

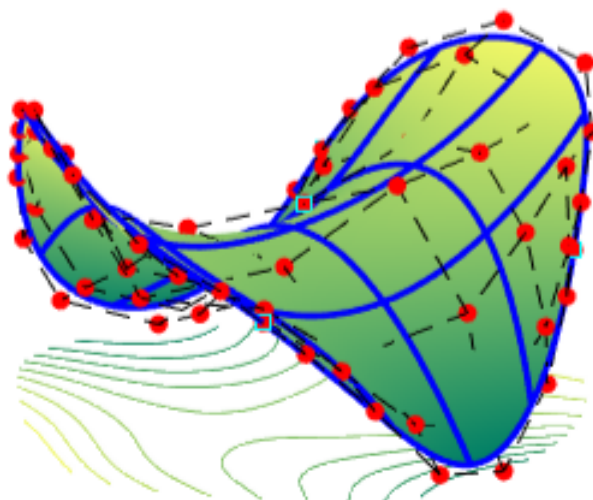


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΙΣΟΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΑΚΩΝ ΚΑΙ ΚΕΛΥΦΩΝ

Διπλωματική εργασία



Αντιγόνη Γιώτη

Επιβλέπων: Σάββας Τριανταφύλλου, Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Μάρτιος 2023

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον κ. Σάββα Τριανταφύλλου που μου έδωσε την ευκαιρία να εκπονήσω την παρούσα διπλωματική εργασία, η ολοκλήρωση της οποίας δε θα ήταν δυνατή χωρίς τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις του. Η συνεχής καθοδήγηση και υποστήριξή του ήταν ανεκτίμητες. Η συνεχής καθοδήγηση και υποστήριξή του ήταν ανεκτίμητες.

Θα ήθελα επίσης να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου για την υποστήριξη και βοήθεια των γονέων μου, καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής μου. Και τέλος, ευχαριστώ τις φίλες μου που ήταν δίπλα μου σε όλες τις όμορφες και δύσκολες στιγμές αυτών των χρόνων.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στη δυναμική, ισογεωμετρική ανάλυση λεπτόπαχων στοιχείων πλακών και κελυφών. Σκοπός της είναι η ανάπτυξη μιας αυτοματοποιημένης διαδικασίας ανάλυσης επιφανειακών φορέων, από τον σχεδιασμό έως την μετεπεξεργασία των αποτελεσμάτων των δυναμικών αποκρίσεων. Για τον σκοπό αυτό, γίνεται χρήση της ισογεωμετρικής μεθόδου με την οποία επιτυγχάνεται ακριβής γεωμετρική αναπαράσταση των καμπύλων επιφανειών. Μετά την παρουσίαση των επικρατέστερων θεωριών πλακών και κελυφών, καθορίζεται πως η καταλληλότερη μέθοδος ανάλυσης για λεπτές επιφάνειες είναι η θεωρία Kirchhoff - Love. Στη συνέχεια, εξετάζεται η υπεροχή των NURBS ως βάση για την αναπαράσταση καμπύλων γεωμετριών. Κατόπιν, παρουσιάζονται αναλυτικά τα συστατικά στοιχεία της ισογεωμετρικής θεωρίας σύμφωνα με την οποία κατασκευάστηκε κατάλληλος κώδικας Matlab. Ύστερα, γίνεται εμβάθυνση σε έννοιες ταλάντωσης πολυβάθμιων συστημάτων, οι οποίες χρησιμοποιούνται για την διεξαγωγή της προγραμματιστικής επίλυσης. Επιπλέον, για τους σκοπούς της διπλωματικής εργασίας, αναπτύχθηκε κατάλληλος κώδικας για ιδιομορφική επίλυση και για τη μέθοδο ολοκλήρωσης Newmark. Τέλος, η ακρίβεια και η αποδοτικότητα του υπολογιστικού κώδικα Matlab συζητούνται σε βάθος μέσα από μια σειρά εφαρμογών.

