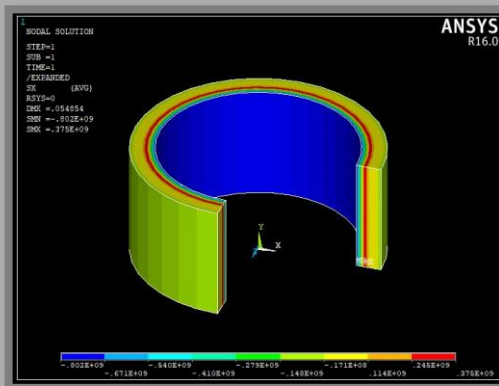
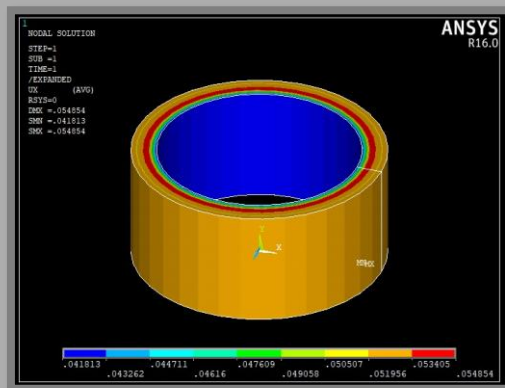
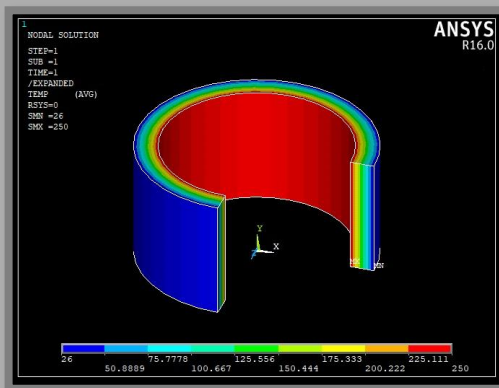




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Δ.Π.Μ.Σ. “ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ”

Μεταπτυχιακή εργασία
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΘΕΡΜΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ



Η μεταπτυχιακή εργασία με τίτλο «Υπολογιστική Μελέτη Θερμομηχανικών Προβλημάτων» εκπονήθηκε στο πλαίσιο του διατμηματικού προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών “Υπολογιστική Μηχανική”, του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον Καθηγητή Ευστάθιο Θεοτόκογλου, επιβλέποντα της εργασίας.

Στυλιανός Κουρουνάρχης, Μηχανολόγος Μηχανικός

ABSTRACT

The current post-graduate thesis focuses on the study of thermomechanical problems. Thermomechanics is the field of Mechanics that studies temperature field problems and the effects of temperature variation on the mechanical behavior of a body. The specific thesis will be limited in the area of Generalized Linear Thermoelasticity.

Initially, the fundamental theory of Linear Thermoelasticity is presented. Detailed attention is given to the basic principles of the Continuum Mechanics, the First and Second Laws of Thermodynamics and Fourier's Law of heat conduction. Consequently, the classical model (based on Fourier's Law) and the non-classical models (Lord-Shulman, Green-Lindsay, Green-Naghdi) of Thermoelasticity are given. Compared to the classical model, non-classical models do not display the paradox of infinite propagation speed of thermal signals (the paradox is caused by the Fourier model of heat conduction) and describe better the response of a solid to a fast transient thermal loading and at low temperatures. The classical and non-classical models constitute the extended model of Generalized Thermoelasticity. Discussion of initial and boundary conditions, the variational formulation and the reciprocity theorem for Thermoelasticity are also presented.

Numerical methods are used for the solution of the thermoelastic problems. The Finite Difference Method and the Finite Element Method are presented. Using the fundamental theory and the two numerical methods mentioned above, five types of thermomechanical problems are studied. The thermomechanical problems are the following:

- Study of the elliptic, parabolic and hyperbolic type of heat conduction.
- Thermal stress analysis of a plate.
- Thermal stress analysis of a thickened cylinder.
- Thermoelastic analysis of a 2d component that consists of 2 different materials.
- Study of the thermomechanical behavior of an elastic hollow sphere.

Finally, the results of the applications are discussed and suggestions for future research are presented. For the synthesis of the thesis, the following software was used: Microsoft Office, Mathtype, Matlab and ANSYS Mechanical APDL.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Θεωρία Θερμοελαστικότητας αποτελεί επέκταση της κλασικής Θεωρίας Ελαστικότητας. Συνιστά μαθηματικό μοντέλο περιγραφής κι επίλυσης σύνθετων τεχνικών προβλημάτων, στα οποία λαμβάνουν χώρα ταυτοχρόνως φαινόμενα θερμικής και μηχανικής φύσης. Συνδυάζει, δηλαδή, τους επιστημονικούς κλάδους της Μετάδοσης Θερμότητας και της Θεωρίας Ελαστικότητας.

Γνωρίζουμε πειραματικά ότι τα πεδία τροπών και θερμοκρασίας αλληλεπιδρούν. Σε αυτό το δεδομένο εδράζεται η σύζευξη θερμικών και μηχανικών μεγεθών σε κοινές μαθηματικές σχέσεις, με στόχο την περιγραφή της θερμομηχανικής συμπεριφοράς ενός στερεού σώματος υπό σύνθετες θερμικές και μηχανικές συνθήκες. Εξαιτίας της σύζευξης, έχουμε την εμφάνιση θερμοκρασιακού όρου στην έκφραση της εξίσωσης κίνησης στο πεδίο των μετατοπίσεων και εμφάνιση όρου παραμόρφωσης στην εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας.

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία επικεντρώνεται στην υπολογιστική μελέτη θερμομηχανικών προβλημάτων στο πλαίσιο της θεωρίας Θερμοελαστικότητας. Μελετώνται προβλήματα μεταβαλλόμενου (χωρικά και χρονικά) θερμοκρασιακού πεδίου και προβλήματα ανάλυσης τάσεων εξαιτίας θερμοκρασιακών μεταβολών. Στα προβλήματα Θερμοελαστικότητας είναι πολύ δύσκολη η εύρεση αναλυτικής λύσης εξαιτίας της σύνθετης δομής τους. Επομένως, η χρήση αριθμητικών μεθόδων είναι επιβεβλημένη. Στη συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι των Πεπερασμένων Διαφορών και των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Αρχικά παρατίθεται το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο της γραμμικής Θερμοελαστικότητας. Δίδεται η θεμελίωση της στα πλαίσια της Θερμοδυναμικής των μη αντιστρεπτών διεργασιών. Δίδεται το κλασικό μοντέλο Θερμοελαστικότητας (βασισμένο στο Νόμο του Fourier) κι ακολούθως τα μη κλασικά θερμοελαστικά μοντέλα Lord-Shulman, Green-Lindsay, Green-Naghdi. Τα θερμοελαστικά μοντέλα Lord-Shulman, Green-Lindsay, Green-Naghdi, τα οποία έχουν διατυπωθεί και πιο πρόσφατα χρονικά, δεν διέπονται από το παράδοξο της άπειρης ταχύτητας διάδοσης του θερμικού κύματος. Αυτό το παράδοξο χαρακτηρίζει το κλασικό μοντέλο Θερμοελαστικότητας και οφείλεται στο ότι ο Νόμος του Fourier δημιουργεί ένα υπερβολικού-παραβολικού τύπου σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Το κλασικό μοντέλο μαζί με τα θερμοελαστικά μοντέλα Lord-Shulman, Green-Lindsay, Green-Naghdi συνθέτουν το διευρυμένο μοντέλο της Γενικευμένης Θερμοελαστικότητας.

Μετά την παράθεση της βασικής θεωρίας μελετούμε πέντε είδη θερμομηχανικών θεμάτων. Για την επίλυση χρησιμοποιούνται η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων και η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών. Βασικά στοιχεία από τις Διαφορικές Εξισώσεις δίδονται στο Παράρτημα της εργασίας.

Αναλυτικότερα, η εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια συν το Παράρτημα και δομείται κατά τον ακόλουθο τρόπο:

- Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί την εισαγωγή της εργασίας. Γίνεται αναφορά στο επιστημονικό περιεχόμενο του κλάδου της Θερμομηχανικής. Παρουσιάζεται συνοπτικά η ιστορική εξέλιξη της Θεωρίας Θερμοελαστικότητας. Δίδεται συνοπτικά το ευρύτερο πλαίσιο στοιχείων και αρχών της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου, στο οποίο εδράζεται και διατυπώνεται η Θεωρία Θερμοελαστικότητας.
- Στο δεύτερο κεφάλαιο διατυπώνονται οι βασικές θεωρητικές αρχές της γραμμικής Θερμοελαστικότητας. Παραθέτονται η αρχή της Μετάδοσης Θερμότητας διά Αγωγής

(Νόμος του Fourier), που περιγράφει το μηχανισμό μετάδοσης θερμότητας εντός στερεού φορέα και οι θεμελιώδεις υποθέσεις στις οποίες στηρίζεται το κλασικό θερμοελαστικό μοντέλο. Με το συνδυασμό των αρχών της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου και του Νόμου Fourier εξάγεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει το συζευγμένο θερμομηχανικό πρόβλημα και αποτελεί το σύστημα εξισώσεων πεδίου της κλασικής Θερμοελαστικότητας. Εν συνεχεία, δίδεται η έννοια της μη κλασικής Θερμοελαστικότητας, η οποία δε στηρίζεται στο Νόμο Fourier, εξαιτίας του οποίου παρουσιάζεται το παράδοξο της άπειρης ταχύτητας διάδοσης του θερμικού σήματος. Περιγράφονται τα μοντέλα μη κλασικής Θερμοελαστικότητας Lord-Shulman, Green-Lindsay και Green-Naghdi. Ακολουθεί η παράθεση του ενοποιημένου μοντέλου της Γενικευμένης Θερμοελαστικότητας, το οποίο παρουσιάζει τα προαναφερθέντα μοντέλα σε ενοποιημένες σχέσεις. Δίδεται το ολοκληρωμένο μαθηματικό μοντέλο (Πρόβλημα συνοριακών συνθηκών, αρχικών τιμών και συνδυασμός αρχικών και συνοριακών τιμών) και γίνεται η κατηγοριοποίηση των θερμοελαστικών προβλημάτων [μη συζευγμένο-συζευγμένο, δυναμικό-στατικό, σταθερής (μόνιμης)-μεταβαλλόμενης (μεταβατικής) θερμοκρασιακής κατάστασης]. Παρουσιάζεται το θεώρημα της μοναδικότητας των λύσεων της Θερμοελαστικότητας. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παράθεση των βασικών ενεργειακών θεωρημάτων της Θερμοελαστικότητας (Αρχή των Μεταβολών και Θεώρημα Αμοιβαιότητας).

- Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι δύο υπολογιστικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην εργασία: α) Η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών και β) η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων.
- Στο τέταρτο κεφάλαιο της εργασίας γίνεται επίλυση θερμομηχανικών προβλημάτων με τη χρήση της θεωρίας Θερμοελαστικότητας και των αριθμητικών μεθόδων που διατυπώνονται στο τρίτο κεφάλαιο. Μελετώνται τα ακόλουθα θέματα: α) Η ελλειπτική, η παραβολική και η υπερβολική περιγραφή του προβλήματος Μετάδοσης Θερμότητας, β) Η ανάπτυξη θερμικών τάσεων σε πλάκα, γ) Η ανάπτυξη θερμικών τάσεων σε κυλινδρικό φορέα, δ) Η θερμοελαστική συμπεριφορά επίπεδου φορέα που δομείται από δύο διαφορετικά υλικά, ε) Η θερμομηχανική συμπεριφορά γραμμικά ελαστικού, σφαιρικού φορέα.
- Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο διατυπώνονται οι παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα επί των αποτελεσμάτων των εφαρμογών. Τέλος, δίδονται προτάσεις για περαιτέρω μελέτη στις ίδιες, αλλά και σε παρεμφερείς θεματικές ενότητες.
- Στο Παράρτημα παραθέτονται στοιχεία από τη θεωρία των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων.

Για την σύνθεση της εργασίας έγινε χρήση των λογισμικών: Microsoft Office, Mathtype, Matlab και ANSYS Mechanical APDL.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ**ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

1.1) Θερμομηχανικά προβλήματα	1
1.2) Ιστορική εξέλιξη Θερμοελαστικότητας	2
1.3) Στοιχεία και βασικές αρχές της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου	4
1.3.1) Στοιχεία της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου	4
1.3.2) Βασικές Αρχές της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου	6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ**ΒΑΣΙΚΕΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ**

2.1) Κλασικό μοντέλο θερμοελαστικότητας	12
2.1.1) Μετάδοση θερμότητας δι' Αγωγής (νόμος Fourier)	12
2.1.2) Διατύπωση εξισώσεων πεδίου κλασικής Θερμοελαστικότητας	14
2.2) Μη κλασικά μοντέλα Θερμοελαστικότητας – Γενικευμένη Θερμοελαστικότητα	19
2.3) Θερμοελαστικό μοντέλο Lord-Shulman	20
2.4) Θερμοελαστικό μοντέλο Green-Lindsay	23
2.5) Θερμοελαστικό μοντέλο Green-Naghdi	25
2.6) Το ενοποιημένο μοντέλο Γενικευμένης Θερμοελαστικότητας	29
2.7) Το πλήρες μαθηματικό μοντέλο	32
2.8) Κατηγοριοποίηση των προβλημάτων Θερμοελαστικότητας	33
2.9) Θεώρημα Μοναδικότητας	35
2.10) Αρχή των Μεταβολών	38
2.11) Θεώρημα Αμοιβαιότητας	41

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**

3.1) Η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών για υπερβολικές, παραβολικές και ελλειπτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις	45
3.1.1) Αριθμητική επίλυση της υπερβολικής εξίσωσης	45
3.1.2) Αριθμητική επίλυση της παραβολικής εξίσωσης	50
3.1.3) Αριθμητική επίλυση της ελλειπτικής εξίσωσης	53
3.2) Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων για τα προβλήματα Θερμοελαστικότητας	53

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

4.1) Ελλειπτική, παραβολική και υπερβολική περιγραφή του προβλήματος Μετάδοσης Θερμότητας	57
4.1.1) Μελέτη του ελλειπτικού προβλήματος Θερμικής Αγωγιμότητας	58
4.1.2) Μελέτη του παραβολικού προβλήματος Θερμικής Αγωγιμότητας	59
4.1.3) Μελέτη του υπερβολικού προβλήματος Θερμικής Αγωγιμότητας	62
4.2) Ανάπτυξη θερμικών τάσεων σε πλάκα	65
4.3) Ανάπτυξη θερμικών τάσεων σε κυλινδρικό φορέα	70

4.4) Θερμοελαστική συμπεριφορά επίπεδου φορέα που δομείται από δύο διαφορετικά υλικά	76
4.5) Θερμομηχανική συμπεριφορά γραμμικά ελαστικού, σφαιρικού φορέα	79
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ	
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	
5.1) Παρατηρήσεις-Συμπεράσματα	84
5.2) Προτάσεις	85
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	
I) Στοιχεία διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους	87
I.1) Γενικές έννοιες και ορισμοί	87
I.2) Κατηγοριοποίηση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους	87
I.3) Αρχικές και συνοριακές συνθήκες	88
I.4) Προβλήματα με μερικές διαφορικές εξισώσεις	89
I.5) Η γραμμική μερική διαφορική εξίσωση β' τάξης	90
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	
Βιβλία-Άρθρα	93

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το περιεχόμενο της θεωρίας Θερμοελαστικότητας. Παρατίθεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή της εξέλιξης της θεωρίας και δίδονται βασικές γνώσεις από τη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου και τη Θερμοδυναμική.

Στόχος του κεφαλαίου η εισαγωγή στο περιεχόμενο της Θερμοελαστικότητας και η συνοπτική παράθεση των βασικών εννοιών και στοιχείων, πάνω στα οποία θα διατυπωθεί η βασική θεωρία που ακολουθεί.

1.1) ΘΕΡΜΟΜΗΧΑΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Σε ένα μεγάλο αριθμό τεχνολογικών προβλημάτων ο μηχανικός καλείται να μελετήσει τη μηχανική συμπεριφορά στερεών φορέων που παρουσιάζουν θερμοκρασιακές διαφορές ανά περιοχές. Αποτέλεσμα των θερμοκρασιακών διαφορών αποτελεί η μεταφορά ενέργειας, γνωστή σαν Μετάδοση Θερμότητας. Η Μετάδοση Θερμότητας, από και προς τον στερεό φορέα, έχει ως συνέπεια είτε φαινόμενα συστολής-διαστολής, είτε αλλαγής φάσης (τήξη-πήξη). Στην περίπτωση μη αλλαγής φάσης, ο μηχανισμός μετάδοσης θερμότητας εντός του στερεού φορέα περιγράφεται από την αρχή Μετάδοσης της Θερμότητας διά Αγωγής (Νόμος του Fourier).

Σε αυτού του τύπου τα μηχανικά συστήματα παρατηρείται αλληλεπίδραση των πεδίων παραμόρφωσης και θερμοκρασίας. Η σύνθετη θερμομηχανική φύση τέτοιων φαινομένων οδήγησε στη γέννηση κι ανάπτυξη του κλάδου της Θερμομηχανικής και της Θεωρίας Θερμικών Τάσεων (Thermal Stresses). Η Θεωρία Θερμικών Τάσεων δημιουργήθηκε από τη σύζευξη των εξισώσεων περιγραφής των μηχανικών και θερμικών μεγεθών. Η σύζευξη κρίνεται απαραίτητη τόσο για τη δημιουργία μοντέλων περιγραφής κοντινότερων στην πραγματική φύση των φαινομένων, όσο και για την εξαγωγή ακριβέστερων αποτελεσμάτων. Η Θεωρία Θερμικών Τάσεων τοποθετείται σαν επιστημονικός κλάδος στην τομή της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου με την Θερμοδυναμική, τη Μετάδοση Θερμότητας και τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Επιγραμματικά να αναφέρουμε ότι σε φυσικό επίπεδο (Ατομική Φυσική) η μετάδοση θερμότητας ουσιαστικά αποτελεί μετάδοση της δόνησης των ατόμων που αποτελούν την ύλη. Όσο θερμότερο είναι ένα υλικό τόσο πιο γρήγορα δονούνται τα άτομα του. Η μετάδοση των δονήσεων γίνεται μέσω των ηλεκτρονίων και των φωνονίων. Το φωνόνιο αποτελεί το στοιχειώδες σωματίο που μεταδίδει τη θερμότητα και τον ήχο. Παρουσιάζει δυική συμπεριφορά αντίστοιχη με του φωτονίου (κυματική αλλά και σωματιδιακή συμπεριφορά). Στα μέταλλα οι κύριοι φορείς μεταφοράς θερμότητας είναι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Ας επανέλθουμε, όμως, στα πλαίσια μοντελοποίησης της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου.

Η χρήση θερμομηχανικών μοντέλων για την ανάλυση κι επίλυση προβλημάτων κρίνεται απαραίτητη για τον μηχανικό σε πολλούς χώρους της σύγχρονης τεχνολογίας. Από την αεροναυπηγική, την αστροναυτική, τους θερμοκινητήρες και τις στροβιλομηχανές έως και τους μεγάλους πυρηνικούς σταθμούς παραγωγής ενέργειας οι θερμικές τάσεις διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στο σχεδιασμό και δημιουργία ασφαλών μηχανισμών, διατάξεων και κατασκευών. Σε τέτοιου τύπου μηχανικά συστήματα, στα οποία έχουμε μεγάλα ποσά μεταφερόμενης θερμικής ενέργειας, δεν γίνεται να

αμελήσουμε την επιρροή των θερμικών μεγεθών στην αντοχή του στερεού φορέα. Η θερμική καταπόνηση του φορέα μπορεί να έχει πολλές αιτίες που εξαρτώνται από το σχεδιασμό και τη χρήση του μηχανικού συστήματος, αλλά και από το εξωτερικό περιβάλλον μέσα στο οποίο λειτουργεί. Συνήθεις αιτίες υψηλών θερμοκρασιακών πεδίων, μεταβολών των πεδίων αυτών και δημιουργίας μετάδοσης θερμότητας σε φορείς αποτελούν: η επαφή με φέροντα θερμά ρευστά, η έκθεση σε ακτινοβολία, η επαφή με άλλο στερεό διαφορετικής θερμοκρασίας και η δημιουργία τριβών κατά την κίνηση ενός μηχανισμού.

Στους θερμοκινητήρες η μετατροπή της χημικής ενέργειας του καυσίμου σε θερμική ενέργεια (μέσω της καύσης) και εν συνεχεία σε μηχανική, έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία υψηλών θερμοκρασιακών πεδίων, που είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη στην αντοχή του μηχανισμού. Σε κελύφη θερμικών εναλλακτών ή σωληνώσεων που φέρουν ρευστά πολύ υψηλής θερμοκρασίας και πίεσης, το θερμοκρασιακό πεδίο που δημιουργείται επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τα πεδία τάσεων στους φορείς. Στην αεροναυτική σημαντικό ρόλο στην επιλογή υλικού και στο σχεδιασμό της ατράκτου και των πτερυγών του αεροσκάφους συντελούν οι πολύ χαμηλές θερμοκρασίες που επικρατούν σε πολύ μεγάλα ύψη, ενώ στα διαστημικά σκάφη οι πολύ υψηλές θερμοκρασίες που δημιουργούν οι τριβές εξαιτίας της γήινης ατμόσφαιρας, κατά την είσοδο και έξοδο από αυτήν. Αυτά όπως και αμέτρητα άλλα τεχνολογικά επιτεύγματα οφείλονται στην ανάπτυξη του κλάδου των Θερμικών Τάσεων.

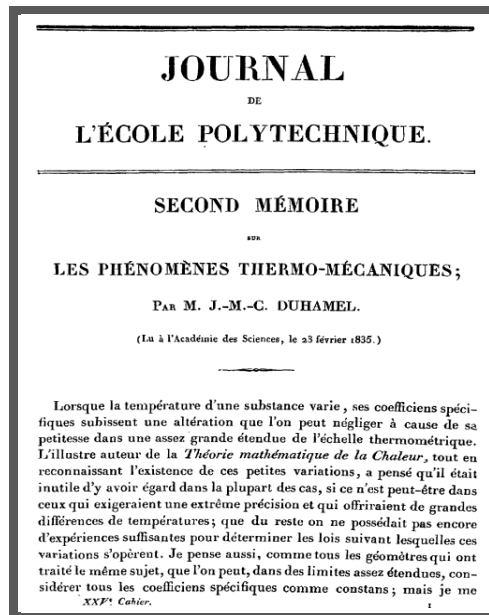
Σημαντική βοήθεια στην επίλυση των πολύπλοκων συστημάτων διαφορικών εξισώσεων του συζευγμένου θερμομηχανικού προβλήματος προσέφερε η ανάπτυξη των υπολογιστικών μαθηματικών μεθόδων και ιδιαίτερα οι μέθοδοι των Πεπερασμένων Διαφορών και των Πεπερασμένων Στοιχείων. Βεβαίως, η πειραματική μελέτη συνεχίζει να αποτελεί το σημαντικότερο μεθοδολογικό εργαλείο εύρεσης της αντοχής σε σύνθετες θερμομηχανικές φορτίσεις. Η εργαστηριακή προσομοίωση μας δίνει τα απαραίτητα δεδομένα τόσο για την αντοχή των υλικών φορέων σε πραγματικές συνθήκες, όσο και για τη διατύπωση θεωρητικών μοντέλων που περιγράφουν τη συμπεριφορά τους.

Οι καταστατικές σχέσεις, που συσχετίζουν το πεδίο τάσεων με τα πεδία τροπών και θερμοκρασίας, εξαρτώνται από το υλικό του φορέα και το μέγεθος των φορτίων και θερμοκρασιών καταπόνησης. Σε αυτήν την εργασία θα περιοριστούμε στα πλαίσια της γραμμικής Θερμοελαστικότητας. Η Θεωρία Θερμοελαστικότητας αποτελεί τη γενίκευση της κλασσικής Θεωρίας Ελαστικότητας σε μη ισόθερμες διεργασίες.

1.2) ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Το πρώτο επιστημονικό άρθρο στην Θερμοελαστικότητα έχει συντάκτη τον J. M. C. Duhamel, τον πρωτοπόρο της Θεωρίας Θερμικών Τάσεων και της Θεωρίας Θερμοελαστικότητας. Εκδόθηκε από την Παρισινή Πολυτεχνική Σχολή (École Polytechnique) το 1837 και περιλαμβάνει την σύζευξη των πεδίων παραμόρφωσης και θερμοκρασίας για πρώτη φορά στην Ιστορία της Εφαρμοσμένης Μηχανικής. Στο έργο του Duhamel γίνεται η εισαγωγή του όρου θερμικής διαστολής στη εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας και περιγράφονται προβλήματα συνοριακών συνθηκών. Αξίζει να αναφερθεί ότι η Θεωρία Θερμοελαστικότητας δεν ήρθε πολύ αργότερα, αλλά ως συνέχεια στα έργα των C.L.M.H. Navier και J.B.J. Fourier. Ο Navier το 1827 δημοσίευσε τη διατριβή του πάνω στη Θεωρία Ελαστικότητας, ενώ ο Fourier το 1822 τη διατριβή του πάνω στη

Θεωρία Μετάδοσης Θερμότητας.



Το εξώφυλλο της πρώτης εργασίας στη θερμοελαστικότητα, από τον J.M.C. Duhamel

Το επόμενο μεγάλο βήμα στην εξέλιξη της Θεωρίας Θερμοελαστικότητας έγινε στις αρχές του 20^{ου} αιώνα από τους W. Voigt και H. Jeffreys. Ο πρώτος στο έργο του 'Lehrbuch der Kristallphysik' και ο δεύτερος στο έργο 'The thermodynamics of an elastic solid' θεμελίωσαν υπό την έννοια της θερμοδυναμικής τις εξισώσεις της θερμοελαστικότητας. Το 1950 δημοσιεύεται η καινοτόμα εργασία της V. I. Danilovskaya πάνω στη δυναμική θερμοελαστικότητα με τίτλο στα αγγλικά 'Thermal Stresses in an Elastic Half-Space Arising after a Sudden Heating of its Boundary'. Στην εργασία επιλύεται το πρόβλημα εύρεσης του πεδίου τάσεων σε ημίχωρο εξαιτίας θερμικού σοκ. Το πρώτο βιβλίο θερμοελαστικότητας συγγράφεται από τους E. Mela και H. Parkus με τον τίτλο 'Wärmespannungen infolge stationäre Temperaturfelder' και εκδίδεται το 1953. Το 1956 ο M.A. Biot στο έργο του 'Thermoelasticity and irreversible thermodynamics' ολοκληρώνει τη θερμοδυναμική θεμελίωση της θερμοελαστικότητας, με τη διατύπωση της εξίσωσης θερμικής αγωγιμότητας στη βάση της θερμοδυναμικής των μη αντιστρεπτών διεργασιών. Αξιοσημείωτη η προσφορά στο χώρο του Witold Nowacki, με πλήθος άρθρων πάνω σε προβλήματα θερμοελαστικότητας και το βιβλίο του 'Thermoelasticity' (1960) να θεωρείται, έως τις μέρες μας, κορυφαίο.

Στα θερμοελαστικά μοντέλα, στα οποία μέχρι τώρα έχουμε αναφερθεί, η σύνθεση της εξίσωσης θερμικής αγωγιμότητας και των εξισώσεων κίνησης στηρίζεται στο Νόμο του Fourier. Η μοντελοποίηση σε αυτή τη βάση συνθέτει το κλασικό μοντέλο θερμοελαστικότητας. Ορόσημο για τη δημιουργία των μη κλασικών μοντέλων θερμοελαστικότητας αποτελεί το βιβλίο 'Generalized Dynamical Theory of Thermoelasticity' (1967) των H.W. Lord και Y.S. Shulman. Στο έργο αυτό πέρα από την έννοια της συζευγμένης επίλυσης του συστήματος θερμοελαστικών εξισώσεων, που ήδη υπήρχε, προωθείται και η ιδέα αλλαγής της εξίσωσης του Fourier για το σχηματισμό της εξίσωσης θερμικής αγωγιμότητας. Αιτίες αυτής της αλλαγής, η εμφάνιση του παραδόξου της άπειρης ταχύτητας διάδοσης του θερμικού σήματος λόγω της εξίσωσης Fourier, αλλά και η

καλύτερη περιγραφή δυναμικών προβλημάτων (κυρίως προβλημάτων με ακαριαίες μεταβολές). Οι παρατηρήσεις και οι μετατροπές πάνω στην εξίσωση του Fourier πρωτοδιατυπώνονται από τον Maxwell (στα τέλη του 19^{ου} αιώνα) και τον Cattaneo (στα μέσα του 20^{ου} αιώνα). Σε αυτή τη λογική έχουν γίνει προσπάθειες και δημιουργήθηκαν νέα μοντέλα στα πλαίσια της σύγχρονης Θερμοελαστικότητας, από το 1967 και το έργο των Lord-Shulman έως τις μέρες μας. Πρωτοπόροι στον κλάδο θεωρούνται οι J. Ignaczak και R. B. Hetnarski με σπουδαίο έργο στη δυναμική Θερμοελαστικότητα.

Σε αυτήν την εργασία θα παρουσιαστούν τα σημαντικότερα μοντέλα της μη κλασικής Θερμοελαστικότητας, τα μοντέλα των Lord-Shulman, Green-Lindsay και Green-Naghdi.

1.3) ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

Η Μηχανική του Συνεχούς Μέσου στηρίζεται στην ακόλουθη υπόθεση. Το σώμα θεωρείται συνεχές και θεωρείται ότι παραμένει συνεχές, μετά την εφαρμογή εξωτερικής φόρτισης. Με την υπόθεση αυτή αμελείται η ατομική δομή της ύλης και το σώμα εξιδανικεύεται ως απεικόνιση τμήματος του Ευκλείδειου χώρου, του οποίου κάθε σημείο αντιστοιχεί πλέον με κάθε στοιχειώδες σωματίδιο του υλικού. Με βάση αυτήν την υπόθεση, αρχικώς γειτονικά σημεία παραμένουν γειτονικά και μετά την φόρτιση του σώματος, όπως επίσης δεν αναπτύσσονται ρωγμές ή οπές στο εσωτερικό. Κάθε σώμα που υπακούει στην παραπάνω υπόθεση καλείται Συνεχές Μέσο. Η μελέτη της παραμορφώσεως του καλείται Μηχανική του Συνεχούς Μέσου. Η Μηχανική του Συνεχούς Μέσου ασχολείται με τη μελέτη του πεδίου των τάσεων, του πεδίου των μετατοπίσεων καθώς και με τις ροές (π.χ. θερμότητας) που αναπτύσσονται σε στερεά, υγρά ή αέρια σώματα.

Ακολουθεί η παράθεση στοιχείων της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου, καθώς και οι βασικές αρχές της, πάνω στις οποίες θα γίνει η διατύπωση της κλασικής και μη κλασικής Θερμοελαστικότητας. Στην εργασία, θα χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή των κινητικών και θερμικών μεγεθών τόσο ο διανυσματικός τρόπος γραφής, όσο και ο δεικτικός συμβολισμός.

1.3.1) ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

Ένα συνεχές μέσο στον σχηματισμό αναφοράς (αρχική κατάσταση) καταλαμβάνει όγκο V_0 . Στον τρέχοντα σχηματισμό (παραμορφωμένη κατάσταση) καταλαμβάνει όγκο V . Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων X_i για την κατάσταση αναφοράς ($t=0$), που καλούνται υλικές συντεταγμένες και σύστημα συντεταγμένων x_i στην τρέχουσα κατάσταση, που καλούνται χωρικές συντεταγμένες. Τους δύο βασικούς τύπους περιγραφής των εξισώσεων ροής και κίνησης αποτελούν οι περιγραφές Lagrange και Euler. Η πρώτη δίδεται στις υλικές συντεταγμένες \mathbf{X} , ενώ η δεύτερη βάσει των χωρικών συντεταγμένων \mathbf{x} . Η περιγραφή Lagrange επικεντρώνεται σε συγκεκριμένο τμήμα του σώματος, ενώ η Euler σε συγκεκριμένη περιοχή του χώρου που καταλαμβάνεται από το συνεχές μέσο.

Στην περιγραφή Lagrange η μάζα των επιλεγμένων τμημάτων του σώματος παραμένει σταθερή, ενώ ο χώρος που καταλαμβάνεται από τα τμήματα μεταβάλλεται χρονικά. Οι χωρικές συντεταγμένες μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση των υλικών:

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, t) \quad (1.3.1)$$

Εναλλακτικά, στην Euler περιγραφή ο όγκος που καταλαμβάνεται από τμήματα του συνεχούς μέσου θεωρείται σταθερός και μεταβάλλονται τα τμήματα που καταλαμβάνουν το συγκεκριμένο χώρο. Οι υλικές συντεταγμένες, ως συνάρτηση των χωρικών συντεταγμένων, δίδονται από την έκφραση:

$$\mathbf{X} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.2)$$

Η σχέση μεταξύ χωρικών και υλικών συντεταγμένων δίδεται από την έκφραση:

$$J = \left| \frac{dx_i}{dX_j} \right| \Leftrightarrow dx_i = J dX_j \quad (1.3.3)$$

Όπου J η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού.

Το διάνυσμα της μετατόπισης δίδεται από τη σχέση:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (1.3.4)$$

Η παραγωγή ως προς το χρόνο ενός κινηματικού μεγέθους παρουσιάζει την εξής ιδιαιτερότητα:

$$\text{Εάν } \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, t) \text{ τότε } \frac{D\mathbf{g}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \quad (1.3.5)$$

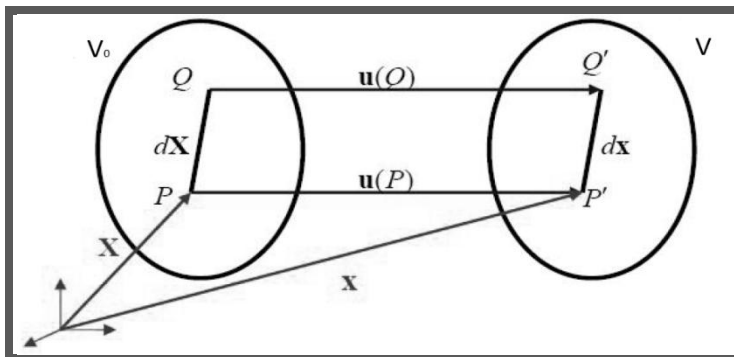
Και

$$\text{Εάν } \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, t) \text{ τότε } \frac{D\mathbf{g}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \quad (1.3.6)$$

Ο όρος D/Dt καλείται υλική παράγωγος και στην περιγραφή Euler παρουσιάζεται ο κανόνας της αλυσίδας στην παραγωγή. Η υλική παράγωγος θα συμβολίζεται και ως εξής:

$$\dot{\mathbf{g}} = \frac{D\mathbf{g}}{Dt} \quad (1.3.7)$$

Το μοντέλο περιγραφής που θα χρησιμοποιηθεί στην εργασία, είναι το μοντέλο Lagrange.



Σχηματική απεικόνιση των \mathbf{x} , \mathbf{X} , \mathbf{u} , $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{X}$, V_0 και V στο σχηματισμό αναφοράς και στον τρέχοντα σχηματισμό.

Εν συνεχεία παραθέτονται τρεις πολύ σημαντικές σχέσεις στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου. Το θεώρημα Gauss, το θεώρημα Μεταφοράς και το θεμελιώδες θεώρημα του Cauchy για την τάση.

➤ ΘΕΩΡΗΜΑ GAUSS

Εάν η $\partial\Omega$ αποτελεί κλειστή επιφάνεια, περιέχουσα χώρο Ω και \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο προς τα έξω στην $\partial\Omega$ διάνυσμα, τότε για ένα ομαλό τανυστικό πεδίο οποιασδήποτε τάξης ισχύει ότι:

$$\int_{\partial\Omega} T_{ijkl\dots} n_l ds = \int_{\Omega} T_{ijkl\dots,j} dV \quad (1.3.8)$$

Για ένα ομαλό ταυνοστικό πεδίο 2^{ης} τάξης:

$$\int_{\partial\Omega} T_{ij} n_j ds = \int_{\Omega} T_{ij,j} dV \quad (1.3.9)$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{T} n ds = \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{T} dV \quad (1.3.10)$$

Με τη χρήση του θεωρήματος Gauss (ή θεώρημα απόκλισης) επιτυγχάνουμε να μετατρέψουμε ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα σε ολοκλήρωμα όγκου και αντίστροφα.

➤ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Έστω φ μια ομαλή συνάρτηση του χώρου και του χρόνου και ρ η πυκνότητα μάζας τότε ισχύει:

$$\frac{D}{Dt} \int_{P_t} \rho \varphi(\mathbf{x}, t) dV = \int_{P_t} \rho \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) dV \quad (1.3.11)$$

➤ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CAUCHY ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΑΣΗ

$$\mathbf{t}^n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (1.3.12)$$

$$t_i^n = \sigma_{ij} n_j \quad (1.3.13)$$

Όπου \mathbf{n} το διάνυσμα προσανατολισμού. Η σχέση (1.3.12) μας δίνει τις συνιστώσες του διανύσματος τάσης (ελκυστικής) σε ένα σημείο, για οποιαδήποτε επιφάνεια διέρχεται από αυτό. Το διάνυσμα τάσης προσδιορίζεται σε όλες των περιπτώσεων. Εφόσον είναι γνωστός ο ταυνοστής της τάσης $\boldsymbol{\sigma}$, η εντατική κατάσταση σε οποιοδήποτε σημείο του σώματος καθορίζεται πλήρως από τον ταυνοστή τάσης στο σημείο αυτό.

1.3.2) ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

➤ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ)

Σε μια δεδομένη κατάσταση και σε χρονική στιγμή t σε ένα συνεχές σώμα μπορεί να οριστεί η συνάρτηση πυκνότητας $\rho(\mathbf{x}, t) > 0$. Η ολική του μάζα M ως προς την πυκνότητα δίδεται από τη σχέση:

$$M = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV \quad (1.3.14)$$

Όπου V ο όγκος που καταλαμβάνεται από το σώμα και \mathbf{x} ανήκει στο V .

Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας του σώματος ως προς το χρόνο δίδεται ως:

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV \quad (1.3.15)$$

Όπου D/Dt η ολική υλική παράγωγος ως προς το χρόνο.

Η ολική μάζα ενός συνεχούς σώματος, όμως, παραμένει σταθερή. Οπότε:

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0 \quad (1.3.16)$$

Η υλική παράγωγος του ολοκληρώματος όγκου της σχέσης (1.3.16) μπορεί να γραφεί ως:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_i \right] dV = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_i = 0 \quad (1.3.17)$$

Η σχέση (1.3.17) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.3.18)$$

Οι σχέσεις (1.3.17) και (1.3.18) αποτελούν την εξίσωση συνέχειας, που περιγράφει τη διατήρηση της μάζας ενός συνεχούς μέσου. Με τον όρο \mathbf{v} συμβολίζουμε την ταχύτητα ($v_i = \partial u_i / \partial t$). Και σε σχέση με την πυκνότητα αναφοράς ρ_0 μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + v_{i,i} \quad (1.3.19)$$

➤ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ (ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ)

Σε ένα συνεχές σώμα ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τις επιβαλλόμενες επί του σώματος εξωτερικές δυνάμεις. Η πρόταση αυτή αποτελεί τη γενίκευση του 2^{ου} Νόμου του Νεύτωνα για το συνεχές σώμα. Σε μαθηματική μορφή περιγράφεται ως:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{t}^n dA \quad (1.3.20)$$

Όπου \mathbf{f} , \mathbf{t}^n οι μαζικές και επιφανειακές δυνάμεις που δρουν στο σώμα αντίστοιχα.

Με τη χρήση του θεωρήματος μεταφοράς:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \rho \dot{v}_i dV \quad (1.3.21)$$

Ενώ με τη χρήση του θεωρήματος Gauss έχουμε:

$$\int_A t_i^n dA = \int_V \sigma_{ij,j} dV \quad (1.3.22)$$

Από τις σχέσεις (1.3.20), (1.3.21), (1.3.22), λαμβάνουμε:

$$\int_V \sigma_{ij,j} dV + \int_V \rho f_i dV = \int_V \rho \dot{v}_i dV \quad (1.3.23)$$

Από την (1.3.23) προκύπτει ότι:

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \dot{v}_i \quad (1.3.24)$$

Η εξίσωση (1.3.24) αποτελεί τη θεμελιώδη εξίσωση κίνησης στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου και αναφέρεται επίσης ως εξίσωση Euler.

➤ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ (ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΤΑΝΥΣΤΗ ΤΑΣΗΣ)

Κατά το νόμο ισοζυγίου της στροφορμής ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ισούται με την ολική ροπή των δρόσων εξωτερικών δυνάμεων.

$$\frac{D}{Dt} \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{x} \times \mathbf{t}^n dA \quad (1.3.25)$$

Όπου $\int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dV$ η στροφορμή του συνεχούς μέσου.

Με τη χρήση του θεωρήματος μεταφοράς:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho e_{ijk} x_j v_k dV = \int_V \rho e_{ijk} x_j \dot{v}_k dV \quad (1.3.26)$$

Με τη χρήση του τύπου του Cauchy και του θεωρήματος Gauss λαμβάνουμε:

$$\int_A \mathbf{x} \times \mathbf{t}^n dA = \int_A e_{ijk} x_j t_k^n dA = \int_V e_{ijk} (\sigma_{jk} + x_j \sigma_{ik,j}) dV \quad (1.3.27)$$

Όπου e_{ijk} το σύμβολο Levi-Civita. Από τις σχέσεις (1.3.25), (1.3.26), (1.3.27) αντικαθιστώντας, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \int_V p e_{ijk} x_j \dot{v}_k dV &= \int_V p e_{ijk} x_j f_k dV + \int_V e_{ijk} (\sigma_{jk} + x_j \sigma_{lk,l}) dV \\ \Rightarrow \int_V e_{ijk} x_j (-p \dot{v}_k + p f_k + \sigma_{lk,l}) dV &+ \int_V e_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

Από την σχέση (1.3.28) το πρώτο ολοκλήρωμα ισούται με 0. Κατά συνέπεια:

$$\int_V e_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 \quad (1.3.29)$$

$$\Rightarrow e_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \Rightarrow \sigma_{jk} = \sigma_{kj} \quad (1.3.30)$$

Ο νόμος ισοζυγίου της στροφορμής μας εξασφαλίζει ότι ο τανυστής τάσεων Cauchy είναι συμμετρικός.

➤ 1^{ος} ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ (ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ)

Ο πρώτος νόμος της Θερμοδυναμικής, που είναι γνωστός και σαν αρχή διατήρησης της ενέργειας, παρέχει τη θεωρητική βάση για τη μελέτη των σχέσεων μεταξύ των διαφόρων μορφών ενέργειας και των ενεργειακών αλληλεπιδράσεων. Βασισμένος σε πειραματικές παρατηρήσεις, ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής δηλώνει ότι η ενέργεια δεν μπορεί ούτε να παραχθεί, ούτε να καταστραφεί, αλλά μόνο να αλλάζει μορφή. Συνεπώς, κάθε ποσό ενέργειας πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά τη διάρκεια μιας διεργασίας.

Ο πρώτος νόμος δεν μπορεί να αποδειχθεί μαθηματικά. Δεν έχει βρεθεί όμως καμία φυσική διεργασία που να τον παραβιάζει και αυτό πρέπει να ληφθεί σαν επαρκής απόδειξη. Η ενέργεια μπορεί να μεταφερθεί από ή προς ένα σύστημα με τρεις μορφές: θερμότητα, έργο και ροή μάζας. Οι αλληλεπιδράσεις της ενέργειας αναγνωρίζονται καθώς περνούν από τις οριακές επιφάνειες του συστήματος και αντιπροσωπεύουν την ενέργεια που κέρδισε ή έχασε ένα σύστημα κατά τη διάρκεια μιας διεργασίας. Τα μόνα δύο είδη ενεργειακών αλληλεπιδράσεων που σχετίζονται με μια συγκεκριμένη μάζα ή ένα κλειστό σύστημα είναι το έργο και η μεταφορά θερμότητας.

Η θερμότητα μπορεί να μεταφερθεί με τρεις τρόπους: με αγωγή, με συναγωγή και με ακτινοβολία. Αγωγή είναι η μεταφορά ενέργειας από τα μόρια μιας ουσίας που έχουν περισσότερη ενέργεια προς τα γειτονικά τους με λιγότερη ενέργεια, σαν αποτέλεσμα των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων. Συναγωγή είναι η μεταφορά ενέργειας μεταξύ της επιφάνειας ενός στερεού και εφραπτόμενου υγρού ή αερίου που βρίσκεται σε κίνηση και περιλαμβάνει το συνδυασμένο αποτέλεσμα της αγωγής και της κίνησης του ρευστού. Στη μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία η ενέργεια εκπέμπεται από την ύλη μέσω ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (ή φωτονίων), σαν αποτέλεσμα των μεταβολών της ηλεκτρονιακής διαμόρφωσης των ατόμων ή των μορίων.

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Η συνολική μεταβολή της ολικής ενέργειας ενός συστήματος κατά τη διάρκεια μιας διεργασίας είναι ίση με τη διαφορά ανάμεσα στην ολική ενέργεια που εισέρχεται στο σύστημα και στην ολική ενέργεια που εξέρχεται από αυτό:

$$\Delta E_{system} = \Delta E_{in} - \Delta E_{out} \quad (1.3.31)$$

Η σχέση (1.3.31) είναι γνωστή ως ισοζύγιο ενέργειας και μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε είδος συστήματος και σε οποιαδήποτε διεργασία.

Το ισοζύγιο ενέργειας συναρτήσει των ρυθμών μεταβολής ως προς το χρόνο δίδεται ως:

$$\Delta \dot{E}_{system} = \Delta \dot{E}_{in} - \Delta \dot{E}_{out} \quad (1.3.32)$$

Για να υπολογιστεί η μεταβολή της ενέργειας ενός συστήματος κατά τη διάρκεια μιας διεργασίας, πρέπει να προσδιοριστεί η αρχική και η τελική ενέργεια του συστήματος και να αφαιρεθούν:

$$\Delta E_{\text{system}} = \Delta E_{\text{final}} - \Delta E_{\text{initial}} = E_2 - E_1 \quad (1.3.33)$$

Η ενέργεια αποτελεί ιδιότητα ενός συστήματος και δεν μεταβάλλεται, αν δεν αλλάξει η κατάσταση του συστήματος. Η ενέργεια μπορεί να έχει διάφορες μορφές: εσωτερική (αισθητή, λανθάνουσα, χημική, πυρηνική), κινητική, δυναμική, ηλεκτρική, μαγνητική, ενώ το άθροισμα τους αποτελεί την ολική ενέργεια E του συστήματος. Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα και φαινόμενα επιφανειακής τάσης (δηλαδή για απλά συμπιεστά συστήματα), η μεταβολή της ολικής ενέργειας ενός συστήματος, κατά τη διάρκεια μιας διεργασίας, αποτελεί το άθροισμα των μεταβολών της εσωτερικής, της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας. Εκφράζεται ως:

$$\Delta E = \Delta U + \Delta K + \Delta G \quad (1.3.34)$$

Όπου ΔU , ΔK , ΔG οι μεταβολές της εσωτερικής, της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας αντίστοιχα.

