



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΕΜΦΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΟΥΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
της
ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΥΧΟΥ ΣΧΟΛΗΣ Ε.Μ.Φ.Ε.

ΤΑΜΑΡΑ ΜΤΣΕΝΤΛΙΝΤΖΕ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΝΤΩΝΙΟΣ ΣΥΜΒΩΝΗΣ

ΕΤΟΣ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗΣ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ: 2011



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πρακτικό Εξέτασης της Διδακτορικής Διατριβής
της
Ταμαρα Μτσεντλιντζε

**Επίλυση Προβλημάτων Θεωρίας Γραφημάτων
με Έμφαση στην Απεικόνισή τους**

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή :

Αντώνιος Συμβώνης, Επιβλέπων
Ευστάθιος Ζάχος
Michael Kaufmann

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την

.....
Α. Συμβώνης
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.
(Επιβλέπων)

.....
Ε. Ζάχος
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

.....
Μ. Kaufmann
Καθηγητής
Παν. Τούμπινγκεν

.....
Ι. Εμίρης
Καθηγητής
Ε.Κ.Π.Α.

.....
Η. Κουτσουπιάς
Καθηγητής
Ε.Κ.Π.Α.

.....
Α. Παγουρτζής
Επ. Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

.....
Α. Παπαϊωάννου
Αν. Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

.....
Ταμάρα Μτσεντλίντζε

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Copyright © Ταμάρα Μτσεντλίντζε, 2011

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος - All rights reserved

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται η παρούσα σημείωση. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτή τη διατριβή εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL & PHYSICAL SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

GRAPH THEORY PROBLEMS WITH EMPHASIS ON GRAPH DRAWING

TAMARA D. MCHEDLIDZE

A THESIS PRESENTED TO THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS IN FULFILMENT OF THE
THESIS REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY

SUPERVISOR: PROF. ANTONIOS SYMVONIS

YEAR OF DOCTORAL DEFENCE: 2011



European Union
European Social Fund



MINISTRY OF EDUCATION, LIFELONG LEARNING AND RELIGIOUS AFFAIRS
MANAGING AUTHORITY



EUROPEAN SOCIAL FUND

Co- financed by Greece and the European Union



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICS AND PHYSICAL SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ph.D. Degree Examination
for
Tamara D. Mchedlidze

GRAPH THEORY PROBLEMS
WITH EMPHASIS ON GRAPH DRAWING

Thesis Committee:

Antonios Symvonis, Supervisor
Efstathios Zachos
Michael Kaufmann

The Ph.D. Degree Proposal has been examined and approved on

.....
A. Symvonis
Professor
N.T.U.A.
(Supervisor)

.....
E. Zachos
Professor
N.T.U.A.

.....
M. Kaufmann
Professor
Un. of Tübingen

.....
I. Z. Emiris
Professor
Un. of Athens

.....
E. Koutsoupias
Professor
Un. of Athens

.....
A. Pagourtzis
Assist. Professor
N.T.U.A.

.....
A. Papaioannou
Assoc. Professor
N.T.U.A.

.....
Tamara D. Mchedlidze
School of Applied Mathematical and Physical Sciences
National Technical University of Athens

Copyright © Tamara D. Mchedlidze, 2011
All rights reserved

No part of this thesis may be reproduced, stored in retrieval systems, or transmitted in any form or by any means -electronic, mechanical, photocopying, or otherwise- for profit or commercial advantage. It may be reprinted, stored or distributed for a non-profit, educational or research purpose, given that its source of origin and this notice are retained. Any questions concerning the use of this thesis for profit or commercial advantage should be addressed to the author. The opinions and conclusions stated in this thesis are expressing the author. They should not be considered as a pronouncement of the National Technical University of Athens.

To Valentina and Alexandra.

Contents

I ENGLISH VERSION	5
Abstract	7
Acknowledgments	9
1 Introduction	11
1.1 The Research Field of Graph Drawing	11
1.2 Directed Acyclic Graphs and their Drawings	12
1.3 Drawings with Vertices Restricted to Specific Locations	14
1.4 Research Topics of this Thesis and their Applications	14
1.5 Thesis Organization	16
1.6 Basic Definitions	17
2 Upward Point Set Embeddability	19
2.1 Definition and Previous Work	19
2.1.1 Our contribution: embedding digraphs into point sets	21
2.2 Notation and Useful Results	22
2.2.1 Point set	22
2.2.2 Graphs	23
2.2.3 Useful results	23
2.3 Embedding a Tree into a Convex Point Set	23
2.3.1 Directed caterpillars	23
2.3.2 Switch-trees	36
2.3.3 K -switch trees	38
2.3.4 Embeddability of trees into convex point set	41
2.3.4.1 Specific notation	42
2.3.4.2 A restricted UPSE problem for trees	43
2.3.4.3 The testing algorithm	47
2.4 Embedding an Outerplanar Digraph into a Convex Point Set	50
2.4.1 Properties of outerplanar digraphs	53
2.4.2 Two restricted UPSE problems for outerplanar digraphs	59
2.4.2.1 Restricted UPSE for cut vertex components	60
2.4.2.2 Restricted UPSE for path components	63
2.4.3 Testing algorithm for outerplanar digraphs	65
2.5 Embedding a Path into a General Point Set	70
2.5.1 Known results and perspectives	70
2.5.2 Point set larger than graph	71
2.5.2.1 Point set of $n2^{k-2}$ points	71

2.5.2.2	Point set of $O(n^2)$ points	72
2.6	Upward Point Set Embeddability is NP-complete	75
2.7	Conclusion and Open Problems	80
3	Upward Topological Book Embeddings of Digraphs	83
3.1	Definition and Previous Work	83
3.1.1	Our contribution: spine-crossing minimization	87
3.2	Notation and Preliminary Results	87
3.3	Equivalence of Acyclic-HPCCM and Upward Book Embedding	90
3.4	Hamiltonian Planar st -Digraphs	92
3.5	Outerplanar st -digraphs	94
3.5.1	st -polygons	95
3.5.2	st -Polygon decomposition of an outerplanar st -digraph	98
3.5.3	Properties of a crossing-optimal acyclic HP-completion set	104
3.5.4	The algorithm	107
3.6	2-Page Upward Book Embeddings	116
3.6.1	Properties of crossing-free acyclic hp-completion sets	117
3.6.2	Two edges per face are enough	119
3.6.3	Embedded N -free upward planar digraphs	121
3.6.4	Fixed-width st -digraphs	123
3.7	ρ -Constrained Upward Topological Book Embedding	125
3.7.1	Main result	125
3.7.2	In terms of book embedding	132
3.8	Conclusion and Open Problems	133
4	Unilateral Orientation of Mixed Graphs	135
4.0.1	Basic Definitions	135
4.0.2	Problem Definition and Related Work	136
4.1	Recognition of Unilaterally Orientable Mixed Graphs	138
4.1.1	Preliminaries	138
4.1.2	A characterization	138
4.1.3	The algorithm	141
4.2	Recognition of Unilateral Forcing Sets	143
4.3	Conclusion and Open Problems	144
II	ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ	145
	Περίληψη	147
	Ευχαριστίες	149
1	Εισαγωγή	151
1.1	Το ερευνητικό πεδίο της απεικόνισης γραφημάτων	151
1.2	Κατευθυνόμενα Ακυκλικά Γραφήματα και οι Απεικονίσεις Τους	152
1.3	Ζωγραφίζοντας Γραφήματα με Περιορισμό στην Τοποθέτηση των Κορυφών	154
1.4	Τα Ερευνητικά Θέματα Αυτής της Διατριβής και οι Εφαρμογές	155
1.5	Η Δομή αυτής της Διατριβής	157
1.6	Βασικοί Ορισμοί	158

2	Ανερχόμενη Εμφύτευση σε Σύνολο Σημείων	161
2.1	Ορισμός και Γνωστά Αποτελέσματα	161
2.1.1	Η δική μας συνεισφορά: εμφύτευση κατεγραφημάτων σε σύνολο σημείων	163
2.2	Ορολογία και Χρήσιμα Αποτελέσματα	165
2.2.1	Σύνολο σημείων	165
2.2.2	Γραφήματα	165
2.2.3	Χρήσιμα αποτελέσματα	166
2.3	Εμφυτευσιμότητα Δέντρων σε Κυρτά Σύνολα Σημείων	167
2.3.1	Κατευθυνόμενα δέντρα-κάμπιες	167
2.3.2	Switch-trees	177
2.3.3	K-switch trees	179
2.3.4	Η Εμφυτευσιμότητα δέντρων σε κυρτά σύνολα σημείων	183
2.3.4.1	Ειδικοί ορισμοί	183
2.3.4.2	Ένα περιορισμένο πρόβλημα ανερχόμενης εμφύτευσης	184
2.3.4.3	Ο αλγόριθμος ελέγχου	188
2.4	Εξωεπίπεδα Κατεγραφήματα & Κυρτά Σύνολα Σημείων	192
2.4.1	Ιδιότητες των εξωεπίπεδων γραφημάτων	195
2.4.2	Δύο περιορισμένα προβλήματα εμφύτευσης για τα εξωεπίπεδα γραφήματα	203
2.4.2.1	Πρόβλημα περιορισμένης εμφύτευσης για τις χωρίζουσες συνιστώσες	203
2.4.2.2	Πρόβλημα περιορισμένης εμφύτευσης για τις βασικές συνιστώσες . .	207
2.4.3	Αλγόριθμος ελέγχου για τα εξωεπίπεδα γραφήματα	210
2.5	Εμφύτευση Προσανατολισμένου Μονοπατιού σε Γενικό Σύνολο Σημείων	213
2.5.1	Γνωστά αποτελέσματα και προοπτικές	213
2.5.2	Σύνολο σημείων μεγαλύτερο του γραφήματος	214
2.5.2.1	Σύνολο $n2^{k-2}$ σημείων	214
2.5.2.2	Σύνολο των $O(n^2)$ σημείων	215
2.6	\mathcal{NP} – completeness του Γενικού Προβλήματος	218
3	Ανερχόμενη Τοπολογική Εμφύτευση σε Βιβλίο	225
3.1	Ορισμός και Γνωστά Αποτελέσματα	225
3.1.1	Η δική μας συνεισφορά: ελαχιστοποίηση των τομών με την ράχη	229
3.2	Ορισμοί και Προκαταρκτικά Αποτελέσματα	230
3.3	Η Ισοδυναμία των δύο Προβλημάτων	232
3.4	Επίπεδα st -Γραφήματα με Μονοπάτι Χάμιλτον	235
3.5	Εξωεπίπεδα st -Γραφήματα	237
3.5.1	st -πολύγωνα	237
3.5.2	Αποσύνθεση εξωεπίπεδων st -γραφημάτων σε st -πολύγωνα	241
3.5.3	Οι ιδιότητες των ακυκλικών πληρώσεων κατά Χάμιλτον	245
3.5.4	Ο αλγόριθμος	248
3.6	2-Σέλιδες Ανερχόμενες Τοπολογικές Εμφυτεύσεις	258
3.6.1	Οι ιδιότητες των ακυκλικών πληρώσεων Χάμιλτον χωρίς τομές	258
3.6.2	Δυο ακμές σε μια όψη είναι αρκετές	260
3.6.3	Εμφυτευμένα N -ελεύθερα ανερχόμενα επίπεδα γραφήματα	262
3.6.4	st -γραφήματα περιορισμένου πλάτους	265
3.7	ρ -Περιορισμένη Ανερχόμενη Τοπολογική Εμφύτευση σε Βιβλίο	267
3.7.1	Βασικό αποτέλεσμα	267

3.7.2	Στους όρους της εμφύτευσης σε βιβλίο	274
4	Μονοσυνεκτικοί Προσανατολισμοί Μεικτών Γραφημάτων	275
4.0.3	Βασικοί ορισμοί	275
4.0.4	Ορισμός του προβλήματος και γνωστά αποτελέσματα	276
4.1	Αναγνώριση Μονοσυνεκτικά Προσανατολισμών Μεικτών Γραφημάτων	278
4.1.1	Προκαταρκτικά αποτελέσματα	278
4.1.2	Χαρακτηρισμός μονοσυνεκτικά προσανατολισμών μεικτών γραφημάτων . . .	279
4.1.3	Ο Αλγόριθμος	282
4.2	Αναγνώριση ενός εξαναγκαστικού μονοσυνεκτικού συνόλου	284
	Bibliography	287

Part I

ENGLISH VERSION

Abstract

In this thesis, we study two kinds of hierarchical layouts for upward planar digraphs. In the first one, called *Upward Point Set Embedding*, we are given an upward planar digraph and a point set on the plane and we are asked to find a correspondence between the vertices of the graph and the points of the point set so that the resulting straight-line drawing is upward and planar. In the second one, called *Upward Topological Book Embedding*, we are given an upward planar digraph and we are asked to find an upward planar drawing of it so that all its vertices lie on a single line and the edges are represented by curves monotonically increasing in the direction of this line. The two types of embeddings find applications in fields like project management, construction of PERT diagrams and VLSI circuit layouts. They can be also utilized in the visualization of hierarchies in directed graphs, where constraints on the positions of vertices are also required.

In the **first chapter**, we give a brief introduction to the field of Graph Drawing and present the problems studied in this thesis.

In the **second chapter**, we study *upward point set embeddings*. We first concentrate on directed trees and convex point sets. We show that there are several families of trees that always admit an upward planar drawing into every convex point sets. On the other hand, we prove that there is a family of trees that does not admit such drawing on some convex point set. Then, we prove that it can be tested in polynomial time whether a given tree admits an upward planar embedding into a given convex point set. This results is then extended to the class of outerplanar digraphs, i.e. we show that it can be tested in polynomial time whether a given outerplanar digraph admits an upward planar embedding into a given convex point set. Since each graph admitting a planar drawing on a convex point set is an outerplanar graph, this result concludes the study of upward planar point set embeddings for convex point sets. Then, we concentrate on general point sets and on oriented paths. We prove that every oriented path with n vertices admits an upward straight-line embedding into every general point set of $O(n^2)$ points. Finally, we prove that it is \mathcal{NP} -hard to determine whether an upward planar digraph admits and upward point set embedding on a given point set.

The **third chapter** is devoted to the study of *upward book embeddings*. More specifically, we study the problem of spine-crossing minimization in upward topological book embeddings. In order to simplify its study, we introduce the problem of Acyclic Hamiltonian Path Completion with Crossing Minimization (Acyclic-HPCCM for short). We first show an equivalence between the Acyclic-HPCCM problem and the problem of obtaining an upward topological 2-page book embeddings with minimum number of spine crossings. Then, we solve the Acyclic-HPCCM problem for the class of outerplanar *st*-digraphs. We also examine whether the Acyclic-HPCCM problem can be solved with zero crossings. We show that it can be efficiently solved for embedded N -free digraphs and for bounded-width digraphs. Finally, we study ρ -constrained upward topological book embeddings, i.e. topological book embeddings where the order of the vertices in which they appear on the spine is given as a part of the input. We provide a worst-case

optimal upper bound on the number of spine crossings per edge which improves the bound given in [50].

Finally, in the **fourth chapter**, we present a graph-theoretical result concerning *unilateral orientations of mixed graphs*. We present the first recognition algorithm for unilaterally orientable mixed graphs. Based on this algorithm we derive a polynomial time algorithm for testing whether a unilaterally orientable mixed graph has a *unique* unilateral orientation, partially resolving a reported open problem by Pascovici [81].

Acknowledgments

First of all, I would like to thank my supervisor, Professor Antonios Symvonis, for the ideal guidance of my research. For sharing with me his knowledge, enforcing my motivation and enthusiasm for research and his continuing support during the work on this thesis.

I want to thank the academic staff of the Department of Mathematics, which provided me the opportunity to pursue research at the department.

I would like to thank the members of my PhD advisory committee: Professor Stathis Zachos and Professor Michael Kaufmann. I thank Professor Zachos for introducing me to the theoretical computer science. It were his lectures of Algorithms, Computational Complexity and Computability that convinced me to study the theoretical computer science. I thank Professor Michael Kaufmann first of all for his interest to my research as well as for his enthusiasm and knowledge shared with me and finally for a creative environment he provided during my stay at the University of Tuebingen.

I express my gratitude to the Special Account of Funds and Research of the National Technical University of Athens and to the Research Funding Program Heracleitus II for supporting this research.

I would like to thank my colleagues and friends Michalis Bekos and Fouli Arguriou for their support, useful discussions and jokes during our long working days together. I am also grateful to all my co-authors for sharing their knowledge with me. I would also like to thank my colleagues: Philip, Christian, Markus, Stephan, Robert and Till for their advises, help and very enjoying coffee breaks during my stay in Tuebingen.

I want to thank my family and my friends. Without their emotional and financial support this thesis would not have been possible.

Finally, I thank all my teachers at the Tbilisi State University and at the National Technical University of Athens, who provided me the necessary knowledge base and passion for pure mathematics and algorithms.

Chapter 1

Introduction

1.1 The Research Field of Graph Drawing

“Graph Drawing” is an active research field that has been developed during last two decades and comprises a subfield of computer science borrowing techniques from Graph Theory and Computational Geometry.

A graph is an abstract mathematical structure that models a set of objects and a pairwise relation between them. The objects are called *nodes* and the pairwise relations are called *edges* of the graph. But, why a non-mathematician may want to draw a graph? The answer is that the drawing of the graph contributes to a better understanding of the overall structure of the relations between objects and may reveal the properties of the graph.

Graph drawing offers its services to a large number of applied fields like: bioinformatics, network security and management, supply chain management, software engineering, risk analysis, data mining, database design, business process modeling, electrical diagrams, telecommunications, social networks, criminology, web visualization, knowledge representation, VLSI circuit design.

Let us now give a more formal definition of graph drawing. A *drawing of a graph* $G = (V, E)$, where V is the set of *nodes* and E is the set of *edges*, is defined to be a mapping of the nodes and the edges of the graph to the two-dimensional or three-dimensional space such that, the nodes are represented by points or shapes (usually circles or rectangles in the plane and spheres or boxes in 3D space) and the edges are drawn as simple curves that join adjacent nodes.

Having decided to use *graph drawing* as a tool, we would like to know what are the criteria that distinguish a “good” drawing from a “bad” one. The problem is that different applications may use different drawing criteria. So, the question that arises is: “Do we need for each of these application a different graph drawing algorithm that, when drawing the graph, takes into consideration some specific to the application criteria?” An affirmative answer to this question would imply the need of a tremendous number of different graph drawing algorithms, one for each application. Fortunately, this is not the case! There is a small number of concepts and techniques that are strong enough to cover a wide variety of applications. For this purpose three important concepts have been introduced [28]: *drawing conventions*, *aesthetics* and *drawing constraints*.

Drawing conventions describe the rules that a drawing has satisfy in order to be *admissible*, for example: “the edges have to be drawn as straight/ polygonal lines”, “the arcs have to be drawn upward”, “the coordinates of the vertices have to be integer numbers”, “the edges must cross under a straight angle”, etc. *Aesthetics* are drawing criteria that we want to optimize and they usually refer to the readability of graph, i.e. “total number of edge bends”, “number of

crossings”, “area of the drawing”, etc. Finally, *drawing constraints* are rules that have to be applied to a specified part of the graph.

Thus, every problem in Graph Drawing can be represented as a set of some specific drawing conventions, aesthetics and drawing constraints. One of the biggest challenges of using Graph Drawing for real applications is the large and diverse set of drawing conventions, aesthetics and constraints that are necessary to be applied in order to model exactly a real problem. This often results in problems which are computationally hard.

The field of graph drawing has been presented in detail in the books: “Graph Drawing: Algorithms for the Visualization of Graphs” [28], “Drawing Graphs: Methods and Models” [68], “Graph Drawing and Applications for Software and Knowledge Engineers” [92], “Graph Drawing Software” [63], and the paper “Algorithms for Graph Drawing: an Annotated Bibliography” [8].

1.2 Directed Acyclic Graphs and their Drawings

In applications like project management and PERT¹ diagrams, one of the criteria of a “good” drawing is how clear the hierarchical structure of the graph is shown, see Figure 1.1. More specifically in project management the whole project can be modeled by a graph as follows: the jobs are viewed as nodes of the graph; if job B has to be executed after job A has been completed, there is a directed edge from the node corresponding to job A to the node corresponding to job B . Such a model can be easily perceived by a human eye if the corresponding graph is drawn in an upward fashion, i.e. the edges of the graph are drawn as simple curves monotonically increasing in a common direction, which is usually defined to be the upward (or downward as in the picture) direction. On the other hand, in graph drawing literature, drawing graphs without edge-crossings, called *planar* drawings, represent the central aspect of studies, since an absence of crossings among the edges improves significantly readability of drawings. The combination of a drawing conventions as upwardness and a drawing aesthetic as planarity produces a style of drawing defined as *upward planar drawings*.

More formally, a *drawing* Γ of graph G maps every vertex v of G to a distinct point $p(v)$ on the plane and each edge $e = (u, v)$ of G to a simple open curve joining $p(u)$ with $p(v)$. A drawing in which every edge (u, v) is a simple open curve monotonically increasing in the vertical direction is an *upward drawing*. A drawing Γ of graph G is *planar* if no two distinct edges intersect except at their common end-vertices. Graph G is called *upward planar* if it admits a planar and upward drawing. It is clear that acyclicity² and planarity represent necessary conditions for a graph to be upward planar. However these conditions are not sufficient, as represented in Figure 1.2.

The study of upward planarity has fascinating connection with graph-theoretic and order-theoretic properties, such as connectivity and dimensions [86].

Given a planar drawing Γ of a planar graph G , the set of points of the plane that can be connected by a curve that does not intersect any vertex or edge of the drawing are said to belong to the same *face* of the drawn graph. An embedding of a planar graph G is the equivalence class of planar drawings of G that define the same set of faces or, equivalently, of face boundaries. A planar graph together with the description of a set of faces F is called an *embedded planar graph*.

¹The Program (or Project) Evaluation and Review Technique, commonly abbreviated PERT, is a model for project management designed to analyze and represent the tasks involved in completing a given project.

²A directed graph is called acyclic if it does not contain any directed cycle.

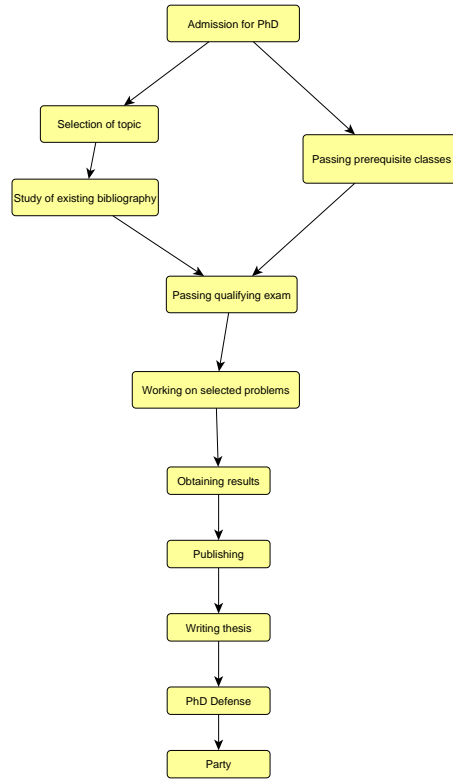


Figure 1.1: An example of PERT diagram.

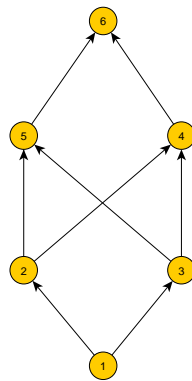


Figure 1.2: An acyclic planar graph which is not upward planar.

When together with a planar acyclic graph its planar embedding is given Bertolazzi *et al.* [10] showed that upward planarity can be tested in polynomial time. Upward planarity of some classes of single sources acyclic graphs can be tested in polynomial time [11, 62]. While both planarity and upwardness can be tested separately in polynomial time, the connected question of upward planarity was proved to be \mathcal{NP} -hard [45]. Concluding this section, we note that upward planarity is an important drawing convention that had been studied for more than 10 years and a long list of bibliography has been accommodated. For more information we refer the reader to [8].

1.3 Drawings with Vertices Restricted to Specific Locations

In practice, it may happen that some nodes of the given graph have to be mapped to pre-specified points on the plane. For example, in the context of data base system design some particularly relevant entities of an ER diagram³ may be required to be drawn in the center/or along the boundary of the diagram (see e.g. [93]). In social network analysis, a typical technique to visualize and navigate large networks is to group the nodes into clusters and to draw the nodes of the same cluster close to each other and relatively far from those of other clusters (see e.g. [16]). In order to model this idea the following problem was defined.

A *planar straight-line embedding* of a graph G into a point set S is a mapping of each node of G to a distinct point of S and of each edge of G to the straight-line segment between the corresponding end-points so that no two edges cross each other. *Point-set embeddability* is the problem of deciding whether a given planar digraph G has a planar straight-line embedding into a point set S . The problem has been studied since 1991 ([52]) and a large body of literature has been accumulated ([15, 14, 18, 22, 41, 52, 69, 71]). More details about the results presented in these works are given in Chapter 2.

A different drawing convention that also restrict positions of vertices to some pre-defined locations is so called “*book embedding*”. Informally book embedding of a graph is a drawing where all the vertices are drawn as points lying on a single line. More formally, a *k-page book* is a structure consisting of a line, referred to as *spine*, and of k half-planes, referred to as *pages*, that have the spine as their common boundary. A *book embedding* of a graph G is a drawing of G on a book such that the vertices are aligned along the spine, each edge is entirely drawn on a single page, and edges do not cross each other. The *book thickness* or *page number* of a graph is the least k so that it has a book embedding into k -page book.

Book thickness has turned up in rather diverse applications such as fault-tolerant computing VLSI design ([24, 89]), computational complexity and graph separators ([42, 43]), software complexity metrics and vehicle traffic engineering [64], sorting permutations ([57, 82, 96]) and “bisecondary structures” used for modeling RNA folding energy states [51].

In this work we are interested only on two-dimensional structures, thus we concentrate on 2-page book embeddings and since not all the graphs have a 2-page book embedding [99] we have to allow edges to cross the spine. In the literature, the book embeddings where spine crossings are allowed are referred to as *topological book embeddings* [39].

1.4 Research Topics of this Thesis and their Applications

This thesis concentrates on the study on drawings of directed graphs and on two drawing conventions: *book* and *point set embedding*. Since upward planarity is a widely accepted convention for directed graphs it is natural to ask for a book or a point set embedding of a directed graph to represent an upward drawing. Thus the problem of *upward book embedding* and *upward point set embedding* have been defined. In both problems we are given an upward planar digraph G and we are asked to construct a drawing of G where the vertices of G are restricted to a given point set (upward point-set embedding) or are lying on a given line (upward book embedding), so that the edges are represented as curves monotonically increasing in a

³In software engineering, an entity-relationship model (ERM) is an abstract and conceptual representation of data. Entity-relationship modeling is a database modeling method, used to produce a type of conceptual schema or semantic data model of a system, often a relational database, and its requirements in a top-down fashion. Diagrams created by this process are called entity-relationship diagrams, ER diagrams for short.

common direction, which in case of book embedding is given by the direction of the given line. For example consider an upward planar digraph of Figure 1.3.a. In Figure 1.3 a 2-page upward book embedding of this digraph is shown. While in Figure 1.4 you can see a point set and an upward planar embedding of this digraph into this point set.

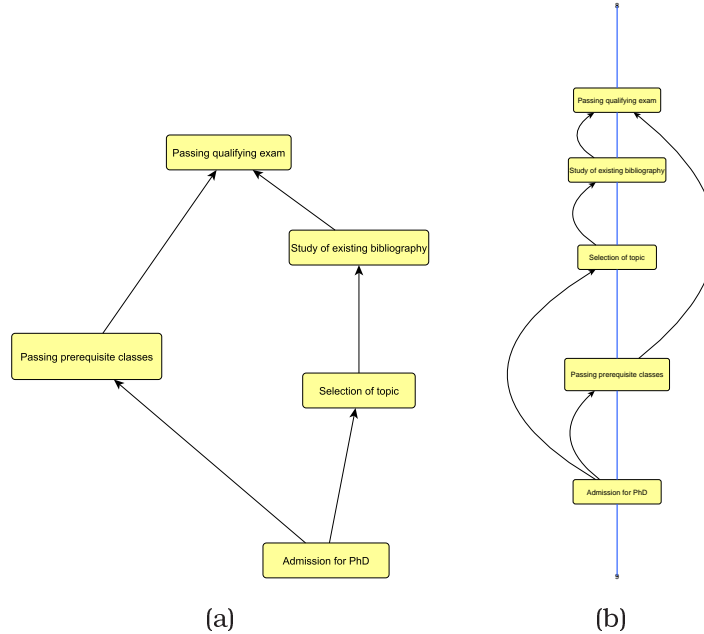


Figure 1.3: (a) Part of the graph shown in Figure 1.1. (b) A 2-page book embedding of graph of Figure 1.3.a.

Upward book embeddings: Motivated by parallel process-scheduling problems, upward book embeddings of acyclic digraphs and of posets have a long story starting in late 80's [78] and have been widely investigated. The first and more immediate application for upward book embeddings is in the context of computing drawings of hierarchical structures where it is required to consider not only convention and aesthetic such as upwardness and planarity but also semantic constraints expressed in terms of collinearity for a (sub)set of the vertices; for example, in the application domains of knowledge engineering and of project management, PERT diagrams are often drawn by requiring that critical sequences of tasks be represented as collinear vertices (see, e.g. [30, 92]). The topological book embedding problem of digraphs (edges are allowed to cross the spine) may also be of interest for its application to VLSI circuit layout in multi-layers. In fact, the topological book embedding problem is regarded as such a circuit routing problem in which:

- all wiring is done above the line,
- multiple interconnection layers are available,
- wires are allowed to cross from one layer to another using a via located on the same line as the terminals, and
- every net is constrained to have just two terminals.

Upward point-set embeddings: Upward point-set embeddability problem was defined just several years ago [36, 48]. It represents an interesting combinatorial problem as an extension of

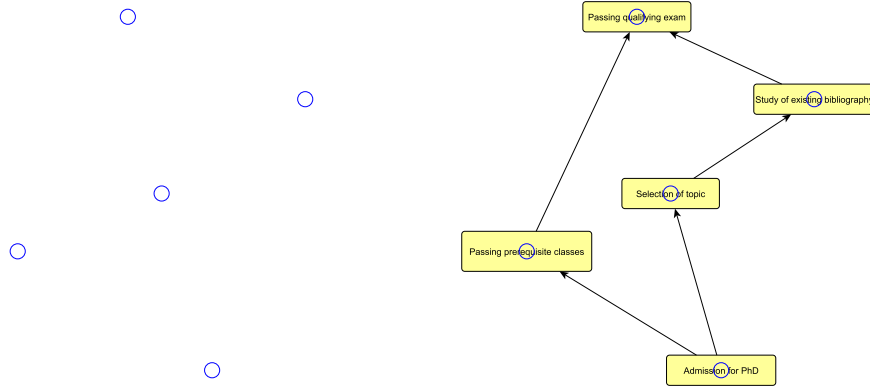


Figure 1.4: A point set and an upward embedding of graph of Figure 1.3 into this point set.

well-studied problem of drawing of undirected graphs with fixed vertex locations. It also provides a tool for information visualization combining conventions such as upwardness, planarity and specified geometric positions for the vertices of graphs (or their subset).

Except their natural relevance the problems of upward topological book embedding and upward point set embedding have a structural relevance, since upward topological book embedding comprises a tool for construction of upward point set embeddings [32, 48, 69].

A more detailed description of previous and relevant work on upward book and point set embeddings is given in the beginning of the corresponding chapters.

1.5 Thesis Organization

- In Chapter 2, we study upward point set embeddings. In Section 2.3.1 and Section 2.3.2, we show that every *caterpillar* and every *switch-tree* admit an upward planar embedding into any convex point set. The family of switch-trees is generalized to the family of *k-switch trees* in Section 2.3.3, where we prove that for every $k \geq 2$ there is a big family of *k-switch trees* which does not admit an upward planar embedding some convex point sets. Finally, in Section 2.3.4, we prove that it can be efficiently tested whether a given tree admit an upward planar embedding into a given convex point-set. In Section 3.5 this result is extended to the class of outerplanar graphs, i.e. we show that it can be tested in polynomial time whether a given outerplanar digraph admits an upward planar embedding into a given convex point set. Section 2.5 is devoted to a very special case of trees, which is an oriented path and to the general point sets. We prove that every oriented path with n vertices and k switches admits an upward straight-line embedding into every general point set of $n2^{k-2}$ points. We further improve this bound to $O(n^2)$. Finally, in Section 2.6 we conclude the chapter with the proof of \mathcal{NP} -hardness of the general problem of upward point set embeddability.
- Chapter 3 is devoted to the study of upward book embeddings. More specifically, we study the problem of spine-crossing minimization in upward topological book embeddings. In order to formalize this problem and to simplify its study the problem of Acyclic Hamiltonian Path Completion with Crossing Minimization (Acyclic-HPCCM for short) is defined. In Section 3.3 an equivalence between the Acyclic-HPCCM problem and the problem of

obtaining an upward topological 2-page book embeddings with minimum number of spine crossings is established. Further, in Section 3.5, Acyclic-HPCCM problem is solved for outerplanar *st*-digraphs. Section 3.6 is devoted to the study of Acyclic-HPCCM with zero crossings. It is shown that it can be efficiently solved for embedded N -free digraphs and for bounded-width digraphs. Finally, in Section 3.7, we study ρ -constrained upward topological book embeddings, i.e. topological book embeddings when the order of the vertices in which they appear on the spine is given as a part of the entry. We improve the upper bound for the number of spine crossings per edge given in [50] and show that this bound is worst-case optimal.

- Finally, in Chapter 4, we present a graph-theoretical result concerning unilateral orientations of mixed graphs. We present the first recognition algorithm for unilaterally orientable mixed graphs. Based on this algorithm we derive a polynomial time algorithm for testing whether a unilaterally orientable mixed graph has a *unique* unilateral orientation, partially resolving a reported open problem by Pascovici [81].

Most of the definitions are given in the beginning of every chapter. In the next section we define only the most basic and common for the entire manuscript terms.

1.6 Basic Definitions

We assume familiarity with basic graph theory [38, 56]. Let $G = (V, E)$ be a graph where V and E represent its vertex and edge sets respectively. Throughout the manuscript, we use the term “*graph*” when we refer to both directed and undirected graphs. We use the term “*digraph*” when we want to restrict our attention to directed graphs. By (u, v) we denote a directed from u to v edge, also called *arc*. An edge with end vertices at u and v is called *incident* to u and v . A directed edge (u, v) is also called an edge *outgoing* from u and *incoming* to v . The graph $G = (V', E')$ is called subgraph of $G = (V, E)$, if $V' \subset V$ and $E' \subset E$. If G' contains all the edges of G , that connect the vertices V' , then we say that G' is the subgraph of G *induced* by the set V' . A subgraph of G that is a tree, vertices of which induce G , is called a *spanning tree* of G .

The number of edges incident to a vertex is called *degree* of this vertex. The number of edges incoming to (resp. outgoing from) a vertex is called *in-degree* (resp. *out-degree*) of this vertex. A vertex of a digraph with in-degree equal to zero (0) is called a *source*, while, a vertex of G with out-degree equal to zero is called a *sink*. A *cycle* in an undirected graph is a sequence of vertices and edges $v_1, e_1, v_2, \dots, v_k, e_k$ so that edge e_i , $1 < i < k - 1$, is incident to the vertices v_i and v_{i+1} and e_k is incident to vertices v_k and v_1 . A *directed cycle* in a digraph is a sequence of vertices and edges $v_1, e_1, v_2, \dots, v_k, e_k$, so that edge e_i is outgoing from vertex v_i and incoming to vertex v_{i+1} , $1 < i < k - 1$, while edge e_k is outgoing from v_k and incoming to v_1 . A digraph is called *acyclic* if it does not contain any directed cycle. An *st-digraph* is an acyclic digraph with a single source and a single sink. Traditionally, the source and the sink of an *st-digraph* are denoted by s and t , respectively. A *path* in an undirected graph is a sequence of vertices and edges $v_1, e_1, v_2, \dots, v_k$ so that edge e_i , $1 < i < k - 1$, is incident to the vertices v_i and v_{i+1} . A *directed path* in a digraph is a sequence of vertices and edges $v_1, e_1, v_2, \dots, v_k$, so that edge e_i is outgoing from vertex v_i and incoming to vertex v_{i+1} , $1 < i < k - 1$. Two paths are called *independent* if they do not share a vertex. An edge of a digraph (u, v) is called *transitive* if there exists a directed path from u to v containing more than one edge.

A *planar drawing* Γ of a graph G is a mapping p of every vertex v of G to a distinct point $p(v)$ on the plane and each edge $e = (u, v)$ of G to a simple open curve joining $p(u)$ with $p(v)$ so that

two distinct edges does not intersect except at their common end-vertices. A graph is called *planar* if it admits a planar drawing. Given a planar drawing Γ of a planar graph G , the set of points of the plane that can be connected by a curve that does not intersect any vertex or edge of the drawing are said to belong to the same *face* of the drawn graph. The unbounded face is called the *external face*. Each face of a drawing can be indicated by the sequence of edges that surround it. An *embedding* of a planar graph G is the equivalence class of planar drawings of G that define the same set of faces or, equivalently, of face boundaries. A planar graph together with the description of a set of faces F is called an *embedded planar graph*. A graph G is called *outerplanar*, if it admits a planar drawing, such that all of its vertices are presented in the same face, which is usually chosen as the external face.

Given a line l , a curve c is called *monotone* with respect to l , if and only if for every two points p, q of the curve, their orthogonal projection on l appear in the same order as they appear along c . Let G be a planar acyclic digraph. A planar drawing of G in which every edge is represented by a simple open curve monotone with respect to a vertical line and so that for every edge (u, v) , v is drawn higher than u is called an *upward planar drawing*. An *upward planar embedding* of a planar graph G is the equivalence class of upward planar drawings of G that define the same set of faces of G . In an upward planar embedding of an *st-digraph*, the vertices s and t appear in the external face. A planar *st-digraph*, which is given together with its planar embedding where its source s and sink t appear on the boundary of its external face, is referred to as a *planar st-digraph*.

A *topological ordering* of a planar digraph G with n vertices is a mapping ρ of its vertices to distinct integers such that for each edge (u, v) we have $\rho(u) < \rho(v)$. A *topological numbering* of G is a topological ordering where the vertices are mapped to the numbers $1, \dots, n$.

An undirected graph is called *connected* if there exists a path between each pair of its vertices. Otherwise the graph is called *disconnected*. A maximal connected subgraph of a disconnected graph, is called *connected component* of the graph. An undirected graph is called *k-connected*, $k \geq 2$, if there is no set of $k - 1$ vertices, the deletion of which make the graph disconnected. The 2-connected graphs are also called *biconnected*. The vertex of a graph, deletion of which makes it disconnected, is called *cut vertex*. The maximal biconnected subgraphs of a graph is called its *blocks*. Each edge of G belongs to a single block of G , while cut vertices are shared by different blocks. The *block-cutvertex tree*, or *BC-tree*, of a connected graph G is a tree with a *B-node* for each block of G and a *C-node* for each cutvertex of G . Edges in the BC-tree connect each *B-node* μ to the *C-nodes* associated with the cutvertices in the block of μ .

Let G be a digraph. If we ignore the directions of the edges of G , we create the *underlying undirected graph* of G .

A *point set in general position*, or *general point set*, is a point set such that no three points lie on the same line and no two points have the same y -coordinate. The *convex hull* $H(S)$ of a point set S is the point set that can be obtained as a convex combination of the points of S . A *point set in convex position*, or *convex point set*, is a point set such that no point is in the convex hull of the others. Given a point set S , we denote by $b(S)$ and by $t(S)$ the lowest and the highest point of S , respectively. An *one-sided convex point-set* S is a convex point-set in which $b(S)$ and $t(S)$ are adjacent in the border of $H(S)$.

Chapter 2

Upward Point Set Embeddability

2.1 Definition and Previous Work

In practice, it may happen that some nodes of the given graph have to be mapped to pre-specified points on the plane. For example, in the context of data base system design some particularly relevant entities of an ER schema may be required to be drawn in the center/or along the boundary of the diagram (see e.g. [93]). In social network analysis, a typical technique to visualize and navigate large networks is to group the nodes into clusters and to draw the nodes of the same cluster close to each other and relatively far from those of other clusters (see e.g. [16]). In order to model this idea the following problem was defined.

A *planar straight-line embedding* of a graph G into a point set S is a mapping of each node of G to a distinct point of S and of each edge of G to the straight-line segment between the corresponding end-points so that no two edges cross each other. *Point-set embeddability* is the problem of deciding whether a given planar digraph G has a planar straight-line embedding into a point set S . It is clear that not every planar graph has planar straight-line embedding into every point set. For example, K_4 does not have a planar straight-line embedding into any 4-point convex point set (see Figure 2.1). The problem has been studied since 1991 ([52]) and a large body of literature has been accumulated ([15, 14, 18, 22, 41, 52, 69, 71]). Gritzmann *et al.* [52] proved that the class of graphs that admit a planar straight-line embedding into every point set in general position or in convex position is that of *outerplanar graphs*. Efficient algorithms are known to embed outerplanar graphs [14] and trees [15] into any point set in general or in convex position. Recently, Cabello [18] proved that the general problem of *point-set embeddability* is *NP*-hard. When the point set is larger than the given graph, determining the minimum cardinality $f(n)$ of a point set S such that every n -node planar graph admits a straight-line embedding into an n -point subset of S is a well-known problem. The best known upper bound for $f(n)$ is quadratic [41], while until very recently only linear lower bounds were available [22, 71]. In our recent work [3], we proved that $O(n(\frac{\log n}{\log \log n})^2)$ points are enough for a planar embedding of a simply-nested planar graph.

Planar graph embeddings into point sets have been also studied where edges are allowed to bend (see, e.g., [5, 31, 69]). Kaufmann and Wiese [69] have proved that a planar graph with n nodes always admits a point-set embedding with at most two bends per edge on any set of n distinct points in the plane; in the same paper, it is also proved that two bends per edge are necessary for some planar graphs and some configurations of points.

When the correspondence between the nodes of the graph and the points of the point set is given as a part of the input the problem is called a *point-set embeddability with mapping*.

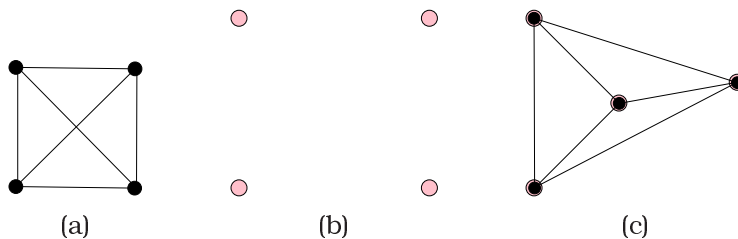


Figure 2.1: Graph K_4 does not have a planar straight-line embedding into any convex point set. But it is planar straight-line embeddable to any non-convex point set of 4 points.

Halton [54] shows that every planar graph admits a point-set embedding on any point-set, where a mapping is provided; however he does not address the question of minimizing the number of bends per edge in the computed drawing. Pach and Wenger [80] prove that a linear number of bends is always sufficient to compute a point-set embedding of a planar graph G on any set of n points; they also show that $\Omega(n)$ bends per edge may be necessary even for paths and points in convex position. The constants in these results were recently improved in [5].

The *point-set embeddability* and *point-set embeddability with given mapping* problems have been studied in a unifying framework of *k-colored point-set embeddability* for undirected graphs. In a *k-colored point set embedding* each node of G and each point of S is assigned one of k colors and the drawing algorithm can map a node of color i to any point of S having the same color. If $k = 1$ the problem coincides with the *point-set embeddability problem*; if $k = n$ we have the *point-set embeddability problem with mapping*. A selected list of papers about the *k-colored point set embeddability* includes [5, 31, 32, 33, 34, 35, 65].

The problem of point-set embeddability has also been studied for directed graphs. Since directed graphs express a kind of hierarchy, it is useful to draw them so that their arcs are represented by curves monotonically increasing in a common direction. See more on upward drawings in Section 1.2.

So, the *upward point-set embeddability* problem was defined, in which, given an upward planar digraph D , the task is to decide whether D has an upward planar embedding into a point-set S . More formally,

Definition 1. An *upward straight-line point-set embedding (UPSE for short)* of a graph $G = (V, E)$ into a point-set S , so that $|S| = |V|$, is a mapping of each vertex of G to a distinct point of S and of each arc to a straight-line segment between its end-points such that no two arcs cross and each arc (u, v) has $y(u) < y(v)$.

Upward point-set embeddability recently became an active field of research and several important results are known ([4, 12, 46, 48, 49, 67, 97]).

Upward point-set embeddability with mapping, i.e. where a correspondence between the nodes and the point-set is given as a part of the input, was studied in [49]. The authors showed that every planar *st*-digraph admits an upward point-set embedding with at most $2n - 3$ bends per edge. The study of straight-line version of upward point-set embeddability was initiated by Binucci et. al. [12], who proved the following main results: (i) No biconnected directed graph admits an upward planar straight-line embedding into every point set in convex position; (ii) The upward planar straight-line embeddability of a directed graph into every *one-side convex point set* can be characterized and efficiently tested; (iii) There exist directed trees that do not have an upward planar straight-line embedding into every point set in convex position; (iv)

Every directed path admits an upward planar straight-line embedding into every point set in convex position. The rest bibliography on the upward point-set embeddability is presented in the following section.

2.1.1 Our contribution: embedding digraphs into point sets

Our previous work on the upward point-set embeddability is presented in the current chapter and has been published in [4, 46, 48, 67, 97].

In [48] we studied the version of upward point-set embeddability where bends on edges are allowed. We showed that every planar *st*-digraph admits an upward point-set embedding with at most two bends per edge.

In [97] we studied the upward point-set embeddability problem when a mapping between the vertices and the points is given as a part of the input. We improved the result given in [49] by providing an algorithm for constructing an upward point-set embedding with at most $n - 3$ bends per edge and by providing an example which require $n - 3$ bends per edge.

In [4, 46, 67] we studied straight-line drawings and presented several interesting and partial results. Among them are: (i) any *caterpillar-tree* and *switch-tree* is upward embeddable in any convex point-set; (ii) it can be tested in polynomial time whether an outerplanar digraph admits an upward point-set embedding into a given convex point set; (iii) the class of digraphs embeddable into every general point set is distinct from the class of digraphs embeddable into every general point-set; (iv) every planar digraphs with a single source and each cycle of length three admits an upward point-set embedding into every general point set; (v) general *upward point-set embeddability* problem is \mathcal{NP} -complete even for single-source digraphs with longest cycle of length four, which together with characterization (iv) provide a complete picture regarding the complexity of the problem.

In this chapter we present our obtained results in the topic of upward point-set embeddability. We start with necessary definitions and notation in Section 2.2.

- In Section 2.3, we present two positive and one negative results regarding trees and point set in convex position. More specifically, in Section 2.3.1 and Section 2.3.2, we show that every *caterpillar* and every *switch-tree* are upward embeddable into any convex point set. The family of switch-trees is generalized to the family of *k-switch trees* in Section 2.3.3, where we prove that for every $k \geq 2$ there is a big family of *k-switch trees* which are not upward embeddable so some convex point sets. In Section 2.3.4, we prove that it can be tested in polynomial time whether a given tree is upward embeddable into a given convex point-set. The result on caterpillars is published in [4]. The results on switch-trees and *k-switch trees* are published in [46]. While the testing algorithm appears in [67].
- Section 2.4 is devoted to outerplanar digraphs and convex point sets. More specifically, we prove that it can be tested in polynomial time whether a given outerplanar digraph is upward embeddable into a given convex point-set. This nontrivial and surprising result takes us an essential step towards the line that separates efficiently solvable graph classes from \mathcal{NP} -complete cases. This result was submitted for publication to the journal of Computational Geometry: Theory and Applications.
- Section 2.5 is devoted to a very special case of trees, which is an oriented path and to the general point sets. Besides the simplicity of this family if graphs the testing problem whether an oriented path is upward embeddable to a general point set is still open. Moreover there is no counterexample proving that the embedding is not always possible. In

Section 2.5.1, I discuss the relevant results and describe a possible perspective for this problem. Section 2.5.2 is devoted to the case when the given point set is larger than the graph. We prove that every oriented path with n vertices and k switches admits an upward straight-line embedding into every general point set of $n2^{k-2}$ points. Then, using different techniques, we prove that $O(n^2)$ are enough for an upward planar embedding of an oriented path. The $n2^{k-2}$ upper bound was published in [4], while bound $O(n^2)$ is not published yet.

- Finally, in Section 2.6, we conclude this chapter with the \mathcal{NP} -completeness of the general problem. This result was published in [46].

2.2 Notation and Useful Results

We mostly follow the terminology presented in the introduction. Next, we give some definitions that are used throughout this chapter. The notation that is specific for each problem is given in the beginning of each section.

2.2.1 Point set

Recall that, a *point set in general position*, or *general point set*, is a point set such that no three points lie on the same line and no two points have the same y -coordinate. The *convex hull* $H(S)$ of a point set S is the point set that can be obtained as a convex combination of the points of S . A *point set in convex position*, or *convex point set*, is a point set such that no point is in the convex hull of the others. Given a point set S , we denote by $b(S)$ and by $t(S)$ the lowest and the highest point of S , respectively.

An *one-sided convex point-set* S is a convex point-set in which $b(S)$ and $t(S)$ are adjacent in the border of $H(S)$. If $b(S)$ and $t(S)$ appear adjacent in the border of $H(S)$ as we traverse it in the clockwise (resp., counterclockwise) direction, then the one-sided convex point-set is called a *left-sided point-set* (resp., *right-sided convex point-set*). A point-set consisting of at most two points is considered to be either a left-sided or a right-sided convex point-set. A convex point-set which is not one-sided, is called a *two-sided convex point-set*. Each given convex point-set S may be considered to be the union of two specified (at the time S is given) one-sided convex point-sets, one left-sided which is denoted by $L(S)$ and is referred to as the *left-side* of S , and one right-sided which is denoted by $R(S)$ and is referred to as the *right-side* of S . When there is no confusion regarding the point-set S we refer to, for simplicity, we use the terms L and R instead of $L(S)$ and $R(S)$, respectively. Each of points $b(S)$ and $t(S)$ belongs to either $L(S)$ or $R(S)$ but not both.

Consider a point set S and its convex hull $H(S)$. Let $S_1 = S \setminus H(S)$, $S_2 = S_1 \setminus H(S_1)$, \dots , $S_m = S_{m-1} \setminus H(S_{m-1})$. If m is the smallest integer such that $S_m = \emptyset$, we say that S is an *m -convex point set*. A subset of points of a convex point set S is called *consecutive* if its points appear consecutive as we traverse the convex hull of S in the clockwise or counterclockwise direction.

Let l be a line on the plane, which is not parallel to the x -axis. We say that point p *lies to the right of l* (resp., *to the left of l*) if p lies on a semi-line that originates on l , is parallel with the x -axis and is directed towards $+\infty$ (resp., $-\infty$). Similarly, if l is a line on the plane, which is not parallel to the y -axis, we say that point p *lies above l* (resp., *below l*) if p lies on a semi-line that originates on l , is parallel with the y -axis and is directed towards $+\infty$ (resp., $-\infty$).

2.2.2 Graphs

In this chapter we concentrate on the directed trees and on their specific families, such as: switch-trees, k -switch trees and caterpillars. A *directed tree* is a directed acyclic graph whose underlying undirected structure is that of a tree. A *switch-tree* is a directed tree T , such that, each vertex of T is either a source or a sink. Note that the longest directed path of a switch-tree has length one¹. Based on the length of the longest path, the class of switch trees can be generalized to that of k -switch trees. A *k -switch tree* is a directed tree, such that its longest directed path has length k . According to this definition a switch tree is a 1-switch tree. A digraph D is called *path-DAG*, if its underlying graph is a simple path. A *monotone path* (v_1, v_2, \dots, v_k) is a path-DAG containing arcs (v_i, v_{i+1}) , $1 \leq i \leq k-1$. Note that an upward straight-line embedding of a monotone path into any general point set S can be easily constructed by mapping vertex v_i to the i -th lowest point of S . A *caterpillar-DAG* G is a tree such that removing all the degree-1 vertices yields a path-DAG.

2.2.3 Useful results

Paper by Binucci *et al.* [12] was the first where the upward planar straight-line point-set embedding were studied. The following results presented there are used in this chapter.

Lemma 1 (Binucci *et al.* [12]). *Let T be an n -vertex tree-DAG and let S be any convex point set of size n . Let u be any vertex of T and let T_1, T_2, \dots, T_k be the subtrees of T obtained by removing u and its incident edges from T . In any UPSE of T into S , the vertices of T_i are mapped into a set of consecutive points of S , for each $i = 1, 2, \dots, k$.*

Theorem 1 (Binucci *et al.* [12]). *For every odd integer $n \geq 5$, there exists a $(3n + 1)$ -vertex directed tree T and a convex point set S of size $3n + 1$ such that T does not admit an UPSE into S .*

Lemma 2 (Binucci *et al.* [12]). *Let S be any one-sided convex point set of size n and let $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ be any n -vertex path-DAG. If edge (v_1, v_2) is directed from v_1 to v_2 (resp. from v_2 to v_1) then there exists an upward straight-line embedding of P into S in which v_1 is on $b(S)$ (resp. v_1 is on $t(S)$).*

The following theorem is one of the main results presented in [12].

Theorem 2 (Binucci *et al.* [12]). *Every n -vertex path-DAG admits an upward straight-line embedding into every convex point set of size n .*

2.3 Embedding a Tree into a Convex Point Set

2.3.1 Directed caterpillars

In this section we prove that any caterpillar-DAG $G = (V, E)$ admits an upward straight-line embedding into every point set in convex position. This result extends the positive result for path-DAGs presented by Binucci *et al.* [12] (see Theorem 2 higher).

Let us first introduce some specific for this section terminology. Recall that a *caterpillar-DAG* G is a tree such that removing all the degree-1 vertices, called the *legs* of G , yields a path,

¹The *length* of a directed path is the number of arcs in the path.

called the *spine* of G . A caterpillar-DAG G whose spine is a monotone path is called a *monotone caterpillar*. Let v_s and v_t be a source and a sink of the spine of a caterpillar. A vertex w that is connected to v_s by the arc (w, v_s) or to v_t by the arc (v_t, w) is called an *extremal leg* of a caterpillar. A vertex w that is connected to v_s by the arc (v_s, w) or to v_t by the arc (w, v_t) is called a *border leg* of a caterpillar. In Figure 2.2 the extremal legs have numbers 1, 13 – 14, 20 – 21, 28, 29, 39 – 41 and are denoted by grey circles, while, the border legs have numbers: 3, 10, 11, 23, 24, 25, 26, 31, 36, 37. We denote by $|G|$ the number of vertices in graph G and by $|S|$, the number of points in the point set S .

First, we give two simple algorithms that obtain an upward straight-line embedding of any caterpillar-DAG G into a given convex point set S when some constraints are imposed either on G or on the structure of S . These results will be later on used to obtain the general caterpillar-DAG embedding algorithm in a general convex point set.

Lemma 3. *Let $G = (V, E)$ be a caterpillar-DAG, let C be its spine and let $u \in C$ be one of the end-points of C . Let also $U = \{u\} \cup \{\text{the extremal legs of } u\}$. Then, G admits an upward straight-line embedding into every point set S in one-sided convex position such that the points of U are mapped to the $|U|$ lowest (highest) point of S .*

Proof: Binucci *et. al.* [12] (see Lemma 2) presented an algorithm that given a path-DAG G and a one-sided point set S in convex position constructs an upward planar straight-line drawing of G on S . The algorithm can be easily generalized to caterpillar-DAGs, by mapping the legs of each spine vertex to consecutive points preceding and following the point where the spine vertex is mapped to. \square

We define an enumeration function $\mathcal{E} : V \rightarrow \mathbb{N}$ for the vertices of the caterpillar-DAG G that will be used later on in the embedding algorithm. Let $C \subseteq V$ be the set of vertices of the spine of G , and let s, t be the end vertices of the spine. The enumeration is obtained according to the following rules:

- $\mathcal{R}1$: For any two vertices $u, v \in C$ such that u is before v when traversing the spine of G from s to t , $\mathcal{E}(u) < \mathcal{E}(v)$;
- $\mathcal{R}2$: for any two vertices $u \in C$ and $v \notin C$ such that there exists a directed edge $(u, v) \in E$, $\mathcal{E}(u) < \mathcal{E}(v)$;
- $\mathcal{R}3$: for any two vertices $u \in C$ and $v \notin C$ such that there exists a directed edge $(v, u) \in E$, $\mathcal{E}(v) < \mathcal{E}(u)$.

Note that rules $\mathcal{R}2$ and $\mathcal{R}3$ are sufficient to enumerate all the legs of G . An example of such an enumeration is presented in Figure 2.2.

Lemma 4. *Let $G = (V, E)$ be a monotone caterpillar-DAG and let C be its spine with source s and a sink t . Assume also that s and t are a source and a sink of G . Then, G admits an upward straight-line embedding into every convex point set S such that s is mapped to the lowest point of S and t is mapped to the highest point of S .*

Proof: Let v_1, \dots, v_n be an ordering of G , given by the enumeration function \mathcal{E} . Let the points of S be ordered by their y -ordinate in increasing order. Map vertex v_i to the i -th point of S . Note that the order given by the enumeration function \mathcal{E} is a topological ordering when restricted to a monotone caterpillar. Hence, the resulting drawing is upward. Since s is a source and t is a sink of G , we have that $s = v_1$ and $t = v_n$, and thus s and t are mapped to the lowest and

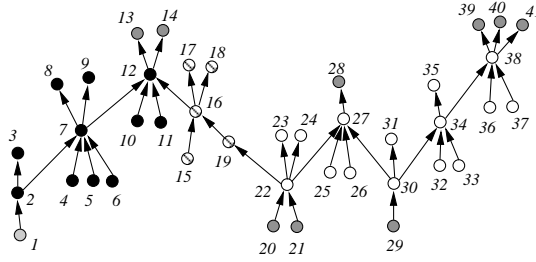


Figure 2.2: A caterpillar-DAG enumerated accordingly to rules $\mathcal{R}1 - \mathcal{R}3$.

highest points of S , respectively. Finally observe that any spine vertex and its legs are drawn on consecutive points of S , therefore there can be no crossings in the final drawing. \square

In the remaining part of this section we describe an algorithm to obtain an upward straight-line embedding of a caterpillar-DAG G into any point set S in convex position. The idea is to partition G into three subcaterpillars and to assign them to suitable parts of S in such a way that each of these subcaterpillars can be embedded with one of the two simpler algorithms described above. In the following we formalize this idea.

Let G be a caterpillar-DAG and C its spine with end points s and t , so that $\mathcal{E}(s) < \mathcal{E}(t)$. Let (C_1, C_2, \dots) be a partition of the spine C such that C_i is a maximal monotone path-DAG of C . Note that on some C_i the enumeration function \mathcal{E} induces a topological ordering while on others does not. If \mathcal{E} induces a topological ordering on a path-DAG C_i then C_i is called an *increasing path-DAG*, otherwise it is called a *decreasing path-DAG*. Since we need a disjoint partition of the spine we assume that the sources and the sinks of the spine are contained in the corresponding increasing path-DAGs.

Let G_i be the monotone caterpillar induced by the vertices of C_i and by the legs of G connected to a vertex of C_i , except for the extremal legs of G . Note that G_i is a monotone caterpillar. A caterpillar-DAG G_i is called an *increasing caterpillar-DAG* (resp. *decreasing caterpillar-DAG*) if C_i is an increasing (resp. decreasing) path-DAG. Note that in this decomposition all the border legs are contained in the increasing caterpillars and that two consecutive caterpillars G_i and G_{i+1} are disjoint (see Figure 2.3). Note also that caterpillar G is partitioned in increasing caterpillars, decreasing caterpillars and extremal legs. Observe that G_1 is always an increasing caterpillar, since it contains at least an end-point of the spine of G .

For example in Figure 2.2 the vertices of G_1 are numbered from 2 to 12, while the vertices of G_2 are numbered from 15 to 19.

Let G_i be an increasing caterpillar in the decomposition of G . We denote by $s(G_i)$ the source of the spine of G_i and by $t(G_i)$ the sink of the spine of G_i . If G_i is a decreasing caterpillar, then $s(G_i)$ denotes the source of the spine of G that is connected by an arc to G_i and by $t(G_i)$ the sink of the spine of G to which G_i is connected by an arc. Note that for any G_i , $s(G_i)$ is a source of the spine of G , while $t(G_i)$ is a sink of the spine of G . In Figure 2.2 observe that $s(G_1) = 2$, $t(G_1) = 12$, $s(G_2) = 22$, $t(G_2) = 12$.

Let G_i again be a monotone caterpillar in the decomposition of G . Next we define the *subcaterpillars* G_i^1 and G_i^2 of G induced by G_i . Let G_i be an increasing caterpillar (see Figure 2.4(a)). We set G_i^1 to be the caterpillar induced by all the vertices of G preceding $s(G_i)$ (excluding $s(G_i)$) in the enumeration \mathcal{E} except for the extremal legs of $s(G_i)$ and G_i^2 to be the caterpillar induced by all the vertices of G following $t(G_i)$ in \mathcal{E} (excluding $t(G_i)$) except for the extremal legs of $t(G_i)$. If G_i is decreasing caterpillar (see Figure 2.8(a)), we set G_i^1 to be the caterpillar induced by

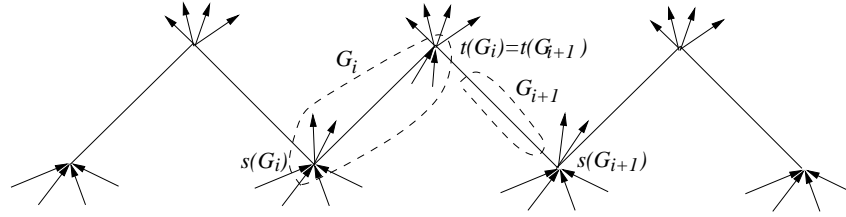


Figure 2.3: Illustration of G_i and G_{i+1} .

all the vertices of the spine preceding $t(G_i)$ (including $t(G_i)$) in the enumeration \mathcal{E} except for the extremal legs of $t(G_i)$ and G_i^2 to be the caterpillar induced by all the vertices of the spine following $s(G_i)$ in \mathcal{E} (including $s(G_i)$) except for the extremal legs of $s(G_i)$.

Let us consider the left and right part of S , $L(S)$ and $R(S)$ respectively, or L and R for simplicity. We assume that the points with the smallest and the largest y -coordinate are considered to be part of set L .

Consider vertex $v_{|L|}$ in the enumeration v_1, v_2, \dots, v_n of the vertices of G obtained according to rules $\mathcal{R}1 - \mathcal{R}3$, i.e. $v_{|L|}$ is the $|L|$ -th vertex in the enumeration. We will use $v_{|L|}$ to partition our caterpillar G into three parts. In order to do that we will consider four cases (1) $v_{|L|}$ is a vertex of an increasing caterpillar, (2) $v_{|L|}$ is a vertex of a decreasing caterpillar, (3) $v_{|L|}$ is an extremal leg that is a sink vertex of G , and (4) $v_{|L|}$ is an extremal leg that is a source of G .

Before proceeding to examine these cases we need to prove two important lemmata on which our drawing algorithm is based.

Lemma 5. *Let G be a caterpillar-DAG and $\{R_1, R_2, \dots\}$ be its decomposition into disjoint monotone caterpillar-DAGs. Let $S = L \cup R$ be the partition of point set S by a line passing through the points with the smallest and largest y -coordinate. Let $v_{|L|}$ be the $|L|$ -th vertex in the enumeration of G given by the rules $\mathcal{R}1 - \mathcal{R}3$ and let G_i be the monotone **increasing** caterpillar-DAG so that either $v_{|L|} \in G_i$ or $v_{|L|}$ is an extremal leg of $s(G_i)$ or $v_{|L|}$ is an extremal leg of $t(G_i)$. Denote by i_b (resp. i_h) the number of extremal legs of $s(G_i)$ (reps. $t(G_i)$) and by B (resp. H) the set of $i_b + 1$ lowest (resp. $i_h + 1$ highest) points of S . Let also $h_r = |H \cap R|$ and $b_l = |B \cap L|$. If it holds that $|L| \geq |G_i^1| + b_l$, $|R| \geq |G_i^2| + h_r$, then there exists an UPSE of G into point set S .*

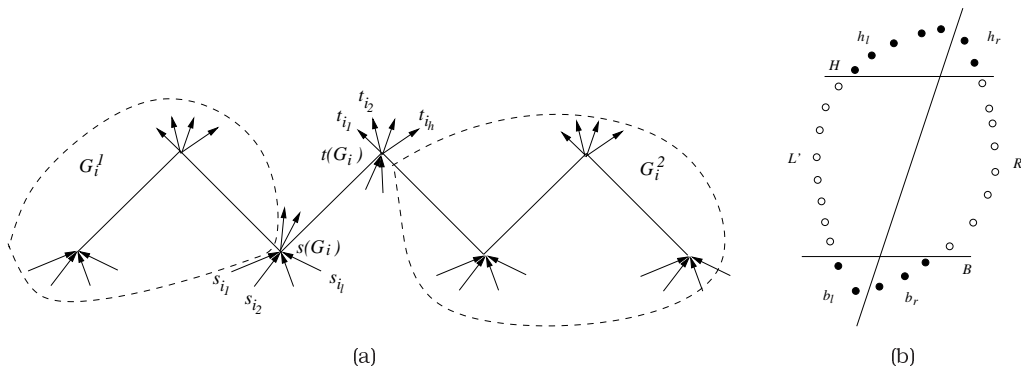


Figure 2.4: (a) Partition of G used in Lemma 5 (b) Partition of S used in Lemma 5.

Proof: The monotone increasing caterpillar G_i and the subcaterpillars G_i^1 and G_i^2 induced by

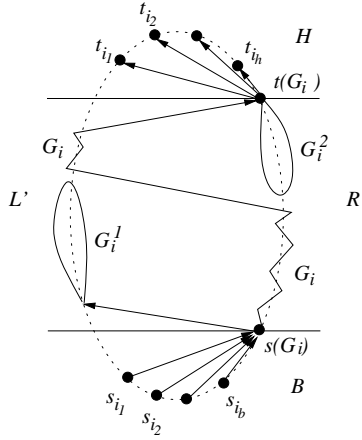


Figure 2.5: The construction of Lemma 5. Case $|A'| \geq |G_i^1|$, $|B'| \geq |G_i^2|$.

G_i are viewed in Figure 2.4(a). Note that the vertex sets of G_i^1 , G_i , G_i^2 , {extremal legs of $s(G_i)$ } and {extremal legs of $t(G_i)$ } are pairwise disjoint and that their union is the vertex set of G .

Recall the partition of point set S into sets L and R . Let the point sets H and B as they described in the lemma. Next we further refine the partition of S . Let $L' = L \setminus (B \cup H)$ and $R' = R \setminus (B \cup H)$. Recall that $|H \cap R| = h_r$, $|B \cap L| = b_l$ and set $|H \cap L| = h_l$, $|B \cap R| = b_r$ (see Figure 2.4(b)). By construction it holds that: $|L| = |L'| + b_l + h_l$ and $|R| = |R'| + b_r + h_r$.

We will use the partition L', R', H, B of point set S to construct the drawing. Next we consider three cases based on the sizes of L' and R' .

Case 1 . $|L'| \geq |G_i^1|$ and $|R'| \geq |G_i^2|$, i.e. both of R' and L' are big enough to draw G_i^1 and G_i^2 respectively. First, map $s(G_i)$ to the highest point of B and the extremal legs connected to $s(G_i)$ to the other points of B (see Figure 2.5). Analogously, map $t(G_i)$ to the lowest point of H and the extremal legs connected to $t(G_i)$ to the other points of H . Note that all the edges connecting $s(G_i)$ and $t(G_i)$ to their extremal legs are drawn in upward planar fashion. We draw G_i^1 on the $|G_i^1|$ lowest points of L' . This can be done using Lemma 3, since L' is a one-sided convex point set. Note that, by Lemma 3 the source of the spine of G_i^1 and its extremal legs are drawn on the lowest points of L' . Note also that the lowest point of L' , is higher than the highest point of B . Hence $s(G_i)$ can be connected to the source of the spine of G_i^1 in an upward way without creating any crossing. Finally observe that G_i^1 , $s(G_i)$ and the extremal legs of $s(G_i)$ are drawn on consecutive points of G .

Analogously, map G_i^2 to the $|G_i^2|$ highest points of R' . This can be done using Lemma 3, since R' is a one-sided convex point set. Note that, by Lemma 3 the sink of the spine of G_i^2 and its extremal legs are drawn on the highest points of R' . Note also that the highest point of R' , is lower than the lowest point of H . Hence the sink of the spine of G_i^2 can be connected to $t(G_i)$ in an upward way without creating any crossing. Observe also that G_i^2 , $t(G_i)$ and the extremal legs of $t(G_i)$ are drawn on the consecutive points of S .

Finally, it remains to draw G_i . By construction, the unique source of the spine of G_i is $s(G_i)$, which is mapped to a point that is lower than all the remaining free points, while the unique sink of the spine of G_i is $t(G_i)$, which is mapped to a point that is higher than all the remaining free points. Note also that the set of free points is comprised by a subset of consecutive points of L' and a subset of consecutive points of R' . Hence, by Lemma 4, we can draw G_i on the remaining points of S in an upward planar fashion.

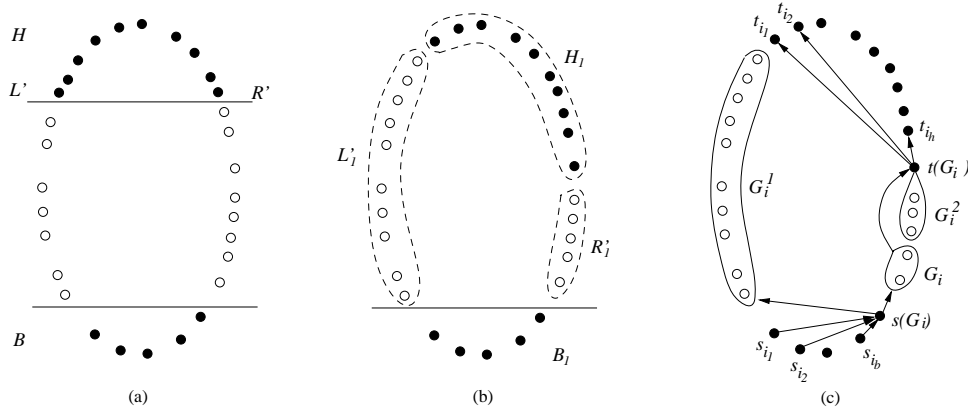


Figure 2.6: The construction of Lemma 5. Case $|A'| < |G_i^1|$. (a) A given partition A', B', H, L . (b) The modified partition A'_1, B_1, H_1, L_1 . (c) The final drawing of G .

Case 2: $|L'| < |G_i^1|$, i.e. L' is not big enough to draw G_i^1 . Next we create a new partition L'_1, H_1 and B_1 of S so that G_i^1 can be drawn on L'_1 and they have exactly the same size, G_i^2 and G_i can be drawn on R'_1 , while $s(G_i)$ with its extremal legs and $t(G_i)$ with its extremal legs on B_1 and H_1 respectively.

By the assumptions of the lemma, it holds that $|G_i^1| + b_l \leq |L|$. Let $d_{G_i^1} = |G_i^1| - |L'|$, i.e. $d_{G_i^1}$ is the number of points we need add to L' in order to draw G_i^1 . Hence, $d_{G_i^1} \leq |L| - b_l - |L'| = |L'| + b_l + h_l - b_l - |L'| = h_l$, or $d_{G_i^1} \leq h_l$. We set $L'_1 = L' \cup \{d_{G_i^1} \text{ lowest points of } H \cap L\}$ (see Figure 2.6.a,b). This construction is possible due to inequality $d_{G_i^1} \leq h_l$. Next, we set $R'_1 = R' \setminus \{d_{G_i^1} \text{ highest points of } R'\}$, $H_1 = H \setminus \{d_{G_i^1} \text{ lowest points of } H \cap L\} \cup \{d_{G_i^1} \text{ highest points of } R'\}$ and finally $B_1 = B$.

First, map $s(G_i)$ to the highest point of B_1 and the extremal legs connected to $s(G_i)$ to the remaining points of B_1 (see Figure 2.6.b,c). Analogously, map $t(G_i)$ to the lowest point of H_1 and the extremal legs connected to $t(G_i)$ to the other points of H_1 . Note that all the edges connecting $s(G_i)$ and $t(G_i)$ to their extremal legs are drawn in upward planar fashion. We draw G_i^1 on the points of L'_1 . It can be done using Lemma 3, since L'_1 is a one-sided convex point set. Note that, by Lemma 3 the source of the spine of G_i^1 and its extremal legs are drawn on the lowest points of L'_1 . Note also that the lowest point of L'_1 is higher than the highest point of B_1 . Hence $s(G_i)$ can be connected to the source of the spine of G_i^1 in an upward way without creating any crossing. Finally observe that $G_i^1, s(G_i)$ and the extremal legs of $s(G_i)$ are drawn on the consecutive points of S .

Analogously, map G_i^2 to the $|G_i^2|$ highest points of R'_1 . It can be done using Lemma 3 since R'_1 is a one-sided convex point set. Note that, by Lemma 3 the sink of G_i^2 and its extremal legs are drawn on the highest point of R'_1 . Note also that the highest points of R'_1 is lower than the lowest point of H_1 . Hence the sink of the spine of G_i^2 can be connected to $t(G_i)$ in an upward way without creating any crossing. Observe also that $G_i^2, t(G_i)$ and the extremal legs of $t(G_i)$ are drawn on the consecutive points of S .

Finally, it remains to draw G_i . Observe that, by construction, the unique source of the spine of G_i is $s(G_i)$, which is mapped to a point that is lower than all the remaining free points, and the unique sink of the spine of G_i is $t(G_i)$, which is mapped to a point that is higher than all the remaining free points. Note also that the set of free points is comprised by a subset of consecutive points of R'_1 . Hence, by Lemma 4, we can draw G_i

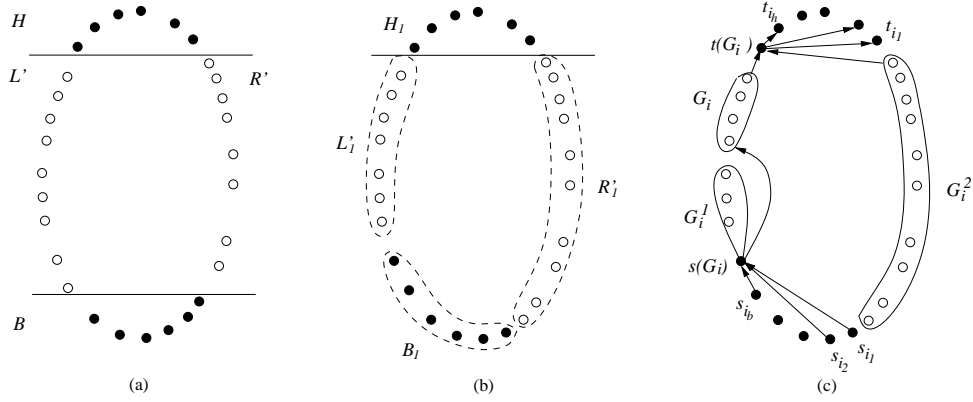


Figure 2.7: The construction of Lemma 5. Case $|L'| \geq |G_i^1|$ and $|R'| < |G_i^2|$. (a) A given partition L', R', H, B . (b) The modified partition L'_1, R'_1, H_1, B_1 . (c) The final drawing of G .

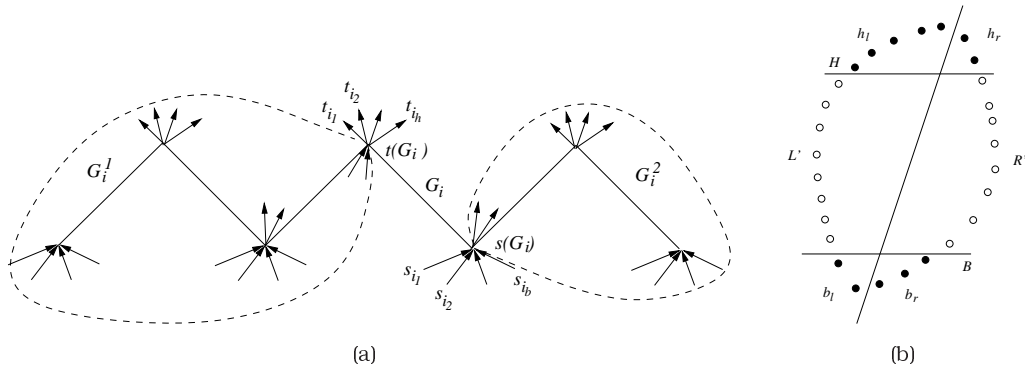


Figure 2.8: (a) Partition of G used in Lemma 6 (b) Partition of S used in Lemma 6.

on the remaining points of S in an upward planar fashion.

Case 3: $|L'| \geq |G_i^1|$ and $|R'| < |G_i^2|$, i.e. R' is not big enough to draw G_i^2 . This case is symmetric to that of Case 2. We will again create a new partition L'_1, R'_1, H_1 and B_1 of S so that G_i^2 can be drawn on R'_1 and they have exactly the same size, G_i^1 and G_i can be drawn on L'_1 , while $s(G_i)$ with its extremal legs and $t(G_i)$ with its extremal legs on B_1 and H_1 respectively. By the assumptions of the lemma $|R| \geq |G_i^2| + h_r$. Let $d_{G_i^2} = |G_i^2| - |R'|$, i.e. $d_{G_i^2}$ is the number of points we need add to R' in order to draw G_i^2 . Then, $d_{G_i^2} \leq |R| - h_r - |R'| = |R'| + h_r + b_r - h_r - |R'| = b_r$. So, we have that $d_{G_i^2} \leq b_r$.

Set $R'_1 = R' \cup \{d_{G_i^2} \text{ highest points of } B \cap R\}$ (see Figure 2.7.a,b). This construction is possible due to inequality $d_{G_i^2} \leq b_r$. Next, set $L'_1 = L' \setminus \{d_{G_i^2} \text{ lowest points of } L'\}$, $B_1 = B \setminus \{d_{G_i^2} \text{ highest points of } B \cap R\} \cup \{d_{G_i^2} \text{ lowest points of } L'\}$ and finally $H_1 = H$. Similarly to the previous cases, we can draw G_i^2 on R'_1 , G_i^1 and G_i on L'_1 , while $s(G_i)$ with its extremal legs and $t(G_i)$ with its extremal legs on B_1 and H_1 respectively (see Figures 2.7.b,c).

□

The next lemma is an analogue of the Lemma 5 for the case where G_i is a decreasing caterpillar.

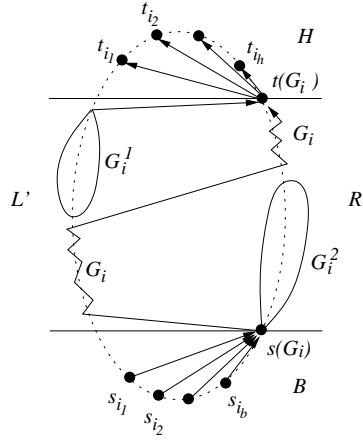


Figure 2.9: The construction of Lemma 6. Case $|L'| \geq |G_i^1| - 1$, $|R'| \geq |G_i^2| - 1$.

Lemma 6. Let G be a caterpillar-DAG and $\{G_1, G_2, \dots\}$ be its decomposition into disjoint monotone caterpillar-DAGs. Let $S = L \cup R$ be the partition of point set S by a line passing through the points with the smallest and largest y -coordinate. Let $v_{|L|}$ be the $|L|$ -th vertex in the enumeration of G given by the rules $\mathcal{R}1 - \mathcal{R}3$ and let G_i be the monotone **decreasing** caterpillar-DAG so that either $v_{|L|} \in G_i$ or $v_{|L|}$ is an extremal leg of $s(G_i)$ or $v_{|L|}$ is an extremal leg of $t(G_i)$. Denote by i_b (resp. i_h) the number of extremal legs of $s(G_i)$ (reps. $t(G_i)$) and by B (resp. H) the set of i_b lowest (resp. i_h highest) points of S . Let also $h_l = |H \cap L|$ and $b_r = |B \cap R|$. If it holds that $|L| \geq |G_i^1| + h_l - 1$, $|R| \geq |G_i^2| + b_r - 1$, then there exists an UPSE of G into point set S .

Proof: The decreasing monotone caterpillar G_i and the subcaterpillars G_i^1 and G_i^2 induced by G_i are viewed in Figure 2.8(a). Note that the vertex sets of G_i^1 , G_i , G_i^2 , {extremal legs of $s(G_i)$ } and {extremal legs of $t(G_i)$ } are pairwise disjoint and that their union is the vertex set of G .

Recall the partition of point set S into sets L and R . Let the point sets H and B as they described in the lemma. Next we farther refine the partition of S . Let $L' = L \setminus (B \cup H)$ and $R' = R \setminus (B \cup H)$. Recall that $h_l = |H \cap L|$, $b_r = |B \cap R|$ and set also $|H \cap R| = h_r$ and $|B \cap L| = b_l$ (see Figure 2.8(b)). By construction, it holds that: $|L| = |L'| + b_l + h_l$ and $|R| = |R'| + b_r + h_r$.

We will use the partition L', R', H, B to construct the drawing. Similarly to the proof of previous lemma we consider three cases based on the sizes of L' and R' .

Case 1: $|L'| \geq |G_i^1| - 1$ and $|R'| \geq |G_i^2| - 1$, i.e. $G_i^1 \setminus \{t(G_i)\}$ and $G_i^2 \setminus \{s(G_i)\}$ are small enough to be mapped to the points of L' and R' , respectively. The vertices $s(G_i)$ and $t(G_i)$ will be mapped to points in B and H , respectively.

First, map $s(G_i)$ to the highest point of B and the extremal legs connected to $s(G_i)$ to the remaining points of B (see Figure 2.9). Analogously, map $t(G_i)$ to the lowest point of H and the extremal legs connected to $t(G_i)$ to the remaining points of H . Note that all the edges connecting $s(G_i)$ and $t(G_i)$ to their extremal legs are drawn in upward planar fashion.

Observe that the point where $s(G_i)$ is mapped to, together with the $|G_i^2|$ lowest points of R' , form a one-sided convex point-set. Denote this point set by $R_{G_i^2}$. Note that, by construction, $s(G_i)$ is a source in G_i^2 and hence, by Lemma 3, we can draw G_i^2 on the point set $R_{G_i^2}$ so that $s(G_i)$ is mapped to its lowest point, i.e to the point it has already been mapped. The drawing of G_i^2 is upward planar due to Lemma 3. Observe also that G_i^2 , $s(G_i)$ and the extremal legs of $s(G_i)$ are all drawn on consecutive points of S .

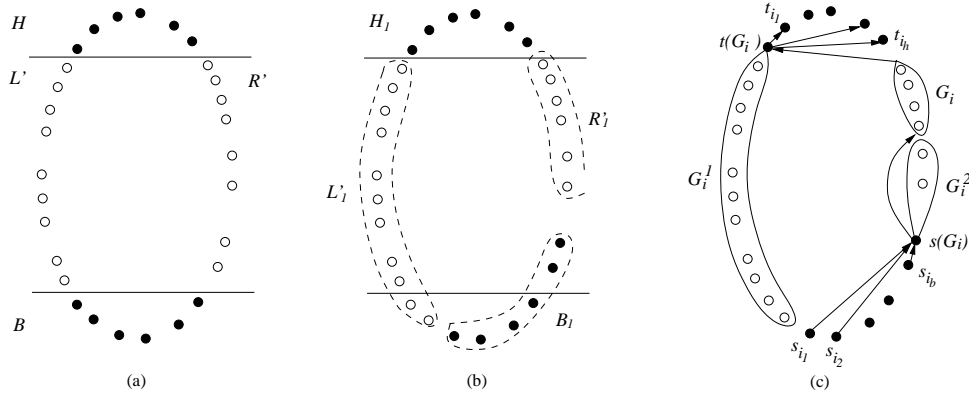


Figure 2.10: The construction of Lemma 6. Case $|A'| < |G_i^1| - 1$. (a) A given partition A' , B' , H , L . (b) The modified partition A'_1 , B'_1 , H_1 , L_1 . (c) The final drawing of G .

Similarly, note that the point where $t(G_i)$ is mapped, together with the $|G_i^1|$ highest points of L' , form a one-sided convex point-set. Denote this point set by $L_{G_i^1}$. Note that, by construction, $t(G_i)$ is a sink of G_i^1 and hence, by Lemma 3, we can draw G_i^1 on the point set $L_{G_i^1}$ so that $t(G_i)$ is mapped to its highest point, i.e to the point it has already been mapped. The drawing of G_i^1 is upward planar due to Lemma 3. Observe also that G_i^1 , $t(G_i)$ and the extremal legs of $t(G_i)$ are all drawn on consecutive points of S .

Finally, it remains to draw G_i . Note that, by construction, $s(G_i)$ is mapped to a point that is lower than all the remaining free points, and $t(G_i)$ is mapped to a point that is higher than all the remaining free points. Denote by F the set of free points together with the points where $s(G_i)$ and $t(G_i)$ are mapped. Since G_i is a decreasing caterpillar-DAG it is connected by edges to $s(G_i)$ and $t(G_i)$. Denote by G'_i the graph induced by the vertices of G_i , $s(G_i)$ and $t(G_i)$. By Lemma 4 we can draw G'_i on the points of F in an upward planar fashion so that $s(G_i)$ and $t(G_i)$ are mapped to the lowest and to the highest points of F , i.e. to the same points they have already been mapped. Note also that the point set F is comprised by a subset of consecutive points of L' and a subset of consecutive points of R' . Hence, the resulting drawing is also planar.

Case 2: $|L'| < |G_i^1| - 1$, i.e. L' is not big enough to draw $G_i^1 \setminus \{t(G_i)\}$. Next we create a new partition L'_1 , R'_1 , H_1 and B_1 of S so that $G_i^1 \setminus \{t(G_i)\}$ can be drawn on L'_1 and they have exactly the same size, $G_i^2 \setminus \{s(G_i)\}$ and G_i can be drawn on R'_1 , while $s(G_i)$ with its extremal legs and $t(G_i)$ with its extremal legs on B_1 and H_1 respectively.

By the assumptions of the lemma $|L| \geq |G_i^1| + h_l - 1$. Let $d_{G_i^1} = |G_i^1| - 1 - |L'|$, i.e. $d_{G_i^1}$ is the number of points we need add to L' in order to be able to draw G_i^1 . $d_{G_i^1} < |L| - h_l + 1 - 1 - |L'| = |L'| + h_l + b_l - h_l - |L'| = b_l$. So, we have that $d_{G_i^1} \leq b_l$.

Set $L'_1 = L' \cup \{d_{G_i^1} \text{ highest points of } B \cap L\}$ (see Figure 2.10.a,b). This construction is possible due to inequality $d_{G_i^1} \leq b_l$ and, therefore, L'_1 is a one-sided convex point set. Next, we set $R'_1 = R' \setminus \{d_{G_i^1} \text{ lowest points of } B'\}$, $B_1 = B \setminus \{d_{G_i^1} \text{ highest points of } B \cap L\} \cup \{d_{G_i^1} \text{ lowest points of } R'\}$ and, finally, $H_1 = H$.

First, map $s(G_i)$ to the highest point of B_1 and the extremal legs connected to $s(G_i)$ to the remaining points of B_1 (see Figure 2.10.b,c). Analogously, map $t(G_i)$ to the lowest point of H_1 and the extremal legs connected to $t(G_i)$ to the remaining points of H_1 . Note that

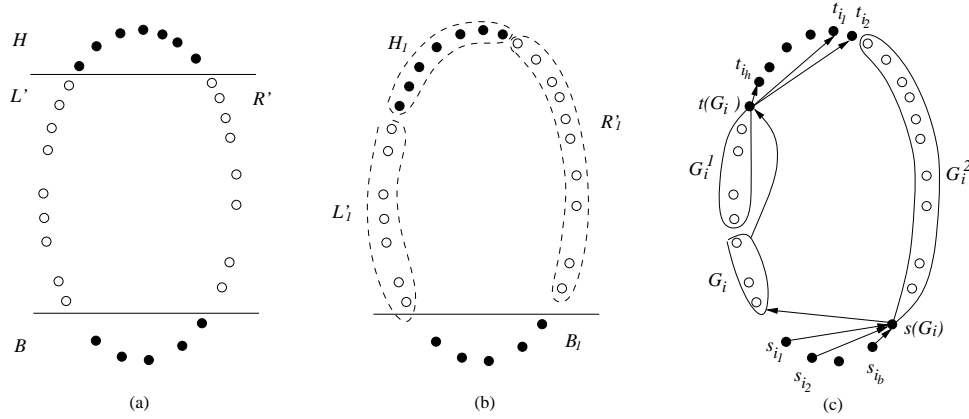


Figure 2.11: The construction of Lemma 6. Case $|L'| \geq |G_i^1| - 1$ and $|R'| < |G_i^2| - 1$.
 (a) A given partition L' , R' , H , B . (b) The modified partition L'_1 , R'_1 , H_1 , B_1 . (c) The final drawing of G .

all the edges connecting $s(G_i)$ and $t(G_i)$ to their extremal legs are drawn in upward planar fashion.

Observe that the point where $s(G_i)$ is mapped to, together with the $|G_i^2|$ lowest points of R'_1 , form a one-sided convex point-set. Denote this point set by $R_{G_i^2}$. Note that, by construction, $s(G_i)$ is a source in G_i^2 and hence by Lemma 3 we can draw G_i^2 on the point set $R_{G_i^2}$ so that $s(G_i)$ is mapped to its lowest point, i.e to the point it has already been mapped. The drawing of G_i^2 is upward planar due to Lemma 3. Observe also that G_i^2 , $s(G_i)$ and the extremal legs of $s(G_i)$ are drawn on the consecutive points of S .

Similarly, note that the point where $t(G_i)$ is mapped to, together with the points of L'_1 , comprise a one-sided convex point-set. Denote this point set by $L_{G_i^1}$. Note that, by construction, $t(G_i)$ is a sink of G_i^1 and hence by Lemma 3 we can draw G_i^1 on the point set $L_{G_i^1}$ so that $t(G_i)$ is mapped to its highest point, i.e to the point it has already been mapped. The drawing of G_i^1 is upward planar due to Lemma 3. Observe also that G_i^1 , $t(G_i)$ and the extremal legs of $t(G_i)$ are drawn on the consecutive points of S .

Finally, it remains to draw G_i . Note that, by construction, $s(G_i)$ is mapped to a point that is lower than all the remaining free points, and $t(G_i)$ is mapped to a point that is higher than all the remaining free points. Denote by F the set of free points together with the points where $s(G_i)$ and $t(G_i)$ are mapped to. Since R_i is a decreasing caterpillar-DAG, it is connected by edges to $s(G_i)$ and $t(G_i)$. Denote by G'_i the graph induced by the vertices of G_i , $s(G_i)$ and $t(G_i)$. By Lemma 4, we can draw G'_i on the points of F in an upward planar fashion so that $s(G_i)$ and $t(G_i)$ are mapped to the lowest and to the highest points of F , i.e. to the same points they have already been mapped. Note also that point set F is comprised by a subset of consecutive points of R' and the point where $t(G_i)$ was mapped. Hence, the resulting drawing is planar.

Case 3: $|L'| \geq |G_i^1| - 1$ and $|R'| < |G_i^2| - 1$, i.e. R' is not big enough to draw $G_i^2 \setminus \{s(G_i)\}$. This case is symmetric to the Case 2. Let now $d_{G_i^2} = |G_i^2| - 1 - |R'|$, i.e. $d_{G_i^2}$ is the number of points we need add to R' in order to be able to draw $G_i^2 \setminus \{s(G_i)\}$. Remember that by assumption of lemma $|R| \geq |G_i^2| + b_r - 1$, thus $d_{G_i^2} = |G_i^2| - 1 - |R'| \leq |R| - b_r + 1 - 1 - |R'| = |R'| + h_r + b_r - b_r - |R'| = h_r$. I.e $d_{G_i^2} \leq h_r$.

We create again a new partition L'_1 , R'_1 , H_1 and B_1 of S so that $G_i^2 \setminus \{s(G_i)\}$ can be drawn on

R'_1 and they have exactly the same size, G_i^1 and G_i can be drawn on L'_1 , while $s(G_i)$ with its extremal legs and $t(G_i)$ with its extremal legs can be drawn on B_1 and H_1 respectively. Set $R'_1 = R' \cup \{d_{G_i^2} \text{ lowest points of } H \cap R\}$. The partition is illustrated in Figures 2.11.a,b. This partition is possible due to the inequality $d_{G_i^2} \leq h_r$ and, hence, R'_1 is a one-sided convex point set. Let $L'_1 = L' \setminus \{d_{G_i^2} \text{ highest points of } L'\}$, $H_1 = H \setminus \{d_{G_i^2} \text{ lowest points of } H \cap R\} \cup \{d_{G_i^2} \text{ highest points of } L'\}$ and finally $B_1 = B$. We draw s_i with its extremal legs on B_1 , t_i with its extremal legs on H_1 , G_i^2 on R'_1 and finally G_i^1 and G_i on L'_1 as in previous case (see Figures 2.11.b,c).

□

Now we are ready to prove the main result of this section.

Theorem 3. *Let $G = (V, E)$ be a caterpillar-DAG. G admits an upward straight-line embedding into every convex point set S of size $|V|$.*

Proof:

Let G be a caterpillar-DAG and $\{G_1, G_2, \dots\}$ be the decomposition of G into disjoint caterpillar-DAGs as described in the beginning of the section. Recall that $G_1 \cup G_2 \cup \dots$ contain all the vertices of G except for the extremal legs of G . Let $S = L \cup R$ be the partition of S created by a line through the points of S with smallest and largest y -coordinate. We assume that these two points are contained in L . Identify the vertex $v_{|L|}$ of G in the enumeration of G given by the rules $\mathcal{R}1 - \mathcal{R}3$. Note that a vertex of G is either contained in G_i , for some i , or is an extremal leg. We proceed considering four cases based on whether $v_{|L|} \in G_i$, for some i , and G_i is an increasing or a decreasing caterpillar-DAG, or $v_{|L|}$ is an extremal leg that is connected to a source or to a sink of the spine of G . In each of the cases we refine the partition of $S = L \cup R$ by making it appropriate for the current position of the vertex $v_{|L|}$.

Case 1: $v_{|L|}$ is a vertex of an increasing caterpillar-DAG G_i . (Refer to Figure 2.4(a)).

Assume that $s(G_i)$ has i_b extremal legs, while $t(G_i)$ has i_h extremal legs. Let, as in Lemma 5 H be the point-set containing the $i_h + 1$ highest points of S and let B be the point-set containing the $i_b + 1$ lowest points of S . Let also $h_r = |H \cap R|$ and $b_l = |B \cap L|$. Recall that G_i^1 and G_i^2 are the subcaterpillars induced by G_i . In order to use Lemma 5 we have to show that: $|L| \geq |G_i^1| + b_l$, $|R| \geq |G_i^2| + h_r$.

Let $|H \cap L| = h_l$ and $|B \cap R| = b_r$. Note that G_i^1, G_i and G_i^2 are disjoint and none of them contains i_b and i_h extremal legs of $s(G_i)$ and $t(G_i)$ respectively. Note that since $v_{|L|} \in G_i$ it is true that $|G_i^1| + i_b + |G_i| \geq |L|$. Then $|R| = |G| - |L| \geq |G| - |G_i^1| - i_b - |G_i| = i_h + |G_i^2| = h_l + h_r + |G_i^2| \geq |G_i^2| + h_r$. So the inequality $|R| \geq |G_i^2| + h_r$ holds. Also since $v_{|L|} \in G_i$ it holds that $|G_i^1| + i_b < |L|$, and since $i_b = b_l + b_r - 1$, it follows that $|G_i^1| + b_l \leq |L|$. Hence by Lemma 5 the result follows.

Case 2: $v_{|L|}$ is a vertex of a decreasing caterpillar-DAG G_i . (Refer to Figure 2.8(a).)

Assume that $s(G_i)$ has i_b extremal legs, while $t(G_i)$ has i_h extremal legs. Let, as in Lemma 6 H be the point-set containing the $i_h + 1$ highest points of S and B be the point-set containing the $i_b + 1$ lowest points of S . Let also $h_l = |H \cap L|$ and $b_r = |B \cap R|$. Recall that G_i^1 and G_i^2 are the subcaterpillars induced by G_i . In order to use Lemma 6 we have to show that: $|L| \geq |G_i^1| + h_l - 1$, $|R| \geq |G_i^2| + b_r - 1$.

Since $v_{|L|} \in G_i$ it is true that $|L| > |G_i^1| + i_h \geq |G_i^1| + h_l - 1$.

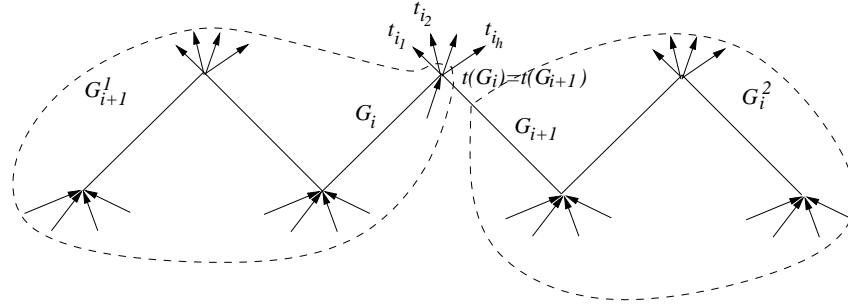


Figure 2.12: The construction of Proposition 1

Note that $|G_i^2| = |G| - |G_i^1| - i_h - i_b - |G_i|$. We know that $|G_i^1| + i_h + |G_i| \geq |L|$ since $v_{|L|}$ is in G_i . So from the previous equality and last inequality we get $|G_i^2| \leq |G| - |L| - i_b = |R| - i_b$. Then $|R| \geq |G_i^2| + i_b \geq |G_i^1| + b_r - 1$, since $i_b + 1 = b_l + b_r$. Hence by Lemma 6 the result follows.

Case 3: $v_{|L|}$ is an extremal leg that is a sink.

Let G_i and G_{i+1} such that $t(G_i) = t(G_{i+1})$ and $v_{|L|}$ is an extremal leg of $t(G_i)$. Note that G_i is an increasing, while G_{i+1} is a decreasing caterpillar. Assume that $t(G_i) (= t(G_{i+1}))$ has i_h extremal legs. Let H be the set of $i_h + 1$ highest points of S and denote $|H \cup L| = h_l$, $|H \cup R| = h_r$. Note also that $h_l + h_r = i_h + 1$.

Let us first prove the following proposition.

Proposition 1. Let G_i^1 , G_i^2 and G_{i+1}^1 , G_{i+1}^2 be the subcaterpillars of G induced by G_i and G_{i+1} respectively. At most one of the following inequalities holds:

$$|L| < |G_{i+1}^1| + h_l - 1 \quad (2.1)$$

$$|R| < |G_i^2| + h_r \quad (2.2)$$

Proof of Proposition 1. See Figure 2.12 for the illustration of the proof. For the sake of contradiction assume that both inequalities hold. Then $|L| + |R| < |G_{i+1}^1| + h_l + h_r - 1 + |G_i^2| = |G_{i+1}^1| + |G_i^2| + i_h = N$. So $|L| + |R| < N$, a clear contradiction. \square

Now we consider two cases based on whether one of the inequalities (2.1) or (2.2) does not hold.

3.a Inequality (2.1) does not hold. Thus $|L| \geq |G_{i+1}^1| + h_l - 1$. We consider the decreasing caterpillar G_{i+1} and the subcaterpillars G_{i+1}^1 and G_{i+1}^2 of G induced by G_{i+1} (see Figure 2.8(a)). Assume that $s(G_{i+1})$ has i_b extremal legs and let B be the $i_b + 1$ lowest point of S . Set $b_r = |B \cap R|$ and $b_l = |B \cap L|$.

We will show that $|R| \geq |G_i^2| + b_r - 1$. Note that $|G_{i+1}^2| = |G| - |G_{i+1}^1| - i_h - i_b - |G_{i+1}|$. We know that $|G_{i+1}^1| + i_h + |G_{i+1}| \geq |L|$ since $v_{|L|}$ is an extremal leg of $t(G_{i+1})$. So from the previous equality and last inequality we get $|G_{i+1}^2| \leq |G| - |L| - i_b = |R| - i_b$. Hence $|R| \geq |G_{i+1}^2| + i_b \geq |G_i^2| + b_r - 1$, since $i_b + 1 = b_l + b_r$. Note that G_{i+1} is a decreasing caterpillar, $v_{|L|}$ is an extremal leg of $t(G_{i+1})$ and all the conditions of Lemma 6 hold. So by the same lemma the result follows.

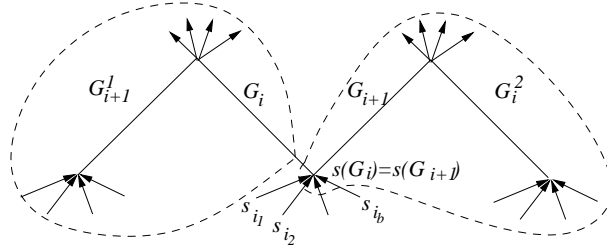


Figure 2.13: The construction of Proposition 2

3.b Inequality (2.2) does not hold. Hence $|R| \geq |G_i^2| + h_r$. We consider the increasing caterpillar G_i and the subcaterpillars G_i^1 and G_i^2 of G induced by G_i (see Figure 2.4(a)). Assume that $s(G_i)$ has i_b extremal legs and let B be the set of $i_b + 1$ lowest point of S . Set $b_l = |B \cap L|$ and $b_r = |B \cap R|$. Note that $|L| \geq |G_i^1| + i_b \geq |G_i^1| + b_l$, since $i_b + 1 = b_l + b_r$. So we have that G_i is an increasing caterpillar, $v_{|L|}$ is an extremal leg of $t(G_i)$ and both inequalities required by Lemma 5 hold. So by the same lemma the result follows.

Case 4: $v_{|L|}$ is an extremal leg that is a source.

Let G_i and G_{i+1} such that $s(G_i) = s(G_{i+1})$ and $v_{|L|}$ is an extremal leg of $s(G_i)$. Note that G_i is a decreasing, while G_{i+1} an increasing caterpillar. Assume that $s(G_i)$ (or $s(G_{i+1})$) has i_b extremal legs. Let B be the set of $i_b + 1$ lowest points of S and set $|B \cup L| = b_l$, $|B \cup R| = b_r$. Note also that $b_l + b_r = i_b + 1$.

Let us first prove the following proposition.

Proposition 2. Let G_i^1 , G_i^2 and G_{i+1}^1 , G_{i+1}^2 be the subcaterpillars of G induced by G_i and G_{i+1} respectively (see Figure 2.13). At most one of the following inequalities holds:

$$|L| < |G_{i+1}^1| + b_l \quad (2.3)$$

$$|R| < |G_i^2| + b_r - 1 \quad (2.4)$$

Proof of Proposition 2. For the sake of contradiction assume that both inequalities hold. Then $|L| + |R| < |G_{i+1}^1| + b_l + b_r - 1 + |G_i^2| = N$, a clear contradiction. \square

Now we consider two cases based on whether one of the inequalities (2.3) or (2.4) does not hold.

4.a Inequality (2.3) does not hold. Hence $|L| \geq |G_{i+1}^1| + b_l$. We consider the increasing caterpillar G_{i+1} and the subcaterpillars G_{i+1}^1 and G_{i+1}^2 of G induced by G_{i+1} (see Figure 2.4(a)).

Assume that $t(G_{i+1})$ has i_h extremal legs. Identify i_h highest points of S and call them H . Set $L \cup H = h_l$ and $R \cup H = h_r$. In order to use the Lemma 5 we have to show that $|R| \geq |G_i^2| + h_r$. Note first that $|G_{i+1}^2| = |G| - |G_{i+1}^1| - i_b - |G_{i+1}| - i_h$ and that $|G_{i+1}^1| + i_b \geq |L|$, since $v_{|L|}$ is an extremal leg of $s(G_{i+1})$. Hence we get $|G_{i+1}^2| \leq |G| - |L| - i_b - |G_{i+1}| - i_h = |R| - i_b - |G_{i+1}| - i_h$. So we have $|G_{i+1}^2| + h_r \leq |R| - i_b - |G_{i+1}| - i_h + h_r = |R| - i_b - |G_{i+1}| - h_l - h_r + 1 + h_r = |R| - i_b - |G_{i+1}| - h_l - 1$ and since $i_b \geq 1$ we get that $|G_{i+1}^2| + h_r \leq |R|$. So by Lemma 5 the result follows.

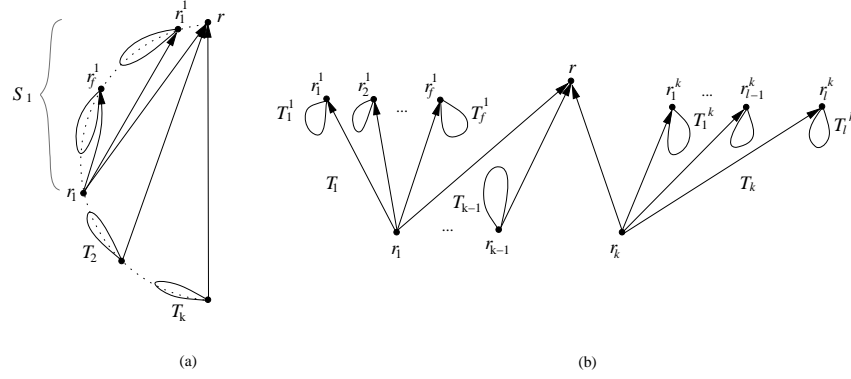


Figure 2.14: The construction of Lemma 7 and Lemma 9

4.b Inequality (2.4) does not hold. Hence $|R| \geq |G_i^2| + b_r - 1$. We consider the decreasing caterpillar G_i and the subcaterpillars G_i^1 and G_i^2 of G induced by G_i (see Figure 2.8(a)). Assume that $t(G_i)$ has i_h extremal legs. Identify i_h highest points of S and call them H . Set $L \cup H = h_l$ and $R \cup H = h_r$. In order to use Lemma 6 we have to show that $|L| \geq |G_i^1| + h_l - 1$. But it is trivial since $v_{|L|}$ is an extremal leg of $t(G_i)$ and hence $|L| > |G_i^1| + i_h$. So by Lemma 6 the result follows. \square

In this section we proved that every directed caterpillar G has an UPSE into any convex point set S . The algorithm is based on a partition of G into three subcaterpillars and to assign them to suitable parts of S . The idea is similar to that used by Binucci *et al.* [12] for the case of a path-DAG, but the proof becomes non-trivial due to the existence of the legs. The crucial idea of the proof is that there always exist two adjacent monotone caterpillars in G , such that at least one of them defines the desired partition.

2.3.2 Switch-trees

In this section we enrich the positive results regarding embeddability of trees into convex point-sets [12] by proving that, any switch-tree has an UPSE into any point set in convex position. During the execution of the algorithms, presented in the following lemmata, which embed a tree T into a point set S , a *free point* is a point of S to which no vertex of T has been mapped yet. The following lemma treats the simple case of a one-sided convex point set and is an immediate consequence of a result by Heath *et al.* [59] (Theorem 2.1).

Lemma 7. *Let T be a switch-tree, r be a sink of T , S be a one-sided convex point set so that $|S| = |T|$, and p be S 's highest point. Then, T admits an UPSE into S so that vertex r is mapped to point p .*

Proof: Let T_1, \dots, T_k be the sub-trees of T that are connected to r by an arc and let r_1, \dots, r_k be the vertices of T_1, \dots, T_k , respectively, that are connected to r (see Figure 2.14.b). Observe that, since T is a switch tree and r is a sink, vertices r_1, \dots, r_k are sources. We draw T as follows: We map r to p , then we map T_1 to the $|T_1|$ highest points of S , so that r_1 is mapped to the lowest of them. This can be trivially done if T_1 consists of a single vertex, i.e. of r_1 . Assume now that T_1 contains more than one vertex. Denote by S_1 the $|T_1|$ highest free points of S . Let, T_1^1, \dots, T_1^f be the sub-trees of T_1 , connected to r_1 by an arc, and let r_1^1, \dots, r_1^f be the vertices of T_1^1, \dots, T_1^f ,

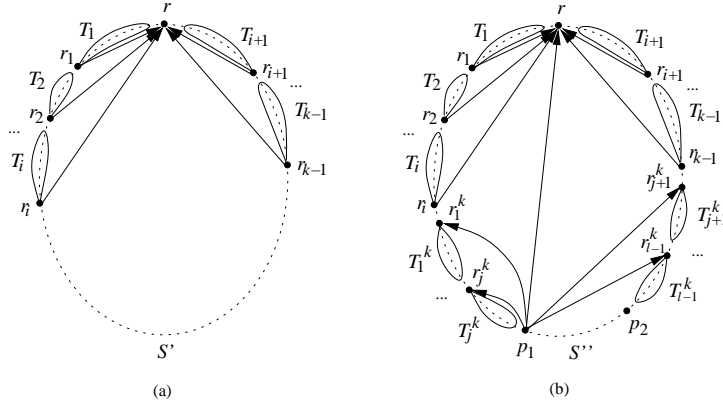


Figure 2.15: The construction of Lemma 9

respectively, to which r_1 is connected. Since r_1 is a source, r_1^1, \dots, r_f^1 are all sinks. Using the lemma recursively we draw T_1^1 on the $|T_1^1|$ consecutive highest points of S_1 so that r_1^1 is mapped to the highest point (Figure 2.14.a). Similarly we draw trees T_2^1, \dots, T_f^1 on the remaining free points of S_1 . Finally we map r_1 to the last free point of S_1 , i.e. to its lowest point. Since all of r_1^1, \dots, r_f^1 are drawn higher than r_1 , the arcs $(r_1, r_1^1), \dots, (r_1, r_f^1)$ are drawn in upward fashion. Since each of T_1^1, \dots, T_f^1 is drawn on the consecutive points of S in an upward planar fashion we infer that the drawing of T_1 is upward planar and is placed on the consecutive points of S .

In a similar way, we map T_2 to the $|T_2|$ highest consecutive free points of S so that r_2 is mapped to the lowest of them. We continue mapping the rest of the trees in the same way on the remaining free points. Note that for any $i = 1, \dots, k$, arc (r_i, r) does not intersect any of $H(P_j)$, where P_j is a point set where the vertices of the subtree T_j are mapped. Hence for any $i = 1, \dots, k$, arc (r_i, r) does not cross any other arc of the drawing. Since p is the highest point of S and r is mapped to p , we infer that arcs (r_i, r) , $i = 1, \dots, k$ are drawn in upward fashion. Since, by construction, the drawings of T_1, \dots, T_k are upward and planar, we infer that the resulting drawing of T is upward and planar. \square

The following lemma is symmetrical to Lemma 7 and can be proved by a symmetric construction.

Lemma 8. *Let T be a switch-tree, r be a source of T , S be a one-sided convex point set so that $|S| = |T|$, and p be S 's lowest point. Then, T admits an UPSE into S so that vertex r is mapped to point p .*

Now we are ready to proceed to the main result of the section.

Theorem 4. *Let T be a switch-tree and S be a convex point set such that $|S| = |T|$. Then, T admits an UPSE into S .*

The proof of the theorem is based on the following lemma, which extends Lemma 7 from one-sided convex point sets to convex point sets.

Lemma 9. *Let T be a switch-tree, r be a sink of T , S be a convex point set such that $|S| = |T|$. Then, T admits an UPSE into S so that vertex r is mapped to the highest point of S .*

Proof: Let T_1, \dots, T_k be the sub-trees of T that are connected to r by an edge (Figure 2.14.b) and let r_1, \dots, r_k be the vertices of T_1, \dots, T_k , respectively, that are connected to r . Observe that, since T is a switch tree and r is a sink, vertices r_1, \dots, r_k are sources.

We draw T on S as follows. We start by placing the trees T_1, T_2, \dots on the left side of the point set S as long as they fit, using the highest free points first. This can be done in an upward planar fashion by Lemma 8 (Figure 2.15.a). Assume that T_i is the last placed subtree. Then, we continue placing the trees T_{i+1}, \dots, T_{k-1} on the right side of the point set S . This can be done due to Lemma 8. Note that the remaining free points are consecutive point of S , denote these points by S' . To complete the embedding we draw T_k on S' . Let T_1^k, \dots, T_l^k the subtrees of T_k , that are connected to r_k by an arc. Let also r_1^k, \dots, r_l^k be the vertices of T_1^k, \dots, T_l^k , respectively, that are connected to r_k (Figure 2.14.b). Note that r_1^k, \dots, r_l^k are all sinks. We start by drawing T_1^k, T_2^k, \dots as long as they fit on the left side of point set S' , using the highest free points first. This can be done in an upward planar fashion by Lemma 7. Assume that T_j^k is the last placed subtree (Figure 2.15.b). Then, we continue on the right side of the point set S' with the trees $T_{j+1}^k, \dots, T_{l-1}^k$. This can be done again by Lemma 7. Note that there are exactly $|T_l^k| + 1$ remaining free points since we have not yet drawn T_l^k and vertex r_k of T_k . Denote by S'' the remaining free points and note that S'' consists of consecutive points of S . If S'' is a one-sided point set then we can proceed by using the Lemma 7 again and the result follows trivially. Assume now that S'' is a two-sided convex point set and let p_1 and p_2 be the highest points of S'' on the left and on the right, respectively. W.l.o.g., let $y(p_1) < y(p_2)$. Then, we map r_k to p_1 . By using the lemma recursively, we can draw T_l^k on $S'' \setminus \{p_1\}$ so that r_l^k is mapped to p_2 . The proof is completed by observing that all edges connecting r_k to r_1^k, \dots, r_l^k and r_1, \dots, r_k to r are upward and do not cross each other. □

Theorem 4 follows immediately if we select any sink-vertex of T as r and apply Lemma 9.

2.3.3 K -switch trees

Binucci et al. [12] (see also Theorem 1) presented a class of trees and corresponding convex point sets, such that any tree of this class does not admit an UPSE into its corresponding point set. In this section we extend this result by presenting a larger class of trees that also does not admit an UPSE into some convex point set. Our result is also interesting because the family for which we prove this result is a family of k -switch trees, $k \geq 2$. Recall that k -switch trees is a generalization of switch trees, in sense that 1-switch tree is exactly a switch tree. Moreover in previous section we showed that each switch tree admits an upward planar embedding into each convex point set.

The $(3n + 1)$ -size tree T constructed in the proof of Theorem 1[12] has the following structure (see Figure 2.16.a for the case $n = 5$). It consists of: (i) one vertex r of degree three, (ii) three monotone paths of n vertices: $P_u = (u_n, u_{n-1}, \dots, u_1)$, $P_v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $P_w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, (iii) arcs (r, u_1) , (v_1, r) and (w_1, r) .

The $(3n + 1)$ -convex point set S , used in the proof of Theorem 1[12], consists of two extremal points on the y -direction, $b(S)$ and $t(S)$, the set L of $(3n - 1)/2$ points $l_1, l_2, \dots, l_{(3n-1)/2}$, comprising the left side of S and the set R of $(3n - 1)/2$ points $r_1, r_2, \dots, r_{(3n-1)/2}$, comprising the right side of S . The points of L and R are located so that $y(b(S)) < y(r_1) < y(l_1) < y(r_2) < y(l_2) < \dots < y(r_{(3n-1)/2}) < y(l_{(3n-1)/2}) < y(t(S))$. See Figure 2.16.b for $n = 5$.

Note that the $(3n + 1)$ -node tree T described above is a $(n - 1)$ -switch tree. Hence a straightforward corollary of Theorem 1[12] is the following statement.

Corollary 1. *For any $k \geq 4$, there exists a k -switch tree T and a convex point set S of the same size, such that T does not admit an UPSE into S .*

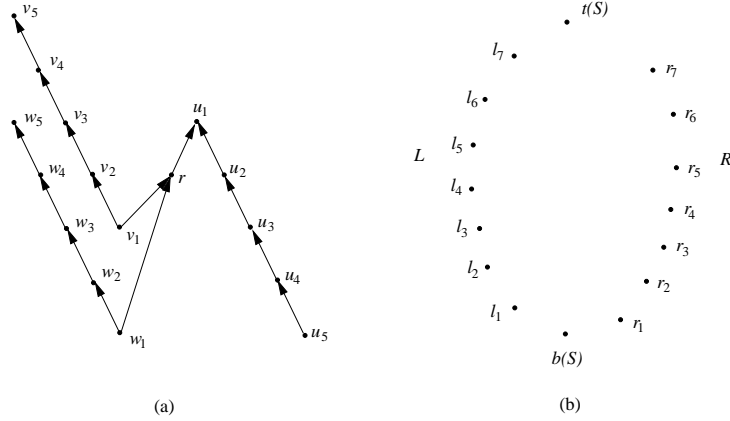


Figure 2.16: (a-b) A 4-switch tree T and a point set S , such that T does not admit an UPSE into point set S .

From Section 2.3.2, we know that any switch tree T , i.e. a 1-switch tree, admits an UPSE into any convex point set. The natural question raised by this result and Corollary 1 is whether an arbitrary 2-switch or 3-switch tree has an UPSE into any convex point set. This question is resolved by the following theorem.

Theorem 5. *For any $n \geq 5$ and for any $k \geq 2$, there exists a class \mathcal{T}_n^k of $3n + 1$ -vertex k -switch trees and a convex point set S , consisting of $3n + 1$ points, such that any $T \in \mathcal{T}_n^k$ does not admit an UPSE into S .*

Proof: For any $n \geq 5$ we construct the following class of trees (see Figure 2.17.a). Let P_u be an n -vertex path-DAG on the vertex set $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, enumerated in the order they are presented in the underlying undirected path of P_u , and such that arcs (u_3, u_2) , (u_2, u_1) are present in P_u . Let also P_v and P_w be two n -vertex path-DAGs on the vertex sets $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ and $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ respectively, enumerated in the order they are presented in the underlying undirected path of P_v and P_w , and such that arcs (v_1, v_2) , (v_2, v_3) and (w_1, w_2) , (w_2, w_3) are present in P_v and P_w , respectively. Let $T(P_u, P_v, P_w)$ be a tree consisting of P_u, P_v, P_w , vertex r and arcs (r, u_1) , (v_1, r) , (w_1, r) .

Let $\mathcal{T}_n^k = \{T(P_u, P_v, P_w) \mid \text{the longest directed path in } P_u, P_v \text{ and } P_w \text{ has length } k\}$, $k \geq 2$. So, \mathcal{T}_n^k is a class of $3n + 1$ -vertex k -switch trees. Let S be a convex point set as described in the beginning of the section. Next we show that any $T \in \mathcal{T}_n^k$ does not admit an UPSE into point set S .

Let $T \in \mathcal{T}_n^k$. For the sake of contradiction, we assume that there exists an UPSE of T into S . By Lemma 1, each of the paths P_u, P_v and P_w of T is drawn on consecutive points of S . Denote by S_u, S_v and S_w the subsets of point set S , in which P_u, P_v and P_w are mapped to, respectively. Hence $|S_u| = |S_v| = |S_w| = n$. By construction of S , the largest subset of S which is a one-sided convex point set, contains two extremal points of S and has size $\lceil \frac{3n-1}{2} \rceil + 2 < 2n$, when $n \geq 5$. Thus, at least one of S_u, S_v and S_w is a two-sided convex point set. We denote by S_b and S_t any two-sided point sets, which consist of consecutive points of S , so that $|S_b| = |S_t| = n$, and $b(S) \in S_b, t(S) \in S_t$ respectively. Next, we show that in any UPSE of T on S , P_u can not be drawn on S_b , while P_v and P_w can not be drawn on S_t .

Statement 1. *For any upward drawing of P_u on S_t there is a crossing created by the arcs of T .*

Proof of Statement 1. Recall that $S_t \subset S$ is a two-sided convex point set, so that $t(S) \in S_t$. In any

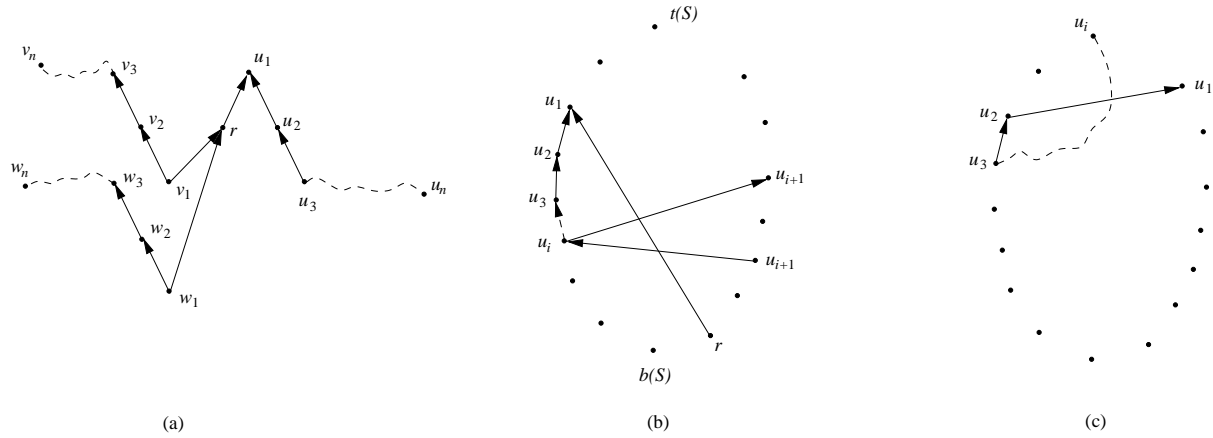


Figure 2.17: (a) k -switch tree, $k \geq 2$. (b) The construction of the proof of Statement 1, Cases 1 to 2.

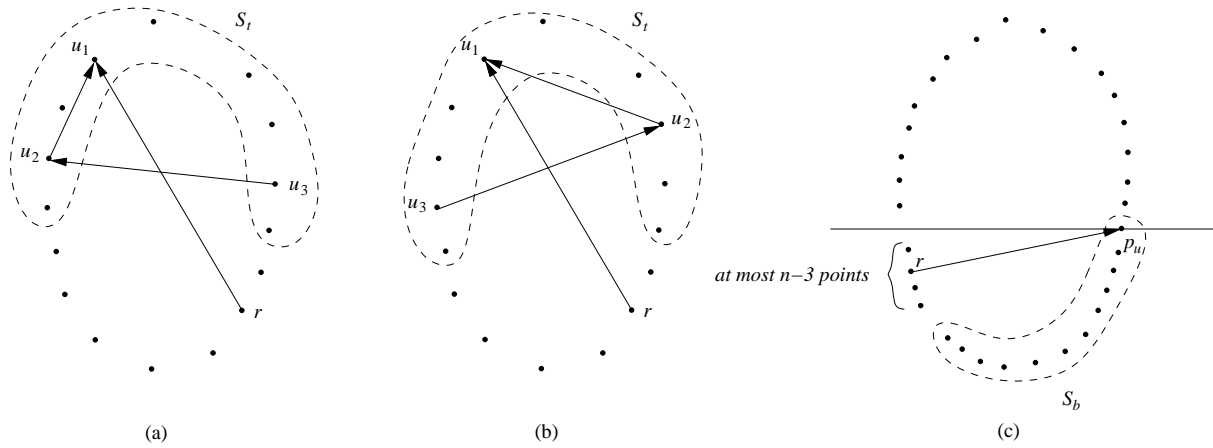


Figure 2.18: (a-b) The construction of the proof of Statement 1, Cases 2 to 3. (c) The construction used in Statement 3.

drawing of P_u on S_t , the vertices u_1, u_2, u_3 are mapped to some points of S_t . Next we consider four cases based on whether u_1, u_2, u_3 are drawn on the same side of S .

Case 1. Vertices u_1, u_2, u_3 are mapped to the same side of S , possibly including $t(S)$, say w.l.o.g. to the left side of S , see Figure 2.17.b. Let u_{i+1} be the first vertex of P_u that is mapped to the right side of S . Then, since r is mapped to a point of $S \setminus S_t$, arc (r, u_1) crosses arc (u_i, u_{i+1}) (or arc (u_{i+1}, u_i)).

Case 2. Vertices u_2, u_3 are mapped to the same side of S , possibly including $t(S)$, say w.l.o.g. to the left side of S , see Figure 2.17.c. Then, u_1 is mapped to the right side of S . Note that u_2 can not be mapped to $t(S)$, because then there is no point for u_1 to be mapped to, so that the drawing is upward. Hence, there is at least one point p higher than the end points of arc (u_2, u_1) , that has to be visited by path P_u . Thus, path P_u crosses arc (u_2, u_1) .

Case 3. Vertices u_1, u_2 are mapped to the same side of S , possibly including $t(S)$, say w.l.o.g. to the left side of S . Then, u_3 is mapped to the right side of S (Figure 2.18.a) and, as a consequence, arcs (r, u_1) and (u_3, u_2) cross.

Case 4. Vertices u_1, u_3 are mapped to the same side of S , possibly including $t(S)$, say w.l.o.g. to the left side of S . Then, u_2 is mapped to the right side of S (Figure 2.18.b) and, as a consequence, arcs (r, u_1) and (u_3, u_2) cross.

□

The proof of following statement is symmetrical to the proof of Statement 1.

Statement 2. *For any upward drawing of P_u or P_w on S_b there is a crossing created by the arcs of T .*

□

So, we have proved that there is no upward planar mapping of T into S so that P_u is mapped to a set S_t , or such that P_v or P_w is mapped to a set S_b . Next, we prove that there is also no upward planar mapping of T on S so that P_u is mapped to S_b , and such that P_v or P_w is mapped to S_t .

Statement 3. *There is no upward drawing of T on point set S , such that P_u is mapped to the points of S_b .*

Proof of Statement 3. Denote by p_u the point of S_b with the largest y -coordinate, see Figure 2.18.c. By the construction of S and since S_b is a two-sided point-set which contains n points, we infer that $S \setminus S_b$ contains at most $n - 3$ points lower than p_u . Moreover, all of these points are on the side opposite to p_u . We observe the following: (i) r has to be placed lower than p_u , and hence r is placed on the opposite side of that of p_u , (ii) v_1 has to be placed lower than r , and since P_v has to be mapped to consecutive points of S , the whole P_v is mapped to the points on the same side with r and lower than r . But, there are at most $n - 4$ free points, a clear contradiction since $|P_v| = n$.

□

The following statement is symmetrical to Statement 3.

Statement 4. *There is no upward drawing of T on point set S , such that P_v or P_w is mapped to the points of S_t .*

□

As we observed in the beginning of the proof of the theorem, at least one of P_u, P_v, P_w is mapped to a two-sided point set containing either $b(S)$ or $t(S)$. But, as it is proved in Statements 1 to 4 this is impossible. So, the theorem follows.

□

2.3.4 Embeddability of trees into convex point set

In previous sections we considered several families of trees that either have or have not an UPSE into a convex point set. More specifically, we showed that switch-trees and caterpillars always have an UPSE into any convex point set. From the negative point of view, we showed that there is a big family of k -switch trees, for $k \geq 2$, which does not admit an UPSE into some point-sets in convex position. An immediate question that arises from these facts is whether the existence of an UPSE of a tree into a convex point-set can be efficiently tested. In this section we give an affirmative answer to this question. More specifically, we show that, given a directed tree T and a convex point-set S , it can be tested in polynomial time whether T admits an UPSE into S .

2.3.4.1 Specific notation

A subset of points of a convex point-set S is called *consecutive* if its points appear to be consecutive as we traverse the convex hull of S in the clockwise or counterclockwise direction. Given that all points of S have distinct y -coordinates, we can refer to the first, the second, the third, etc., lowest point on the left (right) side of S . By p_i^L , $1 \leq i \leq |L(S)|$ we denote the i -th lowest point on the left side of S . Similarly, by p_i^R , $1 \leq i \leq |R(S)|$ we denote the i -th lowest point on the right side of S .

Let $S_{a..b,c..d} = \{p_i^L \mid a \leq i \leq b\} \cup \{p_i^R \mid c \leq i \leq d\}$ denote the subset of S consisting of $b - a + 1$ consecutive points on the left side of S , starting from point p_a^L in the clockwise direction, and of $d - c + 1$ consecutive points on the right side, starting from point p_c^R in the counterclockwise direction. For simplicity, for an one-sided point-set S we use the notation $S_{a..b}$.

In the following, we assume that queries of the form “Find the i -th point on the left/right side of the convex point-set S ” can be answered in $O(1)$ time, e.g., the points on each side of S are stored in an array in ascending order of their y -coordinate.

In this section we consider directed *rooted trees*. Directed tree T is a *rooted tree* if one of its vertices, denoted by $r(T)$ is designated as its *root*. We then say that T is *rooted at vertex* $r(T)$. By $d^-(v)$ (resp., $d^+(v)$) we denote the in-degree (resp., the out-degree) of vertex v of T . $d(v)$ denotes the total degree of vertex v , i.e., $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$.

Let T be a rooted tree and let $r = r(T)$ be its root. Let $T_1^l, \dots, T_{d^-(r)}^l, T_1^h, \dots, T_{d^+(r)}^h$ be the rooted subtrees of T obtained by removing from T its root r and r 's incident arcs and having as their roots the vertices that are incident to r by either an incoming or outgoing arc (see Figure 2.19.a). $T_1^l, \dots, T_{d^-(r)}^l, T_1^h, \dots, T_{d^+(r)}^h$ are called the *subtrees of* T . Note that the superscripts “ l ” and “ h ” indicate whether a particular subtree of T is connected to r by an incoming to or by an outgoing from r arc, respectively.

The rooted subtree of T consisting of T 's root, r , together with $T_1^l, \dots, T_{d^-(r)}^l$ is called the *lower subtree of* T and is also rooted at r . The lower subtree of T is denoted by *lower*(T) (Figure 2.19.b). Similarly, the rooted subtree of T consisting of T 's root, r , together with $T_1^h, \dots, T_{d^+(r)}^h$ is called the *upper subtree of* T and is also rooted at r . The upper subtree of T is denoted by *upper*(T) (Figure 2.19.c).

In this section we use the notation $\{u, v\}$ to denotes arc (u, v) if $(u, v) \in T$ or arc (v, u) if $(v, u) \in T$. If u is mapped into point p and v is mapped into point q which is located below p , then we say that $\{u, v\}$ is drawn upwards (downwards) if $(v, u) \in T$ ($(u, v) \in T$).

The following lemma concerns the UPSE of a rooted tree into a *one-sided* convex point-set. It can be considered to be a simple restatement of a result by Heath et al. [59] (Theorem 2.1) and of Lemma 7.

Lemma 10. *Let T be an n -vertex directed tree rooted at r and S be an one-sided convex point-set of size n . Let $T_1, T_2, \dots, T_{d(r)}$ be the subtrees of T . T admits an UPSE into S so that the following are true:*

- i) *Each T_i , $1 \leq i \leq d(r)$, is drawn on consecutive points of S .*
- ii) *If the root r of T is mapped into point p_r , then there is no arc connecting a point of S below p_r to a point of S above p_r .*

By utilizing Lemma 10, we can easily derive simple algorithms that support the following lemma:

Lemma 11. *Let T be an n -vertex directed tree rooted at r and S be an one-sided convex point-set of size n . Then, an UPSE of T into S satisfying the properties of Lemma 10 can be obtained in*

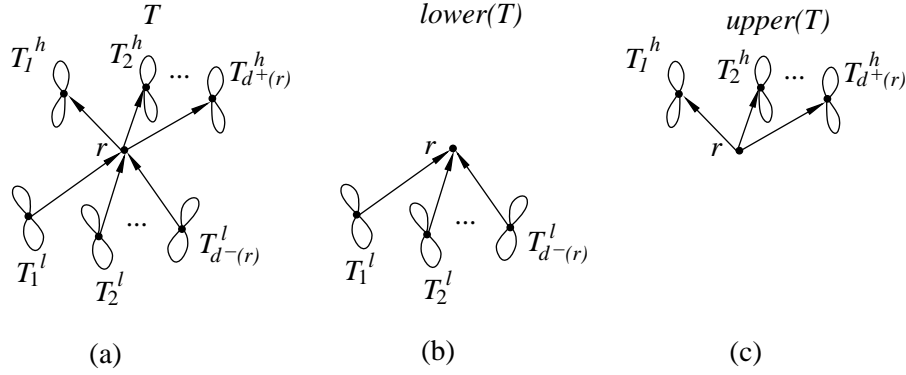


Figure 2.19: (a) A rooted at vertex r tree T its subtrees $T_1^l, \dots, T_{d^-(r)}^l, T_1^h, \dots, T_{d^+(r)}^h$. (b) The subtree $lower(T)$ of T . (c) The subtree $upper(T)$ of T .

$O(n)$ time. Moreover, the point p_r that hosts the root r of T can be determined in $O(1)$ time (i.e., without determining the complete UPSE of T into S).

Proof: Let $k = |lower(T)|$ be the size of subtree $lower(T)$ (rooted at r). It immediately follows that in an UPSE of T into S satisfying the properties of Lemma 10 there are $k - 1$ vertices of T (all belonging to $lower(T)$) that are placed below r . Thus, r is mapped into the k -th lowest point of S . This point, say p_r , can be computed in $O(1)$ time. Having decided where to place the root r , the UPSE of T can be completed in $O(n)$ time by recursively embedding the vertices of $lower(T)$ ($upper(T)$) to the points of S below (above) p_r . \square

2.3.4.2 A restricted UPSE problem for trees

In order to tackle the general problem we first solve the following special case.

Definition 2. In a restricted UPSE problem for trees we are given a directed tree T rooted at r , a convex point set S , and a point $p_r \in S$. We are asked to decide whether there exists an UPSE of T into S such that (i) the root r of T is mapped to point p_r and, (ii) each subtree of T (rooted at r) is mapped to consecutive points on the same side (either L or R) of S .

The following observation follows directly from the definition of a restricted UPSE.

Observation 1. In a restricted UPSE of a directed tree T rooted at r into a convex point set S , where the root r of T is mapped to point $p_r \in S$, no edge enters the triangles $\Delta(t(L), t(R), p_r)$ and $\Delta(b(L), b(R), p_r)$.

Figure 2.20.a shows a tree T rooted at vertex r , a convex point set S consisting of a left-sided convex point set L and a right-sided convex point set R . Tree T has a restricted UPSE only if its root r is mapped to point $p_r \in L$ (Figure 2.20.b). Mapping r to any other point $p \in S$ makes it impossible to map each subtree of T to consecutive points on the same side of S .

Before we proceed to describe a decision algorithm for the restricted UPSE problem, we need some more notation. Let T be a directed tree rooted at vertex r and let $\hat{\eta} = (T_1, \dots, T_{d(r)})$ be an ordering of the subtrees of T . Let S be a convex point set and let Γ be an UPSE of T into S . We say that UPSE Γ respects ordering $\hat{\eta}$ if for any two subtrees T_i and T_j , $1 \leq i \leq j \leq d(r)$, that are both mapped on the same side of S , T_i is mapped to a point set that is entirely below the point set T_j is mapped to.

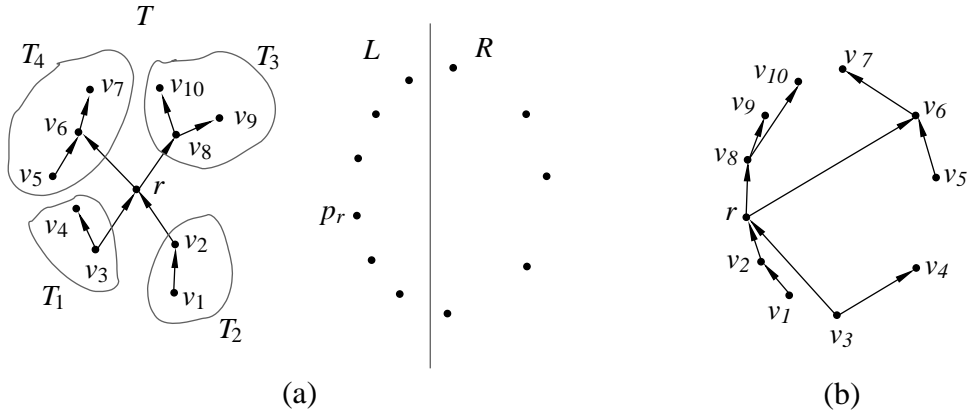


Figure 2.20: (a) A tree T rooted at vertex r and a convex point set $S = L \cup R$.
 (b) A restricted UPSE of T into S so that r is mapped to point p_r . No restricted UPSE of T exists when r is mapped to any point other than p_r .

Consider a tree T rooted at vertex r and let $\hat{\eta} = (T_1^l, \dots, T_{d^-(r)}^l, T_1^h, \dots, T_{d^+(r)}^h)$ be an ordering of the subtrees of T . Ordering $\hat{\eta}$ is called a *proper ordering* of the subtrees of T if it satisfies the following properties:

- (i) $|\text{upper}(T_i^l)| \leq |\text{upper}(T_j^l)|$, $1 \leq i \leq j \leq d^-(r)$, and
- (ii) $|\text{lower}(T_i^h)| \geq |\text{lower}(T_j^h)|$, $1 \leq i \leq j \leq d^+(r)$.

For example, ordering $\hat{\eta}_1 = (T_2, T_1, T_4, T_3)$ is a proper ordering of the subtrees of T in Figure 2.20.a since $|\text{upper}(T_2)| < |\text{upper}(T_1)|$ and $|\text{lower}(T_4)| > |\text{lower}(T_3)|$ while ordering $\hat{\eta}_2 = (T_1, T_2, T_3, T_4)$ is not. Observe that in a proper ordering $\hat{\eta}$ of T , the subtrees in the lower subtree of T appear before the subtrees in the upper subtree of T .

Lemma 12. *Let T be a n -vertex directed tree rooted at vertex r , $\hat{\eta}$ be a proper ordering of the subtrees of T , and S be a convex point set of size n . Then, if there exists a restricted UPSE of T into S , there also exists a restricted UPSE of T into S that respects $\hat{\eta}$.*

Proof: Consider a restricted UPSE Γ of T into S and assume that it does not respect ordering $\hat{\eta}$. Consider any two subtrees T_1 and T_2 of T that are mapped on the same side of S , say both are drawn on the left side of S and T_1 is drawn below T_2 , and assume that they appear in reverse order in $\hat{\eta}$.

First observe that both T_1 and T_2 belong either to the lower or to the upper subtree of T . If they do not, and since they do not respect ordering $\hat{\eta}$, T_1 belongs to the upper subtree of T and T_2 in the lower subtree of T . Then, it is impossible that edges $(r, r(T_1))$ and $(r(T_2), r)$ that belong to T are both drawn upward in any restricted UPSE of T into S with T_1 drawn below T_2 .

Without loss of generality assume that both T_1 and T_2 belong to the lower subtree of T (the proof where they both belong to the upper subtree of T is symmetric). Let the highest point of T_2 be mapped to the i_2 -th lowest point on the left side of S , i.e., point $p_{i_2}^L$ (see Figure 2.21.a). Consider the drawing Γ' obtained from Γ by shifting downwards by $|T_1|$ points the drawing of subtree T_2 and of all the subtrees drawn between T_1 and T_2 in Γ , and by drawing T_1 (as it was drawn in Γ) at the $|T_1|$ points $\{p_{i_2}^L \dots p_{i_2 - |T_1| + 1}^L\}$ (see Figure 2.21.b). The resulting drawing Γ' is obviously planar. In order to prove that Γ' is a restricted UPSE it is sufficient to prove that both edges $(r(T_1), r)$ and $(r(T_2), r)$ remain upward. Edge $(r(T_2), r)$ obviously remains upward since

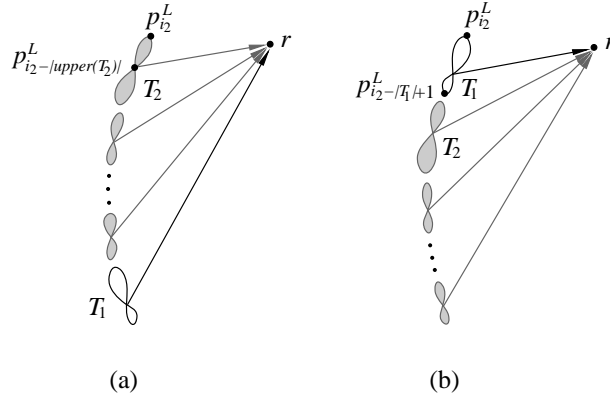


Figure 2.21: The configuration of subtrees used in the proof of Lemma 12. (a) The drawing of subtrees T_1 and T_2 does not respect proper ordering $\hat{\pi}$. (b) Subtrees T_1 and T_2 , as well as the subtrees placed between them, have been redrawn so that proper ordering $\hat{\pi}$ is respected (as far as T_1 and T_2 are concerned).

vertex $r(T_2)$ is mapped to a lower point in Γ' than the point it was mapped in Γ . The root $r(T_2)$ of subtree T_2 was mapped to point $p_{i_2 - |\text{upper}(T_2)|}^L$ in Γ . Since Γ does not respect the proper ordering $\hat{\pi}$, it holds that T_2 appears before T_1 in $\hat{\pi}$ and, thus, $|\text{upper}(T_2)| \leq |\text{upper}(T_1)|$. So, in Γ' vertex $r(T_1)$ is mapped to a point that is at or below the one vertex $r(T_2)$ was mapped in Γ . We conclude that edge $(r(T_1), r)$ is upward in Γ' and, thus, Γ' is a restricted UPSE.

By repeatedly identifying pairs of subtrees that cause a restricted UPSE drawing to not respect $\hat{\pi}$ and by transforming the drawing as described above, we can obtain a restricted UPSE drawing for tree T on S that respects the proper ordering $\hat{\pi}$ of the subtrees of T . \square

Theorem 6. *Let T be a n -vertex directed tree rooted at vertex r , L and R be left-sided and right-sided convex point sets, resp., such that $S = L \cup R$ is a convex point set of size n , and p_r a point of S . The restricted UPSE problem with input T , S and p_r can be decided in $O(d(r)n)$ time. Moreover, if a restricted UPSE for T , S and p_r exists, it can also be constructed in $O(d(r)n)$ time.*

Proof: Let $\hat{\pi} = (T_1, T_2, \dots, T_{d(r)})$ be a proper ordering of the subtrees of T . Proper ordering $\hat{\pi}$ can be computed in $O(n)$ time by a simple tree traversal that computes at the root of T the number of vertices in each subtree of $T \setminus \{v\}$ followed by a bucket sort of the sizes of the subtrees rooted at r . Since the restricted UPSE problem will be repeatedly solved on subtrees of T , we assume that T has been appropriately preprocessed in $O(n)$ time and, thus, a proper ordering of the subtrees rooted at r can be computed in $O(d(r))$ time. By Lemma 12, it is enough to test whether there exists a restricted UPSE that respects $\hat{\pi}$. Thus, we will describe a dynamic programming algorithm that tests whether there exists a restricted UPSE on input T , L , R and p_r .

Our dynamic programming algorithm uses a two-dimensional $d(r) \times |L|$ matrix M . Value $M[i, j]$ is *TRUE* if and only if there exists a restricted UPSE of the subtree of T induced by r and T_1, \dots, T_i that uses all the j lowest points of the left-sided point set L and as many consecutive points as required in the lowest part of the right-sided convex point set R . Recall that $\{u, v\}$ denotes arc (u, v) if $(u, v) \in T$; arc (v, u) if $(v, u) \in T$; otherwise it is undefined.

For the boundary conditions of our dynamic programming we have that:

$$M[0, 0] = \text{TRUE}$$

$$M[1, j] = \begin{cases} \text{TRUE}, & \text{if } j = 0 \text{ and } p_r \notin R_{1..|T_1|} \text{ and } \{r(T_1), p_r\} \text{ is upward} \\ \text{TRUE}, & \text{if } j = |T_1| \text{ and } p_r \notin L_{1..|T_1|} \text{ and } \{r(T_1), p_r\} \text{ is upward} \\ \text{FALSE}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Let $\sigma = |T_1| + \dots + |T_i|$. $M[i, j]$, $1 < i \leq d(r)$ and $0 \leq j \leq |L|$, is set to *TRUE* if any of the following conditions is true; otherwise it is set to *FALSE*.

c-1: $M[i, j - 1] = \text{TRUE}$ **and** $p_r = L_{j, j}$.

This is the case where point p_r happens to be the j -th point of L . There is no need to test for upwardness of $\{r(T_i), p_r\}$ since it has been already tested when entry $M[i, j - 1]$ was filled in.

c-2: $M[i - 1, j - |T_i|] = \text{TRUE}$ **and** $p_r \notin L_{j - |T_i| + 1, j}$ **and** $\{r(T_i), p_r\}$ **is upward**.

In this case, T_i is placed on L . We know that T_i fits on L since $j < |L|$, however, we must make sure that it also holds that p_r is not one of the $|T_i|$ topmost points of $L_{1, j}$.

c-3: $M[i - 1, j] = \text{TRUE}$ **and** $p_r \in R_{1.. \sigma - j - |T_i| + 1}$ **and** $\sigma - j + 1 \leq |R|$ **and** $\{r(T_i), p_r\}$ **is upward**.

In this case, T_i is placed to R . If p_r is one of the points in $R_{1.. \sigma - j - |T_i| + 1}$ then we have to make sure that at least $\sigma - j + 1$ points exist in $|R|$.

c-4: $M[i - 1, j] = \text{TRUE}$ **and** $p_r \notin R_{1.. \sigma - j}$ **and** $\sigma - j \leq |R|$ **and** $\{r(T_i), p_r\}$ **is upward**.

In this case, T_i is also placed to R . However, in contrast to case **c-3**, p_r is not one of the points in $R_{1.. \sigma - j}$. Thus, we only need to make sure that at least $\sigma - j$ points exist in $|R|$. Note that, if both $p_r \in R_{1.. \sigma - j - |T_i| + 1}$ and $p_r \notin R_{1.. \sigma - j}$ are false, we have that $p_r \in R_{\sigma - j - |T_i| + 2.. \sigma - j}$, which means that T_i can not be drawn on these points and therefore $M[i, j]$ should not change its value to *TRUE*.

When determining the value of an entry $M[i, j]$ we need to decide whether the arc $\{r(T_i), p_r\}$ is upward. In order to do that, we need to know the point to which $r(T_i)$ is mapped. By Lemma 11, after $O(n)$ time preprocessing, this point can be computed in $O(1)$ time since T_i is mapped to $|T_i|$ consecutive points forming a one-sided convex point set.

From Lemma 12, it follows that entry $M[d(r), |L|] = \text{TRUE}$ if and only if there exists a restricted UPSE of T into $L \cup R$ such that $r(T)$ is mapped to p_r .

Each entry of matrix M can be filled in $O(1)$ time. Thus, all entries of matrix M are filled in $O(d(r)|L|)$ time. In the event that a restricted UPSE of T into $L \cup R$ exists, we can construct it by storing in each entry $M[i, j]$ the side (“L” or “R”) in which T_i was placed. This information, together with the fact that the restricted UPSE respects ordering \hat{J} is sufficient to construct the embedding. \square

Denote by $\mathcal{L}(T, L, R)$ the set of points $p \in L \cup R$ such that there exists a restricted UPSE of T on $L \cup R$ where the root of T is mapped to p . The next theorem follows easily from Theorem 6 by testing each point of $L \cup R$ as a candidate host for $r(T)$.

Theorem 7. *Let T be an n -vertex directed tree rooted at vertex r and L and R be left-sided and right-sided convex point sets, resp., such that $S = L \cup R$ is a convex point set of size n . Then, the set $\mathcal{L}(T, L, R)$ can be computed in $O(d(r)n^2)$ time. \square*

Note: In this paper we only consider embeddings of n -vertex trees into point sets of size n . Thus, by definition $\mathcal{L}(T, L, R)$ is empty when $|T| \neq |L| + |R|$.

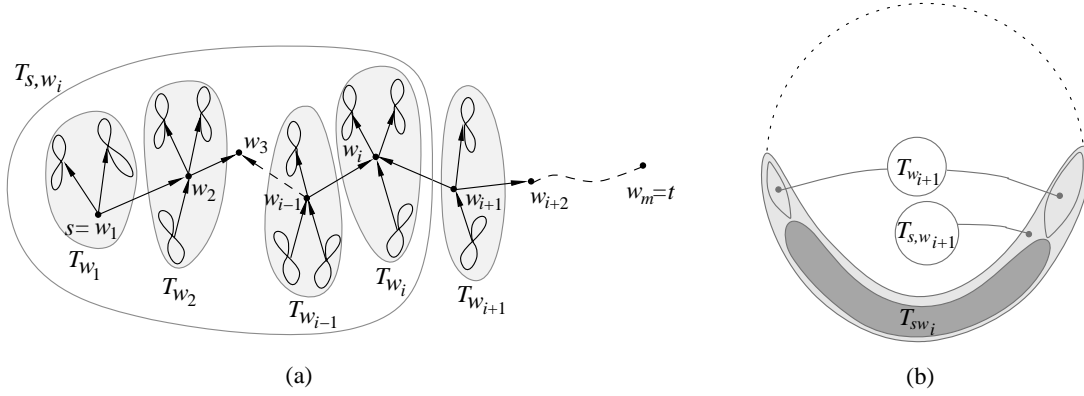


Figure 2.22: (a) The decomposition of tree T based on a path between a source s and a sink t of T . (b) The structure of an UPSE of the tree T into point set S .