Abstract

The scope of this project is the dynamic response of thin plates and shells. The overarching aim is to develop an automated workflow for the dynamic analysis of surface structures, from the design of the geometry, to the post-processing of response quantities. To this end, isogeometric analysis is utilised, since it can provide an accurate geometrical representation of a curved surface. After a representation of the most known surface elements analysis methods, it is determined that the most suitable for thin elements, is the Kirchhoff - Love theory. The basis of NURBS representations for curved geometries are examined then. Next, the concepts of the isogeometric solution method are presented, according to which, a Matlab code has been developed for the purposes of this thesis. Afterwards, the theory delves into the concepts of vibration of elastic multi - degrees of freedom systems. Within the framework of the Matlab code, the Newmark method and the method of mode superposition have been developed. Finally the accuracy and the efficiency of the developed code, are investigated and discussed through a series of applications and benchmarks.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Ιστορική ανασκόπηση	1
1.2	Περιγραφή του προβλήματος	7
1.3	Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας	10
1.4	Ερευνητικοί στόχοι	11
1.5	Μεθοδολογία	11
1.6	Διάρθρωση διπλωματικής εργασίας	12
2	Λεπτές πλάκες και στοιχεία κελύφους	14
2.1	Εισαγωγή στα στοιχεία πλακών	14
2.1.1	Θεμελιώδεις παραδοχές της γραμμικής, ελαστικής θεωρίας λεπτών πλακών	16
2.2	Ταλαντώσεις πλακών	18
2.2.1	Ελεύθερες ταλαντώσεις ορθογωνικών πλακών	19
2.3	Εισαγωγή στα στοιχεία κελυφών	21
2.3.1	Μηχανισμός ανάληψης φορτίων κελυφών	23
2.4	Θεμελιώδεις αρχές και ορισμοί των κελυφών	23
2.4.1	Γραμμικές θεωρίες στοιχείων κελύφους	24
2.4.2	Θεωρία κελυφών Kirchhoff - Love	26
2.4.3	Θεωρία κελυφών Reissner - Mindlin	33
2.5	Ταλαντώσεις κελυφών	35
3	Ισογεωμετρική ανάλυση	37
3.1	Εισαγωγή	37
3.2	Χώροι της ισογεωμετρικής ανάλυσης	39
3.2.1	Index χώρος	39
3.2.2	Παραμετρικός χώρος	40
3.2.3	Φυσικός χώρος	41
3.3	Κομβοδιανύσματα (knot vectors)	42
3.4	Σημεία ελέγχου (control points)	43
3.5	Γεωμετρίες B - Spline	43
3.5.1	Συναρτήσεις σχήματος	43

