



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Φυσικής

Εισαγωγή στην επανακανονικοποίηση θεωριών πεδίου - Θεωρία φ^3
στις 6 διαστάσεις

Διπλωματική Εργασία
του
Αθανάσιου Ευσταθίου

Επιβλέπων: Νικόλαος Μαυρόματος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2022

Ευχαριστίες

Καταρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω πάρα πολύ τον επιβλέπων της διπλωματικής μου εργασίας καθηγητή κ. Νικόλαο Μαυρόματο που μου έδωσε την ευκαιρία να εκπονήσω μαζί του τη διπλωματική μου εργασία. Θα ήθελα επίσης να τον ευχαριστήσω για την απίστευτη βοήθεια που μου παρείχε, το ενδιαφέρον και την υπομονή που έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας μου και περισσότερο από όλα για την άψογη καθοδήγηση και επικοινωνία μαζί του. Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την ψυχολογική υποστήριξη που μου παρείχαν και την υπομονή που έκαναν μαζί μου. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου που ήταν εκεί για μένα και μερικές φορές πίστευαν σε μένα παραπάνω από όσο πίστευα εγώ στον εαυτό μου.

Εισαγωγή

Η κβαντική θεωρία πεδίου (QFT) είναι ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία για την εξήγηση των βασικών αλληλεπιδράσεων. Οφείλει την αρχή της στο πρόβλημα της δημιουργίας μιας κβαντικής θεωρίας για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, ένα πρόβλημα που απασχολούσε τους φυσικούς της δεκαετίας του 1920. Μια πρώτη ολοκληρωμένη θεωρία δημιουργήθηκε από τον Paul Dirac το 1927, όταν προσπάθησε να κβαντώσει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Το τελευταίο σημαντικό βήμα όμως έγινε από τον Enrico Fermi με τη θεωρία της β διάσπασης. Στη συνέχεια οι φυσικοί συνειδητοποίησαν πως θα πρέπει να ενώσουν τη σχετικότητα του Einstein με την κβαντική μηχανική για να εξηγήσουν σωστά το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Ακολούθησε η δημιουργία των κανόνων και των διαγραμμάτων Feynman για την κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED) καθώς και η δημιουργία του ολοκληρώματος διαδρομής ως μεθόδου. Λίγα χρόνια αργότερα ξεκίνησε και η εφαρμογή της επανακανονικοποίησης για την αντιμετώπιση των απειριών που εμφανίζοντουσαν. Στα ίδια χρόνια εκείνα, η QFT χρησιμοποιείται για πρώτη φορά σε συστήματα πολλών σωμάτων. Τη δεκαετία του 1970 γίνεται επανακανονικοποίηση μη Αβελιανών θεωριών βαθμίδας και δημιουργείται η "ομάδα" επανακανονικοποίησης. Από τότε μέχρι σήμερα έχουν προστεθεί και άλλοι μέθοδοι και τεχνικές οι οποίες βρίσκουν εφαρμογές σε πολλούς κλάδους της φυσικής.

Στην εργασία θα ασχοληθούμε με το κομμάτι της επανακανονικοποίησης στη θεωρία φ^3 . Γενικά στην QFT εμφανίζονται απειρίες οι οποίες δημιουργούν προβλήματα στους υπολογισμούς. Για να λυθούν οι απειρίες αυτές προσθέτουμε κάποιους όρους που είναι κατάλληλοι ώστε να ακυρώσουν τις απειρίες που δημιουργούν το πρόβλημα. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται επανακανονικοποίηση και θα αποτελέσει τον πυρήνα της εργασίας. Στην αρχή θα αναφερθεί το ολοκλήρωμα διαδρομής το οποίο αποτελεί ένα από τα κύρια πράγματα που θα χρησιμοποιήσουμε και στη συνέχεια για να γίνει πιο εύκολα κατανοητή η θεωρία, θα αναλύσουμε το παράδειγμα του αρμονικού ταλαντωτή το οποίο θα λειτουργήσει και ως οδηγός για την περίπτωση των ελεύθερων πεδίων καθώς η μορφή του ολοκληρώματος διαδρομής στις δύο αυτές περιπτώσεις είναι ίδια, απλά αλλάζουν οι συμβολισμοί. Μετά θα αναλυθεί το ολοκλήρωμα διαδρομής στα σχετικιστικά αλληλεπιδρώντα πεδία και θα δειχθούν το πώς προκύπτουν οι απειρίες που μας απασχολούν και θέλουμε να λύσουμε. Θα αναλυθούν τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν και τέλος θα γίνουν οι απαραίτητες διορθώσεις τόσο στην κορυφή, τόσο και στον διαδότη των διαγραμμάτων Feynman της θεωρίας φ^3 στις 6 διαστάσεις.

Η εργασία αποτελείται από 8 κεφάλαια στα οποία γίνεται ανάλυση των μεθόδων και της θεωρίας που θα χρησιμοποιηθεί για τη διαδικασία της επανακανονικοποίησης. Τα πρώτα 3 κεφάλαια είναι πιο πολύ σαν "εισαγωγή" για το κύριο μέρος της εργασίας. Είναι όμως πολύ σημαντικά καθώς από εκεί θα πάρουμε τους περισσότερους τύπους και τεχνικές που θα χρησιμοποιηθούν στην τελική εργασία. Υπάρχουν επιπλέον 3 παραρτήματα στα οποία έχουν προστεθεί χρήσιμες τεχνικές και σχέσεις που θα χρησιμοποιηθούν στην εργασία.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	4
Εισαγωγή	4
1 Ολοκλήρωμα διαδρομής (path integral)	5
2 Ολοκλήρωμα διαδρομής του αρμονικού ταλαντωτή	9
3 Ολοκλήρωμα διαδρομής στη θεωρία των ελεύθερων πεδίων	15
4 Ολοκλήρωμα διαδρομής στη θεωρία των αλληλεπιδρώντων σχετικιστικών πεδίων	17
5 Αντισταθμιστικοί όροι και επανακανονικοποίηση	21
6 Διορθώσεις στον διαδότη	24
7 Διορθώσεις στην κορυφή	30
8 Η συνάρτηση β στο σχήμα ελάχιστης αφαίρεσης (MS)	32
Επίλογος	35
A Παράρτημα A: Παράμετροι Feynman	37
B Παράρτημα B: Διαστατική ανάλυση	38
C Παράρτημα Γ: Η συνάρτηση Γάμμα	39
Bibliography	40

1. Ολοκλήρωμα διαδρομής (path integral)

Ξεκινάμε την εργασία από τα ολοκληρώματα διαδρομής τα οποία αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο που θα χρησιμοποιηθεί κατά κόρον στα παρακάτω κεφάλαια. Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομής θα χρειαστούμε το πλάτος μετάβασης ή αλλιώς την πιθανότητα μετάβασης από μια αρχική σε μια τελική κατάσταση. Θα δουλέψουμε σε φυσικές μονάδες στην εργασία ($\hbar = c = 1$) εκτός και αν προστεθούν στο τέλος. Ας συμβολίσουμε την αρχική κατάσταση σε θέση q' και χρόνο t' ως $|q', t'\rangle$ και την τελική κατάσταση σε θέση q'' και χρόνο t'' ως $|q'', t''\rangle$ με $t'' > t'$. Τότε το πλάτος μετάβασης ορίζεται ως:

$$A(q', t'; q'', t'') \equiv \langle q'', t'' | q', t' \rangle \quad (1.1)$$

Για τον τελεστή θέσης \hat{Q} γνωρίζουμε πως η δράση του πάνω σε μια ιδιοκατάσταση της θέσης $|q\rangle$ δίνει ως αποτέλεσμα την αντίστοιχη ιδιοτιμή q :

$$\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle \quad (1.2)$$

Η χρονική εξάρτηση του τελεστή \hat{Q} δίνεται στην εικόνα του Heisenberg ως:

$$\hat{Q}(t) = e^{+i\hat{H}t} \hat{Q} e^{-i\hat{H}t} \quad (1.3)$$

όπου \hat{H} είναι ο τελεστής Χαμιλτονιανής του συστήματος, ενώ η χρονική εξέλιξη μιας κατάστασης $|q, t\rangle$ δίνεται από:

$$|q, t\rangle = e^{+i\hat{H}t} |q\rangle \quad (1.4)$$

Για να υπολογίσουμε το πλάτος μετάβασης 1.1 χωρίζουμε το χρονικό διάστημα $t'' - t'$ σε $N + 1$ ίσα απειροστά τμήματα διάρκειας

$$\delta t = \frac{t'' - t'}{N + 1} \rightarrow 0 \quad (1.5)$$

Από την 1.5 έχουμε πως:

$$t'' - t' = (N + 1) \delta t \quad (1.6)$$

Χρησιμοποιούμε επιπλέον για κάθε τμήμα με χρόνο $t_j - t', j = 1, \dots, N$ τη σχέση πληρότητας:

$$\hat{\mathbb{I}} = \int dq_j |q_j, t_j - t'\rangle \langle q_j, t_j - t'| \quad (1.7)$$

η οποία χρησιμοποιώντας τη σχέση 1.4 μπορεί να γραφεί ως:

$$\hat{\mathbb{I}} = \int dq_j e^{+i\hat{H}(t_j - t')} |q_j\rangle \langle q_j| e^{-i\hat{H}(t_j - t')} = \int dq_j e^{+i\hat{H}j\delta t} |q_j\rangle \langle q_j| e^{-i\hat{H}j\delta t} \quad (1.8)$$

Με αντίστοιχο τρόπο το πλάτος μετάβασης 1.1 γράφεται ως:

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = \langle q'' | e^{-i\hat{H}t''} e^{+i\hat{H}t'} | q' \rangle = \langle q'' | e^{-i\hat{H}(t'' - t')} | q' \rangle \stackrel{(1.6)}{=} \langle q'' | e^{-i\hat{H}(N+1)\delta t} | q' \rangle \quad (1.9)$$

Σε αυτό το σημείο εισάγουμε N ιδιοκαταστάσεις θέσης η κάθε μία από τις οποίες ικανοποιεί τη σχέση πληρότητας 1.8. Επομένως, με την προσθήκη αυτή, το πλάτος μετάβασης γίνεται:

$$\begin{aligned} \langle q'', t'' | q', t' \rangle &= \int \prod_{j=1}^N dq_j \langle q'' | e^{-i\hat{H}(N+1)\delta t} e^{+i\hat{H}N\delta t} | q_N \rangle \langle q_N | e^{-i\hat{H}N\delta t} e^{+i\hat{H}(N-1)\delta t} | q_{N-1} \rangle \dots \langle q_1 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q' \rangle \\ &= \int \prod_{j=1}^N dq_j \langle q'' | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_N \rangle \langle q_N | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | \dots \langle q_1 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q' \rangle \end{aligned} \quad (1.10)$$

Θεωρούμε έναν τελεστή Χαμιλτονιανής της μορφής:

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{P}, \hat{Q}) = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{Q}) \quad (1.11)$$

Γνωρίζουμε πως για τους τελεστές ορμής \hat{P} και τους τελεστές θέσης \hat{Q} ισχύουν ότι $\hat{P}|p\rangle = p|p\rangle$, $\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle$ και $\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq}$. Για να αναλύσουμε ένα τυχαίο στοιχείο του πλάτους μετάβασης π.χ. το $\langle q_2 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_1 \rangle$ θα χρησιμοποιήσουμε τη φόρμουλα των Baker–Campbell–Hausdorff:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B] + \dots} \quad (1.12)$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{-i\hat{H}\delta t} &= e^{-i\frac{\delta t}{2m}\hat{P}^2 - i\delta t V(\hat{Q})} = e^{-i\frac{\delta t}{2m}\hat{P}^2} e^{-i\delta t V(\hat{Q})} e^{O(\delta t^2)} \\ &= e^{-i\frac{\delta t}{2m}\hat{P}^2} e^{-i\delta t V(\hat{Q})} \end{aligned} \quad (1.13)$$

όπου αγνοήσαμε τον όρο $e^{O(\delta t^2)}$ επειδή είναι πολύ μικρός στο όριο που το $\delta t \rightarrow 0$. Επομένως, το τυχαίο στοιχείο του πλάτους μετάβασης με εισαγωγή ενός πλήρους συνόλου ιδιοκαταστάσεων ορμής είναι:

$$\begin{aligned} \langle q_2 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_1 \rangle &= \int dp_1 \langle q_2 | e^{-i\frac{\delta t}{2m}\hat{P}^2} | p_1 \rangle \langle p_1 | e^{-i\delta t V(\hat{Q})} | q_1 \rangle = \int dp_1 e^{-i\frac{\delta t}{2m}p_1^2} e^{-i\delta t V(q_1)} \langle q_2 | p_1 \rangle \langle p_1 | q_1 \rangle \\ &= \int \frac{dp_1}{2\pi} e^{-iH(p_1, q_1)\delta t} e^{ip_1(q_2 - q_1)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Στη γενική περίπτωση ορίζουμε το $\bar{q}_j = \frac{q_j + q_{j+1}}{2}$ με $q_0 = q'$ και $q_{N+1} = q''$. Η Χαμιλτονιανή όμως που μελετάμε έχει διάταξη Weyl, δηλαδή ο συνδυασμός των p και q μέσα στη Χαμιλτονιανή είναι συμμετρικός και όταν η Χαμιλτονιανή δρα από αριστερά σαν τελεστής αλλά και όταν βρίσκεται δεξιά σαν απλά μια συνάρτηση των p και q οπότε στο όριο $\delta t \rightarrow 0$, η $H(p, \bar{q})$ ανάγεται στη $H(p, q)$. Άρα από τις 1.10 και 1.14 προκύπτει ότι:

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = \int \prod_{k=1}^N dq_k \prod_{j=1}^N \frac{dp_j}{2\pi} e^{ip_j(q_{j+1} - q_j)} e^{-iH(p_j, \bar{q}_j)\delta t} \quad (1.15)$$

Ορίζουμε τη χρονική παράγωγο $\dot{q}_j \equiv \frac{q_{j+1} - q_j}{\delta t}$ και παίρνουμε το συνεχές όριο $\delta t \rightarrow 0$ και καταλήγουμε στο ότι:

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{i \int_{t'}^{t''} dt [p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t))]} \quad (1.16)$$

Αγνοήσαμε τον όρο με το 2π καθώς δεν μας ενδιαφέρει και η ολοκλήρωση γίνεται σε όλες τις διαδρομές στον χώρο φάσης που ξεκινάνε από $q(t') = q'$ και τελειώνουν σε $q(t'') = q''$

Εφαρμογή Έστω πως μελετάμε την περίπτωση $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$. Τότε το πλάτος μετάβασης θα είναι:

$$\begin{aligned} A(q', t'; q'', t'') &= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{i \int_{t'}^{t''} dt (p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t)))} = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{i \int_{t'}^{t''} dt (p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} - V(q))} \\ &= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{i \int_{t'}^{t''} dt (-\frac{p^2}{2m} - p\dot{q} + \frac{m\dot{q}^2}{2}) + \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)} = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{i \int_{t'}^{t''} dt (-\frac{p}{\sqrt{2m}} - \dot{q}\sqrt{\frac{m}{2}})^2 + \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Το ολοκλήρωμα $\int \mathcal{D}p e^{-i \int dt (\frac{p}{\sqrt{2m}} - \dot{q}\sqrt{\frac{m}{2}})^2}$ υπολογίζεται με αναλυτική επέκταση σε ευκλείδειο χώρο $t \rightarrow it$, $p \rightarrow ip$, $q \rightarrow iq$ ($\dot{q} \rightarrow i\dot{q}$) και με αλλαγή μεταβλητής $X = \frac{p}{\sqrt{2m}} - \dot{q}\sqrt{\frac{m}{2}}$. Αυτές οι αλλαγές, χρησιμοποιώντας επιπλέον και τα gaussian ολοκληρώματα, μας δίνουν τη μορφή:

$$\int DX e^{-NX^2} = \sqrt{\frac{\pi}{N}} = c \quad (1.18)$$

όπου N, c σταθερές. Επομένως, το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος είναι μια σταθερά η οποία από κανονικοποίηση μπορεί να οριστεί με τιμή 1. Τελικά, το πλάτος μετάβασης γίνεται:

$$A(q', t'; q'', t'') = \int \mathcal{D}q e^{i \int_{t'}^{t''} dt [\frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)]} = \int \mathcal{D}q e^{i \int_{t'}^{t''} \mathcal{L} dt} = \int \mathcal{D}q e^{iS} \quad (1.19)$$

με $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)$ να είναι η Lagrangian και $S = \int_{t'}^{t''} \mathcal{L} dt$ η αντίστοιχη δράση.

Με εισαγωγή του τελεστή θέσης $\hat{Q}(t_1)$ μέσα στο πλάτος για χρόνο $t' < t_1 < t''$ έχουμε από τις 1.2 και 1.3:

$$\begin{aligned} \langle q'', t'' | \hat{Q}(t_1) | q', t' \rangle &= \langle q'' | e^{-i\hat{H}t''} e^{+i\hat{H}t_1} \hat{Q} e^{-i\hat{H}t_1} e^{+i\hat{H}t'} | q' \rangle = \langle q'' | e^{-i\hat{H}(t'' - t_1)} \hat{Q} e^{-i\hat{H}(t_1 - t')} | q' \rangle = \\ &= \langle q'' | e^{-i\hat{H}(t'' - t')} \hat{Q}(t_1) | q' \rangle = q(t_1) \langle q'' | e^{-i\hat{H}(N+1)\delta t} | q' \rangle = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q q(t_1) e^{iS} \end{aligned} \quad (1.20)$$

όπου $S = \int_{t'}^{t''} dt (p\dot{q} - H(p, q))$ η δράση ως συνάρτηση της Χαμιλτονιανής. Η τελευταία ισότητα προέκυψε με τον ίδιο τρόπο όπως στην απόδειξη της μορφής του πλάτους μετάβασης 1.10 καθώς η μόνη διαφορά είναι ο παράγοντας

$q(t_1)$ που υπάρχει τώρα μπροστά από το braket. Για παραπάνω από έναν τελεστή θέσης σε διαφορετικές χρονικές στιγμές έχουμε:

$$\langle q'' | T \hat{Q}(t_1) \hat{Q}(t_2) | q' \rangle = \int Dq Dp q(t_1) q(t_2) e^{iS} \quad (1.21)$$

όπου το T δηλώνει χρονική διάταξη των τελεστών θέσης από αριστερά προς δεξιά κατά φθίνουσα χρονική στιγμή.

