ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κωνσταντίνος Ασημομύτης

Α.Μ. :ge13511

«Ο Αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός και η Συνεισφορά του στην Στατιστική»

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΠΕΤΡΟΣ Ε.ΔΙ.Π. ,Ε.Μ.Π.ΣΕΜΦΕ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Επιβλέπων : Δρ. Πέτρος Δαμιανός(Ε.ΔΙ.Π. ,Ε.Μ.Π)

Επιτροπή : Θεολόγου Κώστας , Καθηγητής ,Ε.Μ.Π

Δρ . Στέλιος Σπύρος (Ε.ΔΙ.Π.,ΕΜΠ)

[ΑΘΗΝΑ, ΜΗΝΑΣ/2023]

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και ιδιαίτερα τον αδερφό μου Αναστάσιο για την συνεχή στήριξη που μου προσέφεραν κατά την εκπόνηση της διπλωματικής .

.....

Κωνσταντίνος Ασημομύτης

© (2023) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ’αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείο

Περίληψη

Σκοπός της διπλωματικής είναι τόσο η λεπτομερής ανάδειξη του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού όσο και η υπεράσπιση του απέναντι στις πολλές επικρίσεις που έχει δεχθεί . Θα επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε όσο σαφέστερα μπορούμε τα θεμέλια της θεωρίας του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού , η οποία χαρακτηρίζεται από τρείς νόρμες και να αντικρούσουμε τις επιθέσεις που του έχουν καταλογιστεί κατά καιρούς , αφού όπως θα δούμε έχει πάρα πολλά οφέλη και θα πρέπει να προτιμάται για την αντιμετώπιση αρκετών προβλημάτων .

Abstract

The Objective Bayesianism and its Contribution to Statistics

The purpose of the thesis is both the detailed highlighting of objective Bayesianism and its defense against the many criticisms it has received. We will try to present as clearly as we can the foundations of the theory of objective Bayesianism which is characterized by three norms and to refute the attacks that have been attributed to it from time to time, since as we will see it has many benefits and should be preferred for dealing with several problems .

Εισαγωγή

Το Κεφάλαιο 1 περιλαμβάνει την ιστορική εξέλιξη της στατιστικής , από το ξεκίνημά της μέχρι την σύγχρονη μορφή της . Γίνεται αναφορά σε όλους τους επιστήμονες που συνέβαλαν με το έργο τους στην διαμόρφωση της στατιστικής θεωρίας και στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζεται μια σύντομη αλλά απαραίτητη εισαγωγή στην Μπεϋζιανή στατιστική .

Στο Κεφάλαιο 2 αναδεικνύεται η συνεισφορά των Bernoulli , Bayes και Laplace στην σύσταση της θεωρίας του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού και γίνεται μια πρώτη εισαγωγή στα θεμέλια της θεωρίας , με την παρουσίαση της γλώσσας και των τριών νορμών που αποτελούν τα κύρια χαρακτηριστικά του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού.

Με το Κεφάλαιο 3 γίνεται μια εμβάθυνση στις τρείς νόρμες που χαρακτηρίζουν τον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό και στον λόγο ύπαρξης καθεμίας εξ'αυτών . Οι τρείς νόρμες αποτελούνται από την νόρμα της πιθανότητας , της βαθμονόμησης και της αμφιλογίας .

Στο Κεφάλαιο 4 πραγματοποιείται μια εκτενής σύγκριση των μεθόδων ενημέρωσης των βαθμών πίστης του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού και του υποκειμενικού. Πιο συγκεκριμένα καταρρίπτεται η αντίληψη ότι η αρχή της Μέγιστης εντροπίας του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού υστερεί σε σχέση με την μέθοδο της συνθηκολογίας .

Στο Κεφάλαιο 5 ορίζονται τα αντικειμενικά Μπεϋζιανά δίκτυα και τα αντικειμενικά δίκτυα πίστωσης που αποτελούν υπολογιστικούς μηχανισμούς που επιτρέπουν την αποτελεσματική αναπαράσταση και συμπερασματολογία . Στο τέλος του κεφαλαίου ακολουθεί ένα παράδειγμα εφαρμογής ενός αντικειμενικού Μπεϋζιανού δικτύου στο πρόβλημα της πρόγνωσης του καρκίνου του μαστού .

Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζεται το πρόβλημα της συσσωμάτωσης κρίσεων ,όταν δηλαδή μια ομάδα με διαφορετικές κρίσεις αποζητά να καταλήξει σε μια συνολική κρίση . Δίνεται έμφαση στην θεωρία της αναθεώρησης πίστης και συγχώνευσης και αναζητείται το στάδιο στο οποίο θα πρέπει να πραγματοποιείται η συγχώνευση .

Στο Κεφάλαιο 7 γίνεται μια σύγκριση της μεθόδου του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού σε σχέση με τέσσερις άλλες μεθόδους ως προς την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για ένα ιατρικό πρόβλημα . Όπως θα δούμε η μέθοδος του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού έχει την καλύτερη επίδοση και θα πρέπει να προτιμάται για αντίστοιχα προβλήματα .

Η ολοκλήρωση της εργασίας πραγματοποιείται με την παρουσίαση των συμπερασμάτων και της μελλοντικής εξέλιξης της θεωρίας του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού .

Περιεχόμενα

1. Ιστορία της στατιστικής 8

1.1 Ιστορική Αναδρομή 8

1.2 Προέλευση στην θεωρία πιθανοτήτων 11

1.3 Ανάπτυξη της σύγχρονης στατιστικής 15

1.4 Μπεϋζιανή Στατιστική : Μία σύντομη εισαγωγή 18

2. Αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός 21

2.1 Μια βιώσιμη ερμηνεία της πιθανότητας 21

2.2 Η αναγέννηση του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού 23

2.3 Χαρακτηρισμός του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού 24

3. **Αιτιολόγηση των τριών νορμών 27**

3.1 Εισαγωγή 27

3.2 Πιθανότητα 28

3.3 Βαθμονόμηση 30

3.4 Αμφιλογία 33

4. Ενημέρωση βαθμών πίστης 44

4.1 Η διαδικασία της ενημέρωσης 44

4.2 Απαραίτητη θεωρία 45

4.3 Επικρίσεις κατά της συνθηκολογίας 50

5. Αντικειμενικά Μπεϋζιανά Δίκτυα 53

5.1 Μπεϋζιανά Δίκτυα 53

5.2 Δίκτυα πίστωσης 56

5.3 Συμπερασματολογία 58

5.4 Αναπαράσταση της αντικειμενικής Μπεϋζιανής πιθανότητας 59

5.5 Εφαρμογή στην πρόγνωση του καρκίνου 59

6. Συσσωμάτωση κρίσεων 65

6.1 Εισαγωγή στην συσσωμάτωση κρίσεων 65

6.2 Αναθεώρηση πίστης και συγχώνευση 66

6.3 Συγχώνευση αποδεικτικών στοιχείων 68

6.4 Από τις συγχωνευμένες αποδείξεις στις κρίσεις 71

6.5 Σύνοψη 74

7. Κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης - Εφαρμογή Α.Μπεϋζιανισμου και σύγκριση με άλλες μεθόδους 78

Βιβλιογραφία 90

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ιστορία της στατιστικής

1.1 Ιστορική Αναδρομή

Η στατιστική με την μοντέρνα της έννοια ξεκίνησε να εξελίσσεται τον 18ο αιώνα για να εξυπηρετήσει τις νέες ανάγκες εκβιομηχάνισης των κυρίαρχων κρατών . Η εξέλιξη αυτή ήταν στενά συνδεδεμένη με την ανάπτυξη των ευρωπαϊκών κρατών εν συνεχεία της συνθήκης ειρήνης της Westphalia (1648) και με την ανάπτυξη της θεωρίας πιθανοτήτων , η οποία τοποθέτησε την στατιστική σε μια σταθερή θεωρητική βάση.

Αρχικά , ο ορισμός της περιοριζόταν στην παροχή πληροφοριών για τις πολιτείες , και πιο συγκεκριμένα δημογραφικών στοιχείων όπως είναι ο πληθυσμός . Αργότερα περιλάμβανε συλλογές πληροφοριών όλων των ειδών και μετέπειτα επεκτάθηκε ώστε να περιλαμβάνει την ανάλυση και την ερμηνεία αυτών των δεδομένων .

Με τον σύγχρονο ορισμό η στατιστική ορίζεται ως και τα δύο σύνολα συλλεγόμενων πληροφοριών , όπως στους εθνικούς λογαριασμούς και στα αρχεία θερμοκρασιών,και η αναλυτική εργασία η οποία απαιτεί στατιστική συμπερασματολογία .

Οι στατιστικές διαδικασίες συχνά σχετίζονται με μοντέλα που εκφράζονται χρησιμοποιώντας πιθανότητες , εξ' ου και η σύνδεση με την θεωρία πιθανοτήτων . Οι μεγάλες απαιτήσεις της επεξεργασίας δεδομένων έχουν κάνει την στατιστική βασική εφαρμογή της πληροφορικής . Πολλές εκ των στατιστικών εννοιών έχουν σημαντικό αντίκτυπο σε ένα ευρύ φάσμα επιστημών . Αυτές περιλαμβάνουν τον σχεδιασμό πειραμάτων και προσεγγίσεις σε στατιστικά συμπεράσματα όπως η Μπεϋζιανή συμπερασματολογία , κάθε μια από τις οποίες μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει την δική της αλληλουχία στην ανάπτυξη ιδεών που υπόκεινται στην μοντέρνα στατιστική .

Στον 18 αιώνα ο όρος στατιστική προσδιόριζε την συστηματική συλλογή δημογραφικών και οικονομικών δεδομένων από τις πολιτείες . Τουλάχιστον για δύο χιλιετίες , αυτά τα δεδομένα ήταν κυρίως πίνακες ανθρώπινων και υλικών πόρων που ίσως θα φορολογούνταν ή είχαν στρατιωτική χρήση . Στις αρχές του 19ο αιώνα , η συλλογή δεδομένων εντατικοποιήθηκε και ο όρος στατιστική επεκτάθηκε ώστε να περιλαμβάνει την πειθαρχία σχετικά με την συλλογή , σύνοψη και ανάλυση των δεδομένων .

Σήμερα , τα δεδομένα συλλέγονται και η στατιστική υπολογίζεται και διανέμεται ευρέως στην κυβέρνηση , στις επιχειρήσεις , στις περισσότερες επιστήμες και αθλήματα , ακόμα και σε πολλά χόμπι . Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές έχουν επιταχύνει τον πιο λεπτομερή στατιστικό υπολογισμό αφού διευκολύνουν πολύ την συλλογή και συγκέντρωση των δεδομένων . Ένας και μόνο αναλυτής δεδομένων μπορεί να έχει στην κατοχή του σετ δεδομένων με εκατομμύρια αρχεία , καθένα με δεκάδες ή και εκατοντάδες ξεχωριστές μετρήσεις . Αυτά συλλέχθηκαν στο πέρασμα του χρόνου με χρήση υπολογιστή (π.χ. το χρηματιστήριο) ή από μηχανο-γραφημένους αισθητήρες , POS , και ούτω καθ' εξής . Οι υπολογιστές στην συνέχεια παράγουν απλές , ακριβείς συνόψεις και πραγματοποιούν πολύ κουραστικές αναλύσεις , όπως αυτές που απαιτούνται στην αντιστροφή ενός πολύ μεγάλου πίνακα ή στην εκτέλεση εκατοντάδων βημάτων επαναλήψεων που δεν θα επιχειρούσε να κάνει κανείς ποτέ με το χέρι .

Οι τόσο γρήγοροι υπολογισμοί έχουν επιτρέψει στους στατιστικούς να αναπτύξουν "Computer intensive " μεθόδους οι οποίες μπορούν να δούνε όλους τους συνδυασμούς ή χρησιμοποιώντας τυχαιοποίηση να δούνε δέκα χιλιάδες παραλλαγές ενός προβλήματος ώστε να υπολογίσουν απαντήσεις οι οποίες δεν είναι εύκολο να ποσοτικοποιηθούν από την θεωρία μόνο .

Ο όρος μαθηματική στατιστική ορίζει τις μαθηματικές θεωρίες των πιθανοτήτων και της στατικής συμπερασματολογίας , οι οποίες εφαρμόζονται στην στατιστική πρακτική . Η σχέση μεταξύ της στατιστικής και της θεωρίας πιθανοτήτων εξελίχθηκε αρκετά αργά ωστόσο . Στον 19 αιώνα η στατιστική χρησιμοποιούσε όλο και περισσότερο την θεωρία πιθανοτήτων της οποίας τα πρώτα αποτελέσματα βρέθηκαν τον 17ο και 18ο αιώνα , και πιο συγκεκριμένα με την ανάλυση των τυχερών παιχνιδιών . Το 1800 στην αστρονομία χρησιμοποιούνταν μοντέλα πιθανοτήτων και στατιστικές θεωρίες ειδικά η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων.Η θεωρία πιθανοτήτων στην πρώιμη της μορφή και η στατιστική συστηματοποιήθηκαν στον 19ο αιώνα και η στατιστική συλλογιστική και τα μοντέλα πιθανοτήτων χρησιμοποιούνταν από κοινωνικούς επιστήμονες για να προάγουν τις νέες επιστήμες της πειραματικής ψυχολογίας και κοινωνιολογίας αλλά και από φυσικούς επιστήμονες στην θερμοδυναμική και στην στατιστική μηχανική. Η ανάπτυξη της στατιστικής συλλογιστικής ήταν στενά συνδεδεμένη με την ανάπτυξη της επαγωγικής λογικής και την επιστημονική μέθοδο , οι οποίες είναι ανησυχίες που απομακρύνουν τους στατιστικούς από την στενότερη περιοχή της μαθηματικής στατιστικής. Η πλειονότητα της θεωρητικής εργασίας ήταν άμεσα διαθέσιμη ώσπου οι υπολογιστές οι υπολογιστές ήταν διαθέσιμοι να τους εκμεταλλευτούμε . Μέχρι την δεκαετία του 1970 ο Τζόνσον και Κοτζ παρήγαγαν μια τεσσάρων τόμων επιτομή στις στατιστικές κατανομές (πρώτη έκδοση 1869- 1972) η οποία ακόμα και σήμερα έχει ανεκτίμητη

αξία .

Η εφαρμοσμένη στατιστική μπορεί να θεωρηθεί όχι μόνο ως ένα πεδίο μαθηματικών αλλά μια αυτόνομη μαθηματική επιστήμη όπως η επιστήμη υπολογιστών και η επιχειρησιακή έρευνα . Σεν αντίθεση με τα μαθηματικά η στατιστική είχε την προέλευση της στην δημόσια διοίκηση . Οι εφαρμογές εμφανίστηκαν νωρίς στην δημογραφία και στα οικονομικά , μεγάλες περιοχές της μικροοικονομίας και της μακροοικονομίας σήμερα είναι ουσιαστικά στατιστική με έμφαση στην ανάλυση χρονοσειρών .

Με έμφαση στην μάθηση από τα δεδομένα και στην επίτευξη όλο και καλύτερων προβλέψεων ,η στατιστική έχει επίσης διαμορφωθεί από τομείς ακαδημαϊκής έρευνας , συμπεριλαμβανομένων ψυχολογικών δοκιμών , ιατρικής και επιδημιολογίας . Οι ιδέες των στατιστικών δοκιμών αλληλεπικαλύπτονται με την επιστήμη των αποφάσεων . Με τις ανησυχίες της σχετικά με την αναζήτηση και αποτελεσματική παρουσίαση δεδομένων , η στατιστική αλληλεπικαλύπτεται με την επιστήμη της πληροφορίας και την επιστήμη των υπολογιστών .

Ετυμολογία

Ο όρος στατιστική προέρχεται από τα νέα λατινικά *“statisticum collegium”*(συμβούλιο του κράτους) και την ιταλική λέξη *“statista ”* που σημαίνει πολιτικός . Η γερμανική λέξη *“statistik ”* που εισήχθη για πρώτη φορά από τον Gottfried Achenwall το 1749 , αρχικά χαρακτήρισε την ανάλυση δεδομένων για το κράτος , υποδηλώνοντας την επιστήμη του κράτους (τότε ονομαζόταν πολιτική επιστήμη στα αγγλικά) . Απέκτησε την έννοια της συλλογής και της ταξινόμησης των δεδομένων στις αρχές του 19ο αιώνα . Εισήχθη στα αγγλικά το 1791 από τον Sir John Sinclair όταν δημοσίευσε τον πρώτο από τους 21 τόμους με τίτλο Statistics Account Of Scotland .

Έτσι ο κύριος αρχικός σκοπός της Statistik ήταν να χρησιμοποιούνται τα δεδομένα από κυβερνητικούς και συχνά συγκεντρωτικούς διοικητικούς φορείς . Η συλλογή δεδομένων για πολιτείες και περιοχές συνεχίζεται , κυρίως μέσω εθνικών και διεθνών στατιστικών υπηρεσιών . Πιο συγκεκριμένα , οι απογραφές παρέχουν συχνά ενημερωμένες πληροφορίες σχετικά με τον πληθυσμό. Το πρώτο βιβλίο που είχε τον όρο στατιστική στον τίτλο του ήταν το “ Contribution To Vital Statistics ”(1845) από τον Francis GP Neison .

1.2 Προέλευση στην θεωρία πιθανοτήτων

Βασικές μορφές της στατιστικής χρησιμοποιούνταν από την αρχή του πολιτισμού . Οι πρώιμες αυτοκρατορίες συνέλεγαν συχνά απογραφές του πληθυσμού ή κατέγραφαν το εμπόριο διάφορων προϊόντων . Η δυναστεία των Χαν και η Ρωμαϊκή Αυτοκρατορία ήταν μερικά από τα πρώτα κράτη που συνέλεγαν εκτενώς δεδομένα σχετικά με το μέγεθος του πληθυσμού , την γεωγραφική περιοχή και τον πλούτο της Αυτό-κρατορίας . Η χρήση στατιστικών μεθόδων ανάγεται τουλάχιστον στον 5ο αιώνα π.Χ. Ο ιστορικός Θουκυδίδης στην ιστορία του Πελοποννησιακού πολέμου περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο οι Αθηναίοι υπολόγισαν το ύψος του τείχους της Πλαταίας μετρώντας τον αριθμό των τούβλων σε ένα μη επιχρισμένο τμήμα του τείχους αρκετά κοντά τους ώστε να μπορούν να τα μετρήσουν . Το μέτρημα επαναλήφθηκε αρκετές φορές από πολλούς στρατιώτες . Η πιο συχνή τιμή που κατέγραψαν θεωρήθηκε έτσι ως η πιο πιθανή τιμή του αριθμού των τούβλων . Ο πολλαπλασιασμός αυτής της τιμής με το ύψος των τούβλων που χρησιμοποιήθηκαν επέτρεψε στους Αθηναίους να προσδιορίσουν το ύψος των σκάλων που ήταν απαραίτητες για να σκαρφαλώσουν το τείχος .

Μορφές πιθανότητας και στατιστική αναπτύχθηκαν από τον Al-Khalil (717 – 786 CE) έναν Άραβα μαθηματικό που μελετούσε την κρυπτολογία . Έγραψε το βιβλίο των κρυπτογραφικών μηνυμάτων , το οποίο περιέχει την πρώτη χρήση συνδυασμών και παραλλαγών για να απαριθμήσει όλες τις δυνατές αραβικές λέξεις , με και χωρίς φωνήεντα . Η πρώτη συγγραφή πάνω στην στατιστική βρέθηκε σε ένα αραβικό βιβλίο του 9ο αιώνα με τίτλο “ Deciphering Cryptographic Messages ”, γραμμένο από τον Al - Kindi (801 – 887) . Στο βιβλίο του ο Al - Kindi έδωσε μια λεπτομερή περιγραφή του τρόπου χρήσης στατιστικής και ανάλυσης συχνότητας για την αποκρυπτογράφηση κρυπτογραφημένων μηνυμάτων . Αυτό το κείμενο οδήγησε αδιαμφισβήτητα στην γέννηση τόσο της στατιστικής όσο και της κρυπτοανάλυσης . Ο Al – Kindi έκανε επίσης την πρώτη γνωστή χρήση στατιστικής συμπερασματολογίας , ενώ αυτός και άλλοι Άραβες κρυπτολόγοι ανέπτυξαν τις πρώτες στατιστικές μεθόδους για την αποκωδικοποίηση κρυπτογραφημένων μηνυμάτων .

Μια σημαντική συμβολή υπήρξε αυτή του Ibn Adlan (1187-1268) στο μέγεθος του δείγματος για την χρήση της ανάλυσης συχνότητας . Το Trial Of The Pyx είναι μια δοκιμασία για την καθαρότητα του νομίσματος του Βασιλικού Νομισματοκοπείου που διεξάγεται σε τακτική βάση από τον 12ο αιώνα . Η δοκιμή βασίζεται σε στατιστικές μεθόδους δειγματοληψίας . Μετά το κόψιμο μιας σειράς νομισμάτων - αρχικά από δέκα κιλά αργύρου - ένα μόνο νόμισμα τοποθετήθηκε στο Pyx - ένα στο κουτί στο Westminster Abbey . Μετά από μια δεδομένη περίοδο - τώρα μια φορά τον χρόνο - τα νομίσματα αφαιρούνται και ζυγίζονται . Στη συνέχεια δοκιμάζεται ένα δείγμα νομισμάτων που αφαιρέθηκαν από το κουτί για καθαρότητα .

Το Nuovo Cronica , μια ιστορία του 14ο αιώνα της Φλωρεντίας από τον τραπεζίτη και ανώτερο υπάλληλο της Φλωρεντίας Giovanni Villani , περιλαμβάνει πολλές στατιστικές πληροφορίες σχετικά με τον πληθυσμό , τα διατάγματα , το εμπόριο , την εκπαίδευση και τις θρησκευτικές εγκαταστάσεις , και έχει περιγραφεί ως η πρώτη εισαγωγή στατιστικής ως θετικό στοιχείο στην ιστορία , αν και δεν υπήρχε ούτε ο όρος ούτε η έννοια της στατιστικής σαν συγκεκριμένο πεδίο ακόμα . Όμως

αυτό αποδείχθηκε λανθασμένο μετά την ανακάλυψη του βιβλίου του Al – Kindi πάνω στην ανάλυση συχνότητας .

Ο αριθμητικός μέσος ,αν και μια έννοια γνωστή στους Έλληνες ,δεν γενικεύτηκε σε περισσότερες από δύο τιμές μέχρι τον 16ο αιώνα . Η ανακάλυψη του δεκαδικού συστήματος από τον Simon Stevin το 1585 φαίνεται πιθανό να διευκόλυνε αυτούς τους υπολογισμούς . Αυτή η μέθοδος υιοθετήθηκε για πρώτη φορά στην αστρονομία από τον Tycho Brahe , ο οποίος προσπαθούσε να μειώσει τα λάθη στις εκτιμήσεις του σχετικά με τις θέσεις διάφορων ουράνιων σωμάτων .

Η ιδέα της διαμέσου προήλθε από το βιβλίο του Edward Wright για την πλοήγηση (ορισμένα σφάλματα στην ναυσιπλοΐα) το 1599 σε μια ενότητα σχετικά με τον προσδιορισμό της τοποθεσίας με μια πυξίδα . Ο Wright θεώρησε ότι η τιμή αυτή ήταν η πιο πιθανή να είναι η σωστή τιμή σε μια σειρά από παρατηρήσεις .

Η γέννηση της στατιστικής χρονολογείται συχνά στο 1662 , όταν ο Τζόν Γκράουντ μαζί με τον Γουίλιαμ Πέτι ανέπτυξαν πρώιμες ανθρώπινες στατιστικές και απογραφικές μεθόδους που παρείχαν ένα πλαίσιο για την σύγχρονη δημογραφία . Δημιούργησε τον πρώτο πίνακα ζωής , δίνοντας πιθανότητες επιβίωσης σε κάθε ηλικία . Το βιβλίο του “ Natural And Political Observations Made Upon The Bills Of Mortality ” χρησιμοποίησε ανάλυση των κυλίνδρων θνησιμότητας για να κάνει την πρώτη στατιστικά βασισμένη εκτίμηση του πληθυσμού του Λονδίνου . Γνώριζε ότι υπήρχαν περίπου 13.000 κηδείες ετησίως στο Λονδίνο και ότι τρία άτομα πέθαιναν ανά έντεκα οικογένειες κάθε χρόνο . Εκτίμησε από τα ενοριακά αρχεία ότι η μέση οικογένεια είχε οχτώ μέλη και υπολόγισε ότι ο πληθυσμός του Λονδίνου ήταν περίπου 384.000 . Αυτή είναι η πρώτη γνωστή χρήση ενός εκτιμητή αναλογίας . Ο Laplace το 1802 υπολόγισε τον πληθυσμό της Γαλλίας με μια παρόμοια μέθοδο .

Αν και το αρχικό πεδίο της στατιστικής περιοριζόταν σε δεδομένα χρήσιμα για την διακυβέρνηση , η προσέγγιση επεκτάθηκε σε πολλούς τομείς επιστημονικής ή εμπορικής φύσης κατά τον 19ο αιώνα . Οι μαθηματικές βάσεις για το θέμα βασίστηκαν σε μεγάλο βαθμό στην νέα θεωρία πιθανοτήτων , που πρωτοστάτησε τον 16ο αιώνα από τους Gerolamo , Cardano , Pierre de Fermat και Blaise Pascal . Ο Christian Huygens (1657) έδωσε την πρώτη γνωστή επιστημονική κατεργασία του θέματος .

Το Ars Conjectandi του Jacob Bernoulli (1713) και το Doctrine Of Chances του Abraham de Moivre (1718) αντιμετώπισαν το θέμα ως κλάδο των μαθηματικών . Στο βιβλίο του ο Bernoulli εισήγαγε την ιδέα να αντιπροσωπεύεται η απόλυτη βεβαιότητα με την μονάδα και η πιθανότητα να παίρνει πάντα ως τιμή έναν αριθμό μεταξύ του μηδέν και της μονάδας . Μια βασική πρώιμη εφαρμογή στατιστικής τον 18ο αιώνα ήταν η αναλογία ανθρώπινου φύλου κατά την γέννηση . Ο John Arbuthnot ασχολήθηκε με αυτή την ερώτηση το 1710 . Ο Arbuthnot εξέτασε τα αρχεία γεννήσεων του Λονδίνου για καθένα από τα 82 χρόνια από το 1629 έως και το 1710 . Σε κάθε χρόνο ο αριθμός των αρσενικών που είχαν γεννηθεί στο Λονδίνο ξεπερνούσε τον αριθμό των θηλυκών . Θεωρώντας εξίσου πιθανές περισσότερες γεννήσεις αρσενικών ή περισσότερες γεννήσεις θηλυκών , η πιθανότητα του παρατηρούμενου αποτελέσματος είναι 0.5^82 (0.5 στην δύναμη του 82) , σε σύγχρονους όρους η τιμή p . Αυτή η τιμή είναι εξωφρενικά μικρή , οδηγώντας τον Arbuthnot ότι αυτό δεν οφειλόταν στην τύχη , αλλά στην θεϊκή πρόνοια . “ Από όπου προκύπτει ότι κυβερνά η τέχνη όχι η ευκαιρία ” . Αυτό είναι και άλλο έργο του Arbuthnot που θεωρείται ως η πρώτη χρήση τεστ σημαντικότητας , το πρώτο παράδειγμα συλλογισμού σχετικά με

την στατιστική σημασία και την ηθική βεβαιότητα , και ίσως η πρώτη δημοσιευμένη έκθεση μιας μη-παραμετρικής δοκιμής .

Η επίσημη μελέτη της θεωρίας των σφαλμάτων μπορεί να εντοπισθεί στην Opera Miscellanea (1722) του Roger Cotes , όμως ένα υπόμνημα που ετοίμασε ο Thomas Simpson το 1755 εφάρμοσε αρχικά την θεωρία στην συζήτηση των σφαλμάτων της παρατήρησης . Η επανεκτύπωση αυτού του υπομνήματος (1757) καθορίζει τα αξιώματα ότι θετικά και αρνητικά σφάλματα είναι εξίσου πιθανά , και ότι υπάρχουν ορισμένα όρια εντός των οποίων πρέπει να πέσουν όλα τα σφάλματα ; συζητούνται συνεχή σφάλματα και δίνεται μια καμπύλη πιθανότητας . Ο Simpson αναφέρθηκε σε πολλές πιθανές κατανομές σφαλμάτων . Αρχικά εξέτασε την ομοιόμορφη κατανομή και έπειτα την διακριτή συμμετρική τριγωνική κατανομή ακολουθούμενη από την συνεχή συμμετρική τριγωνική .

Ο Tobias Mayer , στην μελέτη του για την απελευθέρωση του φεγγαριού (1750) εφηύρε την πρώτη επίσημη μέθοδο για την εκτίμηση αγνώστων ποσοτήτων γενικεύοντας τον μέσο όρο των παρατηρήσεων υπό πανομοιότυπες συνθήκες με τον μέσο όρο ομάδων παρόμοιων εξισώσεων. Ο Roger Joseph Boscovich το 1755 βασιζόμενος στο έργο του για το σχήμα της γης το οποίο πρότεινε στο βιβλίο του θεώρησε ότι η πραγματική τιμή μιας σειράς παρατηρήσεων θα ήταν αυτή που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των απόλυτων σφαλμάτων . Στην σύγχρονη ορολογία αυτή η τιμή είναι η διάμεσος . Το πρώτο παράδειγμα αυτού που αργότερα έγινε γνωστό ως η κανονική καμπύλη μελετήθηκε από τον Abraham de Moivre που σχεδίασε αυτή την καμπύλη στις 12 Νοεμβρίου του 1733 . Ο Abraham de Moivre μελετούσε τον αριθμό των κορωνών που εμφανιζόντουσαν όταν πετούσε ένα δίκαιο νόμισμα.

Το 1761 ο Thomas Bayes απέδειξε το θεώρημα του Bayes και το 1765 ο Joseph Priestley επινόησε τα πρώτα γραφήματα χρονοδιαγράμματος . Ο Johann Heinrich Lambert στο βιβλίο του Anlage tur Architectonic (1765) πρότεινε το ημικύκλιο για την κατανομή των σφαλμάτων . Ο Pierre –Simon Laplace (1774) έκανε τη πρώτη προσπάθεια να συνάψει ένα κανόνα για τον συνδυασμό παρατηρήσεων από τις αρχές της θεωρίας των πιθανοτήτων . Εκπροσώπησε το νόμο της πιθανότητας των σφαλμάτων με μια καμπύλη και συνήγαγε ένα τύπο για τον μέσο όρο τριών παρατηρήσεων .

Ο Laplace το 1774 σημείωσε ότι η συχνότητα ενός σφάλματος θα μπορούσε να εκφραστεί ως μια εκθετική συνάρτηση του μεγέθους του (μόλις το σημείο του αγνοηθεί) . Αυτή η κατανομή είναι γνωστή ως κατανομή Laplace . Ο Lagrange πρότεινε το 1776 μια παραβολική κατανομή σφαλμάτων . Το 1778 ο Laplace δημοσίευσε τον δεύτερο νόμο των σφαλμάτων όπου σημείωσε ότι η συχνότητα ενός σφάλματος ήταν ανάλογη του εκθετικού του τετραγώνου του μεγέθους της . Αυτό στην συνέχεια ανακαλύφθηκε εκ νέου από τον Gauss (πιθανώς το 1795) και είναι πλέον γνωστό ως η κανονική κατανομή η οποία έχει κεντρική σημασία στην στατιστική . Αυτή η κατανομή αναφέρθηκε για πρώτη φορά ως η κανονική κατανομή από τον C.S .Peirce το 1873 , ο οποίος μελετούσε τα σφάλματα μέτρησης όταν ένα αντικείμενο αφηνόταν να πέσει πάνω σε μια ξύλινη βάση . Επέλεξε τον όρο κανονική λόγω της συχνής εμφάνισης του σε φυσικές μεταβλητές .

Ο Lagrange πρότεινε επίσης το 1781 δύο άλλες κατανομές για σφάλματα - μια ανυψωμένη κατανομή συνημίτονων (raised cosine) και μια λογαριθμική κατανομή . Ο Laplace το 1781 έδωσε ένα τύπο για το νόμο της διευκόλυνσης του σφάλματος (

ένας όρος που οφείλεται στον Joseph Louis Lagrange 1774) αλλά οδήγησε σε μη ελεγχόμενες εξισώσεις . Ο Daniel Bernoulli .(1778) εισήγαγε την αρχή του μέγιστου γινομένου των πιθανοτήτων ενός συστήματος ταυτόχρονων σφαλμάτων . Το 1786 ο William Playfair (1759- 1823) εισήγαγε την ιδέα της γραφικής αναπαράστασης στην στατιστική . Ο William εφηύρε το γράφημα γραμμών , ράβδων και το ιστόγραμμα και τα ενσωμάτωσε στα έργα ου για τα οικονομικά , τον εμπορικό και πολιτικό άτλαντα . Το 1795 δημιούργησε το γράφημα πίτας και το γράφημα κύκλου που χρησιμοποίησε για να δείξει την εξέλιξη των εισαγωγών και εξαγωγών της Αγγλίας . Αυτά τα τελευταία γραφήματα συγκέντρωσαν την γενική προσοχή όταν ο William δημοσίευσε παραδείγματα στο Statistic Breviary του το 1801 . Ο Laplace σε μια έρευνα των κινήσεων του Κρόνου και του Δία το 1787 , γενίκευσε την μέθοδο του Mayer χρησιμοποιώντας διαφορετικούς γραμμικούς συνδυασμούς μιας μεμονωμένης ομάδας εξισώσεων .

Το 1791 ο Sir John Sinclair εισήγαγε τον όρο στατιστική στα Αγγλικά στους στατιστικούς λογαριασμούς του στην Σκωτία . Το 1862 ο Laplace εκτίμησε ότι ο πληθυσμός της Γαλλίας ήταν 28.328.612. Υπολόγισε αυτόν τον αριθμό χρησιμοποιώντας τον αριθμό των γεννήσεων κατά το προηγούμενο έτος και τα στοιχεία απογραφής για τρείς κοινότητες. Τα στοιχεία απογραφής αυτών των κοινοτήτων έδειξαν ότι είχαν 2.037.615 άτομα και ότι ο αριθμός των γεννήσεων ήταν 71.860 . Υποθέτοντας ότι αυτά τα δείγματα ήταν αντιπροσωπευτικά της Γαλλίας , ο Laplace παρήγαγε την εκτίμηση του για ολόκληρο τον πληθυσμό .

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων η οποία χρησιμοποιήθηκε για την ελαχιστοποίηση σφαλμάτων κατά την μέτρηση δεδομένων , δημοσιεύτηκε ανεξάρτητα από τους Adrien – Marie Legendre (1805) , Robert Adrain (1808) και Carl – Friedrich Gauss (1809) . Ο Gauss είχε χρησιμοποιήσει την μέθοδο στην διάσημη πρόβλεψή του για την θέση του πλανήτη νάνου Ceres το 1801 . Οι παρατηρήσεις στις οποίες βασίστηκαν οι υπολογισμοί του έγιναν από τον Ιταλό μοναχό Piazzi . Πριν την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων χρησιμοποιήθηκε η διάμεση κλίση παλινδρόμησης . Αυτή η μέθοδος ελαχιστοποιεί το άθροισμα των απόλυτων αποκλίσεων . Μια μέθοδος εκτίμησης αυτής της κλίσης εφευρέθηκε από τον Roger Joseph Boscovich το 1760 , την οποία εφάρμοσε στην αστρονομία .

Ο όρος πιθανό σφάλμα - η διάμεση απόκλιση από τον μέσο όρο - εισήχθη το 1815 από τον Γερμανό αστρονόμο Frederik Wilhelm Bessel . Ο Antoine Augustin Cournot το 1845 ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον όρο διάμεσος για την τιμή που χωρίζει μια κατανομή πιθανότητας σε δύο ίσα μισά . Άλλοι συνεισφέροντες στην θεωρία των σφαλμάτων ήταν οι Ellis (1844) , De Morgan (1864) , Glaiser (1872) και Giovanni Schiaparelli (1875) .

Στους συγγραφείς του 19ο αιώνα πάνω στην στατιστική θεωρία περιλαμβάνονται οι Laplace , S.Lacroix (1816) , Littrow (1833) , Dedekind (1860) Helmert (1872) , Laurent (1873) , Liagre , Didion , De Morgan και Boole . Ο Gustav Thedor Fechner χρησιμοποίησε την διάμεσο σε κοινωνιολογικά ψυχολογικά φαινόμενα . Προηγουμένως είχε χρησιμοποιηθεί μόνο στην αστρονομία και σε συναφείς τομείς . Ο Francis Galton χρησιμοποίησε τον αγγλικό όρο διάμεσος για πρώτη φορά το 1881 έχοντας χρησιμοποιήσεις νωρίτερα τους όρους μεσαίας τιμής το 1869 και τον μέσο όρο το 1880 . Ο Adolphe Quetelet (1796- 1874) , ένας άλλος σημαντικός ιδρυτής της στατιστικής εισήγαγε την έννοια του μέσου ανθρώπου ως ένα μέσο κατανόησης των σύνθετων κοινωνικών φαινομένων όπως τα ποσοστά

εγκληματικότητας , τα ποσοστά γάμου και τα ποσοστά αυτοκτονιών .

Οι πρώτες δοκιμές της κανονικής κατανομής εφευρέθηκαν από τον Γερμανό στατιστικολόγο Wilhelm Lexis το 1870 . Τα μόνα διαθέσιμα σε αυτόν σύνολα δεδομένων που μπορούσε να παρουσιάσει ότι ήταν κανονικά κατανεμημένα ήταν τα ποσοστά γεννήσεων .

1.3 Ανάπτυξη της σύγχρονης στατιστικής

Αν και η προέλευση της στατιστικής θεωρίας εντοπίζεται στην εξέλιξη των πιθανοτήτων τον 18ο αιώνα , το σύγχρονο πεδίο της στατιστικής εμφανίστηκε μόνο στα τέλη του 19ου αιώνα και στις αρχές του 20ου αιώνα σε τρία στάδια . Το πρώτο κύμα ξεκίνησε με το έργο των Francis Galton και Karl Pearson , οι οποίοι μετέτρεψαν την στατιστική σε μια αυστηρά μαθηματική επιστήμη που χρησιμοποιείται για ανάλυση , όχι μόνο στην επιστήμη αλλά και στην βιομηχανία όπως επίσης και στην πολιτική . Το δεύτερο κύμα του 1910 και του 20ου αιώνα ξεκίνησε από τον William Serly Gosset και έφτασε στο αποκορύφωμά του με τις ιδέες του Ronald Fisher . Αυτό περιλάμβανε την ανάπτυξη καλύτερου σχεδιασμού πειραματικών μοντέλων , τεστ υποθέσεων και τεχνικών , για χρήση σε μικρά δείγματα μοντέλων . Το τελευταίο κύμα , το οποίο αποτελούνταν κατά κύριο λόγο την βελτίωση και επέκταση των προηγούμενων εξελίξεων , προέκυψε από την συνεργασία μεταξύ του Egon Pearson και του Jerzy Neyman την δεκαετία του 1930 .

Σήμερα οι στατιστικές μέθοδοι εφαρμόζονται σε όλους τους τομείς που περιλαμβάνουν την λήψη αποφάσεων για την απόκτηση ακριβών συμπερασμάτων από ένα συγκεντρωτικό σύνολο δεδομένων και για την λήψη αποφάσεων ενόψει της αβεβαιότητας βάσει της στατιστικής μεθοδολογίας . Οι πρώτοι στατιστικοί φορείς ιδρύθηκαν στις αρχές του 19ου αιώνα . Η Βασιλική στατιστική εταιρεία (Royal Statistical Society) ιδρύθηκε το 1834 και η Florence Nightingale η πρώτη γυναίκα μέλος της πρωτοστάτησε στην εφαρμογή στατιστικής ανάλυσης σε προβλήματα υγείας για την επέκταση της επιδημιολογικής κατανόησης και της πρακτικής δημόσιας υγείας . Ωστόσο οι μεθόδους που χρησιμοποιούσαν τότε δεν θα θεωρούνταν σύγχρονες σήμερα .

