ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Μελέτη Σφαιρικά Συμμετρικών Λύσεων σε Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας-Στρέψης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Χριστόδουλου - Γεώργιου Βλαχούτσικου

Επιβλέπων καθηγητής: Εμμανουήλ Σαριδάκης

Δ.Π.Μ.Σ. Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα, Μάρτιος 2023

Περίληψη

Από το 1915 που δημοσιεύτηκε από τον **Albert Einstein** η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, μέχρι και σήμερα, θεωρείται, μαζί με την Κβαντική Θεωρία, ένας από τους δύο βασικότερους πυλώνες της σύγχρονης φυσικής. Ωστόσο κάθε απόπειρα σύνδεσης αυτών των δύο θεωριών καταλλήγει αναπόφευκτα σε μαθηματικά παράδοξα γεγονός που έχει οδηγήσει τα τελευταία χρόνια σε μία πληθώρα θεωριών βαρύτητας με σκοπό την τροποποίηση της Γενικής Σχετικότητας. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μία εισαγωγή στις Τηλεπαράλληλες Θεωρίες Βαρύτητας καθώς και στις τροποποιημένες $f(T)$ θεωρίες.

Αρχικά θα παρουσιάσουμε την ανάγκη για γεωμετρικές τροποποιήσεις στο μοντέλο της Γενικής Σχετικότητας όπως οι $f(R)$ θεωρίες. Στην συνέχεια θα κάνουμε μία μαθηματική εισαγωγή στον φορμαλισμό της Τηλεπαράλληλης Θεωρίας εισάγοντας την έννοια της στρέψης και θα εξάγουμε πεδιακές εξισώσεις καταλήγοντας στην ισοδυναμία μεταξύ της παραπάνω θεωρίας και της Γενικής Σχετικότητας. Τέλος θα παρουσιάσουμε μία τροποποιημένη θεωρία στρέψης, $f(T)$ καθώς και λύσεις που έχουν εξαχθεί σε αυτή τη θεωρία.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η Γενική Θεωρία τις Σχετικότητας του Einstein, αποτέλεσε την πιο βασική θεωρία για την περιγραφή της βαρύτητας αλλάζοντας την αντίληψη που είχαμε μέχρι τότε, από μία δύναμη σε μία γεωμετρία του τετραδιάστατου καμπυλωμένου χώρου. Μέχρι τώρα έχει ελεγχθεί με ακρίβεια στο ηλιακό μας σύστημα και αποτελεί τη βάση της κατανόησής μας για το σύμπαν και την εξήγηση πολλών φαινομένων όπως η βαρυτική κατάρρευση, οι μελανές οπές, οι πηγές ακτινών-Χ, τα βαρυτικά κύματα κ.α.

Η εξίσωση Einstein, η εξίσωση δηλαδή που συνδέει τη γεωμετρία του χωροχρόνου με την ύλη, επιλύθηκε για πρώτη φορά το 1916 από τον γερμανό φυσικό και αστρονόμο Karl Schwarzschild. Οι ιδιομορφίες αυτής της λύσης οδήγησαν για πρώτη φορά στην υπόθεση ύπαρξης μελανών οπών ως μαθηματικά-γεωμετρικά αντικείμενα. Στη συνέχεια και άλλες λύσεις, όπως η Reissner-Nordström (1916-1918), η Kerr (1963), η Kerr-Newman (1965), επέμειναν στην ύπαρξη μελανών οπών μέχρι το 2019 όπου δημοσιεύθηκε η πρώτη στην ιστορία άμεση εικόνα μιας μαύρης τρύπας στον γαλαξία Μεσιέ 87.

Αν και η Γενική Σχετικότητα έδειχνε να δίνει απαντήσεις σε πολλά ερωτήματα σχετικά με το σύμπαν στη συνέχεια παρουσιάστηκαν πολλά προβήματα εξήγησης κάποιον φαινομένων Η ακτονοβολία υποβάθρου, οι καμπύλες περιστροφής γαλαξιών ή σμηνών γαλαξιών υποδεικνύουν την ύπαρξη κάποιας ύλης που δεν ακτινοβολεί στο ηλεκτρομαγνητικό φάσμα. Επίσης ένα από τα μεγαλύτερα προβήματα που προκύπτουν είναι η ενοποίηση της Βαρύτητας με την Κβαντομηχανική. Όλα αυτά οδήγησαν στην ανάγκη τροποίησης της Γενικής Σχετικότητας του Einstein κάτι που μέχρι σήμερα έχει φέρει μία ποικιλία νέων θεωρίων όπως οι $f(R)$ θεωρίες, οι Τηλεπαράλληλες Θεωρίες Βαρύτητας και η $f(T)$.

Η Γενική Σχετικότητα συνδέει τη καμπυλότητα του χωρόχρονου με τη βαθμωτή καμπυλότητα Ricci, R. Ένα λογικό και πρώτο βήμα είναι να εισάγουμε στη θεωρία μεγαλύτερους όρους αυτής της ποσότητας ή μεγαλύτερες τάξεις παραγώγων. Μία ακόμη προσέγγιση είναι να εξηγήσουμε τη βαρύτητα μέσω του τανυστή στρέψης T. Η δεύτερη αυτή ιδέα οδήγησε σε μία ισοδύναμη θεωρία της Γενικής Σχετικότητας γνωστή ως Τηλεπαράλληλη Θεωρία Βαρύτητας.

Παρ΄όλο που η Γενική Σχετικότητα και η Τηλεπαράλληλη Θεωρία Βαρύτητας οδηγούν στα ίδια αποτελέσματα, αν θεωρήσουμε αντίστοιχα μεγαλύτερους όρους στρέψης και κατέπέκταση μία οικογένεια $f(T)$ θεωριών δε μπορούμε να θεωρήσουμε πως υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ των $f(T)$ και $f(R)$ θεωριών. Αν και στις $f(R)$ υπάρχει μία ποικιλία προσεγγίσεων και λύσεων στις $f(T)$ υπάρχει ένα μεγάλο πεδίο που δέχετε έρευνα.

Κεφάλαιο 1

Γενική Σχετικότητα και σφαιρικά συμμετρικές λύσεις

1.1 Τι είναι η Γενική Σχετικότητα

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας είναι μία γεωμετρική θεωρία βαρύτητας που δημοσιεύθηκε από τον Albert Einstein το 1915. Αποτελεί μία γενίκευση της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας και βελτιώνει το νόμο της Παγκόσμιας Έλξης του Newton περιγράφοντας της βαρύτητα ως μία γεωμετρική ιδιότητα του τετραδιάστατου χωροχρόνου. Συγκεκριμένα, η καμπυλότητα του χωροχρόνου είναι άμεσα συνδεδεμένη με την ενέργεια και την ορμή της ύλης ή της ακτινοβολίας.

Για να περιλαμβάνει μία καθολική ιδέα για την βαρυτική αλληλεπίδραση, ο Einstein αντιλήφθηκε την βαρύτητα ως μία ιδιότητα της σχετικής δομής μεταξύ όλων των σωματιδίων ύλης (ακόμα και των άμαζων). Συνεπώς, η βαρύτητα είναι μία ιδιότητα της δομής του ίδιου του χωρόχρονου παρά μία δύναμη που δρα μέσα σε αυτόν.

Στη Γενική Σχετικότητα θεωρούμε πως η ύλη κινείται σε έναν ενεργό, ψευδο-Riemannian μετρικό χωρόχρονο όπου κυριαρχείται από την Αρχή Ισοδυναμίας του Einstein (Einstein Equivalence Principle) όπου αποτελείται από δύο μέρη:

(i) Ασθενής Αρχή Ισοδυναμίας (Weak Equivalence Principle)

Κινούμενα σε βαρυτικό πεδίο, θεωρώντας ίδιες αρχικές συνθήκες θέσης και ταχύτητας, δύο σωματίδια θα εκτελέσουν την ίδια τροχιά. θα κινηθούν δηλαδή, κατά το μήκος της ίδιας γεωδαισιακής. Με άλλα λόγια το σωματίδια θα πέσουν με την ίδια επιτάχυνση ανεξάρτητα από τη μάζα τους.

(ii) Ιχυρή Αρχή Ισοδυναμίας (Strong Equivalence Principle)

Οι νόμοι της Φυσικής σε ένα σύστημα αναφοράς που πέφτει ελεύθερα μέσα σε ένα πεδίο βαρύτητας είναι ισοδύναμοι με εκείνους σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς χωρίς βαρύτητα.

Η Ισχυρή Αρχή Ισοδυναμίας ικανοποιείται στη Γενική Σχετικότητα αν θεωρήσουμε πως όλα τα πεδία ύλης είναι ελάχιστα συζευγμένα σε έναν μετρικό τανυστή, $g_{\mu\nu}$, με συσχετισμένη συνοχή μηδενικής στρέψης (συμμετρική). Η κεντρική ιδέα, λοιπόν, είναι πως η βαρύτητα μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τη γεωμετρία που καθρίζεται από μία μετρική κι όχι από μία πρωγενέστερη γεωμετρία, ανεξάρτητη από την κατανομή των πηγών βαρύτητας. Ουσιαστικά η μετρική και η ύλη στο Σύμπαν είναι δυναμικά συζευγμένες μέσω των πεδιακών εξισώσεων του Einstein

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu},$$

όπου $G^{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής Einstein και συνδέεται με την καμπυλότητα του χωρόχρονου (καθορίζεται από τη μετρική , $g_{\mu\nu}$ και τις πρώτης και δεύτερης τάξεις μερικές παραγώγους της), G είναι η σταθερά του Newton και $T^{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής ορμής-ενέργειας.

1.2 Οι πεδιακές εξισώσεις **Einstein**

Οι πεδιακές εξισώσεις προκύπτουν από τη δράση που προτάθηκε από τον Hilbert και είναι το ολοκλήρωμα πάνω στον τετραδιάστατο χωροχρόνο μίας Langrange

$$S = \int \sqrt{-g} \mathscr{L} d^4x \tag{1.1}$$

Αφού η βαρύτητα εκφράζεται από τη γεωμετρία και την ύλη μπορούμε να γράψουμε τη δράση στη μορφή

$$S = \frac{1}{2k} S_G + S_M = \frac{1}{2k} \int \sqrt{-g} \mathscr{L}_G d^4x + \int \sqrt{-g} \mathscr{L}_M d^4x \tag{1.2}$$

όπου οι δείκτες G και M συμβολίζουν το γεωμετρικό και υλικό μέρος αντίστοιχα, ενώ η σταθερά k έχει να κάνει με το Νευτώνιο όριο της θεωρίας.

Έχοντας θεωρήσει τον χωρόχρονο σαν μία τετραδιάστατη ψευδό-Riemann πολλαπλότητα εφοδιασμένο με τη Levi-Civita συνοχή (η μοναδική συνοχή μηδενικής στρέψης που διατηρεί τη ψευδό-Riemannian μετρική) το μοναδικό δυναμικό πεδίο είναι η μετρική $g_{\mu\nu}$. Επίσης η δράση $\mathscr{L}_G$ μπορεί να εξαρτάται από το δυναμικό πεδίο και τις διάφορες τάξεις παραγώγων του και για να μην είναι η εξάρτηση της δράσης από την μετρική τετριμμένη θα πρέπει η συναρτησιακή της μορφή να περιέχει τουλάχιστον δευτέρας τάξης παραγώγους της μετρικής. Ένα τέτοιο μέγεθος είναι η τανυστική καμπυλότητα Riemann και το μοναδικό βαθμωτό μέγεθος που μπορούμε να πάρουμε από αυτήν είναι η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci R. Έτσι ορίζουμε την δράση Einstein-Hilbert

$$S_G = \frac{1}{2k} \int \sqrt{-g} R d^4x \tag{1.3}$$

Υπολογίζοντας τη μεταβολή της δράσης δS_G για αυθαίρετες μεταβολές της μετρικής $\delta g^{\mu\nu}$ καταλήγουμε στην εξίσωση Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k \left[-\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \left(\sqrt{-g} \mathscr{L}_M \right)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \tag{1.4}$$

όπου ορίζουμε τον τανυστή Einstein $G_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{1.5}$$

και τον τανυστή ορμής ενέργειας

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \left(\sqrt{-g} \mathscr{L}_M \right)}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{1.6}$$

Έτσι καταλήγουμε στις πεδιακές εξισώσεις Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu} \tag{1.7}$$

Από το ίχνος της σχέσης (1.7) παίρνουμε

$$R = -kT \tag{1.8}$$

κι αντικαθιστώντας ξανά στην εξίσωση (1.7) παίρνει τη μορφή

$$R_{\mu\nu} = k \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \tag{1.9}$$

Το κενό ορίζεται ως ο χωρόχρονος απουσία πεδίων ύλης άρα $T_{\mu\nu} = T = 0$ και οι πεδιακές εξισώσεις παίρνουν την μορφή

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{1.10}$$

Ο Einstein μετά την δημοσίευση της Γενικής Σχετικότητας προσπάθησε να βρει ένα στατικό κοσμολογικό μοντέλο το οποίο καταλήγει σε ένα στατικό Σύμπαν. Για να μπορέσουν να λυθούν οι πεδιακές εξισώσεις με μία αυθαίρετη πηγή ύλης ήταν απαραίτητο να προστεθεί ένας νέος όρος, η κοσμολογική σταθερά Λ. Η κοσμολογική σταθερά εισάγεται μέσω της δράσης Einstein-Hilbert (1.3)

$$S_G = \frac{1}{2k} \int \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)d^4x \tag{1.11}$$

Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο καταλήγουμε στην τροποποιημένη εξίσωση Einstein (1.7)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \tag{1.12}$$

Αν θεωρήσουμε πως η ενέργεια του κενού είναι μη μηδενική τότε προκύπτει

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^M + T_{\mu\nu}^{(vac)} \tag{1.13}$$

όπου

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu} \tag{1.14}$$

άρα η εξίσωση Einstein (1.7) θα πάρει τη μορφή

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = k(T_{\mu\nu}^M - \rho_{vac}g_{\mu\nu}) \tag{1.15}$$

Από της εξισώσεις (1.12) και (1.15) καταλήγουμε πως κοσμολογική σταθερά είναι ισοδύναμη με την εισαγωγή πυκνότητας ενέργειας του κενού

$$\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{k} \tag{1.16}$$

1.3 Λύσεις στη Γενική Θεωρία της σχετικότητας

1.3.1 Η Λύση **Schwarzschild**

Η πιο προφανής εφαρμογή της θεωρίας του Einstein είναι σε ένα σφαιρικά συμμετρικό βαρυτικό πεδίο (για παράδειγμα γύρω από τη Γη ή τον Ήλιο). Έτσι πρώτη προσπάθεια επίλυσης των εξισώσεων Einstein έγινε από τον Schwarzschild. Η λύση του Schwarzschild είναι η μοναδική σφαιρικά συμμετρική λύση στο κενό.

Αφού μας ενδιαφέρει η γεωμετρία γύρω από ένα σφαιρικά συμμετρικό σώμα στο κενό ξεκινάμε από την εξίσωση

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{1.17}$$

και το στοιχείου μήκος ενός χώρου Minkowski σε σφαιρικές συντεταγμένες t, r, θ, ϕ

$$ds^2_{Minkowski} = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1.18}$$

όπου $d\Omega^2$ η μετρική της σφαίρας

$$d\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2 \tag{1.19}$$

Για να διατηρήσουμε τη σφαιρική συμμετρία θέλουμε να κρατήσουμε τη μορφή του $d\Omega^2$ ενώ μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους με διαφορετικούς συντελεστές οι οποίοι θα έχουν μόνο ακτινική εξάρτηση. Άρα το στοιχείο μήκος θα έχει τη μορφή

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}\mathrm{d}t^2 + e^{2\beta(r)}\mathrm{d}r^2 + e^{2\gamma(r)}r^2 d\Omega^2 \tag{1.20}$$

Η λύση της εξίσωσης (1.17) καταλήγει στο

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1.21}$$

Οι ιδιομορφίες της παραπάνω μετρικές βρίσκονται στα $r = 0$, το σημείο άπειρης χωροχρονικής καμπυλότητας και $r = 2GM$, ο ορίζοντας γεγονότων που ονομάζεται και ακτίνα Schwarzschild.

Η παραπάνω μετρική (1.21) εκφράζει τη γεωμετρία του χωρόχρονου γύρω από ένα σφαιρικά συμμετρικό, μη φορτισμένο και μη περιστρεφόμενο σώμα μάζας M.

1.3.2 Η Γεωμετρία **Kerr**

Η μετρική Kerr αποτελεί μία γενίκευση της μετρικής Schwarzschild (1.21) για ένα περιστρεφόμενο σώμα μάζας M και στροφορμής J. Για την κατανόηση της μετρικής Kerr ένα νέο σύστημα συντεγμένων προτάθηκε από τους Boyer και Lindquist. Ο μετασχηματισμός από τις εισερχόμενος συντεταγμένες Eddington-Finkelstein δίνεται από τις σχέσεις

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}t + \left(r^2 + a^2\right)\mathrm{d}r/\Delta \tag{1.22}$$

$$\mathrm{d}\tilde{\phi} = \mathrm{d}\phi + a\ \mathrm{d}r/\Delta \tag{1.23}$$

όπου $\Delta \equiv r^2 - 2GMr + a^2$. Η μετρική Kerr σε αυτές τις συντεταγμένες έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &- \left(1 - \frac{2GMr}{\Sigma}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{4GMar\sin^2\theta}{\Sigma}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \Sigma\mathrm{d}\theta^2 \\ &+ \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMa^2 r\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2, \end{aligned} \tag{1.24}$$

όπου $\Sigma \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta$ και $a = J/GM$ η παράμετρος Kerr.

Για $r >> GM$ και $r >> a$ η μετρική (1.24) είναι ασυμπτωματικά επίπεδη ενώ για $a = 0$ παρατηρούμε πως παίρνει τη μορφή της Schwarzschild. Επίσης η μετρική (1.24) είναι ανεξάρτητη του χρόνου t, άρα είναι στατική και ανεξάρτητη του ϕ, άρα έχει αξονική συμμετρία.

Η μετρική Kerr παρουσιάζει ιδιομορφίες όταν τα Σ και Δ μηδενίζονται. Η ιδιομορφία $\Sigma = 0$ αντιστοιχεί σε $r = 0$ και $\theta = \pi/2$, δηλαδή σε μία περιοχή άπειρης χωροχρονικής καμπυλότητας ενώ η $\Delta = 0$ αντιστοιχεί στις ακτίνες

$$r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - a^2}. \tag{1.25}$$

Αν και η περιοχή κοντά στο r_- δεν έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία, η ακτίνα r_+ αντιστοιχεί στον ορίζοντα γεγονότων.

1.3.3 Η λύση **Reissner–Nordström**

Μία ακόμα βασική παράμετρος για τη μελέτη μελανών οπών είναι το φορτίο τους Q. Η μετρική Reissner–Nordström αποτελεί μία γενίκευση της Schwarzschild και σε μονάδες $c = 1$, $\epsilon_0 = 1$ έχει τη μορφή

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \tag{1.26}$$

Οι ιδιομορφίες τις μετρικής βρίσκονται στα

$$r = 0 \quad \text{και} \quad r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - G^2Q^4}. \tag{1.27}$$

Το $r = 0$ είναι όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις το σημείο άπειρης χωροχρονικής καμπυλότητας και οι ακτίνες $r_\pm$ αποτελούν τους ορίζοντες γεγονότων. Παρατηρούμε πως στην περίπτωση όπου $Q = 0$ η μετρική (1.26) παίρνει τη μορφή της μετρικής Schwarzschild (1.21). Επίσης στην περίπτωση όπου $M = Q^2$ οι ορίζοντες r_+ και r_- εκφυλίζονται κι έχουμε την περίπτωση μίας extremal μελανής οπής.

