Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Κβαντικές Ομάδες

Διπλωματική Εργασία

7 Μαρτίου 2023

Συγγραφέας:
Αικατερίνη Παπαγεωργίου Καυκά

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:
Σοφία Λαμπροπούλου,
Καθηγήτρια ΕΜΠ

Υπόλοιπα Μέλη Τριμελούς Επιτροπής:
Χριστίνα Βασιλακοπούλου,
Επίκουρη Καθηγήτρια ΕΜΠ
Πέτρος Στεφανέας,
Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Ευχαριστίες

Αυτή η διπλωματική δεν θα είχε γίνει πραγματικότητα, ή τουλάχιστον η ενασχόληση με αυτήν δεν θα ήταν τόσο ευχάριστη και δεν θα είχε τόση επιτυχία, αν δεν με είχαν βοηθήσει και δεν είχαν δείξει ενδιαφέρον άνθρωποι, τόσο στον ακαδημαϊκό χώρο, όσο και στην ζωή μου. Επιθυμώ λοιπόν να τους ευχαριστήσω μέσα από την καρδιά μου. Ευχαριστώ θερμά την κ. Σοφία Λαμπροπούλου, που ως επιβλέπουσα μου έδωσε την ευκαιρία και με ενθάρρυνε να ασχοληθώ με το θέμα της διπλωματικής. Την ευχαριστώ πολύ επίσης, για την όμορφη συνεργασία, την καθοδήγηση και την αφοσίωση που έδειξε στην επίβλεψή μου. Τις ευχαριστίες μου θα ήθελα επίσης να εκφράσω και στην κ. Χριστίνα Βασιλακοποπούλου και στον κ. Πέτρο Στεφανέα που δέχτηκαν να γίνουν μέλη της τριμελούς επιτροπής. Οι «κβαντικές ομάδες» είναι πεδίο και της θεωρητικής φυσικής. Γι' αυτό επικοινώνησα με τον κ. Νίκο Ήργε, αναπληρωτή καθηγητή ΕΜΠ, ο οποίος από την πρώτη στιγμή δεν δίστασε να με συμβουλέψει και να με φέρει σε επαφή με φυσικούς, ειδικούς στο αντικείμενο της διπλωματικής μου. Θα ήθελα λοιπόν, να ευχαριστήσω και αυτούς τους ανθρώπους, τον κ. Αθανάσιο Χατζησταυρακίδη, ερευνητή στο Ruđer Bošković Institute και την κ. Έλλη Πομόνη, ερευνήτρια στο DESY (Deutsches Elektronen-Synchrotron) για τον χρόνο τους και την καθοδήγηση. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Ιωάννη Τσουκνίδα και τον υποψήφιο διδάκτορα Κωνσταντίνο Ψαρομήλιγκο για την προθυμία τους και την βοήθειά τους όποτε είχα κάποια απορία. Κλείνοντας, δεν παραλείπω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, τις φίλες μου και τους φίλους μου που ήταν δίπλα μου σε όλο αυτό το εγχείρημα.

Περίληψη

Οι κβαντικές ομάδες είναι ένα σύγχρονο πεδίο έρευνας των μαθηματικών και της θεωρητικής φυσικής. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την μελέτη τους, έχουν εφαρμογές σε πολλούς και φαινομενικά ασύνδετους μεταξύ τους κλάδους των μαθηματικών, της φυσικής, ακόμη και της επιστήμης υπολογιστών. Όπως φαντάζει λογικό λοιπόν, η κβαντικές ομάδες παρουσιάζουν μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον. Ιστορικά, ως αλγεβρική δομή εμφανίστηκαν μέσα από μία μέθοδο για την κατασκευή και μελέτη κβαντικών ολοκληρώσιμων δυναμικών συστημάτων (quantum integrable systems), την κβαντική μέθοδο του αντίστροφου προβλήματος (QMIP), που αναπτύχθηκε από τον L.D. Faddeev και τους συνεργάτες του. Ως μαθηματικός όρος όμως, έγινε γνωστός το 1986 από τον V.G. Drinfeld σε ομιλία του στο Διεθνές

Κογκρέσσο των Μαθηματικών (IMC) της ίδιας χρονιάς. Ο μαθηματικός φορμαλισμός τους θεμελιώθηκε πρωτύτερα, κυρίως από την δουλειά των V.G. Drinfeld και M. Jimbo και βασίστηκε στις άλγεβρες Hopf, μία έννοια προερχόμενη από την αλγεβρική τοπολογία του 20ου αι.

Η παρούσα διπλωματική είναι μια εισαγωγή στις κβαντικές ομάδες. Αρχικά, εισάγονται κάποια βασικά εργαλεία για την μελέτη και την κατανόησή τους. Στην συνέχεια, γίνεται μια απόπειρα να απαντηθεί το ερώτημα «τι είναι οι κβαντικές ομάδες» με τρόπο διαισθητικό, με βάση του πως απαντάει στο ίδιο ερώτημα ο V.G Drinfeld στο άρθρο του με τίτλο "Quantum Groups". Στα επόμενα κεφάλαια περιγράφεται ένα από τα πιο ευρεία χρησιμοποιούμενα είδη κβαντικών ομάδων, οι κβαντοποιημένες γενικές περιβάλλουσες άλγεβρες μιγαδικών ημιαπλών αλγεβρών Lie και εξερευνούνται οι αναπαραστάσεις τους. Η εργασία κλείνει με μία εφαρμογή της κβαντικής ομάδας $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ στην επίλυση της εξίσωσης Yang-Baxter, η οποία είναι μεγάλης σημασίας στην θεωρία των κβαντικών ολοκληρώσιμων συστημάτων. Με αυτό τον τρόπο επιχειρείται μια σύνδεση με την απαρχή της θεωρίας των κβαντικών ομάδων.

Abstract

Quantum Groups is a modern field of research in mathematics and theoretical physics. The results that arise from their study are applicable in many and seemingly discrete branches of mathematics, physics and even computer science. Reasonably so, its study attracts the interest of many researchers. Historically, quantum groups as an algebraic structure were first introduced through a method of making and studying quantum integrable systems. This method was the quantum method of the inverse problem (QMIP), developed by L.D. Faddeev and his colleagues. The term "quantum groups" became known in 1986 from V.G. Drinfeld in his speech in the International Congress of Mathematics (ICM) of the same year. Earlier than that, the mathematical formalism behind quantum groups was developed from the work of V.G. Drinfeld and M. Jimbo and it was based in Hopf algebras, a notion that arised from the algebraic topology of the 20th century.

This diploma thesis is an introduction to quantum groups. In the first chapters, there is a description of some basic tools that are essential in engaging in the theory of quantum groups. In the following, an intuitive answer in the question "what is a quantum group" is given, according to Drinfeld's paper with title "Quantum Groups". In the next chapters, the reader becomes familiar with a certain type of quantum groups, the quantized version of a universal enveloping algebra of a complex semisimple Lie algebra and their representations are being explored. Finally, this thesis reaches its closure with an application of the quantum group $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ in solving the Yang-Baxter equation, which is of big importance in the theory of quantum integrable systems. This way, a connection with the origins of the theory of quantum groups is being established.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα iv

1 Προαπαιτούμενα 1

1.1 Τανυστικό Γινόμενο 1

1.2 Θεωρία Κατηγοριών 6

1.3 Άλγεβρες 10

1.4 Συνάλγεβρες 13

1.5 Διάλγεβρες 16

1.6 Άλγεβρες Hopf 17

1.7 Άλγεβρες Lie 20

1.8 Πρότυπα 22

2 Τι είναι οι Κβαντικές Ομάδες; 25

3 Η Κβαντική Ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 29

3.1 Η Κβαντική Ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 29

3.1.1 Ορισμός της $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 29

3.1.2 Η κβαντική ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ 30

3.2 Η Κβαντική Ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ 31

3.2.1 Η άλγεβρα Lie $\mathfrak{sl}_2$ 31

3.2.2 Η γενικευμένη περιβάλλουσα άλγεβρα $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ 31

3.2.3 Η κβαντική ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ 32

4 Η εξίσωση Yang-Baxter **39**

4.1 Γενικευμένος R-πίνακας 41

4.2 Η Διπλή Κατασκευή του Drinfeld (The Drinfeld Double Construction) 43

4.2.1 Ο Περιορισμένος Δυϊκός Χώρος μιας Άλγεβρας Hopf . . 43

4.2.2 Η Διπλή Κατασκευή 44

4.2.3 Λύσεις της Εξίσωσης Yang-Baxter Παραγόμενες από Διπλή Κατασκευή Απειροδιάστατης Άλγεβρας Hopf . . . 48

5 Χρήση της Κβαντικής Ομάδας $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ για την Εύρεση Λύσεων της Εξίσωσης Yang-Baxter **51**

5.1 Η άλγεβρα Hopf H_q 51

5.2 Η δυϊκή κατασκευή του Drinfeld D_q 52

5.3 Χρήση της Κβαντικής Ομάδας $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ 53

Βιβλιογραφία **56**

Κεφάλαιο 1

Προαπαιτούμενα

1.1 Τανυστικό Γινόμενο

Θεωρείται ότι όλοι οι διανυσματικοί χώροι που αναφέρονται παρακάτω, είναι πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Ορισμός 1.1.1. Έστω οι διανυσματικοί χώροι V_1, V_2, W. Μία συνάρτηση $\beta : V_1 \times V_2 \to W$ λέγεται **διγραμμική**, αν $\forall v_1 \epsilon V_1$ η συνάρτηση $v_2 \to \beta(v_1, v_2)$ είναι γραμμική και $\forall v_2 \epsilon V_2$ η συνάρτηση $v_1 \to \beta(v_1, v_2)$ είναι επίσης γραμμική.

Η έννοια της **πολυγραμμικότητας** στις συναρτήσεις

$$\beta : V_1 \times V_2 \times V_3 \times ... \times V_n \to W$$

ορίζεται όμοια.

Ορισμός 1.1.2. Έστω οι διανυσματικοί χώροι V_1, V_2. Ένας **χώρος τανυστικού γινομένου** των V_1 και V_2 είναι ένας διανυσματικός χώρος U μαζί με μία διγραμμική συνάρτηση $\phi : V_1 \times V_2 \to U$ τέτοια ώστε να ισχύει η εξής ιδιότητα: για κάθε διανυσματικό χώρο W, για κάθε διγραμμική συνάρτηση $\beta : V_1 \times V_2 \to W$, $\exists!$ γραμμική συνάρτηση $\overline{\beta} : U \to W$ τέτοια ώστε $\beta = \overline{\beta} \circ \phi$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\phi"'] & & W \\
& U \arrow[ur, dashed, "\overline{\beta}"'] &
\end{tikzcd},$$

Δηλαδή, ο χώρος τανυστικού γινομένου είναι ένας χώρος που μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε διγραμμικές συναρτήσεις με γραμμικές συναρτήσεις.

Ο χώρος τανυστικού γινομένου δύο διανυσματικών χώρων V_1 και V_2 είναι μοναδικός. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

Έστω U' ένας άλλος διαν. χώρος τανυστικού γινομένου των χώρων V_1 και V_2 μαζί με μία διγραμμική συνάρτηση $\phi' : V_1 \times V_2 \to U'$. Λόγω του ότι ο U είναι χώρος τανυστικού γινομένου υπάρχει μοναδική $\overline{\phi}' : U \to U'$ με $\phi' = \overline{\phi}' \circ \phi$. Ομοίως για το U' υπάρχει μοναδική $\overline{\phi} : U' \to U$ τέτοια ώστε $\phi = \overline{\phi} \circ \phi'$. Άρα

$$id_U \circ \phi = \phi = \overline{\phi} \circ \phi' = \overline{\phi} \circ \overline{\phi}' \circ \phi$$

Από μοναδικότητα της $\overline{\phi}$ και $\overline{\phi}'$, $id_U = \overline{\phi} \circ \overline{\phi}'$. Ομοίως, παίρνουμε $id_{U'} = \overline{\phi}' \circ \overline{\phi}$. Συμπεραίνεται ότι οι $\overline{\phi}'$ και $\overline{\phi}$ είναι αντίστροφες η μία της άλλης, άρα είναι ισομορφισμοί. Άρα οι U, U' είναι ισομορφικοί χώροι. $\square$

Από εδώ και στο εξής γίνεται χρήση των παρακάτω συμβολισμών:

$$U = V_1 \otimes V_2$$

Για $v_1, v_2 \epsilon V_1 \times V_2$,

$$\phi(v_1, v_2) = v_1 \otimes v_2$$

Λόγω διγραμμικότητας της συνάρτησης ϕ, ισχύουν τα εξής:

- Αν $(v_i^{(1)})_{i\epsilon I}$ γραμμικά ανεξάρτητα στον V_1 και $(v_j^{(2)})_{j\epsilon J}$ γραμμικά ανεξάρτητα στον V_2 $\Rightarrow$ $(v_i^{(1)} \otimes v_j^{(2)})_{i,j\epsilon I\times J}$ γραμμικά ανεξάρτητα στον χώρο $V_1 \otimes V_2$.

- Αν $(v_i^{(1)})_{i\epsilon I}$ παράγουν τον V_1 και $(v_j^{(2)})_{j\epsilon J}$ παράγουν τον $V_2 \Rightarrow (v_i^{(1)} \otimes v_j^{(2)})_{i,j\epsilon I\times J}$ παράγουν τον $V_1 \otimes V_2$.

Προκύπτει από τα παραπάνω ότι: Αν $(v_i^{(1)})_{i\epsilon I}$ είναι βάση του V_1 και $(v_j^{(2)})_{j\epsilon J}$ είναι βάση του $V_2 \Rightarrow (v_i^{(1)} \otimes v_j^{(2)})_{i,j\epsilon I\times J}$ είναι βάση του $V_1 \otimes V_2$. Άρα, αν οι V_1, V_2 είναι πεπερασμένης διάστασης:

$$dim(V_1 \otimes V_2) = dim(V_1)dim(V_2)$$

Ένας τανυστής της μορφής $v^{(1)} \otimes v^{(2)}$ με $v^{(1)}\epsilon V_1$ και $v^{(2)}\epsilon V_2$ ονομάζεται **απλός**. Έστω $(v_\alpha^{(1)})_{\alpha=1}^n$ και $(v_\alpha^{(2)})_{\alpha=1}^n$ δύο οικογένειες του V_1 και V_2 αντίστοιχα. Τότε κάθε τανυστής $t\epsilon V_1 \otimes V_2$ γράφεται ως:

$$t = \sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha^{(1)} \otimes v_\alpha^{(2)}$$

Μπορεί να υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι να γραφτεί ο τανυστής t με αυτό τον τρόπο. Από όλους αυτού τους τρόπους, ο μικρότερος δυνατός αριθμός n ονομάζεται τάξη του τανυστή t και συμβολίζεται με $rank(t)$.

Λήμμα 1.1.1. *Έστω*

$$t = \sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha^{(1)} \otimes v_\alpha^{(2)}$$

με $n = rank(t)$. Τότε και οι δύο οικογένειες $(v_\alpha^{(1)})_{\alpha=1}^n$ και $(v_\alpha^{(2)})_{\alpha=1}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες οικογένειες.

Επίσης, για $\mathbb{K}$ σώμα ισχύει ότι:

$$V \otimes \mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \otimes V \simeq V$$

(1.1)

Αφού για $\lambda\epsilon\mathbb{K}$, $v\epsilon V$:

$$v \otimes \lambda = v\lambda = \lambda v = \lambda \otimes v$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι:

$$V_1 \otimes V_2 \simeq V_2 \otimes V_1$$

Ισχύει επίσης η προσεταιριστικότητα:

$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \simeq (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$$

Παρατήρηση: Θα χρησιμοποιηθεί πολύ στην συνέχεια ο τελεστής $S_{V_1,V_2} : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ που δρα ως εξής: Για $v_1 \epsilon V_1$, $v_2 \epsilon V_2$:

$$v_1 \otimes v_2 \to v_2 \otimes v_1$$

Η δράση αυτή επεκτείνεται γραμμικά για όλα τα στοιχεία του χώρου τανυστικού γινομένου $V_1 \otimes V_2$.

Παρακάτω θα περιγραφούν κάποιες ιδιότητες σε σχέση με τα τανυστικά γινόμενα και τους δυϊκούς διανυσματικών χώρων που θα είναι πολύ χρήσιμες για την συνέχεια.

Σημείωση: Ο $V^* = Hom(V, \mathbb{K})$ είναι ο **δυϊκός χώρος** ενός διανυσματικού χώρου V και ορίζεται ο εξής συμβολισμός (dual brackets) $\forall v \epsilon V$, $\forall \phi \epsilon V^*$:

$$\phi(v) = \langle \phi, v \rangle$$

Ορισμός 1.1.3. Έστω διανυσματικοί χώροι V_1, V_2, W_1, W_2 και δύο γραμμικές συναρτήσεις $f : V_1 \to W_1$ και $g : V_2 \to W_2$.

