή θερμοκρασίας *T*. Χρειάζεται να σημειωθεί ότι η απόλυτη θερμοκρασία, τα πεδία μετατοπίσεων και ταχυτήτων και οι τανυστές τάσεων και τροπών αποτελούν συναρτήσεις του χρόνου και της θέσης ως προς τρισορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $x_i\left(i=1,2,3\right)$.

2.2.1 Αρχές της μηχανικής του συνεχούς μέσου και της θερμοδυναμικής των μη αντιστρεπτών μεταβολών

Οι βασικές εξισώσεις που διέπουν την συμπεριφορά ενός παραμορφώσιμου στερεού προκύπτουν από τη μηχανική θεώρηση του ως συνεχές σώμα (βλέπε κεφάλαιο 1) και από τις γενικές αρχές της Θερμοδυναμικής των μη Αντιστρεπτών Μεταβολών (Biot, 1955) οι οποίες αφορούν το συνολικό σώμα.

Από την Αρχή Διατήρησης της Μάζας (Fung, 1965), θα έχουμε την τοπική εξίσωση της συνέχειας

$$\dot{\rho}+\rho\frac{\partial v_j}{\partial x_j}=0 \tag{2.1}$$

όπου ρ η πυκνότητα μάζας του στερεού και $\dot{\rho}=D\rho/Dt$ η υλική παράγωγος της πυκνότητας.

Ο Πρώτος Νόμος της Θερμοδυναμικής (ή Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας) αφορά τον ισχυρισμό ότι για κάθε σημείο P και χρονική στιγμή t ισχύει ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\int_P \rho\varepsilon\, dV\right)=W\left(P\right)-\int_{\partial P}\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS+\int_P \rho h\, dV \tag{2.2}$$

όπου $W\left(P\right)$ ο ρυθμός παραγωγής έργου (ισχύς), $\varepsilon\left(\mathbf{x},t\right)$ η πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας του σώματος, $q\left(\mathbf{x},t\right)$ το διάνυσμα της θερμικής ροής. Η ποσότητα $\int_P \rho\varepsilon\, dV$ εκφράζει την εσωτερική ενέργεια της περιοχής του σημείου P, η $\int_{\partial P}\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\, dS$ την ροή θερμότητας στο εσωτερικό του σημείου P διαμέσου του συνόρου ∂P και η ποσότητα $\int_P \rho h\, dV$ την συνολική θερμότητα που διέρχεται στο σημείο P από το περιβάλλον του (h η πυκνότητα θερμότητας ανά μονάδα μάζας).

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι $W(P)=\int_P \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{i,j}\ dV=\int_P \sigma_{ij}v_{i,j}\ dV$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss στον δεύτερο όρο του δεξιού μέρους της εξίσωσης (2.2) καταλήγουμε στην παρακάτω τοπική εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

$$\rho\dot{\varepsilon}=\rho h-q_{i,i}+\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{i,j}\Rightarrow\rho\dot{\varepsilon}=\rho h-q_{i,i}+\sigma_{ij}v_{i,j} \tag{2.3}$$

Ο Δεύτερος Θερμοδυναμικός Νόμος (ή ανισότητα Clausius-Duhem) δίνεται από την έκφραση

$$\frac{d}{dt}\left(\int_P \rho\eta\,dV\right)+\int_{\partial P}\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}}{T}\,dS-\int_P\frac{\rho h}{T}\,dV\geq 0 \tag{2.4}$$

για κάθε σημείο P και χρονική στιγμή t. Το $\eta(\mathbf{x},t)$ είναι η πυκνότητα εντροπίας ανά μονάδα μάζας (specific entropy) και $T(\mathbf{x},t)>0$ η απόλυτη θερμοκρασία.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss η τελευταία έκφραση παίρνει τοπικά τη μορφή

$$\rho\dot{\eta}+\left(\frac{q_k}{T}\right)_{,k}-\frac{\rho h}{T}\geq 0 \tag{2.5}$$

Σημειώνεται εδώ ότι τόσο η εσωτερική ενέργεια όσο και η εντροπία είναι τέλεια διαφορικά, με άλλα λόγια το ολοκλήρωμά τους κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής μηδενίζεται.

Εισάγουμε στην συνέχεια την συνάρτηση της ελεύθερης ενέργειας ανά μονάδα μάζας (ελεύθερη ενέργεια Helmholtz) $\Psi=\varepsilon-\mathrm{T}\eta$, ενώ λύνοντας την (2.3) ως προς ρh παίρνουμε

$$\rho h=\rho\left(\dot{\Psi}+\dot{T}\eta+T\dot{\eta}\right)+q_{i,i}-\sigma_{ij}v_j \tag{2.6}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (2.5) καταλήγουμε στην τοπική ανισότητα διασποράς

$$-\rho\left(\Psi+\eta\dot{T}\right)+\sigma_{ij}v_{i,j}-\frac{q_iT_{,i}}{T}\geq 0 \tag{2.7}$$

(Carlson, 1972) (Parkus, 1968)

2.2.2. Γραμμικά ανισότροπα θερμοελαστικά υλικά

Στο σημείο αυτό θα επικεντρωθούμε στα γραμμικά ανισότροπα θερμοελαστικά μέσα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι οι απομακρύνσεις του υλικού από τη θέση μηχανικής και θερμικής ισορροπίας είναι αρκετά μικρές σε σύγκριση με τις διαστάσεις του στερεού, καθώς και ότι $\theta = |T - T_0| << T_0$. Λόγω των περιορισμών αυτών, τα γινόμενα των μετατοπίσεων από τη θέση αναφοράς και οι χωρικές παράγωγοι αυτών μπορούν να αμεληθούν.

Αρχικά χρειάζεται να αναφέρουμε ότι η διάδοση της θερμότητας υπακούει στον νόμο του Fourier

$$q_i = -K_{ij} T_{,j} \tag{2.8}$$

όπου K_{ij} είναι οι συνιστώσες του τανυστή της θερμικής αγωγιμότητας (Χ. Γεωργιάδης, 2020).

Υποθέτουμε ότι το θερμοελαστικό υλικό υπακούει ένα σετ καταστατικών εξισώσεων της μορφής (Youssef, 2015)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}, T, T_{,i}\right) \;,\quad \eta = \eta\left(\varepsilon_{ij}, T, T_{,i}\right) \;,\quad \Psi = \Psi\left(\varepsilon_{ij}, T, T_{,i}\right) \;,\quad q_i = q_i\left(\varepsilon_{ij}, T, T_{,i}\right) \tag{2.9α,β,γ,δ}$$

Με άλλα λόγια θεωρούμε ως ανεξάρτητες (καταστατικές) μεταβλητές του σώματος τα $\left(\varepsilon_{ij}, T, T_{,i}\right)$. Επίσης θεωρούμε ότι οι μηχανικές και θερμικές σταθερές του σώματος δεν εξαρτώνται από τις καταστατικές μεταβλητές, με στόχο την γραμμική εξάρτηση μεταξύ των μερικών διαφορικών εξισώσεων και των εξωτερικών δυνάμεων του προβλήματος. Η εξίσωση συνέχειας λοιπόν γίνεται $\rho = \rho_0\left(1 - \varepsilon_{kk}\right) = \sigma\tau\theta$, όπου ρ_0 η αρχική πυκνότητα του υλικού.

Λαμβάνοντας στην συνέχεια υπόψη τις σχέσεις (2.9α,β,γ,δ,) θα έχουμε

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial T_{,i}} \dot{T}_{,i} + \dot{T}\eta + T\dot{\eta} \tag{2.10}$$

και αντικαθιστώντας την (2.10) στην (2.3) παίρνουμε

$$\rho h - q_{i,i} + \sigma_{ij} v_{i,j} - \rho\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial T_{,i}} \dot{T}_{,i} + \dot{T}\eta + T\dot{\eta} \right) = 0 \tag{2.11}$$

Όμως $\dot{\varepsilon}_{ij} = v_{i,j}$, συνεπώς η (2.11) μπορεί να πάρει την μορφή

$$\left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} + \eta \right) \dot{T} + \rho\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T_{,i}} \right) \dot{T}_{,i} + \rho T \dot{\eta} - \rho h + q_{i,i} = 0 \tag{2.12}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, αντικαθιστώντας την (2.10) στην (2.7) παίρνουμε

$$\left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} + \eta \right) \dot{T} + \rho\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T_{,i}} \right) \dot{T}_{,i} + \frac{q_i T_{,i}}{T} \le 0 \tag{2.13}$$

Οι συντελεστές των $\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{T}, \dot{T}_{,i}$ της ανισότητας (2.13) είναι ανεξάρτητοι των $\left(\varepsilon_{ij}, T, T_{,i} \right)$. Για τον λόγο αυτό, ο μόνος τρόπος για να διατηρηθεί η φορά της ανισότητας για κάθε ανεξάρτητη μεταβολή των $\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{T}, \dot{T}_{,i}$ είναι οι εκφράσεις των παρενθέσεων της (2.13) να μηδενίζονται ταυτοτικά. Με άλλα λόγια, λαμβάνουμε τις παρακάτω σχέσεις

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{2.14}$$

$$\eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial T_{,i}} = 0 \tag{2.16}$$

$$q_i T_{,i} \le 0 \tag{2.17}$$

Οι σχέσεις (2.14) και (2.15) αποτελούν στοιχειώδεις εξισώσεις του υλικού. Η σχέση (2.14) αναπαριστά τον νόμο τάσεων-παραμορφώσεων του υλικού, ενώ η σχέση (2.15) δίνει τον ορισμό της εντροπίας. Επίσης, καταλαβαίνουμε από την σχέση (2.15) η εξαρτημένη μεταβλητή

Ψ αποτελεί συνάρτηση μόνο των ε_{ij} και *T*, γεγονός το οποίο ισχύει και για τις εξαρτημένες μεταβλητές $\left(\sigma_{ij}, \eta, \varepsilon\right)$.

Από την (2.13) εν όψει των (2.14-16) θα έχουμε

$$\rho T\dot{\eta} - \rho h + q_{i,i} = 0 \tag{2.18}$$

η οποία εκφράζει την διατήρηση της ενέργειας (Youssef, 2015).

Από την (2.15) θα έχουμε

$$\frac{\partial \eta}{\partial T} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} \quad , \qquad \frac{\partial \eta}{\partial T_{,i}} = -\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T_{,i}}\right) = 0 \quad , \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_{ij}} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \qquad (2.19\alpha,\beta,\gamma)$$

Αξιοποιώντας τις σχέσεις (2.14), (2.15) και (2.19α,β,γ) στην εξίσωση (2.18) καταλήγουμε στην εξίσωση μετάδοσης της θερμότητας

$$-\rho T\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2}\frac{\partial \eta}{\partial T_{,i}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T_{,i}}\right) - \rho h + q_{i,i} = 0 \tag{2.20}$$

από την οποία είναι φανερή η σύζευξη μεταξύ της θερμοκρασίας *T* και των τροπών ε_{ij} (Parkus, 1968). Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (2.14-2.17) και (2.20) ορίζουν την συμπεριφορά ενός γραμμικού θερμοελαστικού υλικού υπό την προϋπόθεση ότι είναι γνωστή η πυκνότητα ελεύθερης ενέργειας ανά μονάδα όγκου, με άλλα λόγια έχοντας ως δεδομένο το θερμοελαστικό δυναμικό του. Από τις σχέσεις (2.9γ) και (2.16) η ποσότητα αυτή γράφεται ως $U = \rho\Psi\left(\varepsilon_{ij}, T\right)$

Στην συνέχεια, μπορεί να αποδειχθεί ότι γνωρίζοντας την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz ενός σώματος μπορούμε να προσδιορίσουμε τον τανυστή τάσεων του. Αναπτύσσουμε λοιπόν την συνάρτηση ελεύθερης ενέργειας σε σειρά Taylor στη γειτονιά της κατάστασης αναφοράς $\left(\varepsilon_{ij} = 0, T = T_0\right)$. Έχουμε λοιπόν

$$\Psi\left(\varepsilon_{ij},T\right)=\Psi\left(0,T_0\right)+\frac{\partial\Psi\left(0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}}\varepsilon_{ij}+\frac{\partial\Psi\left(0,T_0\right)}{\partial T}\left(T-T_0\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\Psi\left(0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2\Psi\left(0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial T}\varepsilon_{ij}\left(T-T_0\right)+\frac{\partial^2\Psi\left(0,T_0\right)}{\partial T^2}\left(T-T_0\right)^2\right]+\ldots \tag{2.21}$$

Η ποσότητα $\Psi\left(0,T_0\right)$ ορίζει την ελεύθερη ενέργεια του σώματος στην φυσική του κατάσταση. Στην φυσική κατάσταση του σώματος εξαφανίζεται η ελεύθερη ενέργειά του, συνεπώς η σταθερά $\Psi\left(0,\mathrm{T}_0\right)$ μπορεί να θεωρηθεί ίση με το μηδέν. Επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\partial\Psi\left(0,T_0\right)/\partial T=0$, γεγονός το οποίο δίνει για τη σχέση (2.15) ότι $\eta\left(0,T\right)=-\partial\Psi\left(0,T_0\right)/\partial T=0$.

Βασιζόμενοι λοιπόν στην σχέση (2.14) και κρατώντας από το ανάπτυγμα Taylor μόνο τους γραμμικούς και τετραγωνικούς όρους, προκύπτει ότι

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial\Psi\left(\varepsilon_{ij},T\right)}{\partial\varepsilon_{ij}}=\frac{\partial\Psi\left(0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}}+\frac{\partial^2\Psi\left(0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\varepsilon_{kl}+\frac{\partial^2\Psi\left(0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial T}\left(T-T_0\right) \tag{2.22}$$

Η παραπάνω γραμμική σχέση ισχύει μόνο για περιπτώσεις μικρών παραμορφώσεων και είναι συμβατή με την υπόθεση $\left|T/T_0 << 1\right|$. Επιπλέον, είναι απαραίτητο να θέσουμε στην σχέση (2.22) ότι $\partial\Psi\left(0,T_0\right)/\partial\varepsilon_{ij}=0$ για την κατάσταση αναφοράς $\left(\varepsilon_{ij}=0,T=T_0\right)$, $\sigma_{ij}=0$.

Εισάγοντας λοιπόν τους ορισμούς

$$c_{ijkl}\equiv\frac{\partial^2\Psi\left(0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}},\ \kappa_{ij}\equiv\frac{\partial^2\Psi\left(0,T_0\right)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial T},\ d\equiv\frac{\partial^2\Psi\left(0,T_0\right)}{\partial T^2},\ \theta=T-T_0 \tag{2.23α,β,γ,δ}$$

οι (2.21) και (2.22) μπορούν να γραφούν στην ακόλουθη μορφή (Nowacki, 1976)

$$\Psi\left(\varepsilon_{ij},T\right)=\frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+\kappa_{ij}\varepsilon_{ij}\theta+\frac{1}{2}d\theta^2+\ldots \tag{2.24}$$

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}\varepsilon_{kl}+\kappa_{ij}\theta \tag{2.25}$$

Η εξίσωση (2.25) συνιστά το θερμοελαστικό ανάλογο του νόμου ελαστικότητας (σχέση (1.22), γενικευμένος νόμος Hooke) και ονομάζεται νόμος Duhamel-Neumann για την περίπτωση ανισότροπου υλικού. Οι ποσότητες c_{ijkl} και κ_{ij}, οι οποίες ονομάζονται συνιστώσες του τανυστή ελαστικότητας και θερμικά μέτρα αντίστοιχα, παίζουν τον ρόλο των σταθερών ενός ανισότροπου υλικού και προσδιορίζονται κατά την εφαρμογή ισόθερμων συνθηκών, ενώ η ποσότητα κ_{ij} σχετίζεται με τις θερμικές και μηχανικές ιδιότητες του. Επιπλέον, γνωρίζοντας τις συμμετρίες του τανυστή c_{ijkl} από το κεφάλαιο 1 και ότι $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$ (Youssef, 2015) οδηγούμαστε σε 21 ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή των τάσεων.

Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (2.11) με βάση τις τελευταίες θεωρήσεις παίρνει τη μορφή

$$\left(K_{ij}\theta_{,j}\right)_{,i} + T_0\left(\kappa_{ij}\dot{u}_{i,j} + 2d\dot{\theta}\right) + \rho h = 0 \tag{2.26}$$

όπου στον δεύτερο όρο της (2.26) αντικαταστήσαμε την απόλυτη θερμοκρασία T από την θερμοκρασία της κατάστασης αναφοράς T_0, εφόσον έχουμε δεχθεί την προσέγγιση $\theta \ll T_0$. Η εξίσωση (2.26) ονομάζεται εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας στην συζευγμένη θερμοελαστικότητα και μέσω του όρου $u_{i,j}$ υποδεικνύει ότι η διάδοση θερμότητας σε ένα ελαστικό υλικό προκαλεί όχι μόνο μεταβολές στην θερμοκρασία του αλλά και παραμορφώσεις (Nowacki, 1976) (Sneddon, 1974).

2.2.3 Γραμμικά ισότροπα θερμοελαστικά υλικά

Για τα ισότροπα υλικά αποδεικνύεται ότι ο αριθμός των ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών μειώνεται στις γνωστές από την κλασσική ελαστικότητα, σταθερές του Lamé, λ και μ (Achenbach, 1973). Το μητρώο των ελαστικών σταθερών είναι συμμετρικό, ανεξάρτητα από την ύπαρξη συνάρτησης παραμορφωσιακής ενέργειας και είναι ίσο με

$$C_{KM} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad (2.27)$$

Επίσης για ισότροπα θερμοελαστικά υλικά ισχύει ότι

$$K_{ij} = K\delta_{ij} \quad , \qquad \kappa_{ij} = \kappa\delta_{ij} \qquad (2.28α,β)$$

όπου *K* ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας και κ συντελεστής θερμικής διαστολής, ενώ τα μεγέθη αυτά είναι ανεξάρτητα της θέσης και της θερμοκρασίας του υλικού (Youssef, 2015). Ο νόμος Fourier για την διάδοση της θερμότητας γράφεται λοιπόν ως

$$q_i = -KT_{,i} \qquad (2.29)$$

ενώ οι εξισώσεις Duhamel-Neumann για ομογενή και ισότροπα υλικά θα πάρουν την μορφή

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \kappa\theta\delta_{ij} \qquad (2.30)$$

όπου $\Delta \equiv \varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ η ανηγμένη κυβική διαστολή/συστολή (dilatation), η οποία είναι η πρώτη αναλλοίωτη του τανυστή των τροπών και αντιπροσωπεύει την αλλαγή όγκου του υλικού ανά μονάδα αρχικού όγκου. Παίρνοντας $\kappa \equiv -\kappa_0\left(3\lambda + 2\mu\right)$, όπου κ_0 ο συντελεστής γραμμικής διαστολής για ισότροπα και ομογενή υλικά, η (2.30) γίνεται (Achenbach, 1973)

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \kappa_0\left(3\lambda + 2\mu\right)\theta\delta_{ij} \qquad (2.31)$$

Επιλύοντας την σχέση (2.31) ως προς τις τροπές λαμβάνουμε την εξίσωση

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) + \kappa_0\theta\delta_{ij} \qquad (2.32)$$

όπου $\sigma_{kk}\left(k=1,2,3\right)$ η πρώτη αναλλοίωτη του τανυστή των τάσεων. Θέτοντας στην (2.32) $i=j$ παίρνουμε ότι

$$\varepsilon_{kk}=3\kappa_0\theta+\frac{\sigma_{kk}}{\Gamma}\ \text{ με }\ \Gamma=3\lambda+2\mu\neq 0 \tag{2.33}$$

Για να ορίσουμε την ποσότητα κ λαμβάνουμε την περίπτωση ελεύθερης εκτόνωσης ενός στοιχειώδη όγκου αγνοώντας την ύπαρξη ελκυστών στην επιφάνειά του. Εφόσον εξαφανίζονται οι τάσεις, οι εξισώσεις (2.32) και (2.33) οδηγούν στις σχέσεις $\tilde{\varepsilon}_{kk}=3\kappa_0\theta$ και $\tilde{\varepsilon}_{ij}=\kappa_0\theta\delta_{ij}$. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι μία μεταβολή του όγκου που εκφράζεται μέσω της κυβικής διαστολής είναι ανάλογη της θερμοκρασίας κατά $3\kappa_0$. Επιπλέον, οι σχέσεις αυτές εκφράζουν το γεγονός ότι η μεταβολή θερμοκρασίας σε ένα στοιχείο όγκου αλλάζει μόνο τον όγκο και όχι το σχήμα του, μία ιδιότητα γνωστή για την περίπτωση ισότροπων υλικών.

Παρατηρούμε επίσης από τις σχέσεις (2.31) και (2.32) ότι

$$\left.\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial T}\right|_{\varepsilon}=-\kappa_0\Gamma\delta_{ij}\ ,\qquad \left.\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial\sigma_{kk}}\right|_{T}=\frac{1}{\Gamma}\ ,\qquad \left.\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial T}\right|_{\sigma}=3\kappa_0 \tag{2.34}$$

Χρειάζεται να αναφερθεί ότι οι ποσότητες *μ, λ*, Γ προσδιορίζονται κατά την εφαρμογή ισόθερμων συνθηκών (Nowacki, 1976)

Στην συνέχεια, μπορεί να αποδειχθεί βάση των προηγούμενων θεωρήσεων ότι η εντροπία δίνεται από την έκφραση $\eta=\Gamma\kappa_0\varepsilon_{kk}+c_v\ln\left(T/T_0\right)$, όπου c_v η ειδική θερμότητα υπό σταθερή παραμόρφωση με $c_v\equiv\mathrm{T}\left(d\eta/dT\right)_{\varepsilon}$. Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor τη συνάρτηση $\ln\left(T/T_0\right)=\ln\left(1+\theta/T_0\right)$ της εντροπίας και διατηρώντας μόνο το πρώτο όρο παίρνουμε $\eta\cong\Gamma\kappa_0\varepsilon_{kk}+\left(c_v\theta/\mathrm{T}_0\right)$. Με βάση λοιπόν την τελευταία έκφραση της εντροπίας και τις σχέσεις (2.18) και (2.25) συμπεραίνουμε ότι $d=-c_v\rho/T_0$. Τέλος, η ελεύθερη ενέργεια για ομογενές και ισότροπο υλικό δίνεται από τη σχέση (Nowacki, 1976)

$$\Psi\left(\varepsilon_{ij},\theta\right)=\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}+\frac{\lambda}{2}\varepsilon_{kk}\varepsilon_{nn}-\gamma\varepsilon_{kk}\theta-\frac{c_v}{2T_0}\theta^2 \tag{2.35}$$

με $\gamma=\Gamma\kappa_0$. Οι δύο πρώτοι όροι από το δεξί μέλος της έκφρασης (2.35) αντιστοιχούν σε παραμόρφωση απολύτως μηχανικής φύσεως και εκφράζει την μηχανική ισόθερμη ενέργεια του σώματος (Biot, 1955), ενώ ο τέταρτος αντιστοιχεί σε κατάσταση απόλυτης θέρμανσης ή ψύξης. Ο τρίτος όρος αποτελεί σύζευξη μεταξύ θερμικού πεδίου και πεδίων μετατοπίσεων και εκφράζει την αλληλεπίδραση τους.

Υποθέτοντας ότι το K δεν εξαρτάται από την θερμοκρασία T ή την παραμόρφωση ε_{ij}, η εξίσωση (2.26) λόγω των (2.27) και (2.28), της σχέσης $\dot{\varepsilon}_{ii}=\dot{u}_{i,i}$, και της σχέσης μεταξύ των κ και κ_0 γράφεται ως

$$\mathrm{K}\theta_{,ii}-\kappa_0T_0\left(3\lambda+2\mu\right)\dot{\varepsilon}_{ii}-\rho c_v\dot{\theta}+\rho h=0 \tag{2.36}$$

ενώ εφαρμόζοντας στην εξίσωση κίνησης (2.2) την εξίσωση Duhamel-Neumann (2.30), την σχέση τροπών-μετατοπίσεων (2.32) και την σχέση μεταξύ των κ και κ_0 έπεται

$$\mu u_{i,jj}+(\lambda+\mu)u_{j,ji}-\kappa_0\left(3\lambda+2\mu\right)\theta_{,i}+\rho f_i=\rho\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2} \tag{2.37}$$

(Nowacki, 1976) (Youssef, 2015) (Carlson, 1972)

Οι (2.36) αποτελούν διατύπωση της γενικευμένης εξίσωσης θερμικής επαγωγής ενώ οι (2.37) της θερμοελαστικής εξίσωσης Navier-Cauchy (Georgiadis et al., 1998). Οι εξισώσεις (2.36) και (2.37) αποτελούν ένα πλήρες σύστημα θερμοελαστικών εξισώσεων, υπό την έννοια ότι είναι ικανές να περιγράψουν πλήρως προβλήματα συνοριακών τιμών συζευγμένης θερμοελαστικότητας όταν συνοδεύονται υπό τις κατάλληλες συνοριακές και αρχικές συνθήκες. Εξαιτίας των όρων $\partial\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right)/\partial t$ της σχέσης (2.36) και $\nabla\theta$ της (2.37) γίνεται ξεκάθαρη η σύζευξη μεταξύ του πεδίου θερμοκρασιών θ και του πεδίου μετατοπίσεων $\mathbf{u}$.

Από φυσικής άποψης η παρουσία αυτών των όρων σύζευξης οφείλεται στο γεγονός ότι η αύξηση (μείωση) της θερμοκρασίας συνοδεύεται από διαστολή (συστολή) του στερεού και αντίστροφα οι επιβαλλόμενες παραμορφώσεις (συμπίεση ή διαστολή) προκαλούν μεταβολές στη θερμική κατάσταση του σώματος (θέρμανση ή ψύξη). Το μέσο λοιπόν το οποίο χαρακτηρίζεται από αντιστρεπτές ελαστικές μεταβολές και μη αντιστρεπτές θερμικές μεταβολές ονομάζεται θερμοελαστικό. Η σύζευξη αυτή δυσκολεύει ιδιαίτερα την λύση συνοριακών προβλημάτων, εφόσον οι (2.36) και (2.37) αποτελούν ένα σύστημα πεπλεγμένων εξισώσεων οι οποίες πρέπει να επιλυθούν ταυτόχρονα (Nowacki, 1976).

2.2.4 Θερμικές συνοριακές και αρχικές συνθήκες

Η παραμόρφωση και μεταβολή της θερμοκρασίας επιφέρεται σε ένα υλικό μέσω: I) καθολικών δυνάμεων και πηγών θερμότητας και II) εξωτερικών δυνάμεων και θερμικής αλληλεπίδρασης του στερεού με το περιβάλλον του. Για τον λόγο αυτό οι συνοριακές συνθήκες ενός θερμοελαστικού προβλήματος αποτελούν συνήθως συνδυασμό μιας θερμικής και μιας μηχανικής συνθήκης.

Οι πιο συνήθεις θερμικές συνθήκες είναι: I) Η θερμοκρασία είναι δεδομένη συνάρτηση σε όλα τα σημεία της επιφάνειας S (συνοριακές συνθήκες Dirichlet)

$$T\left(\mathbf{x},t\right)=f\left(\mathbf{x},t\right) \;, \qquad \left(\mathbf{x}\in S,\;\; t>0\right) \tag{2.38}$$

η οποία περιγράφει την ροή θερμότητας διαμέσου του συνόρου *S*

II) Η θερμική ροή είναι δεδομένη συνάρτηση σε όλα τα σημεία της επιφάνειας *S* (συνοριακές συνθήκες Neumann)

$$\frac{\partial T}{\partial n}\left(\mathbf{x},t\right)=g\left(\mathbf{x},t\right) \;, \qquad \left(\mathbf{x}\in S,\;\; t>0\right) \tag{2.39}$$

όπου $g\left(\mathbf{x},t\right)$ είναι γνωστή συνάρτηση του χρόνου *t* και της θέσεως στην επιφάνεια *S* και $\mathbf{n}$ το κάθετο προς τα έξω διάνυσμα στην επιφάνειας. Στην περίπτωση θερμικής μονώσεως (thermal insulation) είναι $\partial T/\partial n=0$ στην επιφάνεια *S*.

III) Σε ολόκληρο το σύνορο S (συνοριακές συνθήκες Robin-Cauchy)

$$\mathrm{T} + \alpha \frac{\partial T}{\partial n} = h(\mathbf{x}, t) \qquad (2.40)$$

όπου $h(\mathbf{x},t)$ μία γνωστή συνάρτηση του χρόνου και α ένας γνωστός συντελεστής ή γενικότερα γνωστή συνάρτηση των $(\mathbf{x},t)$. Ο παραπάνω τύπος συνοριακών συνθηκών αντιστοιχεί στον λεγόμενο νόμο ψύξεως του Newton (Newton's cooling law).

Στις περιπτώσεις που διαφορετικοί τύποι των συνοριακών συνθηκών (I), (II) και (III) δίνονται σε συμπληρωματικά τμήματα του συνόρου S, έχουμε μικτού τύπου συνθήκες που οδηγούν εν γένει σε δύσκολα μαθηματικά προβλήματα (Χ. Γεωργιάδης, 2020). Επιπλέον, μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε θερμοελαστικό πρόβλημα έχει μοναδική λύση όταν είναι γνωστές οι συνοριακές συνθήκες της θερμοκρασίας και της μετατόπισης και οι αρχικές κατανομές του θερμοκρασιακού πεδίου και των πεδίων ταχύτητας και μετατοπίσεων. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία (Nowacki, 1976).

Τέλος, για να λυθούν οι διαφορικές θερμοελαστικές εξισώσεις πρέπει το συνοριακό πρόβλημα να συνοδεύεται από αρχικές συνθήκες. Αυτές είναι της μορφής

$$T(\mathbf{x},0) = m(\mathbf{x}) \quad , \qquad \mathbf{x} \in B \qquad (2.41)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad , \qquad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad , \qquad \mathbf{x} \in B \qquad (2.42\alpha,\beta)$$

όπου m, **f**, **h** γνωστές συναρτήσεις.

Χρειάζεται να τονισθεί ότι έχει αναπτυχθεί ένας μεγάλος αριθμός τεχνικών για τη λύση των διαφορικών εξισώσεων (2.36) και (2.37), μεταξύ των οποίων και ενεργειακές μέθοδοι με την βοήθεια του λογισμικό των μεταβολών. Επιπλέον, το θεώρημα αμοιβαιότητας καθώς και τα θεωρήματα των Somigliana, Kirchoff, Weber, Helmholtz και Voltera της κλασσικής (αδιαβατικής) θεωρίας έχουν γενικευθεί ώστε να μπορούν να αξιοποιηθούν στα πλαίσια της Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία (Carlson, 1972) (Nowacki, 1976).

2.3 Θερμοελαστικά Κύματα

Η παρουσία των όρων $\partial(\nabla\cdot\mathbf{u})/\partial t$ στην (2.36) και του όρου $\nabla\theta$ στην (2.37) παίζουν καθοριστικό ρόλο στην διάδοση θερμοελαστικών κυμάτων. Στο σημείο αυτό παρουσιάζουμε τις επιπτώσεις της θερμοελαστικής σύζευξης για τις περιπτώσεις των επίπεδων αρμονικών κυμάτων και των κυμάτων παροδικού τύπου. Θα θεωρήσουμε ότι τα κύματα αυτά διαδίδονται σε ομογενή και ισότροπα μέσα, τα οποία είναι ελεύθερα από καθολικές δυνάμεις και θερμικές πηγές, ώστε η καταστατική εξίσωση (2.37) να λάβει την μορφή

$$\mu\nabla^2\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\nabla div\ \dot{\mathbf{u}}-\kappa_0\left(3\lambda+2\mu\right)\nabla\theta=\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{2.43}$$

Ακόμη ξαναγράφουμε την (2.36) σε διανυσματική γραφή

$$\mathrm{K}\nabla^2\theta-\kappa_0 T_0\left(3\lambda+2\mu\right)div\ \dot{\mathbf{u}}=\rho c_v\dot{\theta} \tag{2.44}$$

(Nowacki, 1976)

2.3.1 Επίπεδα κύματα αρμονικής χρονικής εξάρτησης

Το διάνυσμα μίας επίπεδης μετατόπισης αρμονικά εξαρτώμενης από τον χρόνο, η οποία διαδίδεται με φασική ταχύτητα c κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{p}}$ αναπαρίσταται ως $\mathbf{u}=Ae^{ik(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{p}}-ct)}\hat{\mathbf{d}}$, όπου k ο κυματαριθμός, $\hat{\mathbf{d}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της μετατόπισης και $\mathbf{x}$ το διάνυσμα θέσης. Στα πλαίσια της Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας το παραπάνω κύμα μετατόπισης θα συνοδεύεται από ένα αντίστοιχο κύμα θερμοκρασίας της μορφής $\theta=Be^{ik(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{p}}-ct)}$. Θεωρώντας καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ θέτουμε $\mathbf{p}=p_k\hat{\mathbf{x}}_k$, $\mathbf{d}=d_k\hat{\mathbf{x}}_k$, $\mathbf{x}=x_k\hat{\mathbf{x}}_k$ με k=1,2,3, ενώ μέσω των παραπάνω εκφράσεων των $\mathbf{u}$, θ λαμβάνουμε τις εξής σχέσεις

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=Aik\left(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)e^{ik(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{p}}-ct)} \tag{2.45α}$$

$$\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right)=-Ak^2\left(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)e^{ik(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{p}}-ct)}\hat{\mathbf{p}} \tag{2.45β}$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -Ak^2 e^{ik(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{p}}-ct)}\hat{\mathbf{d}} \tag{2.45γ}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -k^2 c^2 A e^{ik(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{p}}-ct)}\hat{\mathbf{d}} \tag{2.45δ}$$

$$\nabla^2 \theta = -k^2 B e^{ik(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{p}}-ct)} \tag{2.45ε}$$

$$\nabla \theta = ikBe^{ik(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{p}}-ct)}\hat{\mathbf{p}} \tag{2.45στ}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.45α,β,γ,δ,ε,στ) στις εξισώσεις (2.43) και (2.44) λαμβάνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων, στο οποίο άγνωστοι είναι τα A, B

$$\begin{bmatrix} (\lambda+\mu)k^2\left(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)\hat{\mathbf{p}}+\left(\mu-\rho c^2\right)k^2\hat{\mathbf{d}} & \kappa_0\left(3\lambda+2\mu\right)ik\hat{\mathbf{p}} \\ (\lambda+\mu)k^2\left(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)\hat{\mathbf{p}}+\left(\mu-\rho c^2\right)k^2\hat{\mathbf{d}} & Kk^2-\rho c_v ikc \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

Το προηγούμενο σύστημα ως γραμμικό και ομογενές θα έχει μη μηδενικές λύσεις αν και μόνο αν η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων είναι ίση με μηδέν. Εκτελώντας τις πράξεις λοιπόν, προκύπτει ότι

$$(\lambda+\mu)\left(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)\hat{\mathbf{p}}+\left(\mu-\rho c^2\right)\hat{\mathbf{d}}-\frac{\kappa_0^{\,2}\left(3\lambda+2\mu\right)^2 T_0 c\left(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)\hat{\mathbf{p}}}{\rho c_e\left(c+ik\kappa_V\right)}=0 \tag{2.47}$$

όπου $\kappa_v = K/\left(c_v\rho\right)$ ο συντελεστής θερμικής διάχυσης σε σταθερή θερμοκρασία. Εισάγοντας λοιπόν την κανονικοποιημένη θερμοελαστική σταθερά σύζευξης (dimensionless thermoelastic coupling constant), δηλαδή το αδιάστατο μέγεθος σύζευξης μηχανικών και θερμικών αλληλεπιδράσεων $\varepsilon \equiv \kappa_0^2\left(3\lambda+2\mu\right)^2 T_0\left[c_v\left(\lambda+2\mu\right)\rho\right]^{-1}$, παίρνουμε

$$(\lambda+\mu)\left(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)\hat{\mathbf{p}}+\left(\mu-\rho c^2\right)\hat{\mathbf{d}}-\frac{(\lambda+2\mu)c\varepsilon\left(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)}{\left(c+ik\kappa_V\right)}\hat{\mathbf{p}}=0 \tag{2.48}$$

όπου $\varepsilon = O\left(10^{-2}\right)$ (Chadwick, 1960) (Brock & Georgiadis, 1997), ενώ παρατηρούμε ότι αν αμελήσουμε στην σχέση (2.48) την θερμοελαστική σταθερά σύζευξης ε οδηγούμαστε στην σχέση $(\lambda+\mu)(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{p}}+(\mu-\rho c^2)\hat{\mathbf{d}}=0,$ η οποία ισχύει για επίπεδες αρμονικές μετατοπίσεις (Achenbach, 1973).