3.5.2	Παράγωγα συναρτήσεων σχήματος	45
3.5.3	B - Spline καμπύλες	46
3.5.4	B - Spline επιφάνειες	47
3.5.5	B - Spline στερεά	49
3.6	Τεχνικές προσαρμογής	49
3.6.1	Εισαγωγή κόμβων	50
3.6.2	Αύξηση πολυωνυμικού βαθμού	53
3.6.3	k - προσαρμογή	56
3.6.4	Συνδυασμός μηχανισμών προσαρμογής	57
3.7	Μη ομοιόμορφες, ρητές B-Splines (Non - Uniform Rational B - Splines - NURBS)	57
3.7.1	Γεωμετρικός ορισμός των NURBS	57
3.7.2	Αλγεβρικός ορισμός των NURBS	59
3.7.3	Ιδιότητες καμπυλών NURBS	60
3.7.4	Παράγωγοι των συνερτήσεων NURBS	61
3.8	Χρήση πολλαπλών μακροστοιχείων	61
3.9	Βήματα της ανάλυσης	62
3.9.1	Πρωταρχικές παρατηρήσεις	62
3.9.2	Επιλογή πολυωνυμικών τάξεων	63
3.9.3	Επιλογή κομβοδιανυσμάτων	63
3.9.4	Επιλογή σημείων ελέγχου	64
4	Γραμμική ελαστική ανάλυση καμπύλων φορέων με ισογεωμετρικά στοιχεία	65
4.1	Γραμμική ελαστοστατική	65
4.1.1	Τάσεις σε σημείο	65
4.1.2	Παραμορφώσεις σε σημείο	67
4.1.3	Καταστατικές εξισώσεις	68
4.1.4	Εξισώσεις ισορροπίας	69
4.1.5	Εξισώσεις συμβιβαστού	69
4.2	Γραμμική ελαστοδυναμική	69
4.2.1	Δυναμικά φορτία	70
4.2.2	Βαθμοί ελευθερίας προβλήματος	71
4.2.3	Δυναμικό προσομοίωμα κατασκευής	72
4.2.4	Επιρροή των φορτίων βαρύτητας	76
4.3	Δημιουργία μητρώου στιβαρότητας	76
4.3.1	Αριθμητική ολοκλήρωση Gauss	78
4.3.2	Μητρώο Στιβαρότητας σε μονοδιάστατα προβλήματα	79
4.3.3	Μητρώο Στιβαρότητας σε διδιάστατα προβλήματα	82

4.3.4	Μητρώο Στιβαρότητας σε τριδιάστατα προβλήματα	84
4.3.5	Μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας με υπέρθεση της καμπιτικής και μεμβρανικής ακαμψίας	87
4.4	Δημιουργία μητρώου μάζας	90
4.4.1	Ιδιότητες μητρώου μάζας	90
4.4.2	Πλήρες και σωρικό μητρώο μάζας	92
4.4.3	Μητρώο μάζας σε μονοδιάστατα προβλήματα	93
4.4.4	Μητρώο μάζας σε διδιάστατα προβλήματα	94
4.4.5	Μητρώο μάζας σε τριδιάστατα προβλήματα	94
4.5	Ταλαντώσεις	95
4.5.1	Ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση	95
4.5.2	Ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση	100
4.5.3	Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση	103
4.5.4	Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση	104
4.5.5	Ειδικά θέματα ταλαντώσεων	105
4.6	Μέθοδοι επίλυσης εξίσωσης κίνησης πολυβάθμιων συστημάτων σε εξαναγκασμένη ταλάντωση	105
4.6.1	Μέθοδος επαλληλίας ιδιομορφών	106
4.6.2	Μέθοδος άμεσης ολοκλήρωσης Newmark	108
5	Εφαρμογές	113
5.1	Εισαγωγή	113
5.2	Τετραγωνική πλάκα	114
5.2.1	Σημειακές στηρίξεις στις τέσσερις γωνίες της πλάκας	116
5.2.2	Γραμμικές στηρίξεις στις τέσσερις πλευρές	126
5.3	Τετραγωνική πλάκα με οπή στη γωνία	140
5.3.1	Αρχική διακριτοποίηση	144
5.3.2	Τοπολογικά βέλτιστη διακριτοποίηση	144
5.3.3	Προσαρμοσμένη αρχική διακριτοποίηση	146
5.3.4	Προσαρμοσμένη τοπολογικά βέλτιστη διακριτοποίηση	148
5.4	Τετραγωνική πλάκα με ημικυκλική οπή σε πλευρά της	154
5.4.1	Αρχική διακριτοποίηση	156
5.4.2	Τοπολογικά βέλτιστη διακριτοποίηση	157
5.4.3	Προσαρμοσμένη πρωτογενής διακριτοποίηση	159
5.4.4	Προσαρμοσμένη τοπολογικά βέλτιστη διακριτοποίηση	160
5.5	Τετραγωνική πλάκα με κυκλική οπή στο κέντρο της	165
5.5.1	Αρχική διακριτοποίηση	166
5.5.2	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση	170
5.6	Παραβολοειδές κέλυφος	171