Βάσει του γεγονότος ότι η ενέργεια μπορεί να μεταφερθεί με τη μορφή θερμότητας, έργου και μάζας και ότι η συνολική μεταφορά μιας ποσότητας είναι ίση με τη διαφορά ανάμεσα στα ποσά που μεταφέρονται προς και από το σύστημα, το ισοζύγιο ενέργειας μπορεί να γραφεί ως:

$$\Delta E_{\text{system}} = (Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}) + (W_{\text{in}} - W_{\text{out}}) + (E_{\text{mass,in}} - E_{\text{mass,out}}) = E_{\text{in}} - E_{\text{out}} \quad (1.3.35)$$

Για κλειστά συστήματα (χωρίς ροή μάζας) η σχέση (1.3.35) μπορεί να λάβει τη μορφή:

$$\delta Q + \delta W = dE \quad (1.3.36)$$

Όπου ο μαθηματικός τελεστής δ δηλώνει την εξάρτηση της ενεργειακής αλληλεπίδρασης από τη διαδρομή της μεταβολής, ενώ ο τελεστής d δηλώνει τη μεταβολή της συνάρτησης ως προς όλες της μεταβλητές της, συμπεριλαμβανομένου και του χρόνου.

Στο πλαίσιο της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου, ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος διατυπώνεται ως: Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας (εσωτερικής και κινητικής) ισούται με την ισχύ των εξωτερικών δυνάμεων (μαζικών και επιφανειακών) συν το ρυθμό με τον οποίο η θερμότητα εισρέει και παράγεται εντός του σώματος:

$$\frac{D}{Dt} \int_V (U + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \mathbf{v}) dV = \int_V \rho \mathbf{f} \mathbf{v} dV + \int_V R dV + \int_A \mathbf{t}^n \mathbf{v} dA - \int_A \mathbf{q} \mathbf{n} dA \quad (1.3.37)$$

Η

$$\frac{D}{Dt} \int_V (U + \frac{1}{2} \rho v_i v_i) dV = \int_V \rho f_i v_i dV + \int_V R dV + \int_A t_i^n v_i dA - \int_A q_i n_i dA \quad (1.3.38)$$

Όπου U η εσωτερική ενέργεια, $1/2 \rho v_i v_i$ η κινητική ενέργεια, R ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας εντός του σώματος, q_i το διάνυσμα θερμικής ροής και n_i το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα ως προς την επιφάνεια A (επιφάνεια εισροής- εκροής θερμότητας). Στο αριστερό σκέλος της εξίσωσης έχουμε το ρυθμό μεταβολής της εσωτερικής και κινητικής ενέργειας στον όγκο V , ενώ στο δεύτερο σκέλος το ρυθμό μεταβολής των μαζικών και επιφανειακών δυνάμεων συν τους ρυθμούς παραγωγής και μετάδοσης θερμότητας.

➤ 2^{ος} ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ (ΡΥΘΜΟΣ ΑΥΞΗΣΗΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ)

Για να καθορίσουμε πλήρως μια διαδικασία μεταφοράς ενέργειας, πέρα από την ποσοτική περιγραφή που επιτυγχάνεται με τον πρώτο Νόμο της Θερμοδυναμικής, απαιτείται και η

περιγραφή της κατεύθυνσης της. Ο δεύτερος Νόμος της Θερμοδυναμικής περιγράφει την κατεύθυνση της ενεργειακής μεταφοράς.

Θεωρούμε ένα θερμοδυναμικό σύστημα. Σε αυτό το σύστημα δύο κύρια είδη διεργασιών μπορούν να λάβουν χώρα. Οι αντιστρεπτές και οι μη αντιστρεπτές διεργασίες. Αντιστρεπτή ονομάζεται η διεργασία εκείνη, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί και κατά την αντίθετη κατεύθυνση, χωρίς να αφήσει κανένα ίχνος στο περιβάλλον. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα όσο και το περιβάλλον, μετά το τέλος της διεργασίας, επιστρέφουν στην αρχική τους κατάσταση. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί μόνο, εάν είναι μηδενικό το καθαρό ποσό της θερμότητας και του έργου που εναλλάσσεται μεταξύ του συστήματος και του περιβάλλοντος κατά τη διάρκεια της συνδυασμένης διεργασίας (της πραγματικής και της αντίστροφης). Οι διεργασίες που δεν είναι αντιστρεπτές ονομάζονται μη αντιστρεπτές. Οι αντιστρεπτές διεργασίες μπορούν να θεωρηθούν σαν τα θεωρητικά όρια των μη αντιστρεπτών. Στις βασικές αιτίες που καθιστούν μια διεργασία μη αντιστρεπτή (παράγοντες αναντιστρεπτότητας) περιλαμβάνονται η τριβή, η φυσική διαστολή, η ανάμιξη δύο ρευστών, η μεταφορά θερμότητας εξαιτίας μιας πεπερασμένης θερμοκρασιακής διαφοράς, οι ηλεκτρικές αντιστάσεις, οι ανελαστικές παραμορφώσεις των στερεών και οι χημικές αντιδράσεις.

Σύμφωνα με τον 2^ο Νόμο της Θερμοδυναμικής για ένα σύστημα που ολοκληρώνει ένα κύκλο ισχύει η κάτωθι ανισότητα:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (1.3.39)$$

Η σχέση (1.3.39) καλείται ανίσωση του Clausius (J.R.E. Clausius 1822-1888), όπου T η απόλυτη θερμοκρασία. Ο όρος της ισότητας ικανοποιείται για αντιστρεπτές διεργασίες, για τις οποίες ισχύει:

$$\oint \frac{\delta Q_{rev}}{T} = 0 \quad (1.3.40)$$

Η εισαγωγή του όρου της εντροπίας ως θερμοδυναμική ιδιότητα έγινε από τον Clausius και εκπορεύεται από τη σχέση (1.3.39). Η μεταβολή της εντροπίας σε έναν αντιστρεπτό θερμοδυναμικό κύκλο ορίζεται ως:

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \quad (1.3.41)$$

Η μεταβολή της εντροπίας ενός συστήματος μπορεί να παρατηρηθεί σε έναν κλειστό κύκλο. Θεωρούμε ότι ένα σύστημα που μεταφέρει θερμότητα από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2, μέσω μια τυχαίας διεργασίας, επιστρέφει από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 1 αντιστρεπτά. Για τον κύκλο αυτό έχουμε:

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_2^1 \frac{\delta Q_{rev}}{T} \leq 0 \quad (1.3.42)$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (1.3.42) στην (1.3.41) λαμβάνουμε:

$$\int_2^1 \frac{\delta Q_{rev}}{T} = \int_2^1 dS = S_1 - S_2 \quad (1.3.43)$$

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \leq S_2 - S_1 = \Delta S_{sys} \quad (1.3.44)$$

Η σχέση (1.3.44) μπορεί να γραφεί και ως:

$$\Delta S_{\text{sys}} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + S_{\text{gen}} \quad (1.3.45)$$

Όπου S_{gen} ο συμβολισμός της παραγόμενης εντροπίας. Οι σχέσεις (1.3.33-34) εκφράζουν την αρχή αύξησης της εντροπίας. Δηλώνουν ότι η μεταβολή της εντροπίας ενός κλειστού συστήματος, κατά τη διάρκεια μιας μη αντιστρεπτής διεργασίας, είναι πάντα μεγαλύτερη από τη μεταφορά εντροπίας. Δηλαδή, κατά τη διάρκεια μιας μη αντιστρεπτής διεργασίας παράγεται ένα ποσό εντροπίας και η παραγωγή αυτή οφείλεται στην εμφάνιση παραγόντων αναντιστρεπτότητας. Η διαφορά μεταξύ της μεταβολής της εντροπίας ενός κλειστού συστήματος και της μεταφερόμενης εντροπίας είναι ίση με την παραγόμενη εντροπία.

Η σχέση (1.3.45) μπορεί να αναλυθεί και από μια δεύτερη θερμοδυναμική σκοπιά. Θεωρούμε το υπό μελέτη σύστημα και το περιβάλλον του υποσυστήματα ενός ενιαίου μονωμένου συστήματος, αποτελούμενου από αυτά. Η μεταβολή της εντροπίας του μονωμένου αυτού συστήματος, κατά τη διάρκεια μιας διεργασίας, είναι το άθροισμα των μεταβολών εντροπίας των δύο υποσυστημάτων του, αφού σε ένα μονωμένο σύστημα δεν έχουμε μεταφορά θερμότητας και εντροπίας. Υπό αυτήν την θεώρηση λαμβάνουμε:

$$S_{\text{gen}} = \Delta S_{\text{total}} = \Delta S_{\text{sys}} + \Delta S_{\text{surr}} \geq 0 \quad (1.3.46)$$

Η ισότητα ισχύει για τις αντιστρεπτές διεργασίες, ενώ η ανισότητα για τις μη αντιστρεπτές. Η ενδεχόμενη αρνητική τιμή καθιστά μια διεργασία αδύνατη. Ο όρος ΔS_{surr} αναφέρεται στη μεταβολή της εντροπίας του περιβάλλοντος που προκαλείται από τη συγκεκριμένη διεργασία.

Η μεταβολή της εντροπίας του συστήματος (σχέση 1.3.45) μπορεί να δοθεί και ως εξής:

$$\Delta S_{\text{system}} = S_{\text{final}} - S_{\text{initial}} = S_2 - S_1 = S_{\text{in}} - S_{\text{out}} + S_{\text{gen}} \quad (1.3.47)$$

Η σχέση (1.3.48) αναφέρεται συχνά ως ισοζύγιο εντροπίας και μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε σύστημα, που υφίσταται οποιαδήποτε διεργασία. Η σχέση αυτή μπορεί να διατυπωθεί ως: Η μεταβολή της εντροπίας ενός συστήματος, κατά τη διάρκεια μιας διεργασίας, είναι ίση με το άθροισμα της συνολικής εντροπίας που μεταφέρεται διαμέσου των ορίων του συστήματος και της εντροπίας που παράγεται μέσα στο σύστημα εξαιτίας της εμφάνισης αναντιστρεπτοτήτων. Σε μορφή ρυθμών λαμβάνει τη μορφή:

$$\Delta \dot{S}_{\text{system}} = \dot{S}_{\text{in}} - \dot{S}_{\text{out}} + \dot{S}_{\text{gen}} \quad (1.3.48)$$

Ο ρυθμός αύξησης της εντροπίας για ένα συνεχές σώμα δίδεται ως:

$$\int_V \frac{dS}{dt} dV \geq - \int_A \frac{q_i n_i}{T} dA + \int_V \frac{R}{T} dV \quad (1.3.49)$$

και σε μορφή ισοζυγίου:

$$\int_V \frac{dS}{dt} dV = - \int_A \frac{q_i n_i}{T} dA + \int_V \frac{R}{T} dV + \int_V \dot{S}_{\text{gen}} dV \quad (1.3.50)$$

Γενικότερα θα λέγαμε ότι η εντροπία αποτελεί μια αφηρημένη ιδιότητα και η φυσική της ερμηνεία είναι δύσκολο να περιγραφεί. Θα μπορούσαμε να την αποδώσουμε σαν το μέτρο της αταξίας των μορίων που συνιστούν την ύλη. Καθώς η αταξία ενός συστήματος αυξάνεται, τόσο οι θέσεις των μορίων γίνονται όλο και πιο απρόβλεπτες. Ο 2^{ος} Νόμος της Θερμοδυναμικής μας δείχνει ότι ενώ η ενέργεια διατηρείται, η ποιότητα της μειώνεται κατά τη διάρκεια μιας πραγματικής διεργασίας. Το έργο, σαν οργανωμένη μορφή ενέργειας, είναι ελεύθερο εντροπίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΒΑΣΙΚΕΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσονται οι βασικές μαθηματικές σχέσεις της θεωρίας Θερμοελαστικότητας. Βάσει των αρχών που διατυπώθηκαν στην Εισαγωγή, εξάγεται το κλασικό μοντέλο Θερμοελαστικότητας, καθώς και τα μη κλασικά μοντέλα Lord-Shulman, Green-Lindsay και Green-Naghdi. Το κλασικό και τα μη κλασικά θερμοελαστικά μοντέλα συνιστούν το διευρυμένο μοντέλο της Γενικευμένης Θερμοελαστικότητας. Εν συνεχεία, τα προαναφερόμενα μοντέλα παρουσιάζονται σε ενοποιημένες μαθηματικές σχέσεις.

Παρουσιάζεται το ολοκληρωμένο μαθηματικό μοντέλο της Θερμοελαστικότητας, το οποίο συνίσταται από το σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων (εξισώσεις πεδίου) που εξήχθησαν στα προηγούμενα υποκεφάλαια και τη συνοδεία των κατάλληλων βοηθητικών συνθηκών. Ακολουθώντας, γίνεται κατηγοριοποίηση των θερμοελαστικών προβλημάτων, βάσει των παραδοχών και απλοποιήσεων που μπορούν να γίνουν στις εξισώσεις πεδίου, εξαιτίας των χαρακτηριστικών του, ως προς μελέτη, συστήματος.

Τέλος, δίδονται τρία βασικά θεωρήματα της θεωρίας Θερμοελαστικότητας. Διατυπώνεται το θεώρημα μοναδικότητας των λύσεων της Θερμοελαστικότητας και τα ενεργειακά θεωρήματα της Αρχής των Μεταβολών και της Αμοιβαιότητας.

2.1) ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Με το συνδυασμό του Νόμου του Fourier, των αρχών της Μηχανικής του Συνεχούς και υπό τις θεμελιώσεις υποθέσεις που ορίζει η γραμμική Ελαστικότητα, εξάγονται οι εξισώσεις πεδίου του κλασικού μοντέλου Θερμοελαστικότητας.

2.1.1) ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΔΙ' ΑΓΩΓΗΣ (ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ FOURIER)

Η μετάδοση θερμότητας δι' αγωγής περιγράφει τον μηχανισμό μεταφοράς θερμικής ενέργειας εντός στερεών σωμάτων. Εάν σε ένα σύστημα υπάρχουν θερμοκρασιακές διαφορές η θερμοκρασία T είναι μια συνεχής συνάρτηση του χώρου και του χρόνου: $T=T(\mathbf{x},t)$. Ο τόπος των σημείων που σε κάποια χρονική στιγμή έχουν την ίδια θερμοκρασία, ορίζουν μια ισοθερμική επιφάνεια. Πρώτος ο Νεύτωνας είχε παρατηρήσει ότι ο ρυθμός μεταφοράς της θερμικής ενέργειας μεταξύ δύο διαφορετικών ισοθερμοκρασιακών επιφανειών είναι ανάλογος της θερμοκρασιακής του διαφοράς. Ο νόμος περιγραφής του φαινομένου διατυπώθηκε από τον Γάλλο επιστήμονα J. Fourier και φέρει το όνομά του. Σύμφωνα με αυτό το νόμο το διάνυσμα θερμικής ροής (\mathbf{q}) από το εσωτερικό προς το εξωτερικό μιας ισοθερμοκρασιακής επιφάνειας εμβαδού A , σε ισότροπο σώμα, εκφράζεται με τη μαθηματική σχέση:

$$\mathbf{q} = -k(T)\nabla T, \quad q_i = -k(T)T_{,i} \quad (2.1.1)$$

Και για ανισότροπο σώμα λαμβάνει την κάτωθι μορφή:

$$q_i = -k_{ij}T_{,j} \quad (2.1.2)$$

Όπου ∇T είναι η παράγωγος της θερμοκρασίας κατά την κάθετη διεύθυνση και προς το εξωτερικό της επιφάνειας. Με τον όρο $k(T)$ συμβολίζεται ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του συστήματος για ισότροπο σώμα και με k_{ij} για ανισότροπο. Στα πλαίσια της γραμμικής Θερμοελαστικότητας ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας θα θεωρηθεί ανεξάρτητος της θερμοκρασίας T . Το αρνητικό σημείο χρησιμεύει στο να υπάρξει

σύμπτωση της φυσικής ροής της θερμότητας, που υπακούει στο 2^ο θερμοδυναμικό νόμο, με το μαθηματικό αποτέλεσμα.

Θεωρούμε στερεό σώμα B το οποίο ορίζεται από επιφάνεια A και το dA αποτελεί στοιχείο της επιφάνειας αυτής. Σε χρόνο Δt, το επιφανειακό στοιχείο dA θα διαπερνάται από θερμότητα ΔQ ίση με:

$$\Delta Q = -k T_{,n} dA \Delta t \quad (2.1.3)$$

Αν εξετάσουμε το ισοζύγιο θερμότητας σε περιοχή B₁ του σώματος B, που περιβάλλεται από την επιφάνεια A₁, θα δούμε ότι σε χρονικό διάστημα Δt, η ποσότητα θερμότητας που διαπερνά την περιοχή B₁ μέσω της επιφάνειας A₁ δίδεται από τη σχέση:

$$\Delta Q' = k \int_{A_1} T_{,n} dA \Delta t \quad (2.1.4)$$

Εάν εντός της, υπό εξέταση, περιοχής δρα θερμική πηγή R (όπου R η παραγόμενη θερμότητα στη μονάδα όγκου και στη μονάδα χρόνου), τότε πρέπει να λάβουμε υπόψη τη θερμική ποσότητα ΔQ'':

$$\Delta Q'' = \int_{B_1} R dV \Delta t \quad (2.1.5)$$

Το σύνολο ΔQ=ΔQ''+ΔQ' ισούται με τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του σώματος B:

$$\Delta Q = \Delta U = \int_{B_1} c \dot{T} dV \Delta t, \quad c = \rho c_E \quad (2.1.6)$$

Όπου c_E η ειδική θερμότητα, ρ η πυκνότητα και c η ειδική θερμότητα ανά μονάδα όγκου.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.1.4-2.1.5) στην (2.1.6) λαμβάνουμε:

$$\int_{B_1} (c \dot{T} - R) dV - k \int_{A_1} T_{,n} dA = 0 \quad (2.1.7)$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Gauss στο επιφανειακό ολοκλήρωμα της σχέσης (2.1.7):

$$\int_{A_1} T_{,k} n_k dA = \int_{B_1} T_{,kk} dV \quad (2.1.8)$$

Με αντικατάσταση της (2.1.8) στην (2.1.7):

$$\int_{B_1} (c \dot{T} - R - k T_{,kk}) dV = 0 \quad (2.1.9)$$

Από τη σχέση (2.1.9) συνεπάγεται ότι το η μαθηματική παράσταση εντός του ολοκληρώματος ισούται επίσης με μηδέν. Συνεπώς:

$$T_{,kk} - \frac{1}{\kappa} \dot{T} = -\frac{Q}{\kappa} \quad (2.1.10)$$

$$\text{Όπου } \kappa = \frac{k}{c}, \quad R = Qc \quad (2.1.11)$$

Η εξίσωση (2.1.10) αποτελεί την εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας στην περίπτωση της μη συζευγμένης θερμοελαστικότητας. Στο δεύτερο τμήμα του υποκεφαλαίου 2.1 θα εξαχθεί η εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας της συζευγμένης θερμοελαστικότητας, όπου παρουσιάζεται ένας επιπλέον όρος στη μαθηματική έκφραση. Η σχέση (2.1.10) αποτελεί μερική διαφορική εξίσωση παραβολικού τύπου. Εάν η θερμοκρασία T δεν μεταβάλλεται χρονικά, η εξίσωση (2.1.10) λαμβάνει τη μορφή:

$$T_{,kk} = -\frac{Q}{\kappa} \quad (2.1.12)$$

Η σχέση (2.1.12) αποτελεί τη γνωστή εξίσωση Poisson και είναι ελλειπτικού τύπου. Αν επιπλέον έχουμε απουσία θερμικής πηγής, έχουμε περεταίρω απλούστευση της (2.1.12) στην εξίσωση Laplace:

$$T_{,kk} = 0 \quad (2.1.13)$$

Η εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας με τη συνοδεία των κατάλληλων βοηθητικών συνθηκών, μπορεί να ορίσει πλήρως τη κατανομή του θερμοκρασιακού πεδίου εντός στερεού φορέα.

2.1.2) ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΕΔΙΟΥ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Θεωρούμε ομογενές ανισότροπο ελαστικό σώμα. Ελαστικό θεωρείται το σώμα στο οποίο η σχέση μεταξύ τάσεων και τροπών περιγράφεται από τον Γενικευμένο Νόμο του Hooke. Πέραν της μηχανικής φόρτισης το ελαστικό σώμα καταπονείται και θερμικά. Σε αυτό το σώμα θα εξαχθούν οι εξισώσεις κίνησης καθώς και η εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας. Εν συνεχεία, οι αντίστοιχες εξισώσεις θα εξαχθούν και για την περίπτωση ομογενούς ισότροπου σώματος.

Θεωρούμε ότι το σώμα βρίσκεται σε αρχική θερμοκρασία T_0 σε απαράμορφωτη και μη εντατική κατάσταση. Αυτή η κατάσταση θα καλείται φυσική κατάσταση, στην οποία θα θεωρήσουμε ότι η εντροπία είναι μηδενική. Κάτω από τη δράση εξωτερικών δυνάμεων (μαζικών και επιφανειακών) την επίδραση θερμικής πηγής και θέρμανσης(ή ψύξης) της επιφάνειας του σώματος, το μέσο υπόκειται παραμόρφωση και θερμοκρασιακή αλλαγή. Μετατοπίσεις \mathbf{u} θα εμφανιστούν στο σώμα καθώς και θερμοκρασιακές μεταβολές $\theta = T - T_0$, όπου T η απόλυτη θερμοκρασία ενός σημείου \mathbf{x} επί του σώματος. Η θερμοκρασιακή μεταβολή συνοδεύεται από τάσεις σ_{ij} και τροπές ε_{ij} . Οι ποσότητες \mathbf{u} , θ , σ_{ij} , ε_{ij} αποτελούν συναρτήσεις της θέσης \mathbf{x} και του χρόνου t .

Υποθέτουμε ότι η θερμοκρασιακή μεταβολή θ που συνοδεύει την παραμόρφωση είναι μικρή και δεν επηρεάζει τις ιδιότητες του υλικού (θερμικές και μηχανικές ιδιότητες). Οι συντελεστές περιγραφής των ιδιοτήτων του υλικού θεωρούνται ανεξάρτητοι της θερμοκρασίας T . Επιπροσθέτως θεωρούμε τις τροπές μικρές. Βάσει της θεώρησης αυτής, οι δεύτερες δυνάμεις και τα γινόμενα των συντελεστών των τροπών μπορούν να αγνοηθούν. Η εξάρτηση μεταξύ τροπών και μετατοπίσεων δίδεται από τη γραμμική σχέση:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.1.14)$$

Επίσης οι τροπές πρέπει να υπακούουν στις συνθήκες συμβιβαστού:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0 \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2.1.15)$$

Με τη χρήση των εξισώσεων κίνησης, διατήρησης της ενέργειας, τον 2ο Νόμο της Θερμοδυναμικής και τον Νόμο του Fourier θα διατυπώσουμε το κλασικό μοντέλο της Θερμοελαστικότητας στο πλαίσιο των μη αντιστρεπτών διεργασιών. Θα εξάγουμε την καταστατική εξίσωση της Θερμοελαστικότητας, την εξίσωση κίνησης και την εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας για ομογενές ανισότροπο θερμοελαστικό σώμα και εν συνεχεία τις αντίστοιχες εξισώσεις για ισότροπο θερμοελαστικό σώμα.

Αρχικά θα εισάγουμε την έννοια της ελεύθερης ενέργειας Helmholtz (F), που στα πλαίσια της γραμμικής Θερμοελαστικότητας θεωρείται συνάρτηση των στιγμιαίων τροπών και της απόλυτης θερμοκρασίας:

$$F = U - ST \quad (2.1.16)$$

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας, όπως διατυπώθηκε στο πρώτο κεφάλαιο, έχει ως εξής:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(U + \frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) dV = \int_V p f_i v_i dV + \int_V R dV + \int_A t_i^n v_i dA - \int_A q_i n_i dA \quad (2.1.17)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V U dV = \int_V \dot{U} dV \quad (2.1.18)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV = \int_V \rho v_i \dot{v}_i dV \quad (2.1.19)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Gauss, λαμβάνουμε:

$$\int_A t_i^n v_i dA - \int_A q_i n_i dA = \int_V (\sigma_{ij} v_i)_{,j} dV - \int_V q_{i,j} dV \quad (2.1.20)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.1.18), (2.1.19), (2.1.20) στην (2.1.17) λαμβάνουμε:

$$\int_V [(\dot{U} - \sigma_{ij} v_{i,j} + q_{i,j} - R) + v_i (\rho \dot{v}_i - \sigma_{ij,j} - p f_i)] dV = 0 \quad (2.1.21)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση κίνησης (1.3.24) και αξιοποιώντας τη συμμετρία του τανυστή τάσης (1.3.30), η (2.1.21) λαμβάνει τη μορφή:

$$\int_V (\dot{U} - \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + q_{i,j} - R) dV = 0 \quad (2.1.22)$$

Και σε τοπική μορφή:

$$\dot{U} - R = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - q_{i,j} \quad (2.1.23)$$

Ο 2ος Θερμοδυναμικός Νόμος στη μορφή του Clausius-Duhem:

$$\frac{d}{dt} \int_V S dV \geq - \int_A \frac{q_i n_i}{T} dA + \int_V \frac{R}{T} dV \quad (2.1.24)$$

Με τη χρήση του θεωρήματος μεταφοράς:

$$\frac{d}{dt} \int_V S dV = \int_V \dot{S} dV \quad (2.1.25)$$

Με εφαρμογή της σχέσης (2.1.25) και του θεωρήματος Gauss στη σχέση (2.1.24) καταλήγουμε να έχουμε σε τοπική μορφή την παρακάτω σχέση:

$$T \dot{S} - R + q_{i,j} - \frac{q_i}{T} T_{,j} \geq 0 \quad (2.1.26)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο τη σχέση (2.1.16) λαμβάνουμε:

$$\dot{F} = \dot{U} - T \dot{S} - S \dot{T} \quad (2.1.27)$$

Όπου τα μεγέθη U, T αποτελούν συναρτήσεις της κατάστασης. Ακολούθως και η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz αποτελεί συνάρτηση κατάστασης και η παράγωγος μπορεί να γραφεί ως:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} + \left(\frac{\partial F}{\partial T_{,j}} \right) \dot{T}_{,j} \quad (2.1.28)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.1.26) τις σχέσεις (2.1.23), (2.1.27), (2.1.28) οδηγούμαστε στην έκφραση:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial T} + S\right)\dot{T} + \left(\frac{\partial F}{\partial T_{,i}}\right)\dot{T}_{,i} + \frac{q_i}{T}\dot{T}_{,i} \leq 0 \quad (2.1.29)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.1.27) τις σχέσεις (2.1.23) και (2.1.28), λαμβάνουμε:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial T} + S\right)\dot{T} + \left(\frac{\partial F}{\partial T_{,i}}\right)\dot{T}_{,i} + T\dot{S} - R + q_{i,i} = 0 \quad (2.1.30)$$

Οι άνωθι σχέσεις (2.1.29) και (2.1.30) πρέπει να ισχύουν για όλες τις δυνατές θερμοελαστικές διεργασίες. Από αυτή την σκοπιά, πρέπει να ισχύουν για όλες τις δυνατές τιμές παραγώγων $\dot{\varepsilon}_{ij}$, \dot{T} και $\dot{T}_{,i}$. Με την υπόθεση ότι τα εντός παρενθέσεων μεγέθη στις εκφράσεις (2.1.29) και (2.1.30) είναι ανεξάρτητα των $\dot{\varepsilon}_{ij}$, \dot{T} και $\dot{T}_{,i}$, τότε θα πρέπει ταυτοτικά να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (2.1.31)$$

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -S \quad (2.1.32)$$

$$\frac{\partial F}{\partial T_{,i}} = 0 \quad (2.1.33)$$

$$q_i T_{,i} \leq 0 \quad (2.1.34)$$

$$q_{i,i} + T\dot{S} - R = 0 \quad (2.1.35)$$

Αν αναπτύξουμε τη συνάρτηση $F = F(\varepsilon_{ij}, T)$ σε σειρά απείρων όρων περίξ της φυσικής κατάστασης $F = F(0, T_0)$:

$$\begin{aligned} F(\varepsilon_{ij}, T) &= F(0, T_0) + \frac{\partial F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial F(0, T_0)}{\partial T} (T - T_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2 \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \varepsilon_{ij} (T - T_0) + \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial T^2} (T - T_0)^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

Διατηρώντας μόνο τους γραμμικούς και τετραγωνικούς όρους της σειράς καταλήγουμε σε γραμμικές σχέσεις μεταξύ των πεδίων τάσεων, παραμορφώσεων και θερμοκρασίας. Λαμβάνοντας υπ όψη ότι στην φυσική κατάσταση $\varepsilon_{ij} = 0$ και $T = T_0$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $F(0, T_0) = 0$. Επίσης ο όρος $\partial F(0, T_0) / \partial T$ ισούται με μηδέν. Συνεπώς στην φυσική κατάσταση:

$$\frac{\partial F(0, T_0)}{\partial T} = -S(0, T_0) = 0 \quad (2.1.37)$$

Συνδέοντας την σχέση (2.1.31) και τη σχέση (2.1.37) με τις προαναφερθείσες παραδοχές οδηγούμαστε:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{kl} + \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} (T - T_0) \quad (2.1.38)$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση $\partial F(0, T_0) / \partial \varepsilon_{ij} = 0$, για την φυσική κατάσταση λαμβάνουμε $\sigma_{ij} = 0$.

Εισάγοντας το συμβολισμό:

$$\frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = E_{ijkl}, \quad \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} = -\beta_{ij}, \quad \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial T^2} = m \quad (2.1.39)$$

Οι σχέσεις (2.1.36) και (2.1.38) λαμβάνουν τη μορφή:

$$F(\varepsilon_{ij}, T) = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta + \frac{m}{2} \theta^2 \quad (2.1.40)$$

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta \quad (2.1.41)$$

Σημειώνοντας επιπροσθέτως ότι:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = E_{ijkl}, \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = -\beta_{ij} \quad (2.1.42)$$

Η σχέση (2.1.41) αποτελεί την καταστατική εξίσωση της γραμμικής Θερμοελαστικότητας, αναγνωρίζοντας τη γενίκευση του νόμου του Hooke για θερμοελαστικές διεργασίες. Η σχέση (2.1.41) καλείται εξίσωση Duhamel-Neumann για ανισότροπο σώμα. Σε αντιστοιχία με την θεωρία Ελαστικότητας ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις συμμετρίας για το μητρώο ελαστικών σταθερών:

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij} \quad (2.1.43)$$

Η καταστατική εξίσωση, εκφρασμένη ως προς τις τροπές, λαμβάνει τη μορφή:

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \theta \quad (2.1.44)$$

Όπου

$$s_{ijkl} = s_{jikl} = s_{ijlk} = s_{klij} \quad (2.1.45)$$

Αν θεωρήσουμε ένα στοιχείο όγκου ανισοτροπικού σώματος ελεύθερου από τάσεις, τότε ισχύει:

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} \theta \quad (2.1.46)$$

Η παραπάνω σχέση περιγράφει ένα πολύ οικείο φυσικό φαινόμενο, τη θερμική διαστολή.

Από τις σχέσεις (2.1.41) και (2.1.44) συνθέτουμε τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = E_{ijkl}, \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = -\beta_{ij} = -\alpha_{kl} E_{ijkl}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} = \alpha_{ij} \quad (2.1.47)$$

Για να συνθέσουμε την εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας της συζευγμένης Θερμοελαστικότητας, θα πρέπει να εκφράσουμε την εσωτερική ενέργεια και την εντροπία ως συνάρτηση των τροπών και της θερμοκρασίας. Σαν αφετηρία έχουμε τα ολικά διαφορικά της εσωτερικής ενέργειας και της εντροπίας:

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + T dS \quad (2.1.48)$$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial S}{\partial T} dT \quad (2.1.49)$$

Εισάγοντας την (2.1.49) στην (2.1.48) λαμβάνουμε:

$$dU = [T \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} + \sigma_{ij}] d\varepsilon_{ij} + T \frac{\partial S}{\partial T} dT \quad (2.1.50)$$

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ποσότητα dU να αποτελεί ολικό διαφορικό είναι:

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[T \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} + \sigma_{ij} \right] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(T \frac{\partial S}{\partial T} \right) \quad (2.1.51)$$

Από αυτήν την συνθήκη εκπορεύεται η σχέση:

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = 0 \quad (2.1.52)$$

Και λαμβάνοντας υπόψη τον δεύτερο όρο από τις σχέσεις (2.1.47):

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} = \beta_{ij} \quad (2.1.53)$$

Στον αντίποδα, χρησιμοποιούμε την θερμοδυναμική σχέση:

$$T \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial T} = c \quad (2.1.54)$$

Όπου c η ειδική θερμότητα ανά μονάδα όγκου για μόνιμη παραμόρφωση.

Αντικαθιστώντας τα σχέσεις (2.1.53), (2.1.54) στις σχέσεις (2.1.49) και (2.1.50) αποκτούμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$dS = \beta_{ij} d\varepsilon_{ij} + \frac{c}{T} dT \quad (2.1.55)$$

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + T \beta_{ij} d\varepsilon_{ij} + cdT \quad (2.1.56)$$

Εισάγοντας τη σχέση (2.1.41) στη (2.1.56) και ολοκληρώνοντας τις εκφράσεις (2.1.55) και (2.1.56) με την υπόθεση ότι στη φυσική κατάσταση η εντροπία και η εσωτερική ενέργεια ισούνται με μηδέν, έχουμε:

$$S = \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + c \log[1 + (\theta / T_0)] \quad (2.1.57)$$

$$U = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + T_0 \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + c\theta \quad (2.1.58)$$

Στην έκφραση για την εντροπία, ο πρώτος όρος στο δεξιό σκέλος πηγάζει από τη σύζευξη το πεδίου παραμορφώσεων και θερμοκρασίας, ενώ ο δεύτερος από την εντροπία που δημιουργεί η ροή θερμότητας. Σε αυτήν την σχέση δεν έχουμε την εμφάνιση αμιγώς ελαστικού όρου. Συνεπώς βλέπουμε ότι σε ισόθερμες διεργασίες δεν προκαλείται μεταβολή της εντροπίας. Εν αντιθέσει, στην εξίσωση της εσωτερικής ενέργειας εμφανίζονται τρεις όροι. Ο πρώτος έχει πλήρως ελαστικό χαρακτήρα παριστάνοντας το έργο των τροπών, ο δεύτερος όρος αποτελεί συνέπεια της σύζευξης του πεδίου τροπών και θερμοκρασίας και ο τρίτος το θερμικό περιεχόμενο ανά μονάδα όγκου.

Αναπτύσσοντας σε σειρά τη σχέση (2.1.57) και με την υπόθεση ότι $\theta/T_0 \ll 1$ μπορούμε να κρατήσουμε τους παρακάτω όρους:

$$S = \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{c}{T_0} \theta \quad (2.1.59)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.1.59), μπορούμε να εκφράσουμε την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz ως:

$$F \approx \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta - \frac{c}{2T_0} \theta^2 \quad (2.1.60)$$

Με αυτόν τον τρόπο ορίσαμε τον συντελεστή m της σχέσης (2.1.39).

Απομένει να συσχετίσουμε την εντροπία με τη θερμική αγωγιμότητα. Θα εξάγουμε την εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας από την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Λαμβάνοντας υπόψη και το 2^ο θερμοδυναμικό νόμο η εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας λαμβάνει τη μορφή:

$$q_{i,j} + T\dot{S} - R = 0 \quad (2.1.61)$$

Ισχύουν όμως οι ακόλουθες σχέσεις (2.1.62-2.1.65):

$$q_i = -k_{ij}T_{,j} \quad (2.1.62)$$

$$T\dot{S} = T\beta_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{c}{T_0} T \frac{d\theta}{dt} \quad (2.1.63)$$

$$\theta = T - T_0 \quad (2.1.64)$$

$$q_{i,j} = -(k_{ij}T_{,j})_{,i} \quad (2.1.65)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.1.62-2.1.65) στην (2.1.61) και θέτοντας όπου $T=T_0$, λαμβάνουμε την κάτωθι γραμμική σχέση για τη θερμική αγωγιμότητα:

$$c\dot{\theta} - k_{ij}\theta_{,ij} + T_0\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = R \quad (2.1.66)$$

Οι μαθηματικές εκφράσεις για ισότροπο σώμα εξάγονται από τις αντίστοιχες για ανισότροπο, εφαρμόζοντας τις ακόλουθες σχέσεις:

$$E_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (2.1.67)$$

$$s_{ijkl} = \mu'(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda'\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (2.1.68)$$

$$\beta_{ij} = \gamma\delta_{ij}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_t\delta_{ij} \quad (2.1.69)$$

Όπου α_t ο συντελεστής γραμμικής θερμικής διαστολής, τα μ, λ οι σταθερές του Lamé για ισόθερμη κατάσταση και:

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t, \quad \mu' = \frac{1}{4\mu}, \quad \lambda' = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad (2.1.70)$$

Με εφαρμογή των σχέσεων (2.1.67-2.1.70) οι σχέσεις τάσεων-τροπών λαμβάνουν τη μορφή:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - \gamma\theta)\delta_{ij} \quad (2.1.71)$$

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_t\theta\delta_{ij} + 2\mu'\sigma_{ij} + \lambda'\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad (2.1.72)$$

Για ισότροπο σώμα έχουμε:

$$k_{ij} = k\delta_{ij} \quad (2.1.73)$$

Και η εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας καταλήγει ως:

$$k\theta_{,ii} - c\dot{\theta} - T_0\gamma\dot{\varepsilon}_{ii} = -R \quad (2.1.74)$$

Ενώ η εξίσωση κίνησης εκφρασμένη στο πεδίο των μετατοπίσεων περιγράφεται με τη σχέση:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} + pf_i - \gamma\theta_{,i} = \rho\ddot{u}_i \quad (2.1.75)$$

2.2) ΜΗ ΚΛΑΣΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ - ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Οι χρονικά μεταβαλλόμενες συνοριακές θερμικές συνθήκες ή οι χρονικά μεταβαλλόμενες θερμικές πηγές οδηγούν στη δημιουργία κυμάτων θερμικών τάσεων εντός ενός υλικού

φορέα. Στην περίπτωση που ο χρονικός ρυθμός μεταβολής των συνοριακών συνθηκών ή πηγών είναι τέτοιου μεγέθους που δεν μπορεί να αγνοηθεί η κυματική φύση του φαινομένου, η χρήση των συζευγμένων εξισώσεων κρίνεται απαραίτητη. Οι εξισώσεις πεδίου, όπως αυτές εξήχθησαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για ισότροπο ελαστικό σώμα, είναι:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho f_i - \gamma \theta_{,i} = \rho \ddot{u}_i \quad (2.2.1)$$

$$k \theta_{,ii} - c \dot{\theta} - T_0 \gamma \dot{\epsilon}_{,ii} = -R \quad (2.2.2)$$

Οι σχέσεις (2.2.1) και (2.2.2) αποτελούν τη μαθηματική βάση του κλασικού μοντέλου Θερμοελαστικότητας και συνιστούν ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων μεικτού υπερβολικού-παραβολικού τύπου. Η σχέση (2.2.1) περιγράφει 3 μερικές διαφορικές εξισώσεις υπερβολικού τύπου και το σύστημα συμπληρώνεται από την εξίσωση θερμοκίνησης, που αποτελεί παραβολική εξίσωση. Για να αποκτήσουμε την λύση για τη θερμοκρασία, τις μετατοπίσεις κι εν συνεχεία για τις τάσεις, οι εξισώσεις (2.2.1-2) πρέπει να επιλυθούν ταυτόχρονα. Εξαιτίας των μαθηματικών ιδιοτήτων του μεικτού τύπου του συστήματος εξισώσεων, ένα κομμάτι των αποτελεσμάτων, που παράγει ένα εξωγενές παράγοντας ως προς το σώμα, γίνονται αισθητά σε όλα τα σημεία του σώματος ακαριαία. Με άλλα λόγια, αν ένα ισότροπο και ομογενές ελαστικό σώμα εκτεθεί σε θερμικό σοκ, οι συνέπειες του θερμικού σοκ θα μεταδοθούν από το σημείο εφαρμογής ακαριαία σε όλα τα σημεία του σώματος. Για συζευγμένα θερμοελαστικά προβλήματα, αυτό σημαίνει ότι ένα θερμικό σοκ θα επηρεάσει ταυτόχρονα τα πεδία τάσεων και θερμοκρασίας παντού στον τόπο λύσεων. Από φυσικής πλευράς, αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα διάδοσης μιας θερμοελαστικής μεταβολής είναι άπειρη. Το παράδοξο αυτό δημιουργείται εξαιτίας του νόμου του Fourier, που όπως είδαμε στο κεφάλαιο (2.1) οδηγεί στη δημιουργία μιας παραβολικής μερικής διαφορικής εξίσωσης (εξίσωση διάχυσης) για τη θερμοκίνηση. Από τη στιγμή που αυτή η συμπεριφορά είναι φυσικά μη αποδεκτή, η θεωρία πρέπει να τροποποιηθεί και να χρησιμοποιηθεί ένα βελτιωμένο μαθηματικό μοντέλο. Επιπλέον πέρα από το παράδοξο της άπειρης ταχύτητας διάδοσης, το κλασικό θερμοελαστικό μοντέλο παρουσιάζει μη ικανοποιητική περιγραφή στην απόκριση ενός στερεού σε ταχύτατα μεταβαλλόμενη φόρτιση και σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες. Σε αυτή τη βάση, βελτιωμένα μοντέλα, με πεπερασμένη ταχύτητα κυματικής διάδοσης, έχουν προταθεί και αποτελούν τα μη κλασικά μοντέλα Θερμοελαστικότητας. Το σύνολο των θερμοελαστικών μοντέλων, κλασικό και μη κλασικά, συνιστούν το διευρυμένο μοντέλο της Γενικευμένης Θερμοελαστικότητας.

Οι πρώτες προτάσεις άρσης του παραδόξου χρονολογούνται πίσω στο 1867 από τον J. C. Maxwell (On the dynamical Theory of Gases) και το 1948 από τον C. Cattaneo (Sulla condizione del calore). Οι προτάσεις τους περιελάμβαναν τη μετατροπή της εξίσωσης θερμοκίνησης σε κυματική, με τροποποίηση του νόμου του Fourier. Ακολουθώντας τα βήματα των Maxwell και Cattaneo, πολλοί ερευνητές ανέπτυξαν τροποποιημένα θερμοελαστικά μοντέλα. Τροποποιήσεις έχουν προταθεί για την εξίσωση θερμοκίνησης, την καταστατική εξίσωση, την έκφραση της εντροπίας, για απουσία διάχυσης ενέργειας καθώς και σε άλλες σχέσεις. Οι βελτιωμένες αυτές θεωρίες οδηγούν σε υπερβολικές εξισώσεις πεδίου, οι οποίες εξασφαλίζουν την παραδοχή της περατής ταχύτητας διάδοσης των θερμοελαστικών διαταραχών. Η κυματικού τύπου θερμοκίνηση χαρακτηρίζεται ως δεύτερος ήχος, ενώ ως πρώτος ο συνηθής ήχος (ηχητικό κύμα). Σε αυτήν την εργασία θα παρουσιαστούν τα μοντέλα των Lord-Shulman (τροποποιημένος νόμος Fourier), Green-Lindsay (τροποποιημένη έκφραση εντροπίας) και

Green-Naghdi (Θερμοελαστικότητα αντιστρεπτών διεργασιών-απουσία ενεργειακής «σπατάλης»).

2.3) ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ LORD-SHULMAN

Το μοντέλο που προτάθηκε από τους Lord και Shulman το 1967 (Generalized Dynamical Theory of Thermoelasticity), στηρίζεται σε τροποποίηση του νόμου του Fourier. Η τροποποίηση επιτυγχάνεται μέσω της εισαγωγής της έννοιας του χρόνου χαλάρωσης.

Ο πρώτος νόμος της Θερμοδυναμικής για παραμορφώσιμο και θερμικά αγωγίμο σώμα, για μικρές τροπές και μικρή θερμοκρασιακή μεταβολή, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, δίδεται από τη σχέση:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + T \dot{S} = \dot{U} \quad (2.3.1)$$

Όπου

$$q_{i,j} = -T \dot{S} \quad (2.3.2)$$

Σύμφωνα με την αρχή αύξησης της εντροπίας σε ένα ελαστικά παραμορφώσιμο σώμα, η θερμική ροή και η θερμοκρασία δεν γίνεται να συνδέονται αυθαίρετα. Η σχέση αυτή, όπως περιγράφεται από το νόμο του Fourier για ανισότροπο στερεό σώμα, μπορεί να γραφεί ως:

$$q_i = b T_{,i} + B_{ij} T_{,j} \quad (2.3.3)$$

Όπου οι b και B_{ij} αποτελούν υλικές σταθερές. Για ισότροπο σώμα η σχέση απλοποιείται σε:

$$q_i = -k T_{,i} \quad (2.3.4)$$

Σύμφωνα με τη θεωρία των Lord και Shulman, η γενικότερη και τανυστικά περισσότερο έγκυρη σε σχέση με το νόμο Fourier, γραμμική σχέση μεταξύ των q_i και $T_{,i}$, που λαμβάνει υπόψη και το ρυθμό μεταβολής (ως προς το χρόνο) της θερμικής ροής, είναι η ακόλουθη:

$$q_i + \alpha \dot{q}_i + A_{ij} \dot{q}_j = b T_{,i} + B_{ij} T_{,j} \quad (2.3.5)$$

Όπου οι α και A_{ij} αποτελούν υλικές σταθερές για ανισότροπο σώμα. Για ισότροπο υλικό η σχέση απλοποιείται σε:

$$q_i + t_0 \dot{q}_i = -k T_{,i} \quad (2.3.6)$$

Όπου t_0 είναι ο χρόνος χαλάρωσης και αναπαριστά το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να αποκτήσουμε σταθερής κατάστασης θερμική αγωγή σε ένα στοιχείο όγκου, όταν σε αυτό εφαρμόζεται ξαφνική θερμική μεταβολή.

