

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Γεωμετρικώς Μη-Γραμμική Ανάλυση Δοκού για Πτερύγια Ανεμογεννητριών κάτω από Στατικές και Δυναμικές Φορτίσεις

Συντάκτρια:

Ανθούλα Παντελή

Επιβλέπων:

Κωνσταντίνος Σπηλιόπουλος

Η διατριβή υποβάλλεται

για τον Επιστημονικό Τίτλο της Διδάκτορος Μηχανικού

στο

Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών
της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών

27 Φεβρουαρίου 2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Περίληψη

Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Διδακτορική Διατριβή

Γεωμετρικώς Μη-Γραμμική Ανάλυση Δοκού για τα Πτερύγια Ανεμογεννητριών

κάτω απο Στατικές και Δυναμικές Φορτίσεις

από την Ανθούλα Παντελή

Στην παρούσα διατριβή μελετώνται τρία βασικά αντικείμενα. Το πρώτο αντικείμενο περιλαμβάνει την διερεύνηση στην στατική δύο γεωμετρικώς μη-γραμμικών μοντέλων δοκού, των μοντέλων δοκού Simo-Reissner (SR) και Green-Lagrange (GL). Αυτά τα μοντέλα δοκού συγκρίνονται μεταξύ τους τόσο σε θεωρητικό όσο και σε υπολογιστικό επίπεδο. Επιπλέον, η τεχνική για το αναλλοίωτο της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης μετά απο στροφή στερεού σώματος του στοιχείου δοκού υλοποιείται και για τις δύο προσεγγίσεις: πρόκειται για μια νέα υλοποίηση στο GL μοντέλο δοκού. Το δεύτερο αντικείμενο μελέτης περιλαμβάνει την διερεύνηση δύο αλγόριθμων χρονικής ολοκλήρωσης που θεωρούνται τύπου Newmark, για την δυναμική στερεών σωμάτων με μεγάλες στροφές στο χώρο. Στο τρίτο αντικείμενο μελέτης, το γεωμετρικώς ακριβές SR μοντέλο δοκού κι ένας εκ των δύο τύπου Newmark αλγόριθμος χρονικής ολοκλήρωσης, ενσωματώνονται μέσα στον κώδικα δυναμικής πολλαπλών σωμάτων hGAST, για την αερο-ελαστική ανάλυση του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τα εύκαμπτα πτερύγια της ανεμογεννήτριας συγκρίνονται με εκείνα που προκύπτουν από την sub-body (SB) τεχνική. Η SB τεχνική μπορεί να προβλέπει την γεωμετρική μη-γραμμικότητα χρησιμοποιώντας την λογική των πολλαπλών σωμάτων στο επίπεδο του σώματος συνδυασμένη με γραμμικά στοιχεία δοκού. Από την παρούσα εργασία προκύπτουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Όσον αφορά στα αποτελέσματα της στατικής, προκύπτει ότι 1. εξαιτίας των πρόσθετων όρων τροπής του GL μοντέλου δοκού σε σχέση με το SR μοντέλο δοκού, που περιλαμβάνουν το τετράγωνο των καμπυλοτήτων της γραμμής

αναφοράς της δοκού, προβλέπεται μια διαφορετική εκτίμηση των αξονικών και διατμητικών συνιστωσών τροπής μέσα στο στοιχείο δοκού, και 2. η αναλλοίωτη τεχνική, που αρχικά προτάθηκε για το SR μοντέλο δοκού λειτουργεί το ίδιο καλά και για το GL μοντέλο δοκού. Όσον αφορά στα αποτελέσματα της δυναμικής, η ακρίβεια και η ευστάθεια των αλγόριθμων χρονικής ολοκλήρωσης απεικονίζονται στην απόκριση του γνωστού παραδείγματος της βαριάς συμμετρικής κορυφής (*heavy symmetrical top*), είτε για μικρό είτε για μεγάλο χρόνο προσομοίωσης. Τέλος, τα αποτελέσματα που προκύπτουν για το συζευγμένο σύστημα της ανεμογεννήτριας δείχνουν μια πολύ καλή συμπεριφορά της γεωμετρικώς ακριβούς μοντελοποίησης των πτερυγίων, τόσο για ομοιόμορφο όσο και για στοχαστικό άνεμο.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Μαθηματικές έννοιες πάνω στις ομάδες Lie	7
2.1	Εισαγωγή	7
2.2	Η ομάδα $SO(3)$ πινάκων Lie	7
2.3	Παραμετροποίηση των στροφών	9
2.3.1	Αναπαράσταση άξονα-γωνίας στροφής (axis-rotation angle representation) . .	10
2.3.2	Οι γωνίες Euler	10
2.3.3	Εφαπτόμενος χώρος και άλγεβρα Lie του $SO(3)$	11
2.4	Η εκθετική αντιστοίχιση - από την Άλγεβρα στην Ομάδα	12
2.5	Δράσεις της ομάδας $SO(3)$	13
3	Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία	15
3.1	Κινηματική	15
3.1.1	Αρχική και παραμορφωμένη γεωμετρία	16
3.1.2	Διαταραχή της παραμορφωμένης γεωμετρίας στο $t + \Delta t$	17
3.2	Μοντέλο δοκού Simo-Reissner	18
3.2.1	1Δ μέτρα τροπής και τάσης	18
3.2.2	Αρχή δυνατού έργου	19
3.3	Μοντέλο δοκού Green-Lagrange	20
3.3.1	Τροπές και τάσεις	20
3.3.2	Αρχή του δυνατού έργου	21
3.3.3	1Δ μέτρα τροπής και τάσης	21
3.3.4	1Δ μεταβολές των μέτρων τροπής	26
3.4	Αριθμητικά ζητήματα σχετικά με τις στροφές	27

Περιεχόμενα

3.4.1	Η ανανέωση και η διαταραχή του προσανατολισμού στο $t + \Delta t$	28
3.5	Αριθμητικά αποτελέσματα	29
3.5.1	Καμπύλος πρόβολος 45 μοιρών	30
3.5.2	Κυκλικό δαχτυλίδι	34
3.6	Συμπεράσματα	37
4	Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο	39
4.1	Εισαγωγή	39
4.2	Δυναμική του στερεού σώματος - Εξίσωση κίνησης	39
4.2.1	Διακριτοποιημένη εξίσωση κίνησης	40
4.2.2	Γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση για το σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης των Simo & Vu-Quoc	41
4.2.3	Γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση για το σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης των Mäkinen / Cardona & Géradin	42
4.3	Παράδειγμα: Η βαριά συμμετρική κορυφή (<i>The heavy symmetrical top</i>)	45
4.3.1	Διερεύνηση του σχήματος ολοκλήρωσης στον χρόνο των Simo & Vu-Quoc	46
4.3.2	Διερεύνηση των σχημάτων ολοκλήρωσης στον χρόνο των Mäkinen / Cardona & Géradin	47
4.3.3	Σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών σχημάτων των Simo & Vu-Quoc και των Mäkinen / Cardona & Géradin	49
4.4	Συμπεράσματα	50
4.5	Δυναμική δοκών	51
4.5.1	Γραμμική ορμή και στροφορμή	51
5	Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας	55
5.1	Εισαγωγή	55
5.2	Σύστημα πολλαπλών σωμάτων	56
5.3	Γεωμετρικά ακριβής μη-γραμμική διατύπωση δοκού	58
5.3.1	Καταστατικές εξισώσεις σε ανισότροπες δοκούς	58
5.3.2	Ασθενής μορφή του ελαστικού όρου	59
5.3.3	Αδρανειακοί όροι: ενσωμάτωση στον κώδικα δυναμικής πολλαπλών σω- μάτων hGAST	60

Περιεχόμενα

5.4	Αριθμητικά αποτελέσματα	62
5.4.1	Ο ρότορας DTU 10-MW RWTυπό ομοιόμορφη ροή ανέμου	63
5.4.2	Η ανεμογεννήτρια DTU 10-MW RWTυπό τυρβώδη (στοχαστική) ροή ανέμου	65
5.5	Συμπεράσματα	70
6	Επισκόπηση και προοπτική	73
6.1	Επισκόπηση	73
6.1.1	Καινοτομίες της εργασίας	75
6.2	Προοπτική	76

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Η πολλαπλότητα M ως μια ένωση χαρτών U	8
2.2	Μετασχηματισμός Λ από την υλική βάση V στην αδρανειακή βάση e	9
2.3	Αναπαράσταση άξονα-γωνίας στροφής που ορίζεται με το διάνυσμα στροφής θe . . .	10
2.4	Ορισμός του μητρώου μετασχηματισμού: (α') Στροφή a_1 γύρω από τον ξ άξονα. (β') Στροφή a_3 γύρω από τον ζ' άξονα. (γ') Στροφή a_2 γύρω από τον η'' άξονα.	11
2.5	Ο επαπτόμενος χώρος στο σημείο x της σφαίρας. Ένα διάνυσμα στον επαπτόμενο χώρο αντιπροσωπεύει μια πιθανή ταχύτητα στο x [32].	11
2.6	Γεωμετρική απεικόνιση της άλγεβρας $Lieso(3)$ και της εκθετικής αντιστοίχισης του αντι-συμμετρικού μητρώου A	12
3.1	Αρχική και παραμορφωμένες γεωμετρίες της δοκού.	16
3.2	<i>Αναλλοίωτη</i> (invariant) διατύπωση [9]: (α') ανανέωση, και (β') διαταραχή του προσανατολισμού της διατομής των $I-$ και $J-$ κόμβων.	28
3.3	Καμπύλος πρόβολος 45 μοιρών: (α') δεδομένα προβλήματος και (β') διάγραμμα φορτίου-κατακόρυφης μετατόπισης του άκρου.	31
3.4	Καμπύλος πρόβολος 45 μοιρών: (α') μετακινήσεις και (β') στροφές κατά μήκος της δοκού.	31
3.5	Καμπύλος πρόβολος 45 μοιρών: (α') αξονική/διατμητικές και (β') στρεπτική/καμπτικές τροπές κατά μήκος της δοκού.	32
3.6	Καμπύλος πρόβολος 45 μοιρών: κομβικές τιμές της αξονικής/διατμητικών δυνάμεων κατά μήκος της δοκού.	33
3.7	Καμπύλος πρόβολος 45 μοιρών: προσέγγιση της (α') αξονικής/διατμητικών και (β') στρεπτικής/καμπτικών τροπών κατά μήκος της δοκού.	34
3.8	Κυκλικό δαχτυλίδι: δομικό μοντέλο.	34

Κατάλογος Σχημάτων

3.9	Κυκλικό δαχτυλίδι με $\frac{h}{b} = 3$: (α') ροπή αντίδρασης M_1 - στροφή θ_1 του σημείου Ργια τα μοντέλα SRκαι GL, και (β') - (γ') παραμορφωμένα σχήματα στα επιλεγμένα σημεία.	36
3.10	Κυκλικό δαχτυλίδι με $\frac{h}{b} = 3$: (α) τελικές μετακινήσεις u_{03} και (β) τελική συνιστώσα καμπυλότητας K_{η}^h κατά μήκος της μισής περιφέρειας.	36
3.11	Κυκλικό δαχτυλίδι με $\frac{h}{b} = 3$: τελική συνιστώσα τροπής Γ_{ξ}^h κατά μήκος της μισής περιφέρειας.	37
4.1	Κινηματική του στερεού σώματος.	41
4.2	Η βαριά συμμετρική κορυφή (<i>The heavy symmetrical top</i>) στην αρχική θέση.	45
4.3	Σχήμα ολοκλήρωσης στον χρόνο των Simo & Vu-Quocγια $\Delta t = 0.01$, $\Delta t = 0.02$, $\Delta t = 0.04$ και $\Delta t = 0.1$ δευτερόλεπτα σε σύγκριση με τη λύση αναφοράς για $\Delta t = 0.001$ δευτερόλεπτα: γωνία κλόνησης (<i>nutation angle</i>) σε σχέση με το χρόνο, που απεικονίζεται για τα τελευταία 5 δευτερόλεπτα μετά από μεγάλο χρόνο προσομοίωσης $t = 150$ δευτερόλεπτα.	46
4.4	Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης των Mäkinenκαι των Cardona & Géradinγια $\Delta t = 0.01$ δευτερόλεπτα σε σύγκριση με τη λύση αναφοράς για $\Delta t = 0.001$ δευτερόλεπτα: γωνία κλόνησης (<i>nutation angle</i>) που απεικονίζεται για τα τελευταία 5 δευτερόλεπτα μετά από μεγάλο χρόνο προσομοίωσης $t = 150$ δευτερόλεπτα.	48
4.5	Συνεπής γραμμικοποίηση / συνεπής ανανέωση ακολουθώντας την ιδέα της ολοκλήρωσης στον χρόνο των Mäkinenκαι Cardona & Géradinγια $\Delta t = 0.01$ δευτερόλεπτα σε σύγκριση με τη λύση αναφοράς για $\Delta t = 0.001$ δευτερόλεπτα: γωνία κλόνησης (<i>nutation angle</i>) που απεικονίζεται για τα τελευταία 5 δευτερόλεπτα μετά από μεγάλο χρόνο προσομοίωσης $t = 150$ δευτερόλεπτα.	49
5.1	Ο κλάδος της δυναμικής αερο-ελαστικότητας.	55
5.2	Διαμόρφωση ανεμογεννήτριας.	56
5.3	Η κινηματική για τη μοντελοποίηση υπο-σώματος.	58
5.4	Ρότορας της ανεμογεννήτριας DTU 10-MW RWTυπό τις ονομαστικές συνθήκες λειτουργίας: ροπή στρέψης M_2 στην ρίζα και γωνία στρέψης θ_2 στην άκρη, γύρω από τον άξονα E_2 του πτερυγίου.	64

Κατάλογος Σχημάτων

- 5.5 Ρότορας της ανεμογεννήτριας DTU 10-MW RWTυπό τις ονομαστικές συνθήκες λειτουργίας: ροπή κάμψης M_1 στην ρίζα και μετακίνηση u_{03} στην άκρη, γύρω από τον άξονα E_1 και κατά τον άξονα E_3 του περυγίου, αντίστοιχα. 64
- 5.6 Η ανεμογεννήτρια DTU 10-MW RWTυπό στοχαστική ροή ανέμου (DLC 6.2-30°): (α') χρονοϊστορία και (β') PSDτης (*edge-wise*) ροπής κάμψης M_3 στην ρίζα του περυγίου. 68
- 5.7 Η ανεμογεννήτρια DTU 10-MW RWTυπό στοχαστική ροή ανέμου (DLC 1.3-11 m/s): (α') χρονοϊστορία και (β') PSDτης (*pitching*) ροπής στρέψης M_2 στην ρίζα του περυγίου. 69
- 5.8 Η ανεμογεννήτρια DTU 10-MW RWTυπό στοχαστική ροή ανέμου (DLC 1.3-11 m/s): (α') χρονοϊστορία και (β') PSDτης πλευρικής ροπής M_1 στην βάση του πύργου. . . . 70

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

3.1	Καμπύλος πρόβολος 45 μοιρών: τελικές συνιστώσες της μετακίνησης του άκρου. . .	32
5.1	Τα δεδομένα για κάθε περίπτωση φόρτισης DLC σύμφωνα με το Πρότυπο IEC. . . .	65
5.2	Φορτία κόπωσης (DEL's) της περίπτωσης φόρτισης DLC 1.2. Σύγκριση ανάμεσα στα μοντέλα δοκού SR, SB-35 και το γραμμικό μοντέλο.	66
5.3	Οριακά φορτία από την περίπτωση φόρτισης DLC 1.3, 6.1 και 6.2. Σύγκριση ανάμεσα στα μοντέλα δοκού SR, SB-35 και το γραμμικό μοντέλο.	67

Κατάλογος Πινάκων

1 Εισαγωγή

Το κύριο αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η θεωρητική και υπολογιστική διερεύνηση των μοντέλων δοκού που έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία και που χρησιμοποιούνται σε προβλήματα με μη γραμμικότητα γεωμετρίας όπου τα δομικά μέλη υπόκεινται σε μεγάλες μετακινήσεις και στροφές στον χώρο. Με βάση αυτή την διερεύνηση ο κύριος στόχος της διατριβής είναι η υιοθέτηση του πλέον αξιόπιστου μοντέλου δοκού για την προσομοίωση ραβδωτών μελών με μεγάλες μετακινήσεις και στροφές αλλά με μικρές τροπές. Ένας δεύτερος στόχος είναι η επέκταση του μέρους που αφορά στην κίνηση των παραμορφώσιμων σώματων του υπάρχοντος υδρο-σερβο-αερο-ελαστικού κώδικα hGAST, ο οποίος έχει υλοποιηθεί στον Τομέα Ρευστών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου [1], για την ανάλυση του συστήματος ανεμογεννητριών. Για να επιτευχθεί αυτός ο σκοπός, απαιτούνται τα εξής δύο πράγματα: η επιλογή ενός κατάλληλου μοντέλου δοκού για την προσομοίωση των πτερυγίων, κι η τροποποίηση της διαδικασίας επίλυσης ώστε να είναι συμβατή με συστήματα που υπόκεινται σε μεγάλες στροφές στο χώρο. Επομένως, το γεωμετρικώς ακριβές SR μοντέλο δοκού [2] εισάγεται στον κώδικα hGAST, ενώ χρησιμοποιείται η τύπου Newmark χρονική ολοκλήρωση που προτείνεται από τους Simo & Vu-Quoc, 1988 [3].

Η βασική θεωρία δοκού παραδέχεται ότι το επίπεδο της διατομής παραμένει επίπεδο κι απαραμόρφωτο κατά την παραμόρφωση. Στο πλαίσιο αυτής της θεωρίας, διαφορετικά ζεύγη τάσεων-τροπών που υπολογίζουν την εσωτερική ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη ενός γεωμετρικώς μη-γραμμικού μοντέλου δοκού με μικρές τροπές [4]. Δύο δημοφιλή ζεύγη τάσεων-τροπών είναι οι πρώτες τάσεις Piola-Kirchhoff συνδυασμένες με τις κλίσεις της μετατόπισης [2] και οι δεύτερες τάσεις Piola-Kirchhoff συνδυασμένες με τις Green-Lagrange τροπές [5, 6]. Μια θεωρητική κι υπολογιστική σύγκριση μεταξύ των μοντέλων που χρησιμοποιούν αυτά τα ζεύγη τάσεων-τροπών μπορεί κανείς να μελετήσει στην αναφορά [7]. Στους περισσότερους κώδικες που χρησιμοποιούν το γεωμετρικώς ακριβές μοντέλο δοκού, το μοντέλο εξάγεται από τις πρώτες τάσεις Piola-Kirchhoff και τις κλίσεις της μετατόπισης. Η συγκεκριμένη διατύπωση προτάθηκε από τον Simo, 1985 [2], ενώ η αντίστοιχη υπολογιστική υλοποίηση, η οποία για πρώτη φορά συνδέεται με το

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

θεωρητικό υπόβαθρο των μεγάλων στροφών πάνω στο χώρο $SO(3)$ παρουσιάστηκε απο τους Simo & Vu-Quoc, 1986 [8].

Σχετικά με την χωρική διακριτοποίηση του προβλήματος, έχει γίνει μεγάλη προσπάθεια τα τελευταία χρόνια για την ανάπτυξη ενός αναλλοίωτου μοντέλου δοκού, που σημαίνει να παραμένει αναλλοίωτη η εσωτερική ενέργεια παραμόρφωσης μετά από στροφή στερεού σώματος του στοιχείου δοκού, και να είναι η διατύπωση ανεξάρτητη από την διαδρομή (φυσική ή αριθμητική) που ακολουθείται. Οι Jelenić & Crisfield, 1999 [9], έθεσαν για πρώτη φορά προς διερεύνηση το συγκεκριμένο ζήτημα στο SR μοντέλο δοκού. Το κρίσιμο σημείο είναι να εξασφαλιστεί η συνέπεια με τον χώρο των μεγάλων στροφών $SO(3)$. Για τον λόγο αυτό ο συνολικός προσανατολισμός της διατομής αποσυντίθεται σε δύο συνιστώσες: στον προσανατολισμό του στοιχείου δοκού και στον προσανατολισμό που εκφράζει τις τοπικές στροφές της διατομής σε σχέση με το στοιχείο. Η συγκεκριμένη τεχνική χρησιμοποιείται στον τομέα της αιολικής ενέργειας, όπως και η διατύπωση του σταθερού πόλου [10].

Σχετικά με την μελέτη της δυναμικής των δοκών, πολλοί είναι οι αλγόριθμοι οι οποίοι αναλύουν τις δοκούς που υπόκεινται σε μεταβαλλόμενα στον χρόνο φορτία. Αυτοί μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες: σε αυτούς που δεν διατηρούν την συνολική ενέργεια και ορμή, και σε αυτούς που διατηρούν την συνολική ενέργεια και κάποιες φορές την ορμή επίσης (*conserving algorithms*). Ο δεύτερος τύπος αλγόριθμων σχεδιάζεται να είναι ευσταθής υπο οποιεσδήποτε συνθήκες. Η μέθοδος Newmark [11] για τα γραμμικά συστήματα, επεκτείνεται σε προβλήματα με μεγάλες στροφές αλλά δεν είναι ευσταθής. Τύπου Newmark μέθοδοι προτείνονται στις αναφορές [3, 12, 13, 14]. Μερικοί απο τους αλγόριθμους διατήρησης της ενέργειας ή και της ορμής δίνονται στις αναφορές [15, 16]. Στην παρούσα εργασία μελετώνται δύο αλγόριθμοι απο τους προαναφερθέντες, οι οποίοι έχουν το εξής κοινό γνώρισμα: διατυπώνουν την ισορροπία στην χρονική στιγμή t_{n+1} όπου επιλύεται η εξίσωση του ρυθμού της ορμής με την εξωτερική δύναμη, επομένως και οι δύο θεωρούνται τύπου Newmark αλγόριθμοι. Το κίνητρο μελέτης και των δύο είναι ότι ο πρώτος χρησιμοποιεί το σχήμα Newmark για τις γωνιακές ταχύτητες και επιταχύνσεις, ενώ ο δεύτερος χρησιμοποιεί το σχήμα Newmark για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο του διανύσματος στροφής.

Όσον αφορά στο τελευταίο μέρος της διατριβής σχετικά με την ενσωμάτωση του μέρους της δυναμικής των δοκών μέσα στο υπολογιστικό εργαλείο της δυναμικής των πολλαπλών σωμάτων, υπάρχουν δύο προσεγγίσεις στην βιβλιογραφία σχετικά με την 1Δ μοντελοποίηση των δομικών μερών. Η πρώτη κατηγορία χρησιμοποιεί 1Δ γεωμετρικώς ακριβές μοντέλο δοκού, ενώ η δεύτερη

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

κατηγορία χρησιμοποιεί 1Δ γραμμικό μοντέλο δοκού συνδυασμένο με την λογική των πολλαπλών σωμάτων στο επίπεδο του σώματος. Μια σύγκριση μεταξύ των δύο προσεγγίσεων μπορεί κανείς να μελετήσει στην αναφορά [17], όπου αναλύονται παραδείγματα δοκών που υπόκεινται σε υπερβολικά μεγάλες μετακινήσεις και στροφές προκειμένου να αποδειχτεί ότι, ακόμη και σε αυτές τις συνθήκες, η προσέγγιση των πολλαπλών σωμάτων διατυπωμένη στο επίπεδο του ενός σώματος μπορεί να προβλέψει με ακρίβεια τις ελαστικές παραμορφώσεις. Άλλη μια σύγκριση μεταξύ των δύο αυτών μεθόδων παρουσιάζεται στην αναφορά [18]. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι για την 1Δ μοντελοποίηση των πτερυγίων, τα οποία είναι κατασκευασμένα από σύνθετα υλικά, χρειάζεται μια προ-ανάλυση που να υπολογίζει τα ελαστικά και αδρανειακά χαρακτηριστικά κατά μήκος της δοκού, η οποία βασίζεται είτε στην μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων [19, 20] είτε στην θεωρία των πολυ-στρωματοποιημένων λεπτότοιχων διατομών [21, 22].

Το περιεχόμενο της παρούσας εργασίας πάνω στην στατική των δοκών αφορά στη συγκριτική μελέτη μεταξύ δύο γεωμετρικώς μη-γραμμικών μοντέλων δοκού. Ένα εκφυλισμένο 3Δ μοντέλο συνεχούς μέσου διατυπώνεται σε 1Δ μετά από την αναλυτική ολοκλήρωση στο επίπεδο της διατομής. Το 1Δ μοντέλο δοκού που προκύπτει συγκρίνεται με το 1Δ μοντέλο δοκού που χρησιμοποιεί τις SR τάσεις και τροπές. Τα δύο μοντέλα δοκού υλοποιούνται τόσο με την *επαναληπτική (iterative)* όσο και με την *αναλλοίωτη (invariant)* τεχνική. Η γεωμετρική απεικόνιση της *αναλλοίωτης (invariant)* τεχνικής πάνω στην πολλαπλότητα $SO(3)$ δείχνει ξεκάθαρα τον τρόπο που πρέπει να ακολουθείται για την δημιουργία ενός *αναλλοίωτου* μοντέλου δοκού με μεγάλες στροφές: χρειάζεται κανείς να αναφέρεται στο ίδιο εφαπτόμενο επίπεδο της πολλαπλότητας $SO(3)$ κατά την γραμμικοποίηση και διακριτοποίηση του προβλήματος. Τα καινούρια στοιχεία της εργασίας αφορούν στα παρακάτω: 1) Την 1Δ διατύπωση του εκφυλισμένου 3Δ μοντέλου δοκού που χρησιμοποιεί τον τανυστή τροπών Green-Lagrange, ώστε να είναι συγκρίσιμη με την 1Δ διατύπωση του SR μοντέλου δοκού. 2) Τη μελέτη της αριθμητικής συμπεριφοράς του παραπάνω μοντέλου δοκού μετά την εισαγωγή της *αναλλοίωτης (invariant)* τεχνικής. 3) Τη σύγκριση των διαφορετικών μέτρων της τροπής που υπολογίζονται από τα δύο μοντέλα δοκού μέσα στο στοιχείο δοκού μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων. Το περιεχόμενο της παρούσας εργασίας πάνω στην δυναμική των δοκών αφορά στην ενσωμάτωση του γεωμετρικώς ακριβούς SR μοντέλου δοκού μέσα στον αερο-ελαστικό κώδικα πολλαπλών σωμάτων hGAST για την ανάλυση του συστήματος της ανεμογεννήτριας. Το αρχικό SR μοντέλο δοκού επεκτείνεται σε γενικού σχήματος διατομές με ανομοιογενές και ανισότροπο υλικό. Η προεπιλεγμένη επιλογή μοντελοποίησης για τα εύκαμπτα πτερύγια ανεμογεννήτριας στο hGAST είναι

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

η SB μοντελοποίηση σε συνδυασμό με το γραμμικό στοιχείο δοκού Timoshenko [23]. Κατά την SB τεχνική, δημιουργούνται σταδιακά οι μεγάλες μετατοπίσεις, καθώς η μη-γραμμική δυναμική εισάγεται επιβάλλοντας σε κάθε υπό-σωμα τις μετακινήσεις και τις στροφές από τα προηγούμενα υπο-σώματα ως κινήσεις στερεού σώματος. Στην παρούσα εργασία, ο κώδικας hGAST βελτιώνεται περαιτέρω με την ενσωμάτωση του γεωμετρικώς ακριβούς SR μοντέλου δοκού [2, 8]. Η *αναλλοίωτη (invariant)* τεχνική η οποία παρουσιάζεται για πρώτη φορά από τους Jelenić & Crisfield, 1999 [9] και ερευνάται επίσης από τους Panteli & Spiliopoulos, 2020 [7] ενσωματώνεται στον κώδικα. Το νέο μέρος του λογισμικού επαληθεύεται στην στατική και την δυναμική έναντι γνωστών παραδειγμάτων αναφοράς που υφίστανται μεγάλες μετακινήσεις και στροφές. Στην δυναμική οι δυο προσεγγίσεις, SB και SR, συγκρίνονται μεταξύ τους σε αερο-ελαστικούς υπολογισμούς της πρότυπης ανεμογεννήτριας DTU-10MW. Οι συγκρίσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι και τα δύο μοντέλα δοκού μπορούν να προβλέψουν επαρκώς την γεωμετρική μη-γραμμικότητα, εκτός από την στρέψη στην βάση των πτερυγίων και την συστροφή στην άκρη τους. Αποδεικνύεται ότι για την SB τεχνική χρειάζονται πολλά υπο-σώματα για να υπολογιστεί η ίδια παραμόρφωση με το SR μοντέλο δοκού. Τα καινούρια στοιχεία της παρούσας εργασίας είναι: 1) Πραγματοποιείται μια διεξοδική αξιολόγηση των δυνατοτήτων των δύο πιο δημοφιλών επιλογών μοντελοποίησης στην κοινότητα της αιολικής ενέργειας. Οι δύο επιλογές έχουν αναπτυχθεί στο ίδιο εργαλείο, σε αντίθεση με άλλες παρόμοιες εργασίες όπως η [17]. Το προφανές πλεονέκτημα είναι ότι οι διαφορές που οφείλονται στις αριθμητικές λεπτομέρειες των μοντέλων εξαλείφονται, όπως π.χ. στο σχήμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης ή στη μοντελοποίηση των συγκεντρωμένων ιδιοτήτων όπως είναι η αδράνεια της γεννήτριας και η μάζα του κελύφους (νασέλας). 2) Το μοντέλο SR εμπλουτίζεται με τους όρους του μητρώου στιβαρότητας που προκύπτουν από τις διατομές γενικού σχήματος και την ετερογένεια και ανισοτροπία του υλικού. Επιπλέον, δίνεται προσοχή στην συμβατότητα της υλοποίησης με τον χώρο των μεγάλων στροφών. 3) Το μοντέλο SR εμπλουτίζεται με τους αδρανειακούς όρους που προκύπτουν από την δυναμική των πολλαπλών σωμάτων. Οι όροι αυτοί περιγράφουν την επίδραση της δυναμικής συμπεριφοράς του καθενός σώματος πάνω στα άλλα σώματα του συστήματος (π.χ. των πτερυγίων πάνω στον πύργο κι αντιστρόφως).

Η διάρθρωση της εργασίας είναι:

Στο κεφάλαιο 2, παρουσιάζονται ορισμένες μαθηματικές πληροφορίες για τις ομάδες Lie. Δίνονται οι ιδιότητες της πολλαπλότητας $SO(3)$ που είναι απαραίτητες για την ανάπτυξη μιας συνεπούς με τον χώρο των στροφών βήμα προς βήμα διατύπωσης του στοιχείου δοκού. Στο κεφάλαιο 3,

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

παρουσιάζεται και συγκρίνεται η θεωρία για τα δύο γεωμετρικώς μη-γραμμικά μοντέλα δοκών, τα SR και GL μοντέλα δοκών. Επιπλέον, επεξηγούνται η επαναληπτική (*iterative*) και η αναλλοίωτη (*invariant*) υλοποίηση, ενώ η αναλλοίωτη (*invariant*) υλοποίηση ελέγχεται επίσης στο μοντέλο GL (η πρώτη εργασία σχετικά με την συγκεκριμένη υλοποίηση στο μοντέλο SR δίνεται στην αναφορά [9]). Η υπεροχή της αναλλοίωτης (*invariant*) τεχνικής φαίνεται μέσα από τα αριθμητικά παραδείγματα τόσο στο SR όσο και στο GL μοντέλο δοκού. Στο κεφάλαιο 4, διερευνώνται δύο αλγόριθμοι ολοκλήρωσης στον χρόνο για στερεά σώματα με μεγάλες στροφές στον χώρο, προκειμένου να χρησιμοποιηθεί ένας από αυτούς στη δυναμική των δοκών. Επιπλέον, η δυναμική των δοκών μελετάται για το μοντέλο δοκού SR. Στο κεφάλαιο 5, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ενσωμάτωση του μοντέλου δοκού SR και την τροποποίηση του σχήματος Newmark για μεγάλες στροφές στο λογισμικό hGAST. Το σύστημα της ανεμογεννήτριας αναλύεται υπό ομοιόμορφη και στοχαστική ροή ανέμου για την DTU 10-MW Πρότυπη Ανεμογεννήτρια. Στο κεφάλαιο 6, δίνεται η επισκόπηση της παρούσας εργασίας, μαζί με τις ιδέες για περαιτέρω έρευνα.

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

2 Μαθηματικές έννοιες πάνω στις ομάδες Lie

2.1 Εισαγωγή

Η γεωμετρικώς ακριβή θεωρία δοκού περιλαμβάνει χειρισμό και εκτίμηση των στροφών στην τριδιάστατη γεωμετρία. Όπως επισημαίνεται στην αναφορά [24], οι τριδιάστατοι μετασχηματισμοί πρέπει να συντεθούν, να αναστραφούν, να παραγωγιστούν και να παρεμβληθούν. Οι ομάδες Lie αντιμετωπίζουν με ένα συστηματικό τρόπο αυτές τις πράξεις. Η θεωρία Lie αναπτύχθηκε από τον μαθηματικό Marius Sophus Lie τον 19ο αιώνα. Η θεωρία βασίζεται σε συνεχείς ομάδες. Εδώ δίνεται έμφαση στις ομάδες Lie των οποίων τα στοιχεία είναι πίνακες. Από αυτές τις ομάδες ενδιαφέρει η ομάδα $SO(3)$ πινάκων Lie που αντιστοιχεί στις χωρικές στροφές. Στην παρούσα εργασία, ο χώρος στον οποίο κινείται η δοκός που υποβάλλεται σε μεγάλες στροφές είναι ο $\mathcal{R}^3 \times SO(3)$, όπου $SO(3)$ σημαίνει την Ειδική Ορθογώνια Ομάδα (*Special Orthogonal Group*), της οποίας η γεωμετρική δομή αντιστοιχεί σε μια πολλαπλότητα. Οι γεωμετρικές μέθοδοι ή οι μέθοδοι διατήρησης της δομής έγιναν σημαντικές στην αριθμητική ανάλυση τη δεκαετία του 1990. Η συνεπής με τη γεωμετρία ανάπτυξη του μοντέλου δοκού είναι σημαντική για την αποτελεσματικότητα του μοντέλου. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι ιδιότητες του $SO(3)$ α) ως διαφοροποιήσιμης πολλαπλότητας, και β) ως ομάδας πινάκων. Τα σύνολα που συνάδουν με τις δύο παραπάνω ιδιότητες ονομάζονται ομάδες πινάκων Lie. Η περιγραφή τους είναι απαραίτητη για την κατανόηση των αριθμητικών ζητημάτων των μεγάλων στροφών. Μεταξύ της βιβλιογραφίας που δίνεται σε στοιχειώδη θέματα των ομάδων Lie είναι η εξής: [25, 26, 27].

2.2 Η ομάδα $SO(3)$ πινάκων Lie

Στην γενική περίπτωση, οι Ειδικές Ορθογώνιες Ομάδες δίνονται ως $SO(n)$. Στην παρούσα εργασία $n = 2$ ή $n = 3$, που σημαίνει την ομάδα των στροφών στο επίπεδο ή στον χώρο, αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 2. Μαθηματικές έννοιες πάνω στις ομάδες Lie

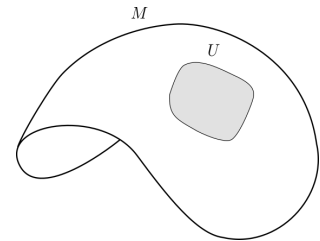
Εστιάζοντας στην ομάδα $SO(3)$, οι ιδιότητές της συγκεντρώνονται ως εξής:

$$SO(3) = \{\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{A}) = 1\} \quad (2.1)$$

όπου \mathbf{I}_3 είναι ο μοναδιαίος πίνακας 3×3 και \mathbf{A} είναι ένας 3×3 πίνακας πραγματικών τιμών, ένας γραμμικός μετασχηματισμός του \mathcal{R}_3 που διατηρεί την νόρμα $|(x, y, z)|^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Η πρώτη ιδιότητα αναφέρεται στην *ορθογωνικότητα*, που αποδεικνύεται και από την ορθοκανονικότητα των διανυσμάτων στηλών που συνιστούν τον πίνακα \mathbf{A} [25], δηλαδή

$$\sum_{l=1}^3 \mathbf{A}_{lj} \mathbf{A}_{lk} = \delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq 3 \quad (2.2)$$

όπου δ_{jk} είναι το δέλτα του Kronecker που είναι ίσο με 1 αν $j = k$ και ίσο με 0 αν $j \neq k$. Πράγματι, στα μοντέλα δοκού που παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια, το μητρώο στροφής \mathbf{A} περιέχει στις στήλες του τα διανύσματα βάσης της διατομής, τα οποία είναι μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους. Η δεύτερη ιδιότητα αναφέρεται στον χαρακτηρισμό *Ειδική*, που σημαίνει την κατάλληλη στροφή. Αν η ορίζουσα είναι -1 , τότε ο πίνακας εκφράζει μια αντανάκλαση και όχι στροφή. Το σύνολο των μητρώων στροφής $SO(3)$ είναι μια ομάδα πινάκων Lie. Κάθε ομάδα πινάκων Lie είναι μια ομάδα Lie που σημαίνει ότι [28]



Σχήμα 2.1: Η πολλαπλότητα M ως μια ένωση χαρτών U .