Η $f \otimes g : V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$ ορίζεται ως

$$(f \otimes g)(v_1 \otimes v_2) = f(v_1) \otimes g(v_2)$$

- Έστω δύο διανυσματικοί χώροι V_1, V_2. Τότε

  $$V_2 \otimes V_1^* \subset Hom(V_1, V_2)$$

  λόγω της αντιστοίχισης:

  $$v_2 \otimes \phi \to (v_1 \to \langle \phi, v_1 \rangle v_2)$$

  για $v_1 \epsilon V_1$, $v_2 \epsilon V_2$, $\phi \epsilon V_2^*$

- Αν υποθέσουμε ότι όλα τα παρακάτω μεγέθη διάστασης χώρων είναι πεπερασμένα, τότε επειδή,
  - $dim(V_2 \otimes V_1^*) = dim(V_2) dim(V_1^*) = dim(V_2) dim(V_1)$
  - $dim(Hom(V_1, V_2)) = dim(V_1) dim(V_2)$

ισχύει:

$$V_2 \otimes V_1^* \simeq Hom(V_1, V_2)$$

Είναι φανερό άρα, ότι υπάρχει η εξής εμφύτευση:

$$Hom(V_1, W_1) \otimes Hom(V_2, W_2) \subset Hom(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$$

Αν οι χώροι V_1, V_2, W_1, W_2 είναι πεπερασμένοι, τότε:

$$dim(Hom(V_1, W_1) \otimes Hom(V_2, W_2)) = dim(V_1)dim(V_2)dim(W_1)dim(W_2)$$

και

$$dim(Hom(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)) = dim(V_1)dim(V_2)dim(W_1)dim(W_2)$$

Άρα, εφόσον οι δύο χώροι θα έχουν την ίδια διάσταση:

$$Hom(V_1, W_1) \otimes Hom(V_2, W_2) \simeq Hom(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$$

- Από την σχέση (1.1), $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \simeq \mathbb{K}$, άρα από τα προηγούμενα προκύπτει:

$$V_1^* \otimes V_2^* \subset (V_1 \otimes V_2)^*$$

μέσα από την σχέση:

$$v_1 \otimes v_2 \to \langle \phi_1, v_1 \rangle \langle \phi_2, v_2 \rangle$$

για $v_1 \epsilon V_1$, $\phi_1 \epsilon V_1^*$, $v_2 \epsilon V_2$, $\phi_2 \epsilon V_2^*$

Ορισμός 1.1.4. Έστω δύο διανυσματικοί χώροι V, W και μια γραμμική συνάρτηση $f : V \to W$. Τότε η **ανάστροφή** της ορίζεται να είναι η $f^* : W^* \to V^*$ τέτοια ώστε για κάθε $\phi \epsilon W^*$, $v \epsilon V$:

$$\langle f^*(\phi), v \rangle = \langle \phi, f(v) \rangle$$

Παρατήρηση:

- Μπορούμε να ορίσουμε για $\phi \epsilon V^*, \psi \epsilon W^*, v \epsilon V, w \epsilon W$:

$$\langle \phi \otimes \psi, v \otimes w \rangle = \langle \phi, v \rangle \langle \psi, w \rangle$$

- Έχουμε $\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{C}$, μέσω της αντιστοιχίας $\phi \epsilon \mathbb{C}^* \leftrightarrow \langle \phi, 1 \rangle$.

Λήμμα 1.1.2. *Αν f, g, V_1, V_2, W_1, W_2 ορισμένα όπως πριν, τότε το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται:*

$$\begin{tikzcd}
(W_1 \otimes W_2)^* \arrow[r, "(f \otimes g)^*"] & (V_1 \otimes V_2)^* \\
W_1^* \otimes W_2^* \arrow[u, hook] \arrow[r, "f^* \otimes g^*"'] & V_1^* \otimes V_2^*. \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

1.2 Θεωρία Κατηγοριών

Ορισμός 1.2.1. Ένα **κατευθυνόμενο γράφημα** είναι ένα σύνολο από αντικείμενα O, ένα σύνολο από βέλη A και δύο συναρτήσεις:

$$dom : A \to O$$

$$codom : A \to O$$

Μπορούμε να φανταστούμε για συγκεκριμένο βέλος f, ότι το αντικείμενο $c = dom(f)$ είναι αυτό από το οποίο ξεκινά και το αντικείμενο $c^{'} = codom(f)$ είναι αυτό στο οποίο καταλήγει.

Ανάμεσα σε δύο στοιχεία του συνόλου A μπορεί να οριστεί η σύνθεση ή αλλιώς «το γινόμενο πάνω από το O», υπό την προϋπόθεση ότι το dom του πρώτου είναι ίσο με το $codom$ του δεύτερου. Δηλαδή η σύνθεση μπορεί να οριστεί μόνο από διατεταγμένα ζεύγη που ανήκουν στο σύνολο:

$$A \times_O A = \{(g, f) |\, g, f \epsilon A,\ dom(g) = codom(f)\}$$

Ορισμός 1.2.2. Μία **κατηγορία** είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα με δύο επιπλέον συναρτήσεις, την **σύνθεση**

$$\circ : A \times_O A \to A$$

$$(g, f) \to g \circ f$$

με

$$dom(g \circ f) = dom(f)$$
$$codom(g \circ f) = codom(g)$$

και την **ταυτότητα**

$$id : O \to A$$

$$c \to id_c$$

με

$$dom(id_c) = c = codom(id_c)$$

δηλαδή, $id_c = \; c \circlearrowleft$. Επίπλέον, ισχύουν τα αξιώματα:

- προσεταιριστικότητα: Για $f, g, h \epsilon A$

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$$

- αξίωμα ταυτοτικού στοιχείου: Για $k, l, id_c \epsilon A$ με $c = dom(k) = codom(l)$

$$id_c \circ l = l$$

$$k \circ id_c = k$$

Παραδείγματα:

0 Η άδεια κατηγορία, χωρίς αντικείμενα και βέλη.

1 Η κατηγορία με ένα αντικείμενο $c \epsilon O$ και ένα ταυτοτικό βέλος, το id_c

2 Η κατηγορία με δύο αντικείμενα $a, b \epsilon O$ με ένα βέλος $a \to b$ εκτός από τα ταυτοτικά: $\circlearrowright a \longrightarrow b \circlearrowleft$

3 Η κατηγορία με τρία αντικείμενα που τα μη ταυτοτικά τους βέλη είναι τοποθετημένα όπως στο τρίγωνο:
$$\begin{tikzcd} & b \circlearrowleft \arrow[d] \\ \circlearrowright a \arrow[ur] \arrow[r] & c \circlearrowleft \end{tikzcd}$$
*Το βέλος $a \to c$ δεν είναι αναγκαστικά η σύνθεση των άλλων δύο.

$\downdownarrows$ Η κατηγορία με δύο αντικείμενα a και b και δύο βέλη πέρα από τα ταυτοτικά: $\circlearrowright a \rightrightarrows b \circlearrowleft$

$\uparrow\downarrow$ Η κατηγορία με δύο αντικείμενα και δύο βέλη πέρα από τα ταυτοτικά: $\circlearrowright a \rightleftarrows b \circlearrowleft$

Ορισμός 1.2.3. Ένας **συναρτητής** είναι ένας μορφισμός κατηγοριών. Συγκεριμένα, για δύο κατηγορίες C, B ορίζεται ο συναρτητής $T : C \to B$ που αποτελείται από δύο σχετικές συναρτήσεις:

- Μία συνάρτηση αντικειμένων $T : O(C) \to O(B)$ που αναθέτει σε κάθε αντικείμενο $c \epsilon C$ ένα αντικείμενο $T_c \epsilon B$.
- Μία συνάρτηση βελών $T : A(C) \to A(B)$ που αναθέτει σε κάθε βέλος $f : c \to c'$ της C ένα βέλος $Tf : T_c \to T_{c'}$ της B με τέτοιο τρόπο, ώστε αν υπάρχει η σύνθεση $g \circ f \epsilon C$ τότε

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf$$

και

$$T_{id_c} = id_{T_c}$$

Παράδειγμα 1.2.1. Ένα παράδειγμα συναρτητή είναι ο συναρτητής ανάθεσης δυναμοσύνολου $\mathcal{P} : Set \to Set$, όπου Set είναι η κατηγορία των συνόλων και των συναρτήσεων. Αυτός ο συναρτητής έχει συνάρτηση αντικειμένων που αναθέτει σε κάθε σύνολο X το δυναμοσύνολό του $\mathcal{P}X$, το οποίο έχει στοιχεία όλα τα υποσύνολα $S \subset X$. Η συνάρτηση βελών αναθέτει σε κάθε βέλος $f : X \to Y$, το βέλος $\mathcal{P}f : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$. Το $\mathcal{P}f$ στέλνει κάθε $S \subset X$ στο $fS \subset Y$. Πράγματι, ο $\mathcal{P}$ είναι καλά ορισμένος διότι $\mathcal{P}_{id_X} = id_{\mathcal{P}X}$ και $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}g \circ \mathcal{P}f$.

Παράδειγμα 1.2.2. Έστω ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο K. Ορίζεται ως $GL_n(K)$ το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων (μη μηδενική ορίζουσα) $n \times n$ πινάκων με ορίσματα από στοιχεία του K. Η $GL_n(K)$ είναι ομάδα με πράξη των πολλαπλασιασμό πινάκων. Κάθε μη τετριμμένος ομομορφισμός δακτυλίων $f : K \to K'$, όπου K' μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, αντιστοιχεί με προφανή τρόπο σε έναν ομομορφισμό ομάδων $GL_n f = GL_n(K) \to GL_n(K')$. Άρα, μπορεί να οριστεί συναρτητής για κάθε n

$$GL_n : CRng \to Grp$$

όπου $CRng$ η κατηγορία των μεταθετικών δακτυλίων και Grp η κατηγορία των ομάδων.

<u>Σχόλιο</u>: Το παραπάνω παράδειγμα είναι καλώς ορισμένο. Έστω $M \epsilon GL_n(K)$. Τότε, υπάρχει ο αντίστροφός του M^{-1}. Θα δείξω ότι ο πίνακας $M^{‘} = M(f(K))\, \epsilon GL_n(K^{‘})$. Έχουμε

$$det(M)det(M^{-1}) = 1_K$$

αλλά $det(M)$, $det(M^{-1})\, \epsilon K$, άρα

$$f(det(M))f(det(M^{-1})) = f(1_K) = 1_{K'} \Rightarrow$$

$$det(f(M))det(f(M^{-1})) = 1_{K'}$$

δηλαδή $det(f(M)) = det(M') \neq 0 \Rightarrow M^{‘} \epsilon GL_n(K')$.

Ορισμός 1.2.4. Για κάθε κατηγορία C υπάρχει η **αντίθετή** της κατηγορία C^{op}, η οποία έχει τα ίδια αντικείμενα με την C και βέλη $f^{op} : b \to a$ για κάθε βέλος $f : a \to b$ της C.

Ορισμός 1.2.5. Ένας συναρτητής $F : C \to D$ λέγεται **ανταλλοίωτος** (contravariant) αν μεταφέρει κάθε βέλος

$$f : c \to d$$

σε ένα βέλος

$$F(f) : F(d) \to F(c)$$

(δηλαδή αντιστρέφει την κατεύθυνση των βελών). Άρα, η εικόνα του F είναι η ίδια με αυτή του μη ανταλλοίωτου συναρτητή $F' : C^{op} \to D$ που αντιστοιχίζει με τον ίδιο τρόπο με τον F αντικείμενα.

Ορισμός 1.2.6. Δεδομένων δύο συναρτητών $S, T : C \to B$, ένας **φυσικός μετασχηματισμός** $\tau : S \to T$ είναι μια συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε αντικείμενο της C, c, ένα βέλος $\tau_c : S_c \to T_c$ στην κατηγορία B, με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε βέλος $f : c \to c'$, το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "f"] & Sc \arrow[r, "\tau c"] \arrow[d, "Sf"'] & Tc \arrow[d, "Tf"] \\
c', & Sc' \arrow[r, "\tau c'"] & Tc'
\end{tikzcd}$$

Ο ορισμός της ισοδυναμίας δύο κατηγοριών είναι ένας φορμαλιστικός τρόπος να ορίσουμε πότε δύο κατηγορίες είναι πρακτικά «οι ίδιες».

Ορισμός 1.2.7. Έστω δύο κατηγορίες C, D. Λέμε ότι αυτές είναι **ισοδύναμες** αν υπάρχουν δύο συναρτητές $F : C \to D$ και $G : D \to C$ και δύο φυσικοί μετασχηματισμοί $\varepsilon : FG \to I_D$ και $\eta : I_C \to GF$ με I_C, I_D οι ταυτοτικοί συναρτητές των C, D αντίστοιχα. Αν οι συναρτητές F, G είναι επιπλέον ανταλλοίωτοι, τότε μιλάμε για **δυϊκότητα** κατηγοριών.

1.3 Άλγεβρες

Σημείωση: Από εδώ και στο εξής: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Ορισμός 1.3.1. Ένας διανυσματικός χώρος A είναι **άλγεβρα** αν είναι εφοδιασμένος με μία γραμμική συνάρτηση

$$\mu : A \otimes A \to A$$

που ονομάζεται γινόμενο και μία γραμμική συνάρτηση

$$\eta : \mathbb{C} \to A$$

που ονομάζεται μονάδα για τις οποίες ισχύουν τα εξής αξιώματα:

- "προσεταιριστικότητα":

$$\mu \circ \ (\mu \otimes id_A) = \mu \circ (id_A \otimes \mu)$$

  (id_A: η ταυτοτική συνάρτηση στο A)

- "αξίωμα ταυτοτικού στοιχείου":

$$\mu \circ (\eta \otimes id_A) = id_A = \mu \circ (id_A \otimes \eta)$$

Εναλλακτικός Ορισμός: Μία τριπλέτα $(A, *, 1_A)$ ονομάζεται **άλγεβρα**, αν ο A είναι διανυσματικός χώρος, η πράξη $* : A \times A \to A$ είναι μία διγραμμική συνάρτηση και ισχύουν επίσης τα αξιώματα:

- προσεταιριστικότητας

$$a_1 * (a_2 * a_3) = (a_1 * a_2) * a_3 \, \forall a_1, a_2, a_3 \epsilon A$$

- αξίωμα ταυτοτικού στοιχείου

$$1_A * a = a = a * 1_A \, \forall a \epsilon A$$

Παρατήρηση: Παρ'όλο που μια άλγεβρα έχει μοναδιαίο στοιχείο, προσεταιριστικότητα και κλειστότητα ως προς την πράξη $*$, δεν είναι ομάδα. Λείπει το αξίωμα του αντιστρόφου στοιχείου. Μάλιστα, τα στοιχεία της άλγεβρας A μπορεί να έχουν είτε αριστερό, είτε δεξιό αντίστροφο. Το μόνο που μπορούμε να αποφανθούμε περί αντιστρόφου είναι ότι αν ένα στοιχείο έχει και δεξιό και αριστερό αντίστροφο, αυτό είναι μοναδικό!

Αν και ο παραπάνω ορισμός είναι πιο εύκολα κατανοητός, για την συνέχεια της εργασίας μας είναι πιο χρήσιμος ο ορισμός 1.3.1. Είναι φανερό ότι από την ανάθεση

$$\mu(a \otimes b) = a * b$$

και

$$\eta(\lambda) = \lambda 1_A$$

για $a, b \epsilon A$, $\lambda \epsilon \mathbb{C}$, οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

Ορισμός 1.3.2. Μία άλγεβρα (A, μ, η) λέγεται **μεταθετική**, αν

$$(A^{op}, \mu^{op}, \eta) = (A, \mu, \eta)$$

με $A^{op} = A$ και $\mu^{op} = \mu \circ S_{A,A}$, δηλαδή $\mu^{op}(a \otimes b) = b * a$, $a, b \epsilon A$.

Παράδειγμα 1.3.1. Έστω μια ομάδα G. Έστω $\mathbb{C}[G]$ ο διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ με βάση $(e_g)_{g \epsilon G}$. Τότε, επεκτείνοντας γραμμικά τις σχέσεις $e_g * e_h := e_{gh}$, ο χώρος $\mathbb{C}[G]$ είναι άλγεβρα, η άλγεβρα ομάδας (group algebra) με $e_e := 1_{\mathbb{C}[G]}$.

Παράδειγμα 1.3.2. Έστω X ένα σύνολο και F το σύνολο των συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$. Το F είναι άλγεβρα με γινόμενο τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό συναρτήσεων, διότι:

- Είναι διανυσματικός χώρος, αφού $\forall \mu, \lambda \epsilon \mathbb{R}, \forall f, g \epsilon F$, $\lambda f + \mu g \epsilon F$.
- Από ιδιότητα πολλαπλασιασμού πραγματικών αρθμών για $f, g, h \epsilon F$, $(fg)h = f(gh)$.
- Το ταυτοτικό στοιχείο είναι η σταθερή συνάρτηση $id(x) = 1, \forall x \epsilon X$

Παράδειγμα 1.3.3. Έστω A_1, A_2 δύο άλγεβρες. Τότε το τανυστικό τους γινόμενο $A_1 \otimes A_2$ είναι επίσης άλγεβρα με γινόμενο:

$$(a_1 \otimes a_2) * (a_1' \otimes a_2') = (a_1 *_1 a_1') \otimes (a_2 *_2 a_2')$$

και ταυτοτικό στοιχείο:

$$1_{A_1 \otimes A_2} = 1_{A_1} \otimes 1_{A_2}$$

Παράδειγμα 1.3.4. Το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ είναι επίσης άλγεβρα, με ταυτοτικό στοιχείο την μονάδα και γινόμενο το σύνηθες γινόμενο των μιγαδικών αριθμών.