Για να μελετήσουμε μια τροποποιημένη δράση με εξωτερικές πηγές $f(t)$ για την θέση $q(t)$ και $h(t)$ για την ορμή $p(t)$ της μορφής:

$$S_{f,h} = \int_{t'}^{t''} dt (p\dot{q} - H(p,q) + f(t)q(t) + h(t)p(t)) \quad (1.22)$$

θα εισάγουμε την έννοια της συναρτησιακής παραγώγου:

$$\frac{\delta}{\delta f(t_2)} f(t_1) = \delta(t_1 - t_2)$$

όπου $\delta(t_1 - t_2)$ είναι η συνάρτηση δέλτα σε μία διάσταση. Με αυτό τον συμβολισμό βλέπουμε πως η 1.20 μπορεί να γραφεί ως:

$$\langle q'', t'' | \hat{Q}(t_1) | q', t' \rangle_{h,f} = \int Dp Dq q(t_1) e^{iS_{h,f}} = -i \frac{\delta}{\delta f(t_1)} \langle q'', t'' | q', t' \rangle_{h,f} \quad (1.23)$$

Με μηδενισμό των δυνάμεων $h = f = 0$ προκύπτει πως:

$$\int Dp Dq q(t_1) e^{iS_{h,f}} |_{h=f=0} = -i \frac{\delta}{\delta f(t_1)} \langle q'', t'' | q', t' \rangle_{h,f} |_{h=f=0} \quad (1.24)$$

Ισοδύναμα για τελεστή ορμής:

$$\int Dp Dq p(t_1) e^{iS_{h,f}} |_{h=f=0} = -i \frac{\delta}{\delta h(t_1)} \langle q'', t'' | q', t' \rangle_{h,f} |_{h=f=0} \quad (1.25)$$

Επομένως για διάφορους τελεστές θέσης και ορμής:

$$\langle q'', t'' | T \hat{Q}(t_1) \dots \hat{P}(t_1) | q', t' \rangle_{h,f} = \left(-i \frac{\delta}{\delta f(t_1)} \right) \dots \left(-i \frac{\delta}{\delta h(t_1)} \right) \dots \langle q'', t'' | q', t' \rangle_{h,f} |_{h=f=0} \quad (1.26)$$

Εμάς μας ενδιαφέρουν οι αρχικές και οι τελικές καταστάσεις εκτός από τους τελεστές θέσεις και ορμής και συγκεκριμένα οι οριακές περιπτώσεις $t' \rightarrow -\infty$ και $t'' \rightarrow \infty$. Για να προσεγγίσουμε αυτές τις περιπτώσεις θα κάνουμε ένα τρικ. Τροποποιούμε ελαφρά την Χαμιλτονιανή:

$$\hat{H} \rightarrow (1 - i\varepsilon)\hat{H}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (1.27)$$

και στην 1.4 βάζουμε ένα πλήρες σύνολο ιδιοκαταστάσεων ενέργειας $|n\rangle$. Για τις καταστάσεις αυτές ισχύει πως $\int dn |n\rangle \langle n| = 1$, $\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$ όπου E_n η ιδιοτιμή ενέργειας της n -οστής ιδιοκατάστασης. Υποθέτουμε επιπλέον πως $E_0 = 0$. Τότε, έχουμε για την τροποποιημένη Χαμιλτονιανή:

$$|q', t'\rangle = e^{iHt'} |q(t')\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(1-i\varepsilon)E_n t'} |n\rangle \langle n|q'\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\varepsilon E_n t'} e^{iE_n t'} |n\rangle \psi_n^*(q') \quad (1.28)$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός πως $\langle q|n\rangle = \psi_n(q)$ όπου ψ_n η κυματοσυνάρτηση της n -οστής ιδιοκατάστασης και ψ_n^* η μιγαδική συζυγής της. Παίρνουμε το όριο της 1.28 στο $t' \rightarrow -\infty$, με το ε να είναι φικαρισμένο και παρατηρούμε πως λόγω του εκθετικού $e^{\varepsilon E_n t'}$ όλοι οι όροι εκτός από τη θεμελιώδη κατάσταση ($n=0$) πολλαπλασιάζονται με έναν εκθετικό όρο ο οποίος τείνει να μηδενιστεί. Επομένως, από αυτές τις καταστάσεις, στο όριο $t' \rightarrow -\infty$ επιζεί μόνο η θεμελιώδης. Άρα το $|q', t'\rangle$ γίνεται τελικά:

$$\lim_{t' \rightarrow -\infty} |q', t'\rangle = \psi_0^*(q') |0\rangle \quad (1.29)$$

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει πως στο όριο $t'' \rightarrow \infty$, από τις τελικές καταστάσεις επιζεί πάλι μόνο η κατάσταση του κενού. Επομένως, χρησιμοποιώντας την τροποποίηση 1.27 καταλήγουμε στο πλάτος μετάβασης από κενό σε κενό με παρουσία πηγών f, h :

$$\langle 0|0\rangle_{f,h} = \int Dq Dp \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - (1 - i\varepsilon)H + fq + hp) \right] \quad (1.30)$$

Για τελεστή Χαμιλτονιανή της μορφής:

$$H(p, q) = H_{free}(p, q) + H_{int}(p, q) \quad (1.31)$$

και αγνοώντας την εξάρτηση από το ε έχουμε πως:

$$\begin{aligned}
\langle 0|0\rangle_{f,h} &= \int Dq Dp \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H_{free}(p,q) - H_{int}(p,q) + fq + hp) \right] \\
&= \int Dq Dp \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{int}(p,q) \right] \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H_{free}(p,q) + fq + hp) \right] \\
&= \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta h(t)}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t)} \right) \right] \int Dq Dp \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H_{free}(p,q) + fq + hp) \right]
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Ο διαχωρισμός έγινε με αυτόν τον τρόπο καθώς υποθέτουμε πως το 2ο ολοκλήρωμα που περιέχει την H_{free} λύνεται. Η τελευταία ισότητα μπορεί να κατανοηθεί με τον εξής τρόπο. Το εκθετικό με την H_{int} δρα πάνω στο 2ο εκθετικό και δίνει ως αποτέλεσμα μόνο τα $p(t)$ και $q(t)$ καθώς τα ορίσματα του H_{int} περιέχουν τις συναρτησιακές παραγώγους. Τα μιγαδικά i που προκύπτουν από την παραγώγιση απλοποιούνται με αυτά που υπάρχουν στα ορίσματα της H_{int} . Επομένως, κάθε τάξη μέσα στην H_{int} δίνει και έναν αντίστοιχο όρο των $p(t)$ και $q(t)$.

Στην περίπτωση που η H_{int} είναι μόνο συνάρτηση της θέσης q , και αν μας ενδιαφέρουν μόνο χρονικά διατεταγμένα γινόμενα του τελεστή θέσης \hat{Q} , και αν ο H είναι το πολύ τετραγωνικός στον \hat{P} και αυτός ο όρος δεν περιέχει τον τελεστή \hat{Q} τότε η έκφραση 1.32 απλοποιείται στην:

$$\langle 0|0\rangle_f = \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dt L_1 \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t)} \right) \right] \int Dq \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dt (L_0(\dot{q}, q) + fq) \right] \tag{1.33}$$

όπου $L_1(q) = -H_{int}(q)$. Τότε το χρονολογικό γινόμενο όταν η αρχική και η τελική κατάσταση ταυτίζεται με αυτή του κενού είναι:

$$\langle 0|T\hat{Q}(t_1) \dots \hat{Q}(t_n)|0\rangle_f = \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t_1)} \right) \dots \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t_n)} \right) \langle 0|0\rangle_f \Big|_{f=0} \tag{1.34}$$

για n εισαγωγές του τελεστή \hat{Q} .

2. Ολοκλήρωμα διαδρομής του αρμονικού ταλαντωτή

Στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή η Χαμιλτονιανή έχει τη μορφή:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 \quad (2.1)$$

με m τη μάζα και ω την κυκλική συχνότητα. Χρησιμοποιούμε στη συνέχεια τη σχέση 1.30 στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή όπου $\hbar=0$ και έχουμε ότι:

$$\langle 0|0\rangle_f = \int Dq Dp \exp\left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dt(p\dot{q} - (1-i\varepsilon)H + fq)\right] \quad (2.2)$$

Παρατηρούμε πως η αλλαγή $H \rightarrow (1-i\varepsilon)H$ είναι ισοδύναμη με την αλλαγή $m^{-1} \rightarrow (1-i\varepsilon)m^{-1}$, δηλαδή $m \rightarrow (1+i\varepsilon)m$, και με την $m\omega^2 \rightarrow (1-i\varepsilon)m\omega^2$. Άμα γράψουμε το πλάτος μετάβασης με τον φορμαλισμό όπως στην 1.19 θα έχουμε:

$$\langle 0|0\rangle_f = \int Dq \exp\left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\frac{1}{2}(1+i\varepsilon)m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}(1-i\varepsilon)m\omega^2q^2 + fq\right]\right] \quad (2.3)$$

Παίρνουμε στη συνέχεια τους μετασχηματισμούς Fourier των ποσοτήτων:

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iEt} \tilde{q}(E) \\ \tilde{q}(E) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{+iEt} q(t) \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iEt} \tilde{f}(E) \\ \tilde{f}(E) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{+iEt} f(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Παραγωγή του μετασχηματισμού Fourier του $q(t)$ ως προς την μεταβλητή t δίνει:

$$\frac{dq}{dt} \equiv \dot{q}(t) = -iE \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iEt} \tilde{q}(E) \quad (2.5)$$

και με την εισαγωγή των 2.4 και 2.5 μέσα στη 2.3 προκύπτει:

$$\begin{aligned} \langle 0|0\rangle_f &= \int Dq \exp\left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{dE'}{2\pi} e^{-i(E+E')t} \left[\left(-(1+i\varepsilon)mEE' - (1-i\varepsilon)m\omega^2 \right) \tilde{q}(E)\tilde{q}(E') + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{f}(E)\tilde{q}(E') + \tilde{f}(E')\tilde{q}(E) \right] \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Υπενθυμίζουμε επιπλέον τον ορισμό της συνάρτησης δέλτα:

$$\delta(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{iEt} \quad (2.7)$$

Παρατηρούμε στη 2.6 πως προκύπτει ένα $2\pi\delta(E+E')$ το οποίο θα κάνει την αντικατάσταση $E' = -E$ όταν γίνει η ολοκλήρωση πάνω στα E' . Επομένως, προκύπτει:

$$\langle 0|0\rangle_f = \int Dq \exp\left[\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \left[\left((1+i\varepsilon)mE^2 - (1-i\varepsilon)m\omega^2 \right) \tilde{q}(E)\tilde{q}(-E) + \tilde{f}(E)\tilde{q}(-E) + \tilde{f}(-E)\tilde{q}(E) \right] \right] \quad (2.8)$$

Ο παράγοντας του $\tilde{q}(E)\tilde{q}(-E)$ είναι:

$$(1+i\varepsilon)mE^2 - (1-i\varepsilon)m\omega^2 = mE^2 - m\omega^2 + i\varepsilon(mE^2 + m\omega^2) = mE^2 - m\omega^2 + i\varepsilon \quad (2.9)$$

όπου η θετική ποσότητα $mE^2 + m\omega^2$ απορροφήθηκε μέσα στο ε . Ορίζουμε μια νέα μεταβλητή

$$\tilde{x}(E) = \tilde{q}(E) + \frac{\tilde{f}(E)}{mE^2 - m\omega^2 + i\varepsilon} \quad (2.10)$$

και έπειτα από αντικατάσταση στη 2.9, χωρίς να επηρεάζεται το μέτρο της ολοκλήρωσης καθώς $Dq = Dx$, έχουμε τη σχέση:

$$\begin{aligned} \langle 0|0 \rangle_f &= \int Dx \exp \left[\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \left[\tilde{x}(E)(mE^2 - m\omega^2 + i\varepsilon)\tilde{x}(-E) - \frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}(-E)}{mE^2 - m\omega^2 + i\varepsilon} \right] \right] \\ &= \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}(-E)}{mE^2 - m\omega^2 + i\varepsilon} \right] \int Dx \exp \left[\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \tilde{x}(E)(mE^2 - m\omega^2 + i\varepsilon)\tilde{x}(-E) \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Βλέπουμε πως το ολοκλήρωμα διαδρομής

$$\int Dx \exp \left[\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \tilde{x}(E)(mE^2 - m\omega^2 + i\varepsilon)\tilde{x}(-E) \right] \quad (2.12)$$

είναι η περίπτωση που δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, δηλαδή όταν $f = 0$. Σε αυτή την περίπτωση όμως εφόσον δεν υπάρχει κάποια εξωτερική δύναμη, ο αρμονικός ταλαντωτής θα μείνει στη βασική του κατάσταση. Επομένως, η πιθανότητα $\langle 0|0 \rangle_{f=0} = 1$. Αυτό οδηγεί στο ότι το ολοκλήρωμα διαδρομής 2.12 είναι ίσο με τη μονάδα. Άρα η 2.11 δίνεται στην ουσία από τον τύπο:

$$\langle 0|0 \rangle_f = \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}(-E)}{mE^2 - m\omega^2 + i\varepsilon} \right] \quad (2.13)$$

Σε αυτό το σημείο θέτουμε $m = 1$ και χρησιμοποιώντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Fourier 2.4 μπορούμε να γυρίσουμε πίσω σε μεταβλητές του χρόνου:

$$\begin{aligned} \langle 0|0 \rangle_f &= \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}(-E)}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon} \right] = \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} dt dt' \frac{f(t)f(t')e^{+iE(t-t')}}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} dt dt' \frac{f(t)f(t')e^{-iE(t-t')}}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon} \right] = \exp \left[\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t)G(t-t')f(t') \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

όπου στη 2η γραμμή της 2.14 έγινε μια απλή αλλαγή μεταβλητής $E \rightarrow -E$ και

$$G(t-t') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(t-t')}}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon} \quad (2.15)$$

είναι η συνάρτηση Green που ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης του αρμονικού ταλαντωτή:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 \right) G(t-t') = \delta(t-t') \quad (2.16)$$

Απόδειξη

Αρχικά, παίρνουμε τη 2η παράγωγο της συνάρτησης Green 2.15:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t-t') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} (-E^2) \frac{e^{-iE(t-t')}}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon} \quad (2.17)$$

Μπορούμε να προσθέσουμε στο αριστερό μέρος της 2.16 τον όρο $-i\varepsilon$ καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0^+$ και να έχουμε από την 2.17:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 - i\varepsilon \right) G(t-t') &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} (-E^2 + \omega^2 - i\varepsilon) \frac{e^{-iE(t-t')}}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iE(t-t')} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{iE(t-t')} = \delta(t-t') \end{aligned} \quad (2.18)$$

□

Η 2.15 με την χρήση του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων, μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$G(t-t') = \frac{i}{2\omega} e^{-i\omega|t-t'|} \quad (2.19)$$

Για να το δείξουμε αυτό, θα ξεκινήσουμε από την εξίσωση 2.15 και θα τη γράψουμε στην παρακάτω μορφή:

$$G(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(t-t')}(-1)}{(E - \sqrt{\omega^2 - i\varepsilon})(E + \sqrt{\omega^2 - i\varepsilon})} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(t-t')}}{2\sqrt{\omega^2 - i\varepsilon}} \left[\frac{1}{E - \sqrt{\omega^2 - i\varepsilon}} - \frac{1}{E + \sqrt{\omega^2 - i\varepsilon}} \right] \quad (2.20)$$

Σε αυτό το σημείο για να προχωρήσουμε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων της μιγαδικής ανάλυσης το οποίο το παίρνουμε από τους Stein, E. M., & Shakarchi, R. [1]. Θα πρέπει να θεωρήσουμε μια κλειστή καμπύλη για να προχωρήσει ο υπολογισμός με αποτέλεσμα να προκύπτουν 2 περιπτώσεις. Υπάρχουν 2 πόλοι όπως φαίνονται στη 2.19, ο $E = \sqrt{\omega^2 - i\varepsilon} = \omega - i\varepsilon$ και $E = -\sqrt{\omega^2 - i\varepsilon} = -\omega + i\varepsilon$

Περίπτωση 1: $t < t'$

Στην περίπτωση αυτή, ορίζουμε τη θετικά προσανατολισμένη καμπύλη C να είναι στο άνω μιγαδικό επίπεδο όπως φαίνεται και στο Figure 1 παρακάτω. Η καμπύλη που διαλέγουμε είναι η $z = Re^{i\theta} = R\cos\theta + iR\sin\theta$ με $R \rightarrow \infty$ και $\theta \in [0, \pi]$

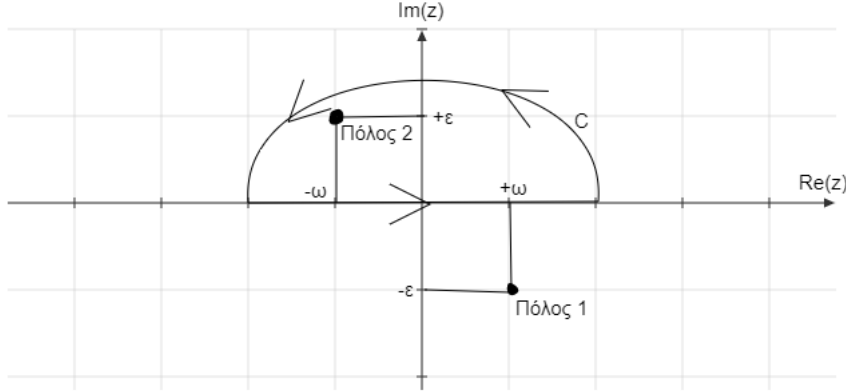


Figure 2.1: Περίπτωση 1: $t < t'$

Παρατηρούμε πως μόνο ο πόλος 2 βρίσκεται μέσα στην καμπύλη C επομένως από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων, προκύπτει πως:

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi} e^{-iz(t-t')} \left[\frac{1}{z + \omega - i\varepsilon} - \frac{1}{z - \omega + i\varepsilon} \right] = +2\pi i \text{Res}_{z_2} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iz(t-t')}}{2\sqrt{\omega^2 - i\varepsilon}} \frac{1}{z + \omega - i\varepsilon} \right) \quad (2.21)$$

όπου z_2 είναι ο πόλος 2 με $z_2 = \omega - i\varepsilon$. Το residue υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z_2} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iz(t-t')}}{2\sqrt{\omega^2 - i\varepsilon}} \frac{1}{z + \omega - i\varepsilon} \right) &= \lim_{z \rightarrow -\omega + i\varepsilon} (z + \omega - i\varepsilon) \left(\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iz(t-t')}}{2\sqrt{\omega^2 - i\varepsilon}} \frac{1}{z + \omega - i\varepsilon} \right) = \\ &\stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \lim_{z \rightarrow -\omega} (z + \omega) \left(\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iz(t-t')}}{2\omega} \frac{1}{z + \omega} \right) = \lim_{z \rightarrow -\omega} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iz(t-t')}}{2\omega} \right) = \frac{e^{i\omega(t-t')}}{2\pi 2\omega} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Επομένως από τις 2.21 και 2.22 έχουμε τελικά πως:

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi} e^{-iz(t-t')} \left[\frac{1}{z + \omega - i\varepsilon} - \frac{1}{z - \omega + i\varepsilon} \right] = \frac{i}{2\omega} e^{-i\omega(t'-t)}, t < t' \quad (2.23)$$

Επειδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στο ημικύκλιο που ορίσαμε ως καμπύλη C δίνει μηδέν για $R \rightarrow 0$, μπορούμε να εξισώσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της 2.23 με το ολοκλήρωμα 2.20. Επομένως, τελικά:

$$\boxed{G(t-t') = \frac{i}{2\omega} e^{-i\omega(t'-t)}, t < t'} \quad (2.24)$$

Περίπτωση 2: $t > t'$

Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε όπως πριν την ίδια καμπύλη C αρνητικά προσανατολισμένη αυτή τη φορά όπως φαίνεται στο Figure 2 παρακάτω. Τώρα παρατηρούμε πως μόνο ο πόλος 1 βρίσκεται μέσα στην καμπύλη C οπότε ομοίως με πριν μπορούμε να καταλήξουμε στην εξίσωση:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{2\pi} e^{-iz(t-t')} \left[\frac{1}{z + \omega - i\varepsilon} - \frac{1}{z - \omega + i\varepsilon} \right] &= -2\pi i \text{Res}_{z_1} \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iz(t-t')}}{2\sqrt{\omega^2 - i\varepsilon}} \frac{1}{z - \omega + i\varepsilon} \right) = \\ &= \frac{i}{2\omega} e^{-i\omega(t-t')} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Επομένως:

$$\boxed{G(t-t') = \frac{i}{2\omega} e^{+i\omega(t'-t)}, t > t'} \quad (2.26)$$

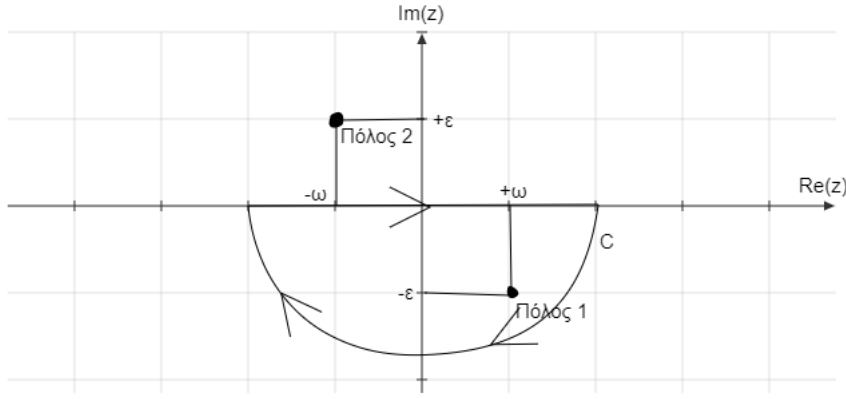


Figure 2.2: Περίπτωση 2: $t > t'$

Από τις 2.24 και 2.26 βλέπουμε πως τελικά η συνάρτηση Green παίρνει τη μορφή 2.19:

$$G(t - t') = \frac{i}{2\omega} e^{-i\omega|t-t'|} \quad (2.27)$$

Η μορφή αυτή της συνάρτησης Green ικανοποιεί και αυτή την εξίσωση 2.16. Εύκολα δείχνεται πως:

$$\partial_t G(t - t') = \frac{i}{2\omega} (\partial_t |t - t'|) e^{-i\omega|t-t'|} (-i\omega) = \frac{1}{2} \text{sgn}(t - t') e^{-i\omega|t-t'|} \quad (2.28)$$

και

$$\begin{aligned} \partial_t^2 G(t - t') &= \frac{1}{2} [\partial_t \text{sgn}(t - t')] + \frac{1}{2} \text{sgn}(t - t') \partial_t (e^{-i\omega|t-t'|}) \\ &= \frac{1}{2} 2\delta(t - t') e^{-i\omega|t-t'|} - \frac{i\omega^2}{2\omega} [\text{sgn}(t - t')]^2 e^{-i\omega|t-t'|} \\ &= \delta(t - t') e^{-i\omega|t-t'|} - \omega^2 G(t - t') \end{aligned} \quad (2.29)$$

όπου sgn η συνάρτηση:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Στην τελευταία ισότητα της 2.29 χρησιμοποιήσαμε την 2.27 και επιπλέον το ότι $(\text{sgn}(t - t'))^2 = 1$ καθώς θεωρήσαμε πως $t \neq t'$. Προκύπτει λοιπόν πως:

$$(\partial_t^2 + \omega^2)G(t - t') = \delta(t - t') e^{-i\omega|t-t'|} = \delta(t - t') \quad (2.31)$$

□

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός πως το εκθετικό μπορεί να γραφεί και να αναπτυχθεί με Taylor ως εξής:

$$\delta(t - t') e^{-i\omega|t-t'|} = \delta(t - t') [\cos(\omega|t-t'|) - i\sin(\omega|t-t'|)] = \frac{\omega^n}{n!} |t-t'|^n \delta(t-t') - i \frac{\omega^m}{m!} |t-t'|^m \delta(t-t') \quad (2.32)$$

όπου n είναι θετικοί άρτιοι ακέραιοι, ενώ m είναι θετικοί περιττοί ακέραιοι με $n \geq 0$ και $m \geq 1$. Επομένως, παρατηρούμε πως λόγω της ιδιότητας $x\delta(x) = 0$, προφανώς ισχύει πως $x^n \delta(x) = x^{n-1} x \delta(x) = 0$, με αποτέλεσμα να μένουν μόνο οι όροι με $n=0$, δηλαδή:

$$\delta(t - t') e^{-i\omega|t-t'|} = \delta(t - t') \quad (2.33)$$

Μπορούμε τώρα από τη σχέση 2.14 να πάρουμε το χρονολογικό γινόμενο:

$$\begin{aligned}
\langle 0|T\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2)|0\rangle &\stackrel{1.34}{=} \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(t_1)}\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(t_2)}\right)\langle 0|0\rangle_f \Big|_{f=0} \\
&= \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(t_1)}\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(t_2)}\right)\exp\left[\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t)G(t-t')f(t')\right] \Big|_{f=0} \\
&= \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(t_1)}\right)\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' \frac{\delta f(t)}{\delta f(t_1)}G(t-t')f(t') + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t)G(t-t')\frac{\delta f(t')}{\delta f(t_2)}\right] \times \\
&\quad \times \exp\left[\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t)G(t-t')f(t')\right] \Big|_{f=0}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός πως:

$$\frac{\delta f(t)}{\delta f(t_1)} = \delta(t-t_1) \tag{2.35}$$

η 2.34 μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned}
\langle 0|T\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2)|0\rangle &= \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(t_1)}\right)\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' \delta(t-t_2)G(t-t')f(t') + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t)G(t-t')\delta(t'-t_2)\right] \times \\
&\quad \times \exp\left[\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t)G(t-t')f(t')\right] \Big|_{f=0} \\
&= \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta f(t_1)}\right)\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t_2-t')f(t') + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t)G(t-t_2)\right] \times \\
&\quad \times \exp\left[\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t)G(t-t')f(t')\right] \Big|_{f=0} \\
&= \left[\frac{1}{2i}G(t_2-t_1) + \frac{1}{2i}G(t_1-t_2)\right]\exp\left[\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t)G(t-t')f(t')\right] + \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t_2-t')f(t') + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t)G(t-t_2)\right] \times \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t_1-t')f(t') + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t)G(t-t_1)\right] \times \\
&\quad \times \exp\left[\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t)G(t-t')f(t')\right] \Big|_{f=0}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Στην τελευταία ισότητα παρατηρούμε πως για $f=0$ μένουν μόνο οι 2 πρώτοι όροι με αποτέλεσμα να γίνει η έκφραση:

$$\langle 0|T\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2)|0\rangle = \frac{1}{2i}G(t_2-t_1) + \frac{1}{2i}G(t_1-t_2) = \frac{1}{i}G(t_1-t_2) = \frac{1}{i}G(t_2-t_1) \tag{2.37}$$

καθώς η συνάρτηση Green 2.15 είναι συμμετρική, το οποίο φαίνεται εύκολα με μια αλλαγή μεταβλητής από $E \rightarrow E' = -E$

Το αποτέλεσμα που φαίνεται στη σχέση 2.37 είναι γνωστό ως το θεώρημα του Wick. Συγκεκριμένα, το θεώρημα ορίζεται ως εξής.

Θεώρημα του Wick

Για χρονικά διατεταγμένες **άρτιες** συναρτήσεις $Q(t)$ $2n$ -σημείων με $n = 1, 2, \dots$ τότε τα χρονολογικά γινόμενα δίνουν:

$$\langle 0|T\hat{Q}(t_1), \dots, \hat{Q}(t_{2n})|0\rangle = \frac{1}{i^n} \sum_{\text{pairings}} \left(G(t_{i_1} - t_{i_2}) \dots G(t_{i_{2n-1}} - t_{i_{2n}}) \right) \tag{2.38}$$

Για χρονικά διατεταγμένες **περιττές** συναρτήσεις $Q(t)$ n -σημείων, τα χρονολογικά γινόμενα δίνουν:

$$\langle 0|T\hat{Q}(t_1), \dots, \hat{Q}(t_{2l+1})|0\rangle = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots \tag{2.39}$$

Απόδειξη

Παρακάτω δε θα είναι ακριβώς η απόδειξη των σχέσεων καθώς αυτό είναι αρκετά δύσκολο ναδειχθεί μόνο με τα εργαλεία που έχουν χρησιμοποιηθεί στην εργασία αυτή. Αυτό που θαδειχθεί όμως είναι μερικές περιπτώσεις οι οποίες δείχνουν τη μορφή των όρων που υπεισέρχονται στους υπολογισμούς. Οι όροι αυτοί είναι παρόμοιοι για την περίπτωση των n στοιχείων και μπορεί κάποιος να βγάλει συμπεράσματα για αυτούς με βάση τις περιπτώσεις που θα μελετηθούν παρακάτω.

Πριν ξεκινήσουμε με την απόδειξη θα δείξουμε μερικά πράγματα που θα απλοποιήσουν τις πράξεις για να είναι και πιο ευανάγνωστο και ξεκάθαρο το αποτέλεσμα. Όπως ήδη αναφέρθηκε πιο πάνω, η συνάρτηση Green είναι συμμετρική επομένως $G(t_1 - t_2) = G(t_2 - t_1)$. Χρησιμοποιώντας αυτή την πληροφορία μπορούμε να παρατηρήσουμε με μια απλή αλλαγή μεταβλητής $t' \rightarrow t$ πως:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t_i - t') f(t') = \int_{-\infty}^{+\infty} dt G(t - t_i) f(t) \quad (2.40)$$

Βλέπουμε τότε πως απλοποιούνται έτσι τα αθροίσματα των ολοκληρωμάτων στη 2.36. Επιπλέον, ορίζουμε την ποσότητα στο εκθετικό ως:

$$\exp\left[\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t) G(t - t') f(t)\right] = e^h \quad (2.41)$$

όπου $h = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' f(t) G(t - t') f(t)$.

Η περίπτωση των **περιπτώσεων** συναρτήσεων κάνει 0 καθώς θα υπάρχουν πάντα πολλαπλασιαστικοί όροι με τη συνάρτηση $f(t)$ μέσα λόγω της παραγωγίσιμης του εκθετικού, οι οποίοι θα μηδενιστούν στο τέλος όταν θα μπει η συνθήκη $f = 0$. Αυτό φαίνεται εύκολα από την περίπτωση που το $l = 1$ στον τύπο 2.39. Το αποτέλεσμα σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \hat{Q}(t_1) \hat{Q}(t_2) \hat{Q}(t_3) | 0 \rangle &= \frac{1}{i} G(t_1 - t_2) \int dt G(t_3 - t) f(t) e^h + \frac{1}{i} G(t_2 - t_3) \int dt G(t_1 - t) f(t) e^h \\ &+ \frac{1}{i} G(t_1 - t_3) \int dt G(t_2 - t) f(t) e^h + \frac{1}{i} \int dt G(t_1 - t) f(t) \int dt G(t_2 - t) f(t) \times \\ &\times \int dt G(t_3 - t) f(t) e^h \Big|_{f=0} = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Με όμοιο τρόπο μπορεί κάποιος να δει πως το ίδιο θα ισχύει για όλες τις περιπτώσεις περιπτώσεων συναρτήσεων που φαίνεται και στη 2.39.

Για την περίπτωση των **άρτιων** συναρτήσεων θα μελετήσουμε την περίπτωση των 4 συναρτήσεων ($n = 2$). Μετά από πράξεις το αποτέλεσμα είναι το εξής:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \hat{Q}(t_1) \hat{Q}(t_2) \hat{Q}(t_3) \hat{Q}(t_4) | 0 \rangle &= \frac{1}{i^2} G(t_1 - t_2) G(t_3 - t_4) e^h + \frac{1}{i^2} G(t_2 - t_3) G(t_1 - t_4) e^h + \frac{1}{i^2} G(t_1 - t_3) G(t_2 - t_4) e^h \\ &+ \frac{1}{i} G(t_1 - t_2) \int dt G(t_3 - t) f(t) \int dt G(t_4 - t) f(t) e^h + \frac{1}{i} G(t_2 - t_3) \int dt G(t_1 - t) f(t) \int dt G(t_4 - t) f(t) e^h \\ &+ \frac{1}{i} G(t_1 - t_3) \int dt G(t_2 - t) f(t) \int dt G(t_4 - t) f(t) e^h + \frac{1}{i^2} G(t_1 - t_4) \int dt G(t_2 - t) f(t) \int dt G(t_3 - t) f(t) e^h \\ &+ \frac{1}{i^2} G(t_2 - t_4) \int dt G(t_1 - t) f(t) \int dt G(t_3 - t) f(t) e^h + \frac{1}{i^2} G(t_3 - t_4) \int dt G(t_1 - t) f(t) \int dt G(t_2 - t) f(t) e^h \\ &+ \frac{1}{i} \int dt G(t_1 - t) f(t) \int dt G(t_2 - t) f(t) \int dt G(t_3 - t) f(t) \int dt G(t_4 - t) f(t) e^h \Big|_{f=0} = \\ &= \frac{1}{i^2} \left[G(t_1 - t_2) G(t_3 - t_4) + G(t_2 - t_3) G(t_1 - t_4) + G(t_1 - t_3) G(t_2 - t_4) \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

Βλέπουμε πως το αποτέλεσμα της 2.43 είναι αυτό που περιμέναμε από την 2.38. Με παρόμοιο τρόπο μπορεί κάποιος να δει πως για $n = n$ θα υπάρξουν όροι της ίδιας μορφής με αυτούς στη 2.43 από τους οποίους, μετά την εφαρμογή της συνθήκης $f = 0$ θα μείνουν μόνο τα pairings στις συναρτήσεις Green.

3. Ολοκλήρωμα διαδρομής στη θεωρία των ελεύθερων πεδίων

Το ολοκλήρωμα διαδρομής του αρμονικού ταλαντωτή που συζητήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο μπορεί με κάποιες αλλαγές να δώσει το ολοκλήρωμα διαδρομής των ελεύθερων βαθμωτών πεδίων $\varphi(x)$, μάζας m , με Χαμιλτονιανή πυκνότητα:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \quad (3.1)$$

όπου Π είναι η κανονική ορμή που ορίζεται ως $\Pi(x) = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(x)$, με την τελεία πάνω από το φ να συμβολίζει τη χρονική παράγωγο.

Οι αλλαγές που πρέπει να γίνουν οι εξής:

$$\begin{aligned} q(t) &\longrightarrow \varphi(x, t) \equiv \varphi(x) && \text{Κλασικά πεδία} \\ \hat{Q}(t) &\longrightarrow \dot{\varphi}(x, t) \equiv \dot{\varphi}(x) && \text{Κλασικοί τελεστές πεδίων} \\ f(t) &\longrightarrow J(x, t) \equiv J(x) && \text{Κλασικές πηγές} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Με βάση αυτές τις αλλαγές και από τη σχέση 1.33 έχουμε πως στην περίπτωση των ελεύθερων scalar πεδίων:

$$\begin{aligned} Z_0[J] &\equiv \langle 0|0 \rangle_J = \int D\varphi \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x (\mathcal{L}_0(\partial_\mu\varphi, \varphi) + J(x)\varphi(x)) \right] \\ &= \int D\varphi \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + J(x)\varphi(x) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

όπου πλέον το μέτρο ολοκλήρωσης

$$D\varphi(x) = \prod_x d\varphi(x) \quad (3.4)$$

ορίζεται ως το γινόμενο των διαδρομών πάνω στον χώρο πεδίων.

Όπως συζητήθηκε στην ενότητα 1, για να βρούμε το ολοκλήρωμα διαδρομής ανάμεσα στις αρχικές και τις τελικές καταστάσεις θα πρέπει να κάνουμε την αλλαγή $H_0 \rightarrow H_0(1 - i\varepsilon)$. Στην περίπτωση της Χαμιλτονιανής πυκνότητας 3.1 αυτό αντιστοιχεί στην αλλαγή $m^2 \rightarrow m^2(1 - i\varepsilon) = m^2 - i\varepsilon = m_\varepsilon^2$ με $\varepsilon > 0$. Για να αναλύσουμε το ολοκλήρωμα διαδρομής 3.3 εισάγουμε τους μετασχηματισμούς Fourier στις 4 διαστάσεις:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \tilde{\varphi}(p) \\ \tilde{\varphi}(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x e^{ipx} \varphi(x) \\ J(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \tilde{J}(p) \\ \tilde{J}(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x e^{ipx} J(x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Η υπόλοιπη διαδικασία είναι ακριβώς ίδια με τον αρμονικό ταλαντωτή οπότε άμα κάποιος θελήσει να δει αναλυτικά τις πράξεις, μπορεί να κοιτάξει την κεφάλαιο 2 κάνοντας τις αλλαγές 3.2, 3.3 και 3.5 και αλλάζοντας κατάλληλα τις ποσότητες που υπεισέρχονται στους υπολογισμούς. Έπειτα από πράξεις καταλήγουμε όπως και στον αρμονικό ταλαντωτή στην τελική έκφραση του ολοκληρώματος διαδρομής για ελεύθερα πεδία:

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \exp \left[-\frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{J}(p) \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \tilde{J}(-p) \right] \\ &= \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} J(y) \right] \\ &= \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

όπου

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (3.7)$$

είναι ο διαδότης Feynman για το βαθμωτό πεδίο. Όπως και στον αρμονικό ταλαντωτή, ο διαδότης Feynman είναι και η συνάρτηση Green της εξίσωσης Klein-Gordon, δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση:

$$(\square_x + m^2)\Delta_F(x-y) = -\delta^4(x-y) \quad (3.8)$$

με $\square_x \equiv \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ να είναι ο τελεστής D'Alembert σε χώρο Minkowski ως προς τη συντεταγμένη x και η τετραδιάστατη συνάρτηση δέλτα ορίζεται ως $\delta^4(x-y) = \delta(t-t')\delta(\vec{x}-\vec{y})$. Η απόδειξη της εξίσωσης είναι ίδια με αυτή του αρμονικού ταλαντωτή και δε θα ξανά αποδειχθεί.