Στο σημείο αυτό θα αποδείξουμε ότι στα πλαίσια της Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας ένα επίπεδο αρμονικό κύμα πολώνεται είτε κατά την διεύθυνση διάδοσης του κύματος είτε κάθετα στην διεύθυνσή του.

Από την σχέση (2.48) θα έχουμε

$$\left((\lambda+\mu)(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{p}})-\frac{(\lambda+2\mu)c\varepsilon(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{p}})}{c+ik\kappa_V}\right)\hat{\mathbf{p}}=-(\mu-\rho c^2)\hat{\mathbf{d}} \tag{2.49}$$

Εφόσον τα $\hat{\mathbf{d}},\hat{\mathbf{p}}$ αποτελούν δύο διαφορετικά μοναδιαία διανύσματα, η παραπάνω εξίσωση ικανοποιείται μόνο για δύο περιπτώσεις’ είτε $\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{p}}=0$ είτε $\hat{\mathbf{d}}=\pm\hat{\mathbf{p}}$.

Ξεκινώντας από την πρώτη περίπτωση έχουμε

$$\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{p}}=0 \quad , \qquad c=(\mu/\rho)^{1/2} \qquad (2.50α,β)$$

και η (2.50α) δηλώνει ότι η διεύθυνση της μετατόπισης $\hat{\mathbf{d}}$ είναι κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος $\hat{\mathbf{p}}$. Με άλλα λόγια η σχέση αυτή ορίζει εγκάρσια κύματα τα οποία διαδίδονται με την ταχύτητα της σχέσης (2.50β), χωρίς να αλληλοεπιδρούν με το θερμοκρασιακό πεδίο.

Αν τα $\hat{\mathbf{p}}$ και $\hat{\mathbf{d}}$ είναι παράλληλα μεταξύ τους ($\hat{\mathbf{d}}=\pm\hat{\mathbf{p}}$) τότε η έκφραση ικανοποιείται όταν

$$\lambda+2\mu-\rho c^2+\frac{(\lambda+2\mu)c\varepsilon}{c+ik\kappa_V}=0 \tag{2.51}$$

Λύνοντας την εξίσωση (2.51) ως προς *c* καταλαβαίνουμε ότι η ταχύτητα των διαμηκών κυμάτων εξαρτάται από τον κυματαριθμό *k*, γεγονός το οποίο σημαίνει ότι τα θερμοελαστικά κύματα εμφανίζουν φαινόμενα διασποράς (dispersion).

Επιπλέον, λόγω του γεγονότος ότι η φασική ταχύτητα c είναι ένας μιγαδικός αριθμός, τα συζευγμένα θερμοελαστικά κύματα εμφανίζουν επίσης φαινόμενα εξασθένησης (attenuation), τα οποία γίνονται περισσότερο αισθητά σε υψηλές συχνότητες (Chadwick, 1960). Θεωρώντας τον κυματαριθμό k ως μεταβλητή, παρατηρούμε ότι στις οριακές περιπτώσεις $k \to 0$ και $k \to \infty$ έχουμε

$$\lim_{k\to 0} c = \left(1+\varepsilon\right)^{1/2} c_L \tag{2.52α}$$

$$\lim_{k\to \infty} c = c_L \tag{2.52β}$$

Εφόσον οι ελαστικές σταθερές *λ, μ* και *ρ* είναι ισόθερμες, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα διαμήκη κύματα διαδίδονται με φασική ταχύτητα c_L μόνο όταν ο κυματαριθμός τείνει στο μηδέν, ενώ αν το k λάβει αρκετά μεγάλες τιμές τότε διαδίδεται με την φασική ταχύτητα της σχέσης (2.52β). Για πολύ μεγάλα κύματα η διάδοση των αρμονικών κυμάτων είναι πρακτικά αδιαβατική και η φασική ταχύτητα εξαρτάται από τις αδιαβατικές σταθερές του υλικού (Achenbach, 1973).

Χρειάζεται να αναφερθεί ότι όπως και στους ισότροπους ελαστικούς ημι-χώρους (βλέπε κεφάλαιο 1), έτσι και στους ισότροπους θερμοελαστικούς ημι-χώρους μπορούν να σχηματισθούν επιφανειακά κύματα κατά μήκος της ελεύθερης επιφάνειάς τους. Με άλλα λόγια, παρατηρούμε ότι επιλύοντας τις εξισώσεις διάδοσης κυμάτων κατά μήκος της επιφάνειας ενός ημι-άπειρου γραμμικά ισότροπου θερμοελαστικού μέσου καταλήγουμε στο θερμοελαστικό ανάλογο των ελαστικών κυμάτων Rayleigh. Τα κύματα που προκύπτουν από την ανάλυση αυτή ονομάζονται θερμοελαστικά κύματα Rayleigh και μας επιτρέπουν να εκτιμήσουμε την απόκλιση μεταξύ της θερμοελαστικής λύσης και των κυμάτων Rayleigh όπως περιγράφονται από την Κλασσική Θεωρία Ελαστοδυναμικής. Το πρόβλημα διάδοσης θερμοελαστικών Rayleigh κυμάτων έχει ερευνηθεί από πολλούς συγγραφείς ανά τα χρόνια. Συγκεκριμένα ο F.J. Lockett ήταν ο πρώτος που προσπάθησε να επιλύσει το πρόβλημα διάδοσης θερμοελαστικών κυμάτων σε επίπεδο μέτωπο, ενώ ο Chadwick στην συνέχεια εκτέλεσε μία λεπτομερής ανάλυση με στόχο να προσδιορίσει τις ρίζες της μιγαδικής εξίσωσης η οποία δίνει την φασική ταχύτητα των θερμοελαστικών κυμάτων Rayleigh. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία (Chadwick, 1960) (Nowacki, 1976) (Sneddon, 1974)

2.3.2 Κύματα παροδικού (transient) τύπου

Η σύζευξη μεταξύ των μηχανικών και θερμοκρασιακών διαταραχών σε ένα σώμα μπορεί να αξιοποιηθεί σε προβλήματα διάδοσης κυμάτων παροδικού τύπου. Ακολουθώντας την μεθοδολογία της υποενότητας 1.12 του κεφαλαίου 1 εκφράζουμε το διάνυσμα της μετατόπισης ως άθροισμα ενός αστρόβιλου και ενός σωληνοειδούς πεδίου

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla\times\mathbf{A} \tag{2.53}$$

Γνωρίζουμε από την υποενότητα 1.12 ότι $\nabla\cdot\left(\nabla\phi\right) = \nabla^2\phi$, $\nabla\cdot\left(\nabla\times\mathbf{A}\right) = 0$ και $\nabla\times\left(\nabla\phi\right) = 0$, ενώ η απόδειξη πληρότητας της παράστασης (2.53) δίνεται στην βιβλιογραφία (Somigliana, 1892).

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην (2.43) την έκφραση (2.53)

$$\nabla\left[(\lambda+2\mu)\nabla^2\phi - \kappa_0\left(3\lambda+2\mu\right)\theta - \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right] + \nabla\times\left(\mu\nabla^2\mathbf{A} - \rho\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{2.54}$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι η αναπαράσταση της μετατόπισης (2.53) ικανοποιεί την εξίσωση της κίνησης αν

$$\nabla^2\phi - \kappa_0\frac{\left(3\lambda+2\mu\right)}{\left(\lambda+2\mu\right)}\theta = \frac{\rho}{\left(\lambda+2\mu\right)}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{2.55α}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} \tag{2.55β}$$

Επίσης η (2.44) λόγω της (2.53) δίνει

$$\kappa_0 T_0\left(3\lambda+2\mu\right)\frac{\partial\left(\nabla^2\phi\right)}{\partial t} + \rho c_v\dot{\theta} = \mathrm{K}\nabla^2\theta \tag{2.56}$$

Το σύστημα των εξισώσεων (2.55α,β-2.56) για τη βαθμωτή ποσότητα φ, το διανυσματικό πεδίο **A** και το θερμοκρασιακό πεδίο θ είναι ισοδύναμο με το σύστημα εξισώσεων (2.43), (2.44) και $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ για το πεδίο μετατοπίσεων u και το θερμοκρασιακό πεδίο θ. Το πλεονέκτημα της αναπαράστασης $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ είναι ότι παρόλο που καταλήξαμε σε τρεις εξισώσεις έναντι των αρχικών δύο, η (2.55β) είναι ασύζευκτη. Επίσης είναι σαφές από την (2.55β) ότι τα εγκάρσια παροδικά κύματα όχι μόνο δεν αλληλοεπιδρούν με το θερμικό πεδίο, αλλά διαδίδονται με ταχύτητα $v_T = \left(\mu/\rho\right)^{1/2}$, η οποία είναι η ίδια με την ταχύτητα διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων στην Κλασσική Ελαστοδυναμική. Από την άλλη μεριά, οι σχέσεις (2.55α) και (2.56) αναδεικνύουν την υπάρχουσα σύζευξη ανάμεσα στα διαμήκη κύματα και στο θερμικό πεδίο.

Γενικά το θερμοκρασιακό πεδίο που οφείλεται σε επιβαλλόμενο φορτίο είναι μη ομογενές, συνεπώς δημιουργείται στο εσωτερικό του σώματος μια βαθμίδα θερμοκρασίας, η οποία προκαλεί ροή θερμοκρασίας από τα θερμότερα στα ψυχρότερα τμήματα. Η ροή αυτή πραγματοποιείται μη αντιστρεπτά, με αποτέλεσμα ένα μέρος του μηχανικού έργου που παράγεται στο σώμα να μετατρέπεται σε διαχεόμενη θερμότητα. Για τον λόγο αυτό, οι παραμορφώσεις παροδικού τύπου που προκαλούνται από εξωτερικά αίτια αποσβένονται μετά την παρέλευση αρκετού χρόνου. Η απόσβεση των θερμοελαστικών διαμηκών κυμάτων παίζει καθοριστικό ρόλο στην γενικότερη διάδοση θερμοελαστικών κυμάτων εφόσον η μείωση του πλάτους τους επηρεάζει την ταχύτητα διάδοσής τους. Η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται από την συχνότητα, με αποτέλεσμα τα θερμοελαστικά κύματα να εμφανίζουν διασπορά. Ξεκινώντας λοιπόν από τα κύματα παροδικού τύπου καταλήξαμε στα ίδια συμπεράσματα με την υποενότητα των επίπεδων αρμονικών κυμάτων, με άλλα λόγια ότι τα εγκάρσια θερμοελαστικά κύματα δεν επηρεάζονται από το θερμικό πεδίο και ότι η σύζευξη μεταξύ μηχανικού και θερμικού πεδίου επιφέρει διασπορά και εξασθένηση.

2.4 Εξωτερική Διέγερση Μηχανικής Φύσεως

Η επίδραση της σύζευξης εκδηλώνεται σαφέστερα όταν έχουμε εξωτερική διέγερση μηχανικής φύσεως. Στην περίπτωση αυτή η παραμόρφωση του σώματος είναι γνήσια μηχανική αν παραλειφθεί το αποτέλεσμα της σύζευξης μεταξύ θερμοκρασιακού πεδίου και πεδίου μετατοπίσεων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας περιορίζουμε την ανάλυση του φαινομένου αυτού σε μία διάστασης, στην οποία οι θερμοελαστικές εξισώσεις (2.43) και (2.44) λαμβάνουν τις μορφές

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\kappa_0\left(3\lambda+2\mu\right)}{(\lambda+2\mu)}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{v_L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.57α}$$

$$K\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\kappa_0 T_0\left(3\lambda+2\mu\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}-\rho c_e\frac{\partial\theta}{\partial t}=0 \tag{2.57β}$$

Στην συνέχεια θεωρούμε ότι βρισκόμαστε στον ημι-χώρο $x \geq 0$, ο οποίος αρχικά βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας με ομοιόμορφη θερμοκρασία T_0 (θερμοκρασία αναφοράς) σε ολόκληρη την έκτασή του

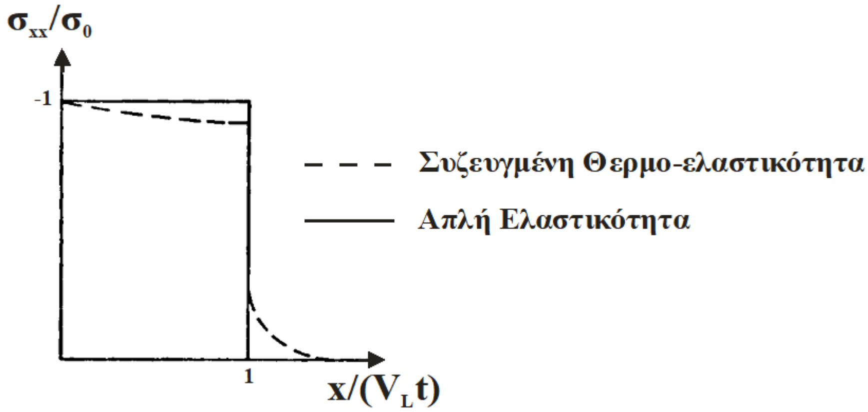
$$u\left(x,0\right)=\dot{u}\left(x,0\right)=0 \quad , \qquad \theta\left(x,0\right)\equiv T_0-T_0=0 \tag{2.58α,β}$$

Την χρονική στιγμή t=0 ασκείται στην επιφάνεια x=0 ομοιόμορφη τάση, ενώ η θερμοκρασία του σώματος διατηρείται σταθερή στην θερμοκρασία αναφοράς,

$$\sigma_{xx}(x=0,t)=-p_0 H(t) \quad , \qquad \theta(x=0,t)=0 \tag{2.58α,β}$$

Τα προβλήματα διάδοσης κυμάτων παροδικού τύπου, όπως εκφράζονται μέσω των εξισώσεων (2.57α.β-2.58β) λύνονται συνήθως στα πλαίσια της Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας με την βοήθεια ολοκληρωτικών μετασχηματισμών. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις είναι αρκετά δύσκολο να προσδιορίσουμε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς οι οποίοι θα δώσουν την λύση του προβλήματος, με αποτέλεσμα να καταφεύγουμε σε προσεγγιστικές μεθόδους. Οι πιο συνήθεις προσεγγίσεις για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων είναι η είναι η παράλειψη του αδρανειακού όρου στην (2.43) $\rho\,\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2$ ή/και η παράλειψη του συζευγμένου όρου $\nabla\cdot\dot{\mathbf{u}}$ στην (2.44). Οι προσεγγίσεις αυτές δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο σε προβλήματα στα οποία τα επιβαλλόμενα φορτία επιβάλλονται στο σώμα αργά. Ωστόσο, έχει αποδειχθεί ότι σε περιπτώσεις που τα θερμικά φαινόμενα οφείλονται σε ταχέως μεταβαλλόμενα φορτία τόσο ο αδρανειακός όρος (Sternberg & Chakravorty, 1959) όσο και οι όροι σύζευξης (Boley & Tolins, 1962) παίζουν καθοριστικό ρόλο στην εύρεση του σωστού αποτελέσματος.

Στο διάγραμμα του σχήματος 2 παρατηρούμε την μεταβολή της τάσης σ_{xx} του παραπάνω προβλήματος ως συνάρτηση της αδιάστατης μεταβλητής $x' = x/(v_L t)$ για συγκεκριμένη χρονική στιγμή *t*. Η συνεχόμενη γραμμή εκφράζει την ισόθερμη λύση η οποία προκύπτει από την λύση του προβλήματος με βάση την θεωρία ασύζευκτης θερμοελαστικότητας $\left\{\partial^2 u/\partial x^2 = v_L^{-2}\partial^2 u/\partial t^2,\ u(x,0)=\dot{u}(x,0)\equiv 0,\ \ \sigma_{xx}(0,t) = -p_0 H(t)\right\}$. Από την άλλη μεριά η διακεκομμένη γραμμή αποδίδει την λύση του ίδιου προβλήματος μέσω της Θεωρίας Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας, από την οποία παρατηρούμε ότι το μέτωπο του διαδιδόμενου κύματος ταχύτητας v_L προηγείται από μία διαταραχή η οποία (θεωρητικά) εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Η διαταραχή αυτή παράγεται από το θερμικό πεδίο το οποίο οφείλεται στην αγωγή θερμότητας εξαιτίας της παραμόρφωσης του σώματος πίσω από το μέτωπο κύματος $x/(v_L t) = 1$. Εφόσον η θερμική αγωγιμότητα είναι μία διαδικασία διάχυσης σύμφωνα με τον νόμο του Fourier, το θερμικό πεδίο στιγμιαία εκτείνεται μέχρι το άπειρο και κατ' επέκταση προκαλεί μία πολύ μικρή παραμόρφωση η οποία προηγείται του μετώπου κύματος, δηλαδή ένα πρόδρομο φαινόμενο. Αν εφαρμοστεί απότομα πίεση στην επιφάνεια του σώματος τότε αρχίζει να διαδίδεται μία φθίνουσα ασυνέχεια στο μέσο με ταχύτητα ίση με εκείνη των διαμηκών κυμάτων. Στο σχήμα 2 εμφανίζεται επίσης το αντίστοιχο ασύζευκτο θερμοελαστικό πεδίο. Η σύζευξη λοιπόν προκαλεί και πρόδρομο φαινόμενο αλλά και φαινόμενο απόσβεσης (Achenbach, 1973).



Σχήμα 3: Χωρική εξάρτηση της διαμήκους τάσης σε μονοδιάστατο ημι-χώρο με βάση τις θεωρίες της συζευγμένης θερμοελαστικότητας και της απλής ελαστικότητας για συγκεκριμένο χρόνο t. (Αναγνώστου, 2005)

Κεφάλαιο 3: Στοιχεία Μηχανικής Θραύσεων

3.1 Γενικά

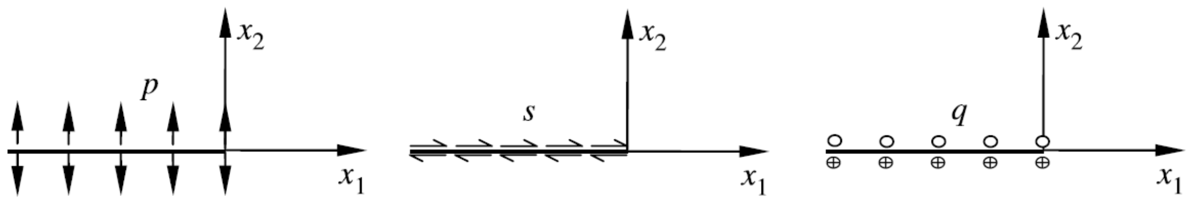
Σύμφωνα με την Κλασσική Θεωρία Ελαστικότητας, ο προσδιορισμός του πεδίου τάσεων και παραμορφώσεων μακριά από την θραύση ή την ρηγμάτωση ενός σώματος πραγματοποιείται ανάγοντας το φαινόμενο σε πρόβλημα συνοριακών τιμών, το οποίο βασίζεται στους νόμους ελαστικότητας ή πλαστικότητας του υλικού του. Στην περίπτωση αυτή η παραμορφωσιακή συμπεριφορά του υλικού λαμβάνεται ως δεδομένη, ενώ οι συνοριακές συνθήκες προσδιορίζονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα σύνορα του μέσου να θεωρηθούν απαραμόρφωτα. Παρόλα αυτά, κάθε σώμα χαρακτηρίζεται από μία κρίσιμη τιμή φορτίου η οποία αν ξεπεραστεί προκαλεί ρωγμές στην έκτασή του, με άλλα λόγια επιφάνειες ασυνέχειας στο διάνυσμα των μετατοπίσεων. Από το σημείο αυτό και έπειτα παύει να ισχύει η προηγούμενη εντατική κατάσταση και αλλάζουν τα σύνορα του σώματος, με αποτέλεσμα ο προσδιορισμός των καινούργιων πεδίων τάσεων και παραμορφώσεων να μετατρέπεται σε ένα δύσκολο πρόβλημα, το οποίο εξαρτάται από τις συνοριακές συνθήκες που προστίθενται. Στόχος λοιπόν της Μηχανικής των Θραύσεων είναι η ποσοτική περιγραφή της μηχανικής κατάστασης ενός παραμορφώσιμου σώματος στο οποίο υπάρχουν ρωγμές, καθώς και ο προσδιορισμός της αντίστασής του σώματος στην περαιτέρω ανάπτυξη των ρωγμών αυτών.

Η ρωγμή μπορεί προσεγγιστικά να θεωρηθεί ως μία κοιλότητα εντός του σώματος, της οποίας η απόσταση μεταξύ των χειλών είναι μικρή συγκριτικά με το μήκος της. Η πρώτη πληρέστερη θεώρηση της δομής της ρωγμής κοντά στα άκρα της οφείλεται στον A.A. Griffith, ο οποίος μέσω της Κλασσικής Θεωρίας Ελαστικότητας και την λύση του Inglis οδηγήθηκε σε απειρισμό των τάσεων κοντά στα άκρα της, καθώς και στην θεώρηση ότι τα άκρα της είναι στρογγυλά με ακτίνα καμπυλότητας της τάξεως της μοριακής απόστασης, γεγονός μη αποδεκτό με βάση τις αρχές της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου. Οι τάσεις στα άκρα των ρωγμών οφείλουν να είναι πεπερασμένες, εφόσον οι απέναντι πλευρές της παρουσιάζουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό και δεν είναι ελεύθερες τάσεων. Αν οι επιφάνειες της ρωγμής θεωρηθούν ελεύθερες τάσεων τότε για οποιαδήποτε μορφή συνόρων οι τάσεις γίνονται άπειρες, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η ύπαρξη ρωγμών σε ισορροπία (Παπαδόπουλος, 2007).

Ο G.R. Irwin παρατήρησε ότι υπάρχουν τρεις ανεξάρτητοι τρόποι μετακίνησης των χειλών της ρωγμής, υπό την προϋπόθεση ότι οι ρωγμές εντός των στερεών θεωρούνται επιφάνειες ασυνέχειας του διανύσματος της μετατόπισης. Κατ' επέκταση, οποιοσδήποτε τρόπος παραμόρφωσης της ρωγμής προκύπτει ως επαλληλία των τριών αυτών ανεξάρτητων τύπων:

α. Συνεπίπεδος (in-plane) εφελκυστικός τύπος ή τύπος I, όπου οι παρειές της ρωγμής τείνουν να διαχωρισθούν συμμετρικά ως προς το επίπεδο της ρωγμής προ της παραμόρφωσης.
β. Συνεπίπεδος (in-plane) διατμητικός τύπος ή τύπος II, όπου οι παρειές της ρωγμής τείνουν να ολισθήσουν η μία ως προς την άλλη προς αντίθετες κατευθύνσεις αλλά εντός του ίδιου επιπέδου
γ. Εγκάρσιος (anti-plane) διατμητικός τύπος ή τύπος III, όπου οι παρειές της ρωγμής τείνουν να διαχωρισθούν προς αντίθετες εγκάρσιες κατευθύνσεις υπό την επίδραση ίσων και αντίθετων δυνάμεων, κάθετων προς το επίπεδο του σώματος.

Τα τρία αυτά ανεξάρτητα πεδία τάσεων στο άκρο της ρωγμής συνδέονται με την σχετική μετατόπιση των χειλών της, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Ημι-άπειρες ρωγμές υπό την επίδραση ομοιόμορφα κατανεμημένων φορτίων. Από αριστερά προς τα δεξιά' συνεπίπεδος εφελκυστικός τύπος, συνεπίπεδος διατμητικός τύπος και εγκάρσιος διατμητικός τύπος (Ravi-Chandar, 2006)

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, οι εκφράσεις των τάσεων είναι προβληματικές ακριβώς πάνω στο άκρο της ρωγμής (r=0), εφόσον για $r^{-1/2} \to 0$ οι τάσεις απειρίζονται. Η συμπεριφορά αυτή των τάσεων καλείται ιδιόμορφη (singular) και ώθησε τον Irwin το 1955 να εισάγει την έννοια του συντελεστή έντασης των τάσεων Σ.Ε.Τ. (Stress Intensity Factor, SIF), ο οποίος αποτελεί την χαρακτηριστική παράμετρο η οποία αποδίδει τα πεδία κοντά στο άκρο μίας ρωγμής. Για τον υπολογισμό τόσο των SIF όσο και των πεδίων τάσεων και μετατοπίσεων έχουν αναπτυχθεί αναλυτικές και πειραματικές μέθοδοι επίλυσης για μεγάλο αριθμό προβλημάτων και περιπτώσεων φορτίσεως (Παπαδόπουλος, 2015).

Στο κεφάλαιο αυτό θα επικεντρωθούμε στην μελέτη προβλημάτων ταχείας διάδοσης ρωγμής, τα οποία επηρεάζονται σημαντικά από αδρανειακά φαινόμενα με βάση την Δυναμική Μηχανική των Θραύσεων. Στην περίπτωση αυτή τα σωματίδια του μέσου που βρίσκονται στα αντίθετα χείλη της ρωγμής κινούνται το ένα ως προς το άλλο από την στιγμή που διαπεραστούν από το άκρο της ρωγμής και έπειτα. Η αντίσταση του σώματος στην κίνηση αυτή μπορεί να επηρεάσει την κινητήρια δύναμη της ρωγμής, με αποτέλεσμα να είναι απαραίτητο να συμπεριληφθεί για την ολοκληρωμένη ανάλυση του φαινομένου (Freund, 1990). Με βάση την Γραμμική Θεωρία Ελαστικότητας θα μελετηθούν οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες διάδοσης δυναμικών ρωγμών, καθώς και θα προσδιορισθούν οι ασυμπτωτικές λύσεις των πεδίων τάσεων και μετατοπίσεων κοντά στο άκρο της ρωγμής για τους τρεις διαφορετικούς τύπους ρωγμών. Από την διαδικασία αυτή θα βρεθούν οι Σ.Ε.Τ. κάθε τύπου ρωγμής, οι οποίοι καθορίζουν το μέγεθος των τάσεων οι οποίες εφαρμόζονται κοντά στο άκρο της ρωγμής. Αναφέρεται ότι στοιχεία του παρόντος κεφαλαίου έχουν αντληθεί από το βιβλίο των Ravi-Chandar «*Dynamic Fracture*» (2004).

3.2 Δυναμικά φορτισμένες ρωγμές

Στα πλαίσια της δι-διάστατης Ελαστοδυναμικής Θεωρίας μπορούν να αναλυθούν τα γενικευμένα προβλήματα ρωγμών. Έστω άπειρο ελαστικό μέσο στο οποίο διαδίδεται ρωγμή. Χωρίς απώλεια της γενικότητας θεωρούμε ότι εφαρμόζεται επίπεδη παραμόρφωση και ότι η ρωγμή βρίσκεται αρχικά στο $x_1 < 0, x_2 = 0$. Αποτέλεσμα της εφαρμογής φορτίου στην ρωγμή είναι η επέκτασή της στο μέσο, η οποία στην αρχή θεωρούμε ότι συγκρατείται. Επιπλέον, θεωρούμε για τις συνοριακές συνθήκες του μέσου στο άπειρο ότι δεν εφαρμόζονται ελκτικές δυνάμεις στην ελεύθερη επιφάνεια, καθώς και ότι εφαρμόζονται δυνάμεις εφελκυσμού μόνο στις επιφάνειες της ρωγμής. Θέτουμε τις συνοριακές συνθήκες ως προς τις τάσεις

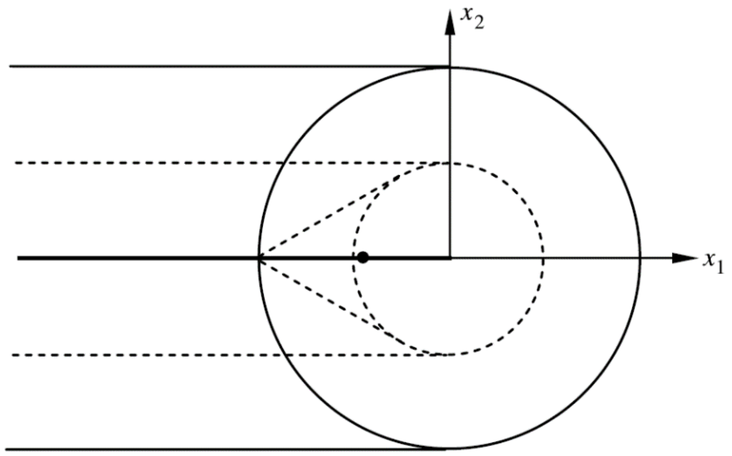
$$\sigma_{12}\left(x_1, 0^{\pm}, t\right) = -sH\left(t\right) \tag{3.1α}$$

$$\sigma_{22}\left(x_1, 0^{\pm}, t\right) = -pH\left(t\right),\ x_1 \leq 0 \tag{3.1β}$$

$$\sigma_{32}\left(x_1, 0^{\pm}, t\right) = qH\left(t\right) \tag{3.1γ}$$

με *H(t)* να συμβολίζει την βηματική συνάρτηση, ενώ για $x_1 \leq 0$ τα *p, s* και *q* είναι καθορισμένα.

Με την εφαρμογή της αρχής Huygen (Freund, 1990) τα κυματικά μέτωπα που εκπέμπονται από την ρωγμή υπό την επίδραση φορτίου μπορούν να σχεδιαστούν όπως φαίνεται στην εικόνα 4. Τα εγκάρσια και διαμήκη κύματα χώρου ταξιδεύουν στο σώμα διαμέσου της επιφάνειας της ρωγμής, ενώ τα μέτωπα τους είναι παράλληλα στην κατεύθυνση διάδοσής της και σε μακρινές αποστάσεις από το άκρο της. Τα μέτωπα αυτά μεταφέρουν απλώς μία ασυνέχεια στις αντίστοιχες τάσεις, ενώ το άκρο της ρωγμής λειτουργεί ως μία σημειακή πηγή η οποία εκπέμπει κυλινδρικά μέτωπα διαμηκών και εγκαρσίων κυμάτων στο μελετώμενο δι-διάστατο πρόβλημα. Τα επιφανειακά κύματα Rayleigh ταξιδεύουν κατά μήκος των αρνητικών τιμών του άξονα x_1, ακριβώς πίσω από το μέτωπο των κυλινδρικών εγκάρσιων κυμάτων, γεγονός το οποίο απεικονίζεται στην εικόνα 4 μέσω της μαύρης κουκίδας.



Σχήμα 4: Εκπεμπόμενα κύματα από διάδοση ρωγμής. Οι συνεχόμενες γραμμές απεικονίζουν τα διαμήκη κύματα, ενώ οι διακεκομμένες τα εγκάρσια (Ravi-Chandar, 2004)

Τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων κοντά στο άκρο της ρωγμής καθορίζονται μέσω της επίλυσης των κυματικών εξισώσεων (1.53α) και (1.53β). Στις στατικές και ψευδοστατικές ρωγμές το ελαστοδυναμικό πεδίο τάσεων κοντά στα άκρα τους εκφράζονται μέσω των ίδιων σχέσεων, με μόνη διαφορά την εξάρτηση των Σ.Ε.Τ. από τον χρόνο στην ψευδοστατική περίπτωση. Συγκεκριμένα έχουμε

$$\sigma_{\alpha\beta}(r,\theta)=\frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}}f_{\alpha\beta}^{Is}(\theta)+\frac{K_{II}(t)}{\sqrt{2\pi r}}f_{\alpha\beta}^{IIs}(\theta)+\ldots,r\rightarrow 0 \tag{3.2α}$$

$$\sigma_{3\alpha}(r,\theta)=\frac{K_{III}(t)}{\sqrt{2\pi r}}f_{3\alpha}^{IIIs}(\theta) \tag{3.2β}$$

όπου $K_I(t), K_{II}(t), K_{III}(t)$ συμβολίζουν τους Σ.Ε.Τ. των τύπων Ι, ΙΙ και ΙΙΙ αντίστοιχα με μονάδες μέτρησης (δύναμη) (μήκος)$^{-3/2}$. Οι συντελεστές αυτοί αντικατοπτρίζουν την επίδραση της γεωμετρικής διαμόρφωσης του σώματος και του εφαρμοζόμενου φορτίου κατά την διάδοση της ρωγμής και προσδιορίζονται μέσω της επίλυσης του κατάλληλου προβλήματος αρχικών-συνοριακών συνθηκών.

Τα $f_{\alpha\beta}^{Is}(\theta), f_{\alpha\beta}^{IIs}(\theta), f_{3\alpha}^{IIIs}(\theta)$ αποτελούν τις γωνιακές διακυμάνσεις του πεδίου τάσεων στο άκρο της ρωγμής και δίνονται από τις σχέσεις

$$f_{11}^{Is}(\theta) = \cos\frac{1}{2}\theta\left[1 - \sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{3}{2}\theta\right] \tag{3.3α}$$

$$f_{22}^{Is}(\theta) = \cos\frac{1}{2}\theta\left[1 + \sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{3}{2}\theta\right] \tag{3.3β}$$

$$f_{22}^{Is}(\theta) = \cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{3}{2}\theta \tag{3.3γ}$$

$$f_{11}^{IIs}(\theta) = -\sin\frac{1}{2}\theta\left[2 + \cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{3}{2}\theta\right] \tag{3.4α}$$

$$f_{22}^{IIs}(\theta) = \cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{3}{2}\theta \tag{3.4β}$$

$$f_{12}^{IIs}(\theta) = \cos\frac{1}{2}\theta\left[1 - \sin\frac{1}{2}\theta\sin\frac{3}{2}\theta\right] \tag{3.4γ}$$

$$f_{31}^{IIIs}(\theta) = \sin\frac{1}{2}\theta \tag{3.5α}$$

$$f_{32}^{IIIs}(\theta) = \cos\frac{1}{2}\theta \tag{3.5β}$$

(Ravi-Chandar, 2004) (Freund, 1990)

Όπως αναφέρθηκε και στην υποενότητα 3.1, παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του πεδίου τάσεων είναι αντιστρόφως ανάλογα της τετραγωνικής ρίζας της κανονικοποιημένης απόστασης από το άκρο της ρωγμής, με άλλα λόγια παρουσιάζουν πόλο τετραγωνικής ρίζας, καθώς και μία χαρακτηριστική απόκλιση ανάλογη της γωνιακής θέσης του άκρου της ρωγμής. Τα γενικά αυτά χαρακτηριστικά είναι κοινά για κάθε διαμόρφωση και συνθήκη φόρτωσης, ενώ η επιρροή τους στην ασυμπτωτική συμπεριφορά των τάσεων είναι γραμμική και εκφράζεται μέσω των ελαστικών Σ.Ε.Τ. (Freund, 1990).