Κεφάλαιο 2

Τροποποιημένη βαρύτητα **f(R)** και σφαιρικά συμμετρικές λύσεις

2.1 Θεωρίες τροποποιημένης Βαρύτητας

Ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα της σύγχρονης φυσικής είναι η ενοποίηση των δύο μεγάλων θεωριών, της Βαρύτητας και της Κβαντομηχανικής. Η Γενική Σχετικότητα και το Καθιερωμένο Πρότυπο αποτελούν τις πιο επιτυχημένες θεωρίες για την περιγραφή φαινομένων σε κοσμολιγικές και μικροσκοπικές κλίμακες αντίστοιχα. Παρόλα αυτά οι δύο παραπάνω θεωρίες αδυνατούν να δώσουν εξήγηση σε πολλά φαινόμενα. Για παράδειγμα η κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου, οι καμπύλες περιστροφής γαλαξίων ή σμηνών γαλαξίων υποδεικνύουν την ύπαρξη ύλης που δεν ακτινοβολεί στο ηλεκτρομαγνητικό φάσμα. Η Σκοτεινή Ύλη όμως δεν εξηγείται από καμία από τις δύο θεωρίες. ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15])

Αν και μέχρι στιγμής δεν έχουμε καταλλήξει σε μία συνεπή θεωρία Κβαντικής Βαρύτητας, τροποιήσεις και επεκτάσεις της Γενικής Σχετικότητας έχουν γίνει ήδη και αποτελούν υπόδειγμα για την καλύτερη αντίληψη της βαρυτικής αλληλεπίδρασης. Μερικές από αυτές τις θεωρίες τροποποιούν τη Γενικά Σχετικότητα προσθέτωντας μεγαλύτερους όρους της βαθμωτής καμπυλότητας R, των τανυστών Riemann και Ricci ή μεγαλύτερη τάξη των παραγώγων τους, όπως για παράδειγμα η θεωρία του Lovelock ή οι $f(R)$ θεωρίες.

Παρακάτω θα γίνει μία μελέτη των $f(R)$ θεωριών καθώς και της ύπαρξης σφαιρικά συμμετρικών λύσεων.

2.2 Ο φορμαλισμός των $f(R)$ θεωριών

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη με μία γενική αναλυτική $f(R)$ συνάρτηση και στη συνέχεια θα μελετήσουμε συγκεκριμένες παραδείγματα συναρτήσεων. Όπως είδαμε, στην περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας, η δράση της θεωρίας δίνεται από την δράση Einstein-Hilbert

$$S_G = \frac{1}{2k}\int \sqrt{-g}\mathscr{L}_G d^4x \tag{2.1}$$

όπου $\mathscr{L}_G = R$ η Lagrangian πυκνότητα στη Γενική Σχετικότητα. Αντικαθιστώντας με $\mathscr{L}_G = f(R)$, παίρνουμε τη δράση της θεωρίας μας

$$S_G = \frac{1}{2k}\int \sqrt{-g}f(R)d^4x. \tag{2.2}$$

Απαιτώντας την αρχή της ελάχιστης δράσης

$$\delta\int d^4x\sqrt{-g}f(R) = 0 \tag{2.3}$$

παίρνουμε τις δεύτερης τάξης εξισώσεις κίνησης στι κενό

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{f(R)}{2}g_{\mu\nu} = \nabla_\mu\nabla_\nu f_R - g_{\mu\nu}\Box f_R \tag{2.4}$$

όπου $f_R = \frac{df}{dR}$, ∇ η συναλλοίωτη παράγωγος και $\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ ο τελεστής d'Alembertian.

Παρατηρούμε επίσης πως αν προσθαφερέσουμε τον όρο $\frac{f_R}{2}g_{\mu\nu}R$ κι αντικαθιστώντας με

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

με $G_{\mu\nu}$ να εκφράζει τον τανυστή Einstein καταλήγουμε στη σχέση

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f_R}\left\{\nabla_p\nabla_\nu f_R - g_{\mu\nu}\Box f_R + g_{\mu\nu}\frac{[f(R) - f_R R]}{2}\right\}. \tag{2.5}$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης μπορεί να θεωρηθεί ως ένας ενεργός τανυστής τάσης-ενέργειας.

Σε μία πιο γενική περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε πως η συνολική δράση της θεωρίας μας έχει τη μορφή

$$S = S_G + S_{\mathrm{m}} \tag{2.6}$$

όπου S_G η δράση Einstein-Hilbert και

$$S_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2k} \int \mathscr{L}_{\mathrm{m}} d^4 x, \tag{2.7}$$

με $\mathscr{L}_{\mathrm{m}}$ τη Lagrangian που αφορά την ύλη. Απαιτώντας ξανά την Αρχή της Ελάχιστης Δράσης οι εξισώσεις κίνησης αποτελούν μία γενίκευση της (2.4)

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{f(R)}{2} g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R = k T_{\mu\nu} \tag{2.8}$$

με $T_{\mu\nu}$ τον τανυστή ορμής ενέργειας που βρίσκεται από τη σχέση

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\left(\sqrt{-g}\mathscr{L}_{\mathrm{m}}\right)}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.9}$$

Παρατηρούμε επίσης πως στην τετριμμένη περίπτωση όπου $f(R) = R$ τότε $f_R = 1$ και οι εξισώσεις (2.4) και (2.8) καταλήγουν στη μορφή της Γενικής Σχετικότητας

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} &= 0 \\ G_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} &= k T_{\mu\nu} \\ G_{\mu\nu} &= k T_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.3 Σφαιρικές λύσεις στην $f(R)$

Ας θεωρήσουμε μία γενικευμένη μορφή της βαθμωτής καμπυλότητας Ricci $R = R(r)$ μία γενική μορφή της μετρικής για σφαιρικά συμμετρικές λύσεις

$$ds^2 = A(t,r)dt^2 - B(t,r)dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{2.12}$$

όπου $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Οι μη διαγώνιοι όροι $\{t, r\}$ της εξίσωσης (2.8) δίνουν την εξίσωση

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 f_R\right)\dot{B}(t,r) = 0. \tag{2.13}$$

Αν θεωρήσουμε την περίπτωση όπου $\dot{B}(t,r) \neq 0$ τότε θα πρέπει $f_R \sim \frac{1}{r^2}$ και υπόλοιπες πεδιακές εξισώσεις δεν ικανοποιούνται. Άρα έχουμε $\dot{B}(t,r) = 0$ και τελικά $B(t,r) = b(r)$. Αντίστοιχα αν πάρουμε τον $\{\theta\theta\}$ όρο της εξίσωσης (2.8) καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως $A(r,t) = a(r)$ και τελικά στην περίπτωση στατικών, σφαιρικά συμμετρικών λύσεων.

Επίσης από το ίχνος και τον $\{\theta\theta\}$ όρο της εξίσωσης (2.8) παίρνουμε τις σχέσεις για τα $a(r)$ και $b(r)$

$$a(r) = \frac{b(r)e^{\frac{2}{3}\int\frac{(Rf'-2f)b(r)}{R'f''}dr}}{r^4 R'^2 f''^2}, \tag{2.14}$$

$$b(r) = \frac{6\left[f'\left(rR'f''\right)' - rR'^2 f''^2\right]}{rf\left(rR'f'' - 4f'\right) + 2f'\left(rR\left(f' - rR'f''\right) - 3R'f''\right)} \tag{2.15}$$

όπου $f' \equiv \frac{df}{dR}$, $f'' \equiv \frac{d^2 f}{dr^2}$ και $R' = \frac{dR}{dr}$. Θεωρώντας επίσης $f(R) = R + \Phi(R)$ με $\Phi(R) \ll R$ πέρνουμε τη μορφή των εξισώσεων (2.14) και (2.15)

$$a(r) = \frac{b(r)e^{-\frac{2}{3}\int\frac{[R+(2\Phi-R\Phi')]b(r)}{R'\Phi''}dr}}{r^4 R'^2 \Phi''^2} \tag{2.16}$$

$$b(r) = -\frac{3\left(rR'\Phi''\right)_{,r}}{rR} \tag{2.17}$$

.

Διαταράσσοντας τη μετρική και τις πεδιακές εξισώσεις παίρνουμε λύσεις για κάποιες συγκεκριμένες επιλογές της $f(R)$ που θα δούμε παρακάτω [16], [17].

1. $f(R) = \Lambda + R + \epsilon R \ln R$

   Σφαιρικά δυναμικά:

$$a(r) = b(r)^{-1} = 1 + \frac{k_1}{r} - \frac{\Lambda r^2}{6} + \delta x(r)$$

   Λύσεις:

$$x(r) = \frac{k_2}{r} + \frac{\epsilon \Lambda [\ln(-2\Lambda) - 1] r^2}{6\delta}$$

   Μετρική πρώτης τάξης :

$$a(r) = 1 - \frac{\Lambda r^2}{6} + \delta x(r),$$

$$b(r) = \frac{1}{1 - \frac{\Lambda r^2}{6}} + \delta y(r)$$

   Λύσεις :

$$\begin{cases} x(r) = (\Lambda r^2 - 6)\left\{ k_1 + \int dr \frac{4\delta(2\Lambda^2 r^4 - 15\Lambda r^2 + 18) y(r) + r\{36 r \epsilon \Lambda [\log(-2\Lambda) - 1] + \delta(\Lambda r^2 - 6)^2 y'(r)\}}{36 r \delta (\Lambda r^2 - 6)} \right\} \\ y(r) = \frac{k_2 \delta - 6 r^3 \epsilon \Lambda [\ln(-2\Lambda) - 1]}{r \delta (r^2 \Lambda - 6)^2} \end{cases}$$

2. $f(R) = R + \epsilon R^n$

   Σφαιρικά δυναμικά:

$$a(r) = b(r)^{-1} = 1 + \frac{k_1}{r} + \delta x(r)$$

   Λύσεις :

$$x(r) = \frac{k_2}{r}$$

   Πρώτης τάξης μετρική :

$$a(r) = 1 + \delta \frac{x(r)}{r}, \quad b(r) = 1 + \delta \frac{y(r)}{r}$$

Λύσεις :

$$x(r) = k_1 + k_2 r, \quad y(r) = k_3$$

3. $f(R) = R^n$

Σφαιρικά δυναμικά :

$$a(r) = b(r)^{-1} = 1 + \frac{k_1}{r} + \frac{R_0 r^2}{12} + \delta x(r)$$

Λύσεις :

$$\begin{cases} n = 2, & R_0 \neq 0 \text{ ανδ } x(r) = \frac{3k_2 - k_3}{3r} + \frac{k_3 r^2}{12} + \frac{k_4}{r} \int dr\, r^2 \left\{ \int dr \frac{\exp\left[\frac{R_0 r_0^2 \ln(r - r_0)}{8 + 3R_0 r_0^2}\right]}{r^5} \right\} \\ & \text{με } r_0 \text{ να ικανοποιεί τη συνθήκη } 6k_1 + 8r_0 + R_0 r_0^3 = 0 \\ n \geq 2, & \text{Το σύστημα είναι επιλύσημο μόνο όταν } R_0 = 0 \end{cases}$$

Πρώτης τάξης μετρική :

$$a(r) = 1 + \delta \frac{x(r)}{r}, \quad b(r) = 1 + \delta \frac{y(r)}{r}$$

Λύσεις :

$$\begin{cases} n = 2 & y(r) = -\frac{R_0 r^3}{6} - \frac{x(r)}{2} + \frac{1}{2} r x'(r) + k_1, \ R(r) = \delta R_0 \\ n \neq 2 & y(r) = -\frac{1}{2} \int dr\, r^2 R(r) - \frac{x(r)}{2} + \frac{1}{2} r x'(r) + k_1 \ \text{ για οποιοδήποτε } R(r) \end{cases}$$

Πρώτης τάξης μετρική :

$$a(r) = 1 - \frac{r_g}{r} + \delta x(r), \quad b(r) = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} + \delta y(r)$$

Λύσεις :

$$\begin{cases} n = 2 & y(r) = \frac{r k_1}{3r_g^2 - 7r_g r + 4r^2} + \frac{r^2 k_2}{3(3r_g^2 - 7r_g r + 4r^2)} + \frac{r_g r^2 x(r) + 2(r_g r^3 - r^4) x'(r)}{(3r_g - 4r)(r_g - r)^2} \\ n \neq 2 & \text{για οποιαδήποτε } x(r) \ \ y(r) \text{ και } R(r) \end{cases}$$

4. $f(R) = R/(\xi + R)$

Πρώτης τάξης μετρική :

$$a(r) = 1 + \delta \frac{x(r)}{r}, \quad b(r) = 1 + \delta \frac{y(r)}{r}$$

Λύσεις :

$$\begin{cases} x(r) = -\frac{4e^{-\frac{\xi^{1/2} r}{\sqrt{6}}}}{\xi} k_1 - \frac{2\sqrt{6} e^{\frac{\xi^{1/2} r}{\sqrt{6}}}}{\xi^{3/2}} k_2 + k_3 r \\ y(r) = -\frac{2e^{-\frac{\xi^{1/2} r}{\sqrt{6}}} (6\xi^{1/2} + \sqrt{6}\xi\, r)}{3b^{3/2}} k_1 - \frac{2e^{\frac{\xi^{1/2} r}{\sqrt{6}}} (\sqrt{6} - \xi^{1/2} r)}{\xi^{3/2}} k_2 \end{cases}$$

Κεφάλαιο 3

Τηλεπαράλληλη Βαρύτητα και Σφαιρικά Συμμετρικές Λύσεις

3.1 Μαθηματική εισαγωγή

Αρχικά θα εισάγωγουμε την έννοια των τετράδων (**tetrads**) που είναι απαραίτητο μαθηματικό εργαλείο για τις τηλεπαράλληλες θεωρίες βαρύτητας. Ως δείκτες θα χρησιμοποιήσουμε ελληνικούς χαρακτήρες ($\mu, \nu, \rho ... = 0, 1, 2, 3$) όταν αναφερόμαστε στο χωρόχρονο, ενώ λατινικούς ($a, b, c ... = 0, 1, 2, 3$) όταν αναφερόμαστε στον εφαπτομένο χώρο, δηλαδή έναν χώρο Minkowski με Lorentz μετρική της μορφής

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1). \tag{3.1}$$

Γενικά ο χωρόχρονος είναι μία τετραδιάστατη, διαφορίσιμη πολλαπλότητα όπου ο εφαπτομένος χώρος σε κάθε σημείο της είναι χώρος Minkowski. Οι κινήσεις σε κάθε έναν από αυτούς τους εφαπτομένους χώρους είναι οι μετασχηματισμοί που απαρτίζουν την ομάδα Poincaré

$$\mathscr{P} = \mathscr{L} \oslash \mathscr{T}^{3,1} \tag{3.2}$$

το ημι-ευθή γινόμενο της ομάδας Lorentz $\mathscr{L} = SO(3,1)$ και της ομάδας των παράλληλων μετατοπίσεων $\mathscr{T}^{3,1}$.

3.1.1 Τετριμμένα συστήματα

Τα τετριμμένα συστήματα ή τετράδες αναπαραστούν παρατηρητές στην Ειδική Σχετικότητα, δηλαδή σε απουσιά βαρυτικού πεδίου [18], [19]. Θα τα συμβολίζουμε

με
$$\{e_a\} \text{ και } \{e^a\} \tag{3.3}$$
και αποτελούν γραμμικές βάσεις στο χώρο Minkowski ικανοποιώντας τη σχέση
$$e^a\left(e_b\right) = \delta^a_b. \tag{3.4}$$
Το σύνολο αυτών των βάσεων αποτελεί την δέσμη των γραμμικών συστημάτων (bundle of linear frames). Μία τετράδα παρέχει, σε κάθε σημείο του χωροχρόνου $p \in \mathbb{R}^{3,1}$, μία βάση για τα διανύσματα του εφαπτομένου χώρου $T_p\mathbb{R}^{3,}$. Επομένως, εκεί που ορίζονται, κάθε μέλος μίας δοσμένης βάσης μπορεί να γραφτεί σε όρους οποιασδήποτε άλλης. Για παράδειγμα
$$e_a = {e_a}^{\mu}\partial_\mu \quad \text{ και } e^a = {e^a}_{\mu}dx^\mu \tag{3.5}$$
και αντίστριφα
$$\partial_\mu = {e^a}_{\mu}e_a \quad \text{ και } \quad dx^\mu = {e_a}^{\mu}e^a. \tag{3.6}$$
Λόγω της σχέσης ορθογωνιότητας (3.4) τα στοιχεία των τετράδων θα ικανοποιούν τις σχέσεις
$${e^a}_{\mu}{e_a}^{\nu} = \delta^\nu_\mu \quad \text{ και } \quad {e^a}_{\mu}{e_b}^{\mu} = \delta^a_b \tag{3.7}$$
Μία γενική γραμμική βάση e_a ικανοποιεί τη σχέση αντιμετάθεσης
$$[e_a, e_b] = {f^c}_{ab}e_c, \tag{3.8}$$
όπου ${f^c}_{ab}$ ονομάζονται συντελεστές της μη ολονομίας (coefficients of anholonomy). Η δυαδική μορφή της παραπάνω σχέση αντιμετάθεσης είναι μία εξίσωση δομής Cartan
$$de^c = -\frac{1}{2}{f^c}_{ab}e^a \wedge e^b = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu {e^c}_{\nu} - \partial_\nu {e^c}_{\mu}\right) dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{3.9}$$
ενώ οι συντελεστές της μη ολονομίας εκφράζουν τους στροβιλισμούς των μελών της βάσης
$${f^c}_{ab} = {e^c}_{\mu}\left[e_a\left({e_b}^{\mu}\right) - e_b\left({e_a}^{\mu}\right)\right] = {e_a}^{\mu}{e_b}^{\nu}\left(\partial_\nu {e^c}_{\mu} - \partial_\mu {e^c}_{\nu}\right) \tag{3.10}$$
Μία ιδιαίτερη περίπτωση είναι σε αδρανειακά συστήματα (e'_a) όπου ${f'^c}_{ab} = 0$ το οποίο σημαίνει $de'^a = 0$ δηλαδή το e'_a είναι μία κλειστή διαφορική μορφή $(e'^a = dx^a)$, για κάποιο x^a. Η βάση (e'^a) σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται ολοκληρώσιμη ή ολονομική.

Αν θεωρήσουμε τη μετρική Minkowski γραμμένη σε μία ολονομική βάση dx^μ

$$\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3.11}$$

και αν το x^μ εκφράζει ένα σύνολο καρτεσιανών συντεταγμένων τότε παίρνει τη μορφή

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1). \tag{3.12}$$

Σε οποιεσδήποτε άλλες συνταταγμένες, η μετρική $\eta_{\mu\nu}$ θα είναι συνάρτηση των χωροχρονικών συντεταγμένων. Το γραμμικό σύστημα $e_a = {e_a}^\mu \partial_\mu$ παρέχει τη σχέση μεταξύ της μετρικής του εφαπτομένου χώρου

$$\eta = \eta_{ab} dx^a \otimes dx^b = \eta_{ab} dx^a dx^b \tag{3.13}$$

και της μετρικής του χωροχρόνου $\eta_{\mu\nu}$

$$\eta_{ab} = \eta_{\mu\nu} {e_a}^\mu {e_b}^\nu. \tag{3.14}$$

Επίσης, από τη σχέση ορθογωνιότητας (3.4) προκύπτει και η αντίτροφη σχέση

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{ab} {e^a}_\mu {e^b}_\nu. \tag{3.15}$$

Ανεξάρτητα λοιπόν από το αν τα e_a είναι ολονομικά ή όχι, αδρανειακά ή όχι, πάντα θα συνδέουν τον εφαπτομένο χώρο Minkowski με τον χωροχρόνο Minkowski. Αυτά είναι τα συστήματα που εμφανίζονται στην Ειδική Σχετικότητα και καλούνται συνήθως τετριμμένα συστήματα ή τετριμμένες τετράδες. Παρακάτω θα αναλύσουμε τα μη τετριμμένα συστήματα που είναι η βάση για να ασχοληθούμε με τις τηλεπαράλληλες θεωρίες Βαρύτητας.