Η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz, από το κεφάλαιο 2.1, δίδεται ως:

$$F(\epsilon_{ij}, T) = U(\epsilon_{ij}, T) - TS(\epsilon_{ij}, T) \quad (2.3.7)$$

Και η παράγωγος της ως προς το χρόνο:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} \quad (2.3.8)$$

Ο τανυστής της τάσης και η εντροπία σε σχέση με την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz δίδονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (2.3.9)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (2.3.10)$$

Αντικαθιστώντας την (2.3.10) στην (2.3.2) λαμβάνουμε:

$$q_{i,j} = -T\dot{S} = T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) = T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \dot{T} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \dot{\varepsilon}_{ij} \right) \quad (2.3.11)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.3.6) και (2.3.11) οδηγούμαστε στην έκφραση:

$$kT_{,ii} = -T \left[\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} (\dot{T} + t_0 \ddot{T}) + \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} (\dot{\varepsilon}_{ij} + t_0 \ddot{\varepsilon}_{ij}) \right] - t_0 [(\dot{T})^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} + T \frac{\partial^3 F}{\partial T^3} \right) + (\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{T}) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} + 2T \frac{\partial^3 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T^2} \right) + (\dot{\varepsilon}_{ij})^2 \left(T \frac{\partial^3 F}{\partial \varepsilon_{ij}^2 \partial T} \right)] \quad (2.3.12)$$

Στο πλαίσιο της γραμμικής θεωρίας Θερμοελαστικότητας οι μη γραμμικοί όροι παραλείπονται και η έκφραση (2.3.12) καταλήγει στην:

$$kT_{,ii} = -T \left[\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} (\dot{T} + t_0 \ddot{T}) + \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} (\dot{\varepsilon}_{ij} + t_0 \ddot{\varepsilon}_{ij}) \right] \quad (2.3.13)$$

Ορίζοντας ως αδιάστατη θερμοκρασιακή μεταβολή την ποσότητα:

$$\bar{\theta} = \frac{T - T_0}{T_0} \quad (2.3.14)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της ειδικής θερμότητας c :

$$c = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad (2.3.15)$$

Και αναλύοντας την ελεύθερη ενέργεια σε δυναμοσειρά των τριών αναλλοίωτων του τανυστή των τροπών και της αδιάστατης θερμοκρασιακής μεταβολής, σύμφωνα με τους Boley και Weiner (Theory of Thermal Stresses, 1960), η σχέση τάσεων-τροπών-θερμοκρασίας από την έκφραση (2.3.9) γίνεται:

$$\sigma_{ij} = \alpha_1 \delta_{ij} + a_2 (2l'_1 \delta_{ij}) + a_3 (l'_1 \delta_{ij} - \varepsilon_{ij}) + a_7 (\bar{\theta} \delta_{ij}) + \dots \quad (2.3.16)$$

Η εξίσωση της ενέργειας από τη σχέση (2.3.13) γίνεται:

$$kT_{,ii} = -\frac{T}{T_0^2} \{ 2\alpha_{13} + 2\alpha_{17} l'_1 + 6a_{25} \bar{\theta} + \dots \} (\dot{T} + t_0 \ddot{T}) - \frac{T}{T_0} \{ a_7 \delta_{ij} + a_{11} (\delta_{ij} l'_1 - \varepsilon_{ij}) + 2a_{14} l'_1 \delta_{ij} + 2a_{17} \bar{\theta} \delta_{ij} + a_{19} [l'_1 (\delta_{ij} l'_1 - \varepsilon_{ij}) + l'_2 \delta_{ij}] + a_{21} (\varepsilon_{ik} \varepsilon_{jk} - \varepsilon_{ij} l'_1 + \delta_{ij} l'_2) + 3a_{24} l'_2 \delta_{ij} + \dots \} (\dot{\varepsilon}_{ij} + t_0 \ddot{\varepsilon}_{ij}) \quad (2.3.18)$$

Και η ειδική θερμότητα δίδεται ως:

$$c = \frac{-T}{T_0^2} (2\alpha_{13} + 2\alpha_{17} l'_1 + 6a_{25} \bar{\theta} + \dots) \quad (2.3.19)$$

Όπου l'_1, l'_2 οι πρώτη και η δεύτερη αναλλοίωτη του τανυστή των τροπών και α_i οι συντελεστές στις σειρές της F .

Αγνοούμε του μη γραμμικούς όρους και οι όροι α_i της σχέσης (2.3.16) γίνονται:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{2}, \alpha_3 = -2\mu, \alpha_7 = -(3\lambda + 2\mu)\alpha T_0 \quad (2.3.20)$$

Και με αντικατάσταση τους στην (2.3.16) οδηγούμαστε στη γνωστή καταστατική σχέση:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha (T - T_0) \delta_{ij} \quad (2.3.21)$$

Για σταθερή ειδική θερμότητα και μικρή αδιάστατη θερμοκρασιακή μεταβολή η εξίσωση

της ενέργειας οδηγείται στη σχέση:

$$kT_{,ji} = c(\dot{T} + t_0 \ddot{T}) + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0 (\dot{\epsilon}_{kk} + t_0 \ddot{\epsilon}_{kk}) \quad (2.3.22)$$

Οι σχέσεις (2.3.22) και $\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} + pf_i - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,i} = \rho \ddot{u}_i$ αποτελούν τις εξισώσεις πεδίου της υπερβολικής Θερμοελαστικότητας με έναν χρόνο χαλάρωσης t_0 , για ισότροπο σώμα. Για ανισότροπο ομογενές στερεό, οι εξισώσεις πεδίου λαμβάνουν τη μορφή:

$$k_{ij}T_{,ji} = (1 + t_0 \frac{\partial}{\partial t}) [c\dot{T} + T_0 \beta_{ij} \dot{u}_{i,j}] \quad (2.3.23)$$

$$E_{ijkl}u_{k,jj} - \beta_{ij}T_{,j} + pf_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.3.24)$$

Και συμπεριλαμβανομένης θερμικής πηγής R , λαμβάνουμε για την εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας:

$$k_{ij}T_{,ji} = (1 + t_0 \frac{\partial}{\partial t}) [c\dot{T} + T_0 \beta_{ij} \dot{u}_{i,j} + R] \quad (2.3.25)$$

Είναι άξια αναφοράς η ακόλουθη επισήμανση. Αγνοώντας την παρουσία θερμικής πηγής και του όρου σύζευξης, η εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας έρχεται στη μορφή:

$$\frac{1}{c_T^2} \ddot{T} + \frac{1}{\alpha} \dot{T} = \nabla^2 T \quad (2.3.26)$$

Όπου c_T είναι η ταχύτητα της θερμικής διάδοσης και δίδεται ως:

$$c_T = \left(\frac{k}{t_0 c}\right)^{1/2} = \left(\frac{\alpha}{t_0}\right)^{1/2} \quad (2.3.27)$$

Είναι προφανές ότι όταν $c_T \rightarrow \infty$ (την οριακή περίπτωση του χρόνου χαλάρωσης), τότε $t_0 \rightarrow 0$. Αποτελεί την περίπτωση άπειρης ταχύτητας διάδοσης της θερμικής διάδοσης και παραπέμπει στο κλασικό παραβολικό μοντέλο, της μετάδοσης θερμότητας με αγωγή. Επιπροσθέτως, το μοντέλο παραπέμπει στο νόμο του Fourier και στην περίπτωση της σταθερής θερμοκρασιακής κατάστασης. Η λύση που δίδουν τα δύο μοντέλα διαφέρει μόνο κατά την μεταβατική κατάσταση. Ο χρόνος χαλάρωσης t_0 έχει ως φυσική ερμηνεία την έναρξη θερμικής ροής, έπειτα από εφαρμογή θερμοκρασιακής μεταβολής.

2.4) ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ GREEN-LINDSAY

Οι Green και Lindsay εισήγαγαν δύο διαφορετικούς χρόνους χαλάρωσης, τι στη σχέση τάσεων-τροπών και t_2 στην έκφραση της εντροπίας. Το μοντέλο αυτό βασίζεται στο έργο του Müller (The Coldness, A Universal Function in Thermoelastic Bodies, 1971), ο οποίος ανέπτυξε μια πιο άμεση προσέγγιση, για να συμπεριλάβει το φαινόμενο του δευτέρου ήχου. Τα αποκτηθέντα αποτελέσματα υπόκεινται στους περιορισμούς από την ανάπτυξη μιας τροποποιημένης εντροπικής ανισότητας, στην οποία περιλαμβάνεται ένα διάνυσμα εντροπικής ροής. Στη θεωρία που ανέπτυξε ο Müller, δύο επιπλέον περιορισμοί που τέθηκαν είναι της μηδενικής πηγής θερμότητας και των μηδενικών μαζικών δυνάμεων. Οι Green και Lindsay προχώρησαν το έργο του Müller ένα βήμα παραπέρα, άροντας τους περιορισμούς της μηδενικής πηγής θερμότητας και των μηδενικών μαζικών δυνάμεων, υιοθετώντας την πρόταση των Green και Laws (On the Entropy Production Inequality, 1972) για την μαθηματική ανισότητα περιγραφής της παραγωγής εντροπίας.

Η έκφραση (2.1.26), που περιγράφει τον 2ο θερμοδυναμικό νόμο στη μορφή της ανισότητας Clausius-Duhem, μπορεί να αντικατασταθεί από μια γενικότερη σχέση:

$$\bar{T}\dot{S} - R + q_{i,j} - \frac{q_i}{\bar{T}}\dot{T}_j \geq 0 \quad (2.4.1)$$

Όπου η \bar{T} αποτελεί θετική βαθμωτή συνάρτηση, η οποία καλείται θερμοδυναμική θερμοκρασία. Όπως εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς, η ανισότητα (2.4.1) εκπίπτει σε αυτήν του κλασσικού μοντέλου Θερμοελαστικότητας όταν $\bar{T} = T$.

Εισάγουμε την ενεργειακή συνάρτηση \bar{F} :

$$\bar{F} = U - \bar{T}S \quad (2.4.2)$$

Θεωρείται ότι οι \bar{F} , \bar{T} είναι συναρτήσεις των T , \dot{T} , T_j και ε_{ij} . Η \bar{F} εκπίπτει στην ελεύθερη ενέργεια Helmholtz για $\bar{T} = T$. Εάν υποθέσουμε ότι ο τανυστής σ_{ij} είναι ανεξάρτητος του $\dot{\varepsilon}_{ij}$, ότι q_i είναι ανεξάρτητο του \dot{T}_j , ότι S ανεξάρτητο του \dot{T} και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.4.1), (2.4.2), οδηγούμαστε στις ακόλουθες μαθηματικές εκφράσεις:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.4.3)$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{T}} + S \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{T}} = 0 \quad (2.4.4)$$

$$\frac{q_i}{\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{T}} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial T_j} = 0 \quad (2.4.5)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial T} + S \frac{\partial \bar{T}}{\partial T} \right) \dot{T} + \frac{\partial}{\partial T_j} \bar{F} \dot{T}_j + \dot{S} \bar{T} + q_{i,j} = 0 \quad (2.4.6)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial T} + S \frac{\partial \bar{T}}{\partial T} \right) \dot{T} + \frac{q_i}{\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial T} T_j \leq 0 \quad (2.4.7)$$

Θεωρούμε παραπέρα ότι:

$$\bar{T} = \bar{T}(T, \dot{T}) \quad (2.4.8)$$

Οι σχέσεις (2.4.3-5) αποτελούν τις καταστατικές εξισώσεις για τια την τάση, την εντροπία, τη θερμική ροή και τη θερμοκρασία. Η σχέση (2.4.6) αποτελεί την εξίσωση ενέργειας και η ανίσωση (2.4.7) τον νόμο αύξησης της εντροπίας. Παρατηρούμε ότι θέτοντας $\bar{T} = T$ η σχέση (2.4.5) γίνεται ανεξάρτητη του q_i και συνεπώς μια ξεχωριστή σχέση επιβάλλεται για την περιγραφή του q_i σε σχέση με τη θερμοκρασία. Σε αυτήν την περίπτωση απαιτείται η υπόθεση που προτείνεται από το νόμο του Fourier και καταλήγουμε στο κλασσικό μοντέλο Θερμοελαστικότητας.

Για να γραμμικοποιήσουμε τις παραπάνω σχέσεις, θα τις αναπτύξουμε σε σειρές Maclaurin πέριξ της κατάστασης αναφοράς. Η επέκταση των \bar{F} , \bar{T} θα γίνει με την υπόθεση ότι $\bar{T}(T, 0) = T$.

$$\bar{T} = T + [\dot{T} + \alpha_1(T - T_0)\dot{T} + \alpha_2\dot{T}^2] \quad (2.4.9)$$

$$\bar{F} = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \varepsilon_{ij} [(T - T_0) + t_1 \dot{T}] - \left(\frac{t_1}{T_0} \right) \{ [c[(T - T_0) + \frac{1}{2} t_2 \dot{T}] - C_i T_i] \dot{T} - \frac{1}{2} k_{ij} T_i T_j \} \quad (2.4.10)$$

Οι σχέσεις (2.4.9-10) αντικαθιστώνται στις σχέσεις (2.4.3-7) και καταλήγουμε:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} [T - T_0] + t_1 \dot{T} \quad (2.4.11)$$

$$S = \frac{c}{T_0} [(T - T_0) + t_2 \dot{T}] - \frac{C_i}{T_0} T_{,i} + \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.4.12)$$

$$q_i = -(C_i \dot{T} + k_{ij} T_{,j}) \quad (2.4.13)$$

$$q_{i,j} = R - \dot{S} T_0 \quad (2.4.14)$$

$$c(t_1 - t_2) y_0^2 + 2C_i y_0 y_i + k_{ij} y_i y_j \geq 0 \quad (2.4.15)$$

Όπου οι t_1 , t_2 , α_1 , α_2 , και C_i αποτελούν νέες υλικές σταθερές ως προς το κλασικό μοντέλο θερμοελαστικότητας ή το μοντέλο Lord-Shulman. Οι y_0 και y_i αποτελούν αυθαίρετες πραγματικές μεταβλητές.

Με το συνδυασμό των εξισώσεων (2.4.12-14) και την αντικατάσταση της (2.4.11) στην εξίσωση κίνησης, σχηματίζουμε τις εξισώσεις πεδίου του μοντέλου Green-Lindsay για ανισότροπο ομογενές υλικό.

$$k_{ij} T_{,ji} + R = c(\dot{T} + t_2 \ddot{T}) - 2C_i \dot{T}_{,i} + T_0 \beta_{ij} \dot{u}_{i,j} \quad (2.4.16)$$

$$E_{ijkl} u_{k,lj} - \beta_{ij} (T + t_1 \dot{T})_{,j} + p f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.4.17)$$

Για ισότροπο υλικό οι εξισώσεις πεδίου γίνονται:

$$k T_{,ji} + R = c \dot{T} + c t_2 \ddot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha T_0 \dot{u}_{i,j} \quad (2.4.18)$$

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,j} - t_1 (3\lambda + 2\mu) \alpha \dot{T}_{,j} + p f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.4.19)$$

2.5) ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ GREEN-NAGHDI

Οι Green και Naghdi (Re-examination of the basic Postulate of Thermomechanics, 1991) ανέπτυξαν ένα νέο μοντέλο, το οποίο βασίζεται στη χρήση ενός ευρύτερου ισοζυγίου εντροπίας. Τρεις τύποι καταστατικών εξισώσεων απόκρισης προτείνονται. Ο πρώτος τύπος, μετά τη γραμμικοποίηση της θεωρίας, είναι ταυτόσημος με το κλασικό μοντέλο. Ο δεύτερος και τρίτος τύπος επιτρέπουν τη διάδοση των θερμοελαστικών μεταβολών με περατή ταχύτητα. Στο παρόν κεφάλαιο θα δοθούν οι βασικές σχέσεις, στις οποίες εδράζεται το μοντέλο, και εν συνεχεία θα αναπτυχθεί σύμφωνα με τον δεύτερο τύπο καταστατικών εξισώσεων.

Τον δεύτερο τύπο, οι Green και Naghdi τον ονόμασαν θερμοελαστικότητα χωρίς «σπατάλη» ενέργειας (θερμοελαστικότητα θερμοδυναμικών αντιστρεπτών διεργασιών-χωρίς διασκορπισμό ενέργειας). Η γενική ιδέα του μοντέλου θέτεται στο άρθρο 'Thermoelasticity without energy dissipation, 1993'. Δύο είναι οι βασικές διαφορές ως προς το κλασικό μοντέλο. Η πρώτη έγκειται στο ότι η θερμική ροή δεν περιλαμβάνει εσωτερική παραγωγή εντροπίας. Η δεύτερη στο ότι η ίδια συνάρτηση δυναμικού που χρησιμοποιείται για να εξαχθεί ο τανυστής της τάσης, χρησιμοποιείται για να οριστεί και η καταστατική εξίσωση της θερμικής ροής. Η παράθεση του μοντέλου ξεκινά από τη μη γραμμική θεωρία κι εν συνεχεία παρουσιάζεται η γραμμική.

Θεωρούμε πεπερασμένο σώμα B με υλικές συντεταγμένες \mathbf{X} στο σύστημα αναφοράς, βάσει των οποίων δίδεται το διάνυσμα θέσης (X_1, X_2, X_3) . Στην μη παραμορφωμένη κατάσταση το σώμα καταλαμβάνει χώρο R^3 . Στο τρέχον σύστημα αναφοράς το διάνυσμα θέσης δίδεται από τις συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) . Οι θερμικές παράμετροι ορίζονται ως εξής:

$$\text{Η θερμική μετατόπιση ορίζεται ως: } \mathcal{G} = \mathcal{G}(X_1, X_2, X_3, t) \quad (2.5.1)$$

$$\text{Η εμπειρική θερμοκρασία ως: } \theta = \dot{\mathcal{G}} \quad (2.5.2)$$

Η θερμοκρασία T , η οποία εξαρτάται από το θ και τις ιδιότητες του υλικού έτσι ώστε:

$$T > 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} > 0 \quad (2.5.3)$$

$$\text{Η κλίση της θερμικής μετατόπισης: } Y_i = \frac{\partial \theta}{\partial X_i} \quad (2.5.4)$$

$$\text{Η κλίση της θερμοκρασίας: } \Gamma_i = \frac{\partial \theta}{\partial X_i} \quad (2.5.5)$$

$$\text{Τα μεγέθη } \Gamma_i \text{ και } Y_j \text{ συνδέονται με τη σχέση: } \dot{Y}_j = F_{ji} \Gamma_i \quad (2.5.6)$$

$$\text{Όπου } F_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} \text{ (τανυστής κλίσης των τροπών)} \quad (2.5.7)$$

Και X_i είναι ο νόμος μετασχηματισμού των συντεταγμένων, που ορίζεται ως:

$$x_i = X_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad \text{με} \quad v_i = \dot{x}_i \quad (2.5.8)$$

$$\text{Εξωτερικός ρυθμός παροχής εντροπίας ανά μονάδα μάζας: } \eta \quad (2.5.9)$$

$$\text{Εξωτερικός ρυθμός παροχής θερμότητας ανά μονάδα μάζας: } r = T\eta \quad (2.5.10)$$

$$\text{Εσωτερικός ρυθμός παραγωγής εντροπίας ανά μονάδα μάζας: } \xi \quad (2.5.11)$$

$$\text{Εσωτερικός ρυθμός παραγωγής θερμότητας ανά μονάδα μάζας: } T\xi \quad (2.5.12)$$

$$\text{Πυκνότητα εντροπίας ανά μονάδα μάζας: } S \quad (2.5.13)$$

$$\text{Πυκνότητα θερμότητας ανά μονάδα μάζας: } Ts \quad (2.5.14)$$

$$\text{Εσωτερική ροή εντροπίας ανά μονάδα μάζας: } -\zeta \quad (2.5.15)$$

$$\text{Εσωτερική ροή θερμότητας ανά μονάδα μάζας: } -\zeta\theta = h \quad (2.5.16)$$

Η κλίση της ταχύτητας ορίζεται ως:

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} = D_{ij} + W_{ij} \quad (2.5.17)$$

Όπου D_{ij} ο ρυθμός μεταβολής του τανυστή των τροπών και W_{ij} ο ρυθμός μεταβολής των στροφών. Οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας και κίνησης:

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (2.5.18)$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \quad (2.5.19)$$

Συμβολίζοντας το διάνυσμα ροής εντροπίας και το διάνυσμα ροής θερμότητας με p_i και q_i αντίστοιχα, το ισοζύγιο εντροπίας σε τοπικό επίπεδο γράφεται:

$$\rho \dot{s} = \rho(n + \xi) - p_{i,i} \quad (2.5.20)$$

Όπου

$$\zeta = p_i n_i \quad \text{και} \quad q_i = T p_i \quad (2.5.21)$$

Απαλείφοντας τις μαζικές δυνάμεις και την εξωτερική παροχή εντροπίας η από την εξίσωση ενέργειας, οδηγούμαστε στην έκφραση:

$$\sigma_{ij} L_{ij} - \rho_i g_i - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \rho T \xi = 0 \quad (2.5.22)$$

Όπου με ψ συμβολίζεται η ειδική ελεύθερη ενέργεια Helmholtz (ανά μονάδα μάζας) και g_i αποτελεί το διάνυσμα κλίσης της θερμοκρασίας στην παραμορφωμένη κατάσταση:

$$g_i = T_{,i} = \frac{\partial T}{\partial X_i} \quad (2.5.23)$$

Θερμοελαστικότητα χωρίς «σπατάλη» ενέργειας (Green-Naghdi, Τύπος 2)

Θεωρούμε ομογενές υλικό και υποθέτουμε ότι οι καταστατικές σχέσεις για τα ψ , T , σ_{ij} , p_i , s , και ξ είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών θ , Y_i και F_{ij} :

$$\psi = \hat{\psi}(\theta, Y_i, F_{ij}) \quad (2.5.24)$$

$$\sigma_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}(\theta, Y_i, F_{ij}) \quad (2.5.25)$$

$$\xi = \hat{\xi}(\theta, Y_i, F_{ij}) \quad (2.5.26)$$

$$T = \hat{T}(\theta, Y_i, F_{ij}) \quad (2.5.27)$$

$$p_i = \hat{p}_i(\theta, Y_i, F_{ij}) \quad (2.5.28)$$

$$s = \hat{s}(\theta, Y_i, F_{ij}) \quad (2.5.29)$$

Με αντικατάσταση των εξισώσεων (2.5.24-29) στην μειωμένη εξίσωση ενέργειας (2.5.22), οδηγούμαστε:

$$\begin{aligned} \rho \hat{T} \hat{\xi} + \rho \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} + \hat{s} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} + \left[\rho \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial Y_j} + \hat{s} \frac{\partial \hat{T}}{\partial Y_j} \right) F_{ij} \Gamma_i + \hat{p}_i \Gamma_i \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] + [-\hat{\sigma}_{ij} + \\ + \rho \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial F_{ik}} + \hat{s} \frac{\partial \hat{T}}{\partial F_{ik}} \right) F_{kj}] L_{ij} + \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial Y_i} \hat{p}_j \right) \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial F_{ij}} \hat{p}_k \right) \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} = 0 \end{aligned} \quad (2.5.30)$$

Όπου τα σύμβολα με το χαρακτηριστικό καπέλο δείχνουν τις τιμές των συναρτήσεων. Στον τρίτο όρο, η σχέση (2.5.6) χρησιμοποιείται. Συγκρίνοντας την εξίσωση (2.5.30) με μία γενική πολυωνυμική εξίσωση της μορφής:

$$a + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4 + a_5 y_5 = 0 \quad (2.5.31)$$

Λαμβάνουμε:

$$a = \rho \hat{T} \hat{\xi} \quad (2.5.32)$$

$$a_1 = \rho \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} + \hat{s} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} \right) \quad (2.5.33)$$

$$a_2 = \rho \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial Y_j} + \hat{s} \frac{\partial \hat{T}}{\partial Y_j} \right) F_{ij} \Gamma_i + \hat{p}_i \Gamma_i \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (2.5.34)$$

$$a_3 = -\hat{\sigma}_{ij} + \rho \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial F_{ik}} + \hat{s} \frac{\partial \hat{T}}{\partial F_{ik}} \right) F_{kj} \quad (2.5.35)$$

$$a_4 = \frac{\partial \hat{T}}{\partial Y_i} \hat{p}_j \quad (2.5.36)$$

$$a_5 = \frac{\partial \hat{T}}{\partial F_{ij}} \hat{p}_k \quad (2.5.37)$$

Με τις μεταβλητές:

$$y_1 = \dot{\theta}, \quad y_2 = \Gamma_i, \quad y_3 = L_{ij}, \quad y_4 = \frac{\partial Y_i}{\partial x_j}, \quad y_5 = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} \quad (2.5.38)$$

Από τη στιγμή που η μειωμένη εξίσωση ενέργειας (2.5.30) πρέπει ταυτοτικά να ικανοποιείται για όλες τις διεργασίες και υπό τους περιορισμούς που επιβάλλει η συναρτησιακή εξάρτηση των καταστατικών εξισώσεων (2.5.24-29), πρέπει να επιλέξουμε όλες οι μεταβλητές να ισούνται με μηδέν και ο πρώτος όρος a επίσης να είναι μηδενικός.

Η εξίσωση μειωμένης ενέργειας λαμβάνει τώρα τη μορφή:

$$\sum_{n=1}^5 a_n \gamma_n = 0 \quad (2.5.39)$$

Το αριστερό μέρος της εξίσωσης πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν. Συνεπώς, όταν όλες οι μεταβλητές, εκτός της αυθαίρετης μεταβλητής $\gamma_5 = \partial F_{ij} / \partial x_k$, επιλέγονται μηδέν (από τη στιγμή που οι συνιστώσες του διανύσματος εντροπικής και θερμικής ροής είναι μη μηδενικές από φυσικής σκοπιάς.), τότε $\partial \hat{T} / \partial F_{ij} = 0$. Στη συνέχεια, μπορούμε να επιλέξουμε όλες τις μεταβλητές των εξισώσεων (2.5.38) εκτός από την γ_4 . Σε αυτήν την περίπτωση, από τη στιγμή που οι συνιστώσες του διανύσματος εντροπικής ροής είναι μη μηδενικές, έπεται ότι $\partial \hat{T} / \partial \gamma_i = 0$. Σαν συνέπεια έχουμε:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial F_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial \hat{T}}{\partial \gamma_i} = 0 \quad (2.5.40)$$

Ανακαλώντας τη σχέση (2.5.27) και σε σύνδεση με τα αποτελέσματα της σχέσης (2.5.40), υποδεικνύεται ότι η T αποτελεί συνάρτηση μόνο του θ :

$$T = \hat{T}(\theta) \quad (2.5.41)$$

Έτσι, μπορούμε να διαλέξουμε την εμπειρική θερμοκρασία $\theta = T - T_0$, όπου T_0 αποτελεί

σταθερή. Τότε $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 1$.

Από τις εξισώσεις (2.5.24-29) έπεται ότι $\psi = \hat{\psi}(\theta, \gamma_i, F_{ij})$, ή $\psi = \hat{\psi}(T, \gamma_i, F_{ij})$. Θέτοντας $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ και με τη χρήση των σχέσεων (2.5.40-41), αποκτούμε:

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial F_{ik}} F_{kj}, \quad \xi = 0, \quad p_i = -\rho F_{ji} \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_j} \quad (2.5.42)$$

Οι εξισώσεις (2.5.40) και (2.5.42) αποτελούν τις αναγκαίες συνθήκες για να ικανοποιείται η μειωμένη εξίσωση της ενέργειας, υπό τις παραδοχές των σχέσεων (2.5.24-29).

Οι προτάσεις των Green και Naghdi που παρατέθηκαν σε αυτό το τμήμα βασίζονται στην υπόθεση ότι ο εσωτερικός ρυθμός παραγωγής εντροπίας ξ είναι μηδενικός. Στο φυσικό επίπεδο αυτό σημαίνει ότι η θερμοελαστική ανάλυση βασίζεται στην υπόθεση μη διασκορπισμού ενέργειας. Παραπέρα, παρατηρούμε από τις εξισώσεις (2.5.42) ότι διάνυσμα εντροπικής ροής ορίζεται από τη μερική παράγωγο της συνάρτησης ειδικής ελεύθερης ενέργειας σε σχέση με την κλίση της θερμικής μετατόπισης.

Γραμμική Θεωρία

Η γραμμική θεωρία ακολουθεί την υπόθεση ότι η θερμοκρασιακή μεταβολή θ , η θερμική μετατόπιση ϑ , και οι μετατοπίσεις u_i είναι πολύ μικρές συγκρινόμενες με τις τιμές αναφοράς τους και οι όροι υψηλότερης τάξης μπορούν να αμεληθούν. Θεωρούμε επίσης ότι οι χρονικές και χωρικές παράγωγοι των προαναφερθέντων μεγεθών είναι επίσης μικρού μεγέθους. Για να παρουσιάσουν τη γραμμική θεωρία, οι Green και Naghdi χρησιμοποίησαν μια τετραγωνική συνάρτηση απειροστών τροπών, θερμοκρασίας και θερμικών μετατοπίσεων, για να περιγράψουν την συνάρτηση ειδικής ελεύθερης ενέργειας Helmholtz. Για ισότροπο υλικό η έκφραση έχει ως:

$$\rho_0 \psi = \frac{1}{2} (\lambda \varepsilon_{,ii})^2 + \mu \varepsilon_{,ij} \varepsilon_{,ji} - \frac{\rho_0 c_E \theta^2}{2T_0} - \frac{E \alpha^*}{3(1-2\nu)} \theta \varepsilon_{,ii} + \frac{\kappa^* \gamma_i \gamma_i}{2T_0} \quad (2.5.43)$$

Οι μαθηματικές εκφράσεις για τα υπόλοιπα θερμομηχανικά μεγέθη λαμβάνουν τη μορφή:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{,kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{,ij} - \frac{E \alpha^* \theta}{3(1-2\nu)} \delta_{ij} \quad (2.5.44)$$

$$\rho_0 s = \rho_0 c_E \frac{\theta}{T_0} + \frac{E \alpha^* \theta}{3(1-2\nu)} \varepsilon_{,ii} \quad (2.5.45)$$

$$\rho_i = -\frac{\kappa^*}{T_0} \gamma_i \quad (2.5.46)$$

$$q_i = -\kappa^* \gamma_i \quad (2.5.47)$$

Όπου κ^* σταθερά και α^* ο συντελεστής θερμοτικής διαστολής. Για την ειδική εσωτερική ενέργεια ε έχουμε:

$$\rho_0 \varepsilon = \rho_0 (\psi + s\theta) = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{,ii})^2 + \mu \varepsilon_{,ij} \varepsilon_{,ji} + \frac{\rho_0 c_E \theta^2}{2T_0} + \frac{\kappa^*}{2T_0} \gamma_i \gamma_i \quad (2.5.48)$$

Με αντικατάσταση των σ_{ij} , s και ρ_i στις εξισώσεις (2.5.19) και (2.5.21) και απαλοιφή μεταξύ ρ και ρ_0 , έχουμε:

$$(\lambda + \mu) u_{,j,ji} + \mu u_{,i,jj} - \frac{E \alpha^*}{3(1-2\nu)} \theta_{,i} + \rho_0 b_i = \rho_0 \ddot{u}_i \quad (2.5.49)$$

$$\rho_0 c_E \ddot{\theta} + \frac{E \alpha^* T_0}{3(1-2\nu)} \ddot{u}_{i,i} = \rho_0 r + \kappa^* \theta_{,ii} \quad (2.5.50)$$

Οι εξισώσεις (2.5.49) και (2.5.50) αποτελούν τις εξισώσεις πεδίου της συζευγμένης θερμοελαστικότητας χωρίς «σπατάλη» ενέργειας, για ισότροπο σώμα.

2.6) ΤΟ ΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας τέσσερα μοντέλα θερμοελαστικότητας έχουν παρουσιαστεί. Πρώτα παρουσιάστηκε η συμβατική θεωρία θερμοελαστικότητας, που βασίζεται στο νόμο του Fourier και παρουσιάζει το παράδοξο της άπειρης ταχύτητας διάδοσης των θερμοελαστικών διαταραχών, και στη συνέχεια τα μοντέλα Lord-Shulman, Green-Lindsay και Green-Naghdi-2, τα οποία δεν εμφανίζουν το παράδοξο της συμβατικής θεωρίας και προσεγγίζουν καλύτερα τα δυναμικά φαινόμενα.

Σε αυτό το τμήμα της εργασίας, θα παρουσιαστούν σε κοινές, ενοποιημένες μαθηματικές εκφράσεις όλα τα μοντέλα της Γενικευμένης θερμοελαστικότητας που έχουν αναλυθεί μέχρι τώρα. Ενοποιητικές παράμετροι θα εισαχθούν για να οδηγήσουν τις εξισώσεις του κλασικού μοντέλου και των μοντέλων Lord-Shulman, Green-Lindsay και Green-Naghdi σε κοινό σύστημα. Θα δοθεί το ενοποιημένο σύστημα εξισώσεων περιγραφής της θερμομηχανικής συμπεριφοράς ανισότροπου ετερογενούς σώματος και στη συνέχεια η απλοποιημένη μορφή για την περιγραφή ισότροπου ομογενούς σώματος. Το ενοποιημένο μοντέλο θα στηριχθεί στις ακόλουθες βασικές σχέσεις:

Τις εξισώσεις κίνησης

$$\nabla \sigma + \rho f = \rho \ddot{u} \quad (2.6.1)$$

Τη γραμμική σχέση τροπών-μετατοπίσεων

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})'] \quad (2.6.2)$$

Τον νόμο του Hooke για γραμμικά θερμοελαστικό σώμα

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}(T - T_0 + t_1\dot{T}) \quad (2.6.3)$$

Το ισοζύγιο εντροπίας

$$\nabla\mathbf{q} = R - T_0\dot{S} \quad (2.6.4)$$

Την σχέση για την εντροπία

$$S = \left(\frac{\rho c_\varepsilon}{T_0}\right)(T + t_2\dot{T} - T_0) + \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{T_0}\hat{\mathbf{C}}\nabla T \quad (2.6.5)$$

Την εξίσωση μετάδοσης θερμότητας με αγωγή

$$n\mathbf{q} + n\dot{\mathbf{q}} + t_3\dot{\mathbf{q}} = -n\mathbf{K}\nabla T - t_3\mathbf{K}\nabla\dot{T} - t_3\mathbf{K}^*\nabla T - \hat{\mathbf{C}}\dot{T} \quad (2.6.6)$$

Οι εξισώσεις (2.6.1-6) οδηγούν στις εξισώσεις πεδίου της κλασικής θεωρίας για $\tau=0$, $\hat{\mathbf{C}}=0$, $t_1=t_2=t_3=0$ και $\eta=1$. Στη θεωρία Lord-Shulman οδηγούμαστε για $\hat{\mathbf{C}}=0$, $t_1=t_2=t_3=0$ και $\eta=1$. Οι εξισώσεις πεδίου για το μοντέλο Green-Lindsay αποκτούνται για $\tau=0$, $\eta=1$, $t_3=0$. Για να λάβουμε το μοντέλο Green-Naghdi τρίτου τύπου θέτουμε $\tau=0$, $\hat{\mathbf{C}}=0$, $\eta=t_1=t_2=0$ και $t_3=1$. Για να λάβουμε τα μοντέλα του πρώτου και δεύτερου τύπου Green-Naghdi, στις εξισώσεις του τρίτου τύπου θέτουμε $\mathbf{K}^*=0$ και $\mathbf{K}=0$ αντίστοιχα. Ο πρώτος τύπος του μοντέλου Green-Naghdi είναι ταυτόσημος με τη κλασική θεωρία.

Για να αποκτήσουμε το σύστημα εξισώσεων στο πεδίο των μετατοπίσεων και της θερμοκρασίας, οι όροι $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{q} και S πρέπει να απαλειφθούν με τη χρήση των εξισώσεων (2.6.1-6). Εφαρμόζουμε τον τελεστή ∇ στην εξίσωση (2.6.6) για να επιτύχουμε:

$$n\nabla\cdot\mathbf{q} + n\nabla\cdot(\dot{\mathbf{q}}) + t_3\nabla\cdot\dot{\mathbf{q}} = -n\nabla\cdot(\mathbf{K}\nabla T) - t_3\nabla\cdot(\mathbf{K}\nabla\dot{T}) - t_3\nabla\cdot(\mathbf{K}^*\nabla T) - \nabla\cdot(\hat{\mathbf{C}}\dot{T}) \quad (2.6.7)$$

Αντικαθιστώντας τον πρώτο και τρίτο όρο στην αριστερή πλευρά της (2.6.7) και χρησιμοποιώντας την σχέση (2.6.4), λαμβάνουμε:

$$n(R - T_0\dot{S}) + n\nabla\cdot(\dot{\mathbf{q}}) + t_3(\dot{R} - T_0\dot{S}) = -n\nabla\cdot(\mathbf{K}\nabla T) - t_3\nabla\cdot(\mathbf{K}\nabla\dot{T}) - t_3\nabla\cdot(\mathbf{K}^*\nabla T) - \nabla\cdot(\hat{\mathbf{C}}\dot{T}) \quad (2.6.8)$$

Επίσης, ο δεύτερος όρος, που αντιστοιχεί μόνο στο μοντέλο Lord-Shulman, πρέπει να αντικατασταθεί με τη χρήση της σχέσης (2.6.6). Για απλοποίηση χρησιμοποιούμε μόνο τους όρους που εμφανίζονται στη θεωρία Lord-Shulman. Η εξίσωση (2.6.6) για τη θεωρία Lord-Shulman ($\hat{\mathbf{C}}=0$, $t_3=0$ και $\eta=1$) μπορεί να λυθεί για να βρεθεί η ροή θερμότητας σε όρους θερμοκρασίας ως:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{B}^{-1} \int_{-\infty}^t \tilde{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau}^{-1}\mathbf{K}\nabla T d\tilde{t} \quad (2.6.9)$$

Όπου

$$\mathbf{B} = \exp(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\tau}^n}{n!} (\boldsymbol{\tau}^{-1})^n \quad (2.6.10)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \exp(\tilde{\boldsymbol{\tau}}\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}^n}{n!} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{-1})^n \quad (2.6.11)$$

Εδώ, $(\boldsymbol{\tau}^{-1})^0 = \mathbf{I}$, με \mathbf{I} τον μοναδιαίο τανυστή.

Η χρονική παραγωγή της σχέσης (2.6.9), λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη ότι:

$\frac{\partial(\mathbf{B}^{-1})}{\partial t} = -\mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{B}^{-1} = -\boldsymbol{\tau}^{-1} \dot{\mathbf{B}}^{-1}$, και πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα με $\boldsymbol{\tau}$, μας οδηγεί στη σχέση:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}^{-1} \int_{-\infty}^t \tilde{\mathbf{B}} \boldsymbol{\tau}^{-1} \mathbf{K} \nabla T d\tilde{t} - \mathbf{K} \nabla T \quad (2.6.12)$$

Η αντικατάσταση της (2.6.12) στην (2.6.8) δίδει:

$$n(R - T_0 \dot{S}) + n \nabla \cdot (\mathbf{B}^{-1} \int_{-\infty}^t \tilde{\mathbf{B}} \boldsymbol{\tau}^{-1} \mathbf{K} \nabla T d\tilde{t}) + t_3 (\dot{R} - T_0 \dot{S}) = -t_3 \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \dot{T}) - t_3 \nabla \cdot (\mathbf{K}^* \nabla T) - \nabla \cdot (\hat{\mathbf{C}} \dot{T}) \quad (2.6.13)$$

Τώρα, αντικαθιστώντας την εντροπία S από την σχέση (2.6.5) στη σχέση (2.6.13) και αξιοποιώντας την εξίσωση (2.6.2), λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές για τους ενοποιητικούς όρους η και τ , τις τιμές των παραμέτρων t_0, t_1, t_2 και ότι οι τανυστές \mathbf{B} και είναι συμμετρικοί, μπορούμε να αποκτήσουμε την εξίσωση ενέργειας στο πεδίο των μετατοπίσεων και της θερμοκρασίας. Απαλείφοντας του τανυστές των τάσεων και των τροπών μέσω των εξισώσεων (2.6.1) και (2.6.3), οδηγούμαστε στις εξισώσεις πεδίου εκφρασμένες στο πεδίο των μετατοπίσεων:

$$t_3 \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \dot{T}) + t_3 \nabla \cdot (\mathbf{K}^* \nabla T) + n \nabla \cdot (\mathbf{B}^{-1} \int_{-\infty}^t \mathbf{B} \boldsymbol{\tau}^{-1} \mathbf{K} \nabla T d\tilde{t}) - \rho c_E (t_2 + t_3) \ddot{T} - n \rho c_E \dot{T} - n T_0 \boldsymbol{\beta} : (\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}) - t_3 T_0 \boldsymbol{\beta} : (\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}) + 2 \hat{\mathbf{C}} : (\nabla \dot{T}) + (\nabla \cdot \hat{\mathbf{C}}) \dot{T} + nR + t_3 \dot{R} = 0 \quad (2.6.14)$$

$$\nabla \cdot [\mathbf{E}(\nabla \mathbf{u})] - (\nabla \cdot \boldsymbol{\beta})(T - T_0 + t_1 \dot{T}) - \boldsymbol{\beta} \nabla (T + t_1 \dot{T}) + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.6.15)$$

Η αναθεώρηση των εξισώσεων (2.6.14-15) για τη θεωρία Green-Naghdi αποκαλύπτει ότι δεν εμφανίζεται όρος απόσβεσης στο σύστημα εξισώσεων και για αυτό η δευτέρου τύπου θεωρία Green-Naghdi είναι γνωστή ως Θερμοελαστικότητα χωρίς «σπατάλη» ενέργειας.

Για ισότροπα σώματα, οι υλικές ιδιότητες είναι οι ακόλουθες:

$$\mathbf{E} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mu (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (2.6.16)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \beta \mathbf{I} \quad (2.6.17)$$

$$\mathbf{K} = \kappa \mathbf{I} \quad (2.6.18)$$

$$\boldsymbol{\tau} = t_0 \mathbf{I} \quad (2.6.19)$$

$$\mathbf{K}^* = k^* \mathbf{I} \quad (2.6.20)$$

$$\mathbf{B} = \exp(t / t_0) \mathbf{I} \quad (2.6.21)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \exp(\tilde{t} / t_0) \mathbf{I} \quad (2.6.22)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = 0 \quad (2.6.23)$$

Οι εξισώσεις (2.6.14-15) για ισότροπο ετερογενές μέσο εμφανίζονται στην ακόλουθη μορφή:

$$t_3 \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \dot{T}) + t_3 \nabla \cdot (\mathbf{K}^* \nabla T) + n \nabla \cdot \left(\frac{k}{t_0} \int_{-\infty}^t \exp[-(t - \tilde{t}) / t_0] (\nabla T) d\tilde{t} \right) - \rho c (t_2 + t_3) \ddot{T} - n \rho c \dot{T} - n T_0 \boldsymbol{\beta} : (\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}) - t_3 T_0 \boldsymbol{\beta} : (\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}) + nR + t_3 \dot{R} = 0 \quad (2.6.24)$$

$$\lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\nabla \lambda) (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla \cdot [(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})'] + [(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})'] (\nabla \mu) - (\nabla \boldsymbol{\beta})(T - T_0 + t_1 \dot{T}) - \boldsymbol{\beta} \nabla (T + t_1 \dot{T}) + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.6.25)$$

Το συζευγμένο σύστημα εξισώσεων μπορεί να μειωθεί για την απόκτηση των σχέσεων ισότροπου ομογενούς σώματος:

$$t_3 \nabla \cdot (k \nabla \dot{T}) + t_3 \nabla \cdot (\kappa^* \nabla T) + n \nabla \cdot \frac{k}{t_0} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-\tilde{t})/t_0] (\nabla T) d\tilde{t} -$$

$$- \rho c_E (t_2 + t_3) \ddot{T} - \rho c_E \dot{T} - n T_0 \beta (\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}) - t_3 T_0 \beta (\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}) + n R + t_3 \dot{R} = 0 \quad (2.6.26)$$

$$\lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla \cdot [(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})'] - \beta \nabla (T + t_1 \dot{T}) + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.6.27)$$

Επίσης, οι εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως:

$$t_3 \kappa^* \nabla^2 T + t_3 k \nabla^2 \dot{T} + n \frac{k}{t_0} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-\tilde{t})/t_0] (\nabla^2 T) d\tilde{t} -$$

$$- \rho c_E (t_2 + t_3) \ddot{T} - \rho c_E \dot{T} - n T_0 \beta (\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}) - t_3 T_0 \beta (\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}) + n R + t_3 \dot{R} = 0 \quad (2.6.28)$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta \nabla (T + t_1 \dot{T}) + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.6.29)$$

Όπου ∇^2 είναι ο τελεστής Laplace. Οι σχέσεις τάσεων-μετατοπίσεων και η εξίσωση μετάδοσης θερμότητας για ισότροπα υλικά είναι:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu [(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})'] - \beta (T - T_0 + t_1 \dot{T}) \mathbf{I} \quad (2.6.30)$$

$$n \mathbf{q} + n t_0 \dot{\mathbf{q}} + t_3 \dot{\mathbf{q}} = -n k \nabla T - t_3 k \nabla \dot{T} - t_3 \kappa^* \nabla T \quad (2.6.31)$$

2.7) ΤΟ ΠΛΗΡΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Η διατύπωση ενός πλήρους μαθηματικού μοντέλου, κατάλληλου για την περιγραφή της σύνθετης θερμομηχανικής συμπεριφοράς ενός υλικού σώματος, βασίζεται σε τρία μέρη: α) Στους φυσικούς νόμους (1ος και 2ος θερμοδυναμικός νόμος, νόμος της κίνησης, νόμος του Fourier κ. λ.), στους οποίους αντιστοιχούν μη επιλύσιμες Μ.Δ.Ε. και ισχύουν ανεξαρτήτως υλικού.

β) Στις καταστατικές σχέσεις, που συνδέουν τα πεδία τάσεων-τροπών και παρέχουν τις απαραίτητες πληροφορίες για το συγκεκριμένο υλικό ή υλικά που δομούν το σύστημα.

γ) Στις συνοριακές ή αρχικές συνθήκες, που περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο το περιβάλλον δρα στο υπό εξέταση σύστημα.

Με το συνδυασμό των φυσικών νόμων και των καταστατικών εξισώσεων, καταλήγουμε στο σχηματισμό των εξισώσεων πεδίου. Στα κεφάλαια 2.1, 2.3, 2.4, 2.5 εξήχθησαν οι εξισώσεις πεδίου της κλασικής Θερμοελαστικότητας και των μοντέλων Lord-Shulman, Green-Lindsay, Green-Naghdi. Μαζί με τις κατάλληλες βοηθητικές συνθήκες συνθέτουν ένα Πρόβλημα Αρχικών Τιμών ή ένα Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών ή ένα Πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών (βλέπε Παράρτημα).

➤ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΠΕΔΙΟΥ

Οι εξισώσεις πεδίου για γραμμικά ελαστικό ισότροπο και θερμικά αγωγίμο σώμα είναι:

$$k T_{,ji} + R = +c \dot{T} + T_0 \gamma \dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.7.1)$$

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho f_i - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,i} = \rho \ddot{u}_i \quad (2.7.2)$$

Οι εξισώσεις (2.7.1-2.7.2) αποτελούν την εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας και τις εξισώσεις κίνησης, κατά το κλασικό θερμοελαστικό μοντέλο.

$$k T_{,ji} + R + t_0 \dot{R} = c (\dot{T} + t_0 \ddot{T}) + (3\lambda + 2\mu) \alpha T_0 (\dot{\epsilon}_{kk} + t_0 \ddot{\epsilon}_{kk}) \quad (2.7.3)$$

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho f_i - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,i} = \rho \ddot{u}_i \quad (2.7.4)$$

Οι εξισώσεις (2.7.3-2.7.4) την εξίσωση θερμοκίνησης αγωγιμότητας και τις εξισώσεις κίνησης, κατά το μοντέλο Lord-Shulman.

$$kT_{,ji} + R = c\dot{T} + ct_2\ddot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0\dot{u}_{i,j} \quad (2.7.5)$$

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,j} - t_1(3\lambda + 2\mu)\alpha \dot{T}_{,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.7.6)$$

Οι εξισώσεις (2.7.5-2.7.6) την εξίσωση θερμοκίνησης αγωγιμότητας και τις εξισώσεις κίνησης, κατά το μοντέλο Green-Lindsay.

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} - \frac{Ea^*}{3(1-2\nu)}\theta_{,i} + \rho_0 b_i = \rho_0 \ddot{u}_i \quad (2.7.7)$$

$$\rho_0 c_E \ddot{\theta} + \frac{Ea^* T_0}{3(1-2\nu)} \ddot{u}_{i,i} = \rho_0 r + \kappa^* \theta_{,ii} \quad (2.7.8)$$

Οι εξισώσεις (2.7.7-2.7.8) την εξίσωση θερμοκίνησης αγωγιμότητας και τις εξισώσεις κίνησης, κατά το μοντέλο Green-Naghdi.

➤ ΒΟΗΘΗΤΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Εξαιτίας της σύνθετης φύσης του προβλήματος παρουσιάζονται συνοριακές και αρχικές συνθήκες τόσο θερμοκίνησης όσο και μηχανικές.

[1] ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Τυπικές θερμοκίνησης συνοριακές για τόπο P, ο οποίος ορίζεται από κλειστή επιφάνεια $\partial P = \partial P_p \cup \partial P_q$, δίδονται ακόλουθως:

$$T = T_p \text{ στο } \partial P_p \text{ (θερμοκρασία)} \quad (2.7.9)$$

$$q_i n_i + q_s - q_h - q_r = 0 \text{ στο } \partial P_q \text{ (θερμική ροή)} \quad (2.7.10)$$

Όπου $q_h = h(T - T_h)$, $q_r = \sigma_T \varepsilon_T (T - T_r)$

και αρχικές συνθήκες:

$$T(x_i, 0) = T_0 \text{ στο } P \quad (2.7.11)$$

$$\dot{T}(x_i, 0) = \dot{T}_0 \text{ στο } P \quad (2.7.12)$$

Οι όροι q_s, q_h, q_r αντιστοιχούν στον επιφανειακό ρυθμό θέρμανσης, στο ρυθμό μετάδοσης θερμότητας λόγω συναγωγής και στο ρυθμό μετάδοσης θερμότητας λόγω ακτινοβολίας.

Οι όροι $h, T_h, \sigma_T, \varepsilon_T, T_r$ αποτελούν τον συντελεστή μετάδοσης θερμότητας με συναγωγή, την θερμοκρασία της κύριας μάζας του ρευστού, την σταθερά Stefan-Boltzmann, την ικανότητα εκπομπής της επιφάνειας και την θερμοκρασία του σώματος που εκπέμπει την ακτινοβολία, αντίστοιχα.

[2] ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Τυπικές συνοριακές μηχανικές συνθήκες αποτελούν οι:

$$u_i = g_i \text{ στο } \partial P_p \text{ (μετατοπίσεις)} \quad (2.7.13)$$

$$\sigma_{ij} n_j = h_i \text{ στο } \partial P_q \text{ (ελκυστική τάση)} \quad (2.7.14)$$

και αρχικές συνθήκες:

$$u_i(x_i, 0) = u_0 \text{ στο } P \quad (2.7.15)$$

$$\dot{u}_i(x_i, 0) = \dot{u}_0 \text{ στο } P \quad (2.7.16)$$

2.8) ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Ανάλογα με τα ειδικά χαρακτηριστικά που μπορούν να παρουσιαστούν σε προβλήματα Θερμοελαστικότητας, όροι των εξισώσεων πεδίου μπορούν να μηδενιστούν ή να αγνοηθούν. Η κατηγοριοποίηση και απλοποίηση μπορεί να γίνει βάσει των ακόλουθων χαρακτηριστικών. Οι εξισώσεις δίδονται για ομογενές ισότροπο υλικό.

[1] ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΑ Ή ΜΗ ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Σε μεγάλο αριθμό τεχνολογικών προβλημάτων ο όρος παραμόρφωσης, που εμφανίζεται στην εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας εξαιτίας της σύζευξης, είναι τέτοιας τάξης μεγέθους που καθίσταται αγνοήσιμος. Στην περίπτωση της μη σύζευξης (μη συζευγμένο πρόβλημα) η εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας ανεξαρτητοποιείται ως προς το υπόλοιπο σύστημα εξισώσεων. Η απαλοιφή του όρου παραμόρφωσης από την εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας επιτρέπει την αυτοτελή επίλυση της εξίσωσης και την μετέπειτα αντικατάσταση της θερμοκρασίας στο υπόλοιπο σύστημα εξισώσεων. Η απλοποίηση αυτή δίνει μεγάλη ευκολία ως προς την επίλυση του συστήματος και καθιστά τα μη συζευγμένα θερμοελαστικά προβλήματα ευκολότερα επιλύσιμα ως προς τα συζευγμένα, στα οποία απαιτείται ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων.

[2] ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΗΣ (ΜΟΝΙΜΗΣ) ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Σε προβλήματα, στα οποία η θερμοκρασία είναι ή μπορεί να θεωρηθεί ανεξάρτητη του χρόνου (προβλήματα σταθερής κατάστασης), το κλασικό θερμοελαστικό μοντέλο και η μη συζευγμένη εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας θεωρούνται πλήρους επάρκειας για την περιγραφή του. Στον αντίποδα βρίσκονται τα προβλήματα μεταβαλλόμενου (μεταβατικού) θερμοκρασιακού πεδίου. Δεδομένων αυτών των παραδοχών, για γραμμικά ελαστικά ισότροπο υλικό, οι εξισώσεις περιγραφής του προβλήματος σταθερής θερμοκρασιακής κατάστασης εκπίπτουν στις:

$$kT_{,ii} + R = 0 \quad (2.8.1)$$

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + pf_i - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.8.2)$$

[3] ΣΤΑΤΙΚΑ Ή ΨΕΥΔΟΣΤΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Εάν η χρονική μεταβολή των μαζικών δυνάμεων, των θερμικών πηγών, των επιφανειακών φορτίων και θέρμανσης είναι μηδενική ή αργή οι αδρανειακοί όροι στην εξίσωση της κίνησης μπορούν να απαλειφθούν. Και σε αυτήν την περίπτωση το κλασικό μοντέλο και η μη συζευγμένη εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας κρίνονται επαρκείς. Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις πεδίου λαμβάνουν τη μορφή:

$$kT_{,ii} + R = c\dot{T} \quad (2.8.3)$$

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + pf_i - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_i = 0 \quad (2.8.4)$$

[4] ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στην περιγραφή δυναμικών προβλημάτων, η μόνη απλοποίηση που μπορεί να γίνει, είναι η αγνόηση του όρου μετατόπισης στην εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας. Σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές η ποσότητα αυτή είναι αμελητέα. Για τους λόγους που αναλύσαμε στο κεφάλαιο (2.2), η χρήση ενός εκ των μοντέλων Lord-Shulman, Green-Lindsay ίσως κρίνεται απαραίτητη για την εξαγωγή ικανοποιητικών αποτελεσμάτων.

Βάσει των προαναφερθέντων δεδομένων, η κατηγοριοποίηση των δυναμικών προβλημάτων γίνεται σε:

A) Συζευγμένη Δυναμική Θερμοελαστικότητα

Κλασικό μοντέλο Θερμοελαστικότητας

$$kT_{,ii} + R = +c\dot{T} + T_0\gamma\dot{\epsilon}_{ii} \quad (2.8.5)$$

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} + pf_i - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_i = \rho\ddot{u}_i \quad (2.8.6)$$

Μοντέλο Θερμοελαστικότητας Lord-Shulman

$$kT_{,ii} + R + t_0\dot{R} = c(\dot{T} + t_0\ddot{T}) + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0(\dot{\epsilon}_{kk} + t_0\ddot{\epsilon}_{kk}) \quad (2.8.7)$$

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} + pf_i - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_i = \rho\ddot{u}_i \quad (2.8.8)$$

Μοντέλο Θερμοελαστικότητας Green-Lindsay

$$kT_{,ii} + R = c\dot{T} + ct_2\ddot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0\dot{u}_{i,i} \quad (2.8.9)$$

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_i - t_1(3\lambda + 2\mu)\alpha\dot{T}_i + pf_i = \rho\ddot{u}_i \quad (2.8.10)$$

Μοντέλο Θερμοελαστικότητας Green-Naghdi

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} - \frac{E\alpha^*}{3(1-2\nu)}\theta_{,i} + \rho_0 b_i = \rho_0\ddot{u}_i \quad (2.8.11)$$

$$\rho_0 c_\epsilon \ddot{\theta} + \frac{E\alpha^* T_0}{3(1-2\nu)}\ddot{u}_{i,i} = \rho_0 r + \kappa^* \theta_{,ii} \quad (2.8.12)$$

B) Μη συζευγμένη Δυναμική Θερμοελαστικότητα

Στις μη συζευγμένες θερμοελαστικές εξισώσεις απαλείφεται ο όρος παραμόρφωσης από την εξίσωση θερμοικής αγωγιμότητας.

2.9) ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο αποδεικνύεται η μοναδικότητα των λύσεων της γραμμικής Θερμοελαστικότητας. Η απόδειξη της μοναδικότητας δίδεται με το σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων εκφρασμένο στο πεδίο των μετατοπίσεων. Ακολουθούν οι αποδείξεις για το κλασικό μοντέλο και για τα μοντέλα Lord-Shulman, Green-Lindsay.

A) ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Υποθέτουμε ότι έστω για το πρόβλημα Θερμοελαστικότητας κατά το κλασικό μοντέλο, όπως αυτό ορίστηκε στο υποκεφάλαιο 2.7, υπάρχουν δύο λύσεις. Η διαφορά τους (u_i, θ) θα αντιστοιχεί σε μηδενικές (ομεγενείς) αρχικές, μηδενικές συνοριακές συνθήκες, μηδενικές μαζικές δυνάμεις και μηδενικές πηγές θερμότητας.

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση κίνησης με \dot{u}_i και λαμβάνουμε:

$$\dot{u}_i \sigma_{ij,j} + \dot{u}_i b_i = \rho \dot{u}_i \ddot{u}_i \quad (2.9.1)$$

Με αντικατάσταση της σχέσης τροπών-μετατοπίσεων (2.1.14) στην (2.9.1) οδηγούμαστε:

$$(\dot{u}_i \sigma_{ij})_{,j} - \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} + \dot{u}_i b_i = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial t} \dot{u}_i \dot{u}_i \quad (2.9.2)$$

Ολοκληρώνοντας σε χώρο V και με χρήση του θεωρήματος Gauss, η (2.9.2) παίρνει τη μορφή:

$$\int_A \dot{u}_i \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \dot{u}_i b_i dV = \int_V \dot{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij} dV + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \quad (2.9.3)$$

Από την καταστατική σχέση της Θερμοελαστικότητας (2.1.41):

$$\dot{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij} = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \varepsilon_{kl} + \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \theta = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}) + \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \theta \quad (2.9.4)$$

Και αντικαθιστώντας την (2.9.4) στην (2.9.3) καταλήγουμε:

$$\int_A \dot{u}_i \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \dot{u}_i b_i dV = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V (E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \rho \dot{u}_i \dot{u}_i) dV + \int_V \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \theta dV \quad (2.9.5)$$

Όπως αποδείξαμε η εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας έχει τη μορφή:

$$c \dot{\theta} - T_0 \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = (k_{ij} \theta_{,j})_{,i} + R \quad (2.9.6)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.9.6) με θ :

$$\beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \theta = \frac{1}{T_0} [c \theta \dot{\theta} - (k_{ij} \theta_{,j})_{,i} \theta - R \theta] = \frac{1}{2T_0} c \frac{\partial}{\partial t} \theta^2 - \frac{1}{T_0} (k_{ij} \theta_{,j} \theta)_{,i} + \frac{1}{T_0} k_{ij} \theta_{,j} \theta_{,i} - \frac{R \theta}{T_0} \quad (2.9.7)$$

Και με ολοκλήρωση σε χώρο V και χρήση του θεωρήματος Gauss:

$$\int_V \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \theta dV = \frac{1}{2T_0} \frac{d}{dt} \int_V c \theta^2 dV + \frac{1}{T_0} \int_V k_{ij} \theta_{,j} \theta_{,i} dV - \frac{1}{T_0} \int_V R \theta dV - \int_A n_i k_{ij} \theta_{,j} \theta dA \quad (2.9.8)$$

Αντικαθιστώντας την (2.9.8) στην (2.9.5) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \frac{1}{2} \int_V E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV + \frac{1}{2T_0} \int_V c \theta^2 dV \right] + \frac{1}{2} \int_V k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j} dV = \\ & = \int_A \dot{u}_i \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \dot{u}_i b_i dV + \frac{1}{T_0} \int_A n_i k_{ij} \theta_{,j} \theta dA + \frac{1}{T_0} \int_V R \theta dV \end{aligned} \quad (2.9.9)$$

Εφαρμόζουμε τις μηδενικές συνοριακές συνθήκες, τις μηδενικές μαζικές δυνάμεις και μηδενικές πηγές θερμότητας, που αντιστοιχούν στην διαφορά (u_i, θ) :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \frac{1}{2} \int_V E_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dV + \frac{1}{2T_0} \int_V c \theta^2 dV \right] + \frac{1}{2} \int_V k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j} dV = 0 \quad (2.9.10)$$

Με χρονική ολοκλήρωση και χρησιμοποίηση των μηδενικών αρχικών συνθηκών:

$$\frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \frac{1}{2} \int_V E_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dV + \frac{1}{2T_0} \int_V c \theta^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \int_0^t k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j} d\tau dV = 0 \quad (2.9.11)$$

Από τη στιγμή που τα ρ , c , T_0 , τα γινόμενα $E_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l}$ και $k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j}$ είναι μεγαλύτερα του μηδενός, ενώ ταυτοχρόνως τα ολοκληρώματα της σχέσης (2.9.11) είναι μη αρνητικά, αυτό σημαίνει ότι $u_i=0$ και $\theta=0$. Οι δύο λύσεις ταυτίζονται και αποδεικνύεται η μοναδικότητα της λύσης.

B) ΜΟΝΤΕΛΟ LORD-SHULMAN

Με αντίστοιχο τρόπο θα αποδείξουμε τη μοναδικότητα της λύσης για το μοντέλο Lord-Shulman. Με το σύμβολο $\hat{\cdot}$ αναπαριστούμε τη δράση του τελεστή L :

$$\hat{f} = Lf, \quad L = \left(1 + t_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \quad (2.9.12)$$

Εφαρμόζουμε στην εξίσωση κίνησης τη διαφορά $(\hat{u}_i, \hat{\theta})$ των δύο υποθετικών λύσεων για το μοντέλο Lord-Shulman και εν συνεχεία πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση κίνησης με \hat{u}_i . Με αντικατάσταση της σχέσης τροπών-μετατοπίσεων, της καταστατικής σχέσης της

Θερμοελαστικότητας, με ολοκλήρωση σε χώρο V και χρήση του θεωρήματος Gauss καταλήγουμε στη σχέση:

$$\int_A \dot{u}_i \hat{\sigma}_{ij} n_j dA + \int_V \dot{u}_i \hat{b}_i dV = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V (E_{ijkl} \hat{\epsilon}_{ij} \hat{\epsilon}_{kl} + \rho \dot{u}_i \dot{u}_i) dV + \int_V \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \hat{\theta} dV \quad (2.9.13)$$

Από την εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας έχουμε:

$$c \hat{\theta} - T_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \hat{q}_{i,i} + \hat{R} \quad (2.9.14)$$

$$c \hat{\theta} - T_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = (k_{ij} \theta_{,j})_{,i} + \hat{R} \quad (2.9.15)$$

Και καταλήγουμε:

$$\beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \theta = \frac{1}{T_0} [c \hat{\theta} \hat{\theta} - (k_{ij} \theta_{,j})_{,i} \hat{\theta} - \hat{R} \hat{\theta}] = \frac{1}{2T_0} c \frac{\partial}{\partial t} \hat{\theta}^2 + \frac{1}{T_0} k_{ij} \theta_{,j} \theta_{,i} + \frac{t_0}{2T_0} \frac{\partial}{\partial t} (k_{ij} \theta_{,j} \theta_{,i}) - \frac{(k_{ij} \theta_{,j} \hat{\theta})_{,i}}{T_0} - \frac{\hat{R} \hat{\theta}}{T_0} \quad (2.9.16)$$

Μετά από ολοκλήρωση και χρήση του θεωρήματος Gauss, αντικαθιστούμε την (2.9.16) στην (2.9.13), λαμβάνοντας:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_V E_{ijkl} \hat{\epsilon}_{ij} \hat{\epsilon}_{kl} dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \frac{1}{2T_0} \int_V c \hat{\theta}^2 dV + \frac{t_0}{2T_0} \int_V k_{ij} \theta_{,j} \theta_{,i} dV \right] + \frac{1}{T_0} \int_V k_{ij} \theta_{,j} \theta_{,i} dV = \\ & = \int_A \dot{u}_i \hat{\sigma}_{ij} n_j dA + \int_V \dot{u}_i \hat{b}_i dV + \frac{1}{T_0} \int_A k_{ij} \theta_{,j} n_i dA + \frac{1}{T_0} \int_V \hat{R} \hat{\theta} dV \end{aligned} \quad (2.9.17)$$

Εφαρμόζοντας ομογενείς συνοριακές συνθήκες, μηδενικές μαζικές δυνάμεις και μηδενικές πηγές θερμότητας οδηγούμαστε:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_V E_{ijkl} \hat{u}_{i,j} \hat{u}_{k,l} dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \frac{1}{2T_0} \int_V c \hat{\theta}^2 dV + \frac{t_0}{2T_0} \int_V k_{ij} \theta_{,j} \theta_{,i} dV \right] + \frac{1}{T_0} \int_V k_{ij} \theta_{,j} \theta_{,i} dV = 0 \quad (2.9.18)$$

Ολοκληρώνοντας την (2.9.18) ως προς το χρόνο και χρησιμοποιώντας τις ομογενείς αρχικές συνθήκες καταλήγουμε:

$$\frac{1}{2} \int_V E_{ijkl} \hat{u}_{i,j} \hat{u}_{k,l} dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \frac{1}{2T_0} \int_V c \hat{\theta}^2 dV + \frac{t_0}{2T_0} \int_V k_{ij} \theta_{,j} \theta_{,i} dV + \frac{1}{T_0} \int_V \int_0^t k_{ij} \theta_{,j} \theta_{,i} d\tau dV = 0 \quad (2.9.19)$$

Από τη στιγμή που τα ρ , c , T_0 , τα γινόμενα $E_{ijkl} \hat{u}_{i,j} \hat{u}_{k,l}$ και $k_{ij} \theta_{,j} \theta_{,i}$ είναι μεγαλύτερα του μηδενός, ενώ ταυτοχρόνως τα ολοκληρώματα της σχέσης (2.9.19) είναι μη αρνητικά, αυτό σημαίνει ότι $\dot{u}_i = 0$ και $\hat{\theta} = 0$. Οι δύο λύσεις ταυτίζονται και αποδεικνύεται η μοναδικότητα της λύσης.

Γ) ΜΟΝΤΕΛΟ GREEN-LINDSAY

Εφαρμόζουμε στην εξίσωση κίνησης τη διαφορά (u_i, θ) των δύο υποθετικών λύσεων για το μοντέλο Green-Lindsay και εν συνεχεία πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση κίνησης με u_i . Με αντικατάσταση της σχέσης τροπών-μετατοπίσεων, της καταστατικής σχέσης της Θερμοελαστικότητας, με ολοκλήρωση σε χώρο V και χρήση του θεωρήματος Gauss καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_V E_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \right] + \int_V \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} (\theta + t_1 \dot{\theta}) dV = \int_A \dot{u}_i \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \dot{u}_i b_i dV \quad (2.9.20)$$

Από την εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας έχουμε:

$$\overline{c(\theta + t_0 \dot{\theta})} - T_0 \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = (k_{ij} \theta_{,j})_{,i} + R \quad (2.9.21)$$

Πολλαπλασιάζουμε με $(\theta + t_0 \dot{\theta})$ και αποκτούμε:

$$\overline{c(\theta + t_0 \dot{\theta})(\theta + t_0 \dot{\theta})} - T_0 \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} (\theta + t_0 \dot{\theta}) = [(k_{ij} \theta_{,j})_{,i} + R](\theta + t_0 \dot{\theta}) \quad (2.9.22)$$

Η

$$\overline{c(\theta + t_0 \dot{\theta})(\theta + t_0 \dot{\theta})} - T_0 \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} (\theta + t_1 \dot{\theta}) + T_0 \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} (t_1 - t_0) \dot{\theta} = [(k_{ij} \theta_{,j})_{,i} + R](\theta + t_0 \dot{\theta}) \quad (2.9.23)$$

Από την άλλη μεριά πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση θερμοικής αγωγιμότητας (2.9.21) με $(t_1 - t_0)\theta$ και αποκτούμε:

$$\overline{c(\theta + t_0 \dot{\theta})(t_1 - t_0) \dot{\theta}} - T_0 \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} (t_1 - t_0) \dot{\theta} = [(k_{ij} \theta_{,j})_{,i} + R](t_1 - t_0) \dot{\theta} \quad (2.9.24)$$

Προσθέτοντας τις (2.9.23) και (2.9.24) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\theta + t_0 \dot{\theta})^2 + \frac{c}{2} t_0 (t_1 - t_0) \frac{\partial}{\partial t} \dot{\theta}^2 + (t_1 - t_0) c \dot{\theta}^2 + k_{ij} \theta_{,j} (\theta + t_1 \dot{\theta})_{,i} - T_0 \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} (\theta + t_0 \dot{\theta}) = \\ = k_{ij} \theta_{,j} (\theta + t_1 \dot{\theta})_{,i} + R(\theta + t_1 \dot{\theta}) \end{aligned} \quad (2.9.25)$$

Με ολοκλήρωση στον όγκο V και χρήση του θεωρήματος απόκλισης (Gauss) η (2.9.25) μετατρέπεται στη σχέση:

$$\begin{aligned} \int_V \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} (\theta + t_1 \dot{\theta}) dV = \frac{1}{2T_0} \frac{d}{dt} \left[\int_V c(\theta + t_1 \dot{\theta})^2 dV + t_0 (t_1 - t_0) \int_V c \dot{\theta}^2 dV + \right. \\ \left. + \int_V k_{ij} \theta_{,j} \theta_{,i} dV \right] - \frac{1}{T_0} \int_V (\theta + t_1 \dot{\theta}) R dV - \frac{1}{T_0} \int_A (\theta + t_1 \dot{\theta}) n_i k_{ij} \theta_{,j} dA \end{aligned} \quad (2.9.26)$$

Αντικαθιστούμε την (2.9.26) στην (2.9.20):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \frac{1}{2} \int_V E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV + \frac{1}{2T_0} \int_V [c(\theta + t_0 \dot{\theta})^2 + t_0 (t_1 - t_0) \dot{\theta}^2] dV + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{t_1}{2T_0} \int_V k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j} dV \right\} + \frac{1}{T_0} \int_V k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j} dV + \frac{t_1 - t_0}{T_0} \int_V c \dot{\theta}^2 dV = \\ = \int_A \dot{u}_i \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \dot{u}_i b_i dV + \frac{1}{T_0} \int_A n_i k_{ij} \theta_{,j} (\theta + t_1 \dot{\theta}) dA + \frac{1}{T_0} \int_V (\theta + t_1 \dot{\theta}) R dV \end{aligned} \quad (2.9.27)$$

Εφαρμόζοντας ομογενείς συνοριακές συνθήκες, μηδενικές μαζικές δυνάμεις και μηδενικές πηγές θερμότητας οδηγούμαστε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \frac{1}{2} \int_V E_{ijkl} u_{i,j} \varepsilon_{k,l} dV + \frac{1}{2T_0} \int_V [c(\theta + t_0 \dot{\theta})^2 + t_0 (t_1 - t_0) \dot{\theta}^2] dV + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{t_1}{2T_0} \int_V k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j} dV \right\} + \frac{1}{T_0} \int_V k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j} dV + \frac{t_1 - t_0}{T_0} \int_V c \dot{\theta}^2 dV = 0 \end{aligned} \quad (2.9.28)$$

Ολοκληρώνοντας την (2.9.28) ως προς το χρόνο και χρησιμοποιώντας τις ομογενείς αρχικές συνθήκες καταλήγουμε:

$$\frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \frac{1}{2} \int_V E_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dV + \frac{1}{2T_0} \int_V [c(\theta + t_0 \dot{\theta})^2 + t_0 (t_1 - t_0) \dot{\theta}^2] dV +$$

$$+\frac{t_1}{2T_0} \int_V k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j} dV + \frac{1}{T_0} \int_V \int_0^t k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j} d\tau dV + \frac{t_1 - t_0}{T_0} \int_V \int_0^t c \dot{\theta}^2 d\tau dV = 0 \quad (2.9.29)$$

Από τη στιγμή που τα p , c , T_0 , τα γινόμενα $E_{ijk} \epsilon_{ij} \epsilon_{ik}$ και $k_{ij} T_i T_j$ είναι μεγαλύτερα του μηδενός, ενώ ταυτοχρόνως τα ολοκληρώματα της σχέσης (2.9.29) είναι μη αρνητικά, αυτό σημαίνει ότι $u_i=0$ και $\theta=0$. Οι δύο λύσεις ταυτίζονται και αποδεικνύεται η μοναδικότητα της λύσης.

2.10) ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Η αρχή των Μεταβολών αποτελεί τη βάση όλων των ενεργειακών θεωρημάτων της Θερμοελαστικότητας και βρίσκει εφαρμογή σε υπολογιστικές μεθόδους, όπως αυτή των Πεπερασμένων Στοιχείων. Αποτελεί ουσιαστικά τη μεταβολική διατύπωση του προβλήματος του παραμορφωσίμου στερεού, στα πλαίσια της γραμμικής Θερμοελαστικότητας. Αντίστοιχο θεώρημα στα πλαίσια της Ελαστοστατικής και της Αντοχής των Υλικών αποτελεί η Αρχή των Δυνατών Έργων. Ακολουθεί η απόδειξη του θεωρήματος της Αρχής των Μεταβολών για το μοντέλο Lord-Shulman. Με αντίστοιχο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί και για τα υπόλοιπα θερμοελαστικά μοντέλα.

Θεωρούμε συναρτησιακό της γενικευμένης γραμμικής συζευγμένης Θερμοελαστικότητας V_t , που αποτελεί το άθροισμα της συνάρτησης γενικευμένης ενέργειας παραμόρφωσης U και της γενικευμένης δυναμικής ενέργειας των εξωτερικών δυνάμεων Ω :

$$V_t = U + \Omega \quad (2.10.1)$$

Η συνάρτηση γενικευμένης ενέργειας παραμόρφωσης U αποτελεί το άθροισμα της θερμοελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης Ψ και της συνάρτησης ελεύθερης ενέργειας Biot D :

$$U = \Psi + D \quad (2.10.2)$$

Η θερμοελαστική ενέργεια παραμόρφωσης δίδεται από τον τύπο:

$$\Psi = \int_V \left(W + \frac{\rho c_\epsilon}{2T_0} \theta^2 \right) dV \quad (2.10.3)$$

Όπου

$$W = \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{kk}^2 + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \quad (2.10.4)$$

Για να εξαγάγουμε την συνάρτηση ελεύθερης ενέργειας Biot, ορίζουμε την ροή εντροπίας ως:

$$\dot{S}_i = \frac{q_i}{T_0} \quad (2.10.5)$$

Σε συνδυασμό με τη σχέση (2.3.2) η (2.10.5) μας δίνει:

$$T_0 S_{i,j} = -\rho T_0 s \quad (2.10.6)$$

Και με αντικατάσταση στην εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας, θεωρώντας μηδενικές θερμικές πηγές:

$$T_0 S_{i,j} = -\rho c_\epsilon \theta - \beta T_0 \epsilon_{ij} \quad (2.10.7)$$

Βάσει του ορισμού της εντροπικής ροής, η συνάρτηση ελεύθερης ενέργειας Biot δίδεται ως:

$$D = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \frac{T_0}{k} S_i S_i dV \quad (2.10.8)$$

Και με τη θεώρηση του χρόνου χαλάρωσης t_0 :

$$D = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} + t_0 \frac{d^2}{dt^2} \right) \int_V \frac{T_0}{k} S_i S_j dV \quad (2.10.9)$$

Από τις εξισώσεις (2.10.2-3) και (2.10.9) λαμβάνουμε την έκφραση για τη γενικευμένη συνάρτηση ενέργειας παραμόρφωσης.

Η γενικευμένη δυναμική ενέργεια των εξωτερικών δυνάμεων αποτελεί το αλγεβρικό άθροισμα του έργου που παράγουν οι επιφανειακές και μαζικές δυνάμεις:

$$\Omega = - \int_A (t_i^n u_i - \theta n_i S_i) dA - \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i) u_i dV \quad (2.10.10)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.10.10), (2.10.2) στην (2.10.1) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.10.3), (2.10.4) και (2.10.9), οδηγούμαστε στην ακόλουθη μαθηματική έκφραση για το συναρτησιακό της γενικευμένης συζευγμένης Θερμοελαστικότητας:

$$V_t = \int_V \left[\frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{kk}^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\rho c_E}{2T_0} \theta^2 + \frac{T_0}{2k} (\rho + t_0 \rho^2) S_i S_i \right] dV - \int_A (t_i^n u_i - \theta n_i S_i) dA - \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i) u_i dV \quad (2.10.11)$$

Όπου $\rho = d/dt$. Στην σχέση (2.10.11) βασίζεται η μεταβολική διατύπωση της συζευγμένης Θερμοελαστικότητας. Η έκφραση (2.10.11) είναι ισοδύναμη των εξισώσεων πεδίου της Θερμοελαστικότητας, των εξισώσεων κίνησης και της συζευγμένης ενεργειακής εξίσωσης.

Η πρώτη μεταβολική διατύπωση του V_t σχετίζεται με την κατάσταση σταθερότητας:

$$\begin{aligned} \delta V_t = & \int_V [\lambda \varepsilon_{kk} \delta \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{\rho c_E}{2T_0} \theta \delta \theta + \frac{T_0}{k} (\rho + t_0 \rho^2) S_i \delta S_i] dV - \\ & - \int_A (t_i^n \delta u_i - \theta n_i \delta S_i) dA - \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV \end{aligned} \quad (2.10.12)$$

Σημειώνεται ότι ο τελεστής ρ λειτουργεί ως σταθερά στον Λογισμό των Μεταβολών. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.10.7) και τη σχέση του Cauchy, η (2.10.12) αναδιατυπώνεται:

$$\begin{aligned} \delta V_t = & \int_V [\lambda \varepsilon_{kk} \delta u_{i,i} + 2\mu \varepsilon_{ij} \delta u_{i,j} - \theta (\delta S_{i,i} + \beta \delta u_{i,i}) + \frac{T_0}{k} (\rho + t_0 \rho^2) S_i \delta S_i] dV - \\ & - \int_A (\sigma_{ij} n_j \delta u_i - \theta n_i \delta S_i) dA - \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV \end{aligned} \quad (2.10.13)$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη και αντικαθιστώντας τον τανυστή της τάσης από τον νόμο του Hooke, αποκτούμε:

$$\begin{aligned} \delta V_t = & \int_A (\lambda \varepsilon_{kk} n_i \delta u_i + 2\mu \varepsilon_{ij} n_j \delta u_i - \beta \theta n_i \delta u_i) dA - \int_A \theta n_i \delta S_i dA - \int_V [\lambda u_{j,jj} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,jj}) - \\ & - \beta \theta_{,i}] \delta u_i dV + \int_V \left[\frac{T_0}{k} (\rho + t_0 \rho^2) S_i + \theta_{,i} \right] \delta S_i dV - \int_A [\lambda \varepsilon_{kk} n_i + 2\mu \varepsilon_{ij} n_j - \beta \theta n_i] \delta u_i dA + \int_A \theta n_i \delta S_i dA - \\ & - \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV \end{aligned} \quad (2.10.14)$$

Τα επιφανειακά ολοκληρώματα αναιρούν το ένα το άλλο και τα χωρικά ολοκληρώματα οδηγούν την έκφραση στη μορφή:

$$\delta V_t = - \int_V [\lambda u_{j,jj} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,jj}) - \beta \theta_{,i} + X_i - \rho \ddot{u}_i] \delta u_i dV + \int_V \left[\frac{T_0}{k} (\rho + t_0 \rho^2) S_i + \theta_{,i} \right] \delta S_i dV \quad (2.10.15)$$

Από τη στιγμή που δu_i και δS_i αποτελούν τις δυνατές (ιδεατές) μετατοπίσεις και τη δυνατή ροή εντροπίας αντίστοιχα, έπεται ότι εάν η πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού V_t

εξαφανισθεί σε όλο τον όγκο, οι ακόλουθες εξισώσεις πρέπει να ικανοποιούνται ταυτοτικά:

$$\mu u_{i,ji} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} - \beta \theta_{,i} + X_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.10.16)$$

$$T_0(\rho + t_0 \rho^2) S_i + k \theta_{,i} = 0 \quad (2.10.17)$$

Η σχέση (2.10.16) αποτελεί την εξίσωση κίνησης. Για να αποκτήσουμε την εξίσωση θερμοικής αγωγιμότητας εφαρμόζουμε τον τελεστή απόκλισης στην εξίσωση (2.10.17) και αποκτούμε:

$$T_0(\rho + t_0 \rho^2) S_{i,j} + k \theta_{,ji} = 0 \quad (2.10.18)$$

Η χρήση της (2.10.7) δίδει:

$$k \theta_{,ji} = (\rho + t_0 \rho^2) (\rho c_E \theta + \beta T_0 \varepsilon_{kk}) \quad (2.10.19)$$

$$k \theta_{,ji} = \rho c_E (\dot{\theta} + t_0 \ddot{\theta}) + \beta T_0 (\dot{\varepsilon}_{kk} + t_0 \ddot{\varepsilon}_{kk}) \quad (2.10.20)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (2.10.16) και (2.10.20), που αντιστοιχούν στο ελάχιστο του συναρτησιακού V_t , αποτελούν τις εξισώσεις πεδίου του μοντέλου Lord-Shulman.

2.11) ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΜΟΙΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

Το θεώρημα αμοιβαιότητας των Betti-Maxwell αναπτύχθηκε στα πλαίσια της θεωρίας Ελαστικότητας και έχει πολύ σημαντική αξία σαν μέσο επίλυσης πρακτικών προβλημάτων της Μηχανικής. Ο πρώτος που επέκτεινε το θεώρημα στα πλαίσια της θεωρίας Θερμοελαστικότητας ήταν ο Maysel (The Temperature Problem of the Theory of Elasticity, 1951) και εφάρμοσε το θεώρημα σε στατικά προβλήματα. Το θεώρημα αμοιβαιότητας για δυναμικά, μη συζευγμένα προβλήματα αναπτύχθηκε από τον Predeleanu (On Thermal Stresses in Viscoelastic Bodies, 1959), ενώ για συζευγμένα δυναμικά προβλήματα από τους Ionescu-Cazimir (Problem of Linear Thermoelasticity: Theorems on Reciprocity I, 1964). Το θεώρημα αμοιβαιότητας της γραμμικής δυναμικής συζευγμένης Θερμοελαστικότητας για ισότροπο ομογενές υλικό πρωτοδιατυπώθηκε από τον Witold Nowacki.

Για τη μη κλασική θερμοελαστικότητα, η πρώτη διατύπωση του θεωρήματος δόθηκε από τον Chandrasekharaiah (A Reciprocal Theorem in Generalised Thermoelasticity, 1984) για ανισότροπα υλικά και διατυπωμένο πάνω στο μοντέλο Green-Lindsay. Βρήκε ότι από τους δύο χρόνους χαλάρωσης του μοντέλου, μόνο ο ένας επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα και ενέταξε σαν ειδική περίπτωση τα αποτελέσματα των Ionescu-Cazimir για το κλασικό μοντέλο.

Περαιτέρω ανάπτυξη του θεωρήματος οφείλεται σε ειδικού ενδιαφέροντος εφαρμογές της Μηχανικής. Ο Iesan (Reciprocity, Uniqueness and Minimum Principles in Dynamic Theory of Thermoelasticity, 1989) χρησιμοποίησε τη μέθοδο του ολοκληρώματος συνέλιξης για να διατυπώσει το θεώρημα πάνω στη θεωρία Green-Lindsay. Παραπέρα, αποδεικνύει ότι το θεώρημα οδηγεί σε μια ελάχιστη αρχή της Θερμοελαστοδυναμικής. Σαν ειδική εφαρμογή, μπορούμε να αναφέρουμε το έργο του Nappa (On the Dynamical Theory of Mixtures of Thermoelastic Solids, 1997), ο οποίος ανέπτυξε το θεώρημα για τη γραμμική δυναμική θεωρία δυικού μίγματος για θερμοελαστικά στερεά.

Σε αυτήν την εργασία, θα παρουσιάσουμε την απόδειξη του θεωρήματος για ανισότροπα υλικά στα πλαίσια του μοντέλου Green-Lindsay, από τον Chandrasekharaiah.

Θεωρούμε ομογενές και ανισότροπο ελαστικό υλικό, που καταλαμβάνει τόπο του τρισδιάστατου Ευκλειδείου χώρου V με συνοριακή επιφάνεια A . Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 2.4. το μοντέλο των Green-Lindsay βασίζεται στις εξισώσεις:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} [T - T_0] + t_1 \dot{T} \quad (2.11.1)$$

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.11.2)$$

$$k_{ij} T_{,ji} + R = c(\dot{T} + t_2 \ddot{T}) - 2C_i \dot{T}_{,i} + T_0 \beta_{ij} \dot{u}_{i,j} \quad (2.11.3)$$

Το σώμα θεωρείται αρχικά σε ακινησία και σε θερμοκρασία αναφοράς T_0 . Οι αρχικές συνθήκες έχουν ως:

$$u_i(x_i, 0) = \dot{u}_i(x_i, 0) = \theta(x_i, 0) = \dot{\theta}(x_i, 0) = 0 \quad \mathbf{x} \in V \quad (2.11.4)$$

Οι συνοριακές συνθήκες δίδονται, για $t > 0$, για τις μετατοπίσεις, τις τάσεις, τη θερμοκρασία και τη θερμοκή ροή:

$$\sigma_{ji} n_j = t_i^n \quad \text{στο } A_1$$

$$u_i = U_i \quad \text{στο } A_2 \quad (2.11.5)$$

$$\theta = \Theta \quad \text{στο } A_3$$

$$q_i n_i = Q \quad \text{στο } A_4 \quad (2.11.6)$$

Όπου t_i^n, U_i, Θ, Q αποτελούν τις γνωστές τάσεις, μετατοπίσεις, θερμοκρασία και θερμοκή ροή στα αντίστοιχα πεδία τους και $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. Η θερμοκή ροή δίδεται ως:

$$q_i = -(C_i \dot{\theta} + k_{ij} \theta_{,j}) \quad (2.11.7)$$

Από τη στιγμή που τα μεγέθη $X_i, R, t_i^n, U_i, \Theta, Q$ είναι γνωστά, η λύση για τις μετατοπίσεις, τις τάσεις και τη θερμοκρασία ορίζεται μοναδικά. Συσχετίζουμε το πρόβλημα με το σύστημα $[(X_i, R, t_i^n, U_i, \Theta, Q); (u_i, \sigma_{ij}, \theta)]$ και βάσει αυτού διατυπώνουμε το θεώρημα αμοιβαιότητας:

Θεωρούμε δύο προβλήματα συνδεδεμένα με τα ακόλουθα συστήματα:

$$[(X_i^{(1)}, R^{(1)}, t_i^{n(1)}, U_i^{(1)}, \Theta^{(1)}, Q^{(1)}); (u_i^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}, \theta^{(1)})] \quad (2.11.8)$$

$$[(X_i^{(2)}, R^{(2)}, t_i^{n(2)}, U_i^{(2)}, \Theta^{(2)}, Q^{(2)}); (u_i^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}, \theta^{(2)})] \quad (2.11.9)$$

Όπου κάθε σύστημα ικανοποιεί τις εξισώσεις (2.11.1-3), την (2.11.7) και τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες (2.11.4-6). Οι μετασχηματισμοί Laplace των εξισώσεων (2.11.1-3) και των συνοριακών συνθηκών (2.11.5-6), λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες, έχουν ως:

$$\sigma_{ij}^{*(m)} = E_{ijrs} u_{rs}^{*(m)} - \beta_{ij} (1 + t_1 s) \theta^{*(m)} \quad (2.11.10)$$

$$\sigma_{ij,j}^{*(m)} + X_i^{*(m)} = \rho_0 s^2 u_i^{*(m)} \quad (2.11.11)$$

$$R^{*(m)} + k_{ij} \theta_{,ji}^{*(m)} - p c_E s \theta^{*(m)} - p c_E t_2 s^2 \theta^{*(m)} - T_0 \beta_{ij} s u_{i,j}^{*(m)} + 2 C_i s \theta_{,i}^{*(m)} = 0 \quad (2.11.12)$$

$$q_i^{*(m)} = -(C_i s \theta^{*(m)} + k_{ij} \theta_{,j}^{*(m)}) \quad (2.11.13)$$

Με τις συνοριακές συνθήκες:

$$\sigma_{ji}^{*(m)} n_j = t_i^{n*(m)} \quad \text{στο } A_1 \quad (2.11.14)$$

$$u_i^{*(m)} = U_i^{*(m)} \quad \text{στο } A_2 \quad (2.11.15)$$

$$\theta^{*(m)} = \Theta^{*(m)} \quad \text{στο } A_3 \quad (2.11.16)$$

$$q_i^{*(m)} n_i = Q^{*(m)} \quad \text{στο } A_4 \quad (2.11.17)$$

Όπου το σύμβολο m είναι 1 και 2 και το σύμβολο (*) δηλώνει το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης. Η εξίσωση (2.11.11) γράφεται για m=1 και m=2, η πρώτη εξίσωση πολλαπλασιάζεται με $u_i^{*(2)}$, η δεύτερη με $(-u_i^{*(1)})$ και προσθέτουμε τα δύο αποτελέσματα για να φτάσουμε στη σχέση:

$$\int_V (X_i^{*(1)} u_i^{*(2)} - X_i^{*(2)} u_i^{*(1)}) dV = \int_V (\sigma_{ij}^{*(2)} u_i^{*(1)} - \sigma_{ij}^{*(1)} u_i^{*(2)})_{,j} dV + \int_V (\sigma_{ij}^{*(1)} u_{i,j}^{*(2)} - \sigma_{ij}^{*(2)} u_{i,j}^{*(1)}) dV \quad (2.11.18)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης, ο πρώτος όρος στο δεξιό μέρος της εξίσωσης (2.11.18) μετασχηματίζεται σε επιφανειακό ολοκλήρωμα με τη χρήση των σχέσεων (2.11.14-17). Το δεύτερο ολοκλήρωμα επίσης αντικαθίσταται με τη χρήση της εξίσωσης (2.11.10). Η (2.11.18) γράφεται:

$$\begin{aligned} & \int_V (X_i^{*(1)} u_i^{*(2)} - X_i^{*(2)} u_i^{*(1)}) dV + \int_{A_1} (t_i^{n*(1)} u_i^{*(2)} - t_i^{n*(2)} u_i^{*(1)}) dA + \int_{A_2} (\sigma_{ij}^{*(1)} U_i^{*(2)} - \sigma_{ij}^{*(2)} U_i^{*(1)}) n_j dA = \\ & = \int_V -\beta_{ij} (1 + t_1 s) (\theta^{*(1)} u_{i,j}^{*(2)} - \theta^{*(2)} u_{i,j}^{*(1)}) dV \end{aligned} \quad (2.11.19)$$

Όταν το σώμα έχει κέντρο συμμετρίας, ενώ είναι ανισότροπο, $C_i=0$ και από την εξίσωση (2.11.12), χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης, τη σχέση (2.11.13) και τις συνοριακές συνθήκες (2.11.14-17), αποκτούμε:

$$\begin{aligned} & -\beta_{ij} T_0 s \int_V (u_{i,j}^{*(1)} \theta^{*(2)} - u_{i,j}^{*(2)} \theta^{*(1)}) dV + \int_V (R^{*(1)} \theta^{*(2)} - R^{*(2)} \theta^{*(1)}) dV = \\ & = \int_V k_{ij} (\theta^{*(1)} \theta_{ij}^{*(2)} - \theta^{*(2)} \theta_{ij}^{*(1)}) dV = \\ & = \int_V k_{ij} (\theta^{*(1)} \theta_{,j}^{*(2)} - \theta^{*(2)} \theta_{,j}^{*(1)})_{,i} dV = \\ & = \int_{A_3} k_{ij} (\Theta^{*(1)} \theta_{,j}^{*(2)} - \Theta^{*(2)} \theta_{,j}^{*(1)}) n_i dA + \int_{A_4} (Q^{*(1)} \theta^{*(2)} - Q^{*(2)} \theta^{*(1)}) dA \end{aligned} \quad (2.11.20)$$

Λύνοντας την (2.11.19) για:

$$\int_V -\beta_{ij} (\theta^{*(1)} u_{i,j}^{*(2)} - \theta^{*(2)} u_{i,j}^{*(1)}) dV \quad (2.11.21)$$

Και αντικαθιστώντας στην (2.11.20):

$$\begin{aligned} & T_0 s \left[\int_V (X_i^{*(1)} u_i^{*(2)} - X_i^{*(2)} u_i^{*(1)}) dV + \int_{A_1} (t_i^{n*(1)} u_i^{*(2)} - t_i^{n*(2)} u_i^{*(1)}) dA + \int_{A_2} (\sigma_{ij}^{*(1)} U_i^{*(2)} - \sigma_{ij}^{*(2)} U_i^{*(1)}) n_j dA = \right. \\ & \left. (1 + s t_1) \left[\int_V (R^{*(1)} \theta^{*(2)} - R^{*(2)} \theta^{*(1)}) dV + \int_{A_3} k_{ij} (\Theta^{*(1)} \theta_{,j}^{*(2)} - \Theta^{*(2)} \theta_{,j}^{*(1)}) n_i dA + \int_{A_4} (Q^{*(1)} \theta^{*(2)} - Q^{*(2)} \theta^{*(1)}) dA \right] \right. \end{aligned} \quad (2.11.22)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα συνέλιξης, οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace της εξίσωσης (2.11.22) μας οδηγούν στη σχέση (2.11.23) και στην απόδειξη του θεωρήματος αμοιβαιότητας.

$$\begin{aligned}
& T_0 \left\{ \int_V (X_i^{(1)} * \hat{u}_i^{(2)} - X_i^{(2)} * \hat{u}_i^{(1)}) dV + \int_{A_1} (t_i^{n(1)} * \hat{u}_i^{(2)} - t_i^{n(2)} * \hat{u}_i^{(1)}) dA + \int_{A_2} (\sigma_{ij}^{(1)} * U_i^{(2)} - \sigma_{ij}^{(2)} * U_i^{(1)}) n_j dA \right\} = \\
& = t_1 \int_V (R^{(1)} * \theta^{(2)} - R^{(2)} * \hat{\theta}^{(1)}) dV + \int_{A_3} k_{ij} [(\Theta^{(2)} * \theta_{,j}^{(1)} - \Theta^{(1)} * \theta_{,j}^{(2)}) + t_1 (\Theta^{(2)} * \hat{\theta}_{,j}^{(1)} - \Theta^{(1)} * \hat{\theta}_{,j}^{(2)})] n_i dA + \\
& + \int_{A_4} [(Q^{(2)} * \theta^{(1)} - Q^{(1)} * \theta^{(2)}) + t_1 (Q^{(2)} * \hat{\theta}^{(1)} - Q^{(1)} * \hat{\theta}^{(2)})] dA \tag{2.11.23}
\end{aligned}$$

Όπου οι ακόλουθοι συμβολισμοί χρησιμοποιούνται:

$$f * g = \int_0^t f(x, t - \tau) g(x, \tau) d\tau \tag{2.11.24}$$

$$f * \hat{g} = \int_0^t f(x, t - \tau) \frac{\partial g}{\partial \tau}(x, \tau) d\tau \tag{2.11.25}$$

Αποτελεί άξιο αναφοράς το ότι ενώ το μοντέλο Green-Lindsay περιλαμβάνει δύο χρόνους χαλάρωσης, μόνο ο ένας τι εμφανίζεται στο θεώρημα αμοιβαιότητας. Θέτοντας για $t_i=0$ αποκτούμε το θεώρημα αμοιβαιότητας για το κλασικό μοντέλο Θερμοελαστικότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δόθηκε συνοπτικά το θεωρητικό υπόβαθρο της Γενικευμένης Θερμοελαστικότητας και έγινε η κατηγοριοποίηση των θερμοελαστικών προβλημάτων. Όπως είδαμε, τα θερμοελαστικά προβλήματα είναι μεγάλης μαθηματικής πολυπλοκότητας κι η δυνατότητα εύρεσης αναλυτικών λύσεων είναι περιορισμένη. Η χρήση υπολογιστικών μεθόδων θεωρείται επιτακτική για την επίλυση αυτών των προβλημάτων κι η άνθηση της Αριθμητικής Ανάλυσης φρόντισε να μας παρέχει τα κατάλληλα εργαλεία για αυτό το σκοπό.

Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι των Πεπερασμένων Διαφορών και των Πεπερασμένων Στοιχείων. Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται η περιγραφή των συγκεκριμένων μεθόδων. Τα απαραίτητα μαθηματικά στοιχεία των προβλημάτων με μερικές διαφορικές εξισώσεις κι η κατηγοριοποίηση των εξισώσεων αυτών δίδονται στο Παράρτημα.

3.1) Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΓΙΑ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ, ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Σε αντίθεση με της αναλυτικές μεθόδους στις οποίες η λύση είναι συνεχής, η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών δίνει διακριτές αριθμητικές τιμές σε συγκεκριμένα σημεία, τα οποία καλούνται σημεία πλέγματος. Αυτές οι αριθμητικές τιμές αναπαριστούν μια αριθμητική προσέγγιση της συνεχούς λύσης. Η κύρια ιδέα της συγκεκριμένης μεθόδου είναι η αντικατάσταση των παραγώγων που εμφανίζονται στις διαφορικές εξισώσεις με τις πεπερασμένες διαφορές που τις προσεγγίζουν και η μετατροπή του συστήματος από συνεχές σε διακριτό. Ακολουθεί η περιγραφή της μεθόδου για τους τρεις τύπους γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων β' τάξης.

3.1.1) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Ως υπερβολικές χαρακτηρίζονται οι γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις β' τάξης της μορφής (σε μία διάσταση):

$$a(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}) \quad (3.1.1.1)$$

Όπου $b^2 > 4ac$.

Η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών θα αναπτυχθεί για την απλούστερη μορφή της κυματικής εξίσωσης:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1.1.2)$$

Όπου $u = u(x,t)$, οι x και t οι ανεξάρτητες μεταβλητές του χώρου και του χρόνου και η c αποτελεί μια σταθερά.

Με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών λαμβάνουμε αριθμητικές προσεγγίσεις της συνεχούς λύσης στην περιοχή $(x_m - \Delta x/2, x_m + \Delta x/2)$ και $(t_n - \Delta t/2, t_n + \Delta t/2)$, όπου Δx και Δt το χωρικό και χρονικό διάστημα μεταξύ των x_m, t_n σημείων του πλέγματος,

αντιστοίχως. Ξεκάθαρα, στο όριο του $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, λαμβάνουμε την συνεχή λύση. Ωστόσο, για πρακτικούς λόγους όπως η μνήμη του υπολογιστή ή ο χρόνος εκτέλεσης τα Δx και Δt , παρότι μικρά, δεν είναι αμελητέα.

Το πρώτο τμήμα της μεθόδου επίλυσης είναι η αντικατάσταση των μερικών παραγώγων της εξίσωσης με πεπερασμένες διαφορές. Η πιο δημοφιλής προσέγγιση χρησιμοποιεί ανάπτυγμα Taylor. Αν επικεντρωθούμε στην παράγωγο του x , τότε η τιμή της λύσης στο $u[(m+1)\Delta x, n\Delta t]$ ως προς τη λύση στο $(m\Delta x, n\Delta t)$ δίδεται ως:

$$\begin{aligned} u[(m+1)\Delta x, n\Delta t] &= u(x_m, t_n) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial u(x_m, t_n)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_m, t_n)}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_m, t_n)}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u(x_m, t_n)}{\partial x^4} + \dots \\ &= u(x_m, t_n) + \Delta x \frac{\partial u(x_m, t_n)}{\partial x} + O[(\Delta x)^2] \end{aligned} \quad (3.1.1.3)$$

Όπου το $O[(\Delta x)^2]$ δίνει ένα μέτρο του μεγέθους των όρων που αγνοούνται.

Για την εξίσωση (3.1.1.2), μια πιθανή προσέγγιση για το $u_{,x}$ είναι η:

$$\frac{\partial u(x_m, t_n)}{\partial x} = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.1.1.4)$$

Όπου χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $u_m^n = u(x_m, t_n)$. Η άνωθι σχέση αποτελεί ένα παράδειγμα προσέγγισης μονόπλευρης πεπερασμένης διαφοράς για την μερική παράγωγο $u_{,x}$. Το σφάλμα σε αυτήν την προσέγγιση αυξάνει ως προς το Δx .

Άλλη πιθανή προσέγγιση της παραγώγου προκύπτει χρησιμοποιώντας $u(m\Delta x, n\Delta t)$ και $u[(m-1)\Delta x, n\Delta t]$. Από το ανάπτυγμα Taylor λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} u[(m-1)\Delta x, n\Delta t] &= u(x_m, t_n) - \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial u(x_m, t_n)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_m, t_n)}{\partial x^2} + \\ &- \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_m, t_n)}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u(x_m, t_n)}{\partial x^4} + \dots, \end{aligned} \quad (3.1.1.5)$$

και λαμβάνουμε τη φόρμουλα:

$$\frac{\partial u(x_m, t_n)}{\partial x} = \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.1.1.6)$$

Μία τρίτη προσέγγιση προκύπτει συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.1.1.3) και (3.1.1.5):

$$u_{m+1}^n - u_{m-1}^n = 2\Delta x \frac{\partial u(x_m, t_n)}{\partial x} + O[(\Delta x)^3] \quad (3.1.1.7)$$

ή

$$\frac{\partial u(x_m, t_n)}{\partial x} = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (3.1.1.8)$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι η επιλογή του σχήματος των διαφορών μπορεί να δημιουργήσει αξιοσημείωτη μεταβολή στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Εν προκειμένω, η τρίτη προσέγγιση των κεντρικών πεπερασμένων διαφορών μπορεί να παράξει αισθητά καλύτερα αποτελέσματα από τις δύο προηγούμενες προσεγγίσεις.

Για να επιλύσουμε την κυματική εξίσωση (3.1.1.2), πρέπει να προσεγγίσουμε την παράγωγο $u_{,xx}$. Εάν προσθέσουμε τις εξισώσεις (3.1.1.3) και (3.1.1.5) λαμβάνουμε:

$$u_{m+1}^n - u_{m-1}^n = 2u_m^n + \frac{\partial^2 u(x_m, t_n)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \quad (3.1.1.9)$$

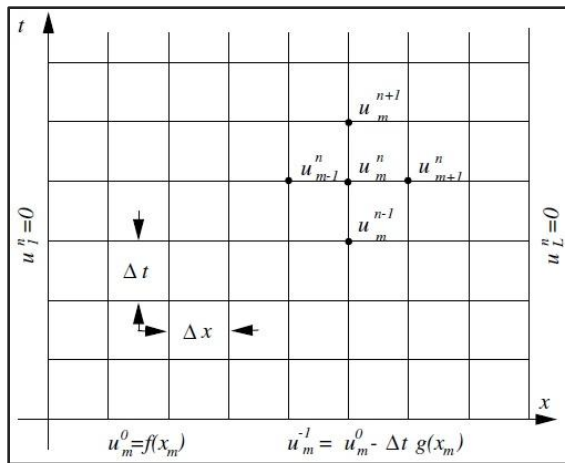
$$\text{ή} \\ \frac{\partial^2 u(x_m, t_n)}{\partial x^2} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (3.1.1.10)$$

Αντίστοιχες θεωρήσεις λαμβάνονται και για τη χρονική παράγωγο. Αμελώντας τα σφάλματα $O[(\Delta x)^2]$ και $O[(\Delta t)^2]$, μπορούμε να προσεγγίσουμε την κυματική εξίσωση ως:

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (3.1.1.11)$$

Επειδή η κυματική εξίσωση αναπαριστά την εξέλιξη κάποιου μεγέθους, η εξίσωση (3.1.1.11) χρησιμοποιείται ως εξίσωση πρόβλεψης και υπολογίζουμε το u_m^{n+1} ως:

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n - u_m^{n-1} + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) \quad (3.1.1.12)$$



Απεικόνιση του αριθμητικού σχήματος

Η μεγαλύτερη δυσκολία στη χρήση της εξίσωσης (3.1.1.12) βρίσκεται στην πρώτη πρόβλεψη. Όταν $n=0$, ξεκάθαρα τα u_{m+1}^0 , u_m^0 , u_{m-1}^0 προσδιορίζονται από την αρχική συνθήκη $u(m\Delta x, 0) = f(x_m)$. Για τον υπολογισμό όμως του u_m^{-1} χρησιμοποιούμε την προς τα πίσω προσέγγιση της σχέσης (3.1.1.6) και έχουμε:

$$\frac{u_m^0 - u_m^{-1}}{\Delta t} = g(x_m) \quad (3.1.1.13)$$

και λύνοντας ως προς u_m^{-1} :

$$u_m^{-1} = u_m^0 - \Delta t g(x_m) \quad (3.1.1.14)$$

Ένα μειονέκτημα της χρήσης του παραπάνω σχήματος είναι το μεγαλύτερο σφάλμα σε σχέση με αυτό που προκύπτει στην κυματική εξίσωση. Μια καλύτερη λύση για τον υπολογισμό του πρώτου βήματος έχουμε με την εφαρμογή των κεντρικών διαφορών.

$$\frac{u_m^1 - u_m^{-1}}{2\Delta t} = g(x_m) \quad (3.1.1.15)$$

και μαζί με την κυματική εξίσωση:

$$\frac{u_m^1 - 2u_m^0 + u_m^{-1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{u_{m+1}^0 - 2u_m^0 + u_{m-1}^0}{(\Delta x)^2} \quad (3.1.1.16)$$

$$u_m^1 = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{f(x_{m+1}) + f(x_{m-1})}{2} + \left[1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right] f(x_m) + \Delta t g(x_m) \quad (3.1.1.17)$$

Μετά τη δημιουργία του αριθμητικού μας σχήματος πρέπει να ελέγξουμε αν έχει τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες: σύγκλιση, ευστάθεια, συνέπεια. Με τον όρο συνέπεια εννοούμε ότι η εξίσωση διαφορών προσεγγίζει την διαφορική εξίσωση όσο τα $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Για να αποδείξουμε την συνέπεια, γράφουμε τα $u_{m+1}^n, u_{m-1}^n, u_m^{n-1}, u_m^{n+1}$ ως προς $u(x, t)$ και τις παραγώγους με τιμές στο (x_m, t_n) . Από το ανάπτυγμα Taylor έχουμε:

$$\begin{aligned} u_{m+1}^n &= u_m^n + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_n^m + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_n^m + \frac{1}{6} (\Delta x)^3 \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_n^m + \dots, \\ u_{m-1}^n &= u_m^n - \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_n^m + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_n^m - \frac{1}{6} (\Delta x)^3 \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_n^m + \dots, \end{aligned} \quad (3.1.1.18)$$

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= u_m^n + \Delta t \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_n^m + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_n^m + \frac{1}{6} (\Delta t)^3 \left. \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|_n^m + \dots, \\ u_m^{n-1} &= u_m^n - \Delta t \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_n^m + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_n^m - \frac{1}{6} (\Delta t)^3 \left. \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|_n^m + \dots \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.1.1.18) στην (3.1.1.11), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{(\Delta t)^2} - c^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} &= \\ = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_n^m &+ \frac{1}{12} (\Delta t)^2 \left. \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right|_n^m - \frac{1}{12} (c\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_n^m + \dots \end{aligned} \quad (3.1.1.19)$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί τμήμα της εξίσωσης (3.1.1.20) είναι μηδέν, αφού ικανοποιεί την κυματική εξίσωση. Όσο τα $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, οι υπόλοιποι όροι στο δεξί τμήμα τείνουν στο μηδέν και η εξίσωση (3.1.1.11) αποτελεί μια συνεπή προσέγγιση διαφορών της κυματικής εξίσωσης.

Η ευστάθεια της μεθόδου αποτελεί ένα άλλο θέμα. Κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες τα μικρά, εγγενή αριθμητικά λάθη μπορούν να μεγαλώσουν για συγκεκριμένες επιλογές των Δx και Δt . Τη δεκαετία του 1920 οι μαθηματικοί Courant, Friedrichs και Lewy βρήκαν ότι αν $c\Delta t / \Delta x > 1$, τότε το αριθμητικό σχήμα είναι ασταθές. Αυτό το κριτήριο έχει τη βάση

του στο ότι εάν $c\Delta t > \Delta x$, τότε ζητάμε τα σήματα στο αριθμητικό σχήμα να μετακινούνται γρηγορότερα σε σχέση με το φυσικό μοντέλο και αυτή η μη ρεαλιστική προσδοκία οδηγεί σε αστάθεια.

Μία μέθοδος προσδιορισμού της ευστάθειας είναι η von Neumann, η οποία περιλαμβάνει εξέταση λύσεων της εξίσωσης (3.1.1.12) της μορφής:

$$u_m^n = e^{im\theta} e^{in\lambda} \quad (3.1.1.20)$$

όπου θ είναι ένας αυθαίρετος πραγματικός αριθμός και λ ένας μιγαδικός αριθμός που δεν έχει προσδιοριστεί ακόμα. Η επιλογή της άνωθι εξίσωσης στηρίζεται στο γεγονός ότι η αρχική συνθήκη u_m^0 μπορεί να αναπαρασταθεί από μια σειρά Fourier, στην οποία ένας τυπικός όρος συμπεριφέρεται ως $e^{im\theta}$.

Εάν αντικαταστήσουμε την εξίσωση (3.1.1.20) στην (3.1.1.11) και διαιρέσουμε με τον κοινό παράγοντα $e^{im\theta} e^{in\lambda}$, λαμβάνουμε:

$$\frac{e^{i\lambda} - 2 + e^{-i\lambda}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}}{(\Delta x)^2} \quad (3.1.1.21)$$

ή

$$\sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.1.1.22)$$

Η συμπεριφορά του u_m^n προσδιορίζεται από τις τιμές του λ που δίδεται από την εξίσωση (3.1.1.22). Εάν $c\Delta t / \Delta x \leq 1$, τότε το λ είναι πραγματικός αριθμός και το u_m^n είναι φραγμένο για όλα τα θ όταν $n \rightarrow \infty$. Αν $c\Delta t / \Delta x > 1$, τότε είναι πιθανό να βρεθεί μια τιμή του θ τέτοια ώστε το δεξί τμήμα της εξίσωσης (3.1.1.22) να ξεπερνά την μονάδα και οι αντίστοιχες τιμές του λ να είναι ζεύγη συζυγών μιγαδικών. Το λ με αρνητικό φανταστικό τμήμα παράγει λύση με εκθετική αύξηση επειδή $n = t_n / \Delta t \rightarrow \infty$ αν $\Delta t \rightarrow 0$ για συγκεκριμένο t_n και $c\Delta t / \Delta x$. Συνεπώς, η τιμή του u_m^n γίνεται απείρως μεγάλη, ακόμα κι αν τα αρχικά δεδομένα είναι μικρά.

Τέλος, πρέπει να γίνει έλεγχος της σύγκλισης. Ένα αριθμητικό σχήμα συγκλίνει εάν η αριθμητική λύση προσεγγίζει την αναλυτική όσο $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$. Η γενική διαδικασία για τον έλεγχο της σύγκλισης περιλαμβάνει την εξέλιξη του όρου σφάλματος e_m^n , που δίδει τη διαφορά μεταξύ της πραγματικής λύσης $u(x_m, t_n)$ και της αριθμητικής u_m^n . Από την εξίσωση (3.1.1.19),

$$e_m^{n+1} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (e_{m+1}^n + e_{m-1}^n) + 2 \left[1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right] e_m^n - e_m^{n-1} + O[(\Delta t)^4] + O[(\Delta x)^2 (\Delta t)^2] \quad (3.1.1.23)$$

Ας εφαρμόσουμε την άνωθι σχέση να λειτουργήσει προς τα πίσω από το σημείο (x_m, t_n) αλλάζοντας το n σε $n-1$. Οι όροι που παραμένουν στο e_m^n μειώνονται σε ένα άθροισμα $n+1$ τιμών στη γραμμή $n=1$ συν $1/2(n+1)n$ όρους της μορφής $A(\Delta x)^4$. Αν ορίσουμε την max νόρμα $\|e_n\| = \max |e_m^n|$, τότε:

$$\|e_n\| \leq nB(\Delta x)^3 + \frac{1}{2}(n+1)nA(\Delta x)^4 \quad (3.1.1.24)$$

Επειδή $n\Delta x \leq ct_n$, η εξίσωση (3.1.1.24) απλοποιείται στη σχέση:

$$\|e_n\| \leq ct_n(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}c^2t_n^2A(\Delta x)^2 \quad (3.1.1.25)$$

Συνεπώς, το σφάλμα τείνει στο μηδέν όσο $\Delta x \rightarrow 0$, επιβεβαιώνοντας την σύγκλιση.

3.1.2) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Στο προηγούμενο υποκεφάλαιο εφαρμόσαμε τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών στην απλούστερη υπερβολική γραμμική μερική διαφορική εξίσωση (κυματική). Θα συνεχίσουμε με την εφαρμογή της μεθόδου για την επίλυση της απλούστερης παραβολικής εξίσωσης. Ως παραβολικές χαρακτηρίζονται οι γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις β' τάξης της μορφής (σε μία διάσταση):

$$a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}) \quad (3.1.2.1)$$

Όπου $b^2 = 4ac$.

Η απλούστερη μορφή παραβολικής εξίσωσης είναι η εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας (heat equation):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1.2.2)$$

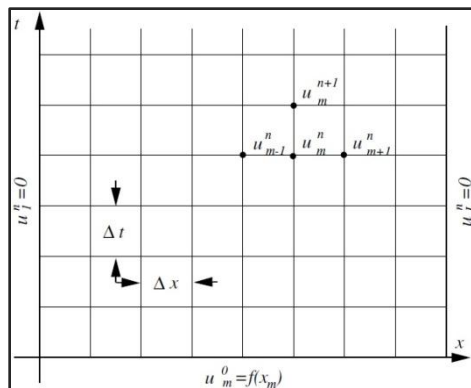
Αρχικά, πρέπει να αντικαταστήσουμε τις μερικές παραγώγους της εξίσωσης με τις αντίστοιχες πεπερασμένες διαφορές. Εφαρμόζοντας το σχήμα των πεπερασμένων διαφορών στις μερικές παραγώγους, λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial u(x_m, t_n)}{\partial t} = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (3.1.2.3)$$

και

$$\frac{\partial^2 u(x_m, t_n)}{\partial x^2} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (3.1.2.4)$$

όπου ο όρος u_m^n συμβολίζει το $u(x_m, t_n)$.



Σχηματική απεικόνιση της αριθμητικής λύσης με τιμές 0 στα δύο άκρα

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.1.2.3) και (3.1.2.4) στην (3.1.2.2) λαμβάνουμε:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) \quad (3.1.2.5)$$

Ο αριθμητικός υπολογισμός ξεκινά για $n=0$ και οι τιμές των $u_{m+1}^0, u_m^0, u_{m-1}^0$ δίδονται από $f(m\Delta x)$. Στη συνέχεια πρέπει να γίνει έλεγχος στη σύγκλιση, την ευστάθεια και τη συνέπεια του σχήματος. Ξεκινάμε γράφοντας τα $u_{m+1}^n, u_m^n, u_m^{n-1}, u_m^{n+1}$ ως προς $u(x, t)$ και τις παραγώγους με τιμές στο (x_m, t_n) . Από το ανάπτυγμα Taylor έχουμε:

$$\begin{aligned} u_{m+1}^n &= u_m^n + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_n^m + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_n^m + \frac{1}{6} (\Delta x)^3 \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_n^m + \dots, \\ u_{m-1}^n &= u_m^n - \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_n^m + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_n^m - \frac{1}{6} (\Delta x)^3 \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_n^m + \dots, \\ u_m^{n+1} &= u_m^n + \Delta t \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_n^m + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_n^m + \frac{1}{6} (\Delta t)^3 \left. \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|_n^m + \dots \end{aligned} \quad (3.1.2.6)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.1.2.5), έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} - a^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} &= \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_n^m + \frac{1}{12} \Delta t \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_n^m - \frac{1}{12} (a\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_n^m + \dots \end{aligned} \quad (3.1.2.7)$$

Για να ορίσουμε την ευστάθεια του άμεσου σχήματος, χρησιμοποιούμε ξανά τη μέθοδο Fourier. Υποθέτοντας μια λύση της μορφής:

$$u_m^n = e^{im\theta} e^{in\lambda} \quad (3.1.2.8)$$

και με αντικατάσταση της (3.1.2.8) στην (3.1.2.5) βρίσκουμε:

$$\frac{e^{i\lambda} - 1}{\Delta t} = a^2 \frac{e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}}{(\Delta x)^2} \quad (3.1.2.9)$$

ή

$$e^{i\lambda} = 1 - 4 \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (3.1.2.10)$$

Η ποσότητα $e^{i\lambda}$ θα αυξηθεί εκθετικά εκτός εάν:

$$-1 \leq 1 - 4 \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) < 1 \quad (3.1.2.11)$$

Η δεξιά ανίσωση ικανοποιείται τετριμμένα εάν $a^2 \Delta t / (\Delta x)^2 > 0$, ενώ η αριστερή αποφέρει:

$$\frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2 \sin^2(\theta/2)} \quad (3.1.2.12)$$

οδηγώντας στην συνθήκη ευστάθειας $0 < a^2 \Delta t / (\Delta x)^2 \leq 1/2$. Αυτή αποτελεί μια αρκετά δεσμευτική συνθήκη, καθώς διπλασιασμός της ανάλυσης (μειώνουμε κατά το ήμισυ το Δx) απαιτεί μείωση του χρονικού βήματος κατά ένα τέταρτο. Κατά συνέπεια, για πολλούς υπολογισμούς το απαραίτητο χρονικό βήμα μπορεί να είναι μη αποδεκτά μικρό. Για αυτό

τον λόγο, πολλοί χρησιμοποιούν το ακόλουθο πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών (Crank-Nicolson implicit method):

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} = \frac{a^2}{2} \left[\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right] \quad (3.1.2.13)$$

Η άνωθι σχέση απαιτεί την ταυτόχρονη επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν αρκετές αποδοτικές μέθοδοι για την επίλυση των εξισώσεων.

Τέλος, ελέγχουμε την σύγκλιση του άμεσου σχήματος ως προς την πραγματική λύση. Εάν ορίσουμε το e_m^n ως της διαφορά μεταξύ αναλυτικής και αριθμητικής λύσης της εξίσωσης θερμοτικής αγωγιμότητας, μπορούμε να εξάγουμε την εξίσωση του e_m^n από τη σχέση (3.1.2.7) και βρίσκουμε:

$$e_m^{n+1} = e_m^n + \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} (e_{m+1}^n - 2e_m^n + e_{m-1}^n) + O \left[(\Delta t)^2 + \Delta t (\Delta x)^2 \right] \quad (3.1.2.14)$$

Για $m = 1, 2, \dots, M$. Με την υπόθεση ότι $a^2 \Delta t / (\Delta x)^2 \leq 1/2$, τότε:

$$\begin{aligned} |e_m^{n+1}| &\leq \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} |e_{m-1}^n| + \left[1 - 2 \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] |e_m^n| + \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} |e_{m+1}^n| + A \left[(\Delta t)^2 + \Delta t (\Delta x)^2 \right] \leq \\ &\leq \|e_n\| + A \left[(\Delta t)^2 + \Delta t (\Delta x)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.1.2.15)$$

όπου $\|e_n\| = \max_{m=0,1,\dots,M} |e_m^n|$. Εν συνεχεία:

$$\|e_{n+1}\| \leq \|e_n\| + A \left[(\Delta t)^2 + \Delta t (\Delta x)^2 \right] \quad (3.1.2.16)$$

Επειδή $\|e_0\| = 0$ και $n\Delta t \leq t_n$, βρίσκουμε ότι

$$\|e_{n+1}\| \leq An \left[(\Delta t)^2 + \Delta t (\Delta x)^2 \right] \leq At_n \left[\Delta t + (\Delta x)^2 \right] \quad (3.1.2.17)$$

Εάν $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, τότε τα σφάλματα τείνουν στο μηδέν κι έχουμε σύγκλιση.

3.1.3) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ

Όπως και στις περιπτώσεις της κυματικής εξίσωσης ή της εξίσωσης θερμοτικής αγωγιμότητας, αριθμητικές μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση και ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, όταν οι αναλυτικές μέθοδοι αδυνατούν να δώσουν λύση ή είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες. Επίσης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση που χωρικά δεν έχουμε απλές γεωμετρίες.

Η αριθμητική ανάλυση με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών ξεκινά με την αντικατάσταση των μερικών παραγώγων της μερικής διαφορικής εξίσωσης με σχήματα πεπερασμένων διαφορών. Εφαρμόζοντας το σχήμα των κεντρικών διαφορών λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (3.1.3.1)$$

και

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} + O[(\Delta y)^2] \quad (3.1.3.2)$$

όπου $u_{m,n}$ συμβολίζει την τιμή της λύσης στο σημείο m,n του πλέγματος. Αν $\Delta x = \Delta y$, η εξίσωση Laplace μετατρέπεται στην ακόλουθη εξίσωση διαφορών:

$$u_{m+1,n} + u_{m-1,n} + u_{m,n+1} + u_{m,n-1} - 4u_{m,n} = 0 \quad (3.1.3.3)$$

Συνεπώς, πρέπει τώρα να λύσουμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων που δίνει την τιμή της λύσης σε κάθε σημείο του πλέγματος. Για την επίλυση του εν λόγω συστήματος ενδείκνυται η μέθοδος Gauss-Seidel εξαιτίας της απλότητάς της. Για τον έλεγχο της συνέπειας, της ευστάθειας και της σύγκλισης της μεθόδου μπορούμε να εργαστούμε όπως στους προηγούμενους δύο τύπους μερικών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων β' τάξης.

3.2) Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων χρησιμοποιείται στην αριθμητική επίλυση πολλών προβλημάτων της Μηχανικής και εφαρμόζεται κυρίως στην επίλυση ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων ή συστημάτων αυτού του τύπου εξισώσεων. Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο θα αναπτυχθεί το γενικό μοντέλο της μεθόδου για τη Θερμοελαστικότητα, το οποίο σε συνδυασμό με άλλες μεθόδους μπορεί να επιλύσει το πλήρες δυναμικό πρόβλημα που είδαμε στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας. Στα προβλήματα της Δυναμικής Θερμοελαστικότητας η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων διακριτοποιεί το συνεχές πρόβλημα στο πεδίο του χώρου και για την επίλυση στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιούνται μέθοδοι όπως ο μετασχηματισμός Laplace και η ιδιοδιανυσματική ανάλυση ή έχουμε διακριτοποίηση στο πεδίο του χρόνου με την μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών.

Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων μπορεί να διατυπωθεί στο πλαίσιο δύο εντελώς διαφορετικών προσεγγίσεων. Η πρώτη είναι η μεταβολική προσέγγιση που στηρίζεται στη μέθοδο Ritz και η δεύτερη που στηρίζεται στην μέθοδο των Σταθμικών Υπολοίπων. Η μεταβολική διατύπωση της μεθόδου παρουσιάζει μειονεκτήματα στην αντιμετώπιση των προβλημάτων της Συζευγμένης Θερμοελαστικότητας, εξαιτίας του συναρτησιακού του Πρώτου Θερμοδυναμικού Νόμου. Αντίθετα, η μέθοδος των Σταθμικών Υπολοίπων κατά Galerkin εφαρμόζεται άμεσα στις εξισώσεις πεδίου, είναι αποδοτική και με μεγάλο ρυθμό σύγκλισης. Η διατύπωση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων για το πλήρες μοντέλο Θερμοελαστικότητας σε αυτήν την εργασία θα γίνει κατά Galerkin και θα περιγραφεί αυτή καθαυτή (θα γίνει μόνο η διακριτοποίηση στο χώρο δηλαδή), χωρίς να συνεχίσουμε στο πως μπορεί να συνδυαστεί με άλλες μεθόδους για την επίλυση των προβλημάτων και στο πεδίο του χρόνου.

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ GALERKIN

Όπως έχουμε δει, το πλήρες μοντέλο της κλασικής συζευγμένης δυναμικής Θερμοελαστικότητας περιλαμβάνει τις εξισώσεις κίνησης και του πρώτου Νόμου της Θερμοδυναμικής:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \quad \text{στο } V \quad (3.2.1)$$

$$q_{i,i} + \rho c \dot{\theta} + \beta T_0 \dot{\epsilon}_{ii} = R \quad \text{στο } V \quad (3.2.2)$$

Οι άνωθι εξισώσεις πρέπει να επιλύονται ταυτόχρονα για τις μετατοπίσεις u_i και τη

θερμοκρασιακή μεταβολή θ . Οι θερμικές συνοριακές πρέπει να ικανοποιούν μία από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\theta = \theta_s \text{ στο } A \text{ για } t > t_0 \quad (3.2.3)$$

$$\theta_{,n} + \alpha\theta = b \text{ στο } A \text{ για } t > t_0 \quad (3.2.4)$$

όπου $\theta_{,n}$ η κλίση της θερμοκρασιακής μεταβολής κατά το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα της συνοριακής επιφάνειας A και a , b σταθερές ή δοσμένες συναρτήσεις της θερμοκρασίας στο σύνορο. Η πρώτη συνθήκη σχετίζεται με τη συγκεκριμένη θερμοκρασία στο σύνορο και η δεύτερη περιγράφει τη μεταφορά θερμότητας στο σύνορο (με συναγωγή κι ακτινοβολία). Οι μηχανικές συνοριακές συνθήκες προσδιορίζονται μέσω του ελκυστή της τάσης στο σύνορο. Ο ελκυστής συνδέεται με τον ταυστή της τάσης μέσω του τύπου του Cauchy:

$$t_i^n = \sigma_{ij} n_j \text{ στο } A \text{ για } t > t_0 \quad (3.2.5)$$

όπου t_i^n ο δοσμένος ελκυστής της τάσης σε στην επιφάνεια A η οποία έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα προς τα έξω \mathbf{n} . Για τη διατύπωση της άνω εξίσωσης στο πεδίο των μετατοπίσεων, χρησιμοποιούμε την καταστατική εξίσωση της γραμμικής Θερμοελαστικότητας μαζί με τις σχέσεις τροπών-μετατοπίσεων. Ο ελκυστής γράφεται ως προς τις μετατοπίσεις:

$$t_i^n = \mu(u_{i,j} + u_{j,i})n_j + \lambda u_{k,k} n_i - (3\lambda + 2\mu)a\theta n_i \quad (3.2.6)$$

όπου $\theta = T - T_0$ είναι η θερμοκρασιακή μεταβολή αναφορικά με την θερμοκρασία αναφοράς T_0 . Είναι, επίσης, πιθανό να έχουμε κινηματικές συνοριακές συνθήκες όπου οι μετατοπίσεις προσδιορίζονται επί του συνόρου ως:

$$u_i = \bar{u}(s) \text{ στο } A \text{ για } t > t_0 \quad (3.2.7)$$

Το σύστημα των συζευγμένων εξισώσεων (3.2.1) και (3.2.2) δεν έχει κάποια γενική αναλυτική λύση. Μια προσέγγιση με πεπερασμένα στοιχεία μπορεί να αναπτυχθεί βάσει της μεθόδου Σταθμικών Υπολοίπων Galerkin. Αποκτάμε το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων του προβλήματος διακριτοποιώντας το πεδίο λύσεων με ένα αριθμό αυθαίρετων στοιχείων. Σε κάθε στοιχείο, οι συνιστώσες της μετατόπισης και η θερμοκρασιακή μεταβολή προσεγγίζονται από τις συναρτήσεις σχήματος:

$$u_i^{(e)}(x_1, x_2, x_3, t) = U_{mi}(t) N_m(x_1, x_2, x_3) \quad (3.2.8)$$

$$\theta^{(e)}(x_1, x_2, x_3, t) = \theta_m(t) N_m(x_1, x_2, x_3) \quad m = 1, 2, \dots, r \quad (3.2.9)$$

όπου r είναι ο ολικός αριθμός κόμβων του στοιχείου (e). Στο συμβολισμό ισχύει η σύμβαση άθροισης. Η άνωθι αποτελεί προσέγγιση Kantorovich, όπου οι χωρικές μεταβλητές και ο χρόνος διαχωρίζονται σε ξεχωριστές συναρτήσεις. Έτσι, ο όρος $U_{mi}(t)$ που δίνει τις μετατοπίσεις σε κάθε κόμβο και ο όρος $\theta_m(t)$ που δίνει τη θερμοκρασιακή μεταβολή σε κάθε κόμβο αποτελούν συναρτήσεις του χρόνου. Η συνάρτηση σχήματος $N_m(x_1, x_2, x_3)$ είναι συνάρτηση των χωρικών μεταβλητών.

Με αντικατάσταση των (3.2.8) και (3.2.9) στην (3.2.1) και εφαρμόζοντας το ολοκλήρωμα σταθμικού υπολοίπου ως προς τις συναρτήσεις βάρους $N_m(x_1, x_2, x_3)$, η προσέγγιση Galerkin γίνεται:

$$\int_{V(e)} (\sigma_{ij,j} + X_i - p\ddot{u}_i) N_l dV = 0 \quad l = 1, 2, \dots, r \quad (3.2.10)$$

Εφαρμόζοντας την ασθενή μορφή στον πρώτο όρο, λαμβάνουμε:

$$\int_{V(e)} (\sigma_{ij,j}) N_l dV = N \int_{A(e)} \sigma_{ij} n_j N_l dA - \int_{V(e)} \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV \quad (3.2.11)$$

όπου n_j το κάθετο προς τα έξω μοναδιαίο διάνυσμα του συνόρου. Αντικαθιστούμε την (3.2.11) στην (3.2.10) και λαμβάνουμε:

$$\int_{A(e)} \sigma_{ij} n_j N_l dA - \int_{V(e)} \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV + \int_{V(e)} X_i N_l dV - \int_{V(e)} p \ddot{u}_i N_l dV = 0 \quad (3.2.12)$$

Σύμφωνα με τον τύπο του Cauchy, ο ελκυστής που εφαρμόζεται στην συνοριακή επιφάνεια σχετίζεται με τον τανυστή της τάσης ως:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.2.13)$$

Συνεπώς, ο πρώτος όρος της (3.2.12) είναι:

$$\int_{A(e)} \sigma_{ij} n_j N_l dA = \int_{A(e)} t_i N_l dA \quad (3.2.14)$$

Από τον Νόμο του Hooke, ο τανυστής της τάσης συνδέεται με τον τανυστή των τροπών ή το πεδίο των μετατοπίσεων και τη θερμοκρασιακή μεταβολή θ με τη σχέση:

$$\sigma_{ij} = G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} - \beta \theta \delta_{ij} \quad (3.2.15)$$

Αντικαθιστούμε στον δεύτερο όρο της (3.2.12) και λαμβάνουμε:

$$\int_{V(e)} \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV = \int_{V(e)} \frac{\partial N_l}{\partial x_j} [G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} - \beta \theta \delta_{ij}] dV \quad (3.2.16)$$

Και με αντικατάσταση της (3.2.16) στην (3.2.12), έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_{V(e)} p \ddot{u}_i N_l dV + \int_{V(e)} \frac{\partial N_l}{\partial x_j} [G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij}] dV - \int_{V(e)} \beta \theta \frac{\partial N_l}{\partial x_j} dV = \\ & = \int_{V(e)} X_i N_l dV + \int_{A(e)} t_i N_l dA \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Τώρα, θα χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις (3.2.8) και (3.2.9) που δίνουν τις προσεγγίσεις των μετατοπίσεων και της θερμοκρασιακής μεταβολής εντός του στοιχείου με r κόμβους. Η σχέση (3.2.17) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{V(e)} p N_l N_m dV \right) \ddot{U}_{mi} + \left(\int_{V(e)} G \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} dV \right) U_{mi} + \left(\int_{V(e)} G \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \frac{\partial N_m}{\partial x_i} dV \right) U_{mj} + \\ & + \left(\int_{V(e)} \lambda \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} dV \right) U_{mj} - \left[\int_{V(e)} \beta \frac{\partial N_l}{\partial x_i} N_m dV \right] \theta_m = \int_{V(e)} X_i N_l dV + \int_{A(e)} t_i N_l dA \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

$$l, m = 1, 2, \dots, r \quad i, j = 1, 2, 3$$

Η άνωθι σχέση περιγράφει την προσέγγιση του πεπερασμένου στοιχείου για την εξίσωση της κίνησης.

Η προσέγγιση Galerkin για την εξίσωση ενέργειας (3.2.2) έχει ως:

$$\int_{V(e)} \left(q_{i,i} + pc\dot{\theta} + T_0\beta\dot{u}_{i,i} - R \right) N_l dV = 0 \quad l = 1, 2, \dots, r \quad (3.2.19)$$

Ο μετασχηματισμός στην ασθενή μορφή για την κλίση του διανύσματος θερμοκικής ροής $q_{i,i}$ δίδει:

$$\int_{V(e)} q_{i,i} N_l dV = \int_{V(e)} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) N_l dV = \int_{A(e)} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) N_l dA - \int_{V(e)} q_i \frac{\partial N_l}{\partial x_i} dV \quad (3.2.20)$$

όπου $A(e)$ η συνοριακή επιφάνεια του στοιχείου (e). Με το συνδυασμό των (3.2.20), (3.2.19) και αναδιάταξη των όρων λαμβάνουμε:

$$\int_{V(e)} pc \frac{\partial \theta}{\partial t} N_l dV - \int_{V(e)} q_i \frac{\partial N_l}{\partial x_i} dV + \int_{V(e)} T_0 \beta \dot{u}_{i,i} N_l dV = \int_{V(e)} R N_l dV - \int_{A(e)} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) N_l dA \quad (3.2.21)$$

$$l = 1, 2, \dots, r$$

Με αντικατάσταση των προσεγγίσεων για τα πεδία μετατοπίσεων και θερμοκρασίας των σχέσεων (3.2.8) και (3.2.9) λαμβάνουμε:

$$\left(\int_{V(e)} k \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \frac{\partial N_l}{\partial x_i} dV \right) \theta_m + \left(\int_{V(e)} T_0 \beta \frac{\partial N_m}{\partial x_i} N_l dV \right) \dot{U}_{mi} + \left(\int_{V(e)} pc N_m N_l dV \right) \dot{\theta}_m = \int_{V(e)} R N_l dV - \int_{A(e)} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) N_l dA \quad (3.2.22)$$

Η σχέση (3.2.22) περιγράφει την προσέγγιση της συζευγμένης εξίσωσης ενέργειας σε ένα πεπερασμένο στοιχείο.

Οι εξισώσεις (3.2.18) και (3.2.22) συνδέονται σε μητρική μορφή και δίδουν την γενική συζευγμένη εξίσωση πεπερασμένων στοιχείων:

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [C]\{\dot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (3.2.23)$$

όπου $[M]$, $[C]$ και $[K]$ είναι τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας, αντίστοιχα.

Η στήλη $\{\Delta\}^T = [U_i, \theta]$ περιλαμβάνει τα άγνωστα μεγέθη και $\{F\}$ η στήλη γνωστών μεγεθών που περιλαμβάνει μηχανικά και θερμικά φορτία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας περιγράφηκαν συνοπτικά οι υπολογιστικές μέθοδοι των Πεπερασμένων Διαφορών και των Πεπερασμένων Στοιχείων. Σε αυτό το κεφάλαιο με χρήση των δύο αυτών μεθόδων της Αριθμητικής Ανάλυσης και της θεωρίας Θερμοελαστικότητας, μελετώνται 5 τύποι θερμομηχανικών προβλημάτων. Αρχικά, εξετάζουμε την ελλειπτική, την παραβολική και την υπερβολική περιγραφή του προβλήματος Θερμικής Αγωγιμότητας. Εν συνεχεία, μελετάται η ανάπτυξη θερμοικών τάσεων σε πλάκα και σε κυλινδρικό φορέα. Τέλος, περιγράφονται η θερμομηχανική συμπεριφορά επίπεδου φορέα που δομείται από δύο διαφορετικά υλικά και η θερμομηχανική συμπεριφορά γραμμικά ελαστικού, σφαιρικού κελύφους. Για την επίλυση των εξισώσεων και την γραφική παρουσίαση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν τα προγράμματα Matlab και ANSYS Mechanical APDL. Το Matlab χρησιμοποιήθηκε στην μοντελοποίηση κι επίλυση με την μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών, ενώ το λογισμικό ANSYS στα προβλήματα που επιλύθηκαν με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.

4.1) ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ, ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Το πρόβλημα της Μετάδοσης Θερμότητας στην γενική του μορφή, όπως είδαμε στη βασική θεωρία, περιγράφεται ως:

$$kT_{,ii} + R = +c\dot{T} + T_0\gamma\dot{\epsilon}_{ii} \quad (4.1.1)$$

Κατά το κλασικό μοντέλο.

$$kT_{,ii} + R + t_0\dot{R} = c(\dot{T} + t_0\ddot{T}) + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0(\dot{\epsilon}_{kk} + t_0\ddot{\epsilon}_{kk}) \quad (4.1.2)$$

Κατά το μοντέλο Lord-Shulman.

$$kT_{,ii} + R = c\dot{T} + ct_2\ddot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0\dot{u}_{i,i} \quad (4.1.3)$$

Κατά το μοντέλο Green-Lindsay.

$$\rho_0 c_E \ddot{\theta} + \frac{E\alpha^* T_0}{3(1-2\nu)} \ddot{u}_{i,i} = \rho_0 r + \kappa^* \theta_{,ii} \quad (4.1.4)$$

Κατά το μοντέλο Green-Naghdi.

Και συνοδεύεται από τις αντίστοιχες βοηθητικές συνθήκες:

$$T = T_p \text{ στο } \partial P_p \text{ (θερμοκρασία)} \quad (4.1.5)$$

$$q_i n_i + q_s - q_h - q_r = 0 \text{ στο } \partial P_q \text{ (θερμική ροή)} \quad (4.1.6)$$

Όπου $q_h = h(T - T_h)$, $q_r = \sigma_T \epsilon_T (T - T_r)$

και αρχικές συνθήκες:

$$T(x_i, 0) = T_0 \text{ στο } P \quad (4.1.7)$$

$$\dot{T}(x_i, 0) = \dot{T}_0 \text{ στο } P \quad (4.1.8)$$

Θα γίνει μελέτη του μη συζευγμένου προβλήματος (ο όρος που περιλαμβάνει μετατόπισεις ή τροπές αγνοείται) στην στατική και στη δυναμική του εκδοχή. Η θερμοστατική μελέτη αγνοεί τον παράγοντα του χρόνου και η εξίσωση πεδίου καταλήγει να γίνει μια μερική διαφορική εξίσωση ελλειπτικού τύπου. Στην δυναμική εκδοχή μπορεί να γίνει περιγραφή

είτε με διαφορική εξίσωση παραβολικού τύπου, η οποία προκύπτει από το κλασικό μοντέλο ή υπερβολικού που προκύπτει από τα άλλα τρία μοντέλα.

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα εξετάσουμε το ελλειπτικό πρόβλημα σε δύο διαστάσεις (Θερμοστατικό) και θα μελετηθεί το δυναμικό σε μία και δύο διαστάσεις βάσει της παραβολικής και υπερβολικής περιγραφής. Η μοντελοποίηση των προβλημάτων θα γίνει με την μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών και τη χρήση του λογισμικού Matlab.

4.1.1) ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑΣ

Θεωρούμε το θερμοστατικό πρόβλημα Θερμικής Αγωγιμότητας σε δύο διαστάσεις κι ότι δεν υπάρχει πηγή θερμότητας εντός του σώματος. Με τις δύο αυτές παραδοχές η εξίσωση θερμότητας λαμβάνει την μορφή:

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1.1.1)$$

που αποτελεί την γνωστή εξίσωση Laplace.

Η άνωθι εξίσωση πεδίου περιγράφει την θερμοκρασιακή κατανομή εντός πλάκας διαστάσεων $0 \leq x, y \leq 4 \text{ cm}$. Στα άκρα της πλάκας εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες Dirichlet:

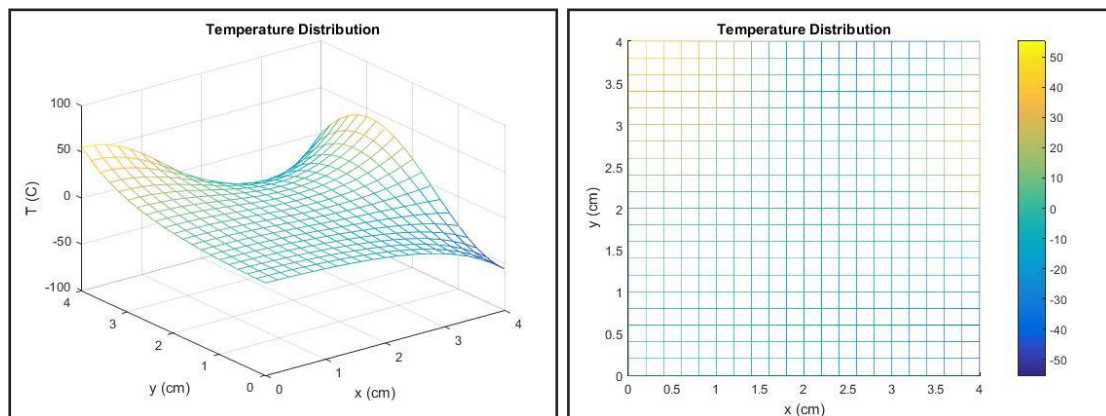
$$T(0, y) = e^y - \cos y \quad (4.1.1.2)$$

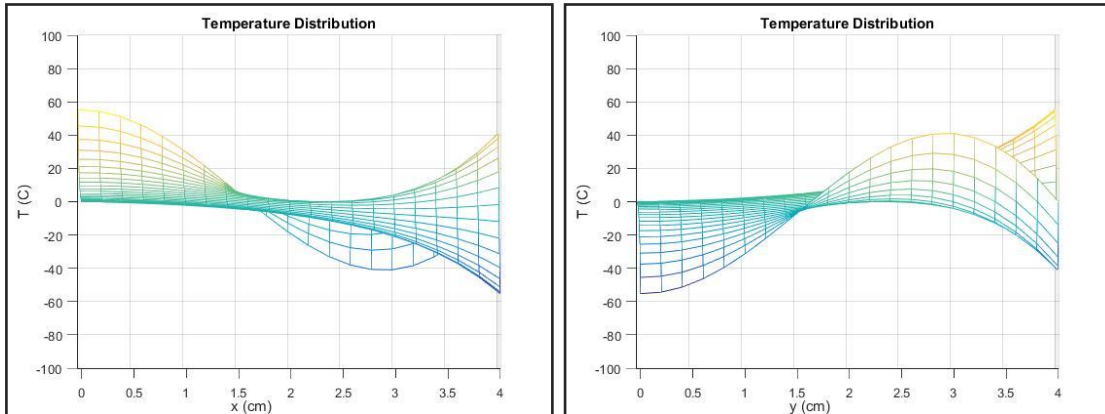
$$T(4, y) = e^y \cos 4 - e^4 \cos y \quad (4.1.1.3)$$

$$T(x, 0) = \cos x - e^x \quad (4.1.1.4)$$

$$T(x, 4) = e^4 \cos x - e^x \cos 4 \quad (4.1.1.5)$$

Το πρόβλημα επιλύεται με το σχήμα των κεντρικών διαφορών και με αριθμητικό πλέγμα 20×20 . Η αριθμητική επίλυση δίδει τα ακόλουθα αποτελέσματα.