Εφόσον αγνοούμε στην αρχή την πιθανότητα επέκτασης της ρωγμής, το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με τις κλασσικές μεθόδους μικτών συνοριακών προβλημάτων. Ωστόσο, οι τάσεις στο άκρο της ρωγμής αυξάνονται διαρκώς με τον χρόνο, με αποτέλεσμα να φτάσουν σε μία κρίσιμη τιμή στην οποία αρχίζει να αναπτύσσεται δυναμικά. Από την στιγμή που αρχίζει να διαδίδεται η ρωγμή πρέπει να καθοριστούν η κατεύθυνση και η ταχύτητα με την οποία κινείται, με άλλα λόγια πρέπει να προσδιορισθεί η εξίσωση κίνησής της. Ο Mott πρότεινε μία απλή επέκταση του κριτηρίου Griffith (Freund, 1990), σύμφωνα με την οποία προσδιορίζεται η ταχύτητα συμπεριλαμβάνοντας την κινητική ενέργεια στην εξίσωση ισοζυγίου ενέργειας. Γράφοντας λοιπόν την εξίσωση αυτή, η ρωγμή θα πρέπει να επεκταθεί κατά μήκος ενός κατάλληλου μονοπατιού υπό κατάλληλη ταχύτητα, ώστε να ικανοποιείται το ενεργειακό ισοζύγιο. Η εξίσωση γράφεται ως

$$\int_{\partial R} s \frac{\partial u}{\partial t} dR = \left[U\left(t\right) + T\left(t\right) \right] + \frac{dD}{dt} \tag{3.6}$$

όπου $U\left(t\right)$ η ενέργεια παραμόρφωσης, $T\left(t\right)$ η κινητική ενέργεια και D η διασπορά στην ζώνη θραύσης. Η εξίσωση (3.6) πρέπει να παρέχει το κατάλληλο κριτήριο για τον προσδιορισμό του μονοπατιού και της ταχύτητας διάδοσής της ρωγμής. Επιπλέον, θα πρέπει να εξασφαλιστεί ότι οι συνοριακές συνθήκες των εξισώσεων (3.1) δεν επηρεάζονται από ελκτικές δυνάμεις στις καινούργιες επιφάνειες S της ρωγμής κατά την επέκτασή της, δηλαδή ότι (Ravi-Chandar, 2004)

$$\sigma_{12}\left(x_1, x_2, t\right) = 0 \tag{3.7α}$$

$$\sigma_{22}\left(x_1, x_2, t\right) = 0 \tag{3.7β}$$

$$\sigma_{32}\left(x_1, x_2, t\right) = 0 \tag{3.7γ}$$

για $\left(x_1, x_2\right) \in S$

3.2 Ασυμπτωτική ανάλυση των πεδίων στα άκρα της ρωγμής

Υπάρχουν αρκετοί λόγοι για την μελέτη των ασυμπτωτικών πεδίων στο άκρο δυναμικής ρωγμής ενός υλικού. Η επιρροή της αδράνειας του υλικού κατά την κατανομή των τάσεων και των παραμορφώσεων κοντά στο άκρο της ρωγμής εμφανίζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον κατά την εκτίμηση των μηχανισμών διάδοσής της στο υλικό, εφόσον τα μελετώμενα πεδία αντιπροσωπεύουν το περιβάλλον στο οποίο είναι λειτουργικοί οι μηχανισμοί αυτοί. Επιπλέον, οι αριθμητικές μέθοδοι που αξιοποιούνται για τα προβλήματα αυτού του τύπου αποτελούν συνήθως τον μοναδικό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να λάβουμε ολοκληρωμένες λύσεις για τα πεδία τους. Ωστόσο, για σημεία πολύ κοντά στο άκρο της ρωγμής η εκτίμηση της ακρίβειας των αριθμητικών μεθόδων γίνεται δύσκολη εξαιτίας των απότομων παραγώγων που εμφανίζονται. Η συμφωνία μεταξύ ασυμπτωτικών και υπολογιστικών αποτελεσμάτων των πεδίων καθορίζει την αξιοπιστία των αριθμητικών μεθόδων.

Μία γενική εκτίμηση του ανώτατου ορίου ταχύτητας διάδοσης ρωγμής στο οποίο μπορούμε να αγνοήσουμε τα αδρανειακά φαινόμενα στην περιγραφή του ασυμπτωτικού πεδίου κοντά στο άκρο της προκύπτει με βάση το πεδίο ισορροπίας μίας ψευδοστατικής ρωγμής. Θεωρούμε την περίπτωση διάδοσης ρωγμής τύπου I σε ελαστικό μέσο με ταχύτητα διάδοσης *v*. Όσο πλησιάζει το άκρο της ρωγμής ένα τυχαίο σωματίδιο της τροχιάς της, η ταχύτητα του σωματιδίου και η πυκνότητα κινητικής ενέργειας αυξάνονται ραγδαία. Το μέγεθος των πεδίων των τάσεων και των παραμορφώσεων αυξάνεται επίσης απότομα κατά την άφιξη του άκρου της ρωγμής στο σωματίδιο, με αποτέλεσμα να έχουμε έντονη αύξηση και στην πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας. Οι δύο αυτές ενεργειακές μεταβολές πραγματοποιούνται σε συγκρίσιμα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα, συνεπώς η σύγκριση των τιμών των δύο αυτών ενεργειακών πυκνοτήτων όταν ένα σωματίδιο βρίσκεται αρκετά κοντά στο άκρο της ρωγμής μπορεί να μας δώσει μία πρώτη εικόνα για τον βαθμό επιρροής της αδράνειας του σώματος σε τοπικά πεδία (Freund, 1990).

Παρακάτω δίνονται τα ασυμπτωτικά πεδία τάσεων και μετατοπίσεων των τριών τύπων ρωγμών, τα όποια όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη υποενότητα εμφανίζουν ιδιομορφία τύπου τετραγωνικής ρίζας. Η ανάλυση θα πραγματοποιηθεί για διάδοση ρωγμών υπό σταθερή κατάσταση στο υποηχητικό εύρος ταχυτήτων, η οποία εξηγείται περεταίρω στο 4^{o} κεφάλαιο.

3.2.1 Εγκάρσιος διατμητικός τύπος ΙΙΙ

Θεωρούμε μέσο που δεν επηρεάζεται από ελκτικές δυνάμεις στην επιφάνειά του και ρωγμή η οποία βρίσκεται αρχικά στο $x_1 < 0, x_2 = 0$ και κινείται κατά μήκος της ευθείας $x_2 = 0$ με σταθερή ταχύτητα $v < v_T$ (v_T η ταχύτητα των διαμηκών κυμάτων). Η διέπουσα διαφορική εξίσωση που δίνει την μη-μηδενική μετατόπιση u_3 είναι η

$$\nabla^2 u_3 = \frac{1}{v_T^2}\ddot{u}_3 \tag{3.8}$$

Η συνοριακή συνθήκη για μέσο ανεπηρέαστο από ελκτικές δυνάμεις μπορεί να γραφεί ως

$$\sigma_{32}\left(x_1, 0^{\pm}\right) = \mu u_{3,2}\left(x_1, 0^{\pm}\right) = 0 \tag{3.9}$$

όπου το $x_2 = 0^{\pm}$ υποδεικνύει την προσέγγιση της επιφάνειας της ρωγμής είτε από την θετική είτε την αρνητική κατεύθυνση του x_2. Αν αξιοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Γαλιλαίου σε κινούμενο σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται μαζί με την ρωγμή για $\xi_1 = x_1 - vt$ και $\xi_2 = x_2$ η εξίσωση (3.8) γίνεται

$$\left(1 - \frac{v^2}{v_T^2}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi_2^2} = 0 \tag{3.10}$$

όπου $u_3 = u_3\left(\xi_1, \xi_2\right)$. Εισάγοντας λοιπόν την κλίμακα $\zeta_s = \xi_1 + i\alpha_s \xi_2$, οι διέπουσες εξισώσεις δίνουν

$$\nabla^2 u_3\left(r_T, \theta_T\right) = 0,\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \tag{3.11}$$

με

$$r_T = \sqrt{\xi_1^2 + \alpha_T^2 \xi_2^2}, \theta_T = \arctan\left(\frac{\alpha_T \xi_2}{\xi_1}\right), \alpha_T = \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_T^2}} \tag{3.12α,β,γ}$$

Ας αναζητήσουμε λοιπόν μία ξεχωριστή μορφή λύσης της u_3, παρόμοια με την επέκταση του Williams για ψευδοστατικό πρόβλημα ρωγμής (Freund, 1990)

$$u_3\left(r_T,\theta_T\right)=r_T^{\lambda} f\left(\theta_T;\lambda\right) \tag{3.13}$$

Τότε η εξίσωση (3.11) περιορίζεται σε μία συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς την άγνωστη συνάρτηση *f*

$$f'' + \lambda^2 f = 0 \tag{3.14}$$

ενώ η γενικευμένη λύση της εξίσωσης (3.14) η οποία υπακούει την αντιεπίπεδη συμμετρία του προβλήματος είναι η

$$f\left(\theta_T;\lambda\right)=A\sin\left(\lambda\theta_T\right) \tag{3.15}$$

όπου το *A* σταθερά. Εισάγοντας την λύση αυτή στην συνοριακή συνθήκη (3.9) λαμβάνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση για τον προσδιορισμό του *λ*. Όπως και στην ψευδοστατική περίπτωση, απορρίπτοντας την τετριμμένη λύση καταλήγουμε σε μοναδικές λύσεις των τάσεων, ενώ οι μετατοπίσεις είναι φραγμένες μόνο για $\lambda = 1/2$. Φυσικά, για $\lambda > 1/2$ οι τάσεις και οι παραμορφώσεις μηδενίζονται όσο πλησιάζουμε στο άκρο της ρωγμής, αλλά οι συνθήκες αυτές δεν θα συμπεριληφθούν στην ανάλυση αυτή. Καταλήγουμε λοιπόν στην παρακάτω έκφραση της μετατόπισης

$$u_3\left(r_T,\theta_T\right)=2Ar_T^{1/2}\sin\left(\frac{1}{2}\theta_T\right)+\dots \tag{3.16}$$

Η παράμετρος εύρους *A* αφήνεται απροσδιόριστη στην ανάλυση τοπικού επιπέδου και βρίσκεται μέσω συνολικής επίλυσης του προβλήματος. Μπορεί ωστόσο να επαναπροσδιορισθεί μέσω του συντελεστή εντάσεως των τάσεων του τύπου ΙΙΙ

$$K_{III}=\lim_{\xi_1\to 0}\sqrt{2\pi\xi_1}\,\sigma_{32}\left(r_T,0^{\pm}\right) \tag{3.17}$$

ενώ οι τάσεις μπορούν να γραφτούν ως

$$\sigma_{32}\left(r_T,\theta_T\right)=\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\frac{1}{\sqrt{\gamma_s}}\cos\left(\frac{\theta_T}{2}\right) \tag{3.18α}$$

$$\sigma_{31}\left(r_T,\theta_T\right)=-\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\frac{1}{\alpha_T\sqrt{\gamma_s}}\cos\left(\frac{\theta_T}{2}\right) \tag{3.18β}$$

όπου θέτουμε

$$\gamma_T=\sqrt{1-\left(v\sin\theta/v_T\right)^2},\quad \tan\theta_T=\alpha_T\tan\theta \tag{3.19}$$

Χρειάζεται να σημειωθεί ότι η παραπάνω ανάλυση είναι ανάλογη του ψευδοστατικού προβλήματος. Συγκεκριμένα τα στοιχεία τάσεων εμφανίζουν πόλο στην τετραγωνική ρίζα, αλλά η γωνιακή κατανομή διαστρεβλώνεται λόγω της ταχύτητας κίνησης της ρωγμής. Τα πεδία τάσεων και παραμορφώσεων μετατρέπονται στα αντίστοιχα ψευδοστατικά πεδία στο όριο $v\to 0$ (Ravi-Chandar, 2004).

Στην παραπάνω ανάλυση έχουμε υποθέσει διάδοση ρωγμής υπό σταθερή κατάσταση, με αποτέλεσμα ο δυναμικός Σ.Ε.Τ. να αποτελεί μία σταθερά. Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να αξιοποιηθούν ακόμα και αν η ρωγμή κινείται με ανομοιόμορφη ταχύτητα, υπό την προϋπόθεση ότι ο Σ.Ε.Τ. θα αποτελεί πλέον μία συνάρτηση του χρόνου και της ταχύτητας διάδοσης της ρωγμής, $K_{\mathrm{III}}\left(\mathrm{t,v}\right)$. Για περαιτέρω πληροφορίες παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία (Freund, 1990).

3.2.2 Εφελκυστικός τύπος I

Στο σημείο αυτό θα αναλυθεί το πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης με στόχο να βρεθούν τα ασυμπτωτικά πεδία τάσεων και μετατοπίσεων. Η διαδικασία εύρεσης των πεδίων αυτών είναι η ίδια με εκείνη της ρωγμής τύπου III που περιεγράφηκε στην υποενότητα 3.2.1.. Όπως και παραπάνω θεωρούμε ρωγμή χωρίς επίδραση ελκτικών δυνάμεων στην επιφάνεια του μέσου, η οποία βρίσκεται αρχικά στο $x_1<0, x_2=0$ και κινείται κατά μήκος της ευθείας $x_2=0$

με σταθερή ταχύτητα $v < v_R$. Οι διέπουσες διαφορικές εξισώσεις είναι για ακόμα μία φορά οι κυματικές εξισώσεις (1.53α) και (1.53β). Εισάγοντας λοιπόν τον μετασχηματισμό Γαλιλαίου $\xi_1 = x_1 - vt, \xi_2 = x_2$ και την κλίμακα $\zeta_L = r_L e^{i\theta_L} = \xi_1 + i\alpha_L \xi_2$, $\zeta_T = r_s e^{i\theta_s} = \xi_1 + i\alpha_s \xi_2$ με

$$r_L = \sqrt{\xi_1^2 + \alpha_L^2 \xi_2^2}, \;\; \theta_L = \arctan\left(\frac{\alpha_T \xi_2}{\xi_1}\right), \;\; \alpha_L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_L^2}} \tag{3.20α,β,γ}$$

και τα α_T, r_T, θ_T να ορίζονται από την εξίσωση (3.12), οι διέπουσες εξισώσεις γίνονται

$$\nabla^2 \varphi\left(r_L, \theta_L\right) = 0, \;\; \nabla^2 \psi\left(r_T, \theta_T\right) = 0, \;\; \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \tag{3.21α,β}$$

Αναζητούμε μία ξεχωριστή μορφή λύσης των $\varphi = \varphi\left(r_L, \theta_L\right), \psi = \psi\left(r_T, \theta_T\right)$, παρόμοια με την επέκταση Williams για το ψευδοστατικό πρόβλημα ρωγμής

$$\varphi\left(r_L, \theta_L\right) = r_L^{\lambda} f\left(\theta_L; \lambda\right), \quad \psi\left(r_T, \theta_T\right) = r_T^{\lambda} g\left(\theta_T; \lambda\right) \tag{3.22α,β}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το πρόβλημα ρωγμής τύπου III μπορούμε να γράψουμε την λύση

$$\varphi\left(r_L, \theta_L\right) = A r_L^{\lambda} \cos\left(\lambda \theta_L\right), \;\; \psi\left(r_T, \theta_T\right) = B r_T^{\lambda} \sin\left(\lambda \theta_T\right) \tag{3.23α,β}$$

Χρειάζεται να σημειωθεί ότι έχουν αξιοποιηθεί μόνο οι συμμετρικές λύσεις που συμφωνούν με το είδος της ρωγμής, με άλλα λόγια με το πρόβλημα τύπου I. Οι αντισυμμετρικές λύσεις περιγράφουν τα πεδία στα άκρα της ρωγμής τύπου II και θα αναλυθούν στην επόμενη υποενότητα. Εφαρμόζοντας λοιπόν τις συνοριακές συνθήκες χωρίς την επιβολή ελκτικών δυνάμεων στην επιφάνεια του μέσου οδηγούμαστε στις παρακάτω εξισώσεις για τις σταθερές *A, B*.

$$\left(1 + \alpha_T^2\right) A \cos(\lambda - 2)\pi + 2\alpha_T B \cos\left(\lambda - 2\right)\pi = 0 \tag{3.24α}$$

$$2\alpha_L A\sin\left(\lambda-2\right)\pi+\left(1+\alpha_L^2\right)B\sin\left(\lambda-2\right)\pi=0 \tag{3.24β}$$

Για τις μη τετριμμένες λύσεις η ορίζουσα του παραπάνω συστήματος εξισώσεων πρέπει να είναι ίση με το μηδέν, ώστε να καταλήξουμε στην χαρακτηριστική εξίσωση. Η γενικευμένη λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι

$$\lambda=\left(n/2\right)+1,\quad n=1,2,3,\ldots \tag{3.25}$$

Οι μη θετικές λύσεις του n οδηγούν σε σημεία ανωμαλίας στις μετατοπίσεις του άκρου της ρωγμής και κατ' επέκταση απορρίπτονται. Στην υποενότητα αυτή θα εξετασθούν όλες οι θετικές τιμές του *n*, ώστε να εμφανιστούν οι ανώτεροι όροι του πεδίου τάσεων στο άκρο της ρωγμής οι οποίοι επηρεάζουν τα πειραματικά συστήματα ανάλυσης δυναμικών ρωγμών. Από την εξίσωση (3.24α,β) μπορεί να αποδειχθεί ότι οι σταθερές *A, B* σχετίζονται ως εξής

$$B=\begin{cases}-\dfrac{2\alpha_L}{1+\alpha_T^2}A, & n\ \ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\\[2ex] -\dfrac{1+\alpha_T^2}{2\alpha_L}A, & n\ \ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\end{cases} \tag{3.26}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.23α,β), (3.25) και (3.26) στις σχέσεις (1.54α,β) παίρνουμε τις μετατοπίσεις, οι οποίες μπορούν να καθοριστούν από τις σχέσεις

$$u_1^n\left(r,\theta\right)=A_n\left(1+\frac{n}{2}\right)\left\{r_L^{n/2}\cos\left(\frac{n\theta_L}{2}\right)-\chi_1\left(n\right)r_T^{n/2}\cos\left(\frac{n\theta_T}{2}\right)\right\} \tag{3.27α}$$

$$u_2^n\left(r,\theta\right)=A_n\alpha_L\left(1+\frac{n}{2}\right)\left\{-r_L^{n/2}\sin\left(\frac{n\theta_L}{2}\right)+\chi_2\left(n\right)r_T^{n/2}\sin\left(\frac{n\theta_T}{2}\right)\right\} \tag{3.27β}$$

όπου θέτουμε

$$\chi_1\left(n\right)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha_L\alpha_T}{1+\alpha_s^2}, & n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\\[2ex] \dfrac{1+\alpha_T^2}{2}, & n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\end{cases} \tag{3.28α}$$

$$\chi_2(n)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+\alpha_L^2}, & n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\\ \dfrac{1+\alpha_L^2}{2\alpha_L\alpha_T}, & n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\end{cases} \tag{3.28β}$$

ενώ οι αντίστοιχες τάσεις από τις σχέσεις (1.55α,β,γ) είναι

$$\sigma_{11}^n(r,\theta)=\frac{\mu A_n}{\left(1+\alpha_T^2\right)}\frac{n}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right)$$

$$\left\{\left(1+\alpha_T^2\right)\left(1+2\alpha_L^2-\alpha_T^2\right)r_L^{(n/2)-1}\cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_L\right)-\kappa(n)r_T^{(n/2)-1}\cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_T\right)\right\} \tag{3.29α}$$

$$\sigma_{22}^n(r,\theta)=\frac{\mu A_n}{\left(1+\alpha_T^2\right)}\frac{n}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right)\left\{-\left(1+\alpha_T^2\right)r_L^{(n/2)-1}\cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_L\right)+\kappa(n)r_T^{(n/2)-1}\cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_T\right)\right\}$$

(3.29β)

$$\sigma_{12}^n(r,\theta)=\frac{\mu A_n}{2\alpha_T}\frac{n}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right)\left\{-4\alpha_T\alpha_L r_L^{(n/2)-1}\sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_L\right)+\kappa(n)r_T^{(n/2)-1}\sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_T\right)\right\} \tag{3.29γ}$$

όπου θέτουμε

$$\kappa(n)=\begin{cases}4\alpha_L\alpha_T, n\,\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\\ \left(1+\alpha_T^2\right)^2, n\,\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\end{cases} \tag{3.30}$$

Ο όρος που ανταποκρίνεται στο n=1 οδηγεί σε φραγμένες μετατοπίσεις και σε εμφάνιση μονού πόλου τετραγωνικής ρίζας στις τάσεις όσο προσεγγίζεται το άκρο της ρωγμής. Οι παράμετροι πλάτους A_n αφήνονται απροσδιόριστοι στην τοπική ανάλυση και θα βρεθούν κατά την πλήρη επίλυση του προβλήματος. Όπως και στην περίπτωση του προβλήματος τύπου III, εισάγεται ο ορισμός του συντελεστή εντάσεως των τάσεων του προβλήματος τύπου I

$$K_I=\lim_{\xi_1\to 0}\sqrt{2\pi\xi_1}\,\sigma_{22}\left(r,0^{\pm}\right) \tag{3.31}$$

Τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων στο άκρο της ρωγμής γράφονται τότε ως

$$\sigma_{\alpha\beta}(r,\theta)=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\,f^I_{\alpha\beta}(\theta;\nu)+\sigma_{ox}\left(\alpha_L^2-\alpha_T^2\right)\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 1}+\ldots \tag{3.32α}$$

$$u_\alpha(r,\theta)=\frac{K_I\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}}\,g^I_\alpha(\theta;\nu)+\ldots \tag{3.32β}$$

Στην παραπάνω έκφραση συμπεριλάβαμε τους όρους n=1,2 για τις τάσεις και n=1 για τις μετατοπίσεις. Ο όρος n=2 συνεπάγεται την ύπαρξη ενός στοιχείου των τάσεων παράλληλο με την ρωγμή, συμβολίζεται με σ_{ox} στα πειραματικά αποτελέσματα και ονομάζεται T-stress στην βιβλιογραφία των ψευδοστατικών ρωγμών. Οι συναρτήσεις $f^I_{\alpha\beta}(\theta;\nu)$ δίνονται παρακάτω

$$f^I_{11}(r,\theta)=\frac{1}{R(\nu)}\left\{\left(1+\alpha_T^2\right)\left(1+2\alpha_L^2-\alpha_T^2\right)\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\theta_L\right)}{\gamma_L^{1/2}}-\alpha_L\alpha_T\,\frac{1}{\gamma_T^{1/2}}\cos\left(\frac{1}{2}\theta_T\right)\right\} \tag{3.33α}$$

$$f^I_{22}(r,\theta)=\frac{1}{R(\nu)}\left\{-\left(1+\alpha_T^2\right)\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\theta_L\right)}{\gamma_L^{1/2}}+4\alpha_L\alpha_T\,\frac{1}{\gamma_T^{1/2}}\cos\left(\frac{1}{2}\theta_T\right)\right\} \tag{3.33β}$$

$$f^I_{12}(r,\theta)=\frac{2\alpha_L\left(1+\alpha_T^2\right)}{R(\nu)}\left\{\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\theta_L\right)}{\gamma_L^{1/2}}-\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\theta_T\right)}{\gamma_T^{1/2}}\right\} \tag{3.33γ}$$

όπου θέτουμε

$$\gamma_L=\sqrt{1-\left(\frac{\nu\sin\theta}{v_L}\right)^2},\quad \gamma_T=\sqrt{1-\left(\frac{\nu\sin\theta}{v_T}\right)^2} \tag{3.34α,β}$$

$$\tan\theta_L=\alpha_L\tan\theta,\ \tan\theta_T=\alpha_T\tan\theta \tag{3.35α,β}$$

$$R(\nu)=4\alpha_L\alpha_T-\left(1+\alpha_T^2\right)^2 \tag{3.36}$$

ενώ οι μετατοπίσεις για n=1 είναι

$$u_1\left(r,\theta\right)=\frac{2K_I}{\mu R\left(v\right)\sqrt{2\pi}}\left\{\left(1+\alpha_T^2\right)r_L^{1/2}\cos\left(\frac{\theta_L}{2}\right)-2\alpha_L\alpha_T r_T^{1/2}\cos\left(\frac{\theta_T}{2}\right)\right\} \quad (3.37α)$$

$$u_2\left(r,\theta\right)=\frac{2\alpha_L K_I}{\mu R\left(v\right)\sqrt{2\pi}}\left\{\left(1+\alpha_T^2\right)r_L^{1/2}\sin\left(\frac{\theta_L}{2}\right)-r_T^{1/2}\sin\left(\frac{\theta_T}{2}\right)\right\} \quad (3.37β)$$

(Ravi-Chandar, 2004)

Χρειάζεται να αναφερθεί ότι σε ρωγμή τύπου I το πεδίο κοντά στο άκρο της ρωγμής για ανομοιόμορφη διάδοσή της περιλαμβάνει την κίνηση του άκρου της μόνο μέσω της στιγμιαίας ταχύτητάς *v(t)*. Άμεση συνέπεια αυτού είναι το γεγονός ότι κοντά στο άκρο της ρωγμής η ανομοιόμορφη κίνησή της ταυτίζεται με εκείνη της σταθερής διάδοσης στο ίδιο υλικό, τουλάχιστον για τις μονότιμες και τοπικά ομοιόμορφες κατανομές. Η διαπίστωση αυτή παρουσιάστηκε από τους Freund και Clifton, Nilsson, Achenbach και Bazant, καθένας από τους οποίους σύγκρινε τις ασυμπτωτικές λύσεις ανομοιόμορφης διάδοσης ρωγμής με προηγούμενα αποτελέσματα των Cotterell, Rice και Sih, οι οποίοι είχαν λάβει την υπόθεση σταθερής διάδοσης ρωγμής (Freund, 1990).

3.2.3 Συνεπίπεδος διατμητικός τύπος II

Τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων που περιγράφουν την διάδοση ρωγμής τύπου II με σταθερή ταχύτητα *v* μπορούν να προσδιορισθούν με παρόμοιο τρόπο με εκείνο της υποενότητας 3.2.2 (Ravi-Chandar, 2004). Αν αξιοποιηθούν οι αντισυμμετρικές λύσεις της εξίσωσης (3.21)

$$\varphi\left(r_L,\theta_L\right)=Ar_L^{\lambda}\sin\left(\lambda\theta_L\right) \quad (3.38α)$$

$$\psi\left(r_T,\theta_T\right)=Br_T^{\lambda}\sin\left(\lambda\theta_T\right) \quad (3.38β)$$

και ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία με την υποενότητα 3.2.2 τότε μπορούν να προσδιορισθούν τα πεδία τάσεων και παραμορφώσεων. Έχουμε λοιπόν

$$\sigma_{11}^{n}\left(r,\theta\right)=\frac{\mu A_n}{\left(1+\alpha_T^2\right)}\frac{n}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right)\left\{\left(1+\alpha_T^2\right)\left(1+2\alpha_L^2-\alpha_T^2\right)r_L^{(n/2)-1}\times\sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_L\right)-\kappa\left(n\right)r_T^{(n/2)-1}\sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_T\right)\right\}$$

(3.39α)

$$\sigma_{22}^{n}\left(r,\theta\right)=\frac{\mu A_n}{\left(1+\alpha_T^2\right)}\frac{n}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right)\left\{-\left(1+\alpha_T^2\right)^2 r_L^{(n/2)-1}\sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_L\right)+\kappa\left(n\right)r_T^{(n/2)-1}\sin\left(\frac{n-2}{2}\theta_T\right)\right\}$$

(3.39β)

$$\sigma_{12}^{n}\left(r,\theta\right)=\frac{\mu A_n}{2\alpha_T}\frac{n}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right)\left\{4\alpha_L\alpha_T r_d^{(n/2)-1}\cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_L\right)-\kappa\left(n\right)r_T^{(n/2)-1}\cos\left(\frac{n-2}{2}\theta_T\right)\right\} \qquad (3.39\gamma)$$

όπου θέτουμε

$$\kappa\left(n\right)=\begin{cases}4\alpha_L\alpha_T, n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \\ \left(1+\alpha_T^2\right)^2, n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\end{cases} \qquad (3.40)$$

ενώ οι μετατοπίσεις είναι

$$u_1^n\left(r,\theta\right)=A_n\left(1+\frac{n}{2}\right)\left\{r_L^{n/2}\sin\left(\frac{n\theta_L}{2}\right)-\chi_1\left(n\right)r_T^{n/2}\sin\left(\frac{n\theta_T}{2}\right)\right\} \qquad (3.41\alpha)$$

$$u_2^n\left(r,\theta\right)=\alpha_L A_n\left(1+\frac{n}{2}\right)\left\{r_L^{n/2}\sin\left(\frac{n\theta_L}{2}\right)-\chi_2\left(n\right)r_T^{n/2}\sin\left(\frac{n\theta_T}{2}\right)\right\} \qquad (3.41\beta)$$

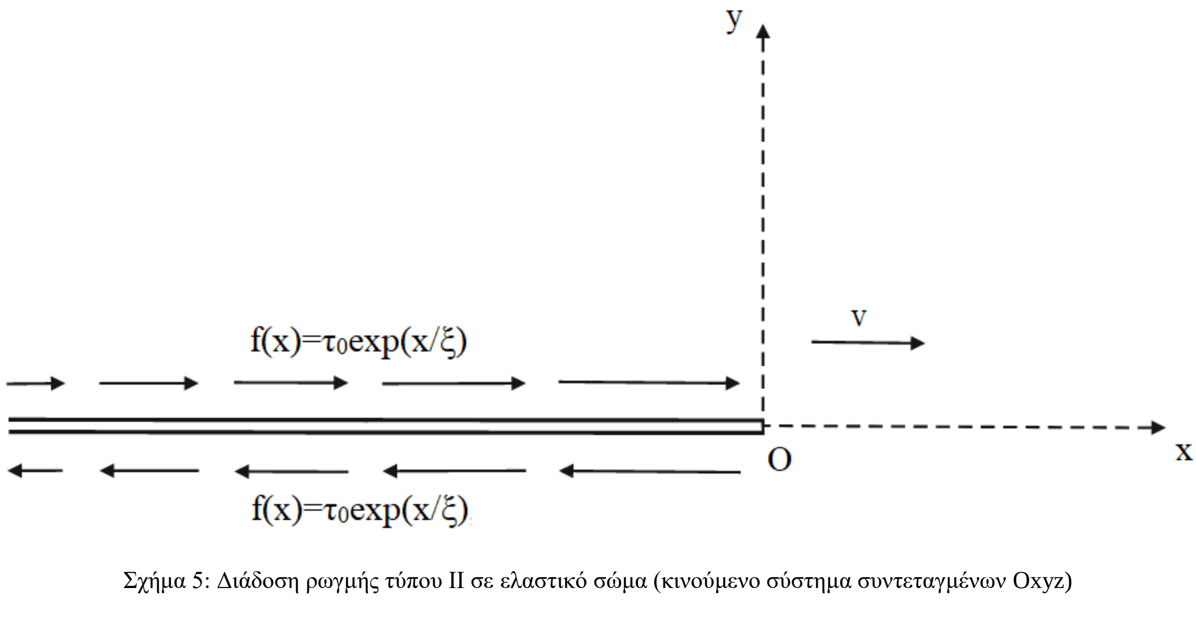
Ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων τύπου ΙΙ μπορεί να ορισθεί κατ' αναλογία με τον ορισμό του ψευδοστατικού προβλήματος, συνεπώς

$$K_{II}=\lim_{\xi_1\to 0}\sqrt{2\pi\xi_1}\,\sigma_{12}\left(r,0^{\pm}\right) \qquad (3.42)$$

Κεφάλαιο 4: Λύση Προβλήματος Ελαστικότητας Κινούμενης Ρωγμής

4.1 Διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό μέσο σε μορφή ημι-χώρου z≥0. Στην επιφάνεια του ημι-χώρου διαδίδεται ρωγμή τύπου II (in-plane shearing) με σταθερή ταχύτητα v (διάστασης (μήκος) (δευτερόλεπτα)$^{-1}$), η οποία βρίσκεται στο υποηχητικό (subsonic) εύρος τιμών, με αποτέλεσμα να ισχύει ότι $v < v_T < v_L$, όπου v_T η ταχύτητα διάδοσης εγκαρσίων (S) κυμάτων και v_L η ταχύτητα διάδοσης διαμηκών (P) κυμάτων. Στα χείλη της ρωγμής εφαρμόζονται φορτία με εκθετική μείωση ως προς το άκρο της σε μορφή $f(x) = \tau_0 \exp(x/\xi)$, όπου ξ η παράμετρος φορτίσεως με διαστάσεις μήκους, όπως το x. Σε περίπτωση που εφαρμοσθούν σταθερά, ομοιόμορφα κατανεμημένα φορτία κατά μήκος των χειλών της ρωγμής θα εμφανισθεί μη-φραγμένη συμπεριφορά στην λύση του προβλήματος, εφόσον η ημι-άπειρη ρωγμή διαδίδεται σε σώμα άπειρης έκτασης. Το μέσο υπακούει στους νόμους της Ελαστοδυναμικής, ενώ το πρόβλημα θα μελετηθεί υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης μόνο για y≥0, λόγω αντισυμμετρικότητας της ρωγμής ως προς τον άξονα x.



Σχήμα 5: Διάδοση ρωγμής τύπου II σε ελαστικό σώμα (κινούμενο σύστημα συντεταγμένων Oxyz)

Οι εξισώσεις κίνησης για ένα σταθερό (ακίνητο) σύστημα συντεταγμένων $O'x_1x_2x_3$ είναι

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu) u_{j,ji} + f_i = \rho \ddot{u}_i \tag{4.1}$$

ενώ ο νόμος του Hooke στην περίπτωση γραμμικής ελαστικότητας για ομογενές και ισότροπο παραμορφώσιμο σώμα είναι (βλέπε κεφάλαιο 1)

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{4.2}$$

Αρχικά ορίζουμε τους αριθμούς Mach μέσω των ταχυτήτων διάδοσης διαμηκών και εγκαρσίων κυμάτων $v_L = \left[(\lambda + 2\mu)/\rho \right]^{1/2}$ και $v_{\mathrm{T}} = (\mu/\rho)^{1/2}$ αντίστοιχα ως

$$c \equiv M_L = \frac{v}{v_L}, \quad mc \equiv M_T = \frac{v}{v_T}, \quad m = \frac{v_L}{v_T} = \frac{M_T}{M_L} \tag{4.3α,β,γ}$$

με αποτέλεσμα στην subsonic περιοχή ταχυτήτων να ισχύει ότι $M_T < M_L < 1$ (Fung, 1965).