Το βιβλίο του φοιτητή της Οξφόρδης Francis Ysidro Edgeworth , Metreike : Or the Method Of Measuring Probability And Utility (1887) ασχολήθηκε με την πιθανότητα ως βάση της επαγωγικής λογικής , και τα μετέπειτα έργα του επικεντρώθηκαν στην φιλοσοφία της τύχης . Η πρώτη του εργασία στην στατιστική (1883) διερεύνησε τον νόμο του σφάλματος (κανονική κατανομή) και οι μέθοδοι στατιστικής του (1885) εισήγαγαν μια πρώιμη εκδοχή της κατανομής t , της επέκτασης Edgeworth , της σειράς Edgeworth , της μεθόδου μετασχηματισμού μεταβλητών και την ασυμπτωτική θεωρία εκτίμησης μέγιστης πιθανότητας .

Ο Νορβηγός Anlers Nicolai Kiaer εισήγαγε την έννοια της στρωματοποιημένης δειγματοληψίας το 1895 .Ο Arthur Lyon Bowley εισήγαγε νέες μεθόδους

δειγματοληψίας το 1906 όταν εργαζόταν στην κοινωνική στατιστική . Παρόλο που οι στατιστικές έρευνες για τις κοινωνικές συνθήκες είχαν ξεκινήσει με το έργο του Charles Booth " Life And Labour Of The People In London " (1889 – 1903) και του Seebohm Rowtree " Poverty , A Study Of Town Life " (1901) η καινοτομία - κλειδί του Bowley αποτελούσε την χρήση τεχνικών τυχαίας δειγματοληψίας . Οι προσπάθειες του κορυφώθηκαν στην νέα έρευνα του " New Survey Of London Life And Labour " .

Ο Francis Galton θεωρείται ως ένας από τους κύριους ιδρυτές της στατιστικής θεωρίας . Οι συνεισφορές του στο πεδίο περιλαμβάνουν την εισαγωγή των εννοιών της τυπικής απόκλισης , του συσχετισμού , της παλινδρόμησης και την εφαρμογή αυτών των μεθόδων στην μελέτη της ποικιλίας των ανθρώπινων χαρακτηριστικών όπως το ύψος , το βάρος , το μήκος βλεφαρίδων μεταξύ άλλων .

Ο Galton υπέβαλε μια εργασία στην Nature το 1907 σχετικά με την χρησιμότητα της διαμέσου . Εξέτασε την ακρίβεια 787 εικασιών για το βάρος ενός βοδιού σε μια έκθεση . Το πραγματικό βάρος ήταν 1208 λίβρες : η μέση εικασία ήταν 1198 . Οι εικασίες ήταν αξιοσημείωτα μη κανονικά κατανεμημένες .

Η δημοσίευση του Galton " Natural Inheritance " το 1889 προκάλεσε το ενδιαφέρον ενός λαμπρού μαθηματικού , του Karl Pearson , όπου έπειτα εργάσθηκε στο University College London και ίδρυσε την επιστήμη της μαθηματικής στατιστικής . Τόνισε την στατιστική βάση των επιστημονικών νόμων και προώθησε την μελέτη της και το εργαστήριο του προσέλκυσε μαθητές από όλο τον κόσμο λόγω των νέων μεθόδων ανάλυσης που χρησιμοποιούσε , συμπεριλαμβανομένου του Udny Yule . Το έργο του επεκτάθηκε και περιλάμβανε τους τομείς της βιολογίας , της επιδημιολογίας , της ανθρωπομετρίας , της ιατρικής και της κοινωνικής ιστορίας . Το 1901 , με τον Walter Weldon , ιδρυτή της βιομετρίας και τον Galton ιδρύθηκε το περιοδικό Biometrika ως το πρώτο περιοδικό μαθηματικής στατιστικής και βιομετρίας .

Το έργο αυτού και του Galton υποστηρίζει πολλές από τις κλασσικές στατιστικές μεθόδους που βρίσκονται σε κοινή χρήση σήμερα , συμπεριλαμβανο-μένου του συντελεστή συσχέτισης που ορίζεται ως (product moment) η μέθοδος των στιγμών για την προσαρμογή των κατανομών σε δείγματα . Το σύστημα συνεχών καμπυλών του Pearson που αποτελεί την βάση των συμβατικών κατανομών συνεχούς πιθανότητας . Η Χ απόσταση ένας πρόδρομος και ειδική περίπτωση της απόστασης και η Ρ-τιμή που ορίζεται ως το μέτρο πιθανότητας του συμπληρώματος της μπάλας με την υποτιθέμενη τιμή ως κέντρο και την απόσταση Χ ως ακτίνα . Εισήγαγε επίσης τον όρο " τυπική απόκλιση ".

Ίδρυσε ακόμα την θεωρία των στατιστικών τεστ υποθέσεων , τα τεστ Χ^2 του Pearson και την ανάλυση κύριων συστατικών . Το 1911 ίδρυσε το πρώτο στον κόσμο τμήμα στατιστικής στο πανεπιστήμιο University College London . Το δεύτερο κύμα μαθηματικής στατιστικής ξεκίνησε από τον Ronald Fisher ο οποίος έγραψε δύο εγχειρίδια , το Statistical Methods For Research Workers που δημοσιεύθηκε το 1925 και το Design Of Experiments που δημοσιεύθηκε δέκα χρόνια αργότερα τα οποία καθόρισαν τον ακαδημαϊκό κλάδο σε πανεπιστήμια σε όλο τον κόσμο .

Επιπλέον συστηματοποίησε τα προηγούμενα αποτελέσματα , τοποθετώντας τα σε αυστηρή μαθηματική βάση .Το 1918 στο σεμινάριο του The Correlation Between Relatives On The Supposition Of Mendelian Inheritance , έγινε η πρώτη χρήση του στατιστικού όρου variance . Το 1919 στο Rothamsted Experimental Station άρχισε μια μεγάλη μελέτη των εκτεταμένων συλλογών δεδομένων που καταγραφόντουσαν εδώ και πολλά χρόνια . Αυτό οδήγησε σε μια σειρά αναφορών

με τον γενικό τίτλο Studies In Crop Variation . Το 1930 δημοσίευσε την θεωρία του The Genetical Theory Of Natural Selection στην οποία εφάρμοσε στατιστική στην εξέλιξη .

Κατά τα επόμενα επτά χρόνια πρωτοστάτησε στις αρχές του σχεδιασμού των πειραμάτων και εκπόνησε τις μελέτες του στην ανάλυση της διακύμανσης . Συνέχισε τις μελέτες του σχετικά με την στατιστική μικρών δειγμάτων . Ίσως ακόμη σημαντικότερο , ξεκίνησε την συστηματική προσέγγιση της ανάλυσης πραγματικών δεδομένων ως εφαλτήριο για την ανάπτυξη νέων στατιστικών μεθόδων . Ανέπτυξε υπολογιστικούς αλγορίθμους για την ανάλυση δεδομένων από τα ισορροπημένα πειραματικά του σχέδια . Το 1923 το έργο του αυτό είχε ως αποτέλεσμα την δημοσίευση του πρώτου βιβλίου του Statistical Methods For Research Workers . Αυτό το βιβλίο πέρασε από πολλές εκδόσεις και μεταφράσεις τα τελευταία χρόνια και έγινε βασικό έργο αναφοράς για επιστήμονες σε πολλούς κλάδους .Το 1935 το βιβλίο αυτό ακολούθησε το Design Of Experiments το οποίο χρησιμοποιήθηκε επίσης ευρέως .

Εκτός από την ανάλυση διακύμανσης ο Fisher ονόμασε και προώθησε την μέθοδο εκτίμησης της μέγιστης πιθανότητας . Ο Fisher δημιούργησε επίσης τις έννοιες της επάρκειας , των βοηθητικών στατιστικών , της γραμμικής διάκρισης του Fisher και των πληροφοριών Fisher . Το άρθρο του On A Distribution Yielding The Error Functions Of Several Well Known Statistics (1924) παρουσίασε το τεστ X^2 του Pearson και το t-τεστ του William Sealy Gosset στο ίδιο πλαίσιο με την γκαουσιανή κατανομή και την δική του παράμετρο στην ανάλυση διακύμανσης της z κατανομής του Fisher (η οποία χρησιμοποιήθηκε περισσότερο δεκαετίες αργότερα με την μορφή της κατανομής F) .

Το επίπεδο σημαντικότητας 5% φαίνεται να εισήχθη από τον Fisher το 1925 . Ο Fisher δήλωσε ότι οι αποκλίσεις που υπερβαίνουν το διπλάσιο της τυπικής απόκλισης θεωρούνται σημαντικές . Πριν από αυτό οι αποκλίσεις που υπέρβαιναν τρείς φορές το πιθανό σφάλμα θεωρούνταν σημαντικές . Για μια συμμετρική κατανομή το πιθανό σφάλμα είναι το μισό του διατεταρτημοριακού εύρους . Για μια κανονική κατανομή το πιθανό σφάλμα είναι περίπου τα δύο τρίτα της τυπικής απόκλισης . Φαίνεται ότι το κριτήριο 5% του Fisher βασίστηκε στην προηγούμενη πρακτική .

Άλλες σημαντικές συνεισφορές εκείνη την χρονική στιγμή περιλάμβανα τον συντελεστή συσχέτισης του Charles Spearman ο οποίος αποτέλεσε μια χρήσιμη επέκταση του συντελεστή Pearson . Ο William Sealy Gosset , Άγγλος στατιστικολόγος που είναι περισσότερο γνωστός με το ψευδώνυμο Student , εισήγαγε την κατανομή t του Student , μια συνεχή κατανομή πιθανότητας χρήσιμη σε καταστάσεις όπου το μέγεθος του δείγματος είναι πολύ μικρό και η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι άγνωστη .

Ο Egon Pearson (υιός του Karl) και ο Jerzy Neyman εισήγαγαν τις έννοιες του σφάλματος τύπου (II) , την ισχύ ενός τεστ όπως επίσης και τα διαστήματα εμπιστοσύνης . Ο Jerzy Neyman το 1934 έδειξε ότι η στρωματοποιημένη τυχαία δειγματοληψία ήταν γενικά μια καλύτερη μέθοδος εκτίμησης από την σκόπιμη δειγματοληψία .

1.4 Μπεϋζιανή Στατιστική : Μία σύντομη εισαγωγή

Η Μπεϋζιανή στατιστική είναι μια θεωρία που ανήκει στο πεδίο της στατιστικής , η οποία βασίζεται στην Μπεϋζιανή ερμηνεία της πιθανότητας όπου αυτή εκφράζεται ως ένας βαθμός πίστης σε ένα γεγονός . Ο βαθμός πίστης μπορεί να βασίζεται σε προϋπάρχουσες γνώσεις όσον αφορά το γεγονός όπως για παράδειγμα αποτελέσματα προηγούμενων πειραμάτων ή προσωπικές πεποιθήσεις για αυτό . Αυτή η ερμηνεία (Μπεϋζιανή) διαφέρει σε σχέση με έναν μεγάλο αριθμό ερμηνειών πιθανότητας όπως της συχνής (frequentist) που καθορίζει την πιθανότητα ως το όριο της σχετικής συχνότητας ενός γεγονότος έπειτα από πολλές δοκιμές .

Οι Μπεϋζιανές στατιστικές μέθοδοι χρησιμοποιούν το θεώρημα του Bayes για να ενημερώσουν και να υπολογίσουν πιθανότητες με την απόκτηση νέων δεδομένων .Το θεώρημα του Bayes περιγράφει την δεσμευμένη πιθανότητα ενός γεγονότος βασιζόμενο στα δεδομένα καθώς επίσης και σε προγενέστερες πληροφορίες ή πεποιθήσεις σχετικά με το γεγονός ή και συνθήκες που συνδέονται με το γεγονός . Για παράδειγμα , στην Μπεϋζιανή συμπερασματολογία το θεώρημα του Bayes μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των παραμέτρων μιας κατανομής πιθανότητας ή ενός στατιστικού μοντέλου .Καθώς η Μπεϋζιανή στατιστική αντιμετωπίζει την πιθανότητα ως ένα βαθμό πίστης , το θεώρημα του Bayes έχει την δυνατότητα να αναθέσει άμεσα μια κατανομή πιθανότητας που ποσοτικοποιεί αυτό το βαθμό πίστης σε μια παράμετρο ή σε ένα σύνολο παραμέτρων .

Η Μπεϋζιανή στατιστική έχει πάρει το όνομά της από τον Thomas Bayes ο οποίος διατύπωσε μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος Bayes σε μια εργασία του που εκδόθηκε το 1763 και αφορούσε την επίλυση ενός προβλήματος στα δόγματα των πιθανοτήτων . Σε αρκετές διατριβές που εκτείνονται από τα τέλη του 18 έως τις αρχές του 19ου αιώνα ο Pierre Simon Laplace ανέπτυξε την Μπεϋζιανή ερμηνεία της πιθανότητας . Ο Laplace χρησιμοποίησε μεθόδους όπου σήμερα θεωρούνται Μπεϋζιανές για να επιλύσει έναν μεγάλο αριθμό στατιστικών προβλημάτων .Πολλές Μπεϋζιανές μέθοδοι αναπτύχθηκαν από μεταγενέστερους συγγραφείς , όμως ο όρος δεν χρησιμοποιούταν ευρέως ακόμα για την περιγραφή τέτοιων μεθόδων ,πράγμα που συνέβη την δεκαετία του 1950. Κατά την διάρκεια του μεγαλύτερου μέρους του 20ου αιώνα οι Μπεϋζιανές μέθοδοι αντιμετωπίζονταν δυσμενώς από πολλούς στατιστικολόγους εξαιτίας φιλοσοφικών και πρακτικών θεωρήσεων. Πιο συγκεκριμένα πολλές Μπεϋζιανές μέθοδοι απαιτούσαν την ολοκλήρωση πολλών υπολογισμών και οι περισσότερες μέθοδοι που χρησιμοποιούνταν κατά την διάρκεια του αιώνα βασίζονταν στην συχνή ερμηνεία . Παρ’όλα αυτά , με την έλευση ισχυρών υπολογιστών και νέων αλγορίθμων όπως η Μαρκοβιανή αλυσίδα Monte Carlo (MCMC) παρατηρείται αυξανόμενη χρήση των Μπεϋζιανών μεθόδων στην στατιστική στον 21ο αιώνα.

Ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός αποτελεί μια θεωρία για το πόσο ισχυρά πρέπει να πιστεύει κάποιος δηλώσεις που είναι ανοιχτές για διερεύνηση . Η εκδοχή του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού στην οποία θα αναφερθούμε χαρακτηρίζεται από τα ακόλουθα δόγματα. Η ισχύς των πεποιθήσεων ενός παράγοντα οφείλουν να συμπεριφέρονται σαν πιθανότητες : θα πρέπει να αντιπροσωπεύονται από πραγματικούς αριθμούς στο μοναδιαίο διάστημα και κάποιος οφείλει να πιστεύει

μια διαχώριση αμοιβαία αποκλειόμενων δηλώσεων στο βαθμό του αθροίσματος των βαθμών πίστης των διαζεύξεων . Επιπλέον αυτοί οι βαθμοί πίστης θα πρέπει να σχηματίζονται βάσει εμπειρικών αποδείξεων , όπως για παράδειγμα να βαθμονομούνται από γνωστές συχνότητες . Σε περιπτώσεις όπου οι εμπειρικές αποδείξεις δεν είναι σε θέση να καθορίσουν πλήρως τους βαθμούς πίστης πρέπει να είναι αμφιλεγόμενοι . Για να συνοψίσουμε , ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός με τον οποίο θα ασχοληθούμε ορίζει ότι : οι βαθμοί πίστης οφείλουν να είναι πιθανολογικοί , βαθμονομημένοι από αποδείξεις αλλιώς αμφιλεγόμενοι .

Θα δώσουμε ένα παράδειγμα για να παρουσιάσουμε σαφέστερα τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η θεωρία . Έστω ότι ένας ιατρός προσπαθεί να καταλήξει σε μια πρόγνωση για έναν ασθενή που έχει καρκίνο του μαστού . Ο ιατρός γνωρίζει μόνο ότι ο ασθενής έχει θεραπευτεί στο παρελθόν από καρκίνο του μαστού και ότι σε παρόμοιες περιπτώσεις κατά ένα διάστημα 10-40% ο συγκεκριμένος καρκίνος επανέρχεται . Σύμφωνα με τον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό ο βαθμός με τον οποίο θα πρέπει να πιστεύει ένας παράγοντας ότι ο καρκίνος του ασθενή θα επανέλθει (R : Recur) αντιπροσωπεύεται με μια πιθανότητα $\mathrm{P(R)}$ ε $[0,1]$ όπου $\mathrm{P(R)} + \mathrm{P(-R)} = 1$. Επιπλέον αυτός ο βαθμός πίστης πρέπει να περιοριστεί και από την αποδεικτική συχνότητα που έχουμε στην διάθεσή μας , άρα $\mathrm{P(R)}$ ε $[0.1,0.4]$.Τέλος ο ιατρός θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν περισσότερο διφορούμενος μεταξύ του R και -R οπότε να θέσει $\mathrm{P(R)} = 0.4$ και $\mathrm{P(-R)} = 0.6$ (βλέπουμε ότι ισχύει $\mathrm{P(R)} + \mathrm{P(-R)} = 0.4 + 0.6 = 1$) .

Σύμφωνα με την παραδοσιακή θεωρία της Μπεϋζιανής επιστημολογίας οι ορθολογικοί βαθμοί πίστης είναι πιθανότητες , συμβατές με όλες τις διαθέσιμες αποδείξεις και ενήμερες σε περίπτωση εμφάνισης νέων αποδείξεων μέσω της Μπεϋζιανής συνθηκολόγησης .Οι αυστηρά υποκειμενικοί θεωρούν ότι οι αρχικοί βαθμοί πίστης είναι κατά μεγάλο μέρος ένα ζήτημα προσωπικής επιλογής . Οι εμπειρικά βασιζόμενοι υποκειμενικοί πιστεύουν ότι οι αρχικοί βαθμοί πίστης δεν αρκεί να είναι μόνο συνεπείς με το σύνολο των αποδείξεων αλλά οφείλουν επίσης να είναι βαθμονομημένοι με φυσικές πιθανότητες στον βαθμό που αυτές είναι γνωστές . Αντίθετα , οι αντικειμενικοί ισχυρίζονται ότι οι αρχικοί βαθμοί πίστης καθορίζονται πλήρως από τις αποδείξεις .

Παρ ’ότι η διάκριση μεταξύ των τριών ειδών Μπεϋζιανής επιστημολογίας που αναφέραμε παραπάνω εξακολουθεί να ισχύει , η εκδοχή του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού που θα εστιάσουμε δεν ενημερώνεται με συνθηκολόγηση (conditionalization) και όσον αφορά τις περιπτώσεις που οι πιθανότητες δεν είναι εφικτό να καθοριστούν από τις αποδείξεις ,ίσως να μην καθορίζονται επαρκώς και όταν αυτό είναι δυνατό , δεν καθορίζονται μόνο βάσει των αποδείξεων . Πιο συγκεκριμένα , οι βαθμοί πίστης ενός συντελεστή θα πρέπει να εξαρτώνται από τις αποδείξεις , την γλώσσα του αλλά και από ποικίλους άλλους παράγοντες .Οι αποδείξεις αποτελούνται από όλες τις πληροφορίες που παίρνει για δεδομένες ο συντελεστής στο τρέχον λειτουργικό του υλικό και η γλώσσα που χρησιμοποιεί ο παράγοντας εκτός του ότι του επιτρέπει να εκφράζει τις δηλώσεις που τον ενδιαφέρουν , ακόμα εννοιολογεί τα κυριότερα χαρακτηριστικά του κόσμου του και οριοθετεί όλες τις πιθανές περιστάσεις που μπορεί να θεωρήσει .

Ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός χαρακτηρίζεται από τρείς νόρμες . Ξεκινάμε με την νόρμα πιθανότητας όπου δηλώνει ότι η ισχύς της πίστης ενός παράγοντα θα πρέπει να αντιπροσωπεύεται από μια συνάρτηση πιθανότητας η οποία θα

καθορίζεται από τις προτάσεις της γλώσσας του παράγοντα . Δεύτερον , μία νόρμα βαθμονόμησης που υπάρχει έτσι ώστε η συνάρτηση πιθανότητας που αναφέραμε προηγουμένως να συνάδει με τις διαθέσιμες αποδείξεις που έχει στην κατοχή του ο παράγοντας . Τρίτον , μια νόρμα αμφιλογίας η οποία στο βαθμό που οι υπάρχουσες αποδείξεις επιτρέπουν μια ποικιλία από συναρτήσεις πιθανοτήτων που είναι συμβατές με αυτές τις αποδείξεις , οι βαθμοί πίστης θα πρέπει να αντιπροσωπεύονται από μια τέτοια συνάρτηση η οποία θα είναι διφορούμενη ανάμεσα στις βασικές δηλώσεις που εκφράζονται στην γλώσσα της .

Οι διαφορετικές εκδοχές του Μπεϋζιανισμού διακρίνονται μεταξύ τους ανάλογα με την στάση που έχουν απέναντι στις τρείς νόρμες που αναφέραμε . Ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός υποστηρίζει και τις τρείς ενώ σε αντίθεση οι εμπειρικά βασιζόμενοι υποκειμενικοί αποδέχονται τις νόρμες πιθανότητας και βαθμονόμησης απορρίπτουν της αμφιλογίας και οι αυστηρά υποκειμενικοί εγκρίνουν μονάχα την νόρμα πιθανότητας .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός

2.1 Μια βιώσιμη ερμηνεία της πιθανότητας

Για την καλύτερη κατανόηση της ιστορικής ανάπτυξης του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού είναι σημαντικό να διερευνήσουμε την αναζήτηση για μια βιώσιμη ερμηνεία της πιθανότητας. Μια φιλοσοφική θεωρία ή ερμηνεία πιθανοτήτων για να θεωρείται βιώσιμη οφείλει να καλύπτει αρκετές απαιτήσεις . Επειδή οι απόψεις διίστανται ως προς αυτές τις απαιτήσεις θα ασχοληθούμε με τις κυριότερες από αυτές . Μια φιλοσοφική ερμηνεία πιθανότητας θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από αντικειμενικότητα , λογισμό , επιστημολογία , ποικιλία και φιλαργυρία . Δηλαδή η φιλοσοφική ερμηνεία θα πρέπει να φροντίζει για την αντικειμενικότητα της πιθανότητας , να εξηγεί τον τρόπο με τον οποίο συλλογιζόμαστε και κρίνουμε τις πιθανότητες , να εξηγεί επίσης πώς αποκτούμε γνώσεις για τις πιθανότητες , να μπορεί να ανταπεξέλθει σε όλη την γκάμα των πιθανοτικών ισχυρισμών που κάνουμε και τέλος να είναι οντολογικά φειδωλή .

Ο Jacob Bernoulli ήταν ίσως ο πρώτος ο οποίος υποστήριξε τα κύρια δόγματα αυτού που σήμερα αναγνωρίζουμε ως αντικειμενική Μπεϋζιανή ερμηνεία της πιθανότητας . Ο Bernoulli ανέπτυξε την δική του αντίληψη για την πιθανότητα στην δεκαετία του 1680 αν και αυτή δεν εκδόθηκε παρά μόνο το 1713 , οχτώ χρόνια μετά τον θάνατό του . Αναγνώριζε την πιθανότητα ως βαθμό πίστης και πιο συγκεκριμένα δήλωνε ότι πράγματι η πιθανότητα αποτελεί ένα μέτρο βεβαιότητας αλλά διαφέρει από αυτή όπως ένα μέρος διαφέρει από το ολόκληρο . Επιπρόσθετα , ισχυριζόταν ότι οι βαθμοί πίστης που αναφέραμε νωρίτερα καθορίζονται από τις υπάρχουσες αποδείξεις ή στην απουσία αυτών από την αμφιλογία μεταξύ των πιθανοτήτων . Παραθέτει επίσης ένα παράδειγμα στο οποίο τρία καράβια αναχωρούν από το λιμάνι και έπειτα από ένα χρονικό διάστημα ένα από αυτά εξαφανίζεται λόγω ναυαγίου . Ποιο εξ ’αυτών συμπεραίνουμε ότι είναι άραγε ; Με αυτά που μας είναι γνωστά θα μπορούσε να είναι οποιοδήποτε από τα τρία καράβια ισοπίθανα . Γνωρίζοντας όμως ότι ένα από αυτά είχε περισσότερες φθορές λόγω της ηλικίας του , επίσης τα πανιά του ήταν σε χειρότερη κατάσταση και ότι ο καπετάνιος ήταν άπειρος καταλήγουμε

σύμφωνα με τον Bernoulli ότι είναι πιθανότερο σίγουρα αυτό το πλοίο να ναυάγησε.

Από τα παραπάνω είναι εμφανές ότι απαιτείται περισσότερη διερεύνηση σχετικά με το αν η ερμηνεία της πιθανότητας του Bernoulli πληροί τις προϋποθέσεις της αντικειμενικότητας . Από την μία πλευρά η πιθανότητα ερμηνεύεται ως ένα μέτρο πίστης ή βεβαιότητας και φαίνεται εύλογο να υποθέσουμε ότι διαφορετικοί παράγοντες με τα ίδια αποδεικτικά στοιχεία ίσως πιστεύουν το ίδιο γεγονός σε διαφορετικό βαθμό . Από την άλλη βλέπουμε ότι οι πιθανότητες είναι δέσμιες του της έκτασης και των ορίων των αποδείξεων κάποιου αλλά δεν εξαρτώνται από άλλους παράγοντες . Συμπερασματικά , δεν είναι ξεκάθαρο κατά πόσο η έννοια της πιθανότητας κατά τον Bernoulli μπορεί να ταξινομηθεί ως αντικειμενική .

Ο Bernoulli ήταν ένας από του πρωτοπόρους στην μαθηματική έννοια της πιθανότητας και απέδειξε μια εκδοχή την οποία σήμερα καλούμαι ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών . Όμως , οι πιθανότητες του δεν ταυτίζονται με την σύγχρονη μορφή τους καθώς δεν ήταν προσθετικές . Ως εκ τούτου κατά τον Bernoulli ήταν εφικτό ένα ενδεχόμενο να έχει πιθανότητα $2/3$ και το αντίθετο ενδεχόμενο $3/4$. Άρα παρατηρούμε ότι η έννοια της πιθανότητας του Bernoulli δεν ικανοποιεί τον λογισμό . Επίσης επέμενε ότι οι πιθανότητες πρέπει να βασίζονται σε όλες τις διαθέσιμες αποδείξεις και ότι αυτές επηρεάζονται τόσο από την παρουσία όσο και από την απουσία των αποδείξεων . Όπου οι αποδείξεις είναι μη συμπερασματικές , ο Bernoulli υποστήριζε πως πρέπει να δεσμευόμαστε στο βαθμό που μας εγγυώνται οι αποδείξεις . Δηλαδή κατά την κρίση μας θα πρέπει να προσέχουμε να μην προσδίδουμε περισσότερο βάρος στα πράγματα από ότι αυτά έχουν .

Στην συνέχεια στρεφόμαστε προς το επιθυμητό της ποικιλίας . Σε αυτό το σημείο οφείλουμε να αναφέρουμε ότι μόνο οι πιθανότητες μεμονωμένων περιπτώσεων είναι εφικτό να ερμηνευτούν άμεσα ως βαθμοί πίστης . Οι πεποιθήσεις συνδέονται με μεμονωμένες περιπτώσεις ή αλλιώς προτάσεις και όχι με γενικά αποτελέσματα όπως είναι οι ανοιχτοί τύποι ή τα επαναλαμβανόμενα πειράματα . Αντιθέτως , οι πιθανότητες συνδέονται και σε μεμονωμένες περιπτώσεις και σε επαναλαμβανόμενα ή γενικά φαινόμενα .Όσον αφορά την φιλαργυρία οι Μπεϋζιανές ερμηνείες των πιθανοτήτων ανταπεξέρχονται αρκετά καλά . Υποθετικά οτιδήποτε μεταφυσικό πρέπει να κάνει χώρο για πεποιθήσεις όπου ποικίλουν σε ισχύ και πράγματι για λογικούς βαθμούς πίστης . Ως εκ τούτου εάν οι πιθανότητες ερμηνεύονται ως λογικοί βαθμοί πίστης δεν είναι απαραίτητο να προστεθεί τίποτα στην οντολογία , δηλαδή δεν χρειάζεται να τεθεί κανένας καινούριος τύπος οντότητας .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν και η ερμηνεία του Bernoulli για την πιθανότητα παρουσιάζει αρκετά κοινά σημεία με την ερμηνεία του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού , δεν αποτελεί μια βιώσιμη ερμηνεία . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δεν είναι ξεκάθαρο κατά πόσο αυτή η ερμηνεία είναι αντικειμενική όπως επίσης δεν διευκρινίζονται οι ακριβείς μηχανισμοί για τον καθορισμό των πιθανοτήτων . Επιπλέον , η ερμηνεία του Bernoulli δεν παρέχει μια ερμηνεία πιθανότητας με την τρέχουσα προσθετική της μορφή αλλά με μια χαριστική ανάγνωση της ερμηνείας του Bernoulli μπορεί να ερμηνεύσει πιθανολογικές δηλώσεις μεμονωμένων και γενικών περιπτώσεων .

Η ερμηνεία της πιθανότητας του Thomas Bayes διατήρησε τις τρείς κυριότερες αρχές που διατύπωσε ο Bernoulli :

1) Η πιθανότητα είναι επιστημονική και κανονιστική και μετράει λογικές προσδοκίες
2) Η πιθανότητα καθορίζεται εν μέρει από τις αποδείξεις και πιο συγκεκριμένα από αποδείξεις παρατηρούμενων συχνοτήτων
3) Η πιθανότητα καθορίζεται εν μέρει μέσω της αμφιλογίας δηλαδή δεν δεσμεύεται σε μια έναντι σε οποιαδήποτε άλλο αριθμό επιτυχιών σε μια ακολουθία δοκιμών .

Για λόγους που δεν είναι απόλυτα ξεκάθαροι αυτό που ορίζεται σήμερα ως Μπεϋζιανή ερμηνεία της πιθανότητας ενσαρκώνει μόνο την πρώτη αρχή από αυτές που αναφέραμε παραπάνω . Πράγματι , οποιαδήποτε ερμηνεία των πιθανοτήτων η οποία ερμηνεύει τις πιθανότητες ως λογικούς βαθμούς πίστης ταξινομείται ως Μπεϋζιανή , παρόλο που η αντίληψη του Bayes επεκτεινόταν αρκετά περισσότερο από αυτό τον ισχυρισμό και σε οποιαδήποτε περίπτωση αυτός ο ισχυρισμός δεν προέρχεται από αυτόν . Η Μπεϋζιανή ερμηνεία της πιθανότητας δεν πρέπει να συγχέεται με την Μπεϋζιανή επιστημολογία , η οποία υποστηρίζει ότι η ισχύς των πεποιθήσεων μας οφείλει να ικανοποιεί τα αξιώματα της πιθανότητας αλλά ούτε και με την Μπεϋζιανή στατιστική η οποία βασίζεται έντονα στο θεώρημα του Μπέϋζ $\mathrm{P}(\theta|\phi) = \mathrm{P}(\phi|\theta)\mathrm{P}(\theta)/\mathrm{P}(\phi)$ όπως το ίδιο ισχύει και για την Μπεϋζιανή θεωρία επιβεβαίωσης που δηλώνει ότι μια θεωρία επιβεβαιώνεται από τις αποδείξεις στο βαθμό της πιθανότητας της θεωρίας δεδομένων των αποδείξεων .

Η θεωρία του Laplace για την πιθανότητα διατήρησε τα τρία στοιχεία-κλειδιά που εισήγαγε ο Bernoulli και τα οποία διαμορφώνουν την βάση της αντικειμενικής Μπεϋζιανής ερμηνείας :

- Οι πιθανότητες ερμηνεύονται ως βαθμοί πίστης .
- Οι πιθανότητες περιορίζονται από τα αποδεικτικά στοιχεία όταν αυτά είναι διαθέσιμα .
- Κατά την απουσία των αποδεικτικών στοιχείων που αναφέραμε παραπάνω καταφεύγουμε στην αμφιλογία ανάμεσα στις βασικές εναλλακτικές .

2.2 Η αναγέννηση του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού

Όπως είδαμε ο Bernoulli , ο Bayes και ο Laplace ασπάστηκαν τα τρία δόγματα που σηματοδοτούν την αντικειμενική Μπεϋζιανή επιστημολογία . Πιο συγκεκριμένα ότι οι βαθμοί πίστης πρέπει να είναι πιθανότητες (νόρμα πιθανότητας) βαθμονομημένοι με αποδείξεις φυσικών πιθανοτήτων (νόρμα βαθμονόμησης) αλλιώς να είναι αμφιλεγόμενοι (νόρμα αμφιλογίας) . Κατά την διάρκεια της ακόλουθης σκοτεινής εποχής οι πιθανολόγοι παρασύρθηκαν και περιπλέχθηκαν καθώς εστίαζαν σε μια από αυτές τις νόρμες εις βάρος των άλλων .Οι αυστηρά υποκειμενικοί επικεντρώνονταν στα αξιώματα της πιθανότητας , οι εμπειρικά βασιζόμενοι και οι

φυσικές θεωρίες στις φυσικές πιθανότητες και οι λογικές θεωρίες στην αμφιλογία . Αυτό ίσχυε μέχρι το δεύτερο μισό του 20ου αιώνα όπου και οι τρείς νόρμες ενώθηκαν πάλι σε αυτό που σήμερα καλούμαι αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό .Έτσι ήρθαν στο φως νέες ανακαλύψεις στην φυσική και ιδιαίτερα με την δημοσίευση του E.T.Jaynes (1957) αναδείχθηκαν δημοσιεύσεις που προκάλεσαν νέες χρήσεις της εξίσωσης της εντροπίας $\mathrm{H(P)} = -\sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}(\omega)\log \mathrm{P}(\omega)$ στην θεωρία πληροφορίας και σε στατιστικούς μηχανισμούς .

Ο Jaynes - επηρεασμένος από την θεωρία πληροφορίας η οποία καταφεύγει στην εντροπία για να υπολογίσει την αβεβαιότητα που αντιπροσωπεύεται από μια συνάρτηση πιθανότητας - υποστήριξε ότι η συνάρτηση πιθανότητας που είναι λιγότερο προκατειλημμένη από όλες αυτές που ικανοποιούν τις δοσμένες πληροφορίες , είναι η συνάρτηση πιθανότητας με την μέγιστη εντροπία . Στην συνέχεια προχώρησε στην διατύπωση της αρχής της μέγιστης εντροπίας (Maximum Entropy Principle or maxent) : κάποιος πρέπει να εξασφαλίζει ότι οι βαθμοί πίστης του οφείλουν να συμμορφώνονται στην συνάρτηση πιθανότητας με την μέγιστη εντροπία ανάμεσα σε αυτές που ικανοποιούν φυσικά τις δοσμένες πληροφορίες .

2.3 Χαρακτηρισμός του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού

Αυτό που μας ενδιαφέρει αρχικά είναι η αντικειμενική Μπεϋζιανή επιστημολογία , δηλαδή το ερώτημα πόσο ισχυρά πρέπει να πιστεύει ένας παράγοντας τις ποικίλες δηλώσεις που είναι εκφρασμένες στην γλώσσα του . Για να είμαστε περισσότερο ακριβείς θεωρούμε ότι η γλώσσα του παράγοντα είναι δυνατό να εκφράσει n στοιχειώδης δηλώσεις . Ο όρος στοιχειώδης σημαίνει ότι μπορούν να εκφραστούν από $A_1, \dots, A_n$ προτάσεις οι οποίες δεν είναι οι εαυτοί τους αποτελούμενες από άλλες προτάσεις μέσω των συνηθισμένων συνδέσμων όχι , ή , και , συνεπάγεται και εάν και μόνο αν . Οπότε η γλώσσα L του παράγοντα μπορούμε να την αντιληφθούμε ως μια πεπερασμένη προτασιακή γλώσσα με προτασιακές μεταβλητές $A_1, \dots, A_n$ και στην οποία λογικά περίπλοκες προτάσεις μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας τα γνωστά συνδετικά ¬,Λ,V,→, ↔ . Επίσης με SL ορίζουμε το σύνολο των προτάσεων της γλώσσας L . Ακόμα δεν είναι υποχρεωτικό ότι το σύνολο των αποδεικτικών στοιχείων ε εκφράζεται στην γλώσσα L . Στην συνέχεια θα εμβαθύνουμε περισσότερο στις τρείς νόρμες που χαρακτηρίζουν τον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό .

Νόρμα πιθανότητας

Όπως έχουμε αναφέρει η ισχύς της πίστης ενός παράγοντα θα πρέπει να αντιπροσωπεύεται από μια συνάρτηση πιθανότητας . Θα υποθέσουμε ότι ο εννοιολογικός παράγοντας είναι λογικός εννοώντας ότι συμβαδίζει με τις νόρμες του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού . Ορίζουμε την συνάρτηση πιθανότητας στην L ως P_E^L ή P_E(όπου E οι αποδείξεις) όταν η γλώσσα είναι καθορισμένη και την καλούμαι

συνάρτηση πίστης του παράγοντα . Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να ορίσουμε την συνάρτηση πιθανότητας σε μια πεπερασμένη προτασιακή γλώσσα L . Ορίζουμε ένα στοιχειώδες αποτέλεσμα ή ατομική κατάσταση ω να είναι μια πρόταση της μορφής $\pm A_1 \wedge \cdots \wedge \pm A_n$όπου A_i είναι το A_i και -A_i είναι το αντίθετο του . Επίσης ορίζουμε Ω το σύνολο όλων των 2^n ατομικών καταστάσεων . Μια συνάρτηση πιθανότητας στην γλώσσα L είναι μια συνάρτηση P που αντιστοιχεί προτάσεις στην L σε πραγματικούς αριθμούς και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες :

Πρόταση 1 : $\mathrm{P}(\omega) \geq 0$ για κάθε ω ε Ω .

Πρόταση 2 : $\mathrm{P}(\tau) = 1$ για μία ταυτολογία τ ε SL .

Πρόταση 3 : $\mathrm{P}(\theta) = \Sigma\omega|{=}\theta\ \mathrm{P}(\omega)$ για κάθε θ ε SL .

Οι δύο πρώτες προτάσεις ορίζουν ότι οι τιμές των πιθανοτήτων κυμαίνονται μεταξύ του μηδενός και της μονάδας . Η τρίτη πρόταση υποδηλώνει ότι οι πιθανότητες των ατομικών καταστάσεων είναι βασικές , δηλαδή ότι όλες οι άλλες πιθανότητες μπορούν να καθοριστούν βάσει αυτών . Έχοντας μια δοσμένη συνάρτηση πιθανότητας P στην L ορίζουμε την δεσμευμένη πιθανότητα ως $\mathrm{P}(\theta|\phi) = \mathrm{P}(\theta \wedge \phi)/\mathrm{P}(\phi)$ για οποιαδήποτε πρόταση θ της L και οποιαδήποτε πρόταση ϕ της L αρκεί $\mathrm{P}(\varphi) > 0$. Αναλυτικότερα η παραπάνω δεσμευμένη πιθανότητα εξηγείται ως η πιθανότητα να συμβεί το θ αν γνωρίζουμε ότι έχει συμβεί το ϕ είναι ίση με την πιθανότητα της τομής του θ και ϕ πρός την πιθανότητα του ϕ .