5.6.1	Αρχική διακριτοποίηση	173
5.6.2	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση	175
5.7	Υπερβολικό παραβολοειδές κέλυφος	179
5.7.1	Διακριτοποίηση του <i>Dynamo</i>	181
5.7.2	Βέλτιστη διακριτοποίηση	182
5.7.3	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση	184
6	Συμπεράσματα	188
A'		191
A'.1	Πίνακας αναλυτικών αποτελεσμάτων εφαρμογής τετραγωνικής πλάκας	191
A'.2	Κομβοδιανύσματα μοντέλων ανάλυσης	192
A'.2.1	Εφαρμογή πλάκας με ημικυκλική οπή στην πλευρά της	192
A'.2.2	Εφαρμογή πλάκας με οπή στο κέντρο	192
A'.2.3	Εφαρμογή τριδιάστατου παραβολοειδούς κελύφους	192
A'.2.4	Εφαρμογή υπερβολικού παραβολοειδούς κελύφους	192
A'.3	Συνολικές ιδιομορφές εφαρμογών	193

Κατάλογος Σχημάτων

1	Παραδείγματα κελυφωτών κατασκευών	2
2	Παραδείγματα εφαρμογής κελυφών	3
3	Διαφόρων ειδών διδιάστατα και τριδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία	4
4	Αντικείμενα σχεδιασμένα με χρήση καμπυλών NURBS.	6
5	Διάγραμμα χρόνου ανάλυσης, αναλογικά με την πολυπλοκότητα της κατασκευής	8
6	Διάγραμμα ροής διαδικασίας δημιουργίας μοντέλου και ανάλυσης	9
7	Διάγραμμα ροής διαδικασίας δημιουργίας μοντέλου και ανάλυσης	12
8	Κατασκευές όπου έγινε χρήση στοιχείων πλακών	15
9	Μέσο επίπεδο πλάκας πριν την παραμόρφωση και μέση επιφάνεια ύστερα από την παραμόρφωση	16
10	Μέση επιφάνεια κελύφους	17
11	Πλάκα σε ταλάντωση υπό τις συχνότητες ω_{11} , ω_{12} και ω_{21} . Η πλάκα στην 11i εμφανίζει μία μέγιστη εκτροπή, στο κέντρο της, ενώ στις 11ii, 11iii εμφανίζονται δύο.	22
12	Παραδείγματα χρήσης κελυφών σε διαφόρων ειδών κατασκευές	22
13	Λυγισμός κελύφους	24
14	Διάφορα είδη κελυφών	25
15	Διατομή σε πλάκα Kirhhoff - Love	27
16	Φορά αξόνων και μοναδιαίων διανυσμάτων στη μέση επιφάνεια κελύφους	28
17	Κίνηση τυχαίου σημείο M , της μέση επιφάνειας κελύφους	29
18	Τάσεις στη μέση επιφάνεια κελύφους	33
19	Διατομή σε πλάκα Reissner - Mindlin	34
20	Πλέγμα κόμβων και πλέγμα σημείων ελέγχου στοιχείου	37
21	Απεικόνιση μακροστοιχείου και κομβοδιαστημάτων	38
22	Παράδειγμα μετασχηματισμού ενός B - Spline στερεού από τον παραμετρικό στο φυσικό χώρο και αντίστροφα	40
23	Φυσικός, Παραμετρικός και Index χώρος	41
24	Κόμβοι στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων και κόμβοι στην ισογεωμετρική ανάλυση	42

