



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Ποσοτικοποίηση Αβεβαιοτήτων και Βελτιστοποίηση με  
τη Μέθοδο των Ροπών Πρώτης Τάξης, με έμφαση στις  
Γεωμετρικές Αβεβαιότητες

Διπλωματική Εργασία

Μιχαήλ Σ. Τσαγκάρης

Επιβλέπων:  
Κυριάκος Κ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2023



## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον καθηγητή κ. Κ. Γιαννάκογλου για το γεγονός ότι υπήρξε πάντα διαθέσιμος οποιαδήποτε στιγμή χρειάστηκα τη βοήθεια ή τη γνώμη του κατά του την εκπόνηση της εργασίας αυτής, συνεισφέροντας με πολύτιμες, επί της ουσίας συμβουλές και επισημάνσεις. Εξίσου πολύτιμη ήταν και η υποστήριξη και καθοδήγησή του επί λοιπών θεμάτων που άπτονται του ενδιαφέροντος ενός σπουδαστή μηχανολόγου, γεγονός που εκτιμώ ιδιαίτερα.

Θερμές ευχαριστίες στα μέλη της ΜΠΥΡ&Β του Τομέα Ρευστών και ιδιαίτερα στους Δρ. Βαγγέλη Παπουτσή-Κιαχαγιά και Δρ. Θέμη Σκαμάγκη για την πολύ σημαντική βοήθεια που μου προσέφεραν όποτε τη χρειάστηκα.

Στους φίλους και συμφοιτητές μου, Δημήτρη, Μάνθο και Στεφανία, με τους οποίους μοιράστηκα χαρές, δυσκολίες, προκλήσεις και επιτυχίες, θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου για τη φιλία και τη στήριξή τους αυτά τα χρόνια της κοινής μας πορείας στο Πολυτεχνείο.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω στην οικογένειά μου, στους γονείς μου και στα αδέρφια μου, που είναι ο σημαντικότερος λόγος για τον οποίο έφτασα ως εδώ.





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

## Ποσοτικοποίηση Αβεβαιοτήτων και Βελτιστοποίηση με τη Μέθοδο των Ροπών Πρώτης Τάξης, με έμφαση στις Γεωμετρικές Αβεβαιότητες

Διπλωματική Εργασία

Μιχαήλ Σ. Τσαγκάρης

Επιβλέπων :

Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2023

### Περίληψη

Το θέμα της διπλωματικής εργασίας αυτής αφορά στην Ποσοτικοποίηση Αβεβαιοτήτων και στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής για ασυμπίεστες, 2Δ, στρωτές, χρονικά αμετάβλητες ροές. Οι Γεωμετρικές Αβεβαιότητες μοντελοποιούνται ως στοχαστική διαδικασία με μέση τιμή μηδέν με τη χρήση του αναπτύγματος Karhunen - Loève (KL), υπερτιθέμενη στο στερεό όριο. Η στοχαστικότητα εισάγεται μέσω των Μεταβλητών Αβεβαιότητας που είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος KL. Η Βελτιστοποίηση υπό Αβεβαιότητες, αλλιώς Στιβαρός Σχεδιασμός, αφορά στην ελαχιστοποίηση μίας Συνάρτησης Κόστους που περιλαμβάνει τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση μίας Ποσότητας Ενδιαφέροντος (QoI - Quantity of Interest) που εξαρτάται από τη ροή. Στην εργασία αυτής, η QoI είναι η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στο στερεό όριο. Οι Γεωμετρικές Αβεβαιότητες επηρεάζουν την QoI. Ο υπολογισμός της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης αυτής, που ονομάζεται Ποσοτικοποίηση Αβεβαιότητας, γίνεται με τη Μέθοδο των Στατιστικών Ροπών Πρώτης Τάξης (FOSM - First Order Second Moment). Ο υπολογισμός των παραγώγων της Ποσότητας Ενδιαφέροντος ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και τις Μεταβλητές Αβεβαιότητας που απαιτούνται για τη βελτιστοποίηση και την Ποσοτικοποίηση Αβεβαιότητας γίνονται με τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Επίσης, η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών σε συνδυασμό με τη συνεχή συζυγή μέθοδο χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των μικτών παραγώγων

δεύτερης τάξης της QoI ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και αβεβαιότητας.

Η εφαρμογή των παραπάνω έγινε στο λογισμικό ανοικτού κώδικα OpenFOAM με τη δημιουργία πηγαίου κώδικα. Για την πιστοποίηση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν εφαρμογές εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής στις οποίες έγινε σύγκριση των υπολογισμένων με τη συνεχή συζυγή μέθοδο παραγώγων με τις πεπερασμένες διαφορές και των αποτελεσμάτων της μεθόδου FOSM με τη μέθοδο Monte - Carlo.



**National Technical University of Athens**  
**School of Mechanical Engineering**  
**Fluids Department**  
**Parallel CFD & Optimization Unit**

# **Uncertainty Quantification and Optimization with the First-Order Method of Moments, with emphasis on Geometrical Uncertainties**

Diploma Thesis

**Michail S. Tsagkaris**

Academic Supervisor :  
Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, February 2023

## **Abstract**

The topic of this diploma thesis focuses on the aerodynamic shape optimization under geometrical uncertainties for 2D laminar flows of incompressible fluids at steady-state conditions. Geometrical uncertainties are modelled as a zero-mean stochastic process described by a truncated Karhunen-Loeve (KL) expansion, superimposed on the wall surface. The uncertainty variables represent the KL expansion coefficients. Optimization under uncertainties, otherwise referred to as Robust Design, involves the minimization of an Objective Function containing the mean value and standard deviation of a Quantity of Interest (QoI), which in the case of this particular thesis is the force exerted by the fluid flow at the wall surface. Geometrical uncertainties influence the QoI and thus, QoI is also of stochastic nature. Calculation of the mean value and standard deviation of the QoI, referred to as Uncertainty Quantification (UQ), is performed using the First-Order, Second-Moment (FOSM) method. Computation of the necessary derivatives of the QoI with respect to the design and uncertainty variables, required for Optimization and UQ, is implemented using the continuous adjoint method. For the second order, mixed derivatives of the QoI with respect to both design and uncertain variables, Finite Differences in combination with the continuous adjoint method are used.

Application of the above procedure was carried out in OpenFOAM open-source software by means of the development of a new source code to implement the ge-

ometrical uncertainties-based UQ and Robust Design functionality. Verification was achieved by running internal and external aerodynamics test cases and comparing the results against Monte-Carlo and Finite Differences methods, for the UQ and QoI-derivatives respectively.



## Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΤΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
<hr/>	
NTUA	National Technical University of Athens
PCopt	Parallel CFD & Optimization unit
CFD	Computational Fluid Dynamics
FOSM	First Order - First Moment (method)
KL	Karhunen - Loève
pFOSM	projected FOSM
QoI	Quantity of Interest
UQ	Uncertainty Quantification
FD	Finite Differences



# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Εισαγωγή στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής . . . . .	1
1.2 Κατηγορίες προβλημάτων βελτιστοποίησης . . . . .	1
1.3 Στιβαρός σχεδιασμός . . . . .	2
1.4 Βήματα Αλγορίθμου Βελτιστοποίησης . . . . .	3
1.5 Στόχος και Δομή της Διπλωματικής Εργασίας . . . . .	4
<b>2 Αβεβαιότητες Γεωμετρίας</b>	<b>7</b>
2.1 Μοντελοποίηση . . . . .	7
2.2 Έννοιες από τη Θεωρία Πιθανοτήτων . . . . .	7
2.3 Το ανάπτυγμα KL . . . . .	10
2.3.1 Ορισμός . . . . .	10
2.3.2 Διακριτοποίηση . . . . .	11
2.3.3 Οι παράγωγοι $\frac{\delta x_i}{\delta c_m}$ . . . . .	12
2.3.4 Παρατηρήσεις . . . . .	13
2.3.5 Εξασφάλιση συνέχειας του στερεού ορίου . . . . .	14
2.3.6 Παράδειγμα εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων της συμμεταβλη- τηότητας . . . . .	16
2.3.7 Παράδειγμα με τη χρήση συνάρτησης συμμεταβλητότητας δι- αφορετικής μορφής . . . . .	20
2.3.8 Θύσανος στοχαστικών διαδικασιών . . . . .	23
2.3.9 Παράδειγμα γένεσης γεωμετρικών ατελειών σε αγωγό μορφής S με το ανάπτυγμα KL . . . . .	26
2.3.10 Παράδειγμα γένεσης γεωμετρικών ατελειών σε αεροτομή . . . . .	27
<b>3 Ποσοτικοποίηση Αβεβαιότητας με τη μέθοδο FOSM</b>	<b>29</b>
3.1 Ποσοτικοποίηση Αβεβαιότητας . . . . .	29
3.2 FOSM . . . . .	29
3.3 Απόδειξη της σχέσης (3.1) . . . . .	30
3.4 Απόδειξη της σχέσης (3.2) . . . . .	31
3.5 Στιβαρός Σχεδιασμός . . . . .	32

<b>4</b>	<b>Πρωτεύουσες Εξισώσεις της Ροής</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>Παράγωγοι <math>\frac{\delta J}{\delta b_n}, \frac{\delta J}{\delta c_m}</math> - Υπολογισμός με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο</b>	<b>35</b>
5.1	Η Επαυξημένη Συνάρτηση Ενδιαφέροντος . . . . .	35
5.2	Διατύπωση των Συζυγών Πεδιακών Εξισώσεων . . . . .	39
5.3	Οριακές συνθήκες των Συζυγών Εξισώσεων . . . . .	40
5.4	Τελικά έκφραση παραγώγων $\frac{\delta J}{\delta b_n}$ . . . . .	42
5.5	Παράγωγοι $\frac{\delta J}{\delta c_m}$ . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Πιστοποίηση παραγώγων και UQ</b>	<b>45</b>
6.1	Εφαρμογή σε αγωγό μορφής S . . . . .	45
6.1.1	Περιγραφή . . . . .	45
6.1.2	Επαλήθευση παραγώγων . . . . .	49
6.1.3	Επαλήθευση UQ . . . . .	51
6.2	Εφαρμογή σε μεμονωμένη αεροτομή . . . . .	53
6.2.1	Περιγραφή . . . . .	53
6.2.2	Επαλήθευση παραγώγων . . . . .	53
6.2.3	Επαλήθευση UQ . . . . .	54
6.3	Εφαρμογή σε πτερύγωση στροβιλομηχανής . . . . .	54
6.3.1	Περιγραφή . . . . .	54
6.3.2	Επαλήθευση παραγώγων . . . . .	57
6.3.3	Επαλήθευση UQ . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Βελτιστοποίηση αγωγού σχήματος S</b>	<b>59</b>
<b>8</b>	<b>Συμπεράσματα και προτάσεις περαιτέρω έρευνας</b>	<b>65</b>
8.1	Συμπεράσματα . . . . .	65
8.2	Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα . . . . .	i
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>iii</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Εισαγωγή στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής

Τα προβλήματα **αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής** (aerodynamic shape optimisation) αφορούν στην κατάλληλη τροποποίηση του σχήματος ενός στερεού σώματος που υπόκειται σε ροή ρευστού γύρω από αυτό έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται μία ποσότητα που ονομάζεται **Συνάρτηση Κόστους** (Objective Function),  $J$ . Παράδειγμα συνάρτησης κόστους είναι η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στο στερεό σώμα σε κάποια συγκεκριμένη διεύθυνση, όπως η **άνωση** (lift) και η **οπισθέλκουσα** (drag). Η γεωμετρία του υπό βελτιστοποίηση σώματος θεωρείται ότι περιγράφεται από ένα σύνολο μεταβλητών,  $b_n$ , οι οποίες ονομάζονται **μεταβλητές σχεδιασμού** (design variables). Οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού καθορίζουν τη γεωμετρία του στερεού σώματος. Επομένως, ζητούμενο της βελτιστοποίησης είναι η εύρεση των τιμών των  $b_n$  που ελαχιστοποιούν τη συνάρτηση κόστους  $J$ . Σημειώνεται πως όταν γίνεται αναφορά σε βελτιστοποίηση, στη συνέχεια, θα θεωρείται δεδομένο ότι αυτή αφορά σε αεροδυναμική βελτιστοποίηση μορφής. Στα προβλήματα βελτιστοποίησης ανήκουν και τα προβλήματα μεγιστοποίησης της συνάρτησης κόστους. Αυτά, ωστόσο, μπορούν εύκολα να μετατραπούν σε προβλήματα ελαχιστοποίησης με μικρή τροποποίηση της συνάρτησης κόστους. Για τον λόγο αυτό, θα θεωρείται στο εξής ότι η βελτιστοποίηση αφορά προβλήματα εύρεσης ελαχίστου.

### 1.2 Κατηγορίες προβλημάτων βελτιστοποίησης

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης διαχωρίζονται, με βάση το πλήθος των συναρτήσεων κόστους,  $J$ , σε προβλήματα **ενός στόχου** (Single Objective Optimisation - SOO) και σε **πολλών στόχων** (Multi Objective Optimisation) [1].

Ένας άλλος διαχωρισμός αφορά στις μεθόδους βελτιστοποίησης. Γενικά, υπάρχουν δύο μεγάλες κατηγορίες μεθόδων βελτιστοποίησης, οι στοχαστικές και οι αιτιοκρα-

τικές. Οι **στοχαστικές** (stochastic) [2, 3] μέθοδοι λειτουργούν αξιολογώντας ένα μεγάλο πλήθος συνδυασμών των μεταβλητών σχεδιασμού,  $b_n$ , και των τιμών της συνάρτησης κόστους,  $J$ , στις οποίες αυτοί αντιστοιχούν. Η επιλογή των συνδυασμών αυτών οφείλεται σε κάποιο βαθμό σε οργανωμένη τυχαιότητα. Αυτός είναι ο λόγος που οι μέθοδοι αυτές ονομάζονται στοχαστικές. Η πιο γνωστή κατηγορία στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης είναι οι **Εξελικτικοί Αλγόριθμοι** (Evolutionary Algorithms) στους οποίους η επιλογή του βέλτιστου συνδυασμού μεταβλητών σχεδιασμού γίνεται μέσα από διαδικασίες οι οποίες μιμούνται τις διεργασίες της φυσικής εξέλιξης. Η δεύτερη μεγάλη κατηγορία μεθόδων βελτιστοποίησης, οι **αιτιοκρατικές** (deterministic) [1] λαμβάνουν υπόψη τις τιμές των παραγώγων της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Αυτό τους επιτρέπει να κατευθύνουν αποδοτικότερα την αναζήτηση βέλτιστων λύσεων καθώς μπορούν να εκτιμήσουν τη μεταβολή που θα επιφέρει στη συνάρτηση κόστους η μεταβολή στις τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού. Ένας απλός και προφανής τρόπος με τον οποίο μπορούν να το επιτύχουν αυτό είναι η **Μέθοδος της Απότομης Καθόδου** (Steepest Descent). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού σε κάθε νέο **κύκλο βελτιστοποίησης** (optimisation cycle) προκύπτουν από αυτές του προηγούμενου κύκλου από τη σχέση

$$b_n^{new} = b_n^{old} - \eta \frac{\delta J}{\delta b_n}, \quad (1.1)$$

όπου  $\eta$  θετική παράμετρος που επιλέγεται από τον χρήστη και ονομάζεται **βήμα της απότομης καθόδου**. Άλλες γνωστές μέθοδοι, στην κατηγορία των αιτιοκρατικών, είναι η **Μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων** (Conjugate Gradients Method) [4], η **Μέθοδος Newton** (Newton's method) [5], μέθοδοι **Quasi-Newton** [6, 7].

### 1.3 Στιβαρός σχεδιασμός

Στα προβλήματα της κλασικής βελτιστοποίησης γίνεται η παραδοχή σταθερών συνθηκών λειτουργίας. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι παράμετροι του προβλήματος εκτός από τις μεταβλητές σχεδιασμού θεωρούνται αμετάβλητες. Παραδείγματα τέτοιων παραμέτρων είναι η ταχύτητα και η γωνία εισόδου της ροής στο υπολογιστικό χωρίο.

Στην πραγματικότητα όμως, κανένα σύστημα δεν λειτουργεί υπό αυστηρά αμετάβλητες συνθήκες λειτουργίας. Η **βελτιστοποίηση υπό αβεβαιότητες** (optimisation under uncertainties) ή, όπως αλλιώς ονομάζεται, ο **στιβαρός σχεδιασμός** (robust design) αφορά στη βελτιστοποίηση εκείνη που λαμβάνει υπόψη της ότι το υπό μελέτη σύστημα μπορεί να λειτουργεί σε ένα εύρος συνθηκών λειτουργίας. Αυτό σημαίνει ότι ορισμένες από τις παραμέτρους λειτουργίας του λαμβάνουν τιμές από ένα εύρος τιμών με τυχαίο τρόπο. Αυτές οι παράμετροι ονομάζονται **μεταβλητές αβεβαιότητας** ή **μεταβλητές περιβάλλοντος** (uncertain variables or environment variables) και θα συμβολίζονται με  $c_m$ . Οι μεταβλητές αβεβαιότητας είναι στοχαστικές μεταβλητές λόγω του ότι υπόκεινται σε τυχαιότητα. Ένα παράδειγμα μεταβλητών που μπορούν να επιλεγούν ως μεταβλητές αβεβαιότητας είναι και πάλι η ταχύτητα και η γωνία εισόδου

της ροής στο υπολογιστικό χωρίο δεδομένου ότι σε φυσικά προβλήματα οι τιμές τους δεν διατηρούνται πάντα σταθερές. Μία συνήθης παραδοχή (όχι όμως και υποχρεωτική) που γίνεται είναι ότι οι μεταβλητές αβεβαιότητας ακολουθούν κανονική κατανομή (**Six Sigma Design**).

Στο στιβαρό σχεδιασμό, η ποσότητα  $J$  ονομάζεται **ποσότητα ενδιαφέροντος** (Quantity of Interest - QoI). Στόχος ενός προβλήματος στιβαρού σχεδιασμού είναι η ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής,  $\mu_J$ , και της τυπικής απόκλισης,  $\sigma_J$ , και όχι της τιμής της  $J$ , για ένα συγκεκριμένο σημείο λειτουργίας. Για τον λόγο αυτό, στα προβλήματα στιβαρού σχεδιασμού, ως συνάρτηση κόστους ορίζεται συνήθως ένας γραμμικός συνδυασμός των δύο αυτών παραμέτρων και συμβολίζεται με  $\hat{J}$ .

$$\hat{J} = \mu_J + k\sigma_J \quad (1.2)$$

Συχνά, για τη  $\hat{J}$  χρησιμοποιείται και ο όρος **μετρική αεροδυναμικής στιβαρότητας**, αλλά στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας θα προτιμηθεί ο όρος συνάρτηση κόστους, ως απλούστερος.

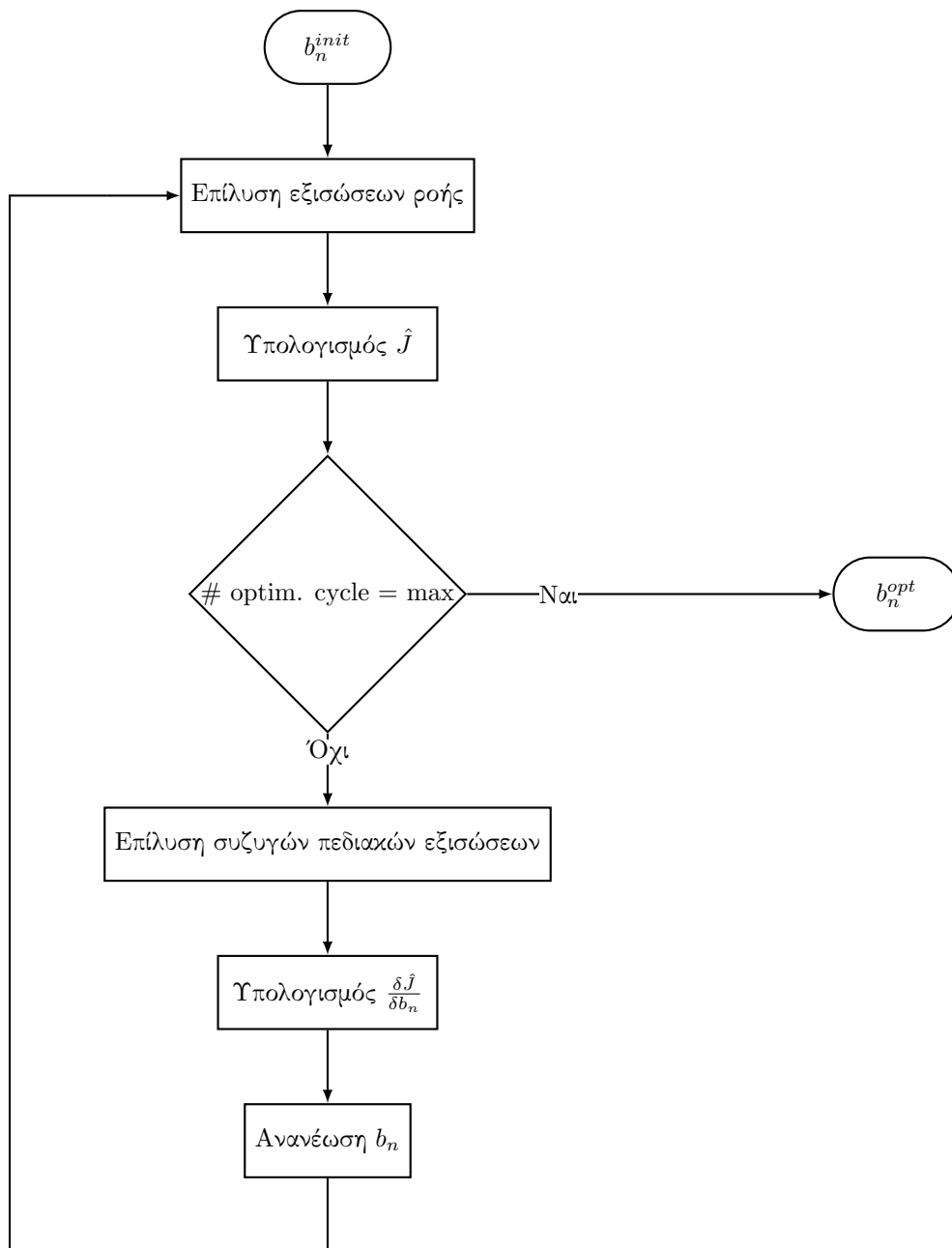
Η παράμετρος  $k$  ορίζεται από τον χρήστη. Όσο μικρότερη η τιμή της, τόσο η βελτιστοποίηση τείνει προς την κλασική βελτιστοποίηση χωρίς αβεβαιότητες.

Λαμβάνοντας ως συνάρτηση κόστους τη  $\hat{J}$  ο τύπος της απότομης καθόδου γίνεται

$$b_n^{new} = b_n^{old} - \eta \frac{\delta \hat{J}}{\delta b_n}. \quad (1.3)$$

## 1.4 Βήματα Αλγορίθμου Βελτιστοποίησης

Τα βήματα που ακολουθεί ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης, για προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής, συνοψίζονται στο διάγραμμα ροής του σχήματος 1.1.



**Σχήμα 1.1:** Διαγράμμα ροής του αλγορίθμου βελτιστοποίησης αεροδυναμικών μορφών όταν υπάρχουν αβεβαιότητες στις συνθήκες ροής

## 1.5 Στόχος και Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Στο πρώτο μέρος της διπλωματικής εργασίας γίνεται παρουσίαση μοντέλου γεωμετρικών αβεβαιοτήτων βασισμένου στο ανάπτυγμα Karhunen-Loève (KL) και παράθεση παραδειγμάτων εφαρμογής του. Ακολουθεί η μαθηματική διατύπωση της μεθόδου των



στατιστικών ροπών πρώτης τάξης (FOSM) με έμφαση στην ποσοτικοποίηση των γεωμετρικών αβεβαιοτήτων. Η συνεχής συζυγής μέθοδος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των απαραίτητων παραγώγων για την εφαρμογή της μεθόδου FOSM. Σημαντικό μέρος της εργασίας αποτελεί επίσης η προγραμματισμός κώδικα για το λογισμικό ανοικτού κώδικα OpenFOAM που αφορά στο μοντέλο γεωμετρικών αβεβαιοτήτων και στη μέθοδο FOSM. Βεβαίως, έγινε χρήση μεγάλου μέρους υπάρχοντος κώδικα OpenFOAM της ΜΠΥΡ&Β που προϋπήρχε και αφορά κυρίως στη συζυγή μέθοδο και στη μέθοδο FOSM. Η πιστοποίηση των απαραίτητων παραγώγων και της ακρίβειας των αποτελεσμάτων της μεθόδου FOSM γίνεται μέσα από εφαρμογές στο OpenFOAM. Τέλος, παρουσιάζεται η μαθηματική ανάπτυξη της μεθόδου pFOSM για το στιβαρό σχεδιασμό που λαμβάνει υπόψη τις γεωμετρικές αβεβαιότητες. Η προγραμματιστική υλοποίηση της μεθόδου αυτής αφήνεται ως πρόταση για περαιτέρω έρευνα.