2.3.4.3 The testing algorithm

Let T be a directed tree and let S be a convex point set. In any UPSE of T into S , a source s and a sink t of T will be mapped to points $b(S)$ and $t(S)$, respectively. In this section, we present a dynamic programming algorithm that, given a n -vertex directed tree T , a source s and a sink t of T , and a convex point set S of size n , decides in polynomial time whether T has an UPSE into S so that s and t are mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively. The application of this algorithm to all $\langle \text{source}, \text{sink} \rangle$ pairs of T , yields a polynomial time algorithm for deciding whether T has an UPSE into S .

Let s and t be a source and a sink vertex of T , respectively. Denote by $P_{s,t} = \{s = w_1, w_2, \dots, w_m = t\}$ the (undirected) path connecting s and t in T , see Figure 2.22.a. By T_{s,w_i} , $1 \leq i < m$, we denote the subtree of T that contains source s and is formed by the removal of edge $\{w_i, w_{i+1}\}$. By definition, $T_{s,w_m} = T$. Let $T_{w_i} = T_{s,w_i} \setminus T_{s,w_{i-1}}$, $1 < i \leq m$. By definition, $T_{w_1} = T_{s,w_1}$. By Lemma 1, we know that T_{s,w_i} is drawn on consecutive points of S , call this point set S_i (see also Figure 2.22.b). Since s is mapped to $b(S)$, we infer that $b(S) \in S_i$. Similarly, in any UPSE of T into S , $T_{s,w_{i+1}}$ is also drawn on consecutive points of S that contain $b(S)$, call this point set S_{i+1} . Hence, $T_{w_{i+1}}$ is drawn on a set $S_{w_{i+1}} = S_{i+1} \setminus S_i$, that is, a subset of S comprised by two consecutive point sets of S , one on its left and one on its right side.

Our dynamic programming algorithm maintains a list of points $\mathcal{P}(a, b, k)$, $0 \leq a \leq |L|$, $0 \leq b \leq |R|$, $1 \leq k \leq m$, such that:

$$p \in \mathcal{P}(a, b, k) \iff \begin{cases} T_{s,w_k} \text{ has an UPSE into point set } S_{1..a,1..b} \text{ with} \\ \text{vertex } w_k \text{ mapped to point } p. \end{cases}$$

For the boundary conditions of our dynamic programming we have that:

$$\mathcal{P}(a, b, 1) = \mathcal{L}(T_{w_1}, L_{1..a}, R_{1..b}) \text{ where } a + b = |T_{w_1}|.$$

Note that since w_1 is a source, $\mathcal{P}(a, b, 1)$ is either $\{b(s)\}$ or \emptyset .

Assume that $T_{s,w_{i-1}}$ has an UPSE into some consecutive points of S , say $S_{1..a-a_1,1..b-b_1}$, with vertices s, w_{i-1} mapped into points s, q , respectively. Also assume that T_{w_i} has a restricted UPSE in $L_{a-a_1+1..a} \cup R_{b-b_1+1..b}$ with w_i mapped into p . If arc $\{w_{i-1}, w_i\}$ which is drawn as line-segment (q, p) is upward, then we can combine the UPSE for $T_{s,w_{i-1}}$ with the restricted UPSE for T_{w_i} in order to get an UPSE of T_{s,w_i} on point set $S_{1..a,1..b}$. This idea allows us to add points in $\mathcal{P}(a, b, i)$ and is formally described by the following recurrence relation.

For any $1 < i \leq m$ we set:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a, b, i) = \{p \mid & \exists a_1, b_1 \in Z : a_1 + b_1 = |T_{w_i}| \\ & \mathbf{and} \ p \in \mathcal{L}(T_{w_i}, L_{a-a_1+1..a}, R_{b-b_1+1..b}) \\ & \mathbf{and} \ \exists q \in \mathcal{P}(a - a_1, b - b_1, i - 1) \\ & \mathbf{and} \ \{p, q\} \text{ is upward} \} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Lemma 13. *Let T be a n -vertex rooted directed tree, S be a convex point set of size n , let s and t be a source and a sink of T , respectively. Let $P_{s,t} = \{s = w_1, w_2, \dots, w_m = t\}$ be the path connecting s and t in T and let T_{s,w_i} , $1 \leq i \leq m$ be the subtrees of T , as defined above. There exists an UPSE of T into S such that s and t are mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively, if and only if $\mathcal{P}(|L|, |R|, m)$, computed by the recurrence relation (2.5), is non-empty.*

Proof: We first prove that if $p \in \mathcal{P}(a, b, i)$ then T_{s,w_i} has an UPSE into point set $S_{1..a,1..b}$ with vertex w_i mapped to point p . From the boundary conditions it is true for $i = 1$. Assume that if $q \in \mathcal{P}(a - a_1, b - b_1, i - 1)$ then $T_{s,w_{i-1}}$ has an UPSE into $S_{1..a-a_1,1..b-b_1}$ with vertex w_{i-1} mapped to point q . Let now $p \in \mathcal{P}(a, b, i)$. Then by the definition of the recurrence relation we infer that: (1) there exist $a_1, b_1 \in Z$ so that $a_1 + b_1 = |T_{w_i}|$, (2) $p \in \mathcal{L}(T_{w_i}, L_{a-a_1+1..a}, R_{b-b_1+1..b})$, which by definition of \mathcal{L} , means that there exists a restricted UPSE of T_{w_i} into $L_{a-a_1+1..a}, R_{b-b_1+1..b}$ with w_i mapped to p , (3) $\exists q \in \mathcal{P}(a - a_1, b - b_1, i - 1)$, thus, by induction hypothesis, $T_{s,w_{i-1}}$ has an UPSE into $S_{1..a-a_1,1..b-b_1}$, and, finally, (4) edge $\{p, q\}$ is upward. Then we combine the UPSE for $T_{s,w_{i-1}}$ with the restricted UPSE for T_{w_i} and the edge $\{p, q\}$ in order to get an UPSE of T_{s,w_i} on point set $S_{1..a,1..b}$. By Observation 1, we have that the combined drawing is planar.

For the reversed statement we also work by induction. From the boundary conditions we know that if $T_{s,w_1} = T_{w_1}$ has an UPSE into a point set $S_{1..a,1..b}$ then $b(S) \in \mathcal{P}(a, b, 1)$, where $a + b = |T_{w_1}|$. Assume that the statement is true for $T_{s,w_{i-1}}$, i.e., if $T_{s,w_{i-1}}$ has an UPSE into a point set $S_{1..a,1..b}$ with vertex w_{i-1} mapped to q then $q \in \mathcal{P}(a, b, i - 1)$. Assume also that T_{s,w_i} has an UPSE into a point set $S_{1..a,1..b}$ with vertices s and w_i mapped to points $b(S)$ and p , respectively. By the discussion above we know that in every such embedding $T_{s,w_{i-1}}$ is mapped to consecutive points of $S_{1..a,1..b}$ that contains $b(S)$. Therefore there exist two numbers a_1 and b_1 , so that $a_1 + b_1 = |T_{w_i}|$ and subtree T_{w_i} is mapped to the point set $S_{a-a_1+1..a,b-b_1+1..b}$, with vertex w_i mapped to some point p , $p \in S_{a-a_1+1..a,b-b_1+1..b}$. Moreover, by induction hypothesis, there exists $q \in \mathcal{P}(a - a_1, b - b_1, i - 1)$. So, since the edge connecting p and q is upward, by the definition of recurrence relation we infer that $p \in \mathcal{P}(a, b, i)$.

For $i = m$ we infer that an UPSE of T into S such that source s and sink t are mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively, exists if and only if $\mathcal{P}(|L|, |R|, m)$ is non-empty. Note that if $\mathcal{P}(|L|, |R|, m) \neq \emptyset$, then it must hold that $\mathcal{P}(|L|, |R|, m) = \{t(S)\}$. \square

$\mathcal{P}(a, b, k)$, when $0 \leq a \leq |L|$, $0 \leq b \leq |R|$, $1 \leq k \leq m$ is calculated by Algorithm 1.

Theorem 8. *Let T be a n -vertex rooted directed tree, S be a convex point set of size n , s be a source of T and t be a sink of T . Then, it can be decided in time $O(n^5)$ whether T has an UPSE into S such that s is mapped to $b(S)$ and t is mapped to $t(S)$. Moreover, if such an UPSE exists, it can also be constructed within the same time bound.*

Proof: The Algorithm 1 calculates the values $\mathcal{P}(a, b, k)$, when $0 \leq a \leq |L|$, $0 \leq b \leq |R|$, $1 \leq k \leq m$, thus from Lemma 13, we infer that Algorithm 1 decides whether T has an UPSE into S such that s and t are mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively.

A naive analysis of Algorithm 1 yields an $O(n^7)$ time complexity. The analysis assumes that (i) the left and the right side of S have both size $O(n)$, (ii) the path from s to t has length $O(n)$,

Algorithm 1: TREE-UPSE(T, S, s, t)

input : A directed tree T , a point set S , a source s and a sink t of T . Path ($s = w_1, \dots, w_m = t$) is used to progressively build tree T from subtrees T_{w_i} , $1 \leq i \leq m$.

output “YES” if T has an UPSE into S with s mapped to $b(S)$ and t mapped to $t(S)$, “NO”
:
otherwise.

1. **For** $a = 0 \dots |L|$
2. **For** $b = 0 \dots |R|$
3. $\mathcal{P}(a, b, 1) = \mathcal{L}(T_{w_1}, L_{1..a}, R_{1..b})$
4. **For** $k = 2 \dots m$ //Consider tree T_{w_k}
5. $\mathcal{P}(a, b, k) = \emptyset$
6. **For** $i = 0 \dots |T_{w_k}|$ //We consider the case where i vertices of T_{w_k} are placed to the left side of S
7. **if** $(a - i \geq 0)$ **and** $(b - (|T_{w_k}| - i) \geq 0)$
8. Let $\mathcal{L} = \mathcal{L}(T_{w_k}, L_{a-i+1..a}, R_{b-(|T_{w_k}|-i)+1..b})$
9. //We consider all possible placements of w_{k-1}
10. **For** each q in $\mathcal{P}(a - i, b - (|T_{w_k}| - i), k - 1)$
11. //We consider all the possible placements of w_k
12. **For** each p in \mathcal{L}
13. **if** ($\{w_{i-1}, w_i\}$ drawn on line-segment (q, p) is upward)
14. **then** add p to $\mathcal{P}(a, b, k)$.
15. **then** add p to $\mathcal{P}(a, b, k)$.
16. **if** $\mathcal{P}(|L|, |R|, m)$ is empty **then return**(“NO”);
17. **return**(“YES”);

(iii) each tree T_{w_i} has size $O(n)$ and (iv) each \mathcal{L} -list containing the solution of a restricted UPSE problem is computed in $O(n^3)$ time. However, based on the following two observations, the total time complexity can be reduced to $O(n^5)$.

- A factor of n can be saved by realizing that in our dynamic programming we can maintain a list $\mathcal{P}'(a, i)$ which uses only one parameter for the left side of the convex set (in contrast with $\mathcal{P}(a, b, i)$ which uses a parameter for each side of S). The number of points on the right side of S is implied since the size of each tree T_{s, w_i} is fixed. For simplicity, we have decided to use notation $\mathcal{P}(a, b, i)$.
- Another factor of n can be saved by observing that the computation of list \mathcal{L} is actually $O(\deg(w_i)n^2)$. Thus, summing over all i gives $O(n^3)$ in total, and not $O(n^4)$.

The UPSE of T into S can be recovered easily by modifying Algorithm 1 so that it stores for each point $p \in \mathcal{P}(a, b, k)$ the point q where vertex w_{i-1} is mapped to as well as the point set that hosts tree $T_{s, w_{i-1}}$ (i.e., its top point on the left and the right side of S). \square

By applying Algorithm 1 on all $\langle \text{source}, \text{sink} \rangle$ pairs of T we can decide whether tree T has an UPSE on a convex point set S , as the main next theorem indicates.

Theorem 9. *Let T be a n -vertex rooted directed tree and S be a convex point set of size n . Then, it can be decided in time $O(n^6)$ whether T has an UPSE into S . Moreover, if such an UPSE exists, it can also be constructed within the same time bound.*

Proof: Note that a naive application of the idea leads to the algorithm with time complexity $O(n^7)$, since there are $O(n^2)$ distinct pairs of sources and sinks. Next we explain how the overall time complexity can be reduced to $O(n^6)$. Let $P_{s,t}$ be a path from s to t , passing through m vertices, and let t' be the j -th vertex of $P_{s,t}$ that is also a sink of G . During the computation of $\mathcal{P}(a, b, m)$ corresponding to path $P_{s,t}$ we also compute $\mathcal{P}(a, b, j)$ and thus we can immediately answer whether there exists an UPSE of G into S so that s and t' is mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively. Next consider a sink \tilde{t} that does not belong to path $P_{s,t}$. Consider the path $P_{s,\tilde{t}}$. Assume that the last common vertex of $P_{s,t}$ and $P_{s,\tilde{t}}$ is the j -th vertex of $P_{s,t}$. In order to compute whether there exists an UPSE of G into S so that s and \tilde{t} are mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively, we can start the computations of Algorithm 1 determined by variable k from the $j + 1$ -th step (see line 4 of the algorithm). Thus, for a single source s and all possible sinks variable k changes at most n times. Since the number of different sources is $O(n)$ we conclude that the whole algorithm runs in time $O(n^6)$. \square

2.4 Embedding an Outerplanar Digraph into a Convex Point Set

In this section we extend our decision algorithm for trees, presented in Section 2.3.4, to the class of outerplanar digraphs. For better understanding we keep the new definitions and the line of arguments on outerplanar graphs as close as possible to already existing definitions for trees.

Consider an *acyclic outerplanar digraph* G (*outerplanar DAG* for short), i.e., a directed acyclic graph whose underlying undirected structure is that of an outerplanar graph. A *cut vertex* is any vertex of G that when removed increases the number of connected components. Let c be a cut vertex of G and let G_1, \dots, G_k be the maximal connected components obtained after deletion of c and all the edges incident to it. Let G'_i be a digraph induced by the vertices of G_i and vertex c , $i = 1, \dots, k$. The set of subgraphs G'_1, \dots, G'_k of G is called a *cut at vertex* c . A maximal biconnected subgraph of G is called a *block* of G . A vertex of G which is either a source or a sink is referred to as a *switch*. Let B be a block of G . Binucci *et al.* [12] proved the following lemma.

Lemma 14 (Binucci *et al.* [12]). *Let G be a n -vertex DAG containing a k -vertex cycle-DAG C , for some $k \leq n$. Suppose that C has at least two vertices u and v that are sources in C . Then there exists a convex point set S of size n such that G has no upward straight-line embedding into S .*

This result easily extends to an arbitrary two-sided convex point set:

Lemma 15. *Let G be a n -vertex outerplanar DAG, let B a block of G and S be a convex point set of size n . If B contains either two sources or two sinks then G does not admit an UPSE into S .*

Proof: Let B be a block with two sources s_1 and s_2 . Note that then B has also two sinks. We observe that there is no upward planar drawing of B such that all the vertices of B lie in a convex position. Since S is a convex point set, block B , and therefore G , does not admit an UPSE into S . \square

Since each block has an equal number of sources and sinks, by previous lemma, we are only interested in digraphs so that each of their blocks contains exactly one source and one sink. Note also that if there exists an UPSE of an outerplanar DAG G into a convex point set S , then it is outerplane and thus in the following we consider only outerplane embeddings of G . An outerplane embedding of a block B with a single source and sink is bounded by two paths,

connecting its source and its sink, called *sides* of B . If one of the sides is a single edge, then B is called a *one-sided block*, otherwise it is called a *two-sided block*. A vertex of B which is not a switch of B is called a *side vertex* of B . By $L(B)$ and $R(B)$ we denote the side-vertices of two different sides of block B . When block B of graph G is specified, by $L(G)$ (resp. $R(G)$) we denote all the vertices of $L(B)$ (resp. $R(B)$) plus the vertices of the components incident to the vertices of $L(B)$ (resp. $R(B)$) and refer to $L(G)$ and $R(G)$ as to *sides* of G .

The edges of G that do not belong to any biconnected component are supposed to be the *trivial blocks* of G . Thus the two end vertices of such edge are considered to be a source and a sink of the corresponding trivial block.

Let v be a cut vertex of G . The blocks of G that have v as their switch are called *extremal blocks* of v , the remaining blocks incident to v are called *side blocks* of v (see Figure 2.23.a). By $b^-(v)$ (resp., $b^+(v)$) we denote the number of extremal blocks of v that have v as their sink (resp., source). By $b(v)$ we denote the total number of extremal blocks that contain v , i.e., $b(v) = b^-(v) + b^+(v)$.

We say that G is a *rooted outerplanar DAG* if one of its vertices, denoted by $r(G)$ is designated as its *root*. We then also say that G is *rooted at vertex* $r(G)$.

Let $G_1^l, \dots, G_{b^-(r)}^l$, and $G_1^h, \dots, G_{b^+(r)}^h$ be the rooted subgraphs of G obtained by a cut at r and having r as their sink or source, respectively. They are called the *extremal subgraphs* of G (see for example the red subgraph in Figure 2.23.b). A subgraph of G , obtained by a cut at r and having r as its side vertex is called a *side subgraph* of G (see for example the green subgraph in Figure 2.23.b). Note that the superscripts “ l ” and “ h ” indicate whether a particular subgraph of G has r as its sink or as its source, respectively.

The rooted subgraph of G consisting of G ’s root, r , together with $G_1^l, \dots, G_{b^-(r)}^l$ is called the *lower subgraph* of G . The lower subgraph of G is denoted by $lower(G)$ (Figure 2.23.b). Similarly, the rooted subgraph of G consisting of G ’s root, r , together with $G_1^h, \dots, G_{b^+(r)}^h$ is called the *upper subgraph* of G and is also rooted at r . The upper subgraph of G is denoted by $upper(G)$. Let a block of G that contains its root r and let v be a vertex of this block, different from r , that is a cut vertex of G . Consider a cut at v . By $G(v)$ we denote the union of the connected components that do not contain r (Figure 2.23.b). Subgraph $G(v)$ is considered to be rooted at v .

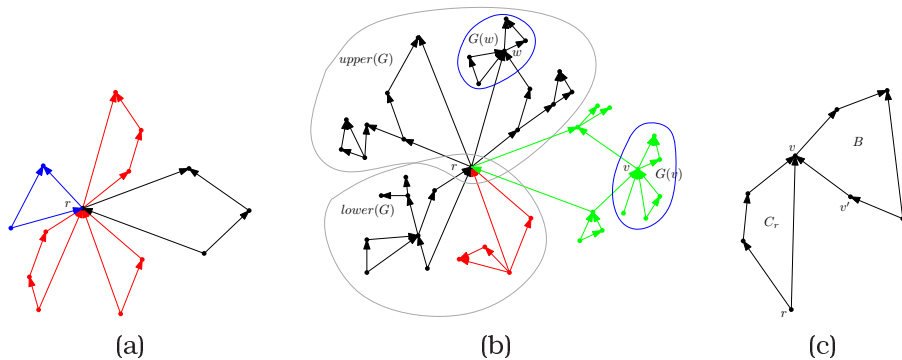


Figure 2.23: (a) An example of extremal and side blocks. The extremal blocks are drawn by red. The rest are the side blocks. (b) An outerplanar DAG G . An extremal and side subgraphs of G are drawn by red and green ink, respectively. A lower and an upper subgraphs of G are surrounded by gray curves. The subgraphs $G(v)$ and $G(w)$ of graph G are surrounded by blue curves. (c) Proof of Lemma 16.

Given two vertices s and t of G , a cut vertex c of G is called (s, t) -*separating* if the removal of c

leaves s and t in different connected components.

Let G be an outerplanar DAG rooted at its source (resp. sink) r . We say that G is *one-side embeddable* iff G admits an UPSE into a one-sided convex point set of size $|G|$ so that r is mapped to its lowest (resp. highest) point.

The next theorem, proved by Binucci *et al.* [12], presents necessary and sufficient conditions for an outerplanar graph to have an UPSE into any one-sided point set without a restriction that its root has to be mapped to an extremal point of the point set. In order to state the theorem we adopt the definition of *auxiliary tree* from [12].

Let $\mathcal{T}(G)$ be the BC-tree of G . A node μ of the auxiliary tree $\mathcal{T}'(G)$ corresponds to a connected subtree T of $\mathcal{T}(G)$ which is maximal with respect to the following property: A cut vertex c that belong in T and is shared by two blocks of G is a switch vertex for both of them. An edge of $\mathcal{T}'(G)$, directed from μ to ν corresponds to a cut vertex which is a side vertex for a block associated with μ and a switch vertex for a block associated with ν .

Theorem 10 (Binucci *et al.* [12]). *A n -vertex connected DAG G admits an upward straight-line embedding into every one-sided convex point set of size n if and only if the following conditions are satisfied:*

Condition 1: *Every block of G is one-sided.*

Condition 2: *Every cut vertex shared by two blocks is extremal for at least one of them.*

Condition 3: *Every node of \mathcal{T}' has at most one incoming edge².*

Next we extend this theorem to the case when it is required to map the root of the given digraph to the extremal point of the point set.

Lemma 16. *Let G be an outerplanar DAG rooted at its switch r . DAG G is one-side embeddable iff the conditions of Theorem 10 hold and moreover r belongs to a vertex of $\mathcal{T}'(G)$ with no incoming edges.*

Proof: In the proof of Theorem 10 it is shown that if r is a source (resp. sink) vertex of G and belong to the vertex of $\mathcal{T}'(G)$ without incoming edges then G has an UPSE into any one-sided point set so that r is mapped to its lowest (resp. highest) point. We next show that this is also a necessary condition.

Let C_r be the set of blocks of F that are represented in $\mathcal{T}'(G)$ by a single vertex and let $r \in C_r$. Assume for the sake of contradiction that, the vertex of $\mathcal{T}'(G)$, where r belong to, has a positive indegree. Then, there is a block B in G , which is incident to C_r by a vertex v , so that v is a side vertex of B . Let v' be a vertex of B , connected to v by edge (v', v) (see Figure 2.23.c). In any UPSE of G into a one-sided point set, the vertices of C_r are mapped to the points that are higher than the point where v' is mapped to. Thus the lemma follows. \square

Note that the construction of the auxiliary tree $\mathcal{T}'(G)$ of a graph G , the check of the Conditions 1-3, as well as the check of the fact that r belongs to a vertex of $\mathcal{T}'(G)$ with zero in-degree can be done in $O(|G|)$ time. Moreover, in the proof of Theorem 10 [12] the authors, given a switch r of G with the above property, present a $O(|G|)$ time algorithm to construct an UPSE of G into S with r at the extremal point of S . Thus, we get the following lemma.

²Without defining the tree \mathcal{T}' this condition sounds like: "Each cut vertex of G , shared by several blocks, is side vertex for at most one of them."

Lemma 17. *Let G be an outerplanar DAG rooted at r . It can be tested in $O(|G|)$ time whether G is one-side embeddable. In affirmative such an UPSE can be constructed within the same time bound. \square*

2.4.1 Properties of outerplanar digraphs

In this section we present necessary conditions for the structure of an outerplanar DAG that has an UPSE into a convex point set.

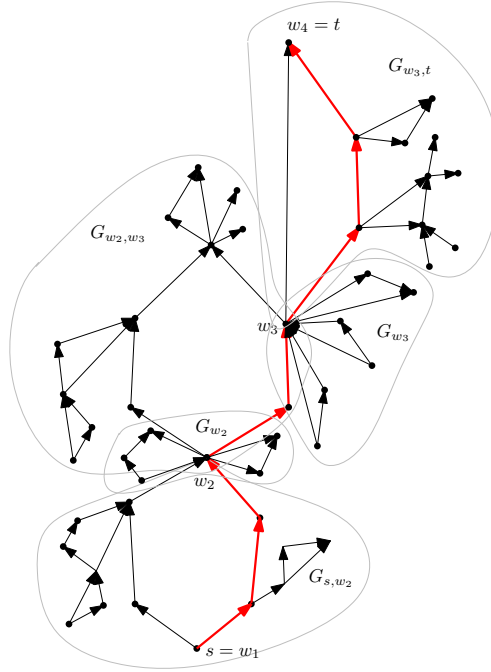


Figure 2.24: A path from s to t is denoted by red. The subpath $P_{s,t}^c = \{s = w_1, w_2, w_3, w_4 = t\}$ are the cut vertices that are also (s, t) -separating vertices of G . The path components $G_{w_i, w_{i+1}}$, $i = 1, \dots, 3$ and the components G_{w_i} , $i = 1, \dots, 4$ are denoted by grey curves.

Let S be a convex point set of n points. Let G be a n -vertex outerplanar DAG and s, t a source and a sink of G . Let $P_{s,t}$ be a path from s to t and let $P_{s,t}^c = (s = w_1, \dots, w_m = t)$ be the subpath of $P_{s,t}$ that contains only the cut-vertices which are also the (s, t) -separating vertices (see Figure 2.24). We call $P_{s,t}^c$ an (s, t) -separating subpath of $P_{s,t}$. Note that every two consecutive vertices w_i, w_{i+1} in $P_{s,t}^c$ belong to the same block of G , that can be also a trivial block, i.e., an edge. By $G_{w_i, w_{i+1}}$ we denote the graph that is induced by this block and all vertices connected to it by paths not passing through w_i or w_{i+1} . We assume that $G_{w_i, w_{i+1}}$ is rooted at w_i . Graphs $G_{w_1, w_2}, \dots, G_{w_{m-1}, w_m}$ are called the *path components* of G defined by the path $P_{s,t}$. Consider vertex w_i and the subgraph of G that contains w_i and is produced by deletion of edges of G_{w_{i-1}, w_i} and $G_{w_i, w_{i+1}}$ that are incident to w_i . Denote this graph by G_{w_i} and call it *cut vertex component* at vertex w_i defined by the path $P_{s,t}$. Finally, let G_{s, w_i} be the subgraph of G induced by the vertices of cut vertex components G_{w_1}, \dots, G_{w_i} and path components $G_{s, w_2}, \dots, G_{w_{i-1}, w_i}$ (see again Figure 2.24, see also Figure 2.27.a for the general structure). We also say that *subgraph G_{s, w_i} is defined by $P_{s,t}$ and w_i* . By definition, $G_{s, w_m} = G$ and $G_{w_1} = G_{s, w_1}$. The following lemma presents various properties of G that are necessary so that it admits an UPSE

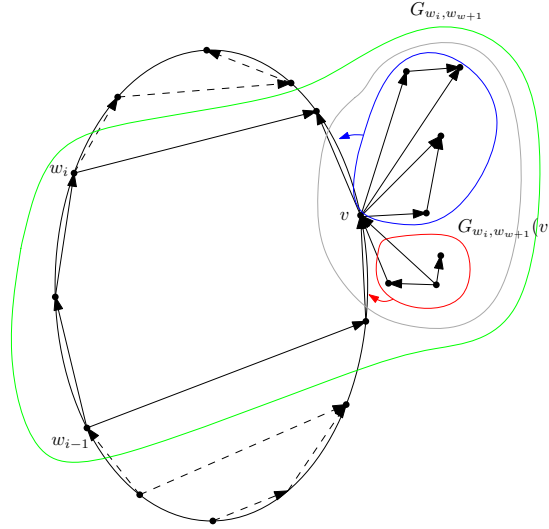


Figure 2.25: An UPSE of G_{w_{i-1}, w_i} and of path $P_{s,t}$ on some points of S . Path $P_{s,t}$ is denoted by dashed lines.

into a convex point set as well as some properties of an UPSE of G into a convex point set.

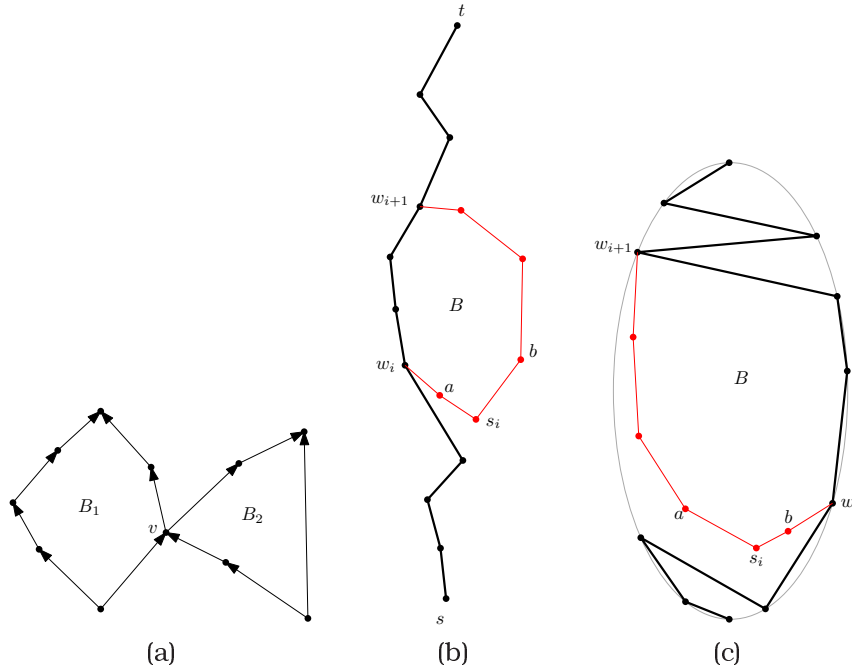


Figure 2.26: Illustration the proof of Lemma 18. (a) Statement (1). (b-c) Statement 3, path $P_{s,t}$ is denoted by black bold inc.

Lemma 18. Let G be a n -vertex outerplanar DAG, let S be a convex point set of size n and let Γ_G be an UPSE of G into S , so that a source s and a sink t of G are mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively. Let $P_{s,t}$ be a path from s to t , let $P_{s,t}^c = (s = w_1, \dots, w_m = t)$ be the (s, t) -separating subpath of $P_{s,t}$. Let $G_{w_i, w_{i+1}}$ be one of the path components defined by the path $P_{s,t}$. Let B_i be the block of $G_{w_i, w_{i+1}}$ that contains both w_i and w_{i+1} , and s_i and t_i be the source and the sink of B_i .

Let also G_{w_i} be the cut vertex component at cut vertex w_i and let G_{s,w_i} be a subgraph of G defined by $P_{s,t}$ and w_i . The following statements hold for G and for embedding Γ_G :

- (1) For each vertex v of G there is at most one block so that v is its side vertex.
- (2) Let B' be a two-sided block of G . The vertices of $L(B')$ and $R(B')$ of block B' are mapped in Γ_G to the opposite sides of S .
- (3) Vertex w_i (resp. w_{i+1}) of block B_i either coincides with the source s_i (resp. sink t_i) of B_i or is adjacent to it.
- (4) If w_i (resp. w_{i+1}) of block B_i is incident to source s_i (resp. sink t_i) of B_i , then s_i (resp. t_i) is mapped in Γ_G to the side of S opposite to which w_i (resp. w_{i+1}) is mapped.
- (5) The vertices of G_{s,w_i} in Γ_G , $1 \leq i \leq m$, are mapped to consecutive points of S containing $b(S)$ (see Figure 2.27.a-b).
- (6) The vertices of G_{w_i} in Γ_G , $1 \leq i \leq m$ are mapped on a subset of S comprised by two consecutive point sets of S , one on its left and one on its right side. Moreover, for every $u, v \in G_{s,w_i}$ so that $u \notin G_{w_i}$ and $v \in G_{w_i}$ and such that, u and v are mapped to the same side of S , v is mapped higher than u (see Figure 2.27.b).
- (7) The vertices of $G_{w_i,w_{i+1}}$, $1 \leq i \leq m - 1$, except of w_i and w_{i+1} are mapped on a subset of S comprised by two consecutive point sets of S , one on its left and one on its right side. Moreover, for every $u \in G_{w_i}$, $v \in G_{w_i,w_{i+1}}$ such that, u and v are mapped to the same side of S , v is mapped higher than u (see Figure 2.27.b).

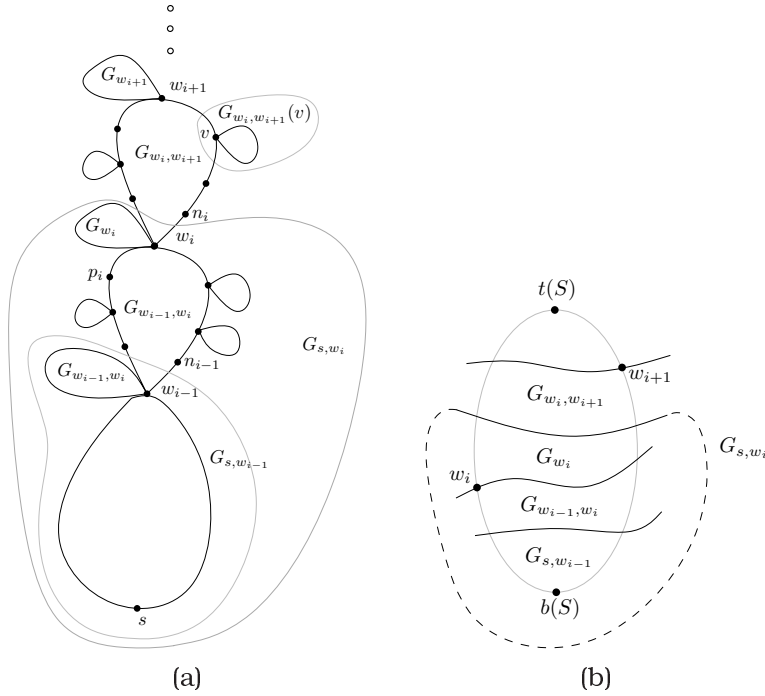


Figure 2.27: (a) The structure of G , illustration of G_{s,w_i} , G_{w_i} , $G_{w_i,w_{i+1}}$ (blue ink), $G_{w_i,w_{i+1}}(v)$. (b) Illustration for Lemma 18.

- (8) For each $v \in B_i$, $v \neq w_i, w_{i+1}$, $G_{w_i,w_{i+1}}(v)$ contains only extremal subgraphs.

- (9) For each $v \in B_i$, $v \neq w_i, w_{i+1}$, the vertices of $G_{w_i, w_{i+1}}(v)$ are mapped in Γ_G to the same side where v is mapped on consecutive points around v (see Figure 2.25).
- (10) All the vertices of a single extremal or a side subgraph of G_{w_i} , $1 \leq i \leq m$, except for vertex w_i , are mapped in Γ_G to the consecutive points of the same side of S . Moreover, the vertices of a side-subgraph of G_{w_i} are mapped to the side of S opposite to that of w_i .
- (11) A cut vertex component G_{w_i} contains at most one two-sided block B and if so then w_i is a side vertex of B . Moreover, if B' is a side block of w_i (one-sided or two-sided), then either $L(B') = \{w_i\}$ or $R(B') = \{w_i\}$, $1 \leq i \leq m$.

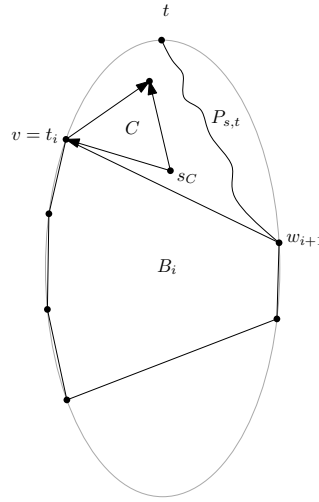


Figure 2.28: Proof of Statement (8) of Lemma 18.

Proof:

- (1) For the sake of contradiction assume that there are two blocks B_1 and B_2 so that v is a side vertex for both B_1 and B_2 (see Figure 2.26.a). Since S is convex, in any UPSE of G into S , the points to which the vertices of B_1 and B_2 are mapped, represent a convex point set. On the other hand, in any upward planar drawing of B_1 and B_2 so that all the vertices lie on the boundary of the drawing, the vertex v has to be drawn inside the convex hull of the rest vertices of B_1 and B_2 . A clear contradiction.
- (2) Note that if B' is a two-sided block then any drawing which does not map $L(B')$ and $R(B')$ to different sides of S is either not upward or non-planar.
- (3) For the sake of contradiction, assume that vertex w_i is neither s_i nor is adjacent to it (the case of w_{i+1} and t_i is symmetrical) (see Figures 2.26.b-c). Let a, b be the vertices adjacent to s_i . Note that in any UPSE Γ_G of G into S the path $P_{s,t}$ splits S on one-sided point sets. By Statement (2), the vertices a and b have to be mapped to different sides of S . Thus, we get a crossing with path $P_{s,t}$ and a clear contradiction to the planarity of Γ_G .
- (4) The statement is true because there exists a path $P_{s,t}$ which does not contain s_i (resp. t_i) and connects w_i (resp. w_{i+1}) to $b(S)$ (resp. $t(S)$).
- (5) We first construct a spanning tree T of G with specific properties (consult Figure 2.27.a): for each w_i , $1 \leq i \leq m$, T contains exactly one vertex of G_{w_{i-1}, w_i} incident to w_i and exactly one vertex from $G_{w_i, w_{i+1}}$ incident to w_i . For simplicity of presentation call T_{s, w_i} , T_{w_i} , $T_{w_i, w_{i+1}}$ the subtrees

of T that are the spanning trees for G_{s,w_i} , G_{w_i} , $G_{w_i,w_{i+1}}$, respectively. Call p_i , n_i the vertices of T_{w_{i-1},w_i} , $T_{w_i,w_{i+1}}$, respectively, that are incident to w_i . Since Γ_G is an UPSE of G , it contains an UPSE of T , say Γ_T . Consider a cut of T created by the removal of n_i . One of the trees resulting from this cut is T_{s,w_i} . By Lemma 1, the subtree T_{s,w_i} is mapped in Γ_T on consecutive points of S , moreover, this point set contains $b(S)$, since by the requirements of the lemma, s is mapped to $b(S)$. Since, G_{s,w_i} is a graph induced by the vertices of T_{s,w_i} we infer that the vertices of G_{s,w_i} in Γ_G are mapped to consecutive points of S containing $b(S)$.

(6) By the previous statement G_{s,w_i} is mapped to consecutive points of S containing $b(S)$. Consider spanning tree T_{s,w_i} of G_{s,w_i} as it was described in the proof of the previous statement. Recall that p_i is the single vertex of G_{w_{i-1},w_i} , incident to w_i in T_{s,w_i} . The removal of p_i from T_{s,w_i} results in a subtrees of T_{s,w_i} one of which is T_{w_i} , that is the spanning tree of G_{w_i} . By Lemma 1, we infer that T_{w_i} is mapped to consecutive points of the point set where G_{s,w_i} is mapped and therefore, on a subset of S comprised by two consecutive point sets of S , one on its left and one on its right side. Therefore the same holds for G_{w_i} . We now prove that if $u, v \in G_{s,w_i}$ so that $u \notin G_{w_i}$ and $v \in G_{w_i}$ and such that, u and v are mapped to the same side of S , then v is mapped higher than u . Assume, for the sake of contradiction, that this is not true. Let first w_i be mapped to the same side where v is mapped (Figures 2.29.a-b). Then, since w_i is part of G_{w_i} , by the first part of this statement, we get that u is mapped above w_i . Note that there exist vertex-disjoint paths $P_{s,u}$ and $P_{w_i,t}$. Therefore $P_{s,u}$ and $P_{w_i,t}$ cross. A clear contradiction. Let now w_i be mapped to the side different from that where v is mapped (Figure 2.29.a and Figure 2.29.c). Consider vertex-disjoint paths $P_{w_i,v}$ and $P_{s,u}$ in G . This paths cross each other. A contradiction again. So the statement follows.

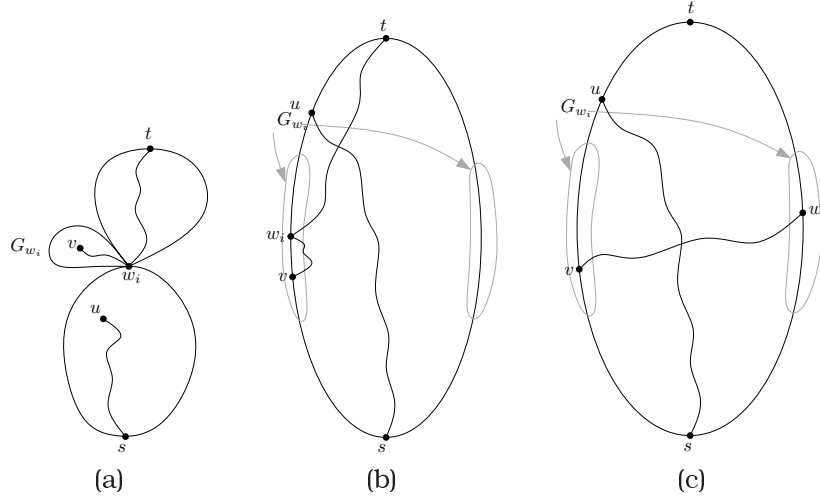


Figure 2.29: (a-c) Proof of Statement (6) of Lemma 18.

(7) By Statement (5), the vertices of G_{s,w_i} in Γ_G , are mapped to consecutive points of S containing $b(S)$. Applying this statement for $i + 1$ we get that the vertices of $G_{s,w_{i+1}}$ in Γ_G , are mapped to consecutive points of S containing $b(S)$. Note that $G_{s,w_{i+1}} = G_{s,w_i} \cup (G_{w_i,w_{i+1}} \cup G_{w_{i+1}})$. Therefore we get that the vertices of the union of $G_{w_{i+1}}$ and $G_{w_i,w_{i+1}}$, except for vertex w_i , are mapped on a subset of S comprised by two consecutive point sets of S , one on its left and one on its right side. By Statement (6), the vertices of $G_{w_{i+1}}$ are also mapped to two consecutive point sets of S , one on its left and one on its right side. Therefore, we infer that the vertices of $G_{w_i,w_{i+1}}$, except for vertices w_i and w_{i+1} , are mapped on a subsets of S comprised by two consecutive point sets

of S , one on its left and one on its right side. Let $u \in G_{w_i}$, $v \in G_{w_i, w_{i+1}}$. By the definition of G_{w_i} and $G_{w_i, w_{i+1}}$ there exist vertex-disjoint paths $P_{s,u}$ and $P_{v,t}$ in G . Assuming that both u and v are mapped to the same side of S and that u is mapped higher than v . We infer that paths $P_{s,u}$ and $P_{v,t}$ have to cross, a clear contradiction.

(8) Consider an upward planar drawing of block B_i on some points of $L \cup R$. Assume for the sake of contradiction that $G_{w_i, w_{i+1}}(v)$ contains a side subgraph and let C be the side block of v that is contained in this side-subgraph. If v is a side vertex of B_i then we get a contradiction by Statement (1), since v is a side vertex of both B_i and C . Otherwise, let v be a switch vertex of B_i , see Figure 2.28. Let $v = t_i$, the case when $v = s_i$ is symmetrical. Then, by Statement (3), and fact that $v \neq w_{i+1}$, t_i is incident to w_{i+1} . By Statement (4), t_i is drawn on the side opposite to w_{i+1} . Let s_C be the source of C . In any upward planar drawing s_C is mapped to the side opposite to that of t_i and therefore to the same side where w_{i+1} is mapped. This causes a crossing between block C and path $P_{s,t}$. Thus $G_{w_i, w_{i+1}}(v)$ contains only extremal subgraphs.

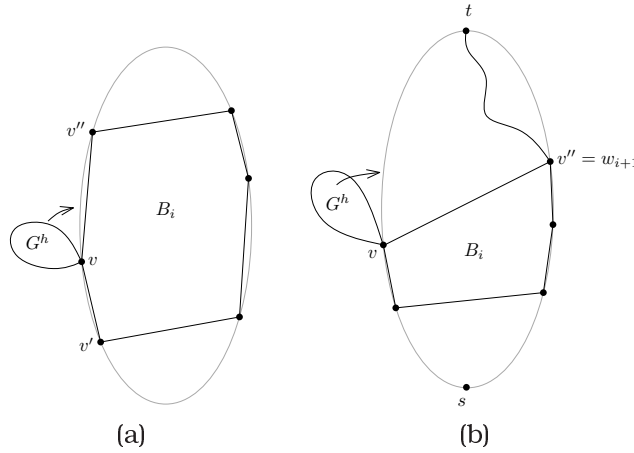


Figure 2.30: (a-b) Proof of Statement (9) of Lemma 18.

(9) Let G^h be an extremal subgraph of $G_{w_i, w_{i+1}}(v)$, that has v as its source. The case when v is its sink is symmetrical. Let v' and v'' be two vertices of B_i , which are incident to v . Assume first that both v' and v'' are mapped to the same side of S where v is mapped (see Figure 2.30.a). W.l.o.g. let v'' be mapped higher than v . Then G^h has to be drawn on the same side of S where v is drawn, below v'' , otherwise a crossing among G^h and B_i is created.

Let now, v'' be mapped to the other side of S (see Figure 2.30.b). Since $v \neq w_i$ and $v \neq w_{i+1}$, we infer that v'' coincides either with w_i or with w_{i+1} , otherwise path $P_{s,t}$ crosses B_i . Therefore there exists path $P_{v',t}$ that does not contain v . Thus G^h has to be mapped to the same side where v is, otherwise a crossing among G^h and $P_{v',t}$ is created.

(10) By Statement (6), the vertices of G_{w_i} in Γ_G are mapped on a subset of S , call it S_i , comprised by two consecutive point sets of S , one on its left and one on its right side. Let T_{w_i} be the spanning tree of G_{w_i} with the following property: T_{w_i} contains only one edge from each of its extremal and side subgraphs that is incident to w_i and let T_{w_i} be rooted at w_i . Let $\Gamma_{T_{w_i}}$ be the drawing of T_{w_i} on S_i that is induced by the drawing of G_{w_i} on S_i . By Lemma 1, each subtree of T_{w_i} is drawn on consecutive points of S_i . Moreover each of the subtrees of T_{w_i} should be drawn on the same side of S_i , otherwise a crossing with path $P_{s,t}$, passing through w_i , is produced (see Figure 2.31.a). Hence the same is true for the extremal and side subgraph of G_{w_i} , except for vertex w_i .

Let now $G_{w_i}^S$ be a side-subgraph of G_{w_i} and B be the block of $G_{w_i}^S$ attached to w_i . I.e. B is a side block of w_i . Note that all vertices of B have to be mapped to the side of S opposite to w_i , otherwise we infer that either there is a crossing or a common vertex with $P_{s,t}$, which is impossible due to the planarity of Γ_G and the definition of G_{w_i} , respectively. Therefore all vertices of $G_{w_i}^S$ are mapped to the side of S opposite to w_i .

(11) By Statement (10) each extremal and side subgraph of G_{w_i} , except for vertex w_i is mapped to one of the sides of S . Recall also, that by Statement (2) the sides of a two-sided block have to be mapped to different sides of S . Therefore, the only two-sided block of an extremal or side subgraph of G_{w_i} can be the one which is attached to w_i . For the sake of contradiction assume that two-sided block B is contained in an extremal subgraph of G_{w_i} , therefore w_i is B 's switch. By Statement (2) the sides of B have to be mapped to different sides of S , which still violates the Statement (10). Thus B can be only contained in a side-subgraph of G_{w_i} and have w_i as its side vertex.

Let now B' be a side block attached to w_i , either one or two-sided. Assume for the sake of contradiction that neither $L(B') = \{w_i\}$ or $R(B') = \{w_i\}$. W.l.o.g assume that $w_i \in L(B')$ and let $a \in L(B')$. Vertices w_i and a are connected by a directed path from a to w_i (resp. from w_i to a), see Figure 2.31.b. Note that $a \notin P_{s,t}$, since by the definition of G_{w_i} , w_i is the only common vertex of $P_{s,t}$ and G_{w_i} . By Statement (2) of this lemma, vertices a and w_i are mapped to the same side of S . Therefore block B' crosses the path $P_{s,t}$.

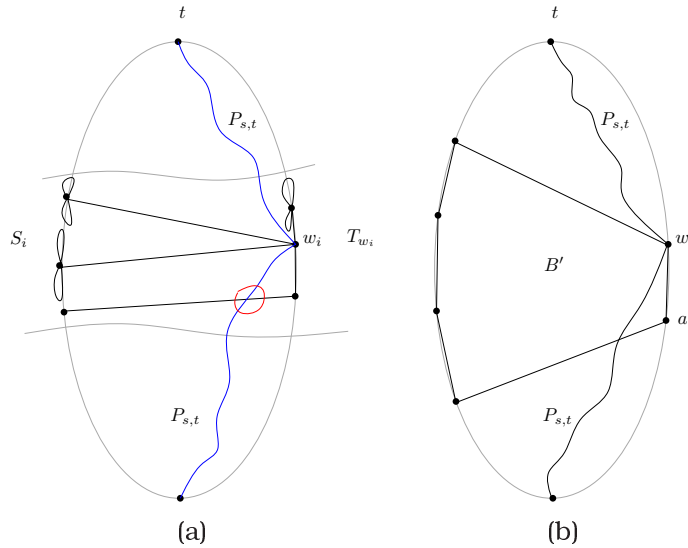


Figure 2.31: (a) Proof of Statement (10) of Lemma 18. (b) Proof of Statement (11) of Lemma 18.

□

2.4.2 Two restricted UPSE problems for outerplanar digraphs

Analogously to the restricted UPSE for trees, in this section, we study two restricted UPSE problems for outerplanar graphs. These problems are later on used by our main algorithm which decides whether there exists an UPSE of a given outerplanar DAG into a given convex point set.

2.4.2.1 Restricted UPSE for cut vertex components

Let G be an outerplanar DAG, let $P_{s,t}$ be a path in G from its source s to its sink t and let $P_{s,t}^c = \{s = w_1, \dots, w_m = t\}$ be the (s, t) -separating subpath of $P_{s,t}$. Let G_{w_i} be one of the cut vertex components defined by the path $P_{s,t}$. Restricted UPSE for cut vertex components deals with an UPSE of G_{w_i} . In Lemma 18, we proved that, if G admits an UPSE Γ_G into a convex point set S , then the following are true:

1. The vertices of G_{w_i} in Γ_G are mapped on a subset of S comprised by two consecutive point sets of S , one on its left and one on its right side (Statement (6)).
2. If G_{w_i} contains a side block B' attached to w_i , then w_i is a single side vertex of one of its sides. Moreover B' can be the only two-sided block of G_{w_i} (Statement (11)).
3. All the vertices of a single extremal or a side subgraph of G_{w_i} , $1 \leq i \leq m$, except for vertex w_i , are mapped to the consecutive points of the same side of S , with the vertices of a side subgraph mapped to the side of S opposite to that of w_i (Statement (10)).

Taking into consideration these necessary conditions we define and solve the following problem.

Definition 3. *In a restricted cut vertex component UPSE problem (RCVC-UPSE, for short) we are given an outerplanar DAG G rooted at r , so that if r is a side vertex of a block B of G , then r is a single side vertex on one of the sides of B , moreover B is the only block of G that can be two-sided (see Figure 2.32 for a possible entry graph G of the problem). We are also given a convex point set S , and a designated point $p_r \in S$. We are asked to decide whether there exists an UPSE of G into S such that:*

- (i) *the root r of G is mapped to point p_r and,*
- (ii) *each extremal subgraph of G is mapped to consecutive points on the same side (either L or R) of S (excluding the vertex r).*
- (iii) *all the vertices of the side subgraph of G , except for vertex r , are mapped to the consecutive points of the side of S opposite to that where vertex r is mapped.*

An UPSE of G into S that satisfies these requirements is called an RCVC-UPSE.

Theorem 11. *Let G be a n -vertex outerplanar DAG as described in RCVC-UPSE problem. Let L and R be left-sided and right-sided convex point sets, resp., such that $S = L \cup R$ is a convex point set of size n , and p_r a point of S . The RCVC-UPSE problem with input G , S and p_r can be decided in $O(b(r)|G|)$ time. Moreover, if a RCVC-UPSE for G , S and p_r exists, it can also be constructed in $O(b(r)|G|)$ time.*

Proof:

Let G , rooted at r , be as described in the RCVC-UPSE problem. Recall that r should be mapped to a pre-specified point p_r . Assume without loss of generality that $p_r \in L$ and let p_r be the k_p -th point of L . Graph G has at most one block, B , having r as its side vertex. Let G_B be a side subgraph of G that contains B (see Figure 2.32). By requirement of the problem, the vertices of G_B , should be mapped to consecutive points of S , to the side opposite to that of r . Recall also that all the vertices of a single extremal subgraph of G have to be mapped to consecutive points of a single side of S . Thus, we infer that the vertices of $lower(G)$ have to be mapped to the points

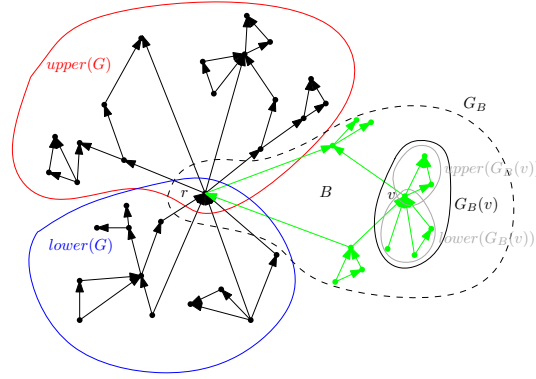


Figure 2.32: Parts of the graph treated by the proof of Theorem 11. Subgraph G_B is drawn by green and indicated by a dashed curve. Subgraph $G_B(v)$ is indicated by a black curve. The subgraphs $upper(G_B(v))$ and $lower(G_B(v))$ are indicated by gray curves.

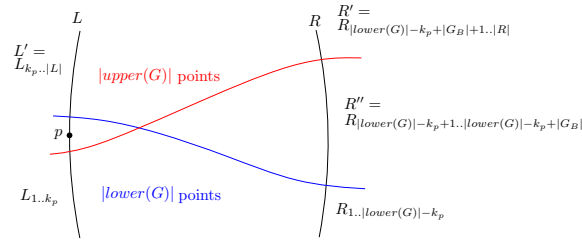


Figure 2.33: The partition of the point set described in the proof of Theorem 11.

of S comprised by two consecutive subsets of S : that is all the points of L , below p_r , i.e., the point set $L_{1..k_p}$ and the $|lower(G)| - k_p$ lowest points of R , i.e., $R_{1..|lower(G)|-k_p}$ (see Figure 2.33). The vertices of G_B have to be mapped to $\{p_r\} \cup R_{|lower(G)|-k_p+1..|lower(G)|-k_p+|G_B|}$. Finally, the vertices of $upper(G)$ are mapped to the point set $L_{k_p..|L|} \cup R_{|lower(G)|-k_p+|G_B|+1..|R|}$. Let us denote $L_{k_p..|L|}$ by L' , $R_{|lower(G)|-k_p+|G_B|+1..|R|}$ by R' and $R_{|lower(G)|-k_p+1..|lower(G)|-k_p+|G_B|}$ by R'' . We first show how to test the existence of an RCVC-UPSE of $upper(G)$ into point set $L' \cup R'$. Testing of existence of an RCVC-UPSE of $lower(G)$ into the point set $L_{1..k_p} \cup R_{1..|lower(G)|-k_p}$ is symmetrical.

We construct a tree $T_{upper(G)}$, called *upward skeleton* of $upper(G)$ and we prove that $upper(G)$ has an RCVC-UPSE into $L' \cup R'$, with r mapped to p_r , if and only if $T_{upper(G)}$ has a restricted UPSE into $L' \cup R'$, with r mapped to p_r . Let $G_1^h, \dots, G_{b^+(r)}^h$ be the extremal subgraphs of $upper(G)$, see Figure 2.34.a. We construct tree $T_{upper(G)}$ to consist of a root r and subtrees $T_1^h, \dots, T_{b^+(r)}^h$, rooted at vertices $r_1, \dots, r_{b^+(r)}$, respectively, that are connected to r by the edges (r, r_i) , $1 \leq i \leq b^+(r)$, respectively (see Figure 2.34.b). Consider G_i^h and let B_i be the extremal block of r contained in G_i^h . Note that B_i can be also a trivial block, but B_i is a one-sided block, because of the requirements of the RCVC-UPSE. Thus r and the sink of B_i must be adjacent. Let v be a vertex of B_i , adjacent to r , different from sink of B_i , if such vertex exists, otherwise let v be a sink of B_i . Consider the graph $G_i^h(v)$ (see Figure 2.34.a, $G_i^h(v)$ is denoted by a blue curve). Tree T_i^h consists of its root r_i a directed path of length $|lower(G_i^h(v))| - 1$, having r_i as its sink, and of a directed path of length $|G_i^h| - |lower(G_i^h(v))| - 1$, having r_i as its source.

Lemma 19. *The outerplanar DAG $upper(G)$, rooted at r , admits an RCVC-UPSE into $L' \cup R'$ with r mapped to p_r iff each extremal subgraph of $upper(G)$, rooted at r , is one-side embeddable and*

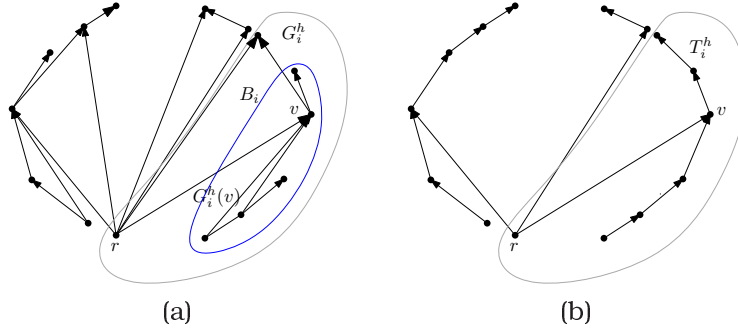


Figure 2.34: (a) The graph $upper(G)$, its extremal subgraph G_i^h and its subgraph $G_i^h(v)$. (b) The upward skeleton on $upper(G)$. The subgraph $lower(G_i^h(v))$ is substituted by a path of length $|lower(G_i^h(v))| - 1$.

the upward skeleton $T_{upper(G)}$ of $upper(G)$ admits a restricted UPSE into $L' \cup R'$ with r mapped to p_r .

Proof: Assume that $upper(G)$, rooted at r , admits an RCVC-UPSE into $L' \cup R'$ with r mapped to p_r . Let Γ be such an embedding. We reconstruct this embedding into a restricted UPSE of $T_{upper(G)}$ into $L' \cup R'$. We consider G_i^h , $i = 1, \dots, b^+(r)$. Since Γ is a RCVC-UPSE, G_i^h (except maybe vertex r) uses the consecutive points of $L' \cup R'$. Let v be a vertex of B_i , incident to r , different from sink of B_i , if such vertex exists, otherwise let v be a sink of B_i . Consider $G_i^h(v)$, in tree T_i^h the $lower(G_i^h(v))$ is substituted by a directed path of length $|lower(G_i^h(v))| - 1$. We draw this path on the points where $lower(G_i^h(v))$ is drawn, using the points in the order of increasing y -coordinate. The rest vertices of T_i^h are drawn on the points where the vertices of $upper(G_i^h)$ are placed. Now consider a drawing of a single G_i^h , $i = 1, \dots, b^+(r)$. Subgraph G_i^h is rooted at r and r is mapped to p_r . Let $S_i \cup \{p_r\}$ be the points of $L' \cup R'$ occupied by the G_i^h . Consider a virtual point p_i that is below the points of S_i so that $S_i \cup \{p_i\}$ creates a one-side convex point set. Place vertex r to point p_i . Note that the new drawing of G_i^h is upward and planar. Thus G_i^h is one-side embeddable.

Now assume that $T_{upper(G)}$ admits a restricted UPSE into $L' \cup R'$ with r mapped to p_r . Let T_i^h , $i = 1, \dots, b^+(r)$ be the subtrees of $T_{upper(G)}$ rooted at $r_1, \dots, r_{b^+(r)}$ respectively. Each of T_i^h , $i = 1, \dots, b^+(r)$ is mapped to consecutive points of $L' \cup R'$, call this point set S_i . Now consider G_i^h , $i = 1, \dots, b^+(r)$. Recall that G_i^h is one-side embeddable. Consider $S_i \cup \{p_i\}$, where p_i is a virtual point lower than all points of S_i . Map G_i^h to $S_i \cup \{p_i\}$ so that r is mapped to its lowest point, i.e. to p_i . Move r to the point p_r . Note that in any UPSE of G_i^h to $S_i \cup \{p_i\}$, vertex v is mapped higher than all vertices of $lower(G_i^h(v))$. Thus, since (r, v) is upward in the UPSE of T_i^h it is also upward in the constructed drawing of G_i^h on point set $S_i \cup \{p_i\}$. \square

By Lemma 19, $upper(G)$ admits an RCVC-UPSE into $L' \cup R'$ if and only if each extremal subgraph of $upper(G)$, rooted at r is one-side embeddable and upward skeleton $T_{upper(G)}$ of $upper(G)$ admits a restricted UPSE into $L' \cup R'$ with r mapped to p_r . One-side embeddability of extremal subgraphs of $upper(G)$ can be tested in linear time by Lemma 17. Finally, the existence of a restricted UPSE of $T_{upper(G)}$ into $L' \cup R'$ can be tested in $O(b^+(r)|upper(G)|)$ time, by using the dynamic programming procedure explained in Section 2.3.4 (see also Theorem 6).

Next we explain how to test whether side subgraph G_B has an UPSE into points $\{p_r\} \cup R''$, where r is mapped to p_r . Note that the positions of the vertices of block B are predetermined by the sizes of the extremal graphs of the vertices of B . I.e. for any edge (v, v') of B , the vertices of $lower(G_B(v'))$ and $upper(G_B(v))$ have to be drawn above v and below v' , respectively. Let Γ_B

be a drawing of the vertices of B on points of $\{p_r\} \cup R''$ so that for each edge (v, v') of B , there are $|lower(G_B(v'))| + |upper(G_B(v))|$ free points between the points to which v and v' are mapped. If Γ_B is upward and for every $v \in B$ each of the $lower(G_B(v))$ and $upper(G_B(v))$ is one-side embeddable, an UPSE of G_B on point set $\{p_r\} \cup R''$, so that r is mapped to p_r , can be constructed in time $O(G_B)$, by Lemma 17.

Finally, since the size of G_B is bounded by $|G|$ the overall time complexity is $O(b^+(r)|G| + b^-(r)|G| + |G|) = O(b(r)|G|)$.

□

Similarly to the case of trees, denote by $\mathcal{L}(G, L, R)$ the set of points $p_r \in L \cup R$ such that there exists an RCVC-UPSE of G into $L \cup R$ so that the root of G is mapped to p_r . The next theorem follows easily from Theorem 11 by testing each point of $L \cup R$ as a candidate host for $r(G)$.

Theorem 12. *Let G be an n -vertex outerplanar DAG rooted at vertex r , so that if r is a side vertex of a block B of G , then r is a single side vertex on one of the sides of B , moreover B is the only block of G that can be two-sided. Let L and R be left-sided and right-sided convex point sets, resp., such that $L \cup R$ is a convex point set of size n . Then, set $\mathcal{L}(G, L, R)$ can be computed in $O(b(r)n^2)$ time.*

□

2.4.2.2 Restricted UPSE for path components

Let again G be an outerplanar DAG, S be a convex point set, let $P_{s,t}$ be a path from a source s to a sink t of G and let $P_{s,t}^c = \{s = w_1, \dots, w_m = t\}$ be the (s, t) -separating subpath of $P_{s,t}$. Let $G_{w_i, w_{i+1}}$ be a path component of G defined by $P_{s,t}$. Let B_i be a block of $G_{w_i, w_{i+1}}$ that contains both w_i and w_{i+1} . If B_i is a trivial block, i.e., an edge then its drawing is determined uniquely by the positions of vertices w_i and w_{i+1} . Thus, in case of a tree, we only had to check whether the edge connecting w_i and w_{i+1} is drawn upward. Assume now that B_i is not a trivial block, then $G_{w_i, w_{i+1}}$ might have more drawings on a point set corresponding to it. In this section we present a restricted UPSE problem that deals with an UPSE of a path component.

We first recall that, by Lemma 18, if G admits an UPSE Γ_G into S with s and t mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively, then the following are true for the structure of $G_{w_i, w_{i+1}}$ and its UPSE into a subset of S .

1. Vertex w_i (resp. w_{i+1}) of block B_i either coincides with the source s_i (resp. sink t_i) of B_i or is adjacent to it (Statement (3)).
2. If w_i (resp. w_{i+1}) of block B_i is incident to source s_i (resp. sink t_i) of B_i , then s_i (resp. t_i) is mapped in Γ_G to the opposite side to which w_i (resp. w_{i+1}) is mapped (Statement (4)).
3. The vertices of $G_{w_i, w_{i+1}}$, $1 \leq i \leq m - 1$, except of w_i and w_{i+1} are mapped in Γ_G to a subset of S comprised by two consecutive point sets of S , one on its left and one on its right side (Statement 7).
4. For each $v \in B_i$, $v \neq w_i, w_{i+1}$, the vertices of $G_{w_i, w_{i+1}}(v)$ are mapped in Γ_G to the same side where v is mapped on consecutive points around v (Statement 9).

Based on these necessary conditions we define and solve the following problem:

Definition 4. *Let G be a n -vertex outerplanar DAG G , let B be a block of G , let s and t be the source and the sink of B . Let also w, w' be the vertices of B so that w (resp. w') either coincide*

with s (resp. t) or is incident to it. We assume that G is rooted at w . Let S be a convex point set of n points and let q, p be two points of S . In a restricted path component UPSE problem (RPC-UPSE, for short) we are asked to determine whether there exists an UPSE of G into S such that:

- (i) Vertices w, w' are mapped to the points q, p , respectively.
- (ii) If w (resp. w') is incident to s (resp. t), then s (resp. t) is mapped to the side of S opposite to which w (resp. w') is mapped.
- (iii) For each $v \in B, v \neq w, w'$, the vertices of $G(v)$ are mapped to the same side of S where v is mapped on consecutive points around v .

An UPSE of G into S that satisfies these requirements is called an RPC-UPSE.

Lemma 20. *Let an outerplanar DAG G , block B of G , vertices w, w' of B , convex point set S and points q, p of $S = L \cup R$, as defined in the RPC-UPSE problem. RPC-UPSE problem can be solved in $O(|G|)$ time. If an RPC-UPSE of G into S exists we can also construct it within the same time bounds.*

Proof: If B is a trivial block then it has a unique drawing defined by the positions of w and w' and we only need to test the upwardness of the edge $\{w, w'\}$, thus the lemma holds. Assume, that B is not a trivial block. Recall that when block B of graph G is specified, by $L(G)$ (resp. $R(G)$) we denote all the vertices of $L(B)$ (resp. $R(B)$) plus the vertices of the components incident to the vertices of $L(B)$ (resp. $R(B)$) and refer to $L(G)$ and $R(G)$ as to sides of G .

By the definition of RPC-UPSE, vertices s, t either coincide with w, w' , or are incident to them, respectively. By Statement 2 (Lemma 18), in any UPSE of B into some points of S , all the vertices of $L(B)$ (resp. $R(B)$) are mapped to the same side of S . While, by RPC-UPSE again, if w (resp. w') is incident to s (resp. t) then s (resp. t) has to be mapped to the opposite side to which w (resp. w') is mapped. Thus, if at least one of w, w' is different from s, t , respectively, and since we know to which side of the point set w and w' are mapped, it is predetermined to which side the points of $\{L(B), R(B), s, t\}$ are mapped.

Based on these notes we define a *side mapping* of G . Side mapping of G is a function $M : V(G) \rightarrow \{\hat{\lambda}, \rho\}$, so that:

1. For each $v \in G, M(v) = \hat{\lambda}$ (resp. $M(v) = \rho$) if vertex v is mapped by M to the left (resp. right) side of the given point set.
2. $M(w)$ and $M(w')$ are already given since we know that w and w' should be mapped to points q and p , respectively.
3. If $w \neq s$ then $M(w) \neq M(s)$. For each $v \in G$ which belong to the same side of G where w belong, set $M(v) = M(w)$, for the vertices of the other side of G , set $M(v) \neq M(w)$.
4. If $w' \neq t$ then $M(w') \neq M(t)$. For each $v \in G$ which belong to the same side of G where w' belong, set $M(v) = M(w')$, for the vertices of the other side of G , set $M(v) \neq M(w')$.
5. If $w = s$ and $w' = t$ then we define two distinct side mappings: (i) for all $v \in L(G)$ set $M_1(v) = \hat{\lambda}$ and for all $v \in R(G)$ set $M_1(v) = \rho$. (ii) for all $v \in L(G)$ set $M_2(v) = \rho$ and for all $v \in R(G)$ set $M_2(v) = \hat{\lambda}$.

Note that a side mapping for G simply expresses the requirements of the RPC-UPSE problem. For the simplicity we introduce the following notation:

$$\hat{\rho}(M) := |\cup_{v \in G} (M(v) = \hat{\rho})|, \rho(M) := |\cup_{v \in G} (M(v) = \rho)|.$$

Let M be a side mapping of G . Since the number of vertices of G that is mapped to the left (resp. right) side of the given point set should be $|L|$ (resp. $|R|$), we get the first necessary condition:

$$\hat{\rho}(M) = |L|, \rho(M) = |R|.$$

If the above equations holds we say that M is a *valid side mapping* of G .

Assume that there exists a valid side mapping of G . By requirement (iii) of RPC-UPSE, for each $v \in B$, $G(v)$ has to be drawn on one the same side of S , where v is placed, on the consecutive points around v . Thus, both $upper(G(v))$ and $lower(G(v))$ should be one-side embeddable. This is the second necessary condition.

Finally, consider the following drawing Γ_B of B on S : let v be a vertex of B . Leave $|upper(G(v))|$ and $|lower(G(v))|$ points free above and below the point where v is mapped. We call Γ_B , drawing of B *induced by mapping* M . It is clear that the induced by M drawing of B should be upward, this is the third necessary condition.

Next we overview the algorithm which tests the three necessary conditions and constructs the drawing if the conditions are fulfilled, i.e., we prove that these conditions are also sufficient. We also discuss the time complexity.

1. Test whether there exists a valid side mapping M of G to S . This can be done in time proportional to the size of G .
2. Let Γ_B be drawing of B *induced by mapping* M . Test whether Γ_B is upward. The construction of Γ_B and the upwardness test can be done in time proportional to the size of G .
3. For each $v \in B$, test whether $upper(G(v))$ and $lower(G(v))$ are one-side embeddable. This can be done in time proportional to the size of the graph due to Lemma 17. The construction of the asked RPC-UPSE of G into S is then completed by the construction of an UPSE of $upper(G(v))$ (resp. $lower(G(v))$) into a one-side convex point set of the same size, comprised by the consecutive points lying above (resp. below) v , which are left free by the definition of the drawing of B induced by a valid mapping. By Lemma 17 this can be done in time $O(|upper(G(v))|)$ (resp. $O(|lower(G(v))|)$).

This concludes the proof of the lemma. □

Given G , block B of G , vertices w, w' of B , convex point set S and points q, p of S , as in RPC-UPSE problem, the procedure $RPC-UPSE(G, w, w', S, q, p)$ returns *true* if there exists an RPC-UPSE of G into S with vertices w, w' mapped to q, p , respectively.

2.4.3 Testing algorithm for outerplanar digraphs

Let G be an outerplanar DAG and s and t be a source and a sink of G , respectively. Let S be a convex point set. In this section we present a polynomial time algorithm that tests whether G admits an UPSE into S , such that, s and t mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively.

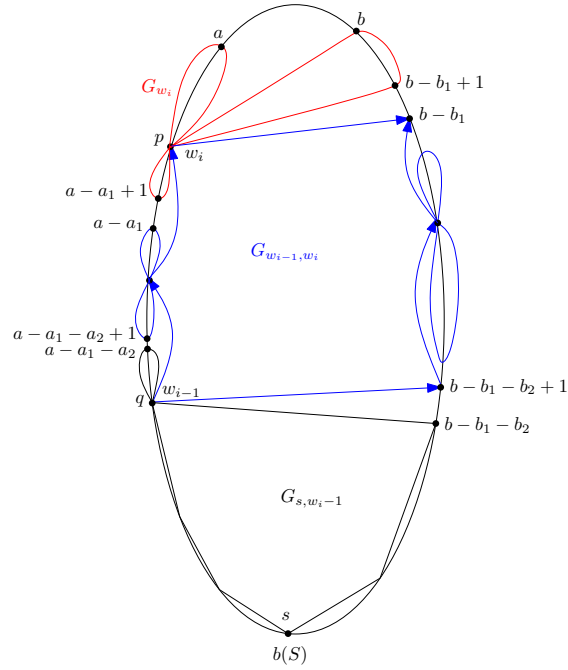


Figure 2.35: Construction of an UPSE of G_{s,w_i} from an UPSE of $G_{s,w_{i-1}}$, an RPC-UPSE of G_{w_{i-1},w_i} and an RCVC-UPSE of G_{w_i} . Subgraph $G_{s,w_{i-1}}$ is denoted by black, path component G_{w_{i-1},w_i} by blue and cut vertex component G_{w_i} by red.

Let $P_{s,t}$ be a path from s to t and let $P_{s,t}^c = \{s = w_1, \dots, w_m = t\}$ be the (s, t) -separating subpath of $P_{s,t}$. Let G_{w_i} , $1 \leq i \leq m$, and $G_{w_i, w_{i+1}}$, $1 \leq i \leq m - 1$, be a cut vertex components and a path components defined by $P_{s,t}$. Finally let G_{s, w_i} , $1 \leq i \leq m$, be the subgraphs of G defined by $P_{s,t}$ and w_i .

Similarly to the case of trees, the dynamic programming Algorithm 2 maintains a list of points $\mathcal{P}(a, b, k)$, $0 \leq a \leq |L|$, $0 \leq b \leq |R|$, $1 \leq k \leq m$, such that:

$$p \in \mathcal{P}(a, b, k) \iff \begin{cases} G_{s, w_k} \text{ has an UPSE into point set } S_{1..a, 1..b} \text{ with} \\ \text{vertices } s, w_k \text{ mapped to points } b(S), p, \text{ respectively.} \end{cases}$$

For the boundary conditions of our dynamic programming we have that:

$$\mathcal{P}(a, b, 1) = \mathcal{L}(G_{w_1}, L_{1..a}, R_{1..b}) \text{ where } a + b = |G_{w_1}|.$$

Note that since w_1 is a source, $\mathcal{P}(a, b, 1)$ is either $\{b(s)\}$ or \emptyset .

Assume that $G_{s, w_{i-1}}$ has an UPSE into point set $S_{1..a-a_1-a_2, 1..b-b_1-b_2}$ with vertex w_{i-1} mapped to point q (see Figure 2.35, black graph). Assume also that G_{w_i} has an RCVC-UPSE in $L_{a-a_1+1..a} \cup R_{b-b_1+1..b}$ with w_i mapped to p (red graph in Figure 2.35). Assume finally, that G_{w_{i-1}, w_i} has an RPC-UPSE into point set $L_{a-a_1-a_2+1..a-a_1} \cup R_{b-b_1-b_2+1..b-b_1} \cup \{p, q\}$ (blue graph in Figure 2.35). Then we can combine the UPSE for $G_{s, w_{i-1}}$ with the RCVC-UPSE for G_{w_i} and with the RPC-UPSE for G_{w_{i-1}, w_i} , in order to get an UPSE of G_{s, w_i} on point set $S_{1..a, 1..b}$ with vertices s and w_i mapped to $b(S)$ and p , respectively. This procedure allows us to add points in $\mathcal{P}(a, b, i)$ and is described

formally by the following recurrence relation:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(a, b, i) = \{p \mid & \exists a_1, b_1 \in Z : a_1 + b_1 = |G_{w_i}| \\
& \exists a_2, b_2 \in Z : a_2 + b_2 = |G_{w_{i-1}, w_i}| - 2 \\
& \text{and } p \in \mathcal{L}(G_{w_i}, L_{a-a_1+1..a}, R_{b-b_1+1..b}) \\
& \text{and } \exists q \in \mathcal{P}(a - a_1 - a_2, b - b_1 - b_2, i - 1) \\
& \text{and } \exists \text{RPC-UPSE of } G_{w_{i-1}, w_i} \text{ into} \\
& L_{a-a_1-a_2+1..a-a_1} \cup R_{b-b_1-b_2+1..b-b_1} \cup \{p, q\} \\
& \text{where } w_{i-1} \text{ and } w_i \text{ are mapped to} \\
& q \text{ and } p, \text{ respectively}\}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Lemma 21. *Let G be a n -vertex outerplanar DAG, S be a convex point set of size n . Let s and t be a source and a sink of G , respectively, let $P_{s,t}$ be a path connecting s and t in G , let $P_{s,t}^c = (s = w_1, \dots, w_m = t)$ be the (s, t) -separating subpath of $P_{s,t}$ and let G_{s,w_i} , $1 \leq i \leq m$ be the subgraphs of G , defined by $P_{s,t}$ and w_i . There exists an UPSE of G into S such that s and t are mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively, if and only if $\mathcal{P}(|L|, |R|, m)$, computed by the recurrence relation (2.6), is non-empty.*

Proof: We first prove that if $p \in \mathcal{P}(a, b, i)$ then G_{s,w_i} has an UPSE into point set $S_{1..a,1..b}$ with vertex w_i mapped to point p . From the boundary conditions it is true for $i = 1$. Assume that if $q \in \mathcal{P}(a, b, i - 1)$ then $G_{s,w_{i-1}}$ has an UPSE into $S_{1..a,1..b}$ with vertex w_{i-1} mapped to point q . Let now $p \in \mathcal{P}(a, b, i)$. Then by the definition of the recurrence relation we infer that:

1. There exist $a_1, b_1 \in Z$ so that $a_1 + b_1 = |G_{w_i}|$.
2. There exist $a_2, b_2 \in Z$ so that $a_2 + b_2 = |G_{w_{i-1}, w_i}| - 2$.
3. Point $p \in \mathcal{L}(G_{w_i}, L_{a-a_1+1..a}, R_{b-b_1+1..b})$, which by the definition of \mathcal{L} , means that there exists an RCVC-UPSE of G_{w_i} into $L_{a-a_1+1..a} \cup R_{b-b_1+1..b}$ with w_i mapped to p .
4. There exists $q \in \mathcal{P}(a - a_1 - a_2, b - b_1 - b_2, i - 1)$, thus, by induction hypothesis, $G_{s,w_{i-1}}$ has an UPSE into $L_{1..a-a_1-a_2} \cup R_{1..b-b_1-b_2}$.
5. There exists an RPC-UPSE of G_{w_{i-1}, w_i} into $L_{a-a_1-a_2+1..a-a_1} \cup R_{b-b_1-b_2+1..b-b_1} \cup \{p, q\}$ where w_{i-1} and w_i are mapped to q and p respectively.

Then we combine the UPSE for $G_{s,w_{i-1}}$ into point set $S_{1..a-a_1-a_2,1..b-b_1-b_2}$ with the RCVC-UPSE for G_{w_i} into point set $S_{a-a_1+1..a,b-b_1+1..b}$ and with the RPC-UPSE of G_{w_{i-1}, w_i} into point set $S_{a-a_1-a_2+1..a-a_1,b-b_1-b_2+1..b-b_1} \cup \{p, q\}$ in order to get an UPSE of G_{s,w_i} on point set $S_{1..a,1..b}$. Since each extremal and a side subgraph of G_{w_i} is drawn entirely on a single side of S we get that the resulting drawing is planar. It is upward as a combination of upward drawings.

For the reversed statement we also work by induction. From the boundary conditions we know that if $G_{s,w_1} = G_{w_1}$ has an UPSE in to a point set $S_{1..a,1..b}$ then $b(S) \in \mathcal{P}(a, b, 1)$, where $a + b = |G_{w_1}|$. Assume that the statement is true for $G_{s,w_{i-1}}$, i.e., if $G_{s,w_{i-1}}$ has an UPSE in to a point set $S_{1..a,1..b}$ with vertex w_{i-1} mapped to q then $q \in \mathcal{P}(a, b, i - 1)$. Assume also that G_{s,w_i} has an UPSE in to a point set $S_{1..a,1..b}$ with vertices s and w_i mapped to points $b(S)$ and p , respectively. Recall Statements (5–7) of Lemma 18. By these statements, there exists numbers a_1, b_1, a_2, b_2 , so that

1. $a_1 + b_1 = |G_{w_i}|$, and $p \in S_{a-a_1+1..a,b-b_1+1..b}$

Algorithm 2: OUTERPLANAR-UPSE(G, S, s, t)

input : An outerplanar DAG G , a point set $S = L \cup R$, a source s and a sink t of G and a path $P_{s,t}$. Path $P_{s,t}^c = (s = w_1, \dots, w_m = t)$ is used to progressively build graph G from subgraphs G_{w_{i-1}, w_i} , $2 \leq i \leq m$ and G_{w_i} , $1 \leq i \leq m$.

output “YES” if G has an UPSE into S with s mapped to $b(S)$ and t mapped to $t(S)$, “NO” otherwise.

1. **For** $a = 0 \dots |L|$
2. **For** $b = 0 \dots |R|$
3. $\mathcal{P}(a, b, 1) = \mathcal{L}(G_{w_1}, L_{1..a}, R_{1..b})$
4. **For** $k = 2 \dots m$ //Consider outerplanar DAG G_{w_k}
5. $\mathcal{P}(a, b, k) = \emptyset$
6. **For** $i = 0 \dots |G_{w_k}|$ //We consider the case where i vertices of G_{w_k} are placed to the left side of S
7. **if** $(a - i \geq 0)$ **and** $(b - (|G_{w_k}| - i) \geq 0)$
8. Let $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G_{w_k}, L_{a-i+1..a}, R_{b-(|G_{w_k}|-i)+1..b})$
9. //We consider all the possible placements of vertex w_k
10. **For** each p in \mathcal{L}
11. Let M be a side mapping of G_{w_{k-1}, w_k} , when w_k is mapped to p and w_{k-1} is mapped to some point of L .
12. //We consider all possible placements of w_{k-1} to the left side of the point set
13. **For** each q in
14. $\mathcal{P}(a - i - \hat{\rho}(M), b - (|G_{w_k}| - i) - \rho(M), k - 1) \cap L$
15. **if** RPC-UPSE($w_{k-1}, w_k, L_{a-i-\hat{\rho}(M)+1..a-i} \cup R_{b-(|G_{w_k}|-i)-\rho(M)+1..b-(|G_{w_k}|-i)} \cup \{p, q\}, q, p$)
16. **then** add p to $\mathcal{P}(a, b, k)$.
17. Let M be a side mapping of G_{w_{k-1}, w_k} , when w_k is mapped to p and w_{k-1} is mapped to some point of R .
18. //We consider all possible placements of w_{k-1} to the right side of the point set
19. **For** each q in
20. $\mathcal{P}(a - i - \hat{\rho}(M), b - (|G_{w_k}| - i) - \rho(M), k - 1) \cap R$
21. **if** RPC-UPSE($w_{k-1}, w_k, L_{a-i-\hat{\rho}(M)+1..a-i} \cup R_{b-(|G_{w_k}|-i)-\rho(M)+1..b-(|G_{w_k}|-i)} \cup \{p, q\}, q, p$)
22. **then** add p to $\mathcal{P}(a, b, k)$.
23. **if** $\mathcal{P}(|L|, |R|, m)$ is empty **then return** (“NO”);
24. **return** (“YES”);

$$2. \ a_2 + b_2 = |G_{w_{i-1}, w_i}| - 2$$

3. The UPSE of G_{s, w_i} contains the UPSE of $G_{s, w_{i-1}}$ into point set

$S_{1..a-a_1-a_2, 1..b-b_1-b_2}$ with vertex w_{i-1} mapped to some point q of

$S_{1..a-a_1-a_2, 1..b-b_1-b_2}$. By induction hypothesis we infer that $q \in \mathcal{P}(a - a_1 - a_2, b - b_1 - b_2, i - 1)$.

4. Cut vertex component G_{w_i} is mapped to the point set $S_{a-a_1+1..a, b-b_1+1..b}$, with vertex w_i

mapped to point p . By the definition of \mathcal{L} we get that $p \in \mathcal{L}(G_{w_i}, L_{a-a_1+1..a}, R_{b-b_1+1..b})$.

5. Path component G_{w_{i-1}, w_i} is mapped to the point set $S_{a-a_1-a_2+1..a-a_1, b-b_1-b_2+1..b-b_1} \cup \{p, q\}$, with vertices w_{i-1}, w_i mapped to points q, p , respectively. Moreover, by Statement (9) of Lemma 18, if B_i is the block of G_{w_{i-1}, w_i} that contains both w_{i-1} and w_i , then for each $v \in B_i, v \neq w_{i-1}, w_i$ the vertices of $G_{w_{i-1}, w_i}(v)$ are mapped on the same side of S around v . Therefore, there exists a RPC-UPSE of G_{w_{i-1}, w_i} into $S_{a-a_1-a_2+1..a-a_1, b-b_1-b_2+1..b-b_1} \cup \{p, q\}$, with vertices w_{i-1}, w_i mapped to points q, p , respectively.

Thus, by the definition of recurrence relation (2.6) we infer that $p \in \mathcal{P}(a, b, i)$.

Finally, for $i = m$ we infer that an UPSE of T into S such that source s and sink t are mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively, exists if and only if $\mathcal{P}(|L|, |R|, m)$ is non-empty. Note that if $\mathcal{P}(|L|, |R|, m) \neq \emptyset$, then it must hold that $\mathcal{P}(|L|, |R|, m) = \{t(S)\}$. \square

The following theorem concludes the section and is proved along the same lines as Theorem 8 and Theorem 9.

Theorem 13. *Let G be a n -vertex outerplanar DAG, S be a convex point set of size n , s be a source of G and t be a sink of G . It can be tested in $O(n^6)$ time whether G has an UPSE into S . Moreover, if such an UPSE exists, it can be constructed within the same time bound.*

Proof: The Algorithm 2 calculates the values $\mathcal{P}(a, b, k)$, when $0 \leq a \leq |L|, 0 \leq b \leq |R|, 1 \leq k \leq m$, thus from Lemma 13, we infer that Algorithm 2 decides whether G has an UPSE into S such that s and t are mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively.

We first prove that Algorithm 2 terminates in time $O(n^5)$. Note the following:

1. By Theorem 12, the list \mathcal{L} in line 8 can be computed in time $O(\deg(w_i)|G_{w_i}|^2)$ and contains at most $2|G_{w_k}|$ values.
2. In line 10, variable p runs over at most $2|G_{w_k}|$ values.
3. In lines 15 and 24, the variable q runs over at most $|G_{S, w_{k-1}}|$ different values.
4. By Lemma 20, the test of lines 17 – 18 and 26 – 27 can be done in time $O(|G_{w_{k-1}, w_k}|)$.

Thus, the complexity of the algorithm is limited by the following value:

$$\sum_{a=0}^{|L|} \sum_{b=0}^{|R|} \sum_{k=2}^m (\deg(w_k)|G_{w_k}|^2 + |G_{S, w_{k-1}}| \cdot |G_{w_k}| \cdot |G_{w_{k-1}, w_k}|) = O(n^6).$$

A factor of n can be saved by realizing that in our dynamic programming we can maintain a list $\mathcal{P}'(a, i)$ which uses only one parameter for the left side of the convex set (in contrast with $\mathcal{P}(a, b, i)$ which uses a parameter for each side of S). The number of points on the right side of S is implied since the size of graph G_{S, w_i} is fixed. For simplicity, we have decided to use notation $\mathcal{P}(a, b, i)$.

By applying Algorithm 2 on all $\langle source, sink \rangle$ pairs of T we can decide whether outerplanar DAG G has an UPSE into a convex point set S . A naive application of this idea leads to the algorithm with time complexity $O(n^7)$, since there are $O(n^2)$ distinct pairs of sources and sinks. Next we explain how the overall time complexity can be reduced to $O(n^6)$. Let $P_{s,t}$ be a path from s to t , passing through m vertices, and let $P_{s,t}^c$ be the subset of $P_{s,t}$ that contain only the cut vertices

of G that are also (s, t) -separating vertices. Let first t' be the j -th vertex of $P_{s,t}^c$ that is also a sink of G . During the computation of $\mathcal{P}(a, b, m)$ corresponding to path $P_{s,t}$ we also compute $\mathcal{P}(a, b, j)$ and thus we can immediately answer whether there exists an UPSE of G into S so that s and t' is mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively. Next consider a sink \tilde{t} that does not belong to path $P_{s,t}$. Consider a path $P_{s,\tilde{t}}$ and its subset $P_{s,\tilde{t}}^c$ that contains only the cut-vertices that are also (s, t) -separating vertices. Assume that the last common vertex of $P_{s,t}^c$ and $P_{s,\tilde{t}}^c$ is the j -th vertex of $P_{s,t}^c$. In order to compute whether there is an UPSE of G into S so that s and \tilde{t} are mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively, we can start the computations of the Algorithm 2 determined by variable k from the $j + 1$ -th step (see line 4 of the algorithm). Thus, for a single source s and all possible sinks variable k changes $O(n)$ times, since there are $O(n)$ cut-vertices in G . Since the number of different sources is $O(n)$ we conclude that the overall time complexity of the algorithm is $O(n^6)$. □

2.5 Embedding a Path into a General Point Set

2.5.1 Known results and perspectives

This section is devoted to point sets in general position and a “simple” family of graphs, path-DAGs. Path-DAGs are also referred to in literature as *oriented paths*. Despite the simplicity of path-DAGs, not many results are known about them. Thus, we only know that the following families path-DAGs always have an UPSE into any general point set:

- (i) Any path-DAG with at most 5 switches and at least two of its monotone paths having length two (see e.g. Figure 2.36.a) [4].
- (ii) Any path-DAG P with 3 switches. Assume that P contains k and l vertices on its monotone paths and that the vertex between them is a sink. The drawing can be produced by the following simple idea: using a line through S 's highest point, partition S on two parts, one having $k - 1$ points and the other $l - 1$ points. Then draw the monotone paths using sorted by y -coordinate points on each of the parts of S .
- (iii) Every path-DAG $P = (v_1, \dots, v_n)$, so that if its vertex v_i is a sink-switch (resp. source-switch), then its vertex v_{i+1} is a source-switch (resp. sink-switch) (see Figure 2.36.b) [12].

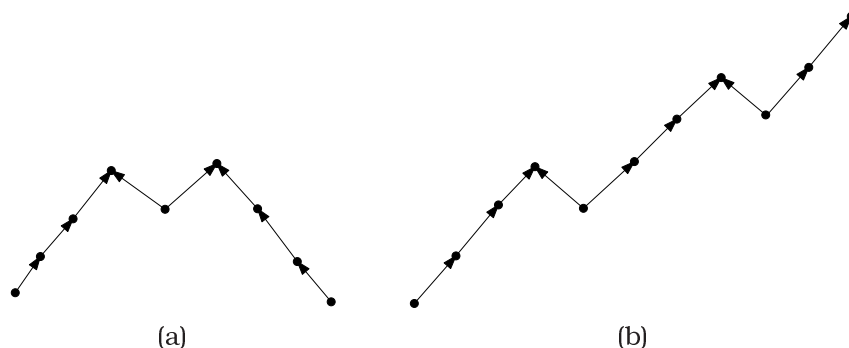


Figure 2.36: (a) Path-DAGs with at most 5 switches and at least two of its monotone paths having length two. (b) Path-DAG $P = (v_1, \dots, v_n)$, so that if its vertex v_i is a sink-switch, then its vertex v_{i+1} is a source-switch.

On the other hand we are aware of no path-DAG P and a point set S , so that P does not admit an UPSE into S .

Recently we set an experiment on a grid point set. That, for every general point set S , consisting of n points, and lying on a $n \times n$ grid, and every path-DAG P , of length n , we test whether P admits an UPSE into S , by simply testing all possible mappings of P to the points of S . Our experiment showed that there is no counterexample for $n \leq 9$.

Let us introduce an equivalent definition of this problem. We construct an embedded tournament T from our point-set S as following: T contains $|S|$ vertices, which are represented by points of S and $n(n-1)/2$ edges, that connect every pair of vertices. The direction of the edges is the one which corresponds to an upward orientation. We call a geometric digraph defined this way an *upward geometric tournament*. Now, given an oriented path P , the question becomes: “Does T contain a planar copy of P ?”

The undirected and non-planar versions of this problems are well-studied problems in graph theory. Thus, Newborn and Moser [77] showed that every drawing of a complete graph K_n contains at least $3/2010^{\lfloor n/3 \rfloor}$ crossing-free Hamiltonian circuits. This result was improved by Hayward [58] to the value of $k3.2684^n$, where k is a constant.

On the other hand, a non-planar but directed counterpart of our problem is the following: given a tournament T and an oriented path P , determine whether T contains a copy of P . There is a long series of works devoted to this problem, see [7] for a survey. This problem is known as M.Rosenfeld’s conjecture and was finally positively resolved by Thomason [98] for the large values of n . For the transitive tournaments it is easy to see that every tournament contain a copy of any oriented path P .

These facts as well as the results of the our experiments drive us to the following conjecture.

Conjecture 1. *Every n -vertex upward geometric tournament contains a planar copy of every n -vertex oriented path.*

2.5.2 Point set larger than graph

In this section we tackle the problem of embedding path-DAGs with at most k switches into general point sets with **more than n points**. We first prove that every path-DAG P with n vertices and k switches admits an upward straight-line embedding into every general point set with $n2^{k-2}$ points. Then we present another approach, decreasing the size of the point set to $O(n^2)$.

2.5.2.1 Point set of $n2^{k-2}$ points

We next show the following:

Theorem 14. *Every path-DAG P with n vertices and k switches admits an upward straight-line embedding into every general point set S with $|S| \geq n2^{k-2}$.*

Proof: We prove the statement by induction on the number of switches; we suppose inductively that one of the end-vertices of P is mapped to $b(S)$ or $t(S)$, depending on whether such a vertex is a source or a sink. The statement is trivial if $k = 2$, as in such a case P is monotone and any general point set with n points suffices.

Suppose that $k > 2$. Let a_1 be an end-vertex of P . Suppose that a_1 is a source, the case in which it is a sink being analogous. Let $P_a = (a_1, a_2, \dots, a_l)$ be the maximal monotone path of P

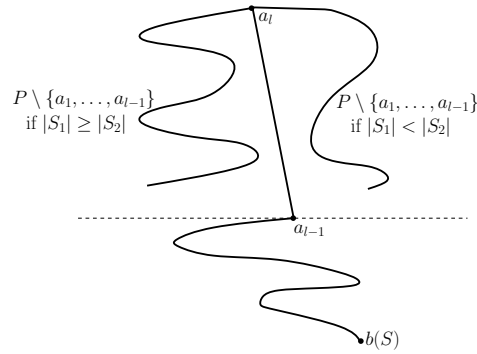


Figure 2.37: Illustration for the proof of Lemma 14.

containing a_1 . Notice that $l \geq 2$. Map $P_a \setminus \{a_l\}$ to the $|P_a| - 1$ points of S with lowest y -coordinate. Denote such a point set by S_a . Map a_l to $t(S)$. Let S_1 and S_2 be the point sets composed of $t(S)$ and of the points of $S \setminus S_a$ to the left and to the right, respectively, of the line through a_{l-1} and a_l . If $|S_1| \geq |S_2|$ (if $|S_2| > |S_1|$), construct an upward straight-line embedding of $P \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}\}$ into S_1 (into S_2 , resp.) with a_l placed at $t(S_1) = t(S)$ (at $t(S_2) = t(S)$, resp.).

It is easy to see that the constructed straight-line embedding is upward and planar. We show that the cardinality of point sets S_1 and S_2 is sufficient to apply the induction. The number of points in the one of S_1 and S_2 with more points is at least $(|S| - (l - 1))/2$. Further, $P \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}\}$ has $n - (l - 1)$ vertices and $k - 1$ switches. Since $|S| \geq n2^{k-2}$, the one of S_1 and S_2 with more points has at least $(n2^{k-2} - (l - 1))/2 = n2^{k-3} - (l - 1)/2 > n2^{k-3} - (l - 1)2^{k-3}$ and, since $k > 2$, the lemma follows. \square

2.5.2.2 Point set of $O(n^2)$ points

We first recall some definitions and introduced some new terms. If p is a point of S , we denote by $y(p)$ its y -coordinate. By $p(v)$ we denote the point to which vertex v has been mapped. A *free point* of S is a point to which no vertex of P has been mapped yet.

Consider a point set S and its convex hull $H(S)$. Let $L_1 = S \setminus H(S)$, \dots , $L_m = L_{m-1} \setminus H(L_{m-1})$. If m is the smallest integer such that $L_m = \emptyset$, we say that S contains $m - 1$ layers L_1, \dots, L_{m-1} . Layers L_i and L_{i+1} are called *consecutive layers* of S . Let p and q be points of L_i and L_{i+1} , respectively. We say that p is *visible* from q (or vice versa) if the straight-line segment $\overline{p, q}$ does not cross the polygon defined by the points of L_{i+1} (see Figure 2.38).

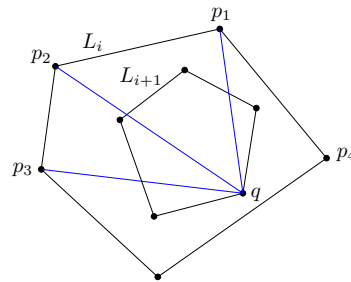


Figure 2.38: Points $p_1 - p_3$ are not visible from q , while point p_4 is visible.

The next simple lemma represents the key idea of the proof.

Lemma 22. *Let S be a point set in general position containing $n^2 - n$ points. If S does not contain a convex subset of n points then S contains at least n layers.*

The following lemma is also used in the proof of the theorem.

Lemma 23. *Let S be a point set in general position that contain m layers L_1, \dots, L_m . Let p_i, q_i be two consecutive points of layer L_i and p_{i+1}, q_{i+1} be two consecutive points of layer L_{i+1} , so that $y(q_i) < (q_{i+1}) < y(p_{i+1}) < y(p_i)$. Moreover both p_i, q_i lie on the right side of L_i and p_{i+1}, q_{i+1} lie on the right side of L_{i+1} . At least one of the following statements holds: (a) p_i is visible from q_{i+1} , (b) q_i is visible from p_{i+1} .*

Proof: For the illustration of the statement of the lemma see Figure 2.39.a. Assume for the sake of contradiction that both statements (a) and (b) are false, i.e. neither p_i is visible from q_{i+1} nor q_i is visible from p_{i+1} . Rotate line l clockwise through p_{i+1} starting from horizontal position, see Figure 2.39.b. Line l encounters point q_{i+1} before point q_i , since q_i is not visible from p_{i+1} . Similarly, rotate line f counterclockwise through q_{i+1} , starting from horizontal position. Line f encounters p_i after p_{i+1} . This means that both point q_{i+1} and p_{i+1} are in convex position with points of L_i , a clear contradiction.

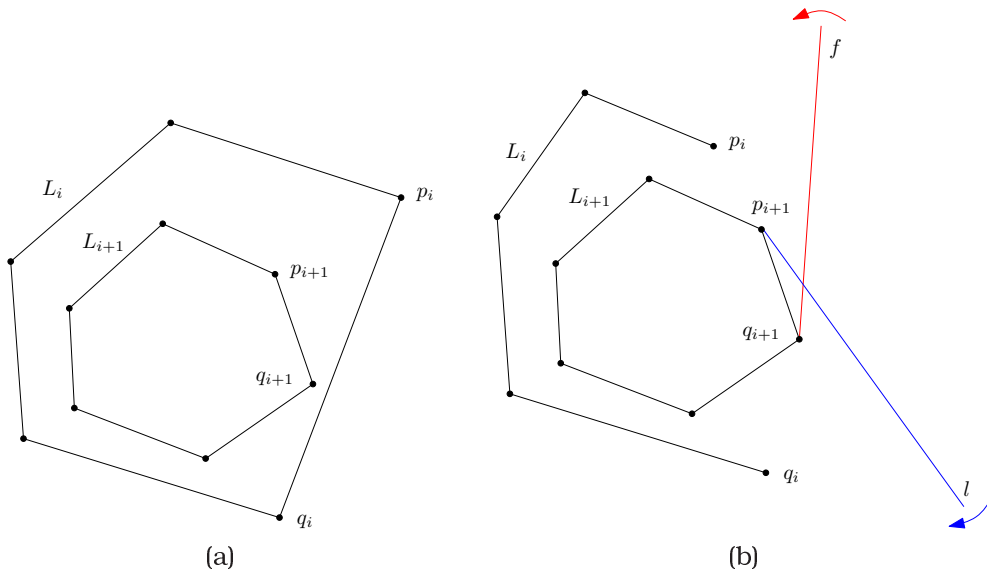


Figure 2.39: (a) Point p_i is visible from q_{i+1} , but point q_i is not visible from p_{i+1} . (b) Illustration of the proof of Lemma 23. Points q_{i+1} and p_{i+1} are in convex position with points of L_i .

□

Theorem 15. *Let S be a set of $n^2 - n$ points in general position and let P be a path-DAG on n vertices. P admits an upse into points of S .*

Proof: If S contains n points in convex position, say S' , then by Theorem 7 of Binucci *et. al.* [12], P admits an upse into S' and thus into S . Assume that none of n points of S are in convex position. Then by Lemma 22, S contains at least n layers. Denote n of these layers by L_1, L_2, \dots, L_n , so that L_1 is the external layer and L_i, L_{i+1} are two consecutive layers, $i = 1, \dots, n - 1$. Let $V(P) = \{v_1, \dots, v_n\}$ be the vertex set of P , where the vertices are present in the order they appear in the path P .

We prove the statement of the theorem by induction.

If the first edge of P is (v_1, v_2) we place v_1 on $t(L_n)$ and v_2 on $t(L_{n-1})$. Note that $t(L_{n-1})$ is always visible from $t(L_n)$. Case when the edge (v_2, v_1) is present is symmetrical. We place v_1 on $b(L_n)$ and v_2 on $b(L_{n-1})$. During the proof, if the vertex v_i is placed on the right (left) side of L_j , then we try to place v_{i+1} to the right (left) side of L_{j-1} .

Assume that after i steps we have placed vertex v_i on the layer j , $j \leq n - i + 1$ and assume also that the following conditions hold:

(\mathcal{R} 1) For any $k < i$, if edge (v_{k-1}, v_k) is present and both v_{k-1}, v_k are placed on the same layer L_m , then, all of the points of L_{m-1} that are higher than the point $p(v_{k-1})$ are invisible from $p(v_{k-1})$.

(\mathcal{R} 2) For any $k < i$, if edge (v_k, v_{k-1}) is present and both v_{k-1}, v_k are placed on the same layer L_m , then, all of the points of L_{m-1} that are lower than the point $p(v_{k-1})$ are invisible from $p(v_{k-1})$.

(\mathcal{R} 3) The drawing is upward and planar.

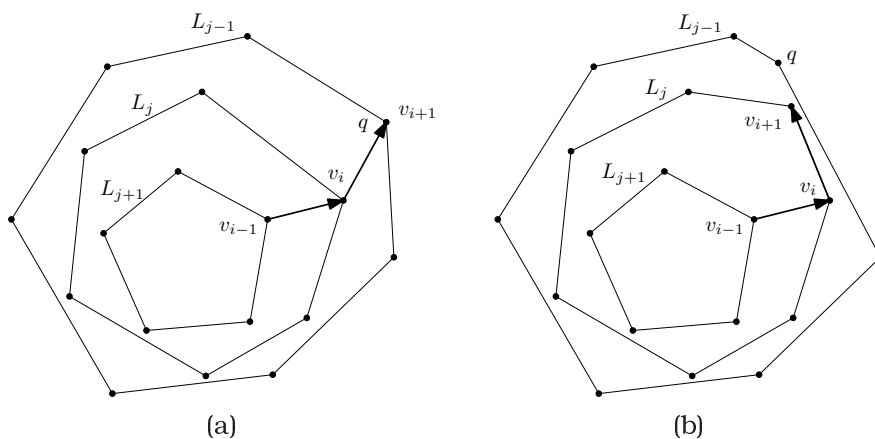


Figure 2.40: Proof of Theorem 15, Case 1.

Now we place v_{i+1} . Assume that the edge (v_i, v_{i+1}) is present, the case of edge (v_{i+1}, v_i) is symmetrical. Recall that vertex v_i was mapped to the layer L_j . Assume w.l.o.g that v_i is mapped to the right side of L_j .

Case 1: Vertex v_{i-1} was mapped to a point of layer L_{j+1} (Figure 2.40). Assume w.l.o.g. that v_{i-1} was mapped to the right side of L_{j+1} . Let q be a point of the right side of L_{j-1} which is next higher than $p(v_i)$. If q is visible from $p(v_i)$ we map there v_{i+1} (Figure 2.40.a). If q is not visible from $p(v_i)$ then we place v_{i+1} into the point of L_j , that is consecutive higher point of $p(v_i)$ (Figure 2.40.b). We know that such a point exists, because otherwise $p(v_i)$ is $t(L_j)$ and then $t(L_{j-1})$ is visible from $t(L_j)$. We also know that this point is free because vertex v_{i-1} was mapped to a point of layer L_{j+1} . Note also that if q is not visible from $p(v_i)$, then none of the points of L_{j-1} that is higher than $p(v_i)$ is visible from it. Thus in both cases conditions \mathcal{R} 1, \mathcal{R} 2 hold and the drawing is upward and planar (condition \mathcal{R} 3 holds).

Case 2: Vertex v_{i-1} was mapped to a point of layer L_j (Figure 2.41).

Case 2.a: Edge (v_{i-1}, v_i) is present, see Figure 2.41.a. Then we proceed exactly as in Case 1.

Case 2.b: Edge (v_i, v_{i-1}) is present, see Figure 2.41.b. By induction hypothesis the point g of L_{j-1} that is next lower than the point $p(v_{i-1})$, is not visible from $p(v_{i-1})$. Let q to be the consecutive higher than g point of L_{j-1} . The point q is higher than $p(v_{i-1})$. Then, by Lemma 23, point q is visible from $p(v_i)$. So, we map v_{i+1} to q . Conditions $\mathcal{R} 1 - \mathcal{R} 3$ hold.

□

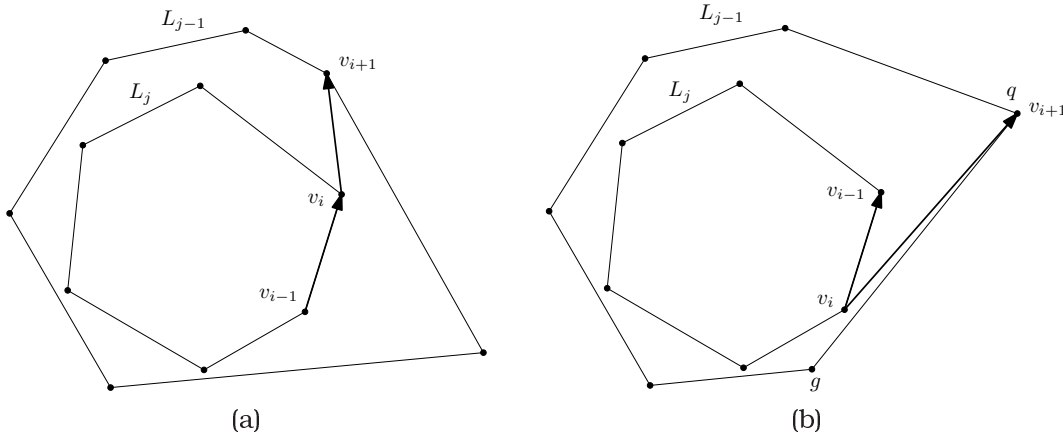


Figure 2.41: Proof of Theorem 15, Case 2.

2.6 Upward Point Set Embeddability is NP-complete

In this section we examine the complexity of testing whether a given n -vertex upward planar digraph G admits an UPSE into a point set S . We show that the problem is NP-complete even for a single source digraph G having longest simple cycle of length at most 4. This result is optimal for the class of cyclic graphs³, since we proved in [4] that every single-source upward planar directed graph with no cycle of length greater than three admits an UPSE into every point set in general position.

Theorem 16. *Given an n -vertex upward planar digraph G and a planar point set S of size n in general position, the decision problem of whether there exists an UPSE of G into S is NP-Complete. The decision problem remains NP-Complete even when G has a single source and the longest simple cycle of G has length at most 4 and, moreover, S is an m -convex point set for some $m > 0$.*

Proof: The problem is trivially in NP. In order to prove the NP-completeness, we construct a reduction from the 3-Partition problem.

Problem: 3-Partition

Input: A bound $B \in \mathbb{Z}^+$, and a set $A = \{a_1, \dots, a_{3m}\}$ with $a_i \in \mathbb{Z}^+$, $\frac{B}{4} < a_i < \frac{B}{2}$.

Output: m disjoint sets $A_1, \dots, A_m \subset A$ with $|A_i| = 3$ and $\sum_{a \in A_i} a = B$, $1 \leq i \leq m$.

³A digraph is *cyclic* if its underlying undirected graph contains at least one cycle.

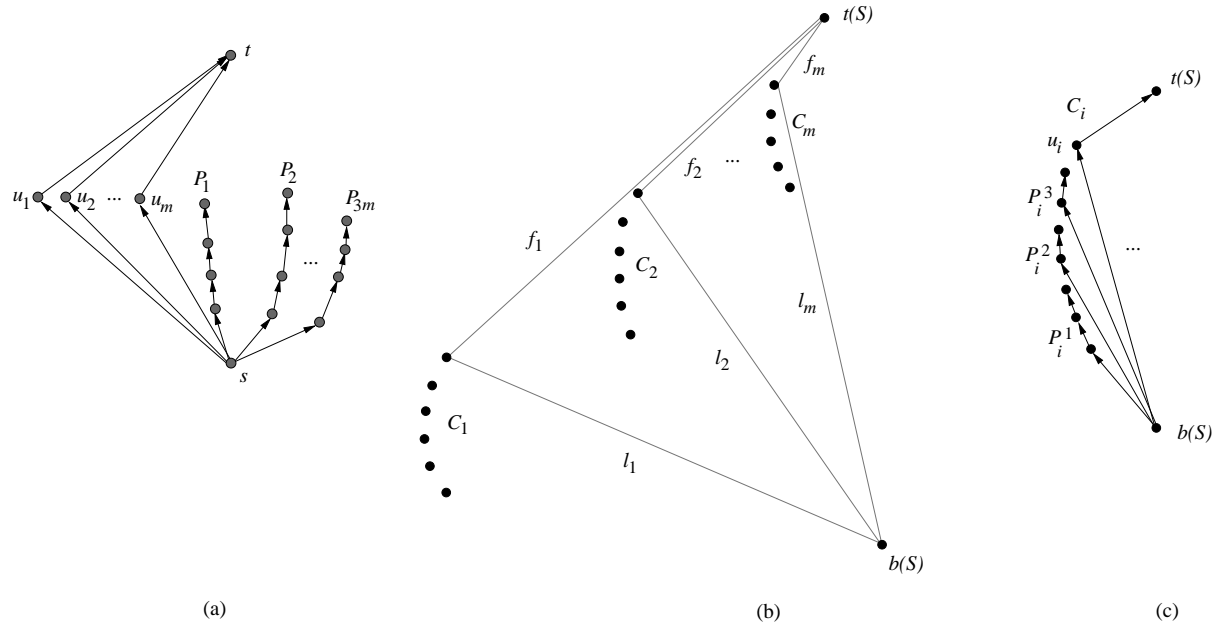


Figure 2.42: (a) The graph G of the construction used in the proof of NP-completeness. (b) The point set S of the construction. (c) An UPSE of G on S . (d) The construction of Statement 5.

We use the fact that 3-Partition is a strongly NP-hard problem, i.e. it is NP-hard even if B is bounded by a polynomial in m [44]. Let A and B be the set of the $3m$ positive integers and the bound, respectively, that form the instance (A, B) of the 3-Partition problem. Based on A and B , we show how to construct an upward planar digraph G and a point set S such that G has an UPSE on point set S if and only if the instance (A, B) of the 3-partition problem has a solution. We first show how to construct G (see Figure 2.42.a for illustration). We start the construction of G by first adding two vertices s and t . Vertex s is the single source of the whole graph. We then add m disjoint paths from s to t , each of length two. The degree-2 vertices of these paths are denoted by u_i , $i = 1, \dots, m$. For each $a \in A$, we construct a monotone directed path P_i of length a that has a new vertices and s at its source. Totally, we have $3m$ such paths P_1, \dots, P_{3m} . We proceed to the construction of point set S . Let $b(S)$ and $t(S)$ be the lowest and the highest points of S (see Figure 2.42.b). In addition to $b(S)$ and $t(S)$, S also contains m one-sided convex point sets C_1, \dots, C_m , each of size $B + 1$, so that the points of S satisfy the following properties:

- $C_i \cup \{b(S), t(S)\}$ is a left-sided convex point set, $i \in \{1, \dots, m\}$.
- The points of C_{i+1} are higher than the points of C_i , $i \in \{1, \dots, m - 1\}$.
- Let l_i be the line through $b(S)$ and $t(C_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$. C_1, \dots, C_i lie to the left of line l_i and C_{i+1}, \dots, C_m lie to the right of line l_i .
- Let f_i be the line through $t(S)$ and $t(C_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$. C_j , $j \geq i$, lie to the right of line f_i .
- $\{t(C_i) : i = 1, \dots, m\}$ is a left-sided convex point set.

The next statement follows from the properties of point set S .

Statement 5. Let C_i be one of the left-sided convex point sets comprising S and let $x \in C_j, j > i$. Then, set $C_i \cup \{b(S), x\}$ is also a left-sided convex point set, with $b(S)$ and x consecutive on its convex hull. \square

Statement 6. We can construct a point set S that satisfies all the above requirements so that the area of S is polynomial on B and m .

Proof of Statement 6: For each $i \in \{0, \dots, m-1\}$ we let C_{m-i} to be the set of $B+1$ points

$$C_{m-i} = \left\{ (-j - i(B+2), j^2 - (i(B+2))^2) \mid j = 1, 2, \dots, B+1 \right\}$$

Then, we set the lowest point of the set S , called $b(S)$, to be point $(-(B+1)^2 + ((m-1)(B+2))^2, (B+1)^2 - (m(B+2))^2)$ and the highest point of S , called $t(S)$, to be point $(0, (m(B+2))^2)$.

It is easy to verify that all the above requirements hold and that the area of the rectangle bounding the constructed point set is polynomial on B and m . \square

Statement 7. $|S| = |V(G)| = m(B+1) + 2$. \square

We now proceed to show how from a solution for the 3-Partition problem we can derive a solution for the upward point set embeddability problem. Assume that there exists a solution for the instance of the 3-Partition problem and let it be $A_i = \{a_i^1, a_i^2, a_i^3\}, i = 1 \dots m$. Note that $\sum_{j=1}^3 a_i^j = B$. We first map s and t to $b(S)$ and $t(S)$, respectively. Then, we map vertex u_i on $t(C_i), i = 1 \dots m$. Note that the path from s to t through u_i is upward and C_1, \dots, C_i lie entirely to the left of this path, while C_{i+1}, \dots, C_m lie to the right of this path. Now each C_i has B free points. We map the vertices of paths P_i^1, P_i^2 and P_i^3 corresponding to a_i^1, a_i^2, a_i^3 to the remaining points of C_i in an upward fashion (see Figure 2.42.c). It is easy to verify that the whole drawing is upward and planar.

Assume now that there is an UPSE of G into S . We prove that there is a solution for the corresponding 3-Partition problem. The proof is based on the following statements.

Statement 8. In any UPSE of G into S , s is mapped to $b(S)$. \square

Statement 9. In any UPSE of G into S , only one vertex from set $\{u_1, \dots, u_m\}$ is mapped to point set $C_i, i = 1 \dots m$.

Proof of Statement 9: For the sake of contradiction, assume that there are two distinct vertices u_j and u_k that are mapped to two points of the same point set C_i (see Figures 2.43). W.l.o.g. assume that u_k is mapped to a point higher than the point u_j is mapped to. We consider three cases based on the placement of the sink vertex t .

Case 1: t is mapped to a point of C_i (Figure 2.43.a). It is easy to see that arc (s, u_k) crosses arc (u_j, t) , a clear contradiction to the planarity of the embedding.

Case 2: t is mapped to $t(S)$ (Figure 2.43.b). Similar to the previous case since $C_i \cup \{b(S), t(S)\}$ is a one-sided convex point set.

Case 3: t is mapped to a point of $C_p, p > i$, denote it by p_t (Figure 2.43.c). By Statement 5 $C_i \cup \{b(S), p_t\}$ is a convex point set and points $p_t, b(S)$ are consecutive points of $C_i \cup \{b(S), p_t\}$. Hence, arc (s, u_k) crosses arc (u_j, t) , a contradiction. \square

By Statement 9, we have that each $C_i, i = 1 \dots m$, contains exactly one vertex from set $\{u_1, \dots, u_m\}$. W.l.o.g., we assume that u_i is mapped to a point of C_i .

Statement 10. In any UPSE of G into S , vertex t is mapped to either a point of C_m or to $t(S)$.

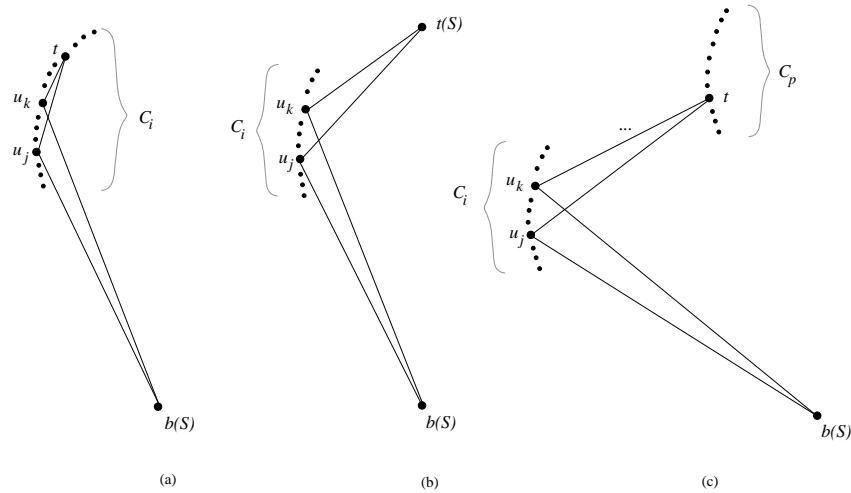


Figure 2.43: Mappings used in the proof of Statement 9

Proof of Statement 10: t has to be mapped higher than any u_i , $i = 1 \dots m$, and hence higher than u_m , which is mapped to a point of C_m . \square

Statement 11. In any UPSE of G into S , vertex u_i is mapped to $t(C_i)$, $1 \leq i \leq m - 1$, moreover, there is no arc (v, w) so that v is mapped to a point of C_i and w is mapped to a point of C_j , $j > i$.

Proof of Statement 11: We prove this statement by induction on i , $i = 1 \dots m - 1$. For the basis, assume that u_1 is mapped to a point p_1 different from $t(C_1)$ (see Figure 2.44.a). Let p_t be the point where vertex t is mapped. By Statement 10, p_t can be either $t(S)$ or a point of C_m . In both cases, point set $C_1 \cup \{b(S), p_t\}$ is a convex point set, due to the construction of the point set S and the Statement 5. Moreover, the points $b(S)$ and p_t are consecutive on the convex hull of point set $C_1 \cup \{b(S), p_t\}$.

Denote by p the point of C_1 that is exactly above the point p_1 . From Statement 9, we know that no u_j , $j \neq 1$ is mapped to the point p . Due to Statement 10, t cannot be mapped to p . Hence there is a path P_k , $1 \leq k \leq 3m$, so that one of its vertices is mapped to p . Call this vertex u . We now consider two cases based on whether u is the first vertex of P_k or not.

Case 1: Assume that there is a vertex v of P_k , such that there is an arc (v, u) . Since the drawing of S is upward, v is mapped to a point lower than p and lower than p_1 . Since $C_1 \cup \{b(S), p_t\}$ is a convex point set, arc (v, u) crosses arc (u_1, t) . A clear contradiction.

Case 2: Let u be the first vertex of P_k . Then, arc (s, u) crosses the arc (u_1, t) since, again, $C_1 \cup \{b(S), p_t\}$ is a convex point set, a contradiction.

So, we have that u_1 is mapped to $t(C_1)$, see Figure 2.44.b. Observe now that any arc (v, w) , such that v is mapped to a point of C_1 and w is mapped to a point $x \in C_2 \cup \dots \cup C_m \cup \{t(S)\}$ crosses arc (s, u_1) , since $C_1 \cup \{b(S), x\}$ is a convex point set. So, the statement is true for $i = 1$.

For the induction step, we assume that the statement is true for C_g and u_g , $g \leq i - 1$, i.e. vertex u_g is mapped to $t(C_g)$ and there is no arc connecting a point of C_g to a point of C_k , $k > g$ and this holds for any $g \leq i - 1$. We now show that it also holds for C_i and u_i . Again, for the sake of contradiction, assume that u_i is mapped to a point p_i different from $t(C_i)$ (see Figure 2.44.c).

Denote by q the point of C_1 that is exactly above point p_i . From Statement 9, we know that no u_l , $l \neq i$, is mapped to the point q . Due to Statement 10, t can not be mapped to q . Hence, there is a path P_f , so that one of its vertices is mapped to q . Call this vertex u_f . We now consider two cases based on whether u_f is the first vertex of P_f or not.

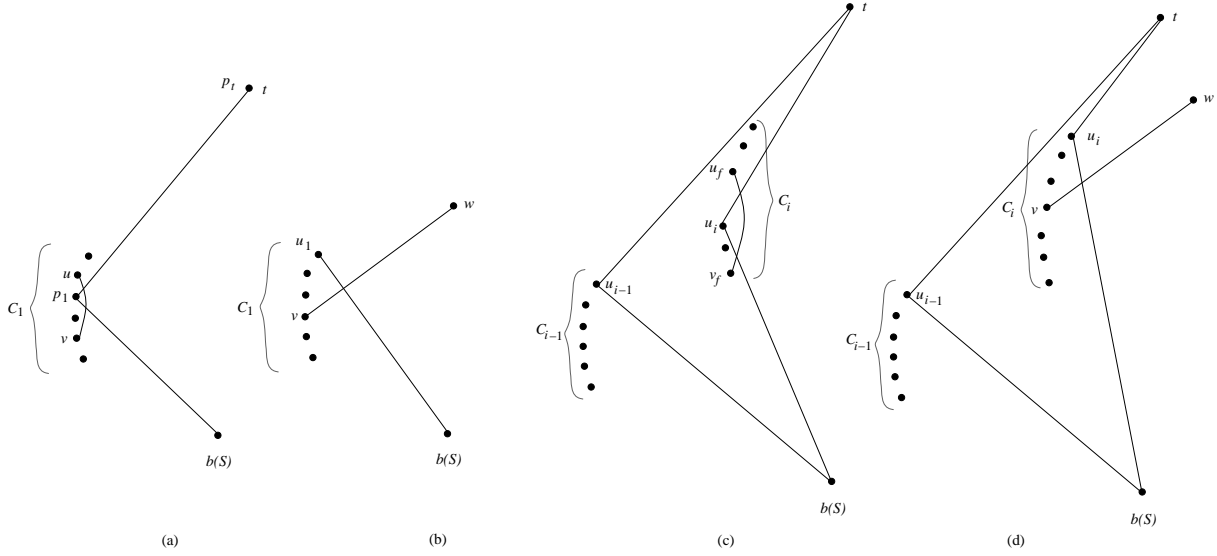


Figure 2.44: Mappings used in the proof of Statement 11.

Case 1: Assume that there is a vertex v_f of P_k such that there is an arc (v_f, u_f) . By the induction hypothesis, we know that v_f is not mapped to any C_l , $l < i$. Then, since the drawing of S is upward, v_f is mapped to a point lower than q and lower than p_i . Since $C_i \cup \{b(S), p_t\}$ is a convex point set, arc (v_f, u_f) crosses arc (u_i, t) . A clear contradiction.

Case 2: Let u_f be the first vertex of P_k . Then, arc (s, u_f) crosses the arc (u_i, t) since, again, $C_i \cup \{b(S), p_t\}$ is a convex point set, a contradiction.

So, we have shown that u_i is mapped to $t(C_i)$, see Figure 2.44.d. Observe now that, any arc (v, w) , such that v is mapped to a point of C_i and w is mapped to a point $x \in C_{i+1} \cup \dots \cup C_m \cup \{t(S)\}$ crosses arc (s, u_i) , since $C_i \cup \{b(S), x\}$ is a convex point set. So, the statement holds for i . \square

A trivial corollary of the previous statement is the following:

Statement 12. In any UPSE of G into S , any directed path P_j of G originating at s , $j \in \{1, \dots, 3m\}$, has to be drawn entirely in C_i , for $i \in \{1, \dots, m\}$. \square

The following statement completes the proof of the theorem.

Statement 13. In any UPSE of G into S , vertex t is mapped to point $t(S)$.

Proof of Statement 13: For the sake of contradiction, assume that t is not mapped to $t(S)$. By Statement 10 we know that t has to be mapped to a point in C_m . Assume first that t is mapped to point $t(C_m)$ (see Figure 2.45.a). Recall that u_{m-2} and u_{m-1} are mapped to $t(C_{m-2})$ and $t(C_{m-1})$, respectively, and that $\{t(C_i) : i = 1 \dots m\}$ is a left-sided convex point set. Hence, points $\{t(C_{m-2}), t(C_{m-1}), t(C_m), b(S)\}$ form a convex point set. It follows that segments $(t(C_{m-2}), t(C_m))$ and $(t(C_{m-1}), b(S))$ cross each other, i.e. edges (s, u_{m-1}) and (u_{m-2}, t) cross, contradicting the planarity of the drawing.

Consider now the case where t is mapped to a point of C_m , say p , different from $t(C_m)$ (see Figure 2.45.b). Since point p does not lie in triangle $t(C_{m-2}), t(C_{m-1}), b(S)$ and point $t(C_{m-1})$ does not lie in triangle $t(C_{m-2}), p, b(S)$, points $\{t(C_{m-2}), t(C_{m-1}), p, b(S)\}$ form a convex point set. Hence, segments $(t(C_{m-2}), p)$ and $(t(C_{m-1}), b(S))$ cross each other, i.e. edges (s, u_{m-1}) and (u_{m-2}, t) cross; a clear contradiction. \square

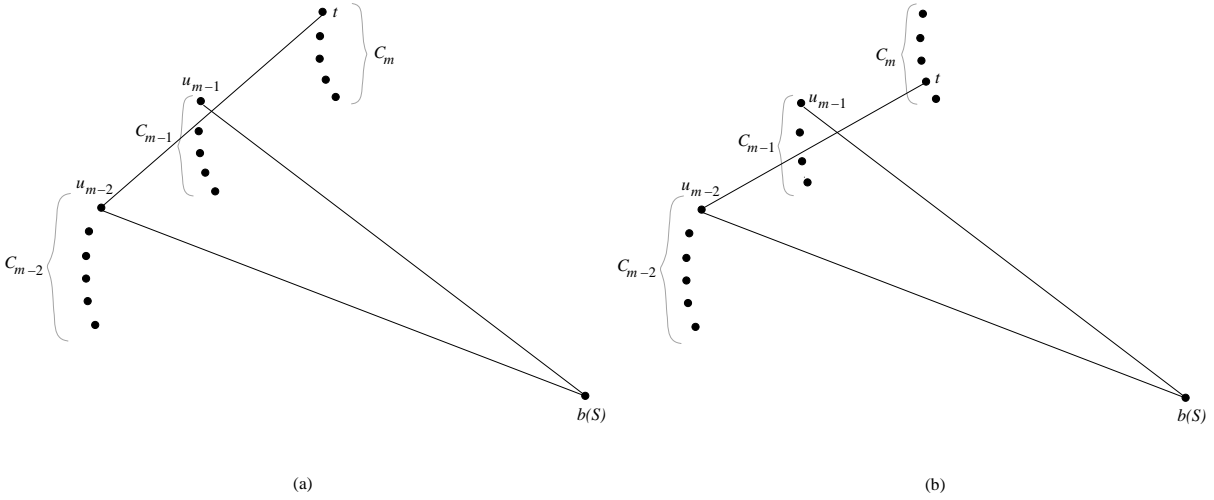


Figure 2.45: (a-b) Mappings used in the proof of Statement 13.

Let us now combine the above statements in order to derive a solution for the 3-Partition problem when we are given an UPSE of G into S . By Statement 8 and Statement 13, vertices s and t are mapped to $b(S)$ and $t(S)$, respectively. By Statement 9, for each $i = 1 \dots m$, point set C_i contains exactly one vertex from $\{u_1, \dots, u_m\}$, say u_i and, hence, the remaining points of C_i are occupied by the vertices of some paths $P_i^1, P_i^2, \dots, P_i^c$. By Statement 12, $P_i^1, P_i^2, \dots, P_i^c$ are mapped entirely to the points of C_i . Since C_i has $B + 1$ points, the highest of which is occupied by u_i , we infer that $P_i^1, P_i^2, \dots, P_i^c$ contain exactly B vertices. We set $A_i = \{a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^c\}$, where a_i^j is the size of path P_i^j , $1 \leq j \leq c$. Since $\frac{B}{4} < a_i^j < \frac{B}{2}$ we infer that $c = 3$. The subsets A_i are disjoint and their union produces A .

Finally, we note that G has a single source s and the longest simple cycle of G has length 4, moreover the point set S is an m -convex point set for some $m > 1$. This completes the proof. \square

2.7 Conclusion and Open Problems

This chapter contains our obtained results on the upward point-set embeddability problem. The major contribution is done in two direction: (1) Study of embeddability of graphs into convex point sets and (2) Study of the complexity of the general UPSE problem.

Regarding the first direction we present a complete picture, thus we give two families of trees that always have an UPSE into convex point sets and a family of trees which does not have an UPSE into some convex point sets. We prove that it can be efficiently tested whether a tree admits an UPSE into a convex point-set. Finally, we extend our tree-testing algorithm to the class of outerplanar graphs, i.e. we proved that it can be efficiently tested whether an upward outerplanar digraph admits an UPSE into a convex point set. This result complete the research on the convex point-sets.

Regarding the second direction we proved that the general problem is \mathcal{NP} -complete.

Next we present a list of interesting open questions and categorize them by the properties of the point-sets.

k -outerplanar point sets, $k \geq 2$: It would be interesting to study how the complexity of the

problems changes when we deal at least with a 2-outerplanar point-set. Even for path-DAGs there is no trivial extension of the embedding algorithm from an outerplanar point-set to a 2-outerplanar point-set. It would be also interesting to answer whether there exist a $k > 1$ and a class of trees so that it is \mathcal{NP} -hard to test whether these trees admit an UPSE into k -convex point sets.

General point sets: The central question is that of path-DAGS, i.e. to prove or to disprove Conjecture 1. Another interesting question is that of complexity of testing whether a tree and an outerplanar digraph admits an UPSE into a general point set. Recall that our \mathcal{NP} -completeness proof works only for a digraphs with multiple sinks. Thus it would be interesting to investigate the complexity of problem for planar st -digraphs.

Chapter 3

Upward Topological Book Embeddings of Digraphs

3.1 Definition and Previous Work

A k -page book is a structure consisting of a line, referred to as *spine*, and of k half-planes, referred to as *pages*, that have the spine as their common boundary. A *book embedding* of a graph G is a drawing of G on a book such that the vertices are aligned along the spine, each edge is entirely drawn on a single page, and edges do not cross each other. Figure 3.1 gives an example of a 3-page book embedding of a graph.

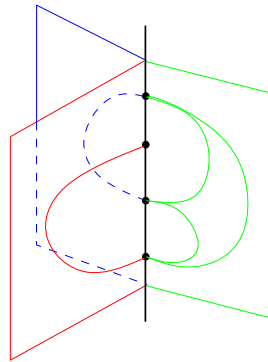


Figure 3.1: An embedding of a graph into 3-page book. Three pages are denoted by different colors.

As it was already noticed in introduction book embeddings of graphs have a large number of diverse applications.

Regarding the number of pages, Yannakakis [99] has shown that planar graphs have a book embedding on a 4-page book and that there exist planar graphs that require 4 pages for their book embedding. Thus, book embeddings for planar graphs are, in general, three-dimensional structures.

In this work we are interested only on two-dimensional structures, thus we concentrate on 2-page book embeddings and since not all the graphs have a 2-page book embedding we have to allow edges to cross the spine. In the literature, the book embeddings where spine crossings are allowed are referred to as *topological book embeddings* [39], see for example Figure 3.2.a. It

is known that every planar graph admits a 2-page topological book embedding with only one spine crossing per edge [37].

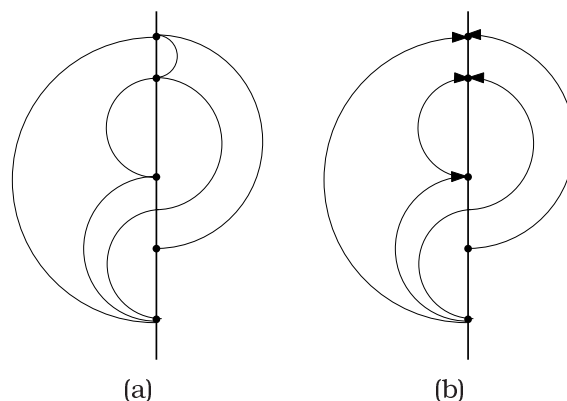


Figure 3.2: (a) A topological book embedding of a graph into 2-page book.
(b) An upward topological book embedding of a directed graph.

As we already noticed in introduction, when we draw directed acyclic graphs we usually wish to emphasize the order that is given by the direction of the edges, i.e. we prefer all edges to be drawn monotonically increasing in a common direction. As a consequence, an *upward book embedding* of an acyclic digraph was defined. In an upward book embedding the vertices of the graph appear along the spine in their topological order, see Figure 3.2.b.

Upward book embeddings have been studied for digraphs and posets in [2, 60, 61, 59, 78]. The minimum number of pages required by an upward book embedding of a planar acyclic digraph is unbounded [60], while the minimum number of pages required by an upward planar digraph is not known [2, 60, 78]. From the positive point of view, Alzohairi and Rival [2], showed that any upward planar series-parallel poset has an upward 2-page book embedding. In terms of graphs, it means that any upward planar series-parallel digraph without transitive edges has an upward 2-page book embedding. This result was improved by Giacomo et al. [47]. The authors provided a linear time algorithm, relaxing the constraint of non-transitive edges. On the same period an optimal algorithm that constructs an upward 2-page book embedding for N -free planar lattices was provided by Alzohairi [1]. Note that, due to Habib and Jerou [53], the class of N -free planar ordered sets can be considered as an extension of series-parallel ordered sets.

Giordano et al. [48] studied *upward topological book embeddings* of embedded upward planar digraphs. They have shown how to construct in linear time an upward topological book embedding for an embedded triangulated planar st -digraph with at most one spine crossing per edge. Given that (i) upward planar digraphs are exactly the subgraphs of planar st -digraphs [29, 70] and (ii) embedded upward planar digraphs can be augmented to become triangulated planar st -digraphs in linear time [48], it follows that any embedded upward planar digraph has a topological book embedding with one spine crossing per edge.

The results on upward topological book embeddings that appear in the literature focus on the number of spine crossings per edge required to book-embed a graph on a 2-page book. However, approaching the topological book embedding problem as an optimization problem, it makes sense to also try to minimize the total number of spine crossings.

In order to formalize the problem of spine crossing minimization in upward topological book embeddings and to simplify its study, we define the problem of Acyclic Hamiltonian Path Comple-

tion with Crossing Minimization (Acyclic-HPCCM for short). Intuitively, Acyclic-HPCCM asks to find some edges, which when added to the embedded upward planar digraph turns it to an embedded hamiltonian acyclic digraph, creating as few crossings as possible.

Let us start with the definition of hamiltonian path completion as it is known in literature.

Given a graph $G = (V, E)$, directed or undirected, a non-negative integer $k \leq |V|$ and two vertices $s, t \in V$, the *hamiltonian path completion (HP-completion)* problem asks whether there exists a superset E' of E such that $|E' \setminus E| \leq k$ and the graph $G' = (V, E')$ has a hamiltonian path from vertex s to vertex t . We refer to G' and to the set of edges $E' \setminus E$ as the *HP-completed graph* and the *HP-completion set* of graph G , respectively. We assume that all edges of an HP-completion set are part of the Hamiltonian path of G' , since otherwise they can be removed. When G is a directed acyclic graph, we can insist on HP-completion sets which leave the HP-completed digraph also acyclic. We refer to this version of the problem as the *acyclic HP-completion problem*. The hamiltonian path completion problem is NP-complete [44]. For acyclic digraphs the HP-completion problem is solved in polynomial time [66].

Both versions of HP-completion described can be extended to embedded digraphs. In this case it makes sense to change the optimization criteria, trying to minimize the number of crossings that the HP-completion set creates. We next formalize this idea.

Let $G = (V, E)$ be an embedded planar graph, E' be a superset of edges containing E , and $\Gamma(G')$ be a drawing of $G' = (V, E')$. When the deletion from $\Gamma(G')$ of the edges in $E' \setminus E$ induces the embedded planar graph G , we say that $\Gamma(G')$ *preserves the embedded planar graph* G .

Definition 5. *Given an embedded planar graph $G = (V, E)$, directed or undirected, a non-negative integer c , and two vertices $s, t \in V$, the hamiltonian path completion with edge crossing minimization (HPCCM) problem asks whether there exists a superset E' of E and a drawing $\Gamma(G')$ of graph $G' = (V, E')$ such that (i) G' has a hamiltonian path from vertex s to vertex t , (ii) $\Gamma(G')$ has at most c edge crossings, and (iii) $\Gamma(G')$ preserves the embedded planar graph G .*

We refer to the version of the HPCCM problem where the input is an upward planar (and thus acyclic) digraph and we are interested in HP-completion sets which leave the HP-completed digraph also acyclic as the *acyclic-HPCCM* problem.

Over the set of all HP-completion sets for a graph G , and over all of their different drawings that preserve G , any set with a minimum number of edge-crossings is called a *crossing-optimal HP-completion set*. Note that an acyclic HP-completion set of minimum size is not necessarily a crossing-optimal HP-completion set. This fact is demonstrated in Figure 3.3. For the non-triangulated outerplanar st -digraph of Figure 3.3.a, every acyclic HP-completion set of size 1 creates 1 edge crossing (see Figure 3.3.b) while, it is possible to obtain an acyclic HP-completion set of size 2 without any crossing (see Figure 3.3.c).

For acyclic digraphs, the acyclic HP-completion problem has been studied in the literature in the context of partially ordered sets (posets) under the terms *Linear Extensions* and *Jump Number*. Each acyclic digraph G can be treated as a poset P . A linear extension of P is a total ordering $L = \{x_1 \dots x_n\}$ of the elements of P such that $x_i < x_j$ in L whenever $x_i < x_j$ in P . We denote by $L(P)$ the set of all linear extensions of P . A pair (x_i, x_{i+1}) of consecutive elements of L is called a *jump in L* if x_i is not comparable to x_{i+1} in P . Denote the number of jumps of L by $s(P, L)$. Then, the *jump number* of P , $s(P)$, is defined as $s(P) = \min\{s(P, L) : L \in L(P)\}$. A linear extension $L \in L(P)$ is called *optimal* if $s(P, L) = s(P)$. The *jump number problem* is to find $s(P)$ and to construct an optimal linear extension of P .

From the above definitions, it follows that an optimal linear extension of a poset P (or its corresponding acyclic digraph G), is identical to an acyclic HP-completion set E_c of minimum

size for G , and its jump number is equal to the size of E_c . This problem has been widely studied, in part due to its applications to scheduling. It has been shown to be NP-hard even for bipartite ordered sets [84] and for the class of interval orders [76]. Up to our knowledge, its computational classification is still open for lattices. Nevertheless, polynomial time algorithms are known for several classes of ordered sets. For instance, efficient algorithms are known for series-parallel orders [25], N-free orders [87], cycle-free orders [27], orders of width two [21], orders of bounded width [26], bipartite orders of dimension two [91] and K-free orders [90]. Brightwell and Winkler [17] showed that counting the number of linear extensions is $\sharp P$ -complete. An algorithm that generates all linear extensions of a poset in constant amortized time, that is in time $\mathcal{O}(|L(P)|)$, was presented by Pruesse and Ruskey [83]. Later on, Ono and Nakano [79] presented an algorithm which generates each linear extension in “worst case” constant time.

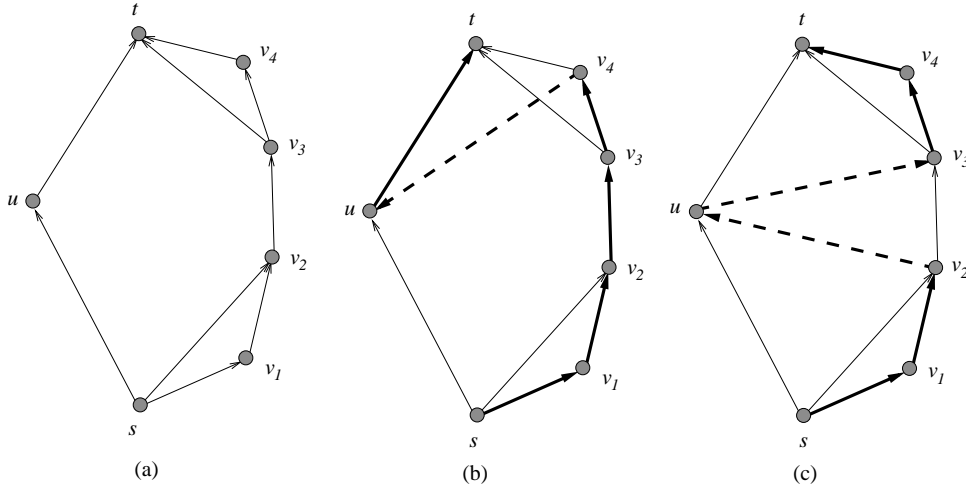


Figure 3.3: An acyclic digraph that has a crossing-optimal HP-completion set of size 2 that creates no crossings. Any HP-completion set of size 1 creates 1 crossing.

Colbourn, Pulleyblank [26] and later Ceroi [19] studied the weighted version of jump number problem. In [26] this problem is referred as the problem of *minimum setup scheduling* (for short, MSS). The MSS is a problem of precedence constrained scheduling which appears to be different from other better studied problems of this field [85]. The authors of [26] give a polynomial time algorithm solving the MSS problem for the acyclic digraphs of bounded width. They observe also that the jump number problem can be presented as an instance of MSS. On the other, the MSS was shown to be NP-Complete for the class of two-dimensional orders [19].

If a topological ordering ρ of the vertices of a graph is also given as a part of the input, then we are interested in constructing an upward topological book embedding such that the ordering of the vertices along the spine is ρ . Such drawing is called a ρ -constrained upward topological book embedding. Giordano, Liotta and Whitesides [50] developed an algorithm that, given an embedded planar st -digraph and a topological numbering ρ of its vertices, computes in $\mathcal{O}(n^2)$ time a ρ -constrained upward topological book embedding with at most $2n - 4$ spine crossings per edge. The number of spine crossings per edge is asymptotically worst case optimal.

3.1.1 Our contribution: spine-crossing minimization

We study the problem of spine-crossing minimization in upward topological book embeddings. To formalize our study we utilize the defined above problem of Acyclic Hamiltonian Path Completion with Crossing Minimization (Acyclic-HPCCM for short).

1. We first establish for the class of planar st -digraphs an equivalence (through a linear time transformation) between the Acyclic-HPCCM problem and the problem of obtaining an upward topological 2-page book embeddings with minimum number of spine crossings (Section 3.3).
2. We develop a necessary and sufficient condition for a planar st -digraph to be hamiltonian (Section 3.4).
3. We solve Acyclic-HPCCM for outerplanar st -digraphs. (Section 3.5).
4. We study the case of Acyclic-HPCCM problem when it has a solution with zero crossings, i.e. when an embedded upward planar digraph has a 2-page upward book embedding. We concentrate on embedded N -free digraphs and on bounded-width digraphs (Section 3.6).
5. Finally we study ρ -constrained upward topological book embeddings. We improve the upper bound for the number of spine crossings per edge given in [50] and show that our bound is worst-case optimal (Section 3.7).

The results 1 – 3 were published in [74], the result 4 in [72], while result 5 in [97].

3.2 Notation and Preliminary Results

Let $G = (V, E)$ be an embedded planar graph, let E_c be an HP-completion set of G and let $\Gamma(G')$ of $G' = (V, E \cup E_c)$ be a drawing with c crossings that preserves G . The graph G_c induced from drawing $\Gamma(G')$ by inserting a new vertex at each edge crossing and by splitting the edges involved in the edge-crossing is referred to as the *HP-extended graph of G with respect to $\Gamma(G')$* (see Figure 3.4).

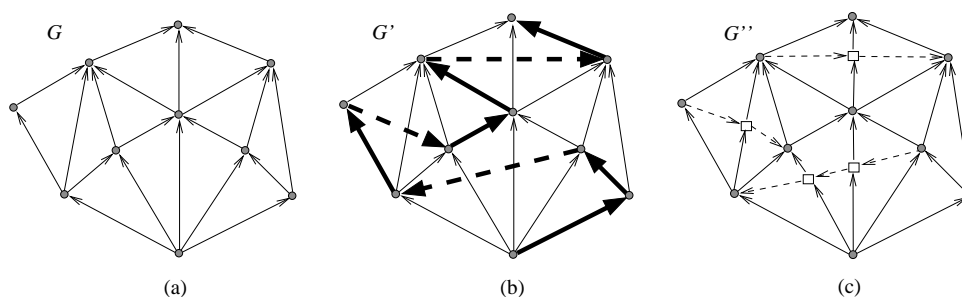


Figure 3.4: (a) A planar embedded digraph G . (b) A drawing $\Gamma(G')$ of an HP-completed digraph G' of G . The edges of the hamiltonian path of G' appear bold, with the edges of the HP-completion set shown dashed. (c) The HP-extended digraph G'' of G with respect to $\Gamma(G')$. The newly inserted vertices appear as squares.

Recall that an st -digraph is an acyclic digraph with exactly one source and exactly one sink. An st -digraph which is planar and, in addition, embedded on the plane so that both of its source

and sink appear on the boundary of its external face, is referred to as a *planar st-digraph*. In a planar *st-digraph* G each face f is bounded by two directed paths which have two common end-vertices. The common origin (resp., destination) of these paths is called the *source* (resp., *sink*) of f and is denoted by $source(f)$ (resp., $sink(f)$). The leftmost (resp., rightmost) of these two paths is called a *left border* (resp., *right border*) of face f . The *bottom-left* (resp., *bottom-right*) edge of a face f is the first edge on its left (resp., right) border. Similarly we define the *top-left* and the *top-right* edge of a face border. The *right(left) border* of an *st-digraph* is the rightmost(leftmost) path from its source s to its sink t .

A new edge e that is inserted to a face f of a planar *st-digraph* G , with its origin and destination on the left and right border of f , respectively, is called a *left-to-right oriented edge*. Analogously, we define a *right-to-left oriented edge*.

It is well known [95] that for every vertex v of a planar *st-digraph*, its incoming (outgoing) incident edges appear consecutively around v . For any vertex v , we denote by $left(v)$ (respectively $right(v)$) the face to the left (respectively to the right) of the leftmost (respectively rightmost) incoming and outgoing edges incident to v . For any edge $e = (u, v)$, we denote by $left(e)$ (respectively $right(e)$) the face to the left (respectively to the right) of edge e as we move from u to v . The external face of G is split into two faces, s^* and t^* . s^* is the face to the left of the left border of G while t^* is the face to the right of the right border of G . The *dual* of an *st-digraph* G , denoted by G^* , is a digraph such that: (i) there is a vertex in G^* for each face of G ; (ii) for every edge $e \neq (s, t)$ of G , there is an edge $e^* = (f, g)$ in G^* , where $f = left(e)$ and $g = right(e)$; (iii) edge (s^*, t^*) is in G^* . If G^* after this construction contains multiply edges, we substitute them by single edges. It is a well known fact that the dual graph G^* of any planar *st-digraph* G , is also a planar *st-digraph* with source s^* and sink t^* .

The following lemma is a direct consequence of Lemma 7 of Tamassia and Preparata [94].

Lemma 24. *Let u and v be two vertices of a planar *st-digraph* such that there is no directed path between them in either direction. Then, in the dual G^* of G there is either a path from $right(u)$ to $left(v)$ or a path from $right(v)$ to $left(u)$. \square*

The following lemma demonstrates a property of planar *st-digraphs*.

Lemma 25. *Let G be a planar *st-digraph* that does not have a hamiltonian path. Then, there exist two vertices in G that are not connected by a directed path in either direction.*

Proof: Let P be a longest path from s to t and let a be a vertex that does not belong to P . Since G does not have a hamiltonian path, such a vertex always exists. Let s' be the last vertex in P such that there exists a path $P_{s' \rightsquigarrow a}$ from s' to a with no vertices in P . Similarly, define t' to be the first vertex in P such that there exists a path $P_{a \rightsquigarrow t'}$ from a to t' with no vertices in P . Since G is acyclic, s' appears before t' in P (see Figure 3.5). Note that s' (respectively t') might be vertex s (respectively t). From the construction of s' and t' it follows that any vertex b , distinct from s' and t' , that is located on path P between vertices s' and t' , is not connected to vertex a in either direction. Thus, vertices a and b satisfy the property of the lemma.