25	Συναρτήσεις σχήματος τάξης $p = 0, 1$ και $p = 2$ για ομοιόμορφο κομβοδιάνυσμα $\{\Xi\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, (Cottrell et al. 2009).	44
26	Κυρτά κελύφη για πολυωνυμικές τάξεις $p = 1$ έως και $p = 5$ και οι αντίστοιχες B-spline καμπύλες τους, (Cottrell et al. 2009).	48
27	B - Spline καμπύλη	49
28	B - Spline στερεό	49
29	Παράδειγμα εισαγωγής κόμβων σε μια απλή καμπύλη. Τα σημεία ελέγχου δημιουργούν τα πλέγμα του μοντέλου και οι κόμβοι το διαχωρίζουν σε στοιχεία, (Cottrell et al. 2009).	51
30	Παράδειγμα εισαγωγής κόμβων σε καμπύλη περιεργής γεωμετρίας. Τα σημεία ελέγχου δημιουργούν τα πλέγμα του μοντέλου και οι κόμβοι το διαχωρίζουν σε στοιχεία. (Cottrell et al. 2009).	52
31	Παράδειγμα εισαγωγής κόμβων σε μια απλή καμπύλη. Τα σημεία ελέγχου δημιουργούν τα πλέγμα του μοντέλου και οι κόμβοι το διαχωρίζουν σε στοιχεία. (Cottrell et al. 2009).	54
32	Παράδειγμα εισαγωγής κόμβων σε μια απλή καμπύλη. Τα σημεία ελέγχου δημιουργούν τα πλέγμα του μοντέλου και οι κόμβοι το διαχωρίζουν σε στοιχεία. (Cottrell et al. 2009).	55
33	Συναρτήσεις σχήματος πριν και μετά την προσαρμογή απλού γραμμικού στοιχείου, με χρήση των τεχνικών αύξησης πολυωνυμικής τάξης και k προσαρμογής, (Cottrell et al. 2009).	56
34	Δημιουργία κύκλου στον διδιάστατο χώρο \mathbb{R}^2 , από τον προβολικό μετασχηματισμό τμηματικής, τετραγωνικής B - Spline συνάρτησης στον τριδιάστατο χώρο \mathbb{R}^3 , (Cottrell et al. 2009).	58
35	Παραδείγματα χρήσης πολλαπλών μακροστοιχείων	62
36	Παράδειγμα τριδιάστατου φορέα ο οποίος κατασκευάζεται με εξώθηση της γνωστής διδιάστατης γεωμετρίας κύκλου, (Cottrell et al. 2009).	63
37	Τάσεις σε σημείο	66
38	Οι έξι απλούστατες μορφές παραμόρφωσης	67
39	Παραμορφώσεις σε σημείο	68
40	Τέσσερις περιπτώσεις δυναμικών φορτίων	71
41	Συστήματα ταλάντωσης με διάφορους βαθμούς ελευθερίας	72
42	Διάγραμμα ροής κατασκευής μητρώου στιβαρότητας	77
43	Βαθμοί ελευθερίας	87
44	Διάγραμμα ροής κατασκευής μητρώου μάζας	91
45	Κατανεμημένη και συγκεντρωμένη μάζα στοιχείου ράβδου	92
46	Μονοβάθμιος ταλαντωτής	96
47	Απόκριση μονοβάθμιου ταλαντωτή χωρίς απόσβεση	98

48	Αποκρίσεις συστημάτων ταλάντωσης με διαφορετικές αποσβέσεις	102
49	Διάγραμμα ροής αλγοριθμικής διαδικασίας Newmark	112
50	Φορέας απλής τετραγωνικής πλάκας	115
51	Διάγραμμα ροής περιπτώσεων ανάλυσης	115
52	Οι διαφορετικές διακριτοποιήσεις που πραγματοποιούνται στον φορέα 50 . .	116
53	Τετραγωνική Πλάκα - Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Παραμορφωμένοι φο- ρείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	117
54	Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, ανα- λύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	118
55	Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	118
56	Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	118
57	Διακριτοποίηση με 9 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, ανα- λύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	119
58	Διακριτοποίηση με 9 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, ανα- λύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	120
59	Διακριτοποίηση με 9 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	120
60	Διακριτοποίηση με 9 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	120
61	Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, ανα- λύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	121
62	Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, ανα- λύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	122
63	Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	122
64	Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	122
65	Διακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, ανα- λύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	123
66	Διακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, ανα- λύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	124
67	Διακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	124
68	Διακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	124