Νόρμα Βαθμονόμησης

Οι βαθμοί πίστης ενός παράγοντα οφείλουν να ικανοποιούν τους περιορισμούς που επιβάλλουν οι αποδείξεις . Έστω ότι υπάρχει κάποιο σύνολο E υποσύνολο του P με γλώσσα την L που περιέχει συναρτήσεις πιθανότητας που είναι συμβατές με τις αποδείξεις ε και ότι η συνάρτηση πιθανότητας P_E που αναπαριστά τους λογικούς βαθμούς πίστης του παράγοντα βρίσκεται επίσης μέσα σε αυτό το σύνολο . Αρχικά αν τα αποδεικτικά στοιχεία υποδεικνύουν ότι η συνάρτηση φυσικής πιθανότητας P* στην L βρίσκεται σε κάποιο σύνολο P* από συναρτήσεις πιθανοτήτων στην L τότε η συνάρτηση πίστης P_E θα πρέπει να βρίσκεται στο κυρτό κέλυφος $[\mathrm{P}^*]$ του P^* το μικρότερο δυνατό σύνολο που περιέχει το P^* το οποίο είναι κλειστό κάτω από κυρτούς συνδυασμούς $\lambda\mathrm{P} + (1-\lambda)\mathrm{Q}$, για $\lambda \in [0, 1]$.

Δεύτερον , οι ποιοτικές αποδείξεις όπως για παράδειγμα είναι η αιτιώδης , ιεραρχική ή οντολογική δομή επιβάλλουν συγκεκριμένους δομικούς περιορισμούς οι οποίοι αναγκάζουν την P_E να βρίσκεται μέσα σε ένα σύνολο S από συναρτήσεις πιθανοτήτων που ικανοποιούν αυτούς τους περιορισμούς . Πιο συγκεκριμένα , όταν η γλώσσα του παράγοντα επεκτείνεται από L' σε L τότε η νέα συνάρτηση πίστης του όταν περιορίζεται από την παλιά γλώσσα του πρέπει να συμπίπτει με την παλιά συνάρτηση . Συνδυάζοντας τους ποσοτικούς και ποιοτικούς αποδεικτικούς περιορισμούς προκύπτει ότι $\mathrm{E} = [\mathrm{P}^*] \cap \mathrm{S}$. Οπότε η νόρμα βαθμονόμησης λέει $P_E^L \in \mathrm{E} = [\mathrm{P}]* \cap \mathrm{S}$.

Νόρμα Αμφιλογίας

Μία συνάρτηση είναι διφορούμενη ή αμφίλογη ανάλογα το πόσο κοντά βρίσκεται στην διφορούμενη συνάρτηση $P_=$ στην L , η οποία δίνει σε κάθε ατομική κατάσταση την ίδια πιθανότητα :

$$\mathrm{P}_=(\omega) \ = \ 1 \ /2^n$$

Η απόσταση ανάμεσα στις συναρτήσεις πιθανότητας μετριέται με την απόκλιση διασταυρούμενη εντροπία (cross–entropy) ή την Kullback–Leibler απόκλιση :

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}(\omega) \log \mathrm{P}(\omega) \ \mathrm{Q}(\omega)$$

Όπου $0\log 0$ θεωρούμε ότι ισούται με μηδέν . Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε ο τύπος παραπάνω δεν είναι μια μέτρηση απόστασης με την συνηθισμένη μαθηματική μορφή καθώς δεν είναι συμμετρικός ούτε επίσης ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα . Η νόρμα αμφιλογίας εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι η πίστη σε κάτι είναι το θεμέλιο για την δράση . Οι περισσότερο ακραίοι βαθμοί πίστης τείνουν να προκαλούν δράσεις με πολύ υψηλό κίνδυνο (δηλαδή θα υπάρχουν μεγάλες απώλειες αν ο παράγοντας κάνει εσφαλμένη εκτίμηση) ενώ οι διφορούμενοι βαθμοί πίστης συνδέονται με χαμηλότερο ρίσκο , και ο παράγοντας θα πρέπει να ρισκάρει στον ελάχιστο βαθμό που του εγγυώνται οι αποδείξεις . Δίνοντας για καλύτερη κατανόηση και μια στοιχηματική ερμηνεία , ο παράγοντας θα πρέπει να είναι διφορούμενος με σκοπό να ελαχιστοποιήσει την αναμενόμενη απώλεια του στο χειρότερο δυνατό σενάριο . Οι βαθμοί πίστης ενός παράγοντα θα πρέπει να αντιπροσωπεύονται από μια συνάρτηση πιθανότητας P_E στην L που θα είναι μέσα στο σύνολο των μέγιστα διφορούμενων συναρτήσεων πιθανότητας που είναι φυσικά συμβατές με τα αποδεικτικά στοιχεία $\downarrow\mathrm{E} \ = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} : \mathrm{d}(\mathrm{P}, P_=)$ να ελαχιστοποιείται $\}$αρκεί να υπάρχει με τέτοια συνάρτηση (δηλαδή $\downarrow\mathrm{E} = \emptyset)$) . Αφού η απόκλιση από την διφορούμενη συνάρτηση ελαχιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται η εντροπία τότε έχουμε :

Αρχή Μέγιστης Εντροπίας

Η αρχή αυτή δηλώνει ότι οι βαθμοί πίστης ενός παράγοντα θα πρέπει να αντιπροσωπεύονται από μια συνάρτηση πιθανότητας $P_E \in \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} : \mathrm{H}(\mathrm{P})$ να μεγιστοποιείται $\}$ αρκεί όμως να υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αιτιολόγηση των τριών νορμών

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αιτιολογήσουμε τους λόγους για τους οποίους ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός αντιπροσωπεύεται από τις τρείς νόρμες που αναφέραμε , αν οι βαθμοί πίστης αξιοποιούνται με βάση αυτά που απαιτούμε . Θα εισάγουμε την στοιχηματική ερμηνεία της πίστης και θα αιτιολογήσουμε μέσω αυτής την νόρμα πιθανότητας . Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε πως διατυπώθηκε η νόρμα βαθμονόμησης και θα την αιτιολογήσουμε όσον αφορά τα μακροπρόθεσμα στοιχήματα . Τέλος θα δώσουμε μια αιτιολογία για την νόρμα αμφιλογίας που απευθύνεται σε περιπτώσεις προφύλαξης και θα διευκρινίσουμε ότι αυτές οι επιστημολογικές νόρμες δεν αποτελούν κάποιο εθελοντικό κώδικα δεοντολογίας αλλά μας επιβάλλονται από τις χρήσεις στις οποίες τίθενται η ισχύς των πεποιθήσεων μας .

Υπάρχουν δύο τρόποι για να λογομαχήσει κάποιος υπέρ μιας λογικής νόρμας έστω N . Ο πρώτος είναι μέσω του επιχειρήματος από εξαγωγή (argument by derivation) . Η διαδικασία έχει ως εξής : αρχικά γίνονται κάποιες υποθέσεις Y και έπειτα δείχνουμε ότι το N έπεται αυτών βάσει της λογικής ($|= A \rightarrow N$) . Εάν το A μπορεί να επιλεχθεί ώστε να είναι διαισθητικά εύλογο η ιδέα είναι ότι τότε και το N θα είναι επίσης εύλογο . Ένας τέτοιος τρόπος διαφωνίας είναι επαρκής για να πείσει κάποιον που δεν έχει κάποια προ υπάρχουσα άποψη για το N και θεωρεί το A αρκετά εύλογο , όμως σε περιπτώσεις όπου κάποιος ήδη τείνει να αμφισβητεί το N και δεν δεσμεύεται στο σύνολο των υποθέσεων του A , εκεί δεν είναι σε θέση να βοηθήσει . Κάποιος που ασπάζεται την τελευταία λογική πιστεύει ότι το A είναι προφανώς το ίδιο ισχυρό λογικά όσο το N , άρα αν το A φαίνεται πιο εύλογο από το N αυτό είναι σκέτο τεχνούργημα , δηλαδή θεωρεί ότι το A έχει επιλεχθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να μετατρέπει τα αμφίβολα χαρακτηριστικά του N σε αβλαβή (η πηγή ορίζει ότι $|= N \rightarrow A$ άρα αφού κάποιος αμφισβητεί το N θα πρέπει να αμφισβητήσει και το A) . Επειδή οι τρείς νόρμες που εξετάζουμε είναι κατά μία έννοια αμφιλεγόμενες καθώς υπάρχουν αρκετοί υποστηρικτές τους όσο και επικριτές και ως εκ τούτου οι λογομαχίες από εξαγωγή όχι μόνο δεν ευνοούν αλλά είναι αρκετά απίθανο να πείσουν τους επικριτές .

Ο δεύτερος τρόπος να λογομαχήσει κάποιος υπέρ μιας λογικής νόρμας είναι μέσω ενός επιχειρήματος ερμηνείας .Η κύρια ιδέα επικεντρώνεται στην στην ερμηνεία ή εξήγηση των όρων που βρίσκονται υπό εξέταση κατά έναν εύλογο τρόπο και έπειτα να δειχθεί ότι κάτω από μια τέτοια ερμηνεία η νόρμα θα ισχύει . Αυτή η διαδικασία πιθανώς να απαιτεί ορισμένες υποθέσεις Α΄ αλλά συνήθως αυτές οι υποθέσεις είναι σχετικά ασήμαντες καθώς η ίδια η ερμηνεία μάλλον θα παρέχει την πλειονότητα του επιχειρήματος . Η δομή του επιχειρήματος συνοψίζεται ως : υπό την ερμηνεία I το N ερμηνεύεται σαν να λέμε N΄ αλλά $|= A' \rightarrow N'$ και οι υποθέσεις Α΄ είναι εύλογες όπως και το N΄ άρα και το N . Κάποιος που αμφισβητεί το N είτε αμφισβητεί τις υποθέσεις Α΄ είτε την ερμηνεία I . Όμως αν οι υποθέσεις είναι πράγματι ασήμαντες όπως αναφέραμε προηγουμένως τότε μένει μόνο η ερμηνεία .Όταν όμως κάποιος αμφισβητεί την ερμηνεία πρέπει τότε ο ίδιος να εξηγήσει αυτόν τον όρο όπως τον αντιλαμβάνεται και ακόμα οφείλει να αποδείξει ότι η δική του ερμηνεία είναι καλύτερη σε σύγκριση με την αρχική ερμηνεία I .

Ένα επιχείρημα ερμηνείας λοιπόν είναι εφικτό να πείσει έναν επικριτή σε αντίθεση με την μέθοδο της εξαγωγής .Η ερμηνεία - κλειδί στην οποία θα προσφύγουμε είναι η στοιχηματική ερμηνεία της λογικής πίστης . Όπως είχε δηλώσει και ο Frank Ramsay , όλη μας την ζωή στοιχηματίζουμε , ακόμα και όταν πάμε στον σταθμό του τραίνου καθώς στοιχιματίζουμε ότι το τραίνο θα λειτουργήσει και αν οι βαθμοί πίστης μας δεν το υποστήριζαν επαρκώς αυτό , θα μέναμε σπίτι . Επομένως , η πίστη μας καθοδηγεί τις δράσεις μας και οι δράσεις μας μπορούν να θεωρηθούν ως στοιχήματα .

Θα εξηγήσουμε πιο αναλυτικά την έννοια της στοιχηματικής ερμηνείας της λογικής πίστης με ένα παράδειγμα . Το γεγονός ότι ένας παράγοντας πρέπει να πιστεύει μια δήλωση θ σε βαθμό q ερμηνεύεται σαν να λέμε ότι αν αυτός ο παράγοντας επέλεγε να αγοράσει ή να πουλήσει στοιχήματα για το θ στην ίδια τιμή , η τιμή θα ήταν qS όπου S είναι το ποσό που έχει πονταριστεί . Αυτό σημαίνει ότι ο παράγοντας θεωρεί ότι το qS είναι ένα αποδεκτό και δίκαιο ποσό για να πληρώσει με σκοπό να κερδίσει το S αν το θ αποδειχθεί σωστό . Όσον αφορά το $S \in R$ είναι ένα άγνωστο ποσό που μπορεί να είναι είτε αρνητικό είτε θετικό και εξαρτάται από το q , όπου το q είναι το στοιχηματικό πηλίκο του παράγοντα για το θ . Αντίστροφα , αν ο παράγοντας ανακοίνωνε το στοιχηματικό πηλίκο q για το θ θα λέγαμε ότι οφείλει να πιστεύει το θ σε βαθμό q . Η κεντρική ιδέα συνοψίζεται στην προσπάθεια να κάνουμε ακριβές ένα κύριο χαρακτηριστικό της ανακριβής έννοιας που εξετάζουμε την λογική πίστη , δηλαδή αντικαθιστούμε την ανακριβή έννοια με τα στοιχηματικά πηλίκα όπου μπορούμε να τα εξηγήσουμε και να τα χειριστούμε καλύτερα .

3.2 Πιθανότητα

Όσον αφορά την νόρμα πιθανότητας υπάρχουν δύο κύρια επιχειρήματα υπέρ της , το θεώρημα Cox όπου αποτελεί ένα επιχείρημα μέσω εξαγωγής και το επιχείρημα του Ολλανδικού βιβλίου (Dutch book argument) όπου αποτελεί ένα επιχείρημα μέσω ερμηνείας . Το θεώρημα του Cox έχει ως στόχο να αποδείξει ότι οποιαδήποτε συνάρτηση πίστης ικανοποιεί συγκεκριμένες υποθέσεις πρέπει να αποτελεί συνάρτηση πιθανότητας . Το αποτέλεσμα αυτό παρουσιάστηκε για πρώτη φορά το

1946 αλλά η εγκυρότητα του επιχειρήματος όπως το παρουσίασε θεωρείται αμφισβητήσιμη . Το θεώρημα Cox/Paris όπως αποδείχθηκε και διατυπώθηκε το 1994 καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η δεσμευμένη πίστη $\mathrm{Bel}(\theta|\psi)$ θα πρέπει να γίνεται αντιληπτή ως ένα μέτρο της λογικής αξιοπιστίας μιας δήλωσης θ όταν γνωρίζουμε ότι μια δήλωση ψ είναι αληθινή .

<u>Θεώρημα Cox/Paris</u>

Έστω ότι ορίζεται μια δεσμευμένη συνάρτηση πίστης $\mathrm{Bel}(\theta|\psi) : \mathrm{SL} \times \mathrm{SL} \longrightarrow [0, 1]$ για κάθε συνεπή ψ και για κάθε θ έτσι ώστε θ∧ ψ να είναι συνεπής και

• Εάν το θ είναι λογικά ισοδύναμο με το θ΄ και το ψ είναι λογικά ισοδύναμο με το ψ΄ τότε $\mathrm{Bel}(\theta|\psi) = \mathrm{Bel}(\theta' |\psi')$

• Εάν το ψ συνεπάγεται λογικά το θ , τότε $\mathrm{Bel}(\theta|\psi)=1$ and $\mathrm{Bel}(\neg\theta|\psi)=0$

• Υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $F : [0, 1]\times[0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ η οποία είναι αυστηρά αύξουσα και στις δύο συντεταγμένες $(0, 1] \times (0, 1]$ τέτοια ώστε $\mathrm{Bel}(\theta \wedge \phi|\psi) = F(\mathrm{Bel}(\theta|\phi \wedge \psi), \mathrm{Bel}(\phi|\psi))$

• Υπάρχει κάποια φθίνουσα συνάρτηση $S : [0, 1] \to [0, 1]$ τέτοια ώστε $\mathrm{Bel}(\neg\theta|\psi) = S(\mathrm{Bel}(\theta|\psi))$

• Για οποιαδήποτε a, b, c ∈ [0, 1] και ε>0 υπάρχουν $\theta1, \theta2, \theta3, \theta4 \in \mathrm{SL}$ τέτοια ώστε $\theta1 \wedge\theta2 \wedge\theta3$ να είναι συνεπής και τα $\mathrm{Bel}(\theta4|\theta1 \wedge\theta2 \wedge\theta3)$, $\mathrm{Bel}(\theta3|\theta1 \wedge\theta2)$, $\mathrm{Bel}(\theta2|\theta1)$ να βρίσκονται μέσα στο ε για τα a, b, c, αντίστοιχα .

Τότε υπάρχει μια συνεχής , αυστηρά αύξουσα και επί συνάρτηση $g : [0, 1] \to [0, 1]$ τέτοια ώστε $g\ \mathrm{Bel}(\cdot|\tau)$ να είναι μια συνάρτηση πιθανότητας στην L για οποιαδήποτε ταυτολογία τ . Άρα η $\mathrm{Bel}(\cdot|\tau)$ είναι ισομορφική με μια συνάρτηση πιθανότητας στην L .

Η υπόθεση ότι μια δεσμευμένη συνάρτηση πίστης αντιστοιχίζει προτάσεις σε μοναδικούς πραγματικούς αριθμούς απορρίπτεται από την ανακριβή πιθανοτική προσέγγιση όσον αφορά την πίστη , η οποία υποστηρίζει ότι η ισχύς της πίστης σε κάτι μετριέται καλύτερα από ένα διάστημα αριθμών και όχι από μια μοναδική τιμή . Η πρώτη και η δεύτερη υπόθεση είναι αρκετά περίπλοκες καθώς απαιτούν μια λογική παντογνωσία αφού αυτός που χρησιμοποιεί το θεώρημα πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίζει πάντα πότε δύο προτάσεις είναι λογικά ισοδύναμες ή η μία συνεπάγεται την άλλη . Η τρίτη υπόθεση επικαλείται την συνέχεια , πράγμα που φαίνεται λιγότερο σαν λογικός περιορισμός και περισσότερο μια τεχνική διευκόλυνση . Σχετικά με την τέταρτη υπόθεση , ένας υποστηρικτής της θεωρίας Dempster–Shafer βρίσκεται αντίθετος σε αυτήν αφού αυτή δηλώνει ότι ο βαθμός στον οποίο πιστεύει κάποιος την άρνηση μιας πρότασης δεν καθορίζεται από τον βαθμό στον οποίο πιστεύει την

ίδια την πρόταση . Ολοκληρώνοντας , η πέμπτη υπόθεση συνεπάγεται ότι το εύρος της συνάρτησης πίστης είναι πυκνό στο πεδίο τιμών δηλαδή ότι η πίστη ενός παράγοντα οφείλει να έχει αμέτρητες διαβαθμίσεις , πράγμα που την χαρακτηρίζει ως μια ακραία ισχυρή υπόθεση σε σημείο που ακόμα και υποστηρικτές της νόρμας πιθανότητας θα την θεωρούσαν ανυπόφορη . Άρα συμπεραίνουμε ότι αυτό το επιχείρημα από εξαγωγή , αν και υποστηρίζεται τόσο από υποκειμενικούς όσο και από αντικειμενικούς δεν επαρκεί ώστε να πείσει όσους έχουν επιφυλάξεις για την νόρμα πιθανότητας .

Από την άλλη πλευρά το επιχείρημα Dutch book επικαλείται την στοιχηματική ερμηνεία της λογικής πίστης και ένα επίσημο αποτέλεσμα . Το επίσημο αποτέλεσμα είναι ότι εάν ένας συντελεστής αποφεύγει την πιθανότητα της σίγουρης απώλειας όταν στοιχηματίζει (αυτό το γεγονός το ονομάζουμε Dutch book) , τότε τα στοιχηματικά πηλίκα του οφείλουν να ικανοποιούν τα αξιώματα των πιθανοτήτων . Οπότε οι βαθμοί πίστης του θα πρέπει να αντιπροσωπεύονται από μια συνάρτηση πιθανότητας . Θα παρουσιάσουμε παρακάτω το θεώρημα το οποίο αντιστοιχεί στο επίσημο αποτέλεσμα που αναφέραμε .

<u>Θεώρημα Ramsay-de Finetti</u>

Ορίζουμε συνάρτηση $P : SL \rightarrow R$ όπου P(θ) είναι τα στοιχηματικά πηλίκα του παράγοντα για το θ . Τα στοιχήματα του παράγοντα στις δηλώσεις που εκφράζονται στην γλώσσα L αποφεύγουν την πιθανότητα ενός Dutch book εάν και μόνο εάν ικανοποιούν τα αξιώματα της πιθανότητας .Η διαδικασία του επιχειρήματος εξελίσσεται ως εξής . Αρχικά ερμηνεύουμε τους λογικούς βαθμούς πίστης ως λογικά στοιχηματικά πηλίκα . Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε το θεώρημα Ramsay-de Finetti για να δείξουμε ότι με την προϋπόθεση ότι τα πηλίκα αποφεύγουν την σίγουρη απώλεια , θα πρέπει να ικανοποιούν τα αξιώματα της πιθανότητας . Οπότε συμπεραίνουμε ότι οι λογικοί βαθμοί πίστης ικανοποιούν τα αξιώματα της πιθανότητας . Το επιχείρημα Dutch book , αν και είναι μια πιο αδύναμη αιτιολογία της νόρμας πιθανότητας σε σχέση με το θεώρημα Cox με την έννοια ότι παραδέχεται πως σε μη φυσιολογικές περιπτώσεις ίσως καταπατηθεί η νόρμα πιθανότητας , εξακολουθεί να είναι περισσότερο πειστικό .

3.3 Βαθμονόμηση

Όλοι οι υποστηρικτές της Μπεϋζιανής συμφωνούν ότι η συνάρτηση πίστης ενός συντελεστή οφείλει να είναι συμβατή με τις αποδείξεις του , όμως υπάρχουν αρκετές αποκλίσεις στον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζουν αυτή την αρχή . Μία ελάχιστη απαίτηση είναι αυτή που ακολουθεί :

Πρόταση 1

Εάν το θ ∈ SL ανήκει στην αποδεικτική βάση Ε του παράγοντα και το Ε είναι συνεπή τότε $P_E(\theta) = 1$.

Η λογική πίσω από την αρχή αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι οι αποδείξεις όπως έχουμε αναφέρει αποτελούνται από οτιδήποτε θεωρεί δεδομένο ο παράγοντας , άρα πρέπει να πιστεύει καθολικά ότι ανήκει στις αποδείξεις του . Για παράδειγμα αν αμφιβάλλει για το θ δηλαδή πιστεύει σε κάποιο βαθμό το -θ δεν μπορεί να θεωρήσει το θ ως δεδομένο . Θα πρέπει να πιστεύει το θ καθολικά χωρίς καμία αμφιβολία .Αυτό το επιχείρημα έρχεται να επαληθεύσει και η στοιχηματική ερμηνεία όπου για την αποφυγή του ενδεχομένου Dutch book (σίγουρης απώλειας) ο παράγοντας πρέπει να πιστεύει καθολικά το θ καθώς ο στοιχηματοποιός και ο παράγοντας έχουν τα ίδια αποδεικτικά στοιχεία άρα και ο στοιχηματοποιός θεωρεί ότι το θ είναι σωστό οπότε το -θ δεν μπορεί να συμβεί αφού το Ε είναι συνεπής και το -θ δεν θεωρείται δεδομένο ούτε και ταυτολογία . Άρα και για τον στοιχηματοποιό και για τον παράγοντα αφού πρέπει το αποτέλεσμα να είναι συνεπή με το θ πρέπει να πιστεύουν σε αυτό με πιθανότητα 1 ώστε να αποφευχθεί το ενδεχόμενο της σίγουρης απώλειας .

Πρόταση 2

Εάν $\mathrm{P}*(\theta) = \mathrm{x}$ είναι η απόδειξη στο Ε η οποία αρμόζει καλύτερα στο θ και θ ∈ SL τότε $P_E(\theta) = x$.

Όπου P∗ είναι η συνάρτηση πιθανότητας - φυσική πιθανότητα μεμονωμένης περίπτωσης - κατά την χρονική στιγμή που διαμορφώνονται οι βαθμοί πίστης του παράγοντα . Υπάρχουν δύο κύριες αιτιολογίες που αποτελούν το κίνητρο για την διαμόρφωση της πρότασης 2 . Πρώτον , για πολλούς το καθοριστικό χαρακτηριστικό της πιθανότητας είναι ότι περιορίζει την πίστη μέσω της πρότασης 2 . Δεύτερον , πολλοί θεωρούν ότι το κύριο χαρακτηριστικό της πιθανότητας είναι η συσχέτιση της με την συχνότητα και όχι με την πίστη . Υποστηρικτής αυτής της άποψης ήταν και ο Kolmogorov ο οποίος θεωρούσε ότι : Κάποιος μπορεί να είναι βέβαιος ότι εάν το σύμπλεγμα των συνθηκών C επαναληφθεί έναν πολύ μεγάλο αριθμό φορών n τότε εάν m είναι ο αριθμός των συμβάντων του γεγονότος A τότε ο λόγος m/n θα διαφέρει ελάχιστα από την πιθανότητα $\mathrm{P}^*(\mathrm{A})$. Ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών ορίζει ότι εάν οι εμφανίσεις των A είναι ομοιόμορφα και ανεξάρτητα κατανεμημένες σύμφωνα με την συνάρτηση πιθανότητας P^* τότε δεν υπάρχει καμία περίπτωση η $\mathrm{P}^*(\mathrm{A})$ να διαφέρει από την οριακή σχετική συχνότητα $\lim_{n\to\infty} m/n$. Εφαρμόζοντας την αρχή ότι εάν μπορούμε να θεωρήσουμε ως δεδομένο ότι η πιθανότητα το θ να είναι σωστό είναι 1 τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ως δεδομένο το ίδιο το θ άρα και αν θεωρήσουμε ως δεδομένο ότι οι εμφανίσεις των A είναι ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένες σύμφωνα με την P* τότε είμαστε σε θέση να ορίσουμε επίσης ως δεδομένο ότι $\mathrm{P}*(\mathrm{A}) = \lim_{n\to\infty} m/n$.Και στις δύο περιπτώσεις που αναφέραμε η νόρμα

βαθμονόμησης ισχύει . Εάν η πιθανότητα συνδέεται με την πίστη τότε η πρόταση 2 ισχύει αν και επιπόλαια . Από την άλλη πλευρά αν η πιθανότητα συνδέεται με την συχνότητα τότε η πρόταση 2 αποτελεί μονόδρομο εάν θέλουμε να αποφύγουμε τους αυθαιρέτως ασύμμετρους βαθμούς πίστης . Η βαθμονόμηση όπως διατυπώθηκε στην πρόταση 2 αφορά αποδείξεις μεμονωμένων περιπτώσεων , οπότε τώρα θα γενικεύσουμε την αρχή αυτή ώστε να μπορεί να ανταπεξέλθει σε πιο περίπλοκες αποδείξεις καθώς και αποδείξεις με μη ποσοτικές δομές . Η εξήγηση της νόρμας βαθμονόμησης στην οποία καταλήγουμε λοιπόν είναι :

Βαθμονόμηση : $P_E \in E = [P*] \cap S$

Η νόρμα της βαθμονόμησης είναι συνήθως η πιο δύσκολη να εφαρμοστεί από τις τρείς στην πράξη . Αυτό συμβαίνει γιατί απαιτεί να καθοριστεί το E το οποίο ποσοτικοποιεί το αντίκτυπο των αποδείξεων στους βαθμούς πίστης . Για να γίνει αυτή η διαδικασία αποτελεσματικά , αυτός που την εκτελεί δεν φτάνει μόνο να γνωρίζει ποιες είναι οι αποδείξεις αλλά και τι αυτές συνεπάγονται για τις πιθανότητες και τις επιδράσεις τους έτσι ώστε να καθοριστούν επίσης το $P*$ και το S . Για παράδειγμα , σε ορισμένες περιπτώσεις όπως στην συγγραφή επιστημονικών δημοσιεύσεων ή στον σχεδιασμό συστημάτων τεχνητής νοημοσύνης είναι αρκετά σύνηθες να είμαστε σαφείς όσον αφορά το ποιες είναι οι αποδείξεις μας καθώς επίσης και να εξερευνούμε λεπτομερειακά τις συνέπειες αυτών . Αντίθετα όμως υπάρχουν και περιπτώσεις όπως για παράδειγμα όταν προσπαθούμε να αποφασίσουμε για το αν θα τρέξουμε ή όχι να προλάβουμε το τραίνο , όπου είναι αρκετά περίπλοκο να ξεκινήσουμε την διαδικασία της βαθμονόμησης. Προφανώς για να πάρουμε μια τέτοια απόφαση οι χρονικοί περιορισμοί που προκύπτουν είναι πιθανό να αποκλείσουν την οποιαδήποτε ακριβή διαδικασία απόφασης . Η ερώτηση όμως που προκύπτει είναι αν ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός έχει να πει κάτι σε καταστάσεις όπου είναι δύσκολο να είναι κάποιος σαφής ως προς το τι θεωρεί δεδομένο ή στο να εξηγήσει τις συνέπειες των αποδείξεων που λαμβάνει ως δεδομένα .

Το γεγονός ότι η νόρμα βαθμονόμησης είναι δύσκολο να υλοποιηθεί βοηθά στο να εξηγήσει πώς διαφορετικοί άνθρωποι - προφανώς λογικοί και έχοντας στην κατοχή τους τις ίδιες αποδείξεις - καταλήγουν να έχουν διαφορετικούς βαθμούς πίστης .Όπως είχε διατυπώσει και ο Laplace η πιθανότητα δεν εξαρτάται μόνο από τα δεδομένα αλλά και από την γνώση των επιπτώσεων τους . Συνοψίζοντας , η εφαρμογή της νόρμας βαθμονόμησης ίσως απαιτεί μια λεπτότητα αλλά αυτό δεν αποτελεί κάποιο επιχείρημα εναντίον στην ίδια την νόρμα .

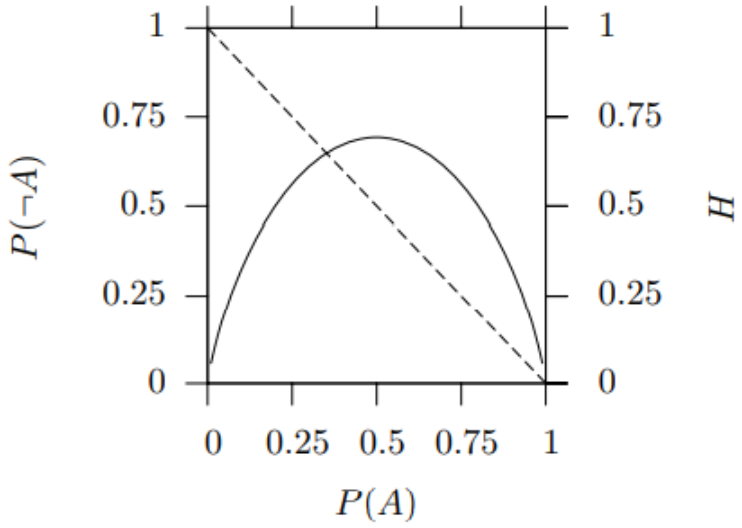
3.4 Αμφιλογία

Η νόρμα αμφιλογίας δηλώνει ότι οι βαθμοί πίστης εκτός από τα να αποτελούν πιθανότητες και να ικανοποιούν τους περιορισμούς που επιβάλλουν οι αποδείξεις οφείλουν ακόμα να είναι διφορούμενοι . Αυτό σημαίνει ότι σε περιπτώσεις που όπου οι αποδείξεις αποτυγχάνουν να καθορίσουν πλήρως τους κατάλληλους βαθμούς πίστης , ο παράγοντας θα πρέπει να υιοθετήσει μια συνάρτηση πίστης η οποία θα είναι επαρκώς κοντά στην διφορούμενη συνάρτηση (equivocator).

$P_E \in \Downarrow E.$

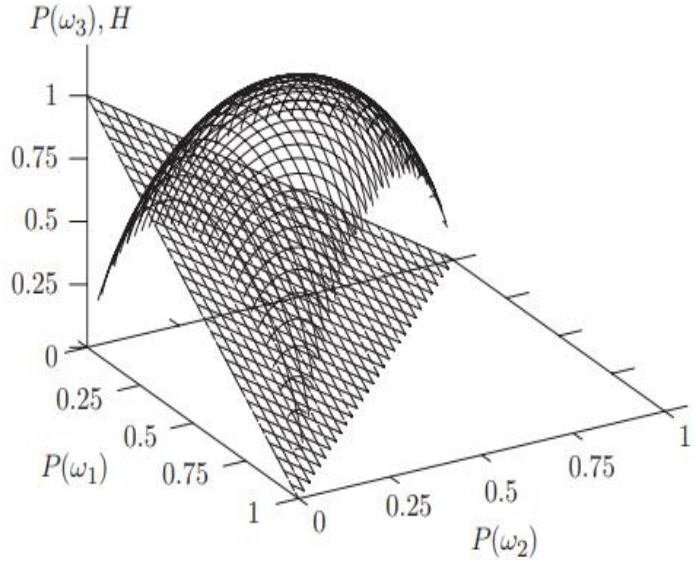
Το $\Downarrow E$ είναι το πρακτικώς καθορισμένο σύνολο των συναρτήσεων πιθανότητας που είναι επαρκώς κοντά στο $P_=$. Η διφορούμενη συνάρτηση ορίζεται από το $P_=$ $(\pm A_1 \wedge \cdots \wedge \pm A_n) = 1/2n$. Σύμφωνα με τα παραπάνω αντιλαμβανόμαστε την εγγύτητα με μέτρο την απόκλιση $d(P, Q) = \sum_\omega P(\omega) \log P(\omega)/Q(\omega)$. Έχοντας $\downarrow E = \{P \in E : d(P, P_=)$ ελαχιστοποιείται $\}$ προκύπτει ότι $\downarrow E = \{P \in E :$ η εντροπία $H(P) = -\sum_\omega P(\omega) \log P(\omega)$ μεγιστοποιείται $\}$. Το σύνολο $\Downarrow E$ των επαρκώς διφορούμενων και αποδεικτικά συμβατών συναρτήσεων πιθανότητας θα πρέπει να περιέχει το σύνολο $\downarrow E$ των μεγίστων διφορούμενων συναρτήσεων $\downarrow E \subseteq \Downarrow E$. Βέβαια το σύνολο $\Downarrow E$ είναι δυνατό να περιέχει γενικότερα και άλλες συναρτήσεις , ιδιαίτερα στην περίπτωση που δεν υπάρχει κάποια μέγιστη διφορούμενη συνάρτηση . Τέλος να σημειώσουμε ότι επειδή το E είναι κυρτό εάν το $\downarrow E$ δεν είναι κενό τότε περιέχει ένα μόνο στοιχείο .

Εάν έχουμε μια μοναδική στοιχειώδη δήλωση $L = \{A\}$ τότε θα έχουμε δύο ατομικές καταστάσεις $\Omega = \{A, -A\}$ και η νόρμα πιθανότητας επιβάλλει ότι $P(-A) = 1 - P(A)$ όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 1 που ακολουθεί .



Εικόνα 1 : *Συναρτήσεις πιθανότητας (διακεκομμένη γραμμή) και η εντροπία τους H (συμπαγής καμπύλη) σε δύο διαστάσεις.*

Όπως είναι εμφανές όσο πλησιάζουμε στο κέντρο της διακεκομμένης γραμμής τόσο μεγαλύτερη είναι η εντροπία H . Στην συνέχεια θα δώσουμε μια αναπαράσταση για την περίπτωση που οι ατομικές καταστάσεις ήταν τρείς , δηλαδή $\Omega=\{\omega_1, \omega_2 , \omega_3\}$ αν και η τρισδιάστατη αυτή αναλογία δεν υφίσταται καθώς πάντα υπάρχει ένας άρτιος αριθμός καταστάσεων . Στο επόμενο διάγραμμα (Διάγραμμα 2) οι συναρτήσεις πιθανότητας απεικονίζονται από το σχεδιασμένο επίπεδο και η εντροπία από την καμπύλη επιφάνεια (σε 3 διαστάσεις) .



Εικόνα 2 : *Οι συναρτήσεις πιθανότητας (επίπεδο) και η εντροπία τους H(καμπύλη επιφάνεια) σε τρείς διαστάσεις .*

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε το κίνητρο για την μετάβαση από τον εμπειρικά βασιζόμενο υποκειμενισμό στον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό όπου εκτός από τις νόρμες πιθανότητας και βαθμονόμησης χαρακτηρίζεται και από αυτή της αμφιλογίας . Οι επιστημολόγοι που εστιάζουν κυρίως στις ποιοτικές πεποιθήσεις αντί για τους βαθμούς πίστης , δηλαδή ο παράγοντας πιστεύει το θ και όχι ο παράγοντας πιστεύει το θ σε βαθμό x , συνήθως θεωρούν την ποιοτική αναλογία της νόρμας αμφιλογίας να είναι αδιαμφισβήτητα αληθινή . Σε ποιοτικούς όρους η αμφιλογία δηλώνει ότι ένας παράγοντας οφείλει να πιστεύει το θ αν και μόνο αν οι αποδείξεις του επιβάλλουν την πίστη στο θ . Από την άλλη πλευρά η ποιοτική αναλογία της θέσης ενός υποκειμενικού υποστηρίζει ότι ένας παράγοντας είναι λογικό να πιστεύει το θ αν αυτό είναι συνεπής με τις αποδείξεις του . Το προηγούμενο είδος επιτρεπτικής λογικής δεν βρίσκει μεγάλη ανταπόκριση σε επιστημολόγους ποιοτικών πεποιθήσεων .

Όσον αφορά τα ποσοτικά πιστεύω τα πράγματα είναι αντίστροφα σε σχέση με όσα αναφέραμε πριν . Ο υποκειμενισμός - ο οποίος περιλαμβάνει τον εμπειρικά βασιζόμενο και τον αυστηρό υποκειμενισμό που και οι δύο απορρίπτουν την αμφιλογία - υποστηρίζεται ευρέως περισσότερο από ποσοτικούς επιστημολόγους σε αντίθεση με τον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό . Παρόλου που αρκετοί ενστερνίζονται την νόρμα της αμφιλογίας και συμφωνούν ότι υπάρχει κάτι σωστό σε αυτήν , είναι αρκετά δύσκολο να προσδιορίσουν τι είναι αυτό ακριβώς . Αυτή η σύγχυση σχετικά με το κίνητρο μαζί με τα αντιλαμβανόμενα προβλήματα της αρχής της μέγιστης εντροπίας βοηθά στο να εξηγήσει την διαμάχη ανάμεσα στην ποιοτική και ποσοτική επιστημολογία .

Υπάρχουν δύο επιχειρήματα υπέρ της αρχής της μέγιστης εντροπίας , ένα

επιχείρημα από εξαγωγή και ένα από ερμηνεία . Ωστόσο κανένα από αυτά τα δύο επιχειρήματα δεν ικανό να δώσει μια καταληκτική απάντηση ανάμεσα στον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό και τον εμπειρικά βασιζόμενο υποκειμενισμό . Ο E.T. Jaynes προσέφερε την πιο γνωστή αιτιολόγηση για την αρχή της μέγιστης εντροπίας η οποία επικαλείται την χρήση της εντροπίας του μαθηματικού Claude Shannon ως μία εξήγηση της αβεβαιότητας που ενσαρκώνεται σε μια συνάρτηση πιθανότητας . Ο Jaynes ισχυρίζεται ότι η συνάρτηση πίστης ενός παράγοντα θα πρέπει να ενημερώνεται από τις αποδείξεις αλλά σε διαφορετική περίπτωση θα πρέπει να είναι αβέβαιη στο μέγιστο βαθμό ή μη δεσμευτική οπότε οφείλει να έχει μέγιστη εντροπία κατά τον Shannon .