Επιγραμματικά, η διπλωματική ακολουθεί την εξής δομή:

- **Κεφάλαιο 2:** Διατυπώνεται το μοντέλο γεωμετρικών αβεβαιοτήτων με τη χρήση του αναπτύγματος KL και δίνονται ορισμένα παραδείγματα εφαρμογής του
- **Κεφάλαιο 3:** Γίνεται παρουσίαση και απόδειξη της μεθόδου FOSM
- **Κεφάλαιο 4:** Παρατίθενται οι εξισώσεις Navier Stokes για ασυμπίεστη, στρωτή ροή
- **Κεφάλαιο 5:** Γίνεται παρουσίαση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό των παραγώγων της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και αβεβαιότητας
- **Κεφάλαιο 6:** Γίνεται αντιπαραβολή των παραγώγων που υπολογίζονται με τη συζυγή μέθοδο με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών σε παραδείγματα εφαρμογών στο λογισμικό OpenFOAM. Επίσης, στις ίδιες εφαρμογές, γίνεται πιστοποίηση της μεθόδου FOSM μέσω της σύγκρισής της με τη μέθοδο Monte-Carlo.
- **Κεφάλαιο 7:** Γίνεται εφαρμογή των μεθόδων που αναπτύχθηκαν στην εργασία για βελτιστοποίηση αγωγού σχήματος S, υπό αβεβαιότητες και σχολιάζονται τα αποτελέσματα
- **Κεφάλαιο 8:** Παρατίθενται τα συμπεράσματα της εργασίας καθώς και οι προτάσεις για περαιτέρω έρευνα



# Κεφάλαιο 2

## Αβεβαιότητες Γεωμετρίας

### 2.1 Μοντελοποίηση

Η ανάπτυξη του μοντέλου αβεβαιότητων γεωμετρίας αφορά στις 2 διαστάσεις (2Δ). Αυτό σημαίνει πως σε ό,τι ακολουθήσει θα θεωρείται δεδομένο ότι η ροή είναι 2Δ, εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

Μία διαταραχή γεωμετρίας ενός στερεού μπορεί να μοντελοποιηθεί ως υπέρθεση μίας καμπύλης διαταραχής  $h(x_i^o)$  κάθετα στην καμπύλη της ονομαστικής του γεωμετρίας,  $x_i^o$ .

$$x_i = x_i^o + h(x_i^o)n_i \quad (2.1)$$

Η μορφή της καμπύλης διαταραχής,  $h$ , είναι αυτή που θα απασχολήσει περισσότερο τα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν.

Εξ αντικειμένου, πρέπει η καμπύλη διαταραχής να έχει στοχαστικά και όχι αιτιοκρατικά χαρακτηριστικά γιατί προκύπτει από τυχαιότητα και όχι από γνωστούς μηχανισμούς. Δηλαδή, δεν μπορεί να είναι γνωστή εκ των προτέρων η μορφή της, αλλά μόνο στοχαστικά μεγέθη όπως η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση κάθε σημείου της. Επιπλέον, η μέση τιμή της διαταραχής πρέπει να είναι μηδενική έτσι ώστε οι διαταραχές να δομούνται περίπου 'συμμετρικά' γύρω από την ονομαστική γεωμετρία. Για να προσδιοριστεί περαιτέρω η μορφή της καμπύλης διαταραχής πρέπει να παρουσιαστούν ορισμένες έννοιες από τη θεωρία πιθανοτήτων.

### 2.2 Έννοιες από τη Θεωρία Πιθανοτήτων

Μία **στοχαστική διαδικασία** (random process) [8, 9],  $p(t)$ , είναι μία οικογένεια στοχαστικών μεταβλητών, καθεμία από τις οποίες αντιστοιχεί σε μία διαφορετική τιμή της παραμέτρου  $t$ . Αν όλα τα σημεία έχουν την ίδια μέση τιμή, αυτή ορίζεται και ως μέση τιμή της στοχαστικής διαδικασίας. Επομένως, αν όλα τα σημεία μίας στοχαστικής διαδικασίας έχουν μέση τιμή μηδέν, τότε η στοχαστική διαδικασία θεωρείται ότι έχει

μέση τιμή μηδέν και το αντίστροφο. Εδώ να τονιστεί ότι είναι σύνηθες στη βιβλιογραφία να χρησιμοποιείται το γράμμα  $t$  ως παράμετρος μίας στοχαστικής διαδικασίας. Η ίδια πρακτική ακολουθείται και στην εργασία αυτή με ορισμένες εξαιρέσεις όπου χρησιμοποιείται το σύμβολο  $s$  για τονιστεί ότι δεν πρόκειται για χρονική αλλά χωρική παράμετρο, για αποφυγή παρερμηνειών.

Η **προσδοκώμενη τιμή** ή προσδοκία (expected value, expectation) μίας στοχαστική μεταβλητής  $X$  με **συνάρτηση κατανομής** (Probability Density Function, PDF)  $w(x)$  ορίζεται ως

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x)dx. \quad (2.2)$$

Αν  $X$  και  $X'$  δύο στοχαστικές μεταβλητές με κατανομή  $w(x)$  και μέση τιμή μηδέν, η **Συμμεταβλητότητα** (Covariance) ορίζεται ως

$$Cov(X, X') = E[XX'] \quad (2.3)$$

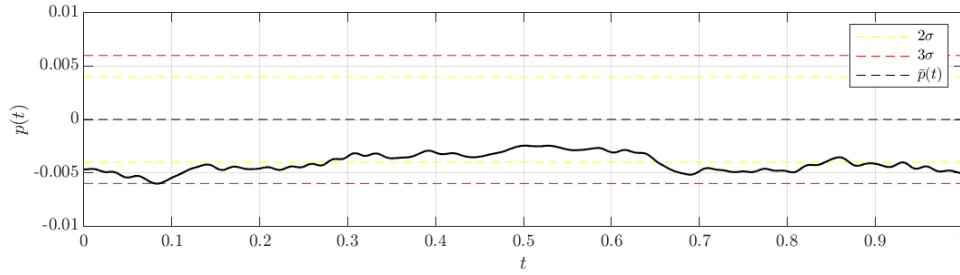
Επειδή δύο τυχαία σημεία  $p_1 = p(t_1)$  και  $p_2 = p(t_2)$  μίας στοχαστικής διαδικασίας είναι στοχαστικές μεταβλητές με την ίδια κατανομή, έστω  $w(t)$ , τότε ορίζεται και για αυτά η συνάρτηση συμμεταβλητότητας, δηλαδή

$$Cov(p_1, p_2) = E[p_1p_2] \quad (2.4)$$

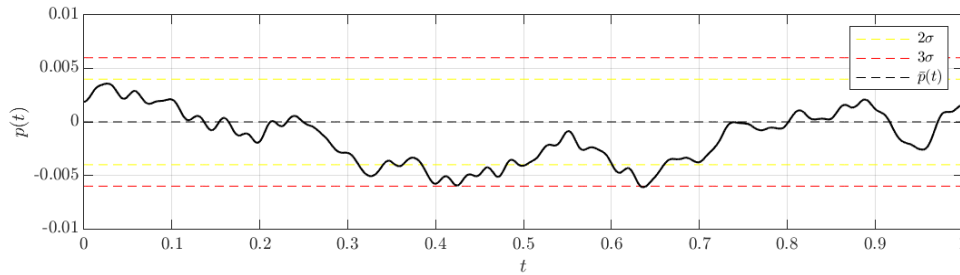
Αν η τυπική απόκλιση είναι η ίδια σε κάθε σημείο της στοχαστικής διαδικασίας είναι σταθερή, η συνάρτηση συμμεταβλητότητας είναι ένα μέτρο της γραμμικής συσχέτισης [10] δύο σημείων της στοχαστικής διαδικασίας μεταξύ τους. Ο λόγος είναι ότι ο **συντελεστής συσχέτισης Pearson** (Pearson correlation coefficient [11]) δίνεται από

$$\rho_{p_1, p_2} = \frac{Cov(p_1, p_2)}{\sigma_{p_1} \sigma_{p_2}} \quad (2.5)$$

Αν δύο σημεία της στοχαστικής διαδικασίας έχουν μηδενική συμμεταβλητότητα τότε σημαίνει ότι αυτά τα δύο σημεία δεν παρουσιάζουν γραμμική συσχέτιση. Αν όλα τα σημεία μίας στοχαστικής διαδικασίας είναι στοχαστικές μεταβλητές γραμμικά ασυσχέτιστες τότε η στοχαστική διαδικασία εκπίπτει πρακτικά σε θόρυβο. Για τα προβλήματα που μελετώνται εδώ, κάτι τέτοιο δεν είναι ρεαλιστικό και ούτε επιθυμητό. Αντιθέτως, επιδιώκεται οι καμπύλες διαταραχής να παρουσιάζουν κάποια λειότητα για να προσομοιώνουν διαταραχές μορφής που εμφανίζονται στην πράξη. Αυτή η λειότητα μπορεί να επιτευχθεί αν κοντινά μεταξύ τους σημεία της στοχαστικής διαδικασίας παρουσιάζουν συσχέτιση. Για τον λόγον αυτό, επιβάλλεται συχνά, αυθαίρετα, μία συνάρτηση συμμεταβλητότητας του τύπου [12]



**Σχήμα 2.1:** Παράδειγμα στοχαστικής διαδικασίας με μεγάλο μήκος συσχέτισης



**Σχήμα 2.2:** Παράδειγμα στοχαστικής διαδικασίας με μικρό μήκος συσχέτισης

$$Cov(p_1, p_2) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|t_1 - t_2|}{l}\right), \quad (2.6)$$

ή ανάλογης μορφής (βλ. [13, 14, 15]). Η παραπάνω σχέση εξασφαλίζει ότι κοντινά μεταξύ τους σημεία της καμπύλης διαταραχής παρουσιάζουν μεγαλύτερη γραμμική συσχέτιση. Το μέγεθος  $l$  ονομάζεται **μήκος συσχέτισης** (correlation length) και είναι μία παράμετρος που μπορεί να επιλεγεί από τον χρήστη ώστε να ρυθμιστεί η λειότητα της καμπύλης διαταραχής. Μεγαλύτερο  $l$  σημαίνει μεγαλύτερη γραμμική συσχέτιση απομακρυσμένων σημείων της καμπύλης διαταραχής και, επομένως, μεγαλύτερη λειότητα.

Η καμπύλη διαταραχής  $h$  της εξ. (2.1) είναι μία στοχαστική διαδικασία με μέση τιμή μηδέν και κανονική κατανομή σύμφωνα με τη θεωρία του 6σ Design, η οποία μπορεί να γραφεί σε παραμετρική μορφή ως  $h(t) = h(x_i^o(t))$ , όπου  $t$  μία παράμετρος που εδώ θα είναι το μήκος της καμπύλης από το ένα άκρο της έως το τυχαίο σημείο  $x_i^o$ .

Κάτι που θα μπορούσε να παρατηρήσει κανείς είναι ότι η υλοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας του σχήματος 2.1 απέχει από τη μέση τιμή της στοχαστικής διαδικασίας. Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι δεν είναι απαραίτητο ότι όλες οι τυχαίες υλοποιήσεις μίας στοχαστικής διαδικασίας θα 'κινούνται' κοντά ή γύρω από τη μέση τιμή της διαδικασίας. Ωστόσο, αν παραχθεί ένα επαρκώς μεγάλο πλήθος τέτοιων υλοποιήσεων η μέση τιμή από όλες τις υλοποιήσεις θα τείνει στη μέση τιμή της στοχαστικής διαδικασίας. Αυτό είναι εμφανές στο παράδειγμα 2.3.8 που εμφανίζεται στη συνέχεια.

## 2.3 Το ανάπτυγμα KL

Η μαθηματική διατύπωση του αναπτύγματος KL και η χρήση του για τη μοντελοποίηση γεωμετρικών αβεβαιοτήτων σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μορφής έχει προηγηθεί από την [16], στην οποία ο αναγνώστης παραπέμπεται για περαιτέρω μελέτη. Η παρούσα εργασία λειτουργεί συμπληρωματικά, συνεισφέροντας στην περαιτέρω έρευνα με μία αριθμητική μέθοδο υπολογισμού των συναρτήσεων βάσης του αναπτύγματος KL σε αντιδιαστολή με την αναλυτική μέθοδο που προτείνεται στην [16].

### 2.3.1 Ορισμός

Σύμφωνα με το ανάπτυγμα Karhunen-Loève (KL), μία στοχαστική διαδικασία  $h$  με μέση τιμή μηδέν μπορεί να αναπαρασταθεί από το άθροισμα [13, 17, 12]

$$h = h(x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sqrt{\lambda_m} \phi_m(x_i), \quad (2.7)$$

όπου  $c_m$  ανεξάρτητες στοχαστικές μεταβλητές που ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση ίση με τη μονάδα. Τα μεγέθη  $\lambda_m$  και  $\phi_m(x_i)$  είναι οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις αντίστοιχα της συνάρτησης συμμεταβλητότητας,  $Cov$ , που περιγράφει τη στοχαστική διαδικασία  $h(x)$ . Αυτό σημαίνει ότι τα  $\lambda_m$  και  $\phi_m(x_i)$  ικανοποιούν την **ολοκληρωματικής εξίσωσης Fredholm** (Fredholm integral equation) δεύτερης τάξης,

$$\int_{s_{w,u}} Cov(x_i, x'_i) \phi_m(x'_i) ds(x'_i) = \lambda_m \phi_m(x_i), \quad (2.8)$$

όπου με  $s_{w,u}$  συμβολίζεται το τμήμα του στερεού ορίου στο οποίο εφαρμόζεται το μοντέλο γεωμετρικών αβεβαιοτήτων. Με  $s$  συμβολίζεται η παράμετρος της στοχαστικής διαδικασίας.

Τα  $x_i$  και  $x'_i$  είναι δύο σημεία που ανήκουν στο στερεό τοίχωμα που παρουσιάζει αβεβαιότητες μορφής. Εδώ να σημειωθεί ότι το ανάπτυγμα KL μπορεί να εφαρμοστεί σε  $2\Delta$  και όχι  $3\Delta$  γεωμετρίες διότι δεν υπάρχει σχετική βιβλιογραφία που να επεκτείνει την εξ. (2.7) σε καμπύλες. Επομένως, το  $s_{w,u}$  του ολοκληρώματος της εξ. (2.8) αναφέρεται στην καμπύλη του στερεού τοιχώματος που παρουσιάζει αβεβαιότητες και όχι σε επιφάνεια.

Οι ιδιοσυναρτήσεις  $\phi_m(x_i)$  πρέπει να είναι κανονικοποιημένες ως εξής

$$\int_{S_{w,u}} \phi_m^2(x_i) ds = 1. \quad (2.9)$$

### 2.3.2 Διακριτοποίηση

Η εξίσωση (2.8) επιλύεται δύσκολα αναλυτικά και η λύση της εξαρτάται, προφανώς, από τη μορφή της συνάρτησης συμμεταβλητότητας. Αν, ωστόσο, γίνει διακριτοποίηση της εξ. (2.8), η επίλυση ανάγεται σε ένα πρόβλημα εύρεσης ιδιοτιμών. Το πλεονέκτημα της αριθμητικής επίλυσης είναι ότι αποφεύγεται η δυσκολία της αναλυτικής λύσης ενώ, ταυτόχρονα, δεν απαιτείται εκ νέου διατύπωση σε περίπτωση που επιλεγεί διαφορετική συνάρτηση συμμεταβλητότητας.

Έστω  $x_i^j$  ένα σημείο στο μέσο του  $j$ -οστού ευθύγραμμου τμήματος του στερεού τοιχώματος με αβεβαιότητες,  $s_{w,u}$ . Τονίζεται ότι τα ευθύγραμμα τμήματα είναι διατεταγμένα διαδοχικά. Δηλαδή, τα σημεία  $x_i^{j-1}$ ,  $x_i^j$  και  $x_i^{j+1}$  είναι διαδοχικά σημεία του στερεού ορίου. Το ολοκλήρωμα της εξ. (2.8) μπορεί να προσεγγιστεί ως

$$\int_{s_{w,u}} Cov(x_i, x'_i) \phi_m(x'_i) ds(x'_i) \approx C_{jk} \phi_m^k \Delta s_k, \quad (2.10)$$

όπου

$$C_{jk} = Cov(x_i^j, x_i^k),$$

$$\phi_m^k = \phi_m(x_i^k),$$

και  $\Delta s_k$  το μήκος του  $k$ -οστού ευθύγραμμου τμήματος του διακριτοποιημένου ορίου. Ως προς τη μορφή της συνάρτησης συμμεταβλητότητας δεν γίνεται καμία παραδοχή εδώ. Επομένως, δεν είναι απαραίτητο ότι πρέπει να ισχύει η εξ. (2.6).

Η εξ. (2.8) γίνεται

$$C_{jk} \phi_m^k \Delta s_k = \{\lambda_m \phi_m^j\}, \quad (2.11)$$

όπου τα άγκριστρα δηλώνουν ότι δεν γίνεται άθροιση κατά το δείκτη  $m$ .

Αν τεθεί

$$W_{jk} = \{C_{jk} \Delta s_k\}, \quad (2.12)$$

τότε η εξ. (2.11) γράφεται

$$W_{jk} \phi_m^k = \{\lambda_m \phi_m^j\}, \quad (2.13)$$

η οποία είναι μία κλασική εξίσωση ιδιοτιμών που μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά με οποιονδήποτε από τους γνωστούς τρόπους.

Τα ιδιοδιανύσματα που θα προκύψουν από την αναλυτική επίλυση δεν είναι απαραίτητο ότι θα είναι κανονικοποιημένα, όπως απαιτεί η εξ. (2.9). Επομένως, μετά τον υπολογισμό τους πρέπει να ακολουθήσει κανονικοποίησή τους. Για το σκοπό αυτό, έστω

$\phi_m^*$  ένα σύνολο ιδιοδιανυσμάτων που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση της εξ. (2.13). Για την ικανοποίηση της απαίτησης της εξίσωσης (2.9), έστω ένα άλλο σύνολο ιδιοδιανυσμάτων,  $\phi_m$  τέτοια ώστε

$$\phi_m = \{\kappa_m \phi_m^*\}. \quad (2.14)$$

Το γεγονός ότι τα  $\phi_m$  θα είναι και αυτά ιδιοδιανύσματα του προβλήματος της εξ. (2.13) προκύπτει από το γεγονός ότι τα πολλαπλάσια ενός ιδιοδιανύσματος είναι και αυτά ιδιοδιανύσματα. Επομένως, τα  $\phi_m$  θα ικανοποιούν επίσης την εξίσωση (2.13) ως πολλαπλάσια των  $\phi_m^*$ . Προσεγγίζοντας το ολοκλήρωμα της εξ. (2.9) με τη μέθοδο των τραπεζίων, προκύπτει ότι

$$\int_{s_{w,u}} \phi_m^2(x_i) ds \approx \phi_m^j \Delta s_j \quad (2.15)$$

και συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.9), (2.14) και (2.15) προκύπτει η σχέση για τα  $\kappa_m$ ,

$$\kappa_m = \sqrt{\Delta s_j (\phi_m^{*j})^2}. \quad (2.16)$$

Τέλος, αφού έχουν υπολογιστεί τα  $\lambda_m$  και  $\phi_m$  μπορεί να οριστεί τάξη αποκοπής  $M$  του αναπτύγματος της σχέσης 2.7 ώστε

$$h(x_i) = \sum_{m=1}^M c_m \sqrt{\lambda_m} \phi_m(x_i). \quad (2.17)$$

Η μέγιστη ακρίβεια προσέγγισης επιτυγχάνεται όταν οι  $M$  όροι που θα παραμείνουν στο ανάπτυγμα είναι αυτοί που αντιστοιχούν στις  $M$  μεγαλύτερες ιδιοτιμές  $\lambda_m$ .

### 2.3.3 Οι παράγωγοι $\frac{\delta x_i}{\delta c_m}$

Η τελική γεωμετρία με την υπέρθεση του μοντέλου αβεβαιοτήτων θα είναι

$$x_i = x_i^o + h(x_i^o) n_i, \quad (2.18)$$

όπου  $n_i$  το κάθετο διάνυσμα στην ονομαστική γεωμετρία. Παραγωγίζοντας ως προς τις μεταβλητές αβεβαιότητας προκύπτει η

$$\frac{\delta x_i}{\delta c_m} = \frac{\delta h}{\delta c_m} n_i = \{\sqrt{\lambda_m} \phi_m(x_i)\} n_i, \quad m = 1, \dots, M. \quad (2.19)$$

Επίσης, η μικτή παράγωγος  $\frac{\delta^2 x_i}{\delta b_n \delta c_m}$  θα είναι



$$\frac{\delta^2 x_i}{\delta b_n \delta c_m} = \{\sqrt{\lambda_m} \phi_m(x_i)\} \frac{\delta n_i}{\delta b_n}. \quad (2.20)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για το τμήμα του ορίου που παρουσιάζει αβεβαιότητες γεωμετρίας. Στα μη-αβέβαια τμήματα του ορίου, θα ισχύει  $\frac{\delta x_i}{\delta c_m} = 0$ .

Η μετακίνηση των κόμβων του πλέγματος λόγω αλλαγής των μεταβλητών αβεβαιότητας,  $c_m$ , στο εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου θεωρείται ότι ικανοποιεί την εξίσωση Laplace [18]

$$R_i^d = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( \frac{\delta x_i}{\delta c_m} \right) = 0, \quad (2.21)$$

οι οριακές συνθήκες για την οποία είναι

$$\frac{\delta x_i}{\delta c_m} = \{\sqrt{\lambda_m} \phi_m(x_i)\} n_i, \quad (2.22)$$

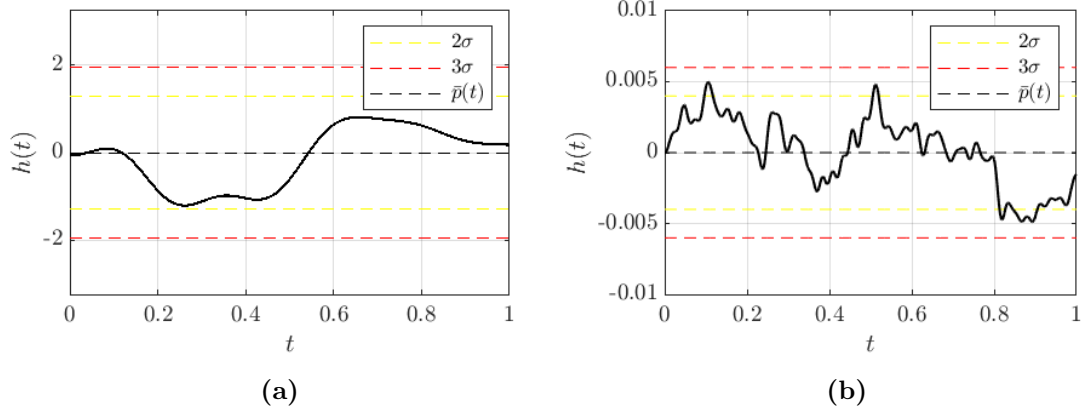
στο τμήμα του ορίου με γεωμετρικές αβεβαιότητες και

$$\frac{\delta x_i}{\delta c_m} = 0, \quad (2.23)$$

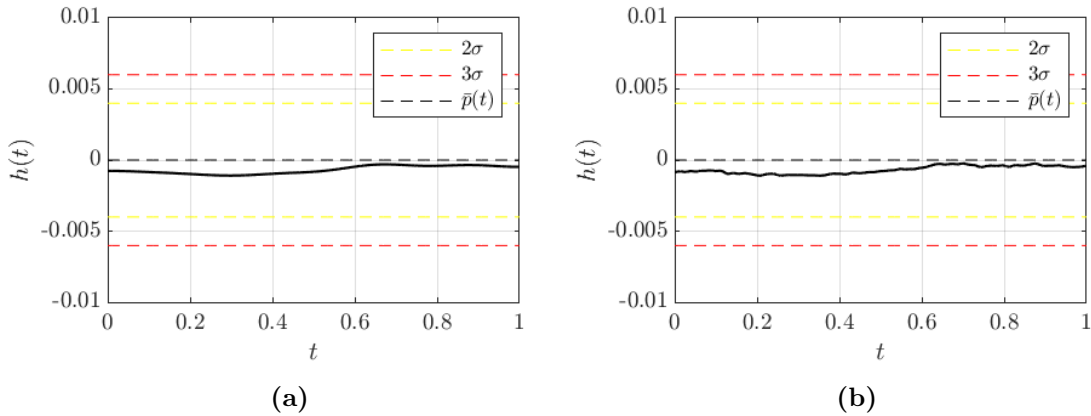
οπουδήποτε αλλού.