Ορισμός 1.3.3. Έστω δύο άλγεβρες (A_1, μ_1, η_1) και (A_2, μ_2, η_2). Μία γραμμική συνάρτηση $f : A_1 \to A_2$ είναι **ομομορφισμός αλγεβρών**, αν ισχύουν:

$$f \circ \eta_1 = \eta_2$$

$$\mu_2 \circ (f \otimes f) = f \circ \mu_1$$

Ορισμός 1.3.4. Έστω μία άλγεβρα B και ένας υπόχωρος $A \subset B$. Ο A είναι **υποάλγεβρα της** B αν υπάρχει ένας 1-1 ομομορφισμός αλγεβρών $i : A \to B$.

Ορισμός 1.3.5. Το **κέντρο** $Z(A)$ **μιας άλγεβρας** A είναι η υποάλγεβρα

$$\{\alpha \epsilon A |\, \alpha\alpha' = \alpha'\alpha,\, \forall \alpha' \epsilon A\}$$

Ορισμός 1.3.6. Έστω μια άλγεβρα (A, μ, η). Ένας υπόχωρος I της άλγεβρας A λέμε ότι είναι:

- **δεξιό ιδεώδες** όταν
$$\mu(A \otimes I) \subset I$$
- **αριστερό ιδεώδες** όταν
$$\mu(I \otimes A) \subset I$$

Όταν το I είναι και αριστερό και δεξιό ιδεώδες, λέμε ότι είναι **διπλό ιδεώδες**. Τότε υπάρχει μοναδική δομή άλγεβρας στον χώρο πηλίκο A/I τέτοια ώστε η κανονική προβολή της A στον A/I να είναι ομομορφισμός αλγεβρών.

Τα αξιώματα του ορισμού της άλγεβρας μπορούν να αναπαρασταθούν και με μεταθετικά διαγράμματα:

$$
\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\
A \otimes A \otimes A \arrow[ur, "\mu \oplus \mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A \oplus \mu"'] & & A \\
& A \otimes A \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figure 1.1: "Προσεταιριστικότητα"

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \otimes A \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[dr, "\eta \oplus \mathrm{id}_A"'] & A \arrow[r, phantom, "\cong"] & A \otimes \mathbb{C} \arrow[dl, "\mathrm{id}_A \oplus \eta"] \\
& A \otimes A \arrow[u, "\mu"'] &
\end{tikzcd} .
$$

Figure 1.2: "Αξίωμα Ταυτοτικού Στοιχείου"

1.4 Συνάλγεβρες

Αν αναστραφούν τα βέλη των παραπάνω διαγραμμάτων, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια άλλη δομή με αξιώματα αυτά που προκύπτουν από τα ίδια διαγράμματα με τα βέλη ανεστραμμένα. Η δομή αυτή ονομάζεται συνάλγεβρα.

Τα ανεστραμμένα διαγράμματα είναι:

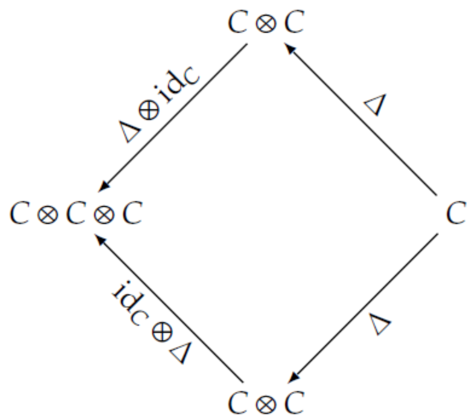

Figure 1.3: Συμπροσεταιτιστικότητα

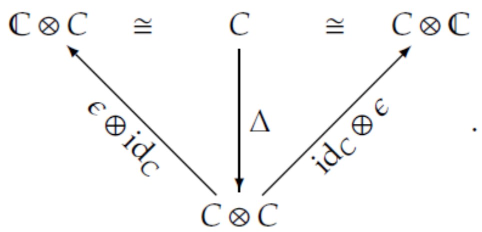

Figure 1.4: Αξίωμα Συνταυτοτικού Στοιχείου

Ορισμός 1.4.1. Μία τριπλέτα (C, Δ, ε) ονομάζεται **συνάλγεβρα**, αν ο C είναι ένας διανυσματικός χώρος, η $\Delta : C \to C \otimes C$ είναι μία γραμμική συνάρτηση που ονομάζεται <u>συνγινόμενο</u> (coproduct) και η $\varepsilon : C \to \mathbb{C}$ είναι μία γραμμική συνάρτηση που ονομάζεται <u>συν-μονάδα</u> (counit) και ισχύουν τα αξιώματα:

- <u>Συμπροσεταιριστικότητα</u>

$$(\Delta \otimes id_c) \circ \Delta = (id_c \otimes \Delta) \circ \Delta$$

- <u>Αξίωμα Συνταυτοτικού Στοιχείου</u>

$$(\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta = id_C = (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta$$

<u>**Ο συμβολισμός "Σίγμα" του Sweedler:**</u>
Έστω $c \epsilon C$. Η συνάρτηση Δ απεικονίζει ένα στοιχείο $c \epsilon C$ σε ένα στοιχείο

$\sum_{i=1}^{n} c_i^{(1)} \otimes c_i^{(2)} \epsilon C \otimes C$. Για ευκολία στις πράξεις με την συνάρτηση Δ όμως, μπορούμε να γράψουμε:

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

Ορισμός 1.4.2. Μία συνάλγεβρα λέγεται **συν-μεταθετική** (cocommutative) αν ισχύει:

$$(C, \Delta, \varepsilon) = (C^{cop}, \Delta^{cop}, \varepsilon)$$

όπου $C = C^{cop}$ και $\Delta^{cop} = S_{C,C} \circ \Delta$, δηλαδή $\Delta^{cop}(c) = \sum_{(c)} c_{(2)} \otimes c_{(1)}$.

Παράδειγμα 1.4.1. Έστω δύο συνάλγεβρες $(C_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$, $(C_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$. Τότε, το τανυστικό τους γινόμενο $C_1 \otimes C_2$ είναι επίσης συνάλγεβρα: $(C_1 \otimes C_2, \Delta, \varepsilon)$. Αν $\Delta_1(c_1) = \sum_{(c_1)} c_{1(1)} \otimes c_{1(2)}$ και $\Delta_2(c_2) = \sum_{(c_2)} c_{2(1)} \otimes c_{2(2)}$, τότε:

$$\Delta(c_1 \otimes c_2) = \sum_{(c_1)\otimes(c_2)} (c_{1(1)} \otimes c_{2(1)}) \otimes (c_{1(2)} \otimes c_{2(2)})$$

και

$$\varepsilon(c_1 \otimes c_2) = \varepsilon_1(c_1)\varepsilon_2(c_2)$$

Παράδειγμα 1.4.2. Το $\mathbb{C}$ μπορεί να γίνει συνάλγεβρα με το συν-γινόμενο και την συν-μονάδα να είναι οι ταυτοτικές συναρτήσεις. (Υπενθύμιση: $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}$)

Ορισμός 1.4.3. Έστω δύο συνάλγεβρες $(C_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$ και $(C_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$. Μία γραμμική συνάρτηση $f : C_1 \to C_2$ είναι **ομομορφισμός συναλγεβρών** αν ισχύει:

$$\Delta_2 \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_1$$

$$\varepsilon_2 \circ f = \varepsilon_1$$

Ορισμός 1.4.4. Ένας διανυσματικός υπόχωρος J μιας συνάλγεβρας A, είναι **συνιδεώδες** της A αν:

$$\Delta(J) \subset J \otimes A + A \otimes J$$

και

$$\varepsilon|_J = 0$$

Ορισμός 1.4.5. Ένα στοιχείο c μίας συνάλγεβρας C είναι **ομαδοειδές** (grouplike), αν ισχύει:

$$\Delta(c) = c \otimes c$$

Θεώρημα 1.4.1. *([Kytölä2011]-Theor.3.34) Έστω (C, Δ, ε) συνάλγεβρα. Ορίζονται τα εξής:*

$$A = C^*$$

$$\mu = \Delta^*|_{C^* \otimes C^*} : A \otimes A \to A$$

$$\eta = \varepsilon^* : \mathbb{C} \to A$$

Τότε, (A, μ, η) είναι ***άλγεβρα****.*

1.5 Διάλγεβρες

Ορισμός 1.5.1. Μία πεντάδα $(B, \mu, \Delta, \eta, \varepsilon)$ ονομάζεται **διάλγεβρα**, αν η τριάδα (B, μ, η) είναι άλγεβρα, η (B, Δ, ε) είναι συνάλγεβρα και ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα:

(A1) $\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ (id_B \otimes S_{B,B} \otimes id_B) \circ (\Delta \otimes \Delta)$

(A2) $\Delta \circ \eta = \eta \otimes \eta$

(A3) $\varepsilon \circ \mu = \varepsilon \otimes \varepsilon$

(A5) $\varepsilon \circ \eta = id_{\mathbb{C}}$ ($id_{\mathbb{C}}$: η ταυτοτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$)

Εναλλακτικός Ορισμός: Έστω B ένας διανυσματικός χώρος και μ, Δ, η, ε γραμμικές συναρτήσεις ώστε η τριπλέτα (B, μ, η) να είναι άλγεβρα και η (B, Δ, ε) συνάλγεβρα. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- Οι συναρτήσεις Δ και ε είναι ομομορφισμοί αλγεβρών.
- Οι συναρτήσεις μ και η είναι ομομορφισμοί συναλγεβρών.
- Η πεντάδα $(B, \mu, \Delta, \eta, \varepsilon)$ είναι διάλεγβρα.

Τα αξιώματα μπορούν να απεικονιστούν στα εξής μεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "\Delta"] & \\
B \otimes B \arrow[ur, "\mu"] \arrow[d, "\Delta \otimes \Delta"'] & & B \otimes B \\
B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[rr, "\mathrm{id}_B \otimes S_{B,B} \otimes \mathrm{id}_B"'] & & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[u, "\mu \otimes \mu"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B & B \arrow[l, "\Delta"'] \\
\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \arrow[u, "\eta \otimes \eta"] \arrow[r, leftrightarrow] & \mathbb{C} \arrow[u, "\eta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\epsilon \otimes \epsilon"'] & B \arrow[d, "\epsilon"] \\
\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "\epsilon"] & \\
\mathbb{C} \arrow[ur, "\eta"] \arrow[rr, leftrightarrow] & & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Figure 1.5: Αξιώματα Διάλγεβρας

Ορισμός 1.5.2. Έστω δύο διάλγεβρες $(B_1, \mu_1, \Delta_1, \eta_1, \varepsilon_1)$ και $(B_2, \mu_2, \Delta_2, \eta_2, \varepsilon_2)$. Μία γραμμική συνάρτηση

$$f : B_1 \to B_2$$

είναι **ομομορφισμός διαλγεβρών** αν η f είναι ομομορφισμούς αλγεβρών και ομομορφισμός συναλγεβρών.

1.6 Άλγεβρες Hopf

Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε τον ορισμό των αλγεβρών Hopf. Οι άλγεβρες Hopf είναι πολύ σημαντικές για το περιεχόμενο αυτής της εργασίας, αφού οι κβαντικές ομάδες είναι ειδικές περιπτώσεις αλγεβρών Hopf.

Συγκεκριμένα, ένας από τους πιο διαδεδομένους ορισμούς είναι ότι οι κβαντικές ομάδες είναι μη μεταθετικές και μη συν-μεταθετικές άλγεβρες Hopf. Περισσότερες λεπτομέρειες θα δοθούν στην συνέχεια.

Ορισμός 1.6.1. Μία εξάδα $(H, \mu, \Delta, \eta, \varepsilon, \gamma)$ ονομάζεται **άλγεβρα Hopf** αν η πεντάδα $(H, \mu, \Delta, \eta, \varepsilon)$ είναι διάλγεβρα και ισχύει ένα επιπλέον αξίωμα, το αξίωμα του <u>αντίποδα</u>. Ο αντίποδας είναι η γραμμική συνάρτηση $\gamma : H \to H$ για την οποία ισχύει το εν λόγω αξίωμα:

$$\mu \circ (\gamma \otimes id_H) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = \mu \circ (id_H \otimes \gamma) \circ \Delta$$

<u>**Παρατήρηση:**</u> Κάνοντας χρήση του συμβολισμού Σίγμα του Sweedler, το παραπάνω αξίωμα μπορεί να γραφτεί σαν:

$$\sum_{(a)} \gamma(a_{(1)}) * a_{(2)} = \varepsilon(a) 1_H = \sum_{(a)} a_{(1)} * \gamma(a_{(2)})$$

Το αξίωμα του αντίποδα στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id}_H \otimes \gamma"] & & H \otimes H \arrow[d, "\mu"] \\
H \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{C} \arrow[r, "\eta"] & H \\
H \otimes H \arrow[rr, "\gamma \otimes \mathrm{id}_H"'] & & H \otimes H \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

Figure 1.6: Αξίωμα Αντίποδα

Παράδειγμα 1.6.1. Από το παράδειγμα 1.3.1 γνωρίζουμε ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}[G]$ για μια ομάδα G μπορεί να πάρει δομή άλγεβρας. Επεκτείνοντας γραμμικά τις παρακάτω σχέσεις για κάθε $g\epsilon G$, η $\mathbb{C}[G]$ μπορεί επίσης να πάρει την δομή άλγεβρας Hopf:

$$\Delta(e_g) = e_g \otimes e_g$$

$$\varepsilon(e_g) = 1$$

$$\gamma(e_g) = e_{g^{-1}}$$

Ιδιότητες Αντίποδα:

- Ο αντίποδας γ είναι μοναδικός για κάθε άλγεβρα Hopf.
- Ο αντίποδας είναι ομομορφισμός αλγεβρών από την (H, μ, η) στην (H^{op}, μ^{op}, η).
- Ο αντίποδας είναι ομομορφισμός συναλγεβρών από την (H, Δ, ε) στην $(H^{cop}, \Delta^{cop}, \varepsilon)$.

Ορισμός 1.6.2. Έστω $(H_1, \mu_1, \Delta_1, \eta_1, \varepsilon_1, \gamma_1)$ και $(H_2, \mu_2, \Delta_2, \eta_2, \varepsilon_2, \gamma_2)$ δύο άλγεβρες Hopf. Μία γραμμική συνάρτηση $f : H_1 \to H_2$ είναι **ομομορφισμός αλγεβρών Hopf** αν η f είναι ομομορφισμός διαλγεβρών και

$$f \circ \gamma_1 = \gamma_2 \circ f$$

Ορισμός 1.6.3. Έστω μια άλγεβρα Hopf $(H, \mu, \Delta, \eta, \varepsilon, \gamma)$. Ένας υπόχωρος $B \subset H$ είναι μία **υποάλγεβρα Hopf της** H, αν η

$$(B, \mu|_B, \Delta|_{B\otimes B}, \eta, \varepsilon|_B, \gamma|_B)$$

είναι άλγεβρα Hopf.

Ορισμός 1.6.4. Ένας υπόχωρος J μιας άλγεβρας Hopf H είναι **ιδεώδες Hopf** αν είναι διπλό ιδεώδες άλγεβρας και συνάλγεβρας της H και επιπλέον:

$$\gamma(J) \subset J$$

1.7 Άλγεβρες Lie

Ορισμός 1.7.1. Μία **άλγεβρα Lie** L είναι ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με μία διγραμμική συνάρτηση $[\,,\,] : L \times L \to L$, την αγκύλη Lie, ως προς την οποία ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες $\forall x, y, z \epsilon L$:

- αντισυμμετρία:
$$[x, y] = -[y, x]$$

- ταυτότητα Jacobi:
$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

Ορισμός 1.7.2.
- Μία **υποάλγεβρα Lie** L' μιας άλγεβρας Lie L, είναι ένας γραμμικός υπόχωρος L' της L τέτοιος ώστε $\forall (x, y) \epsilon L' \times L'$, $[x, y] \epsilon L'$.
- Μία υποάλγεβρα Lie I είναι **ιδεώδες** της L, αν $\forall (x, y) \epsilon L \times I$, $[x, y] \epsilon I$.