Όπως αναφέρει ο Shannon όταν εξάγουμε συμπεράσματα βασιζόμενοι σε περιορισμένες πληροφορίες θα πρέπει να χρησιμοποιούμε εκείνη την κατανομή πιθανότητας που έχει μέγιστη εντροπία και συμβαδίζει σε όσα είναι γνωστά . Ο Shannon δήλωνε χαρακτηριστικά ότι αυτή είναι η μόνη αμερόληπτη διαδικασία που μπορούμε να κάνουμε καθώς οτιδήποτε άλλο θα οδηγούσε σε αυθαίρετες υποθέσεις πληροφοριών όπου δεν έχουμε στην διάθεση μας . Ενώ η ερμηνεία της αβεβαιότητας μέσω της εντροπίας είναι εύλογη και πλέον είναι σύνηθες φαινόμενο η υιοθέτηση της στις επιστήμες , υπάρχει ένα μεγάλο κενό σε αυτό το επιχείρημα . Το κενό αυτό παρουσιάζεται καθώς ο Jaynes υποθέτει ότι οι βαθμοί πίστης που είναι αμερόληπτοι και μη δεσμευτικοί κατά το μέγιστο είναι οι περισσότεροι επιθυμητοί και ότι υ εύρεση αυτών προκύπτει μεγιστοποιώντας στην συνέχεια την εντροπία . Γιατί όμως οι μέγιστα μη δεσμευτικοί βαθμοί πίστης να είναι προτιμότεροι από τους μέγιστα δεσμευτικούς ; Δηλαδή γιατί η μεροληψία να είναι απαραίτητα αθέμιτη ;

Το δεύτερο επιχείρημα προς υπεράσπιση της αρχής της μέγιστης εντροπίας παίρνει την μορφή της εξαγωγής . Αν και υπάρχουν πάρα πολλές εκδοχές , αυτή του Jeff Paris και της Alena Vencovska είναι ενδεχομένως η πιο πειστική . Η εκδοχή αυτή χαρακτηρίζεται από τέσσερα στοιχεία :

1) Μία διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων είναι μια συνάρτηση η οποία αντιστοιχίζει μια γλώσσα και τις αποδείξεις σε μια συνάρτηση πιθανότητας στην γλώσσα που ικανοποιεί τις αποδείξεις .
2) Εάν η επιλεγμένη συνάρτηση πιθανότητας πρόκειται να ερμηνευτεί σαν μια αναπαράσταση των βαθμών πίστης που θα υιοθετήσει κάποιος στην βάση των αποδείξεων , τότε η διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων οφείλει να ικανοποιεί κάποια επιθυμητά της κοινής λογικής . Για παράδειγμα δεδομένων δύο λογικά ισοδύναμων αποδεικτικών βάσεων η συμπερασματική διαδικασία που αναφέραμε θα πρέπει να διαλέξει την ίδια συνάρτηση πιθανότητας και για τις δύο .
3) Η μόνη διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων που εκπληρώνει τα επιθυμητά είναι η αρχή της μέγιστης εντροπίας .
4) Συνεπώς με βάσει την κοινή λογική η αρχή της μέγιστης εντροπίας είναι η μοναδική διαδικασία για την εξαγωγή συμπερασμάτων .

Μια ανησυχία που προκύπτει είναι ότι το παραπάνω επιχείρημα υποθέτει εξαρχής ότι χρειαζόμαστε μια συμπερασματική διαδικασία , δηλαδή χρειάζεται να επιλέξουμε μια μοναδική συνάρτηση πιθανότητας που να ικανοποιεί τις αποδείξεις και επίσης αυτή η συνάρτηση θα πρέπει να καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από την γλώσσα και τις αποδείξεις . Οι υποκειμενικοί βρίσκονται αντίθετοι και στις δύο αυτές υποθέσεις , υποστηρίζοντας ότι διαφορετικά άτομα είναι ελεύθερα να επιλέξουν διαφορετικές συναρτήσεις πιθανότητας παρόλο που έχουν ως βάση κοινές αποδείξεις . Η ανησυχία όμως μπορεί να κατευναστεί σε ένα βαθμό καθώς ο Paris και η Alena είναι ελαστικοί ως προς την απαίτηση της μοναδικότητας στην περίπτωση που οι γνώσεις υποβάθρου υπαγορεύουν μη γραμμικούς περιορισμούς στους βαθμούς πίστης . Είναι πιο ελαστικοί καθώς οι μη γραμμικοί περιορισμοί είναι πιθανό να περιγράφουν ένα μη κυρτό σύνολο στο οποίο ίσως να μην υπάρχει μοναδικός μεγιστοποιητής της εντροπίας . Έτσι λοιπόν συμπεραίνουν ότι ακόμα και χωρίς την υπόθεση της μοναδικότητας της συνάρτησης πίστης , τα επιθυμητά (desiderata) εξακολουθούν να απομονώνουν την αρχή της μέγιστης εντροπίας ως την μοναδική συμπερασματική διαδικασία λόγω κοινής λογικής .

Όμως ακόμα και με την χαλάρωση της απαίτησης της μοναδικότητας δεν είναι και τόσο πιθανό να πειστεί ένας υποστηρικτής του υποκειμενισμού . Αυτό συμβαίνει γιατί το επιχείρημα αυτό προκύπτει από εξαγωγή οπότε για να εξαχθεί ένα ισχυρό συμπέρασμα απαιτούνται ισχυρές υποθέσεις και είναι εύκολο να αρνηθεί κανείς το πρώτο απορρίπτοντας το δεύτερο . Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι οι τρέχουσες αιτιολογήσεις για την αρχή της μέγιστης εντροπίας δεν είναι ικανές ακόμα να ωθήσουν πλήρως προς τον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό.

Ένα ακόμα επιχείρημα που ίσως κατασκευάσει κάποιος εναντίον στον εμπειρικά βασιζόμενο υποκειμενισμό αφορά στον υπαινιγμό ότι δεν είναι αρκετά αντικειμενικός για αρκετές εφαρμογές των πιθανοτήτων . Σε ορισμένες περιπτώσεις όπου οι εφαρμογές πιθανοτήτων προϋποθέτουν την πλήρη αντικειμενικότητα δηλαδή μια μοναδική συνάρτηση πιθανότητας όπου θα συμβαδίζει με τα διαθέσιμα αποδεικτικά στοιχεία , τότε ίσως η αρχή της μέγιστης εντροπίας να είναι η μόνη κατάλληλη επιλογή .

Η Μπεϋζιανή υποκειμενική μέθοδος συνήθως περιλαμβάνει την διαδικασία που ονομάζεται Μπεϋζιανή συνθηκολογία (Bayesian conditionalization) . Σε αυτή την διαδικασία πρέπει αρχικά να παραχθεί μια λεγόμενη προγενέστερη συνάρτηση πιθανότητας P . Στην συνέχεια συλλέγονται νέες αποδείξεις ε . Τέλος , σχηματίζονται προβλέψεις με χρήση της μεταγενέστερης συνάρτησης πιθανότητας από τον τύπο : $P'(\theta) = P(\theta|\varepsilon)$. Όπως βλέπουμε λοιπόν η προγενέστερη συνάρτηση καθορίζεται πριν αποκτήσουμε στην διάθεση μας τις νέες αποδείξεις . Άρα είναι μια εντελώς υποκειμενική επιλογή για τους εμπειρικά βασιζόμενους υποκειμενικούς . Όμως αυτό σημαίνει ότι και τα επακόλουθα συμπεράσματα και οι προβλέψεις είναι υποκειμενικά καθώς εξαρτώνται άμεσα από την αρχική επιλογή της προγενέστερης συνάρτησης . Για παράδειγμα εάν έχουμε $P(\theta) = 0$, τότε $P'(\theta) = P(\theta|\varepsilon) = P(\varepsilon \wedge \theta)/P(\varepsilon) = 0$ (υποθέτοντας ότι $P(\varepsilon) > 0$). Αντίθετα αν ξεκινήσουμε με $P(\theta) = 1$, τότε $P'(\theta) = P(\varepsilon \mid \theta)P(\theta)/(P(\varepsilon \mid \theta)P(\theta) + P(\varepsilon \wedge -\theta)) = P(\varepsilon \mid \theta)/P(\varepsilon| \theta) = 1$. Είναι προφανές λοιπόν ότι δύο υποκειμενικοί είναι εφικτό να καταλήξουν σε δύο τελείως διαφορετικά συμπεράσματα βασιζόμενοι στις ίδιες αποδείξεις . Εάν απλά υιοθετήσουν αντίθετες προγενέστερες πεποιθήσεις θα βγάλουν αντίθετα συμπεράσματα . Η προσέγγιση ενός υποκειμενικού , είτε εμπειρικά βασιζόμενου είτε

αυστηρού εάν χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συνθηκολογίας , αυτό σημαίνει ότι όλα τα συμπεράσματα εξαρτώνται από την αρχική θέση .

Ένας υποστηρικτής του εμπειρικά βασιζόμενου υποκειμενισμού εφόσον επιθυμεί να αποφύγει την ισχυρή σχετικότητα που περιγράψαμε παραπάνω , θα πρέπει να απορρίψει την Μπεϋζιανή συνθηκολογία ως παγκόσμιο κανόνα για την ενημέρωση των βαθμών πεποίθησης και να στραφεί προς την συνήθη εναλλακτική της ενημέρωσης μέσω της διασταυρούμενης εντροπίας (cross entropy updating) . Με βάση αυτή ο παράγοντας υιοθετεί μια προγενέστερη συνάρτηση πίστης P και έπειτα η μεταγενέστερη P' που επιλέγει είναι η συνάρτηση πιθανότητας από όλες εκείνες που είναι συμβατές με τις καινούριες αποδείξεις που είναι εγγύτερη στην P με βάση την συνάρτηση απόκλισης d που ορίσαμε προηγουμένως . Στην περίπτωση αυτή δεν είναι απαραίτητο οι αποδείξεις να μπορούν να εκφραστούν από μια πρόταση ε στην γλώσσα του παράγοντα όπως συνέβαινε με την Μπεϋζιανή συνθηκολογία .

Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε ένα χώρο $\Omega = \{ A, -A \}$ με δύο ενδεχόμενα . Δύο εμπειρικά βασιζόμενοι υποκειμενικοί μπορεί να θέσουν $P(A) = 0$ και $Q(A) = 1$ αντίστοιχα . Αντίθετα ένας υποστηρικτής του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού είναι υποχρεωμένος να θεωρήσει $R(A) = 0.5$ εάν δεν έχει στην κατοχή του κάποιες εμπειρικές αποδείξεις που να διαφωνούν σε αυτό . Ας υποθέσουμε ότι συλλέγονται αποδεικτικά στοιχεία που περιορίζουν την πιθανότητα του A να βρίσκεται στο διάστημα $[0.6, 0.9]$. Τότε ο υποστηρικτής του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού θα πρέπει να θέσει $R'(A) = 0.6$ ενώ οι εμπειρικά βασιζόμενοι υποκειμενικοί θα θεωρήσουν τώρα $P'(A) = 0.6$ και $Q'(A) = 0.9$ αντίστοιχα . Οπότε παρατηρούμε ότι με την μέθοδο της διασταυρούμενης εντροπίας οι αποδείξεις είναι εφικτό να απομακρύνουν τους βαθμούς πίστης από τις τιμές των 0 και 1 .

Αν και η ενημέρωση μέσω της διασταυρούμενης εντροπίας είναι προτιμότερη σε σχέση με την Μπεϋζιανή συνθηκολογία πολλοί συμμερίζονται την γνώμη ότι η υπολειπόμενη σχετικότητα που περιέχεται στον εμπειρικά βασιζόμενο υποκειμενισμό είναι ακόμα πολύ μεγάλη για ορισμένες εφαρμογές πιθανοτήτων που ίσως απαιτούν πλήρη αντικειμενικότητα. Όμως μία τέτοια δήλωση είναι αρκετά δύσκολο να διερευνηθεί καθώς η ανεκτή υποκειμενικότητα ποικίλει ανάλογα την εφαρμογή και δεν είναι απαραίτητο όλες οι περιπτώσεις να απαιτούν πλήρη αντικειμενικότητα . Για παράδειγμα η πλήρης αντικειμενικότητα είναι σίγουρα επιθυμητή για ένα σύστημα υπολογιστών που είναι υπεύθυνο να ελέγχει την διαδικασία πυρηνικών αντίποινων αλλά δεν είναι και τόσο θεμιτό για έναν αυτοματοποιημένο ειδικό κρασιών .

Επιπλέον είναι και αρκετά περίπλοκο να κρίνει κανείς την εκάστοτε ανάγκη για αντικειμενικότητα . Πράγματι η αντικειμενικότητα στην επιστήμη φαίνεται να είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τους επιστήμονες καθώς έτσι τα συμπεράσματα τους φαίνονται ισχυρότερα .Συχνά όμως οι επιστήμονες δίνουν μεγάλη έμφαση στην αντικειμενικότητα στο πεδίο στο οποίο εξειδικεύονται και δεν είναι εύκολο να διακρίνει κάποιος αν οι ισχυρισμοί τους αντικατοπτρίζουν την ανάγκη της επιστήμης για αντικειμενικότητα ή την προσωπική τους ανάγκη . Ακόμα και αν η επιστημονική μεθοδολογία πράγματι υποθέτει την ύπαρξη μιας έμφυτης αντικειμενικότητας , ίσως αυτή να μην είναι απαραίτητα σωστή . Οι παραπάνω δυσκολίες που περιγράψαμε έχουν δημιουργήσει μια μεγάλης κλίμακας διαφωνία ανάμεσα στους επιστημονικούς κοινωνιολόγους - πολλοί από τους οποίους αντιμετωπίζουν τα επιστημονικά

συμπεράσματα ως έντονα σχετικά - και στους φιλόσοφους της επιστήμης και στους επιστήμονες γενικότερα όπου η πλειονότητα αυτών θεωρούν τα επιστημονικά συμπεράσματα ως μια αντικειμενική δραστηριότητα σε μεγάλο βαθμό . Επομένως μέχρι να βρεθεί κάποιο κοινό σημείο χρειάζεται αρκετή δουλειά ώστε να προσδιοριστεί αν είναι προτιμότερη η πιο ακραία μορφή αντικειμενικότητας του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού ή αν η πιο περιορισμένη αντικειμενικότητα του εμπειρικά βασιζόμενου υποκειμενισμού είναι επαρκής .

Ακόμα όμως και σε περιστάσεις όπου απαιτείται αντικειμενικότητα δεν είναι απαραίτητο ότι αυτή θα πρέπει να κλίνει προς τον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό . Για να εκτελεστεί η αξιωματική εξαγωγή της αρχής της μέγιστης εντροπίας αρχικά θα πρέπει να γίνει αποδεκτό ότι τα επιθυμητά που χαρακτηρίζονται από κοινή λογική είναι πράγματι θεμιτά . Εάν αυτό δεν ισχύει τότε ίσως να οδηγηθεί κάποιος σε εναλλακτικές υλοποιήσεις της απαίτησης της αντικειμενικότητας . Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την αρχή της ελάχιστης εντροπίας : Αν $\mathrm{L} = \{A_1,\ldots,A_n\}$ επέλεξε ως συνάρτηση πίστης την συνάρτηση πιθανότητας από όλες εκείνες που ικανοποιούν τους περιορισμούς που επιβάλουν οι αποδείξεις Ε η οποία είναι όσο το δυνατό πιο κοντά στην συνάρτηση Ρ όπου θέτει $\mathrm{P}(A_1)=1$, $\mathrm{P}(A_2) = \cdots = \mathrm{P}(A_n) = 0$. Το παράδειγμα αυτό είναι αντικειμενικό με την έννοια ότι μόλις οριστούν η γλώσσα και η διάταξή της τότε έχει καθοριστεί και η συνάρτηση πίστης . Αυτή η αρχή αν και μια πρώτη ματιά ίσως φαίνεται αρκετά περίεργη , υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες είναι αρκετά εύστοχη παρόλο που υιοθετεί μια μη ισορροπημένη αρχική θέση . Αν θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα περιβάλλον μιας ποινικής δίκης με $\mathrm{L} =\{A_1, A_2\}$ όπου το A_1 αναπαριστά την αθωότητα και το A_2 την ενοχή και υπό την προϋπόθεση ότι δεν έχουν παρουσιαστεί ακόμα αποδεικτικά στοιχεία , τότε η αρχή της ελάχιστης εντροπίας όπου υιοθετεί την αρχική υπόθεση της αθωότητας αποτελεί την προτεινόμενη και κατάλληλη επιλογή . Συμπερασματικά , αν και είναι αρκετά δελεαστικό να υποστηρίξει κανείς τον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό επειδή οι εφαρμογές των πιθανοτήτων απαιτούν αντικειμενικά συμπεράσματα , υπάρχουν αρκετά εμπόδια που θα πρέπει να ξεπεραστούν έτσι ώστε να αναπτυχθεί μια αξιόπιστη θέση υπέρ του .

Από όσα έχουμε δει υπάρχει καμία αμφιβολία ότι η επιλογή της συνάρτησης πίστης από όλες όσες είναι συμβατές με τις αποδείξεις δεν γίνεται να καθοριστεί από κάποια εμπειρική εγγύηση αφού όλες οι συναρτήσεις πίστης είναι ισοδύναμες όσον αφορά την εγγύησή τους από τα διαθέσιμα αποδεικτικά στοιχεία . Δηλαδή εάν πρόκειται να προτιμηθεί ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός έναντι κάποιων υποκειμενικών προσεγγίσεων θα είναι για λόγους που δεν αφορούν τις αποδείξεις όπως και κατά τον ίδιο τρόπο δεν θα απορριφθεί λόγω των αποδείξεων .

Το ερώτημα που αναδύεται λοιπόν είναι αν οι αποδείξεις εξαντλούν την λογική και εδώ έρχεται ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός όπου προτείνει ότι η λογική επεκτείνεται πέρα από τις αποδείξεις .Πιο συγκεκριμένα οι λογικοί βαθμοί πεποίθησης ενός παράγοντα δεν αρκεί μόνο να είναι κατάλληλα βαθμονομημένοι από τις αποδείξεις αλλά οφείλουν να είναι και επαρκώς “ενδιάμεσοι” . Επειδή για τον εμπειρικά βασιζόμενο υποκειμενισμό η εμπειρική εγγύηση είναι αρκετή για να υποστηριχθεί η λογική αυτό τον θέτει σε μειονεκτική θέση σε σχέση με τον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό επειδή είναι και οι δύο εμπειρικά βέλτιστοι δεν υπάρχουν θεωρήσεις που μπορεί να χρησιμοποιήσει όπου θα υπερτερεί . Από την άλλη πλευρά όμως ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός έχει την δυνατότητα να

προσφέρει μη εμπειρικούς λόγους για να προτιμηθεί .

Ένας άλλος τρόπος για να επιλέξουμε ανάμεσα στον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό και στον εμπειρικά βασιζόμενο υποκειμενισμό είναι με την διερεύνηση της αποτελεσματικότητας τους . Εάν οι μέθοδοι του πρώτου είναι πιο αποτελεσματικές σε σχέση με το δεύτερο τότε θα έχουμε έναν λόγο να τον προτιμήσουμε . Ένα επιχείρημα υπέρ του αντικειμενικού είναι ότι αν δεχθούμε ότι οι πιθανότητες είναι υποκειμενικές τότε ο υπολογισμός τους απαιτεί να βρούμε ποιους συγκεκριμένους βαθμούς πίστης έχει επιλέξει ο τυχαίος παράγοντας . Αυτό είναι εφικτό μόνο μέσω της τεχνικής της εξαγωγής , δηλαδή είτε να ρωτήσουμε τον παράγοντα ποιοι είναι οι βαθμοί πίστης του είτε να τους συμπεράνουμε από την συμπεριφορά του . Όμως όπως έχουν συμπεράνει προγραμματιστές ειδικών συστημάτων τεχνητής νοημοσύνης η διαδικασία της εξαγωγής και ο έλεγχος συνέπειας που προϋποθέτει είναι απαγορευτικά πολύ χρονοβόρες διεργασίες (η αδυναμία της εξαγωγής να ανταποκριθεί στην ζήτηση των ειδικών συστημάτων είναι γνωστή ως Feigenbaum’s bottleneck). Εάν ο εμπειρικά βασιζόμενος υποκειμενισμός εφαρμοζόταν σε σταθερή βάση στις επιστήμες είναι πολύ πιθανό κατέληγε σε μία παρόμοια συμφόρηση (bottleneck) . Για παράδειγμα ο καθορισμός του πιθανότερου στατιστικού μοντέλου δεδομένων των αποδείξεων απαιτεί πρώτα την εξαγωγή των υποθέσεων του μοντέλου όπως επίσης και η εύρεση των αρχικών βαθμών πίστης σε κάθε μοντέλο , μια αρκετά αποθαρρυντική διαδικασία .Πιο συγκεκριμένα τα ερωτήματα που πρέπει να απαντηθούν είναι : ακολουθούν οι βαθμοί πίστης του παράγοντα την κανονική κατανομή ; είναι πιθανολογικά ανεξάρτητοι ;

Σε αντίθεση με την επιλογή του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού οι βαθμοί πίστης καθορίζονται αντικειμενικά βάσει των αποδεικτικών στοιχείων και συνήθως δεν απαιτείται εξαγωγή αφού οι βαθμοί πίστης υπολογίζονται με την αρχή της μέγιστης εντροπίας . Οπότε για λόγους αποτελεσματικότητας προτιμάται ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός . Βέβαια αυτό το επιχείρημα καταρρέει αν η μέθοδος του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού είναι δυσκολότερο να διαχειριστεί υπολογιστικά σε σχέση με την εξαγωγή . Ο Judea Pearl το 1988 είχε απορρίψει αρχικά την αρχή της μέγιστης εντροπίας καθώς πίστευε ότι οι υπολογιστικές τεχνικές που απαιτούσε ήταν μη διαχειρίσιμες . Αυτό όμως δε ισχύει σήμερα καθώς το αγαπημένο υπολογιστικό εργαλείο του ίδιου του Pearl , τα Μπεϋζιανά δίκτυα (Bayesian nets) είναι ικανά να μειώσουν σε πολύ μεγάλο βαθμό αυτή την πολυπλοκότητα και να γίνει η διαδικασία την μεγιστοποίησης της εντροπίας διαχειρίσιμη .

Αν και η αποτελεσματικότητα φαίνεται να είναι ένα επιχείρημα κατά της εξαγωγής και συνεπώς κατά του εμπειρικά βασιζόμενου υποκειμενισμού χρειάζεται να επικαλεστούν και άλλα επιθυμητά για τον καθορισμό μιας συγκεκριμένης διαδικασίας για τον προσδιορισμό των βαθμών πίστης , αφού όπως είδαμε η αρχή της μέγιστης εντροπίας δεν είναι πιο αποτελεσματική από την αρχή της ελάχιστης . Επομένως μόνο βάσει της αποτελεσματικότητας δεν είναι αρκετό να στραφούμε προς τον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό και είναι απαραίτητο να γίνουν και άλλες εργασίες ώστε να γίνει κατανοητό πως άλλα επιθυμητά μπορούν να παραμερίσουν τις θεωρήσεις σχετικά με την αποτελεσματικότητα.

Τώρα θα στραφούμε προς το κριτήριο της προφύλαξης . Όπως έχουμε αναφέρει οι βαθμοί πίστης μας καθοδηγούν τις δράσεις μας και αυτές ισοδυναμούν με στοιχήματα .Για να προβούμε σε μια δράση όπως για παράδειγμα να τρέξουμε προς τον σταθμό θα πρέπει ο βαθμός πίστης μας να είναι υψηλός καθώς κάθε δράση

περιλαμβάνει το αντίστοιχο ρίσκο της . Αν όταν φτάσουμε δούμε ότι το τραίνο δεν λειτουργεί θα έχουμε σπαταλήσει χρόνο και προσπάθεια και ίσως έτσι να χάσουμε μια σημαντική συνάντηση . Το έναυσμα για δράση ποικίλει ανάλογα το ρίσκο που περιλαμβάνει . Όσον αφορά το παράδειγμα με το τραίνο εάν οι συνέπειες είναι αρκετά μεγάλες τότε πρέπει να τρέξουμε στον σταθμό μόνο αν οι βαθμοί πίστης μας είναι τουλάχιστον 0.95 σαν πιθανότητα ότι το τραίνο θα λειτουργήσει αλλά αν οι συνέπειες είναι πιο μικρής σημασίας και μια χαμηλότερη τιμή π.χ. 0.85 ίσως να είναι κατάλληλη . Αν υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε μόνο ότι η τοπική σιδηροδρομική εταιρεία έχει περάσει το ελάχιστο κατώφλι των 80% των τραίνων λειτουργούν τότε σύμφωνα με τον εμπειρικά βασιζόμενο υποκειμενισμό θα πρέπει οι βαθμοί πίστης ότι το τραίνο θα εκτελέσει κανονικά τα δρομολόγια του να κινούνται στο διάστημα $[0.8,1]$. Αντίθετα σύμφωνα με τον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό θα έπρεπε να επιλέξουμε την λιγότερο ακραία τιμή του διαστήματος δηλαδή το 0.8 . Άρα στην πρώτη περίπτωση με τον υποκειμενισμό θα αποφασίζαμε να τρέξουμε προς τον σταθμό ενώ σύμφωνα με τον αντικειμενισμό όχι . Στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα λέγαμε ότι ο αντικειμενισμός ίσως προτιμηθεί καθώς είναι πιο επιφυλακτικός .

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα , οι ακραίοι βαθμοί πίστης πυροδοτούν δράσεις και στην συνέχεια εμφανίζονται οι σχετικοί κίνδυνοι .Στο παράδειγμα με το τραίνο η πιο φρόνιμη επιλογή φαίνεται να είναι η υιοθέτηση της λιγότερο ακραίας τιμής όπως προτείνει ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός . Όμως η προτίμηση του σε όλες τις περιπτώσεις δεν είναι μια τόσο απλή υπόθεση αφού προκύπτουν αρκετές δυσκολίες όπως θα δούμε . Ένα πιθανό πρόβλημα απορρέει από το γεγονός ότι δεν είναι μόνο οι ακραίοι βαθμοί πίστης που πυροδοτούν δράσεις αλλά και οι μέτριοι . Ας θεωρήσουμε μια περίπτωση όπου ένας ασθενής πάσχει από δύο πιθανές ασθένειες Α και Β . Ένας υψηλός βαθμός πίστης στα Α,Β θα οδηγήσει στην έναρξη των θεραπειών τους αντίστοιχα . Όμως και ένας πιο μέτριος βαθμός ο οποίος δεν πυροδοτεί ούτε την θεραπεία για το Α ούτε για το Β , θα πυροδοτήσει μια άλλη δράση , ίσως την συλλογή περισσότερων αποδείξεων ώστε να καταλήξουμε σε μια διάγνωση . Η συλλογή όμως περισσότερων συμπτωμάτων έχει και αυτή τους κινδύνους της και τα κόστη της αφού απαιτεί χρόνο , προσπάθεια και χρήματα για την διεξαγωγή των τεστ , τα οποία είναι δυνατό να προκαλέσουν και ζημιές στον ασθενή . Θα μπορούσε να ισχυριστεί κάποιος οπότε ότι ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός δεν είναι και τόσο συνετός.

Το γεγονός όμως ότι οι και οι μέτριοι βαθμοί πίστης προκαλούν δράσεις δεν σημαίνει ότι γενικά ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός δεν πρέπει να προτιμάται για λόγους προφύλαξης . Αυτό συμβαίνει καθώς σε πραγματικά προβλήματα όπου πρέπει να ληφθούν αποφάσεις οι κίνδυνοι που προκαλούνται από μέτριους βαθμούς τείνουν να είναι μικρότεροι σε σχέση με την υιοθέτηση πιο ακραίων βαθμών . Ας υποθέσουμε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα τα Α και Β είναι δύο τύποι μηνιγγίτιδας που απαιτούν εντελώς διαφορετικές θεραπείες . Οι κίνδυνοι των δύο τύπων είναι τόσο μεγάλοι όπου τα ρίσκα για την συλλογή περισσότερων συμπτωμάτων μοιάζουν ασήμαντα . Από την άλλη πλευρά αν τα Α,Β είναι δύο περιπτώσεις κρυώματος όπου η θεραπεία τους προϋποθέτει ένα ζεστό ηδύποτο μία φορά την ημέρα και δύο φορές αντίστοιχα τότε θα υπάρξει σίγουρη ανάρρωση ακόμα και αν δεν ληφθεί καμία θεραπεία . Άρα οι κίνδυνοι και στις δύο περιπτώσεις είναι τόσο ασήμαντοι όπου η υιοθέτηση πιο μέτριων βαθμών πίστης θα πυροδοτούσε μόνο αδράνεια . Δηλαδή έχει νόημα να συλλέξει κάποιος περισσότερα

αποδεικτικά στοιχεία μόνο αν τα κόστη και οι κίνδυνοι που συνδέονται με τα αρχικά αποτελέσματα των Α και Β υπερτερούν σε σχέση με την συλλογή των νέων αποδείξεων . Επομένως είναι και πάλι πιο φρόνιμο να υιοθετήσει κανείς πιο μέτριους βαθμούς πίστης .

Στην προσπάθεια γενίκευσης του επιχειρήματος της προφύλαξης προκύπτει ένα άλλο πρόβλημα το οποίο αφορά την περίπτωση των μη ισορροπημένων κινδύνων . Στο πρόβλημα με την διάγνωση ας πάρουμε ότι το Α είναι μηνιγγιτιδοκοκκική μηνιγγίτιδα και το Β η γρίπη . Ο κίνδυνος που συνδέεται με την αποτυχημένη διάγνωση του Α όταν αυτή συμβαίνει είναι τόσο μεγάλος που είναι φρόνιμο να υποθέσουμε το Α και να χορηγήσουμε αντιβιοτικά εκτός και αν υπάρχουν αδιαμφισβήτητα αποδεικτικά στοιχεία που υποστηρίζουν το Β. Ένα ακόμα παράδειγμα που ανήκει σε αυτή την κατηγορία είναι αυτό που συναντήσαμε νωρίτερα όπου ο κίνδυνος να κρίνουμε κάποιον αθώο ως ένοχο υπερτερεί του να κρίνουμε αθώο κάποιον ένοχο και για αυτό υποθέτουμε την αθωότητα αρχικά σε ποινικές υποθέσεις .

Ίσως ο αποτελεσματικότερος τρόπος να απαλλαχθούμε από αυτές τις δυσκολίες να είναι η διάκριση μεταξύ της εμφάνισης και της πραγματικότητας . Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι πολύ σημαντικό να ενεργούμε σαν να πιστεύαμε κάποια από τις εναλλακτικές , δηλαδή την χορήγηση αντιβιοτικών ή την απελευθέρωση του υπόπτου και όχι να πιστεύουμε πράγματι την εναλλακτική . Τα μη ισορροπημένα ρίσκα επιφέρουν μη ισορροπημένα επίπεδα εναύσματος (trigger levels) και όχι μη ισορροπημένους βαθμούς πεποίθησης . Αν ο βαθμός πίστης στην γρίπη είναι μεγαλύτερος π.χ. από 0.95 χορήγησε παρακεταμόλη αλλιώς αν ο βαθμός πίστης στην μηνιγγιτιδοκοκκική μηνιγγίτιδα είναι τουλάχιστον 0.05 χορήγησε αντιβιοτικά . Για το άλλο παράδειγμα αντίστοιχα αν δεν μπορεί να αποδειχθεί η ενοχή χωρίς αμφιβολία δηλαδή αν ο βαθμός πίστης στην ενοχή είναι λιγότερο από 0.99 τότε θα ενεργοποιηθεί η δράση της απελευθέρωσης του υπόπτου . Το κοινό και στις δύο περιπτώσεις που αναφέραμε είναι ότι το επίπεδο εναύσματος για μια εναλλακτική είναι πολύ υψηλό ενώ για την άλλη εναλλακτική πολύ χαμηλό .

Ένας άλλος προβληματισμός που εμφανίζεται όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε μεγαλύτερες διαστάσεις αφορά τον ισχυρισμό ότι η αρχή της μέγιστης εντροπίας δεν είναι πια η πιο συνετή επιλογή όσον αφορά τον καθορισμό των βαθμών πίστης . Παρότι η περισσότερο διφορούμενη συνάρτηση δεν είναι πράγματι πάντα η πιο επιφυλακτική σε κάθε περίπτωση είναι όμως η πιο επιφυλακτική κατά μέσο όρο . Εάν είναι η πιο φρόνιμη όταν υπολογίζουμε κατά μέσο όρο αποδεικτικές βάσεις Ε και αποφάσεις (δηλαδή προτάσεις θ και επίπεδα εναύσματος $\tau_\theta \in [0, 1]$ τέτοια ώστε ένας κύκλος δράσεων να πυροδοτείτε εάν $P(\theta) \geq \tau_\theta$) , τότε η υιοθέτηση της αρχή μέγιστης εντροπίας θα είναι η καλύτερη τακτική υπό την απουσία κάποιας προγενέστερης γνώσης για τα Ε, θ και τ_θ . Να σημειώσουμε ότι εμείς δεν ασχολούμαστε με την επιλογή των επιπέδων εναύσματος και τον ακριβή μηχανισμό με τον οποίο καθορίζονται αλλά αφήνουμε αυτή την διαδικασία στους ειδικούς η οποία ίσως να είναι η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητας ή κάποια άλλη διαδικασία θεωρητικής απόφασης .

Η μέση προφύλαξη για μια τακτική που ορίζει συνάρτηση πίστης Ρ μπορεί να υπολογιστεί από την αναλογία των Ε,θ,τ_θπου προκαλούν μια σειρά δράσεων .Ορίζουμε την συνάρτηση εναύσματος $T(P, \theta, \tau_\theta)=1 \Leftrightarrow P(\theta) \geq \tau_\theta$, και 0 διαφορετικά . Τότε η μέση προφύλαξη μιας τακτικής είναι το μέτρο των Ε , θ , τ_θ για

τα οποία $\mathrm{T}(\mathrm{P}, \theta, \tau_\theta\ ) = 1$, όπου το P καθορίζεται από τις αποδείξεις E . Περιορίζοντας την προσοχή μας σε μη λογικά ισοδύναμες προτάσεις μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση αναλογία των εναυσμάτων για μια τακτική που επιλέγει P_E από το E ως :

$$|T| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{z} \sum_{\Omega_i \subseteq \Omega} \int_E \int_{\tau_{\theta i}} T(P_E\,, \theta_i\,, \tau_{\theta i}) dE d\tau_{\theta i}$$

$$z = 2^{|\Omega|} \sum_{\Omega_i \subseteq \Omega} \int_E \int_{\tau_{\theta i}} 1\, dE d\tau_{\theta i}$$

Όπου z είναι μια κανονικοποιημένη σταθερά και θ_i ορίζεται ως η διαχώριση των ατομικών καταστάσεων $\Omega_i \subseteq \Omega$, με$\vee$ $\emptyset$ μια αντίφαση όπως $A_1 \wedge$ -A_1. Όσο μικρότερη είναι η τιμή του |T| τόσο σπανιότερα ενεργοποιούνται οι δράσεις και τόσο πιο επιφυλακτική είναι η τακτική κατά μέσο όρο .

Ίσως κάποιος να ισχυριστεί ότι τελικά η προφύλαξη δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως επιχείρημα υπέρ της αρχής της μέγιστης εντροπίας , όμως ένα τέτοιο συμπέρασμα θα ήταν πολύ βιαστικό . Στην πραγματικότητα η αρχή της μέγιστης εντροπίας είναι η πιο συνετή εκεί όπου έχει σημασία δηλαδή εν όψει ριψοκίνδυνων αποφάσεων . Καταλήγουμε λοιπόν ότι κάποιος μπορεί να καταφύγει στο επιχείρημα της προφύλαξης για να υποστηρίξει τον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό . Όταν έχουμε να λάβουμε ριψοκίνδυνες αποφάσεις η πιο φρόνιμη τακτική κατά μέσο όρο είναι να βρισκόμαστε όσο το δυνατόν εγγύτερα στην διφορούμενη συνάρτηση . Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι όσο πιο μέτριοι είναι οι βαθμοί πίστης τόσο μικρότερη και η αναλογία των αποφάσεων εναυσμάτων κατά μέσο όρο όταν τα επίπεδα εναύσματος είναι υψηλά . Εδώ να σημειώσουμε ότι αυτή η αιτιολόγηση επικαλείται την ιδέα των επιπέδων εναύσματος αλλά είναι ανεξάρτητη από την συγκεκριμένη θεωρία αποφάσεων ή μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε για να αντλήσει αυτά τα επίπεδα . Απλά υποθέτουμε ότι με την προϋπόθεση ότι τα άλλα πράγματα είναι ισοδύναμα τα υψηλότερα επίπεδα εναύσματος αντιστοιχούν σε μεγαλύτερα ρίσκα που συνδέονται με την εσφαλμένη πυροδότηση : κρατώντας σταθερές τις αποδείξεις το εύρος των επιλογών και ούτε καθεξής εάν $\tau_\theta\ > \tau_\varphi$ τότε οι συνέπειες της επιλογής της δράσης που πυροδοτείται από το $\mathrm{P}(\theta) \geq \tau_\theta$ όταν το θ αποδεικνύεται λάθος είναι πιο δεινές σε σχέση με τις συνέπειες της επιλογής της δράσης που πυροδοτείται από το $\mathrm{P}(\phi) \geq \tau_\varphi$ όταν το ϕ καταλήγει να είναι λάθος .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ενημέρωση των βαθμών πίστης

4.1 Η διαδικασία της ενημέρωσης

Ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός συχνά απορρίπτεται εξαιτίας της διαφορετικής προσέγγισης που ακολουθεί όσον αφορά την διαδικασία της ενημέρωσης των βαθμών πίστης σε σύγκριση με την μέθοδο της Μπεϋζιανής συνθηκολογίας . Σχετικά με τις διαφορές των δύο μεθόδων , συνήθως αυτές χρησιμοποιούνται ενάντια στον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό .Ο στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να προσπαθήσουμε να αντικρούσουμε την επίκριση που δέχεται λόγω της μεθόδου ενημέρωσης που προτείνει . Όπως θα δούμε οι διαφορές ανάμεσα στις δύο μεθόδους μετά από διερεύνηση καταλήγουν να λειτουργούν υπέρ του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού και η μέθοδος της συνθηκολογίας είναι ασφαλής μόνο όταν τα αποτελέσματά της συμπίπτουν με την ενημέρωση του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού .

Όπως και για τα προηγούμενα θα θεωρήσουμε μια πεπερασμένη προτασιακή γλώσσα L και για απλοϊκότητα της εξήγησης θα εστιάσουμε στην περίπτωση για την οποία οι αποδείξεις E επιβάλλουν ένα συνεπή σύνολο χ από συγγενείς περιορισμούς . Έτσι εξασφαλίζεται ότι : $P_X = \{\mathrm{P} \in \mathrm{PL} : \mathrm{P}\ \text{ικανοποιεί}\ \mathrm{x}\}$ είναι μη κενό , κλειστό και κυρτό και ως εκ τούτου $\mathrm{E} = P_X$ και ↓E έχει ένα μόνο στοιχείο . Για απλούστευση επίσης θεωρούμε επαρκώς κοντά και εγγύτερο ⇓E = ↓E καθώς και όπως συνήθως εξηγούμε την απόσταση μεταξύ των συναρτήσεων πιθανότητας μέσω της απόκλισης . Κάτω από αυτούς τους περιορισμούς η σύσταση του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού είναι να θέσουμε την συνάρτηση πίστης κάποιου P_E να είναι η συνάρτηση στο σύνολο P_X που έχει μέγιστη εντροπία .

Με βάση τον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό η ενημέρωση είναι αρκετά απλή . Εάν αρχικά λάβουμε ως δεδομένες κάποιες δηλώσεις στο E αλλά μετά το σύνολο αυτό αλλάξει σε E΄ τότε οι βαθμοί πίστης μας θα αλλάξουν και αυτοί αντίστοιχα από P_E σε $P_{E'}$. Σε μια πεπερασμένη προτασιακή γλώσσα όταν εγγυάται το E ο παράγοντας

θα πρέπει να επιλέξει την $P_E \in$ E που μεγιστοποιεί την εντροπία και αντίστοιχα την $P_{E'} \in \mathrm{E}'$ για E΄ που μεγιστοποιεί και πάλι την εντροπία . Όπως έχουμε αναφέρει οι υποκειμενικοί υποστηρίζουν την νόρμα πιθανότητας και της βαθμονόμησης , όχι όμως της αμφιλογίας . Οι δύο πρώτες νόρμες όμως περιορίζουν μόνο ασθενώς τους βαθμούς πίστης δηλαδή με εγγύηση το E επέλεξε μια $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. Κάτω μόνο από αυτούς τους περιορισμούς οι βαθμοί πίστης κάποιου έχουν την ελευθερία να ποικίλουν ευρέως κάτω από μικρές ή και μηδαμινές αλλαγές των αποδεικτικών E αυτού . Έτσι οι υποκειμενικοί επιβάλλουν μια επιπλέον αρχή με στόχο την περαιτέρω ισχυροποίηση των περιορισμών των ενημερωμένων βαθμών πίστης . Αυτή η αρχή είναι η Μπεϋζιανή συνθηκολογία κατά την οποία εάν με δεδομένες αποδείξεις E οι βαθμοί πίστης αντιπροσωπεύονται από την P και οι αποδείξεις αλλάξουν σε E΄ = E∪{ε} όπου ε είναι μια πρόταση την γλώσσα L έτσι ώστε $\mathrm{P}(\varepsilon) > 0$ τότε οι νέοι βαθμοί πίστης θα πρέπει να αντιστοιχούν σε $\mathrm{P}' = \mathrm{P}(\cdot|\varepsilon)$ δηλαδή στους παλιούς βαθμούς πίστης δεσμευμένους από τις νέες αποδείξεις .Αυτή η αρχή είναι αρκετά αποτελεσματική υπό την προϋπόθεση ότι οι όροι στο ε ικανοποιούνται και η P΄ ορίζεται μοναδικά .