3.1.2 Μη-τετριμμένα συστήματα

Τα μη-τετριμμένα συστήματα ή τετράδες θα συμβολίζονται με

$$\{h_a\} \text{ και } \{h^a\} \tag{3.16}$$

και η διαφορά τους σε σχέση με τα προηγούμενα είναι πως ο συντελεστής της μη ολονομίας εξαρτάται ταυτόχρονα και από την αδράνεια αλλά και από τη βαρύτητα. Για να γίνει πιο ξεκάθαρη η διαφορά, ας θεωρήσουμε μία ψευδο-riemannian χωροχρονική μετρική g, με στοιχεία $g_{\mu\nu}$ σε μία δυαδική ολονομική βάση $\{dx^\mu\}$

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{3.17}$$

Το πεδίο που ορίζουν οι τετράδες

$$h_a = h_a{}^\mu \partial_\mu \quad \text{και} \quad h^a = h^a{}_\mu dx^\mu \tag{3.18}$$

είναι μία γραμμική βάση που συνδέει τη g με τη μετρική του εφαπτομένου χώρου

$$\eta = \eta_{ab} dx^a \otimes dx^b = \eta_{ab} dx^a dx^b \tag{3.19}$$

μέσω της σχέσης

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} h_a{}^\mu h_b{}^\nu. \tag{3.20}$$

Έχοντας επίσης θεωρήσει

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1) \tag{3.21}$$

μπορούμε να πούμε πως το πεδίο των τετράδων είναι ένα γραμμικό σύστημα όπου τα μέλη του h_a είναι ψευδο-ορθογώνια μέσω της ψευδο-riemannian μετρικής $g_{\mu\nu}$. Οι όροι της δυαδικής βάσης $h^a = h^a{}_\nu dx^\nu$ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$h^a{}_\mu h_a{}^\nu = \delta^\nu_\mu \quad \text{και} \quad h^a{}_\mu h_b{}^\mu = \delta^a_b \tag{3.22}$$

οπότε η αντίστροφη της σχέσης (3.20) γίνεται

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu \tag{3.23}$$

Παρατηρούμε πως η ορίζουσα $g = \det(g_{\mu\nu})$ είναι αρνητική λόγω του ίχνους της μετρικής η_{ab} και επίσης θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$h = \det(h^a{}_\mu) = \sqrt{-g}. \tag{3.24}$$

Η βάση $\{h_a\}$ ικανοποιεί, αντίστοιχα, τη μεταθετική σχέση

$$[h_a, h_b] = f^c{}_{ab} h_c \tag{3.25}$$

όπου $f^c{}_{ab}$ είναι αντίστοιχα οι συντελεστές της μη ολονομίας τους συστήματος $\{h_a\}$. Η βασική διαφορά με τις τετριμμένες γραμμικές βάσεις $\{e_a\}$ όπως αναφέραμε είναι πως οι συντελεστές $f^c{}_{ab}$ εδώ αναπαραστούν ταυτόχρονα αδράνεια και βαρύτητα. Η δυαδική έκφραση της σχέσης μετάθεσης (3.25) είναι κι εδώ μία εξίσωση δομής Cartan

$$dh^c = -\frac{1}{2} f^c{}_{ab} h^a \wedge h^b = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu h^c{}_\nu - \partial_\nu h^c{}_\mu \right) dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{3.26}$$

Αντίστοιχα με πρίν, οι συντελεστές της μη ολονομίας εκφράζουν τους στροβιλισμούς των μελών της βάσης

$$f^c{}_{ab} = h^c{}_\mu \left[h_a \left(h_b{}^\mu\right) - h_b \left(h_a{}^\mu\right)\right] = h_a{}^\mu h_b{}^\nu \left(\partial_\nu h^c{}_\mu - \partial_\mu h^c{}_\nu\right). \tag{3.27}$$

Αν και οι μη τετριμμένες τετράδες είναι εξ ορισμού μη ολονομικές λόγω της παρουσίας βαρύτητας, είναι δυνατό τοπικά να έχουμε $f^c{}_{ab} = 0$ άρα $dh^a = 0$ και το h^a έχει τοπικά κλειστή διαφορική μορφή. Δηλαδή, αν αυτό ισχύει σε κάποιο σημείο p, τότε υπάρχει μία γειτονιά γύρω από το p όπου υπάρχουν συναρτήσεις (συντεταγμένες) x^a ώστε

$$h^a = dx^a \tag{3.28}$$

3.1.3 Συνοχές (**connections**)

Αντικείμενα με καλά ορισμένη συμπεριφορά, κάτω από σημειακής εξάρτησης μετασχηματισμούς, καλούνται συναλλοίωτα κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς. Επειδή όμως οι συνήθεις παράγωγοι αυτών των συναλλοίωτων αντικειμένων δεν είναι κι αυτές συναλλοίωτες απαιτήται η εισαγωγή των συνοχών connections A_μ οι οποιές συμπεριφέρονται ως διανύσματα όσον αφορά τον χωροχρονικό δείκτη, αλλά η μη τανυστική συμπεριφορά στους αλγεβρικούς δείκτες αντισταθμίζει τη μη τανυστική συμπεριφορά των συνήθων παραγώγων. Για παράδειγμα, τα δυναμικά βαθμίδας εισήχθησαν για να δημιουργήσουν παραγώγους που είναι συναλλοίωτες κάτω από το μετασχηματισμό βαθμίδας.

Συνοχές που σχετίζονται με την γραμμική ομάδα $GL(4, \mathbb{R})$ και τις υποομάδες της, όπως η ομάδα Lorentz $SO(3,1)$, λέγονται γραμμικές συνοχές. Συνδέονται επίσης σε μεγάλο βαθμό με τον χωροχρόνο καθώς ορίζονται στη δέσμη των γραμμικών συστημάτων, που αποτελεί στοιχειώδες κομμάτι της δομής μία πολλαπλότητας. Αυτή η δέσμη έχει κάποιες ιδιότητες που δεν έχουν οι δέσμες που σχετίζονται με τις εσωτερικές θεωρίες βαθμίδας. Οι γραμμικές και πιο συγκεκριμένα οι Lorentz συνδέσεις, πάντα έχουν ¨στρέψη' (torsion) σε αντίθεση με τα δυναμικά βαθμίδας.

Μία σχυνοχή Lorentz A_μ, ή αλλιώς συνοχή σπιν (spin connection) είναι μία 1-form που παίρνει τιμές στην άλγεβρα Lie από την ομάδα Lorentz

$$A_\mu = \frac{1}{2} A^{ab}{}_\mu S_{ab} \tag{3.29}$$

όπου S_{ab} μία δοσμένη αναπαράσταση των γεννητόρων Lorentz. Επειδή οι γεννήτορες είναι αντισυμμετρικοί στους αλγεβρικούς δείκτες, έπεται πως και ο

$A^{ab}{}_{\mu}$ πρέπει να είναι αντισυμμετρικός. Αυτή η συνοχή ορίζει την συναλλοίωτη παράγωγο Fock-Ivanenko

$$\mathscr{D}_{\mu} = \partial_{\mu} - \frac{i}{2} A^{ab}{}_{\mu} S_{ab} \tag{3.30}$$

της οποίας το δεύτερο κομμάτι δρα μόνο σε αλγεβρικούς ή του εφαπτομένου χώρου δείκτες.

Για παράδειγμα για ένα βαθμωτό πεδίο ϕ ισχύει

$$S_{ab} = 0 \tag{3.31}$$

ενώ για έναν σπίνορα Dirac ψ ισχύει

$$S_{ab} = \frac{i}{4} \left[\gamma_a, \gamma_b\right] \tag{3.32}$$

με γ_a να αναπαριστούν του πίνακες Dirac. Για ένα όμως διανυσματικό πεδίο Lorentz ϕ^c έχουμε

$$\left(S_{ab}\right)^c d = i \left(\eta_{bd} \delta_a^c - \eta_{ad} \delta_b^c\right) \tag{3.33}$$

και η παράγωγος Fock-Ivanenko γίνεται

$$\mathscr{D}_{\mu} \phi^c = \partial_{\mu} \phi^c + A^c{}_{d\mu} \phi^d. \tag{3.34}$$

Έχοντας θεωρήσει τις τετράδες ώς αντικείμενα που συνδέουν τους τανυστές του εφαπτομένου χώρου (εσωτερικό) με αυτούς του χωροχρόνου (εξωτερικό), αν θεωρήσουμε ένα ϕ^a να είναι ένα εσωτερικό, ή Lorentz διάνυσμα τότε το

$$\phi^{\rho} = h_a{}^{\rho} \phi^a \tag{3.35}$$

θα είναι χωροχρονικό διάνυσμα. Αντίστροφα μπορούμε να γράψουμε

$$\phi^a = h^a{}_{\rho} \phi^{\rho} \tag{3.36}$$

Από την άλλη, λόγω του μη τανυστηκού χαρακτήρα της, μία συνοχή απαιτεί έναν μη ομογενή όρο. Για παράδειγμα, για κάθε σπιν συνοχή $A^a{}_{b\mu}$ υπάρχει μία αντίστοιχη γενική γραμμική συνοχή $\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}$ που δίνεται από τη σχέση

$$\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = h_a{}^{\rho} \partial_{\mu} h^a{}_{\nu} + h_a{}^{\rho} A^a{}_{b\mu} h^b{}_{\nu} \equiv h_a{}^{\rho} \mathscr{D}_{\mu} h^a{}_{\nu} \tag{3.37}$$

όπου $\mathscr{D}_{\mu}$ η συναλλοίωτη παράγωγος (3.34) της οποίας οι γενήτορες δρουν μόνο στους δείκτες του εφαπτομένου χώρου. Η αντίστροφη σχέση έχει τη μορφή

$$A^a{}_{b\mu} = h^a{}_{\nu} \partial_{\mu} h_b{}^{\nu} + h^a{}_{\nu} \Gamma^{\nu}{}_{\rho\mu} h_b{}^{\rho} \equiv h^a{}_{\nu} \nabla_{\mu} h_b{}^{\nu} \tag{3.38}$$

όπου ∇_μ η συναλλοίωτη παράγωγος στη συνοχή $\Gamma^\nu{}_{\rho\mu}$ που δρα μόνο στους δείκτες του χωρόχρονου. Για παράδειγμα για ένα χωροχρονικό διάνυσμα ϕ^ν έχουμε

$$\nabla_\mu \phi^\nu = \partial_\mu \phi^\nu + \Gamma^\nu{}_{\rho\mu}\phi^\rho. \tag{3.39}$$

Από τις εξισώσεις (3.35) και (3.36) παίρνουμε τη σχέση

$$\mathscr{D}_\mu \phi^d = h^d{}_\rho \nabla_\mu \phi^\rho \tag{3.40}$$

και παρατηρούμε πως η Fock-Ivanenko $\mathscr{D}_\mu$ ορίζεται για όλα τα πεδία (τανυστικά και σπινοριακά) ενώ η συναλλοίωτη παράγωγος ∇_μ μπορεί να οριστεί μόνο για τανυστικά.

Οι εξισώσεις (3.37) και (3.38) είναι απλά δύο διαφορετικοί τρόποι να εκφραστεί η ιδιότητα ότι η ολική συναλλοίωτη παράγωγος της τετράδας εξαφανίζεται

$$\partial_\mu h^a{}_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} h^a{}_\rho + A^a{}_{b\mu} h^b{}_\nu = 0. \tag{3.41}$$

Επίσης η συνοχή $\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}$ είναι συμβατή με τη μετρική αν ικανοποιείται η προϋπόθεση (metricity condition)

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} \equiv \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho} = 0. \tag{3.42}$$

Αναφορικά όμως με τις τετράδες, χρησιμοποιώντας ξανά τις εξισώσεις (3.37) και (3.38) η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\partial_\mu \eta_{ab} - A^d{}_{a\mu} \eta_{db} - A^d{}_{b\mu} \eta_{ad} = 0 \tag{3.43}$$

ή ισοδύναμα

$$A_{ba\mu} = -A_{ab\mu} \tag{3.44}$$

Συνεπώς αυτή η ιδιότητα διατήρησης της μετρικής σημαίνει πως η σπιν συνοχή είναι Lorentzian (αντισσυμετρική στους αλγεβρικούς δείκτες). Αντίθετα, όταν $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} \neq 0$ η αντίστοιχη συνοχή $A^a{}_{b\mu}$ δεν λαμβάνει τιμές από την άλγεβρα Lie της ομάδας Lorentz άρα δεν είναι συνοχή Lorentz.

3.1.4 Καμπυλότητα και Στρέψη

Η καμπυλότητα και η στρέψη είναι τανυστικές ιδιότητες των συνοχών Lorentz. Σε αντίθεση με τη Γενική Σχετικότητα που θεωρεί μόνο μηδενική συνοχή στρέψης, παρακάτω θα θεωρήσουμε τον χωροχρόνο απλά ως μία πολλαπλότητα και τις συνοχές ως πρόσθετες κατασκευές επί αυτών.

Η καμπυλότητα μίας συνοχής Lorentz $A^{a}{}_{b\mu}$ είναι μία 2-form που λαμβάνει τιμές από την άλγεβρα Lie της ομάδας Lorentz

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{4} R^{a}{}_{b\nu\mu} S_{a}{}^{b} dx^{\nu} \wedge dx^{\mu}. \tag{3.45}$$

Η στρέψη είναι επίσης μία 2-form αλλά λαμβάνει τιμές από την άλγεβρα Lie της ομάδας των παράλληλων μετατοπίσεων

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2} T^{a}{}_{\nu\mu} P_{a} dx^{\nu} \wedge dx^{\mu} \tag{3.46}$$

με $P_a = \partial_a$ οι γεννήτορές της. Τα στοιχεία της καμπυλότητας και της στρέψης δίνονται από τις σχέσεις

$$R^{a}{}_{b\nu\mu} = \partial_{\nu} A^{a}{}_{b\mu} - \partial_{\mu} A^{a}{}_{b\nu} + A^{a}{}_{e\nu} A^{e}{}_{b\mu} - A^{a}{}_{e\mu} A^{e}{}_{b\nu} \tag{3.47}$$

και

$$T^{a}{}_{\nu\mu} = \partial_{\nu} h^{a}{}_{\mu} - \partial_{\mu} h^{a}{}_{\nu} + A^{a}{}_{e\nu} h^{e}{}_{\mu} - A^{a}{}_{e\mu} h^{e}{}_{\nu}. \tag{3.48}$$

Χρησιμοποιώντας και τις τετράδες, οι τανυστές μπορούν να γραφτούν μόνο με χωροχρονικούς δείκτες

$$R^{\rho}{}_{\lambda\nu\mu} = h_{a}{}^{\rho} h^{b}{}_{\lambda} R^{a}{}_{b\nu\mu} \tag{3.49}$$

και

$$T^{\rho}{}_{\nu\mu} = h_{a}{}^{\rho} T^{a}{}_{\nu\mu} \tag{3.50}$$

Χρησιμοποιώντας επίσης τη σχέση (3.38) μπορούμε να βρούμε τα στοιχεία των παραπάνω τανυστών από τις σχέσεις

$$R^{\rho}{}_{\lambda\nu\mu} = \partial_{\nu} \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu} - \partial_{\mu} \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\eta\nu} \Gamma^{\eta}{}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\eta\mu} \Gamma^{\eta}{}_{\lambda\nu} \tag{3.51}$$

και

$$T^{\rho}{}_{\nu\mu} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}. \tag{3.52}$$

Γράφοντας επίσης το $A^{a}{}_{bc} = A^{a}{}_{b\nu} h_{c}{}^{\nu}$ μπορούμε να βρούμε τα στοιχεία της καμπυλότητας και της στρέψης στη μη ολονομική βάση $\{h_a\}$

$$R^{a}{}_{bcd} = h_{c}\left(A^{a}{}_{bd}\right) - h_{d}\left(A^{a}{}_{bc}\right) + A^{a}{}_{ec} A^{e}{}_{bd} - A^{a}{}_{ed} A^{e}{}_{bc} - f^{e}{}_{cd} A^{a}{}_{be} \tag{3.53}$$

και
$$T^a{}_{bc} = A^a{}_{cb} - A^a{}_{bc} - f^a{}_{bc} \tag{3.54}$$
όπου $h_c = h_c{}^\mu \partial_\mu$. Για τρεις διαφορετικούς συνδιασμούς δεικτών της (3.54) παίρνουμε
$$A^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\left(f_b{}^a{}_c + T_b{}^a{}_c + f_c{}^a{}_b + T_c{}^a{}_b - f^a{}_{bc} - T^a{}_{bc}\right). \tag{3.55}$$
Ξαναγράφοντας την παραπάνω σχέση στη μορφή [1]
$$A^a{}_{bc} = \mathring{A}^a{}_{bc} + K^a{}_{bc} \tag{3.56}$$
όπου
$$\mathring{A}^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\left(f_b{}^a{}_c + f_c{}^a{}_b - f^a{}_{bc}\right) \tag{3.57}$$
είναι η συνηθισμένη έκφραση της συνοχής σπιν της Γενικής Σχετικότητας σε όρους των συντελεστών της μη ολονομίας, και
$$K^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\left(T_b{}^a{}_c + T_c{}^a{}_b - T^a{}_{bc}\right) \tag{3.58}$$
ο τανυστής contortion. Όπως κι η συνοχή Lorentz έτσι και ο contortion είναι 1-form και λαμβάνει τιμές από την άλγεβρα Lie της ομάδας Lorentz:
$$K_\mu = \frac{1}{2} K^a{}_{b\mu} S_a{}^b. \tag{3.59}$$

Η εξίσωση (3.56) αποτελεί ουσιαστικά το θεώρημα στο οποίο κάθε συνοχή Lorentz μπορεί να χωριστεί στη συνοχή σπιν της Γενικής Σχετικότητας και τον τανυστή contorsion. Για τους αντίστοιχους χωροχρονικούς δείκτες της γραμμικής συνοχής παίρνουμε
$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} + K^\rho{}_{\mu\nu} \tag{3.60}$$
όπου
$$\mathring{\Gamma}^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}\left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right) \tag{3.61}$$
είναι το γνωστό σύμβολο Christoffel (ή αλλιώς συνοχή Levi-Civita) μηδενικής στρέψης και
$$K^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T_\nu{}^\rho{}_\mu + T_\mu{}^\rho{}_\nu - T^\rho{}_{\mu\nu}\right) \tag{3.62}$$
είναι ο τανυστής contorsion σε χωροχρονικούς δείκτες.

[1] Όλες οι ποσότητες που σχετίζονται με τη Γενική Σχετικότητα θα συμβολίζονται με ένα 'ο' από πάνω τους

3.1.5 Αδρανειακές συνοχές

Στην Ειδική Σχετικότητα οι συνοχές Lorentz αναπαριστούν αδρανειακά φαινόμενα σε ένα δεδομένο σύστημα. Στην περίπτωση των αδρανειακών συστημάτων, όπου αυτά τα φαινόμενα απουσιάζουν, η συνοχή Lorentz εξαφανίζεται. Για να εξετάσουμε πως μία αδρανειακή Lorentz συνοχή εμφανίζεται ας θεωρήσουμε ένα γενικό σύστημα στον χώρο Minkowski ${e^a}_\mu$ και ένα αδρανειακό (ολονομικό) σύστημα ${e'^a}_\mu$ το οποίο ορίζεται για όλα τα συστήματα τα οποία ${f'^c}_{ab} = 0$ και σε ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $\{x^\mu\}$ έχει την ολονομική μορφή

$$ {e'^a}_\mu = \partial_\mu x'^a \tag{3.63} $$

όπου x'^a ένα χωροχρονικά εξαρτόμενο διάνυσμα Lorentz $x'^a = x'^a(x)$. Κάτω από έναν τοπικό μετασχηματισμό Lorentz

$$ x^a = {\Lambda^a}_b(x) x'^b \tag{3.64} $$

το ολονομικό σύστημα μετασχηματίζεται σε ένα νέο

$$ {e^a}_\mu = {\Lambda^a}_b(x) {e'^b}_\mu \tag{3.65} $$

και με απλούς υπολογισμούς έχει τη μορφή [2]

$$ {e^a}_\mu = \partial_\mu x^a + {\overset{\bullet}{A}{}^a}_{b\mu} x^b \equiv \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu x^a \tag{3.66} $$

όπου

$$ {\overset{\bullet}{A}{}^a}_{b\mu} = {\Lambda^a}_e(x) \partial_\mu {\Lambda_b}^e(x) \tag{3.67} $$

είναι μία συνοχή Lorentz που αναπαριστά τις αδρανειακές επιδράσεις στο νέο σύστημα. Είναι ουσιαστικά η συνοχή που παίρνουμε από έναν μετασχηματισμό Lorentz για μηδενική συνοχή σπιν (${\overset{\bullet}{A}{}'^e}_{d\mu}$) [20]

$$ {\overset{\bullet}{A}{}^a}_{b\mu} = {\Lambda^a}_e(x) {\overset{\bullet}{A}{}'^e}_{d\mu} {\Lambda_b}^d(x) + {\Lambda^a}_e(x) \partial_\mu {\Lambda_b}^e(x). \tag{3.68} $$

Ξεκινώντας από ένα αδρανειακό σύστημα, στο οποίο η αδρανειακή σπιν συνοχή μηδενίζεται, μπορούμε να πάρουμε διαφορετικές κλάσεις μη αδρανειακών συστημάτων εκτελώντας έναν τοπικό (σημειακά εξαρτώμενο) μετασχηματισμό Lorentz (${\Lambda^a}_b(x^\mu)$). Όλα αυτά τα υπεράριθμα συστήματα συνδέονται μέσω ενός καθολικού (global) (σημειακά ανεξάρτητου) μετασχηματισμού Lorentz ${\Lambda^a}_b =$ σταθερά.