### 2.3.4 Παρατηρήσεις

Η χρησιμότητα του συγκεκριμένου αναπτύγματος έγκειται κυρίως στο γεγονός ότι επιτρέπει τη μείωση των διαστάσεων του προβλήματος, ως προς τις αβέβαιες μεταβλητές. Συγκεκριμένα, μία προφανής εναλλακτική θα ήταν να εκφραστεί κάθε διακριτό σημείο της στοχαστικής διαδικασίας ως μία ξεχωριστή μεταβλητή αβεβαιότητας. Σε αυτήν την περίπτωση, ακόμα και για αραιά πλέγματα, οι μεταβλητές αβεβαιότητας του προβλήματος θα ήταν τόσες πολλές που το υπολογιστικό κόστος της βελτιστοποίησης θα ήταν υπερβολικά μεγάλο. Αν όμως η στοχαστική διαδικασία εκφραστεί ως ανάπτυγμα KL, τότε αυτή μπορεί να προσεγγιστεί με καλή ακρίβεια με τη χρήση μόνο μερικών μεταβλητών αβεβαιότητας, θέτοντας κατάλληλη τάξη αποκοπής του αναπτύγματος. Μάλιστα, όσο μεγαλύτερο το μήκος συσχέτισης  $l$ , τόσο λιγότεροι όροι απαιτούνται συνήθως στο ανάπτυγμα ώστε η στοχαστική διαδικασία να προσεγγιστεί με ακρίβεια από το ανάπτυγμα KL. Αυτό γίνεται καλύτερα αντιληπτό μέσα από τα παραδείγματα των σχημάτων 2.3 και 2.4. Συγκεκριμένα, είναι εμφανές ότι η καμπύλη διαταραχής του σχήματος 2.3, που αντιστοιχεί σε μικρό μήκος συσχέτισης, δεν προσεγγίζεται το ίδιο καλά αν αντί για τους 100 πρώτους όρους του αναπτύγματος διατηρηθούν μόλις οι 10 πρώτοι. Ωστόσο, στην καμπύλη του σχήματος 2.4, που απεικονίζει διαταραχή με μεγάλο μήκος συσχέτισης, 10 όροι του αναπτύγματος KL επαρκούν για να αποδοθεί με ακρίβεια η διαταραχή. Το συμπέρασμα που αντλείται από αυτό το παράδειγμα είναι ότι για την προσέγγιση



**Σχήμα 2.3:** Στοχαστική διαδικασία με μικρό μήκος συσχέτισης που παράγεται με το ανάπτυγμα KL με τη χρήση των 10 πρώτων όρων του αναπτύγματος (αριστερά) και των 100 πρώτων όρων (δεξιά)



**Σχήμα 2.4:** Στοχαστική διαδικασία με μεγάλο μήκος συσχέτισης που παράγεται με το ανάπτυγμα KL με τη χρήση των 10 πρώτων όρων του αναπτύγματος (αριστερά) και των 100 πρώτων όρων (δεξιά)

στοχαστικών διαδικασιών με μικρά μήκη συσχέτισης (δηλαδή, με ‘υψίσυχνες’ διαταραχές) θα πρέπει να διατηρούνται αρκετοί όροι στο ανάπτυγμα KL ώστε η προσέγγιση να είναι ακριβής.

### 2.3.5 Εξασφάλιση συνέχειας του στερεού ορίου

Για να εξασφαλιστεί ότι μία καμπύλη με αβεβαιότητες γεωμετρίας θα διατηρεί τη συνέχειά της με τις γειτονικές καμπύλες του στερεού ορίου είναι δυνατό να επιβληθεί ένα “φίλτρο”  $\Phi(t)$  κάποιας μορφής το οποίο να επιβάλλει τον ομαλό μηδενισμό της διαταραχής στα άκρα της.

$$h'(t) = \Phi(t)h(t) \quad (2.24)$$

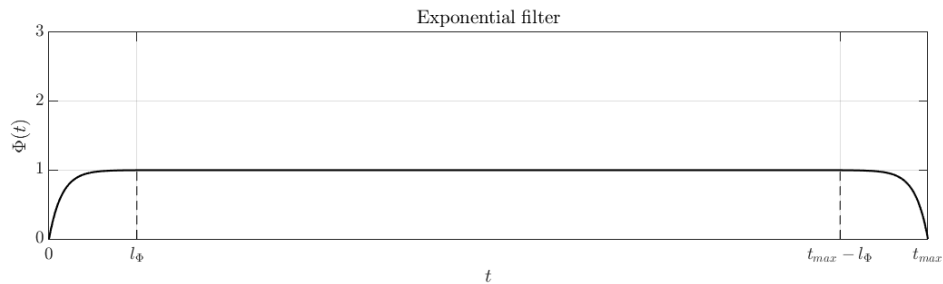
Ένα τέτοιο φίλτρο μπορεί να είναι εκθετικής μορφής ή ακόμα και απλούστερης, γραμμικής. Ένα εκθετικό φίλτρο μπορεί να δίνεται από

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1 - e^{-at}, & t \leq l_{\Phi} \\ 1, & l_{\Phi} < t < t_{max} - l_{\Phi} \\ 1 - e^{a(t-t_{max})}, & t \geq t_{max} - l_{\Phi}, \end{cases} \quad (2.25)$$

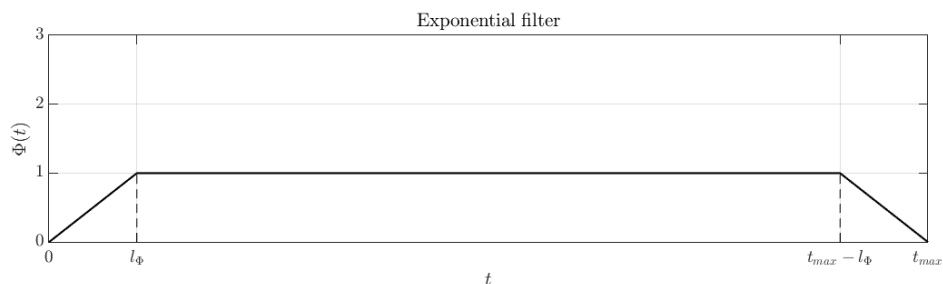
όπου  $a$  και  $l_{\Phi}$  δύο παράμετροι που μπορούν να “ρυθμιστούν” από το χρήστη. Η τιμή που θα δοθεί στο  $a$  πρέπει να είναι τέτοια ώστε οι τιμές  $\Phi(0)$  και  $\Phi(t_{max})$  να είναι αρκετά κοντά στο μηδέν. Το  $l_{\Phi}$  είναι η απόσταση από τα άκρα της καμπύλης μέχρι την οποία το φίλτρο θα επιδρά στην καμπύλη διαταραχής.

Αντίστοιχα, ένα γραμμικό φίλτρο θα είναι της μορφής

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{l_{\Phi}}t, & t \leq l_{\Phi} \\ 1, & l_{\Phi} < t < t_{max} - l_{\Phi} \\ -\frac{1}{l_{\Phi}}(t - t_{max}), & t \geq t_{max} - l_{\Phi}. \end{cases} \quad (2.26)$$



Σχήμα 2.5: Παράδειγμα εκθετικού φίλτρου



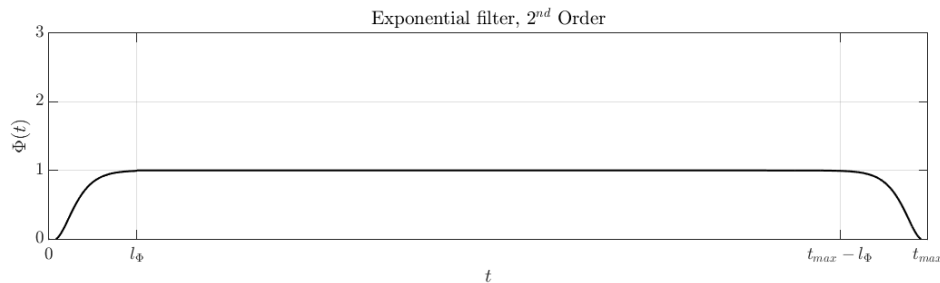
Σχήμα 2.6: Παράδειγμα γραμμικού φίλτρου

Τέλος, αν οι απαιτήσεις λειότητας του συνόρου είναι πιο αυστηρές, μπορεί να εφαρμοστεί ένα εκθετικό φίλτρο δεύτερης τάξης, ώστε να εξασφαλίζεται συνέχεια στην καμ-

πυλότητα των διαδοχικών καμπυλών σύμφωνα με τη σχέση που ακολουθεί. Η σχέση αυτή προκύπτει από την απόκριση ευσταθούς δυναμικού συστήματος δεύτερης τάξης με ικανοποίηση ορισμένων συνθηκών όπως αυτή της μηδενικής παραγώγου στα άκρα.

$$\Phi(t) = \begin{cases} -e^{-\frac{a}{l_{\Phi}}t} - \frac{a}{l_{\Phi}}te^{-\frac{b}{l_{\Phi}}t} + 1, & t \leq l_{\Phi} \\ 1, & l_{\Phi} < t < t_{max} - l_{\Phi} \\ -e^{-\frac{a}{l_{\Phi}}(l-t)} - \frac{a}{l_{\Phi}}(l-t)e^{-\frac{b}{l_{\Phi}}(l-t)} + 1, & t \geq t_{max} - l_{\Phi}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Τα  $a$  και  $b$  είναι αδιάστατες παράμετροι με τις οποίες ο χρήστης μπορεί να “ρυθμίσει” την απόκριση του φίλτρου. Ο χειρισμός τους απαιτεί προσοχή, ωστόσο, διότι είναι δυνατό να δημιουργηθούν υπερακοντίσεις που να επιφέρουν του αντίθετο από το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα.



Σχήμα 2.7: Παράδειγμα εκθετικού φίλτρου δεύτερης τάξης

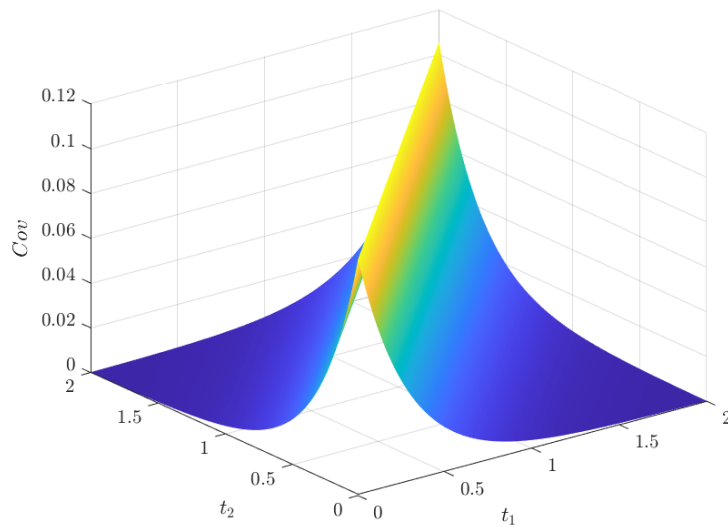
Για τις εφαρμογές να χρησιμοποιηθεί το εκθετικό φίλτρο δεύτερης τάξης μια που εξασφαλίζει και συνέχεια πρώτων παραγώγων και επομένως “εξομαλύνει” καλύτερα τη μετάβαση από τα μη-αβέβια στα αβέβια τμήματα του στερεού ορίου.

### 2.3.6 Παράδειγμα εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων της συμμεταβλητότητας

Έστω η συνάρτηση συμμεταβλητότητας της εξ. (2.6), δηλαδή

$$Cov(p_1, p_2) = \sigma^2 \exp -\frac{|t_1 - t_2|}{l}$$

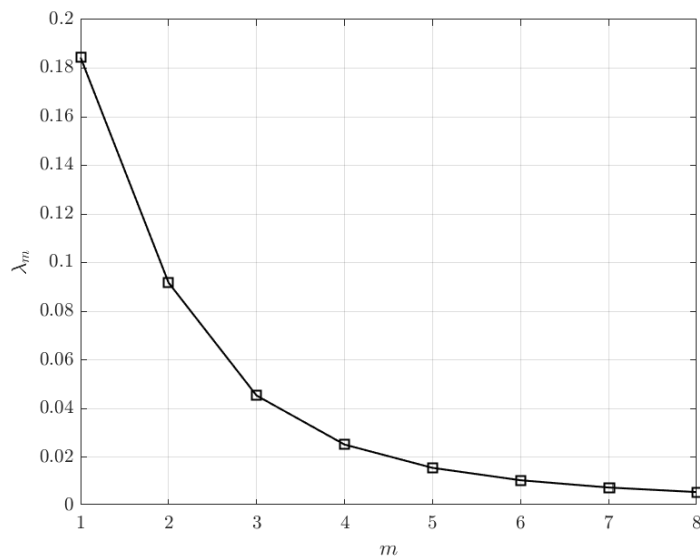
που παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 2.8.



**Σχήμα 2.8:** Συνάρτηση συμμεταβλητότητας,  $Cov(t_1, t_2)$ , της μορφής της εξ. (2.6)

Γίνεται διακριτοποίηση της παραμέτρου  $t$  σε 1000 σημεία και επιλύεται η εξ. 2.13. Από αυτή προκύπτουν 1000 ιδιοτιμές  $\lambda_m$  και 1000 ιδιοδιανύσματα,  $\phi(t)$  που τους αντιστοιχούν.

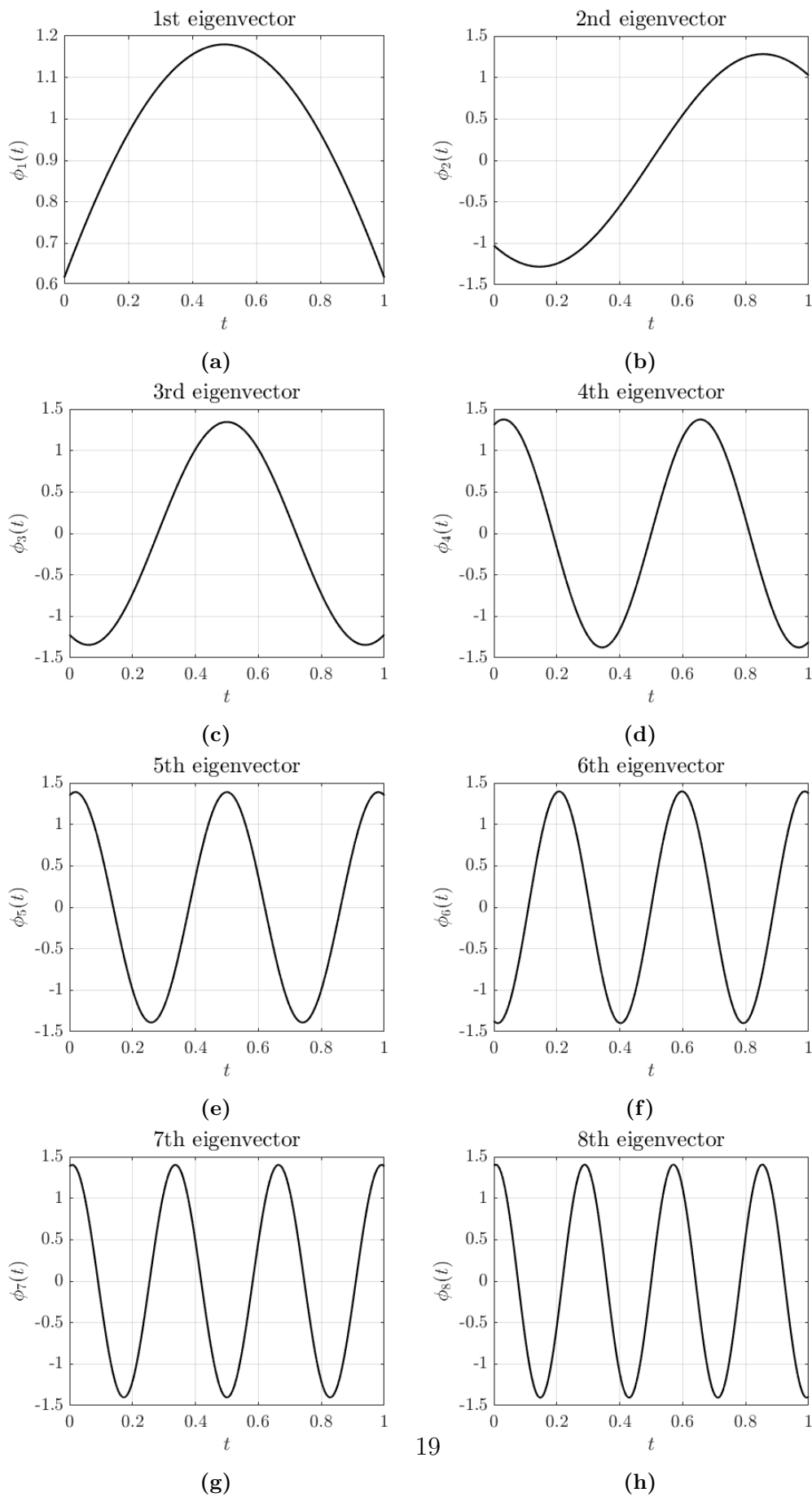
Οι πρώτες 8 ιδιοτιμές της  $Cov(t_1, t_2)$ , κατά φθίνουσα σειρά, παρουσιάζονται στο σχήμα 2.9.



**Σχήμα 2.9:** Συνάρτηση συμμεταβλητότητας,  $Cov(t_1, t_2)$ , της μορφής της εξ. (2.6)

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα παρατίθενται στο σχήμα 2.9. Αυτά έχουν ημιτονοειδή

μορφή όπως υπαινίσσεται το σχήμα και αποδεικνύεται και αναλυτικά (για την αναλυτική απόδειξη ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [16]). Ωστόσο, αυτό δεν είναι απαραίτητο ότι θα ισχύει για οποιαδήποτε συνάρτηση συμμεταβλητότητας. Αυτό γίνεται καλύτερα κατανοητό και μέσα από το επόμενο παράδειγμα.



**Figure 2.9:** Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις πρώτες 8 μεγαλύτερες ιδιοτιμές της  $Cov(t_1, t_2)$

### 2.3.7 Παράδειγμα με τη χρήση συνάρτησης συµµεταβλητότητας διαφορετικής µορφής

Στο παράδειγμα αυτό χρησιµοποιείται µία διαφορετική συνάρτηση συµµεταβλητότητας από αυτή της σχέσης 2.6), η

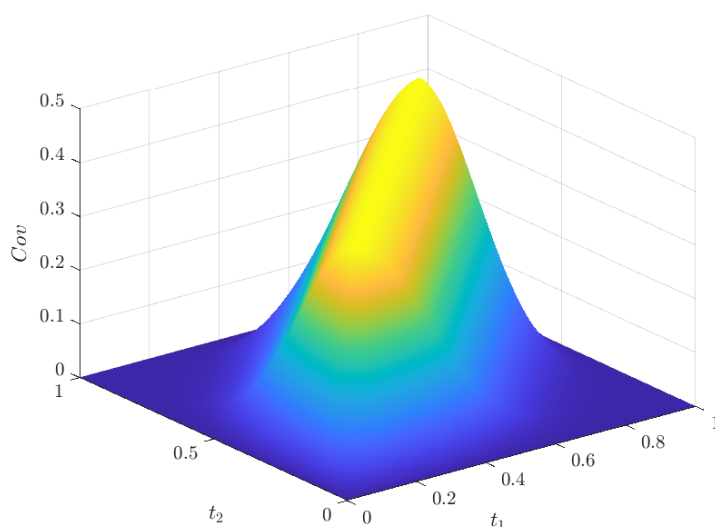
$$Cov(p_1, p_2) = \sigma(t_1)\sigma(t_2) \exp -\frac{(t_1 - t_2)^2}{l^2}. \quad (2.28)$$

Η σηµαντικότερη διαφορά από αυτήν της εξ. 2.6) είναι ότι η τυπική απόκλιση της στοχαστικής διαδικασίας µεταβάλλεται µε τη θέση  $t$ .

Η τυπική απόκλιση που θα χρησιµοποιηθεί εδώ θα είναι η εξής,

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma}{l_\sigma} t, & t \leq l_\sigma \\ \sigma, & l_\sigma < t < t_{max} - l_\sigma \\ -\frac{\sigma}{l_\sigma} (t - t_{max}), & t \geq t_{max} - l_\sigma, \end{cases} \quad (2.29)$$

µε  $\sigma = 0.65$  και  $l_\sigma = 0.3$  Παρατηρεί κανείς ότι αυτή είναι µία εναλλακτική υλοποίηση ενός γραµµικού φίλτρου όπως αυτού της εξ. 2.25 και έχει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσµα.

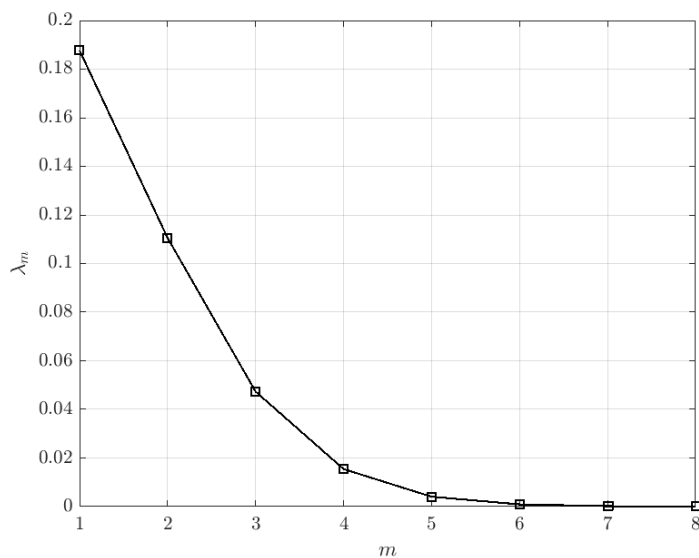


**Σχήμα 2.10:** Συνάρτηση συµµεταβλητότητας,  $Cov(t_1, t_2)$ , της µορφής της εξ. (2.28)

Όπως και στο παράδειγμα που προηγήθηκε, για τη διακριτοποίηση της παραµέτρου  $t$  χρησιµοποιούνται 1000 σηµεία και προκύπτουν 1000 ιδιοτιµές  $\lambda_m$  και 1000 ιδιοδιανύσµατα,  $\phi(t)$  που τους αντιστοιχούν.

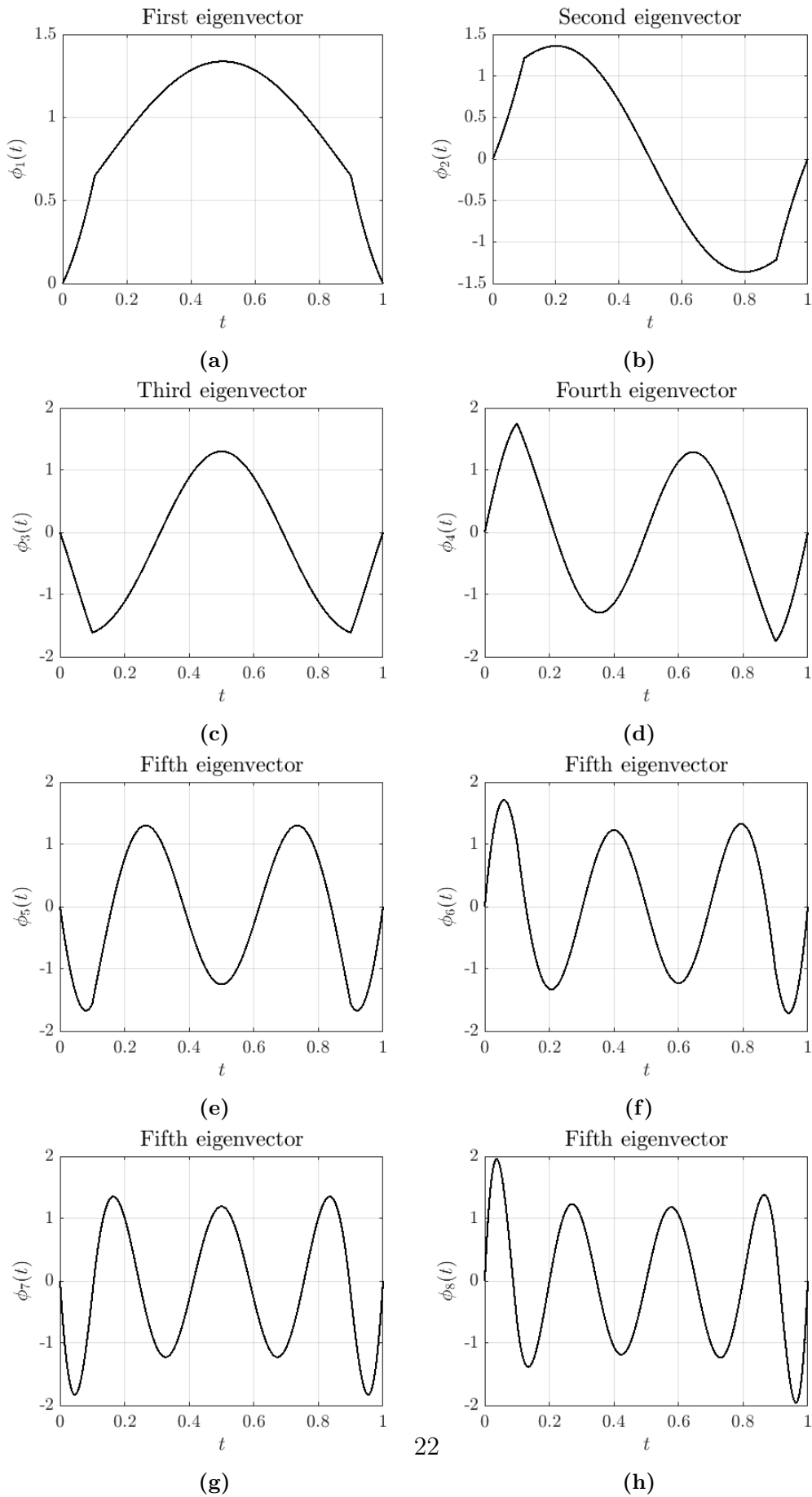


Οι πρώτες 8 ιδιοτιμές της  $Cov(t_1, t_2)$ , κατά φθίνουσα σειρά, παρουσιάζονται στο σχήμα 2.11.



