

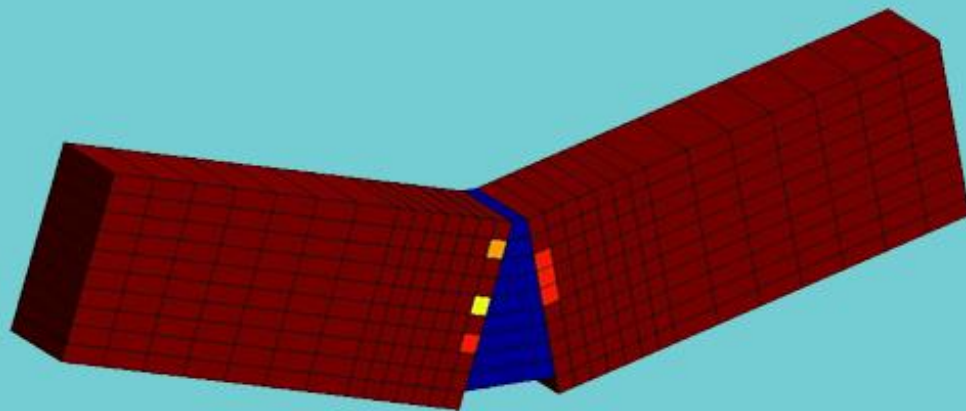


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

**ΔΙΑΔΟΧΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ
ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΡΩΓΜΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ**

(Διπλωματική Εργασία)

ΜΑΝΙΤΑΡΑΣ ΘΕΟΦΙΛΟΣ-ΙΩΑΝΝΗΣ



Επιβλέποντες: Μ. Παπαδρακάκης (Καθ. ΕΜΠ)
Μ. Γεωργιουδάκης (Υποψ. Διδ. ΕΜΠ)

ΑΘΗΝΑ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010

Πίνακας Περιεχομένων

| | |
|--|----|
| Ευχαριστίες | 5 |
| Πρόλογος..... | 7 |
| 1. Γενικά για τη Μηχανική των Θραύσεων (Fracture Mechanics)..... | 9 |
| 1.1 Τρόποι (Modes) φορτίσεως ρωγμών | 10 |
| 2. Διαδοχική Γραμμική Προσέγγιση (ΔΓΠ) | 13 |
| 2.1 Ρηγμάτωση και ΔΓΠ (Sequential Linear Approach - SLA)..... | 13 |
| 2.2 Διαδοχική Γραμμική Ανάλυση βήμα προς βήμα | 14 |
| 2.3 Ισοτροπικό γραμμικό μοντέλο θραύσης και διαδοχική γραμμική προσέγγισή του | 15 |
| 2.4 Διαδοχική γραμμική προσέγγιση | 17 |
| 3. Εφαρμογές της ΔΓΠ | 19 |
| 3.1 Δοκός με εγκοπή υποβαλλόμενη σε κάμψη 4 σημείων (4 Point Notched Bending Beam) | 19 |
| 3.1.1 Διερεύνηση παραμέτρων ΔΓΠ | 19 |
| 3.1.2 Διερεύνηση ευαισθησίας της μεθόδου ως προς τον χρησιμοποιούμενο κάρναβο πεπερασμένων στοιχείων. | 26 |
| 3.2 Δοκός υποβαλλόμενη σε κάμψη 4 σημείων. Σύγκριση Διαδοχικής Γραμμικής Προσέγγισης με Πειραματικά Αποτελέσματα | 32 |
| 3.3 Μονοπροέχουσα δοκός με εγκοπή υποβαλλόμενη σε κάμψη 4 σημείων..... | 36 |
| 3.4 Δοκός εφαρμογής 1 προσομοιωμένη με εξαεδρικά-οκτακομβικά στοιχεία τρισδιαστατης ελαστικότητας..... | 39 |
| Αποτελέσματα - Συμπεράσματα Διπλωματικής Εργασίας | 43 |
| Προτάσεις Για Επιπλέον Μελέτη-Διερεύνηση | 44 |
| Παράρτημα..... | 45 |
| Π.1 Πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης..... | 45 |
| Π.2 Βελτιωμένα Τετραπλευρικά – Τετρακομβικά Στοιχεία Επίπεδης Έντασης | 47 |
| Εισαγωγή | 47 |
| Ενσωμάτωση των μορφών παραμόρφωσης | 48 |
| Π.3 Αριθμητική Ολοκλήρωση..... | 57 |
| Ολοκλήρωση Gauss..... | 58 |
| Ολοκλήρωση σε δύο διαστάσεις | 58 |
| Ολοκλήρωση σε τρεις διαστάσεις..... | 59 |

Βιβλιογραφία..... 61

Ευχαριστίες

Η προετοιμασία της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, ξεκίνησε ουσιαστικά το Νοέμβριο του 2009. Αρχικά με την καθοδήγηση του επιβλέποντα κ. Μ. Παπαδρακάκη (καθηγητή Ε.Μ.Π), άρχισα να μελετώ κώδικες προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων. Αυτή ήταν και η πρώτη μου επαφή με τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τον προγραμματισμό της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων στον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Έπειτα, συνέχισα μελετώντας από διάφορες πηγές τη Μηχανική των Θραύσεων καθώς και τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων με πεπερασμένα στοιχεία. Με προτροπή του επιβλέποντα καθηγητή, ασχολήθηκα με την εναλλακτική αυτή μέθοδο της Διαδοχικής Γραμμικής Προσέγγισης (Sequential Linear Approach) που χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τον Jan. G. Rots για την προσομοίωση του μη γραμμικού φαινομένου της ρηγμάτωσης.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Μ. Παπαδρακάκη, τόσο για την επίβλεψη της Διπλωματικής Εργασίας, όσο και για τη διάθεσή του στην επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος - απορίας συνάντησα. Ακόμη, τον ευχαριστώ γιατί με έφερε σε επαφή με τα πιο σύγχρονα και ενδιαφέροντα προβλήματα του μηχανικού και τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων η οποία κυριαρχεί αυτή τη στιγμή στην επίλυσή τους.

Επιπλέον, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω τον κ. Μ. Γεωργιουδάκη (υποψ. διδάκτωρ της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ), ο οποίος μέσα σε διάστημα λίγων μηνών, μου δίδαξε πολλά πράγματα όσον αφορά τον προγραμματισμό, τη Μηχανική των Θραύσεων και τους σύγχρονους τρόπους προσομοίωσης αυτών των προβλημάτων μέσω της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Η καθοδήγησή του ήταν καταλυτική και η συνεργασία μας άψογη.

Δε θα μπορούσα να μη γράψω για την ευγνωμοσύνη που αισθάνομαι, για όλους τους ανθρώπους που με βοήθησαν, ο καθένας με το δικό του τρόπο σε όλη αυτή την πορεία, από τα χρόνια του σχολείου μέχρι και την αποφοίτησή μου ως διπλωματούχος μηχανικός από το Ε.Μ.Π.

Τέλος, δε θα μπορούσα να βρίσκομαι σήμερα σε αυτή τη θέση χωρίς τη συνεχή στήριξη των γονιών μου οι οποίοι στάθηκαν κοντά μου δίνοντάς μου κουράγιο και διάθεση σε όλη αυτή την προσπάθεια.

Μανιταράς Θεόφιλος-Ιωάννης
Σεπτέμβριος 2010

Πρόλογος

Τα φαινόμενα της θραύσης και ρηγμάτωσης στις κατασκευές, απασχολούσαν ανέκαθεν τους μηχανικούς. Με την πάροδο των χρόνων προτάθηκαν διάφορες μέθοδοι για την προσομοίωση των σύνθετων αυτών φαινομένων. Οι περισσότερες από αυτές, αποτελούν επαναληπτικές μη γραμμικές διαδικασίες προσομοίωσης με πεπερασμένα στοιχεία. Λόγω της πολυπλοκότητας των διαδικασιών αυτών και των παραμέτρων που εισέρχονται σε αυτές, κατά τη χρήση τους δημιουργούνται προβλήματα αστάθειας και δυσκολίας σύγκλισης των μεθόδων αυτών.

Στη Διπλωματική αυτή Εργασία, αφού γίνεται μια μικρή εισαγωγή στη Μηχανική των Θραύσεων, αναλύεται βήμα προς βήμα η διαδικασία της Διαδοχικής Γραμμικής Προσέγγισης (ΔΓΠ). Η μέθοδος της ΔΓΠ (Sequential Linear Approach), χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τον Jan. G. Rots (καθηγητή στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο Delft) και αποτελεί μία εναλλακτική μέθοδο για την ανάλυση των φαινομένων ρηγμάτωσης, η οποία δεν παρουσιάζει προβλήματα σύγκλισης. Εξετάζεται η ευστάθεια και αξιοπιστία της μεθόδου, η ανεξαρτησία της από την επιλογή του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων και διερευνάται η συμπεριφορά της μεθόδου ανάλογα με την τιμή των παραμέτρων της. Ο προγραμματισμός της μεθόδου της ΔΓΠ υλοποιήθηκε στον ήδη υπάρχοντα κώδικα πεπερασμένων στοιχείων GSAP που έχει αναπτυχθεί από τον Μ. Γεωργιουδάκη στα πλαίσια της διδακτορικής του διατριβής, για την προσομοίωση των ρηγματωμένων φορέων και είναι γραμμένος εξ' ολοκλήρου σε γλώσσα F90.

Εν συνεχεία, παρουσιάζονται μερικές εφαρμογές τόσο επίπεδης έντασης όσο και τρισδιάστατης ελαστικότητας. Επιπλέον, διατυπώνεται η μόρφωση του μητρώου δυσκαμψίας του βελτιωμένου τετραπλευρικού στοιχείου επίπεδης έντασης.

Τέλος, σχολιάζονται τα πλεονεκτήματα της μεθόδου της ΔΓΠ σε σχέση με τις μη Γραμμικές διαδικασίες που συνήθως υιοθετούνται και διατυπώνονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη χρήση της μεθόδου.

Κεφάλαιο 1

1. Γενικά για τη Μηχανική των Θραύσεων (Fracture Mechanics)

Η Μηχανική των Θραύσεων, έχει ως αντικείμενο την ανάλυση και το σχεδιασμό των κατασκευών οι οποίες περιέχουν ρωγμές ή ελαττώματα. Υπό κάποια κλίμακα, όλα τα υλικά παρουσιάζουν ελαττώματα σε μικροσκοπικό επίπεδο λόγω της ρηγμάτωσης ενός τμήματός τους, ασύνδετων ινών κτλ. Το ελάττωμα όμως μπορεί να συνίσταται και σε μακροσκοπικό επίπεδο και να οφείλεται σε σκουριά στην περίπτωση μετάλλων, σε κόπωση, σε ελάττωμα συγκόλλησης αλλά και σε πολλούς άλλους λόγους. Έτσι είναι κατανοητό πως η Μηχανική των Θραύσεων, αφορά οποιοδήποτε λεπτομερή σχεδιασμό ή εκτίμηση ασφάλειας μιας κατασκευής. Η ανάπτυξη και διάδοση ρωγμών μπορεί να συμβεί καθ' όλη τη διάρκεια ζωής μιας κατασκευής λόγω διαφόρων καταπονήσεων όπως είναι η κόπωση στις οποίες υπόκειται αυτή. Έτσι, η Μηχανική των Θραύσεων είναι σημαντική για την εκτίμηση της ασφάλειας του έργου ανά πάσα στιγμή και όχι μόνο κατά τη φάση υλοποίησής του.

Η Μηχανική των Θραύσεων λοιπόν έρχεται να δώσει απάντηση σε σημαντικά ερωτήματα που αφορούν τις κατασκευές του μηχανικού. Ποιο είναι το μεγαλύτερο μέγεθος ρωγμής ή το μεγαλύτερο φορτίο ώστε να έχουμε επαρκή ασφάλεια έναντι αστοχίας; Μέχρι ποιο σημείο κάποια ρωγμή η οποία δεν επηρεάζει την ασφάλεια μιας κατασκευής αρχίζει και γίνεται επικίνδυνη; Και τέλος ποιο υλικό είναι κατάλληλο για να εξασφαλιστεί η επιθυμητή ασφάλεια;

Η πρώτη αποδεκτή ανάλυση ενός προβλήματος στο οποίο κυριαρχεί το φαινόμενο της θραύσης, έγινε από τον Griffith το 1920, ο οποίος ασχολήθηκε με το πρόβλημα της διάδοσης ρωγμών στο

γυαλί το οποίο είναι ένα ψαθυρό υλικό. Ο Griffith ήταν αυτός που θεμελίωσε την πολύ γνωστή σήμερα αρχή σύμφωνα με την οποία, μια προϋπάρχουσα ρωγμή θα αρχίσει να διαδίδεται, αν η ενέργεια του συστήματος στην περιοχή γύρω από αυτή μειωθεί. Θεώρησε πως υπάρχει μία απλή ισορροπία ενέργειας, η οποία συνίσταται από τη μείωση της ελαστικής παραμόρφωσης μέσα στο καταπονούμενο υλικό αν η ρωγμή επιμηκύνεται και εξισορροπείται από την ενέργεια που απαιτείται ώστε να σχηματιστούν οι νέες επιφάνειες που δημιουργεί η ρωγμή καθώς διαδίδεται. Η παραπάνω θεωρία επιτρέπει τον υπολογισμό της αντοχής των ψαθυρών υλικών.

Οι Zener και Hollomon το 1944 ήταν οι πρώτοι που συσχέτισαν την θεωρία του Griffith με το φαινόμενο της ψαθυρής θραύσης ορισμένων μετάλλων. Λίγο αργότερα ο Irwin ήταν εκείνος που έδωσε τον ορισμό της ενέργειας θραύσης G_f την οποία θεώρησε ως την οδηγό δύναμη που ελέγχει τη ρωγμή, και την όρισε ως τη συνολική ενέργεια που ελευθερώνεται κατά τη ρηγμάτωση για μοναδιαία αύξηση του μήκους της ρωγμής.

Το 1950 ο Irwin έδειξε πως η ενεργειακή προσέγγιση είναι ισοδύναμη με την προσέγγιση της συγκέντρωσης των τάσεων (K), σύμφωνα με την οποία η θραύση λαμβάνει χώρα όταν μία κρίσιμη κατανομή τάσεων πραγματοποιηθεί στο άκρο της ρωγμής. Έτσι η ιδιότητα του υλικού πλέον που καθορίζει τη θραύση είναι ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων (K_c) ή σε όρους ενέργειας μία κρίσιμη τιμή G_c της ενέργειας θραύσης.

Η παραπάνω ισοδυναμία ήταν και αυτή που άνοιξε το δρόμο για την ανάπτυξη του κλάδου της Γραμμικής Ελαστικής Μηχανικής των Θραύσεων (Linear Elastic Fracture Mechanics).

Από τα παραπάνω, καθίσταται σαφές πως στην περίπτωση ύπαρξης ρωγμών στα καταπονούμενα υλικά η κλασική Θεωρία της Ελαστικότητας δεν επαρκεί για τον πλήρη προσδιορισμό του αναπτυσσόμενου τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου κυρίως λόγω της ιδιομορφίας αυτών σε μια περιοχή γύρω από την ρωγμή. Παρακάτω αναλύονται οι χαρακτηριστικοί τρόποι φόρτισης των ρωγμών.

1.1 Τρόποι (Modes) φορτίσεως ρωγμών

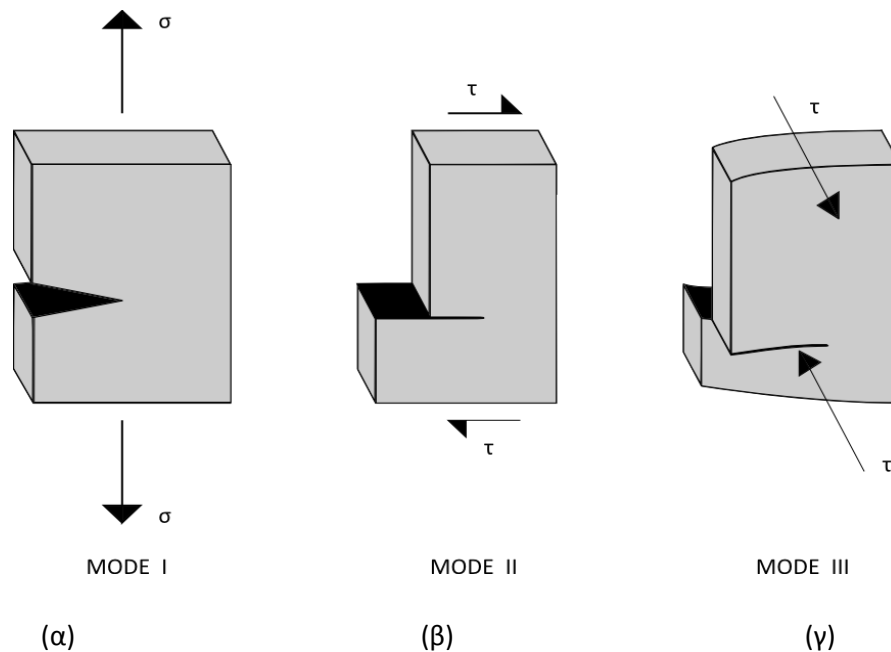
Σε φορείς οι οποίοι καταπονούνται υπό στατικά ή δυναμικά φορτία, το άνοιγμα μιας τυχούσας ρωγμής δύναται να λάβει χώρα σε οποιοδήποτε σημείο του φορέα, με τρεις διαφορετικούς στοιχειώδεις τρόπους οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Κάθε φορτική κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία αυτών των ανεξάρτητων τρόπων. Πιο συγκεκριμένα:

Ο πρώτος τρόπος καταπόνησης (Mode I), ο οποίος ονομάζεται **εφελκυστικός (Opening Mode)**, πραγματοποιείται κατά την καταπόνηση της ρωγμής υπό μια εφελκυστική ορθή τάση, σ , κάθετη στον άξονά της και εντός του επιπέδου της. Λόγω της φόρτισης αυτής τα χείλη της ρωγμής τείνουν να διαχωριστούν συμμετρικά ως προς τον άξονά της (σχήμα 1α).

Ο δεύτερος τρόπος καταπόνησης (Mode II) ονομάζεται **συνεπίπεδος διατμητικός (Shearing Mode)**. Πραγματοποιείται, όταν η ρωγμή καταπονείται από μια διατμητική τάση τ , παράλληλη με τον άξονα της ρωγμής και συνεπίπεδη με αυτόν. Τα χείλη της ρωγμής τείνουν να ολισθήσουν το ένα σε σχέση με το άλλο προς αντίθετες κατευθύνσεις αλλά εντός του ίδιου επιπέδου (σχήμα 1β).

Ο τρίτος τρόπος καταπόνησης (Mode III) καλείται **εγκάρσιος διατμητικός (Tearing Mode)**. Πραγματοποιείται όταν η ρωγμή καταπονείται από μία διατμητική τάση τ , η οποία στην περίπτωση αυτή είναι κάθετη στον άξονα της ρωγμής και εντός του επιπέδου της. Κατά τη φόρτιση αυτή τα χείλη της ρωγμής τείνουν να απομακρυνθούν μεταξύ τους προς εγκάρσιες αντίθετες κατευθύνσεις.

Από τους τρεις παραπάνω τρόπους φόρτισης, ο πρώτος τρόπος καταπόνησης (Mode I) είναι αυτός που εμφανίζεται πιο συχνά στα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού και μελετάται στην παρούσα Διπλωματική Εργασία (ΔΕ).



Σχήμα 1: Τρόποι καταπόνησης μιας ρωγμής

Κεφάλαιο 2

2. Διαδοχική Γραμμική Προσέγγιση (ΔΓΠ)

2.1 Ρηγμάτωση και ΔΓΠ (Sequential Linear Approach - SLA)

Οι κατασκευές έχουν την ικανότητα να ανακατανέμουν τις τάσεις τους λόγω ρηγματώσεων ή σπασιμάτων. Μία ρωγμή μπορεί να ξεκινήσει, να διαδοθεί και να φτάσει μία ελεύθερη επιφάνεια ενώ ταυτόχρονα, εξαιτίας της ανακατανομής των τάσεων μία νέα ρωγμή ή σπάσιμο μπορεί να αναπτυχθεί σε κάποιο γειτονικό ή μη τμήμα της. Για κατασκευές μεγάλης κλίμακας, όπως μία μη οπλισμένη πρόσοψη τοιχοποιίας η ανισορροπία μεταξύ της ελαστικής ενέργειας που είναι αποθηκευμένη στην κατασκευή και της ενέργειας θραύσης που καταναλώνεται από τα φαινόμενα των ρωγμών, είναι μεγάλη. Οι παραπάνω διεργασίες είναι ψαθυρές και αυτό αποτυπώνεται στις ψευδοστατικές καμπύλες φορτίου-μετατόπισης όπου υπάρχουν πολλά οριζόντια σημεία (snap-backs). Η παραπάνω ψαθυρή συμπεριφορά χαρακτηρίζει γενικά τις κατασκευές από μη οπλισμένα υλικά. Στην πράξη, ένα τοπικό άλμα στην καμπύλη εντοπίζεται, όταν μία ρωγμή διαπερνά μία ράβδο οπλισμού, που οδηγεί σε έναν κατιόντα κλάδο που προκύπτει ύστερα από μη γραμμικές αναλύσεις με μεθόδους Newton-Raphson και μήκος τόξου (Arc Length), με έλεγχο μετατοπίσεων (displacement control). Ο κατιών κλάδος, ακολουθείται από έναν ανιόντα κλάδο, όταν συντελεστεί η ανακατανομή τάσεων που περιγράφηκε παραπάνω. Στις επαυξητικές μη γραμμικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, το να επιτευχθεί η προσομοίωση των

οριζόντιων(snap-back) και των κατακόρυφων(snap-through) σημείων της καμπύλης φορτίου-μετατόπισης, είναι ένα πολύ ευαίσθητο και δύσκολο σημείο. Αυτό γιατί σε τέτοιου είδους προβλήματα προκύπτουν προβλήματα σύγκλισης των παραπάνω μη γραμμικών μεθόδων, εξαιτίας της ύπαρξης αρνητικών εφαπτομενικών μητρώων που είναι ανεξάρτητα από το χρησιμοποιούμενο μοντέλο ρηγμάτωσης.

