



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ

Επιχειρησιακή Έρευνα

Μέθοδοι Πρόβλεψης και Εφαρμογές

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ Γ. ΦΡΕΙΔΕΡΙΚΗΣ

Επιβλέπων: Ιωάννης Κολέτσος

Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα, Φεβρουάριος 2023



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟ-
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ

Επιχειρησιακή Έρευνα

Μέθοδοι Πρόβλεψης και Εφαρμογές

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ Γ. ΦΡΕΙΔΕΡΙΚΗΣ

Επιβλέπων: Ιωάννης Κολέτσος
Αναπληρωτής Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 23η Φεβρουαρίου 2023.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Ιωάννης Κολέτσος
Αναπληρωτής Καθηγητής

.....
Κοκκίνης Βασίλειος
Αναπληρωτής Καθηγητής

.....
Στεφανέας Πέτρος
Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα, Φεβρουάριος 2023



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟ-
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ

Copyright © – All rights reserved. Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος.
2023.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Το περιεχόμενο αυτής της εργασίας δεν απηχεί απαραίτητα τις απόψεις του Τμήματος, του Επιβλέποντα, ή της επιτροπής που την ενέκρινε.

ΔΗΛΩΣΗ ΜΗ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ενυπογράφως ότι είμαι αποκλειστικός συγγραφέας της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, για την ολοκλήρωση της οποίας κάθε βοήθεια είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται λεπτομερώς στην εργασία αυτή. Έχω αναφέρει πλήρως και με σαφείς αναφορές, όλες τις πηγές χρήσης δεδομένων, απόψεων, θέσεων και προτάσεων, ιδεών και λεκτικών αναφορών, είτε κατά κυριολεξία είτε βάσει επιστημονικής παράφρασης. Αναλαμβάνω την προσωπική και ατομική ευθύνη ότι σε περίπτωση αποτυχίας στην υλοποίηση των ανωτέρω δηλωθέντων στοιχείων, είμαι υπόλογος έναντι λογοκλοπής, γεγονός που σημαίνει αποτυχία στην Πτυχιακή μου Εργασία και κατά συνέπεια αποτυχία απόκτησης του Τίτλου Σπουδών, πέραν των λοιπών συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων. Δηλώνω, συνεπώς, ότι αυτή η Πτυχιακή Εργασία προετοιμάστηκε και ολοκληρώθηκε από εμένα προσωπικά και αποκλειστικά και ότι, αναλαμβάνω πλήρως όλες τις συνέπειες του νόμου στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής άλλης πνευματικής ιδιοκτησίας.

(Υπογραφή)

23η Φεβρουαρίου 2023

Περίληψη

Η επιστήμη της επιχειρησιακής έρευνα αποτελεί "εργαλείο" για κάθε επιχείρηση τις τελευταίες δεκαετίες και κυρίως τα τελευταία χρόνια, μιας και οι αλλαγές που πραγματοποιούνται σε καθημερινή βάση στον κόσμο έχουν μεγάλο αντίκτυπο στην εύρυθμη λειτουργία των επιχειρήσεων. Κάθε επιχείρηση προκειμένου να είναι σε θέση να αντιμετωπίσει αυτή την μεταβολή και αβεβαιότητα θέτει σε εφαρμογή πληθώρα στρατηγικών με την βοήθεια της επιχειρησιακής έρευνας. Καθώς ζούμε σε ένα κόσμο όπου η οικονομία μεταβάλλεται συνεχώς και οι απαιτήσεις της αγοράς μεγαλώνουν, η βοήθεια της επιχειρησιακής έρευνας είναι αδιαμφισβήτητα σημαντική για την σωστή λήψη αποφάσεων και υλοποίηση μεθόδων, ποιοτικών και ποσοτικών.

Οι κλάδοι στους οποίους βρίσκει εφαρμογή η επιχειρησιακή έρευνα ποικίλουν. Στην παρούσα εργασία γίνεται μελέτη των διαφόρων μεθόδων πρόβλεψης της επιχειρησιακής έρευνας και η εφαρμογή αυτών στον κόσμο των επιχειρήσεων, μιας και ο κλάδος της πρόβλεψης είναι από τα πιο επίκαιρα και κερδοφόρα πεδία για μια επιχείρηση. Η γραφή της διπλωματικής εργασίας ξεκινά με την περιγραφή των διάφορων μεθόδων πρόβλεψης και στην συνέχεια γίνεται η υλοποίηση αυτών των μεθόδων σε πραγματικά δεδομένα μιας ελληνικής επιχειρήσης λιανικής προϊόντων τεχνολογίας.

Λέξεις Κλειδιά

Επιχειρησιακή έρευνα, μέθοδοι πρόβλεψης, ποσοτικές μέθοδοι, ποιοτικές μέθοδοι, τάση, κυκλικότητα, εποχικότητα, τυχαιότητα, μέθοδος Delphi, απλός κινητός μέσος όρος, σταθμισμένος κινητός μέσος όρος, διπλός κινητός μέσος όρος, εκθετική εξομάλυνση, απλή εκθετική εξομάλυνση, εκθετική εξομάλυνση για γραμμική τάση, εποχιακή εξομάλυνση, παλινδρόμηση, απλή γραμμική παλινδρόμηση, πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση, μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων, συντελεστής συσχέτισης, στατιστικοί δείκτες, ιστορικά δεδομένα, σφάλμα, μοντέλο χρονοσειρών, επεξηγηματικό μοντέλο, εξαρτημένη μεταβλητή, ανεξάρτητη μεταβλητή.

Abstract

Operational research has been a "tool" for every business in recent decades and especially in recent years, since the changes that take place on a daily basis in the world, have a great impact on the smooth running of businesses. Every company, in order to be able to face the change and uncertainty, implements a variety of strategies with the help of operational research. As we live in a world where the economy is constantly changing and the demands of the market are growing, the help of business research is undeniably important for making the right decisions and implementing methods, both qualitative and quantitative.

The industries in which operational research is applied are varied. In this paper, we study the various forecasting methods of operational research and their application in the business world, since the field of forecasting is one of the most current and profitable fields for a business. The writing of the thesis begins with the description of the various forecasting methods and then the implementation of these methods in real data of a Greek technology retail business.

Keywords

Exponential smoothing, forecasting methods, quantitative methods, qualitative methods, trend, circularity, seasonality, randomness, Delphi method, moving average, weighted moving average, double moving average, exponential smoothing, simple exponential smoothing, Holt exponential smoothing, exponential smoothing with seasonality, regression, simple linear regression, multiple linear regression, least squared method, correlation coefficient, statistical index, historical data, error, time series model, explanatory model, dependent variable, independent variable.

Στον μπαμπά μου!

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τον κύριο Ιωάννη Κολέτσο, για όλες τις γνώσεις που μου πρόσφερε ως επιστήμονας καθ' όλη την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος, για τις αμέτρητες συμβουλές του ως προς την διαμόρφωση επαγγελματικής συμπεριφοράς καθώς και για την συνεχή στήριξή του σε όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής κύριο Βασίλειο Κοκκίνη και κύριο Πέτρο Στεφανέα για τον έλεγχο της παρούσας εργασίας.

Επιπλέον, οφείλω να πω ένα τεράστιο ευχαριστώ στα μέλη της οικογένειάς μου, για την αμέριστη στήριξη και κατανόηση, διότι χωρίς αυτά ενδεχομένως να μην είχα φτάσει στο τέλος και την ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη	1
Abstract	3
Ευχαριστίες	7
1 Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα	11
1.1 Ορισμός Επιχειρησιακής Έρευνας	11
1.2 Ιστορική Αναδρομή	13
1.3 Οργάνωση του τόμου	15
2 Εισαγωγή στο forecasting	17
2.1 Ποσοτική Μέθοδος	21
2.1.1 Χρονολογικές Σειρές	22
2.1.2 Τάση	23
2.1.3 Κυκλικότητα	24
2.1.4 Εποχικότητα	25
2.1.5 Τυχαιότητα	25
2.2 Ποιοτική Μέθοδος	26
2.2.1 Μέθοδος Delphi	27
2.2.2 Ιστορικές Αναλογίες	28
2.2.3 Έρευνα Αγοράς	28
2.2.4 Εμπειριστατωμένη Γνώμη και Εκτίμηση	29
2.2.5 Καμπύλες Κύκλου Ζωής	29
2.2.6 Μέθοδος Grass Roots	30
3 Μέθοδος Κινητού Μέσου Όρου	33
3.1 Μέθοδοι Naive	34
3.2 Απλός Κινητός Μέσος Όρος	37
3.3 Σταθμισμένος Κινητός Μέσος Όρος	41
3.4 Διπλός Κινητός Μέσος Όρος	42
4 Εκθετική Εξομάλυνση	47
4.1 Απλή Εκθετική Εξομάλυνση	49
4.2 Εκθετική Εξομάλυνση Για Γραμμική Τάση	54
4.3 Εποχιακή Εξομάλυνση	58

5 Παλινδρόμηση	65
5.1 Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση	66
5.1.1 Μέθοδος Ελάχιστων Τετραγώνων	66
5.1.2 Συντελεστής Γραμμικής Συσχέτισης	68
5.1.3 Στατιστικοί Δείκτες	69
5.2 Πολλαπλή Γραμμική Παλινδρόμηση	72
5.2.1 Συντελεστής Πολλαπλής Συσχέτισης	74
5.2.2 Στατιστικοί Δείκτες	74
5.2.3 Βασικές Προϋποθέσεις Στην Πολλαπλή Γραμμική Παλινδρόμηση	75
6 Case Study	79
Βιβλιογραφία	94

Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα

1.1 Ορισμός Επιχειρησιακής Έρευνας

Η μαθηματική επιστήμη που έχει ως στόχο τη λήψη αποφάσεων που σχετίζονται με την βέλτιστη λειτουργία συστημάτων, ονομάζεται Επιχειρησιακή Έρευνα.

Επομένως, αναφερόμαστε σε εκείνον τον κλάδο που βοηθάει στην τεκμηριωμένη αντιμετώπιση της λύσης πολύπλοκων ζητημάτων. Σε περίπτωση που από την λήψη αυτών των αποφάσεων προκύψουν μη επιθυμητά αποτελέσματα, θα πρέπει οι αποφάσεις να ληφθούν εκ νέου με τον πλέον αντικειμενικό τρόπο.[1]

Η επιστήμη της Επιχειρησιακής Έρευνας βρίσκει εφαρμογή στην βιομηχανία, τις επιχειρήσεις, τον στρατό, την δημόσια διοίκηση κ.α. Η φύση των προβλημάτων που καλείται να λύσει καθένας από αυτούς τους τομείς είναι διαφορετική και για τον λόγο αυτό η χρήση των μεθόδων ποικίλει. Παρόλα αυτά έχει διαμορφωθεί μια κοινή μεθοδολογία, η οποία εφαρμόζεται σχεδόν πάντα, ανεξαρτήτως πεδίου. Τα βήματα που ακολουθούνται είναι τα εξής:

1. Κατανόηση του προβλήματος και συλλογή απαραίτητων πληροφοριών: Στο πρώτο αυτό στάδιο η συνειδητοποίηση της προβληματικής κατάστασης και η εξοικείωση με το πρόβλημα είναι υψίστης σημασίας, καθώς με τον τρόπο αυτό μπορεί να προσδιοριστεί ο τρόπος που λειτουργεί το σύστημα. Στη συνέχεια, ακολουθεί η διάσπαση του προβλήματος σε επιμέρους υποπροβλήματα, καθένα από τα οποία αναλύεται και εντοπίζονται τα σημεία τα οποία ενδέχεται να επηρεάζουν το πρόβλημα. Πέραν της ανάλυσης του προβλήματος, είναι εξίσου σημαντική η συλλογή των δεδομένων, που είναι απαραίτητα, τόσο για να μελετηθεί το πρόβλημα, όσο και για να αξιοποιηθούν αργότερα για την κατασκευή του μοντέλου και την επίλυση της προβληματικής κατάστασης.

Η συλλογή και διαχείριση των δεδομένων, μία από τις βασικότερες εισόδους στις τεχνικές προβλέψεων, δεν είναι πάντα εύκολη διαδικασία. Υπάρχουν περιπτώσεις ελλειπουσών ή μηδενικών τιμών, οι οποίες δημιουργούν προβλήματα στην εφαρμογή των περισσότερων στατιστικών μεθόδων, και ως εκ τούτου, πρέπει να αντιμετωπισθούν.

Οι κενές τιμές αφορούν περιπτώσεις όπου η τιμή δεν έχει καταγραφεί και αποθηκευτεί

στη βάση δεδομένων. Ο λόγος μπορεί να οφείλεται σε αστοχία του πληροφοριακού συστήματος ή σε λάθος χειρισμό από την πλευρά του υπεύθυνου χρήστη. Ανεξαρτήτως αιτίας, ακολουθείται κάποια από τις παρακάτω διαδικασίες εκτίμησης της ελλιπούς τιμής. Είτε γίνεται προσπάθεια εύρεσης της κενής τιμής από άλλες πηγές, είτε η κενή τιμή (αν πρόκειται για αριθμητικά δεδομένα) ορίζεται ως το ημίαθροισμα (μέσος όρος) της προηγούμενης και της επόμενης παρατήρησης.

Οι μηδενικές τιμές αφορούν μία ειδική κατηγορία των “προβληματικών” τιμών. Αυτές μπορεί να αφορούν κενές τιμές, οι οποίες καταγράφηκαν αυτόματα από το πληροφοριακό σύστημα ως μηδενικές ή να είναι πραγματικά μηδενικές τιμές. Στην πρώτη περίπτωση, εφαρμόζεται η κατάλληλη διαδικασία διαχείρισης κενών τιμών. Η δεύτερη περίπτωση δεν απαιτεί καμία διαδικασία μεταβολής αυτών.

2. Διατύπωση στόχων: Οι ερευνητές της Επιχειρησιακής Έρευνας για κάθε φύση προβλήματος καλούνται να θέσουν στόχους που θα πρέπει να επιτύχουν προτού την έναρξη επίλυσης του προβλήματος. Η θέσπιση των στόχων αυτών ενδεχομένως να βοηθήσει στην επιτυχή εύρεση των λύσεων του προβλήματος. Ορισμένοι τέτοιοι στόχοι της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι η μεγιστοποίηση κέρδους, η ελαχιστοποίηση κόστους κ.α.
3. Κατασκευή και επίλυση του μαθηματικού μοντέλου: Η κατασκευή του μοντέλου αφορά μία απλή αναπαράσταση του προβλήματος, η οποία θα είναι εύκολη να την επεξεργαστούν οι ερευνητές. Πρόκειται για την αναπαράσταση των σχέσεων μεταξύ παραμέτρων, των στόχων και των μεταβλητών, με μαθηματικές σχέσεις ή εντολές στον υπολογιστή. Το μαθηματικό μοντέλο που κατασκευάζεται, χρειάζεται πάντοτε επαλήθευση, διότι η κατασκευή του βασίζεται σε υποθέσεις που δεν είναι πάντα ρεαλιστικές. Η διάστασή του θα πρέπει να είναι η ελάχιστη δυνατή, καθώς θα πρέπει να περιλαμβάνει μόνο εκείνες τις μεταβλητές που επηρεάζουν ουσιαστικά το πρόβλημα.

Από την επίλυση του μαθηματικού μοντέλου, οι ερευνητές μπορεί να εφοδιαστούν με ένα εύρος διαφορετικών λύσεων. Θα πρέπει όμως, από τις πολλαπλές αυτές λύσεις να επιλεγεί η βέλτιστη. Για την εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής, έχουν αναπτυχθεί αρκετές τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας όπως, ο γραμμικός προγραμματισμός και ο μη, ο ακέραιος, ο δυναμικός, η διαχείριση αποθεμάτων, οι ουρές αναμονής, η θεωρία παιγνίων, τα δέντρα αποφάσεων, ο προγραμματισμός δικτύων κ.α.

4. Ανάλυση ευαισθησίας και υλοποίηση λύσης: Ανάλυση ευαισθησίας είναι το στάδιο κατά το οποίο οι ερευνητές θα πρέπει να γνωρίζουν πως μπορεί να επηρεαστεί η λύση του προβλήματος από εξωτερικούς παράγοντες. Στη συνέχεια ακολουθεί η υλοποίηση της λύσης που έχει βρεθεί.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τον αυστηρό ορισμό της Επιχειρησιακής Έρευνας:

Επιχειρησιακή Έρευνα είναι ο κλάδος της επιστήμης που ασχολείται με την ανάπτυξη και την εφαρμογή μεθόδων και τεχνικών, όπως η βελτιστοποίηση, η Στατιστική και η μοντελοποίηση, πάνω σε πολύπλοκα προβλήματα για τη βέλτιστη λήψη αποφάσεων. [2]

Θα πρέπει να τονιστεί πως αναφερόμενοι στον όρο Επιχειρησιακή εννοούμε την λειτουργία (Operation) και όχι την επιχείρηση-εταιρεία.

Η επίλυση προβλημάτων, σύμφωνα με την Επιχειρησιακή Έρευνα, βασίζεται σε διαθέσιμα δεδομένα- πληροφορίες, λογική ανάλυση και όχι στην διαίσθηση. Είναι σημαντικό επίσης, να τονιστεί πως οι επιλογές μεταξύ εναλλακτικών αποφάσεων γίνονται βάσει κριτηρίων τα οποία μπορούν να μετρηθούν με αντικειμενικό τρόπο.

Ορισμένα προβλήματα τα οποία έχουν επιλυθεί με την βοήθεια τεχνικών της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι:

- Τα προβλήματα κατανομής προσωπικού, προβλήματα μεταφορών με τη χρήση του γραμμικού προγραμματισμού.
- Τα προβλήματα δαπανών, κατανομής καναλιών διανομής και σχεδίασης παραγωγής με τη χρήση του δυναμικού προγραμματισμού.
- Προβλήματα κυκλοφορίας, σχεδίασης αερομεταφορών, σχεδίαση λειτουργίας νοσοκομείων με τη χρήση της θεωρίας ουρών.
- Ποικίλα προβλήματα που έχουν επιλυθεί με την θεωρία αποθεμάτων, θεωρία παιγνίων κ.α.

1.2 Ιστορική Αναδρομή

Κάνοντας μία αναδρομή στο παρελθόν, βλέπουμε πως ο όρος Επιχειρησιακή Έρευνα χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά τον 18^ο αιώνα από τον λεγόμενο "πατέρα" της Επιχειρησιακής Έρευνας, Charles Babbage, ο οποίος ασχολήθηκε με το κόστος μεταφοράς και το κόστος ταξινόμησης της αλληλογραφίας και η έρευνά του αυτή οδήγησε στη δημιουργία του Γενικού Αγγλικού Ταχυδρομείου της Πένας. Έπειτα από την συνεισφορά του C. Babbage, έχουμε την μελέτη προβλημάτων σχετικά με το χρόνο απασχόλησης των τηλεφώνων το 1917 από τον Agner Krarup Erlang και το 1920 ο Horace Clifford Levinson, ασχολήθηκε με την μελέτη προβλημάτων πωλήσεων και εμπορίου. Η επιστήμη αυτή, όμως, άνθισε στις αρχές του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, όταν οι στρατιωτικές δυνάμεις του Ηνωμένου Βασιλείου χρειάστηκε να θέσουν σε εφαρμογή τον όρο για την αναχαίτιση των εχθρικών δυνάμεων. Επιστήμονες συμπεριλαμβανομένων των Patrick Blackett, Cecil Gordon, C.H. Waddington, Owen Wansbrough - Jones και Frank Yates ασχολήθηκαν με την βελτιστοποίηση στρατιωτικών επιχειρήσεων. Τα συστήματα ραντάρ λειτουργούσαν αποτελεσματικά, όμως, υπήρχε

πρόβλημα στο λειτουργικό κομμάτι, οπότε αποφασίστηκε να γίνει έρευνα προς αυτή την κατεύθυνση.

Πιο συγκεκριμένα, δημιουργήθηκαν ομάδες επιστημόνων από διάφορες ειδικότητες για την αντιμετώπιση προβλημάτων, όπως:

1. Ορισμός βέλτιστων τοποθεσιών για την εγκατάσταση οπλικών συστημάτων.
2. Προσδιορισμός βέλτιστου μεγέθους των πολεμικών αποστολών.
3. Εύρεση τρόπων προστασίας των αμάχων πληθυσμών.

Κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου η επιστήμη της Επιχειρησιακής Έρευνας βοήθησε επίσης τις Ηνωμένες Πολιτείες, με τον George Dantzig, όπου έψαχναν τρόπους έτσι ώστε να λαμβάνουν καλύτερες αποφάσεις σε τομείς όπως τα προγράμματα διοικητικής μέριμνας και τα προγράμματα εκπαίδευσης.

Αξιοσημείωτη είναι η αποτελεσματική επίλυση των πρώτων προβλημάτων εκείνης της περιόδου. Αρχικά, σημειώνεται ο προσδιορισμός του βέλτιστου μεγέθους των νηοπομπών, κατά τον οποίο η απόφαση για αύξηση του μεγέθους αυτού οδήγησε στη νίκη στη μάχη του Ατλαντικού. Ένα ακόμη πρόβλημα που επιλύθηκε χάρη στη χρήση της Επιχειρησιακής Έρευνας, ήταν ο προσδιορισμός του τρόπου ρίψης των βομβών. Οι επιστήμονες, αναλύοντας το συγκεκριμένο ζήτημα, αποφάσισαν ότι:

1. Το πιο αποτελεσματικό πλήρωμα θα πρέπει να ρίχνει πρώτο τις βόμβες του
2. Όλες οι βόμβες να ρίχνονται ταυτόχρονα
3. Τα αεροσκάφη να πετούν σε σχηματισμούς ακρίβειας, μειώνοντας με αυτόν τον τρόπο τη μεγάλη διασπορά βομβών

Η λήψη των παραπάνω αποφάσεων είχε ως αποτέλεσμα την βελτίωση της αποτελεσματικότητας πλήξης των στόχων κατά 1000%.

Από την λήξη του Β' Παγκοσμίου Πολέμου και έπειτα, η Επιχειρησιακή Έρευνα καθιερώθηκε ως νέο επιστημονικό πεδίο και αναπτύχθηκε ραγδαία κυρίως στις Ηνωμένες Πολιτείες. Οι πρώτες εφαρμογές στη βιομηχανία και την διοίκηση οργανισμών έλαβαν χώρα κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1950. Οι περισσότεροι αλγόριθμοι και μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα, αναπτύχθηκαν κατά τις δεκαετίες του 1950 και του 1960. Ωστόσο, ραγδαία ανάπτυξη του κλάδου υπήρξε με την πρόοδο των ηλεκτρονικών υπολογιστών, με τη χρήση και ανάπτυξη ειδικών προγραμμάτων και λογισμικών.

Το 1957 ιδρύεται η Διεθνής Ομοσπονδία Κοινοτήτων Επιχειρησιακής Έρευνας ονομαζόμενη διεθνώς ως "IFORS" (International Federation of Operational Research Societies). Η ομάδα της Επιχειρησιακής Έρευνας απαρτίζεται από άτομα με υψηλό επίπεδο εκπαίδευσης και κατάρτισης στα μαθηματικά, στη στατιστική και στη θεωρία πιθανοτήτων, στα οικονομικά, την διοίκηση επιχειρήσεων, στην επιστήμη των υπολογιστών, στην μηχανική,

στις συμπεριφορικές επιστήμες καθώς και σε εξειδικευμένες τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας. Κάθε χώρα έχει ιδρύσει και μία εθνική κοινότητα για την Επιχειρησιακή Έρευνα. Στην Ελλάδα, υπάρχει η Ελληνική Εταιρεία Επιχειρησιακών Ερευνών (Ε.Ε.Ε.Ε.), η οποία ιδρύθηκε το 1963.

Ορισμένοι σημαντικοί σταθμοί στην εξέλιξη της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι οι παρακάτω:

- 1944: Θεωρία παιγνίων και οικονομική συμπεριφορά (J.V. Neumann - O. Morgenstern)
- 1947: Αλγόριθμος Simplex (G.Dantzig)
- 1951-1952: Ανάπτυξη δυικής θεωρίας
- 1950-1960: Εμφάνιση ψηφιακών υπολογιστών και γλωσσών προγραμματισμού
- 1972: Ο αλγόριθμος Simplex δεν είναι πολυωνυμικός (Klee - Minty: εκθετική συμπεριφορά)
- 1982: Υπολογισμός μέσης πολυπλοκότητας Simplex (H.K. Borgwardt)
- 1984: Ανακάλυψη πολυωνυμικού αλγορίθμου εσωτερικών σημείων (N.K. Karmarkar)
- 1991: Ανακάλυψη αλγορίθμων εσωτερικών σημείων τύπου Simplex (K. Paparrizos)

1.3 Οργάνωση του τόμου

Η εργασία αυτή είναι οργανωμένη σε 6 κεφάλαια. Τα 5 πρώτα κεφάλαια αποτελούν τα θεωρητικά θεμέλια για την παρούσα εργασία και στο 6^ο κεφάλαιο γίνεται η υλοποίηση της θεωρίας αυτής σε πραγματικά δεδομένα. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στον κλάδο της επιχειρησιακής έρευνας αναφέροντας την μεθοδολογία που ακολουθείται σε κάθε επιστημονικό πεδίο που βρίσκει εφαρμογή. Επίσης, ανακαλύπτεται η σπουδαιότητα και η σημαντικότητα της εφαρμογής της μέσω της ιστορικής αναδρομής, όπου υποδεικνύει πόσα χρόνια πριν πρωτοεφαρμόστηκε. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια πρώτη ανάλυση του κλάδου της πρόβλεψης (forecasting) και πως η επιχειρησιακή έρευνα βρίσκει εφαρμογή σε αυτή, καθώς παρουσιάζονται και τα χαρακτηριστικά των υποκατηγοριών της πρόβλεψης, ποιοτικών και ποσοτικών μεθόδων. Στη συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο, προχωράμε στην ανάλυση της μεθόδου του κινητού μέσου όρου, παρουσιάζονται οι υποκατηγορίες αυτής της μεθόδου και δίνεται ένα αριθμητικό παράδειγμα για κάθε μια μέθοδο. Στο τέταρτο κεφάλαιο, γίνεται η περιγραφή της μεθόδου εκθετικής εξομάλυνσης, πως και πότε άρχισε να εφαρμόζεται στον κλάδο των προβλέψεων και γίνεται ανάλυση των υποκατηγοριών αυτής ανάλογα με την ύπαρξη τάσης ή εποχικότητας, καθώς και η εφαρμογή αυτών μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων. Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο της θεωρητικής περιγραφής, περιγράφεται η μέθοδος της παλινδρόμησης. Εστιάζουμε μονάχα στην γραμμική παλινδρόμηση κι αφού παρουσιάσουμε τα μοντέλα αυτής της μεθόδου, δίνουμε και κάποια αριθμητικά παραδείγματα για την κατανόηση αυτών. Τέλος, στο τελευταίο κομμάτι της εργασίας αυτής, χρησιμοποιώντας δεδομένα πωλήσεων κάποιων ετών της ελληνικής επιχείρησης

λιανικού εμπορίου ΠΛΑΙΣΙΟ COMPUTERS Α.Ε. Β.Ε., θέτουμε σε εφαρμογή όσες μεθόδους έχουμε αναλύσει και έπειτα μέσω των αποτελεσμάτων που μας δίνουν αποφασίζουμε για την επιλογή της βέλτιστης κι ακριβέστερης μεθόδου.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στο forecasting

Η πρόβλεψη είναι ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία για κάθε οργάνωση στις επιχειρήσεις. Έχει επικρατήσει με τον ξένο όρο forecasting. Πρόκειται για την τεχνική εκείνη κατά την οποία μπορούμε να προβλέψουμε την μελλοντική εξέλιξη βασιζόμενοι σε προηγούμενα δεδομένα. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει ανάλυση παρελθοντικών και παρόντων τάσεων προκειμένου να προβλέπει μελλοντικά γεγονότα, και αυτό γίνεται με τη χρήση στατιστικών εργαλείων. Συνεπώς, δεν θα ήταν λάθος να χρησιμοποιηθεί και η ορολογία “Στατιστική Ανάλυση”. Υπάρχει και ένας επιπλέον όρος για την πρόβλεψη, εκείνος του prediction, ο οποίος είναι παρόμοιος αλλά πιο γενικός. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το forecasting είναι μία υποκατηγορία του prediction, στην οποία χρησιμοποιούμε δεδομένα χρονοσειρών για να κάνουμε προβλέψεις για το μέλλον. Συνεπώς, η κύρια διαφορά μεταξύ prediction και forecasting είναι ότι λαμβάνουμε υπόψη τη χρονική διάσταση.

Παρακάτω παραθέτουμε τον ακριβή ορισμό του όρου της πρόβλεψης.