**Σχήμα 2.11:** Πρώτες 8 ιδιοτιμές της συνάρτησης συμμεταβλητότητας

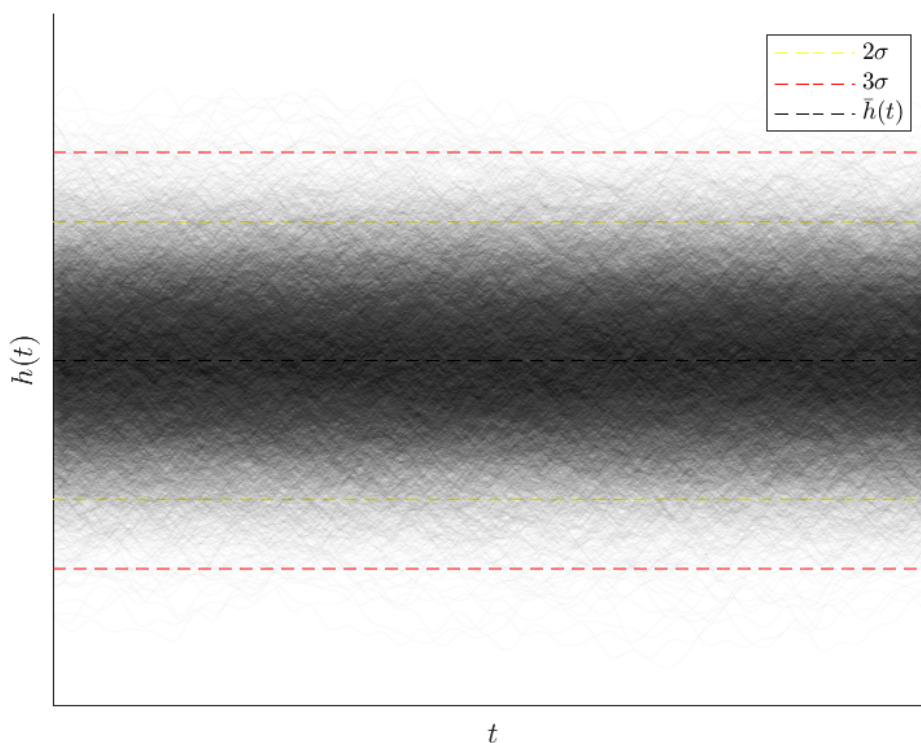
Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα παρατίθενται στη συνέχεια. Παρατηρεί κανείς ότι μορφή των ιδιοδιανυσμάτων δεν είναι προφανής και σίγουρα δεν είναι καθαρά ημιτονοειδής. Σε μία τέτοια περίπτωση θα καθίστατο δυσκολότερος ο αναλυτικός υπολογισμός των ιδιοδιανυσμάτων. Αντιθέτως, ο αριθμητικός υπολογισμός που αναπτύχθηκε σε αυτό το κεφάλαιο ισχύει όποια συνάρτηση συμμεταβλητότητας και αν χρησιμοποιηθεί.



**Figure 2.11:** Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις πρώτες 8 μεγαλύτερες ιδιοτιμές της  $Cov(t_1, t_2)$

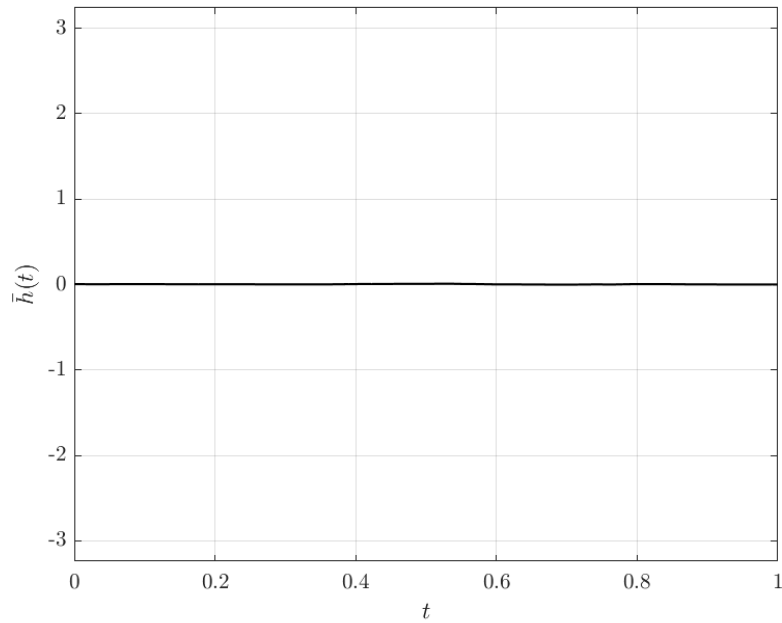
### 2.3.8 Θύσανος στοχαστικών διαδικασιών

Σε αυτό το παράδειγμα θα γίνει “γένεση” μεγάλου πλήθους (500) υλοποιήσεων στοχαστικών διαδικασιών με τη χρήση του αναπτύγματος KL και υπέρθεσή τους στο ίδιο γράφημα εν είδει ‘θύσανου’ καμπυλών. Κάθε υλοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας αντιστοιχεί σε ένα τυχαίο δείγμα μεταβλητών αβεβαιότητας  $c_m$  που ακολουθούν κανονική κατανομή, το οποίο λαμβάνεται με τη χρήση γεννήτριας τυχαίων αριθμών. Ένα τέτοιο σχήμα έχει ‘οπτική’ αξία καθώς δίνει μία εικόνα της κατανομής που ακολουθεί κάθε σημείο της στοχαστικής διαδικασίας. Όσο μεγαλύτερη είναι η πυκνότητα των τυχαίων υλοποιήσεων καμπυλών σε μία περιοχή του σχήματος τόσο μεγαλύτερη αναμένεται να είναι και η πυκνότητα πιθανότητας σε εκείνη την περιοχή.



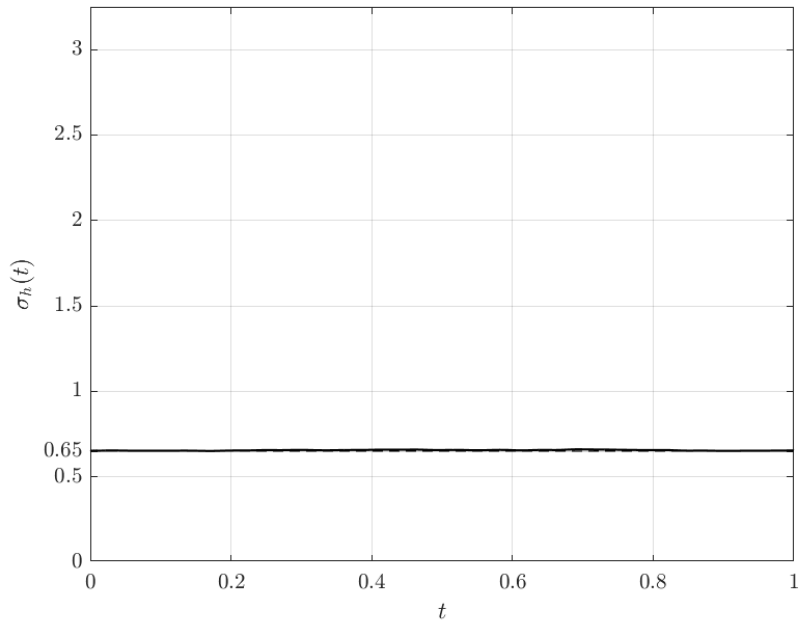
**Σχήμα 2.12:** Παράδειγμα ‘θύσανου’ τυχαία παραγόμενων δειγμάτων στοχαστικής διαδικασίας

Αφού οι στοχαστικές μεταβλητές ακολουθούν κανονική κατανομή, το ανάπτυγμα KL θα πρέπει να περιγράφει στοχαστικές διαδικασίες που ακολουθούν κανονική κατανομή. Πράγματι, αυτό επιβεβαιώνεται από το σχήμα 2.12 καθώς μεγαλύτερη πυκνότητα παρατηρείται κοντά στη μέση τιμή και σχεδόν μηδενική πυκνότητα σε απόσταση μεγαλύτερη των 3 τυπικών αποκλίσεων από αυτή.

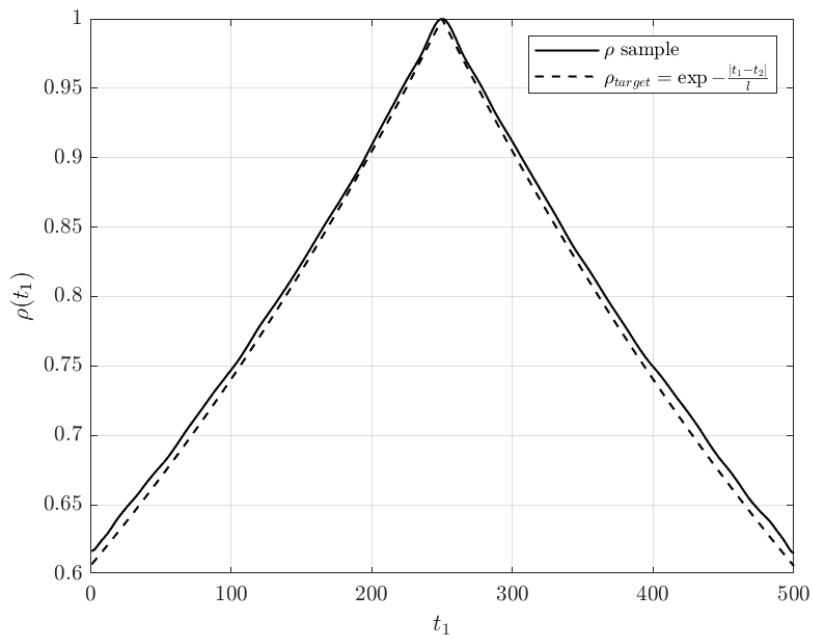


**Σχήμα 2.13:** Μέση τιμή στοχαστικής διαδικασίας

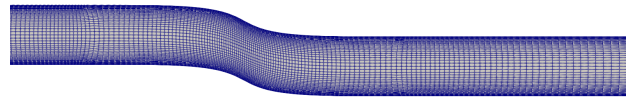
Στα σχήματα 2.13 και 2.14 απεικονίζεται η μέση τιμή  $\mu(t)$  και η τυπική απόκλιση  $\sigma(t)$  αντίστοιχα σε κάθε θέση της στοχαστικής διαδικασίας υπολογισμένων με βάση το δείγμα καμπυλών του σχήματος 2.12. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε σημείο της στοχαστικής διαδικασίας, δηλαδή σε κάθε τιμή της παραμέτρου  $t$ , η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση προκύπτουν από την επεξεργασία των τιμών των τυχαίων υλοποιήσεων σε εκείνο το σημείο και, επομένως, αλλάζουν από θέση σε θέση.



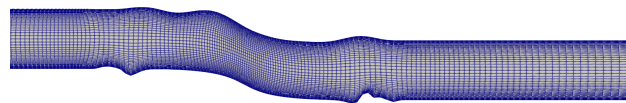
Σχήμα 2.14: Τυπική απόκλιση στοχαστικής διαδικασίας



Σχήμα 2.15: Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης  $\rho(t_1, t_2)$  της στοχαστικής διαδικασίας με  $t_2 = 0.5$ . Σύγκριση του  $\rho$  που υπολογίζεται από 500 υλοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας με τη χρήση του απύγματος  $KL$  με τη θεωρητική του τιμή που αντιστοιχεί στη συμμεταβλητότητα της εξ. (2.6).



(α')



(β')

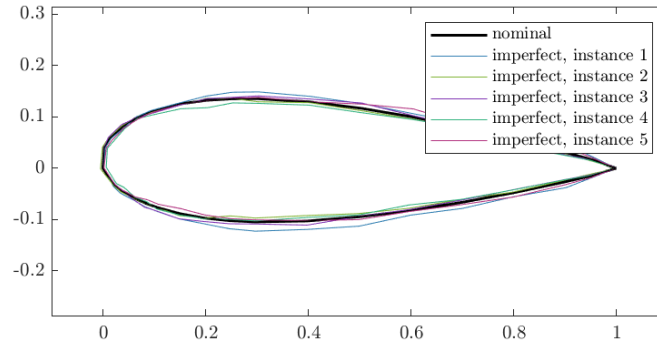
**Σχήμα 2.16:** Αρχικός αγωγός (αριστερά) και ο ίδιος αγωγός μετά την υπέρθεση της διαταραχής γεωμετρίας (δεξιά)

### 2.3.9 Παράδειγμα γένεσης γεωμετρικών ατελειών σε αγωγό μορφής S με το ανάπτυγμα KL

Στη συνέχεια παρουσιάζεται εφαρμογή του μοντέλου διαταραχής σε 2Δ αγωγό σχήματος S. Ως καμπύλες του αγωγού όπου θα εφαρμοστεί το μοντέλο έχουν ορισθεί οι πάνω και κάτω καμπύλες της διαμόρφωσης S (δηλαδή οι πάνω και κάτω καμπύλες του αγωγού χωρίς τα επίπεδα τμήματα). Τα δεδομένα της πάνω καμπύλης είναι  $\sigma_{upper} = 0.02$  και  $l_{upper} = 0.05$ . Αντίστοιχα, για την κάτω καμπύλη είναι  $\sigma_{lower} = 0.03$  και  $l_{lower} = 0.01$ .

Να σημειωθεί ότι το παράδειγμα έχει μεγάλη δόση υπερβολής καθώς οι τιμές των  $\sigma_{upper}$ ,  $\sigma_{lower}$  είναι πολύ μεγάλες για να συμβούν σε πραγματική εφαρμογή. Σκοπός της υπερβολής αυτής είναι να γίνει εμφανής στον αναγνώστη η επίδραση του αναπτύγματος KL.

Στο σχήμα 2.16α' φαίνεται ο αρχικός αγωγός και στο 2.16β' ο ίδιος αγωγός με την επίδραση μίας τυχαίας υλοποίησης του KL. Η τυχαία αυτή υλοποίηση αντιστοιχεί σε ένα σύνολο τυχαίων τιμών των μεταβλητών αβεβαιότητας που παρήχθησαν με γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Ένα διαφορετικό σύνολο τυχαίων τιμών των  $c_m$  θα έδινε διαφορετική διαταραχή της γεωμετρίας. Αυτό γίνεται καλύτερα κατανοητό στο επόμενο παράδειγμα όπου στο ίδιο γράφημα έχουν υπερτεθεί 5 τυχαίες υλοποιήσεις γεωμετρίας αεροτομής με ατέλειες.

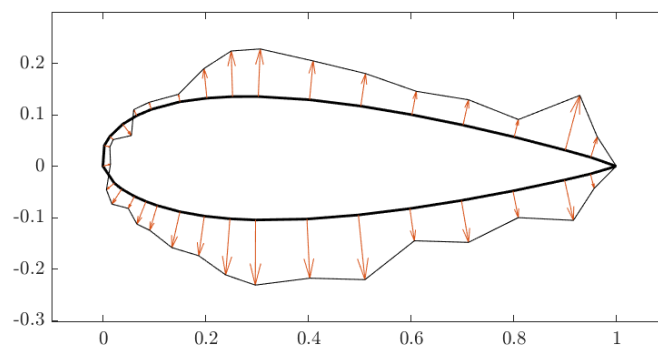


Σχήμα 2.17: Αεροτομή μετά την υπέρθεση της διαταραχής γεωμετρίας

### 2.3.10 Παράδειγμα γένεσης γεωμετρικών ατελειών σε αεροτομή

Στο σχήμα 2.17 έχουν υπερτεθεί 5 υλοποιήσεις γεωμετριών με ατέλειες όπως προέκυψαν από το ανάπτυγμα KL καθώς και η ονομαστική αεροτομή. Για τις καμπύλες διαταραχής ισχύει  $\sigma = 0.013$  και  $l = 0.34$ .

Επιπλέον, με μεγάλη δόση υπερβολής για λόγους διευκόλυνσης της ανάγνωσης του σχήματος, παρατίθεται στο σχήμα 2.18 ένα παράδειγμα 'δόμησης' μίας γεωμετρίας με ατέλειες κάθετα πάνω στην ονομαστική γεωμετρία ώστε να γίνει κατανοητή η φιλοσοφία της μοντελοποίησης των γεωμετρικών αβεβαιοτήτων.



Σχήμα 2.18: Αεροτομή μετά την υπέρθεση της διαταραχής γεωμετρίας



## Κεφάλαιο 3

# Ποσοτικοποίηση Αβεβαιότητας με τη μέθοδο FOSM

### 3.1 Ποσοτικοποίηση Αβεβαιότητας

Ο υπολογισμός της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της QoI αν είναι γνωστές οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις των μεταβλητών αβεβαιότητας του προβλήματος ονομάζεται **Ποσοτικοποίηση Αβεβαιότητας** (UQ - Uncertainty Quantification). Στα προβλήματα Ρευστοδυναμικής αυτό είναι από δύσκολο έως αδύνατο να επιτευχθεί αναλυτικά. Για το λόγο αυτό, υπάρχουν στη βιβλιογραφία διαθέσιμες αρκετές μέθοδοι προσέγγισης των στοχαστικών μεγεθών της QoI [19, 20, 21], μία από τις οποίες είναι η **Μέθοδος των Στατιστικών Ροπών** (Method of (Statistical) Moments) [19].

### 3.2 FOSM

Θα παρουσιαστεί εδώ η **Μέθοδος των Στατιστικών Ροπών Πρώτης Τάξης** (FOSM - First Order, Second Moment) που είναι και αυτή που θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της QoI στην εργασία αυτή.

Σύμφωνα με τη μέθοδο FOSM η μέση τιμή της QoI δίνεται από

$$\mu_J = J|_{c_m=\bar{c}_m} \quad (3.1)$$

και η τυπική της απόκλιση

$$\sigma_J = \sqrt{\left[ \frac{\delta J}{\delta c_m} \right]^2 |_{c_m=\bar{c}_m} \sigma_m^2}, \quad (3.2)$$

όπου  $\mu_m$  και  $\sigma_m$  η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της  $m$ -οστής μεταβλητής αβεβαιότητας,  $c_m$ , του προβλήματος.

### 3.3 Απόδειξη της σχέσης (3.1)

Παρουσιάζεται με συντομία στη συνέχεια η απόδειξη της σχέσης (3.1). Για εκτενέστερη αναφορά, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [22]. Η μέση τιμή  $\mu_J$  υπολογίζεται από

$$\mu_J = \int_{-\infty}^{\infty} J w(c_1) w(c_2) \dots w(c_M) dc_1 dc_2 \dots dc_M, \quad (3.3)$$

όπου  $w(c_m)$  η συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής  $c_m$ , που εδώ θα είναι η κανονική κατανομή. Προσεγγίζοντας την  $J$  από ένα ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης, γύρω από το διάνυσμα των μέσων τιμών των μεταβλητών αβεβαιότητας,  $\bar{c}_m$ , θα είναι

$$J \approx J|_{\bar{c}_m} + \frac{\delta J}{\delta c_m} (c_m - \bar{c}_m) \quad (3.4)$$

Αντικαθιστώντας την (3.4) στην (3.1) και με την υπόθεση ότι οι  $c_m$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους είναι

$$\begin{aligned} \mu_J &= J|_{\bar{c}_m} \int_{-\infty}^{\infty} w(c_1) dc_1 \int_{-\infty}^{\infty} w(c_2) dc_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(c_M) dc_M \\ &+ \frac{\delta J}{\delta c_1} \int_{-\infty}^{\infty} (c_1 - \bar{c}_1) w(c_1) dc_1 + \dots + \frac{\delta J}{\delta c_M} \int_{-\infty}^{\infty} (c_M - \bar{c}_M) w(c_M) dc_M. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Όμως, εξ ορισμού, για μία συνάρτηση κατανομής  $w(c_m)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(c_m) dc_m = 1. \quad (3.6)$$

Επίσης, επειδή η κανονική κατανομή είναι συμμετρική θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} (c_m - \bar{c}_m) w(c_m) dc_m = 0. \quad (3.7)$$

Επομένως, η (3.5) γίνεται

$$\mu_J = J|_{\bar{c}_m}. \quad (3.8)$$

Αποδείχθηκε, επομένως, η σχέση (3.1) για τη μέση τιμή. Θα αποδειχθεί στη συνέχεια και η σχέση (3.2), για την τυπική απόκλιση.

### 3.4 Απόδειξη της σχέσης (3.2)

Η απόδειξη της σχέσης (3.2) γίνεται με παρόμοιο τρόπο με αυτήν της μέσης τιμής (βλ. [22] για εκτενή μελέτη).

Η **μεταβλητότητα** (variance) που ορίζεται ως το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης, δίνεται από

$$\sigma_J^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (J - \mu_J)^2 w(c_1)w(c_2) \dots w(c_M) dc_1 dc_2 \dots dc_M. \quad (3.9)$$

Αντικαθιστώντας την  $J$  στην παραπάνω σχέση από την προσέγγισή της με το ανάπτυγμα Taylor προκύπτει

$$\sigma_J^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left( J|_{\bar{c}_m} + \frac{\delta J}{\delta c_m} (c_m - \bar{c}_m) - \mu_J \right)^2 w(c_1)w(c_2) \dots w(c_M) dc_1 dc_2 \dots dc_M. \quad (3.10)$$

Όμως, λαμβάνοντας υπ' όψιν τη (3.1), η σχέση γίνεται

$$\sigma_J^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\delta J}{\delta c_m} (c_m - \bar{c}_m) \right)^2 w(c_1)w(c_2) \dots w(c_M) dc_1 dc_2 \dots dc_M. \quad (3.11)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ανεξαρτησία των μεταβλητών αβεβαιότητας  $c_m$ , είναι

$$\sigma_J^2 = \left( \frac{\delta J}{\delta c_1} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} (c_m - \bar{c}_m)^2 w(c_1) dc_1 + \dots + \left( \frac{\delta J}{\delta c_M} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} (c_M - \bar{c}_M)^2 w(c_M) dc_M. \quad (3.12)$$

Από τον ορισμό της μεταβλητότητας ισχύει

$$\sigma_m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (c_m - \bar{c}_m)^2 w(c_m) dc_m. \quad (3.13)$$

Αντικαθιστώντας την (3.13) στην (3.12), προκύπτει

$$\sigma_J^2 = \left( \frac{\delta J}{\delta c_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \dots + \left( \frac{\delta J}{\delta c_M} \right)^2 \sigma_M^2. \quad (3.14)$$

Δηλαδή

$$\sigma_J^2 = \left( \frac{\delta J}{\delta c_m} \right)^2 \sigma_m^2. \quad (3.15)$$

Επομένως, η τυπική απόκλιση είναι

$$\sigma_J = \sqrt{\left(\frac{\delta J}{\delta c_m}\right)^2 \sigma_m^2}. \quad (3.16)$$

### 3.5 Στιβαρός Σχεδιασμός

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της απότομης καθόδου της σχέσης (1.1), με συνάρτηση κόστους τη  $\hat{J}$ , το νέο διάνυσμα μεταβλητών σχεδιασμού σε κάθε νέο κύκλο βελτιστοποίησης θα δίνεται από

$$b_n^{new} = b_n^{old} - \eta \frac{\delta \hat{J}}{\delta b_n}.$$

Από τη σχέση που προηγήθηκε προκύπτει ότι για να εφαρμοστεί η μέθοδος της απότομης καθόδου πρέπει να υπολογιστεί η παράγωγος  $\frac{\delta \hat{J}}{\delta b_n}$ .