- Ο $SO(3)$ είναι μια διαφοροποιήσιμη (ομαλή) πολλαπλότητα. Η πολλαπλότητα είναι ένας τοπολογικός χώρος που τοπικά μοιάζει με τον Ευκλείδειο χώρο κοντά σε κάθε σημείο. Όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1, οποιαδήποτε πολλαπλότητα M μπορεί να περιγραφεί από μια συλλογή χαρτών U , γνωστή ως *άτλαντας* [29]. Η διαφοροποιήσιμη πολλαπλότητα είναι ένας τύπος πολλαπλότητας που είναι τοπικά αρκετά παρόμοια με ένα διανυσματικό χώρο όπου επιτρέπεται κανείς να χρησιμοποιήσει τον διαφορικό λογισμό [30].
- Ο $SO(3)$ είναι μια ομάδα. Στην αναφορά [25] μπορεί κανείς να διαβάσει τους ορισμούς και μερικά παραδείγματα ομάδων. Ο $SO(3)$ ως ομάδα είναι το σύνολο των στροφών που συνοδεύονται από την πράξη της ομάδας, που είναι η πράξη πολλαπλασιασμού πινάκων (ή σύνθεσης). Δεδομένου του συνόλου και της πράξης με

Κεφάλαιο 2. Μαθηματικές έννοιες πάνω στις ομάδες Lie

την οποία συνοδεύεται, υπάρχουν τέσσερις ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιηθούν για να έχουμε μια ομάδα. Αυτές είναι:

1. *Κλειστότητα (closure)*: Το γινόμενο δύο στοιχείων του $SO(3)$ είναι και πάλι στοιχείο του $SO(3)$.
2. *Προσεταιριστικότητα (associativity)*: Για όλα τα $\Lambda, R, A \in SO(3)$,

$$\Lambda (R A) = (\Lambda R) A \quad (2.3)$$

3. *Υπαρξη μοναδιαίου στοιχείου*: Υπάρχει ένα στοιχείο I_3 στον $SO(3)$ ώστε για όλα τα στοιχεία $\Lambda \in SO(3)$,

$$\Lambda I_3 = I_3 \Lambda = \Lambda \quad (2.4)$$

4. *Υπαρξη αντιστρόφων*: Για όλα τα $\Lambda \in SO(3)$, υπάρχει $R \in SO(3)$,

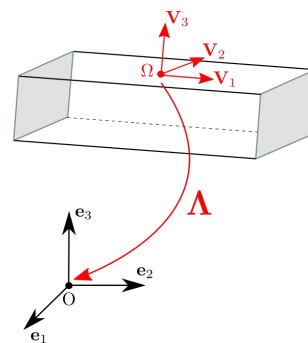
$$\Lambda R = I_3 \quad (2.5)$$

Δεδομένου ότι $\Lambda A \neq A \Lambda$ για όλα τα $\Lambda, A \in SO(3)$, η ομάδα λέγεται ότι είναι μη-αντιμεταθετική [25].

2.3 Παραμετροποίηση των στροφών

Όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2, οι στροφές μπορούν να περιγραφούν με μετασχηματισμούς βάσεων [28]. Η βάση V που κινείται με το σώμα ονομάζεται υλική, ενώ η βάση e είναι η γνωστή αδρανειακή βάση. Έστω $X_V = (\xi, \eta, \zeta)$ οι συντεταγμένες που μετρώνται για ένα σημείο του σώματος ως προς την βάση V , και $X_e = (x, y, z)$ οι συντεταγμένες που μετρώνται για το ίδιο σημείο ως προς την βάση e . Η σχέση μεταξύ τους γράφεται ως

$$X_e = \Lambda X_V \quad (2.6)$$



Σχήμα 2.2: Μετασχηματισμός Λ από την υλική βάση V στην αδρανειακή βάση e .

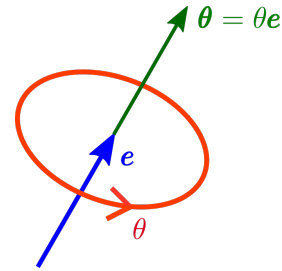
Υπάρχουν διάφοροι τρόποι αναπαράστασης των στροφών, π.χ. με ορθογώνιους πίνακες που έχουν ορίζουσα 1, με άξονα και γωνία στροφής (*axis-rotation angle*), με θεωρία τετραδονίων (*quater-*

Κεφάλαιο 2. Μαθηματικές έννοιες πάνω στις ομάδες Lie

nions), ως ακολουθία τριών στροφών (*Euler* γωνίες). Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούνται η αναπαράσταση άξονα-γωνίας στροφής και η ακολουθία τριών στροφών *Euler*.

2.3.1 Αναπαράσταση άξονα-γωνίας στροφής (axis-rotation angle representation)

Η αναπαράσταση άξονα-γωνίας στροφής χρησιμοποιεί δύο παραμέτρους: το μοναδιαίο διάνυσμα e που δείχνει την κατεύθυνση του άξονα περιστροφής και την γωνία θ που περιγράφει το μέτρο της στροφής γύρω από τον άξονα (Σχήμα 2.3).



2.3.2 Οι γωνίες Euler

Οι γωνίες Euler, που εισήχθησαν από τον Leonhard Euler, είναι τρεις γωνίες που περιγράφουν τον προσανατολισμό ή την στροφή ενός σώματος ως προς ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων. Οι τρεις επιμέρους στροφές μπορεί να είναι εξωγενείς (*extrinsic*), δηλαδή στροφές γύρω από τους άξονες του αρχικού συστήματος συντεταγμένων που παραμένει ακίνητο, ή εγγενείς (*intrinsic*), δηλαδή στροφές γύρω από τους άξονες του περιστρεφόμενου συστήματος συντεταγμένων που προσαρτάται στο κινούμενο σώμα, το οποίο αλλάζει τον προσανατολισμό του μετά από κάθε στοιχειώδη στροφή [31]. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούνται οι εγγενείς γωνίες *Euler*. Οι στοιχειώδεις στροφές (που ορίζουν υπο-ομάδα μιας παραμέτρου του $SO(3)$) σχηματίζουν τους ακόλουθους πίνακες γύρω από τους 3 χωρικούς άξονες

Σχήμα 2.3: Αναπαράσταση άξονα-γωνίας στροφής που ορίζεται με το διάνυσμα στροφής θe .

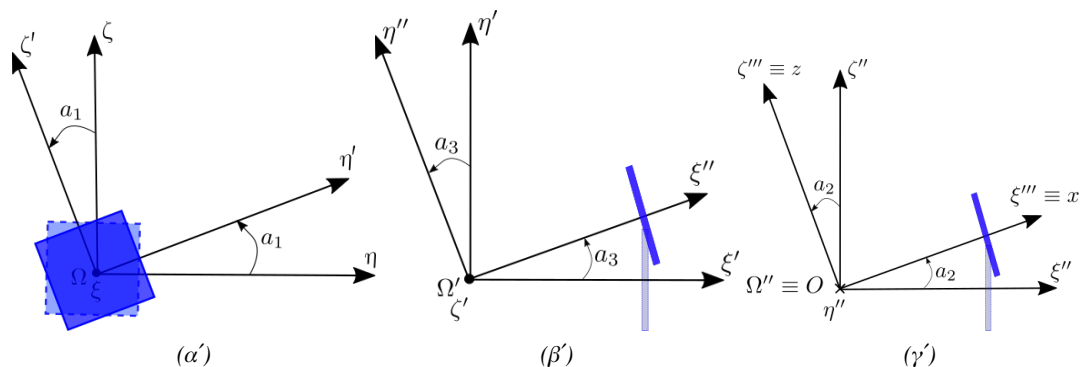
$$\mathbf{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a_1 & -\sin a_1 \\ 0 & \sin a_1 & \cos a_1 \end{bmatrix}; \mathbf{\Lambda}_2 = \begin{bmatrix} \cos a_2 & 0 & \sin a_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin a_2 & 0 & \cos a_2 \end{bmatrix}; \mathbf{\Lambda}_3 = \begin{bmatrix} \cos a_3 & -\sin a_3 & 0 \\ \sin a_3 & \cos a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Το συνολικό μητρώο στροφής μπορεί να οριστεί ως (Σχήμα 2.2)

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_3 \mathbf{\Lambda}_1 \quad (2.8)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι στοιχειώδεις στροφές εκτελούνται γύρω από άξονες που ακολουθούν ο ένας τον άλλο, σημαίνει π.χ. ότι η διατομή μιας δοκού που βρίσκεται κατά μήκος του άξονα 1 (ξ), υποβάλλεται αρχικά σε συστρόφη γύρω από τον άξονα 1 (ξ), μετά υποβάλλεται σε κάμψη

Κεφάλαιο 2. Μαθηματικές έννοιες πάνω στις ομάδες Lie

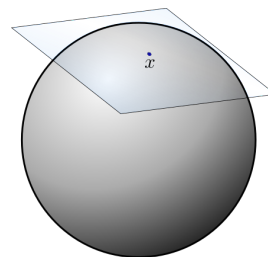


Σχήμα 2.4: Ορισμός του μητρώου μετασχηματισμού: (α') Στροφή a_1 γύρω από τον ξ άξονα. (β') Στροφή a_3 γύρω από τον ζ' άξονα. (γ') Στροφή a_2 γύρω από τον η'' άξονα.

γύρω από τον άξονα 3 (ζ'), και τέλος υπόκειται σε κάμψη γύρω από τον άξονα 2 (η''). Στο Σχήμα 2.4, παρουσιάζεται αυτή η σειρά στροφών για μια διατομή, θεωρώντας ότι το $\Omega\xi\zeta$ είναι το υλικό σύστημα συντεταγμένων και το $Oxyz$ είναι το χωρικό σύστημα συντεταγμένων. Φυσικά αυτή δεν είναι η μόνη δυνατότητα ορισμού ενός μετασχηματισμού στροφών. Η σειρά επιβολής των στροφών επιλέγεται με βάση την φυσική του προβλήματος. Η μη μοναδικότητα του προκύπτοντος μητρώου είναι μειονέκτημα της συγκεκριμένης αναπαράστασης στροφών.

2.3.3 Εφαπτόμενος χώρος και άλγεβρα Lie του $SO(3)$

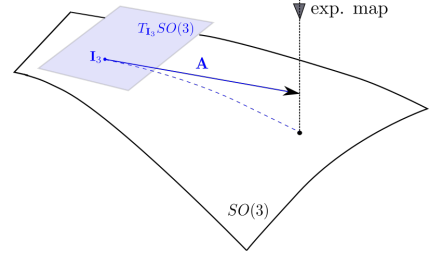
Στα μαθηματικά, ο εφαπτόμενος χώρος μιας πολλαπλότητας γενικεύει σε μεγαλύτερες διαστάσεις την έννοια των εφαπτόμενων επιπέδων σε επιφάνειες στις τρεις διαστάσεις και των εφαπτομένων σε καμπύλες στις δύο διαστάσεις. Στην διαφορική γεωμετρία, μπορεί κανείς να προσαρτήσσει σε κάθε σημείο x μιας διαφοροποιήσιμης πολλαπλότητας έναν εφαπτομενικό χώρο - ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο που περιέχει τις πιθανές κατευθύνσεις στις οποίες μπορεί κανείς να περάσει εφαπτομενικά μέσω του x . Τα στοιχεία του εφαπτόμενου χώρου στο x ονομάζονται εφαπτομενικά διανύσματα στο x . Αν η δοσμένη πολλαπλότητα είναι μια σφαίρα 2 διαστάσεων, τότε μπορεί κανείς να απεικονίσει τον εφαπτόμενο χώρο σε ένα σημείο της σφαίρας ως το επίπεδο που αγγίζει την σφαίρα σε ένα σημείο και είναι κάθετο στην ακτίνα της σφαίρας ([32], Σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5: Ο εφαπτόμενος χώρος στο σημείο x της σφαίρας. Ένα διάνυσμα στον εφαπτόμενο χώρο αντιπροσωπεύει μια πιθανή ταχύτητα στο x [32].

Άλγεβρα Lie [28]

Ο ορισμός για τις ομάδες πινάκων Lie απλοποιεί τον ορισμό της άλγεβρας Lie. Όσον αφορά στην άλγεβρα Lie \mathfrak{g} της ομάδας Lie G , μπορεί να θεωρηθεί ως ο εφαπτόμενος χώρος στο μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας G . Για παράδειγμα, στην περίπτωση του $SO(3)$, η άλγεβρα Lie $\mathfrak{so}(3)$ μπορεί να απεικονιστεί ως το εφαπτομενικό επίπεδο $T_{I_3}SO(3)$ στο μοναδιαίο στοιχείο I_3 του $SO(3)$ (Σχήμα 2.6). Ο ορισμός της άλγεβρας Lie $\mathfrak{so}(3)$ της ομάδας πινάκων Lie $SO(3)$ που είναι ένας γραμμικός χώρος αντι-συμμετρικών τανυστών δευτέρας τάξης [33] είναι



Σχήμα 2.6: Γεωμετρική απεικόνιση της άλγεβρας Lie $\mathfrak{so}(3)$ και της εκθετικής αντιστοίχισης του αντι-συμμετρικού μητρώου A .

$$\mathfrak{so}(3) := \{\Omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \Omega + \Omega^T = \mathbf{0}\} \quad (2.9)$$

Κάθε αντι-συμμετρικός τανυστής Ω έχει ένα μοναδικό συσχετισμένο διάνυσμα $\omega \in \mathbb{R}^3$, έτσι ώστε για όλα τα $x \in \mathbb{R}^3$

$$\Omega x = \omega \times x \quad (2.10)$$

όπου το \times υποδηλώνει το διανυσματικό γινόμενο σε \mathbb{R}^3 . Η γενική μορφή του Ω είναι

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Οι πίνακες στην άλγεβρα Lie δεν αντιπροσωπεύουν στροφές. Οι αντι-συμμετρικοί πίνακες είναι παράγωγοι. Μια απειροελάχιστη στροφή έχει τη μορφή πίνακα $I_3 + \Omega d\theta$, όπου το $d\theta$ είναι εξαιρετικά μικρό. Σε αυτή την περίπτωση, δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία εφαρμόζονται οι απειροελάχιστες στροφές. Με άλλα λόγια, ο πολλαπλασιασμός των πινάκων των απειροελάχιστων στροφών είναι αντιμεταθετικός.

2.4 Η εκθετική αντιστοίχιση - από την Άλγεβρα στην Ομάδα

Στη θεωρία των ομάδων Lie, η εκθετική αντιστοίχιση είναι μια αντιστοίχιση από την άλγεβρα Lie \mathfrak{g} στην ομάδα Lie G που επιτρέπει την ανάκτηση της τοπικής δομής της ομάδας από την άλγεβρα

Κεφάλαιο 2. Μαθηματικές έννοιες πάνω στις ομάδες Lie

Lie [34], δηλαδή

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G \quad (2.12)$$

Στην περίπτωση των ομάδων πινάκων Lie, όπως είναι η ομάδα των στροφών $SO(3)$, ο ορισμός της εκθετικής αντιστοίχισης συμπίπτει με την εκθετική συνάρτηση του πίνακα που δίνεται από την ακόλουθη σειρά (Σχήμα 2.6 για μια γεωμετρική απεικόνιση)

$$\exp \mathbf{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \quad (2.13)$$

Για τον υπολογισμό της εκθετικής αντιστοίχισης από τον $so(3)$ στον $SO(3)$ χωρίς να υπολογίζεται η πλήρης εκθετική συνάρτηση του πίνακα, χρησιμοποιείται ο τύπος του Rodrigues που δίνεται ως εξής: Δεδομένου του διανύσματος α και της νόρμας του $\alpha = \|\alpha\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$, ο τύπος του Rodrigues είναι

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_3 + \frac{\sin \alpha}{\alpha} \mathbf{A} + \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} \mathbf{A}^2 \quad (2.14)$$

όπου \mathbf{A} είναι το 3×3 αντι-συμμετρικό μητρώο $\hat{\alpha}$ του διανύσματος α . Οι ιδιότητες της εκθετικής αντιστοίχισης είναι [28]

- $\exp \mathbf{0} = \mathbf{I}_3$
- $\exp \mathbf{A}$ αντιστρέφεται, και $(\exp \mathbf{A})^{-1} = \exp(-\mathbf{A})$
- $\exp(a + b)\mathbf{A} = \exp a \mathbf{A} \exp b \mathbf{A}$
- αν η ομάδα Lie G είναι αντιμεταθετική (αυτή δεν είναι η περίπτωση για τον $SO(3)$), δηλαδή αν $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, τότε $\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A}) \exp(\mathbf{B})$
- αν \mathbf{C} αντιστρέφεται, τότε $\mathbf{C} (\exp \mathbf{A}) \mathbf{C}^{-1} = \exp(\mathbf{CAC}^{-1})$

2.5 Δράσεις της ομάδας $SO(3)$

Μια σύνθεση διαδοχικών στροφών αποτελεί επίσης μια στροφή η οποία εισάγει μια δομή ομάδας Lie με μια άλγεβρα Lie. Αυτή η σύνθεση συναντάται σε μια επαναληπτική/επαυξητική ανάλυση όπου η αντίστοιχη επαναληπτική/επαυξητική στροφή εφαρμόζεται πάνω σε συγκεκριμένο προσανατολισμό για να δώσει έναν νέο προσανατολισμό. Η σύνθεση των στροφών μπορεί να πραγματοποιηθεί

Κεφάλαιο 2. Μαθηματικές έννοιες πάνω στις ομάδες Lie

χρησιμοποιώντας δύο τρόπους, την αριστερή και δεξιά δράση της ομάδας Lie.

$$\text{Αριστερή δράση:} \quad L_{\Lambda} (\Delta\Lambda^{mat.}) = \Lambda \Delta\Lambda^{mat.} = \Lambda \exp(\hat{\Theta}) \quad (2.15)$$

$$\text{Δεξιά δράση:} \quad R_{\Lambda} (\Delta\Lambda^{spat.}) = \Delta\Lambda^{spat.} \Lambda = \exp(\hat{\theta}) \Lambda \quad (2.16)$$

όπου η μικρή στροφή $\Delta\Lambda$ εφαρμόζεται είτε με την υλική είτε με την χωρική της υπόσταση, αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιείται η υλική μορφή του διανύσματος στροφής, Θ , σε κάθε επανάληψη/επαύξηση, ενώ στην δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιείται η χωρική μορφή του διανύσματος, θ . Η αριστερή δράση σημαίνει ότι ο προσανατολισμός Λ εφαρμόζεται πάνω στην εκθετική αντιστοίχιση του αντι-συμμετρικού μητρώου του διανύσματος στροφής Θ , ενώ η δεξιά δράση σημαίνει ότι ο προσανατολισμός Λ εφαρμόζεται πρώτα, κι έπειτα ακολουθεί η εκθετική αντιστοίχιση του αντι-συμμετρικού μητρώου του διανύσματος στροφής θ .

Οι δύο άλλες δράσεις, ο λεγόμενος εσωτερικός αυτομορφισμός (*inner automorphism*) και ο συζυγής μετασχηματισμός (*adjoint transformation*) [27, 28], της ομάδας $SO(3)$ είναι οι παρακάτω πολύ χρήσιμες σχέσεις

$$\Delta\Lambda_{spat.} = \Lambda \Delta\Lambda_{mat.} \Lambda^T \quad (\text{εσωτερικός αυτομορφισμός, } inner\ automorphism) \quad (2.17)$$

$$\hat{\theta} = \Lambda \hat{\Theta} \Lambda^T \quad (\text{συζυγής μετασχηματισμός, } adjoint\ transformation) \quad (2.18)$$

Τέλος, η λεγόμενη συζυγής δράση του $SO(3)$ πάνω στην αντίστοιχη άλγεβρα οδηγεί στην εξής σημαντική σχέση

$$Ad_{\Lambda} (\hat{\theta}) = \Lambda \hat{\theta} \Lambda^T = \widehat{\Lambda\theta} \quad (2.19)$$

3 Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η διερεύνηση δύο μοντέλων δοκού, η θεωρία καθώς και η αριθμητική τους υλοποίηση. Το πρώτο μοντέλο δοκού ονομάζεται Green-Lagrange (GL) [35, 36], ενώ το δεύτερο μοντέλο δοκού ονομάζεται Simo-Reissner (SR) [2]. Το μαθηματικό υπόβαθρο στις ομάδες Lie (κεφάλαιο 2) χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη των μοντέλων δοκού. Ένας περαιτέρω χειρισμός πραγματοποιείται κατά την γραμμικοποίηση και την διακριτοποίηση προκειμένου να εισαχθεί μια *αναλλοίωτη* (*invariant*) τεχνική. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στο μοντέλο δοκού GL και αποδεικνύεται ότι λειτουργεί το ίδιο καλά όπως και στο μοντέλο δοκού SR. Τα αριθμητικά αποτελέσματα περιλαμβάνουν και την *επαναληπτική* (*iterative*) υλοποίηση, που είναι η αρχική τεχνική υλοποίησης που προτείνεται στην αναφορά [8], για να τονιστεί η υπεροχή της *αναλλοίωτης* (*invariant*) τεχνικής.

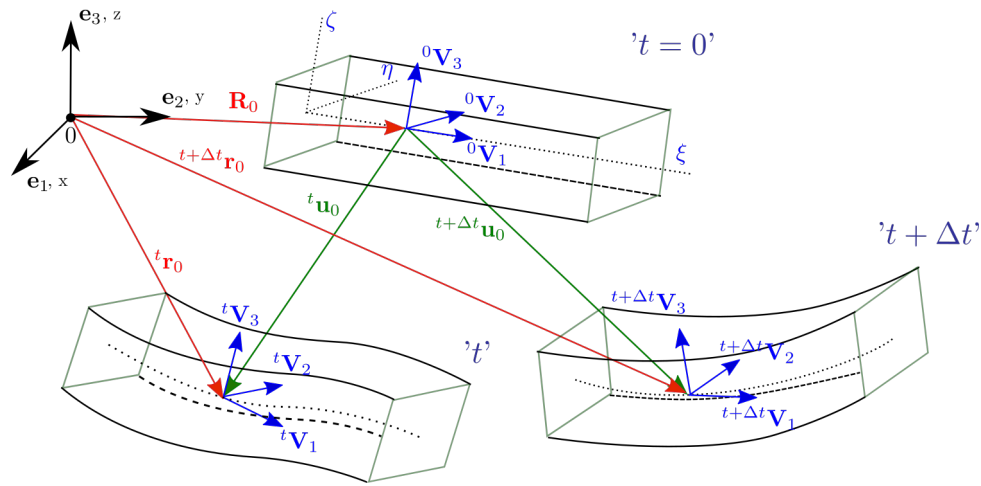
3.1 Κινηματική

Σε αυτή την ενότητα δίνεται η κινηματική ενός πρισματικού μέλους, είτε καμπύλου είτε όχι. Το μέλος αποσυντίθεται σε τμήματα τα οποία είναι ευθύγραμμα και έχουν διπλά συμμετρική, συμπαγή διατομή. Για να απλοποιηθεί η συγκριτική μελέτη μεταξύ των SR και GL μοντέλων δοκού, δεν χρησιμοποιούνται οι ιδιότητες που σχετίζονται με τη μη συμμετρία της διατομής. Οι κινηματικές παραδοχές είναι: 1) Η διατομή της δοκού παραμένει ένα άκαμπτο επίπεδο κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης (υπόθεση Bernoulli). 2) Η διατμητική παραμόρφωση λαμβάνεται υπόψη και θεωρείται σταθερή μέσα στη διατομή ως συνέπεια της προηγούμενης παραδοχής. 3) Θεωρούνται μικρές τροπές. Οι βάσεις αναφοράς που χρησιμοποιούνται στην κινηματική είναι (Σχήμα 3.1)

- $e_j, j = 1 - 3$, είναι η σταθερή χωρική βάση ενός ορθογώνιου καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

- $\mathbf{V}_i(\xi), i = 1 - 3$, είναι η κινητή βάση που προσαρτάται σε κάθε διατομή, όπου ξ είναι η παράμετρος του μήκους της δοκού και η, ζ είναι οι συντεταγμένες της διατομής που μετρώνται στο σύστημα που ορίζεται από την βάση \mathbf{V} . Στην παραμορφωμένη κατάσταση, τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$, το διάνυσμα ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_1$ είναι κάθετο στη διατομή, ενώ τα διανύσματα ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_2, {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_3$ είναι συγγραμμικά με τους κύριους άξονες της διατομής. Εφόσον λαμβάνεται υπόψη η διατμητική παραμόρφωση, το διάνυσμα ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_1$ δεν εφάπτεται απαραίτητα στον άξονα της δοκού.



Σχήμα 3.1: Αρχική και παραμορφωμένες γεωμετρίες της δοκού.

3.1.1 Αρχική και παραμορφωμένη γεωμετρία

Ο προσανατολισμός της διατομής εκφράζεται μέσω του ορθογωνικού μετασχηματισμού $\xi \rightarrow \mathbf{\Lambda}(\xi) \in SO(3)$. Επομένως, οι συνιστώσες της κινητής βάσης ${}^0\mathbf{V}$ και ${}^{t+\Delta t}\mathbf{V}$ στην αρχική και την παραμορφωμένη γεωμετρία στο $t + \Delta t$, δίνονται ως εξής

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{V}_i(\xi) &= {}^0\Lambda_{ji}(\xi) \mathbf{e}_j \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_i(\xi) &= {}^{t+\Delta t}\Lambda_{ji}(\xi) \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1 - 3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

Τα διανύσματα θέσης \mathbf{R} και ${}^{t+\Delta t}\mathbf{r}$ ενός τυχαίου υλικού σημείου (ξ, η, ζ) της δοκού δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\xi, \eta, \zeta) &= \mathbf{R}_0(\xi) + {}^0\mathbf{\Lambda}(\xi) \begin{Bmatrix} 0 \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}^T \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta) &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_0(\xi) + {}^{t+\Delta t}\mathbf{\Lambda}(\xi) \begin{Bmatrix} 0 \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}^T\end{aligned}\quad (3.2)$$

όπου $\mathbf{R}_0(\xi)$ και ${}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_0(\xi)$ είναι τα διανύσματα θέσης του άξονα αναφοράς της δοκού στην αρχική και την παραμορφωμένη γεωμετρία αντίστοιχα, ενώ τα μητρώα προσανατολισμού ${}^0\mathbf{\Lambda}$ και ${}^{t+\Delta t}\mathbf{\Lambda}$ δίνονται από την σχέση

$$\mathbf{\Lambda}(\xi) = \exp(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\xi)) = \cos\alpha \mathbf{I}_3 + \frac{\sin\alpha}{\alpha} \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{1 - \cos\alpha}{\alpha^2} \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\alpha} \quad (3.3)$$

στην οποία εισάγεται είτε το διάνυσμα προσανατολισμού ${}^0\boldsymbol{\alpha}$, που εκφράζει τις αρχικές γωνίες της διατομής, είτε το διάνυσμα προσανατολισμού ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha}$, που εκφράζει τις παραμορφωμένες γωνίες της διατομής στο $t + \Delta t$, \mathbf{I}_3 είναι το 3×3 μοναδιαίο μητρώο, α είναι η Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος $\boldsymbol{\alpha}$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\xi)$ είναι το αντι-συμμετρικό μητρώο που μορφώνεται με βάση την σχέση $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\xi) = -e_k^{ij} \alpha^k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T$, $i, j, k = 1 - 3$ (κεφάλαιο 2).

Το διάνυσμα της μετακίνησης ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ ενός τυχαίου υλικού σημείου (ξ, η, ζ) στο $t + \Delta t$ ισούται με την διαφορά ανάμεσα στις σχέσεις 3.2, δηλαδή

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_0(\xi) + \eta \left(\exp({}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{I}_3 \right) {}^0\mathbf{V}_2(\xi) + \zeta \left(\exp({}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{I}_3 \right) {}^0\mathbf{V}_3(\xi) \quad (3.4)$$

με συνιστώσες u_i ; $i = 1 - 3$ ως προς την καθολική βάση \mathbf{e} και u_ξ, u_η, u_ζ ως προς την αρχική βάση της διατομής ${}^0\mathbf{V}$. Επιπροσθέτως, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_0(\xi) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_0(\xi) - \mathbf{R}_0(\xi) = u_{0i} \mathbf{e}_i = u_{0\xi} {}^0\mathbf{V}_1 + u_{0\eta} {}^0\mathbf{V}_2 + u_{0\zeta} {}^0\mathbf{V}_3$, που εκφράζει την μετατόπιση του κέντρου της διατομής, ενώ $(\exp({}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{I}_3) {}^0\mathbf{V}_2 = {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_2(\xi) - {}^0\mathbf{V}_2$ και $(\exp({}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{I}_3) {}^0\mathbf{V}_3 = {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_3(\xi) - {}^0\mathbf{V}_3$ που εκφράζουν την στροφή ανάμεσα στην αρχική και την παραμορφωμένη γεωμετρία. Η εκθετική αντιστοίχιση $\exp({}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\theta}})$ με ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\theta} = \theta_i \mathbf{e}_i = \theta_\xi {}^0\mathbf{V}_1 + \theta_\eta {}^0\mathbf{V}_2 + \theta_\zeta {}^0\mathbf{V}_3$ δίνεται από την σχέση 3.3 (δες επίσης κεφάλαιο 2).

3.1.2 Διαταραχή της παραμορφωμένης γεωμετρίας στο $t + \Delta t$

Κατά τη διάρκεια της επαυξητικής/επαναληπτικής διαδικασίας Newton-Raphson, πρέπει να εφαρμοστεί μια διαταραχή στην γεωμετρία στο $t + \Delta t$, δεδομένου ότι η γεωμετρία στο t είναι γνωστή.

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

Η διαταραγμένη θέση του άξονα της δοκού σε σχέση με την θέση ${}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_0(\xi)$ είναι

$${}^{t+\Delta t,\epsilon}\mathbf{r}_0(\xi) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_0(\xi) + \epsilon \delta \mathbf{u}_0(\xi) \quad (3.5)$$

όπου $\delta \mathbf{u}_0(\xi) = \delta u_{0i} \mathbf{e}_i = \delta u_{0\xi} {}^0\mathbf{V}_1 + \delta u_{0\eta} {}^0\mathbf{V}_2 + \delta u_{0z} {}^0\mathbf{V}_3$; $i = 1 - 3$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο, που ερμηνεύεται για $\epsilon > 0$, ως η υπερτιθέμενη απειροελάχιστη μετακίνηση του άξονα της δοκού [8]. Ο διαταραγμένος ορθογώνιος μετασχηματισμός σε σχέση με το ${}^{t+\Delta t}\mathbf{\Lambda}(\xi)$ είναι

$${}^{t+\Delta t,\epsilon}\mathbf{\Lambda}(\xi) = \exp\left({}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\theta}}(\xi) + \epsilon \delta \hat{\boldsymbol{\theta}}(\xi)\right) {}^0\mathbf{\Lambda}(\xi) \quad (3.6)$$

$${}^{t+\Delta t,\epsilon}\mathbf{\Lambda}(\xi) = \exp(\epsilon \delta \boldsymbol{\Psi}(\xi)) \exp\left({}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\theta}}(\xi)\right) {}^0\mathbf{\Lambda}(\xi) \quad (3.7)$$

όπου $\delta \hat{\boldsymbol{\theta}}(\xi)$ και $\delta \boldsymbol{\Psi}(\xi)$ είναι τα πεδία των αντι-συμμετρικών τανυστών, που ερμηνεύονται για $\epsilon > 0$, ως τα μητρώα των υπερτιθέμενων απειροελάχιστων διανυσμάτων στροφής (rotation) και περιστροφής (spin), αντίστοιχα, του κινούμενου πλαισίου [8]. Χρησιμοποιώντας τη σχέση 3.7 και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση 3.1, η διαταραχή των διανυσμάτων της διατομής ${}^{t+\Delta t,\epsilon}\mathbf{V}_i$ γράφεται ως

$${}^{t+\Delta t,\epsilon}\mathbf{V}_i = \exp(\epsilon \delta \boldsymbol{\Psi}(\xi)) \exp\left({}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\theta}}(\xi)\right) {}^0\mathbf{V}_i(\xi); \quad i = 1 - 3 \quad (3.8)$$

3.2 Μοντέλο δοκού Simo-Reissner

Το ευρέως γνωστό μοντέλο δοκού Simo-Reissner (SR) εξάγεται κάνοντας χρήση των κλίσεων μετατόπισης και των πρώτων τάσεων Piola-Kirchhoff. Στα ακόλουθα, η ανεξάρτητη μεταβλητή ξ παραλείπεται από το δεξί μέλος για λόγους ευκολίας. Επίσης, το κόμμα (,) δηλώνει τη χωρική παράγωγο ως προς τη συντεταγμένη ξ .

3.2.1 1Δ μέτρα τροπής και τάσης

Η υλική μορφή (*material setting*) του διανύσματος της αξονικής/διατμητικής τροπής $\boldsymbol{\Gamma}(\xi)$ κατά μήκος της δοκού, δίνεται από την σχέση [2, 8]

$$\boldsymbol{\Gamma}(\xi) = \boldsymbol{\Lambda}^T \mathbf{r}_{0,\xi} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

όπου $\mathbf{\Lambda}$ είναι το μητρώο προσανατολισμού στην παραμορφωμένη γεωμετρία. Η υλική μορφή (*material setting*) του διανύσματος της στρεπτικής/καμπτικής τροπής $\mathbf{K}(\xi)$ κατά μήκος της δοκού δίνεται από το αντίστοιχο διάνυσμα (*axial vector*) του αντι-συμμετρικού τανυστή $\hat{\mathbf{K}}(\xi)$ [2, 8]

$$\hat{\mathbf{K}}(\xi) = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda}_{,\xi} \quad (3.10)$$

Το υλικό θεωρείται ότι είναι ομοιογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό. Επομένως, τα διανύσματα αξονικής/διατμητικής δύναμης $\mathbf{F}(\xi)$ και της ροπής στρέψης/κάμψης $\mathbf{M}(\xi)$ στην υλική τους μορφή (*material setting*), ορίζονται ως

$$\mathbf{F}(\xi) = \mathbf{C}^{F\Gamma} \mathbf{\Gamma} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{C}^{MK} \mathbf{K} \quad (3.12)$$

όπου

$$\mathbf{C}^{F\Gamma} = \begin{bmatrix} EA & & \\ & GA_\eta & \\ & & GA_\zeta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}^{MK} = \begin{bmatrix} GJ_t & & \\ & EI_\eta & \\ & & EI_\zeta \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

είναι τα καταστατικά μητρώα στην υλική τους μορφή (*material setting*), E και G είναι οι συντελεστές του Young και διάτμησης, A , A_η και A_ζ είναι το εμβαδόν της διατομής και τα δύο μειωμένα εμβαδά διατομής στις διευθύνσεις των κύριων αξόνων αδρανείας. Η J_t είναι η στρεπτική ροπή αδρανείας, ενώ οι I_η και I_ζ είναι οι δύο κύριες καμπτικές ροπές αδρανείας.

3.2.2 Αρχή δυνατού έργου

Η ασθενής μορφή της εξίσωσης ισορροπίας του σώματος στη διαταραγμένη κατάσταση $(t + \Delta t, \epsilon)$ δίνεται από την σχέση

$$\int_{^0L} ({}^{t+\Delta t, \epsilon} F_j \delta^{t+\Delta t, \epsilon} \Gamma_j + {}^{t+\Delta t, \epsilon} M_j \delta^{t+\Delta t, \epsilon} K_j) d\xi = \delta^{t+\Delta t, \epsilon} W_{ext}; \quad j = \xi, \eta, \zeta \quad (3.14)$$

όπου 0L είναι το αρχικό μήκος της δοκού. Οι τάσεις και οι δυνατές τροπές αναφέρονται στους άξονες ξ , η , ζ στο $(t + \Delta t, \epsilon)$, ενώ το $\delta^{t+\Delta t, \epsilon} W_{ext}$ εκφράζει το εξωτερικό δυνατό έργο στο $(t + \Delta t, \epsilon)$. ${}^{t+\Delta t, \epsilon} F_j$ και ${}^{t+\Delta t, \epsilon} M_j$ είναι οι συνιστώσες της εσωτερικής δύναμης και ροπής $\mathbf{F}(\xi)$ και $\mathbf{M}(\xi)$ που δίνονται από τις σχέσεις 3.11, 3.12, αντίστοιχα, ενώ $\delta^{t+\Delta t, \epsilon} \Gamma_j$ και $\delta^{t+\Delta t, \epsilon} K_j$ είναι οι συνιστώσες

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

των δυνατών τροπών $\delta\mathbf{\Gamma}$ και $\delta\mathbf{K}$ που δίνονται παρακάτω [2, 8]

$$\delta\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Lambda}^T \delta^\nabla \boldsymbol{\gamma}(\xi) = \mathbf{\Lambda}^T (\delta \mathbf{r}_{0,\xi} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{r}_{0,\xi} \times \Delta \boldsymbol{\psi}) \quad (3.15)$$

$$\delta\mathbf{K} = \mathbf{\Lambda}^T \delta^\nabla \boldsymbol{\kappa}(\xi) = \mathbf{\Lambda}^T \delta \boldsymbol{\psi}_{,\xi} \quad (3.16)$$

όπου το σύμβολο ∇ σημαίνει την παράγωγο συν-περιστροφής (*corotational derivative*) [37], το $\delta \mathbf{r}_0$ δίνεται από την κατευθυντική παράγωγο της σχέσης 3.5 ως προς το ϵ , για $\epsilon = 0$, και το $\delta \boldsymbol{\psi}$ είναι το αξονικό διάνυσμα του μητρώου $\delta \boldsymbol{\Psi}$ 3.7.

3.3 Μοντέλο δοκού Green-Lagrange

Σε αυτήν την ενότητα, αναπτύσσεται η 1Δ διατύπωση του εκφυλισμένου μοντέλου συνεχούς μέσου που παρουσιάζεται στις αναφορές [35, 36], όπου το ζεύγος έργου που χρησιμοποιείται είναι οι τροπές Green-Lagrange και οι δεύτερες τάσεις Piola-Kirchhoff. Στη συνέχεια, οι ανεξάρτητες μεταβλητές ξ, η, ζ (στις 3Δ εκφράσεις) και ξ (στις 1Δ εκφράσεις) παραλείπονται από το δεξί μέλος για ευκολία. Επίσης, το κόμμα (,) δηλώνει τη χωρική παράγωγο ως προς τις συντεταγμένες ξ, η, ζ .

3.3.1 Τροπές και τάσεις

Οι συνιστώσες της τροπής Green-Lagrange είναι

$$\epsilon_{ij}(\xi, \eta, \zeta) = 0.5 \left(\underbrace{u_{i,j} + u_{j,i}}_{\text{γραμμικό μέρος}} + \underbrace{u_{k,i} u_{k,j}}_{\text{μη-γραμμικό μέρος}} \right); \quad i, j, k = \xi, \eta, \zeta \quad (3.17)$$

Λόγω της υπόθεσης ότι το σχήμα της διατομής δεν αλλάζει κατά την παραμόρφωση, οι συνιστώσες που είναι διάφορες του μηδενός είναι οι $\epsilon_{\xi\xi}$, $\epsilon_{\xi\eta}$ και $\epsilon_{\xi\zeta}$ ως προς το αρχικό σύστημα της διατομής ${}^0\mathbf{V}$ [35].

Οι συνιστώσες της δεύτερης τάσης Piola-Kirchhoff ως προς το αρχικό σύστημα της διατομής ${}^0\mathbf{V}$, λόγω της υπόθεσης ομοιογενούς, ισότροπου και γραμμικώς ελαστικού υλικού, ορίζονται ως

$$S_{ij}(\xi, \eta, \zeta) = C_{ijrs} \epsilon_{rs}; \quad i, j, r, s = \xi, \eta, \zeta \quad (3.18)$$

όπου C_{ijrs} είναι ο τανυστής τέταρτης τάξης των υλικών σταθερών, ενώ οι συνιστώσες της τροπής ϵ_{rs} δίνονται από την σχέση 3.17.