Ορισμός 2.1. *Πρόβλεψη ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία γίνεται εκτίμηση των μελλοντικών τάσεων, συνδυάζοντας κατάλληλα και με σωστή επεξεργασία των παρελθοντικών ιστορικών δεδομένων. Δηλαδή πρόκειται για την εκτίμηση της τιμής μίας τυχαίας μεταβλητής, η πραγματική τιμή της οποίας θα φανεί μελλοντικά.*

Θα μπορούσαμε να πούμε πως η πρόβλεψη λειτουργεί ως εργαλείο προγραμματισμού το οποίο βοηθάει τις επιχειρήσεις να προετοιμαστούν για την αβεβαιότητα που μπορεί να προκύψει στο μέλλον. Η ακρίβεια των προβλέψεων είναι εξαιρετικά χρήσιμη για την υποστήριξη των αποφάσεων των επιχειρήσεων κάθε μεγέθους, καθώς πιθανά σφάλματα στην ακρίβεια πρόβλεψης αποφέρουν οικονομική ζημία στους επιχειρηματίες. Για παράδειγμα, μια εταιρεία μπορεί να εκτιμήσει τα έσοδα του επόμενου έτους και στη συνέχεια να το συγκρίνει με το πραγματικό αποτέλεσμα. Στην καθημερινότητά μας γίνεται χρήση τεχνικών πρόβλεψης. Ας σκεφτούμε για παράδειγμα, την διαδικασία πρόβλεψης καιρικών συνθηκών ή την πρόβλεψη αποτελεσμάτων στην ρίψη ενός νομίσματος. Στην περίπτωση της ρίψης του νομίσματος μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα πως το αποτέλεσμα θα είναι είτε κορώνα είτε γράμματα. Αν αναλογιστούμε το παράδειγμα της πρόβλεψης του καιρού, εκεί πρέπει να λάβουμε υπόψη αρκετούς παράγοντες και πάλι όμως δεν θα μπορούμε να είμαστε απολύτως σίγουροι για το αποτέλεσμα της πρόβλεψης. Με την ίδια λογική, μπορούμε να σκεφτούμε και την λειτουργία

της πρόβλεψης στον χώρο των επιχειρήσεων. Μια εταιρεία, η οποία βρίσκεται χρόνια στην αγορά εργασίας και σημειώνει σταθερές πωλήσεις στα προϊόντα της, μπορεί να προβλέπει τις μελλοντικές της πωλήσεις με μεγαλύτερη ακρίβεια, απ' ό,τι μία νέα επιχείρηση στην αγορά η οποία δεν διαθέτει ακόμη αρκετά δεδομένα δραστηριότητας. Καθώς υπάρχουν αρκετοί παράγοντες οι οποίοι μπορεί να επηρεάζουν τις προβλέψεις των επιχειρήσεων δεν θα πρέπει να γίνεται αποκλειστικά επιλογή μίας μεθόδου, αλλά να βασιζόμαστε στην παρακολούθηση της συμπεριφοράς των διαφόρων μεθόδων προβλέψεων στα δεδομένα που χρησιμοποιούνται. Η παρακολούθηση αποτελείται από την παρατήρηση, τον έλεγχο και την παρακολούθηση των εξελίξεων μίας περιόδου. Η παρακολούθηση των χρονοσειρών έχει ως στόχο την αυτόματη ανίχνευση σημαντικών αλλαγών στο πρότυπο της χρονοσειράς καθώς νέα δεδομένα γίνονται διαθέσιμα, όσο το δυνατόν συντομότερα από την στιγμή που αυτές λαμβάνουν μέρος και με όσο το δυνατόν λιγότερες εσφαλμένες ανιχνεύσεις. Οι χρονοσειρές που παρουσιάζουν ιδιαίτερη συμπεριφορά και αναγνωρίζονται από το σύστημα παρακολούθησης εξετάζονται διεξοδικά για την επίτευξη προβλέψεων υψηλότερης ακρίβειας. Κατά την διαδικασία των προβλέψεων, όταν παρατηρηθεί ένα μεγάλο σχετικό σφάλμα, δηλώνοντας με αυτό τον τρόπο, πρόβλεψη που χαρακτηρίζεται από μεροληψία, είναι αρκετά πιθανή η ύπαρξη μίας αλλαγής στο πρότυπο της χρονοσειράς.

Υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι πρόβλεψης που χρησιμοποιούνται προκειμένου να βοηθήσουν τις επιχειρήσεις στη λήψη αποφάσεων και στον μελλοντικό τους προγραμματισμό. Ανάλογα με την φύση των δεδομένων που έχουμε στη διάθεσή μας μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε την πρόβλεψη σε ποιοτική και ποσοτική.

1. Ποιοτική Μέθοδος: Οι ποιοτικές μέθοδοι πρόβλεψης είναι επαρκείς όπου δεν υπάρχουν ιστορικά στοιχεία. Είναι υποκειμενικά βασισμένες στην γνώμη και την κρίση των καταναλωτών και των ειδικών. Συνήθως, χρησιμοποιούνται για την λήψη μέτρων και μακροπρόθεσμων αποφάσεων.
2. Ποσοτική Μέθοδος: Η πρόβλεψη μελλοντικών δεδομένων ως αποτέλεσμα ιστορικών δεδομένων γίνεται με την μέθοδο της ποσοτικής πρόβλεψης. Για αυτές τις προβλέψεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν μοντέλα παλινδρόμησης, μοντέλα εκθετικής εξομάλυνσης και άλλα.
3. Στατιστικές Μέθοδοι Πρόβλεψης: Ορισμένες στατιστικές μέθοδοι πρόβλεψης είναι η μέθοδος κινητού μέσου όρου, όπου όλες οι μελλοντικές τιμές προβλέπεται να είναι ίσες με τον μέσο όρο των προηγούμενων δεδομένων, η μέθοδος Naive η οποία χρησιμοποιείται για οικονομικές και χρηματοοικονομικές χρονοσειρές, η μέθοδος Drift η οποία είναι μια παραλλαγή της μεθόδου Naive και επιτρέπει στις προβλέψεις να αυξάνονται ή να μειώνονται με την πάροδο του χρόνου, όπου το μέγεθος της αλλαγής με την πάροδο του χρόνου (που ονομάζεται Drift) ορίζεται ως η μέση αλλαγή που παρατηρείται στα ιστορικά δεδομένα, η μέθοδος εκθετικής εξομάλυνσης και τα μοντέλα παλινδρόμησης.

Οι μέθοδοι πρόβλεψης, ανάλογα με το χρονικό διάστημα στο οποίο αφορούν, διακρίνονται στις εξής κατηγορίες:

- (α) Βραχυπρόθεσμες: Είναι οι προβλέψεις οι οποίες γίνονται για το διάστημα κάποιων εβδομάδων έως ενός έτους και σχετίζονται με τις τρέχουσες λειτουργίες.
- (β) Μεσοπρόθεσμες: Χρησιμοποιούνται για προβλέψεις από ένα έως τρία έτη και είναι χρήσιμες για την εκτίμηση ζήτησης στο μέλλον, την εκτίμηση πωλήσεων κ.α.
- (γ) Μακροπρόθεσμες: Χρησιμοποιούνται για προβλέψεις διαστήματος τριών ετών και άνω και αφορούν αλλαγές στο σχεδιασμό μίας επιχείρησης κ.α.

Μία πρόβλεψη προκειμένου να θεωρηθεί καλή, θα πρέπει να διαθέτει κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Αυτά είναι τα εξής:

1. **Ακρίβεια**: Τα αποτελέσματα της πρόβλεψης είναι αρκετά σημαντικό να πλησιάζουν όσο το δυνατόν περισσότερο στις πραγματικές τιμές που θα προκύψουν, διαφορετικά χάνεται ο λόγος της επιτέλεσής τους. Μια πρόβλεψη η οποία δεν θα είναι ακριβής μπορεί να οδηγήσει μια επιχείρηση σε απώλειες, καθώς μπορεί να επιφέρει πτώση του επιπέδου των πωλήσεων και χρηματικές απώλειες. Συνεπώς, μία ακριβής πρόβλεψη μπορεί να αποτελέσει καθοριστικό παράγοντα για την επιτυχία μίας επιχείρησης.
2. **Έγκαιρη πραγματοποίηση**: Προκειμένου να είναι χρήσιμη η πρόβλεψη, πρέπει να πραγματοποιηθεί σε ένα εύλογο χρονικό διάστημα, έτσι ώστε να επιτρέπει την ευθυγράμμιση και των υπόλοιπων επιχειρηματικών λειτουργιών και αποφάσεων.
3. **Αξιοπιστία**: Είναι απαραίτητο από μία μέθοδο πρόβλεψης να αποδίδει σταθερά αξιόπιστα αποτελέσματα, ώστε το χαρακτηριστικό αυτό να αποτελεί βάση για την λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων.
4. **Απόδοση αξιοποιήσιμων αποτελεσμάτων**: Για να είναι αξιοποιήσιμα τα αποτελέσματα μίας πρόβλεψης, θα πρέπει να αφορούν μεταβλητές οι οποίες θα είναι το επίκεντρο ενδιαφέροντος του ερευνητή που την υλοποιεί.
5. **Γραπτή αποτύπωση**: Η έγγραφη απεικόνιση της μεθοδολογίας πρόβλεψης, έγγυται την ευκολία στον έλεγχο και την ανατροφοδότηση αυτής, καθώς και την δυνατότητα ενημέρωσης όλων των ενδιαφερόμενων τομέων.
6. **Κατανοητή και εύχρηστη**: Μία μέθοδος πρόβλεψης η οποία είναι απλή για κάθε ερευνητή είναι σίγουρα εφαρμόσιμη και άκρως αξιόπιστη, σε σχέση με πιο σύνθετες μεθόδους, οι οποίες μπορεί να αποδειχθούν δαπανηρές και μη αξιόπιστες.
7. **Αντιστάθμιση κόστους από την ωφέλεια**: Τις περισσότερες φορές οι υπεύθυνοι των επιχειρήσεων ασχολούνται με το ερώτημα του "πόσα χρήματα πρέπει να επενδυσθούν για την διεξαγωγή προβλέψεων". Συνεπώς, η μέθοδος πρόβλεψης που θα επιλέγεται από την εκάστοτε επιχείρηση θα πρέπει να επιφέρει τόσα κέρδη, ώστε να γίνεται απόσβεση του κόστους διεξαγωγής της.

Προκειμένου να επιλέξουμε την καλύτερη τεχνική πρόβλεψης θα πρέπει να έχουμε ξεκαθαρίσει τα εξής:

1. Εξερεύνηση της δυναμικής του συστήματος και των επιμέρους μερών του για τα οποία εφαρμόζεται η πρόβλεψη.
2. Προσδιορισμός της σημαντικότητας του παρελθόντος για την εκτίμηση του μέλλοντος.
3. Απόφαση για το ποια τεχνική απαιτείται για τον προσδιορισμό της ακρίβειας και της έκτασης των μεθόδων ώστε να ικανοποιούν τις απαιτήσεις για την επίλυση του προβλήματος.

Η μέθοδος του forecasting βρίσκει εφαρμογή σε τομείς όπως η Οικονομία, η Εφοδιαστική Αλυσίδα, η Τεχνολογία, οι Πωλήσεις, η Μετεωρολογία κλπ [3]

Η διαδικασία της πρόβλεψης αποτελείται από τα ακόλουθα στάδια:

1. Αποσαφηνισμός του προβλήματος και συλλογή δεδομένων: Αποτελεί συνήθως το πιο χρονοβόρο και απαιτητικό στάδιο της διαδικασίας, διότι είναι καίριας σημασίας να γίνει απόλυτα αντιληπτό το ποιο ακριβώς είναι το πρόβλημα ώστε να γίνει και η καταλληλότερη επιλογή της μεθόδου πρόβλεψης.
2. Επεξεργασία δεδομένων και επιλογή μεθόδου: Από την διαλογή όλων των δεδομένων του πρώτου σταδίου, γίνεται εκκαθάριση ώστε να χρησιμοποιηθούν εκείνα τα στοιχεία που θα δώσουν το καλύτερο αποτέλεσμα. Τα αριθμητικά δεδομένα αλλά και τα στοιχεία που συγκεντρώθηκαν με σωστή κρίση και βάσει εμπειρίας είναι συνήθως πιο αποδοτικά. Εφόσον, λοιπόν, γίνει το "ξεσκαρτάρισμα" των πληροφοριών, το επόμενο βήμα είναι η επιλογή της μεθόδου πρόβλεψης που θα χρησιμοποιηθεί.
3. Προκαταρκτική ανάλυση: Στο συγκεκριμένο στάδιο γίνεται μια πρώτη εικονική απεικόνιση των δεδομένων. Από αυτή την αναπαράσταση, συνήθως γραφική, μπορούμε να επισημάνουμε διάφορες χρήσιμες παρατηρήσεις, αν δηλαδή υπάρχουν ακραίες τιμές που επηρεάζουν την διαδικασία, αν έχουν συλλέγει λανθασμένα στοιχεία κλπ.
4. Προσαρμογή μοντέλου: Όπως αναφέρει και ο τίτλος, στο στάδιο αυτό γίνεται η εφαρμογή της μεθόδου που έχουμε επιλέξει στα υπάρχοντα δεδομένα.
5. Εξαγωγή συμπερασμάτων- Αξιολόγηση διαδικασίας: Είναι το τελικό στάδιο κατά το οποίο εξάγονται τα αποτελέσματα των προβλέψεων. Γίνεται καταγραφή των μειονεκτημάτων και των πλεονεκτημάτων και αν κάποια στάδια κριθεί ότι χρειάζεται να επαναληφθούν, τότε αυτό γίνεται

Ορισμένες φορές γεννάται το ερώτημα ποια είναι η κατάλληλη τεχνική πρόβλεψης που θα πρέπει να επιλεγεί. Για να μπορέσει κάθε φορά ο αναλυτής να επιλέξει την καταλληλότερη μέθοδο, θα πρέπει να μπορεί να εκτελέσει τα εξής:

- Να καθορίσει τη φύση του προβλήματος.
- Να εξηγήσει τη φύση των δεδομένων, που αποτελούν αντικείμενο της έρευνας.
- Να περιγράψει τις δυνατότητες και τους περιορισμούς των δυνητικών τεχνικών πρόβλεψης.
- Να αναπτύξει κάποια προκαθορισμένα κριτήρια.

Πέραν όμως, της επιλογής της τεχνικής μεθόδου, θα πρέπει να δώσουμε και ιδιαίτερη έμφαση στη μορφή των δεδομένων που θα συλλεγούν.

Τέσσερα είναι τα κριτήρια που μπορούν να εφαρμοστούν για να καθοριστεί εάν τα δεδομένα είναι χρήσιμα:

- α Τα δεδομένα θα πρέπει να είναι αξιόπιστα και ακριβή. Η πηγή από την οποία συλλέγονται να είναι αξιόπιστη και θα πρέπει να δίνεται σημασία και στην ακρίβεια.
- β Τα δεδομένα θα πρέπει να είναι σχετικά και αντιπροσωπευτικά των περιστάσεων.
- γ Τα δεδομένα θα πρέπει να είναι συνεπή. Να αναπροσαρμόζονται ανάλογα με τις συνθήκες.
- δ Τα δεδομένα θα πρέπει να είναι έγκαιρα. Θα πρέπει, δηλαδή, να συλλέγονται σε τακτά χρονικά διαστήματα.

Παρακάτω δίνουμε τους εξής δύο ορισμούς.

Ορισμός 2.2. *Ομαδοποιημένα διασπρωματικά δεδομένα ονομάζονται τα δεδομένα κατά τα οποία όλες οι παρατηρήσεις προέρχονται από την ίδια χρονική περίοδο.*

Ορισμός 2.3. *Οι παρατηρήσεις μιας τυχαίας μεταβλητής, οι οποίες συλλέγονται σε διαδοχικά ισαπέχοντα σημεία του χρόνου, αποτελούν μια χρονολογική σειρά ή χρονοσειρά.*

2.1 Ποσοτική Μέθοδος

Μία κατηγορία πρόβλεψης είναι η ποσοτική μέθοδος. Η ποσοτική μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί όταν υπάρχει διαθέσιμη πληροφορία από το παρελθόν και μπορεί να ποσοτικοποιηθεί σε αριθμητικά δεδομένα. Επιπλέον, για να γίνει εφαρμογή αυτής της μεθόδου, θα πρέπει οι συνθήκες του παρελθόντος προτύπου να συνεχίζονται και στο μέλλον (assumption of continuity).

Η ποσοτική μέθοδος διακρίνεται σε δύο βασικές κατηγορίες:

α Το μοντέλο χρονοσειρών (time series model)

β Το επεξηγηματικό μοντέλο (explanatory model)

Το μοντέλο χρονοσειρών αποτελεί το πιο διαδεδομένο είδος ποσοτικού μοντέλου πρόβλεψης. Βασίζεται στην υπόθεση, ότι η μεταβολή της τιμής του μεγέθους ακολουθεί ένα συγκεκριμένο πρότυπο που επαναλαμβάνεται στο χρόνο και παραμένει σταθερό.

Έτσι λοιπόν, καταλαβαίνουμε πως ο βασικός στόχος των μοντέλων είναι η αναγνώριση ακολουθούμενου προτύπου των ιστορικών δεδομένων και η προέκτασή του στο μέλλον υπό το καθεστώς των σημερινών συνθηκών. Με βάση τα παραπάνω, παρατηρούμε πως το συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να προβλέπει αποτελεσματικά όταν διάφοροι εξωτερικοί παράγοντες, όπως η διακύμανση της τιμής ενός προϊόντος, παραμένει αμετάβλητη. Στην περίπτωση, που παρουσιάζονται αυξομειώσεις στην τιμή δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το συγκεκριμένο μοντέλο. Είναι φανερό λοιπόν, η αδυναμία του συγκεκριμένου μοντέλου. Οι μέθοδοι που περιγράφονται με το συγκεκριμένο μοντέλο αποτελούν μια ιδιαίτερη κατηγορία της ποσοτικής μεθόδου και ονομάζονται μέθοδοι χρονοσειρών. Σε αυτές ανήκουν η αποσύνθεση (decomposition), η εξομάλυνση (smoothing), και οι αυτοπαλινδρομικές μέθοδοι κινητού μέσου όρου (AutoRegressive Moving Average - ARMA).

Το επεξηγηματικό μοντέλο στηρίζεται στην βασική υπόθεση ότι υπάρχει μία σταθερή σχέση μεταξύ του υπό πρόβλεψη μεγέθους (εξαρτημένη μεταβλητή) και ορισμένων παραμέτρων (ανεξάρτητες μεταβλητές) που το επηρεάζουν. Μπορούμε, για παράδειγμα, να θεωρήσουμε ως εξαρτημένη μεταβλητή το ύψος των πωλήσεων ενός προϊόντος και ως ανεξάρτητες την τιμή πώλησης καθώς και το διαφημιστικό του κόστος.

Το μοντέλο αυτό είναι χρήσιμο στην περιγραφή και επεξήγηση του γιατί και το πώς δουλίζουν τα πράγματα ή γιατί ένα φαινόμενο είναι έτσι. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι δεν είναι τελείως ακριβή, ούτε δίνουν πλήρη επεξήγηση της απόλυτης πραγματικότητας. Μας δίνουν όμως την δυνατότητα να διασυνδέσουμε τη γνώση, την παρατήρηση με ένα θεωρητικό υπόβαθρο για τα διάφορα φαινόμενα και γι'αυτό το λόγο είναι χρήσιμα.

Το σημαντικότερο μειονέκτημα για την εφαρμογή αυτών των μεθόδων πρόβλεψης, είναι ότι απαιτούν πολύ περισσότερα δεδομένα σε σχέση με τις μεθόδους χρονοσειρών, μιας και χρειάζονται πληροφορίες όχι μόνο για την υπό πρόβλεψη μεταβλητή, αλλά και για ένα πλήθος ανεξάρτητων μεταβλητών. Παράδειγμα επεξηγηματικού μοντέλου είναι η παλινδρόμηση, όπου δημιουργούνται σχέσεις αιτίου αιτιατού και μας δίνουν τη δυνατότητα να επεξηγήσουμε κάποια φαινόμενα.

2.1.1 Χρονολογικές Σειρές

Οι χρονοσειρές ή αλλιώς χρονολογικές σειρές είναι το σύνολο διαδοχικών παρατηρήσεων της τιμής κάποιου φυσικού μεγέθους ή άλλου μεγέθους. Θα πρέπει να σημειωθεί πως αυτές

οι παρατηρήσεις δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Όταν οι διαδοχικές αυτές παρατηρήσεις είναι εξαρτημένες, οι μελλοντικές τιμές μπορούν να προσδιοριστούν ακριβώς από τις προηγούμενες. Κάτι τέτοιο, ωστόσο, δεν συμβαίνει με τις πραγματικές χρονοσειρές, καθώς το μέλλον καθορίζεται μερικώς από το παρελθόν.

Παραθέτουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 2.4. *Συνεχείς (continuous) χρονολογικές σειρές είναι αυτές, όπου η τιμή του φαινομένου παρατηρείται συνεχώς.*

Ορισμός 2.5. *Διακριτές (discrete) χρονολογικές σειρές είναι αυτές, που η τιμή του φαινομένου καταγράφεται σε ορισμένα χρονικά διαστήματα.*

Κατά την διαδικασία ανάλυσης των χρονοσειρών γίνεται διαχωρισμός των ιστορικών δεδομένων. Υπάρχουν τέσσερεις παράγοντες όμως (για τους οποίους θα γίνει λόγος στη συνέχεια), οι οποίοι κατά την διαδικασία του διαχωρισμού, βοηθούν στην εκτίμηση του μελλοντικού ανασηματισμού τους. Για την εύρεση του βέλτιστου μοντέλου, σε κάθε μία περίπτωση, θα πρέπει να γίνει χρήση διαφόρων μαθηματικών μοντέλων ανάλυσης χρονοσειρών, τα οποία θα είναι σε θέση να δώσουν στον εκάστοτε ερευνητή τις απαραίτητες πληροφορίες, όσον αφορά τις ενέργειες που έγιναν για την συλλογή αυτών των δεδομένων και τις αντίστοιχες προσαρμογές και ελέγχους. Φυσικά θα πρέπει να σημειωθεί πως με την συνεχή ενημέρωση των τιμών της υπό εξέταση μεταβλητής, αυξάνεται η αποδοτικότητα του μαθηματικού μοντέλου ανάλυσης χρονοσειρών. Στόχος, όμως, δεν είναι η συνεχή βελτίωση του μοντέλου, αλλά η όσο το δυνατόν μικρότερη απόκλιση της τιμής της πρόβλεψης από την πραγματική. Από την μελέτη των χρονοσειρών, έχει βρεθεί ότι υπάρχει μία αλληλουχία των τιμών η οποία αποκαλύπτει πίσω από ποιο μοτίβο κινούνται τα δεδομένα. Συνεπώς, αυτό το μοτίβο είναι πολύτιμο, διότι δείχνει εμφανώς ποια συνιστώσα χαρακτηρίζει τις χρονοσειρές και έτσι μπορεί να προσδιοριστεί η επιλογή του βέλτιστου μοντέλου.

Οι παράγοντες που επηρεάζουν τις τιμές των χρονολογικών σειρών είναι οι εξής:

1. η τάση
2. η κυκλικότητα
3. η εποχικότητα
4. τυχαίες κυμάνσεις (τυχαιότητα)

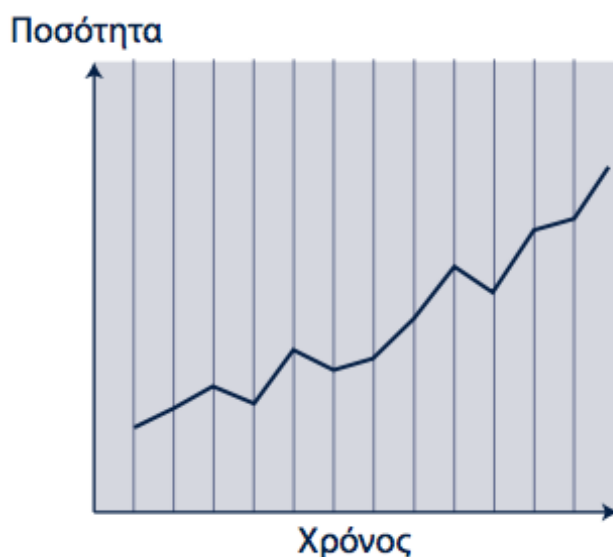
2.1.2 Τάση

Τάση είναι η μακροχρόνια γενική κίνηση, που ακολουθεί η χρονοσειρά, που αναπαριστά την αύξηση ή την πτώση των τιμών της σειράς σε μία εκτεταμένη περίοδο του χρόνου. Είναι δηλαδή, η κατά μέσο όρο απαλλαγμένη από βραχυχρόνιες αυξομειώσεις εξέλιξη της σειράς για μεγάλες χρονικές περιόδους, συνήθως πάνω από 10 έτη. Για το λόγο αυτό, καλείται και

μακροχρόνια τάση και μπορεί να είναι ανοδική ή καθοδική.

Η τάση θεωρείται ανύπαρκτη, όταν η κεντρική κίνηση της χρονοσειράς είναι παράλληλη προς τον άξονα του χρόνου, χωρίς να παρουσιάζει τάση προς αύξηση ή μείωση. Η τάση ενσωματώνει τις μακροχρόνιες εξελίξεις του προς μελέτη μεγέθους, που εκφράζει η μεταβλητή και είναι το αποτέλεσμα της εξέλιξης της οικονομίας, των τεχνολογικών μεταβολών, των μακροχρόνιων αλλαγών των διαφόρων βιομηχανικών κλάδων κ.α.

Ορισμένες μέθοδοι προσδιορισμού της μακροχρόνιας τάσης είναι η μέθοδος των κινητών μέσων όρων, η μέθοδος της ευθείας των ελάχιστων τετραγώνων, η μέθοδος καμπύλης ελάχιστων τετραγώνων κλπ. Στο Σχήμα 2.1 απεικονίζεται η τάση.

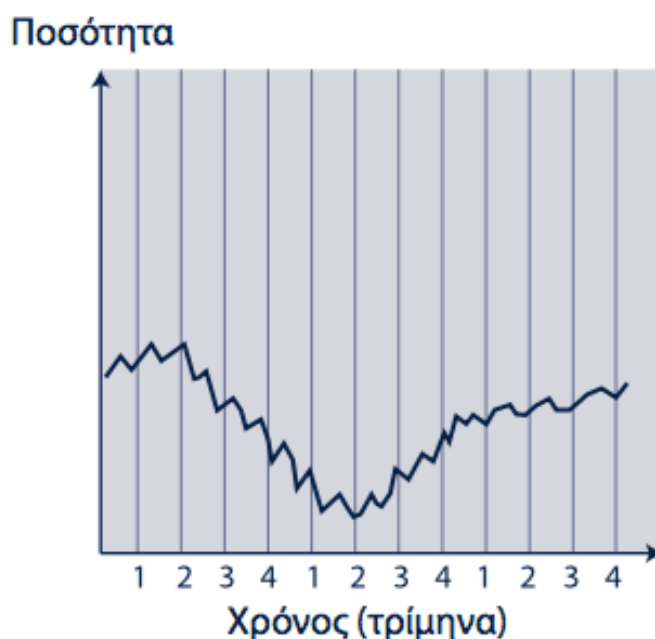


Σχήμα 2.1: Τα δεδομένα παρουσιάζουν διαχρονικά ανοδική πορεία.

2.1.3 Κυκλικότητα

Η κυκλική συνιστώσα αντιπροσωπεύει εκείνες τις επαναλαμβανόμενες κυμάνσεις γύρω από την τάση, που η διάρκειά τους είναι μεγαλύτερη του έτους. Οι κυμάνσεις αυτές έχουν ανοδικές ή καθοδικές φάσεις οι οποίες, συνήθως, διαρκούν μερικά έτη. Μία πλήρης κυκλική κύμανση αποτελείται από δύο κάτω σημεία καμπής και ένα άνω σημείο καμπής, που χρονικά παρεμβάλλεται μεταξύ των δύο πρώτων. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών κάτω ή άνω σημείων καμπής αποτελεί την περίοδο της κυκλικής κύμανσης.

Οι οικονομικοί κύκλοι εμφανίζονται κυρίως στις οικονομικά αναπτυγμένες οικονομίες. Έτσι, στις δυτικές χώρες τα περισσότερα οικονομικά μεγέθη, όπως, τιμές, επενδύσεις, εισόδημα κλπ, παρουσιάζουν κυκλικές κυμάνσεις λίγο ή πολύ έντονες. Το κυριότερο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε στην εξέταση των οικονομικών κύκλων είναι ότι η διάρκειά τους είναι σταθερή. Στο Σχήμα 2.2 απεικονίζεται η κυκλικότητα.



Σχήμα 2.2: Τα δεδομένα παρουσιάζουν διαχρονικά ακαθόριστες αυξήσεις ή μειώσεις.