[2] Όλες οι ποσότητες που σχετίζονται με τις Τηλεπαράλληλες θεωρίες θα συμβολίζονται με ένα '•' από πάνω τους

Λόγω της ορθογωνιότητας των τετράδων, ο μετασχηματισμός (3.65) παίρνει τη μορφή

$$\Lambda^a{}_b(x) = e^a{}_\mu e_b'^{\,\mu}. \tag{3.69}$$

Η βάση $e^a{}_\mu$ δεν είναι πλέον ολονομική και οι συντελεστές της μη ολονομίας είναι

$$f^c{}_{ab} = -(\overset{\bullet}{A}{}^c{}_{ab} - \overset{\bullet}{A}{}^c{}_{ba}), \tag{3.70}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{bc} = \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} e_c{}^\mu$. Η αντίστροφη σχέση έχει τη μορφή

$$\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{bc} = \frac{1}{2}(f_b{}^a{}_c + f_c{}^a{}_b - f^a{}_{bc}). \tag{3.71}$$

Ως επόμενο, η καθαρά αδρανειακή συνοχή $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}$ έχει μηδενική καμπυλότητα και στρέψη:

$$\overset{\bullet}{R}{}^a{}_{b\nu\mu} \equiv \partial_\nu \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} - \partial_\mu \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\nu} + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{e\nu} \overset{\bullet}{A}{}^e{}_{b\mu} - \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{e\mu} \overset{\bullet}{A}{}^e{}_{b\nu} = 0 \tag{3.72}$$

και

$$\overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\nu\mu} \equiv \partial_\nu e^a{}_\mu - \partial_\mu e^a{}_\nu + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{e\nu} e^e{}_\mu - \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{e\mu} e^e{}_\nu = 0 \tag{3.73}$$

3.2 Βάσεις της Τηλεπαράλληλης Θεωρίας Βαρύτητας

3.2.1 Η δομή της Τηλεπαράλληλης Θεωρίας Βαρύτητας ως θεωρία βαθμίδας

Η Τηλεπαράλληλη Βαρύτητα μπορεί να ερμηνευτεί ως μία θεωρία βαθμίδας για την ομάδα των παράλληλων μετατοπίσεων [18,21]. Η πηγή του βαρυτικού πεδίου είναι ενέργεια και ορμή και σύμφωνα με το Θεώρημα της Noether, το ρεύμα της ενέργειας-ορμής διατηρείται συναλλοίωτα παρέχοντας ότι η λανγκραζιανή είναι αναλλοίωτη κάτω από χωροχρονικές, παράλληλες μετατοπίσεις. Έτσι, προκειμένου να μελετήσουμε τη βαρύτητα σε έναν φορμαλισμό βαθμίδας θα πρέπει η θεωρία βαθμίδας να αφορά την ομάδα των παράλληλων μετατοπίσεων.

Ένας μετασχηματισμός βαθμίδας στην Τηλεπαράλληλη Βαρύτητα ορίζεται ως ένας μετασχηματισμός των συντεταγμένων του εφαπτομένου χώρου

$$x^a \to x^a + \varepsilon^a \left(x^\mu\right), \tag{3.74}$$

όπου ε^a η απειροελάχιστη παράμετρος μετασχηματισμού. Κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό, ένα γενικό πεδίο $\Psi = \Psi(x^a(x^\mu))$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$\delta_\epsilon \Psi = \varepsilon^a \left(x^\mu\right) \partial_a \Psi, \tag{3.75}$$

όπου ∂_a οι γενήτορες της ομάδας των παράλληλων μετατοπίσεων. Για μία καθολική μεταφορά με παράμετρο $\varepsilon^a =$σταθερά, η παράγωγος $\partial_\mu \Psi$ μετασχηματίζεται συναλλοίωτα

$$\delta_\epsilon \left(\partial_\mu \Psi\right) = \varepsilon^a \partial_a \left(\partial_\mu \Psi\right) \tag{3.76}$$

ενώ για τοπικό μετασχηματισμό με παράμετρο $\varepsilon^a = \varepsilon^a(x)$ δε μετασχηματίζεται συναλλοίωτα

$$\delta_\epsilon \left(\partial_\mu \Psi\right) = \varepsilon^a(x) \partial_a \left(\partial_\mu \Psi\right) + \left(\partial_\mu \varepsilon^a(x)\right) \partial_a \Psi \tag{3.77}$$

Στην πραγματικότητα ο τελευταίος όρος είναι ένας ψευδο-όρος που σπάει τη συναλλοιώτητα του μετασχηματισμού. Όπως και σε άλλες θεωρίες βαθμίδας, για να επανάφερουμε τη βαθμιδωτή συναλλοιώτητα είναι απαραίτητο να εισάγουμε ένα δυναμικό βαθμίδας $B_\mu = B^a{}_\mu \partial_a$ [22], το οποίο είναι 1-form και παίρνει τιμές από την άλγεβρα Lie των παράλληλων μετατοπίσεων. Με αυτό το δυναμικό μπορούμε να κατασκευάσουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο βαθμίδας:

$$h_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + B^a{}_\mu \partial_a \Psi, \tag{3.78}$$

η οποία αφορά Lorentz συστήματα στα οποία δεν έχουμε αδρανειακές επιδράσεις. Η παράγωγος μετασχηματίζεται συναλλοίοτα κάτω από μία απειροελάχιστη βαθμιδωτή μεταφορά

$$\delta_\epsilon \left(h_\mu \Psi\right) = \varepsilon^a(x)\partial_a \left(h_\mu \Psi\right) \tag{3.79}$$

παρέχοντας τον μετασχηματισμό του δυναμικού βαθμίδας

$$\delta_\epsilon B^a{}_\mu = -\partial_\mu \varepsilon^a(x). \tag{3.80}$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος βαθμίδας μπορεί να ξαναγραφτεί στη μορφή

$$h_\mu \Psi = h^a_\mu \partial_a \Psi \tag{3.81}$$

όπου

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + B^a{}_\mu \tag{3.82}$$

είναι μία μη τετριμμένη τετράδα, με την έννοια ότι $B^a{}_\mu \neq \partial_\mu \varepsilon^a$, διαφορετικά θα ήταν ένας μετασχηματισμός βαθμίδας της (3.82).

Μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε συστήματα Lorentz χωρίς αδρανειακές επιδράσεις. Για να πάρουμε τις ισοδύναμες εκφράσεις σε ένα γενικό συστήματα Lorentz αρκεί να κάνουμε έναν τοπικό μετασχηματισμό Lorentz

$$x^a \rightarrow \Lambda^a{}_b(x) x^b \tag{3.83}$$

Επειδή το $B^a{}_\mu$ είναι διάνυσμα Lorentz στους δείκτες του εφαπτομένου χώρου τότε

$$B^a{}_\mu \rightarrow \Lambda^a{}_b(x) B^b{}_\mu \tag{3.84}$$

και η συναλλοίωτη παράγωγος

$$h_\mu \Psi = h^a{}_\mu \partial_a \psi \tag{3.85}$$

γράφεται τώρα με την τετράδα

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b + B^a{}_\mu \tag{3.86}$$

όπου

$$\overset{\bullet}{A}{}^b{}_{c\mu} = \Lambda^b{}_d(x) \partial_\mu \Lambda_c{}^d(x) \tag{3.87}$$

είναι η καθαρά αδρανειακή Lorentz συνοχή. Η τετράδα (3.86) μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$h^a{}_\mu = e^a{}_\mu + B^a{}_\mu \tag{3.88}$$

όπου
$$e^a{}_\mu \equiv \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu x^a = \partial_\mu x^a + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b \tag{3.89}$$
είναι το τετριμμένο (μη βαρυτικό) κομμάτι της τετράδας. Από τις 2 τελευταίες σχέσεις παίρνουμε
$$h^a{}_\mu = \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu x^a + B^a{}_\mu . \tag{3.90}$$
Σε αυτή την κλάση συστημάτων ο μετασχηματισμός βαθμίδας του δυναμικού $B^a{}_\mu$ είναι
$$\delta B^a{}_\mu = -\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu \varepsilon^a , \tag{3.91}$$
ενώ πολύ εύκολα προκύπτει πως η τετράδα είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας
$$\delta h^a{}_\mu = 0 \tag{3.92}$$

3.2.2 Ένσταση του πεδίου των παράλληλων μετατοπίσεων

Όπως σε κάθε θεωρία βαθμίδας, η ένταση του πεδίου στην Τηλεπαράλληλη Βαρύτητα μπορεί να εξαγχθεί από τη σχέση μετάθεσης των συναλλοίωτων παραγώγων βαθμίδας. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη σχέση (3.78) εύκολα προκύπτει

$$[h_\mu, h_\nu] = \overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu} P_a \tag{3.93}$$

όπου
$$\overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a{}_\nu - \partial_\nu B^a{}_\mu + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} B^b{}_\nu - \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\nu} B^b{}_\mu \tag{3.94}$$
είναι η ένταση του πεδίου των παράλληλων μετατοπίσεων και μπορεί να γραφτεί στη μορφή
$$\overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu} = \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu B^a{}_\nu - \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\nu B^a{}_\mu \tag{3.95}$$
Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.90) και τη μεταθετική σχέση

$$\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu \left(\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\nu x^a \right) - \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\nu \left(\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu x^a \right) \equiv \left[\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu , \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\nu \right] x^a = 0 \tag{3.96}$$

παρατηρούμε ότι η εξίσωση (3.95) δεν είναι τίποτα άλλο παρά στρέψη

$$\overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu} = \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu h^a{}_\nu - \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\nu h^a{}_\mu . \tag{3.97}$$

Ακριβώς λοιπόν όπως και η τετράδες, έτσι κι η ένταση πεδίου $\overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu}$ είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας.

3.2.3 Θεμελιώδη Πεδία

Ως πεδίο βαθμίδας για την ομάδα των παράλληλων μετατοπίσεων, το βαρυτικό πεδίο στην Τηλεπαράλληλη Βαρύτητα αναπαρίσταται από ένα δυναμικό βαθμίδας $\boldsymbol{B}$ το οποίο είναι 1-form και παίρνει τιμές στην άλγεβρα Lie της ομάδας των παράλληλων μετατοπίσεων.

$$\boldsymbol{B} = B^a{}_\mu P_a dx^\mu. \tag{3.98}$$

Αντίστοιχα για την ένταση πεδίου που είναι η στρέψη $\boldsymbol{T}$ όπως είδαμε στο κεφάλαιο (1.3.4)

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2} T^a{}_{\mu\nu} P_a dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{3.99}$$

Η θεμελιώδης συνοχή Lorentz της Τηλεπαράλληλης Βαρύτητας όμως είναι η καθαρά αδρανειακή συνοχή (3.67). Αυτό σημαίνει πως στην συγκεκριμένη θεωρία , οι συνοχές Lorentz αναπαριστούν μόνο αδρανειακά φαινομένα. Επιλέγοντας λοιπόν ένα αδρανειακό σύστημα η συνοχή αυτή μπορεί να μηδενίζεται καθολικά. Μάλιστα, όπως είδαμε, ως καθαρά αδρανειακή συνοχή η καμπυλώτητα μηδενίζεται παντού

$$\dot{R}^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \dot{A}^a{}_{b\nu} - \partial_\nu \dot{A}^a{}_{b\mu} + \dot{A}^a{}_{e\mu}\dot{A}^e{}_{b\nu} - \dot{A}^a{}_{e\nu}\dot{A}^e{}_{b\mu} = 0. \tag{3.100}$$

Παρ΄όλα αυτά, για μία τετράδα που σχετίζεται με ένα μη τετριμένο δυναμικό βαθμίδας $B^a{}_\mu \neq \dot{\mathscr{D}}\varepsilon^a$ παίρνουμε μη μηδενική στρέψη

$$\dot{T}^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu + \dot{A}^a{}_{e\mu} h^e{}_\nu - \dot{A}^a{}_{e\nu} h^e{}_\mu \neq 0. \tag{3.101}$$

Στην Τηλεπαράλληλη Βαρύτητα λοιπόν, η βαρύτητα εκφράζεται από την στρέψης κι όχι από την καμπυλότητα. Αυτή ακριβώς είναι και η κύρια διαφορά με τη Γενική Σχετικότητα, με συνοχή σπιν $\mathring{A}^a{}_{b\mu}$, όπου έχουμε μηδενική στρέψη

$$\mathring{T}^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu + \mathring{A}^a{}_{e\mu} h^e{}_\nu - \mathring{A}^a{}_{e\nu} h^e{}_\mu = 0 \tag{3.102}$$

και μη μηδενική καμπυλότητα

$$\mathring{R}^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \mathring{A}^a{}_{b\nu} - \partial_\nu \mathring{A}^a{}_{b\mu} + \mathring{A}^a{}_{e\mu}\mathring{A}^e{}_{b\nu} - \mathring{A}^a{}_{e\nu}\mathring{A}^e{}_{b\mu} \neq 0. \tag{3.103}$$

Η γραμμική συνοχή που με χωροχρονικούς δείκτες που αντιστοιχεί στην αδρανειακή σπιν συνοχή είναι

$$\dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu} = h_a{}^{\rho}\partial_\mu h^a{}_\nu + h_a{}^{\rho}\dot{A}^a{}_{b\mu}h^b{}_\nu \equiv h_a{}^{\rho}\dot{\mathscr{D}}_\mu h^a{}_\nu. \tag{3.104}$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως συνοχή Weitzenböck και η ερμηνεία της είναι αντίστοιχη της ποσότητας

$$\partial_\mu h^a{}_\nu + \dot{A}^a{}_{b\mu}h^b{}_\nu - \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}h^a{}_\rho = 0. \tag{3.105}$$

Στην κλάση των συστημάτων όπου $\dot{A}^a{}_{b\mu} = 0$ γίνεται

$$\partial_\mu h^a{}_\nu - \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}h^a{}_\rho = 0 \tag{3.106}$$

κι αποτελεί την συνθήκη του εξάποστάσεως παραλληλισμού από την οποία η Τηλεπαράλλη Βαρύτητα πήρε το όνομά της.

Η συνοχή Weitzenböck $\dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}$ σχετίζεται με τη συνοχή Levi-Civita $\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}$ της Γενικής Σχετικότητας μέσω της σχέσης

$$\dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu} = \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu} + \dot{K}^{\rho}{}_{\nu\mu} \tag{3.107}$$

όπου

$$\dot{K}^{\rho}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}(\dot{T}_\nu{}^{\rho}{}_\mu + \dot{T}_\mu{}^{\rho}{}_\nu - \dot{T}^{\rho}{}_{\nu\mu}) \tag{3.108}$$

είναι ο τανυστής contortion της στρέψης Weitzenböck

$$\dot{T}^{\rho}{}_{\nu\mu} = \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} - \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}. \tag{3.109}$$

3.2.4 Σύζευξη Μεταφοράς, Σύζευξη **Lorentz** και Βαρυτική Σύζευξη

Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, για την εισαγωγή του δυναμικού βαθμίδας, απαιτείται η συναλλοίωτητα κάτω από τοπικές παράλληλες μετατοπίσεις η οποία οδηγεί στην αντίστοιχη συναλλοίωτη παράγωγο. Η συναλλοίωτη παράγωγος όρισε στη συνέχεια μία translational coupling prescription, σύμφωνα με την οποία η τετριμένη τετράδα αντικαταστήθηκε από μία μη τετριμένη σχετική με το βαρυτικό πεδίο

$$e^a{}_\mu \to h^a{}_\mu. \tag{3.110}$$

Αφού οι τετράδες ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\eta_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab} \quad \text{και} \quad g_{\mu\nu} = h^a{}_\mu h^b{}_\nu \eta_{ab} \tag{3.111}$$

με $\eta_{\mu\nu}$ η μετρική Minkowski και $g_{\mu\nu}$ μία γενική Riemannian μετρική σχετική με το βαρυτικό πεδίο, η translational coupling prescription είναι ισοδύναμη με την αντικατάσταση

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}. \tag{3.112}$$

Για να είναι μία θεωρία αναλλοίωτη κάτω από τοπικές παράλληλες μετατοπίσεις, πρέπει να είναι αναλλοίωτη και κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς Lorentz. Αυτή η δεύτερη συναλλοιώτητα σχετίζεται με το ότι η φυσική θα πρέπει να παραμένει ίδια κι ανεξάρτητη από το σύστημα που την περιγράφει. Κάτω από έναν τοπικό Lorentz μετασχηματισμό αλλάζουμε από μία κλάση συστημάτων σε μία άλλη η οποία λόγω της παρουσίας αδρανειακών φαινομένων. Η τοπική αναλλοιώτητα Lorentz, αν και δεν έχει δυναμική συμμετρία (βαθμίδας), παρέχει μία ακόμα prescription σύζευξης αντικαθιστώντας όλες τις παραγώγους με την συναλλοίωτη παράγωγο Lorentz

$$\partial_\mu \to \mathscr{D}_\mu + \frac{i}{2} A^{ab}{}_\mu S_{ab} \tag{3.113}$$

όπου S_{ab} οι κατάλληλοι για το πεδίο γεννήτορες Lorentz.

Για την πλήρη βαρυτική σύζευξη απαιτούνται και οι δύο παραπάνω συζεύξεις. Η translation coupling prescription

$$e^a{}_\mu \partial_a \Psi \to h^a{}_\mu \partial_a \Psi \tag{3.114}$$

και σύζευξη Lorentz

$$\partial_a \Psi \to \mathscr{D}_a \Psi \tag{3.115}$$

οι οποίες μαζί δίνουν

$$e^a{}_\mu \partial_a \Psi \to h^a{}_\mu \mathscr{D}_a \Psi = h^a{}_\mu [h_a \Psi - \frac{i}{2}(A^{bc}{}_a - K^{bc}{}_a) S_{bc} \Psi]. \tag{3.116}$$

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$\partial_\mu \Psi \to \mathscr{D} \Psi = \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2}(A^{ab}{}_\mu - K^{ab}{}_\mu S_{ab} \Psi. \tag{3.117}$$

3.3 Λανγκραζιανή και Εξισώσεις Κίνησης

3.3.1 Η Λανγκραζιανή στην Τηλεπαράλληλη Βαρύτητα και η ισοδυναμία με την **Einstein-Hilbert**

Όπως σε κάθε θεωρία βαθμίδας, η Λανγκραζιανή πυκνότητα θα είναι τετραγωνική στο πεδίο έντασης της θεωρίας, δηλαδή τον τανυστή στρέψης

$$\overset{\bullet}{\mathscr{L}} = \frac{c^4 h}{16\pi G}\left(\frac{1}{4}\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_{\rho}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\rho} - \overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\rho}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\nu}\right) \tag{3.118}$$

όπου $h = det(h^a{}_\mu)$.

Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στη συνήθη λαγκραζιανή των θεωριών βαθμίδας ενώ οι άλλοι δύο σχετίζονται με τον soldered χαρακτήρα της δέσμης που επιτρέπει την ισοδυναμία της λαγκραζιανής στους αλγεβρικούς και τους χωροχρονικούς δείκτες. Σε αλγεβρικούς δείκτες θα έχει τη μορφή

$$\overset{\bullet}{\mathscr{L}} = \frac{c^4 h}{16\pi G}\left(\frac{1}{4}\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{bc}\overset{\bullet}{T}{}_{a}{}^{bc} + \frac{1}{2}\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{bc}\overset{\bullet}{T}{}^{cb}{}_{a} - \overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{ba}\overset{\bullet}{T}{}^{cb}{}_{c}\right) \tag{3.119}$$

Επειδή επίσης η στρέψη είναι τανυστική ποσότητα κάθε όρος της λαγκραζιανής είναι αναλλοίωτος κάτω από γενικές συντεταγμένες και κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς Lorentz και κατέπέκταση όλη η λαγκραζιανή θα είναι αναλλοίωτη.

Όπως είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια η λαγκραζιανή Einstein-Hilbert της Γενικής Σχετικότητας έχει τη μορφή

$$\overset{\circ}{\mathscr{L}} = -\frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}\overset{\circ}{R} \tag{3.120}$$

όπου $\overset{\circ}{R}$ η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci της συνοχής Levi-Civita. Εύκολα προκύπτει η σχέση που συνδέει τις δύο αυτές λαγκραζιανές (3.118) και (3.120)

$$\overset{\bullet}{\mathscr{L}} = \overset{\circ}{\mathscr{L}} - \partial_\mu\left(\frac{c^4 h}{8\pi G}\overset{\bullet}{T}{}^{\mu}\right) \tag{3.121}$$

όπου $\overset{\bullet}{T}{}^{\mu} = \overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\nu}$ η διανυσματική στρέψη. Λόγω αυτής της ιδιότητας, η Τηλεπαράλληλη Βαρύτητα, είναι ισοδύναμη της Γενικής Σχετικότητας (Teleparallel Equivalent of General Relativity) αφού και οι εξισώσεις κίνησης που εξάγοντα και από τις δύο αυτές λαγκραζιανές πρέπει να είναι ίδιες.