Note that such a vertex b always exists. If this was not the case, then path P would contain edge (s', t') . Then, path P could be extended by replacing (s', t') by path $P_{s' \rightsquigarrow a}$ followed by path $P_{s' \rightsquigarrow a}$. This would lead to new path P' from s to t that is longer than P , and this would be a contradiction since P was assumed to be of maximum length. \square

The following definitions were given in [48] for maximal planar *st-digraph*. Here we extend them for planar *st-digraphs*. Let $G = (V, E)$ be a planar *st-digraph* and G^* be the dual digraph of G . Let $v_1^* = s^*, v_2^*, \dots, v_m^* = t^*$ be the set of vertices of G^* where the indices are given according to

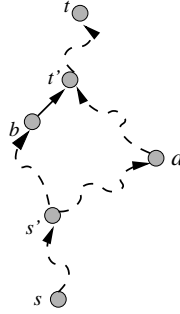


Figure 3.5: The subgraph used in the proof of Lemma 48. Vertices a and b are not connected by a path in either direction.

an st -numbering of G^* . By the definition of the dual st -digraph, a vertex v_i^* of G^* ($1 \leq i \leq m$) corresponds to a face of G . In the following we denote by v_i^* both the vertex of the dual digraph G^* and its corresponding face in digraph G . Face v_k^* is called the k -th face of G . Let V_k be the subset of the vertices of G that belong to faces $v_1^*, v_2^*, \dots, v_k^*$. The subgraph of G induced by vertices in V_k is called the k -facial subgraph of G and is denoted by G_k .

The next lemma describes how, given an st -digraph G and an st -numbering of its dual, G can be incrementally constructed from its faces. The proof is identical to the proof given in [48] for maximal planar st -digraphs.

Lemma 26. Assume a planar st -digraph G and let $v_1^* = s^*, v_2^*, \dots, v_m^* = t^*$ an st -numbering of its dual G^* . Consider the k -facial subgraph G_k and the $k + 1$ -th face v_{k+1}^* of G , ($1 \leq k < m$). Let s_{k+1} be the source of v_{k+1}^* , t_{k+1} be the sink of v_{k+1}^* , $s_{k+1}, u_1^l, u_2^l, \dots, u_i^l, t_{k+1}$ be its left border, and $s_{k+1}, u_1^r, u_2^r, \dots, u_j^r, t_{k+1}$ be its right border. Then:

- a. G_k is a planar st -digraph.
- b. The vertices $s_{k+1}, u_1^l, u_2^l, \dots, u_i^l, t_{k+1}$ are vertices of the right border of G_k .
- c. G_{k+1} can be built from G_k by an addition of a single directed path $s_{k+1}, u_1^r, u_2^r, \dots, u_j^r, t_{k+1}$. \square

Every face of a planar st -digraph consists of two sides, each of them directed from its source to its sink. When one side of the face is a single edge and the other side (the longest) contains exactly one vertex, the face is referred to as a *triangle* (see Figure 3.6). In the case where the longest edge contains more than one vertex, the face is referred to as a *generalized triangle* (see Figure 3.7). We call both a triangle and a generalized triangle *left-sided* (respectively *right-sided*) if its left (respectively right) side is its longest side, i.e., it contains at least one vertex.

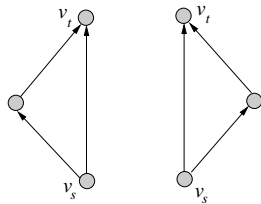


Figure 3.6: Left and right-sided embedded triangles.

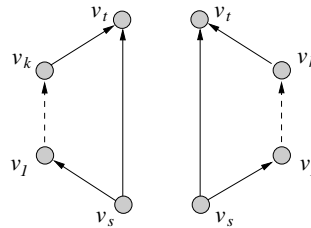


Figure 3.7: Left and right-sided embedded generalized triangles.

The outerplanar st -digraph of Figure 3.8 is called a *strong rhombus*. It consists of two generalized triangles (one left-sided and one right-sided) which have their (v_s, v_t) edge in common. The

edge (v_s, v_t) of a strong rhombus is referred to as its *median* and is drawn in the interior of its drawing. The outerplanar *st*-digraph resulting by deleting the median of a strong rhombus is referred to as a *weak rhombus*. Thus, a weak rhombus is an outerplanar *st*-digraph consisting of a single face that has at least one vertex at each of its sides (see Figure 3.9). We use the term *rhombus* to refer to either a strong or a weak rhombus.

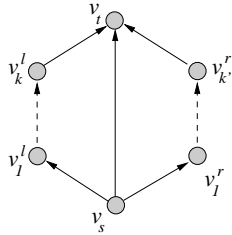


Figure 3.8: A strong rhombus.

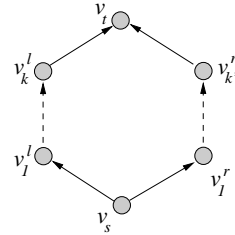


Figure 3.9: A weak rhombus.

Following the terminology of posets, the digraph $G_N = (V_N, E_N)$, where $V_N = \{a, b, c, d\}$ and $E_N = \{(a, b), (c, b), (c, d)\}$ is called an *N-digraph*. Then, any digraph that does not contain G_N as a subgraph is called an *N-free* digraph. This definition can be extended to embedded planar digraphs by insisting on a specific embedding. If we adopt the embedding of Figure 3.10.a. we refer to an *embedded N-digraph* while, if we adopt the embedding Figure 3.10.b. we refer to an *embedded I digraph*. An embedded planar digraph G is then called *N-free* (*I-free*) if it does not contain any embedded *N-digraph* (*I-digraph*) as a subgraph. Figure 3.10.c shows an embedded *N-free* digraph. However, when its embedding is ignored, the digraph is not *N-free* since vertices a, b, c, d comprise a *N-digraph*.

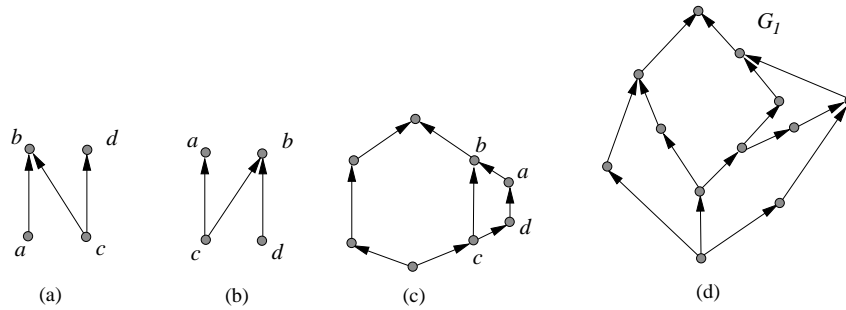


Figure 3.10: (a) Embedded *N-digraph*. (b) Embedded *I-digraph*. (c) Planar digraph that is *N-free* if treated as an embedded planar digraph, but not *N-free* as a planar digraph. (d) An embedded *N-free* planar *st-digraph* G_1 .

3.3 Equivalence of Acyclic-HPCCM and Upward Book Embedding

In this section, we establish for the class of planar *st*-digraphs an equivalence (through a linear time transformation) between the acyclic-HPCCM problem and the problem of obtaining an upward topological 2-page book embeddings with minimum number of spine crossings. We exploit this equivalence later on to develop optimal (with respect to spine crossings) book embeddings for various classes of digraphs. We note that this is an upward counterpart of the result for undirected graphs, saying that every graph has a 2-page book embedding if and only if it is subgraph of a planar hamiltonian graph [9].

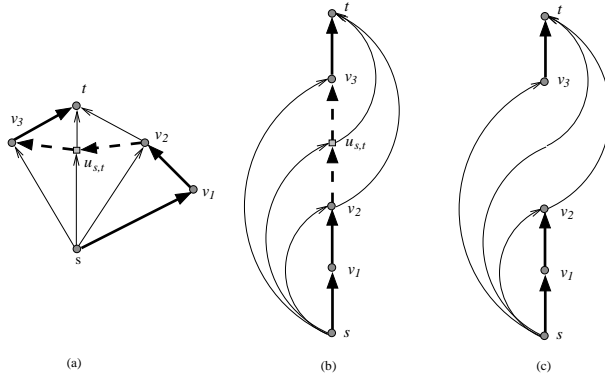


Figure 3.11: (a) A drawing of an HP-extended digraph for an st -digraph G . The dotted segments correspond to the single edge (v_2, v_3) of the HP-completion set for G . (b) An upward topological 2-page book embedding of G_c with its vertices placed on the spine in the order they appear on a hamiltonian path of G_c . (c) An upward topological 2-page book embedding of G .

Theorem 17. Let $G = (V, E)$ be an n -vertex planar st -digraph. G has a crossing-optimal HP-completion set E_c with Hamiltonian path $P = (s = v_1, v_2, \dots, v_n = t)$ such that the corresponding optimal drawing $\Gamma(G')$ of $G' = (V, E \cup E_c)$ has c crossings **if and only if** G has an optimal (with respect to the number of spine crossings) upward topological 2-page book embedding with c spine crossings where the vertices appear on the spine in the order $\Pi = (s = v_1, v_2, \dots, v_n = t)$.

Proof: We show how to obtain from an HP-completion set with c edge crossings an upward topological 2-page book embedding with c spine crossings and vice versa. It then follows that a crossing-optimal HP-completion set for G with c edge crossings corresponds to an optimal upward topological 2-page book embedding with the same number of spine crossings.

“ \Rightarrow ” We assume that we have an HP-completion set E_c that satisfies the conditions stated in the theorem. Let $\Gamma(G')$ of $G' = (V, E \cup E_c)$ be the corresponding drawing that has c crossings and let $G_c = (V \cup V_c, E' \cup E'_c)$ be the acyclic HP-extended digraph of G with respect to $\Gamma(G')$. V_c is the set of new vertices placed at each edge crossing. E' and E'_c are the edge sets resulting from E and E_c , respectively, after splitting their edges involved in crossings and maintaining their orientation (see Figure 3.11(a)). Note that G_c is also a planar st -digraph.

Observe that in $\Gamma(G')$ we have no crossing involving two edges of G . If this was the case, then $\Gamma(G')$ would not preserve G . Similarly, in $\Gamma(G')$ we have no crossing involving two edges of the HP-completion set E_c . If this was the case, then G_c would contain a cycle.

The hamiltonian path P on G' induces a hamiltonian path P_c on the HP-extended digraph G_c . This is due to the facts that: (i) all edges of E_c are used in the hamiltonian path P and (ii) all vertices of V_c correspond to crossings involving edges of E_c . We use the hamiltonian path P_c to construct an upward topological 2-page book embedding for graph G with exactly c spine crossings. We place the vertices of G_c on the spine in the order of hamiltonian path P_c , with vertex $s = v_1$ being the lowest. Since the HP-extended digraph G_c is a planar st -digraph with vertices s and t on the external face, each edge of G_c appears either to the left or to the right of the hamiltonian path P_c . We place the edges of G_c on the left (respectively right) page of the book embedding if they appear to the left (respectively right) of path P_c . The edges of P_c are drawn on the spine (see Figure 3.11(b)). Later on they can be moved to any of the two book pages.

Note that all edges of E_c appear on the spine. Consider any vertex $v_c \in V_c$. Since v_c corresponds

to a crossing between an edge of E and an edge of E_c , and the edges of E'_c incident to it have been drawn on the spine, the two remaining edges of E' correspond to (better, they are parts of) an edge $e \in E$ and drawn on different pages of the book. By removing vertex v_c and merging its two incident edges of E' we create a crossing of edge e with the spine. Thus, the constructed book embedding has as many spine crossings as the number of edge crossings of HP-completed graph G' (see Figure 3.11(c)).

It remains to show that the constructed book embedding is upward. It is sufficient to show that the constructed book embedding of G_c is upward. For the sake of contradiction, assume that there exists a downward edge $(u, w) \in E'_c$. By construction, the fact that w is drawn below u on the spine implies that there is a path in G_c from w to u . This path, together with edge (u, w) forms a cycle in G_c , a clear contradiction since G_c is acyclic.

“ \Leftarrow ” Assume that we have an upward 2-page topological book embedding of st -digraph G with c spine crossings where the vertices appear on the spine in the order $\Pi = (s = v_1, v_2, \dots, v_n = t)$. Then, we construct an HP-completion set E_c for G that satisfies the condition of the theorem as follows: $E_c = \{(v_i, v_{i+1}) \mid 1 \leq i < n \text{ and } (v_i, v_{i+1}) \notin E\}$, that is, E_c contains an edge for each consecutive pair of vertices of the spine that (the edge) was not present in G . By adding/drawing these edges on the spine of the book embedding we get a drawing $\Gamma(G')$ of $G' = (V, E \cup E_c)$ that has c edge crossings. This is due to the fact that all spine crossing of the book embedding are located, (i) at points of the spine above vertex s and below vertex t , and (ii) at points of the spine between consecutive vertices that are not connected by an edge. By inserting at each crossing of $\Gamma(G')$ a new vertex and by splitting the edges involved in the crossing while maintaining their orientation, we get an HP-extended digraph G_c . It remains to show that G_c is acyclic. For the sake of contradiction, assume that G_c contains a cycle. Then, since graph G is acyclic, each cycle of G_c must contain a segment resulting from the splitting of an edge in E_c . Given that in $\Gamma(G')$ all vertices appear on the spine and all edges of E_c are drawn upward, there must be a segment of an edge of G that is downward in order to close the cycle. Since, by construction, the book embedding of G is a sub-drawing of $\Gamma(G')$, one of its edges (or just a segment of it) is downward. This is a clear contradiction since we assume that the topological 2-page book embedding of G is upward. \square

3.4 Hamiltonian Planar st -Digraphs

In this section, we develop a necessary and sufficient condition for a planar st -digraph to be hamiltonian. The provided characterization will be later on used in the development of crossing-optimal HP-completion sets for outerplanar st -digraphs.

Theorem 18. *Let G be a planar st -digraph. Then G has a hamiltonian path if and only if G does not contain any rhombus (strong or weak) as a subgraph.*

Proof: (\Rightarrow) We assume that G has a hamiltonian path and we show that it contains no rhombus (strong or weak) as an embedded subgraph. For the sake of contradiction, assume first that G contains a strong rhombus with vertices s' (its source), t' (its sink), a (on its left side) and b (on its right side) (see Figure 3.12). Then, vertices a and b of the strong rhombus are not connected by a directed path in either direction. To see this, assume without loss of generality that there was a path connecting a to b . Then, this path has to lie outside the rhombus and intersect either the path from t' to t at a vertex u or the path from s to s' at a vertex v . In either case, there must exist a cycle in G , contradicting the fact that G is acyclic.

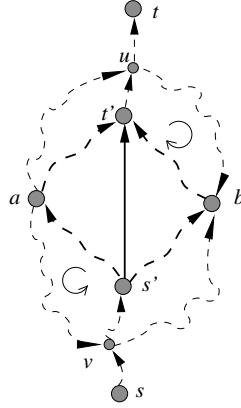


Figure 3.12: The subgraph containing a rhombus which is used in the proof of Theorem 18. In the case of a weak rhombus, edge (s', t') is not present.

Assume now, for the sake of contradiction again, that G contains a weak rhombus characterized by vertices s', t', a , and b . Then, by using the same argument as above, we conclude that vertices a and b of the weak rhombus are not connected by a directed path that lies outside the rhombus in either direction. Note also that vertices a and b cannot be connected by a path that lies in the internal of the weak rhombus since the weak rhombus consists, by definition, of a single face.

So, we have shown that vertices a and b of the rhombus (strong or weak) are not connected by a directed path in either direction, and thus, there cannot exist any hamiltonian path in G , a clear contradiction.

(\Leftarrow) We assume that G contains neither a strong nor a weak rhombus as an embedded subgraph and we prove that G has a hamiltonian path. For the sake of contradiction, assume that G does not have a hamiltonian path. Then, from Lemma 48, it follows that there exist two vertices u and v of G that are not connected by a directed path in either direction. From Lemma 24, it then follows that there exists in the dual G^* of G a directed path from either $right(u)$ to $left(v)$, or from $right(v)$ to $left(u)$. Without loss of generality, assume that the path in the dual G^* is from $right(u)$ to $left(v)$ (see Figure 3.13.a) and let f_0, f_1, \dots, f_k be the faces the path passes through, where $f_0 = Right(u)$ and $f_k = left(v)$. We denote the path from $right(u)$ to $left(v)$ by $P_{u,v}$. Note that each face of digraph G and therefore of path $P_{u,v}$ is a generalized triangle, because we supposed that G does not contain any weak rhombus.

Note that path $P_{u,v}$ can exit face f_0 only through the solid edge (see Figure 3.13.a). The path then enters a new face and, in the rest of the proof, we construct the sequence of faces it goes through.

The next face f_1 of the path, consists of the solid edge of face f_0 and some other edges. There are two possible cases to consider for face f_1 .

Case 1: Face f_1 is left-sided. Then, path $P_{u,v}$ enters f_1 through one of the edges on its left side (see Figures 3.13.b, 3.13.c and 3.13.d for possible configurations). Observe that, since f_1 is left-sided, f_1 has only one outgoing edge in G^* . Thus, in all of these cases, the only edge through which path $P_{u,v}$ can leave f_1 is the single edge on the right side of the generalized triangle f_1 .

Case 2: The face f_1 is right-sided. Then the only edge through which the path $P_{u,v}$ can enter f_1 is the only edge of its left side (see Figure 3.13.e). Note that in this case, f_0 and f_1 form a strong rhombus. Thus, this case cannot occur, since we assumed that G has no strong rhombus as

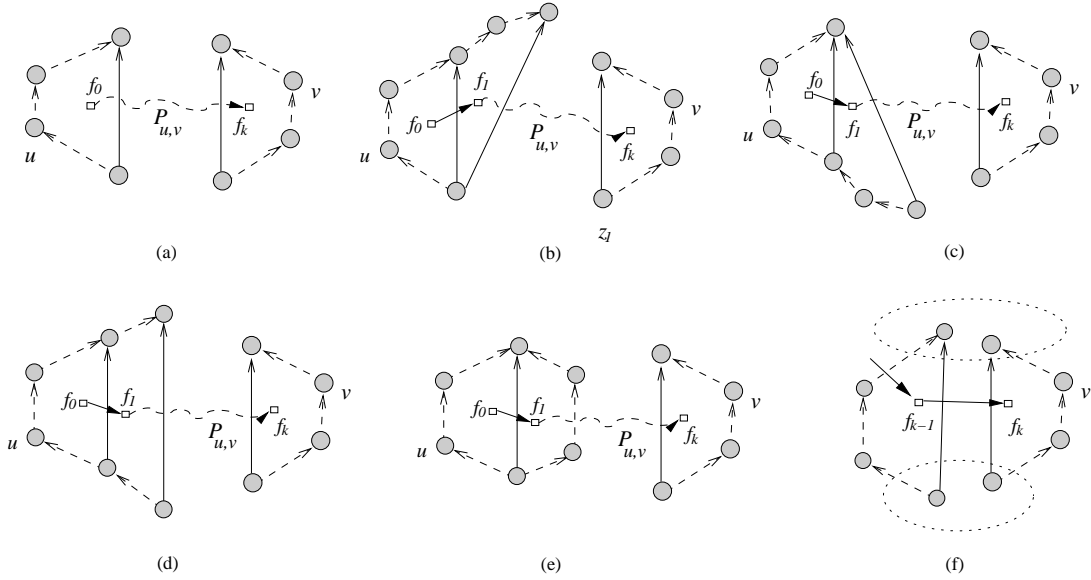


Figure 3.13: The different cases occurring in the construction of path $P_{u,v}$ as described in the proof of Theorem 18.

an embedded subgraph.

A characteristic property of the first case that allows to further continue the identification of the faces path $P_{u,v}$ goes through is that there is a *single* edge that exits face f_1 . Thus, we can continue identifying the faces path $P_{u,v}$ passes through, and build a unique sequence f_0, f_1, \dots, f_{k-1} in this way. Note that all of these faces are left-sided (otherwise, G contains a strong rhombus).

At the end, path $P_{u,v}$ has to leave the left-sided face f_{k-1} and enter the right-sided face f_k . As the only way to enter a right-sided face is to cross the single edge on its left side, we have that the single edge on the right side of f_{k-1} and the single edge on the left side of f_k coincide forming a strong rhombus (see Figure 3.13.f). This is a clear contradiction since we assumed that G has no strong rhombus as an embedded subgraph. \square

3.5 Outerplanar st-digraphs

In this section we present an algorithm that computes a crossing-optimal acyclic HP-completion set for an outerplanar *st*-digraph. Let $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ be an outerplanar *st*-digraph, where s is its source, t is its sink and the vertices in V_l (respectively V_r) are located on the left (respectively right) side of the boundary of the external face. Let $V^l = \{v_1^l, \dots, v_k^l\}$ and $V^r = \{v_1^r, \dots, v_m^r\}$, where the subscripts indicate the order in which the vertices appear on the left (right) side of the external boundary. By convention, the source and the sink are considered to lie on both the left and the right sides of the external boundary. Observe that each face of G is also an outerplanar *st*-digraph. We refer to an edge that has both of its end-vertices on the same side of G as an *one-sided* edge. All remaining edges are referred to as *two-sided* edges. The edges exiting the source and the edges entering the sink are treated as one-sided edges.

The following lemma presents an essential property of an acyclic HP-completion set of an outerplanar *st*-digraph G .

Lemma 27. *An acyclic HP-completion set of an outerplanar st-digraph $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ induces a hamiltonian path that visits the vertices of V_l (respectively V_r) in the order they appear on the left side (respectively right side) of G .*

Proof: Let E_c be an acyclic HP-completion set for G and let G_c be the induced HP-completed acyclic digraph. Consider two vertices v_1 and v_2 that appear, in this order, on the same side (left or right) of G . Then, in G there is a path P_{v_1, v_2} from v_1 to v_2 since each side of an outerplanar st-digraph is a directed path from its source to its sink. For the sake of contradiction, assume that v_2 appears before v_1 in the hamiltonian path induced by the acyclic HP-completion set of G . Then, the hamiltonian path contains a sub-path P_{v_2, v_1} from v_2 to v_1 . Thus, paths P_{v_1, v_2} and P_{v_2, v_1} form a cycle in G_c . This is a contradiction, since G_c is acyclic. \square

3.5.1 st-polygons

A *strong st-Polygon* is an outerplanar st-digraph that has at least one vertex at each side and always contains edge (v_s, v_t) connecting its source v_s to its sink v_t (see Figure 3.14). Edge (v_s, v_t) is referred to as its *median* and it always lies in the interior of its drawing. As a consequence, in a strong st-Polygon no edge connects a vertex on its left side to a vertex on its right side. The outerplanar st-digraph that results from the deletion of the median of a strong st-Polygon is referred to as a *weak st-Polygon* (see Figure 3.15). We use the term *st-Polygon* to refer to both a strong and a weak st-Polygon. Observe that an st-Polygon has at least 4 vertices.

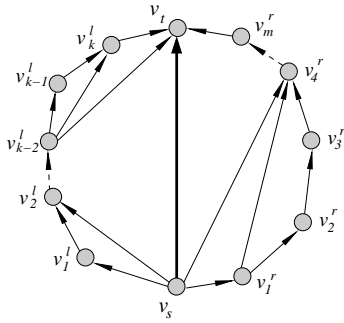


Figure 3.14: A strong st-Polygon.

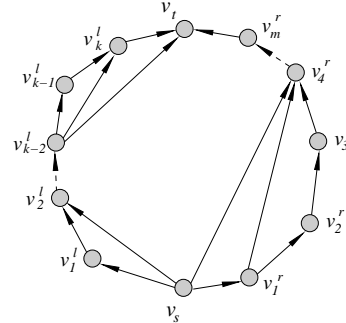


Figure 3.15: A weak st-Polygon.

Consider an outerplanar st-digraph G and one of its embedded subgraphs G_p that is an st-Polygon (strong or weak). G_p is called a *maximal st-Polygon* if it cannot be extended (and still remains an st-Polygon) by the addition of more vertices to its external boundary. In Figure 3.16, the st-Polygon $G_{a,d}$ with vertices a (source), b, c, d (sink), e , and f on its boundary is not maximal since the subgraph $G'_{a,d}$ obtained by adding vertex y to it is still an st-Polygon. However, the st-Polygon $G'_{a,d}$ is maximal since the addition of either vertex x or z to it does not yield another st-Polygon.

Observe that an st-Polygon that is a subgraph of an outerplanar st-digraph G fully occupies a “strip” of it that is limited by two edges (one adjacent to its source and one to its sink), each having its endpoints at different sides of G . We refer to these two edges as the *limiting edges* of the st-Polygon. Note that the limiting edges of an st-Polygon that is an embedded subgraph of an outerplanar graph are sufficient to define it. In Figure 3.16, the maximal st-Polygon with vertex a as its source and vertex d as its sink is limited by edges (a, y) and (c, d) .

Lemma 28. *An st-Polygon contains exactly one rhombus.*

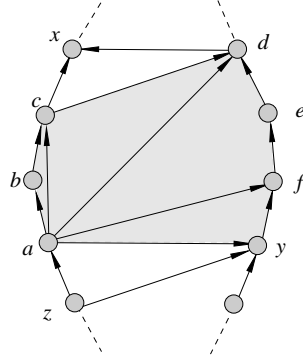


Figure 3.16: The st -Polygon with vertices a (source), b, c, d (sink), e, f , and y on its boundary is maximal.

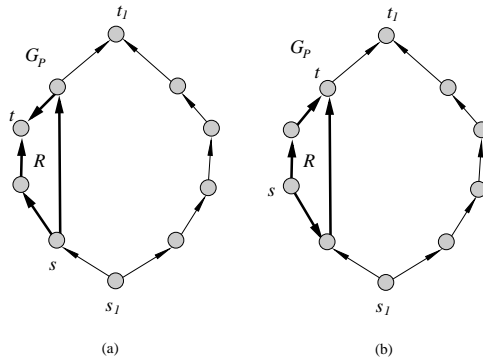


Figure 3.17: Two possible ways for the embedding of a second rhombus into an st -Polygon. Both lead to a configuration that contradicts the definition of an st -Polygon.

Proof: Let G_p be a weak st -Polygon. By definition it contains a weak rhombus. Suppose that this is not the only weak rhombus contained in G_p and let R be a second one. As G_p is an outerplanar graph and does not contain edges connecting its two opposite sides, we have that all the vertices of R must lie on the same side of G_p , say its left side. But then we have that the sink of R is another sink in G_p or that the source of R is another source of G_p (see Figure 3.17). This contradicts the fact that G_p is an st -Polygon. Suppose now that R is a strong rhombus. This case also leads to a contradiction, as R can be converted to a weak rhombus by deleting its median.

If G_p is a strong st -Polygon, then by the same argument we show that G_p cannot contain a second rhombus (strong or weak). □

The following lemmata are concerned with a crossing-optimal acyclic HP-completion set for a single st -Polygon. They state that there exists a crossing-optimal acyclic HP-completion set containing at most two edges.

Lemma 29. *Let $R = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ be an st -Polygon. Let P be an acyclic HP-completion set for R such that $|P| = 2\mu + 1$, $\mu \in \mathbb{N}$. Then, there exists another acyclic HP-completion set P' for R such that $|P'| = 1$ and the edge in P' creates at most as many crossings with the edges of R as the edges in P do. In addition, the hamiltonian paths induced by P and P' have in common their first and last edges.*

Proof: First observe that, as a consequence of Lemma 27, any acyclic HP-completion set for R

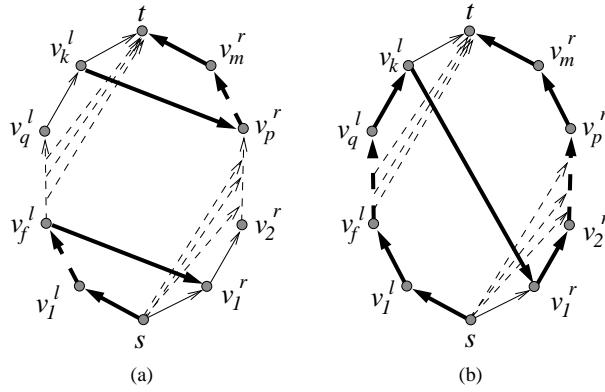


Figure 3.18: An acyclic HP-completion set of odd size for an st -Polygon and an equivalent acyclic HP-completion set of size 1.

does not contain any one-sided edge. Thus, all $2\mu + 1$ edges of P are two-sided edges. Moreover, since P contains an odd number of edges, both the first and the last edge of P have the same direction¹. Without loss of generality, let the lowermost edge of P be directed from left to right (see Figure 3.18(a)). By Lemma 27, it follows that the destination of the lowermost edge of P is the lowermost vertex on the right side of R (i.e., vertex v_1^r) while the origin of the topmost edge of P is the topmost vertex of the left side of R (i.e., vertex v_k^l).

Observe that $P' = \{(v_k^l, v_1^r)\}$ is an acyclic HP-completion set for R . The induced hamiltonian path is $(s \rightsquigarrow v_k^l \rightarrow v_1^r \rightsquigarrow t)$.²

In order to complete the proof, we show that edge (v_k^l, v_1^r) does not cross more edges of R than the edges in P do. To see that, observe that edge (v_k^l, v_1^r) crosses all edges in set $\{(s, v) : v \in V^r \setminus \{v_1^r\}\}$ as well as all edges in set $\{(v, t) : v \in V^l \setminus \{v_k^l\}\}$, provided they exist (see Figure 3.18(b)). However, the edges in these two sets are also crossed by the lowermost and the topmost edges in P , respectively. Thus, edge (v_k^l, v_1^r) creates at most as many crossings with the edges of R as the edges in P do. Observe also that the hamiltonian paths induced by P and P' have in common their first and last edges. \square

Lemma 30. *Let $R = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ be an st -Polygon. Let P be an acyclic HP-completion set for R such that $|P| = 2\mu$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geq 1$. Then, there exists another acyclic HP-completion set P' for R such that $|P'| = 2$ and the edges in P' create at most as many crossings with the edges of R as the edges in P do. In addition, the hamiltonian paths induced by P and P' have in common their first and last edges.*

Proof: As in the case of an HP-completion set of odd size (Lemma 29), the 2μ edges in P are two-sided edges. Moreover, since P contains an even number of edges, the first and the last edge of P have opposite direction. Without loss of generality, let the lowermost edge in P be directed from left to right (see Figure 3.19.a). By Lemma 27, it follows that the destination of the lowermost edge in P is the lowermost vertex on the right side of R (i.e., vertex v_1^r) while the origin of the topmost edge in P is the topmost vertex of the right side of R (i.e., vertex v_m^r). Let the

¹Two two-sided edges of an st -Polygon are said to have the *same direction* if their origins lie at the same side of the st -Polygon. Otherwise, they are said to have *opposite directions*.

²A dashed-arrow " \rightsquigarrow " indicates a path that is on the left or the right side of an st -Polygon (or outerplanar graph) and might contain intermediate vertices.

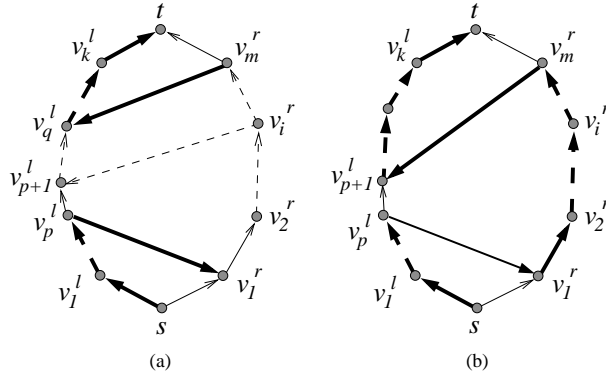


Figure 3.19: An acyclic HP-completion set of even size for an st -Polygon and an equivalent acyclic HP-completion set of size 2.

lowermost edge in P be (v_p^l, v_1^r) . Then, again from Lemma 27, it follows that the HP-completion set P also contains edge (v_i^r, v_{p+1}^l) for some $1 < i \leq m$. If $i = m$, then P contains exactly 2 edges and lemma is trivially true. So, we consider the case where $i < m$.

Observe that, for the case where $|P| > 3$, the set of edges $P' = \{(v_p^l, v_1^r), (v_m^r, v_{p+1}^l)\}$ is an acyclic HP-completion set for R (see Figure 3.19.b). The induced hamiltonian path is $(s \rightarrow v_p^l \rightarrow v_1^r \rightarrow v_m^r \rightarrow v_{p+1}^l \rightarrow t)$.

In order to complete the proof, we show that edges (v_p^l, v_1^r) and (v_m^r, v_{p+1}^l) do not cross more edges of R than the edges in P do. The edges of E that are crossed by the two edges in P' can be classified in the following disjoint groups:

- Edges having their origin below edge (v_p^l, v_1^r) and their destination above edge (v_m^r, v_{p+1}^l) .* All of these edges are crossed by both edges in P' . But, they are also crossed by at least edges (v_p^l, v_1^r) and (v_i^r, v_{p+1}^l) in P .
- Edges having their origin below edge (v_p^l, v_1^r) and their destination between edges (v_p^l, v_1^r) and (v_m^r, v_{p+1}^l) .* All of these edges are only crossed by edge (v_p^l, v_1^r) in P' . But, (v_p^l, v_1^r) also belongs in P .
- Edges having their origin between edges (v_p^l, v_1^r) and (v_m^r, v_{p+1}^l) and their destination above edge (v_m^r, v_{p+1}^l) .* All of these edges are only crossed by edge (v_m^r, v_{p+1}^l) in P' . But, they are also crossed by at least the topmost edge (v_m^r, v_q^l) in P .

Thus, the edges in P' create at most as many crossings with the edges of R as the edges of P do. Observe also that the hamiltonian paths induced by P and P' have in common their first and last edges. \square

The following theorem follows directly from Lemma 29 and Lemma 30.

Theorem 19. *Any st -Polygon has a crossing optimal acyclic HP-completion set of size at most 2.* \square

3.5.2 st -Polygon decomposition of an outerplanar st -digraph

Lemma 31. *Let $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ be an outerplanar st -digraph and $e = (s', t') \in E$ be an arbitrary edge. Denote by V the vertex set of G . If $O(V)$ time is available for the preprocessing of G , we can decide in $O(1)$ time whether e is a median edge of some strong st -Polygon. Moreover,*

the two vertices (in addition to s' and t') that define a maximal strong st -Polygon having edge e as its median can also be computed in $O(1)$ time.

Proof: We can preprocess graph G in linear time so that for each of its vertices we know the first and last (in clock-wise order) in-coming and out-going edges. Observe that an one-sided

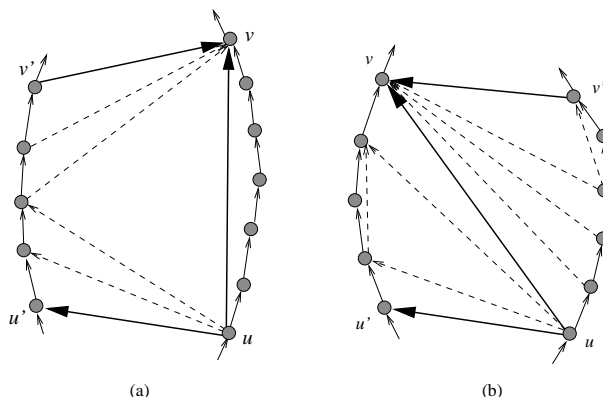


Figure 3.20: st -Polygons with one-sided and two-sided medians. The median and the two edges that bound the st -Polygons are shown in bold.

edge (u, v) is a median of a strong st -Polygon if and only if the following hold (see Figure 3.20.a):

- u and v are not successive vertices of the side of G .
- u has a two-sided outgoing edge.
- v has a two-sided incoming edge.

Similarly, observe that a two-sided edge (u, v) with $u \in V^R$ (respectively $u \in V^L$) is a median of a strong st -Polygon if and only if the following hold (see Figure 3.20.b):

- u has a two-sided outgoing edge that is clock-wise before (respectively after) (u, v) .
- v has a two-sided incoming edge that is clock-wise before (respectively after) (u, v) .

All of the above conditions can be trivially tested in $O(1)$ time. Then, the two remaining vertices that define the maximal strong st -Polygon having (u, v) as its median can be found in $O(1)$ time and, moreover, the strong st -Polygon can be reported in time proportional to its size. \square

Lemma 32. Let $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ be an outerplanar st -digraph and f a face with source u and sink v . Denote by V the vertex set of G . If $O(V)$ time is available for the preprocessing of G , we can decide in $O(1)$ time whether f is a weak rhombus. Moreover, the two vertices (in addition to u and v) that define a maximal weak st -Polygon that contains f can be also computed in $O(1)$ time.

Proof: By definition, a weak rhombus is a face that has at least one vertex on each of its sides. Thus, we can test whether face f is a weak rhombus in $O(1)$ time, if for each face the lists of vertices on its left and right sides are available.

As it was noted in the previous proof, we can preprocess graph G in linear time so that for each of its vertices we know its first and last (in clock-wise order) in-coming and out-going

edges. Then, the two remaining vertices that define the maximal weak st -Polygon having f as a subgraph can be found in $O(1)$ time and it can be reported in time proportional to its size. For example, in Figure 3.21 where vertices u and v are both on the right side, the limiting edges of the maximal weak st -Polygon are the first outgoing edge from u and the last incoming edge to v .

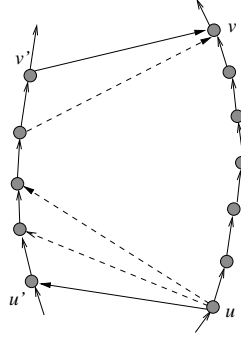


Figure 3.21: The weak rhombus with u and v as its source and sink, respectively, and the maximal st -Polygon containing it.

□

Observe also that, as we extend a weak (strong) rhombus to finally obtain the maximal weak (respectively, strong) st -Polygon that contains it, we include all edges that are outgoing from u and incoming to v . During this procedure, all faces attached to the rhombus are generalized triangles.

Lemma 33. *The maximal st -Polygons contained in an outerplanar st -digraph G are mutually area-disjoint.*

Proof:

We first observe that a maximal st -Polygon cannot fully contain another one. If it does, then we would have a maximal st -Polygon containing two rhombi, which is impossible due to Lemma 28. For the sake of contradiction, assume that two st -Polygons P_1 and P_2 have a partial overlap. We denote by $(s_1, u_1^l, \dots, u_k^l, u_1^r, \dots, u_m^r, t_1)$ and $(s_2, v_1^l, \dots, v_k^l, v_1^r, \dots, v_m^r, t_2)$ the vertices of P_1 and P_2 , respectively. Throughout the proof we refer to Figure 3.22.

Due to the assumed partial overlap of P_1 and P_2 , an edge of one of them, say P_1 , must be contained within the other (say P_2). Below we show that none of the two possible upper limiting edges (u_k^l, t_1) and (u_m^r, t_1) of P_1 can be contained in P_2 .

We have to consider three cases.

Case 1: *One of the edges (u_k^l, t_1) and (u_m^r, t_1) of P_1 coincide with an internal edge of P_2 connecting s_2 with a vertex v_i^l on its left side (the case where it is on its right side is symmetric). Edge (u_k^l, t_1) cannot coincide with (s_2, v_i^l) , since then, edge (u_m^r, t_1) has to be inside P_2 and therefore to connect the left side of P_2 with its right side. This is a contradiction since P_2 is an st -Polygon and it cannot contain any such edge.*

Now assume that edge (u_m^r, t_1) of P_1 coincides with edge (s_2, v_i^l) of P_2 . Then, edge (s_2, v_i^l) is inside P_1 and joins its right with its left side, which is again impossible since P_1 is an st -Polygon.

Case 2: *One of edges (u_k^l, t_1) and (u_m^r, t_1) of P_1 coincides with an internal edge of P_2 connecting*

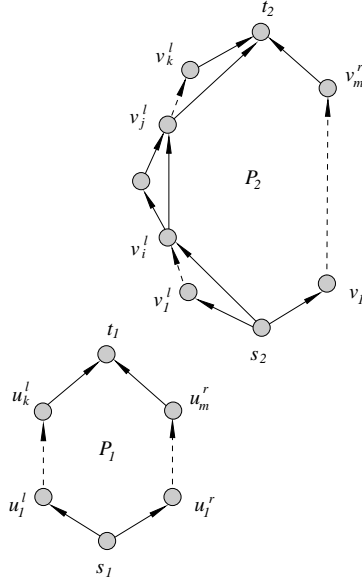


Figure 3.22: Two st-Polygons from the proof of Lemma 33

two vertices on its same side. Let it again be the left side and denote the edge by (v_i^l, v_j^l) . Assume first that (u_m^r, t_1) coincides with (v_i^l, v_j^l) . As graph P_2 is outerplanar, we have that all the remaining vertices of P_1 have to be placed above vertex v_i^l and below vertex v_j^l on the left side of P_2 . Therefore P_1 is fully contained in P_2 , which is impossible.

Assume now that (u_k^l, t_1) coincides with edge (v_i^l, v_j^l) . Then, edge (u_m^r, t_1) of P_1 coincides with edge $(v_{i'}^l, v_{j'}^l)$ of P_2 , $i' < i$. This is impossible as it was covered in the above paragraph. Note also that $v_{i'}^l$ cannot be s_2 since this configuration was shown to be impossible in Case 1.

Case 3: One of edges (u_k^l, t_1) and (u_m^r, t_1) of P_1 coincides with an internal edge of P_2 connecting the vertex on its side (suppose again on its left side) with sink t_2 . Let this edge be denoted by (v_j^l, t_2) . Suppose first that (u_k^l, t_1) coincides with (v_j^l, t_2) . If vertex u_m^r is on the right side of P_2 then P_1 is not maximal as P_1 can be extended (and still remain an st-Polygon) by including in it vertices v_j^l to v_k^l . So, assume that u_m^r is on the left side of P_2 . Then, as covered in Case 2, P_1 must be fully contained in P_2 which leads to a contradiction.

Assume now that edge (u_m^r, t_1) coincides with edge (v_j^l, t_2) . Due to the outer-planarity of P_2 , we have again that all the vertices of P_1 have to be placed above v_j^l and below t_2 on the left side of P_2 . So P_1 is again fully contained in P_2 , leading again to a contradiction.

We have managed to show that none of edges (u_k^l, t_1) and (u_m^r, t_1) is contained in P_2 . Therefore, there can be no partial overlap between P_1 and P_2 . \square

Denote by $\mathcal{R}(G)$ the set of all maximal st-Polygons of an outerplanar st-digraph G . Observe that not every vertex of G belongs to one of its maximal st-Polygons. We refer to the vertices of G that are not part of any maximal st-Polygon as *free vertices* and we denote them by $\mathcal{F}(G)$. Also observe that an ordering can be imposed on the maximal st-Polygons of an outerplanar st-digraph G based on the ordering of the area disjoint strips occupied by each st-Polygon. The vertices which do not belong to any st-Polygon are located in the area between the strips occupied by consecutive st-Polygons.

Lemma 34. Let R_1 and R_2 be two consecutive maximal st -Polygons of an outerplanar st -digraph G which do not share an edge and let $V_f \subseteq \mathcal{F}(G)$ be the set of free vertices lying between R_1 and R_2 . Denote by (u, t_1) and (s_2, v) the upper limiting edge and the lower limiting edge of R_1 and R_2 , respectively. For the embedded subgraph G_f of G induced by the vertices of $V_f \cup \{u, t_1, s_2, v\}$ it holds:

- G_f is an outerplanar st -digraph having vertices u and v as its source and sink, respectively.
- G_f is hamiltonian.

Proof: We first show that statement (a) is true, that is, G_f is an outerplanar st -digraph having vertices u and v as its source and sink, respectively. Without loss of generality, assume that the limiting edge (s_2, v) of the upper maximal st -Polygon R_2 is directed towards the right side of the outerplanar st -digraph G . We consider cases based on whether R_1 and R_2 share a common vertex.

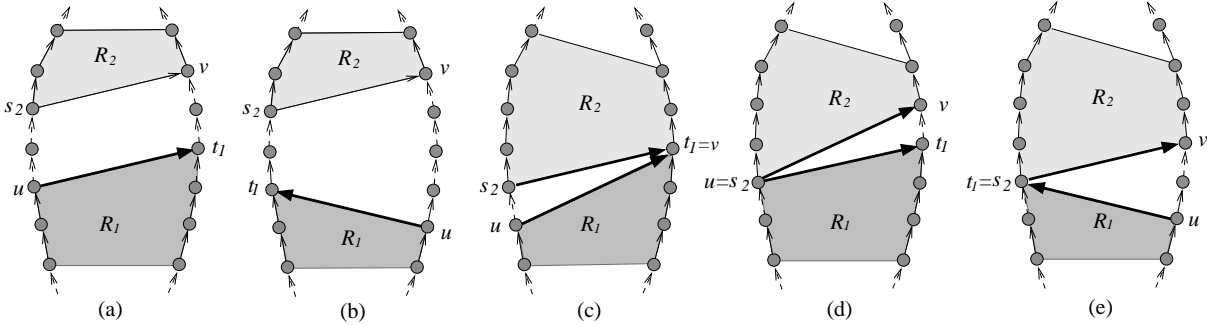


Figure 3.23: The configurations of two st -Polygons used in the proof of Lemma 34.

Case 1: R_1 and R_2 share no common vertex. Based on the direction of the limiting edge (u, t_1) we can further distinguish the following two cases:

Case 1a: (u, t_1) is directed towards the right side of G .

See Figure 3.23.a.

Case 1b: (u, t_1) is directed towards the left side of G .

See Figure 3.23.b.

In both of the above cases, we observe that G_f forms an st -Polygon (or, a rhombus) which contradicts the fact that R_1 and R_2 are consecutive maximal st -Polygons. Thus, Case 1 cannot occur.

Case 2: R_1 and R_2 share one common vertex. First observe that the limiting edge (u, t_1) of R_1 is directed towards the left side of G . To see that, assume for the sake of contradiction that edge (u, t_1) is directed towards the right side of G . If v coincides with t_1 (see Figure 3.23.c) then the st -Polygon R_1 could be extended (and still remain an st -Polygon) by adding to it the area between the two polygons R_1 and R_2 , contradicting the fact that R_1 is maximal. If u coincides with s_2 (see Figure 3.23.d) then the st -Polygon R_2 could be extended (and still remain an st -Polygon) by adding to it the area between the two polygons R_1 and R_2 , contradicting the fact that R_2 is maximal. Thus, the limiting edge (u, t_1) of R_1 is directed towards the left side of G and s_2 coincides with t_1 (see Figure 3.23.e). The rest of the proof is a special case of Case 1b

(where no vertices of V_f exist on the left side of G).

So G_f is an outerplanar st -digraph with the source u and the sink v . Note also that G_f does not contain a rhombus. If it does, then it would be an st -Polygon, contradicting the fact that R_1 and R_2 are consecutive maximal st -Polygons. Then, from Theorem 18 it follows that G_f is hamiltonian. \square

Lemma 35. *Let R_1 and R_2 be two consecutive maximal st -Polygons of an outerplanar st -digraph G that share a common edge. Let t_1 be the sink of R_1 and s_2 be the source of R_2 . Then, edge (s_2, t_1) is their common edge.*

Proof: Let the upper limiting edge of R_1 be edge (u, t_1) and the lower limiting edge of R_2 be edge (s_2, v) . Since these are the only two edges that can coincide, we conclude that v coincides with t_1 and u coincides with s_2 . Thus, edge (s_2, t_1) is the edge shared by R_1 and R_2 . \square

Lemma 36. *Let G be an outerplanar st -digraph. Let R_1 and R_2 be two G 's consecutive maximal st -Polygons and let $V_f \subseteq \mathcal{F}(G)$ be the set of free vertices lying between R_1 and R_2 . Then, the following statements hold:*

- a) *For any pair of vertices $u, v \in V_f$ there is either a path from u to v or from v to u .*
- b) *For any vertex $v \in V_f$ there are a path from the sink of R_1 to v and a path from v to the source of R_2 .*
- c) *If $V_f = \emptyset$, then there is a path from source of R_1 to the source of R_2 .*

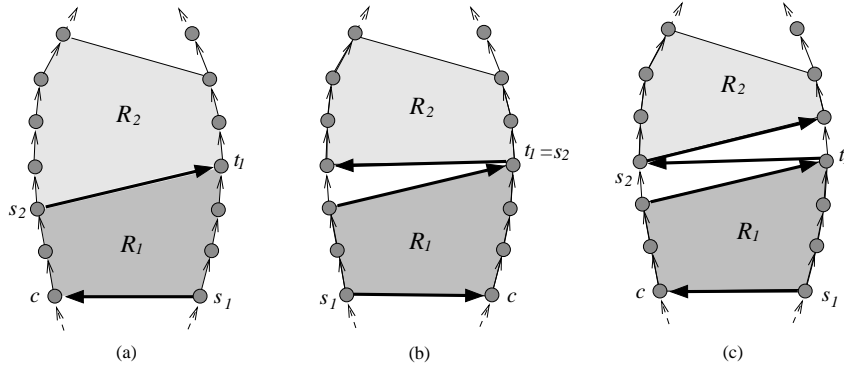


Figure 3.24: The configurations of adjacent st -Polygons of an outerplanar st -digraph.

Proof:

- a) From Lemma 34 we have that the subgraph G_f of G (as defined in the proof of Lemma 34) is hamiltonian. Thus, all vertices in V_f are connected by a directed path.
- b) Follows directly from Lemma 34.
- c) Note that there are 3 configuration in which no free vertex exists between two consecutive st -Polygons (see Figures 3.24.a-c). Denote by s_1 and s_2 the sources of R_1 and R_2 , respectively. If s_1 and s_2 lie on the same side of G then the claim is obviously true since G is an outerplanar st -digraph. If they belong to opposite sides of G , observe that the lower limiting edge (s_1, c) of R_1 leads to the side of G which contains s_2 . Since there is a path from c to s_2 , it follows that there is a path from s_1 to s_2 .

□

We refer to the source vertex s_i of each maximal st -Polygon $R_i \in \mathcal{R}(G)$, $1 \leq i \leq |\mathcal{R}(G)|$ as the *representative* of R_i and we denote it by $r(R_i)$. We also define the representative of a free vertex $v \in \mathcal{F}(G)$ to be v itself, i.e. $r(v) = v$. For any two distinct elements $x, y \in \mathcal{R}(G) \cup \mathcal{F}(G)$, we define the relation \angle_p as follows: $x \angle_p y$ if and only if there exists a path from $r(x)$ to $r(y)$.

Lemma 37. *Let G be an n -vertex outerplanar st -digraph. Then, relation \angle_p defines a total order on the elements $\mathcal{R}(G) \cup \mathcal{F}(G)$. Moreover, this total order can be computed in $O(n)$ time.*

Proof: The fact that \angle_p is a total order on $\mathcal{R}(G) \cup \mathcal{F}(G)$ follows from Lemma 36. The order of the elements of $\mathcal{R}(G) \cup \mathcal{F}(G)$ can be easily derived by the numbers assigned to the representatives of the elements (i.e., to vertices of G) by a topological sort of the vertices of G . To complete the proof, recall that an n -vertex acyclic planar graph can be topologically sorted in $O(n)$ time. □

Definition 6. *Given an outerplanar st -digraph G , the st -Polygon decomposition $\mathcal{D}(G)$ of G is defined to be the total order $\{o_1, \dots, o_{\hat{n}}\}$ induced by relation \angle_p on its maximal st -Polygons and its free vertices, that is, o_i , $1 \leq i \leq \hat{n}$, is either a maximal st -Polygon or a free vertex of G and $o_i \angle_p o_{i+1}$, $1 \leq i < \hat{n}$.*

The following theorem follows directly from Lemma 31, Lemma 32 and Lemma 37.

Theorem 20. *An st -Polygon decomposition of an n -vertex outerplanar st -digraph G can be computed in $O(n)$ time.*

3.5.3 Properties of a crossing-optimal acyclic HP-completion set

In this section, we present three properties of crossing-optimal acyclic HP-completion sets for an outerplanar st -digraph that will be taken into account by our algorithm. Let $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ be an outerplanar st -digraph and $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_{\hat{n}}\}$ its st -Polygon decomposition. As G_i we denote the graph induced by the vertices of elements o_1, \dots, o_i , $i \leq \hat{n}$.

Proposition 3. *Let $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ be an outerplanar st -digraph. Then, no edge of E is crossed by more than 2 edges of a crossing-optimal acyclic HP-completion set for G .*

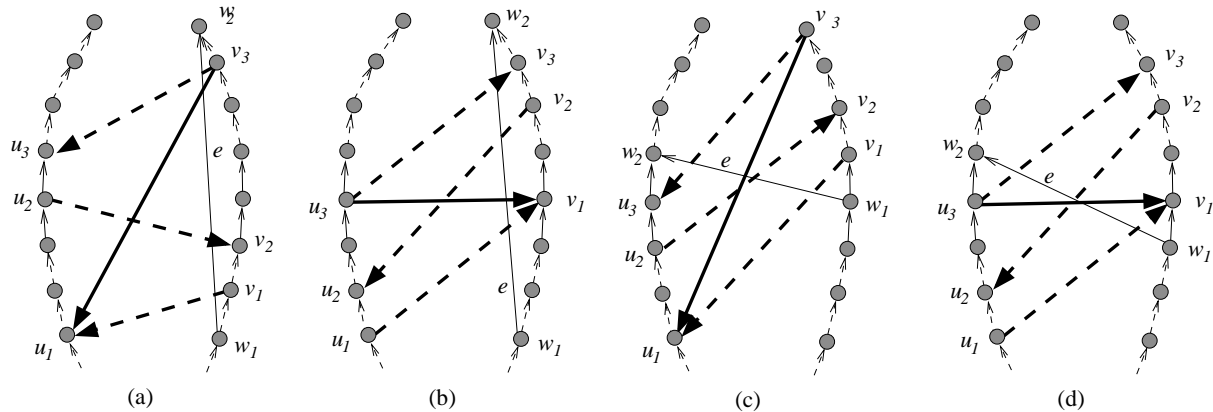


Figure 3.25: The configurations of crossing edges used in the proof of Property 3.

Proof: For the sake of contradiction, assume that P_{opt} is a crossing-optimal acyclic HP-completion set for G , the edges of which cross some edge $e = (w_1, w_2)$ of G three times. We will show that we can obtain an acyclic HP-completion set for G that induces a smaller number of crossings than P_{opt} , a clear contradiction. We assume that all edges of P_{opt} participate in the hamiltonian path of G ; otherwise they can be discarded.

We distinguish two cases based on whether edge e is one-sided or two-sided.

Case 1: The edge e is one-sided. Suppose without loss of generality that e is on the right side. We further distinguish two cases based on the orientation of the edge, say e_1 , which appears first on the hamiltonian path of G (out of the 3 edges crossing edge e).

Case 1a: Edge e_1 is directed from right to left. Let e_1 be edge (v_1, u_1) and let (u_2, v_2) and (v_3, u_3) be the other two edges on the hamiltonian path which cross e (see Figure 3.25.a). It is clear that these three edges have alternating direction. Observe that the path $P_{v_1, u_3} = (v_1 \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow u_3)$ is a sub-path of the hamiltonian path of G . Also, by Lemma 27, vertex u_2 is immediately below vertex u_3 on the left side of G and vertex v_2 is immediately above vertex v_1 on the right side of G .

Now, we show that the substitution of path P_{v_1, u_3} of the hamiltonian path of G by path $P'_{v_1, u_3} = (v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3)$ results in a reduction of the total number of crossings by at least 2. Thus, there exists an HP-completion set that crosses edge e only once and causes 2 crossings less with edges of G compared to P_{opt} , a clear contradiction.

Let us examine the edges of G that are crossed by the new edge (v_3, u_1) . These edges can be grouped as follows: (i) The one-sided edges on the right side of G that have their source below v_3 and their sink above v_3 . Note that these edges are also crossed by edge (v_3, u_3) . In addition, the edges that belong to this group and have their origin below w_1 and their sink above w_2 are crossed by all three edges (v_1, u_1) , (u_2, v_2) and (v_3, u_3) in the original HP-completion set. (ii) The two-sided edges that have their source below w_1 on the right side of G and their sink above v_1 on the left side of G . These edges are also crossed by at least edge (v_1, u_1) (and possibly by one or both of edges (u_2, v_2) and (v_3, u_3)). (iii) The one-sided edges on the left side of G that have their source below u_1 and their sink above u_1 . Note that these edges are also crossed by at least edge (v_1, u_1) (and possibly by one or both of edges (u_2, v_2) and (v_3, u_3)). (iv) The two sided edges that have their source below u_1 on the left side of G and their sink above w_2 on the right side of G . These edges are also crossed by all three edges (v_1, u_1) , (u_2, v_2) and (v_3, u_3) . Thus, we have shown that edge (v_3, u_1) crosses at most as many edges of G as the three edges (v_1, u_1) , (u_2, v_2) , (v_3, u_3) taken together.

Case 1b: Edge e_1 is directed from left to right. Let e_1 be edge (u_1, v_1) and let (v_2, u_2) and (u_3, v_3) be the next two edges on the hamiltonian path which cross e (see Figure 3.25.b). Observe that the path $P_{u_1, v_3} = (u_1 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow v_3)$ is a sub-path of the hamiltonian path of G . Also, by Lemma 27, vertex u_2 is immediately above vertex u_1 on the left side of G and vertex v_2 is immediately below vertex v_3 on the right side of G . By arguing in a way similar to that of Case 1a, we can show that the substitution of path P_{u_1, v_3} of the hamiltonian path of G by path $P'_{u_1, v_3} = (u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3)$ results in a reduction of the total number of crossings by at least 2.

Case 2: Edge e is two-sided. Assume without loss of generality that e is directed from right to left. We again distinguish two cases based on the orientation of the edge, say e_1 , which appears first on the hamiltonian path of G (out of the 3 edges crossing edge e).

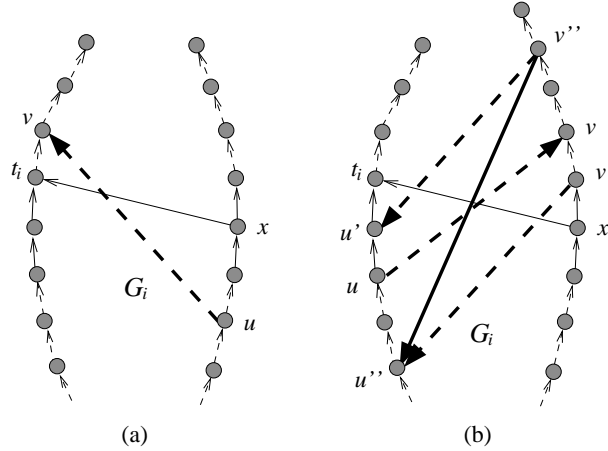


Figure 3.26: The configurations of crossing edges used in the proof of Property 4.

Case 2a: Edge e_1 is directed from right to left. The proof is identical to that of Case 1a.

Case 2b: Edge e_1 is directed from left to right. The proof is identical to that of Case 1b. \square

Proposition 4. Let $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ be an outerplanar st -digraph and let $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_{\hat{n}}\}$ be its st -Polygon decomposition. Then, there exists a crossing-optimal acyclic HP-completion set for G such that, for every maximal st -Polygon $o_i \in \mathcal{D}(G)$, $i \leq \hat{n}$, the HP-completion set does not contain any edge that crosses the upper limiting edge of o_i and leaves G_i .

Proof: Let $e = (x, t_i)$ be the upper limiting edge of o_i and assume without loss of generality that it is directed from right to left. Also assume a crossing-optimal acyclic HP-completion set P_{opt} that violates the stated property, that is, it contains an edge $\tilde{e} = (u, v)$, $u \in G_i$, that crosses the limiting edge e . Based on Lemma 27, we conclude that edge \tilde{e} is a two-sided edge, otherwise the vertices of a single side appear out of order in the hamiltonian path induced by P_{opt} . We distinguish two cases based on direction of the two-sided edge \tilde{e} .

Case 1: Edge $\tilde{e} = (u, v)$ is directed from right to left. See Figure 3.26.a. By Lemma 27, in the hamiltonian path induced by P_{opt} vertex x is visited after vertex u . So, in the resulting HP-completed digraph, there must be a path from v to x which, together with (x, t_i) and the path $(t_i \rightarrow v)$ on the left side of G forms a cycle. This contradicts the fact that P_{opt} is an acyclic HP-completion set.

Case 2: Edge $\tilde{e} = (u, v)$ is directed from left to right. See Figure 3.26.b. Denote by v' the vertex positioned immediately below vertex v (note that v' may coincide with x) and by u' the vertex that is immediately above u (note that u' may coincide with t_i).

Consider the hamiltonian path induced by P_{opt} . By Lemma 27 it follows that before crossing to the right side of G using edge (u, v) it had visited all vertices on the right side which are placed below v , and thus, there is an edge $(v', u'') \in P_{\text{opt}}$, where u'' is some vertex below u on the left side of G . Now note that, by Lemma 27, vertex u' has to appear in the hamiltonian path after vertex u , and thus, there exists an edge $(v'', u') \in P_{\text{opt}}$ where v'' is a vertex above v on the right side of G .

By arguing in a way similar to that of Property 3, we can show that the substitution of path $P_{v',u'} = (v' \rightarrow u'' \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow v'' \rightarrow u')$ of the hamiltonian path of G by path $P'_{v',u'} = (v' \rightarrow v'' \rightarrow u'' \rightarrow u')$ does not result in an increase of the number of edge crossings. More specifically, when v' does not coincide with x and/or u' does not coincide with t_i , the resulting new path causes at least one less crossing, contradiction the optimality of P_{opt} . In the case where v' coincides with x and u' coincides with t_i and the two hamiltonian paths cause the same number of crossings, the new HP-completion set has the desired property, that is, none of its edges crosses the limiting edge (x, t_i) and leaves G_i . \square

Proposition 5. *Let $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ be an outerplanar st-digraph and let $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_{\hat{n}}\}$ be its st-Polygon decomposition. Then, in every crossing-optimal acyclic HP-completion set for G and for every maximal st-Polygon $o_i \in \mathcal{D}(G)$, $i \leq \hat{n}$, at most one edge crosses the upper limiting edge of o_i .*

Proof: Let edge $e = (x, t_i)$ be the upper limiting edge of o_i . Without loss of generality assume that it is directed from the right to the left side of G , and let v be the vertex immediately above x on the right side of G and u be the vertex immediately below t_i on the left side of G . By Property 3, we have that the edges of a crossing-optimal acyclic HP-completion set for G do not cross e three or more times.

For the sake of contradiction assume that there is a crossing-optimal acyclic HP-completion set P_{opt} for G that crosses edge e twice. Let $e_1, e_2 \in P_{\text{opt}}$ be the edges which cross e . Clearly, these two edges cross e in the opposite direction and do not cross each other. Let e_1 be the edge that crosses e and leaves G_i . Observe that e_1 has opposite direction to that of e , otherwise a cycle is created. Then, since e_1 does not cross e_2 , edge e_1 does not coincide with (u, v) . However, for the case where $e_1 \neq (u, v)$, we established in the proof of Property 4 (Case 2) that we are always able to build an acyclic HP-completion set that induced less crossings than P_{opt} , a clear contradiction.³ \square

The following theorem states that there always exists a crossing-optimal acyclic HP-completion set for outerplanar st-digraphs that has certain properties. The algorithm which we present in the next section, focuses only on an HP-completion set satisfying these properties.

Theorem 21. *Let $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ be an outerplanar st-digraph and let $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_{\hat{n}}\}$ be its st-Polygon decomposition. Then, there exists a crossing-optimal acyclic HP-completion set P_{opt} for G such that it satisfies the following properties:*

- a) *Each edge of E is crossed by at most two edges of P_{opt} .*
- b) *Each upper limiting edge e_i of any maximal st-Polygon o_i , $i \leq \hat{n}$, is crossed by at most one edge of P_{opt} . Moreover, the edge crossing e_i , if any, enters G_i .*

Proof: Follows directly from Properties 3, 4 and 5. \square

3.5.4 The algorithm

The algorithm for obtaining a crossing-optimal acyclic HP-completion set for an outerplanar st-digraph G is a dynamic programming algorithm based on the st-Polygon decomposition $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_{\hat{n}}\}$ of G . The following lemmata allow us to compute a crossing-optimal acyclic

³The proof is identical and for this reason it is not repeated

HP-completion set for an st -Polygon and to obtain a crossing-optimal acyclic HP-completion set for G_{i+1} by combining an optimal solution for G_i with an optimal solution for o_{i+1} .

Let G be an outerplanar st -digraph. We denote by $S(G)$ the hamiltonian path on the HP-extended digraph of G obtained when a crossing-optimal HP-completion set is added to G . Note that if we are only given $S(G)$ we can infer the size of the HP-completion set and the number of edge crossings. Denote by $c(G)$ the number of edge crossings caused by the HP-completion set inferred by $S(G)$. If we are restricted to Hamiltonian paths that enter the sink of G from a vertex on the left (respectively right) side of G , then we denote the corresponding size of HP-completion set by $c(G, L)$ (respectively $c(G, R)$). Obviously, $c(G) = \min\{c(G, L), c(G, R)\}$. Moreover, the notation can be extended so that we denote by $c^i(G, L)$ ($c^i(G, R)$) the number of crossings for HP-completion sets that contain exactly i edges, provided they exist. By Theorem 19, we know that the size of a crossing-optimal acyclic HP-completion set for an st -Polygon is at most 2. This notation that restricts the size of the HP-completion set will be used only for st -Polygons and thus, only the terms $c^1(G, L)$, $c^1(G, R)$, $c^2(G, L)$ and $c^2(G, R)$ will be utilized.

We use the operator \oplus to indicate the concatenation of two paths. By convention, the hamiltonian path of a single vertex is the vertex itself.

Lemma 38. *Let $o = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ be an n -vertex st -Polygon. A crossing-optimal acyclic HP-completion set for o and the corresponding number of crossings can be computed in $O(n)$ time.*

Proof: From Lemma 29 and Lemma 30 it follows that it is sufficient to look through all HP-

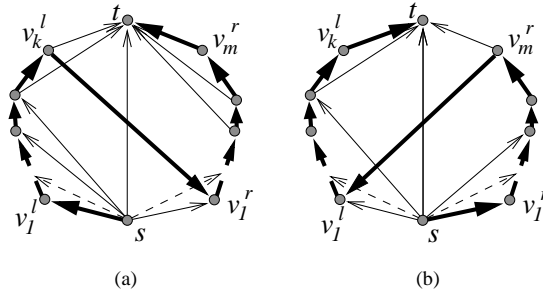


Figure 3.27: The two single-edge HP-completion sets of an st -Polygon.

completion sets with one or two edges in order to find a crossing-optimal acyclic HP-completion set. Let $V^l = \{v_1^l, \dots, v_k^l\}$ and $V^r = \{v_1^r, \dots, v_m^r\}$, where the subscripts indicate the order in which the vertices appear on the left (right) boundary of o . Suppose that $I : V \times V \rightarrow \{0, 1\}$ is an indicator function such that $I(u, v) = 1$ if and only if $(u, v) \in E$.

The only two possible HP-completion sets consisting of exactly one edge are $\{(v_k^l, v_1^r)\}$ and $\{(v_m^r, v_1^l)\}$.

Edge (v_k^l, v_1^r) crosses all edges connecting t with vertices in $V_l \setminus \{v_k^l\}$, the median (provided it exists), and all edges connecting s with vertices in $V_r \setminus \{v_1^r\}$ (see Figure 3.27.a). It follows that:

$$c^1(o, R) = I(s, t) + \sum_{i=2}^{k-1} I(v_i^l, t) + \sum_{i=2}^{m-1} I(s, v_i^r).$$

Similarly, edge (v_m^r, v_1^l) crosses all edges connecting t with vertices in $V_r \setminus \{v_m^r\}$, the median (provided it exists), and all edges connecting s with vertices in $V_l \setminus \{v_1^l\}$ (see Figure 3.27.b). It

follows that:

$$c^1(o, L) = I(s, t) + \sum_{i=2}^{m-1} I(v_i^r, t) + \sum_{i=2}^{k-1} I(s, v_i^l).$$

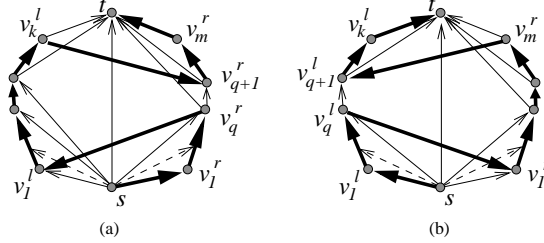


Figure 3.28: The two-edge HP-completion sets of an *st*-Polygon.

Consider now an acyclic HP-completion set of size 2. Assume that the lowermost edge leaves vertex v_q^r on the right side of o (see Figure 3.28.a). Then, it must enter vertex v_1^l . Moreover, the second edge of the acyclic HP-completion set must leave vertex v_k^l and enter vertex v_{q+1}^r . Thus, the HP-completion set is $\{(v_q^r, v_1^l), (v_k^l, v_{q+1}^r)\}$ and, as we observe, it can be put into correspondence with edge (v_q^r, v_{q+1}^r) on the right side of o . In addition, we observe that the hamiltonian path enters t from the right side. An analogous situation occurs when the lowermost edge leaves the left side of o (see Figure 3.28.b).

We denote by $c_q^2(o, R)$ the number of crossings caused by the completion set associated with the edge originating at the q^{th} lowermost vertex on the right side of o . Similarly we define $c_q^2(o, L)$. $c_q^2(o, R)$ can be computed as follows:

$$\begin{aligned} c_q^2(o, R) &= 2 \cdot I(s, t) + \sum_{i=1}^{k-1} I(v_i^l, t) + \sum_{i=2}^k I(s, v_i^l) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{q-1} I(v_i^r, t) + \\ & 2 \cdot \sum_{i=q+2}^m I(s, v_i^r) + I(v_q^r, t) + I(s, v_{q+1}^r) \end{aligned}$$

Then, the optimal solution where the hamiltonian path terminates on the right side of o can be taken as the minimum over all $c_q^2(o, R)$, $1 \leq q \leq m - 1$:

$$c^2(o, R) = \min_{1 \leq q \leq m-1} \{c_q^2(o, R)\}.$$

Similarly, $c_q^2(o, L)$ can be computed as follows:

$$\begin{aligned} c_q^2(o, L) &= 2 \cdot I(s, t) + \sum_{i=1}^{m-1} I(v_i^r, t) + \sum_{i=2}^m I(s, v_i^r) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{q-1} I(v_i^l, t) + \\ & 2 \cdot \sum_{i=q+2}^k I(s, v_i^l) + I(v_q^l, t) + I(s, v_{q+1}^l). \end{aligned}$$

Then, the optimal solution where the hamiltonian path terminates on the left side of o can be taken as the minimum over all $c_q^2(o, L)$, $1 \leq q \leq k - 1$:

$$c^2(o, L) = \min_{1 \leq q \leq k-1} \{c_q^2(o, L)\}.$$

So, now, the number of crossings that corresponds to the optimal solution can be computed as follows:

$$c(o) = \min\{c^1(o, L), c^1(o, R), c^2(o, L), c^2(o, R)\}.$$

It is clear that $c^1(o, R)$ and $c^1(o, L)$ can be computed in time $O(n)$. It is also easy to see that any $c_q^2(o, R)$ can be computed from $c_{q-1}^2(o, R)$ in constant time, while $c_1^2(o, R)$ can be computed

Algorithm 3: ACYCLIC-HPC-CM(G)**input** : An Outerplanar st -digraph $G(V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$.**output** The minimum number of edge crossings $c(G)$ resulting from the addition of a: crossing-optimal acyclic HP-completion set to G .

1. Compute the st -Polygon decomposition $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_{\hat{n}}\}$ of G ;
2. For each element $o_i \in \mathcal{D}(G)$, $1 \leq i \leq \hat{n}$, compute $c^1(o_i, L)$, $c^1(o_i, R)$ and $c^2(o_i, L)$, $c^2(o_i, R)$:
 - if** o_i is a free vertex, **then** $c^1(o_i, L) = c^1(o_i, R) = c^2(o_i, L) = c^2(o_i, R) = 0$.
 - if** o_i is an st -Polygon, **then** $c^1(o_i, L)$, $c^1(o_i, R)$, $c^2(o_i, L)$, $c^2(o_i, R)$ are computed based on Lemma 38.
3. **if** o_1 is a free vertex, **then** $c(G_1, L) = c(G_1, R) = 0$;
else $c(G_1, L) = \min\{c^1(o_1, L), c^2(o_1, L)\}$ and
 $c(G_1, R) = \min\{c^1(o_1, R), c^2(o_1, R)\}$;
4. For $i = 1 \dots \hat{n} - 1$, compute $c(G_{i+1}, L)$ and $c(G_{i+1}, R)$ as follows:
 - if** o_{i+1} is a free vertex, **then**
 $c(G_{i+1}, L) = c(G_{i+1}, R) = \min\{c(G_i, L), c(G_i, R)\}$;
 - else-if** o_{i+1} is an st -Polygon sharing **at most** one vertex with G_i , **then**
 $c(G_{i+1}, L) = \min\{c(G_i, L), c(G_i, R)\} + \min\{c^1(o_{i+1}, L), c^2(o_{i+1}, L)\}$;
 $c(G_{i+1}, R) = \min\{c(G_i, L), c(G_i, R)\} + \min\{c^1(o_{i+1}, R), c^2(o_{i+1}, R)\}$;
 - else** $\{ o_{i+1}$ is an st -Polygon sharing **exactly** two vertices with $G_i\}$,
if $t_i \in V^l$, **then**

$$c(G_{i+1}, L) = \min\{c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, L) + 1, c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, L),$$

$$c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, L), c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, L)\}$$

$$c(G_{i+1}, R) = \min\{c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, R), c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, R),$$

$$c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, R) + 1, c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, R)\}$$
 - else** $\{ t_i \in V^r \}$

$$c(G_{i+1}, L) = \min\{c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, L), c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, L),$$

$$c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, L), c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, L) + 1\}$$

$$c(G_{i+1}, R) = \min\{c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, R), c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, R) + 1,$$

$$c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, R), c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, R)\}$$
5. **return** $c(G) = \min\{c(G_{\hat{n}}, L), c(G_{\hat{n}}, R)\}$

in time $O(n)$. Therefore, $c^2(o, R)$, as well as $c^2(o, L)$, can be computed in linear time. Thus, we conclude that a crossing-optimal acyclic HP-completion set for any n -vertex st -Polygon o and its corresponding number of crossings can be computed in $O(n)$ time. \square

Let $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_{\hat{n}}\}$ be the st -Polygon decomposition of G , where element o_i , $1 \leq i \leq \hat{n}$, is either an st -Polygon or a free vertex. Recall that, we denote by G_i , $1 \leq i \leq \hat{n}$, the graph induced by the vertices of elements o_1, \dots, o_i . Graph G_i is also an outerplanar st -digraph. The same holds for the subgraph of G that is induced by any number of consecutive elements of $\mathcal{D}(G)$.

Lemma 39. *Let G be an outerplanar st -digraph and $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_{\hat{n}}\}$ be its st -Polygon decomposition. Consider any two consecutive elements o_i and o_{i+1} of $\mathcal{D}(G)$ that share at most one vertex. Then, the following statements hold:*

- (i) $S(G_{i+1}) = S(G_i) \oplus S(o_{i+1})$, and
- (ii) $c(G_{i+1}) = c(G_i) + c(o_{i+1})$.

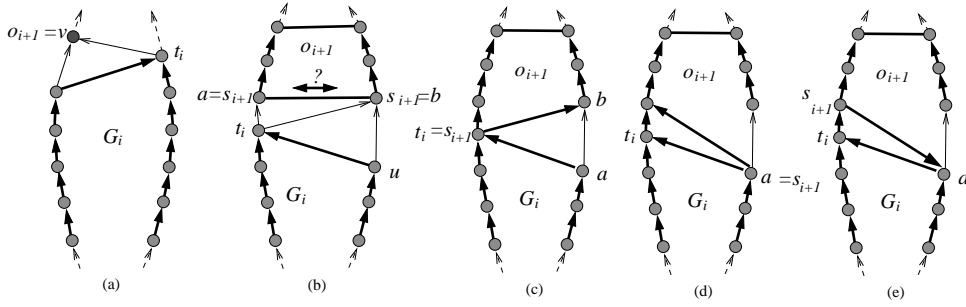


Figure 3.29: The configurations used in the proof of Lemma 39.

Proof: We proceed to prove first statement (i). There are three cases to consider in which 2 consecutive elements of $\mathcal{D}(G)$ share at most 1 vertex.

Case 1: Element $o_{i+1} = v$ is a free vertex (see Figure 3.29.a). By Lemma 36, if o_i is either a free vertex or an *st*-Polygon, there is an edge connecting the sink of o_i to v . Also observe that if v was not the last vertex of $S(G_{i+1})$ then the crossing-optimal HP-completion set had to include an edge from v to some vertex of G_i . This is impossible since it would create a cycle in the HP-extended digraph of $S(G_{i+1})$.

Case 2: Element o_{i+1} is an *st*-Polygon that shares no common vertex with G_i (see Figure 3.29.b). Without loss of generality, assume that the sink of G_i is located on its left side. We first observe that edge (t_i, s_{i+1}) exists in G . If s_{i+1} is on the left side of G , we are done. Note that there can be no other vertex between t_i and s_{i+1} in this case, because then o_i and o_{i+1} would not be consecutive. If s_{i+1} is on the right side of G , realize that the area between two *st*-Polygons o_i and o_{i+1} cannot be free of edges, as it is a weak *st*-Polygon. Note also that the edge (u, a) cannot exist in G , since, if it existed, the area between the two polygons would be a strong *st*-Polygon with (u, a) as its median. Thus, that area can only contain the edge (t_i, s_{i+1}) . Thus, as indicated in Figure 3.29.b, each of the end-vertices of the lower limiting edge of o_{i+1} can be its source. Since edge (t_i, s_{i+1}) exists, the solution $S(o_{i+1})$ can be concatenated to $S(G_i)$ and yield a valid hamiltonian path for G_{i+1} . Now notice that in $S(G_{i+1})$ all vertices of G_i have to be placed before the vertices of o_{i+1} . If this was not the case, then the crossing-optimal HP-completion set had to include an edge from a vertex v of o_{i+1} to some vertex u of G_i . This is impossible since it would create a cycle in the HP-extended digraph of $S(G_{i+1})$.

Case 3: Element o_{i+1} is an *st*-Polygon that shares one common vertex with G_i (see Figure 3.29.c). Without loss of generality, assume that the sink t_i of G_i is located on its left side. Firstly, notice that the vertex shared by G_i and o_{i+1} has to be vertex t_i . To see that, let a be the upper vertex at the right side of G_i . Then, edge (a, t_i) exists since t_i is the sink of G_i . For the sake of contradiction assume that a was the vertex shared between G_i and o_{i+1} . If a was also the source of o_{i+1} (see Figure 3.29.d) then o_{i+1} wouldn't be maximal (edge (a, t_i) should also belong to o_{i+1}). If s_{i+1} was on the left side (see Figure 3.29.e), then a cycle would be formed involving edges (t_i) , (t_i, s_{i+1}) and (s_{i+1}, a) , which is impossible since G is acyclic. Thus, the vertex shared by G_i and o_{i+1} has to be vertex t_i . Secondly, observe that t_i must coincide with vertex s_{i+1} (see Figure 3.29.c). If s_{i+1} coincided with vertex b , then the *st*-Polygon o_i wouldn't be maximal since edge (b, t_i) should also belong to o_i . We conclude that t_i coincides with s_{i+1} and, thus, the solution $S(o_{i+1})$ can be concatenated to $S(G_i)$ and yield a valid hamiltonian path for G_{i+1} . To complete the proof for this case, we can show by contradiction (on the acyclicity of G ; as in Case 2) that in $S(G_{i+1})$ all vertices of G_i have to be placed before the vertices of o_{i+1} .

Now observe that statement (ii) is trivially true since, in all three cases, the hamiltonian paths $S(G_i)$ and $S(o_{i+1})$ were concatenated by using at most one additional edge of graph G . Since G is planar, no new crossings are created. \square

Lemma 40. *Let G be an outerplanar st -digraph and $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_{\bar{n}}\}$ be its st -Polygon decomposition. Consider any two consecutive elements o_i and o_{i+1} of $\mathcal{D}(G)$ that share an edge. Then, the following statements hold:*

1. $t_i \in V^l \Rightarrow c(G_{i+1}, L) = \min\{ c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, L) + 1, c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, L), c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, L), c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, L) \}.$
2. $t_i \in V^l \Rightarrow c(G_{i+1}, R) = \min\{ c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, R), c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, R), c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, R) + 1, c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, R) \}.$
3. $t_i \in V^r \Rightarrow c(G_{i+1}, L) = \min\{ c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, L), c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, L), c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, L), c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, L) + 1 \}.$
4. $t_i \in V^r \Rightarrow c(G_{i+1}, R) = \min\{ c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, R), c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, R) + 1, c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, R), c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, R) \}.$

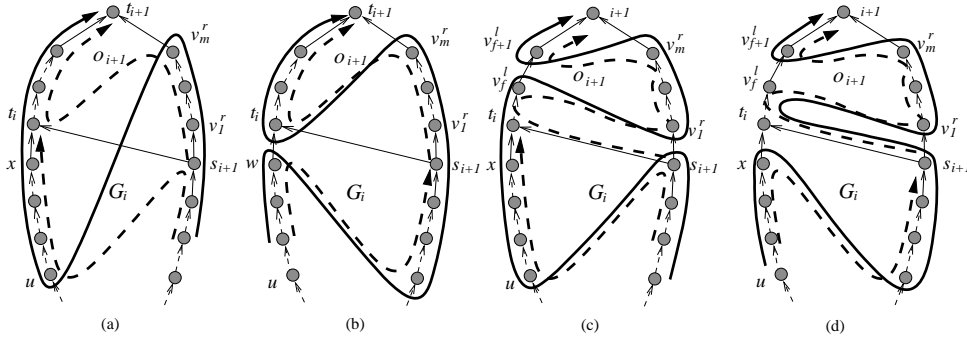


Figure 3.30: The hamiltonian paths for statement (1) of Lemma 40.

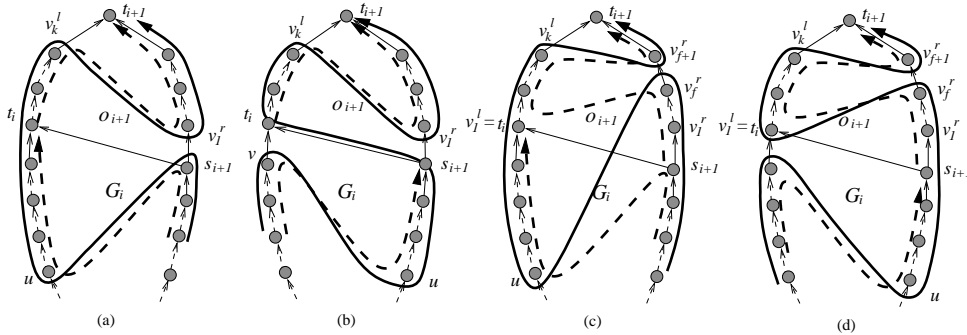


Figure 3.31: The hamiltonian paths for statement (2) of Lemma 40.

Proof: We first show how to build hamiltonian paths that infer HP-completion sets of the specified size. For each of the statements, there are four cases to consider. The minimum number of crossings, is then determined by taking the minimum over the four sub-cases.

(1) $t_i \in V^l \Rightarrow c(G_{i+1}, L) = \min\{ c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, L) + 1, c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, L), c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, L), c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, L) \}$

Case 1a. *The hamiltonian path enters t_i from a vertex on the left side of G_i and the size of the HP-completion of G_{i+1} is one.* Figure 3.30.a shows the hamiltonian paths for G_i (lower dashed path) and o_{i+1} (upper dashed path) as well as the resulting hamiltonian path for G_{i+1} (shown in bold). From the figure, it follows that $\alpha(G_{i+1}, L) = \alpha(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, L) + 1$. To see that, just follow the edge (v_m^r, u) that becomes part of the completion set of G_{i+1} . Edge (v_m^r, u) is involved in as many edge crossings as edge (v_m^r, t_i) (the only edge in the HP-completion set of o_{i+1}), plus as many edge crossings as edge (s_{i+1}, u) (an edge in the HP-completion set of G_i), plus one (1) edge crossing of the lower limiting edge of o_{i+1} .

Case 1b. *The hamiltonian path reaches t_i from a vertex on the right side of G_i and the size of the HP-completion of G_{i+1} is one.* Figures 3.30.b shows the resulting path. From the figure, it follows that $\alpha(G_{i+1}, L) = \alpha(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, L)$, that is, the simple concatenation of two solutions.

Case 1c. *The hamiltonian path enters t_i from a vertex on the left side of G_i and the size of the HP-completion of G_{i+1} is two.* Figure 3.30.c shows the resulting path. From the figure, it follows that $\alpha(G_{i+1}, L) = \alpha(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, L)$, which is just concatenation of two solutions.

Case 1d. *The hamiltonian path reaches t_i from a vertex on the right side of G_i and the size of the HP-completion of G_{i+1} is two.* Figure 3.30.d shows the resulting pathes. From the figure, it follows that $\alpha(G_{i+1}, L) = \alpha(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, L)$, which is again a simple concatenation of two solutions.

$$(2) \quad t_i \in V^l \Rightarrow \alpha(G_{i+1}, R) = \min \left\{ \alpha(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, R), \alpha(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, R), \right. \\ \left. \alpha(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, R) + 1, \alpha(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, R) \right\}$$

Case 2a. *The hamiltonian path enters t_i from a vertex on the left side of G_i and the size of the HP-completion of G_{i+1} is one.* Figure 3.31.a shows the resulting path. From the figure, it follows that $\alpha(G_{i+1}, R) = \alpha(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, R)$, that is, a simple concatenation of the two solutions.

Case 2b. *The hamiltonian path reaches t_i from a vertex on the right side of G_i and the size of the HP-completion of G_{i+1} is one.* Figure 3.31.b shows the resulting path. From the figure, it follows that $\alpha(G_{i+1}, R) = \alpha(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, R)$, that is, a simple concatenation of the two solutions.

Case 2c. *The hamiltonian path enters t_i from a vertex on the left side of G_i and the size of HP-completion set of G_{i+1} is two.* Figure 3.31.c shows the resulting path. From the figure, it follows that $\alpha(G_{i+1}, R) = \alpha(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, R) + 1$.

Note that the added edge (v_i^r, u) creates one more crossing than the number of crossings caused by edges (v_i^r, v_1^l) , (s_{i+1}, u) taken together. The additional crossing is due to the crossing of the lower limiting edge of o_{i+1} .

Case 2d. *The hamiltonian path reaches t_i from a vertex on the right side of G_i and the size of HP-completion set of G_{i+1} is two.* Figure 3.31.d shows the resulting path. From the figure, it follows that $\alpha(G_{i+1}, R) = \alpha(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, R)$, that is, a simple concatenation of the two solutions.

The proofs for statements (3) and (4) are symmetric to those of statements (2) and (1), respectively. Figures 3.32 and 3.33 show how to construct the corresponding hamiltonian paths in each case.

In order to complete the proof, we need to also show that the constructed hamiltonian paths which cause the stated number of crossings are optimal. The basic idea of the proof is the following: we assume $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ is a crossing-optimal solution for G_{i+1} and, based on $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$, we identify two solutions P_{G_i} and $P_{o_{i+1}}$ for G_i and o_{i+1} , respectively, such that (i) they are crossing-optimal and (ii) $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ can be obtained from P_{G_i} and $P_{o_{i+1}}$ as one of the four cases in the statement of the Lemma. We proceed by distinguishing cases based on the structure of $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$.

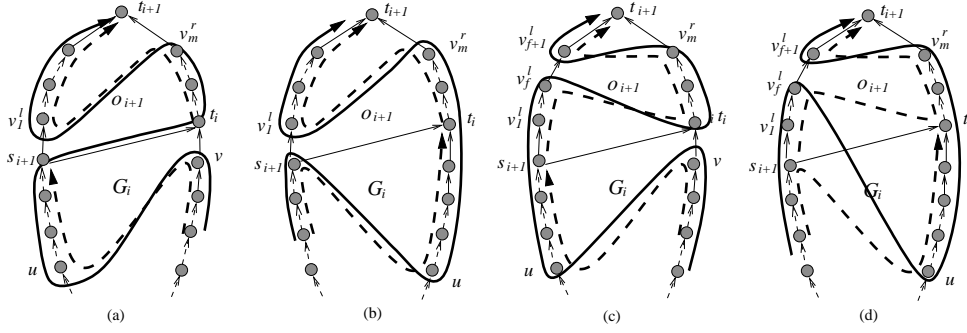


Figure 3.32: The hamiltonian paths for statement (3) of Lemma 40.

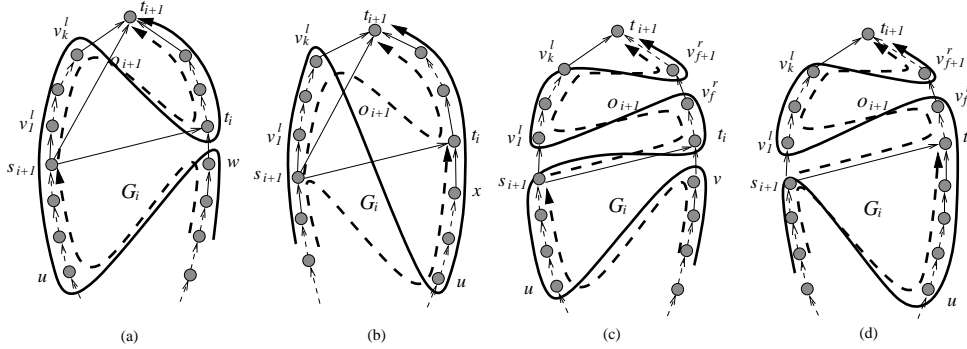


Figure 3.33: The hamiltonian paths for statement (4) of Lemma 40.

We denote by \tilde{e} the common edge of G_i and O_{i+1} . Note that \tilde{e} is the lower limiting edge of O_{i+1} (referred in the rest of the proof as, simply, *limiting edge*).

Without loss of generality, we assume that the limiting edge \tilde{e} is directed from the right to the left side of the outerplanar graph. From Lemma 35 it follows that $\tilde{e} = (s_{i+1}, t_i)$. So, by our assumption, s_{i+1} is on the right side, while t_i is on the left.

Case 1. $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ **contains an edge e crossing the limiting edge \tilde{e} .** By Property 5, there can be only one such edge in $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$, denote it by $e = (u, v)$. By Property 4, we can assume that e does not leave G_i and, thus, vertex u is above edge (s_{i+1}, t_i) while v is below it. In addition, u must be on the right side while v is on the left. To see that, simply observe that if u was on the left side and v was on the right or, if they were both on the same side, then a cycle would be created.

Next, we construct two solutions, P_{G_i} and $P_{O_{i+1}}$ for G_i and O_{i+1} , respectively, from the given optimal solution $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ and show that they are both also optimal.

Suppose, as showed in Figure 3.34.a, that $u = v_j^r$ and let x be the vertex positioned just below vertex v . Since there can exist only one edge in $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ crossing the limiting edge \tilde{e} (by Property 4), $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ approaches vertex u from the right side. Follow the hamiltonian path backwards from u on the right side and let w be the last vertex we visit before we switch to the left side (see Figure 3.34.a). By Lemma 27, the vertex on the left side has to be located just below v , that is, it coincides with vertex x . Consider now the structure of $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ following edge e . It surely continues on the left side and leaves the left side above t_i , since e is the only edge connecting G_i and O_{i+1} . In Figure 3.34.a the solution $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ is shown by a dashed bold line. Now, we can set path P_{G_i} and $P_{O_{i+1}}$ as follows: P_{G_i} is identical to $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ till vertex x on the left side of G_i (see Figure 3.34.b), then it switches to the right, as $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ does, to vertex w and it continues on the

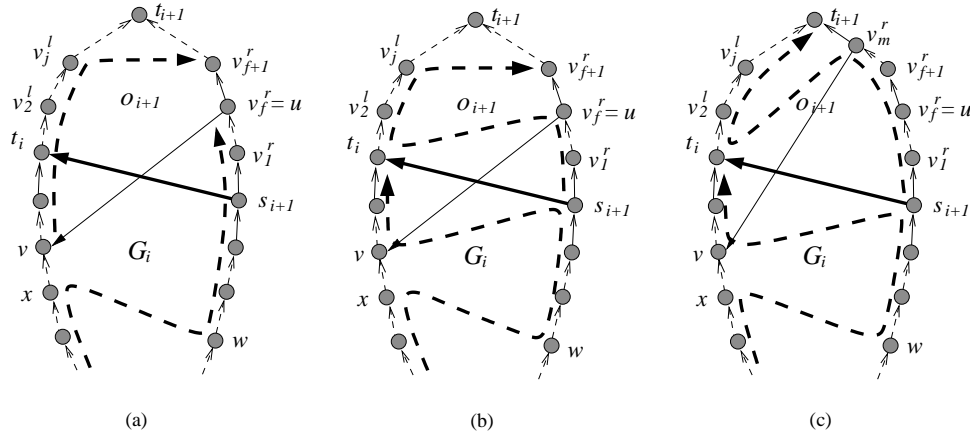


Figure 3.34: The configuration used in proving that the Hamiltonian paths obtained as described in Lemma 40 are optimal.

right side till vertex s_{i+1} , then it switches to the left to vertex v and continues on the left side till vertex t_i . $P_{o_{i+1}}$ starts on the right side at vertex s_{i+1} and continues till vertex u , then it switches to the left side to vertex t_i and continues identical to $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$. Note that if vertex u coincides with the last vertex of the right side, then solution $P_{o_{i+1}}$ terminates on the left side (see Figure 3.34.c). Observe now that $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ can be obtained from P_{G_i} and $P_{o_{i+1}}$ by cases 1.a and 2.c of the Lemma (Figures: 3.30.a and 3.31.c).

Next we show that P_{G_i} and $P_{o_{i+1}}$ are the optimal solutions for G_i and o_{i+1} , respectively. Suppose first that $P_{o_{i+1}}$ is not an optimal solution. Then, there is a solution $P'_{o_{i+1}}$ which has a smaller number of crossings than $P_{o_{i+1}}$. So, if we combine $P'_{o_{i+1}}$ with P_{G_i} using one of the rules of the Lemma we get a better solution than $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$, a contradiction. Similarly, suppose that P_{G_i} is not an optimal solution and let P'_{G_i} which one with a smaller number of crossings. Then, by combining P'_{G_i} with $P_{o_{i+1}}$ we get a better solution than $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$, a contradiction.

Case 2. $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ **does not contain any edge crossing the limiting edge \tilde{e} .** In this case, by Lemma 27, $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ visits first all the vertices of G_i and then all the vertices of o_{i+1} . We will split $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ into two paths P_{G_i} and $P_{o_{i+1}}$ which are solutions for G_i and o_i , respectively.

Case 2a. *The last vertex of $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ before t_i is on the left side.* Hence, the last visited vertex before t_i is the vertex placed just below the vertex t_i on the left side. Set P_{G_i} to be the subpath of $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ terminating to vertex t_i and $P_{o_{i+1}}$ to consist of edge (s_{i+1}, t_i) followed by the subpath of $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ starting from vertex t_i . Now, note that $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ can be obtained from P_{G_i} and $P_{o_{i+1}}$ by cases 1.c and 2.a (see Figures: 3.30.c and 3.31.a). It is easy to see that P_{G_i} and $P_{o_{i+1}}$ are optimal. If we suppose that one of P'_{G_i} or $P'_{o_{i+1}}$ is better than P_{G_i} or $P_{o_{i+1}}$, respectively, then, combining P'_{G_i} with $P_{o_{i+1}}$, or P_{G_i} with $P'_{o_{i+1}}$ gives us a better solution, a clear contradiction.

Case 2b. *The last vertex of $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ before t_i is on the right side.* We distinguish two cases based on the vertex before t_i :

- *The vertex before t_i is s_{i+1} .* This case corresponds to cases 1.d and 2.b (see Figures: 3.30.d and 3.31.b). The figures describe how to construct optimal solutions for G_i and o_{i+1} from $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$. Proving that these solutions are optimal, proceeds in a way identical of that in Case 2a.

- The vertex before t_i is a vertex v_i^r on the right side which is above s_{i+1} . This case corresponds to the cases 1.b and 2.d (see Figures: 3.30.b and 3.31.d). The figures describe how to construct optimal solutions for G_i and o_{i+1} from $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$.

Note that, there is not necessarily a unique hamiltonian path that yields an optimal solution. Since in our construction we apply a “minimum” operator, more than one of the involved hamiltonian paths yield the same number of crossings, and thus, we might have more than one different equivalent (with respect to edge crossings) hamiltonian paths. \square

Algorithm 3 is a dynamic programming algorithm, based on Lemmata 39 and 40, which computes the minimum number of edge crossings $c(G)$ resulting from the addition of a crossing-optimal HP-completion set to an outerplanar st -digraph G . The algorithm can be easily extended to also compute the corresponding hamiltonian path $S(G)$.

Theorem 22. *Given an n -vertex outerplanar st -digraph G , a crossing-optimal HP-completion set for G and the corresponding number of edge-crossings can be computed in $O(n)$ time.*

Proof: Algorithm 3 computes the number of crossings in an acyclic HP-completion set. Note that it can be easily extended so that it computes the actual hamiltonian path (and, as a result, the acyclic HP-completion set). To achieve this, we only need to store in an auxiliary array the term that resulted to the minimum values in Step 4 of the algorithm, together with the endpoints of the edge that is added to the HP-completion set for each st -Polygon in the st -Polygon decomposition $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_{\beta}\}$ of G . The correctness of the algorithm follows immediately from Lemmata 39 and 40.

From Lemma 31 and Theorem 20, it follows that Step 1 of the algorithm needs $O(n)$ time. The same holds for Step 2 (due to Lemma 38). Step 3 is an initialization step that needs $O(1)$ time. Finally, Step 4 requires $O(\beta)$ time. In total, the running time of Algorithm 3 is $O(n)$. Observe that $O(n)$ time is enough to also recover the acyclic HP-completion set. \square

Theorem 23. *Given an n -vertex outerplanar st -digraph G , an upward 2-page topological book embedding for G with minimum number of spine crossings and the corresponding number of spine-crossings can be computed in $O(n)$ time.*

Proof: By Theorem 17 we know that by solving the acyclic-HPCCM problem on G , we can deduce the wanted upward 2-page topological book embedding. By Theorem 22, the acyclic-HPCCM problem can be solved in $O(n)$ time. \square

3.6 2-Page Upward Book Embeddings

When dealing with the acyclic-HPCCM problem, it is natural to first examine whether there exists an acyclic HP-completion set for a digraph G of zero crossings, i.e., a *crossing-free acyclic HP-completion set* for G . In terms of an upward 2-page topological book embedding, this question is formulated as follows: given an embedded upward planar digraph G , determine whether there exists an upward 2-page book embedding of G without spine crossings preserving G 's embedding.

In this section we focus on crossing-free hamiltonian path completion sets for embedded upward planar digraphs. Our results include:

1. *Given an embedded st -digraph G which has a crossing-free HP-completion set, we show that there always exists a crossing-free HP-completion set with at most two edges per face of G (Theorem 24).*

This result finds application to upward 2-page book embeddings. The problem of spine crossing minimization in an upward topological book embedding is defined with a scope to improve the visibility of such drawings. For the class of upward planar digraphs that always admit an upward 2-page book embedding (i.e. a topological book embedding without spine crossings) it make sense to define an additional criterion of visibility. When a graph is embedded in a book, its faces are split by the spine into several adjacent parts. It is clear that the visibility of a drawing improves if each face is split into as few parts as possible. This result implies that the upward planar digraphs which admit an upward 2-page book embedding also admit one such embedding where each face is divided to at most 3 parts by the spine.

2. *Given an embedded N -free upward planar digraph G , we show how to construct a crossing-free HP-completion set for G (Theorem 26).* The class of embedded N -free upward planar digraphs is the class of embedded upward planar digraphs that does not contain as a subgraph the embedded N -graph of Figure 3.10.a. N -free upward planar digraphs have been studied in the context of partially ordered sets (posets) and lattices. The class of N -free upward planar digraphs contains the class of series-parallel digraphs which has been thorough studied in the context of book embeddings.
3. *Given a width- k embedded planar st -digraph G , we show how to determine whether G admits a crossing-free HP-completion set (Theorem 28).* It follows that for fixed-width embedded planar st -digraphs, it can be tested in polynomial time whether there exists a crossing-free HP-completion set (and thus, a 2-page upward book embedding). The result is based on a reduction to the *minimum setup scheduling* problem.

3.6.1 Properties of crossing-free acyclic hp-completion sets

Let $G = (V, E)$ be an embedded planar st -digraph which has an acyclic crossing-free HP-completion set S . By $G_S = (V, E \cup S)$ we denote the HP-completed acyclic digraph and by P_{G_S} the resulting hamiltonian path. Note that, as S creates zero crossings with G , each edge of S is drawn within a face of G and, therefore, G_S is a planar st -digraph.

In the rest of thi subsection, we state some properties of crossing-free acyclic HP-completion sets that are useful in proving the main results of the this section.

Proposition 6. *Assume an embedded planar st -digraph G which has an acyclic crossing-free HP-completion set S . Let f be a face of G and u, v be two vertices of f that reside on f 's opposite borders. Then, any directed path from u to v contains at least one edge of P_{G_S} that is drawn inside f and is directed from the border u resides on towards the opposite border (i.e., the border v resides on).*

Sketch of proof. If we assume, for the sake of contradiction, that there is a path from u to v that does not pass through face f , then, we conclude that there is a cycle in the acyclic HP-completed graph G_S (see Figure 3.35.a). The edge which is drawn inside f belongs in the HP-completion set S and, thus, in the resulting hamiltonian path P_{G_S} . \square

Proposition 7. *Assume an embedded planar st -digraph G which has an acyclic crossing-free HP-completion set S . Let u and v be two vertices of G which are connected by a directed path from u to v . Then, the resulting hamiltonian path P_{G_S} visits u before v .*

Proof. If we assume that P_{G_S} visits vertex v before vertex u then, we conclude that G_S contains a cycle, a clear contradiction. \square

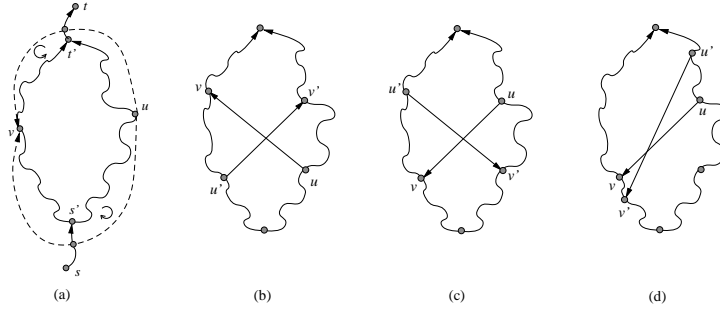


Figure 3.35: (a) Construction for the proof of Property 6. (b)-(d) Construction for the proof of Property 8

Proposition 8. *Assume an embedded planar st-digraph G which has an acyclic crossing-free HP-completion set S . Then, the edges of S can all be drawn so that they do not cross each other.*

Sketch of proof. Suppose that there is an acyclic crossing-free HP-completion set S which contains two edges (u, v) and (u', v') that cannot be drawn without crossing each other. Since S is a crossing-free acyclic HP-completion set, then edges (u, v) and (u', v') are both drawn within the same face (see Figures 3.35.b-d). For the case shown in Figure 3.35.b, if we assume that (u, v) is traversed before (u', v') , we infer that v is traversed before u' , a contradiction due to Property 7. The remaining cases are treated similarly. \square

Lemma 41. *Assume an embedded planar st-digraph G which has an acyclic crossing-free HP-completion set S . Let f be a face of G and let e_1, e_2, \dots, e_k be the edges of S which are drawn inside f , in the order they are traversed by the resulting hamiltonian path P_{G_S} . Then, it holds that:*

- a. *Edges e_i and e_{i+1} ($1 \leq i < k - 1$) have opposite orientations.*
- b. *The destination of the e_1 is the lowermost vertex (other than f 's source) of either the left or the right border of f , while the origin of edge e_k is the topmost vertex (other than f 's sink) of either the left or the right border of f .*
- c. *The origin of e_i and the destination of e_{i+1} ($1 \leq i < k - 1$) are joined by a single edge of G .*

Sketch of proof.

- (a) Note that this statement is meaningful only when $k > 1$, i.e., there exist at least two edges of S that are drawn within f . Consider two consecutive edges, e_i and e_{i+1} in f which are traversed in this order by the hamiltonian path P_{G_S} and, for the sake of contradiction, assume that $e_i = (u_i, v_i)$ and $e_{i+1} = (u_{i+1}, v_{i+1})$ are both directed from the left to the right border of f (see Figure 3.36.a). The hamiltonian path P_{G_S} contains a directed path from v_i to u_{i+1} . These vertices are placed in the opposite sides of f . So, by Property 6, the path from v_i to u_{i+1} contains at least one edge connecting the right border of f with its left border. This edge can not be below e_i or above e_{i+1} as this leads to a contradiction due to Property 7. Thus, we have that there exists an edge in S which is drawn within f , above e_i and below e_{i+1} . This is a contradiction, since we assumed that e_i and e_{i+1} are consecutive edges of S in face f .
- (b) Without loss of generality, let $e_1 = (u_1, v_1)$ be left-to-right oriented (see Figure 3.36.b). For the sake of contradiction, we assume that the destination of the e_1 is not the lowermost

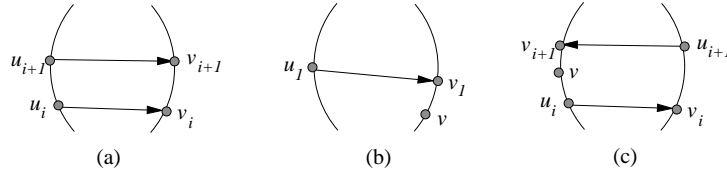


Figure 3.36: (a)-(c) Constructions for the proof of Lemma 41

vertex of the right border of f . Thus, there exists at least one vertex v , on the right side, which is placed below vertex v_1 . By Property 7, vertex v is visited before vertex v_1 and thus, v is visited before u_1 . So, the hamiltonian path P_{G_S} contains a directed path from v to u_1 . Vertex u_1 is on the left side and thus, by Property 6, any path from v to u_1 contains an edge in f which is right-to-left oriented. Due to Property 7, this edge can not be above e_1 and thus, it must be below it. This is a clear contradiction, as we assumed e_1 to be the bottom edge of the HP-completion set drawn in f . The proof for e_k is similar.

- (c) Note that this statement is meaningful only when $k > 1$, i.e., there exist at least two edges of S that are drawn within f . Let $e_i = (u_i, v_i)$ and $e_{i+1} = (u_{i+1}, v_{i+1})$ be two consecutive edges of S which are drawn in f . Without loss of generality, we suppose that e_i is left-to-right oriented (see Figure 3.36.c). Then, by statement (a) of this Lemma, we have that e_{i+1} is right-to-left oriented. Assume, for the sake of contradiction, that u_i and v_{i+1} , which are both on the left border of f , are not connected by an edge. Then, there exist a vertex v on the left border of f which is above u_i and below v_{i+1} . Vertex v has to be visited by P_{G_S} after u_i and before v_{i+1} and, thus, after v_i and before u_{i+1} . By Properties 6 and 7, we conclude that e_i and e_{i+1} are not consecutive edges of S in f , a clear contradiction. \square

3.6.2 Two edges per face are enough

In this Section, we prove that an embedded planar st -digraph G which has a crossing-free acyclic HP-completion set, always admits a crossing-free HP-completion set with at most two edges per face of G . This result implies that the upward planar st -digraphs which admit an upward 2-page book embedding also admit one such embedding where each face is divided to at most 3 parts by the spine. This improves the quality of the book embedding drawing.

Theorem 24. *Assume an embedded planar st -digraph G which has an acyclic crossing-free HP-completion set S . Then, there exists another acyclic crossing-free HP-completion set S' for G which contains at most two edges per face of G .*

Proof: Let G_S be the acyclic HP-completed digraph and P_{G_S} be the resulting hamiltonian path of G_S . We will show how to obtain from S an acyclic zero-crossing HP-completion set S' which has at most two edges per face of G .

Let $f = (s', v_1^l, \dots, v_p^l, v_1^r, \dots, v_m^r, t')$ be an arbitrary face of G in which the acyclic HP-completion set S places at least three edges. By Lemma 41, we infer that the first three edges of S in f , in the order they are traversed by P_{G_S} , can be denoted by $S_f = \{(v_i^l, v_1^r), (v_j^r, v_{i+1}^l), (v_k^l, v_{j+1}^r)\}$, where, without loss of generality, we assumed that the first edge is left-to-right oriented. In Figure 3.37.a these three edges are denoted by dashed lines. Consider, for example, vertices v_1^r and v_j^r in Figure 3.37.a. The hamiltonian path P_{G_S} can travel from v_1^r to v_j^r by either moving entirely on the right border of f , or, by visiting vertices at other faces of G . This second path that visits other faces besides face f is drawn as a dashed curve from v_1^r to v_j^r .

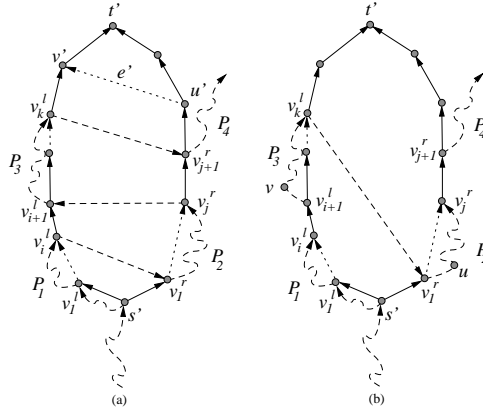


Figure 3.37: (a) A crossing-free acyclic HP-completion set S which places at least three edges to a face of an st -digraph. (b) An equivalent crossing-free acyclic HP-completion set S' where the three edges $(v_i^l, v_i^r), (v_j^l, v_{j+1}^l), (v_k^l, v_{j+1}^r)$ were substituted by a single edge (v_k^l, v_i^r) .

The three edges of S_f split the hamiltonian path P_{G_S} into 4 sub-paths⁴, denoted by P_1 , P_2 , P_3 and P_4 , where $P_1 = P_{G_S}[s \dots v_i^l]$, $P_2 = P_{G_S}[v_i^r \dots v_j^r]$, $P_3 = P_{G_S}[v_{i+1}^l \dots v_k^l]$, and $P_4 = P_{G_S}[v_{j+1}^r \dots t]$, and s and t are the source and the sink of G , respectively (see Figure 3.37.a).

We set $S' = S \setminus S_f \cup \{(v_k^l, v_i^r)\}$ (see Figure 3.37.b) and we will show that S' is also an acyclic crossing-free HP-completion set for G , i.e., $G_{S'}$ is hamiltonian and acyclic, where $G_{S'}$ is a resulting graph when HP-completion set S' is embedded in G .

By Lemma 41(c) we know that the edges (v_i^l, v_{i+1}^l) and (v_j^r, v_{j+1}^r) are present in G . Define path $P_{G_{S'}}$ to be formed by the concatenation of paths P_1 , P_3 , P_2 and P_4 , that is, $P_{G_{S'}} = P_{G_S}[s \dots v_i^l] \rightarrow P_{G_S}[v_{i+1}^l \dots v_k^l] \rightarrow P_{G_S}[v_i^r \dots v_j^r] \rightarrow P_{G_S}[v_{j+1}^r \dots t]$. It is clear that path $P_{G_{S'}}$ is a hamiltonian path for $G_{S'}$.

The only difference between $P_{G_{S'}}$ and P_{G_S} , is that in $P_{G_{S'}}$ the vertices of the sub-path P_3 are visited before the vertices of the path P_2 . So a cycle could be created if there were two vertices u and v , such that $u \in P_2$, $v \in P_3$ and there was a directed path from u to v in $G_{S'}$. However, if there is a directed path from u to v then there is a directed path from v_i^r to v_k^l (see Figure 3.37.b). By Property 6 we have that the path from v_i^r to v_k^l contains a right-to-left oriented edge $e' = (u', v')$ in f . The edge (v_k^l, v_i^r) which we included to S' is left-to-right oriented, and thus, e' must be present in S as well. By Property 8, e' does not cross any edge of S_f . Also the edges of S_f are the three lowest edges of S in f , and thus, e' is above (v_k^l, v_{j+1}^r) (see Figure 3.37.a). Now, it is easy to see that any path from v_i^r to v_k^l that passes through e' creates a cycle in G_S . This is a clear contradiction as S was supposed to be an acyclic HP-completion set.

So, we have substituted the three bottom edges of S in f by a single edge. By repeating this process, we can transform any odd number of edges to a single edge and any even number of edges to a pair of edges. \square

⁴The notation $P[u \dots v]$ indicates the subpath of P starting at node u and terminating at node v , or equivalently, the sequence of vertices in this subpath. We assume that the subpath is well defined, that is, u appears before v in P .

3.6.3 Embedded N -free upward planar digraphs

In this Section, we study embedded N -free upward planar digraphs. We establish that any embedded N -free upward planar digraph G has a crossing-free acyclic HP-completion set with at most one edge per face of G . Recall that the class of embedded N -free upward planar digraphs is the class of embedded upward planar digraphs that does not contain as a subgraph the embedded N -graph of Figure 3.10.a. For the class of N -free upward planar embedded digraphs, which is substantially larger than the class of N -free upward planar digraphs, we show that there is always a crossing-free acyclic HP-completion set that can be computed in linear time, thus improving the results given in [1, 47]

Theorem 25. *Any embedded N -free planar st -digraph $G = (V, E)$ has an acyclic crossing-free HP-completion set S which contains exactly one edge per face of G . Moreover, S can be computed in $O(V)$ time.*

Proof: Let G^* be the dual graph of G and let $s^* = v_1^*, \dots, v_m^* = t^*$ be the vertices of G^* ordered according to an st -numbering of G^* . Let G_{k-1} be the $(k-1)$ -facial subgraph of G . By Lemma 26, G_k can be constructed from G_{k-1} by adding to the right border of G_{k-1} the directed path forming the right border of v_k^* .

We prove the following stronger statement than the one in the theorem:

Statement 14. *For any G_k ($1 \leq k < m$) there exists an acyclic crossing-free HP-completion set S_k such that the following holds: Let P_k be the resulting hamiltonian path and let e be an edge of the right border of G_k that is also the bottom-left edge of a face $f \in \{v_{k+1}^*, \dots, v_m^*\}$. Then, edge e is traversed by P_k .*

Proof of Statement 14. If $k = 1$, G_1 consist of a single path, that is the left border of G (Figure 3.38.a). We let $S_1 = \{\emptyset\}$ and set P_1 to G_1 . As all the edges of G_1 are traversed by P_1 it is clear that, any edge e on the right border of G_1 that is also a bottom-left edge of any other face t is traversed by P_1 .

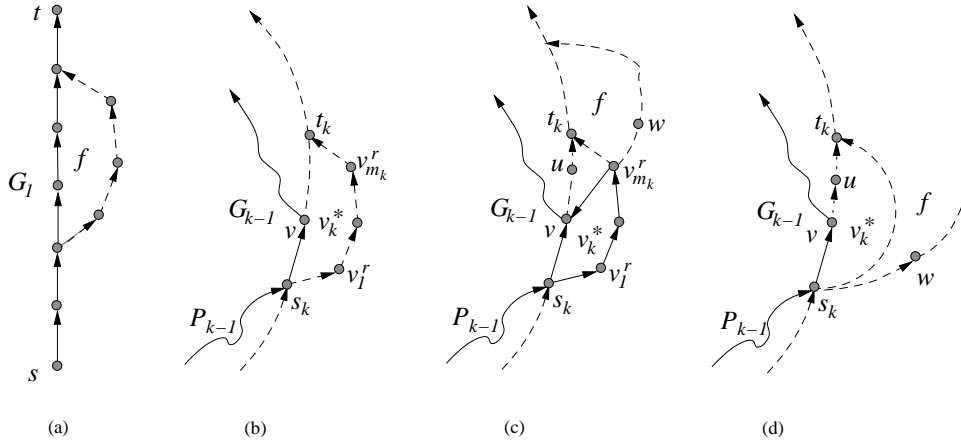


Figure 3.38: (a) $G_1 = P_1$ and a face f . The bottom left edge of f is traversed by P_1 . (b) G_{k-1} and v_k^* . P_{k-1} is denoted by solid line. (c) A graph G_k for the case that the right border of v_k^* contains at least one vertex. The newly constructed P_k is denoted by solid line. (d) A graph G_k for the case that the right border of v_k^* is a transitive edge.

Assume now that the statement is true for any G_{k-1} , $k < m$. We will show that it is true for G_k . Denote by S_{k-1} a crossing-free acyclic HP-completion set of G_{k-1} and by P_{k-1} the produced

hamiltonian path. Let e be an edge on the right border of G_{k-1} that is also the bottom-left edge of v_k^* . By the induction hypothesis, P_{k-1} passes through $e = (s_k, v)$ (see Figure 3.38.b). Denote by s_k and t_k the source and the sink of v_k^* respectively, and by $v_1^r, \dots, v_{m_k}^r$ the vertices of the right border of v_k^* . By Lemma 26, s_k and t_k are vertices of the right border of G_{k-1} and G_k can be built from G_{k-1} by adding the path $s_k, v_1^r, \dots, v_{m_k}^r, t_k$ to it.

Suppose first that $m_k \neq 0$ (i.e., the right border of v_k^* contains at least one vertex). Set $S_k = S_{k-1} \cup \{(v_{m_k}^r, v)\}$, and $P_k = P_{k-1}[s \dots s_k], v_1^r, \dots, v_{m_k}^r, P_{k-1}[v \dots t]$ (see Figure 3.38.c). It is clear that P_k is a hamiltonian path of G_k . This is because P_{k-1} is hamiltonian path of G_{k-1} and P_k traverses all newly added vertices. It is also easy to see that S_k is acyclic: the edge $(v_{m_k}^r, v)$ which was added to S_{k-1} creates a single directed path: from vertex s_k to the vertex v , which were already connected by the directed edge (s_k, v) in G_{k-1} .

We now show that the bottom-left edge e of any $f \in \{v_{k+1}^* \dots v_m^*\}$, where e is also on the right border of G_k , is traversed by P_k . The only edge that was added to G_{k-1} to create G_k and is not traversed by P_k , is $e' = (v_{m_k}^r, t_k)$, that is, e' is the last edge of the right border of v_k^* . If e' is also the left bottom edge of a f then the graph has an embedded N -digraph as a subgraph (see the subgraph induced by the vertices $u, t_k, v_{m_k}^r, w$ in Figure 3.38.c), a contradiction. Otherwise, if the bottom-left edge of f coincides with any other edge of the right border of v_k^* , then the statement holds. If f has its bottom-left edge on the right border of G_{k-1} then, by the induction, a bottom left edge of f is traversed by P_{k-1} and, thus, by P_k .

Consider now the case where $m_k = 0$, that is, the right border of v_k^* is a single, transitive edge (see Figure 3.38.d). In this case, no new vertex is added to G_k , so we set $S_{k+1} = S_k$ and $P_{k+1} = P_k$. Consider now a face $f \in \{v_{k+1}^* \dots v_m^*\}$. If the bottom-left edge e of f is on the right border of G_k and coincides with the transitive edge (s_k, t_k) , then u, t_k, s_k, w form an embedded N -digraph (see Figure 3.38.d), a contradiction. So e is not (s_k, t_k) and, hence, it is an edge of the right border of G_{k-1} . So, by the induction hypothesis, e is traversed by P_{k-1} and hence by P_k . This completes the proof of the statement.

Having proved Statement 14, the theorem follows from the observation that $G_m = G$. The bound on the time needed to compute the crossing-free HP-completion set easily follows from the incremental nature of the described constructive proof. Figure 3.39 demonstrates the application of the algorithm implied by the constructive proof for the embedded N -free upward planar digraph of Figure 3.10.d.

□

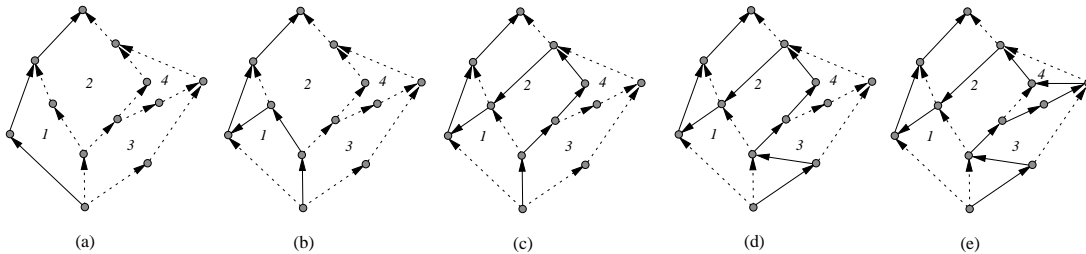


Figure 3.39: (a)-(e) Construction of an acyclic zero-crossing HP-completion set and the corresponding hamiltonian path for the N -free planar st -digraph G_1 of Figure 3.10.d. The faces are numbered by an st -numbering of dual. Solid edges are the edges of hamiltonian path.

Corollary 2. Any I -free embedded planar st -digraph $G = (V, E)$ has an acyclic crossing-free HP-completion set S which contains exactly one edge per face of G . Moreover, S can be computed in

$O(V)$ time.

Proof: Just reverse the edges of G^* and repeat the construction in the proof of Theorem 25. \square

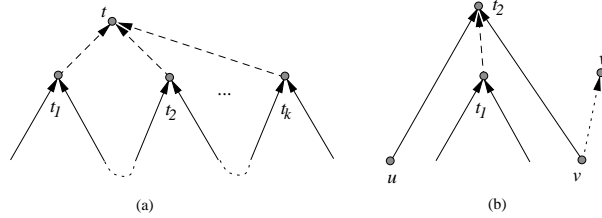


Figure 3.40: (a)-(b) The construction for the proof of Theorem 26.

Theorem 26. Any embedded N -free upward planar digraph $G = (V, E)$ has an acyclic crossing-free HP-completion set S . Moreover, S can be computed in $O(V)$ time.

Proof: We just prove that, any embedded N -free upward planar digraph G can be transformed to an embedded N -free upward planar st -digraph G' by the addition of few edges. Then, the result follows from Theorem 25.

Consider an upward planar embedding Γ of $G = (V, E)$ that is N -free. If the outer face of G contains more than one sink (source), then we add a new super-sink (super-source) vertex. Let t_1, \dots, t_k be the sinks of G in the outer face. By adding a new vertex t and by joining each t_i to t by an edge, the embedding Γ of G is preserved and remains N -free, because each t_i $1 \leq i \leq k$ has out-degree zero (see Figure 3.40.a).

Let now some sink t_1 be placed in a inner face of G . Let t_2 be the sink of that face. We add edge (t_1, t_2) . The addition of the edge (t_1, t_2) creates an embedded N -digraph only if there are edges (v, t_2) and (v, w) in G with (v, w) is the edge following (v, t_2) (in counter clockwise order), out of v . But then, there is already an embedded N -digraph in G (the digraph induced by the vertices u, t_2, v, w in Figure 3.40.b). A clear contradiction, so (t_1, t_2) can be added to G without creating any embedded N -digraph as a subgraph. The sources are treated similarly. The transformation of G into an st -digraph can be easily completed in linear time. \square

3.6.4 Fixed-width st -digraphs

In this section we establish that for any embedded planar st -digraph G of bounded width, there is a polynomial time algorithm determining whether there exists a crossing-free HP-completion set for G . In the case that such an HP-completion set exists, we can easily construct it.

A set Q of vertices of G is called *independent* if the graph incident to Q has no edges. Following the terminology of partially ordered sets, we call *width* of G , and denote it by $width(G)$, the maximum integer r such that G has an independent set of cardinality r .

In Minimum Setup Scheduling (MSS) we are given a number of jobs that are to be executed in sequence by a single processor. There are constrains which require that certain jobs be completed before another may start; these constrains are given in the form of *precedence dag*. In addition, for each pair i, j of jobs there is a *setup cost* representing the cost of performing job j immediately after job i , denoted by $cost(i, j)$. The objective is to find a one-processor schedule for all jobs which satisfies all the precedence constrains and minimizes the total setup cost incurred.

The main idea of the result presented in this section is a simple application of an algorithm solving the *minimum setup scheduling* problem . Given a precedence dag D and a matrix C of costs, $s(D, C)$ denotes the total setup cost of a minimum cost schedule satisfying the constraints given by D . The next theorem follows from the complexity analysis given in [26].

Theorem 27 ([26]). *Given an n -vertex precedence dag D of width k and a matrix C of setup costs, we can compute in $O(n^k k^2)$ time a setup cost $s(P, C)$ of minimum cost schedule, satisfying the constraints given by P .*

In the rest of this section, we show that given a planar st -digraph G the problem of determining whether there is a crossing-free acyclic HP-completion set for G can be presented as an instance of MSS.

Let $G = (V, E)$ is an embedded planar st -digraph. We define the setup cost matrix as follows. Set $C_G[i, j] = 0$ if $(v_i, v_j) \in E$ or v_i and v_j belong to the opposite borders of the same face of G , otherwise set $C_G[i, j] = 1$.

Lemma 42. *Let $G = (V, E)$ be an embedded planar st -digraph. Let also $s(G, C_G)$ be a setup cost of minimum cost schedule satisfying the constraints given by G and setup costs given by C_G . G has an acyclic crossing-free HP-completion set iff $s(G, C_G) = 0$.*

Proof: (\Rightarrow) Assume that G has a crossing-free acyclic HP-completion set S and the vertices in the sequence v_1, v_2, \dots, v_n are enumerated as they appear in the hamiltonian path which is created when S is embedded on G . Then, the sequence v_1, v_2, \dots, v_n presents a schedule satisfying constraints given by G , otherwise an embedding of S in G would create a cycle. The setup cost for this schedule is $\sum_{i=1}^{n-1} C_G[i, i+1]$. We know that S does not create any crossing with G . Therefore, any two successive vertices v_i and v_{i+1} of the resulting hamiltonian path are either connected by an edge of the graph or belong to the opposite borders of the same face, and thus, $C_G[i, i+1] = 0$. So, we have shown that there is a schedule of setup cost zero and, thus, $s(G, C_G) = 0$.

(\Leftarrow) Assume now that $s(G, C_G) = 0$, i.e., there exists a one-processor schedule for the jobs represented by the vertices of G which has total setup cost zero and satisfies the precedence constraints given by G . Let v_1, v_2, \dots, v_n be the jobs as they appear in this schedule. We construct the set of edges S as follows: Consider any two successive jobs v_i and v_{i+1} . If they are not connected by an edge (v_i, v_{i+1}) of G , then we add this edge to S . All the edges added to S correspond to two jobs with setup cost zero, and hence represent edges which connect two vertices of the opposite borders of the same face. So we have that S creates in G a hamiltonian path which does not cross any edge of G .

We will show now that the addition of S to G , does not create any cycles. Call G' the graph resulting when the edges of S are embedded on G . For the sake of contradiction, assume G' contains a cycle. Then, there are two vertices v_i and v_j that are connected in G' by two non-intersecting directed paths, from v_i to v_j and, from v_j to v_i . Then the job corresponding to the vertex v_i is executed by the schedule before the job corresponding to v_j and vice versa. This is a contradiction. So G' is acyclic.

We complete the proof with the observation that there can be no crossing among the edges of S and, hence, the total number of crossing created by S is zero. This fact follows directly from Property 8. \square

Theorem 28. *Let G be a planar st -digraph of width $k \in \mathbb{N}$. Then, in $O(k^2 n^k)$ time we can decide whether G has an crossing-free HP-completion set. In the event that such a set exists, it can be easily computed in the same time bounds.*

Note that for the class of outerplanar st -digraphs the above Theorem implies time complexity $O(n^2)$. But exploring specific properties of outerplanar st -digraphs, in Section 3.5, we solved the problem for this class of graphs in linear time.

3.7 ρ -Constrained Upward Topological Book Embedding

In this section we study a variation of *upward topological book embeddings*, where a topological ordering ρ of G 's vertices is given as a part of the input and we are interested in constructing an upward topological book embedding such that the ordering of the vertices along the spine is ρ . Recall that such drawing is called a ρ -constrained upward topological book embedding.

Giordano, Liotta and Whitesides [50] developed an algorithm that, given an embedded planar st -digraph and a topological numbering ρ of its vertices, computes in $O(n^2)$ time a ρ -constrained upward topological book embedding with at most $2n - 4$ spine crossings per edge. The number of spine crossings per edge is asymptotically worst case optimal.

The problem of ρ -constrained upward topological book embedding can be applied to solve the problem of *upward point-set embeddability with mapping*. Recall that, in this problem, the input is an upward planar digraph G with n vertices, a set S of n distinct points in the plane, and a mapping Φ from the vertices of G to the points of S . The desired output is an upward planar drawing of G with the vertices located at the points of S assigned by the mapping Φ . As it was shown in [50], not all instances of the problem admit a solution. In [50], the authors describe a $O(n^3)$ algorithm that tests whether such embedding exists. They also prove that if it exists then it can be computed in $O(n^2)$ time and has at most $2n - 3$ bends per edge.

In this section, based on the *acyclic-HPCCM* problem and its equivalence with the problem of computing an upward topological book embedding with minimum number of spine crossings (see Section 3.3), we first prove that for any embedded planar st -digraph G and any topological numbering ρ of its vertices there exists a ρ -constrained upward topological book embedding with at most $n - 3$ spine crossings per edge and, moreover, $n - 3$ spine crossing per edge are required for some graphs. In this result, we allow edge (s, t) to be internal in the embedding of the graph. If edge (s, t) is always on the external face, the corresponding number of spine crossings reduces to at most $n - 4$ and is worst case optimal. Second, we provide an output sensitive algorithm that computes in $O(a + n)$ time a ρ -constrained upward topological book embedding with minimum number of spine crossings and at most $n - 3$ spine crossings per edge, where a is the total number of spine crossings. We apply these result to the problem of upward point-set embedding with a given mapping and obtain an algorithm that solves an upward point-set embeddability problem with mapping with at most $n - 3$ bends per edge.

For an easier description we need to refine the definition of dual graph as following. The *left-to-right dual* (*right-to-left dual*) of an st -digraph G , denoted by G_L^* (G_R^*), is a digraph such that: (i) The external face is split into two faces, s^* and t^* , so that, s^* is the face to the left(right) of the left(right) border of G while t^* is the face to the right(left) of the right(left) border of G . (ii) there is a vertex in G_L^* (G_R^*) for each internal face of G ; (iii) for every edge $e \neq (s, t)$ of G , there is an edge $e^* = (f, g)$ in G^* , where $f = \text{left}(e)$ ($f = \text{right}(e)$) and $g = \text{right}(e)$ ($g = \text{left}(e)$).

3.7.1 Main result

Let $G = (V, E)$ be an embedded upward planar digraph, E_c be an acyclic HP-completion set of G and $\Gamma(G')$ be a drawing of $G' = (V, E \cup E_c)$ that preserves G . Recall that the graph G_c induced from drawing $\Gamma(G')$ by inserting a new vertex at each edge crossing and by splitting the edges

involved in the edge-crossing, maintaining the direction of the edges, is called the *HP-extended digraph of G w.r.t. $\Gamma(G')$* . The edges resulting from the splitting of the original edges of graph G or of the HP-completion set E_c are referred to as *segments* of these split edges.

Let G be an embedded upward planar digraph and e be an edge which does not belong in G . The drawing of edge e on the embedded digraph G , denoted by $\Gamma(e)$, is defined by the sequence of the edges of G crossed by e , as e is traversed in the forward direction. Consider a drawing of edge e on the embedded digraph G . Let G_e be the digraph obtained when we substitute the crossings of G with e by dummy vertices and we split the edges involved in the crossings, while maintaining their directions. We call G_e the digraph *induced by a drawing of e on G* .

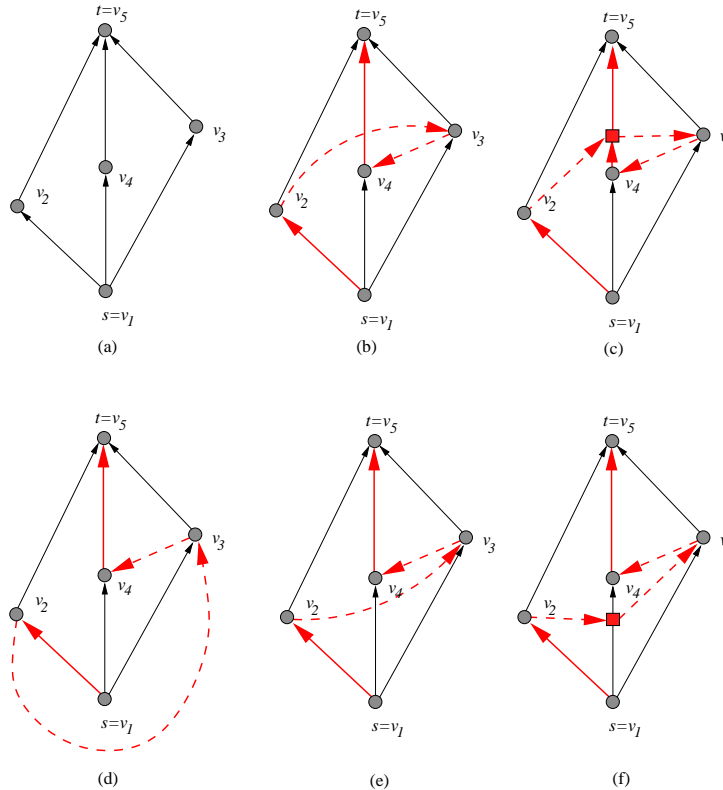


Figure 3.41: (a) A planar embedded *st*-digraph G . (b) A drawing $\Gamma_1(G')$ of an HP-completed digraph G' of G . The edges of the hamiltonian path of G' appear bold, with the edges of the the HP-completion set shown dashed. (c) The HP-extended digraph G'_1 of G w.r.t. $\Gamma_1(G')$. The newly inserted vertex appears as square. (d) A drawing $\Gamma_2(G')$ of an HP-completed digraph G' that represents also an HP-extended digraph G''_2 of G w.r.t. $\Gamma_2(G')$ as there is no edge crossing. (e) A drawing $\Gamma_3(G')$ of an HP-completed digraph G' of G . (f) The HP-extended digraph G''_3 of G w.r.t. $\Gamma_3(G')$.

Note that given an upward planar digraph G and an acyclic HP-completion set E_c , there are many different ways to draw the edges of the HP-completion set. Figure 3.41.a shows a planar *st*-digraph, while Figures 3.41.[b,d,e] show three out of all possible drawings of the HP-completion edge (v_2, v_3) . The corresponding induced HP-extended digraphs are given at Figures 3.41.[c,d,f]. Note that only one of these HP-extended digraphs is an upward planar digraph (see Figure 3.41.f). In Lemma 45, we will show that, for any *st*-digraph G and an acyclic HP-completion E_c of G , there is a unique upward planar HP-extended digraph of G over all possible drawings of the edges of the HP-completion set.

The following two lemmata will be used in proving that an acyclic HP-completion set for G results to a unique upward planar HP-extended digraph of G .

Lemma 43. *Let G be an embedded planar st -digraph, $\Gamma(G)$ be an upward planar drawing of G and $\rho = (s = v_1, \dots, v_n = t)$ a topological numbering of G . Assume that G contains path (v_1, v_2, \dots, v_i) but it does not contain edge $e_i = (v_i, v_{i+1})$. If edge e_i is drawn in the internal of $\Gamma(G)$ so that:*

- (i) *For each edge (u, u') of graph G that is crossed by edge $e_i = (v_i, v_{i+1})$ $u \in \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ and $u' \in V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i+1}\}$,*
- (ii) *$e_i = (v_i, v_{i+1})$ does not cross any edge of G exiting from v_i or entering v_{i+1}*
- (iii) *$e_i = (v_i, v_{i+1})$ does not cross any edge of G more than once*

then, the digraph G_{e_i} that is induced by this drawing of e_i is a planar st -digraph and contains path $(v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1})$.

Proof:

We will show that if the drawing of (v_i, v_{i+1}) meets the conditions of the lemma then the resulting G_{e_i} is acyclic. For the sake of contradiction, let G_{e_i} contain a cycle S . Let $(u_1, u'_1), (u_2, u'_2), \dots, (u_k, u'_k)$ be the edges of G crossed by e_i and let h_1, h_2, \dots, h_k be the dummy vertices that are placed at the crossings created by e_i and these edges (see Figure 3.42.a).

By condition (ii), neither v_i nor v_{i+1} is in $\{u_1, \dots, u_k, u'_1, \dots, u'_k\}$. By condition (iii), edge e_i does not cross any edge of G twice and, thus, any two of the dummy vertices lie on distinct edges of G . Also observe that the whole edge e_i (i.e., all of its segments) can not participate in the cycle; otherwise ρ is not a topological numbering, a clear contradiction. So, we assume that only some of the segments of e_i (and definitely not all of them) are participating in the cycle.

We consider two cases:

Case 1 *Cycle S contains either the first or the last segment of e_i .* We examine only the case where the cycle contains the first segment of e_i . The case where it contains the last segment of e_i is treated similarly.

Assume that the path $v_i \rightsquigarrow h_j$ consisting of segments of e_i is part of the cycle S . Moreover, assume that it is maximal, i.e., h_{j+1} does not participate in S . Then, since (h_j, u'_j) is the only outgoing edge of h_j that can be a part of S , we infer that G contains a path $u'_j \rightsquigarrow v_i$ (see Figure 3.42.a). Then, since ρ is a topological numbering of G , u'_j must be in $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$, contradicting condition (i) since (v_i, v_{i+1}) is crossed by edge (u_j, u'_j) and $u'_j \notin V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i+1}\}$.

Case 2 *Cycle S contains neither the first nor the last segment of e_i .*

Assume that path $h_l \rightsquigarrow h_j$, consisting entirely of segments of e_i , is part of cycle S . Moreover, assume that it is maximal, i.e., neither h_{l-1} , nor h_{j+1} participate in S . Since (h_j, u'_j) is the only edge exiting h_j and (u_l, h_l) is the only edge entering h_l that can be parts of cycle S , we infer that G contains a path $u'_j \rightsquigarrow u_l$ (see Figure 3.42.b). Then, since ρ is a topological numbering of G , u'_j must be in $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$, contradicting condition (i) since (v_i, v_{i+1}) is crossed by edge (u_j, u'_j) and $u'_j \notin V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i+1}\}$.

So, the drawing of edge e_i in the internal of $\Gamma(G)$ that meets the conditions of the lemma, preserves the drawing of G and leaves G_{e_i} acyclic. Thus, G_{e_i} is a planar st -digraph. \square

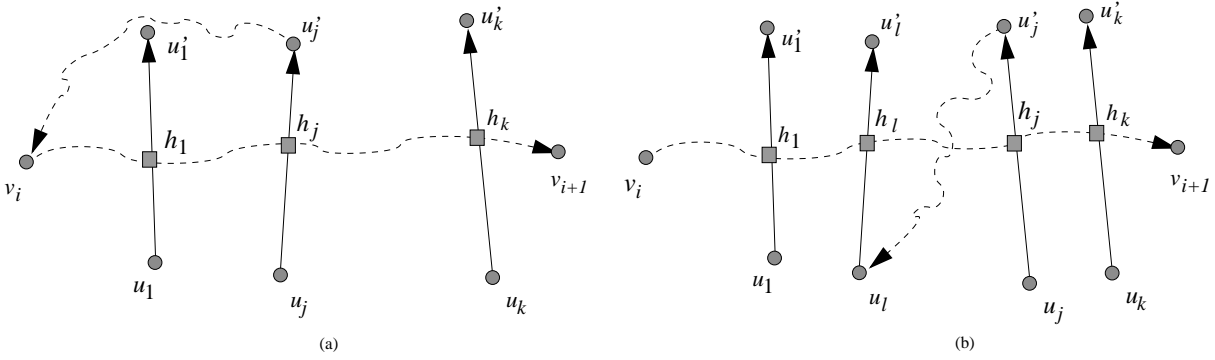


Figure 3.42: Edge crossing patterns used in the proof of Lemma 43.

Note that the requirements of the Lemma 43 that *edge e_i has to be drawn in the internal of the drawing of G* is essential in the proof. It is easy to see that if e_i is drawn in the outer face then the resulting graph G_{e_i} is not upward planar (see Figure 3.41.d).

Lemma 44. *Let G be an embedded planar st -digraph and $\rho = (s = v_1, \dots, v_n = t)$ be a topological numbering of G . Assume that G contains path (v_1, v_2, \dots, v_i) but it does not contain edge (v_i, v_{i+1}) . Then, there is a unique drawing of edge $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $\Gamma(e_i)$, that meets conditions (i)-(iii) of Lemma 43.*

Proof: Let G be an embedded planar st -digraph and $\Gamma(G)$ an upward planar drawing of G . Assume that G contains the path (v_1, v_2, \dots, v_i) but it does not contain the edge (v_i, v_{i+1}) . We show that there is a drawing of edge (v_i, v_{i+1}) that meets the conditions of Lemma 43. The uniqueness of the drawing will follow from the construction.

Since edge (v_i, v_{i+1}) does not exist in G , vertices v_i, v_{i+1} are not connected by a directed path; otherwise ρ is not be a topological numbering.

Since vertices v_i and v_{i+1} are not connected by a directed path in G , they are connected by a directed path in the “left-to-right” dual graph G_L^* of G (see Lemma 7 by Tamassia and Preparata [94], see also Lemma 24). Assume, without loss of generality, that this path is from *right* (v_i) to the *left* (v_{i+1}) . We can draw the edge e_i following this path. If the path is from *right* (v_{i+1}) to *left* (v_i) then, there is also a path from *left* (v_i) to *right* (v_{i+1}) in “right-to-left” dual graph G_R^* of G . In this case the proof is identical using G_R^* instead of G_L^* .

Note that G_L^* may contain more than one path from *right* (v_i) to the *left* (v_{i+1}) , each of them corresponding to a different drawing of e_i . We will next show that there is a unique path from *right* (v_i) to *left* (v_{i+1}) in G_L^* that satisfies the conditions of Lemma 43, and hence induces a planar st -digraph G_{e_i} .

We will identify a path $right(v_i) = f_1, f_2, \dots, f_m = left(v_{i+1})$ in G_L^* , where f_i denotes a face of G with source s_i and sink t_i , such that, vertices s_1, \dots, s_m are all in $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$, while vertices t_1, \dots, t_m are all in $V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i+1}\}$. During this procedure, we will also identify the edges of G that have to be crossed by this path so that the conditions of the Lemma 43 are satisfied. The first face of the path, $right(v_i) = f_1$, satisfies this condition, that is, since v_i is on the left border of f , there are paths $s_1 \rightsquigarrow v_i$ and $v_i \rightsquigarrow t_1$ in G , we have that $s_1 \in \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ and $t_1 \in V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i+1}\}$. Let us concentrate now on the right border of face f_1 . Since the right border of f_1 is a path of G and ρ is a topological numbering of G , there is exactly one edge $e_1 = (u_1, w_1)$ on it with the property that $u_1 \in \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ and $w_1 \in V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i+1}\}$. Note that u_1 can coincide with s_1 , while w_1 can coincide with t_1 . Now, observe that there is a unique

face f , such that the edge (u_1, w_1) belongs to its left border. Since G contains a paths from the source of f to u_1 and from w_1 to the sink of f , face f satisfies the desired property. Thus, the source of f is in $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$, while the sink of f in $V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i+1}\}$. We identify f_2 with f and continue this process until we meet the face $\text{left}(v_{i+1})$. We will next show that this process always terminates at face $\text{left}(v_{i+1})$.

For the sake of contradiction, assume it does not. This implies that $\text{left}(v_{i+1})$ does not have any edge (u, w) on its left border such that $u \in \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ and $w \in V \setminus \{v_1, \dots, v_{i+1}\}$. This means that either the sink of $\text{left}(v_{i+1})$ is in $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ or the source of $\text{left}(v_{i+1})$ is in $V \setminus \{v_1, \dots, v_{i+1}\}$. A clear contradiction, since G contains the paths from v_{i+1} to the sink of $\text{left}(v_{i+1})$ and from the source of $\text{left}(v_{i+1})$ to v_{i+1} .

During the identification of faces we have identified the edges (u_i, w_i) , $i = 1, \dots, m$ crossed by e . As they satisfy all the conditions of the Lemma 43, we infer that the resulting G_{e_i} is a planar st -digraph. Moreover, each edge that is crossed by e_i is uniquely identified. \square

Lemma 45. *Let $G = (V, E)$ be a planar st -digraph and E_c be an acyclic HP-completion set of G . Consider all possible HP-extended digraphs that correspond to drawings of $G' = (V, E \cup E_c)$. Then, there exists a unique HP-extended digraph G_c , such that the drawing of each HP-completion edge $e \in E_c$ meets conditions (i) – (iii) of Lemma 43. Moreover G_c is a planar st -digraph and the number of dummy vertices in G_c is minimum.*

Proof: Let P be the hamiltonian path created by the HP-completion set E_c and let $\rho = \{s = v_1, \dots, v_n = t\}$ be the topological numbering of the vertices of G that is induced by P . Let $E_c = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_k\}$ be the sequence of edges of E_c in the order they appear in P . We will show how to construct the acyclic HP-extended digraph so that it is a planar st -digraph.

Let $e'_1 = (v_i, v_{i+1})$ be the first edge of E_c that is traversed by P . Thus, G contains path (v_1, \dots, v_i) . By Lemma 44, there is a unique drawing of e'_1 that meets the conditions of Lemma 43 and hence induces a planar st -digraph $G_{e'_1}$. We apply this procedure inductively, drawing each time an edge of E_c in the order they appear in the hamiltonian path P . Since at each step we have a planar st -digraph, the final graph will be also a planar st -digraph.

To complete the proof, we show that if the edge e'_j is drawn as it is required in Lemma 43 then e'_j do not cross any e'_l , $l < j$. Call $G_{e'_{j-1}}$ the digraph before drawing the edge e'_j and suppose that $e'_{j-1} = (v_g, v_{g+1})$. The digraph $G_{e'_{j-1}}$ contains path (v_1, \dots, v_{g+1}) and all the HP-completion edges that were added to G in order to construct $G_{e'_{j-1}}$ have as destinations vertices with the indices smaller or equal to $g + 1$. So, if we draw the edge e'_j as required by Lemma 43, the edges that are crossed by e'_j have their sources greater or equal to $g + 1$. So we have that e'_j do not cross any previous HP-completion edge. So we infer that the total number of dummy vertices in G_c is minimum. \square

Let G be an embedded planar st -digraph and E_c be an acyclic HP-completion set of G . The drawing $\Gamma(G')$ of $G' = (V, E \cup E_c)$ that respects the drawing of G and induces the HP-extended digraph that is a planar st -digraph with minimum number of dummy vertices will be referred to as *the unique acyclic drawing of G'* .

Theorem 29. *Let G be an embedded planar st -digraph, E_c be an acyclic HP-completion set of G and $\Gamma(G')$ the unique acyclic drawing of $G' = (V, E \cup E_c)$. If edge (s, t) is not on the external face of G , $\Gamma(G')$ has at most $n - 3$ crossings per edge, otherwise it has at most $n - 4$ crossings per edge. Moreover, there exist embedded graphs and acyclic HP-completions sets that require so many edge crossings.*

Proof: Let $P = (s = v_1, v_2, \dots, v_n = t)$ be the implied by E_c Hamiltonian path on G . Observe that since G is an st -digraph, edges (s, v_2) and (v_{n-1}, t) belong in G and, thus, they are not part of the HP-completion set E_c . So, E_c consists of at most $n - 3$ edges. Then, even if an edge of G is crossed by all edges of E_c , that edge has at most $n - 3$ crossings. Figures 3.43.a and 3.43.b show graphs and topological orderings that cause so many crossings on edge (s, t) for the case where (s, t) is not on the external face.

Let assume now that edge (s, t) is on the external face. Then, it is not crossed by any edge of the HP-completion set. We next consider an arbitrary edge of the graph that is different from (s, t) and prove that it can be crossed by at most $n - 4$ edges of the HP-completion set.

If edges (s, v_2) and (v_{n-1}, t) are not the only edges of the graph G that participate in the hamiltonian path, then the HP-completion set E_c contains at most $n - 4$ edges and the result follows trivially.

Suppose now that (s, v_2) and (v_{n-1}, t) are the only edges of the graph that participate in the hamiltonian path P . This implies that, for any $i = 2 \dots n - 2$, (v_i, v_{i+1}) is an edge of the HP-completion set E_c .

Let us consider an edge (v_i, v_j) of G such that $(v_i, v_j) \neq (s, t)$. We consider three case based on whether (v_i, v_j) coincides with (s, v_2) or (v_{n-1}, t) or non of them. Before we proceed, note that since $\Gamma(G')$ is the unique acyclic drawing of G' , that is, a drawing that induces the unique acyclic HP-extended digraph of G_c , it is true that the drawing of each HP-completion edge meets the conditions of Lemma 43.

Case 1 $(v_i, v_j) = (s, v_2)$.

Consider an HP-completion edge (v_i, v_{i+1}) , $2 \leq i \leq n - 2$. Since the drawing of (v_i, v_{i+1}) meets condition (i) of Lemma 43, we have that (v_i, v_{i+1}) does not cross (s, v_2) . Thus, (s, v_2) is not crossed by any HP-completion edge.

Case 2 $(v_i, v_j) = (v_{n-1}, t)$.

Consider an HP-completion edge (v_i, v_{i+1}) , $2 \leq i \leq n - 2$. Since the drawing of (v_i, v_{i+1}) meets condition (i) of Lemma 43, we have that (v_i, v_{i+1}) does not cross (v_{n-1}, t) . Thus, (v_{n-1}, t) is also not crossed by any HP-completion edge.