Έτσι στη Διπλωματική αυτή εργασία, ερχόμαστε να εφαρμόσουμε μια σχετικά νέα τεχνική προσέγγισης των προβλημάτων η οποία πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Jan. G. Rots, καθηγητή στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο Delft της Ολλανδίας. Η νέα αυτή μέθοδος βασίζεται στο λεγόμενο διαδοχικό γραμμικό πριονωτό μοντέλο το οποίο έρχεται να ξεπεράσει τα προβλήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω. Το μοντέλο αυτό αντικαθιστά τον κλάδο χαλάρωσης, της καμπύλης τάσης-παραμόρφωσης των ψαθυρών υλικών, με μία πριονωτή καμπύλη. Έτσι εκτελείται μία γραμμική ανάλυση, εντοπίζεται το κρίσιμότερο στοιχείο του φορέα και έπειτα μειώνονται σταδιακά η δυσκαμψία και η αντοχή του σύμφωνα με την πριονωτή καμπύλη. Ακολούθως, η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται. Παρακάτω, θα περιγραφεί αναλυτικά η διαδικασία καθώς και το μοντέλο ρηγμάτωσης που θα χρησιμοποιηθεί.

2.2 Διαδοχική Γραμμική Ανάλυση βήμα προς βήμα

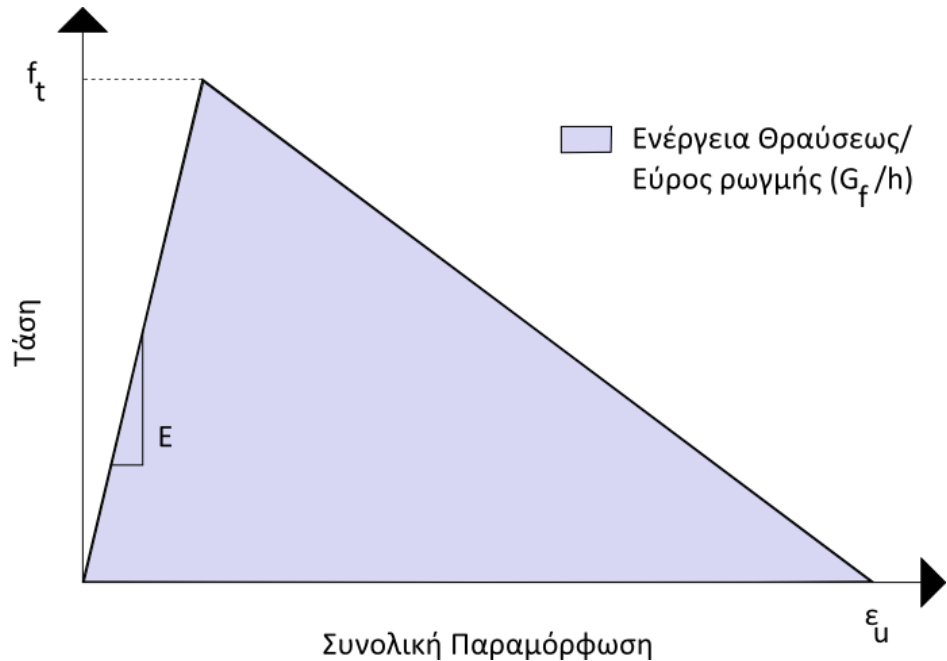
1. Εφαρμογή του εξωτερικού φορτίου με μοναδιαίο μέτρο.
2. Εκτέλεση μιας γραμμικής ελαστικής ανάλυσης.
3. Εύρεση του κρίσιμου στοιχείου από τα αποτελέσματα της γραμμικής ανάλυσης. Ως κρίσιμο χαρακτηρίζεται εκείνο το στοιχείο του οποίου η κύρια εφελκυστική τάση είναι πιο κοντά στην εφελκυστική αντοχή του υλικού. Αυτό το κριτήριο της μέγιστης κύριας εφελκυστικής τάσης, είναι απολύτως αποδεκτό όσον αφορά τον πρώτο τρόπο φόρτισης ρωγμής (Mode I) στη Μηχανική των Θραύσεων που αφορά τα οιονεί ψαθυρά υλικά.
4. Υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου, το οποίο προκύπτει ως το γινόμενο του μοναδιαίου φορτίου επί το λόγο της κύριας εφελκυστικής τάσης προς την τρέχουσα εφελκυστική αντοχή του κρίσιμου στοιχείου. Πρακτικά είναι το φορτίο εκείνο το οποίο θα επιβάλλει στο κρίσιμο στοιχείο εφελκυστική κύρια τάση ίση με την τρέχουσα εφελκυστική του αντοχή.
5. Στο σημείο αυτό μπορούμε να αποθηκεύσουμε τις επιθυμητές μετατοπίσεις του κόμβου ή των κόμβων που θα χρησιμοποιηθούν αργότερα για τη σχεδίαση της καμπύλης φορτίου-μετατόπισης μετά το πέρας της διαδικασίας.
6. Απομείωση της δυσκαμψίας και της αντοχής που στην συγκεκριμένη περίπτωση σημαίνει απομείωση του μέτρου ελαστικότητας E και της εφελκυστικής αντοχής f_t του κρίσιμου στοιχείου. Η απομείωση αυτή θα γίνει σύμφωνα με μία πριονωτή καμπύλη εφελκυστικής τάσης-παραμόρφωσης με κλάδο χαλάρωσης, η οποία θα αναλυθεί παρακάτω.

- I. Στο σημείο αυτό γίνεται επανάληψη των παραπάνω βημάτων, με την απομειωμένη πλέον αντοχή-δυσκαμψία του κρίσιμου-κρίσιμων στοιχείων.
- II. Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί μέχρι την κατάρρευση του φορέα αλλά και μέχρι ένα ενδιάμεσο στάδιο ζημιάς.
- III. Αφού ολοκληρωθεί η όλη διαδικασία, είναι πλέον εφικτή η κατασκευή της καμπύλης φορτίου-μετατόπισης συνδέοντας όλα τα σημεία των επιμέρους γραμμικών αναλύσεων που εκτελέστηκαν.
- IV. Επίσης μπορεί να γίνει απεικόνιση του παραμορφωμένου καννάβου στο πέρας της ανάλυσης αλλά και σε επιθυμητά ενδιάμεσα στάδια ανάλογα με τις ανάγκες.
- V. Εδώ μπορούμε να προσθέσουμε πως η έννοια του κρίσιμου στοιχείου μπορεί να επεκταθεί και σε επίπεδο σημείου ολοκλήρωσης Gauss σε κάθε στοιχείο όπου πλέον η απομείωση αντοχής-δυσκαμψίας θα αφορά κάθε σημείο ολοκλήρωσης και έτσι θα έχουμε τελικά κρίσιμα σημεία ολοκλήρωσης κάθε στοιχείου. Έτσι επιτυγχάνεται πιο σταδιακή εξέλιξη του φαινομένου της ανάπτυξης και διάδοσης των ρωγμών.

2.3 Ισοτροπικό γραμμικό μοντέλο θραύσης και διαδοχική γραμμική προσέγγισή του

Στο σημείο αυτό, θα αναλυθεί το καταστατικό μοντέλο θραύσης που θα χρησιμοποιήσουμε στην διπλωματική αυτή εργασία, καθώς και η τεχνική της διαδοχικής γραμμικής προσέγγισής του.

Γενικότερα, το ισοτροπικό γραμμικό μοντέλο αποτελείται από δύο διακριτούς γραμμικούς κλάδους. Τον αρχικό ανιόντα κλάδο ο οποίος έχει κλίση ίση με το αρχικό μέτρο ελαστικότητας E του υλικού και εκτείνεται από την αρχή των αξόνων μέχρι την εφελκυστική αντοχή f_t . Έπειτα ακολουθεί ο κλάδος χαλάρωσης, με αρκετά μικρότερη κλίση που εκτείνεται μέχρι τη μέγιστη παραμόρφωση που εξαρτάται από τις παραμέτρους του υλικού και του προσομοιώματος. Το εμβαδό κάτω από την καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης, ισούται με το λόγο της ενέργειας θραύσης (fracture energy) G_f προς το εύρος της ρωγμής (crack bandwidth) h . Ενώ η ενέργεια θραύσης αποτελεί ιδιότητα του υλικού, το εύρος της ρωγμής, επιλέγεται ανάλογα με το μέγεθος και την τάξη του στοιχείου. Για τα απλά τετραπλευρικά τετρακομβικά στοιχεία, ισούται με το μέγεθος του στοιχείου. Έτσι βάσει των G_f και h προκύπτουν τα υπόλοιπα στοιχεία για το καταστατικό μοντέλο με τη χρήση σχέσεων που θα δείξουμε παρακάτω.



Σχήμα 2 : Ισοτροπικό Γραμμικό μοντέλο Θραύσης

Ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται η σταδιακή απομείωση της δυσκαμψίας αλλά και της αντοχής των κρίσιμων στοιχείων ή σημείων ολοκλήρωσης σε κάθε επανάληψη, είναι αυτός που καθορίζει την ουσία του καταστατικού προσομοιώματος. Με άλλα λόγια, είναι αναγκαίο να γίνει μια προσέγγιση με τη χρήση του πριονωτού διαγράμματος, το οποίο θα προσεγγίζει το ζητούμενο μοντέλο θραύσης. Διαφορετικές προσεγγίσεις αυτού του πριονωτού διαγράμματος έχουν προταθεί σε διάφορες εργασίες. Ενδεικτικά αναφέρονται οι μέθοδοι προσομοίωσης του κλάδου χαλάρωσης του μοντέλου θραύσης, είτε με σταδιακή απομείωση του μέτρου ελαστικότητας, είτε με σταδιακή απομείωση της εφελκυστικής αντοχής είτε με συνδυασμό αυτών. Οι παραπάνω μέθοδοι όμως, παρότι είναι αρκετά αποτελεσματικές, παρουσιάζουν ευαισθησία ως προς τον κάρνα των πεπερασμένων στοιχείων που επιλέγεται. Έτσι στην παρούσα διπλωματική θα υιοθετήσουμε την τελευταία προσέγγιση που έχει προταθεί. Η προσέγγιση αυτή όχι μόνο αντιμετωπίζει το θέμα της ευαισθησίας ως προς τον κάρνα των στοιχείων, αλλά μπορεί να προσομοιώσει εξίσου καλά τόσο γραμμικούς όσο και εκθετικούς κλάδους χαλάρωσης. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι η αποτελεσματικότητα της μεθόδου που χρησιμοποιείται, καθορίζεται κυρίως από τη διατήρηση κατά την προσομοίωση της σωστής ενέργειας θραύσης, που ορίζεται από το ιδεατό μοντέλο θραύσης του υλικού.

Παρακάτω δίδονται μερικές βασικές σχέσεις οι οποίες ισχύουν για το ισοτροπικό γραμμικό μοντέλο θραύσης:

Η μέγιστη τιμή της παραμόρφωσης (Ultimate Strain) ϵ_u δίνεται από τη σχέση:

$$\epsilon_u = \frac{2G_f}{f_t \cdot h} \quad (1)$$

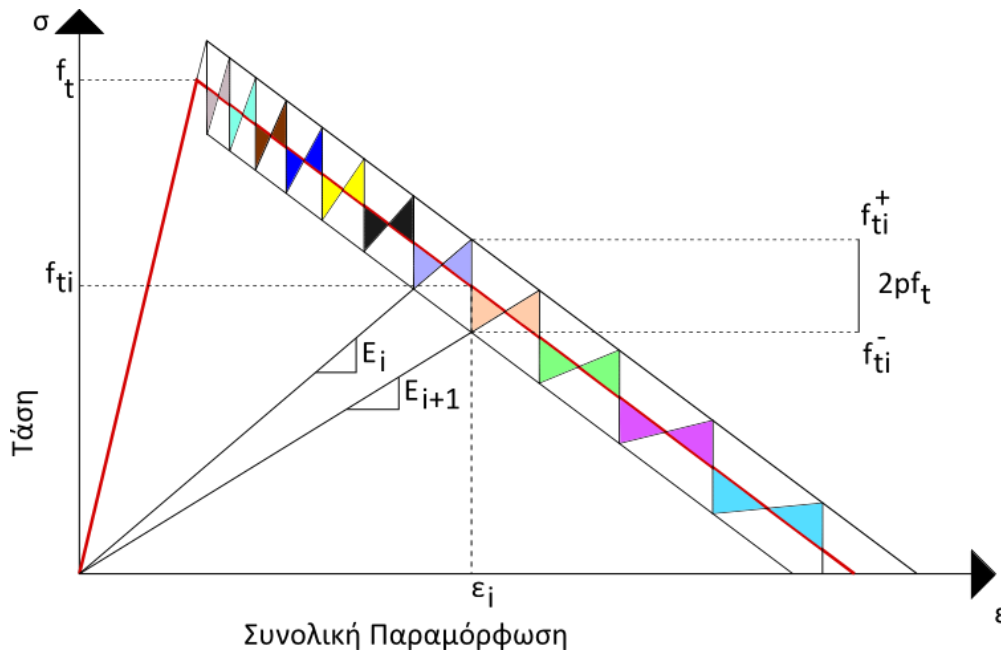
Επιπλέον, εισάγεται το μέγεθος D το οποίο είναι η εφαπτομένη του κλάδου χαλάρωσης η οποία υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D = \frac{f_t}{\varepsilon_u - \frac{f_t}{E}} \quad (2)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι πολύ χρήσιμες και θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω.

2.4 Διαδοχική γραμμική προσέγγιση

Όπως προαναφέρθηκε, η διαδικασία που θα υιοθετηθεί στη διπλωματική εργασία, παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα έναντι των παλιότερων προσεγγίσεων του κλάδου χαλάρωσης. Έτσι το πρόβλημα της ευαισθησίας ως προς το μέγεθος των πεπερασμένων στοιχείων ξεπερνιέται χωρίς τη χρήση εξεζητημένων μεθόδων. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται το πριονωτό διάγραμμα το οποίο υποκαθιστά το γραμμικό κλάδο χαλάρωσης του μοντέλου θραύσης.



Σχήμα 3 : Γραμμική διαδοχική προσέγγιση μοντέλου θραύσης με το πριονωτό διάγραμμα

Στο παραπάνω σχήμα, με κόκκινο χρώμα, φαίνεται η καμπύλη που θέλουμε να προσεγγίσουμε με το πριονωτό διάγραμμα. Αρχικά γίνεται η επιλογή ενός ποσοστού p της εφελκυστικής αντοχής f_t . Βάσει του ποσοστού αυτού, ορίζεται μία ζώνη ανάμεσα στην οποία θα κινείται το πριονωτό διάγραμμα. Η

κατασκευή της ζώνης είναι απλή, εφόσον οριοθετείται από δύο γραμμές παράλληλες στον κλάδο χαλάρωσης η μία πάνω και η άλλη κάτω από αυτόν. Η κατακόρυφη απόσταση καθεμιάς από αυτές τις βοηθητικές γραμμές από το γραμμικό κλάδο χαλάρωσης, ισούται με το αρχικό ποσοστό p που επιλέξαμε, επί την εφελκυστική αντοχή του υλικού f_t . Το απαιτούμενο πλήθος δοντιών N , οι τιμές του μέτρου ελαστικότητας (E_i) και της αντίστοιχης εφελκυστικής αντοχής (f_{ii}) στο βήμα i , υπολογίζονται αυτόματα από τις παρακάτω σχέσεις κάνοντας χρήση των παραμέτρων που ορίσαμε.

Η παραπάνω διαδικασία, έχει ως σκοπό τη διατήρηση της ενέργειας θραύσης που ορίζεται από το καταστατικό μοντέλο θραύσης του υλικού. Με αυτό τον έξυπνο τρόπο τα τρίγωνα που φαίνονται ανά δύο με ίδιο χρώμα έχουν το ίδιο εμβαδό και αλληλοαναιρούνται κατά την εξέλιξη της διαδικασίας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ενέργεια θραύσης του πριονωτού με το κανονικό διάγραμμα να προκύπτουν ίσες. Παρακάτω, δίδονται οι σχέσεις με τις οποίες γίνεται η σταδιακή απομείωση της αντοχής-δυσκαμψίας, οι οποίες προκύπτουν αν εκμεταλλευτούμε τη γεωμετρία του πριονωτού διαγράμματος.

$$f_{ii}^- = f_{ii}^+ - 2pf_t \quad (3)$$

$$E_{i+1} = \frac{f_{ii}^-}{\varepsilon_i} = \frac{E_i}{a_{i+1}} \quad (4)$$

$$a_{i+1} = \frac{E_i}{f_{ii}^-} \varepsilon_i = \frac{f_{ii}^+}{f_{ii}^-} = \frac{f_{ii}^+}{f_{ii}^+ - 2pf_t} \quad (5)$$

Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας E_{i+1} του επόμενου βήματος γνωρίζοντας το μέτρο ελαστικότητας E_i του προηγούμενου. Εδώ E_0 είναι το αρχικό μέτρο ελαστικότητας E του υλικού:

$$E_{i+1} = \frac{E_i}{a_{i+1}} \quad (6)$$

Στην περίπτωση μας που εξετάζεται γραμμικός κλάδος χαλάρωσης, η προσαυξημένη εφελκυστική αντοχή υπολογίζεται:

$$f_{ii}^+ = \varepsilon_u^+ E_i \frac{D}{E_i + D} \quad (7)$$

Όπου:

$$\varepsilon_u^+ = \varepsilon_u + p \frac{f_t}{D} \quad (8)$$

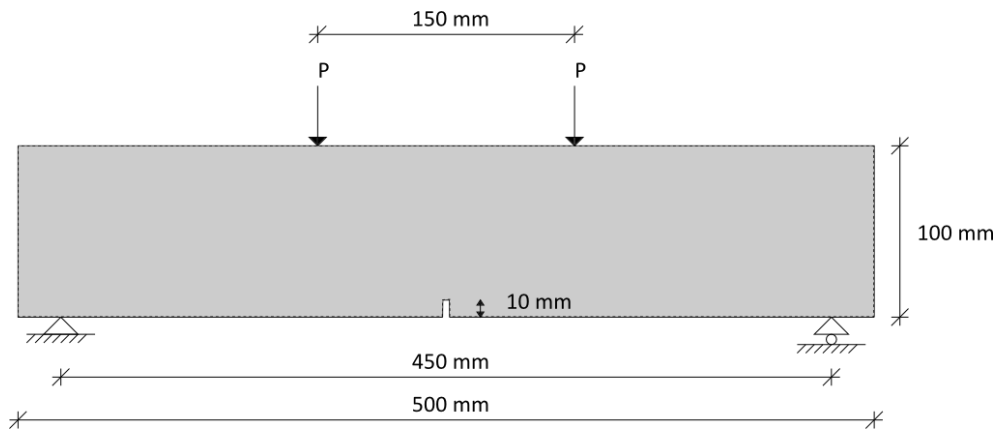
Κεφάλαιο 3

3. Εφαρμογές της ΔΓΠ

3.1 Δοκός με εγκοπή υποβαλλόμενη σε κάμψη 4 σημείων (4 Point Notched Bending Beam)

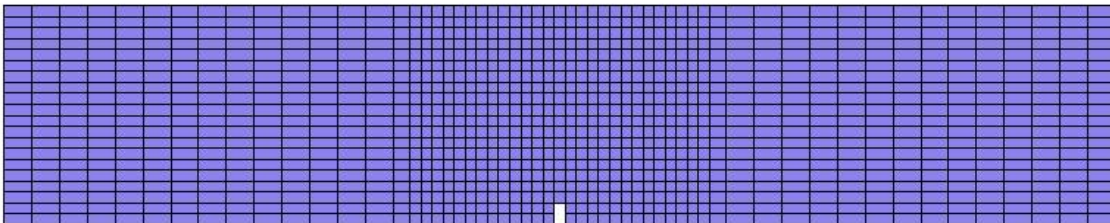
3.1.1 Διερεύνηση παραμέτρων ΔΓΠ

Η πρώτη εφαρμογή που θα μελετηθεί αφορά τη ρηγμάτωση μιας δοκού με εγκοπή, η οποία υποβάλλεται σε κάμψη 4 σημείων. Η δοκός είναι συμμετρική, έχει μήκος 500mm και το άνοιγμά της είναι 450mm. Έχει ύψος 100mm και πάχος 50mm, καθώς και ύψος εγκοπής 10mm. Τα φορτία υποβάλλονται συμμετρικά ως προς τον άξονα της δοκού και η απόσταση μεταξύ τους είναι 150mm. Τέλος, το υλικό της δοκού είναι σκυρόδεμα το οποίο έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά: Μέτρο ελαστικότητας $E = 38\text{GPa}$, εφελκυστική αντοχή $f_t = 3000\text{kPa}$, λόγο του Poisson $\nu = 0.20$ και ενέργεια Θραύσης $G_f = 0.06\text{kN/m}$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το μοντέλο της δοκού.