4.1.2) ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑΣ

➤ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Θεωρούμε το δυναμικό πρόβλημα Θερμικής Αγωγιμότητας σε μία χωρική διάσταση βάσει του κλασικού μοντέλου Θερμοελαστικότητας (ισχύει ο Νόμος του Fourier) κι ότι δεν υπάρχει πηγή θερμότητας εντός του σώματος. Με τις δύο αυτές παραδοχές η εξίσωση θερμότητας λαμβάνει την μορφή:

$$A \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0, \quad A = \frac{c}{k} \quad (4.1.2.1)$$

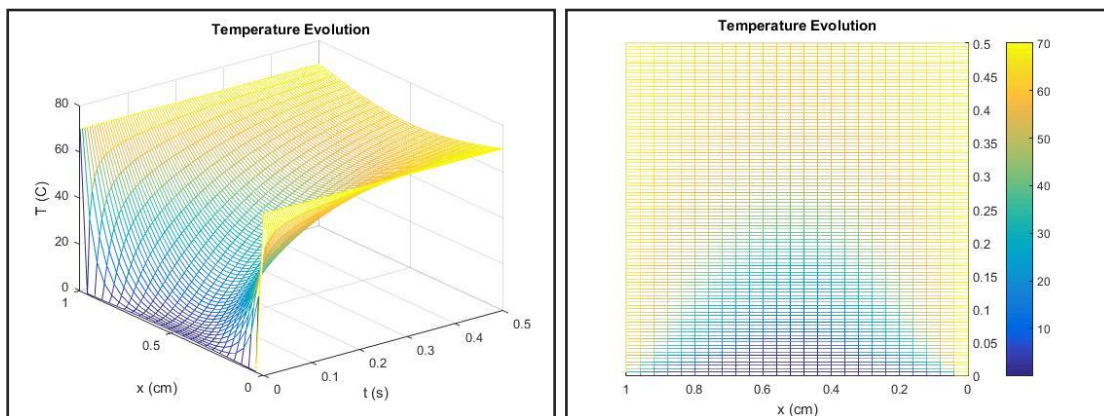
Η μερική διαφορική εξίσωση (4.1.2.1) χαρακτηρίζεται ως β' τάξης, γραμμική, παραβολική.

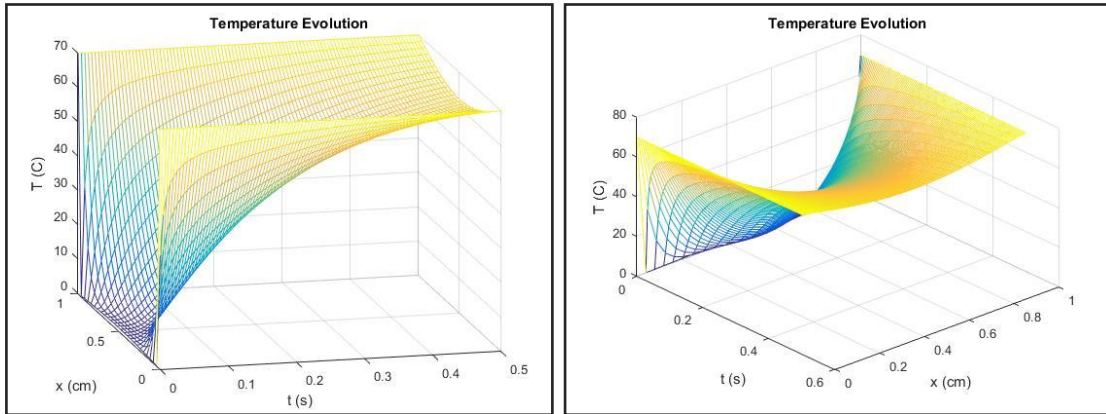
Το πρόβλημα θα επιλυθεί με βοηθητικές συνθήκες:

$$T(x,0) = (\sin \pi x) + 70, \quad T(0,t) = T(1,t) = 70 \quad (4.1.2.2)$$

για $0 \leq x \leq 1$ και $0 \leq t \leq 0,5$. Οι υπολογισμοί θα γίνουν για $A = 0,5$ και θα χρησιμοποιηθεί η πεπλεγμένη μέθοδος Euler (Implicit Backward Euler Method). Το πρόβλημα θα διακριτοποιηθεί με πλέγμα 100×25 ($\Delta t \times \Delta x$).

Λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:





➤ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Η παραβολική εξίσωση σε δύο διαστάσεις, με τις ίδιες παραδοχές να παραμένουν σε ισχύ, λαμβάνει την μορφή:

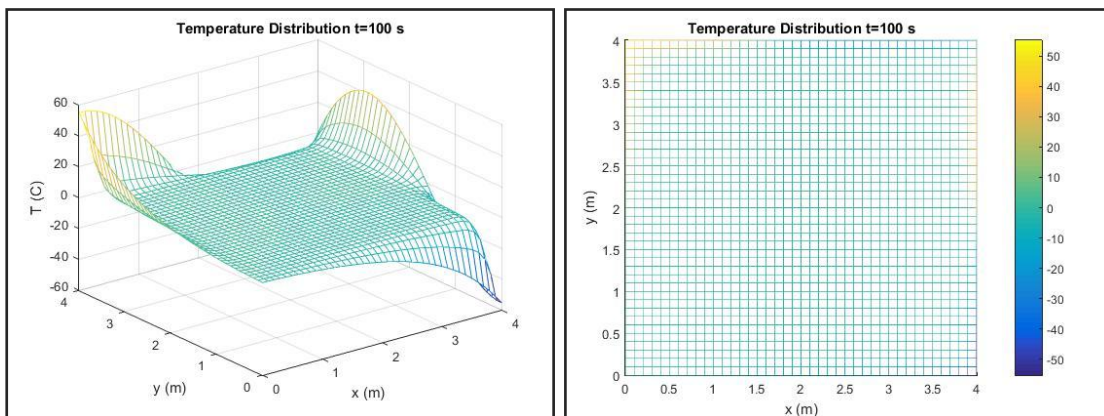
$$A \left(\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = 0 \quad (4.1.2.3)$$

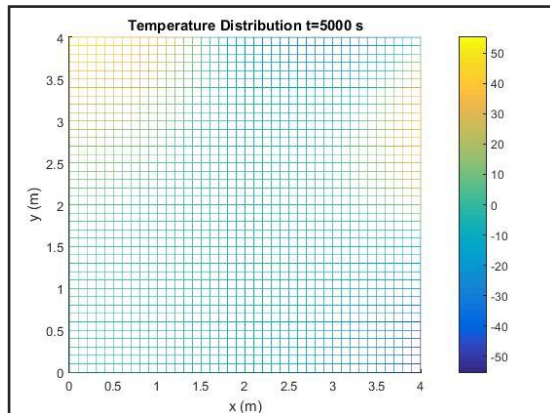
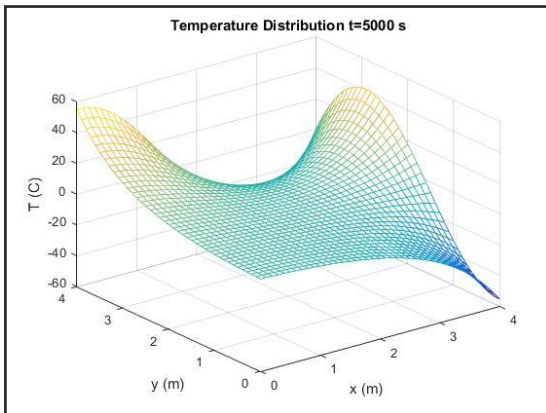
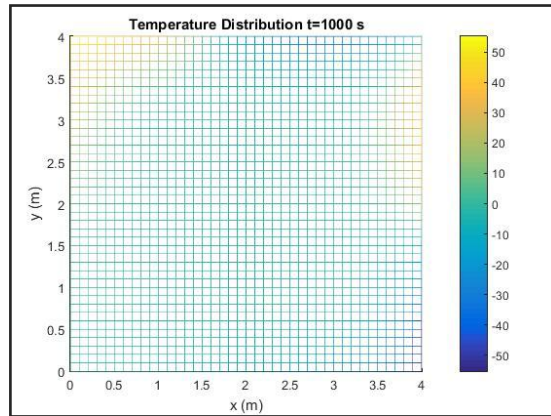
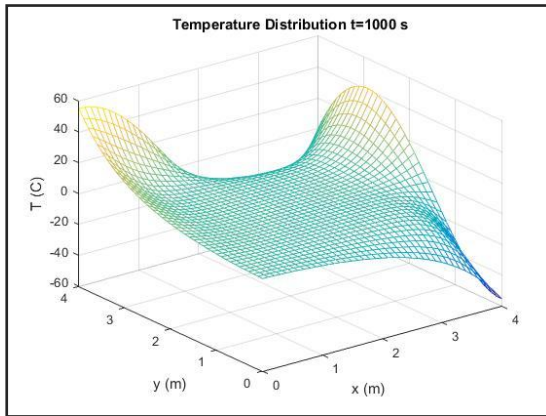
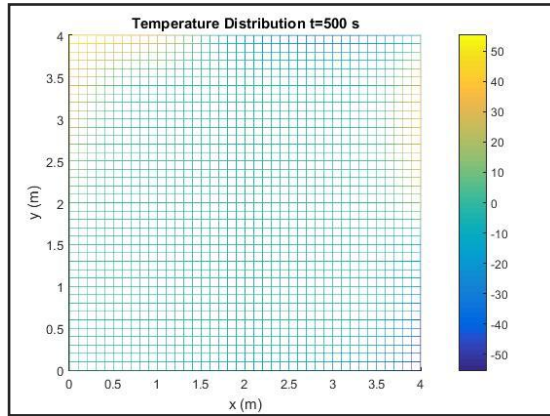
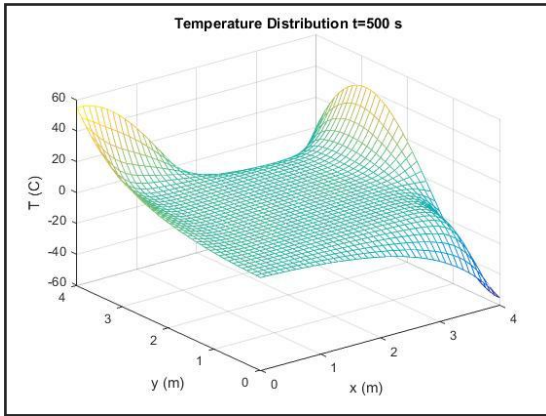
Το πρόβλημα θα επιλυθεί με βοηθητικές συνθήκες:

$$T(x, y, 0) = 0, \quad T(x, y, t) = e^y \cos x - e^x \cos y \quad \text{για } x = 0, x = 4, y = 0, y = 4 \quad (4.1.2.4)$$

για $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq t \leq 5000$. Οι υπολογισμοί θα γίνουν για $A = 10^{-4}$ και θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των κεντρικών διαφορών. Το πρόβλημα θα διακριτοποιηθεί με πλέγμα $50 \times 40 \times 40$ ($\Delta t \times \Delta y \times \Delta x$).

Λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:





4.1.3) ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑΣ

➤ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ-MONTELO GREEN-NAGHDI

Η μετάδοση θερμότητας σε μία διάσταση κατά το μοντέλο Green-Naghdi δίδεται από την ακόλουθη υπερβολική μερική διαφορική εξίσωση:

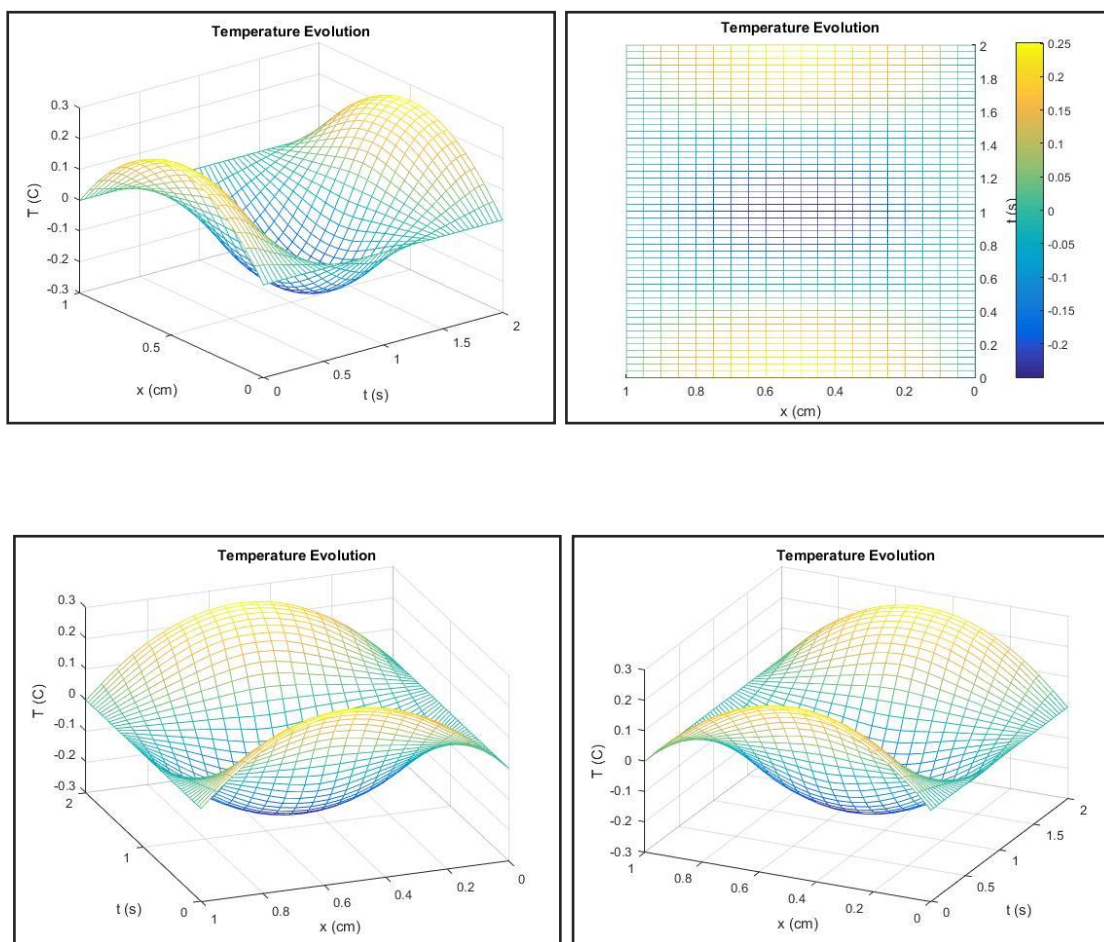
$$A \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad A = \frac{c}{k} \quad (4.1.3.1)$$

Η άνωτη εξίσωση θα μελετηθεί για $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 2$, για $A = 1$ και με τις ακόλουθες συνοριακές και αρχικές συνθήκες:

$$T(x,0) = x(1-x), \quad \frac{\partial T(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (4.1.3.2)$$

$$T(0,t) = 0, \quad T(1,t) = 0$$

Θα χρησιμοποιηθεί το σχήμα των κεντρικών πεπερασμένων διαφορών και τα πεδία θα διακριτοποιηθούν κατά 50×20 ($\Delta t \times \Delta x$). Τα αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:



➤ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Η μετάδοση θερμότητας σε δύο διαστάσεις κατά το μοντέλο Green-Naghdi δίδεται από την ακόλουθη υπερβολική μερική διαφορική εξίσωση:

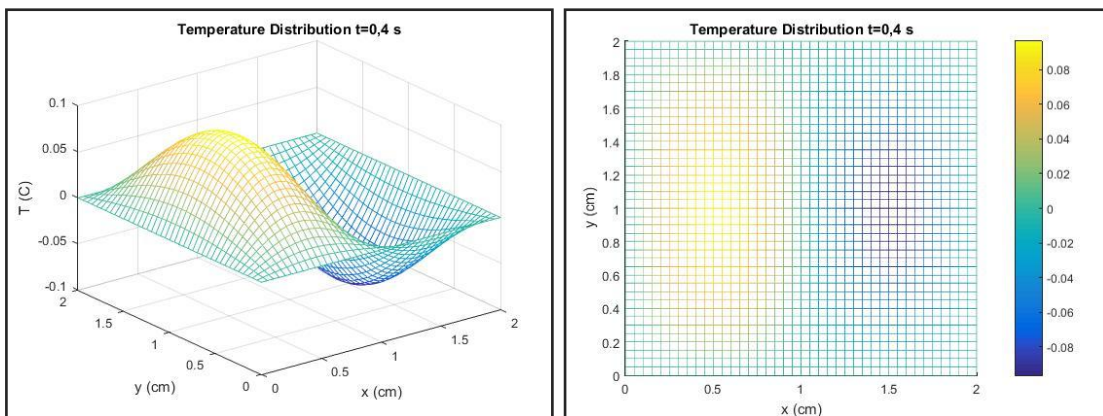
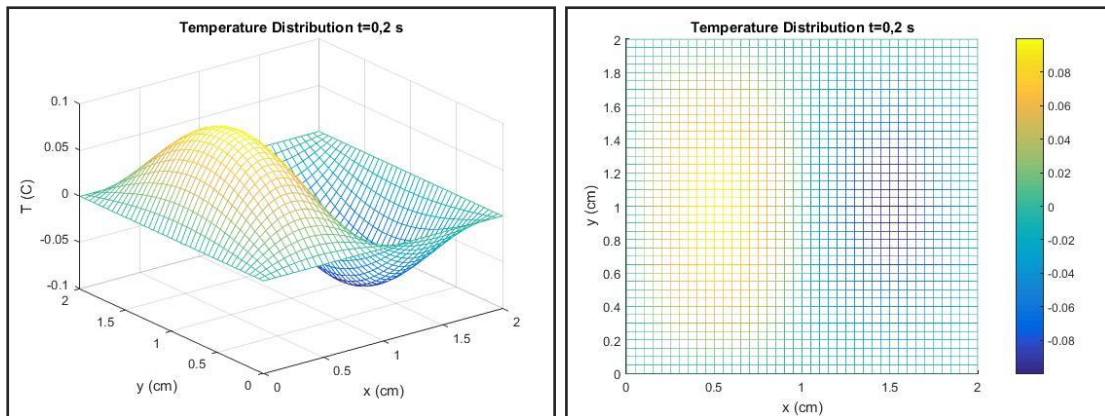
$$A \left[\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial t^2} = 0, \quad A = \frac{c}{k} \quad (4.1.3.3)$$

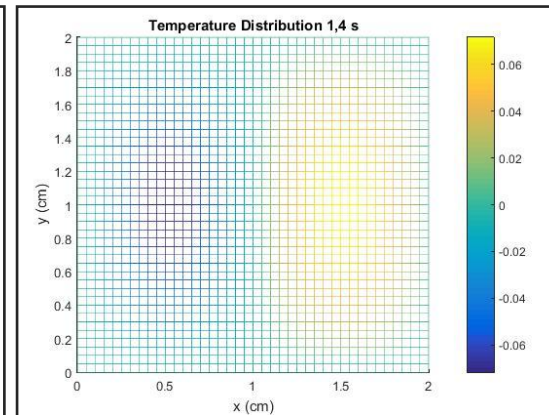
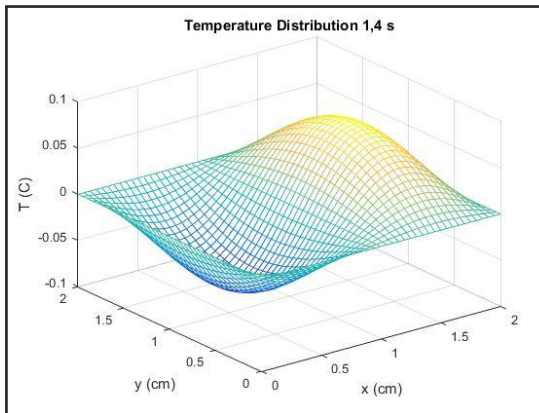
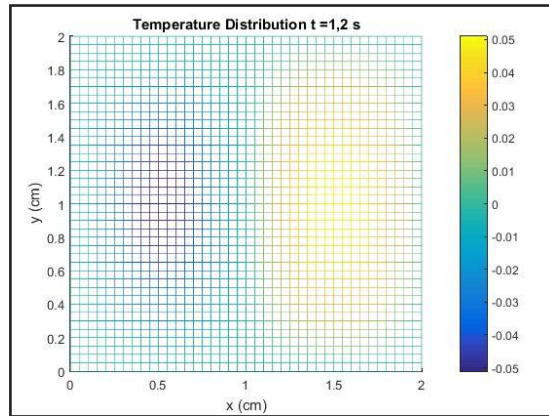
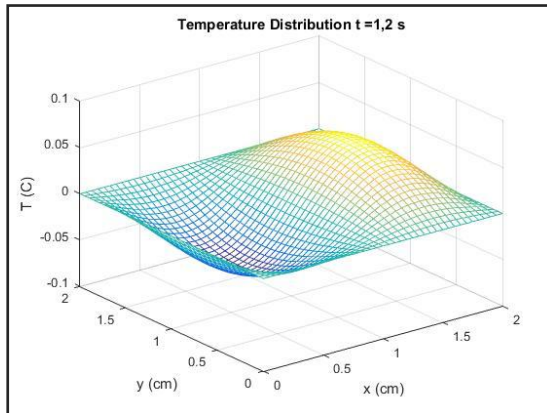
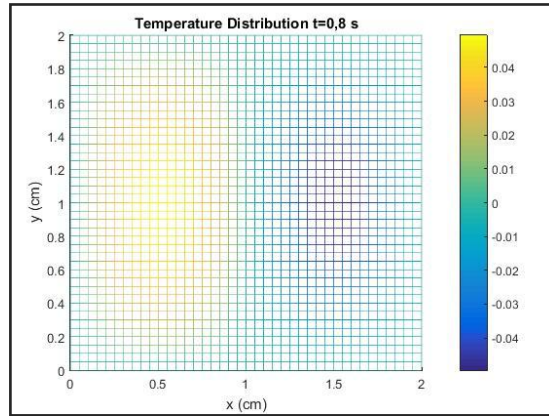
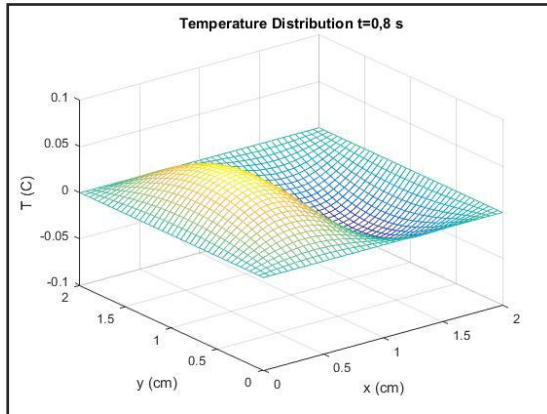
Η άνωθι εξίσωση θα μελετηθεί για $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq t \leq 2$, για $A=1/4$ και με τις ακόλουθες συνοριακές και αρχικές συνθήκες:

$$T(x, y, 0) = 0.1 \sin(\pi x) \sin(\pi y / 2), \quad \frac{\partial T(x, y, 0)}{\partial t} = 0 \quad (4.1.3.4)$$

$$T(0, y, t) = T(2, y, t) = T(x, 0, t) = T(x, 2, t) = 0$$

Χρησιμοποιείται ξανά το σχήμα των κεντρικών πεπερασμένων διαφορών και λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:



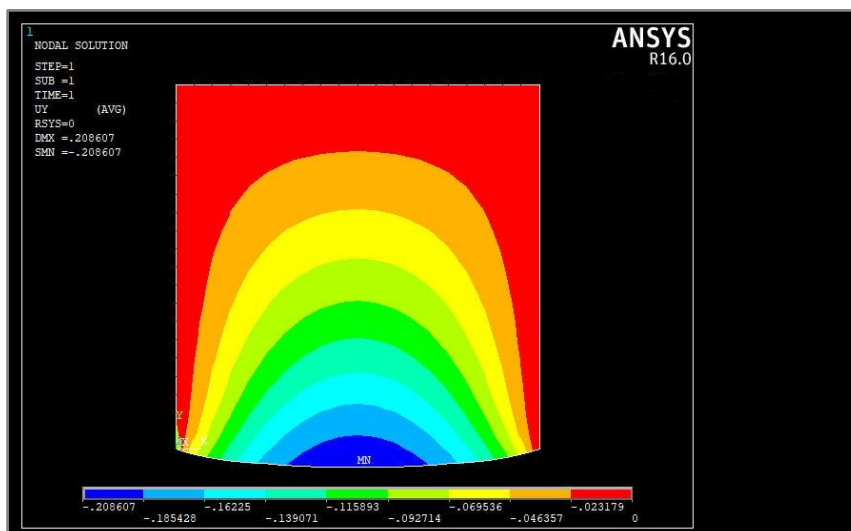
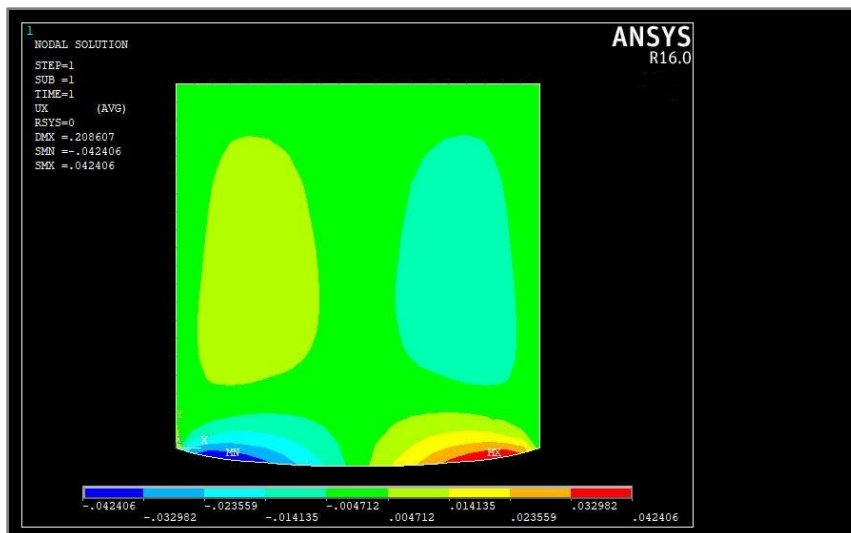


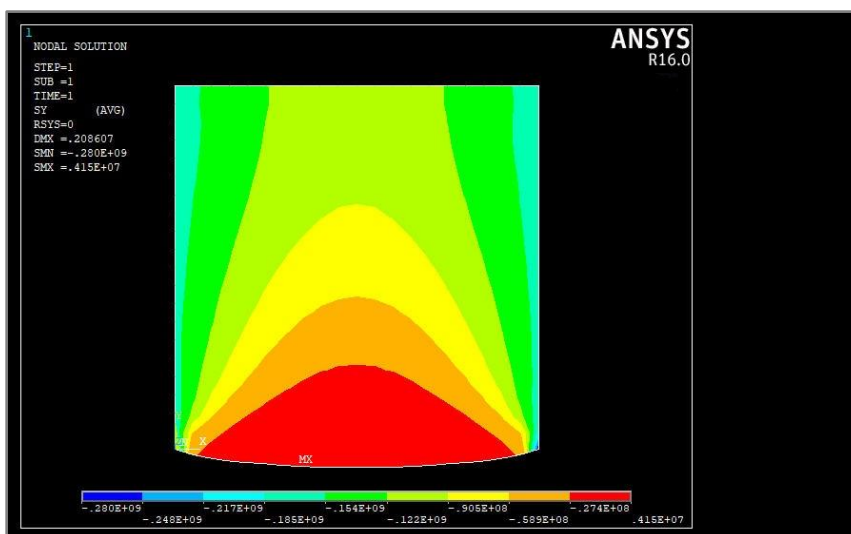
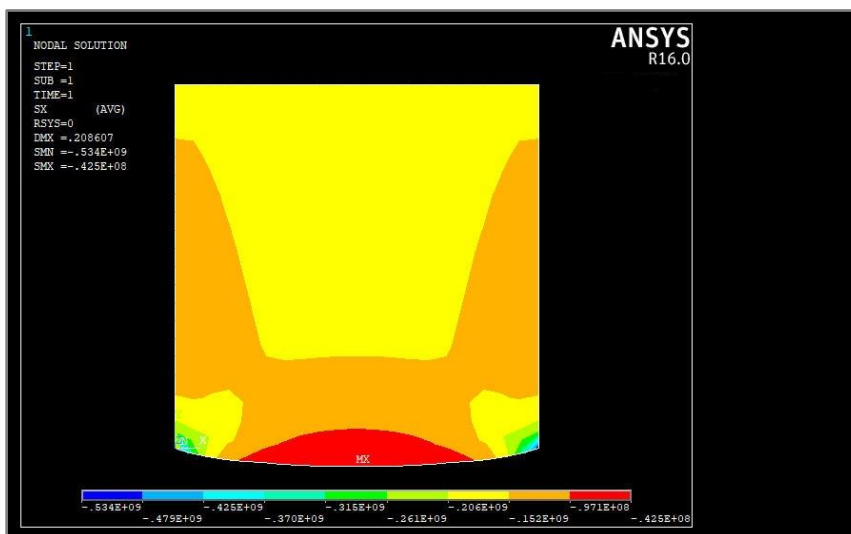
4.2) ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΠΛΑΚΑ

Θεωρούμε επίπεδο φορέα διαστάσεων 400x400x10 (mm) και αποτελούμενο από St AISI C1020. Ο φορέας βρίσκεται σε αρχική θερμοκρασία $T_0=10^{\circ}\text{C}$. Με τη χρήση του λογισμικού ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων Ansys θα γίνει θερμοστατική και ελαστοστατική ανάλυση σε τρεις περιπτώσεις θερμομηχανικών φορτίσεων στον συγκεκριμένο φορέα. Για την μοντελοποίηση θα χρησιμοποιηθούν επίπεδα, γραμμικά στοιχεία 4 κόμβων, τετραγωνικού σχήματος.

➤ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΑΠΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΥ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΚΑΙ ΜΕ ΠΑΚΤΩΣΕΙΣ ΣΤΑ 3 ΑΚΡΑ

Στον φορέα εφαρμόζεται ομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή $\Delta T=50^{\circ}\text{C}$ και ο φορέας φέρει πακτώσεις στις 3 πλευρές, ενώ η τέταρτη πλευρά είναι ελεύθερη τάσεων. Για την επίλυση θα χρησιμοποιήσουμε πλέγμα 20x20 στοιχείων. Λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για τα πεδία μετατοπίσεων και θερμικών τάσεων.

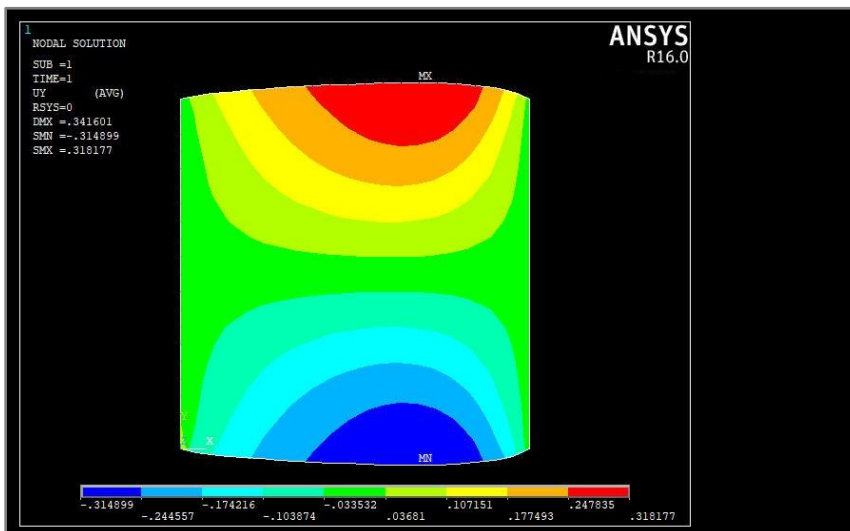
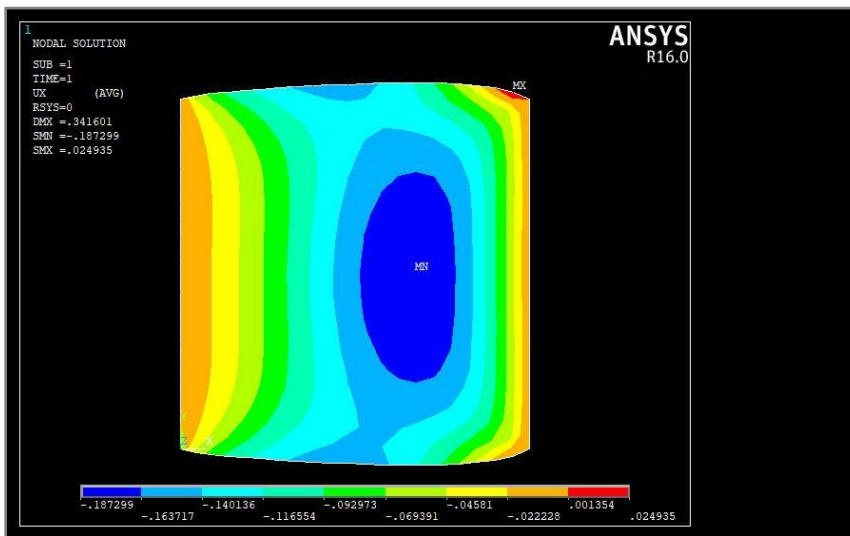
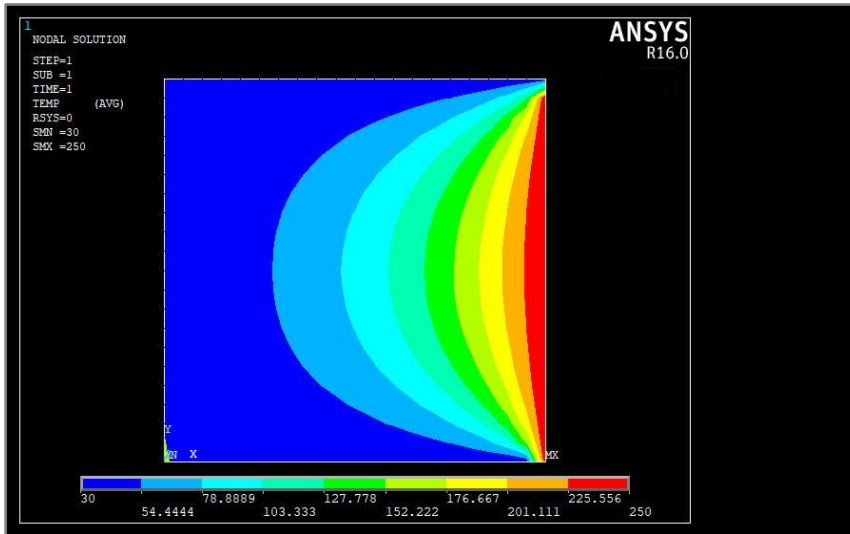


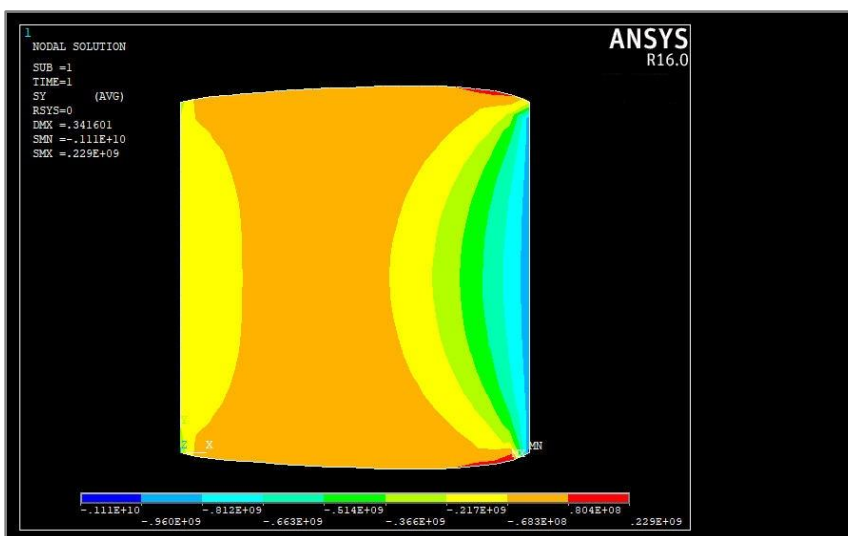
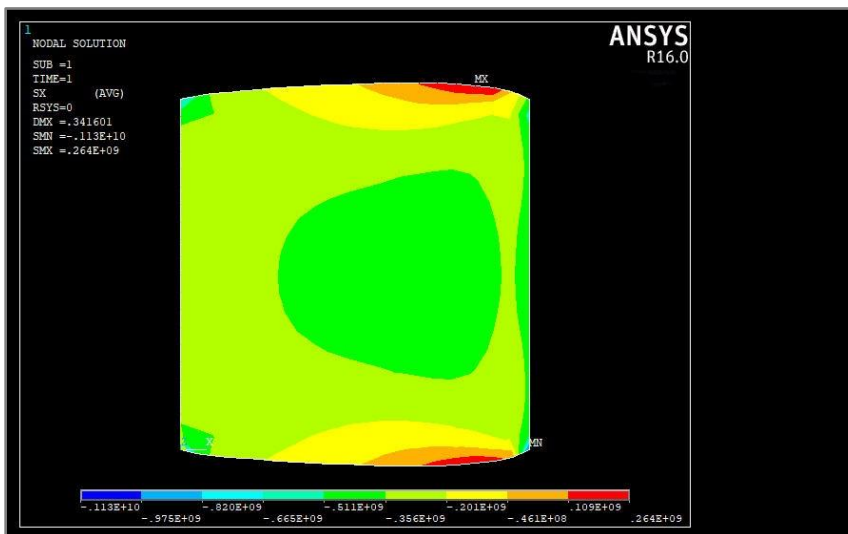


➤ **ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΑΠΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ ΣΤΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΚΑΙ ΜΕ ΠΑΚΤΩΣΕΙΣ ΣΤΑ 2 ΑΚΡΑ**

Θεωρούμε ότι η πλάκα είναι πακτωμένη στα δύο άκρα ($x=0$ mm και $x=400$ mm) και ελεύθερη τάσεων στις άλλες δύο πλευρές. Στην δεξιά πλευρά εφαρμόζεται θερμοκρασία ίση με 250°C , ενώ στις άλλες 3 πλευρές θερμοκρασία 30°C .

Για την επίλυση θα χρησιμοποιήσουμε πλέγμα 20×20 στοιχείων. Λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για τα πεδία θερμοκρασίας, μετατοπίσεων και θερμικών τάσεων.

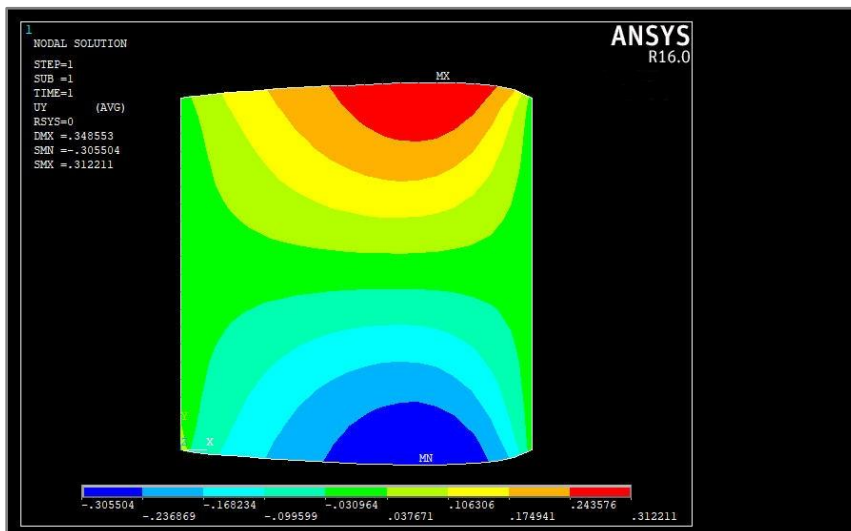
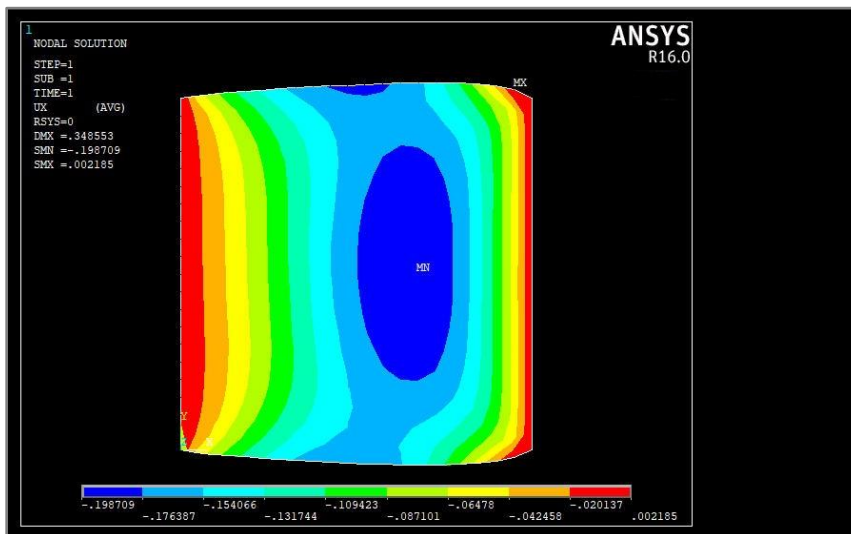
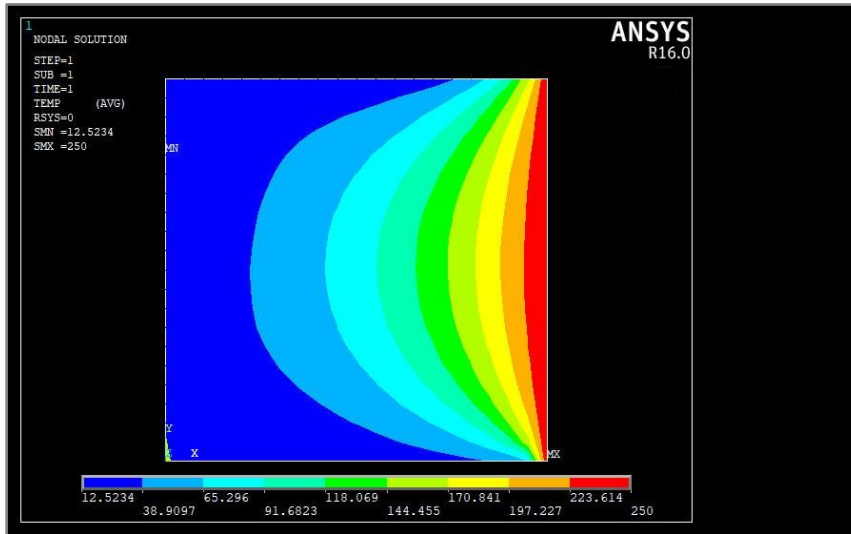


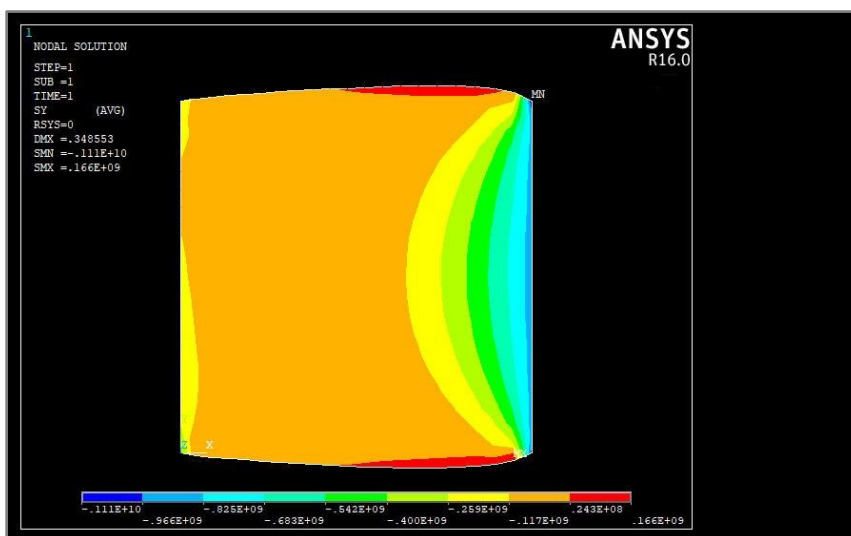
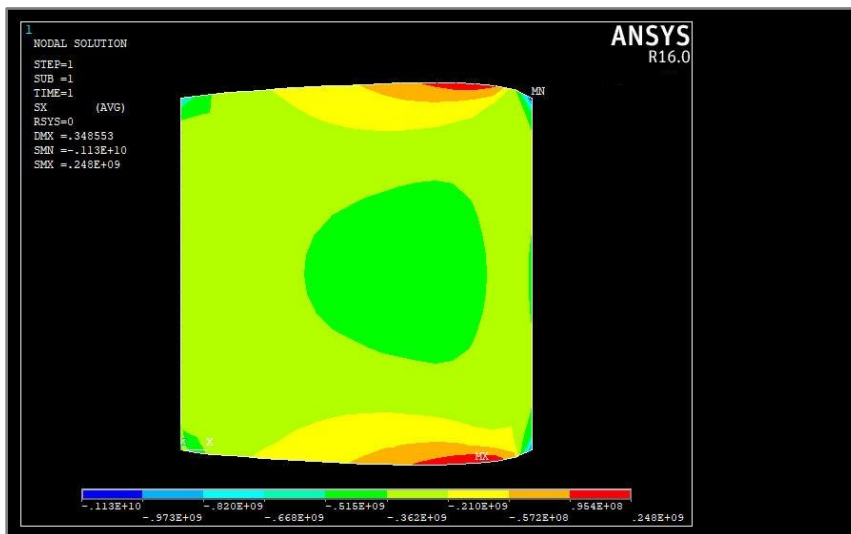


➤ **ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΑΠΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ ΣΤΑ ΔΥΟ ΠΑΚΤΩΜΕΝΑ ΑΚΡΑ**

Σε αυτό το παράδειγμα η πλάκα είναι πακτωμένη στα άκρα ($x=0$ mm και $x=400$ mm) και στις συγκεκριμένες πλευρές εφαρμόζονται θερμοκρασίες 30°C στο αριστερό άκρο και 250°C στο δεξί άκρο. Στις άλλες δύο πλευρές έχουμε μεταφορά θερμότητας με συναγωγή. Θεωρούμε θερμοκρασία περιβάλλοντος $T_{\text{ambient}}=30^{\circ}\text{C}$ και συντελεστή $h=10$ W/m².

