



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΑΙΟΥ

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ Η ΜΕΤΑΝΕΩΤΕΡΙΚΟΤΗΤΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΤΥΛΙΑΝΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

A.M.:ge07114

Επιβλέπων: Δρ. Πέτρος Δαμιανός (Ε.Δι.Π. Ε.Μ.Π.)

Επιτροπή: Θεολόγου Κώστας, καθηγητής Ε.Μ.Π.

Δρ. Στέλιος Σπύρος (Ε.Δι.Π. Ε.Μ.Π.)

Περίληψη

Για τη πλειοψηφία που έρχεται σε μια πρώτη επαφή με τις θετικές επιστήμες συνηθίζουν να σχηματίζουν την άποψη ότι οι θετικές επιστήμες είναι οι σημαντικότεροι εκφραστές της « αντικειμενικής αλήθειας » ίσως και σημείο αδιαλλακτηκότητας. Συνεπώς καθώς τα μαθηματικά αποτελούν βασικό πυλώνα για κάθε θετική επιστήμη. Αλλά και από μόνα τους, συχνά χαρακτηρίζονται ως η επιτομή της αντικειμενικής αληθείας, όπου δε χωράει κάτι πέρα από ψευδές ή αληθές. Ομολογώ υπήρξα υποστηρικτής αυτής της άποψης, αν και ενδόμυχα για προσωπικούς λόγους ήλπιζα και ελπίζω για μια αναθεώρηση των μαθηματικών. Η επαφή μου με τη φιλοσοφία της επιστήμης και των μαθηματικών με έκανε να επαναπροσδιορίσω την άποψη μου για την αντικειμενικότητα των μαθηματικών. Επομένως στη παρούσα εργασία θα έρθουμε σε επαφή με τις βασικότερες φιλοσοφικές σχολές των μαθηματικών του 20ου αιώνα και τους εκφραστές τους. Όπου θα δούμε ότι τα πράγματα στο κόσμο των μαθηματικών ίσως δεν είναι τόσο τακτοποιημένα και ξεκάθαρα ώστε να δικαιολογούν αυτή τη πιστή στην αντικειμενικότητα τους. Ενώ παράλληλα θα δούμε και ορισμένα βασικά σημεία και εκφραστές της μετανεωτερικότητας που θεωρείται το κυρίαρχο φιλοσοφικό ρεύμα της εποχής που πιθανώς μας επηρεάζει στο πως πλέον προσεγγίζουμε τη πραγματικότητα και σε επέκταση τα μαθηματικά. Τέλος θα γίνει μια σύγκριση ανάμεσα στην ηθική και τα μαθηματικά υπό το φάσμα του σχετικισμού.

Λέξεις Κλειδιά: φιλοσοφία των μαθηματικών, μαθηματικά, μετανεωτερικότητα, σχετικισμός

Abstract

For the majority who come into first contact with the sciences, they tend to form the opinion that the sciences are the most important representatives of "objective truth", perhaps even to a point of intolerance. Therefore, as mathematics is a basic pillar for any science, but also on their own, they are often characterized as the epitome of objective truth, where there is no room for anything else but false or true. I confess I have been a supporter of this view, although for personal reasons I have intimately hoped and still hoping for a revision of mathematics. My contact with the philosophy of science and mathematics made me redefine my previous view of the objectivity of mathematics. Hence in this paper we will come into contact with the main philosophical aspects of mathematics of the 20th century and their representatives. Where we will see that things in the world of mathematics may not be so neat and clear as to justify this faith to their objectivity. But at the same time we will also look at some key points and expressions of Postmodernism, which is considered the dominant philosophical movement of the current era and probably influences how we approach reality and, by extension, mathematics. Finally, a comparison will be made between ethics and mathematics under the spectrum of relativism.

Keywords: philosophy of mathematics ,mathematics ,postmodernism ,relativism

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	3
Abstract	4
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	5
Ευχαριστίες	6
Εισαγωγή	7
1. Βασικά σημεία της φιλοσοφίας των Μαθηματικών	10
1.1 Λογικισμός	10
1.2 Ιντουσιονισμός	13
1.3 Φορμαλισμός	15
1.4 Κατηγοριατισμός	19
2 Μετανεωτερικότητα και βασικοί όροι της	22
2.1 Μετανεωτερικότητα	22
2.2 Αποδόμηση	26
2.3 Ίχνος	28
2.4 Διάδοση	29
2.5 Υπερπραγματικότητα	29
2.6 Επανάληψη	32
2.7 Simulacrum	35
3 Μαθηματικά και μετανεωτερικότητα	36
3.1 Μαθηματικός Κονστрукτιβισμός	36
3.2 Φινιτισμός	39
3.3 Ακτουαλισμός ή Υπερφινιτισμός ή Αυστηρός Φινιτισμός	40
3.3 Μαθηματικός σχετικισμός	41
4. Ηθική Μαθηματικά και Σχετικισμός	44
4.1 Ηθικός Σχετικισμός και γνωσιακισμός	45
4.2 Wittgenstein και φιλοσοφική επανάσταση	48
4.3 Ο εκλεπτυσμένος γνωσιακιστής	51
4.4 Η αλήθεια των μαθηματικών	55
Συμπεράσματα – Συζήτηση	58
Βιβλιογραφία	63

Ευχαριστίες

Νομίζω είναι τουλάχιστον αναγκαίο να αναφερθώ σε ορισμένα άτομα που με συνόδευσαν σε αυτή τη προσπάθεια ολοκλήρωσης των σπουδών μου. Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς που πάρα τα δικά τους προβλήματα και δυσκολίες δε σταμάτησαν να με βοηθούν και να με παροτρύνουν. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα μου κύριο Πέτρο Δαμιανό για την υπομονή , τη βοήθεια ,τις συμβουλές και κατανόηση που μου έδωσε. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Θεολόγου ο οποίος μαζί με το κύριο Δαμιανό μέσα από τα μαθήματα τους και συζητήσεις τους, ανακάλυψα το κόσμο της φιλοσοφίας και μου δόθηκε το έναυσμα για αυτή την εργασία. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής για το χρόνο που μου έδωσαν.

Εισαγωγή

Το πρώτο κεφάλαιο ασχολείται με τις κυριότερες φιλοσοφικές σχολές των μαθηματικών του εικοστού αιώνα και το έργο κύριων αντιπροσώπων της εκάστοτε σχολής. Συνεπώς στην πρώτη ενότητα κεφαλαίου θα δούμε το λογισμό. Λογικισμός είναι η άποψη ότι οι μαθηματικές αλήθειες είναι τελικά λογικές αλήθειες. Η ιδέα αυτή εισήχθη από τον Φρέγκε (Frege). Υποστήριξε τον λογικισμό σε συνδυασμό με τον πλατωνισμό, αλλά ο λογικισμός συνάδει και με διάφορες αντιπλατωνικές απόψεις. Ο λογικισμός υποστηρίχθηκε επίσης την ίδια περίπου εποχή από τον Ράσελ (Russel) και τον συνεργάτη του, τον Βρετανό φιλόσοφο Άλφρεντ Νόρθ Γουάιτχεντ, αν και σε ύστερο χρόνο ο Ράσελ ήταν αυτός που βρήκε σοβαρά κενά στο έργο του Φρέγκε. Λίγοι υποστηρίζουν ακόμη αυτή την άποψη, αν και υπάρχει μια νεολογικιστική σχολή, κύριοι υποστηρικτές της οποίας είναι οι Βρετανοί φιλόσοφοι Κρίσπιν Ράιτ (Crispin Wright) και Ρόμπερτ Χέλ (Robert Hale).

Η δεύτερη ενότητα του πρώτου κεφαλαίου θα εξετάσει τον ιντουισιονισμό (intuitionism). Ο ιντουισιονισμός είναι η άποψη ότι ορισμένα είδη μαθηματικών αποδείξεων δεν είναι αποδεκτά (π.χ. νόμος αποκλεισμένου μέσου). Πιο θεμελιωδώς, ο ιντουισιονισμός είναι καλύτερο να θεωρηθεί ως μια θεωρία σχετικά με τη μαθηματική επιβεβαίωση και άρνηση. Ο ιντουισιονισμός εισήχθη από τον Μπράουερ (L.E.J. Brouwer) και αναπτύχθηκε από τον μαθητή του τον Χέιτινγκ (Arend Heyting) και λίγο αργότερα από τον Βρετανό φιλόσοφο Ντάμετ (Michael Dummett).

Ύστερα ακολουθεί ο φορμαλισμός που είναι η άποψη που υποστηρίζει ότι οι δηλώσεις των μαθηματικών και της λογικής μπορούν να θεωρηθούν ως δηλώσεις σχετικά με τις συνέπειες του

χειρισμού συμβολοσειρών (αλφαριθμητικές ακολουθίες συμβόλων, συνήθως ως εξισώσεις) με τη χρήση καθιερωμένων κανόνων χειρισμού. Μια κεντρική ιδέα του φορμαλισμού "είναι ότι τα μαθηματικά δεν είναι ένα σώμα προτάσεων που αντιπροσωπεύουν έναν αφηρημένο τομέα της πραγματικότητας, αλλά μοιάζουν περισσότερο με ένα παιχνίδι. Σύμφωνα με τον φορμαλισμό, οι αλήθειες που εκφράζονται στη λογική και τα μαθηματικά δεν αφορούν αριθμούς, σύνολα ή τρίγωνα ή οποιοδήποτε άλλο συν-υπολογιστικό αντικείμενο - στην πραγματικότητα, δεν "αφορούν" τίποτα απολύτως. Αντίθετα, οι μαθηματικές δηλώσεις είναι συντακτικές μορφές των οποίων τα σχήματα και οι θέσεις δεν έχουν κανένα νόημα αν δεν τους δοθεί μια ερμηνεία (ή σημασιολογία).

Κλείνοντας για το 1ο κεφάλαιο θα δούμε τον κατηγορηματισμό (predicativism) ο οποίος είναι μια θεμελιώδης φιλοσοφία που αναπτύχθηκε από τους Πουανκαρε (Poincaré), Ράσελ (Russell), και Γουέλ (Weyl). Αρχικά σχεδιάστηκε ως απάντηση στην ανακάλυψη των κλασικά παραδόξων στη θεωρία συνόλων. Το επίσημο σύνθημα του κατηγορηματισμού είναι αυτό που ο Ράσελ αποκάλεσε « αρχή του φαύλου κύκλου (vicious circle principle) »: καμία κλάση δεν μπορεί να περιέχει στοιχεία που μπορούν να οριστούν μόνο με βάση την ίδια την κλάση. Ένας άλλος τρόπος για να το πούμε αυτό είναι ότι δεν δεχόμαστε καμία οντότητα που δεν μπορεί να οριστεί χωρίς αναφορά σε μια κλάση στην οποία ανήκει. Είναι δύσκολο αυτή η αρχή να είναι ακριβής, αλλά το βασικό νόημα είναι ότι τα στοιχεία οποιασδήποτε συλλογής θα πρέπει να κάθε συλλογής θα πρέπει να νοούνται ως κατά κάποιο τρόπο λογικά πριν την ίδια τη συλλογή.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα έρθουμε σε επαφή με το φιλοσοφικό ρεύμα της Μετανεωτερικότητας. Όπου θα δούμε τους κύριους εκφραστές του, όπως Ζαν-Φρανσουά Λύοταρντ (Jean-François Lyotard), Ζακ Ντεριντά (Jacques Derrida), Ζαν Μποντριγιάρ (Jean Baudrillard), Γκίλ Ντελέζ (Gill Deleuze). Επίσης θα αφιερωθούν ενότητες στους όρους: ίχνος αποδόμηση (Deconstruction), υπερπραγματικότητα (Hyperreality), διάδοση (Dissemination), επανάληψη, simulacrum της μετανεωτερικότητας.

Το τρίτο κεφάλαιο ασχολείται με μεταγενέστερα ρεύματα της φιλοσοφίας των μαθηματικών. Στη πρώτη ενότητα του θα δούμε τον μαθηματικό κονστρουκτιβισμό ή στρουκτουραλισμό (constructivism). Στη φιλοσοφία των μαθηματικών, ο κονστρουκτιβισμός υποστηρίζει ότι είναι

απαραίτητο να βρεθεί ή να « κατασκευαστεί » ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ενός μαθηματικού αντικειμένου προκειμένου να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα παράδειγμα. Αντίθετα, στα κλασικά μαθηματικά, μπορεί κανείς να αποδείξει την ύπαρξη ενός μαθηματικού αντικειμένου χωρίς να « βρει » το αντικείμενο αυτό ρητά, υποθέτοντας τη μη ύπαρξή του και στη συνέχεια να συναγάγει μια αντίφαση από αυτή την υπόθεση. Μια τέτοια απόδειξη μέσω αντίφασης θα μπορούσε να ονομαστεί μη κατασκευαστική, και ένας κονστρουκτιβιστής θα μπορούσε να την απορρίψει.

Στη δεύτερη ενότητα του τρίτου κεφαλαίου θα δούμε τον Φινιτισμό (Finitism). Η βασική ιδέα του φινιτισμού είναι να μην αποδέχεται την ύπαρξη άπειρων αντικειμένων, όπως τα άπειρα σύνολα. Ενώ όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι αποδεκτοί ως υπαρκτοί, το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών δεν θεωρείται ότι υπάρχει ως μαθηματικό αντικείμενο. Η επόμενη ενότητα ασχολείται με μια πιο αυστηρή εκδοχή του φινιτισμού τον αυστηρό φινιτισμό αλλιώς υπερφινιτισμό ή ακτουαλισμό. Όπου ένας φινιτιστής θα δεχόταν δηλώσεις όπως « κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν διάδοχο » και θα δεχόταν το νόημα των άπειρων σειρών με την έννοια των ορίων των πεπερασμένων μερικών αθροισμάτων, ενώ ένας αυστηρός φινιτιστής δε θα το δεχόταν.

Στη τελευταία ενότητα του τρίτου κεφαλαίου θα δούμε τα μαθηματικά κάτω από το πρίσμα του σχετικισμού. Όπου σύμφωνα με τον μαθηματικό σχετικισμό, οι μαθηματικές αλήθειες είναι σχετικά αληθείς μόνο, δηλαδή είναι αληθείς σε σχέση με i) τον προσδιορισμό των εννοιών και των θεωριών που χαρακτηρίζουν το σχετικό μαθηματικό πεδίο, ii) το μαθηματικό πλαίσιο στο οποίο διατυπώνονται αυτές οι μαθηματικές αλήθειες και iii) τη λογική που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή αυτών των αληθειών.

Το τελευταίο κεφάλαιο επικεντρώνεται στο άρθρο του Λήρ Ηθική Μαθηματικά και Σχετικισμός (Jonathan Lear, *Ethics Mathematics and Relativism* 1983). Όπου γίνεται μια προσπάθεια σύγκρισης πως προσεγγίζουμε τα μαθηματικά και την ηθική.

1. Βασικά σημεία της φιλοσοφίας των Μαθηματικών

1.1 Λογικισμός

Το εγχείρημα του λογικισμού συνίσταται στην προσπάθεια αναγωγής των μαθηματικών στη λογική. Δεδομένου ότι η λογική υποτίθεται ότι είναι ουδέτερη σε θέματα οντολογικά, αυτό το έργο φαινόταν να εναρμονίζεται με την αντιπλατωνική ατμόσφαιρα που επικρατούσε τον δέκατο ένατο αιώνα (Hallett, 1984).

Η ιδέα ότι τα μαθηματικά είναι μεταμφιεσμένη λογική πηγαίνει πίσω στον Λέϊμπνιζ (Leibniz). Αλλά μια σοβαρή προσπάθεια να πραγματοποιηθεί λεπτομερώς το πρόγραμμα της λογικής θα μπορούσε να γίνει μόνο όταν τον δέκατο ένατο αιώνα διατυπώθηκαν οι βασικές αρχές των κεντρικών μαθηματικών θεωριών από τον Ντεντεκάντ (Dedekind) και τον Πεάνο (Peano) και οι αρχές της λογικής αποκαλύφθηκαν από τον Φρέγκε (Frege) (Hamkins, 2015).

Ο Φρέγκε αφιέρωσε μεγάλο μέρος της καριέρας του στην προσπάθεια να δείξει πώς τα μαθηματικά μπορούν να αναχθούν στη λογική (Frege 1884). Κατάφερε να αντλήσει τις αρχές της (δεύτερης τάξης) αριθμητικής Πεάνο από τους βασικούς νόμους ενός συστήματος λογικής δεύτερης τάξης. Η παράγωγός του ήταν άψογη. Ωστόσο, στηρίχθηκε σε μια αρχή που τελικά αποδείχθηκε ότι δεν ήταν λογική αρχή. Η εν λόγω αρχή είναι ο Βασικός Νόμος V του Φρέγκε (Diaconescu, 1975):

$$\{x \mid Fx\} = \{x \mid Gx\}$$

$$\text{εάν και μόνο εάν } \forall x(Fx \equiv Gx), \{x \mid Fx\} = \{x \mid Gx\}$$

$$\text{εάν και μόνο εάν } \forall x(Fx \equiv Gx),$$

Με λόγια: για οποιεσδήποτε έννοιες F, G , η έκταση της F είναι η ίδια με αυτήν της G αν και μόνο αν για κάθε αντικείμενο x , Fx αν και μόνο αν Gx .

Σε μια διάσημη επιστολή προς τον Φρέγκε, ο Ράσελ (Russel) έδειξε ότι ο βασικός νόμος V του Φρέγκε συνεπάγεται μια αντίφαση (Russell 1902). Αυτό το επιχείρημα έγινε γνωστό ως το παράδοξο του Ράσελ (Russel's Paradox) (Hodes, 1984).

Ο ίδιος ο Ράσελ προσπάθησε τότε να αναγάγει τα μαθηματικά στη λογική με άλλο τρόπο. Ο Βασικός Νόμος V του Φρέγκε συνεπάγεται ότι ανταποκρίνεται σε κάθε ιδιότητα των μαθηματικών οντοτήτων, υπάρχει μια κατηγορία μαθηματικών οντοτήτων που έχουν αυτήν την ιδιότητα. Αυτό ήταν προφανώς πολύ ισχυρό, γιατί ήταν ακριβώς αυτή η συνέπεια που οδήγησε στο παράδοξο του Ράσελ. Έτσι ο Ράσελ υπέθεσε ότι μόνο οι ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων που έχουν ήδη αποδειχθεί ότι υπάρχουν, καθορίζουν τις κλάσεις. Ορίσματα που αναφέρονται έμμεσα στην κλάση που επρόκειτο να καθορίσουν εάν υπήρχε μια τέτοια κλάση, δεν προσδιορίζουν μια κλάση (Hilbert,1925).

Έτσι προκύπτει ένα τυποποιημένο οικοδόμημα ιδιοτήτων: ιδιότητες πρωταρχικών ή θεμελιωδών αντικειμένων, ιδιότητες θεμελιωδών αντικειμένων και κατηγορίες θεμελιωδών αντικειμένων κ.λπ. Αυτή η τυποποιημένη ή μορφοποιημένη δομή ιδιοτήτων καθορίζει ένα σύμπαν με στρώματα μαθηματικών αντικειμένων, ξεκινώντας από πρωταρχικά αντικείμενα, προχωρώντας σε κατηγορίες πρωταρχικών αντικειμένων, στη συνέχεια σε κατηγορίες πρωταρχικών αντικειμένων και κατηγορίες πρωταρχικών αντικειμένων κ.λπ. (Dummett, 1975)

Δυστυχώς, ο Ράσελ ανακάλυψε ότι οι αρχές της τυποποιημένης λογικής του δεν επαρκούσαν για να συναχθούν ούτε οι βασικοί νόμοι της αριθμητικής. Χρειαζόταν, μεταξύ άλλων, να θέσει ως βασική αρχή ότι υπάρχει μια άπειρη συλλογή αντικειμένων εδάφους. Αυτό δύσκολα θα μπορούσε να θεωρηθεί ως λογική αρχή. Έτσι, η δεύτερη απόπειρα να αναχθούν τα μαθηματικά στη λογική επίσης έπεσε (Hellman,1989).

Και εκεί τα πράγματα παρέμειναν ως έχουν για περισσότερα από πενήντα χρόνια. Το 1983, εμφανίστηκε το βιβλίο του Ράιτ (Crispin Wright) σχετικά με τη θεωρία του Φρέγκε για τους φυσικούς αριθμούς (Wright 1983). Σε αυτό, ο Ράιτ δίνει νέα πνοή στο έργο της λογικής. Παρατηρεί ότι η παραγωγή του Φρέγκε της δεύτερης τάξης Αριθμητικής Πεάνο μπορεί να αναλυθεί σε δύο στάδια. Σε ένα πρώτο στάδιο, ο Φρέγκε χρησιμοποιεί τον ασυνεπή Βασικό Νόμο V για να εξαγάγει αυτό που έγινε γνωστό ως Αρχή του Χιουμ (Hume) (Hodes,1984):

Ο αριθμός των Fs = ο αριθμός των Gs εάν και μόνο εάν $F \approx GF \approx G$,

όπου $F \approx GF \approx G$ σημαίνει ότι τα F και τα G βρίσκονται σε αντιστοιχία ένα προς ένα μεταξύ τους. (Αυτή η σχέση αντιστοιχίας ένα προς ένα μπορεί να εκφραστεί με λογική δεύτερης τάξης.)

Στη συνέχεια, σε ένα δεύτερο στάδιο, οι αρχές της δεύτερης τάξης της Αριθμητικής Πεάνο προέρχονται από την Αρχή του Χιούμ και τις αποδεκτές αρχές της λογικής δεύτερης τάξης. Συγκεκριμένα, ο Βασικός Νόμος V δεν χρειάζεται στο δεύτερο μέρος της παραγωγής. Επιπλέον, ο Ράιτ υπέθεσε ότι σε αντίθεση με τον Βασικό Νόμο V του Φρέγκε, η Αρχή του Χιούμ είναι συνεπής. Ο Μπόολος (George Boolos) και άλλοι παρατήρησαν ότι η αρχή του Χιούμ είναι πράγματι συνεπής (Boolos 1987).

Ο Ράιτ συνέχισε ισχυριζόμενος ότι η Αρχή του Χιούμ μπορεί να θεωρηθεί ως αλήθεια λογικής. Αν είναι έτσι, τότε τουλάχιστον η δεύτερης τάξης αριθμητική Πεάνο μπορεί να αναχθεί μόνο στη λογική. Έτσι γεννήθηκε μια νέα μορφή λογικής. σήμερα αυτή η άποψη είναι γνωστή ως νεολογικισμός (Hale & Wright 2001). Οι περισσότεροι φιλόσοφοι των μαθηματικών σήμερα αμφιβάλλουν ότι η Αρχή του Χιούμ είναι μια αρχή λογικής. Πράγματι, ακόμη και ο Ράιτ αργότερα προσπάθησε να επιβεβαιώσει αυτόν τον ισχυρισμό. Ωστόσο, πολλοί φιλόσοφοι των μαθηματικών πιστεύουν ότι η εισαγωγή φυσικών αριθμών μέσω της Αρχής του Χιούμ είναι ελκυστική από οντολογική και από γνωσιολογική άποψη. Ο Λινέμπο (Linnebo) υποστηρίζει ότι επειδή η αριστερή πλευρά της Αρχής του Χιούμ απλώς χαράζει εκ νέου το περιεχόμενο της δεξιάς πλευράς της, δεν χρειάζονται πολλά από τον κόσμο για να γίνει αληθινή η Αρχή του Χιούμ. Για το λόγο αυτό, ονομάζει φυσικούς αριθμούς και μαθηματικά αντικείμενα που μπορούν να εισαχθούν με παρόμοιο τρόπο ελαφρά μαθηματικά αντικείμενα (Linnebo 2018).

Το έργο του Ράιτ έχει επιστήσει την προσοχή των φιλοσόφων των μαθηματικών στο είδος των αρχών των οποίων είναι παραδείγματα ο Βασικός Νόμος V και η Αρχή του Χιούμ. Αυτές οι αρχές ονομάζονται αρχές αφαίρεσης. Επί του παρόντος, οι φιλόσοφοι των μαθηματικών προσπαθούν να κατασκευάσουν γενικές θεωρίες για τις αρχές της αφαίρεσης που εξηγούν ποιες αρχές αφαίρεσης είναι αποδεκτές και ποιες όχι, και γιατί (Weir 2003 , Fine 2002). Επίσης, έχει προκύψει ότι στο πλαίσιο των εξασθενημένων εκδοχών της λογικής δεύτερης τάξης, ο Βασικός Νόμος V του Φρέγκε είναι συνεπής. Αλλά αυτές οι αδύναμες θεωρίες υποβάθρου επιτρέπουν μόνο πολύ αδύναμες αριθμητικές θεωρίες να προέρχονται από τον Βασικό Νόμο V.

1.2 Ιντουσιονισμός

Ο ιντουσιονισμός πηγάζει από το έργο του μαθηματικού Μπράουερ (L.E.J. Brouwer) (van Atten 2004) και είναι εμπνευσμένο από τις καντιανές απόψεις για το τι είναι τα αντικείμενα (Parsons 2008, κεφάλαιο 1). Σύμφωνα με τον ιντουσιονιστή, τα μαθηματικά είναι ουσιαστικά μια δραστηριότητα κατασκευής. Οι φυσικοί αριθμοί είναι νοητικές κατασκευές, οι πραγματικοί αριθμοί είναι νοητικές κατασκευές, οι αποδείξεις και τα θεωρήματα είναι νοητικές κατασκευές, το μαθηματικό νόημα είναι μια νοητική κατασκευή. Οι μαθηματικές κατασκευές παράγονται από τον ιδανικό μαθηματικό, δηλ. Οι αφηρημένες έννοιες σχηματίζονται κατασκευάζονται από όντα που υπόκεινται σε φυσικούς περιορισμούς, όπως ένας απλός κοινός θνητός μαθηματικός της πραγματικότητάς μας (Horsten, 2012). Αλλά και ο ιδανικός μαθηματικός παραμένει πεπερασμένος, δεν μπορεί ποτέ να ολοκληρώσει μια άπειρη κατασκευή, παρόλο που μπορεί να ολοκληρώσει αυθαίρετα μεγάλα πεπερασμένα αρχικά μέρη της. Αυτό συνεπάγεται ότι ο ιντουσιονισμός απορρίπτει αποφασιστικά την ύπαρξη του πραγματικού (ή ολοκληρωμένου) απείρου και μόνο δυνητικά άπειρες συλλογές δίνονται στην κατασκευαστική δραστηριότητα. Βασικό παράδειγμα είναι η διαδοχική κατασκευή σε χρόνο των επιμέρους φυσικών αριθμών (Fourman & Grayson, 1982).