Για να κατανοήσουμε τον όρο απόκλισης μεταξύ των δύο λαγκραζιανών αρκεί να θυμηθούμε πως η Einstein-Hilbert (3.120) εξαρτάται από τη μετρική και τις πρώτης και δεύτερης τάξης παραγώγους της.Ισοδύναμα, στο φορμαλισμό των τετράδων μπορούμε να πούμε πως εξαρτάται από την τετράδα και τις πρώτης και δεύτερης τάξης παραγώγους του πεδίου της. Οι όροι που περιέχουν δεύτερες παραγώγους μπορούν να συγχωνευτούν σε ένα όρο απόκλισης ξαναγράφοντας τη λαγκραζιανή Einstein-Hilbert στη μορφή

$$\mathring{\mathscr{L}} = \mathring{\mathscr{L}}_1 + \partial_\mu(\sqrt{-g}w^\mu), \tag{3.122}$$

όπου $\mathring{\mathscr{L}}_1$ είναι η λαγκραζιανή που εξαρτάται μόνο από την τετράδα και τις πρώτης τάξης παραγώγους της και το w^μ είναι ένα τετράνυσμα. Από την άλλη η τηλεπαράλληλη λαγκραζιανή $\overset{\bullet}{\mathscr{L}}$ εξαρτάται μόνο από την τετράδα και τις πρώτης τάξεις παραγώγους της, οπότε η απόκλιση στη σχέση ισοδυναμίας των δύο θεωριών (3.121) είναι απαραίτητη για να ¨διώξει' όλους τους όρους που περιέχουν δεύτερης τάξης παραγώγους της τετράδας από την λαγκραζιανή Einstein-Hilbert $\mathring{\mathscr{L}}$.

3.3.2 Πεδιακές Εξισώσεις

Ας ξεκινήσουμε θεωρώντας την λαγκραζιανή

$$\mathscr{L} = \overset{\bullet}{\mathscr{L}} + \mathscr{L}_s \tag{3.123}$$

όπου $\mathscr{L}_s$ η λαγκραζιανή ενός γενικού πεδίου πηγής (ύλης). Η μεταβολή της λαγκραζιανής ως προς το δυναμικό βαθμίδας $B^a{}_\rho$ ή ισοδύναμα ως προς την τετράδα $h^a{}_\mu$ οδηγεί στην τηλεπαράλληλη μορφή των βαρυτικών πεδιακών εξισώσεων

$$E_a{}^\rho = kh\Theta_a{}^\rho, \tag{3.124}$$

όπου

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} \tag{3.125}$$

και το αριστερό μέλος της εξίσωσης (3.124) είναι η έκφραση Euler-Lagrange

$$E_a{}^\rho = \partial_\sigma\left(h\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}\right) - kh\overset{\bullet}{J}_a{}^\rho \tag{3.126}$$

όπου το

$$h\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma} = -k\frac{\partial\overset{\bullet}{\mathscr{L}}}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} \tag{3.127}$$

εκφράζει το υπερδυναμικό, ενώ ο όρος

$$h\overset{\bullet}{J}_a{}^\rho = -\frac{\partial \overset{\bullet}{\mathscr{L}}}{\partial h^a{}_\rho} \tag{3.128}$$

είναι το ρεύμα βαθμίδας που εκφράζει την υλοενεργειακή πυκνότητα -της ίδιας της βαρύτητας- της Noether [23]. Ο τανυστής ορμής-ενέργειας της ύλης δίνεται από τη σχέση

$$h\Theta_a{}^\rho = -\frac{\delta \mathscr{L}_s}{\delta h^a{}_\rho} \equiv -\left(\frac{\partial \mathscr{L}_s}{\partial h^a{}_\rho} - \partial \frac{\partial \mathscr{L}_s}{\partial_\mu \partial h^a{}_\rho}\right). \tag{3.129}$$

Μετά από αναλυτικούς υπολογισμούς καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(\overset{\bullet}{T}{}^{\sigma\rho}{}_a + \overset{\bullet}{T}_a{}^{\rho\sigma} - \overset{\bullet}{T}{}^{\rho\sigma}{}_a\right) - h_a{}^\sigma \overset{\bullet}{T}{}^{\theta\rho}{}_\theta + h_a{}^\rho \overset{\bullet}{T}{}^{\theta\sigma}{}_\theta \tag{3.130}$$

και

$$\overset{\bullet}{J}_a{}^\rho = \frac{1}{k} h_a{}^\mu \overset{\bullet}{S}_c{}^{\nu\rho} \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\nu\mu} - \frac{h_a{}^\rho}{h} \overset{\bullet}{\mathscr{L}} + \frac{1}{k} \overset{\bullet}{A}{}^c{}_{a\sigma} \overset{\bullet}{S}_c{}^{\rho\sigma}. \tag{3.131}$$

Λόγω της αντισυμμετρίας του υπερδυναμικού στους δύο τελευταίους δείκτες η ολική υλοενεργειακή πυκνότητα διατηρείται

$$\partial_\rho \left(h\overset{\bullet}{J}_a{}^\rho + h\Theta_a{}^\rho\right) = 0. \tag{3.132}$$

3.3.3 Εναλλακτικές μορφές των πεδιακών εξισώσεων

Υπάρχουν πολλοί εναλλακτικοί τρόποι να γράψει κανείς τις πεδιακές εξισώσεις (3.124) που μπορούν να φανούν χρήσιμοι σε διαφορετικές συνθήκες. Ένας από αυτούς είναι να γράψουμε τις πεδιακές εξισώσεις χρησιμοποιώντας την συναλλοίωτη παράγωγο

$$\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\sigma \left(h\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}\right) - kh\overset{\bullet}{\Sigma}_a{}^\rho = kh\Theta_a{}^\rho, \tag{3.133}$$

όπου έχουμε ορίσει τον βαρυτικό τανυστή ορμής-ενέργειας

$$\overset{\bullet}{\Sigma}_a{}^\rho = \overset{\bullet}{J}_a{}^\rho - \frac{1}{k} \overset{\bullet}{A}{}^c{}_{a\sigma} \overset{\bullet}{S}_c{}^{\rho\sigma}. \tag{3.134}$$

Το πλεονέκτημα της παραπάνω μοεφής των πεδιακών εξισώσεων είναι πως ο $\overset{\bullet}{\Sigma}_a{}^\rho$ είναι ιδιοτανυστής κάτω από διαφορομορφισμούς και κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Επίσης μπορεί πολύ εύκολα να δειχθεί πως είναι άιχνος

$$\overset{\bullet}{\Sigma}_\rho{}^\rho \equiv h^a{}_\rho \overset{\bullet}{\Sigma}_a{}^\rho = 0, \tag{3.135}$$

όπως ακριβώς για ένα άμαζο πεδίο.

Ένας άλλος εναλλακτικός τρόπος είναι να γράψουμε τις πεδιακές εξισώσεις (3.124) σε χωροχρονικούς δείκτες

$$E_\mu{}^\rho \equiv \partial_\sigma \left(h\dot{S}_\mu{}^{\rho\sigma} \right) + kh\dot{t}_\mu{}^\rho = kh\Theta_\mu{}^\rho, \tag{3.136}$$

όπου

$$h\dot{t}_\mu{}^\rho = \frac{1}{k} h\dot{\Gamma}^a{}_{\sigma\mu}\dot{S}_a{}^{\sigma\rho} + \delta_\mu{}^\rho \dot{\mathscr{L}} \tag{3.137}$$

είναι ο ψευδοτανυστής ορμής-ενέργειας. Το γεγονός ότι ο $h\dot{t}_\mu{}^\rho$ διατηρείται οδηγεί σε χωροχρονικά διατηρούμενα ρεύματα [24].

3.3.4 Μεταβολές ως προς τη σπιν συνοχή

Από την προσέγγιση της Τηλεπαράλληλης Βαρύτητας ως θεωρία βαθμίδας, δηλαδή από το γεγονός ότι η τετράδα μπορεί να γραφτεί σε όρους δυναμικού μεταφοράς και συνοχής σπιν όπως φαίνεται από την σχέση (3.86)

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + \dot{A}^a{}_{b\mu} x^b + B^a{}_\mu. \tag{3.138}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει πως η συνοχή σπιν δεν είναι μία ανεξάρτητη μεταβλητή από την τετράδα. Αν θεωρήσουμε λοιπόν την λαγκραζιανή (3.118) συναρτήσει της τετράδας και της συνοχής σπιν, θα οδηγηθούμε στο πρόβλημα των μεταβολών της λαγκραζιανής ως προς την συνοχή σπιν.

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για τον υπολογισμό των μεταβολών της λαγκραζιανής ως προς την συνοχή σπιν. Ας ξεκινήσουμε θεωρώντας μία λαγκραζιανή ανάλογη μίας μηδενικής σπιν συνοχής και μία λαγκραζιανή ανάλογη μίας τυχαίας συνοχής σπιν $\dot{A}^a{}_{b\mu}$ [25]

$$\dot{\mathscr{L}}(h^a{}_\mu, 0) \quad \text{και} \quad \dot{\mathscr{L}}(h^a{}_\mu, \dot{A}^a{}_{b\mu}). \tag{3.139}$$

Ξαναγράφοντας την σχέση ισοδυναμίας της Τηλεπαράλληλες Θεωρίας και της Γενικής Σχετικότητας (3.121) και για τις δύο λαγκραζιανές συναρτήσει της τετράδας $h^a{}_\mu$ παίρνουμε τη σχέση

$$\mathring{\mathscr{L}}(h^a{}_\mu) \equiv \dot{\mathscr{L}}(h^a{}_\mu, \dot{A}^a{}_{b\mu}) + \partial_\mu \left[\frac{h}{k} \dot{T}^{\rho\mu}{}_\rho (h^a{}_\mu, \dot{A}^a{}_{b\mu}) \right] = \dot{\mathscr{L}}(h^a{}_\mu, 0) + \partial_\mu \left[\frac{h}{k} \dot{T}^{\rho\mu}{}_\rho (h^a{}_\mu, 0) \right]. \tag{3.140}$$

Ο μη μηδενικός τανυστής στρέψης (3.101) παίρνει τη μορφή

$$\dot{T}^{\rho\mu}{}_\rho (h^a{}_\mu, \dot{A}^a{}_{b\mu}) = \dot{T}^{\rho\mu}{}_\rho (h^a{}_\mu, 0) - \dot{A}^\mu \tag{3.141}$$

όπου $\overset{\bullet}{A}^{\mu} = \overset{\bullet}{A}^{a}{}_{b\nu} h_{a}{}^{\nu} h^{b\mu}$. Από τις δύο παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στη σχέση [25]

$$\overset{\bullet}{\mathscr{L}}(h^{a}{}_{\mu}, \overset{\bullet}{A}^{a}{}_{b\mu}) = \overset{\bullet}{\mathscr{L}}(h^{a}{}_{\mu}, 0) + \frac{1}{k}\partial_{\mu}(h\overset{\bullet}{A}^{\mu}). \tag{3.142}$$

Η παραπάνω σχέση μας δείχνει ότι η αδρανιακή συνοχή σπιν $\overset{\bullet}{A}^{a}{}_{b\mu}$ μπαίνει στην λαγκραζιανή ως ολική παράγωγος κι ως συνέπεια η μεταβολή ως προς τη συνοχή σπιν μηδενίζεται

$$\frac{\delta\overset{\bullet}{\mathscr{L}}}{\delta\overset{\bullet}{A}^{a}{}_{b\mu}} = 0. \tag{3.143}$$

Ένα ακόμη πολύ βασικό συμπέρασμα που μας οδηγεί η εξίσωση (3.142) είναι ότι οι πεδιακές εξισώσεις που παίρνουμε από τις λαγκραζιανές (3.139) είναι οι ίδιες. Αυτό σημαίνει πως οι πεδιακές εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν ανεξάρτητα από τη συνοχή σπιν η οποία παραμένει απροσδιόριστη κατά τη διαδικασία. Επίσης οι πεδιακές εξισώσεις καθορίζουν μόνο την κλάση ισοδυναμίας των τετράδων που αφορούν τοπικούς μετασχηματισμούς Lorentz $\Lambda^{a}{}_{b}(x)$. Δηλαδή οι τετράδες που συνδέεονται μέσω τοπικών μετασχηματισμών Lorentz

$$h^{a}{}_{\mu} \quad \text{και} \quad h'^{a}{}_{\mu} = \Lambda^{a}{}_{b} h^{b}{}_{\mu} \tag{3.144}$$

είναι δυσδιάκρετες όσον αφορά τις τηλεπαράλληλες πεδιακές εξισώσεις.

Μία εναλλακτική μέθοδος θα ήταν να πάρουμε απευθείας μεταβολές της δράσης και να περιοριστούμε σε αυτές που διατηρούν την τοπική επιπεδότητα και την τηλεπαράλληλη μορφή της συνοχής σπιν [26]. Αφού η τηλεπαράλληλη συνοχή (3.67) δίνεται μόνο από τον πίνακα τοπικού μετασχηματισμού Lorentz $\Lambda^{a}{}_{b}$ θα θεωρήσουμε τις αλλαγές μόνο κάτω από απειροελάχιστους τοπικούς μετασχηματισμούς Lorentz

$$\Lambda^{a}{}_{b} = \delta^{a}{}_{b} + \epsilon^{a}{}_{b}, \quad \epsilon_{ab} = -\epsilon_{ba}. \tag{3.145}$$

Η μεταβολή της συνοχής σπιν δίνεται από τη σχέση

$$\delta\overset{\bullet}{A}^{ab}{}_{\mu} = \delta_{\epsilon}\overset{\bullet}{A}^{ab}{}_{\mu} = \overset{\bullet}{\mathscr{D}}\epsilon^{ab} = \partial_{\mu}\epsilon^{ab} + \overset{\bullet}{A}^{a}{}_{c\mu}\epsilon^{cb} + \overset{\bullet}{A}^{b}{}_{c\mu}\epsilon^{ac}. \tag{3.146}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή της δράσης ως προς τη συνοχή σπιν

$$\delta_{A}\overset{\bullet}{\mathscr{L}} = \frac{\delta\overset{\bullet}{\mathscr{L}}}{\delta\overset{\bullet}{A}^{ab}{}_{\mu}}\delta\overset{\bullet}{A}^{ab}{}_{\mu} = \frac{h}{2k}\overset{\bullet}{S}_{ab}{}^{\mu}\delta\overset{\bullet}{A}^{ab}{}_{\mu} = \frac{h}{2k}\overset{\bullet}{S}_{ab}{}^{\mu}\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_{\mu}\epsilon^{ab}. \tag{3.147}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, θεωρώντας πως η ολική παράγωγος δε συνεισφέρει στις πεδιακές εξισώσεις και κάνοντας χρήση της αντισυμμετρίας του ϵ^{ab} καταλήγουμε στη συνθήκη

$$\overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\mu \left(h \overset{\bullet}{S}_{[ab]}{}^\mu \right) = 0. \tag{3.148}$$

Χρησιμοποιώντας την ποσότητα [27]

$$h \overset{\bullet}{S}_{[ab]}{}^\mu = \overset{\bullet}{\mathscr{D}}_\nu (h h_{[a}{}^\nu h_{b]}{}^\mu) \tag{3.149}$$

και το γεγονός ότι οι συναλλοίωτες τηλεπαράλληλες παράγωγοι αντιμετατίθενται (λόγω μηδενικής καμπυλότητας), καταλλήγουμε πως οι πεδιακές εξισώσεις για την συνοχή σπιν (3.148) ικανοποιούνται.

Άρα και οι δύο παραπάνω μάθοδοι μεταβολών οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή η σπιν συνοχή ικανοποιεί τις πεδιακές εξισώσεις [28].

3.3.5 Σύγκριση με τη Γενική Σχετικότητα στο φορμαλισμό τετράδων

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η Γενική Σχετικότητα μπορεί να εκφραστεί τόσο με τον φορμαλισμό της μετρικής όσο και με των τετράδων [29]. Στον φορμαλισμό της μετρικής υπολογίζουμε την καμπυλότητα Riemann χρησιμοποιώντας τα σύμβολα Christoffel που εξάγονται από τη μετρική. Οι πεδιακές εξισώσεις Einstein

$$\overset{\circ}{R}{}^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu \overset{\circ}{R} = k\Theta^\mu{}_\nu \tag{3.150}$$

αποτελούν ένα σύνολο δέκα πεδιακών εξισώσεων των δέκα στοιχείων του τανυστή της μετρικής.

Από την άλλη, στον φορμαλισμό των τετράδων, τα δέκα στοιχεία του τανυστή της μετρικής αντικαθιστούνται με τα δεκαέξι στοιχεία της τετράδας. Οι πεδιακές εξισώσεις Einstein σε αυτή την περίπτωση έχουν τη μορφή

$$\overset{\circ}{R}{}^a{}_\nu - \frac{1}{2}h^a{}_\nu \overset{\circ}{R} = k\Theta^a{}_\nu \tag{3.151}$$

όπου $\overset{\circ}{R}{}^a{}_\nu$ είναι καμπυλότητα Ricci υπολογισμένη απευθείας από την τετράδα και συνδέεται με την αντίστοιχη καμπυλότητα Ricci σε χωροχρονικούς δείκτες από τη σχέση

$$\overset{\circ}{R}{}^a{}_\nu = h^a{}_\mu \overset{\circ}{R}{}^\mu{}_\nu. \tag{3.152}$$

Από τα παραπάνω μπορούμε να δούμε πως ο φορμαλισμός τετράδων των πεδιακών εξισώσεων Einstein (3.151) είναι απλά μία προβολή, της χωροχρονικής τους μορφής (3.150), στα στοιχεία της τετράδας. Συνεπώς το περιεχόμενο των πεδιακών εξισώσεων και στους δύο φορμαλισμους είναι τα ίδιο αφού κι οι δύο καθορίζουν μόνο τον τανυστή της μετρικής. Αυτό είναι επίσης ξεκάθαρο από το γεγονός ότι οι πεδιακές εξισώσεις Einstein (3.151) είναι συναλλοίωτες κάτω από τοπικούς μετασχηματισμός Lorentz

$$\Lambda^c{}_a(x)\left(\overset{\circ}{R}{}^a{}_\nu - \frac{1}{2}h^a{}_\nu \overset{\circ}{R}\right) = k\Lambda^c{}_a(x)\Theta^a{}_\nu. \tag{3.153}$$

Η συναλλοιώτητα διώχνει έξι από τις δεκαέξι εξισώσεις (3.151) κάτω από έναν τοπικό μετασχηματισμό Lorentz το οποίο σημαίνει πως καθορίσαμε μόνο τον τανυστή της μετρικής. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς και οι δύο φορμαλισμοί είναι ισοδύναμοι κάτω από την ίδια θεωρία.

3.3.6 Τετράδες και οι αντίστοιχες συνοχές σπιν

Για κάθε τετράδα $h^a{}_\mu$ υπάρχει μία αντίστοιχη συνοχή σπιν $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}$ που περιγράφει τα αδρανειακά φαινόμενα στο συγκεκριμένο σύστημα. Αυτό είναι ξεκάθαρο από την θεμελιώδη μορφή των τετράδων στην Τηλεπαράλληλη Βαρύτητα (3.86). Υπάρχει μία κλάση κατάλληλων συστημάτων (proper frames) που χαρακτηρίζονται από μία μηδενική συνοχή σπιν $\{h^a{}_\mu, 0\}$. Σε οποιαδήποτε άλλη κλάση συστημάτων που σχετίζονται με τα κατάλλη συστήματα μέσω ενός μετασχηματισμού Lorentz, η συνοχή σπιν δε μηδενίζεται άρα υπάρχουν άπειρα ζευγάρια $\{h^a{}_\mu, \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}\}$. Κάθε ζεύγος ορίζει μία διαφορετική κλάση συστημάτων που χαρακτηρίζεται από μία διαφορετική αδρανειακή συνοχή σπιν $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}$. Παρ'όλα αυτά, πρακτικά, δεν είναι εύκολο να καθορίσουμε απευθείας την κατάληλη συνοχή σπιν μίας δοσμένης τετράδας $h^a{}_\mu$.