Για την περίπτωση των 2 πεδίων:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)|0\rangle &= \frac{1}{i^2} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} Z_0[J] \Big|_{J=0} = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(- \int d^4x' \Delta_F(y-x') J(x') \right) Z_0[J] \Big|_{J=0} \\ &= \left(i\Delta_F(x-y) + \text{όροι ανάλογοι του } J \right) Z_0[J] \Big|_{J=0} = i\Delta_F(x-y) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στον αρμονικό ταλαντωτή μπορεί κάποιος να γράψει το θεώρημα του Wick:

$$\langle 0|T\hat{\varphi}(x_1), \dots, \hat{\varphi}(x_{2n})|0\rangle = i^n \sum_{\text{pairings}} \left(\Delta(x_{i_1} - x_{i_2}) \dots \Delta(x_{i_{2n-1}} - x_{i_{2n}}) \right) \quad (3.10)$$

Επιπλέον είναι και εύκολο να δειχθεί και ότι:

$$\langle 0|T\hat{\varphi}(x_1), \dots, \hat{\varphi}(x_{2l+1})|0\rangle = 0, \quad l = 0, 1, \dots \quad (3.11)$$

Σημειώνεται επίσης πως μπορεί κάποιος να πάρει τον μετασχηματισμό Fourier του $i\Delta_F(x-y)$ ως εξής:

$$i\tilde{\Delta}_F(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+ \quad (3.12)$$

4. Ολοκλήρωμα διαδρομής στη θεωρία των αλληλεπιδρώντων σχετικιστικών πεδίων

Στη θεωρία των αλληλεπιδρώντων πεδίων, η Lagrangian θα είναι

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{free} + \mathcal{L}^{int} \quad (4.1)$$

Στη συγκεκριμένη εργασία θα μελετηθεί η περίπτωση που η αλληλεπίδραση είναι κυβική, της μορφής:

$$\mathcal{L}^{int} = \frac{1}{3!} \lambda \varphi^3 \quad (4.2)$$

όπου το λ είναι η παράμετρος ζεύξης (coupling). Η Hamiltonian που αντιστοιχεί σε αυτή την αλληλεπίδραση βέβαια δεν είναι φραγμένη από κάτω καθώς μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές για πολύ μεγάλες τιμές του φ . Αυτό όμως δε μας πειράζει καθώς για μικρές διαταραχές που θα μελετηθούν στην εργασία ($\lambda \ll 1$) το φαινόμενο αυτό δεν εμφανίζεται. Χρησιμοποιώντας την Lagrangian 4.1, το ολοκλήρωμα διαδρομής γίνεται:

$$Z^{int}[J] \equiv \langle 0|0 \rangle_J = \int D\varphi \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x (\mathcal{L}^{int}(\varphi) + \mathcal{L}^{free}(\partial_\mu \varphi, \varphi) + J(x)\varphi(x)) \right] \quad (4.3)$$

Η σχέση 1.33 απλοποιεί την έκφραση 4.3 στην:

$$\begin{aligned} Z^{int}[J] &= \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L}^{int}(\varphi) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] \int D\varphi \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x (\mathcal{L}^{free}(\partial_\mu \varphi, \varphi) + J(x)\varphi(x)) \right] \\ &= \exp \left[i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L}^{int}(\varphi) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] Z^{free}[J] \end{aligned} \quad (4.4)$$

όπου η Z^{free} δίνεται από τη σχέση 3.6:

$$Z^{free}[J] = \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \quad (4.5)$$

και γενικά έχουμε χρησιμοποιήσει την κανονικοποίηση $Z(0) = 1$.

Θα δούμε σε λίγο πως η αλληλεπίδραση αυτή οδηγεί σε κάποιες απειρίες που πρέπει με κάποιο τρόπο να αντιμετωπιστούν. Για αυτό τον λόγο θα γίνουν κάποιες κβαντικές διορθώσεις οι οποίες θα οδηγήσουν σε μια "ενεργή" (effective) Lagrangian που θα έχει τη μορφή:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{free} + \frac{1}{2} (Z_\varphi - 1) \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} (Z_m - 1) m^2 \varphi^2 + \frac{1}{3!} Z_\lambda \lambda \varphi^3 + \mathcal{J} \varphi \quad (4.6)$$

όπου $Z_i, \mathcal{J}, i = \varphi, m, \lambda$ είναι πραγματικές συναρτήσεις που εξαρτώνται από τις παραμέτρους ζεύξης. Οι όροι αυτοί θα παίξουν τον ρόλο των αντισταθμιστικών όρων (counterterms) στην συνέχεια. Επιπλέον, περιμένουμε πως $Z_i \rightarrow 1$ και $\mathcal{J} \rightarrow 0$ όταν δεν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις $\lambda \rightarrow 0$.

Για να δείξουμε την ανάγκη για την εισαγωγή αυτών των όρων (Z_i, \mathcal{J}) θα κοιτάξουμε το ολοκλήρωμα διαδρομής 4.4 αλλά θα λάβουμε υπόψιν μας μόνο τον όρο αλληλεπίδρασης για την L^{int} 4.2. Οπότε ξεκινώντας από την 4.4 και χρησιμοποιώντας την Lagrangian αλληλεπίδρασης 4.2 έχουμε:

$$Z_1[J] = \exp \left[\frac{i}{3!} Z_\lambda \lambda \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \right] Z^{free}[J] \quad (4.7)$$

Το ολοκλήρωμα διαδρομής ονομάστηκε ως Z_1 και αγνοήθηκαν οι αντισταθμιστικοί όροι. Στη συνέχεια αναπτύσσουμε τους εκθετικούς όρους με Taylor σε δυνάμεις του λ και J :

$$Z_1[J] = \sum_{V=0}^{\infty} \frac{1}{V!} \left[\frac{i}{3!} Z_\lambda \lambda \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \right]^V \sum_{I=0}^{\infty} \frac{1}{I!} \left[-\frac{i}{2} \int d^4y \int d^4z J(y) \Delta_F(y-z) J(z) \right]^I \quad (4.8)$$

Κάθε ένας από τους όρους στην 4.8 υποδηλώνει ένα διάγραμμα Feynman. Έχουμε χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό V για τις κορυφές και I για τους διαδότες (εσωτερικές γραμμές). Μετά από την δράση των συναρτησιακών παραγώγων στην 4.8, ο αριθμός των πηγών που επιβιώνουν είναι $E = 2I - 3V$.

Τα διαγράμματα Feynman ακολουθούν κάποιους κανόνες από τους οποίους μας απασχολούν οι εξής:

1. Ευθείες ή κυρτές γραμμές αντιστοιχούν σε διαδότες $i\Delta(x-y)$ και στον συμβολισμό που έχουμε χρησιμοποιήσει σε εσωτερικές γραμμές I

2. Κύκλος με γεμάτο το εσωτερικό του στο τέλος από μια γραμμή αντιστοιχεί σε πηγή $i \int d^4x J$
3. Σημείο που ενώνει 3 γραμμές αντιστοιχεί σε κορυφή $iZ_{\lambda\lambda} \int d^4x$ και στον συμβολισμό που έχουμε χρησιμοποιήσει σε κορυφή V

Τα διαγράμματα αυτά χωρίζονται σε 2 κατηγορίες, στα συνδεδεμένα (connected) και στα μη συνδεδεμένα (disconnected). Συνδεδεμένα ονομάζονται τα διαγράμματα στα οποία οποιαδήποτε 2 σημεία μπορούν να ενωθούν με μια ευθεία συνεχή γραμμή μέσα στο ίδιο στο διάγραμμα. Αντίστοιχα, μη συνδεδεμένα ονομάζονται τα διαγράμματα στα οποία η παραπάνω ιδιότητα δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Κατά την κατασκευή όλων των πιθανών διαγραμμάτων Feynman για συγκεκριμένα E, V, I θα πρέπει κάποιος να λάβει υπόψιν του την περίπτωση κάποια από τα διαγράμματα να δίνουν τους ίδιους όρους. Για να αποφύγουμε αυτή την υπερμέτρηση, πολλαπλασιάζουμε κάθε διάγραμμα Feynman με τον παράγοντα συμμετρίας S ο οποίος μας λείπει τον αριθμό από τα διαγράμματα που είναι συμμετρικά στις εναλλαγές.

Παρακάτω ακολουθούν μερικά διαγράμματα Feynman για την θεωρία της φ^3 για διάφορα E, V και I μαζί με τον παράγοντα συμμετρίας S . Για παραπάνω διαγράμματα μπορεί κάποιος να δει το βιβλίο του *M. Srednicki* (βλέπε <http://www.physics.ucsb.edu/~mark/qft.html>) στο οποίο ανήκουν και τα παρακάτω διαγράμματα.

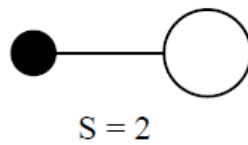


Figure 4.1: Όλα τα συνδεδεμένα διαγράμματα για $E=1, V=1$

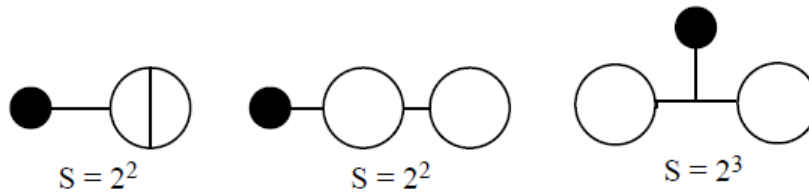


Figure 4.2: Όλα τα συνδεδεμένα διαγράμματα για $E=1, V=3$

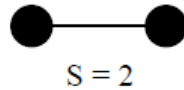


Figure 4.3: Όλα τα συνδεδεμένα διαγράμματα για $E=3, V=0$

Ας συμβολίσουμε τώρα ένα συνδεδεμένο διάγραμμα με C_I . Ένα οποιοδήποτε διάγραμμα Feynman D μπορεί να γραφεί ως ένα γινόμενο συνδεδεμένων διαγραμμάτων με τον εξής τρόπο:

$$D = \frac{1}{S_D} \prod_I (C_I)^{n_I} \quad (4.9)$$

όπου S_D είναι ο παράγοντας συμμετρίας του διαγράμματος και n_I ο αριθμός των συνδεδεμένων γραφημάτων στο D . Οι 2 αυτές ποσότητες συνδέονται με τον τύπο:

$$S_D = \prod_I n_I! \quad (4.10)$$

Μπορούμε τώρα να αντικαταστήσουμε τις 4.9,4.10 στην:

$$Z_1[J] = \sum_{n_I} D = \sum_{n_I} \prod_I \frac{1}{n_I!} (C_I)^{n_I} = \prod_I \sum_{n_I=0}^{\infty} \frac{1}{n_I!} (C_I)^{n_I} = \prod_I \exp(C_I) = \exp\left(\sum_I C_I\right) \quad (4.11)$$

Η σχέση μας εκφράζει το ολοκλήρωμα ως το εκθετικό του αθροίσματος των συνδεδεμένων διαγραμμάτων. Αυτό αποτελεί μια πολύ χρήσιμη σχέση καθώς μπορούμε εύκολα να βάλουμε την κανονικοποίηση $Z_1(0) = 1$ και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μπορούμε να αγνοήσουμε τα διαγράμματα από κενό σε κενό, δηλαδή που δεν έχουν πηγές. Τότε έχουμε:

$$Z_1[J] = \exp[iW_1[J]] \quad (4.12)$$

όπου το $W_1[J]$ ορίζεται ως

$$iW_1[J] = \sum_{I \neq \{0\}} C_I \quad (4.13)$$

όπου με το $I \neq \{0\}$ εννοούμε πως αγνοούμε τα διαγράμματα από κενό σε κενό (που δεν έχουν πηγές) έτσι ώστε $W_1(0) = 1$.

Οι συνθήκες Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) μας λένε πως πρέπει:

$$\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = 0 \quad (4.14)$$

$$\langle k|\varphi(x)|0\rangle = e^{ik \cdot x}, \quad \mu \varepsilon \langle k'|k\rangle = (2\pi^3)2k^0\delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \quad (4.15)$$

Για την εξαγωγή του 4.14 μπορεί κάποιος να γράψει τη μετάβαση από την αρχική προς την τελική κατάσταση όπως την έδωσαν οι LSZ:

$$\langle f|i\rangle = \delta_{if} + i^{n+n'} \int d^4x_1 e^{-ik_1 \cdot x_1} (\square_1^2 + m^2) \dots \int d^4x'_1 e^{-k'_1 \cdot x'_1} (\square_1'^2 + m^2) \dots \langle 0|T\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x'_1)|0\rangle \quad (4.16)$$

Σε χρόνους $-\infty$ και $+\infty$ θα πρέπει να υπάρχουν μόνο μονοσωματιδιακές καταστάσεις και όχι καταστάσεις που είναι υπερθέσεις μονοσωματιδιακής κατάστασης και του κενού. Αυτό γίνεται μόνο όταν $\langle 0|\varphi|0\rangle = 0$.

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη 4.14 προκύπτει:

$$\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} Z_1[J] \Big|_{J=0} = \frac{\delta}{\delta J(x)} W_1[J] \Big|_{J=0} \quad (4.17)$$

Το αποτέλεσμα 4.17 δείχνει πως λαμβάνουμε υπόψιν μας όλα τα συνδεδεμένα διαγράμματα με 1 πηγή (βλ. Figures 4.1,4.2. Σε επίπεδο 1ης τάξης ως προς λ συνεισφέρει μόνο το διάγραμμα με $E=1, V=1$ αφού αφαιρέσουμε την πηγή (βλ. Figure 4.1). Χρησιμοποιώντας τους κανόνες του Feynman και λαμβάνοντας υπόψιν και τον παράγοντα συμμετρίας S προκύπτει πως:

$$\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = \frac{i}{2} \lambda \int d^4y i\Delta_F(x-y) i\Delta_F(y-y) + \mathcal{O}(\lambda^3) = -\frac{i}{2} \lambda \Delta_F(0) \int d^4y \Delta_F(x-y) + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (4.18)$$

Παραπάνω θέσαμε $Z_\lambda = 1$ καθώς $Z_\lambda = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$, το οποίο θα δειχθεί πιο μετά. Το ολοκλήρωμα ξέρουμε πως είναι διαφορετικό του μηδενός οπότε αρκεί να εξετάσουμε το $\Delta(0)$. Για να το εξετάσουμε, χρησιμοποιούμε τον τύπο 3.7 και έχουμε:

$$\Delta_F(0) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (4.19)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι όμως τετραγωνικά αποκλίνον και για αυτό τον λόγο για να το υπολογίσουμε θα εισάγουμε ένα κατώφλι αποκοπής στο υπερίωδες $\Lambda > 0$. Το Λ θεωρούμε πως είναι πολύ μεγαλύτερο της μάζας $\Lambda \gg m$. Χρησιμοποιούμε την εξομάλυνση Pauli-Villars [4] και για να είναι Lorentz αναλλοίωτο το Δ_F κάνουμε την ακόλουθη τροποποίηση:

$$\begin{aligned} \Delta_F(0) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \left(\frac{\Lambda^2}{p^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} \right)^2 \\ &= \Lambda^4 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)^2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Χρησιμοποιούμε τον 2ο τύπο του παραρτήματος A (A.1) με $A = p^2 - m^2 + i\varepsilon$ και $B = p^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon$ και προκύπτει το εξής:

$$\begin{aligned} \Delta_F(0) &= 2\Lambda^4 \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[x(p^2 - m^2 + i\varepsilon) + y(p^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)]^3} \\ &= 2\Lambda^4 \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(x+y)p^2 - (xm^2 + y\Lambda^2) + i(x+y)\varepsilon]^3} \\ &= 2\Lambda^4 \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 - D + i(x+y)\varepsilon]^3} \end{aligned} \quad (4.21)$$

όπου έγινε η αλλαγή μεταβλητής $p \rightarrow q = \sqrt{(x+y)p}$ και ορίστηκε η ποσότητα $D = (xm^2 + y\Lambda^2)$. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος κάνουμε αλλαγή από χώρο Minkowski σε Ευκλείδειο χώρο $q_0 \rightarrow -iq_0$ και εφόσον το ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο στον Ευκλείδειο χώρο μπορούμε να θέσουμε $\varepsilon \rightarrow 0$. Με την αλλαγή αυτή το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned}
\Delta_F(0) &= 2i\Lambda^4 \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) y \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[-q_E^2 - D]^3} \\
&= -2i\Lambda^4 \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) y \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q_E^2 + D]^3} \\
&= -\frac{2i\Lambda^4}{16\pi^4} \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) y \int d\Omega_4 q_E^3 dq_E \frac{1}{[q_E^2 + D]^3} \\
&= -\frac{i\Lambda^4}{8\pi^4} \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) y 2\pi^2 \int_0^\infty q_E^3 dq_E \frac{1}{[q_E^2 + D]^3} \\
&= -\frac{i\Lambda^4}{4\pi^2} \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) y \int_0^\infty q_E^3 dq_E \frac{1}{[q_E^2 + D]^3}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός πως σε Ευκλείδειο χώρο σε 4 διαστάσεις η σφαίρα είναι $\int d\Omega_4 = 2\pi^2$. Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι υπολογίσιμο και δίνει:

$$\int_0^\infty q_E^3 dq_E \frac{1}{[q_E^2 + D]^3} = \frac{1}{4D} \tag{4.23}$$

Επομένως, η 4.21 γίνεται

$$\begin{aligned}
\Delta_F(0) &= -\frac{i\Lambda^4}{15\pi^2} \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{y}{xm^2 + y\Lambda^2} \\
&= -\frac{i\Lambda^4}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-x)}{x(m^2 - \Lambda^2) + \Lambda^2} \approx -\frac{i\Lambda^2}{16\pi^2}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

για $\Lambda \gg m$ όπως αναφέρθηκε πιο πάνω. Παρατηρούμε πως τελικά το $\Delta_F(0) \neq 0$ και συγκεκριμένα τείνει στο άπειρο για $\Lambda \rightarrow \infty$, με αποτέλεσμα να υπάρχει πρόβλημα με τη συνθήκη του LSZ που απαιτούσε να είναι μηδενικό το 4.17. Για να λυθεί το πρόβλημα αυτό θα γίνει στην Lagrangian μια προσθήκη ενός όρου που θα ακυρώνει την ποσότητα όλη με το $\Delta_F(0)$ που εμφανίζεται στην 4.17. Αυτός είναι ένας λεγόμενος αντισταθμιστικός όρος και η όλη διαδικασία είναι η λεγόμενη επανακανονικοποίηση. Το ποιος θα είναι ο όρος αυτός και τι σημασία θα έχει, θα φανεί στο επόμενο κεφάλαιο που θα συζητηθούν οι αντισταθμιστικοί όροι.