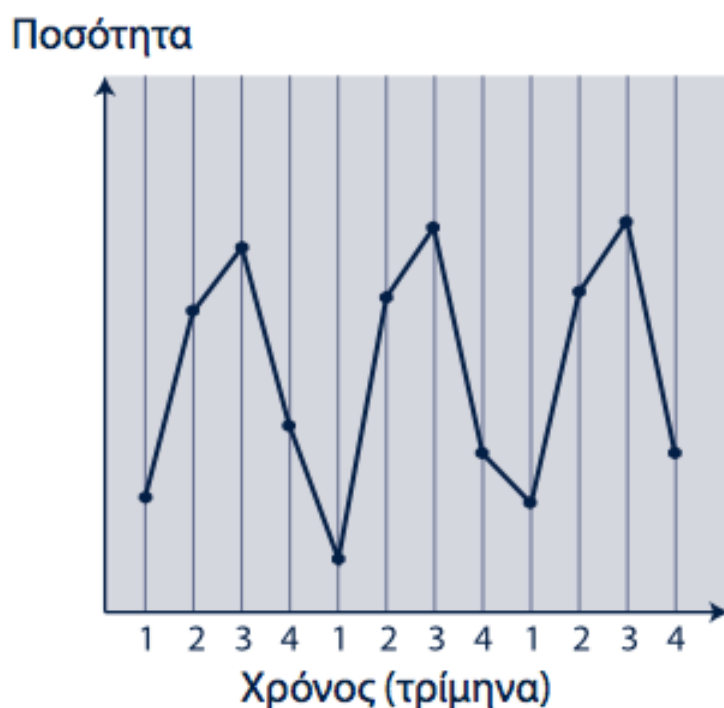
2.1.4 Εποχικότητα

Η εποχική συνιστώσα είναι μία κυκλική κύμανση με περίοδο όμως το έτος, διότι μέσα σ' αυτό εξαντλεί όλες τις ανοδικές και καθοδικές κινήσεις. Επίσης, είναι περιοδική, διότι επαναλαμβάνεται ρυθμικά κάθε έτος. Είναι προφανές ότι η εποχική κύμανση εμφανίζεται μόνο στις χρονοσειρές με εποχικές παρατηρήσεις. Η εποχική κύμανση, που το όνομά της προέρχεται από το γεγονός ότι συνδέεται με τις εποχές, δεν οφείλεται μόνο στις κλιματολογικές διαφορές μεταξύ των εποχών. Ο μεταβαλλόμενος αριθμός των εργάσιμων ημερών μεταξύ των μηνών του έτους, το διαφορετικό ωράριο των καταστημάτων κλπ, είναι μερικές από τις αιτίες των περιοδικών κυμάνσεων που εμφανίζουν οι χρονοσειρές με εποχικά δεδομένα. Στο Σχήμα 2.3 απεικονίζεται η εποχικότητα.

2.1.5 Τυχαιότητα

Οποιαδήποτε επίδραση στη διαμόρφωση της τιμής της μεταβλητής, που δεν οφείλεται σε κάποια από τις παραπάνω συνιστώσες, θεωρείται τυχαία ή άρρυθμος κύμανση. Θα πρέπει όμως να σημειωθεί ότι η τυχαία συνιστώσα εμφανίζεται ακανόνιστα με επιδράσεις, που άλλοτε είναι θετικές και άλλοτε αρνητικές. Οι τυχαίες κυμάνσεις οφείλονται σε όλες εκείνες τις επιδράσεις, που δεν είναι συστηματικές και επομένως δεν μπορούν να προβλεφθούν.

Παραδείγματα τέτοιων επιδράσεων είναι οι ξαφνικές αναγγελίες κυβερνητικών μέτρων, απρόβλεπτες αλλαγές τιμών σε διεθνή αγορά, ασυνήθιστες κλιματολογικές συνθήκες, πολιτικές κρίσεις, φυσικές καταστροφές κλπ. [4]



Σχήμα 2.3: Τα δεδομένα παρουσιάζουν ένα μοτίβο επαναλαμβανόμενο ανά τακτά διαστήματα.

2.2 Ποιοτική Μέθοδος

Η άλλη κατηγορία πρόβλεψης είναι η ποιοτική μέθοδος. Η ποιοτική μέθοδος δεν απαιτεί δεδομένα με τον ίδιο τρόπο, όπως η ποσοτική. Οι εισοδοί, που απαιτούνται, εξαρτώνται από τη συγκεκριμένη μέθοδο που εφαρμόζεται. Συνήθως, απαιτείται σημαντική γνώση ποιοτικών χαρακτηριστικών, τα οποία μπορούν να προσφερθούν από ιδιαίτερα έμπειρα στελέχη του αντίστοιχου κλάδου. Πολλές φορές οι σχέσεις που περιγράφουν την συμπεριφορά των μεταβλητών αλλάζουν, με αποτέλεσμα η χρήση των ποιοτικών μεθόδων πρόβλεψης να γίνεται απαραίτητη. Αιτία αυτής της αναγκαιότητας χρήσης αυτών των μεθόδων είναι ότι όταν παρατηρηθούν αλλαγές στο περιβάλλον, μπορούν να εντοπίσουν μία συστηματική αλλαγή πιο άμεσα και να ερμηνεύσουν το αποτέλεσμα αυτής της αλλαγής στο μέλλον, βασιζόμενοι στην ανθρώπινη κριτική ικανότητα.

Θα μπορούσαμε να πούμε πως οι μέθοδοι αυτοί είναι υποκειμενικές και μπορεί να εμφανίσουν μεροληψία. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι εφόσον βασίζονται στην προσωπική άποψη, την κρίση, την εμπειρία και το ένστικτο των ειδικών, είναι απόλυτα κατανοητό πως το αποτέλεσμα της πρόβλεψης θα είναι κάπως επηρεασμένο. Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενη υποενότητα, οι ποσοτικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται όταν υπάρχει αρκετή διαθέσιμη αριθμητική πληροφορία. Συνεπώς, στην περίπτωση που δεν διαθέτουμε παρελθοντικά δεδομένα ή και ακόμη όταν αυτά που διαθέτουμε χαρακτηρίζονται ανεπαρκή ή ακατάλληλα, γίνεται επιλογή χρήσης των ποιοτικών μεθόδων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ποιοτική προσέγγιση αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμη για βραχυπρόθεσμες προβλέψεις και μπορεί να περιβάλλει προβλέψεις οι οποίες προκύπτουν από τη χρήση ποσοτικών μεθόδων.

Παράδειγμα ποιοτικού μοντέλου, είναι το μοντέλο που χρησιμοποιείται για να προβλέπει, πως θα επηρεαστεί η κατανάλωση καυσίμων από μία μεγάλη αύξηση των τιμών των καυσίμων. Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιείται ποιοτική μέθοδος, αφού τα ιστορικά δεδομένα για αντίστοιχες συνθήκες είναι εξαιρετικά περιορισμένα. Οι ποιοτικές μεθόδους πρόβλεψης λαμβάνουν ποικίλες μορφές, οι οποίες χαρακτηρίζονται από στοιχειώδη δομή και ακολουθία διαδικασιών. Οι συνήθεις μορφές ποιοτικών μεθόδων πρόβλεψης παρατίθενται ακολούθως. [5]

2.2.1 Μέθοδος Delphi

Πρόκειται για μία μέθοδο δομημένης ομαδικής επικοινωνίας με σκοπό τη διευκόλυνση της επίλυσης προβλημάτων και της επίτευξης συναινετικών προτάσεων. Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης, για την επίτευξη μίας κρίσης σε ένα θέμα, ως βοήθεια για τη λήψη αποφάσεων ή ως εργαλείο πρόβλεψης. Η μέθοδος Delphi μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν δεν υπάρχει ολοκληρωμένη γνώση για ένα πρόβλημα και μπορεί να εφαρμοστεί σε ζητήματα που δεν προσφέρονται για ακριβείς αναλυτικές τεχνικές, αλλά υποκειμενικές κρίσεις σε ένα συλλογικό πλαίσιο, όπου η γνώση πολλών ατόμων επικεντρώνεται σε ένα πρόβλημα. Πρόκειται λοιπόν, για μία μέθοδο, την οποία θα χαρακτήριζε κανείς ως ευπροσάρμοστη, διότι βρίσκει εφαρμογή σε πολλούς ερευνητικούς χώρους, όπως τον στρατό, την οικονομία, τις επιχειρήσεις, την εκπαίδευση από ερευνητές σε παγκόσμιο επίπεδο. Συνοψίζοντας, η μέθοδος Delphi, στοχεύει στον εντοπισμό συναίνεσης από μία ομάδα ερευνητών αναφορικά με το πρόβλημα το οποίο εξετάζουν. Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για μακροπρόθεσμες προβλέψεις με σκοπό την συγκέντρωση των απόψεων των ερευνητών σε πολύ επιστημονικά ζητήματα, μέσω διαδοχικών ερωτηματολογίων.

Κάνοντας μία αναδρομή στο παρελθόν, εντοπίζουμε πως η μέθοδος Delphi αναπτύχθηκε από τον Norman Dalkey της RAND Corporation τη δεκαετία του 1950, με σκοπό να αξιοποιηθεί σε ένα έργο του στρατού των ΗΠΑ. Έτσι λοιπόν, δημιουργήθηκε μία ομάδα ειδικών, οι οποίοι θα εκτιμούσαν μια υποτιθέμενη προσπάθεια των Σοβιετικών Δυνάμεων να εισχωρήσουν στην τεχνολογική παραγωγή των ΗΠΑ, και την δυνατότητα ανταπόκρισης του συστήματος των ΗΠΑ σε μία τέτοια εισβολή. Η μελέτη αυτή ονομάστηκε "Project Delphi" και ξεκίνησε δίνοντας στην ομάδα των ερευνητών πέντε γύρους ερωτηματολογίων, τα οποία κλήθηκαν να απαντηθούν και συνοδεύονταν από συνεχή ανατροφοδότηση σε τακτά χρονικά διαστήματα (εβδομαδιαία). Έπειτα από την ολοκλήρωση των πέντε γύρων ερωτηματολογίων, παρατηρήθηκε πως οι απόψεις των ερευνητών άρχισαν να συγκλίνουν σημαντικά, παρά τα αρχικά προβλήματα.

Η μέθοδος Delphi έχει τα εξής τέσσερα βασικά χαρακτηριστικά :

1. Την ανωνυμία των συμμετεχόντων, η οποία τους επιτρέπει να εκφράσουν την γνώμη τους ελεύθερα χωρίς κοινωνικές πιέσεις.
2. Την επανάληψη, η οποία δίνει την δυνατότητα βελτίωσης των απόψεων.

3. Την ελεγχόμενη ανατροφοδότηση, που δίνει την ευκαιρία στα μέλη της ομάδας να διευκρινίσουν ή να αλλάξουν τις απόψεις τους γνωρίζοντας τις προοπτικές των υπολοίπων μελών της.
4. Την στατιστική συγκέντρωση της ομάδας απόκρισης, που επιτρέπει μια ποσοτική ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων.

Η μέθοδος Delphi διαθέτει αρκετά πλεονεκτήματα, όπως η πολυχρησιμότητά της, η ταχεία εξεύρεση συναίνεσης, η δυνατότητα των συμμετεχόντων να λάβουν μέρος από οποιοδήποτε σημείο του πλανήτη και τέλος η ανωνυμία των συμμετεχόντων. Ωστόσο, η μέθοδος έχει και μειονεκτήματα. Καταγράφεται ως μία αρκετά χρονοβόρα διαδικασία, η οποία απαιτεί πολύ προσεκτικό σχεδιασμό για την αποφυγή μεθοδολογικών σφαλμάτων.

2.2.2 Ιστορικές Αναλογίες

Η διεξαγωγή προβλέψεων με την αξιοποίηση ιστορικών αναλογιών είναι μία μέθοδος πρόβλεψης που αφορά νέα προϊόντα, δηλαδή δεν υπάρχουν προγενέστερα δεδομένα για την ζήτηση του προϊόντος. Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου προϊόντος, θα μπορούσε να είναι ένα προϊόν κάποιας επιχείρησης το οποίο μόλις κυκλοφόρησε στην αγορά εργασίας. Καθώς όπως προαναφέρθηκε δεν υπάρχουν δεδομένα παρελθοντικά μίας και πρόκειται για κάτι καινούργιο, γίνεται σύνδεση αυτού του νέου προϊόντος με κάποιο ήδη υπάρχον με το οποίο φέρουν αρκετά κοινά χαρακτηριστικά. Έτσι λοιπόν το τμήμα marketing μίας επιχείρησης, χρησιμοποιεί την σύνδεση αυτή των προϊόντων και εξάγει την ζήτηση του νέου, βασιζόμενο στα δεδομένα του παλαιότερου προϊόντος.

Ένα βασικό πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου, είναι ότι παρά την έλλειψη στοιχείων, μπορεί να δώσει στους υπεύθυνους της επιχείρησης μία πρώτη ζήτηση του αγαθού, πριν εκείνο κυκλοφορήσει στην αγορά. Παρόλα αυτά υπάρχουν και ορισμένα μειονεκτήματα τα οποία δεν μπορεί να μην ληφθούν υπόψιν. Μίας και πρόκειται για ένα νέο προϊόν του οποίου την ζήτηση στηρίζουμε σε μία υπόθεση του πως θα διαμορφωθεί, δεν μπορούμε να είμαστε απόλυτα βέβαιοι διότι η συμπεριφορά ζήτησης από προϊόν σε προϊόν αλλάζει με τις συνθήκες της αγοράς.

2.2.3 Έρευνα Αγοράς

Πρόκειται για την οργανωμένη προσπάθεια συλλογής πληροφοριών η οποία στοχεύει στην ερμηνεία και ανάλυση των καταναλωτικών προτιμήσεων. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται μέσω τηλεφωνικής επικοινωνίας, κατάλληλων προσωπικών συνεντεύξεων ή μέσω ορισμένων ερωτηματολογίων, η οποία ονομάζεται δημοσκόπηση. Όλα αυτά τα δεδομένα που συλλέγονται αφορούν την στάση, την γνώμη, την γνώση, τα πιστεύω, την προτιθέμενη και εκδηλωθείσα συμπεριφορά που αφορούν τους καταναλωτές. Τα στοιχεία που προκύπτουν είναι εξαιρετικά χρήσιμα για την διαμόρφωση μίας πρώτης εκτίμησης ζήτησης και πωλήσεων, το σχεδιασμό των προϊόντων καθώς και τη δημιουργία μία διαφημιστικής καμπάνιας.

Η έρευνα αγοράς και καταναλωτών χαρακτηρίζεται από το χαμηλό κόστος και σύντομη χρονικά συλλογή δεδομένων. Παρόλα αυτά προβληματικό σημείο της μεθόδου αποτελούν οι υποθέσεις και οι παραδοχές που απαιτούνται να γίνουν, όπως επίσης και το γεγονός ότι τα δεδομένα δεν είναι πάντοτε ακριβή και κατάλληλα, αφενός διότι μπορεί να αμφισβητηθεί η αξιοπιστία της πηγής και αφετέρου διότι μπορεί να διαφέρουν ως προς την σχετικότητα και την παλαιότητα.

2.2.4 Εμπειριστατωμένη Γνώμη και Εκτίμηση

Σε κάθε επιχείρηση συγκροτείται μία ομάδα από υψηλά ιστάμενα στελέχη των τριών βασικών λειτουργιών της, την Διοίκηση Λειτουργιών, το Marketing και τα Χρηματοοικονομικά. Τα μέλη αυτής της ομάδας, βάση της εμπειρίας τους αλλά και της γνώσης για την πορεία της επιχείρησης και των προϊόντων της, προσπαθούν να καταλήξουν σε μία κοινή πρόβλεψη η οποία θα είναι το αποτέλεσμα της σύνθεσης των επιμέρους εκτιμήσεων.

Βασικά πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου είναι η ταχύτητα, η ευχρηστία και συμβολή εμπειρογνομόνων στην πρόβλεψη. Επιπλέον, χαρακτηρίζεται από χαμηλό κόστος και κρίνεται κατάλληλη όταν υπάρχει οικονομική ένδεια ή έλλειψη ιστορικών στοιχείων και όταν αφορά νέα προϊόντα ή προϊόντα με σχετικά σταθερή πορεία στην αγορά. Υπάρχουν, όμως, και ορισμένα μειονεκτήματα όπως η έλλειψη επιστημονικότητας καθώς και το συνονθύλευμα ποικίλων εκτιμήσεων το οποίο μπορεί να φανεί μη παραγωγικό. Επίσης, ένα βασικό μειονέκτημα της μεθόδου, είναι η πιθανή επίδραση ενός μέλους της ομάδας στο τελικό αποτέλεσμα ή οποία ελλοχεύει κινδύνους, με την πιθανότητα να επηρεάσει την γνώμη και των υπολοίπων μελών.

Πέραν αυτής την ομάδας, υπάρχουν ορισμένοι ειδικοί, οι πωλητές, οι οποίοι γνωρίζουν σε βάθος την αγορά, μιας και δραστηριοποιούνται σε αυτόν τον τομέα και έρχονται καθημερινά σε τριβή με αυτόν. Έτσι λοιπόν, κάθε πωλητής σε μία επιχείρηση καλείται να δώσει μία εκτίμηση για το μελλοντικό ύψος των πωλήσεων και κάθε μία αυτή εκτίμηση συμψηφίζεται με των υπολοίπων πωλητών της επιχείρησης και αναλύονται, αξιολογούνται και αναπροσαρμόζονται, ώστε να υπολογισθεί ένα συνολικό αποτέλεσμα. Με την χρήση της συγκεκριμένης μεθόδου, οι πωλητές καθίστανται υπεύθυνοι για την στοχοθεσία, με αποτέλεσμα να προσπαθούν να είναι αξιόπιστοι στις προβλέψεις τους και να αισθάνονται ότι καλούνται να πετύχουν ένα ρεαλιστικό στόχο. Χαρακτηριστικά, όμως, όπως ο χαρακτήρας και η προσωπικότητά τους, η αισιοδοξία ή η απαισιοδοξία, η υποτίμηση της τιμής πρόβλεψης προκειμένου να καλυφθεί ο στόχος με ευκολία, αποτελούν πιθανά ελαττώματα των πωλητών, τα οποία θα επιφέρουν αρνητική επίδραση στην εφαρμογή της μεθόδου.

2.2.5 Καμπύλες Κύκλου Ζωής

Οι καμπύλες κύκλου ζωής αναπτύσσονται για νέα προϊόντα βάσει ιστορικών αναλογιών. Για προϊόντα που έχουν μικρό κύκλο ζωής, δηλαδή, μόνο μερικά χρόνια, όπως προϊόντα τεχνολογίας, είναι απαραίτητες οι καμπύλες για την πρόβλεψη της ζήτησης. Κατά κύριο λόγο,

οι καμπύλες κύκλου ζωής έχουν συγκεκριμένη μορφή. Αρχικά, η ζήτηση είναι χαμηλή, στην συνέχεια αναπτύσσεται με αυξανόμενο ρυθμό και στην συνέχεια η ζήτηση μειώνεται όταν η αγορά ωριμάζει. Στο τέλος, όταν η αγορά είναι πλέον κορεσμένη, η καμπύλη εξομαλύνεται πλησιάζοντας ένα άνω όριο. Η λογιστική καμπύλη αποτελεί καμπύλη κύκλου ζωής και δίνεται από την σχέση:

$$y_t = \frac{k}{1 + e^{a+bt}} \quad (2.1)$$

όπου t: το έτος

y_t : η ζήτηση στο έτος t

k: το άνω όριο και a,b: σταθερές

2.2.6 Μέθοδος Grass Roots

Η Grass Roots είναι μία "από κάτω προς τα πάνω" μέθοδος πρόβλεψης. Στην συγκεκριμένη μέθοδο γίνεται χρήση ως πηγή πληροφορίας ένα άτομο το οποίο είναι πιο κοντά στον πελάτη ή στην τελική χρήση του προϊόντος, επομένως θα είναι σε θέση να γνωρίζει τις μελλοντικές ανάγκες. Έτσι λοιπόν, γίνονται εκτιμήσεις πώλησης - ζήτησης, και οι εκτιμήσεις αυτές συγκεντρώνονται και προωθούνται στα επόμενα ανώτερα τμήματα με σκοπό την εξαγωγή της συνολικής πρόβλεψης των πωλήσεων - ζήτησης.

Ένα από τα βασικότερα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου είναι η ευκολία στη χρήση της, μιας και οι πληροφορίες που συλλέγονται και εξάγονται είναι εύκολες να κατανοηθούν. Επίσης, τα δεδομένα που συγκεντρώνονται από τα άτομα που αποτελούν πηγές των πληροφοριών είναι εύκολο να ταξινομηθούν ανά τομέα, κατηγορία, καταναλωτή ή πωλητή και προϊόν και να επεξεργαστούν κατάλληλα. Από την άλλη μεριά, μιας και πρόκειται για μέθοδο που στηρίζεται στη γνώμη των ατόμων αυτών, που βρίσκονται σε επαφή με τους καταναλωτές, είναι πολύ πιθανό τα δεδομένα αυτά που συλλέγονται, να χαρακτηρίζονται από υπερβολική αισιοδοξία ή απαισιοδοξία, με αποτέλεσμα να προκύπτουν λανθασμένες εκτιμήσεις.

Κεφάλαιο 3

Μέθοδος Κινητού Μέσου Όρου

Για την διενέργεια προβλέψεων υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός μεθόδων, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανάλογα με την εξεταζόμενη περίπτωση. Στόχος μας θα πρέπει να είναι η εύρεση και η χρήση εκείνων των μεθόδων, που είναι εύχρηστες, εφαρμόζονται συχνά και έχουν αποδειχθεί στην πράξη ότι δίνουν καλά αποτελέσματα. Το κύριο βάρος της έρευνας θα πρέπει να εστιάζει αφενός στην αξιολόγηση των αποτελεσμάτων και αφετέρου στην επιλογή της καταλληλότερης μεθόδου πρόβλεψης, μιας και οι προβλέψεις προσδιορίζονται με μεγάλη ευκολία χάρη στην χρήση των υπολογιστών.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο έγινε αναφορά στους όρους τάση, εποχικότητα, κυκλικότητα και τυχαιότητα. Αποτελούν τα τέσσερα βασικά χαρακτηριστικά των χρονοσειρών και προκειμένου να εξαχθούν, γίνεται χρήση των μεθόδων αποσύνθεσης. Με τον όρο αποσύνθεση, αναφερόμαστε σε εκείνη την τεχνική πρόβλεψης που διαχωρίζει ή αποσυνθέτει ιστορικά δεδομένα σε διαφορετικές συνιστώσες- στοιχεία και τις χρησιμοποιεί προκειμένου να δημιουργήσει μία πρόβλεψη που να είναι ακριβής. Με το να προβλέπουμε κάθε συνιστώσα ξεχωριστά πριν τις συνδυάσουμε, μπορούμε να αξιολογήσουμε τη σημασία καθεμίας από αυτές και να δώσουμε έμφαση σε αυτές σύμφωνα με τις μεταβαλλόμενες συνθήκες της αγοράς ή τις οικονομικές συνθήκες.[6]

Η μαθηματική διατύπωση της αποσύνθεσης είναι η εξής:

$$Y_t = f(S_t, T_t, C_t, R_t) \quad (3.1)$$

όπου,

- Y_t : παρατήρηση κατά τη χρονική περίοδο t
- S_t : η συνιστώσα εποχικότητας την χρονική περίοδο t
- T_t : η συνιστώσα τάσης την χρονική περίοδο t
- C_t : η συνιστώσα κύκλου την χρονική περίοδο t
- R_t : η συνιστώσα τυχαιότητας την χρονική περίοδο t

Οι πιο απλές μορφές της μαθηματικής διατύπωσης της αποσύνθεσης είναι η προσθετική:

$$Y_t = S_t + T_t + C_t + R_t \quad (3.2)$$

και η πολλαπλασιαστική:

$$Y_t = S_t T_t C_t R_t \quad (3.3)$$

Καταλαβαίνουμε πως η αποσύνθεση των δεδομένων είναι μία πολύ σημαντική διαδικασία, ιδιαίτερα για την πρόβλεψη επιχειρησιακών δεδομένων. Για το λόγο αυτό, οι μέθοδοι αποσύνθεσης χρησιμοποιούνται κυρίως από τις επιχειρήσεις. Η εξάλειψη των συνιστωσών της εποχικότητας και της τυχαιότητας οδηγούν στη σειρά τάσης-κύκλου. Προκειμένου να υπολογισθεί η σειρά τάσης-κύκλου, απαιτείται εξομάλυνση ή αποσύνθεση δεδομένων. Η πιο απλή μέθοδος εξομάλυνσης των δεδομένων είναι η χρήση κινητών μέσων όρων. Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε τέσσερα είδη κινητών μέσων όρων:

1. απλός κινητός μέσος όρος
2. σταθμισμένος κινητός μέσος όρος
3. κεντρικός κινητός μέσος όρος
4. διπλός κινητός μέσος όρος

3.1 Μέθοδοι Naive

Έχοντας κάνει αναφορά στις ποσοτικές μεθόδους πρόβλεψης, στη συνέχεια θα αναλύσουμε τις μεθόδους Naive, οι οποίες αποτελούν κατηγορία των ποσοτικών μεθόδων. Πρόκειται για μοντέλα πρόβλεψης, τα οποία βασίζονται αποκλειστικά σε παρατήρηση και ανάλυση ιστορικών δεδομένων των πωλήσεων και άλλων μεταβλητών, όπως αυτή των κερδών και της ρευστότητας που προβλέπεται. Οι μέθοδοι Naive δεν θέτουν ως στόχο τους να ερμηνεύσουν τις υποκείμενες αιτιακές σχέσεις που παράγουν την υπό πρόβλεψη μεταβλητή, αλλά πρόκειται για μεθόδους που αποτελούνται από πολύ απλά μαθηματικά μοντέλα και μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία, κατατάσσονται τα απλά μοντέλα πρόβλεψης και είναι εκείνα τα οποία δέχονται ως εισόδους δεδομένα από πρόσφατες παρατηρήσεις, αλλά δεν γίνεται στατιστική ανάλυση. Η δεύτερη κατηγορία αποτελείται από Naive μοντέλα, τα οποία είναι αρκετά περίπλοκα και απαιτούν την χρήση του υπολογιστή. Μερικά παραδείγματα μεθόδων είναι η αποσύνθεση, οι κινητοί μέσοι όροι και η εκθετική εξομάλυνση.

Βασικά πλεονεκτήματα συγκεκριμένων μεθόδων είναι ότι αποθηκεύουν τα δεδομένα καθώς και ότι είναι οικονομικά να αναπτυχθούν και να λειτουργήσουν. Παρόλα αυτά, καθώς έχουμε αναφέρει πως δεν είναι βασικός τους στόχος να ερμηνεύσουν τις αιτιακές σχέσεις που δίνουν την μεταβλητή που θα προβλεφθεί, είναι αρκετό να αποτελέσει μειονέκτημα των μεθόδων.

Η πιο συνήθης μέθοδος των μοντέλων Naive, είναι εκείνη που χρησιμοποιεί την τελευταία παρατήρηση της χρονοσειράς ώστε να προβλέπει την επόμενη. Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι γνωστή με την ονομασία "Last Value Forecasting Method", και η σχέση που την περιγράφει δίνεται ως:

$$F_{t+1} = Y_t \quad (3.4)$$

όπου t : είναι η χρονική περίοδος

Y_t : η τιμή της υπό μελέτη μεταβλητής Y την χρονική στιγμή t

F_{t+1} : η προβλεπόμενη τιμή της μεταβλητής Y την χρονική στιγμή t

Η παραπάνω σχέση, στην περίπτωση που ληφθούν υπόψη οι τάσεις γίνεται:

$$F_{t+1} = Y_t + (Y_t - Y_{t-1}) \quad (3.5)$$

Στην σχέση 3.5 το μοντέλο προσθέτει την τελευταία απόλυτη, από περίοδο σε περίοδο, αλλαγή παρατήρησης στην πιο πρόσφατη παρατηρούμενη μεταβλητή.

Στην περίπτωση που θέλουμε να συμπεριλάβουμε ρυθμό αλλαγής, αντί για το απόλυτο ποσό, τότε έχουμε:

$$F_{t+1} = Y_t \left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}} \right) \quad (3.6)$$

Άλλες μέθοδοι Naive είναι η "Free Hand Projection Method" στην οποία απεικονίζονται με την σειρά τα δεδομένα στο χαρτί γραφήματος, και στη συνέχεια οι ερευνητές σχεδιάζουν με το χέρι την καμπύλη που πιστεύουν ότι έχει την καλύτερη δυνατή προσαρμογή στα δεδομένα. Χρησιμοποιώντας την γραφική αυτή απεικόνιση μπορούν να εξάγουν τις μελλοντικές τους προβλέψεις.

Τέλος, μία ακόμη απλοϊκή μέθοδος είναι η "Semi Average Projection Method" κατά την οποία η χρονοσειρά χωρίζεται σε δύο ίσα μέρη, στη συνέχεια γίνεται ο υπολογισμός του μέσου όρου για το καθένα και έπειτα σχεδιάζεται η γραμμή που ενώνει τους δύο μέσους. Από την γραμμή αυτή μπορεί να γίνει η πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών.

Παράδειγμα 3.1. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μηνιαίες πωλήσεις μίας επιχείρησης για ένα προϊόν που παράγει. Με βάση τα δεδομένα του πίνακα, θα υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή του Ιανουαρίου., χρησιμοποιώντας την μέθοδο "Last Value Forecasting Method".