Από τις σχέσεις (3.1) και (3.2), θα είναι

$$\hat{J} = J + k \sqrt{\left[\frac{\delta J}{\delta c_m}\right]^2 \sigma_m^2}. \quad (3.17)$$

Παραγωγίζοντας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού,  $b_n$ , θα είναι

$$\frac{\delta \hat{J}}{\delta b_n} = \frac{\delta J}{\delta b_n} + k \frac{\frac{\delta J}{\delta c_m} \frac{\delta^2 J}{\delta c_m \delta b_n} \sigma_m}{\sqrt{\left[\frac{\delta J}{\delta c_m}\right]^2 \sigma_m^2}}. \quad (3.18)$$

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, για τον υπολογισμό της μικτής παραγώγου  $\frac{\delta^2 J}{\delta c_m \delta b_n}$  χρησιμοποιείται σχήμα πεπερασμένων διαφορών πρώτης τάξης ως εξής

$$\frac{\delta^2 J}{\delta c_m \delta b_n} = \frac{\frac{\delta J}{\delta c_m} \Big|_{b_n + \varepsilon} - \frac{\delta J}{\delta c_m} \Big|_{b_n}}{\varepsilon}, \quad (3.19)$$

όπου οι  $\frac{\delta J}{\delta c_m}$  υπολογίζονται με τη συζυγή μέθοδο όπως θα παρουσιαστεί σε επόμενο κεφάλαιο.

## Κεφάλαιο 4

# Πρωτεύουσες Εξισώσεις της Ροής

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η διατύπωση των εξισώσεων της ροής. Αυτές είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes για χρονικά αμετάβλητη, ασυμπίεστο ρευστό που διατυπώνονται στις σχέσεις 4.1, 4.2.

Η εξίσωση συνέχειας είναι

$$R^p = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (4.1)$$

και η εξίσωση της ορμής,

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.2)$$

όπου  $v_i$  το διάνυσμα της ταχύτητας και  $p$  η πίεση σε κάποιο σημείο του ρευστού.

Ο όρος των συνεκτικών τάσεων (viscous stresses),  $\tau_{ij}$ , ορίζεται ως

$$\tau_{ij} = \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (4.3)$$

όπου  $\nu$  η κινηματική συνεκτικότητα (kinematic viscosity).

Συνήθεις οριακές συνθήκες ενός προβλήματος εσωτερικής ρευστοδυναμικής είναι, στην είσοδο του υπολογιστικού χωρίου,

$$\begin{cases} v_i = const \\ \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i = 0 \end{cases}, \quad (4.4)$$

στην έξοδο,  $S_O$ , συνθήκες Neumann για την ταχύτητα και μηδενική πίεση εξόδου (Dirichlet),

$$\begin{cases} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} n_i = 0 \\ p = 0 \end{cases}, \quad (4.5)$$

και στο στερεό τοίχωμα  $S_W$ , συνθήκη μη ολίσθησης,

$$\begin{cases} v_i = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i = 0 \end{cases}. \quad (4.6)$$

Η ανάπτυξη των συζυγών εξισώσεων που θα ακολουθήσει θα γίνει με βάση αυτές τις οριακές συνθήκες. Η χρήση διαφορετικών οριακών συνθηκών απαιτεί από ελάχιστες έως καθόλου τροποποιήσεις στις συζυγείς οριακές συνθήκες, για αυτό και παραλείπεται προς το παρόν. Ωστόσο, στις εφαρμογές που θα ακολουθήσουν θα γίνει αναφορά και σε διαφορετικές οριακές συνθήκες, χωρίς απόδειξη.

Η συνολική συνοριακή επιφάνεια του υπολογιστικού χωρίου  $S$  αποτελείται από την επιφάνεια εισόδου,  $S_I$ , επιφάνεια εξόδου,  $S_O$ ,  $S_W$ , δηλαδή  $S = S_I \cup S_O \cup S_W$ . Επιπλέον υπάρχει η επιφάνεια του στερεού τοιχώματος που παρουσιάζει αβεβαιότητες γεωμετρίας,  $S_{W,u}$  και η παραμετροποιημένη επιφάνεια,  $S_{W,p}$  για τις οποίες ισχύει  $S_{W,u} \subseteq S_W$  και  $S_{W,p} \subseteq S_W$ . Οι επιφάνειες  $S_{W,u}$  και  $S_{W,p}$  δεν είναι απαραίτητο να ταυτίζονται.

Η συνάρτηση ενδιαφέροντος που θα χρησιμοποιηθεί εδώ είναι η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στο στερεό τοίχωμα κατά την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος  $r_i$ ,

$$J = \int_{S_W} (p\delta_i^j - \tau_{ij}) n_j r_i dS. \quad (4.7)$$

Η επίλυση των εξισώσεων ροής στην εργασία αυτή γίνεται στο περιβάλλον OpenFOAM με τη χρήση του αλγορίθμου SIMPLE. Ο αλγόριθμος SIMPLE είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης των εξισώσεων ασυμπίεστης, χρονικά αμετάβλητης ροής. Η ανάπτυξη του σχετικού κώδικα προϋπήρχε στο λογισμικό [23] και δεν αποτελεί αντικείμενο αυτής της εργασίας.

## Κεφάλαιο 5

# Παράγωγοι $\frac{\delta J}{\delta b_n}$ , $\frac{\delta J}{\delta c_m}$ - Υπολογισμός με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο

### 5.1 Η Επαυξημένη Συνάρτηση Ενδιαφέροντος

Για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας της συνάρτησης ενδιαφέροντος ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και ως προς τις μεταβλητές αβεβαιότητας θα χρησιμοποιηθεί η **συνεχής συζυγής μέθοδος** (Continuous Adjoint Method). Να σημειωθεί ότι η διατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου καθώς και του σχετικού κώδικα στο OpenFOAM προϋπάρχει στη ΜΠΥΡ&Β [18, 24] και δεν αποτελεί αντικείμενο νέας έρευνας της παρούσας εργασίας.

Η συζυγής μέθοδο προβλέπει την εισαγωγή της **Επαυξημένης Συνάρτησης Ενδιαφέροντος ή Συνάρτησης Lagrange** (Augmented or Lagrangian QoI) ως

$$J_{aug} = J + \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega, \quad (5.1)$$

όπου  $u_i$  και  $q$  ορισμένες νέες μεταβλητές που ονομάζονται **συζυγής ταχύτητα** (adjoint velocity) και **συζυγής πίεση** (adjoint pressure) αντίστοιχα.

Η ανάπτυξη που θα ακολουθήσει αφορά τις παραγώγους της  $J$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού,  $b_n$ , αλλά η ίδια ακριβώς ανάπτυξη ισχύει και για τις παραγώγους ως προς τις μεταβλητές αβεβαιότητας. Επομένως, ό,τι θα παρουσιαστεί στη συνέχεια ισχύει και για τις παραγώγους ως προς τις μεταβλητές αβεβαιότητας με αντικατάσταση του  $b_m$  από το σύμβολο  $c_m$ .

Καθώς ισχύει ότι οι εξισώσεις Navier - Stokes ισχύουν παντού στο εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου, δηλαδή  $R^p = R_i^v = 0$ , είναι προφανές ότι ισχύει ταυτοτικά ότι  $J_{aug} = J$  και, επομένως, ισχύει και ότι  $\frac{\delta J_{aug}}{\delta b_n} = \frac{\delta J}{\delta b_n}$ .

Παραγωγίζοντας κατά  $b_n$  την έκφραση της  $J_{aug}$ , έχουμε

$$\frac{\delta J_{aug}}{\delta b_n} = \frac{\delta J}{\delta b_n} + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega \quad (5.2)$$

Τα ολοκληρώματα της σχέσης (5.2) παραγωγίζονται ως εξής

$$\frac{\delta J_{aug}}{\delta b_n} = \frac{\delta J}{\delta b_n} + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta b_n} d\Omega \quad (5.3)$$

Για τις ολικές παραγώγους  $\frac{\delta \Phi}{\delta b_n}$  μίας ποσότητας  $\Phi = \Phi(b_n, x_k(b_n))$  από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει η σχέση

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n}. \quad (5.4)$$

Στην περίπτωση όπου οι μεταβλητές  $b_n$  αφορούν την παραμετροποίηση της γεωμετρίας, ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους αναφέρεται στην μεταβολή της  $\Phi$  λόγω της μετακίνησης των κόμβων του πλέγματος λόγω της μεταβολής των  $b_n$ .

Παραγωγίζοντας το υπόλοιπο της εξίσωσης συνέχειας,  $R^p$ , και αξιοποιώντας την εξ. (5.4), προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\delta R^p}{\delta b_n} &= -\frac{\delta}{\delta b_n} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) - \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta v_j}{\delta b_n} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\partial b_n} \right) - \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta v_j}{\delta b_n} \right) + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\partial b_n} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Πολλαπλασιάζοντας με τη συζυγή πίεση, είναι

$$\begin{aligned} q \frac{\delta R^p}{\delta b_n} &= -q \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta v_j}{\delta b_n} \right) + q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\partial b_n} \right) \\ \Rightarrow q \frac{\delta R^p}{\delta b_n} &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( q \frac{\delta v_j}{\delta b_n} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\delta v_j}{\delta b_n} + q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\partial b_n} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$



Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση, προκύπτει

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_n} d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( q \frac{\delta v_j}{\delta b_n} \right) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\delta v_j}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (5.7)$$

Τέλος, με εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους, είναι

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_n} d\Omega &= - \int_S \left( q \frac{\delta v_j}{\delta b_n} \right) n_j dS + \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\delta v_j}{\delta b_n} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Αντίστοιχη διαδικασία ακολουθείται για τον υπολογισμό του όρου  $\int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta b_n} d\Omega$ . Συγκεκριμένα, θα είναι

$$u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta b_n} = u_i \frac{\delta}{\delta b_n} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - u_i \frac{\delta}{\delta b_n} \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) + u_i \frac{\delta}{\delta b_n} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right). \quad (5.9)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους είναι

$$u_i \frac{\delta}{\delta b_n} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = u_i \frac{\partial}{\partial b_n} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_n}, \quad (5.10)$$

όπου

$$\begin{aligned} u_i \frac{\delta}{\delta b_n} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) &= u_i \frac{\delta v_j}{\delta b_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta v_i}{\delta b_n} \right) - u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) \\ &= u_i \frac{\delta v_j}{\delta b_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i v_j \frac{\delta v_i}{\delta b_n} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) \frac{\delta v_i}{\delta b_n} \\ &\quad - u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ολοκληρώνοντας, και με εφαρμογή του θεωρήματος Gauss, προκύπτει

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\delta}{\delta b_n} \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_{\Omega} u_i \frac{\delta v_j}{\delta b_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_S u_i v_j \frac{\delta v_i}{\delta b_n} n_j dS$$

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) \frac{\delta v_i}{\delta b_n} d\Omega - \int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega. \quad (5.12)$$

Για τον όρο των συνεκτικών τάσεων, μετά από μαθηματική επεξεργασία που παραλείπεται για λόγους συντομίας, θα είναι

$$u_i \frac{\delta}{\delta b_n} \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) = + \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) - u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \tau_{ij}^a \frac{\delta v_j}{\delta b_n} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_n} \right) + \frac{\partial \tau_{ij}^a}{\partial x_i} \frac{\delta v_j}{\delta b_n}, \quad (5.13)$$

όπου  $\tau_{ij}^a$  οι συζυγείς τάσεις

$$\tau_{ij}^a = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (5.14)$$

Ολοκληρώνοντας, και με εφαρμογή του θεωρήματος Gauss θα είναι

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\delta}{\delta b_n} \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) d\Omega = + \int_{\Omega} \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega$$

$$- \int_S \tau_{ij}^a n_j \frac{\delta v_j}{\delta b_n} dS + \int_S u_i n_j \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_n} dS + \int_{\Omega} \frac{\partial \tau_{ij}^a}{\partial x_i} \frac{\delta v_j}{\delta b_n} d\Omega \quad (5.15)$$

Τέλος, για τον όρο που περιέχει την πίεση  $p$ , είναι

$$u_i \frac{\delta}{\delta b_n} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\delta p}{\delta b_n} \right) - u_i \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i \frac{\delta p}{\delta b_n} \right) - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\delta p}{\delta b_n} - u_i \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) \quad (5.16)$$

και, μετά από ολοκλήρωση, είναι

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\delta}{\delta b_n} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_S u_i \frac{\delta p}{\delta b_n} n_i dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\delta p}{\delta b_n} d\Omega - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \quad (5.17)$$

Η παράγωγος της QoI θα είναι

$$\begin{aligned} \frac{\delta J}{\delta b_n} &= \int_{S_W} \left( \frac{\partial p}{\partial b_n} \delta_i^j - \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_n} \right) n_j r_i dS \\ &+ \int_{S_W} (p \delta_i^j - \tau_{ij}) \frac{\delta n_j}{\delta b_n} r_i dS + \int_{S_W} (p \delta_i^j - \tau_{ij}) n_j r_i \frac{\delta}{\delta b_n} (dS) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.3), (5.8), (5.12), (5.15), (5.17) μπορεί να δοθεί, τελικά, η σχέση υπολογισμού της επαυξημένης συνάρτησης ενδιαφέροντος

$$\begin{aligned} \frac{\delta J_{aug}}{\delta b_n} &= \int_{S_W} \left( \frac{\partial p}{\partial b_n} \delta_i^j - \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_n} \right) n_j r_i dS \\ &+ \int_{S_W} (p \delta_i^j - \tau_{ij}) \frac{\delta n_j}{\delta b_n} r_i dS + \int_{S_W} (p \delta_i^j - \tau_{ij}) n_j r_i \frac{\delta}{\delta b_n} (dS) \\ &- \int_S \left( q \frac{\delta v_j}{\delta b_n} \right) n_j dS + \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\delta v_j}{\delta b_n} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} u_i \frac{\delta v_j}{\delta b_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_S u_i v_j \frac{\delta v_i}{\delta b_n} n_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) \frac{\delta v_i}{\delta b_n} d\Omega \\ &- \int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \\ &- \int_{\Omega} \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \\ &+ \int_S \tau_{ij}^a n_j \frac{\delta v_j}{\delta b_n} dS - \int_S u_i n_j \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_n} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial \tau_{ij}^a}{\partial x_i} \frac{\delta v_j}{\delta b_n} d\Omega \\ &+ \int_S u_i \frac{\delta p}{\delta b_n} n_i dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\delta p}{\delta b_n} d\Omega - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (5.19)$$

## 5.2 Διατύπωση των Συζυγών Πεδιακών Εξισώσεων

Ο υπολογισμός των όρων  $\frac{\delta p}{\delta b_n}$  και  $\frac{\delta v_i}{\delta b_n}$  είναι επιθυμητό να αποφευχθεί επειδή είναι υπολογιστικά ακριβός. Μηδενίζοντας τους συντελεστές των όρων αυτών στα χωρικά ολοκληρώματα, προκύπτουν οι **συζυγείς πεδιακές εξισώσεις** (Field Adjoint Equations - FAE)

$$R^q = -\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.20)$$

$$R_j^u = u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) + \frac{\partial q}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} = 0 \quad (5.21)$$

Οι εξισώσεις αυτές, λόγω τις ομοιότητάς τους με τις εξισώσεις της ροής, (4.1) και (4.2), ονομάζονται συζυγείς εξισώσεις συνέχειας (adjoint continuity) και ορμής αντίστοιχα (adjoint momentum). Με τη χρήση της εξ. (5.14), η εξίσωση (5.21) γίνεται

$$R_j^u = u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) + \frac{\partial q}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^a}{\partial x_i} = 0. \quad (5.22)$$

Με την ικανοποίηση των εξ. (5.20), (5.21) και (5.14), η (5.19) γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{\delta J_{aug}}{\delta b_n} &= \int_{S_w} \left( \frac{\partial p}{\partial b_n} \delta_i^j - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n} \right) n_j r_i dS \\ &+ \int_{S_w} (p \delta_i^j - \tau_{ij}) \frac{\delta n_j}{\delta b_n} r_i dS + \int_{S_w} (p \delta_i^j - \tau_{ij}) n_j r_i \frac{\delta}{\delta b_n} (dS) \\ &- \int_S \left( q \frac{\delta v_j}{\delta b_n} \right) n_j dS + \int_{\Omega} q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \\ &+ \int_S u_i v_j \frac{\delta v_i}{\delta b_n} n_j dS - \int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \\ &- \int_{\Omega} \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \\ &+ \int_S \tau_{ij}^a n_j \frac{\delta v_j}{\delta b_n} dS - \int_S u_i n_j \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_n} dS \\ &+ \int_S u_i \frac{\delta p}{\delta b_n} n_i dS d\Omega - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (5.23)$$

### 5.3 Οριακές συνθήκες των Συζυγών Εξισώσεων

Στην επιφάνεια εισόδου,  $S_I$ , για τις πρωτεύουσες μεταβλητές της ροής, θα ισχύει

$$\begin{cases} \frac{\delta v_i}{\delta b_n} = 0 \\ \frac{\delta x_k}{\delta b_n} = 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Στην επιφάνεια εξόδου,  $S_I$ , θα ισχύει

$$\begin{cases} \frac{\delta p}{\delta b_n} = 0 \\ \frac{\delta x_k}{\delta b_n} = 0. \end{cases} \quad (5.25)$$

Στην παραμετροποιημένη επιφάνεια του στερεού τοιχώματος,  $S_{W,p}$ , θα ισχύει

$$\frac{\delta v_i}{\delta b_n} = 0. \quad (5.26)$$

Τέλος, στη μη παραμετροποιημένη επιφάνεια του στερεού τοιχώματος,

$$\begin{cases} \frac{\delta v_i}{\delta b_n} = 0 \\ \frac{\delta x_k}{\delta b_n} = 0 \\ \frac{\delta n_i}{\delta b_n} = 0 \\ \frac{\delta}{\delta b_n} (dS) = 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

Από τα παραπάνω, η σχέση (5.23) επαναδιατυπώνεται αλλάζοντας τις επιφάνειες ολοκλήρωσης στα επιφανειακά ολοκληρώματα έτσι ώστε να μην περιλαμβάνουν αυτές που προκαλούν μηδενισμό των ολοκληρωμάτων,

$$\begin{aligned} \frac{\delta J_{aug}}{\delta b_n} &= \int_{S_W} \left( \frac{\partial p}{\partial b_n} \delta_i^j - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n} \right) n_j r_i dS \\ &+ \int_{S_{W,p}} (p \delta_i^j - \tau_{ij}) \frac{\delta n_j}{\delta b_n} r_i dS + \int_{S_{W,p}} (p \delta_i^j - \tau_{ij}) n_j r_i \frac{\delta}{\delta b_n} (dS) \\ &- \int_S \left( q \frac{\delta v_j}{\delta b_n} \right) n_j dS + \int_{\Omega} q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \\ &+ \int_{S_O} u_i v_j \frac{\delta v_i}{\delta b_n} n_j dS - \int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \\ &- \int_{\Omega} \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \\ &+ \int_{S_O} \tau_{ij}^a n_j \frac{\delta v_j}{\delta b_n} dS - \int_S u_i n_j \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_n} dS \\ &+ \int_{S_I} u_i \frac{\delta p}{\delta b_n} n_i dS d\Omega + \int_{S_W} u_i \frac{\delta p}{\delta b_n} n_i dS d\Omega - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (5.28)$$

Μηδενίζοντας τους συντελεστές των όρων  $\frac{\delta p}{\delta b_n}$ ,  $\frac{\delta \tau_{ij}}{\delta b_n}$  και  $\frac{\delta v_i}{\delta b_n}$  προκύπτουν οι οριακές συνθήκες των συζυγών πεδιακών εξισώσεων.

Στην επιφάνεια εισόδου:

$$u_i = 0 \quad (5.29)$$

Στο στερεό τοίχωμα:

$$u_i = -r_i \quad (5.30)$$

Τέλος, στην επιφάνεια εξόδου:

$$\begin{aligned}
 -qn_j + u_j v_i n_i + \tau_j^a n_i &= 0 \Rightarrow \begin{cases} qn_j n_j = u_j n_j v_i n_i + \tau_{ij}^a n_i n_j = 0 \\ qn_j t_j = u_j t_j v_i n_i + \tau_{ij} n_i t_j \end{cases} \\
 \Rightarrow \begin{cases} q = u_n v_n + 2(\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ u_t v_n + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i t_j = 0, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

όπου  $t_i$  το εφαπτομενικό διάνυσμα.

Τέλος, επειδή στις 2 διαστάσεις απαιτούνται 3 εξισώσεις για τις οριακές συνθήκες, διότι οι συζυγείς εξισώσεις είναι 3 (μία συνέχειας και 2 εξισώσεις ορμής), προστίθεται και μία οριακή συνθήκη Neumann για τη συζυγή πίεση σε όλες τις επιφάνειες, όπου απαιτείται, ελλείψει άλλων συνθηκών. Είναι, δηλαδή,

$$\frac{\partial q}{\partial x_i} n_i = 0 \tag{5.32}$$

Έτσι, διατυπώνονται οι τελικές εκφράσεις για τις οριακές συνθήκες των συζυγών εξισώσεων ως εξής:

$$Inlet : \begin{cases} u_i = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial x_i} n_i = 0, \end{cases} \tag{5.33}$$

$$Wall : \begin{cases} u_i = -r_i \\ \frac{\partial q}{\partial x_i} n_i = 0, \end{cases} \tag{5.34}$$

$$Outlet : \begin{cases} q = u_n v_n + 2(\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ u_t v_n + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i t_j = 0. \end{cases} \tag{5.35}$$

## 5.4 Τελικά έκφραση παραγώγων $\frac{\delta J}{\delta b_n}$

Η τελική έκφραση των παραγώγων  $\frac{\delta J}{\delta b_n}$ , μετά από την ικανοποίηση των συζυγών πεδιακών εξισώσεων και των αντίστοιχων οριακών συνθηκών γίνεται

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta J_{aug}}{\delta b_n} &= \int_{S_{W,p}} (p\delta_i^j - \tau_{ij}) \frac{\delta n_j}{\delta b_n} r_i dS + \int_{S_{W,p}} (p\delta_i^j - \tau_{ij}) n_j r_i \frac{\delta}{\delta b_n} (dS) \\
 &+ \int_{\Omega} A_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \right) d\Omega,
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

όπου

$$A_{jk} = q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \tau_{ij}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} \quad (5.37)$$

## 5.5 Παράγωγοι $\frac{\delta J}{\delta c_m}$

Η ανάπτυξη των παραγώγων της Συνάρτησης Ενδιαφέροντος ως προς τις μεταβλητές αβεβαιότητας  $c_m$ , είναι η ίδια με των μεταβλητών σχεδιασμού,  $b_n$ , για αυτό και η μαθηματική ανάπτυξη παραλείπεται. Οι παράγωγοι  $\frac{\delta J}{\delta c_m}$  που ονομάζονται και **παράγωγοι αβεβαιότητας** (uncertainty derivatives) θα δίνονται από την ίδια σχέση με αυτή των παραγώγων  $\frac{\delta J}{\delta b_n}$  με αντικατάσταση των  $b_n$  από  $c_m$ , δηλαδή

$$\begin{aligned} \frac{\delta J_{aug}}{\delta c_m} = & \int_{S_{W,p}} (p\delta_i^j - \tau_{ij}) \frac{\delta n_j}{\delta c_m} r_i dS + \int_{S_{W,p}} (p\delta_i^j - \tau_{ij}) n_j r_i \frac{\delta}{\delta c_m} (dS) \\ & + \int_{\Omega} A_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_k}{\delta c_m} \right) d\Omega, \end{aligned} \quad (5.38)$$

Οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις και οι οριακές τους συνθήκες είναι ίδιες με αυτές που διατυπώθηκαν για τον υπολογισμό των  $\frac{\delta J}{\delta b_n}$ . Αυτό σημαίνει ότι δεν χρειάζεται η εκ νέου επίλυση των συζυγών εξισώσεων.