3.3.2 Αρχή του δυνατού έργου

Η ασθενής μορφή της εξίσωσης ισορροπίας στο $(t + \Delta t, \epsilon)$ δίνεται ως εξής [36]

$$\delta W_{int}(\xi, \eta, \zeta) = \int_{0V} {}^{t+\Delta t, \epsilon} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t, \epsilon} \epsilon_{ij} d^0V = \delta {}^{t+\Delta t, \epsilon} W_{ext}; \quad i, j = \xi, \eta, \zeta \quad (3.19)$$

όπου 0V είναι ο αρχικός όγκος, ${}^{t+\Delta t, \epsilon} S_{ij}$ είναι οι συνιστώσες της τάσης (δες σχέση 3.18), το $\delta {}^{t+\Delta t, \epsilon} W_{ext}$ είναι το εξωτερικό δυνατό έργο και $\delta {}^{t+\Delta t, \epsilon} \epsilon_{ij}$ είναι οι δυνατές τροπές που δίνονται παρακάτω

$$\delta \epsilon_{ij}(\xi, \eta, \zeta) = 0.5 (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i} + {}^{t+\Delta t} u_{k,i} \delta u_{k,j} + \delta u_{k,i} {}^{t+\Delta t} u_{k,j}); \quad i, j, k = \xi, \eta, \zeta \quad (3.20)$$

όπου δu_i είναι οι συνιστώσες του διανύσματος της δυνατής μετατόπισης σε ένα τυχαίο υλικό σημείο (ξ, η, ζ) ως προς την αρχική τοπική βάση της διατομής 0V . Η δυνατή μετατόπιση δίνεται σε σχέση με τις άγνωστες παραμέτρους $(\delta \mathbf{u}_0, \delta \psi)$ ως εξής

$$\delta \mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \delta \mathbf{u}_0 + \eta \underbrace{(\delta \psi \times {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_2)}_{\delta \mathbf{V}_2} + \zeta \underbrace{(\delta \psi \times {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_3)}_{\delta \mathbf{V}_3} \quad (3.21)$$

όπου $\delta \mathbf{u}_0$, $\delta \mathbf{V}_2$ και $\delta \mathbf{V}_3$ εξάγονται υπολογίζοντας την κατευθυντική παράγωγο ως προς ϵ , για $\epsilon = 0$, των σχέσεων 3.5 και 3.8, αντίστοιχα.

3.3.3 1Δ μέτρα τροπής και τάσης

Η βασική κινηματική υπόθεση των μη-παραμορφώσιμων διατομών της δοκού (των οποίων η κινηματική ορίζεται μοναδικά από τη θέση του κέντρου και τον προσανατολισμό της διατομής, 3.2, 3.4) και η αντίστοιχη μεταβολή της θέσης όπως δίνεται στην σχέση 3.21, εισάγεται στους όρους του δυνατού έργου (σχέση 3.19). Με βάση αυτούς τους περιορισμούς στην έκφραση του δυνατού έργου ορίζονται τα ζεύγη δυνάμεων/ροπών και μεταφορικών/στροφικών μέτρων τροπής που σχετίζονται με την προκύπτουσα 1Δ θεωρία δοκού (ο αριστερός εκθέτης ${}^{t+\Delta t, \epsilon}$ παραλείπεται παρακάτω για διευκόλυνση).

Οι όροι του εσωτερικού δυνατού έργου (3.19) σε σχέση με τις ορθές (' n ') και διατμητικές (' s ') τάσεις

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

είναι

$$\delta W_{\text{int},n}(\xi, \eta, \zeta) = \int_{0V} (S_{\xi\xi} \delta\epsilon_{\xi\xi}) d^0V \stackrel{3.18}{=} \int_{0V} [(E\epsilon_{\xi\xi}) \delta\epsilon_{\xi\xi}] d^0V \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int},s}(\xi, \eta, \zeta) &= \int_{0V} (S_{\xi\eta} 2\delta\epsilon_{\xi\eta} + S_{\xi\zeta} 2\delta\epsilon_{\xi\zeta}) d^0V \\ &\stackrel{3.18}{=} \int_{0V} [(kG 2\epsilon_{\xi\eta}) 2\delta\epsilon_{\xi\eta} + (kG 2\epsilon_{\xi\zeta}) 2\delta\epsilon_{\xi\zeta}] d^0V \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ενσωματώνοντας στις σχέσεις 3.22 και 3.23 τις εκφράσεις για τις τροπές και τις μεταβολές τους, 3.17 και 3.20, όπου οι κλίσεις της μετατόπισης και οι μεταβολές τους δίνονται από την παραγωγήση κατά μήκος των ξ, η, ζ των σχέσεων 3.4 και 3.21, αντίστοιχα, προκύπτουν οι παρακάτω όροι

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int},v}(\xi, \eta, \zeta) &= \\ &\int_{0L} \left\{ \underbrace{(\delta u_{0\xi,\xi} + \mathbf{u}_{0,\xi}^T \delta \mathbf{u}_{0,\xi})}_{\delta\Gamma_\xi(\xi)} \right. \\ &\underbrace{\int_{0A} E [(u_{0\xi,\xi} + 0.5\mathbf{u}_{0,\xi}^T \mathbf{u}_{0,\xi}) + \eta^2 (0.5\mathbf{V}_{2,\xi}^T \mathbf{V}_{2,\xi}) + \zeta^2 (0.5\mathbf{V}_{3,\xi}^T \mathbf{V}_{3,\xi})] d^0A}_{F_\xi(\xi)} \\ &+ \underbrace{(\delta V_{3\xi,\xi} + \mathbf{u}_{0,\xi}^T \delta \mathbf{V}_{3,\xi} + \mathbf{V}_{3,\xi}^T \delta \mathbf{u}_{0,\xi})}_{\delta K_\eta(\xi)} \underbrace{\int_{0A} E \zeta^2 (V_{3\xi,\xi} + \mathbf{u}_{0,\xi}^T \mathbf{V}_{3,\xi}) d^0A}_{M_\eta(\xi)} \\ &+ \underbrace{(\delta V_{2\xi,\xi} + \mathbf{u}_{0,\xi}^T \delta \mathbf{V}_{2,\xi} + \mathbf{V}_{2,\xi}^T \delta \mathbf{u}_{0,\xi})}_{-\delta K_\zeta(\xi)} \underbrace{\int_{0A} E \eta^2 (V_{2\xi,\xi} + \mathbf{u}_{0,\xi}^T \mathbf{V}_{2,\xi}) d^0A}_{-M_\zeta(\xi)} \\ &+ \underbrace{(\mathbf{V}_{3,\xi}^T \delta \mathbf{V}_{3,\xi})}_{\delta K_{\eta,nl,2}(\xi)} \underbrace{\int_{0A} E [\zeta^2 (u_{0\xi,\xi} + 0.5\mathbf{u}_{0,\xi}^T \mathbf{u}_{0,\xi}) + \eta^2 \zeta^2 (0.5\mathbf{V}_{2,\xi}^T \mathbf{V}_{2,\xi}) + \zeta^4 (0.5\mathbf{V}_{3,\xi}^T \mathbf{V}_{3,\xi})] d^0A}_{M_{R1}(\xi)} \\ &+ \underbrace{(\mathbf{V}_{2,\xi}^T \delta \mathbf{V}_{2,\xi})}_{\delta K_{\zeta,nl,2}(\xi)} \underbrace{\int_{0A} E [\eta^2 (u_{0\xi,\xi} + 0.5\mathbf{u}_{0,\xi}^T \mathbf{u}_{0,\xi}) + \eta^4 (0.5\mathbf{V}_{2,\xi}^T \mathbf{V}_{2,\xi}) + \eta^2 \zeta^2 (0.5\mathbf{V}_{3,\xi}^T \mathbf{V}_{3,\xi})] d^0A}_{M_{R2}(\xi)} \\ &\left. + \underbrace{(\mathbf{V}_{3,\xi}^T \delta \mathbf{V}_{2,\xi} + \mathbf{V}_{2,\xi}^T \delta \mathbf{V}_{3,\xi})}_{\delta K_{\zeta\eta,nl,2}(\xi)} \underbrace{\int_{0A} E \eta^2 \zeta^2 (\mathbf{V}_{2,\xi}^T \mathbf{V}_{3,\xi}) d^0A}_{M_{R3}(\xi)} \right\} d^0L \end{aligned} \quad (3.24)$$

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

$$\begin{aligned}
 \delta W_{\text{int},\zeta}(\xi, \eta, \zeta) = & \\
 & \int_{0L} \left\{ \underbrace{(\delta V_{2\xi} + \delta \mathbf{u}_{0,\xi}^T \mathbf{V}_2 + \delta \mathbf{V}_2^T \mathbf{u}_{0,\xi})}_{\delta \Gamma_\eta(\xi)} \underbrace{\int_{0A} kG (V_{2\xi} + \mathbf{u}_{0,\xi}^T \mathbf{V}_2) d^0 A}_{F_\eta(\xi)} \right. \\
 & + \underbrace{(\delta V_{3\xi} + \delta \mathbf{u}_{0,\xi}^T \mathbf{V}_3 + \delta \mathbf{V}_3^T \mathbf{u}_{0,\xi})}_{\delta \Gamma_\zeta(\xi)} \underbrace{\int_{0A} kG (V_{3\xi} + \mathbf{u}_{0,\xi}^T \mathbf{V}_3) d^0 A}_{F_\zeta(\xi)} \\
 & \left. + \underbrace{(\delta \mathbf{V}_3^T \mathbf{V}_{2,\xi} + \delta \mathbf{V}_{2,\xi}^T \mathbf{V}_3)}_{\delta K_\xi(\xi)} \underbrace{\int_{0A} kG (\eta^2 + \zeta^2) (\mathbf{V}_3^T \mathbf{V}_{2,\xi}) d^0 A}_{M_\xi(\xi)} \right\} d^0 L \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Στις σχέσεις 3.24 και 3.25, λαμβάνεται υπόψη ότι: 1) $\int_{0A} \eta d^0 A = \int_{0A} \zeta d^0 A = \int_{0A} \eta \zeta d^0 A = \int_{0A} \zeta \eta^2 d^0 A = \int_{0A} \zeta^3 d^0 A = \int_{0A} \zeta^2 \eta d^0 A = \int_{0A} \eta^3 d^0 A = \int_{0A} \eta^3 \zeta d^0 A = \int_{0A} \zeta^3 \eta d^0 A = 0$, επειδή το σύστημα συντεταγμένων $\xi\eta\zeta$ περνάει από το γεωμετρικό κέντρο της διατομής, ενώ η, ζ είναι οι κύριοι άξονες αδρανείας. 0A είναι το εμβαδόν της διατομής που μετριέται στο σύστημα της υλικής βάσης ${}^0\mathbf{V}$, 2) ${}^0\mathbf{V}_{2,\xi} = {}^0\mathbf{V}_{3,\xi} = 0$, επειδή δεν υπάρχει αρχική καμπυλότητα, 3) ${}^0\mathbf{V}_2^T {}^0\mathbf{V}_1 = {}^0\mathbf{V}_3^T {}^0\mathbf{V}_1 = 0$, λόγω της ορθογωνικότητας των διανυσμάτων της διατομής, 4) οι παράγωγοι των συνιστωσών της μετακίνησης κατά μήκος του ξ , $u_{0\eta,\xi}$, $u_{0\zeta,\xi}$, και των συνιστωσών των διανυσμάτων της διατομής, $V_{2\eta,\xi}$, $V_{3\eta,\xi}$ και $V_{3\zeta,\xi}$, $V_{3\zeta,\xi}$, ακυρώνονται με τα αντίθετα τους. 5) το μητρώο $(\exp(\hat{\theta}))^T (\exp(\hat{\theta}),_\xi)$ είναι αντι-συμμετρικό (δες Παράρτημα A.2.2 στο [38] για την απόδειξη), επομένως

$$\mathbf{V}_3^T \mathbf{V}_{2,\xi} = {}^0\mathbf{V}_3^T (\exp(\hat{\theta}))^T (\exp(\hat{\theta}),_\xi) {}^0\mathbf{V}_2 = -{}^0\mathbf{V}_2^T (\exp(\hat{\theta}))^T (\exp(\hat{\theta}),_\xi) {}^0\mathbf{V}_3 = -\mathbf{V}_2^T \mathbf{V}_{3,\xi}$$

Οι εσωτερικές δυνάμεις, η αξονική δύναμη F_ξ κατά μήκος του ξ άξονα και οι διατμητικές δυνάμεις F_η και F_ζ κατά μήκος των η και ζ αξόνων, ταυτοποιούνται στις σχέσεις 3.24 και 3.25, και ορίζονται ως εξής

$$F_\xi(\xi) = \int_{0A} S_{\xi\xi} d^0 A = EA (\Gamma_{\xi,l} + \Gamma_{\xi,nl}) + EI_\zeta K_{\zeta,nl,2} + EI_\eta K_{\eta,nl,2} \quad (3.26)$$

$$F_\eta(\xi) = \int_{0A} S_{\xi\eta} d^0 A = k_\eta GA (\Gamma_{\eta,l} + \Gamma_{\eta,nl}) \quad (3.27)$$

$$F_\zeta(\xi) = \int_{0A} S_{\xi\zeta} d^0 A = k_\zeta GA (\Gamma_{\zeta,l} + \Gamma_{\zeta,nl}) \quad (3.28)$$

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

όπου $S_{\xi\xi}$; $S_{\xi\eta}$; $S_{\xi\zeta}$ είναι οι συνιστώσες της τάσης που δίνονται από την σχέση 3.18, $EA = \int_{0_A} E d^0A$, $EI_\zeta = \int_{0_A} E\eta^2 d^0A$, $EI_\eta = \int_{0_A} E\zeta^2 d^0A$, $GA = \int_{0_A} G d^0A$, k_η , k_ζ είναι οι συντελεστές διόρθωσης της διάτμησης, ενώ τα 1Δ μέτρα της τροπής $\Gamma_{\xi,l}$; $\Gamma_{\eta,l}$; $\Gamma_{\zeta,l}$ είναι οι γραμμικές συνιστώσες της υλικής μορφής του διανύσματος της αξονικής/διατμητικής τροπής Γ_l ως προς το σύστημα $\xi\eta\zeta$ που δίνεται ως

$$\Gamma_l(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{0,\xi}^T \\ \left(\exp(\hat{\boldsymbol{\theta}})^0 \mathbf{V}_2 \right)^T \\ \left(\exp(\hat{\boldsymbol{\theta}})^0 \mathbf{V}_3 \right)^T \end{bmatrix} {}^0 \mathbf{V}_1 \quad (3.29)$$

και $\Gamma_{\xi,nl}$; $\Gamma_{\eta,nl}$; $\Gamma_{\zeta,nl}$ είναι οι αντίστοιχες μη γραμμικές συνιστώσες της υλικής μορφής του διανύσματος της αξονικής/διατμητικής τροπής Γ_{nl} που δίνεται ως

$$\Gamma_{nl}(\xi) = \begin{bmatrix} 0.5 \mathbf{u}_{0,\xi}^T \\ \left(\exp(\hat{\boldsymbol{\theta}})^0 \mathbf{V}_2 \right)^T \\ \left(\exp(\hat{\boldsymbol{\theta}})^0 \mathbf{V}_3 \right)^T \end{bmatrix} \mathbf{u}_{0,\xi} \quad (3.30)$$

όπου οι δείκτες l και nl σημαίνουν γραμμικό και μη-γραμμικό, αντίστοιχα. $\mathbf{u}_{0,\xi}$ είναι η παράγωγος κατά μήκος του άξονα ξ της μετακίνησης του κέντρου. Προσθέτοντας τις σχέσεις 3.29 και 3.30, προκύπτει η ακόλουθη αξονική/διατμητική τροπή

$$\Gamma(\xi) = \begin{Bmatrix} 0.5 \left(\mathbf{r}_{0,\xi}^T \mathbf{r}_{0,\xi} - 1 \right) \\ \left(\exp(\hat{\boldsymbol{\theta}})^0 \mathbf{V}_2 \right)^T \mathbf{r}_{0,\xi} \\ \left(\exp(\hat{\boldsymbol{\theta}})^0 \mathbf{V}_3 \right)^T \mathbf{r}_{0,\xi} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

όπου χρησιμοποιείται η σχέση $\mathbf{r}_{0,\xi} = {}^0 \mathbf{V}_1 + \mathbf{u}_{0,\xi}$. Η αξονική τροπή είναι διαφορετική από την αντίστοιχη τροπή στο SR μοντέλο, δηλαδή την $\Gamma_\xi = \mathbf{V}_1^T \mathbf{r}_{0,\xi} - 1$, ενώ η διατμητική τροπή είναι η ίδια (δες 3.9 για τον ορισμό της υλικής μορφής της αξονικής/διατμητικής τροπής του SR μοντέλου). Επιπλέον, η συμβολή των τετραγώνων των καμπυλοτήτων στον ορισμό της αξονικής δύναμης δεν υπάρχει στην υλική μορφή της σχέσης 3.11. Αυτές οι μη-γραμμικές καμπυλότητες $K_{\zeta,nl,2}$; $K_{\eta,nl,2}$ είναι

$$K_{\zeta,nl,2}(\xi) = 0.5 \left| \left(\exp(\hat{\boldsymbol{\theta}})_{,\xi} \right)^0 \mathbf{V}_2 \right|^2 \quad (3.32)$$

$$K_{\eta,nl,2}(\xi) = 0.5 \left| \left(\exp(\hat{\boldsymbol{\theta}})_{,\xi} \right)^0 \mathbf{V}_3 \right|^2 \quad (3.33)$$

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

όπου η παράγωγος του τύπου Rodrigues $\exp(\hat{\theta})_{,\xi}$ δίνεται στην αναφορά [39].

Οι εσωτερικές ροπές, η ροπή στρέψης M_ξ γύρω από τον ξ άξονα και οι καμπτικές ροπές M_η και M_ζ γύρω από τους η και ζ άξονες, ταυτοποιούνται επίσης στις σχέσεις 3.24 και 3.25, και ορίζονται ως ακολούθως

$$M_\xi(\xi) = \int_{0A} (S_{\xi\zeta} \eta - S_{\xi\eta} \zeta) d^0A = k_\xi GI_p K_{\xi,nl,1} \quad (3.34)$$

$$M_\eta(\xi) = \int_{0A} S_{\xi\xi} \zeta d^0A = EI_\eta (K_{\eta,l} + K_{\eta,nl,1}) \quad (3.35)$$

$$M_\zeta(\xi) = - \int_{0A} S_{\xi\xi} \eta d^0A = EI_\zeta (K_{\zeta,l} + K_{\zeta,nl,1}) \quad (3.36)$$

όπου $GI_p = \int_{0A} G(\eta^2 + \zeta^2) d^0A$, k_ξ είναι ο συντελεστής διόρθωσης της στρέψης, ενώ τα 1Δ μέτρα τροπής $K_{\eta,l}$; $K_{\zeta,l}$ είναι οι γραμμικές συνιστώσες κατά μήκος του συστήματος $\xi\eta\zeta$ του διανύσματος στρεπτικής/καμπτικής καμπυλότητας \mathbf{K}_l που δίνεται ως

$$\mathbf{K}_l(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \\ \left(\exp(\hat{\theta})_{,\xi} {}^0\mathbf{V}_3 \right)^T \\ - \left(\exp(\hat{\theta})_{,\xi} {}^0\mathbf{V}_2 \right)^T \end{bmatrix} {}^0\mathbf{V}_1 \quad (3.37)$$

και $K_{\xi,nl,1}$; $K_{\eta,nl,1}$; $K_{\zeta,nl,1}$ είναι οι αντίστοιχες μη-γραμμικές συνιστώσες του διανύσματος της στρεπτικής/καμπτικής καμπυλότητας $\mathbf{K}_{nl,1}$ που δίνεται ως

$$\mathbf{K}_{nl,1}(\xi) = \begin{Bmatrix} \left(\exp(\hat{\theta}) {}^0\mathbf{V}_3 \right)^T \left(\exp(\hat{\theta})_{,\xi} {}^0\mathbf{V}_2 \right) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \\ \left(\exp(\hat{\theta})_{,\xi} {}^0\mathbf{V}_3 \right)^T \\ - \left(\exp(\hat{\theta})_{,\xi} {}^0\mathbf{V}_2 \right)^T \end{bmatrix} \mathbf{u}_{0,\xi} \quad (3.38)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις 3.37 και 3.38, προκύπτει το ακόλουθο διάνυσμα στρεπτικής/καμπτικής τροπής

$$\mathbf{K}(\xi) = \begin{Bmatrix} \left(\exp(\hat{\theta}) {}^0\mathbf{V}_3 \right)^T \left(\exp(\hat{\theta})_{,\xi} {}^0\mathbf{V}_2 \right) \\ \mathbf{r}_{0,\xi}^T \left(\exp(\hat{\theta})_{,\xi} {}^0\mathbf{V}_3 \right) \\ - \mathbf{r}_{0,\xi}^T \left(\exp(\hat{\theta})_{,\xi} {}^0\mathbf{V}_2 \right) \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

όπου ο όρος στρέψης είναι ίδιος με το μοντέλο SR, ενώ οι καμπτικοί όροι είναι διαφορετικοί, γιατί π.χ. $\mathbf{r}_{0,\xi}^T \left(\exp(\hat{\theta})_{,\xi} {}^0\mathbf{V}_3 \right) \neq {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_1^T \left(\exp(\hat{\theta})_{,\xi} {}^0\mathbf{V}_3 \right)$ όταν η διατμητική παραμόρφωση λαμβάνεται υπόψη (δες το αξονικό διάνυσμα της σχέσης 3.10 για τον ορισμό της υλικής μορφής της στρεπτι-

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

κής/καμπτικής καμπυλότητας για το SR μοντέλο δοκού).

Επιπλέον, η περαιτέρω συμβολή της μη-γραμμικότητας εμφανίζεται μέσω των όρων M_R [5, 23, 40]

$$M_R(\xi) = \int_{0_A} S_{\xi\xi} (\eta^2 + \zeta^2) d^0 A = EI_p (\Gamma_{\xi,l} + \Gamma_{\xi,nl}) + EI_{p\zeta} K_{\zeta,nl,2} + EI_{p\eta} K_{\eta,nl,2} + EI_{\zeta\eta} K_{\zeta\eta,nl,2} \quad (3.40)$$

όπου $EI_p = \int_{0_A} E(\eta^2 + \zeta^2) d^0 A$, $EI_{p\zeta} = \int_{0_A} E(\eta^2 + \zeta^2)\eta^2 d^0 A$, $EI_{p\eta} = \int_{0_A} E(\eta^2 + \zeta^2)\zeta^2 d^0 A$, $EI_{\zeta\eta} = \int_{0_A} E\eta^2\zeta^2 d^0 A$, ενώ το μη-γραμμικό μέτρο της καμπυλότητας $K_{\zeta\eta,nl,2}$ είναι

$$K_{\zeta\eta,nl,2}(\xi) = \left(\exp(\hat{\boldsymbol{\theta}})_{,\xi} {}^0 \mathbf{V}_2 \right)^T \left(\exp(\hat{\boldsymbol{\theta}})_{,\xi} {}^0 \mathbf{V}_3 \right) \quad (3.41)$$

Ο όρος M_R μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα τριών συνιστωσών

$$M_{R1}(\xi) = EI_\eta \Gamma_\xi + EI_{\zeta\eta} K_{\zeta,nl,2} + EI_{\eta 2} K_{\eta,nl,2} \quad (3.42)$$

$$M_{R2}(\xi) = EI_\zeta \Gamma_\xi + EI_{\zeta 2} K_{\zeta,nl,2} + EI_{\zeta\eta} K_{\eta,nl,2} \quad (3.43)$$

$$M_{R3}(\xi) = EI_{\zeta\eta} K_{\zeta\eta,nl,2} \quad (3.44)$$

όπου $EI_{\eta 2} = \int_{0_A} E\zeta^4 d^0 A$ και $EI_{\zeta 2} = \int_{0_A} E\eta^4 d^0 A$.

3.3.4 1Δ μεταβολές των μέτρων τροπής

Τα δυνατά μέτρα τροπής $\delta\Gamma_\xi$; $\delta\Gamma_\eta$; $\delta\Gamma_\zeta$ είναι οι συνιστώσες κατά μήκος του συστήματος $\xi\eta\zeta$ της μεταβολής του διανύσματος της αξονικής/διατμητικής τροπής $\boldsymbol{\Gamma}$ (3.31)

$$\delta\boldsymbol{\Gamma} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_{0,\xi}^T \delta\mathbf{r}_{0,\xi} \\ \mathbf{V}_2^T (\delta\mathbf{r}_{0,\xi} + \mathbf{r}_{0,\xi} \times \delta\boldsymbol{\psi}) \\ \mathbf{V}_3^T (\delta\mathbf{r}_{0,\xi} + \mathbf{r}_{0,\xi} \times \delta\boldsymbol{\psi}) \end{array} \right\} \quad (3.45)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση 3.45 με την αντίστοιχη σχέση του SR μοντέλου (3.15), υπάρχει μια διαφορά στον αξονικό όρο, δηλαδή $\mathbf{r}_{0,\xi}^T \delta\mathbf{r}_{0,\xi} \neq \mathbf{V}_1^T (\delta\mathbf{r}_{0,\xi} + \mathbf{r}_{0,\xi} \times \delta\boldsymbol{\psi})$, ενώ οι διατμητικοί όροι είναι ίδιοι.

Τα δυνατά μέτρα των καμπυλοτήτων δK_ξ ; δK_η ; δK_ζ είναι οι συνιστώσες κατα μήκος του συστήμα-

τος $\xi\eta\zeta$ της μεταβολής της στρεπτικής/καμπτικής καμπυλότητας \mathbf{K} (3.39)

$$\delta\mathbf{K} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_1^T \delta\boldsymbol{\psi}_{,\xi} \\ (\mathbf{V}_3 \times \mathbf{r}_{0,\xi})^T \delta\boldsymbol{\psi}_{,\xi} + \mathbf{V}_{3,\xi}^T (\delta\mathbf{r}_{0,\xi} + \mathbf{r}_{0,\xi} \times \delta\boldsymbol{\psi}) \\ - \left[(\mathbf{V}_2 \times \mathbf{r}_{0,\xi})^T \delta\boldsymbol{\psi}_{,\xi} + \mathbf{V}_{2,\xi}^T (\delta\mathbf{r}_{0,\xi} + \mathbf{r}_{0,\xi} \times \delta\boldsymbol{\psi}) \right] \end{array} \right\} \quad (3.46)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η σχέση $(\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3)^T = \mathbf{V}_1^T$. Από την σύγκριση της σχέσης 3.46 με το αντίστοιχο διάνυσμα στο SR μοντέλο (3.16), οι όροι κάμψης είναι διαφορετικοί, ενώ ο όρος συστροφής είναι ο ίδιος. Οι μη-γραμμικές καμπυλότητες $\delta K_{\eta,nl,2}$, $\delta K_{\zeta,nl,2}$; $\delta K_{\zeta\eta,nl,2}$ δεν υπάρχουν στο SR μοντέλο, και δίνονται ως εξής

$$\delta K_{\eta,nl,2} = (\mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_{3,\xi})^T \delta\boldsymbol{\psi}_{,\xi} \quad (3.47)$$

$$\delta K_{\zeta,nl,2} = (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_{2,\xi})^T \delta\boldsymbol{\psi}_{,\xi} \quad (3.48)$$

$$\delta K_{\zeta\eta,nl,2} = [(\mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_{2,\xi})^T + (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_{3,\xi})^T] \delta\boldsymbol{\psi}_{,\xi} \quad (3.49)$$

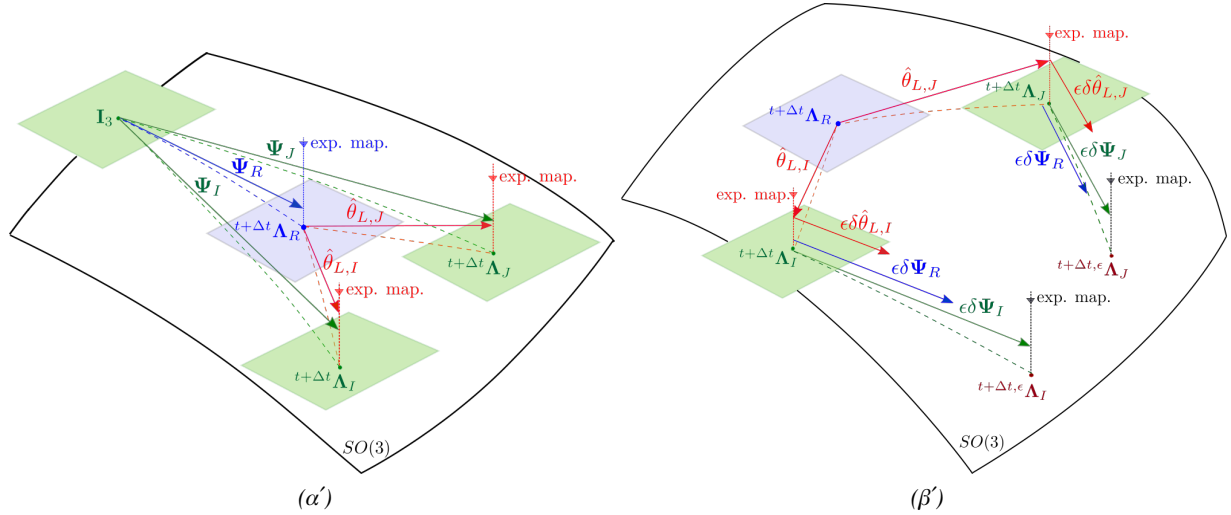
Σημείωση: Η κύρια διαφορά μεταξύ των θεωριών δοκού SR και GL είναι ότι οι συνιστώσες παραμόρφωσης στη θεωρία δοκού GL περιλαμβάνουν τους τετραγωνικούς όρους στις παραμορφώσεις $\boldsymbol{\Gamma}$ και καμπυλότητες \mathbf{K} , που δεν υπάρχουν στη θεωρία δοκού SR. Στις αναφορές [41, 42, 43], παρουσιάζεται η εξαγωγή της θεωρίας δοκού SR, ξεκινώντας από τις τροπές του μοντέλου GL και ακολουθώντας την υπόθεση της μικρής τοπικής παραμόρφωσης. Μια θεωρητική σύνδεση μεταξύ αυτών των δύο ορισμών τροπών δίνεται επίσης στο [44] (στο πλαίσιο της γεωμετρικά μη γραμμικής μοντελοποίησης δοκού), και στο [37] (στο πλαίσιο της μηχανικής του συνεχούς μέσου).

3.4 Αριθμητικά ζητήματα σχετικά με τις στροφές

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζονται η *επαναληπτική* (*iterative*) τεχνική [8], και η *αναλλοίωτη* (*invariant*) τεχνική [9] σχετικά με την αριθμητική επεξεργασία των στροφικών παραμέτρων. Μια γεωμετρική περιγραφή πάνω στην πολλαπλότητα των στροφών $SO(3)$ δείχνει πώς πρέπει να γίνει η ανανέωση (*update*) και η διαταραχή (*perturbation*) του προσανατολισμού στις δύο τεχνικές. Στην *αναλλοίωτη* (*invariant*) διατύπωση, αντί η ανανέωση να γίνει ως προς την τρέχουσα γεωμετρία, όπως γίνεται στην *επαναληπτική* (*iterative*) περίπτωση, αυτή εκτελείται ως προς μια *ενδιάμεση* γεωμετρία που ορίζεται από τον προσανατολισμό ολόκληρου του στοιχείου δοκού.

3.4.1 Η ανανέωση και η διαταραχή του προσανατολισμού στο $t + \Delta t$

Στα Σχήματα 3.2α' και 3.2β', παρουσιάζεται η γεωμετρική δομή ως ομαλή πολλαπλότητα της ομάδας στροφών $SO(3)$. Θεωρείται ότι το μοντέλο δοκού έχει δύο κόμβους, τον κόμβο αρχής I και τον κόμβο



Σχήμα 3.2: Αναλλοίωτη (invariant) διατύπωση [9]: (α') ανανέωση, και (β') διαταραχή του προσανατολισμού της διατομής των I – και J – κόμβων.

τέλους J . Στο Σχήμα 3.2α', εμφανίζεται η ανανέωση (update) του προσανατολισμού των κόμβων I και J . Τα “πράσινα” εφαπτόμενα επίπεδα αντιστοιχούν σε δύο προσανατολισμούς, τον σταθερό και το παραμορφωμένο στο $t + \Delta t$, που εκφράζεται από τα μητρώα I_3 και ${}^{t+\Delta t}\Lambda_i$; $i = I, J$, αντίστοιχα, ενώ το “μπλε” εφαπτόμενο επίπεδο αντιστοιχεί στον ενδιάμεσο προσανατολισμό του στοιχείου, ${}^{t+\Delta t}\Lambda_R$ στο $t + \Delta t$ (ο δεξιός δείκτης R σημαίνει Άκαμπτο, από την στροφή του στερεού σώματος). Ο πίνακας που περιγράφει την περιστροφή των διατομών, ψ_i , αποσυντίθεται σε έναν πίνακα που εκφράζει την περιστροφή του στοιχείου, ψ_R και έναν πίνακα που εκφράζει την τοπική (σχετική με το στοιχείο) στροφή διατομών, $\theta_{L,i}$. Για τον υπολογισμό της στροφής στο σημείο Gauss, η παρεμβολή χρησιμοποιείται μόνο για τις τοπικές στροφές των κόμβων. Αυτό επιτρέπεται γιατί η παρεμβολή εκτελείται σε έναν Ευκλείδειο χώρο (τον χώρο που συμβολίζεται με το “μπλε” εφαπτόμενο επίπεδο στο ${}^{t+\Delta t}\Lambda_R$). Η παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία απεικονίζεται στην ακόλουθη σχέση [9]

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{\Lambda}(\xi) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{\Lambda}_R \exp\left(\hat{\theta}_L(\xi)\right) \quad (3.50)$$

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

Στο Σχήμα 3.2β', εμφανίζεται η διαταραχή του προσανατολισμού της διατομής στους κόμβους I και J . Στην αναλλοίωτη (*invariant*) διατύπωση, αντί να χρησιμοποιηθούν οι απειροελάχιστες περιστροφές $\delta\psi_i; i = I, J$ για την διαταραχή αυτών των προσανατολισμών στο $t + \Delta t$, όπως στην επαναληπτική (*iterative*) διατύπωση, αυτές αποσυντίθενται στις απειροελάχιστες τοπικές στροφές $\delta\theta_{L,i}$ και την απειροελάχιστη περιστροφή $\delta\psi_R$ του στοιχείου. Μαθηματικά από τον κανόνα της αλυσίδας που εφαρμόζεται στην Σχέση (3.50) [9]:

$${}^{t+\Delta t, \epsilon} \mathbf{\Lambda}(\xi) = \exp(\epsilon \delta \Psi_R) {}^{t+\Delta t} \mathbf{\Lambda}(\xi) + {}^{t+\Delta t} \mathbf{\Lambda}_R \exp\left(\hat{\theta}_L(\xi) + \epsilon \delta \hat{\theta}_L(\xi)\right) \quad (3.51)$$

όπου $\delta \Psi_R(\xi)$, $\delta \hat{\theta}_L(\xi)$ είναι αντι-συμμετρικά τανυστικά πεδία, που ερμηνεύονται για $\epsilon > 0$, ως η υπερτιθέμενη απειροελάχιστη περιστροφή του στοιχείου πάνω στον προσανατολισμό της διατομής στο $t + \Delta t$ και ως η υπερτιθέμενη απειροελάχιστη τοπική στροφή πάνω στον προσανατολισμό του στοιχείου στο $t + \Delta t$, αντίστοιχα. Και πάλι, η παρεμβολή των απειροελάχιστων τοπικών στροφών $\delta\theta_{L,i}$ γίνεται σε έναν Ευκλείδειο χώρο στον οποίο ανήκουν αυτές οι ποσότητες. Αντικαθιστώντας τη Σχέση 3.7 στο αριστερό μέλος της Σχέσης 3.51, χρησιμοποιώντας την κατευθυντική παράγωγο ως προς ϵ στην Σχέση 3.51, για $\epsilon = 0$, και μετά από μερικές αλγεβρικές πράξεις, παράγεται η σχέση μεταξύ των τριών απειροελάχιστων παραμέτρων, της συνολική περιστροφής $\delta\psi(\xi)$, της περιστροφής του στοιχείου $\delta\psi_R$ και της τοπικής στροφής $\delta\theta_L(\xi)$ [9]:

$$\delta\psi(\xi) = \delta\psi_R + {}^{t+\Delta t} \mathbf{\Lambda}_R \mathbf{T}(\theta_L(\xi)) \delta\theta_L(\xi) \quad (3.52)$$

όπου $\delta\psi(\xi), \delta\psi_R \in \mathbb{R}^3 \cong T_{t+\Delta t} \mathbf{\Lambda} SO(3)$, ενώ $\delta\theta_L(\xi) \in \mathbb{R}^3 \cong T_{t+\Delta t} \mathbf{\Lambda}_R SO(3)$ και $\mathbf{T}(\theta_L(\xi)) \delta\theta_L(\xi) \in \mathbb{R}^3 \cong T_{t+\Delta t} \mathbf{\Lambda} SO(3)$ (όπου \cong αντιπροσωπεύει έναν ισομορφισμό). Προ-πολλαπλασιάζοντας αυτήν την έκφραση με το ${}^{t+\Delta t} \mathbf{\Lambda}_R$, το διάνυσμα της απειροελάχιστης, τοπικής στροφής δίνεται σε καθολικές συνιστώσες. Ο εφαπτομενικός μετασχηματισμός $\mathbf{T}(\theta_L)$ δίνεται απο την παρακάτω σχέση [3, 12, 45]

$$\mathbf{T}(\theta_L) = \frac{\sin\theta_L}{\theta_L} \mathbf{I} + \frac{1 - \cos\theta_L}{\theta_L^2} \hat{\theta}_L + \frac{\theta_L - \sin\theta_L}{\theta_L^3} \theta_L \otimes \theta_L \quad (3.53)$$

3.5 Αριθμητικά αποτελέσματα

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζονται δύο αριθμητικά παραδείγματα στον τριδιάστατο χώρο για την σύγκριση των δύο γεωμετρικά μη-γραμμικών μοντέλων δοκού, του SR και του GL μοντέλων δοκού. Η

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

σύγκριση αφορά στις μετατοπίσεις και εσωτερικές δυνάμεις της δοκού, καθώς και στην προσέγγιση των μέτρων τροπής στο εσωτερικό των στοιχείων δοκού. Επιπλέον, εξετάζεται η απόκριση του προτεινόμενου *αναλλοίωτου* μοντέλου GL μέσω της σύγκρισης με το *αναλλοίωτο* μοντέλο SR. Για την ανάλυση/επίλυση με Πεπερασμένα Στοιχεία χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι: έλεγχος φορτίου (*load control*), έλεγχος μετατόπισης (*displacement control*) και έλεγχος μήκους τόξου (*arc-length control* [46, 47, 48, 49]). Επίσης, εφαρμόζεται μειωμένη αριθμητική ολοκλήρωση με ένα σημείο Gauss καθώς τα στοιχεία δοκού είναι γραμμικά. Χρησιμοποιείται η πλήρης επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson και η σύγκλιση στην λύση επιτυγχάνεται όταν η μία ή και οι δύο σχετικές νόρμες του υπόλοιπου της δύναμης και της μετατόπισης μειώνονται στην ανοχή δ_f και δ_u αντίστοιχα [9, 36], δηλαδή

$$100 \left\| {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{int}^{(\kappa-1)} \right\|_2 < \delta_f \left\| {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F}_{int} \right\|_2 \quad (3.54)$$

όπου το αριστερό μέλος αντιστοιχεί στην Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος του εναπομείναντος φορτίου στην επανάληψη κ , ενώ το δεξί μέλος αντιστοιχεί στην Ευκλείδεια νόρμα του εναπομείναντος φορτίου στο πρώτο βήμα φόρτισης.

$$100 \left\| d\mathbf{u}_{0i} \right\|_2 < \delta_u \left\| \mathbf{u}_{0i} \right\|_2 \quad (3.55)$$

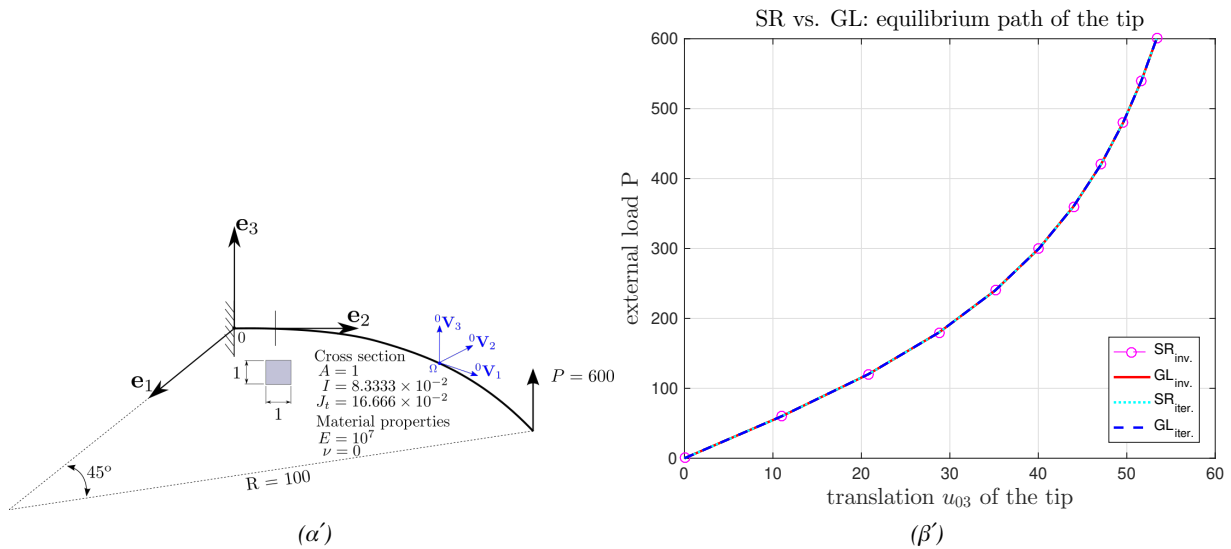
όπου τα διανύσματα $d\mathbf{u}_{0i}$ και \mathbf{u}_{0i} εκφράζουν την διορθωτική και την ολική μετατόπιση των κόμβων, αντίστοιχα. $i = 1 \dots 3N$, όπου N είναι ο αριθμός των κόμβων.