Επομένως έχουμε:

$$F_{t+1} = Y_t \Leftrightarrow F_1 = Y_{12} \Leftrightarrow F_1 = 6100 \quad (3.7)$$

Στην περίπτωση που λάβουμε υπόψη την τάση θα έχουμε ότι:

Πίνακας 3.1: Πίνακας μηνιαίων πωλήσεων

Μήνας	Μηνιαίες Πωλήσεις
1	3050
2	2980
3	3670
4	2910
5	3340
6	4060
7	4750
8	5510
9	5280
10	5504
11	5810
12	6100

$$F_{t+1} = Y_t + (Y_t - Y_{t-1}) \Leftrightarrow F_1 = Y_{12} + (Y_{12} - Y_{11}) \Leftrightarrow F_1 = 6100 + (6100 - 5800) = 6390 \quad (3.8)$$

Τέλος, συμπεριλαμβάνοντας το ρυθμό αλλαγής μεταξύ των χρονικών περιόδων έχουμε ότι:

$$F_{t+1} = Y_t \left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}} \right) \Leftrightarrow F_1 = Y_{12} \left(\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \right) = 6100 \left(\frac{6100}{5810} \right) = 6404 \quad (3.9)$$

Μία ακόμη αρκετά απλή και γνωστή μέθοδος πρόβλεψης, είναι αυτή του απλού μέσου όρου. Σε σχέση με την μέθοδο Naive, "Last Value Forecasting Method" που αναφέραμε προηγουμένως, κατά την οποία λαμβάνεται υπόψη η πιο πρόσφατη τιμή ώστε να υπολογισθεί η τιμή της πρόβλεψης για την αμέσως επόμενη χρονική περίοδο, στη μέθοδο του απλού μέσου όρου αξιοποιούνται στο σύνολό τους οι τιμές της ζήτησης σε κάθε χρονοσειρά. Η μαθηματική σχέση που περιγράφει την παραπάνω μέθοδο είναι η εξής:

$$F_{t+1} = \frac{1}{n} \sum Y_t \quad (3.10)$$

όπου t: είναι η χρονική περίοδος

Y_t : η τιμή της υπό μελέτη μεταβλητής Y την χρονική στιγμή t

F_{t+1} : η αναμενόμενη τιμή για την χρονική στιγμή t

n: ο συνολικός αριθμός των περιόδων που συμμετέχουν στην πρόβλεψη

3.2 Απλός Κινητός Μέσος Όρος

Σ την εφαρμογή της μεθόδου του απλού μέσου όρου θεωρούνται όλες οι προγενέστερες τιμές της χρονοσειράς σημαντικές για τον υπολογισμό της προβλεπόμενης τιμής, κάτι το οποίο μπορεί να μην είναι πάντα ορθό, διότι μπορεί να μην διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο κάθε ένα από αυτά τα δεδομένα. Συνεπώς, αυτό θα μπορούσε να αποτελέσει μειονέκτημα της μεθόδου του απλού μέσου όρου. Το πρόβλημα αυτό έρχεται να αντισταθμίσει ο απλός κινητός μέσος όρος.

Ο απλός κινητός μέσος όρος χρησιμοποιείται στην περίπτωση που θέλουμε να επικεντρωθούμε περισσότερο στα πρόσφατα γεγονότα. Είναι η διαδικασία κατά την οποία, καθώς μία νέα παρατήρηση γίνεται διαθέσιμη, ένας νέος μέσος όρος μπορεί να υπολογισθεί, στον οποίο παραλείπεται η παλιά παρατήρηση προκειμένου να συμπεριληφθεί η πιο πρόσφατη. Ο αριθμός των δεδομένων, που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του μέσου όρου, παραμένει σταθερός. Στόχος κάθε κινητού μέσου όρου είναι η εκτίμηση της τιμής της σειράς τάσης-κύκλου για κάθε παρατήρηση. Η εκτίμηση αυτή δύναται να πραγματοποιηθεί βάσει γειτονικών παρατηρήσεων.

Στην περίπτωση του απλού κινητού μέσου όρου (ΚΜΟ), ο υπολογισμός αφορά τον απλό μέσο όρο n τιμών της αρχικής χρονοσειράς γύρω από την παρατήρηση για την οποία ζητείται ο υπολογισμός της τάσης-κύκλου. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για όλες τις παρατηρήσεις, στις οποίες μπορεί να εφαρμοστεί, και έτσι, προκύπτει η σειρά τάσης-κύκλου.

Ο απλός κινητός μέσος όρος δίνεται από την μαθηματική σχέση:

$$F_{t+1}^n = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \dots + Y_{t-n}}{n} \quad (3.11)$$

όπου t : είναι η χρονική περίοδος

Y_t : η πραγματική τιμή της υπό μελέτη μεταβλητής Y την χρονική στιγμή t

F_{t+1} : η πρόβλεψη για την προσεχή περίοδο t

n : ο συνολικός αριθμός των περιόδων για τους οποίους θα υπολογισθεί ο κινητός μέσος όρος.

Η επιλογή του κατάλληλου μήκους n για τον υπολογισμό των κινητών μέσων όρων είναι καταλυτική, προκειμένου να επιτευχθεί η ζητούμενη εξομάλυνση. Δηλαδή, όσο μεγαλύτερο είναι το n , τόσο μεγαλύτερη είναι και η εξομάλυνση, αφού περισσότερες παρατηρήσεις συμμετέχουν στον υπολογισμό της κάθε παρατήρησης. Αντίστοιχα, μία πολύ μεγάλη τιμή του n , ουσιαστικά θα οδηγήσει σε υπολογισμό της μέσης τιμής της αρχικής χρονοσειράς, χωρίς την εμφανή διάκριση των συνιστωσών τάσης και κύκλου, με την παρουσία πολλών κενών τιμών στην αρχή και στο τέλος της σειράς τάσης-κύκλου. Τέλος, όταν η αρχική χρονοσειρά έχει έντονο το στοιχείο της εποχικότητας συνίσταται η εφαρμογή ενός κινητού μέσου όρου ίσου ή μεγαλύτερου του μήκους της εποχιακής περιодικότητας. Για παράδειγμα στην περίπτωση μίας εποχικής χρονοσειράς με ημερήσιες παρατηρήσεις (7 παρατηρήσεις κάθε εβδομάδα)

συνίσταται η χρήση του κινητού μέσου όρου μήκους $n = 7$. Θα πρέπει να σημειωθεί πως για να διατηρηθεί συμμετρία στους υπολογισμούς, πρέπει ο αριθμός n να είναι περιττός.

Η μέθοδος του απλού κινητού μέσου όρου είναι αρκετά απλή και ευκολονόητη και χρησιμοποιείται συνήθως όταν η ζήτηση για κάποιο προϊόν δεν αυξάνεται ή μειώνεται ραγδαία. Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι χρησιμοποιεί πολλές από τις προγενέστερες παρατηρήσεις. Παρόλα αυτά, συνδέεται και αυτή με αρκετά μειονεκτήματα. Αρχικά, η μέθοδος αυτή είναι διαμορφωμένη με τέτοιο τρόπο που αποδίδει την ίδια βαρύτητα σε κάθε παρατήρηση κατά την διαδικασία υπολογισμού της νέας παρατήρησης, κάτι το οποίο δεν είναι απόλυτα σωστό, μιας και όπως είναι λογικό, αναμένουμε τα πιο πρόσφατα δεδομένα να είναι πιο σχετικά με τις υπάρχουσες συνθήκες, επομένως και πιο χρήσιμα. Ένας ακόμη περιορισμός της μεθόδου είναι ότι ένας κινητός μέσος όρος n περιόδων προϋποθέτει την αποθήκευση $n-1$ τιμών κάθε φορά και την διατήρηση αυτών από περίοδο σε περίοδο. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να είναι αρκετά δύσκολο σε περίπτωση διαχείρισης μεγάλου όγκου δεδομένων, παραδείγματος χάρη, όπως μία επιχείρηση η οποία θα ήθελε για τον μεγάλο αριθμό προϊόντων που παράγει να υπολογίσει τον κινητό μέσο όρο 5 μηνών για κάθε ένα από αυτά.

Έτσι λοιπόν, προκειμένου να αποφύγουμε όλα τα παραπάνω, κρίνεται σημαντικό κάθε φορά που γίνεται χρήση του απλού κινητού μέσου όρου, να λαμβάνουμε υπόψη τα εξής:

- Διαφορετικοί κινητοί μέσοι όροι παράγουν διαφορετικές προβλέψεις.
- Επιτυγχάνουμε μεγαλύτερη εξομάλυνση στα δεδομένα, όταν συμπεριλαμβάνουμε περισσότερες περιόδους στον υπολογισμό του κινητού μέσου όρου.
- Σε περίπτωση όπου τα προγενέστερα δεδομένα παρουσιάζουν μία σταθερή τάση με σημαντική ταχύτητα, τότε θα πρέπει να επιλέξουμε μια μεγαλύτερη τιμή για το n . Αντίθετα, αν παρατηρηθεί αλλαγή στα δεδομένα, χρειάζεται μεγαλύτερη ταχύτητα ανταπόκρισης και άρα η τιμή του n να είναι μικρότερη.

Παράδειγμα 3.2. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μηνιαίες πωλήσεις μιας εταιρείας για ένα προϊόν που παράγει.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του απλού κινητού μέσου όρου 3 μηνών, για να υπολογίσουμε τις αναμενόμενες πωλήσεις, έχουμε:

$$F_4^3 = \frac{450 + 440 + 460}{3} = 450$$

$$F_5^3 = \frac{440 + 460 + 410}{3} = 436,667$$

$$F_6^3 = \frac{460 + 410 + 380}{3} = 416,667$$

$$F_7^3 = \frac{410 + 380 + 400}{3} = 396,667$$

$$F_8^3 = \frac{380 + 400 + 370}{3} = 383,334$$

Πίνακας 3.2: Πίνακας μηνιαίων πωλήσεων

Μήνας	Μηνιαίες Πωλήσεις
1	450
2	440
3	460
4	410
5	380
6	400
7	370
8	360
9	410
10	450
11	470
12	490
1	460

$$F_9^3 = \frac{400 + 370 + 360}{3} = 376,667$$

$$F_{10}^3 = \frac{370 + 360 + 410}{3} = 380$$

$$F_{11}^3 = \frac{360 + 410 + 450}{3} = 406,667$$

$$F_{12}^3 = \frac{410 + 450 + 470}{3} = 443,334$$

$$F_1^3 = \frac{450 + 470 + 490}{3} = 470$$

Με τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιούμε τον απλό κινητό μέσο όρο 6 μηνών για τον υπολογισμό των μηνιαίων πωλήσεων:

$$F_7^6 = \frac{450 + 440 + 460 + 410 + 380 + 400}{6} = 418,334$$

$$F_8^6 = \frac{440 + 460 + 410 + 380 + 400 + 370}{6} = 410$$

$$F_9^6 = \frac{460 + 410 + 380 + 400 + 370 + 360}{6} = 396,667$$

$$F_{10}^6 = \frac{410 + 380 + 400 + 370 + 360 + 410}{6} = 388,334$$

$$F_{11}^6 = \frac{380 + 400 + 370 + 360 + 410 + 450}{6} = 395$$

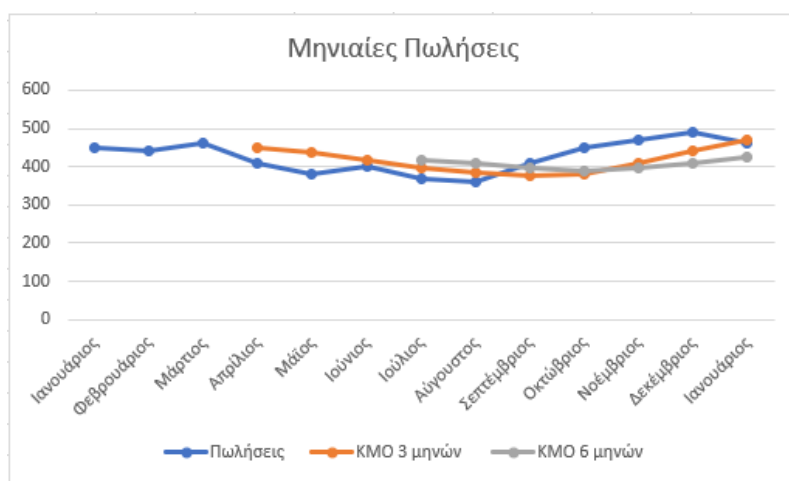
$$F_{12}^6 = \frac{400 + 370 + 360 + 410 + 450 + 470}{6} = 410$$

$$F_1^6 = \frac{370 + 360 + 410 + 450 + 470 + 490}{6} = 425$$

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, έχουμε τον συγκεντρωτικό πίνακα καθώς και το διάγραμμα.

Πίνακας 3.3: Πίνακας με ΚΜΟ 3 και 6 μηνών

Μήνας	Μηνιαίες Πωλήσεις	Πρόβλεψη ΚΜΟ 3 μηνών	Πρόβλεψη ΚΜΟ 6 μηνών
1	450	-	-
2	440	-	-
3	460	-	-
4	410	450	-
5	380	436,667	-
6	400	416,667	-
7	370	396,667	418,334
8	360	383,334	410
9	410	376,667	396,667
10	450	380	388,334
11	470	406,667	395
12	490	443,334	410
1	460	470	425



Σχήμα 3.1: Μηνιαίες πωλήσεις και προβλέψεις με ΚΜΟ

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα της διαδικασίας, θα λέγαμε πως οι εκτιμήσεις του απλού κινητού μέσου όρου 3 μηνών δίνουν αποτελέσματα πιο κοντά στις πραγματικές τιμές απ' ό,τι η μέθοδος του απλού κινητού μέσου όρου 6 μηνών.

3.3 Σταθμισμένος Κινητός Μέσος Όρος

Ο σταθμισμένος κινητός μέσος όρος (ΣΚΜΟ) είναι μία παραλλαγή του απλού κινητού μέσου όρου, όπου οι γειτονικές παρατηρήσεις μπορούν να συμμετέχουν στον υπολογισμό της σειράς τάσης-κύκλου με άνισα βάρη. Τα άνισα αυτά βάρη θα πρέπει να έχουν άθροισμα ίσο με τη μονάδα και συνήθως:

1. δίνεται μεγαλύτερο βάρος στις παρατηρήσεις που γειτνιάζουν σε μεγάλο βαθμό με την τρέχουσα παρατήρηση και μικρότερο βαθμό στις πιο μακρινές παρατηρήσεις.
2. επιλέγονται ώστε να είναι συμμετρικά ως προς την τρέχουσα παρατήρηση.

Ο μαθηματικός τύπος του σταθμισμένου κινητού μέσου όρου δίνεται από την σχέση:

$$F_{t+1} = \sum_t w_t Y_t \quad (3.12)$$

με

$$\sum_t w_t = 1$$

όπου t : είναι η χρονική περίοδος

Y_t : η πραγματική τιμή της υπό μελέτη μεταβλητής Y την χρονική στιγμή t

F_{t+1} : η πρόβλεψη για την προσεχή περίοδο t

n : ο συνολικός αριθμός των περιόδων για τους οποίους θα υπολογισθεί ο κινητός μέσος όρος.

w_t : η στάθμιση που αποδίδεται στην πραγματική τιμή της περιόδου t .

Κύριο ερώτημα για την εφαρμογή αυτής της μεθόδου είναι η τιμή που θα πρέπει να αποδοθούν στα βάρη. Η απλούστερη τακτική που μπορεί να ακολουθήσει ο ερευνητής, ο οποίος θέτει σε εφαρμογή τη μέθοδο αυτή, είναι να βασιστεί στην εμπειρία, το ένστικτο και τις δοκιμές και τα σφάλματα. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, οι παρατηρήσεις που βρίσκονται πιο κοντά στο παρόν ενδεχομένως να έχουν μεγαλύτερη επιρροή στην μελλοντική μας πρόβλεψη. Επομένως, σε αντίστοιχες παρατηρήσεις θα πρέπει να δίνεται μεγαλύτερο βάρος. Η συγκεκριμένη τακτική δεν θα πρέπει να αποτελεί κανόνα, καθώς υπάρχουν και περιπτώσεις στις οποίες κάτι τέτοιο δεν θα επιφέρει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, αν αναλογιστούμε μία επιχείρηση, η οποία παράγει παγωτά, προκειμένου να κάνει μία πρόβλεψη των πωλήσεων του επόμενου έτους, θα ήταν πιο σωστό να λάβει υπόψη της, τις πωλήσεις των μηνών που επηρεάζουν άμεσα την ζήτηση - κατανάλωση, όπως πχ, τους καλοκαιρινούς και όχι απαραίτητα τον πιο πρόσφατο παρελθοντικό μήνα, του οποίου οι πωλήσεις δεν θα έχουν το ίδιο αποτέλεσμα στην πρόβλεψη.

Η μέθοδος του σταθμισμένου κινητού μέσου όρου θα λέγαμε ότι είναι η καλύτερη σε σχέση με τον απλό κινητό μέσο όρο, καθώς καταλήγει σε μία πιο εξομαλυμένη σειρά τάσης-κύκλου.

Παράδειγμα 3.3. Ένα κατάστημα οικιακών συσκευών καταγράφει τις πωλήσεις του ανά μήνα. Διαπιστώθηκε πως η καλύτερη πρόβλεψη των μελλοντικών πωλήσεων επιτυγχάνεται

όταν λιάθουν υπόψη το 40% των πραγματικών πωλήσεων για τον πιο πρόσφατο μήνα, το 30% για δύο μήνες, το 20% για τρεις μήνες και το 10% για τέσσερις μήνες.

Οι μηνιαίες πωλήσεις για 4 μήνες φαίνονται στον πίνακα 3.4.

Πίνακας 3.4: Πίνακας μηνιαίων πωλήσεων

Μήνας	Πωλήσεις
1	100
2	90
3	105
4	95

Με βάση τα παραπάνω, θα υπολογιστούν οι πωλήσεις για τον 5^ο μήνα. Επομένως, έχουμε:

$$F_5 = 0,40 * 95 + 0,30 * 105 + 0,20 * 90 + 0,10 * 100 = 97,5$$

Έστω ότι οι πραγματικές πωλήσεις του 5^{ου} μήνα ήταν 110. Τότε, η πρόβλεψη για τον 6^ο μήνα θα είναι η εξής:

$$F_6 = 0,40 * 110 + 0,30 * 95 + 0,20 * 105 + 0,10 * 90 = 102,5$$

3.4 Διπλός Κινητός Μέσος Όρος

Ο διπλός κινητός μέσος όρος χρησιμοποιείται συνήθως σε χρονοσειρές που διαθέτουν γραμμική τάση και είναι χρήσιμοι για να προβλέψουμε νέους όρους στις χρονοσειρές αυτές. Ο διπλός κινητός μέσος όρος ουσιαστικά αναφέρεται σε διπλή εφαρμογή του απλού κινητού μέσου όρου με ίσα ή άνισα μήκη ($n \times m$). Με την χρήση αυτής της μεθόδου καταλήγουμε σε διπλή εξομάλυνση, αλλά σε περισσότερες κενές τιμές απ' ότι στην περίπτωση του απλού κινητού μέσου όρου. Στην ουσία θα λέγαμε πως η μέθοδος του διπλού κινητού μέσου όρου συμπίπτει με την εφαρμογή του σταθμισμένου κινητού μέσου όρου για συγκεκριμένα βάρη.

Η διαδικασία υπολογισμού του διπλού κινητού μέσου όρου ξεκινάει με τον υπολογισμό του απλού κινητού μέσου όρου χρησιμοποιώντας τον τύπο αυτού.

$$F_{t+1}^n = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \dots + Y_{t-n}}{n} \quad (3.13)$$

Στη συνέχεια γίνεται ξανά εφαρμογή ενός ίδιου τύπου, αλλά τώρα χρησιμοποιώντας τις τιμές F_{t+1}^n για κάθε τιμή του n . Οπότε,

$$M_{t+1}^n = \frac{F_{t+1}^n + F_t^n + F_{t-1}^n \dots + F_{t-n}^n}{n} \quad (3.14)$$

Παράδειγμα 3.4. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι τριμηνιαίες πωλήσεις μιας επιχείρησης για δύο έτη. Με βάση τις μεθόδους κινητών μέσων όρων που έχουμε αναλύσει μέχρι στιγμής θα υπολογίσουμε τον απλό κινητό μέσο όρο τριών μηνών, τον σταθμισμένο κινητό μέσο όρο τριών μηνών με βάρη 0.1 , 0.2 και 0.4 διπλό κινητό μέσο όρο μήκους 3×3. Στον παρακάτω πίνακα έχουμε:

Πίνακας 3.5: Πίνακας τριμηνιαίων πωλήσεων

Τρίμηνα	Πωλήσεις
1	210
2	330
3	560
4	450
5	230
6	300
7	610
8	380

Για τον υπολογισμό κινητού μέσου όρου 3 μηνών έχουμε:

$$F_4^3 = \frac{210 + 330 + 560}{3} = 367$$

$$F_5^3 = \frac{330 + 560 + 450}{3} = 447$$

$$F_6^3 = \frac{560 + 450 + 230}{3} = 413$$

$$F_7^3 = \frac{450 + 230 + 300}{3} = 327$$

$$F_8^3 = \frac{230 + 300 + 610}{3} = 380$$

Για τον υπολογισμό του σταθμισμένου κινητού μέσου όρου 3 μηνών με βάρη έχουμε:

$$F_4 = 0.1 * 210 + 0.2 * 330 + 0.4 * 560 = 311$$

$$F_5 = 0.1 * 330 + 0.2 * 560 + 0.4 * 450 = 325$$

$$F_6 = 0.1 * 560 + 0.2 * 450 + 0.4 * 230 = 238$$

$$F_7 = 0.1 * 450 + 0.2 * 230 + 0.4 * 300 = 211$$

$$F_8 = 0.1 * 230 + 0.2 * 300 + 0.4 * 610 = 327$$

Για τον διπλό κινητό μέσο όρο 3×3 έχουμε:

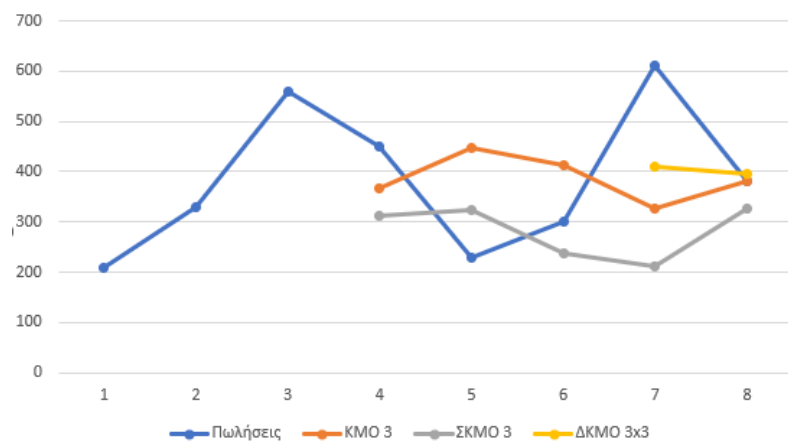
$$M_7^3 = \frac{367 + 447 + 413}{3} = 409$$

$$F_5^3 = \frac{447 + 413 + 327}{3} = 396$$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ο συνολικός πίνακας:

Πίνακας 3.6: Πίνακας τριμηνιαίων πωλήσεων

Τρίμηνα	Πωλήσεις	ΚΜΟ 3	ΣΚΜΟ 3	ΔΚΜΟ 3x3
1	210	-	-	-
2	330	-	-	-
3	560	-	-	-
4	450	367	311	-
5	230	447	325	-
6	300	413	238	-
7	610	327	211	409
8	380	380	327	396



Σχήμα 3.2: Τριμηνιαίες πωλήσεις και προβλέψεις

Κεφάλαιο 4

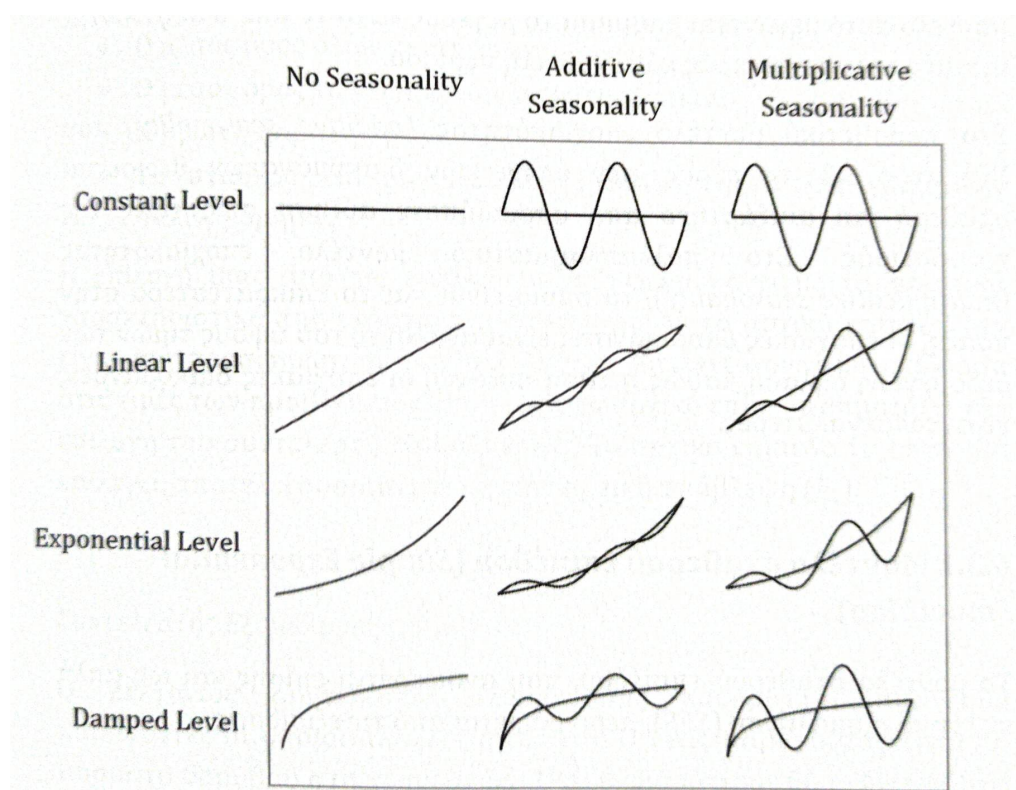
Εκθετική Εξομάλυνση

Οι μέθοδοι εκθετικής εξομάλυνσης αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά στις αρχές της δεκαετίας του 1950. Παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά κατά τη διάρκεια του 2ου Παγκοσμίου Πολέμου, ενώ άρχισαν να γίνονται ευρέως γνωστές με την επανάσταση της πληροφορικής τη δεκαετία του 1960. Από την πρώτη τους εφαρμογή και έκτοτε, έγιναν από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους πρόβλεψης, μεταξύ των επιχειρηματιών, κυρίως της ευκολίας τους, της ελάχιστης απαίτησης σε υπολογιστικό χρόνο αλλά και της απαίτησης σχετικά λίγων παρατηρήσεων προκειμένου να παράγουν προβλέψεις. Έπειτα από μελέτες που έχουν γίνει, διαπιστώθηκε πως οι μέθοδοι εκθετικής εξομάλυνσης παρουσιάζουν ικανοποιητικά ποσοστά ακρίβειας σε σύγκριση με πιο πολύπλοκες μεθόδους πρόβλεψης. Αυτό στηρίζεται στο γεγονός ότι οι μέθοδοι εκθετικής εξομάλυνσης δεν επηρεάζονται από ιδιομορφίες των προτύπων των δεδομένων ή από ακραίες τιμές δεδομένων, οι οποίες μπορεί να εμφανίζονται περιστασιακά, κυρίως σε επιχειρησιακά δεδομένα.

Η εκθετική εξομάλυνση είναι μία μέθοδος πρόβλεψης, η οποία προεκτείνει στοιχεία του προτύπου των ιστορικών δεδομένων, όπως τάσεις και εποχιακούς κύκλους στο μέλλον. Η διαδικασία της μεθόδου ξεκινάει με την εξομάλυνση των δεδομένων, έτσι ώστε να απομονωθούν τα πραγματικά πρότυπα από τις καθαρά τυχαίες κυμάνσεις και έτσι λοιπόν γίνεται ο υπολογισμός των προβλέψεων. Πρόκειται στην ουσία για μία μέθοδο που αποτελεί προέκταση των μεθόδων των κινητών μέσων όρων, αλλά στην προκειμένη περίπτωση δίνεται περισσότερη έμφαση σε όσο το δυνατόν πιο πρόσφατα δεδομένα μιας και υποστηρίζεται ότι αυτά θα περιέχουν όσο το δυνατόν περισσότερη πληροφορία. Για τον λόγο αυτό αποδίδεται μεγαλύτερη βαρύτητα στα πιο πρόσφατα δεδομένα και φθίνει εκθετικά καθώς αναφερόμαστε σε δεδομένα από παλαιότερες χρονικές περιόδους. Οι μέθοδοι εξομάλυνσης είναι κατάλληλες κυρίως για βραχυπρόθεσμες και μακροπρόθεσμες προβλέψεις μεγάλου όγκου χρονοσειρών και αποδίδουν καλύτερα σε δεδομένα που παρουσιάζουν στασιμότητα ή μικρό ρυθμό ανάπτυξης. Στις πιο γνωστές μεθόδους εξομάλυνσης, συμπεριλαμβάνονται η απλή εκθετική εξομάλυνση (simple exponential smoothing), η εκθετική εξομάλυνση γραμμικής τάσης (Holt exponential smoothing), η εκθετική εξομάλυνση μη γραμμικής ή φθίνουσας τάσης (Damped exponential smoothing) και η εποχιακή εξομάλυνση.

Υπάρχουν ποικίλα μοντέλα εξομάλυνσης και κατηγοριοποιούνται ανάλογα με την γενική μορφή της γραφικής παράστασης των ιστορικών δεδομένων με οριζόντιο άξονα τον χρόνο. Στο

παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται 4 μοντέλα τάσης σε συνδυασμό με 3 εποχιακά μοντέλα. Η κατηγοριοποίηση αυτή αποτελεί μία επέκταση της κατηγοριοποίησης κατά Pegel(1969).