Στην συνέχεια εισάγουμε την υπόθεση σταθερής κατάστασης (steady-state), σύμφωνα με την οποία αν η ρωγμή κινείται με σταθερή ταχύτητα για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα τότε σχηματίζεται στο μέσο ένα σταθερό πεδίο τάσεων και μετατοπίσεων ως προς παρατηρητή ο οποίος κινείται μαζί με το άκρο της ρωγμής (Fung, 1965) (Lykotrafitis & Georgiadis, 2003). Με τον τρόπο αυτό οποιοδήποτε φαινόμενο παροδικού τύπου κατά το ξεκίνημα διάδοσης της ρωγμής μπορεί να αγνοηθεί, με αποτέλεσμα να διευκολύνεται η ανάλυση του μελετώμενου προβλήματος. Επίσης, εισάγοντας τον μετασχηματισμό Γαλιλαίου

$$x = x_1 - vt, \quad y = x_2, \quad z = x_3 \tag{4.4α,β,γ}$$

οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος ανεξαρτητοποιούνται από τον χρόνο, ενώ οι μεταβλητές (x_1, t) εισάγονται μόνο μέσω του συνδυασμού $(x_1 - vt)$. Στο νέο (κινούμενο) καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$ οι μερικές παράγωγοι ως προς τον χρόνο t παραλείπονται $\left((\partial/\partial t)_{\kappa\iota\nu} \equiv 0 \right)$, με αποτέλεσμα οι εξισώσεις (4.1) και (4.2) να γίνουν

$$\nabla^2 u_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left[\left(\frac{M_T}{M_L} \right)^2 - 1 \right] \Delta \right] - \mathrm{M}_T^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0 \tag{4.5α}$$

$$\nabla^2 u_y + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 - 1\right]\Delta\right] - M_T^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0 \tag{4.5β}$$

όπου

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{ο δι-διάστατος τελεστής Laplace} \tag{4.6α}$$

$$\Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \text{η διαστολή του όγκου ως προς το } Oxyz \tag{4.6β}$$

και

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_y}{\partial y} \Rightarrow \frac{1}{\mu}\sigma_{xx} = \left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2\frac{\partial u_x}{\partial x} + \left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 - 2\right]\frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{4.7α}$$

$$\sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x} \Rightarrow \frac{1}{\mu}\sigma_{yy} = \left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2\frac{\partial u_y}{\partial y} + \left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 - 2\right]\frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{4.7β}$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{1}{\mu}\tau_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{4.7γ}$$

ενώ οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν διανυσματικά ως

$$\nabla^2\mathbf{u} + \left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 - 1\right]\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - M_T^2\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x^2} = 0 \tag{4.8α}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla) + \mu\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 - 2\right](\nabla\cdot\mathbf{u}) \tag{4.8β}$$

Εξαιτίας της ανεξαρτητοποίησης του προβλήματος από τον χρόνο δεν εμφανίζονται αρχικές συνθήκες, ενώ ο μετασχηματισμός Γαλιλαίου δίνει τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες

$$\sigma_{yy}\left(x, y = 0^+\right) = 0, -\infty < x < +\infty \tag{4.9α}$$

$$\sigma_{xy}\left(x, y = 0^+\right) = \sigma_+(x) - f(x)H(-x), -\infty < x < +\infty \tag{4.9β}$$

$$u_x\left(x, y=0^-\right)=u_-\left(x\right), -\infty < x < +\infty \tag{4.9γ}$$

όπου

$$u_-\left(x\right)=\begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ u\left(x\right), & x < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \sigma_+\left(x\right)=\begin{cases} \sigma\left(x\right), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{4.10α,β}$$

και $\mathrm{H}\left(\mathrm{x}\right)$ η συνάρτηση Heaviside.

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών που αποτελείται από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις (4.8α,β) και τις συνοριακές συνθήκες (4.9α,β,γ,δ) για $-\infty < x < +\infty, y \geq 0$.

4.2 Εφαρμογή μετασχηματισμού Laplace και πλήρης μετασχηματισμένη λύση

Για την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών θα εφαρμόσουμε τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace ως προς την μεταβλητή *x* (Carrier et al., 1966) (Van der Pol & Bremmer, 1950). Το ζεύγος μετασχηματισμού (ευθύς και αντίστροφος) ορίζεται ως εξής

$$F(p, y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-px} dx \tag{4.11α}$$

$$f\left(x, y\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br} F\left(p, y\right) e^{px} dp \tag{4.11β}$$

όπου Br η διαδρομή ολοκληρώσεως Bromwich, η οποία είναι μία ευθεία παράλληλη στον άξονα των φανταστικών αριθμών και βρίσκεται εντός της περιοχής αναλυτικότητας της συνάρτησης $F\left(p, y\right)$ στο μιγαδικό p-επίπεδο.

Επίσης για τον μετασχηματισμό Laplace ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}f(x,y)\right)e^{-px}dx = p^n F(p,y) \tag{4.12α}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^n}{\partial y^n}f(x,y)\right)e^{-px}dx = \frac{d^n}{dy^n}F(p,y) \tag{4.12β}$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στις σχέσεις (4.5α,β) και (4.7α,β,γ) έχουμε

$$\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2\frac{d^2U_y}{dy^2}+\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-1\right]p\frac{dU_x}{dy}-\left(1-M_T^2\right)p^2U_y=0 \tag{4.13α}$$

$$\frac{d^2U_x}{dy^2}+\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-1\right]p\frac{dU_y}{dy}+p^2\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2\left(1-M_L^2\right)U_x=0 \tag{4.13β}$$

και

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{xx}=\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2pU_x+\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-2\right]\frac{dU_y}{dy} \tag{4.14α}$$

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{yy}=\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-2\right]pU_x+\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2\frac{dU_y}{dy} \tag{4.14β}$$

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{xy}=\frac{dU_x}{dy}+pU_y \tag{4.14γ}$$

Θέτουμε λοιπόν $d^n = d^n/dy^n, n\in\mathbb{N}$ και καταλήγουμε στο σύστημα από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{pmatrix} d^2+\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2\left(1-M_L{}^2\right)p^2 & \left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-1\right]pd \\ \left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-1\right]pd & \left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2d^2+\left(1-M_T{}^2\right)p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_x\\U_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow C\begin{pmatrix}U_x\\U_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{4.15}$$

όπου $U_x = U_x\left(p, y\right), U_y = U_y\left(p, y\right)$

και

$$C = \begin{pmatrix} d^2 + \left(\dfrac{M_T}{M_L}\right)^2 \left(1 - {M_L}^2\right) p^2 & \left[\left(\dfrac{M_T}{M_L}\right)^2 - 1\right] pd \\ \left[\left(\dfrac{M_T}{M_L}\right)^2 - 1\right] pd & \left(\dfrac{M_T}{M_L}\right)^2 d^2 + \left(1 - {M_T}^2\right) p^2 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Για την επίλυση του προβλήματος διαφορικών εξισώσεων θα εφαρμοσθεί η συμβολική μέθοδος (Τραχανάς, 1995), σύμφωνα με την οποία θέτουμε την ορίζουσα του πίνακα συντελεστών των αγνώστων $\det\left(C\right)$ ίση με το μηδέν, ενώ αντιμετωπίζουμε τους διαφορικούς τελεστές $d^n = d^n / dy^n, n \in \mathbb{N}$ ως συνήθεις μεταβλητές. Σε συνήθη αλγεβρικά συστήματα ο μηδενισμός της ορίζουσας του C αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη μη τετριμμένης, με άλλα λόγια διάφορης του μηδενός, λύσης για το σύστημα. Ωστόσο, στην περίπτωση διαφορικού συστήματος η $\det\left(C\right)$ αποτελεί διαφορικό τελεστή με τον μηδενισμό της να σημαίνει πως ένας μηδενικός τελεστής δρα στον χώρο που συνθέτουν οι ρίζες της. Οι ρίζες αυτές πρέπει να είναι πραγματικές εξαιτίας της συνθήκης ακτινοβολίας (radiation condition), με άλλα λόγια λόγω της απαίτησης η λύση του συστήματος στο άπειρο να είναι όχι μόνο φραγμένη, αλλά και μηδενιζόμενη. Συνεπώς οι λύσεις του συστήματος (4.15) είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των εκθετικών ριζών της εξίσωσης

$$\det\left(C\right) = 0 \tag{4.17}$$

Με βάση τα παραπάνω υπολογίζονται οι ρίζες της εξίσωσης (4.17)

$$d_{1,2} = \pm\left(1 - {M_L}^2\right)^{1/2} \left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2} = \pm\alpha \quad (4.18α)$$

$$d_{3,4} = \pm\left(1 - M_T^2\right)^{1/2} \left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2} = \pm b \quad (4.18β)$$

ενώ η γενική λύση του συστήματος είναι

$$U_x\left(p,y\right)=b_1\exp\left(-\alpha y\right)+b_2\exp\left(-by\right)+b_3\exp\left(\alpha y\right)+b_4\exp\left(by\right) \tag{4.19α}$$

$$U_y\left(p,y\right)=c_1\exp\left(-\alpha y\right)+c_2\exp\left(-by\right)+c_3\exp\left(\alpha y\right)+c_4\exp\left(by\right) \tag{4.19β}$$

Ωστόσο, λόγω του γεγονότος ότι η λύση του συστήματος (4.15) είναι φραγμένη (και μηδενιζόμενη) καθώς $y\to\infty$, καταλήγουμε στην παρακάτω γενική μετασχηματισμένη λύση του συστήματος

$$U_x\left(p,y\right)=b_1\exp\left(-\alpha y\right)+b_2\exp\left(-by\right) \tag{4.20α}$$

$$U_y\left(p,y\right)=c_1\exp\left(-\alpha y\right)+c_2\exp\left(-by\right) \tag{4.20β}$$

όπου

$$\alpha=\left(1-M_L{}^2\right)^{1/2}\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2} \tag{4.21α}$$

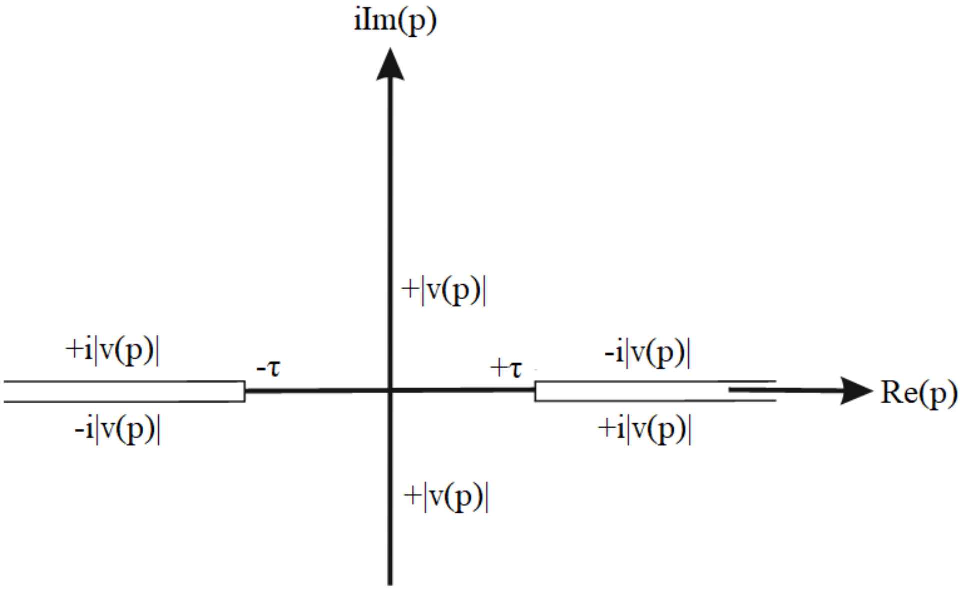
$$b=\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2} \tag{4.21β}$$

($\mathrm{Re}\left(\alpha\right)>0,\ \mathrm{Re}\left(b\right)>0$ λόγω του περιορισμού $y\geq 0$)

Παρατηρούμε ότι στις λύσεις της εξίσωσης (4.17) εισάγεται ο όρος $\left(-p^2\right)^{1/2}$, ο οποίος αποτελεί μία πλειότιμη μιγαδική συνάρτηση. Για να μπορέσουμε να ορίσουμε τις κλαδικές τομές των συναρτήσεων και να εκτελέσουμε τις αντιστροφές για την τελική λύση θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό $\tau>0$ τέτοιο ώστε $\tau\to 0$ και ορίζουμε την συνάρτηση

$$\nu(p)=\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2},\quad p\in\mathbb{C} \tag{4.22}$$

Η εισαγωγή του τ αποτελεί συνήθη τεχνική σε λύσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών (Carrier et al., 1966). Η $\nu(p)$ είναι μία πλειότιμη συνάρτηση με κλαδικά σημεία τα $p=\pm\tau$, τα οποία ορίζονται υπό την προϋπόθεση ότι το πραγματικό μέρος της συνάρτησης είναι θετικό στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή $\mathrm{Re}\left[\nu(p)\right]\geq 0$ (Watanabe, 2015).



Σχήμα 6: Κλαδικές τομές της συνάρτησης v(p)=$\left(\tau^2\text{-}p^2\right)^{1/2}$.

Παρατηρούμε ότι οι σταθερές c_i, b_i (i=1,2) δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, συνεπώς θα χρειαστεί να προσδιορίσουμε την σχέση των c_i ως προς τα b_i.

Από την 1η διαφορική εξίσωση του συστήματος (4.15) έχουμε

$$d^2U_x + \left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 \left(1 - M_L{}^2\right) p^2 U_x + \left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 - 1\right] pdU_y = 0 \qquad (4.23)$$

και με αντικατάσταση των μετασχηματισμένων γενικών λύσεων (4.20α,β) στην (4.23), εκτελώντας τις παραγωγίσεις και αναδιατάσσοντας τους όρους θα πάρουμε την παρακάτω εξίσωση

$$\exp\left(-\alpha y\right)\left[b_1\alpha^2 + b_1\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 \left(1 - M_L{}^2\right) p^2 - \left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 - 1\right] p\alpha c_1\right] +$$

$$+\exp\left(-by\right)\left[b_2 b^2 + b_2\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 p^2\left(1 - M_L{}^2\right) - \left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 - 1\right] pbc_2\right] = 0 \qquad (4.24)$$

Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται όταν οι συντελεστές των εκθετικών είναι ταυτοτικά ίσοι με το μηδέν. Άρα λαμβάνουμε τις παρακάτω σχέσεις μεταξύ των c_i, b_i

$$c_1 = -\frac{\alpha^2 + \left(M_T/M_L\right)^2 \left(1 - M_L{}^2\right) p^2}{\alpha\left[\left(M_T/M_L\right)^2 - 1\right] p} b_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{\alpha}{p} b_1 ,$$

$$c_2 = \frac{b^2 + \left(M_T/M_L\right)^2 p^2 \left(1 - M_L{}^2\right)}{\left[\left(M_T/M_L\right)^2 - 1\right] pb} b_2 \Rightarrow c_2 = \frac{p}{b} b_2 \qquad (4.25\alpha,\beta)$$

και η γενική μετασχηματισμένη λύση του προβλήματος γίνεται

$$U_x\left(p, y\right) = b_1 \exp\left(-\alpha y\right) + b_2 \exp\left(-by\right) \qquad (4.26\alpha)$$

$$U_y\left(p, y\right) = -\frac{\alpha}{p} b_1 \exp\left(-\alpha y\right) + \frac{p}{b} b_2 \exp\left(-by\right) \qquad (4.26\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις μετασχηματισμένες λύσεις των μετατοπίσεων στις σχέσεις (4.14α,β,γ) προκύπτουν οι μετασχηματισμένες τάσεις

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{xx} = -\frac{T'}{p} b_1 \exp\left(-\alpha y\right) + 2pb_2 \exp\left(-by\right) \qquad (4.27\alpha)$$

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{yy} = \frac{T}{p} b_1 \exp\left(-\alpha y\right) - 2pb_2 \exp\left(-by\right) \qquad (4.27\beta)$$

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{xy} = -2\alpha b_1 \exp\left(-\alpha y\right) - \frac{T}{b} b_2 \exp\left(-by\right) \qquad (4.27\gamma)$$

όπου $T' = 2\alpha^2 - M_T{}^2 p^2$ και $T = p^2\left(M_T^2 - 2\right)$ (4.28α,β)

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace στις συνοριακές συνθήκες (4.9α,β,γ) και αντικαθιστούμε τις μετασχηματισμένες λύσεις των τάσεων και των μετατοπίσεων

$$\Sigma_{yy}\left(p, y = 0^+\right) = 0 \Rightarrow \frac{T}{p} b_1 - 2pb_2 = 0 \qquad (4.29\alpha)$$

$$U_x\left(p, y=0^-\right)=U^-\left(p\right)\Rightarrow b_1+b_2=U^-\left(p\right) \tag{4.29β}$$

$$\Sigma_{xy}\left(p, y=0^+\right)=\Sigma^+\left(p\right)-\frac{\tau_0}{\left(1/\xi\right)-p}\Rightarrow -2\alpha b_1-\frac{T}{b}b_2=\frac{1}{\mu}\Sigma^+\left(p\right)-\frac{1}{\mu}\frac{\tau_0}{\left[\left(1/\xi\right)-p\right]} \tag{4.29γ}$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από τον μετασχηματισμό Laplace της βηματικής συνάρτησης Heaviside

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tau_0 e^{x/\xi}H\left(-x\right)e^{-px}dx=\int_0^{+\infty}\tau_0 e^{\left[p-(1/\xi)\right]x}dx=\left(\frac{\tau_0}{p-\left(1/\xi\right)}e^{\left[p-(1/\xi)\right]x}\right)_0^{\infty}=\frac{\tau_0}{\left(1/\xi\right)-p}, \ \mathrm{Re}\left(p\right)<\frac{1}{\xi} \tag{4.30}$$

ενώ οι συναρτήσεις $\Sigma^+\left(p\right)=\Sigma^+\left(p, y=0^+\right), U^-\left(p\right)=U^-\left(p, y=0^-\right)$ είναι αναλυτικές για $\mathrm{Re}\left(p\right)>0$ και $\mathrm{Re}\left(p\right)<0$ αντίστοιχα.

Λύνουμε τις σχέσεις (4.29α), (4.29β) ως προς b_1, b_2 και τα αντικαθιστούμε στην εξίσωση (4.29γ)

$$\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^+\left(p\right)-\frac{\tau_0}{\left(1/\xi\right)-p}\right]=-\left[\frac{4p^2\alpha}{T+2p^2}+\frac{T^2}{b\left(T+2p^2\right)}\right]U^-\left(p\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^+\left(p\right)-\frac{\tau_0}{\left(1/\xi\right)-p}\right]=-\frac{4p^2\alpha b+T^2}{b\left(T+2p^2\right)}U^-\left(p\right) \tag{4.31}$$

όπου θέτουμε

$$R_\alpha=T^2+4\alpha bp^2 \tag{4.32}$$

Στην συνέχεια αντικαθιστούμε τα α, b, T των σχέσεων (4.20α,β) και (4.28β) στην (4.31) και θεωρώντας ότι $\tau^2-p^2\approx -p^2,\left(\tau^2\ll p^2, \tau\rightarrow 0\right)$ έχουμε

$$\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}\left(p\right)-\frac{\tau_0}{\left(1/\xi\right)-p}\right]=-\frac{-4p^4\left(1-M_L{}^2\right)^{1/2}\left(1-M_T^2\right)^{1/2}+\left(M_T^2-2\right)^2 p^4}{\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}\left[\left(M_T^2-2\right)p^2+2p^2\right]}U^{-}\left(p\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}\left(p\right)-\frac{\tau_0}{\left(1/\xi\right)-p}\right]=-\frac{-4p^4\left(1-M_L{}^2\right)^{1/2}\left(1-M_T^2\right)^{1/2}+\left(M_T^2-2\right)^2 p^4}{\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}M_T^2p^2}U^{-}\left(p\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}\left(p\right)-\frac{\tau_0}{\left(1/\xi\right)-p}\right]=-\frac{\left[\left(M_T^2-2\right)^2-4\left(1-M_L{}^2\right)^{1/2}\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\right]p^2}{\left(1-M_T^2\right)^{1/2}M_T^2\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}}U^{-}\left(p\right) \qquad (4.33)$$

όπου θέτουμε

$$R=\left(M_T^2-2\right)^2-4\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(1-M_L{}^2\right)^{1/2} \qquad (4.34)$$

την συνάρτηση Rayleigh σταθερής κατάστασης (Rahman & Barber, 1995) (Brock & Georgiadis, 1997).

Αν θέσουμε v_R την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων Rayleigh, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση $R\left(v_R\right)=0$ (Eringen & Suhubi, 1975), τότε αντιλαμβανόμαστε από την συνάρτηση Rayleigh της σχέσης (4.34) ότι για $v<v_R$ έχουμε $R<0$, ενώ για $v>v_R$ έχουμε $R>0$ (Brock & Georgiadis, 1997). Για να εκτελέσουμε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace θα επικεντρωθούμε στην sub-Rayleigh περιοχή ταχυτήτων, με άλλα λόγια θα θεωρήσουμε ότι $v<v_R$,

Ορίζουμε λοιπόν την σταθερά

$$L=\frac{\mu R}{M_T^2\left(1-M_T^2\right)} \qquad (4.35)$$

και αντικαθιστούμε τις σχέσεις (4.34) και (4.35) στην εξίσωση (4.33)

$$\Sigma^{+}\left(p\right)+\frac{\tau_0}{p-\left(1/\xi\right)}=-L\frac{p^2}{\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}}U^{-}\left(p\right) \qquad (4.36)$$

Τέλος, γνωρίζοντας ότι $\tau \to 0$,

$$\frac{p^2}{\left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2}} \approx -\left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2}$$

η σχέση (4.36) γίνεται

$$\Sigma^+(p) + \frac{\tau_0}{p - (1/\xi)} = L\left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2} U^-(p) \tag{4.37}$$

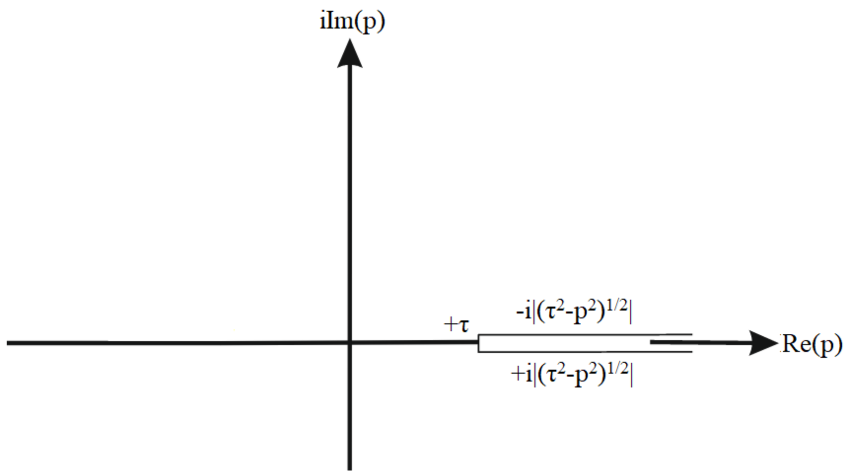
Στόχος μας λοιπόν είναι να εφαρμόσουμε την τεχνική Wiener-Hopf όπως περιγράφεται π.χ. από τον Achenbach (1973) για να επιλύσουμε την εξίσωση (4.37).

4.3 Εφαρμογή τεχνικής Wiener-Hopf και εύρεση τελικής μετασχηματισμένης λύσης

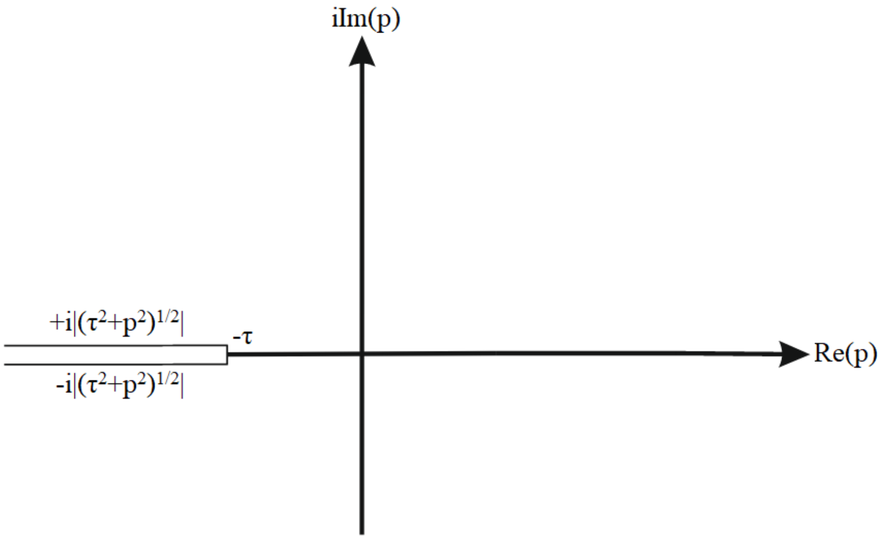
Αρχικά παραγοντοποιούμε τον όρο $\left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2}$ σε $\left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2} = \left(\tau - p\right)^{1/2}\left(\tau + p\right)^{1/2}$ (factorization), ώστε η σχέση (4.37) να μας δώσει

$$\frac{\Sigma^+(p)}{\left(\tau + p\right)^{1/2}} + \frac{\tau_0}{\left[p - (1/\xi)\right]\left(\tau + p\right)^{1/2}} = L\left(\tau - p\right)^{1/2} U^-(p) \tag{4.38}$$

ενώ δίνονται παρακάτω οι κλαδικές τομές των συναρτήσεων $\left(\tau - p\right)^{1/2}$ και $\left(\tau + p\right)^{1/2}$ (Watanabe, 2015)



Σχήμα 7: Κλαδική τομή συνάρτησης $(\tau\text{-}p)^{1/2}$



Σχήμα 8: Κλαδική τομή συνάρτησης $(\tau+p)^{1/2}$

Στην συνέχεια, μέσω διαχωρισμού (decomposition) του 2ου όρου του αριστερού μέρους της εξίσωσης (4.38) σε άθροισμα μερικώς αναλυτικών συναρτήσεων έχουμε

$$\frac{\tau_0}{\left[p-(1/\xi)\right]}\frac{1}{(\tau+p)^{1/2}}=K^+(p)+K^-(p) \tag{4.39}$$

όπου

$$K^+(p)=\frac{\tau_0}{p-(1/\xi)}\left[\frac{1}{(\tau+p)^{1/2}}-\frac{1}{(1/\xi)^{1/2}}\right],\quad K^-(p)=\frac{\tau_0}{\left[p-(1/\xi)\right](1/\xi)^{1/2}} \tag{4.40α,β}$$

Για να μπορέσουμε να αξιοποιήσουμε την τεχνική Weiner-Hopf θα πρέπει να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις $K^+(p)$, $K^-(p)$ είναι αναλυτικές για $\mathrm{Re}(p)>0$ και $\mathrm{Re}(p)<0$ αντίστοιχα. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $K^-(p)$ είναι αναλυτική για $\mathrm{Re}(p)<0$, εφόσον για κάθε $\mathrm{Re}(p)<0$ ισχύει ότι $p-(1/\xi)<0$. Άρα $K^-(p)\neq 0$ για $\mathrm{Re}(p)<0$, με αποτέλεσμα να μην εμφανίζει ιδιάζοντα σημεία και κλαδικές τομές στην περιοχή αυτή.

Όσον αφορά την συνάρτηση $K^+(p)$ καταλαβαίνουμε ότι δεν εμφανίζει κλαδικές τομές για $\mathrm{Re}(p)>0$. Παρατηρούμε ωστόσο ότι ο όρος $\tau_0/\left[p-(1/\xi)\right]$ μηδενίζεται για $p=1/\xi$, με αποτέλεσμα να σχηματίζεται πόλος στο σημείο αυτό. Ταυτόχρονα όμως για $p=1/\xi$ η αγκύλη

$\left[1/(\tau+p)\right]-\left[1/(1/\xi)^{1/2}\right]$ είναι ίση με το μηδέν (τ→0), με αποτέλεσμα να μηδενίζεται η $K^{+}(p)$ στο σημείο αυτό. Ως αποτέλεσμα απαλείφεται ο πόλος της συνάρτησης $K^{+}(p)$ και καθίσταται αναλυτική για $\operatorname{Re}(p)>0$.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις $K^{+}(p), K^{-}(p)$ στην εξίσωση (4.38)

$$\Sigma^{+}(p)\frac{1}{(\tau+p)^{1/2}}+K^{+}(p)=L(\tau-p)^{1/2}U^{-}(p)-K^{-}(p) \tag{4.41}$$

με αποτέλεσμα να θέτουμε τις συναρτήσεις

$$E^{+}(p)=\Sigma^{+}(p)\frac{1}{(\tau+p)^{1/2}}+K^{+}(p) \tag{4.42α}$$

$$E^{-}(p)=L(\tau-p)^{1/2}U^{-}(p)-K^{-}(p) \tag{4.42β}$$

οι οποίες είναι αναλυτικές για $\operatorname{Re}(p)>0$ και $\operatorname{Re}(p)<0$ αντίστοιχα, ενώ ταυτόχρονα είναι συνεχείς και ίσες μεταξύ τους για $\operatorname{Re}(p)=0$. Σύμφωνα με το θεώρημα συναρτησιακής ανάλυσης (theorem of functional analysis) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η $E^{+}(p)$ αποτελεί αναλυτική συνέχιση της $E^{-}(p)$ και το αντίστροφο, με αποτέλεσμα οι $E^{+}(p)$, $E^{-}(p)$ να αναπαριστούν την ίδια ακεραία, με άλλα λόγια αναλυτική σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο *p*, συνάρτηση *E(p)* (Achenbach, 1973).

Στο σημείο αυτό θα αξιοποιήσουμε το θεώρημα Liouville, σύμφωνα με το οποίο αν μία ακεραία συνάρτηση είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$ τότε αυτή είναι ίση με μία σταθερά (Σαραντόπουλος, 2017).

Παρατηρούμε ότι για $|p|\to\infty$

$$K^{+}(p)\to 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad K^{-}(p)\to 0 \tag{4.43α}$$

ενώ επιλέγουμε την κλασσική ελαστική περίπτωση ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των τάσεων και των μετατοπίσεων (Gourgiotis et al., 2012)

$$\sigma_{xy}\left(x,y=0\right)=O\left(x^{-1/2}\right),\quad x\to 0^{+} \tag{4.44α}$$

$$u_{x}\left(x,y=0\right)=O\left(x^{1/2}\right),\quad x\to 0^{-} \tag{4.44β}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Abel-Tauber ισχύει ότι $x^{\kappa}\overset{LT}{\leftrightarrow}\Gamma\left(\kappa+1\right)p^{-\kappa-1}$ $(\mu\varepsilon\,\kappa\neq-1,-2,-3,\ldots)$, όπου $\Gamma\left(\kappa+1\right)$ η συνάρτηση γάμμα, LT ο μετασχηματισμός Laplace και $\kappa>-1$ (Van der Pol & Bremmer, 1950). Από το θεώρημα αυτό παίρνουμε την εξής ασυμπτωτική συμπεριφορά της τάσης και της παραμόρφωσης στον μετασχηματισμένο χώρο

$$\Sigma^{+}\left(p\right)=O\left(p^{-1/2}\right),\ \left|p\right|\to\infty,\ \ \mathrm{Re}\left(p\right)>0 \tag{4.45α}$$

$$U^{-}\left(p\right)=O\left(p^{-3/2}\right),\ \left|p\right|\to\infty,\ \ \mathrm{Re}\left(p\right)<0 \tag{4.45β}$$

Από τα παραπάνω συμπεράσματα προκύπτει για $\left|p\right|\to\infty$ ότι

$$\left|E^{+}\left(p\right)\right|=\left|\Sigma^{+}\left(p\right)\frac{1}{\left(\tau+p\right)^{1/2}}+K^{+}\left(p\right)\right|\to 0 \tag{4.46α}$$

$$\left|E^{-}\left(p\right)\right|=\left|L\left(\tau-p\right)^{1/2}U^{-}\left(p\right)-K^{-}\left(p\right)\right|\to 0 \tag{4.46β}$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι $E^{+}\left(p\right)\to 0$ και $E^{-}\left(p\right)\to 0$ για $\left|p\right|\to\infty$. Με άλλα λόγια αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση *E(p)* είναι ακεραία και φραγμένη στο $\mathbb{C}$, επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Liouville είναι ίση με μία σταθερά. Στην προκειμένη περίπτωση, εφόσον οι συναρτήσεις $E^{+}(p)$, $E^{-}(p)$ τείνουν στο μηδέν για πολύ μεγάλες τιμές του *p*, η αναλυτική συνάρτηση *E(p)* θα είναι ίση με το μηδέν, με αποτέλεσμα

$$\Sigma^{+}(p)\frac{1}{(\tau+p)^{1/2}}+K^{+}(p)=0 \Rightarrow \Sigma^{+}(p,y=0)=\frac{\tau_0}{p-(1/\xi)}\left[\frac{(\tau+p)^{1/2}}{(1/\xi)^{1/2}}-1\right] \tag{4.47α}$$

και

$$L(\tau-p)^{1/2}U^{-}(p)-K^{-}(p)=0 \Rightarrow U^{-}(p,y=0)=\frac{\tau_0}{\left[p-(1/\xi)\right](1/\xi)^{1/2}}\frac{M_T^2\left(1-M_T^2\right)}{\mu R(\tau-p)^{1/2}} \tag{4.47β}$$

Παρατηρούμε ότι το πεδίο των τάσεων $\Sigma^{+}(p)$ συμφωνεί με την βιβλιογραφία όσον αφορά την διάδοση ρωγμών σε ελαστοδυναμικά μέσα (report Georgiadis & Lykotrafitis) (Willis, 1967).

4.4 Αντιστροφή μετασχηματισμένης λύσης και εύρεση συντελεστή εντάσεως των τάσεων

Στην προηγούμενη υποενότητα προσδιορίσαμε τα μετασχηματισμένα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων κοντά στο άκρο της ρωγμής. Μία μέθοδος για να υπολογίσουμε τις τάσεις και τις μετατοπίσεις στον χώρο των πραγματικών αριθμών είναι να εκτελέσουμε άμεσα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στις σχέσεις (4.47α) και (4.47β), όπως δίνεται από την εξίσωση (4.11β). Ωστόσο, λόγω της δυσκολίας του βήματος αυτού και του γεγονότος ότι επιθυμούμε να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των πεδίων αυτών κοντά στο άκρο της ρωγμής, επιλέγουμε να αξιοποιήσουμε το θεώρημα Abel-Tauber ώστε να οδηγηθούμε πίσω στον χώρο των πραγματικών αριθμών.

Αρχικά θα μελετήσουμε την συμπεριφορά του πεδίου τάσεων για $|p| \to \infty$. Από την έκφραση του πεδίου τάσεων (4.47α) μπορούμε να θεωρήσουμε για $|p| \to \infty$ ότι $p-(1/\xi) \approx p$, $(\tau+p)^{1/2} \approx p^{1/2}$, $p^{1/2}/(1/\xi)^{1/2} \gg 1$.

Επομένως η έκφραση του πεδίου τάσεων γίνεται

$$\Sigma^{+}(p,y=0)=\frac{\tau_0}{p-(1/\xi)}\left[\frac{(\tau+p)^{1/2}}{(1/\xi)^{1/2}}-1\right] \approx \frac{\tau_0}{p^{1/2}(1/\xi)^{1/2}} \tag{4.48}$$

από την οποία καταλαβαίνουμε ότι για $|p| \to \infty$ η συνάρτηση $\Sigma^{+}(\mathrm{p})$ παρουσιάζει συμπεριφορά της μορφής $p^{-1/2}$, με άλλα λόγια συμφωνεί με την σχέση (4.45α).

Αντίστοιχα θα μελετήσουμε την συμπεριφορά του πεδίου μετατοπίσεων για $|p| \to \infty$. Από την έκφραση του πεδίου μετατοπίσεων (4.47β) μπορούμε να θεωρήσουμε για $|p| \to \infty$ ότι $\left[p-(1/\xi)\right] >> p$ και $(\tau + p)^{1/2} \approx p^{1/2}$.

Επομένως η έκφραση του πεδίου μετατοπίσεων γίνεται

$$U^{-}(p, y=0) = \frac{\tau_0}{(1/\xi)^{1/2}} \frac{M_T^2\left(1-M_T^2\right)}{p^{3/2}\mu R} \tag{4.49}$$

από την οποία καταλαβαίνουμε ότι για $|p| \to \infty$ η συνάρτηση $U^{-}(p)$ παρουσιάζει συμπεριφορά της μορφής $p^{-3/2}$, με άλλα λόγια συμφωνεί με την σχέση (4.45β).