Τα μαθηματικά δεν είναι τυπικά. Τα αντικείμενα των μαθηματικών είναι νοητικές κατασκευές στο μυαλό του (ιδανικού) μαθηματικού. Μόνο η κατασκευή σκέψης του (εξιδακτευμένου) μαθηματικού είναι ακριβής (Leng, 2010).

Τα μαθηματικά είναι ανεξάρτητα από την εμπειρία στον έξω κόσμο, και κατ' αρχήν είναι επίσης ανεξάρτητα από τη γλώσσα. Η επικοινωνία μέσω της γλώσσας μπορεί να χρησιμεύσει για να προτείνει κατασκευές σκέψης σε άλλους, αλλά δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι αυτές οι κατασκευές είναι ίδιες. Τα μαθηματικά δεν εξαρτώνται από τη λογική. Αντίθετα, η λογική είναι μέρος των μαθηματικών (Rav, 1999).

Βλέπουμε πόσο ριζικά ο Μπράουερ απέρριψε τόσο τον φορμαλισμό όσο και τη λογική: απέρριψε ρητά τις κύριες αρχές αυτών των θέσεων. Επιπλέον, ο διαχωρισμός πηγαίνει βαθύτερος, καθώς ο «αναθεωρημένος» φορμαλισμός της μετα-Γκεδελιανής εποχής, ο οποίος υποστήριζε ότι τα μαθηματικά είναι απλώς ένα είδος γλώσσας, είναι επίσης ξεκάθαρα

αναμενόμενος και απορρίπτεται. Αφετέρου, ο κάθε είδους πλατωνισμός αποκόπτεται ομοίως, αφού η ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων εξαρτάται από την κατασκευή τους (δεν είναι αιώνια και ανεξάρτητα από το μυαλό). (Bernays, 1935)

Από αυτές τις γενικές σκέψεις για τη φύση των μαθηματικών, που βασίζονται στην κατάσταση του ανθρώπινου νου (Moore 2001), οι ιντουσιονιστές συνάγουν μια αναθεωρητική στάση στη λογική και στα μαθηματικά. Θεωρούν απαράδεκτες τις μη κατασκευάσιμες αποδείξεις ύπαρξης. Οι μη κατασκευαστικές αποδείξεις ύπαρξης είναι αποδείξεις που σκοπεύουν να αποδείξουν την ύπαρξη μιας μαθηματικής οντότητας που έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα χωρίς καν να περιέχουν σιωπηρά μια μέθοδο για τη δημιουργία ενός παραδείγματος μιας τέτοιας οντότητας. Ο ιντουσιονισμός απορρίπτει τις μη κατασκευαστικές αποδείξεις ύπαρξης ως «θεολογικές» και «μεταφυσικές». Το χαρακτηριστικό γνώρισμα των μη κατασκευαστικών αποδείξεων ύπαρξης είναι ότι κάνουν ουσιαστική χρήση της αρχής του αποκλεισμένου τρίτου (Gentzen, 1934)

$\varphi \vee \neg \varphi$,

ή ένα από τα ισοδύναμά του, όπως η αρχή της διπλής άρνησης (Benacerraf και Putnam, 1983)

$\neg \neg \varphi \rightarrow \varphi$

Στην κλασική λογική, αυτές οι αρχές ισχύουν. Η λογική των ιντουσιονιστικών μαθηματικών προκύπτει αφαιρώντας την αρχή του αποκλεισμένου τρίτου (και των ισοδύναμων του) από την κλασική λογική. Αυτό φυσικά οδηγεί σε αναθεώρηση των μαθηματικών γνώσεων. Για παράδειγμα, η κλασική θεωρία της στοιχειώδους αριθμητικής, Αριθμητική Πεάνο, δεν μπορεί πλέον να γίνει αποδεκτή. Αντίθετα, προτείνεται μια ιντουσιονιστική θεωρία της αριθμητικής που ονομάζεται Αριθμητική του Χέιτινγκ (Heyting Arithmetic) η οποία δεν περιέχει την αρχή του αποκλεισμένου τρίτου. Αν και η ιντουσιονιστική στοιχειώδης αριθμητική είναι πιο αδύναμη από την κλασική στοιχειώδη αριθμητική, η διαφορά δεν είναι τόσο μεγάλη. Υπάρχει μια απλή συντακτική μετάφραση που μεταφράζει όλα τα κλασικά θεωρήματα της αριθμητικής σε θεωρήματα που συμμορφώνονται στις ιντουσιονιστικές αρχές (Gödel, 1958).

Τις πρώτες δεκαετίες του εικοστού αιώνα, μέρη της μαθηματικής κοινότητας ήταν φιλικά προσκείμενα στη ιντουσιονιστική κριτική των κλασικών μαθηματικών και στην εναλλακτική που πρότεινε. Αυτή η κατάσταση άλλαξε όταν έγινε σαφές ότι στα ανώτερα μαθηματικά, η εναλλακτική του ιντουσιονισμού διαφέρει μάλλον δραστικά από την κλασική θεωρία. Για παράδειγμα, η μαθηματική ανάλυση κάτω από το πρίσμα του ιντουσιονισμού είναι μια αρκετά περίπλοκη θεωρία και είναι πολύ διαφορετική από την κλασική μαθηματική ανάλυση. Αυτό μείωσε τον ενθουσιασμό της μαθηματικής κοινότητας για το ιντουσιονιστικό έργο. Παρόλα αυτά, οι οπαδοί του Μπράουερ συνέχισαν να αναπτύσσουν τα μαθηματικά του ιντουσιονισμού μέχρι και σήμερα (Troelstra & van Dalen 1988).

1.3 Φορμαλισμός

Ο Ντέιβιντ Χίλμπερτ (David Hilbert) συμφώνησε με τους ιντουσιονιστές ότι υπάρχει μια αίσθηση στην οποία οι φυσικοί αριθμοί είναι βασικοί στα μαθηματικά. Αλλά σε αντίθεση με τους ιντουσιονιστές, ο Χίλμπερτ δεν θεώρησε τους φυσικούς αριθμούς ως νοητικές κατασκευές. Αντίθετα, υποστήριξε ότι οι φυσικοί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν σύμβολα. Τα σύμβολα είναι αυστηρά αφηρημένα αντικείμενα. Ωστόσο, είναι σημαντικό για τα σύμβολα να μπορούν να ενσωματωθούν από συγκεκριμένα αντικείμενα, επομένως μπορούμε να τα ονομάσουμε σχεδόν συγκεκριμένα αντικείμενα (Parsons 2008, κεφάλαιο 1) .

Ίσως οι φυσικές οντότητες θα μπορούσαν να παίξουν το ρόλο των φυσικών αριθμών. Για παράδειγμα, μπορεί να πάρουμε ένα συμπαγές ίχνος μελάνης της μορφής | να είναι ο αριθμός 0, ένα συγκεκριμένο ίχνος μελανιού || να είναι ο αριθμός 1 και ούτω καθεξής. Ο Χίλμπερτ θεώρησε αμφίβολο στην καλύτερη περίπτωση ότι τα ανώτερα μαθηματικά θα μπορούσαν να ερμηνευθούν άμεσα με έναν παρόμοιο απλό και ίσως ακόμη και συγκεκριμένο τρόπο. (Heyting,1930)

Σε αντίθεση με τους ιντουσιονιστές, ο Χίλμπερτ δεν ήταν διατεθειμένος να λάβει μια αναθεωρητική στάση απέναντι στο υπάρχον σώμα μαθηματικών γνώσεων. Αντίθετα, υιοθέτησε μια οργανοτεχνική στάση σε σχέση με τα ανώτερα μαθηματικά. Σκέφτηκε ότι τα ανώτερα μαθηματικά δεν είναι παρά ένα τυπικό παιχνίδι. Οι δηλώσεις των μαθηματικών ανώτερης τάξης είναι ανερμήνευτες σειρές συμβόλων. Η απόδειξη τέτοιων δηλώσεων δεν είναι παρά ένα

παιχνίδι στο οποίο τα σύμβολα χειραγωγούνται σύμφωνα με σταθερούς κανόνες. Το σημείο του «παιχνιδιού των ανώτερων μαθηματικών» συνίσταται, κατά την άποψη του Χίλμπερτ, στην απόδειξη δηλώσεων στοιχειώδους αριθμητικής, οι οποίες έχουν μια άμεση ερμηνεία (Hilbert 1925).

Ο Χίλμπερτ σκέφτηκε ότι δεν μπορεί να υπάρξει καμία εύλογη αμφιβολία για την ορθότητα της κλασικής Αριθμητικής Πεάνο — ή τουλάχιστον για την ορθότητα ενός υποσυστήματος αυτής που ονομάζεται Πρωταρχική Επαναλαμβανόμενη Αριθμητική (Primitive Recursive Arithmetic) (Tait 1981). Και σκέφτηκε ότι κάθε αριθμητική πρόταση που μπορεί να αποδειχθεί κάνοντας μια παράκαμψη στα ανώτερα μαθηματικά, μπορεί επίσης να αποδειχθεί απευθείας στην Αριθμητική Πεάνο. Μάλιστα, υποψιαζόταν έντονα ότι κάθε πρόβλημα στοιχειώδους αριθμητικής μπορεί να αποφασιστεί από τα αξιώματα της Αριθμητικής Πεάνο. Φυσικά η επίλυση αριθμητικών προβλημάτων στην αριθμητική είναι σε ορισμένες περιπτώσεις πρακτικά αδύνατη. Η ιστορία των μαθηματικών έχει δείξει ότι η "παράκαμψη" στα ανώτερα μαθηματικά μπορεί μερικές φορές να οδηγήσει σε απόδειξη μιας αριθμητικής δήλωσης που παρέχει περισσότερη πληροφορία από οποιαδήποτε καθαρά αριθμητική απόδειξη της ίδιας δήλωσης (Benacerraf και Putnam, 1983).

Ο Χίλμπερτ συνειδητοποίησε, αν και κάπως αμυδρά, ότι ορισμένες από τις πεποιθήσεις του μπορούν στην πραγματικότητα να θεωρηθούν ως μαθηματικές εικασίες. Για μια απόδειξη σε ένα επίσημο σύστημα ανώτερων μαθηματικών ή στοιχειώδους αριθμητικής είναι ένα πεπερασμένο συνδυαστικό αντικείμενο που μπορεί, με κωδικοποίηση modulo, να θεωρηθεί φυσικός αριθμός. Αλλά στη δεκαετία του 1920 οι λεπτομέρειες της κωδικοποίησης των αποδείξεων ως φυσικών αριθμών δεν ήταν ακόμη πλήρως κατανοητές (van der Hoeven & Moerdijk, 1984).

Κατά τη φορμαλιστική άποψη, μια ελάχιστη απαίτηση των τυπικών συστημάτων ανώτερων μαθηματικών είναι να είναι τουλάχιστον συνεπής. Διαφορετικά κάθε δήλωση στοιχειώδους αριθμητικής μπορεί να αποδειχθεί σε αυτά. Ο Χίλμπερτ είδε επίσης (και πάλι αμυδρά) ότι η συνέπεια ενός συστήματος ανώτερων μαθηματικών συνεπάγεται ότι αυτό το σύστημα είναι τουλάχιστον εν μέρει αριθμητικά ορθό. Έτσι ο Χίλμπερτ και οι μαθητές του ξεκίνησαν να

αποδείξουν δηλώσεις όπως η συνέπεια των τυπικών αξιωμάτων της μαθηματικής ανάλυσης. Φυσικά τέτοιες δηλώσεις θα πρέπει να αποδεικνύονται σε ένα «ασφαλές» μέρος των μαθηματικών, όπως η στοιχειώδης αριθμητική. Διαφορετικά, η απόδειξη δεν αυξάνει την πεποίθησή μας για τη συνέπεια της μαθηματικής ανάλυσης. Και, ευτυχώς, φαινόταν αρχικά εφικτό να γίνει αυτό, γιατί σε τελική ανάλυση οι δηλώσεις συνέπειας είναι, πάλι κωδικοποίηση modulo, αριθμητικές προτάσεις. Έτσι, για την ακρίβεια, ο Χίλμπερτ και οι μαθητές του έθεσαν ως στόχο να αποδείξουν τη συνέπεια, π.χ., των αξιωμάτων της μαθηματικής ανάλυσης στην κλασική αριθμητική Πεάνο. Αυτό το έργο ήταν γνωστό ως πρόγραμμα του Χίλμπερτ (Hilbert's Program) (Zach 2006). Αποδείχθηκε ότι ήταν πιο δύσκολο από όσο περίμεναν. Στην πραγματικότητα, δεν κατάφεραν καν να αποδείξουν τη συνέπεια των αξιωμάτων της Αριθμητικής Πεάνο στην Αριθμητική Πεάνο. (Kleene & Vesley, 1965)

Τότε ο Κέρτ Γκόντελ (Kurt Gödel) απέδειξε ότι υπάρχουν αριθμητικές δηλώσεις που δεν μπορούν να αποφασιστούν στην Αριθμητική Πεάνο (Gödel 1931). Αυτό έχει γίνει γνωστό ως το πρώτο του θεώρημα μη πληρότητας του Γκόντελ. Αυτό δεν προμήνυε καλό για το πρόγραμμα του Χίλμπερτ, αλλά άφησε ανοιχτό το ενδεχόμενο ότι η συνέπεια των ανώτερων μαθηματικών δεν είναι μία από αυτές τις αναποφάσιστες δηλώσεις. Δυστυχώς, ο Γκόντελ συνειδητοποίησε γρήγορα ότι, εκτός και αν η Αριθμητική Πεάνο είναι ασυνεπής, η συνέπεια της Αριθμητικής Πεάνο είναι ανεξάρτητη από την Αριθμητική Πεάνο. Αυτό είναι το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας του Γκόντελ. Τα θεωρήματα μη πληρότητας του Γκόντελ αποδεικνύεται ότι είναι γενικά εφαρμόσιμα σε όλες τις επαρκώς ισχυρές αλλά συνεπείς αναδρομικά αξιωματοποιήσιμες θεωρίες. Μαζί, συνεπάγονται ότι το πρόγραμμα του Χίλμπερτ αποτυγχάνει. Αποδεικνύεται ότι τα ανώτερα μαθηματικά δεν μπορούν να ερμηνευτούν με καθαρά οργανικό τρόπο. Τα ανώτερα μαθηματικά μπορούν να αποδείξουν αριθμητικές προτάσεις, όπως δηλώσεις συνέπειας, που είναι πέρα από τις δυνατότητες του Αριθμητική Πεάνο (Kreisel, 1959).

Όλα αυτά δεν σημαίνουν το τέλος του φορμαλισμού. Ακόμη και μπροστά στα θεωρήματα της μη πληρότητας, είναι συνεκτικό να υποστηρίξουμε ότι τα μαθηματικά είναι η επιστήμη των τυπικών συστημάτων (Kripke, 1965).

Μια εκδοχή αυτής της άποψης προτάθηκε από τον Κάρυ (Curry 1958). Από αυτή την άποψη, τα μαθηματικά αποτελούνται από μια συλλογή τυπικών συστημάτων που δεν έχουν καμία ερμηνεία ή αντικείμενο. Ο Κάρυ εδώ κάνει μια εξαίρεση για τα μετα-μαθηματικά. Σε σχέση με ένα επίσημο σύστημα, μπορεί κανείς να πει ότι μια πρόταση είναι αληθής αν και μόνο αν είναι απορρέουσα από το σύστημα. Αλλά σε ένα θεμελιώδες επίπεδο, όλα τα μαθηματικά συστήματα είναι στο ίδιο επίπεδο. Μπορεί να υπάρχουν το πολύ ρεαλιστικοί λόγοι για την προτίμηση ενός συστήματος έναντι ενός άλλου. Τα ασυνεπή συστήματα μπορούν να αποδείξουν όλες τις δηλώσεις και επομένως είναι άχρηστα. Έτσι, όταν ένα σύστημα διαπιστωθεί ότι είναι ασυνεπές, πρέπει να τροποποιηθεί. Είναι απλώς ένα μάθημα από τα θεωρήματα ατέλειας του Γκόντελ ότι ένα αρκετά ισχυρό συνεπές σύστημα δεν μπορεί να αποδείξει τη συνέπεια του. (Lubarsky & Schuster, 2012)

Υπάρχει μια αντίρρηση κατά της φορμαλιστικής θέσης του Κάρυ. Στην πραγματικότητα, οι μαθηματικοί δεν αντιμετωπίζουν όλα τα φαινομενικά συνεπή τυπικά συστήματα ως ίσα. Οι περισσότεροι από αυτούς δεν είναι πρόθυμοι να παραδεχτούν ότι η προτίμηση των αριθμητικών συστημάτων στα οποία η αριθμητική πρόταση που εκφράζει τη συνέπεια της Αριθμητικής Πεάνο είναι αναπτύξιμα ή παραγωγισιμα έναντι εκείνων στα οποία η άρνησή της είναι παραγωγισιμη, για παράδειγμα, μπορεί τελικά να εξηγηθεί με καθαρά πραγματιστικούς όρους. Πολλοί μαθηματικοί θέλουν να υποστηρίξουν ότι η αντιληπτή ορθότητα (ανακριβή) ορισμένων τυπικών συστημάτων πρέπει τελικά να εξηγηθεί από το γεγονός ότι περιγράφουν σωστά (λανθασμένα) ορισμένα θέματα. (Maietti & Sambin, 2007)

Ο Ντέλτεφσεν (Detlefsen) έχει τονίσει ότι τα θεωρήματα της μη πληρότητας δεν αποκλείουν ότι η συνοχή τμημάτων ανώτερων μαθηματικών που χρησιμοποιούνται στην πράξη για την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων που ενδιαφέρουν τους μαθηματικούς μπορεί να προσδιοριστεί αριθμητικά (Detlefsen 1986). Υπό αυτή την έννοια, κάτι μπορεί ίσως να διασωθεί από τις φλόγες, ακόμη κι αν η οργανοτεχνική στάση του Χίλμπερτ απέναντι σε όλα τα ανώτερα μαθηματικά είναι τελικά αβάσιμη. (Marion, 2003)

Μια άλλη προσπάθεια να διασωθεί ένα μέρος του προγράμματος του Χίλμπερτ έγινε από τον Ισαάκσον (Isaacson 1987). Υπερασπίζεται την άποψη ότι από κάποια άποψη, η Αριθμητική Πεάνο μπορεί τελικά να είναι πλήρης (Isaacson 1987). Υποστηρίζει ότι οι αληθινές προτάσεις που δεν μπορούν να αποφασιστούν στην Αριθμητική Πεάνο μπορούν να αποδειχθούν μόνο μέσω εννοιών υψηλότερης τάξης. Για παράδειγμα, η συνέπεια της Αριθμητικής Πεάνο μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή μέχρι έναν υπερπερασμένο αριθμό (Gentzen 1938). Αλλά η έννοια του υπερπερασμένου αριθμού είναι μια έννοια συνόλου, και ως εκ τούτου μη αριθμητική. Εάν οι μόνοι τρόποι απόδειξης της συνέπειας της αριθμητικής κάνουν ουσιαστική χρήση εννοιών που αναμφισβήτητα ανήκουν σε μαθηματικά ανώτερης τάξης, τότε η συνέπεια της αριθμητικής, παρόλο που μπορεί να εκφραστεί στη γλώσσα της Αριθμητικής Πεάνο, είναι ένα μη αριθμητικό πρόβλημα. Και γενικεύοντας από αυτό, μπορεί κανείς να αναρωτηθεί εάν η εικασία του Χίλμπερτ ότι κάθε πρόβλημα αριθμητικής μπορεί να αποφασιστεί από τα αξιώματα της Αριθμητικής Πεάνο μπορεί να μην είναι ακόμα αληθινή. (Moschovaris, 1973)

1.4 Κατηγορηματισμός

Ο κατηγορηματισμός δεν περιγράφεται συνήθως ως μια από τις σχόλες τις φιλοσοφίας των Μαθηματικών. Αλλά μόνο για αποσπασματικούς λόγους, πριν από την έλευση του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, ο κατηγορηματισμός δεν ανέβηκε στο επίπεδο εξέχουσας θέσης των άλλων σχολών.

Η προέλευση του κατηγορηματισμού βρίσκεται στο έργο του Ράσελ. Με βάση τον Πουανκαρέ (Poincaré), έφτασε στην ακόλουθη διάγνωση του παραδόξου Ράσελ. Το επιχείρημα του παραδόξου του Ράσελ ορίζει το R σύνολο όλων των συνόλων που δεν είναι μέλη του εαυτού τους, και σημειώνει ότι i) αν το R περιέχει τον εαυτό του, τότε το R πρέπει να είναι ένα σύνολο που δεν είναι μέλος του εαυτού του σύμφωνα με τον ορισμό του R , πράγμα που είναι αντιφατικό ii) αν το R δεν περιέχει τον εαυτό του, τότε το R είναι ένα από τα σύνολα που δεν είναι μέλος του εαυτού του, και επομένως περιέχεται στο R εξ ορισμού - επίσης μια αντίφαση.

Η διάγνωση Πουανκαρέ-Ράσελ αυτού του επιχειρήματος δηλώνει ότι αυτός ο ορισμός δεν επιλέγει καθόλου μια συλλογή: είναι αδύνατο να ορίσουμε μια συλλογή S από μια συνθήκη που αναφέρεται έμμεσα στον ίδιο το S . Αυτό ονομάζεται αρχή του φαύλου κύκλου. Οι ορισμοί που

παραβιάζουν την αρχή του φαύλου κύκλου ονομάζονται μη κατηγορηματικοί. Ένας υγιής ορισμός μιας συλλογής αναφέρεται μόνο σε οντότητες που υπάρχουν ανεξάρτητα από την καθορισμένη συλλογή. Τέτοιοι ορισμοί ονομάζονται κατηγορηματικοί (Weyl, 1921). Όπως επεσήμανε αργότερα ο Γκόντελ, ένας πλατωνιστής δεν θα έβρισκε αυτή τη συλλογιστική γραμμή μη πειστική. Εάν οι μαθηματικές συλλογές υπάρχουν ανεξάρτητα από την πράξη του καθορισμού, τότε δεν είναι αμέσως σαφές γιατί δεν θα μπορούσαν να υπάρξουν συλλογές που να μπορούν να οριστούν μόνο μη κατηγορηματικά (Gödel 1944).

Όλα αυτά οδήγησαν τον Ράσελ να αναπτύξει την απλή και τη διακλαδισμένη θεωρία των τύπων, στην οποία δημιουργήθηκαν συντακτικοί περιορισμοί που κάνουν τους μη κατηγορηματικούς ορισμούς άστοχους. Στην απλή θεωρία τύπων, οι ελεύθερες μεταβλητές στον καθορισμό τύπων κυμαίνονται σε οντότητες στις οποίες δεν ανήκει η συλλογή που θα οριστεί. Στη θεωρία διακλαδισμένων τύπων, απαιτείται επιπλέον το εύρος των δεσμευμένων μεταβλητών στον καθορισμό των τύπων να μην περιλαμβάνει τη συλλογή που θα οριστεί. Επισημάνθηκε στην ενότητα του Λογικισμού ότι η θεωρία τύπου του Ράσελ δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αναγωγή των μαθηματικών στη λογική. Αλλά ακόμη και εκτός αυτού, παρατηρήθηκε νωρίς ότι ειδικά στη θεωρία διακλαδισμένων τύπων είναι πολύ δύσκολο να επισημοποιηθούν τα συνηθισμένα μαθηματικά επιχειρήματα (Niekus, 2010).

Όταν ο Ράσελ στράφηκε σε άλλους τομείς της αναλυτικής φιλοσοφίας, ο Χέρμαν Γουέλ (Hermann Weyl) ανέλαβε την κατηγορηματική αιτία (Weyl 1918). Όπως ο Πουανκαρέ, ο Γουέλ δεν συμεριζόντανε την επιθυμία του Ράσελ να αναγάγει τα μαθηματικά στη λογική. Και ευθύς εξαρχής είδε ότι θα ήταν στην πράξη αδύνατο να εργαστεί κανείς σε μια θεωρία διακλαδισμένου τύπου. Ο Γουέλ ανέπτυξε μια φιλοσοφική στάση που είναι κατά μια έννοια ενδιάμεση ανάμεσα στον ιντουσιονισμό και τον πλατωνισμό. Θεώρησε τη συλλογή των φυσικών αριθμών ως απροβλημάτιστα δεδομένη. Αλλά η έννοια ενός αυθαίρετου υποσυνόλου των φυσικών αριθμών δεν θεωρήθηκε ότι δίνεται αμέσως στη μαθηματική διαίσθηση. Μόνο εκείνα τα υποσύνολα που καθορίζονται από αριθμητικές (δηλαδή, πρώτης τάξης) κατηγορήματα θεωρούνται ως κατηγορηματικά αποδεκτά (van Oosten, 2008).