5. Αντισταθμιστικοί όροι και επανακανονικοποίηση

Όπως αναφέρθηκε στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου, για να αντιμετωπιστούν οι απειρίες που προκύπτουν, είναι αναγκαίο να προστεθούν στην Lagrangian κάποιοι όροι οι οποίοι θα ακυρώνουν αυτές τις απειρίες. Πρώτα όμως, πριν αναφερθούν οι αντισταθμιστικοί όροι, θα αναλυθεί μια ποσότητα η οποία μπορεί από μόνη της να δείξει αν ένα ολοκλήρωμα διαδρομής είναι αποκλίνον ή συγκλίνον. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται επιφανειακός βαθμός απόκλισης (superficial degree of divergence) $\mathcal{D}_{graph\ div}$ (SSD) και ορίζεται ως τον αριθμό των δυνάμεων ορμής στον αριθμητή του ολοκληρώματος μείον (-) τον αριθμό των δυνάμεων ορμής στον παρανομαστή του ολοκληρώματος:

$$\mathcal{D}_{graph\ div} = (\text{Άθροισμα δυνάμεων ορμών στον αριθμητή}) - (\text{Άθροισμα δυνάμεων ορμών στον παρανομαστή}) \quad (5.1)$$

Ο SSD μπορεί να δώσει πληροφορίες για την σύγκλιση ή την απόκλιση ενός ολοκληρώματος διαδρομής με τον εξής τρόπο:

$$\mathcal{D}_{graph\ div} \begin{cases} > 0 & \rightarrow \text{Αποκλίνοντα ολοκληρώματα} \\ = 0 & \rightarrow \text{Λογαριθμικώς αποκλίνοντα ολοκληρώματα} \\ < 0 & \rightarrow \text{Συγκλίνοντα ολοκληρώματα} \end{cases} \quad (5.2)$$

Δεν είναι πάντα βολικό όμως να γραφεί ο τύπος του ολοκληρώματος διαδρομής. Για αυτό τον λόγο υπάρχει ένας τύπος που δίνει τον SSD αποκλειστικά από την τοπολογία του διαγράμματος Feynman και είναι ο εξής:

$$\mathcal{D} = L \cdot d - 2I \quad (5.3)$$

όπου L είναι ο αριθμός των loops, d η διάσταση του χώρου και I ο αριθμός των εσωτερικών γραμμών. Ο αριθμός των loops δίνεται και αυτός ως συνάρτηση των εσωτερικών γραμμών I και των κορυφών V ως:

$$L = I - V + 1 \quad (5.4)$$

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα με την εξίσωση 4.8, γενικά για θεωρία φ^N στις d -διάστάσεις με αλληλεπιδράσεις του τύπου:

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda}{N!} \varphi^N \quad (5.5)$$

μετά τη δράση των συναρτησιακών παραγώγων, επιβιώνουν πηγές $E = NV - 2I$ και με λύση της εξίσωσης ως προς τις εσωτερικές γραμμές I βγαίνει πως:

$$I = \frac{1}{2}(NV - E) \quad (5.6)$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις 5.3, 5.4 και 5.6 προκύπτει τελικά πως ο SSD σε μια θεωρία φ^N δίνεται από τον τύπο:

$$\mathcal{D}_{graph\ div} = d + \left[\left(\frac{d}{2}N - d \right) \right] - \left(\frac{d}{2} - 1 \right) E \quad (5.7)$$

Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση την οποία μπορεί κάποιος να δει αναλυτικά στο παράρτημα B, προκύπτουν οι εξής σχέσεις για τις διαστάσεις του πεδίου φ και της μεταβλητής λ :

$$[\varphi] = \frac{d}{2} - 1 \quad (5.8)$$

$$[\lambda] = d - N \left(\frac{d}{2} - 1 \right) \quad (5.9)$$

Η διάσταση του λ αποτελεί έναν από τους τρόπους για την κατάταξη των θεωριών ανάλογα με την επανακανονικοποιησιμότητά τους. Υπάρχουν 3 περιπτώσεις:

1. $[\lambda] = 0$. Η θεωρία είναι **επανακανονικοποιήσιμη**, δηλαδή υπάρχουν πεπερασμένες UV απειρίες για κάθε τάξη θεωρίας διαταραχών οι οποίες μπορούν να αντιμετωπιστούν με την προσθήκη αντισταθμιστικών όρων.
2. $[\lambda] > 0$. Η θεωρία είναι **υπερεπανακανονικοποιήσιμη**, δηλαδή υπάρχουν πεπερασμένοι τύποι απειριών μέχρι μια πεπερασμένη τάξη στη θεωρία διαταραχών μετά από την οποία αυτές εξαφανίζονται.
3. $[\lambda] < 0$. Η θεωρία είναι **μη επανακανονικοποιήσιμη**, δηλαδή υπάρχουν άπειροι τύποι απειριών και σε κάθε τάξη θεωρίας διαταραχών εμφανίζονται καινούργιες απειρίες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να υπάρχουν στην ουσία άπειροι τύποι απειριών που απαιτούν άπειρους αντισταθμιστικούς όρους.

Στην εργασία θα εξεταστεί η συγκεκριμένη περίπτωση της θεωρίας φ^3 στις 6 διαστάσεις. Στις 6 διαστάσεις η θεωρία είναι επανακανονικοποιήσιμη, το οποίο μπορεί να το δει κάποιος εύκολα από την εξίσωση 5.9 για $N=3$ και $d=6$:

$$[\lambda] = 6 - 3(3 - 1) = 0 \quad (5.10)$$

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, οι απειρίες λύνονται με την εισαγωγή των αντισταθμιστικών όρων στην Lagrangian. Η αρχική Lagrangian χωρίς τους αντισταθμιστικούς όρους μπορεί να γραφεί με την bare μορφή της:

$$\mathcal{L}^{\text{bare}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_0 \partial^\mu \varphi_0 - \frac{1}{2} m^2 \varphi_0^2 + \frac{1}{3!} \lambda_0 \varphi_0^3 + \mathcal{J}_0 \varphi_0 \quad (5.11)$$

στην οποία έγινε και μια προσθήκη ενός bare γραμμικού όρου ως προς το φ_0 . Ο όρος αυτός προστέθηκε εξαιτίας της 4.14 ώστε να ισχύσει η συνθήκη LSZ. Μαζί με τους αντισταθμιστικούς όρους και με τις επανακανονικοποιημένες ποσότητες, η Lagrangian παίρνει την μορφή 4.6:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}^{\text{free}} + \frac{1}{2} (Z_\varphi - 1) \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} (Z_m - 1) m^2 \varphi^2 + \frac{1}{3!} Z_\lambda \lambda \varphi^3 + \mathcal{J} \varphi \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} (Z_\varphi - 1) \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} (Z_m - 1) m^2 \varphi^2 + \frac{1}{3!} Z_\lambda \lambda \varphi^3 + \mathcal{J} \varphi \\ &= \frac{1}{2} Z_\varphi \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} Z_m m^2 \varphi^2 + \frac{1}{3!} Z_\lambda \lambda \varphi^3 + \mathcal{J} \varphi \end{aligned} \quad (5.12)$$

Εξισώνοντας την 5.11 και την 5.12 προκύπτουν οι σχέσεις που συνδέουν τις επανακανονικοποιημένες μεταβλητές με τις bare μεταβλητές και τους αντισταθμιστικούς όρους:

$$\varphi_0 = Z_\varphi^{1/2} \varphi \quad (5.13)$$

$$m_0 = Z_\varphi^{-1/2} Z_m^{1/2} m \quad (5.14)$$

$$\lambda_0 = Z_\varphi^{-3/2} Z_\lambda \lambda \mu^{\varepsilon'/2} \quad (5.15)$$

$$\mathcal{J}_0 = Z_\varphi^{-1/2} \mathcal{J} \quad (5.16)$$

όπου στην 5.15 έγινε η μετατροπή $\lambda \rightarrow \lambda \mu^{\varepsilon'/2}$ με $\varepsilon' = 6 - d > 0$. Η μετατροπή αυτή έγινε για την επέκταση της θεωρίας στις d διαστάσεις, οι οποίες δεν είναι απαραίτητα ακέραιες. Στην περίπτωση των 6 διαστάσεων, το λ είναι αδιάστατο όπως έχουμε δει προηγουμένως. Αυτό όμως δεν ισχύει για όλες τις διαστάσεις καθώς σε κάποια γενική διάσταση d , το λ έχει διαστάσεις μάζας $\varepsilon/2$. Για αυτό τον λόγο πολλαπλασιάζουμε το λ με την παράμετρο μ , η οποία δεν έχει κάποια φυσική σημασία ώστε να μείνει το λ αδιάστατο σε όλες τις διαστάσεις. Η παράμετρος μ ονομάζεται μάζα μεταστοιχείωσης και έχει διαστάσεις μάζας. Η περίπτωση των 6 διαστάσεων ανακτάται όταν μπει το ε' να τείνει στο μηδέν ($\varepsilon' \rightarrow 0^+$). Από τις παραμέτρους που εμφανίζονται στις 5.13-5.16, το Z_φ ονομάζεται αντισταθμιστικός όρος πεδίου, το Z_m αντισταθμιστικός όρος μάζας, το Z_λ αντισταθμιστικός όρος ζεύξης και το \mathcal{J} αντισταθμιστικός όρος πηγής. Θαδειχθεί παρακάτω πως $Z_i = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$. Από αυτά, το \mathcal{J} μπορούμε να το βρούμε από την απαίτηση 4.14. Όπως έχειδειχθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, το $\langle 0|\varphi|0 \rangle \neq 0$, το οποίο για να επιλυθεί γίνεται η προσθήκη του όρου $\mathcal{J}\varphi$ στην Lagrangian. Ο όρος αυτός σε διάγραμμα Feynman αντιστοιχεί με το τέλος μιας ευθείας γραμμής, το οποίο συμβολίζεται με ένα X στο διάγραμμα Feynman. Ο όρος αυτός αντιστοιχεί σε κορυφή $i\mathcal{J} \int d^4y$. Παρακάτω στο Figure 5.1 μπορεί κάποιος να δει μια σχηματική αναπαράσταση του.

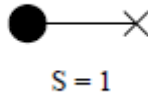


Figure 5.1: Διάγραμμα Feynman με 1 αντισταθμιστικό όρο πηγής

Θεωρούμε πως ο αντισταθμιστικός όρος πηγής που προσθέσαμε είναι της τάξης λ , δηλαδή $\mathcal{J} = \mathcal{O}(\lambda)$ και επομένως σε προσέγγιση 1ης τάξης ως προς λ , μόνο το διάγραμμα στο Figure 5.1 συνεισφέρει στον υπολογισμό του $\langle 0|\varphi|0 \rangle$ και έχουμε:

$$\langle 0|\varphi(x)|0 \rangle = \left(i\mathcal{J} - \frac{1}{2} \lambda \Delta_F(0) \right) \int d^4y i \Delta_F(x-y) + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (5.17)$$

Για να ισχύει η συνθήκη LSZ θα πρέπει:

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{2} i \lambda \Delta_F(0) + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (5.18)$$

Οι υπόλοιποι αντισταθμιστικοί όροι είχαν αγνοηθεί μέχρι τώρα. Για να τους επαναφέρουμε, κοιτάμε την 5.12 και μπορούμε να δούμε πως η τροποποιημένη Lagrangian, δηλαδή αυτή με τους αντισταθμιστικούς όρους Z_i δίνει για ολοκλήρωμα διαδρομής:

$$Z[J] = \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left(-(Z_\varphi - 1)\square_x + (Z_m - 1)m^2 \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] Z_1[J] \quad (5.19)$$

όπου $Z_1[J]$ είναι η L_{int} που έχουμε αγνοήσει τις συνεισφορές από τα Z_Φ, Z_m και δίνεται από την 4.7. Η 5.19 οδηγεί σε έναν νέο κανόνα Feynman για κορυφή. Συμβολίζεται με ένα X στο διάγραμμα Feynman και ορίζεται ως:

$$(-i) \int d^4x \left(+ (Z_\varphi - 1)\square_x + (Z_m - 1)m^2 \right) \quad (5.20)$$

και με μετασχηματισμό Fourier με σύμβαση για τη μετρική $\eta^{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$ ως:

$$(-i) \left[- (Z_\varphi - 1)p^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] \quad (5.21)$$

6. Διορθώσεις στον διαδότη

Όπως έχει συζητηθεί και προηγουμένως, οι διορθώσεις βρόχου στον διαδότη και την κορυφή έχουν UV αποκλίσεις οπότε πρέπει με κάποιο τρόπο να απορροφηθούν. Ας ξεκινήσουμε από την ακριβή έκφραση του διαδότη η οποία δίνεται από το χρονολογικό γινόμενο:

$$i\Delta_F(x-y) = \langle 0|T\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)|0\rangle = \frac{1}{i^2} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} Z[J] \Big|_{J=0} \quad (6.1)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 6.1 και 4.12 οδηγούμαστε στο:

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x-y) &= \frac{1}{i^2} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} \exp(iW[J]) \Big|_{J=0} \\ &= \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) iW[J] \exp(iW[J]) \Big|_{J=0} - \left(\frac{1}{i} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \right) \exp(iW[J]) \Big|_{J=0} \\ &= \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) iW[J] \Big|_{J=0} - \left(\frac{1}{i} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \right) \Big|_{J=0} \\ &= \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) iW[J] \Big|_{J=0} \end{aligned} \quad (6.2)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την κανονικοποίηση $Z(0) = 1$ και επομένως $W(0) = 0$. Η τελευταία ισότητα προέκυψε από το γεγονός πως η συνθήκη LSZ επιβάλλει το $\langle 0|\varphi|0\rangle = 0$ και επομένως θα πρέπει και $\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = 0$. Το $iW[J]$ είναι το άθροισμα όλων των συνδεδεμένων διαγραμμάτων με το $\frac{\delta}{\delta J(x)}$ να αφαιρεί μια πηγή.

Εφόσον ο ακριβής διαδότης δίνεται από την 6.2 μπορούμε να επεκτείνουμε την θεωρία και να δώσουμε τις διορθώσεις στον διαδότη της θεωρίας φ^3 , από τη γεωμετρική σειρά που φαίνεται στο Figure 6.2.

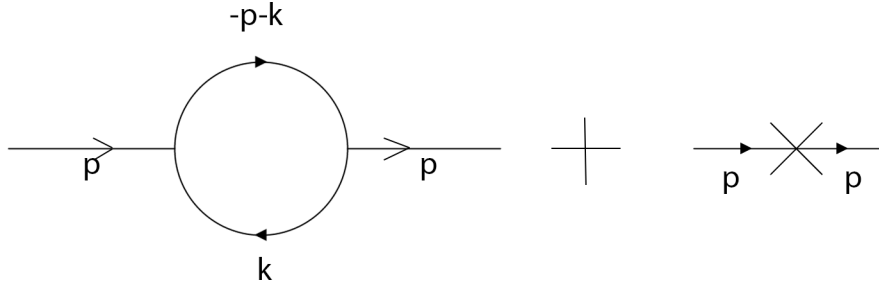


Figure 6.1: Οι διορθώσεις στον διαδότη που συμβολίζονται με $\Pi(p^2)$, τάξης $\mathcal{O}(p^2)$ και που περιλαμβάνουν και την εισαγωγή του αντισταθμιστικού όρου τάξης λ^2 . Το p είναι η εξωτερική ορμή με κατεύθυνση την κατεύθυνση του βέλους ενώ k είναι η εσωτερική ορμή ενός βρόχου. Η σύμβαση είναι πως οι εισερχόμενες ορμές σε κορυφή θεωρούνται με θετικό πρόσημο.

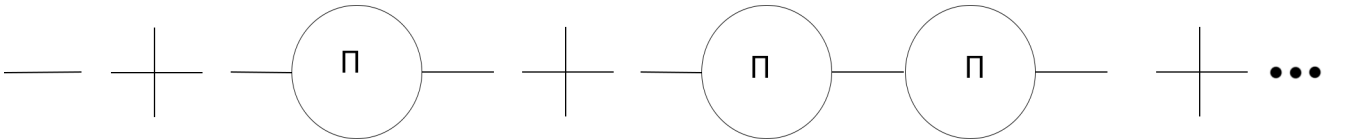


Figure 6.2: Η γεωμετρική σειρά των διορθώσεων ενός βρόχου του διαδότη

Με βάση το Figure 6.2 και τη χρήση των κανόνων Feynman, ο διορθωμένος διαδότης 1 βρόχου (στον χώρο Fourier) δίνεται από:

$$i\tilde{\Delta}_F(p^2)_{\text{corrected}} = i\tilde{\Delta}_F(p^2) + i\tilde{\Delta}_F(p^2) \left(i\Pi(p^2) \right) i\tilde{\Delta}_F(p^2) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (6.3)$$

όπου $i\tilde{\Delta}_F(p^2)$ είναι ο μετασχηματισμένος διαδότης στον χώρο Fourier που δίνεται από την 3.12 και $i\Pi(p^2)$ είναι η διόρθωση ενός βρόχου που ονομάζεται και αυτο-ενέργεια και μπορεί να βρεθεί από το Figure 6.1 με την χρήση των κανόνων Feynman:

$$i\Pi(p^2) = \frac{1}{2} (i\lambda)^2 i^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}((p+k)^2) \tilde{\Delta}(k^2) - i \left[-(Z_\varphi - 1)p^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (6.4)$$

Το 1/2 στην αρχή της εξίσωσης 6.4, προκύπτει από τον παράγοντα συμμετρίας στην εναλλαγή των πάνω και κάτω άκρων του διαδότη μέσα στο βρόχο. Δε γράψαμε το Z_λ καθώς αναμένουμε να είναι $Z_\lambda = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$ επομένως ο όρος Z_λ^2 απορροφήθηκε στον όρο $\mathcal{O}(\lambda^4)$. Αντιθέτως, οι όροι $(Z_\varphi - 1), (Z_m - 1)$ αναμένουμε να είναι $\mathcal{O}(\lambda^2)$.