Στην λογοτεχνία μέχρι σήμερα οποιαδήποτε ασυμφωνία ανάμεσα στην ενημέρωση μέσω της μέγιστης εντροπίας και την ενημέρωσης μέσω της Μπεϋζιανής συνθηκολογίας στρέφεται συνήθως εναντίον της πρώτης . Το επιχείρημα που υποστηρίζεται είναι ότι η συνθηκολογία είναι καλώς θεμελιωμένη και ενστικτώδης οπότε η maxent είναι αυτή που πρέπει να απορριφθεί . Εμείς θα αποδείξουμε το αντίθετο . Το επιχείρημα στο οποίο θα βασιστούμε αποτελείται από δύο βήματα . Αρχικά θα αναδιατυπώσουμε ένα παλιό αποτέλεσμα το οποίο δείχνει τις συνθήκες υπό τις οποίες η maxent και η συνθηκολογία συμφωνούν . Στην συνέχεια θα προσπελάσουμε όλες αυτές τις συνθήκες με την σειρά και θα συμπεράνουμε ότι όπου δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες η maxent είναι περισσότερο κατάλληλη σε σχέση με την συνθηκολογία .

4.2 Απαραίτητη θεωρία

Ορισμός : Το ε είναι απλό σε σχέση με το E αν και μόνο αν $\mathrm{x}' = \mathrm{x} \cup \{\mathrm{P}(\varepsilon)=1\}$ δηλαδή ο μόνος περιορισμός που επιβάλλει το ε στο πλαίσιο του E είναι ότι $\mathrm{P}(\varepsilon)=1$.

Θεώρημα **:** Αν

• Το ε είναι μια πρόταση της γλώσσας του παράγοντα L

• Το ε είναι απλό σε σχέση με το E

• Το x΄ είναι συνεπής και

• P_E (·|ε) ικανοποιεί το x ,

Τότε $P_{E'}$ (θ) = P_E (θ|ε) .

Το αποτέλεσμα του παραπάνω θεωρήματος παρουσιάζει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η ενημέρωση με την αρχή της μέγιστης εντροπίας συμφωνεί με την Μπεϋζιανή συνθηκολογία .

Πόρισμα :

Εάν ο παράγοντας μαθαίνει μόνο συνεπείς προτάσεις $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$στην L και κάθε πρόταση ε_i είναι απλή σε σχέση με τα ε_1,...,ε_{i-1} τότε η ενημέρωση μέσω της αρχής maxent συμφωνεί με την Μπεϋζιανή συνθηκολογία .

Ασυμφωνίες μεταξύ της maxent και της συνθηκολογίας αναδύονται μόνο όταν οι όροι του θεωρήματος καταπατούνται . Θα εξετάσουμε αυτούς τους όρους με την σειρά .

Περίπτωση 1:

Θα θεωρήσουμε την περίπτωση όπου το ε δεν είναι μια πρόταση της αρχικής γλώσσας L . Για την ενημέρωση πρέπει φυσικά η γλώσσα να επεκταθεί ώστε να περιέχει και το ε . Τότε κατά τα γνωστά σύμφωνα με τον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό η ενημέρωση θα ξεκινήσει κανονικά μεγιστοποιώντας την εντροπία στην νέα γλώσσα L΄. Η ίδια κατάσταση όμως για τον υποκειμενικό δεν είναι τόσο απλή . Αυτό συμβαίνει γιατί δεν είναι δυνατό να εφαρμοστεί η Μπεϋζιανή συνθηκολογία καθώς η προγενέστερη $P_E^{L'}$(θ|ε) δεν έχει οριστεί . Το καλύτερο που μπορεί να κάνει κάποιος είναι να αναθέσει μια προγενέστερη στην εκτεταμένη γλώσσα post hoc και στην συνέχεια να ενημερώσει μέσω της συνθηκολογίας . Αυτή δεν αποτελεί όμως μια καλή στρατηγική επειδή η νέα προγενέστερη ανατίθεται στο ίδιο στάδιο με την μεταγενέστερη οπότε μπορεί να κατασκευαστεί έτσι ώστε να ταιριάζει με οποιαδήποτε επιθυμητή μεταγενέστερη . Αν ακολουθηθεί αυτή η post hoc στρατηγική η συνθηκολογία δεν προσφέρει κανέναν περιορισμό στην ενημέρωση των πιθανοτήτων .

Θα εξηγήσουμε καλύτερα την παραπάνω στρατηγική με ένα παράδειγμα . Υποθέτουμε ότι η αρχική γλώσσα L έχει δύο ατομικές καταστάσεις {R,-R} όπου το R δηλώνει ότι ο καρκίνος του ασθενή θα επανεμφανιστεί (Recur) . Ένας παράγοντας αναθέτει προγενέστερη πιθανότητα $1/2$ σε κάθε πρόταση και μετά αλλάζει τους βαθμούς πίστης του σε 0.99 ότι ο καρκίνος του ασθενή θα επαναληφθεί χωρίς κανένα συγκεκριμένο λόγο. Με βάση τον Μπεϋζιανό υποκειμενισμό και την προαναφερθείσα στρατηγική αυτό δεν είναι παράλογο . Το μόνο που πρέπει να κάνει ο παράγοντας είναι να βρει μια πρόταση που δεν εκφράζεται στην γλώσσα αλλά είναι αληθινή (π.χ. το φεγγάρι δεν είναι φτιαγμένο από μπλε τυρί ή το πρώτο ψηφίο του αριθμού π είναι 3) , να επεκτείνει την γλώσσα του ώστε αυτή να περιέχει τις προτάσεις ε και -ε και να ορίσει μία νέα post hoc προγενέστερη με βαθμούς πίστης $\mathrm{P(R|\varepsilon)=0.99}$. Τότε η μεταγενέστερη θα είναι $\mathrm{P'(R)} = 0.99$. Ο σκοπός της Μπεϋζιανής συνθηκολογίας είναι να διασφαλίσει ότι οι αλλαγές στους βαθμούς πίστης δεν είναι ακραίες . Προφανώς στην περίπτωση που αναφέραμε δεν επιτυγχάνει τίποτα η συνθηκολογία και θα πρέπει να προτιμηθεί η ενημέρωση μέσω της αρχής της μέγιστης εντροπίας .

Περίπτωση 2:

Εδώ θα θεωρήσουμε ότι το ε δεν είναι απλό σε σχέση με το Ε . Θα δείξουμε με ένα παράδειγμα την ασυμφωνία μεταξύ της maxent και της συνθηκολογίας . Έστω ότι το ε δηλώνει ότι P∗(θ)=0.8 δηλαδή ότι η πιθανότητα του θ είναι 0.8 . Τότε λόγω της νόρμας βαθμονόμησης η γνώση του ε δεν επιβάλλει μόνο τον περιορισμό $\mathrm{P(\varepsilon)} = 1$ αλλά και τον περιορισμό P(θ)=0.8 . Επομένως αν ο περιορισμός P(θ)=0.8 δεν έχει επιβληθεί ήδη από το Ε τότε το ε δεν είναι απλό σε σχέση με το Ε . Στην συγκεκριμένη περίπτωση θα αναρωτηθούμε αν πρέπει αν προτιμηθεί η maxent ή η συνθηκολογία . Σύμφωνα με την maxent ο παράγοντας θα θέσει $P_{E'}$(θ)=0.8 που φαίνεται σωστό αφού οι αποδείξεις επιβάλουν αυτό τον περιορισμό . Από την άλλη πλευρά αν P_E (θ|ε) ≠ 0.8 τότε η ενημέρωση με την συνθηκολογία είναι εσφαλμένη καθώς ο νέος βαθμός πίστης θα διαφωνεί με τις νέες αποδείξεις . Κάποιος που θα ήθελε να υπερασπιστεί την συνθηκολογία θα πρότεινε ότι ο παράγοντας θα μπορούσε να θέσει P_E (θ|ε)=0.8 και δεν θα υπήρχε διαφωνία . Αυτό το επιχείρημα όμως δεν είναι αποδεκτό καθώς ο υποκειμενισμός επιτρέπει στον παράγοντα να δώσει στο P_E (θ|ε)=0.8 οποιαδήποτε τιμή - αφού το ε δεν είναι δεδομένο την στιγμή που θέτουμε την προγενέστερη - δεν περιορίζει ούτε την τιμή του P_E (θ) ούτε του P_E (θ|ε). Αν το ε συνεπαγόταν επαγωγικά το θ και αντίστοιχα το -θ τότε το P_E (θ|ε) θα περιοριζόταν στην μονάδα ή στο μηδέν αντίστοιχα για -θ αλλά αυτό δεν συμβαίνει εδώ .

Θα παρουσιάσουμε άλλο ένα παράδειγμα . Έστω ότι το ενδεχόμενο Α είναι ότι ο Πίτερσον είναι Σουηδός , Β ότι είναι Νορβηγός και Γ ότι είναι Σκανδιναβός και οι αποδείξεις ε είναι ότι το 80% των Σκανδιναβών είναι Σουηδοί . Αρχικά ο παράγοντας θέτει P_E $(\mathrm{A})=0.2$, P_E $(\mathrm{B}) = 0.8$, P_E $(\Gamma)=1$, P_E $(\varepsilon)=0.2$, και P_E $(\mathrm{A} \wedge \varepsilon) = P_E$ $(\mathrm{B} \wedge \varepsilon)=0.1$. Όλοι αυτοί οι βαθμοί ικανοποιούν τις νόρμες του υποκειμενισμού . Με την γνώση του ε η ενημέρωση μέσω της maxent κάνει τον παράγοντα να πιστεύει ότι ο Πίτερσον είναι Σουηδός σε βαθμό 0.8 όπου φαίνεται σωστό . Αντίθετα , η ενημέρωση με την συνθηκολογία στο ε οδηγεί σε βαθμό πίστης 0.5 ότι ο Πίτερσον

είναι Σουηδός όπου είναι αρκετά λάθος . Επομένως σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι πρέπει να προτιμηθεί η αρχή της μέγιστης εντροπίας (maxent) γιατί αυτή ικανοποιεί τους νέους περιορισμούς x΄ σε αντίθεση με την συνθηκολογία .

Ένα άλλο σενάριο στο οποίο το ε δεν είναι απλό σε σχέση με το Ε και δημιουργούνται προβλήματα είναι αυτό που ακολουθεί , στο οποίο και η ενημέρωση με συνθηκολογία και η ενημέρωση με maxent ικανοποιούν το x΄ αλλά και πάλι η maxent είναι προτιμότερη . Έστω ότι Α ο Πίτερσον είναι Σουηδός , Γ ο Πίτερσον είναι Σκανδιναβός και το ε είναι ότι το 50% των Σκανδιναβών είναι Σουηδοί και όλοι οι πολιτικοί είναι ψεύτες . Το Ε είναι η γνώση ότι το Γ είναι αληθές μαζί με μια μαρτυρία από έναν πολιτικό ότι το -Α ∧ ε είναι ψευδές . Άρα το P_E ικανοποιεί τους περιορισμούς $x = \{P(\Gamma)=1, P(-A \wedge \varepsilon)=0\}$. Μεγιστοποιώντας την εντροπία ο παράγοντας θέτει $P_E(A)=2/3$, $P_E(A|\varepsilon) = 1$. Έπειτα ο παράγοντας μαθαίνει ότι το ε είναι αληθές . Τώρα λοιπόν το ε δεν είναι απλό σε σχέση με το Ε καθώς υπονομεύει την μαρτυρία του πολιτικού . Εύλογα έχουμε ότι $x' = \{P(\Gamma)=1, P(\varepsilon)=1, P(A|\varepsilon) \geq 0.5\}$. Η μεγιστοποίηση της εντροπίας τώρα δίνει $P_{E'}(A)=0.5 \neq 1= P_E(A|\varepsilon)$. Σε αυτό το παράδειγμα η $P_E(A|\varepsilon)$ πράγματι ικανοποιεί τους περιορισμούς στο x΄ όμως είναι διαισθητικά λάθος να ενημερώσουμε μέσω της συνθηκολογίας αφού με βάση τις τρέχουσες αποδείξεις η πίστη στο Α με βαθμό 1 είναι αδικαιολόγητη . Ούτε κάποιος υποκειμενικός ούτε κάποιος αντικειμενικός θα ήθελαν να υποχρεώσουν έναν παράγοντα να πιστέψει ολοκληρωτικά το ενδεχόμενο Α όταν δεν υπάρχουν αποδεικτικά στοιχεία που να εγγυώνται μια τόσο ισχυρή πεποίθηση . Εάν έπρεπε να χρησιμοποιηθεί ένας κανόνας για να οριοθετήσει τον νέο βαθμό πίστης στο Α τότε η maxent είναι πιο εύλογη .

Βλέπουμε λοιπόν ότι όταν το ε δεν είναι απλό σε σχέση με το Ε η maxent προτιμάται έναντι της συνθηκολογίας όταν αυτές διαφέρουν είτε η συνθηκολογία ικανοποιεί τους περιορισμούς x΄ είτε όχι . Εάν η συνθηκολογία δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς τότε προφανώς είναι ακατάλληλη και αν τους ικανοποιεί τότε είτε συμφωνεί με την maxent είτε είναι λιγότερο διφορούμενη από την ενημέρωση μέσω της maxent αλλά στην δεύτερη περίπτωση είναι σπάνια σωστό να έχει κανείς πιο ακραίους βαθμούς πίστης από αυτούς που εγγυώνται οι αποδείξεις .

Περίπτωση 3:

Η τρίτη παράβαση των συνθηκών του θεωρήματος αφορά την περίπτωση όπου το x΄ είναι ασυνεπή . Αυτό συνεπάγεται ότι είτε το χ είναι ασυνεπή είτε το ε είναι ασυνεπή με το x . Ακολουθώντας τους περιορισμούς που ορίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου δεν θα ασχοληθούμε καθόλου με την δεύτερη περίπτωση .Η διαδικασία διατήρησης της συνέπειας θα συνεχιστεί κανονικά , $E \neq P_x$ και όσο οι υπόλοιποι όροι ισχύουν η maxent θα συμβαδίζει με την συνθηκολογία . Εάν το είναι ασυνεπή με το x τότε $P_E(\varepsilon) = 0$ και το $P_E(\theta|\varepsilon)$ είναι είτε μη ορισμένο είτε μη οριοθετημένο σύμφωνα με τον τρόπο που ερμηνεύονται οι δεσμευμένες πιθανότητες . Αυτό εξηγείται γιατί η δεσμευμένη πιθανότητα ορίζεται ως $P(\theta|\varepsilon) = P(\theta \wedge \varepsilon)/P(\varepsilon)$ οπότε δεν ορίζεται όταν $P(\varepsilon) = 0$ και εναλλακτικά αν λαμβάνεται ως θεμελιακή και υποκείμενη στον περιορισμό $P(\theta|\varepsilon)P(\varepsilon) = P(\theta \wedge \varepsilon)$ τότε είναι μη οριοθετημένη όταν $P(\varepsilon)=0$. Εάν η $P_E(\theta|\varepsilon)$ είναι μη ορισμένη τότε δεν είναι εφικτό να εφαρμοστεί καθόλου η Μπεϋζιανή συνθηκολογία . Εάν η $P_E(\theta|\varepsilon)$ είναι μη οριοθετημένη τότε ο παράγοντας έχει την δυνατότητα να της αναθέσει οποιαδήποτε τιμή επιθυμεί οπότε η συνθηκολογία δεν παρέχει κανέναν ουσιαστικό περιορισμό υπό την έννοια ότι ο νέος βαθμός πίστης

στο θ δεν χρειάζεται να συνδέεται με τον προγενέστερο μη δεσμευμένο βαθμό πίστης στα θ , ε και σε οποιαδήποτε άλλη πρόταση . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα παράλογες αλλαγές στις πεποιθήσεις να θεωρούνται λογικές . Για παράδειγμα , αποδεικτικά στοιχεία που είναι γνωστό ότι λειτουργούν εις βάρος του θ είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν για να αυξήσουν την πιθανότητα του θ . Συνοψίζοντας , όταν το ε είναι ασυνεπή με το x η συνθηκολογία είναι μη εφαρμόσιμη ή κενή . Αντίθετα η ενημέρωση με την maxent εφαρμόζεται κανονικά , όπου $P_{E'}$ (θ) είναι η συνάρτηση πιθανότητας που είναι περισσότερο διφορούμενη από όλες όσες ανήκουν στο E΄. Εδώ να σημειώσουμε ότι το E΄ είναι ασυνεπή οπότε η διαδικασία διατήρησης της συνέπειας θα καθορίσει το E΄. Άρα και στην περίπτωση αυτή ο σωστός τρόπος είναι η ενημέρωση με την αρχή της μέγιστης εντροπίας .

Περίπτωση 4:

Η τελευταία περίπτωση είναι εκείνη στην οποία η P_E (·|ε) δεν ικανοποιεί το x . Θα παρουσιάσουμε την κατάσταση με ένα παράδειγμα . Έστω ότι ρίχνουμε ένα ζάρι και ο χώρος αποτελεσμάτων είναι Ω = {1,2,3,4,5,6}. Ο παράγοντας ξέρει ότι το αναμενόμενο αποτέλεσμα για αυτό το ζάρι είναι 3.5 οπότε x = { $\sum_{\omega} P(\omega)$=3.5}. Υποκείμενη σε αυτό τον περιορισμό η P_E είναι ομοιόμορφη δίνοντας P_E (ω)=1/6 σε κάθε αποτέλεσμα (Η συνάρτηση πιθανότητας από όλες εκείνες που ικανοποιούν τον περιορισμό η οποία είναι εγγύτερη στη διφορούμενη συνάρτηση είναι η ίδια η διφορούμενη συνάρτηση και είναι η ομοιόμορφη κατανομή). Ο παράγοντας στην συνέχεια μαθαίνει το ε ότι έχει συμβεί ένα άρτιο αποτέλεσμα . Εάν $x' = \{ \sum_{\omega} P(\omega)=3.5$, $\mathrm{P}(\{2, 4, 6\})=1\}$ τότε έχουμε $P_{E'}$ $(2) = 0.46624$, $P_{E'}$ $(4) = 0.31752$, και $P_{E'}$ $(6) = 0.21624$. Αυτό διαφέρει από το αποτέλεσμα της Μπεϋζιανής συνθηκολογίας αφού P_E $(2|\varepsilon) = P_E$ $(4|\varepsilon) =$ P_E $(6|\varepsilon)=1/3$. Η λύση της συνθηκολογίας παρατηρούμε ότι δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς χ αφού το αναμενόμενο αποτέλεσμα είναι τώρα 4 και όχι 3.5 .Θα εξετάσουμε αν σε αυτή τη περίπτωση είναι σωστή η maxent ή η συνθηκολογία . Εάν η ανάλυση είναι σωστή και $\sum_{\omega} P(\omega)=3.5$ είναι πράγματι ένας περιορισμός και στην προγενέστερη και στις ενημερωμένες συναρτήσεις πίστης τότε η συνθηκολογία πρέπει να είναι εσφαλμένη γιατί πολύ απλά δεν ικανοποιεί τον περιορισμό . Από την άλλη πλευρά ας υποθέσουμε ότι η ανάλυση είναι λάθος . Εάν ο περιορισμός δεν πρέπει να βρίσκεται στο x τότε δεν θα υπάρχει καμία διαφωνία ανάμεσα στην maxent και στην συνθηκολογία , θα εξαρτάται από τον αν η P_E $(\cdot|\varepsilon)$ ικανοποιεί το x . Εναλλακτικά , αν ο περιορισμός πρέπει να βρίσκεται στο x και όχι στο x΄ τότε το ε δεν είναι απλό σε σχέση με το E και καταλήγουμε στην περίπτωση 2 που αναλύσαμε προηγουμένως . Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι σε κάθε μια από τις τέσσερις περιπτώσεις όπου η maxent συγκρούεται με την συνθηκολογία πρέπει πάντα να προτιμάται η ενημέρωση μέσω της maxent .

4.3 Επικρίσεις κατά της συνθηκολογίας

Ένα μεγάλο μειονέκτημα της συνθηκολογίας είναι ότι απαιτείται να είναι αιώνια αληθής στις προγενέστερες πεποιθήσεις , δηλαδή οι βαθμοί πίστης ενός παράγοντα καθ' όλη την διάρκεια του χρόνου είναι καθορισμένες από την αρχική κατανομή πιθανότητας και πιο συγκεκριμένα από δεσμευμένες πιθανότητες της μορφής P(θ|ε) . Ενώ στην αρχή ο παράγοντας ίσως θεωρεί αυτούς τους δεσμευμένους βαθμούς πίστης κατάλληλους , είναι πιθανό να προκύψουν ακατάλληλοι έπειτα από ανασκόπηση . Αυτό συμβαίνει πράγματι όταν οι νέες αποδείξεις δεν είναι απλές σε σχέση με την προγενέστερη γνώση που έχουμε . Για παράδειγμα οι ανταλλάξιμοι προγενέστεροι βαθμοί πίστης ίσως να είναι κατάλληλοι κατά την απουσία γνώσεων για μια πειραματική κατάσταση αλλά όταν οι αποδείξεις ε υποδεικνύουν ότι τα δεδομένα παράγονται από μια μαρκοβιανή διαδικασία και όχι από μια σειρά ανεξάρτητων δοκιμών ,οι ανταλλάξιμοι βαθμοί πίστης αποτελούν μια καταστροφή .Όμως ο παράγοντας δεν επιτρέπεται από την συνθηκολογία να αλλάξει τους βαθμούς πίστης του σε μη ανταλλάξιμους (με δεδομένη μια ακολουθία αποτελεσμάτων είτε θετικών είτε αρνητικών οι προγενέστεροι βαθμοί πίστης ενός παράγοντα είναι ανταλλάξιμοι αν και μόνο αν για κάθε αριθμό m ο παράγοντας αναθέτει τον ίδιο βαθμό πίστης σε κάθε δυνατή ακολουθία αποτελεσμάτων που αποδίδει m θετικά αποτελέσματα συνολικά). Ακόμα και υποστηρικτές της συνθηκολογίας παραδέχονται ότι αυτό είναι ανεπιθύμητο και ότι ίσως χρειάζεται να παρακάμπτεται η συνθηκολογία όταν μια προγενέστερη επαναξιολογείται .

Η αρχή της μέγιστης εντροπίας αλλά και ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός γενικότερα δεν πάσχουν από αυτή την παθολογία . Η maxent δεν επιβάλλει στον παράγοντα να παραμείνει αιώνια πιστός στις προγενέστερες πεποιθήσεις του . Σε κάθε βήμα επιλέγει μια συνάρτηση πίστης από όλες εκείνες που ταιριάζουν στις αποδείξεις εκείνη την στιγμή η οποία είναι μέγιστα διφορούμενη . Δεν υπάρχει καμία περίπτωση οπότε οι ενημερωμένοι βαθμοί πίστης του παράγοντα να είναι εκτός ρυθμού με τις αποδείξεις . Πολλές φορές καταλογίζεται στον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό ότι υποφέρει επειδή μένει προσκολλημένος σε μια αδικαιολόγητη προγενέστερη η οποία καθιστά την εκμάθηση από εμπειρία αδύνατη . Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τις στοιχειώδεις προτάσεις B_1,...,B_{101} όπου B_i δηλώνει ότι το i-οστό παρατηρούμενο κοράκι είναι μαύρο . Η μεγιστοποίηση της εντροπίας υπό την απουσία περιορισμών αποδίδει $P\emptyset(B_{101}) = P\emptyset(B_{101}|B_1 \wedge\cdots\wedge B_{100})$=½ . Οπότε βλέπουμε ότι η παρατήρηση εκατό μαύρων κορακιών δεν ισχυροποιεί την πίστη του παράγοντα ότι το εκατοστό πρώτο θα είναι μαύρο δηλαδή ο παράγοντας αποτυγχάνει να μάθει από την εμπειρία . Η ένσταση αυτή όμως είναι άστοχη αφού η $P\emptyset(B_{101}|B_1 \wedge\cdots\wedge B_{100})$δεν αντιπροσωπεύει τον βαθμό στον οποίο ο παράγοντας θα πρέπει να πιστεύει ότι το εκατοστό πρώτο κοράκι είναι μαύρο στην βάση των αποδείξεων $B_1 \wedge\cdots\wedge B_{100}$. Αυτό οφείλεται στο ότι η $B_1 \wedge\cdots\wedge B_{100}$ δεν είναι απλή . Η γνώση αυτών των αποδείξεων εκτός από τον περιορισμό P($B_{101}|B_1 \wedge\cdots\wedge B_{100}$) =1 επιβάλλει και τον περιορισμό P(B_{101}) $\cong$ 1 . Όταν η απόδειξη $B_1 \wedge\cdots\wedge B_{100}$ συνιστά τις νέες αποδείξεις E΄ βλέπουμε ότι $P\emptyset(B_{101})$ =1/2 (και $P\emptyset(B_{101}|B_1 \wedge\cdots\wedge B_{100})$=1/2), αλλά $P_{E'}$(B101) $\cong$ 1. Και σε αυτή την περίπτωση η maxent διαφωνεί με την συνθηκολογία αλλά ο παράγοντας όντως μαθαίνει από εμπειρία .

Η παραπάνω ένσταση μπορεί να διατυπωθεί και αλλιώς ώστε να γίνει καλύτερα αντιληπτή . Η συνθηκολογία απαιτεί τον προσδιορισμό όλων των μελλοντικών βαθμών πίστης εκ των προτέρων , δηλαδή τον προσδιορισμό της P(θ|ε) από την αρχή για όλες τις δυνατές ακολουθίες των αποδείξεων ε , πράγμα που είναι αδύνατο . Η αρχή της μέγιστης εντροπίας δεν προϋποθέτει κάτι τέτοιο καθώς οι βαθμοί πίστης είναι μια συνάρτηση των αποδείξεων E του παράγοντα και δεν χρειάζεται να υπολογίσει ολόκληρη την συνάρτηση P_E σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή αλλά μόνο το μέρος εκείνο της συνάρτησης που απαιτείται για πρακτικούς σκοπούς . Επομένως σε οποιοδήποτε στάδιο η P_E μπορεί να είναι μερικώς προσδιορισμένη επειδή καθορίζεται εκ νέου σε περίπτωση αλλαγών στις αποδείξεις E και έτσι δεν εμποδίζεται η ενημέρωση .

Κάτι ακόμα που καταλογίζεται εις βάρος της συνθηκολογίας και συνδέεται στενά με όσα αναφέραμε παραπάνω είναι ότι απαιτεί επίσης κάθε μελλοντικό δυνατό στοιχείο των αποδείξεων να μπορεί να εκφραστεί ως πρόταση στην προγενέστερη γλώσσα του παράγοντα . Μια τόσο μεγάλη προβλεπτικότητα όμως είναι παράλογη . Όπως είδαμε η maxent αντίθετα δεν αντιμετωπίζει αυτό το πρόβλημα καθώς αν οι νέες αποδείξεις δεν βρίσκονται στην παλιά γλώσσα τότε πολύ απλά η γλώσσα επεκτείνεται ώστε να περιέχει το ε και η maxent εφαρμόζεται όπως συνήθως . Επειδή στον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό οι μεταγενέστεροι βαθμοί πίστης περιορίζονται από την maxent και όχι από τους προγενέστερους βαθμούς δεν υπάρχει κάποιος λόγος οι αποδείξεις να μπορούν να αντιπροσωπευτούν με τη παλιά γλώσσα.

Η συνθηκολογία έχει δεχθεί επίσης κριτική εξαιτίας του γεγονότος ότι πρέπει να καθιστά όλες τις αποδείξεις μόνιμα σίγουρες ενώ είναι προφανώς υποκείμενες σε λάθη . Όταν το ε γίνεται γνωστό η P(ε) παραμένει 1 για πάντα ακόμα και αν τα μεταγενέστερα αποδεικτικά στοιχεία δημιουργούν αμφιβολίες στην ε . Η αρχή μέγιστης εντροπίας αντιθέτως δεν προϋποθέτει ότι οι αποδείξεις πρέπει να είναι μόνιμα σίγουρες . Εάν η φιλαλήθεια του ε είναι αμφισβητήσιμη απλά το ε αφαιρείται από τις τρέχουσες αποδείξεις και μεγιστοποιείται η εντροπία κανονικά . Εάν το ε αποκτάται μέσω μιας διαδικασίας με ποσοστό σφάλματος δ τότε η γνώση του ε επιβάλλει τον περιορισμό $P(\varepsilon)=1-\delta$ αντί για P(ε) = 1 .Η maxent είναι ικανή χειρίζεται τέτοιους περιορισμούς χωρίς δυσκολία ενώ η Μπεϋζιανή συνθηκολογία απαιτεί να ισχύει P(ε) = 1 όταν το ε γίνεται γνωστό .

Τέλος ένα ακόμα μειονέκτημα της συνθηκολογίας είναι ότι δεν είναι συνεπής σε ορισμένες καταστάσεις . Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα το οποίο πραγματοποιείται σε υποκειμενικούς όρους . Έστω ότι σήμερα είμαστε σίγουροι για το θ οπότε P(θ) = 1 αλλά αύριο ίσως να είμαστε αρκετά λιγότερο σίγουροι για το θ δηλαδή P(P′ (θ) ≤ 0.9) > 0 . Αφού όμως $P(\theta)=1$ τότε $P(\theta|P'(\theta)\leq 0.9)=1$. Έπειτα έρχεται η αυριανή μέρα και πράγματι $P'(\theta)\leq 0.9$ και το συνειδητοποιούμε με ενδοσκόπηση . Όμως με την συνθηκολογία $P'(\theta)=P(\theta|P'(\theta)\leq 0.9)=1$ που οδηγεί σε αντίφαση . Η απόδειξη P′ (θ) ≤ 0.9 εδώ δεν είναι απλή αφού επιβάλλει τους περιορισμούς $P'(\theta)\leq 0.9$ και $P'(P'(\theta)\leq 0.9)=1$. Οπότε σύμφωνα και με όσα είπαμε πριν είναι αναμενόμενο ότι η συνθηκολογία θα είναι εσφαλμένη . Μια προσέγγιση αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού είναι προτιμότερη και σε αυτή την περίπτωση αφού εάν $P'(\theta)\leq 0.9$ είναι ένας περιορισμός στους νέους βαθμούς πίστης τότε θα ικανοποιηθεί χωρίς καμία αντίφαση και αν δεν είναι τότε απλά δεν θα επιβληθεί σαν περιορισμός και πάλι δεν θα δημιουργηθεί κάποια αντιλογία .

Έπειτα από τα διαφορετικά σενάρια που αναλύσαμε προηγουμένως στα οποία η maxent διαφωνεί με την συνθηκολογία είδαμε ότι η πρώτη πρέπει να προτιμάται σε κάθε μια από τις περιπτώσεις . Ως εκ τούτου το επιχείρημα εναντίον της ενημέρωσης μέσω της αρχής της μέγιστης εντροπίας το οποίο στηριζόταν στην ύπαρξη αυτών των διαφωνιών τελικά λειτουργεί εις βάρος των υποκειμενικών και της συνθηκολογίας . Όμως χωρίς ένα βιώσιμο τρόπο ενημέρωσης φτάνει στο σημείο να θεωρείται αστείος καθώς όχι μόνο ένας παράγοντας είναι λογικό να επιλέξει πρακτικά οποιαδήποτε συνάρτηση πίστης θέλει ως προγενέστερη αλλά έχει και την δυνατότητα να την αλλάξει με όποιο τρόπο θέλει .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αντικειμενικά Μπεϋζιανά Δίκτυα

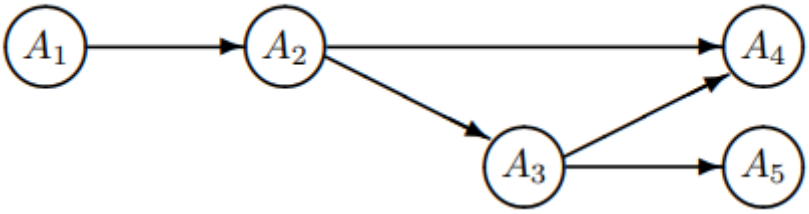
Ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός έχει κατακριθεί γιατί η αναπαράσταση και η συλλογιστική με συναρτήσεις πιθανότητας μέγιστης εντροπίας φαίνεται να είναι υπολογιστικά αδύνατη με εξαίρεση μόνο προβλήματα μικρού μεγέθους . Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε υπολογιστικούς μηχανισμούς που επιτρέπουν την αποτελεσματική αναπαράσταση και συμπερασματολογία για την πιθανότητα του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού . Αυτός είναι ο μηχανισμός των αντικειμενικών Μπεϋζιανών δικτύων και των αντικειμενικών δικτύων πίστωσης .

Ο μηχανισμός των πιθανολογικών δικτύων χρησιμοποιείται για να καθιστά πιο εύκολα διαχειρίσιμη την πιθανολογική αναπαράσταση και συλλογιστική . Το κρισιμότερο χαρακτηριστικό των πιθανολογικών δικτύων είναι ότι παρέχουν μια μείωση της διάστασης . Ενώ ο χώρος P των συναρτήσεων πιθανότητας στην L_n έχει διάσταση $2^{r_n} - 1$ -δηλαδή γενικά απαιτούνται τόσες συντεταγμένες P(ω_n) για τον προσδιορισμό μιας αυθαίρετης συνάρτησης πιθανότητας - ένα πιθανολογικό δίκτυο εκμεταλλεύεται τις πιθανολογικές σχέσεις ανεξαρτησίας που ικανοποιούνται από μια συγκεκριμένη συνάρτηση πιθανότητας ώστε να μειώσουν το πλήθος των συντεταγμένων που απαιτούνται για τον προσδιορισμό της συνάρτησης . Σε πάρα πολλές εφαρμογές πιθανοτήτων οι συναρτήσεις πιθανότητας που μας ενδιαφέρουν συνήθως ικανοποιούν τόσες πολλές σχέσεις ανεξαρτησίας και άρα προσδιορίζονται από πολύ λίγες συντεταγμένες οπότε ο χειρισμός τους είναι αρκετά ευάγωγος .

5.1 Μπεϋζιανά Δίκτυα

Ένα Μπεϋζιανό δίκτυο είναι ένα είδος πιθανολογικού δικτύου το οποίο χρησιμοποιείται για να εκπροσωπεί μια μοναδική συνάρτηση πιθανότητας . Ο λόγος που αναπτύχθηκαν τα Μπεϋζιανά δίκτυα αρχικά ήταν για να αναπαριστούν συναρτήσεις πιθανότητας που ορίζονταν πάνω σε ένα σύνολο μεταβλητών αλλά μπορούν να εφαρμοστούν ισοδύναμα για να αντιπροσωπεύουν συναρτήσεις

πιθανότητας σε λογικές γλώσσες που είναι το θέμα που μας αφορά . Έστω P είναι μια συνάρτηση πιθανότητας που ορίζεται στην L_n. Μια αναπαράσταση με Μπεϋζιανό δίκτυο της P αποτελείται από έναν κατευθυνόμενο άκυκλο γράφο του οποίου οι κόμβοι είναι A_1,…,A_{r_n} , μαζί με την δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας P($A_i|Par_i$) που επάγονται από την P για κάθε A_i δεσμευμένο από τους γονείς του Par_i στον γράφο .Στην εικόνα που ακολουθεί δίνουμε ένα παράδειγμα άκυκλου κατευθυνόμενου γράφου .



Εικόνα 3 *: Άκυκλος κατευθυνόμενος γράφος*

Στην συνέχεια ακολουθεί ένας πίνακας στον οποίο προσδιορίζεται η δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας του ενδεχομένου A_4 δεσμευμένο από τα A_2 και A_3. Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι λόγω της ιδιότητας της προσθετικότητας των πιθανοτήτων μόνο τέσσερις εκ των πιθανοτήτων χρειάζεται να προσδιοριστούν , μια από κάθε γραμμή του πίνακα . Ο γράφος θα πρέπει να κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε η παρακάτω συνθήκη που ονομάζεται Μαρκοβιανή να ισχύει .

$P(\neg A_4 \mid \neg A_2 \wedge \neg A_3) = 0.7$	$P(A_4 \mid \neg A_2 \wedge \neg A_3) = 0.3$
$P(\neg A_4 \mid \neg A_2 \wedge A_3) = 0.9$	$P(A_4 \mid \neg A_2 \wedge A_3) = 0.1$
$P(\neg A_4 \mid A_2 \wedge \neg A_3) = 0.2$	$P(A_4 \mid A_2 \wedge \neg A_3) = 0.8$
$P(\neg A_4 \mid A_2 \wedge A_3) = 0.4$	$P(A_4 \mid A_2 \wedge A_3) = 0.6$

Πίνακας 1*: Η κατανομή πιθανότητας του A_4 δεσμευμένο από τα A_2 και A_3*

Μαρκοβιανή Συνθήκη :

Κάθε A_ι είναι πιθανολογικά ανεξάρτητο από τους μη απογόνους του στον γράφο , δεσμευμένο από τους γονείς του και γράφουμε $A_\iota \perp\perp ND_i \mid Par_i$. Το σύμβολο $\perp\perp$ σηματοδοτεί την δεσμευμένη ανεξαρτησία .Ο γράφος που παρουσιάσαμε προηγουμένως συνεπάγεται ότι :

$A_3 \perp\perp A_1 \mid A_2$

$A_4 \perp\perp A_1 , A_5 \mid A_2, A_3$

$A_5 \perp\perp A_1, A_2 , A_4 \mid A_3$.

Ένα Μπεϋζιανό δίκτυο καθορίζει μια συνάρτηση πιθανότητας P στην L_n μέσω της ταυτότητας :

$$\mathrm{P}(\,\Omega_n) = \prod_{i=1}^{rn} P({A_i}^{\omega_n} | {Par_i}^{\omega_n})$$

Όπου τα ${A_i}^{\omega_n}$ και ${Par_i}^{\omega_n}$ είναι οι καταστάσεις των A_ι και των γονέων του που είναι συνεπή με τα ω_n .

Κάθε συνάρτηση πιθανότητας γίνεται να αναπαρασταθεί από ένα Μπεϋζιανό δίκτυο. Εάν η συνάρτηση καμία πιθανολογική ανεξαρτησία τότε μπορεί κανείς να πάρει ένα Μπεϋζιανό δίκτυο σε έναν ολοκληρωμένο άκυκλο κατευθυνόμενο γράφο (έναν γράφο στον οποίο υπάρχει ένα βέλος ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι κόμβων) αφού ένας τέτοιος γράφος δεν συνεπάγεται καθόλου ανεξαρτησίες σύμφωνα με την Μαρκοβιανή συνθήκη .

Το πλεονέκτημα που παρέχει η αναπαράσταση μιας συνάρτησης πιθανότητας με ένα Μπεϋζιανό δίκτυο είναι ότι συνήθως χρειάζεται να προσδιοριστούν λιγότεροι αριθμοί για τον πλήρη καθορισμό μιας συνάρτησης πιθανότητας . Αντί να πρέπει να υπολογίσουμε την P(ω_n) για όλα τα ω_n εκτός από ένα όπου $\omega_n \in \Omega_n$ δηλαδή 31 πιθανότητες συνολικά για το παράδειγμα , χρειάζεται να υπολογίσουμε μόνο 11 πιθανότητες , αυτές που βρίσκονται στον πίνακα πιθανοτήτων . Η μείωση διάστασης αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική όταν το n είναι μεγάλο .