Σχήμα 4.1: Τύποι Μοντέλων Εξομάλυνσης

Στο μοντέλο σταθερού επιπέδου (constant level) σημειώνεται η έλλειψη τάσης στα δεδομένα. Η πρόβλεψη στα συγκεκριμένα μοντέλα προκύπτει από την προέκταση μίας οριζόντιας ευθείας γραμμής, μιας και οι χρονοσειρές θεωρείται ότι έχουν έναν σχετικά σταθερό μέσο όρο. Χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις όπου οι χρονοσειρές χαρακτηρίζονται από τυχαιότητα.

Το μοντέλο γραμμικής τάσης (linear level) είναι ευρέως το πιο δημοφιλές και σε αυτό οι προβλέψεις προκύπτουν από την προέκταση μίας ευθείας γραμμής για οποιαδήποτε χρονική περίοδο στο μέλλον. Υπάρχουν περιπτώσεις όμως, στις οποίες η εφαρμογή αυτού του μοντέλου δεν είναι η ιδανική. Για παράδειγμα, αν σκεφτούμε ένα νέο προϊόν που έχει μόλις κυκλοφορήσει στην αγορά, τείνει να έχει ανοδικές πωλήσεις συνεχώς. Επομένως, για μία αντίστοιχη περίπτωση, είναι πιο συνετό να γίνει χρήση του μοντέλου εκθετικής τάσης (exponential level). Καθώς όμως, έπειτα από μελέτες διαπιστώθηκε ότι τα γραμμικά και τα εκθετικά μοντέλα είναι υπεραισιόδοξα και οδηγούν σε υψηλές τιμές πρόβλεψης, συνιστάται η χρήση του μοντέλου της φθίνουσας τάσης (damped level) ειδικά για περιπτώσεις μακροπρόθεσμων και μεσοπρόθεσμων προβλέψεων. Με τη χρήση αυτού του μοντέλου μειώνεται σημαντικά το μέγεθος κατά το οποίο αυξάνονται οι τιμές της χρονοσειράς κάθε χρονική περίοδο.

Προχωρώντας στα εποχιακά μοντέλα, στο προσθετικό μοντέλο εποχικότητας (additive seasonality), το εύρος των εποχιακών διακυμάνσεων θεωρείται σταθερό και ανεξάρτητο από οποιαδήποτε αύξηση στις τιμές της χρονοσειράς. Στο πολλαπλασιαστικό μοντέλο εποχικότητας (multiplicative seasonality), το οποίο είναι το επικρατέστερο στην πράξη, οι εποχιακές διακυμάνσεις είναι ανάλογες του ύψους τιμών των δεδομένων, δηλαδή καθώς η τάση αυξάνει, οι εποχιακές διακυμάνσεις γίνονται μεγαλύτερες.

4.1 Απλή Εκθετική Εξομάλυνση

Όπως έχουμε αναφέρει αρκετές φορές, στις περισσότερες μεθόδους, εξέχουσα θέση έχουν τα πιο πρόσφατα δεδομένα σχετικά με την μεταβλητή ενδιαφέροντος, καθώς θεωρείται πως είναι περισσότερο ενδεικτικά για το μέλλον απ' ό,τι αυτά στο μακρινό παρελθόν. Έτσι λοιπόν, κάθε φορά που λαμβάνουμε μία νέα πληροφορία, η πιο παλιά απομονώνεται και έτσι υπολογίζεται η νέα πρόβλεψη. Η μέθοδος εκθετικής εξομάλυνσης αποδεικνύεται να είναι η καταλληλότερη και η πιο εύχρηστη σε αντίστοιχες περιπτώσεις.

Ο όρος "εκθετική εξομάλυνση" προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε προσαύξηση στο παρελθόν μειώνεται κατά $(1 - a)$, όπου η παράμετρος a ονομάζεται συντελεστής εξομάλυνσης της μεθόδου και λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$. Η μέθοδος εκθετικής εξομάλυνσης θα λέγαμε ότι μοιάζει αρκετά με έναν σταθμισμένο κινητό μέσο όρο, βάσει του οποίου η νέα πρόβλεψη ισούται με το άθροισμα της προηγούμενης και ενός ποσοστού σφάλματος πρόβλεψης. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος εκθετικής εξομάλυνσης περιγράφεται από την μαθηματική σχέση:

$$F_{t+1} = aY_t + (1 - a)F_t \quad (4.1)$$

$$e_t = Y_t - F_t \quad (4.2)$$

όπου t : είναι η χρονική περίοδος

Y_t : η πραγματική τιμή της υπό μελέτη μεταβλητής Y την χρονική στιγμή t

F_{t+1} : η πρόβλεψη για την προσεχή περίοδο $t+1$

F_t : η πρόβλεψη για την χρονική περίοδο t

a : ο συντελεστής εξομάλυνσης

e_t : το σφάλμα, δηλαδή η απόκλιση της πραγματικής τιμής από την πρόβλεψη.

Παρατηρούμε πως η πρόβλεψη αποτελεί ένα γραμμικό συνδυασμό της προηγούμενης παρατήρησης και της προηγούμενης πρόβλεψης, με βάρη που καθορίζονται από τον συντελεστή εξομάλυνσης. Κοιτώντας την σχέση 4.1, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως θα πρέπει να ορίσουμε ένα αρχικό επίπεδο Y_0 , προκειμένου να ξεκινήσει η διαδικασία υπολογισμού του μοντέλου πρόβλεψης. Συνήθως, ως αρχικό επίπεδο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί:

1. Ο μέσος όρος όλων των παρατηρήσεων.

2. Ο μέσος όρος των n πρώτων παρατηρήσεων.
3. Η πρώτη παρατήρηση.

Η επιλογή μίας από αυτές τις εναλλακτικές έχει να κάνει με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της εκάστοτε χρονοσειράς. Ο καθορισμός αυτής της τιμής είναι αρκετά σημαντικός, καθώς αν το αρχικό επίπεδο δεν έχει τιμή, η οποία να είναι αντιπροσωπευτική των δεδομένων, τότε αυτό μπορεί να έχει αρνητική επίδραση στις τιμές των προβλέψεων. Ουσιαστικά, η επιλογή αυτή αποτελεί και την αρχική πρόβλεψη F_1 .

Όπως αναφερθήκαμε και στην αρχή της ενότητας αυτής, η σταθερά εξομάλυνσης μπορεί να πάρει τιμές μεταξύ 0 και 1. Ο βέλτιστος συντελεστής εξομάλυνσης καθορίζεται από δύο παράγοντες. Ο ένας είναι το ποσοστό θορύβου στη χρονοσειρά. Όσο περισσότερος θόρυβος υπάρχει στα δεδομένα της χρονοσειράς, τόσο μικρότερη πρέπει να είναι η τιμή του συντελεστή εξομάλυνσης. Ο άλλος παράγοντας είναι η σταθερότητα του μέσου όρου της χρονοσειράς. Δηλαδή, αν ο μέσος όρος μεταβάλλεται, τότε η σταθερά εξομάλυνσης θα πρέπει να είναι μεγάλη ώστε οι προβλέψεις να παρακολουθούν τις μεταβολές που παρουσιάζουν τα δεδομένα. Από την άλλη μεριά, αν ο μέσος όρος είναι σχετικά σταθερός, τότε η τιμή της σταθεράς θα είναι μικρή. Θα λέγαμε πως όσο πιο κοντά στη μονάδα βρίσκεται η τιμή της σταθεράς εξομάλυνσης, τόσο μεγαλύτερη είναι η εξάρτηση της πρόβλεψης από τις τρέχουσες συνθήκες. Ενώ όσο πιο κοντά στο μηδέν, τόσο πιο αμετάβλητη είναι η πρόβλεψη.

Η εύρεση αυτής της βέλτιστης τιμής του συντελεστή εξομάλυνσης είναι μία διαδικασία η οποία πραγματοποιείται από σύγχρονα υπολογιστικά συστήματα. Η πιο διαδεδομένη μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της βέλτιστης παραμέτρου εξομάλυνσης είναι η γραμμική αναζήτηση αυτής, η οποία ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE). Ένας άλλος τρόπος εύρεσης αυτής της βέλτιστης τιμής είναι να θέσουμε δύο τιμές, όχι πολύ μακρινές η μία από την άλλη, στον συντελεστή εξομάλυνσης a και για τις δύο αυτές τιμές να υπολογίσουμε το σφάλμα, και με βάση αυτό να επιλέξουμε την καλύτερη από αυτές τις δύο τιμή. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το σφάλμα για τιμές οι οποίες είναι πολύ μικρές προσαυξήσεις του ήδη επιλεχθέντος a και πάλι καταλήγουμε ποια από αυτές τις δύο είναι η καλύτερη. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι η μεταβολή του σφάλματος να γίνει μικρότερη από 1%, μειώνοντας σταδιακά τις τιμές που επιλέγουμε για προσαυξήσεις γύρω από το a . Παρόλα αυτά, έχει αποδειχθεί ότι για $a \in [0.1, 0.3]$ η μέθοδος δίνει καλύτερες προβλέψεις.

Θα πρέπει να σημειωθεί πως το σφάλμα δεν υπολογίζεται μονάχα για την εύρεση του συντελεστή εξομάλυνσης, αλλά υπολογίζεται ανεξάρτητα από αυτή την διαδικασία για κάθε τιμή της χρονοσειράς, ώστε να έχουμε μία ιδέα για την πρόβλεψη. Στην περίπτωση όπου το σφάλμα βγει θετικό (δηλαδή η προηγούμενη πρόβλεψη είναι μικρότερη της πραγματικής τιμής), τότε η πρόβλεψη για την επόμενη χρονική περίοδο αυξάνεται. Όταν το σφάλμα βγει αρνητικό (δηλαδή η προηγούμενη πρόβλεψη είναι μεγαλύτερη της πραγματικής τιμής), τότε

η πρόβλεψη για την επόμενη χρονική περίοδο μειώνεται. Συνοψίζοντας, τα βασικά στοιχεία που χαρακτηρίζουν την μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης είναι τα εξής:

- Στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα.
- Απαιτείται ελάχιστος αποθηκευτικός χώρος, καθώς στη μέθοδο χρησιμοποιούνται η τελευταία πρόβλεψη, η πρόσφατη πραγματική τιμή της μεταβλητής και ο συντελεστής εξομάλυνσης.
- Η εύρεση της τιμής του συντελεστή εξομάλυνσης γίνεται μέσω μίας διαδικασίας δοκιμών και ο ερευνητής είναι σε θέση να επιλέξει την τιμή εκείνη, η οποία δίνει το μικρότερο σφάλμα.
- Η μέθοδος προσαρμόζεται συνεχώς στα νέα δεδομένα για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται σε αρκετούς κλάδους, ειδικά σε εκείνους που προκύπτουν νέα δεδομένα συνεχώς.

Παράδειγμα 4.5. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα δεδομένα της χρονοσειράς, τα οποία είναι οι ετήσιες πωλήσεις μίας επιχείρησης (σε χιλιάδες) για μία περίοδο 11 μηνών.

Πίνακας 4.1: Πίνακας ετήσιων πωλήσεων

Περίοδος	Δεδομένα Y_t
1	545
2	635
3	420
4	716
5	699
6	681
7	763
8	778
9	690
10	707
11	716

Παρατηρούμε πως στα δεδομένα Y_t των πραγματικών τιμών μία τάση στις 4 πρώτες περιόδους. Συνεπώς, για την επιλογή του αρχικού επιπέδου F_1 , θα επιλεγεί ο μέσος όρος των τεσσάρων αυτών τιμών.

Έχουμε:

$$F_1 = \frac{545 + 635 + 420 + 716}{4} = 579$$

Αυθαίρετα επιλέγουμε ως συντελεστή εξομάλυνσης για $\alpha = 0.3$.
Για τον υπολογισμό των προβλέψεων έχουμε:

$$F2 = 0.3 * 545 + (1 - 0.3) * 579 = 541.5$$

$$F3 = 0.3 * 635 + (1 - 0.3) * 541.5 = 569.6$$

$$F4 = 0.3 * 420 + (1 - 0.3) * 569.6 = 524.7$$

$$F5 = 0.3 * 716 + (1 - 0.3) * 524.7 = 582$$

$$F6 = 0.3 * 699 + (1 - 0.3) * 582 = 617.1$$

$$F7 = 0.3 * 681 + (1 - 0.3) * 617.1 = 636.3$$

$$F8 = 0.3 * 763 + (1 - 0.3) * 636.3 = 674.3$$

$$F9 = 0.3 * 778 + (1 - 0.3) * 674.3 = 705.4$$

$$F10 = 0.3 * 690 + (1 - 0.3) * 705.4 = 700.8$$

$$F11 = 0.3 * 707 + (1 - 0.3) * 700.8 = 702.7$$

$$F12 = 0.3 * 716 + (1 - 0.3) * 702.7 = 706.7$$

Θα εξετάσουμε και την εφαρμογή του μοντέλου για συντελεστή εξομάλυνσης $a = 0.7$.

$$F2 = 0.7 * 545 + (1 - 0.7) * 579 = 555.2$$

$$F3 = 0.7 * 635 + (1 - 0.7) * 555.2 = 611$$

$$F4 = 0.7 * 420 + (1 - 0.7) * 611 = 477.3$$

$$F5 = 0.7 * 716 + (1 - 0.7) * 477.3 = 644.4$$

$$F6 = 0.7 * 699 + (1 - 0.7) * 644.4 = 682.6$$

$$F7 = 0.7 * 681 + (1 - 0.7) * 682.6 = 676.4$$

$$F8 = 0.7 * 763 + (1 - 0.7) * 676.4 = 737$$

$$F9 = 0.7 * 778 + (1 - 0.7) * 737 = 765.7$$

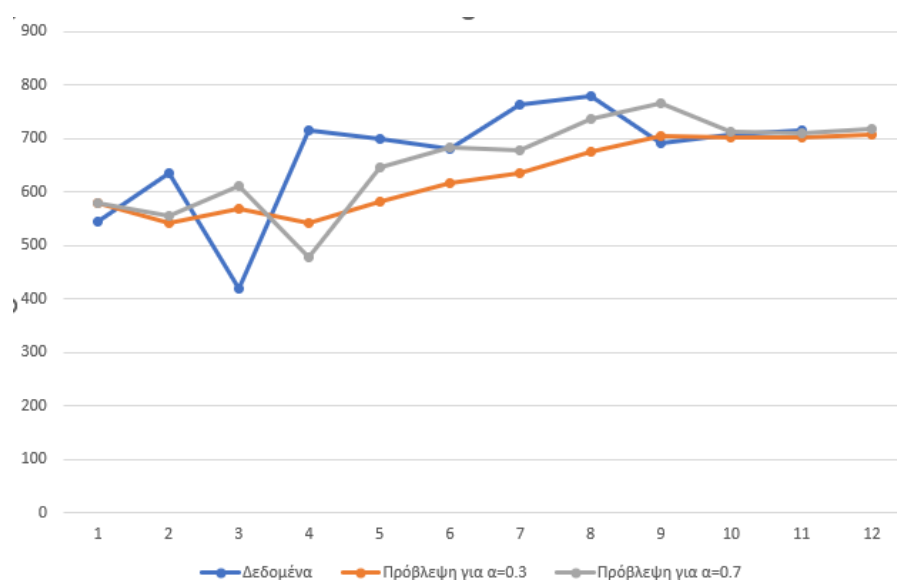
$$F10 = 0.7 * 690 + (1 - 0.7) * 765.7 = 712.7$$

$$F11 = 0.7 * 707 + (1 - 0.7) * 712.7 = 708.7$$

$$F12 = 0.7 * 716 + (1 - 0.7) * 708.7 = 713.8$$

Πίνακας 4.2: Πίνακας ετήσιων πωλήσεων

Περίοδος	Δεδομένα Υt	Πρόβλεψη (για $\alpha=0.3$)	Πρόβλεψη (για $\alpha=0.7$)
1	545	579	579
2	635	541.5	555.2
3	420	569.6	611
4	716	524.7	477.3
5	699	582	644.4
6	681	617.1	682.6
7	763	636.3	676.4
8	778	674.3	737
9	690	705.4	765.7
10	707	700.8	712.7
11	716	702.7	708.7
12	-	706.7	713.8



Σχήμα 4.2: Ετήσιες πωλήσεις και προβλέψεις

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και από το διάγραμμα 4.2, οι προβλέψεις με συντελεστή εξομάλυνσης $\alpha = 0.7$ τείνουν να δίνουν τιμές πιο κοντά στις πραγματικές.

4.2 Εκθετική Εξομάλυνση Για Γραμμική Τάση

Το μοντέλο εξομάλυνσης για γραμμική τάση είναι μία επέκταση της μεθόδου της απλής εκθετικής εξομάλυνσης, η οποία μπορεί επιπρόσθετα να διαχειριστεί τη συνιστώσα της τάσης που εμφανίζεται συχνά στα επιχειρησιακά δεδομένα. Η μέθοδος εκθετικής εξομάλυνσης για γραμμική τάση είναι γνωστή και ως μέθοδος Holt, το όνομα της οποίας προέρχεται από τον ίδιο τον Holt το 1957.

Σε σύγκριση με την απλή μέθοδο εκθετικής εξομάλυνσης, η μέθοδος Holt διαθέτει δύο παραμέτρους εξομάλυνσης, την παράμετρο a για την εξομάλυνση των τιμών της χρονοσειράς και την παράμετρο β για την εξομάλυνση της τάσης. Έτσι λοιπόν, προκύπτουν δύο εξισώσεις εξομάλυνσης και μία εξίσωση για την τελική πρόβλεψη.

Η μαθηματική εξίσωση που περιγράφει την εξομάλυνση των παρατηρήσεων της χρονοσειράς δίνεται ως:

$$L_t = aY_t + (1 - a)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad (4.3)$$

όπου t : είναι η χρονική περίοδος

Y_t : η πραγματική τιμή την χρονική στιγμή t

T_t : η εκτίμηση της γραμμικής τάσης για την προσεχή περίοδο t

L_t : η εξομαλυνθείσα τιμή της χρονοσειράς

a : ο συντελεστής εξομάλυνσης των τιμών της χρονοσειράς.

Στη συνέχεια παραθέτουμε την μαθηματική σχέση που περιγράφει το επόμενο στάδιο της διαδικασίας, το οποίο είναι η εξομάλυνση της γραμμικής τάσης:

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \quad (4.4)$$

όπου β : ο συντελεστής εξομάλυνσης της γραμμικής τάσης και οι υπόλοιπες μεταβλητές όπως παρουσιάστηκαν προηγουμένως.

Τέλος, για την εξαγωγή προβλέψεων έχουμε τη σχέση:

$$F_t = L_{t-1} + T_{t-1} \quad (4.5)$$

Σημειώνεται πως και οι δύο συντελεστές εξομάλυνσης a και β λαμβάνουν τιμές στο διάστημα $[0, 1]$.

Βάσει διαδικασίας για τον υπολογισμό των προβλέψεων, θα πρέπει να ορίσουμε τις αρχικές τιμές για το πρώτο επίπεδο εξομάλυνσης καθώς και για την αρχική τάση, προκειμένου

να ξεκινήσει η διαδικασία υπολογισμού του μοντέλου πρόβλεψης. Το αρχικό επίπεδο υπολογίζεται όπως και στην απλή εκθετική εξομάλυνση. Ως αρχική τάση, συνήθως, χρησιμοποιείται:

1. Η διαφορά δεύτερης και πρώτης παρατήρησης ($Y_2 - Y_1$).
2. Η διαφορά n -οστής και πρώτης παρατήρησης διαιρεμένης με $n-1$.

Θα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί κατά τη διαδικασία επιλογής αρχικών τιμών, καθώς οι τιμές αυτές θα επηρεάσουν το μοντέλο πρόβλεψης και κατ' επέκταση τις σημειακές προβλέψεις.

Όσον αφορά την διαδικασία επιλογής των τιμών των συντελεστών εξομάλυνσης ακολουθείται η ίδια διαδικασία που χρησιμοποιείται στην απλή εκθετική εξομάλυνση, μόνο που στην προκειμένη περίπτωση αντί να έχουμε μόνο τον συντελεστή α , έχουμε και τον συντελεστή β . Συνήθως, η βέλτιστη τιμή του συντελεστή β για την τάση είναι μικρότερη από την τιμή του συντελεστή α για το επίπεδο. Ο λόγος είναι πως η τιμή της τάσης για κάθε περίοδο είναι συνήθως πολύ μικρότερη από την τιμή του επιπέδου.

Παράδειγμα 4.6. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μηνιαίες πωλήσεις σε χιλιάδες του προηγούμενου έτους μίας εταιρείας προϊόντων υγιεινής.

Πίνακας 4.3: Πίνακας μηνιαίων πωλήσεων

Μήνας	Πωλήσεις Y_t
1	540
2	464
3	520
4	590
5	648
6	690
7	730
8	650
9	795
10	800
11	846
12	850

Παρατηρώντας τα δεδομένα του πίνακα αντιλαμβανόμαστε την ύπαρξη μίας αύξουσας γραμμικής τάσης, πράγμα το οποίο σημαίνει πως με την πάροδο του χρόνου οι καταναλωτές

αυξάνονται πιθανόν από μία επιτυχημένη διαφημιστική καμπάνια. Θα εφαρμόσουμε λοιπόν, την μέθοδο Holt για $\alpha = 0.3$ και $\beta = 0.25$.

Για την δήλωση των αρχικών τιμών, η εξομαλυνθείσα πρόβλεψη για τον πρώτο μήνα (Ιανουάριο) εξισώνεται με τις πραγματικές πωλήσεις του μήνα αυτού, επομένως, $L_1 = 540$. Για την γραμμική τάση θα χρησιμοποιήσουμε τις διαφορές μεταξύ των παρατηρήσεων, επομένως έχουμε:

$$T_1 = \frac{(464 - 540) + (520 - 464) + (590 - 520) + \dots + (850 - 846)}{11} \Leftrightarrow T_1 = \frac{310}{11} = 28.18$$

Επομένως, με την χρήση των μαθηματικών εξισώσεων έχουμε:

$$L_2 = 0.30 * 464 + 0.70(540 + 28.18) = 536.9$$

$$T_2 = 0.25 * (563.9 - 540) + 0.75 * 28.18 = 20.36$$

$$F_2 = 540 + 28.18 = 568.18$$

$$L_3 = 0.30 * 520 + 0.70(536.9 + 20.36) = 546$$

$$T_3 = 0.25 * (546 - 536.9) + 0.75 * 20.36 = 17.55$$

$$F_3 = 536.9 + 20.36 = 557.26$$

$$L_4 = 0.30 * 590 + 0.70(546 + 17.55) = 571.5$$

$$T_4 = 0.25 * (571.5 - 546) + 0.75 * 17.55 = 19.54$$

$$F_4 = 546 + 17.55 = 560.55$$

$$L_5 = 0.30 * 648 + 0.70(571.5 + 19.54) = 608$$

$$T_5 = 0.25 * (608 - 571.5) + 0.75 * 19.54 = 23.78$$

$$F_5 = 571.5 + 19.54 = 591.04$$

$$L_6 = 0.30 * 690 + 0.70(608 + 23.78) = 650$$

$$T_6 = 0.25 * (650 - 608) + 0.75 * 23.78 = 28.34$$

$$F_6 = 608 + 23.78 = 631.78$$

$$L_7 = 0.30 * 730 + 0.70(650 + 28.34) = 693.8$$

$$T_7 = 0.25 * (693.8 - 650) + 0.75 * 28.34 = 23.44$$

$$F_7 = 650 + 28.34 = 678.34$$

$$L_8 = 0.30 * 650 + 0.70(693.8 + 23.44) = 697$$

$$T_8 = 0.25 * (697.8 - 693.8) + 0.75 * 23.44 = 18.38$$

$$F_8 = 693.8 + 23.44 = 717.24$$

$$L_9 = 0.30 * 795 + 0.70(697 + 18.38) = 739.2$$

$$T_9 = 0.25 * (739.2 - 697) + 0.75 * 18.38 = 24.33$$

$$F_9 = 697 + 18.38 = 715.38$$

$$L_{10} = 0.30 * 800 + 0.70(739.2 + 24.33) = 774.5$$

$$T_{10} = 0.25 * (774.5 - 739.2) + 0.75 * 24.33 = 27.07$$

$$F_{10} = 739.2 + 24.33 = 763.53$$

$$L_{11} = 0.30 * 846 + 0.70(774.5 + 27.07) = 814.9$$

$$T_{11} = 0.25 * (814.9 - 774.5) + 0.75 * 27.07 = 30.40$$

$$F_{11} = 774.5 + 27.07 = 801.57$$

$$L_{12} = 0.30 * 850 + 0.70(814.9 + 30.40) = 846.71$$

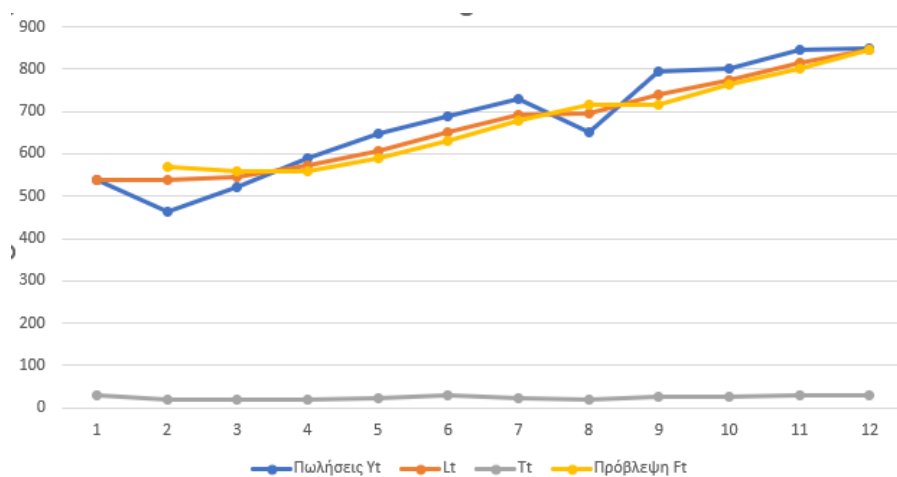
$$T_{12} = 0.25 * (846.71 - 814.9) + 0.75 * 30.40 = 30.75$$

$$F_{12} = 814.9 + 30.40 = 845.3$$

Συγκεντρωτικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα και διάγραμμα :

Πίνακας 4.4: Πίνακας μηνιαίων πωλήσεων

Μήνας	Πωλήσεις Yt	Lt	Tt	Πρόβλεψη Ft
1	540	540	28.18	-
2	464	536.9	20.36	568.18
3	520	546	17.55	557.26
4	590	571.5	19.54	560.55
5	648	608	23.78	591.04
6	690	650	28.34	631.78
7	730	693.8	23.44	678.34
8	650	697	18.38	717.24
9	795	739.2	24.33	715.38
10	800	774.5	27.07	763.53
11	846	814.9	30.40	801.57
12	850	846.71	30.75	845.3



Σχήμα 4.3: Μηνιαίες πωλήσεις και προβλέψεις

4.3 Εποχιακή Εξομάλυνση

Στις προηγούμενες ενότητες περιγράψαμε μη εποχιακά μοντέλα, τα οποία είναι κατάλληλα να χρησιμοποιηθούν σε χρονοσειρές των οποίων τα δεδομένα εμφανίζουν κάποια τάση. Σε περίπτωση που τα δεδομένα αυτά πέρα από την τάση, έχουν έντονο το στοιχείο της εποχικότητας, θα πρέπει να γίνει επέκταση των μοντέλων εξομάλυνσης με την προϋπόθεση ενός ακόμη εξομαλυσμένου παράγοντα, αυτόν της εποχικότητας, για κάθε χρονική περίοδο

στο διάστημα ενός έτους.

Στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, στο σχήμα 4.1 παρουσιάσαμε τέσσερα μοντέλα τάσης σε συνδυασμό με τρία εποχιακά μοντέλα. Στα προσθετικά μοντέλα εποχικότητας, ο εποχιακός παράγοντας ορίζεται ως η διαφορά κάθε σημείου της χρονοσειράς και του μέσου όρου των τιμών της χρονοσειράς για όλο το έτος. Με την χρήση του προσθετικού εποχιακού παράγοντα προκύπτουν οι αποεποχικοποιημένες τιμές των δεδομένων, δηλαδή οι τιμές από τις οποίες έχει αφαιρεθεί το εποχιακό πρότυπο. Στην περίπτωση των πολλαπλασιαστικών μοντέλων εποχικότητας, ο εποχιακός παράγοντας ορίζεται ως ο λόγος κάθε τιμής της χρονοσειράς προς το μέσο όρο των τιμών της χρονοσειράς για όλο το έτος.

Η πιο γνωστή μέθοδος εποχιακής εξομάλυνσης είναι η μέθοδος Winters και πρόκειται για μία επέκταση της μεθόδου Holt, η οποία με την σειρά της αποτελεί επέκταση της απλής εκθετικής εξομάλυνσης. Στην μέθοδο αυτή χρησιμοποιούνται τρεις συντελεστές εξομάλυνσης α , β και γ , οι οποίοι βοηθούν στην εξομάλυνση των τιμών της χρονοσειράς, της τάσης και της εποχικότητας αντίστοιχα.