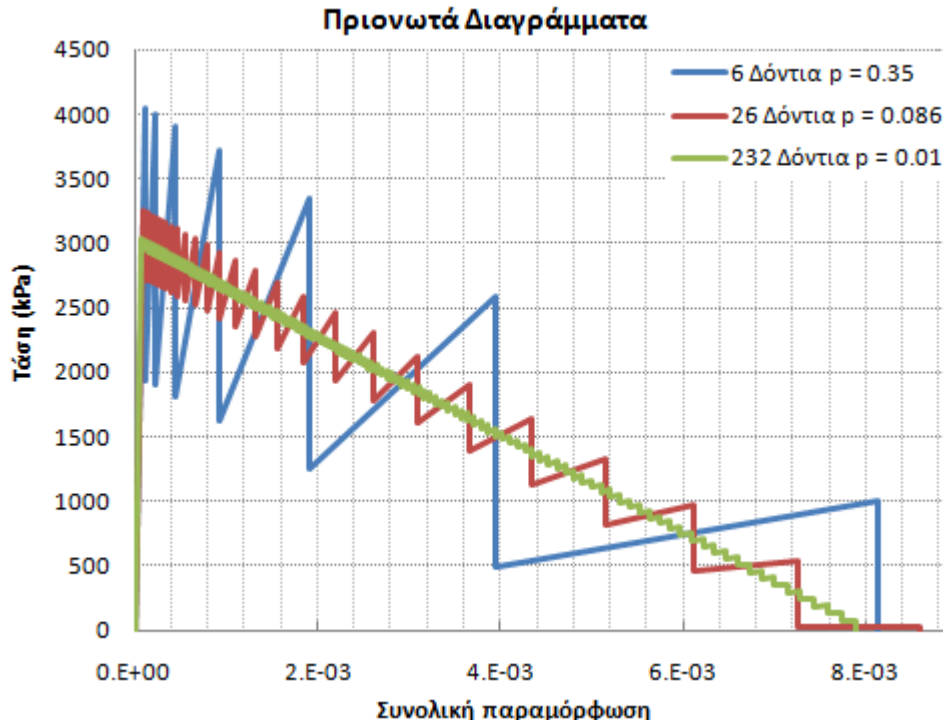


Σχήμα 4 : Μοντέλο δοκού με εγκοπή που υποβάλλεται σε κάμψη 4 σημείων

Αρχικά θα γίνει προσομοίωση του φορέα με τετραπλευρικά τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης. Θα γίνει παραμετρική διερεύνηση ως προς τον αριθμό των δοντιών που χρησιμοποιείται στο πριονωτό διάγραμμα καθώς και της παραμέτρου ρ . Ο κάρναβος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μέτριας πυκνότητας και τα στοιχεία στη περιοχή της εγκοπής έχουν πλευρά ίση με 5mm. Το εύρος της ρωγμής ορίζεται ίσο με την πλευρά του στοιχείου στην περιοχή της εγκοπής δηλαδή $h = 5\text{mm}$.



Σχήμα 5 : Προσομοίωμα πεπερασμένων στοιχείων δοκού με εγκοπή

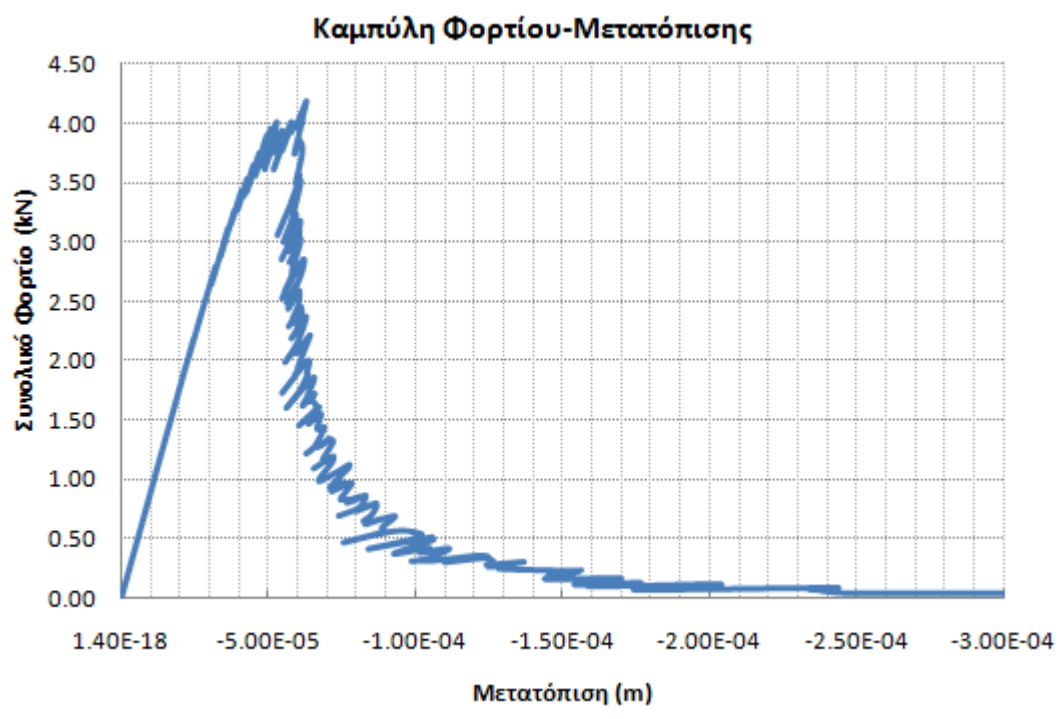


Σχήμα 6 : Διαδοχική γραμμική προσέγγιση μοντέλου θραύσης για τις διάφορες παραμέτρους

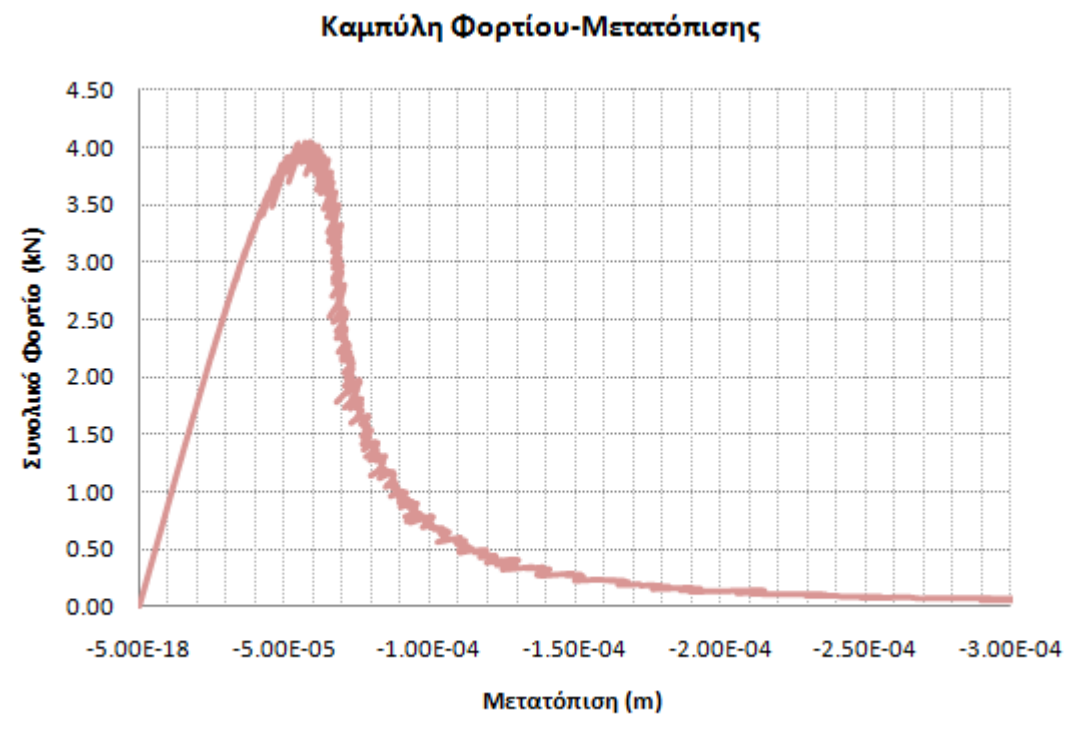
Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι διάφορες παράμετροι για τις αναλύσεις που έγιναν. Ο αριθμός διαδοχικών γραμμικών επιλύσεων, αναφέρεται στον απαιτούμενο αριθμό για να καταρρεύσει ο φορέας.

| Αριθμός Δοντιών N | Παράμετρος p | Αριθμός διαδοχικών γραμμικών επιλύσεων | Χρόνος ολοκλήρωσης διαδικασίας (sec) |
|-------------------|--------------|--|--------------------------------------|
| 6 | 0.35 | 272 | 44.46 |
| 26 | 0.086 | 1208 | 190.84 |
| 232 | 0.01 | 9791 | 1530.06 |

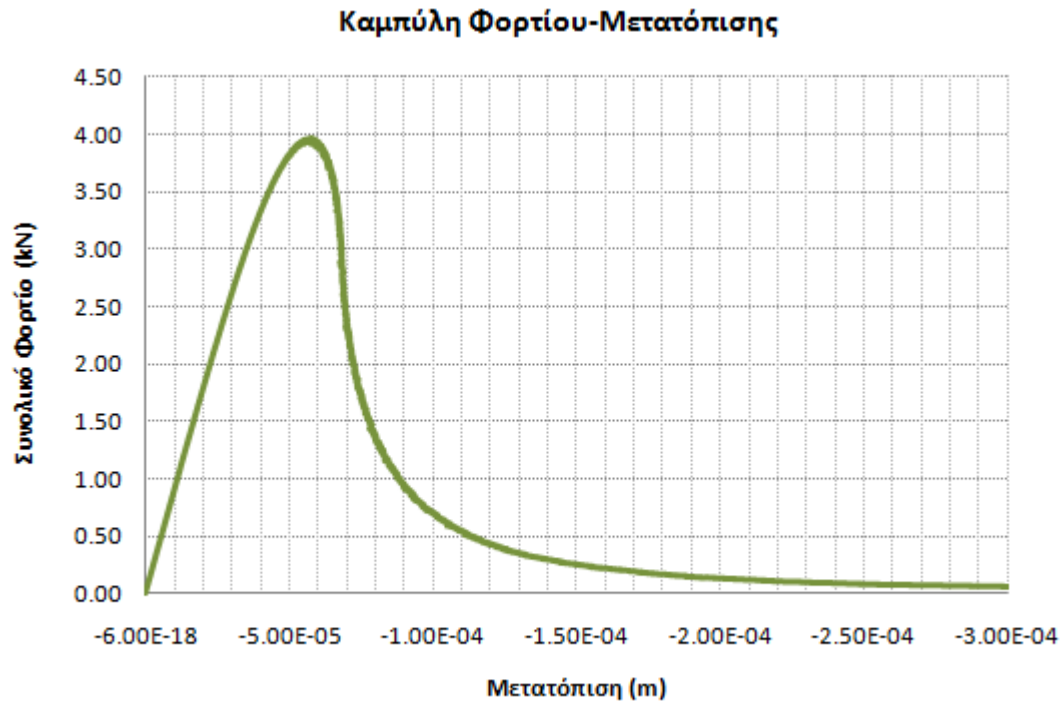
Παρακάτω, φαίνονται οι καμπύλες συνολικού φορτίου – κατακόρυφης μετατόπισης του σημείου εφαρμογής του αριστερού φορτίου P της δοκού. Το φορτίο δίνεται σε kN και η μετατόπιση σε m.



Σχήμα 7 : Καμπύλη φορτίου-μετατόπισης (6 Δόντια , $\rho=0.35$)

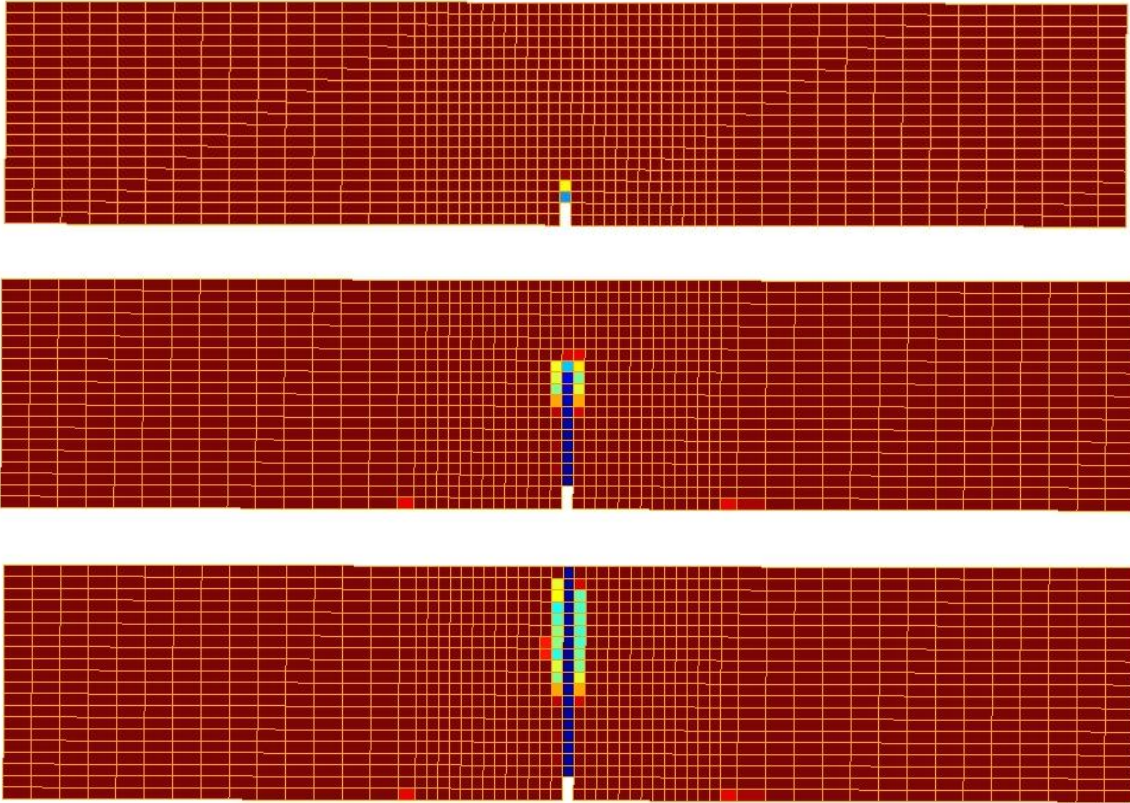


Σχήμα 8 : Καμπύλη φορτίου-μετατόπισης (26 Δόντια , $\rho=0.086$)

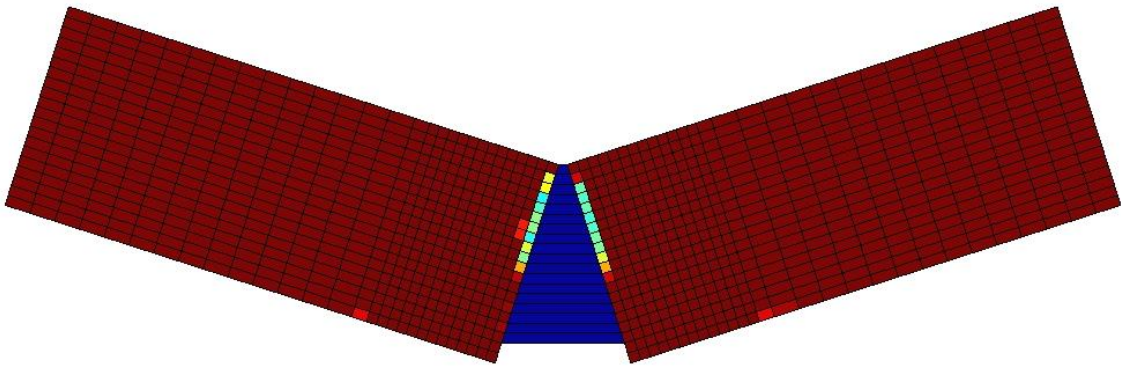


Σχήμα 9 : Καμπύλη φορτίου-μετατόπισης (232 Δόντια , $\rho=0.01$)

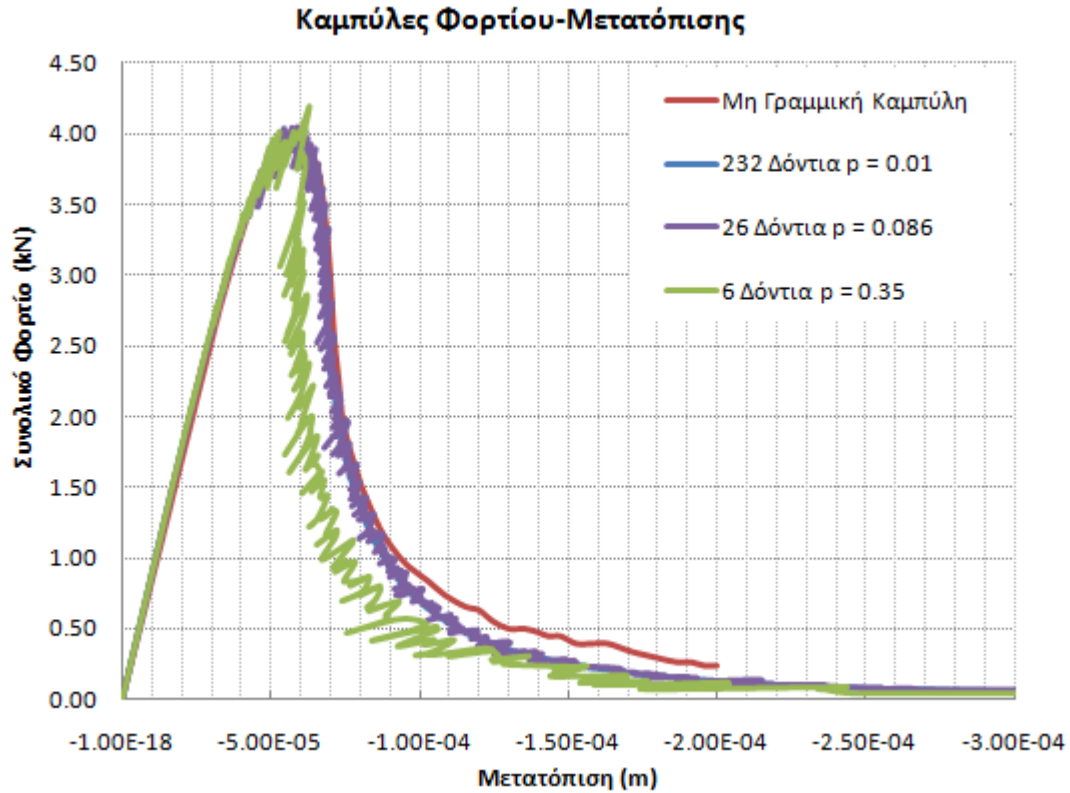
Στο Σχήμα 10, φαίνεται η σταδιακή ρηγμάτωση του φορέα μέχρι την κατάρρευσή του. Με σκούρο μπλε χρώμα, διακρίνονται τα στοιχεία τα οποία έχουν γίνει κρίσιμα τόσες φορές όσα είναι τα δόντια του πριονωτού διαγράμματος. Έχουν πρακτικά μηδενική δυσκαμψία. Είναι φανερό πως το εύρος της ρωγμής είναι ίσο με το μέγεθος της πλευράς των κρίσιμων σημείων. Αυτό είναι λογικό εφόσον θέσαμε $h = 5\text{mm}$. Επιπλέον στο Σχήμα 11, φαίνεται ο παραμορφωμένος φορέας κατά τη στιγμή της καταρρεύσης.



Σχήμα 10 : Βήμα προς Βήμα ρηγμάτωση του φορέα



Σχήμα 11 : Παραμορφωμένος Φορέας πριν την κατάρρευση



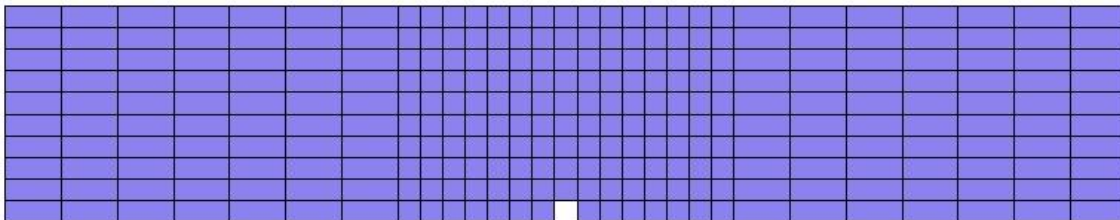
Σχήμα 12 : Σύγκριση των τριών διαφορετικών προσεγγίσεων

Παρατηρήσεις-Συμπεράσματα

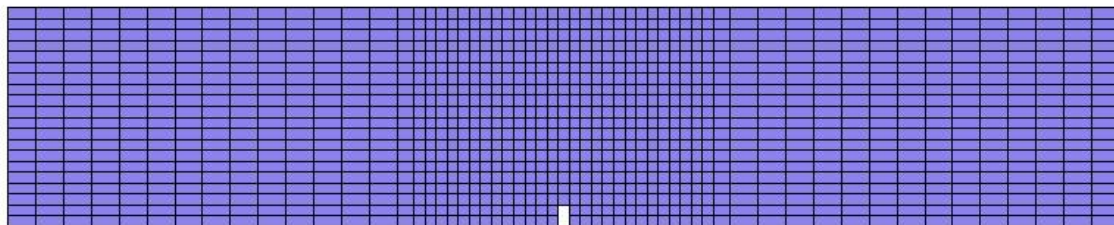
- Όσο πιο μικρή τιμή της παραμέτρου ρ έχουμε, τόσο περισσότερα δόντια απαιτούνται για την διαδοχική γραμμική προσέγγιση. Αυτό συνεπάγεται αυξημένο αριθμό γραμμικών επιλύσεων άρα και μεγαλύτερο υπολογιστικό χρόνο.
- Όσο πιο πολλά δόντια έχουμε, τόσο ομαλότερη προκύπτει η καμπύλη φορτίου-μετατόπισης και γενικότερα η προσέγγιση είναι πιο σωστή.
- Δεν απαιτείται αρκετά μεγάλος αριθμός δοντιών ώστε να έχουμε επαρκή ακρίβεια και καλή προσέγγιση της μη γραμμικής καμπύλης.
- Όταν χρησιμοποιούμε πολύ μικρό αριθμό δοντιών με μεγάλη παράμετρο ρ , τότε η προσομοίωση δεν είναι σωστή. Αυτό συμβαίνει γιατί δεν ικανοποιείται το κριτήριο της διατήρησης της ενέργειας θραύσης G_f . Παρόλα αυτά, το κρίσιμο φορτίο που αντιστοιχεί στην κορυφή της καμπύλης υπολογίζεται σωστά.
- Τέλος η μη γραμμική καμπύλη προσεγγίζεται αρκετά ικανοποιητικά και σε σχετικά μικρό χρόνο βλ. πίνακα.