Για την επιλογή της καλύτερης τετράδας ξεκινάμε ορίζοντας μία τετράδα αναφοράς, $h^a_{(\mathrm{r})\mu}$, για την οποία έχουμε απουσία βαρύτητας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί θεωρώντας μηδενική τη βαρυτική σταθερά G

$$h^a_{(\mathrm{r})\mu} \equiv h^a{}_\mu\big|_{G\to 0}. \tag{3.154}$$

Σε μία τέτοια τετράδα, το βαρυτικό δυναμικό $B^a{}_\mu$ απουσιάζει, οπότε η τετράδα αναφοράς μπορεί να γραφτεί

$$h^a_{(\mathrm{r})\mu} = \partial_\mu x^a + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b. \tag{3.155}$$

Στην πραγματικότητα, η παραπάνω τετράδα αναπαριστά ένα τετριμμένο σύστημα ($h^a_{(\mathrm{r})\mu} = e^a_{(\mathrm{r})\mu}$) οπότε ο τανυστής στρέψης της συνοχής σπιν $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}$ μηδενίζεται

$$\overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu}(h^a_{(\mathrm{r})\mu}, \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}) = 0. \tag{3.156}$$

Οι συντελεστές της μη ολονομίας $f^c{}_{ab}$ μίας γενικής τετράδας $h^a{}_\mu$ σύμφωνα με την εξίσωση (3.27) δίνονται από τη σχέση

$$f^c{}_{ab} = h_a{}^\mu h_b{}^\nu \left(\partial_\nu h^c{}_\mu - \partial_\mu h^c{}_\nu\right). \tag{3.157}$$

Ξαναγράφοντας την εξίσωση (3.54) ως προς την στρέψη

$$\overset{\bullet}{T}{}^a{}_{bc} = -f^a{}_{bc} + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{cb} - \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{bc} \tag{3.158}$$

και χρησιμοποιώντας την συνθήκη (3.156) παίρνουμε τη σχέση

$$\overset{\bullet}{T}{}^a{}_{bc}(h^a_{(\mathrm{r})\mu}, \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}) = -f^a{}_{bc}(h_{(\mathrm{r})}) + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{cb} - \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{bc} = 0, \tag{3.159}$$

όπου $f^a{}_{bc}(h_{(\mathrm{r})})$ οι συντελεστές της μη ολονομίας για την τετράδα αναφοράς $h^a_{(\mathrm{r})\mu}$. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση για τρεις διαφορετικούς συνδιασμούς δεικτών μπορούμε να λύσουμε ως προς την συνοχή σπιν και να πάρουμε τη σχέση

$$\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = \frac{1}{2} h^c_{(\mathrm{r})\mu} \left[f_b{}^a{}_c(h_{(\mathrm{r})}) + f_c{}^a{}_b(h_{(\mathrm{r})}) - f^a{}_{bc}(h_{(\mathrm{r})})\right]. \tag{3.160}$$

Η παραπάνω σχέση είναι η αδρανειακή συνοχή σπιν που σχετίζεται με την τετράδα αναφοράς $h^a_{(\mathrm{r})\mu}$. Επειδή όμως η τετράδα $h^a_{(\mathrm{r})\mu}$ διαφέρει από την γενική τετράδα $h^a{}_\mu$ μόνο ως προς το βαρυτικό τους περιεχόμενο (το αδρανειακό είναι το ίδιο), η συνοχή σπιν (3.160) θα πρέπει να είναι η αδρανειακή συνοχή σπιν που σχετίζεται και με την γενική τετράδα $h^a{}_\mu$. Παρατηρούμε επίσης πως η έκφραση για την τηλεπαράλληλη συνοχή σπιν (3.160) ταυτίζεται με την **Levi-Civita** συνοχή σπιν για την τετράδα αναφοράς

$$\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}\left(h^a{}_\mu\right) = \mathring{A}{}^a{}_{b\mu}\left(h^a_{(\mathrm{r})\mu}\right). \tag{3.161}$$

Να τονίσουμε βέβαια πως η **Levi-Civita** συνοχή είναι υπολογισμένη για την τετράδα αναφοράς που αντιστοιχεί σε έναν χωρόχρονο **Minkowski** το οποίο εξασφαλίζει τη μηδενική καμπυλότητα άρα είμαστε στην κλάση των τηλεπαράλληλων συνοχών.

Το βασικό είναι πως ο τανυστής στρέψης

$$\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\mu\nu}\left(h^{a}{}_{\mu}, \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}\right) \tag{3.162}$$

είναι κατασκευασμένος από την τετράδα και την συνοχή σπιν που αντιπροσωπεύει μία καθαρά βαρυτική στρέψη με την έννοια πως η συνεισφορά από αδρανειακές επιδράσεις έχει αφαιρεθεί.

3.4 Λύσεις στην Τηλεπαράλληλη Βαρύτητα

3.4.1 Η λύση **Schwarzschild**

Θα ξεκινήσουμε με το πιο απλό παράδειγμα των στατικών και σφαιρικά συμμετρικών λύσεων [30]. Λόγω συμμετρίας του προβήματος μπορούμε να υποθέσουμε ότι το στοιχείο μήκος θα έχει τη μορφή

$$ds^2 = A(r)^2 dt^2 - B(r)^2 dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \tag{3.163}$$

όπου $A = A(r)$ και $B = B(r)$ δύο τυχαίες συναρτήσεις που θα οριστούν από τις πεδιακές εξισώσεις.

Όπως έχουμε πει υπάρχουν άπειρες τετράδες που αντιστοιχούν στη μετρική που ορίζει την (3.163). Ας θεωρήσουμε δύο τετράδες, την διαγώνια

$$h^a{}_\mu = diag(A, B, r, r\sin\theta) \tag{3.164}$$

και τη μη διαγώνια

$$\tilde{h}^a{}_\mu = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B\cos\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ 0 & -B\cos\theta & r\sin\theta & 0 \\ 0 & B\sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{3.165}$$

Αυτές οι δύο τετράδες συνδεόνται από τη σχέση

$$\tilde{h}^a{}_\mu = \tilde{\Lambda}^a{}_b h^b{}_\mu, \tag{3.166}$$

όπου $\tilde{\Lambda}^a{}_b$ ο τοπικός μετασχηματισμός Lorentz

$$\tilde{\Lambda}^a{}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0\cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi & \\ 0 & -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi \end{pmatrix}. \tag{3.167}$$

Προφανώς και οι δύο τετράδες αναπαριστούν την ίδια μετρική επειδή η μετρική είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς Lorentz.

Θεωρώντας μηδενική συνοχή σπιν αρχικά θα λύσουμε τις πεδιακές εξισώσεις και για τις δύο τετράδες.

1. Για τη διαγώνια τετράδα $h^a{}_\mu$

Σε αυτή την περίπτωση υπολογίζουμε αρχικά τους μη μηδενικούς όρους του υπαρδυναμικού $\overset{\bullet}{S}_\mu{}^{\rho\sigma} = \overset{\bullet}{S}_\mu{}^{\rho\sigma}(h^a{}_\mu, 0)$

$$\overset{\bullet}{S}_t{}^{tr} = -\frac{2}{rB^2}, \quad \overset{\bullet}{S}_t{}^{t\theta} = \overset{\bullet}{S}_r{}^{r\theta} = -\frac{\cot\theta}{r^2}, \quad \overset{\bullet}{S}_\theta{}^{r\theta} = \overset{\bullet}{S}_\phi{}^{r\phi} = \frac{1}{rB^2} + \frac{A'}{AB^2}, \tag{3.168}$$

όπου δεν έχουμε παρουσιάσει αναλυτικά τα αντισυμμετρικά στοιχεία $\overset{\bullet}{S}_\mu{}^{\rho\sigma} = -\overset{\bullet}{S}_\mu{}^{\sigma\rho}$. Τα μη μηδενικά στοιχεία του ψευδοτανυστή ενέργειας ορμής $\overset{\bullet}{t}_\mu{}^\rho = \overset{\bullet}{t}_\mu{}^\rho(h^a{}_\mu, 0)$ είναι

$$\begin{aligned}
\overset{\bullet}{t}_t{}^t = -\overset{\bullet}{t}_r{}^r = \overset{\bullet}{t}_\theta{}^\theta = \overset{\bullet}{t}_\phi{}^\phi &= \frac{1}{k}\frac{A + 2rA'}{r^2AB^2} \\
\overset{\bullet}{t}_r{}^\theta &= -\frac{1}{k}\frac{BA' + AB'}{r^2AB}\cot\theta \\
\overset{\bullet}{t}_\theta{}^r &= -\frac{1}{k}\frac{A + rA'}{rAB^2}\cot\theta
\end{aligned} \tag{3.169}$$

Συνδιάζοντας τα παραπάνω, τα μη τετριμμένα στοιχεία των πεδιακών εξισώσεων είναι

$$\begin{aligned}
E_t{}^t &= \left(\frac{-B + B^3 + 2rB'}{r^2B^3}\right)h, \\
E_r{}^r &= \left(\frac{-A + AB^2 - 2rA'}{r^2AB^2}\right)h, \\
E_\theta{}^\theta = E_\phi{}^\phi &= \left(\frac{B'(A + rA') - B(A' + rA'')}{rAB^3}\right)h.
\end{aligned} \tag{3.170}$$

Εύκολα παρατηρούμε πως η τρίτη από τις παραπάνω εξισώσεις δεν είναι ανεξάρτητη. Συνδιάζοντας λοιπόν τις άλλες δύο καταλήγουμε στην ίδια λύση με τη Γενική Σχετικότητα, δηλαδή τη λύση Schwarzschild

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = \sqrt{1 - \frac{c_1}{r}}. \tag{3.171}$$

Αντιστοιχώντας την λύση στο Νευτόνιο όριο, η σταθερά ολοκλήρωσης c_1 βρίσκεται, όπως στη Γενική Σχετικότητα να είναι $c_1 = 2GM$.

2. Για τη μη διαγώνια τετράδα $\tilde{h}^a{}_\mu$

Σε αυτή την περίπτωση οι μη μηδενικοί όροι του υπερδυναμικού $\overset{\bullet}{S}_\mu{}^{\rho\sigma} = \overset{\bullet}{S}_\mu{}^{\rho\sigma}(\tilde{h}^a{}_\mu, 0)$ είναι

$$\overset{\bullet}{S}_t{}^{tr} = \frac{2(B-1)}{rB^2}, \quad \overset{\bullet}{S}_\theta{}^{r\theta} = \overset{\bullet}{S}_\phi{}^{r\phi} = \frac{-A(B-1)+rA'}{rAB^2}. \tag{3.172}$$

Αντίστοιχα τα μη μηδενικά στοιχεία του ψευδοτανυστή ενέργειας ορμής $\overset{\bullet}{t}_\mu{}^\rho = \overset{\bullet}{t}_\mu{}^\rho(\tilde{h}^a{}_\mu, 0)$

$$\begin{array}{ll} \overset{\bullet}{t}_t{}^t = \frac{1}{k}\frac{(B-1)(A(B-1)-2rA')}{r^2AB^2}, & \overset{\bullet}{t}_r{}^r = \frac{1}{k}\frac{A\left(B^2-1\right)-2rA'}{r^2AB^2} \\ \overset{\bullet}{t}_\theta{}^\theta = \overset{\bullet}{t}_\phi{}^\phi = -\frac{1}{k}\frac{A(B-1)+r(B-2)A'}{r^2AB^2}, & \overset{\bullet}{t}_\theta{}^r = \frac{1}{k}\frac{A(B-1)-rA'}{rAB^2}\cot\theta, \end{array} \tag{3.173}$$

Παρατηρούμε πως τόσο το υπερδυναμικό, όσο και ο ψευδοτανυστής ενέργειας ορμής είναι διαφορετικοί για κάθε τετράδα λόγω του ότι όταν επιλέξαμε μηδενική σπιν συνοχή και για τις δύο τετράδες, οι ποσότητες $\overset{\bullet}{S}_\mu{}^{\rho\sigma}$ και $\overset{\bullet}{t}_\mu{}^\rho$ γίνανε μη τανυστηκές.

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για να υπολογίσουμε τα στοιχεία της συνοχής σπιν που σχετίζεται με τις τετράδες (3.164) και (3.165). Αρχικά θα ορίσουμε την τετράδα αναφοράς η οποία για την διαγώνια τετράδα (3.164) είναι

$$h^a_{(\mathrm{r})\mu} \equiv h^a{}_\mu\Big|_{G\to 0} = diag(1, 1, r, r\sin\theta). \tag{3.174}$$

Από την εξίσωση (3.160) βρίσκουμε πως οι μη μηδενικοί όροι της συνοχής σπιν είναι [3]

$$\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}\theta} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}\theta} = -1, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{3}\phi} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}\phi} = -\sin\theta, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{3}\phi} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{2}\phi} = -\cos\theta. \tag{3.175}$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε την τετράδα αναφοράς για τη μη διαγώνια τετράδα (3.165)

$$\tilde{h}^a_{(\mathrm{r})\mu} \equiv \tilde{h}^a{}_\mu\Big|_{G\to 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ 0 & -\cos\theta & r\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \end{pmatrix}, \tag{3.176}$$

[3]Με $(t, r, \theta\phi)$ συμβολίζουμε της συντεγμένες του χωρόχρονου και με $(\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4})$ του εφαπτομενικού.

και η αντιστοίχη συνοχή σπιν είναι παντού μηδέν

$$\tilde{\overset{\bullet}{A}}{}^{a}{}_{b\mu} = 0. \tag{3.177}$$

Αυτό σημαίνει πως η μη διαγώνια τετράδα (3.165) είναι όντως η κατάλληλη τετράδα και αντιπροσωπεύει μόνο τη βαρύτητα σε αντίθεση με την διαγώνια τετράδα (3.164) όπου και οι αδρανειακές επιδράσεις αντιπροσωπεύονται από την αντίστοιχη συνοχή σπιν.

Μπορούμε τώρα να ελέγξουμε πως και οι δύο τετράδες με τις σχετικές συνοχές σπιν οδηγούν στα ίδια αποτελέσματα για όλες τις γεωμετρικές ποσότητες

$$\overset{\bullet}{S}{}_{\mu}^{\rho\sigma}(\tilde{h}^{a}{}_{\mu}, 0) = \overset{\bullet}{S}{}_{\mu}^{\rho\sigma}(h^{a}{}_{\mu}, \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}), \quad \overset{\bullet}{t}{}_{\mu}{}^{\rho}(\tilde{h}^{a}{}_{\mu}, 0) = \overset{\bullet}{t}{}_{\mu}{}^{\rho}(h^{a}{}_{\mu}, \overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}). \tag{3.178}$$

3.4.2 Η Στρέψη **de-Sitter**

Ο χωρόχρονος de-Sitter ($dS(4,1)$) είναι ένας τετραδιάστατος, maximally συμμετρικός ψευδο-riemannian χώρος με σταθερή καμπυλότητα. Είναι ένας ομογενείς χώρος κάτω από την ομάδα Lorentz $\mathscr{L} = SO(3,1)$,

$$dS(4,1) = SO(4,1)/\mathscr{L}, \tag{3.179}$$

όπου $SO(4,1)$ είναι η ομάδα de-Sitter. Στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας οδηγεί σε μία λύση της εξίσωσης Einstein απουσία πηγής και με κοσμολογική σταθερά Λ

$$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \overset{\circ}{R} - g_{\mu\nu}\Lambda = 0 \tag{3.180}$$

Η μετρική de-Sitter προϋποθέτει την σύμμορφα επίπεδη μορφή

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}, \tag{3.181}$$

όπου Ω ο σύμμορφος παράγοντας

$$\Omega \equiv \Omega(x) = \frac{1}{1 - (\sigma^2 \Lambda/12)} \tag{3.182}$$

και σ^2 είναι το αναλλοίωτο κατά Lorentz τετραγωνικό διάστημα

$$\sigma^2 = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} \tag{3.183}$$

Παρατηρούμε πως στο όριο $\Lambda \to 0$ η μετρική $g_{\mu\nu}$ παίρνει τη μορφή της μετρικής Minkowski

$$\lim_{\Lambda \to 0} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \tag{3.184}$$

Τα σύμβολα Christoffel της μετρικής (3.181) είναι

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \left(\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} + \delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\mu} - \eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\right)\partial_{\sigma}\ln\Omega, \tag{3.185}$$

ο τανυστής Riemann

$$\overset{\circ}{R}{}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = -\frac{\Lambda}{3}\left(\delta^{\mu}_{\rho}g_{\nu\sigma} - \delta^{\mu}_{\sigma}g_{\nu\rho}\right), \tag{3.186}$$

η καμπυλότητα Ricci

$$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} \tag{3.187}$$

και η βαθμωτή καμπυλότητα

$$\overset{\circ}{R} = -4\Lambda. \tag{3.188}$$

Για να πάρουμε την αντίστοιχη λύση στην τηλεπαράλληλη θεωρία ας ξεκινήσουμε από τη σχέση [18]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}h^{a}{}_{\mu}h^{b}{}_{\nu}, \tag{3.189}$$

όπου $g_{\mu\nu}$ η de-Sitter μετρική (3.181). Η αντίστοιχη τετράδα de-Sitter θα έχει τη μορφή

$$h^{a}{}_{\mu} = \Omega\delta^{a}_{\mu}. \tag{3.190}$$

Αν θεωρήσουμε την τάξη των συστημάτων όπου $\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} = 0$, η συνοχή Weitzenböck έχει τη μορφή

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = h_{a}{}^{\rho}\partial_{\nu}h^{a}{}_{\mu}. \tag{3.191}$$

Σε αυτή την περίπτωση η τετράδα de-Sitter έχει τη μορφή

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \delta^{\rho}_{\mu}\partial_{\nu}\ln\Omega. \tag{3.192}$$

Ο τανυστής στρέψης σε αυτήν την περίπτωση έχει τη μορφή

$$\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \delta^{\rho}_{\nu}\partial_{\mu}\ln\Omega - \delta^{\rho}_{\mu}\partial_{\nu}\ln\Omega \tag{3.193}$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.182) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{6\Omega}\left(\delta^{\rho}_{\nu}g_{\mu a} - \delta^{\rho}_{\mu}g_{\nu a}\right)x^{a}. \tag{3.194}$$

Ο αντίστοιχος τανυστής Contortion είναι

$$\overset{\bullet}{K}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{6\Omega} \left(\delta^{\rho}_{a} g_{\mu\nu} - \delta^{\rho}_{\nu} g_{\mu a}\right) x^{a}. \tag{3.195}$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τη φυσική σημασία του τανυστή στρέψης, μπορούμε να τον αποσυνθέσουμε σε τρία μέρη που δε μπορούν να απλουστευθούν κάτω από καθολικούς μετασχηματισμούς Lorentz

$$\overset{\bullet}{T}_{\lambda\mu\nu} = \frac{2}{3}\left(\overset{\bullet}{\mathscr{T}}_{\lambda\mu\nu} - \overset{\bullet}{\mathscr{T}}_{\lambda\nu\mu}\right) + \frac{1}{3}\left(g_{\lambda\mu}\overset{\bullet}{\mathscr{V}}_{\nu} - g_{\lambda\nu}\overset{\bullet}{\mathscr{V}}_{\mu}\right) + \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\overset{\bullet}{\mathscr{A}}{}^{\rho} \tag{3.196}$$

όπου $\overset{\bullet}{\mathscr{T}}_{\lambda\mu\nu}$ είναι το καθαρά τανυστηκό κομμάτι και $\overset{\bullet}{\mathscr{V}}_{\mu}$ και $\overset{\bullet}{\mathscr{A}}{}^{\rho}$ το διανυσματικο και αξονικό κομμάτι αντίστοιχα. Στην περίπτωση του χωροχρόνου de-Sitter, μόνο η διανυσματική στρέψη είναι μη μηδενική και έχει τη μορφή

$$\overset{\bullet}{\mathscr{V}}_{\rho} = -\frac{\Lambda}{2\Omega} g_{\rho a} x^{a}. \tag{3.197}$$

Η ομογένεια και η ισοτροπία του χωροχρόνου de-Sitter είναι ο λόγος που μηδενίζονται το καθαρά τανυστηκό και το αξονικό κομμάτι της στρέψης.

3.4.3 Η Στρέψη **Kerr**

Όπως γνωρίζουμε από τη Γενική Σχετικότητα η μετρική Kerr γραμμένη στις συντεταγμένες Boyer-Lindquist (r, θ, φ) έχει τη μορφή

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 + 2 g_{t\varphi} d\varphi dt, \tag{3.198}$$

όπου

$$g_{tt} = 1 - \frac{r_s r}{\rho^2}, \quad g_{rr} = -\frac{\rho^2}{\Delta}, \quad g_{\theta\theta} = -\rho^2, \tag{3.199}$$

$$g_{\varphi\varphi} = -\left(r^2 + a^2 + \frac{r_s r a^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta, \tag{3.200}$$

$$g_{t\varphi} = g_{\varphi t} = \frac{r_s r a}{\rho^2}\sin^2\theta. \tag{3.201}$$

Στις παραπάνω σχέσεις, $r_s = 2Gm$ είναι η ακτίνα Schwarzschild με m η μάζα της πηγής και

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = r^2 - r_s r + a^2, \tag{3.202}$$

με a η γωνιακή στροφορμή της μάζας. Για $a = 0$ η μετρική Kerr παίρνει την απλή μορφή της Schwarzschild.