Η επίλυση του θερμοστατικού θερμικού προβλήματος κι εν συνεχεία του στατικού θερμοελαστικού μας δίνει τα ακόλουθα αποτελέσματα για τη θερμοκρασιακή κατανομή και τα μηχανικά μεγέθη στην συγκεκριμένη επιφάνεια.



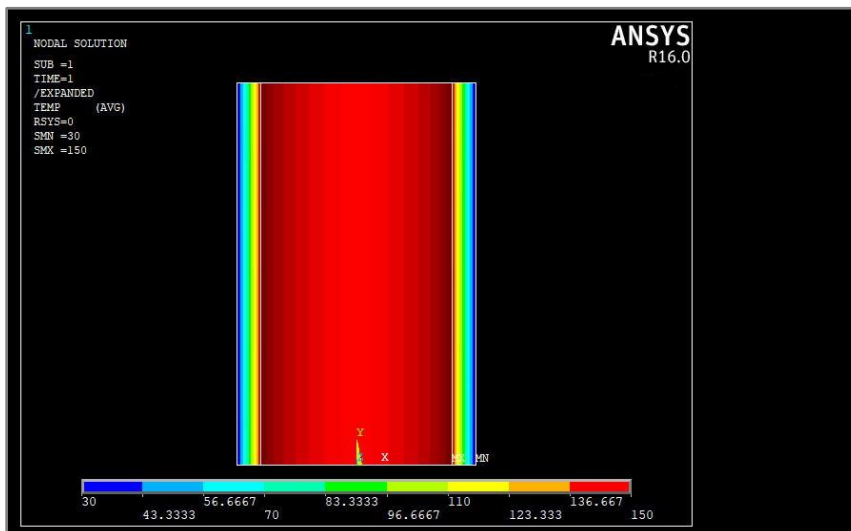
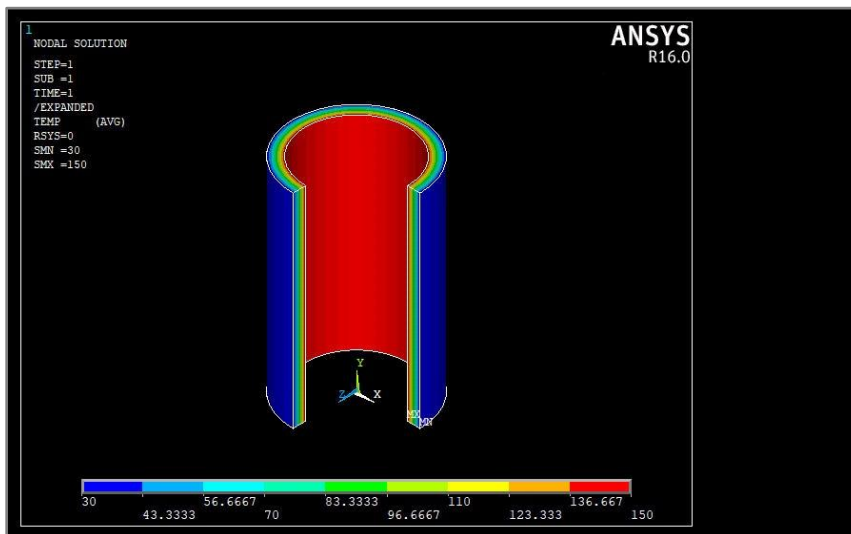
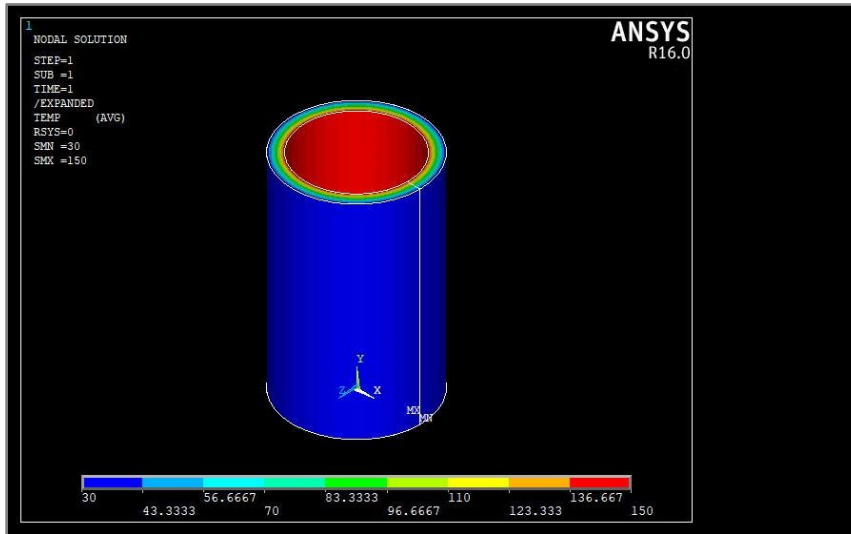


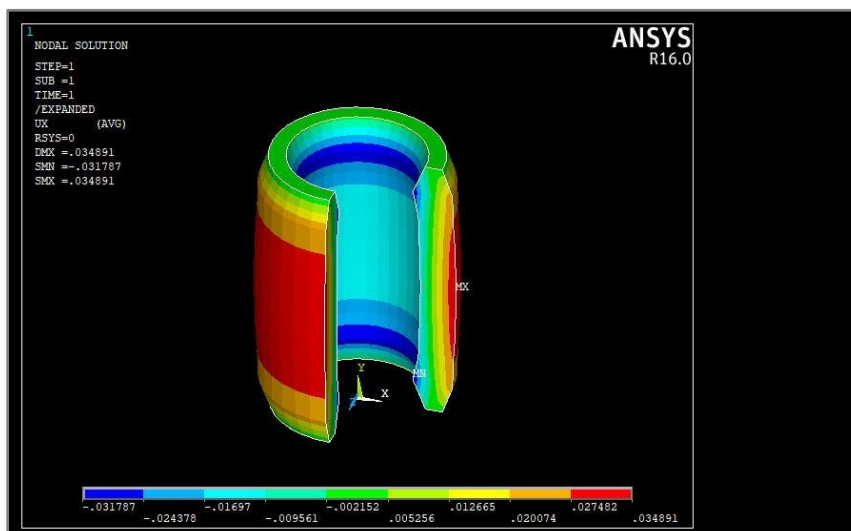
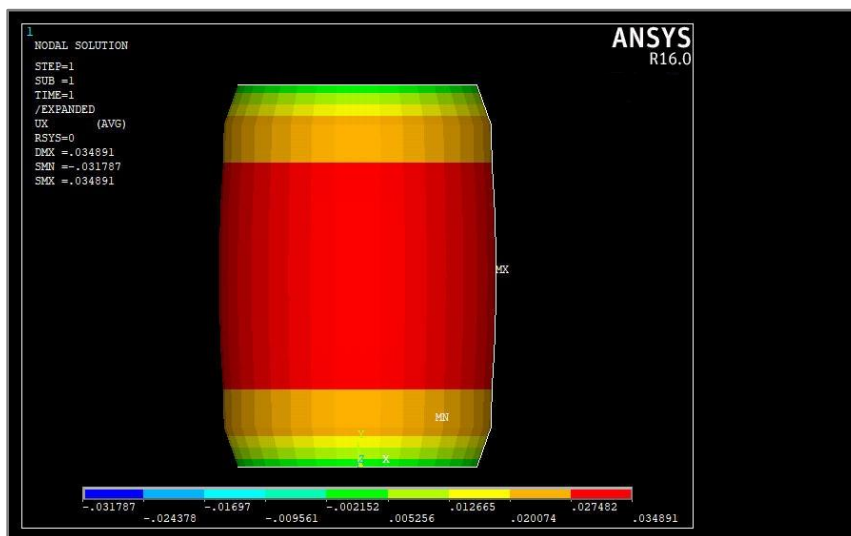
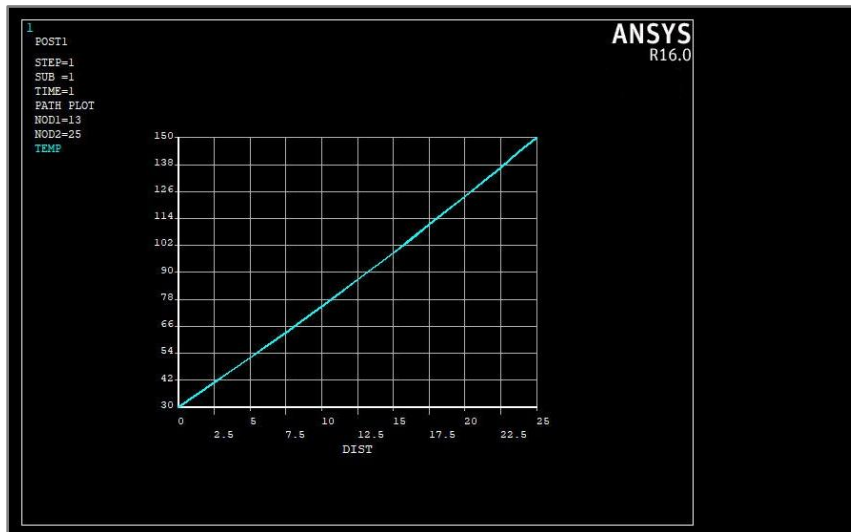
4.3) ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΦΟΡΕΑ

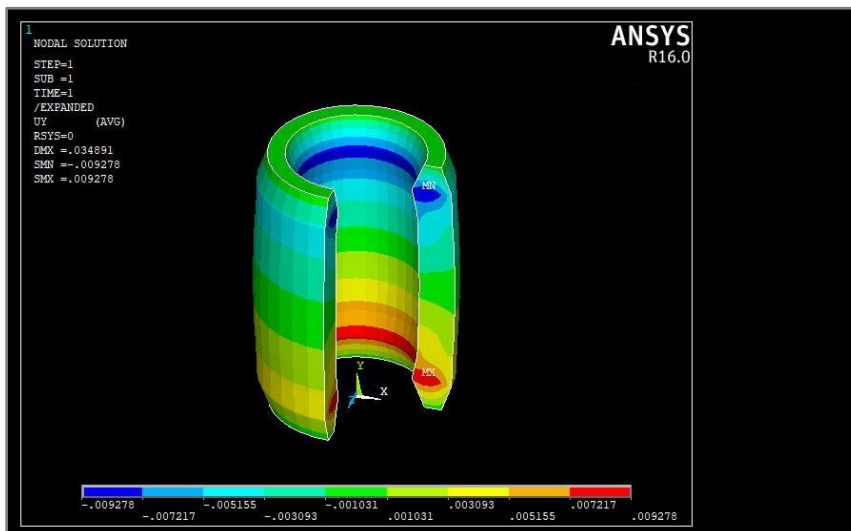
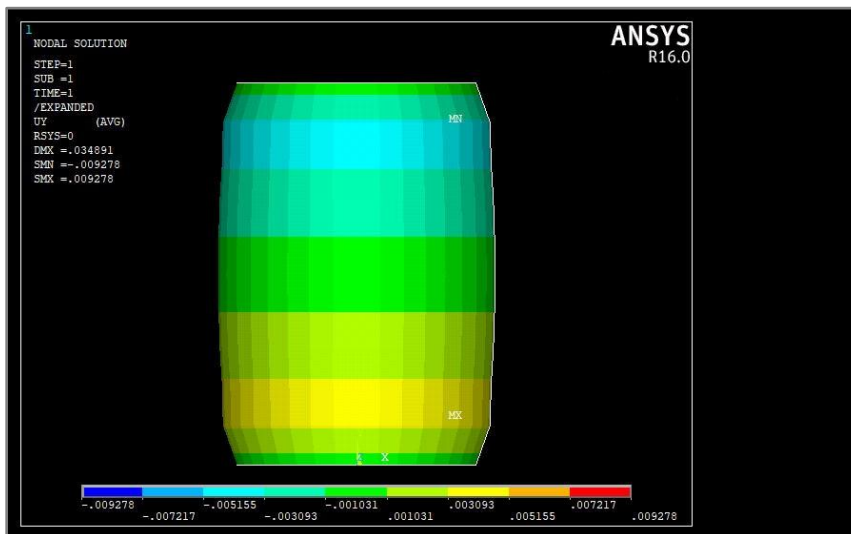
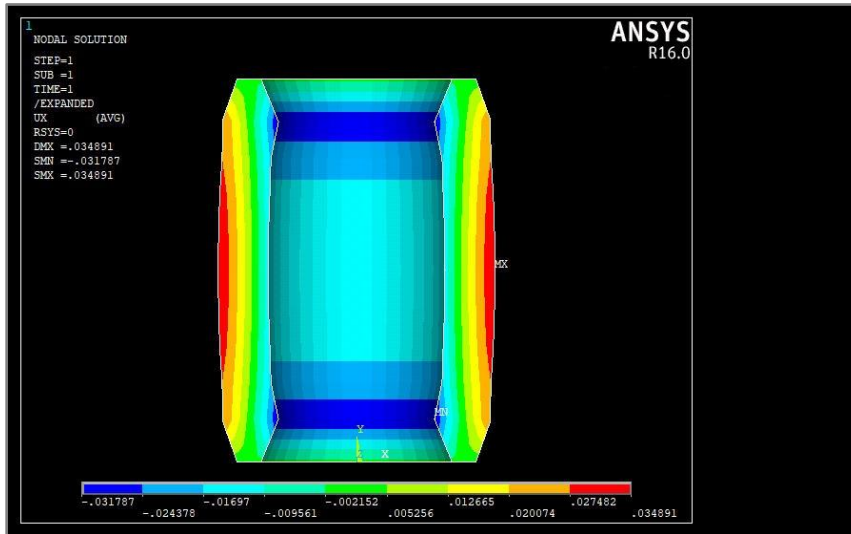
Θεωρούμε κυλινδρικό αγωγό κυκλικής διατομής που αποτελείται από καθαρό χαλκό (Cu). Ο φορέας έχει πάχος 25 mm, ακτίνα 100 mm και μήκος 400 mm. Στην εσωτερική πλευρά φέρει ομοιόμορφο θερμοκρασιακό πεδίο 150°C και στην εξωτερική πλευρά ομοιόμορφο θερμοκρασιακό πεδίο 30°C. Η θερμοκρασία αναφοράς είναι 10°C και ο αγωγός είναι πακτωμένος στα δύο άκρα.

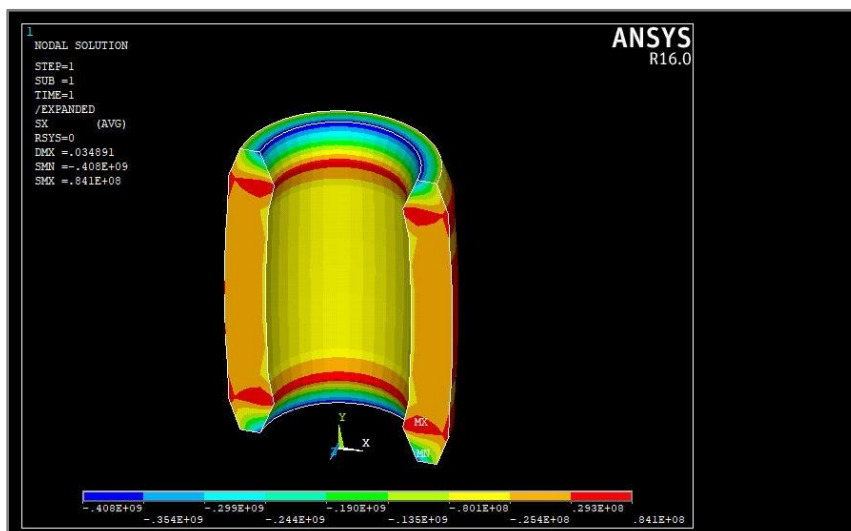
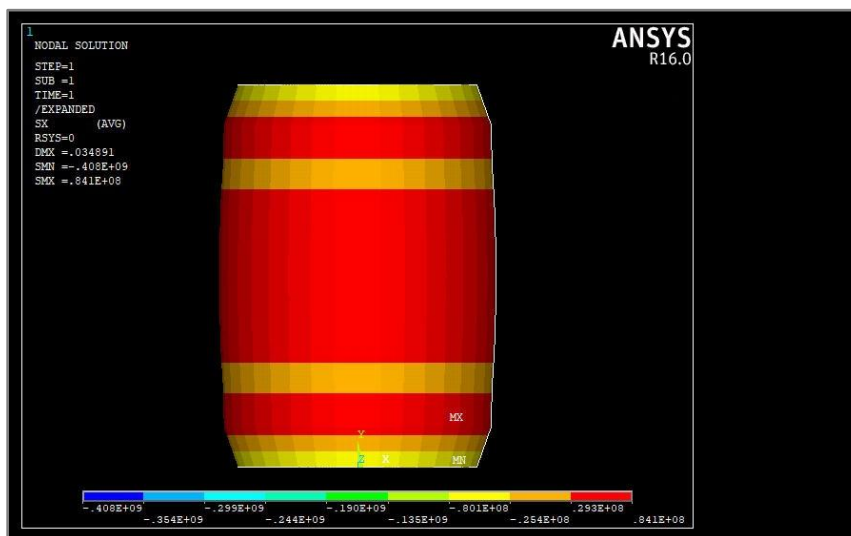
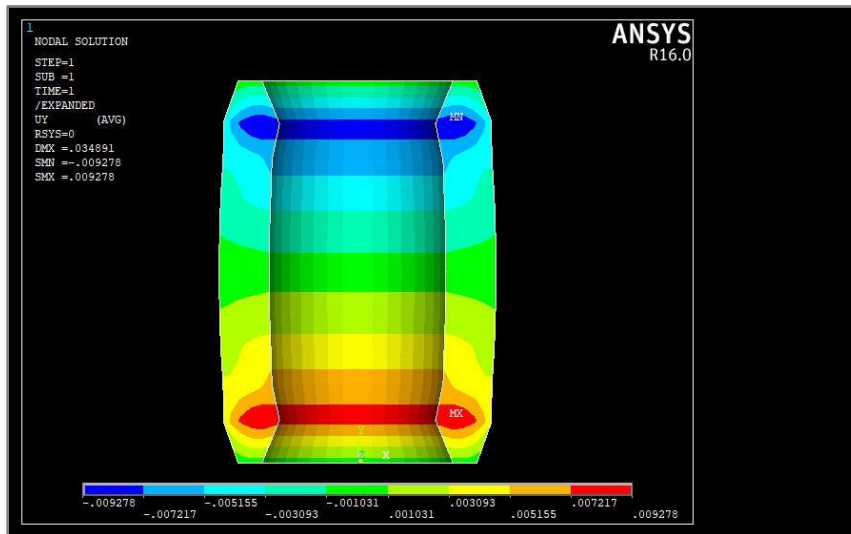
Το πρόβλημα παρουσιάζει συμμετρία ως προς τον άξονα του κυλίνδρου (αξονοσυμμετρικό πρόβλημα), ιδιότητα που θα εκμεταλλευτούμε για την επίλυση. Για την μοντελοποίηση θα χρησιμοποιήσουμε πλέγμα 20×50 στοιχείων. Τα στοιχεία είναι ορθογωνικά, γραμμικά, τετράκομβα και αξονοσυμμετρικά.

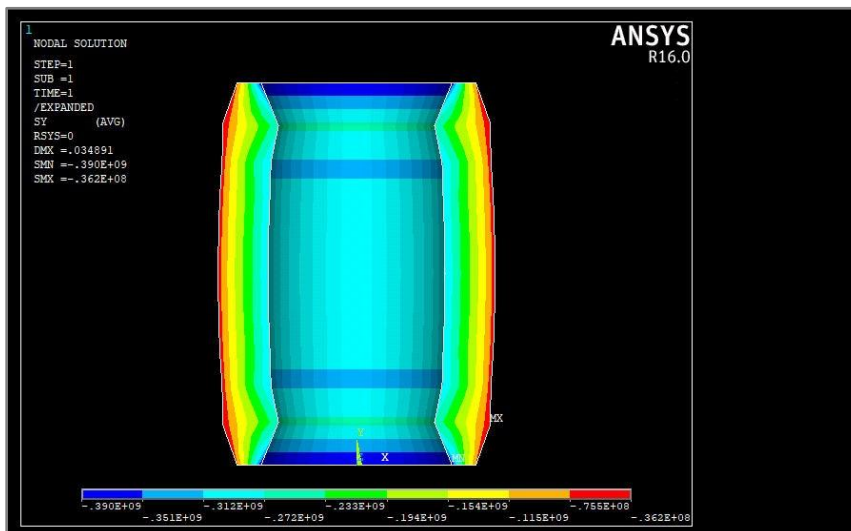
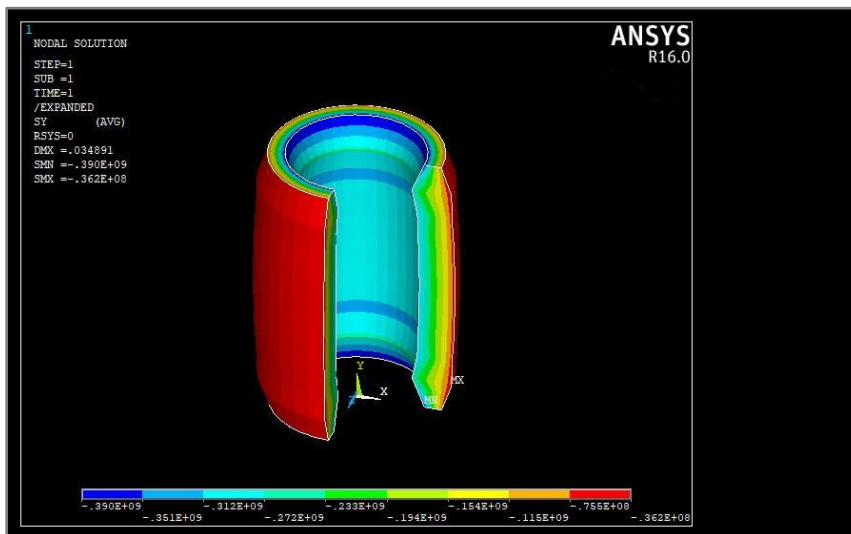
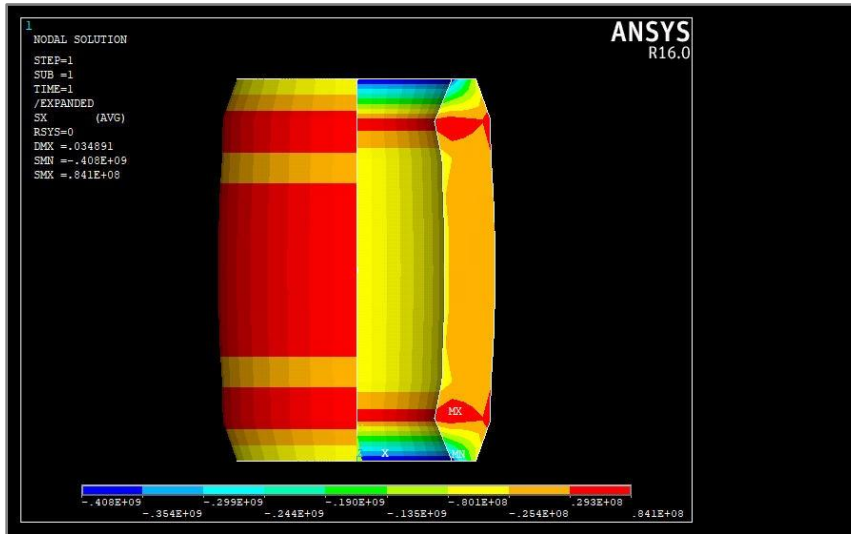
Λύνοντας το επίπεδο αξονοσυμμετρικό θερμοστατικό πρόβλημα και στην συνέχεια το στατικά θερμοελαστικό, λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα.







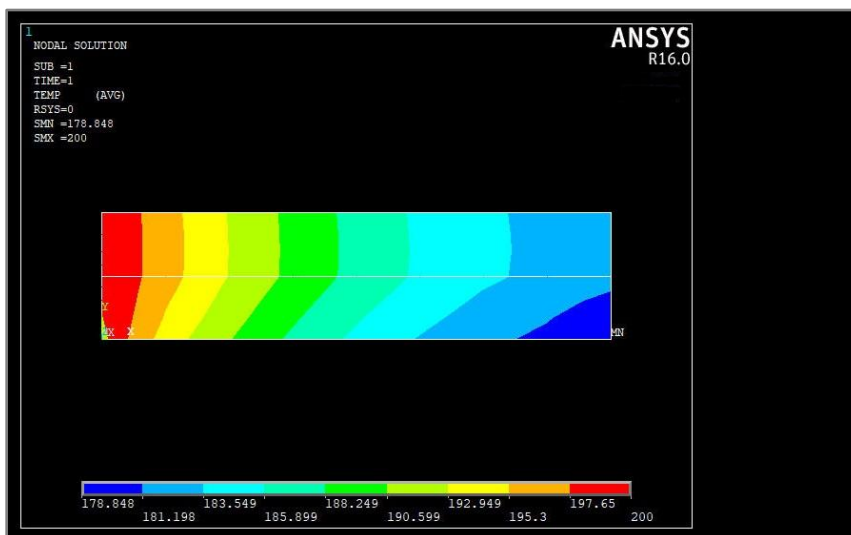


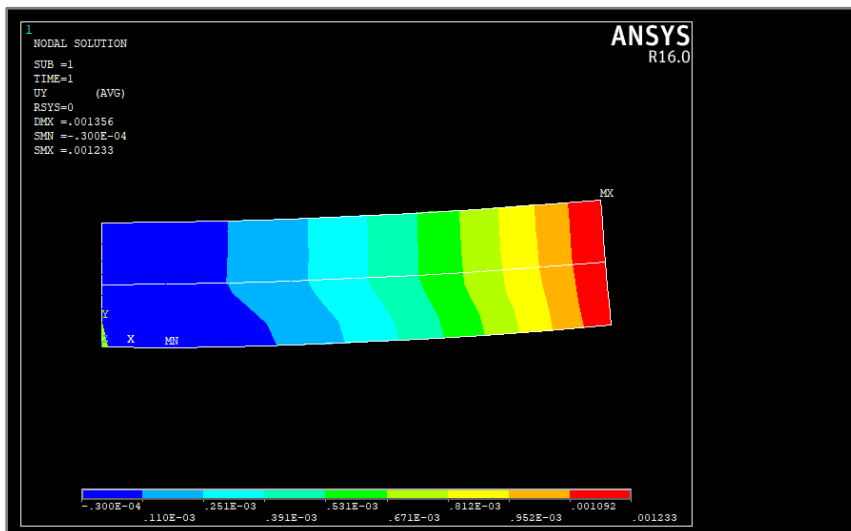
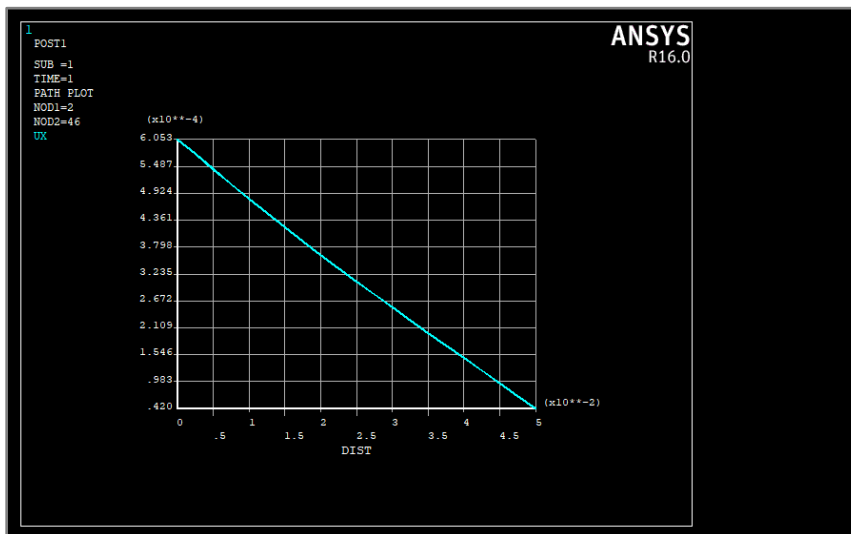
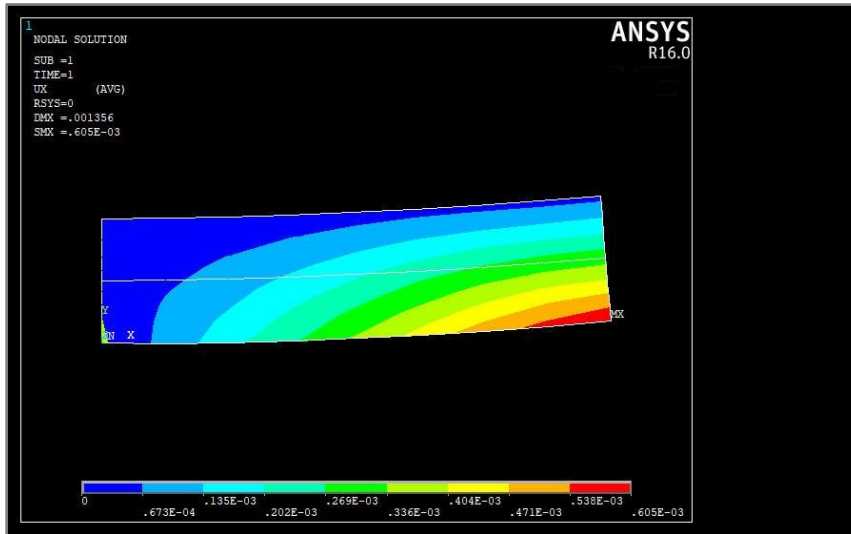


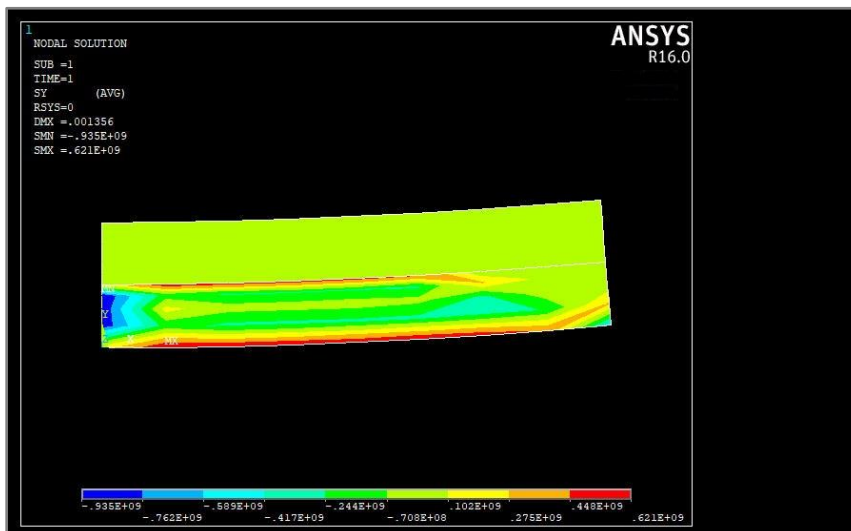
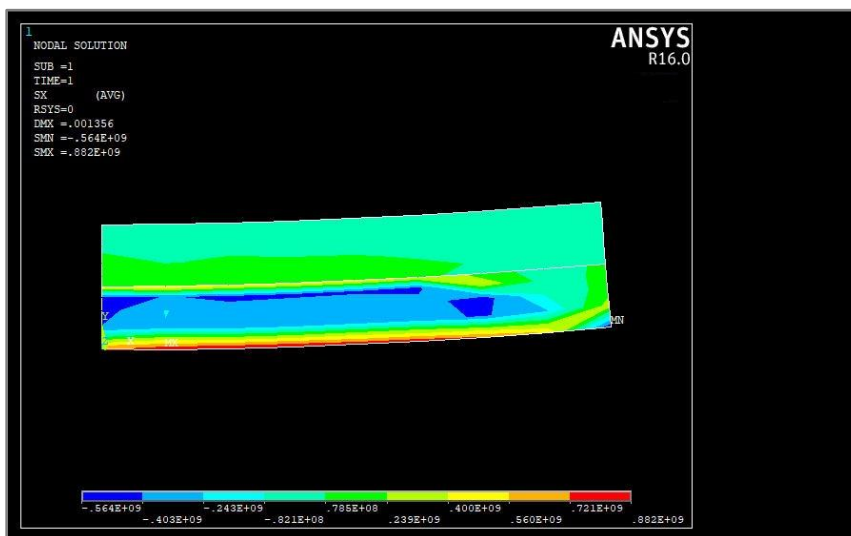
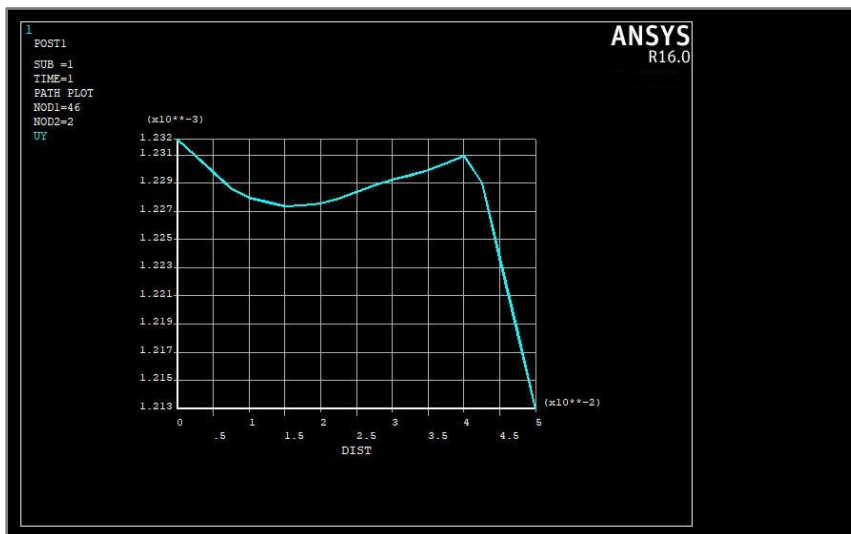
4.4) ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΦΟΡΕΑ ΠΟΥ ΔΟΜΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΔΥΟ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

Θεωρούμε επίπεδο φορέα αποτελούμενο από δύο υλικά. Ο φορέας έχει μήκος 200 mm, πλάτος 50 mm και δομείται από Al6061 και AISI304 σε δύο στρώματα των 25 mm. Το αριστερό άκρο είναι πακτωμένο και φέρει θερμοκρασία 200°C. Οι υπόλοιπες πλευρές είναι ελεύθερες τάσεων και περιβάλλονται από αέρα περιβάλλοντος θερμοκρασίας $T_{\text{ambient}}=30^{\circ}\text{C}$, η οποία προκαλεί μετάδοση θερμότητας με συναγωγή ($h=10\text{ W/m}^2$).

Το άνωθι πρόβλημα θα μοντελοποιηθεί με επίπεδα, γραμμικά τετράκομβα στοιχεία και με πλέγμα 8×4 . Λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:



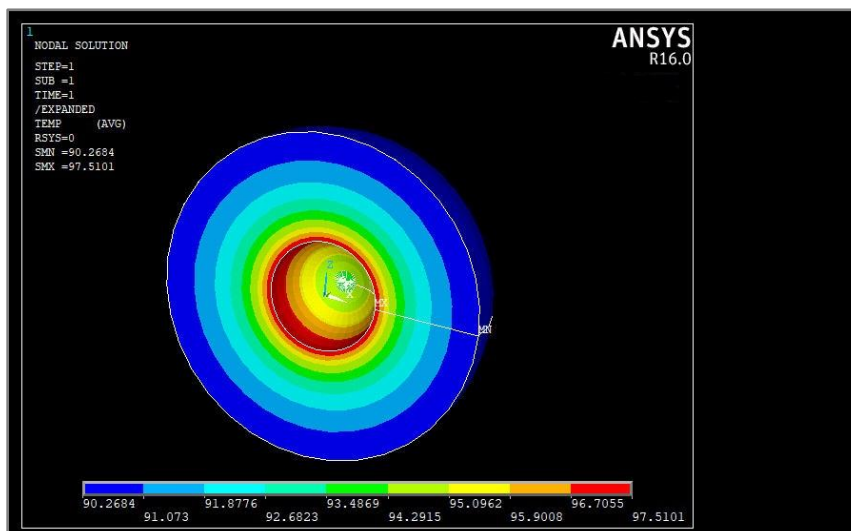
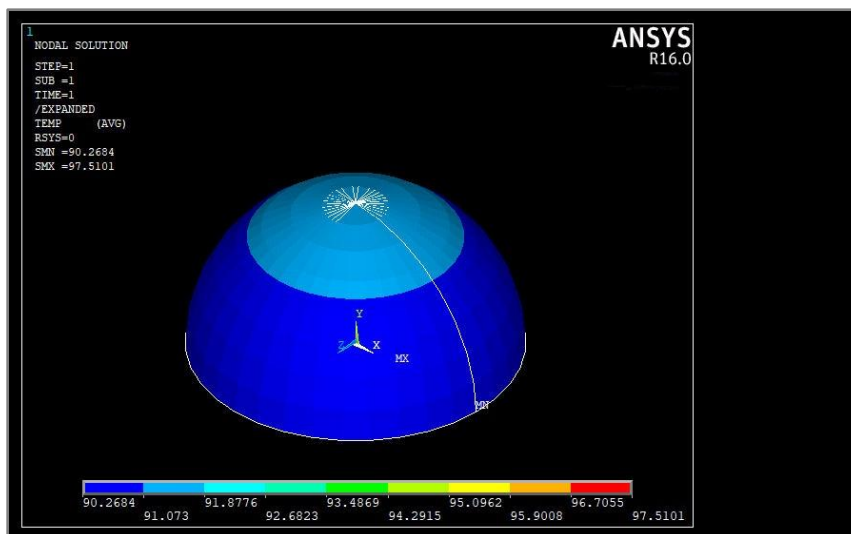


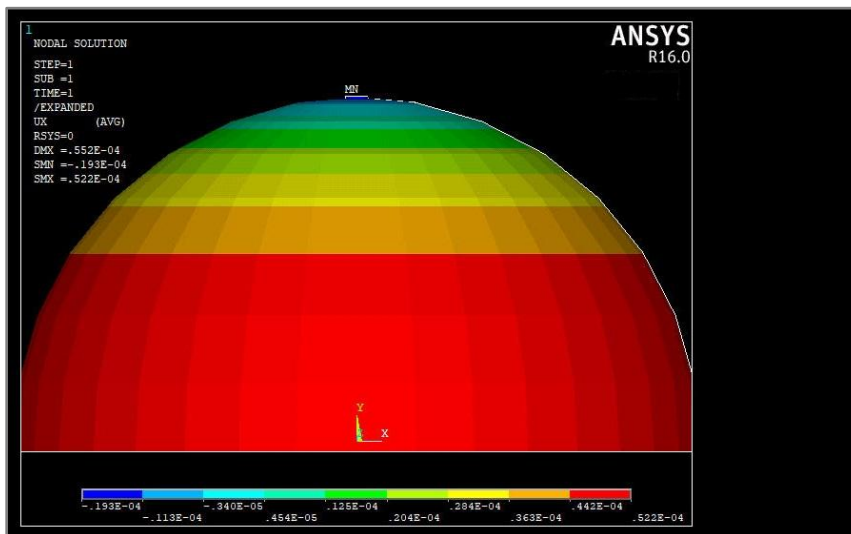
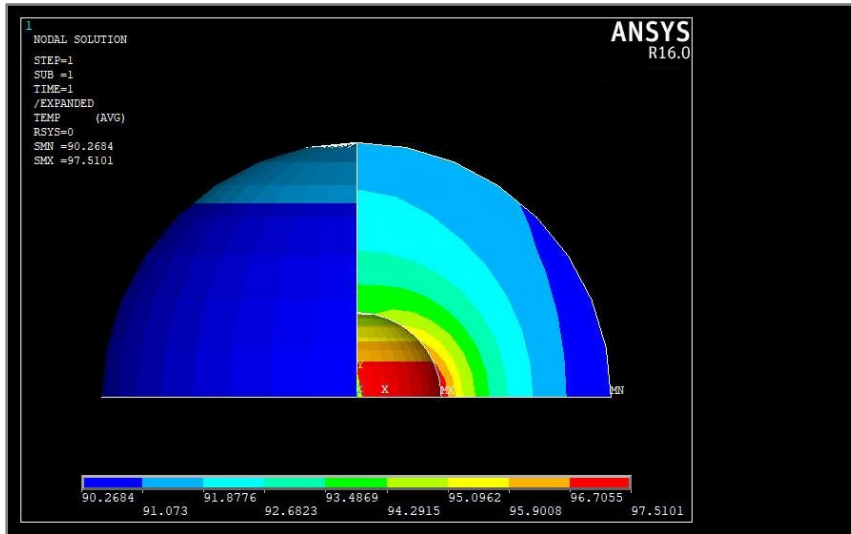


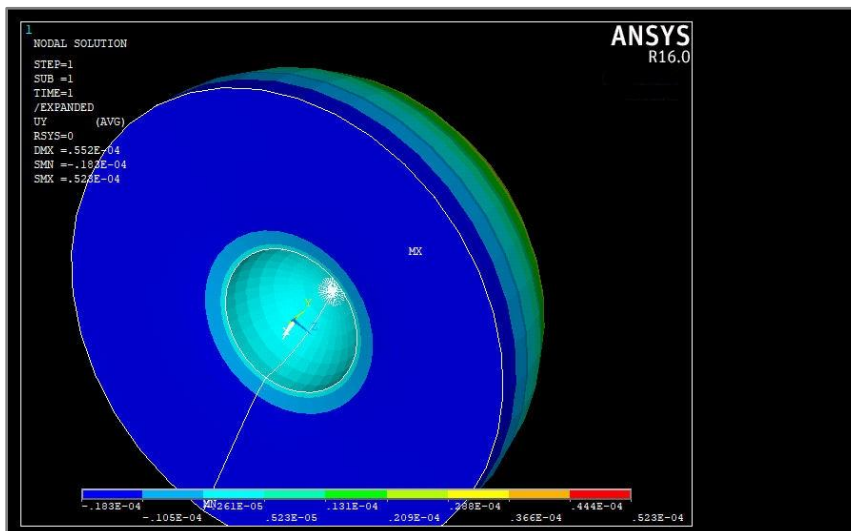
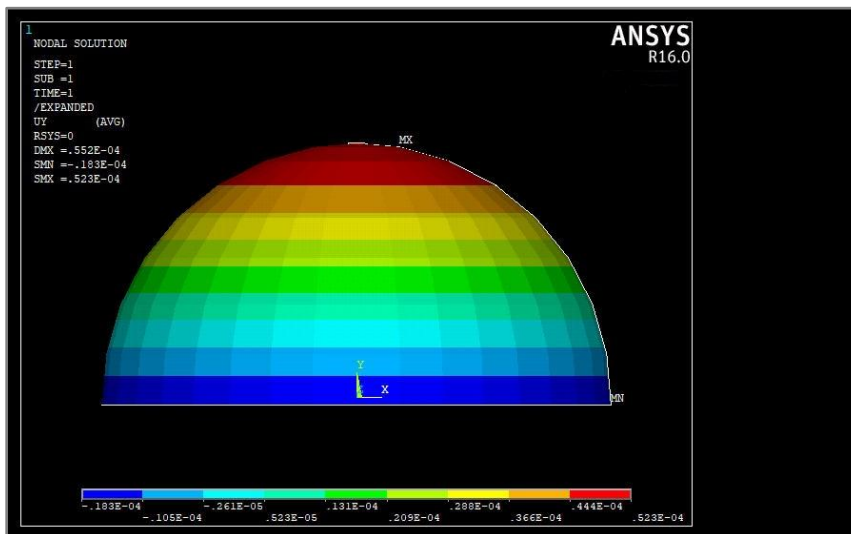
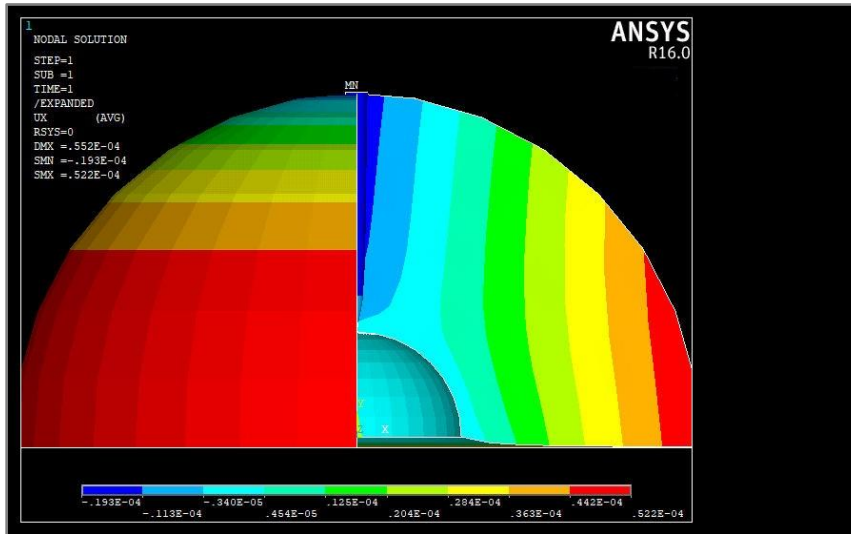
4.5) ΘΕΡΜΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ, ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΦΟΡΕΑ

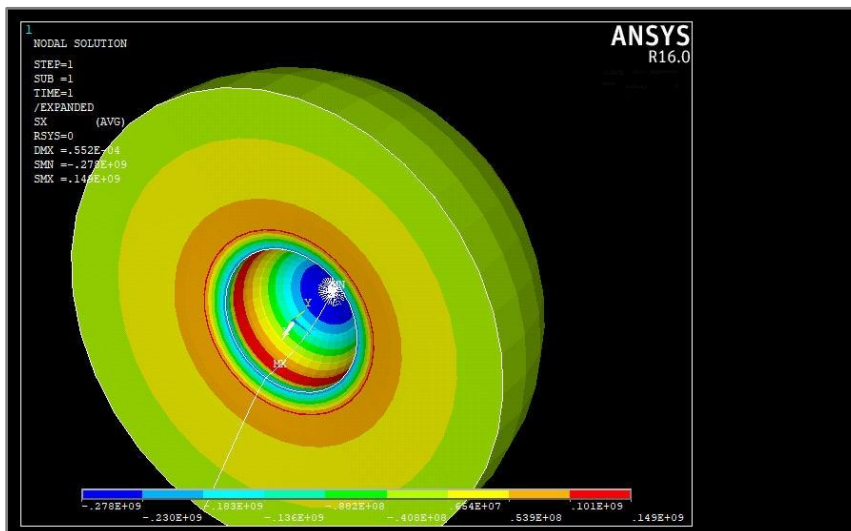
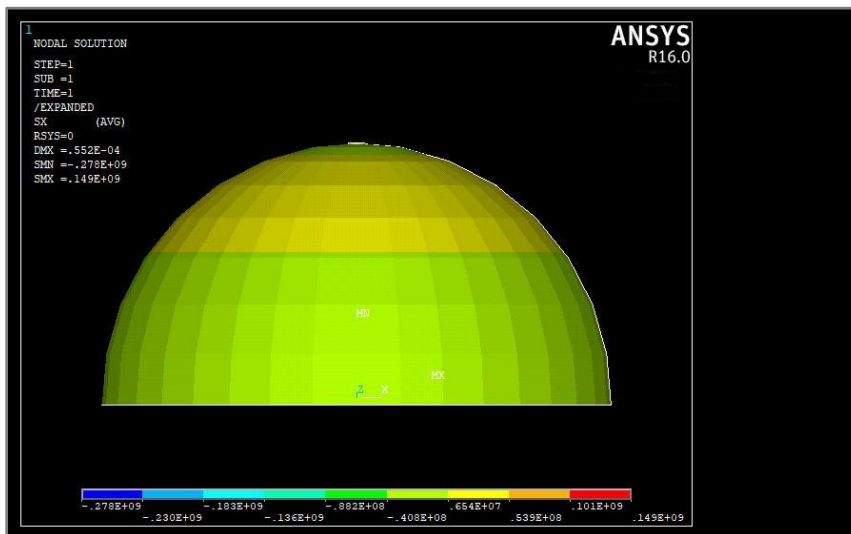
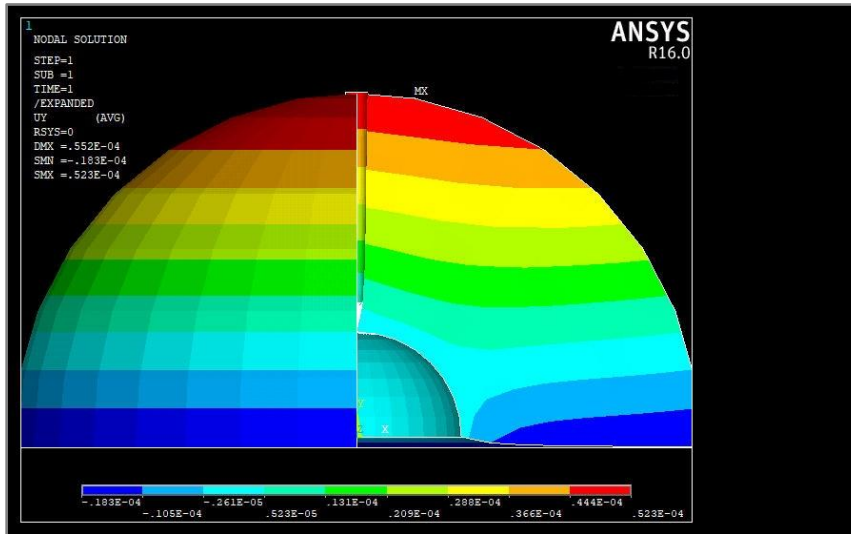
Θεωρούμε σφαιρικό κέλυφος αποτελούμενο από Ni pure (καθαρό νικέλιο). Το κέλυφος έχει εσωτερική διάμετρο 20 mm και εξωτερική 60 mm. Η εσωτερική επιφάνεια είναι πακτωμένη και έχει ομοιόμορφη θερμική ροή με $q=6.000 \text{ W/m}^2$. Η εξωτερική επιφάνεια είναι ελεύθερη τάσεων κι αλληλεπιδρά με αέρα περιβάλλοντος $T_{\text{ambient}}=10^\circ\text{C}$ που οδηγεί σε μετάδοση θερμότητας με συναγωγή ($h=80 \text{ W/m}^2$).