5.2 Δίκτυα πίστωσης

Ένα άλλο είδος πιθανολογικού δικτύου είναι το δίκτυο πίστωσης το οποίο χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση ενός συνόλου συναρτήσεων πιθανότητας . Όπως και ένα Μπεϋζιανό δίκτυο , ένα δίκτυο πίστωσης επικαλείται ένα άκυκλο κατευθυνόμενο γράφο . Αντί όμως για τον προσδιορισμό για κάθε προτασιακή μεταβλητή /ατομική δήλωση A_i μιας μοναδικής κατανομής των A_i δεσμευμένη από τους γονείς της , προσδιορίζει τους περιορισμούς που μια τέτοια κατανομή πιθανότητας θα πρέπει να ικανοποιεί . Αυτό το επιτυγχάνει με την αντιστοίχιση ενός κλειστού διαστήματος - αντί για ένα μοναδικό πραγματικό αριθμό - σε κάθε ατομική κατάσταση A_i και τους γονείς της (αν και επιτρέπονται και μοναδικοί αριθμοί ως τετριμμένα κλειστά διαστήματα). Βασιζόμενοι στον προηγούμενο άκυκλο κατευθυνόμενο γράφο θα θεωρήσουμε ένα δίκτυο πίστωσης και θα δώσουμε ένα παράδειγμα πιθανολογικού πίνακα (Πίνακας 2) όπου και εδώ λόγω της προσθετικότητας χρειαζόμαστε μια καταχώρηση σε κάθε γραμμή για να καθορίσουμε ολόκληρο τον πίνακα .

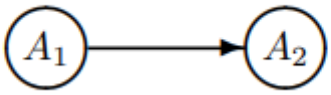
$P(\neg A_4 \mid \neg A_2 \wedge \neg A_3) \in [0.7, 0.8]$	$P(A_4 \mid \neg A_2 \wedge \neg A_3) \in [0.2, 0.3]$
$P(\neg A_4 \mid \neg A_2 \wedge A_3) = 0.9$	$P(A_4 \mid \neg A_2 \wedge A_3) = 0.1$
$P(\neg A_4 \mid A_2 \wedge \neg A_3) \in [0.2, 1]$	$P(A_4 \mid A_2 \wedge \neg A_3) \in [0, 0.8]$
$P(\neg A_4 \mid A_2 \wedge A_3) \in [0.35, 0.4]$	$P(A_4 \mid A_2 \wedge A_3) \in [0.6, 0.65]$

Πίνακας 2

Η Μαρκοβιανή συνθήκη εφαρμόζεται και στα δίκτυα πίστωσης . Αυτή είναι δυνατό να ερμηνευτεί με ποικίλους τρόπους όταν αναφέρεται σε ένα σύνολο συναρτήσεων πιθανότητας αλλά εμείς θα ακολουθήσουμε την παρακάτω : για κάθε συνάρτηση πιθανότητας που αναπαρίσταται από το δίκτυο κάθε A_i είναι πιθανολογικά ανεξάρτητο από τους μη απογόνους στον άκυκλο κατευθυνόμενο γράφο, δεσμευμένο από τους γονείς του και γράφουμε $A_i \perp\perp_P ND_i \mid Par_i$ για όλα τα $P \in C$ το σύνολο των συναρτήσεων πιθανότητας που καθορίζονται από το δίκτυο πίστωσης . Κάτω από αυτή την ερμηνεία το δίκτυο πίστωσης μπορεί να γίνει αντιληπτό ως το σύνολο των Μπεϋζιανών δικτύων που έχουν τον γράφο ενός δικτύου πίστωσης και του οποίου οι δεσμευμένες κατανομές πιθανότητας ικανοποιούν τους περιορισμούς που βρίσκονται στο δίκτυο πίστωσης .

Ένα δίκτυο πίστωσης στην συνέχεια καθορίζει ένα σύνολο C από συναρτήσεις πιθανότητας στην L_n μέσω του C = { Οι P που ικανοποιούν τους περιορισμούς στους πίνακες και $P(\Omega_n) = \prod_{i=1}^{rn} P({A_i}^{\omega_n} | {Par_i}^{\omega_n})$, όπου ${A_i}^{\omega_n}$ και ${Par_i}^{\omega_n}$ είναι οι καταστάσεις των A_i και οι γονείς αυτών που είναι συνεπείς με τα ω_n . Όμως είναι κρίσιμο να αναφέρουμε ότι δεν είναι εφικτό κάθε σύνολο συναρτήσεων πιθανότητας να αναπαρασταθεί από ένα δίκτυο πίστωσης όπως το ορίσαμε προηγουμένως . Για αρχή μόνο τα κλειστά σύνολα συναρτήσεων είναι δυνατό να αναπαρασταθούν .

Επιπλέον ως τώρα οι περιορισμοί στους πίνακες πιθανότητας αντιμετωπίζονταν σαν να λειτουργούν ανεξάρτητα , αλλά για την αναπαράσταση συγκεκριμένων συνόλων συναρτήσεων πιθανότητας πρέπει η τιμή που παίρνει το P μέσα σε ένα περιοριστικό διάστημα να περιορίζει την τιμή που μπορεί να πάρει αυτό σε κάποιο άλλο διάστημα . Για παράδειγμα έστω L_2 (με $r_n = \mathrm{n}$) και το σύνολο των συναρτήσεων πιθανότητας C = {P : P($A_1 \wedge A_2$)=0.3, P(A_2|-A_1)=0} . Θα κατασκευάσουμε ένα δίκτυο πίστωσης που θα αναπαριστά αυτό το σύνολο στον γράφο που ακολουθεί (Γράφος 2) , ο οποίος δεν υπονοεί καμία ανεξαρτησία μέσω της Μαρκοβιανής συνθήκης . Για να βρίσκεται σε αυτό το σύνολο μια συνάρτηση πιθανότητας P θα πρέπει να ικανοποιεί : $\mathrm{P}(A_1) \in [0.3, 1]$ το οποίο αποδίδει ένα πίνακα πιθανότητας για το A_1 .



Γράφος 2

Όσον αφορά τον πίνακα πιθανότητας για το A_2 το P οφείλει να ικανοποιεί επίσης $\mathrm{P}(A_2|\text{-}A_1) = 0$ όμως η τιμή που παίρνει το P($A_2|A_1$) εξαρτάται από το P(A1) αφού $\mathrm{P}(A_2|A_1) = 0.3/\mathrm{x}$, όπου $\mathrm{x} = \mathrm{P}(A_1)$. Άρα θα πρέπει να παρουσιάσουμε τους περιορισμούς μέσω των πινάκων 3 και 4 .

$$\boxed{P(A_1) = x \in [0.3, 1]}$$

Πίνακας 3*: Ένας πίνακας πιθανότητας για το A1*

$$\boxed{\begin{array}{l} P(A_2|\neg A_1) = 0 \\ P(A_2|A_1) = 0.3/x \end{array}}$$

Πίνακας 4 *: Ένας πίνακας πιθανότητας για το A2 δεσμευμένο από το A1*

Εάν συνδέσουμε τους πίνακες πιθανότητας κάνοντας έκκληση σε παραμέτρους όπως είναι η x παραπάνω τότε έχουμε ένα παραμετροποιημένο δίκτυο πίστωσης . Κάνοντας έκκληση σε παραμέτρους αυξάνεται η εκφραστική δύναμη των δικτύων πίστωσης . Αυτό συμβαίνει διότι οι παράμετροι δίνουν την δυνατότητα στα δίκτυα πίστωσης να εκπροσωπεύουν μια ευρύτερη ποικιλία από σύνολα συναρτήσεων πιθανότητας . Παρότι ο προσδιορισμός ενός δικτύου πίστωσης απαιτεί τον καθορισμό περισσότερων αριθμών σε σχέση με ένα Μπεϋζιανό δίκτυο αφού πρέπει να προσδιοριστούν και τα δύο τελικά σημεία ενός κλειστού διαστήματος , τα δίκτυα πίστωσης προσφέρουν την ίδια μείωση στην διάσταση . Ανάλογα με την αραιότητα του άκυκλου κατευθυνόμενου γράφου ο αριθμός των περιορισμών στους πίνακες πιθανότητας μπορεί να είναι αρκετά μικρότερος από τον 2^{r_n}-1 που θα απαιτούνταν ώστε να περιοριστούν όλα τα P(ω_n) εκτός από ένα μεμονωμένα .

5.3 Συμπερασματολογία

Αφού προσδιορίσει κανείς ένα πιθανολογικό δίκτυο είναι φυσικό ακόλουθο να θέλει να συμπεράνει μια P(ψ) ή ένα εύρος δυνατών τιμών για το P(ψ) από το δίκτυο , όπου ψ είναι κάποια πρόταση στην L_n. Υπάρχει μια μεγάλη γκάμα από αλγορίθμους που πραγματοποιούν συμπερασματολογία σε πιθανολογικά δίκτυα , οι περισσότεροι εκ των οποίων εξειδικεύονται σε συγκεκριμένα είδη συμπερασμάτων δηλαδή στην συμπερασματολογία συγκεκριμένων δεσμευμένων πιθανοτήτων από Μπεϋζιανά δίκτυα . Μία πολύ γενική προσέγγιση είναι αυτή του Haenni η οποία παρέχει το πλεονέκτημα ότι χειρίζεται τα Μπεϋζιανά δίκτυα , τα δίκτυα πίστωσης και τα παραμετροποιημένα δίκτυα πίστωσης με έναν ομογενή τρόπο και επιπλέον μπορεί να χειριστεί αυθαίρετες προτασιακές προτάσεις ψ . Η προσέγγιση αυτή συνδυάζει μια μεθοδολογία σύνταξης με μεθόδους αριθμητικών προσεγγίσεων .

Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί η προσέγγιση είναι ότι χωρίζει την συμπερασματολογία σε δύο φάσεις . Η πρώτη αποτελείται από την φάση σύνταξης η οποία μετατρέπει το πιθανολογικό δίκτυο σε μια νέα αναπαράσταση που ευνοεί την αποτελεσματική συμπερασματολογία . Η δεύτερη φάση που ονομάζεται φάση απαντήσεων αιτημάτων , εκτελεί συμπερασματολογία στην νέα αναπαράσταση . Η πρώτη φάση είναι ακριβή υπολογιστικά αλλά χρειάζεται να εκτελεστεί μόνο μια φορά ενώ η δεύτερη φάση είναι φθηνότερη και μπορεί να εκτελεστεί κάθε φορά που παρουσιάζεται ένα νέο ψ .

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε ότι η συμπερασματολογία με δίκτυα πίστωσης μπορεί να είναι εξαιρετικά πιο περίπλοκη σε σύγκριση με τα Μπεϋζιανά δίκτυα . Το δίκτυο πίστωσης ίσως να αναπαριστά ένα σύνολο συναρτήσεων πιθανότητας με ένα μεγάλο αριθμό ακραίων σημείων καθένα από τα οποία χρειάζεται να παρακολουθηθεί ώστε να εκτελεστεί η συμπερασματολογία . Η μεθοδολογία σύνταξης που περιγράψαμε προηγουμένως βοηθάει στην καταπράυνση αυτού του υπολογιστικού εμποδίου αλλά είναι επίσης βοηθητικό να χρησιμοποιήσει κανείς μεθόδους αριθμητικών προσεγγίσεων αντί για ακριβείς μεθόδους συμπερασματολογίας όταν εργάζεται με δίκτυα πίστωσης . Σύμφωνα με

αυτά οι μέθοδοι hill-climbing ταιριάζουν πολύ καλά για μεταγλωττισμένα δίκτυα πίστωσης . Πιο συγκεκριμένα , αυτές οι μέθοδοι λειτουργούν άψογα στις ακραίες περιπτώσεις όπου το δίκτυο πίστωσης είναι πράγματι ένα Μπεϋζιανό δίκτυο .

5.4 Αναπαράσταση της αντικειμενικής Μπεϋζιανής πιθανότητας

Αντικειμενικά Μπεϋζιανά δίκτυα

Ένα αντικειμενικό Μπεϋζιανό δίκτυο ή obnet είναι μια αναπαράσταση μιας συνάρτησης P_E στην L_n που σύμφωνα με την Μπεϋζιανή επιστημολογία αποδίδει τους κατάλληλους βαθμούς πίστης για έναν παράγοντα με γλώσσα L_n και αποδεικτικά στοιχεία E . Ένα obnet μπορεί να κατασκευαστεί με τρία βήματα :

1) Καθορίζοντας τις ανεξαρτησίες που πρέπει να ικανοποιούνται από την P_E .

2) Αναπαριστώντας αυτές τις ανεξαρτησίες με έναν άκυκλο κατευθυνόμενο γράφο που ικανοποιεί την Μαρκοβιανή συνθήκη και

3) Προσδιορίζοντας τις δεσμευμένες κατανομές P_E $(A_i | Par_i)$

Αντικειμενικά δίκτυα πίστωσης

Σε περιπτώσεις όπου η P_E δεν είναι εφικτό να προσδιοριστεί μοναδικά , ίσως μας ενδιαφέρει να αναπαραστήσουμε την επιλεγμένη P_E του παράγοντα αλλά όλες τις υποψήφιες για την P_E δηλαδή ίσως να θέλουμε αναπαραστήσουμε το $\downarrow E$ (ή $\Downarrow E$) . Σε τέτοιες περιπτώσεις ένα μόνο obnet δεν επαρκεί για να αναπαραστήσει το $\downarrow E$. Με την βοήθεια ενός θεωρήματος (με το οποίο δεν θα ασχοληθούμε αναλυτικότερα) όμως είναι δυνατό να αναπαρασταθούν όλα τα μέλη του $\downarrow E$ από obnets στο ίδιο γράφο . Ένα αντικειμενικό δίκτυο πίστωσης ή ocnet είναι ένα δίκτυο πίστωσης που αναπαριστά το σύνολο $\downarrow E$ και έχει θεμελιώδες ενδιαφέρον για τον αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό .

5.5 Εφαρμογή στην πρόγνωση του καρκίνου

Για μια βαθύτερη κατανόηση των αντικειμενικών Μπεϋζιανών δικτύων ή obnets θα δείξουμε στην συνέχεια πως αυτά εφαρμόζονται στην πράξη και πιο συγκεκριμένα στην πρόγνωση του καρκίνου του μαστού . Το πρόβλημα που θα αναλύσουμε αφορά έναν ασθενή που έχει καρκίνο του μαστού και ένας παράγοντας ή πιο συγκεκριμένα

ιατρός οφείλει να λάβει την κατάλληλη απόφαση για την θεραπεία του . Επειδή ορισμένες θεραπείες έχουν πολύ σκληρές παρενέργειες θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή καθώς δεν θα ήταν εύλογο ούτε φρόνιμο να εφαρμοστούν αυτές σε ασθενείς με χαμηλά επίπεδα κινδύνου . Γενικά η τακτική που ακολουθείτε είναι ότι όσο υψηλότερη είναι η πιθανότητας εμφάνισης του καρκίνου τόσο πιο επιθετική θα πρέπει να είναι και η θεραπεία που θα χορηγηθεί . Επομένως είναι εξαιρετικά σημαντικό να καθορισθεί ο βαθμός στον οποίο ο ιατρός θα πρέπει να πιστεύει ότι ο καρκίνος του ασθενή θα ξανασυμβεί .

Τα διαθέσιμα αποδεικτικά στοιχεία σε ένα τέτοιο πρόβλημα είναι πολυσχιδή και παρουσιάζουν αρκετά διαφορετικά είδη δομών . Υπάρχει επίσης μια μεγάλη ποικιλία από σύνολα κλινικών δεδομένων που περιγράφουν τα συμπτώματα και την εξέλιξη των ασθενειών που έχουν συλλεχθεί από προηγούμενους ασθενείς . Επιπλέον έχουμε στην διάθεση μας σύνολα με γονιδιωματικά δεδομένα που δείχνουν την παρουσία ή απουσία μοριακών δεικτών σε προηγούμενους ασθενείς καθώς και επιστημονικές εργασίες που προσφέρουν αποδεικτικά στοιχεία για τις αιτιώδεις σχέσεις και μηχανισμούς όπως και παρέχουν στατιστικές πληροφορίες που ποσοτικοποιούν την ισχύ της σύνδεσης μεταξύ των μεταβλητών που βρίσκονται υπό εξέταση . Οι αιτιώδεις σχέσεις και οι μηχανισμοί είναι δυνατό να εξαχθούν και από ειδικούς στο συγκεκριμένο επιστημονικό πεδίο όπως είναι οι κλινικοί ιατροί και οι ερευνητές της βιολογίας του καρκίνου . Τέλος υπάρχει ακόμα ένα μεγάλο πλήθος από συστήματα ιατρικής πληροφορικής που προσφέρουν για παράδειγμα αποδεικτικά στοιχεία για τις οντολογικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών και στοιχεία των σχέσεων λογικής σε συστήματα ιατρικής ανάπτυξης .

Με βάση την μεθοδολογία της παραδοσιακής μηχανικής μάθησης υπάρχουν δύο διαδρομές που μπορούν να ακολουθηθούν . Η μια επιλογή αποτελεί την επιλογή των βέλτιστων διαθέσιμων δεδομένων , για παράδειγμα ένα σύνολο κλινικών δεδομένων και την κατασκευή ενός μοντέλου δηλαδή ενός Μπεϋζιανού δικτύου όπου θα αναπαριστά την κατανομή των δεδομένων . Το μοντέλο που θα προκύψει από την παραπάνω διαδικασία θα χρησιμοποιηθεί ως βάση για την απόφαση που θα λάβουμε για το πρόβλημα . Προφανώς μια τέτοια προσέγγιση δεν είναι ιδανική αφού με αυτό τον τρόπο αγνοούμε ένα μεγάλο μέρος από τα διαθέσιμα αποδεικτικά στοιχεία και η διαδικασία αυτή δεν πρόκειται να αποδώσει χρήσιμα αποτελέσματα εάν τα επιλεγμένα δεδομένα δεν είναι σχετικά , ακριβή και άφθονα. Η δεύτερη επιλογή αφορά την κατασκευή ενός μοντέλου από κάθε μέρος των αποδεικτικών στοιχείων και τον συνδυασμό των αποτελεσμάτων , δηλαδή κάθε μοντέλο θα ψηφίζει για την προτεινόμενη απόφαση και στην συνέχεια θα συναθροίζαμε με κάποιο τρόπο αυτές τις ψήφους . Με αυτή την προσέγγιση όμως εμφανίζονται αρκετά εμπόδια .

Το πρώτο εμπόδιο είναι ότι οι περισσότερες μέθοδοι μηχανικής μάθησης λαμβάνουν ένα μόνο σύνολο δεδομένων ως είσοδο . Σαν συνέπεια αυτού τα ποιοτικά αιτιώδη αποδεικτικά στοιχεία και οι αποδείξεις που αφορούν τους ιεραρχικούς μηχανισμούς είναι πολύ πιθανό να αγνοηθούν . Δεύτερον , τα μοντέλα που θα προκύψουν μπορεί να βασίζονται σε αμοιβαία ασυνεπής υποθέσεις και σε αυτή την περίπτωση δεν είναι ξεκάθαρο αν θα πρέπει συνδυαστούν . Μια τρίτη δυσκολία που πρέπει να αντιμετωπιστεί είναι ότι το πρόβλημα της συνάθροισης των κρίσεων από τα διάφορα μοντέλα είναι από μόνο του φορτωμένο . Αντιθέτως , η προσέγγιση που επιλέγουμε εμείς είναι η κατασκευή ενός μοναδικού μοντέλου - ένα αντικειμενικό Μπεϋζιανό δίκτυο - που λαμβάνει υπόψιν του ολόκληρο το εύρος των αποδεικτικών

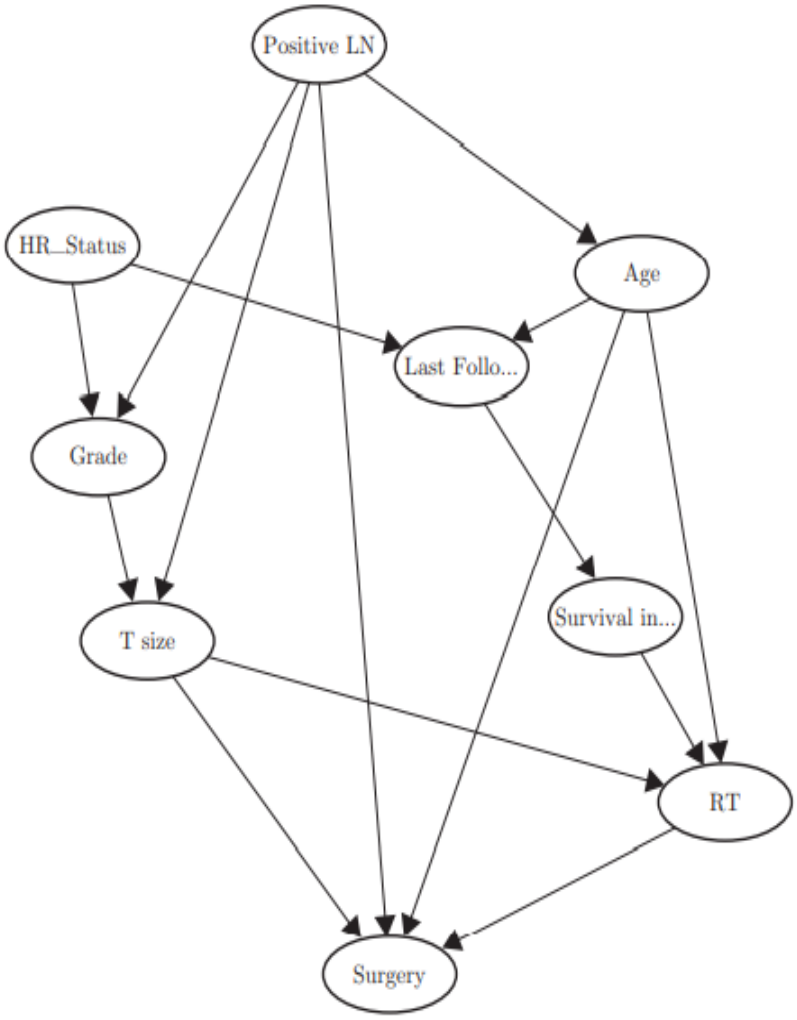
στοιχείων . Η μελέτη στην οποία αναφερόμαστε θεωρεί τέσσερις αποδεικτικές πηγές τις οποίες θα αναλύσουμε στην συνέχεια .

Η πρώτη πηγή με την οποία θα ασχοληθούμε είναι η μελέτη SEER , ένα σύνολο κλινικών δεδομένων που περιλαμβάνει τρία εκατομμύρια ασθενείς στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής από το 1975 μέχρι το 2003 , από τους οποίους οι 4.731 έπασχαν από καρκίνο του μαστού . Το σύνολο αυτών των δεδομένων υπολογίζει τις ακόλουθες μεταβλητές , την ηλικία , το μέγεθος του όγκου (mm) , τον βαθμό (σε κλίμακα 1-3) , την κατάσταση HR(υποδοχείς οιστρογόνων / προγεστερόνης) , τους όγκους των λεμφαδένων , την εγχείρηση , την ακτινοθεραπεία , την επιβίωση (μήνες) και την κατάσταση (ζωντανός / νεκρός) . Παρακάτω ακολουθεί ένα δείγμα από το σύνολο δεδομένων :

Age	T Size	Grade	HR	LN	Surgery	Radiotherapy	Survival	Status
70–74	22	2	1	1	1	1	37	1
45–49	8	1	1	0	2	1	41	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Η πρώτη στήλη βλέπουμε ότι περιλαμβάνει ένα άτομο ηλικίας 70-74 χρονών , με μέγεθος όγκου 22 χιλιοστά , βαθμό 2 , κατάσταση HR , όγκοι λεμφαδένων , εγχείρηση και ακτινοθεραπεία όλα έχουν την τιμή 1 που σημαίνει ότι υπάρχουν υποδοχείς οιστρογόνων /προγεστερόνης , υπάρχει όγκος στους λεμφαδένες , το άτομο έκανε μια εγχείρηση και ακτινοθεραπεία και του απομένουν 37 μήνες ζωής και η κατάσταση του είναι ζωντανός . Στην δεύτερη στήλη αντίστοιχα , ένα άτομο ηλικίας 45-49 χρονών έχει όγκο με μέγεθος 8 χιλιοστά , βαθμό 1 , κατάσταση HR 1, έχει όγκο στους λεμφαδένες , υπεβλήθη σε δύο εγχειρήσεις , έκανε ακτινοθεραπεία και του απομένουν 41 μήνες ζωής και η κατάσταση του είναι ζωντανός .

Εάν χρησιμοποιούσαμε τις συνήθεις μεθόδους μηχανικής μάθησης για ένα Μπεϋζιανό δίκτυο που αναπαριστά την εμπειρική κατανομή πιθανότητας αυτού του συνόλου δεδομένων θα παραγόταν ένα δίκτυο με γράφο που θα έμοιαζε σε αυτόν που παραθέτουμε :



Σχήμα *:Γράφος ενός Μπεϋζιανού δικτύου που αναπαριστά την εμπειρική κατανομή των κλινικών δεδομένων*

Όμως στην δική μας περίπτωση χειριζόμαστε αυτή την εμπειρική κατανομή ως έναν περιορισμό στους κατάλληλους βαθμούς πίστης . Οι βαθμοί πίστης ενός παράγοντα σε μια οποιαδήποτε δήλωση που περιλαμβάνει μεταβλητές οι οποίες υπολογίζονται σε αυτό το σύνολο δεδομένων θα πρέπει να συμπίπτουν με την εμπειρική πιθανότητα αυτής της δήλωσης όπως αυτή καθορίζεται από το σύνολο δεδομένων δηλαδή : $P_E(\theta) = \mathrm{P}*(\theta)$ για όλα τα θ που περιέχουν μόνο μεταβλητές αυτού του συνόλου δεδομένων .

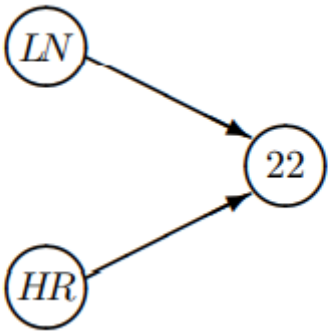
Η δεύτερη πηγή αποδεικτικών στοιχείων αποτελείται από γονιδιωματικά δεδομένα από ένα Progenetix σύνολο δεδομένων με 502 περιπτώσεις . Ένα δείγμα είναι το παρακάτω :

1p31	1p32	1p34	2q32	3q26	4q35	5q14	7p11	8q23	20p13	Xp11	Xq13
0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	0	-1
0	0	1	1	0	0	0	-1	-1	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Η τρίτη πηγή που χρησιμοποιήθηκε ήταν ένα περαιτέρω σύνολο γονιδιωματικών δεδομένων όπου αυτή την φορά περιλάμβανε 119 περιπτώσεις με κλινικό σχολιασμό και πάλι από την βάση δεδομένων Progenetix :

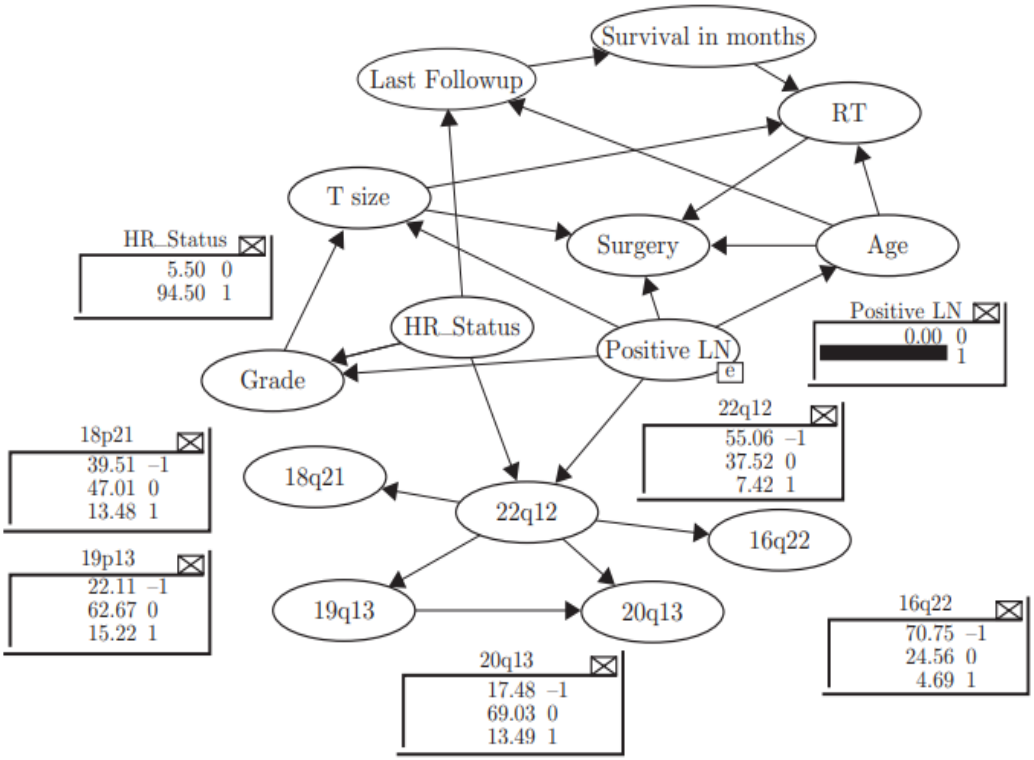
Lymph Nodes	1q22	1q25	1q32	1q42	7q36	8p21	8p23	8q13	8q21	8q24
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Η τέταρτη και τελευταία πηγή ήταν μια δημοσιευμένη μελέτη η οποία περιείχε αιτιώδεις και ποσοτικές πληροφορίες που αφορούσαν την πιθανολογική εξάρτηση ανάμεσα στις μεταβλητές HR_status (κατάσταση HR) και το γονιδίωμα 22q12 . Μέσω αυτής της έρευνας δημιουργήθηκε μια επιπλέον γεφύρωση μεταξύ των μεταβλητών των γονιδιωμάτων και των κλινικών μεταβλητών η οποία φαίνεται και από το σχήμα που ακολουθεί :



Στο σχήμα φαίνεται η σχέση μεταξύ της κατάστασης των λεμφαδένων, της κατάστασης των ορμονικών υποδοχέων και του γονιδιώματος 22q12

Το αντικειμενικό Μπεϋζιανό δίκτυο που προκύπτει από τις τέσσερις πηγές που περιγράψαμε απεικονίζεται στον επόμενο γράφο . Να σημειώσουμε ότι έχουμε αφαιρέσει από τον γράφο τις μεταβλητές που σχετίζονται αμυδρά με την πρόγνωση .



Σχήμα *: Γράφος του αντικειμενικού Μπεϋζιανού δικτύου*

Μία αναπαράσταση τέτοιου είδους είναι πολύ ελκυστική καθώς εμπλέκει και κλινικές και μοριακές μεταβλητές και έτσι επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων από το ένα είδος μεταβλητής στην άλλη . Ως εκ τούτου έχει κανείς την δυνατότητα να χρησιμοποιήσει τόσο κλινικά αποδεικτικά στοιχεία όσο και μοριακά για να καταλήξει στην κατάλληλη πρόγνωση . Η γεφύρωση των μοριακών και κλινικών επιπέδων είναι ένας από τους βασικούς στόχους της βιολογίας συστημάτων και τα αντικειμενικά Μπεϋζιανά δίκτυα προσφέρουν έναν αξιωματικό τρόπο για την επίτευξη αυτού του στόχου . Τέλος , αυτή η προσέγγιση προτιμάται καθώς ενθυλακώνει τις τρείς νόρμες του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού αφού η πρόγνωση του καρκίνου απαιτεί πιθανολογικές προβλέψεις οι οποίες βασίζονται σε όλα τα διαθέσιμα αποδεικτικά στοιχεία και δεσμεύονται στα αποτελέσματα μόνο στον ελάχιστο βαθμό που επιβάλλουν οι αποδείξεις .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συσσωμάτωση Κρίσεων

6.1 Εισαγωγή στην συσσωμάτωση κρίσεων

Τα τελευταία χρόνια ,επίσημες μέθοδοι οι οποίες αναπτύχθηκαν αρχικά από επιστήμονες υπολογιστών και της λογικής για να αντιμετωπίσουν τις ασυνέπειες στις βάσεις δεδομένων ,εφαρμόζονται όλο και περισσότερο σε προβλήματα της κοινωνικής γνωσιολογίας . Επομένως , η επίσημη θεωρία της αναθεώρησης πίστης και συγχώνευσης που έχει αναπτυχθεί από την δεκαετία του 1980 με στόχο να συμβάλλει στην διατήρηση της συνέπειας όταν αναθεωρούμε και συγχωνεύουμε σύνολα δηλώσεων έχει εφαρμοστεί στο πρόβλημα της συνάθροισης προτιμήσεων, στο πρόβλημα της σύσκεψης και συμφιλίωσης κρίσεων καθώς και στο πρόβλημα της συσσωμάτωσης κρίσεων στο οποίο θα εστιάσουμε και θα το αναλύσουμε ακολούθως.

Σε πολλές περιπτώσεις είναι σημαντικό για ένα σύνολο από παράγοντες με καθέναν από αυτούς να έχει την προσωπική του κρίση , να συμφωνήσουν σε ένα σύνολο κρίσεων ως μια ομάδα .Το πρόβλημα της συσσωμάτωσης των κρίσεων αποτελεί την ερώτηση στο πως αυτό μπορεί να γίνει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο . Σε συζητήσεις που αφορούν την συσσωμάτωση κρίσεων συνήθως υποθέτουμε ότι μια κρίση είναι μια δήλωση ή μια πρόταση και ότι παρέχοντας κανείς μια κρίση εγκρίνει την σχετική δήλωση .

Η απλή πλειοψηφία για κάθε μια από τις δηλώσεις σε μια ατζέντα είναι μη ικανοποιητική ως μια διαδικασία συσσωμάτωσης κρίσεων για τον απλό λόγο ότι ενώ κάθε άτομο είναι δυνατό να έχει ένα συνεπή σύνολο από κρίσεις , το συναθροισμένο σύνολο των κρίσεων μπορεί να είναι ασυνεπή . Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό και ως παρεκβατικό δίλημμα ή δογματικό παράδοξο. Στον πίνακα που ακολουθεί απεικονίζεται ένα απλό παράδειγμα παρεκβατικού διλήμματος .

	θ	$\theta \rightarrow \varphi$	φ
A	True	True	True
B	True	False	False
C	False	True	False
Majority	True	True	False

Στον πίνακα παρατηρούμε τρία άτομα A,B,C που έχουν συνεπή σύνολα κρίσεων .Για παράδειγμα ο A κρίνει ότι θ , θ → φ , φ αλλά στην συνέχεια η πλειοψηφία αποδίδει το ασυνεπή σύνολο {θ , θ → φ , -φ} .Τα προβλήματα που παρουσιάζει η μέθοδος της πλειοψηφίας έχουν οδηγήσει στην αναζήτηση για την εύρεση μιας καλύτερης διαδικασίας για την συνάθροιση κρίσεων . Όμως ένα πλήθος από θεωρήματα αδυνάτου περιορίζουν τις διαθέσιμες επιλογές . Πιο συγκεκριμένα οι Dietrich and List δείχνουν ότι αν η ατζέντα είναι επαρκώς πλούσια και αν ισχύουν οι συνθήκες που θα παραθέσουμε παρακάτω τότε οι μόνες λειτουργίες συσσωμάτωσης είναι δικτατορίες , δηλαδή αυτές απλά λαμβάνουν τις κρίσεις ενός συγκεκριμένου ατόμου ως κρίσεις μιας ομάδας . Οι συνθήκες είναι αυτές που ακολουθούν :

- Παγκόσμιος τομέας : ο τομέας της λειτουργίας συσσωμάτωσης αποτελείται από το σύνολο όλων των πιθανών προφίλ από συνεπή και ολοκληρωμένα σύνολα ατομικών κρίσεων .
- Συνολική λογική : η λειτουργία συσσωμάτωσης παράγει συνεπή και ολοκληρωμένα σύνολα κρίσεων .
- Ανεξαρτησία : η συναθροισμένη κρίση σε κάθε δήλωση εξαρτάται μόνο από τις ατομικές κρίσεις σε αυτή τη δήλωση .
- Ομοφωνία : εάν κάθε άτομο κρίνει μια συγκεκριμένη δήλωση αληθή το ίδιο θα κάνει και το σύνολο .

Έπειτα από αυτά που αναφέραμε δημιουργείται το ερώτημα , αν υπάρχει άραγε κάποια εύλογη λειτουργία συσσωμάτωσης . Και αν πράγματι υπάρχει , ποιες από τις παραπάνω συνθήκες παραβιάζει . Το συμπέρασμα στο οποίο θα καταλήξουμε είναι ότι προβλήματα όπως αυτό του παρεκβατικού διλήμματος είναι υποκαθορισμένα .

6.2 Αναθεώρηση πίστης και συγχώνευση

Η θεωρία αναθεώρησης πίστης και συγχώνευσης ασχολείται με το πώς πρέπει να αναθεωρηθούν και να συγχωνευτούν τα διάφορα σύνολα προτάσεων ή δηλώσεων . Πιο συγκεκριμένα η αναθεώρηση πίστης επιδιώκει να απαντήσει στο πώς κανείς οφείλει να αναθεωρεί ένα επαγωγικά κλειστό σύνολο από προτάσεις T όταν προκύπτουν νέες πληροφορίες , μια συνεπή πρόταση θ .Η θεωρία επιβάλλει τα

ακόλουθα επιθυμητά , τα οποία είναι γνωστά και ως αξιώματα AGM για έναν τελεστή αναθεώρησης πίστης * :

*0: T *θ είναι συνεπή ,

*1: T *θ είναι επαγωγικά κλειστό ,

*2: θ ∈ T *θ,

*3: Εάν T + θ, η επαγωγική κλειστότητα του T ∪ θ, είναι συνεπή , τότε T *θ = T + θ,

*4: Εάν θ και φ είναι λογικά ισοδύναμα , τότε T *θ = T *ϕ,

*5: Εάν T *θ + φ είναι συνεπή , τότε T *θ + ϕ = T *θ ∧ ϕ

Επίσης υπάρχουν αντίστοιχα αξιώματα και για έναν τελεστή συστολής πίστης - , όπου T-θ είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει αν βγάλουμε το θ από ένα επαγωγικά κλειστό T . Η αναθεώρηση και η συστολή συνδέονται με την ταυτότητα Levi : T *θ = (T − θ)+θ αλλά και την ταυτότητα Harper : T − θ = (T *θ)∩T , αν το θ δεν είναι ταυτολογία . Η θεωρία έχει επεκταθεί και περαιτέρω ώστε να προσφέρουν και μία ενημέρωση πίστης : ενώ στην αναθεώρηση πίστης το θ και το T τα αντιλαμβανόμαστε σαν να αναφέρονται στην ίδια κατάσταση , για την ενημέρωση πίστης το T δεχόμαστε ότι αναφέρεται στο παρελθόν και το θ στο παρόν .