Γράφοντας όλους τους όρους της γεωμετρικής σειράς του Figure 6.2 έχουμε:

$$\begin{aligned} i\tilde{\Delta}_F(p^2) &= i\tilde{\Delta}_F(p^2) + i\tilde{\Delta}_F(p^2) \left[i\Pi(p^2) \right] i\tilde{\Delta}_F(p^2) + i\tilde{\Delta}_F(p^2) \left[i\Pi(p^2) \right] i\tilde{\Delta}_F(p^2) \left[i\Pi(p^2) \right] i\tilde{\Delta}_F(p^2) + \dots \\ &= i\tilde{\Delta}_F(p^2) \left(1 + \left[i\Pi(p^2) \right] i\tilde{\Delta}_F(p^2) + \left[i\Pi(p^2) \right] i\tilde{\Delta}_F(p^2) \left[i\Pi(p^2) \right] i\tilde{\Delta}_F(p^2) + \dots \right) \\ &= i\tilde{\Delta}_F(p^2) \left(1 + \left[i\Pi(p^2) \right] i\tilde{\Delta}_F(p^2) \left(1 + \left[i\Pi(p^2) \right] i\tilde{\Delta}_F(p^2) + \dots \right) \right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Με την γεωμετρική σειρά 6.5 ενσωματώνουμε στην $i\tilde{\Delta}_F(p^2)$ όλες τις συνεισφορές από τα διαγράμματα αρκεί να πάρουμε το $i\Pi(p^2)$ να δίνεται από το άθροισμα των μονοσωματιδιακών μη αναγώγιμων διαγραμμάτων (one-particle irreducible), 1PI για συντομία. 1PI είναι όλα τα διαγράμματα τα οποία παραμένουν συνδεδεμένα μετά την αποκοπή οποιασδήποτε γραμμής. Παρατηρούμε στην 6.5 πως η παρένθεση αντιστοιχεί σε γεωμετρική πρόοδο $\sum_{k=0}^{\infty} = \frac{1}{1-x}$

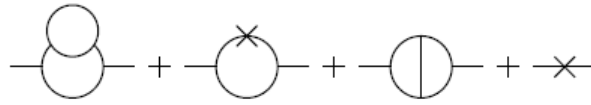


Figure 6.3: Τα 1PI διαγράμματα που συνεισφέρουν $\mathcal{O}(\lambda^4)$ στο $i\Pi(p^2)$. Έχουν ληφθεί υπόψιν και οι συνεισφορές των αντισταθμιστικών όρων που συμβολίζονται με X στο διάγραμμα. [3]

με $x = \left[i\Pi(p^2) \right] i\tilde{\Delta}_F(p^2)$. Επομένως, η 6.5 δίνει για τον ακριβή διαδότη:

$$\begin{aligned} i\tilde{\Delta}_F(p^2) &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \left(1 - \frac{i\Pi(p^2)i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right)^{-1} = \frac{i}{\left(p^2 - m^2 + i\varepsilon \right) \left(1 + \frac{\Pi(p^2)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right)} \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2 + \Pi(p^2) - i\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+ \end{aligned} \quad (6.6)$$

όπου στην τελευταία ισότητα επαναορίσαμε το απειροστό $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$ (Δεν επηρεάζει τίποτα η αλλαγή εφόσον τείνει στο 0). Ο ακριβής διαδότης γνωρίζουμε πως πρέπει να έχει έναν πόλο στο $p^2 = m^2$ με υπόλοιπο 1. Στον ακριβή διαδότη μετά από την επανάθροιση που φαίνεται στη σχέση 6.6 παρατηρούμε πως για να ισχύει αυτό θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες:

$$\left. \Pi(p^2) \right|_{p^2=m^2} = 0 \quad \text{και} \quad \left. \frac{d}{dp^2} \Pi(p^2) \right|_{p^2=m^2} = 0 \quad (6.7)$$

Οι 2 συνθήκες αυτές θα βοηθήσουν στην επιλογή των αντισταθμιστικών όρων στη συνέχεια.

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $m_E^2 = m^2 - i\varepsilon$ και την αντικατάσταση του $\Delta_F(p^2)$ στην 6.4 έχουμε:

$$i\Pi(p^2) = \frac{1}{2}\lambda^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p+k)^2 - m_E^2} \frac{1}{k^2 - m_E^2} - i \left[-(Z_\varphi - 1)p^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (6.8)$$

Μπορούμε να προχωρήσουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους Feynman A.1 του Παραρτήματος A όπου στην περίπτωση μας έχουμε $A = (p+k)^2 - m_E^2$ και $B = p^2 - m_E^2$. Έτσι, το $\frac{1}{AB}$ δίνει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+k)^2 - m_E^2} \frac{1}{k^2 - m_E^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{[x((p+k)^2 - m_E^2) + (1-x)(k^2 - m_E^2)]^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{[(xp^2 + 2xp \cdot k + xk^2 - xm_E^2) + (1-x)(k^2 - m_E^2)]^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{[k^2 + 2xp \cdot k + xp^2 - m_E^2]^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[(k+xp)^2 + x(1-x)p^2 - m_E^2]^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{[q^2 - \mathcal{A}(p)]^2} \end{aligned} \quad (6.9)$$

όπου $q^\mu = k^\mu + xp^\mu$ και $\mathcal{A}(p) = -x(1-x)p^2 + m_E^2$. Όπως είχαμε αναφέρει πριν για την διαστατική εξομάλυνση, έχει γίνει η αλλαγή $\lambda \rightarrow \lambda\mu^{\varepsilon/2}$. Επομένως, για να είναι σωστή η έκφραση 6.8 θα πρέπει να βάλουμε και την παράμετρο $\mu^{\varepsilon/2}$ μέσα. Κάνοντας λοιπόν την αλλαγή αυτή και κάνοντας και μια αλλαγή μεταβλητής $d^d k \rightarrow d^d q$ στο μέτρο της ολοκλήρωσης, έχουμε:

$$i\Pi(p^2) = \frac{1}{2}\lambda^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int_0^1 \frac{dx \mu^\varepsilon}{[q^2 - \mathcal{A}(p)]^2} - i \left[-(Z_\varphi - 1)p^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (6.10)$$

Κάνουμε μια περιστροφή Wick από τον χώρο Minkowski στον ευκλείδειο χώρο $q^2 \rightarrow -q_E^2$ και έχουμε για την αυτοενέργεια:

$$i\Pi(p^2) = \frac{1}{2}i\lambda^2\mu^\varepsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 + \mathcal{A}(p)]^2} - i \left[-(Z_\varphi - 1)p^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (6.11)$$

Αλλάξαμε στην 6.11 την σειρά ολοκλήρωσης καθώς τα ολοκληρώματα είναι καλά ορισμένα. Το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί από την C.15 για $a = 0, b = 2, \Delta = \mathcal{A}(p)$ και $d = 6 - \varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0^+$ και δίνει:

$$\begin{aligned} i\Pi(p^2) &= \frac{1}{2}\lambda^2\mu^\varepsilon \int_0^1 dx i(-1)^{-2} \frac{1}{(4\pi)^{3-\frac{\varepsilon}{2}}} \frac{1}{\Delta^{\frac{\varepsilon}{2}-1}} \frac{\Gamma(3-\frac{\varepsilon}{2})\Gamma(\frac{\varepsilon}{2}-1)}{\Gamma(2)\Gamma(3-\frac{\varepsilon}{2})} - i \left[-(Z_\varphi - 1)p^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] + \mathcal{O}(\lambda^4) \\ &= \frac{1}{2}i\lambda^2 \frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2}-1)}{(4\pi)^3} \int_0^1 dx \mathcal{A}(p) \left(\frac{4\pi\mu^2}{\mathcal{A}(p)} \right)^{\varepsilon/2} - i \left[-(Z_\varphi - 1)p^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] + \mathcal{O}(\lambda^4) \\ &= \frac{1}{2}i\alpha\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}-1\right) \int_0^1 dx \mathcal{A}(p) \left(\frac{4\pi\mu^2}{\mathcal{A}(p)} \right)^{\varepsilon/2} - i \left[-(Z_\varphi - 1)p^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned} \quad (6.12)$$

όπου ορίσαμε για ευκολία:

$$\alpha \equiv \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \quad (6.13)$$

Από την ιδιότητα C.9 της συνάρτησης Γάμμα για $n = 1$ και $z = \frac{\varepsilon}{2}$ βλέπουμε πως:

$$\Gamma\left(-1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{-1}{1!} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] = - \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \quad (6.14)$$

Επιπλέον γνωρίζουμε πως για μια ποσότητα υψωμένη σε δύναμη:

$$\left(\frac{4\pi\mu^2}{\mathcal{A}(p)} \right)^{\varepsilon/2} = \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\mathcal{A}(p)}\right)\right) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\mathcal{A}(p)}\right) \quad (6.15)$$

Επομένως, η 6.12 δίνει:

$$\begin{aligned} i\Pi(p^2) &= -i\frac{1}{2}\alpha \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \left[\int_0^1 dx \mathcal{A}(p) + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 dx \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\mathcal{A}(p)}\right) \right] - i \left[-(Z_\varphi - 1)p^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= -i\frac{1}{2}\alpha \left[\left(\frac{2}{\varepsilon} + 1\right) \int_0^1 dx \mathcal{A}(p) - \gamma \int_0^1 dx \mathcal{A}(p) + \int_0^1 dx \mathcal{A}(p) \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\mathcal{A}(p)}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \\ &\quad - i \left[-(Z_\varphi - 1)p^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= -i\frac{1}{2}\alpha \left[\left(\frac{2}{\varepsilon} + 1\right) \left(-\frac{p^2}{6} + m_E^2\right) - \int_0^1 dx \mathcal{A}(p) \ln e^\gamma + \int_0^1 dx \mathcal{A}(p) \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\mathcal{A}(p)}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \\ &\quad - i \left[-(Z_\varphi - 1)p^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= -i\frac{1}{2}\alpha \left[\left(\frac{2}{\varepsilon} + 1\right) \left(-\frac{p^2}{6} + m_E^2\right) + \int_0^1 dx \mathcal{A}(p) \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\mathcal{A}(p)e^\gamma}\right) \right] \\ &\quad - i \left[-(Z_\varphi - 1)p^2 + (Z_m - 1)m^2 \right] + \mathcal{O}(\alpha^2, \varepsilon) \end{aligned} \quad (6.16)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός πως $\int_0^1 dx \mathcal{A}(p) = \left(-\frac{p^2}{6} + m_E^2\right)$. Ορίζουμε τώρα την μεταβλητή:

$$\tilde{\mu} = \sqrt{4\pi} \mu e^{-\gamma/2} \quad (6.17)$$

και κάνουμε τις εξής τροποποιήσεις στην 6.16:

$$\begin{aligned}
i\Pi(p^2) &= i\frac{\alpha}{6}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right)p^2 - i\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right)m^2 - i\frac{\alpha}{2}\int_0^1 dx\mathcal{A}(p)\ln\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{\mathcal{A}(p)}\right) - i\left[-(Z_\varphi - 1)p^2 + (Z_m - 1)m^2\right] + \mathcal{O}(\alpha^2, \varepsilon) \\
&= \left[i\frac{\alpha}{6}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right) + i(Z_\varphi - 1)\right]p^2 - \left[i\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right) + i(Z_m - 1)\right]m^2 + i\frac{\alpha}{2}\int_0^1 dx\mathcal{A}(p)\ln\left(\frac{\mathcal{A}(p)}{\tilde{\mu}^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2, \varepsilon) \\
&= \left[i\frac{\alpha}{6}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right) + i(Z_\varphi - 1)\right]p^2 - \left[i\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right) + i(Z_m - 1)\right]m^2 + i\frac{\alpha}{2}\int_0^1 dx\mathcal{A}(p)\ln\left(\frac{\mathcal{A}(p)}{m^2}\right) \\
&\quad + i\frac{\alpha}{2}\int_0^1 dx\mathcal{A}(p)\ln\left(\frac{m^2}{\tilde{\mu}^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2, \varepsilon) \\
&= \left[i\frac{\alpha}{6}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{\tilde{\mu}}{m}\right)\right) + i(Z_\varphi - 1)\right]p^2 - \left[i\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{\tilde{\mu}}{m}\right)\right) + i(Z_m - 1)\right]m^2 \\
&\quad + i\frac{\alpha}{2}\int_0^1 dx\mathcal{A}(p)\ln\left(\frac{\mathcal{A}(p)}{m^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2, \varepsilon)
\end{aligned} \tag{6.18}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε:

$$\int_0^1 dx\mathcal{A}(p)\ln\left(\frac{m^2}{\tilde{\mu}^2}\right) = -2\ln\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{m^2}\right)\left(-\frac{p^2}{6} + m^2\right) \tag{6.19}$$

Βλέπουμε πως εμφανίζονται 2 ειδών απειρίες, αυτές που έχουν την μορφή $\frac{p^2}{\varepsilon}$ και αυτές που έχουν την μορφή $\frac{1}{\varepsilon}$. Οι απειρίες $\frac{p^2}{\varepsilon}$ απορροφούνται από τον αντισταθμιστικό όρο Z_φ ενώ οι απειρίες τύπου $\frac{1}{\varepsilon}$ από τον αντισταθμιστικό όρο Z_m . Υπάρχουν 2 τρόποι για την επιλογή των αντισταθμιστικών όρων. Ο πρώτος τρόπος ονομάζεται **σχήμα φλοιού μάζας (on-shell (OS))** και σε αυτόν οι αντισταθμιστικοί όροι εξαρτώνται από τη μάζα μεταστοιχείωσης μ και υπολογίζονται από τις συνθήκες 6.7. Σε αυτή την περίπτωση η μάζα m είναι η φυσική μάζα του συστήματος η οποία είναι ανεξάρτητη του μ . Ο δεύτερος τρόπος ονομάζεται **σχήμα ελάχιστης αφαίρεσης (minimal subtraction (MS))** και σε αυτό το σχήμα οι αντισταθμιστικοί όροι είναι ανεξάρτητοι του μ και αφορούν μόνο τις απειρίες της μορφής $\frac{1}{\varepsilon}$ που υπάρχουν. Σε αυτή την περίπτωση βέβαια, το m^2 δεν είναι η φυσική μάζα του συστήματος επομένως οι συνθήκες 6.7 δεν ισχύουν. Στη συνέχεια θα βρεθούν οι αντισταθμιστικοί όροι και με τα 2 σχήματα.

Σχήμα φλοιού μάζας (OS)

Στο σχήμα φλοιού μάζας ακυρώνουμε τις αποκλίσεις θεωρώντας πως οι αντισταθμιστικοί όροι έχουν την μορφή:

$$(Z_\varphi - 1) = -\frac{\alpha}{6}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{\tilde{\mu}}{m}\right)\right) - \alpha\kappa_\varphi + \mathcal{O}(\lambda^4) \tag{6.20}$$

$$(Z_m - 1) = -\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{\tilde{\mu}}{m}\right)\right) - \alpha\kappa_m + \mathcal{O}(\lambda^4) \tag{6.21}$$

όπου κ_φ, κ_m είναι πραγματικές σταθερές και το α δίνεται από την 6.13 ως $\alpha \equiv \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3}$. Πλέον με τον ορισμό των αντισταθμιστικών όρων, οι απειρίες απορροφήθηκαν και το υπόλοιπο κομμάτι της 6.18 είναι υπολογίσιμο. Η 6.18 γίνεται:

$$i\Pi(p^2) = i\frac{\alpha}{2}\int_0^1 dx\mathcal{A}(p)\ln\left(\frac{\mathcal{A}(p)}{m^2}\right) - i\alpha\kappa_\varphi p^2 + i\alpha\kappa_m m^2 + \mathcal{O}(\lambda^4) \tag{6.22}$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με το mathematica και δίνει:

$$i\Pi(p^2) = i\frac{\alpha}{2}\left[-\frac{4}{3}m^2 + \frac{5}{18}p^2 + \frac{m^3}{3p}\left(\frac{4m^2}{p^2} - 1\right)^{3/2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{p^2} - 1}}\right)\right] - i\alpha\kappa_\varphi p^2 + i\alpha\kappa_m m^2 + \mathcal{O}(\lambda^4) \tag{6.23}$$

Η πρώτη συνθήκη 6.7

$$\Pi(p^2)\Big|_{p^2=m^2} = 0 \tag{6.24}$$

δίνει:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2}\left[-\frac{4}{3}p^2 + \frac{5}{18}p^2 + p^2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] - \alpha\kappa_\varphi p^2 + \alpha\kappa_m p^2 &= 0 \Rightarrow \\
\kappa_\varphi - \kappa_m &= \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3} + \frac{5}{18} + \sqrt{3}\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{19}{18} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \frac{19}{36}
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Για την εφαρμογή της 2ης συνθήκης 6.7

$$\frac{d}{dp^2}\Pi(p^2)_{p^2=m^2} = 0 \quad (6.26)$$

θα πρέπει πρώτα να παραγωγίσουμε την 6.23 ως προς το p^2 . Η παραγωγή αφήνει μόνο τον αντισταθμιστικό όρο κ_φ και δίνει:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp^2}\Pi(p^2)_{p^2=m^2} &= \frac{\alpha}{2} \left[\frac{5}{18} - \frac{1}{2} \frac{m^3}{3p^3} \left(\frac{4m^2}{p^2} - 1 \right)^{3/2} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{p^2} - 1}} \right) \right. \\ &+ \frac{m^3}{3p} \frac{3}{2} \left(\frac{4m^2}{p^2} - 1 \right)^{1/2} \left(-\frac{4m^2}{p^4} \right) \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{p^2} - 1}} \right) \\ &\left. + \frac{m^3}{3p} \left(\frac{4m^2}{p^2} - 1 \right)^{3/2} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\frac{4m^2}{p^2} - 1} \right)} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{4m^2}{p^2} - 1 \right)^{-3/2} \right) \left(-\frac{4m^2}{p^4} \right) \right] - \alpha \kappa_\varphi \Big|_{p^2=m^2} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Με επιβολή του $p^2 = m^2$ η 6.27 γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp^2}\Pi(p^2)_{p^2=m^2} &= \frac{\alpha}{2} \left[\frac{5}{18} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \frac{\pi}{6} - \frac{2\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{1}{2} \right] - \alpha \kappa_\varphi = 0 \Rightarrow \\ \kappa_\varphi &= \frac{1}{2} \left[\frac{14}{18} - \frac{5\sqrt{3}\pi}{12} \right] \Rightarrow \boxed{\kappa_\varphi = \frac{7}{18} - \frac{5\sqrt{3}\pi}{24}} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα της 6.28 πίσω στην 6.25 και έχουμε:

$$\kappa_m = \frac{7}{18} + \frac{19}{36} - \frac{5\sqrt{3}\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}\pi}{12} \Rightarrow \boxed{\kappa_m = \frac{37}{36} - \frac{7\sqrt{3}\pi}{24}} \quad (6.29)$$

Τελικά με εφαρμογή των συνθηκών 6.7 υπολογίστηκαν τα κ_φ, κ_m και επομένως βρέθηκαν και οι αντισταθμιστικοί όροι οι οποίοι απορροφούν τις απειρίες $1/\varepsilon$ με αποτέλεσμα η τελική μορφή του $\Pi(p^2)$ να είναι επανακανονικοποιημένη.