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να μεταβούμε από τις μετασχηματισμένες εκφράσεις των πεδίων των τάσεων και των μετατοπίσεων στον χώρο των πραγματικών αριθμών (Van der Pol & Bremmer, 1950). Στον μετασχηματισμένο μιγαδικό χώρο έχουμε

$$\lim_{|p|\to\infty} \Sigma^{+}(p, y=0) = \frac{\tau_0}{(1/\xi)^{1/2}} p^{-1/2} \tag{4.50α}$$

$$\lim_{|p|\to\infty} U^{-}(p, y=0) = \frac{\tau_0}{(1/\xi)^{1/2}} \frac{M_T^2\left(1-M_T^2\right)}{\mu R} p^{-3/2} \tag{4.50β}$$

Με αποτέλεσμα να λαμβάνουμε τα μετασχηματισμένα ασυμπτωτικά πεδία κοντά στο άκρο της ρωγμής

$$\lim_{|p|\to\infty} \Sigma_{xy}(p, y=0) = \lim_{|p|\to\infty}\left[\Sigma^{+}(p, y=0) + \frac{\tau_0}{p-(1/\xi)}\right] = \frac{\tau_0}{(1/\xi)^{1/2}} p^{-1/2} \tag{4.51α}$$

$$\lim_{|p|\to\infty} U_x(p, y=0) = \lim_{|p|\to\infty} U^{-}(p, y=0) = \frac{\tau_0}{(1/\xi)^{1/2}} \frac{M_T^2\left(1-M_T^2\right)}{\mu R} p^{-3/2} \tag{4.51β}$$

Συνεπώς, μέσω του θεωρήματος Abel-Tauber (Van der Pol & Bremmer, 1950) λαμβάνουμε τα εξής ασυμπτωτικά πεδία στον χώρο των πραγματικών αριθμών κοντά στο άκρο της ρωγμής

$$\lim_{x\to 0^+} \sigma_{xy}\left(x, y=0\right) = \frac{\tau_0}{\pi^{1/2}\left(1/\xi\right)^{1/2}} x^{-1/2} \tag{4.52α}$$

$$\lim_{x\to 0^-} u_x\left(x, y=0\right) = \frac{2\tau_0}{\pi^{1/2}\left(1/\xi\right)^{1/2}} \frac{M_T^2\left(1-M_T^2\right)}{\mu R}\left(-x\right)^{1/2} \tag{4.52β}$$

η ασυμπτωτική συμπεριφορά των οποίων συμφωνεί με εκείνες των σχέσεων (4.44α,β).

Τέλος, για την ολοκλήρωση της ανάλυσης του προβλήματος ελαστικότητας δίνεται ο Σ.Ε.Τ., ο οποίος σύμφωνα με το θεώρημα Abel-Tauber είναι ίσος με

$$K_{II} = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(2\pi x\right)^{1/2}\sigma_{xy}\right] \overset{Abel\text{-}Tauber}{\Leftrightarrow} K_{II} = \lim_{|p|\to\infty}\left[\frac{\left(2\pi\right)^{1/2} p^{1/2}}{\Gamma(1/2)}\Sigma_{xy}\left(p\right)\right]$$

$$\overset{(4.29\gamma)}{\Rightarrow} K_{II} = \lim_{|p|\to\infty}\left[\frac{\left(2\pi\right)^{1/2} p^{1/2}}{\pi^{1/2}}\left(\Sigma^+\left(p\right)+\frac{\tau_0}{p-\left(1/\xi\right)}\right)\right]$$

$$\Rightarrow K_{II} = \lim_{|p|\to\infty}\left[\frac{\tau_0\left(2p\right)^{1/2}}{p-\left(1/\xi\right)}\left(\frac{\left(\tau+p\right)^{1/2}}{\left(1/\xi\right)^{1/2}}-1\right)+\frac{\tau_0\left(2p\right)^{1/2}}{p-\left(1/\xi\right)}\right]$$

$$\Rightarrow K_{II} = \lim_{|p|\to\infty}\left[\frac{\tau_0}{\left(1/\xi\right)^{1/2}}\frac{\left(2p\right)^{1/2}\left(\tau+p\right)^{1/2}}{\left[p-\left(1/\xi\right)\right]}\right]$$

$$\Rightarrow K_{II} = \tau_0\left[\frac{2}{\left(1/\xi\right)}\right]^{1/2} \Rightarrow K_{II} = \tau_0\left(2\xi\right)^{1/2} \tag{4.53}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα συμφωνεί με την βιβλιογραφία (report Georgiadis & Lykotrafitis). Καταλαβαίνουμε λοιπόν ο συντελεστής έντασης τάσεων για την περίπτωση διάδοσης ρωγμής σε καθαρά ελαστικό μέσο είναι ίσος με μία σταθερά, η οποία είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα διάδοσης της ρωγμής. Το αποτέλεσμα αυτό ταυτίζεται με τον συντελεστή έντασης τάσεων για την περίπτωση στατικής ρωγμής τύπου ΙΙ με την ίδια κατανομή φορτίων στα χείλη της (Gourgiotis et al., 2012), γεγονός το οποίο είναι αναμενόμενο για την μελέτη του φαινομένου υπό σταθερή κατάσταση. Από την άλλη μεριά ο Freund (1998) ασχολήθηκε με την περίπτωση εφαρμογής συγκεντρωμένου φορτίου σε ρωγμή τύπου ΙΙ, η οποία αποτελεί μία ειδική περίπτωση του προβλήματος που αναλύθηκε στο κεφάλαιο αυτό. Αν θεωρήσουμε την λύση για τον Σ.Ε.Τ. που δίνεται από τον Freund

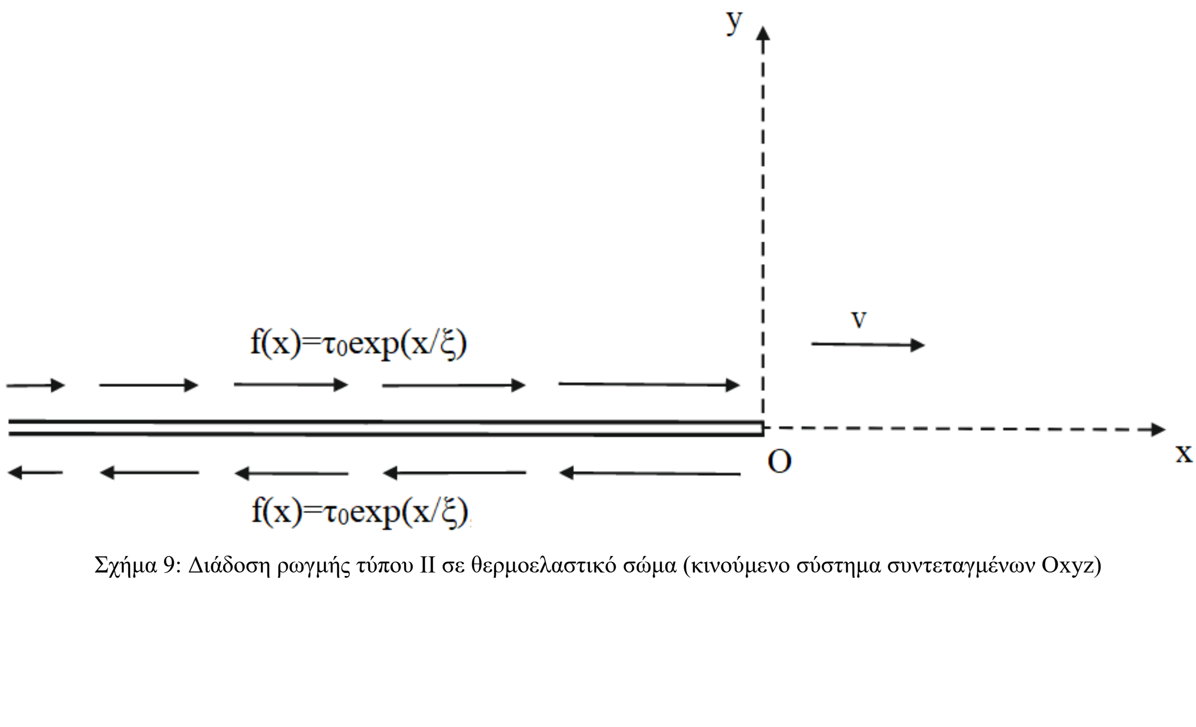
$$K_{II} = \tau_0 \int_{-\infty}^{0} e^{(1/\xi)x} \left(-\frac{2}{\pi x} \right) dx = \tau_0 (2\xi)^{1/2} \tag{4.54}$$

λαμβάνουμε το ίδιο αποτέλεσμα με τον Σ.Ε.Τ. της σχέσης (4.53) για κατανεμημένο φορτίο στα χείλη της ρωγμής.

Κεφάλαιο 5: Επίλυση του Θερμοελαστικού Προβλήματος Κινούμενης Ρωγμής

5.1 Διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε ομογενές, ισότροπο και θερμοελαστικό μέσο σε μορφή ημι-χώρου $z \geq 0$. Στην επιφάνεια του ημι-χώρου διαδίδεται ρωγμή τύπου ΙΙ (in-plane shearing) με σταθερή ταχύτητα *v*, η οποία βρίσκεται στο υποηχητικό (subsonic) εύρος τιμών, με αποτέλεσμα να ισχύει ότι $v < v_T < v_L$. Στα χείλη της ρωγμής εφαρμόζονται φορτία με εκθετική μείωση από το άκρο της σε μορφή $f(x) = \tau_0 \exp(x/\xi)$, όπου ξ η παράμετρος φορτίσεως με διαστάσεις μήκους. Σε περίπτωση που εφαρμοσθούν σταθερά, ομοιόμορφα κατανεμημένα φορτία κατά μήκος των χειλών της ρωγμής θα εμφανισθεί μη-φραγμένη συμπεριφορά στην λύση του προβλήματος, εφόσον η ημι-άπειρη ρωγμή διαδίδεται σε σώμα άπειρης έκτασης. Το μέσο υπακούει στους νόμους της Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας, ενώ το πρόβλημα θα μελετηθεί υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης μόνο για $y \geq 0$, λόγω αντισυμμετρικότητας της ρωγμής ως προς τον άξονα *x*. Με άλλα λόγια θα επιλυθεί το ίδιο πρόβλημα με εκείνο του 4^{ου} κεφαλαίου, με μοναδική διαφορά ότι θα συμπεριληφθεί η σύζευξη μεταξύ των μηχανικών παραμορφώσεων και του θερμοκρασιακού πεδίου του μέσου κατά την μελέτη του φαινομένου.



Σχήμα 9: Διάδοση ρωγμής τύπου ΙΙ σε θερμοελαστικό σώμα (κινούμενο σύστημα συντεταγμένων Oxyz)

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα για ακίνητο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $\mathrm{O}'x_1x_2x_3$ σύμφωνα με την Θεωρία Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας δίνονται παρακάτω. Συγκεκριμένα, με βάση το σταθερό σύστημα συντεταγμένων οι σχέσεις μεταξύ τάσεων-παραμορφώσεων (νόμος Duhamel-Neumann), ο νόμος Fourier, οι εξισώσεις κίνησης (θερμοελαστικές εξισώσεις Navier-Cauchy) και η γενικευμένη εξίσωση μετάδοσης θερμότητας χωρίς την ύπαρξη καθολικών δυνάμεων είναι (βλέπε κεφάλαιο 2)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu\left(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\right) + \lambda\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right)\mathbf{1} - \kappa_0\left(3\lambda + 2\mu\right)\theta\mathbf{1} \tag{5.1α}$$

$$\mathbf{q} = -K\nabla\theta \tag{5.1β}$$

$$\mu\nabla^2 u + \left(\lambda + \mu\right)\nabla\left(\nabla\cdot u\right) - \kappa_0\left(3\lambda + 2\mu\right)\nabla\theta = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{5.1γ}$$

$$K\nabla^2\theta - \rho c_v\frac{\partial\theta}{\partial t} - \kappa_0\left(3\lambda + 2\mu\right)\mathrm{T}_0\frac{\partial\left(\nabla\cdot u\right)}{\partial t} = 0 \tag{5.1δ}$$

όπου

θ=T-T_0: μεταβολή θερμοκρασίας με διαστάσεις (°C)

q: θερμική ροή με διαστάσεις (ισχύος) (μονάδα επιφάνειας)$^{-1}$

κ_0: συντελεστής θερμικής διαστολής με διαστάσεις (°C)$^{-1}$

ρ: πυκνότητα στερεού με διαστάσεις (μονάδας μάζας) (μονάδα όγκου)$^{-1}$

(λ, μ): σταθερές Lamé με διαστάσεις (δύναμης) (μονάδα επιφάνειας)$^{-1}$

c_v: ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο με διαστάσεις (ενέργειας) (μονάδα μάζας)$^{-1}$ (°C)$^{-1}$

K: θερμική αγωγιμότητα με διαστάσεις (ισχύος) (μονάδα μήκους)$^{-1}$ (°C)$^{-1}$

$\mathbf{1}$: μοναδιαίο μητρώο

Όπως και στο κεφάλαιο 4 εισάγουμε την υπόθεση σταθερής κατάστασης (steady-state), σύμφωνα με την οποία αν η ρωγμή κινείται με σταθερή ταχύτητα για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα τότε σχηματίζεται στο μέσο ένα σταθερό πεδίο τάσεων και μετατοπίσεων ως προς παρατηρητή ο οποίος κινείται μαζί με το άκρο της ρωγμής (Fung, 1965) (Lykotrafitis &

Georgiadis, 2003). Με τον τρόπο αυτό αγνοούνται τα αρχικά φαινόμενα παροδικού τύπου κατά την διάδοση της ρωγμής, οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος ανεξαρτητοποιούνται από τον χρόνο και οι μεταβλητές (x_1, t) εισάγονται μόνο μέσω του συνδυασμού $(x_1 - vt)$. Εφαρμόζουμε λοιπόν τον μετασχηματισμό Γαλιλαίου στις σχέσεις (5.1α)-(5.1δ) όπως δίνεται από τις σχέσεις (4.4α,β,γ) του προηγούμενου κεφαλαίου και λαμβάνουμε τις παρακάτω εξισώσεις για το κινούμενο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς *Oxyz*

$$\mathbf{q} = -K\nabla\theta \tag{5.2α}$$

$$\nabla^2\mathbf{u} + \left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 - 1\right]\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \kappa\nabla\theta - M_T^2\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x^2} = 0 \tag{5.2β}$$

$$\frac{K}{\mu}\nabla^2\theta + \frac{M_T}{v_T}c_V\frac{\partial\theta}{\partial x} - \kappa T_0 M_L v_L\frac{\partial(\nabla\cdot\mathbf{u})}{\partial x} = 0 \tag{5.2γ}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla) + \mu\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 - 2\right](\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mu\kappa\theta\mathbf{1} \tag{5.2δ}$$

όπου κ ο κανονικοποιημένος συντελεστής θερμικής διαστολής

$$\kappa = -\kappa_0\left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\mu}\right) = \kappa_0\left[4 - 3\left(\frac{v_L}{v_T}\right)^2\right] = \kappa_0\left[4 - 3\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2\right] < 0 \tag{5.3}$$

Τονίζεται ότι το M_L δεν είναι ο αριθμός Mach των διαμηκών κυμάτων στα πλαίσια της Θεωρίας Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας. Επιλέγουμε να αξιοποιήσουμε στην ανάλυσή μας τον αριθμό Mach ελαστικών διαμηκών κυμάτων εφόσον εξυπηρετεί ως κανονικοποίηση των εξισώσεων πεδίου (Lykotrafitis & Georgiadis, 2003).

Εξαιτίας της ανεξαρτητοποίησης του προβλήματος από τον χρόνο δεν εμφανίζει αρχικές συνθήκες. Οι μηχανικές συνοριακές συνθήκες του θερμοελαστικού προβλήματος ταυτίζονται με εκείνες του καθαρά ελαστικού (σχέσεις (4.9α,β,γ) του 4ου κεφαλαίου), ενώ για τις θερμικές συνοριακές συνθήκες θεωρούμε ότι η θερμοκρασία του μέσου παραμένει αμετάβλητη κατά την διάδοση της ρωγμής, συνεπώς δεν εμφανίζεται θερμική ροή (q=0). Μπορούμε να θεωρήσουμε λοιπόν, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η θερμοκρασία του μέσου πίσω και μπροστά από το άκρο της ρωγμής είναι ίση με το μηδέν. Συνεπώς, οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος ύστερα από εφαρμογή του μετασχηματισμού Γαλιλαίου είναι

$$\sigma_{yy}\left(x, y=0^{+}\right)=0, -\infty<x<+\infty \tag{5.4α}$$

$$\sigma_{xy}\left(x, y=0^{+}\right)=\sigma_{+}(x)-f(x)H(-x), -\infty<x<+\infty \tag{5.4β}$$

$$u_{x}\left(x, y=0^{-}\right)=u_{-}(x), -\infty<x<+\infty \tag{5.4γ}$$

$$\theta\left(x, y=0^{+}\right)=0, -\infty<x<+\infty \tag{5.4δ}$$

όπου

$$u_{-}(x)=\begin{cases}0, & x\geq 0\\ u(x), & x<0\end{cases} \quad \text{και} \quad \sigma_{+}(x)=\begin{cases}\sigma(x), & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{5.5α,β}$$

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η επίλυση του γραμμικού συζευγμένου θερμοελαστικού προβλήματος συνοριακών τιμών, το οποίο αποτελείται από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις (5.2α)-(5.2δ) και τις συνοριακές συνθήκες (5.4α)-(5.4δ) ως προς για $-\infty<x<+\infty, y\geq 0$.

5.2 Εφαρμογή μετασχηματισμού Laplace και πλήρης μετασχηματισμένη λύση

Για την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών θα εφαρμόσουμε τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace ως προς την μεταβλητή x (Carrier et al., 1966) (Van der Pol & Bremmer, 1950). Εφαρμόζοντας λοιπόν τις σχέσεις (4.11α,β) και τις ιδιότητες (4.12α,β) στις σχέσεις (5.2α)-(5.2δ) οδηγούμαστε στις εξής εξισώσεις:

Από την σχέση (5.2β) έχουμε

$$p^{2}\left(\frac{M_{T}}{M_{L}}\right)^{2}\left(1-M_{L}{}^{2}\right)U_{x}+\frac{d^{2}U_{x}}{dy^{2}}+\left[\left(\frac{M_{T}}{M_{L}}\right)^{2}-1\right]p\frac{dU_{y}}{dy}+\kappa p\Theta=0 \tag{5.6α}$$

$$\left[\left(\frac{M_{T}}{M_{L}}\right)^{2}-1\right]p\frac{dU_{x}}{dy}+\left(1-M_{T}^{2}\right)p^{2}U_{y}+\left(\frac{M_{T}}{M_{L}}\right)^{2}\frac{d^{2}U_{y}}{dy^{2}}+\kappa\frac{d\Theta}{dy}=0 \tag{5.6β}$$

Από την σχέση (5.2γ)

$$\frac{K}{\mu}\left(p^2\Theta+\frac{d^2\Theta}{dy^2}\right)+\frac{M_T}{v_T}c_V\,p\Theta-\kappa\mathrm{T}_0M_Lv_Lp^2U_x-\kappa\mathrm{T}_0M_Lv_Lp\frac{dU_y}{dy}=0$$

$$\Rightarrow-\frac{\varepsilon}{h}p^2U_x-\frac{\varepsilon}{h}p\frac{dU_y}{dy}+\left(\frac{\mu\kappa M_L}{M_T{}^2}p^2+\frac{\mu\kappa M_L}{M_T{}^2}\frac{d^2}{dy^2}+\frac{\kappa\mu c_V M_L}{\mathrm{K}v_TM_T}p\right)\Theta=0$$

$$\Rightarrow-\frac{\varepsilon}{h}p^2U_x-\frac{\varepsilon}{h}p\frac{dU_y}{dy}+\frac{\kappa M_L}{M_T{}^2}\left(p^2+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{M_L}{h}p\right)\Theta=0 \tag{5.7}$$

όπου

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{T}_0\kappa^2v_T^2M_L^2}{c_vM_T{}^2},\quad h=\frac{KM_Lv_T}{\mu M_Tc_v} \tag{5.8α,β}$$

ο συντελεστής σύζευξης λόγω θερμοελαστικότητας (thermoelastic coupling constant) και το χαρακτηριστικό μήκος λόγω θερμοελαστικότητας (thermoelastic characteristic length) αντίστοιχα. Ο συντελεστής σύζευξης λόγω θερμοελαστικότητας είναι αδιάστατο μέγεθος της τάξης $\varepsilon=\mathrm{O}(10^{-2})$, ενώ το χαρακτηριστικό μήκος λόγω θερμοελαστικότητας έχει διαστάσεις μήκους της τάξης $h=\mathrm{O}(10^{-10})m$ (Brock & Georgiadis, 1997) (Lykotrafitis & Georgiadis, 2003).

Από την σχέση (5.2δ)

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{xx}=\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2pU_x+\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-2\right]\frac{dU_y}{dy}+\kappa\Theta \tag{5.9α}$$

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{yy}=\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-2\right]pU_x+\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2\frac{dU_y}{dy}+\kappa\Theta \tag{5.9β}$$

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{xy}=\frac{dU_x}{dy}+pU_y \tag{5.9γ}$$

Θέτουμε $d^n = d^n / dy^n, n \in \mathbb{N}$ και καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 \left(1 - M_L{}^2\right) p^2 + d^2 & \left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 - 1\right] pd & \kappa p \\ \left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 - 1\right] pd & \left(1 - M_T^2\right) p^2 + \left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 d^2 & \kappa d \\ -(\varepsilon/h)\, p^2 & -(\varepsilon/h)\, pd & \frac{M_L \kappa}{M_T^2}\left(p^2 + d^2 + \frac{M_L}{h} p\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ \Theta \end{pmatrix} = 0$$

(5.10)

όπου $U_x = U_x(p, y),\ U_y = U_y(p, y),\ \Theta = \Theta(p, y)$

Θεωρώντας λοιπόν ότι

$$C_\varepsilon = \begin{pmatrix} \left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 \left(1 - M_L{}^2\right) p^2 + d^2 & \left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 - 1\right] pd & \kappa p \\ \left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 - 1\right] pd & \left(1 - M_T^2\right) p^2 + \left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 d^2 & \kappa d \\ -(\varepsilon/h)\, p^2 & -(\varepsilon/h)\, pd & \frac{M_L \kappa}{M_T^2}\left(p^2 + d^2 + \frac{M_L}{h} p\right) \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων γίνεται

$$C_\varepsilon \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ \Theta \end{pmatrix} = 0 \tag{5.12}$$

Σύμφωνα με την βιβλιογραφία (Brock & Georgiadis, 1997) αν θεωρήσουμε ότι $\kappa \to 0$ (άρα $\varepsilon \to 0$) τότε προσεγγίζουμε το μη-θερμικό (καθαρά μηχανικό) πρόβλημα του προηγούμενου κεφαλαίου. Κατά την προσέγγιση του καθαρά ελαστικού προβλήματος θα πρέπει επίσης να μηδενίζεται και το χαρακτηριστικό μήκος θερμοελαστικότητας *h* (Αναγνώστου, 2005). Ωστόσο, παρατηρούμε ότι τα *ε, h* δεν προσεγγίζουν το 0 με την ίδια ταχύτητα, εφόσον το *ε* τείνει στην μηδενική τιμή όπως το *κ* και το *h* όπως το *K*. Επιπλέον, λόγω των προσεγγίσεων που λαμβάνουμε κατά την ανάλυση του προβλήματος, δεν μπορούμε να θέσουμε και τις δύο ποσότητες ίσες με το μηδέν ($\varepsilon = h = 0$) για να ελέγξουμε την συμπεριφορά της θερμοελαστικής λύσης στο όριο ελαστικότητας, εφόσον οδηγούμαστε σε λόγους της μορφής 0/0. Για τους παραπάνω λοιπόν λόγους, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το *h* είναι μία μικρή ποσότητα $\left(h = \mathrm{O}(10^{-10})m\right)$ η οποία μπορεί εύκολα να αγνοηθεί, επιλέγουμε κατά την μελέτη της οριακής μορφής του προβλήματος να μηδενίζεται μόνο ο συντελεστής σύζευξης *ε*. Θέτοντας λοιπόν στον πίνακα (5.11) $\kappa = \varepsilon = 0$ οδηγούμαστε στον

$$C_{\varepsilon \lim} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{M_T}{M_L}\right)^2 \left(1 - M_L{}^2\right) p^2 + d^2 & \left[\left(\dfrac{M_T}{M_L}\right)^2 - 1\right] pd \\ \left[\left(\dfrac{M_T}{M_L}\right)^2 - 1\right] pd & \left(1 - M_T{}^2\right) p^2 + \left(\dfrac{M_T}{M_L}\right)^2 d^2 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

ο οποίος ταυτίζεται με τον πίνακα (4.16) του κεφαλαίου 4.

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η επίλυση του προβλήματος διαφορικών εξισώσεων θα πραγματοποιηθεί μέσω της συμβολικής μεθόδου (Τραχανάς, 1995), σύμφωνα με την οποία θέτουμε την ορίζουσα του πίνακα συντελεστών των αγνώστων $\det\left(C_\varepsilon\right)$ ίση με το μηδέν, ενώ αντιμετωπίζουμε τους διαφορικούς τελεστές $d^n = d^n / dy^n, n \in \mathbb{N}$ ως συνήθεις μεταβλητές. Σε συνήθη αλγεβρικά συστήματα ο μηδενισμός της ορίζουσας του C_ε αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη μη τετριμμένης, με άλλα λόγια διάφορης του μηδενός, λύσης για το σύστημα. Ωστόσο, στην περίπτωση διαφορικού συστήματος η $\det\left(C_\varepsilon\right)$ αποτελεί διαφορικό τελεστή με τον μηδενισμό της να σημαίνει πως ένας μηδενικός τελεστής δρα στον χώρο που συνθέτουν οι ρίζες της. Οι ρίζες αυτές πρέπει να είναι πραγματικές εξαιτίας της συνθήκης ακτινοβολίας (radiation condition), με άλλα λόγια της απαίτησης η λύση του συστήματος στο άπειρο να είναι όχι μόνο φραγμένη, αλλά και μηδενιζόμενη. Συνεπώς οι λύσεις του συστήματος (5.12) είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των εκθετικών ριζών της εξίσωσης

$$\det\left(C_{\varepsilon}\right)=0 \tag{5.14}$$

Με βάση τα παραπάνω υπολογίζονται οι ρίζες της εξίσωσης (5.14)

$$d_{1,2}=\pm\left[M_{+}-\left(1-M_{L}^{2}\right)p^{2}\right]^{1/2}=\pm\alpha_{+} \tag{5.15α}$$

$$d_{3,4}=\pm\left[M_{-}-\left(1-M_{L}^{2}\right)p^{2}\right]^{1/2}=\pm\alpha_{-} \tag{5.15β}$$

$$d_{5,6}=\pm\left(1-M_{T}^{2}\right)^{1/2}\left(\tau^{2}-p^{2}\right)^{1/2}=\pm b \tag{5.15γ}$$

όπου θέτουμε

$$M_{+}=-M_{L}\,p\left(\rho_{+}+\rho_{-}\right)^{2} \tag{5.16α}$$

$$M_{-}=-M_{L}\,p\left(\rho_{+}-\rho_{-}\right)^{2} \tag{5.16β}$$

$$2\rho_{+}=\left[\left(M_{L}{}^{1/2}\left(\tau+p\right)^{1/2}+\left(\varepsilon/h\right)^{1/2}\right)^{2}+\left(1/h\right)\right]^{1/2} \tag{5.17α}$$

$$2\rho_{-}=\left[\left(M_{L}{}^{1/2}\left(\tau+p\right)^{1/2}-\left(\varepsilon/h\right)^{1/2}\right)^{2}+\left(1/h\right)\right]^{1/2} \tag{5.17β}$$

ενώ η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\begin{aligned}U_{x}\left(p,y\right)=b_{1}\exp\left(-\alpha_{+}y\right)+b_{2}\exp\left(-\alpha_{-}y\right)+b_{3}\exp\left(-by\right)\\ +b_{4}\exp\left(\alpha_{+}y\right)+b_{5}\exp\left(\alpha_{-}y\right)+b_{6}\exp\left(by\right)\end{aligned} \tag{5.18α}$$

$$\begin{aligned}U_{y}\left(p,y\right)=c_{1}\exp\left(-\alpha_{+}y\right)+c_{2}\exp\left(-\alpha_{-}y\right)+c_{3}\exp\left(-by\right)\\ +c_{4}\exp\left(\alpha_{+}y\right)+c_{5}\exp\left(\alpha_{-}y\right)+c_{6}\exp\left(by\right)\end{aligned} \tag{5.18β}$$

$$\begin{aligned}\Theta\left(p,y\right)=f_{1}\exp\left(-\alpha_{+}y\right)+f_{2}\exp\left(-\alpha_{-}y\right)+f_{3}\exp\left(-by\right)\\ +f_{4}\exp\left(\alpha_{+}y\right)+f_{5}\exp\left(\alpha_{-}y\right)+f_{6}\exp\left(by\right)\end{aligned} \tag{5.18γ}$$

Ωστόσο, λόγω του γεγονότος ότι η λύση του συστήματος (5.12) είναι φραγμένη (και μηδενιζόμενη) καθώς $y\to\infty$, καταλήγουμε στην παρακάτω γενική μετασχηματισμένη λύση του συστήματος

$$U_x = b_1 \exp\left(-\alpha_+ y\right) + b_2 \exp\left(-\alpha_- y\right) + b_3 \exp\left(-by\right) \tag{5.19α}$$

$$U_y = c_1 \exp\left(-\alpha_+ y\right) + c_2 \exp\left(-\alpha_- y\right) + c_3 \exp\left(-by\right) \tag{5.19β}$$

$$\Theta = f_1 \exp\left(-\alpha_+ y\right) + f_2 \exp\left(-\alpha_- y\right) + f_3 \exp\left(-by\right) \tag{5.19γ}$$

όπου

$$\alpha_+ = \left[M_+ - \left(1 - M_L^2\right) p^2\right]^{1/2} \tag{5.20α}$$

$$\alpha_- = \left[M_- - \left(1 - M_L^2\right) p^2\right]^{1/2} \tag{5.20β}$$

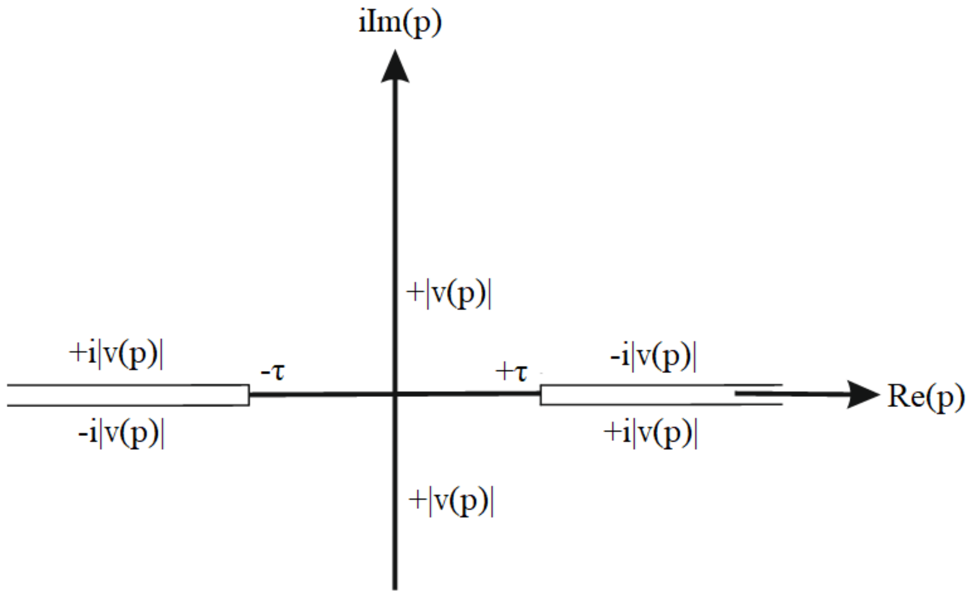
$$b = \left(1 - M_T^2\right)^{1/2} \left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2} \tag{5.20γ}$$

($\operatorname{Re}\left(\alpha_+\right) > 0$, $\operatorname{Re}\left(\alpha_-\right) > 0$, $\operatorname{Re}\left(b\right) > 0$ λόγω του περιορισμού $y\geq 0$)

Παρατηρούμε ότι στις λύσεις της εξίσωσης (5.14) εισάγεται ο όρος $\left(-p^2\right)^{1/2}$, ο οποίος αποτελεί πλειότιμη μιγαδική συνάρτηση. Για να μπορέσουμε να ορίσουμε τις κλαδικές τομές των συναρτήσεων και να εκτελέσουμε τις αντιστροφές για την τελική λύση θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό $\tau>0$, τέτοιο ώστε $\tau\to 0$ και ορίζουμε την συνάρτηση

$$\nu(p) = \left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2}, \; p \in \mathbb{C} \tag{5.21}$$

Η εισαγωγή του τ αποτελεί συνήθη τεχνική σε λύσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών (Carrier et al., 1966). Η $\nu(p)$ είναι μία πλειότιμη συνάρτηση με κλαδικά σημεία τα $p = \pm\tau$, τα οποία ορίζονται υπό την προϋπόθεση ότι το πραγματικό μέρος της συνάρτησης είναι θετικό στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή $\operatorname{Re}\left[\nu(p)\right] \geq 0$ (Watanabe, 2015).



Σχήμα 10: Κλαδικές τομές της συνάρτησης $v(p)=\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}$

Οι σταθερές b_i, c_i, f_i (i=1,2,3) δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, συνεπώς χρειάζεται να προσδιορισθούν οι σχέσεις μέσω των οποίων συνδέονται.