Η διαδικασία της μεθόδου ξεκινάει με την εξομάλυνση των τιμών της χρονοσειράς με την χρήση της μαθηματικής σχέσης:

$$L_t = a \frac{Y_t}{E_{t-N}} + (1 - a)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad (4.6)$$

όπου t : είναι η χρονική περίοδος

Y_t : η πραγματική τιμή την χρονική στιγμή t

T_t : η εκτίμηση της γραμμικής τάσης για την προσεχή περίοδο t

E_t : ο δείκτης εποχικότητας για την περίοδο t

L_t : η εξομαλυνθείσα τιμή της χρονοσειράς

a : η σταθερά εξομάλυνσης των τιμών της χρονοσειράς.

N : ο αριθμός των περιόδων σε ένα κύκλο εποχικότητας.

Θα πρέπει να σημειωθεί πως στην παραπάνω σχέση υπάρχει ο όρος E_{t-N} και όχι απλά ο E_t και αυτό συμβαίνει καθώς η πιο πρόσφατη πληροφορία για την συγκεκριμένη περίοδο, όταν στα δεδομένα δεν υπάρχει εποχικότητα, είναι η πληροφορία για την αντίστοιχη περίοδο του προηγούμενου κύκλου, δηλαδή η τιμή E_{t-N} .

Στην συνέχεια γίνεται η εξομάλυνση της τάσης, ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που συμβαίνει και στο στάδιο αυτό της μεθόδου Holt. Έχουμε:

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \quad (4.7)$$

Έπειτα, ακολουθεί η εξομάλυνση της εποχικότητας:

$$E_t = \gamma \frac{Y_t}{L_t} + (1 - \gamma)E_{t-N} \quad (4.8)$$

Και τέλος προχωράμε στην πρόβλεψη, χρησιμοποιώντας την μαθηματική σχέση:

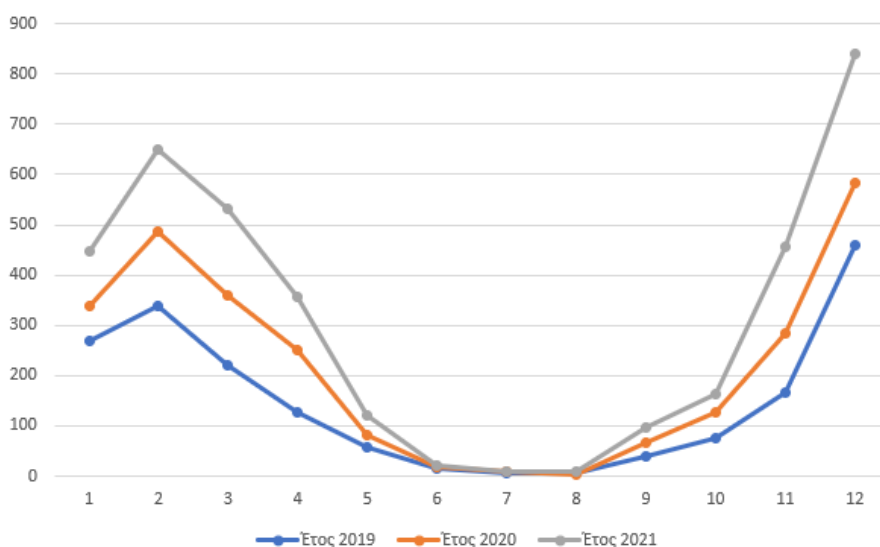
$$F_{t+1} = (L_t + T_t)E_{t+1-N} \quad (4.9)$$

Οι συντελεστές εξομάλυνσης α , β και γ λαμβάνουν τιμές στο διάστημα $(0, 1)$, παρόλα αυτά όμως, συνήθως ο συντελεστής γ λαμβάνει μεγαλύτερη τιμή από τους α και β , καθώς οι δείκτες εποχικότητας επικαιροποιούνται μόνο μία φορά ανά κύκλο, σε αντίθεση με τις προβλέψεις εκθετικής εξομάλυνσης και γραμμικής τάσης που ανανεώνονται σε κάθε περίοδο. Όπως έχουμε αναφέρει και στις προηγούμενες μεθόδους εξομάλυνσης, για την έναρξη της διαδικασίας απαραίτητο βήμα αποτελεί ο προσδιορισμός αρχικών τιμών στους όρους L και T . Γενικά, ο τρόπος του ορισμού των αρχικών τιμών δεν είναι μοναδικός αλλά ποικίλει από ερευνητή σε ερευνητή καθένας από τους οποίους τις προσδιορίζει βάσει εμπειρίας, ανάλογα με τη μορφή δεδομένων που διαθέτει.

Παράδειγμα 4.7. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μηνιαίες πωλήσεις σε χιλιάδες μίας επιχείρησης ανταθλητικών σε μία τριετία.

Πίνακας 4.5: Πίνακας μηνιαίων πωλήσεων τριών ετών

Μήνας	2019	2020	2021
1	270	339	447
2	340	487	650
3	220	360	532
4	126	250	357
5	57	82	120
6	15	17	22
7	7	8	10
8	6	3	8
9	39	67	97
10	76	127	164
11	166	283	457
12	460	584	841



Σχήμα 4.4: Μηνιαίες πωλήσεις τριών ετών

Παρατηρώντας το διάγραμμα, διαπιστώνουμε την ύπαρξη τάσης και εποχικότητας. Για να ξεκινήσει η διαδικασία πρόβλεψης, θα πρέπει να δοθούν οι αρχικές τιμές στις παραμέτρους L και T , καθώς και να υπολογιστούν οι δείκτες εποχικότητας. Επομένως έχουμε:

Ο μέσος όρος όλων των μηνών των τριών ετών, υπολογίζεται ως:

$$\bar{Y} = \frac{270 + 340 + 220 + 126 + \dots + 164 + 457 + 841}{36}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μέσο όρο για κάθε μήνα των τριών ετών (2019,2020,2021), ξεκινώντας με τον Ιανουάριο:

$$\bar{Y}_1 = \frac{270 + 339 + 447}{3} = 352$$

και ο δείκτης εποχικότητας για τον Ιανουάριο ορίζεται ως:

$$E_1 = \frac{\bar{Y}_1}{\bar{Y}} = \frac{352}{224,84} = 1,57$$

Αντίστοιχα, για τον Φεβρουάριο:

$$\bar{Y}_2 = \frac{340 + 487 + 650}{3} = 492,4$$

και ο δείκτης εποχικότητας για τον Φεβρουάριο:

$$E_2 = \frac{\bar{Y}_2}{\bar{Y}} = \frac{492,4}{224,84} = 2,19$$

Ομοίως, υπολογίζουμε και για τους υπόλοιπους μήνες των οποίων τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 4.6: Πίνακας μηνιαίων πωλήσεων τριών ετών

Μήνας	2019	2020	2021	Μ.Ο. Πωλήσεων	Δείκτης Εποχικότητας
1	270	339	447	352	1,57
2	340	487	650	492,4	2,19
3	220	360	532	370,7	1,65
4	126	250	357	244,4	1,09
5	57	82	120	86,4	0,38
6	15	17	22	18	0,08
7	7	8	10	8,4	0,04
8	6	3	8	5,7	0,03
9	39	67	97	67,7	0,30
10	76	127	164	122,4	0,54
11	166	283	457	302	1,34
12	460	584	841	628,3	2,79

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, θα πρέπει να γίνει αρχικοποίηση των τιμών L και T .

Η αρχική τιμή για την γραμμική τάση T_0 προκύπτει ως η διαφορά των πωλήσεων του Ιανουαρίου 2021 από τις πωλήσεις του Ιανουαρίου 2019, διαιρεμένη με τις μεταβολές που μεσολλάθησαν στις πωλήσεις.

Έχουμε,

$$T_0 = \frac{447 - 270}{24} = 7,4$$

Για την αρχικοποίηση της βασικής πρόβλεψης, υπολογίζεται πρώτα ο μέσος όρος των πωλήσεων του 2019:

$$Y_{2019}^- = \frac{270 + 340 + 220 + \dots + 460}{12} = 148,5$$

Από την αρχική τιμή της γραμμικής τάσης μπορούμε να υπολογίσουμε την γραμμική τάση για μισό κύκλο, δηλαδή 6 μήνες. Οπότε, $6 * 7,4 = 44,4$ μονάδες.

Έτσι, για την αρχική τιμή της μεταβλητής L_t έχουμε:

$$L_0 = Y_{2019}^- - 6 * T_0 = 148,5 - 44,4 = 104,1$$

Αυθαιρέτα επιλέγουμε τις τιμές των συντελεστών εξομάλυνσης ως $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,3$ και $\gamma = 0,4$. Επομένως, με βάση τις σχέσεις 4.6, 4.7, 4.8 και 4.9 της μεθόδου έχουμε:

$$L_1 = 0,3 * \frac{270}{1,57} + 0,7 * (104,1 + 7,4) = 126,65$$

$$T_1 = 0,3 * (126,65 - 104,1) + 0,7 * 7,4 = 11,9$$

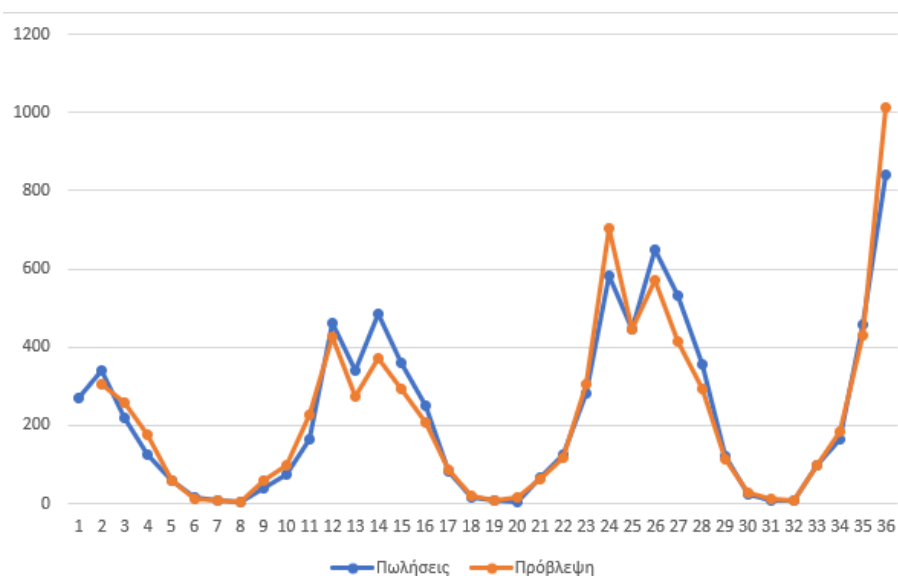
$$E_1 = 0,4 * \frac{270}{126,65} + 0,6 * 1,57 = 1,79$$

$$F_2 = (126,65 + 11,9) * 2,19 = 303,42$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες μεταβλητές και έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας.

Από το αντίστοιχο διάγραμμα καθώς και από τις τιμές των σφαλμάτων του πίνακα μπορούμε να παρατηρήσουμε πως η μέθοδος εκθετικής εξομάλυνσης κατά Winters δίνει αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Θα πρέπει να σημειωθεί πως επειδή δεν διαθέτουμε τους δείκτες εποχικότητας του προηγούμενου έτους, για τον υπολογισμό των σχέσεων των 12 πρώτων μηνών χρησιμοποιήσαμε τους δείκτες εποχικότητας E_t και στη συνέχεια έγινε χρήση των E_{t-N} με $N=12$.



Σχήμα 4.5: Μηνιαίες πωλήσεις τριών ετών

Πίνακας 4.7: Τελικός πίνακας πρόβλεψης

Μήνας	Πωλήσεις	Lt	Tt	Et	Ft	Σφάλμα et
1	270	126,65	11,9	1,79	-	-
2	340	143,55	13,4	2,26	303,42	-36,58
3	220	149,76	11,24	1,58	258,96	38,96
4	126	147,38	7,15	0,99	175,49	49,49
5	57	153,17	6,74	0,37	58,72	1,72
6	15	168,19	9,23	0,08	12,79	-2,21
7	7	176,7	9	0,04	7,1	0,1
8	6	189,99	10,29	0,03	5,57	-0,43
9	39	179,2	3,97	0,27	60,08	21,08
10	76	170,45	0,15	0,5	98,91	22,91
11	166	156,58	-4,05	1,23	228,6	62,6
12	460	156,23	-2,94	2,85	425,56	-34,44
13	339	164,12	1,19	1,9	274,39	-64,61
14	487	180,36	5,71	2,43	373,6	-113,4
15	360	198,6	9,47	1,67	293,99	-66,01
16	250	221,41	13,47	1,05	205,99	-44,01
17	82	229,28	11,79	0,37	86,91	4,91
18	17	232,5	9,22	0,08	19,28	2,28
19	8	229,21	5,47	0,04	9,67	1,67
20	3	224,28	2,35	0,02	14,08	11,08
21	67	233,09	4,3	0,28	61,19	-5,81
22	127	242,37	5,79	0,51	118,7	-8,3
23	283	242,74	4,16	1,21	305,24	22,24
24	584	234,3	0,38	2,71	703,67	119,67
25	447	234,85	0,43	1,9	445,89	-1,11
26	650	244,94	3,32	2,52	571,73	-78,27
27	532	269,35	9,6	1,79	414,59	-117,41
28	357	297,27	15,1	1,11	292,9	-64,1
29	120	315,96	16,18	0,37	115,58	-4,42
30	22	315	11,04	0,07	26,57	4,57
31	10	303,23	4,2	0,04	13,04	3,04
32	8	335,2	12,53	0,02	6,15	-1,85
33	97	347,34	12,41	0,29	97,36	0,36
34	164	348,3	8,98	0,49	183,47	19,47
35	457	363,4	10,82	1,23	432,3	-24,7
36	841	355,05	5,07	2,57	1014,14	173,14

Κεφάλαιο 5

Παλινδρόμηση

Σε αρκετές περιπτώσεις μελέτης μπορεί να παρατηρήσουμε πως η μεταβλητή ενδιαφέροντος ενδέχεται να εξαρτάται από επιμέρους μεταβλητές του προβλήματος. Έτσι, λοιπόν, η εφαρμογή της μεθόδου παλινδρόμησης είναι απαραίτητη σε τέτοιας φύσης ζητήματα καθώς πρόκειται για μια διαδικασία στην οποία ο κύριος στόχος είναι η εύρεση συσχετίσεων μεταξύ μεταβλητών. Θα πρέπει να επισημάνουμε πως από εδώ και στο εξής, την μεταβλητή εκείνη που εξαρτάται από τις επιμέρους μεταβλητές θα την ονομάζουμε εξαρτημένη μεταβλητή και είναι αυτή που επιθυμούμε να προβλέψουμε ενώ τις υπόλοιπες θα τις ονομάζουμε ανεξάρτητες μεταβλητές και οι τιμές τους είναι γνωστές. Παρακάτω παραθέτουμε τον αυστηρό ορισμό της παλινδρόμησης:

“Παλινδρόμηση είναι η στατιστική διαδικασία κατά την οποία γίνεται η εύρεσης της μαθηματικής σχέσης που σχετίζει την εξαρτημένη μεταβλητή με τις ανεξάρτητες”

Με την εφαρμογή της παλινδρόμησης, δηλαδή, είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο η εξαρτημένη μεταβλητή αλλάζει τιμή, την ώρα που μια ανεξάρτητη μεταβλητή μεταβάλλεται και ενώ οι υπόλοιπες ανεξάρτητες μεταβλητές παραμένουν σταθερές. Πέραν όμως της κατανόησης του πως αλλάζει η τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής, η ανάλυση παλινδρόμησης βρίσκει συχνά εφαρμογή όταν επιθυμούμε την εκτίμηση της εξαρτημένης μεταβλητής, όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές μεταβάλλονται. Στην ουσία επιδιώκουμε την πρόβλεψη της εξαρτημένης μεταβλητής, η οποία πρόκειται για μια μαθηματική συνάρτηση των ανεξαρτήτων μεταβλητών και καλείται εξίσωση παλινδρόμησης.

Ο κύριος λόγος χρησιμοποίησης της παλινδρόμησης είναι η ανάλυση και η κατανόηση των σχέσεων μεταξύ εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών. Συγκεκριμένα, κατά την εφαρμογή της μεθόδου μπορούμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα για το ποιες από τις εξεταζόμενες μεταβλητές είναι συσχετισμένες επαρκώς με την ανεξάρτητη και υπό πρόβλεψη μεταβλητή, καθώς και ποία είναι η μορφή αυτής της συσχέτισης. Προκειμένου να επιτευχθεί η ανάλυση αυτή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορες τεχνικές, με τις πιο γνωστές να είναι η γραμμική παλινδρόμηση και η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων. Στο κεφάλαιο αυτό της παρούσας εργασίας, θα ασχοληθούμε με την μελέτη μόνο των γραμμικών μοντέλων παλινδρόμησης, που αφορά στην απλή και πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση.

5.1 Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση

Αρχικά θα πρέπει να ερμηνεύσουμε τον όρο “γραμμική” που βρίσκεται στον τίτλο της μεθόδου. Η μέθοδος ονομάζεται γραμμική διότι η μεταξύ σχέσης της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής είναι γραμμική.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε την πρόβλεψη μηνιαίων πωλήσεων μιας επιχείρησης, οι οποίες διαμορφώνονται βάσει εποχής του έτους που δεν είναι σταθερές, τότε η επιλογή της προαναφερθείσας μεθόδου δεν είναι κατάλληλη. Αντίθετα, για την πρόβλεψη των ίδιων πωλήσεων, αλλά σε ετήσια βάση, είναι επιτεύξιμη η εφαρμογή ενός μοντέλου γραμμικής σχέσης. Θα πρέπει επίσης, να επισημανθεί πως στις περιπτώσεις πρόβλεψης χρονοσειρών ως ανεξάρτητη μεταβλητή επιλέγεται ο χρόνος, δηλαδή ο αύξοντας αριθμός των περιόδων.

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή αυτού του κεφαλαίου, σκοπός της απλής γραμμικής παλινδρόμησης είναι η εύρεση της σχέσης ανάμεσα στις εξαρτημένες μεταβλητές, και τις ανεξάρτητες με την εξίσωση μιας ευθείας γραμμής. Η προσαρμογή αυτής της ευθείας γραμμής θα πρέπει να γίνει έτσι ώστε να μας επεξηγεί όσο καλύτερα γίνεται την συμπεριφορά των δεδομένων μας.

Ορίζουμε, λοιπόν, Y :την εξαρτημένη μεταβλητή και X :την ανεξάρτητη μεταβλητή και έτσι η ευθεία θα έχει την μορφή :

$$\hat{Y} = a + bX + \epsilon_i \quad (5.1)$$

όπου

a : η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας με τον άξονα των εξαρτημένων μεταβλητών.

b : η κλίση της ευθείας, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του \hat{Y} ανά μονάδα αύξησης του X .

ϵ_i : το τυχαίο σφάλμα, δηλαδή παριστάνει για την τιμή Q_i της κατακόρυφης απόστασης της Y_i από την ευθεία παλινδρόμησης.

Προκειμένου να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές a και b του μοντέλου θα κάνουμε χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων που παρουσιάζεται στη συνέχεια.

5.1.1 Μέθοδος Ελάχιστων Τετραγώνων

Η προσαρμογή της ευθείας γραμμής $\hat{Y} = a + bX$ στις παρατηρήσεις μας, που αναφέραμε προηγουμένως, ενδεχομένως να έχει κάποιες αποκλίσεις από τις πραγματικές τιμές. Με την εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων μπορούμε να υπολογίσουμε τι τιμές των παραμέτρων a και b έτσι ώστε η ευθεία γραμμή που θα προκύψει και περιγράφει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο την σχέση μεταξύ των μεταβλητών X και Y .

Μέσω της ευθείας παλινδρόμησης υπολογίζονται οι εκτιμήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής Y_i και στη συνέχεια οι αποκλίσεις ϵ_i , των οποίων το άθροισμα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί.

Οι αποκλίσεις e_i είναι η κάθετη απόσταση των εκτιμήσεων των εξαρτημένων μεταβλητών \hat{Y}_i από τις πραγματικές τιμές Y_i .

Συνοπτικά έχουμε,

Y : η πραγματική τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής.

\hat{Y} : η αναμενόμενη τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής, υπολογισμένη από την σχέση $\hat{Y} = a + bX$.

$e = Y - \hat{Y}$ (Προσοχή δεν μπερδεύουμε τα e_i με τα ϵ_i).

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων έχει ως σκοπό την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των διαφορών των πραγματικών τιμών Y από τις τιμές \hat{Y} , δηλαδή το σφάλμα, το οποίο παρουσιάζεται με την μαθηματική σχέση:

$$\sum_{i=1}^n (e_i)^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - a - bX_i)^2 \quad (5.2)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς a και b και εξισώνοντας αυτές τις σχέσεις με το μηδέν παίρνουμε ότι:

$$na + b \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$a \sum_{i=1}^n X_i + b \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$$

από τις οποίες προκύπτουν οι εξισώσεις για τους συντελεστές a και b :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})]}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (5.3)$$

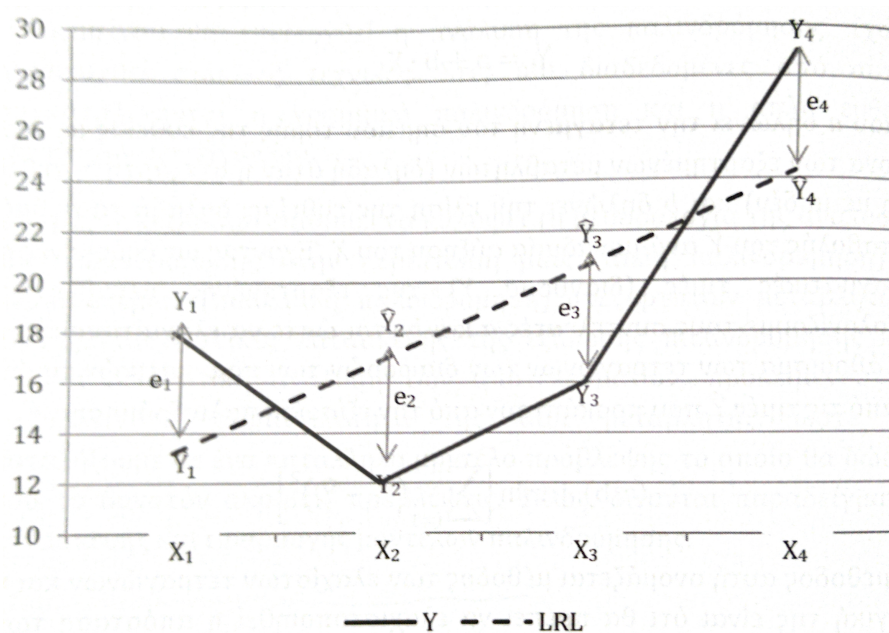
$$a = \bar{Y} - b\bar{X} \quad (5.4)$$

όπου \bar{X} , \bar{Y} οι μέσες τιμές των διανυσμάτων X και Y ., δηλαδή

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

και

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$$



Σχήμα 5.1: Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων

5.1.2 Συντελεστής Γραμμικής Συσχέτισης

Για το μοντέλο της απλής γραμμικής παλινδρόμησης έχουμε υποθέσει ότι η τιμή μίας μεταβλητής εξαρτάται από τιμή ή την μεταβολή της τιμής κάποιας άλλης μεταβλητής. Συχνά, όμως, μπορεί να παρατηρήσουμε πως δύο μεταβλητές μπορεί να σχετίζονται χωρίς όμως να μπορούμε να υποθέσουμε ότι η τιμή της μίας επηρεάζει ή εξαρτάται από την τιμή της άλλης. Για τον λόγο αυτό υπάρχει ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r , ο οποίος αποτελεί ένα "εργαλείο" εύρεσης του βαθμού συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών. Οι τιμές που λαμβάνει η μεταβλητή r κυμαίνονται στο διάστημα $[0, 1]$, όπου η τιμή 0 υποδεικνύει ότι δεν υπάρχει συσχέτιση και η τιμή 1 ότι υπάρχει απόλυτη συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών. Οι δύο μεταβλητές ονομάζονται θετικά συσχετισμένες όταν ο συντελεστής συσχέτισης r είναι μεγαλύτερος του μηδενός ($r > 0$) και αρνητικά συσχετισμένες όταν ο συντελεστής συσχέτισης r είναι μικρότερος του μηδενός ($r < 0$).

Ο συντελεστής συσχέτισης r δύο μεταβλητών X και Y δίνεται από την σχέση:

$$r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (5.5)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις για τον συντελεστή b και το συντελεστή r_{XY} προκύπτει:

$$b = r_{XY} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} = r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \quad (5.6)$$

Παρατηρούμε, πως η κλίση της ευθείας παλινδρόμησης ισούται με το γινόμενο του συντελεστή συσχέτισης των X και Y μεταβλητών και του λόγου των τυπικών αποκλίσεων αυτών.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τον συντελεστή συσχέτισης ως :

- α) ως ένδειξη της κατεύθυνσης της σχέσης ανάμεσα σε δύο μεταβλητές, δηλαδή αν δύο μεταβλητές είναι θετικά συσχετισμένες (οι τιμές και των δύο αυξάνονται ή μειώνονται συγχρόνως), αν δύο μεταβλητές είναι αρνητικά συσχετισμένες (η τιμή της μιας αυξάνεται ενώ ταυτόχρονα η τιμή της άλλης μειώνεται) ή αν είναι ασυσχέτιστες (οι τιμές των δύο μεταβάλλονται ανεξάρτητα η μια από την άλλη).
- β) ως ένδειξη του βαθμού συσχέτισης, δηλαδή όσο η τιμή του r_{XY} απομακρύνεται από το μηδέν, τόσο πιο ισχυρή θεωρείται η συσχέτιση ανάμεσα στις δύο μεταβλητές.

Εκτός από τον συντελεστή συσχέτισης r_{XY} έχουμε και τον συντελεστή R^2 ο οποίος αντιπροσωπεύει το ποσοστό της διακύμανσης της μεταβλητής Y η οποία ερμηνεύεται από την ευθεία παλινδρόμησης. Δηλαδή, ο συντελεστής R^2 ισούται με το λόγο της διακύμανσης των τιμών \hat{Y} προς την διακύμανση των τιμών Y .

Επομένως, έχουμε :

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = r_{XY}^2 \quad (5.7)$$

5.1.3 Στατιστικοί Δείκτες

Αν θεωρήσουμε την εξίσωση παλινδρόμησης ως ένα στατιστικό μοντέλο, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιους στατιστικούς δείκτες οι οποίοι μας επιτρέπουν να εκτιμήσουμε :

- α) την πιθανότητα οι προβλεπόμενες τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής να είναι αρκετά κοντά στις μελλοντικές πραγματικές τιμές.
- β) την αξιοπιστία του υπολογισμού της ευθείας παλινδρόμησης.
- γ) την ακρίβεια των συντελεστών a και b .

Έχουμε, λοιπόν, τον στατιστικό δείκτη F (ή αλλιώς F-test) και τον στατιστικό δείκτη t για τους συντελεστές (ή αλλιώς t-test).

Ο στατιστικός δείκτης F αποδεικνύει αν υπάρχει σημαντική σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές X και Y και δίνεται από τη σχέση :

$$F = \frac{\frac{R^2}{k-1}}{\frac{1-R^2}{n-k}} \quad (5.8)$$

όπου k : ο αριθμός των συντελεστών στην εξίσωση παλινδρόμησης (για την απλή γραμμική παλινδρόμηση $k = 2$).

Η τιμή του F που προκύπτει στη συνέχεια συγκρίνεται με τις τιμές του στατιστικού πίνακα F για διάφορα διαστήματα εμπιστοσύνης, έτσι ώστε να μπορούμε να καθορίσουμε το

ποσοστό σημαντικότητας της εξίσωσης παλινδρόμησης. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του δείκτη F , τόσο μεγαλύτερη σημαντικότητα έχει η εξίσωση παλινδρόμησης. Μικρότερη τιμή του δείκτη F για να επιτύχουμε το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας, σε περίπτωση που είναι διαθέσιμα περισσότερα δεδομένα.

Ο στατιστικός δείκτης t για τους συντελεστές a και b υπολογίζεται με βάση τα τυπικά σφάλματά τους.

Έχουμε, λοιπόν, το τυπικό σφάλμα για τον συντελεστή a δίνεται από την σχέση:

$$SE_a = \hat{\sigma}_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \quad (5.9)$$

και για τον συντελεστή b :

$$SE_b = \hat{\sigma}_e \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \quad (5.10)$$

όπου $\hat{\sigma}_e$: η τυπική απόκλιση του σφάλματος με

$$\hat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - k}} \quad (5.11)$$

Άρα, οι στατιστικοί δείκτες των a και b δίνονται αντίστοιχα από τις παρακάτω σχέσεις:

$$t_a = \frac{a - a'}{SE_a} \quad \text{και} \quad t_b = \frac{b - b'}{SE_b} \quad (5.12)$$

όπου a, b : είναι οι υπολογισμένοι συντελεστές από την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης.

και a', b' : υποθετικές τιμές σύγκρισης (συνήθως το 0).