Ορισμός 1.7.3. Έστω δύο άλγεβρες Lie L, L'. Ένας **ομομορφισμός αλγεβρών Lie** είναι μία γραμμική συνάρτηση $f : L \to L'$, τέτοια ώστε $\forall x, y \epsilon L$:
$$f([x, y]) = [f(x), f(y)]$$

Σημείωση:

- Μία άλγεβρα A γίνεται άλγεβρα Lie ορίζοντας
$$[a, b] = ab - ba$$
$\forall a, b \epsilon A$. Η άλγεβρα αυτή συμβολίζεται ως $L(A)$.
- Για $A = M_n(\mathbb{C})$, δηλαδή η άλγεβρα των $n \times n$ πινάκων στο $\mathbb{C}$, τότε συμβολίζουμε την $L(A)$ με $\mathfrak{gl}(n)$. Ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πινάκων στο $\mathbb{C}$ με μηδενικό ίχνος που είναι υποάλγεβρα Lie της $\mathfrak{gl}_n$, συμβολίζεται με $\mathfrak{sl}_n$.

Ορισμός 1.7.4. Έστω μία άλγεβρα Lie L. Μία **περιβάλλουσα (enveloping) άλγεβρά της** είναι ένα ζεύγος $(\phi, U(L))$ με $U(L)$ άλγεβρα και $\phi : L \to L(U(L))$ ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie.

Ορισμός 1.7.5. Μία **γενικευμένη περιβάλλουσα (universal enveloping) άλγεβρα** μιας άλγεβρας Lie L είναι το ζεύγος $(\Phi, \mathcal{U}(L))$ που έχει την ακόλουθη γενικευμένη ιδιότητα: $\forall$ περιβάλλουσα άλγεβρα της L, $(\phi, U(L))$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αλγεβρών $f : \mathcal{U}(L) \to U(L)$ τέτοιος ώστε, $\phi = f \circ \Phi$.

Παρατηρήσεις:

- Αν η γενικευμένη περιβάλλουσα άλγεβρα της L υπάρχει, είναι μοναδική. [Kac2011]
- Η γενικευμένη περιβάλλουσα άλγεβρα της L έχει ακριβώς τις ίδιες αναπαραστάσεις με την L. [Kac2011]

Σημείωση: Έστω μια άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$. Το υποσύνολο $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{g \epsilon \mathfrak{g} |\, g = [h, h'] \quad \forall h, h' \epsilon \mathfrak{g}\}$ της $\mathfrak{g}$ είναι υποάλγεβρα Lie της $\mathfrak{g}$.

Ορισμός 1.7.6. Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie. Μία υποάλγεβρα της $\mathfrak{h}$ της $\mathfrak{h}$ ονομάζεται **υποάλγεβρα Cartan της** $\mathfrak{g}$ αν έχει τις εξής ιδιότητες:

- Η σειρά
$$\mathfrak{h} \geq [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \geq [\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]] \geq ...$$
τερματίζει στην υποάλγεβρα $\{0\}$ (είναι nilpotent).
- Είναι αυτοκανονικοποιητική (self-normalising), δηλαδή αν $[x, y] \epsilon \mathfrak{h}$ $\forall x \epsilon \mathfrak{h}$, τότε $y \epsilon \mathfrak{h}$.

Παρατήρηση: Κάθε άλγεβρα Lie έχει μοναδική υποάλγεβρα Cartan.

Έστω μία άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ και $\mathfrak{h}$ η Cartan υποάλγεβρά της. Ορίζονται τα εξής σύνολα:

- Για $\alpha \epsilon \mathfrak{h}^*$
$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \epsilon \mathfrak{g} |\, [h, x] = \langle \alpha, h \rangle x,\, \forall h \epsilon \mathfrak{h}\}$$
- $$R = \{\alpha \epsilon \mathfrak{h}^* - \{0\} |\, \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

Όλα τα στοιχεία του συνόλου R ονομάζονται **ρίζες** της $\mathfrak{g}$.

Γνωρίζουμε ότι χώροι $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}^*$ είναι ισομορφικοί. Έστω $H_\alpha \epsilon \mathfrak{h}$ το ατίστοιχο στοιχείο του $\alpha \epsilon \mathfrak{h}^*$. Τότε ορίζεται η εξής διγραμμική συνάρτηση $\forall \alpha, \beta \epsilon \mathfrak{h}^*$:

$$(\alpha, \beta) = \langle H_\alpha, \beta \rangle = \beta(H_\alpha)$$

Ισχύουν τα εξής:

- $\forall \alpha \beta \epsilon \mathfrak{h}^*$ ισχύει ότι ο αριθμός $2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ είναι ακέραιος. [Kirillov2008]
- Ο R είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος. [Kirillov2008]

Επομένως, οποιαδήποτε ρίζα μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός από στοιχεία μίας αυθαίρετης βάσης στο R. Θετικές ονομάζονται οι ρίζες που στην ανάλυσή τους σε αυτή την βάση, έχουν τον πρώτο συντελεστή θετικό αριθμό. Μια θετική ρίζα ονομάζεται **απλή** όταν δεν μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα από δύο άλλες θετικές ρίζες. Επιπλέον, το σύνολο των απλών ριζών δημιουργούν επίσης βάση στο R. [Ήργες2022]

Ορισμός 1.7.7.
- **Απλή** ονομάζεται μία άλγεβρα Lie L που δεν είναι αβελιανή (δεν ισχύει ότι $[a, b] = 0, \forall a, b \epsilon L$) και δεν περιέχει γνήσια ιδεώδη.
- **Ημιαπλή** ονομάζεται μία άλγεβρα Lie που είναι ευθύ άθροισμα απλών αλγεβρών Lie.

Ορισμός 1.7.8. Εστω $\mathfrak{g}$ μία απλή άλγεβρα Lie και έστω μία βάση του R από απλές ρίζες $(\alpha_i)_{1\leq i\leq N}$. Τότε ο **πίνακας Cartan** $(\alpha_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ της $\mathfrak{g}$ είναι ο πίνακας με στοιχεία

$$\alpha_{i,j} = 2\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$$

1.8 Πρότυπα

Ορισμός 1.8.1. Έστω $(R, +, *)$ ένας δακτύλιος. Ένα αβελιανό **(αριστερό)** R**-πρότυπο** (R-module) είναι ένας χώρος $(M, +)$ που είναι αβελιανή ομάδα μαζί με μία πράξη βαθμοτού πολλαπλασιασμού ".", ώστε για κάθε $\alpha, \beta \epsilon M$ και $r, s \epsilon R$:

- $r.a \epsilon M$
- $r.(\alpha+\beta)=r.\alpha+r.\beta$
- $(r+s).\alpha=r.\alpha+s.\alpha$
- $(r*s).\alpha=r.(s.\alpha)$

Παρατήρηση: Αν ο δακτύλιος έχει και μοναδιαίο στοιχείο, τότε επιπλέον ισχύει:$\forall \alpha \epsilon M\ 1_R.\alpha=\alpha$.

Ορισμός 1.8.2. Έστω μία άλγεβρα A και ένας διανυσματικός χώρος V. Ονομάζουμε **αναπαράσταση της άλγεβρας** A το ζεύγος (V,ρ), όπου ρ είναι μία γραμμική συνάρτηση $\rho : A \otimes V \to V$, τέτοια ώστε ο V μαζί με την ρ ως πράξη εξωτερικού πολλαπλασιασμού να είναι A-πρότυπο.

Ορισμός 1.8.3. Ένα **Α-υποπρότυπο** V' είναι ένας γραμμικός υπόχωρος ενός A-προτύπου V, τέτοιος ώστε αν (V,ρ) είναι μια αναπαράσταση της άλγεβρας A, τότε και (V',ρ) να είναι επίσης αναπαράσταση της A, και αυτή ονομάζεται **υποαναπαράσταση** της (V,ρ).

Ορισμός 1.8.4. Έστω A άλγεβρα με (V,ρ_V) και (W,ρ_W) δύο A-πρότυπα. Ένας **ομομορφισμός Α-προτύπων** είναι μία γραμμική απεικόνιση
$T : V \to W$ έτσι ώστε $\forall a \epsilon A, v \epsilon V$:

$$\rho_W(a \otimes T(v)) = T \circ \rho_V(a \otimes v)$$

$$\forall a \epsilon A, v \epsilon V$$

Δηλαδή με το συμβολισμό του ορισμού 1.8.1.:

$$a.T(v) = T \circ\ a.v$$

Ορισμός 1.8.5.
- Ένα A-πρότυπο V είναι **απλό**, αν τα μόνα υποπρότυπά του είναι το ίδιο το V και το $\{0\}$. Τότε μία αναπαράσταση (V,ρ) της άλγεβρας A ονομάζεται **απλή αναπαράσταση** ή αλλιώς **ανάγωγη αναπαράσταση**.
- Ένα A-πρότυπο V είναι **ημιαπλό**, αν είναι ισομορφικό με ένα ευθύ άθροισμα απλών A-προτύπων.
- Μία άλγεβρα A που όλες οι αναπαραστάσεις της αποτελούνται από ημιαπλά A-πρότυπα ονομάζεται **απλή**.
- Μία άλγεβρα A που όλες οι πεπερασμένης διάστασης αναπαραστάσεις της αποτελούνται από ημιαπλά A-πρότυπα ονομάζεται **ημιαπλή**.

Αναπαραστάσεις Άλγεβρας Χώρου Τανυστικού Γινομένου: Έστω μία άλγεβρα A και δύο αναπαραστάσεις της (V,ρ_V), (W,ρ_W). Αν η άλγεβρα A μπορεί να πάρει δομή διάλγεβρας με συνγινόμενο $\Delta : A \to A \otimes A$, η αναπαράσταση της άλγεβρας A στον διανυσματικό χώρο $V \otimes W$, ορίζεται να είναι η $(V \otimes W, \rho_{V\otimes W})$ με:

$$\rho_{V\otimes W} = (\rho_V \otimes \rho_W) \circ (id_A \otimes S_{A,V} \otimes id_W) \circ (\Delta \otimes id_{V\otimes W})$$

Δηλαδή για $a\epsilon A, v\epsilon V, w\epsilon W$:

$$a.(v \otimes w) = \sum_{(a)} a_{(1)}.v \otimes a_{(2)}.w$$

Κεφάλαιο 2

Τι είναι οι Κβαντικές Ομάδες;

Από την στιγμή που μου ανατέθηκε η παρούσα διπλωματική, θεωρούσα σημαντικό να μπορώ να δώσω μια σαφή και διαισθητική απάντηση στην ερώτηση «Τι είναι οι κβαντικές ομάδες;». Αυτό επιχειρώ να κάνω λοπόν σε αυτό το κεφάλαιο. Κατά την γνώμη μου, βρίσκω πολύ ωραίο τον τρόπο που ο V.G. Drinfeld απαντά σε αυτό το ερώτημα στο άρθρο του με τίτλο "Quantum Groups" [Dri88], το άρθρο που εισήγαγε τον κόσμο των μαθηματικών στον φορμαλισμό των κβαντικών ομάδων. Έτσι, θα προσπαθήσω να αποδώσω τον ορισμό που δίνει, όσο καλύτερα και πιο κατανοητά μπορώ.

Πολλά προβλήματα στην φυσική μελετώνται ως δυναμικά συστήματα. Στα δυναμικά συστήματα, ως χώρος καταστάσεων ορίζεται να είναι όλες οι δυνατές καταστάσεις του συστήματος. Ως παρατηρήσιμα μεγέθη ορίζονται μετρήσιμες πληροφορίες που μπορούμε να έχουμε σε σχέση με την κατάσταση του συστήματος. Για να γίνει πιο κατανοητό το υπόλοιπο κομμάτι, ένας πολύ όμορφος και αφηρημένος ορισμός για τα δυναμικά συστήματα είναι ο εξής:

*Ένα **δυναμικό σύστημα** είναι ένας ομομορφισμός μιας αβελιανής ομάδας στην ομάδα όλων των αυτομορφισμών του χώρου καταστάσεων.* [TIz2008]

Ένας αυτομορφισμός ενός χώρου με κάποια (αλγεβρική) δομή, είναι ένας ισομορφισμός με πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών τον ίδιο τον χώρο. Έτσι, δεν είναι δύσκολο να φανταστούμε τον χώρο καταστάσεων να έχει μια συγκεκριμένη αλγεβρική δομή.

Για βαθύτερη κατανόηση των παρακάτω, χρήσιμη είναι η πληροφορία ότι οι κβαντικές ομάδες αρχικά εμφανίστηκαν σε στρατηγικές επίλυσης κβαντικών ολοκληρώσιμων συστημάτων (quantum integrable systems), άρα είναι λογικό να χρησιμοποιείται ο φορμαλισμός των δυναμικών συστημάτων.

Όπως αναφέρει και ο Drinfeld στο εν λόγω άρθρο για όσους/ες είναι εξοικείωμένοι/ες με την θεωρία ομάδων στην φυσική σε ένα φυσικό σύστημα δεν είναι δύσκολο να φανταστούμε τον κλασικό χώρο καταστάσεων να έχει την δομή ομάδας (ομάδας Lie, αλγεβρικής ομάδας). Στην κλασική φυσική, οι καταστάσεις αντιστοιχούν σε σημεία μιας πολλαπλότητας M και τα παρατηρήσιμα μεγέθη είναι συναρτήσεις σε αυτή την πολλαπλότητα M. Στην κβαντική φυσική, αντίστοιχα, οι καταστάσεις είναι κυματοσυναρτήσεις, δηλαδή μονοδιάστατοι υπόχωροι χώρων Hilbert, ενώ τα παρατηρήσιμα μεγέθη είναι τελεστές αυτών των χώρων. Μετράμε αυτά τα μεγέθη, παίρνοντας την μέση τιμή των τελεστών (πρέπει να είναι ερμιτιανοί).

Από το παράδειγμα 1.3.2 στην κλασική φυσική τα παρατηρήσιμα μεγέθη μπορεί να είναι ο χώρος F των πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στο $X = M$ και να έχουν την δομή άλγεβρας. Στην περίπτωση της κλασικής φυσικής η άλγεβρα αυτή είναι μεταθετική. Στην κβαντική φυσική, όποια κι αν είναι η δομή των παρατηρήσιμων μεγεθών, είναι δυνατόν να μην έχουν μεταθετικότητα, λόγω της αρχής της απροσδιοριστίας του Heisenberg. Άρα, *το πέρασμα από την κλασική φυσική στην κβαντική φυσική είναι κατά κάποιον τρόπο, το πέρασμα από την μεταθετικότητα στην μη μεταθετικότητα.*

Ο χώρος καταστάσεων της κλασικής φυσικής, λοιπόν, συνηθίζεται να έχουν την δομή ομάδας, έστω G. Τότε οι συναρτήσεις πάνω στην G αποτελούν μία μεταθετική άλγεβρα $A = Fun(G)$. Επίσης, $Fun(G \times G) = A \otimes A$. Έστω $f : G \times G \to G$ η πράξη της ομάδας G. Από την προσεταιριστικότητα της f :

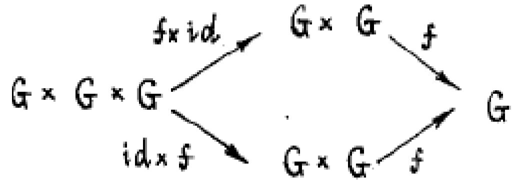

Figure 2.1

Εφαρμόζοντας τον ανταλλοίωτο συναρτητή $F : X \to Fun(X)$ (όπου $X = G$ και $Fun(G) = A$) παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

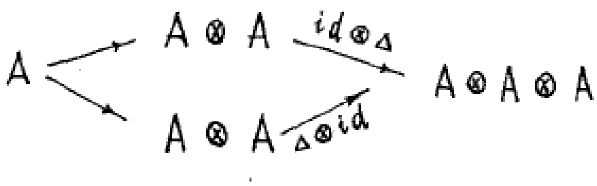

Figure 2.2

Με την ίδια λογική, από τις ισότητες $g * e = g = e * g$ και $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$, $\forall g \epsilon G$, επάγονται τα παρακάτω μεταθετικά διαγράμματα:

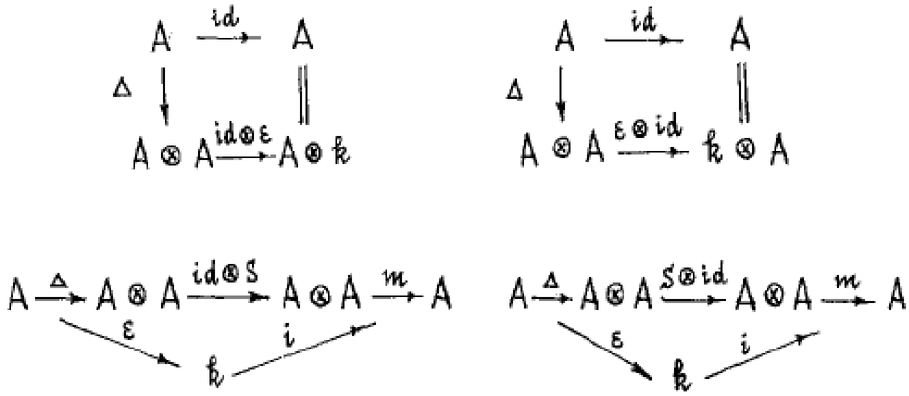

Figure 2.3

Άρα, αν το Δ είναι το συν-γινόμενο (coproduct), το m το γινόμενο, το ε η συν-μονάδα (counit), το i η μονάδα, το S ο αντίποδας και k το σώμα πάνω στο οποίο έχει οριστεί η άλγεβρα A, η $(A, m, \Delta, i, \varepsilon, S)$ είναι μία μεταθετική άλγεβρα Hopf. Αν συμβολίσουμε ως Grp την κατηγορία με αντικείμενα τις ομάδες και βέλη τους ομομορφισμούς ομάδων, και αντίστοιχα συμβολίσουμε CommHopfAlg την κατηγορία με αντικείμενα τις μεταθετικές άλγεβρες Hopf και βέλη τους ομομορφισμούς διαλγεβρών μεταξύ τους, τότε αποδεικνύεται ότι η διαδικασία Fun είναι ένας συναρτητής $Grp^{op} \to CommHopfAlg$ που είναι μάλιστα ισοδυναμία. Έτσι,*η κατηγορία των ομάδων και η κατηγορία των μεταθετικών αλγεβρών Hopf έχουν σχέση δυϊκότητας.*

Για να δούμε όμως ποια είναι η αλγεβρική δομή που θα μπορούσε να εκφράζει τον κβαντικό χώρο όμως, χρειάζεται όπως είπαμε και πριν, να πάμε από την μεταθετικότητα στην μη μεταθετικότητα. Έτσι, κατ'αντιστοιχία, η κατηγορία του κβαντικού χώρου καταστάσεων έχει σχέση δυϊκότητας με την κατηγορία των (μη μεταθετικών) αλγεβρών Hopf. Οι κβαντικές ομάδες είναι αντίστοιχος ο χώρος καταστάσεων, όμως η αντίστροφη διαδικασία με πριν, δεν μας δίνει ομάδα, αλλά μία κβαντική ομάδα! Οι κβαντικές ομάδες που προκύπτουν έτσι, έχουν δομή άλγεβρας Hopf. Η διαφορά άλγεβρας Hopf και κβαντικής ομάδας είναι ότι η κβαντική ομάδα έχει την παραπάνω ερμηνεία.