Από την 1η διαφορική εξίσωση του συστήματος έχουμε

$$\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2\left(1-M_L{}^2\right)p^2+d^2\right]U_x+\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-1\right]pdU_y+\kappa p\Theta=0 \tag{5.22}$$

Αντικαθιστούμε τις μετασχηματισμένες λύσεις (5.19α,β,γ) στην εξίσωση (5.22), εκτελούμε τις παραγωγίσεις και αναδιατάσσουμε τους όρους, με αποτέλεσμα να οδηγηθούμε σε άθροισμα εκθετικών όρων. Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται όταν οι συντελεστές των εκθετικών όρων είναι ταυτοτικά ίσοι με το μηδέν, συνεπώς λαμβάνουμε τις εξής σχέσεις

$$\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2\left(1-M_L{}^2\right)p^2b_1+b_1\alpha_+^2-\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-1\right]pc_1\alpha_++\kappa pf_1=0 \tag{5.23α}$$

$$\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2\left(1-M_L{}^2\right)p^2b_2+b_2\alpha_-^2-\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-1\right]pc_2\alpha_-+\kappa pf_2=0 \tag{5.23β}$$

$$\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2\left(1-M_L{}^2\right)p^2b_3+b^2b_3-\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-1\right]pc_3b+\kappa pf_3=0 \tag{5.23γ}$$

Όμοια από την δεύτερη διαφορική εξίσωση του συστήματος έχουμε

$$\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-1\right]pdU_x+\left[\left(1-M_T^2\right)p^2+\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 d^2\right]U_y+\kappa d\Theta=0 \tag{5.24}$$

και με αντικατάσταση των μετασχηματισμένων μετατοπίσεων στην σχέση (5.24) προκύπτουν οι εξισώσεις

$$-\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-1\right]p\alpha_+ b_1+\left(1-M_T^2\right)p^2 c_1+\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2\alpha_+^2 c_1-\kappa\alpha_+ f_1=0 \tag{5.25α}$$

$$-\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-1\right]p\alpha_- b_2+\left(1-M_T^2\right)p^2 c_2+\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2\alpha_-^2 c_2-\kappa\alpha_- f_2=0 \tag{5.25β}$$

$$-\left[\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2-1\right]pbb_3+\left(1-M_T^2\right)p^2 c_3+\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2 b^2 c_3-\kappa bf_3=0 \tag{5.25γ}$$

ενώ από την τρίτη διαφορική εξίσωση του συστήματος

$$-\frac{\varepsilon}{h}p^2U_x-\frac{\varepsilon}{h}pdU_y+\frac{M_L\kappa}{M_T^2}\left(p^2+d^2+\frac{M_L}{h}p\right)\Theta=0 \tag{5.26}$$

και με αντικατάσταση των μετασχηματισμένων λύσεων στην σχέση (5.26) προκύπτουν οι εξισώσεις

$$-\frac{\varepsilon}{h}p^2b_1+\frac{\varepsilon}{h}p\alpha_+c_1+\frac{M_L\kappa}{M_T^2}p\left(p+\frac{M_L}{h}\right)f_1+\frac{M_L\kappa}{M_T^2}\alpha_+^2 f_1=0 \tag{5.27α}$$

$$-\frac{\varepsilon}{h}p^2b_2+\frac{\varepsilon}{h}p\alpha_-c_2+\frac{M_L\kappa}{M_T^2}p\left(p+\frac{M_L}{h}\right)f_2+\frac{M_L\kappa}{M_T^2}\alpha_-^2 f_2=0 \tag{5.27β}$$

$$-\frac{\varepsilon}{h}p^2b_3+\frac{\varepsilon}{h}pc_3b+\frac{M_L\kappa}{M_T^2}p\left(p+\frac{M_L}{h}\right)f_3+\frac{M_L\kappa}{M_T^2}b^2 f_3=0 \tag{5.27γ}$$

Μέσω χρήσης του λογισμικού MATHEMATICA καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις μεταξύ των $b_i, c_i,\ f_i$

$$c_1 = -\frac{\alpha_+}{p}b_1, c_2 = -\frac{\alpha_-}{p}b_2, c_3 = \frac{p}{b}b_3 \tag{5.28α,β,γ}$$

$$f_1 = -\frac{M_T^2 M_+}{M_L^2 \kappa p}b_1,\ f_2 = -\frac{M_T^2 M_-}{M_L^2 \kappa p}b_2,\ f_3 = 0 \tag{5.28δ,ε,στ}$$

καθώς και στην γενική μετασχηματισμένη λύση του συστήματος

$$U_x = b_1 \exp\left(-\alpha_+ y\right) + b_2 \exp\left(-\alpha_- y\right) + b_3 \exp\left(-by\right) \tag{5.29α}$$

$$U_y = -\frac{\alpha_+}{p}b_1 \exp\left(-\alpha_+ y\right) - \frac{\alpha_-}{p}b_2 \exp\left(-\alpha_- y\right) + \frac{p}{b}b_3 \exp\left(-by\right) \tag{5.29β}$$

$$\Theta = -\frac{M_T^2 M_+}{M_L^2 \kappa p}b_1 \exp\left(-\alpha_+ y\right) - \frac{M_T^2 M_-}{M_L^2 \kappa p}b_2 \exp\left(-\alpha_- y\right) \tag{5.29γ}$$

Αντικαθιστώντας τις μετασχηματισμένες λύσεις των μετατοπίσεων στις σχέσεις (5.9α,β,γ) προκύπτουν οι μετασχηματισμένες τάσεις

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{xx} = -\frac{T_+}{p}b_1 \exp\left(-\alpha_+ y\right) - \frac{T_-}{p}b_2 \exp\left(-\alpha_- y\right) + 2pb_3 \exp\left(-by\right) \tag{5.30α}$$

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{yy} = \frac{T}{p}b_1 \exp\left(-\alpha_+ y\right) + \frac{T}{p}b_2 \exp\left(-\alpha_- y\right) - 2pb_3 \exp\left(-by\right) \tag{5.30β}$$

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{xy} = -2\alpha_+ b_1 \exp\left(-\alpha_+ y\right) - 2\alpha_- b_2 \exp\left(-\alpha_- y\right) - \frac{T}{b}b_3 \exp\left(-by\right) \tag{5.30γ}$$

όπου

$$T_+ = 2\alpha_+^2 - M_T^2 p^2, T_- = 2\alpha_-^2 - M_T^2 p^2,\ T = p^2\left(M_T^2 - 2\right) \tag{5.31α,β,γ}$$

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace στις συνοριακές συνθήκες (5.4α,β,γ,δ) και αντικαθιστούμε τις μετασχηματισμένες λύσεις των τάσεων και των μετατοπίσεων.

$$\Sigma_{yy}\left(p, y=0^{+}\right)=0 \Rightarrow \mu\left(\frac{T}{p} b_{1}+\frac{T}{p} b_{2}-2 p b_{3}\right)=0 \Rightarrow \frac{T}{p} b_{1}+\frac{T}{p} b_{2}-2 p b_{3}=0 \qquad (5.32\alpha)$$

$$U_{x}\left(p, y=0^{-}\right)=U^{-}(p) \Rightarrow b_{1}+b_{2}+b_{3}=U^{-}(p) \qquad (5.32\beta)$$

$$\Theta\left(p, y=0^{+}\right)=0 \Rightarrow M_{+} b_{1}+M_{-} b_{2}=0 \qquad (5.32\gamma)$$

$$\Sigma_{xy}\left(p, y=0^{+}\right)=\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_{0}}{(1/\xi)-p} \Rightarrow -2 \alpha_{+} b_{1}-2 \alpha_{-} b_{2}-\frac{T}{b} b_{3}=\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_{0}}{(1/\xi)-p}\right] \qquad (5.32\delta)$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από τον μετασχηματισμό Laplace της βηματικής συνάρτησης Heaviside (σχέση (4.30) του 4ου κεφαλαίου), ενώ οι συναρτήσεις $\Sigma^{+}(p)=\Sigma^{+}\left(p, y=0^{+}\right), U^{-}(p)=U^{-}\left(p, y=0^{-}\right)$ είναι αναλυτικές για $\operatorname{Re}(p)>0$ και $\operatorname{Re}(p)<0$ αντίστοιχα.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.32α,β,γ) καταλήγουμε στις εξής εξισώσεις των b_{1}, b_{2}, b_{3}

$$b_{1}=\frac{2 M_{-} p^{2} U^{-}(p)}{\left(M_{-}-M_{+}\right)\left(T+2 p^{2}\right)}, \quad b_{2}=\frac{2 M_{+} p^{2} U^{-}(p)}{\left(M_{+}-M_{-}\right)\left(T+2 p^{2}\right)}, \quad b_{3}=\frac{T U^{-}(p)}{T+2 p^{2}} \qquad (5.33\alpha,\beta,\gamma)$$

και αντικαθιστώντας τις (5.33α,β,γ) στην σχέση (5.32δ) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_{0}}{(1/\xi)-p}\right]=\frac{4 p^{2} \alpha_{+} b M_{-}-4 p^{2} \alpha_{-} b M_{+}-T^{2}\left(M_{+}-M_{-}\right)}{b\left(M_{+}-M_{-}\right)\left(T+2 p^{2}\right)} U^{-}(p)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_{0}}{(1/\xi)-p}\right]=\frac{-T^{2}\left(M_{+}-M_{-}\right)-4 p^{2} b\left(\alpha_{-} M_{+}-\alpha_{+} M_{-}\right)}{b\left(M_{+}-M_{-}\right)\left(T+2 p^{2}\right)} U^{-}(p)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_{0}}{(1/\xi)-p}\right]=-\frac{\left(M_{+}-M_{-}\right) T^{2}+4 b\left(\alpha_{-} M_{+}-\alpha_{+} M_{-}\right) p^{2}}{b\left(M_{+}-M_{-}\right)\left(T+2 p^{2}\right)} U^{-}(p) \qquad (5.34)$$

όπου θέτουμε

$$R_{\varepsilon,\alpha} = \left(M_+ - M_-\right)T^2 + 4bp^2\left(\alpha_- M_+ - \alpha_+ M_-\right) \qquad (5.35)$$

την πλήρη θερμοελαστική συνάρτηση Rayleigh σταθερής κατάστασης.

5.3 Προσεγγίσεις υποηχητικής περιοχής

Στο σημείο αυτό θα αναζητήσουμε τις ασυμπτωτικές λύσεις των πεδίων των τάσεων και των παραμορφώσεων κοντά στο άκρο της ρωγμής. Η εύρεση των επιφανειακών (y=0) πεδίων αποτελεί ένα χρήσιμο βήμα για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων, εφόσον οι σχετικές πειραματικές μετρήσεις πραγματοποιούνται συνήθως στην επιφάνεια του μέσου και σε περιοχές κοντά στην επιφάνεια οι οποίες φθείρονται και εμφανίζουν ρωγμές.

Τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα που θα προκύψουν είναι έγκυρα είτε για την περίπτωση $|x/h| >> 1 \; \left(|x| >> h\right)$, είτε για την $|x/h| << 1 \; \left(x << h\right)$. Εφόσον το χαρακτηριστικό μήκος λόγω θερμοελαστικότητας λαμβάνει πολύ μικρές τιμές $\left(h \to 0\right)$, η πρώτη περίπτωση δεν εμφανίζει μεγάλους περιορισμούς και κατ' επέκταση μπορεί να ληφθεί για το εύρος τιμών $O\left(10^{-7} m\right) < |x| < \infty$. Η επιλογή αυτή, η οποία ικανοποιεί εύκολα την παραπάνω ασυμπτωτική ανισότητα, ακολουθεί τις λύσεις του Brock (1994, 1995) για παρόμοιο πρόβλημα διάδοσης ρωγμής σε σταθερή κατάσταση και είναι έγκυρες για $|x/h| >> 1$. Η δεύτερη περίπτωση $\left(|x/h| << 1\right)$ δεν είναι τόσο χρήσιμη όσο η πρώτη, καθόσον στις κλίμακες αυτές (μήκη μικρότερα του δέκατου του micron) «καταρρέει» η κλασσική Μηχανική του Συνεχούς Μέσου και η θεωρία χρειάζεται τροποποίηση. Στην διπλωματική αυτή εργασία θα επικεντρωθούμε λοιπόν μόνο στην πρώτη περίπτωση $\left(|x/h| >> 1\right)$.

Παρακάτω δίνονται οι ασυμπτωτικές εκφράσεις των $\alpha_+, \alpha_-, M_+, M_-, b$, οι οποίες παρατηρούμε ότι εξαρτώνται κατά κάποιον τρόπο από την ταχύτητα διάδοσης της ρωγμής v (Brock & Georgiadis, 1997).

$$M_+ \cong -M_L \frac{1+\varepsilon}{h} p = -M_{L\varepsilon} \frac{\left(1+\varepsilon\right)^{3/2}}{h} p \qquad (5.36\alpha)$$

$$M_- \cong -M_L{}^2 \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} p^2 = -M_{L\varepsilon}{}^2 \varepsilon p^2 \tag{5.36β}$$

$$\alpha_+ \cong \left(M_L \frac{1+\varepsilon}{h} \right)^{1/2} \left(\tau - p\right)^{1/2} = \left[M_{L\varepsilon} \frac{\left(1+\varepsilon\right)^{3/2}}{h} \right]^{1/2} \left(\tau - p\right)^{1/2} \tag{5.36γ}$$

$$\alpha_- \cong \left(1 - \frac{M_L{}^2}{1+\varepsilon} \right)^{1/2} \left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2} = \left(1 - M_{L\varepsilon}{}^2\right)^{1/2} \left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2} \tag{5.36δ}$$

$$\mathrm{T} = \left(M_T^2 - 2\right) p^2, \quad b = \left(1 - M_T^2\right)^{1/2} \left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2} \tag{5.36ε,στ}$$

όπου θέτουμε ως

$$v_{L\varepsilon} = v_L \left(1+\varepsilon\right)^{1/2} \tag{5.37α}$$

την ταχύτητα διάδοσης διαμηκών θερμοελαστικών κυμάτων, από την οποία προκύπτουν οι θερμοελαστικοί αριθμοί Mach

$$M_T = \frac{v}{v_T}, \quad M_{L\varepsilon} = \frac{M_L}{\left(1+\varepsilon\right)^{1/2}}, \quad m_\varepsilon = \frac{v_{L\varepsilon}}{v_T} = \frac{M_T}{M_{L\varepsilon}} \tag{5.37β,γ,δ}$$

(Lykotrafitis & Georgiadis, 2003)

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\Gamma\left(p\right) = -\frac{\left(1+\varepsilon\right)^{3/2}}{h} M_{L\varepsilon} p^2 \left[\left(M_T^2 - 2\right)^2 - 4\left(1 - M_T^2\right)^{1/2} \left(1 - M_{L\varepsilon}{}^2\right)^{1/2} \right]$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\left(1+\varepsilon\right)^{1/2}} M_{L\varepsilon}{}^2 p^2 \left[\left(M_T^2 - 2\right)^2 p - 4\left(1 - M_T^2\right)^{1/2} \left(M_{L\varepsilon} \frac{\left(1+\varepsilon\right)^{3/2}}{h} \right)^{1/2} \left(\tau + p\right)^{1/2} \right] \tag{5.38}$$

όπου θέτουμε

$$R_\varepsilon = \left(M_T^2 - 2\right)^2 - 4\left(1 - M_T^2\right)^{1/2} \left(1 - M_{L\varepsilon}{}^2\right)^{1/2} \tag{5.39}$$

την ασυμπτωτική θερμοελαστική συνάρτηση Rayleigh σταθερής κατάστασης (Lykotrafitis & Georgiadis, 2003) (Chadwick, 1960).

Αν θέσουμε $v_{R\varepsilon}$ την ταχύτητα διάδοσης των θερμοελαστικών κυμάτων Rayleigh, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση $R\left(v_{R\varepsilon}\right)=0$, τότε αντιλαμβανόμαστε από την θερμοελαστική συνάρτηση Rayleigh της σχέσης (5.39) ότι για $v<v_{\mathrm{R}\varepsilon}$ έχουμε $R_\varepsilon<0$, ενώ για $v>v_{\mathrm{R}\varepsilon}$ έχουμε $R_\varepsilon>0$ (Brock & Georgiadis, 1997). Για να εκτελέσουμε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace θα επικεντρωθούμε στην sub-Rayleigh περιοχή ταχυτήτων, με άλλα λόγια θα θεωρήσουμε ότι $v<v_{R\varepsilon}$.

Αντικαθιστώντας τις προσεγγίσεις (5.36α,β,γ,δ,ε,στ) στην εξίσωση (5.34) οδηγούμαστε στην παρακάτω σχέση για την υποηχητική περιοχή

$$\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_0}{(1/\xi)-p}\right]=-\frac{\Gamma(p)\,p^3}{M_T^2 p^3\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}\varepsilon M_{L\varepsilon}{}^2\left(p-\frac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h\varepsilon M_{L\varepsilon}}\right)}U^{-}(p)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_0}{(1/\xi)-p}\right]=-\frac{\Gamma(p)}{M_T^2\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}\varepsilon M_{L\varepsilon}{}^2\left(p-\frac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h\varepsilon M_{L\varepsilon}}\right)}U^{-}(p) \quad (5.40)$$

Θα εξετάσουμε την παραπάνω εξίσωση στο όριο ελαστικότητας. Συγκεκριμένα παρατηρούμε από τις ασυμπτωτικές προσεγγίσεις των $\alpha_+,\alpha_-,M_+,M_-$ ότι $M_+>>M_-$ και $\alpha_+>>\alpha_-$ εφόσον h<<1, κατ’ επέκταση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $M_+-M_-\approx M_+$ και $\alpha_+-\alpha_-\approx\alpha_+$. Εφαρμόζοντας τις θεωρήσεις αυτές στην αναλυτική σχέση (5.34) προκύπτει

$$\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_0}{(1/\xi)-p}\right]=-\frac{M_+T^2+4b\left(\alpha_-M_+-\alpha_+M_-\right)p^2}{bM_+\left(T+2p^2\right)}U^{-}(p) \quad (5.41)$$

εφόσον τα α_-M_+,α_+M_- αποτελούν συγκρίσιμα μεγέθη.

Όμοια η συνάρτηση $\Gamma(p)$ γίνεται

$$\Gamma(p)=\frac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h}M_{L\varepsilon}p^2\left[\left(M_T^2-2\right)^2-4\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(1-M_{L\varepsilon}{}^2\right)^{1/2}\right]$$

$$+4\varepsilon M_{L\varepsilon}{}^2\left(M_{L\varepsilon}\frac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h}\right)^{1/2}\left(1-M_T^2\right)^{1/2}(\tau+p)^{1/2}\,p^2 \tag{5.42}$$

και αντικαθιστώντας τις ασυμπτωτικές προσεγγίσεις της υποηχητικής περιοχής στην εξίσωση (5.41) καταλήγουμε στην σχέση

$$\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^+(p)-\frac{\tau_0}{(1/\xi)-p}\right]=-\frac{h\Gamma(p)\,p^3}{p^3\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}(1+\varepsilon)^{3/2}M_{L\varepsilon}M_T^2\left(1-M_T^2\right)^{1/2}}U^-(p)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^+(p)-\frac{\tau_0}{(1/\xi)-p}\right]=-\frac{h\Gamma(p)}{\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}(1+\varepsilon)^{3/2}M_{L\varepsilon}M_T^2\left(1-M_T^2\right)^{1/2}}U^-(p) \tag{5.43}$$

Θέτοντας $\varepsilon\to 0$ για να αγνοήσουμε τα θερμικά φαινόμενα του προβλήματος η συνάρτηση $\Gamma(p)$ γίνεται

$$\Gamma(p)=\frac{1}{h}M_L p^2\left[\left(M_T^2-2\right)^2-4\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(1-M_L{}^2\right)^{1/2}\right] \tag{5.44}$$

όπου

$$R_\varepsilon^{\lim}=\left(M_T^2-2\right)^2-4\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(1-M_L{}^2\right)^{1/2} \tag{5.45}$$

η ασυμπτωτική θερμοελαστική συνάρτηση Rayleigh στο όριο ελαστικότητας, η οποία παρατηρούμε ότι ταυτίζεται με την κλασσική συνάρτηση Rayleigh της καθαρά ελαστικής περίπτωσης (4.34).

Στο όριο ελαστικότητας λοιπόν η εξίσωση (5.43) γίνεται

$$\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^+(p)-\frac{\tau_0}{(1/\xi)-p}\right]=-\frac{\left[\left(M_T^2-2\right)^2-4\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(1-M_L{}^2\right)^{1/2}\right]p^2}{\left(1-M_T^2\right)^{1/2}M_T^2\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}}U^-(p) \tag{5.46}$$

συνεπώς ταυτίζεται με την εξίσωση (4.33) του κεφαλαίου 4. Τονίζεται για ακόμα μία φορά ότι η μόνη προσέγγιση που έχει ληφθεί στην ανάλυσή μας είναι η $|x| >> h$. Εφόσον δεν μπορούμε να μηδενίσουμε ταυτόχρονα τις σταθερές *ε, h* κατά την μελέτη του ορίου ελαστικότητας, η απόδειξη της αντιστοιχίας μεταξύ καθαρά ελαστικού και θερμοελαστικού προβλήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο έμμεσα μέσω των εξισώσεων (4.33) και (5.46) και όχι από τις λύσεις των θερμοελαστικών πεδίων των τάσεων και των μετατοπίσεων που πρόκειται να προσδιορισθούν στην συνέχεια.

Συνεχίζοντας με την εξίσωση (5.40) παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\Gamma(p)$ είναι αναλυτική $\mathrm{Re}(p) > 0$ και έχει διπλή ρίζα για $\mathrm{Re}(p) = 0$. Ορίζουμε λοιπόν την συνάρτηση $G^+(p) = \Gamma(p)/p^2$, η οποία δεν μηδενίζεται για $\mathrm{Re}(p) = 0$ και είναι αναλυτική για $\mathrm{Re}(p) > 0$

$$G^+(p) = -\frac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h} M_{L\varepsilon} R_\varepsilon +$$

$$+\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{1/2}} M_{L\varepsilon}{}^2 \left[\left(M_T^2 - 2\right)^2 p - 4\left(1 - M_T^2\right)^{1/2} \left(M_{L\varepsilon} \frac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h} \right)^{1/2} (\tau + p)^{1/2} \right] \tag{5.47}$$

Επιπλέον, θέτουμε την σταθερά

$$L = -\frac{\mu}{\left(1 - M_T^2\right)^{1/2} M_{\mathrm{T}}^2} \tag{5.48}$$

και η σχέση (5.40) γίνεται

$$\Sigma^+(p) - \frac{\tau_0}{(1/\xi) - p} = L \frac{G^+(p)\, p^2}{\varepsilon M_{L\varepsilon}{}^2 \left(p - \dfrac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h\varepsilon M_{L\varepsilon}} \right) \left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2}} U^-(p) \tag{5.49}$$

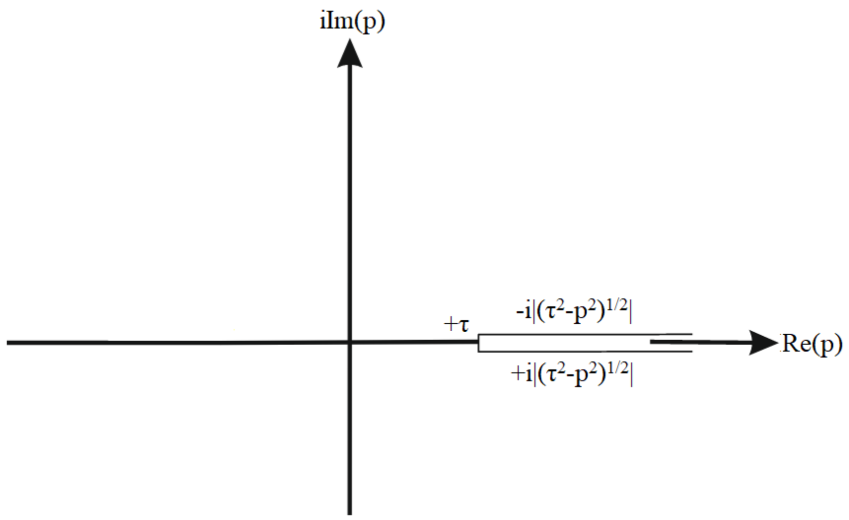
Θα εφαρμόσουμε λοιπόν την τεχνική Wiener-Hopf όπως περιγράφεται π.χ. από τον Achenbach (1973) για να επιλύσουμε την εξίσωση (5.49).

5.4 Εφαρμογή τεχνικής Wiener-Hopf και εύρεση τελικής μετασχηματισμένης λύσης

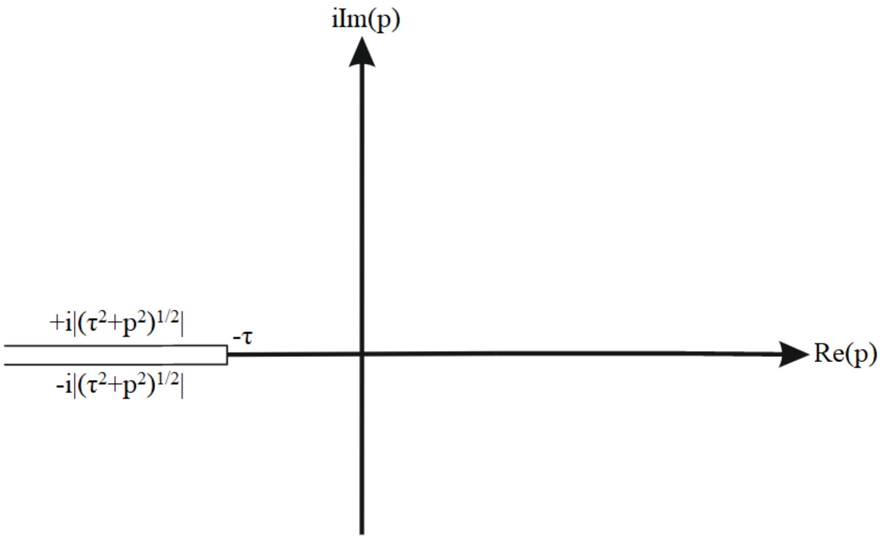
Αρχικά παραγοντοποιούμε τον όρο $\left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2}$ σε $\left(\tau^2 - p^2\right)^{1/2} = \left(\tau - p\right)^{1/2}\left(\tau + p\right)^{1/2}$ (factorization), ώστε η σχέση (5.49) να δώσει

$$\frac{\Sigma^+(p)(\tau+p)^{1/2}}{G^+(p)} + \frac{\tau_0(\tau+p)^{1/2}}{\left[p-(1/\xi)\right]G^+(p)} = L\frac{p^2}{\varepsilon M_{L\varepsilon}{}^2\left(p-\dfrac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h\varepsilon M_{L\varepsilon}}\right)(\tau-p)^{1/2}}U^-(p) \qquad (5.50)$$

ενώ δίνονται παρακάτω οι κλαδικές τομές των $\left(\tau - p\right)^{1/2}$ και $\left(\tau + p\right)^{1/2}$ (Watanabe, 2015)



Σχήμα 11: Κλαδική τομή συνάρτησης $(\tau\text{-}p)^{1/2}$



Σχήμα 12: Κλαδική τομή συνάρτησης $(\tau+p)^{1/2}$

Στην συνέχεια, μέσω διαχωρισμού (decomposition) του δεύτερου όρου του αριστερού μέρους της εξίσωσης (5.50) σε άθροισμα μερικώς αναλυτικών συναρτήσεων έχουμε

$$\frac{\tau_0\left(\tau+p\right)^{1/2}}{\left[p-\left(1/\xi\right)\right]G^{+}\left(p\right)}=K^{+}\left(p\right)+K^{-}\left(p\right) \tag{5.51}$$

όπου θέτουμε τις συναρτήσεις

$$K^{+}\left(p\right)=\frac{\tau_0}{\left[p-\left(1/\xi\right)\right]}\left[\frac{\left(\tau+p\right)^{1/2}}{G^{+}\left(p\right)}-\frac{\left(1/\xi\right)^{1/2}}{G^{+}\left(1/\xi\right)}\right],\ K^{-}\left(p\right)=\frac{\tau_0}{\left[p-\left(1/\xi\right)\right]}\frac{\left(1/\xi\right)^{1/2}}{G^{+}\left(1/\xi\right)} \qquad (5.52\alpha,\beta)$$

Για να μπορέσουμε να αξιοποιήσουμε την τεχνική Weiner-Hopf θα πρέπει να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις $\mathrm{K}^{+}\left(p\right)$, $\mathrm{K}^{-}\left(p\right)$ είναι αναλυτικές για $\mathrm{Re}\left(p\right)>0$ και $\mathrm{Re}\left(p\right)<0$ αντίστοιχα. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\mathrm{K}^{-}\left(p\right)$ είναι αναλυτική για $\mathrm{Re}\left(p\right)<0$, εφόσον για κάθε $\mathrm{Re}\left(p\right)<0$ ισχύει ότι $p-\left(1/\xi\right)<0$. Άρα $\mathrm{K}^{-}\left(p\right)\neq 0$ για $\mathrm{Re}\left(p\right)<0$, με αποτέλεσμα να μην εμφανίζει ιδιάζοντα σημεία και κλαδικές τομές στην περιοχή αυτή.

Όσον αφορά την συνάρτηση $\mathrm{K}^{+}\left(p\right)$ καταλαβαίνουμε ότι δεν εμφανίζει κλαδικές τομές για $\mathrm{Re}\left(\mathrm{p}\right)>0$. Παρατηρούμε ωστόσο ότι ο όρος $\tau_0/\left[p-\left(1/\xi\right)\right]$ μηδενίζεται για $p=1/\xi$, με αποτέλεσμα να σχηματίζεται πόλος στο σημείο αυτό. Ταυτόχρονα όμως για $p=1/\xi$ η αγκύλη $\left[\left(\tau+p\right)^{1/2}/G^{+}\left(p\right)\right]-\left[\left(1/\xi\right)^{1/2}/G^{+}\left(1/\xi\right)\right]$ είναι περίπου ίση με το μηδέν ($\tau\rightarrow 0$), με αποτέλεσμα να μηδενίζεται η $\mathrm{K}^{+}\left(p\right)$ στο μελετώμενο σημείο. Ως αποτέλεσμα απαλείφεται ο πόλος της συνάρτησης $\mathrm{K}^{+}\left(p\right)$ και καθίσταται αναλυτική για $\mathrm{Re}\left(p\right)>0$.

Μπορούμε λοιπόν να αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις $K^{+}\left(p\right),K^{-}\left(p\right)$ στην εξίσωση (5.50), δίνοντας την σχέση

$$\frac{\Sigma^+(p)(\tau+p)^{1/2}}{G^+(p)}+K^+(p)=L\frac{p^2}{\varepsilon M_{L\varepsilon}{}^2\left(p-\frac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h\varepsilon M_{L\varepsilon}}\right)(\tau-p)^{1/2}}U^-(p)-K^-(p) \qquad (5.53)$$

Θέτουμε λοιπόν τις συναρτήσεις

$$E^+(p)=\frac{\Sigma^+(p)(\tau+p)^{1/2}}{G^+(p)}+K^+(p) \qquad (5.54α)$$

$$E^-(p)=L\frac{p^2}{\varepsilon M_{L\varepsilon}{}^2\left(p-\frac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h\varepsilon M_{L\varepsilon}}\right)(\tau-p)^{1/2}}U^-(p)-K^-(p) \qquad (5.54β)$$

οι οποίες είναι επίσης αναλυτικές για $\mathrm{Re}(p)>0$ και $\mathrm{Re}(p)<0$ αντίστοιχα, ενώ ταυτόχρονα είναι συνεχείς και ίσες μεταξύ τους για $\mathrm{Re}(p)=0$. Σύμφωνα με το θεώρημα συναρτησιακής ανάλυσης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η $E^+(p)$ αποτελεί αναλυτική συνέχιση της $E^-(p)$ και το αντίστροφο, με αποτέλεσμα οι $E^+(p), E^-(p)$ να αναπαριστούν την ίδια ακεραία, με άλλα λόγια αναλυτική σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, συνάρτηση *E(p)* (Achenbach, 1973).

Στην συνέχεια θα αξιοποιήσουμε το θεώρημα Liouville, σύμφωνα με το οποίο αν μία ακεραία συνάρτηση είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$ τότε αυτή είναι ίση με μία σταθερά (Σαραντόπουλος, 2017). Παρατηρούμε ότι

$\Gamma(p)\sim p^3$ & $G(p)\sim p$

με αποτέλεσμα για $|p|\to\infty$ να έχουμε

$$K^+(p)=\frac{\tau_0}{\left[p-(1/\xi)\right]}\left[\frac{(\tau+p)^{1/2}}{G^+(p)}-\frac{(1/\xi)^{1/2}}{G^+(1/\xi)}\right]\to 0 \qquad (5.55α)$$

$$K^-(p)=\frac{\tau_0}{\left[p-(1/\xi)\right]}\frac{(1/\xi)^{1/2}}{G^+(1/\xi)}\to 0 \qquad (5.55β)$$

Επιλέγουμε για ακόμα μία φορά την κλασσική περίπτωση ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των τάσεων και των μετατοπίσεων, δηλαδή τις σχέσεις (4.44α,β) του 4ου κεφαλαίου

$$\sigma_{xy}\left(x, y=0\right)=O\left(x^{-1/2}\right), x\to 0^{+}$$

$$u_{x}\left(x, y=0\right)=O\left(x^{1/2}\right), x\to 0^{-}$$

ενώ οι μετασχηματισμένες μορφές τους δίνουν σύμφωνα με το θεώρημα Abel-Tauber (βλέπε σελίδα 68 του 4ου κεφαλαίου), τις σχέσεις (4.45α,β) (Van der Pol & Bremmer, 1950)

$$\Sigma^{+}\left(p\right)=O\left(p^{-1/2}\right),\ \ |p|\to\infty,\ \ \mathrm{Re}\left(p\right)>0$$

$$U^{-}\left(p\right)=O\left(p^{-3/2}\right),\ \ |p|\to\infty,\ \ \mathrm{Re}\left(p\right)<0$$

Συνεπώς, για $|p|\to\infty$ έχουμε

$$\left|E^{+}\left(p\right)\right|=\left|\frac{\Sigma^{+}\left(p\right)\left(\tau+p\right)^{1/2}}{G^{+}\left(p\right)}+K^{+}\left(p\right)\right|\to 0 \tag{5.56α}$$

$$\left|E^{-}\left(p\right)\right|=\left|L\frac{p^{2}}{\varepsilon M_{L\varepsilon}{}^{2}\left(p-\dfrac{\left(1+\varepsilon\right)^{3/2}}{h\varepsilon M_{L\varepsilon}}\right)\left(\tau-p\right)^{1/2}}U^{-}\left(p\right)-K^{-}\left(p\right)\right|\to 0 \tag{5.56β}$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι $E^{+}\left(p\right)\to 0$ & $E^{-}\left(p\right)\to 0$ για $|p|\to\infty$. Με άλλα λόγια αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση E(p) είναι ακεραία και φραγμένη στο $\mathbb{C}$, επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Liouville είναι ίση με μία σταθερά. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε *E(p)*=0 εφόσον οι $E^{+}(p),\ E^{-}(p)$ τείνουν στο μηδέν για πολύ μεγάλες τιμές του p, κατά συνέπεια

$$\frac{\Sigma^{+}\left(p\right)\left(\tau+p\right)^{1/2}}{G^{+}\left(p\right)}+K^{+}\left(p\right)=0\Rightarrow\Sigma^{+}\left(p, y=0\right)=\frac{\tau_{0}}{p-\left(1/\xi\right)}\left[\frac{\left(1/\xi\right)^{1/2}G^{+}\left(p\right)}{\left(\tau+p\right)^{1/2}G^{+}\left(1/\xi\right)}-1\right] \tag{5.57α}$$

$$L\frac{p^2}{\varepsilon M_{L,\varepsilon}{}^2\left(p-\frac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h\varepsilon M_{L,\varepsilon}}\right)(\tau-p)^{1/2}}U^-(p)-K^-(p)=0$$

$$\Rightarrow U^-(p,y=0)=\frac{\varepsilon M_{L\varepsilon}{}^2\left(p-\frac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h\varepsilon M_{L\varepsilon}}\right)(\tau-p)^{1/2}}{Lp^2}\frac{\tau_0}{\left[p-(1/\xi)\right]}\frac{(1/\xi)^{1/2}}{G^+(1/\xi)} \tag{5.57β}$$

Παρατηρούμε ότι τα παραπάνω αποτελέσματα συμφωνούν με την βιβλιογραφία (report Georgiadis & Lykotrafitis).

5.5 Αντιστροφή μετασχηματισμένης λύσης και εύρεση συντελεστή εντάσεως των τάσεων

Στην προηγούμενη υποενότητα προσδιορίσαμε τα μετασχηματισμένα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων κοντά στο άκρο της ρωγμής. Μία μέθοδος για να υπολογίσουμε τις τάσεις και τις μετατοπίσεις στον χώρο των πραγματικών αριθμών είναι να εκτελέσουμε άμεσα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης (4.11β) στις σχέσεις (5.57α,β). Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε και στο 4^{ο} κεφάλαιο, λόγω της δυσκολίας του βήματος αυτού και του γεγονότος ότι επιθυμούμε να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των πεδίων αυτών κοντά στο άκρο της ρωγμής, επιλέγουμε να αξιοποιήσουμε το θεώρημα Abel-Tauber ώστε να οδηγηθούμε πίσω στον χώρο των πραγματικών αριθμών.

Αρχικά θα μελετήσουμε την συμπεριφορά του πεδίου τάσεων (5.57α) για $|p|\to\infty$. Μπορούμε να θεωρήσουμε για $|p|\to\infty$ ότι $p-(1/\xi)\approx p$ και $(\tau+p)^{1/2}\approx p^{1/2}$.