3.5.1 Καμπύλος πρόβολος 45 μοιρών

Αυτό το παράδειγμα έχει προταθεί στην αναφορά [50], ενώ αρκετοί ερευνητές το έχουν χρησιμοποιήσει για να αξιολογήσουν την απόδοση των προτεινόμενων μοντέλων δοκού (βλέπε π.χ. [8, 35, 51, 52, 53, 54]). Μελετάται ο καμπύλος πρόβολος 45 μοιρών που υπόκειται σε σταθερό φορτίο στο άκρο και η διατομή του οποίου έχει τις γεωμετρικές και υλικές ιδιότητες που φαίνονται στο Σχήμα 3.3α'. Το μέλος διαιρείται σε 8 ισομεγέθη, δικομβικά, ευθύγραμμα στοιχεία δοκού. Η σύγκλιση της λύσης των Πεπερασμένων Στοιχείων επιτυγχάνεται όταν $\delta_f = \delta_u = 10^{-7}$.

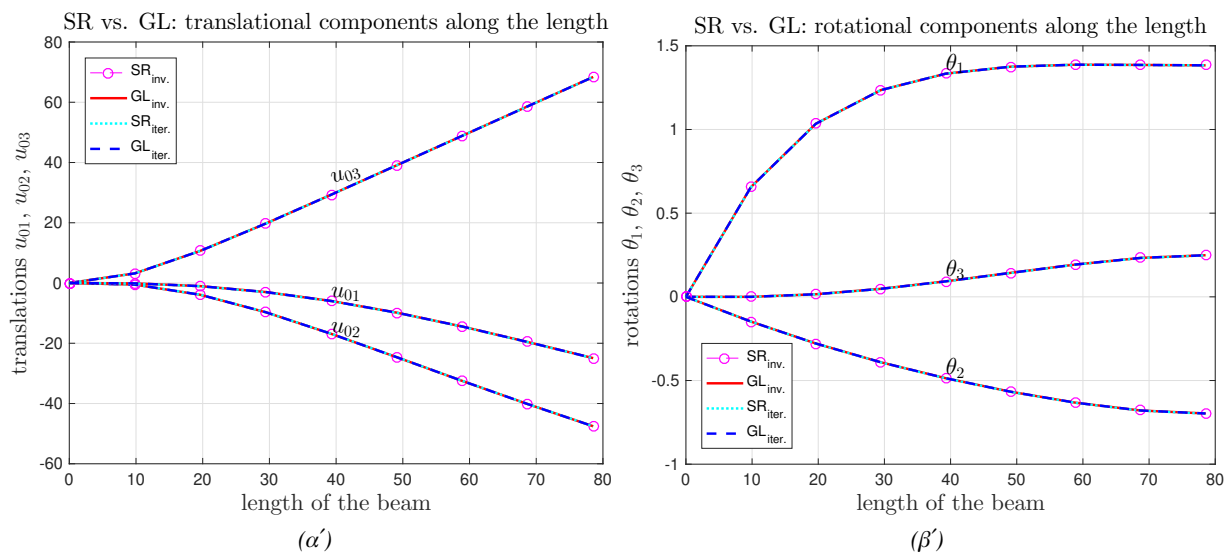
Τα Σχήματα 3.3 και 3.4 έχουν προκύψει χρησιμοποιώντας 10 βήματα φόρτισης, αν και το πρόβλημα έχει επίσης αναλυθεί χρησιμοποιώντας 3 βήματα φόρτισης (βλέπε Πίνακα 3.1). Ο δρόμος ισορροπίας του άκρου για την κατακόρυφη μετατόπιση u_{03} απεικονίζεται στο Σχήμα 3.3β' για τα μοντέλα SR και GL, τόσο για την *αναλλοίωτη* (*invariant*) τεχνική όσο και για την *επαναληπτική* (*iterative*) τε-

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία



Σχήμα 3.3: Καμπύλος πρόβολος 45 μοιρών: (α') δεδομένα προβλήματος και (β') διάγραμμα φορτίου-κατακόρυφης μετατόπισης του άκρου.

χνική. Μπορεί κανείς να δει ότι δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ τους. Οι ίδιες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν από τα Σχήματα 3.4 όπου φαίνονται οι μετατοπίσεις και οι στροφές κατά μήκος της δοκού. Στον Πίνακα 3.1 δίνονται οι 3 συνιστώσες της μετατόπισης του άκρου της δοκού, u_{01} ; u_{02} ; u_{03} ,



Σχήμα 3.4: Καμπύλος πρόβολος 45 μοιρών: (α') μετακινήσεις και (β') στροφές κατά μήκος της δοκού.

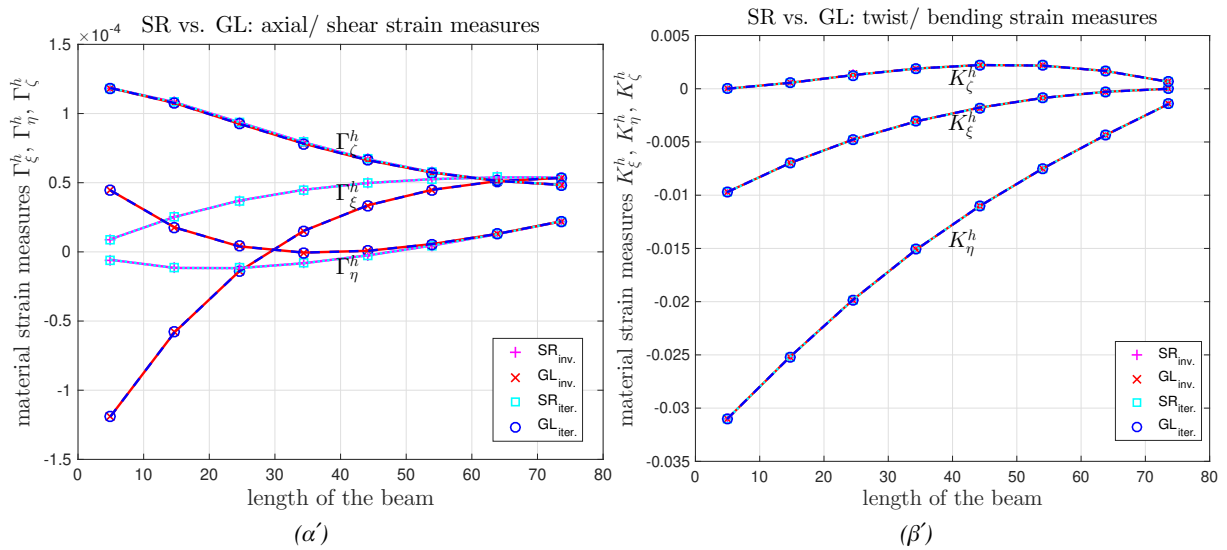
όταν το φορτίο έχει φτάσει στην τελική του τιμή, δηλαδή 600, για την *αναλλοίωτη* (*invariant*) και την *επαναληπτική* (*iterative*) υλοποίηση του SR και GL μοντέλου. Τα αποτελέσματα είναι πανομοι-

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

Πίνακας 3.1: Καμπύλος πρόβολος 45 μοιρών: τελικές συνιστώσες της μετακίνησης του άκρου.

διατύπωση	βήματα/επαναλήψεις	u_{01}	u_{02}	u_{03}
SR _{inv.}	10/73	-13.48243 /	-23.47852 /	53.37099 /
	3/43	-13.48243	-23.47852	53.37099
GL _{inv.}	10/79	-13.48397 /	-23.48420 /	53.37284 /
	3/35	-13.48397	-23.48420	53.37284
SR _{iter.}	10/66	-13.48745 /	-23.47779 /	53.36930 /
	3/41	-13.49192	-23.47703	53.36559
GL _{iter.}	10/72	-13.48899 /	-23.48348 /	53.37114 /
	3/33	-13.48995	-23.48339	53.37090

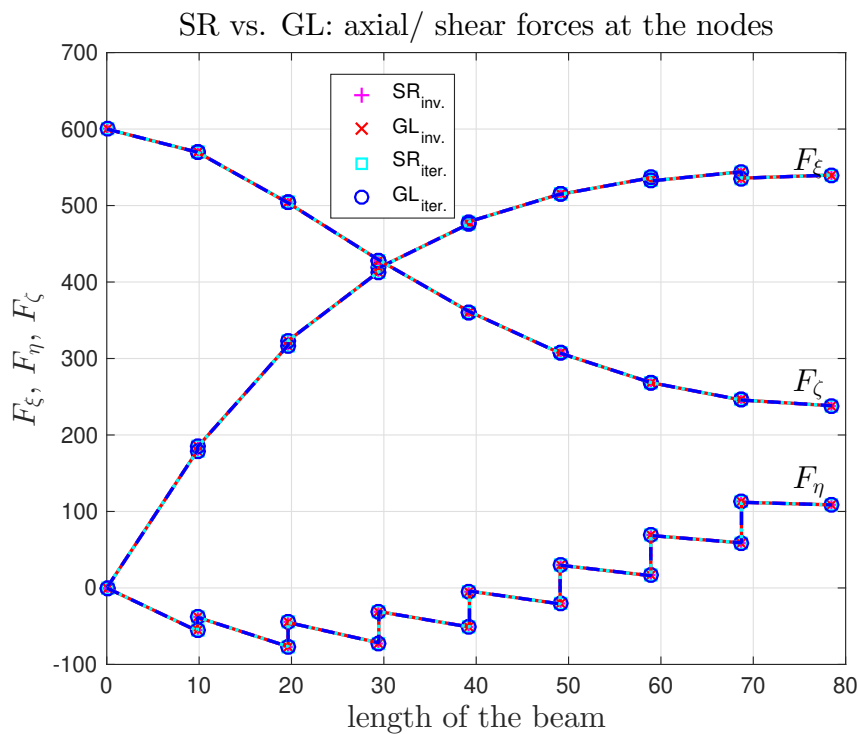
ότυπα, είτε στην περίπτωση των 10 βημάτων είτε στην περίπτωση των 3 βημάτων, για τα μοντέλα SR_{inv.} και GL_{inv.}, ενώ δεν είναι ακριβώς τα ίδια για τις επαναληπτικές (iterative) διατυπώσεις. Αυτή η παρατήρηση επιβεβαιώνει ότι η ενσωμάτωση της αναλλοίωτης επεξεργασίας των στροφών στο μοντέλο GL, προσφέρει στο μοντέλο την ιδιότητα της ανεξαρτησίας του αποτελέσματος από την διαδρομή που ακολουθήθηκε (path-independence). Επιπλέον, το μοντέλο GL συγκλίνει στη σωστή λύση σε παρόμοιο αριθμό επαναλήψεων σε σύγκριση με το μοντέλο SR, και επίσης, οι επαναληπτικές (iterative) υλοποιήσεις συγκλίνουν στη λύση σε λίγο μικρότερο αριθμό επαναλήψεων σε σύγκριση με την αντίστοιχη αναλλοίωτη (invariant) υλοποίηση. Τέλος, στα Σχήματα 3.5α', 3.5β' μπορεί κανείς να δει τον υπολογισμό της αξονικής/διατμητικής και στρεπτικής/καμπτικής παραμόρφωσης κατά μήκος της δοκού. Τα αποτελέσματα για το SR_{inv.} και SR_{iter.} μοντέλο συμπίπτουν. Το ίδιο ισχύει



Σχήμα 3.5: Καμπύλος πρόβολος 45 μοιρών: (α') αξονική/διατμητικές και (β') στρεπτική/καμπτικές τροπές κατά μήκος της δοκού.

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

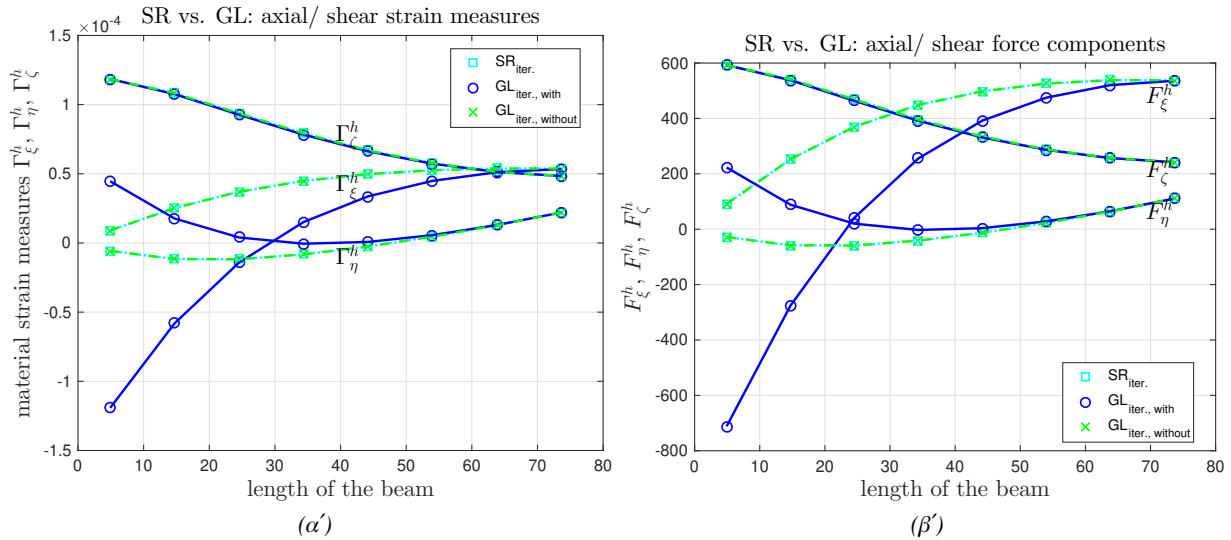
για τα μοντέλα $GL_{inv.}$ και $GL_{iter.}$. Η αξονική παραμόρφωση Γ_{ξ}^h , και μια από τις δύο συνιστώσες της διάτμησης Γ_{η}^h , διαφέρουν στα μοντέλα SR και GL, και στις δύο υλοποιήσεις (*αναλλοίωτη* κι *επαναληπτική*). Η διαφορά γίνεται σταδιακά μεγαλύτερη προς τη στήριξη του προβόλου. Το μοντέλο GL παρουσιάζει μια απόκλιση από τη μηδενική τιμή τόσο για την αξονική όσο και για την διατμητική παραμόρφωση. Μετά την αριθμητική ολοκλήρωση κατά μήκος, η συνολική ισορροπία ικανοποιείται για όλα τα μοντέλα όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.6. Αυτές οι κατανομές μοιάζουν πολύ



Σχήμα 3.6: Καμπύλος πρόβολου 45 μοιρών: κομβικές τιμές της αξονικής/διατμητικών δυνάμεων κατά μήκος της δοκού.

με αυτές που δημοσιεύτηκαν στο [51]. Οι όροι που είναι υπεύθυνοι για τη διαφορετική συμπεριφορά των μοντέλων SR και GL στο σημείο Gauss περιέχονται στα F_{ξ} , δK_{η} και δK_{ζ} . Συγκεκριμένα, είναι ο δεύτερος και ο τρίτος όρος της Σχέσης 3.26 και οι δεύτεροι όροι στο δεύτερο και τρίτο στοιχείο της Σχέσης 3.46. Στα Σχήματα 3.7α' και 3.7β', φαίνεται η επαναληπτική υλοποίηση για τα μοντέλα SR και GL, με και χωρίς τους παραπάνω όρους. Αν κανείς σβήσει αυτούς τους όρους η προσέγγιση των μέτρων τροπής και των εσωτερικών δυνάμεων στο σημείο Gauss δεν παρουσιάζει σχεδόν καμία διαφορά ανάμεσα στα δύο μοντέλα. Ωστόσο, με την παράλειψη αυτών των όρων χάνει κανείς την συμβατότητα με την τριδιάστατη διατύπωση, και αυτό έχει ως αποτέλεσμα έναν αυξημένο αριθμό επαναλήψεων για την επίτευξη της σύγκλισης, π.χ. τα βήματα/επαναλήψεις είναι

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

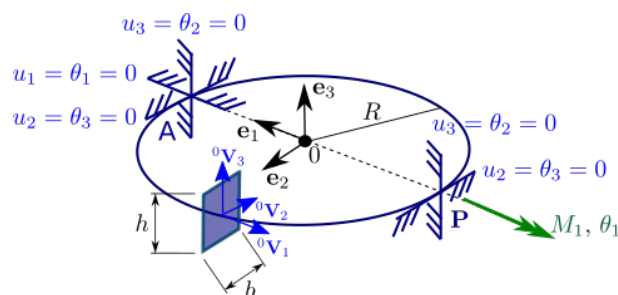


Σχήμα 3.7: Καμπύλος πρόβολος 45 μοιρών: προσέγγιση της (α') αξονικής/διατμητικών και (β') στρεπτικής/καμπτικών τροπών κατά μήκος της δοκού.

10/118 αντί να είναι 10/72 (3.1), για το μοντέλο $GL_{iter.}$. Όσον αφορά στους όρους καμπυλότητας, είναι πολύ παρόμοιοι για όλα τα μοντέλα. Σημειώνεται ότι έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί 16 και 32 στοιχεία, και η κατανομή των μέτρων τροπής κατά μήκος δεν αλλάζει.

3.5.2 Κυκλικό δαχτυλίδι

Το συγκεκριμένο παράδειγμα που αφορά σε ένα κυκλικό δαχτυλίδι που αναδιπλώνεται παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην αναφορά [55] όπου διερευνάται το φαινόμενο του ελαστικού λυγισμού μη ευθύγραμμου μέλους. Το μοντέλο φαίνεται στο Σχήμα 3.8. Το χωρικό πλαίσιο e τοποθετείται



Σχήμα 3.8: Κυκλικό δαχτυλίδι: δομικό μοντέλο.

στο κέντρο του δακτυλίου. Ο δακτύλιος έχει ακτίνα $R = 20$ και υποστηρίζεται πλήρως σε ένα σημείο της περιφέρειας του, ενώ στον αντίποδα P είναι ελεύθερο να κινηθεί και να περιστραφεί κατά μήκος και γύρω από την διεύθυνση που ορίζεται από το διάνυσμα e_1 της χωρικής βάσης. Σε

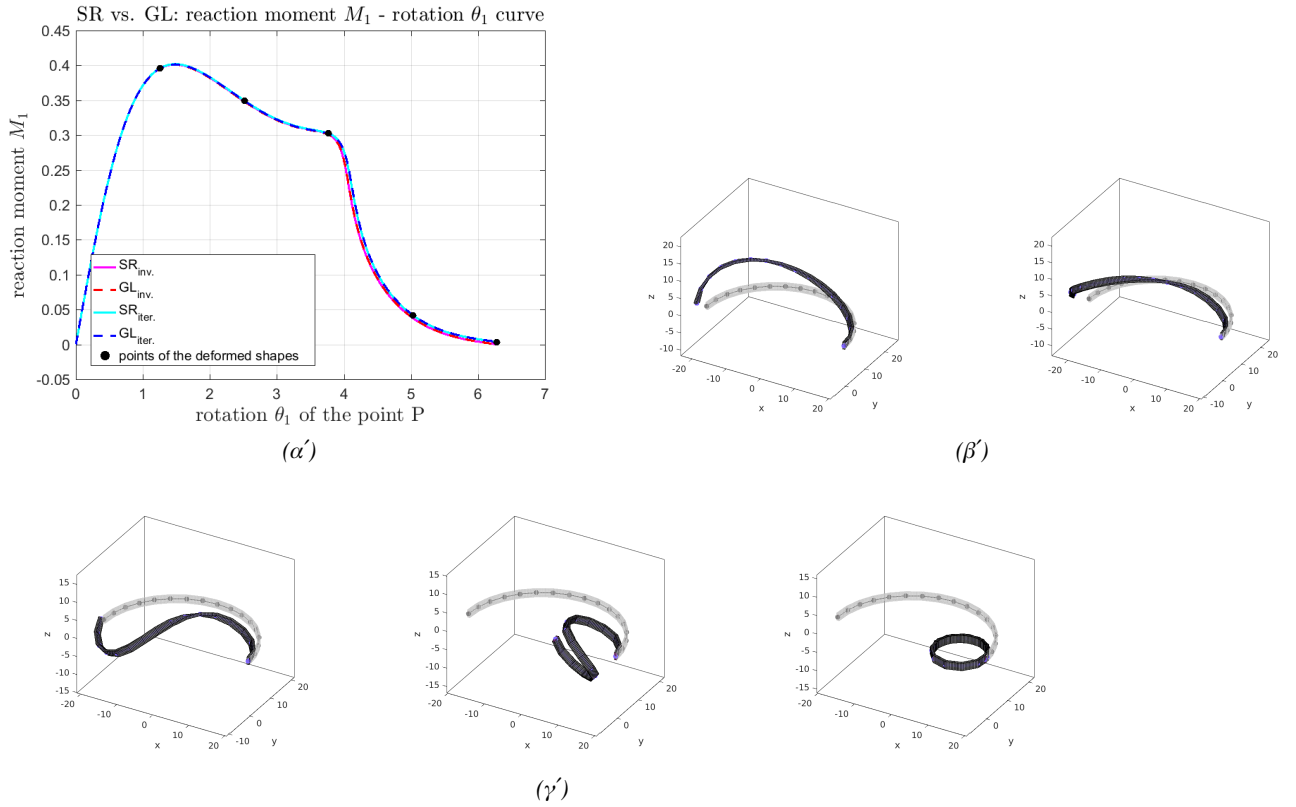
Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

αυτό το σημείο εφαρμόζεται μια ροπή M_1 ή μια προδιαγεγραμμένη στροφή θ_1 . Η διατομή είναι ορθογώνια με πλάτος b και ύψος h όπου $\frac{h}{b} = 3 > 1.51$, και το αποτέλεσμα είναι το δαχτυλίδι να αναδιπλωθεί σε νέο δαχτυλίδι με τρεις φορές μικρότερη διάμετρο [55]. Αναλύεται το μισό μοντέλο. Έχουν χρησιμοποιηθεί δύο μέθοδοι με τα ίδια αποτελέσματα: α) εφαρμογή της μισής ροπής σε συνδυασμό με τη μέθοδο ελέγχου μήκους τόξου και β) επιβολή στροφής μεγέθους 2π σε συνδυασμό με τη μέθοδο ελέγχου μετατόπισης. Χρησιμοποιούνται 16 στοιχεία. Ως κριτήρια σύγκλισης χρησιμοποιούνται οι σχετικές νόρμες του εναπομείναντος φορτίου και της μετατόπισης, ενώ η αντίστοιχη ανοχή ισούται με 10^{-6} .

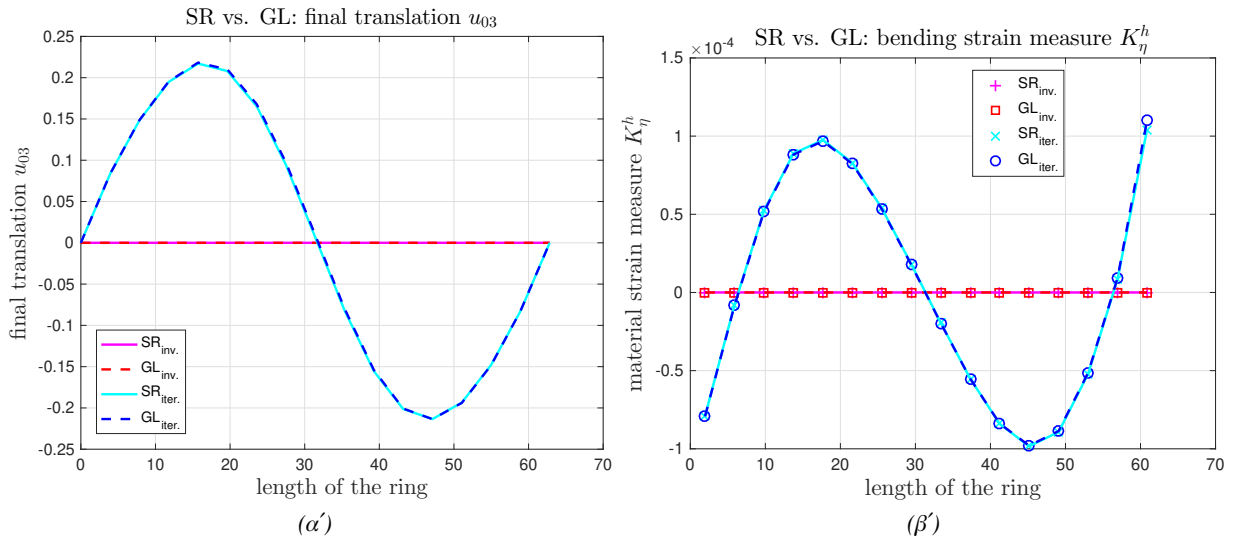
Στο Σχήμα 3.9α', φαίνεται η καμπύλη αντίδρασης της ροπής και στροφής στο σημείο P για τα μοντέλα SR και GL, ενώ στα Σχήματα 3.9β' και 3.9γ' φαίνονται τα παραμορφωμένα σχήματα σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές που αντιστοιχούν στα σημεία του Σχήματος 3.9α' που έχουν επισημανθεί με μαύρες τελείες. Τα αποτελέσματα είναι πολύ παρόμοια για καθένα από τα δύο ζεύγη, τα SR_{inv} και GL_{inv} και SR_{iter} και GL_{iter} μοντέλα δοκού. Επιπλέον, τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με αυτά της λύσης αναφοράς [55]. Όσον αφορά στο τελευταίο παραμορφωμένο σχήμα, η κατασκευή ισορροπεί κάτω από μηδενικό εξωτερικό φορτίο. Πράγματι, στο Σχήμα 3.9α', φαίνεται ότι το τελευταίο σημείο του γραφήματος αντιστοιχεί σε μηδενική ροπή. Στην *αναλλοίωτη* υλοποίηση, οι τιμές είναι $-6,31 \times 10^{-11}$ και $-1,50 \times 10^{-11}$, για τα μοντέλα SR και GL, αντίστοιχα, ενώ στις *επαναληπτικές* τους διατυπώσεις η αντίδραση έχει τη μικρή τιμή $3,52 \times 10^{-03}$. Αυτή η παρατήρηση επιβεβαιώνει τις ιδιότητες της *αναλλοίωτης* και της *επαναληπτικής* υλοποίησης. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει κανείς κοιτάζοντας το Σχήμα 3.10α', όπου σχεδιάζονται οι τελικές μετακινήσεις u_{03} κατά μήκος της μισής περιφέρειας του δακτυλίου που προκύπτουν από την μέθοδο ελέγχου μετατόπισης. Σε αυτό το γράφημα, μπορεί κανείς να δει ότι δεν υπάρχει σφάλμα για την *αναλλοίωτη* τεχνική (ευθεία γραμμή στο μηδέν), ενώ για την *επαναληπτική* τεχνική δεν ισχύει το ίδιο. Όσον αφορά τα μέτρα τροπής, μπορούν να εξαχθούν δύο συμπεράσματα παρατηρώντας τα αποτελέσματα στα Σχήματα 3.10β' και 3.11:

- στο 3.10β', απεικονίζεται το ίδιο μοτίβο με αυτό του 3.10α', όπου δίνεται η προσέγγιση στο σημείο Gauss της τελικής καμπυλότητας K_{η}^h για τις δύο παραλλαγές των μοντέλων δοκού SR και GL. Αυτό δείχνει και πάλι την υπεροχή της *αναλλοίωτης* διατύπωσης.
- στο 3.11, φαίνεται η προσέγγιση στο σημείο Gauss της τελικής αξονικής τάσης Γ_{ξ}^h κατά μήκος των στοιχείων. Υπάρχει μια μικρή απόκλιση από το μηδέν για τα μοντέλα GL, ενώ χρησιμοποιώντας τα μοντέλα SR το μέτρο της αξονικής τροπής Γ_{ξ}^h είναι ακριβώς μηδέν.

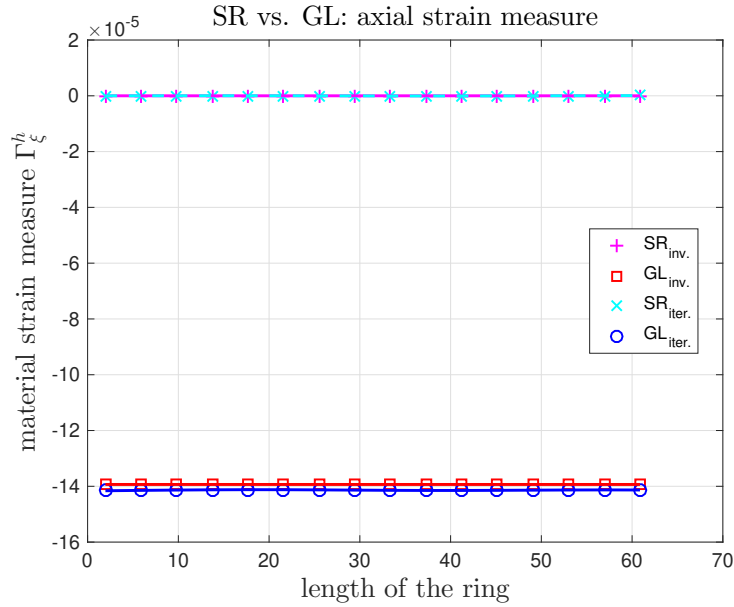
Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία



Σχήμα 3.9: Κυκλικό δαχτυλίδι με $\frac{h}{b} = 3$: (α') ροπή αντίδρασης M_1 - στροφή θ_1 του σημείου P για τα μοντέλα SR και GL, και (β') - (γ') παραμορφωμένα σχήματα στα επιλεγμένα σημεία.



Σχήμα 3.10: Κυκλικό δαχτυλίδι με $\frac{h}{b} = 3$: (α) τελικές μετακινήσεις u_{03} και (β) τελική συνιστώσα καμπυλότητας K_{η}^h κατά μήκος της μισής περιφέρειας.



Σχήμα 3.11: Κυκλικό δαχτυλίδι με $\frac{h}{b} = 3$: τελική συνιστώσα τροπής Γ_{ξ}^h κατά μήκος της μισής περιφέρειας.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι επαναλήψεις που απαιτούνται για να συγκλίνει στη σωστή λύση τα μοντέλα SR όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος ελέγχου μετατόπισης με 200 βήματα για την ολοκλήρωση ολόκληρης της περιστροφής 2π , είναι 1000 για την επαναληπτική διατύπωση και 1058 για την αναλλοίωτη διατύπωση. Οι αντίστοιχες τιμές για το μοντέλο δοκού GL είναι 1270 και 1311, αντίστοιχα. Τα παραπάνω επηρεάζουν το υπολογιστικό κόστος, δηλαδή το επαναληπτικό μοντέλο SR χρειάζεται $cpu\ time = 619,3$ μονάδες χρόνου με επεξεργαστή Intel Core i3 CPU M370 @2,40GHz $\times 4$, ενώ το αντίστοιχο μοντέλο GL χρειάζεται ελαφρώς αυξημένο χρόνο κατά περίπου 4%. Το αναλλοίωτο μοντέλο SR χρειάζεται $cpu\ time = 656,42$ μονάδες χρόνου, ενώ το αντίστοιχο μοντέλο GL χρειάζεται αυξημένο χρόνο κατά περίπου 10%.

3.6 Συμπεράσματα

Δύο μοντέλα για μη-γραμμικότητα γεωμετρίας 3D δοκών με διατμητική παραμόρφωση και με μικρές παραμορφώσεις παρουσιάζονται και συγκρίνονται μεταξύ τους. Το πρώτο είναι το μοντέλο Simo-Reissner (μοντέλο SR), ενώ το δεύτερο είναι η 1D διατύπωση του εκφυλισμένου μοντέλου συνεχούς μέσου που χρησιμοποιεί τις τροπές Green-Lagrange (μοντέλο GL). Η παρουσίαση του μοντέλου έγινε με τρόπο ώστε να μπορεί κανείς να έχει μια σαφή σύγκριση με το μοντέλο SR. Δύο διαφορετικές (όσον αφορά τις στροφές) υλοποιήσεις, η επαναληπτική (iterative) και η αναλλοίωτη (invariant),

Κεφάλαιο 3. Θεωρία δοκού με μεγάλες στροφές και η διατύπωση με Πεπερασμένα Στοιχεία

αναπτύσσονται και συγκρίνονται για τα δύο μοντέλα. Η γεωμετρική απεικόνιση που δίνεται στην πολλαπλότητα των στροφών $SO(3)$ διευκρινίζει τον τρόπο δημιουργίας ενός αναλλοίωτου 3D στοιχείου δοκού με μεγάλες στροφές: θα πρέπει να αναφερθεί κανείς στον ίδιο εφαπτόμενο χώρο στο $SO(3)$ όταν εκτελείται η παρεμβολή.

Προκύπτουν τέσσερις παραλλαγές μιας γεωμετρικά μη-γραμμικής διατύπωσης Πεπερασμένων Στοιχείων (SR invariant, GL invariant, SR iterative, GL iterative). Τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνουν το προτεινόμενο *αναλλοίωτο* μοντέλο GL με τα άλλα τρία μοντέλα Πεπερασμένων Στοιχείων καθώς και τα μέτρα των τροπών τους. Τα κύρια συμπεράσματα είναι:

- Το μοντέλο GL δίνει διαφορετική προσέγγιση των τροπών στο εσωτερικό των στοιχείων σε σύγκριση με το μοντέλο SR λόγω των επιπλέον όρων. Επαληθεύεται αριθμητικά ότι το μοντέλο SR ταιριάζει καλύτερα σε μια θεώρηση μεγάλων μετατοπίσεων και μικρών τροπών.
- Η ενσωμάτωση στο μοντέλο GL της διαδικασίας ανανέωσης που χωρίζει τη στροφή σε ένα τμήμα στροφής άκαμπτου σώματος και ένα τμήμα τοπικής στροφής της διατομής, προσφέρει τις ιδιότητες της *αναλλοίωτης* υλοποίησης. Αυτή η υλοποίηση μπορεί να συνδυαστεί με όλα τα μοντέλα δοκού που χρησιμοποιούν παραμέτρους στροφής ως αγνώστους.
- Η *αναλλοίωτη* διατύπωση, είτε στο μοντέλο SR είτε στο μοντέλο GL, είναι πιο κατάλληλη για προβλήματα με μεγάλες στροφές.
- Τα μοντέλα δοκού SR και GL απαιτούν παρόμοιο υπολογιστικό κόστος για να συγκλίνουν στη σωστή λύση.