Case 3 (v_i, v_j) does not coincide with either (s, v_2) or (v_{n-1}, t) . Since each (v_i, v_{i+1}) is an HP-completion edge we infer that $j > i + 1$. Thus, (v_{j-1}, v_j) , (v_i, v_{i+1}) are both edges of the HP-completion set. Since $(v_i, v_j) \neq (s, t)$ we have that either $v_i \neq s$ or $v_j \neq t$.

Case 3.a $v_i \neq s$. Then, the HP-completion edge (v_i, v_{i+1}) does not cross (v_i, v_j) due to condition (ii) of the Lemma 43.

Case 3.b $v_j \neq t$. Then, the HP-completion edge (v_{j-1}, v_j) does not cross (v_i, v_j) due to condition (ii) of the Lemma 43.

In both subcases, we identified one edge of the HP-completion set which does not cross edge (v_i, v_j) . Thus, at most $n - 4$ edges of the HP-completion set cross (v_i, v_j) .

□

Note that for the embedded graph and the topological ordering in Fig 3.43.b, moving edge (s, t) on the external face of graph G_2 (or, simply, deleting it), leaves edge (v_1, v_5) with 2 (i.e., 6-4) crossings in the upward drawing of the HP-completed graph.

Theorem 30. *Let G be an embedded planar st-digraph, E_c be an acyclic HP-completion set of G and P be the implied Hamiltonian path. Then, the unique acyclic drawing of $G' = (V, E \cup E_c)$ can be computed in $O(n + a)$ time, where a is the total number of edge crossings.*

Proof: We first describe how to represent the solution. For each edge of E_c we maintain a list of the edges of the original graph in the order they are crossed by it. In addition, we also maintain for each edge of the original graph, a list of edges of E_c which cross it, in the order they cross it when we traverse the edge in the forward direction. Note that the total number of items in the lists is proportional to the number of crossings.

Let G_L^* be the dual of G where all of its edges cross edges of the original graph from “left-to-right”. Similarly, define the “right-to-left” dual G_R^* . Let the external face of G be represented by two vertices on the dual, that is, s^* and t^* . s^* is positioned to the left(right) of G in G_L^* (resp., G_R^*) while t^* is positioned to the right(left) of G in G_L^* (resp., G_R^*). Each vertex of G corresponds to a face of each dual and by construction s (t) corresponds to the “lower half” (resp., “upper half”) of the external face of G_L^* and G_R^* . Thus, vertex s is below the bottom-most path of both duals (when G and each dual are drawn simultaneously).

During the execution of the algorithm which computes the crossings, the “interesting” part of the two duals (called *active dual*) will shrink (by deleting edges). Below, we describe how the active dual is defined during the course of the algorithm and we state its properties which our embedding algorithm is based on.

Let $P = (s = v_1, v_2, \dots, v_n = t)$ be the Hamiltonian path induced by E_c . Assume that we have computed all crossings involving all edges of P up to vertex v_i . The *active duals* G_L^* and G_R^* at the end of step i of the algorithm consist of the faces (and the vertices/edges defining them) of the dual which correspond to vertices $v_{i+1}, \dots, v_n = t$ of G . The following properties hold:

1. Vertices $s = v_1, \dots, v_i$ are all below the bottom-most path of the active duals. Moreover, the faces of the duals that correspond to vertex v_i share edges with the bottom-most path of their corresponding active duals.
2. Vertices $v_{i+1}, \dots, v_n = t$ are all above the bottom-most path of the active duals. Moreover, the faces of the duals that correspond to vertex v_{i+1} share edges with the the bottom-most path of their corresponding active duals.
3. If edge $(v_i, v_{i+1}) \notin E$ then, since E_c is an acyclic HP completion set, there either exists a path from $right(v_i)$ to $left(v_{i+1})$ in G_L^* or exists a path from $left(v_{i+1})$ to $right(v_i)$ in G_L^* . This path can be found on the bottom-most path of one of the two active duals.

The path from either $right(v_i)$ to $left(v_{i+1})$ or from $left(v_{i+1})$ to $right(v_i)$ on the bottom-most path of one of the active duals defines (in order) the edges of G crossed by edge (v_i, v_{i+1}) . Each crossing can be added in the corresponding linked lists of each crossed edge of G in constant time and thus, the crossings caused by edge (v_i, v_{i+1}) can be computed in time proportional to their number. An important technical detail in order to achieve time proportional to the number of edge crossings is the following: we do not know whether there exists a path from $right(v_i)$ to $left(v_{i+1})$ or from $left(v_{i+1})$ to $right(v_i)$, so we do not know in which dual to search (its bottom-most path). So, we traverse the bottom-most paths of the two duals in parallel (i.e., one step at each active dual) starting from $right(v_i)$ on the active G_L^* trying to find $left(v_{i+1})$, and from $left(v_{i+1})$ on the active G_R^* trying to find $right(v_i)$. This guarantees that the successful search terminates after a number of steps that is proportional to the size of the wanted path.

After we have identified the path in the bottom-most path of one of the two duals, then both active duals shrink for the next iteration by removing the dual edges that correspond to the

incoming edges of v_{i+1} . This can be done in time proportional to the number of these edges, by appropriately linking together the data structures representing the edges of the two duals and the edges of G .

From the above description, we infer an iterative algorithm that generates the crossings caused by the edges of the HP-completion set E_c in the order the edges of E_c appear on the Hamiltonian path P . Creating the two duals and maintaining the active duals during the course of the algorithm takes $O(n)$ time, while reporting the crossings (i.e., inserting them in the corresponding ordered linked lists of the edges they belong) takes $O(a)$ time, where a is the total number of edge crossings, resulting to an optimal output sensitive algorithm of $O(n + a)$ time complexity. The paths from $right(v_i)$ to $left(v_{i+1})$, that are computed by the algorithm, meet the conditions of Lemma 43 and hence by Lemma 44 and Lemma 45, we have that the drawing of E_c that is computed by the algorithm corresponds to the unique acyclic drawing of G' . So the correctness follows. \square

3.7.2 In terms of book embedding

In Section 3.3, the equivalence between the Acyclic-HPCCM problem and the problem of determining an upward topological book embedding with minimum number of spine crossings was established. More formally, it was shown that, if $G = (V, E)$ is an embedded upward planar digraph and $\Gamma(G)$ its upward planar drawing, G has an upward 2-page topological book embedding that respect the given embedding of G and has at most k -spine crossings per edge and c total crossings, such that the vertices appear on the spine in the order $\Pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ **if and only if** G has an acyclic HP-completion set E_c with the inferred hamiltonian path $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ and a drawing $\Gamma(G')$ of $G' = (V, E \cup E')$ respecting $\Gamma(G)$ such that each initial edge of G is crossed by at most k HP-completion edges, the total number of crossings is c and the induced HP-extended digraph G_c is an upward planar st -digraph.

Let $\rho = (s = v_1, v_2, \dots, v_n = t)$ be a topological ordering of the vertices of G . Then, observe that the edge set $E^\rho = \{(v_i, v_{i+1}) \mid (v_i, v_{i+1}) \notin E, 1 \leq i < n\}$ is an acyclic HP-completion set for G . Based on this fact, Theorems 29 and 30 and the equivalence between the Acyclic-HPCCM and the book embedding problems established in Section 3.3, we can state the following theorems (see Figures 3.43.b and 3.43.c for a relevant example):

Theorem 31. *Let G be an embedded planar st -digraph and ρ be a topological numbering of G . Then, G admits a unique ρ -constrained upward topological book embedding with at most $n - 3$ spine crossings per edge for the case where edge (s, t) is not on the external face, otherwise it admits a embedding with at most $n - 4$ spine crossings per edge. Moreover, there exist embedded graphs and topological orderings that require so many spine crossings.*

Theorem 32. *Let G be an embedded planar st -digraph and ρ be a topological numbering of G . Then, the unique ρ -constrained upward topological book embedding of G (with a minimum number of spine crossings) can be computed in $O(n + a)$ time, where a is the total number of spine crossings.*

The improved results on ρ -constrained upward topological book embeddings presented in this section, can be also used to improve the results presented in [50] regarding upward point set embeddability with a given mapping. The improvement mostly concerns the required number of bends per edge which is reduced to at most $n - 3$ bends per edge. The time complexity of the point set embedding algorithm in [50] is not improved by our algorithm since the step of finding the direction of the upwardness dominates in the overall algorithm with complexity $O(n^3)$.

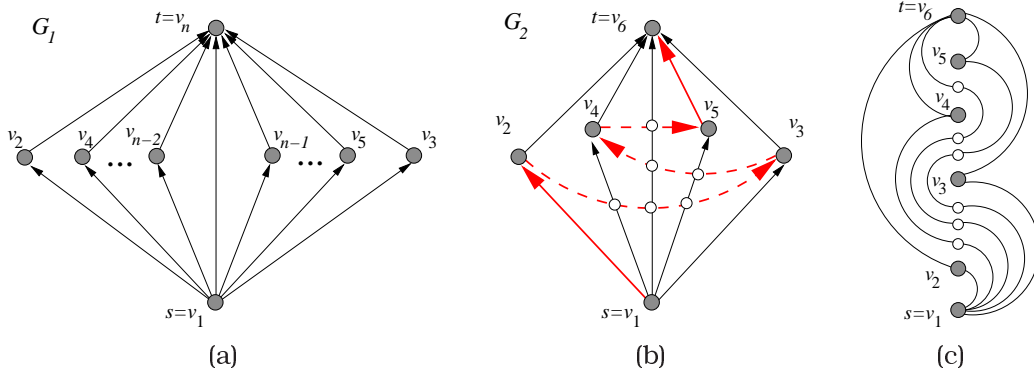


Figure 3.43: (a) A digraph G_1 and a topological numbering ρ such that in the ρ -constrained upward topological book embedding of G_1 edge (s, t) crosses the spine $n - 3$ times. (b) A digraph G_2 , an HP-completion set (dashed light edges), and the unique embedding of the HP-completed graph that respects the original drawing of G_2 . (c) The ρ -constrained book embedding for graph G_2 .

Finally, we point out that the ρ -constrained book embedding produced by the algorithm in [50] can be easily converted to the embedding produced by our algorithm if the redundant crossings with the spine are eliminated. Our approach, using the Acyclic-HPCCM problem, is just another point of view that allows a better analysis concerning the number of spine crossings.

3.8 Conclusion and Open Problems

In this chapter we defined and studied the acyclic-HPCCM problem. We first showed that this problem is equivalent to the problem of spine crossing minimization in upward topological book embeddings. Exploring this equivalence and the results we acquired for the acyclic-HPCCM problem we got several results for the spine crossing minimization problem in upward topological book embeddings. The most important among them are:

1. For the class of outerplanar st -digraphs the minimization problem can be solved in linear time.
2. For the class of embedded N -free upward planar digraphs there always exists a zero-crossing upward topological book embedding.
3. For the class of bounded-width st -digraphs, the minimization problem can be solved in polynomial time.
4. When the order of the vertices along the spine ρ is given we proved that there exists a ρ -constrained upward topological book embedding with at most $n - 3$ spine crossings per edge and, moreover, $n - 3$ spine crossing per edge are required for some graphs.

Concluding this chapter we note that, for the general problem no polynomial time algorithm is still known.

Chapter 4

Unilateral Orientation of Mixed Graphs

In this chapter we present a graph-theoretical result, concerning orientations of mixed graphs. We studied this problem because it promised to represent a tool for the solution of general problem of spine-crossing minimization in upward topological book embeddings. Taken independent, it represents an interesting result for algorithmic graph theory, partially resolving a reported open graph theory problem [81].

A large body of literature has been devoted to the study of mixed graphs (see [6] and the references therein). A mixed graph is *strongly orientable* when its undirected edges can be oriented in such a way that the resulting directed graph is strongly connected, while, it is *unilaterally orientable* when its undirected edges can be oriented in such a way that for every pair of vertices x, y there exists a path from x to y , or from y to x , or both.

Several problems related to the strong orientation of mixed graphs have been studied. Among them are the problems of “recognition of strongly orientable mixed graphs” [13] and “determining whether a mixed graph admits a unique strong orientation” [20, 40].

In this chapter we answer the corresponding questions for unilateral orientations of mixed graphs, that is, firstly we develop a linear-time algorithm for recognizing whether a mixed graph is unilaterally orientable and, secondly, we provide a polynomial algorithm for testing whether a mixed graph accepts a unique unilateral orientation.

4.0.1 Basic Definitions

We say that in (di)graph G vertex y is *reachable* from vertex x if there is a (directed) path from vertex x to vertex y .

A *mixed graph* $M = (V, A, E)$ contains both arcs (ordered pairs of vertices in A) and edges (unordered pairs of vertices in E). A *path in a mixed graph* is a sequence of edges and arcs in which consecutive elements (i.e., edges or arcs) are incident on the same vertex and all arcs are traversed in their forward direction. Note that, since a graph (digraph) is a mixed graph having only edges (resp. only arcs), any definition or property concerning mixed graphs also applies to graphs (resp. digraphs).

A *biorientation* of a mixed graph $M = (V, A, E)$ is obtained from M by replacing every edge $(x, y) \in E$ by either arc (x, y) , or arc (y, x) , or the pair of arcs (x, y) and (y, x) . If every edge is replaced by a single arc, we speak of an *orientation* of a mixed graph M . The *complete biorientation* of a mixed graph $M = (V, A, E)$, denoted by \overleftrightarrow{M} , is a biorientation of M such that every edge $(x, y) \in E$ is replaced in \overleftrightarrow{M} by the pair of arcs (x, y) and (y, x) .

An *underlying graph* $UG(M)$ of a mixed graph $M = (V, A, E)$ is the unique undirected graph G resulting by “removing” the direction from each arc of M , i.e., by turning each arc of A into an edge. A mixed graph M is *connected* if $UG(M)$ is connected.

A digraph D is *strongly connected* (or, just *strong*) if, for every pair x, y of distinct vertices in D , x and y are mutually reachable from each other. A *strong component* of a digraph D is a maximal subdigraph of D which is strong. The *strong component digraph* $SC(D)$ of D is obtained by contracting strong components of D and by identifying any parallel arcs obtained during this process into a single arc. The digraph $SC(D)$ for any digraph D is acyclic as any cycle is fully contained within a single strongly connected component. A digraph D is *unilateral* if, for every pair x, y of vertices of D , either x is reachable from y or y is reachable from x (or both).

The definitions for the connectivity-related terms can be extended for the case of mixed graphs. A mixed graph M is *strongly connected* (or *strong*) if its complete biorientation \overleftrightarrow{M} is strongly connected. A mixed graph M is *unilaterally connected* (or *unilateral*) if its complete biorientation \overleftrightarrow{M} is unilateral.

A mixed graph M is *strongly (unilaterally) orientable* (or, equivalently, M *admits a strong (unilateral) orientation*) if there is an orientation of M which is strongly (resp. unilaterally) connected. A mixed graph M admits a *hamiltonian orientation*, if there is an orientation \vec{M} of M which is hamiltonian¹. Note that a graph that admits a hamiltonian orientation also admits a unilateral orientation.

4.0.2 Problem Definition and Related Work

Given a mixed graph M , it is natural to examine whether M is strongly or unilaterally orientable. The mixed graph M_1 of Figure 4.1a, is strongly orientable as it is demonstrated by digraph D_1 (Fig. 4.1b). The directed graphs D_2 and D_3 (Fig. 4.1c and Fig. 4.1d) show two unilateral orientations of M , non of which is strong. Robbins [88] proved that an undirected graph is strongly orientable if and only if it is connected and has no bridge². Boesch and Tindel [13] generalized Robbins’ result, showing that a mixed multigraph is strongly orientable if and only if it is strongly connected and has no bridges. Given that a digraph with n vertices and m arcs can be tested for strong connectivity and for being bridgeless in $O(m + n)$ time, the characterization given by Boesch and Tindel immediately leads to a polynomial time recognition algorithm of strongly orientable mixed graphs. Chung et al [23] presented an algorithm that computes a strong orientation of a mixed multigraph in linear time. Chartrand et al [20] provided a characterization of unilaterally orientable graphs by showing that:

Theorem 33 (Chartrand et al., [20]). *A connected graph G has a unilateral orientation if and only if all of the bridges of G lie on a common path.*

As the unilateral orientation presents a different notion of connectivity, it is natural to ask whether a mixed graph admits a unilateral orientation. Even though unilateral orientation is a weaker notion of connectivity, not all mixed graphs admit a unilateral orientation. For example, the mixed graph M_2 in Fig. 4.2a does not admit a unilateral orientation since there is no directed path between vertices v_2 and v_3 in either direction. In this chapter, we present a characterization

¹In the literature, a *hamiltonian graph* is traditionally referred to as a graph containing a hamiltonian cycle. In this chapter, we refer to a hamiltonian graph as a graph containing a hamiltonian path.

²An edge e of a connected mixed graph M is a *bridge* if $M \setminus \{e\}$ is not connected. A mixed graph containing no bridge is called *bridgeless*.

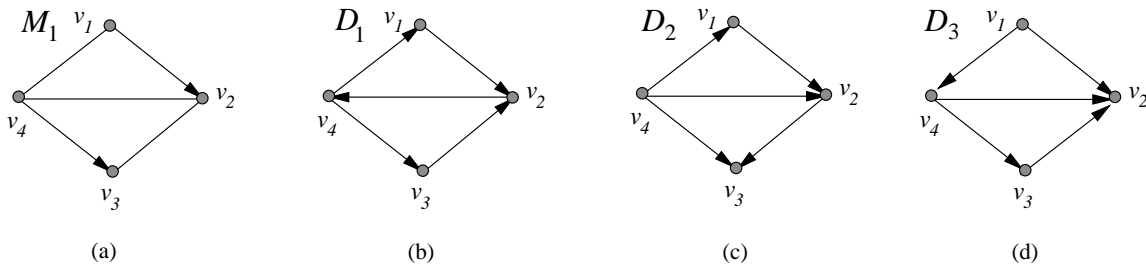


Figure 4.1: (a) A mixed graph M_1 . (b) A strong orientation of M_1 . (c) & (d) Unilateral orientations of M_1 that are not strong, as there is no path from v_3 to v_1 .

of unilaterally orientable mixed graphs that leads to a linear-time recognition algorithm. Our characterization can be considered to be a generalization of Theorem 33 for mixed graphs.

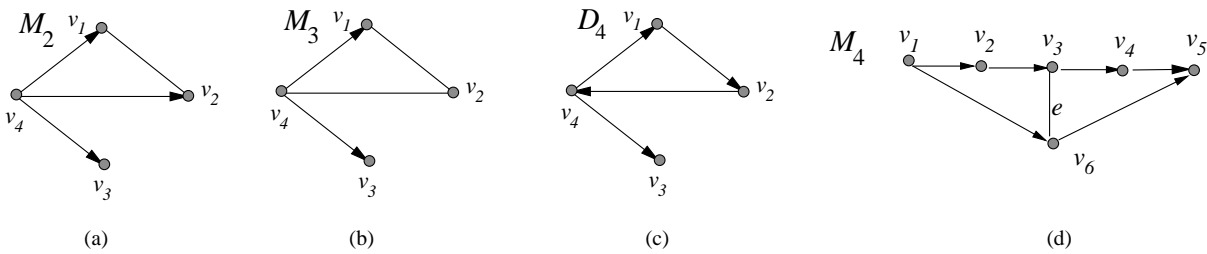


Figure 4.2: (a) A mixed graph M_2 which does not admit any unilateral orientation. (b) A mixed graph M_3 which has a forced unilateral orientation. (c) The unique unilateral orientation of M_3 . (d) A bridgeless unilateral mixed graph that does not admit a unilateral orientation.

Observe that not all mixed graphs admit more than one distinct orientation (strong or unilateral). For example, the mixed graph M_3 of Fig. 4.2b admits a unique unilateral orientation (given in Fig. 4.2c). Consider a mixed graph $M = (V, A, E)$ which has a *unique* strong (unilateral) orientation D . Then, we say that D is a *forced strong (resp. unilateral) orientation* for M .

Let $G = (V, E_1 \cup E_2)$ be a graph, let A be an arc-set obtained from an orientation of the edges in E_1 , and let $M = (V, A, E_2)$ be the resulting mixed graph. If M has a forced strong (unilateral) orientation then we say that A is a *forcing set* for a strong (resp. unilateral) orientation of G , or simply a *strong (resp. unilateral) forcing set*.

The concept of forced strong (unilateral) orientation of graphs was first introduced by Chartrand et al [20] who defined the *forcing strong (resp. unilateral) orientation number* of an undirected graph G to be the cardinality of the minimal forcing set for a strong (resp. unilateral) orientation of G . Forced strong orientations of graphs were later studied by Farzad et al [40]. Forced unilateral orientations were studied by Pascovici [81]. In her work, she mentions that finding an efficient algorithm for calculating the forcing unilateral orientation number of a graph is an open question which, to the best of our knowledge, has not been answered yet. In this chapter, we partially resolve this question. Given a mixed graph $M = (V, A, E)$, we provide an algorithm which tests in polynomial time whether A is a forcing set for a unilateral orientation of M (i.e., it tests whether M has a unique unilateral orientation).

The remaining of this chapter is organized as follows:

- In Section 4.1 we develop a linear-time algorithm for recognizing whether a mixed graph

accepts a unilateral orientation and, in the case it does, we produce such an orientation.

- In Section 4.2, we give a lemma which implies a polynomial algorithm for testing whether a mixed graph accepts a unique unilateral orientation. We conclude in Section 4.3 with open problems.

The results presented in this chapter are published in [75].

4.1 Recognition of Unilaterally Orientable Mixed Graphs

4.1.1 Preliminaries

The following theorem, due to Boesch and Tindell, gives necessary and sufficient conditions for a mixed graph to have a strongly connected orientation.

Theorem 34 (Boesch and Tindell [13]). *A mixed multigraph M admits a strong orientation if and only if M is strong and the underlying multigraph of M is bridgeless.*

Note that, a corresponding theorem for unilaterally orientable graphs (i.e., “a mixed multigraph M has a unilateral orientation if and only if M is unilateral and the underlying multigraph of M is bridgeless”) does not hold. This is demonstrated by the mixed graph M_4 in Fig. 4.2d which is unilateral and bridgeless, but, it does not have a unilateral orientation. To see that, observe that if edge (v_3, v_6) is oriented towards v_6 , then vertices v_4 and v_6 are not connected by a directed path in either direction, while, if edge (v_3, v_6) is directed towards v_3 then vertices v_2 and v_6 are not connected by a directed path in either direction.

Lemma 46 ([55], pp. 66). *Digraph D is unilateral if and only if D has a spanning directed walk³.*

Lemma 47 ([20]). *A tree T admits a unilateral orientation if and only if T is a path.*

A vertex of a directed graph having in-degree (out-degree) equal to zero is referred to as a *source* (resp. *sink*). An *st-digraph* is a directed acyclic digraph having a single source (denoted by s) and a single sink (denoted by t).

Lemma 48 ([73]). *Let D be an st -digraph⁴ that does not have a hamiltonian path. Then, there exist two vertices in D that are not connected by a directed path in either direction.*

4.1.2 A characterization

Consider a mixed graph $M = (V, A, E)$ and let $V' \subseteq V$. The mixed subgraph of M induced by V' , denoted by $M(V')$, is defined as $M(V') = (V', A', E')$ where, $A' = \{(u, v) \mid (u, v) \in A \text{ and } u, v \in V'\}$ and $E' = \{(u, v) \mid (u, v) \in E \text{ and } u, v \in V'\}$.

Let M be a mixed graph, let $D_i = (V_i, E_i)$, $1 \leq i \leq k$, be the strong components of the complete biorientation \overleftrightarrow{M} of M . The *strong components* M_i , $1 \leq i \leq k$, of mixed graph M are defined as: $M_i = M(V_i)$, $1 \leq i \leq k$, that is, M_i is the mixed subgraph of M induced by V_i . Note that each M_i is strong since, by definition, D_i is its complete biorientation.

³A *spanning directed walk* of a digraph is a directed path that visits all the vertices of the digraph, some possibly more than once.

⁴In [73] the lemma was proven for planar st -digraphs. The identical proof holds for all st -digraphs.

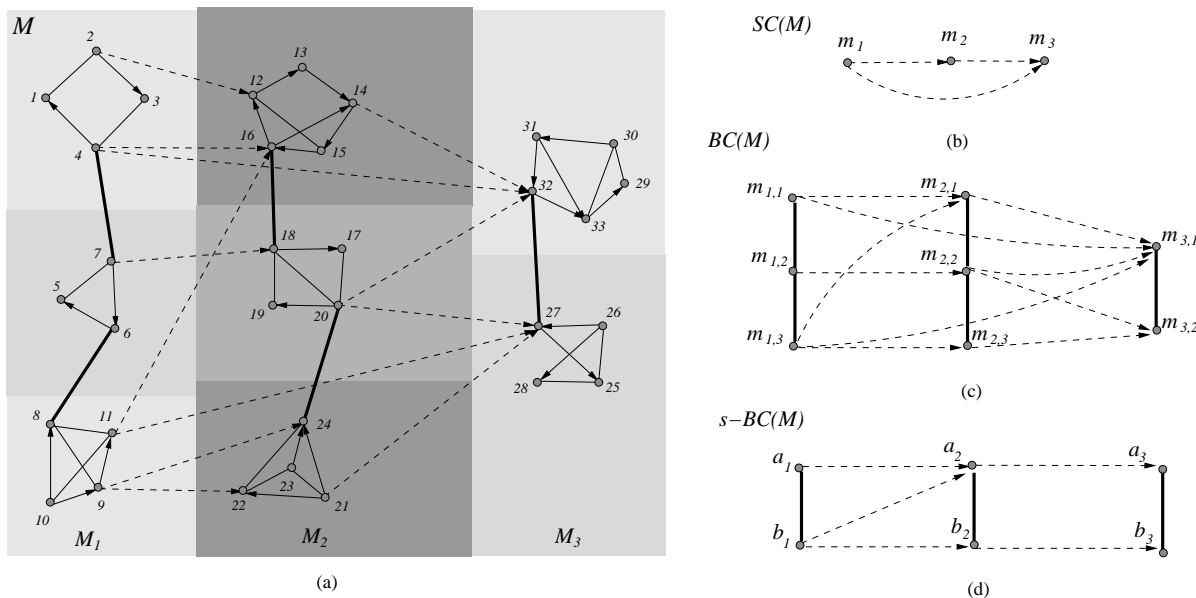


Figure 4.3: (a) A mixed graph M . M_1 , M_2 and M_3 are the three strong components of M . Dashed edges connect M_i with M_j , $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. The bold edges are the bridges of each M_i . (b) The strong component digraph $SC(M)$ of M . (c) The bridgeless-component mixed graph $BC(M)$ of M . (d) The simplified bridgeless-component mixed graph for mixed graph M , where the vertices a_i, b_i denote the endpoints of a bridge path $B(M_i)$.

The *strong component digraph* of a mixed graph M , denoted by $SC(M)$, is obtained by contracting each strong component of M into a single vertex and by identifying all parallel arcs that are created during this process into a single arc. Fig. 4.3a shows a mixed graph having three strong components and Fig. 4.3b shows its corresponding strong component digraph. Note that the strong component digraph of any mixed graph is acyclic.

The next lemma gives the first necessary condition for a mixed graph M to have a unilateral orientation.

Lemma 49. *If a mixed graph M admits a unilateral orientation then its strong component digraph $SC(M)$ has a hamiltonian path.*

Proof: For the sake of contradiction, assume that $SC(M)$ has no hamiltonian path. Since $SC(M)$ is an acyclic digraph, it has at least one source and at least one sink. If there are two or more sources (sinks) then it is clear that any two of the sources (sinks) are not connected by a directed path in either direction. If there is exactly one source and exactly one sink in $SC(M)$ then $SC(M)$ is an st -digraph and, by Lemma 48, there are two vertices of $SC(M)$ that are not connected by a directed path in either direction. So, in either case, we can identify two vertices of $SC(M)$, call them m_i and m_j , that are not connected by a directed path in either direction.

By the definition of the strong component digraph $SC(M)$, m_i and m_j correspond to contracted strong components of M . Let these strong components be M_i and M_j , respectively. Since m_i and m_j are not connected by a directed path in either direction, then for each vertex u of M_i and for each vertex v of M_j there is no directed path in the complete biorientation digraph \overleftrightarrow{M} connecting u with v . Therefore, there is no path in the mixed graph M connecting u and v in either direction, and thus, there can be no orientation of M that creates a directed path connecting u with v in either direction. This is a clear contradiction of the assumption that M

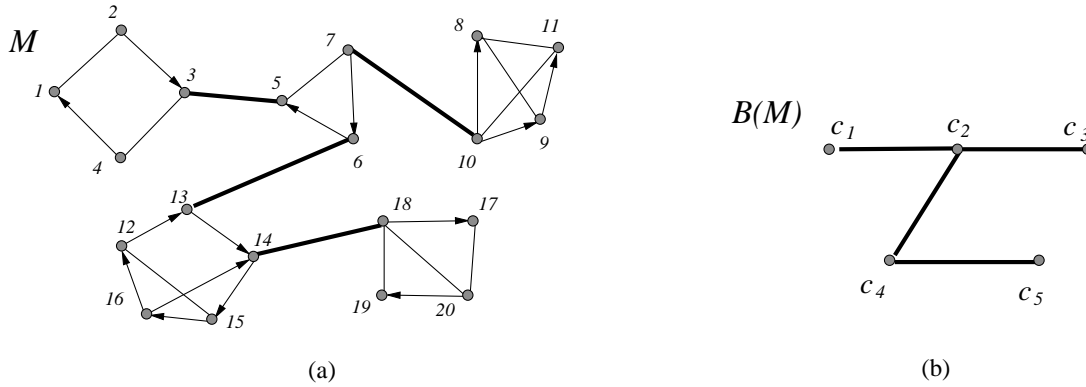


Figure 4.4: (a) A strong mixed graph M . (b) The bridge graph $B(M)$ of M .

admits a unilateral orientation. □

Let $M = (V, A, E)$ be a strong mixed graph and $B \subseteq E$ be the bridges of M . Note that B may be empty. Then, all components of graph $M \setminus B$ are strong and bridgeless.

The *bridge graph* of a strong mixed graph M , denoted by $B(M)$, is obtained by contracting in M the vertices of each strong component of $M \setminus B$. Note that a bridge graph of any strong mixed graph is a tree. Fig. 4.4 shows a strong mixed graph and its bridge graph.

The following lemma gives the second necessary condition for the mixed graph to have a unilateral orientations.

Lemma 50. *If a mixed graph M admits a unilateral orientation then the bridge graph of each of its strong components is a path.*

Proof: Consider a unilateral orientation D of M . By Lemma 46, D has a spanning walk. This spanning walk of D induces an orientation of the bridges of M and, thus, an orientation of $B(M)$ which is unilateral. Recall that $B(M)$ is a tree. Then, by Lemma 47 we conclude that the bridge graph $B(M)$ of M is a path. □

Let $M = (V, A, E)$ be a mixed graph and let $M_i, 1 \leq i \leq k$, be its strong components. Moreover, let B_i be the bridges of $M_i, 1 \leq i \leq k$, and let $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$. Then, the set of strong components of the mixed graph $M \setminus B$ is the union of the strong components of each $M_i \setminus B_i, 1 \leq i \leq k$. The *bridgeless-component mixed graph* of a mixed graph M , denoted by $BC(M)$, is obtained by contracting in M the vertices of each strong component of $M \setminus B$ into a single vertex and by identifying any parallel arcs created during this process into a single arc. Fig. 4.3c shows the bridgeless-component mixed graph for the mixed graph of Fig. 4.3a. Note that the edge set of the bridgeless-component mixed graph $BC(M)$ is exactly set B . Moreover, $BC(M)$ can be considered to consist of a set of (undirected) trees (the bridge graph $B(M_i)$ of each strong component M_i of M) connected by arcs which do not create any cycle. Also observe that the strong component digraph $SC(M)$ of M can be obtained from $BC(M)$ by contracting all bridgeless components of M_i into a single vertex and by identifying all parallel arcs created by this process into a single arc.

Observation 2. *Let M be a mixed graph. Then any orientation of $BC(M)$ is acyclic.*

Proof: It follows from the facts that (i) the strong component digraph $SC(M)$ is acyclic and (ii) the bridge graph $B(M')$ of any strong component M' of M is a tree. □

The following theorem provides a characterization of unilaterally orientable mixed graphs.

Theorem 35. *A mixed graph M admits a unilateral orientation if and only if the bridgeless-component mixed graph $BC(M)$ admits a hamiltonian orientation.*

Proof: (\Rightarrow) We assume that a mixed graph M admits a unilateral orientation and we show that $BC(M)$ admits a hamiltonian orientation. Consider a unilateral orientation of M . By Lemma 46, the unilateral orientation of M has a spanning walk. That spanning walk induces a spanning walk on $BC(M)$. Since any orientation of $BC(M)$ is acyclic (Observation 2) the induced spanning walk on $BC(M)$ is a hamiltonian path. Thus, $BC(M)$ admits a hamiltonian orientation.

(\Leftarrow) We assume now that $BC(M)$ admits a hamiltonian orientation and we show that M admits a unilateral orientation. Recall that the vertices of $BC(M)$ correspond to the bridgeless strong components of M . By Theorem 34, it follows that each of these components admits a strong orientation. This strong orientation implies a spanning walk between any pair of vertices of the strong bridgeless component. The hamiltonian orientation of $BC(M)$ implies an orientation of the bridges of the strong components of M . The strong orientation of the strong and bridgeless components of M together with the orientation of the bridges of the strong components of M , result to orientation D of M .

The hamiltonian orientation of $BC(M)$ implies a hamiltonian path and, in turn, an ordering of the strong bridgeless components of M . Based on this ordering, we can easily construct a spanning walk on orientation D . Thus, based on Lemma 46, D is a unilateral orientation. We conclude that M admits a unilateral orientation. \square

4.1.3 The algorithm

Based on the the characterization of Section 4.1.2, Algorithm 1 decides whether a mixed graph that is given to its input is unilaterally orientable. In the first step of Algorithm 1, we construct the strong connected digraph $SC(M)$ of M . In order to do so, we have to compute the strongly connected components of the complete biorientation \overleftrightarrow{M} of M . This can be easily accomplished in $O(V + A + E)$ time. In the second step of Algorithm 1, we test whether $SC(M)$ has a hamiltonian path. Note that since $SC(M)$ is an acyclic digraph, it has a hamiltonian path if and only if it has a unique topological ordering. This can be easily tested in linear time to the size of $SC(M)$. In the third step of Algorithm 1, we construct the bridge graph $BM(M_i)$ for each strong component M_i of M . Identifying all bridges can be trivially done by testing whether the removal of each individual edge disconnects the component. By using a depth-first-search based method, the identification of all bridges and the construction of all bridge graphs can be completed in $O(V + A + E)$ time. Testing whether each bridge graph is a path is trivial and can be completed in linear time to the size of the bridge graph.

By utilizing the already constructed bridge graphs of step 3 of the algorithm, we can construct the bridgeless-component mixed graph $BC(M)$ of M in time proportional to its size. Now, it remains to test whether $BC(M)$ is hamiltonian. Note that, since we have reached the fourth step of Algorithm 1, it holds that our graph satisfies two properties. Firstly, all of its bridge graphs are paths (thus, we refer to them as *bridge paths*) and, secondly, its strong component digraph $SC(M)$ is hamiltonian. We will exploit these properties in order to decide whether $BC(M)$ is hamiltonian in linear time.

Let M_i , $1 \leq i \leq k$, be the strong components of M and assume without loss of generality that they appear on the hamiltonian path of $SC(M)$ in this order. Firstly observe that in a hamiltonian path of $BC(M)$, if one exists, all vertices of the bridge path $B(M_i)$ are visited before the vertices of the bridge path $B(M_j)$, for all $i < j$. Since the graph $SC(M)$ is acyclic, if we leave component M_i before visiting all of its vertices there is no way to return to it and, thus, no

hamiltonian path exists. Also observe that, in a hamiltonian path of $BC(M)$ each bridge path is traversed from one of its endpoint to the other and, thus, there are two possible orientation of the bridge path. As a consequence, the hamiltonian path of $BC(M)$, if any, only uses arcs which leave from the endpoints of a bridge path $B(M_i)$ and enter the endpoints of a bridge path $B(M_j)$, $i < j$. In addition, these arcs connect consecutive bridge paths. Thus, when testing whether the bridgeless-component mixed graph $BC(M)$ has a hamiltonian path, we can use a simplified leveled mixed graph, denoted by $s-BC(M)$, resulting by eliminating all vertices which are not endpoints of a bridge graph and all arcs that enter or leave them, as well as all arcs connecting vertices on non consecutive bridge paths. Thus, each level of the graph is either an edge or a single vertex, and the levels which correspond to the strong components of M appear in the order of their corresponding strong component. Fig. 4.3d shows the simplified bridgeless-component mixed graph for mixed graph M , where the vertices a_i, b_i denote the endpoints of a bridge path $B(M_i)$.

We can decide whether the $s-BC(M)$ has a hamiltonian path by using a simple dynamic programming algorithm. Let p_i^a be a boolean variable which takes the value **true** if and only if there is a hamiltonian path that traverses all vertices of the first i levels of $s-BC(M)$ and terminates at vertex a_i , $1 \leq i \leq k$. Similarly we define p_i^b . It is easy to see that the following recursive relations hold:

$$\begin{aligned} p_1^a &= p_1^b = \mathbf{true} \\ p_i^a &= (p_{i-1}^a = \mathbf{true} \wedge \exists(a_{i-1}, b_i) \in A') \vee (p_{i-1}^b = \mathbf{true} \wedge \exists(b_{i-1}, b_i) \in A') \\ p_i^b &= (p_{i-1}^b = \mathbf{true} \wedge \exists(b_{i-1}, a_i) \in A') \vee (p_{i-1}^a = \mathbf{true} \wedge \exists(a_{i-1}, a_i) \in A') \\ &\text{(for } 1 < i \leq k) \end{aligned}$$

Based on the above equations, we can decide whether there is a hamiltonian path in $s-BC(M)$ (and, as a consequence in $BC(M)$) in $O(k)$ time.

Observation 3. *The bridgeless-component mixed graph $BC(M)$ of a mixed graph M has exactly one hamiltonian path if and only if $p_i^a \oplus p_i^b = \mathbf{true}$, $1 \leq i \leq k$, where k is the number of strong components of M .*

We also note that, in the case where a unilateral orientation exists, we can compute one in linear time. This can be achieved by orienting the bridges of $BC(M)$ according to the hamiltonian path of $BC(M)$ and by using a strong orientation for each bridgeless strong component of the bridge graphs.

From the above description, we can state the following theorem:

Theorem 36. *Given a mixed graph $M = (V, A, E)$, we can decide whether M admits a unilateral orientation in $O(V + A + E)$ time. Moreover, if M is unilaterally orientable, a unilateral orientation can be computed in $O(V + A + E)$ time.*

We also note that we can prove an additional characterization for unilaterally orientable mixed graphs that can be considered to be a counterpart of Theorem 33 given by Chartrand et al [20]. The proof of the following theorem is based on the properties of the strong component digraph $SC(M)$, and the bridgeless-component mixed graph $BC(M)$ for a mixed graph M .

Theorem 37. *A mixed graph admits a unilateral orientation if and only if all the bridges of its strong components lie on a common path.*

Algorithm 4: UNILATERAL-ORIENTATION(M)**input** : A Mixed graph $M = (V, A, E)$.**output** “YES” if M has a unilateral orientation, “NO” otherwise.

:

1. Construct the strong connected digraph $SC(M)$ of M .
{Denote the strong components of $SC(M)$ by M_1, \dots, M_k .}
2. **if** $SC(M)$ has no hamiltonian path **then return**(“NO”) **else**
3. For each strong component M_i of M , $1 \leq i \leq k$,
Construct the bridge graph $B(M_i)$;
if B_{M_i} is not a simple path **then return**(“NO”);
{ All bridge graphs B_{M_i} are paths. }
4. Construct the bridgeless-component mixed graph $BC(M)$ of M
5. **if** $BC(M)$ has no hamiltonian path **then return**(“NO”);
6. **return**(“YES”);

4.2 Recognition of Unilateral Forcing Sets

Let $M = (V, E, A)$ be a mixed graph. In this section we present a simple lemma stating whether M has a forced unilateral orientation or, equivalently, whether A is a unilateral forcing set for M . Based on this lemma and Algorithm 4, we infer a polynomial algorithm for testing whether A is a unilateral forcing set for M or, equivalently, G has a unique unilateral orientation.

Forced unilateral orientations were studied by Pascovici in [81], where she gave a general lower bound for the forcing unilateral orientation number and showed that the forcing unilateral orientation number of a graph G having edge connectivity 1 is equal to $m - n + 2$, where m and n are the numbers of edges and vertices of G , respectively.

Lemma 51. *A mixed graph $M = (V, A, E)$ admits a unique unilateral orientation if and only if for each edge $e = (u, v) \in E$ either $(V, A \cup \{(u, v)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ or $(V, A \cup \{(v, u)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ has a unilateral orientation, but not both.*

Proof: (\Rightarrow) Let M admit a unique unilateral orientation and assume, for the sake of contradiction, that both $(V, A \cup \{(u, v)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ and $(V, A \cup \{(v, u)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ have a unilateral orientation. Then these unilateral orientations differ in at least one edge and hence are distinct. A clear contradiction. Otherwise, if we assume that neither $(V, A \cup \{(u, v)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ nor $(V, A \cup \{(v, u)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ has a unilateral orientation, then we have a contradiction again, as M was supposed to have at least one unilateral orientation.

(\Leftarrow) Assume now that for each edge $e = (u, v) \in E$ either $(V, A \cup \{(u, v)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ or $(V, A \cup \{(v, u)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ has a unilateral orientation, but not both of them. It is clear that M has at least one unilateral orientation. Assume, for the sake of contradiction, that M has more than one unilateral orientations. Consider any two arbitrary unilateral orientations of M . As these orientations are distinct they differ in at least one edge, say $e' = (u', v') \in E$. So we conclude that both $(V, A \cup \{(u', v')\}, E \setminus \{e'\})$ and $(V, A \cup \{(v', u')\}, E \setminus \{e'\})$ have a unilateral orientation, a clear contradiction. \square

Theorem 38. *Given a mixed graph $M = (V, A, E)$, we can decide whether A is a unilateral forcing set for M in $O(E(V + A + E))$ time.*

Proof: Follows directly from Theorem 36 and Lemma 51. □

4.3 Conclusion and Open Problems

For a mixed graph $M = (V, A, E)$, we presented a linear-time algorithm that recognizes whether M is unilaterally orientable, and in the case where it is, we also presented a characterization leading to a polynomial algorithm for determining whether A is a unilateral forcing set for M . Future research includes the study of the number of unilateral orientations of a mixed graph, as well as the complexity of the problem of finding a unilateral forcing set of minimum size.

Μέρος II

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Περίληψη

Δύο προβλήματα της Απεικόνισης Γραφημάτων αποτελούν το αντικείμενο αυτής της διατριβής. Στο πρώτο πρόβλημα, που ονομάζεται *Ανερχόμενη Εμφύτευση σε Σύνολο Σημείων*, το δεδομένο γράφημα ζητείται να εμφυτευτεί με ανερχόμενο και επίπεδο τρόπο σε ένα δεδομένο σύνολο σημείων του επιπέδου. Στο δεύτερο, που ονομάζεται *Ανερχόμενη Εμφύτευση σε Βιβλίο*, ο στόχος είναι να ζωγραφίσουμε το γράφημα έτσι ώστε οι κορυφές του να είναι τοποθετημένες σε μια προσανατολισμένη ευθεία και οι ακμές του να αναπαρίστανται από μονότονα αύξουσες καμπύλες στην κατεύθυνση της ευθείας αυτής. Τα προβλήματα αυτά βρίσκουν εφαρμογές στην διαχείριση έργων, κατασκευή διαγραμμάτων PERT και σχεδιασμό των κυκλωμάτων VLSI. Επιπλέον, εφαρμόζονται για την απεικόνιση της ιεραρχικής δομής των κατευθυνόμενων γραφημάτων, όπου ζητούνται κάποιο περιορισμοί στην τοποθέτηση των κορυφών.

Στο **Κεφάλαιο 1**, δίνουμε μια σύντομη εισαγωγή στο πεδίο της Απεικόνισης Γραφημάτων και παρουσιάζουμε τα προβλήματα που μελετούνται σε αυτή την διατριβή.

Στο **Κεφάλαιο 2**, μελετάμε τις ανερχόμενες εμφυτεύσεις σε σύνολα σημείων. Αρχικά, συγκεντρωνόμαστε σε κατευθυνόμενα δέντρα και κυρτά σύνολα σημείων. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν μερικές οικογένειες δέντρων που είναι ανερχόμενα και επίπεδα εμφυτεύσιμες σε οποιοδήποτε κυρτό σύνολο σημείων. Εναλλακτικά, δείχνουμε ότι υπάρχει μια οικογένεια δέντρων που δεν επιδέχεται καμία ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε ένα κυρτό σύνολο σημείων. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι μπορεί να αποφανθεί σε πολυωνυμικό χρόνο αν ένα κατευθυνόμενο δέντρο είναι ανερχόμενα και επίπεδα εμφυτεύσιμο σε ένα δεδομένο κυρτό σύνολο σημείων. Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται στην κλάση των εξωεπίπεδων κατευθυνόμενων γραφημάτων. Δηλαδή, παρουσιάζουμε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο, που δεδομένου ενός κατευθυνόμενου εξωεπίπεδου γραφήματος και ενός κυρτού συνόλου σημείων αποφασίζει αν υπάρχει μια ανερχόμενα επίπεδη εμφύτευσή του στο σύνολο σημείων. Επειδή κάθε γράφημα που επιδέχεται μια επίπεδη εμφύτευση σε ένα κυρτό σύνολο σημείων αποτελεί ένα εξωεπίπεδο γράφημα, το τελευταίο αποτέλεσμα ολοκληρώνει την μελέτη του προβλήματος για τα κυρτά σύνολα σημείων. Στη συνέχεια, μελετάμε γενικά σύνολα σημείων και προσανατολισμένα μονοπάτια. Αποδεικνύουμε ότι κάθε προσανατολισμένο μονοπάτι με n κορυφές επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε κάθε σύνολο $O(n^2)$ σημείων. Τέλος, αποδεικνύουμε ότι το γενικό πρόβλημα απόφασης για το αν ένα ανερχόμενα επίπεδο γράφημα επιδέχεται μια ανερχόμενα επίπεδη εμφύτευση σε ένα σύνολο σημείων είναι \mathcal{NP} -πλήρες.

Το **Κεφάλαιο 3** είναι αφιερωμένο στην μελέτη των *εμφυτεύσεων σε βιβλίο*. Πιο συγκεκριμένα, μελετάμε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης των τομών των ακμών με την ράχη του βιβλίου. Για να απλοποιήσουμε την μελέτη, εισάγουμε το πρόβλημα της Ακυκλικής Πλήρωσης κατά Χάμιλτον με Ελαχιστοποίηση των Τομών (για συντομία Acyclic-HPCCM). Πρώτα αποδεικνύουμε την ισοδυναμία του προβλήματος της ελαχιστοποίησης των τομών των ακμών με την ράχη του βιβλίου, και του προβλήματος Acyclic-HPCCM. Στη συνέχεια επιλύουμε το πρόβλημα Acyclic-HPCCM για την κλάση των εξωεπίπεδων *st*-γραφημάτων. Ως ειδική περίπτωση, μελετάμε αν το πρόβλημα Acyclic-HPCCM μπορεί να λυθεί χωρίς τομές. Αποδεικνύουμε ότι αυτό μπορεί να γίνει για τα N -ελεύθερα κατευθυνόμενα γραφήματα και να αποφανθεί σε πολυωνυμικό χρόνο για ανερχόμενα επίπεδα γρα-

φήματα περιορισμένου πλάτους. Τέλος, μελετάμε τις ρ -περιορισμένες ανερχόμενες εμφυτεύσεις σε βιβλίο, δηλαδή τις εμφυτεύσεις όπου η σειρά με την οποία οι κορυφές εμφανίζονται στη ράχη του βιβλίου δίνονται ως μέρος της εισόδου. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε βελτιώνουν τα όρια που δόθηκαν στην [50].

Στο **Κεφάλαιο 4**, παρουσιάζουμε ένα γραφοθεωρητικό αποτέλεσμα που αφορά τους *μονοσυνεκτικούς προσανατολισμούς των μεικτών γραφημάτων*. Δίνουμε τον πρώτο αλγόριθμο απόφασης, που δεδομένου ενός μεικτού γραφήματος, αποκρίνεται αν αυτό έχει έναν μονοσυνεκτικό προσανατολισμό. Στη συνέχεια, επεκτείνουμε την ιδέα μας παρουσιάζοντας έναν αλγόριθμο που ελέγχει αν ο υπάρχον μονοσυνεκτικός προσανατολισμός είναι μοναδικός, δίνοντας μερική απάντηση στην ερώτηση που τέθηκε από την Pascovici [81].

Ευχαριστίες

Πρώτα από όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διδακτορικής μου διατριβής, Καθηγητή Αντώνιο Συμβώνη, για την επιστημονική καθοδήγηση του, για την γνώση και τον ενθουσιασμό για την έρευνα που μου μετέδωσε και για την συνεχή υποστήριξή του κατά την διάρκεια εκπόνησης της διατριβής αυτής.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών που μου έδωσαν την δυνατότητα να κάνω έρευνα στον τομέα.

Ευχαριστώ τα μέλη της τριμελούς μου επιτροπής: τον Καθηγητή Στάθη Ζάχο και τον Καθηγητή Michael Kaufmann. Ευχαριστώ τον Στάθη Ζάχο για την εισαγωγή μου στην θεωρητική πληροφορική. Οι ενδιαφέρουσες διαλέξεις του στους Αλγόριθμους, Πολυπλοκότητα και Υπολογισσιμότητα με έκαναν να αποφασίσω να κάνω έρευνα στην θεωρητική πληροφορική. Ευχαριστώ τον Michael Kaufmann για το ενδιαφέρον του στο ερευνητικό μου πεδίο, για τον ενθουσιασμό και την γνώση που μοιράστηκε μαζί μου και για το δημιουργικό περιβάλλον εργασίας που μου προσέφερε κατά την διάρκεια της παραμονής μου στο Τούμπινγκεν.

Εκφράζω την ευγνωμοσύνη μου στον Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων Έρευνας του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου και στο Ερευνητικό Πρόγραμμα Ηράκλειτος II για την χρηματοδότηση αυτής της έρευνας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συναδέλφους και φίλους μου, τον Μιχάλη Μπέκο, και την Φούλη Αργυρίου, για την υποστήριξή τους, χρήσιμες συζητήσεις και ωραία αστεία που ανταλλάξαμε κατά την διάρκεια της πολύωρης καθημερινής μας εργασίας. Είμαι πολύ ευγνώμων σε όλους τους ερευνητικούς μου συναδέλφους για την γνώση που μοιράστηκαν μαζί μου.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου. Χωρίς την συνεχή συναισθηματική και οικονομική υποστήριξή τους ή έρευνα και η συγγραφή αυτής της διατριβής θα ήταν αδύνατη.

Τέλος, ευχαριστώ όλους τους καθηγητές μου στο Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο και στο Κρατικό Πανεπιστήμιο της Τιφλίδας που μου μετέδωσαν τις γνώσεις και το πάθος τους για τα μαθηματικά και τους αλγόριθμους.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Το ερευνητικό πεδίο της απεικόνισης γραφημάτων

Η «Απεικόνιση Γραφημάτων» είναι ένα ενεργό ερευνητικό πεδίο που αναπτύχθηκε κατά διάρκεια των δύο τελευταίων δεκαετιών, αποτελεί μια υποπεριοχή της επιστήμης των υπολογιστών, και δανείζεται τεχνικές από την Θεωρία Γραφημάτων και την Υπολογιστική Γεωμετρία.

Ένα γράφημα αποτελεί μια αφηρημένη μαθηματική δομή που μοντελοποιεί ένα σύνολο αντικειμένων και τις σχέσεις μεταξύ αυτών. Τα αντικείμενα ονομάζονται *κορυφές* και οι σχέσεις μεταξύ αυτών *ακμές*. Όταν ζωγραφίζουμε ένα γράφημα συνήθως αναπαριστούμε τις κορυφές ως σημεία του επιπέδου και τις ακμές ως καμπύλες ή ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές. Γιατί όμως ένας μη μαθηματικός να θέλει να ζωγραφίσει ένα γράφημα; Η απάντηση είναι ότι μια απεικόνιση γραφήματος μπορεί να συμβάλει σημαντικά στην κατανόηση της δομής των σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων και να αποκαλύψει πολλές ιδιότητες του γραφήματος.

Η ερευνητική περιοχή της απεικόνισης γραφημάτων αντλεί τα προβλήματα με τα οποία ασχολείται από (και προσφέρει τις υπηρεσίες της σε) ένα μεγάλο αριθμό εφαρμοσμένων περιοχών. Ενδεικτικά αναφέρονται οι περιοχές: bioinformatics, network security and management, supply chain management, software engineering, risk analysis, data mining, database design, business process modeling, electrical diagrams, telecommunications, social networks, criminology, web visualization, knowledge representation, VLSI circuit design.

Ας δώσουμε έναν πιο τυπικό ορισμό για το τι είναι απεικόνιση ενός γραφήματος. Ως *απεικόνιση ενός γραφήματος* $G = (V, E)$, όπου V είναι το σύνολο των κόμβων και E είναι το σύνολο των ακμών, ορίζεται μία απεικόνιση (mapping) των κόμβων και των ακμών του γραφήματος στον δισδιάστατο ή τρισδιάστατο χώρο όπου οι κόμβοι αναπαρίστανται ως σημεία ή γεωμετρικά σχήματα (συνήθως παραλληλόγραμμα και κύκλοι στο δισδιάστατο χώρο και παραλληλεπίπεδα ή σφαίρες στο τρισδιάστατο χώρο) και οι ακμές ως απλές καμπύλες οι οποίες ενώνουν τους προσκείμενους σε αυτές κόμβους.

Έχοντας αποφασίσει να χρησιμοποιήσουμε την Απεικόνιση Γραφημάτων ως εργαλείο για την αποκάλυψη πληροφοριών, οδηγούμαστε άμεσα στην ερώτηση: ποια είναι τα κριτήρια που ξεχωρίζουν μια ‘καλή’ απεικόνιση από μια ‘κακή’. Και η απάντηση είναι ότι τα κριτήρια αυτά εξαρτώνται από την εφαρμογή από την οποία μας προέκυψε το γράφημα. Αμέσως επόμενη ερώτηση που δημιουργείται είναι, αν ο αριθμός αυτών των κριτηρίων είναι τόσο μεγάλος όσο και το πλήθος των εφαρμογών. Η θετική απάντηση σε αυτή την ερώτηση θα σήμαινε έναν τεράστιο αριθμό από κριτήρια και άρα αλγόριθμους απεικόνισης, έναν για κάθε εφαρμογή. Ευτυχώς τα πράγματα δεν είναι έτσι! Υπάρχει ένας σχετικά μικρός αριθμός βασικών εννοιών και κριτηρίων που είναι αρκετός για να καλύψει ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών. Για τον σκοπό αυτό ορίστηκαν [28] οι *συμβάσεις απεικόνισης* (drawing conventions), οι *αισθητικές* (aesthetics) και οι *περιορισμοί απεικόνισης* (drawing

constraints).

Συμβάσεις απεικόνισης (drawing conventions) περιγράφουν τους κανόνες που πρέπει να ικανοποιεί μια απεικόνιση ώστε να είναι *αποδεκτή*, για παράδειγμα: ‘οι ακμές πρέπει να απεικονίζονται ως ευθύγραμμα ή πολυγωνικά τμήματα’, ‘οι κατευθύνσεις των βελών που τυχόν υπάρχουν στις ακμές πρέπει να δείχνουν προς μια ορισμένη κατεύθυνση’, ‘οι συντεταγμένες των κορυφών πρέπει να είναι ακέραιοι αριθμοί’, ‘οι ακμές πρέπει να τέμνονται υπό ορθή γωνία’ και άλλα. Οι αισθητικές (aesthetics) είναι τα κριτήρια που θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε σε μια απεικόνιση, επειδή συνήθως αναφέρονται στη ‘αναγνωσιμότητα’ μιας απεικόνισης, για παράδειγμα: ‘ο συνολικός αριθμός των καμπών στις ακμές’, ‘αριθμός των τομών μεταξύ των ακμών’, ‘εμβαδών μιας απεικόνισης’ και άλλα. Τέλος, οι περιορισμοί απεικόνισης (drawing constraints) εμφανίζονται ως κανόνες που ζητούνται να εφαρμοστούν σε συγκεκριμένα τμήματα του γραφήματος.

Έτσι όλα τα προβλήματα της Απεικόνισης Γραφημάτων αναπαρίστανται ως σύνολο από συγκεκριμένες συμβάσεις απεικόνισης, αισθητικές και περιορισμούς απεικόνισης. Μια από τις μεγαλύτερες προκλήσεις στην χρήση της Απεικόνισης Γραφημάτων σε πραγματικές εφαρμογές είναι ο μεγάλος αριθμός των συμβάσεων, αισθητικών και περιορισμών που πρέπει να εφαρμοστούν ώστε να μοντελοποιήσουν επακριβώς το πρόβλημα, με αποτέλεσμα να προκύπτουν υπολογιστικά δύσκολα (computationally hard) θεωρητικά προβλήματα.

Κλείνοντας την ενότητα, αναφέρουμε ότι εκτενής και πλήρης κάλυψη του αντικειμένου των απεικονίσεων γραφημάτων παρουσιάζεται στα βιβλία ‘Graph Drawing: Algorithms for the Visualization of Graphs’ [28], ‘Drawing Graphs: Methods and Models’ [68], ‘Graph Drawing and Applications for Software and Knowledge Engineers’ [92], ‘Graph Drawing Software’ [63], και την επιστημονική δημοσίευση ‘Algorithms for “Graph Drawing: an Annotated Bibliography’ [8].

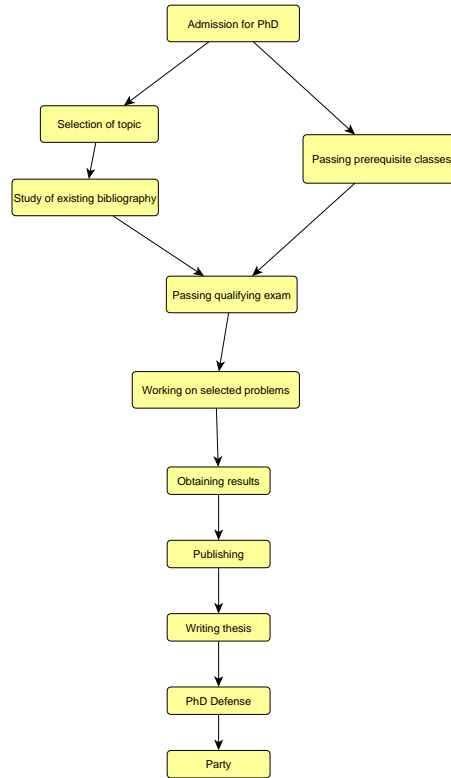
1.2 Κατευθυνόμενα Ακυκλικά Γραφήματα και οι Απεικονίσεις Τους

Στην Διαχείριση Έργων (project management) και PERT¹ διαγράμματα, ένα από τα κριτήρια μιας ‘καλής’ απεικόνισης είναι το πόσο ξεκάθαρα εμφανίζεται η ιεραρχική δομή του γραφήματος που παρουσιάζει το συγκεκριμένο έργο, βλέπε Εικόνα 1.1. Πιο συγκεκριμένα, στη διαχείριση έργων, ένα έργο μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής: οι εργασίες ή τα βήματα που πρέπει να υλοποιηθούν αναπαρίστανται με κόμβους, ενώ, αν η εργασία *B* πρέπει να εκτελεστεί μετά την εργασία *A*, υπάρχει μια κατευθυνόμενη ακμή από τον κόμβο *A* στον κόμβο *B*. Ένα τέτοιο μοντέλο γίνεται εύκολα αντιληπτό από τον άνθρωπο, εάν οι ακμές απεικονιστούν ως βέλη που δείχνουν όλα προς μια επιλεγμένη κατεύθυνση. Στην Εικόνα 1.1, η κατεύθυνση αυτή είναι προς τα κάτω. Ένα άλλο κριτήριο που βελτιώνει σημαντικά την αναγνωσιμότητα μιας απεικόνισης είναι η απουσία των τομών μεταξύ των ακμών. Ο συνδυασμός της σύμβασης για την όμοια κατεύθυνση των ακμών και της απαίτησης απουσίας τομής μεταξύ των ακμών παράγει τα σχεδιογράμματα που ονομάζονται *επίπεδες ανερχόμενες απεικονίσεις* (upward planar drawings). Η λέξη ‘ανερχόμενη’ προέρχεται από την συνήθη επιλογή της κοινής κατεύθυνσης των ακμών.

Πιο τυπικά, μια *ανερχόμενη απεικόνιση* (upward drawing) Γ ενός γραφήματος G είναι μια ένα προς ένα συνάρτηση από το σύνολο των κορυφών του G στο σύνολο σημείων του επιπέδου και των ακμών του G , σε απλές, ανοιχτές μονότονα αύξουσες, στην κατακόρυφη κατεύθυνση, καμπύλες, που ενώνουν τις αντίστοιχες κορυφές.

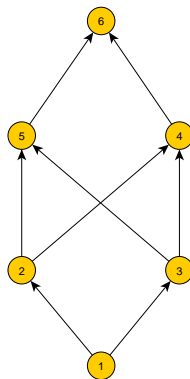
Μια απεικόνιση ενός γραφήματος ονομάζεται *επίπεδη* (planar) αν οι ακμές της δεν τέμνονται

¹ Program (or Project) Evaluation and Review Technique, συντομα PERT, είναι ένα μοντέλο για την διαχείριση έργων σχεδιασμένο για την παρουσίαση και την ανάλυση των βημάτων που απαιτούνται για την ολοκλήρωση ενός έργου.



Εικόνα 1.1: Ένα παράδειγμα PERT διαγράμματος.

εκτός από τα σημεία που αποτελούν τις κοινές τους κορυφές. Ένα γράφημα G ονομάζεται *ανερχόμενα επίπεδο* (upward planar) αν επιδέχεται μια απεικόνιση που είναι ταυτόχρονα ανερχόμενη και επίπεδη. Είναι προφανές ότι η ακυκλικότητα² και επιπεδότητα αποτελούν αναγκαίες συνθήκες ώστε ένα γράφημα να είναι ανερχόμενα επίπεδο. Όμως αυτές οι συνθήκες δεν είναι και ικανές, όπως βλέπουμε στην Εικόνα 1.2.



Εικόνα 1.2: Ένα ακυκλικό και επίπεδο γράφημα που δεν αποτελεί ένα ανερχόμενο επίπεδο γράφημα.

²Ένα γράφημα ονομάζεται ακυκλικό (acyclic) αν δεν περιέχει κατευθυνόμενους κύκλους.

Οι μελέτη των ανερχόμενων επιπέδων γραφημάτων συνδέεται στενά με την θεωρία γραφημάτων και την θεωρία διατάξεων (order theory) και τις ιδιότητες των γραφημάτων, όπως η συνδεσιμότητα (connectivity) και οι διαστάσεις (dimensions) [86].

Έστω μια επίπεδη απεικόνιση Γ του γραφήματος G . Η όψη του Γ αποτελείται από το σύνολο των σημείων του επιπέδου που μπορούν να ενωθούν με μια καμπύλη χωρίς να τέμνουν μια ακμή ή να περνούν από μια κορυφή του γραφήματος. Μία όψη μπορεί να περιγραφεί από τις ακμές που αποτελούν το σύνολό της. Η *εμφύτευση* ενός επιπέδου γραφήματος (embedding of a planar graph) G είναι η κλάση ισοδυναμίας των επιπέδων απεικονίσεων του G που ορίζει το ίδιο σύνολο των όψεων ή, ισοδύναμα, των συνόρων των όψεων. Ένα επίπεδο γράφημα που δίνεται μαζί με μία εμφύτευσή του ονομάζεται *εμφυτευμένο επίπεδο γράφημα* (embedded planar graph).

Όταν μαζί με ένα επίπεδο ακυκλικό γράφημα δίνεται και μία επίπεδη εμφύτευσή του, οι Bertolazzi *et al.* [10] έδειξαν ότι μπορούμε να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν το δεδομένο γράφημα αποτελεί ένα επίπεδο ανερχόμενο γράφημα. Για ένα ακυκλικό επίπεδο γράφημα που έχει μόνο μια πηγή και μια καταθόρα³, μπορούμε επίσης να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν το γράφημα αποτελεί επίπεδο ανερχόμενο γράφημα [11, 62]. Ενώ μπορούμε να ελέγξουμε χωριστά αν το ένα γράφημα είναι επίπεδο ή αν είναι ανερχόμενο σε πολυωνυμικό χρόνο, το να ελέγξουμε αν είναι ανερχόμενα επίπεδο είναι υπολογιστικά δύσκολο (*NP-hard*) [45]. Κλίνοντας αυτή την ενότητα, παρατηρούμε ότι οι ανερχόμενα επίπεδες απεικονίσεις είναι ένα σημαντικό είδος απεικονίσεων που μελετάται για πάνω από δέκα χρόνια με αποτέλεσμα η λίστα με τις αντίστοιχες δημοσιεύσεις να είναι αρκετά εκτενής. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην [8].

1.3 Ζωγραφίζοντας Γραφήματα με Περιορισμό στην Τοποθέτηση των Κορυφών

Στην πράξη, μπορεί να συμβεί ότι οι κορυφές του γραφήματος πρέπει να αντιστοιχηθούν σε κάποια σημεία του επιπέδου που έχουν δοθεί σαν είσοδος του προβλήματος. Για παράδειγμα, στα πλαίσια των σχεδιασμών των συστημάτων βάσεων δεδομένων, μερικές συγκεκριμένες οντότητες του σχεσιακού διαγράμματος (entity-relationship (ER) diagram) απαιτώνται να απεικονίζονται κοντά στο κέντρο, ή αντίθετα, κοντά στα περιγράμματα του διαγράμματος. Στην ανάλυση κοινωνιολογικών δικτύων (social network analysis), μια συνηθισμένη τεχνική για απεικόνιση και πλοήγηση μεγάλων δικτύων είναι η ομαδοποίηση των κόμβων σε συμπλέγματα (clusters) και απεικόνιση των κόμβων ενός συμπλέγματος κοντά το ένα στο άλλο, ενώ τους κόμβους διαφορετικών συμπλεγμάτων, σχετικά μακριά το ένα από το άλλο (βλέπε για παράδειγμα [16]). Για να μοντελοποιηθεί αυτή η ιδέα ορίστηκε το ακόλουθο πρόβλημα.

Μια *επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση* ενός γραφήματος G σε σύνολο σημείων S είναι μία ένα προς ένα και επί συνάρτηση από το σύνολο των κορυφών του G στο σύνολο των σημείων του S , έτσι ώστε, αν οι ακμές ζωγραφιστούν ως ευθύγραμμα τμήματα, η προκύπτουσα απεικόνιση να είναι επίπεδη. Το πρόβλημα *εμφυτευσιμότητας* ενός επιπέδου γραφήματος G σε ένα σύνολο σημείων S είναι το πρόβλημα απόφασης αν το δεδομένο γράφημα G επιδέχεται μια επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση στο σύνολο σημείων S . Το πρόβλημα αυτό μελετάται από το τέλος του 1991 ([52]) στις εργασίες ([15, 14, 18, 22, 41, 52, 69, 71]). Περισσότερες λεπτομέρειες για τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στις εργασίες αυτές δίνονται στο Κεφάλαιο 2.

Μια διαφορετική σύμβαση απεικόνισης, που επίσης περιορίζει τις θέσεις των κορυφών σε δεδομένες περιοχές είναι η ονομαζόμενη *εμφύτευση γραφήματος σε βιβλίο*. Διαισθητικά μια εμ-

³ Πηγή (source) είναι μια κορυφή του γραφήματος χωρίς εισερχόμενες ακμές, αντίστοιχα καταθόρα (sink) είναι μια κορυφή του γραφήματος χωρίς εξερχόμενες ακμές

φύτευση σε βιβλίο είναι μια απεικόνιση του γραφήματος όπου όλοι οι κόμβοι ζωγραφίζονται ως συνευθειακά σημεία. Πιο τυπικά, ένα k -σέλιδο βιβλίο είναι μια δομή που αποτελείται από μια ευθεία που αναφέρεται ως *ράχη του βιβλίου* και από k ημιεπίπεδα, αναφερόμενα ως σελίδες του βιβλίου, που έχουν την ράχη ως κοινό τους σύνορο. Μια *εμφύτευση στο βιβλίο* ενός γραφήματος G είναι μια απεικόνιση του G τέτοια ώστε οι κορυφές του G να απεικονίζονται πάνω στην ράχη του βιβλίου, ενώ κάθε ακμή παρουσιάζεται ως καμπύλη που ανήκει ολοκλήρως σε μια σελίδα του βιβλίου, και οι ακμές που ανήκουν σε μια σελίδα δεν τέμνονται μεταξύ τους. Το *πάχος* ή *σελιδοαριθμός* ενός γραφήματος G ορίζεται ως ελάχιστος ακέραιος k έτσι ώστε το G να επιδέχεται μια εμφύτευση σε k -σέλιδο βιβλίο.

Η εμφύτευση σε βιβλίο βρίσκει ποικίλες εφαρμογές όπως: ανεκτικός σε σφάλματα σχεδιασμός VLSI (fault-tolerant computing VLSI design) ([24, 89]), υπολογιστική πολυπλοκότητα (computational complexity) και graph separators ([42, 43]), μετρικές πολυπλοκότητας λογισμικού (software complexity metrics), σχεδίαση κίνησης οχημάτων (vehicle traffic engineering) [64], και ταξινόμηση μεταθέσεων (sorting permutations) ([57, 82, 96]).

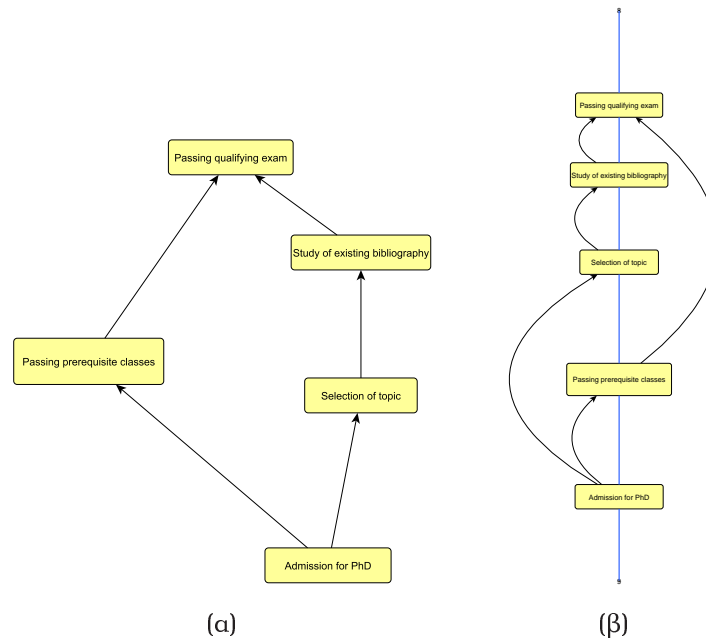
Σε αυτή την εργασία ενδιαφερόμαστε μόνο για τις επίπεδες δομές, άρα συγκεντρωνόμαστε σε 2-σέλιδα βιβλία. Επειδή υπάρχουν επίπεδα γραφήματα που δεν επιδέχονται εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο [99], αναγκαζόμαστε να επιτρέψουμε στις ακμές να τέμνουν την ράχη του βιβλίου. Στην βιβλιογραφία μια εμφύτευση σε βιβλίο όπου οι ακμές επιτρέπονται να τέμνουν την ράχη αναφέρεται ως *τοπολογική εμφύτευση σε βιβλίο* [39].

1.4 Τα Ερευνητικά Θέματα Αυτής τις Διατριβής και οι Εφαρμογές τους

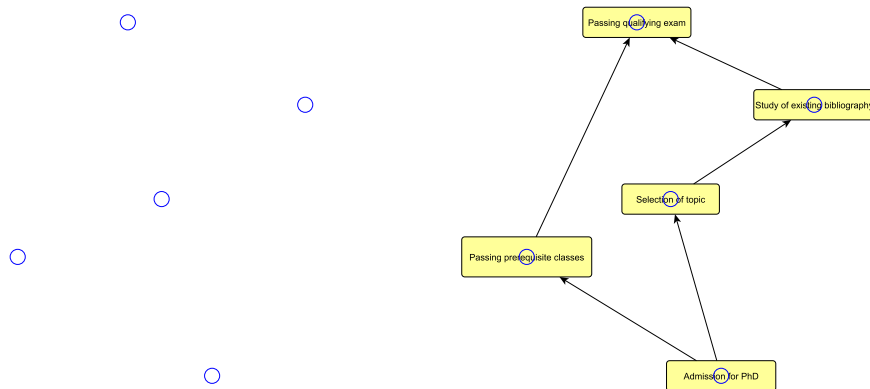
Αυτή η διατριβή επικεντρώνεται στην μελέτη των συμβάσεων απεικόνισης, όπως *εμφύτευση σε βιβλίο* και σε *σύνολο σημείων* για *κατευθυνόμενα γραφήματα*. Επειδή οι απεικονίσεις που είναι ευρέως αποδεκτές για τα επίπεδα κατευθυνόμενα γραφήματα είναι ανερχόμενα επίπεδες απεικονίσεις, είναι φυσικό να απαιτήσει κανείς ώστε η τελική εμφύτευση ενός κατευθυνόμενου γραφήματος σε βιβλίο ή σε σύνολο σημείων, να είναι εκτός από επίπεδη και ανερχόμενη. Έτσι γεννήθηκαν τα προβλήματα *ανερχόμενης εμφύτευσης σε βιβλίο* και *ανερχόμενης εμφύτευσης σε σύνολο σημείων*. Και στα δύο προβλήματα μας δίνεται ένα ανερχόμενο επίπεδο γράφημα G και μας ζητείται να κατασκευάσουμε μια ανερχόμενη επίπεδη απεικόνιση του G όπου οι κορυφές του περιορίζονται είτε να βρίσκονται σε μια ευθεία, είτε να είναι τοποθετημένες σε δεδομένα σημεία. Στην Εικόνα 1.3 βλέπουμε μια ανερχόμενη εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο. Ενώ στην Εικόνα 1.4 παρατηρούμε ένα σύνολο σημείων και μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του γραφήματος της Εικόνας 1.3.α σε αυτό.

Το πρόβλημα της ανερχόμενης εμφύτευσης σε βιβλίο των κατευθυνόμενων γραφημάτων και μερικών διατάξεων (posets) αντλεί κίνητρα από το πρόβλημα του σχεδιασμού παράλληλων εργασιών (parallel process-scheduling problem), και έχει μακρά ιστορία που αρχίζει λίγο πριν από το 1990 [78]. Η πιο άμεση εφαρμογή της ανερχόμενης εμφύτευσης σε βιβλίο είναι η κατασκευή ιεραρχικών δομών, όπου απαιτείται να λάβουμε υπόψη όχι μόνο την ανερχόμενη κατεύθυνση των ακμών, αλλά και τον περιορισμό των κορυφών ή του υποσυνόλου τους, να βρίσκονται σε μια ευθεία. Η απαίτηση αυτή συναντιέται στη σχεδίαση των PERT διαγραμμάτων (βλέπε για παράδειγμα [30]). Η τοπολογική εμφύτευση κατευθυνόμενων γραφημάτων σε βιβλίο, δηλαδή όταν οι ακμές επιτρέπονται να τέμνουν την ράχη του βιβλίου, παρουσιάζει ενδιαφέρον για σχεδιασμό των (VLSI) κυκλωμάτων σε πολλαπλές στρώσεις.

Το πρόβλημα κατασκευής ανερχόμενης εμφύτευσης σε σύνολο σημείων έχει οριστεί σχετικά πρόσφατα [36, 48] και παρουσιάζει ένα ενδιαφέρον συνδυαστικό πρόβλημα ως επέκταση του καλά



Εικόνα 1.3: (α) Ένα μέρος του γραφήματος της Εικόνας 1.1. (β) Μια ανερχόμενη εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο του γραφήματος της Εικόνας 1.3.α.



Εικόνα 1.4: Ένα σύνολο σημείων και μια ανερχόμενη εμφύτευση σε αυτό του γραφήματος της Εικόνας 1.3.

μελετημένου προβλήματος εμφυτευσιμότητας σε σύνολο σημείων για μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Επίσης, παρουσιάζει ένα εργαλείο για οπτικοποίηση πληροφορίας συνδυάζοντας την σύμβαση ανερχόμενων ακμών, την επιπεδότητα και την δυνατότητα προεπιλογής θέσεων για τις κορυφές του γραφήματος ή ενός υποσυνόλου τους.

Εκτός από τη φυσική τους σχέση, τα προβλήματα της ανερχόμενης τοπολογικής εμφύτευσης σε βιβλίο, και της ανερχόμενης εμφύτευσης σε σύνολο σημείων, έχουν και μια δομική σχέση, επειδή το πρόβλημα εμφύτευσης σε βιβλίο παρουσιάζεται ως εργαλείο για την κατασκευή των εμφυτεύσεων σε σύνολα σημείων [32, 48, 69].

Περισσότερες λεπτομέρειες για τις σχετικές δημοσιεύσεις για τις ανερχόμενες εμφυτεύσεις σε βιβλίο και σύνολα σημείων δίνονται στην αρχή των αντίστοιχων κεφαλαίων.

1.5 Η Δομή αυτής της Διατριβής

Η διατριβή αυτή αποτελείται από τρία βασικά μέρη.

- ο Στο πρώτο μέρος, (Κεφάλαιο 2) μελετάμε το πρόβλημα εμφύτευσης ανερχόμενων επίπεδων γραφημάτων σε σύνολο σημείων. Στην Ενότητα 2.3.1 και στην Ενότητα 2.3.2 μελετάμε ειδικές κατηγορίες κατευθυνόμενων δέντρων, όπως *caterpillar* και *switch-tree*. Αποδεικνύουμε ότι αυτές οι κατηγορίες δέντρων επιδέχονται πάντοτε μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε κάθε κυρτό σύνολο σημείων. Ύστερα, στην Ενότητα 2.3.3, η οικογένεια των *switch-trees* γενικεύεται στην οικογένεια των *k-switch trees*, και αποδεικνύεται ότι υπάρχουν πολλά *k-switch trees* τα οποία δεν επιδέχονται ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε κάποια κυρτά σύνολα σημείων. Τέλος, στην Ενότητα 2.3.4, παρουσιάζεται αλγόριθμος πολυωνυμικής πολυπλοκότητας χρόνου, που δεδομένου ενός κατευθυνόμενου δέντρου T και ενός κυρτού συνόλου σημείων S , ελέγχει αν το T επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο S . Στην Ενότητα 2.4, το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται στην κλάση των εξωεπίπεδων κατευθυνόμενων γραφημάτων (*outerplanar directed graphs*), δηλαδή παρουσιάζεται αλγόριθμος πολυωνυμικής πολυπλοκότητας χρόνου, που δεδομένου ενός κατευθυνόμενου εξωεπίπεδου γραφήματος G , και ενός κυρτού συνόλου σημείων S , ελέγχει αν το G επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο S . Η Ενότητα 2.5 είναι εξ ολοκλήρου αφιερωμένη σε μια πολύ ειδική, αλλά, όπως αποδείχθηκε, αρκετά δύσκολη περίπτωση του προβλήματος, όταν το δεδομένο γράφημα είναι ένα *προσανατολισμένο μονοπάτι* (*oriented path*). Αποδεικνύουμε ότι κάθε προσανατολισμένο μονοπάτι επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε ένα γενικό σύνολο $n2^{k-2}$ σημείων, όπου k είναι ο συνολικός αριθμός των πηγών και καταβόθρων. Ύστερα, το αποτέλεσμα βελτιώνεται σε $O(n^2)$ σημεία. Τέλος, στην Ενότητα 2.6, ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο με την απόδειξη ότι το γενικό πρόβλημα της ανερχόμενης επίπεδης εμφύτευσης γραφημάτων σε γενικό σύνολο σημείων είναι υπολογιστικά δύσκολο (*NP-hard*).
- ο Το δεύτερο μέρος (Κεφάλαιο 3) είναι αφιερωμένο στην μελέτη των ανερχόμενων τοπολογικών εμφυτεύσεων γραφημάτων σε βιβλίο. Πιο συγκεκριμένα, μελετάμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης των τομών μεταξύ των ακμών του γραφήματος και της ράχης του βιβλίου. Για να επιτύχουμε μια πιο τυπική παρουσίαση ορίζουμε το πρόβλημα της Ακυκλικής Πλήρωσης κατά Χάμιλτον με Ελαχιστοποίηση των Τομών (*Acyclic Hamiltonian Path Completion with Crossing Minimization*) (*Acyclic-HPCCM* για συντομία). Στην Ενότητα 3.3, αποδεικνύουμε ότι το πρόβλημα *Acyclic-HPCCM* είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα της εύρεσης των ανερχόμενων τοπολογικών εμφυτεύσεων γραφημάτων σε βιβλίο με ελάχιστο αριθμό τομών των ακμών με την ράχη. Ύστερα, στην Ενότητα 3.5 επιλύουμε το πρόβλημα *Acyclic-HPCCM* για εξωεπίπεδα γραφήματα με μοναδική πηγή και καταβόθρα. Η Ενότητα 3.6, είναι αφιερωμένη στην μελέτη της περίπτωσης όπου το πρόβλημα *Acyclic-HPCCM* μπορεί να λυθεί χωρίς τομές, ή ισοδύναμα, το πότε ένα ανερχόμενο επίπεδο γράφημα επιδέχεται εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο (οχι τοπολογική, δηλαδή δεν επιτρέπονται οι τομές με την ράχη). Το πρόβλημα επιλύεται για N -free γράφηματα και γραφήματα με περιορισμένο πλάτος. Τέλος, στην Ενότητα 3.7, μελετάμε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης των τομών με την ράχη στην ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε βιβλίο, όταν η σειρά των κορυφών με την οποία αυτές εμφανίζονται πάνω στην ράχη είναι δεδομένη ως είσοδος του προβλήματος. Το αποτέλεσμά μας είναι η βελτίωση του προηγούμενου γνωστού αποτελέσματος, που έχει παρουσιαστεί στην [50] και η απόδειξη ότι η δεδομένη λύση είναι η βέλτιστη δυνατή.
- ο Το τελευταίο μέρος, Κεφάλαιο 4, είναι αφιερωμένο στην μελέτη του γραφοθεωρητικού προβλήματος του *μονοσυσκευτικού προσανατολισμού μεικτών γραφημάτων* (*unilateral orientation*

of mixed graphs). Η μελέτη αυτού του προβλήματος προέκυψε στην διαδικασία της επίλυσης ενός από τα προβλήματα ανερχόμενης εμφύτευσης σε βιβλίο, αλλά, σύμφωνα με την υπάρχουσα βιβλιογραφία, αποτελεί ένα ενδιαφέρον και αυτόνομο πρόβλημα της Θεωρίας Γραφημάτων. Το κεντρικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου είναι ο πρώτος αλγόριθμος απόφασης, που δεδομένου ενός μεικτού γραφήματος, αποφασίζει αν αυτό έχει έναν μονοσυνεκτικό προσανατολισμό. Στη συνέχεια, επεκτείνουμε την ιδέα μας, παρουσιάζοντας αλγόριθμο που ελέγχει αν ο υπάρχον μονοσυνεκτικός προσανατολισμός είναι μοναδικός, δίνοντας μερική απάντηση στην ερώτηση που τέθηκε από την Pasconici [81].

Οι περισσότεροι ορισμοί δίνονται στην αρχή του κάθε κεφαλαίου. Στην επόμενη ενότητα ορίζουμε μόνο τις απλούστατες και τις κοινές για όλη την διατριβή έννοιες.

1.6 Βασικοί Ορισμοί

Οι προϋποθέσεις για την κατανόηση της ύλης της διατριβής είναι τα βιβλία της Θεωρίας Γραφημάτων [38, 56]. Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα, όπου με V και E συμβολίζεται το σύνολο των κορυφών, και το σύνολο των ακμών του G , αντίστοιχα. Σε όλο το χειρόγραφο, χρησιμοποιούμε τον όρο *γράφος* ή τον όρο *γράφημα* όταν αναφερόμαστε είτε σε κατευθυνόμενα ή μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Για την αναφορά σε κατευθυνόμενα γραφήματα εισαγουμε τον όρο *κατεγράφος* ή *κατεγράφημα*. Με (u, v) συμβολίζουμε μια ακμή κατευθυνόμενου γραφήματος που κατευθύνεται από την u στην v και επίσης αναφέρεται ως *βέλος*. Μια ακμή με άκρα στις κορυφές u και v ονομάζεται *προσπίπτουσα* στις u και v και οι κορυφές u και v ονομάζονται *γειτονικές*. Επίσης, λέμε ότι η κατευθυνόμενη ακμή (u, v) είναι *εξερχόμενη* από την u και *εισερχόμενη* στην v . Επίσης η u ονομάζεται *πηγή* της (u, v) , και η v *καταβόθρα* της (u, v) . Το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν σε μια κορυφή ονομάζεται *βαθμός* της κορυφής. Το γράφημα $G = (V', E')$ ονομάζεται υπογράφημα του $G = (V, E)$, αν $V' \subset V$ και $E' \subset E$. Αν το G' περιέχει όλες τις ακμές του G , που συνδέουν τις κορυφές του V' , τότε λέμε ότι G' είναι υπογράφημα του G που *παράγεται από το V'* . Ένα υπογράφημα του G που αποτελεί δέντρο οι κορυφές του οποίου παράγουν το G , ονομάζεται *γεννητικό δέντρο* του G .

Έστω ένα κατεγράφημα G , μια κορυφή του G που έχει μόνο εξερχόμενες (αντ. εισερχόμενες) ακμές ονομάζεται *πηγή* (αντ. *καταβόθρα*). Ένας *κύκλος* του γραφήματος ή κατεγραφήματος είναι μια ακολουθία από ακμές και κορυφές $v_1, e_1, v_2, \dots, v_k, e_k$ έτσι ώστε η ακμή e_i , $1 < i < k - 1$, να είναι προσπίπτουσα στις κορυφές v_i και v_{i+1} και η ακμή e_k να είναι προσπίπτουσα στις κορυφές v_k και v_1 . Ένας *κατευθυνόμενος κύκλος* του κατεγραφήματος είναι μια ακολουθία από ακμές και κορυφές $v_1, e_1, v_2, \dots, v_k, e_k$, έτσι ώστε η ακμή e_i να είναι εξερχόμενη από την v_i και εισερχόμενη στην v_{i+1} , $1 < i < k - 1$, και η ακμή e_k να είναι εξερχόμενη από την v_k και εισερχόμενη στην v_1 . Ένα κατεγράφημα G ονομάζεται *ακυκλικό* αν δεν περιέχει κανένα κατευθυνόμενο κύκλο. Ένα *st-κατεγράφημα* είναι ένα ακυκλικό γράφημα με μοναδική πηγή και μοναδική καταβόθρα που συμβολίζονται με s και t , αντίστοιχα. Ένα *μονοπάτι* σε μη-κατευθυνόμενο γράφημα είναι μια ακολουθία από κορυφές και ακμές $v_1, e_1, v_2, \dots, v_k$, έτσι ώστε e_i , $1 < i < k - 1$, προσπίπτει στις v_i και v_{i+1} . Ένα *κατευθυνόμενο μονοπάτι* σε κατεγράφημα είναι μια ακολουθία από κορυφές και ακμές $v_1, e_1, v_2, \dots, v_k$, έτσι ώστε ακμή e_i είναι εξερχόμενη από την κορυφή v_i και εισερχόμενη στην κορυφή v_{i+1} , $1 < i < k - 1$. Δύο μονοπάτια ονομάζονται *ανεξάρτητα* αν δεν έχουν κοινή ακμή. Μια ακμή κατεγραφήματος (u, v) ονομάζεται *μεταβατική* (transitive) αν το γράφημα περιέχει ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από την u στην v , με πάνω από μια ακμή.

Ως μια *επίπεδη απεικόνιση* (planar drawing) ενός γραφήματος $G = (V, E)$, ορίζεται μία απεικόνιση (mapping) των κόμβων και των ακμών του γραφήματος στο επίπεδο, όπου οι κόμβοι αναπαριστανται ως σημεία και οι ακμές ως απλές καμπύλες οι οποίες ενώνουν τους προσκείμενους σε αυτές

κόμβους. Ένα γράφημα ονομάζεται *επίπεδο* (planar) αν επιδέχεται μια επίπεδη απεικόνιση. Δεδομένου μιας επίπεδης απεικόνισης Γ ενός επίπεδου γραφήματος G , το σύνολο των σημείων του επιπέδου που μπορεί να συνδεθεί με μια συνεχή καμπύλη που δεν τέμνει καμία ακμή και δεν περνάει από καμία κορυφή, ονομάζεται *όψη* του απεικονισμένου γραφήματος. Η μη φραγμένη όψη ονομάζεται *εξωτερική όψη* της απεικόνισης. Κάθε όψη μπορεί να περιγραφεί με μια λίστα ακμών που την περικυκλώνουν. Η *εμφύτευση* ενός επίπεδου γραφήματος (embedding of a planar graph) G είναι η κλάση ισοδυναμίας των επίπεδων απεικονίσεων του G που ορίζει το ίδιο σύνολο των όψεων ή ισοδύναμα των συνόρων των όψεων. Ένα επίπεδο γράφημα που δίνεται μαζί με μία εμφύτευσή του ονομάζεται *εμφυτευμένο επίπεδο γράφημα* (embedded planar graph). Ένα γράφημα ονομάζεται *εξωεπίπεδο* (outerplanar) αν επιδέχεται μια επίπεδη εμφύτευση, έτσι ώστε όλες οι κορυφές τις να εμφανίζονται σε μια μοναδική όψη, η οποία συνήθως επιλέγεται ως εξωτερική όψη του γραφήματος.

Δεδομένου μιας ευθείας l , μια καμπύλη c ονομάζεται *μονότονη* ως προς την l αν για οποιαδήποτε δύο σημεία p και q της καμπύλης c οι κατακόρυφες τους προβολές πάνω στην l εμφανίζονται στην ίδια σειρά που εμφανίζονται και πάνω στην c . Έστω G ένα ακυκλικό επίπεδο κατεγράφημα. Μια επίπεδη απεικόνιση του G έτσι ώστε οι ακμές του G απεικονίζονται ως μονότονα αύξουσες καμπύλες ως προς κατακόρυφη ευθεία l και για κάθε ακμή (u, v) ισχύει ότι η v είναι ζωγραφισμένη πάνω από την u , ονομάζεται μια *ανερχόμενη επίπεδη απεικόνιση* του G . Μια *ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση* του G είναι η κλάση ισοδυναμίας των ανερχόμενων επίπεδων απεικονίσεων του G που ορίζει το ίδιο σύνολο των όψεων. Σε μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση ενός ανερχόμενου επίπεδου st -κατεγραφήματος οι κορυφές s και t εμφανίζονται στην εξωτερική όψη της εμφύτευσης. Μια τέτοια εμφύτευση του st -κατεγραφήματος αναφέρεται απλά ως *επίπεδο st -κατεγράφημα*.

Μια *τοπολογική διάταξη* ενός κατεγραφήματος είναι μια συνάρτηση ρ από το σύνολο των κορυφών στο σύνολο των φυσικών αριθμών, τέτοια ώστε για κάθε ακμή (u, v) ισχύει $\rho(u) < \rho(v)$. Μια *τοπολογική αρίθμηση* είναι μια τοπολογική διάταξη όπου το σύνολο τιμών της ρ είναι το $\{1, \dots, n\}$.

Έστω G είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Αν αγνοήσουμε της κατευθύνσεις των ακμών του G , τότε παράγουμε το *υποκείμενο μη-κατευθυνόμενο γράφημα* του G .

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα ονομάζεται *συνεκτικό* ή *συνδεδεμένο*, αν κάθε ζεύγος κορυφών του συνδέεται τουλάχιστον με ένα μονοπάτι. Διαφορετικά, το γράφημα ονομάζεται *μη-συνεκτικό* ή *μη-συνδεδεμένο*. Ένα μέγιστο υπογράφημα ενός μη-συνεκτικού γραφήματος, ονομάζεται *συνεκτική συνιστώσα* του γραφήματος. Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα ονομάζεται *k -συνδεδεμένο*, $k \geq 2$, αν μετά από την διαγραφή οποιονδήποτε $k-1$ κορυφών του, το γράφημα παραμένει συνεκτικό. Μία *χωρίζουσα κορυφή* του G είναι μια κορυφή, η διαγραφή της οποίας αυξάνει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος. Ένα μέγιστο υπογράφημα του G , το υποκείμενο μη-κατευθυνόμενο γράφημα του οποίου είναι 2-συνδεδεμένο, ονομάζεται ένα *μπλοκ* του G . Κάθε ακμή του G ανήκει σε ένα μοναδικό μπλοκ του G , ενώ οι χωρίζουσες κορυφές του ανήκουν σε διαφορετικά μπλοκ. Το *δέντρο 2-συνδεδεμένων συνιστωσών* (BC -tree), ενός συνδεδεμένου γραφήματος G , είναι ένα δέντρο με B -κορυφή για κάθε μπλοκ του G και C -κορυφή για κάθε χωρίζουσα κορυφή του G . Ακμές του BC -tree συνδέουν κάθε B -κορυφή m με την C -κορυφή που αντιστοιχεί στην χωρίζουσα κορυφή που ανήκει στο μπλοκ m .

Ένα σύνολο σημείων λέγεται *γενικό* αν δεν περιέχει τρία συνευθειακά σημεία και κανένα ζεύγος σημείων δεν έχει τις ίδιες y -συντεταγμένες. Το *κυρτό περίβλημα* $H(S)$ του συνόλου σημείων S είναι το μικρότερο κυρτό πολύγωνο που περιλαμβάνει όλα τα σημεία του S . Στην συνέχεια όταν μιλάμε για κυρτό περίβλημα αναφερόμαστε στις κορυφές του. Ένα σύνολο σημείων ονομάζεται *κυρτό*, αν το κυρτό περίβλημά του δεν περιέχει κανένα σημείο του στο εσωτερικό του. Δεδομένου ενός συνόλου σημείων S , συμβολίζουμε με $b(S)$ και $t(S)$ τα σημεία με μικρότερη και με μεγαλύτερη y -συντεταγμένη, αντίστοιχα. Ένα κυρτό σύνολο σημείων S ονομάζεται *μονομερές* αν τα σημεία $b(S)$ και $t(S)$ βρίσκονται διαδοχικά στο περίβλημά του.

Κεφάλαιο 2

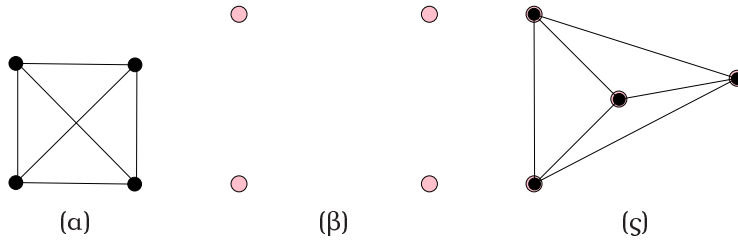
Ανερχόμενη Εμφύτευση σε Σύνολο Σημείων

2.1 Ορισμός και Γνωστά Αποτελέσματα

Στην πράξη μπορεί να συμβεί ότι μερικοί από τους κόμβους του δεδομένου γραφήματος πρέπει να είναι τοποθετημένοι σε ορισμένα από τον χρήστη σημεία στο επίπεδο. Για παράδειγμα, στα πλαίσια σχεδιασμού βάσεων δεδομένων, μερικές συγκεκριμένες ενότητες απαιτούνται να είναι απεικονισμένες στο κέντρο/ κοντά στο περίγραμμα του διαγράμματος (βλ. [93]). Στα κοινωνιολογικά δίκτυα, μια κοινώς αποδεκτή τεχνική για απεικόνιση και πλοήγηση μεγάλων δικτύων είναι η ομαδοποίηση των κορυφών σε συμπλέγματα (clusters) και η απεικόνιση των κορυφών ενός (cluster) σχετικά κοντά τον έναν στον άλλον συγκριτικά με τις κορυφές των άλλων (clusters)(βλ. [16]). Για να τυποποιηθεί αυτή η ιδέα είχε οριστεί το πρόβλημα *εμφύτευσης γραφήματος σε σύνολο σημείων*.

Επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση ενός γραφήματος G στο σύνολο σημείων S είναι μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση από το σύνολο των κορυφών του G στο σύνολο S και κάθε ακμής σε ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των αντίστοιχων κορυφών έτσι ώστε οι ακμές να μην τέμνονται. Για απλοποίηση της παρουσίασης θα αναφερόμαστε σε μια 'επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση' ως απλά 'επίπεδη εμφύτευση', όταν δεν υπάρχει αμφιβολία ότι πρόκειται για μια ευθύγραμμη εμφύτευση. *Η εμφυτευσιμότητα σε σύνολο σημείων* είναι το πρόβλημα απόφασης αν το δεδομένο γράφημα G έχει (επιδέχεται) μια επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση στο δεδομένο σύνολο σημείων S . Είναι ξεκάθαρο ότι υπάρχουν επίπεδα γραφήματα τα οποία δεν επιδέχονται καμία επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση σε κάποια σύνολα σημείων. Για παράδειγμα, το K_4 δεν επιδέχεται επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση σε κυρτό σύνολο τεσσάρων σημείων (βλ. Εικόνα 2.1). Το πρόβλημα επίπεδης εμφυτευσιμότητας γραφημάτων σε σύνολα σημείων μελετήθηκε από το 1991 (βλ [52]) και υπάρχει μια εκτενής λίστα σχετικής βιβλιογραφίας (βλ. [15, 14, 18, 22, 41, 52, 69, 71]).

Οι Gritzmann *et al.* [52] απέδειξαν ότι, η κλάση των γραφημάτων, που επιδέχονται μια επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση σε κάθε γενικό ή κυρτό σύνολο σημείων, είναι αυτό των *εξωεπίπεδων γραφημάτων* (outerplanar graphs). Πολυωνυμικοί αλγόριθμοι είναι γνωστοί για την εμφύτευση εξωεπίπεδων γραφημάτων [14] και δέντρων [15] σε κάθε γενικό ή κυρτό σύνολο σημείων. Πρόσφατα ο Cabello [18] απέδειξε ότι το γενικό πρόβλημα είναι \mathcal{NP} -hard για την κλάση των 2-συνδεδεμένων γραφημάτων. Ακόμα πιο πρόσφατα, οι Durocher και Mondal [;] απέδειξαν ότι το πρόβλημα παραμένει \mathcal{NP} -hard και για την κλάση των 3-συνδεδεμένων γραφημάτων, το οποίο συνεπάγεται ότι το πρόβλημα είναι επίσης δύσκολο στην περίπτωση που η επίπεδη εμφύτευση του γραφήματος είναι δεδομένη ως είσοδος του προβλήματος. Το πρόβλημα έχει επίσης μελετηθεί όταν το σύνολο



Εικόνα 2.1: Γραφήμα K_4 δεν επιδέχεται ευθύγραμμη επίπεδη εμφύτευση σε κάθε κυρτό σύνολο σημείων. Αλλά είναι εμφυτεύεται σε κάθε μη κυρτό σύνολο τεσσάρων σημείων.

σημείων έχει πιο πολλά σημεία από τις κορυφές του γραφήματος. Σε αυτή την περίπτωση, ο στόχος είναι για κάθε ακέραιο n να προσδιοριστεί ο ελάχιστος αριθμός $f(n)$ τέτοιος ώστε κάθε γράφημα με n κορυφές να επιδέχεται επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση σε σύνολο σημείων με $f(n)$ κορυφές, δηλαδή, σε κάποια από τα n σημεία του. Μέχρι πολύ πρόσφατα το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα ήταν τετραγωνικό [41], ενώ ως προς το κάτω φράγμα υπήρχαν μόνο γραμμικά αποτελέσματα [22, 71]. Στην πρόσφατη εργασία μας [3], αποδείξαμε ότι $O(n(\frac{\log n}{\log \log n})^2)$ σημεία είναι αρκετά για να εμφυτεύσουμε ένα απλώς-φωλιασμένο επίπεδο γράφημα.

Οι επίπεδες εμφυτεύσεις σε σύνολα σημείων μελετήθηκαν επίσης για την περίπτωση που επιτρέπονται καμπές στις ακμές (βλ. [5, 31, 69]). Οι Kaufmann και Wiese [69] απέδειξαν ότι κάθε επίπεδο γράφημα με n κορυφές επιδέχεται μια επίπεδη εμφύτευση σε κάθε σύνολο n σημείων με το πολύ δύο καμπές ανά ακμή. Στην ίδια εργασία, οι συγγραφείς αποδεικνύουν ότι δύο καμπές ανά ακμή είναι απαραίτητες για μερικά επίπεδα γραφήματα.

Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι σε όλες τις εργασίες που αφορούν εμφύτευση σε σύνολα σημείων όπου επιτρέπονται καμπές στις ακμές, οι καμπές δεν απαιτούνται να βρίσκονται στα σημεία του δεδομένου συνόλου. Η πρώτη εργασία που απαιτεί οι καμπές να βρίσκονται στα δεδομένα σημεία δημοσιεύτηκε φέτος [;]. Οι συγγραφείς αποδεικνύουν ότι υπάρχει ένα γραμμικό σύνολο σημείων στο οποίο μπορούμε να εμφυτεύσουμε κάθε επίπεδο γράφημα με το πολύ δύο καμπές ανά ακμή.

Όταν η αντιστοιχία μεταξύ των κορυφών και των σημείων δίνεται ως είσοδος του προβλήματος, το πρόβλημα ονομάζεται *εμφυτευσιμότητα σε σύνολο σημείων με αντιστοιχηση*. Ο Halton [54] απέδειξε ότι κάθε επίπεδο γράφημα επιδέχεται εμφύτευση σε κάθε σύνολο σημείων, όταν δίνεται η αντιστοιχηση κορυφών-σημείων. Παρόλα αυτά ο συγγραφέας δεν αναφέρθηκε στο πρόβλημα του αριθμού των καμπών που απαιτούνται σε μια τέτοια εμφύτευση. Οι Pach και Wenger [80] απέδειξαν ότι ο γραμμικός αριθμός των καμπών είναι πάντοτε αρκετός για υπολογιστεί μια εμφύτευση επίπεδου γραφήματος σε οποιοδήποτε σύνολο σημείων με δεδομένη αντιστοιχηση. Επίσης απέδειξαν ότι, $\Omega(n)$ καμπές μπορεί να είναι απαραίτητες ακόμα και για ένα μονοπάτι και για ένα κυρτό σύνολο σημείων. Οι σταθερές για αυτά τα αποτελέσματα βελτιώθηκαν πρόσφατα στην [5].

Το πρόβλημα εμφυτευσιμότητας σε σύνολο σημείων με και χωρίς αντιστοιχηση μελετήθηκαν υπό γενικευμένο πλαίσιο των εμφυτεύσεων χρωματισμένων γραφημάτων σε χρωματισμένα σύνολα σημείων. Στο πρόβλημα *εμφύτευσης σε k -χρωματισμένο σύνολο σημείων*, κάθε κόμβος του γραφήματος και κάθε σημείο του δεδομένου συνόλου σημείων είναι χρωματισμένα με ένα από τα k χρώματα και ο αλγόριθμος επιτρέπεται να αντιστοιχεί κάθε κορυφή μόνο σε ένα σημείο του ίδιου χρώματος. Αν $k = 1$, το πρόβλημα συμπίπτει με το απλό πρόβλημα εμφύτευσης σε σύνολο σημείων, ενώ αν $k = n$, όπου n ο αριθμός των κορυφών/σημείων, το πρόβλημα είναι ακριβώς η εμφυτευσιμότητα με αντιστοιχηση. Τα περισσότερα αποτελέσματα για το πρόβλημα της εμφύτευσης σε k -χρωματισμένο σύνολο σημείων παρουσιάζονται στις [5, 31, 32, 33, 34, 35, 65].

Το πρόβλημα εμφύτευσης σε σύνολο σημείων μελετήθηκε και για κατευθυνόμενα γραφήματα.

Επειδή τα κατευθυνόμενα γραφήματα συχνά αναπαριστούν μια ιεραρχική σχέση, συνηθίζεται οι ακμές τους, που συνήθως παρουσιάζονται ως βέλη, να απεικονίζονται ως μονότονα αύξουσες καμπύλες σε κάποια επιλεγμένη κατεύθυνση. Αυτές οι απεικονίσεις λέγονται *ανερχόμενες* (βλ. επίσης Ενότητα 1.2). Αυτή η προτίμηση στις απεικονίσεις των κατευθυνόμενων γραφημάτων επεκτάθηκε και στο πρόβλημα εμφύτευσης αυτών σε σύνολα σημείων. Έτσι ορίστηκε το πρόβλημα *ανερχόμενης εμφύτευσης σε σύνολο σημείων*. Στο πρόβλημα αυτό μας δίνεται ένα κατευθυνόμενο γράφημα G με n κορυφές και ένα σύνολο n σημείων S και ο στόχος είναι να αποφασίσουμε αν υπάρχει μια αντιστοίχιση μεταξύ των κορυφών του G και των σημείων του S έτσι ώστε η τελική ευθύγραμμη απεικόνιση να είναι ανερχόμενη και επίπεδη. Ακολουθεί ο τυπικός ορισμός του προβλήματος:

Ορισμός 1. *Μια ανερχόμενη ευθύγραμμη εμφύτευση σε σύνολο σημείων (για συντομογραφία UPSE, από το αγγλικό upward straight-line point-set embedding) ενός γραφήματος $G = (V, E)$ σε ένα σύνολο σημείων S , τέτοιο ώστε $|S| = |V|$, είναι μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση των κορυφών του G σε σημεία του S έτσι ώστε η τελική ευθύγραμμη απεικόνιση είναι επίπεδη, δηλαδή δεν υπάρχουν τομές μεταξύ των ακμών, και για κάθε ακμή (u, v) , κατευθυνόμενη από την u στην v , ισχύει $y(u) < y(v)$.*

Το πρόβλημα ανερχόμενης ευθύγραμμης εμφύτευσης σε σύνολο σημείων είναι ένα ενεργό πεδίο έρευνας και τα γνωστά αποτελέσματα παρουσιάζονται στις [4, 12, 46, 48, 49, 67, 97].

Η ανερχόμενη ευθύγραμμη εμφύτευση σε σύνολο σημείων με δεδομένη αντιστοίχιση, δηλαδή όταν η αντιστοίχιση μεταξύ των κορυφών και των σημείων δίνεται ως είσοδος του προβλήματος, μελετήθηκε στην [49]. Οι συγγραφείς έδειξαν ότι κάθε επίπεδο st -γράφημα επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση σε σύνολο σημείων με το πολύ $2n - 3$ καμπές ανά ακμή. Η μελέτη της ευθύγραμμης εκδοχής του προβλήματος ξεκίνησε από τους Binucci et. al. [12], που απέδειξαν τα ακόλουθα. (i) Κανένα από τα 2-συνδεδεμένα γραφήματα δεν επιδέχεται ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε κάθε κυρτό σύνολο σημείων. (ii) Στην περίπτωση ενός μονομερούς κυρτού συνόλου μπορούμε να αποφασίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν το δεδομένο γράφημα επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση. (iii) Υπάρχουν κατευθυνόμενα δέντρα που δεν επιδέχονται εμφύτευση σε κάποια κυρτά σύνολα σημείων. (iv) Κάθε προσανατολισμένο μονοπάτι επιδέχεται ανερχόμενη εμφύτευση σε κάθε κυρτό σύνολο σημείων. Τα υπόλοιπα αποτελέσματα για το πρόβλημα ανερχόμενης εμφύτευσης γραφημάτων σε σύνολο σημείων παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.

2.1.1 Η δική μας συνεισφορά: εμφύτευση κατεγγραφημάτων σε σύνολο σημείων

Η συμβολή μας στην κατανόηση του προβλήματος εμφύτευσης κατευθυνόμενων γραφημάτων σε σύνολο σημείων παρουσιάζεται σε αυτό το κεφάλαιο και είναι δημοσιευμένο στις εργασίες [4, 46, 48, 67, 97].

Στην [48] μελετήσαμε την εκδοχή του προβλήματος όταν επιτρέπονται καμπές στις ακμές του γραφήματος. Αποδείξαμε ότι κάθε st -γράφημα επιδέχεται ανερχόμενη εμφύτευση σε σύνολο σημείων με το πολύ δύο καμπές ανά ακμή.

Στην [97] μελετήσαμε το πρόβλημα εμφυτευσιμότητας με αντιστοίχιση. Βελτιώσαμε το αποτέλεσμα που παρουσιάζεται στην [49], δίνοντας πολυωνυμικό αλγόριθμο για κατασκευή ανερχόμενων απεικονίσεων με το πολύ $n - 3$ καμπές ανά ακμή, παρουσιάζοντας επίσης ένα γράφημα, όπου $n - 3$ καμπές σε κάποιες ακμές είναι απαραίτητες.

Στις [4, 46, 67] μελετήσαμε την ευθύγραμμη εκδοχή του προβλήματος. Μερικά από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα: (i) Κάθε δέντρο-κάμπια (*caterpillar-tree*) και κάθε *switch-tree* επιδέχονται μια ανερχόμενη εμφύτευση σε κάθε κυρτό σύνολο σημείων. (ii) Για ένα δεδομένο εξωεπίπεδο γράφημα και ένα κυρτό σύνολο σημείων η ανερχόμενη εμφυτευσιμότητα μπορεί να

ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. (iii) Η κλάση των γραφημάτων που εμφυτεύονται σε κάθε κυρτό σύνολο σημείων είναι διαφορετική από την κλάση των γραφημάτων που εμφυτεύονται σε κάθε γενικό σύνολο σημείων. (iv) Κάθε ανερχόμενα επίπεδο γράφημα με μοναδική πηγή και μέγιστο μη-κατευθυνόμενο κύκλο μήκους τρία, επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση σε κάθε γενικό σύνολο σημείων. (v) Το γενικό πρόβλημα ανερχόμενης εμφυτευσιμότητας είναι \mathcal{NP} -complete ακόμα και για γραφήματα με μοναδική πηγή και μέγιστο μη-κατευθυνόμενο κύκλο μήκους τέσσερα. Το αποτέλεσμα αυτό μαζί με το (iv) παρουσιάζουν μια πλήρη εικόνα για την υπολογιστική πολυπλοκότητα του προβλήματος.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματά μας πάνω στο πρόβλημα ανερχόμενης εμφυτευσιμότητας σε σύνολο σημείων. Αρχίζουμε με τους απαραίτητους ορισμούς και συμβολισμούς στην Ενότητα 2.2.

- ο Στην Ενότητα 2.3, παρουσιάζουμε δύο θετικά και ένα αρνητικό αποτέλεσμα που αφορούν την εμφυτευσιμότητα των κατευθυνόμενων δέντρων σε ένα κυρτό σύνολο σημείων. Πιο συγκεκριμένα, στην Ενότητα 2.3.1 και στην Ενότητα 2.3.2, αποδεικνύουμε ότι κάθε *δέντρο-κάμπια* (*caterpillar*) και κάθε *switch-tree* επιδέχονται μια ανερχόμενη εμφύτευση σε κάθε κυρτό σύνολο σημείων. Ύστερα, στην Ενότητα 2.3.3, η οικογένεια των *switch-trees* γενικεύεται στην οικογένεια των *k-switch trees* και αποδεικνύεται ότι, για κάθε $k \geq 2$ υπάρχει μια οικογένεια των *k-switch trees*, τα μέλη της οποίας δεν είναι ανερχόμενα εμφυτεύσιμα σε κάποια κυρτά σύνολα σημείων. Στην Ενότητα 2.3.4, αποδεικνύουμε ότι μπορούμε να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν το δεδομένο δέντρο επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση στο δεδομένο κυρτό σύνολο σημείων.

Το αποτέλεσμα που αφορά τα δέντρα-κάμπιες είναι δημοσιευμένο στην [4]. Το αποτέλεσμα για τα *switch-trees* και τα *k-switch trees* είναι δημοσιευμένο στην [46]. Ενώ ο αλγόριθμος ελέγχου εμφανίζεται στην [67].

- ο Η Ενότητα 2.4 είναι αφιερωμένη στα εξωεπίπεδα γραφήματα και κυρτά σύνολα σημείων. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι μπορούμε να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν το δεδομένο ανερχόμενα εξωεπίπεδο γράφημα επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση στο δεδομένο κυρτό σύνολο σημείων. Αυτό το μη-τετριμμένο αποτέλεσμα μας προσφέρει την σημαντική γνώση για το ποιες περιπτώσεις του γενικού προβλήματος είναι επιλύσιμες και ποιες είναι \mathcal{NP} -hard. Το αποτέλεσμα αυτό υποβλήθηκε για δημοσίευση στο περιοδικό "Computational Geometry: Theory and Applications".
- ο Η Ενότητα 2.5 είναι εξ ολοκλήρου αφιερωμένη σε μια πολύ ειδική περίπτωση των δέντρων, ονομαζόμενων προσανατολισμένων μονοπατιών, και στα γενικά σύνολα σημείων. Παρόλο που η δομή των γραφημάτων αυτών είναι απλή, η γενική ερώτηση αν ένα προσανατολισμένο μονοπάτι πάντα επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση σε ένα γενικό σύνολο σημείων αποτελεί ένα ανοιχτό πρόβλημα. Επιπλέον, δεν είναι γνωστό κανένα αντιπαράδειγμα που να δείχνει ότι δεν είναι όλα τα μονοπάτια ανερχόμενα εμφυτεύσιμα σε κάθε γενικό σύνολο σημείων. Στην Ενότητα 2.5.1, συζητάμε τα σχετικά αποτελέσματα και τις πιθανές προσεγγίσεις στο πρόβλημα αυτό. Η Ενότητα 2.5.2 είναι αφιερωμένη στην περίπτωση που το σύνολο σημείων είναι μεγαλύτερο από το σύνολο των κορυφών του γραφήματος. Αποδεικνύουμε ότι κάθε προσανατολισμένο μονοπάτι με n κορυφές και k πηγές και καταβόθρες επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση σε κάθε γενικό σύνολο $n2^{k-2}$ σημείων. Ύστερα, χρησιμοποιώντας διαφορετικές τεχνικές αποδεικνύουμε ότι τα $O(n^2)$ σημεία είναι αρκετά για μια ανερχόμενη εμφύτευση προσανατολισμένου μονοπατιού. Το άνω όριο των $n2^{k-2}$ σημείων δημοσιεύτηκε στην [4], ενώ το άνω όριο των $O(n^2)$ σημείων δεν έχει δημοσιευτεί ακόμα.

- ο Τελικά, ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο με την Ενότητα 2.6, όπου αποδεικνύουμε ότι το γενικό πρόβλημα της ανερχόμενης εμφυτευσιμότητας είναι \mathcal{NP} -complete. Το αποτέλεσμα αυτό δημοσιεύτηκε στην [46].

2.2 Ορολογία και Χρήσιμα Αποτελέσματα

Στις περισσότερες περιπτώσεις ακολουθούμε τους ορισμούς και τους συμβολισμούς που παρουσιάζονται στην εισαγωγή. Παρακάτω ορίζουμε τις έννοιες που χρησιμοποιούνται στο παρόν κεφάλαιο. Οι συμβολισμοί που είναι ειδικοί για κάθε πρόβλημα δίνονται στην αρχή της αντίστοιχης ενότητας.

2.2.1 Σύνολο σημείων

Ανακαλούμε ότι, ένα σύνολο σημείων λέγεται *γενικό* αν δεν περιέχει τρία συνευθειακά σημεία και κανένα ζεύγος σημείων δεν έχει τις ίδιες y -συντεταγμένες. Το *κυρτό περίβλημα* $H(S)$ του συνόλου σημείων S είναι το μικρότερο κυρτό πολύγωνο που περιλαμβάνει όλα τα σημεία του S . Στην συνέχεια όταν μιλάμε για κυρτό περίβλημα αναφερόμαστε στις κορυφές του. Ένα σύνολο σημείων ονομάζεται *κυρτό*, αν το κυρτό περίβλημά του δεν περιέχει κανένα σημείο του στο εσωτερικό του. Δεδομένου ενός συνόλου σημείων S , συμβολίζουμε με $b(S)$ και $t(S)$ τα σημεία με μικρότερη και με μεγαλύτερη y -συντεταγμένη, αντίστοιχα.

Ένα κυρτό σύνολο σημείων S ονομάζεται *μονομερές* αν τα σημεία $b(S)$ και $t(S)$ βρίσκονται διαδοχικά στο περίβλημά του. Αν αυτά εμφανίζονται διαδοχικά στο $H(S)$ όπως το διασχίζουμε κατά (αντ. αντίθετα προς) την φορά των δεικτών του ρολογιού, τότε το S ονομάζεται *αριστερομερές* (αντ. *δεξιομερές*) σύνολο σημείων. Ένα σύνολο σημείων που αποτελείται από δύο σημεία θεωρείται ότι είναι είτε αριστερομερές είτε δεξιομερές. Ένα κυρτό σύνολο σημείων που δεν είναι μονομερές ονομάζεται επίσης *διμερές* σύνολο σημείων. Κάθε κυρτό σύνολο σημείων S μπορεί να θεωρηθεί ως ένωση ενός αριστερομερούς και ενός δεξιομερούς συνόλων. Το αντίστοιχο αριστερομερές σύνολο ονομάζεται *αριστερή μεριά* του S και συμβολίζεται με $L(S)$, ενώ το δεξιομερές σύνολο ονομάζεται *δεξιά μεριά* του S και συμβολίζεται με $R(S)$. Όταν δεν υπάρχει σύγχυση σε ποιο σύνολο σημείων αναφερόμαστε, χρησιμοποιούμε συμβολισμούς L και R στην θέση των $L(S)$ και $R(S)$, αντίστοιχα. Τα σημεία $b(S)$ και $t(S)$ θεωρούμε ότι ανήκουν είτε στο $L(S)$ είτε στο $R(S)$, αλλά όχι και στα δύο. Έστω ότι S είναι ένα κυρτό σύνολο σημείων και $H(S)$ είναι το κυρτό περίβλημά του. Έστω $S_1 = S \setminus H(S)$, $S_2 = S_1 \setminus H(S_1)$, \dots , $S_m = S_{m-1} \setminus H(S_{m-1})$. Αν m είναι ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε $S_m = \emptyset$, λέμε ότι S είναι *m -κυρτό σύνολο σημείων*. Ένα υποσύνολο του S ονομάζεται *συνεχόμενο* αν τα σημεία του εμφανίζονται διαδοχικά στο περίβλημα του S . Έστω l είναι μια ευθεία στο επίπεδο, η οποία δεν είναι παράλληλη με τον άξονα των x . Λέμε ότι το σημείο p *βρίσκεται στα δεξιά της l* (αντ., *αριστερά από την l*) αν p κείται σε μια ημιευθεία που έχει το ένα της άκρο στην l , είναι παράλληλη προς τον άξονα των x και είναι κατευθυνόμενη προς $+\infty$ (αντ., $-\infty$). Παρόμοια, αν l είναι μια ευθεία στο επίπεδο που δεν είναι παράλληλη με τον άξονα των y λέμε ότι το σημείο p *βρίσκεται πάνω από την l* (αντ., *κάτω από την l*) αν p κείται σε μια ημιευθεία που έχει το ένα της άκρο στην l , είναι παράλληλη προς τον άξονα των y και κατευθύνεται προς το $+\infty$ (αντ., $-\infty$).

2.2.2 Γραφήματα

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με κατευθυνόμενα ακυκλικά γραφήματα, δίνοντας έμφαση στα κατευθυνόμενα δέντρα και στις ειδικές κατηγορίες αυτών, όπως *switch-trees*, *k-switch trees* και δέντρα-κάμπιες (*caterpillars*). Ένα κατευθυνόμενο δέντρο είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα το υποκείμενο μη-κατευθυνόμενο γράφημα του οποίου είναι δέντρο. Ένα *switch-tree* είναι ένα κα-

τευθυνόμενο δέντρο T , τέτοιο ώστε, κάθε κορυφή του T είναι είτε πηγή είτε καταβόθρα. Παρατηρούμε ότι το μέγιστο κατευθυνόμενο μονοπάτι σε ένα switch-tree έχει μήκος ένα¹. Βασίζομενοι σε αυτόν τον χαρακτηρισμό των switch-trees μπορούμε να γενικεύσουμε την κλάση των switch-trees στην κλάση των k -switch trees ως εξής: ένα k -switch tree είναι ένα κατευθυνόμενο δέντρο το μέγιστο μονοπάτι του οποίου έχει μήκος k . Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, ένα switch-tree είναι ένα 1-switch tree. Ένα γράφημα ονομάζεται *προσανατολισμένο μονοπάτι* αν το υποκείμενο μη-κατευθυνόμενο γράφημά του είναι ένα απλό μονοπάτι. Ένα προσανατολισμένο μονοπάτι με κορυφές $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ονομάζεται *μονότονο* αν περιέχει τις ακμές (v_i, v_{i+1}) , $1 \leq i \leq k-1$. Παρατηρούμε ότι μια ανερχόμενη εμφύτευση ενός μονότονου μονοπατιού σε ένα γενικό σύνολο σημείων μπορεί εύκολα να κατασκευαστεί απεικονίζοντας i -στη κορυφή στο i -στο ψηλότερο σημείο. Ένα *δέντρο-κάμπια* (caterpillar) είναι ένα κατευθυνόμενο δέντρο τέτοιο ώστε αν διαγράψουμε τις κορυφές βαθμού ένα παράγουμε ένα προσανατολισμένο μονοπάτι. Ένα μη-κατευθυνόμενο επίπεδο γράφημα ονομάζεται *εξωεπίπεδο*, αν αποδέχεται μια επίπεδη εμφύτευση, όπου όλες οι κορυφές του βρίσκονται σε μία όψη, συνήθως επιλεγμένη ως η εξωτερική του όψη. Ένα *κατευθυνόμενο εξωεπίπεδο γράφημα* είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα, το υποκείμενο μη-κατευθυνόμενο γράφημά του οποίου είναι εξωεπίπεδο.

2.2.3 Χρήσιμα αποτελέσματα

Για πρώτη φορά οι ανερχόμενες ευθύγραμμες εμφυτεύσεις σε σύνολο σημείων μελετήθηκαν από τους Binucci *et. al.* [12]. Τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην εργασία αυτή και μας είναι χρήσιμα στο παρόν κεφάλαιο είναι τα ακόλουθα.

Λήμμα 1 (Binucci at al. [12]). *Έστω T είναι ένα κατευθυνόμενο δέντρο με n κορυφές και έστω S είναι ένα κυρτό σύνολο n σημείων. Έστω u είναι μια κορυφή του T και έστω T_1, T_2, \dots, T_k είναι τα υπόδεντρα του T που παράγονται διαγράφοντας την u και τις προσπίπτουσες στην u ακμές του T . Σε κάθε ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του T στο S , οι κορυφές του T_i είναι απεικονισμένες σε συνεχόμενα σημεία του S για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$.*

Θεώρημα 1 (Binucci at al. [12]). *Για κάθε περιπτώ ακέραιο $n \geq 5$, υπάρχει ένα κατευθυνόμενο δέντρο T με $(3n+1)$ -κορυφές και ένα κυρτό σύνολο $3n+1$ σημείων S , τέτοιο ώστε το T δεν επιδέχεται καμία ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο S .*

Λήμμα 2 (Binucci at al. [12]). *Έστω S ένα μονομερές κυρτό σύνολο n σημείων και έστω $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ένα προσανατολισμένο μονοπάτι n κορυφών. Αν η ακμή πάνω στις κορυφές v_1, v_2 είναι κατευθυνόμενη από την v_1 στην v_2 (αντ. από την v_2 στην v_1), τότε υπάρχει μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του P στο S στην οποία η κορυφή v_1 βρίσκεται στο σημείο $b(S)$ (αντ. v_1 βρίσκεται στο $t(S)$).*

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην εργασία [12].

Θεώρημα 2 (Binucci at al. [12]). *Κάθε προσανατολισμένο μονοπάτι n κορυφών επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε κάθε κυρτό σύνολο n σημείων.*

¹Ως μήκος μονοπατιού ορίζουμε το πλήθος των ακμών που περιέχει.

2.3 Εμφυτευσιμότητα Δέντρων σε Κυρτά Σύνολα Σημείων

2.3.1 Κατευθυνόμενα δέντρα-κάμπιες

Στην παρούσα ενότητα αποδεικνύουμε ότι κάθε κατευθυνόμενο δέντρο-κάμπια $G = (V, E)$ επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση σε κάθε κυρτό σύνολο σημείων. Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνει το θετικό αποτέλεσμα του θεωρήματος των Binucci *et al.* [12] (βλ. Θεώρημα 2 παραπάνω).

Αρχικά εισάγουμε τους ειδικούς για αυτή την ενότητα ορισμούς και συμβολισμούς. Θυμίζουμε ότι ένα δέντρο-κάμπια G είναι ένα κατευθυνόμενο δέντρο, τέτοιο ώστε αν διαγράψουμε όλες τις κορυφές βαθμού ένα (που ονομάζονται *πόδια* της κάμπιας) παίρνουμε ένα προσανατολισμένο μονοπάτι, το οποίο ονομάζεται *ράχη* του G . Ένα δέντρο-κάμπια, η ράχη του οποίου είναι ένα μονότονο μονοπάτι, ονομάζεται *μονότονο* δέντρο-κάμπια. Έστω ότι v_s και v_t είναι μια πηγή και μια καταβόθρα της ράχης ενός δέντρου-κάμπιας. Μια κορυφή w που συνδέεται με την v_s μέσω ακμής (w, v_s) είτε στην v_t μέσω ακμής (v_t, w) ονομάζεται *ακραίο πόδι* του δέντρου-κάμπιας. Μια κορυφή w που συνδέεται με την v_s μέσω της ακμής (v_s, w) είτε με την v_t μέσω της ακμής (w, v_t) ονομάζεται ένα *οριακό πόδι* ενός δέντρου-κάμπιας. Στην Εικόνα 2.2 τα ακραία πόδια είναι αριθμημένα με αριθμούς 1, 13 – 14, 20 – 21, 28, 29, 39 – 41 και συμβολίζονται με γκρι κύκλους, ενώ τα οριακά πόδια με αριθμούς 3, 10, 11, 23, 24, 25, 26, 31, 36, 37. Συμβολίζουμε με $|G|$ τον αριθμό των κορυφών στο γράφημα G και με $|S|$ τον αριθμό των σημείων στο σύνολο S .

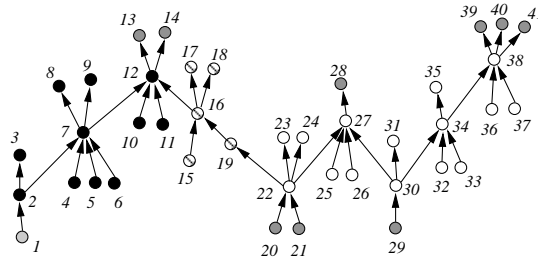
Αρχικά παρουσιάζουμε δύο απλούς αλγόριθμους οι οποίοι κατασκευάζουν ανερχόμενες εμφυτεύσεις ενός δέντρου-κάμπιας σε ένα κυρτό σύνολο σημείων, όταν υπάρχει κάποιος περιορισμός είτε στην δομή της κάμπιας, είτε στο σύνολο σημείων. Οι αλγόριθμοι αυτοί αποτελούν εργαλεία για τον γενικευμένο αλγόριθμο που παρουσιάζουμε αμέσως μετά.

Λήμμα 3. Έστω ότι $G = (V, E)$ είναι ένα δέντρο-κάμπια n κορυφών, και έστω ότι C είναι η ράχη του, και $u \in C$ είναι ένα από τα δύο άκρα της ράχης C . Έστω επίσης $U = \{u\} \cup \{\text{τα ακραία πόδια της } u\}$. Τότε, το G επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση στο μονομερές κυρτό σύνολο n σημείων S έτσι ώστε οι κορυφές του U να είναι απεικονισμένες στα $|U|$ χαμηλότερα (αντ. υψηλότερα) σημεία του S .

Απόδειξη: Οι Binucci *et. al.* [12] (βλ. Λήμμα 2) παρουσίασαν έναν αλγόριθμο, που δεδομένου ενός προσανατολισμένου μονοπατιού G και ενός μονομερούς κυρτού συνόλου σημείων S κατασκευάζει μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G στο S . Ο αλγόριθμος αυτός γενικεύεται στα δέντρα-κάμπιες, δεσμεύοντας αρκετά συνεχόμενα σημεία γύρω από κάθε σημείο της ράχης, ώστε να απεικονιστούν τα πόδια της κάμπιας. \square

Ορίζουμε μια *συνάρτηση απαρίθμησης* $\mathcal{E} : V \rightarrow \mathbb{N}$ για τις κορυφές ενός δεδομένου δέντρου-κάμπιας $G = (V, E)$, η οποία χρησιμοποιείται αργότερα από τον αλγόριθμο εμφύτευσης. Έστω ότι $C \subseteq V$ είναι το σύνολο των κορυφών της ράχης του G και έστω ότι s, t είναι οι κορυφές που αποτελούν τα δύο άκρα της ράχης. Η συνάρτηση απαρίθμησης ορίζεται από τους εξής κανόνες:

- $\mathcal{R}1$: Για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in C$, τέτοιων ώστε η κορυφή u να εμφανίζεται πριν από την κορυφή v στην ράχη C , όταν την διασχίζουμε από την s στην t , ισχύει $\mathcal{E}(u) < \mathcal{E}(v)$.
- $\mathcal{R}2$: Για κάθε ζεύγος κορυφών $u \in C$ και $v \notin C$ που συνδέονται μέσω κατευθυνόμενης ακμής $(u, v) \in E$, ισχύει $\mathcal{E}(u) < \mathcal{E}(v)$.
- $\mathcal{R}3$: Για κάθε ζεύγος κορυφών $u \in C$ και $v \notin C$ που συνδέονται μέσω ακμής $(v, u) \in E$, ισχύει $\mathcal{E}(v) < \mathcal{E}(u)$.



Εικόνα 2.2: Ένα δέντρο-κάμπια οι κορυφές του οποίου έχουν αναριθμηθεί σύμφωνα με τους κανόνες $\mathcal{R}1 - \mathcal{R}3$.

Παρατηρούμε ότι οι κανόνες $\mathcal{R}2$ και $\mathcal{R}3$ είναι αρκετοί για να αναριθμήσουμε όλα τα πόδια του G . Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας αναρίθμησης εμφανίζεται στην Εικόνα 2.2.

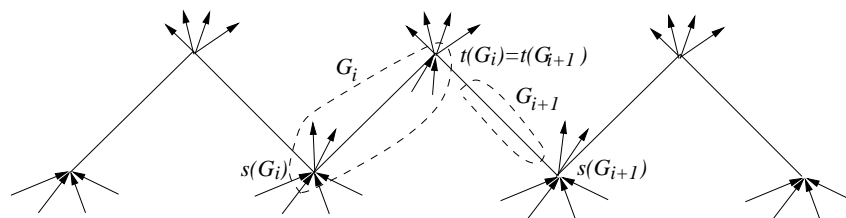
Λήμμα 4. Έστω ότι $G = (V, E)$ είναι ένα μονότονο δέντρο-κάμπια και έστω ότι C είναι η ράχη της με την πηγή s και καταβόθρα t . Επίσης υποθέτουμε ότι οι κορυφές s και t είναι επίσης πηγή και καταβόθρα του G , αντίστοιχα. Τότε, το G επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση σε κάθε κυρτό σύνολο σημείων S τέτοιο ώστε η s βρίσκεται στο χαμηλότερο S και η t στο υψηλότερο σημείο του συνόλου S .

Απόδειξη: Έστω v_1, \dots, v_n είναι η αρίθμηση των κορυφών του G , που δίνεται από την συνάρτηση αναρίθμησης \mathcal{E} . Υποθέτουμε ότι το σύνολο S είναι ταξινομημένο βάση την y -συντεταγμένη στην αύξουσα σειρά. Αντιστοιχούμε την κορυφή v_i στο i -στο σημείο του S . Παρατηρούμε ότι η αρίθμηση που δίνεται από την συνάρτηση \mathcal{E} είναι τοπολογική αρίθμηση όταν εφαρμόζεται σε ένα μονότονο δέντρο-κάμπια. Άρα η απεικόνιση που προκύπτει με την αντιστοίχιση αυτή είναι ανερχόμενη. Επειδή s είναι η πηγή και t είναι η καταβόθρα του G , οι κορυφές $s = v_1$ και $t = v_n$ απεικονίστηκαν στο χαμηλότερο και στο υψηλότερο σημείο του S , αντίστοιχα. Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε κορυφή της ράχης και τα πόδια που συνδέονται με αυτή είναι απεικονισμένα σε διαδοχικά σημεία του S , και άρα δεν υπάρχουν τομές μεταξύ των ακμών. \square

Στο υπόλοιπο μέρος της ενότητας αυτής παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο που κατασκευάζει μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση ενός δέντρου-κάμπιας G σε ένα κυρτό σύνολο σημείων S . Η διαισθητική ιδέα είναι να χωρίσουμε το G σε τρία μέρη και να τα αντιστοιχήσουμε σε κατάλληλα μέρη του συνόλου S έτσι ώστε καθένα από τα τρία υπογραφήματα μπορεί να αντιμετωπιστεί με έναν από τους δύο αλγορίθμους που περιγράψαμε παραπάνω. Στην συνέχεια τυποποιούμε αυτή την ιδέα.

Έστω ότι G είναι ένα δέντρο-κάμπια και έστω ότι C είναι η ράχη της με άκρα s και t , έτσι ώστε $\mathcal{E}(s) < \mathcal{E}(t)$. Έστω ότι (C_1, C_2, \dots) είναι ένας διαχωρισμός της ράχης C έτσι ώστε C_i είναι μέγιστο μονότονο μονοπάτι του C . Παρατηρούμε ότι σε κάποια C_i η συνάρτηση αναρίθμησης \mathcal{E} αριθμεί τις κορυφές σύμφωνα με μια τοπολογική αρίθμηση, ενώ σε κάποια αυτό δεν ισχύει. Αν \mathcal{E} αριθμεί τις κορυφές του C_i σύμφωνα με μια τοπολογική αρίθμηση, ονομάζουμε C_i ένα *αύξον μονοπάτι*, αλλιώς το ονομάζουμε *φθίνον μονοπάτι*. Επειδή χρειαζόμαστε έναν διαχωρισμό χωρίς τομές υποθέτουμε ότι οι πηγές και οι καταβόθρες της ράχης ανήκουν στα αύξοντα μονοπάτια.

Έστω ότι G_i είναι το μονότονο δέντρο-κάμπια που παράγεται από τις κορυφές του C_i και από τα πόδια του G που είναι γειτονικά με τις κορυφές του C_i , εκτός από τα ακραία πόδια του G . Παρατηρούμε ότι G_i είναι ένα μονότονο δέντρο-κάμπια. Ένα δέντρο-κάμπια G_i ονομάζεται *αύξον* (αντ. *φθίνον*) αν C_i είναι ένα αύξον (αντ. φθίνον) μονοπάτι. Παρατηρούμε επίσης ότι σε αυτόν τον διαχωρισμό του G σε μονότονα δέντρα-κάμπιας όλα τα οριακά πόδια ανήκουν σε αύξοντα δέντρα-κάμπιας και ότι δυο διαδοχικά δέντρα-κάμπιας G_i και G_{i+1} δεν έχουν κοινή κορυφή (βλ.



Εικόνα 2.3: Τα υπογραφήματα G_i και G_{i+1} .

Εικόνα 2.3). Παρατηρούμε επίσης ότι τελικά έχουμε έναν διαχωρισμό του G σε αύξοντα, φθίνοντα δέντρα-κάμπιες και τα ακραία πόδια. Επίσης παρατηρούμε ότι το G_1 είναι πάντοτε ένα αύξον δέντρο-κάμπια, που μπορεί να περιέχει μονάχα μια κορυφή της ράχης του G .

Παραδείγματος χάρη, στην Εικόνα 2.2 οι κορυφές του G_1 είναι αριθμημένες από 2 έως 12, ενώ οι κορυφές του G_2 είναι αριθμημένες από 15 έως 19.

Έστω ότι G_i είναι ένα αύξον δέντρο-κάμπια στον διαχωρισμό του G που μόλις περιγράψαμε. Συμβολίζουμε με το $s(G_i)$ την πηγή της ράχης του G_i και με το $t(G_i)$ την καταβόθρα της ράχης του G_i . Αν G_i είναι φθίνον δέντρο-κάμπια, τότε $s(G_i)$ συμβολίζει την πηγή της ράχης του G που γειτονεύει με το G_i και $t(G_i)$ συμβολίζει την καταβόθρα της ράχης του G που γειτονεύει με το G_i . Παρατηρούμε ότι για κάθε G_i , $s(G_i)$ είναι μια από τις πηγές της ράχης του G , ενώ $t(G_i)$ είναι μια από τις καταβόθρες της ράχης του G . Στην Εικόνα 2.2 παρατηρούμε ότι $s(G_1) = 2$, $t(G_1) = 12$, $s(G_2) = 22$, $t(G_2) = 12$.

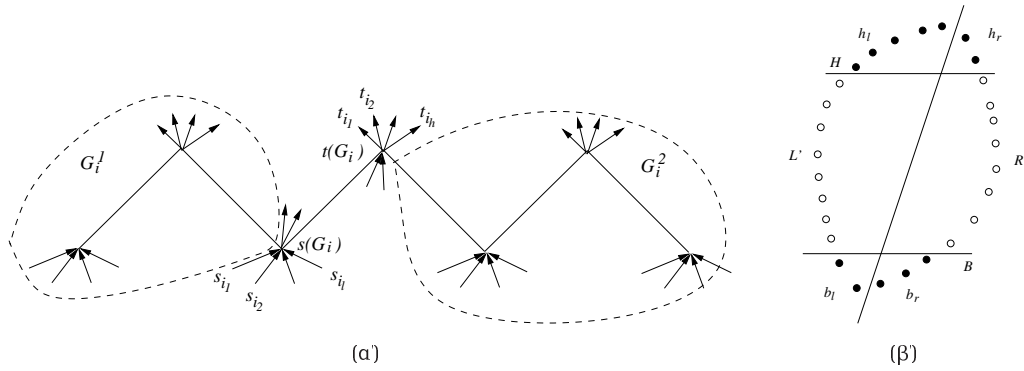
Έστω πάλι ότι G_i είναι ένα μονότονο δέντρο-κάμπια στον διαχωρισμό του G . Στα ακόλουθα ορίζουμε τα υπόδεντρα G_i^1 και G_i^2 του G που παράγονται από το G_i . Έστω ότι G_i είναι ένα αύξον δέντρο-κάμπια (βλ. Εικόνα 2.4(α)). Ορίζουμε G_i^1 να είναι το δέντρο-κάμπια που παράγεται από όλες τις κορυφές του G , εκτός από τα ακραία πόδια του $s(G_i)$ που προηγούνται της κορυφής $s(G_i)$ (εξαιρώντας $s(G_i)$) στην απαρίθμηση \mathcal{E} . Επίσης ορίζουμε G_i^2 να είναι το δέντρο-κάμπια που ορίζεται από όλες τις κορυφές του G , εκτός από τα ακραία πόδια του $t(G_i)$, που έπονται την κορυφή $t(G_i)$ στην \mathcal{E} (εξαιρώντας την $t(G_i)$). Αν G_i είναι ένα φθίνον δέντρο-κάμπια (βλ. Εικόνα 2.8(α')), ορίζουμε G_i^1 να είναι το δέντρο-κάμπια που παράγεται από όλες τις κορυφές του G που προηγούνται της $t(G_i)$ (περιλαμβάνοντας $t(G_i)$) στην \mathcal{E} εκτός από τα ακραία πόδια του $t(G_i)$, ενώ G_i^2 να είναι το δέντρο-κάμπια που παράγεται από όλες τις κορυφές του G , εκτός από τα ακραία πόδια του $s(G_i)$, που έπονται την $s(G_i)$ στην \mathcal{E} (περιλαμβάνοντας την $s(G_i)$).

Θυμίζουμε ότι το αριστερό και το δεξί μέρος του συνόλου σημείων S συμβολίζονται με L και R . Υποθέτουμε εδώ ότι $b(S), t(S) \in L$.

Έστω η κορυφή $v_{|L|}$ στην απαρίθμηση v_1, v_2, \dots, v_n των κορυφών του G που προέκυψε σύμφωνα με τους κανόνες $\mathcal{R}1 - \mathcal{R}3$, δηλαδή $v_{|L|}$ είναι $|L|$ -στή κορυφή σε αυτή την απαρίθμηση. Θα χρησιμοποιήσουμε $v_{|L|}$ για να διαχωρίσουμε το δέντρο-κάμπια G σε τρία μέρη. Για να το πετύχουμε αυτό ξεχωρίζουμε τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις: (1) $v_{|L|}$ είναι μια κορυφή ενός αύξοντα δέντρο-κάμπιας, (2) $v_{|L|}$ είναι μια κορυφή ενός φθίνοντα δέντρο-κάμπιας, (3) $v_{|L|}$ είναι ένα ακραίο πόδι μιας καταβόθρας της ράχης του G , και (4) $v_{|L|}$ είναι ένα ακραίο πόδι μιας πηγής της ράχης του G . Πριν εξετάσουμε αυτές τις περιπτώσεις θα αποδείξουμε δύο σημαντικά λήμματα που χρησιμοποιούνται στον τελικό αλγόριθμο εμφύτευσης.

Λήμμα 5. Έστω ότι G είναι ένα δέντρο κάμπια και έστω ότι $\{R_1, R_2, \dots\}$ είναι ο διαχωρισμός αυτού σε μονότονα δέντρα-κάμπιες, όπως ορίστηκε παραπάνω. Έστω ότι $S = L \cup R$ είναι ένα κυρτό σύνολο σημείων. Έστω ότι $v_{|L|}$ είναι η $|L|$ -στή κορυφή του G που ορίστηκε από την απαρίθμηση σύμφωνα με τους κανόνες $\mathcal{R}1 - \mathcal{R}3$ και έστω ότι G_i είναι ένα μονότονο **αύξον** δέντρο-κάμπια τέτοιο ώστε $v_{|L|} \in G_i$ ή $v_{|L|}$ είναι το ακραίο πόδι της $s(G_i)$ ή $v_{|L|}$ είναι το ακραίο πόδι της $t(G_i)$. Συμβολίζουμε με i_b (αντ.

i_h) τον αριθμό των ακραίων ποδιών της $s(G_i)$ (αντ. $t(R_i)$) και με B (αντ. H) το σύνολο των $i_b + 1$ χαμηλότερων (αντ. $i_h + 1$ υψηλότερων) σημείων του S . Έστω επίσης $h_r = |H \cap R|$ και $b_l = |B \cap L|$. Αν ισχύει ότι $|L| \geq |G_i^1| + b_l$, $|R| \geq |G_i^2| + h_r$, τότε υπάρχει μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G στο σύνολο σημείων S .



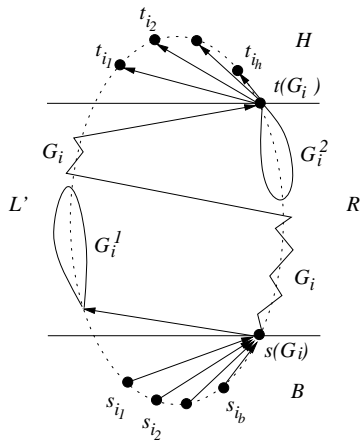
Εικόνα 2.4: (α) Ο διαχωρισμός του G που χρησιμοποιείται στο Λήμμα 5 (β) Ο διαχωρισμός του S που χρησιμοποιείται στο Λήμμα 5.

Απόδειξη: Το μονότονο αύξον δέντρο-κάμπα G_i και τα υπογραφήματα G_i^1 και G_i^2 που παράγονται από το G_i εμφανίζονται στην Εικόνα 2.4(α). Παρατηρούμε ότι τα σύνολα των κορυφών των G_i^1 , G_i , G_i^2 , {ακραία πόδια της $s(G_i)$ } και {ακραία πόδια της $t(G_i)$ } είναι ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους αποτελεί το σύνολο των κορυφών του G .

Έστω τα σύνολα σημείων H και B να είναι όπως περιγράφηκαν στο λήμμα. Παρακάτω τελειοποιούμε τον διαχωρισμό του S . Έστω $L' = L \setminus (B \cup H)$ και $R' = R \setminus (B \cup H)$. Θυμίζουμε ότι $|H \cap R| = h_r$, $|B \cap L| = b_l$ και θέτουμε $|H \cap L| = h_l$, $|B \cap R| = b_r$ (βλ. Εικόνα 2.4(β)). Από την κατασκευή έχουμε ότι: $|L| = |L'| + b_l + h_l$ και $|R| = |R'| + b_r + h_r$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον διαχωρισμό L', R', H, B του συνόλου S για να κατασκευάσουμε την εμφύτευση. Παρακάτω ξεχωρίζουμε περιπτώσεις σύμφωνα με το μέγεθος των L' και R' .

Περίπτωση 1 . $|L'| \geq |G_i^1|$ και $|R'| \geq |G_i^2|$, δηλαδή και τα δύο R' και L' είναι αρκετά μεγάλα για να χωρέσουν σε αυτά τα σημεία των G_i^1 και G_i^2 , αντίστοιχα. Πρώτα, απεικονίζουμε



Εικόνα 2.5: Η κατασκευή του Λήμματος 5. Περίπτωση $|L'| \geq |G_i^1|$, $|R'| \geq |G_i^2|$.

την $s(G_i)$ στο ψηλότερο σημείο του B και τα ακραία πόδια της $s(G_i)$ στα υπόλοιπα σημεία του B (βλ. Εικόνα 2.5). Ανάλογα, απεικονίζουμε την $t(G_i)$ στο χαμηλότερο σημείο του H και τα ακραία πόδια της $t(G_i)$ στα υπόλοιπα σημεία του H . Παρατηρούμε ότι όλες οι ακμές που συνδέουν $s(G_i)$ και $t(G_i)$ με τα ακραία τους πόδια είναι ανερχόμενες και δεν τέμνονται. Απεικονίζουμε G_i^1 στα $|G_i^1|$ χαμηλότερα σημεία του L' . Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3, επειδή το L' είναι μονομερές. Παρατηρούμε ότι, από το Λήμμα 3, η πηγή της ράχης του G_i^1 και τα ακραία της πόδια είναι απεικονισμένα στα χαμηλότερα σημεία του L' . Παρατηρούμε επίσης ότι το L' είναι πιο ψηλά από το ψηλότερο σημείο του B . Άρα η $s(G_i)$ μπορεί να συνδεθεί με την πηγή της ράχης του G_i^1 δημιουργώντας μια ανερχόμενη ακμή που δεν τέμνει τις υπόλοιπες. Τέλος, παρατηρούμε ότι G_i^1 , $s(G_i)$ και τα ακραία πόδια της $s(G_i)$ απεικονίζονται στα διαδοχικά σημεία του S .

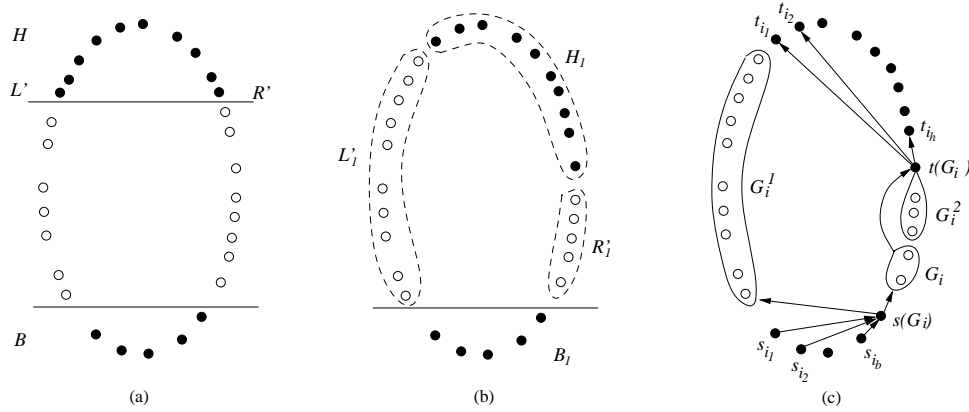
Αναλόγως, απεικονίζουμε G_i^2 στα $|G_i^2|$ ψηλότερα σημεία του R' . Αυτό μπορεί να γίνει μέσω του Λήμματος 3, επειδή R' είναι ένα μονομερές σύνολο σημείων. Παρατηρούμε ότι, από το Λήμμα 3 έπεται ότι η καταβόθρα της ράχης του G_i^2 και τα ακραία της πόδια είναι απεικονισμένα στα ψηλότερα σημεία του R' . Παρατηρούμε επίσης ότι το ψηλότερο σημείο του R' είναι πιο κάτω από το χαμηλότερο σημείο του H . Άρα η καταβόθρα της ράχης του G_i^2 μπορεί να συνδεθεί με την $t(G_i)$ σχηματίζοντας μια ανερχόμενη ακμή, χωρίς να δημιουργήσει τομή με τις ήδη υπάρχουσες ακμές. Παρατηρούμε επίσης ότι το G_i^2 , $t(G_i)$ και τα ακραία πόδια της $t(G_i)$ είναι απεικονισμένα στα διαδοχικά σημεία του S .