Για την αντίστοιχη λύση στην Τηλεπαράλληλη Θεωρία ξεκινάμε πάλι από τη σχέση [18]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu \tag{3.203}$$

και η τετράδα Kerr έχει τη μορφή

$$h^a{}_\mu \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{tt} & 0 & 0 & \eta \\ 0 & \gamma_{rr} \sin\theta \cos\varphi & \gamma_{\theta\theta} \cos\theta \cos\varphi & -\beta \sin\varphi \\ 0 & \gamma_{rr} \sin\theta \sin\varphi & \gamma_{\theta\theta} \cos\theta \sin\varphi & \beta \cos\varphi \\ 0 & \gamma_{rr} \cos\theta & -\gamma_{\theta\theta} \sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.204}$$

όπου

$$\beta^2 = \eta^2 - g_{\varphi\varphi} \quad \text{και} \quad \eta = g_{t\varphi}/\gamma_{tt} \tag{3.205}$$

και

$$\gamma_{tt} = \sqrt{g_{tt}} \quad \text{και} \quad \gamma_{ii} = -\sqrt{-g_{ii}} \tag{3.206}$$

Η αντίστρογη τετράδα έχει τη μορφή

$$h_a{}^\mu \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{tt}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta g^{t\varphi} \sin\varphi & \gamma_{rr}^{-1} \sin\theta \cos\varphi & \gamma_{\theta\theta}^{-1} \cos\theta \cos\varphi & -\beta^{-1} \sin\varphi \\ \beta g^{t\varphi} \cos\varphi & \gamma_{rr}^{-1} \sin\theta \sin\varphi & \gamma_{\theta\theta}^{-1} \cos\theta \sin\varphi & \beta^{-1} \cos\varphi \\ 0 & \gamma_{rr}^{-1} \cos\theta & -\gamma_{\theta\theta}^{-1} \sin\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{3.207}$$

Αντίστοιχα με πριν, επιλέγουμε αδρανειακή σπιν συνοχή $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = 0$ και η συνοχή Weitzenböck έχει τη μορφή

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^\rho{}_{\nu\mu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu. \tag{3.208}$$

Μετά από υπολογισμούς βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
&\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{t}{}_{tr} = \partial_r \ln \sqrt{g_{tt}} && \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{t}{}_{r\varphi} = \beta g^{t\varphi} \gamma_{rr} \sin\theta \\
&\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{t}{}_{\theta\varphi} = -\beta g^{t\varphi} \gamma_{\theta\theta} \cos\theta && \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{t}{}_{\varphi r} = \partial_r \eta/\gamma_{tt} - \left(\partial_r \beta^2\right) g^{t\varphi}/2 \\
&\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{t}{}_{\varphi\theta} = \partial_\theta \eta/\gamma_{tt} - \left(\partial_\theta \beta^2\right) g^{t\varphi}/2 && \\
&\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{r}{}_{rr} = \partial_r \ln \sqrt{-g_{rr}} && \\
&\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{r}{}_{r\theta} = \partial_\theta \ln \sqrt{-g_{rr}} && \\
&\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{r}{}_{\theta\theta} = -\gamma_{\varphi\varphi}/\gamma_{rr} && \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{r}{}_{\varphi\varphi} = -\beta \sin\theta/\gamma_{rr} \\
&\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\theta}{}_{r\theta} = \gamma_{rr}/\gamma_{\theta\theta} && \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\theta}{}_{\theta r} = \partial_r \ln \sqrt{-g_{\theta\theta}} \\
&\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\theta}{}_{\theta\theta} = \partial_\theta \ln \sqrt{-g_{\theta\theta}} && \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\theta}{}_{\varphi\varphi} = -\beta \cos\theta/\gamma_{\theta\theta} \\
&\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\varphi}{}_{r\varphi} = \gamma_{rr} \sin\theta/\beta && \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\varphi}{}_{\theta\varphi} = \gamma_{\theta\theta} \cos\theta/\beta \\
&\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\varphi}{}_{\varphi r} = \partial_r \ln \beta && \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\varphi}{}_{\varphi\theta} = \partial_\theta \ln \beta
\end{aligned} \tag{3.209}$$

Οι αντίστοιχοι μη μηδενικοί όροι του τανυστή στρέψης είναι

$$\begin{aligned}
\overset{\bullet}{T}{}^{t}{}_{tr} &= -\partial_r \ln \gamma_{tt} \\
\overset{\bullet}{T}{}^{t}{}_{r\varphi} &= \partial_r \eta/\gamma_{tt} - \beta g^{t\varphi} \left(\partial_r \beta - \gamma_{rr} \sin\theta\right) \\
\overset{\bullet}{T}{}^{t}{}_{\theta\varphi} &= \partial_\theta \eta/\gamma_{tt} - \beta g^{t\varphi} \left(\partial_\theta \beta - \gamma_{\theta\theta} \cos\theta\right) \\
\overset{\bullet}{T}{}^{r}{}_{r\theta} &= -\partial_\theta \ln \gamma_{rr} \\
\overset{\bullet}{T}{}^{\theta}{}_{r\theta} &= \partial_r \ln \gamma_{\theta\theta} - \gamma_{rr}/\gamma_{\theta\theta} \\
\overset{\bullet}{T}{}^{\varphi}{}_{\varphi} &= \left(\partial_r \beta - \gamma_{rr} \sin\theta\right)/\beta \\
\overset{\bullet}{T}{}^{\varphi}{}_{\theta\varphi} &= \left(\partial_\theta \beta - \gamma_{\theta\theta} \cos\theta\right)/\beta
\end{aligned} \tag{3.210}$$

Για τη λύση Kerr, το διανυσματικό, το αξονικό και το καθαρά τανυστικό κομμάτι της στρέψης είναι μη μηδενικά. Συγκεκριμένα οι μη μηδενικοί όροι του αξονικού μέρους είναι

$$\overset{\bullet}{\mathscr{A}}{}^{(r)} = -\frac{1}{3h} \left[g_{tt} \overset{\bullet}{T}{}^{t}{}_{\theta\varphi} + g_{t\varphi} \overset{\bullet}{T}{}^{\varphi}{}_{\theta\varphi} \right] \tag{3.211}$$

και

$$\overset{\bullet}{\mathscr{A}}{}^{(\theta)} = \frac{1}{3h} \left[g_{tt} \overset{\bullet}{T}{}^{t}{}_{\theta\varphi} + g_{t\varphi} \left(\overset{\bullet}{T}{}^{\varphi}{}_{r\varphi} + \overset{\bullet}{T}{}^{t}{}_{tr} \right) \right] \tag{3.212}$$

Όταν η στροφορμή a είναι μηδενική τότε το αξονικό κομμάτι μηδενίζεται και οι το διανυσματικό και καθαρά τανυστικό κομμάτι παίρνουν τις τιμές που είχαν στην λύση Schwarzschild.

Κεφάλαιο 4

Τροποιημένη $f(T)$ Βαρύτητα και Σφαιρικά Συμμετρικές Λύσεις

4.1 Η $f(T)$ Βαρύτητα

Όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, μία αρκετά δημοφιλής τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας ήταν αυτή της $f(R)$. Με αντίστοιχη λογική, οι **Ferraro** και **Fiorini** ([31], [32], [33], [34]) πρότειναν το μοντέλο $f(T)$ όπου η λαγκραζιανή της θεωρίας δίνεται από τη σχέση

$$\overset{\bullet}{\mathscr{L}}_f = \frac{h}{2k} f(\overset{\bullet}{T}), \tag{4.1}$$

όπου

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} \quad \text{και} \quad h = det(h^a{}_\mu) \tag{4.2}$$

και $\overset{\bullet}{T}$ είναι η βαθμωτή στρέψη, τα κομμάτια της οποίας εμφανίζονται στην λαγκραζιανή της Τηλεπαράλληλης Βαρύτητας (3.118)

$$\overset{\bullet}{T} = \frac{1}{2}\overset{\bullet}{S}_a{}^{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}^a{}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\overset{\bullet}{T}^\rho{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overset{\bullet}{T}^\rho{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}^{\nu\mu}{}_\rho - \overset{\bullet}{T}^\rho{}_{\mu\rho}\overset{\bullet}{T}^{\nu\mu}{}_\nu \tag{4.3}$$

όπου $\overset{\bullet}{S}_a{}^{\mu\nu}$ το υπερδυναμικό (3.130). Από τη σχέση ισοδυναμίας της Τηλεπαράλληλης θεωρίας και της Γενικής σχετικότητας

$$\overset{\bullet}{\mathscr{L}} = \overset{\circ}{\mathscr{L}} - \partial_\mu\left(\frac{c^4 h}{8\pi G}\overset{\bullet}{T}^\mu\right) \tag{4.4}$$

μπορούμε να πάρουμε τη σχέση μεταξύ της βαθμωτής καμπυλότητας και της βαθμωτής στρέψης

$$\overset{\circ}{R} = -\overset{\bullet}{T} + \overset{\bullet}{B} \tag{4.5}$$

όπου

$$\overset{\bullet}{B} = -\frac{2}{h}\partial_\mu \left(h\overset{\bullet}{T}^\mu\right), \tag{4.6}$$

είναι ένας συνοριακός όρος.

Ο συνοριακός όρος $\overset{\bullet}{B}$ δεν συνεισφέρει στις πεδιακές εξισώσεις στην περίπτωση της Τηλεπαράλληλης Βαρύτητας και όπως είδαμε η Τηλαπαράλληλη Θεωρία και η Γενική Σχετικότητα είναι ισοδύναμες. Το ίδιο όμως δεν μπορεί να ισχύει και για τις θεωρίες $f(R)$ και $f(T)$ οι οποίες λόγω του συνοριακού όρου δε μπορούν να είναι πια ισοδύναμες καθώς μία τυχαία συνάρτηση ενός συνοριακού όρου δε μπορεί να είναι πλέον συνοριακός όρος. Όπως θα δούμε είναι δυνατό να σχετίσουμε τις θεωρίες $f(R)$ και $f(T)$ αν θεωρήσουμε Τηλεπαράλληλες θεωρίες βαρύτητας με υψηλότερους όρους παραγώγων στην στρέψη.

4.2 Πεδιακές Εξισώσεις και μεταβολές της δράσης

Η λαγκραζιανή στην $f(T)$ βαρύτητα είναι μία συνάρτηση της τετράδας και της συνοχής σπιν οπότε θα πρέπει να θεωρήσουμε μεταβολές και ως προς τις δύο αυτές μεταβλητές. Ας ξεκινήσουμε με τη λαγκραζιανή

$$\mathscr{L} = \overset{\bullet}{\mathscr{L}}_f + \mathscr{L}_s \tag{4.7}$$

όπου $\overset{\bullet}{\mathscr{L}}_f$ η λαγκραζιανή (4.1) και $\mathscr{L}_s$ ένα γενικό πεδίο πηγή. Παίρνοντας τις μεταβολές ως προς την τετράδα καταλήγουμε στις πεδιακές εξισώσεις

$$E_a{}^\mu = kh\Theta_a{}^\mu, \tag{4.8}$$

όπου η έκφραση Euler-Lagrange στο αριστερό μέλος δίνεται από τη σχέση [35]

$$E_a{}^\mu \equiv k\frac{\delta \overset{\bullet}{\mathscr{L}}_f}{\delta h^a{}_\mu} = f_T\partial_\nu\left(h\overset{\bullet}{S}_a{}^{\mu\nu}\right) + h\left(f_{TT}\overset{\bullet}{S}_a{}^{\mu\nu}\partial_\nu\overset{\bullet}{T} - f_T\overset{\bullet}{T}{}^b{}_{\nu a}\overset{\bullet}{S}_b{}^{\nu\mu} + f_T\omega^b{}_{a\nu}\overset{\bullet}{S}_b{}^{\nu\mu} + \frac{1}{2}fh_a{}^\mu\right) \tag{4.9}$$

όπου f_T και f_{TT} η πρώτη κι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f(T)$ ως προς την βαθμωτή στρέψη.

Για να αναλύσουμε το συμμετρικό και αντισυμμετρικό κομμάτι των πεδιακών εξισώσεων θα γράψουμε ξανά την έκφραση Euler-Lagrange με μόνο δείκτες Lorentz

$$E_{ab} = \eta_{bc} h^c{}_\mu E_a{}^\mu \tag{4.10}$$

και η αναλυτική της μορφή είναι

$$E_{ab} = h \left(f_{TT} \dot{S}_{ab}{}^\nu \partial_\nu \dot{T} + f_T \overset{\circ}{G}_{ab} + \frac{1}{2} \eta_{ab} \left(f - \dot{T} f_T \right) \right) \tag{4.11}$$

όπου $\overset{\circ}{G}_{ab}$ είναι συμμετρικός τανυστής Einstein της Levi-Civita συνοχής υπολογισμένος από την τετράδα. Παρατηρούμε πως οι δύο τελευταίοι όροι της (4.11) είναι συμμετρικοί, οπότε το αντισυμμετρικό κομμάτι της Euler-Lagrange είναι

$$E_{[ab]} = h f_{TT} \dot{S}_{[ab]}{}^\nu \partial_\nu \dot{T}. \tag{4.12}$$

Γνωρίζοντας πως ο τανυστής ενέργειας-ορμής έχει μηδενικό αντισυμμετρικό κομμάτι ($\Theta_{[ab]} = 0$, το αντισυμμετρικό κομμάτι των πεδιακών εξισώσεων είναι

$$f_{TT} \dot{S}_{[ab]}{}^\nu \partial_\nu \dot{T} = 0. \tag{4.13}$$

Αντίστοιχα αν θεωρήσουμε μεταβολές ως προς την συνοχή σπιν θα δείξουμε πως καταλήγουμε στην ίδια εξίσωση (4.13) [36].

Η εξίσωση (3.142) εκφρασμένη για την βαθμωτή στρέψη έχει τη μορφή

$$\dot{T}(h^a{}_\mu, \dot{A}^a{}_{b\mu}) = \dot{T}(h^a{}_\mu, 0) + \frac{2}{h} \partial_\mu (h \dot{A}^a{}_{b\nu} h_a{}^\nu h_c{}^\mu \eta^{bc}). \tag{4.14}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε τη μεταβολή $\delta_A \dot{\mathscr{L}}_f$ ως προς την συνοχή σπιν

$$\delta_A \dot{\mathscr{L}}_f = \frac{1}{2k} h h_a{}^\mu h_b{}^\nu \left(\partial_\nu f_T \right) \delta \dot{A}^{ab}{}_\mu. \tag{4.15}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.146) και ολοκληρώνοντας κατά μέλη παίρνουμε τη συνθήκη

$$f_{TT} \partial_\nu \dot{T} \dot{\mathscr{D}}_\mu \left(h h_{[a}{}^\mu h_{b]}{}^\nu \right) = 0, \tag{4.16}$$

έχοντας χρησιμοποιήσει τη σχέση $\partial_\nu f_T = f_{TT} \partial_\nu \dot{T}$. Από την εξίσωση (3.149) βρίσκουμε ότι οι πεδιακές εξισώσεις για την συνοχή σπιν (4.16) ταυτίζεται με το αντισυμμετρικό μέρος των πεδιακών εξισώσεων για την τετράδα (4.13).

Μία ιδιαίτερη περίπτωση είναι όταν $\overset{\bullet}{T} = T_0 =$ σταθερά. Σε αυτή την περίπτωση η σχέση (4.16) αυτόματα ικανοποιείται ενώ η εξίσωση (4.11) παίρνει την μορφή των κλασικών πεδιακών εξισώσεων Einstein με κοσμολογική σταθερά $(f(T_0) - T_0 f_T(T_0))/2$. Αυτό σημαίνει πως αν μπορέσουμε να κατασκευάσουμε μία σταθερή βαθμωτή στρέψη $\overset{\bullet}{T} = T_0$ για κάποια λύση στη γενική σχετικότητα τότε αυτή η λύση είναι μία λύση για την $f(T)$ βαρύτητα για μία τυχαία συνάρτηση f.

4.3 Λύσεις στην $f(T)$ Βαρύτητα

4.3.1 Ο χώρος **Minkowski**

Θα ξεκινήσουμε με το πιο απλό παράδειγμα, του χώρου Minkowski, για την κατανόηση του φορμαλισμού της $f(T)$ βαρύτητας. Θα θεωρήσουμε δύο διαφορετικές τετράδες που αναπαριστούν τον χωροχρόνο Minkowski. Η πρώτη είναι η ορθογώνια τετράδα σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

$$h^a{}_\mu = diag(1,1,1,1). \tag{4.17}$$

Αν θεωρήσουμε μηδενική σπιν συνοχή τότε η παραπάνω τετράδα οδηγεί σε μηδενική στρέψη, άρα για οποιαδήποτε συνάρτηση $f(T)$ με $f(0) = 0$ οι πεδιακές εξισώσεις ικανοποιούνται, οπότε είναι μία ¨καλή' τετράδα.

Από την άλλη, αν θεωρήσουμε μία διαγώνια τετράδα σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$h^a{}_\mu = \mathrm{diag}(1,1,r,r\sin\theta) \tag{4.18}$$

και μηδενική συνοχή σπιν, καταλήγουμε στο ότι η αντίστοιχη βαθμωτή στρέψη είναι μη μηδενική. Επίσης μία από τις πεδιακές εξισώσεις

$$E_{\hat{2}}{}^{\theta} = \frac{4hf_{TT}\cot\theta}{r^5} = 0 \tag{4.19}$$

έχει λύση μόνο για $f_{TT} = 0$ και αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση οδηγεί στην συνήθη τηλεπαράλληλη βαρύτητα.

Το πρόβλημα με τον φορμαλισμό την $f(T)$ βαρύτητας είναι πως προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων για να περιγράψουμε τον χωροχρόνο Minkowski θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την τετράδα

$$\tilde{h}^a{}_\mu = \tilde{\Lambda}^a{}_b h^a{}_\mu \tag{4.20}$$

όπου $\tilde{\Lambda}^a{}_b$ δίνεται από τη σχέση (3.167) και $h^a{}_\mu$ η τετράδα (4.18). Ο παραπάνω μετασχηματισαμός οδηγεί στην ισοδύναμη τετράδα (3.176). Αφού η βαρύτητα απουσιάζει στον χωροχρόνο Minkowski, η φύση του προβλήματος της αναλλοιώτητας Lorentz δεν σχετίζεται με την τροποποιήση της βαρύτητας αλλά με τον συνεπή φορμαλισμό της θεωρίας. Από την άλλη, στον συναλλοίωτο φορμαλισμό της $f(T)$ βαρύτητας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε τετράδα σε ένα τυχαίο σύστημα συντεταγμένων. Στην περίπτωση του χωροχρόνου Minkowski για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την διάγωνια τετράδα (4.18) αλλά με την αντίστοιχη συνοχή σπιν (3.175).

4.3.2 Σφαιρικά Συμμετρικές Λύσεις σε κενό χωροχρόνο

Οι σφαιρικά συμμετρικές λύσεις των πεδιακών εξισώσεων είναι πολύ σημαντικές καθώς περιγράφουν το βαρυτικό πεδίο έξω από μία σφαιρική μάζα όπως οι μελανές οπές. ([37], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [45], [46], [47], [48], [49])

Στο φορμαλισμό της $f(T)$ βαρύτητας θα θεωρήσουμε μία σφαιρικά συμμετρική μετρική της μορφής

$$ds^2 = A(r)^2 dt^2 - B(r)^2 dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \tag{4.21}$$

Η πιο κλασική επιλογή για την αντίστοιχη τετράδα είναι η απλή διαγώνια τετράδα (όπως και στην τηλεπαράλληλη βαρύτητα)

$$h^a{}_\mu = \mathrm{diag}(A, B, r, r\sin\theta). \tag{4.22}$$

Ακριβώς όπως στην περίπτωση του χωροχρόνου Minkowski σε σφαιρικά συμμετρικό σύστημα συντεταγμένων, η παραπάνω διαγώνια τετράδα οδηγεί στη συνήθη τηλεπαράλληλη βαρύτητα. Για να το δείξουμε αυτό μπορούμε να δείξουμε πως η παραπάνω τετράδα με μία τετριμένη συνοχή σπιν $A^a{}_{b\mu}$ οδηγεί στην βαθμωτή στρέψη

$$\overset{\bullet}{T} = \frac{2(A + rA')}{r^2 AB^2}, \tag{4.23}$$

όπου ο τόνος δηλώνει την παράγωγο ως προς r. Μία από τις πεδιακές εξισώσεις έχει τη μορφή

$$E_{\hat{2}}{}^\theta = \frac{h f_{TT}\cot\theta}{Br}\overset{\bullet}{T}' = 0 \tag{4.24}$$

όπου ικανοποείται μόνο για $f_{TT} = 0$. Για αυτό τον λόγο, η διαγώνια τετράδα (4.22) δε μπορεί να θεωρηθεί συνεπής λύση στην $f(T)$ βαρύτητα.