4 Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται η διερεύνηση δύο σχημάτων χρονικής ολοκλήρωσης στο πλαίσιο των μεγάλων στροφών στον χώρο. Το πρόβλημα που επιλέγεται για αυτή την διερεύνηση είναι το γνωστό παράδειγμα της βαριάς συμμετρικής κορυφής (*heavy symmetrical top*) [56]. Οι αλγόριθμοι ολοκλήρωσης στον χρόνο που ενδιαφέρουν είναι οι ακόλουθοι:

- ο αλγόριθμος των Simo & Vu-Quoc [3]
- ο αλγόριθμος του Mäkinen [14] και δύο παραλλαγές του, ο αλγόριθμος των Cardona & Géradin [12], και μια ακόμη παραλλαγή που αφορά στην συνέπεια με τις σχέσεις Newmark ως προς τον τρόπο με τον οποίο παράγονται οι γραμμικοποιημένες εκφράσεις και η ανανέωση κατά την επαναληπτική διαδικασία.

Οι παραπάνω τεχνικές έχουν το ακόλουθο κοινό χαρακτηριστικό: Εφαρμόζουν την ισορροπία τη χρονική στιγμή t_{n+1} , όπου διατυπώνεται κι επιλύεται η εξίσωση του ρυθμού της ορμής. Επομένως, θεωρούνται αλγόριθμοι τύπου Newmark [11]. Ωστόσο, το κίνητρο της μελέτης και των δύο είναι ότι ο πρώτος αλγόριθμος [3] χρησιμοποιεί το σχήμα Newmark για τις γωνιακές ταχύτητες και επιταχύνσεις, ενώ ο δεύτερος αλγόριθμος [12, 14] χρησιμοποιεί το σχήμα Newmark για την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο του διανύσματος στροφής, αντίστοιχα.

4.2 Δυναμική του στερεού σώματος - Εξίσωση κίνησης

Η εξίσωση του Euler για το στερεό σώμα σε υλικές συντεταγμένες είναι [56, 57]:

$$J\dot{\mathbf{A}} + \mathbf{\Omega} \times J\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{m} \quad (4.1)$$

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο

όπου \mathbf{J} είναι το μητρώο αδρανείας, \mathbf{A} είναι το διάνυσμα γωνιακής επιτάχυνσης, $\boldsymbol{\Omega}$ είναι το διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας, $\boldsymbol{\Lambda}$ είναι το μητρώο προσανατολισμού και \mathbf{m} είναι η εφαρμοζόμενη ροπή στο κέντρο μάζας σε χωρικές συντεταγμένες.

Μαζί με τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες:

$$\boldsymbol{\Lambda}|_{t=0} = \boldsymbol{\Lambda}_0 \text{ και } \boldsymbol{\Omega}|_{t=0} = \boldsymbol{\Omega}_0 \quad (4.2)$$

η Σχέση 4.1 ορίζει ένα πρόβλημα αρχικής τιμής για τα $(\boldsymbol{\Lambda}(t), \boldsymbol{\Omega}(t))$ στο χώρο $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ [58].

4.2.1 Διακριτοποιημένη εξίσωση κίνησης

Η υλική μορφή της εξίσωσης κίνησης γραμμής στην μορφή του εναπομείναντος φορτίου (*residual*) τη χρονική στιγμή t_{n+1} ως προς το διάνυσμα στροφής $\boldsymbol{\Theta}_{n+1}$ είναι

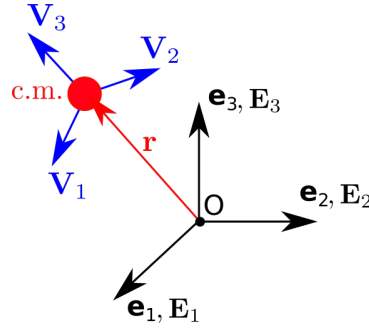
$$\mathbf{g}_{n+1}(\boldsymbol{\Theta}_{n+1}) = \mathbf{J}\mathbf{A}_{n+1}(\boldsymbol{\Theta}_{n+1}) + \boldsymbol{\Omega}_{n+1}(\boldsymbol{\Theta}_{n+1}) \times \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}_{n+1}(\boldsymbol{\Theta}_{n+1}) - \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^T(\boldsymbol{\Theta}_{n+1})\mathbf{m} \quad (4.3)$$

όπου $\mathbf{A}_{n+1}(\boldsymbol{\Theta}_{n+1})$ είναι το διάνυσμα γωνιακής επιτάχυνσης στο t_{n+1} , $\boldsymbol{\Omega}_{n+1}(\boldsymbol{\Theta}_{n+1})$ είναι το διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας στο t_{n+1} , και $\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}(\boldsymbol{\Theta}_{n+1})$ είναι το μητρώο προσανατολισμού στο t_{n+1} . Στην περίπτωση του βαρυτικού πεδίου, η εφαρμοζόμενη ροπή \mathbf{m} αλλάζει με τον προσανατολισμό και δίνεται όπως παρακάτω

$$\mathbf{m}_{n+1}(\boldsymbol{\Theta}_{n+1}) = \mathbf{r}_{n+1}(\boldsymbol{\Theta}_{n+1}) \times \mathbf{f} = \underbrace{\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}(\boldsymbol{\Theta}_{n+1}) \mathbf{l}\mathbf{E}_3}_{\mathbf{l}\mathbf{V}_{3,n+1}(\boldsymbol{\Theta}_{n+1})} \times (-mg \mathbf{e}_3) \quad (4.4)$$

όπου $\mathbf{r}_{n+1}(\boldsymbol{\Theta}_{n+1}) = \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}(\boldsymbol{\Theta}_{n+1}) \mathbf{l}\mathbf{E}_3$ είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας και $\mathbf{f} = -mg \mathbf{e}_3$ είναι το διάνυσμα του φορτίου βαρύτητας, γραμμένα στην χωρική τους μορφή. Στο Σχήμα 4.1, δίνεται η κινηματική του στερεού σώματος.

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο



Σχήμα 4.1: Κινηματική του στερεού σώματος.

4.2.2 Γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση για το σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης των Simo & Vu-Quoc

Γωνιακή ταχύτητα στο t_{n+1}

Το διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας Ω_{n+1} στο t_{n+1} δίνεται σε σχέση με το διάνυσμα στροφής Θ_{n+1} στο t_{n+1} και την γωνιακή ταχύτητα Ω_n και επιτάχυνση A_n στο t_n , ως

$$\Omega_{n+1} = \frac{\gamma}{h\beta} \Theta_{n+1} + \underbrace{\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \Omega_n + h \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) A_n}_{\Omega'_n} \quad (4.5)$$

όπου β, γ είναι οι σταθερές Newmark [11] και το $h = t_{n+1} - t_n$ είναι το χρονικό βήμα. Οι δύο τελευταίοι όροι που γράφονται ως συνάρτηση της κινηματικής στο t_n ορίζονται ως Ω'_n .

Ο τύπος ανανέωσης μέσα στην επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson είναι

$$\Omega_{n+1}^{(i+1)} - \Omega_{n+1}^{(i)} = \frac{\gamma}{h\beta} \left(\Theta_{n+1}^{(i+1)} - \Theta_{n+1}^{(i)} \right) \quad (4.6)$$

Γωνιακή επιτάχυνση στο t_{n+1}

Το διάνυσμα γωνιακής επιτάχυνσης A_{n+1} στο t_{n+1} δίνεται (όπως προηγουμένως) σε σχέση με το διάνυσμα στροφής Θ_{n+1} στο t_{n+1} και την γωνιακή ταχύτητα Ω_n και επιτάχυνση A_n στο t_n , ως

$$A_{n+1} = \frac{1}{h^2\beta} \Theta_{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{h\beta} \Omega_n - \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{2} - \beta \right) A_n \right)}_{A'_n} \quad (4.7)$$

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο

Οι δύο τελευταίοι όροι που γράφονται ως συνάρτηση της κινηματικής στο t_n ορίζονται ως \mathbf{A}'_n .

Ο τύπος ανανέωσης μέσα στην επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson είναι

$$\mathbf{A}_{n+1}^{(i+1)} - \mathbf{A}_{n+1}^{(i)} = \frac{1}{h^2\beta} \left(\Theta_{n+1}^{(i+1)} - \Theta_{n+1}^{(i)} \right) \quad (4.8)$$

4.2.3 Γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση για το σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης των Mäkinen / Cardona & Géradin

Το τροποποιημένο σχήμα Newmark που παρουσιάζεται στην αναφορά [14] βασίζεται στο ότι το βασικό σχήμα Newmark εφαρμόζεται στην πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο του διανύσματος στροφής αντί να εφαρμόζεται στο διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας και επιτάχυνσης. Ωστόσο, στην συγκεκριμένη εργασία δεν υπάρχει μια συνεπής με τις αρχικές σχέσεις Newmark διατύπωση για τα διανύσματα γωνιακής ταχύτητας και επιτάχυνσης που εμφανίζονται μέσα στην επαυξητική μορφή της εξίσωσης κίνησης. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται επίσης μια τροποποίηση της εργασίας του Mäkinen, όπως είχε προταθεί νωρίτερα στην αναφορά [12]. Επιπλέον, προστίθεται μια πλήρως συνεπής με τις αρχικές σχέσεις Newmark παραλλαγή του σχήματος του Mäkinen.

Για την εύρεση της σχέσης μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου του διανύσματος στροφής και του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας και επιτάχυνσης, λαμβάνονται υπόψη οι δύο τρόποι υπολογισμού της παραγώγου στον χρόνο του μητρώου προσανατολισμού, $\dot{\mathbf{\Lambda}}_{n+1}$, στο t_{n+1} .

1. Ο πρώτος τρόπος υπολογισμού χρησιμοποιεί το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\mathbf{\Omega}_{n+1}$ στο t_{n+1}

$$\dot{\mathbf{\Lambda}}_{n+1} = \mathbf{\Lambda}_{n+1} \hat{\mathbf{\Omega}}_{n+1} \quad (4.9)$$

όπου το $\mathbf{\Lambda}_{n+1}$ δίνεται ως

$$\mathbf{\Lambda}_{n+1} = \mathbf{\Lambda}_n \exp(\hat{\mathbf{\Theta}}_{n+1}), \quad \mathbf{\Lambda}_n \text{ είναι το μητρώο προσανατολισμού στο } t_n. \quad (4.10)$$

2. Ο δεύτερος τρόπος υπολογισμού χρησιμοποιεί την παράγωγο της εκθετικής αντιστοίχισης του αντι-συμμετρικού τανυστή $\hat{\mathbf{\Theta}}_{n+1}$ του διανύσματος στροφής $\mathbf{\Theta}_{n+1}$ στο t_{n+1}

$$\dot{\mathbf{\Lambda}}_{n+1} = \mathbf{\Lambda}_n \frac{d[\exp(\hat{\mathbf{\Theta}}_{n+1})]}{dt} \quad (4.11)$$

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο

Εξισώνοντας τις Σχέσεις 4.9 και 4.11, προκύπτει η σχέση μεταξύ του διανύσματος γωνιακής ταχύτητας, Ω_{n+1} , και της πρώτης παραγώγου του διανύσματος στροφής, $\dot{\Theta}_{n+1}$, ως

$$\Omega_{n+1} = \mathbf{T}_{n+1}^T(\Theta_{n+1})\dot{\Theta}_{n+1} \quad (4.12)$$

όπου $\mathbf{T}_{n+1}^T(\Theta_{n+1})$ είναι ο ανάστροφος του εφαπτομενικού μετασχηματισμού που δίνεται παρακάτω

$$\mathbf{T}_{n+1}^T(\Theta_{n+1}) = a_1(\Theta_{n+1})\mathbf{I} - a_2(\Theta_{n+1})\hat{\Theta}_{n+1} + a_3(\Theta_{n+1})\Theta_{n+1}\Theta_{n+1}^T \quad (4.13)$$

όπου $a_1(\Theta_{n+1})$, $a_2(\Theta_{n+1})$ και $a_3(\Theta_{n+1})$ είναι τριγωνομετρικές συναρτήσεις που δίνονται στο Παράρτημα Β του Αγγλικού κειμένου (δες επίσης [39]).

Παραγωγίζοντας την Σχέση 4.12 ως προς τον χρόνο, προκύπτει η σχέση μεταξύ του διανύσματος γωνιακής επιτάχυνσης, \mathbf{A}_{n+1} , και της πρώτης και δεύτερης παραγώγου $\dot{\Theta}_{n+1}$, $\ddot{\Theta}_{n+1}$ του διανύσματος στροφής

$$\mathbf{A}_{n+1} = \frac{d[\mathbf{T}_{n+1}^T(\Theta_{n+1})]}{dt} \dot{\Theta}_{n+1} + \mathbf{T}_{n+1}^T(\Theta_{n+1})\ddot{\Theta}_{n+1} \quad (4.14)$$

όπου $\frac{d[\mathbf{T}_{n+1}^T(\Theta_{n+1})]}{dt}$ δίνεται από

$$\begin{aligned} \frac{d[\mathbf{T}_{n+1}^T(\Theta_{n+1})]}{dt} = & -\alpha_2(\Theta_{n+1})\dot{\Theta}_{n+1} + \alpha_3(\Theta_{n+1})(\dot{\Theta}_{n+1}\Theta_{n+1}^T + \Theta_{n+1}\dot{\Theta}_{n+1}^T) \\ & + b_1(\Theta_{n+1})(\Theta_{n+1}^T\dot{\Theta}_{n+1})\mathbf{I} - b_2(\Theta_{n+1})(\Theta_{n+1}^T\dot{\Theta}_{n+1})\hat{\Theta}_{n+1} \\ & + b_3(\Theta_{n+1})(\Theta_{n+1}^T\dot{\Theta}_{n+1})\Theta_{n+1}\Theta_{n+1}^T \end{aligned} \quad (4.15)$$

όπου $b_1(\Theta_{n+1})$, $b_2(\Theta_{n+1})$ και $b_3(\Theta_{n+1})$ είναι τριγωνομετρικές συναρτήσεις που δίνονται στο Παράρτημα Β του Αγγλικού κειμένου (δες επίσης [39]).

Γωνιακή ταχύτητα στο t_{n+1}

Λαμβάνοντας υπόψη τις Σχέσεις 4.5 και 4.12, το διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας στο t_{n+1} γράφεται ως εξής

$$\Omega_{n+1} = \mathbf{T}_{n+1}^T \left[\underbrace{\frac{\gamma}{h\beta}\Theta_{n+1} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\Theta}_n + h\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\Theta}_n}_{\dot{\Theta}_{n+1}} \right] \quad (4.16)$$

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο

όπου $\dot{\Theta}_n, \ddot{\Theta}_n$ είναι η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος του διανύσματος στροφής τη χρονική στιγμή t_n , που ισούνται με τα αντίστοιχα διανύσματα γωνιακής ταχύτητας και επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή t_n , δηλαδή $\dot{\Theta}_n = \Omega_n$ και $\ddot{\Theta}_n = A_n$.

- Ο τύπος ανανέωσης του Mäkinen μέσα στην επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson είναι

$$\Omega_{n+1}^{(i+1)} - \Omega_{n+1}^{(i)} = \frac{\gamma}{h\beta} [\mathbf{T}_{n+1}^{(i+1)}]^T \left(\Theta_{n+1}^{(i+1)} - \Theta_{n+1}^{(i)} \right) \quad (4.17)$$

- Ο τύπος ανανέωσης των Cardona & Géradin μέσα στην επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson είναι

$$\Omega_{n+1}^{(i+1)} = [\mathbf{T}_{n+1}^{(i+1)}]^T \underbrace{\left(\dot{\Theta}_{n+1}^{(i)} + \frac{\gamma}{h\beta} \left(\Theta_{n+1}^{(i+1)} - \Theta_{n+1}^{(i)} \right) \right)}_{\dot{\Theta}_{n+1}^{(i+1)}} \quad (4.18)$$

όπου

$$\dot{\Theta}_{n+1}^{(i+1)} = \dot{\Theta}_{n+1}^{(i)} + \frac{\gamma}{h\beta} \left(\Theta_{n+1}^{(i+1)} - \Theta_{n+1}^{(i)} \right) \quad (4.19)$$

Γωνιακή επιτάχυνση στο t_{n+1}

Λαμβάνοντας υπόψη τις Σχέσεις 4.7 και 4.14, το διάνυσμα γωνιακής επιτάχυνσης στο t_{n+1} γράφεται ως εξής

$$\mathbf{A}_{n+1} = [\dot{\mathbf{T}}_{n+1}]^T \left[\underbrace{\frac{\gamma}{h\beta} \Theta_{n+1} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\Theta}_n + h \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{\Theta}_n}_{\dot{\Theta}_{n+1}} \right] + [\mathbf{T}_{n+1}]^T \left[\underbrace{\frac{1}{h^2\beta} \Theta_{n+1} - \frac{1}{h\beta} \dot{\Theta}_n - \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{\Theta}_n}_{\ddot{\Theta}_{n+1}} \right] \quad (4.20)$$

- Ο τύπος ανανέωσης του Mäkinen εντός της επαναληπτικής διαδικασίας Newton-Raphson είναι

$$\mathbf{A}_{n+1}^{(i+1)} - \mathbf{A}_{n+1}^{(i)} = \frac{1}{h^2\beta} [\mathbf{T}_{n+1}^{(i+1)}]^T \left(\Theta_{n+1}^{(i+1)} - \Theta_{n+1}^{(i)} \right) + \frac{\gamma}{h\beta} [\dot{\mathbf{T}}_{n+1}^{(i+1)}]^T \left(\Theta_{n+1}^{(i+1)} - \Theta_{n+1}^{(i)} \right) \quad (4.21)$$

- Ο τύπος ανανέωσης των Cardona & Géradin εντός της επαναληπτικής διαδικασίας Newton-

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο

Raphson είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{n+1}^{(i+1)} &= [\dot{\mathbf{T}}_{n+1}^{(i+1)}]^T \underbrace{\left(\dot{\Theta}_{n+1}^{(i)} + \frac{\gamma}{h\beta} \left(\Theta_{n+1}^{(i+1)} - \Theta_{n+1}^{(i)} \right) \right)}_{\dot{\Theta}_{n+1}^{(i+1)}} \\ &+ [\mathbf{T}_{n+1}^{(i+1)}]^T \underbrace{\left(\ddot{\Theta}_{n+1}^{(i)} + \frac{1}{h^2\beta} \left(\Theta_{n+1}^{(i+1)} - \Theta_{n+1}^{(i)} \right) \right)}_{\ddot{\Theta}_{n+1}^{(i+1)}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

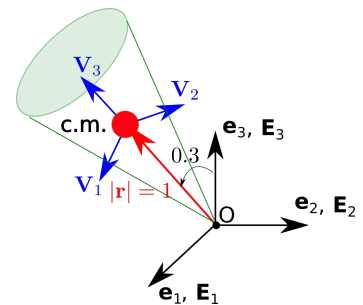
όπου

$$\ddot{\Theta}_{n+1}^{(i+1)} = \ddot{\Theta}_{n+1}^{(i)} + \frac{1}{h^2\beta} \left(\Theta_{n+1}^{(i+1)} - \Theta_{n+1}^{(i)} \right) \quad (4.23)$$

4.3 Παράδειγμα: Η βαριά συμμετρική κορυφή (*The heavy symmetrical top*)

Τα σχήματα ολοκλήρωσης στον χρόνο που περιγράφηκαν προηγουμένως εφαρμόζονται στο γνωστό παράδειγμα της βαριάς συμμετρικής κορυφής (*heavy symmetrical top*), του οποίου τη θεωρητική ανάλυση μπορεί κανείς να βρει στις αναφορές [56, 57]. Η χωρική βάση \mathbf{e} και η υλική βάση \mathbf{E} που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση εμφανίζονται στο Σχήμα 4.2. Το μητρώο αδρανείας στην υλική του μορφή και η εφαρμοσμένη σταθερά ροπής είναι:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad mgl = 20 \quad (4.24)$$



Σχήμα 4.2: Η βαριά συμμετρική κορυφή (*The heavy symmetrical top*) στην αρχική θέση.

Οι αρχικές συνθήκες (προσανατολισμός και γωνιακή ταχύτητα) είναι:

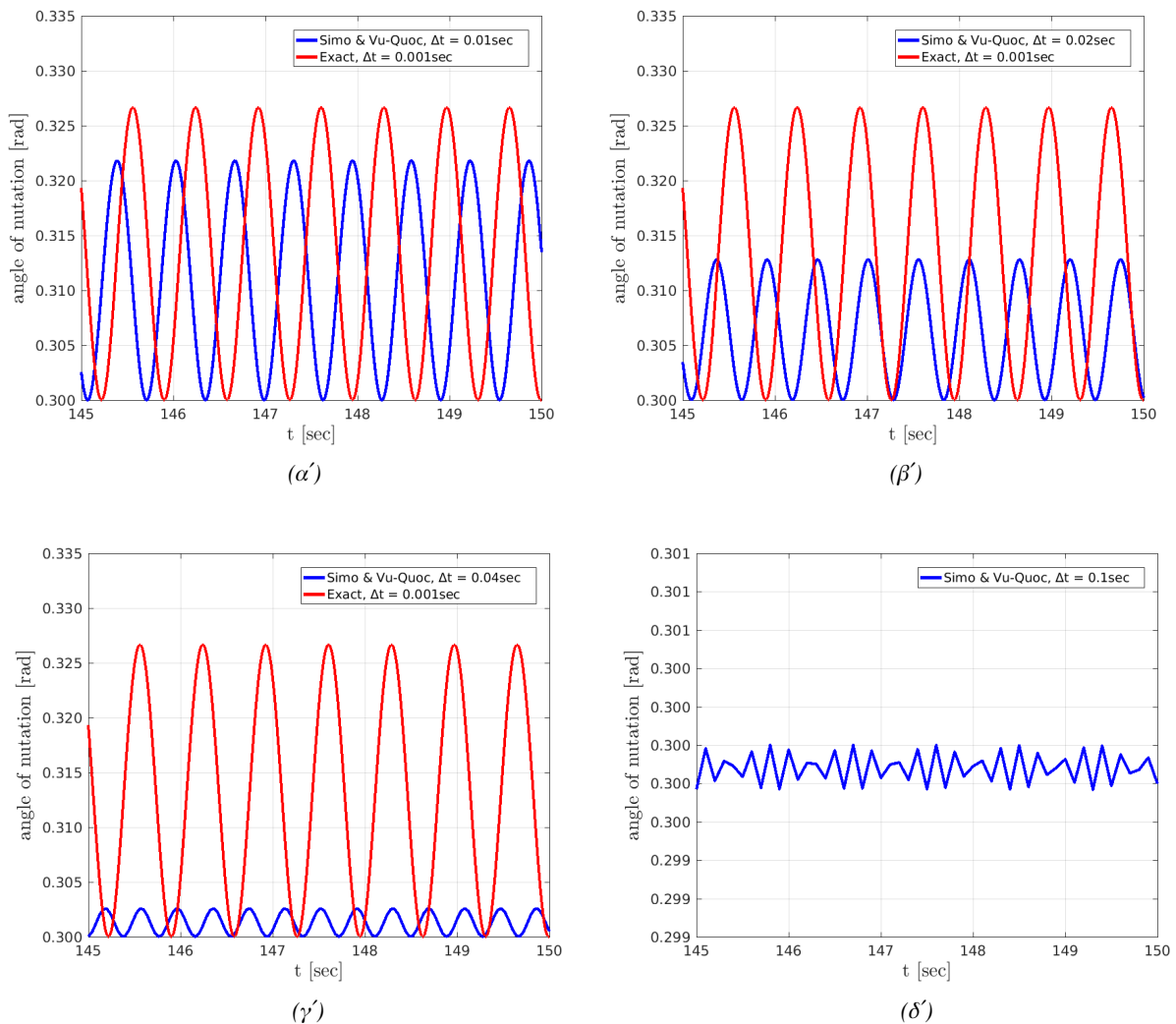
$$\Theta(t=0) = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega(t=0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Στη συνέχεια, το πρόβλημα επιλύεται με τις παραμέτρους Newmark $\beta = 0,25$ και $\gamma = 0,5$, ενώ η ανοχή είναι $|\mathbf{R}| < 10^{-6}$ για το υπολειπόμενο φορτίο (*residual*).

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο

4.3.1 Διερεύνηση του σχήματος ολοκλήρωσης στον χρόνο των Simo & Vu-Quoc

Το σχήμα ολοκλήρωσης στον χρόνο των Simo & Vu-Quoc διερευνάται για μεγάλο χρόνο προσομοίωσης ώστε να βγάλει κανείς συμπέρασμα σχετικά με την ευστάθεια του. Το πρόβλημα λύνεται για



Σχήμα 4.3: Σχήμα ολοκλήρωσης στον χρόνο των Simo & Vu-Quoc για $\Delta t = 0.01$, $\Delta t = 0.02$, $\Delta t = 0.04$ και $\Delta t = 0.1$ δευτερόλεπτα σε σύγκριση με τη λύση αναφοράς για $\Delta t = 0.001$ δευτερόλεπτα: γωνία κλόνησης (nutation angle) σε σχέση με το χρόνο, που απεικονίζεται για τα τελευταία 5 δευτερόλεπτα μετά από μεγάλο χρόνο προσομοίωσης $t = 150$ δευτερόλεπτα.

150 δευτερόλεπτα, χρόνος που αντιστοιχεί σε 60 περιστροφές γύρω από το σταθερό σημείο O. Τα παρακάτω Σχήματα δείχνουν την απόκριση τα τελευταία 5 δευτερόλεπτα για την γωνία κλόνησης (nutation angle). Το χρονικό βήμα αυξάνεται σταδιακά σε σχέση με το χρονικό βήμα που δίνει την λύση αναφοράς στα 0.001 δευτερόλεπτα. Στο Σχήμα 4.3α', η μπλε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα χρονι-

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο

κό βήμα που είναι 10 φορές μεγαλύτερο σε σύγκριση με αυτό που δίνει την λύση αναφοράς (κόκκινη γραμμή). Καθώς το χρονικό βήμα αυξάνεται, η περιοδικότητα ως προς τον χρόνο φαίνεται να διατηρεί ένα καλό σχήμα εκτός από α) το εύρος της ταλάντωσης που μικραίνει και β) τη μετατόπιση που παρατηρείται στην περίοδο. Στα Σχήματα 4.3β' και 4.3γ', τα ίδια ισχύουν για ένα χρονικό βήμα που είναι 20 φορές ή και 40 φορές μεγαλύτερο από το χρονικό βήμα της λύσης αναφοράς, όπου η τιμή του εύρους της ταλάντωσης γίνεται ακόμη μικρότερη. Τέλος, στο Σχήμα 4.3δ' το χρονικό βήμα αυξάνεται σε 0.1 δευτερόλεπτα όπου ακόμη και τότε, διατηρείται μια περιοδικότητα. Ο κώδικας έχει εκτελεστεί για ένα χρονικό βήμα μέχρι 5 δευτερόλεπτα, και το συμπέρασμα είναι ότι το σχήμα ολοκλήρωσης δεν κάνει το αποτέλεσμα να εκτιναχθεί, αλλά κρατά το διάγραμμα οριοθετημένο μεταξύ δύο σταθερών τιμών.

4.3.2 Διερεύνηση των σχημάτων ολοκλήρωσης στον χρόνο των Mäkinen / Cardona & Gérardin

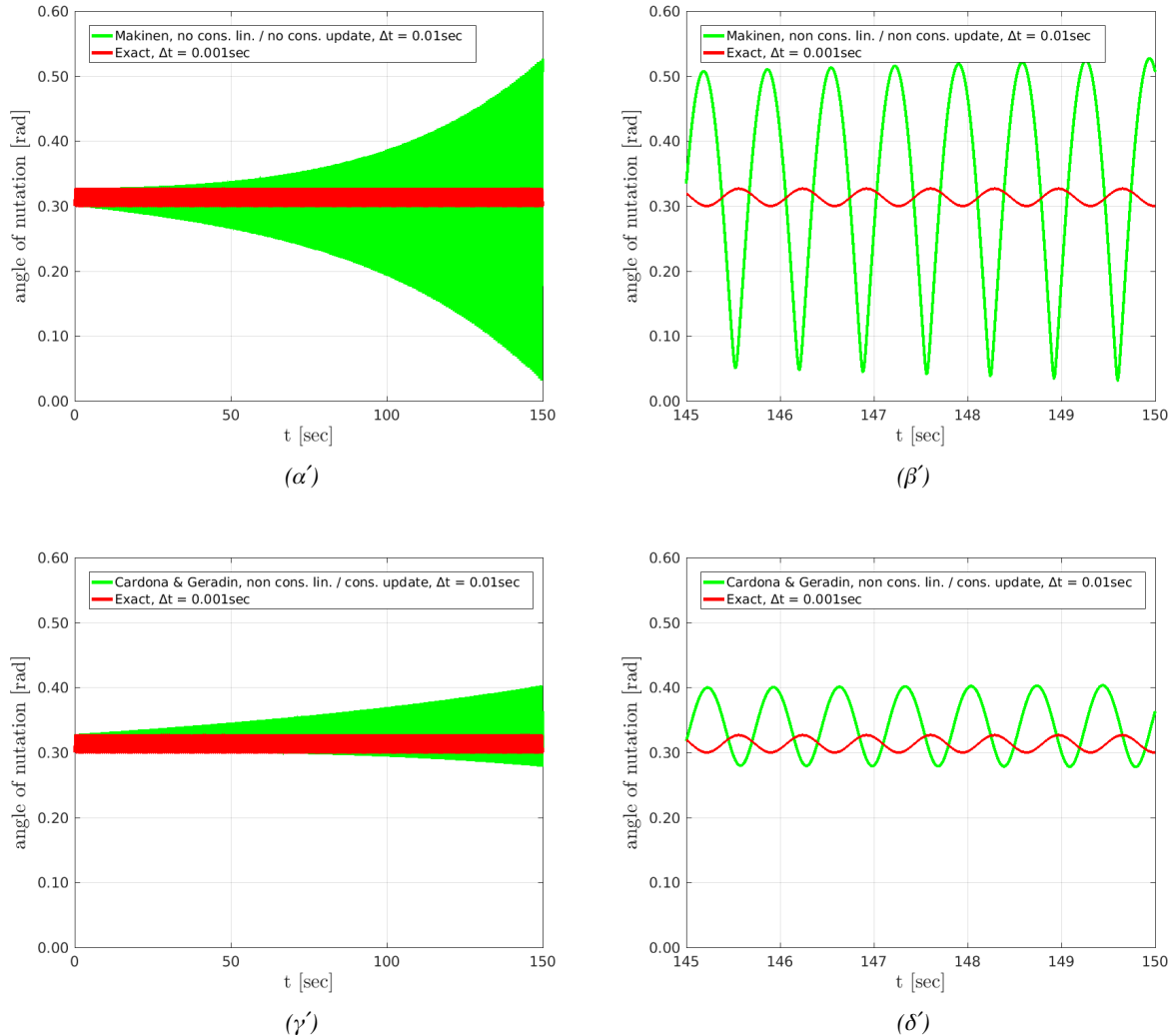
Σε αυτήν την ενότητα, διερευνώνται τα αποτελέσματα από τις εργασίες των Mäkinen και Cardona & Gérardin που αφορούν τις επόμενες παραλλαγές

- μη συνεπής γραμμικοποίηση - μη συνεπής ανανέωση (Mäkinen)
- μη συνεπής γραμμικοποίηση - συνεπής ανανέωση (Cardona & Gérardin)
- συνεπής γραμμικοποίηση - συνεπής ανανέωση (προστίθεται)

Για να καταλήξει κανείς σε κάποιο συμπέρασμα σχετικά με την ευστάθεια, το παραπάνω παράδειγμα λύνεται ξανά για 150 δευτερόλεπτα. Το χρονικό βήμα είναι 0.01 δευτερόλεπτα, όπως προηγουμένως στο Σχήμα 4.3α'. Εδώ, η εικόνα για το σύνολο του χρόνου προσομοίωσης στην περίπτωση της μη συνεπούς γραμμικοποίησης και ανανέωσης δίνεται στο Σχήμα 4.4α'. Το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται όλο και μεγαλύτερο με το χρόνο. Εάν γίνει μεγέθυνση τα τελευταία 5 δευτερόλεπτα, στο Σχήμα 4.4β', παρατηρείται μετατόπιση της περιόδου (το μέγιστο της ακριβούς λύσης συμβαίνει τη στιγμή του ελαχίστου της λύσης με βήμα τα 0.01 δευτερόλεπτα και αντίστροφα), η οποία είναι μια συμπεριφορά που παρατηρήθηκε επίσης στο σχήμα ολοκλήρωσης των Simo & Vu-Quoc, στα Σχήματα 4.3α', 4.3β', 4.3γ'. Στα Σχήματα 4.4γ', 4.4δ', όπου υπάρχει συνέπεια ως προς την ανανέωση, παρατηρείται η ίδια συμπεριφορά όπως στην προηγούμενη περίπτωση της μη συνέπειας. Η κρίσιμη διαφορά είναι ότι η εκτίναξη της λύσης είναι μικρότερη από πριν. Οι τελικές ακραίες τιμές της πράσινης γραμμής είναι περίπου 0.4 και 0.28, ενώ στην προηγούμενη

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο

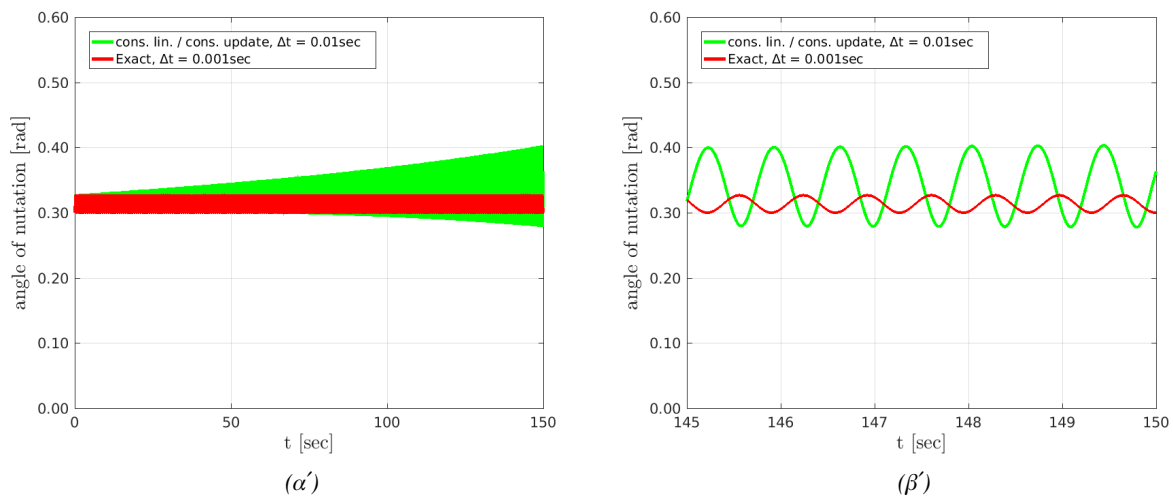
περίπτωση οι αντίστοιχες τιμές ήταν περίπου 0.5 και 0.05. Στα Σχήματα 4.5α' και 4.5β', όπου τόσο



Σχήμα 4.4: Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης των *Mäkinen* και των *Cardona & Gérardin* για $\Delta t = 0.01$ δευτερόλεπτα σε σύγκριση με τη λύση αναφοράς για $\Delta t = 0.001$ δευτερόλεπτα: γωνία κλόνησης (mutation angle) που απεικονίζεται για τα τελευταία 5 δευτερόλεπτα μετά από μεγάλο χρόνο προσομοίωσης $t = 150$ δευτερόλεπτα.

η γραμμικοποίηση όσο και η ανανέωση είναι συνεπείς με τις αρχικές σχέσεις Newmark, παρατηρείται ακριβώς η ίδια συμπεριφορά όπως στην προηγούμενη περίπτωση (Σχήματα 4.4γ' και 4.4δ'). Αυτό είναι αναμενόμενο, επειδή, ακόμη κι αν ο εφαπτομενικός τελεστής δεν έχει προκύψει από μια ακριβή γραμμικοποίηση, οι τιμές των αποτελεσμάτων δεν επηρεάζονται εφόσον έχει επιτευχθεί η σύγκλιση.

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο

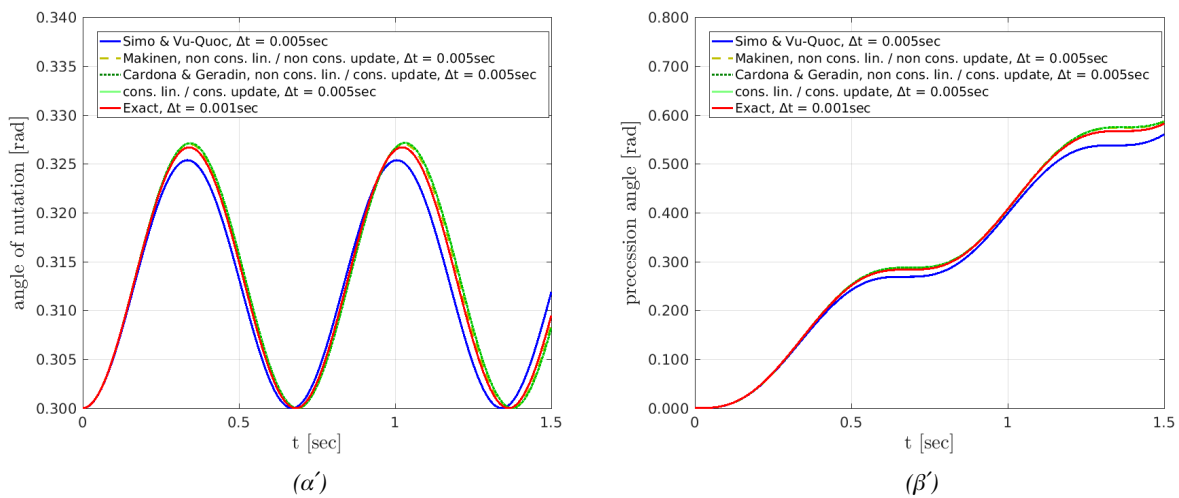


Σχήμα 4.5: Συνεπής γραμμικοποίηση / συνεπής ανανέωση ακολουθώντας την ιδέα της ολοκλήρωσης στον χρόνο των Mäkinen και Cardona & Géradin για $\Delta t = 0.01$ δευτερόλεπτα σε σύγκριση με τη λύση αναφοράς για $\Delta t = 0.001$ δευτερόλεπτα: γωνία κλόνησης (nutation angle) που απεικονίζεται για τα τελευταία 5 δευτερόλεπτα μετά από μεγάλο χρόνο προσομοίωσης $t = 150$ δευτερόλεπτα.