Σχήμα ελάχιστης αφαίρεσης (MS)

Στο σχήμα ελάχιστης αφαίρεσης οι αντισταθμιστικοί όροι είναι ανεξάρτητοι του $\tilde{\mu}$ και θεωρούμε πως έχουν την μορφή:

$$Z_\varphi = 1 - \frac{\alpha}{6\varepsilon} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (6.30)$$

$$Z_m = 1 - \frac{\alpha}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (6.31)$$

Επομένως σε αυτή την περίπτωση βλέπουμε από την 6.16 πως η αυτοενέργεια στο σύστημα MS είναι:

$$i\Pi(p^2)_{MS} = -i\frac{\alpha}{2} \left[-\frac{p^2}{6} + m^2 + \int_0^1 dx A(p) \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{A(p)} \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha^2, \varepsilon) \quad (6.32)$$

Στο σύστημα αυτό η μάζα m δεν είναι η φυσική μάζα του συστήματος καθώς ο διαδότης δεν έχει πόλο στο $p^2 = m^2$ πλέον και επομένως οι συνθήκες 6.7 δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Θα πρέπει να βρούμε κάποιες άλλες συνθήκες που να είναι παρόμοιες. Ο διαδότης όμως έχει πόλο στη φυσική μάζα $p^2 = m_{ph}^2$. Για να βρούμε τη φυσική μάζα θα κοιτάζουμε τον ακριβή διαδότη για την περίπτωση του MS από την εξίσωση 6.6:

$$\tilde{\Delta}_{F,MS}(p^2) = \frac{1}{p^2 - m^2 + \Pi(p^2)_{MS}} \quad (6.33)$$

Εφόσον ο ακριβής διαδότης έχει πόλο στη φυσική μάζα $p^2 = m_{phys}^2$, θα ισχύει:

$$\tilde{\Delta}_{F,MS}^{-1}(m_{ph}^2) = 0 \quad (6.34)$$

Από την 6.33 και την 6.34 μπορούμε να δούμε πως η φυσική μάζα θα είναι:

$$m_{ph}^2 = m^2 - \Pi(m^2)_{MS} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (6.35)$$

Η φυσική μάζα m_{ph} με τη μάζα m είναι τάξης $\mathcal{O}(\alpha)$ ενώ το $\Pi(m_{ph}^2)_{MS}$ έχει υπόλοιπο της τάξης $\mathcal{O}(\alpha^2)$ επομένως συνολικά η φυσική μάζα θα έχει τη μορφή που δίνεται από την 6.35. Η 6.35 μπορεί να υπολογισθεί και με αντικατάσταση δίνει:

$$\begin{aligned}
m_{ph}^2 &= m^2 \left(1 + \frac{5\alpha}{12} \right) - \frac{\alpha}{2} \int_0^1 dx (-x(1-x)m^2 + m^2) \ln \left(\frac{-x(1-x)m^2 + m^2}{\tilde{\mu}^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
&= m^2 \left(1 + \frac{5\alpha}{12} - \frac{\alpha}{2} \int_0^1 dx [1-x(1-x)] \ln \left(\frac{[1-x(1-x)]m^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
&= m^2 \left(1 + \frac{5\alpha}{12} - \frac{\alpha}{2} \int_0^1 dx [1-x(1-x)] \left[\ln[1-x(1-x)] + \ln \left(\frac{m^2}{\tilde{\mu}^2} \right) \right] \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
&= m^2 \left(1 + \frac{5\alpha}{12} + \frac{\alpha}{2} \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{m^2} \right) \int_0^1 dx [1-x(1-x)] - \frac{\alpha}{2} \int_0^1 dx [1-x(1-x)] \ln[1-x(1-x)] \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
&= m^2 \left(1 + \frac{5\alpha}{12} + \frac{5\alpha}{12} \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{m^2} \right) - \frac{\alpha}{2} (-0.15) \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
&= m^2 \left(1 + \frac{5\alpha}{12} \left[\ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{m^2} \right) + 1 + 0.075 \frac{12}{5} \right] \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
&= m^2 \left(1 + \frac{5\alpha}{12} \left[\ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{m^2} \right) + 1.18 \right] \right) + \mathcal{O}(\alpha^2)
\end{aligned} \tag{6.36}$$

όπου τα ολοκληρώματα υπολογίσθηκαν σε mathematica. Επομένως, από την 6.36 έχουμε:

$$m_{ph} = m \sqrt{1 + \frac{5\alpha}{12} \left[\ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{m^2} \right) + 1.18 \right] + \mathcal{O}(\alpha^2)} \tag{6.37}$$

Η φυσική μάζα δεν πρέπει να εξαρτάται από την ποσότητα $\tilde{\mu}$. Επομένως, η μερική παράγωγος της ως προς το $\ln(\tilde{\mu}^2)$ θα δίνει 0. Για να γίνει πιο εύκολα η εφαρμογή αυτή θα πάρουμε τον λογάριθμο της φυσικής μάζας:

$$\begin{aligned}
\ln(m_{ph}) &= \ln(m) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{5\alpha}{12} \left[\ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{m^2} \right) + 1.18 \right] \right) = \ln(m) + \frac{1}{2} \frac{5\alpha}{12} \left[\ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{m^2} \right) + 1.18 \right] + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
&= \ln(m) + \frac{5\alpha}{12} \left[\ln \left(\frac{\tilde{\mu}}{m} \right) + 0.59 \right] + \mathcal{O}(\alpha^2)
\end{aligned} \tag{6.38}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός πως σε τάξη $\mathcal{O}(\alpha)$ ο λογάριθμος δίνεται από:

$$\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2) \tag{6.39}$$

Επομένως έχουμε τώρα παίρνοντας την παράγωγο ως προς $\ln \tilde{\mu}$ της 6.38 ως $\frac{d}{d \ln \tilde{\mu}} = \tilde{\mu} \frac{d}{d \tilde{\mu}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d \ln(\tilde{\mu})} (\ln m_{ph}) &= 0 = \frac{5\alpha}{12} + \frac{1}{m} \frac{d}{d \ln \tilde{\mu}} m + \mathcal{O}(\alpha^2) \Rightarrow \\
\frac{d}{d \ln \tilde{\mu}} m &= \left(-\frac{5\alpha}{12} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right) m
\end{aligned} \tag{6.40}$$

όπου θεωρήσαμε πως $\frac{d}{d \ln \tilde{\mu}} \alpha = \mathcal{O}(\alpha^2)$ το οποίο θα δειχθεί παρακάτω.

7. Διορθώσεις στην κορυφή

Για τις διορθώσεις στην κορυφή ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με πριν. Στην εργασία θα μελετηθεί η περίπτωση της κορυφής 3 σημείων.

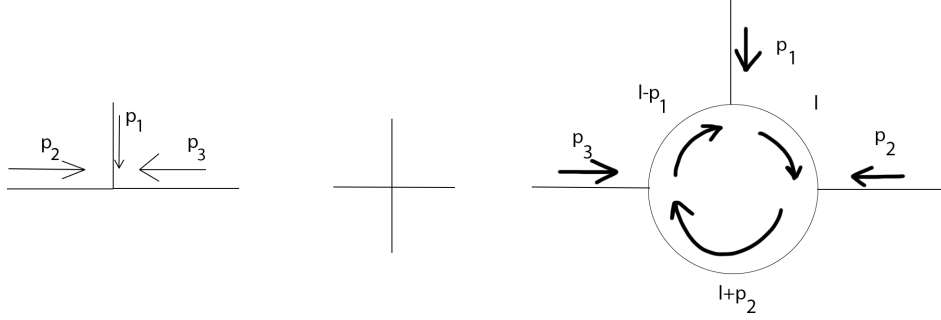


Figure 7.1: Οι διορθώσεις $\mathcal{O}(\lambda^3)$ στην κορυφή 3 σημείων. Η σύμβαση είναι πως οι εισερχόμενες στην κορυφή ορμές θεωρούνται θετικές. Με l συμβολίζεται η εσωτερική ορμή του βρόχου.

Όπως και πριν, στην κορυφή ισχύει η διατήρηση της ορμής, επομένως έχουμε:

$$p_1^\mu + p_2^\mu + p_3^\mu = 0 \quad , \quad \mu = 0, \dots, 3 \quad (7.1)$$

Η κορυφή ορίζεται από το άθροισμα όλων των 1PI γραφημάτων με τους εξωτερικούς διαδότες να έχουν αφαιρεθεί, το οποίο απεικονίζεται στο figure 7.1. Όπως και με τον διαδότη για τον υπολογισμό της κορυφής θα χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες Feynman και τη διαστατική εξομάλυνση. Έχουμε λοιπόν για την κορυφή:

$$i\Gamma^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = iZ_\lambda \lambda + (i\lambda)^3 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} i^3 \tilde{\Delta}_F((l-p_1)^2) \tilde{\Delta}_F(l^2) \tilde{\Delta}_F((l+p_2)^2) + \mathcal{O}(\lambda^5) \quad (7.2)$$

Χρησιμοποιούμε τις παραμέτρους Feynman του παραρτήματος A για να γράψουμε την έκφραση με τα Δ :

$$\tilde{\Delta}_F((l-p_1)^2) \tilde{\Delta}_F(l^2) \tilde{\Delta}_F((l+p_2)^2) = \int dF_3 \frac{1}{[x_1(l-p_1)^2 + x_2(l+p_2)^2 + x_3 l^2 - m^2(x_1+x_2+x_3)]^3} \quad (7.3)$$

όπου

$$\int dF_3 = 2 \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \quad (7.4)$$

Χρησιμοποιούμε την συνάρτηση δέλτα που υπάρχει στην 7.4 και η 7.3 γίνεται:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_F((l-p_1)^2) \tilde{\Delta}_F(l^2) \tilde{\Delta}_F((l+p_2)^2) &= \int dF_3 \frac{1}{[x_1(l-p_1)^2 + x_2(l+p_2)^2 + (1-x_1-x_2)l^2 - m^2]^3} \\ &= \int dF_3 \frac{1}{[(x_1 l^2 + x_1 p_1^2 - 2l x_1 p_1) + (x_2 l^2 + x_2 p_2^2 + 2l x_2 p_2) + (l^2 - x_1 l^2 - x_2 l^2) - m^2]^3} \\ &= \int dF_3 \frac{1}{[l^2 - 2l(x_1 p_1 - x_2 p_2) + x_1 p_1^2 + x_2 p_2^2 - m^2]^3} \\ &= \int dF_3 \frac{1}{[l^2 - 2l(x_1 p_1 - x_2 p_2) + (x_1 p_1 - x_2 p_2)^2 - x_1^2 p_1^2 - x_2^2 p_2^2 + 2x_1 p_1 x_2 p_2 + x_1 p_1^2 + x_2 p_2^2 - m^2]^3} \\ &= \int dF_3 \frac{1}{[(l - (x_1 p_1 - x_2 p_2))^2 + x_1(1-x_1)p_1^2 + x_2(1-x_2)p_2^2 + 2x_1 p_1 x_2 p_2 - m^2]^3} \\ &= \int dF_3 \frac{1}{[q^2 - D]^3} \end{aligned} \quad (7.5)$$

όπου ορίσαμε $q = (l - x_1 p_1 + x_2 p_2)$ και $D = -x_1(1-x_1)p_1^2 - x_2(1-x_2)p_2^2 - 2x_1 p_1 x_2 p_2 + m^2$. Κάνουμε μια περιστροφή Wick και η 7.2 μαζί με την 7.5 δίνουν:

$$i\Gamma^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = iZ_\lambda \lambda - i\lambda^3 \int dF_3 \int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q_E^2 + D)^3} + \mathcal{O}(\lambda^5) \quad (7.6)$$

όπου αλλάξαμε τη μεταβλητή της ολοκλήρωσης το οποίο δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα αφού $d^d l = d^d q$. Τώρα χρησιμοποιούμε διαστατική εξομάλυνση με $d = 6 - \varepsilon$ πίσω στον χώρο Minkowski και από τον τύπο C.15 για $a = 0, b = 3, \Delta = D$ προκύπτει:

$$i\Gamma^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = iZ_\lambda \lambda + \frac{i\lambda^3}{2(4\pi)^3} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 dF_3 \left(\frac{4\pi}{D}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} + \mathcal{O}(\lambda^5) \quad (7.7)$$

Κάνουμε την αλλαγή $\lambda \rightarrow \lambda\mu^{\varepsilon/2}$ όπως συζητήθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο και ορίζουμε και

$$\alpha = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3}. \quad (7.8)$$

Με αυτές τις αλλαγές, και την χρήση της C.8 μπορούμε να γράψουμε την κορυφή ως:

$$\begin{aligned} i\Gamma^3(p_1, p_2, p_3) &= i\lambda \left(Z_\lambda + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma \right) \int_0^1 dF_3 \left(\frac{4\pi\mu^2}{D} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right) = i\lambda \left(Z_\lambda + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma \right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 dF_3 \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{D} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right) \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= i\lambda \left(Z_\lambda + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \int_0^1 dF_3 \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{D} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right) \right) + \mathcal{O}(\alpha^2, \varepsilon) \\ &= i\lambda \left(Z_\lambda + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \int_0^1 dF_3 \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{De^\gamma} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right) \right) + \mathcal{O}(\alpha^2, \varepsilon) \\ &= i\lambda \left(Z_\lambda + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \int_0^1 dF_3 \ln \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{D} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right) \right) + \mathcal{O}(\alpha^2, \varepsilon) \\ &= i\lambda \left(Z_\lambda + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + 2 \ln \left(\frac{\tilde{\mu}}{m} \right) + \int_0^1 dF_3 \ln \left(\frac{m^2}{D} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right) \right) + \mathcal{O}(\alpha^2, \varepsilon) \\ &= i\lambda \left(Z_\lambda + \alpha \left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{\tilde{\mu}}{m} \right) \right] + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 dF_3 \ln \left(\frac{m^2}{D} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2, \varepsilon) \end{aligned} \quad (7.9)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\int_0^1 dF_3 = 1$ και όπως πριν

$$\tilde{\mu}^2 = 4\pi \frac{\mu^2}{e^\gamma} \quad (7.10)$$

Μπορούμε να απορροφήσουμε την απόκλιση $1/\varepsilon$ στον αντισταθμιστικό όρο Z_λ θέτοντας τον ως:

$$Z_\lambda + \alpha \left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{\tilde{\mu}}{m} \right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^4) = 1 + \alpha\kappa_\lambda + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (7.11)$$

όπου κ_λ είναι μια πραγματική σταθερά. Έτσι απορροφήθηκε η απειρία και η κορυφή είναι ανεξάρτητη του $\tilde{\mu}$. Διαφορετική τιμή του κ_λ συνεπάγεται διαφορετική σταθερά λ . Μπορούμε να θεωρήσουμε πριν από το πείραμα μια συγκεκριμένη τιμή της κ_λ και να υπολογίσουμε από την ενεργό διατομή την σταθερά λ αρκεί να έχουμε και στο πείραμα και στην θεωρία την ίδια τιμή του κ_λ . Επομένως υπάρχει ελευθερία στην επιλογή της τιμής του κ_λ και μια βολική τιμή είναι το $\kappa_\lambda = 0$ στο οποίο έχουμε:

$$\Gamma^{(3)}(0, 0, 0) = \lambda \quad (7.12)$$

Στην περίπτωση της χρήσης του σχήματος MS το αποτέλεσμα θα ήταν:

$$Z_\lambda = 1 - \frac{\alpha}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (7.13)$$

Θα μας φανεί χρήσιμο στο επόμενο και τελευταίο κεφάλαιο στο οποίο θα γίνει ο υπολογισμός της συνάρτησης β μέσα από την παράμετρο α .

8. Η συνάρτηση β στο σχήμα ελάχιστης αφαίρεσης (MS)

Η συνάρτηση β είναι μια σημαντική ποσότητα καθώς μας λείπει την εξάρτηση της παραμέτρου ζεύξης λ από τη μάζα μεταστοιχείωσης μ και για αυτό τον λόγο στο κεφάλαιο αυτό θα συζητηθεί ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζεται στην περίπτωση της θεωρίας φ^3 .

Ξεκινάμε από το γεγονός πως σε μια επανακανονικοποιημένη Lagrangian οι μεταβλητές της, συνδέονται με αυτές της bare μορφής της με τους τύπους 5.13-5.16 που συζητήθηκαν στο κεφάλαιο 5. Συγκεκριμένα, από αυτούς μας ενδιαφέρει ο:

$$\lambda_0 = Z_\varphi^{-3/2} Z_\lambda \lambda \mu^{\varepsilon'/2} \quad (8.1)$$

όπου μ είχαμε ορίσει την μάζα μεταστοιχείωσης για να είναι αδιάστατο το λ σε όλες τις διαστάσεις $d = 6 - \varepsilon'$. Στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε ορίσει την ποσότητα

$$\alpha \equiv \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \quad (8.2)$$

Μπορούμε να γράψουμε την 8.1 χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό 8.2 ως:

$$\alpha_0 = Z_\lambda^2 Z_\varphi^{-3} \alpha \mu^\varepsilon \quad (8.3)$$

όπου αλλάξαμε τον συμβολισμό $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon$ για ευκολία.