Από τη μία πλευρά, προέκυψε ότι πολλοί από τους τυπικούς ορισμούς στη μαθηματική ανάλυση είναι μη κατηγορηματικοί. Για παράδειγμα, η ελάχιστη κλειστότητα μιας λειτουργίας σε ένα σύνολο ορίζεται συνήθως ως η τομή όλων των συνόλων που είναι κλειστά κάτω από εφαρμογές της λειτουργίας. Αλλά η ελάχιστη κλειστότητα είναι ένα από τα σεντ που κλείνουν στις εφαρμογές της λειτουργίας. Επομένως, ο ορισμός είναι μη κατηγορηματικός. Με αυτόν τον τρόπο, η προσοχή σταδιακά απομακρύνθηκε από την ανησυχία για τα παράδοξα των θεωρητικών συνόλων στον ρόλο της μη κατηγορηματικότητας στα κυρίαρχα μαθηματικά. Από την άλλη πλευρά, ο Χέρμαν Γουέλ έδειξε ότι είναι συχνά εφικτό να παρακάμψουμε μη κατηγορηματικές έννοιες. Προέκυψε μάλιστα ότι το μεγαλύτερο μέρος της κυρίαρχης μαθηματικής ανάλυσης του δέκατου ένατου αιώνα μπορεί να δικαιολογηθεί σε κατηγορηματική βάση (Feferman 1988).

Στη δεκαετία του 1920 παρενέβη η Ιστορία. Ο Γουέλ κέρδισε το πιο ριζοσπαστικό ιντουσιονιστικό έργο του Μπράουερ. Εν τω μεταξύ, οι μαθηματικοί πείσθηκαν ότι η εξαιρετικά μη κατηγορηματική θεωρία των υπερπεπερασμένων συνόλων που αναπτύχθηκε από τον Καντόρ (Cantor) και τον Ζερμέλο (Zermelo) απειλούνταν λιγότερο από το παράδοξο του Ράσελ από ό,τι υποπτευόταν προηγουμένως. Αυτοί οι παράγοντες προκάλεσαν την πτώση του κατηγορηματισμού σε μια αδρανή κατάσταση για αρκετές δεκαετίες (Prawitz, 1977).

Βασιζόμενος στην εργασία στη θεωρία της γενικευμένης αναδρομής, ο Φέφερμαν (Feferman) επέκτεινε το κατηγορηματικό έργο στη δεκαετία του 1960. Συνειδητοποίησε ότι η στρατηγική του Γουέλ μπορούσε να επαναληφθεί στο υπερπερασμένο. Επίσης, εκείνα τα σύνολα αριθμών που μπορούν να οριστούν χρησιμοποιώντας ποσοτικοποίηση σε σχέση με τα σύνολα που ο Γουέλ θεώρησε ως κατηγορηματικά δικαιολογημένα, θα πρέπει να υπολογίζονται ως κατηγορηματικά αποδεκτά και ούτω καθεξής. Αυτή η διαδικασία μπορεί να διαδοθεί κατά μήκος μιας σειριακής διαδρομής. Αυτή η σειριακή διαδρομή εκτείνεται τόσο μακριά στο υπερπερασμένο όσο φτάνουν οι κατηγορηματικές διατακτικές, όπου μια διατακτική είναι κατηγορηματική εάν μετρά το μήκος μιας αποδείξιμης καλής διάταξης των φυσικών αριθμών. Αυτή η βαθμονόμηση της ισχύος των κατηγορηματικών μαθηματικών, η οποία οφείλεται στον Φέφερμαν και (ανεξάρτητα) Σούτε (Schütte), είναι σήμερα αρκετά γενικά αποδεκτή. Στη

συνέχεια ο Φέφερμαν διερεύνησε πόσο μεγάλο μέρος της τυπικής μαθηματικής ανάλυσης μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσα σε ένα πλαίσιο του κατηγορηματισμού. Η έρευνα του Φέφερμαν και άλλων κυρίως του Χάρβεϊ Φρίντμαν (Harvey Friedman) δείχνει ότι το μεγαλύτερο μέρος της ανάλυσης του εικοστού αιώνα είναι αποδεκτό από μια οπτική του κατηγορηματισμού. Αλλά είναι επίσης σαφές ότι δεν είναι όλα τα σύγχρονα μαθηματικά που είναι γενικά αποδεκτά από τη μαθηματική κοινότητα αποδεκτά από τη σκοπιά του κατηγορηματισμού: η θεωρία των διαπερασμένων συνόλων είναι ένα παράδειγμα (Parsons, 1986).

Από πολλούς ο κατηγορηματισμός θεωρείται να είναι το πρώτο πιο συγκεκριμένο παρακλάδι του κονστρουκτιβισμού (θα αναφερθούμε αναλυτικότερα σε επόμενη ενότητα) και ο πρόδρομος του ιντουσιονισμού. Θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως κονστρουκτιβισμός σε σχέση με τους ορισμούς των συνόλων (αλλά όχι σε σχέση με τη χρήση της λογικής): τα σύνολα κατασκευάζονται «από κάτω», όχι με το να τα ξεχωρίζουμε από μια μεγαλύτερη ολότητα που θεωρήθηκε ως υπάρχουσα προηγουμένως (Detlefsen, 1986).

2 Μετανεωτερικότητα και βασικοί όροι της

2.1 Μετανεωτερικότητα

Το ότι ο όρος μετανεωτερικότητα ή αλλιώς μεταμοντερνισμός είναι απροσδιόριστος είναι αληθές. Ωστόσο, μπορεί να περιγραφεί ως ένα σύνολο κριτικών, στρατηγικών και ρητορικών πρακτικών που χρησιμοποιούν έννοιες όπως η διαφορά, η επανάληψη, το ίχνος, το simulacrum και η υπερπραγματικότητα για να αποσταθεροποιήσουν άλλες έννοιες όπως η παρουσία, η ταυτότητα, η ιστορική πρόοδος, η επιστημική βεβαιότητα και η μονοφωνία νοήματος.

Ο όρος «μεταμοντερνισμός» εισήλθε για πρώτη φορά στο φιλοσοφικό λεξικό το 1979, με τη δημοσίευση της Μεταμοντέρνας Συνθήκης του Ζαν-Φρανσουά Λυοτάρντ (Jean-François Lyotard). Οι Γάλλοι εργάζονται με έννοιες που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια της στρουκτουραλιστικής επανάστασης στο Παρίσι τη δεκαετία του 1950 και τις αρχές της δεκαετίας του 1960, συμπεριλαμβανομένων των στρουκτουραλιστικών αναγνώσεων του Μαρξ και του

Φρόντ. Για το λόγο αυτό αποκαλούνται συχνά «μεταστρουκτουραλιστές». Αναφέρουν επίσης τα γεγονότα του Μαΐου του 1968 ως ορόσημο για τη σύγχρονη σκέψη και τους θεσμούς της, ιδιαίτερα τα πανεπιστήμια. Οι Ιταλοί, αντίθετα, βασίζονται σε μια παράδοση αισθητικής και ρητορικής που περιλαμβάνει μορφές όπως ο Τζιαμπατίστα Βικό (Giambattista Vico) και ο Μπενεντέτο Κροκέ (Benedetto Croce). Η έμφαση τους είναι έντονα ιστορική και δεν δείχνουν γοητεία για μια επαναστατική στιγμή. Αντίθετα, τονίζουν τη συνέχεια, την αφήγηση και τη διαφορά εντός της συνέχειας, παρά τις αντιστρατηγικές και τα κενά λόγου. Καμία πλευρά, ωστόσο, δεν προτείνει ότι ο μεταμοντερνισμός είναι μια επίθεση κατά της νεωτερικότητας ή μια πλήρης απομάκρυνση από αυτήν. Μάλλον, οι διαφορές του βρίσκονται στην ίδια τη νεωτερικότητα και η μετανεωτερικότητα είναι η συνέχεια της σύγχρονης σκέψης σε άλλο τρόπο

Η νεωτερικότητα που συζητείται στην μετανεωτερικότητα ξεκινά με την «Κοπερνίκεια επανάσταση» του Κάντ, δηλαδή την υπόθεση του ότι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τα πράγματα από μόνα τους και ότι τα αντικείμενα γνώσης πρέπει να συμμορφώνονται με τις ικανότητές μας αναπαράστασης (Kant 1787). Ιδέες όπως ο Θεός, η ελευθερία, η αθανασία, ο κόσμος, η πρώτη αρχή και το τελικό τέλος έχουν μόνο μια ρυθμιστική λειτουργία για τη γνώση, αφού δεν μπορούν να βρουν ικανοποιητικές περιπτώσεις μεταξύ των αντικειμένων της εμπειρίας. Με τον Χέγκελ (Hegel), η αμεσότητα της ίδιας της σχέσης υποκειμένου-αντικειμένου αποδεικνύεται απατηλή. Όπως δηλώνει στη Φαινομενολογία του Πνεύματος (The Phenomenology of Spirit), «βρίσκουμε ότι ούτε το ένα ούτε το άλλο είναι άμεσα παρόντα στην αίσθηση-βεβαιότητα, αλλά το καθένα διαμεσολαβεί ταυτόχρονα» (Hegel 1807), επειδή υποκείμενο και αντικείμενο είναι και τα δύο περιπτώσεις ενός «αυτό» και ενός «τώρα», κανένα από τα οποία δεν γίνεται αντιληπτό αμέσως. Επομένως, η αποκαλούμενη άμεση αντίληψη δεν έχει τη βεβαιότητα της ίδιας της αμεσότητας, μια βεβαιότητα που πρέπει να αναβληθεί στην επεξεργασία ενός ολοκληρωμένου συστήματος εμπειρίας. Ωστόσο, μεταγενέστεροι στοχαστές επισημαίνουν ότι η λογική του Χέγκελ προϋποθέτει έννοιες, όπως η ταυτότητα και η άρνηση, οι οποίες δεν μπορούν να γίνουν αποδεκτές ως άμεσα δεδομένες και οι οποίες επομένως πρέπει να ληφθούν υπόψη με κάποιον άλλο, μη διαλεκτικό τρόπο.

Ο τελευταίος δέκατος ένατος αιώνας είναι η εποχή της νεωτερικότητας ως μια πραγματικότητα που έχει επιτευχθεί, όπου η επιστήμη και η τεχνολογία, συμπεριλαμβανομένων των δικτύων μαζικής επικοινωνίας και μεταφορών, αναδιαμορφώνουν τις ανθρώπινες αντιλήψεις. Δεν υπάρχει σαφής διάκριση, λοιπόν, μεταξύ του φυσικού και του τεχνητού στην εμπειρία. Πράγματι, πολλοί υποστηρικτές του μεταμοντερνισμού αμφισβητούν τη βιωσιμότητα μιας τέτοιας διάκρισης tout court, βλέποντας στον επιτεύξιμο μοντερνισμό την εμφάνιση ενός προβλήματος που η φιλοσοφική παράδοση έχει καταστείλει. Μια συνέπεια του επιτεύξιμου μοντερνισμού είναι αυτό που οι μεταμοντερνιστές θα μπορούσαν να αναφέρουν ως αποπραγμάτωση.

Η αποπραγμάτωση επηρεάζει τόσο το υποκείμενο όσο και τα αντικείμενα της εμπειρίας, έτσι ώστε η αίσθηση της ταυτότητας, της σταθερότητας και της ουσίας τους αναστατώνεται ή διαλύεται. Σημαντικοί πρόδρομοι αυτής της έννοιας βρίσκονται στον Κίρκεγκαρντ (Kierkegaard), τον Μαρξ (Marx) και τον Νίτσε (Nietzsche). Ο Κίρκεγκαρντ, για παράδειγμα, περιγράφει τη σύγχρονη κοινωνία ως ένα δίκτυο σχέσεων στο οποίο τα άτομα ισοπεδώνονται σε ένα αφηρημένο φάντασμα γνωστό ως «το κοινό» (Kierkegaard 1846, 59). Το σύγχρονο κοινό, σε αντίθεση με τις αρχαίες και μεσαιωνικές κοινότητες, είναι δημιούργημα του Τύπου, που είναι το μόνο όργανο ικανό να συγκρατήσει τη μάζα των εξωπραγματικών ατόμων «που ποτέ δεν είναι και ποτέ δεν μπορούν να ενωθούν σε μια πραγματική κατάσταση ή οργάνωση» (Kierkegaard 1846, 60). Υπό αυτή την έννοια, η κοινωνία έχει γίνει μια πραγμάτωση της αφηρημένης σκέψης, που συγκρατείται από ένα τεχνητό και διάχυτο μέσο που μιλά για όλους και για κανέναν. Στον Μαρξ, από την άλλη πλευρά, έχουμε μια ανάλυση του φετιχισμού των εμπορευμάτων (Marx 1867, 444–461) όπου τα αντικείμενα χάνουν τη στερεότητα της αξίας χρήσης τους και γίνονται φασματικές φιγούρες υπό την όψη της ανταλλακτικής αξίας. Η απόκοσμη φύση τους προκύπτει από τη απορρόφηση των κληρονόμων σε ένα δίκτυο κοινωνικών σχέσεων, όπου οι αξίες τους κυμαίνονται ανεξάρτητα από τη σωματική τους υπόσταση. Τα ίδια τα ανθρώπινα υποκείμενα βιώνουν αυτήν την αποπραγμάτωση επειδή τα εμπορεύματα είναι προϊόντα της εργασίας τους. Οι εργαζόμενοι παραδόξως χάνουν την ύπαρξή τους στην συνειδητοποίηση του εαυτού τους, και αυτό γίνεται εμβληματικό για εκείνους που δηλώνουν μια μεταμοντέρνα ευαισθησία (Field, 1980).

Προτάσεις αποπραγματοποίησης βρίσκουμε επίσης στον Νίτσε, ο οποίος μιλά για το ότι είναι «η τελευταία πνοή μιας πραγματικότητας που εξατμίζεται» και παρατηρεί τη διάλυση της διάκρισης μεταξύ «πραγματικού» και «φαινομενικού» κόσμου. Στο βιβλίο Το Λυκόφως των Ειδώλων (Twilight of the Idols) ο Νίτσε ανιχνεύει την ιστορία αυτής της διάκρισης από τον Πλάτωνα μέχρι τη δική του εποχή, όπου ο «αληθινός κόσμος» γίνεται μια άχρηστη και περιττή ιδέα (Nietzsche 1889, 485–86). Ωστόσο, με την έννοια του αληθινού κόσμου, λέει, καταργήσαμε και τον φαινομενικό. Αυτό που απομένει δεν είναι ούτε πραγματικό ούτε φαινομενικό, αλλά κάτι ενδιάμεσο, και επομένως κάτι παρόμοιο με την εικονική πραγματικότητα μιας πρόσφατης περασμένης εποχής.

Η μετανεωτερικότητα απορρίπτει έναν μόνο έγκυρο τρόπο θέασης των μαθηματικών, των δασκάλων και των μαθητών, γιατί ο καθένας μπορεί να δει και να ερμηνευτεί με πολλούς τρόπους. Τα μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν αξιωματικά και λογικά που οδηγούν σε αναμφισβήτητα συμπεράσματα, αλλά μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως διαισθητικά και παιχνιδιάρικα, ανοιχτά, με εκπλήξεις και χιούμορ, όπως αποδεικνύεται σε δημοφιλείς μαθηματικές εικόνες και κινούμενα σχέδια. Επιπλέον μπορεί να φανεί στις εφαρμογές του στην επιστήμη, τις τεχνολογίες της πληροφορίας και των επικοινωνιών, καθώς και στην καθημερινή ζωή. Όλες αυτές οι διαστάσεις είναι μέρος αυτού που συνθέτουν τα μαθηματικά και όλες συνυπάρχουν με επιτυχία.

Αυτή η προοπτική βεβαιώνει ότι δεν υπάρχει τέτοιο πράγμα όπως τα μαθηματικά. Δεν υπάρχει μοναδικό αντικείμενο με το όνομα του όρου. Δεν υπάρχει μοναδική ή σταθερή ταυτότητα για τις διάφορες σφαίρες γνώσης, δραστηριότητες, πρακτικές, μορφές, ταυτότητες ή τοποθεσίες που επισημαίνονται από τον όρο. Ωστόσο, τα μαθηματικά (στον πληθυντικό) υπάρχουν - προφανώς υπάρχει μια πολλαπλότητα που υποδηλώνεται από αυτόν τον όρο που ποικίλλει ανάλογα με τους χρόνους, τους τόπους και τους σκοπούς για τους οποίους επικαλούνται (Veldman, 1976). Αυτά τα διαφορετικά μαθηματικά φέρουν αυτό που ο Βιτγκενστάιν (Wittgenstein) ονομάζει οικογενειακή ομοιότητα. Δεν υπάρχει κανένας ουσιαστικός καθοριστικός χαρακτήρας που να τον μοιράζονται όλοι, αλλά σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό, σχετίζονται αναγνωρίσιμα.

Είναι επίσης σημαντικό να αναγνωρίσουμε ότι όλα τα ανθρώπινα υποκείμενα έχουν πολλαπλούς εαυτούς και ότι όλοι (μαθηματικοί, δάσκαλοι και μαθητές - και είμαστε πάντα και οι τρεις) έχουμε πρόσβαση σε διαφορετικούς εαυτούς: έγκυροι γνώστες, ερευνητές, μαθητές, εκτιμητές και καταναλωτές δημοφιλών και άλλους πολιτισμούς, καθώς και να έχουν μη ακαδημαϊκούς εαυτούς .

2.2 Αποδόμηση

Η αποδόμηση (Deconstruction) είναι μια μέθοδος, που προέρχεται σε μεγάλο βαθμό από τον έ Ζακ Ντεριντά (Jacques Derrida) Αλγερινής καταγωγής Γάλλος φιλόσοφος και τα έργα του: *Of Grammatology* in English 1974, *Writing and Difference* (στα αγγλικά 1978) και *Speech and Phenomena* (in English 1973). Η αποδόμηση είναι και θεωρία και πράξη, και εφαρμόζεται πιο συγκεκριμένα σε έναν τρόπο ανάγνωσης κειμένων. Έτσι διαφοροποιείται ελαφρώς από τον μεταστρουκτουραλισμό, ο οποίος, ενώ έχει εννοιολογικές και διαδικαστικές ομοιότητες με την αποδόμηση, είναι περισσότερο φιλοσοφία ή άποψη. Ο μεταστρουκτουραλισμός έχει επίσης να κάνει περισσότερο με τη γλωσσολογία, ενώ η αποδόμηση είναι μια μέθοδος που θεωρητικά μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε είδους πειθαρχία ή πολιτιστικό προϊόν . Η αποδόμηση συνδέεται σε μεγάλο βαθμό με τη σκέψη του Ζακ Ντεριντά και τα γραπτά του Πωλ ντε Μαν (Paul de Man) (1919–1983). Αρχικά επικεντρώθηκε στη φιλοσοφία και τη λογοτεχνική θεωρία, έχει εφαρμοστεί σε τομείς που κυμαίνονται από την αρχιτεκτονική έως τη θεολογία Ο Χάιντεγκερ (1889–1976), ζητώντας τον τερματισμό της δυτικής μεταφυσικής παράδοσης, είχε προωθήσει την έννοια του *Abbau* ή « ανοικοδόμησης » και είχε ζητήσει επίσης οι υπάρχουσες έννοιες να υπόκεινται σε «καταστροφή» που θα τις επανατοποθετούσε στρατηγικά (Tieszen,1994). Ο Ντεριντά δανείστηκε τις έννοιες του Χάιντεγκερ με δύο μεγάλες αλλαγές: αφαίρεσε κάθε υπολειπόμενη ρομαντική θλίψη είτε από τη διαδικασία της ίδιας της ανοικοδόμησης είτε από την ανάκληση της μεταφυσικής παράδοσης, και το έκανε λιγότερο οντολογικό έργο παρά διαδικασία ανάγνωσης κειμένων. Έτσι, η ιδέα του Ντεριντά για την «αποδόμηση» στρεφόταν λιγότερο ενάντια στις μεταφυσικές απόλυτες καθαυτές, τις οποίες ο Χάιντεγκερ και άλλοι είχαν ήδη αμφισβητήσει, αλλά ενάντια στο είδος της καθαρής παρουσίας, που δεν επηρεαζόταν από

ίχνη ή κειμενικότητα, που ο Ντεριντά έβλεπε ακόμη και σε έργο τόσο αυστηρό όσο αυτό του Έντμουντ Χούσερλ (Edmund Husserl).

Στην ανάγνωση του Φαιδρού στη Διάδοση του Πλάτωνα (1967, μεταφρασμένο στα αγγλικά ως Διάδοση, 1978), ο Ντεριντά τερματίζει τη διάκριση που γίνεται στον διάλογο του Πλάτωνα μεταξύ του λόγου, ο οποίος είναι προνομιακός επειδή φαίνεται αυθόρμητο προϊόν, ενώ η γραφή θεωρείται ως «δηλητήριο». Μία επιβεβλημένη προσθήκη που συμπυκνώνει μόνο την παρουσία του λόγου ή εμφανίζει την απουσία του. Ο Ντεριντά αντιστρέφει αυτούς τους όρους, βλέποντας τη γραφή ως τη βάση του λόγου και τον λόγο ως ανίκανο να επιβιώσει εννοιολογικά από μόνος του, αλλά πέφτει σε ένα είδος διάχυτης κειμενικότητας ή αρχέγραφης γραφής, όπως γνωρίζουμε μόνο την ομιλία επειδή συγκρίνεται με τη γλώσσα και τη γραφή. υπόκεινται σε μοντέλα γλωσσικής αναπαράστασης .

Χαρακτηριστικά, ο Ντεριντά αντιστρέφει τη συνηθισμένη ιεραρχία. Το κάνει αυτό όχι για να ανυψώσει νέες δικές του απολυτότητες, αλλά για να αποσταθεροποιήσει το δεδομένο, για να προωθήσει αυτό που αποκαλεί *différance*, ένα ειδικό είδος «διαφοροποίησης» που διασφαλίζει ότι το νόημα δεν είναι ποτέ εντελώς «εκεί». Όταν γίνεται σε σχέση με τη δυαδική αντίθεση της γραφής και του λόγου, μπορεί πιθανώς να θέσει υπό διαγραφή οποιαδήποτε υπάρχουσα αντίθεση (για παράδειγμα, ολότητα έναντι κατακερματισμού, εσωτερική έναντι εξωτερικής), αποκαλύπτοντας ότι οι όροι της μπορεί να μην είναι τόσο αντίθετοι όσο αρχικά φαίνονται (Brouwer, 1975).

Για τον Ντεριντά, ο μετέπειτα Χάιντεγκερ πέτυχε, όχι να εξαπολύσει μια αποδομητική κριτική της ερμηνευτικής φαινομενολογίας, αλλά απλώς να την ανεβάσει σε μια άλλη βαθμίδα σε μια ερμηνευτική της διαφοράς σε δύο έννοιες του ρήματος «διαφέρω» (*différer*): «διαφέρω» και «αναβάλλω». Με αυτόν τον τρόπο, ο όρος *différance* επιχειρεί να ονομάσει το γεγονός ότι η γνωσιακή (δηλαδή, αντιληπτική και διανοητική) εμπειρία του να είμαστε στον κόσμο δημιουργείται θεμελιωδώς ως μια δυναμική διαδικασία διαφοροποίησης και ότι ο μη αναγώγιμος τρόπος αυτής της διαφοροποίησης είναι αυτός του «χρονισμού» (αναβολή) και του «διαστήματος» (διαφοροποίησης) ως αλληλεξαρτώμενες πτυχές της ίδιας διαδικασίας (και όχι

ως μεταφυσικές ουσίες, «χώρος» και «χρόνος») . Η σκέψη του Ντερριντά για τη διαφορετικότητα έχει ερμηνευθεί σε μεγάλο βαθμό με όρους γλώσσας, δεδομένης της αποδομητικής έμφασης του στην κειμενικότητα, και κατά συνέπεια η ριζοσπαστική φιλοσοφική σημασία της έχει υποτιμηθεί. Η έννοια της διαφοράς ανοίγει το δρόμο για μια μη μεταφυσική και κριτική αντίληψη του τρόπου γνωστικότητάς μας και ανακτά μια σκέψη της διαφοράς η οποία, ενώ έχει επανειλημμένα επαναληφθεί στην ιστορία της δυτικής σκέψης, έχει ουσιαστικά κατασταλεί από μια μεταφυσική της ουσίας που έχει κορεστεί σε κάθε διάσταση του δυτικού πολιτισμού.

2.3 Ίχνος

Πρέπει να επισημανθεί ότι όλες οι ανατροπές της αποδόμησης (συμπεριλαμβανομένης της αρχέγραφης γραφής) είναι εν μέρει αιχμάλωτες του οικοδομήματος που επιδιώκουν να ανατρέψουν. Για τον Ντερριντά, « πάντα κατοικεί κανείς, και μάλιστα όταν δεν το υποψιάζεται » (Derrida 1976), και είναι σημαντικό να αναγνωριστεί ότι η απλή αντιστροφή μιας υπάρχουσας μεταφυσικής αντίθεσης μπορεί να μην αμφισβητεί επίσης το κυβερνητικό πλαίσιο και τις προϋποθέσεις που επιχειρείται να αντιστραφούν (Derrida 1978). Συνεπώς, η αποδόμηση δεν μπορεί να αρκестεί στο να δώσει απλώς προτεραιότητα στη γραφή έναντι του λόγου, αλλά πρέπει επίσης να επιτύχει τη δεύτερη σημαντική πτυχή των διπλών στρατηγικών της αποδόμησης, δηλαδή να διαφθείρει και να μολύνει την ίδια την αντίθεση.