4.3.3 Σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών σχημάτων των Simo & Vu-Quoc και των Mäkinen / Cardona & Géradin

Στα παρακάτω Σχήματα 4.6α' και 4.6β', απεικονίζονται οι γωνίες κλόνησης (nutation angle) και μετάπτωσης (precession angle), για τα πρώτα 1.5 δευτερόλεπτα που αντιστοιχούν περίπου στο 1/10 μιας πλήρους περιστροφής γύρω από το O. Το χρονικό βήμα είναι 0.005 δευτερόλεπτα που είναι 5 φορές μεγαλύτερο από το χρονικό βήμα της λύσης αναφοράς (κόκκινη γραμμή), δηλαδή τα 0.001 δευτερόλεπτα. Στο Σχήμα 4.6α', εμφανίζεται η γωνία κλόνησης (nutation angle). Η αρχική στιγμή αντιστοιχεί σε γωνία 0.3 rad = 17.2 μοίρες. Το άνω όριο της γωνίας κλόνησης (nutation angle) είναι περίπου 0.3275 rad = 18.76 μοίρες. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι περίπου 0.7 δευτερόλεπτα. Παρατηρείται ότι το αριθμητικό σχήμα των Mäkinen / Cardona & Géradin (όλοι οι τύποι πράσινης γραμμής) δίνει ένα αποτέλεσμα που είναι πιο κοντά στη λύση αναφοράς από το το αριθμητικό σχήμα των Simo & Vu-Quoc (μπλε γραμμή). Στο Σχήμα 4.6β', εμφανίζεται η γωνία μετάπτωσης (precession angle). Το ίδιο μοτίβο της γωνίας επαναλαμβάνεται κάθε 0.7 δευτερόλεπτα που είναι η περίοδος της ταλάντωσης της γωνίας κλόνησης (nutation angle). Παρατηρείται ξανά ότι το αριθμητικό σχήμα των Mäkinen / Cardona & Géradin (όλοι οι τύποι πράσινης γραμμής) δίνει πιο ακριβές αποτέλεσμα από το σχήμα των Simo & Vu-Quoc (μπλε γραμμή).

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο



Σύγκριση μεταξύ των 3 αλγορίθμων για σύντομο χρόνο προσομοίωσης $t = 1.5 \text{ sec}$, χρονικό βήμα: $\Delta t = 0.005 \text{ sec}$.

4.4 Συμπεράσματα

Τα αριθμητικά σχήματα ολοκλήρωσης στον χρόνο που μελετώνται για την δυναμική του στερεού σώματος με μεγάλες στροφές στον χώρο είναι: α) των Simo & Vu-Quoc, και β) των Mäkinen / Cardona & Géradin, καθώς και η παραλλαγή τους που είναι συνεπής ως προς της γραμμικοποίηση και την ανανέωση με τις αρχικές σχέσεις Newmark. Αυτοί οι αλγόριθμοι θεωρούνται ως αλγόριθμοι τύπου Newmark. Η μεταξύ τους διαφορά, που είναι και το κίνητρο της σύγκρισής τους σε αυτή την εργασία, είναι ότι το σχήμα Newmark εφαρμόζεται στις γωνιακές ταχύτητες και επιταχύνσεις στο α), ενώ το ίδιο σχήμα εφαρμόζεται στην πρώτη και δεύτερη παράγωγο του διανύσματος στροφής στο β). Στη συνέχεια, συνοψίζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τα αριθμητικά αποτελέσματα της βαριά συμμετρικής κορυφής (*heavy symmetrical top*).

Για σύντομο χρόνο προσομοίωσης: 1) Οι παραλλαγές της μη συνεπούς και συνεπούς ανανέωσης του σχήματος Mäkinen / Cardona & Géradin δίνουν μια πιο ακριβή λύση για μεγάλο χρονικό βήμα από τον αλγόριθμο των Simo & Vu-Quoc, 2) Ο αλγόριθμος των Mäkinen / Cardona & Géradin παρουσιάζει μια μικρή μετατόπιση στην περίοδο που οδηγεί τη λύση πιο μπροστά από την ακριβή λύση, ενώ ο αλγόριθμος των Simo & Vu-Quoc δίνει μια περιοδικότητα στην ταλάντωση που παραμένει πίσω από την ακριβή λύση.

Για μεγάλο χρονικό διάστημα προσομοίωσης: 1) Το σχήμα των Simo & Vu-Quoc φαίνεται να είναι πιο ευσταθές από τις 3 παραλλαγές του σχήματος Mäkinen / Cardona & Géradin. 2) Το σχήμα

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο

Cardona & Géradin με τη συνεπή ανανέωση έχει καλύτερη συμπεριφορά σχετικά με το λεγόμενο εκτίναγμα (*blown up*) από το σχήμα του Mäkinen με τη μη συνεπή ανανέωση.

4.5 Δυναμική δοκών

Ακολουθώντας το σχήμα ολοκλήρωσης στον χρόνο των Simo & Vu-Quoc που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, εξετάζεται η δυναμική των δοκών για το γεωμετρικά ακριβές μοντέλο δοκού SR. Σύμφωνα με τις κινηματικές παραδοχές, η διατομή της δοκού ακολουθεί μια κίνηση στερεού σώματος. Για αυτή την κίνηση, το πεδίο ταχύτητας δίνεται όπως παρακάτω

$$\dot{\mathbf{r}}(\xi, \mathbf{X}; t) = \dot{\mathbf{r}}_0(\xi; t) + \dot{\mathbf{\Lambda}}(\xi; t) \mathbf{X} \quad (4.26)$$

όπου $\dot{\mathbf{r}}_0(\xi; t) = \dot{\mathbf{u}}(\xi; t)$ είναι η μεταφορική ταχύτητα του κέντρου αναφοράς, και $\mathbf{X} = \{0 \quad \eta \quad \zeta\}^T$ είναι οι υλικές συντεταγμένες ενός αυθαίρετου υλικού σημείου. Η χρονική παράγωγος του μητρώου στροφής $\dot{\mathbf{\Lambda}}(\xi; t)$ μπορεί να δοθεί είτε ως προς την υλική μορφή της γωνιακής ταχύτητας $\mathbf{\Omega}$ είτε ως προς την χωρική της μορφή $\boldsymbol{\omega}$.

$$\dot{\mathbf{\Lambda}}(\xi; t) = \mathbf{\Lambda} \hat{\mathbf{\Omega}} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{\Lambda} \quad (4.27)$$

Η δεύτερη χρονική παράγωγος του μητρώου στροφής στην υλική και χωρική της μορφή δίνεται ως εξής

$$\ddot{\mathbf{\Lambda}}(\xi; t) = \dot{\mathbf{\Lambda}} \hat{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Lambda} \ddot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{\Lambda} \hat{\mathbf{\Omega}} \hat{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Lambda} \hat{\mathbf{A}} \quad (4.28)$$

$$\ddot{\mathbf{\Lambda}}(\xi; t) = \hat{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{\Lambda}} + \ddot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{\Lambda} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{\Lambda} + \hat{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{\Lambda} \quad (4.29)$$

4.5.1 Γραμμική ορμή και στροφορμή

Το ολικό διάνυσμα γραμμικής ορμής, που συμβολίζεται με $\mathbf{p}(\xi, \mathbf{X}; t)$, ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\xi, \mathbf{X}; t) &:= \int_{0A} \rho_{ref} \dot{\mathbf{r}} d^0A \stackrel{(4.26)}{=} \int_{0A} \rho_{ref} (\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{X}) d^0A \Leftrightarrow \\ \mathbf{p}(\xi; t) &:= \underbrace{A_m \dot{\mathbf{r}}_0}_{\mathbf{p}_u(t, \xi)} + \underbrace{\dot{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{S}_m}_{\mathbf{p}_\psi(t, \xi)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

όπου οι ανεξάρτητες μεταβλητές $\xi; t$ παραλείπονται από το δεξί μέλος, για λόγους ευκολίας, και $\rho_{ref} : {}^0A \rightarrow \mathcal{R}$ είναι η πυκνότητα σε 0A . Το $\mathbf{p}_u(\xi; t)$ είναι το διάνυσμα της γραμμικής ορμής λόγω

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο

της γραμμικής ταχύτητας του σημείου αναφοράς, ενώ το $\mathbf{p}_\psi(\xi; t)$ είναι το διάνυσμα της γραμμικής ορμής λόγω της γωνιακής ταχύτητας του σημείου αναφοράς. Στη Σχέση 4.30, έχουν χρησιμοποιηθεί οι ακόλουθες ιδιότητες

- $A_m(\xi) := \int_{0\mathbf{A}} \rho_{ref} d^0\mathbf{A}$ είναι το βαθμωτό μέγεθος που ορίζεται ως η κατανομή μάζας κατά μήκος της δοκού.
- $\mathbf{S}_m(\xi) := \int_{0\mathbf{A}} \rho_{ref} \mathbf{X} d^0T_o\mathbf{A}$ είναι ένα διάνυσμα που ορίζεται ως η πρώτη ροπή αδρανείας της μάζας σε σχέση με τους άξονες αναφοράς ${}^0\mathbf{V}_2$ και ${}^0\mathbf{V}_3$ που συνδέονται με τη διατομή που βρίσκεται στο ξ .

Ο τελευταίος όρος δεν είναι μηδέν, $\mathbf{S}_m(\xi) \neq \mathbf{0}$, λόγω της επιλογής του πλαισίου αναφοράς έτσι ώστε οι κύριοι άξονες αδρανείας να μην συμπίπτουν απαραίτητα με τους άξονες αναφοράς.

Χρησιμοποιώντας τις Σχέσεις 3.2 και 4.26, το διάνυσμα της στροφορμής είναι

$$\mathbf{l}(\xi, \mathbf{X}; t) := \int_{0\mathbf{A}} \rho_{ref} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \dot{\mathbf{r}} d^0\mathbf{A} \stackrel{3.2,4.26}{=} \int_{0\mathbf{A}} \left[\rho_{ref} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{X}) \times (\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{X}) \right] d^0\mathbf{A} \quad (4.31)$$

όπου οι ανεξάρτητες μεταβλητές $\xi; t$ παραλείπονται από το δεξί μέλος, για ευκολία. Το διάνυσμα της στροφορμής στη Σχέση 4.31 γράφεται περαιτέρω ως:

$$\mathbf{l}(\xi, \mathbf{X}; t) = \int_{0\mathbf{A}} \left[\rho_{ref} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{r}}_0) + \rho_{ref} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{X}) \right] d^0\mathbf{A} \quad (4.32)$$

Ο τελευταίος όρος της Σχέσης 4.32 εκφράζει το συνολικό διάνυσμα της στροφορμής σε σχέση με τους κύριους άξονες αδρανείας, $\boldsymbol{\pi}(\xi, \mathbf{X}; t)$, και αναλύεται ως

$$\boldsymbol{\pi}(\xi, \mathbf{X}; t) = \int_{0\mathbf{A}} \left[\rho_{ref} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{X}) \right] d^0\mathbf{A} \stackrel{(4.27)}{=} \int_{0\mathbf{A}} \left[\rho_{ref} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{X}) \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Lambda} \mathbf{X} \right] d^0\mathbf{A} \quad (4.33)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο Lagrange, δηλαδή για τα διανύσματα \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} :

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (4.34)$$

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο

η Σχέση 4.33 γράφεται ως

$$\begin{aligned}
 \pi(\xi, \mathbf{X}; t) &= \int_{0\mathbf{A}} \left\{ \rho_{ref} [(\mathbf{\Lambda}\mathbf{X})^T \mathbf{\Lambda}\mathbf{X}] \boldsymbol{\omega} - [(\mathbf{\Lambda}\mathbf{X})^T \boldsymbol{\omega}] \mathbf{\Lambda}\mathbf{X} \right\} d^0\mathbf{A} \\
 &= \int_{0\mathbf{A}} \rho_{ref} \left\{ [(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{I}_3 - \mathbf{\Lambda} (\mathbf{X}\mathbf{X}^T) \mathbf{\Lambda}^T] \boldsymbol{\omega} \right\} d^0\mathbf{A} \\
 &= \int_{0\mathbf{A}} \rho_{ref} [\mathbf{\Lambda} (|\mathbf{X}|^2 \mathbf{I}_3 - \mathbf{X}\mathbf{X}^T) \mathbf{\Lambda}^T] \boldsymbol{\omega} d^0\mathbf{A} \tag{4.35}
 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιείται η ιδιότητα $\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}_3$ και, $(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{I}_3 = \mathbf{\Lambda} (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{I}_3 \mathbf{\Lambda}^T$. Το \mathbf{I}_3 είναι ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας.

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του $\mathbf{S}_m(\xi)$ που δόθηκε προηγουμένως, και

- $\mathbf{J}(\xi) := \int_{0\mathbf{A}} \rho_{ref} [|\mathbf{X}|^2 \mathbf{I}_3 - \mathbf{X}\mathbf{X}^T] d^0\mathbf{A}$ είναι ο σταθερός 3×3 τανυστής της δεύτερης ροπής αδρανείας της μάζας ως προς τους άξονες αναφοράς ${}^0\mathbf{V}_1$, ${}^0\mathbf{V}_2$ και ${}^0\mathbf{V}_3$ που συνδέονται με τη διατομή που βρίσκεται στο ξ .

η Σχέση 4.32 γράφεται ως

$$\mathbf{l}(\xi; t) = \underbrace{(\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}_m) \times \dot{\mathbf{r}}_0}_{\mathbf{l}_u(\xi; t)} + \underbrace{(\mathbf{\Lambda}\mathbf{J}\mathbf{\Lambda}^T) \boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{\pi}(\xi; t)} \tag{4.36}$$

όπου αναγνωρίζονται οι ακόλουθοι όροι:

- $\mathbf{l}_u(\xi; t) = (\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}_m) \times \dot{\mathbf{r}}_0$ που είναι μηδέν αν οι άξονες αναφοράς συμπίπτουν με τους κύριους άξονες αδρανείας.
- $\boldsymbol{\pi}(\xi; t) = (\mathbf{\Lambda}\mathbf{J}\mathbf{\Lambda}^T) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}_t \boldsymbol{\omega}$ είναι η συνολική στροφορμή ως προς τους κύριους άξονες αδρανείας. $\mathbf{I}_t = \mathbf{\Lambda}\mathbf{J}\mathbf{\Lambda}^T$ είναι ο χρονικά εξαρτώμενος τανυστής αδρανείας.

Μετά την εισαγωγή των διανυσμάτων γραμμικής ορμής και στροφορμής, οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της 3Δ δοκού δίνονται σε χωρικές συντεταγμένες από ([3]),

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{n} + \tilde{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{p}} \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{m} + \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi} \times \mathbf{n} + \tilde{\mathbf{m}} = \dot{\mathbf{l}} \tag{4.38}$$

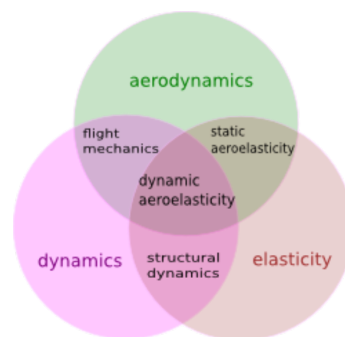
όπου \mathbf{n} , \mathbf{m} είναι τα διανύσματα εσωτερικής δύναμης και ροπής, $\tilde{\mathbf{n}}$, $\tilde{\mathbf{m}}$ είναι τα εξωτερικά διανύσματα φορτίου και ροπής.

Κεφάλαιο 4. Σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης για την δυναμική με μεγάλες στροφές στον χώρο

5 Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η ενσωμάτωση του γεωμετρικά μη-γραμμικού μοντέλου δοκού στον υδρο-σερβο-αερο-ελαστικό κώδικα πολλαπλών σωμάτων hGAST. Ο κώδικας hGAST χρησιμοποιείται για την ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς του πλήρως συζευγμένου συστήματος ανεμογεννητριών, που έχει αναπτυχθεί στον Τομέα Ρευστών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π.. Η ανάλυση αυτή ανήκει στον κλάδο της δυναμικής αερο-ελαστικότητας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1, που σημαίνει την μελέτη των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των αδρανειακών, ελαστικών και αεροδυναμικών δυνάμεων που συμβαίνουν όταν ένα ελαστικό σώμα εκτίθεται σε ροή ρευστού



Σχήμα 5.1: Ο κλάδος της δυναμικής αερο-ελαστικότητας.

[59]. Στο [1] ο κώδικας παρουσιάζεται στην πρώτη του έκδοση, ενώ στο [23], χρησιμοποιείται η βελτιωμένη έκδοση του κώδικα όπου αποδεικνύεται η σημασία της γεωμετρικής μη-γραμμικότητας για την πρόβλεψη των παραμορφώσεων και των φορτίων των πτερυγίων (κυρίως, η γωνία συστροφής πρέπει να είναι όσο το δυνατόν ακριβέστερη, γιατί επηρεάζει σημαντικά τη γωνία πρόσπτωσης στην αεροδυναμική). Όσον αφορά τις δυνατότητες μοντελοποίησης, μπορούν να αναλυθούν οι ανεμογεννήτριες οριζόντιου και κάθετου άξονα, με όλες τις χερσαίες και υπεράκτιες δομές στήριξης και τις γραμμές πρόσδεσης. Όσον αφορά τους τύπους ανάλυσης, μπορούν να εκτελεστούν η στατική, η ιδιομορφική και η ανάλυση στον χρόνο. Οι κύριες ενότητες του hGAST είναι:

- *Δυναμική.* Στην δυναμική ακολουθείται η λογική των πολλαπλών σωμάτων. Αυτή η διατύπωση υιοθετήθηκε από τη ρομποτική και μπορεί να αφορά μεγάλες κινήσεις στερεού σώματος. Κάθε σώμα ακολουθεί την παραμόρφωση από τα άλλα, προηγούμενα σώματα. Έτσι, η ανάλυση γίνεται στην παραμορφωμένη γεωμετρία και μπορούν να αποτυπωθούν τα μη-γραμμικά δυναμικά φαινόμενα.

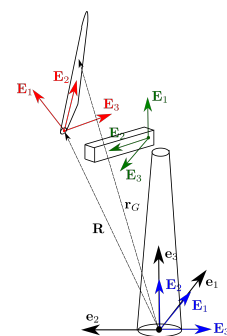
Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

- *Ελαστικότητα.* Με την ενσωμάτωση της ελαστικότητας, ολόκληρο το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας πολύπλοκος, εύκαμπτος μηχανισμός. Χρησιμοποιούνται γεωμετρικά μη-γραμμικά μοντέλα δοκού με διατμητική παραμόρφωση. Η τρέχουσα έκδοση του hGAST παρέχει τη δυνατότητα εκτέλεσης της ανάλυσης χρησιμοποιώντας ένα γραμμικό μοντέλο δοκού Timoshenko, σε συνδυασμό με τη μοντελοποίηση υπο-σωμάτων για την αποτύπωση των μη-γραμμικών επιδράσεων. Στη μοντελοποίηση υπο-σωμάτων, η έννοια των πολλαπλών σωμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο επίπεδο ενός σώματος για να ληφθούν υπόψη οι μεγάλες μετατοπίσεις (μετακινήσεις και στροφές). Η βελτιωμένη έκδοση του hGAST που προκύπτει από την παρούσα εργασία έχει τη δυνατότητα να πραγματοποιήσει την ανάλυση χρησιμοποιώντας το γεωμετρικά ακριβές μοντέλο δοκού SR.
- *Αεροδυναμική.* Η φόρτιση ανέμου υπολογίζεται χρησιμοποιώντας δύο επιλογές: 1. τη θεωρία ορμής στοιχείων πτερυγίου (BEMT) που είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία, και 2. το μοντέλο ροής δίνης, που είναι πιο εξελιγμένο από την BEMT και ως επί το πλείστον στοχεύει στην καλύτερη κατανόηση της υποκείμενης φυσικής και στην αξιολόγηση των μεθόδων που βασίζονται στην BEMT [60].

Η υδροδυναμική και οι ελεγκτές αποτελούν επίσης σημαντικά μέρη του λογισμικού. Ωστόσο, ο ελεγκτής χρησιμοποιείται ως 'μαύρο κουτί', και η υδροδυναμική είναι εκτός του αντικειμένου αυτής της εργασίας εφόσον μελετάται η χερσαία ανεμογεννήτρια. Στη συνέχεια, ενδιαφέρει η δυναμική των παραμορφώσιμων σωμάτων, μαζί με την εφαρμογή της στο σύστημα των πολλαπλών σωμάτων.

5.2 Σύστημα πολλαπλών σωμάτων

Η δυναμική πολλαπλών σωμάτων που εφαρμόζεται στο hGAST βασίζεται στα ακόλουθα. Η ανεμογεννήτρια θεωρείται ως ένα δυναμικό σύστημα πολλαπλών σωμάτων που έχει ως συστατικά μέρη τα πτερύγια, το σύστημα μετάδοσης κίνησης και τον πύργο. Όλα τα μέρη προσεγγίζονται ως δοκοί Timoshenko (Σχήμα 5.2). Η συναρμολόγηση των παραπάνω σωμάτων στο πλήρες σύστημα πραγματοποιείται στο πλαίσιο της λεγόμενης προσέγγισης πολλαπλών σωμάτων. Συνίσταται στην εξέταση κάθε σώματος ξεχωριστά από τα άλλα, που υπόκειται σε συγκεκριμένες κινηματικές συνθήκες ελεύθερου σώματος και φόρτισης,



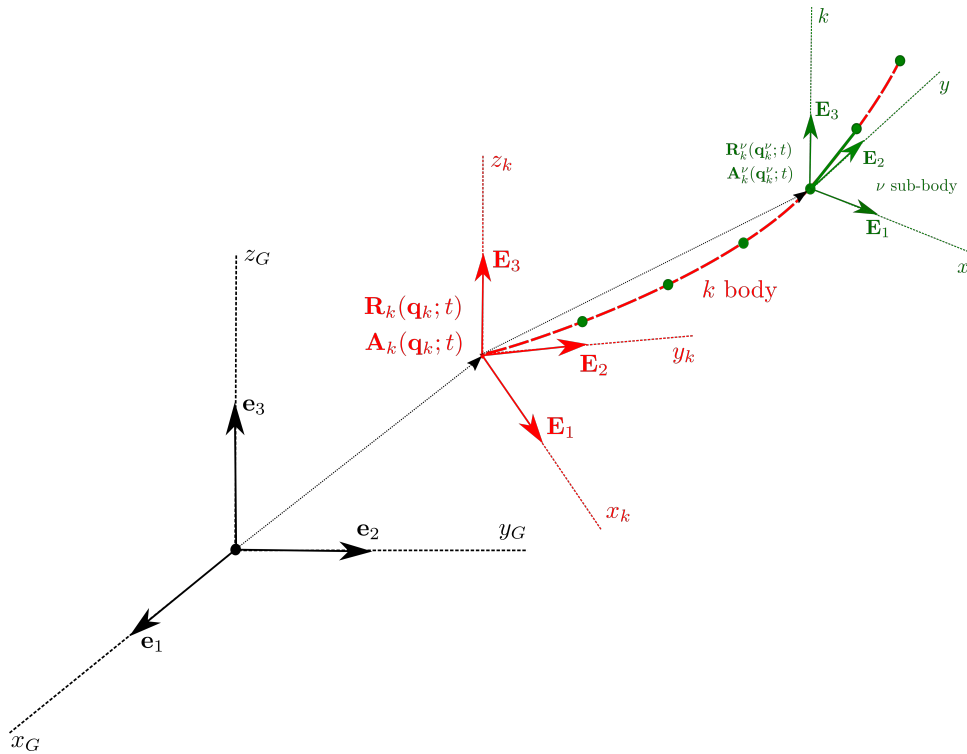
Σχήμα 5.2: Διαμόρφωση ανεμογεννήτριας.

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

που επιβάλλονται στα σημεία σύνδεσης των σωμάτων. Όσον αφορά την κινηματική, κάθε σώμα υπόκειται στην ελαστική κίνηση των προηγούμενων σωμάτων καθώς και σε προδιαγεγραμμένες ή ελεγχόμενες κινήσεις στερεού σώματος. Για παράδειγμα, στο σημείο σύνδεσης μεταξύ του πτερυγίου και του άξονα στη ρίζα του πτερυγίου, η ελαστική παραμόρφωση που αντιστοιχεί στην κίνηση του άξονα και του πύργου επιβάλλεται στο πτερύγιο, το οποίο υποβάλλεται επίσης στις στροφές της γωνίας βήματος, του αζιμουθίου και της εκτροπής. Όσον αφορά τη δυναμική, κάθε σώμα δέχεται τις εσωτερικές δυνάμεις και ροπές του σώματος που είναι μπροστά του, π.χ. ο πύργος δέχεται τις εσωτερικές δυνάμεις και ροπές από το σύστημα μετάδοσης κίνησης. Στο πλαίσιο της δυναμικής πολλαπλών σωμάτων, μια υλική βάση \mathbf{E} (Σχήμα 5.2) προσαρτάται σε κάθε σώμα που ακολουθεί τις στροφές του στερεού σώματος καθώς και τις μετακινήσεις του ([61, 62]). Η κινηματική κάθε σώματος αρχικά γράφεται ως προς την χωρική (αδρανειακή) βάση και στη συνέχεια μεταφέρεται στην υλική βάση \mathbf{E} , για την ενσωμάτωσή της στις εξισώσεις ισορροπίας του σώματος. Η σύνθεση πολλαπλών σωμάτων επεκτείνεται επίσης στο επίπεδο των συστατικών μερών της ανεμογεννήτριας. Τα εύκαμπτα μέρη, όπως είναι τα πτερύγια, είναι χωρισμένα σε έναν αριθμό υπο-σωμάτων που αποτελούνται από ένα σύνολο γραμμικών στοιχείων δοκού. Μεγάλες μετακινήσεις και στροφές δημιουργούνται σταδιακά, ενώ η μη-γραμμική δυναμική εισάγεται με την επιβολή σε κάθε υπο-σώμα των μετακινήσεων και των στροφών των προηγούμενων υπο-σωμάτων. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει την εκτίμηση των γεωμετρικά μη-γραμμικών φαινομένων λόγω μεγάλων παραμορφώσεων χρησιμοποιώντας τη γραμμική θεωρία δοκού στο επίπεδο στοιχείου, αλλά λαμβάνοντας υπόψη τις μη-γραμμικές επιδράσεις στο επίπεδο υπο-σώματος ([23]). Στο Σχήμα 5.3, το διάνυσμα θέσης σε σχέση με την αδρανειακή βάση \mathbf{e} ενός αυθαίρετου υλικού σημείου σε μια διατομή των στοιχείων κατά μήκος του υπο-σώματος ν του σώματος k δίνεται από

$$\mathbf{r}_{G,k}^{\nu} = \mathbf{R}_k(\mathbf{q}_k; t) + \mathbf{A}_k(\mathbf{q}_k; t) [\mathbf{R}_k^{\nu}(\mathbf{q}_k^{\nu}; t) + \mathbf{A}_k^{\nu}(\mathbf{q}_k^{\nu}; t) \mathbf{r}_k^{\nu}] \quad (5.1)$$

όπου $\mathbf{R}_k(\mathbf{q}_k; t)$ και $\mathbf{A}_k(\mathbf{q}_k; t)$ είναι το διάνυσμα θέσης και το μητρώο προσανατολισμού του σώματος k , που δίνονται στην βάση \mathbf{e} σε σχέση με το χρόνο t . Το διάνυσμα \mathbf{q}_k δηλώνει το σύνολο των κινηματικών βαθμών ελευθερίας των σωμάτων λόγω των ελαστικών κινήσεων και των κινήσεων στερεού σώματος των προηγούμενων σωμάτων. Ομοίως, $\mathbf{R}_k^{\nu}(\mathbf{q}_k^{\nu}; t)$ και $\mathbf{A}_k^{\nu}(\mathbf{q}_k^{\nu}; t)$ είναι το διάνυσμα θέσης και το μητρώο προσανατολισμού του υπο-σώματος ν , που δίνεται στην βάση \mathbf{E} του σώματος k (με κόκκινο χρώμα στο Σχήμα 5.3) ως προς το χρόνο t και \mathbf{q}_k^{ν} είναι το αντίστοιχο διάνυσμα με τους κινηματικούς βαθμούς ελευθερίας που εκφράζει την κίνηση των προηγούμενων υπο-σωμάτων του



Σχήμα 5.3: Η κινηματική για τη μοντελοποίηση υπο-σώματος.

σώματος k . r_k^ν είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου αναφοράς της δοκού που ορίζεται σύμφωνα με το γραμμικό μοντέλο δοκού Timoshenko σε σχέση με την βάση \mathbf{E} στο υπο-σώμα ν (με πράσινο χρώμα στο Σχήμα 5.3). Για μια λεπτομερή περιγραφή της μοντελοποίησης SB, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [63].

5.3 Γεωμετρικά ακριβής μη-γραμμική διατύπωση δοκού

5.3.1 Καταστατικές εξισώσεις σε ανισότροπες δοκούς

Το υλικό θεωρείται ανομοιογενές, ανισότροπο και γραμμικό ελαστικό, ενώ η διατομή μπορεί να έχει γενικό σχήμα. Σύμφωνα με αυτές τις παραδοχές, η αξονική/διατμητική εσωτερική δύναμη και η ροπή συστροφής/κάμψης, $\mathbf{F}(\xi)$ και $\mathbf{M}(\xi)$, δίνονται ως

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\xi) &= \mathbf{C}^{F\Gamma} \boldsymbol{\Gamma} + \underline{\mathbf{C}^{FK}} \mathbf{K} \\ \mathbf{M}(\xi) &= \underline{\mathbf{C}^{M\Gamma}} \boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{C}^{MK} \mathbf{K}\end{aligned}\quad (5.2)$$

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

όπου οι πίνακες $C^{F\Gamma}$, C^{FK} , $C^{M\Gamma}$ και C^{MK} αποτελούν τους υπο-πίνακες του ακόλουθου, πλήρως συμπληρωμένου καταστατικού μητρώου

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{F\Gamma} & \mathbf{C}^{FK} \\ \mathbf{C}^{M\Gamma} & \mathbf{C}^{MK} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Οι υπογραμμισμένοι όροι προστίθενται στην αρχική διατύπωση, μαζί με τους μη διαγώνιους όρους από τους υπο-πίνακες $C^{F\Gamma}$ και C^{MK} . Ο καταστατικός πίνακας \mathbf{C} είναι σταθερός, επομένως, η απειροελάχιστη αλλαγή της Σχέσης 5.2 είναι

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}(\xi) &= \mathbf{C}^{F\Gamma} d\mathbf{\Gamma} + \mathbf{C}^{FK} d\mathbf{K} \\ d\mathbf{M}(\xi) &= \mathbf{C}^{M\Gamma} d\mathbf{\Gamma} + \mathbf{C}^{MK} d\mathbf{K} \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.3.2 Ασθενής μορφή του ελαστικού όρου

Το ελαστικό μέρος της ασθενούς μορφής των εξισώσεων κίνησης είναι

$$G_k = \int_{0_L} (\chi'^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{F} - \phi^T \hat{r}'_0 \mathbf{\Lambda} \mathbf{F} + \phi'^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}) d\xi \quad (5.5)$$

όπου οι συναρτήσεις χ , ϕ είναι οι λεγόμενες *test functions*, ενώ $\mathbf{\Lambda} \mathbf{F}$, $\mathbf{\Lambda} \mathbf{M}$ είναι η χωρική μορφή του διανύσματος της εσωτερικής δύναμης και ροπής που δίνονται στη Σχέση 5.2. Λαμβάνοντας την απειροελάχιστη αλλαγή κάθε αγνώστου της Σχέσης 5.5

$$\begin{aligned} dG_k &= \int_{0_L} (\chi'^T d\mathbf{\Lambda} \mathbf{F} + \chi'^T \mathbf{\Lambda} d\mathbf{F} \\ &\quad - \phi^T d\hat{r}'_0 \mathbf{\Lambda} \mathbf{F} - \phi^T \hat{r}'_0 d\mathbf{\Lambda} \mathbf{F} - \phi^T \hat{r}'_0 \mathbf{\Lambda} d\mathbf{F} \\ &\quad + \phi'^T d\mathbf{\Lambda} \mathbf{M} + \phi'^T \mathbf{\Lambda} d\mathbf{M}) d\xi \end{aligned} \quad (5.6)$$

όπου τα $d\mathbf{r}_0$ και $d\mathbf{\Lambda}$ προκύπτουν μετά από την χρήση της κατευθυντικής παραγώγου ως προς ϵ , για $\epsilon = 0$, στις Σχέσεις 3.5 και 3.7 (ανταλλάσσοντας το δ με το d), αντίστοιχα

$$d\mathbf{r}_0(\xi) = d\mathbf{u}_0 \quad (5.7)$$

$$d\mathbf{\Lambda}(\xi) = d\boldsymbol{\psi} \times \mathbf{\Lambda} \quad (5.8)$$

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

Το $d\psi$ είναι το αξονικό διάνυσμα του πίνακα $d\Psi$. Μετά την εισαγωγή στη Σχέση 5.6 της Σχέσης 5.7 και 5.8, και μετά από μερικούς αλγεβρικούς χειρισμούς, η απειροελάχιστη μεταβολή του ελαστικού τμήματος της ασθενούς μορφής γράφεται σε μορφή πίνακα ως εξής

$$dG_k = \int_{0L} \begin{Bmatrix} \chi' \\ \phi \\ \phi' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{f\gamma} & \mathbf{c}^{f\gamma} \hat{\mathbf{r}}'_0 - \widehat{\Lambda \mathbf{F}} & \mathbf{c}^{f\kappa} \\ \widehat{\Lambda \mathbf{F}} - \hat{\mathbf{r}}'_0 \mathbf{c}^{f\gamma} & -\hat{\mathbf{r}}'_0 \mathbf{c}^{f\gamma} \hat{\mathbf{r}}'_0 + \hat{\mathbf{r}}'_0 \widehat{\Lambda \mathbf{F}} & -\hat{\mathbf{r}}'_0 \mathbf{c}^{f\kappa} \\ \mathbf{c}^{m\gamma} & -\widehat{\Lambda \mathbf{M}} + \mathbf{c}^{m\gamma} \hat{\mathbf{r}}'_0 & \mathbf{c}^{m\kappa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\mathbf{u}'_0 \\ d\psi \\ d\psi' \end{Bmatrix} d\xi \quad (5.9)$$

όπου $\mathbf{c}^{f\gamma} = \Lambda \mathbf{C}^{FG} \Lambda^T$, $\mathbf{c}^{f\kappa} = \Lambda \mathbf{C}^{FK} \Lambda^T$, $\mathbf{c}^{m\gamma} = \Lambda \mathbf{C}^{MG} \Lambda^T$, $\mathbf{c}^{m\kappa} = \Lambda \mathbf{C}^{MK} \Lambda^T$ είναι τα καταστατικά υπο-μητρώα στην χωρική τους διατύπωση.

5.3.3 Αδρανειακοί όροι: ενσωμάτωση στον κώδικα δυναμικής πολλαπλών σωμάτων hGAST

Έστω $\mathbf{R}(\mathbf{q}; t)$ και $\mathbf{A}(\mathbf{q}; t)$ δηλώνουν τη θέση και τον προσανατολισμό του σώματος σε σχέση με την αδρανειακή βάση \mathbf{e} . Το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_G(\mathbf{q}, \xi; t)$ οποιουδήποτε αυθαίρετου υλικού σημείου $\xi = (\xi \ \eta \ \zeta)^T$ της δοκού ως προς την αδρανειακή βάση τη στιγμή t δίνεται μέσω της Σχέσης 5.1 ως εξής

$$\mathbf{r}_G(\mathbf{q}, \xi; t) = \mathbf{R} + \mathbf{A} \mathbf{r} \quad (5.10)$$

όπου οι δείκτες k, ν που εμφανίζονται στη Σχέση 5.1 έχουν παραλειφθεί για ευκολία. Ας σημειωθεί ότι η Σχέση 5.1 εκφυλίζεται στην Σχέση 5.10 όταν λαμβάνεται υπόψη μόνο ένα υπο-σώμα (δηλαδή $\nu = 1$). Το $\mathbf{r}(\xi; t)$ είναι το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου σε σχέση με το πλαίσιο του σώματος \mathbf{E} που δίνεται από την Σχέση 3.2 για το μοντέλο δοκού SR. Το μητρώο στροφής $\mathbf{A}(\mathbf{q}; t)$ παραμετροποιείται χρησιμοποιώντας τις τρεις γωνίες Euler γύρω από τους ακόλουθους άξονες (εγγενείς γωνίες Euler). Τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης που εκφράζονται ως προς το \mathbf{E} δίνονται ως ([60])

$$(\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{r}}_G)(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \xi; t) = \underline{\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \quad (5.11)$$

$$(\mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{r}}_G)(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \xi; t) = \underline{\mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{A}} \mathbf{r} + 2\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{r}}} + \ddot{\mathbf{r}} \quad (5.12)$$

όπου $\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \xi; t)$, $\ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \xi; t)$ και $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \xi; t)$, $\ddot{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \xi; t)$ είναι οι πρώτες και οι δεύτερες χρονικές παράγωγοι του διανύσματος θέσης και του προσανατολισμού του σώματος ως προς την αδρανειακή βάση \mathbf{e} τη στιγμή t . Η πρώτη και η δεύτερη χρονική παράγωγος του διανύσματος

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

θέσης, $\dot{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\xi}; t)$ και $\ddot{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\xi}; t)$ αντίστοιχα, του υλικού σημείου σε σχέση με το πλαίσιο του σώματος \mathbf{E} τη στιγμή t , δίνονται στην ενότητα 4.5.

Η χρονική παράγωγος της γραμμικής ορμής $\dot{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}; t)$ που εκφράζεται ως προς το \mathbf{E} ορίζεται ως

$$\dot{\mathbf{p}}_{tot}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}; t) = \int_{0A} \rho_{ref} \left(\mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{A}}\mathbf{r} + 2 \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \right) d^0 \mathbf{A} \quad (5.13)$$

όπου η σχέση

$$\dot{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\xi}; t) = \int_{0A} \rho_{ref} \ddot{\mathbf{r}} d^0 \mathbf{A} = \underbrace{A_m \ddot{\mathbf{r}}_0}_{\dot{\mathbf{p}}_u} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\Lambda}} \mathbf{S}_m}_{\dot{\mathbf{p}}_\psi} \quad (5.14)$$

εκφράζει τη χρονική παράγωγο της γραμμικής ορμής οποιουδήποτε υλικού σημείου ξ σε σχέση με το πλαίσιο \mathbf{E} σε περίπτωση που δεν λαμβάνονται οι όροι λόγω της διατύπωσης των πολλαπλών σωμάτων (δηλαδή οι υπογραμμισμένοι όροι στις Σχέσεις 5.11 και 5.12). $\rho_{ref} : {}^0A \rightarrow \mathcal{R}$ είναι η πυκνότητα στο 0A . $\dot{\mathbf{p}}_u(\boldsymbol{\xi}; t)$ και $\dot{\mathbf{p}}_\psi(\boldsymbol{\xi}; t)$ είναι οι χρονικές παράγωγοι του διανύσματος γραμμικής ορμής λόγω της γραμμικής και της γωνιακής επιτάχυνσης του κέντρου αναφοράς, αντίστοιχα.