Στον συναλλοίωτο φορμαλισμό είναι δυνατών να έχουμε μη τετριμμένες λύσεις χρησιμοποιώντας μία τυχαία τετράδα που αντιστοιχεί στην μετρική (4.21), μαζί με την αντίστοιχη συνοχή σπιν. Για τον καθορισμό της κατάλληλης τετράδας θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο που είδαμε στο κεφάλαιο (3.3.6). Η μόνη διαφορά σε σχέση με την τηλεπαράλληλη θεωρία βαρύτητας είναι πως δεν ξέρουμε τη λύση για την τετράδα οπότε δε μπορούμε να ορίσουμε την τετράδα αναφοράς χρησιμοποιώντας την σχέση (3.154). Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε πως σε απουσία βαρύτητας, η διαγώνια τετράδα (4.22) θα πάρει τη μορφή της τετράδας (4.18) που παριστά τον χωροχρόνο **Minkowski** σε σφαιρικές συντεταγμένες. Έτσι καταλήγουμε πως η συνοχή σπιν δίνεται από τη σχέση

$$\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}\theta} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}\theta} = -1, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{3}\phi} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}\phi} = -\sin\theta, \quad \overset{\bullet}{A}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{3}\phi} = -\overset{\bullet}{A}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{2}\phi} = -\cos\theta. \tag{4.25}$$

Μπορούμε να εξετάσουμε πως οι πεδιακές εξισώσεις για τη συνοχή σπιν (4.16) ικανοποιούνται για την τετράδα (4.22) και τη συνοχή σπιν (4.25). Επίσης υπολογίζουμε την βαθμωτή στρέψη

$$\overset{\bullet}{T}(h^a{}_\mu, A^a{}_{b\mu}) = -\frac{2(B-1)(A-AB+2rA')}{r^2AB^2}, \tag{4.26}$$

και οι πεδιακές εξισώσεις (4.8) έχουν τη μορφή

$$E_{\hat{0}}{}^t \equiv h\left(\frac{1}{2A}f + 2f_T\frac{(-AB+AB^2+AB'r+A'B^2r-A'Br)}{A^2B^3r^2} + 2f_{TT}\overset{\bullet}{T}{}'\frac{(B-1)}{AB^2r}\right), \tag{4.27}$$

$$E_{\hat{1}}{}^r \equiv h\left(\frac{1}{2B}f + 2f_T\frac{(-2A'r+AB+A'Br-A)}{AB^3r^2}\right) \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} E_{\hat{2}}{}^\theta \equiv h\Bigg(&\frac{1}{2r}f + f_T\frac{(2B^2A'r-AB-AB^3+2AB^2-A''Br^2+AB'r-3A'Br+B'A'r^2)}{AB^3r^3} \\ &+f_{TT}\overset{\bullet}{T}{}'\frac{(AB-A-A'r)}{AB^2r^2}\Bigg) \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$E_{\hat{3}}{}^\phi \equiv \frac{1}{\sin\theta}E_{\hat{2}}{}^\theta \tag{4.30}$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να παρατηρήσουμε πως καμία από τις παραπάνω εξισώσεις δεν οδηγούν στο $f_{TT}=0$ οπότε οδηγούμαστε σε νέες, διαφορετικές λύσεις για την $f(T)$ βαρύτητα. Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε μετρική αντιστοιχεί στη μετρική (4.21). Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε πως η μη διαγώνια τετράδα (3.165) με μηδενική συνοχή σπιν οδηγεί στις ίδιες πεδιακές εξισώσεις (4.27)-(4.30) παρ΄όλο που δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στον συναλλοίωτο φορμαλισμό της $f(T)$ βαρύτητας.

4.3.3 Σφαιρικά Συμμετρικές λύσεις με κοσμολογική σταθερά

Ας θεωρήσουμε μία λαγκραζιανή της μορφής

$$\mathscr{L} = \overset{\bullet}{\mathscr{L}}_f + \mathscr{L}_m \tag{4.31}$$

όπου αντίστοιχα της σχέσης (4.1) [50]

$$\overset{\bullet}{\mathscr{L}}_f = \frac{h}{2k}(\overset{\bullet}{T} + f(T) - 2\Lambda). \tag{4.32}$$

Η μεταβολή ως προς την τετράδα h δίνει τη σχέση

$$h^{-1}\partial_\mu \left(h h_A^\rho \overset{\bullet}{S}_\rho{}^{\mu\nu}\right)[1+f_T] - h_A^\lambda \overset{\bullet}{T}^\rho{}_{\mu\lambda}\overset{\bullet}{S}_\rho{}^{\nu\mu} + h_A^\rho \overset{\bullet}{S}_\rho{}^{\mu\nu}\partial_\mu(\overset{\bullet}{T}) f_{TT} - \frac{1}{4} h_A^v[\overset{\bullet}{T}+f(T)-2\Lambda] = \frac{k}{2}h_A^\rho T_\rho{}^{\nu\{em]\}}, \tag{4.33}$$

όπου f_T και f_{TT} η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της $f(T)$ ως προς $\overset{\bullet}{T}$ και $T_\rho{}^{\nu\{em]\}}$ ο τανυστής ενέργειας ορμής.

Ας θεωρήσουμε μία συνήθη μετρική της μορφής

$$ds^2 = N(r)^2 dt^2 - K(r)^{-2} dr^2 - R(r)^2 d\Omega^2 \tag{4.34}$$

όπου $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Η πιο απλή επιλογή είναι αυτή της διαγώνιας τετράδας

$$h_\mu^A = \mathrm{diag}\left(N(r), K(r)^{-1}, R(r), R(r)\sin\theta\right). \tag{4.35}$$

Η βαθμωτή στρέψη θα έχει τη μορφή

$$\overset{\bullet}{T} = 2K^2 \frac{R'}{R}\left(\frac{2N'}{N} + \frac{R'}{R}\right) \tag{4.36}$$

και οι εξισώσεις κίνησεις, αμελώντας τον τανυστή ενέργειας ορμής

$$0 = K^2 \frac{R'}{R}\overset{\bullet}{T}' f_{TT} - \left(\frac{\overset{\bullet}{T} f(T) - 2\Lambda}{4}\right) + \left\{\overset{\bullet}{T} - \frac{1}{R^2} - K^2\left[\left(\frac{2N'}{N} - \frac{2K'}{K}\right)\frac{R'}{R} - 2\frac{R''}{R}\right]\right\}\left(\frac{1+f_{\overset{\bullet}{T}}}{2}\right), \tag{4.37}$$

$$0 = \left(\frac{1}{R^2} - \overset{\bullet}{T}\right)\left(\frac{1+f_T}{2}\right) + \left(\frac{\overset{\bullet}{T} + f(T) - 2\Lambda}{4}\right) \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} 0 = &-K^2\left(\frac{N'}{N} + \frac{R'}{R}\right)\overset{\bullet}{T}' f_{TT} + \left(\frac{\overset{\bullet}{T} + f(T) - 2\Lambda}{4}\right) \\ &-\left\{\frac{\overset{\bullet}{T}}{2} + K^2\left[\frac{R''}{R} + \frac{N''}{N} - \frac{N'^2}{N^2}\right.\right. \\ &\left.\left. + \left(\frac{N'}{N} + \frac{R'}{R}\right)\left(\frac{N'}{N} + \frac{K'}{K}\right)\right]\right\}\left(\frac{1+f_T}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.39}$$

Στην τηλεπαράλληλη θεωρία, όπως και στην Γενική Σχετικότητα, οι μη διαγώνιοι όροι των πεδιακών εξισώσεων είναι μηδέν. Στην $f(T)$ όμως, η $r - \theta$ εξίσωση έχει τη μορφή

$$\frac{K\cot\theta}{2R^2}\overset{\bullet}{T}' f_{TT} = 0. \tag{4.40}$$

Για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων χρειάζεται να κάνουμε κάποιες υποθέσεις. Καταρχάς, για να μειώσουμε τις άγνωστες συναρτήσεις, μπορούμε να θεωρήσουμε $R(r) = r$. Η δεύερη υπόθεση είναι πως, αφού θέτοντας $f(T) = 0$ παίρνουμε τη Γενική Σχετικότητα, θα πρέπει το $f(T)$ να είναι αρκετά μικρότερο του $\overset{\bullet}{T}$. Οπότε αναπτύσσουμε την $f(T)$ σε δυνάμεις του $\overset{\bullet}{T}$

$$f(T) = \alpha\overset{\bullet}{T}^2 + O\left(\overset{\bullet}{T}^3\right). \tag{4.41}$$

Οι λύσεις των πεδιακών εξισώσεων (4.37)-(4.40) μέχρι $O\left(\alpha/r^2\right)^2$ όρους είναι

$$N(r)^2 = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \alpha\left[-6\Lambda - \frac{6}{r^2} - \frac{4GM\Lambda}{c^2 r}\right] \tag{4.42}$$

$$K(r)^2 = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \alpha\left[\frac{8\Lambda}{3} - \frac{14}{r^2} - 2\Lambda^2 r^2 - \frac{2GM}{c^2 r}\left(8\Lambda - \frac{8}{r^2}\right)\right] \tag{4.43}$$

Παρατηρούμε πως για $\alpha = 0$ παίρνουμε τη λύση Schwarzschild-de Sitter ενώ $\alpha = \Lambda = 0$ παίρνουμε τη λύση Schwarzschild της Γενικής Σχετικότητας.

Συμπεράσματα

Βασική προϋπόθεση, για να τροποποιήσουμε τη βαρύτητα, είναι η κατάλληλη επιλογή μεθόδου τροποποίησης. Η πιο σύνηθες προσέγγιση είναι αυτή της καμπυλότητας, όπως για παράδειγμα στη Γενική Σχετικότητα, όπου τροποιούμε την δράση. Όπως είδαμε, μία ακόμη μέθοδος είναι να ξεκινήσουμε από τη στρέψη, όπως για παράδειγμα στην Τηλεπαράλληλη θεωρία Βαρύτητας, η οποία σε πρώτο επίπεδο οδηγεί στις ίδιες πεδιακές εξισώσεις με τη Γενική Σχετικότητα. Τροποποιώντας όμως τη παραπάνω θεωρία καταλλήξαμε σε διαφορετικές θεωρίες Βαρύτητας.

Η $f(T)$ θεωρία είναι η πιο απλή και βασική τροποποίηση της Τηλεπάραλληλης Θεωρίας όπως αντίστοιχα η $f(R)$ για της Γενικής Σχετικότητας. Παρ΄ όλα αυτά είδαμε πως δεν ικανοποιεί την αναλλοιώτητα κατά Lorentz επειδή στην $f(T)$ ξεκινάμε από την ¨καθαρή τετράδα της ΤΘ' και θεωρούμε πως η συνοχή σπιν εξαφανίζεται, επομένως παρ΄όλο που η θεωρία απλουστεύεται, ο τανυστής στρέψης αντικαθίστεται από τους συντελεστές της μη ολονομίας οι οποίοι δεν είναι τανυστές κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς Lorentz. Αν και στη μη τροποποιημένη θεωρία, η παραβίαση της τοπικής Lorentz συμμετρίας συχνά αγνοείται καθώς δεν επιρρεάζει τις πεδικές εξισώσεις, στην $f(T)$ δημιουργεί βασικά προβλήματα.

Στην τελευταία ενότητα παρουσιάστηκε η επίλυση του παραπάνω προβλήματος με την κατασκευή μιας συναλλοίωτης μεθόδου $f(T)$ βαρύτητας. Συγκεκριμένα ξεκινώντας, αντί της ¨καθαρή τετράδα της ΤΘ¨, από την συναλλοίωτη ΤΘ επανακατασκευάσαμε την $f(T)$ χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα την τετράδα και την συνοχή σπιν. Στην ΤΘ η συνοχή σπιν εισάγεται στη δράση ως επιφανειακός όρος οπότε μπορούμε αρχικά να λύσουμε τις πεδιακές εξισώσεις για να ορίσουμε την τετράδα και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τη συνοχή σπιν από τη λύση. Το ίδιο όμως δε συμβαίνει στην $f(T)$ όπου οι πεδικές εξισώσεις εξαρτώνται από την επιλογή μίας συνοχής σπιν. Για την επίλυση αυτού του προβήματος παρουσιάσαμε μία μέθοδο για την επιλογή μίας συνοχής σπιν που να μην εξαρτάται από την λύση των πεδιακών εξισώσεων. Συγκεκριμένα η κατάλληλη τετράδα αναφοράς μπορεί να υποτεθεί από τις συμμετρίες της γεωμετρίας η οποία οδηγεί στην εύρεση της συνοχής σπιν και τελικά στην επίλυση των πεδιακών εξισώσεων.

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε πως η $f(T)$ είναι μία σωστή και συνεπής θεωρία τροποποιημένης βαρύτητας η οποία βασίζεται στη στρέψη και αποτελεί μία εναλλακτική της καμπυλότητας, όπως η $f(R)$. Παρ΄όλα αυτά η συναλλοίωτη $f(T)$ καθώς και οι εφαρμογές της στην κοσμολογία και τις σφαιρικά συμμετρικές γεωμετρίας αποτελούν ένα πεδίο που χρήζει περαιτέρω έρευνας.

Βιβλιογραφία

[1] J. A. R. Cembranos, “Phys. rev. lett. 102, 141301 (2009),”

[2] A. Dobado and A. L. Maroto, “Phys. lett. b 316, 250, (1993) [erratum-ibid. b 321, 435, (1994)],”

[3] T. P. Sotiriou and V. Faraoni

[4] B. Whitt, “Phys. lett. b 145, 176 (1984).,”

[5] S. Mignemi and D. L. Wiltshire, “Phys. rev. d 46, 1475 (1992).,”

[6] T. Multamaki and I. Vilja, “Phys. rev. d 74, 064022 (2006),”

[7] G. J. Olmo, “Phys. rev. d 75, 023511 (2007),”

[8] S. W. Hawking and D. N. Page, “Commun. math. phys. 87 577 (1983).,”

[9] E. Witten, “Adv. theor. math. phys. 2, 505 (1998).,”

[10] F. Briscese and E. Elizalde, “Phys. rev. d 77, 044009 (2008).,”

[11] R. G. Cai, “Phys. rev. d 65, 084014 (2002).,”

[12] S. W. Hawking and D. N. Page, “Commun. math. phys. 87 577 (1983).,”

[13] Y. M. Cho and I. P. Neupane, “Phys. rev. d 66, 024044 (2002).,”

[14] R. G. Cai, “Phys. lett. b 582, 237 (2004).,”

[15] M. T. J. Matyjasek and D. Tryniecki, “Phys. rev. d 73, 124016 (2006).,”

[16] S. Capozziello, A. Stabile, and A. Troisi, "Spherical symmetry in f(r)-gravity," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 25, p. 085004, Mar 2008.

[17] A. de la Cruz-Dombriz, A. Dobado, and A. L. Maroto, "Black holes in f (r) theories," *Physical Review D*, vol. 80, dec 2009.

[18] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity An Introduction*. Springer Dordrecht Heidelberg New York London, 2013.

[19] J. G. P. Ruben Aldrovandi, *An Introduction to Geometrical Physics*. World Scientific Publishing Company, 2nd ed.,, 2017.

[20] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Vol.1*. Wiley Classics Library. Wiley, 2nd ed., 1996.

[21] K. Hayashi and T. Nakano, *Extended translation invariance and associated gauge fields*. Prog. Theor. Phys. 38, 1967.

[22] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory.* International Series In Pure and Applied Physics. McGraw-Hill, New York, 1980.

[23] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen, and J. G. Pereira, *Gravitational energy momentum density in teleparallel gravity*. Phys. Rev. Lett. 84 (2000) 4533–4536.

[24] M. Krššák and J. G. Pereira, "Spin connection and renormalization of teleparallel action," 2015.

[25] M. Krššák, "Holographic renormalization in teleparallel gravity," vol. 77, jan 2017.

[26] A. Golovnev, T. Koivisto, and M. Sandstad, "On the covariance of teleparallel gravity theories," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 34, p. 145013, jun 2017.

[27] M. Blagojevi and I. A. Nikoli, "Hamiltonian structure of the teleparallel formulation of general relativity," *Physical Review D*, vol. 62, jun 2000.

[28] A. Golovnev, T. Koivisto, and M. Sandstad, "On the covariance of teleparallel gravity theories," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 34, p. 145013, jun 2017.

[29] S. Weinberg, "Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity," jun 1972.

[30] M. Krššák, R. J. van den Hoogen, J. G. Pereira, C. G. Böhmer, and A. A. Coley, "Teleparallel theories of gravity: illuminating a fully invariant approach," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 36, p. 183001, aug 2019.

[31] R. Ferraro and F. Fiorini, "Modified teleparallel gravity: Inflation without an inflaton," *Physical Review D*, vol. 75, apr 2007.

[32] G. R. Bengochea and R. Ferraro, "Dark torsion as the cosmic speed-up," *Physical Review D*, vol. 79, jun 2009.

[33] R. Ferraro and F. Fiorini, "Born-infeld gravity in weitzenböck spacetime," *Physical Review D*, vol. 78, dec 2008.

[34] E. V. Linder, "Einstein's other gravity and the acceleration of the universe," *Physical Review D*, vol. 81, jun 2010.

[35] M. Krššák and E. N. Saridakis, "The covariant formulation of f(t) gravity," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 33, p. 115009, apr 2016.

[36] K. Martin, "Variational problem and bigravity nature of modified teleparallel theories," 2017.

[37] R. Ferraro and F. Fiorini, "Spherically symmetric static spacetimes in vacuum f(t) gravity," *Physical Review D*, vol. 84, oct 2011.

[38] N. Tamanini and C. G. Böhmer, "Good and bad tetrads in f(t) gravity," *Physical Review D*, vol. 86, aug 2012.

[39] R. Ferraro and F. Fiorini, "Non-trivial frames for f(t) theories of gravity and beyond," *Physics Letters B*, vol. 702, pp. 75–80, aug 2011.

[40] C. G. Böhmer, A. Mussa, and N. Tamanini, "Existence of relativistic stars in f(t) gravity," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 28, p. 245020, dec 2011.

[41] C. G. Böhmer, T. Harko, and F. S. N. Lobo, "Wormhole geometries in modified teleparallel gravity and the energy conditions," *Physical Review D*, vol. 85, feb 2012.

[42] T. Wang, "Static solutions with spherical symmetry in f(t) theories," *Physical Review D*, vol. 84, jul 2011.

[43] M. H. Daouda, M. E. Rodrigues, and M. J. S. Houndjo, "New static solutions in f(t) theory," *The European Physical Journal C*, vol. 71, nov 2011.

[44] H. Dong, Y. bin Wang, and X. he Meng, "Extended birkhoff's theorem in f(t) gravity," *The European Physical Journal C*, vol. 72, may 2012.

[45] A. de la Cruz-Dombriz, P. K. Dunsby, and D. Saez-Gomez, "Junction conditions in extended teleparallel gravities," *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2014, pp. 048–048, dec 2014.

[46] E. L. Junior, M. E. Rodrigues, and M. J. Houndjo, "Born-infeld and charged black holes with non-linear source in f(t) gravity," *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2015, pp. 037–037, jun 2015.

[47] A. Das, F. Rahaman, B. K. Guha, and S. Ray, "Relativistic compact stars in f(t) gravity admitting conformal motion," *Astrophysics and Space Science*, vol. 358, jul 2015.

[48] dec 2015.

[49] M. L. Ruggiero and N. Radicella, "Weak-field spherically symmetric solutions in f(t) gravity," *Physical Review D*, vol. 91, may 2015.

[50] L. Iorio and E. N. Saridakis, "Solar system constraints on f(t) gravity," *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 427, p. 1555, 2012.