Τέλος, απομένει να εμφυτεύσουμε το G_i . Από την κατασκευή, η μοναδική πηγή της ράχης του G_i είναι η $s(G_i)$, που έχει απεικονιστεί σε ένα σημείο που είναι χαμηλότερα από όλα τα υπόλοιπα, ακόμα ελεύθερα σημεία, ενώ η μοναδική καταβόθρα της ράχης του G_i είναι η $t(G_i)$, που έχει απεικονιστεί σε σημείο ψηλότερο από όλα τα υπόλοιπα, ακόμα ελεύθερα σημεία. Παρατηρούμε επίσης ότι τα ελεύθερα σημεία αποτελούνται από τα διαδοχικά σημεία του L' και διαδοχικά σημεία του R' . Άρα, ακολουθώντας το Λήμμα 4, μπορούμε να εμφυτεύσουμε ανερχόμενα το G_i στα ελεύθερα σημεία του S .

Περίπτωση 2: $|L'| < |G_i^1|$, δηλαδή το L' δεν είναι αρκετά μεγάλο για να χωρέσει το G_i^1 . Στη συνέχεια δημιουργούμε έναν καινούργιο διαχωρισμό L'_1 , R'_1 , H_1 και B_1 του S έτσι ώστε το G_i^1 μπορεί να εμφυτευτεί στο L'_1 , ενώ G_i^2 και G_i μπορούν να εμφυτευτούν στο R'_1 , και τέλος, η $s(G_i)$ με τα ακραία της πόδια και $t(G_i)$ με τα ακραία της πόδια μπορούν να εμφυτευτούν στα B_1 και H_1 , αντίστοιχα.

Από τις υποθέσεις του λήμματος, έχουμε ότι $|G_i^1| + b_l \leq |L|$. Έστω $d_{G_i^1} = |G_i^1| - |L'|$, δηλαδή $d_{G_i^1}$ είναι ο αριθμός των σημείων που πρέπει να προστεθούν στο L' ώστε να μπορούμε να εμφυτεύσουμε το G_i^1 . Άρα, $d_{G_i^1} \leq |L| - b_l - |L'| = |L'| + b_l + h_l - b_l - |L'| = h_l$, ή $d_{G_i^1} \leq h_l$. Ορίζουμε $L'_1 = L' \cup \{d_{G_i^1} \text{ χαμηλότερα σημεία του } H \cap L\}$ (βλ. Εικόνα 2.6.α,β). Αυτή η κατασκευή είναι δυνατή λόγω της ανισότητας $d_{G_i^1} \leq h_l$. Ορίζουμε επίσης $R'_1 = R' \setminus \{d_{G_i^1} \text{ ψηλότερα σημεία του } R'\}$, $H_1 = H \setminus \{d_{G_i^1} \text{ χαμηλότερα σημεία του } H \cap L\} \cup \{d_{G_i^1} \text{ ψηλότερα σημεία του } R'\}$ και τέλος $B_1 = B$.

Πρώτα από όλα, απεικονίζουμε την $s(G_i)$ στο ψηλότερο σημείο του B_1 και τα ακραία πόδια συνδεδεμένα με την $s(G_i)$ στα υπόλοιπα σημεία του B_1 (βλ. Εικόνα 2.6.β,γ). Αναλόγως, απεικονίζουμε την $t(G_i)$ στο χαμηλότερο σημείο του H_1 και τα ακραία της πόδια στα υπόλοιπα σημεία του H_1 . Παρατηρούμε ότι όλες οι ακμές που συνδέουν τις $s(G_i)$ και $t(G_i)$ με τα ακραία τους πόδια αποτελούν ανερχόμενες ακμές. Απεικονίζουμε το G_i^1 στα σημεία του L'_1 χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3, επειδή το L'_1 είναι ένα μονομερές σύνολο σημείων. Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με το Λήμμα 3 η πηγή της ράχης του G_i^1 και τα ακραία της πόδια είναι εμφυτευμένα στα χαμηλότερα σημεία του L'_1 . Τα χαμηλότερα σημεία του L'_1 είναι πιο πάνω



Εικόνα 2.6: Η κατασκευή του Λήμματος 5. Περίπτωση $|A'| < |G_i^1|$. (α) Δίνεται ο διαχωρισμός A', B', H, L, R' . (β) Ο τροποποιημένος διαχωρισμός A_1', B_1', H_1, L_1 . (γ) Η τελική εμφύτευση του G .

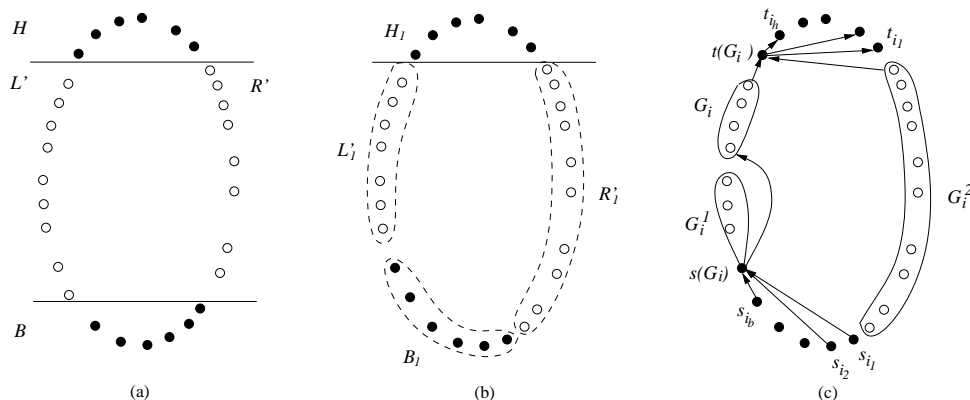
από το ψηλότερο σημείο του B_1 . Άρα η $s(G_i)$ μπορεί να συνδεθεί με την πηγή της ράχης του G_i^1 με ανερχόμενη ακμή χωρίς να δημιουργούνται τομές. Τελικά παρατηρούμε ότι το G_i^1 , η $s(G_i)$ και τα ακραία πόδια της $s(G_i)$ είναι απεικονισμένα στα διαδοχικά σημεία του S .

Αναλόγως, απεικονίζουμε το G_i^2 στα $|G_i^2|$ ψηλότερα σημεία του R_1' . Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3 επειδή το R_1' είναι ένα μονομερές σύνολο σημείων. Σύμφωνα με το Λήμμα 3 η καταβόθρα του G_i^2 και τα ακραία της πόδια είναι απεικονισμένα στα ψηλότερα σημεία του R_1' . Τα ψηλότερα σημεία του R_1' είναι πιο κάτω από το χαμηλότερο σημείο του H_1 . Άρα η καταβόθρα της ράχης του G_i^2 μπορεί να συνδεθεί με την $t(G_i)$ με μια ανερχόμενη ακμή χωρίς να δημιουργούνται τομές. Παρατηρούμε επίσης ότι το G_i^2 , η $t(G_i)$ και τα ακραία πόδια της $t(G_i)$ είναι απεικονισμένα στα διαδοχικά σημεία του S .

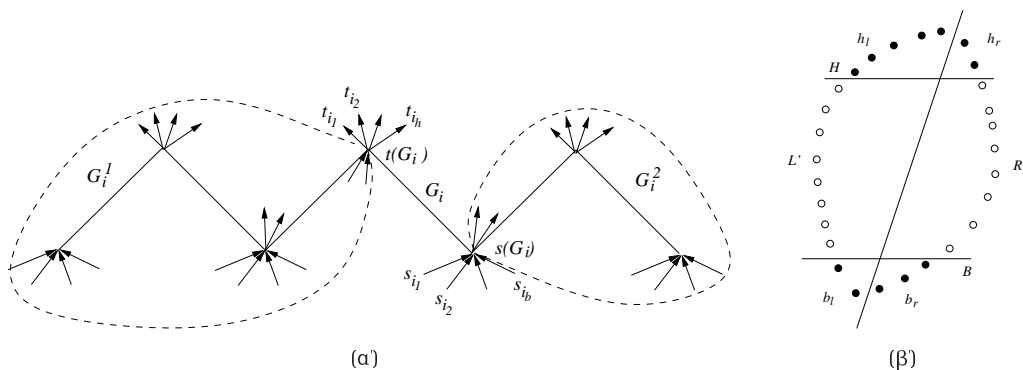
Απομένει να εμφυτεύσουμε το G_i . Από την κατασκευή, η μοναδική πηγή της ράχης του G_i είναι η $s(G_i)$, που έχει απεικονιστεί σε ένα σημείο που είναι χαμηλότερα από όλα τα υπόλοιπα, ακόμα ελεύθερα σημεία, ενώ η μοναδική καταβόθρα της ράχης του G_i είναι η $t(G_i)$, που έχει απεικονιστεί σε σημείο ψηλότερο από όλα τα υπόλοιπα, ακόμα ελεύθερα σημεία. Παρατηρούμε επίσης ότι τα ελεύθερα σημεία αποτελούνται από τα διαδοχικά σημεία του R_1' . Άρα, ακολουθώντας το Λήμμα 4, μπορούμε να εμφυτεύσουμε ανερχόμενα το G_i στα ελεύθερα σημεία του S .

Περίπτωση 3: $|L'| \geq |G_i^1|$ και $|R'| < |G_i^2|$, δηλαδή το R' δεν είναι αρκετά μεγάλο για να χωρέσει το G_i^2 . Η περίπτωση αυτή είναι συμμετρική στην Περίπτωση 2. Θα κατασκευάσουμε πάλι έναν καινούργιο διαχωρισμό L_1', R_1', H_1 και B_1 του S έτσι ώστε το G_i^2 να μπορεί να εμφυτευτεί στα σημεία του R_1' , τα G_i^1 και G_i να μπορούν να εμφυτευτούν στο L_1' , ενώ η $s(G_i)$ με τα ακραία της πόδια και η $t(G_i)$ με τα ακραία της πόδια να εμφυτεύονται στα B_1 και H_1 , αντίστοιχα. Σύμφωνα με την υπόθεση του λήμματος έχουμε ότι $|R| \geq |G_i^2| + h_r$. Έστω $d_{G_i^2} = |G_i^2| - |R'|$, δηλαδή $d_{G_i^2}$ είναι ο αριθμός των σημείων που χρειαζόμαστε να προσθέσουμε στο R' για να μπορούμε να εμφυτεύσουμε σε αυτό το γράφημα G_i^2 . Άρα, $d_{G_i^2} \leq |R| - h_r - |R'| = |R'| + h_r + b_r - h_r - |R'| = b_r$. Δηλαδή έχουμε ότι $d_{G_i^2} \leq b_r$.

Θέτουμε $R_1' = R' \cup \{d_{G_i^2}$ τα ψηλότερα σημεία του $B \cap R\}$ (βλ. Εικόνα 2.7.α,β). Η κατασκευή αυτή είναι δυνατή επειδή ισχύει η ανισότητα $d_{G_i^2} \leq b_r$. Θέτουμε επίσης $L_1' = L' \setminus \{d_{G_i^2}$ χαμηλότερα σημεία του $L'\}$, $B_1 = B \setminus \{d_{G_i^2}$ ψηλότερα σημεία του $B \cap R\} \cup \{d_{G_i^2}$ χαμηλότερα σημεία του $L'\}$ και τελικά $H_1 = H$. Παρόμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις, εμφυτεύουμε



Εικόνα 2.7: Η κατασκευή του Λήμματος 5. Περίπτωση $|L'| \geq |G_i^1|$ και $|R'| < |G_i^2|$.
 (α) Ο αρχικός διαχωρισμός L', R', H, B . (β) Ο τροποποιημένος διαχωρισμός L'_1, R'_1, H_1, B_1 . (γ) Η τελική εμφύτευση του G .



Εικόνα 2.8: (α) Διαχωρισμός του G που χρησιμοποιήθηκε στο Λήμμα 6 (β) Διαχωρισμός του S που χρησιμοποιήθηκε στο Λήμμα 6.

το G_i^2 στο R'_1 , το G_i^1 και το G_i στο L'_1 , ενώ την $s(G_i)$ με τα ακραία της πόδια και την $t(G_i)$ με τα ακραία της πόδια στα B_1 και H_1 αντίστοιχα (βλ. Εικόνες 2.7.b,c).

□

Το επόμενο λήμμα είναι ανάλογο του Λήμματος 5 για την περίπτωση όταν το G_i είναι ένα φθίνον δέντρο-κάμπια. Οι ανισότητες του λήμματος είναι ασθενέστερες από αυτές του Λήμματος 5, και η απόδειξή του λήμματος είναι ταυτόσημη αυτής του Λήμματος 5.

Λήμμα 6. Έστω ότι G είναι ένα δέντρο-κάμπια με n κορυφές και $\{G_1, G_2, \dots\}$ είναι ο διαχωρισμός του σε μονότονα δέντρα-κάμπιας, όπως περιγράφηκε στην αρχή της ενότητας. Έστω ότι $S = L \cup R$ είναι ένα κυρτό σύνολο n σημείων. Έστω ότι $v_{|L|}$ είναι η $|L|$ -στη κορυφή στην απαρίθμηση του G που περιγράφεται από του κανόνες $\mathcal{R}1 - \mathcal{R}3$ και έστω G_i είναι ένα μονότονο φθίνον δέντρο-κάμπια έτσι ώστε είτε $v_{|L|} \in G_i$, είτε $v_{|L|}$ είναι ένα από τα ακραία πόδια της $s(G_i)$, είτε $v_{|L|}$ είναι ένα από τα ακραία πόδια της $t(G_i)$. Συμβολίζουμε με i_b (αντ. i_h) το πλήθος των ακραίων ποδιών της $s(G_i)$ (αντ. $t(G_i)$) και με B (αντ. H) το σύνολο των i_b χαμηλότερων (αντ. i_h ψηλότερων) σημείων του S . Έστω επίσης $h_l = |H \cap L|$ και $b_r = |B \cap R|$. Αν ισχύει ότι $|L| \geq |G_i^1| + h_l - 1$, $|R| \geq |G_i^2| + b_r - 1$, τότε υπάρχει μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G στο σύνολο σημείων S .

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας.

Θεώρημα 3. Έστω ότι $G = (V, E)$ είναι ένα δέντρο-κάμπια. Το γράφημα G επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση σε κάθε κυρτό σύνολο $|V|$ σημείων S .

Απόδειξη:

Έστω G είναι ένα δέντρο-κάμπια και έστω $\{G_1, G_2, \dots\}$ είναι ο διαχωρισμός του G σε μονότονα δέντρα-κάμπιας, όπως περιγράφηκε στην αρχή της ενότητας. Θυμίζουμε ότι τα $G_1 \cup G_2 \cup \dots$ περιέχουν όλες τις κορυφές του G εκτός από τα ακραία πόδια του G . Έστω $S = L \cup R$ είναι ένα κυρτό σύνολο $|V|$ σημείων. Θεωρούμε την κορυφή $v_{|L|}$ του G στην απαρίθμηση του G που δίνεται από τους κανόνες $\mathcal{R}1 - \mathcal{R}3$. Παρατηρούμε ότι η κορυφή αυτή είτε περιέχεται στο G_i , για κάποιο i , είτε είναι ένα ακραίο πόδι. Θα προχωρήσουμε θεωρώντας τέσσερις περιπτώσεις ανάλογα με το αν $v_{|L|} \in G_i$, για κάποιο i , και G_i είναι ένα φθίνον ή αύξον δέντρο-κάμπια ή $v_{|L|}$ είναι ένα ακραίο πόδι του G και γειτονεύει είτε σε μια πηγή είτε σε μια καταβόθρα της ράχης του G . Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις τελειοποιούμε τον διαχωρισμό του συνόλου $S = L \cup R$ για να τον κάνουμε κατάλληλο για την συγκεκριμένη θέση της κορυφής $v_{|L|}$.

Περίπτωση 1: $v_{|L|}$ είναι κορυφή ενός αύξοντα δέντρου-κάμπιας G_i . (βλ. Εικόνα 2.4(α')).

Υποθέτουμε ότι η $s(G_i)$ έχει i_b ακραία πόδια, ενώ η $t(G_i)$ έχει i_h ακραία πόδια. Έστω, όπως στο Λήμμα 5, το H είναι το σύνολο των $i_h + 1$ ψηλότερων σημείων του S και έστω το B είναι το σύνολο που περιέχει τα $i_b + 1$ χαμηλότερα σημεία του S . Έστω επίσης $h_r = |H \cap R|$ και $b_l = |B \cap L|$. Θυμίζουμε ότι τα G_i^1 και G_i^2 είναι τα υπογραφήματα του G που παράγονται από το G_i . Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 5 πρέπει να δείξουμε ότι: $|L| \geq |G_i^1| + b_l$, $|R| \geq |G_i^2| + h_r$.

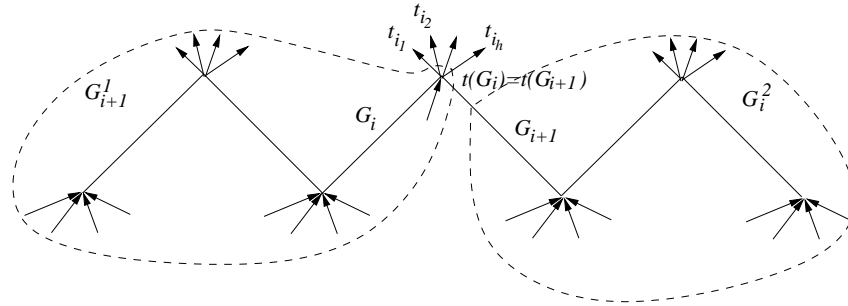
Έστω $|H \cap L| = h_l$ και $|B \cap R| = b_r$. Παρατηρούμε ότι τα G_i^1, G_i και G_i^2 είναι ξένα μεταξύ τους και κανένα από αυτά δεν περιέχει τα ακραία πόδια των $s(G_i)$ και $t(G_i)$. Επίσης, επειδή $v_{|L|} \in G_i$ ισχύει ότι $|G_i^1| + i_b + |G_i| \geq |L|$. Τότε $|R| = |G| - |L| \geq |G| - |G_i^1| - i_b - |G_i| = i_h + |G_i^2| = h_l + h_r + |G_i^2| \geq |G_i^2| + h_r$. Άρα ισχύει η ανισότητα $|R| \geq |G_i^2| + h_r$. Επειδή $v_{|L|} \in G_i$ ισχύει ότι $|G_i^1| + i_b < |L|$, και επειδή $i_b = b_l + b_r - 1$, ισχύει η ανισότητα $|G_i^1| + b_l \leq |L|$. Άρα, από το Λήμμα 5 έπεται το ζητούμενο.

Περίπτωση 2: $v_{|L|}$ είναι κορυφή ενός φθίνοντα δέντρου-κάμπιας G_i . (βλ. Εικόνα 2.8(α')).

Έστω ότι η $s(G_i)$ έχει i_b ακραία πόδια, ενώ η $t(G_i)$ έχει i_h ακραία πόδια. Έστω, όπως στο Λήμμα 6, το H είναι το σύνολο σημείων που περιέχει $i_h + 1$ ψηλότερα σημεία του S και B είναι το σύνολο σημείων που περιέχει $i_b + 1$ χαμηλότερα σημεία του S . Έστω επίσης $h_l = |H \cap L|$ και $b_r = |B \cap R|$. Θυμίζουμε ότι G_i^1 και G_i^2 είναι τα υπογραφήματα του G , που παράγονται από το G_i . Για να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 6 πρέπει να αποδείξουμε ότι: $|L| \geq |G_i^1| + h_l - 1$, $|R| \geq |G_i^2| + b_r - 1$. Επειδή $v_{|L|} \in G_i$, έχουμε ότι $|L| > |G_i^1| + i_h \geq |G_i^1| + h_l - 1$. Παρατηρούμε ότι $|G_i^2| = |G| - |G_i^1| - i_h - i_b - |G_i|$. Επίσης ξέρουμε ότι, $|G_i^1| + i_h + |G_i| \geq |L|$, επειδή $v_{|L|}$ είναι μια κορυφή του G_i . Από την προηγούμενη ισότητα και την τελευταία ανισότητα έχουμε ότι $|G_i^2| \leq |G| - |L| - i_b = |R| - i_b$. Άρα, $|R| \geq |G_i^2| + i_b \geq |G_i^2| + b_r - 1$, επειδή $i_b + 1 = b_l + b_r$. Άρα, από το Λήμμα 6, έχουμε το ζητούμενο.

Περίπτωση 3: $v_{|L|}$ είναι ένα ακραίο πόδι και είναι μια καταβόθρα.

Έστω ότι τα γραφήματα G_i και G_{i+1} είναι τέτοια ώστε $t(G_i) = t(G_{i+1})$ και $v_{|L|}$ είναι το ακραίο πόδι της $t(G_i)$. Παρατηρούμε ότι G_i είναι ένα αύξον, ενώ G_{i+1} είναι ένα φθίνον δέντρο-κάμπια. Υποθέτουμε ότι $t(G_i)$ ($= t(G_{i+1})$) έχει i_h ακραία πόδια. Έστω ότι H είναι το σύνολο των $i_h + 1$ ψηλότερων σημείων του S και έστω $|H \cup L| = h_l$, $|H \cup R| = h_r$. Παρατηρούμε ότι $h_l + h_r = i_h + 1$. Αποδεικνύουμε πρώτα την ακόλουθη πρόταση.



Εικόνα 2.9: Η κατασκευή της Πρότασης 1

Ιδιότητα 1. Έστω ότι G_i^1, G_i^2 και G_{i+1}^1, G_{i+1}^2 είναι τα υπογραφήματα του G που παράγονται από τα G_i και G_{i+1} , αντίστοιχα. Το ποθίυ μια από τις ακόλουθες ανισότητες μπορεί να ισχύει:

$$|L| < |G_{i+1}^1| + h_l - 1 \quad (2.1)$$

$$|R| < |G_i^2| + h_r \quad (2.2)$$

Απόδειξη της Πρότασης 1. Βλ. Εικόνα 2.9 για την προβολή της απόδειξης. Εις άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι ισχύουν και οι δύο ανισότητες. Τότε $|L| + |R| < |G_{i+1}^1| + h_l + h_r - 1 + |G_i^2| = |G_{i+1}^1| + |G_i^2| + i_h = N$. Άρα $|L| + |R| < N$, άτοπο. \square

Τώρα θεωρούμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το ποιά από τις ανισότητες (2.1) ή (2.2) δεν ισχύει.

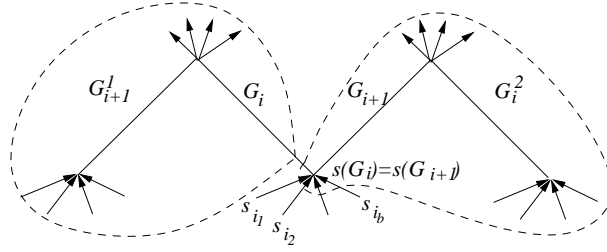
3.a Δεν ισχύει η Ανισότητα (2.1). Άρα $|L| \geq |G_{i+1}^1| + h_l - 1$. Θεωρούμε το φθίνον δέντρο-κάμπια G_{i+1} και τα υπογραφήματα G_{i+1}^1 και G_{i+1}^2 του G που παράγονται από το G_{i+1} (βλ. Εικόνα 2.8(α)). Έστω ότι η $s(G_{i+1})$ έχει i_b ακραία πόδια, και έστω B είναι τα $i_b + 1$ χαμηλότερα σημεία του S . Θέτουμε $b_r = |B \cap R|$ και $b_l = |B \cap L|$.

Θα δείξουμε ότι $|R| \geq |G_i^2| + b_r - 1$. Παρατηρούμε ότι $|G_{i+1}^2| = |G| - |G_{i+1}^1| - i_h - i_b - |G_{i+1}|$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $|G_{i+1}^1| + i_h + |G_{i+1}| \geq |L|$, επειδή $v_{|L|}$ είναι ένα ακραίο πόδι της $t(G_{i+1})$. Από την προηγούμενη ισότητα και την τελευταία ανισότητα έχουμε $|G_{i+1}^2| \leq |G| - |L| - i_b = |R| - i_b$. Άρα $|R| \geq |G_i^2| + i_b \geq |G_i^2| + b_r - 1$, επειδή $i_b + 1 = b_l + l_r$. Παρατηρούμε ότι το G_{i+1} είναι ένα φθίνον δέντρο-κάμπια, η $v_{|L|}$ είναι το ακραίο πόδι της $t(G_{i+1})$ και όλες οι συνθήκες του Λήμματος 6 ισχύουν, άρα το ζητούμενο έπεται.

3.b Δεν ισχύει η Ανισότητα (2.2). Άρα $|R| \geq |G_i^2| + h_r$. Θεωρούμε το αύξοντα δέντρο-κάμπια G_i και τα υπογραφήματα G_i^1 και G_i^2 του G που παράγονται από το G_i (βλ. Εικόνα 2.4(α')). Υποθέτουμε ότι η $s(G_i)$ έχει i_b ακραία πόδια και έστω B είναι το σύνολο των $i_b + 1$ χαμηλότερων σημείων του S . Θέτουμε $b_l = |B \cap L|$ και $b_r = |B \cap R|$. Παρατηρούμε ότι $|L| \geq |G_i^1| + i_b \geq |G_i^1| + b_l$, επειδή $i_b + 1 = b_l + b_r$. Άρα γνωρίζοντας ότι το G_i είναι ένα αύξον δέντρο-κάμπια, η κορυφή $v_{|L|}$ είναι ένα ακραίο πόδι της $t(G_i)$ και οι δύο ανισότητες που απαιτούνται από τις συνθήκες του Λήμματος 5 ισχύουν, έχουμε το ζητούμενο.

Περίπτωση 4: $v_{|L|}$ είναι ακραίο πόδι που είναι μια πηγή.

Έστω G_i και G_{i+1} είναι τέτοια ώστε $s(G_i) = s(G_{i+1})$ και $v_{|L|}$ είναι ένα ακραίο πόδι της $s(G_i)$. Παρατηρούμε ότι το G_i είναι ένα φθίνον δέντρο-κάμπια, ενώ το G_{i+1} είναι ένα αύξον δέντρο-κάμπια. Υποθέτουμε ότι η $s(G_i)$ έχει i_b ακραία πόδια. Έστω B είναι το σύνολο των $i_b + 1$



Εικόνα 2.10: Η κατασκευή της Πρότασης 2

χαμηλότερων σημείων του S και έστω $|B \cup L| = b_l$, $|B \cup R| = b_r$. Παρατηρούμε επίσης ότι $b_l + b_r = i_b + 1$.

Θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Ιδιότητα 2. Έστω G_i^1 , G_i^2 και G_{i+1}^1 , G_{i+1}^2 είναι τα υπογραφήματα του G που παράγονται από τα G_i και G_{i+1} αντίστοιχα (βλ. Εικόνα 2.10). Το πολύ μία από τις ακόλουθες ανισότητες μπορεί να ισχύει:

$$|L| < |G_{i+1}^1| + b_l \quad (2.3)$$

$$|R| < |G_i^2| + b_r - 1 \quad (2.4)$$

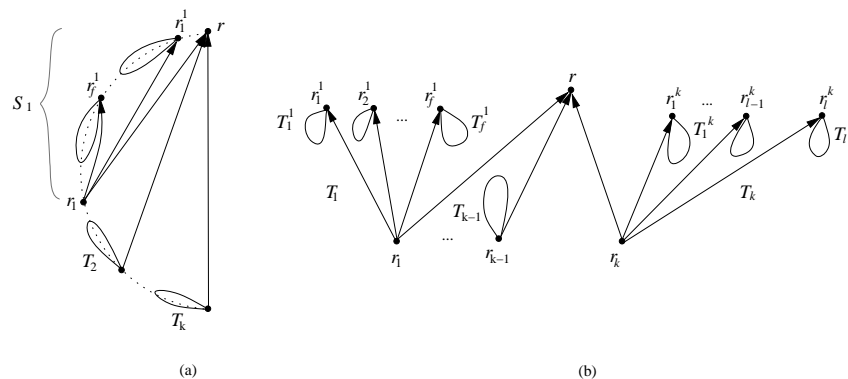
Απόδειξη της Πρότασης 2. Είς άτοπον απαγωγή υποθέτουμε ότι ισχύουν και οι δύο ανισότητες. Τότε $|L| + |R| < |G_{i+1}^1| + b_l + b_r - 1 + |G_i^2| = N$, άτοπο. \square

Στην συνέχεια ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις με βάση το ποιά από τις Ανισότητες (2.3) ή (2.4) δεν ισχύει.

4.a Η ανισότητα (2.3) δεν ισχύει. Άρα $|L| \geq |G_{i+1}^1| + b_l$. Θεωρούμε το αύξον δέντρο-κάμπια G_{i+1} και τα υπογραφήματα G_{i+1}^1 και G_{i+1}^2 του G που παράγονται από το G_{i+1} (βλ. Εικόνα 2.4(α)).

Υποθέτουμε ότι η $t(G_{i+1})$ έχει i_h οριζακά πόδια. Ορίζουμε το H να είναι τα i_h ψηλότερα σημεία του S . Θέτουμε $L \cup H = h_l$ και $R \cup H = h_r$. Για να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 5 πρέπει να αποδείξουμε ότι $|R| \geq |G_i^2| + h_r$. Παρατηρούμε ότι $|G_{i+1}^2| = |G| - |G_{i+1}^1| - i_b - |G_{i+1}| - i_h$ και ότι $|G_{i+1}^1| + i_b \geq |L|$, επειδή η $v_{|L|}$ είναι το ακραίο πόδι της $s(G_{i+1})$. Άρα παίρνουμε $|G_{i+1}^2| \leq |G| - |L| - i_b - |G_{i+1}| - i_h = |R| - i_b - |G_{i+1}| - i_h$. Συνεπώς, $|G_{i+1}^2| + h_r \leq |R| - i_b - |G_{i+1}| - i_h + h_r = |R| - i_b - |G_{i+1}| - h_l - h_r + 1 + h_r = |R| - i_b - |G_{i+1}| - h_l - 1$ και επειδή $i_b \geq 1$ έχουμε ότι $|G_{i+1}^2| + h_r \leq |R|$. Άρα από το Λήμμα 5, έπεται το αποτέλεσμα.

4.6 Δεν ισχύει η Ανισότητα (2.4). Άρα $|R| \geq |G_i^2| + b_r - 1$. Θεωρούμε το φθίνον δέντρο-κάμπια G_i και τα υπογραφήματα G_i^1 και G_i^2 του G που παράγονται από το G_i (βλ. Εικόνα 2.8(α)). Υποθέτουμε ότι η $t(G_i)$ έχει i_h ακραία πόδια. Θεωρούμε τα i_h ψηλότερα σημεία του S και τα συμβολίζουμε με H . Θέτουμε $L \cup H = h_l$ και $R \cup H = h_r$. Για να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 6 πρέπει να δείξουμε ότι $|L| \geq |G_i^1| + h_l - 1$. Αλλά αυτό είναι τετριμμένο, επειδή η $v_{|L|}$ είναι το ακραίο πόδι της $t(G_i)$ και άρα $|L| > |G_i^1| + i_h$. Άρα, από το Λήμμα 6, έπεται το αποτέλεσμα. \square



Εικόνα 2.11: Η κατασκευή του Λήμματος 7 και του Λήμματος 9

Στην ενότητα αυτή αποδείξαμε ότι κάθε κατευθυνόμενο δέντρο-κάμπια G έχει μια ανερχόμενη εμφύτευση σε κάθε κυρτό σύνολο σημείων S . Ο αλγόριθμος βασίζεται στον ειδικό διαχωρισμό του G σε τρία ξένα μεταξύ τους μέρη και η εμφύτευσή τους σε κατάλληλα μέρη του S . Η τεχνική αυτή είναι παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε από τους Binucci *et al.* [12] για την περίπτωση των προσανατολισμένων μονοπατιών, αλλά η δική μας απόδειξη είναι τεχνικά πολύ πιο δύσκολη λόγω της παρουσίας των ποδιών.

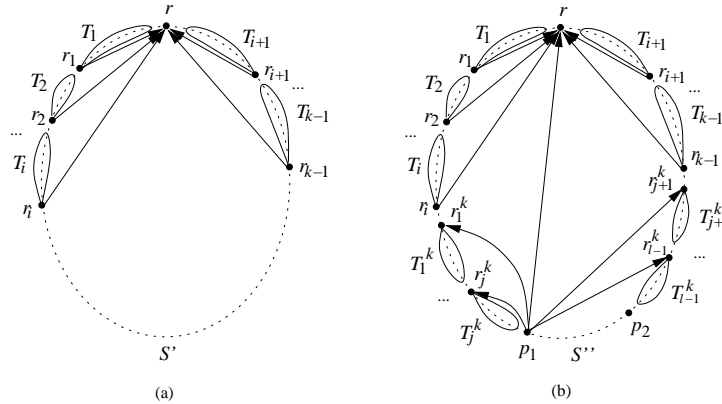
2.3.2 Switch-trees

Στην ενότητα αυτή εμπλουτίζουμε τα θετικά αποτελέσματα [12] που αφορούν την εμφυτευσιμότητα των κατευθυνόμενων δέντρων σε κυρτά σύνολα σημείων. Αποδεικνύουμε ότι κάθε switch-tree επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε οποιοδήποτε κυρτό σύνολο σημείων.

Σε όλη την ενότητα ονομάζουμε *ελεύθερα* εκείνα τα σημεία του συνόλου στα οποία δεν έχουν ακόμα αντιστοιχηθεί οι κορυφές του γραφήματος. Στο ακόλουθο λήμμα ασχολούμαστε με την απλή περίπτωση ενός μονομερούς συνόλου σημείων. Το λήμμα αυτό είναι επίσης συνέπεια ενός αποτελέσματος που παρουσιάστηκε από Heath *et al.* [59] (Theorem 2.1).

Λήμμα 7. Έστω T είναι ένα switch-tree, r είναι μια καταβόθρα του T , S είναι ένα μονομερές σύνολο σημείων έτσι ώστε $|S| = |T|$, και p είναι το ψηλότερο σημείο του S . Τότε, το T επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση στο S έτσι ώστε η κορυφή r είναι απεικονισμένη στο σημείο p .

Απόδειξη: Έστω T_1, \dots, T_k είναι τα υπόδεντρα του T που συνδέονται με την κορυφή r μέσω ακμών και έστω r_1, \dots, r_k είναι οι κορυφές των T_1, \dots, T_k , αντίστοιχα, που είναι γειτονικές στην r (βλ. Εικόνα 2.11.6). Παρατηρούμε ότι, επειδή το T είναι ένα switch-tree και η r είναι μια καταβόθρα, οι κορυφές r_1, \dots, r_k είναι πηγές του T . Εμφυτεύουμε το T ως εξής: απεικονίζουμε την r στο σημείο p , αντιστοιχούμε το T_1 στα $|T_1|$ ψηλότερα σημεία του S , έτσι ώστε η r_1 να απεικονίζεται στο χαμηλότερο από τα σημεία αυτά. Αυτό μπορεί να γίνει τετριμμένα αν το T_1 αποτελείται από μια μοναδική κορυφή, δηλαδή από την r_1 . Υποθέτουμε τώρα ότι το T_1 περιέχει περισσότερες από μία κορυφές. Συμβολίζουμε με S_1 τα $|T_1|$ ψηλότερα σημεία του S . Έστω, T_1^1, \dots, T_1^f είναι τα υπόδεντρα του T_1 , που συνδέονται με την r_1 με ακμές, και έστω r_1^1, \dots, r_1^f είναι οι κορυφές των T_1^1, \dots, T_1^f , αντίστοιχα, γειτονικές με την r_1 . Επειδή r_1 είναι μια πηγή, οι κορυφές r_1^1, \dots, r_1^f είναι όλες καταβόθρες. Χρησιμοποιώντας το λήμμα αναδρομικά, εμφυτεύουμε το T_1^1 στα $|T_1^1|$ συνεχόμενα ψηλότερα σημεία του S_1 έτσι ώστε η r_1^1 να είναι απεικονισμένη στο ψηλότερό του σημείο (Εικόνα 2.11.α). Παρόμοια, εμφυτεύουμε τα δέντρα T_2^1, \dots, T_1^f στα υπόλοιπα ελεύθερα σημεία του S_1 . Τελικά, απεικονίζουμε την r_1 στο τελευταίο ελεύθερο σημείο του συνόλου S_1 ,



Εικόνα 2.12: Η κατασκευή του Λήμματος 9

δηλαδή στο χαμηλότερό του σημείο. Επειδή όλες οι κορυφές r_1^1, \dots, r_f^1 έχουν απεικονιστεί στα σημεία που είναι πάνω από την r_1 , οι ακμές $(r_1, r_1^1), \dots, (r_1, r_f^1)$ είναι ανερχόμενες. Επειδή καθένα από τα T_1^1, \dots, T_f^1 έχει απεικονιστεί στα συνεχόμενα σημεία του S , συνεπάγεται ότι δεν υπάρχουν τομές μεταξύ των ακμών και άρα έχουμε μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του T_1 σε συνεχόμενα σημεία του S .

Με παρόμοιο τρόπο, απεικονίζουμε το T_2 στα $|T_2|$ ψηλότερα συνεχόμενα ελεύθερα σημεία του S , έτσι ώστε η r_2 να απεικονίζεται στο χαμηλότερο από αυτά. Συνεχίζουμε την εμφύτευση των υπολοίπων υπόδεντρων με τον ίδιο τρόπο στα υπόλοιπα ελεύθερα σημεία του S . Παρατηρούμε ότι για κάθε $i = 1, \dots, k$, η ακμή (r_i, r) δεν τέμνει κανένα από τα κυρτά περιβλήματα $H(P_j)$, όπου P_j είναι το σύνολο σημείων, στο οποίο έχουμε εμφυτεύσει το δέντρο T_j . Άρα για κάθε $i = 1, \dots, k$, η ακμή (r_i, r) δεν τέμνει καμία άλλη ακμή της απεικόνισης. Επειδή το p είναι το ψηλότερο σημείο του S και η r έχει απεικονιστεί στο p , συμπεραίνουμε ότι οι ακμές (r_i, r) , $i = 1, \dots, k$ είναι ανερχόμενες. Επειδή η εμφύτευση του κάθε ένα από τα T_1, \dots, T_k είναι ανερχόμενη και επίπεδη, συμπεραίνουμε ότι η τελική εμφύτευση του T είναι επίσης ανερχόμενη και επίπεδη. \square

Το ακόλουθο λήμμα είναι συμμετρικό στο Λήμμα 7 και αποδεικνύεται με ακριβώς συμμετρική διαδικασία.

Λήμμα 8. Έστω T είναι ένα switch-tree, r είναι μια πηγή του T , S είναι ένα μονομερές σύνολο σημείων έτσι ώστε $|S| = |T|$, και p είναι το χαμηλότερο σημείο του S . Τότε το T επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση στο S έτσι ώστε η κορυφή r να είναι απεικονισμένη στο σημείο p . \square

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας.

Θεώρημα 4. Έστω T είναι ένα switch-tree και S είναι ένα μονομερές σύνολο σημείων έτσι ώστε $|S| = |T|$. Τότε το T επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση στο S .

Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα, το οποίο επεκτείνει το Λήμμα 7 από μονομερές σε διμερές κυρτό σύνολο σημείων.

Λήμμα 9. Έστω T είναι ένα switch-tree, r είναι μια καταβόθρα του T , S είναι ένα κυρτό σύνολο σημείων, έτσι ώστε $|S| = |T|$. Τότε το T επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση στο S έτσι ώστε η κορυφή r να βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο του S .

Απόδειξη: Έστω T_1, \dots, T_k είναι τα υπόδεντρα του T που συνδέονται με την r με ακμές (Εικόνα 2.11.β) και έστω r_1, \dots, r_k είναι οι κορυφές των T_1, \dots, T_k , αντίστοιχα, που είναι γειτονικές με

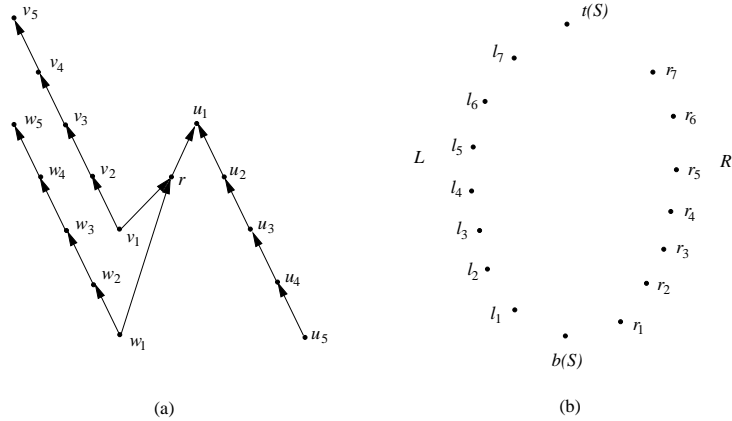
την r . Παρατηρούμε ότι, επειδή το T είναι ένα switch-tree και η r είναι μια καταθόθρα, οι κορυφές r_1, \dots, r_k είναι οι πηγές του T .

Εμφυτεύουμε το T στο S ως εξής. Ξεκινάμε με την εμφύτευση των δέντρων T_1, T_2, \dots στην αριστερή μεριά του συνόλου σημείων S , ξεκινώντας από τα ψηλότερα σημεία και συνεχίζουμε όσο υπάρχουν αρκετά ελεύθερα σημεία. Η εμφύτευση αυτή γίνεται σύμφωνα με το Λήμμα 8 (βλ. Εικόνα 2.12.α). Έστω ότι το T_i είναι το τελευταίο δέντρο έτσι ώστε τα σημεία στην αριστερή μεριά να είναι αρκετά για να το εμφυτεύσουμε. Συνεχίζουμε με την εμφύτευση των T_{i+1}, \dots, T_{k-1} στην δεξιά μεριά του συνόλου σημείων S ακολουθώντας και πάλι το Λήμμα 8. Παρατηρούμε ότι τα ελεύθερα σημεία που απομένουν είναι συνεχόμενα στο S , συμβολίζουμε τα σημεία αυτά με S' . Για να ολοκληρώσουμε την εμφύτευση απεικονίζουμε τις κορυφές του T_k στα σημεία του S' . Έστω T_1^k, \dots, T_l^k είναι τα υπόδεντρα του T_k , που συνδέονται μέσω ακμής με την κορυφή r_k . Έστω επίσης r_1^k, \dots, r_l^k είναι οι κορυφές των T_1^k, \dots, T_l^k , αντίστοιχα, που είναι γειτονικές με την r_k (Εικόνα 2.11.β). Παρατηρούμε ότι οι κορυφές r_1^k, \dots, r_l^k είναι καταθόθρες του T . Ξεκινάμε με την εμφύτευση των T_1^k, T_2^k, \dots στο αριστερό μέρος του S' , ξεκινώντας από τα ψηλότερα σημεία του S' , όσο υπάρχουν αρκετά σημεία για να υποδεχτούν ολόκληρα τα υπόδεντρα. Η εμφύτευση γίνεται σύμφωνα με το Λήμμα 7. Έστω το T_j^k είναι το τελευταίο δέντρο που εμφυτεύσαμε (Εικόνα 2.12.β). Συνεχίζουμε στην δεξιά μεριά του S' με τα δέντρα $T_{j+1}^k, \dots, T_{l-1}^k$, ακολουθώντας και πάλι το Λήμμα 7. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν ακόμα ακριβώς $|T_l^k| + 1$ ελεύθερα σημεία επειδή δεν έχουμε εμφυτεύσει ακόμα το T_l^k και την κορυφή r_k του T_k . Συμβολίζουμε με S'' το σύνολο των ελεύθερων σημείων και παρατηρούμε ότι το σύνολο S'' αποτελείται από διαδοχικά σημεία του S . Αν το σύνολο S'' είναι μονομερές μπορούμε να κατασκευάσουμε την απομένουσα εμφύτευση χρησιμοποιώντας ξανά το Λήμμα 7. Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο S'' είναι διμερές και έστω p_1 και p_2 είναι τα ψηλότερα σημεία του S'' στην αριστερή και στην δεξιά μεριά, αντίστοιχα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $y(p_1) < y(p_2)$. Αντιστοιχούμε την r_k στο p_1 . Χρησιμοποιώντας το λήμμα αναδρομικά, μπορούμε να εμφυτεύσουμε το T_l^k στο σύνολο $S'' \setminus \{p_1\}$ έτσι ώστε η r_l^k να βρίσκεται στο σημείο p_2 . Η απόδειξη ολοκληρώνεται παρατηρώντας ότι όλες οι ακμές που συνδέουν την κορυφή r_k με τις κορυφές r_1^k, \dots, r_l^k και τις r_1, \dots, r_k με την r είναι ανερχόμενες και δεν τέμνουν η μία την άλλη. \square

Το Θεώρημα 4 έπεται αμέσως αν επιλέξουμε οποιαδήποτε καταθόθρα του T ως r και εφαρμόσουμε το Λήμμα 9.

2.3.3 K -switch trees

Οι Binucci et al. [12] (βλ. επίσης Θεώρημα 1) παρουσίασαν μια κλάση των δέντρων και ένα αντίστοιχο κυρτό σύνολο σημείων, έτσι ώστε κάθε δέντρο αυτής της κλάσης δεν επιδέχεται καμία ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο αντίστοιχο σύνολο σημείων. Στην παρούσα ενότητα επεκτείνουμε το αποτέλεσμα αυτό παρουσιάζοντας μια μεγαλύτερη κλάση δέντρων, τα οποία δεν επιδέχονται καμία ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε κάποιο κυρτό σύνολο σημείων. Το αποτέλεσμά μας αποκτά ενδιαφέρον επειδή η κλάση των δέντρων, την οποία εξερευνούμε, είναι η κλάση των k -switch trees, $k \geq 2$. Θυμίζουμε ότι τα k -switch trees είναι μια γενίκευση των switch trees, με την έννοια ότι κάθε 1-switch tree είναι ακριβώς ένα switch tree. Επιπλέον, στην προηγούμενη ενότητα αποδείξαμε ότι κάθε switch tree εμφυτεύεται ανερχόμενα σε κάθε κυρτό σύνολο σημείων. Το δέντρο T με $(3n + 1)$ κορυφές που κατασκευάστηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 1[12] έχει την ακόλουθη δομή (βλ. Εικόνα 2.13.α για την περίπτωση όταν $n = 5$). Αποτελείται από: (i) μια κορυφή r βαθμού τρία, (ii) τρία μονότονα μονοπάτια με n κορυφές το κάθε ένα: $P_u = (u_n, u_{n-1}, \dots, u_1)$, $P_v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $P_w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, (iii) ακμές (r, u_1) , (v_1, r) και (w_1, r) . Το κυρτό σύνολο $(3n + 1)$ σημείων S , που χρησιμοποιήθηκε στο Θεώρημα 1[12], αποτελείται από: δύο οριακά, στην κατεύθυνση των y , σημεία, $b(S)$ και $t(S)$, το σύνολο των $(3n - 1)/2$ σημείων



Εικόνα 2.13: (α-β) Ένα 4-switch tree T και ένα κυρτό σύνολο σημείων S , τέτοια ώστε το T δεν επιδέχεται καμία ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο S .

$L = \{l_1, l_2, \dots, l_{(3n-1)/2}\}$, που αποτελεί το αριστερό μέρος του S και το σύνολο των $(3n-1)/2$ σημείων $R = \{r_1, r_2, \dots, r_{(3n-1)/2}\}$, που αποτελεί το δεξί μέρος του S . Τα σημεία των L και R είναι τοποθετημένα έτσι ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες: $y(b(S)) < y(r_1) < y(l_1) < y(r_2) < y(l_2) < \dots < y(r_{(3n-1)/2}) < y(l_{(3n-1)/2}) < y(t(S))$, βλ. Εικόνα 2.13.β για την περίπτωση $n = 5$.

Παρατηρούμε ότι το δέντρο T με $(3n+1)$ κορυφές, που περιγράφηκε παραπάνω, είναι ένα $(n-1)$ -switch tree. Άρα, μία άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1[12] είναι το ακόλουθο

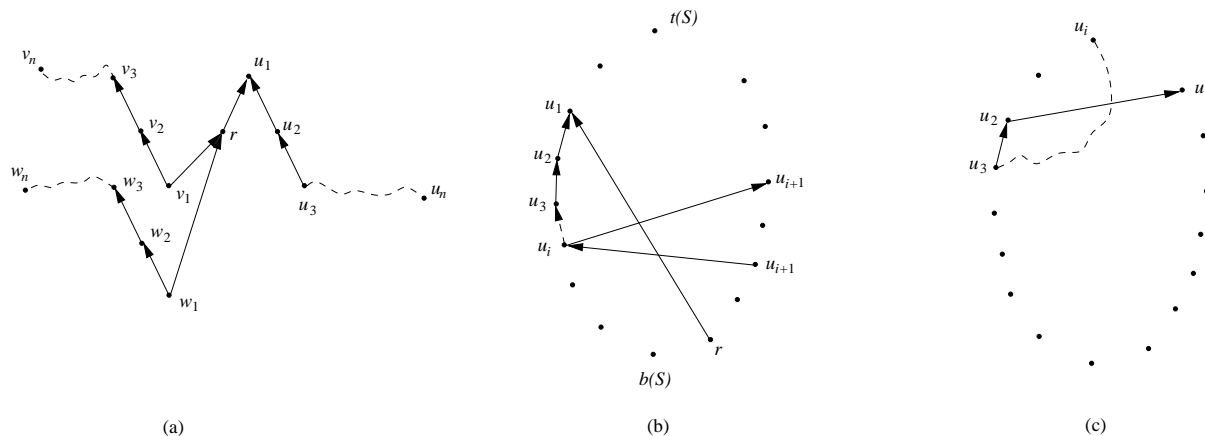
Πόρισμα 1. Για κάθε $k \geq 4$, υπάρχει ένα k -switch tree T και ένα κυρτό σύνολο σημείων S ίδιου μεγέθους, τέτοιο ώστε το T να μην επιδέχεται καμία ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο S .

Από την ενότητα 2.3.2, γνωρίζουμε ότι κάθε switch tree T , δηλαδή κάθε 1-switch tree επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε κάθε κυρτό σύνολο σημείων. Ένα φυσικό ερώτημα που δημιουργείται είναι αν επίσης κάθε 2-switch και κάθε 3-switch tree επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε κάθε κυρτό σύνολο σημείων. Το ερώτημα αυτό απαντάται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5. Για κάθε $n \geq 5$ και για κάθε $k \geq 2$, υπάρχει μια κλάση k -switch trees $3n+1$ κορυφών \mathcal{T}_n^k και ένα κυρτό σύνολο $3n+1$ σημείων S , τέτοιο ώστε κανένα $T \in \mathcal{T}_n^k$ δεν επιδέχεται ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο S .

Απόδειξη: Δεδομένου $n \geq 5$ κατασκευάζουμε την εξής κλάση δέντρων (βλ. Εικόνα 2.14.α). Έστω P_u είναι ένα προσανατολισμένο μονοπάτι n κορυφών $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, αριθμημένες σύμφωνα με την σειρά εμφάνισής τους στο μονοπάτι, και τέτοιο ώστε οι ακμές (u_3, u_2) , (u_2, u_1) να είναι παρούσες στο P_u . Έστω επίσης P_v και P_w είναι δύο προσανατολισμένα μονοπάτια n κορυφών με σύνολα κορυφών $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ και $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ αντίστοιχα, και τέτοια ώστε οι ακμές (v_1, v_2) , (v_2, v_3) και (w_1, w_2) , (w_2, w_3) να είναι παρούσες στα P_v και P_w , αντίστοιχα. Έστω $T(P_u, P_v, P_w)$ είναι ένα δέντρο που αποτελείται από τα μονοπάτια P_u, P_v, P_w , την κορυφή r και τις ακμές (r, u_1) , (v_1, r) , (w_1, r) . Έστω $\mathcal{T}_n^k = \{T(P_u, P_v, P_w) \mid \text{το μακρύτερο μονοπάτι στα } P_u, P_v \text{ και } P_w \text{ έχει μήκος } k\}$, $k \geq 2$. Τότε, \mathcal{T}_n^k είναι μια κλάση των k -switch trees. Έστω S είναι ένα κυρτό σύνολο σημείων όπως περιγράφηκε στην αρχή της ενότητας. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι κανένα $T \in \mathcal{T}_n^k$ δεν επιδέχεται καμία ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο S .

Έστω $T \in \mathcal{T}_n^k$. Εις άτοπον απαγωγή, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του T στο S . Από το Λήμμα 1, έχουμε ότι κάθε ένα από τα μονοπάτια P_u, P_v και P_w του T πρέπει



Εικόνα 2.14: (α) k -switch tree, $k \geq 2$. (β) Η κατασκευή της Πρότασης 1, Περίπτωσης 1 και 2.

να είναι εμφυτευμένα στα συνεχόμενα σημεία του S . Συμβολίζουμε με S_u , S_v και S_w τα σύνολα αυτά, αντίστοιχα. Άρα $|S_u| = |S_v| = |S_w| = n$. Από την κατασκευή του S το μέγιστο μονομερές υποσύνολο του S περιέχει $\lceil \frac{3n-1}{2} \rceil + 2 < 2n$ σημεία, όπου $n \geq 5$. Άρα, τουλάχιστον ένα από τα S_u , S_v και S_w είναι ένα διμερές σύνολο σημείων. Συμβολίζουμε με S_b (αντ. S_t) ένα διμερές σύνολο σημείων, που αποτελείται από συνεχόμενα σημεία του S , και $|S_b| = n$ (αντ. $|S_t| = n$), και $b(S) \in S_b$ (αντ. $t(S) \in S_t$). Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι σε καμία επίπεδη ανερχόμενη εμφύτευση του T στο S το P_u δεν μπορεί να εμφυτευτεί στο S_b , ενώ P_v και P_w δεν μπορούν να εμφυτευτούν στο S_t .

Πρόταση 1. Σε κάθε ανερχόμενη εμφύτευση του P_u στο S_t υπάρχει τομή μεταξύ των ακμών του T .

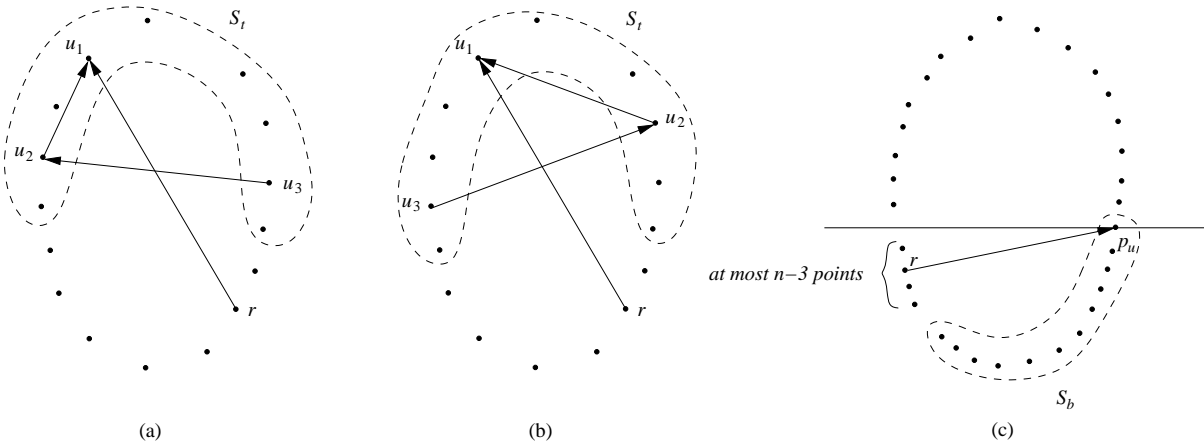
Απόδειξη της Πρότασης 1. Θυμίζουμε ότι το $S_t \subset S$ είναι ένα διμερές σύνολο σημείων, έτσι ώστε $t(S) \in S_t$. Σε κάθε εμφύτευση του P_u στο S_t , οι κορυφές u_1, u_2, u_3 απεικονίζονται σε κάποια σημεία του S_t . Στη συνέχεια ξεχωρίζουμε τέσσερις περιπτώσεις ανάλογα με το αν οι κορυφές u_1, u_2, u_3 είναι απεικονισμένες στην ίδια μεριά του S ή όχι.

Περίπτωση 1. Οι κορυφές u_1, u_2, u_3 βρίσκονται στην ίδια μεριά του S , πιθανόν περιλαμβάνοντας και το $t(S)$. Χωρίς βλάβη τις γενικότητας, υποθέτουμε ότι είναι η αριστερή μεριά του S , βλ. Εικόνα 2.14.β. Έστω u_{i+1} είναι η πρώτη κορυφή του P_u που έχει απεικονιστεί στη δεξιά μεριά του S . Τότε, επειδή η r έχει απεικονιστεί στο σημείο του $S \setminus S_t$, η ακμή (r, u_1) τέμνει την ακμή (u_i, u_{i+1}) (ή την ακμή (u_{i+1}, u_i)).

Περίπτωση 2. Κορυφές u_2, u_3 έχουν απεικονιστεί στην ίδια μεριά του S , πιθανόν περιλαμβάνοντας και το $t(S)$. Χωρίς βλάβη τις γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι η αριστερή μεριά του S , βλ. Εικόνα 2.14.c. Τότε η u_1 έχει απεικονιστεί στη δεξιά μεριά του S . Παρατηρούμε ότι η u_2 δεν μπορεί να έχει απεικονιστεί στο $t(S)$, επειδή τότε δεν υπάρχει σημείο όπου θα μπορούσε να απεικονιστεί η u_1 . Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο p πάνω από την ακμή (u_2, u_1) που πρέπει να επισκεφθεί από το μονοπάτι P_u . Άρα το μονοπάτι P_u τέμνει την ακμή (u_2, u_1) .

Περίπτωση 3. Οι κορυφές u_1, u_2 έχουν απεικονιστεί στην ίδια μεριά του S , περιλαμβάνοντας την $t(S)$. Χωρίς βλάβη τις γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι η αριστερή μεριά του S . Τότε η u_3 έχει απεικονιστεί στην δεξιά μεριά του S (Εικόνα 2.15.a) και ως συνέπεια, οι ακμές (r, u_1) και (u_3, u_2) τέμνονται.

Περίπτωση 4. Οι κορυφές u_1, u_3 έχουν απεικονιστεί στην ίδια μεριά του S , περιλαμβάνοντας την $t(S)$. Χωρίς βλάβη τις γενικότητας, υποθέτουμε ότι είναι η αριστερή μεριά του S . Τότε η u_2



Εικόνα 2.15: (α-β) Η κατασκευή την Πρότασης 1, Περιπτώσεις 2 και 3. (c) Η κατασκευή της Πρότασης 3.

έχει απεικονιστεί στην δεξιά μεριά του S (Εικόνα 2.15.β) και συνεπώς, οι ακμές (r, u_1) και (u_3, u_2) τέμνονται.

□

Η απόδειξη της ακόλουθης πρότασης είναι συμμετρική στην απόδειξη της Πρότασης 1.

Πρόταση 2. Σε κάθε ανερχόμενη εμφύτευση του P_u ή του P_w στο υποσύνολο S_b υπάρχουν τομές μεταξύ των ακμών του T .

□

Οπότε, μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει ότι δεν μπορεί να υπάρχει ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του T στο S , όταν το P_u έχει εμφυτευτεί σε κάποιο σύνολο S_t ή όταν το P_v ή το P_w έχει εμφυτευτεί σε κάποιο σύνολο S_b . Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι δεν μπορεί να υπάρχει καμία ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του T στο S όταν το P_u έχει εμφυτευτεί σε κάποιο σύνολο S_b ή όταν το P_v ή το P_w έχει εμφυτευτεί σε κάποιο σύνολο S_t .

Πρόταση 3. Δεν υπάρχει καμία ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του T στο S , έτσι ώστε το P_u να έχει απεικονιστεί στα σημεία του S_b .

Απόδειξη της Πρότασης 3. Συμβολίζουμε με p_u το σημείο του S_b με την μεγαλύτερη y -συντεταγμένη, βλ. Εικόνα 2.15.c. Από την κατασκευή του S , και επειδή S_b είναι ένα διμερές σύνολο n σημείων, συμπεραίνουμε ότι το $S \setminus S_b$ περιέχει το πολύ $n - 3$ σημεία κάτω από το p_u . Ακόμα, όλα αυτά τα σημεία βρίσκονται στην μεριά του S απέναντι από το p_u . Παρατηρούμε τα ακόλουθα: (i) Η κορυφή r πρέπει να τοποθετηθεί χαμηλότερα από το p_u , και άρα η r τοποθετείται απέναντι από το p_u , (ii) Η κορυφή v_1 πρέπει να τοποθετηθεί χαμηλότερα από την r , και επειδή το P_v πρέπει να είναι εμφυτευμένο σε συνεχόμενα σημεία του S , ολόκληρο το P_v πρέπει να έχει εμφυτευτεί στην ίδια μεριά με την r και κάτω από την r . Όμως, τέτοια σημεία υπάρχουν το πολύ $n - 4$, άτοπο, επειδή $|P_v| = n$.

□

Η ακόλουθη πρόταση είναι συμμετρική στην Πρόταση 3.

Πρόταση 4. Δεν υπάρχει καμία ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του T στο S , έτσι ώστε το P_v ή το P_w να έχει απεικονιστεί στα σημεία του S_t

□

Όπως παρατηρήσαμε στην αρχή της απόδειξης του παρόντος θεωρήματος, τουλάχιστον ένα από τα προσανατολισμένα μονοπάτια P_u, P_v, P_w πρέπει να είναι απεικονισμένο σε ένα διμερές υποσύνολο

του S που περιέχει είτε το $b(S)$ είτε το $t(S)$. Όπως αποδείξαμε στις Προτάσεις 1 έως 4, αυτό είναι αδύνατον, επομένως έχουμε το ζητούμενο. \square

2.3.4 Η Εμφυτευσιμότητα δέντρων σε κυρτά σύνολα σημείων

Στις προηγούμενες ενότητες εξετάσαμε μερικές οικογένειες δέντρων που είτε έχουν είτε δεν έχουν μια εμφύτευση σε οποιοδήποτε κυρτό σύνολο σημείων. Πιο συγκεκριμένα αποδείξαμε ότι κάθε δέντρο-κάμπια και κάθε switch-tree εμφυτεύεται πάντα σε ένα κυρτό σύνολο σημείων, ενώ από την αρνητική πλευρά αποδείξαμε ότι υπάρχει μια οικογένεια των k -switch trees, για $k \geq 2$, που δεν επιδέχεται ανερχόμενη εμφύτευση σε όλα τα κυρτά σύνολα σημείων. Το ερώτημα που προκύπτει άμεσα από τα αποτελέσματα αυτά είναι, εάν δεδομένου ενός δέντρου T , και ενός κυρτού συνόλου σημείων S μπορούμε να αποφασίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν το T επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση στο S . Στην ενότητα αυτή απαντάμε καταφατικά στο ερώτημα αυτό.

2.3.4.1 Ειδικοί ορισμοί

Έστω S είναι ένα γενικό σύνολο σημείων. Επειδή το S δεν περιέχει δύο σημεία με την ίδια y -συντεταγμένη μπορούμε να μιλάμε για το πρώτο, δεύτερο τρίτο και κ.ο.κ., χαμηλότερο σημείο στο αριστερό (αντ. δεξί) μέρος του S . Με το p_i^L , $1 \leq i \leq |L(S)|$ συμβολίζουμε το i -στο χαμηλότερο σημείο στην αριστερή μεριά του S . Παρόμοια, με p_i^R , $1 \leq i \leq |R(S)|$ συμβολίζουμε το i -στο χαμηλότερο σημείο στη δεξιά μεριά του S .

Με το $S_{a..b.c..d} = \{p_i^L \mid a \leq i \leq b\} \cup \{p_i^R \mid c \leq i \leq d\}$ συμβολίζουμε το υποσύνολο του S που περιέχει τα $b - a + 1$ διαδοχικά σημεία της αριστερής μεριάς του S , ξεκινώντας από το σημείο p_a^L και συνεχίζοντας κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού, και από τα $d - c + 1$ διαδοχικά σημεία στην δεξιά μεριά του S , ξεκινώντας από το p_c^R και συνεχίζοντας αντίθετα της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Για ένα μονομερές σύνολο σημείων απλοποιούμε τον συμβολισμό σε $S_{a..b}$.

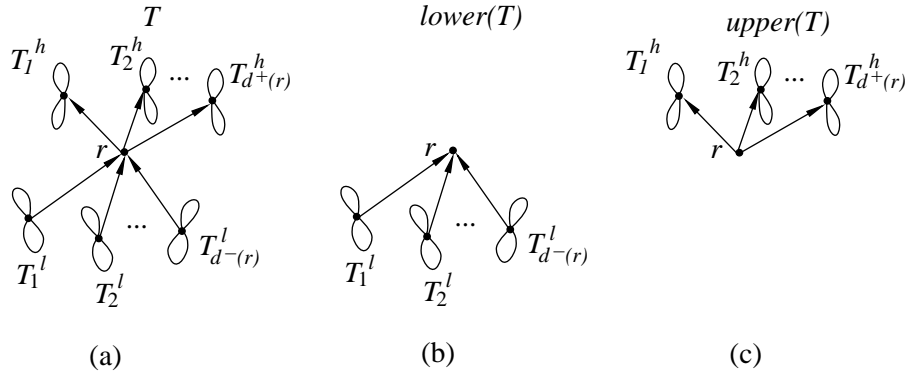
Στα ακόλουθα υποθέτουμε ότι, τα αιτήματα τύπου 'Βρες το i -στο σημείο στην αριστερή/δεξιά μεριά του S ' μπορούν να απαντηθούν σε χρόνο $O(1)$, δηλαδή τα σημεία μιας μεριάς του S είναι αποθηκευμένα σε έναν πίνακα στην αύξουσα κατά την y -συντεταγμένη σειρά.

Στην ενότητα αυτή μιλάμε πάντοτε για κατευθυνόμενα δέντρα με ρίζα. Ένα κατευθυνόμενο δέντρο ονομάζεται *δέντρο με ρίζα*, αν μία από τις κορυφές του $r(T)$ έχει επιλεγθεί ως η *ρίζα* του. Με $d^-(v)$ (αντ., $d^+(v)$) συμβολίζουμε το πλήθος των εισερχόμενων (αντ., εξερχόμενων από) την κορυφή v ακμών. Με $d(v)$ συμβολίζουμε τον *βαθμό* της κορυφής v , δηλαδή, $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$.

Έστω T είναι ένα κατευθυνόμενο δέντρο με ρίζα $r = r(T)$. Έστω $T_1^l, \dots, T_{d^-(r)}^l, T_1^h, \dots, T_{d^+(r)}^h$ είναι τα υπόδεντρα του T που λαμβάνουμε αν διαγράψουμε από το T την ρίζα της r και τις ακμές προσπίπτουσες στην r . Θεωρούμε ότι τα δέντρα αυτά έχουν τις ρίζες τους στις κορυφές γειτονικές με την r είτε μέσω εισερχόμενης στην είτε μέσω εξερχόμενης από την r ακμής (βλ. Εικόνα 2.16.α). Τα δέντρα $T_1^l, \dots, T_{d^-(r)}^l, T_1^h, \dots, T_{d^+(r)}^h$ ονομάζονται απλά *υπόδεντρα του T* . Παρατηρούμε ότι οι εκθέτες 'l' και 'h' φανερώνουν αν το συγκεκριμένο υπόδεντρο είναι συνδεδεμένο με την r μέσω εισερχόμενης στην ή εξερχόμενης από την r ακμής, αντίστοιχα.

Το υπόδεντρο του T που αποτελείται από την ρίζα του T , r , μαζί με τα υπόδεντρα $T_1^l, \dots, T_{d^-(r)}^l$ ονομάζεται το *κάτω υπόδεντρο* του T και έχει επίσης την ρίζα του στην r . Το κάτω υπόδεντρο του T συμβολίζεται με το $lower(T)$ (Εικόνα 2.16.β). Παρόμοια, το υπόδεντρο του T που αποτελείται από την ρίζα του T , r , μαζί με τα $T_1^h, \dots, T_{d^+(r)}^h$ ονομάζεται το *πάνω υπόδεντρο* του T και έχει την ρίζα του στην r . Το πάνω υπόδεντρο του T συμβολίζεται με $upper(T)$ (Εικόνα 2.16.γ).

Στην ενότητα αυτή χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\{u, v\}$ για να αναπαραστήσουμε την ακμή (u, v) αν $(u, v) \in T$ ή την ακμή (v, u) αν $(v, u) \in T$. Αν η κορυφή u έχει απεικονιστεί στο σημείο p και



Εικόνα 2.16: (α) Δέντρο T με ρίζα r και τα υπόδεντρα του $T_1^l, \dots, T_{d^-(r)}^l, T_1^h, \dots, T_{d^+(r)}^h$. (β) Το υπόδεντρο $lower(T)$ του T . (γ) Το υπόδεντρο $upper(T)$ του T .

η κορυφή v στο σημείο q , που βρίσκεται κάτω από το σημείο p , τότε λέμε ότι, η ακμή $\{u, v\}$ είναι ανερχόμενη αν $(v, u) \in T$.

Το ακόλουθο λήμμα έχει να κάνει με την εμφύτευση ενός δέντρου σε ένα μονομερές σύνολο σημείων και αποτελεί μια απλή επαναδιατύπωση του αποτελέσματος του Heath et al. [59] (Θεώρημα 2.1) και αποδεικνύεται παρόμοια με το Λήμμα 7.

Λήμμα 10. Έστω T είναι ένα κατευθυνόμενο δέντρο με n κορυφές και ρίζα r και έστω S είναι ένα μονομερές σύνολο n σημείων. Έστω $T_1, T_2, \dots, T_{d(r)}$ είναι τα υπόδεντρα του T . Για κάθε ανερχόμενη επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση του T στο S ισχύουν τα εξής:

- i) Κάθε ένα από τα T_i , $1 \leq i \leq d(r)$, είναι απεικονισμένο στα διαδοχικά σημεία του S .
- ii) Αν η ρίζα r του T βρίσκεται στο σημείο p_r , τότε δεν υπάρχει ακμή που να συνδέει σημεία του S που βρίσκονται κάτω από το p_r με τα σημεία που είναι πάνω από το p_r .

□

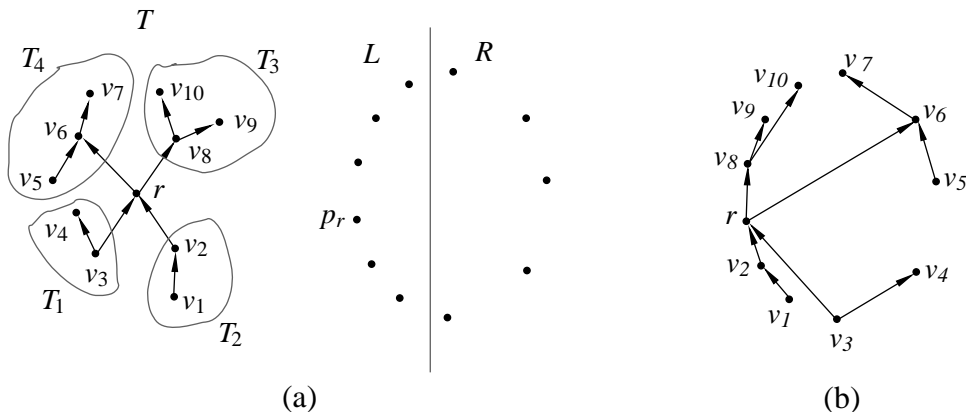
Στην συνέχεια κατασκευάζουμε έναν απλό αλγόριθμο που αξιοποιεί το παραπάνω λήμμα:

Λήμμα 11. Έστω T είναι ένα δέντρο με n κορυφές και ρίζα στην r και S είναι ένα μονομερές σύνολο n σημείων. Μια ανερχόμενη εμφύτευση του T στο S , που προφανώς ικανοποιεί τις ιδιότητες του Λήμματος 10, μπορεί να υπολογιστεί στον χρόνο $O(n)$. Επίσης, το σημείο p_r , όπου τελικά βρίσκεται η ρίζα r του T , μπορεί να βρεθεί στον χρόνο $O(1)$ (δηλαδή, χωρίς να κατασκευάσουμε ολόκληρη την εμφύτευση του T στο S).

Απόδειξη: Έστω $k = |lower(T)|$ είναι το μέγεθος του υπόδεντρου $lower(T)$ (που έχει την ρίζα στο r). Σε κάθε ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του T στο S (βλ. Λήμμα 10) υπάρχουν $k - 1$ κορυφές του T (οι κορυφές του $lower(T)$) που βρίσκονται κάτω από την r . Άρα, η r πρέπει να βρίσκεται στο k -στο σημείο του S . Αυτό το σημείο, έστω p_r , μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(1)$. Έχοντας αποφασίσει που βρίσκεται η ρίζα r , η ανερχόμενη εμφύτευση του T στο S μπορεί να υπολογιστεί στον χρόνο $O(n)$ εμφυτεύοντας αναδρομικά τις κορυφές του $lower(T)$ ($upper(T)$) στα σημεία του S κάτω (πάνω) από το p_r . □

2.3.4.2 Ένα περιορισμένο πρόβλημα ανερχόμενης εμφύτευσης

Για να μπορέσουμε να αντιμετωπίσουμε το γενικό πρόβλημα εμφύτευσης χρειαζόμαστε πρώτα να λύσουμε το εξής περιορισμένο πρόβλημα.



Εικόνα 2.17: (α) Ένα δέντρο T με την ρίζα r και ένα κυρτό σύνολο σημείων $S = L \cup R$. (β) Μια περιορισμένη ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του T στο S όταν η r βρίσκεται στο p_r .

Ορισμός 2. Στο πρόβλημα περιορισμένης εμφύτευσης δέντρων μας δίνεται ένα κατευθυνόμενο δέντρο T με ρίζα r , ένα κυρτό σύνολο σημείων S , και ένα σημείο $p_r \in S$. Ζητείται να αποφασίσουμε αν υπάρχει μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του δέντρου T στο σύνολο S έτσι ώστε (i) η ρίζα r του T να βρίσκεται στο σημείο p_r και (ii) για κάθε υπόδεντρο του T να έχουμε ότι οι κορυφές του βρίσκονται στην ίδια μεριά και στα συνεχόμενα σημεία του S . Μια εμφύτευση που τηρεί τους κανόνες (i – ii) θα ονομάζεται μια **περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση**.

Η επόμενη παρατήρηση έπεται άμεσα από τον ορισμό του προβλήματος περιορισμένης εμφύτευσης δέντρων.

Παρατήρηση 1. Στην λύση του προβλήματος περιορισμένης εμφύτευσης δέντρων για το T με ρίζα στο r , στο σύνολο S , όπου η r βρίσκεται στο σημείο $p_r \in S$, καμία ακμή δεν τέμνει το τρίγωνο $\Delta(t(L), t(R), p_r)$ και $\Delta(b(L), b(R), p_r)$.

Η Εικόνα 2.17.α δείχνει ένα δέντρο T με ρίζα στην r , ένα κυρτό σύνολο σημείων $S = L \cup R$. Το T έχει μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση στο S αν και μόνο αν η r βρίσκεται στο σημείο $p_r \in L$ (Εικόνα 2.17.β). Εάν αντιστοιχίσουμε την r σε κάποιο άλλο σημείο $p \in S$, τότε δεν μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε καμία περιορισμένη ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του T στο S .

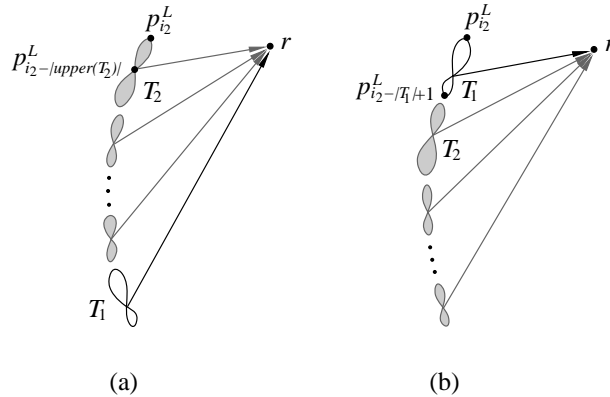
Πριν προχωρήσουμε να περιγράψουμε τον αλγόριθμο απόφασης για το περιορισμένο πρόβλημα εμφύτευσης εισάγουμε μερικούς ακόμα συμβολισμούς. Έστω T είναι ένα δέντρο με ρίζα στο r και έστω $\mathcal{h} = (T_1, \dots, T_{d(r)})$ είναι η αρίθμηση των υπόδεντρων του T . Έστω S είναι ένα κυρτό σύνολο σημείων και Γ είναι μια ανερχόμενη εμφύτευση του T στο S . Λέμε ότι η Γ *συμφωνεί με την αρίθμηση \mathcal{h}* αν για κάθε δύο υπόδεντρα T_i και T_j , $1 \leq i < j \leq d(r)$, τέτοια ώστε και τα δύο έχουν απεικονιστεί στην ίδια μεριά του S , το T_i έχει απεικονιστεί σε σημεία του S που είναι κάτω από εκείνα του T_j .

Έστω το δέντρο T με την ρίζα r και έστω $\mathcal{h} = (T_1^l, \dots, T_{d^-(r)}^l, T_1^h, \dots, T_{d^+(r)}^h)$ είναι μια αρίθμηση των υπόδεντρων του T . Η αρίθμηση \mathcal{h} ονομάζεται *κατάλληλη* αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

$$(i) |\text{upper}(T_i^l)| \leq |\text{upper}(T_j^l)|, \quad 1 \leq i < j \leq d^-(r), \text{ και}$$

$$(ii) |\text{lower}(T_i^h)| \geq |\text{lower}(T_j^h)|, \quad 1 \leq i < j \leq d^+(r).$$

Για παράδειγμα, αρίθμηση $\mathcal{h}_1 = (T_2, T_1, T_4, T_3)$ είναι μια κατάλληλη αρίθμηση των υπόδεντρων του T της Εικόνας 2.17.α, επειδή $|\text{upper}(T_2)| < |\text{upper}(T_1)|$ και $|\text{lower}(T_4)| > |\text{lower}(T_3)|$, ενώ η



Εικόνα 2.18: Η τοποθέτηση των υπόδεντρων στο Λήμμα 12. (α) Η εμφύτευση των T_1 και T_2 δεν συμφωνεί με την εμφύτευση β . (β) Τα υπόδεντρα T_1 και T_2 , όπως και τα υπόδεντρα που βρίσκονται μεταξύ τους, έχουν ξανατοποθετηθεί ώστε να συμφωνούν με την β (ως αναφορά τα δέντρα T_1 και T_2).

αρίθμηση $\beta_2 = (T_1, T_2, T_3, T_4)$ δεν είναι. Παρατηρούμε ότι σε μια κατάλληλη αρίθμηση β του T , τα υπόδεντρα του κάτω υπόδεντρου του T εμφανίζονται πάντα πριν από τα υπόδεντρα του πάνω υπόδεντρου του T .

Λήμμα 12. Έστω T είναι ένα κατευθυνόμενο δέντρο με n κορυφές και ρίζα r , β είναι μια κατάλληλη αρίθμηση των υπόδεντρων του T , και S είναι ένα κυρτό σύνολο n σημείων. Αν υπάρχει μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση του T στο S , τότε υπάρχει επίσης μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση του T στο S που συμφωνεί με την β .

Απόδειξη: Θεωρούμε μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση Γ του T στο S και υποθέτουμε ότι η Γ δεν συμφωνεί με την β . Έστω το T_1 και το T_2 είναι δύο υπόδεντρα του T , που έχουν απεικονιστεί στην ίδια μεριά του S , χωρίς βλάβη στην γενικότητα υποθέτουμε ότι είναι η αριστερή μεριά του S , και έστω ότι το T_1 εμφανίζεται κάτω από το T_2 , ενώ στην β , το T_1 και το T_2 εμφανίζονται με την αντίθετη σειρά.

Πρώτα παρατηρούμε ότι και τα δύο T_1 και T_2 ανήκουν είτε στο κάτω είτε στο πάνω υπόδεντρο του T . Αν όχι, και επειδή αυτά δεν συμφωνούν με την αρίθμηση β , το T_1 ανήκει στο πάνω υπόδεντρο του T , ενώ το T_2 στο κάτω υπόδεντρο του T . Τότε είναι αδύνατον οι ακμές $(r, r(T_1))$, $(r(T_2), r)$ του T να είναι και οι δύο ανερχόμενες στην Γ .

Υποθέτουμε ότι και τα δύο T_1 και T_2 ανήκουν στο κάτω υπόδεντρο του T (η απόδειξη για το πάνω υπόδεντρο είναι συμμετρική). Έστω ότι το ψηλότερο σημείο του T_2 έχει απεικονιστεί στο i_2 -στο χαμηλότερο σημείο στην αριστερή μεριά του S , δηλαδή στο σημείο $p_{i_2}^L$ (βλ. Εικόνα 2.18.α). Θεωρούμε την εμφύτευση Γ' που προκύπτει από την Γ αν σπρώξουμε το υπόδεντρο T_2 , και όλα τα υπόδεντρα που βρίσκονται μεταξύ των T_1 και T_2 στην Γ κατά $|T_1|$ σημεία προς τα κάτω και εμφυτεύσουμε το T_1 στα $|T_1|$ σημεία που απελευθερώθηκαν, δηλαδή στα $\{p_{i_2}^L \dots p_{i_2 - |T_1| + 1}^L\}$ (βλ. Εικόνα 2.18.β). Η εμφύτευση που προκύπτει Γ' , είναι προφανώς επίπεδη. Για να αποδείξουμε ότι η Γ' είναι μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση αρκεί να δείξουμε ότι οι ακμές $(r(T_1), r)$, $(r(T_2), r)$ παρέμειναν ανερχόμενες.

Η ακμή $(r(T_2), r)$ προφανώς παραμένει ανερχόμενη, επειδή η κορυφή $r(T_2)$ απεικονίζεται στην Γ' σε ένα σημείο, που είναι χαμηλότερο από εκείνο στο οποίο απεικονίζεται η $r(T_2)$ στην Γ . Η ρίζα $r(T_2)$ του δέντρου T_2 απεικονίζεται στο σημείο $p_{i_2 - |upper(T_2)|}^L$ στην Γ . Επειδή η Γ δεν συμφωνεί με την αρίθμηση β , το T_2 εμφανίζεται πριν από το T_1 στην β και, άρα, $|upper(T_2)| \leq |upper(T_1)|$. Οπότε, στην Γ' η κορυφή $r(T_1)$ απεικονίζεται στο σημείο που συμπίπτει με ή είναι χαμηλότερο από εκείνο

όπου βρίσκεται η $r(T_2)$ στην Γ . Άρα η ακμή $(r(T_1), r)$ είναι ανερχόμενη στην Γ' και, άρα, η Γ' είναι μια περιορισμένη ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση.

Συνεχίζοντας να ανταλλάζουμε τις θέσεις άλλων υπόδεντρων που δεν συμφωνούν με την αρίθμηση β παίρνουμε μια περιορισμένη εμφύτευση που συμφωνεί με την β . \square

Θεώρημα 6. Έστω T είναι ένα προσανατολισμένο δέντρο n κορυφών με ρίζα r , έστω L και R είναι ένα αριστερομερές και ένα δεξιομερές σύνολο σημείων αντίστοιχα, έτσι ώστε το $S = L \cup R$ να αποτελεί ένα κυρτό σύνολο n σημείων, και p_r να είναι ένα σημείο του S . Το πρόβλημα περιορισμένης εμφύτευσης με είσοδο T , S και p_r μπορεί να αποφανθεί σε χρόνο $O(d(r)n)$. Στην περίπτωση καταφατικής απάντησης, μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση για το T , S και p_r , μπορεί να βρεθεί σε χρόνο $O(d(r)n)$.

Απόδειξη: Έστω $\beta = (T_1, T_2, \dots, T_{d(r)})$ είναι μια κατάλληλη αρίθμηση των υπόδεντρων του T . Η κατάλληλη αρίθμηση β μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n)$ με την διάσχιση του δέντρου T και τον υπολογισμό του πλήθους των κορυφών στα υπόδεντρα του T και στη συνέχεια εφαρμόζοντας μια ταξινόμηση με κάδους (bucket sort). Από το Λήμμα 12 ξέρουμε ότι είναι αρκετό να ελέγξουμε αν υπάρχει μια ανερχόμενη εμφύτευση που συμφωνεί με την αρίθμηση β . Στην συνέχεια, θα περιγράψουμε έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού, που δεδομένου των T , L , R και p_r , αποφασίζει για την ύπαρξη μιας περιορισμένης ανερχόμενης εμφύτευσης.

Ο αλγόριθμός μας χρησιμοποιεί έναν διδιάστατο πίνακα M , διαστάσεων $d(r) \times |L|$. Η τιμή $M[i, j]$ γίνεται $TRUE$ αν και μόνο αν υπάρχει μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση του υπόδεντρου του T που αποτελείται από τον κόμβο r και τα υπόδεντρα T_1, \dots, T_i , που χρησιμοποιεί τα j χαμηλότερα σημεία του L και όσα σημεία χρειάζεται στην R . Ανακαλούμε ότι με $\{u, v\}$ συμβολίζουμε την ακμή (u, v) , αν $(u, v) \in T$, και την (v, u) , αν $(v, u) \in T$, αλλιώς θεωρούμε ότι $\{u, v\}$ είναι ένας μη-ορισμένος όρος.

Για τις οριακές συνθήκες του δυναμικού προγραμματισμού έχουμε:

$$M[0, 0] = TRUE$$

$$M[1, j] = \begin{cases} TRUE, & \text{αν } j = 0 \text{ και } p_r \notin R_{1..|T_1|} \text{ και } \{r(T_1), p_r\} \text{ είναι ανερχόμενη} \\ TRUE, & \text{αν } j = |T_1| \text{ και } p_r \notin L_{1..|T_1|} \text{ και } \{r(T_1), p_r\} \text{ είναι ανερχόμενη} \\ FALSE, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Έστω $\sigma = |T_1| + \dots + |T_i|$. Θέτουμε την $M[i, j]$, $1 < i \leq d(r)$ και $0 \leq j \leq |L|$, να είναι $TRUE$ αν και μόνο αν μία από τις ακόλουθες συνθήκες είναι αληθής, σε διαφορετική περίπτωση την θέτουμε $FALSE$.

c-1: $M[i, j - 1] = TRUE$ και $p_r = L_{j, j}$.

Αυτή η συνθήκη αντιστοιχεί στην περίπτωση όταν το σημείο p_r συμβαίνει να είναι το j -στο σημείο του L . Δεν χρειάζεται να ελέγξουμε το αν η απεικόνιση της $\{r(T_i), p_r\}$ είναι ανερχόμενη, επειδή το έχουμε ήδη ελέγξει συμπληρώνοντας την τιμή $M[i, j - 1]$.

c-2: $M[i - 1, j - |T_i|] = TRUE$, $p_r \notin L_{j - |T_i| + 1, j}$ και $\{r(T_i), p_r\}$ είναι ανερχόμενη.

Σε αυτή την περίπτωση, το δέντρο T_i τοποθετείται στο L . Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν αρκετά σημεία για το T_i στο L , όμως επειδή $j < |L|$, πρέπει να σιγουρευτούμε ότι το σημείο p_r δεν είναι ένα από τα $|T_i|$ ψηλότερα σημεία του $L_{1..j}$.

c-3: $M[i - 1, j] = TRUE$, $p_r \in R_{1.. \sigma - j - |T_i| + 1}$ και $\sigma - j + 1 \leq |R|$ και $\{r(T_i), p_r\}$ είναι ανερχόμενη.

Στην περίπτωση αυτή το T_i τοποθετείται στο R . Αν p_r είναι ένα από τα σημεία του $R_{1.. \sigma - j - |T_i| + 1}$, πρέπει να σιγουρευτούμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον $\sigma - j + 1$ σημεία στο $|R|$.

c-4: $M[i - 1, j] = TRUE$ και $p_r \notin R_{1.. \sigma - j}$ και $\sigma - j \leq |R|$ και $\{r(T_i), p_r\}$ είναι ανερχόμενη.

Στην περίπτωση αυτή, το T_i επίσης τοποθετείται στο R . Όμως, η διαφορά με την Περί-

πτωση **c-3** είναι ότι το p_r δεν είναι ένα από τα $R_{1..σ-j}$. Άρα, χρειαζόμαστε μόνο να ελέγξουμε αν υπάρχουν τουλάχιστον $σ - j$ ελεύθερα σημεία στο $|R|$. Παρατηρούμε ότι, αν ούτε $p_r \in R_{1..σ-j-|T_i|+1}$ ούτε $p_r \notin R_{1..σ-j}$ έχουμε ότι $p_r \in R_{σ-j-|T_i|+2..σ-j}$, που σημαίνει ότι το T_i δεν μπορεί να εμφυτευτεί στα σημεία αυτά και άρα η τιμή $M[i,j]$ δεν πρέπει να αλλάξει στη *TRUE*.

Όταν προσδιορίζουμε την τιμή $M[i,j]$ πρέπει να αποφασίσουμε αν η ακμή $\{r(T_i), p_r\}$ είναι ανερχόμενη. Για να πετύχουμε αυτό πρέπει να γνωρίζουμε σε ποιο σημείο βρίσκεται η κορυφή $r(T_i)$. Από το Λήμμα 11, μετά από μια μοναδική προεργασία χρόνου $O(n)$, το σημείο αυτό μπορεί να προσδιοριστεί σε χρόνο $O(1)$, επειδή το T_i εμφυτεύεται σε $|T_i|$ διαδοχικά σημεία που αποτελούν ένα μονομερές σύνολο σημείων.

Από το Λήμμα 12 έπεται ότι η τιμή $M[d(r), |L|] = TRUE$ αν και μόνο αν υπάρχει μια περιορισμένη ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του T στο $L \cup R$ έτσι ώστε η $r(T)$ να βρίσκεται στο p_r .

Κάθε τιμή του πίνακα M μπορεί να προσδιοριστεί σε χρόνο $O(1)$. Άρα όλες οι τιμές του πίνακα υπολογίζονται σε χρόνο $O(d(r)|L|)$. Στην περίπτωση που υπάρχει μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση του T στο $L \cup R$, μπορούμε να την υπολογίσουμε αποθηκεύοντας στην $M[i,j]$ την μεριά ('Λ' ή 'Ρ') στην οποία το T_i έχει τοποθετηθεί. Αυτή η πληροφορία μαζί με το γεγονός ότι η περιορισμένη εμφύτευση συμφωνεί με την αρίθμηση β είναι αρκετή για να ανακτήσουμε την εμφύτευση. \square

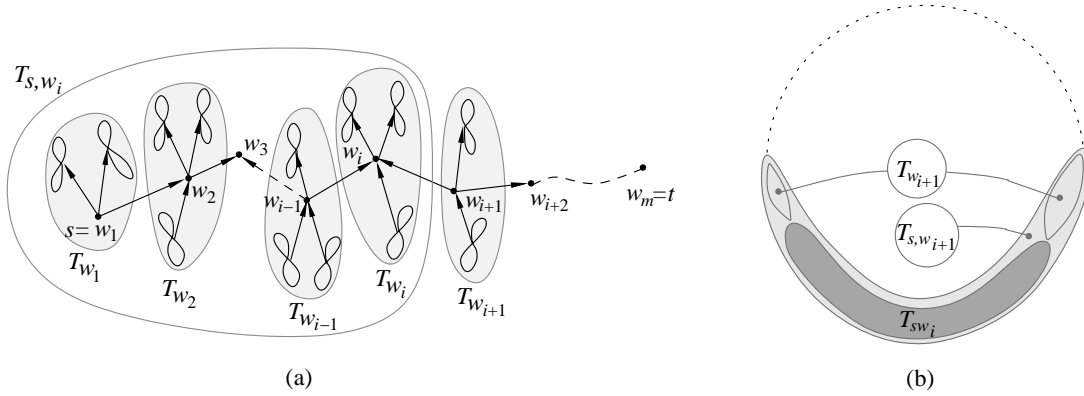
Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(T, L, R)$, το σύνολο σημείων $p \in L \cup R$ τέτοιων ώστε υπάρχει μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση του T στο $L \cup R$, όταν η ρίζα του T βρίσκεται στο p . Το ακόλουθο θεώρημα έπεται από το Θεώρημα 6 με έναν απλό έλεγχο κάθε σημείου του $L \cup R$ ως υποψήφια θέση για την κορυφή $r(T)$.

Θεώρημα 7. Έστω T είναι ένα κατευθυνόμενο δέντρο με n κορυφές και ρίζα r και έστω L και R είναι ένα αριστερομερές και ένα δεξιομερές σύνολο, αντίστοιχα, έτσι ώστε το $S = L \cup R$ να αποτελεί ένα κυρτό σύνολο n σημείων. Τότε το σύνολο $\mathcal{L}(T, L, R)$ μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(d(r)n^2)$. \square

2.3.4.3 Ο αλγόριθμος ελέγχου

Έστω T είναι ένα κατευθυνόμενο δέντρο με n κορυφές και έστω S είναι ένα κυρτό σύνολο σημείων. Σε κάθε ανερχόμενη εμφύτευση του T στο S υπάρχει μια πηγή s και μια καταβόθρα t του T , που αντιστοιχούνται στα σημεία $b(S)$ και $t(S)$, αντίστοιχα. Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού, που δεδομένου ενός δέντρου με n κορυφές T , με καθορισμένες κορυφές s (πηγή) και t (καταβόθρα), και ένα κυρτό σύνολο n σημείων S , αποφασίζει σε πολυωνυμικό χρόνο αν το δέντρο T επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση στο S έτσι ώστε η s και η t να βρίσκονται στα $b(S)$ και $t(S)$, αντίστοιχα. Η εφαρμογή αυτού του αλγορίθμου σε όλα τα ζεύγη (πηγή, καταβόθρα) του T έπεται έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο για το αρχικό πρόβλημα.

Έστω s και t είναι μια πηγή και μια καταβόθρα του T , αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με $P_{s,t} = \{s = w_1, w_2, \dots, w_m = t\}$ το (μη-κατευθυνόμενο) μονοπάτι από την s στην t στο T , βλ. Εικόνα 2.19.α. Με T_{s,w_i} , $1 \leq i < m$, συμβολίζουμε το υπόδεντρο του T που περιέχει την s και σχηματίζεται με την διαγραφή της ακμής $\{w_i, w_{i+1}\}$. Από τον ορισμό, $T_{s,w_m} = T$. Έστω $T_{w_i} = T_{s,w_i} \setminus T_{s,w_{i-1}}$, $1 < i \leq m$. Από τον ορισμό, $T_{w_1} = T_{s,w_1}$. Από το Λήμμα 1 γνωρίζουμε ότι σε κάθε ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του T στο S το T_{s,w_i} εμφυτεύεται σε διαδοχικά σημεία του S , ονομάζουμε το σύνολο αυτό S_i (βλ. επίσης Εικόνα 2.19.β). Επειδή η s πρέπει να βρίσκεται στο $b(S)$, συμπεραίνουμε ότι $b(S) \in S_i$. Παρόμοια, σε κάθε ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του T στο S , το $T_{s,w_{i+1}}$ επίσης εμφυτεύεται σε συνεχόμενα σημεία του S που περιλαμβάνει το $b(S)$, ονομάζουμε το σύνολο αυτό S_{i+1} . Άρα, το $T_{w_{i+1}}$ είναι εμφυτευμένο στο $S_{w_{i+1}} = S_{i+1} \setminus S_i$, ένα υποσύνολο του S , που αποτελείται



Εικόνα 2.19: (α) Ο διαχωρισμός του T που βασίζεται στο μονοπάτι από την s στην t του T . (β) Η γενική δομή της ανερχόμενης εμφύτευσης του δέντρου T στο σύνολο S .

από δύο συνεχόμενα (σύνολα διαδοχικών σημείων) υποσύνολα του S , ένα στο αριστερό και ένα στο δεξί μέρος του S .

Ο αλγόριθμός μας διατηρεί μια λίστα από σημεία $\mathcal{P}(a, b, k)$, $0 \leq a \leq |L|$, $0 \leq b \leq |R|$, $1 \leq k \leq m$, τέτοια ώστε:

$$p \in \mathcal{P}(a, b, k) \iff \begin{cases} T_{s, w_k} \text{ επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση} \\ \text{στο } S_{1..a, 1..b} \text{ με κορυφή } w_k \text{ να βρίσκεται στο } p. \end{cases}$$

Για τις οριακές συνθήκες του δυναμικού μας προγραμματισμού έχουμε:

$$\mathcal{P}(a, b, 1) = \mathcal{L}(T_{w_1}, L_{1..a}, R_{1..b}), \text{ όπου } a + b = |T_{w_1}|.$$

Παρατηρούμε ότι επειδή w_1 είναι μια πηγή, η τιμή $\mathcal{P}(a, b, 1)$ είναι ίση είτε με $\{b(s)\}$ είτε με \emptyset .

Υποθέτουμε ότι το $T_{s, w_{i-1}}$ έχει μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε συνεχόμενα σημεία του S , έστω $S_{1..a-a_1, 1..b-b_1}$, με τις κορυφές s , w_{i-1} να βρίσκονται στα $b(S)$, q , αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι το T_{w_i} έχει μια **περιορισμένη** ανερχόμενη εμφύτευση στο $L_{a-a_1+1..a} \cup R_{b-b_1+1..b}$ με την w_i να βρίσκεται στο p . Αν η ακμή $\{w_{i-1}, w_i\}$, που απεικονίζεται ως ευθύγραμμο τμήμα (q, p) , είναι ανερχόμενη, μπορούμε να συνδυάσουμε την ανερχόμενη εμφύτευση του $T_{s, w_{i-1}}$ με την περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση του T_{w_i} για να κατασκευάσουμε μια ανερχόμενη εμφύτευση του T_{s, w_i} στο σύνολο σημείων $S_{1..a, 1..b}$. Η ιδέα αυτή μας επιτρέπει να προσθέτουμε σημεία στο $\mathcal{P}(a, b, i)$ και περιγράφεται τυπικά με την ακόλουθη αναδρομική σχέση.

Για κάθε $1 < i \leq m$ θέτουμε:

$$\mathcal{P}(a, b, i) = \{p \mid \begin{aligned} &\exists a_1, b_1 \in \mathbb{Z} : a_1 + b_1 = |T_{w_i}| \\ &\text{και } p \in \mathcal{L}(T_{w_i}, L_{a-a_1+1..a}, R_{b-b_1+1..b}) \\ &\text{και } \exists q \in \mathcal{P}(a - a_1, b - b_1, i - 1) \\ &\text{και } \{p, q\} \text{ είναι ανερχόμενη} \end{aligned} \} \quad (2.5)$$

Λήμμα 13. Έστω T είναι ένα δέντρο n κορυφών, S ένα κυρτό σύνολο n σημείων, έστω s και t είναι μια πηγή και μια καταβόθρα του T , αντίστοιχα. Έστω $P_{s,t} = \{s = w_1, w_2, \dots, w_m = t\}$ είναι ένα μονοπάτι που συνδέει τις s και t στο T και έστω T_{s, w_i} , $1 \leq i \leq m$ είναι τα υπόδεντρα του T , όπως περιγράφηκε παραπάνω. Υπάρχει μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του T στο S έτσι ώστε η s και η t να βρίσκονται στα $b(S)$ και $t(S)$, αντίστοιχα, αν και μόνο αν η τιμή $\mathcal{P}(|L|, |R|, m)$, υπολογισμένη με την βοήθεια την αναδρομικής σχέσης (2.5), είναι μη κενή.

Απόδειξη: Πρώτα θα αποδείξουμε ότι αν $p \in \mathcal{P}(a, b, i)$, τότε το T_{s, w_i} έχει μια ανερχόμενη εμφύτευση στο $S_{1..a, 1..b}$, με την κορυφή w_i στο σημείο p . Από τις οριακές συνθήκες, η δήλωση αυτή αληθεύει για $i = 1$. Υποθέτουμε ότι αν $q \in \mathcal{P}(a - a_1, b - b_1, i - 1)$ τότε το $T_{s, w_{i-1}}$ έχει μια ανερχόμενη εμφύτευση στο $S_{1..a-a_1, 1..b-b_1}$, με την κορυφή w_{i-1} στο σημείο q . Έστω τώρα $p \in \mathcal{P}(a, b, i)$. Τότε από τον ορισμό τις αναδρομικής σχέσης έχουμε ότι: (1) υπάρχουν ακέραιοι $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $a_1 + b_1 = |T_{w_i}|$, (2) $p \in \mathcal{L}(T_{w_i}, L_{a-a_1+1..a}, R_{b-b_1+1..b})$, το οποίο από τον ορισμό της \mathcal{L} σημαίνει ότι υπάρχει μια ανερχόμενη εμφύτευση του T_{w_i} στο $L_{a-a_1+1..a}, R_{b-b_1+1..b}$ με την κορυφή w_i στο σημείο p , (3) $\exists q \in \mathcal{P}(a - a_1, b - b_1, i - 1)$, άρα, από την επαγωγική υπόθεση, το $T_{s, w_{i-1}}$ έχει μια ανερχόμενη εμφύτευση στο $S_{1..a-a_1, 1..b-b_1}$ και τελικά, (4) η ακμή $\{p, q\}$ είναι ανερχόμενη. Συνδυάζοντας την ανερχόμενη εμφύτευση του $T_{s, w_{i-1}}$ με την περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση του T_{w_i} και την ακμή $\{p, q\}$ παίρνουμε μια ανερχόμενη εμφύτευση του T_{s, w_i} στο σύνολο σημείων $S_{1..a, 1..b}$. Από την Παρατήρηση 1 έχουμε ότι η τελική απεικόνιση είναι ανερχόμενη και επίπεδη.

Για την αντίθετη κατεύθυνση εργαζόμαστε επίσης με επαγωγή. Από τις οριακές συνθήκες έχουμε ότι: αν το $T_{s, w_1} = T_{w_1}$ έχει μια ανερχόμενη εμφύτευση στο σύνολο σημείων $S_{1..a, 1..b}$, τότε $b(S) \in \mathcal{P}(a, b, 1)$, όπου $a + b = |T_{w_1}|$. Υποθέτουμε ότι η δήλωση προς απόδειξη ισχύει για το $T_{s, w_{i-1}}$, δηλαδή, αν το $T_{s, w_{i-1}}$ έχει μια εμφύτευση στο $S_{1..a, 1..b}$ με την κορυφή w_{i-1} στο σημείο q , τότε ισχύει ότι $q \in \mathcal{P}(a, b, i - 1)$. Υποθέτουμε ότι το δέντρο T_{s, w_i} έχει μια ανερχόμενη εμφύτευση στο σύνολο σημείων $S_{1..a, 1..b}$ με τις κορυφές s και w_i να βρίσκονται στα σημεία $b(S)$ και p , αντίστοιχα. Από την παραπάνω συζήτηση, γνωρίζουμε ότι, σε κάθε τέτοια εμφύτευση το δέντρο $T_{s, w_{i-1}}$ είναι απεικονισμένο σε συνεχόμενα σημεία του $S_{1..a, 1..b}$ που περιέχει $b(S)$. Άρα υπάρχουν ακέραιοι a_1 και b_1 , έτσι ώστε $a_1 + b_1 = |T_{w_i}|$ και το υπόδεντρο T_{w_i} να βρίσκεται στα $S_{a-a_1+1..a, b-b_1+1..b}$, με την κορυφή w_i στο σημείο p , $p \in S_{a-a_1+1..a, b-b_1+1..b}$. Επίσης, από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει ένα $q \in \mathcal{P}(a - a_1, b - b_1, i - 1)$. Άρα, επειδή η ακμή που συνδέει το p και το q είναι ανερχόμενη, από τον ορισμό της αναδρομικής σχέσης έχουμε ότι $p \in \mathcal{P}(a, b, i)$.

Για $i = m$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια ανερχόμενη εμφύτευση του T στο S , τέτοια ώστε η s και η t να βρίσκονται στο $b(S)$ και στο $t(S)$, αντίστοιχα, αν και μόνο αν $\mathcal{P}(|L|, |R|, m)$ είναι μη-κενό. Παρατηρούμε ότι αν $\mathcal{P}(|L|, |R|, m) \neq \emptyset$, τότε πρέπει να ισχύει ότι $\mathcal{P}(|L|, |R|, m) = \{t(S)\}$. \square

Οι τιμές $\mathcal{P}(a, b, k)$, όταν $0 \leq a \leq |L|$, $0 \leq b \leq |R|$, $1 \leq k \leq m$ υπολογίζονται από τον Αλγόριθμο 5.

Θεώρημα 8. Έστω T είναι ένα κατευθυνόμενο δέντρο n κορυφών, S ένα κυρτό σύνολο n σημείων, s μια πηγή του T και t μια καταβόθρα του T . Τότε μπορούμε να αποφανθούμε σε χρόνο $O(n^5)$ αν το T επιδέχεται μια εμφύτευση στο S έτσι ώστε η s να βρίσκεται στο $b(S)$ και η t στο $t(S)$. Στην καταφατική περίπτωση, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τέτοια εμφύτευση με την ίδια χρονική πολυπλοκότητα.

Απόδειξη: Ο Αλγόριθμος 5 υπολογίζει τις τιμές $\mathcal{P}(a, b, k)$, για $0 \leq a \leq |L|$, $0 \leq b \leq |R|$, $1 \leq k \leq m$, άρα, από το Λήμμα 13, συμπεραίνουμε ότι ο Αλγόριθμος 5 αποφασίζει αν το T επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση στο S έτσι ώστε οι κορυφές s και t να βρίσκονται στις $b(S)$ και $t(S)$, αντίστοιχα.

Μια πρώτη προσέγγιση στην ανάλυση του Αλγορίθμου 5 μας δίνει την πολυπλοκότητα $O(n^7)$. Η ανάλυση αυτή προϋποθέτει ότι: (i) και τα δύο μέρη του S έχουν μέγεθος $O(n)$, (ii) το μονοπάτι από την s στο t έχει μήκος $O(n)$, (iii) κάθε δέντρο T_{w_i} έχει μέγεθος $O(n)$ και (iv) κάθε λίστα \mathcal{L} που περιέχει την λύση του προβλήματος περιορισμένης εμφύτευσης, μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n^3)$.

Βασίζόμενοι στις παρακάτω παρατηρήσεις, μπορούμε να μειώσουμε την πολυπλοκότητα στην $O(n^5)$.

- ο Μπορούμε να μειώσουμε την πολυπλοκότητα κατά έναν παράγοντα n , αν συνειδητοποιήσουμε ότι ο δυναμικός μας προγραμματισμός μπορεί να διατηρεί την λίστα $\mathcal{P}'(a, i)$, με την

Algorithm 5: TREE-UPSE(T, S, s, t)

Είσοδος : Ένα κατευθυνόμενο δέντρο T , ένα κυρτό σύνολο S , μια πηγή s και μια καταβόθρα t του T . Το μονοπάτι ($s = w_1, \dots, w_m = t$) χρησιμοποιείται για να χτιστεί προοδευτικά η εμφύτευση του T από τα υπόδεντρα T_{w_i} , $1 \leq i \leq m$.

Έξοδος : ‘ΝΑΙ’ αν το T έχει ανερχόμενη εμφύτευση στο S με την s στο $b(S)$ και την t στο $t(S)$, ‘ΟΧΙ’ διαφορετικά.

```

1. For  $a = 0 \dots |L|$ 
2.   For  $b = 0 \dots |R|$ 
3.      $\mathcal{P}(a, b, 1) = \mathcal{L}(T_{w_1}, L_{1..a}, R_{1..b})$ 
4.     For  $k = 2 \dots m$  //Θεωρούμε το  $T_{w_k}$ 
5.        $\mathcal{P}(a, b, k) = \emptyset$ 
6.       For  $i = 0 \dots |T_{w_k}|$  //Θεωρούμε την περίπτωση όπου
           //  $i$  κορυφές του  $T_{w_k}$  βρίσκονται στην
           // αριστερή μεριά του  $S$ 
7.         if ( $a - i \geq 0$ ) και ( $b - (|T_{w_k}| - i) \geq 0$ )
8.           Έστω  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(T_{w_k}, L_{a-i+1..a}, R_{b-(|T_{w_k}|-i)+1..b})$ 
9.           // Εξετάζουμε όλες τις δυνατές θέσεις της  $w_{k-1}$ 
10.          For each  $q$  στο  $\mathcal{P}(a - i, b - (|T_{w_k}| - i), k - 1)$ 
11.            //Εξετάζουμε όλες τις δυνατές θέσεις της  $w_k$ 
12.            For each  $p$  in  $\mathcal{L}$ 
13.              if ( $\{w_{i-1}, w_i\}$  που απεικονίζεται ευθύγραμμο
14.                τμήμα ( $q, p$ ) είναι ανερχόμενη )
15.                then προσθέτουμε  $p$  στην  $\mathcal{P}(a, b, k)$ .
16. if  $\mathcal{P}(|L|, |R|, m)$  είναι άδεια then return(‘ΟΧΙ’).
17. return(‘ΝΑΙ’);

```

παράμετρο μόνο για την αριστερή μεριά του συνόλου (αντίθετα με την $\mathcal{P}(a, b, i)$ που έχει παραμέτρους και για τις δύο μεριές του S). Ο αριθμός των σημείων στην δεξιά μεριά του S προκύπτει από το μέγεθος του δέντρου T_{s, w_i} . Για απλοποίηση της παρουσίασης αποφασίσαμε να χρησιμοποιήσουμε την $\mathcal{P}(a, b, i)$.

- ο Μπορούμε να μειώσουμε την πολυπλοκότητα κατά έναν παράγοντα n ακόμα, παρατηρώντας ότι η λίστα \mathcal{L} ουσιαστικά υπολογίζεται στον χρόνο $O(deg(w_i)n^2)$. Άρα, αθροίζοντας πάνω από όλα τα i έχουμε σύνολο $O(n^3)$ και όχι $O(n^4)$.

Η εμφύτευση του T στο S μπορεί εύκολα να ανακτηθεί τροποποιώντας τον Αλγόριθμο 5 έτσι ώστε να αποθηκεύεται για κάθε σημείο $p \in \mathcal{P}(a, b, k)$ ένα σημείο q , όπου τοποθετείται η κορυφή w_{i-1} , καθώς και το σύνολο σημείων όπου εμφυτεύεται το δέντρο $T_{s, w_{i-1}}$ (δηλαδή, τα δύο πάνω σημεία, στην αριστερή και στην δεξιά μεριά του S). \square

Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο 5 σε όλα τα ζεύγη \langle πηγή, καταβόθρα \rangle του T , μπορούμε να αποφασίσουμε αν το T επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση στο S , όπως μας λέει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 9. Έστω T είναι ένα κατευθυνόμενο δέντρο n κορυφών, S ένα κυρτό σύνολο n σημείων. Μπορούμε να αποφασίσουμε σε χρόνο $O(n^6)$ αν το T επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση

στο S . Επιπλέον, αν μια τέτοια εμφύτευση υπάρχει, τότε μπορεί να κατασκευαστεί μέσα στην ίδια χρονική πολυπλοκότητα.

Απόδειξη: Η απλή εφαρμογή του αλγορίθμου μας οδηγεί στην πολυπλοκότητα $O(n^7)$, επειδή μπορεί να υπάρχουν $O(n^2)$ διαφορετικά ζεύγη πηγών και καταβόθρων. Στην συνέχεια εξηγούμε πως μπορούμε να μειώσουμε την πολυπλοκότητα στο $O(n^6)$. Έστω $P_{s,t}$ είναι ένα μονοπάτι από την s στην t , που περνά σύνολο από m κορυφές και έστω t' είναι η j -στη κορυφή του $P_{s,t}$, η οποία είναι επίσης μια καταβόθρα του G . Στην διάρκεια του υπολογισμού της $\mathcal{P}(a, b, m)$ για το μονοπάτι $P_{s,t}$ υπολογίζουμε επίσης την τιμή $\mathcal{P}(a, b, j)$ και άρα μπορούμε αμέσως να απαντήσουμε αν υπάρχει μια εμφύτευση του T στο S έτσι ώστε οι s και t' να βρίσκονται στα $b(S)$ και $t(S)$, αντίστοιχα. Στη συνέχεια, θεωρούμε την καταβόθρα \tilde{t} που δεν ανήκει στο μονοπάτι $P_{s,t}$. Θεωρούμε το μονοπάτι $P_{s,\tilde{t}}$. Υποθέτουμε ότι η τελευταία κοινή κορυφή του $P_{s,t}$ και του $P_{s,\tilde{t}}$ είναι η j -στη κορυφή του $P_{s,t}$. Για να υπολογίσουμε αν υπάρχει μια εμφύτευση του T στο S έτσι ώστε s και \tilde{t} είναι στα $b(S)$ και $t(S)$, αντίστοιχα, μπορούμε να ξεκινήσουμε τους υπολογισμούς του Αλγορίθμου 5, που προσδιορίζονται από την μεταβλητή k , από την τιμή $j + 1$ (βλ. γραμμή 4 του αλγορίθμου). Άρα, για την μοναδική πηγή s και όλες τις διαφορετικές καταβόθρες η μεταβλητή k αλλάζει σύνολο n φορές. Επειδή ο αριθμός των πηγών είναι $O(n)$, καταλήγουμε στο ότι ο τροποποιημένος εδώ αλγόριθμος εκτελείται σε χρόνο $O(n^6)$. \square

2.4 Εμφύτευση Εξωεπίπεδων Κατεγραφημάτων σε Κυρτά Σύνολα Σημείων

Στην παρούσα ενότητα επεκτείνουμε το αποτέλεσμα την προηγούμενης ενότητας και παρουσιάζουμε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο, που δεδομένου ενός εξωεπίπεδου γραφήματος G και ενός κυρτού συνόλου σημείων S , αποφασίζει αν το G επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη ευθύγραμμη εμφύτευση στο S . Για την ευκολία της κατανόησης διατηρούμε τους νέους ορισμούς και την περιγραφή του αλγορίθμου όσο πιο κοντά γίνεται στην περιγραφή της προηγούμενης ενότητας.

Θεωρούμε ένα *ακυκλικό εξωεπίπεδο γράφημα* G , δηλαδή ένα γράφημα χωρίς κατευθυνόμενο κύκλο, το υποκείμενο μη-κατευθυνόμενο γράφημα του οποίου είναι ένα εξωεπίπεδο γράφημα. Μία *χωρίζουσα κορυφή* του G είναι μια κορυφή, η διαγραφή της οποίας αυξάνει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος.

Έστω c είναι μια χωρίζουσα κορυφή του G και έστω G_1, \dots, G_k είναι οι μέγιστες συνεκτικές συνιστώσες που λαμβάνουμε με την διαγραφή της c και τις προσπίπτουσες σε αυτήν ακμές. Έστω G'_i είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα που παράγεται από τις κορυφές του G_i και την κορυφή c , $i = 1, \dots, k$. Το σύνολο G'_1, \dots, G'_k των υπογραφημάτων του G ονομάζεται *τομή στην κορυφή* c . Ένα μέγιστο υπογράφημα του G , το υποκείμενο μη-κατευθυνόμενο γράφημα του οποίου είναι 2-συνδεδεμένο, ονομάζεται ένα *μπλοκ* του G . Μια κορυφή του G η οποία είναι είτε πηγή, είτε καταβόθρα αναφέρεται ως *διακόπτης*.

Οι Binucci *et al.* [12] απέδειξαν το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 14 (Binucci *et al.* [12]). *Έστω G είναι ένα ακυκλικό κατεγράφημα με n κορυφές που περιέχει έναν μη-κατευθυνόμενο κύκλο C με k κορυφές, για κάποιο $k \leq n$. Υποθέτουμε ότι ο C έχει δύο κορυφές u και v που και οι δύο είναι πηγές στον C . Τότε υπάρχει ένα κυρτό σύνολο n σημείων S τέτοιο ώστε το G να μην επιδέχεται καμία ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο S .*

Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται σε οποιοδήποτε κυρτό σύνολο σημείων και σε μπλοκ του G :

Λήμμα 15. Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο ακυκλικό κατεγροφήμα n κορυφών, έστω B είναι ένα μπλοκ του G και S ένα κυρτό σύνολο n σημείων. Αν το B περιέχει είτε δύο πηγές είτε δύο καταδόθρες τότε G δεν επιδέχεται καμία ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο S .

Απόδειξη: Εις άτοπον απαγωγή, έστω B είναι ένα μπλοκ με δύο πηγές s_1 και s_2 . Παρατηρούμε ότι τότε το μπλοκ B περιέχει και δύο καταδόθρες. Παρατηρούμε επίσης ότι σε οποιαδήποτε επίπεδη ανερχόμενη απεικόνιση του B οι κορυφές του B αποτελούν ένα μη-κυρτό σύνολο σημείων. Επειδή όμως S είναι κυρτό, και άρα οποιοδήποτε υποσύνολό του είναι επίσης κυρτό, συνεπάγεται ότι το μπλοκ B , και άρα και το γράφημα G , δεν επιδέχεται καμία ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο S . \square

Επειδή κάθε μπλοκ έχει τον ίδιο αριθμό πηγών και καταδόθρων, από το προηγούμενο λήμμα συμπεραίνουμε ότι τα μόνα γροφήματα που μπορεί να έχουν εμφύτευση που αναζητούμε είναι τα γροφήματα όπου κάθε μπλοκ έχει ακριβώς μια πηγή και μια καταδόθρα. Επειδή το σύνολο σημείων S είναι κυρτό, παρατηρούμε ότι η μόνη επίπεδη εμφύτευση του G που παρουσιάζει ενδιαφέρον για μας είναι εκείνη που έχει όλες τις κορυφές στο περίβλημα της απεικόνισης (η ονομαζόμενη *εξωεπίπεδη εμφύτευση (outerplane embedding)*). Μια εξωεπίπεδη εμφύτευση ενός μπλοκ B με μια πηγή και καταδόθρα φράσσεται από δύο μονότονα μονοπάτια, που συνδέουν την πηγή του με την καταδόθρα του και ονομάζονται *πλευρές* του B . Αν μία από τις πλευρές του αποτελείται από μοναδική ακμή, τότε το B ονομάζεται *μονόπλευρο*, αλλιώς είναι *δίπλευρο*. Μια κορυφή του B που δεν είναι διακόπτης του B ονομάζεται *πλάγια κορυφή* του B . Με $L(B)$ και $R(B)$ ονομάζουμε τα σύνολα των πλάγιων κορυφών της αριστερής και της δεξιάς πλευράς του B , αντίστοιχα. Όταν έχουμε ξεχωρίσει ένα μπλοκ B του G , με $L(G)$ (αντ. $R(G)$) συμβολίζουμε όλες τις κορυφές του συνόλου $L(B)$ (αντ. $R(B)$) ενωμένες με όλες τις κορυφές των συνιστωσών του G που γειτονεύουν με τις κορυφές του $L(B)$ (αντ. $R(B)$) και αναφέρουμε τα σύνολα $L(G)$ και $R(G)$ ως *πλευρές* του G .

Οι ακμές του G που δεν ανήκουν σε κανένα μπλοκ του θεωρούνται ως *τετριμμένα μπλοκ* του G . Έτσι, οι δύο κορυφές στις οποίες προσπίπτει μια τέτοια ακμή αποτελούν την πηγή και την καταδόθρα του αντίστοιχου τετριμμένου μπλοκ.

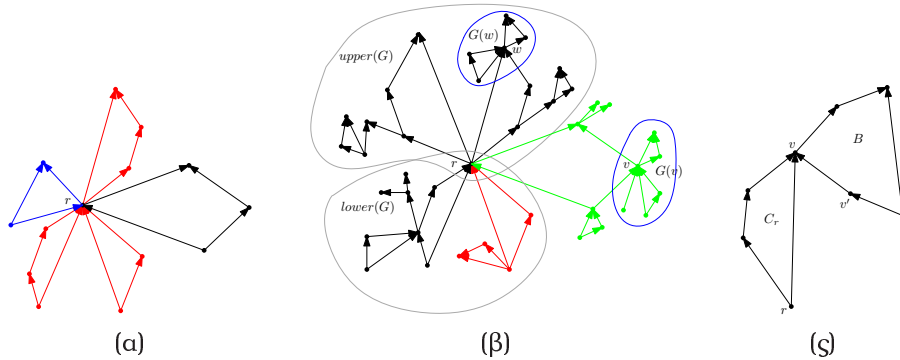
Έστω ότι η κορυφή v είναι μια χωρίζουσα κορυφή του G . Τα μπλοκ του G για τα οποία η κορυφή v είναι διακόπτης (πηγή ή καταδόθρα), ονομάζονται *οριακά μπλοκ* της v , τα υπόλοιπα μπλοκ που περιέχουν την κορυφή v ονομάζονται *πλάγια μπλοκ* της v (βλ. Εικόνα 2.20.α). Με $b^-(v)$ (αντ., $b^+(v)$) συμβολίζουμε τον αριθμό των οριακών μπλοκ της v για τα οποία η v είναι καταδόθρα (αντ., πηγή). Με $b(v)$ συμβολίζουμε το συνολικό αριθμό των οριακών μπλοκ που έχει η κορυφή v , δηλαδή, $b(v) = b^-(v) + b^+(v)$.

Λέμε ότι το γράφημα G είναι ένα *γροφήμα με ρίζα* αν μία από τις κορυφές του $r(G)$ έχει ξεχωριστεί ως η *ρίζα* του.

Έστω $G_1^l, \dots, G_{b^-(r)}^l$ και $G_1^h, \dots, G_{b^+(r)}^h$ είναι τα υπογροφήματα του G , που λαμβάνουμε παίρνοντας τομή στην r και που έχουν την r ως πηγή ή καταδόθρα, αντίστοιχα. Τα υπογροφήματα αυτά ονομάζονται *οριακά υπογροφήματα* του G (βλ. για παράδειγμα το κόκκινο υπογροφήμα στην Εικόνα 2.20.β). Τα υπογροφήματα του G , που λαμβάνουμε παίρνοντας τομή στην r και που έχουν την r ως πλάγια κορυφή του, ονομάζονται *πλάγια υπογροφήματα* του G (βλ. για παράδειγμα το πράσινο υπογροφήμα στην Εικόνα 2.20.β). Παρατηρούμε ότι οι εκθέτες ' l ' και ' h ' φανερώνουν αν το συγκεκριμένο υπογροφήμα έχει την r ως καταδόθρα ή πηγή, αντίστοιχα.

Το υπογροφήμα του G , που αποτελείται από την ρίζα του G , r , και τα υπογροφήματα $G_1^l, \dots, G_{b^-(r)}^l$, ονομάζεται *κάτω υπογροφήμα* του G . Το κάτω υπογροφήμα του G συμβολίζεται με $lower(G)$ (Εικόνα 2.20.β) και έχει την ρίζα του στην r . Παρόμοια, το υπογροφήμα του G , που αποτελείται από την r και τα υπογροφήματα $G_1^h, \dots, G_{b^+(r)}^h$, ονομάζεται *πάνω υπογροφήμα* του G και έχει επίσης

την ρίζα του στην r . Το πάνω υπογράφημα του G συμβολίζεται με $upper(G)$. Έστω ένα μπλοκ του G , που περιέχει την ρίζα του r και έστω v είναι μια κορυφή αυτού του μπλοκ διαφορετική από την r , που είναι μια χωρίζουσα κορυφή για το G . Θεωρούμε μια τομή στην v . Με $G(v)$ συμβολίζουμε την ένωση των συνεκτικών συνιστωσών που δεν περιέχουν την r (Εικόνα 2.20.β). Το υπογράφημα $G(v)$ θεωρείται ότι έχει την ρίζα της στην κορυφή v .



Εικόνα 2.20: (α) Ένα παράδειγμα του οριακού και του πλάγιου μπλοκ. Τα οριακά μπλοκ εμφανίζονται με κόκκινο. τα υπόλοιπα είναι πλάγια μπλοκ. (β) Το εξωεπίπεδο γράφημα G . Ένα οριακό και ένα πλάγιο υπογράφημα του G εμφανίζονται με κόκκινο και πράσινο, αντίστοιχα. Τα κάτω και πάνω υπογραφήματα του G είναι περικυκλωμένα με γκρι καμπύλη. Τα υπογραφήματα $G(v)$ και $G(w)$ του γραφήματος G έχουν περικυκλωθεί με μπλε καμπύλη. (γ) Απόδειξη του Λήμματος 16.

Δεδομένου δύο κορυφών s και t του G , μια κορυφή c του G ονομάζεται (s, t) -χωρίζουσα αν η διαγραφή της c αφήνει τις s και t σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες.

Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο κατεγράφημα με την πηγή (αντ. καταβόθρα) r . Το γράφημα G θα ονομάζεται *μονόπλευρο* αν και μόνο αν G επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε ένα μονομερές σύνολο σημείων μεγέθους $|G|$ έτσι ώστε η κορυφή r να βρίσκεται στο χαμηλότερο (αντ. ψηλότερο) του σημείο.

Το επόμενο θεώρημα από τους Binucci *et al.* [12] παρουσιάζει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε ένα εξωεπίπεδο γράφημα να έχει εμφύτευση σε κάθε μονομερές σύνολο σημείων, χωρίς όμως να απαιτεί κάποια συγκεκριμένη του πηγή να βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο. Για να διατυπώσουμε το θεώρημα χρειαζόμαστε τον ορισμό του *βοηθητικού δέντρου* (auxiliary tree) από [12].

Έστω $\mathcal{T}(G)$ είναι το δέντρο 2-συνδεδεμένων συνιστωσών του G . Μια κορυφή μ του βοηθητικού δέντρου $\mathcal{T}'(G)$ αντιστοιχεί σε υπόδεντρο T του $\mathcal{T}(G)$ που είναι μέγιστο ως προς την εξής ιδιότητα: μια χωρίζουσα κορυφή c που ανήκει στο T και επίσης ανήκει σε δύο μπλοκ του G είναι διακόπτης (πηγή ή καταβόθρα) και για τα δύο μπλοκ. Μια ακμή του $\mathcal{T}'(G)$ κατευθυνόμενη από την μ στην ν αντιστοιχεί σε μια χωρίζουσα κορυφή που είναι πλάγια κορυφή για το μπλοκ που αναπαρίσταται από την μ και διακόπτης για το μπλοκ που αναπαρίσταται από την κορυφή ν .

Θεώρημα 10 (Binucci *et al.* [12]). Ένα γράφημα με n κορυφές G επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε οποιοδήποτε μονομερές σύνολο n σημείων αν οι ακόλουθες συνθήκες ισχύουν:

Συνθήκη 1: Κάθε μπλοκ του G είναι μονόπλευρο.

Συνθήκη 2: Κάθε χωρίζουσα κορυφή που ανήκει σε δύο μπλοκ αποτελεί διακόπτη για τουλάχιστον ένα από αυτά.

Συνθήκη 3: Κάθε κόμβος του \mathcal{T}' έχει το πολύ μια εισερχόμενη ακμή.

Παρακάτω επεκτείνουμε το θεώρημα αυτό στην περίπτωση όπου μια δεδομένη πηγή του γραφήματος απαιτείται να βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο του συνόλου.

Λήμμα 16. *Έστω G είναι ένα ακυκλικό εξωεπίπεδο κατεγρήμα με ρίζα στην r . Το γράφημα G είναι ένα μονόπλευρο γράφημα αν και μόνο αν οι συνθήκες του Θεωρήματος 10 ισχύουν και επιπλέον η κορυφή r ανήκει στην κορυφή του $\mathcal{T}'(G)$ που δεν έχει εισερχόμενες ακμές.*

Απόδειξη: Στην απόδειξη του Θεωρήματος 10 αποδεικνύεται ότι αν η r είναι μια πηγή (αντ. καταβόθρα) του G και ανήκει σε μια κορυφή του $\mathcal{T}'(G)$ χωρίς εισερχόμενες ακμές, τότε το G επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση σε ένα μονομερές σύνολο σημείων, τέτοια ώστε η κορυφή r να βρίσκεται στο χαμηλότερο (αντ. ψηλότερο) σημείο του συνόλου. Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι αυτή είναι επίσης και αναγκαία συνθήκη.

Έστω C_r είναι το σύνολο των μπλοκ που αναπαριστώνται στο $\mathcal{T}'(G)$ από μια κορυφή και έστω $r \in C_r$. Υποθέτουμε, εις άτοπο απαγωγή, ότι η κορυφή του $\mathcal{T}'(G)$, όπου ανήκει η r , έχει τουλάχιστον μια εισερχόμενη ακμή. Τότε υπάρχει μπλοκ B στο G , το οποίο έχει μια κοινή κορυφή με το C_r , έστω την v , η οποία είναι πλάγια κορυφή του B . Έστω v' είναι μια κορυφή του B , που συνδέεται με την v με ακμή (v', v) (βλ. Εικόνα 2.20.c). Σε μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G σε ένα μονομερές σύνολο σημείων οι κορυφές του C_r πρέπει να απεικονιστούν σε σημεία που είναι ψηλότερα από το σημείο όπου βρίσκεται η κορυφή v' . Άτοπο, επειδή υποθέσαμε ότι η χαμηλότερη κορυφή της εμφύτευσης είναι η r , άρα το λήμμα έπεται. \square

Παρατηρούμε ότι η κατασκευή του βοηθητικού δέντρου $\mathcal{T}'(G)$ του γραφήματος G και έλεγχος των Συνθηκών 1-3, όσο και ο έλεγχος του αν η κορυφή r ανήκει σε μια κορυφή του $\mathcal{T}'(G)$ χωρίς εισερχόμενες ακμές, μπορεί να πραγματοποιηθεί σε χρόνο $O(|G|)$. Επιπλέον, στην απόδειξη του Θεωρήματος 10 [12] οι συγγραφείς, δεδομένου μιας πηγής (αντ. καταβόθρας) r του G με την παραπάνω ιδιότητα, παρουσιάζουν έναν αλγόριθμο με πολυπλοκότητα χρόνου $O(|G|)$, που κατασκευάζει μια ανερχόμενη εμφύτευση του G στο S με την κορυφή r να βρίσκεται στο χαμηλότερο (αντ. ψηλότερο) σημείο του S . Άρα έχουμε το εξής λήμμα.

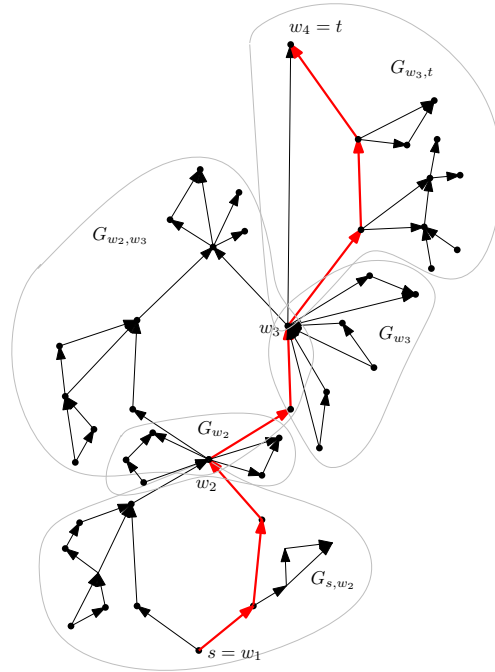
Λήμμα 17. *Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο ακυκλικό κατεγρήμα με ρίζα στην r , που είναι μια πηγή (αντ. καταβόθρα) του G . Μπορούμε να αποφασίσουμε σε χρόνο $O(|G|)$ αν το γράφημα G είναι μονόπλευρο. Αν ναι, μια ανερχόμενη εμφύτευση του G στο S έτσι ώστε η r να βρίσκεται στο χαμηλότερο (αντ. ψηλότερο) σημείο του S μπορεί να κατασκευαστεί με την ίδια χρονική πολυπλοκότητα.* \square

2.4.1 Ιδιότητες των εξωεπίπεδων γραφημάτων

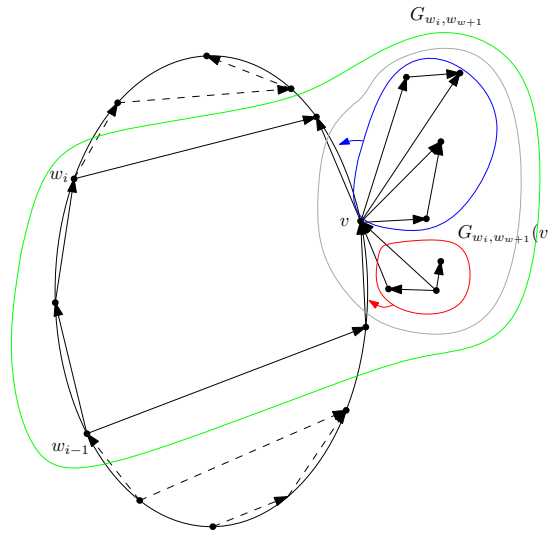
Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τις αναγκαίες συνθήκες για την δομή ενός εξωεπίπεδου γραφήματος, που επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση σε ένα κυρτό σύνολο σημείων.

Έστω S είναι ένα κυρτό σύνολο n σημείων. Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο κατεγρήμα με n κορυφές και s, t είναι μια πηγή και μια καταβόθρα του G , αντίστοιχα. Έστω $P_{s,t}$ είναι ένα μονοπάτι από την s στην t και έστω $P_{s,t}^c = (s = w_1, \dots, w_m = t)$ είναι το υποσύνολο του $P_{s,t}$ που αποτελείται μόνο από τις (s, t) -χωρίζουσες κορυφές (βλ. Εικόνα 2.21). Ονομάζουμε $P_{s,t}^c$ ένα (s, t) -χωρίζον υπομονοπάτι του $P_{s,t}$. Παρατηρούμε ότι κάθε δύο διαδοχικές κορυφές w_i, w_{i+1} του $P_{s,t}^c$ ανήκουν στο ίδιο μπλοκ του G , που μπορεί να είναι επίσης ένα τετριμμένο μπλοκ, δηλαδή, μια ακμή. Με το $G_{w_i, w_{i+1}}$ συμβολίζουμε το γράφημα που παράγεται από το μπλοκ αυτό και όλες τις κορυφές που συνδέονται με αυτό μέσω μονοπατιών που δεν περνούν ούτε από την w_i ούτε από την w_{i+1} . Θεωρούμε ότι $G_{w_i, w_{i+1}}$ έχει ως ρίζα την κορυφή w_i . Τα γραφήματα $G_{w_1, w_2}, \dots, G_{w_{m-1}, w_m}$ ονομάζονται *βασικές συνιστώσες* του G που ορίζονται από το μονοπάτι $P_{s,t}$.

Θεωρούμε την κορυφή w_i και το υπογράφημα του G που περιέχει την w_i και δημιουργείται με την διαγραφή των ακμών του G_{w_{i-1}, w_i} και του $G_{w_i, w_{i+1}}$, προσπίπτουσες στην w_i . Συμβολίζουμε το



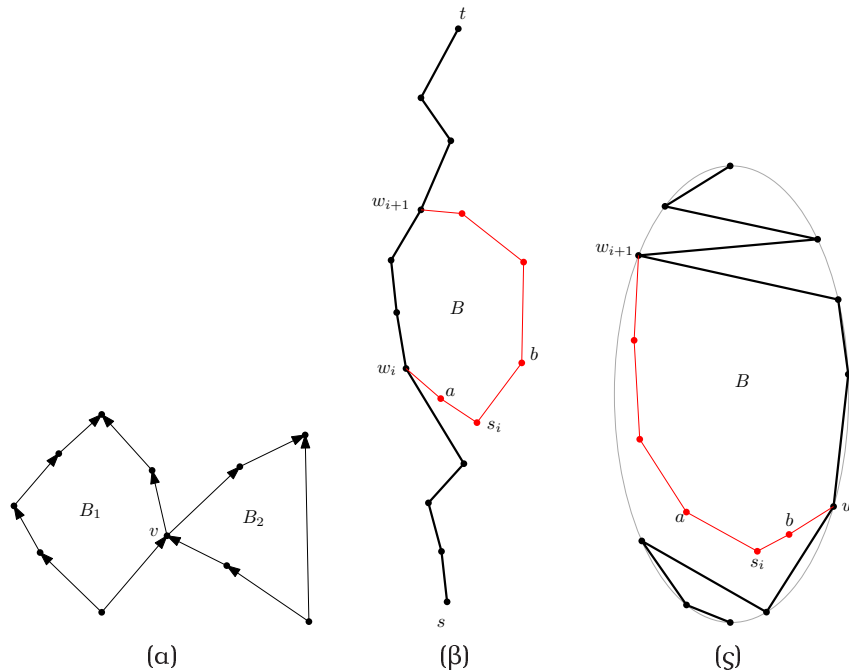
Εικόνα 2.21: Ένα μονοπάτι από την s στην t συμβολίζεται με κόκκινο. Το υπομονοπάτι $P_{s,t}^c = \{s = w_1, w_2, w_3, w_4 = t\}$ είναι οι (s, t) -χωρίζουσες κορυφές του G . Οι βασικές συνιστώσες $G_{w_i, w_{i+1}}$, $i = 1, \dots, 3$ και οι χωρίζουσες συνιστώσες G_{w_i} , $i = 1, \dots, 4$ είναι περικυκλωμένες με γκρι.



Εικόνα 2.22: Μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G_{w_{i-1}, w_i} και του μονοπατιού $P_{s,t}$ σε κάποια σημεία του S . Το μονοπάτι $P_{s,t}$ συμβολίζεται με διακεκομμένη γραμμή.

γράφημα αυτό με G_{w_i} και το ονομάζουμε *χωρίζουσα συνιστώσα* στην κορυφή w_i που ορίζεται από το μονοπάτι $P_{s,t}$. Τέλος, θέτουμε G_{s,w_i} να είναι το υπογράφημα του G που παράγεται από τις κορυφές των χωρίζουσών συνιστωσών G_{w_1}, \dots, G_{w_i} και των βασικών συνιστωσών $G_{s,w_2}, \dots, G_{w_{i-1}, w_i}$ (βλ. ξανά την Εικόνα 2.21, και επίσης την Εικόνα 2.24.a για την γενική δομή του διαχωρισμού που ορίσαμε).

Θα λέμε επίσης ότι το υπογράφημα G_{s,w_i} ορίζεται από το μονοπάτι $P_{s,t}$ και την κορυφή w_i . Από τον ορισμό, ισχύει ότι $G_{s,w_m} = G$ και ότι $G_{w_1} = G_{s,w_1}$. Το ακόλουθο λήμμα παρουσιάζει πολλές ιδιότητες του G που αποτελούν αναγκαίες συνθήκες για την δομή του G που έχει μια ανερχόμενη εμφύτευση σε ένα κυρτό σύνολο σημείων, καθώς και τις ιδιότητες μιας ανερχόμενης εμφύτευσης του G σε ένα κυρτό σύνολο σημείων.

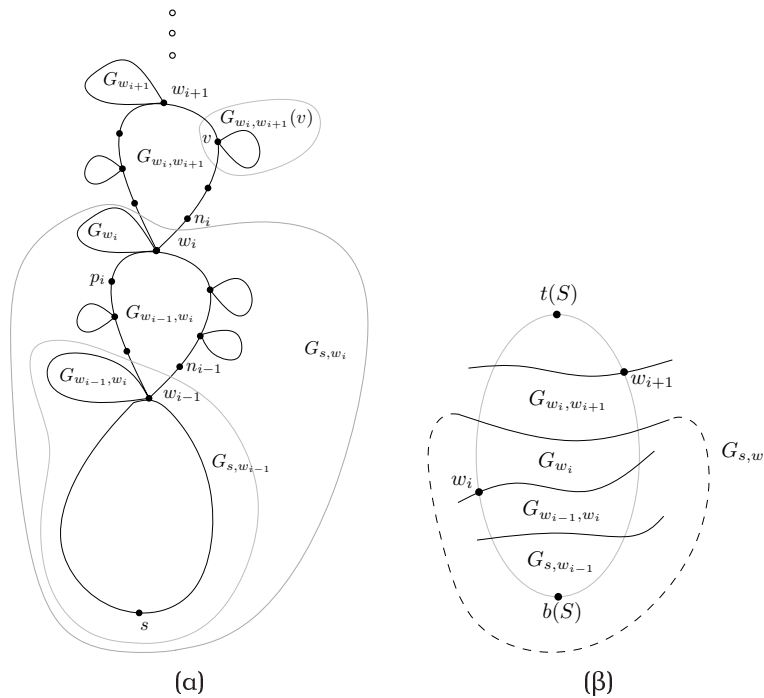


Εικόνα 2.23: Απεικόνιση της απόδειξης του Λήμματος 18. (α) Πρόταση (1). (b – c) Πρόταση 3, το μονοπάτι $P_{s,t}$ συμβολίζεται με έντονη μαύρη γραμμή.

Λήμμα 18. Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο κατεγγραφήμα n κορυφών, έστω S είναι ένα κυρτό σύνολο n σημείων και έστω Γ_G είναι μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G στο S , έτσι ώστε μια πηγή s και μια καταβόθρα t του G να βρίσκονται στα $b(S)$ και $t(S)$, αντίστοιχα. Έστω $P_{s,t}$ είναι ένα μονοπάτι από την s στην t , έστω $P_{s,t}^c = (s = w_1, \dots, w_m = t)$ είναι το (s, t) -χωρίζον υπομονοπάτι του $P_{s,t}$. Έστω $G_{w_i, w_{i+1}}$ είναι μια από τις βασικές συνιστώσες που ορίζονται από το $P_{s,t}$. Έστω B_i είναι το μπλοκ της $G_{w_i, w_{i+1}}$ που περιέχει και τις δύο w_i και w_{i+1} , και s_i, t_i είναι η πηγή και η καταβόθρα του B_i , αντίστοιχα. Έστω επίσης G_{w_i} είναι η χωρίζουσα συνιστώσα στην χωρίζουσα κορυφή w_i και έστω G_{s, w_i} είναι το υπογράφημα του G που ορίζεται από το $P_{s,t}$ και την w_i . Οι ακόλουθες προτάσεις ισχύουν για το G και για την εμφύτευση Γ_G :

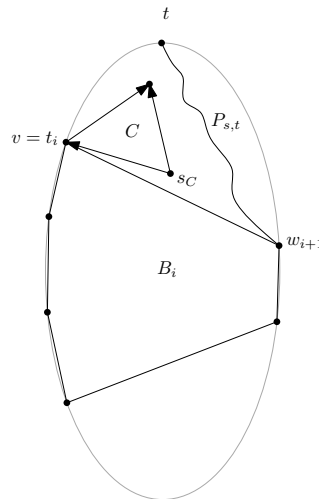
- (1) Για κάθε κορυφή v του G υπάρχει το ποθιύ ένα μπλοκ στο G που έχει την v ως μια πηγή και μια καταβόθρα του.
- (2) Έστω B' είναι ένα δίπλευρο μπλοκ του G . Οι κορυφές του $L(B')$ και $R(B')$ του μπλοκ B' στην εμφύτευση Γ_G βρίσκονται στις απέναντι πλευρές του S .
- (3) Η κορυφή w_i (αντ. w_{i+1}) του μπλοκ B_i είτε συμπίπτει με την πηγή s_i (αντ. καταβόθρα t_i) του B_i είτε γειτονεύει με αυτήν.
- (4) Αν η κορυφή w_i (αντ. w_{i+1}) του μπλοκ B_i είναι γειγονική με την πηγή s_i (αντ. καταβόθρα t_i) του B_i , τότε η s_i (αντ. t_i) βρίσκεται στην απεικόνιση Γ_G στην μεριά του S απέναντι από αυτήν που βρίσκεται η w_i (αντ. w_{i+1}).

- (5) Οι κορυφές του G_{S,w_i} στην Γ_G , $1 \leq i \leq m$, βρίσκονται στην Γ , στα συνεχόμενα σημεία του S συμπεριλαμβανομένου του $b(S)$ (βλ. Εικόνα 2.24.α-β).
- (6) Οι κορυφές του G_{w_i} στην Γ_G , $1 \leq i \leq m$, βρίσκονται σε ένα υποσύνολο του S που αποτελείται από δύο συνεχόμενα υποσύνολα του S , ένα στην αριστερή και ένα στη δεξιά μεριά του. Επιπλέον, για κάθε $u, v \in G_{S,w_i}$ έτσι ώστε οι $u \notin G_{w_i}$ και $v \in G_{w_i}$ και τέτοια ώστε, u και v να βρίσκονται στην ίδια μεριά του S , η κορυφή v βρίσκεται πάνω από την u (βλ. Εικόνα 2.24.6).
- (7) Οι κορυφές του $G_{w_i,w_{i+1}}$, $1 \leq i \leq m-1$, εκτός από τις w_i και w_{i+1} βρίσκονται στην Γ σε ένα υποσύνολο του S που αποτελείται από δύο συνεχόμενα υποσύνολα του S , ένα στην αριστερή και ένα στην δεξιά μεριά του. Επιπλέον, για κάθε $u \in G_{w_i}$, $v \in G_{w_i,w_{i+1}}$ τέτοια ώστε, οι u και v να βρίσκονται στην ίδια μεριά του S , η κορυφή v βρίσκεται πιο πάνω από την u (βλ. Εικόνα 2.24.6).



Εικόνα 2.24: (α) Η δομή του G και των G_{S,w_i} , G_{w_i} , $G_{w_i,w_{i+1}}$ (μπλε), $G_{w_i,w_{i+1}}(v)$. (β) Το Λήμμα 18.

- (8) Κάθε κορυφή $v \in B_i$, $v \neq w_i, w_{i+1}$, $G_{w_i,w_{i+1}}(v)$ έχει μόνο οριακά υπογραφήματα.
- (9) Για κάθε κορυφή $v \in B_i$, $v \neq w_i, w_{i+1}$, οι κορυφές του $G_{w_i,w_{i+1}}(v)$ βρίσκονται στην Γ_G στην ίδια μεριά του S όπου βρίσκεται η κορυφή v , σε σημεία που αποτελούν ένα συνεχόμενο υποσύνολο του S (βλ. Εικόνα 2.22).
- (10) Όλες οι κορυφές ενός πλάγιου/οριακού υπογραφήματος του G_{w_i} , $1 \leq i \leq m$, εκτός από την κορυφή w_i , βρίσκονται στην Γ_G σε συνεχόμενα σημεία μοναδικής μεριάς του S . Επιπλέον, οι κορυφές του πλάγιου υπογραφήματος του G_{w_i} βρίσκονται στην μεριά του S απέναντι από αυτήν της w_i .
- (11) Μια χωρίζουσα συνιστώσα G_{w_i} περιέχει το πολύ ένα δίπλευρο μπλοκ B , και τότε η w_i είναι πλάγια κορυφή του B . Επιπλέον, αν B' είναι ένα πλάγιο μπλοκ της w_i (μονόπλευρο ή δίπλευρο), τότε είτε $L(B') = \{w_i\}$, είτε $R(B') = \{w_i\}$, $1 \leq i \leq m$.



Εικόνα 2.25: Η απόδειξη της Πρότασης (8) του Λήμματος 18.

Απόδειξη:

(1) Εις άτοπο αναγωγή υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο μπλοκ B_1 και B_2 στο G , έτσι ώστε η κορυφή v να είναι πλάγια κορυφή και για τα δύο μπλοκ B_1 και B_2 (βλ. Εικόνα 2.23.a). Επειδή το σύνολο S είναι κυρτό, σε κάθε ανερχόμενη εμφύτευση του G στο S , τα σημεία στα οποία αντιστοιχούνται οι κορυφές του B_1 και του B_2 αποτελούν κυρτό σύνολο σημείων. Όμως, σε κάθε επίπεδη και ανερχόμενη απεικόνιση των B_1 και B_2 , έτσι ώστε όλες οι κορυφές να βρίσκονται στο περίγραμμα της απεικόνισης, η κορυφή v βρίσκεται μέσα στο κυρτό περίβλημα υπολοίπων κορυφών, άτοπο.

(2) Παρατηρούμε ότι αν B' είναι ένα δίπλευρο μπλοκ, τότε οποιαδήποτε εμφύτευση, που δεν απεικονίζει τις πλευρές $L(B')$ και $R(B')$ σε διαφορετικές μεριές του S είναι είτε μη-επίπεδη είτε μη-ανερχόμενη.

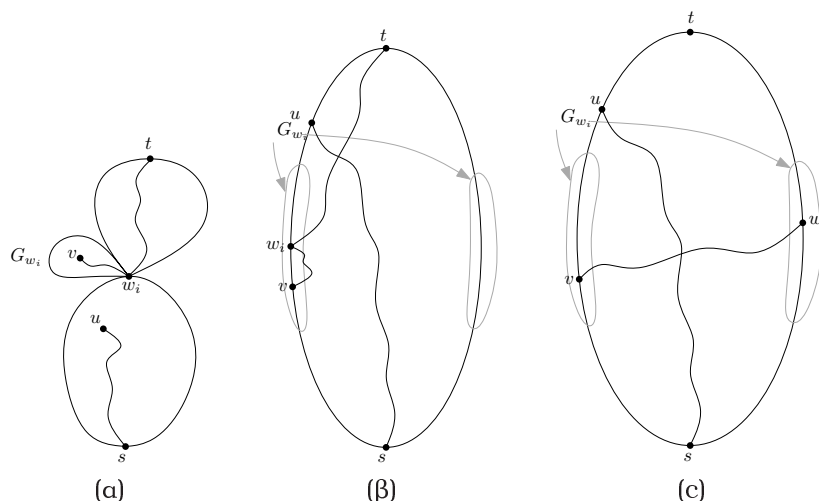
(3) Εις άτοπον απαγωγή, υποθέτουμε ότι η κορυφή w_i ούτε συμπίπτει με την s_i , ούτε γειτονεύει με αυτή (η περίπτωση για τις w_{i+1} και t_i είναι συμμετρική) (βλ. Εικόνες 2.23.b – c). Έστω a , b είναι οι κορυφές γειτονικές με την s_i . Παρατηρούμε ότι στην Γ_G , το μονοπάτι $P_{s,t}$ χωρίζει το S σε μονομερή σύνολα σημείων. Από την Πρόταση (2), οι κορυφές a και b πρέπει να βρίσκονται σε διαφορετικές μεριές του S . Άρα καταλήγουμε στο ότι υπάρχει τομή με το μονοπάτι $P_{s,t}$, δηλαδή έχουμε αντίφαση με το γεγονός ότι η Γ_G είναι μια επίπεδη εμφύτευση.