Επίσης παρατηρούμε ότι στο όριο αυτό η συνάρτηση $G^+(p)$ γίνεται

$$G^+(p)=-\frac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h}M_{L\varepsilon}R_\varepsilon+$$

$$+\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{1/2}}M_{L\varepsilon}{}^2\left[\left(M_T^2-2\right)^2p-4\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(M_{L\varepsilon}\frac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h}\right)^{1/2}p^{1/2}\right] \tag{5.58}$$

και η έκφραση του πεδίου τάσεων για $|p| \to \infty$ γίνεται

$$\Sigma^{+}(p, y=0) \approx \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{1/2}} M_{L\varepsilon}{}^{2} \frac{\tau_0 (1/\xi)^{1/2} \left(M_T^2 - 2\right)^2}{p^{1/2} G^{+}(1/\xi)} \tag{5.59}$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι για $|p| \to \infty$ η συνάρτηση $\Sigma^{+}(p)$ συμπεριφέρεται όπως το $p^{-1/2}$, γεγονός το οποίο είναι αναμενόμενο από την σχέση (4.45α).

Αντίστοιχα θα μελετήσουμε την συμπεριφορά του πεδίου μετατοπίσεων (5.57β) για $|p| \to \infty$. Μπορούμε να θεωρήσουμε για $|p| \to \infty$ ότι $p-(1/\xi) \approx p$, $(\tau - p)^{1/2} \approx -p^{1/2}$ και $p-\left[(1+\varepsilon)^{3/2} / h\varepsilon M_{L\varepsilon}\right] \approx p$.

Επομένως η έκφραση του πεδίου μετατοπίσεων γίνεται

$$U^{-}(p, y=0) = -\frac{\varepsilon M_{L\varepsilon}{}^{2} \tau_0 (1/\xi)^{1/2}}{L G^{+}(1/\xi)\, p^{3/2}} \tag{5.60}$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι για $|p| \to \infty$ η συνάρτηση $U^{-}(p)$ συμπεριφέρεται όπως το $p^{-3/2}$ γεγονός το οποίο είναι αναμενόμενο από την σχέση (4.45β).

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να μεταβούμε από τις μετασχηματισμένες εκφράσεις των πεδίων των τάσεων και των παραμορφώσεων στον χώρο των πραγματικών αριθμών (Van der Pol & Bremmer, 1950). Στον μετασχηματισμένο χώρο έχουμε

$$\lim_{|p| \to \infty} \Sigma^{+}(p, y=0) = \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{1/2}} M_{L\varepsilon}{}^{2} \frac{\tau_0 (1/\xi)^{1/2} \left(M_T^2 - 2\right)^2}{G^{+}(1/\xi)} p^{-1/2} \tag{5.61α}$$

$$\lim_{|p| \to \infty} U^{-}(p, y=0) = -\frac{\varepsilon M_{L\varepsilon}^{2} \tau_0 (1/\xi)^{1/2}}{L G^{+}(1/\xi)} p^{-3/2} \tag{5.61β}$$

με αποτέλεσμα να λαμβάνουμε τα μετασχηματισμένα ασυμπτωτικά πεδία κοντά στο άκρο της ρωγμής

$$\lim_{|p|\to\infty} \Sigma_{xy}\left(p, y=0\right) = \lim_{|p|\to\infty}\left[\Sigma^{+}\left(p\right)+\frac{\tau_0}{p-(1/\xi)}\right] = \frac{\varepsilon}{\left(1+\varepsilon\right)^{1/2}} M_{L\varepsilon}{}^{2}\, \frac{\tau_0\left(1/\xi\right)^{1/2}\left(M_T^2-2\right)^2}{G^{+}\left(1/\xi\right)}\, p^{-1/2}$$

(5.62α)

$$\lim_{|p|\to\infty} U_x\left(p, y=0\right) = \lim_{|p|\to\infty} U^{-}\left(p, y=0\right) = -\frac{\varepsilon M_{L\varepsilon}^2 \tau_0\left(1/\xi\right)^{1/2}}{LG^{+}\left(1/\xi\right)}\, p^{-3/2} \tag{5.62β}$$

Συνεπώς, μέσω του θεωρήματος Abel-Tauber (Van der Pol & Bremmer, 1950) λαμβάνουμε τα εξής ασυμπτωτικά πεδία στον χώρο των πραγματικών αριθμών κοντά στο άκρο της ρωγμής

$$\lim_{x\to 0^{+}} \sigma_{xy}\left(x, y=0\right) = \frac{\varepsilon}{\left(1+\varepsilon\right)^{1/2}} M_{L\varepsilon}{}^{2}\, \frac{\tau_0\left(1/\xi\right)^{1/2}\left(M_T^2-2\right)^2}{\pi^{1/2}G^{+}\left(1/\xi\right)}\, x^{-1/2} \tag{5.63α}$$

$$\lim_{x\to 0^{-}} u_x\left(x, y=0\right) = -\frac{2\varepsilon M_{L\varepsilon}^2 \tau_0\left(1/\xi\right)^{1/2}}{\pi^{1/2}LG^{+}\left(1/\xi\right)}\left(-x\right)^{1/2} \tag{5.63β}$$

τα οποία παρατηρούμε ότι συμφωνούν με εκείνα των σχέσεων (4.44α,β).

Τέλος, για την ολοκλήρωση της ανάλυσης του προβλήματος θερμοελαστικότητας κινούμενης ρωγμής δίνεται ο Σ.Ε.Τ., ο οποίος σύμφωνα με το θεώρημα Abel-Tauber είναι ίσος με

$$K_{II\varepsilon} = \lim_{x\to 0^{+}}\left[\left(2\pi x\right)^{1/2}\sigma_{xy}\right] \overset{Abel\text{-}Tauber}{\Leftrightarrow} K_{II\varepsilon} = \lim_{|p|\to\infty}\left[\frac{\left(2\pi\right)^{1/2} p^{1/2}}{\Gamma(1/2)}\Sigma_{xy}\left(p\right)\right]$$

$$\overset{(5.30\delta)}{\Rightarrow} K_{II\varepsilon} = \lim_{|p|\to\infty}\left[\frac{\left(2\pi\right)^{1/2} p^{1/2}}{\pi^{1/2}}\left(\Sigma^{+}\left(p\right)+\frac{\tau_0}{p-\left(1/\xi\right)}\right)\right]$$

$$\Rightarrow K_{II\varepsilon} = \lim_{|p|\to\infty}\left[\frac{\left(2p\right)^{1/2}\tau_0}{p-\left(1/\xi\right)}\left(\frac{\left(1/\xi\right)^{1/2}G^{+}\left(p\right)}{\left(\tau+p\right)^{1/2}G^{+}\left(1/\xi\right)}-1\right)+\frac{\left(2p\right)^{1/2}\tau_0}{p-\left(1/\xi\right)}\right]$$

$$\Rightarrow K_{II\varepsilon}=\frac{2^{1/2}\tau_0\left(1/\xi\right)^{1/2}}{G^{+}\left(1/\xi\right)}\lim_{|p|\to\infty}\left[\frac{p^{1/2}G^{+}\left(p\right)}{\left[p-\left(1/\xi\right)\right]\left(\tau+p\right)^{1/2}}\right] \tag{5.64}$$

Επεκτείνοντας την συνάρτηση $G^{+}\left(p\right)$ μέσω της σχέσης (5.47) και επιλύοντας τα επιμέρους όρια που προκύπτουν καταλήγουμε στον παρακάτω Σ.Ε.Τ. του θερμοελαστικού προβλήματος

$$K_{II\varepsilon}=\frac{2^{1/2}\varepsilon M_{L\varepsilon}\tau_0\left(M_T^2-2\right)^2\left(1/\xi\right)^{1/2}}{-\frac{\left(1+\varepsilon\right)^2}{h}R_\varepsilon+\varepsilon M_{L\varepsilon}\left[\left(M_T^2-2\right)^2\left(1/\xi\right)-4\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(M_{L\varepsilon}\frac{\left(1+\varepsilon\right)^{3/2}}{h}\right)^{1/2}\left(1/\xi\right)^{1/2}\right]} \tag{5.65}$$

Αποτελέσματα – Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία, αφού διατυπώθηκαν οι βασικές αρχές της Ελαστοδυναμικής Θεωρίας, της Θερμοελαστικότητας και της Μηχανικής των Θραύσεων, μελετήθηκε το πρόβλημα διάδοσης ρωγμής τύπου II σε καθαρά ελαστικό και θερμοελαστικό δι-διάστατο μέσο. Με εφαρμογή του αμφίπλευρου μετασχηματισμού Laplace στις διέπουσες εξισώσεις και τις συνοριακές συνθήκες κάθε προβλήματος καθώς και του θεωρήματος Abel-Tauber στις τελικές μετασχηματισμένες λύσεις, υπολογίστηκαν οι ασυμπτωτικές τάσεις και μετατοπίσεις κοντά στο άκρο της ρωγμής για sub-Rayleigh ταχύτητα διάδοσης ρωγμής στα δύο είδη σωμάτων. Μέσω της διαδικασίας αυτής υπολογίστηκαν επίσης οι συντελεστές εντάσεως των τάσεων των δύο περιπτώσεων, ώστε να επαληθευτούν με την υπάρχουσα βιβλιογραφία.

Από το κεφάλαιο 4 καταλαβαίνουμε ότι η ασυμπτωτική λύση των τάσεων (4.47α) του καθαρά ελαστικού προβλήματος και ο συντελεστής εντάσεων των τάσεων (4.53) συμπίπτουν με την βιβλιογραφία (Willis, 1967, Freund, 1990, και Gourgiotis et al., 2012). Επιπλέον παρατηρούμε ότι ο Σ.Ε.Τ. για δυναμική διάδοση ρωγμής σε ελαστικό μέσο ταυτίζεται με εκείνον της στατικής ελαστικής ρωγμής, γεγονός που μπορεί να αιτιολογηθεί από την μελέτη του προβλήματος υπό συνθήκες σταθερής κατάστασης.

Όσον αφορά την θερμοελαστική περίπτωση του κεφαλαίου 5, παρατηρούμε ότι στα πλαίσια της παρούσας εργασίας επιβεβαιώνεται η λύση των Χ.Γ. Γεωργιάδη και Γ. Λυκοτραφίτη για το πρόβλημα ταχείας διάδοσης ρωγμής (*Report on moving shear cracks - Crack propagation in thermoelastic media*). Σύμφωνα με το θεωρητικό υπόβαθρο του προβλήματος αν αγνοήσουμε τα θερμικά φαινόμενα θα οδηγηθούμε στην καθαρά μηχανική περίπτωση και κατ’ επέκταση στις λύσεις του κεφαλαίου 4.

Τα αποτελέσματα του 4^{ου} και 5^{ου} κεφαλαίου της διπλωματικής αυτής εργασίας μπορούν να αξιοποιηθούν για την επίλυση παρόμοιων δυναμικών προβλημάτων διάδοσης ρωγμής. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για μελλοντική έρευνα παρουσιάζει η μελέτη της διάδοσης ρωγμής σύμφωνα με τις αρχές της Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας για πιο σύνθετες συνοριακές συνθήκες, οι οποίες θα προσεγγίζουν ακόμα πιο ρεαλιστικά το μελετώμενο φαινόμενο. Μία σύντομη εφαρμογή μεικτών συνοριακών συνθηκών για τον συγκεκριμένο τύπο προβλήματος θα δοθεί στο παράρτημα Β, η οποία ωστόσο δεν θα αναλυθεί λεπτομερώς στα πλαίσια της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας.

Βιβλιογραφία

Achenbach, J. D. (1973). *Wave Propagation in Elastic Solids* (Amsterdam, North-Holland Pub. Co.; New York, American Elsevier Pub. Co., Vol. 16).

Biot, M. A. (1955). *Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics*. https://doi.org/10.1063/1.1722351

Boley, B. A., & Tolins, I. S. (1962). Transient Coupled Thermoelastic Boundary Value Problems in the Half-Space. *ASME J. Appl. Mech*, *29*, 637–646. https://doi.org/10.1115/1.3640647

Brock, L. M., & Georgiadis, H. G. (1997). Steady-State Motion of a Line Mechanical/Heat Source over a Half-Space: A Thermoelastodynamic Solution. *ASME J. Appl. Mech*, *64(3)*, 562–567. https://doi.org/10.1115/1.2788929

Carlson, D. E. (1972). *Linear Thermoelasticity: Vol. VIa/2* (S. Flugge, pp. 297–345). Springer-Verlag.

Carrier, G. A., Krook, M., & Pearson, C. E. (1966). *Functions of a Complex Variable*. McGraw-Hill Book Company.

Chadwick, P. (1960). *Thermoelasticity: The dynamical theory* (Vol. 1). Sneddon, I.N., Hill, R. (Eds).

Eringen, A. C., & Suhubi, E. S. (1975). *Elastodynamics Linear Theory* (Vol. 2). Academic Press INC.

Freund, L. B. (1990). *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge University Press.

Fung, Y. C. (1965). *Foundations of Solid Mecahnics*. Prentice-Hall, INC.

Georgiadis, H. G., Brock, L. M., & Rigatos, A. P. (1998). Transient Concentrated Thermal/Mechanical Loading of the Faces of a Crack in a Coupled-Thermoelastic

Solid. *Pergamon, 35, No 11*(Int. J. Solids Structures). https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00109-1

Georgiadis, H. G., & Lykotrafitis, G. (n.d.). *Report on moving shear cracks—Crack propagation in thermoelastic media*.

Gourgiotis, P., Georgiadis, H., & Sifnaiou, M. (2012). Couple-stress effects for the problem of a crack under concentrated shear loading. *Mathematics and Mechanics of Solids, 17*(5), 433–459. https://doi.org/10.1177/1081286511423123

Lykotrafitis, G., & Georgiadis, H. G. (2003). The three-dimensional steady-state thermo-elastodynamic problem of moving sources over a half space. *International Journal of Solids and Structures*, *40*(4), 899–940. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00613-3

Nowacki, W. (1976). *Dynamic Problems of thermoelasticity*. Noordhoff International Publishing Leyden.

Parkus, H. (1968). *Thermoelasticity*. Blaisdell Publishing Co.

Rahman, M., & Barber, J. R. (1995). Exact expressions for the roots of the secular equation for Rayleigh waves. *ASME J. Appl. Mech*, *62*, 250–252.

Ravi-Chandar, K. (2004). *Dynamic Fracture*. Elsevier Ltd.

Sneddon, I. N. (1974). *The Linear Theory of Thermoelasticity*. Springer-Verlag-Wien-New York.

Somigliana, C. (1892). Sulle Espressioni Analitiche Generali dei Movimenti Oscillatori. *Reale Accad*.

Sternberg, E., & Chakravorty, J. G. (1959). *Thermal Shock in an elastic body with a spherical cavity*. *17*, 205–218.

The Sokhotski-Plemelj Formula. (2018). U.C. Santa Cruz Physics 215 graduate quantum mechanics class.

Van der Pol, B., & Bremmer, H. (1950). *Operational Calculus Based on the Two-Sided Laplace Integral*. Cambridge University Press.

Watanabe, K. (2015). *Integral Transform Techniques for Green's Function* (Second Edition, Vol. 76). Springer International Publishing.

Willis, J. R. (1967). Crack Propagation in Viscoelastic Media. *Pergamon Press Ltd*, *15*, 229–240. https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90013-0

Youssef, H. M. (2015). Theory of generalized thermoelasticity with fractional order strain. *SAGE*. https://doi.org/10.1177/1077546314566837

Αναγνώστου, Δ. Σ. (2005). *Διάδοση Θερμοελαστικών Κυμάτων λόγω Θερμικής Πηγής*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία.

Γεωργιάδης, Χ. (2020). *Εισαγωγή στην Μηχανική του Συνεχούς Μέσου*. Εκδόσεις Τσότρας.

Γεωργιάδης, Χ. Γ. (2003). *Προχωρημένη Μηχανική των Υλικών*. Εκδόσεις Συμμετρία.

Παπαδόπουλος, Γ. Α. (2007). *Πειραματική Μηχανική των Θραύσεων—Οπτικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

Παπαδόπουλος, Γ. Α. (2015). *Μηχανική των Θραύσεων*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

Σαραντόπουλος, Γ. (2017). *Μία Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση με Παραδείγματα και Ασκήσεις*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Σημειώσεις.

Τραχανάς, Σ. Λ. (1995). *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Φαρμάκης, Γ. (2017). *Πρόβλημα Κινούμενου Συγκεντρωμένου Φορτίου στην Επιφάνεια Ελαστοδυναμικού Ημι-χώρου*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία.

Παράρτημα Α: Τεχνική Wiener-Hopf

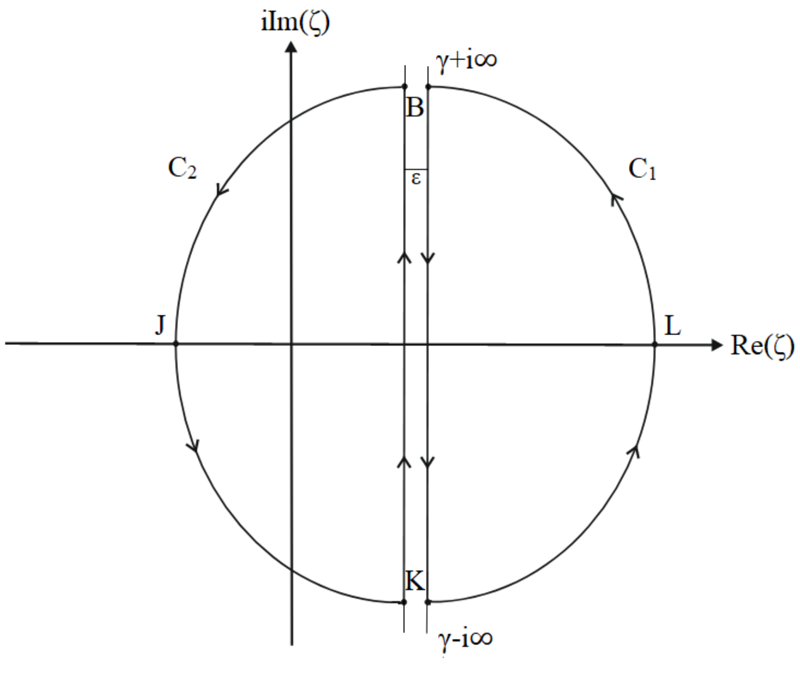
Στο παράρτημα αυτό θα αποδείξουμε ότι ισχύει στην τεχνική Wiener-Hopf το βήμα διαχωρισμού των συναρτήσεων σε επιμέρους αναλυτικές συναρτήσεις με συζυγή ημι-επίπεδα, βασιζόμενοι στο κείμενο του Achenbach (1973).

Έστω η αναλυτική στο μιγαδικό επίπεδο ζ συνάρτηση $L(\zeta)$, την οποία χωρίζουμε σε

$$L(\zeta) = L_+(\zeta) + L_-(\zeta) \tag{A.1}$$

όπου $L_+(\zeta)$ είναι αναλυτική συνάρτηση για $\mathrm{Re}(\zeta) > \gamma_1$ και $L_-(\zeta)$ είναι αναλυτική συνάρτηση για $\mathrm{Re}(\zeta) < \gamma_2$ με $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ και $\gamma_1 < \gamma_2$. Θεωρούμε ότι ε είναι η απόσταση μεταξύ των ευθειών $\mathrm{Re}(\gamma_1) = 0$ και $\mathrm{Re}(\gamma_2) = 0$.

Στην περίπτωση που $\gamma_1, \gamma_2 \to \gamma$ (δηλαδή $\varepsilon \to 0$) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ισότητα (Α.1) ισχύει για ευθεία γραμμή $\mathrm{Re}(\gamma) = 0$ στην οποία ενώνονται τα δύο ημι-επίπεδα. Με άλλα λόγια θεωρούμε ότι η $L_+(\zeta)$ είναι αναλυτική συνάρτηση για $\mathrm{Re}(\zeta) > \gamma$ και η $L_-(\zeta)$ είναι αναλυτική συνάρτηση για $\mathrm{Re}(\zeta) < \gamma$ με $\gamma \in \mathbb{R}$.



Σχήμα 13: Καμπύλες Ολοκλήρωσης C$_1$ και C$_2$ για τις συναρτήσεις L$_+$ και L$_-$ αντίστοιχα

Θεωρούμε ότι για την συνάρτηση $L(\zeta)$ ισχύει ότι

$$L(\zeta)=\mathrm{O}\left(|\zeta|^{-p}\right) \text{ για } \zeta\to\infty,\ p>0 \tag{A.2}$$

ενώ σύμφωνα με τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy οι συναρτήσεις $L_+(\zeta), L_-(\zeta)$ ορίζονται ως

$$L_+(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{L_+(z)}{z-\zeta}dz,\ \mathrm{Re}(\zeta)>\gamma \tag{A.3α}$$

$$L_-(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{L_-(z)}{z-\zeta}dz,\ \mathrm{Re}(\zeta)<\gamma \tag{A.3β}$$

όπου C_1, C_2 τα περιγράμματα Bromwich των παραπάνω ολοκληρωμάτων, με άλλα λόγια οι κλειστές καμπύλες ολοκλήρωσης.

Χωρίζουμε κάθε μία από τις δύο καμπύλες στο ημικυκλικό της τόξο και τον δρόμο Bromwich $(\gamma-i\infty, \gamma+i\infty)$

$$L_+(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{BJK}\frac{L_+(z)}{z-\zeta}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{L_+(z)}{z-\zeta}dz \tag{A.4α}$$

$$L_-(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{BLK}\frac{L_-(z)}{z-\zeta}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{L_-(z)}{z-\zeta}dz \tag{A.4β}$$

Από το λήμμα Jordan και την θεώρηση (A.2) καταλαβαίνουμε ότι

$$\int_{BJK}\frac{L_+(z)}{z-\zeta}dz=\int_{BLK}\frac{L_-(z)}{z-\zeta}dz=0 \tag{A.5}$$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$L_+(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{L_+(z)}{z-\zeta}dz \tag{A.6α}$$

$$L_-(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{L_-(z)}{z-\zeta}dz \tag{A.6β}$$

Επιπλέον, από την σχέση (Α.1) έχουμε ότι

$$L_+(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+i\infty}^{\gamma-i\infty}\frac{L(z)}{z-\zeta}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+i\infty}^{\gamma-i\infty}\frac{L_-(z)}{z-\zeta}dz \tag{A.7α}$$

$$L_-(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{L(z)}{z-\zeta}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{L_+(z)}{z-\zeta}dz \tag{A.7β}$$

Γνωρίζουμε ωστόσο ότι η συνάρτηση $L_+(\zeta)$ είναι αναλυτική για $\mathrm{Re}(\zeta)>\gamma$, ενώ η συνάρτηση $L_-(\zeta)$ είναι αναλυτική για $\mathrm{Re}(\zeta)<\gamma$.

Συνεπώς, για $\mathrm{Re}(\zeta)>\gamma$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+i\infty}^{\gamma-i\infty}\frac{L_-(z)}{z-\zeta}dz=0$$

$$L_+(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+i\infty}^{\gamma-i\infty}\frac{L(z)}{z-\zeta}dz=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{L(z)}{z-\zeta}dz \tag{A.8α}$$

ενώ για $\mathrm{Re}(\zeta)<\gamma$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{L_+(z)}{z-\zeta}dz=0$$

$$L_-(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{L(z)}{z-\zeta}dz \tag{A.8β}$$

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $L(\zeta)$ είναι τέτοια ώστε τα παραπάνω ολοκληρώματα να συγκλίνουν απόλυτα μεταξύ τους για $\mathrm{Re}(\zeta) \neq \gamma$. Θεωρώντας λοιπόν κλειστά επικαμπύλια ολοκληρώματα στα ημι-επίπεδα $\mathrm{Re}(\zeta) > \gamma$ και $\mathrm{Re}(\zeta) < \gamma$ αντίστοιχα και αξιοποιώντας την σχέση (Α.2) και το λήμμα του Jordan καταλαβαίνουμε ότι οι συναρτήσεις $L_+(\zeta), L_-(\zeta)$ είναι αναλυτικές για $\mathrm{Re}(\zeta) > \gamma$ και $\mathrm{Re}(\zeta) < \gamma$ αντίστοιχα.

Έστω σημείο $\zeta_0 = \gamma + i\omega_0$ πάνω στην ευθεία $\mathrm{Re}(\zeta) = \gamma$. Εξ ορισμού γνωρίζουμε ότι

$$L_+(\zeta_0) = \lim_{\zeta \to \zeta_0} L_+(\zeta) \tag{Α.9α}$$

όπου το ζ πλησιάζει το ζ_0 από το δεξί ημι-επίπεδο,

και

$$L_-(\zeta_0) = \lim_{\zeta \to \zeta_0} L_-(\zeta) \tag{Α.9β}$$

όπου το ζ πλησιάζει το ζ_0 από το αριστερό ημι-επίπεδο

Θα αποδείξουμε ότι

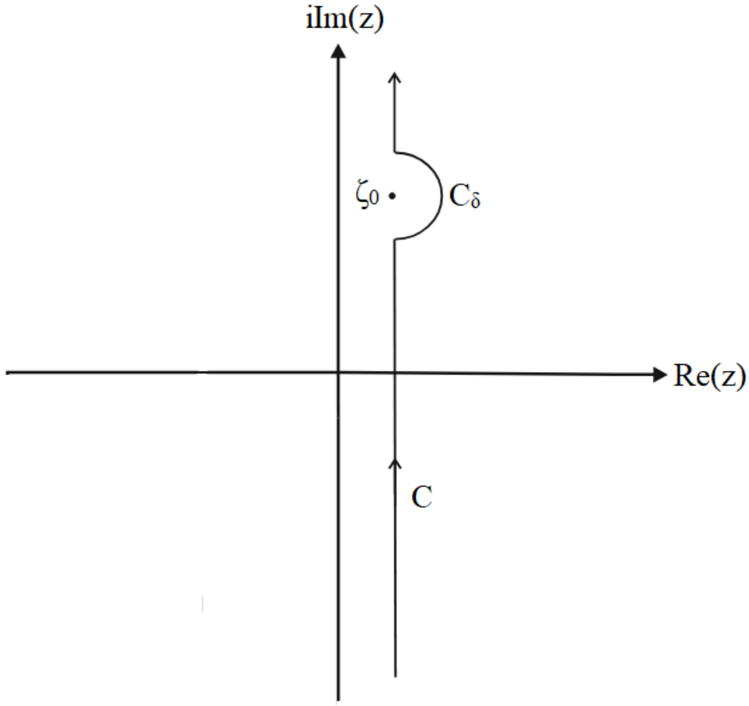
$$L(\zeta_0) = L_+(\zeta_0) + L_-(\zeta_0) \tag{Α.10}$$

Η απόδειξη θα προκύψει από την εκτίμηση των ορίων (Α.9α) και (Α.9β)

Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε ότι $\Omega_1 < \omega_0 < \Omega_2$, τότε η σχέση (Α.8α) γίνεται για το σημείο ζ_0

$$L_+(\zeta_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\Omega_1} \frac{L(z)}{z - \zeta_0} dz - \frac{1}{2\pi i}\lim_{\zeta \to \zeta_0}\left[\int_{\gamma + i\Omega_1}^{\gamma + i\Omega_2} \frac{L(z)}{z - \zeta} dz\right] - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma + i\Omega_2}^{\gamma + i\infty} \frac{L(z)}{z - \zeta_0} dz \tag{Α.11}$$

Θεωρούμε το παρακάτω μονοπάτι ολοκλήρωσης C στο επίπεδο των μιγαδικών αριθμών, όπως φαίνεται και παρακάτω



Σχήμα 14: Μονοπάτι ολοκλήρωσης C

Με άλλα λόγια το C αποτελεί επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος του άξονα των φανταστικών αριθμών από το $-i\infty$ έως το -*δ* ($\delta \in \mathbb{C}$), το οποίο στην συνέχεια οδηγεί στο ημικυκλικό μονοπάτι C_δ (ακτίνας *δ*) και καταλήγει σε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος του άξονα των φανταστικών αριθμών από το δ έως το $+i\infty$ (*The Sokhotski-Plemelj Formula*, 2018). Θεωρούμε ότι το *δ* είναι μία θετική ποσότητα, ενώ στο όριο $\delta \to 0$ μπορούμε να εφαρμόσουμε την προσέγγιση $L(z) \cong L(\zeta_0)$. Τότε

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} \left[\int_{\gamma + i\Omega_1}^{\gamma + i\Omega_2} \frac{L(z)}{z - \zeta} dz \right] = \lim_{\delta \to 0} \left[\int_{C_\delta} \frac{L(z)}{z - \zeta} dz \right] = L(\zeta_0) \lim_{\delta \to 0} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{i\delta e^{i\theta}}{\delta e^{i\theta}} d\theta \right] = -i\pi L(\zeta_0) \qquad \text{(A.12)}$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε τον ορισμό της πρωτεύουσας τιμής Cauchy (Cauchy principal value) στον άξονα των φανταστικών αριθμών ότι

$$P\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{f(x)}{x}dx \equiv \lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{-i\infty}^{-\delta}\frac{f(x)}{x}dx+\int_{\delta}^{+i\infty}\frac{f(x)}{x}dx\right\} \tag{A.13}$$

Συνεπώς, θεωρώντας ότι τα Ω_1,Ω_2 προσεγγίζουν το ω_0 και κατ' επέκταση ότι βρισκόμαστε στο όριο $\delta\to 0$ ($\zeta\to\zeta_0$), αντικαθιστούμε τις σχέσεις (Α.12) και (Α.13) στην (Α.11) ώστε να προκύψει η σχέση

$$L_+(\zeta_0)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\Omega_1}\frac{L(z)}{z-\zeta_0}dz+\frac{1}{2\pi i}i\pi L(\zeta_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+i\Omega_2}^{\gamma+i\infty}\frac{L(z)}{z-\zeta_0}dz$$

$$\Rightarrow L_+(\zeta_0)=\frac{1}{2}L(\zeta_0)-\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\Omega_1}\frac{L(z)}{z-\zeta_0}dz+\int_{\gamma+i\Omega_2}^{\gamma+i\infty}\frac{L(z)}{z-\zeta_0}dz\right]$$

$$\Rightarrow L_+(\zeta_0)=\frac{1}{2}L(\zeta_0)-\frac{1}{2\pi i}\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\omega_0}\frac{L(z)}{z-\zeta_0}dz+\int_{\gamma+i\omega_0}^{\gamma+i\infty}\frac{L(z)}{z-\zeta_0}dz\right]$$

$$\Rightarrow L_+(\zeta_0)=\frac{1}{2}L(\zeta_0)-\frac{1}{2\pi i}P\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{L(z)}{z-\zeta_0}dz \tag{A.14α}$$

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$L_-(\zeta_0)=\frac{1}{2}L(\zeta_0)+\frac{1}{2\pi i}P\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{L(z)}{z-\zeta_0}dz \tag{A.14β}$$

Προσθέτοντας λοιπόν τις σχέσεις (Α14α) και (Α14β) έχουμε

$$L_+(\zeta_0)+L_-(\zeta_0)=\frac{1}{2}L(\zeta_0)-\frac{1}{2\pi i}P\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{L(z)}{z-\zeta_0}dz+\frac{1}{2}L(\zeta_0)+\frac{1}{2\pi i}P\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{L(z)}{z-\zeta_0}dz$$

$$\Rightarrow L_+(\zeta_0)+L_-(\zeta_0)=L(\zeta_0)$$

Αποδεικνύεται λοιπόν η σχέση (Α.9).

Στην συνέχεια θεωρούμε ότι στο $\mathrm{Re}(\zeta)=\gamma$ πραγματοποιείται ο διαχωρισμός (decomposition)

$$K(\zeta)=K_{+}(\zeta)K_{-}(\zeta) \tag{A.15}$$

ενώ θεωρούμε ότι το $K(\zeta)$ δεν μηδενίζεται για $\mathrm{Re}(\zeta)=\gamma$.

Λογαριθμίζοντας την σχέση (A15) έχουμε

$$\ln\left[K(\zeta)\right]=\ln\left[K_{+}(\zeta)\right]+\ln\left[K_{-}(\zeta)\right] \tag{A.16}$$

Παρατηρούμε ότι αν τα $K_{+}(\zeta),K_{-}(\zeta)$ δεν μηδενίζονται στα ημι-επίπεδα $\mathrm{Re}(\zeta)>\gamma$ και $\mathrm{Re}(\zeta)<\gamma$ αντίστοιχα, τότε και τα $\ln\left[K_{+}(\zeta)\right]$ και $\ln\left[K_{-}(\zeta)\right]$ αποτελούν ακεραίες συναρτήσεις στα επίπεδα αυτά.

Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι το $\ln\left[K(\zeta)\right]$ ικανοποιεί την συνθήκη (A2), τότε ο διαχωρισμός της $K(\zeta)$ σε γινόμενο συναρτήσεων είναι ισοδύναμος με τον διαχωρισμό της $\ln\left[K(\zeta)\right]$ σε άθροισμα συναρτήσεων (Achenbach, 1973).