Η ασθενής μορφή των όρων αδράνειας ως προς το \mathbf{E} δίνεται από

$$\delta W_{\dot{\mathbf{p}}_{tot}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}; t) = \int_{0L} (\delta \mathbf{r}_0^T \dot{\mathbf{p}}_{tot}) d\xi \quad (5.15)$$

όπου $\delta \mathbf{r}_0$ είναι η μεταβολή του διανύσματος θέσης του κέντρου αναφοράς.

Η χρονική παράγωγος του διανύσματος της στροφορμής ως προς το \mathbf{E} δίνεται από

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{i}}_{tot}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}; t) = \int_{0A} \rho_{ref} \left[\left(\dot{\boldsymbol{\Lambda}} \mathbf{X} \right) \times \left(\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}}\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} \right) \right. \\ \left. + \left(\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{X} \right) \times \left(\mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{A}}\mathbf{r} + 2 \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} \right) \right] d^0 \mathbf{A} \end{aligned} \quad (5.16)$$

όπου με παρόμοιο τρόπο η σχέση

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{i}}(\boldsymbol{\xi}; t) = \int_{0A} \rho_{ref} \left[\overline{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \dot{\mathbf{r}}} \right] d^0 \mathbf{A} = \int_{0A} \rho_{ref} \left(\dot{\boldsymbol{\Lambda}} \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{X} \times \ddot{\mathbf{r}} \right) d^0 \mathbf{A} \\ = \underbrace{\left(\dot{\boldsymbol{\Lambda}} \mathbf{S}_m \right) \times \dot{\mathbf{r}}_0 + \left(\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{S}_m \right) \times \ddot{\mathbf{r}}_0}_{\dot{\mathbf{i}}_u} + \underbrace{\int_{0A} \rho_{ref} \left(\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{X} \times \ddot{\mathbf{X}} \right) d^0 \mathbf{A}}_{\dot{\mathbf{i}}_\psi} \end{aligned} \quad (5.17)$$

εκφράζει τη χρονική παράγωγο της στροφορμής οποιουδήποτε υλικού σημείου ξ σε σχέση με το \mathbf{E} χωρίς να ληφθούν υπόψη οι όροι της δυναμικής των πολλαπλών σωμάτων. $\dot{\mathbf{i}}_u$ και $\dot{\mathbf{i}}_\psi$ είναι οι χρονικές

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

παράγωγοι του διανύσματος της στροφορμής λόγω της γραμμικής και της γωνιακής επιτάχυνσης του κέντρου αναφοράς, αντίστοιχα. Το \mathbf{l}_ψ είναι η συνολική στροφορμή σε σχέση με τους κύριους άξονες αδράνειας, βλέπε 4.5. Οι τυπικές αδρανειακές ιδιότητες διατομής που λαμβάνονται υπόψη είναι η γραμμική πυκνότητα μάζας $A_m(\xi)$, η πρώτη ροπή αδράνειας $S_m(\xi)$ και ο τανυστής με τις δεύτερες ροπές αδράνειας \mathbf{J} , ενώ $\mathbf{I}_t(\xi; t) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{J} \mathbf{\Lambda}^T$ είναι οι χρονικά εξαρτώμενες δεύτερες ροπές αδράνειας (βλ. επίσης 4.5).

Η ασθενής μορφή των αδρανειακών όρων ως προς το \mathbf{E} δίνεται από

$$\delta W_{i_{tot}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\xi}; t) = \int_{0L} \delta \psi^T \dot{\mathbf{i}}_{tot} d\xi \quad (5.18)$$

όπου $\delta \psi$ είναι το διάνυσμα της περιστροφής (spin) που εκφράζει τη διαταραχή του προσανατολισμού της διατομής (δες κεφάλαιο 3).

Για τη γραμμικοποίηση των αδρανειακών όρων ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Παράρτημα E του Αγγλικού κειμένου.

5.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται το σύστημα της ανεμογεννήτριας. Τα δεδομένα γεωμετρίας και υλικού, καθώς και οι ιδιότητες αεροδυναμικής και ελέγχου προέρχονται από την αναφορά [64] για την ανεμογεννήτρια DTU 10-MW (RWT). Παρουσιάζονται οι αερο-ελαστικοί υπολογισμοί στο πεδίο του χρόνου για τον απομονωμένο ρότορα υπό ομοιόμορφη ροή ανέμου και για ολόκληρο το σύστημα της ανεμογεννήτριας υπό στοχαστική ροή ανέμου. Αυτά τα παραδείγματα επιλέγονται με στόχο τη σύγκριση των επιλογών μοντελοποίησης SR και SB σχετικά με την αποτελεσματικότητά τους στην αποτύπωση της μη-γραμμικής συμπεριφοράς εύκαμπτων δοκών στην δυναμική/αεροελαστικότητα. Για αυτή τη σύγκριση, η λύση που προκύπτει με μια πυκνή διακριτοποίηση του μοντέλου SR θεωρείται ακριβής, σε σχέση με την οποία υπολογίζεται το σχετικό ποσοστό σφάλματος. Ο λόγος είναι ότι το μοντέλο SB συγκλίνει στο μοντέλο SR καθώς αυξάνεται η διακριτοποίηση. Αυτό δικαιολογείται θεωρητικά ως εξής. Το μοντέλο SB θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια πρόωμη εκδοχή ενός γεωμετρικά ακριβούς μοντέλου δοκού, στο οποίο εφαρμόζεται η ίδια κινηματική με το μοντέλο SR από υπο-σώμα σε υπο-σώμα (όχι από σημείο σε σημείο) κατά μήκος του σώματος. Επιπλέον, προκειμένου να δοθεί ένα ποσοτικό μέτρο της μη-γραμμικότητας προστίθενται στα μοντέλα SR και SB τα αποτελέσματα του γραμμικού μοντέλου δοκού Timoshenko. Σημειώνεται ότι, ο

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

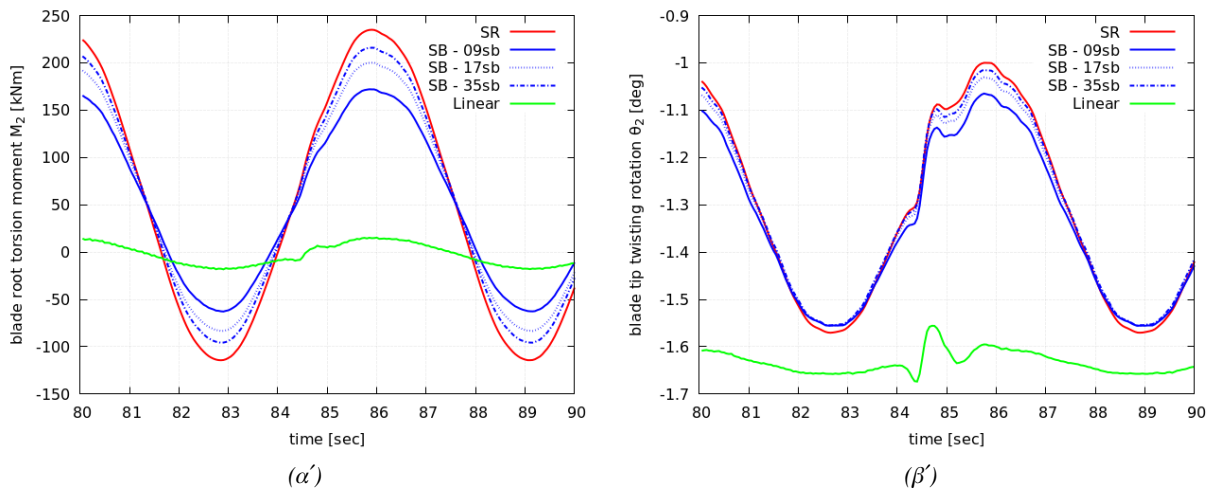
όρος που αφορά στην φυγόκεντρη στιβαρότητα και στην ζεύξη κάμψης-αξονικής παραμόρφωσης είναι ο μόνος μη-γραμμικός όρος που λαμβάνεται υπόψη στο παραπάνω γραμμικό μοντέλο καθώς επηρεάζει σημαντικά τη συνολική ακαμψία και την συχνότητα απόκρισης, κι επομένως δεν μπορεί να αμεληθεί. Τέλος, τονίζεται ότι και οι τρεις παραπάνω επιλογές μοντελοποίησης υλοποιούνται στο hGAST, που σημαίνει ότι χρησιμοποιείται το ίδιο λογισμικό για όλα τα μοντέλα δοκού.

5.4.1 Ο ρότορας DTU 10-MW RWT υπό ομοιόμορφη ροή ανέμου

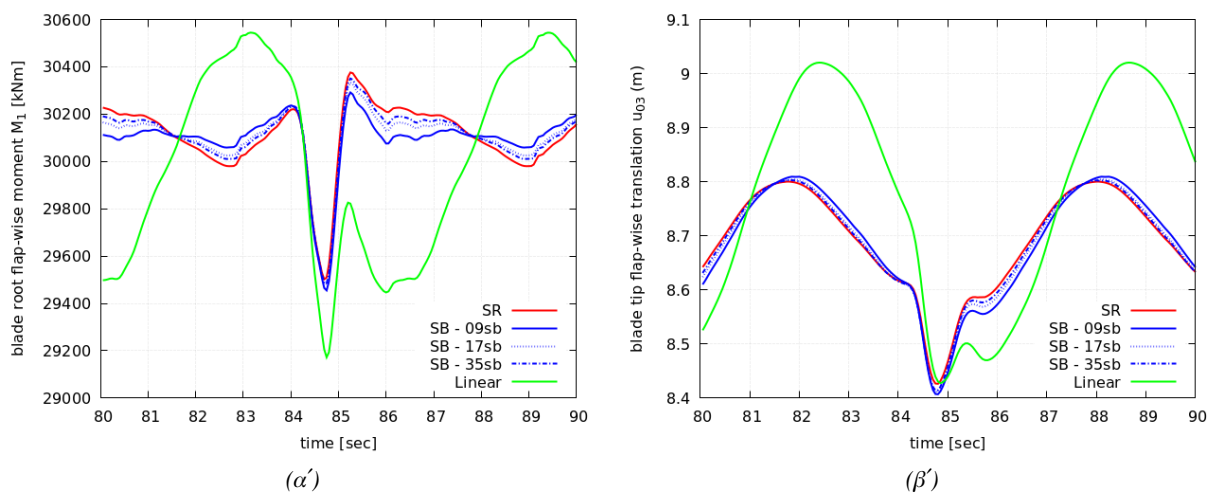
Παρακάτω εξετάζεται ο απομονωμένος ρότορας που αποτελείται μόνο από τα τρία περιστρεφόμενα πτερύγια υπό ομοιόμορφη ροή ανέμου και την βαρύτητα. Περιλαμβάνεται επίσης η επίδραση του πύργου (*tower shadow*). Το πλέγμα των Πεπερασμένων Στοιχείων αποτελείται από 35 στοιχεία ανά πτερύγιο για όλα τα μοντέλα δοκού. Για να γίνει καλύτερα η σύγκριση και να δειχθεί ότι οι προβλέψεις από το SB μοντέλο πλησιάζουν στις προβλέψεις από το SR μοντέλο καθώς ο αριθμός των υπο-σωμάτων αυξάνεται, τα πλέγματα της SB μοντελοποίησης χρησιμοποιούν επιπλέον 9 και 17 υπο-σώματα. Θεωρούνται ομοιόμορφες συνθήκες εισροής με ονομαστική ταχύτητα ανέμου 11.4 m/s , όπου οι παραμορφώσεις αναμένεται να επιτύχουν τη μέγιστη τιμή τους (λόγω της μέγιστης ώθησης) και, με τη σειρά τους, τα μη-γραμμικά φαινόμενα θα είναι πιο έντονα. Ο ρότορας λειτουργεί με σταθερή ταχύτητα περιστροφής 9.6 rpm και σε μηδενική γωνία βήματος (λειτουργία ανοιχτού βρόγχου, δηλαδή ο ελεγκτής δεν είναι ενεργός), που αντιστοιχεί σε μέσες συνθήκες λειτουργίας στην ονομαστική ταχύτητα ανέμου. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε μορφή χρονοϊστορίας, μετά την απόσβεση του αρχικού μεταβατικού σταδίου.

Στο Σχήμα 5.4, απεικονίζονται η ροπή στρέψης M_2 στη ρίζα και η γωνία στρέψης θ_2 στο άκρο. Και τα δύο μοντέλα δοκού SR και SB έχουν πολύ κοντινή πρόβλεψη στην φάση και στις μέσες τιμές των δύο σημάτων, ενώ το μοντέλο δοκού SR προβλέπει υψηλότερο πλάτος διακύμανσης και των δύο σημάτων. Ωστόσο, καθώς ο αριθμός των υπο-σωμάτων του μοντέλου SB αυξάνεται, το προβλεπόμενο από το μοντέλο δοκού πλάτος συγκλίνει προς τις προβλέψεις του SR. Το γραμμικό μοντέλο δοκού υποεκτιμά σημαντικά τα πλάτη της διακύμανσης τόσο στη ροπή όσο και στην γωνία, ενώ προβλέπει σχεδόν μηδενική μέση τιμή της ροπής στρέψης και 0.3° υψηλότερη μέση γωνία στρέψης (σε απόλυτη τιμή). Όσον αφορά την κύρια διεύθυνση κίνησης του πτερυγίου που προκαλείται από τη δύναμη ώθησης λόγω της εισροής του ανέμου, στο Σχήμα 5.5, απεικονίζονται η ροπή του πτερυγίου M_1 στη ρίζα του και η αντίστοιχη εκτροπή u_{03} στην άκρη του. Στο Σχήμα 5.5', τα δύο μη-γραμμικά μοντέλα παρέχουν πολύ παρόμοια αποτελέσματα. Η μικρή διαφορά που παρατηρε-

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας



Σχήμα 5.4: Ρότορας της ανεμογεννήτριας DTU 10-MW RWT υπό τις ονομαστικές συνθήκες λειτουργίας: ροπή στρέψης M_2 στην ρίζα και γωνία στρέψης θ_2 στην άκρη, γύρω από τον άξονα E_2 του πτερυγίου.



Σχήμα 5.5: Ρότορας της ανεμογεννήτριας DTU 10-MW RWT υπό τις ονομαστικές συνθήκες λειτουργίας: ροπή κάμψης M_1 στην ρίζα και μετακίνηση u_{03} στην άκρη, γύρω από τον άξονα E_1 και κατά τον άξονα E_3 του πτερυγίου, αντίστοιχα.

ίται στο γράφημα μετράται λιγότερο από 1%. Στο Σχήμα 5.5β', η μέση τιμή της μετακίνησης u_{03} είναι περίπου το 10% της ακτίνας του ρότορα (για την ανεμογεννήτρια DTU 10-MW RWT η ακτίνα του ρότορα είναι 89.2 m) και προβλέπεται καλά και από τα δύο μη-γραμμικά μοντέλα (διαφορά 0,6%). Η μειωμένη μέση τιμή σε σύγκριση με το γραμμικό μοντέλο προκύπτει από το φαινόμενο σύζευξης κάμψης-στρέψης και το ίδιο ισχύει για το πλάτος της ταλάντωσης. Η αύξηση του πλάτους της γωνίας συστροφής στο Σχήμα 5.4β', οδηγεί σε μείωση του πλάτους της μετακίνησης κατά την

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

κύρια διεύθυνση κίνησης του πτερυγίου στο Σχήμα 5.5β', η οποία προκύπτει ως αποτέλεσμα της αλλαγής της ενεργούς γωνίας πρόσπτωσης του ανέμου. Όπως στην περίπτωση της στρέψης, όσο περισσότερα υπο-σώματα χρησιμοποιούνται τόσο πιο κοντά βρίσκονται τα αποτελέσματα των δύο μη-γραμμικών μοντέλων (Σχήμα 5.5).

5.4.2 Η ανεμογεννήτρια DTU 10-MW RWT υπό τυρβώδη (στοχαστική) ροή ανέμου

Η χερσαία έκδοση της ανεμογεννήτριας DTU 10-MW RWT αναλύεται υπό στοχαστική ροή ανέμου. Ο στόχος της ανάλυσης είναι η αξιολόγηση των φορτίων σύμφωνα με τις προδιαγραφές του προτύπου IEC 61400-1 [65] και ο εντοπισμός διαφορών στις προβλέψεις των διαφόρων επιλογών μοντελοποίησης (γραμμικής και μη-γραμμικής). Πραγματοποιούνται τρεις προσομοιώσεις των 10 λεπτών η καθεμία ανά ταχύτητα ανέμου. Για την αξιολόγηση της οριακής κατάστασης κόπωσης (FLS), θεωρείται η περίπτωση φόρτισης σχεδιασμού DLC 1.2, όπου χρησιμοποιείται ένα μοντέλο κανονικού στροβιλισμού (NTM) σε κανονική λειτουργία. Για την αξιολόγηση της τελικής οριακής κατάστασης (ULS), λαμβάνεται υπόψη η περίπτωση DLC 1.3 όπου χρησιμοποιείται ένα μοντέλο ακραίων αναταράξεων (ETM) σε κανονική λειτουργία. Δύο επιπλέον περιπτώσεις εξετάζονται, οι περιπτώσεις DLC 6.1 και 6.2, λαμβάνοντας υπόψη την ανεμογεννήτρια σε κατάσταση ρελαντί (*idling*) υπό ακραίες συνθήκες ανέμου (EWM). Ο ορισμός των περιπτώσεων φόρτισης DLC δίνεται στον Πίνακα 5.1. Η κατηγορία της ανεμογεννήτριας είναι 1A που προσδιορίζει την κατηγορία για

Πίνακας 5.1: Τα δεδομένα για κάθε περίπτωση φόρτισης DLC σύμφωνα με το Πρότυπο IEC.

DLC	Άνεμος	Ταχύτητα (m/s)	Σφάλμα Εκτροπής	Ανάλ.	Συν. Ασφαλ.	Τρεξίματα
1.2	NTM	05 – 25, $step = 2$	0°	FLS	-	11×3
1.3	ETM	11 – 25, $step = 2$	0°	ULS	1.35	8×3
6.1	EWM	50	$0^\circ, \pm 8^\circ$	ULS	1.35	3×3
6.2	EWM	50	$\pm 15^\circ, \pm 30^\circ,$ $\pm 45^\circ, \pm 60^\circ$	ULS	1.10	8×3

τα υψηλότερα χαρακτηριστικά στροβιλισμού. Οι επιπτώσεις της διάτμησης του ανέμου (εκθέτης διάτμησης = 0.20), η σκιά του πύργου και η κλίση του ανέμου ($= 8^\circ$) λαμβάνονται υπόψη σύμφωνα με το πρότυπο IEC 61400-1. Επιπλέον, η ανεμογεννήτρια λειτουργεί σε κλειστό βρόγχο (δηλαδή ενεργοποιείται ο ελεγκτής). Το πλέγμα Πεπερασμένων Στοιχείων αποτελείται από 35 στοιχεία για κάθε πτερύγιο (όπως προηγουμένως) και από 20 στοιχεία για τον πύργο. Τα υπο-σώματα (στο μοντέλο SB) ανέρχονται σε 35 με ένα στοιχείο δοκού το καθένα για τα πτερύγια και σε 5 υπο-σώματα

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

με 4 στοιχεία δοκού το καθένα για τον πύργο.

Στον Πίνακα 5.2, εμφανίζονται τα ισοδύναμα φορτία κόπωσης (DEL) των μερών της ανεμογεννήτριας για το SR, το SB και το γραμμικό μοντέλο. Ως αναφορά επιλέγεται η λύση SR, σε σύγκριση

Πίνακας 5.2: Φορτία κόπωσης (DEL's) της περίπτωσης φόρτισης DLC 1.2. Σύγκριση ανάμεσα στα μοντέλα δοκού SR, SB-35 και το γραμμικό μοντέλο.

Σήμα	SR	SB	Γραμμικό
	DEL (kNm)	διαφορά (%)	διαφορά (%)
Ροπή κάμψης (<i>edge-wise</i>) στη ρίζα του πτερυγίου	28291	0.4	1.4
Ροπή κάμψης (<i>flap-wise</i>) στη ρίζα του πτερυγίου	34378	0.2	-0.5
Ροπή στρέψης (<i>pitching</i>) στη ρίζα του πτερυγίου	437	-1.6	-36.9
Ροπή στρέψης του άξονα	4814	0.3	0.5
Ροπή εκτροπής του άξονα στη βάση του ρουλεμάν	30567	0.1	-1.7
Ροπή κλίσης του άξονα στη βάση του ρουλεμάν	32447	0.2	-0.6
Πλευρική ροπή στην βάση του πύργου	57516	4.7	4.6
Μπροστά-πίσω ροπή στην βάση του πύργου	118409	0.5	-0.5
Ροπή στρέψης στην βάση του πύργου	29573	0.6	-0.1

με την οποία δίνονται οι σχετικές ποσοστιαίες διαφορές για το SB και το γραμμικό μοντέλο. Τα ισοδύναμα φορτία κόπωσης DEL υπολογίζονται υποθέτοντας διάρκεια ζωής 20 ετών και 107 κύκλους αναφοράς. Οι συντελεστές Wöhler είναι $m = 10$ για τα πτερύγια, $m = 8$ για τον άξονα και $m = 4$ για τον χαλύβδινο πύργο, ενώ οι παράμετροι Weibull είναι $C = 11.3$ m/s και $k = 2$. Προβλέπονται παρόμοια φορτία κόπωσης στο πτερύγιο από όλες τις επιλογές μοντελοποίησης, εκτός από τη ροπή στρέψης στην ρίζα των πτερυγίων όπου η απόκλιση σε σχέση με την προσέγγιση SR είναι -37% για το γραμμικό μοντέλο δοκού. Το μοντέλο δοκού SB με 35 υπο-σώματα προβλέπει ελαφρώς χαμηλότερο φορτίο (1.6%) το οποίο είναι συσχετισμένο με τα αποτελέσματα του Σχήματος 5.4. Ελαφρώς υψηλότερα φορτία DEL προβλέπονται από το γραμμικό και το SB μοντέλο δοκού για την πλευρική ροπή κάμψης της βάσης του πύργου (4.6-4.7%), ενώ το φορτίο DEL της μπροστά-πίσω ροπής κάμψης της βάσης του πύργου, η οποία διεγείρεται άμεσα από τον άνεμο, είναι σε καλή συμφωνία για όλα τα μοντέλα δοκού (η απόλυτη τιμή των σχετικών ποσοστιαίων διαφορών είναι 0.5%). Τα άλλα φορτία είναι πολύ παρόμοια τόσο για το SB όσο και για το γραμμικό μοντέλο δοκού (η απόλυτη τιμή των σχετικών ποσοστιαίων διαφορών είναι κάτω από 1,7%).

Στον Πίνακα 5.3, εμφανίζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης φορτίου για την οριακή κατάσταση αστοχίας. Η μέγιστη απόλυτη τιμή των ροπών δίνεται για το μοντέλο δοκού SR, ενώ για το SB και το γραμμικό μοντέλο δοκού δίνονται οι σχετικές ποσοστιαίες διαφορές, όπως προηγουμένως. Επιπλέον, η περίπτωση DLC στην οποία εμφανίζεται το φορτίο της αστοχίας παρουσιάζεται στην

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

Πίνακας 5.3: Οριακά φορτία από την περίπτωση φόρτισης DLC 1.3, 6.1 και 6.2. Σύγκριση ανάμεσα στα μοντέλα δοκού SR, SB-35 και το γραμμικό μοντέλο.

Σήμα	SR Φορτίο (kNm)	SB διαφ. (%)	Γραμμικό διαφ. (%)	DLC
<i>edge-wise</i> ροπή ρίζας πτερυγίου	31244	5.1	42.4	6.2 – 30°
<i>flap-wise</i> ροπή ρίζας πτερυγίου	61240	0.3	2.4	1.3 – 13m/s
<i>pitching</i> ροπή ρίζας πτερυγίου	934	4.0	-8.0	6.2 – 330°, 315°, 8°
Συνδυασμένη ροπή ρίζας πτερυγίου	64354	0.3	1.8	1.3 – 13m/s
Ροπή στρέψης του άξονα	16907	0.1	0.1	1.3 – 25m/s
Ροπή εκτροπής του άξονα	52389	1.2	1.2	1.3 – 25m/s
Ροπή κλίσης του άξονα	59322	0.1	21.9	1.3 – 25m/s (nl), 6.2 – 30° (l)
Συδυνασμένη ροπή του άξονα	64306	0.5	13.0	1.3 – 25m/s (nl), 6.2 – 30° (l)
Πλευρική ροπή βάσης πύργου	460076	2.9	-2.2	6.2 – 45°
Μπροστά-πίσω ροπή βάσης πύργου	327059	0.9	7.7	1.3 – 13m/s (nl), 6.2 – 30° (l)
Ροπή στρέψης βάσης πύργου	54538	0.1	-0.6	1.3 – 25m/s
Συνδυασμένη ροπή βάσης πύργου	509105	4.2	11.3	6.2 – 45°, 45°, 30°

τελευταία στήλη (μαζί με αυτήν δίνεται είτε η ταχύτητα ανέμου για την DLC 1.3 είτε η κακή ευθυγράμμιση για τις περιπτώσεις *ρελαντί* DLC 6.X). Δίνεται μία μόνο περίπτωση DLC όταν αυτή είναι η ίδια για όλα τα μοντέλα δοκού, ενώ δίνονται δύο περιπτώσεις DLC όταν υπάρχουν διαφορές μεταξύ της μη-γραμμικής (nl) και της γραμμικής (l) μοντελοποίησης. Για τα δύο μη-γραμμικά μοντέλα, οι περιπτώσεις DLC είναι ίδιες για όλα τα σήματα.

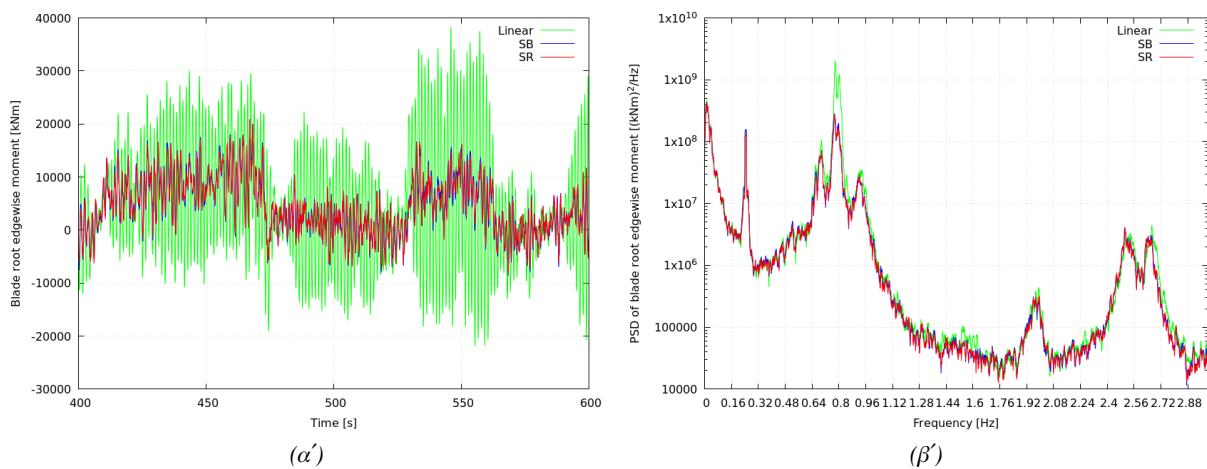
Οι διαφορές μεταξύ των δύο μη-γραμμικών μοντέλων δοκού δεν υπερβαίνουν το 5%. Υψηλότερες απόλυτες τιμές σχετικών ποσοστιαίων διαφορών λαμβάνονται για την *edgewise* ροπή κάμψης και τη ροπή στρέψης στη ρίζα του πτερυγίου, και για την πλευρική και συνδυασμένη ροπή κάμψης στην βάση του πύργου. Αυτό που είναι κοινό σε όλα τα παραπάνω σήματα είναι η περίπτωση DLC στην οποία παρατηρούνται, που είναι η *ρελαντί* περίπτωση DLC 6.2. Τα οριακά φορτία στη λειτουργία *ρελαντί* οφείλονται κυρίως σε αστάθειες όταν λαμβάνει χώρα χαμηλή ή και αρνητική απόσβεση. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούν να προβλεφθούν ελαφρώς διαφορετικά φορτία μεταξύ των διαφόρων μοντέλων. Επιπλέον, η στοχαστική φύση αυτών των *ρελαντί* περιπτώσεων δεν μπορεί να εξαλειφθεί εντελώς ακόμη κι αν ληφθεί υπόψη η ίδια τυρβώδης εισροή ανέμου, επειδή μικρές συσσωρευμένες διαφορές στο αζιμούθιο του δρομέα μπορεί να προκαλέσουν διαφορετικά φορτία λόγω της διαφορετικής ταχύτητας του ανέμου που 'βλέπουν' τα πτερύγια. Οι διαφορές στα υπόλοιπα σήματα που προκαλούνται από την περίπτωση DLC 1.3 παραμένουν μικρές, της τάξης του 1%.

Αντίθετα, παρατηρούνται σημαντικά υψηλές διαφορές μεταξύ του μη-γραμμικού και του γραμμικού

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

κού μοντέλου δοκού. Η μεγαλύτερη απόκλιση αφορά την *edgewise* ροπή της ρίζας του πτερυγίου (42,4%), που λήφθηκε στην περίπτωση DLC 6.2 σε 30° απόκλιση ευθυγράμμισης. Όπως αναφέρθηκε, σε αυτή την περίπτωση DLC εμφανίζονται σημαντικές δονήσεις στον ρότορα κατά την *edgewise* διεύθυνση περιστροφής που υπερεκτιμούνται από το γραμμικό μοντέλο δοκού. Το ίδιο ισχύει και για άλλα σήματα (δηλαδή την ροπή της κλίσης του άξονα, τη συνδυασμένη ροπή του άξονα και τη μπροστά-πίσω και συνδυασμένη ροπή του πύργου) που επηρεάζονται από την υπερβολική φόρτιση του πτερυγίου στην *edgewise* κατεύθυνση περιστροφής. Για αυτά τα σήματα η οριακή τιμή λαμβάνεται στην περίπτωση DLC 6.2 στις 30°, που είναι διαφορετική από την περίπτωση που προβλέπεται από τα μη-γραμμικά μοντέλα δοκού. Η δεύτερη αξιοσημείωτη διαφορά μεταξύ των μη-γραμμικών και του γραμμικού μοντέλου δοκού αφορά τη ροπή στρέψης του πτερυγίου (-8%) η οποία έχει ήδη συζητηθεί προηγουμένως και οφείλεται στο γεωμετρικά μη-γραμμικό φαινόμενο σύζευξης κάμψης-στρέψης που δεν μπορεί να προβλεφθεί με γραμμική μοντελοποίηση.

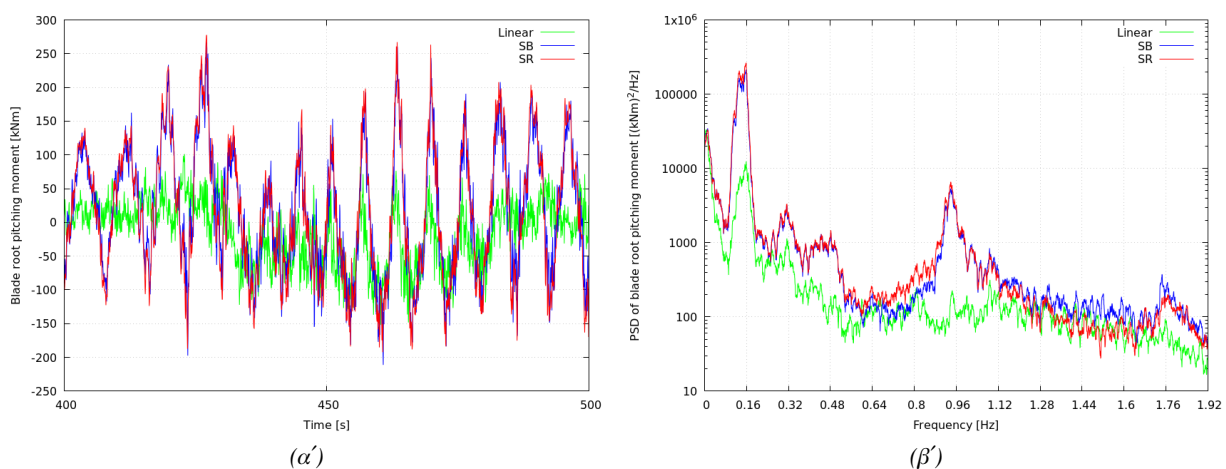
Στη συνέχεια, για περαιτέρω επεξεργασία των παραπάνω ευρημάτων, παρουσιάζονται διαγράμματα χρονοσειρών και φασματικής πυκνότητας ισχύος (PSD) για επιλεγμένα σήματα φορτίου. Οι συντελεστές ασφαλείας εδώ δεν έχουν ληφθεί υπόψη. Η ανάλυση επικεντρώνεται αποκλειστικά στην εκτίμηση των φορτίων, ενώ αναμενόμενες διαφορές στις παραμορφώσεις λόγω μη-γραμμικών φαινομένων έχουν συζητηθεί προηγουμένως. Στο Σχήμα 5.6, απεικονίζονται η χρονοσειρά και η γραφική παράσταση PSD της *edgewise* ροπής κάμψης του πτερυγίου που προκύπτει από την περίπτωση DLC 6.2 σε κακή ευθυγράμμιση 30°. Οι χρονοσειρές δείχνουν ότι το γραμμικό μοντέλο



Σχήμα 5.6: Η ανεμογεννήτρια DTU 10-MW RWT υπό στοχαστική ροή ανέμου (DLC 6.2-30°): (α') χρονοϊστορία και (β') PSD της (*edge-wise*) ροπής κάμψης M_3 στην ρίζα του πτερυγίου.

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

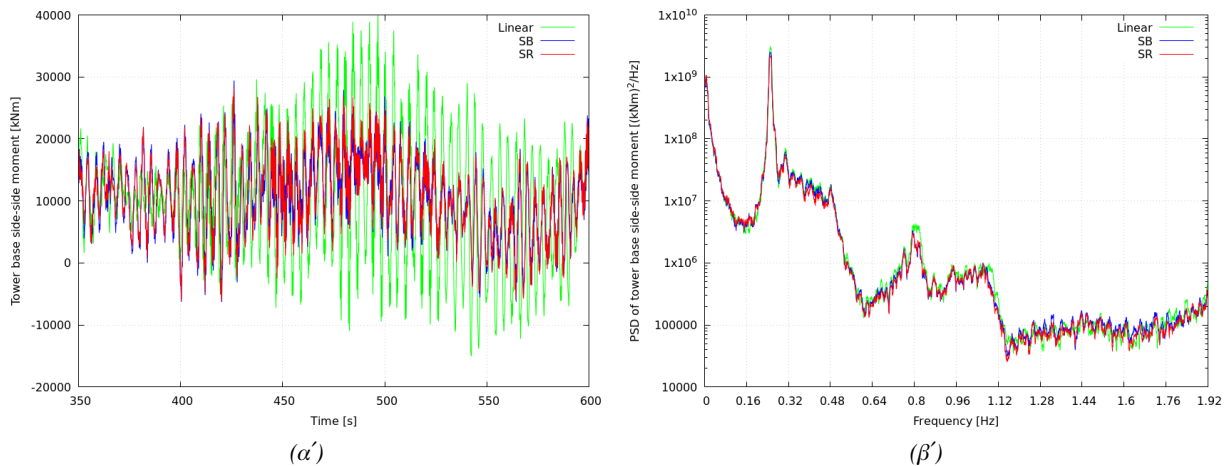
δοκού υπερεκτιμά σημαντικά τα πλάτη της ροπής από τις δονήσεις αστάθειας *stall induced vibrations*, ενώ τα δύο μη-γραμμικά μοντέλα δοκού προβλέπουν πολύ παρόμοια απόκριση φορτίου. Στην γραφική παράσταση PSD, η κορυφή στις συχνότητες των τριών *edgewise* μορφών ταλάντωσης του δρομέα (ας σημειωθεί ότι η ρύθμιση βήματος είναι στις 90° στις ρελαντί περιπτώσεις DLC 6.X) και ειδικά της 1ης ασύμμετρης ιδιομορφής στα 0.8 Hz είναι υψηλότερα από τις αντίστοιχες κορυφές στα μη-γραμμικά μοντέλα δοκού. Στο Σχήμα 5.7, εμφανίζεται η ροπή στρέψης του πτερυγίου από την περίπτωση DLC 1.3 στα 11 m/s. Αυτή η ταχύτητα ανέμου είναι κοντά στην ονομαστική



Σχήμα 5.7: Η ανεμογεννήτρια DTU 10-MW RWT υπό στοχαστική ροή ανέμου (DLC 1.3-11 m/s): (α') χρονοϊστορία και (β') PSD της (pitching) ροπής στρέψης M_2 στην ρίζα του πτερυγίου.

ταχύτητα της ανεμογεννήτριας DTU-10MW RWT (11.4 m/s) και οι υψηλότερες παραμορφώσεις αναμένεται να προκαλέσουν το γεωμετρικά μη-γραμμικό φαινόμενο σύζευξης κάμψης-στρέψης. Το γραμμικό μοντέλο δοκού προβλέπει σημαντικά μικρότερα πλάτη ροπής, ενώ τα μη-γραμμικά μοντέλα δοκού είναι σε καλή συμφωνία. Το μοντέλο SB-35 προβλέπει ελαφρώς χαμηλότερα πλάτη ροπής σε σύγκριση με το μοντέλο SR, τα οποία μπορεί να αυξηθούν αυξάνοντας περαιτέρω τη διακριτοποίηση SB. Η γραφική παράσταση PSD δείχνει ότι το γραμμικό μοντέλο δοκού υποεκτιμά όλες τις κορυφές συχνότητας, δηλαδή στις 1P, 2P και 3P συχνότητες διέγερσης στα 0.16 Hz και τα πολλαπλάσια του, στην 1η ασύμμετρη οριζόντια (με ελεύθερες συνοριακές συνθήκες στην περιστροφή) συχνότητα εντός του επιπέδου του ρότορα στα 0.96 Hz και επίσης στην 1η συμμετρική (με ελεύθερες συνοριακές συνθήκες στην περιστροφή) συχνότητα του ρότορα κατά την *edgewise* διεύθυνση στα 1.77 Hz. Στο Σχήμα 5.8, παρουσιάζεται η πλευρική ροπή κάμψης στην βάση του πύργου για την ίδια περίπτωση (DLC 1.3 στα 11 m/s). Παρόλο που η μέγιστη τιμή αυτού του φορτίου

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας



Σχήμα 5.8: Η ανεμογεννήτρια DTU 10-MW RWT υπό στοχαστική ροή ανέμου (DLC 1.3-11 m/s): (α') χρονοϊστορία και (β') PSD της πλευρικής ροπής M_1 στην βάση του πύργου.