3.1.2 Διερεύνηση ευαισθησίας της μεθόδου ως προς τον χρησιμοποιούμενο κάνναβο πεπερασμένων στοιχείων.

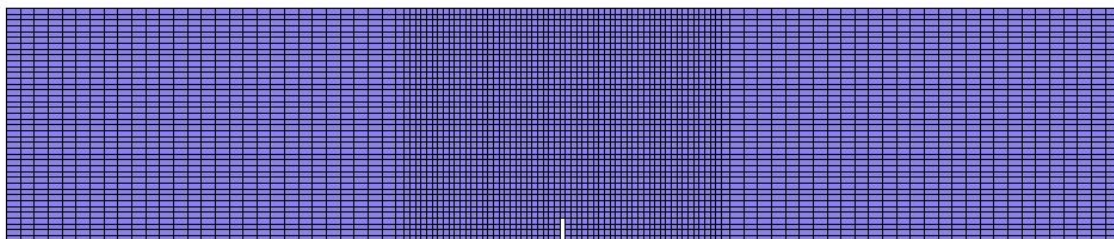
Στο σημείο αυτό θα γίνει διερεύνηση για το πώς επηρεάζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου ανάλογα με την πυκνότητα του καννάβου των πεπερασμένων στοιχείων και το μέγεθος αυτών. Θα γίνει χρήση τριών διαφορετικών δικτύων, ενός αραιού, του μέτριου δικτύου που αναλύθηκε παραπάνω και ενός πυκνού δικτύου στοιχείων. Όπως και παραπάνω, θα γίνει χρήση τετραπλευρικών, τετρακομβικών πεπερασμένων στοιχείων επίπεδης έντασης. Το κάθε στοιχείο έχει 4 σημεία αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss.



Σχήμα 13 : Αραιό δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων



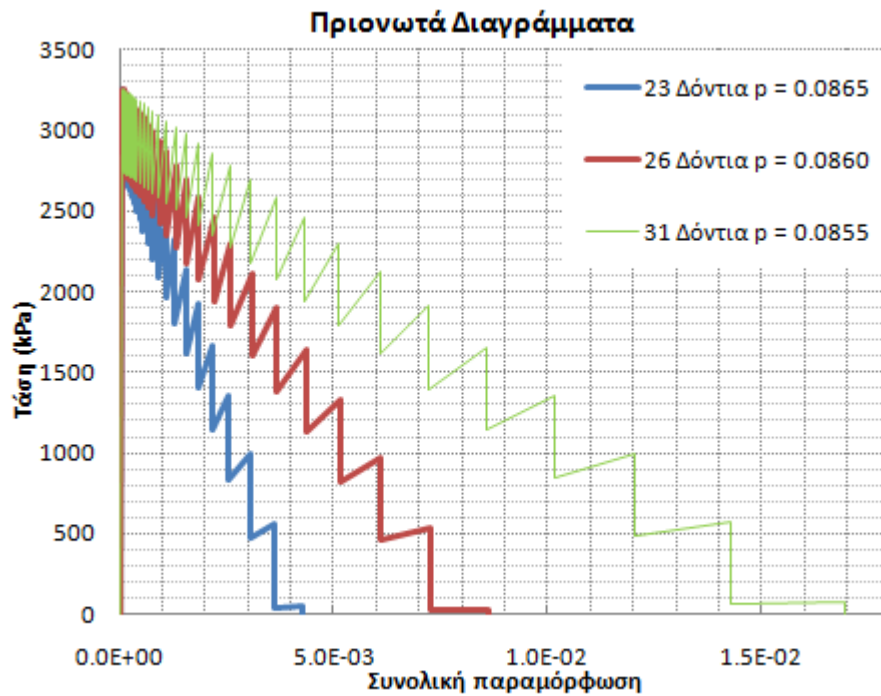
Σχήμα 14 : Δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων μέτριας πυκνότητας



Σχήμα 15 : Πυκνό δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων

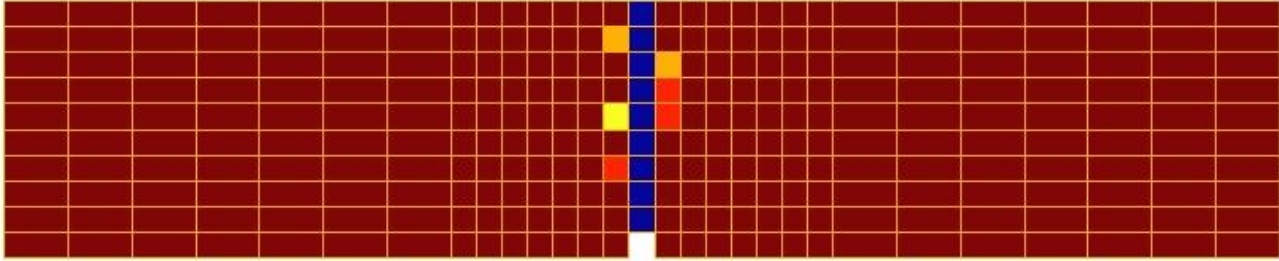
Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα στοιχεία για τα τρία παραπάνω δίκτυα καθώς και οι παράμετροι των αναλύσεων που θα ακολουθήσουν.

| Πυκνότητα Δικτύου | Μήκος Πλευράς Στοιχείου κοντά στην εγκοπή(mm) | Εύρος ρωγμής h(mm) | Αριθμός Δοντιών N | Παράμετρος ρ | Αριθμός Γραμμικών Επιλύσεων | Χρόνος (sec) |
|-------------------|---|--------------------|-------------------|--------------|-----------------------------|--------------|
| Αραιό | 10 | 10 | 23 | 0.0865 | 442 | 14.96 |
| Μέτριο | 5 | 5 | 26 | 0.0860 | 1208 | 190.84 |
| Πυκνό | 2.5 | 2.5 | 31 | 0.0855 | 6720 | 7665.16 |

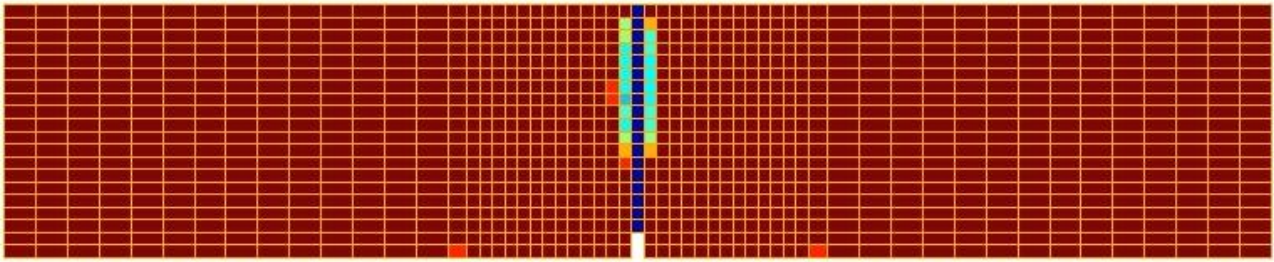


Σχήμα 16 : Πριονωτά διαγράμματα για τις Διαδοχικές Γραμμικές Προσεγγίσεις

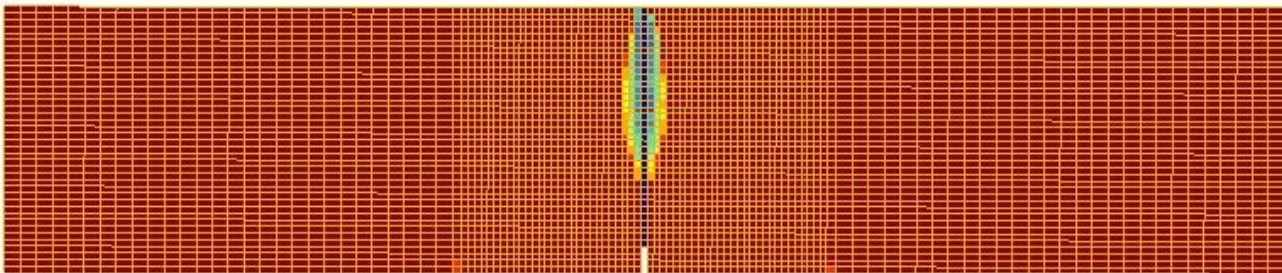
Ακολουθούν εικόνες όπου εμφανίζεται η ρωγμή σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις.



Σχήμα 17 : Ρηγμάτωση για το αραιό δίκτυο

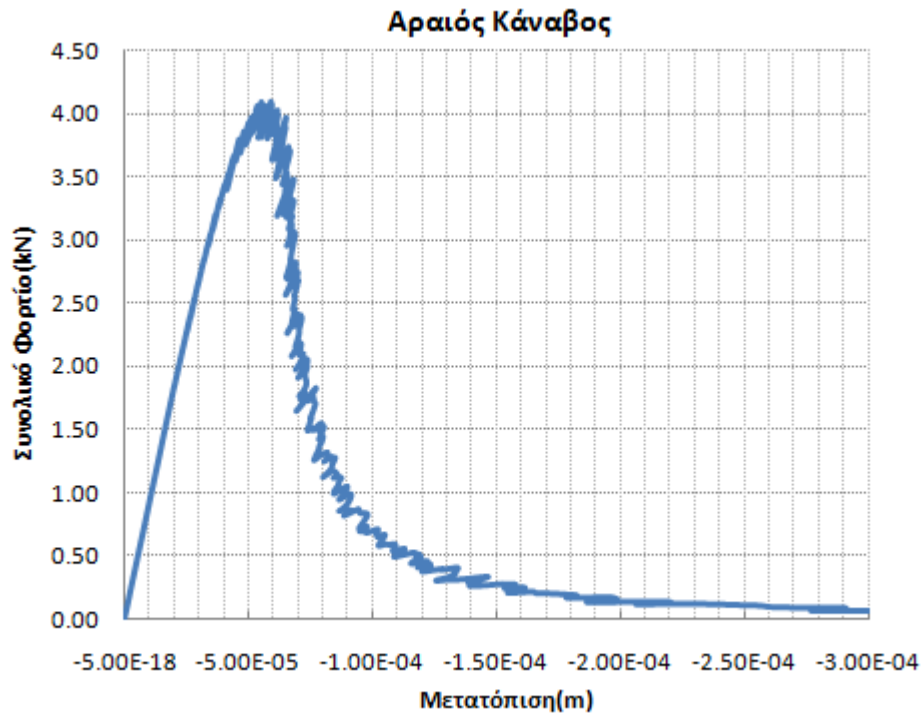


Σχήμα 18 : Ρηγμάτωση για το μεσαίο δίκτυο

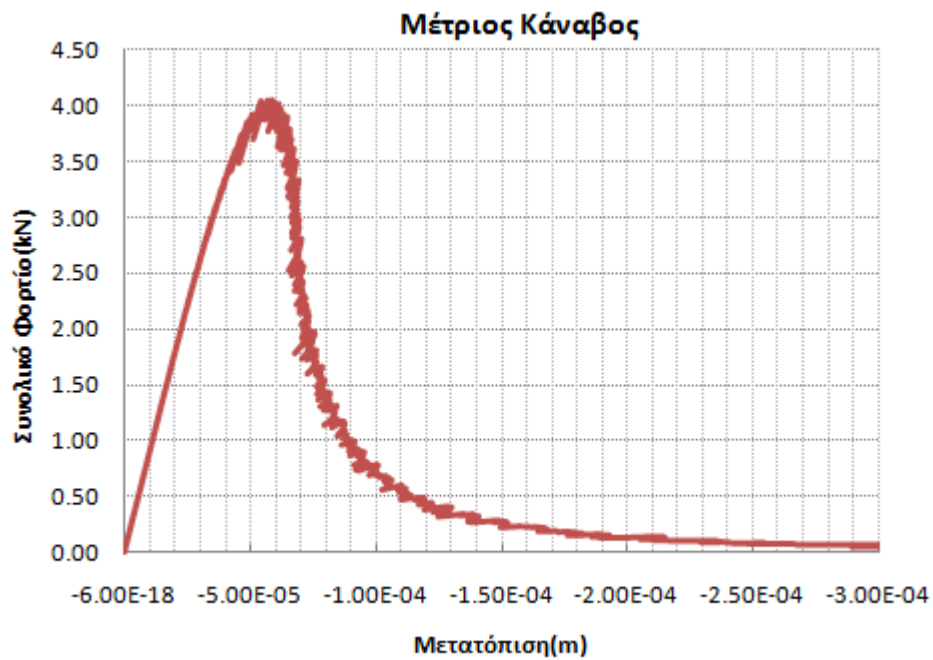


Σχήμα 19 : Ρηγμάτωση για το πυκνό δίκτυο

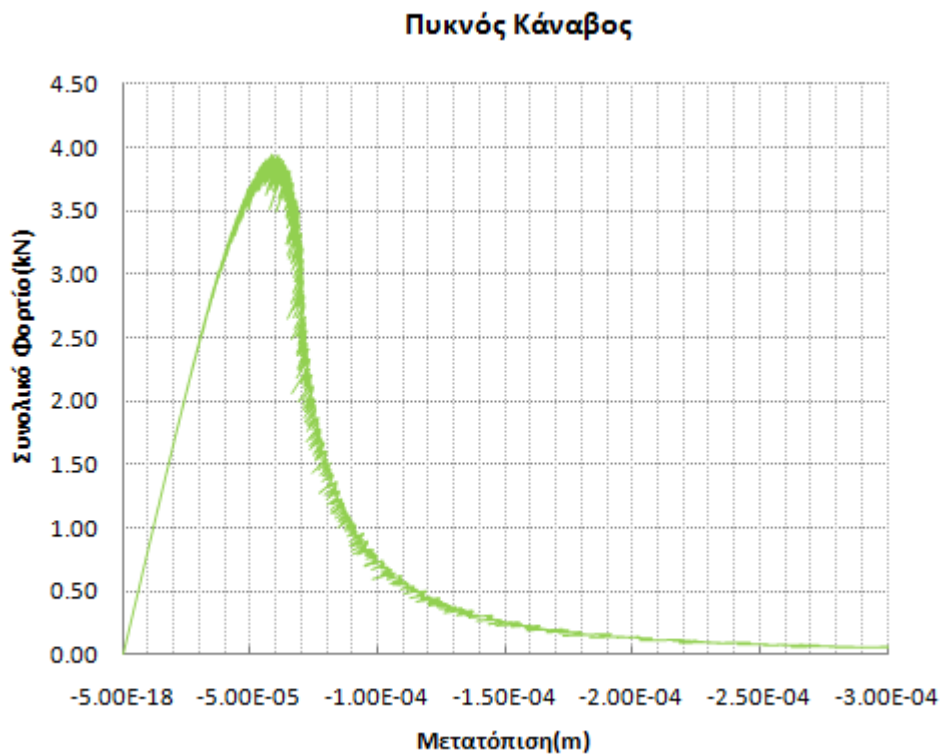
Ακολουθως, δίδονται οι καμπύλες φορτίου-μετατόπισης για κάθε δίκτυο.



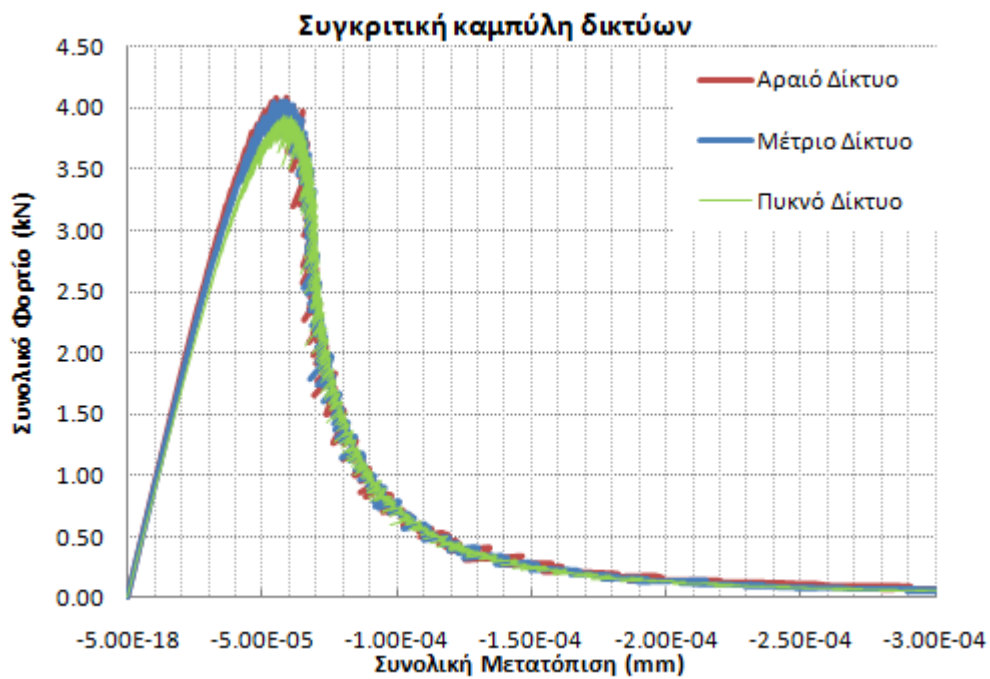
Σχήμα 20 : Καμπύλη Φορτίου-Μετατόπισης για το αραιό δίκτυο



Σχήμα 21 : Καμπύλη Φορτίου-Μετατόπισης δικτύου μέτριας πυκνότητας



Σχήμα 22 : Καμπύλη Φορτίου-Μετατόπισης για το πυκνό δίκτυο



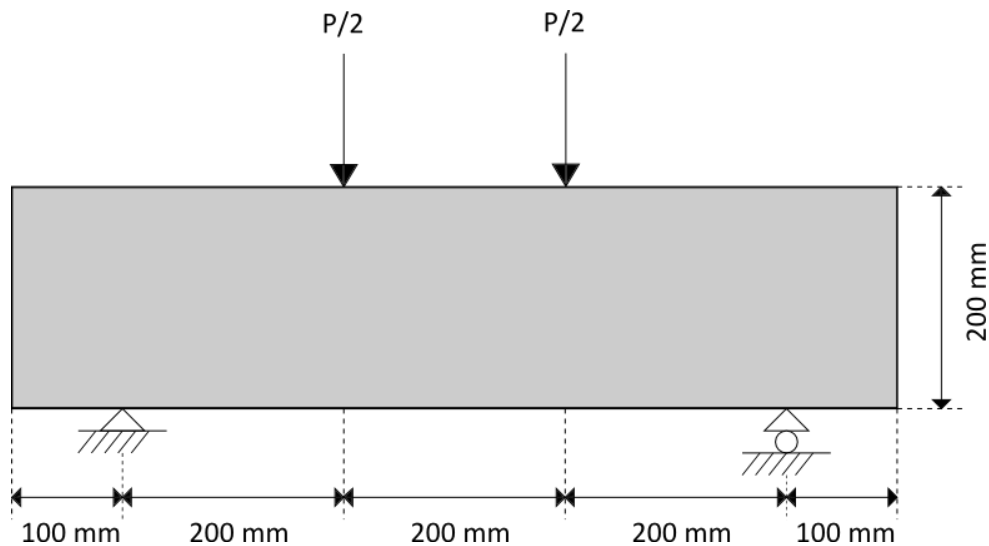
Σχήμα 23 : Καμπύλες Φορτίου-Μετατόπισης για όλα τα δίκτυα

Παρατηρήσεις-Συμπεράσματα

- Για την ίδια ενέργεια θραύσης, το εμβαδό του πριονωτού διαγράμματος είναι μεγαλύτερο, όσο μεγαλώνει η πυκνότητα του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων. Αυτό είναι λογικό εφόσον για πυκνότερο δίκτυο υιοθετούμε μικρότερο εύρος ρωγμής h . Έτσι ο λόγος G_i/h που ισούται με το εμβαδόν κάτω από το πριονωτό διάγραμμα είναι μεγαλύτερος στο πυκνό δίκτυο.
- Η διαδοχική γραμμική προσέγγιση, με τη μέθοδο απομείωσης που χρησιμοποιήθηκε, δεν επηρεάζεται από την πυκνότητα του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων.
- Όπως είναι φυσικό όσο πυκνότερο είναι το δίκτυο των στοιχείων τόσο αυξάνεται ο απαιτούμενος χρόνος επίλυσης. Αυτό γιατί εκτός του ότι απαιτούνται περισσότερες γραμμικές επιλύσεις για την κατάρρευση του φορέα, κάθε γραμμική επίλυση χρειάζεται περισσότερο χρόνο λόγω των περισσότερων στοιχείων του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας.

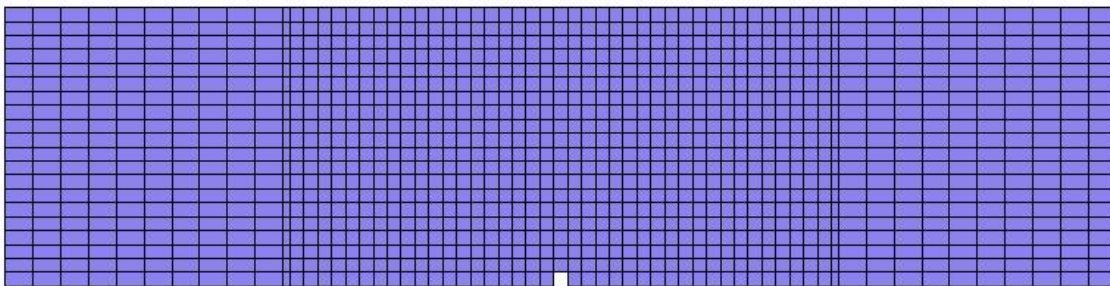
3.2 Δοκός υποβαλλόμενη σε κάμψη 4 σημείων. Σύγκριση Διαδοχικής Γραμμικής Προσέγγισης με Πειραματικά Αποτελέσματα

Στην εφαρμογή αυτή θα γίνει σύγκριση κάποιων πειραματικών αποτελεσμάτων, με αυτά που προκύπτουν υιοθετώντας την τεχνική που μελετάται σε αυτή τη διπλωματική εργασία. Το πρόβλημα αφορά την κάμψη 4 σημείων συμμετρικής δοκού τετραγωνικής διατομής, η οποία μελετήθηκε τόσο πειραματικά όσο και αριθμητικά από τους Zihai Shi, Masaki Suzuki [14]. Η γεωμετρία της δοκού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το υλικό της είναι σκυρόδεμα με τα εξής χαρακτηριστικά μεγέθη: μέτρο ελαστικότητας $E = 27.50 \text{ GPa}$, εφελκυστική αντοχή $f_t = 2800 \text{ kPa}$, λόγο Poisson $\nu = 0.20$ και ενέργεια Θραύσης $G_f = 0.10 \text{ kN/m}$.