Ο Ντερριντά πρέπει να τονίσει ότι οι κατηγορίες που στηρίζουν και διασφαλίζουν κάθε δυϊσμό είναι πάντα ήδη διαταραγμένες και εκτοπισμένες. Για να επιτύχει αυτή τη δεύτερη πτυχή των στρατηγικών προθέσεων της αποδόμησης, ο Ντερριντά συνήθως επινοεί έναν νέο όρο, ή επεξεργάζεται έναν παλιό, για να διαταράξει μόνιμα τη δομή στην οποία έχει παρέμβει - παραδείγματα αυτού περιλαμβάνουν τη συζήτησή του για το φάρμακον στον Πλάτωνα (φάρμακο ή βάμμα, θεραπευτικό ή κακόβουλο). Για να διατυπωθεί το πρόβλημα με ελαφρώς διαφορετικούς όρους, το επιχείρημα του Ντερριντά είναι ότι, εξετάζοντας μια δυαδική αντίθεση, η αποδόμηση καταφέρνει να αποκαλύψει ένα ίχνος. Αυτό δεν είναι ένα ίχνος των αντιθέσεων που έχουν έκτοτε αποδομηθεί - αντίθετα, το ίχνος αυτό είναι μια ρήξη μέσα στη μεταφυσική, ένα μοτίβο αναντιστοιχιών όπου το μεταφυσικό τρίβεται πάνω στο μη μεταφυσικό, που είναι

δουλειά της αποδόμησης να αντιπαραβάλει όσο καλύτερα μπορεί. Το ίχνος δεν εμφανίζεται ως τέτοιο (Derrida 1976), αλλά η λογική της διαδρομής του σε ένα κείμενο μπορεί να μιμηθεί από μια αποδομητική παρέμβαση και, ως εκ τούτου, να αναδειχθεί.

2.4 Διάδοση

Ο Ντερριντά επίσης εισήγαγε τον όρο «Διάδοση» (Dissemination) . Όπως ο όρος *différance* του Ντερριντά, η «διάδοση» δεν μπορεί απλώς να οριστεί ακριβώς επειδή ονομάζει τη διαδικασία με την οποία δημιουργείται το «νόημα» χωρίς ποτέ να καθορίζεται αυστηρά ή να δίνεται με τον τρόπο που υποτίθεται ότι κάνει ένας ορισμός. Η συμβατική έννοια του όρου, «διανέμω, διασκορπίζω, διαχέω», υποδηλώνει τη διαδικασία με την οποία, στη γλώσσα, η έννοια οποιουδήποτε όρου ή συνόλου όρων κατανέμεται και διαχέεται σε όλο το γλωσσικό σύστημα χωρίς ποτέ να φτάσει σε ένα τελικό τέλος. . Η λέξη προέρχεται από το λατινικό *disseminare*, από το *dis-*, *apart*, και *seminare*, το *sow*, από το *semen seed*. Ο Ντερριντά παίζει με αυτήν την αίσθηση της αναπαραγωγικής γονιμότητας: ένα είδος αυτο-σποράς λειτουργίας της γλώσσας και του λόγου. Η διάδοση εμπλέκεται στενά με δύο έννοιες του Ντερριντά: διαφορά (ή *différance*) και το ίχνος. Μπορεί να γίνει κατανοητό ότι λειτουργεί σε δύο αλληλένδετα επίπεδα ή με δύο προεκτάσεις του έννοια. Από αυτές, το ευρύτερο σε εύρος είναι αυτό που συνδέεται κυρίως με έννοιες της κειμενικότητας, της διακειμενικότητας και του κειμένου, αλλά και με αυτήν του λόγου. Το στενότερο πεδίο εφαρμογής συνδέεται πιο συγκεκριμένα με τη μεταδομική μετατόπιση ή μετασχηματισμό της δομικής γλωσσολογίας και σημειωτικής .

2.5 Υπερπραγματικότητα

Η υπερπραγματικότητα, στον μεταμοντερνισμό, είναι η αδυναμία της συνείδησης να διακρίνει την πραγματικότητα από μια προσομοίωση της πραγματικότητας, ιδίως στις τεχνολογικά προηγμένες μεταμοντέρνες κοινωνίες. Η υπερπραγματικότητα θεωρείται ως μια κατάσταση

στην οποία αυτό που είναι πραγματικό και αυτό που είναι μυθοπλασία αναμειγνύονται άφουγα μεταξύ τους, έτσι ώστε να μην υπάρχει σαφής διάκριση μεταξύ του πού τελειώνει το ένα και πού αρχίζει το άλλο. Επιτρέπει τον συνδυασμό της φυσικής πραγματικότητας με την εικονική πραγματικότητα (Virtual Reality) και της ανθρώπινης νοημοσύνης με την τεχνητή νοημοσύνη (Artificial Intelligence).

Η μετανεωτερική σημειωτική έννοια της «υπερπραγματικότητας» επινοήθηκε από τον Γάλλο κοινωνιολόγο Ζαν Μποντριγιάρ (Jean Baudrillard) στο βιβλίο του Ομοιώματα και Προσομοίωση (Simulacra and Simulation). Ο Μποντριγιάρ όρισε την υπερπραγματικότητα ως την παραγωγή από μοντέλα ενός πραγματικού χωρίς προέλευση ή πραγματικότητα- η υπερπραγματικότητα είναι μια αναπαράσταση, ένα σημείο, χωρίς αρχικό σημείο αναφοράς. Σύμφωνα με τον Μποντριγιάρ, τα εμπορεύματα σε αυτή τη θεωρητική κατάσταση δεν έχουν αξία χρήσης, όπως την όρισε ο Καρλ Μαρξ, αλλά μπορούν να κατανοηθούν ως σημεία, όπως τα όρισε ο Φέρντιναντ ντε Σωσέρ (Ferdinand de Saussure).

Πιστεύει ότι η υπερπραγματικότητα πηγαίνει παραπέρα από τη σύγχυση ή την ανάμειξη του "πραγματικού" με το σύμβολο που το αναπαριστά- περιλαμβάνει τη δημιουργία ενός συμβόλου ή ενός συνόλου σημαινόντων που αναπαριστούν κάτι που δεν υπάρχει στην πραγματικότητα, όπως ο Άγιος Βασίλης. Ο Μποντριγιάρ δανείζεται, από το βιβλίο του Χόρχε Λουίς Μπόρχες (Jorge Luis Borges) «Περί ακρίβειας στην επιστήμη» (On Exactitude in Science) που είχε ήδη δανειστεί από τον Λιούις Κάρολ (Lewis Carroll), το παράδειγμα μιας κοινωνίας της οποίας οι χαρτογράφοι δημιουργούν έναν χάρτη τόσο λεπτομερή που καλύπτει τα ίδια τα πράγματα για τα οποία σχεδιάστηκε να αναπαραστήσει. Όταν η αυτοκρατορία παρακμάζει, ο χάρτης χάνεται στο τοπίο. Λέει ότι, σε μια τέτοια περίπτωση, δεν παραμένει ούτε η αναπαράσταση ούτε το πραγματικό, αλλά μόνο το υπερρεαλιστικό.

Η ιδέα του Μποντριγιάρ για την υπερπραγματικότητα επηρεάστηκε σε μεγάλο βαθμό από τη φαινομενολογία, τη σημειωτική και Μάρσαλ ΜακΛούχαν (Marshall McLuhan). Ο Μποντριγιάρ ωστόσο, αμφισβητεί τη διάσημη δήλωση του ΜακΛούχαν ότι «το μέσο είναι το μήνυμα», υποδηλώνοντας ότι οι πληροφορίες καταβροχθίζουν το δικό τους περιεχόμενο. Το πρότεινε επίσης υπάρχει διαφορά μεταξύ των μέσων ενημέρωσης και της πραγματικότητας και αυτού

που αντιπροσωπεύουν. Υπερπραγματικότητα είναι η αδυναμία της συνείδησης να διακρίνει την πραγματικότητα από μια προσομοίωση της πραγματικότητας, ειδικά σε τεχνολογικά προηγμένες κοινωνίες. Ωστόσο, η θεωρία της υπερπραγματικότητας του Μποντριγιάρ προχωρά ένα βήμα παραπέρα από τη θεωρία του μέσου του Μακλούχαν: «Δεν υπάρχει μόνο μια κατάρρευση του μηνύματος στο μέσο, υπάρχει, στην ίδια κίνηση, η κατάρρευση του ίδιου του μέσου στο πραγματικό, η κατάρρευση του μέσο και του πραγματικού σε ένα είδος υπερπραγματικού νεφελώματος, στο οποίο ακόμη και ο ορισμός και η διακριτή δράση του μέσου δεν μπορούν πλέον να προσδιοριστούν.

Η υπερπραγματικότητα είναι σημαντική ως παράδειγμα για να εξηγήσει τις τρέχουσες πολιτισμικές συνθήκες. Ο καταναλωτισμός, λόγω της εξάρτησής του από την αξία ανταλλαγής προσώπων (π.χ. η μάρκα X δείχνει ότι κάποιος είναι της μόδας, το αυτοκίνητο Y δείχνει τον πλούτο κάποιου), θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένας παράγοντας που συμβάλλει στη δημιουργία της υπερπραγματικότητας ή της υπερπραγματικής συνθήκης. Η υπερπραγματικότητα ξεγελάει τη συνείδηση ώστε να αποσπαστεί από οποιαδήποτε πραγματική συναισθηματική εμπλοκή, αντί αυτού να επιλέγει τεχνητή προσομοίωση και ατελείωτες αναπαραγωγές θεμελιωδώς άδειας εμφάνισης. Ουσιαστικά (αν και ο ίδιος ο Μποντριγιάρ μπορεί να διστάζει με τη χρήση αυτής της λέξης), η ολοκλήρωση ή η ευτυχία βρίσκεται μέσω της προσομοίωσης και της μίμησης ενός παροδικού ομοιώματος της πραγματικότητας, παρά από οποιαδήποτε αλληλεπίδραση με οποιαδήποτε «πραγματική» πραγματικότητα.

Αν και η υπερπραγματικότητα δεν είναι μια σχετικά νέα έννοια, τα αποτελέσματά της είναι πιο σχετικά σήμερα από ό,τι όταν πρωτοδημιουργήθηκε. Αυτό αποδίδεται στον τρόπο με τον οποίο αποτύπωσε αποτελεσματικά τη μετανεωτερική συνθήκη, ιδιαίτερα στο πώς οι άνθρωποι στον μετανεωτερικό κόσμο αναζητούν διέγερση δημιουργώντας εξωπραγματικούς κόσμους θεάματος και αποπλάνησης και τίποτα περισσότερο.

Η υπερπραγματικότητα, επισημαίνουν ορισμένες πηγές, μπορεί να παρέχει πληροφορίες για το μετανεωτερικό κίνημα αναλύοντας πώς οι προσομοιώσεις διαταράσσουν τη δυαδική αντίθεση

μεταξύ πραγματικότητας και ψευδαίσθησης, αλλά δεν αντιμετωπίζει ούτε επιλύει τις αντιφάσεις που είναι εγγενείς σε αυτήν την ένταση.

Η προσομοίωση χαρακτηρίζεται από ένα μείγμα «πραγματικότητας» και αναπαράστασης, όπου δεν υπάρχει σαφής ένδειξη για το πού σταματά η πρώτη και πού αρχίζει η δεύτερη. Η προσομοίωση δεν είναι πλέον αυτή της μιας περιοχής, ενός αναφορικού όντος ή μιας ουσίας. Είναι η δημιουργία από μοντέλα ενός πραγματικού χωρίς προέλευση ή πραγματικότητα ένα υπερπραγματικό. Ο Μποντριγιάρ προτείνει ότι η προσομοίωση δεν λαμβάνει χώρα πλέον σε ένα φυσικό πεδίο· λαμβάνει χώρα μέσα σε έναν χώρο που δεν κατηγοριοποιείται από φυσικά όρια, π.χ. μέσα μας, τεχνολογικές προσομοιώσεις, και τα λοιπά.

2.6 Επανάληψη

Για τον Γκιλ Ντελέζ (Gill Deleuze), το κεντρικό διακύβευμα στην εξέταση της επανάληψης είναι ο χρόνος. Όπως και με τη διαφορά, η επανάληψη υπόκειται στο νόμο του ταυτόσημου, αλλά και σε ένα προηγούμενο μοντέλο του χρόνου: το να επαναλαμβάνεις μια πρόταση σημαίνει, παραδοσιακά, να λες το ίδιο πράγμα δύο φορές, σε διαφορετικές στιγμές. Αυτές οι διαφορετικές στιγμές πρέπει να είναι οι ίδιες ίσες και αμερόληπτες, σαν να ήταν ο χρόνος μια επίπεδη, χωρίς χαρακτηριστικά έκταση. Έτσι, η επανάληψη έχει ουσιαστικά θεωρηθεί ως η παραδοσιακή ιδέα της διαφοράς με την πάροδο του χρόνου, κατανοητή με έναν κοινό τρόπο, ως μια διαδοχή στιγμών. Ο Ντελέζ αναρωτιέται αν, δεδομένης μιας ανανεωμένης κατανόησης της διαφοράς ως αυτοτέλειας, είμαστε σε θέση να επανεξετάσουμε και την επανάληψη. Υπάρχει όμως και μια επιτακτική ανάγκη εδώ, καθώς, αν πρόκειται να εξετάσουμε τη διαφορά-σε-αυτόν-του-χρόνου, με βάση την παραδοσιακή λογική της επανάληψης, φτάνουμε και πάλι στο σημείο της ταυτότητας. Ως εκ τούτου, η κριτική του Ντελέζ στην ταυτότητα πρέπει να επανεκτιμήσει το ζήτημα του χρόνου.

Η επιχειρηματολογία του Ντελέζ περνάει μέσα από τρία μοντέλα του χρόνου και συνδέει την έννοια της επανάληψης με καθένα από αυτά.

Η πρώτη είναι ο χρόνος ως κύκλος. Ο κυκλικός χρόνος είναι ο μυθικός και εποχιακός χρόνος, η επανάληψη του ίδιου αφού ο χρόνος έχει περάσει από τα οριακά του σημεία. Τα σημεία αυτά μπορεί να είναι απλές φυσικές επαναλήψεις, όπως η καθημερινή ανατολή του ήλιου, η κίνηση

του καλοκαιριού προς την άνοιξη, ή τα στοιχεία τραγωδίας, τα οποία ο Ντελέζ προτείνει να λειτουργούν κυκλικά. Η έννοια του χρόνου ως κύκλου, ως διαδοχής στιγμών που διέπονται από έναν εξωτερικό νόμο, έχει μια αίσθηση τόσο του πεπρωμένου όσο και της θεολογίας.

Όταν ο χρόνος εξετάζεται με αυτόν τον τρόπο, υποστηρίζει ο Ντελέζ (Difference and Repetition 2001 70-9), η επανάληψη αφορά αποκλειστικά τη συνήθεια. Το υποκείμενο βιώνει το πέρασμα των στιγμών κυκλικά (ο ήλιος θα ανατέλλει κάθε πρωί) και συνάπτει συνήθειες που δίνουν νόημα στο χρόνο ως ένα διαρκώς ζωντανό παρόν. Η συνήθεια είναι λοιπόν η παθητική σύνθεση στιγμών που δημιουργεί ένα υποκείμενο.

Το δεύτερο μοντέλο του χρόνου συνδέεται από τον Ντελέζ με τον Κάντ (Deleuze 1984, vii-viii) και αποτελεί για τον Ντελέζ μια από τις κεντρικές ρήξεις που δημιουργεί στη σκέψη η καντιανή φιλοσοφία: πρόκειται για τον χρόνο ως ευθεία γραμμή. Στην Κριτική του Καθαρού Λόγου (Critique of Pure Reason), ο Κάντ απελευθερώνει τον χρόνο από το κυκλικό μοντέλο προτείνοντάς τον ως μια μορφή που επιβάλλεται στην αισθητηριακή εμπειρία. Για τον Ντελέζ, αυτό αντιστρέφει την προηγούμενη κατάσταση, τοποθετώντας τα γεγονότα στο χρόνο (ως γραμμή), αντί να βλέπει την αλυσίδα των γεγονότων που συνιστούν το χρόνο από το πέρασμα των παρόντων στιγμών.

Η συνήθεια δεν μπορεί έτσι να έχει πλέον καμία δύναμη, αφού σε αυτό το μοντέλο του χρόνου, τίποτα δεν επιστρέφει. Προκειμένου να δοθεί νόημα σε ό,τι έχει συμβεί, πρέπει να υπάρξει μια ενεργός διαδικασία σύνθεσης, η οποία δίνει νόημα στις παρελθοντικές περιπτώσεις (Deleuze 2001). Ο Ντελέζ αποκαλεί αυτή τη δεύτερη σύνθεση μνήμη. Σε αντίθεση με τη συνήθεια, η μνήμη δεν σχετίζεται με ένα παρόν, αλλά με ένα παρελθόν που δεν υπήρξε ποτέ παρόν, αφού συνθέτει από τις στιγμές που περνούν μια μορφή πραγμάτων που δεν υπήρχαν ποτέ πριν από τη λειτουργία. Τα μυθιστορήματα του Μαρσέλ Προυστ (Marcel Proust) αποτελούν για τον Ντελέζ την πιο βαθιά ανάπτυξη της μνήμης ως καθαρού παρελθόντος, ή, σύμφωνα με την ορολογία του Προυστ, ως ανακτημένου χρόνου. (Deleuze 2001, Deleuze 2008)

Σε αυτό το δεύτερο μοντέλο του χρόνου, η επανάληψη έχει έτσι μια ενεργητική έννοια σύμφωνα με τη σύνθεση, αφού επαναλαμβάνει κάτι, στη μνήμη, που δεν υπήρχε προηγουμένως - αυτό δεν τη σώζει, ωστόσο, από το να είναι μια πράξη ταυτότητας. Αυτές οι δύο στιγμές, η ενεργός

συγκρότηση ενός καθαρού παρελθόντος και η ανομοιογενής εμπειρία ενός παρόντος που δεν έχει ακόμη συντεθεί, παράγουν μια περαιτέρω συνέπεια για τον Ντελέζ: όπως και στον Κάντ, μια ριζική διάσπαση του υποκειμένου σε δύο στοιχεία, το εγώ της μνήμης, που είναι μόνο μια διαδικασία σύνθεσης, και ένα εγώ της εμπειρίας, ένα εγώ που υφίσταται την εμπειρία (Deleuze 2001).

Ο Ντελέζ επιμένει ότι και τα δύο αυτά μοντέλα του χρόνου θέτουν την επανάληψη στην υπηρεσία του ταυτόσημου και την καθιστούν δευτερεύουσα διαδικασία σε σχέση με τον χρόνο. Το τελευταίο μοντέλο του χρόνου που προτείνει ο Ντελέζ επιχειρεί να κάνει την ίδια την επανάληψη τη μορφή του χρόνου.

Για να το κάνει αυτό, ο Ντελέζ συνδέει τις έννοιες της διαφοράς και της επανάληψης μεταξύ τους. Αν η διαφορά είναι η ουσία αυτού που υπάρχει, που συγκροτεί τα όντα ως ανόμοια, τότε κανένα από τα δύο πρώτα μοντέλα του χρόνου δεν τα δικαιώνει, επιμένοντας στη δυνατότητα, ακόμη και στην αναγκαιότητα της σύνθεσης των διαφορών σε ταυτότητες. Μόνο όταν τα όντα επαναλαμβάνονται ως κάτι άλλο αποκαλύπτεται η διαφορετικότητά τους. Κατά συνέπεια, η επανάληψη δεν μπορεί να κατανοηθεί ως επανάληψη του ίδιου και απελευθερώνεται από την υποταγή στις απαιτήσεις της παραδοσιακής φιλοσοφίας.

Για να δώσει σώμα στην αντίληψη της επανάληψης ως καθαρής μορφής του χρόνου, ο Ντελέζ στρέφεται στη νιτσεϊκή έννοια της αιώνιας επιστροφής. Αυτή η δύσκολη έννοια χαρακτηρίζεται πάντοτε από τον Ντελέζ, όποτε γράφει γι' αυτήν, με έναν ισχυρό και προσεκτικό προσδιορισμό (π.χ. *Diffence and Repetition* 6;41- 242- *Pure Immanence* 88-9- *Nietzsche and Philosophy* 94-100): ότι δεν πρέπει να θεωρηθεί ως η κίνηση ενός κύκλου, ως η επιστροφή του ταυτόσημου. Ως μορφή χρόνου, η αιώνια επιστροφή δεν είναι ο κύκλος της συνήθειας, ακόμη και σε κοσμικό επίπεδο. Αυτό θα επέτρεπε μόνο την επιστροφή σε κάτι που ήδη υπήρχε, στο ίδιο, και θα οδηγούσε και πάλι στην καταστολή της διαφοράς μέσω μιας ανεπαρκούς έννοιας της επανάληψης.

Ενώ η συνήθεια επέστρεφε το ίδιο σε κάθε περίπτωση, και η μνήμη ασχολείται με τη δημιουργία ταυτότητας προκειμένου να επιτραπεί η ανάμνηση της εμπειρίας, η αιώνια επιστροφή είναι, για τον Ντελέζ, μόνο η επανάληψη αυτού που διαφέρει από τον εαυτό του, ή, με την ορολογία του

Νίτσε, μόνο η επανάληψη εκείνων των όντων των οποίων η ύπαρξη είναι γίνεσθαι: «Το υποκείμενο της αιώνιας επιστροφής δεν είναι το ίδιο αλλά το διαφορετικό, όχι το όμοιο αλλά το ανόμοιο, όχι το ένα αλλά τα πολλά...» (Deleuze 2001)

Ως εκ τούτου, μας λέει ο Ντελέζ, η επανάληψη ως τρίτη έννοια του χρόνου παίρνει τη μορφή της αιώνιας επιστροφής. Ότι υπάρχει ως ενότητα δεν θα επιστρέψει, μόνο ό,τι διαφέρει από τον εαυτό του. «Η διαφορά κατοικεί στην επανάληψη» (Deleuze 2001). Έτσι, ενώ η συνήθεια ήταν ο χρόνος του παρόντος και η μνήμη το ον του παρελθόντος, η επανάληψη ως αιώνια επιστροφή είναι ο χρόνος του μέλλοντος.

Η ανωτερότητα αυτής της τρίτης κατανόησης της επανάληψης ως χρόνου έχει δύο βασικές ώσεις στην επιχειρηματολογία του Ντελέζ. Το πρώτο είναι προφανώς ότι διατηρεί τη διαφορά άθικτη στην κίνηση της διαφοράς από τον εαυτό της. Η δεύτερη είναι εξίσου σημαντική, αν και για διαφορετικούς λόγους. Αν επιστρέφει μόνο ό,τι διαφέρει, τότε η αιώνια επιστροφή λειτουργεί επιλεκτικά (Deleuze 2001) και αυτή η επιλογή είναι μια επιβεβαίωση της διαφοράς και όχι μια δραστηριότητα αναπαράστασης και ενοποίησης βασισμένη στο αρνητικό, όπως στον Χέγκελ.

2.7 Simulacrum

Αν και ο όρος υπάρχει από την εποχή του Πλάτωνα, μόνο τον 20ό αιώνα απέκτησε τη σημασία που έχει σήμερα. Τα δύο πιο σημαντικά ονόματα που έχουν συνδεθεί με αυτή την έννοια είναι ο Μποντριγιάρ και ο Ντελέζ.

Ο Μποντριγιάρ τείνει να χρησιμοποιεί τις λέξεις προσομοίωση και προσομοίωμα εναλλάξ και προσφέρει όχι τόσο μια νέα θεωρία του προσομοιώματος όσο μια νέα ιστορία του παρόντος που εξετάζεται μέσα από τον εννοιολογικό φακό του προσομοιώματος. Για τον Μποντριγιάρ, το simulacrum είναι ουσιαστικά το αντίγραφο ενός αντιγράφου, δηλαδή το αντίγραφο κάποιου πράγματος που δεν είναι το ίδιο ένα πρωτότυπο, και ως εκ τούτου είναι μια εντελώς υποβαθμισμένη μορφή. Στα όριά του, όπως σε ορισμένες περιγραφές της μετανεωτερικότητας, το simulacrum χρησιμοποιείται για να αρνηθεί τη δυνατότητα οποιουδήποτε να είναι η μοναδική πηγή ή προέλευση είτε μιας ιδέας είτε ενός πράγματος. Σύμφωνα με αυτή την άποψη των πραγμάτων, οτιδήποτε θεωρείται πρωτότυπη ιδέα ή αντικείμενο είναι στην

πραγματικότητα μια οφθαλμαπάτη, μια οπτική ψευδαίσθηση της ίδιας τάξης με την οπίσθια προβολή στον κινηματογράφο. Ένας άλλος τρόπος να το θέσουμε αυτό θα ήταν να πούμε ότι ένα ομοίωμα είναι πάντα μόνο αποτέλεσμα και ποτέ αιτία.

Αντίθετα, ο Ντελέζ χρησιμοποιεί την έννοια του simulacrum ενάντια στην έννοια της προσομοίωσης, για να δημιουργήσει μια ενυπάρχουσα θεωρία της αναπαράστασης. Το simulacrum δεν είναι μια έννοια για την οποία ο Ντελέζ έγραψε πολλά, και μάλιστα ασχολείται άμεσα μόνο σε δύο δοκίμια (για τον Πλάτωνα και τον Λουκρήτιο) που επισυνάπτονται ως παραρτήματα στο *Logique du Sens* (1969), το οποίο μεταφράστηκε ως *Logic of Sense* (1990), αλλά η συμβολή του υπήρξε καθοριστική. Το επιχείρημά του είναι ότι το αντίγραφο ή η προσομοίωση είναι μια εικόνα με ομοιότητα (εξ ορισμού, το αντίγραφο μοιάζει με αυτό που αντιγράφεται), ενώ το προσομοίωμα είναι μια εικόνα χωρίς ομοιότητα (ο άνθρωπος είναι κατ' εικόνα Θεού, σύμφωνα με την κατήχηση, αλλά μετά την πτώση - δηλαδή λόγω της αμαρτίας του - δεν Του μοιάζει πλέον). Το simulacrum δεν είναι απλώς ένα υποβαθμισμένο αντίγραφο, υποστηρίζει ο Ντελέζ, αλλά έχει τη δική του θετική δύναμη, η οποία διακόπτει τη σχέση μεταξύ πρωτοτύπου και αντιγράφου. Το παράδειγμά του γι' αυτό είναι η Pop Art, η οποία κατά την άποψή του ώθησε το αντίγραφο τόσο πολύ που έγινε προσομοίωση, μια εικόνα χωρίς ομοιότητα π.χ. η εκτύπωση του Αντι Γουόρχολ (Andy Warhol) Campbell's Soup.