# Κεφάλαιο 6

## Πιστοποίηση παραγώγων και UQ

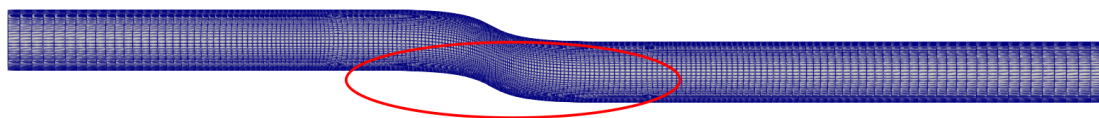
### 6.1 Εφαρμογή σε αγωγό μορφής S

#### 6.1.1 Περιγραφή

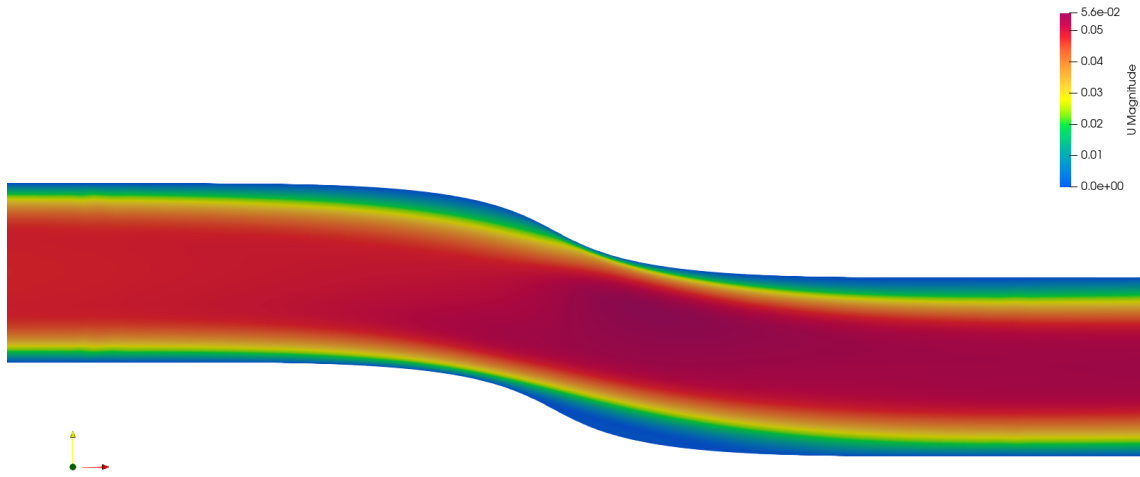
Για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων γίνεται εφαρμογή σε 2D αγωγό σχήματος S, σε μία από τις καμπύλες επιφάνειες του οποίου εφαρμόζεται μοντέλο αβεβαιοτήτων KL. Το πλέγμα είναι δομημένο, με 24000 κόμβους. Επίσης, εμφανίζει σημαντική πύκνωση κοντά στα τοιχώματα του αγωγού γεγονός που συνεισφέρει στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Η επίλυση γίνεται για στρωτή ροή, καθώς, άλλωστε, η μαθηματική ανάπτυξη που προηγήθηκε δε λαμβάνει ποθενά υπόψη την επίδραση της τύρβης. Ως ποσότητα ενδιαφέροντος λαμβάνεται η δύναμη κατά την οριζόντια διεύθυνση.

Στα σχήματα 6.2 και 6.3 παρουσιάζονται τα πεδία ταχύτητας και συζυγούς ταχύτητας όπως προέκυψαν μετά την επίλυση των πρωτευσών και των συζυγών εξισώσεων της ροής.

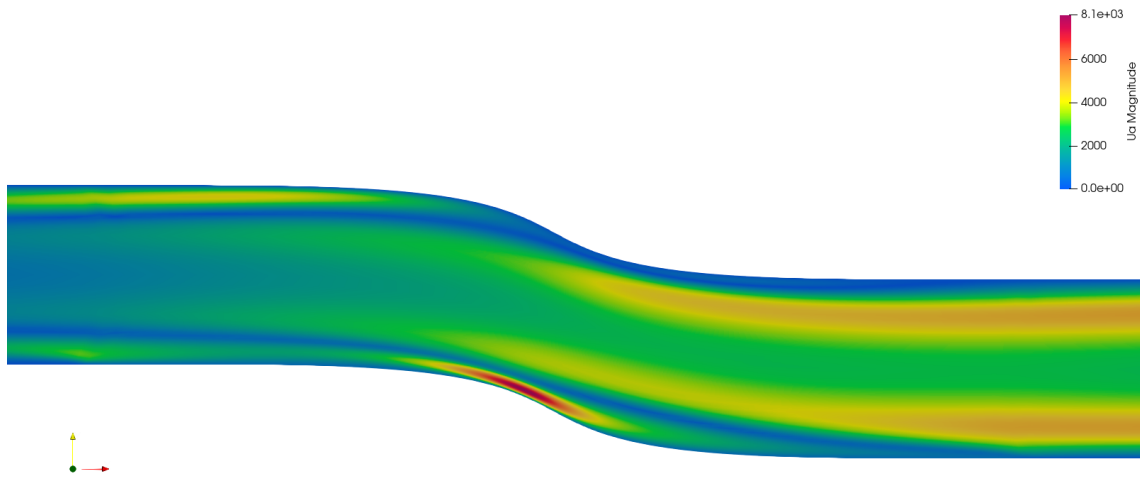
Τα διαγράμματα σύγκλισης των υπολοίπων των εξισώσεων της ροής και των συζυγών εξισώσεων παρατίθενται στη συνέχεια. Ο κώδικας τερματίζει όταν τα υπόλοιπα έχουν γίνεται μικρότερα του  $10^{-7}$ .



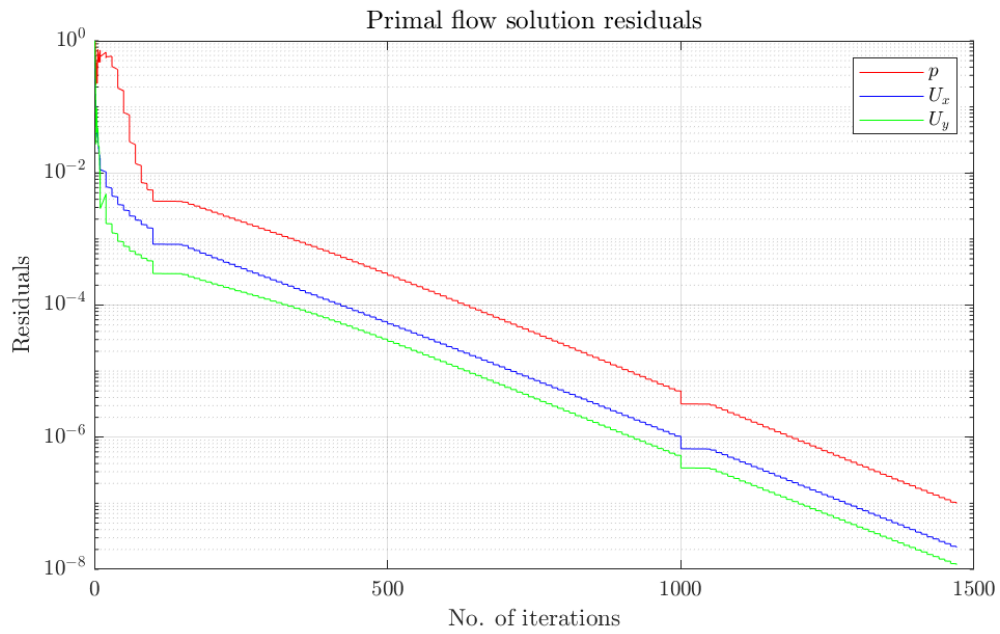
**Σχήμα 6.1:** Πλέγμα αγωγού μορφής S. Κυκλωμένο είναι το τμήμα του στερεού ορίου στο οποίο εφαρμόζεται το μοντέλο των γεωμετρικών αβεβαιοτήτων



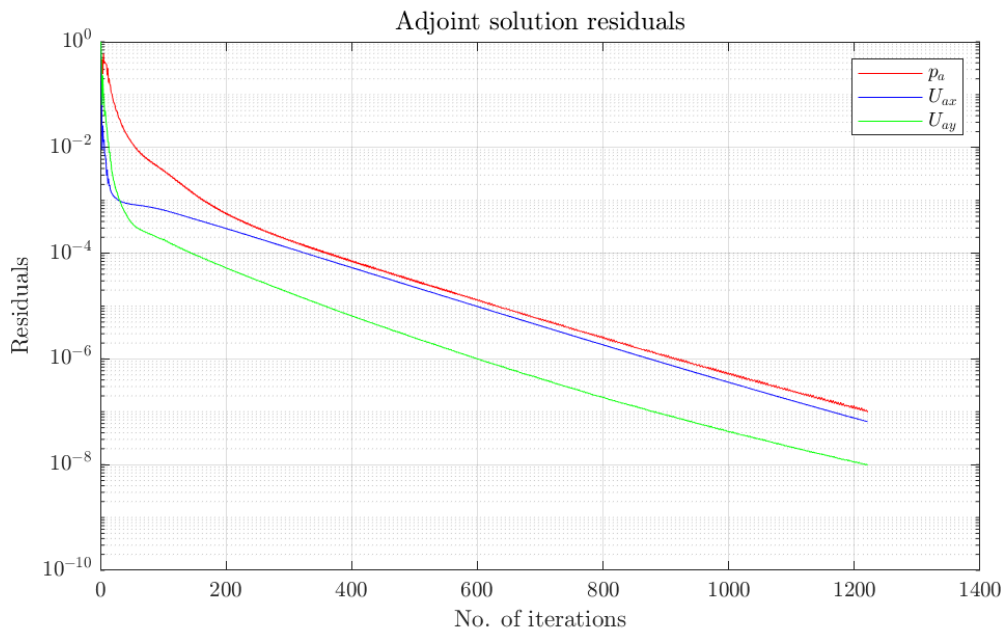
Σχήμα 6.2: Πεδίο ταχύτητας (μέτρου ταχύτητας) στο αγωγό μορφής  $S$



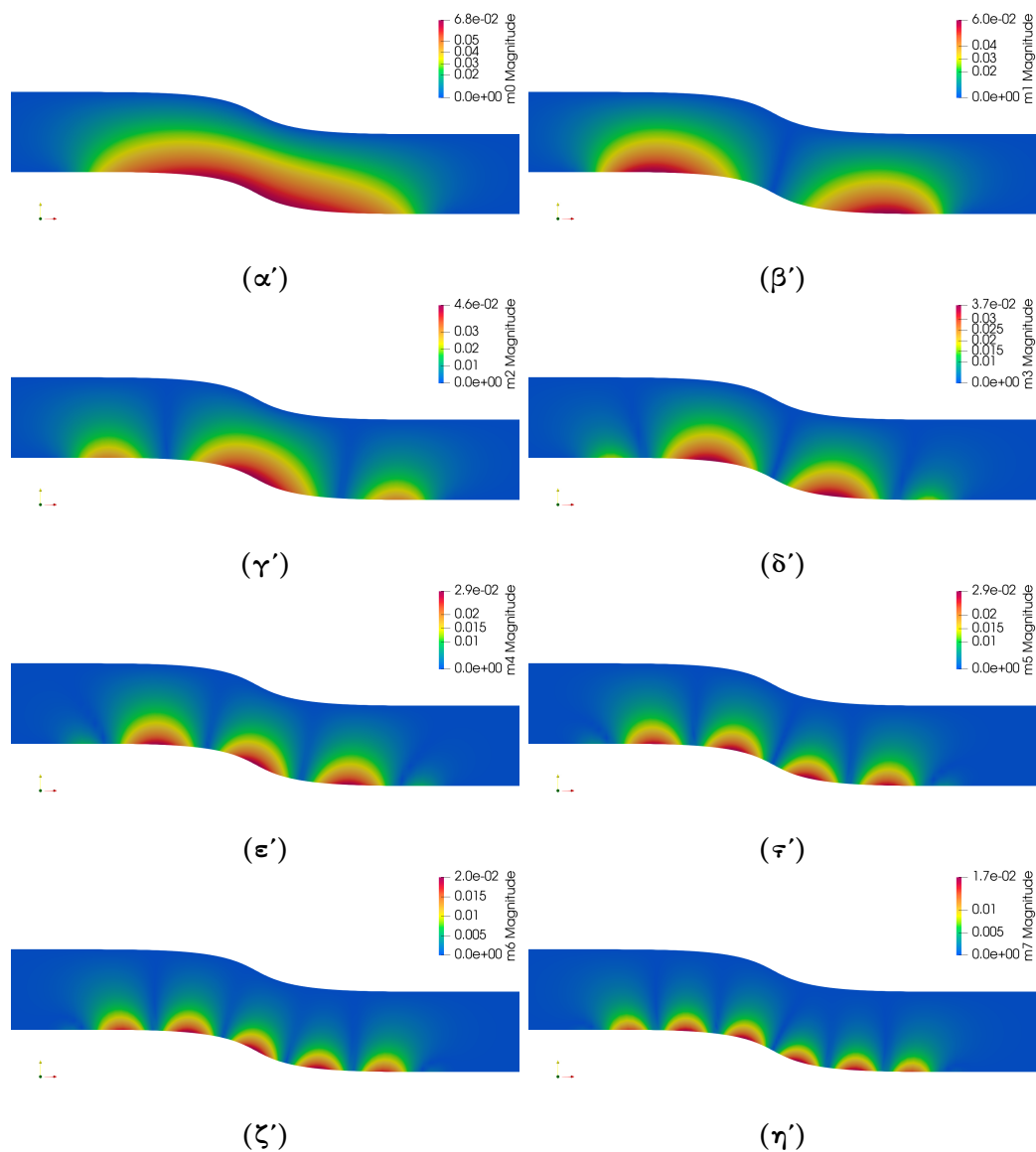
Σχήμα 6.3: Πεδίο συζυγούς ταχύτητας (μέτρου συζυγούς ταχύτητας) στο αγωγό μορφής  $S$



Σχήμα 6.4: Διάγραμμα σύγκλισης των υπολοίπων των εξισώσεων της ροής

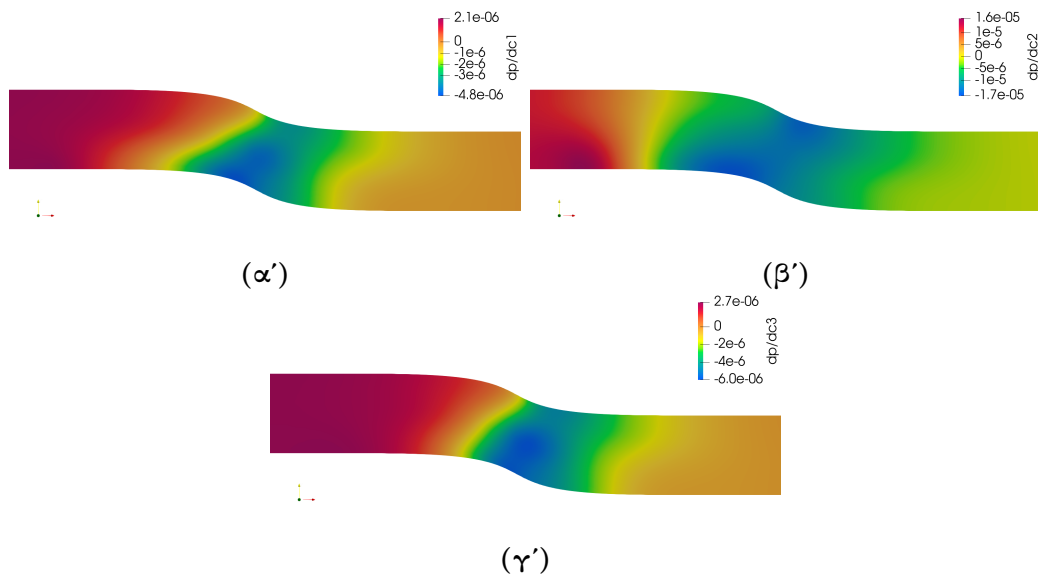


Σχήμα 6.5: Διάγραμμα σύγκλισης των υπολοίπων των συζυγών εξισώσεων



**Σχήμα 6.6:** Πεδίο συνεισφοράς των πρώτων 8 μεταβλητών αβεβαιότητας,  $c_m$ , στη μετακίνηση του πλέγματος, δηλαδή των όρων  $\frac{\delta x_i}{\delta c_m}$

Στο σχήμα 6.6 απεικονίζονται τα πεδία των  $\frac{\delta x_i}{\delta c_m}$  στο εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου. Είναι εμφανές ότι οι μεταβλητές αβεβαιότητας έχουν μη αμελητέα επιρροή και στο εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου καθώς η οποιαδήποτε διαταραχή γεωμετρίας επιβάλλεται στο στερεό όριο μέσω του αναπτύγματος KL μεταφέρεται και στο εσωτερικό μέσω της εξίσωσης 2.21.



**Σχήμα 6.7:** Οι παράγωγοι  $\frac{\delta p}{\delta c_m}$  της ροής υπολογισμένες με πεπερασμένες διαφορές (εξ. 6.1), δείχνουν την επίδραση που θα έχει στο πεδίο ροής η μεταβολή στις μεταβλητές αβεβαιότητας. Στην πραγματικότητα, οι τιμές τους είναι αρκετά μικρές, γεγονός που δείχνει ότι οι διαταραχές στην ονομαστική γεωμετρία έχουν μικρή επίδραση στο πεδίο ροής. Τονίζεται ότι οι όροι  $\frac{\delta p}{\delta c_m}$  δεν υπολογίζονται όταν χρησιμοποιείται η συζυγής μέθοδος.

### 6.1.2 Επαλήθευση παραγώγων

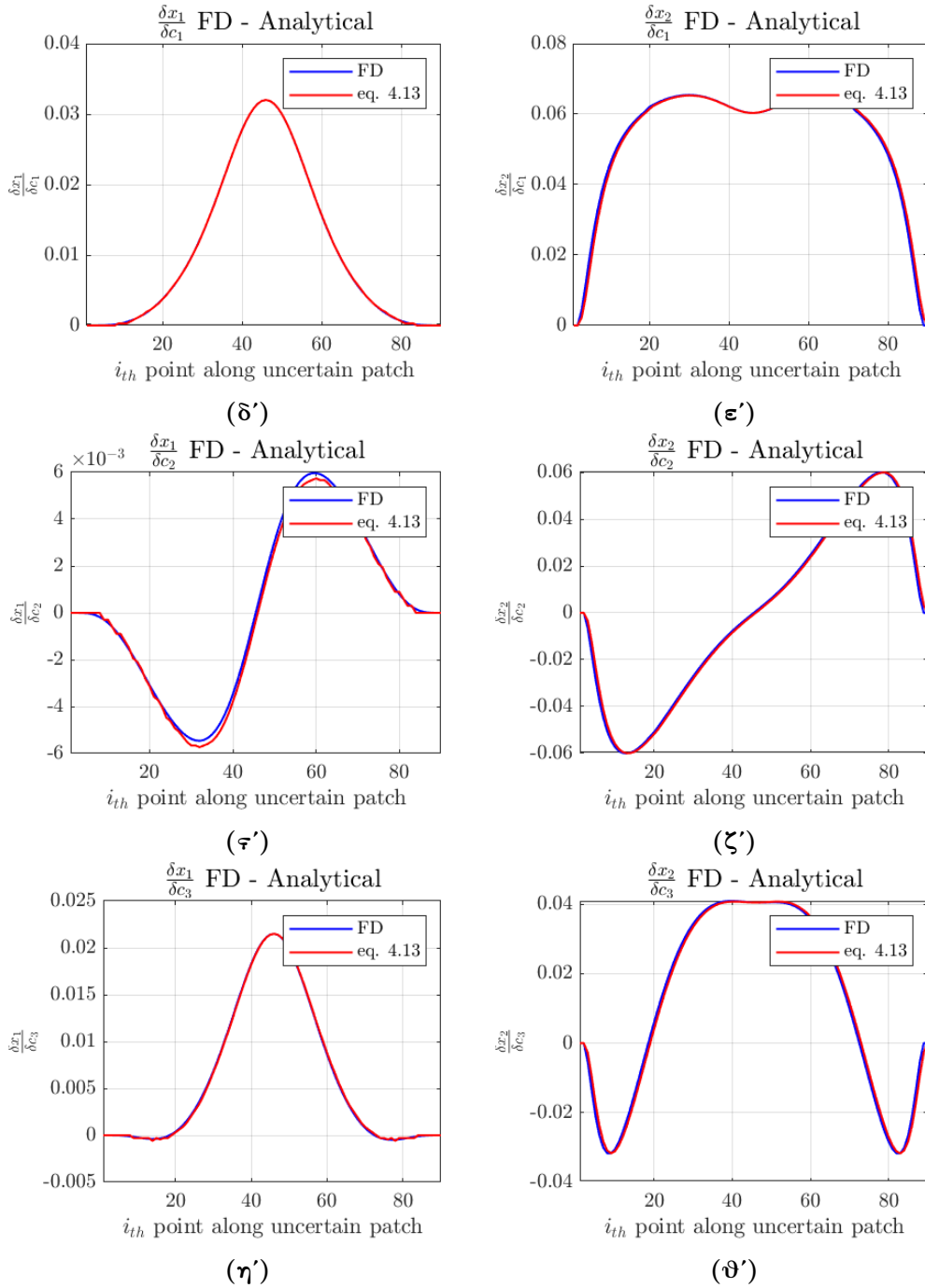
#### Επαλήθευση παραγώγων $\frac{\delta x_i}{\delta c_m}$

Στο πλαίσιο της επαλήθευσης του κώδικα, πρέπει να ελεγχθεί αρχικά ότι οι παράγωγοι της γεωμετρίας του ορίου ως προς τις μεταβλητές αβεβαιότητας,  $\frac{\delta x_i}{\delta c_m}$ , που υπολογίζονται από τη σχέση είναι ακριβείς. Για τον σκοπόν αυτό, γίνεται σύγκριση των τιμών των παραγώγων  $\frac{\delta x_i}{\delta c_m}$  υπολογισμένων αναλυτικά με βάση τη σχέση (6.1.2) και των ίδιων παραγώγων υπολογισμένων με πεπερασμένες διαφορές. Το σχήμα πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιείται είναι σχήμα κεντρικών διαφορών που έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης και δίνεται από τη γενική σχέση 6.1,

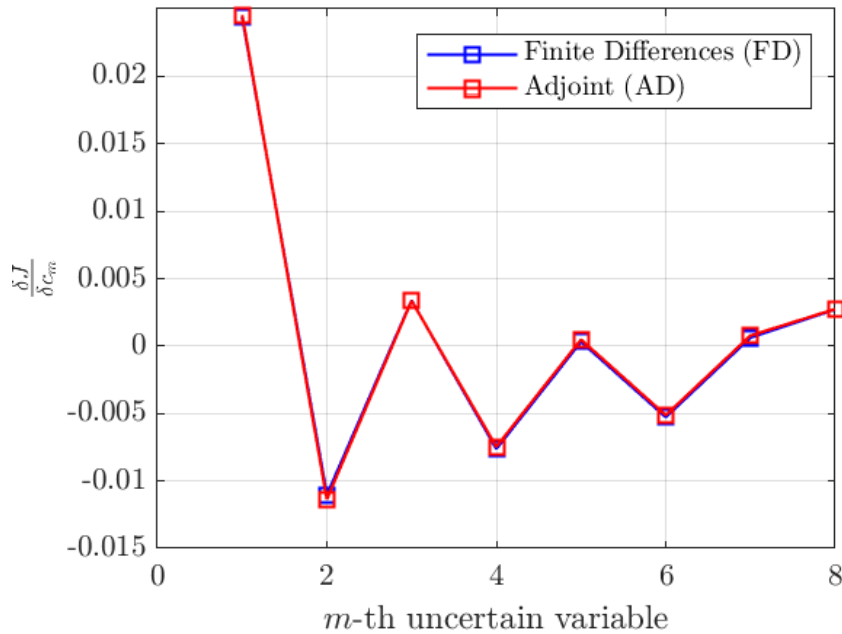
$$\frac{\delta \phi}{\delta c_m} \approx \frac{\phi(c_1, c_2, \dots, c_m + \varepsilon, \dots, c_m) - \phi(c_1, c_2, \dots, c_m - \varepsilon, \dots, c_m)}{2\varepsilon}, \quad (6.1)$$

όπου  $\phi = \phi(c_1, c_2, \dots, c_m)$  ένα οποιοδήποτε βαθμωτό ή διανυσματικό μέγεθος.

Η ποσότητα  $\varepsilon$  είναι το βήμα των πεπερασμένων διαφορών που ορίζεται από το χρήστη. Όσο μικρότερο το βήμα τόσο καλύτερη η προσέγγιση, αλλά πολύ μικρές τιμές του  $\varepsilon$  είναι δυνατό να οδηγήσουν σε αριθμητικά σφάλματα αποκοπής. Στο κεφάλαιο αυτό, θα είναι  $\varepsilon = 10^{-4}$ , το οποίο επιλέχθηκε μετά από δοκιμές.



**Σχήμα 6.7:** Σύγκριση παραγώγων  $\frac{\delta x_i}{\delta c_m}$  υπολογισμένες με πεπερασμένες διαφορές και αναλυτικά



**Σχήμα 6.8:** Σύγκριση τιμών παραγώγων  $\frac{\delta J}{\delta c_m}$  υπολογισμένων με πεπερασμένες διαφορές και με τη συζυγή μέθοδο

### Επαλήθευση παραγώγων $\frac{\delta J}{\delta c_m}$

Για την επαλήθευση των παραγώγων  $\frac{\delta J}{\delta c_m}$  γίνεται σύγκριση των τιμών τους υπολογισμένων με τη συζυγή μέθοδο και με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, (βλ. εξ. 6.1).