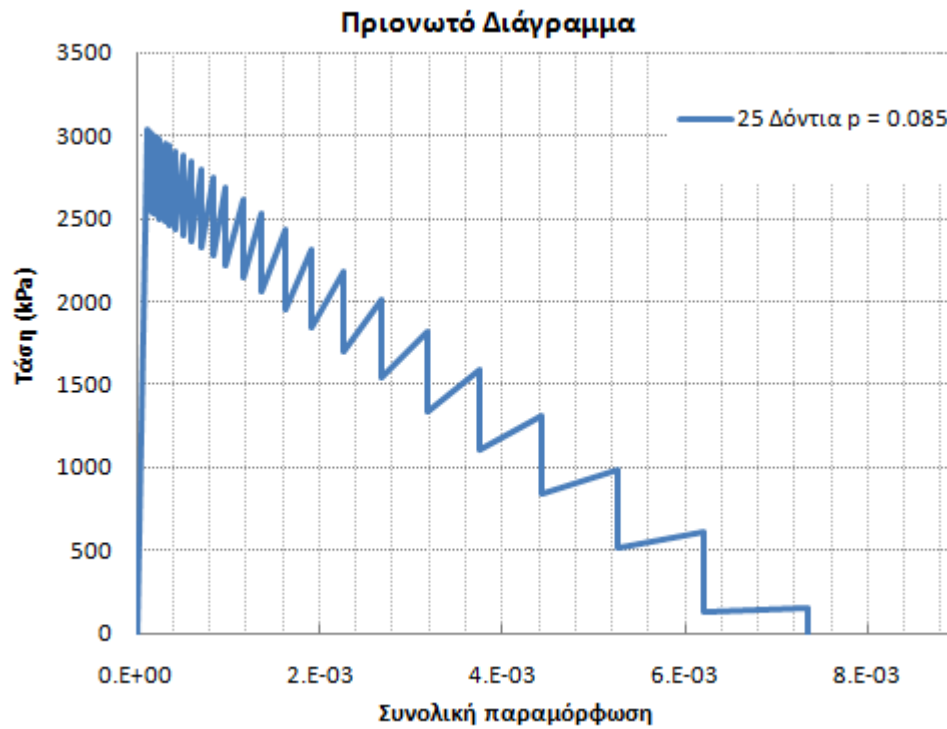


Σχήμα 24 : Δοκός από σκυρόδεμα υποβαλλόμενη σε κάμψη 4 σημείων (Zihai Shi, Masaki Suzuki [14])

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί πως στο μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων, τοποθετήθηκε μία μικρή εγκοπή στο μέσο της κάτω ίνας της δοκού ώστε να διευκολυνθεί η προσομοίωση του φαινομένου της ρηγμάτωσης.



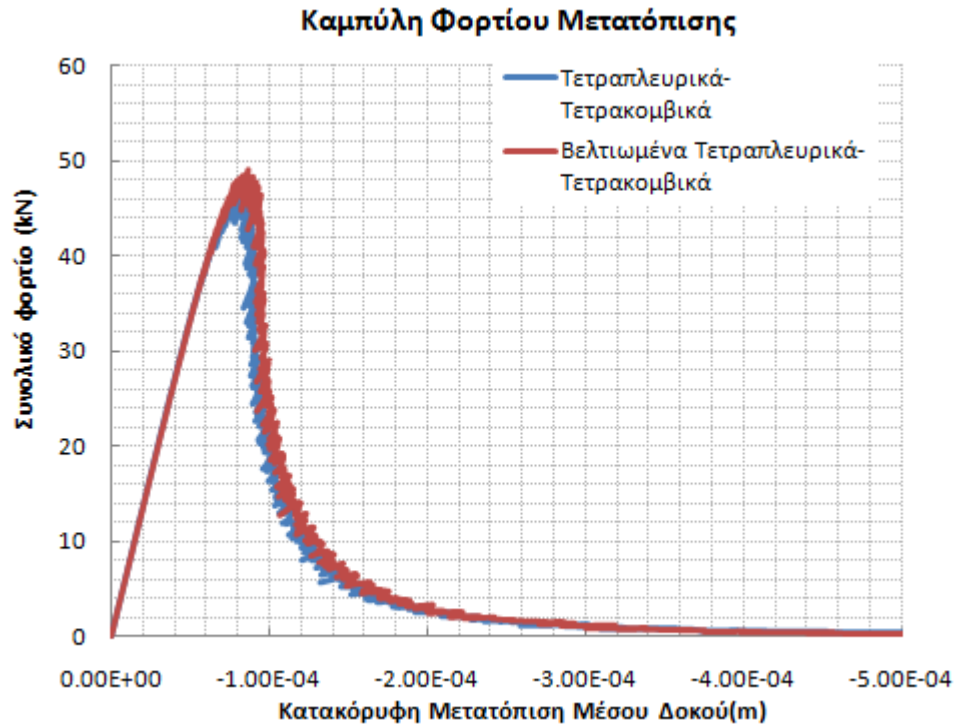
Σχήμα 25 : Δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων δοκού



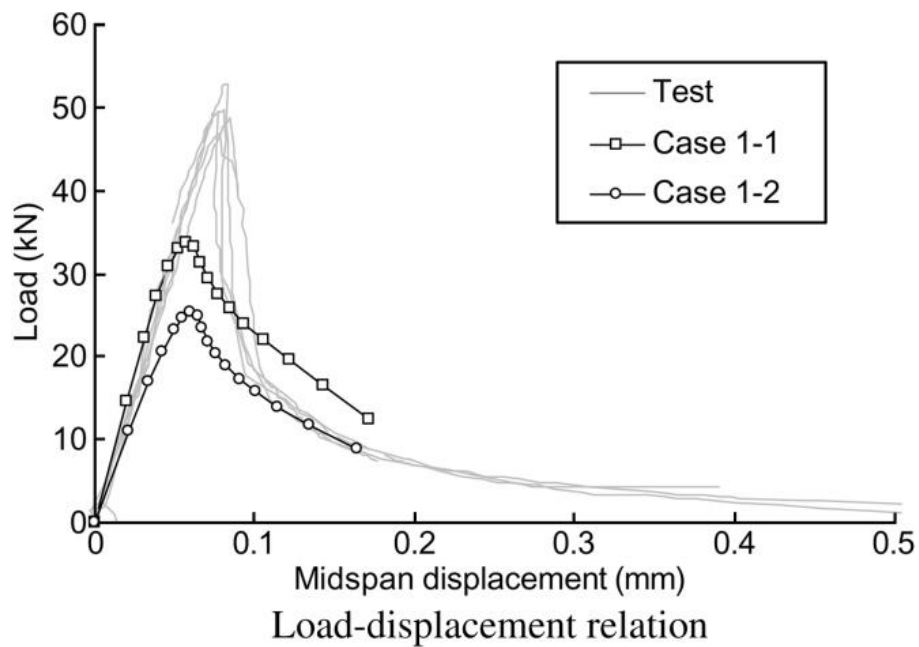
Σχήμα 26 : Πριονωτό Διάγραμμα

Στον παρακάτω πίνακα είναι συγκεντρωμένα τα δεδομένα για τις δύο αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν.

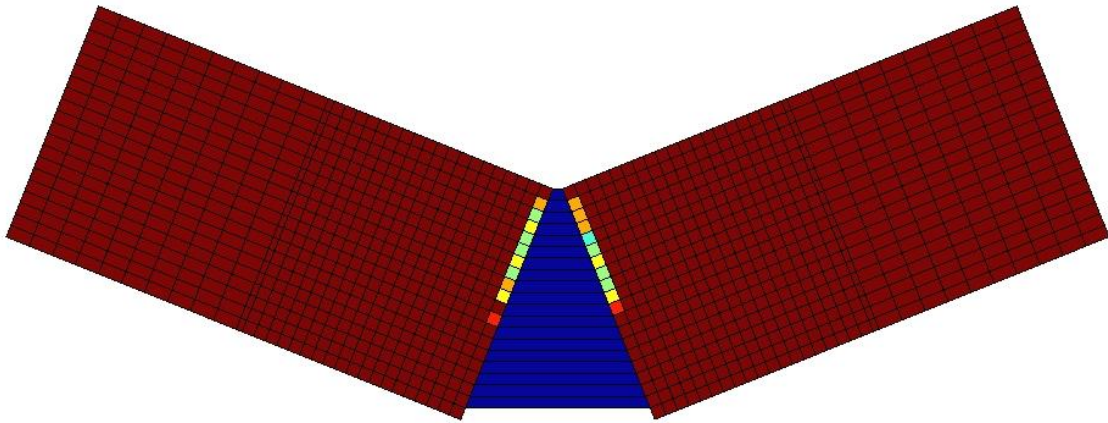
| Τύπος Τετραπλευρικού Στοιχείου | Μήκος Πλευράς Στοιχείου κοντά στην εγκοπή(mm) | Εύρος ρωγμής h(mm) | Αριθμός Δοντιών N | Παράμετρος ρ | Αριθμός Γραμμικών Επιλύσεων | Χρόνος (sec) |
|--------------------------------|---|--------------------|-------------------|--------------|-----------------------------|--------------|
| Απλό | 10 | 10 | 25 | 0.085 | 1068 | 180.65 |
| Βελτιωμένο | 10 | 10 | 25 | 0.085 | 977 | 239.02 |



Σχήμα 27 : Καμπύλη Φορτίου Μετατόπισης δύο διαφορετικών στοιχείων επίπεδης έντασης



Σχήμα 28 : Καμπύλη Φορτίου Μετατόπισης (Zihai Shi, Masaki Suzuki [14])

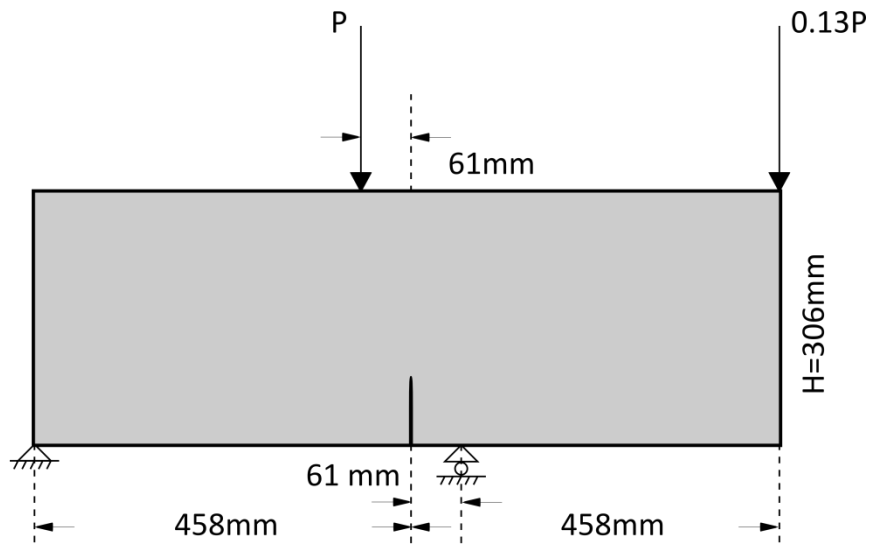


Σχήμα 29 : Παραμορφωμένος Φορέας πριν την κατάρρευση

Παρατηρήσεις-Συμπεράσματα

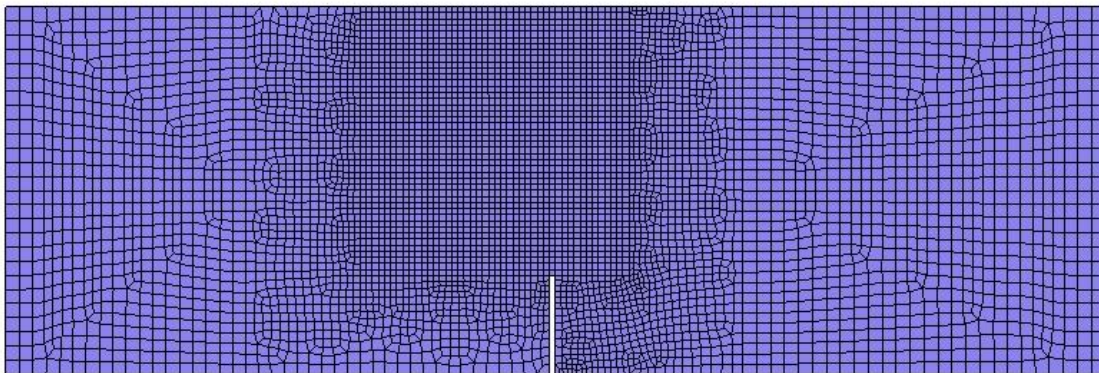
- Η μέθοδος της διαδοχικής γραμμικής προσέγγισης, παράγει αποτελέσματα τα οποία είναι πολύ κοντά σε αυτά που προκύπτουν από εργαστηριακά πειράματα. Έτσι μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα πως η μέθοδος αυτή είναι αρκετά αξιόπιστη στην προσομοίωση των φαινομένων της ρηγμάτωσης.
- Η προσομοίωση με τα βελτιωμένα τετραπλευρικά-τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης, δίνει στο φορέα την απαραίτητη μείωση δυσκαμψίας ως προς την κάμψη. Έτσι το φορτίο των 50 kN που προκύπτει πειραματικά σε μετατόπιση $1.0E-04$ m, προσεγγίζεται ικανοποιητικότερα με τη χρήση αυτών των στοιχείων.
- Παρότι βλέπουμε ότι ο αριθμός των επιλύσεων είναι μικρότερος στην περίπτωση των βελτιωμένων στοιχείων, ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται είναι μεγαλύτερος συγκριτικά με τα συμβατικά στοιχεία. Αυτό προφανώς οφείλεται στο πιο σύνθετο μητρώο δυσκαμψίας των βελτιωμένων στοιχείων. Έτσι λόγω της συμπύκνωσης για τον υπολογισμό του αλλά και της αποσυμπύκνωσης για τον υπολογισμό τάσεων ο χρόνος που απαιτείται για κάθε γραμμική επίλυση είναι μεγαλύτερος.

3.3 Μονοπροέχουσα δοκός με εγκοπή υποβαλλόμενη σε κάμψη 4 σημείων



Σχήμα 30 : Μονοπροέχουσα δοκός με εγκοπή υπό κάμψη 4 σημείων

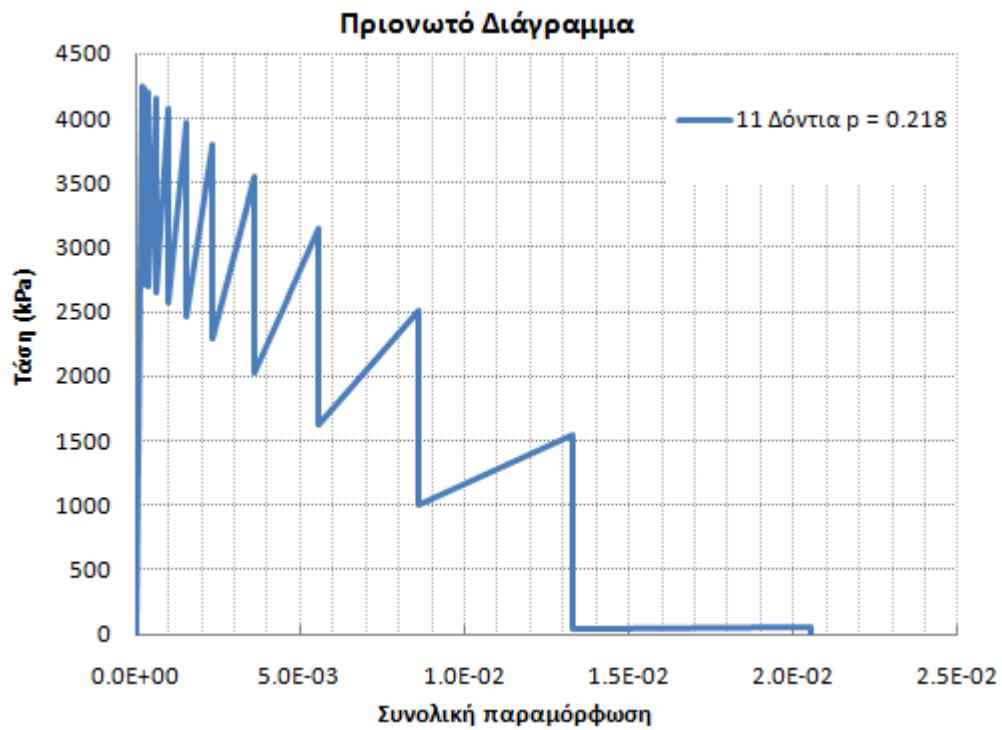
Η μονοπροέχουσα δοκός της εφαρμογής αυτής έχει πάχος 0.152m . Το υλικό της είναι σκυρόδεμα το οποίο έχει τις εξής ιδιότητες. Έχει μέτρο ελαστικότητας $E = 24.8\text{GPa}$, λόγο Poisson $\nu = 0.18$, εφελκυστική αντοχή $f_t = 3500\text{kPa}$ και ενέργεια θραύσης $G_f = 0.15\text{kN/m}$. Η δοκός προσομοιώνεται με τετραπλευρικά-τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης με μέγεθος πλευράς κοντά στην εγκοπή 5mm . Κάθε στοιχείο έχει 4 σημεία ολοκλήρωσης Gauss. Οι επιπλέον παράμετροι για τη διαδοχική γραμμική προσέγγιση, είναι συγκεντρωμένες σε παρακάτω πίνακα.



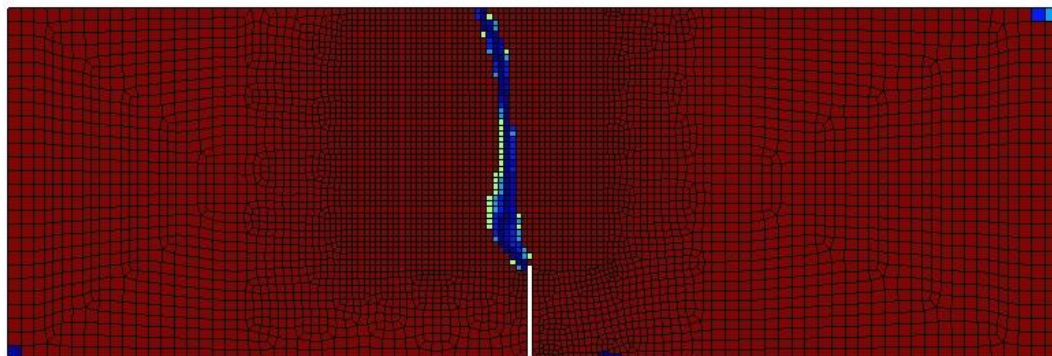
Σχήμα 31 : Δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων για τη μονοπροέχουσα δοκό

Παράμετροι Διαδοχικής Γραμμικής Προσέγγισης:

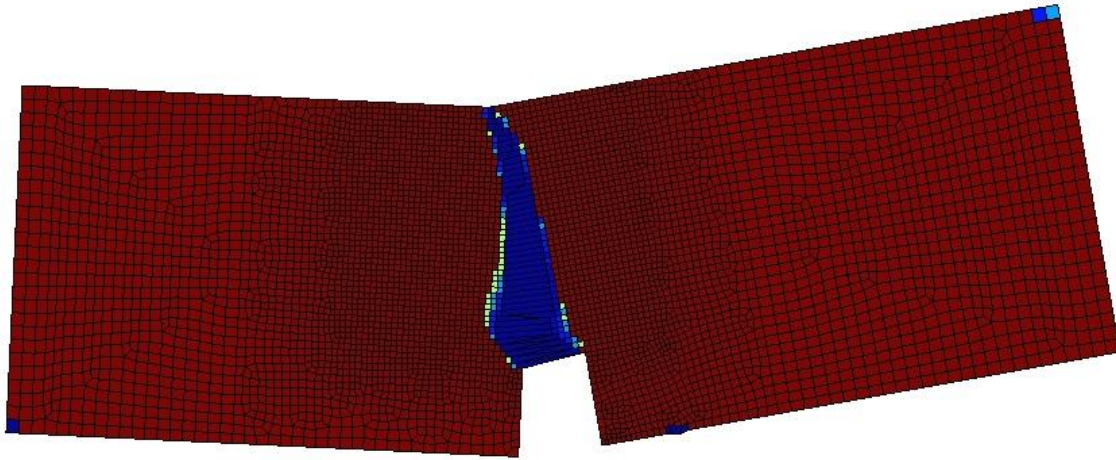
| Μήκος Πλευράς Στοιχείου κοντά στην εγκοπή(mm) | Εύρος ρωγμής h(mm) | Αριθμός Δοντιών N | Παράμετρος ρ | Αριθμός Γραμμικών Επιλύσεων | Χρόνος (sec) |
|---|--------------------------|-------------------------|--------------|-----------------------------------|-----------------|
| 5 | 5 | 11 | 0.218 | 2574 | 4795.03 |