3 Μαθηματικά και μετανεωτερικότητα

3.1 Μαθηματικός Κονστρουκτιβισμός

Η θεμελιώδης κρίση στα μαθηματικά μαζί με περίπου τέσσερις δεκαετίες που ακολούθησαν, ήταν πιθανώς η πιο γόνιμη περίοδος στην ιστορία της λογικής και των σπουδών στα θεμέλια. Αφού ανακάλυψαν τα παράδοξα της θεωρίας συνόλων, όπως το παράδοξο του συνόλου όλων των συνόλων, μαζί με τα λογικά, όπως το παράδοξο του Ράσελ, οι μαθηματικοί, συνειδητοποιώντας ότι η αφελής θεωρία συνόλων ή η Grundlagen der Arithmetik του Φρέγκε δεν μπορούν να κάνουν μια σταθερή βάση για τα μαθηματικά, άρχισαν να αναζητούν μια άλλη, πιο στέρεη βάση. Αυτό προέκυψε επίσης με τον δικαιολογημένο σκεπτικισμό σχετικά με τα μέσα που χρησιμοποιούσαν οι Καντόρ και Ντεντεκάντ στη δουλειά τους στη θεωρία συνόλων και στην ανάλυση αντίστοιχα (Avigad, 2021).

Στα μαθηματικά, όταν αποδεικνύεται κάποια δήλωση, μπορεί κανείς να εργαστεί σε μια ειδική περίπτωση. αυθαίρετα υψηλό, αλλά πεπερασμένο παράδειγμα ή τη γενική περίπτωση. Θα πρέπει να προσθέσω ότι η γενική περίπτωση δεν είναι πάντα η άπειρη: περιορίζεται πάντα στο εν λόγω πεδίο ορισμού, το οποίο μπορεί να περιοριστεί από υποθέσεις που αποκλείουν την άπειρη περίπτωση. Ήταν ο Καντόρ που άρχισε να αντιμετωπίζει το άπειρο ως μια ολοκληρωμένη ενότητα και άρχισε να εργάζεται πάνω στο άπειρο των πραγματικών. Στην πρώιμη εργασία του σε τριγωνομετρικές σειρές, μπόρεσε να διαμορφώσει νέες μεθόδους και έννοιες, όταν οι υπάρχουσες προσεγγίσεις σε ορισμένα προβλήματα απέτυχαν. Αυτό τον οδήγησε στον δικό του ορισμό του ρητού αριθμού και αργότερα του αριθμού γενικά (Brouwer, 1976). Η εφευρετικότητα και η ανεξαρτησία του γέννησαν τη θεωρία συνόλων, η οποία προήλθε από τη φιλοσοφική φύση του μυαλού του. Ο Καντόρ κατέληξε στη θεωρία όταν αναζητούσε περαιτέρω γενικεύσεις των θεωρημάτων του. Όμως, ακόμη και πριν από τη δημιουργία της θεωρίας του για την πληθικότητα, η ώθησή του προς υψηλότερες γενικεύσεις είχε εχθρούς. Ακόμη και μεταξύ των συναδέλφων του, όπως στην περίπτωση του Κρόνεκερ (Kronecker) (Troelstra & van Dalen, 1988).

Ο Καντόρ έφερε νέες μεθόδους που υπονοούσαν την ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων όχι μόνο αμφιλεγόμενων για μεθοδολογικούς και φιλοσοφικούς λόγους, αλλά και με αντιφατικά αποτελέσματα. Η συζήτηση για τα θεμέλια των μαθηματικών που ακολούθησε έδειξε περίπου τρεις στρατηγικές για την αντιμετώπιση των ιδεών του (Tatton-Brown, 2020): (1) Η θεωρία του Καντόρ δεν είναι πώς πρέπει να γίνονται τα μαθηματικά (μεθοδολογικοί λόγοι). (2) Τα μαθηματικά αντικείμενα δεν υπάρχουν με τον τρόπο που καθορίζονται από τον Καντόρ (μεθοδολογικοί και φιλοσοφικοί λόγοι) (Tait, 1981). (3) Το άπειρο που νοείται ως ολοκληρωμένη ολότητα είναι ακατανόητο και πρέπει να φυλάσσεται μακριά από μαθηματικούς προβληματισμούς (φιλοσοφικοί λόγοι) (Studd, 2019).

Ο «κονστрукτιβισμός» στην τεχνική του έννοια αναφέρεται άμεσα σε μια μέθοδο στην οποία πρέπει να γίνονται μαθηματικά. Ισχυρίζεται ότι ένας ισχυρισμός για την ύπαρξη η απόδειξη κάποιου αντικειμένου θα πρέπει να μας δώσει μια μέθοδο για την κατασκευή ενός τέτοιου αντικειμένου. Τα αντικείμενα πρέπει να κατασκευάζονται ή να υπολογίζονται και πρέπει να ξέρουμε πώς να τα «βρίσκουμε» στη μαθηματική σφαίρα, όχι μόνο να γνωρίζουμε ότι υπάρχουν

κάπου εκεί έξω χωρίς να έχουμε ένα σαφές παράδειγμα της παρουσίας τους. Ως εκ τούτου, μια απόδειξη με αντίφαση απορρίπτεται ως μέθοδος απόδειξης. Αυτό συμβαίνει επειδή απλά δεν μας λέει πώς να κατασκευάσουμε ένα αντικείμενο, αλλά απλώς ότι η ανυπαρξία του θα ήταν αντιφατική (Sieg, 1994).

Μπορεί να ειπωθεί χωρίς αμφισβήτηση ότι καθ' όλη τη διάρκεια της ανάπτυξής τους, τα μαθηματικά παρέμειναν κυρίως εποικοδομητικά με την παραπάνω έννοια μέχρι το τελευταίο τέταρτο του 19ου αιώνα, με αξιοσημείωτη εξαίρεση τη γεωμετρία όπου η απόδειξη με αντίφαση ήταν παγκοσμίως αποδεκτή και εφαρμόστηκε πριν από τον Ευκλείδη (Sharipo, 1983).

Αλλά ο προβληματισμός για τα ουσιαστικά όρια των μαθηματικών ήταν στο μεγαλύτερο μέρος της ιστορίας στο υποσυνείδητο. Σχετικά με το ερώτημα για τη φύση του άπειρου, είναι γνωστό ότι οι Έλληνες πάντα το κατανοούσαν δυνητικά και όχι ουσιαστικά, δηλαδή ως μη ολοκληρωμένο σύνολο. Ίσως ο πρώτος γνωστός μαθηματικός που σκέφτηκε ρητά αυτούς τους δύο τύπους ερμηνείας του άπειρου δεν ήταν άλλος από τον Γκάους (Resnik, 1974):

«Πρέπει να διαμαρτυρηθώ για τη χρήση ενός άπειρου μεγέθους ως ολοκληρωμένης ποσότητας, που δεν επιτρέπεται ποτέ στα μαθηματικά. Το Άπειρο είναι απλώς ένας τρόπος ομιλίας, στον οποίο κάποιος μιλάει πραγματικά με όρους ορίων, τα οποία ορισμένες αναλογίες μπορεί να πλησιάζουν όσο πιο κοντά θέλει, ενώ σε άλλες μπορεί να επιτρέπεται να αυξάνονται χωρίς περιορισμούς» (Bernays, 1935).

Φαινόταν να έχει επίγνωση των προβλημάτων που θα μπορούσε να προκαλέσει η μεταφορά του άπειρου στα μαθηματικά. Αλλά ο Καντόρ πήγε στην εντελώς αντίθετη κατεύθυνση. Και ίσως ήταν τα αποτελέσματά του που προκάλεσαν μια πιο σαφή περιγραφή του κονστрукτιβισμού.

Ο δάσκαλός του από το Βερολίνο, Κρόνεκερ (1823–1891) μπορεί να περιγραφεί ως ο πρώτος συνειδητός κονστрукτιβιστής. Για αυτόν, μόνο οι φυσικοί αριθμοί ήταν «θεόδοτοι» και όλα τα άλλα αντικείμενα πρέπει να εξηγηθούν με όρους φυσικών. Οι ισχυρισμοί για την ύπαρξη πρέπει να υποστηρίζονται από κατασκευές και οι ιδιότητες των αριθμών πρέπει να μπορούν να αποφασιστούν σε πεπερασμένα πολλά βήματα (στο πνεύμα του τελειωτικού). Ο Κρόνεκερ αντιτάχθηκε ζωτικά στη θεωρία συνόλων του Καντόρ, αλλά έδειξε τη στάση του περισσότερο με το παράδειγμα παρά με μια σαφή συζήτηση των αρχών του (Appel, et al., 1977).

3.2 Φινιτισμός

Ο Φινιτισμός μπορεί να περιγραφθεί ως ένα έργο που στοχεύει στην ερμηνεία των μαθηματικών με όρους των πιο απτών όρων ή στη μετάφραση του αφηρημένου με όρους συγκεκριμένου. Η βάση του είναι η έννοια του φυσικού αριθμού, μιας πεπερασμένης, συγκεκριμένα αναπαραστήσιμης δομής. Αυτή η προσέγγιση θεμελίωσης των μαθηματικών συνεπάγεται στη συνέχεια την αποδοχή του ορισμού με αναδρομή και της απόδειξης με επαγωγή — η δομή των φυσικών αριθμών τελικά παράγεται με την εφαρμογή της απλής συνάρτησης διαδόχου στο τελευταίο στοιχείο (Avigad, 2021).

Είναι ξεκάθαρο γιατί στους φινιτιστές δεν αρέσουν οι ποσοτικοί δείκτες: προτάσεις όπως $\forall x \exists \phi$ ή $\exists x \phi$ δεν μας παρέχουν πραγματικά ένα ουσιαστικό παράδειγμα ενός αντικειμένου x που έχει την ιδιότητα ϕ . Η απόρριψη της ποσοτικοποιημένης σημειογραφίας είναι εκεί όπου συναντώνται οι δύο αρχές του κονστρουκτιβισμού: ο υπαρξιακός ποσοτικός προσδιοριστής καταργείται επειδή δεν δίνει καμία κατασκευή του αντικειμένου του οποίου η ύπαρξη ισχυρίζεται, ενώ ο καθολικός ποσοτικός απορρίπτεται επειδή είναι (στις περισσότερες περιπτώσεις) που κυμαίνονται στον τομέα που είναι απαράδεκτο να κατανοηθεί ως ολοκληρωμένο σύνολο, το άπειρο σύνολο προτάσεων ή αντικειμένων (Di Toffoli, 2021).

Ο φινιτισμός δεν είναι τόσο περιοριστικός όσο θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί. Ο Γκούντσταϊν (Goodstein) πήρε τον τελειωμό πέρα από τα επιτεύγματα του Σκόλεμ (Skolem) και έδειξε πώς ορισμένα μέρη της ανάλυσης μπορούν να γίνουν με φινιτιστικά μέσα. Επιπλέον, έχει αποδειχθεί στο δεύτερο μισό του 20ου αιώνα ότι μεγάλα τμήματα των μαθηματικών έχουν μια πεπερασμένη βάση. Τα αποτελέσματα ήταν της μορφής: δεδομένου ενός συγκεκριμένου αδύναμου τυπικού συστήματος S με ισχυρή εκφραστική δύναμη, το S μπορεί να αποδειχθεί συνεπές με μεθόδους που εκφράζονται στη πρωταρχική επαναλαμβανόμενη αριθμητική (PRA, Primitive Recursive Arithmetic) πράγμα που σημαίνει ότι το S είναι συντηρητικό έναντι του PRA (Reck & Price, 2000).

Ο Σκόλεμ αναφέρθηκε επανειλημμένα από τον Χίλμπερτ στις δημοσιεύσεις του τελευταίου στο Πρόγραμμά του για συγκεκριμένο λόγο. Ο Χίλμπερτ έδειξε μια φιλόδοξη προσέγγιση στο πρόβλημα της εύρεσης μιας εύλογης θεμελιώδους θεωρίας για τα μαθηματικά. Πίστευε ότι η

θεωρία συνόλων είναι η καλύτερη και δεν έπρεπε να απορριφθεί. Δεν ήθελε να απορρίψει καμία μέθοδο από την εργαλειοθήκη του μαθηματικού, αλλά φιλοδοξούσε να βρει τα διαπερασμένα μαθηματικά στα πιο αξιόπιστα, θα λέγαμε, πεπερασμένα μαθηματικά (Rav, 1999).

3.3 Ακτουαλισμός ή Υπερφινιτισμός ή Αυστηρός Φινιτισμός

Πρέπει να σημειωθεί ότι ορισμένοι μαθηματικοί δεν πίστευαν ακόμη και την καταληπτότητα της έννοιας του φυσικού αριθμού. Ο ισχυρισμός ήταν ότι, στο βαθμό που μπορούμε να συλλάβουμε τον αριθμό τέσσερα, είναι πολύ πιο δύσκολο να αντιμετωπίσουμε πολύ μεγαλύτερους αριθμούς, όπως το 9^{99} . Ισχυρίστηκαν ότι ακόμη και η ιδέα ενός φυσικού αριθμού περιλαμβάνει μια ισχυρή εξιδανίκευση του «συγκεκριμένα αναπαραστήσιμου». Αυτή η εξιδανίκευση είναι σιωπηρή στην υπόθεση ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι κατασκευές του ίδιου είδους. Στην πραγματικότητα, δεν μπορούμε να παραδώσουμε Η κατανόηση τόσο μεγάλων αριθμών χωρίς μια γενική έννοια της εκθέσεως. Αυτοί οι μαθηματικοί, που αυτοαποκαλούνταν πραγματιστές, υπερ-φινιτιστές ή αυστηροί φινιτιστές, ισχυρίστηκαν ότι τα μαθηματικά πρέπει να περιορίζονται μόνο σε αριθμούς που μπορούν πραγματικά να πραγματοποιηθούν (στη φαντασία μας ή στη φύση) (Niebergall, 2000).

Ο πρώτος που υποστήριξε για το ρεαλιστικό πρόγραμμα ήταν ο Αλεξάντερ Γίεσεσιν-Βόλπιν (Alexander Yessenin-Volpin), ο οποίος σκιαγράφησε ένα έργο απόδειξης της συνέπειας του Ζερμέλο Φρένκελ με εξαιρετικά φινιτιστικά μέσα. Ωστόσο, το πρόγραμμα γενικά δεν έχει γνωρίσει μεγάλη εξέλιξη έκτοτε, καθώς φαίνεται να υπάρχουν εγγενείς δυσκολίες με την πραγματικότητα (Parsons, 1980).

Ωστόσο, η ιδέα έχει παρακινήσει μερικούς να διερευνήσουν τις βασικές αριθμητικές πράξεις ως προς την πραγματιστική, την πεπερασμένη ή τη μεταβατική φύση τους. Ο Πάρικχ (R. Parikh) έχει υποδείξει το 1971, από τεχνικά αποτελέσματα, ότι υπάρχει μια ουσιαστική διαφορά χαρακτήρα μεταξύ της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού από τη μια πλευρά και της εκθέσεως από την άλλη (Antonutti., 2010).

3.3 Μαθηματικός σχετικισμός

Ο μαθηματικός σχετικισμός είναι η άποψη σύμφωνα με την οποία κάθε μαθηματική αλήθεια είναι σχετικά αληθινή μόνο. Αυτή η διατύπωση της άποψης επεκτείνει στα μαθηματικά τον συνεπή χαρακτηρισμό του προοπτικού σχετικισμού που έχει υπερασπιστεί ο Στήβεν Χέιλς (Steven Hales). Άρα δεν υπάρχουν αληθινές απλούστερες μαθηματικές προτάσεις. Η αλήθεια στα μαθηματικά είναι σχετική (Sambin, 1987).

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα σημαίνει ότι δίνουμε κάποιο περιεχόμενο στον σχετικιστικό ισχυρισμό. Συνοπτικά, οι μαθηματικές αλήθειες σχετίζονται με

(α) τις έννοιες που χαρακτηρίζουν το σχετικό μαθηματικό πεδίο ή τη συγκεκριμένη μαθηματική θεωρία που εξετάζεται,

(β) το μαθηματικό πλαίσιο (π.χ. μια δεδομένη θεωρία συνόλων) στο οποίο διατυπώνονται τέτοιες αλήθειες και

(γ) τη λογική που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή των δηλώσεων. Έχουμε τότε τουλάχιστον τρεις διακριτές πηγές σχετικότητας: εννοιολογικό δομικό και λογικό.

Αν και ξεχωριστές, αυτές οι πηγές σχετικότητας είναι προφανώς συνδεδεμένες, δεδομένου ότι υπάρχουν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ τους (Yablo, 2014).

Για παράδειγμα, τυπικά, η θεωρία συνόλων που εξετάζει κάποιος εξαρτάται από την υποκείμενη λογική που υιοθετείται. Το σύνολο Ράσελ (το σύνολο όλων των συνόλων που δεν είναι μέλη του εαυτού τους) δεν μπορεί να διατυπωθεί στις συνήθεις θεωρίες συνόλων, όπως η θεωρία συνόλων Ζερμέλο-Φράενκελ (Zermelo-Fraenkel), οι οποίες κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας την κλασική λογική· και έχουν στόχο να είναι συνεπείς. Ωστόσο, το σύνολο Ράσελ μπορεί να εκφραστεί ευθέως σε μια παρασυνεπή θεωρία συνόλων, δηλαδή μια θεωρία συνόλων που κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας μια παρασυνεπή λογική. Μια τέτοια λογική είναι αυτή στην οποία δεν προκύπτουν όλα από μια αντίφαση (da Costa 2007). Στην κλασική λογική, αν μια θεωρία είναι ασυνεπής - δηλ. εάν μια πρόταση της μορφής A και όχι- A είναι θεώρημα του T - τότε είναι ασήμαντη, αφού κάθε πρόταση στη γλώσσα του T είναι τότε θεώρημα. Δεδομένης της παρασυνεπούς λογικής, ωστόσο, μπορούμε να διακρίνουμε την ασυνέπεια από την

επιπολαιότητα. Συγκεκριμένα, υπάρχουν ασυνεπείς θεωρίες που δεν είναι ασήμαντες, όπως μια παρασυνεπής θεωρία συνόλων στην οποία κατασκευάζεται το σύνολο Ράσελ, αλλά δεν προκύπτουν όλα από αυτήν τη θεωρία (da Costa 2007).

Αυτό το παράδειγμα επεξηγεί ορισμένες σχέσεις μεταξύ της εννοιολογικής, της δομικής και της λογικής σχετικότητας. Η δήλωση "το σύνολο Ράσελ υπάρχει", εάν είναι αληθής, είναι σχετικά αληθής μόνο: είναι αληθής σε μια παρασυνεπή θεωρία συνόλων, αλλά ψευδής στη θεωρία συνόλων Ζερμέλο - Φράενκελ (υποθέτοντας ότι η τελευταία είναι συνεπής). Σαφώς, η αλήθεια αυτής της δήλωσης εξαρτάται από τη λογική που χρησιμοποιείται: μια παρασυνεπής λογική, αντί της κλασικής λογικής, πρέπει να υπάρχει για να είναι αληθής η δήλωση χωρίς επιπολαιότητα (λογική σχετικότητα). Αυτό, με τη σειρά του, απαιτεί μια αλλαγή στη θεωρία συνόλων που εξετάζουμε: από την κλασική στην παρασυνεπή θεωρία συνόλων (δομική σχετικότητα). Και με αυτήν την αλλαγή, τότε επικαλείται μια διαφορετική αντίληψη του συνόλου, η οποία επιτρέπει τη δυνατότητα ασυνεπών συνόλων χωρίς επιπολαιότητα (εννοιολογική σχετικότητα) (Wright,1983).

Παρακάτω λοιπόν θα συζητηθεί η σημασία αυτών των τριών συστατικών για τον μαθηματικό σχετικισμό, συζητώντας κάποιες παρεξηγήσεις που μπορεί να προκαλέσει αυτή η άποψη. Χρειάζεται να αναφερθεί τι δεν είναι ο μαθηματικός σχετικισμός, αναφέροντας αργότερα τι είναι. Για να υπάρχει σαφήνεια σχετικά με το θέμα, είναι σημαντικό να προσδιορισθούν ορισμένα χαρακτηριστικά που δεν έχει ο μαθηματικός σχετικισμός, καθώς και ορισμένα χαρακτηριστικά που έχει (Benacerraf και Putnam, 1983).

Ο σχετικισμός μερικές φορές παρουσιάζεται ως η άποψη σύμφωνα με την οποία τα πάντα μπορούν να ισχύσουν. Ο Πολ Φεγιεράμπεντ (Paul Feyerabend 1988), μάλλον προκλητικά και κάπως αστεειεύομενος, προτείνει ότι η μόνη αρχή που δεν αναστέλλει την επιστήμη, την επιστημονική πρόοδο είναι: όλα είναι δεκτά. Ωστόσο, η δική του συζήτηση για τον σχετικισμό είναι πιο λεπτή (Paul Feyerabend 1988). Βασίζεται στην πρακτική που δημιουργεί προβλήματα. Οι αρχαίοι Έλληνες σκεπτικιστές, υποστήριξαν ότι εκείνοι που κακολογούν ισχυρισμούς σχετικά με την τελική φύση της πραγματικότητας συχνά αδυνατούν να θεμελιώσουν αυτούς τους ισχυρισμούς σύμφωνα με τα δικά τους πρότυπα. Αυτό είναι το είδος της πρακτικής που

διερευνούν οι σχετικιστές. Με την επίκληση αυτής της πρακτικής, γίνεται ολοένα και πιο σαφές ότι καμία μεμονωμένη μέθοδος δεν είναι επαρκής σε κάθε τομέα έρευνας, ότι προτιμάται μια πληθώρα προσεγγίσεων. Αλλά είναι ακόμη μίλια μακριά από το να καθοριστεί το σημείο ότι όλα είναι δεκτά. Όποια και αν είναι η μοίρα του σχετικισμού στο πλαίσιο της επιστημονικής έρευνας, ο μαθηματικός σχετικισμός δεν είναι ο ισχυρισμός ότι όλα είναι δεκτά στα μαθηματικά. Ο μαθηματικός σχετικισμός θα ήταν καλύτερα να μην δηλωθεί με αυτόν τον τρόπο ή με ότι συνεπάγεται προς αυτήν την κατεύθυνση.

Δεδομένου ότι τα μαθηματικά είναι μια αρκετά περιορισμένη πρακτική, οποιαδήποτε άποψη για τα μαθηματικά με αυτά τα χαρακτηριστικά θα ήταν εσφαλμένη ως απολογισμός των μαθηματικών γενικά και της μαθηματικής δραστηριότητας ειδικότερα. Μια τέτοια απόλυτη διατύπωση σχετικισμού για τα μαθηματικά είναι και περιγραφικά ανεπαρκής και κανονιστικά κενή. Είναι περιγραφικά ανεπαρκής δεδομένου ότι οι μαθηματικοί όντως πληρούν διάφορους περιορισμούς ενώ κάνουν μαθηματικά: υιοθετούν μια υποκείμενη λογική έστω και έμμεσα. Ασπάζονται πρότυπα αυστηρότητας (ακόμα και αν τα τελευταία αλλάξουν με τον καιρό). εργάζονται μέσα σε ορισμένα πλαίσια, τα οποία περιορίζουν τους αποδεκτούς ορισμούς, τις επιτρεπόμενες κινήσεις σε μια απόδειξη και καθορίζουν την κατάλληλη γλώσσα που μπορούν να χρησιμοποιήσουν. Δεδομένων αυτών των περιορισμών, απλά δεν συμβαίνει - ως περιγραφή της πραγματικής μαθηματικής πρακτικής - ότι όλα είναι δεκτά.

Ομοίως, είναι κανονιστικά κενό να δηλώνουμε ότι όλα είναι δεκτά στα μαθηματικά. Οι περιορισμοί που αναφέρθηκαν παραπάνω όχι μόνο ενημέρωσαν τη μαθηματική πρακτική κατά τη διάρκεια των αιώνων, αλλά θα έπρεπε επίσης να έχουν ενημερώσει αυτήν την πρακτική. Χωρίς περιορισμούς αυτού του είδους, δεν θα είχαμε μαθηματικά: θα είχαμε ένα εντελώς διαφορετικό σύνολο εργασιών και μια δραματικά διαφορετική επιχείρηση. Απλώς δεν θα ήταν μαθηματικά - σίγουρα όχι όπως είναι αναγνωρίσιμα τώρα.

Όπως θα γίνει σαφές, τα πάντα στα μαθηματικά είναι κατ' αρχήν αναθεωρήσιμα. Οι ορισμοί των μαθηματικών εννοιών, οι θεμελιώδεις μαθηματικές αρχές, ακόμη και η υποκείμενη λογική είναι όλα αναθεωρήσιμα και έχουν αναθεωρηθεί στη μαθηματική πράξη. Αυτό δεν σημαίνει, ωστόσο, ότι αυτές οι έννοιες, οι αρχές και η λογική μπορούν όλες να αναθεωρηθούν ταυτόχρονα.