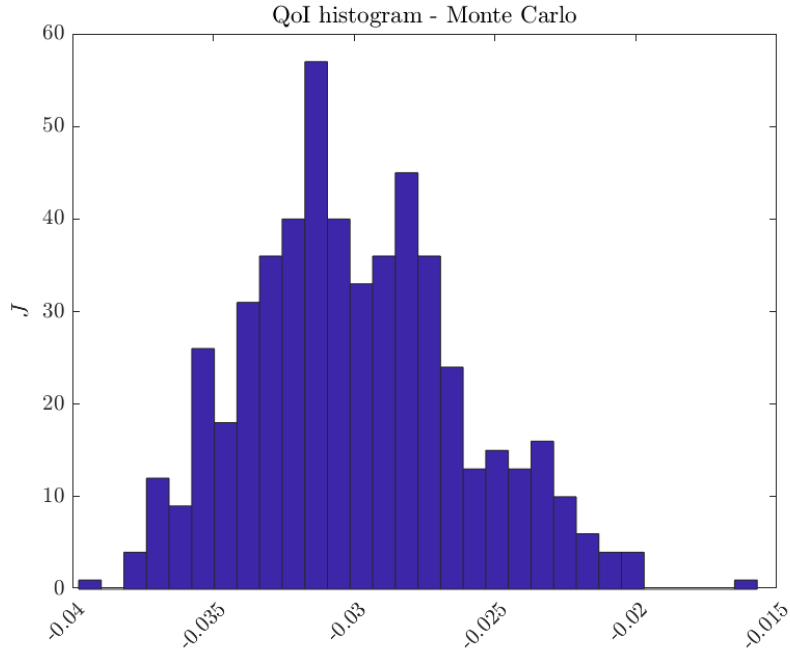
Για εδώ χρησιμοποιείται  $\varepsilon = 10^{-6}$  εκτός των μεταβλητών αβεβαιότητας  $c_5$  και  $c_7$  για τις οποίες χρησιμοποιείται  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Ο λόγος είναι ότι οι δύο τελευταίες έχουν τιμές κοντά στο 0 γεγονός που έχει ως συνέπεια οι πεπερασμένες διαφορές να είναι πιο επιρρεπείς σε σφάλματα αποκοπής σε μικρά  $\varepsilon$ .

Στο σχήμα 6.8 παρατίθενται συγκριτικά οι τιμές των παραγώγων υπολογισμένων με τη συζυγή μέθοδο και με πεπερασμένες διαφορές. Όπως είναι εμφανές στο σχήμα, η ταύτιση μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων είναι αρκετά καλή.

### 6.1.3 Επαλήθευση UQ

Η επαλήθευση της ποσοτικοποίησης αβεβαιότητας αφορά στην πιστοποίηση των  $\mu_J$  και  $\sigma_J$ . Σε ό,τι αφορά στο  $\mu_J$ , δεν απαιτείται κάποια επαλήθευση καθώς από τη σχέση 3.1 είναι  $\mu_J = J|_{c_m=\bar{c}_m}$ .

Για την πιστοποίηση της τυπικής απόκλισης της ποσότητας ενδιαφέροντος,  $\sigma_J$ , γίνεται χρήση της μεθόδου Monte-Carlo ως βάσης για την πραγματοποίηση σύγκρισης. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, δίνονται τυχαίες τιμές στις μεταβλητές αβεβαιότητας από μία



**Σχήμα 6.9:** Ιστόγραμμα του δείγματος τιμών της συνάρτησης ενδιαφέροντος  $J$

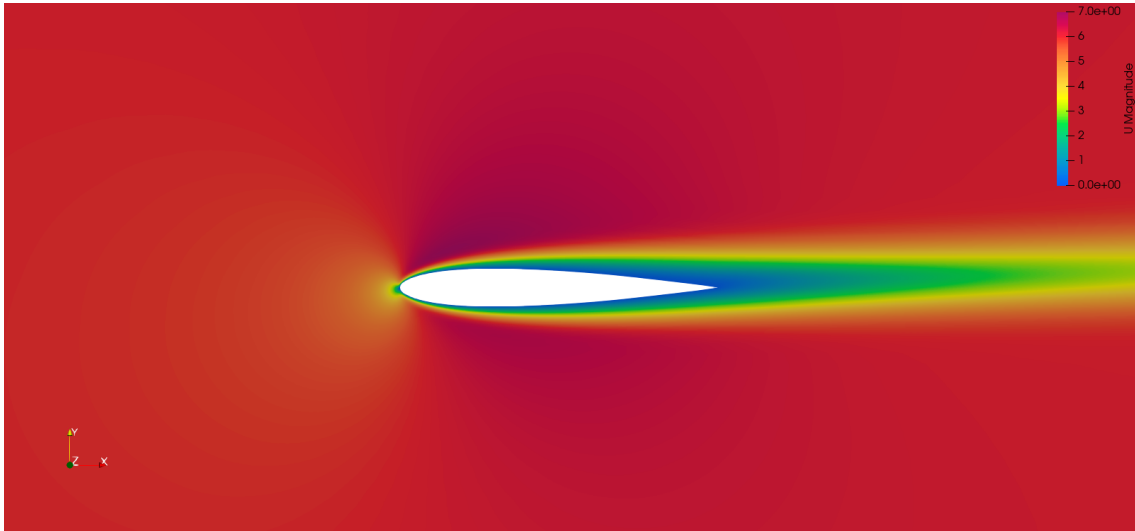
γεννήτρια τυχαίων αριθμών που ακολουθεί την κατανομή των μεταβλητών σχεδιασμού. Έπειτα γίνεται επίλυση των εξισώσεων ροής για αυτές τις τιμές των μεταβλητών αβεβαιότητας και υπολογίζεται η τιμή της ποσότητας ενδιαφέροντος,  $J$ . Η διαδικασία επαναλαμβάνεται αρκετές φορές, με διαφορετικές τυχαίες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού κάθε φορά έως ότου προκύψει ένα ικανά μεγάλο (έστω μεγέθους  $K$ ) δείγμα τιμών της  $J$ . Από αυτό υπολογίζεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του δείγματος από τις γνωστές σχέσεις

$$\bar{J} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K J_K \quad (6.2)$$

$$\sigma_J = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (J_K - \bar{J})^2} \quad (6.3)$$

Τα αποτελέσματα που ακολουθούν αντιστοιχούν σε ένα δείγμα 530 αξιολογήσεων. Ιδανικά το δείγμα θα έπρεπε να είναι μεγαλύτερο για περισσότερη ακρίβεια, αλλά το υπολογιστικό κόστος έπρεπε να κρατηθεί χαμηλό. Χρησιμοποιήθηκαν 3 μεταβλητές αβεβαιότητας για το ανάπτυγμα KL. Η τυπική απόκλιση των μεταβλητών αβεβαιότητας είναι  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.65$ .





Σχήμα 6.10: Πεδίο ταχύτητας (μέτρου ταχύτητας) στο αγωγό μορφής  $S$

Μέθοδος	$\mu_J$	$\sigma_J$
Monte-Carlo	-0.0299341	0.003752
FOSM	-0.029386	0.003519

Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση υπολογισμένες με τη μέθοδο FOSM δεν διαφέρουν πολύ από αυτήν της μεθόδου Monte-Carlo. Η διαφορά τους, περίπου 2% και 6% αντίστοιχα, οφείλεται, μεταξύ άλλων, στο γεγονός ότι η μέθοδος FOSM χρησιμοποιεί προσέγγιση πρώτης τάξης κατά Taylor και στο μέγεθος του δείγματος.

## 6.2 Εφαρμογή σε μεμονωμένη αεροτομή

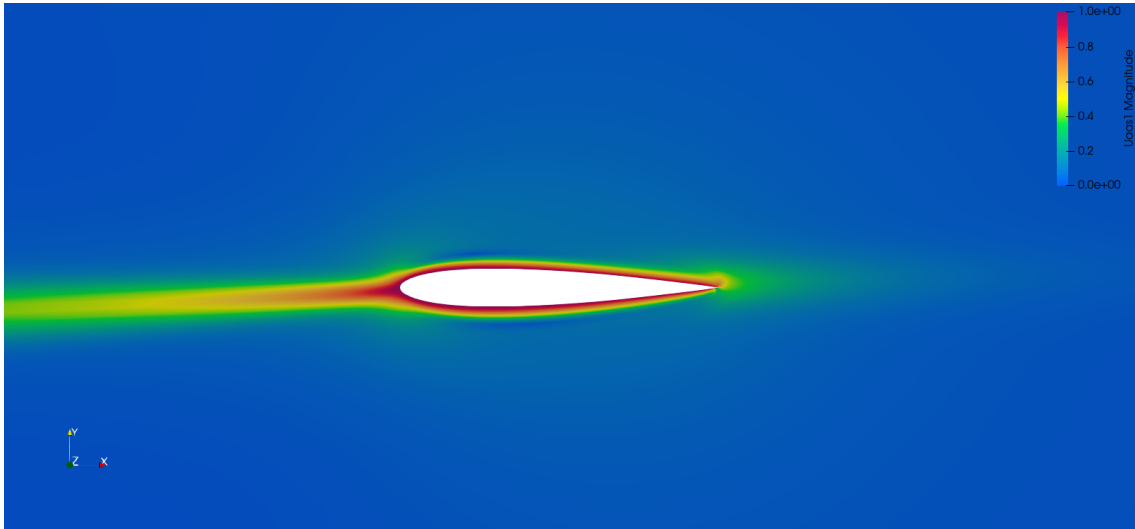
### 6.2.1 Περιγραφή

Στην εφαρμογή αυτή εξετάζεται περίπτωση αεροτομής NACA 0012. Η ταχύτητα εισόδου της ροής στο υπολογιστικό χωρίο είναι  $U_{inlet} = 6m/s$  ώστε η ροή να κρατηθεί στρωτή και η γωνία εισόδου της ροής είναι  $\alpha = 2^\circ$ . Ως ποσότητα ενδιαφέροντος λαμβάνεται η οπισθέλκουσα. Οι γεωμετρικές αβεβαιότητες εφαρμόζονται σε όλη την αεροτομή ενώ έχει εφαρμοστεί το εκθετικό φίλτρο δεύτερης τάξης της εξ. 2.27 ώστε το μοντέλο διαταραχής της γεωμετρίας να μηδενίζεται κοντά στην ακμή εκφυγής.

Στα σχήματα 6.10 και 6.11 παρουσιάζονται τα πεδία ταχύτητας και συζυγούς ταχύτητας όπως προέκυψαν μετά την επίλυση των πρωτεύουσών και των συζυγών εξισώσεων της ροής.

### 6.2.2 Επαλήθευση παραγώγων

Στο σχήμα 6.12 εμφανίζονται συγκριτικά οι παράγωγοι  $\frac{\delta J}{\delta c_m}$  υπολογισμένες με τη συζυγή μέθοδο και με πεπερασμένες διαφορές αντίστοιχα. Και σε αυτήν την περίπτωση



**Σχήμα 6.11:** Πεδίο συζυγούς ταχύτητας (μέτρου συζυγούς ταχύτητας) στο αγωγό μορφής  $S$

υπάρχει πολύ καλή ταύτιση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων.

### 6.2.3 Επαλήθευση UQ

Στον πίνακα 6.3.3 συγκεντρώνονται οι τιμές των μέσων τιμών και των τυπικών αποκλίσεων της συνάρτησης ενδιαφέροντος υπολογισμένες με τη μέθοδο Monte-Carlo και με τη μέθοδο FOSM. Για τη μέθοδο Monte-Carlo έχουν ληφθεί 2244 δείγματα της  $J$  που αντιστοιχούν σε τυχαία παραγόμενους συνδυασμούς των μεταβλητών αβεβαιότητας που ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση ίση με 1.

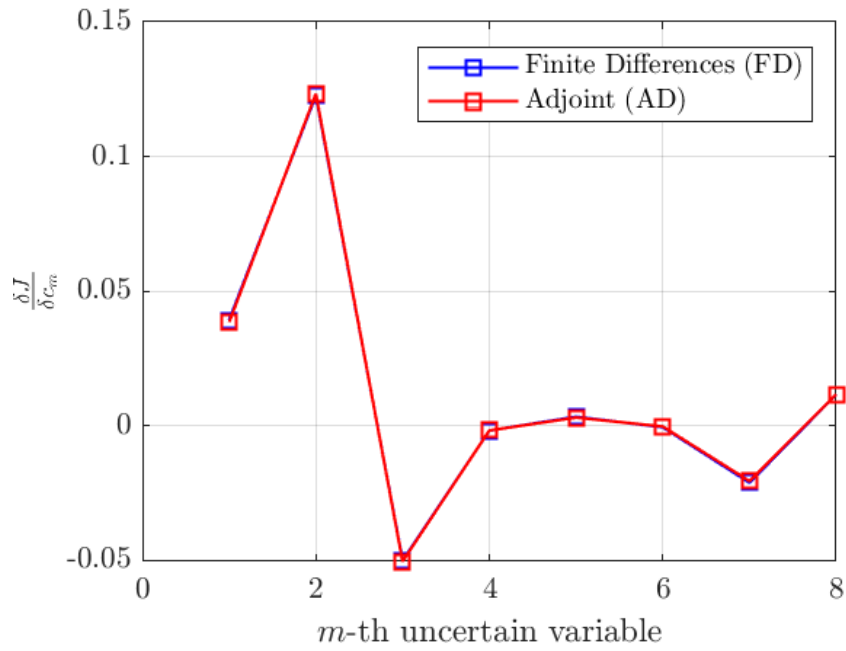
Μέθοδος	$\mu_J$	$\sigma_J$
Monte-Carlo	2.166777062	0.013377931
FOSM	2.195064679	0.00913032

## 6.3 Εφαρμογή σε περύγωση στροβιλομηχανής

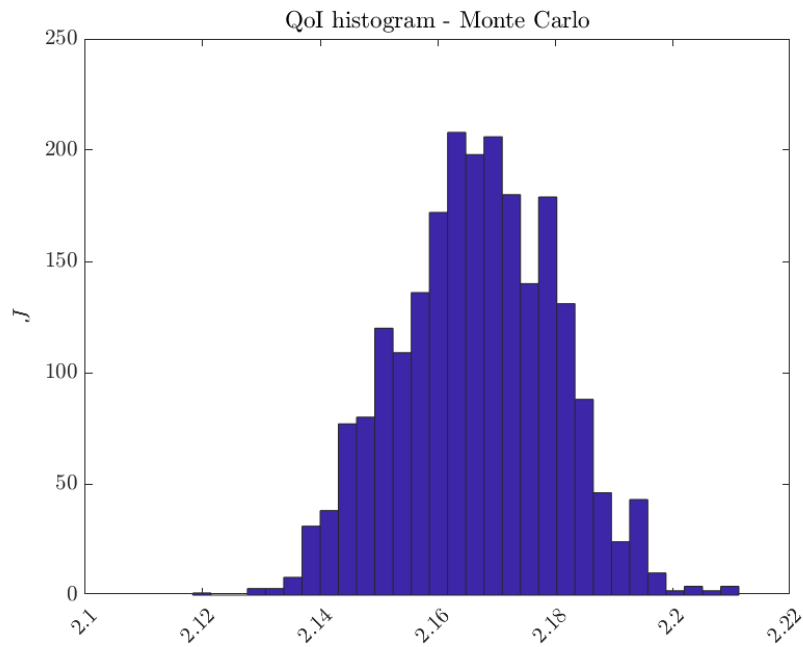
### 6.3.1 Περιγραφή

Σε αυτή την εφαρμογή μελετάται ροή μέσα σε  $2\Delta$  περύγωση στροβιλομηχανής. Η ταχύτητα της εισόδου της ροής στο υπολογιστικό χωρίο είναι  $U = 48m/s$  και η γωνία εισόδου της ροής είναι  $\alpha = -42^\circ$ . Αναγκαστικά η ροή μελετάται ως τυρβώδης, αλλά αυτό δεν είναι περιοριστικό μιας και ο συζυγής κώδικας για τυρβώδεις ροές είναι διαθέσιμος. Εξάλλου, αυτή η παραδοχή δεν αλλοιώνει το μήνυμα της εργασίας αυτής.

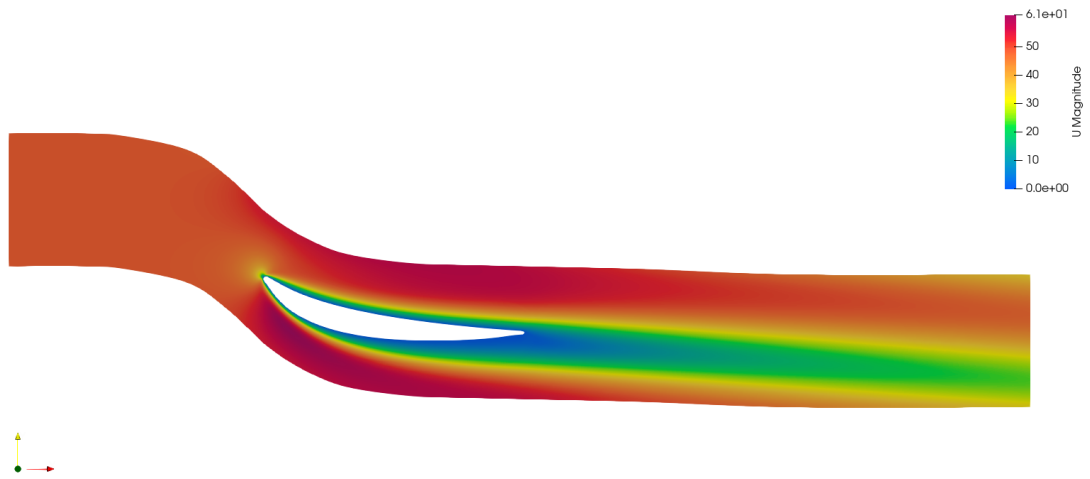
Το σχήμα 6.14 απεικονίζει το πεδίο ταχύτητας και το σχήμα 6.15 το πεδίο της συζυγούς ταχύτητας.



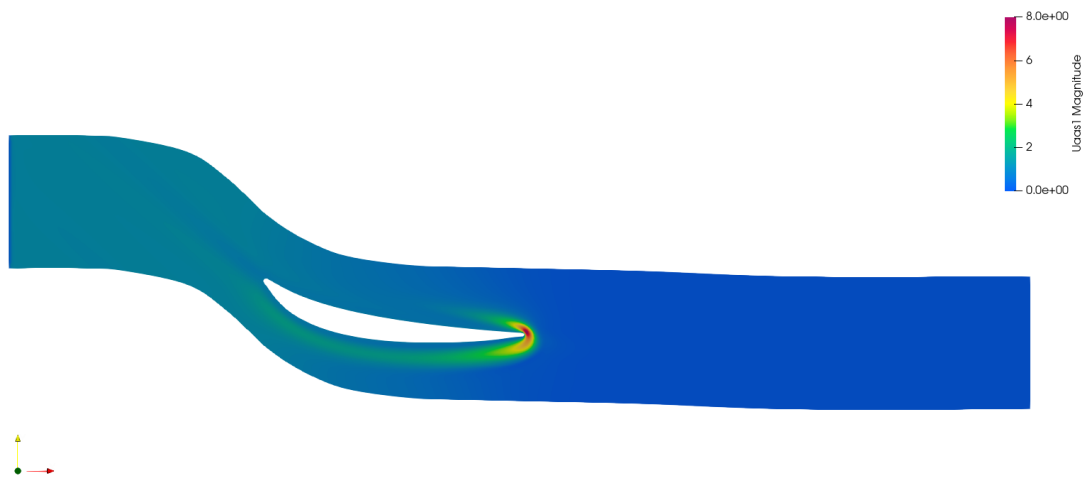
**Σχήμα 6.12:** Σύγκριση τιμών παραγώγων  $\frac{\delta J}{\delta c_m}$  υπολογισμένων με πεπερασμένες διαφορές και με τη συζυγή μέθοδο



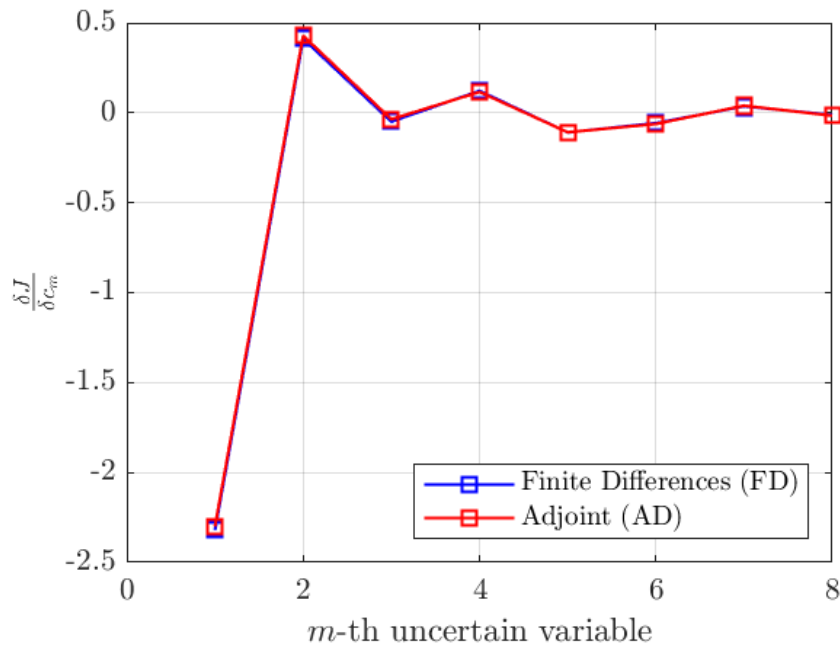
**Σχήμα 6.13:** Ιστόγραμμα του δείγματος τιμών της συνάρτησης ενδιαφέροντος  $J$  στην αεροτομή NACA 0012



Σχήμα 6.14: Πεδίο ταχύτητας (μέτρου ταχύτητας) στο αγωγό μορφής  $S$



Σχήμα 6.15: Πεδίο συζυγούς ταχύτητας (μέτρου συζυγούς ταχύτητας) στο αγωγό μορφής  $S$



**Σχήμα 6.16:** Σύγκριση τιμών παραγώγων  $\frac{\delta J}{\delta c_m}$  υπολογισμένων με πεπερασμένες διαφορές και με τη συζυγή μέθοδο

### 6.3.2 Επαλήθευση παραγώγων

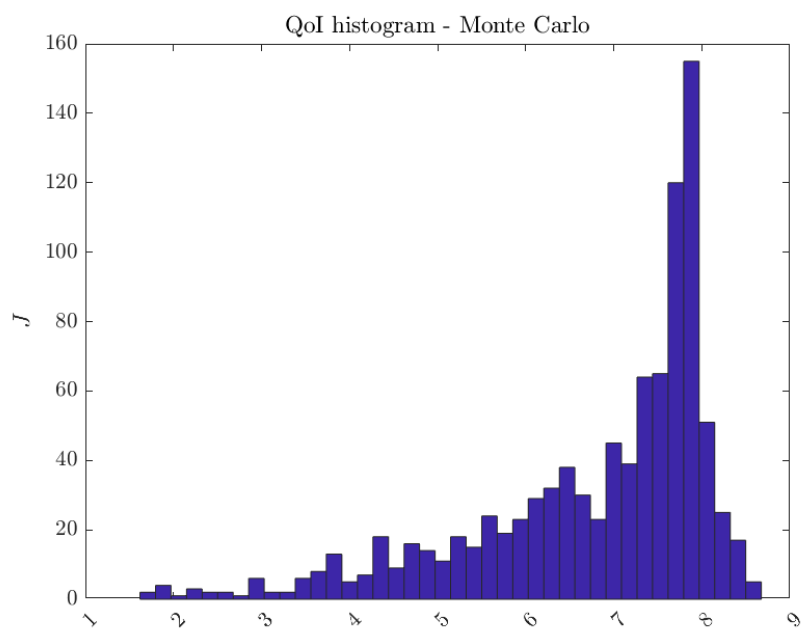
Η σύγκριση των παραγώγων  $\frac{\delta J}{\delta c_m}$  υπολογισμένων με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και με τη συζυγή μέθοδο φαίνεται στο σχήμα 6.16. Όπως είναι εμφανές από το σχήμα, υπάρχει πολύ καλή ταύτιση των τιμών των παραγώγων υπολογισμένων με τη συζυγή μέθοδο και των τιμών αναφοράς.

### 6.3.3 Επαλήθευση UQ

Στον πίνακα 6.3.3 συγκεντρώνονται οι τιμές των μέσων τιμών και των τυπικών αποκλίσεων της συνάρτησης ενδιαφέροντος υπολογισμένες με τη μέθοδο Monte-Carlo για 1000 δείγματα και με τη μέθοδο FOSM.

Το ιστόγραμμα του σχήματος 6.17 υποδεικνύει ότι η κατανομή της  $J$  είναι έντονα μη συμμετρική. Αυτό φαίνεται να επηρεάζει το σφάλμα της μεθόδου FOSM καθώς υπάρχει μεγαλύτερη απόκλιση από τη μέθοδο Monte-Carlo εδώ σε σχέση με τις υπόλοιπες εφαρμογές, όπου η κατανομή της  $J$  είναι πιο συμμετρική.