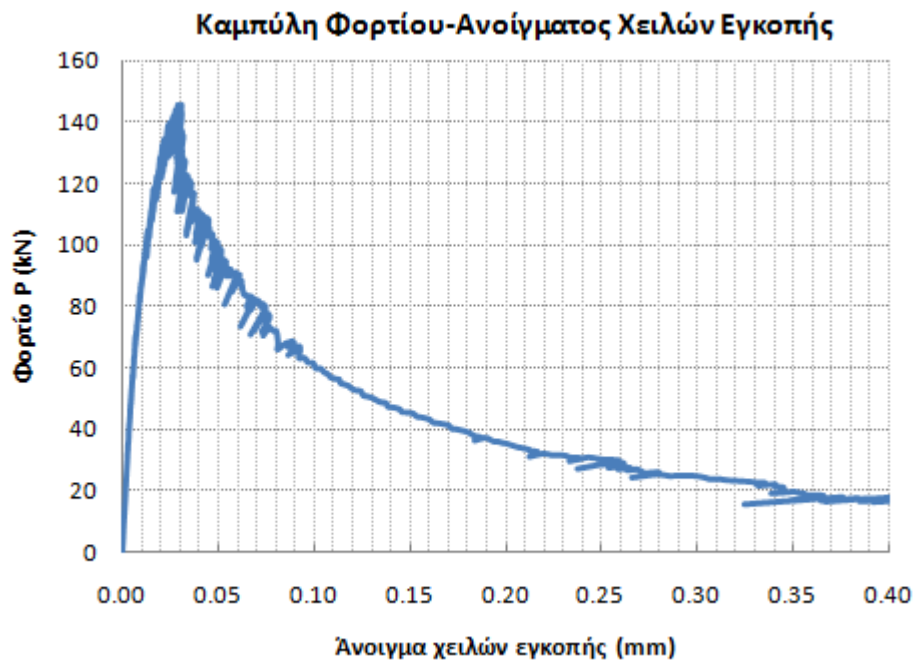
Σχήμα 32 : Πριονωτό διάγραμμα



Σχήμα 33 : Μονοπρόεχουσα δοκός στο τελευταίο στάδιο ρηγμάτωσης



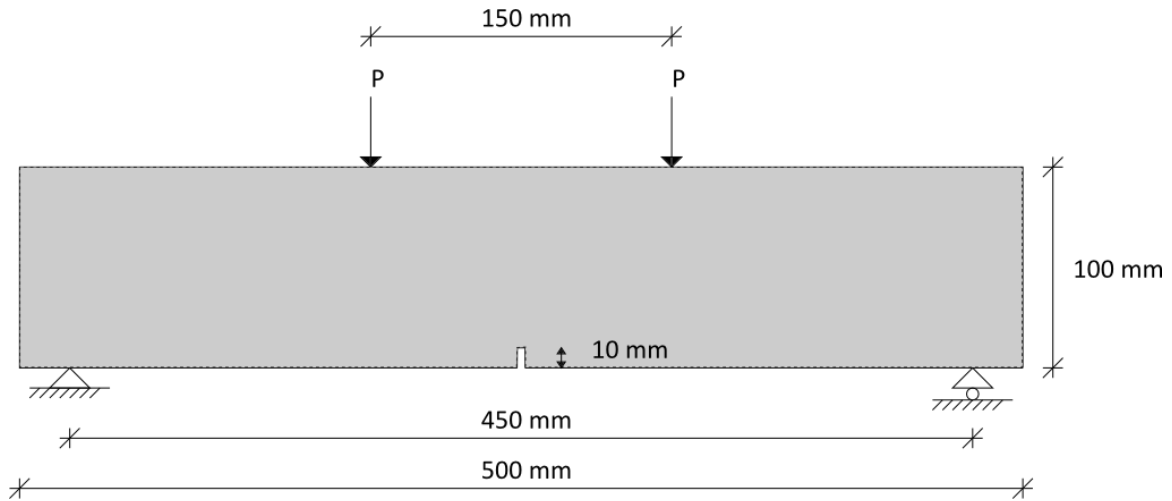
Σχήμα 34 : Παραμόρφωση μονοπρόχειουσας δοκού λίγο πριν την κατάρρευση



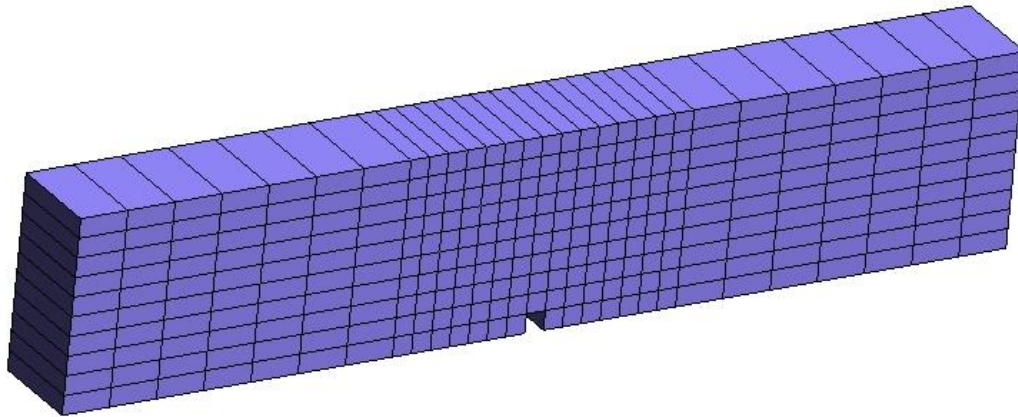
Σχήμα 35 : Καμπύλη Φορτίου-Ανοίγματος χειλών εγκοπής (Crack Mouth Opening)

3.4 Δοκός εφαρμογής 1 προσομοιωμένη με εξαεδρικά-οκτακομβικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας

Στην εφαρμογή αυτή θα προσομοιώσουμε τη δοκό της εφαρμογής 1 με εξαεδρικά-οκτακομβικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας. Κάθε στοιχείο έχει 8 σημεία ολοκλήρωσης Gauss. Με τον τρόπο αυτό, θα εξετάσουμε κατά πόσο η μέθοδος της Διαδοχικής Γραμμικής Προσέγγισης, λειτουργεί ικανοποιητικά στην περίπτωση της τρισδιάστατης ελαστικότητας.



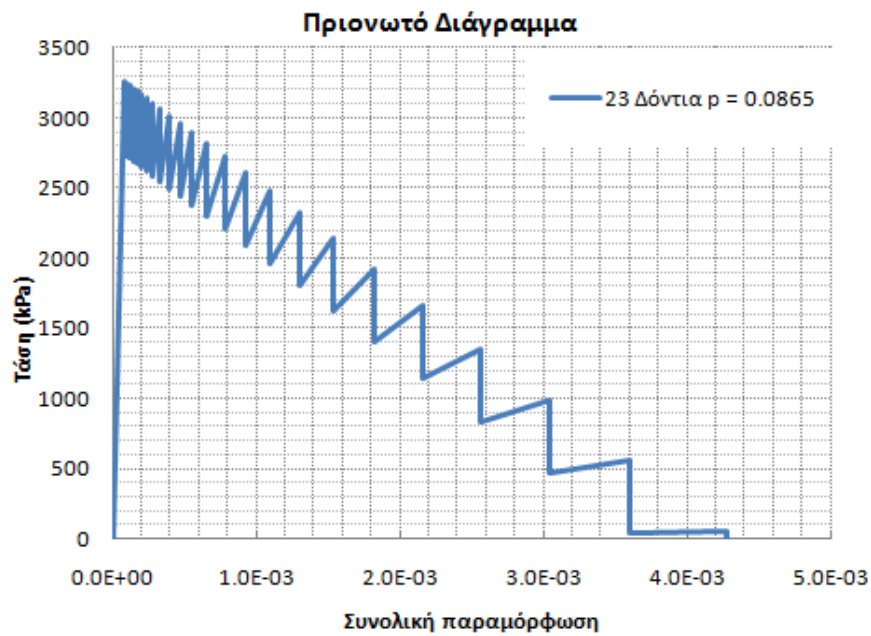
Σχήμα 36 : Μοντέλο δοκού με εγκοπή που υποβάλλεται σε κάμψη 4 σημείων



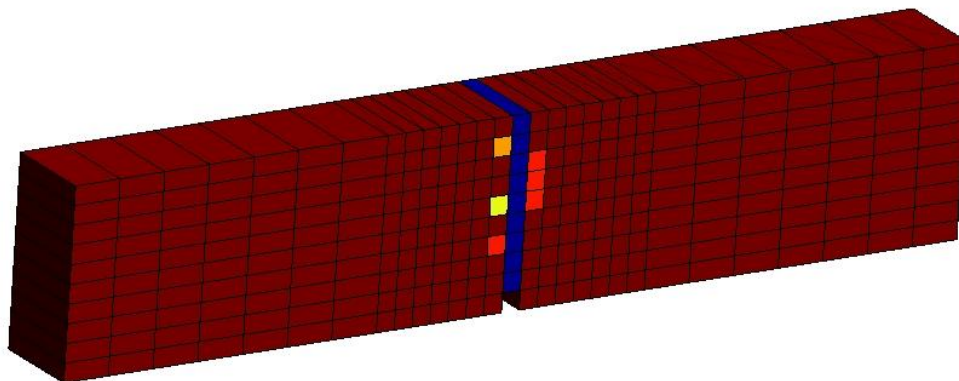
Σχήμα 37 : Προσομοίωση δοκού με εγκοπή, με εξαεδρικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας

Παράμετροι Διαδοχικής Γραμμικής Προσέγγισης:

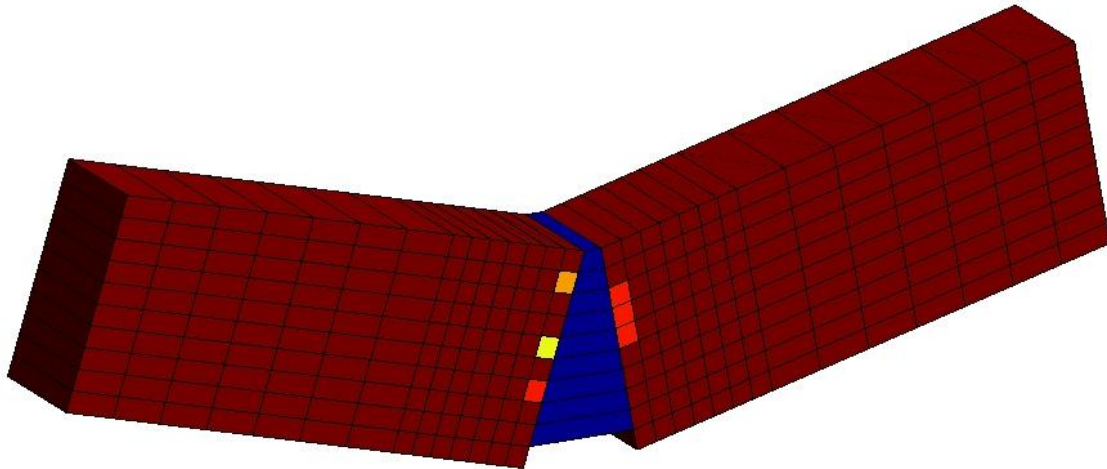
| Μήκος Πλευράς Στοιχείου κοντά στην εγκοπή(mm) | Εύρος ρωγμής h(mm) | Αριθμός Δοντιών N | Παράμετρος ρ | Αριθμός Γραμμικών Επιλύσεων | Χρόνος (sec) |
|---|--------------------------|-------------------------|----------------------|-----------------------------------|-----------------|
| 10 | 10 | 23 | 0.0865 | 441 | 187.58 |



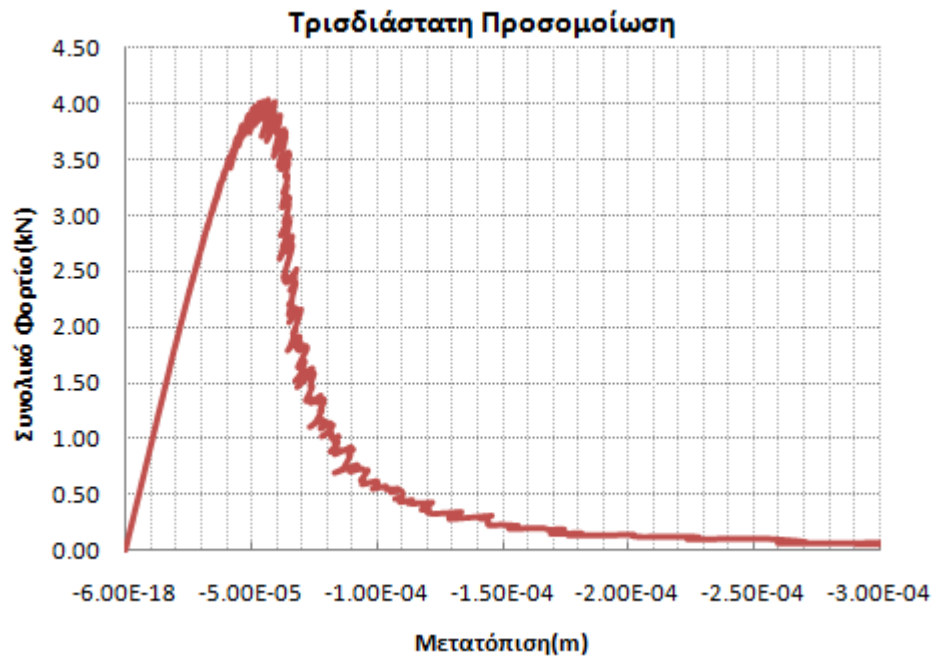
Σχήμα 38 : Πριονωτό Διάγραμμα



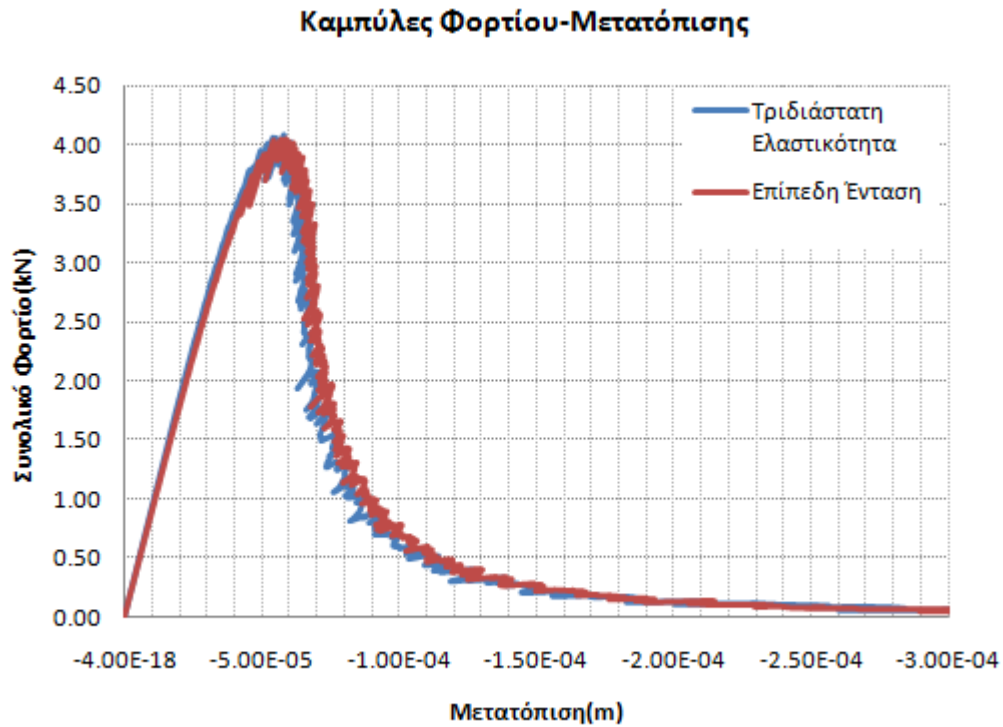
Σχήμα 39 : Ρηγματωμένος Φορέας πριν την κατάρρευση



Σχήμα 40 : Παραμορφωμένος Φορέας πριν την κατάρρευση



Σχήμα 41 : Καμπύλη Φορτίου-Μετατόπισης Τρισδιάστατης Προσομοίωσης



Σχήμα 42 : Σύγκριση Καμπυλών Φορτίου-Μετατόπισης Τρισδιάστατης Ελαστικότητας-Επίπεδης Έντασης

Παρατηρήσεις-Συμπεράσματα

- Η Γραμμική Διαδοχική Προσέγγιση, λειτουργεί ικανοποιητικά και για την περίπτωση της τρισδιάστατης ελαστικότητας.
- Η Καμπύλη Φορτίου-Μετατόπισης της τρισδιάστατης ελαστικότητας, σχεδόν συμπίπτει με την αντίστοιχη καμπύλη για την επίπεδη ένταση λόγω της φύσης του προβλήματος.
- Προφανώς χρειάζεται περισσότερος υπολογιστικός χρόνος για την επίλυση λόγω των μεγαλύτερων σε στοιχεία μητρώων δυσκαμψίας των τρισδιάστατων στοιχείων. Επιπλέον οι κύριες τάσεις, υπολογίζονται πλέον συνδυάζοντας όλα τα στοιχεία του ταυιστή των τάσεων στις τρεις διαστάσεις.

Αποτελέσματα - Συμπεράσματα Διπλωματικής Εργασίας

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από την παρούσα Διπλωματική Εργασία συνοψίζονται ως εξής:

- Η Διαδοχική Γραμμική Προσέγγιση (ΔΓΠ), αποτελεί μία αξιόπιστη τεχνική αντιμετώπισης προβλημάτων ρωγμών.
- Η ΔΓΠ συγκλίνει πάντα εφόσον δεν προκύπτουν αρνητικά εφαπτομενικά μητρώα δυσκαμψίας. Αντιθέτως, λόγω της προσέγγισης του κλάδου χαλάρωσης του μοντέλου θραύσης με το πριονωτό διάγραμμα, τα μητρώα είναι πάντα θετικά ορισμένα.
- Η ΔΓΠ αντικαθιστά με επιτυχία τις μη γραμμικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση των φαινομένων ρηγμάτωσης. Μάλιστα, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των «δοντιών» στα πριονωτά διαγράμματα (για την προσέγγιση του φθιτού κλάδου του υλικού), τόσο καλύτερα προσεγγίζονται τα αποτελέσματα των μη γραμμικών μεθόδων.
- Με σωστή επιλογή του εύρους της ρωγμής h (bandwidth), επιτυγχάνεται η ορθή ανακατανομή της έντασης λόγω της απελευθέρωσης ενέργειας από την ανάπτυξη και διάδοση των ρωγμών, ανεξάρτητα από το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση ενός φορέα.
- Η ενσωμάτωση της ΔΓΠ γίνεται εύκολα σε υπάρχοντες κώδικες πεπερασμένων στοιχείων χωρίς να απαιτούνται πολλές τροποποιήσεις στις ήδη υπάρχουσες διαδικασίες.

Τέλος, έγινε διερεύνηση της απόδοσης των βελτιωμένων τετραπλευρικών-τετρακομβικών στοιχείων επίπεδης έντασης και διαπιστώθηκε η καλύτερη συμπεριφορά τους σε σύγκριση με αυτή των συμβατικών τετραπλευρικών κυρίως σε καμπτικά προβλήματα. Τα αποτελέσματα που δίνουν είναι καλύτερα τόσο όσον αφορά τις μετατοπίσεις όσο και τις τάσεις.

Προτάσεις Για Επιπλέον Μελέτη-Διερεύνηση

Μερικές προτάσεις για επιπλέον μελέτη και διερεύνηση της συγκεκριμένης μεθόδου, θα μπορούσαν να είναι οι εξής:

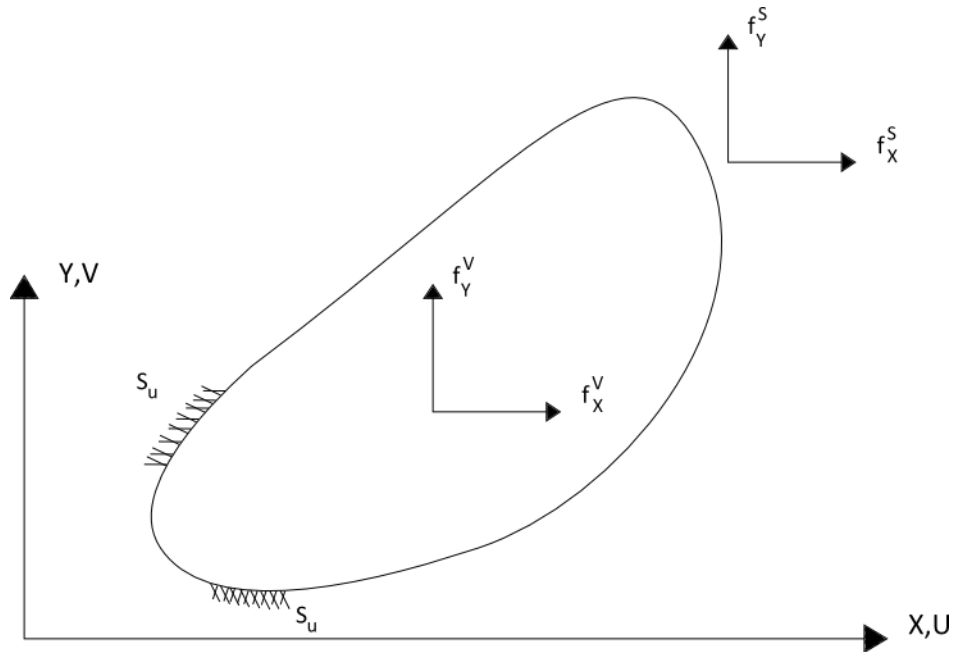
- Επέκταση της μεθόδου της Διαδοχικής Γραμμικής Προσέγγισης σε επιπλέον καταστατικά προσομοιώματα υλικών, όπως το ιστροπικό προσομοίωμα θραύσης με εκθετικό κλάδο χαλάρωσης (isotropic damage model with exponential softening).
- Εφαρμογή της ΔΓΠ σε επιπλέον τύπους πεπερασμένων στοιχείων. Ενδεικτικά αναφέρονται στοιχεία κελύφους και πλάκας.
- Διερεύνηση για λειτουργία της μεθόδου και αξιοποίησή της σε άλλα προβλήματα όπου κυριαρχεί η μη γραμμικότητα του υλικού.
- Προσομοίωση ρηγμάτωσης φορέων οι οποίοι αποτελούνται από περισσότερα του ενός υλικά.
- Εύρεση αποτελεσματικότερων τεχνικών διαχείρισης των μητρώων δυσκαμψίας. Αυτό θα επιτευχθεί αν εκμεταλλευτούμε το γεγονός πως από βήμα σε βήμα, η μεταβολή του μητρώου δυσκαμψίας αφορά μόνο τα κρίσιμα στοιχεία ή σημεία Gauss. Ο αριθμός των στοιχείων του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας που μεταβάλλονται, είναι μικρός σε σχέση με το σύνολο των στοιχείων.
- Τέλος είναι απαραίτητο να γίνουν επιπλέον εφαρμογές καθώς και σύγκριση με τα αποτελέσματα μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση της ρηγμάτωσης. Ενδεικτικά αναφέρεται η σύγκριση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με ενσωματωμένες ασυνέχειες (Finite Elements with Embedded Discontinuities).