Οι κβαντικές ομάδες που πραγματεύεται αυτή η διπλωματική, είναι ένα σύνηθες είδος κβαντικών ομάδων είναι άλγεβρες Hopf και με μία αυθαίρετη παράμετρο q, είναι τροποποιησεις γενικευμένων περιβαλλουσών αλγεβρών Lie.

Κεφάλαιο 3

Η Κβαντική Ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$

3.1 Η Κβαντική Ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$

Μία συνήθης κατηγορία κβαντικής ομάδας είναι οι ομάδες $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$

3.1.1 Ορισμός της $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$

Ορισμός 3.1.1. Έστω $\mathfrak{g}$ μία απλή μιγαδική άλγεβρα Lie, $(\alpha_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ ο πίνακας Cartan αυτής και $(\alpha_i)_{1\leq i\leq N}$ μία βάση από απλές ρίζες της. Ως $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ με $q\epsilon\mathbb{C}$ ορίζεται να είναι η $\mathbb{C}$-άλγεβρα με γεννήτορες $(k_i, k_i^{-1}, e_i, f_i)_{1\leq i\leq N}$ που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = 1$$

$$k_i k_j = k_j k_i$$

$$k_i e_j k_i^{-1} = q_i^{\alpha_{i,j}} e_j$$

$$k_i f_j k_{i-1} = q_i^{-\alpha_{i,j}} f_j$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{i,j} \frac{k_i^2 - k_i^{-2}}{q_i^2 - q_i^{-2}}$$

Για $i \neq j$:

$$\sum_{\nu=0}^{1-\alpha_{i,j}} (-1)^\nu \begin{bmatrix} 1-\alpha_{i,j} \\ \nu \end{bmatrix}_{q_i^2} e_i^{1-\alpha_{i,j}-\nu} e_j e_i^\nu = 0$$

$$\sum_{\nu=0}^{1-\alpha_{i,j}} (-1)^{\nu} \begin{bmatrix} 1-\alpha_{i,j} \\ \nu \end{bmatrix}_{q_i^2} f_i^{1-\alpha_{i,j}-\nu} f_j f_i^{\nu} = 0$$

Όπου $q_i = q^{\frac{(\alpha_i|\alpha_i)}{2}}$ με $(\,|\,)$ το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $\oplus\mathbb{C}\alpha_i$ και $(\alpha_i|\alpha_i)\epsilon\mathbb{Z}$. Επιπλέον:

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \left\{ \begin{matrix} \frac{(q^m-q^{-m})(q^{m-1}-q^{-(m-1)})...(q^{m-n+1}-q^{-(m-n+1)})}{(q-q^{-1})(q^2-q^{-2})...(q^n-q^{-n})}, \quad m>n>0 \\ 1, \quad mn=0 \end{matrix} \right\}$$

Η $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ μπορεί να πάρει την μορφή άλγεβρας Hopf ως εξής:

- Το συν-γινόμενο $\Delta : \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ ορίζεται για τους γεννήτορες ως:

$$\Delta(k_i) = k_i \otimes k_i$$
$$\Delta(k_i^{-1}) = k_i^{-1} \otimes k_i^{-1}$$
$$\Delta(e_i) = e_i \otimes k_i^{-1} + k_i \otimes e_i$$
$$\Delta(f_i) = f_i \otimes k_i^{-1} + k_i \otimes f_i$$

- Η συν-μονάδα $\varepsilon : \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ ορίζεται ως:

$$1 = \varepsilon(k_i) = \varepsilon(k_i^{-1})$$
$$\varepsilon(e_i) = \varepsilon(f_i) = 0$$

- Ο αντίποδας $\gamma : \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ ορίζεται ως:

$$\gamma(k_i) = k_i^{-1}$$
$$\gamma(e_i) = -q_i^{-2} e_i$$
$$\gamma(f_i) = -q_i^{2} f_i$$

3.1.2 Η κβαντική ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$

Ας υποθέσουμε ότι η παράμετρος q **δεν είναι ρίζα της μονάδας**. Ο Jimbo έδειξε ότι για $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N+1)$, $N\epsilon\mathbb{N}$ κάθε ανάγωγη πεπερασμένη αναπαράστασή της μπορεί να μετασχηματιστεί (can be deformed) σε ανάγωγη αναπαράσταση της $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$. [Jimbo1986] Ο Rosso προχωράει ακόμη περισσότερο και δείχνει ότι κάθε πεπερασμένη αναπαράσταση της $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$

μπορεί να αναλυθεί σε ευθύ γινόμενο ανάγωγων αναπαραστάσεων. Επιπλέον, κάθε πεπερασμένη αναπαράσταση της $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ μπορεί να παρθεί από πεπερασμένη αναπαράσταση της $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$, χρησιμοποιώντας ανάλογα προτύπων μέγιστων βαρών. [Rosso1988] Έτσι, κατά κάποιον τρόπο η $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ αποτελεί όντως το κβαντικό ανάλογο της $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

3.2 Η Κβαντική Ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετηθεί η κβαντική ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ που είναι το πιο συνηθισμένο και ίσως απλό παράδειγμα κβαντικής ομάδας. Είναι επίσης ένα πολύ χρήσιμο παράδειγμα, καθώς έχει πολλές εφαρμογές.

3.2.1 Η άλγεβρα Lie $\mathfrak{sl}_2$

Ορισμός 3.2.1. Η άλγεβρα Lie $\mathfrak{sl}_2$ είναι ο διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{C}$ με βάση τρία στοιχεία, E, F και H, εφοδιασμένος με την αγκύλη Lie $[\,,\,] : \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{sl}_2$ τέτοια ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$[H, E] = 2E$$

$$[H, F] = -2F$$

$$[E, F] = H$$

3.2.2 Η γενικευμένη περιβάλλουσα άλγεβρα $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

Ορισμός 3.2.2. Η γενικευμένη περιβάλλουσα άλγεβρα $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ ορίζεται να είναι η $\mathbb{C}$-άλγεβρα με μονάδα 1 και με γεννήτορες E,F και H που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$HE - EH = 2E$$

$$HF - FH = -2F$$

$$EF - FE = H$$

3.2.3 Η κβαντική ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$

Η παράμετρος q δεν είναι ρίζα της μονάδας

Για $q\epsilon\mathbb{C}$, όχι ρίζα της μονάδας, η κβαντική ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 3.2.3. Η κβαντική ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ είναι η $\mathbb{C}$-άλγεβρα με μονάδα 1 και γεννήτορες E, ,F, K, και K^{-1} με σχέσεις:

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1$$

$$KE = qEK$$
$$KF = q^{-1}FK$$
$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$$

Παρατήρηση: Η $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ μπορεί να παρθεί από την $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ όταν $q \to 1$. Αυτό μπορούμε να το δούμε θεωρώντας $q = e^{\hbar}$. Επιπλέον:

- Η σχέση $HE = E(H + 2)$ της $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ αντιστοιχεί στην εξής έκφραση αν $K = q^{\frac{H}{2}}$ (το στοιχείο αυτό βρίσκεται με επέκταση της σειράς Taylor e^x για $x = \hbar\frac{H}{2}$):
$$KE = e^{\hbar\frac{H}{2}}E = Ee^{\hbar\frac{H+2}{2}} = qEK$$
- Ομοίως, η σχέση $HF = F(H - 2)$ της $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ είναι ισοδύναμη με την τρίτη σχέση $KFK^{-1} = q^{-1}F$.
- Η τέταρτη σχέση του $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ γράφεται ως $EF - FE = [H]$, όπου $[H] := \frac{q^{\frac{H}{2}} - q^{-\frac{H}{2}}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$ το "κβαντικό" H, που γίνεται H όταν $q \to 1$.

Δομή άλγεβρας Hopf: Η $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ λαμβάνει την δομή άλγεβρας Hopf ως εξής:

- Το συν-γινόμενο $\Delta : \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2) \to \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ για τους γεννήτορες ορίζεται ως εξής:
$$\Delta(K) = K \otimes K$$
$$\Delta(K^{-1}) = K^{-1} \otimes K^{-1}$$
$$\Delta(E) = E \otimes K + 1 \otimes E$$
$$\Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F$$

- Η συν-μονάδα $\varepsilon : \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2) \to \mathbb{C}$ ορίζεται να είναι:

$$\varepsilon(K) = \varepsilon(K^{-1}) = 1$$

$$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0$$

- Ο αντίποδας $\gamma : \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2) \to \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ ορίζεται ως:

$$\gamma(K) = K^{-1}$$

$$\gamma(K^{-1}) = K$$

$$\gamma(E) = -EK^{-1}$$

$$\gamma(F) = -KF$$

Ορίζω τις παραπάνω ποσότητες, οι οποίες θα φανούν χρήσιμες στην συνέχεια:

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

$$[n]! = [1][2]...[n]$$

$$\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$$

Κάνοντας υπολογισμούς με τους παραπάνω γεννήτορες της $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ προκύπτει το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 3.2.1. *Έστω $m \geq 0$ και $n \epsilon \mathbb{Z}$. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:*

$$E^m K^n = q^{-2mn} K^n E^m$$

$$F^m K^n = q^{2nm} K^n F^m$$

$$EF^m - F^m E = [m] F^{m-1} \frac{q^{-(m-1)}K - q^{m-1}K^{-1}}{q - q^{-1}} = [m] \frac{q^{m-1}K - q^{-(m-1)}K^{-1}}{q - q^{-1}} F^{m-1}$$

$$E^m F - F E^m = [m] \frac{q^{-(m-1)}K - q^{m-1}K^{-1}}{q - q^{-1}} E^{m-1} = [m] E^{m-1} \frac{q^{m-1}K - q^{-(m-1)}K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

Πρόταση 3.2.1. *([Kassel] (VI.4.1)) Το στοιχείο*

$$C_q = EF + \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q - q^{-1})^2} = FE + \frac{qK + q^{-1}K^{-1}}{(q - q^{-1})^2}$$

ανήκει στο κέντρο της $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$.

Αναπαραστάσεις της $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$:

Για κάθε $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-πρότυπο V και ένα βαθμωτό μέγεθος $\lambda \neq 0$, ορίζεται ως V^λ ο υπόχωρος όλων των ιδιοδιανυσμάτων $v \epsilon V$ με $K.v = \lambda v$. Το λ ονομάζεται **βάρος** του V, αν $V^\lambda \neq \{0\}$.

Ορισμός 3.2.4. Ένα $v \neq 0 \epsilon V$ είναι **διάνυσμα μέγιστου βάρους** λ **(highest weight vector of weight** λ**)**, αν $E.v = 0$ και $K.v = v$. Ένα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-πρότυπο είναι **πρότυπο μέγιστου βάρους** λ αν το διάνυσμα μέγιστου βάρους λ, v, παράγει το V ως πρότυπο (από τον εξωτερικό πολλαπλασιασμό "." του προτύπου παράγονται όλοι οι γεννήτορές του).

Από το Λήμμα 3.2.1 μπορεί να παραχθεί το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 3.2.2. *Έστω v διάνυσμα μέγιστου βάρους του λ. Έστω $v_0 = v$ και $v_p = \frac{1}{[p]!}F^p.v$, $p > 0$. Τότε:*

$$K.v_p = \lambda q^{-2p} v_p$$

$$E.v_p = \frac{q^{-(p-1)}\lambda - q^{p-1}\lambda^{-1}}{q - q^{-1}} v_{p-1}$$

$$F.v_{p-1} = [p] v_p$$

Θεώρημα 3.2.1. *([Kassel] VI.3.5)*

(a) Έστω V ένα πεπερασμένης διάστασης $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-πρότυπο παραγόμενο από ένα μέγιστου βάρους διάνυσμα v του λ. Τότε:

   (i) Αν $dim(V) = n + 1, n \epsilon \mathbb{N}$, τότε $\lambda = \pm q^n$.

   (ii) Για $v_p = F^p.v/[p]!$, το σύνολο $\{v = v_0, v_1, .., v_n\}$ είναι βάση του V.

   (iii) Κάθε άλλο διάνυσμα μέγιστου βάρους του V είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του v και βάρους λ.

   (iv) Το πρότυπο V είναι απλό.

(b) Κάθε απλό $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-πρότυπο είναι παραγόμενο από ένα μέγιστου βάρους διάνυσμα. Επιπλέον, δύο $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-πρότυπα που παράγονται από ιδιοδιανύσματα μέγιστου βάρους, ίδιου βάρους λ είναι ισομορφικά.

Απόδειξη:

(a)(i)-(ii): Από το Λήμμα 3.2.2, το σύνολο $\{v_p\}_{p\geq 0}$ είναι ιδιοδιανύσματα του στοιχείου K με διακριτές ιδιοτιμές. Όμως, αφού ο V είναι πεπερασμένης διάστασης, $\exists n\epsilon\mathbb{N}$, με $v_n \neq 0$ και $v_{n+1} = 0$. Ξανά από το Λήμμα 3.2.2 έχουμε ότι:

$$0 = E.v_{n+1} = \frac{q^{-n}\lambda - q^n\lambda^{-1}}{q - q^{-1}} v_n$$

Άρα, $\lambda = \pm q^n$. Άρα όλα τα $v_0 = v, v_1, .., v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ως ιδιοδιανύσματα διακριτών ιδιοτιμών. Επίσης τα v_i παράγονται από το v, το οποίο παράγει το V. Άρα το σύνολο $\{v = v_0, v_1, .., v_n\}$ είναι βάση του V, δηλαδή $dim(V) = n + 1$.

(a)(iii): Έστω v' ένα άλλο διάνυσμα μέγιστου βάρους. Αυτό είναι ιδιοδιάνυσμα της δράσης από το K, άρα είναι πολλαπλάσιο ενός v_i, όμως απο το Λήμμα 3.2.2 $E.v_i = 0$ αν-ν $i = 0$.

(a)(iv): Έστω V' ένα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-υποπρότυπο του V και έστω v' ένα μέγιστου βάρους διάνυσμα του V'. Τότε το v' θα είναι επίσης μέγιστου βάρους διάνυσμα του V, άρα από (ii) πολλαπλάσιο του v. Άρα $v\epsilon V'$. Αλλά το v παράγει το V, άρα $V = V'$, άρα το V είναι απλό.

(b): Όπως φαίνεται από τα προηγούμενα για διάφορες τιμές του n, παράγονται από μέγιστου βάρους διανύσματα πρότυπα όλων των διαστάσεων . Όλα αυτά τα πρότυπα από (a)(iv) είναι απλά, οπότε προκύπτει και το ζητούμενο. Επιπλέον, το ότι είναι ισομορφικά ως πρότυπα, είναι προφανές. □

Στην συνέχεια θα προσδιοριστούν όλα τα απλά $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-πρότυπα διάστασης $n + 1$.