Συνήθως, οι αλλαγές στα μαθηματικά γίνονται σταδιακά. Παρόλο που, με την πάροδο του χρόνου, μπορεί να υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ διαφορετικών πρακτικών στα μαθηματικά, δεδομένων των αλλαγών στους ορισμούς, στα αποτελέσματα, ακόμη και στη λογική τους, η διαδικασία μετασχηματισμού εξελίχθηκε σε σταδιακά βήματα, με μία αλλαγή εδώ (π.χ. η τελειοποίηση μιας δεδομένης έννοιας), μια αναθεώρηση εκεί (ένα νέο θεώρημα που θα μπορούσε να ληφθεί με βάση τις αναθεωρημένες έννοιες) και μια πιο ασυνήθιστη αλλαγή εκεί (π.χ. με μια νέα υποκείμενη λογική που υιοθετείται). Με αυτόν τον τρόπο, η μαθηματική αλλαγή είναι πράγματι μια σταδιακή διαδικασία. Εντοπίζεται σε επίπεδα θεωρημάτων (τα οποία περιλαμβάνουν εννοιολογικές βελτιώσεις που εισάγονται από νέους ορισμούς), μεθόδων (που περιλαμβάνουν συγκεκριμένα πρότυπα αυστηρότητας και την υποκείμενη λογική), καθώς και στόχων (που περιλαμβάνουν ορισμένες αξίες, όπως η πληροφόρηση, η κομψότητα και συνοχή). Αλλά αυτές οι αλλαγές, αν και μεμονωμένα είναι όλες δυνατές, δεν συμβαίνουν ταυτόχρονα. Από αυτή την άποψη, η κατάσταση είναι ανάλογη με αυτό που συμβαίνει στην εμπειρική επιστήμη - όπως έχει περιγράψει ο Λάρι Λάουνταν (Larry Laudan 1984) μέσω του δικτυωτού μοντέλου. Ως αποτέλεσμα, ακόμη και από μια τέτοια μεθοδολογική προοπτική, δεν είναι όλα δεκτά στα μαθηματικά. Ο μαθηματικός σχετικισμός θα πρέπει στη συνέχεια να διακριθεί emphatically από κάθε μορφή μαθηματικής επιπολαιότητας (οι ισχυρισμοί ότι τα πάντα μπορούν να προκύψουν στα μαθηματικά ή ότι οτιδήποτε ισχύει στα μαθηματικά).

4. Ηθική Μαθηματικά και Σχετικισμός

Ηθική μαθηματικά και σχετικισμός είναι ο τίτλος της ομώνυμης μελέτης του Λήρ (Jonathan Lear Ethics Mathematics and Relativism 1983).

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα σχετικισμός είναι η θέση ότι όλες οι απόψεις είναι εξίσου έγκυρες και το άτομο καθορίζει τι είναι αληθινό και σχετικό για αυτές. Ο σχετικισμός θεωρεί ότι η αλήθεια είναι διαφορετική για διαφορετικούς ανθρώπους, όχι απλώς ότι διαφορετικοί άνθρωποι πιστεύουν διαφορετικά πράγματα ως αληθινά. Ενώ υπάρχουν

σχετικιστές στην επιστήμη και τα μαθηματικά, ο ηθικός σχετικισμός είναι η πιο κοινή ποικιλία σχετικισμού. Σχεδόν όλοι έχουν ακούσει ένα σχετικιστικό λογικό σχήμα (Rouff- EL, 1999):

- Αυτό που είναι σωστό για εσάς μπορεί να μην είναι αυτό που είναι σωστό για μένα .
- Αυτό που είναι σωστό για τον πολιτισμό μου δεν θα είναι απαραίτητα αυτό που είναι σωστό για τον πολιτισμό σου.
- Καμία ηθική αρχή δεν ισχύει για όλους τους ανθρώπους σε κάθε στιγμή και σε όλα τα μέρη.

Ο ηθικός σχετικισμός αντιπροσωπεύει τη θέση ότι δεν υπάρχουν ηθικές απόλυτες, ηθικό σωστό ή λάθος. Αυτή η θέση θα ισχυριζόταν ότι τα ήθη μας εξελίσσονται και αλλάζουν με τους κοινωνικούς κανόνες σε μια χρονική περίοδο. Αυτή η φιλοσοφία επιτρέπει στους ανθρώπους να μεταλλάσσονται ηθικά καθώς η κουλτούρα, η γνώση και η τεχνολογία αλλάζουν στην κοινωνία. Η δουλεία είναι ένα καλό παράδειγμα ηθικού σχετικισμού. Επανειλημμένα η αξία ενός ανθρώπου καθορίζεται από έναν συνδυασμό κοινωνικών προτιμήσεων και προτύπων, εμπειρίας, συναισθημάτων και «κανόνων» που φαινόταν να αποφέρουν τα περισσότερα οφέλη.

Τι είναι ο ηθικός σχετικισμός από μια υποκειμενική άποψη; Ο υποκειμενικός ηθικός σχετικισμός υποστηρίζει την άποψη ότι η αλήθεια των ηθικών αρχών σχετίζεται με τα άτομα. Ό,τι πιστεύετε ότι είναι σωστό για εσάς προσωπικά εξαρτάται από εσάς να το καθορίσετε. Ο υποκειμενικός σχετικισμός σας επιτρέπει να είστε κυρίαρχοι στις αρχές που υπαγορεύουν τον τρόπο ζωής σας.

Ο συμβατικός ηθικός σχετικισμός υποστηρίζει την άποψη ότι η αλήθεια των ηθικών αρχών σχετίζεται με τους πολιτισμούς. Σε αντίθεση με την υποκειμενική άποψη, αυτό που είναι σωστό για εσάς ως άτομο εξαρτάται από το τι πιστεύει η συγκεκριμένη κουλτούρα σας ότι είναι σωστό για εσάς. Αυτή η άποψη υποστηρίζει την ιδέα ότι ό,τι λέει η κουλτούρα ότι είναι σωστό για εσάς είναι πραγματικά κατάλληλο για εσάς. Η κουλτούρα ή η κοινωνία γίνεται η ανώτατη αρχή σχετικά με το τι είναι σωστό για κάθε άτομο σε αυτήν την κοινωνία. Ο συμβατικός σχετικισμός υποτάσσει τη βούληση του ατόμου στη βούληση της πολιτισμικής πλειοψηφίας.

4.1 Ηθικός Σχετικισμός και γνωσιακισμός

Τι είναι ο ηθικός σχετικισμός από αντικειμενική οπτική; Η επιθυμία να έχουμε ένα απόλυτο σύνολο ηθικής συνεπάγεται μια Απόλυτη Πηγή Ηθικής που μπορεί εύκολα να αναχθεί ως Θεός.

Αυτή η θέση θα ήταν αντίθετη στον ηθικό σχετικισμό. Ο σχετικιστής θα καταδίκασε την απόλυτη ηθική και αποκλείει κάθε θρησκευτικό σύστημα που βασίζεται σε απόλυτα ήθη. Ο Θεός έχει τη δύναμη να μας μεταφέρει πράγματα που είναι απόλυτα αληθινά και ηθικά. Αυτά τα απόλυτα, ωστόσο, μπορεί να μην αρέσουν ή να ευχαριστήσουν τα υποκειμενικά μας γούστα. «Διότι οι σκέψεις μου δεν είναι σκέψεις σας, ούτε οι δρόμοι σας είναι οι δρόμοι μου», δηλώνει ο Κύριος» (Ησαΐας 55:8). Το να βασίζεται κανείς στις ηθικές επιλογές ενός ατόμου ή μιας κοινωνίας είναι αντιπαραγωγικό.

Η πεποίθηση ότι ο αναστοχασμός της μαθηματικής πρακτικής θα προσδώσει διορατικότητα στη φύση της ηθικής άσκησε ισχυρή επιρροή στη φιλοσοφική φαντασία. Ο Πλάτωνας υποστήριξε ότι η εκπαίδευση στα μαθηματικά ήταν σημαντική προετοιμασία για την άνοδό μας προς την αντίληψη της μορφής του Αγαθού (Plato VII). Στα μαθηματικά, σύμφωνα με αυτόν, αντιλαμβανόμαστε αυτό που είναι καθολικό, αμετάβλητο και αφηρημένο: αυτό υποτίθεται ότι είναι σχετικώς παρόμοιο με την αντίληψη του Αγαθού. Τόσο η μαθηματική όσο και η ηθική πραγματικότητα θεωρήθηκαν ως πολύ σημαντικές για την αντίληψη του Αγαθού.

Αν και ο πλατωνισμός τόσο στην ηθική όσο και στα μαθηματικά έχει γίνει στόχος συνεχών επιθέσεων, η πεποίθηση ότι υπάρχουν σημαντικές αναλογίες μεταξύ αυτών των τομέων του λόγου παραμένει. Η ομοιότητα μεταξύ του ηθικού και του μαθηματικού λόγου υποτίθεται ότι σώζει την ηθική από την απειλή του μη-γνωσιακισμού. Αναλογιζόμενοι το γεγονός ότι τα μαθηματικά είναι « μαλακά » -δηλαδή, ότι δεν υποστηρίζουν μια πλατωνιστική ερμηνεία- και παρόλα αυτά φαίνεται να ικανοποιούν κάθε λογική απαίτηση για αντικειμενικότητα, υποτίθεται ότι πρέπει να δούμε ότι υπάρχουν είναι ένας τρόπος με τον οποίο η ηθική μπορεί να είναι αντικειμενική, παρόλο που είναι μόνο μια "ανθρώπινη κατασκευή".

Ο ηθικός μη γνωσιακιστής ισχυρίζεται ότι οι αξίες είναι ανθρώπινο δημιούργημα: ότι τις επινοούμε και τις εφαρμόζουμε σε έναν ηθικά αδρανή κόσμο. Ο εκλεπτυσμένος γνωσιακιστής προσπαθεί να αποκρούσει αυτή την κατηγορία παρουσιάζοντας τα μαθηματικά ως ένα παράδειγμα ανθρώπινης δημιουργίας, αδύνατης και ακατανόητης έξω από μια κοινή μορφή ζωής, η οποία ωστόσο εγείρει ισχυρές αξιώσεις αλήθειας και αντικειμενικότητας. Αν λοιπόν

κάποιος μπορεί να δείξει ότι μια ηθική προοπτική είναι ανθρώπινο δημιούργημα με αυτή την έννοια, θα έχει τεκμηριώσει επαρκώς την αντικειμενικότητά της.

Ο εκλεπτυσμένος γνωσιακισμός, όπως θα τον ονομάσουμε, είναι μια θέση που συνδυάζει δύο θέσεις, μία αρνητική και μία θετική. Η αρνητική θέση είναι ότι οι προβληματισμοί του Βιτγκενστάιν σχετικά με την τήρηση ενός κανόνα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπονομεύσουν τον μη-γνωσιακισμό, -τουλάχιστον όπως αυτός παραδοσιακά νοείται. Η θετική θέση είναι ότι η φιλοσοφία των μαθηματικών του Βιτγκενστάιν, στην οποία τα μαθηματικά αποδεικνύονται ως ανθρώπινο δημιούργημα, το οποίο ωστόσο διεκδικεί την αλήθεια, την αντικειμενικότητα και την αναγκαιότητα, παρέχει ένα μοντέλο για μια ικανοποιητική μορφή ηθικού ρεαλισμού.

Αν και το επιχείρημα επειδή η αρνητική θέση είναι επιτυχής έναντι ορισμένων παραδοσιακών μορφών μη-γνωσιακισμού, άλλες μορφές μη-γνωσιακισμού επιβιώνουν. Έτσι, ο μη γνωσιακός χαρακτήρας ως τέτοιος δεν υπονομεύεται. Δεύτερον, είναι αμφίβολο αν τα μαθηματικά μπορούν να παρέχουν ένα μοντέλο για την ερμηνεία της ηθικής πρακτικής. Το μάθημα που προκύπτει για όσους θα θέλουν να υπερασπιστούν κάποια μορφή ηθικού γνωσιακισμού είναι ότι πρέπει να γίνει περισσότερη δουλειά.

Ο χιουμαϊκός μη-γνωσιακισμός πηγάζει από δύο πεποιθήσεις: Πρώτον, ότι οι ηθικές κρίσεις παρακινούν τις πράξεις- δεύτερον, ότι καμία αυστηρά γνωσιακή πεποίθηση για τον κόσμο δεν θα μπορούσε από μόνη της να παρακινήσει τη δράση: πρέπει επίσης να υπάρχει κάποια μη γνωσιακή επιθυμία ή βούληση. Έτσι, αν συναντήσουμε άλλους που τυχαίνει να μην έχουν τα δικά μας ενδιαφέροντα και επιθυμίες, θα αναγνωρίσουμε, αν είμαστε μη γνωσιακιστές, ότι δεν έχουν λόγο να ενεργούν όπως εμείς.

Σύμφωνα με τον εκλεπτυσμένο γνωσιακιστή, υπάρχουν δύο λόγοι για τους οποίους οι άνθρωποι τείνουν να πείθονται από τον μη γνωσιακισμό. Πρώτον, τείνουν να αποδέχονται μια φιλοσοφία του νου που διαχωρίζει τις γνωσιακές από τις συναισθηματικές ικανότητες. Δεδομένου ότι αυτό ισοδυναμεί με την παραδοχή του μη γνωσιακισμού, δεν αποτελεί επιχείρημα υπέρ του μη γνωσιακισμού, εκτός αν υπάρχει ένα ανεξάρτητο επιχείρημα για την ανατομία του νου. Δεύτερον, και πιο σημαντικό, ο γνωσιακισμός συχνά γίνεται αντιληπτός με τέτοιο τρόπο που τον

καθιστά ώριμο για επιθέσεις σκεπτικιστών. Ο γνωσιακισμός είναι μια θέση που προκύπτει από την απομάκρυνση και τον προβληματισμό σχετικά με τις καθημερινές ηθικές πρακτικές μας: στοχεύει στην παροχή μιας αιτιολόγησής τους. Μερικές φορές γίνεται αντιληπτή ως μια προσπάθεια να βγει κανείς έξω από το ηθικό σύμπαν και, από μια εντελώς αποστασιοποιημένη οπτική γωνία, να μας πει πώς είναι πραγματικά τα πράγματα στο εσωτερικό του.

Η στρατηγική του εκλεπτυσμένου γνωσιακιστή μπορεί επομένως να περιγραφθεί ως εξής. Το κίνητρο για τον μη γνωσιακισμό έγκειται στο γεγονός ότι ο γνωσιακισμός, όπως παραδοσιακά παρουσιάζεται, προσκαλεί σε κριτική. Ωστόσο, ο παραδοσιακός γνωσιακισμός μπορεί να υπονομευθεί από τις εκτιμήσεις του Βιτγκενστάιν, αφήνοντας παράλληλα χώρο για μια ικανοποιητική μορφή ηθικού ρεαλισμού. Με την υπονόμηση του παραδοσιακού γνωσιακισμού, το τυπικό κίνητρο για τον μη γνωσιακιστή εξαφανίζεται.

Υπάρχει ένας προφανής παραλληλισμός με την παραδοσιακή ερμηνεία του πλατωνισμού με τη φιλοσοφία των μαθηματικών. Ο πλατωνιστής, έτσι λέει η ιστορία, προσπαθεί να βγει έξω από τη μαθηματική πρακτική για να μπορέσει να μας πει σε τι πραγματικά συνίσταται. Η πλατωνική απάντηση είναι ότι η μαθηματική πρακτική συνίσταται στην αντίληψη μιας μαθηματικής πραγματικότητας, που υπάρχει ανεξάρτητα από εμάς, βάσει της οποίας οι μαθηματικές δηλώσεις μας είναι αληθείς ή ψευδείς. Εξαιτίας αυτής της πραγματικότητας μπορούμε, σύμφωνα με τον πλατωνιστή, να πούμε ότι έχουμε γνώση των μαθηματικών αληθειών. Τόσο ο πλατωνιστής όσο και ο γνωσιακιστής επιδιώκουν να εξηγήσουν πώς οι μαθηματικές ή ηθικές πεποιθήσεις μας συνιστούν γνώση μιας πραγματικότητας που υπάρχει «με κάθε τρόπο».

4.2 Wittgenstein και φιλοσοφική επανάσταση

Είναι δίκαιο να πούμε ότι ο Βιτγκενστάιν προκάλεσε μια επανάσταση στη φιλοσοφική προοπτική, καθιστώντας τον πλατωνισμό, όπως παραδοσιακά παρουσιάζεται, αδύνατο. Όταν ένα άτομο μπορεί να εκτελέσει σωστά μια μαθηματική διαδικασία -για παράδειγμα, μπορεί να επεκτείνει τη σειρά 2, 4, 6, 8...- ο πλατωνιστής λέει ότι έχει μάθει πώς να ακολουθεί έναν κανόνα ή έχει κατανοήσει μια καθολική έννοια. Εκδηλώνουμε την αντίληψή μας για καθολική έννοια, την αντίληψή μας για έναν κανόνα, το πολύ με έναν πεπερασμένο αριθμό συμπεριφορών, ωστόσο η κατανόηση μιας καθολικής έννοιας ή ενός κανόνα εγγυάται μια δυνητικά άπειρη

ποσότητα συμπεριφορών. Η άποψη του Βιτγκενστάιν είναι, χονδρικά, ότι δεν συμπεριφερόμαστε με συγκεκριμένο τρόπο επειδή έχουμε κατανοήσει έναν κανόνα, αλλά επειδή ενεργούμε με συγκεκριμένους τρόπους λέμε ότι έχουμε κατανοήσει έναν κανόνα ή μια καθολική έννοια. Κανένας κανόνας ή καθολική έννοια δεν εγγυάται ότι κάποιος δεν θα επεκτείνει τις σειρές 2, 4, 6, 8, 17, 28, 1002, =, Δ λέγοντας ότι σε κάθε βήμα κάνει ακριβώς αυτό που έκανε πριν. Δεν υπάρχει τέτοιο πράγμα, υποστήριξε ο Βιτγκενστάιν, ως απόλυτη ομοιότητα.

Μια διαδικασία είναι μια περίπτωση που κάνει το ίδιο πράγμα και πάλι αν πρόκειται για μια πρακτική στο πλαίσιο αυτού που ο Βιτγκενστάιν ονόμασε « μορφή της ζωής » - μια κοινότητα που μοιράζεται τις αντιλήψεις για την σημαντικότητα, κοινά ενδιαφέροντα, αισθήματα φυσικότητας στα οποία γίνεται αντιληπτό ως το ίδιο. Αν ο πλατωνιστής προσπαθεί να βγει έξω από τη μορφή της ζωής για να πει σε αυτούς που βρίσκονται μέσα πώς είναι τα πράγματα πραγματικά, τότε πρέπει να στεναχωρηθεί. Γιατί έξω από τη μορφή της ζωής δεν υπάρχει τίποτα: ούτε κανόνες, ούτε καθολικά, καμία ομοιομορφία, καμία πραγματικότητα.

Τι πρέπει να γίνει προκειμένου να εξηγηθεί η ηθική και μαθηματική πρακτική μόνο με όρους της φυσικής ιστορίας των ανθρώπινων όντων; Είναι εφικτό να εξηγηθεί η ηθική και μαθηματική συμπεριφορά μόνο λέγοντας ότι οι άνθρωποι τυχαίνει να έχουν μια δομή τέτοια που τείνουν να αντιδρούν με συγκεκριμένους τρόπους με βάση ορισμένους τύπους εκπαίδευσης; Ο εκλεπτυσμένος γνωσιακιστής απορρίπτει το δίλημμα που μας αναγκάζει να επιλέξουμε μεταξύ (ηθικού ή μαθηματικού) πλατωνισμού από τη μια και φυσικής ιστορίας από την άλλη. Η επιλογή φαίνεται εξαντλητική μόνο εάν, μπερδεμένα, προσπαθούμε να καταλάβουμε ένα πλεονέκτημα έξω από τις ηθικές και μαθηματικές πρακτικές μας, προκειμένου να προσδιορίσουμε το τι πραγματεύονται. Από αυτή την υποτιθέμενη προοπτική, φανταζόμαστε, είτε θα υπάρχει κάτι εκεί - ηθικές αξίες, καθολικές έννοιες - είτε δεν θα υπάρχει: καμία ενδιαμέση θέση δεν φαίνεται διαθέσιμη . Ο εκλεπτυσμένος γνωσιακιστής προσπαθεί να αποδομήσει τη διχοτόμηση όχι προσφέροντας κάτι άλλο που θα μπορούσαμε να δούμε από αυτή την οπτική γωνία, αλλά θεραπεύοντας μας από τον πειρασμό να σκεφτούμε ότι υπάρχει κάποιο τέτοιο πλεονέκτημα . Η μόνη θέση από την οποία μια δήλωση όπως το « $7 + 5$ πραγματικά ισούται με 12 » είναι λογικό να είναι στο πλαίσιο της μαθηματικής πρακτικής. Έτσι, όταν κάποιος λέει «Επειδή το $7 + 5$ πραγματικά ισούται με 12 , οι άνθρωποι μπορούν να διδαχθούν να πιστεύουν ότι το $7+5$ ισούται

με 12», δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι λέει κάτι τέτοιο διαφωνεί με τον Βιτγκενστάιν. Γιατί μια τέτοια δήλωση είναι συμβατή με την πεποίθηση ότι έχει νόημα να μιλάμε μόνο για δύο αριθμούς που πραγματικά ισούνται με έναν άλλο σε μια μορφή ζωής. Ακριβώς επειδή υπάρχει χώρος γι' αυτό μέσα σε μια μορφή ζωής, υπάρχει χώρος για έναν εκλεπτυσμένο γνωσιακιστή. Εγκαταλείπει την επιθυμία για αυτό που θεωρεί ότι είναι ένα ακατοίκητο πλεονεκτικό σημείο έξω από τις ηθικές και μαθηματικές πρακτικές μας- και ισχυρίζεται ότι μας λέει πώς είναι πραγματικά τα πράγματα με τον μόνο τρόπο με τον οποίο μπορεί να βγάλει νόημα ότι τα πράγματα είναι πραγματικά με κάποιον τρόπο και όχι με κάποιον άλλο. Η πραγματικότητα, η αλήθεια, η αντικειμενικότητα έχουν νόημα μόνο στο πλαίσιο μιας μορφής ζωής.

Αν επιθυμούμε να θεμελιώσουμε την αντικειμενικότητα των μαθηματικών σε κάτι ισχυρότερο, υποστηρίζει ο εκλεπτυσμένος γνωσιακιστής, αυτό θα μπορούσε να οφείλεται μόνο στο ότι δεν έχουμε ακόμη θεραπευτεί από την επιθυμία να βγούμε έξω από τη μορφή της ζωής μας και να την δούμε « από τα πλάγια », δηλαδή από μια εξωτερική οπτική γωνία. Η αντικειμενικότητα των μαθηματικών θα φανεί αδύναμη, με ανάγκη ενίσχυσης, μόνο αν διατηρήσουμε φετιχιστικά την επιθυμία για μια εξωτερική προοπτική. Αν εγκαταλείψουμε ειλικρινά αυτή την επιθυμία, αν σπάσει ο πυρετός, τότε δεν θα νιώθουμε πια να απειλούμαστε από μια κατάρρευση στη φυσική ιστορία. $7 + 5$ είναι πράγματι ίσο με 12, μας λέει ο εκλεπτυσμένος γνωσιακιστής, αλλά επιμένει επίσης ότι δεν μας λέει κάτι που δεν γνωρίζαμε ήδη.

Προσπαθώντας να εμψυχήσουμε μια ηθική αντίληψη, θα προσπαθήσουμε να κάνουμε ένα άτομο να βλέπει τις καταστάσεις με έναν συγκεκριμένο τρόπο: θα επικαλεστούμε τις αντιλήψεις του για το τι θεωρεί σημαντικό τι ου προκαλεί αίσθημα συμπάθειας, τα συμφέροντά του, και μάλιστα στην αίσθηση του σωστού και του λάθους. Το ότι πετυχαίνουμε δεν σημαίνει ότι αντιλαμβάνεται μια καθολική έννοια ή έναν κανόνα: δεν μπορεί να συνίσταται σε τίποτα περισσότερο από το να ότι έρχεται να δει τον κόσμο με τον τρόπο που τον βλέπουμε εμείς. Αυτό δεν απειλεί την αντικειμενικότητα της ηθικής, λέει ο εκλεπτυσμένος γνωσιακιστής, παρέχει τη βάση της. Μέσα από την ηθική θεώρηση, βλέπουμε ότι ορισμένες πράξεις π.χ. η δολοφονία αθώων ανθρώπων είναι πραγματικά λάθος, και ότι όποιος πιστεύει διαφορετικά κάνει λάθος. Αυτό δεν σημαίνει ότι μπορούμε να πείσουμε οποιονδήποτε εκτός της ηθικής μας προοπτικής να το υιοθετήσει. Γιατί έχουμε ήδη παραδεχθεί ότι εκτός της ηθικής μας προοπτικής δεν υπάρχει

τίποτα στο οποίο μπορούμε να κάνουμε έκκληση για να το προτείνουμε. Μπορούμε μόνο να κάνουμε διάφορες εκκλήσεις για να τον κάνουμε να δει μια κατάσταση όπως εμείς, αν δεν είναι τόσο διατεθειμένος δεν μπορεί να γίνει τίποτα περισσότερο.

Ωστόσο, αυτό δεν απειλεί την αντικειμενικότητα της ηθικής, απλώς τον αποκαλύπτει ότι είναι αναίσθητος. Η αντικειμενικότητα των μαθηματικών δεν κλονίζεται κάθε φορά που ένα παιδί δεν μπορεί να διδαχθεί να προσθέτει. Στα μαθηματικά, η αποτυχία ενός παιδιού να δει τα πράγματα με τον δικό μας τρόπο θεωρείται ανικανότητά του. Ομοίως με την ηθική: εάν ένας άνθρωπος δεν μπορεί να δει ότι ορισμένες πράξεις είναι σωστές και άλλες λάθος, αυτό είναι η ανικανότητά του. Η αντικειμενικότητα της ηθικής δεν απειλείται, παρόλο που, τελικά, δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτα άλλο από το να προσπαθήσουμε να τον κάνουμε να δει τα πράγματα όπως εμείς. Τελικά, αυτό είναι το μόνο που μπορούμε να κάνουμε σε οποιονδήποτε τομέα λόγου και η εσφαλμένη πεποίθηση ότι πρέπει να είμαστε σε θέση να κάνουμε περισσότερα στην ηθική πηγάζει από την εσφαλμένη πεποίθηση ότι είμαστε πραγματικά ικανοί να κάνουμε περισσότερα σε άλλους πιο προφανώς αντικειμενικούς τομείς του λόγου.