Όπως και στον στατιστικό δείκτη F , έτσι και στον t , η μεγάλη τιμή του t αντιστοιχεί σε ισχυρή σημαντικότητα καθώς και το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας επιτυγχάνεται με μικρότερη τιμή του δείκτη t .

Παράδειγμα 5.8. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται ο ετήσιος αριθμός επιβατών μίας αεροπορικής εταιρείας (σε χιλιάδες). Οι καταγραφές για κάθε ένα έτος ξεκινούν την 1η Ιανουαρίου και σταματούν την 31η Δεκεμβρίου.

Η ανεξάρτητη μεταβλητή X_i στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ο χρόνος (έτη) και η ανεξάρτητη μεταβλητή Y_i είναι οι επιβάτες, με $i = 1, 2, \dots, 6$.

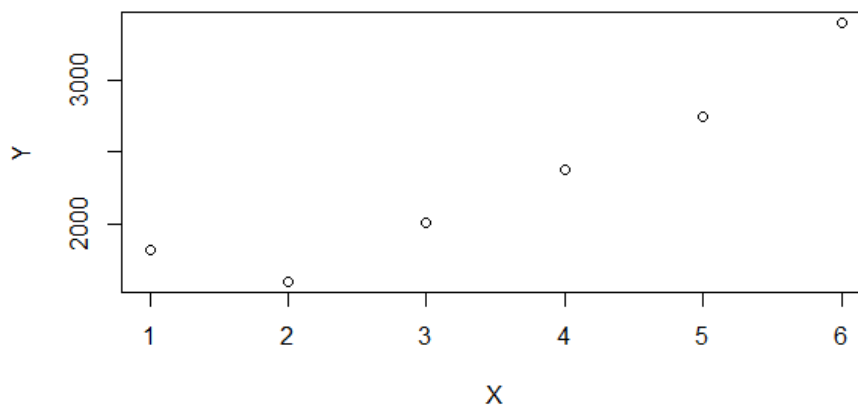
Παραθέτουμε το διάγραμμα διασποράς των παρατηρήσεων:

Παρατηρούμε πως η εξαρτημένη μεταβλητή Y συνδέεται με την ανεξάρτητη μεταβλητή X μέσω μίας γραμμικής σχέσης.

Υπολογίζοντας τους συντελεστές a και b με την χρήση κατάλληλου υπολογιστικού περιβάλλοντος, έχουμε ότι $a = 1151,47$ και $b = 335,49$.

Πίνακας 5.1: Ετήσιοι επιβάτες για τα έτη 2012-2017

Έτος X	Επιβάτες Y
1	1815
2	1600
3	2009
4	2382
5	2748
6	3400



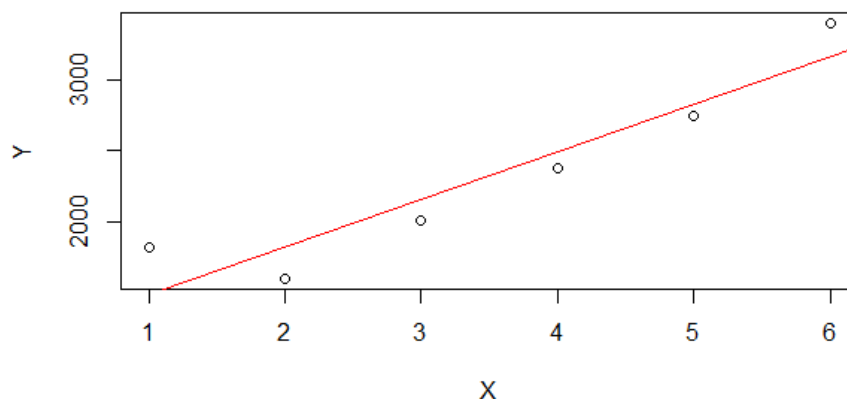
Σχήμα 5.2: Διασπορά παρατηρήσεων

Έτσι, προκύπτει το απλό γραμμικό μοντέλο $\hat{Y} = 1151,47 + 335,49X$ με την χρήση του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε τους επιβάτες της αεροπορικής εταιρείας για τα μελλοντικά έτη.

Παρατηρούμε μάλιστα ότι με την χρήση των δεδομένων των πρώτων 5 ετών μπορούμε να προβλέψουμε τον αριθμό των επιβατών του βου έτους (2017) και να διαπιστώσουμε κατά πόσο κοντά είμαστε στην πραγματική τιμή. Θα πρέπει να σημειωθεί πως όσο απομακρυνόμαστε από τα δεδομένα, δηλαδή προχωράμε με τον υπολογισμό των τιμών για μελλοντικά έτη, τόσο μικρότερη θα είναι η ακρίβεια στην πρόβλεψή μας.

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η προσαρμογή της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων στα δεδομένα.

Παρατηρούμε πως η προσαρμογή της ευθείας στα δεδομένα είναι αρκετά ικανοποιητική με $R^2 = 0,8859$, δηλαδή η μεταβλητότητα των επιβατών εξηγείται κατά 88,59% από την μεταβλητή X.



Σχήμα 5.3: Προσαρμογή ευθείας παλινδρόμησης

```
Call:
lm(formula = Y ~ X)

Residuals:
    1     2     3     4     5     6 
328.0 -222.4 -148.9 -111.4  -80.9  235.6 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1151.47    234.47   4.911  0.00798 **
X           335.49     60.21   5.572  0.00508 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 251.9 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8859,    Adjusted R-squared:  0.8573 
F-statistic: 31.05 on 1 and 4 DF,  p-value: 0.005083
```

Σχήμα 5.4: Αποτελέσματα απλής γραμμικής παλινδρόμησης

5.2 Πολλαπλή Γραμμική Παλινδρόμηση

Τα μοντέλα πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις κατά τις οποίες η εξαρτημένη μεταβλητή που βρίσκεται υπό μελέτη επηρεάζεται από δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές. Για παράδειγμα, αν για μια επιχείρηση ορίσουμε ως εξαρτημένη μεταβλητή τις πωλήσεις της και θέλουμε να τη μελετήσουμε πρέπει να λάβουμε υπόψη τους διάφορους παράγοντες που έχουν επίδραση σε αυτή, όπως λόγου χάρη η διαφήμιση, ο ανταγωνισμός κλπ. Όλοι αυτοί οι παράγοντες στην προκειμένη περίπτωση αποτελούν τις ανεξάρτητες μεταβλητές που επηρεάζουν την εξαρτημένη, δηλαδή την διαμόρφωση του ύψους των πωλήσεων που μελετάται μέσω της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης. Στην ουσία η πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση αποτελεί μια επέκταση της απλής γραμμικής παλινδρόμησης για περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές.

Η γενική μορφή της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης είναι η εξής:

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_kX_k + \epsilon \quad (5.13)$$

όπου

Y : η εξαρτημένη υπό μελέτη μεταβλητή

$X_j, j = 1, 2, \dots, k$: οι ανεξάρτητες μεταβλητές

a, b_1, b_2, \dots, b_k : οι συντελεστές παλινδρόμησης

ϵ : το τυχαίο σφάλμα

Παρατηρούμε πως η εξίσωση που περιγράφει την πολλαπλή παλινδρόμηση είναι γραμμική, διότι ο εκθέτης των συντελεστών παλινδρόμησης ισούται με την μονάδα. Όπως και στην απλή γραμμική παλινδρόμηση, έτσι και τώρα σκοπός μας είναι ο υπολογισμός των παραμέτρων a, b_1, b_2, \dots, b_k προκειμένου να προβλέψουμε την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής. Ο υπολογισμός των παραμέτρων παλινδρόμησης γίνεται, και σε αυτή την περίπτωση, με την χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.

Στην απλή γραμμική παλινδρόμηση όταν υπάρχει μια μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή X , το σχήμα της συνάρτησης που συνδέει την εξαρτημένη μεταβλητή Y με τις μεταβλητές X είναι μια ευθεία γραμμή. Στην περίπτωση όπου υπάρχουν δύο ανεξάρτητες μεταβλητές X , τότε η Y παριστάνεται σε επίπεδο, το οποίο σχηματίζεται από τις δύο μεταβλητές X . Στην περίπτωση όπου υπάρχουν περισσότερες από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές X , τότε η Y παριστάνεται σε υπερεπίπεδο.

Όταν το σύνολο των παρατηρήσεων είναι της μορφής

$$(Y_1, X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1k}), (Y_2, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2k}), \dots, (Y_n, X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nk})$$

τότε η εξίσωση που περιγράφει το μοντέλο διαμορφώνεται ως:

$$Y_i = a + b_1X_{i1} + b_2X_{i2} \dots + b_kX_{ik} + \epsilon, \text{ με } i = 1, 2, \dots, n \quad (5.14)$$

όπου η παράμετρος a : είναι η μέση τιμή της Y , όταν $X_j = 0$ για $j = 1, 2, \dots, k$ και b_j : εκφράζει την αναμενόμενη μεταβολή της μεταβλητής Y όταν X_j αυξηθεί κατά μια μονάδα και οι υπόλοιπες X_k , για $k \neq j$ παραμένουν σταθερές.

Έστω ότι το μοντέλο πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης περιέχει δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Τότε, η εξίσωση είναι:

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 \quad (5.15)$$

ή αλλιώς η γενική μορφή του:

$$\hat{Y}_i = a + b_1X_{i1} + b_2X_{i2} + \dots + b_kX_{ik} \quad (5.16)$$

όπου \hat{Y}_i η εκτίμηση της μεταβλητής Y και το σφάλμα e_i δίνεται από την σχέση $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

Έτσι λοιπόν, θέτοντας σε εφαρμογή την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, επιδιώκουμε την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των σφαλμάτων πρόβλεψης, δηλαδή της σχέσης $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

Καθώς, ο υπολογισμός αυτός δεν είναι τόσο εύκολος όσο στην απλή γραμμική παλινδρόμηση, μπορούμε να κάνουμε χρήση διαφόρων υπολογιστικών πακέτων για την εύρεση των τιμών των παραμέτρων αυτών.

5.2.1 Συντελεστής Πολλαπλής Συσχέτισης

Ο συντελεστής συσχέτισης, όπως και στην περίπτωση της απλής γραμμικής παλινδρόμησης, αποτελεί ένα τρόπο για να ελέγξουμε πόσο καλά έχει γίνει η προσαρμογή του πολλαπλού γραμμικού μοντέλου.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την συσχέτιση ανάμεσα στην πραγματική τιμή της μεταβλητής Y και της αναμενόμενης τιμής της \hat{Y} χρησιμοποιούμε την σχέση:

$$R_{Y\hat{Y}} = \frac{n \sum_{i=1}^n (Y_i \hat{Y}_i) - (\sum_{i=1}^n Y_i)(\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i)}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - (\sum_{i=1}^n Y_i)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i^2 - (\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i)^2}} \quad (5.17)$$

Ο συντελεστής $R_{Y\hat{Y}}$ είναι γνωστός ως συντελεστής πολλαπλής συσχέτισης και το τετράγωνο αυτού $(R_{Y\hat{Y}})^2$ ονομάζεται coefficient of determination.

Όπως και στην απλή γραμμική παλινδρόμηση υπολογίζουμε τον συντελεστή R^2 από την ίδια σχέση:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (5.18)$$

ο οποίος παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$ και εκφράζει το ποσοστό διασποράς της μεταβλητής Y βάσει του μοντέλου παλινδρόμησης.

Όταν η τιμή του συντελεστή αυτού είναι κοντά στη μονάδα, τότε το μοντέλο παλινδρόμησης έχει καλύτερη προσαρμογή. Καθώς όμως στην πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση υπάρχουν αρκετές ανεξάρτητες μεταβλητές και μπορεί να προστίθενται και άλλες, τότε ο συντελεστής πολλαπλής συσχέτισης αυξάνεται. Επομένως, αντί να χρησιμοποιήσουμε τον συντελεστή R^2 , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον διορθωμένο συντελεστή πολλαπλής συσχέτισης:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k-1} \quad (5.19)$$

5.2.2 Στατιστικοί Δείκτες

Αντίστοιχα με την απλή γραμμική παλινδρόμηση έχουμε τους στατιστικούς δείκτες F και t . Οι στατιστικοί δείκτες αυτοί είναι αρκετά σημαντικοί και χρησιμοποιούνται για την

επιλογή των στατιστικά σημαντικών μεταβλητών. Σύμφωνα με την εφαρμογή τους, αν μία μεταβλητή δεν συμβάλει στη συνάρτηση παλινδρόμησης, τότε ο συντελεστής αυτής της μεταβλητής είναι ίσος με το μηδέν.

Ο στατιστικός δείκτης F χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της ειδικής περίπτωσης που όλες οι παράμετροι είναι μηδέν και υπολογίζεται από την σχέση:

$$F = \frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{1-R^2}{n-k-1}} \quad (5.20)$$

Σε περίπτωση που η τιμή του δείκτη F είναι μικρή, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως το μοντέλο παλινδρόμησης δεν είναι επιτυχημένο. Καταλαβαίνουμε πως και στην περίπτωση της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης, υπάρχει στενή σχέση ανάμεσα στο συντελεστή R^2 και τον στατιστικό δείκτη F .

Ο στατιστικός συντελεστής t στην πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση για έναν συγκεκριμένο συντελεστή αποτελεί εκτίμηση της σημαντικότητας του συντελεστή αυτού με την παρουσία όλων των άλλων ανεξάρτητων μεταβλητών. Έτσι, λοιπόν, για κάθε συντελεστή παλινδρόμησης ορίζουμε ένα τυπικό σφάλμα, δηλαδή ένα μέτρο της σταθερότητας του συντελεστή και με βάση την υπόθεση της κανονικότητας του μοντέλου παλινδρόμησης, ο δείκτης t ακολουθεί την t -κατανομή με $(n - k - 1)$ βαθμούς ελευθερίας. Ο δείκτης t δίνεται από την σχέση:

$$t_{bj} = \frac{b_j}{SE_{b_j}}, \text{ με } j = 1, 2, \dots, k \quad (5.21)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση για τον δείκτη t για κάθε συντελεστή του μοντέλου παλινδρόμησης, υπολογίζεται η σημαντικότητά του, μέσα από σύγκριση της τιμής του συντελεστή αυτού με το μηδέν, τιμή για την οποία η αντίστοιχη ανεξάρτητη μεταβλητή δεν συνεισφέρει στην πρόβλεψη του Y , με δεδομένη την παρουσία των άλλων ανεξάρτητων μεταβλητών.

Πρέπει να σημειωθεί ότι όσο μεγαλύτερη είναι η συσχέτιση μεταξύ δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, τόσο πιο ασταθείς θα είναι οι δύο συντελεστές που θα υπολογιστούν για τις μεταβλητές αυτές.

5.2.3 Βασικές Προϋποθέσεις Στην Πολλαπλή Γραμμική Παλινδρόμηση

Κατά την εφαρμογή του μοντέλου της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τις παρακάτω βασικές υποθέσεις:

1. Η ύπαρξη γραμμικής σχέσης ανάμεσα στην εξαρτημένη μεταβλητή και στις ανεξάρτητες είναι υψίστης σημασίας. Ακόμη και σε περίπτωση όπου δεν ικανοποιείται η υπόθεση της γραμμικότητας, τότε οι ανεξάρτητες μεταβλητές μετασχηματίζονται σε νέες έτσι ώστε να εμφανίζουν αυτή την γραμμική σχέση με την εξαρτημένη μεταβλητή Y .
2. Η δεύτερη υπόθεση που πρέπει να ικανοποιείται της ομοσκεδαστικότητας (homoscedasticity).

Θα πρέπει δηλαδή τα σφάλματα πρόβλεψης να είναι σταθερά για όλο το εύρος των παρατηρήσεων.

3. Τα υπόλοιπα σφάλματα είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, δηλαδή η τιμή του κάθε υπολοίπου είναι ανεξάρτητη από τις τιμές των προηγούμενων και των επόμενων.
4. Οι τιμές των υπολοίπων σφαλμάτων αν παρασταθούν γραφικά θα πρέπει να εμφανίζουν μια σχεδόν κανονική διασπορά.

Πέραν των τεσσάρων υποθέσεων υπάρχει ένα ακόμη σημαντικό ζήτημα στην πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση το οποίο δεν μπορεί να παραληφθεί και είναι αυτό της πολυσυγγραμικότητας. Χρησιμοποιώντας τον όρο της πολυσυγγραμικότητας εννοούμε όταν δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές είναι ισχυρά συσχετισμένες. Όταν συμβαίνει αυτό, προκύπτουν υπερβολικά μεγάλοι αριθμοί οι οποίοι είναι δύσκολοι στην διαχείριση. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να επιλέγονται ανεξάρτητες μεταβλητές οι οποίες δεν είναι ισχυρά συσχετισμένες (η συσχέτιση να μην υπερβαίνει την τιμή 0,7 και να μην είναι μικρότερη της τιμής $-0,7$).

Παράδειγμα 5.9. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι πωλήσεις (σε χιλιάδες) μιας επιχείρησης καθώς και το διαφημιστικό κόστος των προϊόντων που παράγει. Οι πωλήσεις και το διαφημιστικό κόστος είναι καταγεγραμμένα για κάθε έτος χωριστά κι αφορά την τελευταία δεκαετία (2012-2021).

Πίνακας 5.2: Ετήσιες πωλήσεις και διαφημιστικά κόστη για τα έτη 2012-2021

Έτος X_1	Διαφημιστικό κόστος X_2	Πωλήσεις Y
1	165,67	10979,43
2	90,95	9792,34
3	72,20	9579,85
4	71,80	8738,05
5	80,77	8964,94
6	129,13	10834,75
7	144,05	10271,37
8	99,9	8975,09
9	87,02	10452,67
10	137,18	9546,83

Παρατηρώντας τα δεδομένα του πίνακα, βλέπουμε πως πρόκειται για μοντέλο πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης, στο οποίο η εξαρτημένη μεταβλητή Y είναι οι πωλήσεις και οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι τα έτη X_1 και το διαφημιστικό κόστος X_2 . Με την βοήθεια κατάλληλου υπολογιστικού πακέτου υπολογίζουμε τις παραμέτρους a , b_1 και b_2 .

Επομένως έχουμε: $a = 8278,29$, $b_1 = -41,087$ και $b_2 = 16,328$.

Οπότε το μοντέλο πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης έχει την μορφή:

$$\hat{Y} = a + b_1X_1 + b_2X_2 = 8278,29 - 41,087X_1 + 16,328X_2$$

Με την βοήθεια της παραπάνω σχέσης μπορεί να υπολογιστεί μία εκτίμηση των πωλήσεων για τα επόμενα έτη.

```
Call:
lm(formula = y ~ x1 + x2)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-605.64 -517.84 -17.05  212.28 1123.33

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 8278.290    811.887   10.196 1.88e-05 ***
x1          -41.087     72.076   -0.570  0.586
x2           16.328      6.529    2.501  0.041 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 653.2 on 7 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4783,    Adjusted R-squared:  0.3293
F-statistic: 3.209 on 2 and 7 DF,  p-value: 0.1025
```

Σχήμα 5.5: Αποτελέσματα πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης

Κοιτάζοντας τα αποτελέσματα έπειτα από την προσαρμογή του πολλαπλού γραμμικού μοντέλου, παρατηρούμε ότι η p -value του συντελεστή b_1 για τον έλεγχο t έχει την τιμή p -value = 0,586 η οποία πλησιάζει αρκετά στη μονάδα, επομένως δεν πρόκειται για μία πολύ μικρή τιμή. Συνεπώς, δεν μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση ότι ο συντελεστής b_1 είναι στατιστικά διάφορος του μηδενός. Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να προσαρμόσουμε ξανά το μοντέλο παραλείποντας εντελώς την ανεξάρτητη μεταβλητή X_1 και θα ελέγχαμε ξανά τον στατιστικό δείκτη F και t , για να συγκρίνουμε την προσαρμογή των δύο μοντέλων.

Επιπλέον, μπορούμε να δούμε ότι και ο συντελεστής προσδιορισμού αλλά και η p -value του ελέγχου F , μας αποδεικνύουν ότι το μοντέλο έχει μία αρκετά καλή προσαρμογή στις παρατηρήσεις.

Κεφάλαιο 6

Case Study

Στην παρούσα ενότητα θα θέσουμε σε εφαρμογή τις μεθόδους πρόβλεψης που έχουν αναπτυχθεί στα προηγούμενα κεφάλαια. Για την μελέτη αυτή, θα χρησιμοποιήσουμε δεδομένα από την ελληνική εταιρεία ΠΛΑΙΣΙΟ COMPUTERS A.E. B.E., μέσω των οικονομικών της καταστάσεων που βρίσκονται αναρτημένα στο διαδίκτυο. Συγκεκριμένα, στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι πωλήσεις ετών από το 2017 ως το 2021 (σε χιλιάδες ευρώ) σε είδη ηλεκτρονικών υπολογιστών. Για κάθε έτος αναγράφονται οι πωλήσεις ανά εξάμηνο, συνεπώς για κάθε έτος αντιστοιχούν δύο εξάμηνα, το πρώτο από 1 Ιανουαρίου κάθε έτους ως 30 Ιουνίου και το δεύτερο από 1 Ιουλίου ως 31 Δεκεμβρίου. Για λόγους ευκολίας αντί να λέμε κάθε φορά το πρώτο εξάμηνο του 2020 για παράδειγμα, θα ορίσουμε ότι έχουμε 10 εξάμηνα (2 για κάθε έτος, 5 έτη επί 2 εξάμηνα =10)

Πίνακας 6.1: Εξαμηνιαίες πωλήσεις για τα έτη 2017-2021

Έτος	Εξάμηνο	Πωλήσεις Η/Υ (σε χιλ. €)
2017	1	61.385
	2	76.615
2018	3	64.347
	4	80.653
2019	5	61.673
	6	77.327
2020	7	67.181
	8	93.819
2021	9	95.921
	10	104.079

Παραθέτουμε και το διάγραμμα των πωλήσεων συναρτήσει των εξαμήνων

Παρατηρώντας τα δεδομένα μπορούμε να διαπιστώσουμε πως υπάρχει μια τάση αύξησης των πωλήσεων σε βάθος χρόνου καθώς και την ύπαρξη εποχικότητας. Οι λόγοι εμφάνισης των δύο αυτών παραγόντων, τάσης και εποχικότητας, θα μπορούσαν να ερμηνευθούν για την περίπτωση μας. Η αυξητική τάση των πωλήσεων από έτος σε έτος οφείλεται στο γεγονός ότι οι ανάγκες της αγοράς για απόκτηση Η/Υ, λόγω της εξέλιξης της τεχνολογίας, αυξάνονται.



Σχήμα 6.1: Εξαμηνιαίες πωλήσεις για τα έτη 2017-2021

Όσον αφορά στον παράγοντα της εποχικότητας παρατηρούμε πως στο δεύτερο εξάμηνο κάθε έτους (1/7-31/12) οι πωλήσεις είναι υψηλότερες έναντι του πρώτου εξαμήνου κάθε έτους. Αιτία αυτού είναι πως στο δεύτερο εξάμηνο, ανήκουν μήνες που η πώληση αυτών των προϊόντων αυξάνεται, όπως ο Δεκέμβριος, λόγω Χριστουγέννων, ή ο Σεπτέμβριος λόγω έναρξης σχολικής/ακαδημαϊκής χρονιάς. Επομένως, λόγω αυτής της συμπεριφοράς των δεδομένων, κρίνεται λογικό να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος εκθετικής εξομάλυνσης για τάση και εποχικότητα. Ανατρέχοντας στο κεφάλαιο 4 και συγκεκριμένα στην ενότητα 4.3, υπενθυμίζουμε πως για την εφαρμογή της μεθόδου είναι απαραίτητη η δήλωση αρχικών τιμών στις μεταβλητές T,L και E καθώς και η χρήση συντελεστών α, β και γ .

Έχουμε αναφέρει πως οι συντελεστές α, β, γ λαμβάνουν τιμές στο διάστημα (0,1) και η τιμή του συντελεστή γ είναι μεγαλύτερη των α και β . Επομένως, αυθαίρετα επιλέγουμε τις τιμές ως εξής: $\alpha = 0,2$, $\beta = 0,2$ και $\gamma = 0,3$

Ο μέσος όρος όλων των εξαμήνων των 5 ετών είναι:

$$\bar{Y} = \frac{61.385 + 76.615 + \dots + 95.921 + 104.079}{10} = \frac{783.000}{10} = 78.300 \quad (6.1)$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια των μ.ο. κάθε πρώτου και δεύτερου εξαμήνου των 5 ετών:

$$\bar{Y}_1 = \frac{61.385 + 64.347 + 61.673 + 67.181 + 95.921}{5} = \frac{350.507}{3} \approx 70.101,4 \quad (6.2)$$

και ο δείκτης εποχικότητας του πρώτου εξαμήνου υπολογίζεται ως:

$$E_1 = \frac{\bar{Y}_1}{\bar{Y}} = \frac{70.101,4}{78.300} \approx 0,895 \quad (6.3)$$

Αντίστοιχα για το δεύτερο εξάμηνο:

$$\bar{Y}_2 = \frac{76.615 + \dots + 104.079}{5} = \frac{432.993}{5} = 86.498,6 \quad (6.4)$$

και

$$E_2 = \frac{\bar{Y}_2}{\bar{Y}} = \frac{86.498,6}{78.300} \approx 1,105 \quad (6.5)$$

Συγκεντρωτικά, έχουμε τα αποτελέσματα στον ακόλουθο πίνακα :

Πίνακας 6.2: Πωλήσεις ετών για τα δύο εξάμηνα

Εξάμηνα	2017	2018	2019	2020	2021	Μ.Ο. Πωλήσεων	Δείκτης Εποχ.
1	61.385	64.347	61.673	67.181	95.921	70.101,4	0,895
2	76.615	80.653	77.327	93.819	104.079	86.498,6	1,105

Για την αρχική τιμή της μεταβλητή της γραμμικής τάσης T_0 έχουμε:

$$T_0 = \frac{95.921 - 61.385}{4} = \frac{34.536}{4} = 8.634 \quad (6.6)$$

Ο μέσος όρος των πωλήσεων του 2017 είναι:

$$\bar{Y}_{2017} = \frac{61.385 + 76.615}{2} = \frac{138.000}{2} = 69.000 \quad (6.7)$$