(4) Η πρόταση είναι αληθής, επειδή υπάρχει ένα μονοπάτι $P_{s,t}$ που δεν περιέχει s_i (αντ. t_i) και συνδέει w_i (αντ. w_{i+1}) με το $b(S)$ (αντ. $t(S)$).

(5) Πρώτα θα κατασκευάσουμε ένα γεννητικό δέντρο T του G με συγκεκριμένες ιδιότητες (βλ. Εικόνα 2.24.a): για κάθε (s, t) -χωρίζουσα κορυφή w_i , $1 \leq i \leq m$, το δέντρο T περιέχει ακριβώς μια κορυφή του γραφήματος G_{w_{i-1}, w_i} που γειτονεύει με την w_i και ακριβώς μια κορυφή του $G_{w_i, w_{i+1}}$ που γειτονεύει με την w_i . Για την απλοποίηση της περιγραφής ονομάζουμε T_{s, w_i} , T_{w_i} , $T_{w_i, w_{i+1}}$ τα υπόδεντρα του T που αποτελούν γεννητικά δέντρα για τα G_{s, w_i} , G_{w_i} , $G_{w_i, w_{i+1}}$, αντίστοιχα. Ονομάζουμε p_i , n_i τις κορυφές των T_{w_{i-1}, w_i} , $T_{w_i, w_{i+1}}$, αντίστοιχα, που γειτονεύουν με την w_i . Επειδή Γ_G είναι μια ανερχόμενη και επίπεδη εμφύτευση του G , συμπεραίνουμε ότι περιέχει μια ανερχόμενη και επίπεδη εμφύτευση του T , έστω Γ_T . Θεωρούμε μια τομή του T που δημιουργείται με την διαγραφή της κορυφής n_i . Ένα από τα υπόδεντρα που δημιουργείται ως αποτέλεσμα της τομής αυτής είναι το T_{s, w_i} . Από το Λήμμα 1, το υπόδεντρο T_{s, w_i} απεικονίζεται στην Γ_T σε συνεχόμενο υποσύνολο του S , επιπλέον, το υποσύνολο αυτό περιέχει το $b(S)$, επειδή από τις υποθέσεις του λήμματος η κορυφή s βρίσκεται στο $b(S)$. Επειδή, G_{s, w_i} είναι το γράφημα που παράγεται από

τις κορυφές του T_{S,w_i} συμπεραίνουμε ότι οι κορυφές του G_{S,w_i} , στην εμφύτευση Γ_G βρίσκονται σε συνεχόμενο υποσύνολο του S που περιέχει το $b(S)$.

(6) Από την προηγούμενη πρόταση, το υπογράφημα G_{S,w_i} απεικονίζεται σε ένα συνεχόμενο υποσύνολο του S που περιέχει το $b(S)$. Θεωρούμε το γεννητικό δέντρο T_{S,w_i} του G_{S,w_i} , όπως περιγράφηκε στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης. Θυμίζουμε ότι η p_i είναι η μοναδική κορυφή του G_{w_{i-1},w_i} που γειτονεύει με την w_i και ανήκει στο T_{S,w_i} . Η διαγραφή της p_i από το T_{S,w_i} δημιουργεί υπόδεντρα του T_{S,w_i} , ένα από τα οποία είναι το T_{w_i} που αποτελεί ένα γεννητικό δέντρο του G_{w_i} . Από το Λήμμα 1, συμπεραίνουμε ότι το T_{w_i} βρίσκεται στην Γ σε συνεχόμενο υποσύνολο των σημείων, όπου βρίσκεται το G_{S,w_i} και άρα, σε ένα υποσύνολο του S που αποτελείται από δύο συνεχόμενα υποσύνολα, ένα στην αριστερή και ένα στην δεξιά μεριά του S . Άρα το ίδιο ισχύει και για το G_{w_i} . Τώρα θα δείξουμε ότι αν οι κορυφές $u, v \in G_{S,w_i}$, έτσι ώστε $u \notin G_{w_i}$ και $v \in G_{w_i}$ και οι u, v βρίσκονται στην ίδια μεριά του S , τότε η v είναι πάνω από την u . Εις άτοπον απαγωγή, υποθέτουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Έστω πρώτα ότι η κορυφή w_i βρίσκεται στην ίδια μεριά με την v (Εικόνα 2.26.α-β). Άρα, επειδή η w_i είναι κορυφή του G_{w_i} , από το πρώτο μέρος της πρότασης έχουμε ότι η κορυφή u βρίσκεται πάνω από την w_i . Παρατηρούμε επίσης ότι υπάρχουν ανεξάρτητα μονοπάτια $P_{S,u}$ και $P_{w_i,t}$. Άρα το $P_{S,u}$ και $P_{w_i,t}$ τέμνονται, άτοπο. Έστω τώρα ότι η w_i βρίσκεται στην απέναντι μεριά με αυτήν της v (Εικόνα 2.26.α και Εικόνα 2.26.ε). Θεωρούμε τα ανεξάρτητα μονοπάτια $P_{w_i,v}$ και $P_{S,u}$ στο G . Αυτά τα μονοπάτια τέμνονται, και πάλι άτοπο.

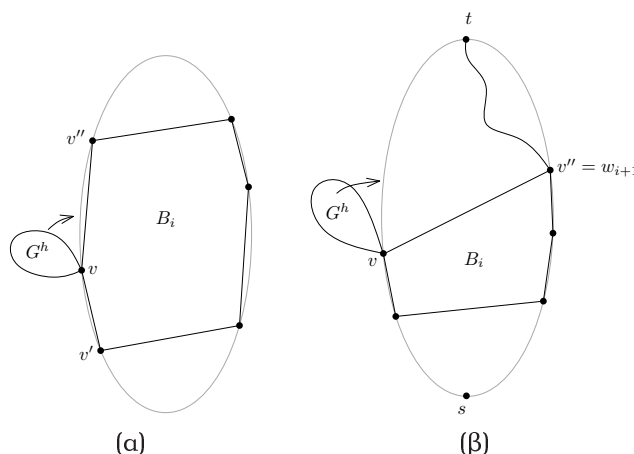


Εικόνα 2.26: (a-c) Η απόδειξη της Πρότασης (6) του Λήμματος 18.

(7) Από την Πρόταση (5), το υπογράφημα G_{S,w_i} απεικονίζεται σε ένα συνεχόμενο υποσύνολο του S που περιέχει το $b(S)$. Εφαρμόζοντας την πρόταση αυτή για το $i+1$ έχουμε ότι οι κορυφές του $G_{S,w_{i+1}}$ στην Γ_G απεικονίζονται σε ένα συνεχόμενο υποσύνολο του S που περιέχει το $b(S)$. Παρατηρούμε ότι $G_{S,w_{i+1}} = G_{S,w_i} \cup (G_{w_i,w_{i+1}} \cup G_{w_{i+1}})$. Συνεπώς, έχουμε ότι οι κορυφές της ένωσης των $G_{w_{i+1}}$ και $G_{w_i,w_{i+1}}$, εκτός από την κορυφή w_i , βρίσκονται σε ένα υποσύνολο του S που αποτελείται από ένα συνεχόμενο υποσύνολο της αριστερής και ένα συνεχόμενο υποσύνολο της δεξιάς μεριάς του S . Από την Πρόταση (6), οι κορυφές του $G_{w_{i+1}}$ επίσης είναι απεικονισμένες σε ένα υποσύνολο με ακριβώς την ίδια ιδιότητα. Άρα, έχουμε ότι και οι κορυφές του $G_{w_i,w_{i+1}}$, εκτός από τις κορυφές του w_i και w_{i+1} , βρίσκονται σε ένα υποσύνολο του S που αποτελείται από ένα συνεχόμενο υποσύνολο της αριστερής και ένα συνεχόμενο υποσύνολο της δεξιάς μεριάς του S . Έστω $u \in G_{w_i}$, $v \in G_{w_i,w_{i+1}}$. Από τον ορισμό του G_{w_i} και $G_{w_i,w_{i+1}}$ υπάρχουν δύο ανεξάρτητα μονοπάτια $P_{S,u}$ και $P_{v,t}$ στο G . Υποθέτοντας ότι οι κορυφές u και v βρίσκονται στην ίδια μεριά του S και ότι η u είναι πάνω

από την v , καταλήγουμε στο ότι τα μονοπάτια $P_{s,u}, P_{v,t}$ τέμνονται, που αποτελεί αντίφαση στην επιπεδότητα της εμφύτευσης.

(8) Θεωρούμε μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του μπλοκ B_i σε κάποια σημεία του $L \cup R$. Εισ άτοπον απαγωγή, υποθέτουμε ότι το $G_{w_i, w_{i+1}}(v)$ περιέχει ένα πλάγιο υπογράφημα και συμβολίζουμε με C το πλάγιο μπλοκ της v που περιέχεται στο $G_{w_i, w_{i+1}}(v)$. Αν η v είναι μια πλάγια κορυφή του B_i , δημιουργείται αντίφαση στην Πρόταση (1) του παρόντος λήμματος, επειδή η v αποτελεί πλάγια κορυφή για το B_i και για το C . Αλλιώς, έστω v είναι μια κορυφή-διακόπτης (πηγή ή καταθόθρα) για το μπλοκ B_i , βλ. Εικόνα 2.25. Έστω $v = t_i$, η περίπτωση $v = s_i$ είναι συμμετρική. Τότε, από την Πρόταση (3) και το γεγονός ότι $v \neq w_{i+1}$, η κορυφή t_i είναι γειτονική με την w_{i+1} . Από την Πρόταση (4), η κορυφή t_i απεικονίζεται στην μεριά του S απέναντι από την w_{i+1} . Έστω s_C είναι η πηγή του C . Σε οποιαδήποτε ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση η κορυφή s_C βρίσκεται στην μεριά του S απέναντι από την t_i και άρα στην ίδια μεριά με την κορυφή w_{i+1} . Αυτό δημιουργεί τομή μεταξύ του μπλοκ C και του μονοπατιού $P_{s,t}$. Άρα, το γράφημα $G_{w_i, w_{i+1}}(v)$ περιέχει μόνο οριακά υπογράφημα.



Εικόνα 2.27: (α-β) Απόδειξη της Πρότασης (9) του Λήμματος 18.

(9) Έστω G^h είναι ένα οριακό υπογράφημα του $G_{w_i, w_{i+1}}(v)$, έτσι ώστε v είναι η πηγή του. Η περίπτωση όπου v είναι η καταθόθρα του, είναι συμμετρική. Έστω v' και v'' είναι δύο κορυφές του B_i , οι οποίες είναι γειτονικές με την v . Υποθέτουμε πρώτα ότι και οι δύο v' και v'' βρίσκονται στην μεριά του S όπου βρίσκεται και η v (βλ. Εικόνα 2.27.α). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι η v'' βρίσκεται πάνω από την v . Τότε το G^h βρίσκεται στην ίδια μεριά του S με την κορυφή v κάτω από την v'' , αλλιώς θα υπήρχε τομή μεταξύ των G^h και B_i .

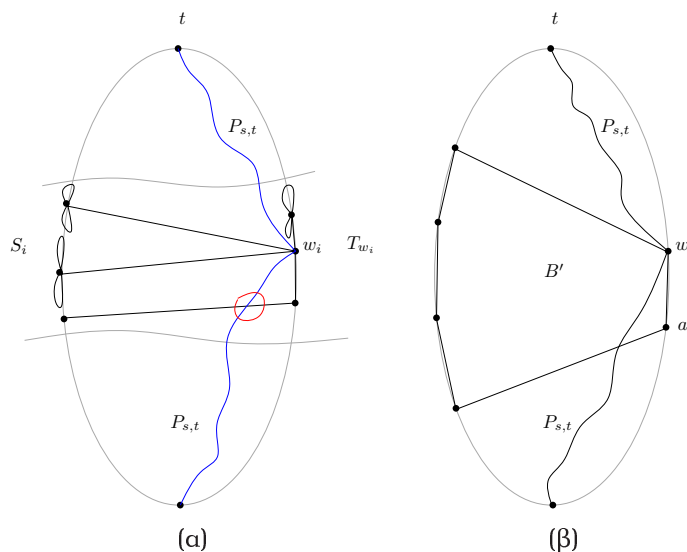
Έστω τώρα ότι η v'' βρίσκεται στην άλλη μεριά του S (βλ. Εικόνα 2.27.β). Επειδή $v \neq w_i$ και $v \neq w_{i+1}$, συμπεραίνουμε ότι η κορυφή v'' , είτε συμπίπτει με την w_i , είτε με την w_{i+1} , διαφορετικά το μονοπάτι $P_{s,t}$ τέμνει το B_i . Άρα υπάρχει μονοπάτι $P_{v'',t}$ που δεν περιέχει την v . Συνεπώς, το γράφημα G^h βρίσκεται στην ίδια μεριά με την v , διαφορετικά θα υπήρχε τομή μεταξύ των G^h και $P_{v'',t}$.

(10) Από την Πρόταση (6), οι κορυφές του G_{w_i} στην Γ_G βρίσκονται στο υποσύνολο του S , έστω S_i , που αποτελείται από δύο συνεχόμενα υποσύνολα του S , ένα στην αριστερή και ένα στην δεξιά μεριά του. Έστω T_{w_i} είναι το γεννητικό δέντρο του G_{w_i} με την εξής ιδιότητα: το T_{w_i} περιέχει μόνο μια ακμή από κάθε οριακό και πλάγιο υπογράφημά του που προσπίπτει στην w_i και έστω το T_{w_i} έχει ρίζα στην w_i . Έστω $\Gamma_{T_{w_i}}$ είναι η εμφύτευση του T_{w_i} στο S_i που προκύπτει από την εμφύτευση του G_{w_i} στο S_i . Από το Λήμμα 1, κάθε υπόδεντρο του T_{w_i} είναι απεικονισμένο σε διαδοχικά σημεία

του S_i . Επιπλέον, κάθε υπόδεντρο του T_{w_i} είναι εμφυτευμένο ολόκληρο σε μοναδική μεριά του S_i , αλλιώς οποιοδήποτε μονοπάτι $P_{s,t}$ που περνά από την w_i θα τεμνόταν με το T_{w_i} (βλ. Εικόνα 2.28.α). Έστω τώρα ότι $G_{w_i}^s$ είναι το πλάγιο υπογράφημα του G_{w_i} και B είναι το μπλοκ του $G_{w_i}^s$ που περιέχει την w_i , δηλαδή, B είναι το πλάγιο μπλοκ της w_i . Παρατηρούμε ότι όλες οι κορυφές του B πρέπει να βρίσκονται στην μεριά του S , διαφορετική από αυτή της w_i , διαφορετικά συμπεραίνουμε ότι είτε υπάρχει τομή είτε μια κοινή κορυφή με το $P_{s,t}$, τα οποία είναι αδύνατα, λόγω της επιπεδότητας της Γ_G και του ορισμού του G_{w_i} , αντίστοιχα. Άρα, όλες οι κορυφές του $G_{w_i}^s$ βρίσκονται στην μεριά του S απέναντι από την w_i .

(11) Από την Πρόταση (10), κάθε οριακό και πλάγιο υπογράφημα του G_{w_i} , εξαιρώντας την κορυφή w_i , βρίσκεται στην μοναδική μεριά του S . Θυμίζουμε ότι, από την Πρόταση (2), οι πλευρές ενός δίπλευρου μπλοκ βρίσκονται στις απέναντι μεριές του S . Άρα, το μόνο δίπλευρο μπλοκ B του G_{w_i} είναι εκείνο που περιέχει την κορυφή w_i . Εις άτοπον απαγωγή, υποθέτουμε ότι το δίπλευρο μπλοκ B βρίσκεται σε ένα οριακό υπογράφημα του G_{w_i} , άρα η w_i είναι διακόπτης του B . Όπως ήδη αναφέραμε, οι πλευρές ενός δίπλευρου μπλοκ βρίσκονται στις απέναντι μεριές του S , που αποτελεί αντίφαση στην Πρόταση (10). Άρα το B μπορεί μόνο να αποτελεί μέρος ενός πλάγιου υπογραφήματος του G_{w_i} που έχει την w_i ως πλάγια του κορυφή.

Έστω τώρα B' είναι ένα μονόπλευρο ή δίπλευρο πλάγιο μπλοκ της w_i . Εις άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι ούτε $L(B') = \{w_i\}$, ούτε $R(B') = \{w_i\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $w_i \in L(B')$ και $a \in R(B')$. Οι κορυφές w_i και a είναι συνδεδεμένες με ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από την a στην w_i (αντ. από την w_i στην a), βλ. Εικόνα 2.28.β. Παρατηρούμε ότι $a \notin P_{s,t}$, επειδή από τον ορισμό του G_{w_i} , η w_i είναι η μόνη κοινή κορυφή του μονοπατιού $P_{s,t}$ και G_{w_i} . Από την Πρόταση (2) του παρόντος λήμματος, οι κορυφές a και w_i βρίσκονται στην ίδια μεριά του S . Άρα, το μπλοκ B' τέμνει το μονοπάτι $P_{s,t}$, άτοπο. \square



Εικόνα 2.28: (α) Απόδειξη της Πρότασης (10) του Λήμματος 18. (β) Απόδειξη της Πρότασης (11) του Λήμματος 18.

2.4.2 Δύο περιορισμένα προβλήματα εμφύτευσης για τα εξωεπίπεδα γραφήματα

Στην παρούσα ενότητα μελετάμε δύο περιορισμένα προβλήματα εμφύτευσης εξωεπίπεδων γραφημάτων, που μας χρησιμεύουν στην κατασκευή του γενικού αλγόριθμου αναγνώρισης. Αντιστοιχώντας την μελέτη αυτή στα δέντρα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι η μελέτη που αντιστοιχεί στην Ενότητα 2.3.4.2.

2.4.2.1 Πρόβλημα περιορισμένης εμφύτευσης για τις χωρίζουσες συνιστώσες

Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο γράφημα, $P_{s,t}$ είναι ένα μονοπάτι στο G από μια πηγή του s σε μια καταβόθρα του t και έστω $P_{s,t}^c = \{s = w_1, \dots, w_m = t\}$ είναι το (s, t) -χωρίζον υπομονοπάτι του $P_{s,t}$. Έστω G_{w_i} είναι μια από τις χωρίζουσες συνιστώσες που ορίζονται από το μονοπάτι $P_{s,t}$. Το πρόβλημα περιορισμένης ανερχόμενης εμφύτευσης για τις χωρίζουσες συνιστώσες μελετάει τις ανερχόμενες εμφυτεύσεις σε σύνολο σημείων του γραφήματος G_{w_i} . Στο Λήμμα 18, αποδείξαμε ότι αν το γράφημα G επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση Γ_G σε ένα κυρτό σύνολο σημείων S , τότε ισχύουν τα εξής:

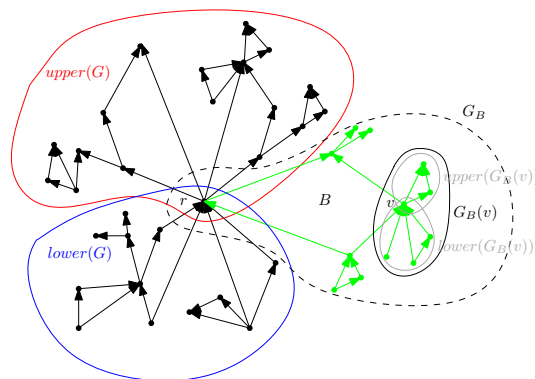
1. Οι κορυφές της χωρίζουσας συνιστώσας G_{w_i} στην εμφύτευση Γ_G , είναι απεικονισμένες σε ένα υποσύνολο του S , που αποτελείται από δύο συνεχόμενα υποσύνολα του S , ένα στην αριστερή και ένα στην δεξιά μεριά του συνόλου (Πρόταση (6)).
2. Αν το G_{w_i} περιέχει ένα πλάγιο μπλοκ B' της κορυφής w_i , τότε η w_i είναι η μοναδική πλάγια κορυφή σε μία από τις πλευρές του. Επιπλέον, το B' είναι το μοναδικό πλάγιο μπλοκ της κορυφής w_i και άρα και του G_{w_i} (Πρόταση (11)).
3. Όλες οι κορυφές ενός μοναδικού οριακού/πλάγιου υπογραφήματος της G_{w_i} , $1 \leq i \leq m$, εκτός από την κορυφή w_i , βρίσκονται στην Γ , στην ίδια μεριά του S , με τις κορυφές του πλάγιου υπογραφήματος να βρίσκονται στην μεριά του S διαφορετική από εκείνη που βρίσκεται η κορυφή w_i (Πρόταση (10)).

Λαμβάνοντας υπόψιν αυτές τις αναγκαίες συνθήκες ορίζουμε και επιλύουμε το εξής πρόβλημα.

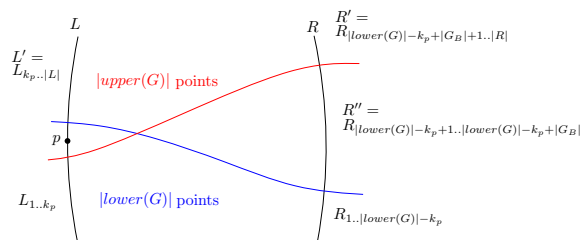
Ορισμός 3. Στο πρόβλημα περιορισμένης ανερχόμενης εμφύτευσης μιας χωρίζουσας συνιστώσας (για συντομία, RCVC-UPSE, από το αγγλικό *upward point set embedding for restricted cut-vertex component*) μας δίνεται ένα εξωεπίπεδο κατεγροφημα G με ρίζα στην r , έτσι ώστε αν η r είναι πλάγια κορυφή ενός μπλοκ B του G , τότε r είναι η μοναδική πλάγια κορυφή σε μία από τις πλευρές του B , επιπλέον το B είναι το μόνο μπλοκ του G που μπορεί να είναι δίπλευρο (βλ. Εικόνα 2.29 για ένα παράδειγμα εισόδου του παρόντος προβλήματος). Μας δίνεται επίσης ένα κυρτό σύνολο σημείων S και ένα επιλεγμένο σημείο $p_r \in S$. Ζητείται να αποφασίσουμε αν υπάρχει μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G στο S έτσι ώστε:

- (i) η ρίζα r του G να βρίσκεται στο σημείο p_r ,
- (ii) κάθε οριακό υπογράφημα του G να βρίσκεται σε συνεχόμενο υποσύνολο της μοναδικής μεριάς (είτε L , είτε R) του του S (εξαιρώντας την κορυφή r).
- (iii) όλες οι κορυφές του πλάγιου υπογραφήματος του G , εκτός από την κορυφή r , να βρίσκονται σε συνεχόμενα σημεία της πλευράς του S διαφορετικής από εκείνη που βρίσκεται η κορυφή r .

Μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση που ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες ονομάζεται **περιορισμένη εμφύτευση χωρίζουσας συνιστώσας** (για συντομογραφία, RCVC-UPSE).



Εικόνα 2.29: Μέρη του γραφήματος που μελετούνται στο Θεώρημα 11. Το υπογράφημα G_B εμφανίζεται με πράσινο και είναι περικυκλωμένο με μια διακεκομμένη καμπύλη. Το υπογράφημα $G_B(v)$ είναι περικυκλωμένο με μαύρη καμπύλη. Τα υπογραφήματα $upper(G_B(v))$ και $lower(G_B(v))$ είναι περικυκλωμένα με γκρι καμπύλη.



Εικόνα 2.30: Ο διαχωρισμός του συνόλου σημείων που περιγράφεται στο Θεώρημα 11.

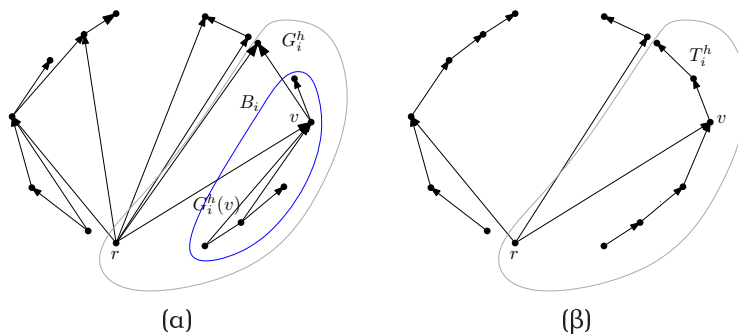
Θεώρημα 11. Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο κατεγράφημα n κορυφών, όπως περιγράφηκε παραπάνω στο περιορισμένο πρόβλημα εμφύτευσης χωρίζουσών συνιστώσων. Έστω L και R είναι ένα αριστερομερές και ένα δεξιομερές σύνολο σημείων, αντίστοιχα, έτσι ώστε το $S = L \cup R$ να αποτελεί ένα κυρτό σύνολο n σημείων, και έστω p_r είναι ένα σημείο του S . Το πρόβλημα περιορισμένης ανερχόμενης επίπεδης εμφύτευσης για χωρίζουσες συνιστώσες με είσοδο G , S και p_r μπορεί να αποφανθεί σε χρόνο $O(b(r)|G|)$. Στην καταφατική περίπτωση, μια τέτοια εμφύτευση μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(b(r)|G|)$.

Απόδειξη:

Έστω G , με την ρίζα στην r , όπως περιγράφηκε στο πρόβλημα περιορισμένης εμφύτευσης χωρίζουσας συνιστώσας. Θυμίζουμε ότι η r πρέπει να βρίσκεται σε προκαθορισμένο σημείο p_r . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $p_r \in L$ και θέτουμε το p_r να είναι το k_p -στο σημείο του L . Το γράφημα G έχει το πολύ ένα μπλοκ, B , που έχει την r ως μια πλάγια κορυφή του. Έστω G_B είναι το πλάγιο υπογράφημα του G που περιέχει το B (βλ. Εικόνα 2.29). Από τις απαιτήσεις του προβλήματος, οι κορυφές του G_B , πρέπει να βρίσκονται σε συνεχόμενα σημεία του S , στην πλευρά του S διαφορετική από αυτήν που περιέχει την κορυφή r . Θυμίζουμε ότι όλες οι κορυφές ενός μοναδικού οριακού υπογραφήματος του G πρέπει να βρίσκονται σε συνεχόμενα σημεία της μοναδικής πλευράς S . Άρα, συμπεραίνουμε ότι οι κορυφές του $lower(G)$ πρέπει να βρίσκονται σε υποσύνολο του S που αποτελείται από εξής υποσύνολα του S : όλα τα σημεία του L κάτω από το p_r , δηλαδή το σύνολο σημείων $L_{1..k_p}$ και τα $|lower(G)| - k_p$ χαμηλότερα σημεία του R , δηλαδή τα σημεία $R_{1..|lower(G)|-k_p}$ (βλ. Εικόνα 2.30). Οι κορυφές του G_B πρέπει να βρίσκονται

στο $\{p_r\} \cup R_{|lower(G)|-k_p+1..|lower(G)|-k_p+|G_B|}$. Τέλος, οι κορυφές του $upper(G)$ πρέπει να βρίσκονται στο σύνολο σημείων $L_{k_p..|L|} \cup R_{|lower(G)|-k_p+|G_B|+1..|R|}$. Συμβολίζουμε το σύνολο $L_{k_p..|L|}$ με L' , το σύνολο $R_{|lower(G)|-k_p+|G_B|+1..|R|}$ με R' και το σύνολο $R_{|lower(G)|-k_p+1..|lower(G)|-k_p+|G_B|}$ με R'' . Πρώτα θα δείξουμε πως μπορούμε να αποφασίσουμε για την ύπαρξη μιας περιορισμένης εμφύτευσης χωρίζουσας συνιστώσας μόνο για το υπογράφημα $upper(G)$ στο αντίστοιχό του σύνολο σημείων $L' \cup R'$. Παρατηρούμε ότι η απόφαση για το $lower(G)$ και το αντίστοιχό του σύνολο σημείων $L_{1..k_p} \cup R_{1..|lower(G)|-k_p}$ είναι συμμετρική.

Θα κατασκευάσουμε ένα δέντρο $T_{upper(G)}$, το ονομαζόμενο *ανερχόμενο σκελετό* του $upper(G)$, και θα αποδείξουμε ότι, το γράφημα $upper(G)$ έχει μια περιορισμένη εμφύτευση χωρίζουσας συνιστώσας στο σύνολο $L' \cup R'$, με την κορυφή r να βρίσκεται στο p_r , αν και μόνο αν το $T_{upper(G)}$ έχει μια περιορισμένη εμφύτευση στο $L' \cup R'$, με την κορυφή r να βρίσκεται p_r (για τον ορισμό περιορισμένης εμφύτευσης για τα δέντρα βλ. Ενότητα 2.3.4.2). Έστω $G_1^h, \dots, G_{b^+(r)}^h$ είναι τα οριακά υπογραφήματα του $upper(G)$, βλ. Εικόνα 2.31.α. Το δέντρο $T_{upper(G)}$ θα αποτελείται από την ρίζα r και τα υπόδεντρα $T_1^h, \dots, T_{b^+(r)}^h$, με τις ρίζες στις κορυφές $r_1, \dots, r_{b^+(r)}$, αντίστοιχα, που είναι συνδεδεμένες με την κορυφή r μέσω των ακμών (r, r_i) , $1 \leq i \leq b^+(r)$, αντίστοιχα (βλ. Εικόνα 2.31.β). Θεωρούμε το G_i^h και συμβολίζουμε με B_i το οριακό μπλοκ του r που περιέχεται στο G_i^h . Παρατηρούμε ότι το B_i μπορεί να είναι ένα τετριμμένο μπλοκ, όμως B_i είναι απαραίτητα ένα μονόπλευρο μπλοκ, λόγω της συνθήκης του λήμματος. Άρα η r και η καταβόθρα του B_i πρέπει να είναι γειτονικές κορυφές. Έστω v είναι η κορυφή του B_i , γειτονική με την r , διαφορετική από την καταβόθρα του B_i , εάν υπάρχει, διαφορετικά θέτουμε την v να είναι η καταβόθρα του B_i . Θεωρούμε το γράφημα $G_i^h(v)$ (βλ. Εικόνα 2.31.α, $G_i^h(v)$ συμβολίζεται με μπλε καμπύλη). Το δέντρο T_i^h αποτελείται από την ρίζα του r_i , ένα μονότονο μονοπάτι μήκους $|lower(G_i^h(v))| - 1$, που έχει την r_i ως μοναδική του καταβόθρα και ένα μονότονο μονοπάτι μήκους $|G_i^h| - |lower(G_i^h(v))| - 1$, που έχει την r_i ως την μοναδική του πηγή.



Εικόνα 2.31: (α) Το γράφημα $upper(G)$, τα οριακά του υπογραφήματα G_i^h και το υπογράφημα $G_i^h(v)$. (β) Ο ανερχόμενος σκελετός του $upper(G)$. Το υπογράφημα $lower(G_i^h(v))$ αντικαθίσταται με ένα μονότονο μονοπάτι μήκους $|lower(G_i^h(v))| - 1$.

Λήμμα 19. Το εξωεπίπεδο γράφημα $upper(G)$ με ρίζα στην r επιδέχεται μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση χωρίζουσας συνιστώσας στο σύνολο $L' \cup R'$ με την r στο σημείο p_r αν και μόνο αν κάθε οριακό υπογράφημα του $upper(G)$, με την ρίζα στο r , είναι μονόπλευρο και ο ανερχόμενος σκελετός $T_{upper(G)}$ του $upper(G)$ επιδέχεται μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση στο $L' \cup R'$ με την r στο σημείο p_r .

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το $upper(G)$, με ρίζα στην r , επιδέχεται μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση χωρίζουσας συνιστώσας στο $L' \cup R'$ με την κορυφή r να βρίσκεται στο σημείο p_r . Έστω Γ είναι μια τέτοια εμφύτευση. Θα τροποποιήσουμε την εμφύτευση αυτή, κατασκευάζοντας την

περιορισμένη εμφύτευση του δέντρου $T_{upper(G)}$ στο σύνολο $L' \cup R'$. Θεωρούμε τα υπογράφημα G_i^h , $i = 1, \dots, b^+(r)$. Επειδή η Γ είναι μια **περιορισμένη** εμφύτευση, το υπογράφημα G_i^h (εκτός από την κορυφή r) χρησιμοποιεί τα συνεχόμενα σημεία του $L' \cup R'$. Έστω v είναι η κορυφή του B_i , γειτονική με την r , διαφορετική από την καταβόθρα του B_i , αν υπάρχει, αλλιώς έστω v να είναι η καταβόθρα του B_i . Συγκεντρωνόμαστε στο γράφημα $G_i^h(v)$. Στο υπόδεντρο T_i^h οι κορυφές του $lower(G_i^h(v))$ έχουν αντικατασταθεί με ένα μονότονο μονοπάτι μήκους $|lower(G_i^h(v))| - 1$. Σχεδιάζουμε το μονοπάτι αυτό σε σημεία που βρίσκεται το $lower(G_i^h(v))$, χρησιμοποιώντας τα σημεία αυτά στην αύξουσα κατά την y -συντεταγμένη σειρά. Οι υπόλοιπες κορυφές του T_i^h απεικονίζονται σε σημεία όπου βρίσκονται οι κορυφές του $upper(G_i^h)$. Τώρα θεωρούμε την απεικόνιση ενός μοναδικού G_i^h , $i = 1, \dots, b^+(r)$. Το υπογράφημα G_i^h έχει την ρίζα του στην κορυφή r και η r βρίσκεται στο σημείο p_r . Έστω $S_i \cup \{p_r\}$ είναι τα σημεία του συνόλου $L' \cup R'$, όπου βρίσκεται το γράφημα G_i^h . Θεωρούμε ένα φανταστικό σημείο p_i κάτω από τα σημεία του S_i έτσι ώστε το $S_i \cup \{p_i\}$ να αποτελεί ένα μονομερές σύνολο σημείων. Τοποθετούμε την κορυφή r στο σημείο p_i . Παρατηρούμε ότι η καινούργια εμφύτευση του G_i^h είναι επίπεδη και ανερχόμενη. Άρα το γράφημα G_i^h είναι μονόπλευρο.

Τώρα υποθέτουμε ότι το $T_{upper(G)}$ επιδέχεται μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση στο σύνολο $L' \cup R'$ με την r να βρίσκεται στο p_r . Έστω T_i^h , $i = 1, \dots, b^+(r)$ είναι τα υπόδεντρα του $T_{upper(G)}$ με τις ρίζες στις $r_1, \dots, r_{b^+(r)}$, αντίστοιχα. Κάθε ένα από τα T_i^h , $i = 1, \dots, b^+(r)$ βρίσκεται σε συνεχόμενα σημεία του $L' \cup R'$, ονομάζουμε το σύνολο αυτό S_i . Θεωρούμε το G_i^h , $i = 1, \dots, b^+(r)$. Θυμίζουμε ότι το G_i^h είναι μονόπλευρο. Έστω $S_i \cup \{p_i\}$, όπου p_i είναι ένα φανταστικό σημείο κάτω από τα σημεία του S_i , έτσι ώστε το $S_i \cup \{p_i\}$ να είναι μονομερές. Εμφυτεύουμε το G_i^h στο $S_i \cup \{p_i\}$ έτσι ώστε η κορυφή r να βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο, δηλαδή στο p_i . Μεταφέρουμε την κορυφή r στο σημείο p_r . Παρατηρούμε ότι σε κάθε ανερχόμενη εμφύτευση του G_i^h στο $S_i \cup \{p_i\}$, η κορυφή v βρίσκεται πάνω από όλες τις κορυφές του $lower(G_i^h(v))$. Άρα, επειδή η ακμή (r, v) είναι ανερχόμενη στην εμφύτευση του T_i^h είναι επίσης ανερχόμενη στην εμφύτευση του G_i^h στο $S_i \cup \{p_i\}$, που μόλις κατασκευάσαμε. \square

Από το Λήμμα 19, το γράφημα $upper(G)$ επιδέχεται μια περιορισμένη εμφύτευση χωριζουσών συνιστωσών στο σύνολο $L' \cup R'$ αν και μόνο αν κάθε οριακό υπογράφημα του $upper(G)$, με ρίζα στην r είναι μονόπλευρο και ο ανερχόμενος σκελετός $T_{upper(G)}$ του $upper(G)$ επιδέχεται μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση στο $L' \cup R'$, με την r να βρίσκεται στο p_r . Το αν τα οριακά υπογράφημα του $upper(G)$ είναι μονόπλευρα, μπορεί να αποφανθεί σε γραμμικό χρόνο, σύμφωνα με το Λήμμα 17. Τέλος, η ύπαρξη μιας περιορισμένης εμφύτευσης του $T_{upper(G)}$ στο $L' \cup R'$ μπορεί να αποφανθεί σε χρόνο $O(b^+(r)|upper(G)|)$, χρησιμοποιώντας τον δυναμικό προγραμματισμό της Ενότητας 2.3.4 (βλ. το Θεώρημα 6).

Στη συνέχεια εξηγήσουμε πως μπορούμε να ελέγξουμε αν το πλάγιο υπογράφημα G_B του G επιδέχεται μια περιορισμένη εμφύτευση στο $\{p_r\} \cup R''$, όπου η κορυφή r βρίσκεται στο σημείο p_r . Παρατηρούμε ότι οι θέσεις των κορυφών του μπλοκ B είναι προκαθορισμένες από τα μεγέθη των οριακών υπογραφημάτων των κορυφών του B . Δηλαδή, για κάθε ακμή (v, v') του B , οι κορυφές του $lower(G_B(v'))$ και του $upper(G_B(v))$ πρέπει να βρίσκονται στα σημεία πάνω από την v και κάτω από την v' , αντίστοιχα. Έστω Γ_B είναι η εμφύτευση του μπλοκ B σε σημεία του $\{p_r\} \cup R''$, έτσι ώστε για κάθε ακμή (v, v') του B , υπάρχουν $|lower(G_B(v'))| + |upper(G_B(v))|$ ελεύθερα σημεία μεταξύ των σημείων στα οποία αντιστοιχίστηκαν οι κορυφές v και v' . Αν η Γ_B είναι ανερχόμενη και για κάθε κορυφή $v \in B$ τα γραφήματα $lower(G_B(v))$ και $upper(G_B(v))$ είναι μονόπλευρα, τότε η περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση του G_B στο $\{p_r\} \cup R''$, έτσι ώστε η κορυφή r να βρίσκεται στο p_r , μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο $O(G_B)$ από το Λήμμα 17.

Τέλος, επειδή το μέγεθος του G_B είναι φραγμένο από το $|G|$, η συνολική χρονική πολυπλοκότητα είναι $O(b^+(r)|G| + b^-(r)|G| + |G|) = O(b(r)|G|)$. \square

Παρόμοια με την περίπτωση των δέντρων, συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(G, L, R)$ το σύνολο των σημείων $p_r \in L \cup R$, τέτοιων ώστε υπάρχει μια περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση του G στο $L \cup R$, έτσι ώστε η ρίζα του G να βρίσκεται στο p_r . Το επόμενο θεώρημα έπεται άμεσα από το Θεώρημα 11, ελέγχοντας κάθε σημείο του $L \cup R$ ως πιθανό σημείο υποδοχής για την ρίζα $r(G)$.

Θεώρημα 12. Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο κατεγροφήμα με n κορυφές και ρίζα στην r , έτσι ώστε αν η r είναι μια πλάγια κορυφή για κάποιο μπλοκ B του G , τότε r είναι η μοναδική πλάγια κορυφή σε μία από τις πλευρές του B , επιπλέον, το μπλοκ B είναι το μόνο μπλοκ του G που μπορεί να είναι δίπλευρο. Έστω L και R είναι ένα αριστερομερές και ένα δεξιομερές κυρτό σύνολο σημείων, αντίστοιχα, έτσι ώστε το $L \cup R$ να αποτελεί ένα κυρτό σύνολο n σημείων. Τότε, το σύνολο $\mathcal{L}(G, L, R)$ μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(b(r)n^2)$. \square

2.4.2.2 Πρόβλημα περιορισμένης εμφύτευσης για τις βασικές συνιστώσες

Έστω πάλι ότι G είναι ένα εξωεπίπεδο κατεγροφήμα με n κορυφές και S είναι ένα κυρτό σύνολο n σημείων, $P_{s,t}$ είναι το μονοπάτι από την πηγή s στην καταβόθρα t του G και έστω $P_{s,t}^c = \{s = w_1, \dots, w_m = t\}$ είναι το (s, t) -χωρίζον υπομονοπάτι του $P_{s,t}$. Έστω $G_{w_i, w_{i+1}}$ είναι μια βασική συνιστώσα του G που ορίζεται από το $P_{s,t}$. Έστω B_i είναι το μπλοκ του $G_{w_i, w_{i+1}}$ που περιέχει τις κορυφές w_i και w_{i+1} . Αν το μπλοκ B_i είναι τετριμμένο, δηλαδή μια απλή ακμή, τότε η εμφύτευσή της ορίζεται μονοσήμαντα από τις θέσεις των κορυφών w_i και w_{i+1} . Οπότε, στην περίπτωση των δέντρων, είχαμε μόνο να ελέγξουμε αν η ακμή που συνδέει τις κορυφές w_i και w_{i+1} είναι ανερχόμενη. Στο υπόλοιπο μέρος της ενότητας αυτής υποθέτουμε ότι το μπλοκ B_i δεν είναι τετριμμένο, τότε η βασική συνιστώσα $G_{w_i, w_{i+1}}$ πιθανόν να έχει παραπάνω από μια δυνατή εμφύτευση στο αντίστοιχο σύνολο σημείων. Στη ενότητα αυτή συνοψίζουμε πώς είναι η δομή μιας τέτοιας εμφύτευσης και δίνουμε αλγόριθμο αναγνώρισης για το αν υπάρχει μια.

Θυμίζουμε πρώτα ότι σύμφωνα με το Λήμμα 18, αν το γράφημα G επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση Γ_G στο S με τις κορυφές s και t να βρίσκονται στα σημεία $b(S)$ και $t(S)$, αντίστοιχα, τότε ισχύουν τα ακόλουθα για την δομή του $G_{w_i, w_{i+1}}$ και μια ανερχόμενη εμφύτευσή του σε ένα υποσύνολο του S .

1. Η κορυφή w_i (αντ. w_{i+1}) του μπλοκ B_i είτε συμπίπτει με την πηγή s_i (αντ. καταβόθρα t_i) του B_i είτε γειτονεύει με αυτήν (Πρόταση (3)).
2. Αν η κορυφή w_i (αντ. w_{i+1}) του μπλοκ B_i γειτονεύει με την πηγή s_i (αντ. καταβόθρα t_i) του B_i , τότε η s_i (αντ. t_i) βρίσκεται στην Γ_G στην μεριά του S διαφορετική από εκείνη που βρίσκεται η κορυφή w_i (αντ. w_{i+1}) (Πρόταση (4)).
3. Οι κορυφές του $G_{w_i, w_{i+1}}$, $1 \leq i \leq m - 1$, εκτός από τις w_i και w_{i+1} βρίσκονται στην Γ_G σε ένα υποσύνολο του S , που αποτελείται από δύο συνεχόμενα υποσύνολα του S , ένα στα αριστερή και ένα στη δεξιά μεριά του (Πρόταση 7).
4. Για κάθε κορυφή $v \in B_i$, $v \neq w_i, w_{i+1}$, οι κορυφές του $G_{w_i, w_{i+1}}(v)$ βρίσκονται στην Γ_G στην ίδια μεριά του S , όπου βρίσκεται η κορυφή v στα διαδοχικά σημεία γύρω από την κορυφή v (Πρόταση 9).

Βασιζόμενοι στις παραπάνω αναγκαίες συνθήκες, ορίζουμε και επιλύουμε το ακόλουθο πρόβλημα.

Ορισμός 4. Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο κατεγροφήμα n κορυφών και έστω B είναι ένα μπλοκ του G , έστω s και t είναι μια πηγή και μια καταβόθρα του B . Έστω επίσης ότι οι w , w' είναι δεδομένες, ως μέρος της εισόδου του προβλήματος, κορυφές του B , έτσι ώστε η w (αντ. w') είτε να συμπίπτει

με την s (αντ. t) είτε να είναι γειτονική με αυτήν. Υποθέτουμε ότι το γράφημα G έχει την ρίζα στην κορυφή w . Έστω S είναι ένα κυρτό σύνολο n σημείων και έστω q, p είναι δύο προκαθορισμένα σημεία του S . Στο πρόβλημα περιορισμένης εμφύτευσης βασικών συνιστωσών (για συντομογραφία RPC-UPSE, από το αγγλικό *restricted path components upward point set embedding*) ζητείται να αποφασίσουμε αν υπάρχει μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G στο S τέτοια ώστε:

- (i) Οι κορυφές w, w' να βρίσκονται στα σημεία q, p , αντίστοιχα.
- (ii) Αν η w (αντ. w') γειτονεύει με την s (αντ. t), τότε η s (αντ. t) να βρίσκεται στην μεριά του S διαφορετική από αυτήν που βρίσκεται η w (αντ. w').
- (iii) Για κάθε κορυφή $v \in B, v \neq w, w'$, οι κορυφές του $G(v)$ να βρίσκονται στην ίδια μεριά του S , όπου βρίσκεται και η v , σε συνεχόμενα σημεία γύρω από την v .

Μια ανερχόμενη εμφύτευση του G στο S , που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες, ονομάζεται μια **περιορισμένης εμφύτευση βασικών συνιστωσών** (για συντομογραφία RPC-UPSE).

Λήμμα 20. Έστω ένα εξωεπίπεδο κατεγράφημα G , ένα μπλοκ B του G , δύο κορυφές w, w' του B , κυρτό σύνολο σημείων S και δύο σημεία q, p του $S = L \cup R$, όπως ορίστηκε παραπάνω στο πρόβλημα περιορισμένης εμφύτευσης βασικών συνιστωσών. Το πρόβλημα απόφασης της ύπαρξης μιας περιορισμένης εμφύτευσης βασικών συνιστωσών μπορεί να αποφανθεί σε χρόνο $O(|G|)$. Στην καταφατική περίπτωση, μια τέτοια εμφύτευση μπορεί να κατασκευαστεί μέσα στην ίδια χρονική πολυπλοκότητα.

Απόδειξη: Αν B είναι ένα τετριμμένο μπλοκ, τότε η εμφύτευσή του στο S καθορίζεται από τις θέσεις των w και w' , και άρα το μόνο που πρέπει να ελέγξουμε είναι αν η ακμή $\{w, w'\}$ είναι ανερχόμενη, άρα το λήμμα ισχύει. Υποθέτουμε ότι το μπλοκ B δεν είναι τετριμμένο. Θυμίζουμε ότι όταν έχει προκαθοριστεί ένα μπλοκ B του G , με $L(B)$ (αντ. $R(B)$) συμβολίζουμε όλες τις κορυφές του $L(B)$ (αντ. $R(B)$) ενωμένες με τις κορυφές του G , που είναι προσβάσιμες από μια κορυφή του $L(B)$ (αντ. $R(B)$) με μονοπάτι που δεν περνά από τις κορυφές του $B \setminus L(B)$ (αντ. $B \setminus R(B)$) και αναφερόμαστε στις $L(B)$ και $R(B)$ ως *πλευρές* του G .

Από τον ορισμό του προβλήματος περιορισμένης εμφύτευσης βασικών συνιστωσών, οι κορυφές s, t είτε συμπίπτουν με τις w, w' , είτε γειτονεύουν με αυτές, αντίστοιχα. Από την Πρόταση 2 (Λήμμα 18), σε κάθε ανερχόμενη εμφύτευση του B σε κάποια σημεία του S όλες οι κορυφές του $L(B)$ (αντ. $R(B)$) απεικονίζονται στην ίδια μεριά του S . Επίσης, στο πρόβλημα περιορισμένης εμφύτευσης βασικών συνιστωσών, εάν η κορυφή w (αντ. w') είναι γειτονική με την s (αντ. t), τότε η s (αντ. t) πρέπει να βρίσκεται στην μεριά του S , διαφορετική από αυτήν της w (αντ. w'). Επειδή γνωρίζουμε σε ποια μεριά του S βρίσκονται οι κορυφές w και w' , άρα, αν τουλάχιστον μία από τις w, w' είναι διαφορετική από τις s, t , αντίστοιχα, τότε είναι επίσης προκαθορισμένο σε ποια μεριά του S βρίσκονται οι κορυφές του $\{L(B), R(B), s, t\}$.

Βασίζόμενοι σε αυτές τις παρατηρήσεις ορίζουμε μια *πλευρική απεικόνιση* για το G . Μια πλευρική απεικόνιση για το G είναι μια συνάρτηση $M : V(G) \rightarrow \{\lambda, \rho\}$ έτσι ώστε:

1. Για κάθε κορυφή $v \in G, M(v) = \lambda$ (αντ. $M(v) = \rho$), αν η κορυφή v απεικονίζεται από την M στην αριστερή (αντ. δεξιά) μεριά του συνόλου σημείων.
2. Οι τιμές $M(w)$ και $M(w')$ είναι δεδομένες, επειδή από την είσοδο του προβλήματος γνωρίζουμε ότι οι κορυφές w και w' πρέπει να βρίσκονται στα σημεία q και p , αντίστοιχα.
3. Αν $w \neq s$ τότε $M(w) \neq M(s)$. Για κάθε κορυφή $v \in G$ που ανήκει στην ίδια με την w πλευρά του G , θέτουμε $M(v) = M(w)$, για όλες τις κορυφές της άλλης πλευράς του G θέτουμε $M(v) \neq M(w)$.

4. Αν $w' \neq t$, τότε $M(w') \neq M(t)$. Για κάθε $v \in G$ που ανήκει στην ίδια με την w' πλευρά του, θέτουμε $M(v) = M(w')$, για όλες τις κορυφές της άλλης πλευράς του G , θέτουμε $M(v) \neq M(w')$.
5. Αν $w = s$ και $w' = t$, τότε ορίζουμε να υπάρχουν δύο πλευρικές απεικονίσεις: (i) για κάθε $v \in L(G)$ θέτουμε $M_1(v) = \beta$ και για κάθε $v \in R(G)$ θέτουμε $M_1(v) = \rho$. (ii) Για κάθε $v \in L(G)$ θέτουμε $M_2(v) = \rho$ και για κάθε $v \in R(G)$ θέτουμε $M_2(v) = \beta$.

Σημειώνουμε ότι μια πλευρική απεικόνιση του G απλώς εκφράζει τις απαιτήσεις του προβλήματος περιορισμένης εμφύτευσης χωριζουσών συνιστωσών. Για την απλότητα της παρουσίασης εισάγουμε τους εξής συμβολισμούς:

$$\beta(M) := |\cup_{v \in G} (M(v) = \beta)|, \quad \rho(M) := |\cup_{v \in G} (M(v) = \rho)|.$$

Έστω ότι M είναι μια πλευρική απεικόνιση του G . Επειδή ο αριθμός των κορυφών του G , που απεικονίζεται στην αριστερή (αντ. δεξιά) μεριά του δεδομένου συνόλου σημείων πρέπει να είναι ίσος με $|L|$ (αντ. $|R|$), έχουμε την πρώτη αναγκαία συνθήκη:

$$\beta(M) = |L|, \quad \rho(M) = |R|.$$

Αν ισχύει η παραπάνω ιδιότητα, θα λέμε ότι η απεικόνιση M είναι μια *έγκυρη πλευρική απεικόνιση* του G .

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια έγκυρη πλευρική απεικόνιση για το G . Από την συνθήκη (iii) του προβλήματος περιορισμένης εμφύτευσης βασικών συνιστωσών, για κάθε κορυφή $v \in B$, το γράφημα $G(v)$ πρέπει να βρίσκεται στην ίδια με την v μεριά του S σε συνεχόμενα σημεία γύρω από την v . Άρα, και τα δύο υπογραφήματα $upper(G(v))$ και $lower(G(v))$ πρέπει να είναι μονόπλευρα. Αυτή είναι η δεύτερη αναγκαία συνθήκη.

Τέλος, θεωρούμε την ακόλουθη εμφύτευση Γ_B του B στο S : έστω v είναι μια κορυφή του B . Αντιστοιχούμε την v στην πλευρά του S που μας υποδεικνύει η M , αφήνοντας $|upper(G(v))|$ και $|lower(G(v))|$ ελεύθερα σημεία πάνω και κάτω από το σημείο όπου βρίσκεται η v . Ονομάζουμε Γ_B την εμφύτευση αυτή του B και λέμε ότι η Γ_B *έπεται από την απεικόνιση M* . Είναι ξεκάθαρο ότι η εμφύτευση του B που έπεται από την M πρέπει να είναι ανερχόμενη, αυτή είναι η τρίτη αναγκαία συνθήκη.

Στη συνέχεια συνοψίζουμε και παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο που ελέγχει τις τρεις αναγκαίες συνθήκες που περιγράψαμε και κατασκευάζουμε την περιορισμένη εμφύτευση του G στο S , αν οι συνθήκες ικανοποιούνται, δηλαδή αποδεικνύουμε ότι οι συνθήκες αυτές είναι και ικανές.

1. Ελέγχουμε αν υπάρχει μια έγκυρη πλευρική απεικόνιση M του G στο S . Αυτό μπορεί να γίνει σε χρόνο ανάλογο του μεγέθους του G .
2. Έστω Γ_B είναι η εμφύτευση του B που έπεται από την M . Ελέγχουμε αν η Γ_B είναι ανερχόμενη. Η κατασκευή της Γ_B και ο έλεγχος αυτός μπορεί να γίνει πάλι σε χρόνο ανάλογο του μεγέθους του G .
3. Για κάθε κορυφή $v \in B$, ελέγχουμε αν τα γραφήματα $upper(G(v))$ και $lower(G(v))$ είναι μονόπλευρα. Αυτό, σύμφωνα με το Λήμμα 17, μπορεί να γίνει σε χρόνο ανάλογο του μεγέθους του γραφήματος. Η κατασκευή της ζητούμενης περιορισμένης εμφύτευσης βασικών συνιστωσών του G στο S μπορεί να ολοκληρωθεί κατασκευάζοντας τις εμφυτεύσεις του $upper(G(v))$ (αντ. $lower(G(v))$) στο μονομερές σύνολο ιδίου μεγέθους, που αποτελείται από τα συνεχόμενα σημεία πάνω (αντ. κάτω) από την v , τα οποία έχουν αφεθεί ελεύθερα από τον ορισμό της

εμφύτευσης του B που έπεται από μια έγκυρη εμφύτευση. Από το Λήμμα 17 αυτό μπορεί να γίνει σε χρόνο $O(|\text{upper}(G(v))|)$ (αντ. $O(|\text{lower}(G(v))|)$).

□

Δεδομένου ενός γραφήματος G , ενός μπλοκ B του G , δύο κορυφών w, w' του B , ενός κυρτού συνόλου σημείων S και σημείων q, p του S , όπως στο πρόβλημα περιορισμένης εμφύτευσης βασικών συνιστωσών, η διαδικασία $\text{RPC-UPSE}(G, w, w', S, q, p)$ επιστρέφει *true* αν και μόνο αν υπάρχει μια περιορισμένη εμφύτευση βασικών συνιστωσών του G στο S με τις κορυφές w, w' στα σημεία q, p , αντίστοιχα.

2.4.3 Αλγόριθμος ελέγχου για τα εξωεπίπεδα γραφήματα

Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο κατεγράφημα και s, t είναι μια πηγή και μια καταβόθρα του G , αντίστοιχα. Έστω S είναι ένα κυρτό σύνολο σημείων. Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζουμε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο που ελέγχει αν το G επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο S , έτσι ώστε οι s και t να βρίσκονται στα $b(S)$ και $t(S)$, αντίστοιχα.

Έστω $P_{s,t}$ είναι ένα μονοπάτι από την s στην t και έστω $P_{s,t}^c = \{s = w_1, \dots, w_m = t\}$ είναι το (s, t) -χωρίζον υπομονοπάτι του $P_{s,t}$. Έστω $G_{w_i}, 1 \leq i \leq m$, και $G_{w_i, w_{i+1}}, 1 \leq i \leq m-1$, είναι οι χωρίζουσες συνιστώσες και οι βασικές συνιστώσες που ορίζονται από το μονοπάτι $P_{s,t}$, αντίστοιχα. Τέλος, έστω $G_{s, w_i}, 1 \leq i \leq m$, είναι τα υπογράφημα του G που ορίζονται από το $P_{s,t}$ και την w_i .

Παρόμοια με την περίπτωση των δέντρων, ο δυναμικός προγραμματισμός του Αλγορίθμου 6 διατηρεί μια λίστα σημείων $\mathcal{P}(a, b, k), 0 \leq a \leq |L|, 0 \leq b \leq |R|, 1 \leq k \leq m$, έτσι ώστε:

$$p \in \mathcal{P}(a, b, k) \iff \begin{cases} G_{s, w_k} \text{ έχει μια ανερχόμενη εμφύτευση στο } S_{1..a, 1..b} \text{ με} \\ \text{τις κορυφές } s, w_k \text{ να βρίσκονται στα σημεία } b(S), p. \end{cases}$$

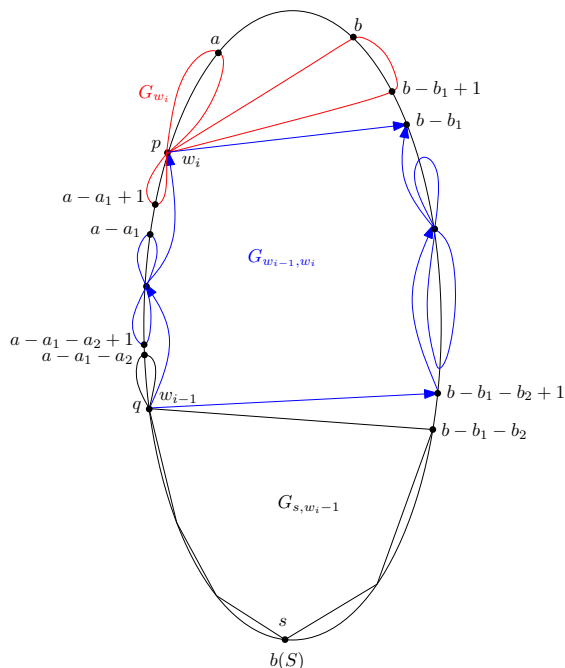
Για τις οριακές συνθήκες του δυναμικού μας προγραμματισμού θέτουμε:

$$\mathcal{P}(a, b, 1) = \mathcal{L}(G_{w_1}, L_{1..a}, R_{1..b}), \text{ όπου } a + b = |G_{w_1}|.$$

Παρατηρούμε ότι επειδή η w_1 είναι μια πηγή, η τιμή $\mathcal{P}(a, b, 1)$ είναι είτε $\{b(s)\}$ είτε \emptyset .

Υποθέτουμε ότι το υπογράφημα $G_{s, w_{i-1}}$ έχει μια ανερχόμενη εμφύτευση στο σύνολο σημείων $S_{1..a-a_1-a_2, 1..b-b_1-b_2}$ με την κορυφή w_{i-1} να βρίσκεται στο σημείο q (βλ. Εικόνα 2.32, μαύρο γράφημα). Υποθέτουμε επίσης ότι το G_{w_i} έχει μια περιορισμένη εμφύτευση χωρίζουσών συνιστωσών στο $L_{a-a_1+1..a} \cup R_{b-b_1+1..b}$, με την w_i να απεικονίζεται στο σημείο p (κόκκινο γράφημα στην Εικόνα 2.32). Τέλος, υποθέτουμε ότι το γράφημα G_{w_{i-1}, w_i} έχει μια περιορισμένη εμφύτευση βασικών συνιστωσών στο σύνολο σημείων $L_{a-a_1-a_2+1..a-a_1} \cup R_{b-b_1-b_2+1..b-b_1} \cup \{p, q\}$ (μπλέ υπογράφημα της Εικόνας 2.32). Τότε μπορούμε να συνδυάσουμε αυτές τις εμφυτεύσεις των $G_{s, w_{i-1}}, G_{w_i}$ και G_{w_{i-1}, w_i} για να δημιουργήσουμε μια εμφύτευση του G_{s, w_i} στο σύνολο σημείων $S_{1..a, 1..b}$, με τις κορυφές s και w_i να βρίσκονται στα $b(S)$ και p , αντίστοιχα. Η διαδικασία αυτή μας επιτρέπει να προσθέτουμε σημεία στο $\mathcal{P}(a, b, i)$ και περιγράφεται τυπικά από την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a, b, i) = \{p \mid & \exists a_1, b_1 \in Z : a_1 + b_1 = |G_{w_i}| \\ & \exists a_2, b_2 \in Z : a_2 + b_2 = |G_{w_{i-1}, w_i}| - 2 \\ & \text{και } p \in \mathcal{L}(G_{w_i}, L_{a-a_1+1..a}, R_{b-b_1+1..b}) \\ & \text{και } \exists q \in \mathcal{P}(a - a_1 - a_2, b - b_1 - b_2, i - 1) \\ & \text{και } \exists \text{RPC-UPSE of } G_{w_{i-1}, w_i} \text{ στο} \\ & L_{a-a_1-a_2+1..a-a_1} \cup R_{b-b_1-b_2+1..b-b_1} \cup \{p, q\} \\ & \text{όπου οι } w_{i-1} \text{ και } w_i \text{ βρίσκονται στα} \\ & q \text{ και } p, \text{ αντίστοιχα)} \end{aligned} \quad (2.6)$$



Εικόνα 2.32: Η κατασκευή μιας ανερχόμενης εμφύτευσης του G_{s,w_i} από μια ανερχόμενη εμφύτευση του $G_{s,w_{i-1}}$, μια περιορισμένη εμφύτευση βασικών συνιστωσών για το G_{w_{i-1},w_i} και μια περιορισμένη εμφύτευση χωρίζουσων συνιστωσών για το G_{w_i} . Το υπογράφημα $G_{s,w_{i-1}}$ συμβολίζεται με μαύρο, η βασική συνιστώσα G_{w_{i-1},w_i} με μπλε και η χωρίζουσα συνιστώσα G_{w_i} με κόκκινο.

Λήμμα 21. Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο κατεγρήμα n κορυφών, S είναι ένα κυρτό σύνολο n σημείων. Έστω s και t είναι μια πηγή και μια καταβόθρα του G , αντίστοιχα, έστω $P_{s,t}$ είναι ένα μονοπάτι που συνδέει τις s και t στο G , έστω $P_{s,t}^c = (s = w_1, \dots, w_m = t)$ είναι το (s, t) -χωρίζον υπομονοπάτι του $P_{s,t}$ και έστω G_{s,w_i} , $1 \leq i \leq m$ είναι τα υπογράφημα του G , που ορίζονται από το $P_{s,t}$ και w_i . Υπάρχει μια ανερχόμενη εμφύτευση του G στο S έτσι ώστε οι s και t να βρίσκονται στα $b(S)$ και $t(S)$, αντίστοιχα, αν και μόνο αν η τιμή $\mathcal{P}(|L|, |R|, m)$, υπολογισμένη από την αναδρομική σχέση (2.6), είναι μη κενή. \square

Η απόδειξη του παραπάνω λήμματος γίνεται με επαγωγή και ακολουθεί την γραμμή της απόδειξης του αντίστοιχου λήμματος για τα δέντρα, βλ. Λήμμα 13.

Ο Αλγόριθμος 6 (βλ. σελίδα 212) υπολογίζει τις τιμές $\mathcal{P}(|L|, |R|, i)$, για $1 \leq i \leq m$.

Το ακόλουθο θεώρημα ολοκληρώνει την ενότητα και αποδεικνύεται παρόμοια με το Θεώρημα 8 και το Θεώρημα 9.

Θεώρημα 13. Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο κατεγρήμα n κορυφών, S είναι ένα κυρτό σύνολο n σημείων. Έστω s και t είναι μια πηγή και μια καταβόθρα του G , αντίστοιχα. Μπορούμε να αποφασίσουμε σε χρόνο $O(n^6)$ αν το γράφημα G έχει μια ανερχόμενη εμφύτευση στο S . Επιπλέον, αν μια τέτοια εμφύτευση υπάρχει μπορεί να κατασκευαστεί μέσα στην ίδια χρονική πολυπλοκότητα. \square

Algorithm 6: OUTERPLANAR-UPSE(G, S, s, t)

Είσοδος: Ένα εξωεπίπεδο κατεγράφημα G , ένα σύνολο σημείων $S = L \cup R$, μια πηγή s και μια καταβόθρα t του G , ένα μονοπάτι $P_{s,t}$. Το μονοπάτι $P_{s,t}^c = (s = w_1, \dots, w_m = t)$ χρησιμοποιείται για να χτίσουμε προοδευτικά το γράφημα G από τα υπογραφήματα G_{w_{i-1}, w_i} , $2 \leq i \leq m$ και G_{w_i} , $1 \leq i \leq m$.

Είσοδος: ‘ΝΑΙ’ αν το G επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση στο S με την s να βρίσκεται στο $b(S)$ και την t να βρίσκεται στο $t(S)$, ‘ΟΧΙ’ διαφορετικά.

```

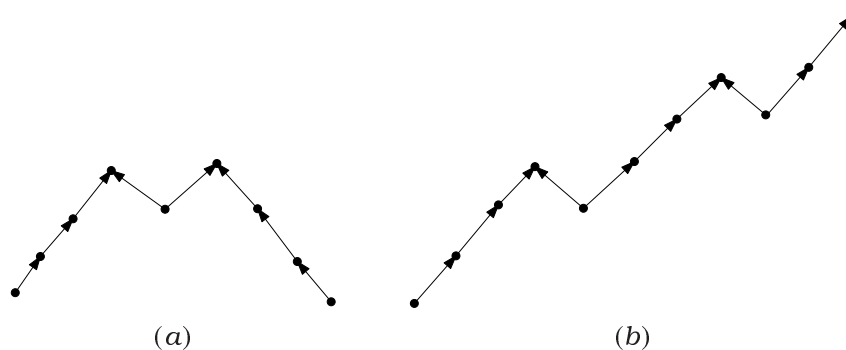
1. For  $a = 0 \dots |L|$ 
2.   For  $b = 0 \dots |R|$ 
3.      $\mathcal{P}(a, b, 1) = \mathcal{L}(G_{w_1}, L_{1..a}, R_{1..b})$ 
4.     For  $k = 2 \dots m$  //Θεωρούμε το γράφημα  $G_{w_k}$ 
5.        $\mathcal{P}(a, b, k) = \emptyset$ 
6.       For  $i = 0 \dots |G_{w_k}|$  //Οι  $i$  κορυφές του  $G_{w_k}$ 
           βρίσκονται στην αριστερή μεριά του  $S$ 
7.         if  $(a - i \geq 0)$  και  $(b - (|G_{w_k}| - i) \geq 0)$ 
8.           Έστω  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G_{w_k}, L_{a-i+1..a}, R_{b-(|G_{w_k}|-i)+1..b})$ 
9.           //Θεωρούμε όλες τις δυνατές τοποθετήσεις της
10.          //κορυφής  $w_k$ 
11.          For each  $p$  στο  $\mathcal{L}$ 
12.            Έστω  $M$  είναι μια πλευρική απεικόνιση του
13.             $G_{w_{k-1}, w_k}$ , όταν η  $w_k$  βρίσκεται στο  $p$ 
14.            και  $w_{k-1}$  βρίσκεται σε κάποιο σημείο του  $L$ .
15.            //Θεωρούμε όλες τις δυνατές τοποθετήσεις της
16.            κορυφής  $w_{k-1}$  στην αριστερή μεριά του συνόλου
17.            For each  $q$  στο
18.             $\mathcal{P}(a - i - \hat{\rho}(M), b - (|G_{w_k}| - i) - \rho(M), k - 1) \cap L$ 
19.              if RPC-UPSE( $w_{k-1}, w_k, L_{a-i-\hat{\rho}(M)+1..a-i} \cup$ 
20.                 $R_{b-(|G_{w_k}|-i)-\rho(M)+1..b-(|G_{w_k}|-i)} \cup \{p, q\}, q, p)$ 
21.                then πρόσθεσε  $p$  στο  $\mathcal{P}(a, b, k)$ .
22.            Έστω  $M$  είναι μια πλευρική απεικόνιση του
23.             $G_{w_{k-1}, w_k}$ , όταν η  $w_k$  βρίσκεται στο  $p$ 
24.            και η  $w_{k-1}$  βρίσκεται σε ένα σημείο του  $R$ .
25.            //Θεωρούμε όλες τις δυνατές τοποθετήσεις της
26.            κορυφής  $w_{k-1}$  στην δεξιά πλευρά του συνόλου
27.            For each  $q$  στο
28.             $\mathcal{P}(a - i - \hat{\rho}(M), b - (|G_{w_k}| - i) - \rho(M), k - 1) \cap R$ 
29.              if RPC-UPSE( $w_{k-1}, w_k, L_{a-i-\hat{\rho}(M)+1..a-i} \cup$ 
30.                 $R_{b-(|G_{w_k}|-i)-\rho(M)+1..b-(|G_{w_k}|-i)} \cup \{p, q\}, q, p)$ 
31.                then πρόσθεσε το  $p$  στο  $\mathcal{P}(a, b, k)$ .
32. if  $\mathcal{P}(|L|, |R|, m)$  είναι κενή then return(‘ΟΧΙ’);
33. return(‘ΝΑΙ’);

```

2.5 Εμφύτευση Προσανατολισμένου Μονοπατιού σε Γενικό Σύνολο Σημείων

2.5.1 Γνωστά αποτελέσματα και προοπτικές

Η παρούσα ενότητα είναι αφιερωμένη σε γενικά σύνολα σημείων και μια ‘απλή’ οικογένεια κατεγραφημάτων, ονομαζόμενων *προσανατολισμένων μονοπατιών* (oriented paths). Παρόλο που η δομή των προσανατολισμένων μονοπατιών είναι απλή, ελάχιστα γνωρίζουμε για την ανερχόμενη εμφυτευσιμότητά τους σε γενικά σύνολα σημείων. Πιο συγκεκριμένα, ξέρουμε ότι οι παρακάτω οικογένειες μονοπατιών πάντα επιδέχονται μια ανερχόμενη εμφύτευση σε οποιοδήποτε γενικό σύνολο σημείων :



Εικόνα 2.33: (a) Ένα προσανατολισμένο μονοπάτι με το πολύ 5 διακόπτες έτσι ώστε τουλάχιστον δύο από τα μονότονα υπομονοπάτια του έχουν μήκος δύο. (b) Προσανατολισμένο μονοπάτι $P = (v_1, \dots, v_n)$, τέτοιο ώστε η αν κορυφή v_i είναι καταβόθρα, τότε η κορυφή v_{i+1} είναι πηγή.

- (i) Προσανατολισμένα μονοπάτια με το πολύ 5 διακόπτες και τέτοια ώστε τουλάχιστον δύο από τα μονότονα υπομονοπάτια τους αποτελούνται από μια ακμή (βλ. για παράδειγμα Εικόνα 2.33.a) [4].
- (ii) Όλα τα προσανατολισμένα μονοπάτια P με 3 διακόπτες. Υποθέτουμε ότι το P περιέχει k και l κορυφές στα μονότονα υπομονοπάτια του και ότι η κοινή κορυφή των μονοπατιών αυτών είναι πηγή. Μια ανερχόμενη εμφύτευση του μονοπατιού P μπορεί να παραχθεί με τον εξής απλό τρόπο: θεωρούμε μια ευθεία που περνά από το ψηλότερο σημείο του S , που χωρίζει το S σε δύο υποσύνολα, ένα με $k - 1$ σημεία και το άλλο με $l - 1$ σημεία. Απεικονίζουμε τα μονότονα μονοπάτια στα υποσύνολα αυτά χρησιμοποιώντας τα σημεία κατά την αύξουσα y -συντεταγμένη.
- (iii) Τα προσανατολισμένα μονοπάτια $P = (v_1, \dots, v_n)$, έτσι ώστε αν η κορυφή v_i είναι μια καταβόθρα (αντ. πηγή), τότε η κορυφή v_{i+1} είναι μια πηγή (αντ. καταβόθρα) (βλ. Εικόνα 2.33.β) [12].

Από την άλλη μεριά, δεν γνωρίζουμε κανένα προσανατολισμένο μονοπάτι P και σύνολο σημείων S , έτσι ώστε το P να μην εμφυτεύεται στο S .

Πρόσφατα σχεδιάσαμε ένα πείραμα σε γενικά σύνολα σημείων, που παράγονται από ορθόγωνα πλέγματα. Έτσι, για κάθε γενικό σύνολο σημείων S , που αποτελείται από n σημεία και είναι υποσύνολο ενός $n \times n$ ορθόγωνου πλέγματος και για κάθε προσανατολισμένο μονοπάτι P με n κορυφές, ελέγξαμε αν το P επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο S , ελέγχοντας όλες

τις δυνατές απεικονίσεις από το σύνολο των κορυφών του P στο σύνολο των σημείων του S . Το πείραμά μας έδειξε ότι δεν υπάρχει κανένα αντιπαράδειγμα για $n \leq 9$.

Στη συνέχεια θα εισάγουμε έναν ισοδύναμο ορισμό αυτού του προβλήματος. Κατασκευάζουμε ένα γεωμετρικό πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα (geometric tournament) T από το σύνολο σημείων S ως εξής: Το T περιέχει $|S|$ κορυφές, που αναπαρίστανται από τα σημεία του S και $n(n-1)/2$ ακμές, που συνδέουν κάθε ζεύγος σημείων. Οι κατευθύνσεις των ακμών είναι εκείνες που δίνουν ανερχόμενες ακμές. Ονομάζουμε αυτό το γεωμετρικό γράφημα *ανερχόμενο γεωμετρικό πλήρες γράφημα* (upward geometric tournament). Συνεπώς, έχοντας το προσανατολισμένο μονοπάτι P , το ερώτημά μας γίνεται: 'Υπάρχει ένα επίπεδο αντίγραφο του P μέσα στο γράφημα T ;'.

Οι μη-κατευθυνόμενη και μη-επίπεδη εκδοχές του προβλήματος αυτού έχουν μελετηθεί αρκετά στην θεωρία γραφημάτων. Έτσι οι Newborn και Moser [77] απέδειξαν ότι κάθε απεικόνιση του πλήρους (μη-κατευθυνόμενου) γραφήματος K_n περιέχει τουλάχιστον $3/20 \cdot 10^{\lfloor n/3 \rfloor}$ επίπεδα μονοπάτια Χάμιλτον. Το αποτέλεσμα αυτό βελτιώθηκε από τον Hayward [58] στην τιμή $k3.2684^n$, όπου k είναι μια σταθερά.

Από την άλλη πλευρά, η μη-επίπεδη, αλλά κατευθυνόμενη εκδοχή του προβλήματος αυτού είναι το ακόλουθο: δεδομένου ενός πλήρες κατευθυνόμενου γραφήματος (directed tournament) T και ενός κατευθυνόμενου μονοπατιού P και τα δύο με n κορυφές, να βρεθεί αν το T περιέχει ως υπογράφημα το P . Στο πρόβλημα αφιερώθηκαν πολλές ερευνητικές εργασίες και για τις αναφορές παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην [7]. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως η Εικασία του M. Rosenfeld και απαντήθηκε καταφατικά από τον Thomason [98] για τις μεγάλες τιμές του n . Για ένα transitive tournament T , είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι πάντα περιέχει ένα αντίγραφο του P .

Τα παραπάνω μας οδήγησαν στην ακόλουθη εικασία.

Εικασία 1. Κάθε ανερχόμενο γεωμετρικό πλήρες γράφημα (upward geometric tournament) με n κορυφές περιέχει ως επίπεδο υπογράφημα κάθε προσανατολισμένο μονοπάτι n κορυφών.

2.5.2 Σύνολο σημείων μεγαλύτερο του γραφήματος

Στην ενότητα αυτή αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα εμφύτευσης ενός προσανατολισμένου μονοπατιού με n κορυφές σε σύνολα σημείων με παραπάνω από n κορυφές. Πρώτα αποδεικνύουμε ότι ένα μονοπάτι με το πολύ k διακόπτες επιδέχεται πάντοτε μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση σε ένα σύνολο $n2^{k-2}$ σημείων. Ύστερα, χρησιμοποιώντας μια διαφορετική προσέγγιση, κατεβάζουμε το πλήθος των απαραίτητων σημείων στο $O(n^2)$.

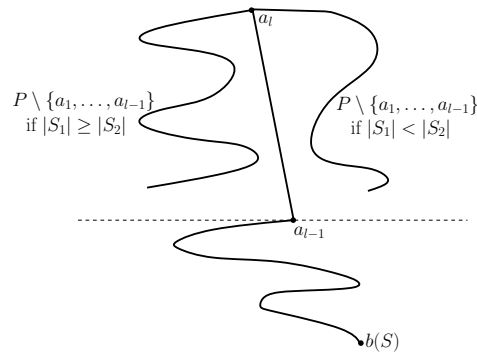
2.5.2.1 Σύνολο $n2^{k-2}$ σημείων

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 14. Κάθε προσανατολισμένο μονοπάτι n κορυφών P με k διακόπτες επιδέχεται μια ανερχόμενη ευθύγραμμη εμφύτευση σε ένα γενικό σύνολο σημείων S , με $|S| \geq n2^{k-2}$.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή στον αριθμό των διακοπών. Η επαγωγική μας υπόθεση είναι ότι μια από τις άκρες του μονοπατιού είναι απεικονισμένη είτε στο $b(S)$ είτε στο $t(S)$, εξαρτώντας από το αν η κορυφή αυτή είναι πηγή ή καταβόθρα. Η πρόταση είναι τετριμμένη για $k = 2$, επειδή στην περίπτωση αυτή το P είναι μονότονο και άρα μπορούμε να το εμφυτεύσουμε σε ένα σύνολο n σημείων.

Υποθέτουμε ότι $k > 2$. Έστω a_1 είναι η μία άκρη του P . Υποθέτουμε ότι η a_1 είναι πηγή, η περίπτωση όταν είναι καταβόθρα είναι συμμετρική. Έστω $P_a = (a_1, a_2, \dots, a_l)$ είναι το μέγιστο



Εικόνα 2.34: Η απόδειξη του Λήμματος 14.

μονότονο υπομονοπάτι του P που περιέχει την a_l . Παρατηρούμε ότι $l \geq 2$. Απεικονίζουμε $P_a \setminus \{a_l\}$ στα $|P_a| - 1$ σημεία του συνόλου S με την μικρότερη y -συντεταγμένη. Συμβολίζουμε το σύνολο αυτό με S_a . Απεικονίζουμε την κορυφή a_l στο σημείο $t(S)$. Έστω S_1 και S_2 είναι τα υποσύνολα που αποτελούνται από το $t(S)$ και τα σημεία του $S \setminus S_a$ στα αριστερά και στα δεξιά της ευθείας που περνά από τα a_{l-1} και a_l , αντίστοιχα. Αν $|S_1| \geq |S_2|$ (αν $|S_2| > |S_1|$), κατασκευάζουμε μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του $P \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}\}$ στο S_1 (αντ. στο S_2) με την a_l στο σημείο $t(S_1) = t(S)$ (αντ. στο $t(S_2) = t(S)$).

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η προκύπτουσα εμφύτευση είναι ανερχόμενη και επίπεδη. Αποδεικνύουμε ότι το μέγεθος των υποσυνόλων S_1 και S_2 είναι αρκετό για να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Το πλήθος των σημείων στο μεγαλύτερο από τα S_1 και S_2 είναι τουλάχιστον $(|S| - (l - 1))/2$. Επιπλέον, το $P \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}\}$ έχει $n - (l - 1)$ κορυφές και $k - 1$ διακόπτες. Επειδή $|S| \geq n2^{k-2}$, το μεγαλύτερο από τα S_1 και S_2 περιέχει τουλάχιστον $(n2^{k-2} - (l - 1))/2 = n2^{k-3} - (l - 1)/2 > n2^{k-3} - (l - 1)2^{k-3}$ σημεία, άρα, επειδή $k > 2$, το λήμμα έπεται. \square

2.5.2.2 Σύνολο των $O(n^2)$ σημείων

Στην παρούσα ενότητα βελτιώνουμε το αποτέλεσμα της προηγούμενης ενότητας και αποδεικνύουμε ότι $O(n^2)$ σημεία είναι αρκετά για να εμφυτεύσουμε ένα προσανατολισμένο μονοπάτι n σημείων. Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $y(p)$ όταν αναφερόμαστε στη y -συντεταγμένη του σημείου p . Με $p(v)$ θα συμβολίζουμε το σημείο όπου έχει απεικονιστεί η κορυφή v . Ένα σημείο θα ονομάζεται ελεύθερο σημείο του S αν καμία κορυφή του μονοπατιού P δεν έχει απεικονιστεί σε αυτό.

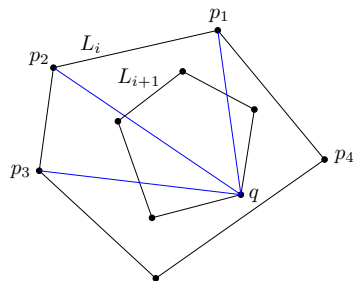
Θεωρούμε το σύνολο σημείων S και το κυρτό του περίβλημα $H(S)$. Έστω $L_1 = S \setminus H(S)$, $L_2 = L_1 \setminus H(S_1)$, \dots , $L_m = L_{m-1} \setminus H(S_{m-1})$. Αν $m + 1$ είναι ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε $L_{m+1} = \emptyset$, λέμε ότι το S είναι m -κυρτό σύνολο σημείων. Τα σύνολα L_1, \dots, L_m ονομάζονται στρώματα του S . Τα στρώματα L_i και L_{i+1} ονομάζονται διαδοχικά στρώματα του S . Έστω p και q είναι τα σημεία των L_i και L_{i+1} , αντίστοιχα. Λέμε ότι το σημείο p είναι ορατό από το q (ή αντιστρόφως) αν το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{p, q}$ δεν τέμνει το πολύγωνο με τις κορυφές στα σημεία L_{i+1} (βλ. Εικόνα 2.35).

Το ακόλουθο απλό λήμμα αποτελεί την βασική ιδέα της απόδειξης.

Λήμμα 22. Έστω S είναι ένα γενικό σύνολο $n^2 - n$ σημείων. Αν το S δεν περιέχει κανένα κυρτό υποσύνολο n σημείων, τότε το S περιέχει τουλάχιστον n στρώματα. \square

Το ακόλουθο λήμμα αποτελεί εργαλείο για την απόδειξη του θεωρήματος.

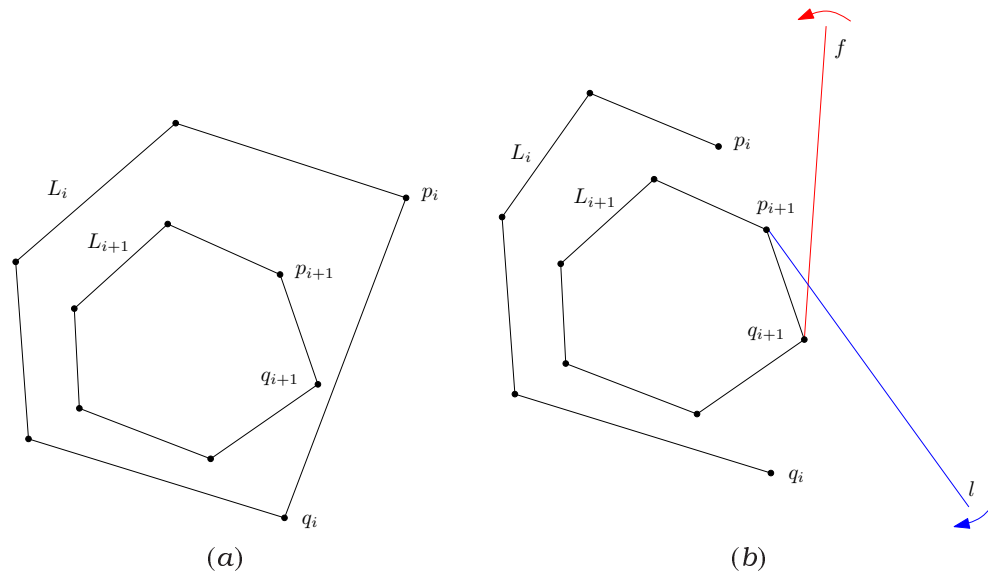
Λήμμα 23. Έστω S είναι ένα γενικό σύνολο με m στρώματα L_1, \dots, L_m . Έστω p_i, q_i είναι δύο διαδοχικά σημεία του στρώματος L_i και p_{i+1}, q_{i+1} είναι δύο διαδοχικά σημεία του στρώματος L_{i+1} ,



Εικόνα 2.35: Τα σημεία $p_1 - p_3$ δεν είναι ορατά από το q , ενώ το σημείο p_4 είναι ορατό.

έτσι ώστε $y(q_i) < (q_{i+1}) < y(p_{i+1}) < y(p_i)$. Επίσης, τα σημεία p_i, q_i και p_{i+1}, q_{i+1} βρίσκονται στην δεξιά μεριά του L_i και του L_{i+1} , αντίστοιχα. Τότε ισχύει τουλάχιστον μία από τις επόμενες προτάσεις: (α) το σημείο p_i είναι ορατό από το q_{i+1} , (β) το σημείο q_i είναι ορατό από το p_{i+1} .

Απόδειξη: Η Εικόνα 2.36.α περιγράφει την απόδειξη. Εις άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι και οι δύο προτάσεις (α) και (β) είναι λανθασμένες, δηλαδή ούτε το σημείο p_i είναι ορατό από το q_{i+1} , ούτε το q_i είναι ορατό από το p_{i+1} . Περιστρέφουμε μια ευθεία l κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού γύρω από το σημείο p_{i+1} , ξεκινώντας από την οριζόντια θέση, βλ. Εικόνα 2.36.β. Η ευθεία l εντοπίζει το σημείο q_{i+1} πριν το σημείο q_i , επειδή το q_i δεν είναι ορατό από το p_{i+1} . Παρόμοια, περιστρέφουμε μια ευθεία f , αντίστροφα της φοράς των δεικτών του ρολογιού γύρω από το q_{i+1} , ξεκινώντας από την οριζόντια θέση. Η ευθεία f εντοπίζει το σημείο p_i μετά το σημείο p_{i+1} . Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία q_{i+1} και p_{i+1} βρίσκονται στο κυρτό σύνολο L_i , άτοπο. □



Εικόνα 2.36: (α) Το σημείο p_i είναι ορατό από το q_{i+1} , ενώ το σημείο q_i δεν είναι ορατό από το p_{i+1} . (β) Απόδειξη του Λήμματος 23. Τα σημεία q_{i+1} και p_{i+1} είναι στο κυρτό σύνολο L_i .

Θεώρημα 15. Έστω S είναι ένα γενικό σύνολο $n^2 - n$ σημείων και έστω P είναι ένα προσανατολισμένο μονοπάτι n κορυφών. Το P επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στα σημεία του S .

Απόδειξη: Αν το S περιέχει ένα κυρτό υποσύνολο n σημείων S' , τότε από το Θεώρημα 7 των Binucci *et. al.* [12] (βλ. επίσης Θεώρημα 2), το μονοπάτι P επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση στο υποσύνολο S' και άρα στο σύνολο S . Διαφορετικά, από το Λήμμα 22, το S περιέχει τουλάχιστον n στρώματα. Συμβολίζουμε τα n από τα στρώματα αυτά με L_1, L_2, \dots, L_n , έτσι ώστε L_1 να είναι το εξωτερικό στρώμα, ενώ τα L_i, L_{i+1} να είναι δύο διαδοχικά στρώματα $i = 1, \dots, n - 1$. Έστω $V(P) = \{v_1, \dots, v_n\}$ είναι το σύνολο των κορυφών του P , όπου οι κορυφές δίνονται με την σειρά της εμφάνισής τους στο μονοπάτι P .

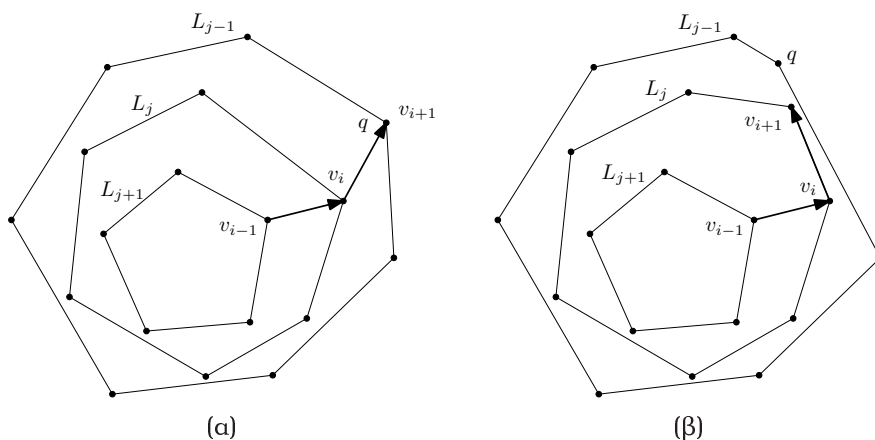
Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή. Αν η πρώτη ακμή του P είναι (v_1, v_2) τοποθετούμε την v_1 στο $t(L_n)$ και την v_2 στο $t(L_{n-1})$. Παρατηρούμε ότι το σημείο $t(L_{n-1})$ είναι πάντα ορατό από το $t(L_n)$. Η περίπτωση όταν η ακμή (v_2, v_1) είναι μέρος του P είναι συμμετρική. Δηλαδή τοποθετούμε την v_1 στο $b(L_n)$ και την v_2 στο $b(L_{n-1})$. Κατά την διάρκεια της απόδειξης, αν η κορυφή v_i βρίσκεται στη δεξιά (αριστερή) μεριά του L_j , τότε προσπαθούμε να τοποθετήσουμε την κορυφή v_{i+1} στη δεξιά (αριστερή) μεριά του L_{j-1} .

Υποθέτουμε ότι μετά από τα i πρώτα βήματα έχουμε τοποθετήσει την κορυφή v_i στο στρώμα j , $j \leq n - i + 1$ και υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(R 1) Για κάθε $k < i$, εάν (v_{k-1}, v_k) είναι ακμή του P και οι δύο κορυφές v_{k-1}, v_k βρίσκονται στο ίδιο στρώμα L_f , τότε όλα τα σημεία του L_{f-1} , τα οποία είναι πάνω από το $p(v_{k-1})$, δεν είναι ορατά από το $p(v_{k-1})$.

(R 2) Για κάθε $k < i$, αν (v_k, v_{k-1}) είναι η ακμή του P και οι κορυφές v_{k-1}, v_k βρίσκονται στο ίδιο στρώμα L_f , τότε όλα τα σημεία του L_{f-1} που είναι κάτω από το σημείο $p(v_{k-1})$ δεν είναι ορατά από το $p(v_{k-1})$.

(R 3) Η εμφύτευση του υπομονοπατιού στις κορυφές $\{v_1, \dots, v_i\}$ είναι επίπεδη και ανερχόμενη.



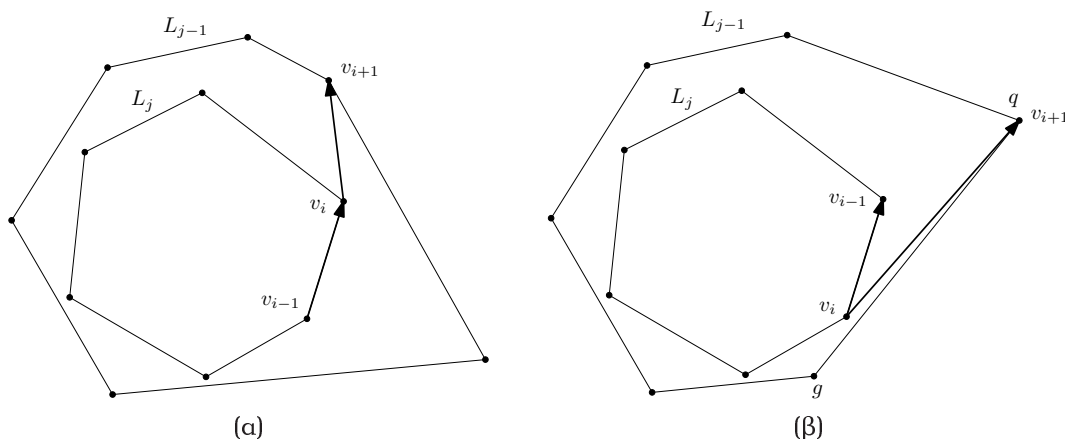
Εικόνα 2.37: Απόδειξη του Θεωρήματος 15, Περίπτωση 1.

Τοποθετούμε την κορυφή v_{i+1} . Υποθέτουμε ότι (v_i, v_{i+1}) είναι η ακμή του P , η περίπτωση της ακμής (v_{i+1}, v_i) είναι συμμετρική. Θυμίζουμε ότι η κορυφή v_i έχει απεικονιστεί στο στρώμα L_j . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η v_i έχει απεικονιστεί στην δεξιά μεριά του L_j .

Περίπτωση 1: Η κορυφή v_{i-1} έχει απεικονιστεί σε ένα σημείο του στρώματος L_{j+1} (Εικόνα 2.37).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η v_{i-1} έχει απεικονιστεί στην δεξιά μεριά του L_{j+1} . Έστω q είναι το σημείο στην δεξιά μεριά του L_{j-1} που είναι αμέσως πιο πάνω από το $p(v_i)$. Αν το q είναι ορατό από το $p(v_i)$, απεικονίζουμε στο q την κορυφή v_{i+1} (Εικόνα 2.37.α).

Εάν το σημείο q δεν είναι ορατό από το $p(v_i)$, τοποθετούμε την v_{i+1} στο σημείο του L_j , που είναι αμέσως πιο πάνω από το $p(v_i)$ στο ίδιο στρώμα (Εικόνα 2.37.β). Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα τέτοιο σημείο, διαφορετικά $p(v_i) = t(L_j)$ και άρα το $t(L_{j-1})$ είναι ορατό από το $t(L_j)$. Γνωρίζουμε επίσης, ότι το σημείο αυτό είναι ελεύθερο, επειδή η κορυφή v_{i-1} έχει απεικονιστεί σε σημείο του L_{j+1} . Παρατηρούμε επίσης ότι αν το q δεν είναι ορατό από το $p(v_i)$, τότε κανένα από τα σημεία του L_{j-1} που είναι πάνω από το $p(v_i)$ δεν είναι ορατό από αυτό. Άρα και στις δύο περιπτώσεις οι συνθήκες $\mathcal{R} 1, \mathcal{R} 2$ ισχύουν και η απεικόνιση είναι ανερχόμενη και επίπεδη (ισχύει η συνθήκη $\mathcal{R} 3$).



Εικόνα 2.38: Απόδειξη του Θεωρήματος 15, Περίπτωση 2.

Περίπτωση 2: Η κορυφή v_{i-1} έχει απεικονιστεί σε ένα σημείο του στρώματος L_j (Εικόνα 2.38).

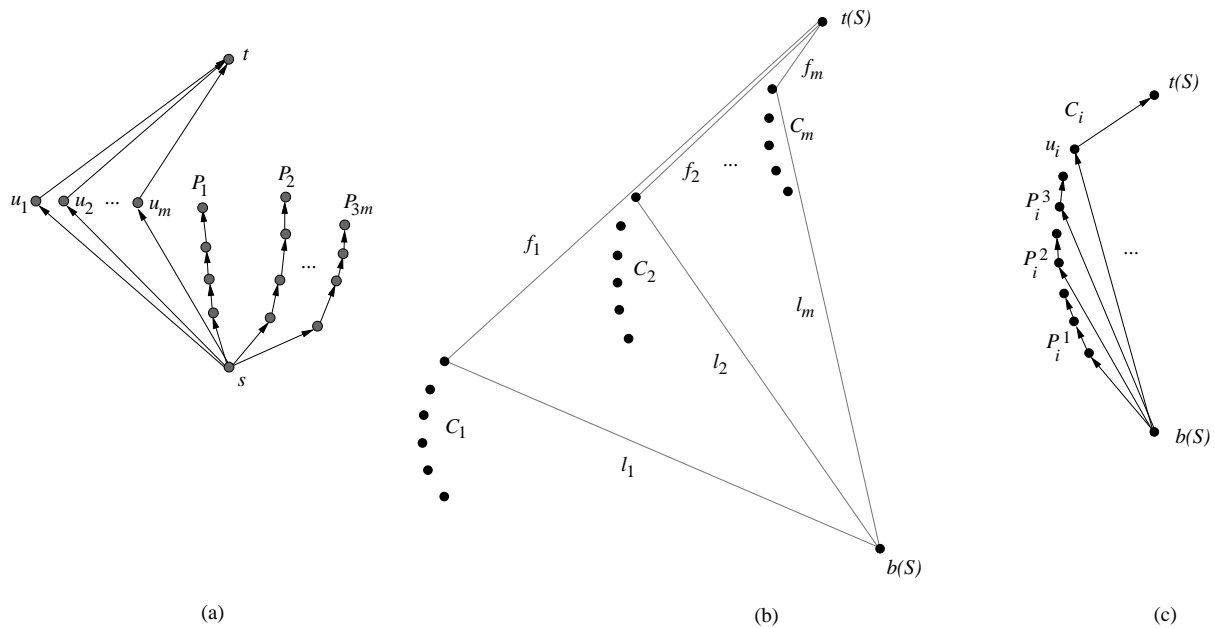
Περίπτωση 2.α: (v_{i-1}, v_i) είναι η ακμή του P , βλ. Εικόνα 2.38.α. Η περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ταυτόσημα με την Περίπτωση 1.

Περίπτωση 2.β: (v_i, v_{i-1}) είναι η ακμή του P , βλ. Εικόνα 2.38.β. Από την επαγωγική υπόθεση, το σημείο g του L_{j-1} , το οποίο είναι αμέσως πιο κάτω από το $p(v_{i-1})$, δεν είναι ορατό από το $p(v_{i-1})$. Έστω q είναι το αμέσως πιο πάνω σημείο από το g στο L_{j-1} . Το σημείο q είναι πάνω από το $p(v_{i-1})$. Άρα, από το Λήμμα 23, το σημείο q είναι ορατό από το $p(v_i)$. Απεικονίζουμε το v_{i+1} στο q . Οι συνθήκες $\mathcal{R} 1 - \mathcal{R} 3$ ισχύουν.

□

2.6 Το Πρόβλημα Ανερχόμενης Εμφυτευσιμότητας σε Σύνολα Σημείων είναι \mathcal{NP} - complete

Στην παρούσα ενότητα εξετάζουμε την χρονική πολυπλοκότητα του προβλήματος ελέγχου για το αν το δεδομένο επίπεδο ανερχόμενο γράφημα G επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση στο δεδομένο σύνολο σημείων S . Αποδεικνύουμε ότι το πρόβλημα είναι \mathcal{NP} -complete ακόμα και για γραφήματα με μοναδική πηγή και μέγιστο μη-κατευθυνόμενο κύκλο μήκους τέσσερα. Το αποτέλεσμα αυτό είναι βέλτιστο για γραφήματα με μη-κατευθυνόμενους κύκλους, επειδή στην [4] είχαμε αποδείξει ότι κάθε γράφημα με μοναδική πηγή και μέγιστο μη-κατευθυνόμενο κύκλο μήκους τρία, επιδέχεται πάντα μια ανερχόμενη εμφύτευση σε ένα γενικό σύνολο σημείων.



Εικόνα 2.39: (a) Το γράφημα G που κατασκευάζουμε για την απόδειξη. (b) Το σύνολο σημείων S που κατασκευάζουμε για την απόδειξη. (c) Μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G στο σύνολο S . (d) Η κατασκευή της Πρότασης 5.

Θεώρημα 16. Έστω G είναι ένα επίπεδο ανερχόμενο γράφημα με n κορυφές και S είναι ένα γενικό σύνολο n σημείων, το πρόβλημα απόφασης για το αν το G επιδέχεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο S είναι NP-complete. Το πρόβλημα παραμένει NP-complete για γραφήματα με μοναδική πηγή και μέγιστο μη-κατευθυνόμενο κύκλο μήκους τέσσερα και m -κυρτά σύνολα σημείων, για κάποιο $m > 0$.

Απόδειξη: Είναι ξεκάθαρο ότι το πρόβλημα είναι στην κλάση NP. Για να αποδείξουμε την NP-completeness θα ανάγουμε το γνωστό NP-complete πρόβλημα 3-Partition στο δικό μας πρόβλημα.

Πρόβλημα: 3-Partition

Είσοδος: Ένα όριο $B \in \mathbb{Z}^+$, και ένα σύνολο $A = \{a_1, \dots, a_{3m}\}$ με $a_i \in \mathbb{Z}^+$, $\frac{B}{4} < a_i < \frac{B}{2}$.

Έξοδος: m ζένα μεταξύ του σύνολα $A_1, \dots, A_m \subset A$ με $|A_i| = 3$ και $\sum_{a \in A_i} a = B$, $1 \leq i \leq m$.

Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το 3-Partition είναι ένα *strongly NP-hard* πρόβλημα, δηλαδή είναι NP-hard ακόμα και στην περίπτωση που το B είναι φραγμένο με ένα πολυώνυμο του m [44].

Έστω A και B είναι το σύνολο $3m$ θετικών ακεραίων και το όριο, που δίνονται ως μια εκδοχή (instance) (A, B) του προβλήματος 3-Partition. Βασίζομενοι στα A και B , θα δείξουμε πως μπορεί να κατασκευαστεί ένα ανερχόμενο επίπεδο γράφημα G και ένα σύνολο σημείων S έτσι ώστε το G να έχει μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση στο S αν και μόνο αν η εκδοχή του 3-Partition προβλήματος (A, B) έχει μια λύση.

Δείχνουμε πρώτα πως κατασκευάζεται το G (βλ. Εικόνα 2.39.a). Ξεκινάμε με δύο κορυφές s και t του G . Η κορυφή s είναι η μοναδική πηγή του τελικού γραφήματος. Προσθέτουμε m ζένα μεταξύ τους μονοπάτια από την s στην t , με δύο ακμές το κάθε ένα. Με u_i , $i = 1, \dots, m$ συμβολίζουμε τις κορυφές βαθμού δύο των δημιουργηθέντων μονοπατιών. Για κάθε $a \in A$, κατασκευάζουμε ένα μονότονο μονοπάτι P_i με a νέες κορυφές που έχει την κορυφή s ως την πηγή του. Σύνολο, έχουμε $3m$ τέτοια μονοπάτια P_1, \dots, P_{3m} .

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το S . Έστω $b(S)$ και $t(S)$ είναι το χαμηλότερο και το ψηλότερο σημείο του S (βλ. Εικόνα 2.39.β). Εκτός από τα $b(S)$, $t(S)$, το S περιέχει m μονομερή σύνολα C_1, \dots, C_m , το καθένα με $B + 1$ σημεία, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες :

- Το $C_i \cup \{b(S), t(S)\}$ είναι ένα αριστερομερές σύνολο σημείων, $i \in \{1, \dots, m\}$.
- Τα σημεία του C_{i+1} είναι πάνω από τα σημεία του C_i , $i \in \{1, \dots, m - 1\}$.
- Έστω l_i είναι η ευθεία που περνά από τα $b(S)$ και $t(C_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Τα σύνολα C_1, \dots, C_i βρίσκονται στα αριστερά της ευθείας l_i και τα σύνολα C_{i+1}, \dots, C_m στα δεξιά της ευθείας l_i .
- Έστω f_i είναι η ευθεία που περνά από τα $t(S)$ και $t(C_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Τα σύνολα C_j , $j \geq i$, βρίσκονται στα αριστερά της f_i .
- Το σύνολο $\{t(C_i) : i = 1, \dots, m\}$ είναι αριστερομερές.

Η ακόλουθη πρόταση έπεται από τις ιδιότητες του συνόλου S .

Πρόταση 5. Έστω C_i είναι ένα από τα αριστερομερή σύνολα που αποτελούν το S και έστω $x \in C_j$, $j > i$. Τότε το σύνολο $C_i \cup \{b(S), x\}$ είναι επίσης αριστερομερές με τα σημεία $b(S)$ και x να είναι διαδοχικά του σημεία. \square

Πρόταση 6. Υπάρχει ένα σύνολο σημείων S που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες και το εμβαδόν του είναι πολυώνυμικό ως προς τα B και m .

Απόδειξη της Πρότασης 6: Για κάθε $i \in \{0, \dots, m - 1\}$ θέτουμε C_{m-i} να είναι το σύνολο των $B + 1$ σημείων

$$C_{m-i} = \left\{ (-j - i(B + 2), j^2 - (i(B + 2))^2) \mid j = 1, 2, \dots, B + 1 \right\}$$

Θέτουμε το σημείο $b(S)$ να είναι το $(-i(B + 2), (i(B + 2))^2)$, $(B + 1)^2 - (m(B + 2))^2$ και το $t(S)$ να είναι το $(0, (m(B + 2))^2)$.

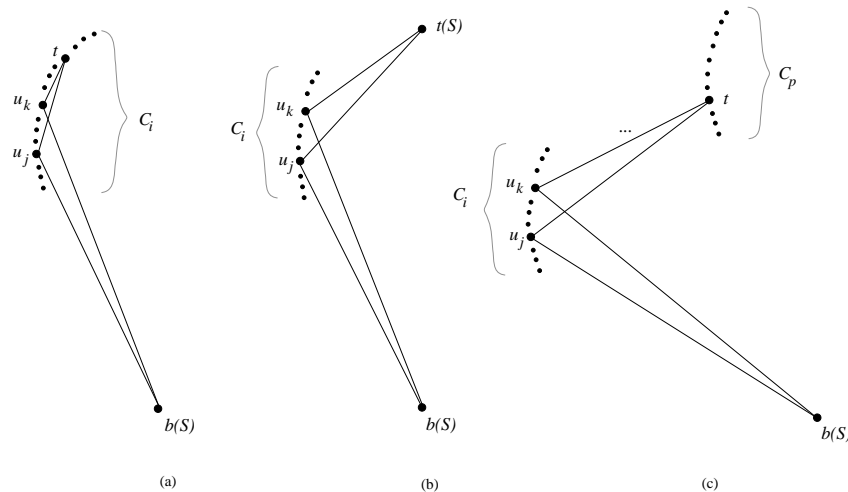
Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι οι απαιτούμενες ιδιότητες για το S ισχύουν και ότι το μικρότερο ορθογώνιο που περιφράζει το σύνολο έχει πολυωνυμικό ως προς τα B και m εμβαδόν. \square

Πρόταση 7. $|S| = |V(G)| = m(B + 1) + 2$. \square

Στη συνέχεια θα δείξουμε πως από την λύση του 3-Partition μπορούμε να κατασκευάσουμε μια λύση για το πρόβλημα ανερχόμενης εμφύτευσης σε σύνολο σημείων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια λύση για το πρόβλημα 3-Partition, έστω $A_i = \{a_i^1, a_i^2, a_i^3\}$, $i = 1 \dots m$. Παρατηρούμε ότι $\sum_{j=1}^3 a_i^j = B$. Απεικονίζουμε πρώτα τα s και t στα $b(S)$ και $t(S)$, αντίστοιχα. Ύστερα, απεικονίζουμε την κορυφή u_i στο $t(C_i)$, $i = 1 \dots m$. Παρατηρούμε ότι το μονοπάτι από την s στην t μέσω της u_i είναι ανερχόμενο και τα σύνολα C_1, \dots, C_i βρίσκονται εξ ολοκλήρου στα αριστερά αυτού του μονοπατιού, ενώ τα C_{i+1}, \dots, C_m βρίσκονται στα δεξιά αυτού του μονοπατιού. Σε κάθε ένα από τα C_i έχουν απομείνει B ελεύθερα σημεία. Απεικονίζουμε τις κορυφές του μονοπατιών P_i^1, P_i^2 και P_i^3 , που αντιστοιχούν στα a_i^1, a_i^2, a_i^3 , στα ελεύθερα σημεία του C_i , έτσι ώστε τα μονοπάτια να είναι ανερχόμενα (βλ. Εικόνα 2.39.ε). Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι όλη η εμφύτευση είναι ανερχόμενη και επίπεδη.

Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει μια ανερχόμενη εμφύτευση του G στο S . Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια λύση για το αντίστοιχο πρόβλημα 3-Partition. Η απόδειξη βασίζεται στις ακόλουθες προτάσεις που αποδεικνύουν ιδιότητες μιας ανερχόμενης εμφύτευσης του G στο S .

Πρόταση 8. Σε κάθε ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G στο S η κορυφή s βρίσκεται στο $b(S)$. \square



Εικόνα 2.40: Απεικόνιση που χρησιμοποιείται στην απόδειξη της Πρότασης 9

Πρόταση 9. Σε κάθε ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G στο S μόνο μία από τις κορυφές $\{u_1, \dots, u_m\}$ βρίσκεται στο σημείο του C_i , $i = 1 \dots m$.

Απόδειξη της Πρότασης 9: Εις άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι δύο διαφορετικές κορυφές u_j και u_k βρίσκονται σε δύο διαφορετικά σημεία του συνόλου C_i (βλ. Εικόνα 2.40). Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η u_k βρίσκεται πάνω από την u_j . Εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις με βάση την τοποθεσία της κορυφής t .

Περίπτωση 1: Η κορυφή t βρίσκεται σε ένα σημείο του C_i (Εικόνα 2.40.a). Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η ακμή (s, u_k) τέμνει την ακμή (u_j, t) , αντίφαση με την επιπεδότητα της εμφύτευσης.

Περίπτωση 2: Η κορυφή t βρίσκεται στο $t(S)$ (Εικόνα 2.40.β). Παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση, επειδή το σύνολο $C_i \cup \{b(S), t(S)\}$ είναι μονομερές.

Περίπτωση 3: Η κορυφή t βρίσκεται στο σημείο του C_p , $p > i$, το συμβολίζουμε με p_t (Εικόνα 2.40.c). Από την Πρόταση 5, το σύνολο $C_i \cup \{b(S), p_t\}$ είναι κυρτό και τα σημεία p_t , $b(S)$ είναι διαδοχικά σημεία του $C_i \cup \{b(S), p_t\}$. Άρα, η ακμή (s, u_k) τέμνει την ακμή (u_j, t) , άτοπο. \square

Από την Πρόταση 9, έχουμε ότι κάθε σύνολο C_i , $i = 1 \dots m$, περιέχει ακριβώς μία από τις κορυφές $\{u_1, \dots, u_m\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η κορυφή u_i βρίσκεται σε ένα σημείο του C_i .

Πρόταση 10. Σε κάθε ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G στο S η κορυφή t βρίσκεται είτε στο σημείο του C_m είτε στο $t(S)$.

Απόδειξη της Πρότασης 10: Η κορυφή t πρέπει να βρίσκεται σε ένα σημείο πάνω από κάθε u_i , $i = 1 \dots m$, και άρα πάνω από την u_m , η οποία βρίσκεται στο σύνολο C_m . \square

Πρόταση 11. Σε κάθε ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G στο S η κορυφή u_i βρίσκεται στο $t(C_i)$, $1 \leq i \leq m - 1$, επιπλέον, δεν υπάρχει ακμή (v, w) έτσι ώστε η v να βρίσκεται σε ένα σημείο του C_i και η w σε ένα σημείο του C_j , $j > i$.

Απόδειξη της Πρότασης 11: Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή στην i , $i = 1 \dots m - 1$. Για την βάση της επαγωγής, υποθέτουμε ότι η u_1 βρίσκεται σε σημείο p_1 διαφορετικό από το $t(C_1)$ (βλ. Εικόνα 2.41.a). Έστω p_t είναι το σημείο όπου βρίσκεται η κορυφή t . Από την Πρόταση 10, το p_t είναι είτε $t(S)$ είτε ένα σημείο του C_m . Και στις δύο περιπτώσεις, το σύνολο $C_1 \cup \{b(S), p_t\}$

είναι κυρτό από την κατασκευή του S και την Πρόταση 5. Επιπλέον, τα σημεία $b(S)$ και p_t είναι διαδοχικά στο κυρτό περιβλήμα του $C_1 \cup \{b(S), p_t\}$.

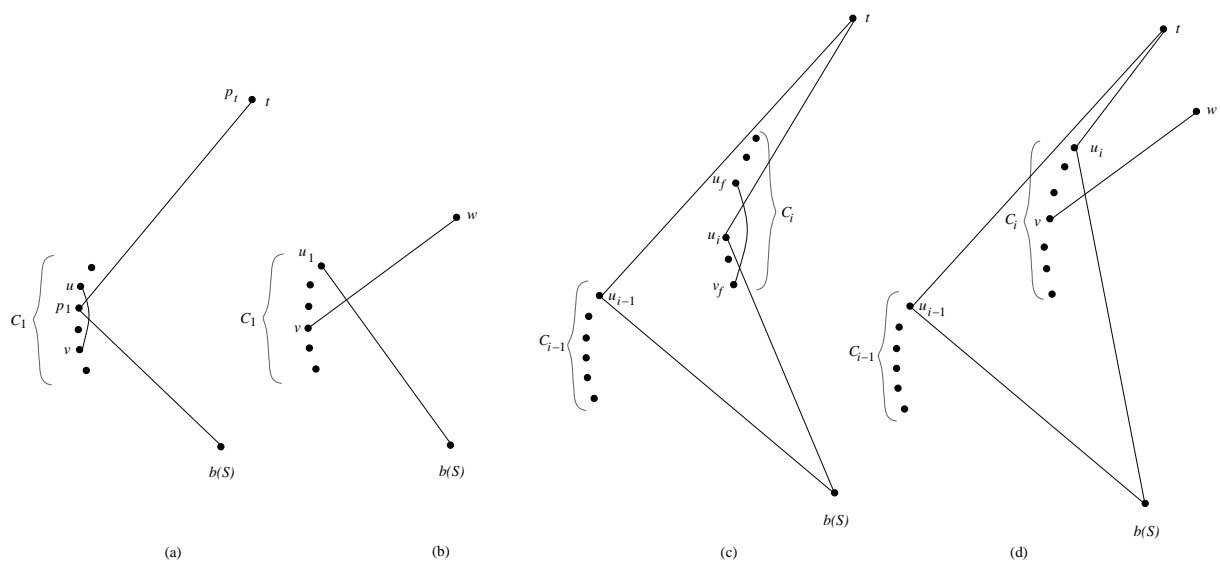
Συμβολίζουμε με p το σημείο του C_1 που βρίσκεται ακριβώς πάνω από το p_1 . Από την Πρόταση 9, γνωρίζουμε ότι καμία από τις $u_j, j \neq 1$ δεν βρίσκεται στο p . Από την Πρόταση 10, η t δεν μπορεί να είναι στο p . Άρα, υπάρχει μονοπάτι $P_k, 1 \leq k \leq 3m$, έτσι ώστε μία από τις κορυφές του βρίσκονται στο p . Ονομάζουμε την κορυφή αυτή u . Στη συνέχεια εξετάζουμε δύο περιπτώσεις βάσει του αν η u είναι η πρώτη κορυφή του P_k ή όχι.

Περίπτωση 1: Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια κορυφή v του P_k , έτσι ώστε υπάρχει ακμή (v, u) . Επειδή η εμφύτευση του G στο S είναι ανερχόμενη, η v βρίσκεται στο σημείο κάτω από το p και κάτω από το p_1 . Επειδή $C_1 \cup \{b(S), p_t\}$ είναι ένα κυρτό σύνολο, η ακμή (v, u) τέμνει την ακμή (u_1, t) . Άτοπο.

Περίπτωση 2: Έστω u είναι η πρώτη κορυφή του P_k . Τότε η ακμή (s, u) τέμνει την ακμή (u_1, t) επειδή ξανά το σύνολο $C_1 \cup \{b(S), p_t\}$ είναι κυρτό, άτοπο.

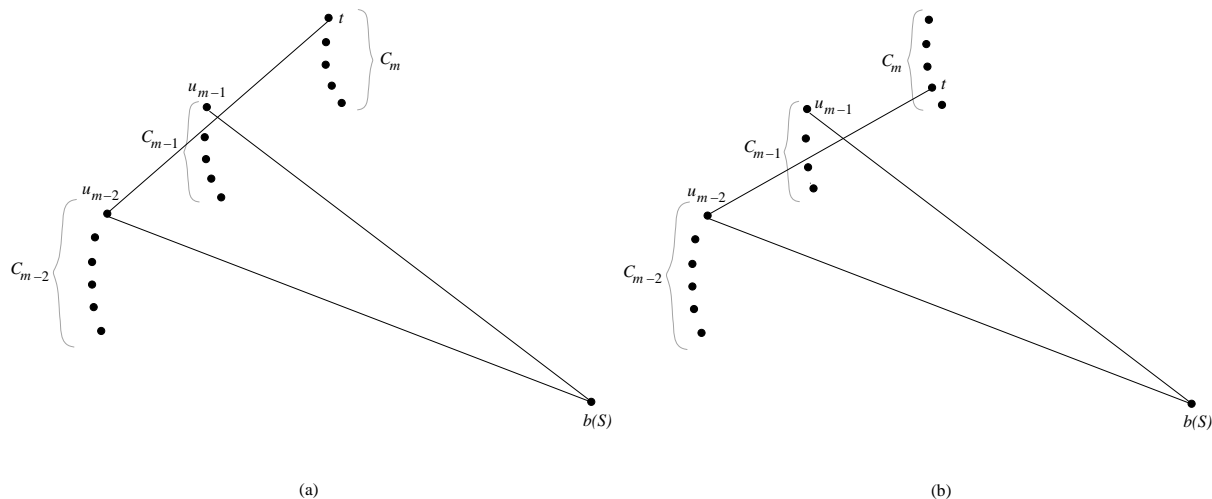
Συνεπώς, έχουμε ότι η κορυφή u_1 βρίσκεται στο σημείο $t(C_1)$, βλ. Εικόνα 2.41.β. Παρατηρούμε τώρα ότι κάθε ακμή (v, w) , έτσι ώστε η v είναι στο C_1 και η w είναι σε ένα σημείο $x \in C_2 \cup \dots \cup C_m \cup \{t(S)\}$, τέμνει την ακμή (s, u_1) , επειδή $C_1 \cup \{b(S), x\}$ είναι κυρτό σύνολο. Άρα η πρόταση ισχύει για $i = 1$.

Για το βήμα της επαγωγής, υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για C_g και $u_g, g \leq i - 1$, δηλαδή η κορυφή u_g βρίσκεται στο $t(C_g)$ και δεν υπάρχει καμία ακμή που συνδέει το σημείο του C_g με ένα σημείο του $C_k, k > g$ και αυτό ισχύει για κάθε $g \leq i - 1$. Θα δείξουμε ότι αυτό ισχύει και για το C_i και την u_i . Εις άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι η κορυφή u_i βρίσκεται στο σημείο p_i διαφορετικό από το $t(C_i)$ (βλ. Εικόνα 2.41.α).



Εικόνα 2.41: Απόδειξη της Πρότασης 11.

Συμβολίζουμε με q το σημείο του C_1 που βρίσκεται ακριβώς πάνω από το p_i . Από την Πρόταση 9, γνωρίζουμε ότι καμία κορυφή $u_l, l \neq i$, δεν βρίσκεται στο σημείο q . Από την Πρόταση 10, η κορυφή t δεν μπορεί να βρίσκεται στο q . Άρα, υπάρχει ένα μονοπάτι P_f , έτσι ώστε μια από τις κορυφές του να βρίσκεται στο q . Ονομάζουμε την κορυφή αυτή u_f . Εξετάζουμε στη συνέχεια δύο περιπτώσεις βάσει του αν η u_f είναι η πρώτη κορυφή του P_f ή όχι.



Εικόνα 2.42: (α-β) Οι απεικονίσεις που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη της Πρότασης 13.

Περίπτωση 1: Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια κορυφή u_f του P_k τέτοια ώστε υπάρχει ακμή (u_f, u_f) . Από την επαγωγική υπόθεση, η κορυφή u_f δεν βρίσκεται σε κανένα σύνολο C_l , $l < i$. Άρα, επειδή η εμφύτευση του G στο S είναι ανερχόμενη, η κορυφή u_f βρίσκεται σε σημείο χαμηλότερο του q και του p_i . Επειδή το σύνολο $C_i \cup \{b(S), p_i\}$ είναι κυρτό, η ακμή (u_f, u_f) τέμνει την ακμή (u_i, t) . Άτοπο.

Περίπτωση 2: Έστω u_f είναι η πρώτη κορυφή του P_k . Τότε η ακμή (s, u_f) τέμνει την (u_i, t) , επειδή το σύνολο $C_i \cup \{b(S), p_i\}$ είναι κυρτό, άτοπο.

Συνεπώς, έχουμε αποδείξει ότι η κορυφή u_i βρίσκεται στο $t(C_i)$, βλ. Εικόνα 2.41.d. Παρατηρούμε ότι κάθε ακμή (v, w) , έτσι ώστε η v είναι σε κάποιο σημείο του C_i και η w σε κάποιο σημείο του $x \in C_{i+1} \cup \dots \cup C_m \cup \{t(S)\}$, τέμνει την ακμή (s, u_i) , επειδή το $C_i \cup \{b(S), x\}$ είναι κυρτό. Άρα, η πρόταση ισχύει για i . □

Μια τειριμμένη συνέπεια της προηγούμενης πρότασης είναι η εξής:

Πρόταση 12. Σε κάθε ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G στο S , κάθε μονοπάτι P_j του G με την πηγή στο s , $j \in \{1, \dots, 3m\}$, βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στο C_i , για $i \in \{1, \dots, m\}$. □

Η ακόλουθη πρόταση ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος.

Πρόταση 13. Σε κάθε ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G στο S , η κορυφή t βρίσκεται στο σημείο $t(S)$.

Απόδειξη της Πρότασης 13: Εισ άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι η κορυφή t δεν βρίσκεται στο $t(S)$. Από την Πρόταση 10, γνωρίζουμε ότι η κορυφή t πρέπει να βρίσκεται στο σημείο του C_m . Υποθέτουμε πρώτα ότι η κορυφή t βρίσκεται στο σημείο $t(C_m)$ (βλ. Εικόνα 2.42.a). Θυμίζουμε ότι η u_{m-2} και η u_{m-1} βρίσκονται στα $t(C_{m-2})$ και $t(C_{m-1})$, αντίστοιχα, και ότι το $\{t(C_i) : i = 1 \dots m\}$ είναι ένα αριστερομερές σύνολο σημείων. Άρα, τα σημεία $\{t(C_{m-2}), t(C_{m-1}), t(C_m), b(S)\}$ αποτελούν ένα κυρτό σύνολο. Αυτό σημαίνει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $(t(C_{m-2}), t(C_m))$ και $(t(C_{m-1}), b(S))$ τέμνονται, και συνεπώς οι ακμές (s, u_{m-1}) , (u_{m-2}, t) τέμνονται επίσης, αποτελώντας αντίφαση στην επιτεδότητα της εμφύτευσης.

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όταν η t βρίσκεται στο σημείο του C_m , έστω p , διαφορετικό από το $t(C_m)$ (βλ. Εικόνα 2.42.β). Επειδή το σημείο p δεν βρίσκεται στο τρίγωνο $t(C_{m-2}), t(C_{m-1}), b(S)$ και

το σημείο $t(C_{m-1})$ δεν βρίσκεται στο τρίγωνο $t(C_{m-2}), p, b(S)$, τα σημεία $\{t(C_{m-2}), t(C_{m-1}), p, b(S)\}$ αποτελούν ένα κυρτό σύνολο σημείων. Άρα, τα τμήματα $(t(C_{m-2}), p)$ και $(t(C_{m-1}), b(S))$ τέμνονται, συνεπώς οι ακμές $(s, u_{m-1}), (u_{m-2}, t)$ τέμνονται επίσης, άτοπο. \square

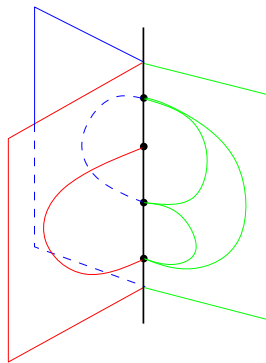
Θα συνδυάσουμε στη συνέχεια όλες τις προτάσεις για να κατασκευάσουμε την λύση για το πρόβλημα 3-Partition, όταν δίνεται μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση του G στο S . Από την Πρόταση 8 και Πρόταση 13, οι κορυφές s και t βρίσκονται στα $b(S)$ και $t(S)$, αντίστοιχα. Από την Πρόταση 9, για κάθε $i = 1 \dots m$, το σύνολο σημείων C_i περιέχει ακριβώς μια κορυφή από το σύνολο $\{u_1, \dots, u_m\}$, έστω u_i και άρα τα υπόλοιπα σημεία του C_i υποδέχονται τις κορυφές των μονοπατιών $P_i^1, P_i^2, \dots, P_i^c$. Από την Πρόταση 12, τα μονοπάτια $P_i^1, P_i^2, \dots, P_i^c$ βρίσκονται εξ ολοκλήρου στο C_i . Επειδή το C_i έχει $B + 1$ σημεία, στο ψηλότερο από τα οποία βρίσκεται η κορυφή u_i , συμπεραίνουμε ότι τα μονοπάτια $P_i^1, P_i^2, \dots, P_i^c$ περιέχουν συνολικά ακριβώς B κορυφές. Θέτουμε $A_i = \{a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^c\}$, όπου a_i^j είναι το πλήθος των κορυφών στο P_i^j , $1 \leq j \leq c$. Επειδή $\frac{B}{4} < a_i^j < \frac{B}{2}$ συμπεραίνουμε ότι $c = 3$. Τα υποσύνολα A_i είναι ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους παράγει το A . Τέλος, παρατηρούμε ότι το G έχει μια μοναδική πηγή s και ο μακρύτερος μη-κατευθυνόμενος κύκλος του G έχει μήκος 4, επιπλέον το σύνολο S είναι ένα m -κυρτό σύνολο για $m > 1$. Εδώ ολοκληρώνουμε την απόδειξη του θεωρήματος. \square

Κεφάλαιο 3

Ανερχόμενη Τοπολογική Εμφύτευση σε Βιβλίο

3.1 Ορισμός και Γνωστά Αποτελέσματα

Ένα k -σέλιδο βιβλίο είναι μια δομή που αποτελείται από μια ευθεία, αναφερόμενη ως *ράχη του βιβλίου*, και από k ημιεπίπεδα, αναφερόμενα ως *σελίδες του βιβλίου*, που έχουν την ράχη ως κοινό τους σύνορο. Μια *εμφύτευση στο βιβλίο* ενός γραφήματος G , είναι μια απεικόνιση του G τέτοια ώστε οι κορυφές του G να απεικονίζονται πάνω στην ράχη του βιβλίου, ενώ κάθε ακμή να παρουσιάζεται ως καμπύλη που ανήκει ολοκλήρως σε μια σελίδα του βιβλίου, και οι ακμές που ανήκουν σε μια σελίδα να μην τέμνονται μεταξύ τους. Στην Εικόνα 3.1 απεικονίζεται μια εμφύτευση ενός γραφήματος σε 3-σέλιδο βιβλίο. Πάχος ή *σελιδοαριθμός* ενός γραφήματος G ορίζεται ως ο ελάχιστος ακέραιος k έτσι ώστε το G να έχει (επιδέχεται) μια εμφύτευση σε k -σέλιδο βιβλίο.

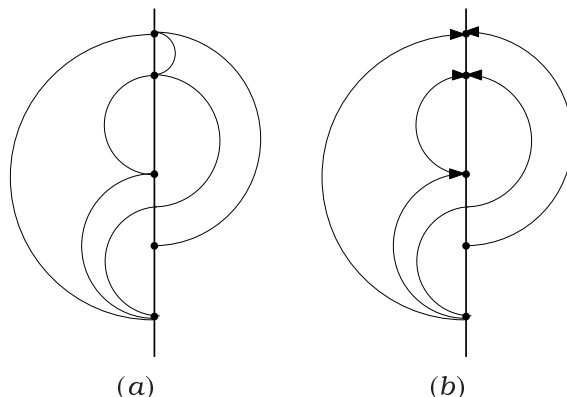


Εικόνα 3.1: Μια εμφύτευση γραφήματος σε ένα 3-σέλιδο βιβλίο. Οι τρεις σελίδες του βιβλίου είναι απεικονισμένες με διαφορετικά χρώματα.

Όπως ήδη αναφέραμε στην Εισαγωγή (βλ. Ενότητα 1.3), οι εμφυτεύσεις σε βιβλίο βρίσκουν πολλές και ποικίλες εφαρμογές.

Όσάναφορά τον αριθμό των σελίδων, ο Γιαννακάκης [99] απέδειξε ότι κάθε επίπεδο γράφημα επιδέχεται μια εμφύτευση σε 4-σέλιδο βιβλίο και ότι υπάρχουν επίπεδα γραφήματα που απαιτούν 4 σελίδες. Συνεπώς, στην γενική περίπτωση οι εμφυτεύσεις σε βιβλίο είναι τρισδιάστατες δομές. Στην έρευνά μας ενδιαφερόμαστε μόνο για τις δομές δύο διαστάσεων, οπότε περιοριζόμαστε σε

2-σέλιδα βιβλία. Επειδή όμως ενδιαφερόμαστε για την γενική κλάση των επίπεδων γραφημάτων και όπως αναφέραμε παραπάνω δεν αρκούν οι 2 σελίδες για κάθε επίπεδο γράφημα, πρέπει να επιτρέψουμε στις ακμές να τέμνουν την ράχη. Στην βιβλιογραφία, οι εμφυτεύσεις σε βιβλίο, όπου επιτρέπονται τομές με την ράχη, ονομάζονται *τοπολογικές εμφυτεύσεις σε βιβλίο* [39], βλ. για παράδειγμα Εικόνα 3.2.α. Είναι γνωστό, ότι κάθε επίπεδο γράφημα επιδέχεται μια τοπολογική εμφύτευση σε 2-βιβλίο, όπου κάθε ακμή τέμνει την ράχη το πολύ μια φορά [37].



Εικόνα 3.2: (a) Μια τοπολογική εμφύτευση σε 2-βιβλίο. (b) Μια ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση ενός κατεγραφήματος.

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, όταν απεικονίζουμε κατευθυνόμενα γραφήματα συνήθως θέλουμε να δώσουμε έμφαση στη κατεύθυνση των ακμών, έτσι προτιμούμε τις απεικονίσεις, όπου όλες οι ακμές παρουσιάζονται ως μονότονα αύξουσες σε μια επιλεγμένη κατεύθυνση καμπύλης. Οι απεικονίσεις αυτές ονομάζονται *ανερχόμενες*. Έτσι, για ανερχόμενα επίπεδα γραφήματα ορίστηκε η *ανερχόμενη εμφύτευση σε βιβλίο*. Στην ανερχόμενη εμφύτευση σε βιβλίο, οι κορυφές του γραφήματος εμφανίζονται πάνω στην ράχη σύμφωνα με μια τοπολογική αρίθμηση του γραφήματος (βλ. Εικόνα 3.2.β).

Οι *ανερχόμενες εμφυτεύσεις σε βιβλίο* έχουν μελετηθεί για μερικές διατάξεις (posets) στις [2, 60, 61, 59, 78]. Ο σελιδοαριθμός για τα ακυκλικά επίπεδα γραφήματα είναι μη-φραγμένος [60], ενώ ο σελιδοαριθμός για τα ανερχόμενα επίπεδα γραφήματα είναι άγνωστος [2, 60, 78]. Από την θετική πλευρά, οι Alzohairi και Rival [2] απέδειξαν ότι κάθε ανερχόμενο series-parallel poset έχει μια ανερχόμενη εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο. Σε όρους γραφημάτων αυτό σημαίνει ότι κάθε ανερχόμενο series-parallel γράφημα χωρίς μεταβατικές (transitive) ακμές έχει μια ανερχόμενη εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο. Το αποτέλεσμα αυτό βελτιώθηκε από τους Giacomo et al. [47]. Οι συγγραφείς παρουσίασαν έναν γραμμικού χρόνου αλγόριθμο, που κατασκευάζει μια εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο για ένα ανερχόμενο series-parallel γράφημα. Ταυτόχρονα, ο Alzohairi [1] δημοσίευσε έναν γραμμικό αλγόριθμο που εμφυτεύει σε 2-σέλιδο βιβλίο κάθε N -free planar lattice. Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τους Habib και Jerou [53] η κλάση των N -free planar ordered sets αποτελεί επέκταση των series-parallel ordered sets.

Οι Giordano et al. [48] μελέτησαν τις ανερχόμενες τοπολογικές εμφυτεύσεις σε βιβλίο των εμφυτευμένων ανερχόμενα επίπεδων γραφημάτων. Έδειξαν πως για τα μέγιστα επίπεδα st -γραφήματα, κατασκευάζονται οι ανερχόμενες τοπολογικές εμφυτεύσεις σε 2-σέλιδο βιβλίο με το πολύ μια τομή με την ράχη ανά ακμή σε γραμμικό χρόνο. Δεδομένου ότι: (i) κάθε ανερχόμενο επίπεδο γράφημα είναι υπογράφημα ενός επίπεδου st -γραφήματος [29, 70] και (ii) ένα εμφυτευμένο ανερχόμενο επίπεδο γράφημα μπορεί να συμπληρωθεί έως μέγιστο επίπεδο st -γράφημα σε γραμμικό χρόνο [48], συνεπάγεται ότι κάθε εμφυτευμένο ανερχόμενο επίπεδο γράφημα επιδέχεται μια ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο με το πολύ μια τομή με την ράχη ανά ακμή.

Τα αποτελέσματα που εμφανίζονται στην βιβλιογραφία συγκεντρώνονται στον αριθμό των τομών με την ράχη που είναι απαραίτητες για την κατασκευή μιας ανερχόμενης εμφύτευσης σε βιβλίο. Αν προσεγγίσουμε την εμφυτευσιμότητα σε βιβλίο ως πρόβλημα βελτιστοποίησης, αποκτά νόημα να αναζητήσουμε ανερχόμενες τοπολογικές εμφυτεύσεις σε βιβλίο με τον ελάχιστο αριθμό των τομών με την ράχη.

Για να απλοποιήσουμε και να τυποποιήσουμε την μελέτη του προβλήματος ελαχιστοποίησης των τομών με την ράχη στις ανερχόμενες τοπολογικές εμφυτεύσεις σε βιβλίο, ορίζουμε το πρόβλημα *Ακυκλικής Πλήρωσης κατά Χάμιλτον με Ελαχιστοποίηση των Τομών* (Acyclic Hamiltonian Path Completion with Crossing Minimization, Acyclic-HPCCM για συντομία). Διαισθητικά, το πρόβλημα Acyclic-HPCCM ζητά να βρεθούν κάποιες ακμές, οι οποίες, όταν προστεθούν στο δεδομένο ανερχόμενο εμφυτευμένο γράφημα G , θα δημιουργήσουν ένα ανερχόμενο γράφημα με μονοπάτι Χάμιλτον, δημιουργώντας όσο το δυνατόν λιγότερες τομές με τις αρχικές ακμές του G .

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό του προβλήματος πλήρωσης κατά Χάμιλτον, όπως αυτό είναι γνωστό στη βιβλιογραφία.

Δίνεται ένα γράφημα $G = (V, E)$, κατευθυνόμενο ή μη, ένας μη-αρνητικός ακέραιος $k \leq |V|$ και δύο κορυφές $s, t \in V$, το πρόβλημα *πλήρωσης κατά Χάμιλτον* (hamiltonian path completion) ρωτά αν υπάρχει ένα υπερσύνολο E' του E έτσι ώστε $|E' \setminus E| \leq k$, και το γράφημα $G' = (V, E')$ έχει ένα μονοπάτι Χάμιλτον από την κορυφή s στην κορυφή t . Ονομάζουμε G' το *συμπληρωμένο κατά Χάμιλτον* γράφημα, και το σύνολο $E' \setminus E$ *σύνολο πλήρωσης Χάμιλτον* του γραφήματος.

Υποθέτουμε ότι όλες οι ακμές ενός συνόλου πλήρωσης Χάμιλτον, αποτελούν ακμές του μονοπατιού Χάμιλτον του G' , διαφορετικά μπορούν να διαγραφούν από το σύνολο αυτό. Όταν G είναι ένα κατευθυνόμενο ακυκλικό γράφημα μπορούμε να ζητήσουμε ένα σύνολο πλήρωσης Χάμιλτον το οποίο θα διατηρήσει την ιδιότητα αυτή, δηλαδή το συμπληρωμένο κατά Χάμιλτον γράφημα να είναι επίσης ακυκλικό. Αναφερόμαστε στο πρόβλημα αυτό ως *ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον*. Το πρόβλημα πλήρωσης κατά Χάμιλτον είναι \mathcal{NP} -complete [44]. Για ακυκλικά κατεγραφήματα το πρόβλημα της πλήρωσης κατά Χάμιλτον λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο [66]. Και οι δύο εκδοχές του προβλήματος, κατευθυνόμενη και μη, μπορούν να αναθεωρηθούν όταν μαζί με το γράφημα δίνεται και μια εμφύτευσή του. Τότε αντί να ελαχιστοποιούμε τον αριθμό των προσθετέων ακμών, αποκτά νόημα να προσπαθήσουμε να ελαχιστοποιήσουμε τον αριθμό των τομών που δημιουργούν οι προσθετέες ακμές με τις ήδη υπάρχουσες. Στη συνέχεια τυποποιούμε αυτήν την ιδέα.

Έστω $G = (V, E)$ είναι ένα εμφυτευμένο γράφημα, έστω E' είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου ακμών E , και $\Gamma(G')$ είναι η απεικόνιση του $G' = (V, E')$. Όταν η διαγραφή των ακμών $E' \setminus E$ από την $\Gamma(G')$ μας δίνει το εμφυτευμένο γράφημα G , λέμε ότι η απεικόνιση $\Gamma(G')$ *διατηρεί την εμφύτευση του G* .

Ορισμός 5. Δεδομένου ενός επίπεδου εμφυτευμένου γραφήματος $G = (V, E)$, κατευθυνόμενου ή μη, μη-αρνητικού ακεραίου c , και δύο κορυφών $s, t \in V$, το πρόβλημα *πλήρωσης κατά Χάμιλτον με ελαχιστοποίηση των τομών* (Hamiltonian Path Completion with Crossing Minimization, για συντομία HPCCM) ρωτά εάν υπάρχει ένα υπερσύνολο E' του E και μια απεικόνιση $\Gamma(G')$ του γραφήματος $G' = (V, E')$ έτσι ώστε: (i) το γράφημα G' έχει ένα μονοπάτι Χάμιλτον από την κορυφή s στην κορυφή t , (ii) η απεικόνιση $\Gamma(G')$ να έχει το πολύ c τομές μεταξύ των ακμών του, και τέλος (iii) $\Gamma(G')$ να διατηρεί την εμφύτευση του γραφήματος G .

Στην εργασία αυτή μας ενδιαφέρει η εκδοχή του προβλήματος, όπου ως είσοδο έχουμε ένα εμφυτευμένο ανερχόμενο επίπεδο γράφημα και μας ενδιαφέρει να βρούμε ένα σύνολο πλήρωσης κατά Χάμιλτον, που διατηρεί το γράφημα ακυκλικό. Αυτή η εκδοχή του προβλήματος ονομάζεται *ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον με ελαχιστοποίηση των τομών* (acyclic-HPCCM).

Το σύνολο των ακμών που λύνει το πρόβλημα πλήρωσης κατά Χάμιλτον με ελαχιστοποίηση των

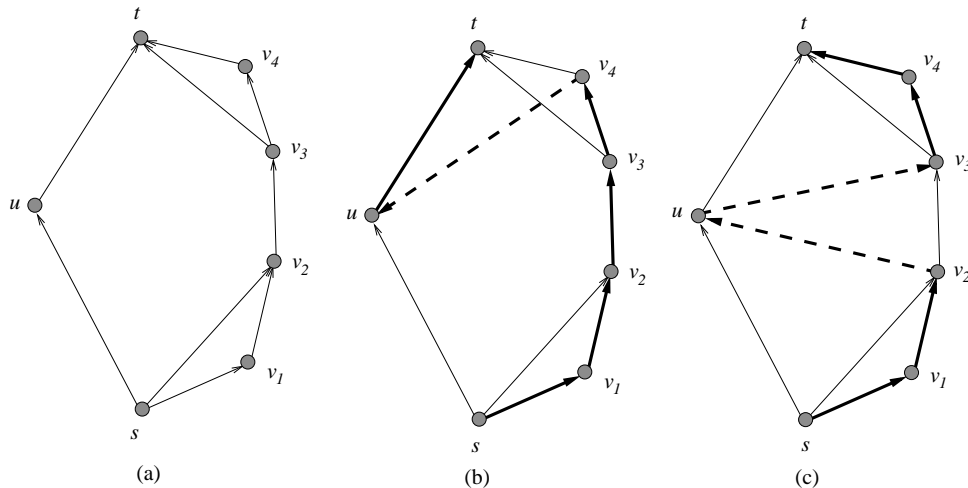
τομών ονομάζεται *σύνολο πλήρωσης Χάμιλτον ελαχίστων τομών*. Παρατηρούμε ότι ένα σύνολο πλήρωσης Χάμιλτον με ελάχιστο αριθμό των ακμών, δεν αποτελεί απαραίτητα ένα σύνολο πλήρωσης Χάμιλτον ελαχίστων τομών. Ένα παράδειγμα εμφανίζεται στην Εικόνα 3.3. Για το εξωεπίπεδο *st*-γράφημα της Εικόνας 3.3.a, κάθε ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον με μία ακμή δημιουργεί μια τομή (βλ. Εικόνα 3.3.b), ενώ υπάρχει ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον που αποτελείται από δύο ακμές και δεν δημιουργεί καμία τομή (βλ. Εικόνα 3.3.c).

Για τα ακυκλικά κατεγγραφήματα, το πρόβλημα της ακυκλικής πλήρωσης κατά Χάμιλτον, εμφανίζεται στην βιβλιογραφία με τους όρους των μερικών διατάξεων (posets) και ονομάζεται *Γραμμική Επέκταση (Linear Extensions)* ή *Αριθμός Αλμάτων (Jump Number)*. Κάθε ακυκλικό κατεγγραφήμα G μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια μερική διάταξη P . *Γραμμική επέκταση* μιας μερικής διάταξης P είναι μια *ολική διάταξη* $L = \{x_1 \dots x_n\}$ των στοιχείων της P έτσι ώστε, στην L ισχύει $x_i < x_j$, μόνο όταν ισχύει $x_i < x_j$ στην P . Με $L(P)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των γραμμικών επεκτάσεων του P . Το ζεύγος (x_i, x_{i+1}) των διαδοχικών στοιχείων της L ονομάζεται *άλμα του L* , αν το x_i δεν είναι συγκρίσιμο με το x_{i+1} στην P . Συμβολίζουμε με $s(P, L)$ τον αριθμό των αλμάτων του L . Τότε *αριθμός αλμάτων* της P , $s(P)$, ορίζεται ως $s(P) = \min\{s(P, L) : L \in L(P)\}$. Μια γραμμική επέκταση $L \in L(P)$ της P ονομάζεται *βέλτιστη* εάν $s(P, L) = s(P)$. Το πρόβλημα *αριθμού αλμάτων* αποτελεί την αναζήτηση του αριθμού αλμάτων $s(P)$ και την κατασκευή μιας βέλτιστης γραμμικής επέκτασης του P .

Από τους παραπάνω ορισμούς, έπεται ότι μια βέλτιστη γραμμική επέκταση της μερικής διάταξης P (η του αντίστοιχου ακυκλικού γραφήματος G), είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα αναζήτησης ενός ακυκλικού συνόλου πλήρωσης κατά Χάμιλτον ελαχίστου μεγέθους για το γράφημα G . Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε ευρέως λόγω της εφαρμογής του στο *πρόβλημα προγραμματισμού εργασιών* (scheduling). Το πρόβλημα αποδείχθηκε \mathcal{NP} -hard ακόμα και για διμερείς μερικές διατάξεις [84] και για την κλάση των interval orders [76]. Από όσα γνωρίζουμε, η υπολογιστική πολυπλοκότητά του είναι άγνωστη για lattices. Παρόλα αυτά, υπάρχουν πολυωνυμικοί αλγόριθμοι για τις παρακάτω κλάσεις: series-parallel orders [25], N-free orders [87], cycle-free orders [27], orders of width two [21], orders of bounded width [26], bipartite orders of dimension two [91] και K-free orders [90]. Οι Brightwell και Winkler [17] απέδειξαν ότι το πρόβλημα απαρίθμησης των γραμμικών επεκτάσεων είναι $\#\mathcal{P}$ -complete.

Οι Colbourn, Pulleyblank [26] και αργότερα Ceroi [19] μελέτησαν το πρόβλημα αριθμού αλμάτων σε γραφήματα με βάρη. Στην [26] το πρόβλημα αυτό αναφέρεται ως *πρόβλημα ρύθμισης προγραμματισμού εργασιών (minimum setup scheduling)* (για συντομία, MSS). Το MSS είναι ένα πρόβλημα προγραμματισμού εργασιών με δεδομένες προτεραιότητες στην εκτέλεση των εργασιών, που αποτελεί ένα από τα λιγότερα μελετημένα προβλήματα αυτού του πεδίου [85]. Οι συγγραφείς της [26] παρουσίασαν έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο που λύνει το πρόβλημα MSS για τα ακυκλικά γραφήματα περιορισμένου πλάτους (bounded width). Παρατηρούν επίσης ότι το πρόβλημα του αριθμού αλμάτων ανάγεται στο πρόβλημα MSS. Από την άλλη μεριά, το πρόβλημα MSS αποδείχθηκε \mathcal{NP} -complete για την κλάση των διδιάστατων διατάξεων (two-dimensional orders) [19].

Αν μια τοπολογική αρίθμηση ρ των κορυφών του γραφήματος δίνεται ως μέρος της εισόδου του προβλήματος, τότε ενδιαφερόμαστε να κατασκευάσουμε μια ανερχόμενη εμφύτευση σε βιβλίο, έτσι ώστε η σειρά με την οποία οι κορυφές να εμφανίζονται πάνω στην ράχη του βιβλίου να συμφωνεί με την αρίθμηση ρ . Αυτές οι εμφυτεύσεις ονομάζονται *ρ -περιορισμένες ανερχόμενες τοπολογικές εμφυτεύσεις σε βιβλίο*. Οι Giordano, Liotta και Whitesides [50] ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο, που δεδομένου ενός εμφυτευμένου *st*-γραφήματος και μιας τοπολογικής αρίθμησης ρ των κορυφών του, υπολογίζει σε χρόνο $O(n^2)$ μια ρ -περιορισμένη ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε βιβλίο με το πολύ $2n-4$ τομές με την ράχη ανά ακμή. Ο αριθμός των τομών με την ράχη είναι ασυμπτωτικά βέλτιστος.



Εικόνα 3.3: Ένα ανερχόμενο επίπεδο γράφημα που έχει ένα σύνολο ακυκλικής πλήρωσης Χάμιλτον που αποτελείται από δύο ακμές και δεν δημιουργεί καμία τομή. Παρατηρούμε επίσης, ότι κάθε σύνολο ακυκλικής πλήρωσης Χάμιλτον που αποτελείται από μία ακμή δημιουργεί μια τομή.

3.1.1 Η δική μας συνεισφορά: ελαχιστοποίηση των τομών με την ράχη

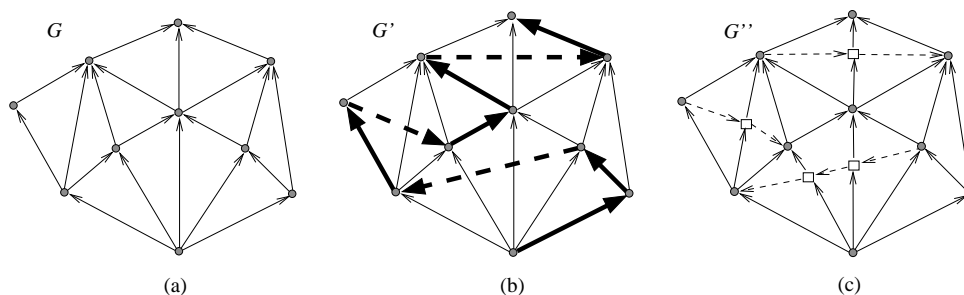
Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης των τομών των ακμών με την ράχη στις ανερχόμενες τοπολογικές εμφυτεύσεις σε βιβλίο. Για να τυποποιήσουμε την μελέτη μας, εκμεταλλευόμαστε το νέο-ορισθέν πρόβλημα ακυκλικής πλήρωσης κατά Χάμιλτον με ελαχιστοποίηση των τομών.