4.3 Ο εκλεπτυσμένος γνωσιακιστής

Η στρατηγική του εκλεπτυσμένου γνωσιακιστή μπορεί με βάση τα παραπάνω να περιγραφεί ως εξής: το κίνητρο για τον μη γνωσιακισμό έγκειται στο γεγονός ότι ο γνωσιακισμός, όπως παρουσιάζεται παραδοσιακά, καλεί την κριτική. Ωστόσο, ο παραδοσιακός γνωσιακισμός μπορεί να υπονομευθεί από τις εκτιμήσεις του Βιτγκενστάιν ενώ αφήνει χώρο για μια ικανοποιητική μορφή ηθικού ρεαλισμού. Με τον παραδοσιακό γνωσιακισμό να υπονομεύεται, το τυπικό κίνητρο για μη γνωσιακισμό εξαφανίζεται.

Δυστυχώς αυτή η στρατηγική δεν λειτουργεί, γιατί ούτε ο γνωσιακιστής ούτε ο μη γνωσιακιστής χρειάζεται να ερμηνεύσει τον εαυτό του ότι ενεργεί πάνω στο στάδιο που έχει θέσει ο εκλεπτυσμένος γνωσιακιστής. Στο βαθμό που ένας γνωσιακιστής επιθυμεί να δράσει σε αυτό το στάδιο, είναι ευάλωτος στην κριτική. Ωστόσο, ούτε ο γνωσιακιστής στην ηθική ούτε ο πλατωνιστής στα μαθηματικά χρειάζεται να συλλάβει τον εαυτό του ότι προσπαθεί να βγει έξω από την ηθική ή μαθηματική σφαίρα, σαν να προσπαθεί να υιοθετήσει μια εξωτερική άποψη. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ο γνωσιακιστής και ο πλατωνιστής υποχωρούν και στοχάζονται σε

έναν τομέα ανθρώπινης δραστηριότητας και πεποιθήσεων. Μπορούμε εύκολα να φανταστούμε έναν λαό που απλώς ενεργούσε σύμφωνα με έναν ηθικό κώδικα, που χρησιμοποιούσε απλώς την αριθμητική για να υπολογίσει και που ποτέ δεν σκέφτηκε τη δικαιολόγηση των δύο πρακτικών. Αλλά όταν κάποιος αναρωτηθεί « Έτσι είναι πραγματικά τα πράγματα; » ή «Γιατί πιστεύουμε ότι οι ηθικές (μαθηματικές) πεποιθήσεις μας είναι αληθινές;», αυτό δεν χρειάζεται να ερμηνευθεί ως θεμελιωδώς παράνομο αίτημα για υιοθέτηση μιας εξωτερικής άποψης, μιας μη ανθρώπινης προοπτικής.

Η μαθηματική και ηθική πρακτική δεν απαιτεί αυτοστοχασμό, αλλά τον προσκαλούν. Όταν, ίσως προαναστοχαστικά, ισχυριζόμαστε, για παράδειγμα, «Το να το κάνουμε αυτό θα ήταν λάθος», προβάλλουμε έναν ισχυρισμό που φιλοδοξεί στην καθολικότητα. Είναι πάρα πολύ ανθρώπινο και σε μεγάλο βαθμό ένα κομμάτι με ηθική συμπεριφορά για να το εξετάσουμε κριτικά και να δοκιμάσουμε αυτόν τον ισχυρισμό. Δεδομένου ότι οι ηθικοί ισχυρισμοί έχουν όντως φιλοδοξίες και εφόσον οι ηθικές αξιώσεις έχουν σημασία στη ζωή μας, εν μέρει, σε αυτές τις φιλοδοξίες, είναι φυσικό να αναρωτηθούμε εάν αυτές οι φιλοδοξίες εκπληρώνονται. Αν κάποιος ψάχνει για ένα Πλατωνικό όφελος, η σύλληψη του οποίου θα τον αναγκάσει να ενεργήσει με συγκεκριμένους τρόπους, τότε ένας Βιτγκενστάιν είναι σωστό να τον επικρίνει. Ωστόσο, ένας γνωσιακιστής δεν χρειάζεται να επιδιώκει το άνευ όρων, προσπαθώντας να σταθεί στο διάστημα έξω από την ανθρώπινη ζωή. Το μόνο που χρειάζεται είναι να διερευνήσει αν ο ηθικός λόγος έχει την ιδιότητα που αποδίδει στον εαυτό του.

Η έλξη του γνωσιακισμού έγκειται, στον ισχυρισμό ότι το λεξιλόγιο της ηθικής αξιολόγησης- π.χ. «σωστό», «λάθος», «καλό», «κακό»- μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς επιφύλαξη ακόμη και μετά από προβληματισμό σχετικά με τη φύση των ηθικών μας πρακτικών. Από την πρώιμη παιδική ηλικία εντυπώνετε μια ηθική προοπτική. Μαθαίνουμε την ηθική συμπεριφορά πολύ πριν μπορέσουμε να αναλογιστούμε την κατάστασή της. Το αρχικό κίνητρο μπορεί να είναι η επιθυμία για έγκριση από τους γονείς και ο φόβος της τιμωρίας, αλλά η ηθική προοπτική σύντομα εσωτερικεύεται και έρχεται να παρέχει το δικό της κίνητρο. Έτσι, από τη στιγμή που μπορούμε να σκεφτούμε τις ηθικές πρακτικές, δεν μπορούμε να είμαστε αποσπασμένοι παρατηρητές, αμερόληπτοι καταναλωτές που αναρωτιούνται ποια μάρκα να αγοράσουν.

Έχουμε ήδη μια ηθική άποψη που ενσωματώνει ένα λεξιλόγιο που, τουλάχιστον εκ πρώτης όψews, προσποιείται την οικουμενικότητα. Όταν λέμε ότι σε αυτές τις συνθήκες μια τέτοια ενέργεια θα ήταν το σωστό, πρωταρχικά ισχυριζόμαστε ότι θα ήταν το σωστό για οποιονδήποτε υπό αυτές τις συνθήκες, όχι μόνο για εμάς ή για κάποιον που συμερίζεται τις απόψεις μας. Καθώς αναλογιζόμαστε τις ηθικές μας πρακτικές, καθώς κάνουμε ένα βήμα πίσω, παρατηρούμε ότι υπάρχουν και άλλες ηθικές απόψεις. Υπήρξαν και υπάρχουν άλλες ηθικές αντιλήψεις που είναι πραγματικά ασυμβίβαστες στο ότι υπαγορεύουν διαφορετικές ενέργειες σε μια δεδομένη κατάσταση, χρησιμοποιώντας ένα λεξιλόγιο που προσποιείται την καθολικότητα. Φυσικά, οι διαφορετικές απόψεις μπορεί να αντιλαμβάνονται την κατάσταση διαφορετικά - ο Βιτγκενστάιν ισχυρίστηκε ότι υπάρχει μόνο περιθώριο να μιλήσουμε για αλήθεια, αντικειμενικότητα και αναγκαιότητα μέσα στο πλαίσιο μιας «μορφής ζωής»: μια κοινότητα που μοιράζεται αντιλήψεις περί εξέχουσας σημασίας, διαδρομές ενδιαφέροντος, αισθήματα φυσικότητας κ.λπ. Φυσικά, αυτή η «συμφωνία υπό μορφή ζωής» δεν αποτελεί την αλήθεια οποιουδήποτε τομέα λόγου. παρέχει το χώρο στον οποίο μπορεί κανείς να μιλήσει για την αλήθεια και το ψέμα, την αναγκαιότητα και το ενδεχόμενο, την αντικειμενικότητα και την υποκειμενικότητα.

Το ερώτημα είναι: πώς μπορούμε να έχουμε αυτή τη διορατικότητα και να διατηρήσουμε μια ισχυρή αίσθηση ότι η αριθμητική είναι ένα νόμιμο παράδειγμα αλήθειας, αντικειμενικότητας και αναγκαιότητας .

Εξετάζοντας τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

(α) $7 + 5 = 12$. Η υπόθεση ότι οποιοσδήποτε άλλος ακέραιος αριθμός, π.χ.13, είναι το άθροισμα του $7 + 5$ είναι λάθος.

(β) Μόνο μέσα στο πλαίσιο της ύπαρξής μας είναι τόσο νου ότι $7 + 5 = 12$.

Ο πρώτος ισχυρισμός, (α), είναι ασφαλώς σωστός. Το $7 + 5$ ισούται με 12 και όποιος προσπαθεί να προσφέρει έναν διαφορετικό ακέραιο αριθμό ως απάντηση είναι λάθος. Αφού μελετήσει κανείς τον μεταγενέστερο Βιτγκενστάιν, θέλει επίσης να πει ότι το (β) εκφράζει κάποιο είδος αλήθειας. Και όμως, πώς μπορεί κανείς να πιστέψει το (β) χωρίς αυτό να αποδυναμώσει τις πεποιθήσεις μας για την αλήθεια του (α) και την αναγκαιότητα της προσθήκης; Αυτό είναι ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζει κάθε συμβατικός ιστός στη φιλοσοφία των μαθηματικών. Ωστόσο,

υποστηρίζεται ότι ο Βιτγκενστάιν ήταν συμβατικός. Αυτό μπορεί να το δει κανείς όταν αναγνωρίσει ότι το (β) δεν εκφράζει μια εμπειρική αλήθεια. Διότι αν το (β) ήταν μια εμπειρική αλήθεια, τότε θα έπρεπε να είμαστε σε θέση να αποδεχτούμε το ακόλουθο αντιγεγονός:

Το 7+5 θα ισοδυναμούσε με κάτι διαφορετικό από το 12, αν όλοι είχαν άλλο μυαλό.

Δεν προκύπτει νόημα από αυτό το αντίθετο, γιατί η ιδέα ότι οι άνθρωποι είναι αλλόφρονες δεν είναι κάτι που είναι κατανοητό. Το πρόβλημά είναι ότι το να έχουμε το μυαλό μας όπως είμαστε δεν είναι μία από τις δυνατότητες που μπορούμε να εξερευνήσουμε μεταξύ άλλων. Εξερευνούμε τι πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας καθώς κινούμαστε συνειδητά και προσδιορίζοντας τι έχει περισσότερο και λιγότερο νόημα. Δεν μπορούμε να δούμε πώς θα μπορούσε να είναι να είσαι αλλόφρων, γιατί καθώς προχωράμε προς τα εξωτερικά όρια της νοημοσύνης μας φτάνουμε στα όρια της ασυναρτησίας και της ανοησίας.

Οι εξηγήσεις, σύμφωνα με τον Βιτγκενστάιν, πρέπει να έρθουν και να τελειώσουν κάπου. Και είναι δουλειά της φιλοσοφίας να βοηθήσει να κατανοηθεί αυτό που δεν έχει εξήγηση. Άτομο που έχει αποκτήσει ένα βασική αριθμητική ικανότητα, κατόπιν αιτήματος, θα προσθέσει 7+ 5 και θα πάρει 12 ως αποτέλεσμα. Η πλήρης εμπειρική εξήγηση αυτής της δράσης δεν θα καταπνίξει την αίσθηση σύγχυσης που νιώθουμε όταν, με μια Βιτγκενσταϊνική διάθεση, αναρωτιόμαστε γιατί αυτό το άτομο ενήργησε με έναν τρόπο και όχι με κάποιον ριζικά διαφορετικό τρόπο. Οι λόγοι μας έχουν δηλωθεί, έχουμε ήδη δώσει την πλήρη εμπειρική εξήγηση, οι αιτιολογήσεις μας έχουν εξαντληθεί. Και ακόμα θέλουμε να ξέρουμε: πώς θα συνεχίσουμε; Ο ισχυρισμός ότι «ενεργούμε με συγκεκριμένους τρόπους επειδή έχουμε το μυαλό μας όπως είμαστε» φαίνεται να κάνει γνήσια δουλειά στο να κάνει τη συμπεριφορά μας κατανοητή στους εαυτούς μας. Είναι λοιπόν δελεαστικό να δούμε τον ισχυρισμό να παρέχει μια εξήγηση, σαν να δείχνει γιατί έγινε πραγματικότητα η πιθανότητα που αποτελεί τη συμπεριφορά μας παρά κάποια άλλη πιθανότητα. Ωστόσο, δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτα από αυτές τις «άλλες δυνατότητες»:

Στην ηθική περίπτωση, αντίθετα, η «μορφή ζωής» φαίνεται να είναι μια κοινωνιολογική έκφραση που χρησιμοποιείται για να ξεχωρίσει μια ομάδα μεταξύ άλλων. Μπορούμε να αναγνωρίσουμε την ύπαρξη άλλων ομάδων που έχουν εναλλακτικές ηθικές απόψεις. Επιπλέον,

φαίνεται να υπάρχει ακόμα αρκετός χώρος για εξηγήσεις σχετικά με το γιατί έχουμε τις ηθικές πεποιθήσεις που έχουμε και όχι κάποιες άλλες. Είναι δύσκολο να καταλάβει κανείς γιατί πρέπει να πιστέψει κανείς ότι μόνο στο πλαίσιο μιας μορφής ζωής υπάρχει χώρος για αλήθεια, αντικειμενικότητα και αναγκαιότητα όταν η «μορφή ζωής» χρησιμοποιείται στενά, για να διαλέξει μια υποομάδα της κοινότητας των προσώπων.

4.4 Η αλήθεια των μαθηματικών

Ένα άλλο χαρακτηριστικό της μαθηματικής πρακτικής για το οποίο δεν φαίνεται να υπάρχει ανάλογο στην ηθική είναι ότι μπορεί κανείς να δώσει μια εξήγηση της αλήθειας και της αντικειμενικότητας των μαθηματικών. Φυσικά, η εξήγηση πρέπει να εμφανίζεται μέσα στο πλαίσιο μιας μορφής ζωής, και καμία εξήγηση δεν μπορεί να απαντήσει στο ερώτημα του Βιτγκενστάιν, «Πώς συνεχίζουμε;», αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι καμία εξήγηση δεν είναι δυνατή.

Γιατί τείνουμε να πιστεύουμε ότι κάθε τομέας των μαθηματικών περιέχει ένα σύνολο αληθειών; Κύρια αιτία αυτής της πεποίθησης είναι, επειδή ορισμένοι τομείς των μαθηματικών είναι εφαρμόσιμοι στον φυσικό κόσμο και στην εμπειρία μας από αυτόν.

Υπάρχει βέβαια μια κοινή πεποίθηση ότι τα μαθηματικά θεωρήματα είναι αληθή ανεξάρτητα από το αν υπάρχουν φυσικές παρουσίες τους. Αλλά μια μελέτη της αλλαγής της οπτικής γωνίας που συνέβη με την ανακάλυψη μη Ευκλείδειων γεωμετριών και την επιβεβαίωση της θεωρίας της σχετικότητας θέτει υπό αμφισβήτηση αυτή την πεποίθηση. Για παράδειγμα, ο Ευκλείδης υποστήριξε - ότι ένα τρίγωνο έχει εσωτερικές γωνίες ίσες με δύο ορθές γωνίες - που κάποτε θεωρήθηκε ότι ήταν μια *a priori* αλήθεια δεν θεωρείται πλέον καν ότι είναι αληθινό. Ο λόγος είναι ότι τώρα πιστεύεται ότι τα φυσικά τρίγωνα, αν υπήρχαν, δεν θα είχαν εσωτερικές γωνίες ίσες με δύο ορθές γωνίες ίσως είναι συνέπεια των ευκλείδειων αξιωμάτων και έτσι μπορούμε να ισχυριστούμε το περιορισμό ότι ισχύει για τρίγωνα στον Ευκλείδειο χώρο. Έτσι, ενώ κάποιος μπορεί να πιστεύει ένα θεώρημα αληθές ενώ παραμένει μη γνωσιακιστής στο ερώτημα, ασ πούμε, του εάν υπάρχουν φυσικά τρίγωνα, πρέπει να πιστεύει ότι το θεώρημα περιγράφει πραγματικά μια ιδιότητα που θα είχε ένα τρίγωνο.

Εκείνοι οι τομείς των μαθηματικών που συνηθίζεται να θεωρούνται αληθινοί περιγράφουν αφηρημένες δομές που διατηρούν ορισμένα δομικά χαρακτηριστικά που, γενικά, βρίσκονται

στον φυσικό κόσμο. Είναι η φύση αυτής της δομικής διατήρησης που εξηγεί τη δυνατότητα εφαρμογής των μαθηματικών. Για παράδειγμα, ένας αριθμός n σχετίζεται με άλλους αριθμούς με τρόπους που συνδέονται στενά με τον τρόπο με τον οποίο η μέλη σε σύνολα ανθεκτικών φυσικών αντικειμένων συσχετίζονται με ασύνδετα σύνολα διαφορετικών ιδιοτήτων. Εάν μια μελέτη της αναλογίας μεταξύ ηθικής και μαθηματικών υπονομεύει, αντί υποστηρίζει, εκλεπτυσμένο γνωσιακισμό, προκαλεί επίσης προβλήματα σε εκλεπτυσμένους μη γνωσιακιστές

Οι μη γνωσιακιστές τείνουν να είναι ηθικοί σχετικιστές, αλλά το παραδοσιακό πρόβλημα με τον σχετικισμό ήταν να δηλώσουν μια εκδοχή που είναι και συνεκτική και εύλογη. Ο σχετικισμός, σε απλοϊκή μορφή, είναι η άποψη ότι όλη η αλήθεια πρέπει να είναι αλήθεια-σε-θεωρία, για κάποια θεωρία, και ότι επομένως δεν μπορεί να υπάρχει αλήθεια ως προς το ποια από τις δύο ανταγωνιστικές θεωρίες είναι σωστή. Ο απλοϊκός σχετικισμός είναι ασυνάρτητος επειδή χρησιμοποιεί τη μη σχετικιστική αλήθεια για να περιγράψει τη σχετικιστική κατάσταση, ενώ αρνείται ότι μπορεί να υπάρχει τέτοια αλήθεια.

Ο Μπέρναρντ Ουίλιαμς (Bernard Williams) προσπάθησε να δηλώσει τις απαραίτητες προϋποθέσεις για πιο εξελιγμένα και συνεκτική μορφή σχετικισμού.

Πρώτον, πρέπει κανείς να έχει δύο θεωρίες που είναι λίγο πολύ αυτοτελείς.

Δεύτερον, οι θεωρίες πρέπει να είναι ασυμβίβαστες, με την ελάχιστη έννοια ότι υπάρχει κάποια ερώτηση ναι/όχι στην οποία δίνουν αντικρουόμενες απαντήσεις.

Επομένως, οι θεωρίες πρέπει να είναι συγκρίσιμες σε κάποιο ελάχιστο βαθμό. Μια θεωρία μπορεί να περιγράψει ένα γεγονός ως «πέτρα που πέφτει λόγω βαρύτητας», η άλλη ως «ένα κομμάτι της γης που αναζητά τη φυσική του θέση», αλλά πρέπει να υπάρχει κάποιο ερώτημα-π.χ. «Αν η Γη δεν βρισκόταν στο κέντρο του σύμπαντος, αυτό το αντικείμενο θα κινούνταν προς την ίδια κατεύθυνση;», στο οποίο οι θεωρίες δίνουν διαφορετικές απαντήσεις.

Τρίτον, οι θεωρίες πρέπει να βρίσκονται σε πραγματική αντιπαράθεση: δηλαδή πρέπει να υπάρχει μια ομάδα ανθρώπων για τους οποίους καθεμία από τις θεωρίες είναι μια πραγματική επιλογή. Μια θεωρία είναι μια πραγματική επιλογή για μια ομάδα είτε αν την πιστεύει είτε αν είναι δυνατόν να την πιστέψει η ομάδα. Θα υπάρχει βέβαια λεξιλόγιο αξιολόγησης, π.χ. «καλό-

κακό», «αληθές-λάθος», «σωστό-λάθος», στα οποία συζητούνται οι επιλογές. Σε μια πλασματική αντιπαράθεση Αντίθετα, μια ομάδα μπορεί να γνωρίζει και τις δύο θεωρίες και τις διαφορές τους, αλλά τουλάχιστον μία από αυτές δεν αποτελεί πραγματική επιλογή για αυτή.

Ο σχετικισμός, σύμφωνα με τον Ουίλιαμς, είναι το δόγμα ότι υπάρχει μόνο νόημα στην εκτίμηση της αξίας και των δύο θεωριών εάν βρίσκονται σε πραγματική αντιπαράθεση. «Το να στέκεσαι μόνο σε πλασματική αντιπαράθεση σημαίνει έλλειψη σχέση με τις ανησυχίες μας, το οποίο από μόνο του δίνει ουσιαστικό στοιχείο στην αξιολόγηση: τα μόνα πραγματικά ερωτήματα αξιολόγησης αφορούν τις πραγματικές επιλογές». Η κύρια αρετή αυτής της αφήγησης, σε αντίθεση με τον απλοϊκό σχετικισμό, είναι ότι μας επιτρέπει να σκεφτόμαστε εναλλακτικές θεωρίες που μπορεί να μας απασχολούν με τρόπους που δεν σχετίζονται αυστηρά με τη σημερινή θεωρία μας. Μπορούμε να εξερευνήσουμε πραγματικές επιλογές.

Έχουν διατυπωθεί αντιρρήσεις ότι ένας τέτοιος σχετικισμός είναι αδύνατος, με το σκεπτικό ότι η επιτυχής ερμηνεία μιας εναλλακτικής θεωρίας, η οποία είναι απαραίτητη για να τη δούμε ως ασύμβατη με τη θεωρία μας, ειδικά στις αποτιμήσεις της, απαιτεί η εναλλακτική να είναι τόσο παρόμοια με τη δική μας. πεποιθήσεις και συμφέροντα ότι πρέπει να βρίσκεται σε πραγματική σύγκρουση. Οποιαδήποτε εναλλακτική μπορούμε να κατανοήσουμε θα είναι μια πραγματική επιλογή. Αυτή η αντίρρηση προσπαθεί, νομίζω, να αντλήσει περισσότερα από τη θεωρία της ερμηνείας από όσα θα αποφέρει εύλογα. Μπορούμε να κατανοήσουμε θεωρίες με διαφορετικές αποτιμήσεις που δεν είναι πραγματικές επιλογές ούτε σε πραγματική αντιπαράθεση, αν και τα άτομα για τα οποία αυτές οι θεωρίες είναι πραγματικές επιλογές είναι αρκετά αναγνωρίσιμα σαν εμάς (Cantor, 1932). Ωστόσο, η διατύπωση του σχετικισμού του Ουίλιαμς συγχέει μια επιλογή και μια αντιπαράθεση. Σίγουρα μπορεί να υπάρξουν πραγματικές αντιπαράθεσεις μεταξύ δύο θεωριών στις οποίες οι υποστηρικτές κάθε θεωρίας δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν την άλλη θεωρία ως πραγματική επιλογή. Για παράδειγμα, οι ηθικές και θρησκευτικές απόψεις του θεμελιώδους Ισλάμ και της Δύσης φαίνεται να βρίσκονται σε πραγματική αντιπαράθεση: το μέλλον της ζωής στον πλανήτη τίθεται σε κίνδυνο από τις διαφωνίες, η ύπαρξη κάθε θεωρίας απειλεί την ικανότητα των οπαδών της άλλης μεταδίδουν τις πεποιθήσεις τους ανέπαφες στις μελλοντικές γενιές, κ.λπ. Ωστόσο, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι, λόγω της πολιτιστικής σχιζοφρένειας, οι οπαδοί της καμίας θεωρίας δεν θα

μπορούσαν να έχουν την άλλη ως πραγματική επιλογή. Μέρος του τι σημαίνει να είσαι ισλαμιστής φονταμενταλιστής είναι να έχεις τη δυτική προοπτική ως εξωπραγματική επιλογή και το αντίστροφο. Για να υπάρξει μια πραγματική αντιπαράθεση μεταξύ μη πραγματικών επιλογών, φαίνεται ότι το λεξιλόγιο της αξιολόγησης κάθε θεωρίας πρέπει να αναπτυχθεί με πλήρη ισχύ. Ακριβώς επειδή ο ένας θεωρεί την άλλη θεωρία ψευδή, κακή, παράλογη κ.λπ., η επιλογή είναι εξωπραγματική.

Μπορούν όμως και να υπάρξουν πλασματικές αντιπαράθεσεις μεταξύ πραγματικών επιλογών, ωστόσο, η αντιπαράθεση είναι πλασματική: Αν κάποιος μπορούσε χωρίς προβλήματα να χαρακτηρίσει μια από τις θεωρίες «αληθινή», την άλλη «ψευδή», τότε μια από τις θεωρίες δεν θα ήταν πραγματική επιλογή.

Όταν δύο ασυμβίβαστες θεωρίες είναι και οι δύο πραγματικές επιλογές για τους υποστηρικτές τους, αλλά βρίσκονται μόνο σε πλασματική αντιπαράθεση. Αυτή η μορφή σχετικισμού μπορεί να επιτευχθεί μόνο σε περιορισμένους τομείς σκέψης. Μια αντιπαράθεση μεταξύ πραγματικών επιλογών μπορεί να είναι πλασματική μόνο εάν παραδεχτεί κανείς ότι δεν υπάρχουν πολλά στη διαμάχη: δεν υπάρχει «γεγονός του θέματος» με το οποίο μια από τις θεωρίες προσεγγίζει καλύτερα. Διαφορετικά η αντιπαράθεση θα ήταν πραγματική. Τώρα φαίνεται ότι όσο περισσότερες πεποιθήσεις για τον κόσμο συμπεριλαμβάνουμε στη «θεωρία» μας, τόσο λιγότερο πιθανό είναι να αντιμετωπίσουμε μια αντιπαράθεση ως πλασματική. Διότι γινόμαστε ολοένα και πιο ανίκανοι να αποστασιοποιηθούμε από τις πεποιθήσεις μας στο βαθμό που είναι απαραίτητο για να αντιμετωπίσουμε μια εναλλακτική ως πραγματική επιλογή ή ως πλασματική αντιπαράθεση.