<u>Για $n = 0$</u>: $V_{\pm,0} = \mathbb{C}$ με σχέσεις:

$$\rho_{\pm,0}(K) = \pm 1$$

$$\rho_{\pm,0}(E) = \rho_{\pm,0}(F) = 0$$

<u>Γενικά για $dim(V) = n + 1$</u>: Για $V_{\pm,n}$:

$$K.v_p = \pm q^{n-2p} v^p$$

$$E.v_p = \pm[n - p + 1]v_{p-1}$$

$$F.v_{p-1} = [p]v_p$$

Η παράμετρος q είναι ρίζα της μονάδας

Εξετάζεται η περίπτωση όπου $q \neq \pm 1$.

Ορίζεται $d\epsilon\mathbb{Z}$ ως ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει ότι $q^d = 1$. Ορίζεται επίσης και ο αριθμός e ως:

$$e = \begin{Bmatrix} d, d = 2k+1, & k\epsilon\mathbb{N} \\ d/2, d = 2k, & k\epsilon\mathbb{N} \end{Bmatrix}$$

Το $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ ορίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και πριν, μόνο που τώρα ισχύουν οι επιπλέον σχέσεις:

$$E^d = F^d = 0$$

Πρόταση 3.2.2. *([Kassel] VI.5.1) Κάθε απλό $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-πρότυπο διάστασης $< e$ είναι ισομορφικό με ένα πρότυπο $V_{\pm,n}$, $0 \leq n < e-1$, όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη υποενότητα.*

Απόδειξη: Είναι παρόμοια με αυτή του Θεωρήματος 3.2.1, αφού τα βάρη $1, q, q^2, ..., q^n$ είναι διακριτά για $n < e$. □

Λήμμα 3.2.3. *Τα στοιχεία E^e, F^e και K^e ανήκουν στο κέντρο της άλγεβρας $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$, $Z(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2))$.*

Λήμμα 3.2.4. *Έστω $z\epsilon Z(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2))$. Το z δρα σε κάθε πεπερασμένης διάστασης $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-πρότυπο ως βαθμωτός πολλαπλασιασμός.*

Πρόταση 3.2.3. *([Kassel] VI.5.2) Δεν υπάρχει απλό $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-πρότυπο πεπερασμένης διάστασης$> e$.*

Απόδειξη: Θα αποδειχθεί με εις άτοπον απαγωγή ότι, αν υπάρχει πεπερασμένης διάστασης$> e$ απλό $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-πρότυπο V, τότε το V έχει υποπρότυπο$\neq \{0\}$ διάστασης $\leq e$.

Στη συνέχεια, πράγματι, έστω ότι υπάρχει $v\epsilon V$, $v \neq 0$ ιδιοδιάνυσμα της δράσης K, τέτοιο ώστε $F.v = 0$.

Ισχυρισμός: Ο χώρος V' που παράγεται από τα $v, E.v, ..., E^{e-1}.v$ είναι υποπρότυπο του V διάστασης $< e-1$.

Αρκεί να δείξουμε ότι ο V' είναι κλειστός κάτω από την δράση των K, F, E. Προφανώς είναι κλειστός κάτω από την δράση F, K. Ισχύει ότι $E.(E^p).v = E^{p+1}.v$ για $p < e-1$. Για $p = e-1$, κάνοντας χρήση των λημμάτων 4.3.3, 4.3.4:

$$E.(E^{e-1}.v) = E^e.v = c_1 v, c_1 \epsilon \mathbb{C}$$

Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Έστω τώρα ότι δεν υπάρχει ιδιοδιάνυσμα v του V $(v \neq 0)$ με $F.v = 0$. Άρα $F.v \neq 0$.

Ισχυρισμός: Ο χώρος V'' που παράγεται από τα $v, F.v, ..., F^{e-1}.v$ είναι υποπρότυπο του V διάστασης $< e-1$.

Προφανώς ο V'' είναι κλειστός κάτω από την δράση του K και κάτω από την δράση F, αφού ομοίως με πριν:

$$F^e.v = c_2 v, c_2 \epsilon \mathbb{C}$$

$c_2 \neq 0$, γιατί τότε θα υπήρχε $p < e$ με $F^p.v$ ιδιοδιάνυσμα του K που μηδενίζεται από το F, άτοπο.

Από πρόταση 3.2.1, $C_q \epsilon Z(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2))$. Από το Λήμμα 3.2.4 δρα στο v με $C_q.v = c_3 v, c_3 \epsilon \mathbb{C}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η δράση του E στο V“. Για $p > 0$:

$$E.(F^p.v) = EF.(F^{p-1}.v) = (C_q - \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q-q^{-1})^2})(F^{p-1}.v)$$

$$= c_3 F^{p-1}.v - \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q-q^{-1})^2} F^{p-1}.v$$

Για $p = 0$ χρησιμοποιούμε το ίδιο επιχείρημα, αφού $v = c_2^{-1} F^e.v$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. □

Μένει να προσδιοριστούν τα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-πρότυπα διάστασης e.

Θεώρημα 3.2.2. *([Kassel] VI.5.5) Κάθε $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-πρότυπο διάστασης e είναι ισομορφικό με μία από τις παρακάτω δομές προτύπων.*

- *Για λ, a, b με $\lambda, b \neq 0$, το $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-πρότυπο είναι ο e-διάσταστος διανυσματικός χώρος $V(\lambda, a, b)$ με βάση $\{v_0, ...v_{e-1}\}$ και σχέσεις:*
  - *Για $0 \leq p < e-1$:*

$$K.v_p = \lambda q^{-2p} v_p$$

$$E.v_{p+1} = (\frac{q^{-p}\lambda - q^p\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}[p+1] + ab)v_p$$

  - $E.v_0 = av_{e-1}$, $F.v_{e-1} = bv_0$ *και* $K.v_{e-1} = \lambda q^{-2(e-1)} v_{e-1}$

- *Η ίδια δομή με πριν για* $V(\lambda, a, 0)$ *με* $\lambda \neq \pm q^{j-1}$ *για* $1 \leq j < e-1$.

- *Για* $c \neq 0$, $1 \leq j < e-1$, *το* $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$*-πρότυπο είναι ο* e*-διάσταστος διανυσματικός χώρος* $\overline{V}(\mu = \pm q^{j-1}, c)$ *με βάση* $\{v_0, ...v_{e-1}\}$ *και σχέσεις:*

  - *Για* $0 \leq p < e-1$*:*

$$K.v_p = \mu q^{2p} v_p$$
$$F.v_{p+1} = \frac{q^{-p}\mu^{-1} - q^p \mu}{q - q^{-1}}[p+1]v_p$$
$$E.v_p = v_{p+1}$$

  - $F.v_0 = 0$, $E.v_{e-1} = cv_0$ *και* $K.v^{e-1} = \mu q^{-2p} v_{e-1}$

Κεφάλαιο 4

Η εξίσωση Yang-Baxter

Η εξίσωση Yang-Baxter είναι μια εξίσωση πολύ χρήσιμη στην φυσική, ειδικά στην στατιστική φυσική. Στα κβαντικά ολοκληρώσιμα συστήματα (quantum integrable systems), που από την μελέτη τους εισήχθησαν οι κβαντικές ομάδες, χρησιμοποιήθηκε στην κβαντική μέθοδο αντίστροφης σκέδασης (quantum inverse scattering method).

Ορισμός 4.0.1. Μία συλλογή από αριθμούς στο $\mathbb{C}$, $(r_{i,j}^{k.l})_{i,j,k,l\epsilon[1,\ldots,d]}$ λέγεται ότι ικανοποιεί την εξίσωση **Yang-Baxter**, αν

$$\sum_{a,b,c=1}^{d} r_{a,b}^{l,m} r_{c,k}^{b,n} r_{i,j}^{a,c} = \sum_{a,b,c=1}^{d} r_{a,b}^{m,n} r_{i,c}^{l,a} r_{j,k}^{c,b}$$

$\forall i,j,k,l,m,n\epsilon[1,...d]$.

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με βάση $\{v_i\}_{i=1}^d$ και έστω μια συνάρτηση $\overline{R} : V \otimes V \to V \otimes V$ με

$$\overline{R}(v_i \otimes v_j) = \sum_{k,l=1}^{d} r_{i,j}^{k,l} v_k \otimes v_l$$

Τότε η εξίσωση Yang-Baxter είναι ισοδύναμη με την:

$$\overline{R}_{12} \circ \overline{R}_{23} \circ \overline{R}_{12} = \overline{R}_{23} \circ \overline{R}_{12} \circ \overline{R}_{23}$$

όπου $\overline{R}_{12}, \overline{R}_{23} : V \otimes V \otimes V \to V \otimes V \otimes V$ είναι $\overline{R}_{12} = \overline{R} \otimes id_V$ και $\overline{R}_{23} = id_V \otimes \overline{R}$. Τότε λέμε ότι η συνάρτηση $\overline{R}$ είναι λύση της εξίσωσης Yang-Baxter και ονομάζεται R-**πίνακας**.

Σχόλιο: Για $n \epsilon \mathbb{N}$, η ομάδα πλεξίδων n κλωστών είναι η ομάδα B_n, με γεννήτορες (τις στοιχειώδεις διασταυρ) σ_1, $\sigma_2, ..., \sigma_{n-1}$ έτσι ώστε:

(i) Για $1 \leq j < n$

$$\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_j$$

(ii) Για $|j - k| > 1$

$$\sigma_j \sigma_k = \sigma_k \sigma_j$$

Έτσι, η εξίσωση Yang-Baxter κατά κάποιον τρόπο ικανοποιεί την σχέση (i) της ομάδας πλεξίδων, θεωρώντας το $r_{i,j}$ να είναι η θετική διασταύρωση των κλωστών i και j Δηλαδή, μια εικόνα που χαρακτηρίζει την εξίσωση Yang-Baxter είναι η αντίστοιχη αυτής της σχέσης (i):

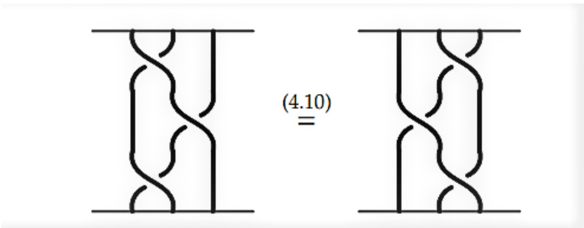

Figure 4.1: εξίσωση Yang-Baxter

4.1 Γενικευμένος R-πίνακας

Ορισμός 4.1.1. Έστω H μία διάλγεβρα ή άλγεβρα Hopf. Ένα στοιχείο R ονομάζεται **γενικευμένος R-πίνακας της** H αν:

(i) ο R είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας $H \otimes H$

(ii) $\forall x \epsilon H$, $\Delta^{op}(x) = R\Delta(x)R^{-1}$

(iii) $(\Delta \otimes id_H)(R) = R_{13}R_{23}$

(iv) $(id_H \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$

Το ζευγάρι (H, R) ονομάζεται **πλεξιδοειδής διάλγεβρα/άλγεβρα Hopf** (braided bialgebra/Hopf algebra, quasi-triangular Hopf algebra).

Παρατηρήσεις:

- Στον παραπάνω ορισμό χρησιμοποιήθηκε ότι ο πίνακας $R \epsilon H \otimes H$ μπορεί να γραφεί ως $R = \sum_i s_i \otimes t_i$ με $s_i, t_i \epsilon H$ και $s_i \otimes t_i \epsilon H \otimes H$ απλοί τανυστές. Τότε

$$R_{12} = \sum_i s_i \otimes t_i \otimes 1_H$$

$$R_{13} = \sum_i s_i \otimes 1_H \otimes t_i$$

$$R_{23} = \sum_i 1_H \otimes s_i \otimes t_i$$

- Οι σχέσεις (ii) και (iii) μπορούν να γραφούν ανίστοιχα ως:

$$\sum_{i,(s_i)} (s_i)' \otimes (s_i)'' \otimes t_i = \sum_{i,j} s_i \otimes s_j \otimes t_i t_j$$

$$\sum_{i,(t_i)} s_i \otimes (t_i)' \otimes (t_i)'' = \sum_{i,j} s_i s_j \otimes t_j \otimes t_i$$

- Αν επιπλέον, η H είναι άλγεβρα Hopf με αντιστρέψιμο αντίποδα $\gamma : H \to H$, τότε:

$$R^{-1} = \sum_i \gamma(s_i) \otimes t_i = \sum_i s_i \otimes \gamma^{-1}(t_i)$$

Παρακάτω θα αποδειχθεί ότι δεδομένης μιας πλεξιδοειδούς διάλγεβρας (H, R) (άλγεβρας Hopf) και ενός H-προτύπου, κατασκευάζεται μία λύση της εξίσωσης Yang-Baxter.

Έστω V, W H-πρότυπα. Έστω μια συνάρτηση $c^R_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ τέτοια ώστε $\forall v \epsilon V, w \epsilon W$:

$$c^R_{V,W}(v \otimes w) = S_{V,W}(R(v \otimes w)) = \sum_i t_i w \otimes s_i v$$

Η συνάρτηση $c^R_{V,W}$ είναι αντιστρέψιμη με $(c^R_{V,W})^{-1}(w \otimes v) = R^{-1}(v \otimes w)$

Πρόταση 4.1.1. *([Kassel], VIII.3.1)*

(i) *Η συνάρτηση* $c^R_{V,W}$ *είναι ισομορφισμός* H*-προτύπων.*

(ii) $\forall U, V, W$ H*-πρότυπα, ισχύουν:*

$$c^R_{U\otimes V,W} = (c^R_{U,V} \otimes id_V)(id_U \otimes c^R_{V,W})$$

$$c^R_{U,V\otimes W} = (id_V \otimes c^R_{U,W})(c^R_{U,V} \otimes id_W)$$

$$(c^R_{V,W} \otimes id_U)(id_V \otimes c^R_{U,W})(c^R_{U,V} \otimes id_W) = (id_W \otimes c^R_{U,V})(c^R_{U,W} \otimes id_V)(id_U \otimes c^R_{V,W})$$

Απόδειξη Για $v \epsilon V$, $u \epsilon U$, $w \epsilon W$:

(i) Αρκεί να δείξω ότι η $c^R_{V,W}$ είναι H-ομομορφισμός προτύπων. Για $x \epsilon H$:

$$c^R_{V,W}(x.(v \otimes w)) = S_{V,W}(R\Delta(x).(v \otimes w)) = S_{V,W}(\Delta^{op}(x).(v \otimes w))$$

$$= \Delta.S_{V,W}(R(v \otimes w)) = x.c^R_{V,W}(v \otimes w)$$

(ii)

- Η πρώτη ισότητα αποδεικνύεται ως εξής:

$$(c^R_{U,W} \otimes id_V)(id_U \otimes c^R_{V,W})(u \otimes v \otimes w) = \sum_{i,j} t_i t_j w \otimes s_j u \otimes s_i v = \sum_i t_i w \otimes (s_i)' u \otimes (s_i)'' v$$

$$= \sum_i t_i w \otimes \Delta(s_i)(u \otimes v) = c^R_{U\otimes V,W}$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η δεύτερη σχέση.

- Για την τρίτη σχέση:

  $$(c^R_{V,W}\otimes id_U)(id_V\otimes c^R_{U,W})(c^R_{U,V}\otimes id_W)(u\otimes v\otimes w) = \sum_{i,j,k} t_k t_j w\otimes s_k t_i v\otimes s_j s_i u$$

  και

  $$(id_w\otimes c^R_{U,V})(c^R_{U,W}\otimes id_V)(id_U\otimes c^R_{V,W})(u\otimes v\otimes w) = \sum_{i,j,k} t_j t_i w\otimes t_k s_i v\otimes s_k s_j u$$

  Οι δύο σχέσεις είναι ίσες, άρα αποδεικνύεται το ζητούμενο.

$\square$

Από την παραπάνω πρόταση, αν $V = W = U$, η $c^R_{V,V}$ είναι λύση της εξίσωσης Yang-Baxter για κάθε H-πρότυπο V.

Παρατήρηση: Αν $R = 1 \otimes 1$, $c^R_{V,V} = S_{V,V}$.

4.2 Η Διπλή Κατασκευή του Drinfeld (The Drinfeld Double Construction)

4.2.1 Ο Περιορισμένος Δυϊκός Χώρος μιας Άλγεβρας Hopf

Για να δούμε αν ισχύει κάτι παρόμοιο όπως στο Θεώρημα 1.4.1 και για τον δυϊκό χώρο των αλγεβρών, πρέπει να λάβουμε υπόψιν ότι $A^* \otimes A^* \subset (A \otimes A)^*$.

Ορισμός 4.2.1. Ο **περιορισμένος δυϊκός χώρος μιας άλγεβρας** είναι ο υπόχωρος $A^\circ \subset A^*$ με

$$A^\circ = (\mu^*)^{-1}(A^* \otimes A^*)$$

όπου $(\mu^*)^{-1}(A^* \otimes A^*) = \{\phi \epsilon A^* | \, \mu^*(\phi) \epsilon A^* \otimes A^*\}$.