1. Για την κλάση των επίπεδων st -γραφήματων, αποδεικνύουμε την ισοδυναμία του προβλήματος ακυκλικής πλήρωσης κατά Χάμιλτον με ελαχιστοποίηση των τομών (Acyclic-HPCCM), και του προβλήματος ελαχιστοποίησης τομών των ακμών με την ράχη στις ανερχόμενες τοπολογικές εμφυτεύσεις σε βιβλίο (μέσω μιας αναγωγής γραμμικού χρόνου) (Ενότητα 3.3).
2. Αναπτύσσουμε μια αναγκαία και ικανή τοπική συνθήκη για τα επίπεδα st -γραφήματα να είναι γραφήματα Χάμιλτον (Ενότητα 3.4).
3. Επιλύουμε το πρόβλημα Acyclic-HPCCM για εξωεπίπεδα st -γραφήματα. (Ενότητα 3.5).
4. Μελετάμε την περίπτωση όταν το πρόβλημα Acyclic-HPCCM επιλύεται με μηδέν τομές, δηλαδή όταν ένα εμφυτευμένο ανερχόμενο επίπεδο γράφημα επιδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση σε ένα 2-σέλιδο βιβλίο. Συγκεντρωνόμαστε στα N -ελεύθερα (N -free) κατεγραφήματα και κατεγραφήματα περιορισμένου πλάτους (bounded-width digraphs) (Ενότητα 3.6).
5. Τέλος μελετάμε τις ρ -περιορισμένες ανερχόμενες τοπολογικές εμφυτεύσεις σε βιβλίο. Βελτιώνουμε το άνω όριο για τον αριθμό των τομών με την ράχη που δόθηκε στην [50] και αποδεικνύουμε ότι το όριό μας είναι βέλτιστο στην χειρότερη περίπτωση (Ενότητα 3.7).

Τα αποτελέσματα 1 – 3 είναι δημοσιευμένα στην [74], το αποτέλεσμα 4 στην [72], ενώ το αποτέλεσμα 5 στην [97].

3.2 Ορισμοί και Προκαταρκτικά Αποτελέσματα

Έστω $G = (V, E)$ είναι ένα εμφυτευμένο επίπεδο γράφημα, έστω E_c είναι μια πλήρωση Χάμιλτον του G , και έστω $\Gamma(G')$ είναι η απεικόνιση του $G' = (V, E \cup E_c)$ με c τομές που διατηρεί την εμφύτευση του G . Από την απεικόνιση $\Gamma(G')$ δημιουργούμε το εξής γράφημα G_c : σε κάθε τομή των ακμών εισάγουμε μια καινούργια κορυφή και υποδιαιρούμε τις ήδη υπάρχουσες ακμές. Το γράφημα G_c ονομάζεται *επεκταμένο κατά Χάμιλτον γράφημα του G που προκύπτει από την $\Gamma(G')$* (βλ. Εικόνα 3.4). Μια σημαντική για όλο το κεφάλαιο είναι η εξής παρατήρηση: όταν ζωγραφίζουμε τις ακμές της πλήρωσης Χάμιλτον ενός ανερχόμενου επίπεδου γραφήματος, το κάνουμε έτσι ώστε το αντίστοιχο επεκταμένο γράφημα να αποτελεί μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση. Διαισθητικά αυτό μπορεί να γίνει με μοναδικό τρόπο. Πιο τυπικά θα επιστρέψουμε στο ερώτημα αυτό στην Ενότητα 3.7.



Εικόνα 3.4: (α) Ένα επίπεδο εμφυτευμένο γράφημα G . (β) Μια απεικόνιση $\Gamma(G')$ ενός συμπληρωμένου κατά Χάμιλτον κατεγραφήματος G' του G . Οι ακμές του μονοπατιού Χάμιλτον του G' εμφανίζονται με έντονη γραμμή, ενώ οι ακμές της πλήρωσης κατά Χάμιλτον είναι διακεκομμένες. (γ) Το επεκταμένο κατά Χάμιλτον γράφημα G'' του G που προκύπτει από την $\Gamma(G')$. Οι νεοπροσθετές κορυφές είναι τετράγωνα.

Θυμίζουμε ότι ένα *st-γράφημα* είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα, χωρίς κατευθυνόμενο κύκλο και με ακριβώς μια πηγή και μια καταβόθρα. Ένα *st-γράφημα* το οποίο είναι επίπεδο και εμφυτευμένο στο επίπεδο, έτσι ώστε η κορυφή και η καταβόθρα του να βρίσκονται στην εξωτερική όψη, αναφέρεται απλά ως *επίπεδο st-γράφημα*. Σε ένα επίπεδο *st-γράφημα* G κάθε όψη f είναι φραγμένη από δύο κατευθυνόμενα μονοπάτια που έχουν δύο κοινές κορυφές. Η κοινή πηγή (αντ. καταβόθρα) των μονοπατιών αυτών συμβολίζονται με $source(f)$ (αντ. $sink(f)$). Το μονοπάτι που βρίσκεται στα αριστερά (αντ. δεξιά) ονομάζεται το *αριστερό σύνορο* (αντ. *δεξί σύνορο*) της όψης f . Η *κάτω-αριστερή* (αντ. *κάτω-δεξιά*) ακμή μιας όψης f , είναι η πρώτη ακμή του αριστερού (αντ. δεξιού) της συνόρου. Παρόμοια, ορίζουμε την *πάνω-αριστερή* και την *πάνω-δεξιά* ακμή μιας όψης. Το *αριστερό* (αντ. *δεξί*) *σύνορο* ενός *st-γραφήματος* είναι το αριστερότερο (δεξιότερο) μονοπάτι από την πηγή του, s , στην καταβόθρα του, t .

Μια νέα ακμή e που εισάγεται σε μια όψη f ενός επίπεδου *st-γραφήματος* G ονομάζεται *δεξιόστροφη*, αν η πηγή της e βρίσκεται στο αριστερό σύνορο στη f , ενώ η καταβόθρα της e βρίσκεται στο δεξί σύνορο της f . Παρόμοια ορίζουμε μια *αριστερόστροφη* ακμή.

Είναι γνωστό το γεγονός ότι για κάθε κορυφή v ενός επίπεδου *st-γραφήματος*, όλες οι εισερχόμενες (εξερχόμενες) ακμές της εμφανίζονται διαδοχικά γύρω από την v [95]. Για κάθε κορυφή v , συμβολίζουμε με $left(v)$ (αντ. $right(v)$) την όψη στα αριστερά (αντ. στα δεξιά) της αριστερότερης (αντ. δεξιότερης) εισερχόμενης και εξερχόμενης ακμής της v . Για κάθε ακμή $e = (u, v)$, συμβολίζουμε με $left(e)$ (αντ. $right(e)$) την όψη στα αριστερά (αντ. δεξιά) της ακμής e όπως προχωράμε από την u στην v . Θεωρούμε ότι η εξωτερική όψη του G είναι χωρισμένη σε δύο όψεις s^* και t^* . Εδώ s^* είναι η όψη στα αριστερά του αριστερού συνόρου του G , ενώ t^* είναι στα δεξιά του δεξιού συνόρου

του G . Δυϊκό γράφημα (*dual graph*) ενός st -γραφήματος G , συμβολίζεται με G^* , και είναι το κατεγράφημα που κατασκευάζεται ως εξής: (i) κάθε κορυφή του G^* αντιστοιχεί σε μια όψη του G , (ii) για κάθε ακμή $e \neq (s, t)$ του G , υπάρχει ακμή $e^* = (f, g)$ στο G^* , όπου $f = \text{left}(e)$ και $g = \text{right}(e)$, (iii) η ακμή (s^*, t^*) είναι στο G^* . Αν το κατασκευασμένο με τον τρόπο αυτό γράφημα G^* περιέχει πολλαπλές ακμές, τις αντικαθιστούμε με μια. Είναι γνωστό ότι το δυϊκό γράφημα ενός st -γραφήματος είναι επίσης ένα st -γράφημα με πηγή s^* και καταβόθρα t^* .

Το ακόλουθο λήμμα είναι μια άμεση συνέπεια του Λήμματος 7 των Tamassia και Preparata [94].

Λήμμα 24. Έστω ότι u και v είναι δύο κορυφές ενός επίπεδου st -γραφήματος G , που δεν συνδέονται με κανένα κατευθυνόμενο μονοπάτι. Τότε, το δυϊκό γράφημα G^* του G περιέχει είτε ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από το $\text{right}(u)$ στο $\text{left}(v)$, είτε ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από το $\text{right}(v)$ στο $\text{left}(u)$. \square

Το ακόλουθο λήμμα δείχνει μια ιδιότητα των επίπεδων st -γραφήματων.

Λήμμα 25. Έστω G είναι ένα επίπεδο st -γράφημα που δεν περιέχει κανένα μονοπάτι Χάμιλτον. Τότε στο G υπάρχει ένα ζεύγος κορυφών που δεν συνδέεται με κατευθυνόμενο μονοπάτι σε καμία από τις δύο κατευθύνσεις. \square

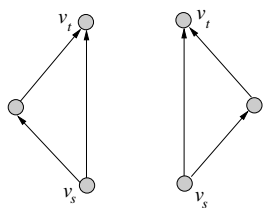
Οι ακόλουθοι ορισμοί είχαν δοθεί στην [48] για μέγιστα επίπεδα st -γραφήματα. Θα επεκτείνουμε τους ορισμούς αυτούς για στα επίπεδα st -γραφήματα. Έστω $G = (V, E)$ είναι ένα επίπεδο st -γράφημα και G^* είναι το δυϊκό γράφημα του G . Έστω $v_1^* = s^*, v_2^*, \dots, v_m^* = t^*$ είναι το σύνολο των κορυφών του G^* που δίνονται σύμφωνα με μια τοπολογική αρίθμηση του G^* . Από τον ορισμό του δυϊκού st -γραφήματος, μια κορυφή v_i^* του G^* ($1 \leq i \leq m$) αντιστοιχεί σε μια όψη του G . Στη συνέχεια, συμβολίζουμε με v_i^* και την κορυφή του δυϊκού G^* , αλλά και την αντίστοιχη όψη του G . Η όψη v_k^* ονομάζεται η k -στη όψη του G . Έστω V_k είναι το υποσύνολο των κορυφών του G που ανήκει στις όψεις $v_1^*, v_2^*, \dots, v_k^*$. Το υπογράφημα G που παράγεται από τις κορυφές του V_k ονομάζεται το υπογράφημα k όψεων του G και συμβολίζεται με G_k .

Το ακόλουθο λήμμα περιγράφει, πως δεδομένου ενός st -γραφήματος G και μιας τοπολογικής αρίθμησης του δυϊκού του, μπορούμε να κατασκευάσουμε το G από τις όψεις του. Η απόδειξη είναι ταυτόσημη με την απόδειξη που παρουσιάζεται στην [48] για τα μέγιστα επίπεδα st -γραφήματα.

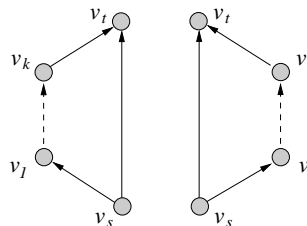
Λήμμα 26. Έστω G είναι ένα επίπεδο st -γράφημα και $v_1^* = s^*, v_2^*, \dots, v_m^* = t^*$ είναι μια τοπολογική αρίθμηση του δυϊκού G^* του G . Έστω G_k είναι το υπογράφημα k όψεων του G και έστω v_{k+1}^* είναι η $k+1$ -στη όψη του G , ($1 \leq k < m$). Έστω s_{k+1} είναι η πηγή και t_{k+1} είναι η καταβόθρα της v_{k+1}^* . Επίσης, έστω $s_{k+1}, u_1^l, u_2^l, \dots, u_i^l, t_{k+1}$ είναι το αριστερό, και $s_{k+1}, u_1^r, u_2^r, \dots, u_j^r, t_{k+1}$ είναι το δεξιό σύνορο της όψης v_{k+1}^* . Τότε:

- Το G_k είναι ένα επίπεδο st -γράφημα.
- Οι κορυφές $s_{k+1}, u_1^l, u_2^l, \dots, u_i^l, t_{k+1}$ αποτελούν κορυφές του δεξιού συνόρου του G_k .
- Το γράφημα G_{k+1} μπορεί να χτιστεί από το G_k , με την πρόσθεση ενός κατευθυνόμενου μονοπατιού $s_{k+1}, u_1^r, u_2^r, \dots, u_j^r, t_{k+1}$. \square

Όπως ήδη αναφέραμε, κάθε όψη ενός επίπεδου st -γραφήματος αποτελείται από δύο μονοπάτια, το δεξιό και το αριστερό της σύνορο. Όταν το ένα από τα σύνορα μιας όψης f , αποτελείται από μία ακμή, η όψη f ονομάζεται γενικευμένο τρίγωνο (βλ. Εικόνα 3.6). Όταν το ένα από τα σύνορα μιας όψης f , αποτελείται από μία ακμή, και το άλλο από δύο ακμές, τότε η όψη f ονομάζεται τρίγωνο (βλ. Εικόνα 3.5). Ένα (γενικευμένο) τρίγωνο ονομάζεται αριστερόπλευρο (αντ. δεξιόπλευρο), αν το αριστερό (αντ. δεξιό) σύνορό της περιέχει τουλάχιστον δύο ακμές.

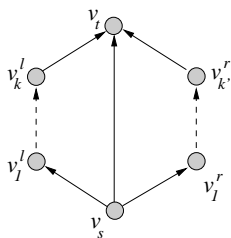


Εικόνα 3.5: Αριστερόπλευρο και δεξιόπλευρο τρίγωνα.

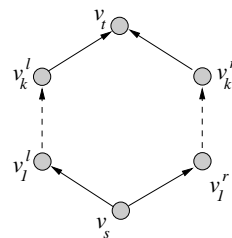


Εικόνα 3.6: Αριστερόπλευρο και δεξιόπλευρο γενικευμένα τρίγωνα.

Το εξωεπίπεδο st -γράφημα της Εικόνας 3.7 ονομάζεται *ισχυρός ρόμβος*. Ένας ισχυρός ρόμβος αποτελείται από δύο γενικευμένα τρίγωνα (ένα αριστερόπλευρο και ένα δεξιόπλευρο) που περιέχουν την ακμή (v_s, v_t) από κοινού. Η ακμή (v_s, v_t) του ισχυρού ρόμβου ονομάζεται *διαγώνιος* και πάντα εμφυτεύεται στο εσωτερικό του. Το εξωεπίπεδο st -γράφημα που λαμβάνουμε με την διαγραφή της διαγώνιου από ένα ισχυρό ρόμβο, ονομάζεται *ασθενής ρόμβος*. Εναλλακτικά, ένας ασθενής ρόμβος είναι ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα που αποτελείται από μοναδική εσωτερική όψη και τουλάχιστον δύο ακμές σε κάθε σύνορό της (βλ. Εικόνα 3.8). Χρησιμοποιούμε τον όρο *ρόμβος* για να αναφερόμαστε σε ένα ισχυρό ή ασθενή ρόμβο.



Εικόνα 3.7: Ένας ισχυρός ρόμβος.

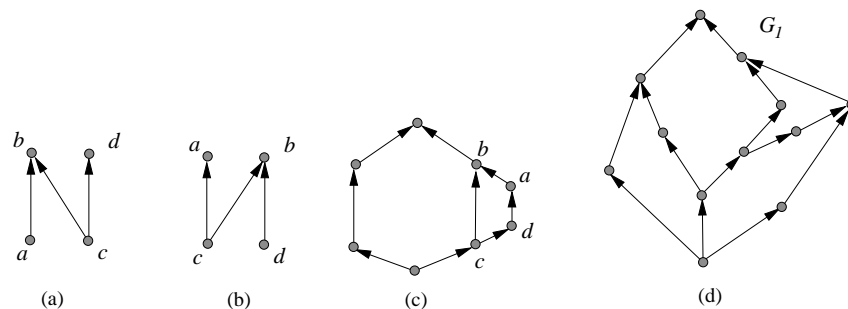


Εικόνα 3.8: Ένας ασθενής ρόμβος.

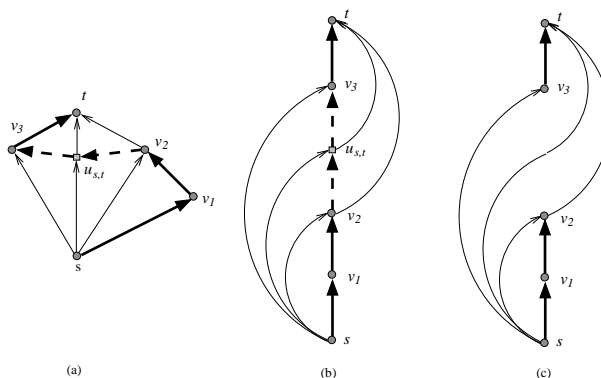
Ακολουθώντας την ορολογία των μερικών διατάξεων, ονομάζουμε το κατεγράφημα $G_N = (V_N, E_N)$, όπου $V_N = \{a, b, c, d\}$ και $E_N = \{(a, b), (c, b), (c, d)\}$ ένα N -κατεγράφημα. Τότε, κάθε κατεγράφημα που δεν περιέχει G_N ως υπογράφημά του, ονομάζεται N -ελεύθερο (N -free) κατεγράφημα. Ο ορισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί σε εμφυτευμένα επίπεδα γραφήματα επιμένοντας σε μια συγκεκριμένη εμφύτευση του N -κατεγραφήματος. Θεωρούμε την εμφύτευση της Εικόνας 3.9.a. και ονομάζουμε το γράφημα αυτό *εμφυτευμένο N -κατεγράφημα* ενώ, η εμφύτευση της Εικόνας 3.9.b. αναφέρεται ως *εμφυτευμένο I -κατεγράφημα*. Τότε, ένα εμφυτευμένο επίπεδο κατεγράφημα G ονομάζεται N -ελεύθερο (I -ελεύθερο) αν δεν περιέχει ως υπογράφημα κανένα εμφυτευμένο N -κατεγράφημα (I -κατεγράφημα). Η Εικόνα 3.9.c απεικονίζει ένα εμφυτευμένο N -ελεύθερο κατεγράφημα. Όμως, αν αγνωήσουμε την εμφύτευση, το γράφημα δεν είναι N -ελεύθερο, επειδή οι κορυφές a, b, c, d αποτελούν ένα N -κατεγράφημα.

3.3 Η Ισοδυναμία των Acyclic-HPCCM και Προβλήματος Ανερχόμενης Εμφύτευσης σε Βιβλίο

Στην παρούσα ενότητα, αποδεικνύουμε ότι, για την κλάση των επίπεδων st -γραφήματων, το πρόβλημα της ακυκλικής πλήρωσης κατά Χάμιλτον με ελαχιστοποίηση των τομών (Acyclic-HPCCM), και το πρόβλημα ελαχιστοποίησης τομών των ακμών με την ράχη στις ανερχόμενες τοπολογικές εμφυτεύσεις σε βιβλίο είναι ισοδύναμα. Η απόδειξη γίνεται μέσω αναγωγής γραμμικού χρόνου. Η



Εικόνα 3.9: (a) Εμφυτευμένο N -κατεγράφημα. (b) Εμφυτευμένο I -κατεγράφημα. (c) Ανερχόμενο επίπεδο γράφημα που είναι N -ελεύθερο αν το αντιμετωπίσουμε ως ένα εμφυτευμένο γράφημα, αλλά δεν είναι N -ελεύθερο ως επίπεδο κατεγράφημα χωρίς δεδομένη εμφύτευση. (d) Ένα εμφυτευμένο N -ελεύθερο επίπεδο st -γράφημα G_1 .



Εικόνα 3.10: (a) Μια απεικόνιση ενός επεκταμένου κατά Χάμιλτον επίπεδου st -γραφήματος G . Τα διακεκομμένα τμήματα αντιστοιχούν σε μοναδική ακμή (v_2, v_3) της πλήρωσης του G . (b) Μια ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο του G_c με τις κορυφές του να εμφανίζονται πάνω στην ράχη ακριβώς με την σειρά που εμφανίζονται στο μονοπάτι Χάμιλτον του G_c . (c) Μια ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο του G .

ισοδυναμία αυτή χρησιμοποιείται έμμεσα σε όλο το κεφάλαιο, επειδή αντικαθιστούμε την μελέτη των εμφυτεύσεων σε βιβλίο, με την μελέτη των ακυκλικών πλήρωσεων κατά Χάμιλτον. Παρατηρούμε ότι η ισοδυναμία που θα αποδείξουμε, αποτελεί την ανερχόμενη εκδοχή του εξής αποτελέσματος: «ένα επίπεδο γράφημα έχει μια εμφύτευση σε ένα 2-σέλιδο βιβλίο αν αποτελεί υπογράφημα ενός επίπεδου γραφήματος Χάμιλτον» [9].

Θεώρημα 17. Έστω ότι $G = (V, E)$ είναι ένα επίπεδο st -γράφημα n κορυφών. Το G έχει μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον E_c με το μονοπάτι Χάμιλτον $P = (s = v_1, v_2, \dots, v_n = t)$ έτσι ώστε η βέλτιστη απεικόνιση $\Gamma(G')$ του $G' = (V, E \cup E_c)$ έχει συνολικά c τομές μεταξύ των ακμών **αν και μόνο αν** G επιδέχεται μια τοπολογική εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο με c τομές με την ράχη, όπου οι κορυφές εμφανίζονται πάνω στην ράχη με την σειρά $\Pi = (s = v_1, v_2, \dots, v_n = t)$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε πως δεδομένου μιας πλήρωσης κατά Χάμιλτον που δημιουργεί c τομές κατασκευάζεται μια ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο με c τομές με την ράχη και αντιστρόφως.

‘ \Rightarrow ’ Υποθέτουμε ότι μας δίνεται μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον E_c , που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος. Έστω $\Gamma(G')$ είναι η αντίστοιχη απεικόνιση του $G' = (V, E \cup E_c)$ που

δημιουργεί c τομές και έστω $G_c = (V \cup V_c, E' \cup E'_c)$ είναι το επεκταμένο κατά Χάμιλτον γράφημα του G που προκύπτει από την $\Gamma(G')$. Το V_c συμβολίζει το σύνολο των νεοπροσθετων κορυφών στις τομές. Το E' και το E'_c είναι τα σύνολα ακμών που λαμβάνουμε από τα σύνολα E και E_c , αντίστοιχα, μετά από την υποδιαίρεση των ακμών που συμμετέχουν στις τομές, διατηρώντας τον προσανατολισμό τους. (βλ. Εικόνα 3.10(a)). Παρατηρούμε ότι το G_c είναι επίσης ένα st -γράφημα. Παρατηρούμε επίσης ότι στην $\Gamma(G')$, δεν υπάρχουν τομές μεταξύ των ακμών του G . Διαφορετικά, η $\Gamma(G')$ δεν θα διατηρούσε την εμφύτευση του G . Παρόμοια, στην $\Gamma(G')$, δεν υπάρχουν τομές μεταξύ των ακμών της πλήρωσης E_c . Διαφορετικά, το επεκταμένο γράφημα G_c , θα περιείχε έναν κύκλο.

Το μονοπάτι Χάμιλτον P στο G' , παράγει ένα μονοπάτι Χάμιλτον P_c του επεκταμένου γραφήματος G_c . Αυτό συμβαίνει επειδή: (i) όλες οι ακμές του E_c χρησιμοποιούνται σε μονοπάτι P και (ii) όλες οι κορυφές του V_c αντιστοιχούν στις τομές που δημιουργούνται από τις ακμές του E_c . Θα χρησιμοποιήσουμε το μονοπάτι Χάμιλτον P_c , για να κατασκευάσουμε μια ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο για το γράφημα G , με ακριβώς c τομές. Τοποθετούμε τις κορυφές του G_c στην ράχη, με την σειρά με την οποία εμφανίζονται στο μονοπάτι P_c , με την χαμηλότερη κορυφή την $s = v_1$. Επειδή το επεκταμένο γράφημα G_c είναι ένα επίπεδο st -γράφημα με τις κορυφές s και t να βρίσκονται στην εξωτερική όψη, κάθε ακμή του G_c εμφανίζεται είτε στα αριστερά είτε στα δεξιά του μονοπατιού P_c . Τοποθετούμε τις ακμές του G_c στην αριστερή (αντ. δεξιά) σελίδα του βιβλίου αν αυτές εμφανίζονται στα αριστερά (αντ. δεξιά) του μονοπατιού P_c . Οι ακμές του P_c απεικονίζονται πάνω στην ράχη (βλ. Εικόνα 3.10(b)). Ύστερα, οι ακμές της ράχης μπορούν να μετακινηθούν σε μία από τις δύο σελίδες.

Έστω μια κορυφή $v_c \in V_c$. Η v_c αντιστοιχεί σε μια τομή μεταξύ μιας ακμής του συνόλου E και μιας ακμής της πλήρωσης E_c . Με την παραπάνω διαδικασία οι ακμές του E'_c , προσπίπτουσες στην v_c , έχουν απεικονιστεί πάνω στην ράχη, και οι δύο υπόλοιπες ακμές, προσπίπτουσες στην v_c , που ανήκουν στο E' και αντιστοιχούν σε μια ακμή $e \in E$, έχουν απεικονιστεί σε διαφορετικές σελίδες του βιβλίου. Διαγράφοντας την κορυφή v_c και ενώνοντας τις δύο προσπίπτουσες ακμές των E' δημιουργούμε μια τομή της e με την ράχη. Άρα η κατασκευασμένη με αυτόν τον τρόπο εμφύτευση έχει ακριβώς τόσες τομές με την ράχη όσες κορυφές έχει το V_c ή όσες τομές έχει το συμπληρωμένο γράφημα G' (βλ. Εικόνα 3.10(c)).

Απομένει να αποδείξουμε ότι η εμφύτευση σε βιβλίο που κατασκευάσαμε, είναι ανερχόμενη. Είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι η εμφύτευση στο βιβλίο του G_c είναι ανερχόμενη. Εισ άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ακμή $(u, w) \in E'_c$, κατευθυνόμενη προς τα κάτω. Από την κατασκευή, το γεγονός ότι η κορυφή w βρίσκεται στην ράχη κάτω από την u , σημαίνει ότι, υπάρχει ένα μονοπάτι στο G_c από την w στην u . Το μονοπάτι αυτό, μαζί με την ακμή (u, w) αποτελεί κύκλο στο G_c , άτοπο, επειδή το γράφημα G_c είναι ανερχόμενο και άρα ακυκλικό.

‘ \Leftarrow ’ Υποθέτουμε ότι έχουμε μια ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο του st -γραφήματος G , όπου οι ακμές τέμνουν την ράχη c φορές, και οι κορυφές εμφανίζονται πάνω στην ράχη με την σειρά $\Pi = (s = v_1, v_2, \dots, v_n = t)$. Τότε, κατασκευάζουμε μια πλήρωση κατά Χάμιλτον E_c για το G , ως εξής: $E_c = \{(v_i, v_{i+1}) \mid 1 \leq i < n \text{ και } (v_i, v_{i+1}) \notin E\}$, έτσι, το σύνολο E_c περιέχει μια ακμή για κάθε ζεύγος διαδοχικών κορυφών πάνω στην ράχη, οι οποίες δεν συνδέονται με ακμή στο G . Προσθέτοντας τις ακμές αυτές στην εμφύτευση στο βιβλίο, παίρνουμε μια απεικόνιση $\Gamma(G')$ του $G' = (V, E \cup E_c)$ που έχει c τομές των ακμών. Αντικαθιστώντας κάθε τομή της $\Gamma(G')$ με μια καινούργια κορυφή και υποδιαίρωντας τις ακμές που συμμετέχουν στις τομές, διατηρώντας τον προσανατολισμό τους, έχουμε ένα επεκταμένο κατά Χάμιλτον γράφημα G_c . Απομένει να δείξουμε ότι G_c είναι ακυκλικό. Εισ άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι το G_c περιέχει κύκλο. Επειδή το γράφημα G είναι ακυκλικό κάθε κύκλος του G_c πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μια ακμή από το σύνολο E_c . Δεδομένου ότι όλες οι κορυφές στην $\Gamma(G')$ είναι απεικονισμένες πάνω στην ράχη, και και άρα όλες οι ακμές του E_c είναι ανερχόμενες, πρέπει να υπάρχει ένα τμήμα της ακμής του G ,

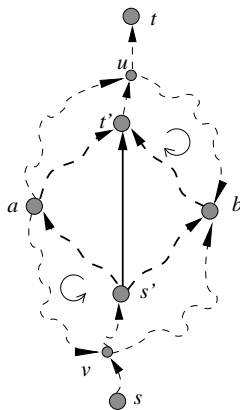
που κατευθύνεται προς τα κάτω και κλείνει τον κύκλο. Άτοπο, επειδή υποθέσαμε ότι μας δίνεται μια ανερχόμενη εμφύτευση σε βιβλίο. \square

3.4 Επίπεδα st -Γραφήματα με Μονοπάτι Χάμιλτον

Στην παρούσα ενότητα, αναπτύσσουμε μια αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε ένα επίπεδο st -γράφημα να περιέχει ένα μονοπάτι Χάμιλτον (από την s στην t). Η συνθήκη αυτή είναι τοπική, και θα χρησιμοποιηθεί αργότερα στην κατασκευή πλήρωσης Χάμιλτον για εξωεπίπεδα st -γραφήματα.

Θεώρημα 18. Έστω G είναι ένα επίπεδο st -γράφημα. Το γράφημα G έχει μονοπάτι Χάμιλτον αν και μόνο αν το G δεν περιέχει ως εμφυτευμένο υπογράφημα κανέναν ρόμβο (ισχυρό ή ασθενή).

Απόδειξη: (\Rightarrow) Υποθέτουμε ότι το γράφημα G περιέχει ένα μονοπάτι Χάμιλτον και θα δείξουμε



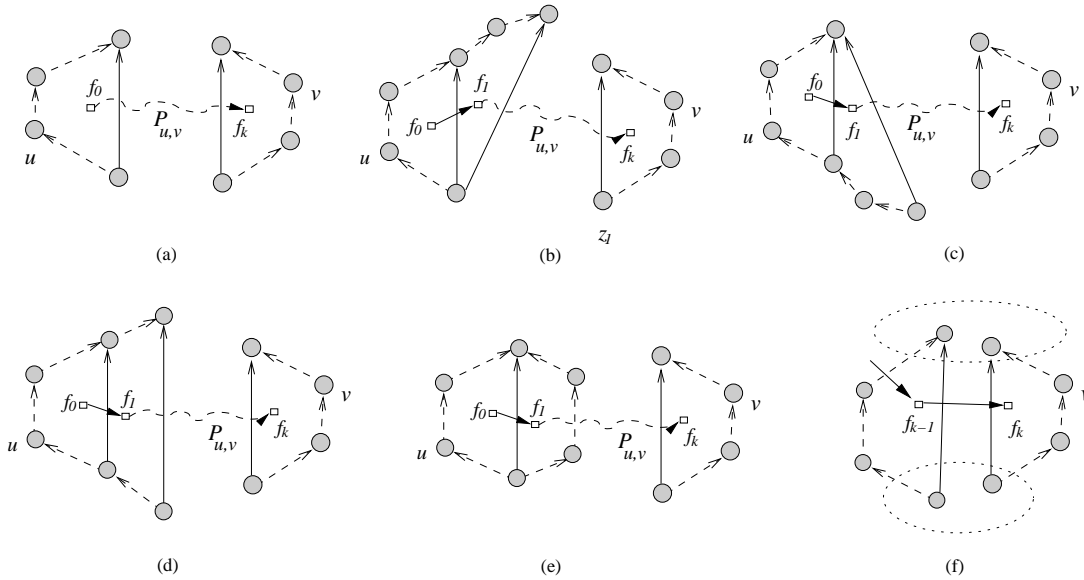
Εικόνα 3.11: Το υπογράφημα που περιέχει ρόμβο και χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Θεωρήματος 18. Στην περίπτωση ενός ασθενούς ρόμβου, το γράφημα δεν περιέχει την ακμή (s', t') .

ότι δεν περιέχει κανέναν ρόμβο (ισχυρό ή ασθενή) ως εμφυτευμένο υπογράφημα. Εις άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι το γράφημα G περιέχει έναν ισχυρό ρόμβο με τις κορυφές s' (πηγή του ρόμβου), t' (καταβόθρα του ρόμβου), a (μια κορυφή στην αριστερή πλευρά) και b (μια κορυφή στην δεξιά πλευρά) (βλ. Εικόνα 3.11). Τότε, οι κορυφές a και b του ισχυρού ρόμβου δεν συνδέονται με κανένα κατευθυνόμενο μονοπάτι. Διαφορετικά, ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι μεταξύ των a και b θα βρισκόταν έξω από τον ρόμβο. Οπότε θα τεμνόταν είτε με ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από την t' στην t σε κάποια κορυφή u , είτε με ένα μονοπάτι από την s στην s' σε κάποια κορυφή v . Σε κάθε περίπτωση, θα υπήρχε κύκλος στο G , άτοπο, επειδή το G είναι ακυκλικό.

Για την περίπτωση ενός ασθενούς ρόμβου είναι αρκετό να παρατηρήσουμε ότι κατευθυνόμενο μονοπάτι που συνδέει τις κορυφές a και b , δεν μπορεί να βρίσκεται μέσα στον ρόμβο, επειδή, από τον ορισμό ένας ασθενής ρόμβος αποτελείται από μια όψη.

Οπότε, έχουμε αποδείξει, ότι οι κορυφές a και b του ρόμβου (ασθενούς ή ισχυρού), δεν συνδέονται με κατευθυνόμενο μονοπάτι σε καμία κατεύθυνση, άρα το γράφημα G δεν περιέχει κανένα μονοπάτι Χάμιλτον, άτοπο.

(\Leftarrow) Υποθέτουμε ότι το γράφημα G δεν περιέχει κανέναν ρόμβο (ισχυρό ή ασθενή) και θα δείξουμε ότι το G περιέχει ένα μονοπάτι Χάμιλτον. Εις άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι το γράφημα G δεν περιέχει κανένα μονοπάτι Χάμιλτον. Τότε από το Λήμμα 48, έπεται ότι υπάρχουν δύο κορυφές u και v στο G που δεν συνδέονται με κατευθυνόμενο μονοπάτι σε καμία κατεύθυνση. Από το



Εικόνα 3.12: Περιπτώσεις στην κατασκευή του μονοπατιού $P_{u,v}$, όπως περιγράφεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 18.

Λήμμα 24, έχουμε ότι στο δυϊκό γράφημα G^* του G υπάρχει ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι είτε από την $right(u)$ στην $left(v)$, είτε από την $right(v)$ στην $left(u)$. Χωρίς βλάβη τις γενικότητας, υποθέτουμε ότι το υπάρχον μονοπάτι είναι από την $right(u)$ στην $left(v)$, $P_{u,v}$, (βλ. Εικόνα 3.12.a) και έστω f_0, f_1, \dots, f_k είναι οι όψεις (κορυφές του δυϊκού) από τις οποίες περνάει το μονοπάτι αυτό, όπου $f_0 = Right(u)$ και $f_k = left(v)$. Παρατηρούμε ότι κάθε όψη του G , και άρα του $P_{u,v}$, είναι ένα γενικευμένο τρίγωνο, επειδή υποθέσαμε ότι το G δεν περιέχει κανέναν ρόμβο. Παρατηρούμε επίσης ότι το μονοπάτι $P_{u,v}$, μπορεί να εξέρχεται από την όψη f_0 μόνο μέσω μιας ακμής (βλ. Εικόνα 3.12.a). Ύστερα, το μονοπάτι εισέρχεται σε μια άλλη όψη και στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε την ακολουθία από τις όψεις τις οποίες διαπερνά.

Η όψη f_1 του μονοπατιού, περιέχει μια κοινή ακμή με την f_0 και κάποιες ακόμα ακμές. Υπάρχουν δύο πιθανές περιπτώσεις για την όψη f_1 .

Περίπτωση 1: Η όψη f_1 είναι αριστερόπλευρη. Τότε το μονοπάτι $P_{u,v}$ εισέρχεται στην f_1 , από μια ακμή στο αριστερό της σύνορο (βλ. Εικόνα 3.12.β, 3.12.c και 3.12.d για όλες τις δυνατές περιπτώσεις). Παρατηρούμε ότι, επειδή η f_1 είναι αριστερόπλευρη, περιέχει μόνο μια εξερχόμενη ακμή στο G^* . Άρα, ο μόνος τρόπος που το μονοπάτι $P_{u,v}$ μπορεί να φύγει από την f_1 , είναι να διασχίσει τη μοναδική πλευρά του δεξιού συνόρου του f_1 .

Περίπτωση 2: Η όψη f_1 είναι δεξιόπλευρη. Τότε η μόνη ακμή μέσω της οποίας το μονοπάτι $P_{u,v}$ μπορεί να εισέλθει στην f_1 είναι η μοναδική ακμή της αριστερής της πλευράς (βλ. Εικόνα 3.12.e). Στην περίπτωση αυτή οι όψεις f_0 και f_1 αποτελούν έναν ισχυρό ρόμβο. Άρα η περίπτωση αυτή αποκλείεται, λόγω της υπόθεσης για το G .

Η ιδιότητα που στην πρώτη περίπτωση παραπάνω μας επέτρεψε να συνεχίσουμε να χτίζουμε το $P_{u,v}$ είναι ότι, υπάρχει μοναδική ακμή που εξέρχεται από την όψη f_1 . Έτσι συνεχίζουμε να χτίζουμε το μονοπάτι $P_{u,v}$, βρίσκοντας μονοσήμαντα τις όψεις f_0, f_1, \dots, f_{k-1} από τις οποίες περνά το μονοπάτι. Παρατηρούμε ότι όλες αυτές οι όψεις είναι αριστερόπλευρες (διαφορετικά, το G περιέχει έναν ισχυρό ρόμβο).

Τέλος, το μονοπάτι $P_{u,v}$, πρέπει να εγκαταλείψει την αριστερόπλευρη όψη f_{k-1} και να εισέλθει στην δεξιόπλευρη όψη f_k . Επειδή ο μόνος τρόπος για να γίνει αυτό είναι να περάσει από την μοναδική

πλευρά της δεξιάς πλευράς της f_{k-1} και την μοναδική πλευρά της αριστερής πλευράς της f_k , οι οποίες συνεπώς ταυτίζονται, δημιουργώντας έναν ισχυρό ρόμβο (βλ. Εικόνα 3.12.f), άτοπο. \square

3.5 Εξωεπίπεδα st -Γραφήματα

Στην παρούσα ενότητα, παρουσιάζουμε έναν γραμμικό αλγόριθμο που δεδομένου ενός εξωεπίπεδου st -γραφήματος G , κατασκευάζει μια ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση του G σε 2-σέλιδο βιβλίο με τον ελάχιστο αριθμό των τομών με την ράχη. Έστω $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ είναι ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα, όπου s και t είναι η πηγή και η καταβόθρα του και οι κορυφές στο V_l (αντ. V_r) βρίσκονται στο αριστερό (αντ. δεξιό) σύνορο του G . Θέτουμε $V^l = \{v_1^l, \dots, v_k^l\}$ και $V^r = \{v_1^r, \dots, v_m^r\}$, όπου οι δείκτες φανερώνουν την σειρά στην οποία οι κορυφές εμφανίζονται στα σύνορα του G . Θεωρούμε ότι η πηγή και η καταβόθρα, ανήκουν και στα δύο σύνορα. Παρατηρούμε ότι κάθε μια όψη του G αποτελεί επίσης ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα. Μια ακμή που έχει και τις δύο κορυφές της σε ένα σύνορο του G , ονομάζεται στη συνέχεια *μονόπλευρη* ακμή. Όλες οι υπόλοιπες ακμές ονομάζονται *δίπλευρες*. Οι ακμές που προσπίπτουν στην πηγή και στην καταβόθρα θεωρούνται μονόπλευρες.

Το ακόλουθο λήμμα παρουσιάζει μια σημαντική ιδιότητα των ακυκλικών πληρώσεων Χάμιλτον για εξωεπίπεδα st -γραφήματα.

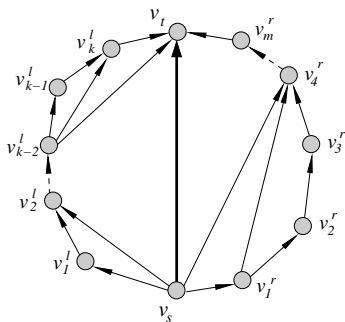
Λήμμα 27. *Κάθε ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον για ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ δημιουργεί ένα μονοπάτι Χάμιλτον που επισκέπτεται τις κορυφές του V_l (αντ. V_r) με την σειρά που αυτές εμφανίζονται στο αριστερό (αντ. δεξιό) σύνορο του G .*

Απόδειξη: Έστω E_c είναι μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον για το G και έστω G_c είναι το τελικό, συμπληρωμένο κατά Χάμιλτον, ακυκλικό γράφημα. Θεωρούμε δύο κορυφές v_1 και v_2 που εμφανίζονται, με αυτή την σειρά, στο ίδιο σύνορο (αριστερό ή δεξιό) του G . Τότε στο G υπάρχει μονοπάτι P_{v_1, v_2} από την v_1 στην v_2 . Εις άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι η v_2 εμφανίζεται στο μονοπάτι Χάμιλτον πριν από την v_1 . Τότε το μονοπάτι αυτό περιέχει ένα υπομονοπάτι P_{v_2, v_1} από την v_2 στην v_1 . Άρα, τα μονοπάτια P_{v_1, v_2} και P_{v_2, v_1} αποτελούν κύκλο στο G_c . Άτοπο, επειδή G_c είναι ακυκλικό. \square

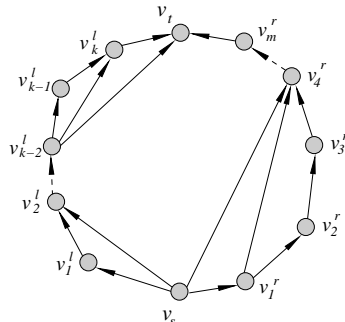
3.5.1 st -πολύγωνα

Ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα ονομάζεται *ισχυρό st -πολύγωνο* αν και τα δύο σύνορά του, περιέχουν τουλάχιστον μια κορυφή και η ακμή (v_s, v_t) που συνδέει την πηγή του v_s με την κατάβοθρα του v_t , είναι παρούσα (βλ. Εικόνα 3.13). Η ακμή (v_s, v_t) αναφέρεται ως *διαγώνιος* και πάντα βρίσκεται στο εσωτερικό της απεικόνισης. Ως συνέπεια, σε ένα ισχυρό st -πολύγωνο, δεν υπάρχουν δίπλευρες ακμές. Το εξωεπίπεδο st -γράφημα που προκύπτει από ένα ισχυρό st -πολύγωνο με την διαγραφή της διαγώνιου του ονομάζεται *ασθενές st -πολύγωνο* (βλ. Εικόνα 3.14). Χρησιμοποιούμε τον όρο *st -πολύγωνο* όταν αναφερόμαστε σε ένα ασθενές ή σε ένα ισχυρό st -πολύγωνο. Παρατηρούμε ότι ένα st -πολύγωνο έχει τουλάχιστον 4 κορυφές.

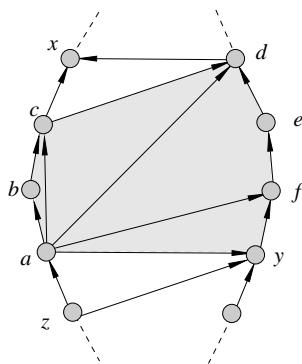
Έστω ένα st -γράφημα G και ένα υπογράφημά του G_p που αποτελεί ένα εμφυτευμένο st -πολύγωνο (ισχυρό ή ασθενές). Το G_p ονομάζεται *μέγιστο st -πολύγωνο* αν δεν μπορούμε να προσθέσουμε στο G_p άλλες κορυφές του G , και αυτό να παραμένει st -πολύγωνο. Στην Εικόνα 3.15, το st -πολύγωνο $G_{a,d}$ με τις κορυφές a (πηγή), b , c , d (καταβόθρα), e , και f στο σύνορό του, δεν είναι μέγιστο, επειδή προσθέτοντας την κορυφή y και τις προσπίπτουσες ακμές, έχουμε και πάλι ένα st -πολύγωνο $G'_{a,d}$. Όμως το st -πολύγωνο $G'_{a,d}$ είναι μέγιστο.



Εικόνα 3.13: Ένα ισχυρό st -πολύγωνο.



Εικόνα 3.14: Ένα ασθενές st -πολύγωνο.



Εικόνα 3.15: st -πολύγωνο με το σύνορο a (πηγή), b, c, d (καταβόθρα), e, f , και y είναι μέγιστο.

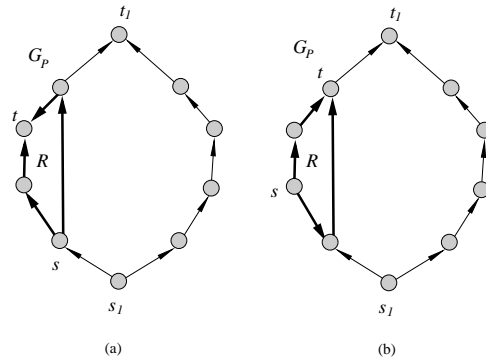
Παρατηρούμε ότι ένα st -πολύγωνο, ως υπογράφημα ενός εξωεπίπεδου st -γραφήματος G , αποτελεί μια ‘*λωρίδα*’ του, που φράσσεται από δύο δίπλευρες ακμές (η μία προσπίπτουσα στην πηγή και η άλλη στην καταβόθρα του st -πολυγώνου). Οι ακμές αυτές αναφέρονται ως *οριακές ακμές* του st -πολυγώνου. Παρατηρούμε επίσης, ότι οι οριακές ακμές είναι αρκετές για να ορίσουμε ένα st -πολύγωνο μέσα σε ένα st -γράφημα. Στην Εικόνα 3.15, το μέγιστο st -πολύγωνο με την πηγή a και την καταβόθρα d , έχει τις οριακές ακμές (a, y) και (c, d) .

Λήμμα 28. Ένα st -πολύγωνο περιέχει ακριβώς έναν ρόμβο.

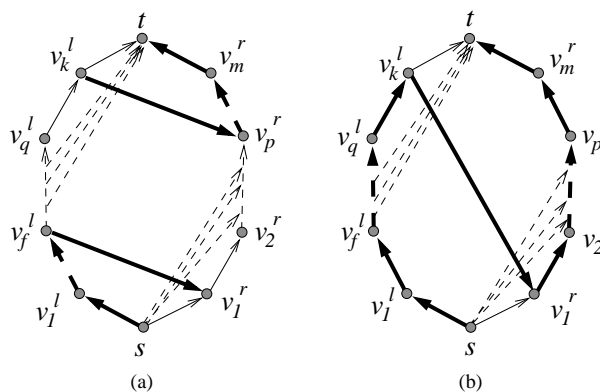
Απόδειξη: Έστω G_p είναι ένα st -πολύγωνο. Από τον ορισμό του συμπεράνουμε ότι G_p περιέχει έναν ρόμβο. Υποθέτουμε ότι αυτός δεν είναι ο μόνος ρόμβος που περιέχεται στο G_p και θέτουμε R να είναι ένας άλλος ρόμβος. Επειδή G_p είναι ένα εξωεπίπεδο γράφημα και δεν περιέχει δίπλευρες ακμές, έχουμε ότι όλες οι κορυφές του R πρέπει να βρίσκονται αποκλειστικά σε ένα από τα δύο σύνορα του G_p . Άρα το ένα από τα σύνορα του R αποτελείται από μόλις μια ακμή, άτοπο επειδή κάθε ρόμβος έχει τουλάχιστον δύο ακμές σε κάθε σύνορό του (βλ. Εικόνα 3.16). □

Τα ακόλουθα λήμματα έχουν να κάνουν με μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον ελαχίστων τομών για ένα μοναδικό st -πολύγωνο. Αποδεικνύουν ότι υπάρχει μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον ελαχίστων τομών που αποτελείται από το πολύ δύο ακμές.

Λήμμα 29. Έστω $R = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ είναι ένα st -πολύγωνο. Έστω P είναι μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον για το R έτσι ώστε $|P| = 2\mu + 1$, $\mu \in \mathbb{N}$. Τότε, υπάρχει μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον P' για το R έτσι ώστε $|P'| = 1$ και η ακμή του P' δημιουργεί τον ίδιο αριθμό τομών με τις ακμές του R όσο και οι ακμές του P . Επιπλέον, τα μονοπάτια Χάμιλτον που δημιουργούν οι πληρώσεις P και P' έχουν την ίδια πρώτη και τελευταία ακμή.



Εικόνα 3.16: Δύο δυνατοί τρόποι εμφύτευσης δεύτερου ρόμβου σε ένα st -πολύγωνο.

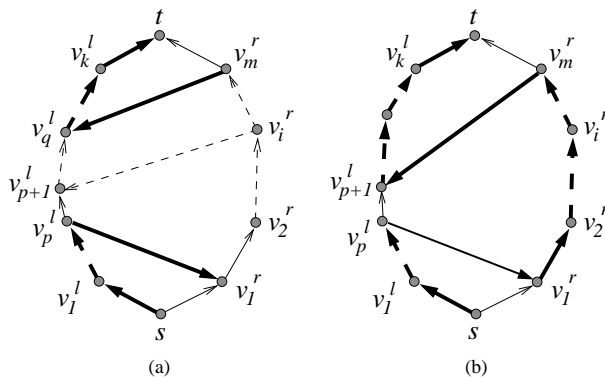


Εικόνα 3.17: Μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον περιπτού μεγέθους για ένα st -πολύγωνο και η αντίστοιχη ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον μεγέθους ένα.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 27 μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον για το R δεν περιέχει καμία μονόπλευρη ακμή. Άρα, όλες οι $2\mu + 1$ ακμές του P είναι δίπλευρες. Επιπλέον, επειδή το P περιέχει περιττό αριθμό των ακμών, η πρώτη και η τελευταία ακμή του P έχουν τον ίδιο προσανατολισμό¹. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι η χαμηλότερη ακμή του P είναι δεξιόστροφη (βλ. Εικόνα 3.17(a)). Από το Λήμμα 27, συνεπάγεται ότι η καταθόθρα της ακμής αυτής είναι η πρώτη κορυφή στο δεξιό σύνορο του R (δηλαδή, η κορυφή v_1^r), ενώ η πηγή της τελευταίας ακμής του P είναι η τελευταία κορυφή του αριστερού συνόρου του R (δηλαδή, η κορυφή v_k^l).

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $P' = \{(v_k^l, v_1^r)\}$ αποτελεί μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον για το R . Το μονοπάτι Χάμιλτον που προκύπτει από την πλήρωση αυτή είναι το $(s \rightarrow v_k^l \rightarrow v_1^r \rightarrow t)$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη δείχνουμε ότι η ακμή (v_k^l, v_1^r) δεν τέμνει περισσότερες ακμές του R από όσες τέμνουν οι ακμές του P . Η ακμή (v_k^l, v_1^r) τέμνει όλες τις ακμές στο σύνολο $\{(s, v) : v \in V^r \setminus \{v_1^r\}\}$ καθώς και όλες τις ακμές του συνόλου $\{(v, t) : v \in V^l \setminus \{v_m^l\}\}$, αν αυτές οι ακμές υπάρχουν στο γράφημα (βλ. Εικόνα 3.17(β)). Οι ακμές των συνόλων αυτών τέμνονται από την πρώτη και την τελευταία ακμή του P , αντίστοιχα. Άρα, η ακμή (v_k^l, v_1^r) δημιουργεί το πολύ τον ίδιο αριθμό των τομών με τις ακμές του R όσο και οι ακμές του P . Παρατηρούμε επίσης ότι τα μονοπάτια Χάμιλτον που δημιουργούν οι πληρώσεις P και P' έχουν την ίδια πρώτη και τελευταία ακμή. \square

¹ Λέμε ότι δύο ακμές έχουν τον ίδιο προσανατολισμό αν και οι δύο είναι αριστερόστροφες ή και οι δύο δεξιόστροφες. Διαφορετικά, λέμε ότι οι ακμές έχουν αντίθετο προσανατολισμό.



Εικόνα 3.18: Μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον άρτιου μεγέθους για ένα st -πολύγωνο και η αντίστοιχη ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον μεγέθους δύο.

Λήμμα 30. Έστω $R = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ είναι ένα st -πολύγωνο. Έστω P είναι μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον για το R έτσι ώστε $|P| = 2\mu$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geq 1$. Τότε, υπάρχει μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον P' για το R έτσι ώστε $|P'| = 2$ και οι ακμές του P' δημιουργούν το ποψύ τον ίδιο αριθμό των τομών με το R όσο και οι ακμές του P . Επιπλέον, τα μονοπάτια Χάμιλτον που δημιουργούν οι πληρώσεις P και P' έχουν την ίδια πρώτη και τελευταία ακμή.

Απόδειξη: Όπως στην περίπτωση του περιττού αριθμού των ακμών (Λήμμα 29), οι 2μ ακμές του P είναι δίπλευρες. Επειδή η πλήρωση P περιέχει άρτιο αριθμό ακμών, η πρώτη και τελευταία ακμή του P έχουν αντίθετο προσανατολισμό. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η πρώτη ακμή είναι δεξιόστροφη (βλ. Εικόνα 3.18.a). Από το Λήμμα 27, συνεπάγεται ότι η πρώτη ακμή του P είναι εισερχόμενη στην πρώτη κορυφή του δεξιού συνόρου του R (δηλαδή, στην κορυφή v_1^r), ενώ η τελευταία ακμή του P , εξέρχεται από την τελευταία κορυφή του δεξιού συνόρου του R (δηλαδή, από την v_m^r). Συμβολίζουμε την χαμηλότερη ακμή του P με (v_p^l, v_1^r) . Τότε, από το Λήμμα 27, συνεπάγεται ότι η πλήρωση P περιέχει την ακμή (v_i^r, v_{p+1}^l) για κάποιο $1 < i \leq m$. Αν $i = m$, τότε η P περιέχει ακριβώς δύο ακμές και το ζητούμενο έπεται. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $i < m$.

Παρατηρούμε ότι, για την περίπτωση $|P| > 3$, το σύνολο των ακμών $P' = \{(v_p^l, v_1^r), (v_m^r, v_{p+1}^l)\}$ αποτελεί μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον για το R (βλ. Εικόνα 3.18.β). Το παραγόμενο μονοπάτι Χάμιλτον είναι το $(s \rightarrow v_p^l \rightarrow v_1^r \rightarrow v_m^r \rightarrow v_{p+1}^l \rightarrow t)$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι ακμές (v_p^l, v_1^r) και (v_m^r, v_{p+1}^l) δεν τέμνουν περισσότερες ακμές του R από ότι τέμνουν οι ακμές της πλήρωσης P . Οι ακμές του E που τέμνονται από τις δύο ακμές του P' είναι οι ακόλουθες:

- Ακμές που έχουν την πηγή τους κάτω από την ακμή (v_p^l, v_1^r) , και την καταβόθρα τους πάνω από την ακμή (v_m^r, v_{p+1}^l) . Όλες οι ακμές αυτές τέμνονται και από τις δύο ακμές του P' . Όμως, στην περίπτωση του P , τέμνονται τουλάχιστον από τις ακμές (v_p^l, v_1^r) και (v_i^r, v_{p+1}^l) .
- Ακμές που έχουν την πηγή τους κάτω από την (v_p^l, v_1^r) και την καταβόθρα τους μεταξύ των (v_p^l, v_1^r) και (v_m^r, v_{p+1}^l) . Όλες αυτές οι ακμές τέμνονται μόνο από την ακμή (v_p^l, v_1^r) του P' . Αλλά, η ακμή (v_p^l, v_1^r) ανήκει επίσης στη πλήρωση P .
- Ακμές που έχουν την πηγή τους μεταξύ των ακμών (v_p^l, v_1^r) και (v_m^r, v_{p+1}^l) και τις καταβόθρες τους πάνω από την ακμή (v_m^r, v_{p+1}^l) . Όλες αυτές οι ακμές τέμνονται μόνο από την ακμή (v_m^r, v_{p+1}^l) στο P' . Αλλά, τέμνονται τουλάχιστον από την (v_m^r, v_{p+1}^l) στο P .

Έστω, οι ακμές του P' δημιουργούν το πολύ τον ίδιο αριθμό των τομών με τις ακμές του R όσο και οι ακμές του P . Τέλος, παρατηρούμε ότι, τα μονοπάτια Χάμιλτον που δημιουργούν οι πληρώσεις P και P' έχουν την ίδια πρώτη και την τελευταία ακμή. \square

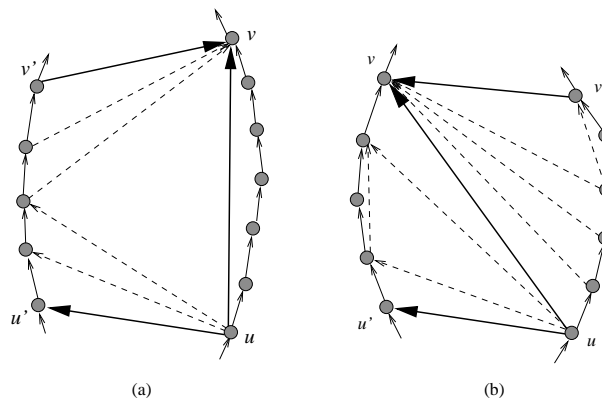
Το ακόλουθο θεώρημα έπεται άμεσα από το Λήμμα 29 και το Λήμμα 30.

Θεώρημα 19. Κάθε st -πολύγωνο έχει μια βέλτιστη ως προς τον αριθμό των τομών ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον που αποτελείται από το πολύ δύο ακμές. \square

3.5.2 Αποσύνθεση εξωεπίπεδων st -γραφημάτων σε st -πολύγωνα

Λήμμα 31. Έστω $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ είναι ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα και $e = (s', t') \in E$ είναι μια ακμή του. Συμβολίζουμε με V το σύνολο όλων των κορυφών του G . Αν διαθέσουμε $O(V)$ χρόνο για προεπεξεργασία του G , μπορούμε να αποφασίσουμε σε χρόνο $O(1)$ αν η ακμή e είναι διαγώνιος ενός ισχυρού st -πολυγώνου. Επιπλέον, οι οριακές ακμές του st -πολυγώνου αυτού μπορούν επίσης να βρεθούν σε χρόνο $O(1)$.

Απόδειξη: Μπορούμε να προεπεξεργαστούμε το γράφημα G σε γραμμικό χρόνο έτσι ώστε για κάθε μια από τις κορυφές του να γνωρίζουμε την πρώτη και την τελευταία (κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού) εισερχόμενη και εξερχόμενη ακμή. Παρατηρούμε ότι μια μονόπλευρη ακμή (u, v)



Εικόνα 3.19: st -πολύγωνα με μονόπλευρη και δίπλευρη διαγώνιο. Η διαγώνιος και οι οριακές ακμές του st -πολυγώνου, εμφανίζονται με έντονη γραμμή.

είναι διαγώνιος ενός ισχυρού st -πολυγώνου αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής (βλ. Εικόνα 3.19.a):

- (a) Οι u και v δεν είναι συνεχόμενες κορυφές στο ίδιο σύνορο του G .
- (b) Η u έχει μια δίπλευρη, εξερχόμενη ακμή.
- (c) Η v έχει μια δίπλευρη, εισερχόμενη ακμή.

Παρόμοια, παρατηρούμε ότι μια δίπλευρη ακμή (u, v) με $u \in V^R$ (αντ. $u \in V^L$) είναι διαγώνιος ενός ισχυρού st -πολυγώνου αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα (βλ. Εικόνα 3.19.β):

- (a) Η u έχει μια δίπλευρη εξερχόμενη ακμή που ρολογιακά² προηγείται (αντ. έπεται) την (u, v) .
- (b) Η v έχει μια δίπλευρη εισερχόμενη ακμή που ρολογιακά προηγείται (αντ. έπεται) την (u, v) .

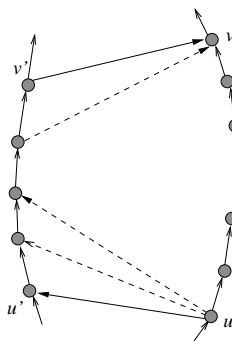
²κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού

Όλες οι παραπάνω συνθήκες μπορούν να ελεγχθούν τετριμμένα σε χρόνο $O(1)$. Άρα οι οριακές ακμές του st -πολυγώνου με διαγώνιο (u, v) μπορεί να βρεθούν σε χρόνο $O(1)$. \square

Λήμμα 32. Έστω $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ είναι ένα εξωεπίεδο st -γράφημα και f είναι μια όψη του, με πηγή u και καταβόθρα v . Συμβολίζουμε με V το σύνολο όλων των κορυφών του G . Αν διαθέσουμε $O(V)$ χρόνο για την προεπεξεργασία του G , μπορούμε να αποφασίσουμε σε χρόνο $O(1)$ αν η όψη f αποτελεί έναν ασθενή ρόμβο. Επιπλέον, οι οριακές ακμές του μέγιστου st -πολυγώνου που περιέχει την f , μπορούν να βρεθούν σε χρόνο $O(1)$.

Απόδειξη: Από τον ορισμό, ένας ασθενής ρόμβος είναι μια όψη που έχει τουλάχιστον δύο ακμές σε κάθε σύνορό του. Άρα μπορούμε να ελέγξουμε σε χρόνο $O(1)$ αν το f αποτελεί έναν ασθενή ρόμβο, αν διαθέτουμε τις κορυφές που αποτελούν τα δύο σύνορά του.

Όπως παρατηρήσαμε στην προηγούμενη απόδειξη, μπορούμε να προεπεξεργαστούμε το γράφημα G σε γραμμικό χρόνο έτσι ώστε για κάθε μια από τις κορυφές του να γνωρίζουμε την πρώτη και την τελευταία (κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού) εισερχόμενη και εξερχόμενη ακμή. Τότε οι υπόλοιπες δύο κορυφές που μαζί με την πηγή και καταβόθρα του f αποτελούν τις οριακές ακμές του ασθενούς st -πολυγώνου που περιέχει τον f ως υπογράφημα, μπορούν να βρεθούν σε χρόνο $O(1)$. Για παράδειγμα, στην Εικόνα 3.20, όπου οι κορυφές u και v είναι είναι στο δεξιά σύνορο, οι οριακές ακμές του μέγιστου st -πολυγώνου είναι ή πρώτη εξερχόμενη ακμή από την u και η τελευταία εισερχόμενη ακμή στην v . \square



Εικόνα 3.20: Ένας ασθενής ρόμβος που έχει τις u και v ως πηγή και καταβόθρα, αντίστοιχα και το μέγιστο st -πολύγωνο που περιέχει τον ρόμβο αυτό.

Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς το ακόλουθο λήμμα.

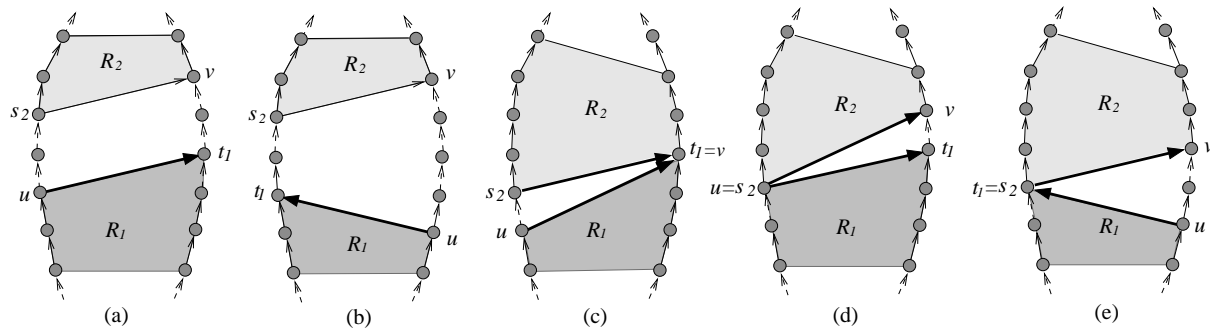
Λήμμα 33. Τα μέγιστα st -πολύγωνα που περιέχονται σε ένα εξωεπίεδο st -γράφημα G δεν έχουν κοινές όψεις. \square

Συμβολίζουμε με $\mathcal{R}(G)$ το σύνολο των μέγιστων st -πολυγώνων ενός εξωεπίεδου st -γραφήματος G . Παρατηρούμε ότι υπάρχουν κορυφές του G που δεν ανήκουν σε κανένα st -πολύγωνο. Ονομάζουμε τις κορυφές αυτές *ελεύθερες κορυφές* και τις συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(G)$. Επίσης παρατηρούμε ότι, υπάρχει μια φυσική σειρά με την οποία τα st -πολύγωνα εμφανίζονται στο G , η οποία βασίζεται στις οριακές τους ακμές. Οι ελεύθερες κορυφές του G , εμφανίζονται μεταξύ των λωρίδων των st -πολυγώνων.

Λήμμα 34. Έστω R_1 και R_2 είναι δύο διαδοχικά μέγιστα st -πολύγωνα ενός εξωεπίεδου st -γραφήματος G που δεν έχουν κοινή ακμή, και έστω $V_f \subseteq \mathcal{F}(G)$ είναι το σύνολο των ελεύθερων κορυφών μεταξύ των R_1 και R_2 . Συμβολίζουμε με (u, t_1) και (s_2, v) την πάνω και την κάτω οριακή ακμή των R_1 και R_2 , αντίστοιχα. Για το εμφυτευμένο υπογράφημα G_f του G που παράγεται από τις κορυφές $V_f \cup \{u, t_1, s_2, v\}$ ισχύει ότι:

- (a) Το G_f είναι ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα με πηγή u και καταβόθρα v .
- (b) Το G_f έχει μονοπάτι Χάμιλτον.

Απόδειξη: Πρώτα θα δείξουμε ότι αληθεύει η πρόταση (a). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η οριακή ακμή (s_2, v) , του st -πολυγώνου R_2 , είναι δεξιόστροφη. Εξετάζουμε περιπτώσεις βασιζόμενοι στο αν το R_1 και το R_2 έχουν κοινή κορυφή.



Εικόνα 3.21: Απόδειξη του Λήμματος 34.

Περίπτωση 1: R_1 και R_2 δεν έχουν κοινή κορυφή. Βασιζόμενοι στον προσανατολισμό της ακμής (u, t_1) ξεχωρίζουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση 1a: Η ακμή (u, t_1) είναι δεξιόστροφη.
 Βλ. Εικόνα 3.21.α.

Περίπτωση 1b: Η ακμή (u, t_1) είναι αριστερόστροφη.
 Βλ. Εικόνα 3.21.β.

Στις παραπάνω δύο περιπτώσεις, παρατηρούμε ότι το G_f αποτελεί ένα st -πολύγωνο που έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι τα R_1 και R_2 είναι διαδοχικά και μέγιστα st -πολύγωνα. Άρα, η Περίπτωση 1 δεν υφίσταται.

Περίπτωση 2: Τα R_1 και R_2 έχουν μια κοινή κορυφή. Πρώτα με απαγωγή στο άτοπο, θα δείξουμε ότι η ακμή (u, t_1) του R_1 είναι αριστερόστροφη. Έστω ότι είναι δεξιόστροφη. Αν η κορυφή u συμπίπτει με την t_1 (βλ. Εικόνα 3.21.c) τότε το st -πολύγωνο R_1 θα μπορούσε να επεκταθεί (παραμένοντας st -πολύγωνο), προσθέτοντας τις όψεις μεταξύ των R_1 και R_2 , άτοπο, επειδή R_1 είναι μέγιστο. Αν η u συμπίπτει με την s_2 (βλ. Εικόνα 3.21.d) τότε θα μπορούσαμε να επεκτείνουμε το st -πολύγωνο R_2 , προσθέτοντάς του τις όψεις μεταξύ των R_1 και R_2 , άτοπο, επειδή το R_2 είναι μέγιστο. Άρα, η οριακή ακμή (u, t_1) του R_1 είναι αριστερόστροφη και η s_2 συμπίπτει με την t_1 (βλ. Εικόνα 3.21.e). Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι μια ειδική περίπτωση της Περίπτωσης 1b (όταν καμία κορυφή του V_f δεν είναι στο αριστερό σύνορο του G).

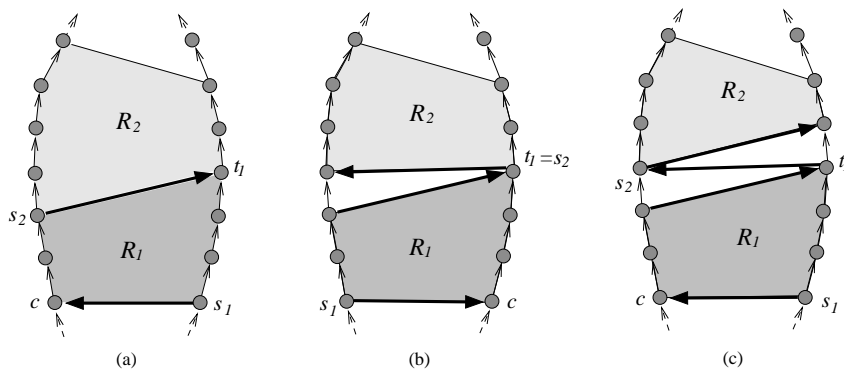
Άρα το G_f είναι ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα με την πηγή u και την καταβόθρα v . Παρατηρούμε επίσης ότι το G_f δεν περιέχει ρόμβο, διαφορετικά θα αποτελούσε st -πολύγωνο. Άρα, από το Θεώρημα 18, έπεται ότι το G_f έχει μονοπάτι Χάμιλτον. □

Λήμμα 35. Έστω R_1 και R_2 είναι δύο διαδοχικά μέγιστα st -πολύγωνα ενός εξωεπίπεδου st -γραφήματος G που μοιράζονται μια κοινή ακμή. Έστω t_1 είναι η καταβόθρα του R_1 και s_2 είναι η πηγή του R_2 . Τότε, ακμή κοινή για τα R_1 και s_2 είναι η (s_2, t_1) .

Απόδειξη: Έστω η πάνω οριακή ακμή του R_1 είναι η (u, t_1) , και η κάτω οριακή ακμή του R_2 είναι η (s_2, v) . Επειδή αυτές είναι οι μόνες ακμές που μπορούν να συμπίπτουν, συμπεραίνουμε ότι η v συμπίπτει με την t_1 και η u με την s_2 . \square

Λήμμα 36. Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα. Έστω R_1 και R_2 είναι δύο διαδοχικά st -πολυγώνια στο G και έστω $V_f \subseteq \mathcal{F}(G)$ είναι το σύνολο των ελεύθερων κορυφών μεταξύ των R_1 και R_2 . Τότε, ισχύουν οι εξής προτάσεις:

- Για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V_f$, υπάρχει ένα μονοπάτι είτε από την u στην v , είτε από την v στην u .
- Για κάθε κορυφή $v \in V_f$, υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι από την καταδόθρα του R_1 στην v , και ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από την v στην πηγή του R_2 .
- Αν ισχύει ότι $V_f = \emptyset$, τότε υπάρχει μονοπάτι από την πηγή του R_1 στην πηγή του R_2 .



Εικόνα 3.22: Διαδοχικά st -πολύγωνα σε ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα, μεταξύ των οποίων δεν υπάρχει καμία ελεύθερη κορυφή.

Απόδειξη:

- Από το Λήμμα 34 έχουμε ότι το υπογράφημα G_f του G (όπως ορίστηκε στην απόδειξη του Λήμματος 34) έχει μονοπάτι Χάμιλτον. Άρα, το ζητούμενο έπεται.
- Έπεται απευθείας από το Λήμμα 34.
- Παρατηρούμε ότι υπάρχουν τρεις δυνατές περιπτώσεις για την δομή του γραφήματος ώστε μεταξύ των δύο διαδοχικών st -πολυγώνων να μην υπάρχουν ελεύθερες κορυφές (βλ. Εικόνες 3.22.a-c). Συμβολίζουμε με s_1 και s_2 τις πηγές των R_1 και R_2 , αντίστοιχα. Αν η s_1 και η s_2 βρίσκονται στο ίδιο σύνολο του G τότε το ζητούμενο ισχύει. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η s_1 και η s_2 ανήκουν σε διαφορετικά σύνορα του G . Τότε η κάτω οριακή ακμή του R_1 , έστω (s_1, c) , καταλήγει στο σύνορο του G όπου βρίσκεται η s_2 . Επειδή υπάρχει μονοπάτι από την c στην s_2 έχουμε ότι υπάρχει μονοπάτι από την s_1 στην s_2 .

\square

Η πηγή s_i του st -πολυγώνου $R_i \in \mathcal{R}(G)$, $1 \leq i \leq |\mathcal{R}(G)|$, ονομάζεται *αντιπρόσωπος* του R_i και συμβολίζεται με $r(R_i)$. Ορίζουμε επίσης ως αντιπρόσωπο μιας ελεύθερης κορυφής $v \in \mathcal{F}(G)$ να είναι ίδια η v , δηλαδή $r(v) = v$. Για κάθε δύο στοιχεία $x, y \in \mathcal{R}(G) \cup \mathcal{F}(G)$ ορίζουμε την σχέση \angle_p ως εξής: $x \angle_p y$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα μονοπάτι από την $r(x)$ στην $r(y)$.

Λήμμα 37. Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο *st*-γράφημα με n κορυφές. Τότε, η σχέση \mathcal{L}_p ορίζει μια ολική διάταξη των στοιχείων του $\mathcal{R}(G) \cup \mathcal{F}(G)$. Η ολική διάταξη αυτή μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n)$.

Απόδειξη: Το γεγονός ότι \mathcal{L}_p είναι μια ολική διάταξη του $\mathcal{R}(G) \cup \mathcal{F}(G)$ έπεται από το Λήμμα 36. Η σειρά των στοιχείων του $\mathcal{R}(G) \cup \mathcal{F}(G)$ μπορεί εύκολα να βρεθεί από μια τοπολογική αρίθμηση του G και πιο συγκεκριμένα από τους αριθμούς που αντιστοιχεί η αρίθμηση αυτή στους αντιπροσώπους των στοιχείων του $\mathcal{R}(G) \cup \mathcal{F}(G)$. Ανακαλούμε επίσης, ότι σε ένα ακυκλικό γράφημα n κορυφών η τοπολογική του αρίθμηση μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n)$. \square

Ορισμός 6. Έστω ένα εξωεπίπεδο *st*-γράφημα G , η αποσύνθεση του G σε *st*-πολύγωνα είναι η ολική διάταξη $\{o_1, \dots, o_\beta\}$ που ορίζεται από την σχέση \mathcal{L}_p πάνω στα *st*-πολύγωνα $\mathcal{D}(G)$ και τις ελεύθερες κορυφές του G , δηλαδή, το o_i , $1 \leq i \leq \beta$, είναι είτε ένα *st*-πολύγωνο είτε μια ελεύθερη κορυφή του G και ισχύει ότι $o_i \mathcal{L}_p o_{i+1}$, $1 \leq i < \beta$.

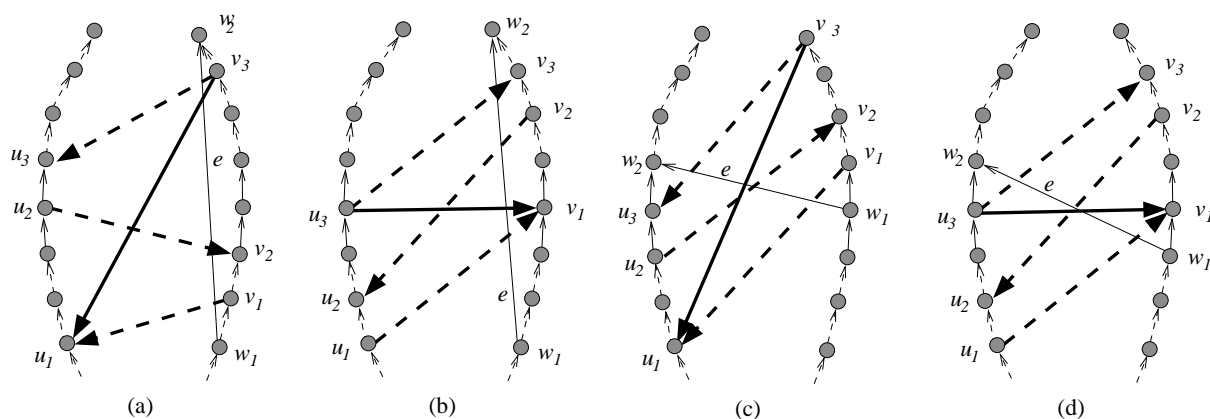
Το ακόλουθο θεώρημα έπεται άμεσα από το Λήμμα 31, Λήμμα 32 και το Λήμμα 37.

Θεώρημα 20. Η αποσύνθεση σε *st*-πολύγωνα ενός εξωεπίπεδου *st*-γραφήματος με n κορυφές μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n)$.

3.5.3 Οι ιδιότητες των ακυκλικών πληρώσεων κατά Χάμιλτον

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζουμε τρεις ιδιότητες των ακυκλικών πληρώσεων κατά Χάμιλτον, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στον αλγόριθμο. Έστω $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ είναι ένα εξωεπίπεδο *st*-γράφημα και $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_\beta\}$ είναι η αποσύνθεσή του *st*-πολύγωνα. Με το G_i συμβολίζουμε το υπογράφημα του G που παράγεται από τις κορυφές των o_1, \dots, o_i , $i \leq \beta$.

Ιδιότητα 3. Έστω $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ είναι ένα εξωεπίπεδο *st*-γράφημα. Τότε, σε μια βέλτιστη ως προς τον αριθμό των τομών, ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον για το G , κάθε ακμή του E τέμνεται από το πολύ δύο ακμές της πλήρωσης.



Εικόνα 3.23: Απόδειξη της Ιδιότητας 3.

Απόδειξη: Εισ άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι το P_{opt} είναι μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον για το G , οι ακμές της οποίας τέμνουν κάποια ακμή $e = (w_1, w_2)$ του G τρεις φορές. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον για το G που δημιουργεί συνολικά μικρότερο αριθμό των τομών.

Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις με βάση το αν η ακμή e είναι μονόπλευρη ή δίπλευρη.

Περίπτωση 1: Η ακμή e είναι μονόπλευρη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι και οι δύο κορυφές της e είναι στο δεξί σύνορο. Έστω e_1 είναι η πρώτη από τις τρεις ακμές της πλήρωσης P_{opt} , που τέμνουν την e . Θεωρούμε περιπτώσεις βασιζόμενοι στον προσανατολισμό της e_1 .

Περίπτωση 1a: Η ακμή e_1 είναι αριστερόστροφη. Έστω $e_1 = (v_1, u_1)$ και έστω $(u_2, v_2), (v_3, u_3)$ είναι οι δύο άλλες ακμές που τέμνουν την e (βλ. Εικόνα 3.23.a). Είναι ξεκάθαρο ότι οι ακμές αυτές είναι προσανατολισμένες εναλλάξ. Το μονοπάτι $P_{v_1, u_3} = (v_1 \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow u_3)$ αποτελεί υπομονοπάτι του τελικού μονοπατιού Χάμιλτον στο συμπληρωμένο γράφημα. Από το Λήμμα 27, η κορυφή u_2 γειτονεύει με την u_3 στο αριστερό σύνορο του G , και η κορυφή v_2 γειτονεύει με την v_1 στο δεξί σύνορο του G .

Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι η αντικατάσταση του μονοπατιού P_{v_1, u_3} από το μονοπάτι $P'_{v_1, u_3} = (v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3)$ μέσα στο μονοπάτι Χάμιλτον του συμπληρωμένου γραφήματος, μειώνει τον συνολικό αριθμό των τομών τουλάχιστον κατά δύο.

Αναρωτιόμαστε ποιες ακμές του G τέμνονται από την νέα ακμή (v_3, u_1) . Οι ακμές αυτές κατηγοριοποιούνται ως εξής: (i) Οι μονόπλευρες ακμές, με τις δύο κορυφές στο δεξί σύνορο του G , που έχουν την πηγή τους κάτω από την v_3 και καταβόθρα τους πάνω από την v_3 . Παρατηρούμε ότι οι ακμές αυτές τέμνονται επίσης από την ακμή (v_3, u_3) . (ii) Οι δίπλευρες ακμές που έχουν την πηγή τους κάτω της w_1 στο δεξί σύνορο του G , και την καταβόθρα τους πάνω από την v_1 , στο αριστερό σύνορο του G . Οι ακμές αυτές τέμνονται από την ακμή (v_1, u_1) (και πιθανόν και από τις δύο ακμές (u_2, v_2) και (v_3, u_3)). (iii) Η μονόπλευρες ακμές στο αριστερό σύνορο του G που έχουν την πηγή τους κάτω της u_1 , και την καταβόθρα τους πάνω την u_1 . Οι ακμές αυτές τέμνονται τουλάχιστον από την (v_1, u_1) . (iv) Οι δίπλευρες ακμές που έχουν την πηγή τους κάτω της u_1 , στο αριστερό σύνορο του G , και την καταβόθρα τους πάνω από την w_2 , στο δεξί σύνορο του G . Οι ακμές αυτές τέμνονται επίσης από τις (v_1, u_1) , (u_2, v_2) και (v_3, u_3) . Οπότε, έχουμε αποδείξει ότι αντικαθιστώντας το P_{u_1, v_3} με το P'_{u_1, v_3} έχουμε ότι ο αριθμός των τομών μειώνεται τουλάχιστον κατά δύο.

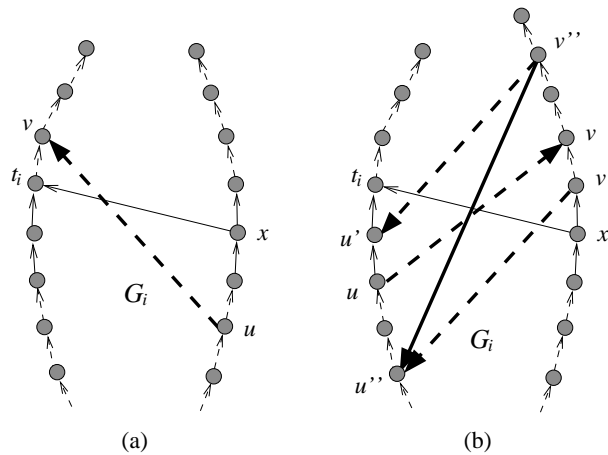
Περίπτωση 1b: Η ακμή e_1 είναι δεξιόστροφη. Έστω $e_1 = (u_1, v_1)$ και $(v_2, u_2), (u_3, v_3)$ είναι οι υπόλοιπες δύο ακμές που τέμνουν την e (βλ. Εικόνα 3.23.b). Παρατηρούμε ότι το μονοπάτι $P_{u_1, v_3} = (u_1 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow v_3)$ είναι ένα υπομονοπάτι του μονοπατιού Χάμιλτον στο συμπληρωμένο γράφημα του G . Επίσης, από το Λήμμα 27, η κορυφή u_2 είναι γειτονική με την u_1 στο αριστερό σύνορο του G , και η v_2 είναι γειτονική με την v_3 στο δεξί σύνορο του G . Με τον τρόπο παρόμοιο με την Περίπτωση 1a, αποδεικνύουμε ότι αντικαθιστώντας το P_{u_1, v_3} με το $P'_{u_1, v_3} = (u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3)$ έχουμε ότι ο αριθμός των τομών μειώνεται τουλάχιστον κατά δύο.

Περίπτωση 2: Η ακμή e είναι δίπλευρη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι είναι αριστερόστροφη. Ξεχωρίζουμε περιπτώσεις βάση του προσανατολισμού της e_1 .

Περίπτωση 2a: Η ακμή e_1 είναι αριστερόστροφη. Η απόδειξη είναι ταυτόσημη με την απόδειξη της Περίπτωσης 1a.

Περίπτωση 2b: Η ακμή e_1 είναι δεξιόστροφη. Η απόδειξη είναι ταυτόσημη με την απόδειξη της Περίπτωσης 1b. \square

Ιδιότητα 4. Έστω $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ είναι ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα και έστω $\mathcal{D}(G) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ είναι η αποσύνθεσή του σε st -ποβιύγωνα. Τότε, υπάρχει μια βέλτιστη ως προς τον αριθμό των τομών, ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον για το G έτσι ώστε για κάθε μέγιστο st -ποβιύγωνα



Εικόνα 3.24: Απόδειξη της Ιδιότητας 4.

$o_i \in \mathcal{D}(G)$, $i \leq \lambda$, η πλήρωση δεν περιέχει καμία ακμή που να έχει την πηγή της στο G_i και να τέμνει την πάνω οριακή ακμή του o_i .

Απόδειξη: Έστω $e = (x, t_i)$ είναι η πάνω οριακή ακμή του o_i . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι αριστερόστροφη. Για απαγωγή στο άτοπο, υποθέτουμε ότι η πλήρωση P_{opt} περιέχει μια ακμή $\tilde{e} = (u, v)$, $u \in G_i$, που τέμνει την e . Από το Λήμμα 27, συμπεραίνουμε ότι η ακμή \tilde{e} είναι δίπλευρη, διαφορετικά οι κορυφές ενός συνόρου του G εμφανίζονται στο μονοπάτι Χάμιλτον, που προκύπτει από το P_{opt} σε διαφορετική σειρά από την σειρά τους στο G . Διαχωρίζουμε δύο περιπτώσεις, με βάση τον προσανατολισμό της \tilde{e} .

Περίπτωση 1: Η ακμή $\tilde{e} = (u, v)$ είναι αριστερόστροφη. Βλ. Εικόνα 3.24.a. Από το Λήμμα 27, στο μονοπάτι Χάμιλτον που προκύπτει από την P_{opt} , η κορυφή x επισκέπτεται μετά την κορυφή u . Έτσι, στο προκύπτον συμπληρωμένο κατά Χάμιλτον γράφημα πρέπει να υπάρχει μονοπάτι από την v στην x , το οποίο μαζί με την (x, t_i) και το μονοπάτι $(t_i \rightarrow v)$ στο αριστερό σύνορο της G δημιουργεί κύκλο. Άτοπο, επειδή το P_{opt} είναι μια ακυκλική πλήρωση.

Περίπτωση 2: Η ακμή $\tilde{e} = (u, v)$ είναι δεξιόστροφη. Βλ. Εικόνα 3.24.b. Συμβολίζουμε με v' την κορυφή που βρίσκεται αμέσως πιο κάτω από την v (παρατηρούμε ότι η v' μπορεί να συμπίπτει με την x) και με u' την κορυφή που είναι αμέσως πιο πάνω από την u (η u' μπορεί να συμπίπτει με την t_i).

Θεωρούμε το μονοπάτι Χάμιλτον που προκύπτει από το P_{opt} . Από το Λήμμα 27, συνεπάγεται ότι, το μονοπάτι P_{opt} , πριν περάσει στο αριστερό σύνορο του G , μέσω της ακμής (u, v) , επισκέφθηκε όλες της κορυφές στο δεξιό σύνορο, που βρίσκονται κάτω από την v . Άρα υπάρχει μια ακμή $(v', u'') \in P_{opt}$, όπου u'' είναι μια κορυφή κάτω από την u , στο αριστερό σύνορο του G . Παρατηρούμε ότι από το Λήμμα 27, η κορυφή u' πρέπει να εμφανίζεται στο μονοπάτι Χάμιλτον μετά την κορυφή u . Άρα υπάρχει μια ακμή $(v'', u') \in P_{opt}$, όπου v'' είναι μια κορυφή πάνω από την v στο δεξιό σύνορο του G .

Με επιχειρήματα παρόμοια με αυτά της απόδειξης της Ιδιότητας 3, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η αντικατάσταση του υπομονοπατιού $P_{v',u'} = (v' \rightarrow u'' \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow v'' \rightarrow u')$ με το υπομονοπάτι $P'_{v',u'} = (v' \rightarrow v'' \rightarrow u'' \rightarrow u')$ στο μονοπάτι Χάμιλτον του G δεν αυξάνει τον αριθμό των τομών. Πιο συγκεκριμένα, όταν η v' δεν συμπίπτει με την x και/ή u' δεν συμπίπτει με την t_i , το παραγόμενο μονοπάτι δημιουργεί τουλάχιστον μια τομή παραπάνω, αποτελώντας αντίφαση στην βελτιστότητα του P_{opt} . Στην περίπτωση που η v' συμπίπτει με την x και η u' με την t_i και τα δύο μονοπάτια

Χάμιλτον δημιουργούν τον ίδιο αριθμό των τομών, και το νέο μονοπάτι Χάμιλτον έχει την επιθυμητή ιδιότητα, δηλαδή καμία από της ακμές του δεν ξεκινά από το G_i και τέμνει την (x, t_i) . \square

Ιδιότητα 5. Έστω $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ είναι ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα και έστω $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_\beta\}$ είναι η αποσύνθεσή του σε st -πολύγωνα. Τότε, σε κάθε, βέλτιστη ως προς τον αριθμό των τομών, ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιτον για το G , το ποσόν μια ακμή της πλήρωσης τέμνει την πάνω οριακή ακμή του o_i .

Απόδειξη: Έστω $e = (x, t_i)$ είναι η πάνω οριακή ακμή του o_i . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι είναι αριστερόστροφη και έστω v είναι μια κορυφή αμέσως πάνω από την x στο δεξί σύνορο του G . Συμβολίζουμε με u την κορυφή που βρίσκεται αμέσως κάτω από την t_i στο αριστερό σύνορο του G . Από την Ιδιότητα 3, έχουμε ότι οι ακμές μιας βέλτιστης ως προς τον αριθμό των τομών, ακυκλικής πλήρωσης κατά Χάμιτον για το G δεν τέμνουν την e πάνω από δύο φορές.

Εισ άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια βέλτιστη ως προς τον αριθμό των τομών, ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιτον P_{opt} για το G που τέμνει την e δύο φορές. Έστω $e_1, e_2 \in P_{opt}$ είναι οι ακμές που τέμνουν την e . Είναι φανερό ότι οι ακμές αυτές έχουν αντίθετο προσανατολισμό και δεν τέμνονται. Έστω η e_1 είναι η ακμή που τέμνει e και έχει πηγή στο G_i . Παρατηρούμε ότι η e_1 είναι προσανατολισμένη αντίθετα με την e , διαφορετικά θα υπήρχε κύκλος. Επειδή η e_1 δεν τέμνει την e_2 , η ακμή e_1 δεν συμπίπτει με την (u, v) . Όμως, για την περίπτωση που $e_1 \neq (u, v)$, αποδείξαμε στην απόδειξη της Ιδιότητας 4 (Περίπτωση 2), ότι μπορούμε να χτίσουμε μια διαφορετική πλήρωση κατά Χάμιλτον, που δημιουργεί λιγότερες τομές, από όσες δημιουργεί η P_{opt} , άτοπο.³ \square

Το ακόλουθο θεώρημα ισχυρίζεται ότι πάντοτε υπάρχει μια βέλτιστη ως προς τον αριθμό των τομών, ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιτον για ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα που ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες. Ο αλγόριθμος, που παρουσιάζουμε στην επόμενη ενότητα συγκεντρώνεται στις πληρώσεις που ικανοποιούν τις ιδιότητες αυτές.

Θεώρημα 21. Έστω $G = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ είναι ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα και έστω $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_\beta\}$ είναι η αποσύνθεσή του σε st -πολύγωνα. Τότε υπάρχει μια βέλτιστη ως προς τον αριθμό των τομών, ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιτον P_{opt} για το G που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- (a) Κάθε ακμή του E τέμνεται από το ποσόν δύο ακμές της P_{opt} .
- (b) Κάθε οριακή ακμή e_i ενός μέγιστου st -πολύγωνα o_i , $i \leq \beta$, τέμνεται από το ποσόν μια ακμή της P_{opt} . Επιπλέον, κάθε ακμή της P_{opt} , που τέμνει την e_i , εισέρχεται στο G_i .

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από τις Ιδιότητες 3, 4 και 5. \square

3.5.4 Ο αλγόριθμος

Ο αλγόριθμος για την κατασκευή μιας βέλτιστης ως προς τον αριθμό των τομών, ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιτον για ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα G , είναι αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού που βασίζεται στην αποσύνθεση του G σε st -πολύγωνα $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_\beta\}$. Τα ακόλουθα λήμματα αποδεικνύουν ότι μια τέτοια πλήρωση μπορεί να βρεθεί υπολογίζοντας τις πληρώσεις για τα st -πολύγωνα και ενώνοντάς τα με κατάλληλο τρόπο.

Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα. Συμβολίζουμε με $S(G)$ το μονοπάτι Χάμιλτον στο συμπληρωμένο κατά Χάμιλτον γράφημα του G , που λαμβάνουμε μετά την πρόσθεση την πλήρωσης

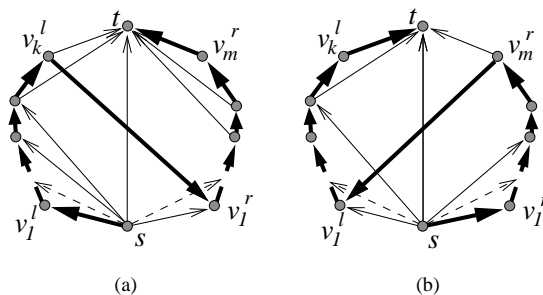
³Η απόδειξη είναι εντελώς ταυτοσημη και δεν επαναλαμβάνεται.

κατά Χάμιλτον στο G . Σημειώνουμε ότι δεδομένου μόλις του $S(G)$, μπορούμε να ανακτήσουμε το μέγεθος της πλήρωσης και τον αριθμό των τομών. Συμβολίζουμε με $c(G)$ τον αριθμό των τομών που δημιουργεί η πλήρωση του μονοπατιού $S(G)$. Αν περιοριστούμε στα μονοπάτια που εισέρχονται στην καταβόθρα του G από το αριστερό (αντ. δεξί) σύνορο του G , τότε το $c(G, L)$ (αντ. $c(G, R)$) συμβολίζει τον αριθμό των δημιουργηθέντων τομών. Είναι φανερό ότι, $c(G) = \min\{c(G, L), c(G, R)\}$. Επεκτείνουμε τον συμβολισμό αυτό, συμβολίζοντας με $c^i(G, L)$ ($c^i(G, R)$) τον αριθμό των τομών μιας ακυκλικής πλήρωσης κατά Χάμιλτον, που περιέχει ακριβώς i ακμές. Από το Θεώρημα 19, γνωρίζουμε ότι το μέγεθος μιας βέλτιστης ως προς τον αριθμό των τομών, ακυκλικής πλήρωσης κατά Χάμιλτον για ένα st -πολύγωνο είναι το πολύ δύο. Ο συμβολισμός αυτός θα χρησιμοποιηθεί μόνο για st -πολύγωνα, και άρα θα χρησιμοποιηθούν μόνο οι όροι $c^1(G, L)$, $c^1(G, R)$, $c^2(G, L)$ και $c^2(G, R)$.

Χρησιμοποιούμε τον σύμβολο \oplus για να υποδηλώσουμε την πράξη της παράθεσης (concatenation) των δύο μονοπατιών. Αποδεχόμαστε ότι το μονοπάτι Χάμιλτον μιας κορυφής είναι η ίδια η κορυφή.

Λήμμα 38. Έστω $o = (V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$ είναι ένα st -πολύγωνο n κορυφών. Μια βέλτιστη ως προς τον αριθμό των τομών, ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον για το o και ο αντίστοιχος αριθμός των τομών μπορεί να βρεθεί σε χρόνο $O(n)$.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 29 και το Λήμμα 30 έπεται ότι για να βρούμε μια βέλτιστη ως προς



Εικόνα 3.25: Δύο δυνατές ακυκλικές πληρώσεις Χάμιλτον ενός st -πολύγωνα που αποτελούνται από μια ακμή.

τον αριθμό των τομών, ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον, είναι αρκετό να εξετάσουμε όλες τις πληρώσεις με μια και δύο ακμές.

Έστω $V^l = \{v_1^l, \dots, v_k^l\}$ και $V^r = \{v_1^r, \dots, v_m^r\}$, όπου οι δείκτες φανερώνουν της σειρά με την οποία εμφανίζονται οι κορυφές στο αριστερό και δεξί σύνορο του o , αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $I: V \times V \rightarrow \{0, 1\}$ είναι μια συνάρτηση έτσι ώστε $I(u, v) = 1$ αν και μόνο αν $(u, v) \in E$.

Οι δύο ακυκλικές πληρώσεις κατά Χάμιλτον που αποτελούνται από μια ακμή είναι οι $\{(v_k^l, v_1^r)\}$ και $\{(v_m^r, v_1^l)\}$.

Η ακμή (v_k^l, v_1^r) τέμνει όλες τις ακμές που ενώνουν την t με τις κορυφές $V_l \setminus \{v_k^l\}$, την διαγώνιο (αν υπάρχει), και όλες τις ακμές που ενώνουν την s και τις κορυφές $V_r \setminus \{v_1^r\}$ (βλ. Εικόνα 3.25.a).

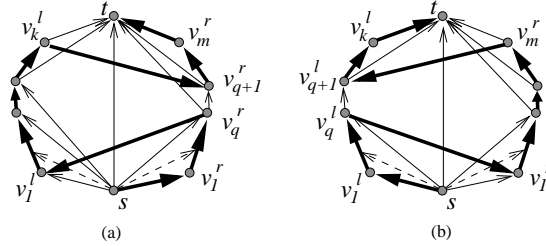
Έπεται ότι:

$$c^1(o, R) = I(s, t) + \sum_{i=2}^{k-1} I(v_i^l, t) + \sum_{i=2}^{m-1} I(s, v_i^r).$$

Παρόμοια, η ακμή (v_m^r, v_1^l) τέμνει όλες τις ακμές που ενώνουν την t και τις $V_r \setminus \{v_m^r\}$, την διαγώνιο (αν υπάρχει), και όλες τις ακμές που ενώνουν την s και τις κορυφές $V_l \setminus \{v_1^l\}$ (βλ. Εικόνα 3.25.b).

Συνεπάγεται ότι :

$$c^1(o, L) = I(s, t) + \sum_{i=2}^{m-1} I(v_i^r, t) + \sum_{i=2}^{k-1} I(s, v_i^l).$$



Εικόνα 3.26: Η ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον ενός st -πολυγώνου που αποτελείται από δύο ακμές.

Θεωρούμε μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον που αποτελείται από δύο ακμές. Υποθέτουμε ότι η χαμηλότερη ακμή εξέρχεται από την κορυφή v_q^r στο δεξιό σύνορο του st -πολυγώνου o (βλ. Εικόνα 3.26.a). Τότε, θα πρέπει να εισέρχεται στην κορυφή v_1^l . Επιπλέον, η δεύτερη ακμή της πλήρωσης πρέπει να εξέρχεται την κορυφή v_k^l και να εισέρχεται στην κορυφή v_{q+1}^r . Άρα, η πλήρωση είναι $\{(v_q^r, v_1^l), (v_k^l, v_{q+1}^r)\}$ η οποία μπορεί να περιγραφεί από την ακμή (v_q^r, v_{q+1}^r) στο δεξιό σύνορο του st -πολυγώνου o . Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το μονοπάτι Χάμιλτον εισέρχεται στην t από το δεξιό σύνορο. Παρόμοια αναλύουμε την περίπτωση όταν η χαμηλότερη ακμή της πλήρωσης εξέρχεται από την αριστερή πλευρά του o (βλ. Εικόνα 3.26.b).

Συμβολίζουμε με $c_q^2(o, R)$ των αριθμό των τομών που δημιουργούνται από την πλήρωση που αντιστοιχεί στην ακμή (v_q^r, v_{q+1}^r) . Αντίστοιχα, ορίζουμε το $c_q^2(o, L)$. Η τιμή $c_q^2(o, R)$ μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$c_q^2(o, R) = 2 \cdot I(s, t) + \sum_{i=1}^{k-1} I(v_i^l, t) + \sum_{i=2}^k I(s, v_i^l) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{q-1} I(v_i^r, t) + 2 \cdot \sum_{i=q+2}^m I(s, v_i^r) + I(v_q^r, t) + I(s, v_{q+1}^r)$$

Τότε η βέλτιστη λύση, όταν το μονοπάτι εισέρχεται στην καταβόθρα του o από το δεξιό του σύνορο, μπορεί να βρεθεί ως ελάχιστο πάνω σε όλα τα $c_q^2(o, R)$, $1 \leq q \leq m-1$:

$$c^2(o, R) = \min_{1 \leq q \leq m-1} \{c_q^2(o, R)\}.$$

Παρόμοια, η τιμή $c_q^2(o, L)$ μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$c_q^2(o, L) = 2 \cdot I(s, t) + \sum_{i=1}^{m-1} I(v_i^r, t) + \sum_{i=2}^m I(s, v_i^r) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{q-1} I(v_i^l, t) + 2 \cdot \sum_{i=q+2}^k I(s, v_i^l) + I(v_q^l, t) + I(s, v_{q+1}^l).$$

Τότε η βέλτιστη λύση, όταν το τελικό μονοπάτι Χάμιλτον εισέρχεται στην καταβόθρα του o από το αριστερό σύνορο, μπορεί να βρεθεί ως ελάχιστο πάνω από όλα τα $c_q^2(o, L)$, $1 \leq q \leq k-1$:

$$c^2(o, L) = \min_{1 \leq q \leq k-1} \{c_q^2(o, L)\}.$$

Έτσι, ο αριθμός των τομών της βέλτιστης λύσης υπολογίζεται ως εξής:

$$c(o) = \min\{c^1(o, L), c^1(o, R), c^2(o, L), c^2(o, R)\}.$$

Algorithm 7: ACYCLIC-HPC-CM(G)

Είσοδος: Ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα $G(V^l \cup V^r \cup \{s, t\}, E)$.

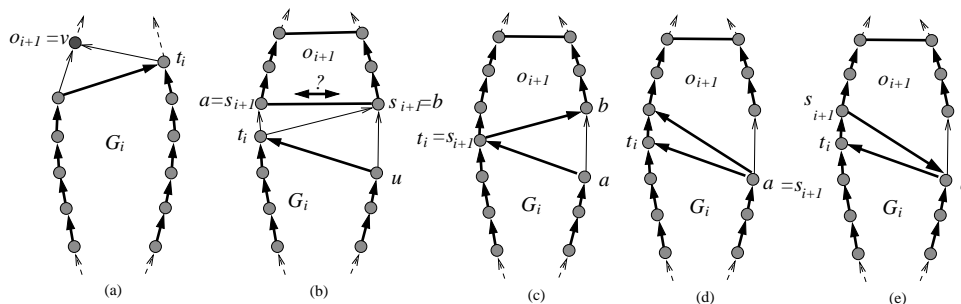
Έξοδος: Ο ελάχιστος αριθμός των τομών $c(G)$ που προκύπτει από μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον του G .

1. Υπολόγισε την αποσύνθεση του G σε st -πολύγωνα, έστω $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_{\beta}\}$.
2. Για κάθε στοιχείο $o_i \in \mathcal{D}(G)$, $1 \leq i \leq \beta$, υπολόγισε $c^1(o_i, L)$, $c^1(o_i, R)$ και $c^2(o_i, L)$, $c^2(o_i, R)$:
if o_i είναι μια ελεύθερη κορυφή, **then** $c^1(o_i, L) = c^1(o_i, R) = c^2(o_i, L) = c^2(o_i, R) = 0$.
if o_i είναι ένα st -πολύγωνο, **then** $c^1(o_i, L)$, $c^1(o_i, R)$, $c^2(o_i, L)$, $c^2(o_i, R)$ υπολογίζονται βάσει του Λήμματος 38.
3. **if** o_1 είναι μια ελεύθερη κορυφή, **then** $c(G_1, L) = c(G_1, R) = 0$;
else $c(G_1, L) = \min\{c^1(o_1, L), c^2(o_1, L)\}$ και
 $c(G_1, R) = \min\{c^1(o_1, R), c^2(o_1, R)\}$;
4. For $i = 1 \dots \beta - 1$, υπολογίζουμε $c(G_{i+1}, L)$ και $c(G_{i+1}, R)$ ως εξής:
if o_{i+1} είναι μια ελεύθερη κορυφή, **then**
 $c(G_{i+1}, L) = c(G_{i+1}, R) = \min\{c(G_i, L), c(G_i, R)\}$;
else-if o_{i+1} είναι ένα st -πολύγωνο που μοιράζεται **το πολύ** μια κορυφή με το G_i , **then**
 $c(G_{i+1}, L) = \min\{c(G_i, L), c(G_i, R)\} + \min\{c^1(o_{i+1}, L), c^2(o_{i+1}, L)\}$;
 $c(G_{i+1}, R) = \min\{c(G_i, L), c(G_i, R)\} + \min\{c^1(o_{i+1}, R), c^2(o_{i+1}, R)\}$;
else $\{ o_{i+1}$ είναι ένα st -πολύγωνο που έχει **ακριβώς** δύο κοινές κορυφές με το $G_i \}$,
if $t_i \in V^l$, **then**
 $c(G_{i+1}, L) = \min\{c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, L) + 1, c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, L),$
 $c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, L), c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, L)\}$
 $c(G_{i+1}, R) = \min\{c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, R), c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, R),$
 $c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, R) + 1, c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, R)\}$
else $\{ t_i \in V^r \}$
 $c(G_{i+1}, L) = \min\{c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, L), c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, L),$
 $c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, L), c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, L) + 1\}$
 $c(G_{i+1}, R) = \min\{c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, R), c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, R) + 1,$
 $c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, R), c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, R)\}$
5. **return** $c(G) = \min\{c(G_{\beta}, L), c(G_{\beta}, R)\}$

Οι τιμές $c^1(o, R)$ και $c^1(o, L)$ μπορούν να βρεθούν σε χρόνο $O(n)$. Είναι επίσης εύκολο να δει κανείς ότι κάθε $c_q^2(o, R)$ μπορεί να υπολογιστεί από την $c_{q-1}^2(o, R)$ σε σταθερό χρόνο, επειδή η $c_1^2(o, R)$ μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n)$. Άρα, η τιμή $c^2(o, R)$, όσο και η $c^2(o, L)$, υπολογίζονται σε γραμμικό χρόνο. Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι μια βέλτιστη ως προς τον αριθμό των τομών, ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον για κάθε st -πολύγωνο o , n κορυφών, και ο αντίστοιχος αριθμός των τομών, μπορούν να υπολογιστούν σε χρόνο $O(n)$. \square

Έστω $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_{\beta}\}$ είναι η αποσύνθεση του G σε st -πολύγωνα, όπου το στοιχείο o_i , $1 \leq i \leq \beta$, είναι είτε ένα st -πολύγωνο, είτε μια ελεύθερη κορυφή. Θυμίζουμε ότι, με G_i , $1 \leq i \leq \beta$, συμβολίζουμε το υπογράφημα του G που παράγεται από τις κορυφές των o_1, \dots, o_i . Γράφημα G_i είναι επίσης ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα.

Λήμμα 39. Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα και $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_{\beta}\}$ είναι η αποσύνθεσή του σε st -πολύγωνα. Θεωρούμε δύο διαδοχικά στοιχεία o_i και o_{i+1} του $\mathcal{D}(G)$ που έχουν **το πολύ** μια κοινή κορυφή. Τότε ισχύουν τα εξής:



Εικόνα 3.27: Απόδειξη του Λήμματος 39.

(i) $\mathcal{S}(G_{i+1}) = \mathcal{S}(G_i) \oplus \mathcal{S}(o_{i+1})$, και

(ii) $c(G_{i+1}) = c(G_i) + c(o_{i+1})$.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε πρώτα την πρόταση (i). Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις όταν δύο διαδοχικά στοιχεία του $\mathcal{D}(G)$ έχουν το πολύ μια κοινή κορυφή.

Περίπτωση 1: Το στοιχείο $o_{i+1} = v$ είναι μια ελεύθερη κορυφή (βλ. Εικόνα 3.27.a). Από το Λήμμα 36, αν το o_i είναι είτε μια ελεύθερη κορυφή είτε ένα st -πολύγωνο, υπάρχει μια ακμή που είναι προσπίπτουσα στην καταβόθρα του o_i και στην v . Αν η κορυφή v δεν ήταν η τελευταία κορυφή του $\mathcal{S}(G_{i+1})$, τότε η πλήρωση κατά Χάμιλτον θα έπρεπε να περιέχει μια ακμή εξερχόμενη από την v και εισερχόμενη σε κάποια κορυφή του G_i . Αυτό είναι αδύνατον, επειδή θα δημιουργούσε κύκλο.

Περίπτωση 2: Το στοιχείο o_{i+1} είναι ένα st -πολύγωνο που δεν έχει καμία κοινή κορυφή με το G_i (βλ. Εικόνα 3.27.b). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η καταβόθρα του G_i είναι στο αριστερό σύνορο του γραφήματος. Παρατηρούμε πρώτα ότι η ακμή (t_i, s_{i+1}) είναι στο G . Αν η s_{i+1} είναι στο αριστερό σύνορο στο G έχουμε αποδείξει το ζητούμενο. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί να υπάρχει κορυφή μεταξύ των t_i και s_{i+1} , επειδή τότε τα στοιχεία o_i και o_{i+1} δεν θα ήταν διαδοχικά. Αν η s_{i+1} είναι στο δεξί σύνορο του G , συνειδητοποιούμε ότι στην περιοχή μεταξύ των st -πολυγώνων o_i και o_{i+1} δεν μπορεί να μην υπάρχουν ακμές, διαφορετικά θα αποτελούσε ένα ασθενές st -πολύγωνο. Παρατηρούμε ότι η ακμή (u, a) δεν μπορεί να είναι παρούσα στο G , διαφορετικά η περιοχή μεταξύ τους o_i και o_{i+1} θα αποτελούσε έναν ισχυρό st -πολύγωνο με διαγώνιο (u, a) . Άρα η περιοχή αυτή μπορεί να περιέχει μόνο την ακμή (t_i, s_{i+1}) . Άρα, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.27.β, κάθε κορυφή στην οποία προσπίπτει η κάτω οριακή ακμή του o_{i+1} μπορεί να είναι η πηγή του o_{i+1} . Επειδή η ακμή (t_i, s_{i+1}) είναι παρούσα η λύση $\mathcal{S}(o_{i+1})$ μπορεί να ενωθεί με την λύση του $\mathcal{S}(G_i)$ δίνοντας ένα έγκυρο μονοπάτι Χάμιλτον για το G_{i+1} . Παρατηρούμε ότι στο $\mathcal{S}(G_{i+1})$ όλες οι κορυφές του G_i εμφανίζονται πριν από τις κορυφές του o_{i+1} . Διαφορετικά η πλήρωση θα έπρεπε να περιλαμβάνει μια ακμή εξερχόμενη από μια κορυφή v του o_{i+1} και εισερχόμενη σε κάποια κορυφή u του G_i , αυτό θα δημιουργούσε κύκλο.

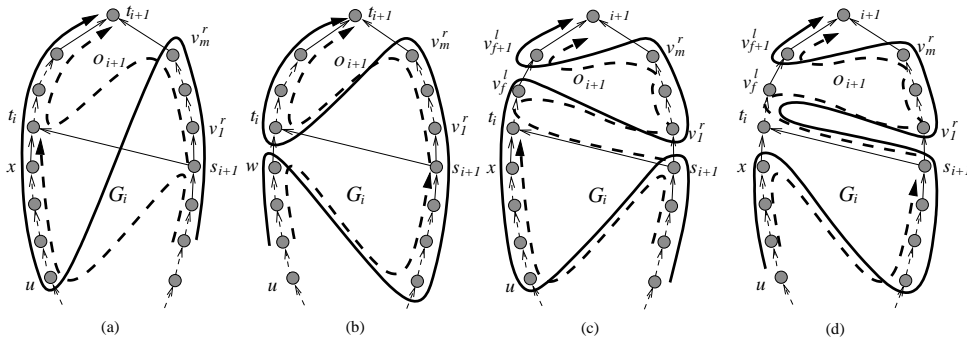
Περίπτωση 3: Το στοιχείο o_{i+1} είναι ένα st -πολύγωνο που έχει ακριβώς μια κορυφή κοινή με το G_i (βλ. Εικόνα 3.27.c). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η πηγή t_i του G_i βρίσκεται στο αριστερό σύνορο του γραφήματος. Πρώτα, παρατηρούμε ότι η κορυφή κοινή για το G_i και το o_{i+1} πρέπει να είναι η t_i . Για να το δείξουμε, θέτουμε a να είναι η τελευταία κορυφή στο δεξί σύνορο του G_i . Τότε, η ακμή (a, t_i) είναι παρούσα, επειδή η t_i είναι μια καταβόθρα του G_i . Εις άτοπο απαγωγή, έστω η a είναι η κοινή κορυφή των G_i και o_{i+1} . Αν a είναι επίσης πηγή του o_{i+1} (βλ. Εικόνα 3.27.d) τότε το o_{i+1} δεν είναι μέγιστο (η ακμή (a, t_i) θα έπρεπε να ανήκει στο o_{i+1}). Αν η s_{i+1} είναι στο δεξί σύνορο (βλ. Εικόνα 3.27.e), τότε θα υπήρχε κύκλος που περιλαμβάνει τις ακμές (t_i) , (t_i, s_{i+1}) και (s_{i+1}, a) , το οποίο είναι αδύνατο, επειδή το G είναι ακυκλικό. Άρα, η

κοινή κορυφή των G_i και o_{i+1} είναι η t_i . Επίσης, η κορυφή t_i πρέπει να συμπίπτει με την s_{i+1} (βλ. Εικόνα 3.27.c). Αν η s_{i+1} ταυτιζόταν με την b , το st -πολύγωνο o_i δεν θα ήταν μέγιστο, επειδή η ακμή (b, t_i) θα άνηκε επίσης στο o_i . Άρα η κορυφή t_i ταυτίζεται με την s_{i+1} και άρα η λύση $S(o_{i+1})$ μπορεί να ενωθεί με την λύση $S(G_i)$, δίνοντας ένα έγκυρο μονοπάτι Χάμιλτον για το G_{i+1} . Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη μπορούμε να δείξουμε με απαγωγή στο άτοπο ότι στο $S(G_{i+1})$ όλες οι κορυφές του G_i προηγούνται όλων των κορυφών του o_{i+1} .

Τέλος, παρατηρούμε ότι η πρόταση (ii) είναι αληθής, επειδή σε όλες τις τρεις περιπτώσεις τα μονοπάτια $S(G_i)$ και $S(o_{i+1})$ ενώθηκαν χρησιμοποιώντας το πολύ μια επιπλέον ακμή του G . Επειδή το G είναι επίπεδο, δεν δημιουργούνται νέες τομές. \square

Λήμμα 40. Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα και $\mathcal{D}(G) = \{o_1, \dots, o_\beta\}$ είναι η αποσύνθεσή του σε st -πολύγωνα. Έστω o_i και o_{i+1} είναι δύο διαδοχικά στοιχεία του $\mathcal{D}(G)$ που έχουν μια κοινή ακμή. Τότε ισχύουν τα εξής:

1. $t_i \in V^l \Rightarrow c(G_{i+1}, L) = \min \{ c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, L) + 1, c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, L), c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, L), c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, L) \}.$
2. $t_i \in V^l \Rightarrow c(G_{i+1}, R) = \min \{ c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, R), c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, R), c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, R) + 1, c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, R) \}.$
3. $t_i \in V^r \Rightarrow c(G_{i+1}, L) = \min \{ c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, L), c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, L), c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, L), c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, L) + 1 \}.$
4. $t_i \in V^r \Rightarrow c(G_{i+1}, R) = \min \{ c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, R), c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, R) + 1, c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, R), c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, R) \}.$

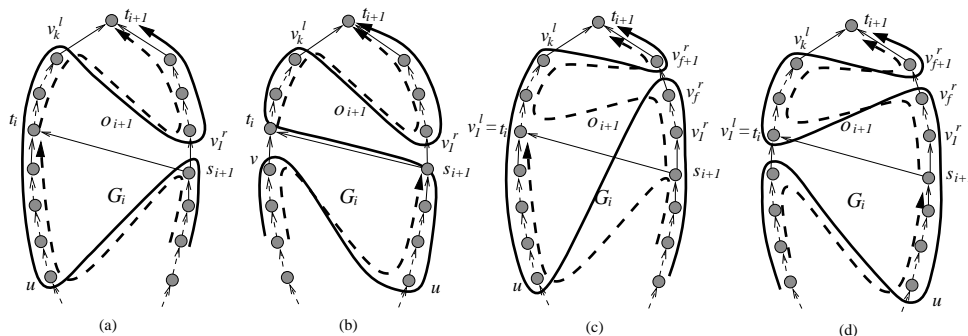


Εικόνα 3.28: Το μονοπάτι Χάμιλτον για την Πρόταση (1) του Λήμματος 40.

Απόδειξη: Πρώτα θα δείξουμε πως χτίζεται το μονοπάτι Χάμιλτον από το οποίο προκύπτει η πλήρωση του συγκεκριμένου μεγέθους. Για κάθε μία από τις παραπάνω προτάσεις, θεωρούμε τέσσερις περιπτώσεις. Ύστερα, ο ελάχιστος αριθμός των τομών προκύπτει θεωρώντας τον ελάχιστο αριθμό των τομών των τεσσάρων περιπτώσεων.

(1) $t_i \in V^l \Rightarrow c(G_{i+1}, L) = \min \{ c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, L) + 1, c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, L), c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, L), c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, L) \}$

Περίπτωση 1α. Το μονοπάτι Χάμιλτον εισέρχεται στην t_i από μια κορυφή στο αριστερό σύνορο του G_i , και το μέγεθος της πλήρωσης κατά Χάμιλτον για το G_{i+1} είναι ένα. Η Εικόνα 3.28.a απεικονίζει το μονοπάτι Χάμιλτον για το G_i (το κάτω διακεκομμένο μονοπάτι) και για το o_{i+1} (το πάνω διακεκομμένο μονοπάτι), όπως και το τελικό μονοπάτι Χάμιλτον για το G_{i+1} (έντινο μονοπάτι). Από



Εικόνα 3.29: Το μονοπάτι Χάμιλτον για την Πρόταση (2) του Λήμματος 40.

την Εικόνα βλέπουμε ότι $c(G_{i+1}, L) = c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, L) + 1$. Για να το δει κανείς, ακολουθεί την ακμή (v_m^r, u) που γίνεται μέρος της πλήρωσης για το G_{i+1} . Η ακμή (v_m^r, u) , δημιουργεί το πολύ τον ίδιο αριθμό των τομών όσο και η ακμή (v_m^r, t_i) (η μόνη ακμή στην πλήρωση του o_{i+1}), και όσο η ακμή (s_{i+1}, u) (η ακμή της πλήρωσης του G_i), συν μία ακόμα τομή με την κάτω οριακή ακμή του o_{i+1} .

Περίπτωση 1b. Το μονοπάτι Χάμιλτον εισέρχεται στην t_i από μια κορυφή στο δεξιό σύνορο του G_i και το μέγεθος της πλήρωσης του G_{i+1} είναι ένα. Η Εικόνα 3.28.b δείχνει το τελικό μονοπάτι. Από την εικόνα, συμπεραίνουμε ότι $c(G_{i+1}, L) = c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, L)$, δηλαδή, μια απλή παράθεση (concatenation) των δύο λύσεων.

Περίπτωση 1c. Το μονοπάτι Χάμιλτον εισέρχεται στην t_i από μια κορυφή στην αριστερή πλευρά του G_i και το μέγεθος της πλήρωσης για το G_{i+1} είναι δύο. Η Εικόνα 3.28.c δείχνει το τελικό μονοπάτι. Από την εικόνα, έπεται ότι $c(G_{i+1}, L) = c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, L)$, που είναι μια απλή παράθεση των δύο λύσεων.

Περίπτωση 1d. Το μονοπάτι Χάμιλτον εισέρχεται στην t_i από μια κορυφή στο δεξιό σύνορο του G_i , και το μέγεθος της πλήρωσης για το G_{i+1} είναι δύο. Η Εικόνα 3.28.d δείχνει το τελικό μονοπάτι. Από την εικόνα έπεται ότι $c(G_{i+1}, L) = c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, L)$ που ξανά αποτελεί μια απλή παράθεση των δύο λύσεων.

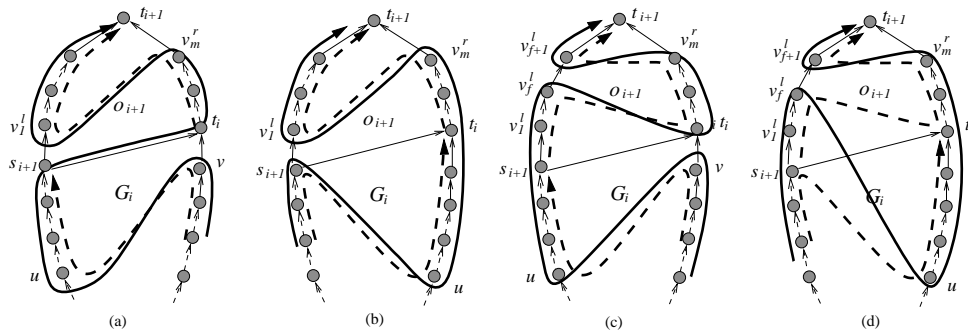
$$(2) \quad t_i \in V^l \Rightarrow c(G_{i+1}, R) = \min \{c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, R), c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, R), c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, R) + 1, c(G_i, R) + c^2(o_{i+1}, R)\}$$

Περίπτωση 2a. Το μονοπάτι Χάμιλτον εισέρχεται στην t_i από μια κορυφή στην αριστερή πλευρά του G_i και το μέγεθος την πλήρωσης για το G_{i+1} είναι ένα. Η Εικόνα 3.29.a δείχνει το τελικό μονοπάτι. Από την εικόνα έχουμε: $c(G_{i+1}, R) = c(G_i, L) + c^1(o_{i+1}, R)$ που αποτελεί παράθεση των δύο λύσεων.

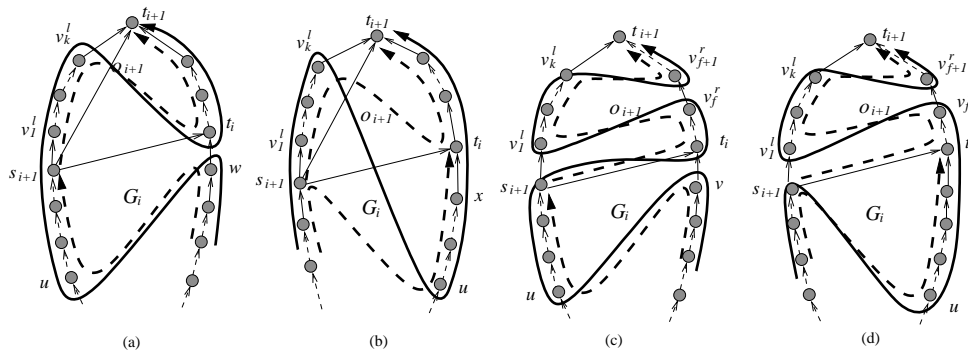
Περίπτωση 2b. Το μονοπάτι Χάμιλτον εισέρχεται στην t_i από μια κορυφή στην δεξιά πλευρά του G_i και το μέγεθος την πλήρωσης για το G_{i+1} είναι ένα. Η Εικόνα 3.29.b δείχνει το τελικό μονοπάτι. Από την εικόνα έπεται ότι $c(G_{i+1}, R) = c(G_i, R) + c^1(o_{i+1}, R)$ που αποτελεί μια παράθεση των δύο λύσεων.

Περίπτωση 2c. Το μονοπάτι Χάμιλτον εισέρχεται στην t_i από μια κορυφή στην αριστερή πλευρά του G_i και το μέγεθος την πλήρωσης για το G_{i+1} είναι δύο. Η Εικόνα 3.29.c δείχνει το τελικό μονοπάτι. Από την εικόνα έπεται ότι $c(G_{i+1}, R) = c(G_i, L) + c^2(o_{i+1}, R) + 1$.

Παρατηρούμε ότι η πρόσθετη ακμή (v_i^r, u) δημιουργεί μια τομή παραπάνω από όσες δημιουργούν οι ακμές (v_i^r, v_1^l) , (s_{i+1}, u) . Η επιπλέον τομή δημιουργείται λόγω της τομής με την κάτω οριακή ακμή του o_{i+1} .



Εικόνα 3.30: Το μονοπάτι Χάμιλτον της Πρότασης (3) του Λήμματος 40.



Εικόνα 3.31: Το μονοπάτι Χάμιλτον της Πρότασης (4) του Λήμματος 40.

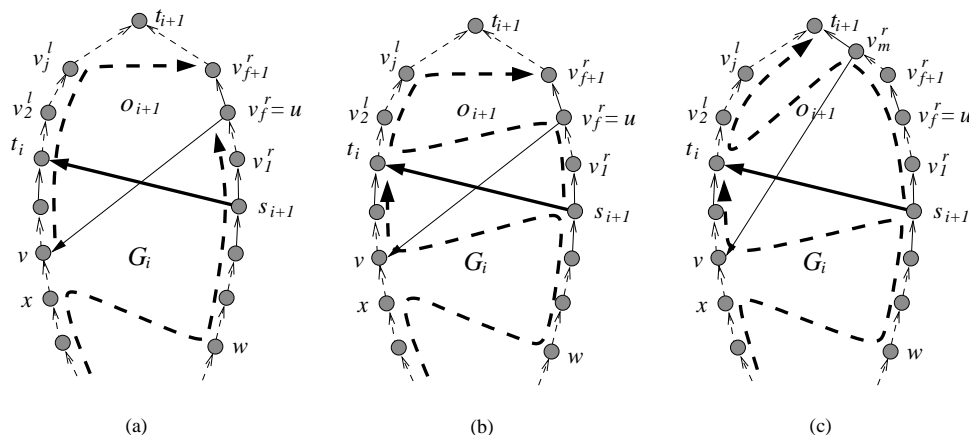
Περίπτωση 2d. Το μονοπάτι Χάμιλτον εισέρχεται στην t_i από μια κορυφή στο δεξιό σύνορο του G_i και το μέγεθος την πλήρωσης για το G_{i+1} είναι δύο. Η Εικόνα 3.29.d δείχνει το τελικό μονοπάτι. Από την εικόνα, έπεται ότι $c(G_{i+1}, R) = c(G_i, R) + c^2(O_{i+1}, R)$ που αποτελεί παράθεση των δύο λύσεων.

Οι αποδείξεις για τις προτάσεις (3) και (4) είναι συμμετρικές με αυτές των προτάσεων (2) και (1), αντίστοιχα. Οι Εικόνες 3.30 και 3.31 δείχνουν πως κατασκευάζονται τα μονοπάτια Χάμιλτον σε κάθε περίπτωση.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι τα μονοπάτια που κατασκευάσαμε δημιουργούν τον ελάχιστο αριθμό των τομών. Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι ως εξής: θεωρούμε ότι $P_{G_{i+1}}^{opt}$ είναι βέλτιστο ως προς τον αριθμό των τομών μονοπάτι Χάμιλτον του G_{i+1} και βασιζόμενοι στην $P_{G_{i+1}}^{opt}$ κατασκευάζουμε δύο λύσεις P_{G_i} και $P_{O_{i+1}}$ για το G_i και το O_{i+1} , αντίστοιχα, έτσι ώστε: (i) είναι βέλτιστες ως προς τον αριθμό των τομών και (ii) το μονοπάτι $P_{G_{i+1}}^{opt}$ προκύπτει από την P_{G_i} και την $P_{O_{i+1}}$ με την εφαρμογή της μιας από τις τέσσερις προτάσεις του Λήμματος. Στη συνέχεια εξετάζουμε περιπτώσεις με βάση την δομή της $P_{G_{i+1}}^{opt}$.

Συμβολίζουμε με \tilde{e} την κοινή ακμή των G_i και O_{i+1} . Παρατηρούμε ότι η \tilde{e} είναι η κάτω οριακή ακμή του O_{i+1} (στο υπόλοιπο της απόδειξης αναφερόμαστε στην ακμή αυτή ως απλά *οριακή ακμή*). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, η οριακή ακμή \tilde{e} είναι αριστερόστροφη. Από το Λήμμα 35 έπεται ότι $\tilde{e} = (s_{i+1}, t_i)$. Άρα από την υπόθεσή μας η s_{i+1} είναι στο δεξιό σύνορο, ενώ η t_i στο αριστερό.

Περίπτωση 1. Το μονοπάτι $P_{G_{i+1}}^{opt}$ περιέχει μια ακμή e , που τέμνει την οριακή ακμή \tilde{e} . Από την Ιδιότητα 5, μπορεί να υπάρχει μόνο μια τέτοια ακμή, στο $P_{G_{i+1}}^{opt}$, την συμβολίζουμε με $e = (u, v)$. Από την Ιδιότητα 4, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η e δεν εξέρχεται από το G_i και συνεπώς η κορυφή u είναι πάνω από την ακμή (s_{i+1}, t_i) , ενώ η v κάτω από αυτήν. Επιπλέον, η u πρέπει να είναι στο δεξιό σύνορο, ενώ η v στο αριστερό. Για να το δει κανείς, παρατηρεί ότι αν η κορυφή u



Εικόνα 3.32: Απόδειξη του Λήμματος 40.

ήταν στο αριστερό σύνορο και η v ήταν στο δεξιό, ή αν και οι δύο κορυφές ήταν στο ίδιο σύνορο, τότε θα υπήρχε κύκλος, πράγμα που δεν συμβαίνει.

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε δύο λύσεις, την P_{G_i} και την $P_{o_{i+1}}$ για τα G_i και o_{i+1} , αντίστοιχα, από την δεδομένη βέλτιστη λύση $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ και αποδεικνύουμε ότι και οι δύο λύσεις αυτές είναι βέλτιστες.

Υποθέτουμε, όπως δείχνει η Εικόνα 3.32.a, ότι $u = v_f^r$ και έστω x είναι η κορυφή που βρίσκεται αμέσως πιο κάτω από την v . Επειδή μπορεί να υπάρχει μόνο μια ακμή στο $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ που τέμνει την οριακή ακμή \tilde{e} (από την Ιδιότητα 4), έχουμε ότι το μονοπάτι $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ εισέρχεται στην κορυφή u από το δεξιό σύνορο. Ακολουθούμε το μονοπάτι Χάμιλτον προς τα πίσω από την κορυφή u στο δεξιό σύνορο και έστω w είναι η τελευταία κορυφή που επισκέπτεται το μονοπάτι πριν περάσει στο αριστερό σύνορο (βλ.Εικόνα 3.32.a). Από το Λήμμα 27, η κορυφή στην οποία περνά το μονοπάτι στο αριστερό σύνορο πρέπει να βρίσκεται ακριβώς κάτω από την v , άρα να συμπίπτει με την x . Θα δούμε τώρα πως είναι η δομή του $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ μετά την ακμή e . Το μονοπάτι συνεχίζει στο αριστερό σύνορο και το εγκαταλείπει ακριβώς πάνω από την t_i , επειδή η ακμή e είναι η μοναδική ακμή που συνδέει το G_i και το o_{i+1} . Στην Εικόνα 3.32.a η λύση $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ απεικονίζεται ως έντονο διακεκομμένο μονοπάτι. Θέτουμε τα μονοπάτια P_{G_i} και $P_{o_{i+1}}$ ως εξής: το P_{G_i} ταυτίζεται με το $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ μέχρι την κορυφή x στο αριστερό σύνορο του G_i (βλ. Εικόνα 3.32.b), ύστερα περνά στο δεξιό σύνορο στην κορυφή w , όπως και το $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ και συνεχίζει στο δεξιό σύνορο μέχρι την κορυφή s_{i+1} , μετά περνάει στο αριστερό σύνορο στην κορυφή v και συνεχίζει στα αριστερά μέχρι την κορυφή t_i . Το μονοπάτι $P_{o_{i+1}}$ ξεκινά στο δεξιό σύνορο στην κορυφή s_{i+1} και συνεχίζει μέχρι την κορυφή u , όπου περνά στο αριστερό σύνορο στην κορυφή t_i και συνεχίζει ταυτόσημα με το $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$. Παρατηρούμε ότι αν η κορυφή u ταυτίζεται με την τελευταία κορυφή στο δεξιό σύνορο, τότε η λύση $P_{o_{i+1}}$ τερματίζεται στο αριστερό σύνορο (βλ. Εικόνα 3.32.c). Παρατηρούμε επίσης ότι, το $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ μπορεί να παραχθεί από το P_{G_i} και το $P_{o_{i+1}}$ από τις περιπτώσεις 1.a και 2.c του Λήμματος (Εικόνα 3.28.a και 3.29.c).

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το P_{G_i} και το $P_{o_{i+1}}$ είναι βέλτιστες λύσεις για το G_i και το o_{i+1} , αντίστοιχα. Για απαγωγή στο άτοπο υποθέτουμε πρώτα ότι το $P_{o_{i+1}}$ δεν είναι μια βέλτιστη λύση. Τότε υπάρχει μια λύση $P'_{o_{i+1}}$ που δημιουργεί μικρότερο αριθμό των τομών από ότι η $P_{o_{i+1}}$. Άρα αν συνδυάσουμε την $P'_{o_{i+1}}$ με την P_{G_i} χρησιμοποιώντας έναν από τους κανόνες του λήμματος, λαμβάνουμε μια καλύτερη λύση από ότι είναι η $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$, άτοπο. Παρόμοια, υποθέτουμε ότι η P_{G_i} δεν είναι βέλτιστη και υποθέτουμε ότι η P'_{G_i} δημιουργεί μικρότερο αριθμό των τομών. Συνδυάζοντας την P'_{G_i} με την $P_{o_{i+1}}$, λαμβάνουμε μια καλύτερη λύση από την $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$, άτοπο.

Περίπτωση 2. Το μονοπάτι $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ δεν περιέχει καμία ακμή που τέμνει την οριακή ακμή \tilde{e} . Στην

περίπτωση αυτή, από το Λήμμα 27, το μονοπάτι $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ επισκέπτεται πρώτα όλες τις κορυφές του G_i και ύστερα, όλες τις κορυφές του σ_{i+1} . Χωρίζουμε το μονοπάτι $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ σε δύο, P_{G_i} και $P_{\sigma_{i+1}}$ που αποτελούν λύσεις για το G_i και το σ_i , αντίστοιχα.

Περίπτωση 2a. Η τελευταία κορυφή του $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ πριν την t_i είναι στο αριστερό σύνορο. Άρα, η τελευταία κορυφή που επισκέπτεται το μονοπάτι πριν την t_i είναι η κορυφή που βρίσκεται αμέσως πιο κάτω από την t_i στο αριστερό σύνορο. Θέτουμε P_{G_i} να είναι το υπομονοπάτι του $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ που τερματίζει στην κορυφή t_i και το $P_{\sigma_{i+1}}$ να περιέχει την ακμή (s_{i+1}, t_i) που ακολουθείται από το υπομονοπάτι $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$, ξεκινώντας από την κορυφή t_i . Τώρα, παρατηρούμε ότι το μονοπάτι $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ παράγεται από το P_{G_i} και το $P_{\sigma_{i+1}}$ από τις περιπτώσεις 1.c και 2.a (βλ. Εικόνες: 3.28.c και 3.29.a). Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το P_{G_i} και το $P_{\sigma_{i+1}}$ είναι βέλτιστα. Διαφορετικά, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει το P'_{G_i} ή το $P'_{\sigma_{i+1}}$, το οποίο είναι καλύτερο από το P_{G_i} ή το $P_{\sigma_{i+1}}$, αντίστοιχα, τότε, συνδυάζοντας το P'_{G_i} με το $P_{\sigma_{i+1}}$, ή το P_{G_i} με το $P'_{\sigma_{i+1}}$ θα παίρναμε μια λύση καλύτερη από βέλτιστη, άτοπο.

Περίπτωση 2b. Η τελευταία κορυφή του $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ πριν την t_i είναι στο δεξί σύνορο. Θεωρούμε δύο περιπτώσεις που βασίζονται στην κορυφή που επισκέπτεται το μονοπάτι $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$ πριν την t_i :

- Η κορυφή πριν την t_i είναι η s_{i+1} . Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί στις περιπτώσεις 1.d και 2.b (βλ. Εικόνες 3.28.d και 3.29.b). Οι εικόνες περιγράφουν πως κατασκευάζονται βέλτιστες λύσεις για το G_i και το σ_{i+1} από το $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$. Η απόδειξη του ότι οι λύσεις αυτές είναι βέλτιστες γίνεται παρόμοια με την περίπτωση 2a.
- Η κορυφή πριν από την t_i είναι η v'_i που είναι πάνω από την s_{i+1} . Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί στις περιπτώσεις 1.b και 2.d (βλ. Εικόνες: 3.28.b και 3.29.d). Οι εικόνες αυτές περιγράφουν πως κατασκευάζονται οι βέλτιστες λύσεις για το G_i και το σ_{i+1} από το $P_{G_{i+1}}^{\text{opt}}$.

Παρατηρούμε ότι το μονοπάτι Χάμιλτον που δίνει την βέλτιστη λύση, δεν είναι απαραίτητα μοναδικό. \square

Ο Αλγόριθμος 7 είναι ένας αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού που βασίζεται στο Λήμμα 39 και στο Λήμμα 40. Ο Αλγόριθμος 7 υπολογίζει τον ελάχιστο αριθμό των τομών $c(G)$ που προκύπτει από την πρόσθεση μιας βέλτιστης ως προς τον αριθμό των τομών, ακυκλικής πλήρωσης κατά Χάμιλτον σε δεδομένο εξωεπίπεδο st -γράφημα G . Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί εύκολα να επεκταθεί για να υπολογίζει το τελικό μονοπάτι Χάμιλτον $S(G)$.

Θεώρημα 22. Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα n κορυφών. Μια βέλτιστη ως προς τον αριθμό των τομών, ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον για το G και ο αντίστοιχος αριθμός των τομών μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n)$.

Απόδειξη: Ο Αλγόριθμος 7 υπολογίζει τον αριθμό των τομών που δημιουργεί μια βέλτιστη ως προς τον αριθμό των ακμών, ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον για το G . Για να επεκτείνουμε τον αλγόριθμο ώστε να υπολογίζει το μονοπάτι Χάμιλτον πρέπει να αποθηκεύσουμε σε έναν βοηθητικό πίνακα τις τιμές του βήματος 4 του αλγορίθμου μαζί με τις κορυφές της ακμής που προστίθεται στο σύνολο πλήρωσης για κάθε st -πολύγωνο. Η ορθότητα του αλγορίθμου, έπεται άμεσα από τα Λήμματα 39 και 40.

Από το Λήμμα 31 και το Θεώρημα 20 έπεται ότι το Βήμα 1 του αλγορίθμου χρειάζεται χρόνο $O(n)$. Το ίδιο ισχύει και για το Βήμα 2 (από το Λήμμα 38). Το Βήμα 3 αποτελεί αρχικοποίηση και εκτελείται σε χρόνο $O(1)$. Τέλος, το Βήμα 4 χρειάζεται χρόνο $O(\beta)$. Σύνολο, ο χρόνος εκτέλεσης του Αλγορίθμου 7 είναι $O(n)$. Παρατηρούμε ότι χρόνος $O(n)$ είναι επίσης αρκετός για να ανακτήσει κανείς το σύνολο των ακμών που αποτελεί την πλήρωση. \square

Θεώρημα 23. Έστω G είναι ένα εξωεπίπεδο st -γράφημα n κορυφών. Μια ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε βιβλίο του γραφήματος G , με τον ελάχιστο αριθμό των τομών με την ράχη, μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n)$.

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από το Θεώρημα 17 και το Θεώρημα 22. □

3.6 2-Σέλιδες Ανερχόμενες Τοπολογικές Εμφυτεύσεις

Όταν ασχολούμαστε με το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης τομών των ακμών με την ράχη στις ανερχόμενες τοπολογικές εμφυτεύσεις σε βιβλίο, είναι φυσικό να αναρωτηθούμε πρώτα, αν το δεδομένο γράφημα έχει μια ανερχόμενη εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο, χωρίς καθόλου τομές με την ράχη. Ή, στους όρους της πλήρωσης κατά Χάμιλτον, αν το δεδομένο γράφημα έχει μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον που δεν δημιουργεί καμία τομή.

Στην παρούσα ενότητα συγκεντρωνόμαστε σε αυτό το πρόβλημα. Τα αποτελέσματά μας περιλαμβάνουν :

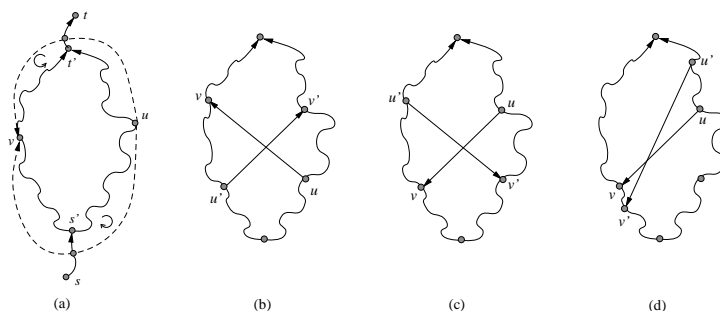
1. Δεδομένου ενός st -γραφήματος G που έχει μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον χωρίς τομές, αποδεικνύουμε ότι πάντα υπάρχει μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον χωρίς τομές για το G που περιέχει το πολύ δύο ακμές ανά όψη του G (Θεώρημα 24).
2. Δεδομένου ενός N -ελεύθερου ανερχόμενα επίπεδου γραφήματος G , αποδεικνύουμε ότι το G πάντα επιδέχεται μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον χωρίς τομές (Θεώρημα 26).
3. Δεδομένου ενός επίπεδου st -γραφήματος G πλάτους k , παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο απόφασης για το αν G έχει μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον χωρίς τομές (Θεώρημα 28). Αυτό συνεπάγεται ότι για ένα st -γράφημα με σταθερό πλάτος μπορούμε να αποφασίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν υπάρχει μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον χωρίς τομές (και άρα μια ανερχόμενη εμφύτευση σε 2-σελιδο βιβλίο). Το αποτέλεσμα βασίζεται στο πρόβλημα ρύθμισης προγραμματισμού εργασιών (minimum setup scheduling).

3.6.1 Οι ιδιότητες των ακυκλικών πληρώσεων Χάμιλτον χωρίς τομές

Έστω $G = (V, E)$ είναι ένα επίπεδο st -γράφημα που έχει μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον S , που δεν δημιουργεί τομές. Συμβολίζουμε με το $G_S = (V, E \cup S)$ το συμπληρωμένο κατά Χάμιλτον γράφημα, και με P_{G_S} το μονοπάτι Χάμιλτον που επάγεται από την πλήρωση S . Παρατηρούμε ότι, επειδή το S δεν δημιουργεί τομές με το G , κάθε ακμή του S βρίσκεται εξ ολοκλήρου σε μια όψη του G και συνεπώς, το γράφημα G_S είναι επίπεδο st -γράφημα.

Στην ενότητα αυτή προσδιορίζουμε μερικές ιδιότητες των ακυκλικών πληρώσεων κατά Χάμιλτον χωρίς τομές οι οποίες είναι χρήσιμες στην απόδειξη των αποτελεσμάτων που ακολουθούν στις επόμενες ενότητες.

Ιδιότητα 6. Έστω ένα επίπεδο st -γράφημα G που έχει μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον χωρίς τομές S . Έστω f είναι μια όψη του G και u, v είναι δύο κορυφές της f που ανήκουν σε δύο σύνορα του f . Τότε, το κατευθυνόμενο υπομονοπάτι του P_{G_S} που συνδέει τις u και v , περιέχει τουλάχιστον μια ακμή της πλήρωσης που βρίσκεται μέσα στην f και κατευθύνεται από το ένα της σύνορο στο άλλο.



Εικόνα 3.33: (a) Απόδειξη της Ιδιότητας 6. (b) – (d) Απόδειξη της Ιδιότητας 8

Απόδειξη: Για την απαγωγή στο άτοπο, υποθέτουμε το υπομονοπάτι του P_{G_S} που συνδέει τις u και v , δεν περνά μέσω από την f , τότε, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κύκλος στο συμπληρωμένο κατά Χάμιλτον γράφημα G_S (βλ. Εικόνα 3.33.a). \square

Ιδιότητα 7. Έστω ένα επίπεδο st -γράφημα G που έχει μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον χωρίς τομές S . Έστω u και v είναι δύο κορυφές του G που συνδέονται με κατευθυνόμενο μονοπάτι από την u στην v . Τότε το μονοπάτι Χάμιλτον P_{G_S} επισκέπτεται την u πριν από την v .

Απόδειξη: Υποθέτοντας ότι το P_{G_S} επισκέπτεται την v πριν από την u , συμπεραίνουμε ότι το G_S περιέχει κύκλο, άτοπο. \square

Ιδιότητα 8. Έστω ένα επίπεδο st -γράφημα G που έχει μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον χωρίς τομές S . Τότε οι ακμές του συνόλου S μπορούν να απεικονιστούν έτσι ώστε να μην υπάρχουν τομές μεταξύ τους.

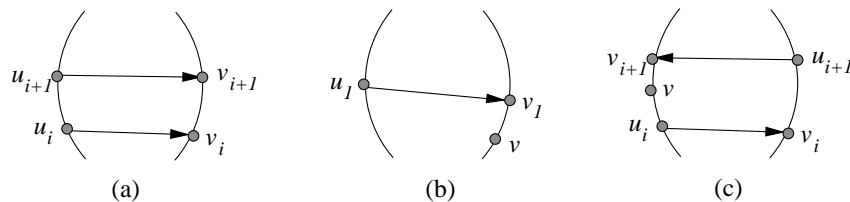
Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το S περιέχει δύο ακμές, (u, v) και (u', v') , που δεν μπορούν να απεικονιστούν χωρίς να τέμνει η μία την άλλη. Επειδή η πλήρωση S δεν δημιουργεί τομές με το γράφημα, οι ακμές (u, v) και (u', v') βρίσκονται στη ίδια όψη του G (βλ. Εικόνα 3.33.b-d). Για την περίπτωση της Εικόνας 3.33.b αν υποθέσουμε ότι η ακμή (u, v) διασχίζεται από το μονοπάτι Χάμιλτον πριν από την (u', v') , συμπεραίνουμε ότι η v επισκέπτεται πριν από την u' , αντίφαση στην Ιδιότητα 7. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται παρόμοια. \square

Λήμμα 41. Έστω ένα επίπεδο st -γράφημα G που έχει μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον χωρίς τομές S . Έστω f είναι μια όψη του G και έστω e_1, e_2, \dots, e_k είναι οι ακμές της S που βρίσκονται μέσα στην f με την σειρά που διασχίζονται από το μονοπάτι P_{G_S} . Τότε ισχύει ότι:

- Οι ακμές e_i και e_{i+1} ($1 \leq i < k - 1$) έχουν αντίθετο προσανατολισμό.
- Η καταθόδρα την ακμής e_1 είναι η χαμηλότερη κορυφή (διαφορετική από την πηγή της f) ενός από τα σύνορα της f , ενώ η πηγή της e_k είναι η τελευταία κορυφή (διαφορετική από την καταθόδρα της f) ενός από τα σύνορα της f .
- Η πηγή της e_i και η καταθόδρα της e_{i+1} ($1 \leq i < k - 1$) είναι γειονικές στο G .

Απόδειξη:

- Παρατηρούμε ότι ο ισχυρισμός αποκτά νόημα μόνο όταν $k > 1$, δηλαδή, υπάρχουν τουλάχιστον δύο ακμές του S που βρίσκονται μέσα στην όψη f . Θεωρούμε δύο διαδοχικές ακμές e_i και e_{i+1} στην f που διασχίζονται από το μονοπάτι Χάμιλτον P_{G_S} με αυτήν την σειρά. Εισ άτοπο



Εικόνα 3.34: (a) – (c) Απόδειξη του Λήμματος 41

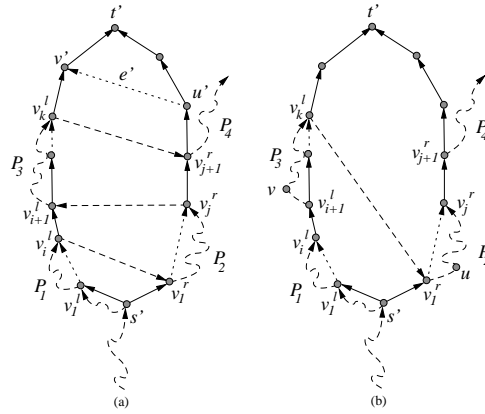
απαγωγή, υποθέτουμε ότι η $e_i = (u_i, v_i)$ και η $e_{i+1} = (u_{i+1}, v_{i+1})$ είναι και οι δύο δεξιόστροφες ακμές του f (βλ. Εικόνα 3.34.a). Το μονοπάτι Χάμιλτον P_{G_S} περιέχει ένα κατευθυνόμενο υπομονοπάτι από την v_i στην u_{i+1} . Και οι κορυφές αυτές βρίσκονται σε διαφορετικά σύνορα της f . Άρα, από την Ιδιότητα 6, το μονοπάτι από την v_i στην u_{i+1} περιέχει τουλάχιστον μια ακμή που συνδέει το δεξί σύνορο της f με το αριστερό της σύνορο. Η ακμή αυτή δεν μπορεί να είναι κάτω από την e_i ή πάνω από την e_{i+1} , επειδή αυτό θα οδηγούσε σε αντίφαση σε την Ιδιότητα 7. Συνεπώς, υπάρχει μια ακμή στην πλήρωση S που βρίσκεται στην όψη f , πάνω από την e_i και κάτω από την e_{i+1} . Άτοπο, επειδή υποθέσαμε ότι οι e_i, e_{i+1} είναι διαδοχικές ακμές της πλήρωσης S στην όψη f .