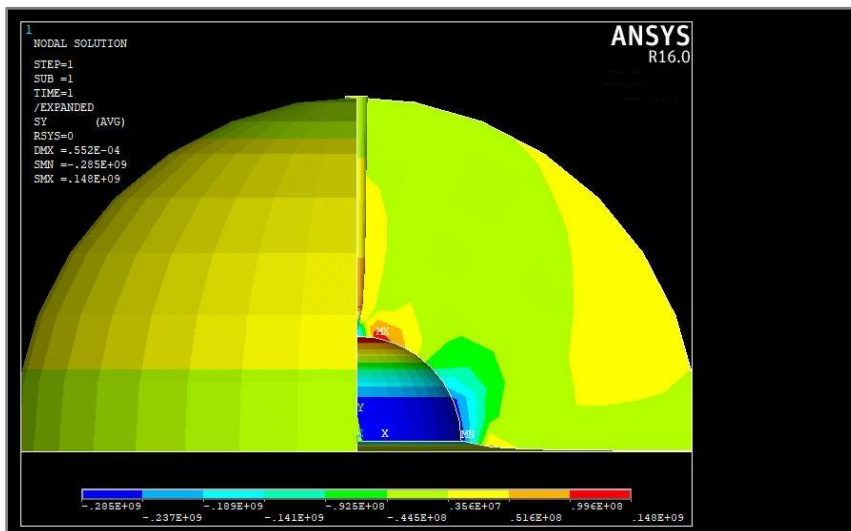
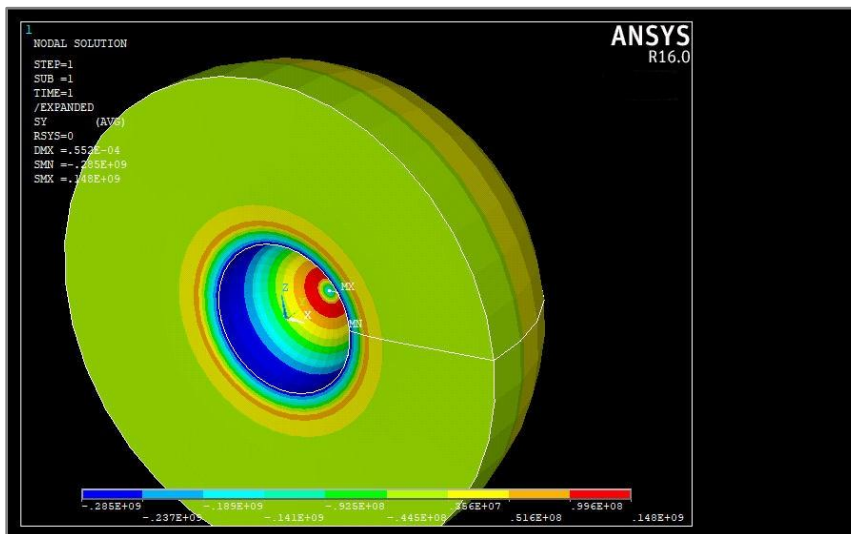
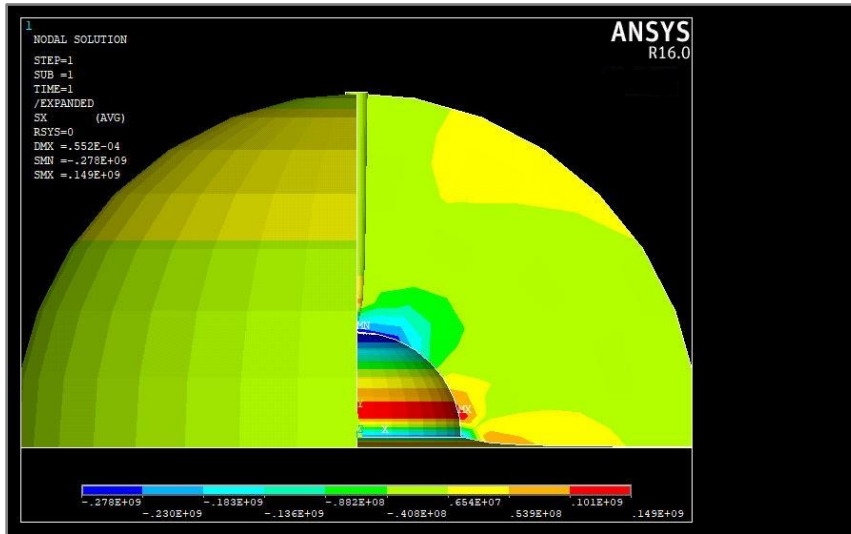
Το πρόβλημα είναι αξονοσυμμετρικό και θα επιλυθεί στα πλαίσια της Θερμοστατικής και στατικής Θερμοελαστικότητας. Θα αξιοποιηθεί η συμμετρία και θα επιλυθεί με αξονοσυμμετρικά, επίπεδα, δκομβά στοιχεία και με πλέγμα 8×8 . Λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:











ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο: ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Στο 4^ο κεφάλαιο έγινε η μελέτη 5 θερμομηχανικών θεμάτων στο πλαίσιο της Γενικευμένης Γραμμικής Θερμοελαστικότητας και με τη χρήση των υπολογιστικών μεθόδων των Πεπερασμένων Διαφορών και των Πεπερασμένων Στοιχείων. Αρχικά, σε αυτό το κεφάλαιο διατυπώνονται παρατηρήσεις και συμπεράσματα πάνω στα αποτελέσματα που εξήχθησαν. Εν συνεχεία, δίδονται προτάσεις για περαιτέρω μελέτη και εκπόνηση μελλοντικών εργασιών.

5.1) ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Για τη θερμομηχανική συμπεριφορά των υλικών μπορούν να διατυπωθούν οι ακόλουθες παρατηρήσεις και συμπεράσματα, ανά εφαρμογή:

➤ **Ελλειπτική, παραβολική και υπερβολική περιγραφή του προβλήματος Μετάδοσης Θερμότητας**

Για την επίλυση των θερμικών προβλημάτων χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών. Η χρήση της συγκεκριμένης μεθόδου συνήθίζεται για την επίλυση προβλημάτων Θερμικής Αγωγιμότητας και δίδει πολύ καλά αποτελέσματα σε φορείς που δεν έχουν σύνθετη γεωμετρική δομή ή μεγάλη γεωμετρική πολυπλοκότητα στις συνοριακές επιφάνειες.

Σε όλα τα προβλήματα εφαρμόστηκαν συνοριακές συνθήκες Dirichlet (δόθηκε το θερμοκρασιακό πεδίο στο σύνορο). Η μέθοδος εμφάνισε συνέπεια, ευστάθεια και σύγκλιση τόσο στο θερμοστατικό πρόβλημα, όσο και στα δυναμικά προβλήματα και με τη χρήση όλων των σχημάτων διαφορών.

Για την μελέτη του υπερβολικού θερμικού προβλήματος (βασισμένο στο μοντέλο Green-Naghdi) αξίζει να αναφέρουμε ότι τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν τον κυματικό χαρακτήρα του μοντέλου, καθώς στη μία διάσταση οι θερμοκρασιακές μεταβολές εμφανίζουν συμπεριφορά παλλόμενης χορδής και στις δύο διαστάσεις παλλόμενης μεμβράνης. Επίσης, για την επίλυση του προβλήματος είναι απαραίτητη η ύπαρξη μιας επιπλέον αρχικής συνθήκης σε σχέση με την παραβολική περιγραφή του φαινομένου.

➤ **Ανάπτυξη θερμικών τάσεων σε πλάκα**

Η επίλυση έγινε με τη χρήση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων τόσο για το θερμικό, όσο και για το ελαστικό πρόβλημα. Και στις τρεις περιπτώσεις θερμικών φορτίσεων και κινηματικών δεσμεύσεων του φορέα, οι τάσεις που εμφανίστηκαν ήταν πολύ χαμηλότερες του ορίου διαρροής. Οι υψηλότερες θερμικές τάσεις εμφανίστηκαν στην δεύτερη περίπτωση, όπου η πλάκα έφερε πακτώσεις και σταθερές θερμοκρασίες στα δύο άκρα και αλληλεπιδρούσε θερμικά με το περιβάλλον με συναγωγή στις άλλες δύο πλευρές. Και σε αυτήν την περίπτωση όμως ήταν μία τάξη μεγέθους χαμηλότερη από το όριο διαρροής. Το μέγεθος ήταν αντίστοιχο και στις δύο ορθές ορθές τάσεις (σ_x , σ_y), ενώ και οι δύο ήταν θλιπτικές. Το τασικό πεδίο στην τρίτη περίπτωση ήταν αντίστοιχης κατανομής και μεγέθους.

➤ **Ανάπτυξη θερμικών τάσεων σε κυλινδρικό φορέα**

Κυλινδρικοί αγωγοί αντίστοιχων γεωμετρικών χαρακτηριστικών και αποτελούμενοι από χαλκό χρησιμοποιούνται πολύ συχνά σε θερμικές εγκαταστάσεις. Υπό τις συγκεκριμένες θερμικές φορτίσεις και δεσμεύσεις κίνησης, ο φορέας παρουσιάζει τις μέγιστες τάσεις σ_x , σ_y στο εσωτερικό χείλος των πακτωμένων επιφανειών. Είναι και οι δύο αντίστοιχου μεγέθους, θλιπτικές και πολύ χαμηλότερες του ορίου διαρροής.

➤ **Θερμοελαστική συμπεριφορά επίπεδου φορέα που δομείται από δύο διαφορετικά υλικά**

Σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές συναντούμε φορείς που αποτελούνται κατά στρώσεις ή με άλλη δομή από διαφορετικά υλικά. Αυτό γίνεται για λόγους καλύτερης είτε θερμικής είτε μηχανικής συμπεριφοράς του φορέα. Ο επίπεδος φορέας που μελετάμε σε αυτήν την εργασία δομείται από αλουμίνιο στην άνω επιφάνεια κι από ανοξείδωτο χάλυβα στην κάτω. Οι μέγιστες θερμικές τάσεις εντοπίζονται στην κάτω επιφάνεια, στην πλευρά που είναι δεσμευμένες οι μετατοπίσεις και είναι θλιπτικές. Τόσο οι σ_x , όσο και οι σ_y είναι αντίστοιχου μεγέθους και μακριά από το όριο διαρροής.

➤ **Θερμομηχανική συμπεριφορά γραμμικά ελαστικού, σφαιρικού φορέα**

Στο σφαιρικό κέλυφος οι μέγιστες θερμικές τάσεις σ_x παρατηρούνται στην εσωτερική επιφάνεια και είναι εφελκυστικές. Οι μέγιστες σ_y είναι θλιπτικές κι εμφανίζονται σε πολύ κοντινές θέσεις με τις μέγιστες σ_x . Και σε αυτό το παράδειγμα οι μέγιστες τάσεις είναι πολύ μικρότερες του ορίου διαρροής.

5.2) ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Για την περαιτέρω μελέτη πάνω στην θερμομηχανική συμπεριφορά των υλικών δίδονται οι ακόλουθες προτάσεις:

- Να επιλυθούν θέματα γραμμικής Θερμοελαστικότητας με σύνθετη θερμομηχανική εξωτερική φόρτιση. Προτείνεται η παρουσία δυναμικής μηχανικής φόρτισης ταυτόχρονα με τη θερμική.
- Να μελετηθούν φορείς οι οποίοι εμφανίζουν μεταβλητές θερμομηχανικές ιδιότητες (ελαστικά ετερογενείς). Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα FGM υλικά (Functionally Graded Materials).
- Να μοντελοποιηθούν προβλήματα στα οποία το μέγεθος των μηχανικών ή θερμικών φορτίσεων απαιτεί τη χρήση μη γραμμικής Θερμοελαστικότητας ή ανελαστικών καταστατικών εξισώσεων.
- Να μελετηθούν υπολογιστικά, να επιβεβαιωθούν πειραματικά και να βρεθούν οι καινούριες σταθερές που προκύπτουν στα μοντέλα Lord-Shulman, Green-Lindsay και Green-Naghdi.
- Να επιλυθεί με το συνδυασμό των υπολογιστικών μεθόδων των Πεπερασμένων Στοιχείων και των Πεπερασμένων Διαφορών το δυναμικό συζευγμένο πρόβλημα Θερμοελαστικότητας σε δύο και τρεις διαστάσεις.
- Να μελετηθούν υπολογιστικά θέματα Θερμοελαστικότητας με τη χρήση της μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων και της μεθόδου των Χαρακτηριστικών.

- Να μελετηθούν τα προβλήματα με τον κυλινδρικό αγωγό και το σφαιρικό κέλυφος με τους δύο φορείς να δομούνται από δύο η περισσότερα υλικά. Να γίνει η επιλογή υλικών, ώστε το ένα τουλάχιστον από αυτά να λειτουργεί ως μονωτικό.
- Στα προβλήματα που επιλύθηκαν με την μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών να χρησιμοποιηθούν διαφορετικά σχήματα διαφορών και να γίνει σύγκριση με τη χρήση των σχημάτων πεπερασμένων διαφορών της συγκεκριμένης εργασίας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ι) ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Ι.1) ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Διαφορική Εξίσωση με μερικές παραγώγους καλείται η εξίσωση που συνδέει δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n , μια άγνωστη συνάρτηση $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ και τις μερικές παραγώγους της u . Γενικά μια μερική διαφορική εξίσωση έχει τη μορφή:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{,x_1}, u_{,x_2}, \dots, u_{,x_1 x_1}, u_{,x_2 x_2}, \dots) = 0 \quad (I.1.1)$$

Και στην περίπτωση που μελετάμε πραγματικές συναρτήσεις:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (I.1.2)$$

Όπου Ω είναι ένα ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και ονομάζεται τόπος. Σπουδαία έννοια αποτελεί και το σύνορο $\partial\Omega$ του πεδίου Ω . Υποθέτουμε ότι το σύνορο $\partial\Omega$ είναι λείο, δηλαδή ότι οι συναρτήσεις που το περιγράφουν έχουν συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης.

Μια συνάρτηση $u = u(\mathbf{x})$ είναι μια κλασική λύση για μια δεδομένη Μ.Δ.Ε. τάξης m , αν για κάθε $\mathbf{x} \in \Omega$ ισχύει ότι και $u \in C(\Omega)$ ικανοποιεί σημειακά τη Μερική Διαφορική Εξίσωση. Με $C(\Omega)$ συμβολίζουμε το χώρο των συναρτήσεων που έχουν συνεχείς παραγώγους τάξης m στο Ω .

Ονομάζουμε γενική λύση μιας Μ.Δ.Ε. τάξης m , με n μεταβλητές μια λύση της εξίσωσης που περιέχει m αυθαίρετες συναρτήσεις με $(n - 1)$ μεταβλητές η κάθε μία.

Κάθε λύση που λαμβάνεται από τη γενική λύση με συγκεκριμένη επιλογή των αυθαίρετων συναρτήσεων, ονομάζεται μερική ή ειδική λύση.

Υπάρχουν όμως επίσης λύσεις Μ.Δ.Ε. οι οποίες δεν προκύπτουν από τη γενική λύση της εξίσωσης με συγκεκριμένη επιλογή των αυθαίρετων συναρτήσεων. Μια τέτοια λύση ονομάζεται ιδιάζουσα και αντιστοιχεί σε περιβάλλουσα μιας παραμετρικής οικογένειας λύσεων που ανήκουν στη Γενική Λύση.

Ι.2) ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Είναι σπουδαίο να διακρίνουμε τους τύπους εξισώσεων ως προς κάποιο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό τους, γιατί οι μέθοδοι επίλυσης των Μ.Δ.Ε. ποικίλλουν ανάλογα με το είδος τους. Σε πρώτη φάση διακρίνουμε τα είδη ως προς τα ακόλουθα χαρακτηριστικά τους:

- Το πλήθος των μεταβλητών. Το πλήθος των μεταβλητών είναι το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών.
- Η τάξη της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης. Με τον όρο τάξη μιας Μ.Δ.Ε. εννοούμε την τάξη της μέγιστης μερικής παραγώγου της εξίσωσης.
- Γραμμικότητα μιας Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης. Μια Μ.Δ.Ε. της μορφής (I.1.1) λέγεται γραμμική όταν η συνάρτηση F είναι αλγεβρικά γραμμική ως προς την u και όλες τις παραγώγους της και οι συντελεστές της u και των παραγώγων της εξαρτώνται αποκλειστικά από τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Μία Μ.Δ.Ε. που δεν είναι γραμμική, λέγεται μη-γραμμική. Μία μη-γραμμική Μ.Δ.Ε. τάξης m λέγεται σχεδόν γραμμική, όταν είναι γραμμική ως προς τις τάξης m παραγώγους της με συντελεστές που εξαρτώνται από τις ανεξάρτητες μεταβλητές και τις παραγώγους με τάξη μικρότερη του m . Μια σχεδόν γραμμική Μ.Δ.Ε. της τάξης m , στην οποία οι συντελεστές των

παραγώγων μέγιστης τάξης είναι συναρτήσεις μόνο των ανεξάρτητων μεταβλητών, λέγεται ημιγραμμική.

- Ομογένεια μιας Γραμμικής Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης. Μια γραμμική Μ.Δ.Ε. μπορεί να γραφεί σε μια μορφή, όπου το αριστερό μέλος περιέχει όλους τους όρους με την άγνωστη συνάρτηση u και όλες τις παραγώγους της. Αν υπάρχει στο δεξιό μέλος μια συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ που εξαρτάται από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, η Μ.Δ.Ε. ονομάζεται μη-ομογενής και η συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ ονομάζεται πηγή. Αν δεν υπάρχει δεξιό μέλος, τότε η Μ.Δ.Ε. ονομάζεται ομογενής.
- Είδη συντελεστών. Μια γραμμική Μ.Δ.Ε. διακρίνεται ανάλογα με το αν είναι οι συντελεστές της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της σταθεροί ή μεταβλητοί.

1.3) ΑΡΧΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Για να βρούμε μια μοναδική λύση που να έχει νόημα σε ένα φυσικό πρόβλημα, επιβάλλεται η μερική διαφορική εξίσωση ή το σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων να συνοδεύεται από βοηθητικές συνθήκες, οι οποίες χαρακτηρίζουν το μαθηματικό μοντέλο.

Διακρίνουμε δύο κατηγορίες Βοηθητικών Συνθηκών:

- Αρχικές Συνθήκες (Α.Σ.): Αρχικές Συνθήκες ορίζονται συνήθως στο επίπεδο $t = 0$ που ορίζει την αρχή του χρόνου και χωρίζει τον τόπο σε δύο υποσύνολα, τα $t < 0$ και $t > 0$, που το καθένα τους είναι ανοιχτό και εκτείνεται στο άπειρο. Αφορούν στην κατάσταση του φυσικού συστήματος κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ και συνίστανται στον καθορισμό της συνάρτησης ή και παραγώγων της για $t = 0$. Οι Αρχικές Συνθήκες όπου δίνονται οι τιμές της συνάρτησης και των καθέτων παραγώγων της σε μια καμπύλη Γ ή σε μια λεία υπερεπιφάνεια S του πεδίου ορισμού σε μια δεδομένη στιγμή, ονομάζονται Συνθήκες Cauchy. Σχεδόν πάντοτε η αρχική στιγμή ορίζεται ως χρόνος μηδέν. Το αντίστοιχο πρόβλημα εύρεσης λύσης μιας Μ.Δ.Ε. που ικανοποιεί ταυτόχρονα τέτοιες βοηθητικές συνθήκες, ονομάζεται Πρόβλημα Cauchy.
- Συνοριακές Συνθήκες (Σ.Σ.): Οι περισσότερες εφαρμογές των Μ.Δ.Ε. περιλαμβάνουν πεδία με σύνορα και είναι σημαντικό να καθορίζονται τα δεδομένα σε αυτές τις θέσεις σωστά. Οι συνθήκες που συσχετίζουν τη λύση της Μ.Δ.Ε. με δεδομένα σε κάποιο σύνορο της φυσικής περιοχής του προβλήματος, ονομάζονται Συνοριακές Συνθήκες. Οι Σ.Σ. αφορούν στις χωρικές μεταβλητές. Για παράδειγμα μπορεί να ορίζονται στην επιφάνεια μιας σφαίρας με ακτίνα ρ στον τόπο \mathbb{R}^n . Υπάρχει μια ποικιλία από Συνοριακές Συνθήκες. Μερικές απλές Συνοριακές Συνθήκες που εμφανίζονται συχνά σε προβλήματα Μηχανικής είναι οι εξής:

- [1] Dirichlet. Η τιμή της λύσης u δίδεται πάνω στο σύνορο $\partial\Omega$.

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad f \in C(\partial\Omega) \quad (1.3.1)$$

Η συνάρτηση f είναι μια δεδομένη συνάρτηση της θέσης \mathbf{x} πάνω στο σύνορο.

- [2] Neumann. Δίδεται η τιμή της κάθετης παραγώγου της λύσης u επάνω στο σύνορο $\partial\Omega$.

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad f \in C(\partial\Omega) \quad (1.3.2)$$

Εδώ με n εννοούμε τη συντεταγμένη που είναι κάθετη στο σύνορο. Επισημαίνουμε ότι ο ορισμός της u πάνω στο σύνορο προϋποθέτει την τιμή της παραγώγου στην κατεύθυνση του συνόρου. Για αυτό το λόγο συμπεριλαμβάνουμε μόνο την, κάθετη

προς το σύνορο, παράγωγο στη λίστα των βασικών Συνοριακών Συνθηκών.

- [3] Robin. Δίδεται ένας γραμμικός συνδυασμός των τιμών u και $\frac{\partial u}{\partial n}$ πάνω στο σύνορο.

$$a(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad a, f \in C(\partial\Omega) \quad (\text{I.3.3})$$

Τέτοιες Συνοριακές Συνθήκες χρησιμοποιούνται συχνά σε απλά προβλήματα διάδοσης κυμάτων και υποδεικνύουν ότι δεν μπαίνουν κύματα στο πεδίο από τα εξωτερικά.

Υπάρχει καθαρά μαθηματικός τρόπος για να οδηγηθεί κανείς σε μια πλήρη περιγραφή των Βοηθητικών Συνθηκών που εξασφαλίζουν το μονοσήμαντο της λύσης, αλλά η φυσική προσέγγιση παραμένει απλούστερη. Γενικά, οι Αρχικές Συνθήκες είναι εξαιρετικά χρήσιμες στην περιγραφή της διάδοσης κυμάτων.

Ι.4) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Τα προβλήματα με μερικές διαφορικές εξισώσεις μπορούν να ταξινομηθούν ως εξής:

- Σε προβλήματα Μ.Δ.Ε. που ζητούν μια λύση, όταν δίνεται η αρχική κατάσταση του συστήματος και στα οποία επιδιώκεται να καθοριστούν οι τιμές της λύσης για θετικές τιμές του χρόνου. Αυτού του είδους τα προβλήματα καλούνται Προβλήματα Αρχικών Τιμών ή Προβλήματα Cauchy.
- Σε προβλήματα που ζητούν μια λύση, όταν υπάρχουν συνοριακά δεδομένα και τα οποία καλούνται Προβλήματα Συνοριακών Τιμών.
- Σε προβλήματα στα οποία αναζητείται μια μία λύση, όταν υπάρχουν τόσο αρχικά, όσο και συνοριακά δεδομένα. Τα προβλήματα αυτά καλούνται Αρχικών Και Συνοριακών Τιμών (Π.Α.Σ.Τ.).

Ας θεωρήσουμε ένα Πρόβλημα Αρχικών Και Συνοριακών Τιμών που αποτελείται από μια Μ.Δ.Ε. που περιγράφει κάποιο μοντέλο καθώς και από Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες. Ονομάζουμε Δεδομένα του συγκεκριμένου Π.Α.Σ.Τ. τους συντελεστές της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης, τις συναρτήσεις που περιγράφουν τις Αρχικές και τις Συνοριακές Συνθήκες και τη συνάρτηση πηγής (αν υπάρχει φυσικά). Με απλά λόγια μπορούμε να πούμε ότι ένα Π.Α.Σ.Τ. είναι καλά διατυπωμένο αν έχει μία μοναδική λύση που έχει νόημα. Δεν αρκεί να βρούμε μια λύση σε κάποιο Π.Α.Σ.Τ., είναι επίσης σημαντικό να δείξουμε ότι η λύση είναι μοναδική. Επιπλέον, για να είμαστε σίγουροι ότι η λύση περιγράφει το φυσικό φαινόμενο που μελετάμε με ικανοποιητικό τρόπο, πρέπει να εξετάσουμε την εξάρτηση της λύσης από τα δεδομένα του προβλήματος. Λέγεται ότι μια λύση του προβλήματος εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τα βοηθητικά δεδομένα, αν το μέγιστο της μεταβολής της λύσης σε όλο το Ω μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε, φροντίζοντας ότι το μέγιστο της μεταβολής των δεδομένων σε όλο το Ω είναι αρκετά μικρό. Δηλαδή, μικρές μεταβολές στα δεδομένα πρέπει να προκαλούν αντίστοιχες μικρές μεταβολές στη λύση. Η ιδιότητα αυτή λέγεται ευστάθεια. Η διαπίστωση της ευστάθειας είναι απαραίτητη στους αριθμητικούς υπολογισμούς, στους οποίους θα υπάρχουν πάντα σφάλματα στρογγύλευσης ή προσέγγισης των δεδομένων. Αν το ίδιο το πρόβλημα είναι ασταθές, τότε οι αρχικά μικρές αποκλίσεις θα αυξηθούν σε μέγεθος και η αριθμητική λύση δεν θα έχει καμία σχέση με την πραγματική λύση του προβλήματος. Αν ένα Π.Α.Σ.Τ. ικανοποιεί τις τρεις ακόλουθες συνθήκες: **α)** Εάν υπάρχει μια λύση, **β)** εάν η λύση είναι μοναδική και **γ)** εάν η λύση είναι ευσταθής, τότε λέμε ότι το πρόβλημα είναι καλά διατυπωμένο κατά Hadamard.

1.5) Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΜΕΡΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ Β΄ ΤΑΞΗΣ

Οι μη-γραμμικές Μ.Δ.Ε. είναι τόσο ποικιλόμορφες, ώστε δεν επιδέχονται καμία συστηματική ταξινόμηση, σε αντίθεση με τις γραμμικές Μ.Δ.Ε. 2^{ης} τάξης, για τις οποίες υπάρχουν τρεις χαρακτηριστικές κατηγορίες: η υπερβολική, η παραβολική και η ελλειπτική. Οι τρεις κατηγορίες Γραμμικών Μ.Δ.Ε. 2^{ης} τάξης ταξινομούν τα φυσικά προβλήματα στους εξής αντίστοιχους τρεις τύπους: της κυματικής διάδοσης, της διάχυσης και των στάσιμων προβλημάτων. Οι μαθηματικές λύσεις των τριών αυτών τύπων εξισώσεων έχουν ουσιαστικές διαφορές. Η γνώση του τύπου της Μ.Δ.Ε. μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε δοκιμασμένες μεθόδους μελέτης της. Αυτές οι μέθοδοι διαφέρουν ουσιαστικά ανάλογα με τον τύπο της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης. Ο συγκεκριμένος τύπος μιας Μ.Δ.Ε. 2^{ης} τάξης ορίζει το είδος των Αρχικών Συνθηκών ή των Συνοριακών Συνθηκών, που βοηθούν με φυσικό τρόπο να καθοριστεί η λύση της με μοναδικό τρόπο.

➤ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΜΔΕ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΗΣ ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑΣ

Η συστηματική ταξινόμηση των γραμμικών Μ.Δ.Ε. 2^{ης} τάξης με δύο μεταβλητές που ακολουθεί, εμφανίζει πολλές ομοιότητες με την κλασσική ταξινόμηση των τετραγωνικών εξισώσεων κωνικών τομών, που γίνεται με βάση τους συντελεστές του κύριου μέρους τους. Όπως γνωρίζουμε, οι κωνικές τομές ταξινομούνται ανάλογα με το πρόσημο της τετραγωνικής διακρίνουσάς τους.

[1] Αυτό παραμένει αναλλοίωτο σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς. Επομένως, συσχετισμένες απεικονίσεις μετασχηματίζουν κωνικές σε κωνικές του ίδιου είδους και έτσι δικαιολογείται η κατηγοριοποίησή τους με βάση το πρόσημο της διακρίνουσας.

[2] Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να κάνουμε κατάλληλους μετασχηματισμούς συντεταγμένων, ώστε να φέρουμε την εξίσωση σε μία από τις γνωστές κανονικές μορφές: Α) Του κύκλου: $x^2 + y^2 = 1$, Β) Της παραβολής: $x^2 + y = 0$, Γ) Της υπερβολής: $x^2 - y^2 = 1$

Με παρόμοιο τρόπο γίνεται η ταξινόμηση των γραμμικών Μ.Δ.Ε. 2^{ης} τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Εστιάζουμε την προσοχή μας στη γενική γραμμική Μ.Δ.Ε. 2^{ης} τάξης με δύο μεταβλητές:

$$au_{,xx} + 2bu_{,xy} + cu_{,yy} + du_{,x} + eu_{,y} + fu = g \quad (I.5.1)$$

στην οποία θεωρούμε ότι οι συντελεστές a, b, c, d, e, f και ο ανεξάρτητος όρος g μπορεί να είναι συνεχείς συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y , αλλά δεν εξαρτώνται από την άγνωστη συνάρτηση u . Επίσης υποθέτουμε ότι δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα σε κάποιο σημείο $\mathbf{r} = (x, y)$ του πεδίου ορισμού Ω της (I.5.1). Ορίζουμε ως διακρίνουσα Δ της (I.5.1) την έκφραση $\Delta \equiv b^2 - ac$. Η διακρίνουσα είναι, δηλαδή, το αντίθετο της ορίζουσας του συμμετρικού πίνακα των συντελεστών:

$$A(x, y) \equiv \begin{bmatrix} a(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & c(x, y) \end{bmatrix} \quad (I.5.2)$$

(Εδώ δικαιολογείται η εμφάνιση του παράγοντα 2 στο συντελεστή του όρου $2b(x, y) u_{xy}$, που απλουστεύει τους περαιτέρω υπολογισμούς).

α) Αν $\Delta > 0$ στο σημείο (x_0, y_0) η Μ.Δ.Ε. λέγεται υπερβολική στο (x_0, y_0) .

β) Αν $\Delta = 0$ στο σημείο (x_0, y_0) η Μ.Δ.Ε. λέγεται παραβολική στο (x_0, y_0) .

γ) Αν $\Delta < 0$ στο σημείο (x_0, y_0) η Μ.Δ.Ε. λέγεται ελλειπτική στο (x_0, y_0) .

Η εξίσωση (I.5.1) λέγεται υπερβολική, παραβολική ή ελλειπτική στον τόπο Ω αν είναι αντίστοιχα υπερβολική, παραβολική ή ελλειπτική σε κάθε σημείο του Ω . Μια εξίσωση που μεταβάλλει τον τύπο της στο θεμέλιο πεδίο Ω , ονομάζεται Μ.Δ.Ε. μεικτού τύπου. Το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης παραμένει αναλλοίωτο σε κατάλληλο μετασχηματισμό. Θα εφαρμόσουμε έναν τοπικά αντιστρέψιμο μετασχηματισμό συντεταγμένων $\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$ με $\xi, \eta \in C^2$ και με Ιακωβιανή $J(\xi, \eta) \equiv \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x,y)} \equiv \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$. Συμβολίζουμε τη συνάρτηση στην οποία η $u(x,y)$ μετασχηματίζεται με $\tilde{u}(\xi, \eta)$.

Εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας:

$$u_{,x} = \tilde{u}_{,\xi} \xi_{,x} + \tilde{u}_{,\eta} \eta_{,x} \quad (I.5.3)$$

$$u_{,y} = \tilde{u}_{,\xi} \xi_{,y} + \tilde{u}_{,\eta} \eta_{,y} \quad (I.5.4)$$

$$u_{,xx} = \tilde{u}_{,\xi\xi} \xi_{,x}^2 + 2\tilde{u}_{,\xi\eta} \xi_{,x} \eta_{,x} + \tilde{u}_{,\eta\eta} \eta_{,x}^2 + \tilde{u}_{,\xi} \xi_{,xx} + \tilde{u}_{,\eta} \eta_{,xx} \quad (I.5.5)$$

$$u_{,xy} = \tilde{u}_{,\xi\xi} \xi_{,x} \xi_{,y} + \tilde{u}_{,\xi\eta} (\xi_{,x} \eta_{,y} + \xi_{,y} \eta_{,x}) + \tilde{u}_{,\eta\eta} \eta_{,x} \eta_{,y} + \tilde{u}_{,\xi} \xi_{,xy} + \tilde{u}_{,\eta} \eta_{,xy} \quad (I.5.6)$$

$$u_{,yy} = \tilde{u}_{,\xi\xi} \xi_{,y}^2 + 2\tilde{u}_{,\xi\eta} \xi_{,y} \eta_{,y} + \tilde{u}_{,\eta\eta} \eta_{,y}^2 + \tilde{u}_{,\xi} \xi_{,yy} + \tilde{u}_{,\eta} \eta_{,yy} \quad (I.5.7)$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση (I.5.1) βρίσκουμε:

$$\tilde{a}(\xi, \eta) \tilde{u}_{,\xi\xi} + 2\tilde{b}(\xi, \eta) \tilde{u}_{,\xi\eta} + \tilde{c}(\xi, \eta) \tilde{u}_{,\eta\eta} + \tilde{e}(\xi, \eta, \tilde{u}_{,\xi}, \tilde{u}_{,\eta}) = 0 \quad (I.5.8)$$

Όπου οι συντελεστές δίνονται από:

$$\tilde{a}(\xi, \eta) = \alpha(x, y) \xi_{,x}^2 + 2b(x, y) \xi_{,x} \xi_{,y} + c(x, y) \xi_{,y}^2 \quad (I.5.9)$$

$$2\tilde{b}(\xi, \eta) = 2\alpha(x, y) \xi_{,x} \eta_{,x} + b(x, y) (\xi_{,x} \eta_{,y} + \xi_{,y} \eta_{,x}) + 2c(x, y) \xi_{,y} \eta_{,y} \quad (I.5.10)$$

$$\tilde{c}(\xi, \eta) = \alpha(x, y) \eta_{,x}^2 + 2b(x, y) \eta_{,x} \eta_{,y} + c(x, y) \eta_{,y}^2 \quad (I.5.11)$$

Υπολογίζοντας τη διακρίνουσα $\tilde{\Delta} = \tilde{b}^2 - \tilde{a}\tilde{c}$, λαμβάνουμε: $\tilde{b}^2 - \tilde{a}\tilde{c} = (b^2 - ac)(\xi_{,x} \eta_{,y} - \xi_{,y} \eta_{,x})^2$, δηλαδή $\tilde{\Delta} = \Delta J^2$ και αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα: Το πρόσημο της διακρίνουσας μιας γραμμικής Μ.Δ.Ε. 2^{ης} τάξης με 2 ανεξάρτητες μεταβλητές είναι αναλλοίωτο κάτω από μια λεία μη ιδιόμορφη αλλαγή συντεταγμένων. Το θεώρημα αποκαλύπτει πως το γεγονός ότι η διακρίνουσα είναι θετική, μηδέν ή αρνητική είναι μια εγγενής ιδιότητα της Μ.Δ.Ε., που δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται. Δικαιολογείται έτσι η ταξινόμηση των Μ.Δ.Ε. 2^{ης} τάξης με κριτήριο το πρόσημο της διακρίνουσάς τους.

➤ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΜΔΕ Β' ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΤΗΣ

Ας εστιάσουμε ξανά την προσοχή μας στη γενική γραμμική Μ.Δ.Ε. 2^{ης} τάξης με δύο μεταβλητές:

$$au_{,xx} + 2bu_{,xy} + cu_{,yy} + du_{,x} + eu_{,y} + fu = g \quad (I.5.12)$$

Θεωρούμε τον πίνακα των συντελεστών του Κυρίου Μέρους:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad (I.5.13)$$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 του συμμετρικού πίνακα A από την εξίσωση:

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - \lambda(\alpha + c) - (b^2 - ac) = 0 \quad (I.5.14)$$

Στη Γραμμική Άλγεβρα αποδεικνύεται ότι οι ιδιοτιμές ενός πραγματικού, συμμετρικού

πίνακα είναι και αυτές πραγματικές. Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\lambda_1 \lambda_2 = -(b^2 - ac) = -\Delta \quad (I.5.15)$$

Όπου Δ η διακρίνουσα του Κύριου Μέρους της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης. Συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να ταξινομήσουμε τις γραμμικές Μ.Δ.Ε. β' τάξης με κριτήριο το πρόσημο των ιδιοτιμών τους ως εξής:

α) Αν $\Delta > 0$, οι λ_1, λ_2 μη μηδενικές και ετερόσημες, τότε η Μ.Δ.Ε. είναι υπερβολική.

β) Αν $\Delta = 0$, τουλάχιστον μία από τις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 είναι μηδέν, τότε η Μ.Δ.Ε. είναι παραβολική.

γ) Αν $\Delta < 0$, οι λ_1, λ_2 μη μηδενικές και ομόσημες, τότε η Μ.Δ.Ε. είναι ελλειπτική.

➤ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΕΡΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ Β' ΤΑΞΗΣ

Η μορφή της εξίσωσης (I.5.8) ονομάζεται κανονική, στην περίπτωση που ισχύουν:

$$\alpha) \tilde{\alpha}(\xi, \eta) = \alpha(x, y)\xi_x^2 + 2b(x, y)\xi_x\xi_y + c(x, y)\xi_y^2 = 0 \quad (I.5.16)$$

$$\beta) \tilde{c}(\xi, \eta) = \alpha(x, y)\eta_x^2 + 2b(x, y)\eta_x\eta_y + c(x, y)\eta_y^2 = 0 \quad (I.5.17)$$

Οι εξισώσεις (I.5.16-17) είναι του ίδιου τύπου και συνεπώς μπορούν να γραφούν ως:

$$A\zeta_x^2 + B\zeta_x\zeta_y + C\zeta_y^2 = 0 \quad (I.5.18)$$

Διαιρώντας δια ζ_y^2 την (I.5.18), λαμβάνουμε:

$$A\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right)^2 + B\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right) + C = 0 \quad (I.5.19)$$

Κατά μήκος της καμπύλης $\zeta = \text{σταθερό}$, έχουμε:

$$d\zeta = \zeta_x dx + \zeta_y dy = 0 \quad (I.5.20)$$

Έτσι:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\zeta_x}{\zeta_y} \quad (I.5.21)$$

Και συνεπώς η (I.5.19) γράφεται:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0 \quad (I.5.22)$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (I.5.22) είναι οι:

$$\frac{dy}{dx} = (B + \sqrt{B^2 - 4AC}) / 2A \quad (I.5.23)$$

$$\frac{dy}{dx} = (B - \sqrt{B^2 - 4AC}) / 2A \quad (I.5.24)$$

Οι εξισώσεις (I.5.23-24) είναι γνωστές ως χαρακτηριστικές εξισώσεις και είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις της οικογένειας των καμπυλών στο επίπεδο xy , όπου ξ και η είναι σταθερά. Τα ολοκληρώματα των εξισώσεων (I.5.23-24) ονομάζονται χαρακτηριστικές καμπύλες. Αφού οι εξισώσεις αυτές είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις α' τάξης, οι λύσεις τους μπορούν να γραφούν στη μορφή: $\varphi_1(x, y) = c_1$, $\varphi_2(x, y) = c_2$ (c_1, c_2 σταθερές).

Συνεπώς ο μετασχηματισμός: $\varphi_1(x, y) = \xi$, $\varphi_2(x, y) = \eta$ μετατρέπει την εξίσωση (I.5.12) στην κανονική της μορφή.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**Βιβλία**

- [1] R. B. HETNARSKI, Encyclopedia of Thermal Stresses, Springer, 2014
- [2] D. W. NICHOLSON, Finite Element Analysis-Thermomechanics of Solids, CRC Press, 2003
- [3] G. DHONDT, The Finite Element Method for Three-dimensional Thermomechanical Applications, John Wiley & Sons, 2004
- [4] G. A. MAUGIN, R. DROUOT, F. SIDOROFF, Continuum Thermomechanics, Kluwer Academic Publishers, 2000
- [5] T. HSU, The Finite Element Method in Thermomechanics, Allen & Unwin, Inc., 1986
- [6] H. PARKUS, Thermoelasticity, Springer-Verlag, 1976
- [7] D. G. DUFFY, Advanced Engineering Mathematics with Matlab, CRC Press, 2017
- [8] J. IGNACZAK, M. OSTOJA-STARZEWSKI, Thermoelasticity with Finite Wave Speeds, Oxford Science Publications, 2010
- [9] J. SALENÇON, Handbook of Continuum Mechanics, Springer, 2001
- [10] R. B. HETNARSKI, M. R. ESLAMI, J. IGNACZAK, N. NODA, N. SUMI, Y. TANIGAWA, Theory of Elasticity and Thermal Stresses-Explanations, Problems and Solutions, Springer, 2013
- [11] R. B. HETNARSKI, M. R. ESLAMI, Thermal Stresses-Advanced Theory and Applications, Springer, 2009
- [12] R. B. HETNARSKI, Thermal Stresses IV, Elsevier, 1996
- [13] R. F. BARRON, B. R. BARRON, Design for Thermal Stresses, John Wiley & Sons, Inc., 2012
- [14] S. J. FARLOW, Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, New York: Dover Publications, Inc., 1993
- [15] W. NOWACKI, Dynamic Problems of Thermoelasticity, PWN-Polish Scientific Publishers, 1975
- [16] W. NOWACKI, Thermoelasticity, PWN-Polish Scientific Publishers, 1962
- [17] Y. A. ÇENGEL, M. A. BOLES, Thermodynamics: An Engineering Approach, 5th Edition, The McGraw-Hill Companies, Inc., 2006
- [18] ER. CARRERA, F. A. FAZZOLARI, M. CINEFRA, Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells-Computational Modelling and Applications, Elsevier, 2017
- [19] ΧΡ. ΜΠΑΜΠΙΑΤΖΙΜΟΠΟΥΛΟΣ, Εφαρμοσμένη Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, Σ.Ε.Α.Β., 2016
- [20] Σ. ΚΟΥΡΟΥΝΑΡΧΗΣ, Μελέτη της Συμπεριφοράς των Υλικών σε Προβλήματα Θερμοελαστικότητας, Μεταπτυχιακή Εργασία-Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο - Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένη Μηχανική, 2017
- [21] B. RADI, ABD. E. HAMI, Advanced Computational Methods with Matlab 2, John Wiley & Sons, Inc., 2018
- [22] S. MAZUMDER, Numerical Methods for Partial Differential Equations-Finite Difference and Finite Volume Methods, Elsevier, 2016
- [23] L. N. TREFETHEN, Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, Cornell University, 1996

- [24] M. K. THOMPSON, J. M. THOMPSON, ANSYS Mechanical APDL for Finite Element Analysis, Elsevier, 2017
- [25] S. MOAVENI, Finite Element Analysis-Theory and Application with Ansys, Prentice Hall, 1999
- [26] E. MADENCI, I. GUVEN, The Finite Element Method and Applications in Engineering using Ansys, Springer, 2015

Άρθρα

- [1] A.E. GREEN, P.M. NAGHDI, On Undamped Heat Waves in an Elastic Solid, J. Therm. Stresses, Vol. 15, pp. 253–264, 1992
- [2] A.E. GREEN, P.M. NAGHDI, Thermoelasticity Without Energy Dissipation, J.Elasticity, Vol. 31, pp. 189–208, 1993
- [3] L.Y. BAHAR, R.B. HETNARSKI, State-Space Approach to Thermoelasticity, J. Therm.Stresses, Vol. 1, pp. 135–145, 1978
- [4] W. NOWACKI, Progress in Thermoelasticity, VIIIth European Mechanics Colloquium, Warszawa, 1967