Μέθοδος	$\mu_J$	$\sigma_J$
Monte-Carlo	6.782246415	1.372907852
FOSM	7.284552322	1.525630046



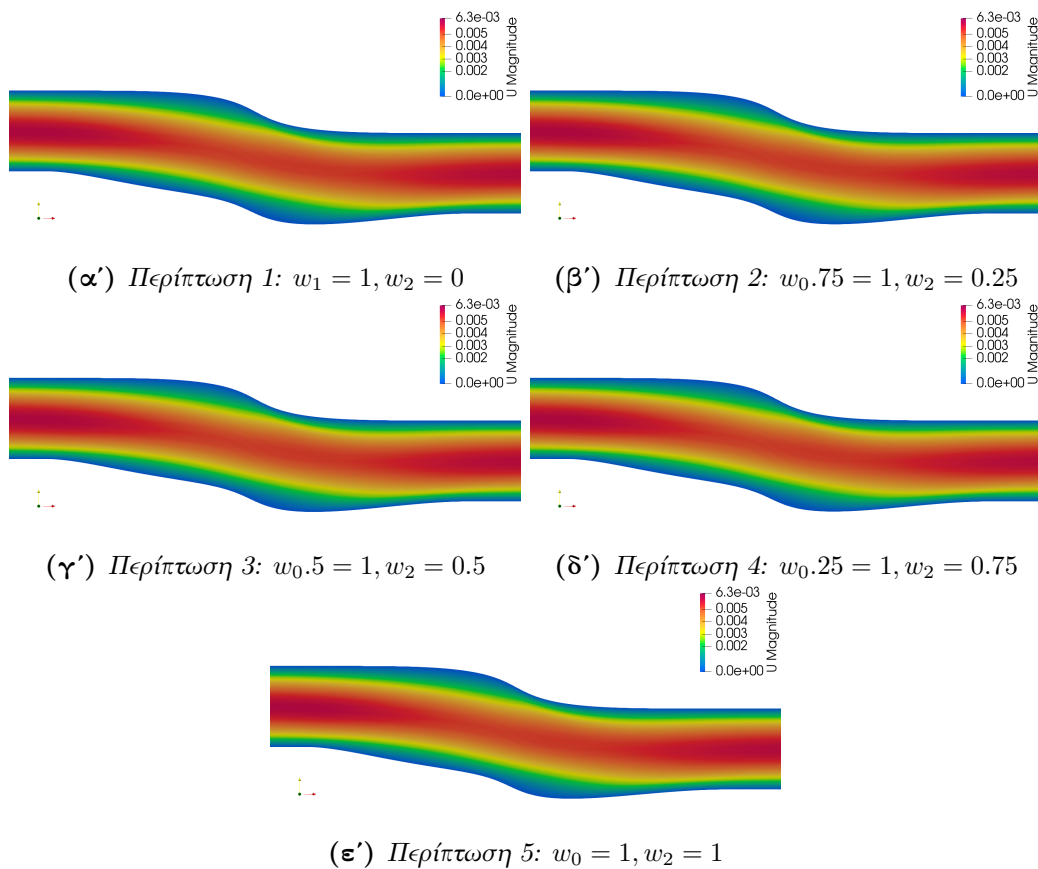
**Σχήμα 6.17:** Ιστογράμμο του δείγματος τιμών της συνάρτησης ενδιαφέροντος  $J$  στην περύγωση στροβιλομηχανής

## Κεφάλαιο 7

# Βελτιστοποίηση αγωγού σχήματος S

Στην εφαρμογή αυτή γίνεται βελτιστοποίηση μορφής του αγωγού σχήματος S λαμβάνοντας το κάτω καμπύλο τμήμα του αγωγού (βλ. σχήμα 6.1) ως την προς-βελτιστοποίηση επιφάνεια και ως την επιφάνεια εφαρμογής του μοντέλου αβεβαιοτήτων. Τα χαρακτηριστικά της ροής είναι τα ίδια με αυτά της εφαρμογής του Κεφαλαίου 7, ωστόσο έχει χρησιμοποιηθεί ένα αραιότερο πλέγμα για μείωση του υπολογιστικού κόστους της βελτιστοποίησης. Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης τερματίζει μετά από 35 επαναλήψεις. Η παραμετροποίηση της κάτω καμπύλης γίνεται με καμπύλες Bezier με 8 σημεία ελέγχου. Από αυτά, τα δύο ακραία δεν κινούνται ενώ όλα τα υπόλοιπα μπορούν να κινηθούν. Η βελτιστοποίηση επαναλήφθηκε για 5 συνολικά περιπτώσεις καθεμία από τις οποίες αντιστοιχεί σε διαφορετικό συνδυασμό βαρών των μέσων τιμών και των τυπικών αποκλίσεων στη σχέση υπολογισμού της συνάρτησης κόστους.

Τα βάρη κάθε περίπτωσης φαίνονται στο σχήμα 7.6, το οποίο επίσης απεικονίζει τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της  $J$  κάθε βελτιστοποιημένου αγωγού ως ένα μέτωπο Pareto. Στο σχήμα 7.3 φαίνονται οι 5 βελτιστοποιημένοι αγωγοί. Τα σχήματα 7.2α' και 7.2β' παρουσιάζουν τη σύγκλιση των μέσων τιμών και των τυπικών αποκλίσεων, αντίστοιχα, της  $J$ , ενώ στον πίνακα 7.1 παρατίθενται τα ποσοστά επί τοι εκατό μείωσης των  $\mu_J$  και  $\sigma_J$  για τους βελτιστοποιημένους αγωγούς κάθε περίπτωσης. Όπως είναι αναμενόμενο, όσο μεγαλύτερο βάρος δίνεται στην τυπική απόκλιση, τόσο μεγαλύτερη η μείωσή της στον βελτιστοποιημένο αγωγό με αντάλλαγμα μικρότερη μείωση στη μέση τιμή και το αντίθετο. Ωστόσο, και χωρίς αυτό να αποτελεί γενικό κανόνα, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η κατεύθυνση της μείωσης της μέσης τιμής της συνάρτησης ενδιαφέροντος ταυτίζεται σχεδόν με την κατεύθυνση της μείωσης της τυπικής απόκλισης. Αυτό είναι εμφανές από το γεγονός ότι η διαφορά τόσο στο σχήμα των αγωγών όσο και των  $\mu_J$  και  $\sigma_J$  είναι σχεδόν ανεπαίσθητη ανεξαρτήτως των  $w_1$  και  $w_2$  που χρησιμοποιήθηκαν. Μία μικρή διαφοροποίηση αρχίζει να διαφαίνεται μεταξύ των διαφορετικών περιπτώσεων όσο οι κύκλοι της βελτιστοποίησης αυξάνονται. Σημειώνεται ότι η βελτιστοποίηση με στόχο τη μέση τιμή είναι ισοδύναμη με την 'κλασική'

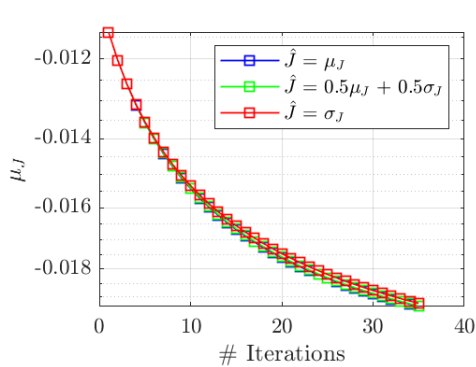


**Σχήμα 7.1:** 5 περιπτώσεις βελτιστοποιημένων αγωγών με διαφορετικά βάρη στη μέση τιμή και στην τυπική απόκλιση (βλ. σχήμα 7.6 για τα βάρη που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε περίπτωση)

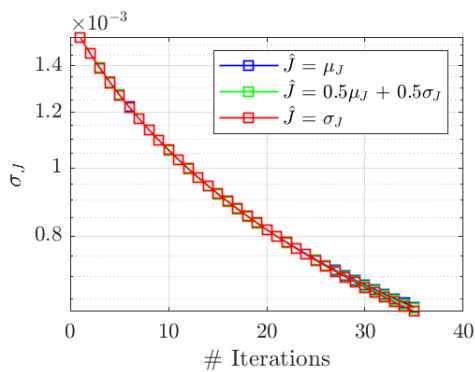
βελτιστοποίηση, χωρίς αβεβαιότητες, καθώς λόγω της μεθόδου FOSM η μέση τιμή ταυτίζεται με την τιμή της ποσότητας ενδιαφέροντος.

Μία πιο αισθητή διαφορά μεταξύ των διαφορετικών περιπτώσεων εντοπίζεται στον α-διάστατο συντελεστή δύναμης κατά την οριζόντια κατεύθυνση,  $c_f$ , η τιμή του οποίου σε κάθε θέση στο στερεό όριο παρουσιάζεται στο σχήμα 7.5. Από το σχήμα αυτό φαίνεται ότι η δύναμη πάνω στο όριο του βελτιστοποιημένου για μέση τιμή αγωγού είναι γενικά λίγο χαμηλότερη και με πιο έντονες μεταβολές από ότι αυτή στο όριο του βελτιστοποιημένου για τυπική απόκλιση αγωγού.



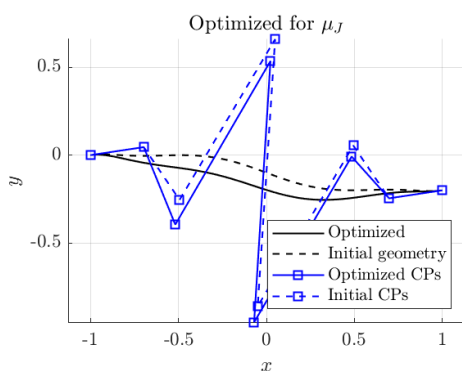


(α')

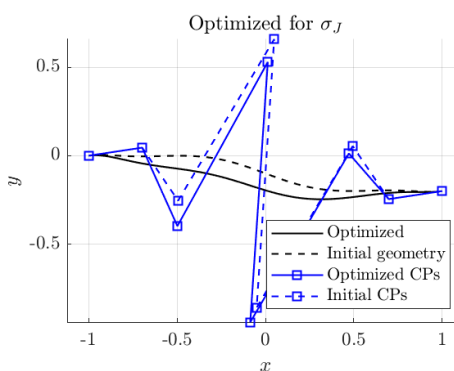


(β')

**Σχήμα 7.2:** Εξέλιξη της μέσης τιμής (αριστερά) και της τυπικής απόκλισης (δεξιάς) της  $J$  σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης για τις περιπτώσεις 1,3 και 5



(α')

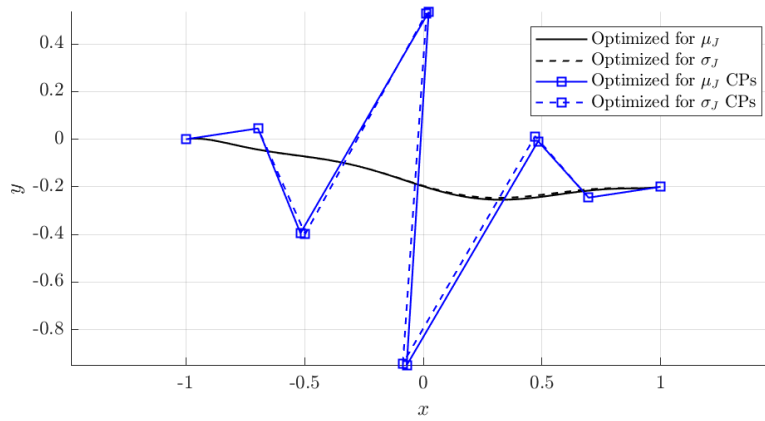


(β')

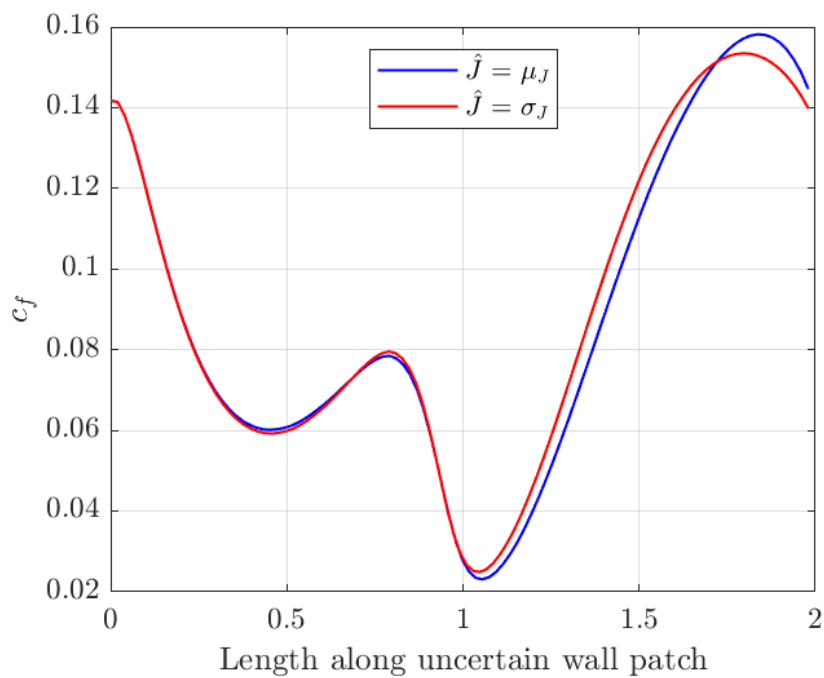
**Σχήμα 7.3:** Καμπύλες αρχικού και βελτιστοποιημένου αγωγού μαζί με τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου της παραμετροποίησης γεωμετρίας (Bezier) για βελτιστοποίηση με στόχο τη μέση τιμή (πάνω) και την τυπική απόκλιση (κάτω)

Περίπτωση	Μείωση $\mu_J$ (ποσοστό επί %)	Μείωση $\sigma_J$ (ποσοστό επί %)
1	69.7185	58.7894
2	69.6687	58.8852
3	69.5735	59.0144
4	69.3617	59.1909
2	68.7287	59.3922

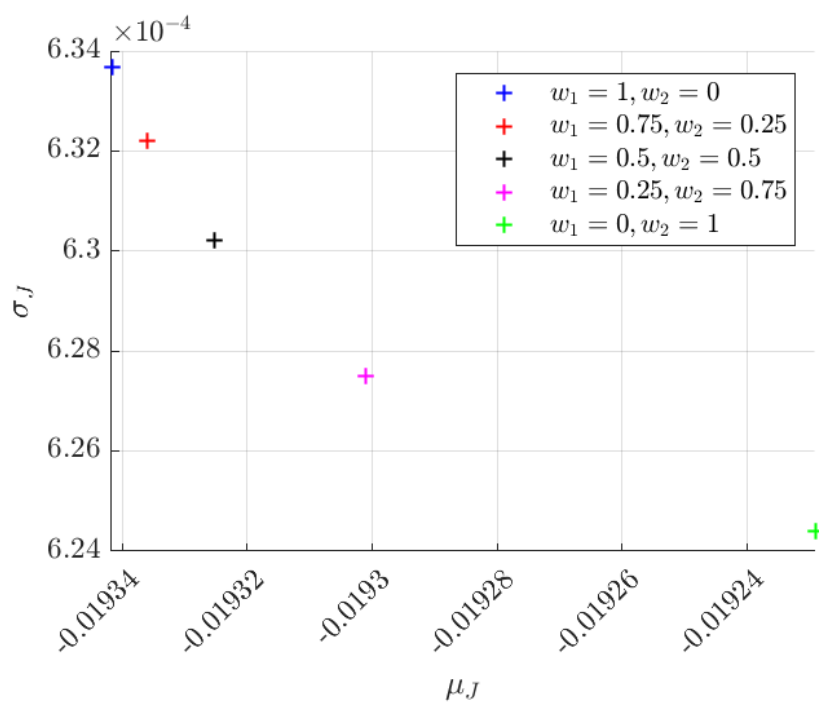
**Πίνακας 7.1:** Ποσοστό (επί %) μείωσης της μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης του βελτιστοποιημένου αγωγού σε σχέση με τον αρχικό



**Σχήμα 7.4:** Σύγκριση βελτιστοποιημένων για μέση τιμή και για τυπική απόκλιση, αγωγών.



**Σχήμα 7.5:** Σύγκριση αδιάστατου συντελεστή της δύναμης κατά την οριζόντια διεύθυνση,  $c_f$ , στους βελτιστοποιημένους για μέση τιμή και για τυπική απόκλιση αγωγούς.



**Σχήμα 7.6:** Τιμές  $\mu_J$  και  $\sigma_J$  των βελτιστοποιημένων αγωγών με διαφορετικούς συνδυασμούς βαρών που σχηματίζουν ένα μέτωπο Pareto



# Κεφάλαιο 8

## Συμπεράσματα και προτάσεις περαιτέρω έρευνας

### 8.1 Συμπεράσματα

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας ήταν διατύπωση της Μεθόδου των Στατιστικών Ροπών Πρώτης Τάξης (FOSM) λαμβάνοντας υπόψη ότι το στερεό όριο των υπό βελτιστοποίηση σωμάτων διέπεται από γεωμετρικές αβεβαιότητες. Στα κεφάλαια που προηγήθηκαν έγινε παρουσίαση μοντέλου γεωμετρικών αβεβαιοτήτων με βάση το ανάπτυγμα KL, έγινε διατύπωση της μεθόδου FOSM και της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για τον υπολογισμό των απαραίτητων παραγώγων της Ποσότητας Ενδιαφέροντος ως προς τις μεταβλητές αβεβαιότητας. Για την πιστοποίηση των παραγώγων έγινε σύγκριση με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και διαπιστώθηκε ότι η ταύτιση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων είναι πολύ ικανοποιητική. Για τον έλεγχο της μεθόδου FOSM έγινε αντιπαραβολή των αποτελεσμάτων της με αυτά της μεθόδου Monte-Carlo όπου διαπιστώθηκε ικανοποιητική ταύτιση μεταξύ τους. Τέλος, αφού πιστοποιήθηκε η ακρίβεια των μεθόδων που αναπτύχθηκαν, έγινε εφαρμογή τους για το στιβαρό σχεδιασμό αγωγού με αβεβαιότητες γεωμετρίας.

Σε πρακτικό επίπεδο, στο πλαίσιο της εργασίας αυτής, δημιουργήθηκε ο απαραίτητος πηγαίος κώδικας εντός του λογισμικού OpenFOAM που υλοποιεί το ανάπτυγμα KL και ενσωματώνει τις αβεβαιότητες γεωμετρίας στους υπάρχοντες κώδικες OpenFOAM της ΜΠΥΡ&Β που σχετίζονται με τη μέθοδο FOSM και τη συζυγή μέθοδο. Κατ' αυτόν τον τρόπο, η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ιδιοτιμών για τον υπολογισμό των συναρτήσεων βάσης του αναπτύγματος KL, η υλοποίηση των φίλτρων εξασφάλισης συνέχειας του ορίου, η γένεση αβέβαιων γεωμετριών, οι παράγωγοι της μετακίνησης του πλέγματος ως προς τις μεταβλητές αβεβαιότητας καθώς και η ποσοτικοποίηση γεωμετρικών αβεβαιοτήτων υλοποιούνται πλέον εγγενώς στο λογισμικό OpenFOAM χωρίς την απαίτηση χρήσης εξωτερικού λογισμικού.

## 8.2 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Ως προς τις πιθανές κατευθύνσεις της μελλοντικής έρευνας προτείνονται τα παρακάτω:

- Επέκταση της μεθόδου στις 3 διαστάσεις (3Δ) με τη διατύπωση του μοντέλου γεωμετρικών αβεβαιοτήτων έτσι ώστε αυτό να αφορά σε επιφάνειες αντί για καμπύλες.
- Αναλυτικός υπολογισμός του εσσιανού μητρώου  $\frac{\delta^2 J}{\delta b_n \delta c_m}$  με κάποια μέθοδο, όπως η μέθοδος της **ευθείας διαφόρισης** (direct differentiation), που να μην περιλαμβάνει χρήση πεπερασμένων διαφορών, για μείωση του υπολογιστικού κόστους. Επ' αυτού προτείνεται η **Μέθοδος των Ροπών Πρώτης Τάξης με προβολές** (projected FOSM - pFOSM) [25, 26] με βάση την οποία υπολογίζεται το εσσιανό μητρώο προβεβλημένο σε ένα διάνυσμα, η οποία επιτυγχάνει σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους.



# Βιβλιογραφία

- [1] ”Κ.Χ.Γιαννάκογλου, *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2006.
- [2] K. Giannakoglou, “Design of optimal aerodynamic shapes using stochastic optimization methods and computational intelligence,” *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 38, no. 1, pp. 43–76, 2002.
- [3] *Evolutionary Computation for Modeling and Optimization*. Springer-Verlag, 2006.
- [4] R. Fletcher and C. M. Reeves, “Function minimization by conjugate gradients,” *Comput. J.*, vol. 7, pp. 149–154, 1964.
- [5] D. I. Papadimitriou and K. C. Giannakoglou, “The continuous direct-adjoint approach for second order sensitivities in viscous aerodynamic inverse design problems,” *Comput. Fluids*, vol. 38, pp. 1539–1548, Sept. 2009.
- [6] *Numerical Optimization*. Springer New York, 2006.
- [7] R. H. Byrd, H. F. Khalfan, and R. B. Schnabel, “Analysis of a symmetric rank-one trust region method,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 6, no. 4, pp. 1025–1039, 1996.
- [8] M. Loeve, *Probability Theory II*. Graduate Texts in Mathematics, New York, NY: Springer, 4 ed., May 1978.
- [9] A. Leon-Garcia, *Probability, statistics, and random processes for electrical engineering*. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 3 ed., Dec. 2007.
- [10] M. Loève, *Probability Theory I*. Springer New York, 1977.
- [11] “VII. note on regression and inheritance in the case of two parents,” *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 58, pp. 240–242, Dec. 1895.
- [12] M. S. Karimi, M. Raisee, M. Farhat, P. Hendrick, and A. Nourbakhsh, “On the numerical simulation of a confined cavitating tip leakage vortex under geometrical and operational uncertainties,” *Computers & Fluids*, vol. 220, p. 104881, Apr. 2021.



- [13] D. Liu, A. Litvinenko, C. Schillings, and V. Schulz, “Quantification of air-foil geometry-induced aerodynamic uncertainties—comparison of approaches,” *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, vol. 5, pp. 334–352, Jan. 2017.
- [14] B. Eisfeld, H. Barnewitz, W. Fritz, and F. Thiele, eds., *Management and Minimisation of Uncertainties and Errors in Numerical Aerodynamics*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [15] D. Liu and H. G. Matthies, “Pivoted cholesky decomposition by cross approximation for efficient solution of kernel systems,” *ArXiv*, vol. abs/1505.06195, 2015.
- [16] S. Villette, “Non-intrusive polynomial chaos expansion for aerodynamic uncertainty quantification & robust design with manufacturing imperfections,” Master’s thesis, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2022.
- [17] A. Litvinenko and H. G. Matthies, “Numerical methods for uncertainty quantification and bayesian update in aerodynamics,” in *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, pp. 265–282, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [18] I. Kavvadias, E. Papoutsis-Kiachagias, and K. Giannakoglou, “On the proper treatment of grid sensitivities in continuous adjoint methods for shape optimization,” *Journal of Computational Physics*, vol. 301, pp. 1–18, 2015.
- [19] E. Papoutsis-Kiachagias, V. Asouti, and K. Giannakoglou, “Assessment of variants of the method of moments and polynomial chaos approaches to aerodynamic uncertainty quantification,” pp. 354–370, 01 2021.
- [20] R. Walters and L. Huysse, “Uncertainty analysis for fluid mechanics with applications,” p. 50, 02 2002.
- [21] A. Papageorgiou, K. B. Fragkos, E. M. Papoutsis-Kiachagias, and K. C. Giannakoglou, “Uncertainty quantification and robust design for aerodynamic applications , using continuous adjoint methods,” 2018.
- [22] Γ. Πάμπαλης, “Υλοποίηση Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους στον Αεροδυναμικά Στιβαρό Σχεδιασμό - Βελτιστοποίηση με Εξελικτικούς Αλγορίθμους υπό Στοχαστικές Εισόδους,” Master’s thesis, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2015.
- [23] J. P. V. Doormaal and G. D. Raithby, “Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows,” *Numerical Heat Transfer*, vol. 7, no. 2, pp. 147–163, 1984.
- [24] E. Papoutsis-Kiachagias and K. Giannakoglou, “Continuous adjoint methods for turbulent flows, applied to shape and topology optimization: Industrial

applications,” *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 23, 12 2014.

- [25] K. Fragkos, E. Papoutsis-Kiachagias, and K. Giannakoglou, “pfosm: An efficient algorithm for aerodynamic robust design based on continuous adjoint and matrix-vector products,” *Computers & Fluids*, vol. 181, pp. 57–66, 2019.
- [26] T. Skamagkis, E. Papoutsis-Kiachagias, and K. Giannakoglou, “Cfd-based shape optimization under uncertainties using the adjoint-assisted polynomial chaos expansion and projected derivatives,” *Computers & Fluids*, vol. 241, p. 105458, 2022.