Συμπεράσματα – Συζήτηση

Από την παραπάνω αναζήτηση έχει καταστεί σαφές ότι, τουλάχιστον εν μέρει, οι μαθηματικές τεχνικές μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε φιλοσοφικά ζητήματα στα μαθηματικά. Αυτό έλαβε χώρα στο πλαίσιο της μαθηματικής λογικής, η οποία έχει οριστεί εδώ για να περιλαμβάνει τα υποπεδία της θεωρίας απόδειξης, της θεωρίας μοντέλων, της θεωρίας συνόλων και της θεωρίας υπολογισιμότητας. Έτσι, ο 20ός αιώνας είδε τη μαθηματική εξερεύνηση των διακλαδώσεων του ποιες είναι, στον πυρήνα, οι φιλοσοφικές πεποιθήσεις για τη φύση των μαθηματικών. Σημαντικά σημεία στα οποία αναφέρθηκε η εργασία αυτή ήταν ο μαθηματικός σχετικισμός, στο πλαίσιο της μετανεωτερικότητας και της ηθικής. Δεδομένου ότι η ηθική ασχολείται με το πώς πρέπει να ζούμε τη ζωή μας μεταξύ άλλων, οι πραγματικές επιλογές θα τείνουν να βρίσκονται σε πραγματική αντιπαράθεση. Μπορεί να υπάρχουν ορισμένοι περιορισμένοι τομείς συμπεριφοράς, για παράδειγμα ερωτήματα ηθικής συμπεριφοράς, στα οποία μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τις πραγματικές επιλογές όπως στην πλασματική αντιπαράθεση. Καθώς η επιλογή περιλαμβάνει όλο και ευρύτερους τομείς της ανθρώπινης συμπεριφοράς, ωστόσο, είτε θα γίνει νοητή είτε η αντιπαράθεση θα γίνει πραγματική ή και τα δύο. Σε κάθε περίπτωση το λεξιλόγιό μας της αξιολόγησης θα τείνει να χρησιμοποιείται με πλήρη ισχύ. Ακριβώς επειδή πιστεύουμε ότι μια άλλη επιλογή είναι λανθασμένη, κακή, παράλογη, είναι εξωπραγματική για εμάς. επειδή το πιστεύουμε λάθος, κακό παράλογο, είμαστε σε θέση να συντηρήσουμε τον εαυτό μας -και τις πεποιθήσεις μας- μέσα από μια πραγματική αντιπαράθεση. Δεδομένου του χαρακτηρισμού μας του σχετικισμού, αυτές οι σκέψεις αποκαλύπτουν την αναλήθεια στον ηθικό σχετικισμό (Burgess, et al.,1997).

Ο σχετικιστής, ωστόσο, μπορεί να προσπαθήσει να ενισχύσει τη θέση του. Μπορεί να παραδεχτεί ότι δεν μπορούμε να συνεχίσουμε να αντιμετωπίζουμε για πάντα μια αντιπαράθεση ως απλώς πλασματική. Ωστόσο, θα επιμείνει ότι «μέσα στις σπουδές μας» θα δούμε ότι ο μη γνωσιακισμός είναι αληθινός. και θα αναγνωρίσουμε ότι, ως εμπειρικό γεγονός, τυχαίνει να υπάρχουν και άλλες ομάδες με ασυμβίβαστες ηθικές απόψεις και ότι οι διάφορες απόψεις δεν μπορούν σε καμία περίπτωση να θεωρηθούν ως συγκλίνουσες. Φαίνεται ότι αυτός ο σχετικιστής μπορεί να επιτρέψει να υπάρξουν πραγματικές αντιπαράθεσεις μεταξύ επιλογών, τόσο πραγματικών όσο και πλασματικών, στις οποίες δεν υπάρχει τελικά κανένα πραγματικό στοιχείο για το ποιος έχει δίκιο και ποιος έχει άδικο. Θα παραδεχτεί ότι καθώς η επιλογή περιλαμβάνει

ένα ευρύτερο φάσμα ανθρώπινης συμπεριφοράς, θα είμαστε ολοένα και πιο ανίκανοι να την αντιμετωπίσουμε ως πραγματική ή ως εννοιολογική αντιπαράθεση. Θα παραδεχτεί ότι «εκτός των σπουδών μας» θα τείνουμε να χρησιμοποιούμε το λεξιλόγιό μας της αξιολόγησης με πλήρη ισχύ. Ωστόσο, θα επιμένει επίσης ότι «μέσα στις σπουδές μας», προστατευμένοι από την επίθεση των αντίπαλων επιλογών, θα δούμε ότι δεν υπάρχει καμία πραγματικότητα για το ποιος έχει δίκιο και ποιος άδικο.

Η πεποίθηση ότι αυτή η μορφή σχετικισμού είναι αληθινή μπορεί να έχει διαφορετικά αποτελέσματα σε διαφορετικούς ανθρώπους. Σε μερικούς μπορεί να οδηγήσει σε μια μακιαβελική προσπάθεια να επιβάλουν τις δικές τους αξίες σε άλλους. Σε ορισμένους μπορεί να ενθαρρύνει μια ιδιωτικοποιημένη επιδίωξη ατομικών συμφερόντων. Σε μερικούς μπορεί να οδηγήσει σε αγανάκτηση και γενική υπονόμευση των αξιών. Οι στοχαστικοί ηθικοί παράγοντες που ζουν στη σύγχρονη φιλελεύθερη κοινωνία φαίνεται να είναι δεκτικοί στην ανησυχία ότι ο σχετικισμός είναι αληθινός. και αυτό μπορεί, κατά τον χεγκελιανό τρόπο, να οδηγήσει σε μεταμόρφωση της οπτικής. Η συζήτηση μεταξύ γνωσιακού και μη γνωσιακού δεν είναι απλώς μια αφηρημένη συζήτηση σχετικά με την (έλλειψη) θεμελίων της ηθικής. η ηθική προοπτική κάποιου μπορεί στην πραγματικότητα να αλλάξει από το αποτέλεσμα της συζήτησης. Για παράδειγμα, εκείνοι που είναι ανίκανοι να ζήσουν μια ζωή ανθρωπιστικής διάστασης δεν θα μπορούν να έχουν τη διορατικότητα ότι ο σχετικισμός είναι αληθινός χωρίς να αποστασιοποιούνται έτσι από το λεξιλόγιο του «σωστού και λάθους». Αυτό το λεξιλόγιο δεν παρουσιάζεται ως λεξιλόγιο έγκρισης ή αποδοκιμασίας της τοπικής συμπεριφοράς, αλλά ως καθολικό πρότυπο με το οποίο μπορεί να μετρηθεί η διαφορετική συμπεριφορά. Ίσως ένα τέτοιο λεξιλόγιο να είναι ιδεολογικό: ίσως δεν μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε ειλικρινά χωρίς μια ψεύτικη συνείδηση της θέσης κρίσης μας. Αλλά πώς μπορούμε να πιστέψουμε αυτή τη διατριβή και να συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε το λεξιλόγιο ειλικρινά σε πραγματικές αντιπαραθέσεις ;

Με εξελικτικούς όρους, φαίνεται ότι πάσχουμε από μια επιλεκτικό μειονέκτημα. Η δεκτικότητά μας στην πεποίθηση ότι ο σχετικισμός είναι αληθινός μας καθιστά ευάλωτους σε πραγματικές αντιπαραθέσεις -και ειδικά σε θνητές συγκρούσεις- όταν ο άλλος πολιτισμός τείνει να είναι θεμελιώδης, μη στοχαστικός και μη δεκτικός στην πεποίθηση ότι ο σχετικισμός είναι αληθινός.

Ακόμα κι αν δεχθούμε ότι κάποιες αλλαγές πεποιθήσεων θα οδηγήσουν σε μια βελτιωμένη ηθική προοπτική, είναι απαισιόδοξο να συμπεράνουμε ότι η στοχαστική επίγνωση είναι επιλεκτικά μειονεκτική σε σύγκριση με την μη στοχαστική μονομερή διάθεση (Balaguer, 1998).

Ένας τρόπος για να συνεχίσουμε την φιλοσοφική αναζήτηση θα ήταν να δείξουμε ότι αυτή η μορφή σχετικισμού δεν είναι απλώς «αναληθής» με την χεγκελιανή έννοια, αλλά στην πραγματικότητα ασυνάρτητη, καθώς ακόμα αγνοούμε πολύ τη σχέση μεταξύ των στοχαστικών πεποιθήσεών μας και πέρα από τις πεποιθήσεις και τις αξίες μας, δεν είναι βιαστικό να ελπίζουμε ότι αυτό μπορεί να γίνει. Εάν υπάρχει μια σημαντική αναλογία μεταξύ των μαθηματικών και της ηθικής, είναι ότι και οι δύο τομείς του λόγου προσκαλούν έναν ορισμένο βαθμό προβληματισμού. Αναλογιζόμενοι τις μαθηματικές και ηθικές αρχές που χρησιμοποιούμε, συνειδητοποιούμε ποιες αξίζουν ευρύτερης εφαρμογής ή γενικότερης διατύπωσης. Επιπλέον, τόσο τα μαθηματικά όσο και η ηθική είναι τόσο αξιοσημείωτα ανθρώπινα επιτεύγματα που προκαλούν φυσικά την απορία για το πώς είναι δυνατά. Αυτό δεν είναι μια επιθυμία για μια μη ανθρώπινη προοπτική, αλλά μια επιθυμία για διορατικότητα στην ανθρώπινη προοπτική. Ο σχετικισμός προτείνεται μόλις κάποιος αναλογιστεί την ηθική πρακτική και παρατηρήσει την ύπαρξη διαφορετικών ηθικών πρακτικών. Αλλά σε έναν παρατηρητή του οποίου η οπτική γωνία είναι περιορισμένη, οι γραμμές δύο αναπτυσσόμενων πολιτισμών μπορεί να φαίνονται παράλληλες, παρόλο που στην πραγματικότητα συγκλίνουν. Η ελπίδα που εκφράζω, και είναι μόνο μια ελπίδα, είναι ότι ο σχετικισμός θα γίνει αντιληπτός ως προϊόν ενός πρώιμου σταδίου προβληματισμού» .

Ο Λήρ μιλά για έναν «εκλεπτυσμένο γνωσιακισμό», ο οποίος μπορεί να είναι μια μορφή σχετικισμού. Στη συνέχεια, μιλά για έναν περίπλοκο σχετικιστικό μη γνωσιακισμό. Ωστόσο μπορεί κανείς να διαβάσει το δοκίμιό του ως απλά επιχειρήματα ενάντια σε διαφορετικές μορφές «σχετικισμού», ανεξάρτητα από τον γνωσιακισμό (Lear, 1983).

Και οι δύο αυτές θεωρίες φαίνονται σχετικιστικές επειδή απαιτούν από εμάς (1) να έχουμε ομάδες ανθρώπων που έχουν διαφορετικές ηθικές πεποιθήσεις και (2) να συνειδητοποιούμε ότι «απλώς δεν υπάρχει πραγματικό γεγονός». (Ίσως οι γνωσιακοί σχετικιστές θα υποστήριζαν

ότι «υπάρχει ένα γεγονός του θέματος», αλλά δεν ξέρω γιατί θα κατέληξαν σε αυτό το συμπέρασμα.) (Bernays, 1935)

Στην πραγματικότητα, και οι δύο μορφές σχετικισμού μπορούν να αναγνωστούν ως γνωσιακές.

Ο Λήρ ορίζει μια μορφή μη γνωσιακισμού ως πηγάζει από δύο πεποιθήσεις: «Πρώτον, ότι οι ηθικές κρίσεις παρακινούν πράξεις. Δεύτερον, ότι καμία αυστηρά γνωσιακή πεποίθηση για τον κόσμο δεν θα μπορούσε από μόνη της να παρακινήσει τη δράση: κάποια μη γνωσιακή επιθυμία ή βούληση πρέπει επίσης να υπάρχει». Ωστόσο, αυτές οι δύο πεποιθήσεις, για κάποιους είναι εντελώς άσχετες με τον γνωσιακισμό. Το αν η ηθική μπορεί να είναι αποτελεσματικά κίνητρο ή όχι δεν είναι θέμα. Αυτό που αμφισβητείται είναι εάν οι ηθικές μου πεποιθήσεις είναι είτε «αληθινές ή ψευδείς». Ένας μη γνωσιακιστής θα έλεγε ότι δεν είναι. Εάν «δεν υπάρχει κανένα γεγονός», τότε γιατί να μην πω απλώς ότι η πεποίθησή μου ότι «ο φόνος είναι λάθος» είναι ψευδής. (Αυτή είναι μια γνωσιακή απάντηση.)

Ίσως τα ηθικά γεγονότα να είναι καθολικά από κάποια άποψη, αλλά υπάρχει ένα ερώτημα σχετικά με το εάν κάποιος βρίσκεται ποτέ σε «σχετικά παρόμοιες περιστάσεις». Εάν όλες οι συνθήκες είναι διαφορετικές, τότε μπορεί να μην είμαστε σε θέση να τις ενοποιήσουμε. (van Atten & D. van Dalen, 2002)

Μια εναλλακτική λύση στη βάση της ηθικής στις περιστάσεις είναι η βάση της στις προθέσεις και μια προσπάθεια ηθικής αρετής (το να είσαι πρόθυμος και ικανός να κάνεις αυτό που είναι σωστό). Όσο προσπαθούμε να είμαστε καλοί άνθρωποι με κάθε δυνατό τρόπο, γίνεται παράλογο να πούμε ότι κάναμε πραγματικά το «λάθος». Μπορεί να καταλήξουμε να πληγώνουμε ανθρώπους, αλλά και πάλι κάναμε ό,τι περνούσε από το χέρι μας για να αποφύγουμε να πληγώσουμε ανθρώπους. Το να κάνεις αυτό που έχεις κάθε λόγο να πιστεύεις ότι είναι σωστό είναι πραγματικά σωστό. Φυσικά, αν έχετε «κάθε λόγο» να πιστεύετε ότι είναι σωστό, τότε μπορείτε να δικαιολογήσετε το γιατί. Μόνο το απρόβλεπτο μπορεί να οδηγήσει μια καλή ενέργεια σε κακές συνέπειες. Δεν μπορούμε να περιμένουμε να γνωρίζουμε το απρόβλεπτο.

Βιβλιογραφία

- Antonutti Marfori, M., 2010. ‘Informal Rigour and Mathematical Practice’, *Studia Logica*, 102: 567–576.
- Appel, K., Haken, W. & Koch, J., 1977. ‘Every Planar Map is Four Colorable’, *Illinois Journal of Mathematics*, 21: 429–567.
- Avigad, J., 2021. ‘Reliability of Mathematical Inference’, *Synthese*, 198: 7377–7399.
- Balaguer, M., 1998. *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.
- Benacerraf, P. & Putnam, H. (eds.), 1983. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edition.
- Bernays, P., 1935. ‘On Platonism in Mathematics’, in Benacerraf & Putnam 1983, pp. 258–271.
- Boolos, G., 1987. ‘The Consistency of Frege’s Foundations of Arithmetic’, in Boolos 1998, pp. 183–201.
- Burgess, J. & Rosen, G., 1997. *A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.
- Cantor, G., 1932. *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, E. Zermelo (ed.), Berlin: Julius Springer.
- Curry, H., 1958. *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, Amsterdam: North-Holland.
- da Costa, N. C. A., Krause, D., and Bueno, O. (2007) Paraconsistent logics and paraconsistency. In D. Jacquette (ed.), *Philosophy of Logic*. Amsterdam: North-Holland, 791 - 911
- Detlefsen, M., 1986. *Hilbert’s Program*, Dordrecht: Reidel.
- Deleuze Gilles and Paul Patton. 2001. *Difference and Repetition*. London: Continuum.
- Deleuze G Tomlinson H Habberjam B. 1984 *Kant’s Critical Philosophy : The Doctrine of the Faculties*. Minneapolis: University of Minnesota Press; .
- Deleuze G Howard R Proust M. 2008 *Proust and Signs : The Complete Text*. London: Continuum; .
- Deleuze G Boyman A. *Pure Immanence : Essays on a Life*. 1St pbk. ed. New York Cambridge Mass: Zone Books ; Distributed by MIT Press; 2005.
- Deleuze G. *Nietzsche and Philosophy*. New York: Columbia University Press; 1983.

- Derrida J. 1976 *Of Grammatology*, trans. Spivak, Baltimore: John Hopkins University Press.
- —, 1978 *Writing and Difference*, trans. Bass, Chicago: University of Chicago Press.
- Di Toffoli, S., 2021. ‘Reconciling Rigor and Intuition’. *Erkenntnis*, 86: 1783–1802.
- Feferman, S., 1988. ‘Weyl Vindicated: Das Kontinuum seventy years later’, reprinted in S. Feferman, *In the Light of Logic*, New York: Oxford University Press, 1998, pp. 249–283.
- Feyerabend, P. (1988). *Farewell to Reason*, rev. London: Verso
- Field, H., 1980. *Science without Numbers: a defense of nominalism*, Oxford: Blackwell.
- Fine, K., 2002. *The Limits of Abstraction*, Oxford: Oxford University Press.
- Frege, G., 1884. *The Foundations of Arithmetic. A Logico-mathematical Enquiry into the Concept of Number*, J.L. Austin (trans.), Evanston: Northwestern University Press, 1980.
- Gentzen, G., 1934, ‘Untersuchungen über das logische Schließen I, II,’ *Mathematische Zeitschrift*, 39: 176–210, 405–431.
- — G., 1938. ‘Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie’, in *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften* (Neue Folge/Heft 4), Leipzig: Hirzel.
- Gödel, K., 1931. ‘On Formally Undecidable Propositions in Principia Mathematica and Related Systems I’, in van Heijenoort 1967, pp. 596–616.
- —, 1944. ‘Russell’s Mathematical Logic’, in Benacerraf & Putnam 1983, pp. 447–469.
- —, K., 1958, ‘Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes,’ *Dialectica*, 12: 280–287.
- Hale, B. & Wright, C., 2001. *The Reason’s Proper Study: Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.
- Hallett, M., 1984. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford: Clarendon Press.
- Hodes, H., 1984. ‘Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic’, *Journal of Philosophy*, 3: 123–149.
- Hamkins, J., 2015. ‘Is the dream solution of the continuum hypothesis attainable?’, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 56: 135–145.
- Hellman, G., 1989. *Mathematics without Numbers*, Oxford: Clarendon Press.
- Hilbert, D., 1925. ‘On the Infinite’, in Benacerraf & Putnam 1983, pp. 183–201.

- Horsten, L., 2012. ‘Vom Zählen zu den Zahlen: on the relation between computation and mathematical structuralism’, *Philosophia Mathematica*, 20: 275–288.
- Isaacson, D., 1987. ‘Arithmetical Truth and Hidden Higher-Order Concepts’, in The Paris Logic Group (eds.), *Logic Colloquium ‘85*, Amsterdam: North-Holland, pp. 147–169.
- Leng, M., 2010. *Mathematics and Reality*, Oxford: Oxford University Press.
- Linnebo, 2018. *Thin Objects: an abstractionist account*, Oxford: Oxford University Press.
- Moore, A., 2001. *The Infinite*, second edition, New York: Routledge.
- Niebergall, K., 2000. ‘On the Logic of Reducibility: axioms and examples’, *Erkenntnis*, 53: 27–62.
- Nietzsche, Friedrich, 1889, “Twilight of the Idols”, translation and pages numbers from Kaufman 1954: 463–564.
- Parsons, C., 1980. ‘Mathematical Intuition’, *Proceedings of the Aristotelian Society*, 80: 145–168.
- —, 1986, ‘Intuition in Constructive Mathematics,’ in *Language, Mind and Logic*, J. Butter (ed.), Cambridge: Cambridge University Press.
- —, 2008. *Mathematical Thought and Its Objects*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Pour-El, M., 1999. ‘The Structure of Computability in Analysis and Physical Theory’, in E. Griffor (ed.), *Handbook of Computability Theory*, Amsterdam: Elsevier, pp. 449–471.
- Rav, Y., 1999. ‘Why do we prove theorems?’, *Philosophia Mathematica*, 9: 5–41.
- Reck, E. & Price, M., 2000. ‘Structures and Structuralism in Contemporary Philosophy of Mathematics’, *Synthese*, 125: 341–383.
- Resnik, M., 1974. ‘The Frege-Hilbert Controversy’, *Philosophy and Phenomenological Research*, 34: 386–403.
- Russell, B., 1902. ‘Letter to Frege’, in van Heijenoort 1967, 124–125.
- Shapiro, S., 1983. ‘Conservativeness and Incompleteness’, *Journal of Philosophy*, 80: 521–531.
- Sieg, W., 1994. ‘Mechanical Procedures and Mathematical Experience’, in A. George (ed.), *Mathematics and Mind*, Oxford: Oxford University Press.
- Studd, J., 2019. *Everything, more or less. A defence of generality relativism*. Oxford: Oxford University Press.
- Tait, W., 1981. ‘Finitism’, reprinted in Tait 2005, pp. 21–42.

- Tatton-Brown, O., forthcoming. ‘Rigour and Proof’, *Review of Symbolic Logic*, first online 21 October 2020. doi:10.1017/S1755020320000398
- Troelstra, A. & van Dalen, D., 1988. *Constructivism in Mathematics: An Introduction* (Volumes I and II), Amsterdam: North-Holland.
- van Heijenoort, J., 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic (1879–1931)*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Weir, A., 2003. ‘Neo-Fregeanism: An Embarrassment of Riches’, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 44: 13–48.
- Weyl, H., 1918. *The Continuum: A Critical Examination of the Foundation of Analysis*, S. Pollard and T. Bole (trans.), Mineola: Dover, 1994.
- Wright, C., 1983. *Frege’s Conception of Numbers as Objects* (Scots Philosophical Monographs, Volume 2), Aberdeen: Aberdeen University Press.
- Yablo, S. 2014. *Aboutness* Princeton: Princeton University Press.
- Zach, R., 2006. ‘Hilbert’s Program Then and Now’, in D. Jacquette (ed.), *Philosophy of Logic* (Handbook of the Philosophy of Science, Volume 5), Amsterdam: Elsevier, pp. 411–447.
- van Atten, M., 2004, *On Brouwer*, Belmont: Wadsworth/Thomson Learning.
- —, M. and D. van Dalen, 2002, ‘Arguments for the continuity principle,’ *Bulletin of Symbolic Logic*, 8(3): 329–374.
- Brouwer, L.E.J., 1975, *Collected works I*, A. Heyting (ed.), Amsterdam: North-Holland.
- —, 1976, *Collected works II*, H. Freudenthal (ed.), Amsterdam: North-Holland.
- Diaconescu, R., 1975, ‘Axiom of choice and complementation,’ in *Proceedings of the American Mathematical Society*, 51: 176–178.
- Dummett, M., 1975, ‘The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic,’ in H.E. Rose and J.C. Shepherdson (eds.), *Proceedings of the Logic Colloquium ’73*, special issue of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 80: 5–40.
- Fourman, M., and R. Grayson, 1982, ‘Formal spaces,’ in A.S. Troelstra and D. van Dalen (eds.), *The L.E.J. Brouwer Centenary Symposium*, Amsterdam: North-Holland.
- Heyting, A., 1930, ‘Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik,’ *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie von Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse*, 42–56.
- Hegel, 1807, *Phenomenology of Spirit*, A.V. Miller (trans.), Oxford: Oxford University Press, 1977.
- van der Hoeven, G., and I. Moerdijk, 1984, ‘Sheaf models for choice sequences,’ *Annals of Pure and Applied Logic*, 27: 63–107.

- Kleene, S.C., and R.E. Vesley, 1965, *The foundations of intuitionistic mathematics*, Amsterdam: North-Holland.
- Kreisel, G., 1959, 'Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite type,' in A. Heyting (ed.), *Constructivity in Mathematics*, Amsterdam: North-Holland.
- Kierkegaard, Soren, 1846, *The Present Age*, Alexander Dru (trans.), New York: Harper & Row, 1962. (Page reference is to the translation.)
- Kripke, S.A., 1965, 'Semantical analysis of intuitionistic logic', in J. Crossley and M. Dummett (eds.), *Formal systems and recursive functions*, Amsterdam: North-Holland.
- Lubarsky, R., F. Richman, and P. Schuster 2012, 'The Kripke schema in metric topology', *Mathematical Logic Quarterly*, 58(6): 498–501.
- Lear, J. (1983). Ethics, Mathematics and Relativism. *Mind*, 92(365), 38–60. <http://www.jstor.org/stable/2253929>
- Maietti, M.E., and G. Sambin, 2007, 'Toward a minimalist foundation for constructive mathematics,' in L. Crosilla and P. Schuster (eds.), *From sets and types to topology and analysis: toward a minimalist foundation for constructive mathematics*, Oxford: Oxford University Press.
- Marion, M., 2003, 'Wittgenstein and Brouwer', *Synthese* 137: 103–127.
- Moschovakis, J.R., 1973, 'A topological interpretation of second-order intuitionistic arithmetic,' *Compositio Mathematica*, 26(3): 261–275.
- Niekus, J., 2010, 'Brouwer's incomplete objects' *History and Philosophy of Logic*, 31: 31–46.
- van Oosten, J., 2008, *Realizability: An introduction to its categorical side*, (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics: Volume 152), Amsterdam: Elsevier.
- Prawitz, D., 1977, 'Meaning and proofs: On the conflict between classical and intuitionistic logic,' *Theoria*, 43(1): 2–40.
- Plato, *Republic* bk VII.
- Sambin, G., 1987, 'Intuitionistic formal spaces,' in *Mathematical Logic and its Applications*, D. Skordev (ed.), New York: Plenum.
- Tieszen, R., 1994, 'What is the philosophical basis of intuitionistic mathematics?,' in D. Prawitz, B. Skyrms and D. Westerstahl (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, IX: 579–594.
- Veldman, W., 1976, 'An intuitionistic completeness theorem for intuitionistic predicate logic,' *Journal of Symbolic Logic*, 41(1): 159–166.

- —, forthcoming, ‘Intuitionism is all bosh, entirely. Unless it is an inspiration,’ in G. Alberts, L. Bergmans, and F. Muller, (eds.), *Significs and the Vienna Circle: Intersections*, Dordrecht: Springer. [[preprint available online](#)]
- Weyl, H., 1921, ‘Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik,’ *Mathematische Zeitschrift*, 10: 39–70.