Παράρτημα

Π.1 Πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης – παραμόρφωσης

Στοιχεία για την επίπεδη ένταση

Επίπεδη ένταση επικρατεί σε έναν ολόσωμο φορέα όταν η μία του διάσταση, η οποία είναι η διάσταση κατά τη διεύθυνση του άξονα Z είναι πολύ μικρή συγκρινόμενη με τις διαστάσεις ως προς τους άλλους δύο άξονες X και Y. Επιπλέον, δεν ασκούνται φορτία κατά τη Z διεύθυνση ούτε και στις άνω και κάτω επιφάνειες του φορέα τις παράλληλες με το επίπεδο XY. Η διάσταση κατά την Z διεύθυνση ορίζεται ως το πάχος του φορέα και συμβολίζεται με t (thickness). Εκτός από τα συγκεντρωμένα φορτία στο επίπεδο XY, τα φορτία που ασκούνται στο φορέα περιλαμβάνουν τις μαζικές δυνάμεις f_x^V και f_y^V που ασκούνται εντός του όγκου του φορέα καθώς και τις επιφανειακές δυνάμεις f_x^S και f_y^S . Όλα τα φορτία θεωρούνται κατανομημένα ομοιόμορφα κατά το πάχος t του φορέα. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ένας τυχαίος φορέας υπό συνθήκες επίπεδης έντασης.



Λόγω των παραπάνω παραδοχών, οι τάσεις $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{yz}$ μηδενίζονται. Οι συνιστώσες U, V της μετατόπισης ως προς τους άξονες X, Y αντίστοιχα, όπως επίσης και οι ανηγμένες παραμορφώσεις $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ καθώς και οι αντίστοιχες τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ και τα φορτία είναι συναρτήσεις μόνο των X και Y .

Παρακάτω δίνονται τα διανύσματα των ανηγμένων παραμορφώσεων και των αντίστοιχων τάσεων:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{bmatrix}$$

Όπου από τις γνωστές σχέσεις της μηχανικής:

$$\varepsilon_X = \frac{\partial U}{\partial X}, \quad \varepsilon_Y = \frac{\partial V}{\partial Y}, \quad \gamma_{XY} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X}$$

Επιπλέον, λόγω των αρχικών παραδοχών για το μηδενισμό των τάσεων σχετικές με τη διάσταση Z, προκύπτει η σχέση ανηγμένων παραμορφώσεων-τάσεων για την επίπεδη ένταση:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{bmatrix}$$

Ή

$$\begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{bmatrix}$$

Ή

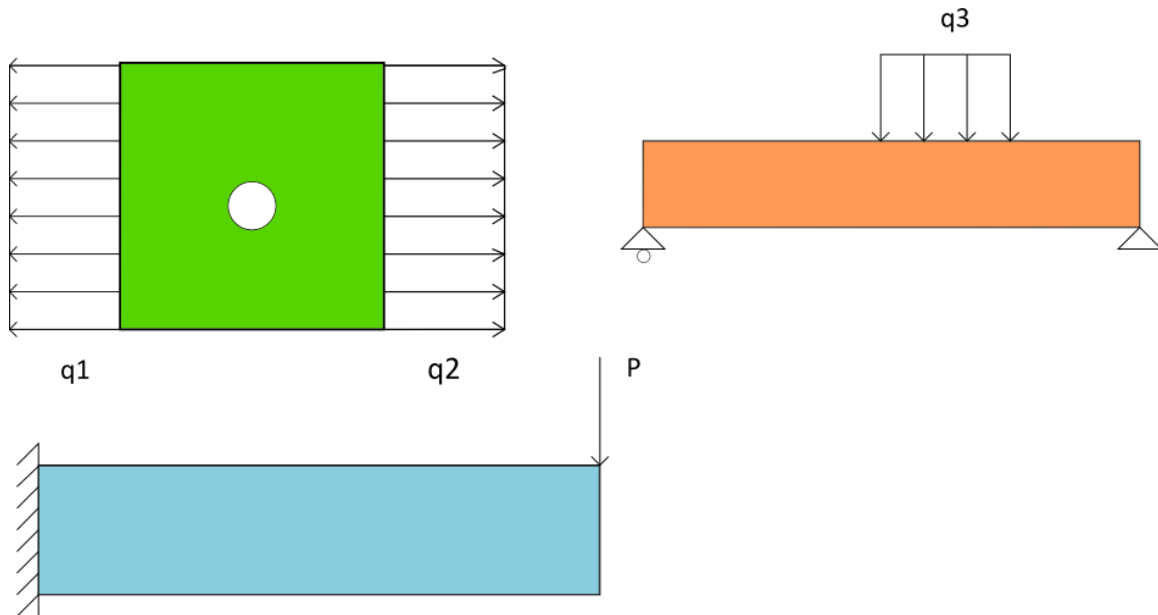
$$\{\sigma\} = [E] \cdot \{\varepsilon\}$$

Όπου το [3x3] μητρώο που συνδέει τις παραμορφώσεις με τις τάσεις, είναι το μητρώο ελαστικότητας [E] για την περίπτωση της επίπεδης έντασης.

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η ανηγμένη παραμόρφωση ε_z δεν είναι μηδενική αλλά ισούται με:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_X + \sigma_Y)$$

Λόγω του μηδενισμού της τάσης σ_z όμως η ελαστική ενέργεια του σώματος που οφείλεται σε αυτή την ανηγμένη παραμόρφωση είναι μηδενική και έτσι μπορεί να μη ληφθεί υπόψη. Παρακάτω φαίνονται μερικά παραδείγματα φορέων στους οποίους επικρατούν συνθήκες επίπεδης έντασης.

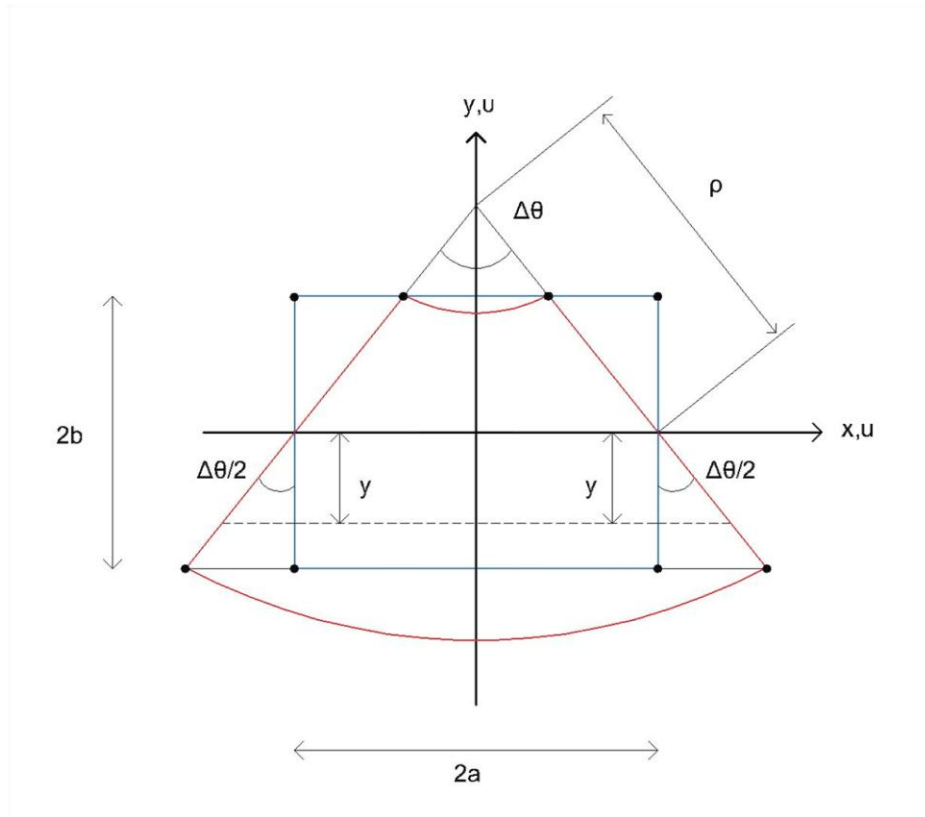


Π.2 Βελτιωμένα Τετραπλευρικά – Τετρακομβικά Στοιχεία Επίπεδης Έντασης

Εισαγωγή

Ο σκοπός ανάπτυξης και μόρφωσης των βελτιωμένων στοιχείων επίπεδης έντασης είναι η μείωση της ακαμψίας των απλών τετρακομβικών στοιχείων ώστε να μπορούν να προσομοιωθούν καλύτερα φαινόμενα κάμψης. Τα παραπάνω φαινόμενα με τη βελτίωση των στοιχείων, μπορούν να ληφθούν υπόψη με πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος και χωρίς την αλλαγή του δικτύου των κόμβων και των στοιχείων. Η βελτίωση γίνεται ενσωματώνοντας στο στοιχείο κάποιες μορφές παραμόρφωσης, οι οποίες συμπυκνώνονται σε επίπεδο στοιχείου προσδίδοντας του καλύτερη συμπεριφορά.

Ενσωμάτωση των μορφών παραμόρφωσης



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot \Delta\theta/2}{(\rho + y) \cdot \Delta\theta/2} \cong \frac{y}{\rho}$$

$$\{\varepsilon\} = [C] \cdot \{\sigma\}$$

$$[C] = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \nu) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_y, \tau_{xy} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{E}{\rho} \cdot y$$

$$\Rightarrow \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) = -\frac{\nu \cdot \rho}{y} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{E} \cdot (1 + \nu) \cdot \tau_{xy} \\ \text{Πρέπει : } \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

Παραπάνω δείξαμε ότι ισχύει:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{\rho}, \quad \text{Ολοκληρώνοντας ως προς τη μεταβλητή } x \text{ προκύπτει :}$$

$$u = \frac{y}{\rho} \cdot x + c_1, \quad \text{όπου } c_1 \text{ είναι η σταθερά ολοκλήρωσης.}$$

Για $y = 0 \rightarrow u = 0 \rightarrow c_1 = 0$ Άρα τελικά προκύπτει ότι:

$$u = \frac{y}{\rho} \cdot x \quad (3)$$

Αξιοποιώντας τη σχέση (2) και αντικαθιστώντας τη μεταβλητή u όπως προέκυψε στην εξίσωση (3), έχουμε τα παρακάτω:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \left(\frac{y}{\rho} \cdot x \right)}{\partial y} = -\frac{x}{\rho}, \quad \text{Ολοκληρώνουμε τη σχέση ως προς } x$$

$$\Rightarrow v^x = -\frac{x^2}{2 \cdot \rho} + c_2 \quad (4)$$

Όπου v^x είναι η συνιστώσα της μετατόπισης u λόγω της παραμόρφωσης του στοιχείου στη διεύθυνση του άξονα x .

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) και ολοκληρώνοντας ως προς y , μπορούμε να υπολογίσουμε τη σχέση που θα μας δώσει τη συνιστώσα v^y δηλαδή τη συνιστώσα της μετατόπισης u λόγω της παραμόρφωσης του στοιχείου στη διεύθυνση του άξονα y .

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu \cdot \rho}{y} \Rightarrow v^y = -\frac{\nu \cdot y^2}{2 \cdot \rho} + c_3 \quad (5)$$

Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνολική μετατόπιση u αθροίζοντας τις δύο συνιστώσες της που βρήκαμε στις σχέσεις (4) και (5).

$$v = v^x + v^y = \left(-\frac{x^2}{2 \cdot \rho} + c_2 \right) + \left(-\frac{v \cdot y^2}{2 \cdot \rho} + c_3 \right) = -\frac{x^2}{2 \cdot \rho} - \frac{v \cdot y^2}{2 \cdot \rho} + C$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες υπολογίζουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης C

→ Για $x = a$ και $y = b$ δηλαδή για τον πάνω δεξιά κόμβο του στοιχείου που φαίνεται στο σχήμα, η μετατόπιση $u = 0$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση, προκύπτει:

$$C = \frac{a^2}{2 \cdot \rho} + \frac{v \cdot b^2}{2 \cdot \rho}$$

Και τελικά η σχέση που μας δίνει τη μετατόπιση u είναι:

$$v = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \cdot \frac{a^2}{2 \cdot \rho} + \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \cdot \frac{v \cdot b^2}{2 \cdot \rho} \quad (6)$$

Οι σχέσεις (3) και (6), μπορούν να γραφτούν συμβολικά ως εξής:

$$u = \beta_1 \cdot x \cdot y \quad (3')$$

$$v = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \cdot \beta_2 + \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \cdot \beta_3 \quad (6')$$

Εφαρμόζοντας την αντίστοιχη διαδικασία για κάμψη ως προς τον άλλο άξονα του στοιχείου προκύπτουν οι αντίστοιχες σχέσεις για τις μετατοπίσεις:

$$u = \beta_4 \cdot \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) + \beta_5 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad (3'')$$

$$v = \beta_6 \cdot x \cdot y \quad (6'')$$

Οι κλασικές σχέσεις που δίνουν τις μετατοπίσεις ενός σημείου με συντεταγμένες (x,y) του απλού τετραπλευρικού-τετρακομβικού στοιχείου είναι:

$$u = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 + N_3 \cdot u_3 + N_4 \cdot u_4 \quad , \quad u_i \quad i=1,4 \text{ οι επικόμβιες μετατοπίσεις}$$

$$v = N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot v_2 + N_3 \cdot v_3 + N_4 \cdot v_4 \quad , \quad v_i \quad i=1,4 \text{ οι επικόμβιες μετατοπίσεις}$$

Πλέον στις σχέσεις αυτές μπορούν να ενταχθούν και οι μορφές παραμόρφωσης που υπολογίστηκαν παραπάνω και να προκύψουν πλέον οι σχέσεις:

$$u = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 + N_3 \cdot u_3 + N_4 \cdot u_4 + N_5 \cdot u_5 + N_6 \cdot u_6$$

$$v = N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot v_2 + N_3 \cdot v_3 + N_4 \cdot v_4 + N_5 \cdot v_5 + N_6 \cdot v_6$$

Όπου u_i και v_i $i=5,6$ δεν είναι επικόμβιες μετατοπίσεις αλλά είναι οι μορφές παραμόρφωσης. Οι συναρτήσεις σχήματος N_i $i=1,6$ δίδονται παρακάτω αναλυτικά :

$$N_1 = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right) \qquad N_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right) \qquad N_5 = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{y}{b}\right) \qquad N_6 = 1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2$$

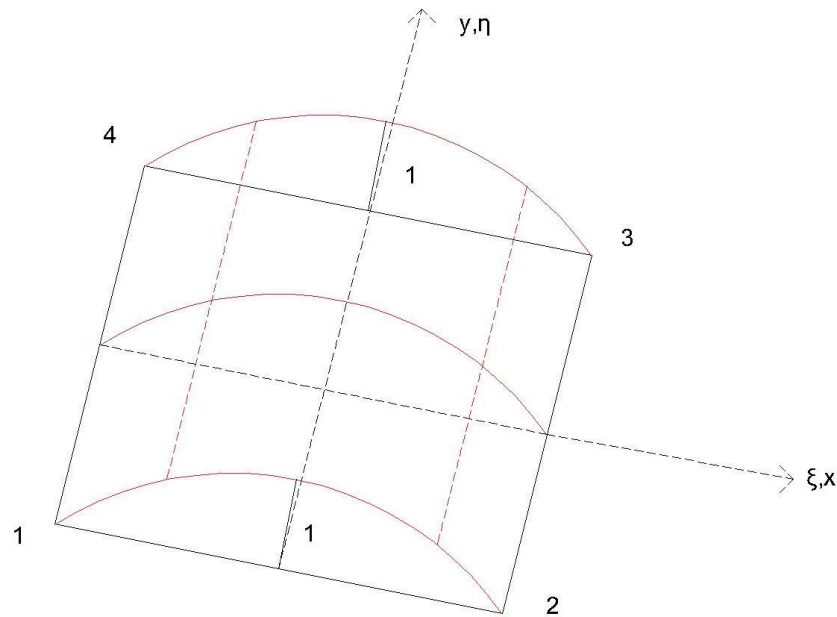
Με τις ακόλουθες αντικαταστάσεις, μπορούμε να βρούμε τις συναρτήσεις σχήματος ως προς το φυσικό σύστημα συντεταγμένων και έτσι θα μπορέσουμε να βρούμε τα ισοπαραμετρικά βελτιωμένα τετραπλευρικά - τετρακομβικά στοιχεία.

$$\xi = \frac{x}{a}, \qquad \eta = \frac{y}{b}$$

$$N_1 = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \qquad N_4 = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \qquad N_5 = 1 - \xi^2$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \qquad N_6 = 1 - \eta^2$$



Στο Παραπάνω σχήμα απεικονίζεται η συνάρτηση σχήματος N_5 η οποία λαμβάνει την τιμή 1 στα μέσα των πλευρών (1-2) και (3-4) του στοιχείου.

Πλέον μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μητρική γραφή για τα παρακάτω.

$$\{u\} = [N] \cdot \{d_i\} + [N_{en}] \cdot \{d_j\} \quad , \quad i = 1, 4 \quad j = 5, 6$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$[N_{en}] = \begin{bmatrix} N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix}$$

Πλέον το μητρώο παραμόρφωσης αποτελείται από δύο τμήματα:

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{d\} \Rightarrow \{\varepsilon\} = [B_i] \cdot \{d_i\} + [B_j] \cdot \{d_j\}$$

$$[B] = \left[[B_i] \quad [B_j] \right]$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ N_{1,\xi} & N_{1,x} & N_{2,\xi} & N_{2,x} & N_{3,\xi} & N_{3,x} & N_{4,\xi} & N_{4,x} \end{bmatrix}$$

$$[B_j] = \begin{bmatrix} N_{5,x} & 0 & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{5,\xi} & 0 & N_{6,\xi} \\ N_{5,\xi} & N_{5,x} & N_{6,\xi} & N_{6,x} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου παράγεται κατά τα γνωστά:

$$[k] = \int_V \begin{bmatrix} [B_i]^T \\ [B_j]^T \end{bmatrix} \cdot [C] \cdot \begin{bmatrix} [B_i] & [B_j] \end{bmatrix} dV$$

Και η εξίσωση ισορροπίας του στοιχείου είναι:

$$\begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{ij}] \\ [k_{ji}] & [k_{jj}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{u_i\} \\ \{u_j\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_i\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

Τα παραπάνω υπομητρώα τα οποία εμφανίζονται στην εξίσωση ισορροπίας, διατυπώνονται παρακάτω.

$$\begin{aligned} [k_{ii}] &= \int_V [B_i]^T \cdot [C] \cdot [B_i] dV & [k_{ij}] &= \int_V [B_i]^T \cdot [C] \cdot [B_j] dV \\ [k_{ji}] &= \int_V [B_j]^T \cdot [C] \cdot [B_i] dV & [k_{jj}] &= \int_V [B_j]^T \cdot [C] \cdot [B_j] dV \end{aligned}$$

Η διαδικασία, ολοκληρώνεται, με στατική συμπύκνωση των βαθμών ελευθερίας που αντιστοιχούν στις μορφές παραμόρφωσης. Έτσι το τελικό μητρώο που προκύπτει είναι όπως και στην περίπτωση των συμβατικών τετρακομβικών στοιχείων διαστάσεων 8x8.

$$[K_{en}] \cdot \{u_i\} = \{P_i\} \quad \text{Όπου: } [K_{en}] = [K_{ii}] - [K_{ij}] \cdot [K_{jj}]^{-1} \cdot [K_{ji}]$$

Αξίζει να σημειωθεί πως για τον υπολογισμό των τάσεων, πρέπει να γίνει υπολογισμός των μορφών παραμόρφωσης, με την επίλυση της παρακάτω εξίσωσης:

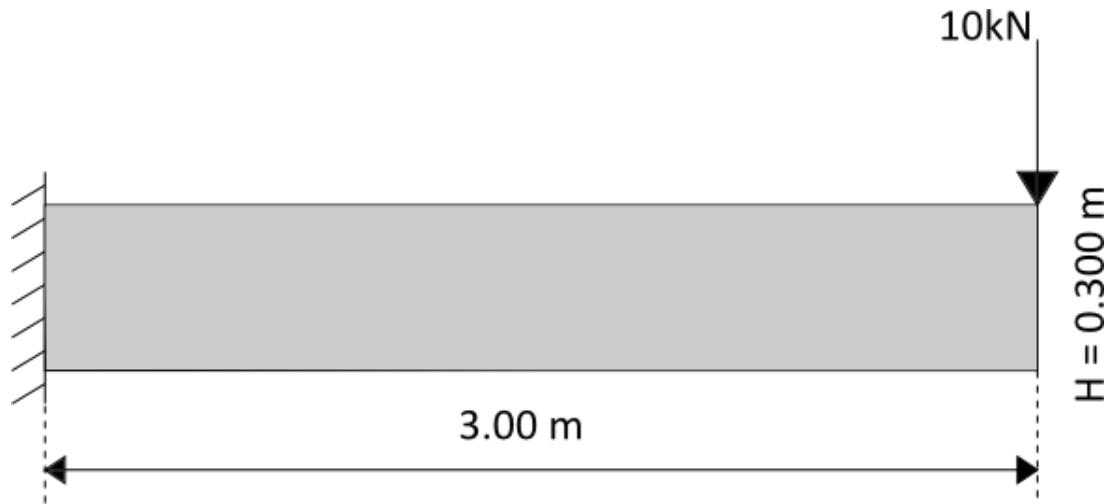
$$[K_{ji}] \cdot \{u_i\} + [K_{jj}] \cdot \{u_j\} = \{0\} \Rightarrow \{u_j\} = -[K_{jj}]^{-1} \cdot [K_{ji}] \cdot \{u_i\}$$

Άρα το διάνυσμα των τάσεων $\{\sigma\}$ θα υπολογιστεί από την σχέση:

$$\{\sigma\} = [C] \cdot [B] \cdot \{d\}$$

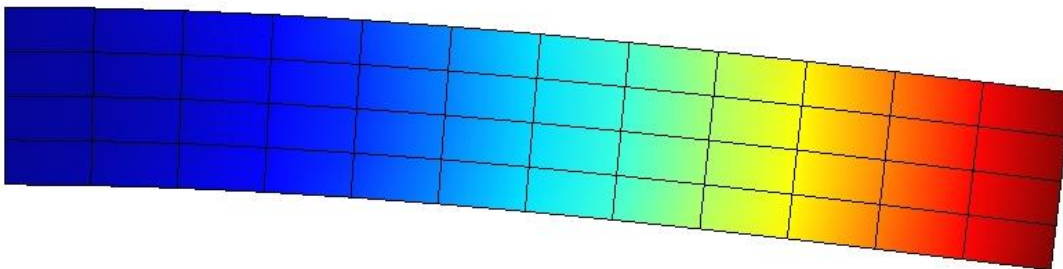
Για να αποδείξουμε την καλύτερη συμπεριφορά των βελτιωμένων στοιχείων, θα λύσουμε ένα απλό στατικό πρόβλημα κάμψης. Το πρόβλημα αυτό αφορά έναν πρόβολο του οποίου το μοντέλο εμφανίζεται παρακάτω. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης με τη χρήση συμβατικών αλλά και

βελτιωμένων τετραπλευρικών-τετρακομβικών στοιχείων, θα συγκριθούν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν κάνοντας χρήση του προγράμματος Nastran.