Θα αναλύσουμε τώρα μια τρίτη επέκταση της θεωρίας αυτής η οποία παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον . Η συγχώνευση πίστης έχει στόχο να προσφέρει έναν τρόπο με τον οποίο θα πρέπει κανείς να συνδυάζει σύνολα προτάσεων $T_1,\ldots,T_{kT}$. Για έναν τελεστή συγχώνευσης Δ που δρά σε ένα πολυσύνολο T = {$T_1,\ldots,T_{kT}$ } όπου κάθε T_i υποθέτουμε ότι είναι συνεπή και όπου η σημειογραφία T_i μπορεί να χρησιμοποιείται για να αναφερθεί στο σύνολο των προτάσεων ή στην διαχώριση των μελών του και όπου το T ⊔ U είναι το πολυσύνολο {$T_1,\ldots,T_{kT}$, $U_1,\ldots,U_{kU}$ }, θεωρούμε τα παρακάτω αξιώματα :

Δ0: ΔT είναι συνεπή ,

Δ1: Εάν ∧ T είναι συνεπή τότε ΔT = ∧ T,

Δ2: Εάν T_i and U_i είναι λογικά ισοδύναμα για i = 1,…,kT = kU , τότε ΔT and ΔU είναι λογικά ισοδύναμα ,

Δ3: Εάν ∧ T ∧ ∧ U είναι συνεπή τότε Δ(T ⊔ U) δεν συνεπάγεται λογικά το T ,

Δ4: ΔT ∧ ΔU συνεπάγεται λογικά Δ(T ⊔ U),

Δ5: Εάν ΔΤ ∧ ΔU είναι συνεπή τότε Δ(Τ ⊔ U) συνεπάγεται λογικά ΔΤ ∧ ΔU

Το παραπάνω πλαίσιο γενικεύεται ώστε να παρέχει αξιώματα για έναν τελεστή συγχώνευσης Δ_iμε περιορισμούς ακεραιότητας ι τους οποίους οφείλει να ικανοποιεί το συγχωνευμένο σύνολο . Η συγχώνευση πίστης συνδέεται με την αναθεώρηση πίστης μέσω της ταυτότητας Τ * ι = $\Delta_i\{T\}$ όπου το Τ είναι ένα σύνολο προτάσεων και η συγχώνευση υπόκειται στην συνθήκη επαγωγικής κλειστότητας . Η καθηγήτρια της επιστήμης υπολογιστών Gabriella Pigozzi (2006) έδειξε ότι μια συνετή επιλογή των περιορισμών ακεραιότητας είναι ικανή να αποφύγει το ενδεχόμενο κατάληξης σε παράδοξα αποτελέσματα μέσα από ένα άλλο παράδειγμα παρεκβατικού διλήμματος. Όμως αυτό που δεν δύναται να αποφευχθεί είναι ότι σε όλες αυτές τις περιπτώσεις η διαδικασία της συσσωμάτωσης οδηγεί σε αρκετά ισάξια βέλτιστα συγχωνευμένα σύνολα και οπότε η επιλογή ενός εκ αυτών των συνόλων είναι αυθαίρετη . Κατά την χρήση τεχνικών συγχώνευσης πίστης για την άμεση συσσωμάτωση συνόλων κρίσεων , η αυθαιρεσία που προκύπτει αποτελεί ένα θεμελιώδες πρόβλημα αφού σπάνια υπάρχουν αρκετές πληροφορίες στα σύνολα κρίσεων ώστε να μπορεί κάποιος να αποφασίσει με ποιον τρόπο θα επιλύσει μια ασυνέπεια κατά την άποψη της πλειοψηφίας . Θα δείξουμε όμως στην συνέχεια ότι αυτή η αυθαιρεσία μπορεί να τεθεί υπό έλεγχο αν η συγχώνευση πραγματοποιηθεί στο στάδιο των αποδείξεων και όχι στο στάδιο των κρίσεων .

6.3 Συγχώνευση αποδεικτικών στοιχείων

Κατά τον σχεδιασμό μιας μεθόδου συσσωμάτωσης κρίσεων υπάρχουν ένας ή δύο στόχοι στο νου . Ένας φυσικός στόχος είναι η επιδίωξη της εύρεσης μιας δίκαιης διαδικασίας , δηλαδή μια διαδικασία η οποία χειρίζεται όλους τους παράγοντες ισάξια και όπου οι κρίσεις αυτών συνεισφέρουν με τον ίδιο τρόπο στον προσδιορισμού της συνολικής κρίσης .Καθώς η σύγχρονη βιβλιογραφία στην συσσωμάτωση κρίσεων έχει προκύψει από την εργασία στην θεωρία της κοινωνικής επιλογής , όπως για παράδειγμα εργασίες για την προσπάθεια σχεδιασμού δίκαιων συστημάτων ψηφοφορίας , αυτός ο στόχος έχει παραμείνει κυρίαρχος μέχρι και σήμερα . Δυστυχώς όμως το παρεκβατικό δίλημμα και τα αδύνατα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι αυτός ο στόχος ίσως να είναι ανέφικτος .

Ένας άλλος φυσικός στόχος είναι επιδίωξη της εύρεσης μιας διαδικασίας συσσωμάτωσης κρίσεων που να αποδίδει τις σωστές κρίσεις . Πιθανώς εάν αυτός είναι ο πρωταρχικός στόχος τότε δεν έχει και πολύ σημασία αν οι κρίσεις των διαφορετικών παραγόντων κατέχουν έναν ισάξιο ρόλο στον καθορισμό της συνολικής κρίσης . Επομένως , τα αποτελέσματα αδυνάτου των οποίων οι υποθέσεις παρακινούνται από τις θεωρήσεις δικαιοσύνης , δεν χρειάζεται να εφαρμοστούν .

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα συνάθροισης κρίσεων . Ένας ασθενής έχει λάβει κάποια θεραπεία για τον καρκίνο του μαστού και δύο σύμβουλοι Α και Β πρέπει να πάρουν τις ακόλουθες κρίσεις . Αρχικά πρέπει να κρίνουν αν ο καρκίνος του ασθενή θα επανεμφανιστεί ή όχι (R) με σκοπό να ενημερώσουν τον ασθενή για

τις δυνατότητες που έχει . Δεύτερον , θα πρέπει επίσης να κρίνουν αν απαιτείται χημειοθεραπεία ή όχι (C) ,όπου αν η επανεμφάνιση του καρκίνου είναι απίθανη τότε μια τόσο επιθετική θεραπεία με σκληρές παρενέργειες όπως είναι η χημειοθεραπεία ίσως να μην είναι δικαιολογημένη .Σε ένα τέτοιο παράδειγμα είναι αρκετά σημαντικότερο οι συλλογικές κρίσεις να είναι σωστές από το να είναι δίκαιες στις ατομικές γνώμες του κάθε παράγοντα αφού την μέγιστη σημασία πάντα έχει η υγεία του ασθενή και ο εγωϊσμός του κάθε συμβούλου έχει λίγη αξία .

Ο σύμβουλος A έχει στην κατοχή του τις κλινικές αποδείξεις ότι ο όγκος δεν έχει εξαπλωθεί στους λεμφαδένες το οποίο συμβολίζουμε με -L . Αυτό τον οδηγεί στο να πιστεύει ότι ο καρκίνος δεν θα επανέλθει , -R . Δεν είναι σίγουρος για το αν απαιτείται χημειοθεραπεία ή όχι αλλά λαμβάνοντας υπόψιν του όλους τους παράγοντες κρίνει ότι δεν απαιτείται . Επομένως ο A κρίνει -R ,-C . Ο σύμβουλος B έχει μοριακές αποδείξεις καθώς γνωρίζει την παρουσία κάποιων συγκεκριμένων υποδοχέων ορμονών στον ασθενή , H . Αυτό υποδεικνύει μια λιγότερη ευνοϊκή πρόγνωση . Ο B δεν είναι πεπεισμένος αρκετά ώστε να πει ότι πιστεύει τα R , C αλλά αφού απαιτείται να πάρει μια απόφαση , κρίνει R ,C . Στον πίνακα παρακάτω απεικονίζονται οι γνωσιολογικές καταστάσεις των δύο συμβούλων .

	Grants	Believes	Judges
A	$\neg L$	$\neg R$	$\neg R, \neg C$
B	H	$\emptyset$	R, C

Οι δύο παράγοντες εδώ A,B έχουν γνωσιολογικά τρείς βαθμούς δηλώσεων : τις αποδείξεις , τις πεποιθήσεις και τις κρίσεις τους . Ως συνήθως οι αποδείξεις του παράγοντα περιλαμβάνουν όλα όσα λαμβάνει ως δεδομένα όσον αφορά το περιεχόμενο της τρέχουσας διεργασίας .Εκτός από τις παρατηρήσεις των αποτελεσμάτων , περιέχουν και οποιεσδήποτε θεωρητικές υποθέσεις ή γνώσεις υποβάθρου οι οποίες δεν αμφισβητούνται ,δηλαδή συνοπτικά μπορούμε να το πούμε και ως το γνωσιολογικό υπόβαθρο του παράγοντα . Στο ερώτημα αν ο παράγοντας είναι λογικός ώστε να λάβει τις αποδείξεις του ως δεδομένες , αυτό εξαρτάται από τους στόχους της τρέχουσας έρευνάς του όπως επίσης και από την προέλευση των δηλώσεων . Αντίθετα , οι ποιοτικές πεποιθήσεις του παράγοντα δεν λαμβάνονται ως δεδομένες όμως είναι αρκετά αξιόπιστες για να ερμηνευτούν ως αποδεκτές. Όπως φαίνεται και από το παραπάνω παράδειγμα στον πίνακα , οι κρίσεις συνήθως χρειάζονται όταν υπάρχουν μικρές διαφορές προκειμένου να αποφασίσει κανείς για ένα ενδεχόμενο κάποιο άλλο . Οι κρίσεις είναι ουσιαστικά εικασίες με την ελπίδα ότι είναι λογικές . Συνοψίζοντας λοιπόν , οι αποδείξεις είναι πρακτικά βέβαιες , οι πεποιθήσεις χαρακτηρίζονται από υψηλή αξιοπιστία ενώ μια κρίση ίσως είναι ασθενέστερα πιστευτή .Εάν θέλουμε να εφαρμόσουμε την

αναθεώρηση πίστης και συγχώνευσης στο πρόβλημα της συσσωμάτωσης κρίσεων παρουσιάζεται το ερώτημα τι ακριβώς θα πρέπει να συγχωνεύσουμε . Είναι φυσιολογικό σαν πρώτη σκέψη να προσπαθήσουμε να συγχωνεύσουμε τις κρίσεις όπως πρότεινε και η στρατηγική της Pigozzi που είδαμε προηγουμένως . Αλλά τότε προκύπτει το εμπόδιο της αυθαιρεσίας . Στο πρόβλημά μας θα έπρεπε να συγχωνεύσουμε το $\{\neg R, \neg C\}$ με το $\{R, C\}$ και ο μόνος τρόπος θα ήταν να επιλέξουμε αυθαίρετα την κρίση ενός παράγοντα εκ των δύο ή να παίρναμε την διαχώριση τους $(\neg R \wedge \neg C) \vee (R \wedge C)$ ως συνολική κρίση . Όμως ούτε αυτή η στρατηγική είναι ικανή να απαλλαγεί από την αυθαιρεσία καθώς οι συναθροισμένες κρίσεις δεν περιέχουν κρίσεις για τις δηλώσεις που θέλουμε οπότε η πραγματοποίηση κρίσεων για την επανεμφάνιση του καρκίνου και την χημειοθεραπεία με βάση το διαχωρισμένο σύνολο απαιτεί επίσης αυθαίρετη επιλογή .

Σε αυτό το σημείο θα αναρωτηθεί κανείς αν θα ήταν προτιμότερο η θεωρία αναθεώρησης πίστης και συγχώνευσης να εφαρμοστεί στο επίπεδο της πίστης . Αυτό όμως θα ήταν λάθος για δύο λόγους όπως θα δούμε . Πρώτον , η θεωρία της αναθεώρησης πίστης και συγχώνευσης πιο κατάλληλη στο να αναθεωρεί και να συγχωνεύει αποδείξεις συγκριτικά με την πίστη . Δεύτερον , στο παράδειγμά μας μια συγχώνευση στο επίπεδο πίστης θα απέδιδε το συγχωνευμένο σύνολο πίστης -R . Υποθετικά τότε η κρίση -R θα ήταν εύλογη βάσει αυτών των συγχωνευμένων πεποιθήσεων . Όμως στην πραγματικότητα μια τέτοια κρίση ίσως να ήταν εντελώς παράλογη καθώς θα μπορούσε η παρουσία και των δύο συμπτωμάτων του ασθενή μαζί να κάνουν το ενδεχόμενο της επανεμφάνισης του καρκίνου αρκετά πιθανό . Επομένως η συγχώνευση των πεποιθήσεων αγνοεί οποιαδήποτε αλληλεπίδραση ανάμεσα στα κομμάτια των αποδείξεων τα οποία πυροδοτούν τις πεποιθήσεις .

Οι δύο αυτοί λόγοι που αναλύσαμε μας κατευθύνουν στην συγχώνευση των αποδεικτικών στοιχείων των παραγόντων αντί για την συγχώνευση των πεποιθήσεων ή κρίσεων τους . Η σωστή κρίση είναι αυτή η οποία λαμβάνοντας υπόψιν της όλα τα διαθέσιμα αποδεικτικά στοιχεία , είναι η καταλληλότερη με βάση την χρήση την οποία στην οποία θα τεθεί η κρίση . Μόνο συγχωνεύοντας τις ίδιες τις αποδείξεις μπορεί κανείς να λάβει υπόψιν του όλες τις διαθέσιμες αποδείξεις . Η άμεση συγχώνευση των πεποιθήσεων ή των κρίσεων αγνοεί τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των στοιχείων των αποδείξεων .

Ένα από τα κυριότερα πλεονεκτήματα της συγχώνευσης στο επίπεδο των αποδείξεων είναι ότι ελαττώνει σημαντικά την αυθαιρεσία . Πολλές φορές να σχηματίσουμε κρίσεις υπό το πλαίσιο εκτεταμένης αβεβαιότητας -δηλαδή η απόφαση υπέρ μιας δήλωσης ή της άρνησης της να είναι πολύ δύσκολη - παρόλα αυτά θα πρέπει να επιλέξουμε μια από τις δύο. Άρα διαφορετικοί παράγοντες είναι πιθανό να καταλήξουν σε διαφορετικές αποφάσεις αποδίδοντας και οι δύο ασυνεπείς κρίσεις . Εάν αποφασίζαμε να συγχωνεύσουμε αυτές τις κρίσεις θα οδηγούμασταν και πάλι σε αυθαιρεσία . Οι πεποιθήσεις χαρακτηρίζονται από ένα υψηλότερο γνωσιολογικό βαθμό από ότι οι κρίσεις . Μια δήλωση για να θεωρείται πεποίθηση υπό την ποιοτική έννοια θα πρέπει να πιστεύεται ισχυρά σε μια ποσοτική έννοια . Λιγότερες δηλώσεις είναι ικανές να λάβουν αυτόν τον βαθμό και οπότε είναι πιθανότερο να υπάρχουν λιγότερες ασυνέπειες ανάμεσα στις πεποιθήσεις των διαφορετικών παραγόντων σε σχέση με ανάμεσα στις διαφορετικές κρίσεις των παραγόντων . Άρα η συγχώνευση πεποιθήσεων περιλαμβάνει λιγότερη αυθαιρεσία από την συγχώνευση κρίσεων . Όμως οι αποδείξεις χαρακτηρίζονται από ακόμα

υψηλότερο βαθμό καθώς ένα στοιχείο αποδείξεων λαμβάνεται ως κάτι δεδομένο και είναι πρακτικά βέβαιο .Βέβαια ακόμα και τα στοιχεία αποδείξεων υπάρχει πιθανότητα να είναι εσφαλμένα και ως εκ τούτου ίσως να δημιουργηθούν ασυνέπειες ανάμεσα στις διαφορετικές βάσεις δεδομένων των παραγόντων . Όμως αυτές οι ασυνέπειες θα είναι αρκετά σπανιότερες από αυτές που προκαλούνται ανάμεσα στις βάσεις πεποιθήσεων και πόσο μάλλον στις βάσεις των κρίσεων . Επομένως ,η συγχώνευση αποδείξεων αποφεύγει ένα μεγάλο μέρος της αυθαιρεσίας που περικλείεται σε προσπάθειες συγχώνευσης κρίσεων κατευθείαν .

6.4 Από τις συγχωνευμένες αποδείξεις στις κρίσεις

Η πραγματοποίηση μιας κρίσης αποτελεί ουσιαστικά ένα πρόβλημα απόφασης . Για κάθε μια δήλωση σε μια ατζέντα πρέπει να αποφασίσουμε αν θα εγκρίνουμε την ίδια την δήλωση ή την άρνησή της . Λέμε ότι κανείς πραγματοποιεί τις σωστές κρίσεις στον βαθμό που οι κρίσεις αυτές είναι οι καταλληλότερες με βάση την χρήση για την οποία τις θέλουμε . Συνήθως , όπως και στην περίπτωση του παραδείγματος που αναφέραμε πριν , θα ήθελε κανείς οι κρίσεις του να είναι αληθής αλλά είναι επαρκές αυτές να καθορίζονται με τον σωστό τρόπο από τις αποδείξεις του . Για παράδειγμα μια εσφαλμένη κρίση μπορεί να είναι η σωστή κρίση εάν αυτή είναι η πιο εύλογη με βάση τις περιορισμένες διαθέσιμες αποδείξεις που κατέχουμε ενώ αντίστοιχα μια αληθής κρίση ίσως να είναι η λάθος κρίση εάν είναι απίθανη με βάσει τα δεδομένα που γνωρίζουμε .

Αφού η κρίση αποτελεί ένα πρόβλημα απόφασης για την διαμόρφωση κρίσεων μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία αποφάσεων . Μια απλή τέτοια διαδικασία της θεωρίας αποφάσεων μπορεί να είναι η εξής . Έστω ότι $U(\theta|\varphi)$ αναπαριστά την ωφέλεια της κρίσης θ με δεδομένη την περίπτωση φ . Ο πίνακας 1 που ακολουθεί είναι ένας πίνακας με τις ωφέλειες όσον αφορά την κρίση της επανεμφάνισης του καρκίνου . Η κρίση στην οποία θα καταλήξουμε θα χρησιμοποιηθεί για να ενημερώσει τον ασθενή για τις προοπτικές που έχει , οπότε η κρίση του αληθές αποτελέσματος έχει θετική ωφέλεια ενώ αντίθετα η κρίση του εσφαλμένου αποτελέσματος έχει αρνητική ωφέλεια , και είναι ιδιαίτερα άσχημη περίπτωση καθώς το να κρίνουμε εσφαλμένα την επανεμφάνιση του καρκίνου προκαλεί περιττό άγχος στον ασθενή .

		Judgement	
		R	$\neg R$
Case	R	1	-1
	$\neg R$	-3	1

Πίνακας 1 *: Ένας πίνακας ωφέλειας για την κρίση της επανεμφάνισης (R)*

Στην συνέχεια αποφασίζουμε για την κρίση η οποία μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφέλεια που συμβολίζεται με EU(θ) $=\sum_{\varphi} U(\theta|\varphi)P(\varphi)$ όπου P(φ) είναι η πιθανότητα του φ . Για το παράδειγμα μας σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα θα ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία :

Θα βρούμε πρώτα από τον τύπο την αναμενόμενη ωφέλεια για την περίπτωση που κρίνουμε την επανεμφάνιση R.

EU(R)= U(R|R)P(R)+ U(R|-R)P(-R)= 1P(R)-3P(-R)

Για την αντίθετη περίπτωση -R έχουμε αντίστοιχα :

EU(-R)= U(-R|R)P(R)+U(-R|-R)P(-R)= -1P(R)+1P(-R)

Θα κρίνουμε υπέρ της επανεμφάνισης εάν ισχύει : EU (R) > EU (¬R).

Άρα έχουμε P(R)-3P(-R)> -P(R)+P(-R) = 2P(R)-4P(-R)> 0.

P(R)>2P(-R)=P(R)>2(1-P(R))=2-2P(R) . Άρα 3P(R)>2 και P(R)>2/3 .

Οπότε καταλήγουμε ότι κρίνουμε ότι θα υπάρξει επανεμφάνιση του καρκίνου αν η πιθανότητα επανεμφάνισης είναι μεγαλύτερη από 2/3 . Οι κρίσεις είναι δυνατόν να εξαρτώνται και από δηλώσεις εκτός από την δήλωση που κρίνεται . Στον επόμενο πίνακα (2) θα παρουσιάσουμε έναν πίνακα ωφέλειας αλλά αυτή τη φορά θα κρίνεται το ενδεχόμενο της χημειοθεραπείας . Η κρίση υπέρ της χημειοθεραπείας έχει θετικό πρόσημο αν ο καρκίνος του ασθενή πρόκειται να επανέλθει αλλά είναι αρκετά αρνητικό αν δεν επανεμφανιστεί . Η κρίση εναντίον της χημειοθεραπείας είναι πολύ κακή αν ο καρκίνος πράγματι επανεμφανιστεί αλλά αρκετά καλή αν αυτό δεν συμβεί .

		Judgement	
		C	$\neg C$
Case	R	5	-10
	$\neg R$	-4	1

Πίνακας 2 *: Ένας πίνακας ωφέλειας για την κρίση της χημειοθεραπείας*

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και προηγουμένως θα έχουμε :

Η αναμενόμενη ωφέλεια για την κρίση της χημειοθεραπείας (C) είναι :

$EU(C)= U(C|R)P(R)+U(C|-R)P(-R)=5P(R)-4P(-R)$

Και για την κρίση εναντίον σε αυτήν (-C) :

$EU(-C)= U(-C|R)P(R)+U(-C|-R)P(-R)=-10P(R)+P(-R)$

Για να αποφασίσουμε υπέρ της χημειοθεραπείας θα πρέπει να ισχύει : $EU\ (C) > EU\ (\neg C)$

Από αυτή την σχέση έχουμε :

$EU(C)>EU(-C)=5P(R)-4P(-R)>-10P(R)+P(-R)=15P(R)-5P(-R)>0.$

$3P(R)> P(-R).$

$3P(R)>1-P(R).$

$4P(R)>1.$ Άρα $P(R)>1/4.$

Επομένως θα αποφασίσουμε υπέρ της χημειοθεραπείας αν η πιθανότητα επανεμφάνισης του καρκίνου είναι μεγαλύτερη από $1/4$. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε για να εφαρμόσουμε αυτή την προσέγγιση της θεωρίας αποφάσεων θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις πιθανότητες P(R) και σε αυτό το σημείο είναι που μπορεί να εφαρμοστεί ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός .Τώρα έχουμε στην κατοχή μας όλα τα εργαλεία για την διαδικασία της συσσωμάτωσης κρίσεων . Αρχικά χρησιμοποιούμε έναν τελεστή συγχώνευσης για να συγχωνεύσουμε τις αποδεικτικές βάσεις των παραγόντων . Η συγχωνευμένη αποδεικτική βάση που προκύπτει μπορούμε να την αντιληφθούμε ως μια αποδεικτική βάση ενός υποθετικού παράγοντα M . Στην συνέχεια με την βοήθεια του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού θα προσδιορίσουμε τους βαθμούς πίστης που οφείλει να υιοθετήσει ο παράγοντας M με δεδομένη την συγχωνευμένη αποδεικτική βάση που αναφέραμε .Τέλος , θα χρησιμοποιηθεί η θεωρία αποφάσεων για να καθοριστούν οι κρίσεις τις οποίες θα λάβει ο M στηριζόμενος στους βαθμούς πίστης . Τις κρίσεις αυτές μπορούμε να τις δούμε σαν το σύνολο των ατομικών κρίσεων των παραγόντων παρόλο που είναι μια συνάρτηση των ατομικών αποδεικτικών βάσεων των παραγόντων και όχι των συνόλων κρίσεων .Σημειώνουμε επίσης ότι δεν υποθέτουμε ότι οι αρχικοί παράγοντες προσδιορίζουν τις κρίσεις τους με αντικειμενικό Μπεϋζιανισμό και την θεωρία αποφάσεων . Πράγματι η διαδικασία που αναλύσαμε δεν εξαρτάται καθόλου από τις αρχικές διαδικασίες κρίσεων των παραγόντων .Το μόνο που υποθέτουμε είναι ότι οι παράγοντες έχουν κάποιες αποδείξεις και αυτές μπορούν να γίνουν σαφείς ώστε να λάβει μέρος η συγχώνευση .Αφού γίνει η συγχώνευση τότε ο

υποθετικός παράγοντας M είναι αυτός που συμμορφώνεται του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού και της θεωρίας αποφάσεων .

Στο παράδειγμα μας τα στοιχεία των αποδείξεων -L και H είναι συνεπή . Ως εκ τούτου από το αξίωμα συγχώνευσης Δ1 η συγχώνευση τους θα δώσει {-L, H} . Για να το κάνουμε πιο ενδιαφέρων υποθέτουμε ότι οι δύο παράγοντες έχουν περισυλλέξει κοινά αποδεικτικά στοιχεία από τα δεδομένα του νοσοκομείου τα οποία είναι ότι η συχνότητα επανεμφάνισης του καρκίνου όταν δεν υπάρχει καρκίνος στους λεμφαδένες είναι 0.2 και η ίδια συχνότητα όταν γνωρίζουμε την παρουσία του σχετικού υποδοχέα ορμονών είναι 0.6 . Άρα η νόρμα βαθμονόμησης αποδίδει τους περιορισμούς $P(R|-L)=0.2$ και $P(R|H)=0.6$. Επίσης υποθέτουμε ότι οι σύμβουλοι γνωρίζουν ότι το R δεν είναι η αιτία του L ή του H . Υπό την παρουσία τέτοιων αιτιωδών αποδείξεων η εντροπία θα πρέπει να μεγιστοποιηθεί διαδοχικά και πιο συγκεκριμένα πρώτα θα μεγιστοποιήσουμε την εντροπία για να βρούμε την κατανομή πιθανότητας για τα L,H , έπειτα για να βρούμε την κατανομή του R με βάση τις προηγούμενες πιθανότητες των L,H . Τότε η μεγιστοποίηση της εντροπίας θα αποδώσει $P(R) = P(R|-L\wedge H)=2/5$. Αφού το $P(R) <2/3$ τότε ο υποθετικός παράγοντας M θα κρίνει -R .Ακόμα επειδή $P(R) >1/4$ θα κρίνει C . Δηλαδή κρίνει ότι ο καρκίνος δεν θα επανεμφανιστεί αλλά θα πρέπει να χορηγηθεί χημειοθεραπεία στον ασθενή . Αυτά απεικονίζονται και στον πίνακα 3 .

	Grants	Believes	Judges
A	$\neg L$	$\neg R$	$\neg R, \neg C$
B	H	$\emptyset$	R, C
M	$H, \neg L$	$R^{0.4}$	$\neg R, C$

Πίνακας 3 *: Οι γνωσιακές καταστάσεις των A,B και του συγχωνευμένου παράγοντα M*

Όπως φαίνεται και από τον πίνακα ο M αντί να έχει ποιοτικές πεποιθήσεις , έχει μια ποσοτική πεποίθηση , πιστεύει το R με βαθμό 0.4 . Προφανώς το συγχωνευμένο σύνολο {-R, C} δεν θα μπορούσε να έχει προκύψει συγχωνεύοντας τις κρίσεις των παραγόντων A,B , ούτε και αν συγχωνεύονταν οι πεποιθήσεις των A,B. Για την εύρεση των σωστών κρίσεων έπρεπε να συγχωνεύσουμε τις αποδείξεις τους .

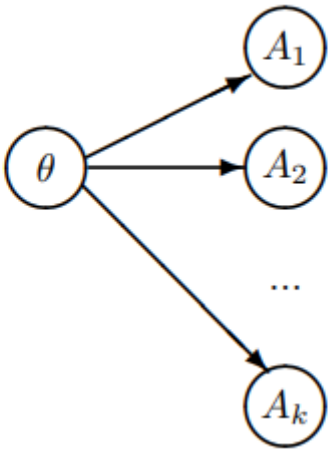
6.5 Σύνοψη

Όπως είδαμε εάν θέλουμε να οδηγηθούμε σε σωστές κρίσεις δεν θα πρέπει να εφαρμόσουμε την συγχώνευση πίστης απευθείας στα σύνολα κρίσεων των παραγόντων . Αντιθέτως η σωστή επιλογή είναι να εφαρμόσουμε την συγχώνευση πίστης στις αποδεικτικές βάσεις των παραγόντων και να θεωρήσουμε έναν υποθετικό

παράγοντα με την παραγόμενη συγχωνευμένη αποδεικτική βάση . Έπειτα έχουμε την δυνατότητα να προσδιορίσουμε τους κατάλληλους βαθμούς πίστης για αυτόν τον υποθετικό παράγοντα με την βοήθεια της θεωρίας του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού και να καθορίσουμε τις κατάλληλες κρίσεις με την χρήση της θεωρίας αποφάσεων . Τις κρίσεις αυτές μπορούμε να τις δούμε σαν το σύνολο των συνόλων κρίσεων των αρχικών παραγόντων .

Το πλαίσιο της συσσωμάτωσης κρίσεων επικαλείται μια γνωσιολογία αποδείξεων , λογικών βαθμών πίστης και λογικής κρίσης αντί για την γνωσιολογία των αποδείξεων , ποιοτικής πίστης και κρίσης . Ενσωματώνει την λογική (συγχώνευση αποδείξεων) , την θεωρία πιθανοτήτων (προσδιορισμός βαθμών πίστης) και την θεωρία αποφάσεων (προσδιορισμός κρίσεων) . Ενώ ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός αντιστοιχίζει τις αποδείξεις στους βαθμούς πίστης και στην συνέχεια η θεωρία αποφάσεων αντιστοιχίζει τους βαθμούς πίστης στις ωφέλειες των κρίσεων , το λογικό στάδιο της συγχώνευσης είναι ακόμα αρκετά υποκαθορισμένο . Ως τώρα δεν έχουμε καθορίσει κανέναν συγκεκριμένο τελεστή συγχώνευσης για την συγχώνευση των αποδεικτικών στοιχείων . Αρκετά συχνά οι τελεστές συγχώνευσης παρακινούνται από θεωρήσεις πλειοψηφίας . Δηλαδή αν δύο παράγοντες υποστηρίζουν το θ και μόνο ένας υποστηρίζει το -θ τότε συνήθως λαμβάνεται το θ ως αποτέλεσμα της συγχώνευσης . Μια τέτοια στρατηγική όμως είναι αρκετά αβέβαιη όσον αφορά την συγχώνευση αποδείξεων καθώς φαίνεται παράλογο να θεωρήσει κανείς ως δεδομένο το θ , την στιγμή που οι παράγοντες διαφωνούν για αυτό . Από την άλλη πλευρά βέβαια πράγματι έχουμε κάποιες αποδείξεις για το θ και φαίνεται εύλογο να προσδώσουμε έναν υψηλότερο βαθμό πίστης στο θ σε σχέση με το -θ .

Μια τέτοιου είδους κατάσταση μπορεί να μοντελοποιηθεί με την εξής λογική .Για κάθε παράγοντα i που έχει είτε θ είτε -θ στην αποδεικτική του βάση , έστω ότι A_ι δηλώνει ότι το i εγγυάται το θ και το -A_ι εγγυάται το -θ . Παίρνουμε το θ να είναι αιτία του κάθε A_ι . Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε κάποιο κατώφλι αξιοπιστίας $\tau \in [1/2, 1]$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\mathrm{i} = 1,\ldots, \mathrm{k}$, $\mathrm{P}(A_\iota|\theta) \geq \tau$ και $\mathrm{P}(\text{-}A_\iota|\neg\theta) \geq \tau$. Θεωρούμε έστω ότι A_ι* σημαίνει η κατά γράμμα έννοια του A_ι (δηλαδή A_ι εάν το i εγγυάται το θ και -A_ι αν το i εγγυάται το -θ) και έστω m η πλειοψηφία που εγγυάται το θ που εννοείται ως ο αριθμός των παραγόντων που εγγυώνται το θ μείον τον αριθμό που εγγυώνται το -θ .Οπότε τώρα μπορούμε να βρούμε την σύσταση του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού μεγιστοποιώντας την εντροπία . Η συνάρτηση μέγιστης εντροπίας αναπαρίσταται από ένα αντικειμενικό Μπεϋζιανό δίκτυο με τον γράφο που ακολουθεί και τις δεσμευμένες κατανομές $\mathrm{P}(\theta)=1/2$, $\mathrm{P}(A_\iota\,|\theta) = \tau$,$\mathrm{P}(A_\iota|\neg\theta)=1-\tau$.

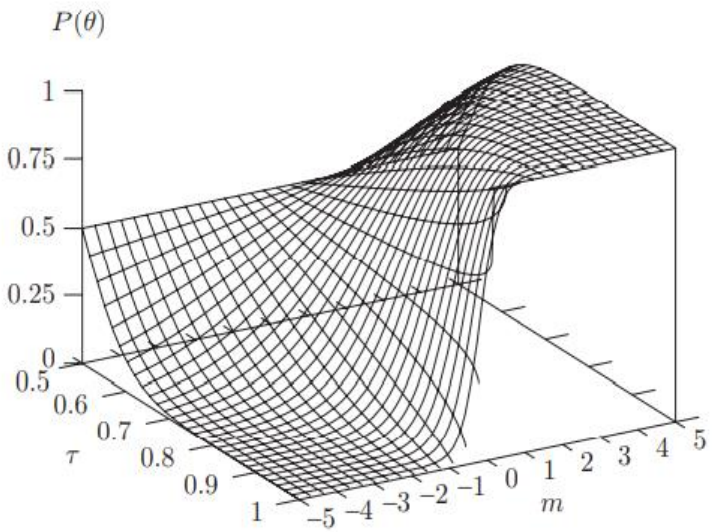


Γράφος *: το ϑ προκαλεί τα A_ι,...A_k.*

Η συνάρτηση μέγιστης εντροπίας αποδίδει τους ακόλουθους βαθμούς πίστης στο θ με τις αποδείξεις $\mathrm{E} = \{A_1{}^*,\ldots,A_k{}^*\}$:

$$\mathrm{P}\{A_1{}^*,\ldots,A_k{}^*\}(\theta) = \frac{\tau^m}{\tau^m + (1-\tau)^m}$$

Η απεικόνιση της συνάρτησης φαίνεται στην γραφική παράσταση παρακάτω :



Εικόνα *: Ο βαθμός στον οποίο ο συγχωνευμένος παράγοντας ϑα πρέπει να πιστεύει το ϑ*

Βλέπουμε λοιπόν ότι αν έχουμε ένα κατώφλι αξιοπιστίας έχουμε όλα όσα χρειαζόμαστε για να προσδιορίσουμε έναν τελεστή συγχώνευσης . Με μια πρώτη σκέψη είναι φυσικό να αναρωτηθεί κανείς αν η διαδικασία συσσωμάτωσης κρίσεων που αναλύσαμε , λαμβάνει υπόψιν της την ειδικότητα των δύο συμβούλων καθώς φαίνεται να αγνοείται . Οι κρίσεις των δύο συμβούλων συσσωματώνονται αμελώντας τις προσωπικές τους κρίσεις και συγχωνεύοντας αντίθετα τα αποδεικτικά τους στοιχεία και έτσι κάποιος είναι λογικό να πιστεύει ότι οι παράγοντες δεν παίζουν κανένα ρόλο στην διαδικασία . Όμως δεν το συμπέρασμα αυτό δεν ισχύει . Παρόλο που η διαδικασία αυτή πράγματι αμελεί τις κρίσεις των παραγόντων , οι ειδικότητές τους κατά τον σχηματισμό αυτών των κρίσεων δεν χρειάζεται να αγνοηθούν αφού χρησιμεύουν στην διαμόρφωση του προβλήματος απόφασης .Για να αποφασίσουν τι να κρίνουν οι παράγοντες βασιζόμενοι στις συγχωνευμένες αποδείξεις απαιτείται ο υπολογισμός των ωφελειών και εδώ είναι που η τεχνογνωσία τους θα είναι κρίσιμη . Ακόμα όπως είδαμε η διαδικασία απαιτεί να συγχωνευτούν οι αποδεικτικές βάσεις των παραγόντων και αυτές δεν αποτελούνται από μια απλή λίστα με τα συμπτώματα των ασθενών αλλά ενθυλακώνουν ένα μεγάλο μέρος της τεχνογνωσίας τους .Επομένως βλέπουμε ότι η ειδικότητα/τεχνογνωσία των παραγόντων αξιοποιείται στα πρώτα και στα τελευταία στάδια της διαδικασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης με εφαρμογή του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού σε σύγκριση με άλλες μεθόδους

Θα συγκρίνουμε πέντε μεθόδους για την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για post test πιθανότητες όταν οι εκτιμητές της ευαισθησίας , της ειδικότητας και της pre-test πιθανότητας μιας διαταραχής αντλούνται από εμπειρικά δεδομένα και θα δείξουμε ότι η προτιμότερη επιλογή είναι αυτή της μεθόδου του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού . Το πρόβλημα μέσα από το οποίο θα αξιολογήσουμε τις πέντε μεθόδους έχει ως εξής . Έστω ο κύριος Smith ανησυχεί ότι ίσως έχει μια διαταραχή D οπότε συμβουλεύεται τον γιατρό του Jones και εκείνος τον παραπέμπει να κάνει ένα τεστ το οποίο έχει δύο πιθανά αποτελέσματα , μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό . Τα αποτελέσματα του τεστ επιστρέφουν θετικά και ο γιατρός τον ενημερώνει ότι έχει 69% πιθανότητα να έχει την διαταραχή D . Αυτό όμως δεν αρκεί για τον κύριο Smith ο οποίος ζητάει από τον γιατρό ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης της πιθανότητας να έχει την διαταραχή D με δεδομένο το θετικό αποτέλεσμα του τεστ αλλά και την ανακρίβεια στις εκτιμήσεις . Ο σκοπός του είναι να δει αν το παραγόμενο διάστημα θα είναι ευρύ ή περιορισμένο ώστε να αποφασίσει αν θα κάνει και άλλα τεστ ή αν θα προχωρήσει σε κάποια κατάλληλη θεραπεία .