Στα προηγούμενα κεφάλαια είχαμε υπολογίσει στο σχήμα MS τις ποσότητες $Z_\lambda, Z_\varphi, Z_m$ ως:

$$Z_\varphi = 1 - \frac{\alpha}{6\varepsilon} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (8.4)$$

$$Z_m = 1 - \frac{\alpha}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (8.5)$$

$$Z_\lambda = 1 - \frac{\alpha}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (8.6)$$

Για υψηλότερες τάξεις, οι ποσότητες $Z_\lambda, Z_m, Z_\varphi$ μπορούν να γραφούν σε γενική μορφή ως:

$$Z_\varphi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\alpha)}{\varepsilon^n} \quad (8.7)$$

$$Z_m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(\alpha)}{\varepsilon^n} \quad (8.8)$$

$$Z_\lambda = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\alpha)}{\varepsilon^n} \quad (8.9)$$

Τώρα που έχουν οριστεί οι ποσότητες, επιστρέφουμε στην 8.3 και περνάμε λογάριθμο και στα 2 μέρη της:

$$\ln \alpha_0 = \ln(Z_\lambda^2 Z_\varphi^{-3}) + \ln(\alpha \mu^\varepsilon) \quad (8.10)$$

Ορίζουμε ως

$$G(\alpha, \varepsilon) = \ln(Z_\lambda^2 Z_\varphi^{-3}) \quad (8.11)$$

και βλέπουμε από την μορφή των 8.4, 8.6 πως έχουμε:

$$G(\alpha, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(\alpha)}{\varepsilon^n} \quad (8.12)$$

με

$$G_1(\alpha) = 2c_1(\alpha) - 3a_1(\alpha) = -\frac{3}{2}\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (8.13)$$

Με αυτή την αλλαγή, η 8.10 γράφεται:

$$\ln \alpha_0 = G(\alpha, \varepsilon) + \ln \alpha + \varepsilon \ln \mu \quad (8.14)$$

Στη συνέχεια διαφορίζουμε την 8.14 ως προς το $\ln \mu$ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{d}{d \ln \mu} \ln \alpha_0 = \frac{dG(\alpha, \varepsilon)}{da} \frac{da}{d \ln \mu} + \frac{1}{a} \frac{da}{d \ln \mu} + \varepsilon \quad (8.15)$$

Το α_0 θεωρούμε πως είναι ανεξάρτητο του μ επομένως η παράγωγος στο αριστερό μέρος της 8.15 πρέπει να κάνει μηδέν. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{da}{d \ln \mu} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{G'_1(\alpha)}{\varepsilon} + \frac{G'_2(\alpha)}{\varepsilon^2} + \dots \right] + \varepsilon \Rightarrow \\
-\varepsilon\alpha &= \frac{da}{d \ln \mu} \left[1 + \alpha \frac{G'_1(\alpha)}{\varepsilon} + \alpha \frac{G'_2(\alpha)}{\varepsilon^2} + \dots \right] \Rightarrow \\
\frac{da}{d \ln \mu} &= -\varepsilon\alpha \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha G'_1(\alpha)}{\varepsilon} + \frac{\alpha G'_2(\alpha)}{\varepsilon^2} + \dots \right)} \Rightarrow \\
\frac{da}{d \ln \mu} &\approx -\varepsilon\alpha \left(1 - \frac{\alpha G'_1(\alpha)}{\varepsilon} - \frac{\alpha G'_2(\alpha)}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha^2 G'_1(\alpha)}{\varepsilon^2} + \dots \right) \Rightarrow \\
\frac{da}{d \ln \mu} &= -\varepsilon\alpha + \alpha^2 G'_1(\alpha) + \frac{\alpha^2 G'_2(\alpha)}{\varepsilon} - \frac{\alpha^3 G'_1(\alpha)}{\varepsilon} + \dots
\end{aligned} \tag{8.16}$$

όπου $G'(\alpha) = \frac{dG(\alpha)}{d\alpha}$. Εφόσον το $\frac{d\alpha}{d \ln \mu}$ αποτελεί τον ρυθμό με τον οποίο το α αλλάζει για κάποια αλλαγή του μ , θα πρέπει στο όριο $\varepsilon \rightarrow 0$ να είναι πεπερασμένο. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να έχει την μορφή:

$$\frac{d\alpha}{d \ln \mu} = -\varepsilon\alpha + \beta(\alpha) \tag{8.17}$$

όπου $\beta(\alpha)$ είναι η συνάρτηση β . Επομένως, από τις 8.16, 8.17 προκύπτει ότι οι συντελεστές του $1/\varepsilon$ στην 8.16 πρέπει να είναι μηδέν:

$$\alpha G'_1(\alpha) = G'_2(\alpha) \tag{8.18}$$

Επιπλέον βλέπουμε πως η συνάρτηση β πρέπει να είναι:

$$\beta(\alpha) = \alpha^2 G'_1(\alpha) = -\frac{3\alpha^2}{2} + \mathcal{O}(\alpha^2) \tag{8.19}$$

Τώρα που γνωρίζουμε την συνάρτηση β μπορούμε να δούμε ένα ενδιαφέρον φαινόμενο με το οποίο θα τελειώσει και η εργασία. Άμα λάβουμε το όριο στο οποίο $\varepsilon \rightarrow 0$ τότε από την 8.17 έχουμε:

$$\frac{d\alpha}{d \ln \mu} = \beta(\alpha) = \beta_2 \alpha^2 \tag{8.20}$$

όπου $\beta_2 = -\frac{3}{2}$. Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την σχέση 8.20 με άκρα ολοκλήρωσης για το α από $\alpha \equiv \lambda$ που το σύστημα είναι αυτό που παρατηρούμε έως $\alpha_0 \equiv \lambda_0$ στο οποίο το σύστημα βρίσκεται στην bare κατάσταση του η οποία υπάρχει για $\mu = M$ όπου ως M έχουμε ορίσει μια πολύ μεγάλη ποσότητα το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε και ως άνω άκρο στην ολοκλήρωση ως προς το μ . Το μ αποτελεί μια ποσότητα με διαστάσεις μάζας επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ως κάτω άκρο της ολοκλήρωσης που το σύστημα βρίσκεται στην παρατηρήσιμη κατάσταση ως $\mu = m$ χωρίς απαραίτητως να εννοούμε πως το μ γίνεται η παρατηρήσιμη μάζα του συστήματος. Επομένως, η 8.21 γίνεται:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\alpha^2} &= \int_{\ln m}^{\ln M} \beta_2 d \ln \mu \Rightarrow \\
\left[-\frac{1}{\alpha} \right]_{\alpha}^{\alpha_0} &= \left[\mu \right]_{\ln m}^{\ln M} \beta_2 \Rightarrow \\
\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_0} &= \ln \left(\frac{M}{m} \right) \beta_2 \Rightarrow \\
\alpha &= \frac{\alpha_0}{1 + \beta_2 \alpha_0 \ln \left(\frac{M}{m} \right)}
\end{aligned} \tag{8.21}$$

Παρατηρούμε πως για πολύ μεγάλες τιμές του μ δηλαδή για $M \gg m, M \rightarrow \infty$ δημιουργείται ένας πόλος στο

$$M_{\text{pole}} = m \exp \left[\frac{1}{\beta_2 \alpha} \right] \tag{8.22}$$

Το φαινόμενο αυτό εμφανίζει μια ομοιότητα με τον πόλο Landau [7]. Οι Landau, Abrikosov, και Khalatnikov έδειξαν την σχέση ανάμεσα στο παρατηρήσιμο φορτίο g_{obs} στο "bare" φορτίο g_0 στην QED, με τον τύπο:

$$g_{\text{obs}} = \frac{g_0}{1 + \beta_2 g_0 \ln \left(\frac{\Lambda}{m} \right)} \tag{8.23}$$

Εμφανίζεται λοιπόν ένας πόλος της 8.23 ο οποίος έχει τιμή:

$$\Lambda_L = m \exp \left[\frac{1}{\beta_2 g_{\text{obs}}} \right] \quad (8.24)$$

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην ισχύει η QED για cut-off μεγαλύτερο του Λ_L . Βέβαια, σε περίπτωση που κρατηθεί σταθερό το g_0 τότε δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα με το να στείλουμε το Λ στο άπειρο καθώς το $g_{\text{obs}} \rightarrow 0$. Παρατηρούμε πως η περίπτωση στη φ^3 είναι παρόμοια με τον πόλο Landau καθώς οι 8.21,8.22 έχουν ίδια μορφή με τις 8.23,8.24 και έχουμε και στις 2 περιπτώσεις το ίδιο πρόβλημα με τον πόλο.

Επίλογος

Στην εργασία μελετήθηκε η επανακανονικοποίηση της θεωρίας φ^3 στις 6 διαστάσεις. Το ολοκλήρωμα διαδρομής αποτέλεσε χρήσιμο εργαλείο σε όλους τους τομείς της εργασίας. Ο αρμονικός ταλαντωτής έδωσε στον αναγνώστη την δυνατότητα να δει αναλυτικά τις πράξεις και μετά με μια αντιστοιχία όρων έγινε το άλμα στη θεωρία των ελεύθερων πεδίων. Έγινε υπολογισμός της μορφής των απειριών τόσο στον διαδότη όσο και στην κορυφή των διαγραμμάτων Feynman. Υπολογίστηκαν οι αντισταθμιστικοί όροι και με το σχήμα του φλοιού μάζας αλλά και με το σχήμα ελάχιστης αφαίρεσης. Οι αντισταθμιστικοί όροι ακύρωσαν τις απειρίες και η τελική μορφή του διαδότη και της κορυφής δεν είχε πρόβλημα με απειρίες. Είδαμε το πότε μια θεωρία είναι κανονικοποιήσιμη, πότε δεν είναι και πότε είναι υπερκανονικοποιήσιμη. Αναλύθηκαν και δείχθηκαν όλα τα εργαλεία και οι μέθοδοι που χρειάζεται κάποιος σε μια πρώτη επαφή με την επανακανονικοποίηση και έγινε εφαρμογή στη θεωρία φ^3 που ήταν ένα καλό παράδειγμα για να εφαρμοστούν οι τεχνικές αυτές.

Η εργασία έφερε τον αναγνώστη σε μια πρώτη επαφή με το αντικείμενο και σε επόμενο επίπεδο, μπορεί κάποιος να ασχοληθεί με ενεργές θεωρίες το οποίο είναι κάπως πιο απαιτητικό ή με το ολοκλήρωμα διαδρομής για φερμιόνια. Αυτό το μπορεί όμως να εξαχθεί σίγουρα από τη συγκεκριμένη εργασία είναι πως το ολοκλήρωμα διαδρομής είναι ένα εργαλείο το οποίο είναι πάρα πολύ χρήσιμο και εμφανίζεται σχεδόν συνέχεια στην κβαντική θεωρία πεδίου. Η κβαντική θεωρία πεδίου είναι ένας συνεχώς εξελισσόμενος κλάδος της φυσικής και σίγουρα παίζει σημαντικό ρόλο σε αρκετούς τομείς της.

Παραρτήματα

A. Παράρτημα A: Παράμετροι Feynman

Μερικοί χρήσιμοι τύποι οι οποίοι θα μπουν σε πολλούς από τους υπολογισμούς είναι οι παράμετροι Feynman [5]. Χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των loops και όχι μόνο. Αυτοί είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{AB} &= \int_0^1 dx \frac{1}{[A + (B - A)x]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x + y - 1) \frac{1}{[xA + yB]^2}, \\
 \frac{1}{AB^n} &= \int_0^1 dx dy \delta(x + y - 1) \frac{ny^{n-1}}{[xA + yB]^{n+1}}, \\
 \frac{1}{ABC} &= \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2}{[xA + yB + zC]^3} \\
 \frac{1}{A_1 \dots A_n} &= (n - 1)! \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(x_1 + \dots + x_n - 1) (x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^{-n}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

B. Παράρτημα B: Διαστατική ανάλυση

Έχουμε θέσει στην εργασία $\hbar = c = 1$ οπότε μπορούμε να κάνουμε τις μετατροπές από χρόνο σε μήκος και από μήκος σε μάζα⁻¹ με τις εξής μετατροπές:

$$\begin{aligned} T &= c^{-1}L \\ L &= \hbar c^{-1}M^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Γενικά μπορούμε να γράψουμε οποιαδήποτε ποσότητα A με μονάδες μάζας και θα συμβολιστεί με αγκύλες $[A]$. Έτσι, έχουμε:

$$[m] = +1 \quad (\text{B.2})$$

$$[x^\mu] = -1 \quad (\text{B.3})$$

$$[\partial^\mu] = +1 \quad (\text{B.4})$$

$$[d^d x] = -d \quad (\text{B.5})$$

Αυτό χρησιμεύει όταν θέλουμε να βρούμε τις διαστάσεις μάζας μια μεταβλητής σε μια Lagrangian. Για παράδειγμα, σε μια θεωρία σε d διαστάσεις όπου η Lagrangian είναι

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \sum_{n=3}^N \frac{1}{n!}\lambda_n\varphi^n \quad (\text{B.6})$$

και η αντίστοιχη δράση δίνεται από τον τύπο

$$\mathcal{S} = \int d^d x \mathcal{L}, \quad (\text{B.7})$$

το ολοκλήρωμα διαδρομής έχει τη μορφή:

$$Z[J] = \int D\varphi \exp\left[i \int d^d x (\mathcal{L} + J\varphi)\right] \quad (\text{B.8})$$

Βλέπουμε πως η δράση μπαίνει σαν όρισμα μέσα σε εκθετικό επομένως θα πρέπει να είναι αδιάστατη:

$$[\mathcal{S}] = 0 \quad (\text{B.9})$$

Από τις B.7, B.5 βλέπουμε πως η Lagrangian πρέπει να έχει μονάδες μάζας d :

$$[\mathcal{L}] = d \quad (\text{B.10})$$

Τέλος από τις B.4, B.10 και από το γεγονός πως το $\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi$ αποτελεί όρο της Lagrangian, καταλήγουμε στο ότι το πεδίο φ έχει:

$$d = 2 + 2[\varphi] \Rightarrow [\varphi] = \frac{d}{2} - 1 \quad (\text{B.11})$$

Επιπλέον εφόσον και το $\frac{1}{n!}\lambda\varphi^n$ αποτελεί και αυτό όρο της Lagrangian ισχύει ότι:

$$d = [\lambda] + N[\varphi] \Rightarrow [\lambda] = d - N\left(\frac{d}{2} - 1\right) \quad (\text{B.12})$$

C. Παράρτημα Γ: Η συνάρτηση Γάμμα

Η συνάρτηση Γάμμα [6] εμφανίζεται στους υπολογισμούς των ολοκληρωμάτων και ορίζεται για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς εκτός των μη θετικών ακέραιων ως:

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n = \text{θετικός ακέραιος} \quad (\text{C.1})$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}, \quad z = \text{μιγαδικός αριθμός με } \text{Re}(z) > 0 \quad (\text{C.2})$$

και έχει ιδιότητες:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{C.3})$$

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad \text{για } z \text{ μη ακέραιο} \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\Gamma(2z)\Gamma(2(1-z))}{\Gamma(1-z)\Gamma(1+z)} = \frac{1-2z}{2z} \frac{1}{\cos(\pi z)} \quad (\text{C.5})$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z) \quad (\text{C.6})$$

$$\Gamma(\varepsilon - n) = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(n+1-\varepsilon)}, \quad n = \text{θετικός ακέραιος}, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+ \quad (\text{C.7})$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} - \gamma + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}\right)z - \frac{1}{6}\left(\gamma^3 + \frac{\gamma\pi^2}{2} + 2\zeta(3)\right)z^2 + \mathcal{O}(z^3) \quad (\text{C.8})$$

$$\Gamma(-n+z) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{l=1}^n l^{-1} + \mathcal{O}(z) \right] \quad (\text{C.9})$$

όπου γ είναι η σταθερά Euler-Mascheroni που ορίζεται ως $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\ln(n) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$ και έχει την τιμή:

$$\gamma \approx 0.5772\dots \quad (\text{C.10})$$

Στην C.8 το $\zeta(z)$ αποτελεί την ζήτα συνάρτηση Riemann και δίνεται από τον τύπο $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ για $\text{Re}(s) > 1$ ή από τον $\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^t-1}$ με $\text{Re}(s) > 1$.

Σε διαστάσεις d όχι απαραίτητα ακέραιες, υπάρχει η εξής ταυτότητα:

$$\pi^{d/2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \right)^d = \int d\Omega_d \int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-r^2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \int d\Omega_d \quad (\text{C.11})$$

Από την C.11 φαίνεται εύκολα πως:

$$\Omega_d = \int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \quad (\text{C.12})$$

Μια άλλη σχέση που θα χρησιμοποιηθεί στην εργασία είναι η συνάρτηση βήτα Euler ως συνάρτηση της γάμμα:

$$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 dx (1-x)^{a-1} x^{b-1} \quad (\text{C.13})$$

Ευκλείδεια ολοκληρώματα σε διαστάσεις d , τα οποία έχουν περιστραφεί κατά Wick, μπορούν να υπολογιστούν με την χρήση της συνάρτησης Γάμμα αρκεί να είναι σφαιρικά συμμετρικά ως προς το k_E , με τον εξής τρόπο:

$$\int dk_E \frac{k_E^a}{(k_E + \Delta)^b} = \Delta^{\frac{a+1}{2}-b} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(b - \frac{a+1}{2}\right)}{2\Gamma(b)} \quad (\text{C.14})$$

Στην γενική περίπτωση πίσω στον χώρο Minkowski:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{2a}}{(k^2 - \Delta)^b} = i(-1)^{a-b} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{b-a-\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(a + \frac{d}{2}\right)\Gamma\left(b - a - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(b)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \quad (\text{C.15})$$

Bibliography

- [1] Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2003). Chapter 3. MEROMORPHIC FUNCTIONS AND THE LOGARITHM. In Complex analysis. essay, Princeton Univ. Press.
- [2] Peskin, M. E., & Schroeder, D. V. (1995). An introduction to quantum field theory. Perseus Books.
- [3] Srednicki, M. A. (2010). Quantum Field theory. Cambridge University Press.
- [4] Zee, A. (2013). Part 3, Appendix 1: Pauli-Villars regularization. In Quantum Field Theory in a Nutshell. essay, World Publishing Corporation.
- [5] Weinberg, S. (1995). Appendix Assorted Integrals. In The quantum theory of fields I-II. volume I: Foundations (p. 497). essay, Cambridge University Press.
- [6] Sebah, P., & Gourdon, X. (2002, February 4). Introduction to the gamma function . Numbers, constants and computation. Retrieved September 7, 2022, from <https://www.csie.ntu.edu.tw/~b89089/link/gammaFunction.pdf>
- [7] Gockeler, M., Horsley, R., Linke, V., Rakow, P., Schierholz, G., & Stuben, H. (1997, December). (PDF) is there a Landau pole problem in QED? - researchgate. Retrieved September 11, 2022, from https://www.researchgate.net/publication/2083170_Is_there_a_Landau_pole_problem_in_QED