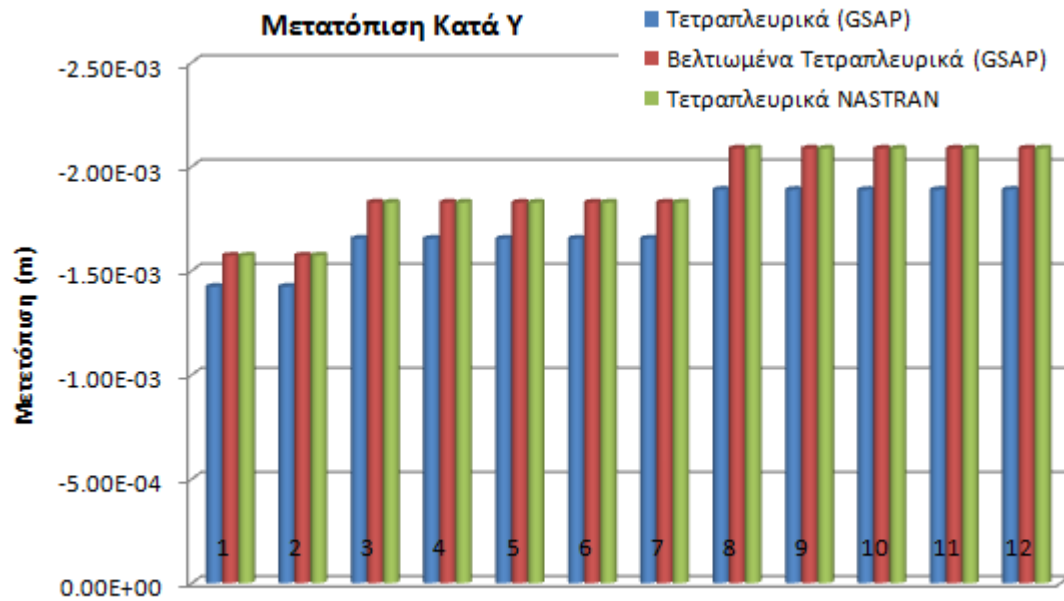
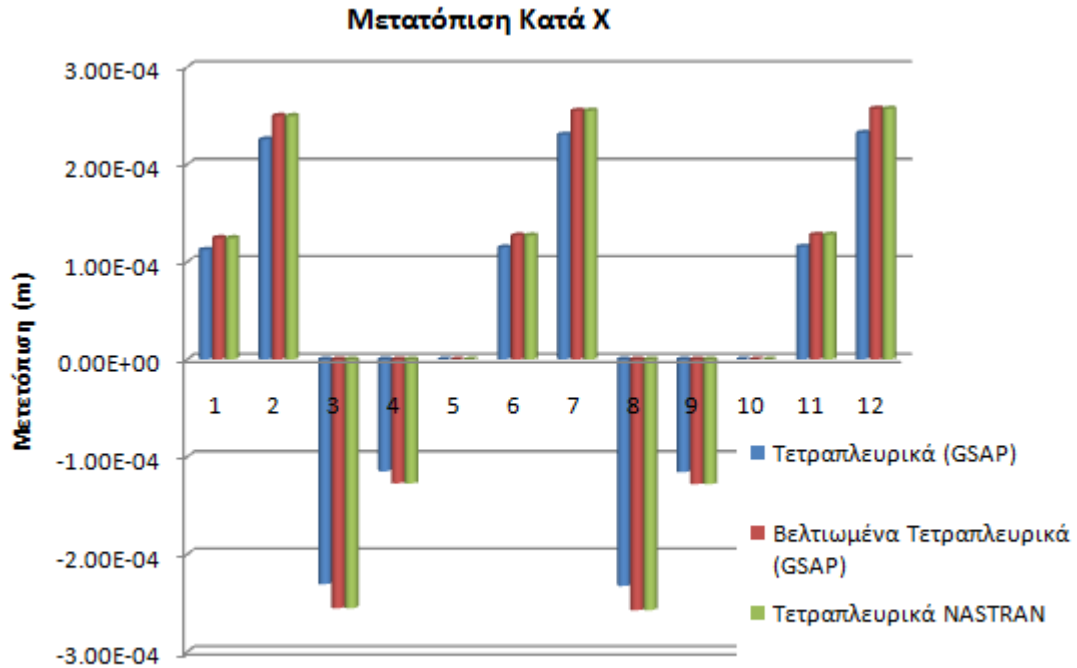


Ο παραπάνω πρόβολος, έχει πάχος $t = 0.2$ m. Αποτελείται από ομογενές υλικό το οποίο έχει μέτρο ελαστικότητας $E = 21$ GPa και λόγο του Poisson $\nu = 0.20$. Ο φορέας αυτός θα χωριστεί σε 48 τετραπλευρικά τετρακομβικά στοιχεία τόσο συμβατικά όσο και βελτιωμένα. Το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων καθώς και ο παραμορφωμένος φορέας, φαίνονται παρακάτω.

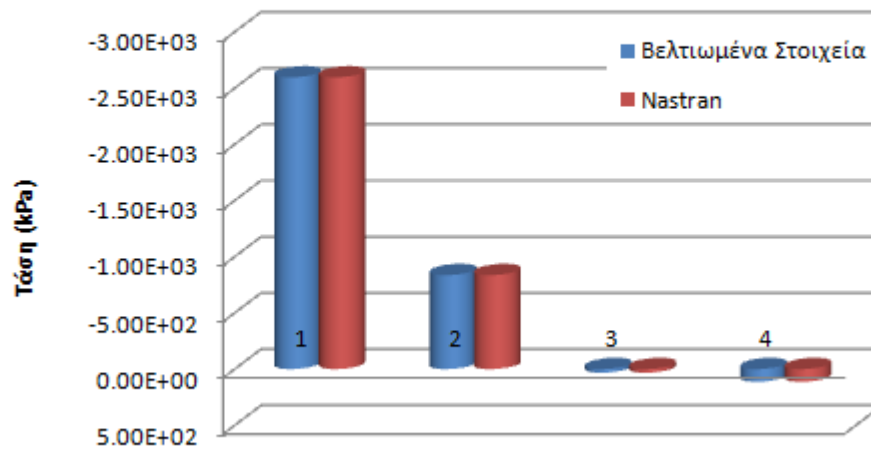
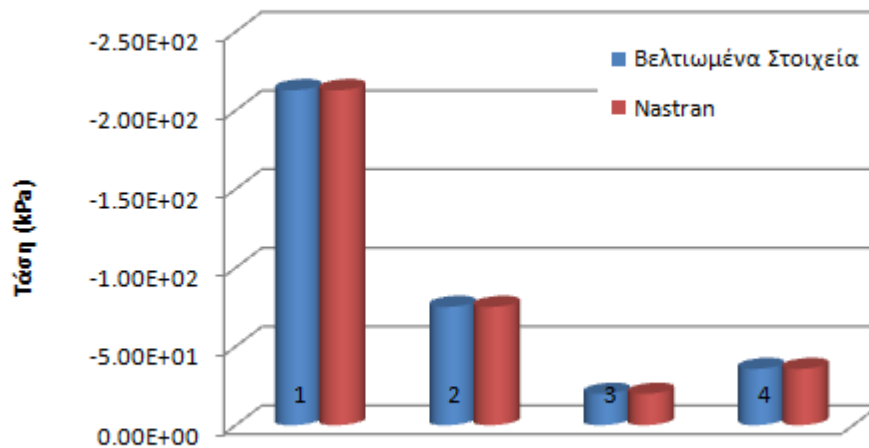
| | | | | | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 44 | 48 |
| 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 47 |
| 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 |
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 | 41 | 45 |

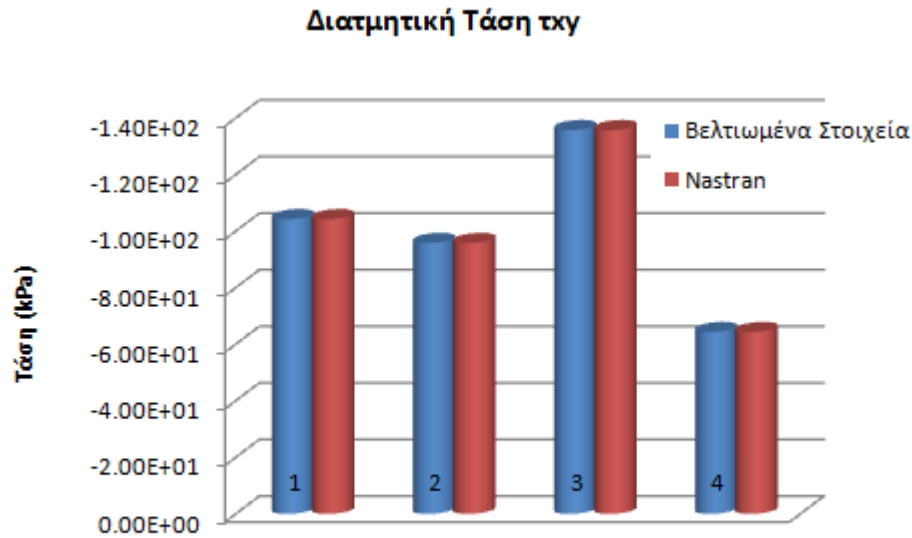


Τέλος, θα δείξουμε γραφήματα στα οποία φαίνεται σύγκριση των τιμών της μετατόπισης σε μερικούς από τους κόμβους κοντά στο σημείο εφαρμογής του φορτίου.



Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα βελτιωμένα στοιχεία ουσιαστικά επιτυγχάνουν τις ίδιες τιμές με την ανάλυση του προγράμματος Nastran. Πρέπει να σημειωθεί πως το παραπάνω πρόγραμμα, χρησιμοποιεί τετραπλευρικά-τετρακομβικά στοιχεία με εγκάρσιους στρωφικούς βαθμούς ελευθερίας. Ανάλογα αποτελέσματα προκύπτουν και για τις τάσεις όπου η σύγκριση φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

Ορθή Τάση σx**Ορθή Τάση σy**



Π.3 Αριθμητική Ολοκλήρωση

Γενικά, ο αναλυτικός υπολογισμός του μητρώου σιβαρότητας ενός ισοπαραμετρικού στοιχείου είναι δυσχερής και πρακτικά αδύνατος για στοιχεία ανώτερου βαθμού. Έτσι η αριθμητική ολοκλήρωση είναι μονόδρομος για να υπολογιστεί το μητρώο σιβαρότητας ενός ισοπαραμετρικού πεπερασμένου στοιχείου.

Τα προς ολοκλήρωση μητρώα είναι της μορφής $[F(\xi)]$ σε μία, $[F(\xi, \eta)]$ σε δύο και $[F(\xi, \eta, \zeta)]$ σε τρεις διαστάσεις. Τα αντίστοιχα μητρώα σιβαρότητας δίνονται από τα ολοκληρώματα που σημειώνονται και παραπάνω για κάθε στοιχείο:

$$\int [F(\xi)] d\xi \quad , \quad \iint [F(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad , \quad \iiint [F(\xi, \eta, \zeta)] d\xi d\eta d\zeta$$

Οι αντίστοιχοι τύποι για την αριθμητική ολοκλήρωση είναι οι ακόλουθοι:

$$\int [F(\xi)] d\xi = \sum_i \alpha_i \cdot [F(\xi_i)] + [e_n]$$

$$\iint [F(\xi, \eta)] d\xi d\eta = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \cdot [F(\xi_i, \eta_j)] + [e_n]$$

$$\iiint [F(\xi, \eta, \zeta)] d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} \cdot [F(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)] + [e_n]$$

Όπου τα αθροίσματα στους παραπάνω τύπους, περιλαμβάνουν όλα τα σημεία του στοιχείου που καθορίζονται από τους δείκτες i, j, k , οι συντελεστές $\alpha_i, \alpha_{ij}, \alpha_{ijk}$ είναι οι συντελεστές βάρους και τα μητρώα $[F(\xi_i)], [F(\xi_i, \eta_j)], [F(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)]$ είναι τα μητρώα $[F(\xi)], [F(\xi, \eta)], [F(\xi, \eta, \zeta)]$ τα οποία είναι υπολογισμένα στις θέσεις των σημείων ολοκλήρωσης i, j, k του στοιχείου.

Τα μητρώα $[e_n]$, είναι τα μητρώα τα οποία εκφράζουν το σφάλμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης και στην πράξη δεν υπολογίζονται. Έτσι τα ολοκληρώματα για τον υπολογισμό των μητρώων στιβαρότητας, προσεγγίζονται από τα αντίστοιχα αθροίσματα:

$$\int [F(\xi)] d\xi \approx \sum_i \alpha_i \cdot [F(\xi_i)]$$

$$\int [F(\xi, \eta)] d\xi d\eta \approx \sum_{i,j} \alpha_{ij} \cdot [F(\xi_i, \eta_j)]$$

$$\int [F(\xi, \eta, \zeta)] d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} \cdot [F(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)]$$

Ανάλογα με τον τύπο και την τάξη του στοιχείου, επιλέγεται το πλήθος των σημείων ολοκλήρωσης, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η επιθυμητή ακρίβεια.

Ολοκλήρωση Gauss

Στην περίπτωση του αριθμητικού υπολογισμού του μητρώου στιβαρότητας ενός ισοπαραμετρικού στοιχείου, έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την τιμές των μητρώων $[F]$ σε οποιοδήποτε σημείο εντός του στοιχείου. Έτσι τα σημεία αυτά δε βρίσκονται κατ' ανάγκη σε ισαπέχουσες θέσεις. Τελικά μπορούμε να επιλέξουμε τη θέση των σημείων αυτών καθώς και το πλήθος τους, έτσι ώστε ο υπολογισμός του μητρώου στιβαρότητας να γίνεται με όσο το δυνατό μεγαλύτερη ακρίβεια. Η ολοκλήρωση Gauss, είναι μία μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης στην οποία τόσο οι θέσεις των σημείων καθώς και οι τιμές των συντελεστών βάρους, έχουν βελτιστοποιηθεί ώστε να έχουμε την καλύτερη ακρίβεια με το μικρότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος.

Ολοκλήρωση σε δύο διαστάσεις

Για να μπορέσουμε να ολοκληρώσουμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία της αριθμητικής ολοκλήρωσης διαδοχικά σε κάθε κατεύθυνση. Για να επιτύχουμε τον υπολογισμό του ακόλουθου ολοκληρώματος ολοκληρώνουμε διαδοχικά ως προς κάθε μεταβλητή:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 g(\eta) d\eta$$

Όπου

$$g(\eta) = \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot f(\xi_i, \eta)$$

$$\Rightarrow I = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot g(\eta_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot f(\xi_i, \eta_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_j \cdot \alpha_i \cdot f(\xi_i, \eta_j)$$

Συγκεκριμένα, για τον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας ενός τετραπλευρικού, ισοπαραμετρικού στοιχείου, η θέση των σημείων ολοκλήρωσης καθώς και οι αντίστοιχοι συντελεστές βάρους, συγκεντρώνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Τάξη Ολοκλήρωσης(n) | Αριθμός Σημείων | Συντεταγμένες Σημείων (ξ _i , η _j) | Συντελεστές Βάρους α _i , α _j |
|---------------------|-----------------|--|--|
| 1 | 1 | 0.0 | 2.0 |
| 2 | 4 | ±0.57735 | 1.0 |
| 3 | 9 | ±0.77459 0.0 | 0.55555 0.88888 |
| 4 | 16 | ±0.86113 ±0.33998 | 0.34785 0.65214 |

Ολοκλήρωση σε τρεις διαστάσεις

Με την ίδια λογική επιτυγχάνεται και ο υπολογισμός του ολοκληρώματος που δίνει το μητρώο στιβαρότητας στις τρεις διαστάσεις. Τώρα το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$I = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \alpha_k \cdot f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

Για τον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας ενός εξαεδρικού, ισοπαραμετρικού στοιχείου, η θέση των σημείων ολοκλήρωσης καθώς και οι αντίστοιχοι συντελεστές βάρους, συγκεντρώνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Τάξη Ολοκλήρωσης(n) | Αριθμός Σημείων | Συντεταγμένες Σημείων (ξ_i, η_j, ζ_k) | Συντελεστές Βάρους $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ |
|------------------------|-----------------|---|--|
| 1 | 1 | 0.0 | 2.0 |
| 2 | 8 | ± 0.57735 | 1.0 |
| 3 | 27 | ± 0.77459 | 0.55555 |
| | | 0.0 | 0.88888 |
| 4 | 64 | ± 0.86113 | 0.34785 |
| | | ± 0.33998 | 0.65214 |

Βιβλιογραφία

- [1] Μ. Παπαδρακάκης, *Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*. Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2001.
- [2] Ι. Ν. Πρασιανάκης, Σ. Κ. Κουρκουλής, *Πειραματική Αντοχή των Υλικών*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1999.
- [3] Δημήτρης Σ. Ματαράς, Φραγκίσκος Α. Κουτελιέρης, *Προγραμματισμός Fortran 90/95 για επιστήμονες και μηχανικούς*, Εκδόσεις Τζιόλα 2003, 2008.
- [4] Σημειώσεις Μαθημάτων “Ανάλυση φορέων με Πεπερασμένα Στοιχεία” και “Ειδικά Θέματα Ανάλυσης Φορέων με Πεπερασμένα Στοιχεία” του 8^{ου} και 9^{ου} Εξαμήνου αντίστοιχα της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.
- [5] Stephen J. Chapman, *Fortran 95/2003 for Scientists and Engineers (3rd Edition)*, McGraw-Hill 2008.
- [6] I. M. Smith and D. V. Griffiths, *Programming the Finite Element Method(4th Edition)*, Wiley 2004.
- [7] EA de Souza Neto, D. Perić, DRJ Owen, *Computational Methods for Plasticity Theory and Applications*, Wiley 2008.
- [8] Michael Janssen, Jan Zuidema and Russell Wanhill, *Fracture Mechanics (Second Edition)*, Spon Press 2002, 2004.
- [9] Jan G. Rots and Stefano Invernizzi, Regularized sequentially linear saw-tooth softening model, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2004; **28** : 821-856.
- [10] Jan G. Rots, Beatrice Belletti, Stefano Invernizzi, Robust modeling of RC structures with an “event-by-event” strategy, *Engineering Fracture Mechanics*, 2008; **75** : 590-614.
- [11] Matthew J. Dejong, Max A.N. Hendriks, Jan G. Rots, Sequentially linear analysis of fracture under non-proportional loading, *Engineering Fracture Mechanics*, 2008; **75** : 5042-5056.
- [12] Matthew J. Dejong, Beatrice Belletti, Max A.N. Hendriks, Jan G. Rots, Shell elements for sequentially linear analysis, Lateral failure of masonry structures. *Engineering Structures*, 2009; **31** : 1382-1392.
- [13] Anne V. Van de Graaf, Sequentially linear analysis as an alternative to nonlinear analysis applied to a reinforced glass beam, 7th fib PhD Symposium, Stuttgart 2008
- [14] Zihai Shi, Masaki Suzuki, Numerical studies on load-carrying capacities of notched concrete beams subjected to various concentrated loads, *Construction and Building Materials*, 2004; **18** : 173–180.
- [15] Zhenjun Yang , X. Frank Xu, A heterogeneous cohesive model for quasi-brittle materials considering spatially varying random fracture properties, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* , 2008; **197** : 4027–4039.