Έστω p_0 η επικράτηση της διαταραχής D σε έναν πληθυσμό ή αλλιώς η πιθανότητα pre-test . Όπως αναφέραμε το τεστ έχει μόνο δύο αποτελέσματα . Έστω p_1 η πιθανότητα ενός θετικού τεστ όταν ένας ασθενής από τον πληθυσμό έχει την διαταραχή D ή αλλιώς λέγεται και ευαισθησία του τεστ και p_2 η πιθανότητα ενός θετικού τεστ όταν ένας ασθενής από τον πληθυσμός δεν έχει την διαταραχή D . Η ειδικότητα του τεστ ισούται με $1\text{-}p_2$.Τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Bayes η πιθανότητα φ να έχει κάποιος την διαταραχή D με δεδομένο ένα θετικό αποτέλεσμα στο τεστ ισούται με :

$$\varphi = \frac{\epsilon\pi\iota\kappa\rho\alpha\tau\eta\sigma\eta\ x\ \epsilon\upsilon\alpha\iota\sigma\theta\eta\sigma\iota\alpha}{\epsilon\pi\iota\kappa\rho\alpha\tau\eta\sigma\eta\ x\ \epsilon\upsilon\alpha\iota\sigma\theta\eta\sigma\iota\alpha + [1-\epsilon\pi\iota\kappa\rho\alpha\tau\eta\sigma\eta]x\ [1-\epsilon\upsilon\alpha\iota\sigma\theta\eta\sigma\iota\alpha]}$$

$$= \frac{p_0\, p_1}{p_0\, p_1 + (1-p_0)p_2} \quad (1)$$

Επειδή οι γιατροί και οι ερευνητές δεν είναι σε θέση να γνωρίζουν τις πραγματικές τιμές για τα p_0,p_1,p_2 ουσιαστικά κάνουν εκτιμήσεις για αυτές $\hat{p}_0$,$\hat{p}_1$,$\hat{p}_2$ από εμπειρικά δεδομένα σχετικά με την επικράτηση της διαταραχής και την ακρίβεια του τεστ . Η επικράτηση εκτιμάται από την ποσότητα $\hat{p}_0 = x_0/n_0$ όπου n_0 είναι ο αριθμός των ατόμων που αξιολογούνται από ένα τυχαίο δείγμα του σχετικού πληθυσμού και x_0 είναι ο αριθμός των ατόμων που έχουν την διαταραχή D . Η ευαισθησία του τεστ εκτιμάται από το $\hat{p}_1 = x_1/n_1$ όπου το n_1 ισούται με τον αριθμό των τυχαία επιλεγμένων ατόμων που έχουν την διαταραχή D και έχουν κάνει το τεστ T και x_1 είναι ο αριθμός αυτών που είχαν θετικό αποτέλεσμα στο τεστ . Αντίστοιχα έχουμε $\hat{p}_2$= x_2/n_2 όπου n_2 είναι ο αριθμός των τυχαία επιλεγμένων ατόμων που έκαναν τεστ και δεν έχουν την διαταραχή D και x_2 είναι ο αριθμός αυτών που είχαν θετικό αποτέλεσμα στο τεστ . Με βάσει αυτά ο γιατρός Jones υπολογίζει τον εκτιμητή ως :

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{p}_0\hat{p}_1}{\hat{p}_0\hat{p}_1 + (1-\hat{p}_0)\hat{p}_2} = \frac{\frac{x_0}{n_0}\frac{x_1}{n_1}}{\frac{x_0}{n_0}\frac{x_1}{n_1} + \left(1-\frac{x_0}{n_0}\right)\frac{x_2}{n_2}} = \frac{\frac{10}{50}\frac{36}{40}}{\frac{10}{50}\frac{36}{40} + \left(1-\frac{10}{50}\right)\frac{4}{40}} = 0.692$$

Ο γιατρός εκτιμάει ότι η πιθανότητα να έχει κάποιος την διαταραχή D γνωρίζοντας ότι το τεστ του ήταν θετικό είναι περίπου 69%. Χρησιμοποιώντας τα p_0,p_1,p_2 θα κατασκευάσουμε διαστήματα εμπιστοσύνης για το ϕ με πέντε μεθόδους . Εμείς όμως θα αναλύσουμε την μέθοδο του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού γιατί αυτή μας αφορά και θα την αξιολογήσουμε για το πως ανταποκρίνεται συγκριτικά με τα διαστήματα εμπιστοσύνης των άλλων τεσσάρων μεθόδων . Γενικά σύμφωνα με την Μπεϋζιανή προσέγγιση αυτή αντιστοιχίζει προγενέστερες κατανομές στα p_0,p_1,p_2 και από εκεί κανείς προσδιορίζει μια μεταγενέστερη κατανομή και ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το ϕ . Η δομή των προγενέστερων κατανομών είναι πιθανό να αντικατοπτρίζει τις γνώσεις των ιατρών ή ερευνητών σχετικά με την φύση του πληθυσμού ή τα δεδομένα του τεστ και σε αυτή την περίπτωση η ανάλυση θα χαρακτηριζόταν ως υποκειμενική Μπεϋζιανή ανάλυση . Σε πολλές περιπτώσεις όμως τα διαστήματα εμπιστοσύνης αντλούνται αποκλειστικά από τα δεδομένα και τότε έχουμε μια αντικειμενική Μπεϋζιανή ανάλυση .Οι αντικειμενικοί Μπεϋζιανοί επιλέγουν προεπιλεγμένες (default) ή μη πληροφοριακές προγενέστερες κατανομές για τις παραμέτρους , δηλαδή προγενέστερες που εξαρτώνται αποκλειστικά από το μοντέλο δεδομένων που εξετάζουν και δεν επηρεάζονται από υποκειμενικές πεποιθήσεις .

Τα διαστήματα εμπιστοσύνης για το φ που προκύπτουν από την Μπεϋζιανή προσέγγιση τα καλούμε αξιόπιστα διαστήματα ώστε να μπορούμε να τα διακρίνουμε σε σχέση με άλλα καθώς η ερμηνεία τους είναι διαφορετική σε σχέση με την συχνή(frequentist) . Για παράδειγμα ένα 95% αξιόπιστο διάστημα εμπιστοσύνης το οποίο υπολογίζουμε για μια συγκεκριμένη εφαρμογή σημαίνει ότι διαβεβαιώνουμε ότι το φ έχει 95% να βρίσκεται μέσα στο διάστημα . Αντίθετα με βάσει την συχνή ή αλλιώς κλασική θεωρία (frequentist) ένα διάστημα 95% σημαίνει ότι με επαναλαμβανόμενη χρήση η διαδικασία θα έχει ως αποτέλεσμα διαστήματα που θα περιέχουν το φ το 95% των φορών και άρα δεν μπορεί να μας διαβεβαιώσει για κάποια συγκεκριμένη φορά .

Θα παρουσιάσουμε τώρα την κατανομή Βήτα η οποία είναι αρκετά χρήσιμη για την περιγραφή μιας a priori κατανομής της παραμέτρου p που προκύπτει ως η πιθανότητα μιας επιτυχίας σε μια δοκιμή από την διωνυμική κατανομή . Η πυκνότητα πιθανότητας μιας κατανομής Βήτα (a,b) δίνεται ως :

$$\beta_{(a,b)}(p) = Cp^{a-1}(1-p)^{b-1}$$

για $0<p<1$ και 0 διαφορετικά . Η σταθερά C επιλέγεται έτσι ώστε το συνολικό εμβαδόν κάτω από την κατανομή να ισούται με 1 .Οι υποστηρικτές του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού χρησιμοποιούν κυρίως δύο μη πληροφοριακές ή προεπιλεγμένες προγενέστερες κατανομές για το p . Ο Laplace χρησιμοποιούσε την "ομοιόμορφη" προγενέστερη κατανομή , Βήτα(1,1) ενώ ο Jeffreys πρότεινε την Βήτα(1/2,1/2) η οποία τώρα ονομάζεται προγενέστερη κατανομή Jeffreys για ένα ποσοστό p . Η προγενέστερη Jeffreys είναι γνωστό ότι σύνολα εμπιστοσύνης με πολύ καλές ιδιότητες κάλυψης για ένα μοναδικό ποσοστό p . Εμείς θα μελετήσουμε την περίπτωση που υπάρχουν πολλαπλά ποσοστά και συγκεκριμένα θα την χρησιμοποιήσουμε ως την προγενέστερη κατανομή για κάθε ένα από τα ποσοστά p_i που αναφέραμε προηγουμένως (p_0,p_1,p_2) .

Μετά την παρατήρηση των (x_i , n_i) η μεταγενέστερη κατανομή για τα p_i είναι η Βήτα($x_i + 1/2$,$n_i - x_i + 1/2$) .Χρησιμοποιώντας αυτή την κατανομή θα κατασκευάσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης για το φ , τα οποία θα τα ονομάσουμε διαστήματα φ_{β}. Αυτό θα το επιτύχουμε αξιοποιώντας την διαδικασία Monte Carlo η οποία θα αποδώσει έναν εκτιμητή του 100(1-α) % συνόλου εμπιστοσύνης με ίση ουρά για το φ . Η διαδικασία που ακολουθούμε με έναν υπολογιστή έχει ως εξής :

1) Κληρώνουμε τυχαία τιμές για κάθε μια από τις κατανομές Βήτα($x_i + 1/2$,$n_i - x_i + 1/2$) για τα i =0,1,2.
2) Συνδυάζουμε τις τρείς παραπάνω τιμές ώστε να πάρουμε από την εξίσωση (1) την τιμή του φ .

3) Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία N φορές όπου N ένας πολύ μεγάλος αριθμός έστω 10.000 ώστε να παράγουμε N τιμές για το φ και στην συνέχεια τις ταξινομούμε από την μικρότερη στην μεγαλύτερη .
4) Βρίσκουμε τους ακέραιους που είναι εγγύτερα στο Nα/2 και στο N(1-α/2) και επιλέγουμε τις αντίστοιχες ταξινομημένες τιμές του φ ως το χαμηλότερο και υψηλότερο όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης για το φ .

Ο γιατρός Jones έχοντας στα χέρια τα δεδομένα από δύο δημοσιευμένες ιατρικές έρευνες συμπεραίνει ότι η επικράτηση της διαταραχής είναι 20% ενώ η ευαισθησία του τεστ όπως και η ειδικότητα του τεστ είναι 90%. Το ποσοστό για την επικράτηση προκύπτει επειδή σε μια έρευνα με 50 άντρες στην ηλικία του Smith οι δέκα από αυτούς είχαν την διαταραχή D . Σχετικά με την ευαισθησία και την ειδικότητα η δεύτερη ιατρική έρευνα έδειξε ότι 36 από τους 40 που είχαν την διαταραχή D είχαν και θετικά τεστ ενώ 4 από τους 40 είχαν επίσης θετικά τεστ αλλά δεν είχαν την διαταραχή D . Επομένως έτσι προκύπτουν τα ποσοστά 90%. Με έναν υπολογιστή και ένα πρόγραμμα που χρησιμοποιεί υπολογιστικά φύλλα , τα οποία υπάρχουν διαθέσιμα σε μεγάλη έκταση μπορεί κανείς πολύ γρήγορα και εύκολα να εκτελέσει την διαδικασία Monte Carlo και θα καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα με τον Jones για ένα διάστημα 95% για το φ_β που είναι το {0.431,0.887} .

Για το ίδιο πρόβλημα αν χρησιμοποιούσαμε την μέθοδο Two-log odds θα καταλήγαμε σε ένα διάστημα 95% για το $\varphi_{1/2}$ που θα ήταν το {0.410,0.864}. Με μία μετατροπή στην μέθοδο την οποία δεν χρειάζεται να αναλύσουμε έχουμε και ένα εναλλακτικό διάστημα 95% για το οποίο συμβολίζουμε με φ_S και είναι το {0.413,0.878}. Αντίστοιχα με εφαρμογή της μεθόδου προσέγγισης Gart-Nam θα είχαμε ένα 95% διάστημα για το φ_{GN} {0.439,0.891} . Τέλος με την μέθοδο Δέλτα θα πρόκυπτε το 95% διάστημα για το φ_δ {0.419,0.888} . Στην συνέχεια παραθέτουμε παρακάτω έναν πίνακα (πίνακας 1) όπου απεικονίζονται τα αποτελέσματα των πέντε μεθόδων που αναφέραμε σε σχέση με τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης που παράγουν για εννέα πιθανά σύνολα δεδομένων .

Table 1 Results from 5 Methods of Constructing 95% Intervals for φ

Method	Data and Sample Sizes		
	$x_0/n_0, x_1/n_1, x_2/n_2$ 8/80, 72/80, 8/80	$x_0/n_0, x_1/n_1, x_2/n_2$ 20/80, 60/80, 20/80	$x_0/n_0, x_1/n_1, x_2/n_2$ 40/80, 72/80, 8/80
$\varphi_{1/2}$ (log odds, add ½)	[0.264–0.714]	[0.341–0.651]	[0.797–0.949]
φ_β (objective Bayesian)	[0.264–0.726]	[0.346–0.658]	[0.808–0.952]
φ_S (log odds, substituted)	[0.272–0.728]	[0.344–0.656]	[0.803–0.952]
φ_{GN} (Gart-Nam)	[0.284–0.740]	[0.349–0.662]	[0.807–0.955]
φ_δ (delta method)	[0.266–0.734]	[0.343–0.657]	[0.812–0.955]
	$x_0/n_0, x_1/n_1, x_2/n_2$ 2/20, 18/20, 2/20	$x_0/n_0, x_1/n_1, x_2/n_2$ 5/20, 15/20, 5/20	$x_0/n_0, x_1/n_1, x_2/n_2$ 10/20, 18/20, 2/20
$\varphi_{1/2}$ (log odds, add ½)	[0.112–0.842]	[0.210–0.769]	[0.632–0.970]
φ_β (objective Bayesian)	[0.107–0.872]	[0.216–0.780]	[0.679–0.980]
φ_S (log odds, substituted)	[0.122–0.878]	[0.216–0.784]	[0.648–0.978]
φ_{GN} (Gart-Nam)	[0.149–0.902]	[0.241–0.795]	[0.699–0.982]
φ_δ (delta method)	[0.099–0.901]	[0.208–0.792]	[0.695–0.982]
	$x_0/n_0, x_1/n_1, x_2/n_2$ 0/20, 18/20, 2/20	$x_0/n_0, x_1/n_1, x_2/n_2$ 0/20, 15/20, 5/20	$x_0/n_0, x_1/n_1, x_2/n_2$ 10/20, 18/20, 0/20
$\varphi_{1/2}$ (log odds, add ½)	[0.009–0.799]	[0.004–0.570]	[0.675–0.998]
φ_β (objective Bayesian)	[0.000–0.649]	[0.000–0.326]	[0.857–1.000]
φ_S (log odds, substituted)	[0.010–0.837]	[0.004–0.588]	[0.570–1.000]
φ_{GN} (Gart-Nam)	[0.032–0.824]	[0.014–0.507]	[0.701–0.984]
φ_δ (delta method)	[0.006–0.833]	[0.003–0.438]	[0.695–0.982]

Πίνακας 1: *Αποτελέσματα των 5 μεθόδων όσον αφορά την κατασκευή 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης για το φ*

Χωρίζουμε τον πίνακα σε τρία μέρη για να γίνει ευκολότερη η περιγραφή του όπου ξεκινάμε με το ανώτερο μέρος , στην συνέχεια με την μέση και τέλος το κατώτερο μέρος . Τα εννέα διαφορετικά σύνολα δεδομένων που φαίνονται στον πίνακα 1 χρησιμοποιούν τιμές για τα $\hat{p}_0$,$\hat{p}_1$,$\hat{p}_2$ και μεγέθη δειγμάτων που συναντώνται συχνά στην κλινική ιατρική . Από το ανώτερο μέρος του πίνακα μπορούμε να δούμε ότι σε σχετικά μεγάλα δείγματα και όταν τα $\hat{p}_0$,$\hat{p}_1$,$\hat{p}_2$ δεν έχουν τιμή κοντά στο μηδέν ή την μονάδα οι μέθοδοι αποδίδουν αρκετά όμοια διαστήματα και οι διαφορές που παρατηρούμε είναι πολύ μικρές ώστε να αποφασίσουμε υπέρ κάποιας μεθόδου . Όμως όταν τα $\hat{p}_0$,$\hat{p}_1$ και /ή το $\hat{p}_2$ ισούνται με 1/10 ή 9/10 τότε οι διαφορές είναι σημαντικές και είναι ακόμα εντονότερες όταν τα δείγματα είναι μικρά όπως φαίνεται στη μέση του πίνακα για n_i =20 . Στο κατώτερο μέρος του πίνακα βλέπουμε πως συμπεριφέρονται οι πέντε μέθοδοι όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό και είτε το $\hat{p}_0$ είτε το $\hat{p}_2$ είναι μηδέν . Με αυτά τα δεδομένα παρατηρούμε ότι τα διαστήματα που παράγονται με την μέθοδο του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού είναι σημαντικά μικρότερα , μια πάρα πολύ επιθυμητή ιδιότητα η οποία μπορεί να έχει κρίσιμες ιατρικές συνέπειες .

Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο αξιολογούμε τα διαφορετικά διαστήματα εμπιστοσύνης είναι ανάλογα με τον βαθμό στον οποίο ικανοποιούν τους ονομαστικούς στόχους κάλυψης . Για παράδειγμα αν έχουμε ένα διάστημα 95% με ίση ουρά (equal-tailed) για το φ τότε ουσιαστικά δηλώνουμε ότι υπάρχει μια πιθανότητα 2.5% η τιμή του φ να είναι μικρότερη από το χαμηλότερο όριο του διαστήματος και 2.5% αυτή να είναι μεγαλύτερη από το ανώτερο όριο του διαστήματος . Έτσι μπορούμε να αξιολογήσουμε μια συγκεκριμένη διαδικασία που παράγει διαστήματα εμπιστοσύνης υπολογίζοντας το πραγματικό ποσοστό των φορών όπου η διαδικασία με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή κατασκευάζει διαστήματα που βρίσκονται πάνω ή κάτω από την πραγματική τιμή του φ . Για να διερευνήσουμε πως αποδίδουν οι διαδικασίες υπολογισμού των διαστημάτων όσων αφορά την κάλυψη για τα φ_β και φ_{GN} επιλέγουμε τριάδες των p_0, p_1, p_2 που δίνουν μια γνωστή τιμή του φ και επίσης επιλέγουμε τιμές για τα n_0, n_1, n_2 που αναπαριστούν τα μεγέθη δειγμάτων από τον πληθυσμό και τους υποπληθυσμούς που σχετίζονται με τα p_0, p_1, p_2 . Στην συνέχεια φτιάχνουμε προσομοιώσεις από ερευνητικές μελέτες με έναν υπολογιστή και δημιουργούμε έναν μεγάλο αριθμό J τυχαίων κληρώσεων για τα μεγέθη n_0,n_1,n_2 από τους πληθυσμούς . Κάθε ένα από τα J προσφέρει δεδομένα από τα οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε διαστήματα για το φ καθώς και να εξετάσουμε πόσο συχνά αυτά υπερβαίνουν ή υστερούν συγκριτικά με την πραγματική τιμή του φ με βάση την κάθε μέθοδο . Για να πούμε ότι μια μέθοδος είναι αποτελεσματική θα πρέπει να παράγει 100(1-α)% διαστήματα που ανταποκρίνονται στην ονομαστική τιμή του φ , δηλαδή περίπου Jα/2 θα υστερούν σε σχέση με το φ και Jα/2 διαστήματα θα υπερβαίνουν το φ .

Για τις μεθόδους που αφορούν τα $\varphi_{1/2}, \varphi_S, \varphi_\delta$ όπου χρησιμοποιούν σαφείς τύπους για τον υπολογισμό των διαστημάτων μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει μια αναλυτική αξιολογική προσέγγιση που βασίζεται τις διωνυμικές πιθανότητες των δεδομένων που αντιστοιχούν στις δεδομένες τιμές των p_0, p_1, p_2. Η πιθανότητα κάθε δυνατής τριάδας είναι απλά το γινόμενο των τριών σχετικών διωνυμικών πιθανοτήτων . Επομένως για κάθε δυνατή τριάδα δεδομένων μπορεί κανείς να υπολογίσει το διάστημα εμπιστοσύνης και να ελέγξει αν αυτό υστερεί ή υπερβαίνει την πραγματική τιμή του φ .Στον πίνακα 2 που ακολουθεί απεικονίζονται τα αποτελέσματα κάλυψης για τρία διαφορετικά σενάρια που εμπλέκουν υποθετικούς, γνωστούς πληθυσμούς για τους οποίους οι τιμές της τριπλέτας (p_0, p_1, p_2) είναι (1/4 ,3/4 ,1/4) , (1/10 ,9/10,1/10) ή (1/2,9/10 1/10) ,οι ίδιες τιμές που είδαμε προηγουμένως στο ανώτερο και μέσο τμήμα του πίνακα 1 .

Table 2 Evaluation of 5 Methods for Constructing Confidence Intervals: Percentage of Times the 100(1 – α)% Interval for φ Exceeded or Fell below the Actual Value of φ

Reference Population		Interval Construction Method				
$p_0\, p_1\, p_2$	n_i	$\varphi_{1/2}$ (log odds, add ½)	φ_β (objective Bayesian)	φ_S (log odds, substituted)	φ_{GN} (Gart-Nam interval)	φ_δ (delta method)
¼ ¾ ¼	20	0.12 1.53 4.06 3.87 1.25 0.03	0.59 2.86 5.47 5.28 2.71 0.60	0.11 1.65 4.25 3.96 1.32 0.02	0.53 2.77 5.59 4.96 2.57 0.56	0.62 2.68 4.65 4.67 2.45 0.48
	40	0.28 2.10 4.54 4.36 1.96 0.22	0.54 2.57 5.12 5.06 2.56 0.53	0.30 2.19 4.90 4.67 2.08 0.24	0.55 2.79 5.52 4.86 2.46 0.49	0.60 2.50 5.03 4.79 2.36 0.54
	80	0.39 2.33 4.82 4.66 2.22 0.37	0.54 2.64 5.19 5.00 2.53 0.49	0.41 2.38 4.93 4.83 2.30 0.38	0.55 2.68 5.36 4.85 2.42 0.46	0.53 2.53 5.00 4.89 2.45 0.50
	160	0.43 2.41 4.91 4.81 2.34 0.42	0.49 2.52 5.03 4.96 2.46 0.50	0.45 2.43 4.98 4.88 2.39 0.43	0.51 2.68 5.25 4.85 2.42 0.46	0.68 2.50 5.00 5.07 2.45 0.50
1/10 9/10 1/10	20	0.00 0.17 1.34 0.79 0.03 0.00	0.39 2.23 5.23 5.11 2.47 0.29	0.00 0.13 1.23 0.52 0.02 0.00	0.05 1.58 3.48 4.59 2.14 0.24	0.12 0.83 2.28 1.50 0.41 0.02
	40	0.01 0.72 3.02 2.84 0.55 0.00	0.59 2.92 5.49 5.49 2.85 0.62	0.01 0.74 3.42 2.94 0.54 0.00	0.29 2.27 4.90 5.20 2.61 0.57	0.29 1.89 4.00 3.78 1.74 0.21
	80	0.11 1.67 4.13 4.03 1.61 0.05	0.56 2.69 5.22 5.16 2.61 0.54	0.14 1.91 4.46 4.37 1.82 0.10	0.56 2.69 5.33 5.05 2.55 0.53	0.47 2.35 4.76 4.60 2.29 0.45
	160	0.31 2.13 4.61 4.53 2.08 0.29	0.52 2.56 5.14 5.07 2.55 0.52	0.34 2.26 4.82 4.72 2.20 0.32	0.49 2.59 5.21 4.90 2.44 0.50	0.49 2.42 4.90 4.80 2.38 0.47
½ 9/10 1/10	20	0.00 0.04 0.34 7.56 4.40 1.11	0.27 2.81 6.32 4.74 2.40 0.50	0.00 0.06 0.61 5.17 2.72 0.69	0.04 2.40 4.06 4.21 2.12 0.46	0.28 1.25 2.90 4.05 1.91 0.27
	40	0.00 0.18 1.21 7.10 3.89 0.99	0.67 3.12 5.81 4.74 2.38 0.49	0.00 0.28 2.18 5.13 2.78 0.67	0.24 2.19 5.03 4.41 2.18 0.42	0.54 2.98 5.88 4.30 2.02 0.33
	80	0.02 0.90 2.79 6.50 3.52 0.89	0.60 2.83 5.49 4.94 2.41 0.47	0.03 1.40 4.08 5.12 2.73 0.66	0.53 2.71 5.50 4.57 2.29 0.43	0.76 3.08 5.76 4.60 2.16 0.37
	160	0.14 1.46 3.55 5.20 2.78 0.64	0.52 2.59 5.24 4.81 2.37 0.47	0.21 1.95 4.43 5.15 2.73 0.63	0.54 2.69 5.38 4.74 2.35 0.46	0.66 2.88 5.49 4.61 2.25 0.40
1/100 99/100 1/100	25		0.00 0.03 0.13 0.14 0.01 0.00			
	50		0.00 0.08 0.82 0.84 0.10 0.00			
	100		0.02 0.68 3.00 3.10 0.68 0.02			
	200		0.22 2.27 5.85 5.76 2.19 0.21			
	400		0.58 2.88 6.10 6.02 2.81 0.59			
	800		0.57 2.65 5.09 5.09 2.62 0.54			
Percentile		0.5 2.5 5.0 95.0 97.5 99.5	0.5 2.5 5.0 95.0 97.5 99.5	0.5 2.5 5.0 95.0 97.5 99.5	0.5 2.5 5.0 95.0 97.5 99.5	0.5 2.5 5.0 95.0 97.5 99.5
Expected value		0.50 2.50 5.00 5.00 2.50 0.50	0.50 2.50 5.00 5.00 2.50 0.50	0.50 2.50 5.00 5.00 2.50 0.50	0.50 2.50 5.00 5.00 2.50 0.50	0.50 2.50 5.00 5.00 2.50 0.50

Πίνακας 2

Για την μελέτη της προσομοίωσης των μεθόδων φ_β, φ_{GN} φτιάχτηκαν J =200.000 τυχαίες κληρώσεις από n_i με μεγέθη 20,40,80 ή 160 από κάθε έναν από τους τρείς πληθυσμούς των οποίων τα χαρακτηριστικά αναπαρίστανται από τα p_0,p_1,p_2 έτσι ώστε τα $n_0 = n_1 = n_2$ να ισούνται πάντα με 20,40,80 ή 160 αλλά τα x_{0j}, x_{1j}, x_{2j} να ποικίλουν τυχαία με κάθε κλήρωση . Οι τιμές αυτές που επιλέξαμε για τα n_i μας επιτρέπουν να διερευνήσουμε την απόδοση για κάθε μέθοδο κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης σε μικρά αλλά και σε μεγάλα μεγέθη δειγμάτων . Σχετικά με τα $\varphi_{1/2}$,φ_S και φ_δ υποθέτουμε τα ίδια χαρακτηριστικά για τον πληθυσμό αλλά κάνουμε τους υπολογισμούς αναλυτικά όπως αναφέραμε προηγουμένως .

Θα αναλύσουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα δεδομένα του πίνακα 2 . Οι έξι αριθμοί που βρίσκονται στην πρώτη γραμμή και στην πρώτη στήλη του πίνακα παρουσιάζουν την απόδοση της μεθόδου $\varphi_{1/2}$ όταν επιλέγουμε τυχαία δείγματα 20 ατόμων από έναν πληθυσμό για τον οποίο p_0 = 1/4 ,p_1=3/4 και p_2=1/4 .

Εάν $n_0 = n_1 = n_2 = 20$ υπάρχουν $(20+1)^3$ = 9.261 πιθανοί συνδυασμοί δειγμάτων και για κάθε συνδυασμό υπολογίστηκαν τα 90%, 95% , 99% διαστήματα εμπιστοσύνης για το ϕ (δηλαδή με επίπεδο σημαντικότητας α =0.10 , α=0.05 και α=0.01 αντίστοιχα) όπως και η πιθανότητα απόκτησης καθενός από αυτά τα διαστήματα . Επειδή το ϕ σε αυτή την περίπτωση είναι : ϕ = $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}$ =½

θα θέλαμε να βρούμε ότι το χαμηλότερο όριο του 99% διαστήματος είναι μεγαλύτερο από 1/2 περίπου 0.5% των φορών και ότι το ανώτερο όριο είναι μικρότερο από 1/2 πάλι το 0.5% των φορών . Τα αποτελέσματα όμως που παρατηρούμε στον πίνακα 2 δείχνουν ότι μόνο το 0.12% των διαστημάτων της μεθόδου $\varphi_{1/2}$ αναμένεται να βρίσκονται πάνω από το 1/2 και μόνο το 0.03% θα είναι κάτω από το 1/2 . Βλέπουμε λοιπόν ότι όταν $n_0 = n_1 = n_2 = 20$ τα διαστήματα 99% της μεθόδου $\varphi_{1/2}$ έχουν πολύ μεγάλος εύρος όπως το ίδιο ισχύει και για τα 90% και 95% . Στις επόμενες τρείς γραμμές όπου αυξάνεται το n_i και συγκεκριμένα παίρνει τις τιμές 40,80,160 τα διαστήματα της $\varphi_{1/2}$ πλησιάζουν περισσότερο τις ονομαστικές τιμές . Στην πέμπτη γραμμή όμως όπου έχουμε p_0 =1/10 ,p_1=9/10 και p_2=1/10 η μέθοδος είχε και πάλι κακή επίδοση και ιδιαίτερα όταν οι πληθυσμοί ήταν μικροί τα διαστήματα ήταν είτε πολύ μεγάλα σε εύρος είτε λοξά .

Θα εστιάσουμε τώρα στην μέθοδο φ_β του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού η οποία είναι κατασκευάζει διαστήματα που είναι πολύ κοντά σε αυτά που επιθυμούμε , ακόμα και όταν τα μεγέθη δειγμάτων είναι μικρά . Για παράδειγμα όταν p_0 = 1/10 και n_0 = 20 περίπου το 12.2% από τις τυχαίες κληρώσεις των 20 ατόμων από τον πληθυσμό δεν θα περιέχουν κανέναν με την διαταραχή D έτσι ώστε p_0^=x_0/n_0 = 0 . Όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τυχαίες κληρώσεις είκοσι ατόμων από πληθυσμούς για τους οποίους p_0=1/10 , p_1=9/10 και p_2=1/10 η πιθανότητα να υπάρξει μια κλήρωση όπου είτε $\hat{p}_0=x_0/n_0=0$,$\hat{p}_1=x_1/n_1=1$ είτε $\hat{p}_2=x_2/n_2=0$ ή να συμβεί κάποιος συνδυασμός τους είναι 0.322 . Αυτό σημαίνει ότι για μικρά δείγματα οι ιδιότητες κάλυψης επηρεάζονται σε πολύ μεγάλο βαθμό από τις δύσκολες σε χειρισμό περιπτώσεις στις οποίες $\hat{p}_0=0$, $\hat{p}_1=1$ ή/και $\hat{p}_2=0$.

Αν παρατηρήσουμε και συγκρίνουμε τις συνολικές επιδόσεις κάθε μιας από τις πέντε μεθόδους βλέπουμε ότι αποδίδει καλύτερα από όλες αυτή του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού . Ακόμα και στις περιπτώσεις των μικρών δειγμάτων τα διαστήματα εμπιστοσύνης που παράγει είναι συνεχώς κοντά στην επιθυμητή συχνότητα σχετικά με το αν υστερούν ή υπερβαίνουν την τιμή του ϕ καθώς και ένα ακόμη σημαντικό προτέρημα είναι ότι δεν παρατηρείται κάποια συστηματική τάση τα διάστημα να κατευθύνονται προς τα πάνω ή προς τα κάτω . Η αμέσως επόμενη σε επίδοση είναι η μέθοδος φ_{GN} η οποία προσφέρει συνήθως διαστήματα που είναι αρκετά κοντά στις ονομαστικές τιμές όσο και τα διαστήματα φ_β , αυτή όμως είναι δυσκολότερη στην εφαρμογή και πολλές φορές δίνει μεγαλύτερα σε εύρος διαστήματα . Από τις τρείς μεθόδους που χρησιμοποιούν σαφείς μαθηματικούς τύπους η μέθοδος φ_δ έχει καλύτερα αποτελέσματα αλλά δεν τα πηγαίνει τόσο καλά όταν έρχεται αντιμέτωπη με μικρά δείγματα . Οι δύο μέθοδοι log-odds είναι αρκετά καλές για μεγάλα δείγματα και υπό την προϋπόθεση ότι οι πιθανότητες αναφοράς δεν είναι κοντά στο μηδέν ή την μονάδα .Όταν όμως δεν ικανοποιούνται τα παραπάνω τα διαστήματα που προκύπτουν έχουν πολύ μεγάλο εύρος και τείνουν να μεροληπτούν προς το χαμηλότερο όριο του διαστήματος . Επομένως συμπεραίνουμε

ότι για προβλήματα σαν αυτό που αναλύσαμε θα πρέπει να προτιμάται η μέθοδος του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού για την κατασκευή των διαστημάτων εμπιστοσύνης .

Συμπεράσματα

Όπως είδαμε ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός δεν είναι μια απλή θεωρία για να υπερασπιστούμε . Αυτό συμβαίνει γιατί ενώ ο αυστηρός υποκειμενισμός κάνει έκκληση στην νόρμα πιθανότητας και ο εμπειρικά βασιζόμενος επικαλείται μια νόρμα βαθμονόμησης , ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός εκτός από αυτές τις δύο δεσμεύεται και σε μια νόρμα αμφιλογίας η οποία είναι και η αιτία της πλειονότητας των επικρίσεων που δέχεται σαν θεωρία . Όμως παρόλο που η νόρμα αμφιλογίας προσθέτει κάποια εμπόδια που πρέπει να αντιμετωπιστούν , η βασική διαίσθηση που εμπεριέχει είναι εύλογη . Πιο συγκεκριμένα , αν τα αποδεικτικά στοιχεία κάποιου αφήνουν ανοιχτή την αλήθεια ή το ψεύδος μιας δήλωσης θ τότε θα ήταν παράλογος αν πίστευε ισχυρά το θ ή την άρνησή του . Είναι προτιμότερο να συνεισφέρουμε στην προσπάθεια να υπερασπιστούμε την σωστή θέση από το να συμβιβαστούμε με μια θέση που είναι ευκολότερο να υποστηρίξουμε αλλά αποτελεί μόνο ένας μέρος της ιστορίας .

Η ορθολογική θεώρηση στην φιλοσοφία της στατιστικής αποτελείται από τρία κύρια παραδείγματα στατιστικής . Πρώτα έχουμε την κλασσική ή συχνή θεώρηση, μετά την υποκειμενική και τρίτη είναι η προσέγγιση του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού . Σύμφωνα με την φιλοσοφία αυτή μόνο μια εκ των τριών μπορεί να είναι σωστή . Οι φιλόσοφοι έχουν την τάση να θεωρούν τις στατιστικές μεθόδους του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού ως υποκειμενικές μεθόδους με αντικειμενικές προγενέστερες πιθανότητες και ισχυρίζονται ότι ο προσδιορισμός αυτών αποτελεί μια απελπισμένη προσπάθεια . Η κλασική στατιστική ή στατιστική με βάση την συχνότητα αντιμετωπίζεται συχνά ως ένα ανακάτωμα από ανόμοιες μεθόδους οι οποίες στερούνται ένα συναφή ενοποιητικό πλαίσιο . Επομένως οι περισσότεροι φιλόσοφοι υποστηρίζουν ότι ο υποκειμενισμός διαθέτει τα σταθερότερα θεμέλια.

Πολλοί όμως στατιστικολόγοι δικαιολογημένα δεν επιθυμούν τα συμπεράσματα των ερευνών τους να κατηγοριοποιούνται ως υποκειμενικά . Άλλωστε η στατιστική χρωστάει την παρουσία της στην επιστήμη σε δύο κύριους λόγους ,πρώτον στο ότι είναι εξαιρετικά χρήσιμη για την πραγματοποίηση προβλέψεων και δεύτερον στο οποίο δίνουμε έμφαση ότι προσφέρει μια αντικειμενική επικύρωση για την επιστήμη . Στον κλάδο της στατιστικής εδώ και πολλά χρόνια ο διάλογος ανάμεσα στην αντικειμενικότητα και την υποκειμενικότητα οδηγεί σε αδιέξοδο . Οι επιστήμονες - των οποίων οι μέθοδοι χαρακτηρίζονται ως υποκειμενικές - έχουν την επιλογή να διαφωνήσουν και να δηλώσουν ότι όχι είμαστε πράγματι αντικειμενικοί ή να ασπαστούν την υποκειμενική αυτή ετικέτα και να την μετατρέψουν σε μια αρχή . Αντίθετα οι επιστήμονες που εφαρμόζουν αντικειμενικές

μεθόδους είναι συχνά τόσο προσκολλημένοι στην εξάλειψη της υποκειμενικότητας από τις αναλύσεις τους που καταλήγουν να λογοκρίνουν τους εαυτούς τους . Μια λύση που προτείνουμε είναι να αντικαταστήσουμε όπου είναι δυνατό τις λέξεις αντικειμενικότητα και υποκειμενικότητα με μια ευρύτερη συλλογή χαρακτηριστικών όπου η αντικειμενικότητα να αντικαθίσταται από την διαφάνεια , την ομοφωνία , την αμεροληψία και την ανταπόκριση στην παρατηρούμενη πραγματικότητα και αντίστοιχα η υποκειμενικότητα από την επίγνωση πολλαπλών απόψεων και την εξάρτηση από τις συνθήκες . Το πλεονέκτημα που προσφέρει αυτή η αναδιατύπωση είναι ότι οι νέοι αυτοί όροι δεν αντιτίθενται μεταξύ τους . Για αυτό τον λόγο πολύ συχνά οι στατιστικολόγοι διατηρούν μια πιο ουδέτερη στάση και επιλέγουν να εφαρμόζουν τις μεθόδους που ταιριάζουν καλύτερα ανάλογα την περίπτωση .

Οπότε η ορθολογική θεώρηση που κυριαρχεί έως τώρα στην φιλοσοφία της στατιστικής θα πρέπει να ανατραπεί . Τα διαφορετικά παραδείγματα στατιστικής που αναφέραμε προηγουμένως δεν είναι αμοιβαία αποκλειόμενα αλλά συμπληρώνουν το ένα το άλλο καθώς οι υποκειμενικές στατιστικές μέθοδοι παρέχουν πληροφορίες για το περιεχόμενο της νόρμας πιθανότητας , οι συχνές ή κλασικές στατιστικές μέθοδοι καθορίζουν ποια μοντέλα πιθανοτήτων είναι συμβατά με τις αποδείξεις και άρα υλοποιούν πτυχές της νόρμας βαθμονόμησης και οι μέθοδοι του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού εξερευνούν τα θέματα που αφορούν την νόρμα αμφιλογίας . Παρατηρούμε λοιπόν ότι στο πλαίσιο του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού οι τρείς νόρμες συνδυάζονται και έχει κανείς την δυνατότητα να εκτελέσει μια αντικειμενική Μπεϋζιανή στατιστική ανάλυση χρησιμοποιώντας μεθόδους από τα τρία διαφορετικά παραδείγματα στατιστικής .

Επομένως ο αντικειμενικός Μπεϋζιανισμός είναι καλώς ορισμένος και αποτελεί ένα πολλά υποσχόμενο επιστημονικό πεδίο για έρευνα .Παρότι το μέλλον μπορεί ενδεχομένως να επιφυλάσσει πιο πειστικές επικρίσεις για την θεωρία του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού ,οι τρέχουσες επικρίσεις είναι υπερβατές .Με βάση λοιπόν τα στοιχεία που γνωρίζουμε μέχρι σήμερα είναι εύλογο να ακολουθεί κανείς τους κανόνες του αντικειμενικού Μπεϋζιανισμού και αναπόφευκτα με το πέρασμα του χρόνου η εφαρμογή του στην στατιστική ανάλυση θα είναι όλο και πιο έντονη.

Βιβλιογραφία

[1] Bacchus, Fahiem, Kyburg, Jr., Henry E., and Thalos, Mariam (1990). *Against conditionalization*. Synthese, 84(3), 475–506.

[2] Barnett, O. W. and Paris, J. B. (2008). *Maximum entropy inference with quantified knowledge*. Logic Journal of the IGPL, 16, 85–98.

[3] Billingsley, Patrick (1979). *Probability and measure* (Third (1995) edn). Wiley, New York.

[4] Corfield, David (2001). *Bayesianism in mathematics. In Foundations of Bayesianism* (eds. D. Corfield and J. Williamson), pp. 175–201. Kluwer, Dordrecht

[5] Dawid, A. P. (1982). *The well-calibrated Bayesian*. Journal of the American Statistical Association, 77, 604–13. With discussion

[6] Mossman ,D,.Berger,J.O (2016) .*Intervals for Posttest Probabilities : A Comparison of 5 Methods* .Research article.

[7] Berger.J (2006) .*The Case for Objective Bayesian Analysis* . Journal Article

[8] Del Val, Alvaro and Shoham, Yoav (1994). *A unified view of belief revision and update*. Journal of Logic and Computation, 4(5), 797–810

[9] Dias, Penha Maria Cardoso and Shimony, Abner (1981*). A critique of Jaynes' maximum entropy principle*. Advances in Applied Mathematics, 2(2), 172–211

[10] Williamson,J (2010) . *In defense of Objective Bayesianism* . Oxford University Press.

[11] James,S (2003) . *Subjective and Objective Bayesian Statistics* (Second Edition) . Publication .John Wiley and Sons ,Inc ,Hoboken ,New Jersey.PRESS

[12] Gelman,A,Hennig,C (2015) . *Beyond Subjective and Objective in Statistics*. Article in Journalof the Royal Statistical Society Series A.

[13] Jaynes,E.T (1995) . *Probability Theory : The Logic of Science* . Cambridge University Press.

[14] Good, I. J. (1952). *Rational decisions*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B, 14(1), 107–14.

[15] Kipping,D (2020) . *An Objective Bayesian Analysis of Life's Early Start and our Late Arrival* . Research Article . New York.

[16] Hartmann, Stephan, Pigozzi, Gabriella, and Sprenger, Jan (2007*). Reliable methods of judgment aggregation*. Technical Report 3593 (http://philsciarchive.pitt.edu/archive/00003593/), Philsci Archive