Θεώρημα 4.2.1. *([Kytölä2011]-Theor.3.45) Έστω (A, μ, η) μία άλγεβρα. Τότε ο περιορισμένος δυϊκός της χώρος*

$$(A^\circ, \mu^*|_{A^\circ}, \eta^*|_{A^\circ})$$

είναι ***συνάλγεβρα****.*

Θεώρημα 4.2.2. *([Kytölä2011]-Theor.3.46) Έστω $(H, \mu, \Delta, \eta, \varepsilon, \gamma)$ μία άλγεβρα Hopf. Ο περιορισμένος δυϊκός της χώρος*

$$(H^{\circ}, \Delta^{*}|_{H^{\circ}\otimes H^{\circ}}, \mu^{*}|_{H^{\circ}}, \varepsilon^{*}, \eta^{*}|_{H^{\circ}}, \gamma|_{H^{\circ}})$$

είναι ***άλγεβρα Hopf***.

4.2.2 Η Διπλή Κατασκευή

Από την Πρόταση 4.1.1 συμπεραίνεται ότι, δεδομένης μιας πλεξιδοειδούς άλγεβρας Hopf, μπορούν να κατασκευαστούν από τα πρότυπά της λύσεις της εξίσωσης Yang-Baxter. Η διπλή κατασκευή του Drinfeld είναι ένας συστηματικός τρόπος να παραχθεί μια πλεξιδοειδής άλγεβρα Hopf, έχοντας ως εργαλείο μία τυχαία άλγεβρα Hopf με αντιστρέψιμο αντίποδα. [Dri1988]

Έστω $(A, \mu, \Delta, \eta, \varepsilon, \gamma)$ με αντιστρέψιμο αντίποδα γ^{-1} και $B \subset A^{\circ}$ μια υποάλγεβρα Hopf της A°.

Θεώρημα 4.2.3. *([Kytölä2011]-Theor.4.15) Ο χώρος $A \otimes B$ είναι άλγεβρα Hopf που συμβολίζεται ως $\mathcal{D}(A, B)$ τέτοια ώστε:*

- *Η συνάρτηση $\iota_A : A \to A \otimes B$ με $a \to a \otimes 1^{*}$ είναι ομομορφισμός αλγεβρών Hopf.*
- *Η συνάρτηση $\iota_B : B^{cop} \to A \otimes B$ με $\phi \to 1 \otimes \phi$ είναι ομομορφισμός αλγεβρών Hopf.*
- *Το γινόμενο $\mu_{\mathfrak{D}}$ είναι $\forall a, b \epsilon A$, $\forall \phi, \psi \epsilon B$:*

$$(a \otimes \phi)(b \otimes \psi) = \sum_{(\phi),(b)} \langle \phi_{(1)}, b_{(3)} \rangle \langle \phi_{(3)}, \gamma^{-1}(b_{(1)}) \rangle a b_{(2)} \otimes \phi_{(2)} \psi$$

  **Τα $\phi_{(3)}, b_{(3)}$ προκύπτουν από το διπλό συν-γινόμενο των A και B αντίστοιχα.*

- *$\forall a \epsilon A, \phi \epsilon B$:*

$$(a \otimes 1^{*})(1 \otimes \phi) = a \otimes \phi$$

- *$\forall a \epsilon A, \phi \epsilon B$::*

$$(1 \otimes \phi)(a \otimes 1^{*}) = \sum_{(a)} \sum_{(\phi)} \langle \phi_{(1)}, a_{(3)} \rangle \langle \phi_{(3)}, \gamma^{-1}(a_{(1)}) \rangle a_{(2)} \otimes \phi_{(2)}$$

- $1_{\mathcal{D}} = 1 \otimes 1^*$
- $\forall a \epsilon A, \phi \epsilon B$:

$$\Delta_{\mathcal{D}}(a \otimes \phi) = \sum_{(a),(\phi)} (a_{(1)} \otimes \phi_{(2)}) \otimes (a_{(2)} \otimes \phi_{(1)})$$

- $\forall a \epsilon A, \phi \epsilon B$:

$$\varepsilon_{\mathcal{D}}(a \otimes \phi) = \varepsilon(a)\langle \phi, 1 \rangle$$

- $\forall a \epsilon A$, $\phi \epsilon B$

$$\gamma_{\mathcal{D}}(a \otimes \phi) = \sum_{(a),(\phi)} \langle \phi_{(1)}, \gamma^{-1}(a_{(3)}) \rangle \langle \phi_{(3)}, a_{(1)} \rangle \gamma(a_{(2)}) \otimes (\gamma^*)^{-1}(\phi_{(2)})$$

Η $\mathcal{D}(A,B)$ ονομάζεται ***διπλή κατασκευή Drinfeld του*** *A* ***και του*** *B.*

Σχόλιο: Τα στοιχεία της μορφής $1 \otimes \phi$ και $a \otimes 1^*$ παράγουν την κατασκευή $\mathcal{D}(A,B)$ ως άλγεβρα.

Παρατήρηση: Οι άλγεβρες Hopf A και $(A^\circ)^{cop}$ εμβυθίζονται στην διπλή κατασκευή $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A, A^\circ)$ μέσα από τις συναρτήσεις

$$\iota_A : A \to \mathcal{D}$$

$$a \to a \otimes 1^*$$

και

$$\iota_{A^\circ} : A^\circ \to \mathcal{D}$$

$$\phi \to 1 \otimes \phi$$

αντίστοιχα.

Θεώρημα 4.2.4. *([Kassel], Theor. IX.4.4) Έστω A μία άλγεβρα Hopf πεπερασμένης διάστασης, με αντιστρέψιμο αντίποδα και έστω $(e_i)_{i=1}^d$ και $(\delta^i)_{i=1}^d$ βάσεις των A και A^* αντίστοιχα, τέτοιες ώστε:*

$$\langle \delta_i, e_j \rangle = \begin{Bmatrix} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{Bmatrix}$$

Η διπλή κατασκευή Drinfeld $\mathcal{D}(A)$ είναι πλεξιδοειδής άλγεβρα Hopf με γενικευμένο R-πίνακα:

$$R = (\iota_A \otimes \iota_{A^*})(\sum_{i=1}^{d} e_i \otimes \delta^i) = \sum_{i=1}^{d} (e_i \otimes 1^*) \otimes (1 \otimes \delta^i)$$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι ο R ικανοποιεί τα αξιώματα του Ορισμού 4.1.1.

(i) Χρειάζεται να δείξω ότι το στοιχείο R είναι αντιστρέψιμο στον χώρο $\mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A)$. Θα δειχεί ότι το αντίστροφο στοιχείο του R είναι το:

$$\overline{R} = \sum_i (\gamma(e_i) \otimes 1^*) \otimes (1 \otimes \delta^i)$$

$$R\overline{R} = (\sum_i (e_i \otimes 1^*) \otimes (1 \otimes \delta^i))(\sum_i (\gamma(e_i) \otimes 1^*) \otimes (1 \otimes \delta^i)) = \sum_{i,j} (e_i \gamma(e_j) \otimes 1^*) \otimes (1 \otimes \delta^i \delta^j)$$

Αλλά $\sum_{i,j}(e_i\gamma(e_j) \otimes 1^*) \otimes (1 \otimes \delta^i\delta^j) = 1 \otimes 1^* \otimes 1 \otimes 1^*$, αφού για $b \otimes c \epsilon A \otimes A$:

$$\sum_{i,j}(e_i\gamma(e_j) \otimes 1^*) \otimes (1 \otimes \delta^i\delta^j) \otimes (b \otimes c) = \sum_{i,j}(e_i\gamma(e_j) \otimes \langle 1^*, b\rangle) \otimes (1 \otimes \langle \delta^i\delta^j, c\rangle)$$

$$= \sum_{i,j} e_i\gamma(e_j) \otimes 1\langle 1^*, b\rangle\langle \delta^i\delta^j, 1\rangle = \varepsilon(b) \sum_{i,j}\sum_{(c)} e_i\gamma(e_j) \otimes 1\langle \delta^i, c_{(1)}\rangle\langle \delta^j, c_{(2)}\rangle$$

$$= \varepsilon(b) \sum_{(c)} c_{(1)}\gamma(c_{(2)}) \otimes 1 = \varepsilon(b)\varepsilon(c) 1 \otimes 1$$

Αυτό το αποτέλεσμα θα έδινε το στοιχείο $1 \otimes 1^* \otimes 1 \otimes 1^*$, άρα το στοιχείο $\overline{R}$ είναι το αριστερό αντίστροφο του R. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι είναι και το δεξιό αντίστροφο.

(ii) Έστω

$$S = \{x \epsilon \mathcal{D}(A) : \Delta^{op}_{\mathcal{D}}(x)R = R\Delta(x)R\}$$

Θα δείξουμε ότι $S = \mathcal{D}(A)$. Το S είναι υποάλγεβρα της $\mathcal{D}(A)$, διότι:

- $1_{\mathcal{D}} = 1 \otimes 1^* \epsilon S$, αφού $\Delta_{\mathcal{D}}(1_{\mathcal{D}}) = 1_{\mathcal{D}} \otimes 1_{\mathcal{D}} = \Delta^{op}_{\mathcal{D}}$
- Για $x, y \epsilon S$: $\Delta^{op}_{\mathcal{D}}(xy)R = \Delta^{op}_{\mathcal{D}}(x)\Delta^{op}_{\mathcal{D}}(y)R = \Delta^{op}_{\mathcal{D}}(x)R\Delta_{\mathcal{D}}(y) = R\Delta_{\mathcal{D}}(x)\Delta_{\mathcal{D}}(y) = R\Delta_{\mathcal{D}}(xy)$.

Για το στοιχείο της μορφής $a \otimes 1^*$:

- Για το πρώτο μέλος:

$$\Delta^{op}_{\mathcal{D}}(a \otimes 1^*)R = \sum_i \sum_{(a)} ((a_{(2)} \otimes 1^*)(e_i \otimes 1^*)) \otimes ((a_{(1)} \otimes 1^*)(1 \otimes \delta^i))$$

$$= \sum_i \sum_{(a)} (a_{(2)}e_i \otimes 1^*) \otimes (a_{(1)} \otimes \delta^i)$$

- Για το δεύτερο μέλος:

$$R\Delta_{\mathcal{D}}(a\otimes 1^*) = \sum_i \sum_{(a)} (e_i a_{(1)}\otimes 1^*)\otimes(\sum_{(\delta^i)} \langle(\delta^i)_{(3)}, \gamma^{-1}(a_{(2)})\rangle\langle(\delta^i)_{(1)}, a_{(4)}\rangle a_{(3)}\otimes(\delta^i)_{(2)})$$

Τα παραπάνω στοιχεία ανήκουν στο $\mathcal{D}(A)\otimes\mathcal{D}(A) = A\otimes A^*\otimes A\otimes A^*$. Για την εκτίμηση των $b, c\epsilon A$ στο δεύτερο και τέταρτο μέρος του παραπάνω χώρου τανυστικού γινομένου έχουμε:

- Για το πρώτο μέλος:

$$\Delta^{op}_{\mathcal{D}} R(a\otimes 1^*)R(b\otimes c) = \sum_i \sum_{(a)} \varepsilon(b)\langle\delta^i, c\rangle a_{(2)}e_i\otimes a_{(1)} = \sum_{(a)} \varepsilon(b)a_{(2)}c\otimes a_{(1)}$$

- Για το δεύτερο μέλος:

$$R\Delta_{\mathcal{D}}(a\otimes 1^*)(b\otimes c)$$

$$= \sum_i \sum_{(a)} \sum_{(\delta^i)} \varepsilon(b)\langle(\delta^i)_{(2)}, c\rangle\langle(\delta^i)_{(3)}, \gamma^{-1}(a_{(2)})\rangle\langle(\delta^i)_{(1)}, a_{(4)}\rangle e_i a_{(1)}\otimes a_{(3)}$$

$$= \varepsilon(b)\sum_i \sum_{(a)} \langle\delta^i, a_{(4)}c\gamma^{-1}(a_{(2)})\rangle e_i a_{(1)}\otimes a_{(3)} = \varepsilon(b)\sum_{(a)} a_{(4)}c\gamma^{-1}(a_{(2)})a_{(1)}\otimes a_{(3)}$$

Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα του αντίποδα και της συν-μεταθετικότητας για την A^{op}:

$$= \sum_{(a)} \varepsilon(b)a_{(2)}c\otimes a_{(1)}$$

Παρατηρείται ότι τα δύο μέλη είναι ίσα, άρα $\Delta^{op}_{\mathcal{D}}(a\otimes 1^*)R = R\Delta_{\mathcal{D}}(a\otimes 1^*)$. Ομοίως, αποδεικνύεται για τα στοιχεία της μορφής $1\otimes\phi$ ότι $\Delta^{op}_{\mathcal{D}}(1\otimes\phi)R = R\Delta_{\mathcal{D}}(1\otimes\phi)$. Όμως τα στοιχεία $a\otimes 1^*$ και $1\otimes\phi$ παράγουν την άλγεβρα $\mathcal{D}(A)$, άρα τελικά $\mathcal{D}(A) = S$.

(iii), (iv) Χρειάζεται να δείξω ότι $(\Delta_{\mathcal{D}}\otimes id_{\mathcal{D}})(R) = R_{13}R_{23}$ και $(id_{\mathcal{D}}\otimes\Delta_{\mathcal{D}})(R) = R_{13}R_{12}$. Ας αποδείξουμε καταρχήν την πρώτη έκφραση.

- Για το πρώτο μέλος της εξίσωσης:

$$(\Delta_{\mathcal{D}}\otimes id_{\mathcal{D}})(R) = \sum_i \Delta_{\mathcal{D}}(e_i\otimes 1^*)\otimes(1\otimes\delta^i)$$

$$= \sum_i \sum_{(e_i)} ((e_i)_{(1)}\otimes 1^*)\otimes((e_i)_{(2)}\otimes 1^*)\otimes(1\otimes\delta^i)$$

- Για το δεύτερο μέλος της εξίσωσης:

$$R_{12}R_{23} = \sum_{i,j}(e_i \otimes 1^*) \otimes (e_j \otimes 1^*) \otimes (1 \otimes \delta^i\delta^j)$$

Αν εκτιμηθούν και τα δύο μέλη στο $a \otimes b \otimes c$, τότε θα προκύψουν τα εξής:

- Για την εκτίμηση του πρώτου μέλους:

$$(\Delta_{\mathcal{D}} \otimes id_{\mathcal{D}})(R)(a \otimes b \otimes c) = \sum_i \sum_{(e_i)} \langle 1^*, a\rangle\langle 1^*, b\rangle\langle \delta^i, c\rangle(e_i)_{(1)} \otimes (e_i)_{(2)} \otimes 1$$

$$= \langle 1^*, a\rangle\langle 1^*, b\rangle[\sum_i \langle \delta^i, c\rangle\Delta(e_i)] \otimes 1 = \langle 1^*, a\rangle\langle 1^*, b\rangle(\Delta(c) \otimes 1)$$

- Για την εκτίμηση του δεύτερου μέλους:

$$R_{12}R_{23}(a \otimes b \otimes c) = \sum_{i,j}\langle 1^*, a\rangle\langle 1^*, b\rangle \sum_{(c)}\langle \delta^i, c_{(1)}\rangle\langle \delta^j, c_{(2)}\rangle e_i \otimes e_j \otimes 1$$

$$\langle 1^*, a\rangle\langle 1^*, b\rangle(\Delta(c) \otimes 1)$$

Παρατηρείται ότι τα δύο μέλη της εκτίμησης είναι ίσα, άρα ισχύει η σχέση (iii). Ομοίως αποδεικνύεται ότι ισχύει και η σχέση (iv). □

4.2.3 Λύσεις της Εξίσωσης Yang-Baxter Παραγόμενες από Διπλή Κατασκευή Απειροδιάστατης Άλγεβρας Hopf

Αν η άλγεβρα Hopf είναι απειροδιάστατη, δεν μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα 4.2.4. Ας υποθέσουμε ότι μπορεί. Τότε

$$R = \sum_a (e_a \otimes 1^*) \otimes (1 \otimes \delta^a)$$

Βρισκόμαστε αντιμέτωποι/ες δηλαδή με ένα άπειρο άθροισμα που δεν γνωρίζουμε αν συγκλίνει. Το υποκεφάλαιο αυτό περιγράφει πως ξεπερνάται αυτή η δυσκολία.

Έστω (A, μ, η) μια άλγεβρα και V ένα πεπερασμένης διάστασης A-πρότυπο με βάση $(u_i)_{i=1}^n$. Τότε $\forall a \epsilon A$, $\exists \lambda_{i,j} \epsilon \mathbb{C}$:

$$a.u_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} u_i$$

Από τις ιδιότητες της δράσης της A στο V, οι συντελεστές $\lambda_{i,j}$ εξαρτώνται γραμμικά από το $a \epsilon A$. Άρα, ανήκουν στον χώρο A^*.