Από την αρχή της γραμμικής τάσης μπορούμε να υπολογίσουμε την γραμμική τάση για μισό κύκλο, δηλαδή 1 εξάμηνο. Οπότε, $1 \cdot T_0 = 1 \cdot 8.634 = 8.634$. Έτσι για την αρχική τιμή της μεταβλητής L_0 έχουμε:

$$L_0 = \bar{Y}_{2017} - 1 \cdot T_0 = 69.000 - 8.634 = 60.366 \quad (6.8)$$

Έχουμε λοιπόν:

$$L_1 = 0,2 \cdot \frac{61.385}{0,895} + 0,8(8.634 + 60.366) = 13.717,3184 + 55.200 \approx 68.917,319$$

$$T_1 = 0,2 \cdot (68.917,319 - 60,366) + 0,8 \cdot 8.634 = 8551,319 + 6907,2 \approx 15.458,519$$

$$E_1 = 0,3 \cdot \frac{61.385}{68.917,319} + 0,7 \cdot 0,895 = 0,2672115 + 0,6265 \approx 0,893$$

$$F_2 = (68.917,319 + 15.458,519) \cdot 1,105 \approx 93.235,301 \quad (6.9)$$

$$L_2 = 0,2 \cdot \frac{76.615}{1,105} + 0,8(68.917,319 + 15.458,519) = 13.866,9683 + 67.500,6704 \approx 81.367,639$$

$$T_2 = 0,2 \cdot (81.367,639 - 68.917,319) + 0,8 \cdot 15.458,519 = 2.490,064 + 12.366,8152 \approx 14.856,880$$

$$E_2 = 0,3 \cdot \frac{76.615}{81.367,639} + 0,7 \cdot 1,105 = 0,282477 + 0,7735 \approx 1,056$$

$$F_3 = (81.367,639 + 14.856,880) \cdot 0,893 \approx 85.928,496 \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned}
L_3 &= 0,2 \cdot \frac{64.347}{0,893} + 0,8(81.367,639 + 14.856,880)14.411,4222 + 76.979,6152 = 91.391,037 \\
T_3 &= 0,2 \cdot (91.391,037 - 81.367,639) + 0,8 \cdot 14.856,880 = 2004,6796 + 11.885,504 \approx 13.890,184 \\
E_3 &= 0,3 \cdot \frac{64.347}{91.391,037} + 0,7 \cdot 0,893 = 0,2112253 + 0,6251 \approx 0,836 \\
F_4 &= (91.391,037 + 13.890,184) \cdot 1,056 \approx 111.176,969
\end{aligned}
\tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
L_4 &= 0,2 \cdot \frac{80.653}{1,056} + 0,8(91.391,037 + 13.890,184) = 15.275,1894 + 84.224,9768 \approx 99.500,166 \\
T_4 &= 0,2 \cdot (99.500,166 - 91.391,037) + 0,8 \cdot 13.890,184 = 1.621,8258 + 11.112,1472 \approx 12.733,973 \\
E_4 &= 0,3 \cdot \frac{80.653}{99.500,166} + 0,7 \cdot 1,056 = 0,2431745 + 0,7392 \approx 0,982 \\
F_5 &= (99.500,166 + 12.733,73) \cdot 0,836 \approx 93.827,740
\end{aligned}
\tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
L_5 &= 0,2 \cdot \frac{61.673}{0,836} + 0,8(99.500,166 + 12.733,973) = 14.754,3062 + 89.787,3112 \approx 104.541,617 \\
T_5 &= 0,2 \cdot (104.541,617 - 99.500,166) + 0,8 \cdot 12.733,973 = 1.008,2902 + 10.187,1784 \approx 11.195,469 \\
E_5 &= 0,3 \cdot \frac{61.673}{104.541,617} + 0,7 \cdot 0,836 = 0,176981192 + 0,5852 \approx 0,762 \\
F_6 &= (104.541,617 + 11.195,469) \cdot 0,982 \approx 113.653,818
\end{aligned}
\tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
L_6 &= 0,2 \cdot \frac{77.327}{0,982} + 0,8(104.541,617 + 11.195,469) = 15.748,8798 + 92.589,668 \approx 108.338,549 \\
T_6 &= 0,2 \cdot (108.338,549 - 104.541,617) + 0,8 \cdot 11.195,469 = 759,3864 + 8.956,3752 \approx 9.715,762 \\
E_6 &= 0,3 \cdot \frac{77.327}{108.338,549} + 0,7 \cdot 0,982 = 0,214126 + 0,6874 \approx 0,902 \\
F_7 &= (108.338,549 + 9.715,762) \cdot 0,762 \approx 89.957,385
\end{aligned}
\tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}
L_7 &= 0,2 \cdot \frac{67.181}{0,762} + 0,8(108.338,549 + 9.715,762) = 17.632,8084 + 94.443,4488 \approx 112.076,257 \\
T_7 &= 0,2 \cdot (112.076,257 - 108.338,549) + 0,8 \cdot 9.715,762 = 747,5416 + 7.772,6096 \approx 8.520,151 \\
E_7 &= 0,3 \cdot \frac{67.181}{112.076,257} + 0,7 \cdot 0,762 = 0,1798267 + 0,5334 \approx 0,713 \\
F_8 &= (112.076,257 + 8.520,151) \cdot 0,902 \approx 108.777,96
\end{aligned}
\tag{6.15}$$

$$L_8 = 0,2 \cdot \frac{93.816}{0,902} + 0,8(112.076,257 + 8.520,151) = 20.802,439 + 96.477,1264 \approx 117.279,565$$

$$T_8 = 0,2 \cdot (117.279,565 - 112.076,257) + 0,8 \cdot 8.520,151 = 1.040,6616 + 6816,1208 \approx 7.856,783$$

$$E_8 = 0,3 \cdot \frac{93.819}{117.279,565} + 0,7 \cdot 0,902 = 0,2399881 + 0,6314 \approx 0,871$$

$$F_9 = (117.279,565 + 7.856,783) \cdot 0,713 \approx 89.222,216$$

(6.16)

$$L_9 = 0,2 \cdot \frac{95.921}{0,713} + 0,8(117.279,565 + 7.856,783) = 26.906,3114 + 100.109,078 \approx 127.015,389$$

$$T_9 = 0,2 \cdot (127.015,389 - 117.279,565) + 0,8 \cdot 7.856,783 = 1.947,1648 + 6.285,4264 \approx 8.232,592$$

$$E_9 = 0,3 \cdot \frac{95.921}{127.015,389} + 0,7 \cdot 0,713 = 0,2265576 + 0,4991 \approx 0,726$$

$$F_{10} = (127.015,389 + 8.232,592) \cdot 0,871 \approx 117.800,991$$

(6.17)

$$L_{10} = 0,2 \cdot \frac{104.079}{0,871} + 0,8(127.015,389 + 8.232,592) = 23.898,737 + 108.198,385 \approx 132.097,122$$

$$T_{10} = 0,2 \cdot (132.097,122 - 127.015,389) + 0,8 \cdot 8.232,592 = 1.016,3466 + 6.586,0736 \approx 7.602,420$$

$$E_{10} = 0,3 \cdot \frac{104.079}{132.097,122} + 0,7 \cdot 0,871 = 0,2363692 + 0,6097 \approx 0,846$$

$$F_{11} = (132.097,122 + 7.602,4202) \cdot 0,726 \approx 101.421,867$$

(6.18)

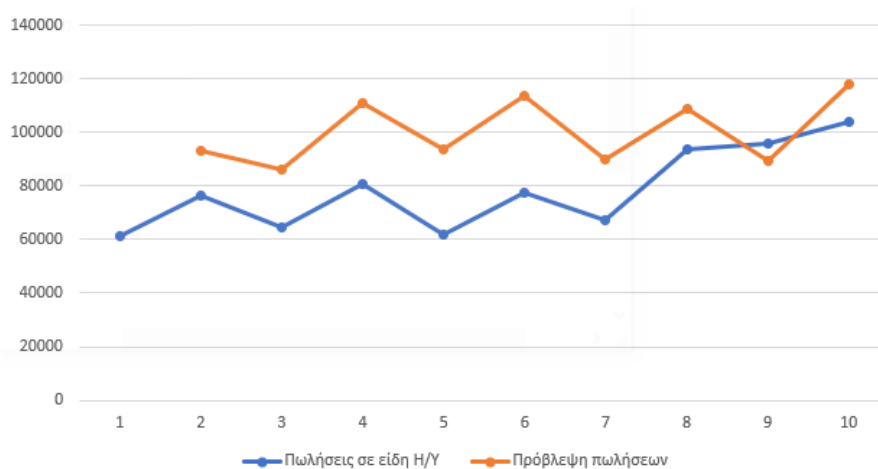
Τα αποτελέσματα της εφαρμογής της μεθόδου εμφανίζονται συγκεντρωτικά στον παρακάτω πίνακα

Πίνακας 6.3: Αποτελέσματα μεθόδου Winters

Έτος	Εξάμηνο	Πωλήσεις H/Y (σε χιλ. €)	L_t	T_t	E_t	F_t
2017	1	61.385	68.917,319	15.458,519	0,893	-
	2	76.615	81.367,639	14.856	1,056	93.235,301
2018	3	64.347	91.931,037	13.890,184	0,836	85.928,496
	4	80.653	99.500,166	12.733,973	0,982	111.176,969
2019	5	61.673	104.541,617	11.195,469	0,762	93.827,740
	6	77.327	108.338,549	9.715,762	0,902	113.653,818
2020	7	67.181	112.076,257	8.520,151	0,713	89.957,385
	8	93.819	117.279,565	7.856,783	0,871	108.777,960
2021	9	95.921	127.015,389	8.232,592	0,726	89.222,216
	10	104.079	132.097,122	7.602,420	0,846	117.800,991

Με βάση τους υπολογισμούς που έγιναν, βλέπουμε και την πρόβλεψη για το πρώτο εξάμηνο του έτους 2022, η οποία αντιστοιχεί στην τιμή $F_{11} = 101.421,867\text{€}$

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια στο ακόλουθο διάγραμμα τις πραγματικές πωλήσεις για τα έτη 2017-2021 καθώς και τις προβλέψεις F_t που υπολογίσαμε για τα έτη αυτά.



Σχήμα 6.2: Πραγματικές πωλήσεις και προβλέψεις

Παρατηρώντας το διάγραμμα μπορούμε να διαπιστώσουμε πως, με την εφαρμογή της μεθόδου Winters οι πραγματικές πωλήσεις αποκλίνουν των τιμών σε κάποιο βαθμό από τις προβλέψεις των πωλήσεων. Η διαφορά μεταξύ των τιμών φαίνεται να ελαχιστοποιείται καθώς προχωράμε την διαδικασία, δηλαδή από το 8^ο εξάμηνο και έπειτα. Όπως έχουμε αναφέρει και στην εισαγωγή του κεφαλαίου αυτού, πρόκειται για πώληση ειδών Η/Υ, η οποία ανά τα χρόνια αναμένεται να αυξάνεται λόγω της εφαρμογής της τεχνολογίας στην καθημερινότητά μας. Συνεπώς, η τιμή της πρόβλεψης για το πρώτο εξάμηνο του 2022, $F_{11} = 101.421.867\text{€}$, μοιάζει να είναι λογική καθώς είναι μεγαλύτερη από το πρώτο εξάμηνο της περασμένης χρονιάς, 2021. Μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα πως αν και η μέθοδος Winters δεν προσεγγίζει τα δεδομένα με μεγάλη ακρίβεια, πρόκειται για μέθοδο που στην περίπτωση μας δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

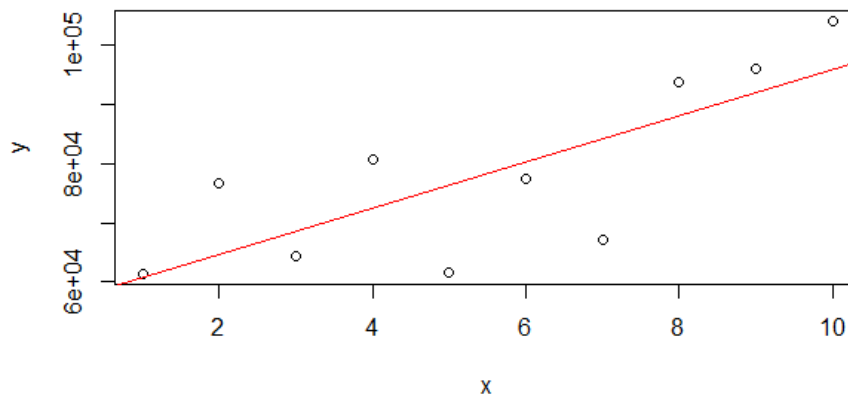
Εκτός από την μέθοδο εκθετικής εξομάλυνσης, έχουμε κάνει αναφορά και για την μέθοδο παλινδρόμησης. Στη συνέχεια, λοιπόν, θα εφαρμόσουμε την μέθοδο της απλής γραμμικής παλινδρόμησης και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που θα μας δώσει.

Θα θεωρήσουμε ανεξάρτητη μεταβλητή X τα εξάμηνα των 5 ετών και εξαρτημένη μεταβλητή Y τις πωλήσεις που σημειώθηκαν στα εξάμηνα αυτά. Πρέπει να αναφέρουμε πως η εφαρμογή της μεθόδου της απλής γραμμικής παλινδρόμησης είναι εφικτή στην περίπτωση μας καθώς η σχέση μεταξύ μεταβλητής X και Y είναι γραμμική.

Με τη χρήση του υπολογιστικού προγράμματος R, εισάγουμε τις τιμές για τις μεταβλητές X και Y και εμφανίζουμε την προσαρμογή της ευθείας παλινδρόμησης στα δεδομένα μας.

Παρατηρούμε πως η ευθεία παλινδρόμησης έχει μια καλή προσαρμογή στα δεδομένα.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συντελεστές παλινδρόμησης a και b .



Σχήμα 6.3: Προσαρμογή ευθείας παλινδρόμησης

```

call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-16955  -3899   2298   7590  11933

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   56901      7071   8.047 4.19e-05 ***
x              3891      1140   3.414 0.00917 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 10350 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.593,    Adjusted R-squared:  0.5421
F-statistic: 11.66 on 1 and 8 DF,  p-value: 0.009167

```

Σχήμα 6.4: Αποτελέσματα απλής γραμμικής παλινδρόμησης

Έχουμε, λοιπόν, $a = 56.901$ και $b = 3.891$ και άρα η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης είναι της μορφής:

$$Y = 56.901 + 3.891X \quad (6.19)$$

η οποία έχει παρασταθεί και γραφικά στο προηγούμενο γράφημα.

Χρησιμοποιώντας την σχέση για την ευθεία της γραμμικής παλινδρόμησης μπορούμε να υπολογίσουμε τις πωλήσεις για το πρώτο εξάμηνο του έτους 2021.

$$\text{Έχουμε: } Y_{11} = 56.901 + 3.891 \cdot 11 = 99.702\text{€}$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως η τιμή της μεταβλητής Y_{11} με την χρήση της μεθόδου παλινδρόμησης είναι κοντά στα σχετικά με την τιμή που μας έδωσε η μέθοδος Winters για την μεταβλητή αυτή. Θα μπορούσαμε ίσως να πούμε πως με την μέθοδο της απλής γραμμικής παλινδρόμησης πήραμε ένα λίγο καλύτερο αποτέλεσμα παρατηρώντας τα παρελθοντικά δεδομένα που διαθέτουμε. Η μέθοδος της απλής γραμμικής παλινδρόμησης μπορεί να ανα-

χθεί σε μέθοδο πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης, αν στο πρόβλημά μας προσθέσουμε μια ακόμη ανεξάρτητη μεταβλητή, όπως για παράδειγμα το κόστος παραγωγής των προϊόντων H/Y .

Παρόλα αυτά θα παραμείνουμε στη μέθοδο της απλής γραμμικής παλινδρόμησης και θα επισημάνουμε το γεγονός ότι υπάρχει μια διαφοροποίηση στις πωλήσεις του πρώτου και του δεύτερου εξαμήνου κάθε έτους. Αυτό συμβαίνει γιατί, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στο δεύτερο εξάμηνο κάθε έτους ανήκουν μήνες που οι πωλήσεις στα είδη H/Y επηρεάζονται θετικά. Επομένως, θα διαχωρίσουμε για τα 5 έτη μας τις πωλήσεις στα πρώτα εξάμηνα κάθε χρονιάς και στα δεύτερα εξάμηνα.

Έχουμε:

Πίνακας 6.4: Πωλήσεις πρώτων εξαμήνων για την περίοδο 2017-2021

Έτος	Εξάμηνο	Πωλήσεις(σε χιλ. €)
2017	1	61.385
2018	2	64.347
2019	3	61.673
2020	4	67.181
2021	5	95.921

Πίνακας 6.5: Πωλήσεις δεύτερων εξαμήνων για την περίοδο 2017-2021

Έτος	Εξάμηνο	Πωλήσεις(σε χιλ. €)
2017	1	76.615
2018	2	80.653
2019	3	77.327
2020	4	93.819
2021	5	104.079

Καθώς, προηγουμένως υπολογίσαμε την πρόβλεψη για τις πωλήσεις του πρώτου εξαμήνου του έτους 2022, τώρα χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα 6.4 θα κάνουμε εκ νέου τον υπολογισμό της μεταβλητής Y_{11} , έχοντας αποκλείσει τα δεδομένα του εαρινού εξαμήνου τα οποία ενδεχομένως να είχαν επιρροή.

Ορίζουμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή την X_{new} να είναι τα πρώτα εξάμηνα κάθε έτους και εξαρτημένη μεταβλητή την Y_{new} να είναι οι πωλήσεις αυτών των εξαμήνων.

Υπολογίζουμε τις τιμές των παραμέτρων παλινδρόμησης a' και b' με την χρήση του προγράμματος R.

```

Call:
lm(formula = y_new ~ x_new)

Residuals:
    1     2     3     4     5 
5665 1436 -8428 -10111 11438

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  48530     11137   4.358  0.0223 *
x_new        7191       3358   2.141  0.1217
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 10620 on 3 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6045,    Adjusted R-squared:  0.4727 
F-statistic: 4.586 on 1 and 3 DF,  p-value: 0.1217

```

Σχήμα 6.5: Προσαρμογή ευθείας παλινδρόμησης

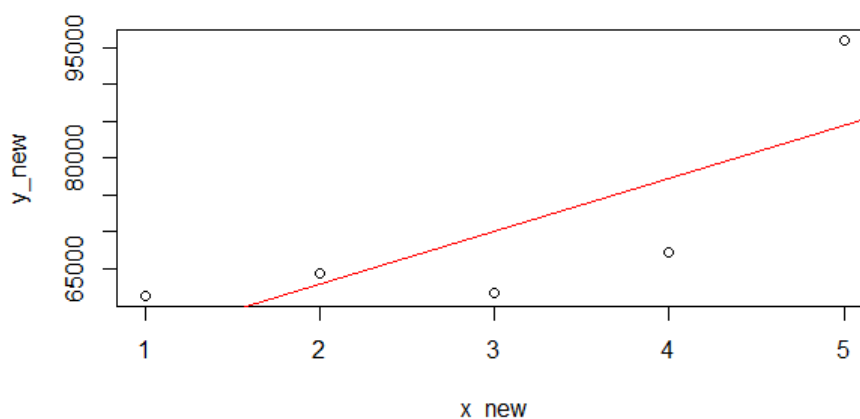
Επομένως έχουμε:

$$a' = 48.530 \text{ και } b' = 7.191$$

Άρα, η ευθεία παλινδρόμησης, δίνεται από την σχέση:

$$Y_{new} = 48.530 + 7.191X_{new} \quad (6.20)$$

και με την χρήση της γλώσσας προγραμματισμού *R*, η προσαρμογή αυτής στα δεδομένα φαίνεται ακολούθως:



Σχήμα 6.6: Προσαρμογή ευθείας παλινδρόμησης

Υπολογίζουμε την τιμή της πρόβλεψης για τις πωλήσεις του πρώτου εξαμήνου του έτους 2022, με την χρήση των νέων συντελεστών παλινδρόμησης a' και b' .

$$Y_6 = 48.530 + 7.191 \cdot 6 = 91.676 \text{ €} \quad (6.21)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως με τον αποκλεισμό των δεύτερων εξαμήνων κάθε έτους, ο υπολογισμός για το πρώτο εξάμηνο του 2022 έδωσε διαφορετικό αποτέλεσμα από

εκείνων στον οποίο συμπεριλάβαμε τα δεύτερα εξάμηνα.

Δημιουργείται έτσι το ερώτημα ποια από τις δύο εφαρμογές δίνει το καλύτερο αποτέλεσμα. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τα πρώτα εξάμηνα κάθε έτους εμφανίζουν μια κοινή συμπεριφορά, συνεπώς αναμένουμε πως η μέθοδος στην οποία απομονώσαμε τα πρώτα εξάμηνα κάθε έτους θα δίνει καλύτερη τιμή πρόβλεψης. Στην περίπτωση της μεθόδου που έχουμε συμπεριλάβει όλες τις τιμές, το εύρος των τιμών αυξάνεται και η τιμή της πρόβλεψης θα εξαρτάται από δεδομένα τα οποία έχουν μια διαφορετική συμπεριφορά από την μεταβλητή που προσπαθούμε να εκτιμήσουμε.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις αποδεικνύονται και από τα αποτελέσματα που μας παρέχονται μέσω του υπολογιστικού προγράμματος R.

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα της απλής γραμμικής παλινδρόμησης για την μέθοδο στην οποία έχουμε αξιοποιήσει όλες τις παρατηρήσεις, διαπιστώνουμε πως η τιμή του συντελεστή προσδιορισμού R^2 είναι $R^2 = 0,593$, το οποίο ερμηνεύεται ως ότι το 59,3% της διασποράς της μεταβλητής Y εξηγείται από την μεταβλητή X .

Αναζητώντας την τιμή του συντελεστή προσδιορισμού R^2 για την μέθοδο στην οποία αξιοποιήσαμε μόνο τα πρώτα εξάμηνα κάθε έτους, βλέπουμε ότι $R^2 = 0,6045$ το οποίο ερμηνεύεται ως ότι το 60,45% της διασποράς της μεταβλητής Y_{new} εξηγείται από την μεταβλητή X_{new} .

Βλέπουμε πως δεν υπάρχει μεγάλη απόκλιση μεταξύ των τιμών των δύο συντελεστών προσδιορισμού, αλλά στην μέθοδο των πρώτων εξαμήνων η τιμή είναι κάπως καλύτερη από την μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε όλες τις παρατηρήσεις ($60,45 > 59,3$).

Συνεπώς, μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος η οποία περιέχει τις τιμές μόνο των πρώτων εξαμήνων έχει καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα.

Συνεχίζοντας την μελέτη μας, στο επόμενο κομμάτι θα θέσουμε σε εφαρμογή τις μεθόδους Naïve και των κινητών μέσων όρων που παρουσιάστηκαν σχετικά στην αρχή της παρούσας εργασίας.

Εκκινώντας με την μέθοδο Naïve στην περίπτωση όπου έχουν ληφθεί υπόψη οι τάσεις, έχουμε ότι:

$$F_{t+1} = Y_t + (Y_t - Y_{t-1}) \quad (6.22)$$

Επομένως, για τον υπολογισμό των πωλήσεων του πρώτου εξαμήνου του έτους 2022 έχουμε:

$$F_{11} = Y_{10} + (Y_{10} - Y_9) \Rightarrow F_{11} = 104.079 + (104.079 - 95.921) = 112.297 \text{ €} \quad (6.23)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως η τιμή της μεταβλητής F_{11} της μεθόδου Naive είναι αρκετά αισιόδοξη και έχει απόκλιση με τις τιμές των μεθόδων της εκθετικής εξομάλυνσης και της απλής γραμμικής παλινδρόμησης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι δύο τελευταίες μέθοδοι, εκθετικής εξομάλυνσης και γραμμικής παλινδρόμησης λαμβάνουν υπόψη τους περισσότερους παράγοντες κατά τον υπολογισμό της πρόβλεψης και έτσι το αποτέλεσμα είναι πιο ακριβές. Θα λέγαμε λοιπόν πως η μέθοδος Naive, δίνει ένα πιο γενικό αποτέλεσμα καθώς μπορούμε να δούμε ότι στην σχέση της μεθόδου χρησιμοποιούνται οι δύο τελευταίες μόνο παρατηρήσεις κάτι που "δεν δίνει την ευκαιρία" στο μοντέλο να αντιληφθεί το μοτίβο που υπάρχει μεταξύ όλων των παρατηρήσεων.

Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του απλού κινητού μέσου όρου για 3 εξάμηνα.

Υπενθυμίζουμε την σχέση που περιγράφει την παραπάνω μέθοδο,

$$F_{t+1}^n = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \dots + Y_{t-n}}{n} \quad (6.24)$$

Επομένως, για $n = 3$ εξάμηνα, η τιμή του πρώτου εξαμήνου του έτους 2022 υπολογίζεται ως:

$$F_{11}^3 = \frac{Y_8 + Y_9 + Y_{10}}{3} = \frac{93.819 + 95.921 + 104.079}{3} = \frac{293.819}{3} \approx 97.939,67 \text{ €} \quad (6.25)$$

Βλέπουμε πως σε σχέση με την μέθοδο Naive, η τιμή που μας έδωσε η μέθοδος του απλού κινητού μέσου όρου για 3 εξάμηνα είναι κάπως καλύτερη και πιο κοντά στις τιμές της εκθετικής εξομάλυνσης και γραμμικής παλινδρόμησης. Αυτό ενδεχομένως να συμβαίνει διότι η μέθοδος απλού κινητού μέσου όρου για 3 εξάμηνα λαμβάνει υπόψη της 3 παρατηρήσεις, έναντι των 2 που λαμβάνει η Naive και αυτό δίνει την δυνατότητα στο μοντέλο να προσαρμοστεί κάπως καλύτερα στα δεδομένα.

Θα θέλαμε να δούμε τα αποτελέσματα που θα μας δώσει και η μέθοδο απλού κινητού μέσου όρου 5 εξαμήνων.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} F_{11}^5 &= \frac{Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{10}}{5} \\ &= \frac{77.327 + 67.181 + 93.819 + 95.921 + 104.079}{5} = \frac{438.327}{5} = 87.665,4 \text{ €} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Από την μέθοδο της απλής γραμμικής παλινδρόμησης με την αξιοποίηση των πρώτων εξαμήνων κάθε έτους, καταλήξαμε στο συμπέρασμα πως είναι η βέλτιστη μέθοδος και η τιμή της υπό πρόβλεψη μεταβλητής υπολογίστηκε ως $Y_6 = 91.676 \text{ €}$.

Η τιμή της μεταβλητής F_{11}^5 είναι πιο κοντά στην τιμή της μεταβλητής Y_6 απ' ό τι είναι η τιμή της μεταβλητής F_{11}^3 .

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η μέθοδος απλού κινητού μέσου όρου 5 εξαμήνων λαμβάνει υπόψη της περισσότερα δεδομένα από την μέθοδο απλού κινητού μέσου όρου 3 εξαμήνων, και άρα το μοντέλο μπορεί να έχει μια καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα.

Τέλος, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο σταθμισμένου κινητού μέσου όρου. Υπενθυμίζουμε την σχέση της μεθόδου:

$$F_{t+1} = \sum_t w_t Y_t \quad (6.27)$$

Θα υπολογίσουμε τον σταθμισμένο κινητό μέσο όρο 4 εξαμήνων, και τα βάρη της μεθόδου αυτής θα έχουν τιμές $a = 40\%$ των πραγματικών τιμών για το πιο πρόσφατο παρελθοντικό εξάμηνο, $b = 30\%$ για δύο εξάμηνα, $g = 20\%$ για τρία εξάμηνα και $d = 10\%$ για τέσσερα εξάμηνα.

Επομένως,

$$\begin{aligned} Y_{11} &= 0,40 * 104.079 + 0,30 * 95.921 + 0,20 * 93.819 + 0,10 * 67181 \\ &= 41.631,6 + 28.776,3 + 18.763,8 + 6.718,1 = 95.889,8 \text{ €} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως και η μέθοδος σταθμισμένου κινητού μέσου όρου μας έδωσε ένα αποτέλεσμα σχετικά κοντά σε αυτό που μας έδωσε η μέθοδος απλής γραμμικής παλινδρόμησης για τα πρώτα εξάμηνα κάθε έτους. Βλέπουμε ως τα βάρη της μεθόδου σταθμισμένου κινητού μέσου όρου επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να δίνεται βαρύτητα στις πιο πρόσφατες πωλήσεις. Έτσι, δίνεται η δυνατότητα στο μοντέλο να κάνει μία εκτίμηση της μεταβλητής Y_{11} , η οποία θα πάρει την αυξητική τάση που παρατηρούμε από κάθε πρώτο εξάμηνο σε κάθε επόμενο πρώτο εξάμηνο.

Στην περίπτωση που απομονώσουμε τα δεδομένα των δεύτερων εξαμήνων κάθε έτους και επαναλάβουμε την μέθοδο σταθμισμένου κινητού μέσου όρου για 4 εξάμηνα με τα ίδια βάρη, έχουμε ότι η εκτίμηση για το πρώτο εξάμηνο του έτους 2022 θα είναι:

$$\begin{aligned} Y_6 &= 0,40 * 95.921 + 0,30 * 67.181 + 0,20 * 61.673 + 0,10 * 64.347 \\ &= 38368,4 + 20.154,3 + 12.334,6 + 6.434,7 = 77.292 \text{ €} \end{aligned} \tag{6.29}$$

Στην προκειμένη περίπτωση, η εκτίμηση για την υπό πρόβλεψη μεταβλητή φαίνεται να έχει διατηρήσει κάπως το μοτίβο των πρώτων εξαμήνων κάθε έτους, όμως δεν θα λέγαμε πως είναι ικανοποιητική πρόβλεψη μιας και απέχει αρκετά από την τιμή της μεθόδου απλής γραμμικής παλινδρόμησης για τα πρώτα εξάμηνα κάθε έτους, που θεωρήσαμε να είναι και η βέλτιστη.

[7]

[8]

[9]

[10], [11], [12], [13]

[14], [15], [16]

Βιβλιογραφία

- [1] Ι. Κολέτσος, Δ. Στογιάννης. *Επιχειρησιακή Έρευνα- Θεωρία, αλγόριθμοι και εφαρμογές*. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1η έκδοση, 2021.
- [2] Hillier και Lieberman. *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill, New York, 7η έκδοση, 2001.
- [3] *forecasting*. <https://otexts.com/fpp2/what-can-be-forecast.html>.
- [4] John E. Hanke και Dean W. Wichern. *Business Forecasting*. Pearson, 9η έκδοση, 2008.
- [5] R.A. Hoshman. *Business forecasting. A practical approach*. NY and Oxon Routledge, New York, 2η έκδοση, 2010.
- [6] *CHRON*. <https://smallbusiness.chron.com/estimate-y-intercept-excel-32434.html>.
- [7] *eurostat*. https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Main_Page.
- [8] *investopedia*. <https://www.investopedia.com/terms/f/forecasting.asp>.
- [9] W.J. Stevenson. *Operations Management*. McGraw-Hill, New York, 12η έκδοση, 2015.
- [10] Ronkainen Ilkka A. Czinkota, Michael R. *A forecast of globalization, international business and trade: report from a Delphi study*. Journal of World Business, pages 111-123, 2005.
- [11] Tolson H. Cole B. R. Akins, R. B. *Stability of response characteristics of a Delphi panel: Application of bootstrap data expansion*. BMC Medical Research Methodology, 1-12. doi:10.1186/1471-2288-5-37, 5(37)η έκδοση, 2005.
- [12] Φ. Πετρόπουλος, Β. Ασημακόπουλος. *Επιχειρησιακές Προβλήψεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1η έκδοση, 2013.
- [13] *Financial statements of PLAISIO*. <https://www.plaisio.gr/IR/Financial-Information/Financial-Results>.
- [14] H. A. Turoff M. Linstone. *The Delphi Method, Techniques and Applications*. Addison Wesley Pub Co Inc., Boston, 18η έκδοση, 2002.

- [15] Francis X. Diebold. *Elements of forecasting*. Thomson South-Western, USA, 4η έκδοση, 2007.
- [16] Michael K. Evans. *Practical Business Forecasting*. Blackwell Publishers, UK, 1η έκδοση, 2002.