- b. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $e_1 = (u_1, v_1)$ είναι δεξιόστροφη (βλ. Εικόνα 3.34.b). Για απαγωγή στο άτοπο, υποθέτουμε ότι η καταβόθρα της e_1 δεν είναι η χαμηλότερη κορυφή (διαφορετική από την πηγή της f) του δεξιού συνόρου της f . Άρα υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή v στο δεξί σύνορο της f , που είναι κάτω από την v_1 και διαφέρει από την πηγή της f . Από την Ιδιότητα 7, η κορυφή v επισκέπτεται από το μονοπάτι πριν την v_1 και άρα, η v επισκέπτεται πριν από την u_1 . Άρα το μονοπάτι Χάμιλτον P_{G_S} , περιέχει ένα κατευθυνόμενο υπομονοπάτι από την v στην u_1 . Η κορυφή u_1 ανήκει στο αριστερό σύνορο και άρα από την Ιδιότητα 6, κάθε μονοπάτι από την v στην u_1 περιέχει μια αριστερόστροφη ακμή στο f . Από την Ιδιότητα 7, η ακμή αυτή δεν μπορεί να είναι πάνω από την e_1 και άρα, είναι κάτω από αυτήν. Άτοπο, επειδή υποθέσαμε ότι η e_1 είναι η πρώτη ακμή της πλήρωσης στην f . Η απόδειξη για την ακμή e_k είναι συμμετρική.
- c. Παρατηρούμε ότι ο ισχυρισμός έχει νόημα, μόνο όταν $k > 1$, δηλαδή, υπάρχουν τουλάχιστον δύο ακμές στην πλήρωση S , που βρίσκονται στην όψη f . Έστω $e_i = (u_i, v_i)$ και $e_{i+1} = (u_{i+1}, v_{i+1})$ είναι οι δύο ακμές της S που είναι συνεχόμενες στην f . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η e_i είναι δεξιόστροφη (βλ. Εικόνα 3.34.c). Τότε, από την πρόταση (a) του παρόντος λήμματος έχουμε ότι η ακμή e_{i+1} είναι αριστερόστροφη. Υποθέτουμε για απαγωγή στο άτοπο, ότι η u_i και η v_{i+1} , που και οι δύο βρίσκονται στο αριστερό σύνορο της f , δεν είναι γειτονικές. Τότε, υπάρχει μια κορυφή v στο αριστερό σύνορο της f που είναι πάνω από την u_i και κάτω από την v_{i+1} . Η κορυφή v πρέπει να επισκεφθεί από το P_{G_S} μετά την u_i και πριν την v_{i+1} και άρα μετά την v_i και πριν την u_{i+1} . Από τις Ιδιότητες 6 και 7, συμπεραίνουμε ότι η e_i και η e_{i+1} δεν είναι συνεχόμενες ακμές της S στην όψη f , άτοπο.

□

3.6.2 Δυο ακμές σε μια όψη είναι αρκετές

Στην παρούσα ενότητα αποδεικνύουμε ότι κάθε επίπεδο st -γράφημα G που έχει μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον χωρίς τομές, έχει επίσης μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον με το πολύ δύο ακ-



Εικόνα 3.35: (a) Μια ακυκλική πλήρωση χωρίς τομές S , που τοποθετεί σε μια όψη τουλάχιστον τρεις ακμές. (b) Μια εισοδύναμη ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον χωρίς τομές S' , όπου οι ακμές $(v_i^l, v_i^r), (v_j^l, v_{i+1}^l), (v_k^l, v_{j+1}^l)$ αντικαθιστώνται με την μοναδική ακμή (v_k^l, v_i^l) .

μές ανά όψη του G . Απο το αποτέλεσμα αυτό έπεται ότι, κάθε επίπεδο st -γράφημα αποδέχεται μια ανερχόμενη εμφύτευση σε 2-σέλιδο βιβλίο, στην οποία κάθε όψη του γραφήματος είναι χωρισμένη από την ράχη σε το πολύ τρία μέρη. Η ιδιότητα αυτή βελτιώνει την ποιότητα των ανερχομένων εμφυτεύσεων σε βιβλίο.

Θεώρημα 24. Έστω ένα επίπεδο st -γράφημα G που έχει μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον χωρίς τομές S . Τότε G έχει μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον S' που δεν δημιουργεί τομές και περιέχει το πολύ δύο ακμές σε κάθε όψη του G .

Απόδειξη: Έστω ότι G_S είναι το συμπληρωμένο κατά Χάμιλτον γράφημα που προκύπτει από την πρόσθεση του S , και έστω ότι P_{G_S} είναι το μονοπάτι Χάμιλτον του γραφήματος G_S . Στη συνέχεια θα δείξουμε πως από την S , κατασκευάζεται η πλήρωση S' με την επιθυμητή ιδιότητα.

Έστω $f = (s', v_1^l, \dots, v_p^l, v_1^r, \dots, v_m^r, t')$ είναι μια όψη του G στην οποία η πλήρωση S τοποθετεί τουλάχιστον τρεις ακμές. Από το Λήμμα 41, συμπεραίνουμε ότι οι πρώτες τρεις ακμές της S στην f , με την σειρά που αυτές επισκέπτονται από το P_{G_S} , μπορούν να συμβολιστούν με $S_f = \{(v_i^l, v_i^r), (v_j^r, v_{i+1}^l), (v_k^l, v_{j+1}^r)\}$, όπου, χωρίς βλάβη της γενικότητας, η πρώτη ακμή είναι δεξιόστροφη. Στην Εικόνα 3.35.a οι τρεις ακμές αυτές συμβολίζονται με διακεκομμένες γραμμές. Θεωρούμε για παράδειγμα τις κορυφές v_1^r και v_j^r της Εικόνας 3.35.a. Το μονοπάτι Χάμιλτον P_{G_S} μπορεί να ταξιδέψει από την v_1^r στην v_j^r , είτε ακολουθώντας μόνο το δεξιό σύνορο της f , είτε, επισκέπτοντας ενδιάμεσα κορυφές άλλων όψεων του G (ένα τέτοιο μονοπάτι συμβολίζεται με διακεκομμένη καμπύλη από την v_1^r στην v_j^r).

Οι τρεις ακμές S_f υποδιαιρούν το P_{G_S} σε τέσσερα υπομονοπάτια⁴, P_1, P_2, P_3 και P_4 , όπου $P_1 = P_{G_S}[s \dots v_i^l]$, $P_2 = P_{G_S}[v_i^l \dots v_j^r]$, $P_3 = P_{G_S}[v_{i+1}^l \dots v_k^l]$, και $P_4 = P_{G_S}[v_{j+1}^r \dots t]$ και s, t αποτελούν την πηγή και την καταβόθρα του G , αντίστοιχα (βλ. Εικόνα 3.35.a).

Θέτουμε $S' = S \setminus S_f \cup \{(v_k^l, v_i^r)\}$ (βλ. Εικόνα 3.35.b) και θα δείξουμε ότι το σύνολο ακμών S' αποτελεί μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον χωρίς τομές για το G , δηλαδή το $G_{S'}$ είναι ένα ανερχόμενο επίπεδο γράφημα με μονοπάτι Χάμιλτον, όπου $G_{S'}$ είναι το συμπληρωμένο κατά Χάμιλτον γράφημα που προκύπτει από την πλήρωση S' .

⁴Με το $P[u \dots v]$ συμβολίζουμε το υπομονοπάτι του P που ξεκινά από την κορυφή u και τερματίζεται στην v . Υποθέτουμε ότι το μονοπάτι $P[u \dots v]$ είναι καλώς ορισμένο, δηλαδή η κορυφή u εμφανίζεται στο P πριν από την v .

Από το Λήμμα 41(c), γνωρίζουμε ότι οι ακμές (v_i^l, v_{i+1}^l) και (v_j^r, v_{j+1}^r) είναι παρούσες στο G . Ορίζουμε το μονοπάτι $P_{G_{S'}}$, να είναι η παράθεση (concatenation) των μονοπατιών P_1, P_3, P_2 και P_4 , δηλαδή $P_{G_{S'}} = P_{G_S}[s \dots v_i^l] \rightarrow P_{G_S}[v_{i+1}^l \dots v_k^l] \rightarrow P_{G_S}[v_1^r \dots v_j^r] \rightarrow P_{G_S}[v_{j+1}^r \dots t]$. Είναι φανερό ότι το $P_{G_{S'}}$ αποτελεί μονοπάτι Χάμιλτον για το $G_{S'}$.

Η μοναδική διαφορά μεταξύ των $P_{G_{S'}}$ και P_{G_S} , είναι ότι στο $P_{G_{S'}}$ οι κορυφές του P_3 επισκέπτονται πριν από τις κορυφές του P_2 . Δηλαδή ένας κύκλος στο γράφημα θα δημιουργώταν μόνο εάν υπήρχαν δύο κορυφές u και v , έτσι ώστε $u \in P_2, v \in P_3$ και υπήρχε ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από την u στην v στο $G_{S'}$. Όμως, αν υπάρχει τέτοιο μονοπάτι από την u στην v , τότε υπάρχει μονοπάτι από την v_1^r στην v_k^l (βλ. Εικόνα 3.35.b). Από την Ιδιότητα 6 έχουμε ότι το μονοπάτι από την v_1^r στην v_k^l περιέχει μια αριστερόστροφη ακμή $e' = (u', v')$ στην f . Η ακμή (v_k^l, v_1^r) που συμπεριλαμβάνουμε στην S' είναι δεξιόστροφη και άρα, η ακμή e' πρέπει να είναι επίσης παρούσα στην S . Από την Ιδιότητα 8, η ακμή e' δεν τέμνει καμία ακμή της S_f . Επίσης οι ακμές της S_f , είναι οι τρεις χαμηλότερες ακμές της S στην f , και άρα η ακμή e' είναι πάνω από την (v_k^l, v_{j+1}^r) (βλ. Εικόνα 3.35.a). Τώρα, είναι εύκολο να δει κανείς ότι το μονοπάτι από την v_1^r στην v_k^l που περνά από την e' δημιουργεί κύκλο στο G_S . Άτοπο, επειδή η πλήρωση S είναι ακυκλική.

Έτσι, έχουμε αντικαταστήσει τις τρεις χαμηλότερες ακμές της S της όψης f με μια μοναδική ακμή. Επαναλαμβάνοντας αυτή την διαδικασία, μπορούμε να μετατρέψουμε κάθε μονό αριθμό των ακμών σε μια μοναδική ακμή και κάθε ζυγό αριθμό των ακμών σε ένα ζεύγος ακμών. \square

3.6.3 Εμφυτευμένα N -ελεύθερα ανερχόμενα επίπεδα γραφήματα

Στην παρούσα ενότητα μελετάμε την κλάση των εμφυτευμένων N -ελεύθερων ανερχόμενα επίπεδων γραφημάτων. Αποδεικνύουμε ότι κάθε εμφυτευμένο N -ελεύθερο ανερχόμενα επίπεδο γράφημα G έχει μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον χωρίς τομές με το πολύ μια ακμή ανά όψη του G . Αποδεικνύουμε ότι η πλήρωση αυτή μπορεί να βρεθεί σε γραμμικό χρόνο, βελτιώνοντας τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στις [1, 47]. Θυμίζουμε ότι η κλάση των εμφυτευμένων N -ελεύθερων ανερχόμενων επίπεδων γραφημάτων αποτελείται από τα εμφυτευμένα ανερχόμενα επίπεδα γραφήματα που δεν περιέχουν εμφυτευμένο N -γράφημα της Εικόνας 3.9.a ως υπογράφημα. Σημειώνουμε επίσης ότι η κλάση των εμφυτευμένων N -ελεύθερων ανερχόμενα επίπεδων γραφημάτων περιέχει και είναι μεγαλύτερη από την κλάση των απλά N -ελεύθερων ανερχόμενα επίπεδων γραφημάτων. Επιπλέον περιέχει την κλάση των series-parallel ανερχόμενα επίπεδων γραφημάτων.

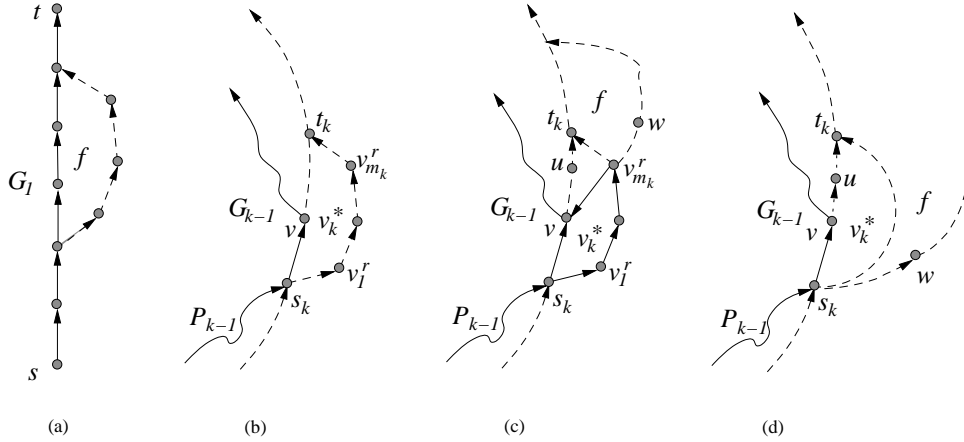
Θεώρημα 25. Κάθε εμφυτευμένο N -ελεύθερο επίπεδο st -γράφημα $G = (V, E)$, έχει μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον χωρίς τομές S που περιέχει το πολύ μια ακμή ανά την όψη του G . Επιπλέον, η S μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(V)$.

Απόδειξη: Έστω G^* είναι το δυϊκό γράφημα του G και έστω $s^* = v_1^*, \dots, v_m^* = t^*$ είναι οι κορυφές του G^* , σύμφωνα με μια τοπολογική αρίθμηση των κορυφών του G^* . Έστω G_{k-1} είναι το υπογράφημα $(k-1)$ όψεων του G . Από το Λήμμα 26, το G_k μπορεί να κατασκευαστεί από το G_{k-1} προσθέτοντας στο δεξί σύνορο του G_{k-1} ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι που αποτελεί το δεξί σύνορο της όψης v_k^* .

Αποδεικνύουμε την ακόλουθη, ισχυρότερη πρόταση:

Πρόταση 14. Για κάθε G_k ($1 \leq k < m$) υπάρχει μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον χωρίς τομές S_k έτσι ώστε ισχύει το ακόλουθο: αν P_k είναι το μονοπάτι Χάμιλτον που προκύπτει από την πλήρωση και e είναι η ακμή του δεξιού συνόρου του G_k , που αποτελεί την κάτω-αριστερή ακμή της όψης $f \in \{v_{k+1}^*, \dots, v_m^*\}$. Τότε η ακμή e συμμετέχει στο P_k .

Απόδειξη της Πρότασης 14. Αν $k = 1$, το G_1 αποτελείται από μοναδικό μονοπάτι, δηλαδή το αριστερό σύνορο του G (Εικόνα 3.36.a). Έστω $S_1 = \{\emptyset\}$ και θέτουμε το P_1 να είναι το μονοπάτι Χάμιλτον του G_1 . Επειδή όλες οι ακμές του G_1 διασχίζονται από το μονοπάτι P_1 , μια ακμή e στο δεξί σύνορο του G_1 , που είναι κάτω-αριστερή ακμή κάποιας όψης, διασχίζεται από το P_1 .



Εικόνα 3.36: (a) $G_1 = P_1$ και μια όψη f . Η κάτω-αριστερή ακμή της f διασχίζεται από το P_1 . (b) Το G_{k-1} και v_k^* . Το P_{k-1} απεικονίζεται με συνεχόμενη γραμμή. (c) Το γράφημα G_k για την περίπτωση που το δεξί σύνορο της v_k^* περιέχει τουλάχιστον μια κορυφή. Το P_k συμβολίζεται με συνεχόμενη γραμμή. (d) Το γράφημα G_k για την περίπτωση που το δεξί σύνορο του v_k^* είναι μια μεταβατική (transitive) ακμή.

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάθε G_{k-1} , $k < m$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για το G_k . Συμβολίζουμε με S_{k-1} μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον χωρίς τομές για το G_{k-1} και με το P_{k-1} το παραγόμενο μονοπάτι Χάμιλτον. Έστω e , είναι η ακμή στο δεξί σύνορο του G_{k-1} που αποτελεί την κάτω-αριστερή ακμή για την όψη v_k^* . Από την επαγωγική υπόθεση, το P_{k-1} διασχίζει την $e = (s_k, v)$ (βλ. Εικόνα 3.36.b). Συμβολίζουμε με s_k και t_k την πηγή και την καταβόθρα την όψης v_k^* , αντίστοιχα, και με $v_1^r, \dots, v_{m_k}^r$ τις κορυφές στο δεξί σύνορο της v_k^* . Από το Λήμμα 26, οι s_k και t_k βρίσκονται στο δεξί σύνορο του G_{k-1} , και το γράφημα G_k χτίζεται από το G_{k-1} με την προσθήκη του μονοπατιού $s_k, v_1^r, \dots, v_{m_k}^r, t_k$.

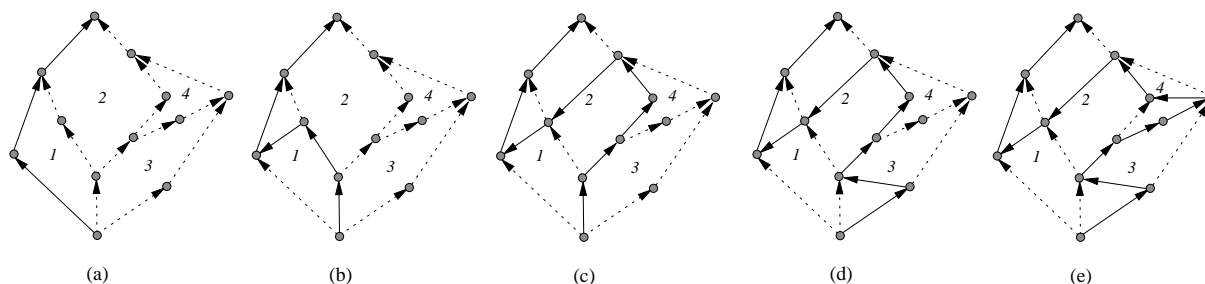
Υποθέτουμε πρώτα ότι $m_k \neq 0$ (δηλαδή το δεξί σύνορο της v_k^* περιέχει τουλάχιστον μια κορυφή). Θέτουμε $S_k = S_{k-1} \cup \{(v_{m_k}^r, v)\}$, και $P_k = P_{k-1}[s \dots s_k], v_1^r, \dots, v_{m_k}^r, P_{k-1}[v \dots t]$ (βλ. Εικόνα 3.36.c). Είναι φανερό ότι το P_k είναι το μονοπάτι Χάμιλτον του G_k . Αυτό είναι επειδή το P_{k-1} είναι το μονοπάτι Χάμιλτον του G_{k-1} και το P_k διασχίζει όλες τις κορυφές που προσθέσαμε σε αυτό. Είναι επίσης εύκολο να δει κανείς ότι η πλήρωση S_k είναι ακυκλική: η ακμή $(v_{m_k}^r, v)$ η οποία προστέθηκε στη S_{k-1} , δημιουργεί ένα μοναδικό κατευθυνόμενο μονοπάτι: από την κορυφή s_k στην κορυφή v , οι οποίες ήταν ήδη συνδεδεμένες με την ακμή (s_k, v) στο G_{k-1} .

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η κάτω-αριστερή ακμή e της $f \in \{v_{k+1}^* \dots v_m^*\}$, όπου e είναι επίσης στο δεξί σύνορο του G_k , διασχίζεται από το P_k . Η μόνη ακμή που προστέθηκε στο G_{k-1} για να δημιουργήσουμε το G_k και δεν διασχίζεται από το P_k , είναι η $e' = (v_{m_k}^r, t_k)$, έτσι η e' είναι η τελευταία ακμή του δεξιού συνόρου της v_k^* . Αν η e' αποτελούσε επίσης την κάτω-αριστερή ακμή της f , τότε το γράφημα θα είχε ένα εμφυτευμένο N -γράφημα ως υπογράφημα (βλ. το υπογράφημα που παράγεται από τις κορυφές $u, t_k, v_{m_k}^r, w$ στην Εικόνα 3.36.c), άτοπο. Διαφορετικά, αν η κάτω-αριστερή ακμή της όψης f ταυτίζεται με μια οποιαδήποτε άλλη ακμή του δεξιού συνόρου της v_k^* , η πρόταση ισχύει. Αν η f έχει την κάτω-αριστερή ακμή της στο δεξί σύνορο του G_{k-1} τότε, με επαγωγή, η κάτω-αριστερή ακμή της f διασχίζεται με το P_{k-1} και, άρα με το P_k .

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση που $m_k = 0$, δηλαδή το δεξί σύνορο της v_k^* είναι μια μοναδική

μεταβατική ακμή (βλ. Εικόνα 3.36.d). Σε αυτήν την περίπτωση, καμία νέα κορυφή δεν προστίθεται στο G_k , άρα θέτουμε $S_{k+1} = S_k$ και $P_{k+1} = P_k$. Έστω η όψη $f \in \{v_{k+1}^* \dots v_m^*\}$. Αν η κάτω-αριστερή ακμή e της f είναι στο δεξί σύνορο του G_k και ταυτίζεται με την μεταβατική ακμή (s_k, t_k) , τότε οι κορυφές u, t_k, s_k, w παράγουν ένα N -γράφημα (βλ. Εικόνα 3.36.d), άτοπο. Επειδή η ακμή e δεν ταυτίζεται με την (s_k, t_k) , δεν είναι ακμή του δεξιού συνόρου του G_{k-1} . Άρα, από την επαγωγική υπόθεση, η e διασχίζεται από το P_{k-1} και άρα από το P_k . Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης.

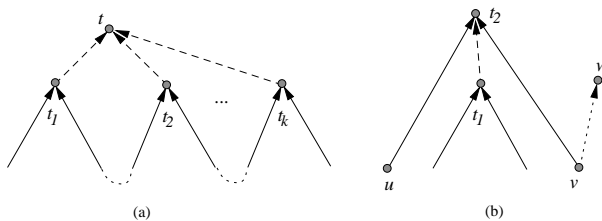
Το Θεώρημα έπεται από την Πρόταση 14, παρατηρώντας ότι $G_m = G$. Ο χρόνος που χρειάζεται για τον υπολογισμό της πλήρωσης έπεται άμεσα από την δομή της διαδικασίας που περιγράψαμε. Εικόνα 3.37 δείχνει την εφαρμογή του αλγορίθμου στο γράφημα της Εικόνας 3.9.d. □



Εικόνα 3.37: (a) – (e) Κατασκευή μιας ακυκλικής πλήρωσης Χάμιλτον και αντίστοιχου μονοπατιού Χάμιλτον για το N -ελεύθερο επίπεδο st -γράφημα G_1 της Εικόνας 3.9.d. Οι όψεις είναι αριθμημένες σύμφωνα με μια τοπολογική αρίθμηση του δυικού γραφήματος. Οι συνεχόμενες ακμές αναπαριστούν ακμές του μονοπατιού Χάμιλτον.

Πόρισμα 2. Κάθε I -ελεύθερο εμφυτευμένο επίπεδο st -γράφημα $G = (V, E)$ έχει μια ακυκλική πλήρωση χωρίς τομές S που περιέχει ακριβώς μια ακμή ανά όψη του G . Επιπλέον, η πλήρωση S μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(V)$.

Απόδειξη: Αναστρέφουμε τις ακμές του G^* και επαναλαμβάνουμε την κατασκευή της απόδειξης του Θεωρήματος 25. □



Εικόνα 3.38: (a) – (b) Απόδειξη του Θεωρήματος 26.

Θεώρημα 26. Κάθε εμφυτευμένο N -ελεύθερο ανερχόμενο επίπεδο γράφημα $G = (V, E)$ έχει μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον χωρίς τομές S . Επιπλέον, η S μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(V)$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι κάθε εμφυτευμένο N -ελεύθερο ανερχόμενο επίπεδο γράφημα G μπορεί να επεκταθεί σε ένα εμφυτευμένο N -ελεύθερο επίπεδο st -γράφημα G' με την πρόσθεση μερικών ακμών. Ύστερα, το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα 25.

Θεωρούμε μια ανερχόμενη επίπεδη εμφύτευση Γ του $G = (V, E)$ η οποία είναι N -ελεύθερη. Αν η εξωτερική όψη του G περιέχει πάνω από μια καταβόθρα (αντ. πηγή), τότε προσθέτουμε μια κορυφή t η οποία θα αποτελέσει την μοναδική καταβόθρα (αντ. πηγή) του τελικού γραφήματος. Έστω t_1, \dots, t_k είναι οι καταβόθρες του G στην εξωτερική όψη. Ενώνουμε τις κορυφές αυτές με την t . Παρατηρούμε ότι το τελικό γράφημα είναι N -ελεύθερο, επειδή κάθε t_i $1 \leq i \leq k$ δεν έχει καμία εξερχόμενη ακμή (βλ. Εικόνα 3.38.a).

Έστω t_1 και t_2 είναι δύο καταβόθρες σε μια εσωτερική όψη. Προσθέτουμε την ακμή (t_1, t_2) . Η πρόσθεση της ακμής (t_1, t_2) δημιουργεί ένα εμφυτευμένο N -γράφημα μόνο αν οι ακμές (v, t_2) και (v, w) ανήκουν στο G , με την (v, w) να ακολουθεί την (v, t_2) (κατά την φορά του ρολογιού), γύρω από την v . Αλλά τότε υπήρχε ήδη ένα εμφυτευμένο N -γράφημα στο G (το γράφημα που παράγεται από τις κορυφές u, t_2, v, w στην Εικόνα 3.38.b). Άτοπο, άρα η ακμή (t_1, t_2) μπορεί να προστεθεί στο G χωρίς να δημιουργήσεις κανένα εμφυτευμένο N -γράφημα ως υπογράφημα. Οι πηγές αντιμετωπίζονται παρόμοια. Η μετατροπή του G σε επίπεδο st -γράφημα μπορεί να ολοκληρωθεί σε γραμμικό χρόνο. \square

3.6.4 st -γραφήματα περιορισμένου πλάτους

Στην παρούσα ενότητα ασχολούμαστε με γραφήματα περιορισμένου πλάτους και αποδεικνύουμε ότι για τα γραφήματα αυτής της κλάσης μπορούμε να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο, αν αυτά αποδέχονται μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον χωρίς τομές. Στην περίπτωση που μια τέτοια πλήρωση υπάρχει, μπορούμε επίσης να την κατασκευάσουμε.

Ένα υποσύνολο Q , των κορυφών του G , ονομάζεται *ανεξάρτητο* αν το υπογράφημα του G , που παράγεται από τις κορυφές Q , δεν περιέχει ακμές. Ακολουθώντας την ορολογία των μερικών διατάξεων, ονομάζουμε *πλάτος* του G , και το συμβολίζουμε με $width(G)$, τον μέγιστο ακέραιο r έτσι ώστε το G να έχει ανεξάρτητο υποσύνολο κορυφών μεγέθους r .

Στο Πρόβλημα Ρύθμισης Προγραμματισμού Εργασιών (Minimum Setup Scheduling (MSS)), μας δίνεται ένα σύνολο από εργασίες, που πρέπει να εκτελεστούν από έναν μοναδικό επεξεργαστή. Επίσης δίνονται περιορισμοί, σύμφωνα με τους οποίους κάποιες εργασίες πρέπει να έχουν ολοκληρωθεί πριν ξεκινήσουν κάποιες άλλες. Οι περιορισμοί αυτοί δίνονται σε μορφή *κατεγραφήματος προτεραιότητας*. Είναι ξεκάθαρο ότι ένα κατεγράφημα προτεραιότητας πρέπει να είναι ακυκλικό. Επιπλέον, για κάθε ζεύγος εργασιών i, j , δίνεται το *κόστος ρύθμισης* που ερμηνεύεται ως το κόστος εκτέλεσης της εργασίας j αμέσως μετά την εκτέλεση της εργασίας i , και συμβολίζεται με $cost(i, j)$. Ο στόχος του προβλήματος MSS είναι να βρεθεί ένα πρόγραμμα για εκτέλεση όλων των εργασιών από μοναδικό επεξεργαστή, που ικανοποιεί το γράφημα προτεραιότητας και ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος ρύθμισης.

Η κεντρική ιδέα του αποτελέσματος του παρουσιάζεται στην παρούσα ενότητα είναι μια απλή αναγωγή του προβλήματός μας στο πρόβλημα MMS. Δεδομένου κατεγραφήματος προτεραιότητας D και τον πίνακα C , που περιέχει το κόστος ρύθμισης για κάθε ζεύγος εργασιών, συμβολίζουμε με $s(D, C)$ το ελάχιστο συνολικό κόστος ρύθμισης που ικανοποιεί το κατεγράφημα προτεραιότητας και αποτελεί την λύση του MMS. Το ακόλουθο θεώρημα έπεται από την ανάλυση της χρονικής πολυπλοκότητας που δίνεται στην [26].

Θεώρημα 27 ([26]). *Δεδομένου ενός κατεγραφήματος προτεραιότητας D n -κορυφών, το οποίο έχει πλάτος k , και τον πίνακα C που για κάθε ζεύγος κορυφών περιέχει το αντίστοιχο κόστος ρύθμισης, μπορούμε να υπολογίσουμε σε χρόνο $O(n^k k^2)$ το συνολικό κόστος ρύθμισης $s(P, C)$ του προβλήματος MMS, που ικανοποιεί τις προτεραιότητες που δίνονται από το κατεγράφημα P .*

Στο υπόλοιπο της ενότητας αποδεικνύουμε ότι δεδομένου ενός επίπεδου st -γραφήματος G , το

πρόβλημα της απόφασης αν το G έχει μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον χωρίς τομές, μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια εκδοχή (instance) του προβλήματος (MSS).

Έστω $G = (V, E)$ είναι ένα επίπεδο st -γράφημα. Ορίζουμε τον πίνακα που περιέχει τα κόστη ρύθμισης ως εξής. Θέτουμε $C_G[i, j] = 0$ αν $(v_i, v_j) \in E$ ή αν οι κορυφές v_i και v_j ανήκουν στην ίδια όψη του G , διαφορετικά θέτουμε $C_G[i, j] = 1$.

Λήμμα 42. Έστω $G = (V, E)$ είναι ένα επίπεδο st -γράφημα. Έστω επίσης το $s(G, C_G)$ είναι το κόστος του προγραμματισμού εργασιών που έχει το ελάχιστο κόστος ρύθμισης για το γράφημα προτεραιοτήτων G και τον πίνακα κόστους ρύθμισης C_G . Το γράφημα G έχει μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον χωρίς τομές αν και μόνο αν $s(G, C_G) = 0$.

Απόδειξη: (\Rightarrow) Υποθέτουμε ότι το γράφημα G έχει μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον χωρίς τομές S και v_1, v_2, \dots, v_n είναι η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι κορυφές στο μονοπάτι Χάμιλτον που δημιουργεί η προσθήκη του S στο G . Τότε, η σειρά v_1, v_2, \dots, v_n παρουσιάζει έναν προγραμματισμό εργασιών που ικανοποιεί τους περιορισμούς που δίνονται από το G , διαφορετικά η προσθήκη του S στο G θα δημιουργούσε κύκλο. Το κόστος ρύθμισης για τον συγκεκριμένο προγραμματισμό είναι $\sum_{i=1}^{n-1} C_G[i, i+1]$. Γνωρίζουμε ότι το S δεν δημιουργεί τομές με το G . Άρα, κάθε δύο διαδοχικές κορυφές v_i και v_{i+1} του μονοπάτι Χάμιλτον συνδέονται είτε με μια ακμή του γραφήματος, είτε με μια ακμή της πλήρωσης που βρίσκεται εξ ολοκλήρου σε μια όψη. Άρα $C_G[i, i+1] = 0$. Οπότε έχουμε αποδείξει ότι το αντίστοιχο πρόβλημα MMS έχει λύση $s(G, C_G) = 0$.

(\Leftarrow) Υποθέτουμε ότι $s(G, C_G) = 0$, δηλαδή, υπάρχει ένας προγραμματισμός εργασιών που έχει μηδενικό συνολικό κόστος και ικανοποιεί το γράφημα προτεραιοτήτων G . Έστω v_1, v_2, \dots, v_n είναι οι εργασίες, όπως αυτές εμφανίζονται στον προγραμματισμό. Κατασκευάζουμε το σύνολο των ακμών S ως εξής: θεωρούμε δύο διαδοχικές εργασίες v_i και v_{i+1} . Αν αυτές δεν συνδέονται με την ακμή (v_i, v_{i+1}) στο G , τότε προσθέτουμε αυτή την ακμή στο S . Κάθε ακμή που προσθέσαμε στο S αντιστοιχεί σε δύο εργασίες που έχουν το αντίστοιχο κόστος ρύθμισης μηδέν και άρα οι κορυφές που συνδέει βρίσκονται στην ίδια όψη του G . Άρα το μονοπάτι Χάμιλτον που δημιουργεί το S δεν τέμνει ακμές του γραφήματος.

Θα δείξουμε ότι η προσθήκη του S στο G δεν δημιουργεί κανέναν κύκλο. Ονομάζουμε G' το γράφημα που προκύπτει όταν οι ακμές του S προστεθούν στο G . Εισ άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι το G' περιέχει κύκλο. Τότε υπάρχουν δύο κορυφές v_i και v_j που συνδέονται στο G' με δύο ανεξάρτητα κατευθυνόμενα μονοπάτια, από την v_i στην v_j και από την v_j στην v_i . Τότε η εργασία που αντιστοιχεί στην κορυφή v_i , εκτελείται από τον επεξεργαστή πριν από την v_j και αντιστρόφως. Άτοπο, άρα το G' είναι ακυκλικό.

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη παρατηρώντας ότι δεν μπορεί να υπάρχουν τομές μεταξύ των ακμών του S , αυτό έπεται από την Ιδιότητα 8. Άρα ο συνολικός αριθμός των τομών που δημιουργεί το S είναι μηδέν. \square

Θεώρημα 28. Έστω G είναι ένα επίπεδο st -γράφημα πλάτους $k \in \mathbb{N}$. Σε χρόνο $O(k^2 n^k)$ μπορούμε να αποφασίσουμε αν το G έχει μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον χωρίς τομές. Στην καταφατική περίπτωση η πλήρωση αυτή μπορεί να υποβληθεί με την ίδια χρονική πολυπλοκότητα.

Παρατηρούμε ότι για την κλάση των εξωεπίπεδων st -γραφημάτων, το παραπάνω θεώρημα δίνει έναν αλγόριθμο πολυπλοκότητας $O(n^2)$. Χρησιμοποιώντας ειδικές ιδιότητες των εξωεπίπεδων st -γραφημάτων, το πρόβλημα αυτό λύθηκε σε γραμμικό χρόνο στην Ενότητα 3.5.

3.7 ρ -Περιορισμένη Ανερχόμενη Τοπολογική Εμφύτευση σε Βιβλίο

Στην παρούσα ενότητα μελετάμε μια παραλλαγή του προβλήματος ανερχόμενης τοπολογικής εμφύτευσης γραφημάτων σε βιβλίο, όπου μαζί με ένα ανερχόμενο επίπεδο γράφημα G , μας δίνεται μια τοπολογική αρίθμηση ρ των κορυφών του G , και μας ζητείται να κατασκευάσουμε μια ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση του G σε 2-σέλιδο βιβλίο, όπου οι κορυφές του G εμφανίζονται πάνω στην ράχη του βιβλίου σύμφωνα με την αρίθμηση ρ . Μια τέτοια εμφύτευση ονομάζεται *ρ -περιορισμένη ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε βιβλίο*.

Οι Giordano, Liotta και Whitesides [50] ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο που δεδομένου ενός επίπεδου st -γραφήματος G και μιας τοπολογικής του αρίθμησης ρ , υπολογίζει σε χρόνο $O(n^2)$ μια ρ -περιορισμένη ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση στο βιβλίο του G με το πολύ $2n - 4$ τομές με την ράχη ανά ακμή. Απέδειξαν ότι ο αριθμός αυτός των τομών είναι ασυμπτωτικά βέλτιστος.

Το πρόβλημα της ανερχόμενης ρ -περιορισμένης τοπολογικής εμφύτευσης σε βιβλίο μπορεί να εφαρμοστεί για επίλυση του προβλήματος *ανερχόμενης εμφύτευσης σε σύνολο σημείων με δεδομένη αντιστοίχιση*. Θυμίζουμε ότι, στο πρόβλημα αυτό μας δίνεται ένα ανερχόμενο επίπεδο γράφημα G με n κορυφές, ένα σύνολο S , n διαφορετικών σημείων στο επίπεδο, και μια αντιστοίχιση Φ από το σύνολο των κορυφών του G στο σύνολο των σημείων του S . Το επιθυμητό αποτέλεσμα είναι να βρεθεί μια ανερχόμενη απεικόνιση του G με τις κορυφές του να αναπαριστώνται από τα σημεία του S , όπως το υποδεικνύει η αντιστοίχιση Φ . Όπως αποδείχθηκε στην [50], όχι όλες οι εκδοχές (instances) του προβλήματος έχουν λύση. Στην [50], οι συγγραφείς περιγράφουν έναν αλγόριθμο χρόνου $O(n^3)$ που ελέγχει αν μια τέτοια εμφύτευση υπάρχει. Επίσης, αποδεικνύουν ότι αν υπάρχει μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n^2)$ και έχει το πολύ $2n - 3$ καμπές ανά ακμή του γραφήματος.

Στην παρούσα ενότητα βασιζόμενοι στο πρόβλημα ακυκλικής πλήρωσης Χάμιλτον και την ισοδυναμία του με το πρόβλημα υπολογισμού της ανερχόμενης τοπολογικής εμφύτευσης σε βιβλίο (βλ. Ενότητα 3.3), αποδεικνύουμε πρώτα ότι κάθε επίπεδο st -γράφημα G με δεδομένη μια τοπολογική του αρίθμηση ρ , επιδέχεται μια ρ -περιορισμένη τοπολογική εμφύτευση σε βιβλίο με το πολύ $n - 3$ τομές με την ράχη και, επιπλέον, $n - 3$ τομές με την ράχη είναι απαραίτητες για κάποια γραφήματα. Στο αποτέλεσμα αυτό, επιτρέπουμε την ακμή (s, t) να βρίσκεται στο εσωτερικό του γραφήματος. Αν η ακμή (s, t) είναι στη εξωτερική όψη, ο μέγιστος αριθμός των τομών των ακμών με την ράχη γίνεται $n - 4$ και αποτελεί την χειρότερη περίπτωση. Ύστερα, παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο ο χρόνος εκτέλεσης του οποίου εξαρτιέται από το μέγεθος της εξόδου (output sensitive algorithm). Ο αλγόριθμος αυτός υπολογίζει σε χρόνο $O(a + n)$ μια ρ -περιορισμένη ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε βιβλίο με τον ελάχιστο αριθμό των τομών με την ράχη. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο αυτό στο πρόβλημα της εμφύτευσης σε σύνολο σημείων με αντιστοίχιση, λαμβάνουμε λύση με το πολύ $n - 3$ καμπές ανά ακμή.

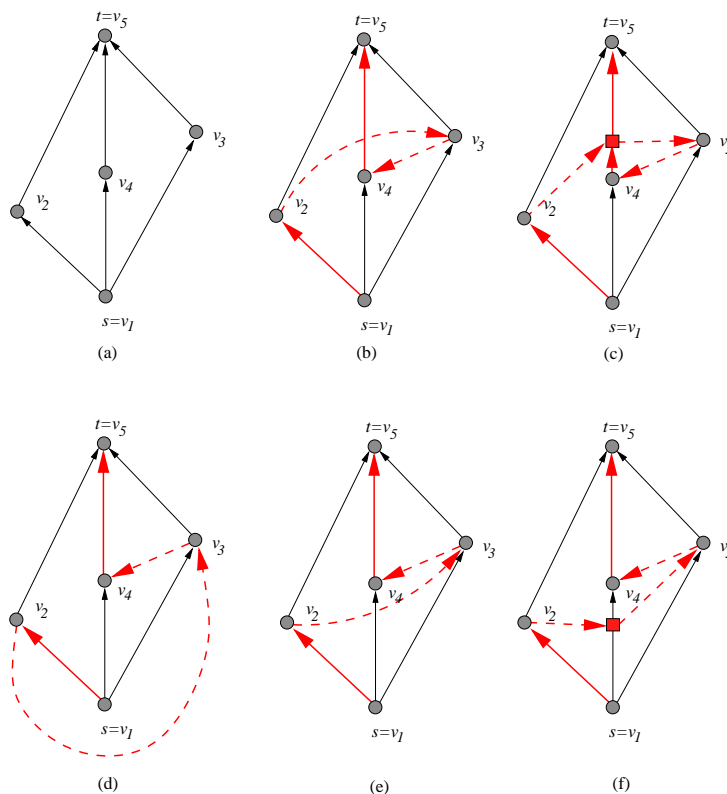
Για την ευκολία της παρουσίασης αναθεωρούμε τον ορισμό του δυικού γραφήματος ως εξής. Το *δεξιόστροφο δΰικό* (αντ. *αριστερόστροφο δΰικό*) ενός επίπεδου st -γραφήματος G συμβολίζεται με G_R^* (G_L^*) και είναι ένα κατεγράφημα έτσι ώστε: (i) η εξωτερική όψη είναι χωρισμένη σε δύο, s^* και t^* , έτσι ώστε, s^* είναι η όψη στα αριστερά(αντ. δεξιά) του αριστερού (αντ. δεξιού) συνόρου του G , ενώ t^* είναι η όψη στα δεξιά (αντ. αριστερά) του δεξιού (αντ. αριστερού) συνόρου του G , (ii) Υπάρχει μια κορυφή στο G_R^* (G_L^*) για κάθε εσωτερική όψη του G , (iii) για κάθε ακμή $e \neq (s, t)$ του G , υπάρχει ακμή $e^* = (f, g)$ στο G^* , έτσι ώστε $f = left(e)$ (αντ. $f = right(e)$) και $g = right(e)$ (αντ. $g = left(e)$).

3.7.1 Βασικό αποτέλεσμα

Έστω $G = (V, E)$ είναι ένα εμφυτευμένο ανερχόμενο επίπεδο γράφημα, το E_c είναι μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον του G και $\Gamma(G')$ είναι μια απεικόνιση του $G' = (V, E \cup E_c)$ που σέβεται

την εμφύτευση του G . Θυμίζουμε ότι, το γράφημα G_c που προκύπτει από την απεικόνιση $\Gamma(G')$, αντικαθιστώντας κάθε τομή με μια καινούργια κορυφή και υποδιαιρώντας τις ακμές που συμμετέχουν στις τομές, διατηρώντας τον προσανατολισμό τους, ονομάζεται *επεκταμένο κατά Χάμιλτον γράφημα του G που προκύπτει από την $\Gamma(G')$* . Οι ακμές που προκύπτουν από την υποδιαίρεση των αρχικών ακμών του γραφήματος G , ή των ακμών της πλήρωσης E_c , αναφέρονται ως *τμήματα των υποδιαιρεμένων ακμών*.

Έστω G είναι ένα εμφυτευμένο ανερχόμενα επίπεδο γράφημα και e είναι μια ακμή που δεν ανήκει στο G . Η *απεικόνιση της ακμής e* στο εμφυτευμένο γράφημα G συμβολίζεται με $\Gamma(e)$ και ορίζεται ως μια ακολουθία των ακμών του G που τέμνει η ακμή e , όπως διασχίζουμε την e από την πηγή της προς την καταβόθρα της. Θεωρούμε μια απεικόνιση της e στο G . Έστω G_e είναι το κατεγράφημα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τις τομές που προκαλεί η e με βοηθητικές κορυφές και υποδιαιρέσουμε τις ακμές που συμμετέχουν στις τομές, διατηρώντας της κατεύθυνσή τους. Ονομάζουμε το G_e το κατεγράφημα που προέκυψε από την απεικόνιση της e στο G .



Εικόνα 3.39: (a) Ένα επίπεδο st -γράφημα G . (b) Μια απεικόνιση $\Gamma_1(G')$ του συμπληρωμένου κατά Χάμιλτον γραφήματος G' του G . Οι ακμές του μονοπατιού Χάμιλτον του G' είναι έντονες, και οι ακμές της πλήρωσης διακεκομμένες. (c) Το επεκταμένο κατά Χάμιλτον κατεγράφημα G_1' του G που προκύπτει από την $\Gamma_1(G')$. Οι βοηθητικές κορυφές απεικονίζονται με τετράγωνα. (d) Μια απεικόνιση $\Gamma_2(G')$ του συμπληρωμένου κατά Χάμιλτον γραφήματος G' που επίσης αποτελεί το επεκταμένο κατά Χάμιλτον γράφημα G_2' του G που προκύπτει από την $\Gamma_2(G')$, επειδή δεν υπάρχουν τομές. (e) Μια απεικόνιση $\Gamma_3(G')$ του συμπληρωμένου κατά Χάμιλτον γραφήματος G' του G . (f) Το επεκταμένο κατά Χάμιλτον γράφημα G_3' του G που προέκυψε από την $\Gamma_3(G')$.

Παρατηρούμε ότι αν μας δίνεται ένα ανερχόμενα επίπεδο γράφημα G και μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον του E_c , υπάρχουν πολλοί τρόποι να απεικονίσουμε τις ακμές της πλήρωσης πάνω στην

απεικόνιση του G . Η Εικόνα 3.39.a δείχνει ένα επίπεδο st -γράφημα, ενώ οι Εικόνες 3.39.(b-e) δείχνουν τρεις από όλες τις δυνατές απεικονίσεις της ακμής (v_2, v_3) . Τα αντίστοιχα επεκταμένα κατά Χάμιλτον γραφήματα δίνονται στις Εικόνες 3.39.(c-f). Παρατηρούμε ότι μόνο ένα από τα γραφήματα αυτά είναι ανερχόμενο και επίπεδο γράφημα (βλ. Εικόνα 3.39.f). Στο Λήμμα 45 θα δείξουμε ότι για κάθε επίπεδο st -γράφημα G και μια ακυκλική πλήρωση E_c για το G υπάρχει μια και μοναδική απεικόνιση των ακμών της πλήρωσης E_c ώστε το επεκταμένο κατά Χάμιλτον γράφημα που προκύπτει να είναι ένα ανερχόμενο επίπεδο γράφημα.

Πριν περάσουμε στο Λήμμα 45 θα αποδείξουμε κάποια βοηθητικά αποτελέσματα.

Λήμμα 43. Έστω G είναι ένα επίπεδο st -γράφημα, $\Gamma(G)$ είναι η απεικόνιση του G και $\rho = (s = v_1, \dots, v_n = t)$ είναι μια τοπολογική αρίθμηση του G . Υποθέτουμε ότι το G περιέχει το μονοπάτι (v_1, v_2, \dots, v_i) αλλά δεν περιέχει την ακμή $e_i = (v_i, v_{i+1})$. Αν η ακμή e_i απεικονίζεται στο εσωτερικό της $\Gamma(G)$ έτσι ώστε:

- (i) Για κάθε ακμή (u, u') του G που τέμνεται από την $e_i = (v_i, v_{i+1})$, ισχύει $u \in \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ και $u' \in V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i+1}\}$,
- (ii) Η ακμή $e_i = (v_i, v_{i+1})$ δεν τέμνει καμία ακμή του G εξερχόμενη από την v_i ή, εισερχόμενη στην v_{i+1}
- (iii) Η ακμή $e_i = (v_i, v_{i+1})$ δεν τέμνει καμία ακμή του G πάνω από μια φορά

τότε, το κατεγράφημα G_{e_i} που προκύπτει από την συγκεκριμένη απεικόνιση της e_i , είναι ένα επίπεδο st -γράφημα και περιέχει το μονοπάτι $(v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1})$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε στην συνέχεια ότι, αν η απεικόνιση της (v_i, v_{i+1}) ικανοποιεί τις συνθήκες του λήμματος, τότε το προκύπτον γράφημα G_{e_i} είναι ακυκλικό. Εισ ατόπο απαγωγή, έστω G_{e_i} περιέχει κύκλο S . Έστω $(u_1, u'_1), (u_2, u'_2), \dots, (u_k, u'_k)$ είναι οι ακμές του G που τέμνει η e_i και έστω h_1, h_2, \dots, h_k είναι οι βοηθητικές κορυφές που τοποθετήθηκαν στις τομές που δημιουργεί η e_i (βλ. Εικόνα 3.40.a).

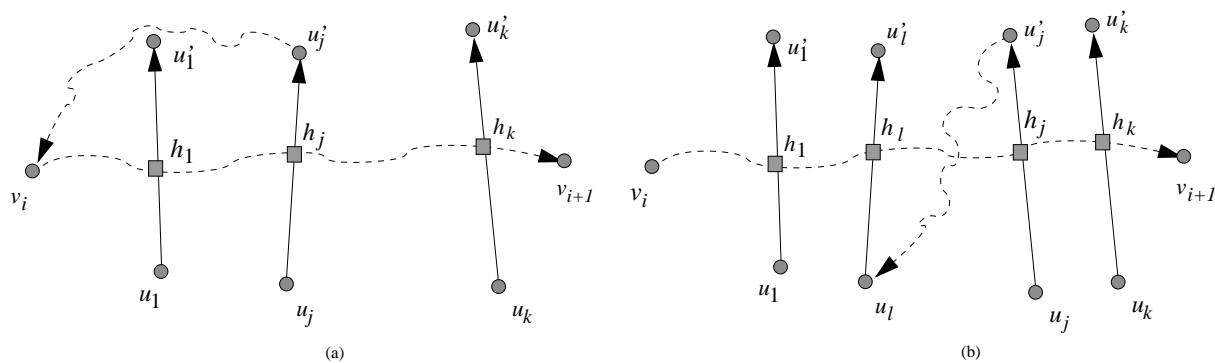
Από την συνθήκη (ii), ούτε η v_i ούτε η v_{i+1} είναι στο $\{u_1, \dots, u_k, u'_1, \dots, u'_k\}$. Από την συνθήκη (iii), η ακμή e_i δεν τέμνει καμία ακμή του G δυο φορές και συνεπώς κάθε ζεύγος βοηθητικών κορυφών βρίσκεται σε διαφορετικές ακμές του G . Επίσης, η ακμή e_i (δηλαδή, όλα τα τμήματά της) δεν μπορεί να συμμετέχει στο κύκλο· διαφορετικά η ρ δεν θα ήταν μια τοπολογική αρίθμηση, άτοπο. Έτσι, υποθέτουμε ότι μόνο μερικά από τα τμήματα της e_i συμμετέχουν στον κύκλο.

Θεωρούμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. Κύκλος S περιέχει είτε το πρώτο είτε το τελευταίο τμήμα της e_i . Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση όταν ο κύκλος περιέχει το πρώτο τμήμα της e_i . Η περίπτωση του τελευταίου τμήματος είναι συμμετρική.

Υποθέτουμε ότι το μονοπάτι $v_i \rightsquigarrow h_j$ που περιέχει τμήματα της e_i είναι μέρος του κύκλου S . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το μονοπάτι αυτό είναι μέγιστο, δηλαδή το h_{j+1} δεν συμμετέχει στο S . Τότε, επειδή (h_j, u'_j) είναι η μόνη εξερχόμενη ακμή του h_j που μπορεί να είναι μέρος του S , συμπεραίνουμε ότι το G περιέχει ένα μονοπάτι $u'_j \rightsquigarrow v_i$ (βλ. Εικόνα 3.40.a). Τότε, επειδή η ρ είναι μια τοπολογική αρίθμηση του G , η u'_j πρέπει να είναι στο $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$, το οποίο αποτελεί αντίφαση με την συνθήκη (i), επειδή η (v_i, v_{i+1}) τέμνεται από την (u_j, u'_j) και $u'_j \notin V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i+1}\}$.

Περίπτωση 2. Κύκλος S δεν περιέχει ούτε το πρώτο, ούτε το τελευταίο τμήμα της ακμής e_i .



Εικόνα 3.40: Απόδειξη του Λήμματος 43.

Υποθέτουμε ότι το μονοπάτι $h_i \rightsquigarrow h_j$ περιέχει μόνο τμήματα της ακμής e_i , αποτελεί μέρος του S και είναι μέγιστο. Επειδή η (h_j, u'_j) είναι η μόνη εξερχόμενη ακμή της h_j και η (u_i, h_i) είναι η μόνη εισερχόμενη της h_i , που μπορεί να αποτελεί μέρος του κύκλου S , συμπεραίνουμε ότι το G περιέχει ένα μονοπάτι $u'_j \rightsquigarrow u_i$ (βλ. Εικόνα 3.40.b). Τότε, επειδή η ρ είναι μια τοπολογική αρίθμηση του G , η κορυφή u'_j πρέπει να είναι στο $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$, που αποτελεί αντίφαση με την συνθήκη (i), επειδή η ακμή (v_i, v_{i+1}) τέμνεται από την (u_j, u'_j) και $u'_j \notin V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i+1}\}$.

Συνεπάγεται ότι η απεικόνιση της ακμής e_i στο εσωτερικό της $\Gamma(G)$, που ικανοποιεί τις συνθήκες του λήμματος, σέβεται την εμφύτευση του G και αφήνει το G_{e_i} ακυκλικό. Άρα, το G_{e_i} είναι ένα επίπεδο st -γράφημα. \square

Παρατηρούμε ότι η απαίτηση του Λήμματος 43 ότι ακμή e_i πρέπει να είναι στο εσωτερικό της απεικόνισης του G είναι σημαντική για την απόδειξη. Είναι εύκολο να δει κανείς, ότι αν e_i βρίσκεται στην εξωτερική όψη, τότε το γράφημα G_{e_i} δεν είναι ανερχόμενα επίπεδο (βλ. Εικόνα 3.39.d).

Λήμμα 44. Έστω G είναι ένα επίπεδο st -γράφημα και $\rho = (s = v_1, \dots, v_n = t)$ είναι μια τοπολογική αρίθμηση του G . Υποθέτουμε ότι το G περιέχει το μονοπάτι (v_1, v_2, \dots, v_i) , αλλά δεν περιέχει την ακμή (v_i, v_{i+1}) . Τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση της ακμής $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $\Gamma(e_i)$, που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) – (iii) του Λήμματος 43.

Απόδειξη: Έστω G είναι ένα επίπεδο st -γράφημα και $\Gamma(G)$ είναι η αντίστοιχη απεικόνιση του G . Υποθέτουμε ότι το G περιέχει το μονοπάτι (v_1, v_2, \dots, v_i) αλλά δεν περιέχει την ακμή (v_i, v_{i+1}) . Συνεπώς, οι κορυφές v_i, v_{i+1} δεν συνδέονται με κανένα κατευθυνόμενο μονοπάτι, διαφορετικά ρ δεν θα μπορούσε να είναι μια τοπολογική αρίθμηση.

Επειδή οι κορυφές v_i και v_{i+1} δεν είναι συνδεδεμένες με κατευθυνόμενο μονοπάτι στο G , συνδέονται με κατευθυνόμενο μονοπάτι στο δεξιόστροφο δυϊκό γράφημα G_R^* του G (βλ. Λήμμα 7 των Tamassia και Preparata [94], βλ. επίσης Λήμμα 24). Χωρίς βλάβη στην γενικότητα, υποθέτουμε ότι, υπάρχει μονοπάτι από το $right(v_i)$ στο $left(v_{i+1})$. Μπορούμε να απεικονίσουμε την ακμή e_i ακολουθώντας το μονοπάτι αυτό. Αν το μονοπάτι είναι από το $right(v_{i+1})$ στο $left(v_i)$ τότε υπάρχει επίσης ένα μονοπάτι από το $left(v_i)$ στο $right(v_{i+1})$ στο αριστερόστροφο δυϊκό G_L^* του G . Η απόδειξη στην περίπτωση αυτή είναι ίδια χρησιμοποιώντας το G_L^* στην θέση του G_R^* .

Παρατηρούμε επίσης ότι το G_L^* μπορεί να περιέχει παραπάνω από ένα μονοπάτια από την $right(v_i)$ στην $left(v_{i+1})$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό μονοπάτι από την $right(v_i)$ στην $left(v_{i+1})$ στο G_L^* που ικανοποιεί τις ιδιότητες του Λήμματος 43.

Θα κατασκευάσουμε ένα μονοπάτι $right(v_i) = f_1, f_2, \dots, f_m = left(v_{i+1})$ στο G_L^* , όπου f_i συμβολίζει μια όψη του G με την πηγή s_i και καταθόθρα t_i , έτσι ώστε, οι κορυφές s_1, \dots, s_m είναι όλες στο

$\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$, ενώ οι t_1, \dots, t_m είναι όλες στο $V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i+1}\}$. Η πρώτη όψη του μονοπατιού είναι η $right(v_i) = f_1$, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη, δηλαδή επειδή η v_i είναι στο αριστερό σύνορο της f , υπάρχουν μονοπάτια $s_1 \rightsquigarrow v_i$ και $v_i \rightsquigarrow t_1$ στο G , άρα έχουμε ότι $s_1 \in \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ και $t_1 \in V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i+1}\}$. Επειδή το δεξί σύνορο της f_1 είναι μονοπάτι του G και ρ είναι μια τοπολογική αρίθμηση του G , υπάρχει ακριβώς μια ακμή $e_1 = (u_1, w_1)$ σε αυτό, με την ιδιότητα ότι $u_1 \in \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ και $w_1 \in V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i+1}\}$. Παρατηρούμε ότι η u_1 μπορεί να ταυτίζεται με την s_1 , ενώ η w_1 με την t_1 . Επίσης παρατηρούμε ότι υπάρχει μοναδική όψη f έτσι ώστε η ακμή (u_1, w_1) να ανήκει στο αριστερό του σύνορο. Επειδή το G περιέχει ένα μονοπάτι από την πηγή της f στην u_1 και από την w_1 στην καταβόθρα της f , η όψη f ικανοποιεί την επιθυμητή ιδιότητα. Έτσι η πηγή της f είναι στο $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ και η καταβόθρα της f στο $V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i+1}\}$. Ταυτίζουμε την όψη f_2 με την f και συνεχίζουμε την διαδικασία μέχρι να εντοπίσουμε την όψη $left(v_{i+1})$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι αυτό συμβαίνει πάντα, δηλαδή μια τέτοια αναζήτηση καταλήγει στην $left(v_{i+1})$.

Για απαγωγή στο άτοπο υποθέτουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει. Αυτό συνεπάγεται ότι η όψη $left(v_{i+1})$ δεν περιέχει καμία ακμή (u, w) στο αριστερό της σύνορο, έτσι ώστε $u \in \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ και $w \in V \setminus \{v_1, \dots, v_{i+1}\}$. Συνεπώς, είτε η καταβόθρα της $left(v_{i+1})$ είναι στο $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$, είτε η πηγή της στο $V \setminus \{v_1, \dots, v_{i+1}\}$. Άτοπο, επειδή το G περιέχει μονοπάτι από την v_{i+1} στην καταβόθρα του $left(v_{i+1})$ και από την πηγή της $left(v_{i+1})$ στην v_{i+1} .

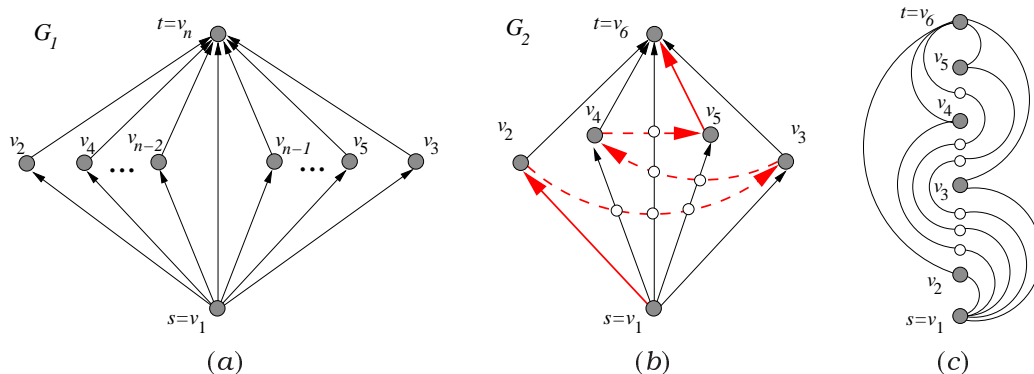
Κατά την διάρκεια της απόδειξης προσδιορίσαμε τις ακμές (u_i, w_i) , $i = 1, \dots, m$ που τέμνονται από την e . Επειδή οι ακμές αυτές ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες του Λήμματος 43, συμπεραίνουμε ότι το τελικό G_{e_i} είναι ένα επίπεδο st -γράφημα. \square

Λήμμα 45. Έστω $G = (V, E)$ είναι ένα επίπεδο st -γράφημα και E_c είναι μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον του G . Θεωρούμε όλα τα δυνατά επεκταμένα κατά Χάμιλτον γραφήματα που προκύπτουν από τις διαφορετικές απεικονίσεις του $G' = (V, E \cup E_c)$. Τότε υπάρχει μοναδικό επεκταμένο κατά Χάμιλτον γράφημα G_c , έτσι ώστε η απεικόνιση της κάθε ακμής $e \in E_c$ να ικανοποιεί τις συνθήκες (i)–(iii) του Λήμματος 43. Επιπλέον το G_c είναι ένα επίπεδο st -γράφημα και ο αριθμός των βοηθητικών κορυφών στο G_c είναι ελάχιστος δυνατός.

Απόδειξη: Έστω P είναι το μονοπάτι Χάμιλτον που δημιουργείται από την πλήρωση E_c και έστω $\rho = \{s = v_1, \dots, v_n = t\}$ είναι η τοπολογική αρίθμηση του G που συμφωνεί με το P . Έστω $E_c = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_k\}$ είναι η ακολουθία των ακμών του E_c , με την οποία αυτές εμφανίζονται στο P . Θα δείξουμε πως κατασκευάζεται το επεκταμένο κατά Χάμιλτον γράφημα που αποτελεί ένα επίπεδο st -γράφημα.

Έστω $e'_1 = (v_i, v_{i+1})$ είναι η πρώτη ακμή της πλήρωσης E_c , που διασχίζεται από το P . Έτσι, το G περιέχει ένα μονοπάτι (v_1, \dots, v_i) . Από το Λήμμα 44, υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση της e'_1 , που ικανοποιεί τις συνθήκες του Λήμματος 43 και άρα δίνει ένα επίπεδο st -γράφημα $G_{e'_1}$. Εφαρμόζουμε αυτήν την διαδικασία αναδρομικά, προσθέτοντας κάθε φορά μια ακμή του E_c με την σειρά που αυτές εμφανίζονται στο P .

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θα δείξουμε ότι αν η ακμή e'_j ζωγραφίζεται όπως το απαιτεί το Λήμμα 43, τότε η e'_j δεν τέμνει καμία e'_l , $l < j$. Ονομάζουμε $G_{e'_{j-1}}$ το γράφημα πριν απεικονίσουμε την ακμή e'_j και υποθέτουμε ότι $e'_{j-1} = (v_g, v_{g+1})$. Το γράφημα $G_{e'_{j-1}}$ περιέχει το μονοπάτι (v_1, \dots, v_{g+1}) και όλες οι ακμές που προστέθηκαν στο G για να κατασκευάσουμε το $G_{e'_{j-1}}$, έχουν ως καταβόθρες τις κορυφές με δείκτη μικρότερο ή ίσο με το $g + 1$. Έτσι, αν απεικονίσουμε την ακμή e'_j όπως το απαιτεί το Λήμμα 43, οι ακμές που τέμνονται από την e'_j έχουν τις πηγές τους τις κορυφές με δείκτη μεγαλύτερο ή ίσο από το $g + 1$. Άρα έχουμε το ζητούμενο. Επειδή όμως ο τρόπος να κατασκευάσουμε το G_c είναι μοναδικός, συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός των βοηθητικών κορυφών είναι ο ελάχιστος δυνατός. \square



Εικόνα 3.41: (a) Ένα κατεγράφημα G_1 και μια τοπολογική αρίθμηση του ρ , έτσι ώστε στην ρ -περιορισμένη ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε βιβλίο του G_1 , η ακμή (s, t) να τέμνει την ράχη $n - 3$ φορές. (b) Ένα κατεγράφημα G_2 , μια ακυκλική πλήρωση κατά Χάμιλτον (διακεκομμένες γραμμές), και η μοναδική ανερχόμενη απεικόνιση του αντίστοιχου συμπληρωμένου γραφήματος, που σέβεται την απεικόνιση του G_2 . (c) Η ρ -περιορισμένη ανερχόμενη εμφύτευση στο βιβλίο του γραφήματος G_2 .

Έστω G είναι ένα επίπεδο st -γράφημα και E_c μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον του G . Η απεικόνιση $\Gamma(G')$ του $G' = (V, E \cup E_c)$, που σέβεται την εμφύτευση το G και δίνει ένα επεκταμένο κατά Χάμιλτον γράφημα, που αποτελεί επίπεδο st -γράφημα με τον ελάχιστο αριθμό των βοηθητικών κορυφών θα ονομάζεται *μοναδική ακυκλική απεικόνιση του G'* .

Θεώρημα 29. Έστω G είναι ένα επίπεδο st -γράφημα, E_c είναι μια ακυκλική πλήρωση Χάμιλτον του G , και $\Gamma(G')$ είναι η μοναδική ακυκλική απεικόνιση του $G' = (V, E \cup E_c)$. Αν η ακμή (s, t) δεν είναι στην εξωτερική όψη του G η $\Gamma(G')$ έχει το πολύ $n - 3$ τομές ανά ακμή, διαφορετικά έχει το πολύ $n - 4$ τομές ανά ακμή. Επιπλέον, υπάρχουν εμφυτευμένα ανερχόμενα επίπεδα γραφήματα που απαιτούν τον συγκεκριμένο αριθμό των τομών.

Απόδειξη: Έστω $P = (s = v_1, v_2, \dots, v_n = t)$ είναι το μονοπάτι Χάμιλτον που προκύπτει από την πλήρωση E_c . Επειδή το G είναι ένα st -γράφημα, οι ακμές (s, v_2) και (v_{n-1}, t) ανήκουν στο G και άρα δεν είναι μέρος της πλήρωσης E_c . Έτσι, το E_c αποτελείται από το πολύ $n - 3$ ακμές. Άρα, ακόμα και αν υπάρχει ακμή στο G που τέμνεται από όλες τις ακμές του E_c , έχει το πολύ $n - 3$ τομές. Βλ. Εικόνες 3.41.a και 3.41.b.

Υποθέτουμε τώρα ότι η ακμή (s, t) βρίσκεται στην εξωτερική όψη. Τότε, η (s, t) δεν τέμνεται από καμία ακμή της πλήρωσης. Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι καμία ακμή που διαφέρει από την (s, t) δεν τέμνεται από παραπάνω από $n - 4$ ακμές της πλήρωσης.

Αν οι ακμές (s, v_2) και (v_{n-1}, t) δεν είναι οι μόνες ακμές του μονοπατιού Χάμιλτον που δεν βρίσκονται στην πλήρωση, τότε η πλήρωση περιέχει το πολύ $n - 4$ ακμές και το αποτέλεσμα έπεται τετριμμένα.

Υποθέτουμε ότι οι (s, v_2) και (v_{n-1}, t) είναι οι μόνες ακμές του μονοπατιού που δεν βρίσκονται στην πλήρωση. Αυτό συνεπάγεται ότι οι ακμές (v_i, v_{i+1}) , $i = 2 \dots n - 2$, ανήκουν στο E_c .

Θεωρούμε μια ακμή (v_i, v_j) του G έτσι ώστε $(v_i, v_j) \neq (s, t)$. Εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις που βασίζονται στο αν η ακμή (v_i, v_j) ταυτίζεται με την (s, v_2) , ή με την (v_{n-1}, t) .

Περίπτωση 1. $(v_i, v_j) = (s, v_2)$.

Θεωρούμε την ακμή της πλήρωσης (v_i, v_{i+1}) , $2 \leq i \leq n - 2$. Επειδή η απεικόνιση της (v_i, v_{i+1})

ικανοποιεί την συνθήκη (i) του Λήμματος 43, έχουμε ότι η ακμή (v_i, v_{i+1}) δεν τέμνει την (s, v_2) . Έτσι, η ακμή (s, v_2) δεν τέμνεται από καμία ακμή της πλήρωσης.

Περίπτωση 2. $(v_i, v_j) = (v_{n-1}, t)$.

Θεωρούμε μια ακμή της πλήρωσης (v_i, v_{i+1}) , $2 \leq i \leq n-2$. Επειδή η απεικόνιση της (v_i, v_{i+1}) ικανοποιεί την συνθήκη (i) του Λήμματος 43, έχουμε ότι η (v_i, v_{i+1}) δεν τέμνει την (v_{n-1}, t) . Έτσι, η (v_{n-1}, t) επίσης δεν τέμνεται από καμία ακμή της πλήρωσης.

Περίπτωση 3. Η ακμή (v_i, v_j) δεν ταυτίζεται ούτε με την (s, v_2) , ούτε με την (v_{n-1}, t) . Επειδή κάθε ακμή (v_i, v_{i+1}) είναι στη πλήρωση, συμπεραίνουμε ότι $j > i + 1$. Έτσι, οι (v_{j-1}, v_j) , (v_i, v_{i+1}) είναι και οι δύο ακμές της πλήρωσης. Επειδή $(v_i, v_j) \neq (s, t)$, έχουμε ότι $v_i \neq s$, και $v_j \neq t$.

Περίπτωση 3.a $v_i \neq s$. Τότε, η ακμή της πλήρωσης (v_i, v_{i+1}) δεν τέμνει την (v_i, v_j) , λόγω της συνθήκης (ii) του Λήμματος 43.

Περίπτωση 3.b $v_j \neq t$. Τότε, η ακμή της πλήρωσης (v_{j-1}, v_j) δεν τέμνει την (v_i, v_j) , λόγω της συνθήκης (ii) του Λήμματος 43.

Και στις δύο υποπεριπτώσεις, ανακαλύψαμε μια ακμή της πλήρωσης που δεν τέμνει την ακμή (v_i, v_j) . Έτσι, το πολύ $n - 4$ ακμές τέμνουν κάποια, ελεύθερα επιλεγμένη, ακμή της πλήρωσης (v_i, v_j) .

□

Θεώρημα 30. Έστω G είναι ένα επίπεδο st -γράφημα, E_c είναι μια ακυβλική πλήρωση κατά Χάμιλτον για το G και P είναι το αντίστοιχο μονοπάτι Χάμιλτον. Τότε, η μοναδική ακυβλική απεικόνιση του $G' = (V, E \cup E_c)$ μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n + a)$, όπου a είναι ο συνολικός αριθμός των τομών.

Απόδειξη: Περιγράφουμε πρώτα πως αναπαριστάται η λύση. Για κάθε ακμή του $e \in E_c$ διατηρούμε μια λίστα ακμών του αρχικού γραφήματος με την σειρά που αυτές τέμνονται από την e . Επιπλέον, διατηρούμε για κάθε ακμή του αρχικού γραφήματος, μια λίστα των ακμών του E_c οι οποίες την τέμνουν.

Έστω G_R^* , G_L^* είναι το δεξιόστροφο και αριστερόστροφο δυϊκά του G . Η εξωτερική όψη του G αναπαριστάται από δύο κορυφές του δυϊκού, s^* και t^* . Κάθε κορυφή του G αντιστοιχεί σε μια όψη ενός δυϊκού του G και από την κατασκευή, η κορυφή s (αντ. t) αντιστοιχεί στο 'κάτω μέρος' (αντ. 'πάνω μέρος') της εξωτερικής όψης του G_L^* και G_R^* . Έτσι, η κορυφή s είναι κάτω από το χαμηλότερο μονοπάτι και των δύο δυϊκών (όταν G και καθένα από τα δυϊκά του έχουν απεικονιστεί ταυτόχρονα).

Έστω $P = (s = v_1, v_2, \dots, v_n = t)$. Υποθέτουμε ότι έχουμε υπολογίσει όλες τις τομές στις οποίες συμμετέχουν όλες οι ακμές του P μέχρι την κορυφή v_i . Το ενεργό δυϊκό G_L^* και G_R^* στο τέλος του βήματος i , ορίζεται να αποτελείται από τις όψεις του δυϊκού που αντιστοιχούν στις κορυφές $v_{i+1}, \dots, v_n = t$ του G . Τα ακόλουθα ισχύουν:

1. Οι κορυφές $s = v_1, \dots, v_i$ είναι όλες κάτω από το χαμηλότερο μονοπάτι του ενεργού δυϊκού. Επιπλέον, οι όψεις των δυϊκών, που αντιστοιχούν στην κορυφή v_i , μοιράζονται ακμές με το χαμηλότερο μονοπάτι των αντίστοιχων ενεργών δυϊκών.
2. Οι κορυφές $v_{i+1}, \dots, v_n = t$, είναι όλες πάνω από το χαμηλότερο μονοπάτι των ενεργών δυϊκών. Επιπλέον, οι όψεις των δυϊκών που αντιστοιχούν στην κορυφή v_{i+1} , μοιράζονται ακμές με το χαμηλότερο μονοπάτι των αντίστοιχων ενεργών δυϊκών.

3. Αν $(v_i, v_{i+1}) \notin E$ τότε, επειδή η πλήρωση E_c είναι ακυκλική, υπάρχει μονοπάτι από την $right(v_i)$ στην $left(v_{i+1})$ στο G_R^* ή από την $left(v_{i+1})$ στην $right(v_i)$ στο G_L^* . Το μονοπάτι αυτό αποτελεί το χαμηλότερο μονοπάτι των δύο δυικών.

Το μονοπάτι από την $right(v_i)$ στην $left(v_{i+1})$, ή από την $left(v_{i+1})$ στην $right(v_i)$, που βρίσκεται στο χαμηλότερο μονοπάτι του ενεργού δυικού, ορίζει τις ακμές του G , που τέμνει η ακμή (v_i, v_{i+1}) . Έτσι ο αριθμός των ακμών που τέμνει η (v_i, v_{i+1}) , μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο ανάλογο του μεγέθους του. Μια σημαντική παρατήρηση για να πετύχουμε τον χρόνο αυτό είναι: αρχικά, δεν γνωρίζουμε αν το μονοπάτι είναι από την $right(v_i)$ στην $left(v_{i+1})$, ή από την $left(v_{i+1})$ στην $right(v_i)$. Έτσι, δεν γνωρίζουμε σε ποια κατεύθυνση να κάνουμε την αναζήτηση. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα κάνουμε αναζήτηση των χαμηλότερων μονοπατιών των δύο δυικών παράλληλα (ένα βήμα σε κάθε δυικό).

Αφού έχουμε εντοπίσει το μονοπάτι σε ένα από τα δύο δυικά, μικραίνουμε και τα δύο ενεργά δυικά, διαγράφοντας από αυτά τις ακμές που αντιστοιχούν στις εισερχόμενες ακμές του v_{i+1} . Αυτό μπορεί να γίνει σε χρόνο ανάλογο του αριθμού των ακμών. \square

3.7.2 Στους όρους της εμφύτευσης σε βιβλίο

Στην Ενότητα 3.3, αποδείξαμε την εισοδυναμία μεταξύ του προβλήματος ελαχιστοποίησης των τομών με την ράχη στην ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε βιβλίο και το πρόβλημα εύρεσης μιας ακυκλικής πλήρωσης Χάμιλτον με ελάχιστο αριθμό των τομών με της ακμές του γραφήματος. Βασιζόμενοι στο γεγονός αυτό, στο Θεώρημα 29 και στο Θεώρημα 30 έχουμε το παρακάτω θεώρημα (βλ. Εικόνες 3.41.b και 3.41.c για το σχετικό παράδειγμα):

Θεώρημα 31. *Έστω G είναι ένα επίπεδο st -γράφημα και ρ μια τοπολογική αρίθμηση του G . Τότε το G επιδέχεται μια μοναδική ρ -περιορισμένη ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε βιβλίο. Η εμφύτευση αυτή έχει με το πολύ $n - 3$ τομές με την ράχη ανά ακμή, αν η ακμή (s, t) δεν είναι στην εξωτερική όψη, διαφορετικά ο αριθμός των τομών ανά ακμή είναι το πολύ $n - 4$. Επιπλέον, υπάρχουν st -γραφήματα που απαιτούν τον συγκεκριμένο αριθμό των τομών.*

Θεώρημα 32. *Έστω G είναι ένα επίπεδο st -γράφημα και ρ μια τοπολογική αρίθμηση του G . Τότε, η ρ -περιορισμένη ανερχόμενη τοπολογική εμφύτευση σε βιβλίο με τον ελάχιστο αριθμό των τομών με την ράχη για το G μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n + a)$, όπου a είναι ο συνολικός αριθμός των τομών.*

Κεφάλαιο 4

Μονοσυνεκτικοί Προσανατολισμοί Μεικτών Γραφημάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα γραφοθεωρητικό αποτέλεσμα, το οποίο αφορά προσανατολισμούς μεικτών γραφημάτων. Μελετήσαμε αυτό το πρόβλημα διότι υπήρχε ενδεχόμενο να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για την επίλυση του γενικότερου προβλήματος ελαχιστοποίησης των τομών στις ανερχόμενες τοπολογικές εμφυτεύσεις σε βιβλίο. Ανεξάρτητα από την ενδεχόμενη εφαρμογή, το πρόβλημα αποτελεί ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα στην Αλγοριθμική Θεωρία Γραφημάτων που επιλύει επιμέρους ένα πρόβλημα, το οποίο σύμφωνα με την Pascovici παραμένει ανοικτό [81]. Μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας αφορά τη μελέτη των μεικτών γραφημάτων (βλ. [6] και τις εκεί παρατιθέμενες πηγές). Ένα γράφημα ονομάζεται *μεικτό*, αν περιέχει κατευθυνόμενες και μη-κατευθυνόμενες ακμές. Ένα μεικτό γράφημα καλείται *ισχυρά προσανατολισμένο* όταν στις μη κατευθυνόμενες πλευρές του μπορεί να δοθεί τέτοιος προσανατολισμός, ώστε το κατευθυνόμενο γράφημα που προκύπτει να είναι ισχυρά συνεκτικό. Ανάλογα λέμε ότι ένα μεικτό γράφημα είναι *μονοσυνεκτικά προσανατολισμένο* όταν στις μη κατευθυνόμενες πλευρές του μπορεί να δοθεί τέτοιος προσανατολισμός, ώστε για κάθε δύο κόμβους x, y είτε υπάρχει μονοπάτι από τον x στον y , ή από τον y στον x , ή και τα δύο.

Διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με τον ισχυρό προσανατολισμό μεικτών γραφημάτων αποτέλεσαν αντικείμενο μελέτης στο παρελθόν. Μεταξύ άλλων μελετήθηκαν για παράδειγμα το πρόβλημα της αναγνώρισης ισχυρά προσανατολισμένων μεικτών γραφημάτων ([13]), και το πρόβλημα της μοναδικότητας ισχυρού προσανατολισμού μεικτών γραφημάτων ([20, 40]).

Στο παρόν κεφάλαιο απαντάμε το τελευταίο ερωτήματα για μονοσυνεκτικούς προσανατολισμούς μεικτών γραφημάτων, συγκεκριμένα αναπτύσσουμε αρχικά ένα γραμμικό αλγόριθμο που αποφασίζει για το αν ένα μεικτό γράφημα είναι μονοσυνεκτικά προσανατολισμένο. Έπειτα παρουσιάζουμε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο, ο οποίος εξετάζει πότε ένα μεικτό γράφημα επιδέχεται μοναδικό μονοσυνεκτικό προσανατολισμό.

4.0.3 Βασικοί ορισμοί

Λέμε ότι σε ένα (κατευθυνόμενο) γράφημα G ένας κόμβος y είναι *προσβάσιμος* από τον κόμβο x εάν υπάρχει (κατευθυνόμενο) μονοπάτι από τον κόμβο x στον κόμβο y .

Ένα *μεικτό γράφημα* $M = (V, A, E)$ περιέχει *ακμές* (διατεταγμένα ζεύγη κόμβων στο A) και *πλευρές* (μη διατεταγμένα ζεύγη κόμβων στο E). Ένα *μονοπάτι* σε ένα μεικτό γράφημα είναι μία ακολουθία πλευρών και ακμών στην οποία διαδοχικοί όροι (πλευρές ή ακμές) έχουν έναν κόμβο κοινό και όλες οι ακμές διασχίζονται με φορά από την πηγή στην καταβόθρα. Σημειώνουμε ότι καθώς ένα

γράφημα (αντ. κατεγράφημα) είναι ένα μεικτό γράφημα που έχει μόνο πλευρές (αντ. ακμές), κάθε ορισμός ή ιδιότητα που αφορά μεικτά γραφήματα ανάγεται με φυσικό τρόπο και στα γραφήματα (αντ. κατεγραφήματα).

Λαμβάνουμε έναν *προσανατολισμό* σε ένα μεικτό γραφήματα $M = (V, A, E)$ αν στο M αντικαταστήσουμε κάθε πλευρά $(x, y) \in E$ είτε με μία από τις ακμές $(x, y) \in A$ ή $(y, x) \in A$, είτε με το ζευγάρι των ακμών (x, y) και (y, x) . Εάν κάθε πλευρά αντικατασταθεί από μία ακμή τότε λέμε απλά ότι προκύπτει ένας *προσανατολισμός* του μεικτού γραφήματος M , ενώ αν κάθε πλευρά αντικατασταθεί από ένα ζεύγος ακμών, τότε προκύπτει ο *πλήρης προσανατολισμός* του μεικτού γραφήματος M , τον οποίο συμβολίζουμε με \vec{M} .

Ορίζουμε *υποκείμενο γράφημα* $UG(M)$ ενός μεικτού γραφήματος $M = (V, A, E)$ ως το μοναδικό μη κατευθυνόμενο γράφημα G που προκύπτει όταν αφαιρούμε τον προσανατολισμό από κάθε ακμή $(x, y) \in A$, δηλαδή όταν μετατρέπουμε κάθε ακμή σε πλευρά. Ένα μεικτό γράφημα M καλείται *συνεκτικό* αν το $UG(M)$ είναι ένα συνεκτικό γράφημα.

Ένα κατεγράφημα D καλείται *ισχυρά συνεκτικό* (ή απλώς *ισχυρό*) εάν για κάθε ζευγάρι διαφορετικών κόμβων x, y του D , οι x και y είναι προσβάσιμοι ο ένας από τον άλλον. Μία *ισχυρή συνιστώσα* του κατεγραφήματος D είναι ένα μέγιστο υποκατεγράφημα του D , το οποίο είναι ισχυρό. Το *γράφημα ισχυρών συνιστώσων* $SC(D)$ του D προκύπτει συρρικνώνοντας τις ισχυρές συνιστώσες του D σε κόμβους και μετατρέποντας τις πολλαπλές ακμές που πιθανόν να προκύπτουν σε μία. Το κατεγράφημα $SC(D)$ είναι ακυκλικό για κάθε κατεγράφημα D , διότι κάθε κύκλος περιέχεται πλήρως σε μοναδική συνεκτική συνιστώσα. Ένα κατεγράφημα D καλείται *μονοσυνεκτικό* εάν για κάθε ζευγάρι κόμβων x, y του D ισχύει: είτε ο κόμβος x είναι προσβάσιμος από τον y είτε ο κόμβος y είναι προσβάσιμος από τον x (είτε και τα δύο).

Οι ορισμοί που σχετίζονται με την έννοια της συνεκτικότητας επεκτείνονται και στα μεικτά γραφήματα. Έτσι, ένα μεικτό γράφημα $M = (V, A, E)$ καλείται *ισχυρά συνεκτικό* (ή απλώς *ισχυρό*) αν ο πλήρης προσανατολισμός του, \vec{M} , είναι ένα ισχυρά συνεκτικό κατεγράφημα. Ένα μεικτό γράφημα M καλείται *μονοσυνεκτικό* εάν ο πλήρης προσανατολισμός του, \vec{M} , είναι ένα μονοσυνεκτικό κατεγράφημα.

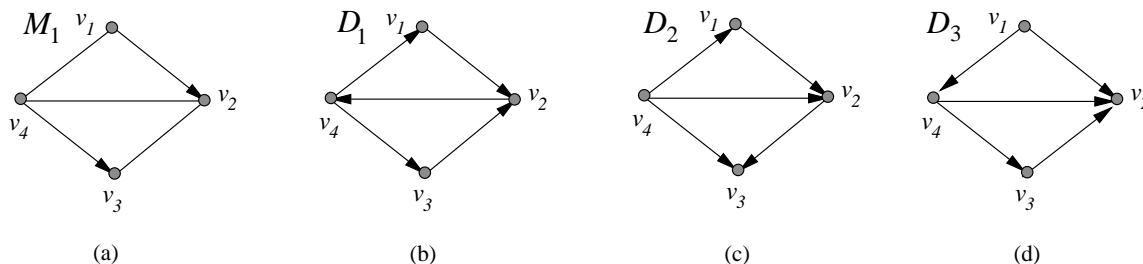
Ένα μεικτό γράφημα M είναι *ισχυρά (μονοσυνεκτικά) προσανατολίσιμο* (ή ισοδύναμα το M *επιδέχεται έναν ισχυρό (μονοσυνεκτικό) προσανατολισμό*) εάν υπάρχει τέτοιος προσανατολισμός του M , που αποτελεί ένα ισχυρά (αντ. μονοσυνεκτικά) συνεκτικό κατεγράφημα. Ένα μεικτό γράφημα M *επιδέχεται προσανατολισμό Χάμιλτον*, όταν υπάρχει προσανατολισμός \vec{M} του M που είναι γράφημα Χάμιλτον¹. Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι αν ένα γράφημα επιδέχεται προσανατολισμό Χάμιλτον τότε επιδέχεται και μονοσυνεκτικό προσανατολισμό.

4.0.4 Ορισμός του προβλήματος και γνωστά αποτελέσματα

Δοθέντος μεικτού γραφήματος M , προκύπτει φυσικά το ερώτημα αν το M είναι ισχυρά ή μονοσυνεκτικά προσανατολίσιμο. Το μεικτό γράφημα M_1 που απεικονίζεται στην Εικόνα 4.1.a είναι ισχυρά προσανατολίσιμο όπως αποδεικνύεται από το γράφημα D_1 (Εικόνα 4.1.b). Τα κατευθυνόμενα γραφήματα D_2 και D_3 (Εικόνα 4.1.c και Εικόνα 4.1.d) απεικονίζουν δύο μονοσυνεκτικούς προσανατολισμούς του M , κανέναν από τους οποίους δεν είναι ισχυρός.

Ο Robbins [88] απέδειξε ότι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα είναι ισχυρά προσανατολίσιμο αν και

¹ Στη βιβλιογραφία ένα *γράφημα Χάμιλτον* ορίζεται παραδοσιακά ως ένα γράφημα που περιέχει έναν κύκλο Χάμιλτον. Σε αυτό το κεφάλαιο όταν αναφερόμαστε σε ένα γράφημα Χάμιλτον θα εννοούμε ένα γράφημα που περιέχει ένα μονοπάτι Χάμιλτον.



Εικόνα 4.1: (a) Ένα μεικτό γράφημα M_1 . (b) Ένας ισχυρός προσανατολισμός του M_1 . (c – d) Μονοσυνεκτικοί προσανατολισμοί του M_1 που δεν είναι ισχυροί, καθώς δεν υπάρχει μονοπάτι από τον κόμβο v_3 στον v_1 .

μόνο αν είναι συνεκτικό και δεν έχει γέφυρες². Οι Boesch και Tindel [13] γενίκευσαν το αποτέλεσμα του Robbins και απέδειξαν ότι ένα μεικτό πολυγράφημα είναι ισχυρά προσανατολισίμο αν και μόνο αν είναι ισχυρά συνεκτικό και αγεφύρωτο. Επειδή για ένα κατεγράφημα με n κόμβους και m ακμές μπορεί να εξετάσει κανείς αν αυτό είναι ισχυρά συνεκτικό και αγεφύρωτο μέσα σε χρόνο $O(m + n)$, τότε με τον χαρακτηρισμό των Boesch και Tindel οδηγούμαστε αυτόματα σε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο που αποκρίνεται για το αν ένα μεικτό γράφημα είναι ισχυρά προσανατολισίμο. Στην εργασία τους οι Chung et al. [23] παρουσίασαν έναν αλγόριθμο που υπολογίζει έναν ισχυρό προσανατολισμό ενός μεικτού πολυγραφήματος σε γραμμικό χρόνο. Επίσης οι Chartrand et al. [20] παρουσίασαν έναν χαρακτηρισμό μονοσυνεκτικά προσανατολισίμων γραφημάτων δείχνοντας ότι:

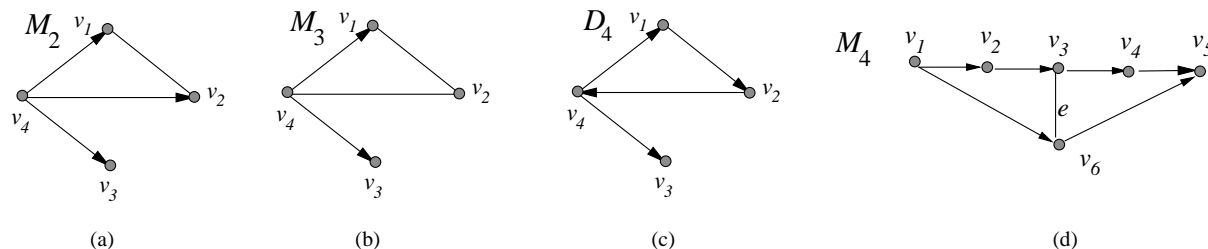
Θεώρημα 33 (Chartrand et al., [20]). *Ένα συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα G έχει μονοσυνεκτικό προσανατολισμό αν και μόνο αν όλες οι γέφυρες του βρίσκονται σε ένα κοινό μονοπάτι.*

Η έννοια του μονοσυνεκτικού προσανατολισμού σχετίζεται με την έννοια της ισχυρής συνεκτικότητας και αποτελεί ασθενέστερη ιδιότητα για ένα μεικτό γράφημα από ότι η ισχυρή συνεκτικότητα. Όμως δεν επιδέχονται όλα τα μεικτά γραφήματα μονοσυνεκτικό προσανατολισμό. Για παράδειγμα το μεικτό γράφημα M_2 της Εικόνας 4.2.a δεν επιδέχεται μονοσυνεκτικό προσανατολισμό, καθώς δεν υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι μεταξύ των κόμβων v_2 και v_3 . Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε έναν χαρακτηρισμό μονοσυνεκτικά προσανατολισίμων μεικτών γραφημάτων που οδηγεί σε έναν γραμμικό αλγόριθμο αναγνώρισης. Ο χαρακτηρισμός αυτός μπορεί να θεωρηθεί ως μία γενίκευση του Θεωρήματος 33 σε μεικτά γραφήματα.

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι δεν υπάρχουν κατ' ανάγκη περισσότεροι από έναν διαφορετικοί προσανατολισμοί, ισχυροί ή μονοσυνεκτικοί. Για παράδειγμα το μεικτό γράφημα M_3 της Εικόνας 4.2.b επιδέχεται μοναδικό μονοσυνεκτικό προσανατολισμό, ο οποίος και παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.2.c. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα μεικτό γράφημα $M = (V, A, E)$ το οποίο επιδέχεται μοναδικό ισχυρό (μονοσυνεκτικό) προσανατολισμό που δίνεται από το γράφημα D . Τότε λέμε ότι το D είναι ένας *εξαναγκασμένος ισχυρός (αντ. μονοσυνεκτικός) προσανατολισμός* του M .

Έστω τώρα ένα γράφημα $G = (V, E)$, όπου το σύνολο πλευρών δίνεται από την ένωση δύο συνόλων $E = E_1 \cup E_2$. Επιπλέον έστω A ένα σύνολο ακμών, οι οποίες προκύπτουν από έναν προσανατολισμό των πλευρών του E_1 , και $M = (V, A, E_2)$ το μεικτό γράφημα που προκύπτει από αυτόν τον προσανατολισμό. Εάν το M επιδέχεται εξαναγκασμένο ισχυρό (μονοσυνεκτικό) προσανατολισμό, τότε λέμε ότι το σύνολο A αποτελεί ένα *εξαναγκαστικό σύνολο* για έναν ισχυρό (αντ. μονοσυνεκτικό) προσανατολισμό του G , ή απλώς ένα *ισχυρά (μονοσυνεκτικά) εξαναγκαστικό σύνολο*.

²Μία πλευρά e ενός συνεκτικού μεικτού γραφήματος M λέγεται *γέφυρα* αν το $M \setminus \{e\}$ παύει να είναι συνεκτικό. Ένα μεικτό γράφημα που δεν περιέχει γέφυρες καλείται *αγεφύρωτο*.



Εικόνα 4.2: (a) Ένα μεικτό γράφημα M_2 που δεν επιδέχεται μονοσυνεκτικό προσανατολισμό. (b) Ένα μεικτό γράφημα M_3 με εξαναγκασμένο μονοσυνεκτικό προσανατολισμό. (c) Ο μοναδικός μονοσυνεκτικός προσανατολισμός του M_3 . (d) Ένα αγεφύρωτο μονοσυνεκτικό μεικτό γράφημα που δεν επιδέχεται μονοσυνεκτικό προσανατολισμό.

Την έννοια των εξαναγκασμένων ισχυρών (μονοσυνεκτικών) προσανατολισμών για μεικτά γραφήματα εισήγαγαν οι Chartrand et al. [20]. Στην εργασία τους ορίζεται επίσης ο *ισχυρά (μονοσυνεκτικά) εξαναγκαστικός πληθάριθμος* ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος G ως η πληθικότητα του εξαναγκαστικού συνόλου για έναν ισχυρό (αντ. μονοσυνεκτικό) προσανατολισμό του G . Οι εξαναγκασμένοι ισχυροί προσανατολισμοί γραφημάτων μελετήθηκαν περαιτέρω από τους Farzad et al. [40] και οι εξαναγκασμένοι μονοσυνεκτικοί προσανατολισμοί γραφημάτων από την Pascovici [81]. Στις δημοσιεύσεις της αναφέρει ότι η εύρεση ενός αποτελεσματικού αλγορίθμου για τον υπολογισμό του μονοσυνεκτικά εξαναγκαστικού πληθάριθμου αποτελεί ένα ανοικτό πρόβλημα.

Στο παρόν κεφάλαιο λύνουμε επιμέρους το πρόβλημα αυτό: δοθέντος μεικτού γραφήματος $M = (V, A, E)$ παρέχουμε έναν αλγόριθμο, ο οποίος σε πολυωνυμικό χρόνο ελέγχει εάν το σύνολο A αποτελεί εξαναγκαστικό σύνολο για έναν μονοσυνεκτικό προσανατολισμό του M (δηλ. ελέγχει εάν το M επιδέχεται μοναδικό μονοσυνεκτικό προσανατολισμό).

Το κεφάλαιο αναπτύσσεται ως εξής:

- Στην Ενότητα 4.1 παρουσιάζεται ένας γραμμικός αλγόριθμος που αποκρίνεται για το αν ένα μεικτό γράφημα επιδέχεται μονοσυνεκτικό προσανατολισμό και στην περίπτωση θετικής απάντησης κατασκευάζει έναν μονοσυνεκτικό προσανατολισμό για το γράφημα.
- Στην Ενότητα 4.2 παρουσιάζεται ένα Λήμμα που υπονοεί έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο, ο οποίος ελέγχει εάν ένα μεικτό γράφημα επιδέχεται μοναδικό μονοσυνεκτικό προσανατολισμό.

Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου έχουν δημοσιευθεί στο [75].

4.1 Αναγνώριση Μονοσυνεκτικά Προσανατολίσιμων Μεικτών Γραφημάτων

4.1.1 Προκαταρκτικά αποτελέσματα

Το Θεώρημα που ακολουθεί αποδίδεται στους Boesch και Tindell. Παρέχει αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε ένα γράφημα να έχει ισχυρά συνεκτικό προσανατολισμό.

Θεώρημα 34 (Boesch και Tindell [13]). Ένα μεικτό πολυγράφημα M επιδέχεται ισχυρό προσανατολισμό αν και μόνο αν το M είναι ισχυρό και το υποκείμενο πολυγράφημά του, $UG(M)$, είναι αγεφύρωτο.

Σημειώνουμε ότι δεν ισχύει κάτι αντίστοιχο στην περίπτωση των μονοσυνεκτικά προσανατολισμένων γραφημάτων (δηλ. δεν ισχύει ότι 'ένα μεικτό πολυγράφημα M έχει μονοσυνεκτικό προσανατολισμό, αν και μόνο αν το M είναι μονοσυνεκτικό και το υποκείμενο γράφημα $UG(M)$ αγεφύρωτο.'). Αυτό μπορεί να το συμπεράνει κανείς από το μεικτό γράφημα M_4 που φαίνεται στην Εικόνα 4.2.d. Το M_4 είναι μονοσυνεκτικό και αγεφύρωτο, όμως δεν επιδέχεται μονοσυνεκτικό προσανατολισμό. Πράγματι, μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι αν στην πλευρά (v_3, v_6) θεωρήσουμε τον κόμβο v_6 ως καταβόθρα, τότε οι κόμβοι v_4 και v_6 δεν είναι προσβάσιμοι ο ένας από τον άλλον. Εάν εναλλακτικά θεωρήσουμε τον κόμβο v_3 ως καταβόθρα, τότε δεν υπάρχει μονοπάτι προς καμία κατεύθυνση που να συνδέει τους κόμβους v_2 και v_6 .

Λήμμα 46 ([55], σελ. 66). 'Ένα κατεγράφημα D είναι μονοσυνεκτικό αν και μόνο αν έχει ένα γεννητικό κατευθυνόμενο μονοπάτι³.

Λήμμα 47 ([20]). 'Ένα δέντρο T επιδέχεται μονοσυνεκτικό προσανατολισμό αν και μόνο αν το T είναι μονοπάτι.

Θυμίζουμε ότι ένας κόμβος σε ένα κατεγράφημα με χωρίς εισερχόμενες (αντ. εξερχόμενες) ακμές καλείται πηγή (αντ. καταβόθρα). Ορίζουμε ως *st-κατεγράφημα* ένα ακυκλικό κατεγράφημα με μοναδική πηγή, την οποία συμβολίζουμε με s , και μοναδική καταβόθρα, την οποία συμβολίζουμε με t .

Λήμμα 48 ([73], βλ. επίσης Λήμμα 48). 'Εστω D ένα *st-κατεγράφημα*⁴ το οποίο δεν έχει μονοπάτι Χάμιλτον. Τότε υπάρχουν δύο κόμβοι στο D που δεν συνδέονται από κάποιο κατευθυνόμενο μονοπάτι σε καμία κατεύθυνση.

4.1.2 Χαρακτηρισμός μονοσυνεκτικά προσανατολισμένων μεικτών γραφημάτων

Εστω ένα μεικτό γράφημα $M = (V, A, E)$ και έστω ένα υποσύνολο $V' \subseteq V$ του συνόλου των κόμβων V . Ορίζουμε το γράφημα που παράγεται από το σύνολο V' να είναι το μεικτό υπογράφημα $M(V') = (V', A', E')$, όπου $A' = \{(u, v) \mid (u, v) \in A \text{ και } u, v \in V'\}$ και $E' = \{(u, v) \mid (u, v) \in E \text{ και } u, v \in V'\}$.

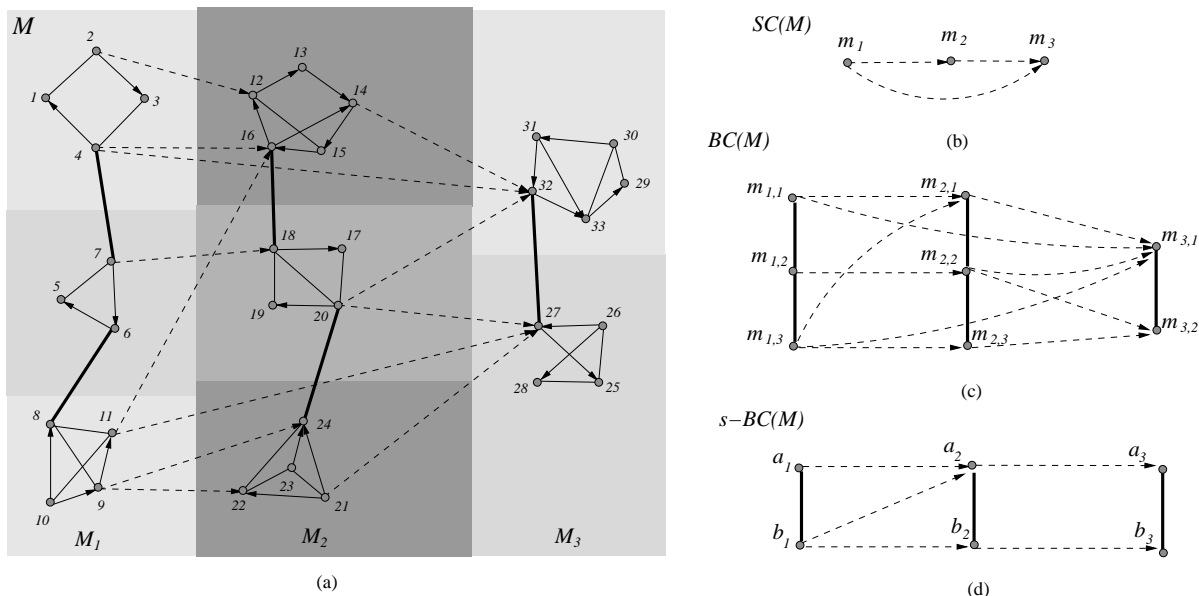
Εστω $D_i = (V_i, E_i)$, $1 \leq i \leq k$ οι ισχυρές συνιστώσες του πλήρους προσανατολισμού \vec{M} του M . Οι ισχυρές συνιστώσες M_i , $1 \leq i \leq k$ του μεικτού γραφήματος M ορίζονται ως εξής: $M_i = M(V_i)$, $1 \leq i \leq k$, δηλαδή κάθε M_i είναι το μεικτό υπογράφημα του M που παράγεται από το σύνολο V_i . Σημειώνουμε ότι κάθε M_i είναι ισχυρό, εφόσον εξ ορισμού το D_i αποτελεί τον πλήρη προσανατολισμό του.

Το γράφημα ισχυρών συνιστωσών του μεικτού γραφήματος M , το οποίο συμβολίζουμε με $SC(M)$, προκύπτει συρρικνώνοντας κάθε ισχυρή συνιστώσα του M σε έναν κόμβο και αντικαθιστώντας τις πολλαπλές ακμές που πιθανόν να προκύπτουν από μία. Στην Εικόνα 4.3.a φαίνεται ένα μεικτό γράφημα με τρεις ισχυρές συνιστώσες και στην Εικόνα 4.3.b φαίνεται το γράφημα ισχυρών συνιστωσών που προκύπτει. Αξίζει να σημειώσουμε ότι το γράφημα ισχυρών συνιστωσών κάθε μεικτού γραφήματος είναι ακυκλικό.

Το Λήμμα που ακολουθεί δίνει την πρώτη αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε το μεικτό γράφημα M να έχει μονοσυνεκτικό προσανατολισμό.

³Γεννητικό κατευθυνόμενο μονοπάτι (*spanning directed walk*) για ένα κατεγράφημα είναι ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι που περνάει από όλους τις κορυφές του γραφήματος τουλάχιστον μία φορά.

⁴Το Λήμμα 48 αποδεικνύεται για επίπεδα *st-κατεγραφήματα*. Η απόδειξη είναι η πανομοιότυπη για όλα τα *st-κατεγραφήματα*.



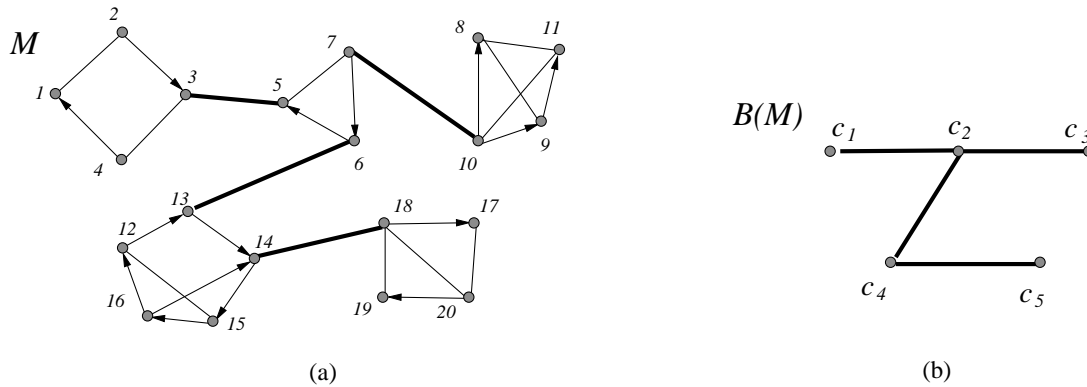
Εικόνα 4.3: (a) Ένα μεικτό γράφημα M . Τα γραφήματα M_1 , M_2 και M_3 είναι οι τρεις ισχυρές συνιστώσες του M . Με διακεκομμένες πλευρές ενώνονται οι συνιστώσες M_i και M_j , $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. Με παχιές πλευρές φαίνονται οι γέφυρες κάθε συνιστώσας M_i . (b) Το γράφημα ισχυρών συνιστωσών $SC(M)$ του M . (c) Το μεικτό γράφημα αγεφύρωτων συνιστωσών $BC(M)$ του M . (d) Το απλοποιημένο μεικτό γράφημα αγεφύρωτων συνιστωσών του M , όπου οι κόμβοι a_i, b_i συμβολίζουν τα τελικά σημεία του μονοπατιού γεφυρών $B(M_i)$.

Λήμμα 49. Αν ένα μεικτό γράφημα M επιδέχεται μονοσυνεκτικό προσανατολισμό τότε το γράφημα ισχυρών συνιστωσών $SC(M)$ έχει μονοπάτι Χάμιλτον.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε προς απαγωγή σε άτοπο, ότι το γράφημα $SC(M)$ δεν έχει μονοπάτι Χάμιλτον. Επειδή το $SC(M)$ είναι ένα ακυκλικό γράφημα έχει τουλάχιστον μία πηγή και τουλάχιστον μία καταβόθρα. Εάν υπάρχουν δύο ή παραπάνω πηγές (καταβόθρες) τότε είναι προφανές ότι κάθε δύο από αυτές δεν γίνεται να συνδέονται από κάποιο κατευθυνόμενο μονοπάτι. Εάν υπάρχει ακριβώς μία πηγή και ακριβώς μία καταβόθρα στο $SC(M)$ τότε πρόκειται για ένα st -κατεγράφημα. Από το Λήμμα 48 έπεται ότι υπάρχουν δύο κόμβοι του $SC(M)$, οι οποίοι δεν συνδέονται από κάποιο κατευθυνόμενο μονοπάτι. Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχουν δύο κόμβοι του $SC(M)$, έστω m_i και m_j , που δεν συνδέονται από κάποιο κατευθυνόμενο μονοπάτι.

Από τον ορισμό του γραφήματος ισχυρών συνιστωσών $SC(M)$ οι κόμβοι m_i και m_j αντιστοιχούν σε συρρικνωμένες ισχυρές συνιστώσες του M , έστω M_i και M_j αντίστοιχα. Εφόσον οι κόμβοι m_i και m_j δεν συνδέονται από κάποιο κατευθυνόμενο μονοπάτι στο $SC(M)$, τότε για κάθε κόμβο u της συνιστώσας M_i και για κάθε κόμβο v της συνιστώσας M_j ισχύει ότι δεν υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι στον πλήρη προσανατολισμό \vec{M} , που να συνδέει τον u με τον v . Άρα ούτε στο μεικτό γράφημα M υπάρχει μονοπάτι που να συνδέει τους κόμβους u και v προς οποιαδήποτε κατεύθυνση και επομένως δεν υπάρχει προσανατολισμός για το M , στον οποίο να προκύπτει κατευθυνόμενο μονοπάτι που συνδέει τους κόμβους u και v προς οποιαδήποτε κατεύθυνση. Το τελευταίο έρχεται σε αντίθεση με την αρχική υπόθεση ότι το M επιδέχεται μονοσυνεκτικό προσανατολισμό. \square

Έστω τώρα $M = (V, A, E)$ ένα ισχυρό μεικτό γράφημα και έστω $B \subseteq E$ το σύνολο των γεφυρών του M , το οποίο δεν είναι κατ' ανάγκη διάφορο του κενού συνόλου. Τότε όλες οι συνιστώσες του γραφήματος $M \setminus B$ είναι ισχυρές και αγεφύρωτες. Το γράφημα γεφυρών ενός ισχυρού μεικτού



Εικόνα 4.4: (a) Ένα ισχυρό μεικτό γράφημα M . (b) Το γράφημα γεφυρών $B(M)$ του M .

γραφήματος M , το οποίο συμβολίζουμε με $B(M)$, ορίζεται ως το γράφημα που προκύπτει από τη συρρίκνωση των κόμβων κάθε ισχυρής συνιστώσας του $M \setminus B$. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το γράφημα γεφυρών κάθε ισχυρού μεικτού γραφήματος είναι δέντρο. Στην Εικόνα 4.4 φαίνεται ένα ισχυρό μεικτό γράφημα καθώς και το γράφημα γεφυρών του.

Το Λήμμα που ακολουθεί μας παρέχει τη δεύτερη αναγκαία συνθήκη ώστε ένα γράφημα να έχει μονοσυνεκτικό προσανατολισμό.

Λήμμα 50. *Εάν ένα μεικτό γράφημα επιδέχεται μονοσυνεκτικό προσανατολισμό, τότε το γράφημα γεφυρών για κάθε μία από τις ισχυρές συνιστώσες του M είναι ένα μονοπάτι.*

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε έναν μονοσυνεκτικό προσανατολισμό D του M . Από το Λήμμα 46 έπεται ότι το D έχει ένα γεννητικό κατευθυνόμενο μονοπάτι. Το γεννητικό κατευθυνόμενο μονοπάτι του D επάγει έναν προσανατολισμό των γεφυρών του M και έτσι έναν προσανατολισμό του $B(M)$, ο οποίος είναι μονοσυνεκτικός. Όμως το $B(M)$ είναι δέντρο, επομένως με τη βοήθεια του Λήμματος 47 συμπεραίνουμε ότι το γράφημα γεφυρών $B(M)$ του M είναι ένα μονοπάτι. \square

Έστω $M = (V, A, E)$ ένα μεικτό γράφημα και έστω M_i , $1 \leq i \leq k$, οι ισχυρές συνιστώσες του M . Επιπλέον, έστω B_i τα σύνολα των γεφυρών των M_i , $1 \leq i \leq k$. Θεωρούμε το σύνολο $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$. Τότε το σύνολο των ισχυρών συνιστωσών του μεικτού γραφήματος $M \setminus B$ προκύπτει από την ένωση των ισχυρών συνιστωσών των γραφημάτων $M_i \setminus B_i$, $1 \leq i \leq k$. Το *μεικτό γράφημα αγεφύρωτων συνιστωσών* ενός μεικτού γραφήματος M , το οποίο συμβολίζουμε με $BC(M)$, ορίζεται ως το γράφημα που προκύπτει από τη συρρίκνωση στο M των κόμβων κάθε ισχυρής συνιστώσας του $M \setminus B$ σε έναν κόμβο και τη μετατροπή των πολλαπλών ακμών που πιθανόν να προκύπτουν σε μία. Στην Εικόνα 4.3.c παρουσιάζεται το μεικτό γράφημα αγεφύρωτων συνιστωσών $BC(M)$ του γραφήματος M της Εικόνας 4.3.a. Παρατηρούμε ότι το σύνολο των πλευρών του γραφήματος $BC(M)$ είναι ακριβώς το σύνολο B . Επιπλέον, το $BC(M)$ μπορεί να θεωρηθεί ως το γράφημα που αποτελείται από ένα σύνολο (μη κατευθυνόμενων) δέντρων (τα γραφήματα γεφυρών $B(M_i)$ των ισχυρών συνιστωσών M_i του M) τα οποία συνδέονται από ακμές έτσι, ώστε να μην δημιουργούνται κύκλοι. Σημειώνουμε ότι το γράφημα ισχυρών συνιστωσών $SC(M)$ του M προκύπτει από το $BC(M)$ συρρικνώνοντας όλες τις αγεφύρωτες συνιστώσες του M_i σε έναν κόμβο και μετατρέποντας τις πολλαπλές ακμές που πιθανόν να προκύπτουν σε μία.

Παρατήρηση 2. *Έστω M ένα μεικτό γράφημα. Τότε κάθε προσανατολισμός του μεικτού γραφήματος αγεφύρωτων συνιστωσών $BC(M)$ είναι ακυκλικός.*

Απόδειξη: Έπεται άμεσα ότι (i) το γράφημα ισχυρών συνιστώσων $SC(M)$ είναι ακυκλικό και (ii) το μεικτό γράφημα αγεφύρωτων συνιστώσων $B(M')$ για κάθε ισχυρή συνιστώσα M' του M είναι δέντρο. \square

Το επόμενο θεώρημα παρέχει έναν χαρακτηρισμό των μονοσυνεκτικά προσανατολισμών γραφημάτων.

Θεώρημα 35. Ένα μεικτό γράφημα M επιδέχεται μονοσυνεκτικό προσανατολισμό αν και μόνο αν το μεικτό γράφημα αγεφύρωτων συνιστώσων $BC(M)$ επιδέχεται προσανατολισμό Χάμιλτον.

Απόδειξη: (\Rightarrow) Αρχικά αποδεικνύουμε το ευθύ: αν το μεικτό γράφημα M επιδέχεται μονοσυνεκτικό προσανατολισμό, τότε το $BC(M)$ επιδέχεται προσανατολισμό Χάμιλτον. Έστω κάποιος μονοσυνεκτικός προσανατολισμός του M . Από το Λήμμα 46 έπεται ότι ο μονοσυνεκτικός προσανατολισμός έχει γεννητικό μονοπάτι. Αυτό το μονοπάτι επάγει έναν ένα γεννητικό μονοπάτι στο $BC(M)$. Καθώς κάθε προσανατολισμός του $BC(M)$ είναι ακυκλικός (Παρατήρηση 2) το επαγόμενος γεννητικό μονοπάτι στο $BC(M)$ είναι μονοπάτι Χάμιλτον. Άρα το $BC(M)$ επιδέχεται προσανατολισμό Χάμιλτον.

(\Leftarrow) Για το αντίστροφο: έστω ότι το $BC(M)$ επιδέχεται προσανατολισμό Χάμιλτον. Τότε θα δείξουμε ότι το M επιδέχεται μονοσυνεκτικό προσανατολισμό. Υπενθυμίζουμε ότι οι κόμβοι του $BC(M)$ αντιστοιχούν στις αγεφύρωτες ισχυρές συνιστώσες του M . Από το Θεώρημα 34 έπεται ότι κάθε μία από τις συνιστώσες του M επιδέχεται ισχυρό προσανατολισμό. Αυτός ο ισχυρός προσανατολισμός επιβάλλει ένα γεννητικό μονοπάτι μεταξύ κάθε δύο κόμβων μίας ισχυρής αγεφύρωτης συνιστώσας. Ο προσανατολισμός Χάμιλτον του γραφήματος $BC(M)$ επιβάλλει έναν προσανατολισμό των γεφυρών των ισχυρών συνιστώσων του M . Ο ισχυρός προσανατολισμός των ισχυρών και αγεφύρωτων συνιστώσων του M μαζί με τον προσανατολισμό των γεφυρών των ισχυρών συνιστώσων του M δίνουν τον ζητούμενο προσανατολισμό D του M .

Από τον προσανατολισμό Χάμιλτον του γραφήματος $BC(M)$ παίρνουμε ένα μονοπάτι Χάμιλτον, το οποίο με τη σειρά του μας δίνει μία ταξινομημένη ακολουθία των ισχυρών αγεφύρωτων συνιστώσων του M . Βασίζομενοι σε αυτήν την ακολουθία μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε ένα γεννητικό μονοπάτι στον προσανατολισμό D . Από το Λήμμα 46 το D είναι ένας μονοσυνεκτικός προσανατολισμός και άρα το M επιδέχεται μονοσυνεκτικό προσανατολισμό. \square

4.1.3 Ο Αλγόριθμος

Βασίζομενος στον χαρακτηρισμό της Ενότητας 4.1.2, ο Αλγόριθμος 8 αποφασίζει αν ένα μεικτό γράφημα το οποίο δίνεται ως είσοδος, είναι μονοσυνεκτικά προσανατολισίμο. Στο πρώτο βήμα του αλγορίθμου, κατασκευάζουμε για το M το γράφημα ισχυρών συνιστώσων $SC(M)$. Για να επιτύχουμε αυτό, υπολογίζουμε ισχυρές συνιστώσες του πλήρη προσανατολισμού, \vec{M} , του M . Αυτό μπορεί να ολοκληρωθεί σε χρόνο $O(V + A + E)$. Στο δεύτερο βήμα του αλγορίθμου, ελέγχουμε αν το $SC(M)$ έχει μονοπάτι Χάμιλτον. Παρατηρούμε ότι, επειδή το $SC(M)$ είναι ένα ακυκλικό κατεγράφημα, το $SC(M)$ έχει ένα μονοπάτι Χάμιλτον αν και μόνο αν έχει μια μοναδική τοπολογική αρίθμηση. Αυτό μπορεί να ελεγχθεί σε γραμμικό ως προς το μέγεθος του $SC(M)$ χρόνο. Στο τρίτο βήμα του αλγορίθμου, κατασκευάζουμε το γράφημα γεφυρών $BM(M_i)$ για κάθε ισχυρή συνιστώσα M_i του M . Η αναζήτηση όλων των γεφυρών μπορεί να ολοκληρωθεί απλά ελέγχοντας αν κάθε ακμή αποτελεί μια γέφυρα. Κάνοντας ένα 'πέρασμα κατά βάθος', η αναζήτηση των γεφυρών και η κατασκευή των γραφημάτων γεφυρών ολοκληρώνεται σε χρόνο $O(V + A + E)$. Ελέγχοντας αν κάθε γράφημα είναι μονοπάτι είναι τετριμμένο και μπορεί να εκτελεστεί σε γραμμικό χρόνο.

Εκμεταλλεύοντας τα γραφήματα γεφυρών που έχουμε ήδη κατασκευάσει στο βήμα 3 του αλγορίθμου, κατασκευάζουμε το μεικτό γράφημα αγεφύρωτων συνιστώσων $BC(M)$ για το M , σε χρόνο

που αναλογεί στο μέγεθός του. Τώρα, απομένει να ελέγξουμε αν το $BC(M)$ είναι γράφημα Χάμιλτον. Παρατηρούμε ότι, επειδή έχουμε φτάσει στο τέταρτο βήμα του αλγορίθμου, ισχύει ότι το γράφημά μας ικανοποιεί τις δύο ιδιότητες. Πρώτα, όλα τα γραφήματα γεφυρών είναι μονοπάτια (έτσι αναφερόμαστε σε αυτά ως *μονοπάτια γεφυρών*) και, ύστερα, το γράφημα ισχυρών συνιστωσών $SC(M)$ αποτελεί ένα γράφημα Χάμιλτον. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις ιδιότητες για να αποφανθούμε αν το $BC(M)$ είναι ένα γράφημα Χάμιλτον σε γραμμικό χρόνο.

Έστω M_i , $1 \leq i \leq k$, είναι οι ισχυρές συνιστώσες του M και υποθέτουμε χωρίς βλάβη στην γενικότητα, ότι εμφανίζονται με αυτή την σειρά στο μονοπάτι Χάμιλτον του $SC(M)$. Παρατηρούμε ότι, στο μονοπάτι Χάμιλτον του $BC(M)$, αν υπάρχει, όλες οι κορυφές του μονοπάτι γεφυρών $B(M_i)$, εμφανίζονται πριν από τις κορυφές του $B(M_j)$, για κάθε $i < j$. Επειδή το γράφημα $SC(M)$ είναι ακυκλικό, αν εγκαταλείψουμε το M_i , πριν επισκεφθούμε όλες τις κορυφές του, δεν θα υπάρχει τρόπος να επιστρέψουμε, και άρα, δεν θα υπάρχει μονοπάτι Χάμιλτον. Επίσης, σε ένα μονοπάτι Χάμιλτον του $BC(M)$, κάθε μονοπάτι γεφυρών, επισκέπτεται από την μία άκρη στην άλλη και άρα, υπάρχουν δύο δυνατοί προσανατολισμοί για ένα μονοπάτι γεφυρών. Ως συνέπεια, το μονοπάτι Χάμιλτον του $BC(M)$, αν υπάρχει, χρησιμοποιεί μόνο τις ακμές που εξέρχονται από τα άκρα ενός μονοπατιού γεφυρών $B(M_i)$ και εισέρχεται σε ένα από τα άκρα του μονοπατιού γεφυρών $B(M_j)$, $i < j$. Επιπλέον, οι ακμές αυτές συνδέουν διαδοχικά μονοπάτια γεφυρών. Συνεπώς, για να ελέγξουμε αν το $BC(M)$ έχει μονοπάτι Χάμιλτον, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα απλοποιημένο γράφημα, το οποίο θα το συμβολίζουμε με $s-BC(M)$, και το οποίο προκύπτει αν αγνοήσουμε όλες τις κορυφές των μονοπατιών γεφυρών που δεν αποτελούν τα άκρα τους, δηλαδή μετατρέποντας κάθε μονοπάτι γεφυρών σε μια μοναδική ακμή. Επίσης αγνοούμε και τις ακμές που συνδέουν τα μη διαδοχικά μονοπάτια γεφυρών. Έτσι, κάθε επίπεδο του τελικού γραφήματος αποτελεί είτε ακμή, είτε μια μοναδική κορυφή. Εικόνα 4.3.d δείχνει το απλοποιημένο γράφημα που κατασκευάζεται από το μεικτό γράφημα αγεφύρωτων συνιστωσών του γραφήματος M , όπου οι κορυφές a_i , b_i συμβολίζουν τα άκρα του μονοπατιού γεφυρών $B(M_i)$.

Μπορούμε να ελέγξουμε αν το $s-BC(M)$ έχει μονοπάτι Χάμιλτον, χρησιμοποιώντας απλή τεχνική δυναμικού προγραμματισμού. Έστω p_i^a είναι μια λογική μεταβλητή που παίρνει την τιμή **true** αν και μόνο αν υπάρχει μονοπάτι Χάμιλτον που διασχίζει όλες τις κορυφές των πρώτων i επιπέδων του $s-BC(M)$ και καταλήγει στην κορυφή a_i , $1 \leq i \leq k$. Παρόμοια, ορίζουμε p_i^b . Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ισχύει το ακόλουθο :

$$\begin{aligned} p_1^a &= p_1^b = \mathbf{true} \\ p_i^a &= (p_{i-1}^a = \mathbf{true} \wedge \exists (a_{i-1}, b_i) \in A') \vee (p_{i-1}^b = \mathbf{true} \wedge \exists (b_{i-1}, b_i) \in A') \\ p_i^b &= (p_{i-1}^b = \mathbf{true} \wedge \exists (b_{i-1}, a_i) \in A') \vee (p_{i-1}^a = \mathbf{true} \wedge \exists (a_{i-1}, a_i) \in A') \\ &(\text{φορ } 1 < i \leq k) \end{aligned}$$

Βασίζόμενοι στις παραπάνω ισότητες, μπορούμε να αποφανθούμε αν υπάρχει μονοπάτι Χάμιλτον στο $s-BC(M)$ (και άρα στο $BC(M)$) σε χρόνο $O(k)$.

Παρατήρηση 3. Το μεικτό γράφημα αγεφύρωτων συνιστωσών $BC(M)$ του μεικτού γραφήματος M έχει ακριβώς ένα μονοπάτι Χάμιλτον αν και μόνο αν $p_i^a \oplus p_i^b = \mathbf{true}$, $1 \leq i \leq k$, όπου k είναι ο αριθμός των ισχυρών συνιστωσών του M .

Παρατηρούμε επίσης ότι, στην περίπτωση που υπάρχει ένας μονοσυνεκτικός προσανατολισμός, μπορούμε να τον υπολογίσουμε σε γραμμικό χρόνο. Αυτό μπορεί να γίνει προσανατολίζοντας τις γέφυρες του $BC(M)$ σύμφωνα με το μονοπάτι Χάμιλτον του $BC(M)$ και χρησιμοποιώντας των ισχυρό προσανατολισμό για κάθε αγεφύρωτη ισχυρή συνιστώσα των γραφημάτων γεφυρών.

Από την παραπάνω συζήτηση, συμπεραίνουμε το ακόλουθο :

Algorithm 8: UNILATERAL-ORIENTATION(M)

Είσοδος: Ένα μεικτό γράφημα $M = (V, A, E)$.

Έξοδος: ‘ΝΑΙ’ αν M έχει μονοσυνεκτικό προσανατολισμό, ‘ΟΧΙ’ διαφορετικά.

1. Κατασκεύασε το γράφημα ισχυρών συνιστωσών $SC(M)$ του M .
{Συμβόλισε τις συνεκτικές συνιστώσες του $SC(M)$ με M_1, \dots, M_k .}
2. **if** $SC(M)$ δεν έχει μονοπάτι Χάμιλτον **then return**(‘ΟΧΙ’)
else
3. For each ισχυρή συνιστώσα M_i του M , $1 \leq i \leq k$,
Κατασκεύασε το γράφημα γεφυρών $B(M_i)$;
if B_{M_i} δεν είναι ένα μονοπάτι **then return**(‘ΟΧΙ’);
{ ‘Όλα τα B_{M_i} είναι μονοπάτια. }
4. Κατασκεύασε το μεικτό γράφημα ισχυρών συνιστωσών $BC(M)$ του M
5. **if** $BC(M)$ δεν έχει μονοπάτι Χάμιλτον **then return**(‘ΟΧΙ’).
6. **return**(‘ΝΑΙ’);

Θεώρημα 36. Έστω $M = (V, A, E)$ είναι ένα μεικτό γράφημα. Μπορούμε να αποφανθούμε αν το M επιδέχεται έναν μονοσυνεκτικό προσανατολισμό σε χρόνο $O(V + A + E)$. Επιπλέον, αν το M είναι μονοσυνεκτικά προσανατολίσσιμο, ο προσανατολισμός αυτός μπορεί επίσης να βρεθεί σε χρόνο $O(V + A + E)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι μπορούμε να δώσουμε έναν χαρακτηρισμό σε όρους του Θεωρήματος 33, των Chartrand et al [20].

Θεώρημα 37. Ένα μεικτό γράφημα επιδέχεται έναν μονοσυνεκτικό προσανατολισμό αν και μόνο αν όλες οι γέφυρες των ισχυρών συνιστωσών του βρίσκονται σε ένα κοινό μονοπάτι.

4.2 Αναγνώριση ενός εξαναγκαστικού μονοσυνεκτικού συνόλου

Έστω $M = (V, E, A)$ είναι ένα μεικτό γράφημα. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε ένα απλό λήμμα που δίνει χαρακτηρισμό για το πότε M έχει έναν εξαναγκαστικό μονοσυνεκτικό προσανατολισμό, ή ισοδύναμα, πότε A αποτελεί ένα εξαναγκαστικό σύνολο για το M . Βασιζόμενοι σε αυτό το λήμμα και τον Αλγόριθμο 8, λαμβάνουμε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο που αποφασίζει αν το A αποτελεί ένα εξαναγκαστικό σύνολο για το γράφημα M .

Λήμμα 51. Ένα μεικτό γράφημα $M = (V, A, E)$ έχει έναν μοναδικό μονοσυνεκτικό προσανατολισμό αν και μόνο αν για κάθε ακμή $e = (u, v) \in E$ είτε $(V, A \cup \{(u, v)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ είτε $(V, A \cup \{(v, u)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ έχει μονοσυνεκτικό προσανατολισμό, αλλιώς όχι και τα δύο.

Απόδειξη: (\Rightarrow) Έστω M έχει έναν μοναδικό μονοσυνεκτικό προσανατολισμό και υποθέτουμε, για απαγωγή στο άτοπο, ότι και τα δύο $(V, A \cup \{(u, v)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ και $(V, A \cup \{(v, u)\}, E \setminus \{(u, v)\})$

έχουν μονοσυνεκτικό προσανατολισμό. Τότε οι μονοσυνεκτικοί αυτοί οι προσανατολισμοί, διαφέρουν τουλάχιστον σε μια ακμή, άτοπο. Διαφορετικά, αν υποθέσουμε ότι κανένα από τα $(V, A \cup \{(u, v)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ και $(V, A \cup \{(v, u)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ δεν έχει μονοσυνεκτικό προσανατολισμό, έχουμε πάλι αντίφαση με το γεγονός ότι M έχει έναν μονοσυνεκτικό προσανατολισμό.

(\Leftarrow) Υποθέτουμε ότι για κάθε ακμή $e = (u, v) \in E$ είτε $(V, A \cup \{(u, v)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ είτε $(V, A \cup \{(v, u)\}, E \setminus \{(u, v)\})$ έχει έναν μονοσυνεκτικό προσανατολισμό αλλά όχι και τα δύο. Είναι ξεκάθαρο ότι M έχει τουλάχιστον έναν μονοσυνεκτικό προσανατολισμό. Υποθέτουμε, για απαγωγή στο άτοπο, ότι M έχει πάνω από έναν μονοσυνεκτικό προσανατολισμό. Θεωρούμε δύο τυχαίους μονοσυνεκτικούς προσανατολισμούς του M . Επειδή είναι διαφορετικοί, διαφέρουν τουλάχιστον σε μία ακμή, έστω $e' = (u', v') \in E$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $(V, A \cup \{(u', v')\}, E \setminus \{e'\})$ και $(V, A \cup \{(v', u')\}, E \setminus \{e'\})$ έχουν έναν μονοσυνεκτικό προσανατολισμό, άτοπο. \square

Θεώρημα 38. Δεδομένου ενός μεικτού γραφήματος $M = (V, A, E)$, μπορούμε να αποφασίσουμε αν το σύνολο A αποτελεί ένα αποτελεί ένα εξαναγκαστικό σύνολο για το M σε χρόνο $O(E(V + A + E))$.

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από το Θεώρημα 36 και το Λήμμα 51. \square

Bibliography

- [1] M. Alzohairi. N-free planar ordered sets that contain no covering four-cycle have pagenum-ber two. *The Arabian Journal for Science and Engineering*, 31(2A):213–220, 2005. 84, 121, 226, 262
- [2] Mohammad Alzohairi and Ivan Rival. Series-parallel planar ordered sets have pagenumber two. In Stephen C. North, editor, *Graph Drawing*, volume 1190 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 11–24. Springer, 1996. 84, 226
- [3] P. Angelini, G. Di Battista, M. Kaufmann, T. Mchedlidze, C. Squarcella, and V. Roselli. Small point sets for simply-nested planar graphs. In *19th International Symposium on Graph Drawing (GD '11)*, *Lecture Notes in Computer Science*, 2011. To appear. 19, 162
- [4] P. Angelini, F. Frati, M. Geyer, M. Kaufmann, **T. Mchedlidze**, and A. Symvonis. Upward geometric graph embeddings into point sets. In *18th International Symposium on Graph Drawing (GD '10)*, *Lecture Notes in Computer Science*, 2010. To appear. 20, 21, 22, 70, 75, 163, 164, 213, 218
- [5] M. Badent, E. Di Giacomo, and G. Liotta. Drawing colored graphs on colored points. *Theor. Comput. Sci.*, 408(2-3):129–142, 2008. 19, 20, 162
- [6] J. Bang-Jensen and G. Gutin. *Theory, Algorithms and Applications*. 2007. 135, 275
- [7] Jørgen Bang-Jensen and Gregory Gutin. Paths, trees and cycles in tournaments. 71, 214
- [8] G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, and I. Tollis. Algorithms for drawing graphs: An annotated bibliography. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 4:235–282, 1994. 12, 13, 152, 154
- [9] Frank Bernhart and Paul C. Kainen. The book thickness of a graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 27(3):320 – 331, 1979. 90, 233
- [10] P. Bertolazzi, G. Di Battista, G. Liotta, and C. Mannino. Upward drawings of triconnected digraphs. *Algorithmica*, 12:476–497, 1994. 13, 154
- [11] Paola Bertolazzi, Giuseppe Di Battista, Carlo Mannino, and Roberto Tamassia. Optimal upward planarity testing of single-source digraphs. *SIAM Journal on Computing*, 1998. 13, 154
- [12] C. Binucci, E. Di Giacomo, W. Didimo, A. Estrella-Balderrama, F. Frati, S. Kobourov, and G. Liotta. Upward straight-line embeddings of directed graphs into point sets. *Computat. Geom. Th. Appl.*, 43:219–232, 2010. 20, 23, 24, 36, 38, 50, 52, 70, 73, 163, 166, 167, 177, 179, 180, 192, 194, 195, 213, 217

- [13] F. Boesch and R. Tindell. Robbins's theorem for mixed multigraphs. In *American Mathematical Monthly*, volume 87, pages 716–719, 1980. 135, 136, 138, 275, 277, 278
- [14] P. Bose. On embedding an outer-planar graph in a point set. *Computat. Geom. Th. Appl.*, 23(3):303–312, 2002. 14, 19, 154, 161
- [15] P. Bose, M. McAllister, and J. Snoeyink. Optimal algorithms to embed trees in a point set. *J. Graph Alg. Appl.*, 1(2):1–15, 1997. 14, 19, 154, 161
- [16] U. Brandes and T. Erlebach (Eds.). *Network Analysis, Methodological Foundations*. Lecture Notes in Computer Science, Theoretical Computer Science and General Issues, Vol. 3418, 2005. 14, 19, 154, 161
- [17] Graham Brightwell and Peter Winkler. Counting linear extensions. *Order*, Volume 8(3):225–242, 1991. 86, 228
- [18] S. Cabello. Planar embeddability of the vertices of a graph using a fixed point set is NP-hard. *J. Graph Alg. Appl.*, 10(2):353–366, 2006. 14, 19, 154, 161
- [19] S. Ceroi. A weighted version of the jump number problem on two-dimensional orders is np-complete. *Order*, 20:1–11, 2001. 86, 228
- [20] G. Chartrand, F. Harary, M. Schultz, and C.E. Wall. Forced orientation numbers of a graph. In *Congressus Numerantium*, volume 100, pages 183–191, 1994. 135, 136, 137, 138, 142, 275, 277, 278, 279, 284
- [21] M. Chein and M. Habib. Jump number of dags having Dilworth number 2. *Discrete Applied Math*, 7:243–250, 1984. 86, 228
- [22] M. Chrobak and H. Karloff. A lower bound on the size of universal sets for planar graphs. 20:83–86, November 1989. 14, 19, 154, 161, 162
- [23] Fan R. K. Chung, Michael R. Garey, and Robert E. Tarjan. Strongly connected orientations of mixed multigraphs. In *Networks*, volume 15, pages 477–484, 1985. 136, 277
- [24] Fan R. K. Chung, Frank Thomson, Leighton, and Arnold L. Rosenberg. Embedding graphs in books: a layout problem with applications to vlsi design. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 8:33–58, 1987. 14, 155
- [25] O. Cogis and M. Habib. Nombre de sauts et graphes series-paralleles. In *RAIRO Inf. Th.*, volume 13, pages 3–18, 1979. 86, 228
- [26] C. J. Colbourn and W. R. Pulleyblank. Minimizing setups in ordered sets of fixed width. *Order*, 1:225–229, 1985. 86, 124, 228, 265
- [27] D. Duffus, I. Rival, and P. Winkler. Minimizing setups for cycle-free orders sets. In *Proc. of the American Math. Soc.*, volume 85, pages 509–513, 1982. 86, 228
- [28] G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, and I. G. Tollis. *Graph Drawing: Algorithms for the Visualization of Graphs*. Prentice-Hall, 1999. 11, 12, 151, 152
- [29] Giuseppe Di Battista and Roberto Tamassia. Algorithms for plane representations of acyclic digraphs. *Theor. Comput. Sci.*, 61(2-3):175–198, 1988. 84, 226

- [30] Giuseppe Di Battista, Roberto Tamassia, and Ioannis G. Tollis. Constrained visibility representations of graphs. *Information Processing Letters*, 41(1):1-7, 1992. 15, 155
- [31] E. Di Giacomo, W. Didimo, G. Liotta, H. Meijer, F. Trotta, and S. K. Wismath. k-colored point-set embeddability of outerplanar graphs. *J. Graph Alg. Appl.*, 12(1):29-49, 2008. 19, 20, 162
- [32] E. Di Giacomo, W. Didimo, G. Liotta, and S. Wismath. Curve-constrained drawings of planar graphs. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 30:1-23, January 2005. 16, 20, 156, 162
- [33] E. Di Giacomo, W. Didimo, G. Liotta, and S. Wismath. Book embeddability of series-parallel digraphs. *Algorithmica*, 45:531-547, August 2006. 20, 162
- [34] E. Di Giacomo, G. Liotta, and F. Trotta. On embedding a graph on two sets of points. *INT. J. OF FOUNDATIONS OF COMP. SCIENCE*, 17:2006, 2005. 20, 162
- [35] E. Di Giacomo, G. Liotta, and F. Trotta. Drawing colored graphs with constrained vertex positions and few bends per edge. In *Graph Drawing*, volume 4875 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 315-326. Springer, 2008. 20, 162
- [36] Emilio Di Giacomo, Walter Didimo, Giuseppe Liotta, and Stephen K. Wismath. Book embeddings and point-set embeddings of series-parallel digraphs. In Michael T. Goodrich and Stephen G. Kobourov, editors, *Proceedings of 10th International Symposium on Graph Drawing (GD 2002)*, volume 2528 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 162-173, 2002. 15, 155
- [37] Emilio Di Giacomo, Walter Didimo, Giuseppe Liotta, and Stephen K. Wismath. Curve-constrained drawings of planar graphs. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 30(1):1-23, 2005. 84, 226
- [38] Reinhard Diestel. *Graph Theory, Third Edition*. Springer, 2005. 17, 158
- [39] Hikoe Enomoto, Miki Shimabara Miyauchi, and Katsuhiko Ota. Lower bounds for the number of edge-crossings over the spine in a topological book embedding of a graph. *Discrete Appl. Math.*, 92(2-3):149-155, 1999. 14, 83, 155, 226
- [40] B. Farzad, M. Mahdian, E.S. Mahmoodian, A. Saberi, and B. Sadri. Forced orientation of graphs. In *Bulletin of Iranian Mathematical Society*, volume 32, pages 79-89, 2006. 135, 137, 275, 278
- [41] H. Fraysseix, J. Pach, and R. Pollack. How to draw a planar graph on a grid. *Combinatorica*, 10:41-51, 1990. 14, 19, 154, 161, 162
- [42] Z. Galil, R. Kannan, and E. Szemerédi. On 3-pushdown graphs with large separators. *Combinatorica*, 9:9-19, 1989. 14, 155
- [43] Z Galil, R Kannan, and E Szemerédi. On nontrivial separators for k-page graphs and simulations by nondeterministic one-tape turing machines. In *Proceedings of the eighteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, STOC '86, pages 39-49. ACM, 1986. 14, 155
- [44] M. Garey and D. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1979. 76, 85, 219, 227

- [45] Ashim Garg and Roberto Tamassia. On the computational complexity of upward and rectilinear planarity testing. *SIAM J. Comput.*, 31:601–625, February 2002. 13, 154
- [46] M. Geyer, M. Kaufmann, **T. Mchedlidze**, and A. Symvonis. Upward point-set embeddability. In *37th International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science (SOFSEM'11)*, Lecture Notes in Computer Science, 2011. To appear. 20, 21, 22, 163, 164, 165
- [47] Emilio Di Giacomo, Walter Didimo, Giuseppe Liotta, and Stephen K. Wismath. Book embeddability of series-parallel digraphs. *Algorithmica*, 45(4):531–547, 2006. 84, 121, 226, 262
- [48] F. Giordano, G. Liotta, **T. Mchedlidze**, and A. Symvonis. Computing upward topological book embeddings of upward planar digraphs. In *ISAAC '07*, pages 172–183, 2007. 15, 16, 20, 21, 84, 88, 89, 155, 156, 163, 226, 231
- [49] F. Giordano, G. Liotta, and S. Whitesides. Embeddability problems for upward planar digraphs. In *Graph Drawing*, volume 5417 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 242–253. Springer, 2009. 20, 21, 163
- [50] Francesco Giordano, Giuseppe Liotta, and Sue Whitesides. Embeddability problems for upward planar digraphs. In *Graph Drawing*, pages 242–253, 2008. 8, 17, 86, 87, 125, 132, 133, 148, 157, 228, 229, 267
- [51] Petra M. Gleiss and Peter F. Stadler. Relevant cycles in biopolymers and random graphs. In *Presented at the Fourth Slovene International Conference in Graph Theory*, 1999. 14
- [52] P. Gritzmann, B. Mohar J. Pach, and R. Pollack. Embedding a planar triangulation with vertices at specified positions. *Amer. Math. Mont.*, 98:165–166, 1991. 14, 19, 154, 161
- [53] M. Habib and R. Jegou. N-free posets as generalization of series-parallel posets. *Discrete Applied Mathematics*, 12:1–23, 1985. 84, 226
- [54] J. Halton. On the thickness of graphs of given degree. *Inf. Sci.*, 54:219–238, April 1991. 20, 162
- [55] F. Harary, R.Z. Norman, and D. Cartwright. *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs*. 1965. 138, 279
- [56] Frank Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1972. 17, 158
- [57] Tero Harju and Lucian Ilie. Where mathematics, computer science, linguistics and biology meet. chapter Forbidden subsequences and permutations sortable on two parallel stacks, pages 267–275. Kluwer Academic Publishers, 2001. 14, 155
- [58] Ryan Hayward. A lower bound for the optimal crossing-free hamiltonian cycle problem. *Discrete and Computational Geometry*, 2:327–343, 1987. 71, 214
- [59] L. S. Heath, S. V. Pemmaraju, and A. N. Trenk. Stack and queue layouts of directed acyclic graphs: Part I. *SIAM J. Comput.*, 28(4):1510–1539, 1999. 36, 42, 84, 177, 184, 226
- [60] Lenwood S. Heath and Sriram V. Pemmaraju. Stack and queue layouts of posets. *SIAM J. Discrete Math.*, 10(4):599–625, 1997. 84, 226

- [61] Lenwood S. Heath and Sriram V. Pemmaraju. Stack and queue layouts of directed acyclic graphs: Part II. *SIAM J. Comput.*, 28(5):1588–1626, 1999. 84, 226
- [62] Michael D. Hutton and Anna Lubiw. Upward planar drawing of single source acyclic digraphs. In *Proceedings of the second annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, SODA '91*, pages 203–211. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1991. 13, 154
- [63] M. Junger and P. Mutzel. *Graph Drawing Software*. Springer, 2003. 12, 152
- [64] P. C. Kainen. The book thickness of a graph ii. In *Proceedings of the Twentieth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Congr. Numer. 71*, pages 127–132, 1990. 14, 155
- [65] A. Kaneko and M. Kano. Discrete geometry on red and blue points in the plane. a survey. In *in Discrete and Computational Geometry, The Goodman-Pollack Festschrift*, pages 551–570. Springer, 2003. 20, 162
- [66] Z. A. Karejan and K. M. Mosesjan. The hamiltonian completion number of a digraph (in Russian). *Akad. Nauk Armyan. SSR Dokl.*, 70(2-3):129–132, 1980. 85, 227
- [67] M. Kaufmann, T. Mchedlidze, and A. Symvonis. Upward point set embeddability for convex point sets is in p. In *19th International Symposium on Graph Drawing (GD '11)*, Lecture Notes in Computer Science, 2011. To appear. 20, 21, 163, 164
- [68] M. Kaufmann and D. Wagner. *Drawing Graphs: Methods and Models*. Lecture Notes in Computer Science 2025, Springer-Verlag, 2001. 12, 152
- [69] M. Kaufmann and R. Wiese. Embedding vertices at points: Few bends suffice for planar graphs. *J. Graph Alg. Appl.*, 6(1):115–129, 2002. 14, 16, 19, 154, 156, 161, 162
- [70] D. Kelly. Fundamentals of planar ordered sets. *Discrete Math.*, 63(2-3):197–216, 1987. 84, 226
- [71] M. Kurowski. A 1.235 lower bound on the number of points needed to draw all n-vertex planar graphs. *Information Processing Letters*, 92(2):95–98, 2004. 14, 19, 154, 161, 162
- [72] Tamara Mchedlidze and Antonios Symvonis. Crossing-free acyclic hamiltonian path completion for planar t -digraphs. In Yingfei Dong, Ding-Zhu Du, and Oscar H. Ibarra, editors, *ISAAC*, volume 5878 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 882–891. Springer, 2009. 87, 229
- [73] Tamara Mchedlidze and Antonios Symvonis. Crossing-optimal acyclic hamiltonian path completion and its application to upward topological book embeddings. In Sandip Das and Ryuhei Uehara, editors, *WALCOM*, volume 5431 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 250–261. Springer, 2009. 138, 279
- [74] Tamara Mchedlidze and Antonios Symvonis. Crossing-optimal acyclic HP-completion for outerplanar st -digraphs. In *Journal of Graphs Algorithms and Applications*, volume 15, pages 373–415, 2010. 87, 229
- [75] Tamara Mchedlidze and Antonios Symvonis. Unilateral orientation of mixed graphs. In Jan van Leeuwen, Anca Muscholl, David Peleg, Jaroslav Pokorný, and Bernhard Rumpe, editors, *SOFSEM*, volume 5901 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 588–599. Springer, 2010. 138, 278

- [76] Jutta Mitas. Tackling the jump number of interval orders. *Order*, 8:115–132, 1991. 86, 228
- [77] Monroe Newborn and W. O. J. Moser. Optimal crossing-free hamiltonian circuit drawings of kn . *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 29(1):13 – 26, 1980. 71, 214
- [78] Richard Nowakowski and Andrew Parker. Ordered sets, pagenumbers and planarity. *Order*, 6(3):209–218, 1989. 15, 84, 155, 226
- [79] A. Ono and S. Nakano. Constant time generation of linear extensions. *Proceedings of 16th International Symposium on Fundamentals of Computation Theory, FCT2005, In LNCS 3623, Springer*, pages 445–453, 2005. 86
- [80] J. Pach and R. Wenger. Embedding planar graphs at fixed vertex locations. In *Graph Drawing*, volume 1547 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 263–274. Springer, 1998. 20, 162
- [81] D. Pascovici. On the forced unilateral orientation number of a graph. In *Discrete Mathematics*, volume 187, pages 171–183, 1997. 8, 17, 135, 137, 143, 148, 158, 275, 278
- [82] Vaughan R. Pratt. Computing permutations with double-ended queues, parallel stacks and parallel queues. In *Proceedings of the fifth annual ACM symposium on Theory of computing, STOC '73*, pages 268–277. ACM, 1973. 14, 155
- [83] Gara Pruesse and Frank Ruskey. Generating linear extensions fast. *SIAM Journal on Computing*, 23(2):373–386, 1994. 86
- [84] W. R. Pulleyblank. On minimizing setups in precedence constrained scheduling. In *Report 81105-OR*, 1981. 86, 228
- [85] J. Lenstra A.R. Kan R. Graham, E. Lawler. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey. *Ann. Discrete Math.*, 5:287–326, 1979. 86, 228
- [86] I. Rival. Reading, drawing, and order. In *in Algebras and Orders*, eds. I.G. Rosenberg and G. Sabidussi, pages 359–404. Kluwer Academic Publishers, 1993. 12, 154
- [87] Ivan Rival. Optimal linear extensions by interchanging chains. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, volume 89, pages 387–394, 1983. 86, 228
- [88] H. E. Robbins. A theorem on graphs, with an application to a problem of traffic control. In *American Mathematical Monthly*, volume 46, pages 218–283, 1939. 136, 276
- [89] A. L. Rosenberg. The diogenes approach to testable fault-tolerant arrays of processors. *IEEE Trans. Comput.*, 32:902–910, October 1983. 14, 155
- [90] A. Sharary and N. Zaguia. On minimizing jumps for ordered sets. *Order*, 7:353–359, 1991. 86, 228
- [91] G. Steiner and L. K. Stewart. A linear algorithm to find the jump number of 2-dimensional bipartite partial orders. *Order*, 3:359–367, 1987. 86, 228
- [92] K. Sugiyama. *Graph drawing and applications for software and knowledge engineers*. World Scientific Publishing Company; 1st edition. Series on Software Engineering and Knowledge Engineering, 11, June 2002. 12, 15, 152

-
- [93] R. Tamassia, G. Di Battista, and C. Batini. Automatic graph drawing and readability of diagrams. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, 18:61–79, January 1988. 14, 19, 161
- [94] Roberto Tamassia and Franco P. Preparata. Dynamic maintenance of planar digraphs, with applications. *Algorithmica*, 5(4):509–527, 1990. 88, 128, 231, 270
- [95] Roberto Tamassia and Ioannis G. Tollis. A unified approach a visibility representation of planar graphs. *Discrete & Computational Geometry*, 1:321–341, 1986. 88, 230
- [96] Robert Tarjan. Sorting using networks of queues and stacks. *J. ACM*, 19:341–346, April 1972. 14, 155
- [97] **T. Mchedlidze** and A. Symvonis. On ρ -constrained upward topological book embeddings. In *17th International Symposium on Graph Drawing, GD 2009*, volume 5849 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 411–412. Springer, 2009. 20, 21, 87, 163, 229
- [98] Andrew Thomason. Paths and cycles in tournaments. *Transactions of the American Mathematical Society*, 296:167–180, 1986. 71, 214
- [99] Mihalis Yannakakis. Embedding planar graphs in four pages. *J. Comput. Syst. Sci.*, 38(1):36–67, 1989. 14, 83, 155, 225