Ορισμός 4.2.2. Οι συντελεστές $\lambda_{i,j}$ ονομάζονται **αναπαραστατικές μορφές** της A και η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$a.u_j = \sum_{i=1}^{n} \langle \lambda_{i,j}, a \rangle u_j$$

Παράδειγμα 4.2.1. Έστω A άλγεβρα και V ένα πεπερασμένης διάστασης A-πρότυπο με βάση $(u_i)_{1=1}^n$ και $\lambda_{i,j} \epsilon A^*$, $i, j = 1, ..n$ οι αναπαραστατικές μορφές. Για κάθε $a, b \epsilon A$:

$$\langle \mu^*(\lambda_{i,j}), a \otimes b \rangle = \langle \lambda_{i,j}, \mu(a \otimes b) \rangle = \langle \lambda_{i,j}, ab \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \lambda_{i,k}, a \rangle \langle \lambda_{k,j}, b \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle \lambda_{i,k} \otimes \lambda_{k,j}, a \otimes b \rangle$$

Επομένως,

$$\mu^*(\lambda_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i,k} \otimes \lambda_{k,j} \, \epsilon A^* \otimes A^*$$

δηλαδή $\lambda_{i,j} \epsilon A^\circ$.

Θεωρούμε μία άλγεβρα Hopf άπειρης διάστασης A. Έστω V ένα $\mathcal{D}(A, A^\circ)$-πρότυπο. Θα γίνει μια προσπάθεια να δοθεί μια φόρμουλα για την λύση

$$\overline{R} : V \otimes V \to V \otimes V$$

της εξίσωσης Yang-Baxter που να ορίζεται με ανάλογο τρόπο, όπως η λύση που παράγεται από πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα Hopf και σχετίζεται με τον πίνακα R του θεωρήματος 4.2.4.

Θεώρημα 4.2.5. *([Kytölä2011]-Theor.4.31) Έστω A μία άλγεβρα Hopf με αντιστρέψιμο αντίποδα, $B \subset A^\circ$ μία υποάλγεβρα Hopf του περιορισμένου* *δυϊκού της,* $(e_a)_{a\epsilon\mathbb{N}}$, $(\delta^a)_{a\epsilon\mathbb{N}}$ *οι αντίστοιχες βάσεις των* A, B *και* $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, B)$ *η αντίστοιχη διπλή κατασκευή Drinfeld. Έστω* V *ένα πεπερασμένης διάστασης* $\mathcal{D}$*-πρότυπο με βάση* $(v_i)_{i=1}^d$ *και* $\lambda_{i,j}\epsilon\mathcal{D}^\circ$ *οι αναπαραστατικές μορφές με* $\lambda_{i,j}|_A = B$ $(A^\circ \subset \mathcal{D})$*. Τότε,* $\lambda_{i,j}|_A \subset B \subset \mathcal{D}$ *και* $\lambda_{i,j}|_B \subset B^\circ \subset A \subset \mathcal{D}$*. Η γραμμική συνάρτηση* $\overline{R} : V \otimes V \to V \otimes V$ *με:*

$$\overline{R}(v_i \otimes v_j) = \sum_{k,l}^{d} \langle \lambda_{l,i}, (\lambda_{k,j})^{`} \rangle v_l \otimes v_k$$

με $\lambda_{i,j}\epsilon B$ *και* $(\lambda i, j)^{`} \subset B^\circ \subset A$*, είναι λύση της εξίσωσης Yang-Baxter.*

Κεφάλαιο 5

Χρήση της Κβαντικής Ομάδας $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ για την Εύρεση Λύσεων της Εξίσωσης Yang-Baxter

5.1 Η άλγεβρα Hopf H_q

Έστω $q\epsilon\mathbb{C}$, $q \neq 0$ και q όχι ρίζα της μονάδας. Συμβολίζεται με H_q η άλγεβρα που έχει γεννήτορες τα στοιχεία $a, a{-}1, b$ που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

$$ab = qba$$

Επιπλέον, τα στοιχεία $(b^m a^n)_{m\epsilon\mathbb{N},n\epsilon\mathbb{Z}}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρους H_q. Η H_q έχει δομή άλγεβρας Hopf ως εξής:

$$\mu(b^{m_1}a^{n_1} \otimes b^{m_2}a^{n_2}) = q^{n_1 m_2} b^{m_1+m_2} a^{n_1+n_2}$$

$$\Delta(a) = a \otimes a$$

$$\Delta(b) = a \otimes b + b \otimes 1$$

$$\Delta(b^m a^n) = \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q b^k a^{m-k+n} \otimes b^{m-k} a^n$$

$$\varepsilon(b^m a^n) = \delta_{m,0}$$

$$\gamma(b^m a^n) = (-1)^m q^{-m(m+1)/2-nm} b^m a^{-n-m}$$

Παρατήρηση:

- Είναι φανερό ότι η H_q δεν είναι ούτε μεταθετική, ούτε συν-μεταθετική.
- Η H_q έχει αντιστρέψιμο αντίποδα:

$$\gamma^{-1}(b^m a^n) = (-1)^m q^{-m(m-1)/2-mn} b^m a^n b^m a^{-m-n}$$

5.2 Η δυϊκή κατασκευή του Drinfeld D_q

Έστω τα στοιχεία $1^*, \overline{a}, \overline{a}^{-1}, \overline{b} \epsilon H_q^\circ$ που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\langle 1^*, b^m a^n \rangle = \delta_{m,0}$$

$$\langle \overline{a}^{\pm 1}, b^m a^n \rangle = \delta_{m,0} q^{\pm n}$$

$$\langle \overline{b}, b^m a^n \rangle = \delta_{m,1}$$

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ισομορφισμός αλγεβρών Hopf $b^m a^n \to \overline{b}^m \overline{a}^n$. Έστω $H_q^{'} \subset H_q^\circ$ η ισομορφική άλγεβρα Hopf της H_q στον περιορισμένο δυϊκό της που έχει βάση $(\overline{b}^m \overline{a}^n)_{m\epsilon\mathbb{N}, n\epsilon\mathbb{Z}}$.

Ορίζεται ως $D_q = \mathcal{D}(H_q, H_q')$ η δυϊκή κατασκευή της $H_q \otimes H_q'$. Επιπλέον, ορίζονται τα εξής στοιχεία:

$$\alpha = \iota_{H_q}(a) = a \otimes 1^*$$

$$\beta = \iota_{H_q}(b) = b \otimes 1^*$$

$$\overline{\alpha} = \iota_{H_q'}(\overline{a}) = 1 \otimes \overline{a}$$

$$\overline{\beta} = \iota_{H_q'}(\overline{b}) = 1 \otimes \overline{b}$$

Τα παρακάτω είναι εφαρμογή του θεωρήματος 4.2.3.

Η άλγεβρα Hopf D_q έχει διανυσματική βάση τα στοιχεία $(\beta^m \alpha^n \overline{\beta}^{m'} \overline{\alpha}^{n'})_{m,m'\epsilon\mathbb{N}, n,n'\epsilon\mathbb{Z}}$.

Η άλγεβρα D_q έχει γεννήτορες τα στοιχεία $\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \overline{\alpha}, \overline{\alpha}^{-1}, \overline{\beta}$, με τις εξής μεταξύ τους σχέσεις:

$$\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \overline{\alpha}\overline{\alpha}^{-1} = \overline{\alpha}^{-1}\overline{\alpha} = 1$$

$$\alpha\beta = q\beta\alpha$$
$$\overline{\alpha}\overline{\beta} = q\overline{\beta}\overline{\alpha}$$
$$\alpha\overline{\beta} = q^{-1}\overline{\beta}\alpha$$
$$\overline{\alpha}\beta = q^{-1}\beta\overline{\alpha}$$
$$\alpha\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\alpha$$
$$\overline{\beta}\beta - \beta\overline{\beta} = \alpha - \overline{\alpha}$$

και επιπλέον ισχύει:

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha$$
$$\Delta(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha} \otimes \overline{\alpha}$$
$$\Delta(\beta) = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes 1$$
$$\Delta(\overline{\beta}) = \overline{\beta} \otimes \overline{\alpha} + 1 \otimes \overline{\beta}$$

Η υπόλοιπη δομή άλγεβρας Hopf μπορεί να ανακτιθεί χρησιμοποιώντας το θεώρημα 4.2.3.

5.3 Χρήση της Κβαντικής Ομάδας $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$

Λήμμα 5.3.1. *Το στοιχείο $k = \alpha\overline{\alpha}$ είναι ομαδοειδές και κεντρικό και το διπλό ιδεώδες άλγεβρας J_q που παράγεται από το στοιχείο $k-1$ είναι Hopf ιδεώδες.*

Απόδειξη: Το k είναι ομαδοειδές εφόσον:

$$\Delta(k) = \Delta(\alpha\overline{\alpha}) = \Delta(\alpha)\Delta(\overline{\alpha}) = (\alpha \otimes \alpha)(\overline{\alpha} \otimes \overline{\alpha}) = (\alpha\overline{\alpha} \otimes \alpha\overline{\alpha}) = k \otimes k$$

Για να δειχθεί ότι το k είναι κεντρικό αρκεί να δείξω ότι μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες. Για τους γεννήτορες α, β:

$$\alpha k = \alpha\alpha\overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}\alpha = k\alpha$$

$$\beta k = \beta\alpha\overline{\alpha} = q^{-1}\alpha\beta\overline{\alpha} = qq^{-1}\alpha\overline{\alpha}\beta = k\beta$$

Ομοίως το k μετατίθεται με τα $\overline{\alpha}$ και $\overline{\beta}$. Το διπλό ιδεώδες J_q που παράγεται από το $k-1$ παράγεται γραμμικά από τα στοιχεία της μορφής $x(k-1)y$, $x, y \epsilon D_q$. Το J_q είναι συνιδεώδες αφού ισχύουν τα εξής:

$$\Delta(k-1) = k \otimes k - 1 \otimes 1 = (k-1) \otimes k + 1 \otimes (k-1) \epsilon J_q \otimes D_q + D_q \otimes J_q$$

$$\Delta(x(k-1)y) = \Delta(x)\Delta(k-1)\Delta(y)$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι $\Delta(J_q) \subset J_q \otimes D_q + D_q \otimes J_q$. Επίσης $\epsilon|_{J_q} = 0$, αφού:

$$\varepsilon(k-1) = \varepsilon(k) - \varepsilon(1) = 1 - 1 = 0$$

και

$$\varepsilon(x(k-1)y) = \varepsilon(x)\varepsilon(k-1)\varepsilon(y)$$

Τέλος, το J_q είναι ιδεώδες Hopf αφού:

$$\gamma(k-1) = \overline{\alpha}^{-1}\alpha^{-1} - 1 = \overline{\alpha}^{-1}\alpha^{-1}(1-\alpha\overline{\alpha}) = -\overline{\alpha}^{-1}\alpha^{-1}(k-1)\epsilon J_q$$

και

$$\gamma(x(k-1)y) = \gamma(x)\gamma(k-1)\gamma(y)$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι $\gamma(J_q) \subset J_q$ $\square$

Πρόταση 5.3.1. *([Kytölä2011]-4.23) Ο χώρος D_q/J_q είναι ισομορφικός με την κβαντική ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ (όταν q όχι ρίζα της μονάδας). Τα στοιχεία $K, E, F\, \epsilon \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl})_2$ είναι τα αντίστοιχα των κλάσεων ισοδυναμίας των στοιχείων $\overline{\alpha}, \frac{-1}{q-q^{-1}}\overline{\beta}, \beta$.*

Συμπεραίνεται ότι, εφόσον η κβαντική ομάδα $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ είναι χώρος πηλίκο της D_q, οι αναπαραστάσεις της, οι οποίες περιγράφηκαν αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3, είναι και αναπαραστάσεις της D_q. Άρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να κατασκευαστούν λύσεις της εξίσωσης Yang-Baxter από την Πρόταση 4.2.5, αφού η άλγεβρα Hopf H_q είναι απειροδιάστατη. Έτσι, όλες οι πεπερασμένες αναπαραστάσεις της $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση λύσεων της εξίσωσης Yang-Baxter.

Ως επίλογος...

Ήδη από αυτή την πολύ εισαγωγική διπλωματική μπορεί κανείς ήδη να δει τις δυνατότητες που προσφέρει η μελέτη των κβαντικών ομάδων. Η χρήση τους για εύρεση των αναπαραστάσεων των αλγεβρών Lie $\mathfrak{sl}_n$ και για την επίλυση της εξίσωσης Yang-Baxter ανοίγουν το παράθυρο για πάρα πολλές εφαρμογές τους στην φυσική. Οι εφαρμογές τους όμως δεν σταματάνε στην φυσική και επεκτείνονται σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών επίσης. Φανταστείτε που μπορεί να φτάσει κανείς αν εξερευνήσει τις κβαντικές ομάδες περισσότερο.

Βιβλιογραφία

[BorVaz2000] Borowiec A., Vazquez Coutino G.A., Hopf Modules and their Duals, Int. J. Theoret. Phys. v.39 no10 (2000) https://arxiv.org/pdf/math/0007151.pdf

[Dri1989] Drinfeld V.G., On Almost Cocommutative Hopf Algebras, Algebra i Analiz 1:2 (1989), English translation: Leningrad Math J. Vol.1, 1990

[Dri1988] Drinfeld V.G., Quantum Groups, Journal of Soviet Mathematics, 898-915, 1988 https://link.springer.com/article/10.1007/BF01247086

[Dri1985] Drinfeld, V.G., Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation, Sov. Math. Dokl. 32, 254-258 (1985)

[EntSem2019] Entigof Pavel, Semenyankin Mykola, A Brief Introduction to Quantum Groups, July 2019 https://arxiv.org/abs/2106.05252

[Fad1984] Faddeev L.D., Integrable Models in (1+1)-Dimensional Quantum Field Theory, Lectures at Les Houches 1982, Elsevier Science Publishers B.V.,Amsterdam, New York, 1984

[Fraleigh2016] Fraileigh, John B., Εισαγωγή στην Άλγεβρα, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2016

[Humph] Humphereys, J. E.: Introduction to Lie algebras and Representation Theory. Graduate Texts in Mathematics Vol. 9. Berlin, Heidelberg, New York: Springer https://www.math.uci.edu/~brusso/humphreys.pdf

[Jimbo1985] Jimbo, Michio, A q-Difference Analogue of U(g) and the Yang-Baxter Equation, Letters in Mathematical Physics, vol. 10, 1985

[Jimbo1986] Jimbo, Michio, A q-analogue of U(g[(N+1)), Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation, Lett Math Phys 11, 247–252 (1986)

[Kac2010] Kac, Victor, Lecture 22- The Universal Enveloping Algebra, Introduction to Lie Algebras, MIT, 2010 https://math.mit.edu/classes/18.745/Notes/Lecture_22_Notes.pdf

[Kassel1995] Kassel, Christian, Quantum Groups, Graduate Texts in Mathematics, 155, Springer-Verlag, 1995

[KirMel1991] Kirby R., Melvin P., The 3-Manifold Invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for sl(2,C), Invent. Math., Vol 105, 1991 https://tqft.net/svn/d4/trunk/links-article/papers/kirby-melvin.pdf

[Kirillov2008] Kirillov Alexander Jr., An introduction to Lie Groups and Lie Algebras, Cambridge studies in advanced mathematics, vol.11, Cambridge University Press, 2008 https://www.math.stonybrook.edu/~kirillov/mat552/liegroups.pdf

[KR1981] Kulish P.P, Reshetikhin N.Yu., Quantum Linear Problem for the sine-Gordon Equation and Higher Representations, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), Vol. 101, (1981), english translation: J. Soviet Math. 23, (1983)

[Kytölä2011] Kytölä, Kalle, Introduction to Hopf Algebras and Representations, Lecture Notes, Department of Mathematics and Statistics, University of Helsinki, Spring semester 2011 https://wiki.helsinki.fi/display/mathstatKurssit/Introduction+to+Hopf+algebras+and+representations%2C+spring+2011

[MacLane1997] Mac Lane, Saunders, Categories for the Working Mathematician, 2nd Edintion, Springer-Verlag New York Inc., 1997

[Meusberg2017] Meusburger Catherine, Hopf Algebras and Representation Theory of Hopf Algebras, Lecture Notes, Department Mathematik, Fr6iedrich Alexander Universität Erlangen Nürnberg, Winter term 2016/2017 `https://faubox.rrze.uni-erlangen.de/dl/fiBKxitAap7wcXeGnoceTSP4/?inline`

[Ohtsuki2001] Ohtsuki, Tomotada, Quantum Invariants, A Study of 3-Knots, 3-Manifolds and their Sets, Series on Knots and Everything, Volume 29, Word Scientific, December 2001

[Rosso1988] Rosso, Marc, Finite Dimensional Representations of the Quantum Analog of the Enveloping Algebra of a Complex Simple Lie Algebra, Communications in Mathematical Physics, Vol. 117, pg. (581-593), 1988

[TIz2008] Terman, David H., Izhikevich, Eugene M., State Space, Scholarpedia, 3(3):1924, 2008 `http://www.scholarpedia.org/article/State_space`

[Ήργες2022] Ήργες Νίκος, Σημειώσεις για Θεωρία Ομάδων στη Φυσική, ΣΕΜΦΕ, Τομέας Φυσικής