εμφανίζεται στην περίπτωση DLC 6.2 σε 45° κακή ευθυγράμμιση (δες Πίνακα 5.3), τα επιλεγμένα διαγράμματα περιλαμβάνονται για να δείξουν τις διαφορές που προέκυψαν μεταξύ της γραμμικής και της μη-γραμμικής μοντελοποίησης. Κατά την κανονική λειτουργία, η πλευρική ταλάντωση του ρότορα (και η ταλάντωση στην *edgewise* διεύθυνση του ρότορα) έχει χαμηλή απόσβεση. Η αεροδυναμική απόσβεση επηρεάζει κυρίως την *flapwise* ταλάντωση των πτερυγίων και την ταλάντωση του πύργου εμπρός-πίσω. Στην γραφική παράσταση χρονοσειράς, το γραμμικό μοντέλο προβλέπει σημαντικά υψηλότερα πλάτη φορτίου εντός του εύρους 450 – 600 s που αντιστοιχούν κυρίως στη 1η συχνότητα της πλευρικής κάμψης του πύργου στα 0.25 Hz, όπως φαίνεται στο διάγραμμα PSD.

5.5 Συμπεράσματα

Στην παρούσα ενότητα, το γεωμετρικά ακριβές μοντέλο δοκού SR ενσωματώθηκε στον αεροελαστικό κώδικα δυναμικής πολλαπλών σωμάτων hGAST, ακολουθώντας την αναλλοίωτη (*invariant*) τεχνική. Το αρχικό μοντέλο δοκού εμπλουτίστηκε με τους όρους αδράνειας πολλαπλών σωμάτων. Επιπλέον, το μοντέλο δοκού SR επεκτάθηκε σε γενικού σχήματος διατομές με ανισότροπο υλικό, με συζεύξεις του υλικού όπως αυτό της κάμψης-στρέψης που χρησιμοποιείται στα περύγια ανεμογεννητριών ως μηχανισμός παθητικού ελέγχου φορτίου για τον μετριασμό των φορτίων. Γίνονται αριθμητικές συγκρίσεις μεταξύ των δύο πιο δημοφιλών επιλογών μοντελοποίησης στην κοινότητα της Αιολικής Ενέργειας, του μοντέλου δοκού SR και του υπάρχοντος μοντέλου δοκού SB, το οποίο προβλέπει τη γεωμετρική μη-γραμμικότητα μέσω της πολυσωματικής προσέγγισης σε επίπεδο

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

σώματος. Τα δύο μοντέλα έχουν αναπτυχθεί εντός του ίδιου εργαλείου, σε αντίθεση με άλλες παρόμοιες εργασίες. Το προφανές πλεονέκτημα της παραπάνω προσέγγισης είναι ότι καταργούνται πιθανές αποκλίσεις ή αβεβαιότητες που σχετίζονται με τις αριθμητικές λεπτομέρειες των μοντέλων και των παραδοχών μοντελοποίησης που λαμβάνονται υπόψη. Επιπλέον, τα αποτελέσματα του γραμμικού μοντέλου δοκού Timoshenko προστίθενται για να παρέχουν ένα ποσοτικό μέτρο της μη-γραμμικότητας.

Οι συγκρίσεις των δύο μοντέλων δοκού με μη-γραμμικότητα δείχνουν ότι και οι δύο επιλογές μπορούν με ακρίβεια να προβλέπουν γεωμετρικά μη-γραμμικά φαινόμενα λόγω μεγάλων παραμορφώσεων. Η κύρια διαφορά τους είναι ότι όσο οι μη-γραμμικότητες γίνονται πιο έντονες, ο αριθμός των υπο-σωμάτων που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση πολλαπλών σωμάτων πρέπει να αυξηθεί για να αποτυπωθούν με ακρίβεια τα αποτελέσματα. Από την άλλη, το μοντέλο δοκού SR παρέχει το ίδιο επίπεδο ακρίβειας σε όλες τις συνθήκες χρησιμοποιώντας την ίδια χωρική διακριτοποίηση. Η σχεδόν τέλεια συμφωνία των ανεξάρτητων από το πλέγμα λύσεων των δύο μοντέλων δοκού υποδηλώνει ότι το μοντέλο δοκού SR έχει ενσωματωθεί με συνέπεια στο hGAST και ότι και τα δύο μοντέλα δοκού είναι επαρκή για την προσομοίωση εξαιρετικά εύκαμπτων πτερυγίων ανεμογεννητριών με ανισότροπο σύνθετο υλικό που υφίστανται μεγάλες παραμορφώσεις.

Οι συγκρίσεις με το γραμμικό μοντέλο δοκού δείχνουν ότι τα μη-γραμμικά μοντέλα δοκού προβλέπουν μεγαλύτερη ροπή στρέψης στην ρίζα του πτερυγίου κατά την κανονική λειτουργία λόγω του φαινομένου ζεύξης κάμψης-στρέψης που εμφανίζεται κυρίως κοντά στην ονομαστική ταχύτητα του ανέμου, όπου οι *flapwise* παραμορφώσεις επιτυγχάνουν τη μέγιστη τιμή τους. Οι ροπές κάμψης των κύριων εξαρτημάτων της ανεμογεννήτριας εξακολουθούν να εκτιμώνται καλά από το γραμμικό μοντέλο δοκού κατά την κανονική λειτουργία. Αντίθετα, τα μη-γραμμικά μοντέλα δοκού μπορεί να προβλέπουν χαμηλότερα φορτία σχεδιασμού όταν συμβαίνουν αστάθειες (*stall induced vibrations*). Για παράδειγμα, για την ανεμογεννήτρια DTU-10MW RWT που εξετάζεται στην παρούσα εργασία, το οριακό φορτίο σχεδιασμού της *edgewise* ροπής του πτερυγίου υπερεκτιμάται από το γραμμικό μοντέλο (+42,4%) όταν ο ρελαντί τρόπος λειτουργίας προσομοιώνεται κάτω από συνθήκες καταιγίδας 50 ετών. Τα παραπάνω υποδηλώνουν ότι τα γραμμικά μοντέλα δοκού μπορούν ακόμα να χρησιμοποιηθούν στη διαδικασία σχεδιασμού/πιστοποίησης των κύριων εξαρτημάτων της ανεμογεννήτριας, καθώς τα μη-γραμμικά φαινόμενα επηρεάζουν οριακά τα φορτία. Ωστόσο, όταν υπάρχουν αστάθειες το γραμμικό μοντέλο δοκού είναι συντηρητικό καθώς παραλείπει τις μη-γραμμικές ζεύξεις που τείνουν να καταστέλλουν τις αστάθειες. Το γραμμικό μοντέλο δοκού μπορεί

Κεφάλαιο 5. Δυναμική του συζευγμένου συστήματος ανεμογεννήτριας

να παρέχει μικρότερα φορτία μόνο σε περίπτωση που ένα φαινόμενο μη-γραμμικής σύζευξης είναι έντονο και επηρεάζει σημαντικά το πλάτος φορτίου που προκύπτει, όπως τη ροπή στρέψης του πτερυγίου λόγω της σύζευξης κάμψης-στρέψης.

6 Επισκόπηση και προοπτική

6.1 Επισκόπηση

Η παρούσα διατριβή απαρτίζεται από τα παρακάτω επιμέρους αντικείμενα μελέτης:

1. Την μελέτη δύο μοντέλων δοκού από τη βιβλιογραφία για την επίλυση εύκαμπτων δοκών στον τριδιάστατο χώρο, που υφίστανται μεγάλες μετακινήσεις και στροφές αλλά οι τροπές παραμένουν μικρές.
2. Την μελέτη δύο αλγόριθμων ολοκλήρωσης στον χρόνο που είναι διαθέσιμοι στη βιβλιογραφία για την επίλυση προβλημάτων με μεγάλες στροφές στο χώρο.
3. Την επαναδιατύπωση του γεωμετρικώς ακριβούς μοντέλου δοκού SR ώστε να περιλαμβάνει τους όρους που προκύπτουν από την γενικού σχήματος διατομή κι από την ανομοιογένεια κι ανισοτροπία του υλικού. Επιπλέον, προστίθενται οι αδρανειακοί όροι που προκύπτουν από την διατύπωση της δυναμικής των πολλαπλών σωμάτων. Στόχος του συγκεκριμένου αντικείμενου μελέτης είναι η επέκταση του κώδικα hGAST της δυναμικής πολλαπλών σωμάτων όσον αφορά στο μέρος της δυναμικής των παραμορφώσιμων σωμάτων. Αυτή η βελτίωση υλοποιείται με την ενσωμάτωση του γεωμετρικά ακριβούς μοντέλου δοκού SR για την προσομοίωση των πτερυγίων της ανεμογεννήτριας, και την τροποποίηση της διαδικασίας επίλυσης ώστε να είναι συνεπής με την πολλαπλότητα των στροφών $SO(3)$.

Όσον αφορά στο πρώτο αντικείμενο, συγκρίνονται μεταξύ τους δύο γεωμετρικά μη-γραμμικά μοντέλα δοκού με διατμητική παραμόρφωση που προέρχονται από διαφορετικά ζεύγη τάσεων-τροπών. Το πρώτο είναι το μοντέλο δοκού Simo-Reissner (SR) [2], ενώ το δεύτερο είναι η 1Δ διατύπωση του εκφυλισμένου μοντέλου δοκού που χρησιμοποιεί τις τροπές Green-Lagrange (GL) [35]. Η ανάπτυξη του GL μοντέλου δοκού έγινε με τρόπο ώστε να μπορεί κανείς να έχει μια σαφή σύγκριση με το μοντέλο δοκού SR. Δύο διαφορετικές (όσον αφορά τις στροφές) υλοποιήσεις, η

Κεφάλαιο 6. Επισκόπηση και προοπτική

επαναληπτική (*iterative*) και η αναλλοίωτη (*invariant*), ελέγχονται για τα δύο μοντέλα δοκού. Η γεωμετρική απεικόνιση που δίνεται στην πολλαπλότητα στροφών $SO(3)$ ξεκαθαρίζει τον τρόπο δημιουργίας ενός αναλλοίωτου στοιχείου δοκού με μεγάλες στροφές στον χώρο: πρέπει να αναφέρεται κανείς στον ίδιο εφαπτομενικό χώρο στο $SO(3)$ όταν εκτελείται η παρεμβολή. Έτσι προκύπτουν τέσσερις εκδοχές ενός γεωμετρικά μη-γραμμικού Πεπερασμένου Στοιχείου (SR invariant, GL invariant, SR iterative, GL iterative) που χρησιμοποιούνται στα αριθμητικά παραδείγματα. Στα αποτελέσματα γίνεται η σύγκριση του προτεινόμενου αναλλοίωτου μοντέλου δοκού GL με τα υπόλοιπα τρία μοντέλα δοκού. Το μοντέλο δοκού που προέρχεται από τις τροπές Green-Lagrange δίνει μια διαφορετική προσέγγιση των τροπών και των δυνάμεων μέσα στο στοιχείο δοκού (στα σημεία Gauss λόγω των επιπλέον όρων καμπυλότητας που μετατοπίζουν τον ουδέτερο άξονα κατά την παραμόρφωση. Αντίθετα, το μοντέλο δοκού που χρησιμοποιεί τις τροπές Simo-Reissner υπολογίζει στο εσωτερικό του στοιχείου τιμές τροπών και δυνάμεων που ακολουθούν μια αναμενόμενη κατανομή στο μήκος λόγω του ότι ο ουδέτερος άξονας παραμένει ίδιος με τον κεντροβαρικό άξονα κατά την παραμόρφωση. Η ενσωμάτωση στο μοντέλο δοκού GL της αναλλοίωτης ανανέωσης που χωρίζει την συνολική στροφή της διατομής σε στροφή στερεού σώματος και σε μια τοπική στροφή διατομής σχετικής με τον προσανατολισμό του στοιχείου δοκού, προσφέρει τις ιδιότητες του αναλλοίωτου της εσωτερικής ελαστικής ενέργειας μετά απο στροφή στερεού σώματος του στοιχείου δοκού, όπως και την ανεξαρτησία του αποτελέσματος απο την διαδρομή (φυσική ή αριθμητική) που ακολουθήθηκε. Όπως φαίνεται, αυτή η υλοποίηση μπορεί να συνδυαστεί με όλα τα μοντέλα δοκών με μικρές παραμορφώσεις που χρησιμοποιούν παραμέτρους *spin* ως αγνώστους στροφής. Η αναλλοίωτη διατύπωση, είτε στο μοντέλο δοκού SR είτε στο μοντέλο δοκού GL, είναι πιο κατάλληλη για προβλήματα με 3D μεγάλες στροφές. Τέλος, τα μοντέλα δοκού SR και GL απαιτούν παρόμοιο υπολογιστικό κόστος για τη σύγκλιση στη σωστή λύση.

Όσον αφορά στο δεύτερο αντικείμενο, μελετώνται τα ακόλουθα σχήματα χρονικής ολοκλήρωσης για τη δυναμική του στερεού σώματος: α) των Simo & Vu-Quoc [3], και β) οι 3 παραλλαγές του σχήματος Mäkinen / Cardona & Géradin [14, 12] (μη-συνεπής ανανέωση και γραμμικοποίηση, συνεπής ανανέωση και μη-συνεπής γραμμικοποίηση, συνεπής ανανέωση και γραμμικοποίηση). Η διαφορά μεταξύ των δύο αλγόριθμων, που είναι και το κίνητρο της σύγκρισής τους σε αυτή την εργασία, είναι ότι στον πρώτο αλγόριθμο το σχήμα Newmark εφαρμόζεται στις γωνιακές ταχύτητες κι επιταχύνσεις, ενώ στον δεύτερο αλγόριθμο το ίδιο σχήμα εφαρμόζεται στην πρώτη και δεύτερη παράγωγο του διανύσματος στροφής. Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τα αριθμητικά απο-

Κεφάλαιο 6. Επισκόπηση και προοπτική

τελέσματα του παραδείγματος της βαριάς συμμετρικής κορυφής είναι τα παρακάτω. Για σύντομο χρόνο προσομοίωσης: Οι παραλλαγές της μη-συνεπούς και συνεπούς ανανέωσης του δεύτερου σχήματος δίνουν μεγαλύτερη ακρίβεια για μεγάλο χρονικό βήμα από τον αλγόριθμο των Simo & Vu-Quoc. Παρουσιάζουν επίσης μια μικρή μετατόπιση στην περίοδο που οδηγεί τη λύση μπροστά από την ακριβή λύση, ενώ ο αλγόριθμος των Simo & Vu-Quoc δίνει μια περιοδικότητα στην ταλάντωση που οδηγεί την λύση πίσω από την ακριβή λύση.

Για μεγάλο χρονικό διάστημα προσομοίωσης: Ο αλγόριθμος των Simo & Vu-Quoc φαίνεται να είναι πιο σταθερός από τις 3 παραλλαγές του αλγόριθμου του Mäkinen / Cardona & Géradin. Το σχήμα με τη συνεπή ανανέωση (είτε με συνεπή γραμμικοποίηση είτε με μη-συνεπή γραμμικοποίηση) έχει καλύτερη συμπεριφορά όσον αφορά στο εκτίναγμα (blown up) της λύσης σε σχέση με τον αλγόριθμο με τη μη-συνεπή ανανέωση.

Σχετικά με το τρίτο αντικείμενο, το γεωμετρικά ακριβές μοντέλο δοκού SR ενσωματώνεται στον αερο-ελαστικό κώδικα της δυναμικής πολλαπλών σωμάτων, hGAST, καθώς και η αναλλοίωτη υλοποίηση του. Το μοντέλο SR επεκτείνεται σε γενικού σχήματος διατομές με ανομοιογενές και ανισότροπο υλικό. Γίνονται συγκρίσεις μεταξύ των μοντέλων SR και SB, που προβλέπει την γεωμετρική μη-γραμμικότητα μέσω της προσέγγισης πολλαπλών σωμάτων στο επίπεδο του σώματος. Τόσο τα παραδείγματα αναφοράς στην στατική όσο και οι αερο-ελαστικοί υπολογισμοί δείχνουν ότι το γεωμετρικά ακριβές μοντέλο δοκού προβλέπει τη στρεπτική παραμόρφωση πιο επαρκώς σε σύγκριση με τη μοντελοποίηση υπο-σώματος SB. Στην δεύτερη περίπτωση χρειάζονται πολλά υπο-σώματα για την σύγκλιση στη λύση που δίνεται από το μοντέλο SR.

6.1.1 Καινοτομίες της εργασίας

Η πρωτοτυπία της διατριβής και η συμβολή της στην έρευνα και την πράξη του μηχανικού συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- Προτάθηκε ένα νέο μοντέλο δοκού (GL invariant) που συνδυάζει την θεωρία δοκού που χρησιμοποιεί Green-Lagrange τροπές και την αναλλοίωτη τεχνική για την αποφυγή αριθμητικού σφάλματος που συνδέεται με την στροφή στερεού σώματος του στοιχείου δοκού.
- Η αριθμητική σύγκριση μεταξύ του προτεινόμενου μοντέλου δοκού (GL invariant) και του ήδη υπάρχοντος στην βιβλιογραφία μοντέλου δοκού (GL iterative) και του μοντέλου δοκού SR (invariant & iterative) παρουσιάζεται για πρώτη φορά στην βιβλιογραφία. Επιπλέον, όσον αφορά στην θεωρητική τους διερεύνηση, αυτή γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχει

Κεφάλαιο 6. Επισκόπηση και προοπτική

συμβατότητα στον τρόπο παρουσίασης των δύο μοντέλων δοκού, και να γίνεται άμεσα και εύκολα η μεταξύ τους σύγκριση.

- Διατυπώθηκε η εξίσωση δυναμικής στερεού σώματος ώστε η λύση της να διερευνηθεί με δύο αλγόριθμους χρονικής ολοκλήρωσης που προτείνονται στην βιβλιογραφία για μεγάλες στροφές στον χώρο. Η ακρίβεια και η ευστάθεια των αλγόριθμων αποτυπώνονται πάνω στα γραφήματα χρονοσειρών που δείχνουν την απόκριση με τον χρόνο ενός πολύ γνωστού παραδείγματος της βιβλιογραφίας (του “Lagrange’s top / heavy symmetrical top”). Αυτή η σύγκριση αποτελεί το πρώτο βήμα για μια περισσότερο λεπτομερή διερεύνηση ανάμεσα σε αυτά τα σχήματα χρονικής ολοκλήρωσης η οποία δεν υπάρχει στην βιβλιογραφία.
- Εμπλουτίστηκε το μοντέλο δοκού SR, καθώς στην διατύπωση του προστέθηκαν οι όροι που περιλαμβάνουν τις συζεύξεις λόγω του γενικού σχήματος διατομής, και της ετερογένειας και ανισοτροπίας του υλικού. Επιπλέον, το μοντέλο δοκού SR επεκτάθηκε με το να συμπεριλάβει τους όρους αδράνειας που είναι απαραίτητοι για την διατύπωση της δυναμικής των πολλαπλών σωμάτων.
- Η ενσωμάτωση του SR μοντέλου δοκού με τις παραπάνω επιπλέον δυνατότητες του, μέσα στον κώδικα hGAST αποτελεί μια σημαντική βελτίωση του λογισμικού, καθώς η “sub-body” τεχνική που χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα δεν είναι γεωμετρικώς ακριβής. Συγκεκριμένα, η “sub-body” τεχνική αποτελεί μια πρόιμη εκδοχή μιας γεωμετρικώς ακριβούς διατύπωσης, όπου η ακριβής κινηματική ικανοποιείται για μεμονωμένα σημεία κατά μήκος της δοκού και όχι για κάθε υλικό σημείο της δοκού.
- Η σύγκριση των δύο μεθοδολογιών (sub-body vs. geometrically exact) που περιλαμβάνονται στον ίδιο κώδικα παρουσιάζεται για πρώτη φορά στην βιβλιογραφία. Αυτό είναι πολύ σημαντικό καθώς εξαλείφονται αβεβαιότητες που σχετίζονται με τις αριθμητικές λεπτομέρειες της μοντελοποίησης, όπως είναι το σχήμα ολοκλήρωσης, η μοντελοποίηση των συγκετρωμένων μαζών, η μοντελοποίηση του εξωτερικού φορτίου, κ.α. Οπότε, η σύγκριση των δύο μοντέλων δοκού είναι άμεση, κι απαλλαγμένη απο τυχούσες διαφοροποιήσεις δύο διαφορετικών υπολογιστικών εργαλείων.

6.2 Προοπτική

Υπάρχουν διάφορα αντικείμενα σχετικά με την ανάλυση των δοκών που αξίζει να διερευνηθούν.

Κεφάλαιο 6. Επισκόπηση και προοπτική

1. Περαιτέρω έρευνα μπορεί να διενεργηθεί στην κατεύθυνση της γενίκευσης των μοντέλων δοκού με μη γραμμικότητα γεωμετρίας. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να προστεθούν επιπλέον βαθμοί ελευθερίας που θα εκφράζουν την παραμόρφωση της διατομής. Τα φαινόμενα της στρέβλωσης και της διαστρέβλωσης τα οποία προβλέπονται απο ένα τέτοιο προχωρημένο μοντέλο δοκού έχουν ήδη παρουσιαστεί στην διδακτορική διατριβή [66] και σε παρόμοιες αναφορές. Επομένως, μια μελέτη που θα συνδύαζε αυτήν την εργασία μαζί με το γεωμετρικώς ακριβές μοντέλο δοκού της παρούσας διατριβής θα ήταν ένα πολύ υποσχόμενο αντικείμενο έρευνας.
2. Από την εκτίμηση των τιμών τάσης κοντά στις στηρίξεις, που είναι αποτέλεσμα της παραπάνω ιδέας για έρευνα, θα μπορούσε να επιτευχθεί η διερεύνηση των συνθηκών στήριξης είτε στην στατική είτε στην δυναμική. Θα μπορούσε επίσης να μελετηθεί ο τοπικός λυγισμός μελών όπως είναι τα περύγια στην παρούσα διατριβή.
3. Ανοιχτά ερωτήματα υπάρχουν επίσης στο αντικείμενο της μη γραμμικότητας του υλικού. Όπως περιγράφεται παραπάνω, το κύριο πλεονέκτημα της χρήσης ενός γενικευμένου πεδίου μετακίνησης είναι ότι μπορεί να εκτιμηθεί το πεδίο τάσεων και τροπών σε κάθε υλικό σημείο της διατομής. Επομένως, ένα μεγάλο σύνολο καταστατικών εξισώσεων θα μπορούσαν να διερευνηθούν. Στις εφαρμογές με οπλισμένο σκυρόδεμα απαιτείται τουλάχιστον ένα ελαστοπλαστικό μοντέλο. Τα περισσότερα σύνθετα υλικά στις μέρες μας υπόκεινται σε μεγάλες διατμητικές παραμορφώσεις και αντιμετωπίζονται καλύτερα με μη γραμμικά ελαστικά μοντέλα. Τέλος, η πρόοδος στην περιογή της βισκο-ελαστο-πλαστικότητας επιτρέπει την μελέτη δοκών που είναι φτιαγμένες απο ελαστομερή και συνεισφέρει στην μοντελοποίηση της απόσβεσης των κατασκευών.
4. Άλλη πιθανή συμβολή σε επόμενες εργασίες μπορεί να γίνει μέσω της επέκτασης της παρούσας διατύπωσης σε συζευγμένα θερμο-μηχανικά προβλήματα. Το μέρος που αφορά στον καταστατικό νόμο θα πρέπει να τροποποιηθεί ώστε να συμπεριλάβει τους θερμοδυναμικούς νόμους τόσο στην θεωρία όσο και στην αντίστοιχη αντιμετώπιση στις αριθμητικές προσομοιώσεις.
5. Μια επέκταση της παρούσας εργασίας σε γεωμετρικώς ακριβή στοιχεία κελύφους θα μπορούσε να είναι ένα πολύ ενδιαφέρον μελλοντικό αντικείμενο έρευνας. Τα στοιχεία κελύφους είναι ένα ακόμη είδος δομικών στοιχείων που χρησιμοποιούνται ευρέως σε εφαρμοσμένες

Κεφάλαιο 6. Επισκόπηση και προοπτική

περιοχές της μηχανικής.

6. Σχετικά με το αριθμητικό μέρος της εργασίας, περαιτέρω έρευνα μπορεί να γίνει πάνω στην ανισοτροπία ως προς τις συναρτήσεις παρεμβολής που χρησιμοποιούνται όταν το καταστατικό μητρώο της διατομής είναι πλήρες. Μπορεί να διερευνηθεί η λεγόμενη "linked" παρεμβολή, όπου οι παρεμβολές του πεδίου μετατόπισης εξαρτώνται όχι μόνο από τις κομβικές μετακινήσεις, αλλά και από τις κομβικές στροφές. Παρόλο που έχει γίνει προηγούμενη εργασία στην βιβλιογραφία, υπάρχουν ακόμη ανοιχτά ερωτήματα όσον αφορά στα ανωτέρας τάξης στοιχεία δοκού στην μη-γραμμική ανάλυση.
7. Για να βελτιωθεί περαιτέρω η δυναμική των δοκών καθώς και το υδρο-σερβο-ελαστικό εργαλείο προσομοίωσης hGAST, η αριθμητική ολοκλήρωση στον χρόνο θα μπορούσε να αναβαθμιστεί ώστε να ληφθεί υπόψη η διατήρηση της συνολικής ενέργειας και ορμής. Σε αυτή την περίπτωση, οι αριθμητικές αστάθειες μπορούν να αποφευχθούν κι επομένως, τα αριθμητικά αποτελέσματα στην περιοχή των μεγάλων στροφών μπορούν να βελτιωθούν.

Βιβλιογραφία

- [1] V. Riziotis and S. Voutsinas. “GAST: A general aerodynamic and structural prediction tool for wind turbines”. In: *Proceedings of the EWEC conference (Dublin Castle, Ireland)*. 1997.
- [2] J. C. Simo. “A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 49 (1985), pp. 55–70. URL: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90050-7](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90050-7).
- [3] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. “On the dynamics in space of rods undergoing large motions - A geometrically exact approach”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 66 (1988), pp. 125–161. URL: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90073-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90073-4).
- [4] P. F. Pai, A. N. Palazotto, and J. J. M. Greer. “Polar decomposition and appropriate strains and stresses for nonlinear structural analyses”. In: *Computers and Structures* 66(6) (1998), pp. 823–840. URL: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00004-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00004-2).
- [5] E. Sapountzakis and I. Dikaros. “Non-linear flexural-torsional dynamic analysis of beams of arbitrary cross section by BEM”. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46 (2011), pp. 782–794. URL: [10.1016/j.ijnonlinmec.2011.02.012](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.02.012).
- [6] O. A. Bauchau. *Flexible Multibody Dynamics*. Springer, 2011.
- [7] A. N. Panteli and K. V. Spiliopoulos. “Comparative study of two geometrically non-linear beam models with different strain measures”. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 123(4) (2020). URL: DOI:[10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103480](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103480).
- [8] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. “A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 58 (1986), pp. 79–116. URL: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(86\)90079-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(86)90079-4).

Βιβλιογραφία

- [9] G. Jelenić and M. A. Crisfield. “Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 171 (1999), pp. 141–171. URL: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00249-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00249-7).
- [10] C. L. Bottasso, M. Borri, and L. Trainelli. “Geometric invariance”. In: *Computational Mechanics* 29 (2002), pp. 163–169. URL: DOI:10.1007/s00466-002-0329-8.
- [11] N. M. Newmark. “A method of computation for structural dynamics”. In: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 85(3) (1959), pp. 67–94.
- [12] A. Cardona and M. Géradin. “A beam finite element non-linear theory with finite rotations”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26 (1988), pp. 2403–2438. URL: <https://doi.org/10.1002/nme.1620261105>.
- [13] A. Ibrahimbegović and M. A. Mikdad. “Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 41 (1998), 781–814. URL: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19980315\)41:5<781::AID-NME308>3.0.CO;2-9](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19980315)41:5<781::AID-NME308>3.0.CO;2-9).
- [14] J. Mäkinen. “Critical study of Newmark-scheme in manifold of finite rotations”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2001), pp. 817–828. URL: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00291-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00291-2).
- [15] J. C. Simo, N. Tarnow, and M. Doblare. “Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conserving algorithms”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38 (1995), 1431–1473. URL: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(92\)90115-Z](https://doi.org/10.1016/0045-7825(92)90115-Z).
- [16] A. Ibrahimbegović and S. Mamouri. “Energy conserving/decaying implicit time-stepping scheme for nonlinear dynamics of three-dimensional beams undergoing finite rotations”. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 191 (2002), 4241–4258. URL: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00377-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00377-8).
- [17] C. Pavese et al. “HAWC2 and BeamDyn: Comparison Between Beam Structural Models for Aero-Servo-Elastic Frameworks”. In: *EWEA 2015, Paris, France, November 17-10 (2015)*.

Βιβλιογραφία

- [18] D. Manolas et al. “Cross comparison of aeroelastic state-of-the-art design tools on a 10 MW scale wind turbine”. In: *In Proceedings of the European Wind Energy Association (EWEA2015) Annual event*. Vol. Paris, France, 17-20 November. 2015.
- [19] J. Blasques. “User’s Manual for BECAS: A Cross Section Analysis Tool for Anisotropic and Inhomogeneous Beam Sections of Arbitrary Geometry”. In: *National Laboratory of Sustainable Energy, Denmark. Forskningscenter Risoe, Risoe-R No. 1785 (EN)*. 2012.
- [20] W. Yu et al. “Validation of the variational asymptotic beam sectional analysis (VABS)”. In: *AIAA J.* 40 (10) (2002), pp. 2105–2113. URL: <https://doi.org/10.2514/2.1545>.
- [21] D. Saravanos et al. “A shear beam finite element for the damping analysis of tubular laminated composite beams”. In: *J. Sound Vib.* 291 (3-5) (2006), pp. 802–823. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.06.045>.
- [22] G. P. Serafeim et al. “Optimized blade mass reduction of a 10MW-scale wind turbine via combined application of passive control techniques based on flap-edge and bend-twist coupling effects”. In: *J. Wind Eng. Ind. Aerod.* 222, 105002 (2022). URL: <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2022.105002>.
- [23] D. Manolas, V. Riziotis, and S. Voutsinas. “Assessing the importance of geometric nonlinear effects in the prediction of wind turbine blade loads”. In: *Journal of computational and nonlinear dynamics* 10(4) (2015). URL: <https://doi.org/10.1115/1.4027684>.
- [24] E. Eade. In: *Lie Groups for 2D and 3D Transformations*. 2017.
- [25] B. C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. An Elementary Introduction. Springer, 2000.
- [26] R. Gilmore. *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*. John Wiley & Sons, 1974.
- [27] J. Mäkinen. “Rotation manifold $SO(3)$ and its tangential vectors”. In: *Computational Mechanics* 42(6) (2008), pp. 907–919. URL: DOI: 10.1007/s00466-008-0293-z.
- [28] A. Mueller. “Part I, I.a - Mathematical Background”. In: *CISM Lectures: Differential-Geometric Methods in Computational Multibody System Dynamics*. 2013.
- [29] Wikipedia. *Manifold*. Available at <https://en.wikipedia.org/wiki/Manifold>.
- [30] Wikipedia. *Differentiable manifold*. Available at https://en.wikipedia.org/wiki/Differentiable_manifold.

Βιβλιογραφία

- [31] J. Argyris. “An excursion into large rotations”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 32 (1982), pp. 85–155. URL: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90069-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90069-X).
- [32] Wikipedia. *Tangent space*. Available at https://en.wikipedia.org/wiki/Tangent_space.
- [33] I. Romero. “The interpolation of rotations and its application to finite element models of geometrically exact rods”. In: *Computational Mechanics* 34 (2004), 121–133. URL: DOI10.1007/s00466-004-0559-z.
- [34] Wikipedia. *Exponential map (Lie theory)*. Available at [https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_map_\(Lie_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_map_(Lie_theory)).
- [35] E. Dvorkin, E. Onate, and J. Olivier. “On a non-linear formulation for curved Timoshenko beam elements considering large displacement/rotation increments”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26 (1988), pp. 1597–1613. URL: <https://doi.org/10.1002/nme.1620260710>.
- [36] K.-J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [37] B. McGinty. *Continuum Mechanics*. Available at <https://www.continuummechanics.org>.
- [38] M. Gaćeša. “Fixed-Pole Concept in 3D Beam Finite Elements - Relationship to Standard Approaches and Analysis of Different Interpolations”. PhD thesis. Rijeka, 2015.
- [39] M. Ritto-Corrêa and D. Camotim. “On the differentiation of the Rodrigues formula and its significance for the vector-like parameterization of Reissner-Simo beam theory”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 55 (2002), pp. 1005–1032. URL: <https://doi.org/10.1002/nme.532>.
- [40] J. C. Houbolt and G. W. Brooks. “Differential equations of motion for combined flapwise bending, chordwise bending, and torsion of twisted nonuniform rotor blades”. In: *Report 1346 - National advisory committee for aeronautics* (1956).
- [41] M. Géradin and A. Cardona. *Flexible Multibody Dynamics*. A John Wiley & Sons Ltd. Publication, 2001.
- [42] J. Linn, H. Lang, and A. Tuganov. “Geometrically exact Cosserat rods with Kelvin-Voigt type viscous damping”. In: *Mechanical Sciences* 4(1) (2013), pp. 79–96. URL: DOI:10.5194/ms-4-79-2013.

Βιβλιογραφία

- [43] C. Meier, W. A. Wall, and A. Popp. “Geometrically exact finite element formulations for curved slender beams: Kirchhoff-Love theory vs. Simo-Reissner theory”. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 26 (2019), pp. 163–243. URL: <https://doi.org/10.1007/s11831-017-9232-5>.
- [44] F. Auricchio, P. Carotenuto, and A. Reali. “On the geometrically exact beam model: A consistent, effective and simple derivation from three-dimensional finite-elasticity”. In: *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008), pp. 4766–4781. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.04.015>.
- [45] M. A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 2. Advanced topics. John Wiley & Sons Ltd., 1997.
- [46] M. Ritto-Corrêa and D. Camotim. “On the arc-length and other quadratic control methods: Established, less known and new implementation procedures”. In: *Computers & Structures* 86 (2008), pp. 1353–1368. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.08.003>.
- [47] G. Papazafeiropoulos. *Arc Length Matlab*. Available at https://www.researchgate.net/profile/George_Papazafeiropoulos2/contributions.
- [48] E. de Souza Neto and Y. Feng. “On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and ‘snap-backs’”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 179 (1999), pp. 81–89. URL: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00042-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00042-0).
- [49] R. de Borst et al. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Vol. Second edition. A John Wiley & Sons Ltd. Publication, 2012.
- [50] K.-J. Bathe and S. Bolourchi. “Large displacement analysis of three-dimensional beam structures”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14 (1979), pp. 961–986. URL: <https://doi.org/10.1002/nme.1620140703>.
- [51] V. Sonnevile, A. Cardona, and O. Brüls. “Geometrically exact beam finite element formulated on the special Euclidean group $SE(3)$ ”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 268 (2014), pp. 451–474. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.10.008>.
- [52] M. Gaćeša and G. Jelenić. “Modified fixed-pole approach in geometrically exact spatial beam finite elements”. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 99 (2015), pp. 39–48. URL: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2015.02.001>.

Βιβλιογραφία

- [53] I. Romero and F. Armero. “An objective finite element approximation of the kinematics of geometrically exact rods and its use in the formulation of an energy-momentum conserving scheme in dynamics”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54 (2002), pp. 1683–1716. URL: <https://doi.org/10.1002/nme.486>.
- [54] P. Betsch and P. Steinmann. “Frame-indifferent beam finite elements based upon the geometrically exact beam theory”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54 (2002), pp. 1775–1788. URL: <https://doi.org/10.1002/nme.487>.
- [55] Y. Goto et al. “Elastic buckling phenomenon applicable to deployable rings”. In: *International Journal of Solids and Structures* 29 (1992), pp. 893–909. URL: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90024-N](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90024-N).
- [56] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics 3rd edition*. Addison-Wesley, 2000.
- [57] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [58] J. C. Simo and K. K. Wong. “Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 31 (1991), pp. 19–52. URL: <https://doi.org/10.1002/nme.1620310103>.
- [59] Wikipedia. *Aeroelasticity*. Available at <https://en.wikipedia.org/wiki/Aeroelasticity>.
- [60] D. Manolas. “Hydro-Aero-Elastic Analysis of Offshore Wind Turbines”. PhD thesis. School of Mechanical Engineering, Laboratory of Aerodynamics, National Technical University of Athens, 2015.
- [61] J. Simo and L. Vu-Quoc. “On the Dynamics of Flexible Beams Under Large Overall Motions - The Plane Case: Part I”. In: *Journal of applied mechanics* 53(4) (1986), pp. 849–854. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3171870>.
- [62] J. Simo and L. Vu-Quoc. “On the Dynamics of Flexible Beams Under Large Overall Motions - The Plane Case: Part II”. In: *Journal of computational and nonlinear dynamics* 53(4) (1986), pp. 855–863. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3171871>.
- [63] D. Manolas et al. “Hydro-servo-aero-elastic analysis of floating offshore wind turbines”. In: *Fluids* 5(4), 200 (2020). URL: <https://doi.org/10.3390/fluids5040200>.
- [64] C. Bak et al. “Description of the DTU 10 MW Reference Wind Turbine”. In: *DTU Wind Energy Report-I-0092* (2013).

Βιβλιογραφία

- [65] IEC. *IEC 61400-1, IEC 2003, 188184CDV, 2004, edited by TC88-MT1*. Vol. 3rd ed. 2003-2004.
- [66] K. Argyridi. “Linear and Non-linear Elastic Stability of Beams by Higher Order Beam Theories”. PhD thesis. School of Civil Engineering, NTUA, Athens, 2019.
- [67] D. H. Hodges. *Nonlinear Composite Beam Theory*. Vol. 213. Progress in Astronautics and Aeronautics. American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 2006.