Παράρτημα Β: Μεικτές Συνοριακές Συνθήκες

Β.1 Περιγραφή νέων συνοριακών συνθηκών

Στο σημείο αυτό θα μελετηθεί το πρόβλημα διάδοσης ρωγμής σε θερμοελαστικό μέσο του κεφαλαίου 5 εφαρμόζοντας μεικτό τύπο συνοριακών συνθηκών. Συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε ότι τα χείλη της ρωγμής δεν άγουν θερμότητα, με άλλα λόγια είναι μονωμένα (insulated boundary conditions), κατ' επέκταση έχουν μηδενική τιμή θερμικής ροής. Επίσης θεωρούμε ότι η θερμοκρασία στο άνω χείλος της ρωγμής έχει αντίθετη τιμή σε σχέση με την θερμοκρασία στο κάτω χείλος λόγω αντισυμμετρίας του προβλήματος. Αποτέλεσμα αυτής της υπόθεσης είναι η συνολική θερμοκρασία μπροστά από το άκρο της ρωγμής να είναι ίση με το μηδέν, έχοντας ωστόσο μη μηδενική τιμή θερμικής ροής στην περιοχή αυτή. Καταλήγουμε λοιπόν σε ένα θερμοελαστικό πρόβλημα μεικτών συνοριακών συνθηκών, στο οποίο η θερμική ροή πίσω από το άκρο της ρωγμής είναι ίση με το μηδέν, ενώ μπροστά από το άκρο της ρωγμής η θερμοκρασία είναι ίση με το μηδέν. Η μαθηματική έκφραση των νέων συνοριακών συνθηκών στον χώρο των πραγματικών αριθμών δίνεται παρακάτω:

$$u_x\left(x, y=0^+\right)=u_-\left(x\right), -\infty < x < +\infty \tag{Β.1α}$$

$$\sigma_{xy}\left(x, y=0^+\right)=\sigma_+\left(x\right)-f\left(x\right)H\left(-x\right), -\infty < x < +\infty \tag{Β.1β}$$

$$\sigma_{yy}\left(x, y=0^+\right)=0, -\infty < x < +\infty \tag{Β.1γ}$$

$$\theta\left(x, y=0^+\right)=\theta_-\left(x\right), -\infty < x < +\infty \tag{Β.1δ}$$

$$q\left(x, y=0^+\right)=q_+\left(x\right), -\infty < x < +\infty \tag{Β.1ε}$$

όπου

$$u_-\left(x\right)=\begin{cases} 0, x \geq 0 \\ u\left(x\right), x < 0 \end{cases} \tag{Β.2α}$$

$$\sigma_+\left(x\right)=\begin{cases} \sigma\left(x\right), x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \tag{Β.2β}$$

$$\theta_{-}(x)=\begin{cases}0, x\geq 0\\ \theta(x), x<0\end{cases} \tag{B.2γ}$$

$$q_{+}(x)=\begin{cases}q(x), x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases} \Rightarrow q_{+}(x)=\begin{cases}-\mathrm{K}\nabla\theta(x), x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases} \tag{B.2δ}$$

B.2 Εφαρμογή του αμφίπλευρου μετασχηματισμού Laplace

Έχουμε λοιπόν τις μετασχηματισμένες λύσεις των τάσεων και των μετατοπίσεων για το πρόβλημα διάδοσης ρωγμής τύπου II σε μέσο το οποίο υπακούει στην Θεωρία Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας. Η αναλυτική εύρεση των λύσεων δίνεται στο κεφάλαιο 5, σύμφωνα με το οποίο καταλήγουμε στις σχέσεις (5.29α,β,γ) και (5.30α,β,γ,).

$$U_x=b_1\exp(-\alpha_{+}y)+b_2\exp(-\alpha_{-}y)+b_3\exp(-by) \tag{B.3α}$$

$$U_y=-\frac{\alpha_{+}}{p}b_1\exp(-\alpha_{+}y)-\frac{\alpha_{-}}{p}b_2\exp(-\alpha_{-}y)+\frac{p}{b}b_3\exp(-by) \tag{B.3β}$$

$$\Theta=-\frac{M_T^2M_{+}}{M_L^2\kappa}b_1\exp(-\alpha_{+}y)-\frac{M_T^2M_{-}}{M_L^2\kappa}b_2\exp(-\alpha_{-}y) \tag{B.3γ}$$

και

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{xx}=-\frac{T_{+}}{p}b_1\exp(-\alpha_{+}y)-\frac{T_{-}}{p}b_2\exp(-\alpha_{-}y)+2pb_3\exp(-by) \tag{B.4α}$$

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{yy}=\frac{T}{p}b_1\exp(-\alpha_{+}y)+\frac{T}{p}b_2\exp(-\alpha_{-}y)-2pb_3\exp(-by) \tag{B.4β}$$

$$\frac{1}{\mu}\Sigma_{xy}=-2\alpha_{+}b_1\exp(-\alpha_{+}y)-2\alpha_{-}b_2\exp(-\alpha_{-}y)-\frac{T}{b}b_3\exp(-by) \tag{B.4γ}$$

όπου

$$T_{+}=2\alpha_{+}^2-M_T^2p^2,\;\; T_{-}=2\alpha_{-}^2-M_T^2p^2,\; T=p^2\left(M_T^2-2\right) \tag{B.4δ}$$

Μετασχηματίζοντας λοιπόν τις νέες συνοριακές συνθήκες μέσω του αμφίπλευρου μετασχηματισμού Laplace προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις

$$\Sigma_{yy}\left(p, y=0^{+}\right)=0 \Rightarrow \mu\left(\frac{T}{p} b_{1}+\frac{T}{p} b_{2}-2 p b_{3}\right)=0 \Rightarrow \frac{T}{p} b_{1}+\frac{T}{p} b_{2}-2 p b_{3}=0 \qquad (\text{B.5α})$$

$$U_{x}\left(p, y=0^{+}\right)=U^{-}(p) \Rightarrow b_{1}+b_{2}+b_{3}=U^{-}(p) \qquad (\text{B.5β})$$

$$\Sigma_{xy}\left(p, y=0^{+}\right)=\Sigma^{+}(x)-\frac{\tau_{0}}{(1/\xi)-p} \Rightarrow -2\alpha_{+} b_{1}-2\alpha_{-} b_{2}-\frac{T}{b} b_{3}=\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_{0}}{(1/\xi)-p}\right] \qquad (\text{B.5γ})$$

$$\Theta\left(p, y=0^{+}\right)=\Theta^{-}(p) \Rightarrow M_{+} b_{1}+M_{-} b_{2}=\Theta^{-}(p) \qquad (\text{B.5δ})$$

$$Q\left(p, y=0^{+}\right)=Q^{+}(p) \Rightarrow -K \frac{d\Theta}{dy}\left(p, y=0^{+}\right)=Q^{+}(p) \Rightarrow K\alpha_{+} M_{+} b_{1}+K\alpha_{-} M_{-} b_{2}=Q^{+}(p)$$

(B.5ε)

Συνδυάζοντας λοιπόν τις εξισώσεις (B.5α), (B.5β) και (B.5δ) παίρνουμε τις παρακάτω εκφράσεις για τους συντελεστές b_1, b_2, b_3

$$b_{1}=\frac{-\left(T+2 p^{2}\right) \Theta^{-}(p)+2 M_{-} p^{2} U^{-}(p)}{\left(M_{+}-M_{-}\right)\left(T+2 p^{2}\right)} \qquad (\text{B.6α})$$

$$b_{2}=\frac{-\left(T+2 p^{2}\right) \Theta^{-}(p)+2 M_{+} p^{2} U^{-}(p)}{\left(M_{-}-M_{+}\right)\left(T+2 p^{2}\right)} \qquad (\text{B.6β})$$

$$b_{3}=\frac{T U^{-}(p)}{T+2 p^{2}} \qquad (\text{B.6γ})$$

ενώ αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στην εξίσωση (B5γ) καταλήγουμε στην σχέση

$$\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_0}{(1/\xi)-p}\right]=-\frac{T^2U^{-}(p)}{(T+2p^2)b}+\frac{2\alpha_{-}\left[-2p^2\Theta^{-}(p)-T\Theta^{-}(p)+2M_{+}p^2U^{-}(p)\right]}{(M_{-}-M_{+})(T+2p^2)}$$

$$+\frac{2\alpha_{+}\left[-2p^2\Theta^{-}(p)-T\Theta^{-}(p)+2M_{-}pU^{-}(p)\right]}{(M_{+}-M_{-})(T+2p^2)}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_0}{(1/\xi)-p}\right]=-\frac{2(\alpha_{+}-\alpha_{-})}{(M_{+}-M_{-})}\Theta^{-}(p)+\frac{4bp^2(\alpha_{+}M_{-}-\alpha_{-}M_{+})+T^2(M_{-}-M_{+})}{b(M_{+}-M_{-})(T+2p^2)}U^{-}(p) \qquad \text{(B.7)}$$

Όμοια, συνδυάζουμε τις εξισώσεις (Β.5α), (Β.5β), (Β.5ε) και λαμβάνουμε τις παρακάτω εκφράσεις για τους συντελεστές b_1, b_2, b_3

$$b_1=-\frac{-(T+2p^2)Q^{+}(p)+2\alpha_{-}KM_{-}p^2U^{-}(p)}{K(\alpha_{+}M_{+}-\alpha_{-}M_{-})(T+2p^2)} \qquad \text{(B.8α)}$$

$$b_2=-\frac{-(T+2p^2)Q^{+}(p)+2\alpha_{+}KM_{+}p^2U^{-}(p)}{K(\alpha_{-}M_{-}-\alpha_{+}M_{+})(T+2p^2)} \qquad \text{(B.8β)}$$

$$b_3=\frac{TU^{-}(p)}{T+2p^2} \qquad \text{(B.8γ)}$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των παραπάνω συντελεστών στην εξίσωση (Β.5γ) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_0}{(1/\xi)-p}\right]=-\frac{\mathrm{T}^2U^{-}(p)}{(T+2p^2)b}+\frac{2\alpha_{-}\left[-2p^2Q^{+}(p)-TQ^{+}(p)+2\alpha_{+}KM_{+}pU^{-}(p)\right]}{K(\alpha_{-}M_{-}-\alpha_{+}M_{+})(T+2p^2)}$$

$$+\frac{2\alpha_{+}p\left[-2p^2Q^{+}(p)-TQ^{+}(p)+2\alpha_{-}KM_{-}p^2U^{-}(p)\right]}{K(\alpha_{+}M_{+}-\alpha_{-}M_{-})(T+2p^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_0}{(1/\xi)-p}\right]=-\frac{2(\alpha_{+}-\alpha_{-})}{K(\alpha_{+}M_{+}-\alpha_{-}M_{-})}Q^{+}(p)$$

$$+\frac{4\alpha_{+}\alpha_{-}bp^2(M_{-}-M_{+})+T^2(\alpha_{-}M_{-}-\alpha_{+}M_{+})}{b(\alpha_{+}M_{+}-\alpha_{-}M_{-})(T+2p^2)}U^{-}(p) \tag{B.9}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_0}{(1/\xi)-p}\right]=-\frac{2(\alpha_{+}-\alpha_{-})}{(M_{+}-M_{-})}\Theta^{-}(p)+\frac{4bp^2(\alpha_{+}M_{-}-\alpha_{-}M_{+})+T^2(M_{-}-M_{+})}{b(M_{+}-M_{-})(T+2p^2)}U^{-}(p)$$

(B.10α)

$$\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_0}{(1/\xi)-p}\right]=-\frac{2(\alpha_{+}-\alpha_{-})}{K(\alpha_{+}M_{+}-\alpha_{-}M_{-})}Q^{+}(p)$$

$$+\frac{4\alpha_{+}\alpha_{-}bp^2(M_{-}-M_{+})+T^2(\alpha_{-}M_{-}-\alpha_{+}M_{+})}{b(\alpha_{+}M_{+}-\alpha_{-}M_{-})(T+2p^2)}U^{-}(p) \tag{B.10β}$$

B.3 Προσεγγίσεις υποηχητικής περιοχής

Στην συνέχεια αξιοποιούμε τις προσεγγίσεις της υποηχητικής περιοχής που δίνονται από τις σχέσεις (5.34α,β,γ,δ,ε,στ), δηλαδή (Brock & Georgiadis, 1997)

$$M_{+}\cong -M_L\frac{1+\varepsilon}{h}p=-M_{L\varepsilon}\frac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h}p \tag{B.11α}$$

$$M_{-}\cong -M_L{}^2\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}p^2=-M_{L\varepsilon}{}^2\varepsilon p^2 \tag{B.11β}$$

$$\alpha_{+}\cong\left(M_L\frac{1+\varepsilon}{h}\right)^{1/2}(\tau-p)^{1/2}=\left[M_{L\varepsilon}\frac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h}\right]^{1/2}(\tau-p)^{1/2} \tag{B.11γ}$$

$$\alpha_{-} \cong \left(1-\frac{M_L{}^2}{1+\varepsilon}\right)^{1/2}\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}=\left(1-M_{L\varepsilon}{}^2\right)^{1/2}\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2} \qquad (\text{B.11δ})$$

$$T=\left(M_T^2-2\right)p^2, \;\; b=\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2} \qquad (\text{B.11ε,στ})$$

Θέτοντας λοιπόν τις συναρτήσεις

$$\Gamma_{1,\alpha}\left(p\right)=2hM_T^2\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}\left[\left[\frac{\left(1+\varepsilon\right)^{3/2}}{h}M_{L\varepsilon}\right]^{1/2}\left(\tau-p\right)^{1/2}+\left(1-M_{L\varepsilon}^2\right)^{1/2}\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}\right]$$

(B.12α)

$$\Gamma_{1,\beta}\left(p\right)=\left(1+\varepsilon\right)^{3/2}M_{L\varepsilon}p^3\left[\left(M_T^2-2\right)^2-4\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(1-M_{L\varepsilon}{}^2\right)^{1/2}\right]$$

$$-\varepsilon hM_{L\varepsilon}{}^2p^3\left[\left(M_T^2-2\right)^2p-4\left[M_{L\varepsilon}\frac{\left(1+\varepsilon\right)^{3/2}}{h}\right]^{1/2}\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(\tau+p\right)^{1/2}\right] \qquad (\text{B.12β})$$

για την σχέση (Β.10α) και

$$\Gamma_{2,\alpha}\left(p\right)=2hM_T^2\left(1-M_T^2\right)^{1/2}\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}\left[\left(1-M_{L\varepsilon}{}^2\right)^{1/2}\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}-\left[M_{L\varepsilon}\frac{\left(1+\varepsilon\right)^{3/2}}{h}\right]^{1/2}\left(\tau+p\right)^{1/2}\right]$$

(B.13α)

$$\Gamma_{2,\beta}\left(\mathrm{p}\right)=\varepsilon hK\mathrm{M}_{\mathrm{L\varepsilon}}{}^2\left(1-\mathrm{M}_{\mathrm{L\varepsilon}}{}^2\right)^{1/2}\mathrm{p}^3\left(\tau^2-\mathrm{p}^2\right)^{1/2}\left[\left(\mathrm{M}_\mathrm{T}^2-2\right)^2\mathrm{p}-4\left(\mathrm{M}_{\mathrm{L\varepsilon}}\frac{\left(1+\varepsilon\right)^{3/2}}{\mathrm{h}}\right)^{1/2}\left(1-\mathrm{M}_\mathrm{T}^2\right)^{1/2}\left(\tau+\mathrm{p}\right)^{1/2}\right]$$

$$+hK\left(\mathrm{M}_{\mathrm{L\varepsilon}}\frac{\left(1+\varepsilon\right)^{3/2}}{\mathrm{h}}\right)^{1/2}\mathrm{p}^3\left(\tau-\mathrm{p}\right)^{1/2}\left[\left(\mathrm{M}_\mathrm{T}^2-2\right)^2-4\left(1-\mathrm{M}_\mathrm{T}^2\right)^{1/2}\left(1-\mathrm{M}_{\mathrm{L\varepsilon}}{}^2\right)^{1/2}\right] \qquad (\text{B.13})$$

για την σχέση (Β.10β)

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις προσεγγίσεις της υποηχητικής περιοχής στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων (B.10) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_0}{(1/\xi)-p}\right]=\frac{\Gamma_{1,\alpha}(p)\Theta^{-}(p)}{M_{L\varepsilon}M_T^2\left(1-M_T^2\right)^{1/2}p\left[(1+\varepsilon)^{1/2}+\varepsilon\left((1+\varepsilon)^{1/2}+hM_{L\varepsilon}p\right)\right]\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}}$$

$$+\frac{\Gamma_{1,\beta}(p)U^{-}(p)}{M_{L\varepsilon}M_T^2\left(1-M_T^2\right)^{1/2}p\left[(1+\varepsilon)^{1/2}+\varepsilon\left((1+\varepsilon)^{1/2}+hM_{L\varepsilon}p\right)\right]\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}} \qquad \text{(B.14α)}$$

$$\frac{1}{\mu}\left[\Sigma^{+}(p)-\frac{\tau_0}{(1/\xi)-p}\right]=\frac{\Gamma_{2,\alpha}(p)Q^{+}(p)}{KM_{L\varepsilon}M_T^2\left(1-M_T^2\right)^{1/2}pF(p)\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}}$$

$$+\frac{\Gamma_{2,\beta}(p)U^{-}(p)}{KM_{L\varepsilon}M_T^2\left(1-M_T^2\right)^{1/2}pF(p)\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2}} \qquad \text{(B.14β)}$$

όπου

$$F(p)=\frac{h\left(M_{L\varepsilon}\dfrac{(1+\varepsilon)^{3/2}}{h}\right)^{1/2}(\tau-p)^{1/2}}{M_{L\varepsilon}}+\varepsilon hM_{L\varepsilon}\left(1-M_{L\varepsilon}{}^2\right)^{1/2}p\left(\tau^2-p^2\right)^{1/2} \qquad \text{(B.15)}$$

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να επιλυθεί μέσω της τεχνικής Wiener-Hopf. Ωστόσο, στα πλαίσια της διπλωματικής αυτής εργασίας γίνεται μόνο μία σύντομη περιγραφή του προβλήματος με μεικτές συνοριακές συνθήκες και δεν πρόκειται να επιλυθεί περαιτέρω.

Παράρτημα Γ: Εκτέλεση πράξεων μέσω του λογισμικού MATHEMATICA

Γ.1 Εύρεση λύσεων του συστήματος διαφορικών εξισώσεων

Αρχικά ορίζεται ο πίνακας C_ε του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (5.11) ως

mat={{(MT^2/ML^2)*(1−ML^2)*p^2+d^2,((MT^2/ML^2)−1)*p*d,k*p},

{((MT^2/ML^2)−1)*p*d,(1−MT^2)*(p^2)+(MT^2/ML^2)*d^2,k*d}

{−(e/h)*p^2,−(e/h)*p*d,(ML*k/MT^2)*(p^2+d^2+(ML*p/h))}} (Γ.1)

$$\left\{\left\{d^2+\frac{(1-ML^2)MT^2p^2}{ML^2},d\left(-1+\frac{MT^2}{ML^2}\right)p,kp\right\},\left\{d\left(-1+\frac{MT^2}{ML^2}\right)p,\frac{d^2MT^2}{ML^2}+(1-MT^2)p^2,dk\right\}\right.$$
$$\left.\left\{-\frac{ep^2}{h},-\frac{dep}{h},\frac{kML\left(d^2+\frac{MLp}{h}+p^2\right)}{MT^2}\right\}\right\}$$

όπου

$mat \equiv C_\varepsilon$ από την σχέση (5.11), $\mathrm{MT} \equiv \mathrm{M}_T$, $\mathrm{ML} \equiv M_L$ από τις σχέσεις (4.3α,β,γ) του 4ου κεφαλαίου και $\mathrm{k} \equiv \kappa$, $\mathrm{e} \equiv \varepsilon$ από την σχέση (5.8α) του 5ου κεφαλαίου.

Η ορίζουσα του πίνακα C_ε $\det(C_\varepsilon)$ προσδιορίζεται μέσω της εντολής

r=Det[mat]//FullSimplify (Γ.2)

$$\frac{k\left(d^2-(-1+MT^2)p^2\right)\left(d^4h+d^2p\left(2hp+ML\left(1+e-hMLp\right)\right)+p^3\left(hp+ML\left(1+e-ML\left(ML+hp\right)\right)\right)\right)}{hML}$$

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα του πίνακα C_ε αποτελεί ένα πολυώνυμο 6ου βαθμού ως προς το d, συνεπώς η εξίσωση $\det(C_\varepsilon)=0$ θα έχει το πολύ 6 λύσεις.

Η επίλυση της εξίσωσης $\det\left(C_{\varepsilon}\right)=0$ δίνεται μέσω της εντολής

$$\text{Solve}\left[\text{r==0,d}\right]\text{//Simplify} \tag{Γ.3}$$

$$\{\{\mathrm{d}\to-\sqrt{-1+\mathrm{MT}^2}\,\mathrm{p}\},\{\mathrm{d}\to\sqrt{-1+\mathrm{MT}^2}\,\mathrm{p}\},$$

$$\{\mathrm{d}\to-\frac{\sqrt{\frac{\mathrm{p}(-2\mathrm{hp}+\mathrm{hML}^2\mathrm{p}-\mathrm{ML}(1+\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}(2-2\mathrm{hMLp})+(1+\mathrm{hMLp})^2}))}{\mathrm{h}}}}{\sqrt{2}}\},$$

$$\{\mathrm{d}\to\frac{\sqrt{\frac{\mathrm{p}(-2\mathrm{hp}+\mathrm{hML}^2\mathrm{p}-\mathrm{ML}(1+\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}(2-2\mathrm{hMLp})+(1+\mathrm{hMLp})^2}))}{\mathrm{h}}}}{\sqrt{2}}\},$$

$$\{\mathrm{d}\to-\frac{\sqrt{\frac{\mathrm{p}(-2\mathrm{hp}+\mathrm{hML}^2\mathrm{p}+\mathrm{ML}(-1-\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}(2-2\mathrm{hMLp})+(1+\mathrm{hMLp})^2}))}{\mathrm{h}}}}{\sqrt{2}}\},$$

$$\{\mathrm{d}\to\frac{\sqrt{\frac{\mathrm{p}(-2\mathrm{hp}+\mathrm{hML}^2\mathrm{p}+\mathrm{ML}(-1-\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}(2-2\mathrm{hMLp})+(1+\mathrm{hMLp})^2}))}{\mathrm{h}}}}{\sqrt{2}}\}\}$$

ενώ για να απλοποιήσουμε τα τελικά αποτελέσματα θέτουμε τις εξής παραμέτρους

$$\text{r1=}\left(\left(\left(\left(\text{ML\^{}}\left(1/2\right)\text{*p\^{}}\left(1/2\right)\right)+\left(\text{e/h}\right)\text{\^{}}\left(1/2\right)\right)\text{\^{}2+}\left(1/\text{h}\right)\right)\text{\^{}}\left(1/2\right)\right)\text{/2;} \tag{Γ.4α}$$

$$\text{r2=}\left(\left(\left(\left(\text{ML\^{}}\left(1/2\right)\text{*p\^{}}\left(1/2\right)\right)-\left(\text{e/h}\right)\text{\^{}}\left(1/2\right)\right)\text{\^{}2+}\left(1/\text{h}\right)\right)\text{\^{}}\left(1/2\right)\right)\text{/2;} \tag{Γ.4β}$$

$$\text{m1=}-\text{ML*p*}\left(\text{r1+r2}\right)\text{\^{}2;} \tag{Γ.4γ}$$

$$\text{m2=}-\text{ML*p*}\left(\text{r1}-\text{r2}\right)\text{\^{}2;} \tag{Γ.4δ}$$

$$\text{a1=}\left(\text{m1}-\left(1-\text{ML\^{}2}\right)\text{*p\^{}2}\right)\text{\^{}}\left(1/2\right)\text{;} \tag{Γ.4ε}$$

$$\text{a2=}\left(\text{m2}-\left(1-\text{ML\^{}2}\right)\text{*p\^{}2}\right)\text{\^{}}\left(1/2\right)\text{;} \tag{Γ.4στ}$$

όπου $\mathrm{r1} \equiv \rho_+$, $\mathrm{r2} \equiv \rho_-$ από τις σχέσεις (5.19α,β) του 5ου κεφαλαίου, $\mathrm{m1} \equiv M_+$, $\mathrm{m2} \equiv M_-$, από τις σχέσεις (5.18α,β) και $\mathrm{a1} \equiv a_+$, $\mathrm{a2} \equiv a_-$ από τις σχέσεις (5.17α,β)

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις παραπάνω σταθερές στην ορίζουσα r προκύπτει ότι

$\mathrm{r/.d} \to \mathrm{p}\sqrt{-1+\mathrm{MT}^2}$

0

$\mathrm{r/.d} \to -\mathrm{p}\sqrt{-1+\mathrm{MT}^2}$

0

$\mathrm{r/.d} \to \mathrm{a1//FullSimplify}$

0

$\mathrm{r/.d} \to -\mathrm{a1//FullSimplify}$

0

$\mathrm{r/.d} \to \mathrm{a2//FullSimplify}$

0

$\mathrm{r/.d} \to -\mathrm{a2//FullSimplify}$

0

Ωστόσο, λόγω του φραγμού των λύσεων για $y \to \infty$, επιλέγονται μόνο οι λύσεις a1, a2 και $-\mathrm{p}\sqrt{-1+\mathrm{MT}^2}$ η οποία ταυτίζεται με το b της σχέσης (5.17γ).

Γ.2 Προσδιορισμός σχέσεων μεταξύ σταθερών b_i, c_i, f_i

Στην συνέχεια θα προσδιορίσουμε τις σχέσεις μεταξύ των σταθερών b_i, c_i, f_i της γενικής λύσης του συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$U_x = b_1 \exp(-\alpha_+ y) + b_2 \exp(-\alpha_- y) + b_3 \exp(-by)$$

$$U_y = c_1 \exp(-\alpha_+ y) + c_2 \exp(-\alpha_- y) + c_3 \exp(-by)$$

$$\Theta = f_1 \exp(-\alpha_+ y) + f_2 \exp(-\alpha_- y) + f_3 \exp(-by)$$

όπως δίνονται από τις σχέσεις (5.21α,β,γ) του $5^{ου}$ κεφαλαίου.

Αρχικά ορίζουμε τις παραπάνω συναρτήσεις στο MATHEMATICA ως

$$\mathrm{Ux}\left[\mathrm{y\_}\right]=\mathrm{b1*exp}\left[-\mathrm{a1*y}\right]+\mathrm{b2*exp}\left[-\mathrm{a2*y}\right]+\mathrm{b3*exp}\left[-\mathrm{b*y}\right]; \tag{Γ.5α}$$

$$\mathrm{Uy}\left[\mathrm{y\_}\right]=\mathrm{c1*exp}\left[-\mathrm{a1*y}\right]+\mathrm{c2*exp}\left[-\mathrm{a2*y}\right]+\mathrm{c3*exp}\left[-\mathrm{b*y}\right]; \tag{Γ.5β}$$

$$\mathrm{U}\left[\mathrm{y\_}\right]=\mathrm{f1*exp}\left[-\mathrm{a1*y}\right]+\mathrm{f2*exp}\left[-\mathrm{a2*y}\right]+\mathrm{f3*exp}\left[-\mathrm{b*y}\right]; \tag{Γ.5γ}$$

όπου

$\mathrm{Ux}\equiv U_x,\ \mathrm{Uy}\equiv U_y,\ \mathrm{U}\equiv\Theta,\ \mathrm{a1}\equiv\alpha_1,\ \mathrm{a2}\equiv\alpha_2$

$\mathrm{b1}\equiv b_1,\ \mathrm{b2}\equiv b_2,\ \mathrm{b3}\equiv b_3$

$\mathrm{c1}\equiv c_1,\ \mathrm{c2}\equiv c_2,\ \mathrm{c3}\equiv c_3$

$\mathrm{f1}\equiv f_1,\ \mathrm{f2}\equiv f_2,\ \mathrm{f3}\equiv f_3$

Αντικαθιστούμε λοιπόν τα U_x, U_y και Θ στον πίνακα mat (Γ.1)

$$\begin{aligned}&\mathrm{f=\{\{(MT^2/ML^2)*(1-ML^2)*p^2*Ux[y]+Ux''[y],((MT^2/ML^2)-1)*p*Uy'[y],k*p*U[y]\},}\\&\mathrm{\{((MT^2/ML^2)-1)*p*Ux'[y],(1-MT^2)*(p^2)*Uy[y]+(MT^2/ML^2)*Uy''[y],k*U'[y]\},}\\&\mathrm{\{-(e/h)*p^2*Ux[y],-(e/h)*p*Uy'[y],}\\&\mathrm{(ML*k/MT^2)*(p^2+(ML*p/h))*U[y]+(ML*k/MT^2)*U''[y]\}\};}\end{aligned} \tag{Γ.6}$$

και αναδιατάσσουμε τους όρους ως προς τα $\exp\left[-\mathrm{a1}y\right],\ \exp\left[-\mathrm{a2}y\right],\ \exp\left[-\mathrm{b}y\right]$

Η 1η διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι

$$\left[\frac{(1-\mathrm{ML}^2)\mathrm{MT}^2\mathrm{p}^2}{\mathrm{ML}^2}+\mathrm{a1}^2-\left(-1+\frac{\mathrm{MT}^2}{\mathrm{ML}^2}\right)\mathrm{pa1c1+kpf1}\right]\mathrm{b1exp}[-\mathrm{a1y}]$$

$$+\left[\frac{(1-\mathrm{ML}^2)\mathrm{MT}^2\mathrm{p}^2}{\mathrm{ML}^2}+\mathrm{a2}^2-\left(-1+\frac{\mathrm{MT}^2}{\mathrm{ML}^2}\right)\mathrm{pa2c2+kpf2}\right]\mathrm{b2exp}[-\mathrm{a2y}]$$

$$+[\frac{(1-ML^2)MT^2p^2}{ML^2}+b^2-(-1+\frac{MT^2}{ML^2})pbc3+kpf3]b3exp[-by]=0 \qquad (Γ.7α)$$

η 2η διαφορική εξίσωση

$$[-(-1+\frac{MT^2}{ML^2})pa1+(1-MT^2)p^2c1+\frac{MT^2a1^2c1}{ML^2}-ka1f1]b1exp[-a1y]$$

$$+[-(-1+\frac{MT^2}{ML^2})pa2+(1-MT^2)p^2c2+\frac{MT^2a2^2c2}{ML^2}-ka2f2]b2exp[-a2y]$$

$$+[-(-1+\frac{MT^2}{ML^2})pb+(1-MT^2)p^2c3+\frac{MT^2b^2c3}{ML^2}-kbf3]b3exp[-by]=0 \qquad (Γ.7β)$$

και η 3η διαφορική εξίσωση

$$[-\frac{ep^2}{h}+\frac{epa1c1}{h}+\frac{kML(\frac{MLp}{h}+p^2)f1}{MT^2}+\frac{kMLa1^2f1}{MT^2}]b1exp[-a1y]$$

$$+[-\frac{ep^2}{h}+\frac{epa2c2}{h}+\frac{kML(\frac{MLp}{h}+p^2)f2}{MT^2}+\frac{kMLa2^2f2}{MT^2}]b2exp[-a2y]$$

$$+[-\frac{ep^2}{h}+\frac{epa1c1}{h}+\frac{kML(\frac{MLp}{h}+p^2)f1}{MT^2}+\frac{kMLa1^2f1}{MT^2}]b1exp[-a1y]=0 \qquad (Γ.7γ)$$

Οι εξισώσεις (Γ.7α), (Γ.7β), (Γ.7γ) ικανοποιούνται μόνο αν οι συντελεστές των εκθετικών μηδενίζονται. Επιλύουμε λοιπόν ως εξής:

$$Solve[-p\left(-1+\frac{MT^2}{ML^2}\right)a1*b1+p^2*\left(1-MT^2\right)*c1+\frac{MT^2*a1^2*c1}{ML^2}-k*a1*f1==0 \ \&\&$$

$$\frac{b1*\left(1-ML^2\right)p^2*MT^2}{ML^2}+a1^2*b1-p*\left(-1+\frac{MT^2}{ML^2}\right)a1*c1+f1*k*p==0,\{c1,b1,f1\}] \qquad (Γ.8α)$$

$$\left\{\left\{c1\to-\frac{a1b1}{p},f1\to-\frac{b1MT^2\left(a1^2+p^2-ML^2p^2\right)}{kML^2p}\right\}\right\}$$

$$\text{Solve}[\frac{\text{b2}\left(1-\text{ML}^2\right)\text{p}^2\text{MT}^2}{\text{ML}^2}+\text{a2}^2\text{b2}-\text{p}\left(-1+\frac{\text{MT}^2}{\text{ML}^2}\right)\text{a2c2+f2kp==0}\;\&\&$$

$$-\text{p}\left(-1+\frac{\text{MT}^2}{\text{ML}^2}\right)\text{a2b2+p}^2\left(1-\text{MT}^2\right)\text{c2+}\frac{\text{MT}^2\text{a2}^2\text{c2}}{\text{ML}^2}-\text{ka2f2==0,}\{\text{c2,b2,f2}\}] \qquad (\Gamma.8\beta)$$

$$\left\{\left\{\text{c2}\to-\frac{\text{a2b2}}{\text{p}},\text{f2}\to-\frac{\text{b2MT}^2\left(\text{a2}^2+\text{p}^2-\text{ML}^2\text{p}^2\right)}{\text{kML}^2\text{p}}\right\}\right\}$$

$$\text{Solve}[\frac{\text{b3}\left(1-\text{ML}^2\right)\text{p}^2\text{MT}^2}{\text{ML}^2}+\text{b}^2\text{b3}-\text{p}\left(-1+\frac{\text{MT}^2}{\text{ML}^2}\right)\text{bc3+f3kp==0}\;\&\&$$

$$-\text{p}\left(-1+\frac{\text{MT}^2}{\text{ML}^2}\right)\text{bb3+p}^2\left(1-\text{MT}^2\right)\text{c3+}\frac{\text{MT}^2\text{b}^2\text{c3}}{\text{ML}^2}-\text{kbf3==0,}\{\text{c3,b3,f3}\}] \qquad (\Gamma.8\gamma)$$

$$\left\{\left\{\text{c3}\to-\frac{\text{bb3}}{\text{p}},\text{f3}\to-\frac{\text{b3MT}^2\left(\text{b}^2+\text{p}^2-\text{ML}^2\text{p}^2\right)}{\text{kML}^2\text{p}}\right\}\right\}$$

Παρατηρούμε από τα αποτελέσματα των εξισώσεων (Γ.8α,β,γ) ότι τα c1,c2,c3 που προκύπτουν ταυτίζονται με τα c_1, c_2, c_3 των σχέσεων (5.28α,β,γ). Αν αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις (Γ.8α) και (Γ.8β) τα α_+, α_- των σχέσεων (5.17α,β) (όπου $\text{a1} \equiv a_+$, $\text{a2} \equiv a_-$ και αμελώντας την επίδραση του πραγματικού αριθμού $\tau \to 0$) προκύπτει ότι

$$\text{f1}\to-\frac{\text{b1MT}^2\left(\text{a1}^2+\text{p}^2-\text{ML}^2\text{p}^2\right)}{\text{kML}^2\text{p}}=-\frac{\text{MT}^2\text{m1}}{\text{kML}^2\text{p}}\text{b1} \qquad (\Gamma.9\alpha)$$

$$\text{f2}\to-\frac{\text{b2MT}^2\left(\text{a2}^2+\text{p}^2-\text{ML}^2\text{p}^2\right)}{\text{kML}^2\text{p}}=-\frac{\text{MT}^2\text{m2}}{\text{kML}^2\text{p}}\text{b2} \qquad (\Gamma.9\beta)$$

τα οποία ταυτίζονται με τα f_1, f_2 των σχέσεων (5.28δ,ε).

Όσον αφορά το f_3, παρατηρούμε από την πράξη

$$\text{Solve}[\frac{b3\left(1-ML^2\right)p^2MT^2}{ML^2}+b^2b3-p\left(-1+\frac{MT^2}{ML^2}\right)bc3+f3kp==0\ \&\&$$

$$-\frac{ep^2b3}{h}+\frac{epbc3}{h}+\frac{f3kML\left(\frac{MLp}{h}+p^2\right)}{MT^2}+\frac{kML}{MT^2}b^2f3==0,\{c3,b3,f3\}] \qquad (\Gamma.10)$$

$$\{\{c3\to-\frac{b3\left(-\frac{ekp^3}{h}-\left(\frac{b^2kML}{MT^2}+p^2\right)\left(b^2+\frac{(1-ML^2)p^2MT^2}{ML^2}\right)\right)}{\frac{bekp^2}{h}+bp\frac{kML\left(\frac{MLp}{h}+p^2+b^2\right)}{MT^2}\left(\frac{MT^2}{ML^2}-1\right)},$$

$$f3\to-\frac{b3ML\left(-b^2eMT^2-ep^2MT^2+ep^2MT^4\right)}{k\left(b^2hML^2+ML^3p+hML^2p^2-b^2hMT^2-MLpMT^2-eMLpMT^2-hp^2MT^2\right)}\}\}$$

ότι αν αντικαταστήσουμε στο αποτέλεσμα της (Γ.10) για την f3 το μέγεθος b της σχέσης (5.17γ) (αμελώντας την επίδραση του πραγματικού αριθμού $\tau\to 0$), τότε γίνεται

$$f3=-\frac{b3ML\left(-b^2eMT^2-ep^2MT^2+ep^2MT^4\right)}{k\left(b^2hML^2+ML^3p+hML^2p^2-b^2hMT^2-MLpMT^2-eMLpMT^2-hp^2MT^2\right)}=0 \qquad (\Gamma.11)$$

με άλλα λόγια μηδενίζεται.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα b_i, c_i, f_i συνδέονται μεταξύ τους μέσω των σχέσεων

$$c1=-\frac{a1b1}{p},\ c2=-\frac{a2b2}{p},\ c3=-\frac{bb3}{p}$$

$$f1=-\frac{MT^2m1}{kML^2p}b1,\ f2=-\frac{MT^2m2}{kML^2p}b2,\ f3=0$$

Οι οποίες ταυτίζονται με τις σχέσεις (5.28α,β,γ,δ,ε,στ) του κεφαλαίου 5. Με άλλα λόγια αποδεικνύεται ότι οι γενικές μετασχηματισμένες λύσεις του συστήματος (5.12) είναι της μορφής

$$U_x = b_1 \exp\left(-\alpha_+ y\right) + b_2 \exp\left(-\alpha_- y\right) + b_3 \exp\left(-by\right)$$

$$U_y = -\frac{\alpha_+}{p} b_1 \exp\left(-\alpha_+ y\right) - \frac{\alpha_-}{p} b_2 \exp\left(-\alpha_- y\right) + \frac{p}{b} b_3 \exp\left(-by\right)$$

$$\Theta = -\frac{M_T^2 M_+}{M_L^2 \kappa p} b_1 \exp\left(-\alpha_+ y\right) - \frac{M_T^2 M_-}{M_L^2 \kappa p} b_2 \exp\left(-\alpha_- y\right)$$