69	Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	127
70	Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	127
71	Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	128
72	Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	128
73	Οι παραμορφωμένοι φορείς και οι αποκρίσεις τους, που προέκυψαν από αναλύσεις με 100, 1000 και 10000 χρονικά βήματα αντίστοιχα και χρήση πλήρους μητρώου μάζας	129
74	Οι παραμορφωμένοι φορείς και οι αποκρίσεις τους, που προέκυψαν από αναλύσεις με 100, 1000 και 10000 χρονικά βήματα αντίστοιχα και χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	129
75	Ιδιομορφές τετραγωνικής πλάκας, γραμμικά στηριγμένη στις εξωτερικές πλευρές, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	130
76	Ιδιομορφές τετραγωνικής πλάκας, γραμμικά στηριγμένη στις εξωτερικές πλευρές, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	130
77	Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	131
78	Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	131
79	Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	132
80	Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	132
81	Οι παραμορφωμένοι φορείς και οι αποκρίσεις τους, που προέκυψαν από αναλύσεις με 100, 1000 και 10000 χρονικά βήματα αντίστοιχα και χρήση πλήρους μητρώου μάζας	133
82	Οι παραμορφωμένοι φορείς και οι αποκρίσεις τους, που προέκυψαν από αναλύσεις με 100, 1000 και 10000 χρονικά βήματα αντίστοιχα και χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	133
83	Ιδιομορφές τετραγωνικής πλάκας, γραμμικά στηριγμένη στις εξωτερικές πλευρές, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	134
84	Ιδιομορφές τετραγωνικής πλάκας, γραμμικά στηριγμένη στις εξωτερικές πλευρές, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	134
85	Νέες διακριτοποιήσεις των μοντέλων ανάλυσης, με ανυψωμένες πολυωνυμικές τάξεις	135

86	Μοντέλο 25 στοιχείων - Αποκρίσεις αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων και χρήση πλήρους και διαγώνιου μητρώου μάζας	136
87	Μοντέλο 49 στοιχείων - Αποκρίσεις αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων και χρήση πλήρους και διαγώνιου μητρώου μάζας	137
88	Μοντέλο 196 στοιχείων - Αποκρίσεις αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων και χρήση πλήρους και διαγώνιου μητρώου μάζας	138
89	Νέα δακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	138
90	Νέα δακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	138
91	Νέα δακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	139
92	Νέα δακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	139
93	Νέα δακριτοποίηση με 196 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	139
94	Νέα δακριτοποίηση με 196 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	139
95	Διαγράμματα σύγκρισης μετατοπίσεων - συνολικού αριθμού στοιχείων . . .	141
96	Αρχικές και προσαρμοσμένες διακριτοποιήσεις φορέα τετραγωνικής πλάκας με γωνιακή οπή	144
97	Μοντέλο 1α με 2 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.	145
98	Μοντέλο 1α με 2 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.	145
99	Μοντέλο 1α με 2 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	146
100	Μοντέλο 1α με 2 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	146
101	Βέλτιστη διακριτοποίηση με 2 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.	147
102	Βέλτιστη διακριτοποίηση με 2 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.	147
103	Βέλτιστη διακριτοποίηση με 2 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	148
104	Βέλτιστη διακριτοποίηση με 2 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	148

105	Μοντέλο 1β με 32 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.	149
106	Μοντέλο 1β με 32 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.	149
107	Μοντέλο 1β με 32 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας .	150
108	Μοντέλο 1β με 32 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	150
109	Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 32 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.	151
110	Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 32 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.	151
111	Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 32 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	152
112	Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 32 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	152
113	Αρχικές και προσαρμοσμένες διακριτοποιήσεις φορέα τετραγωνικής πλάκας με ημικυκλική πλευρική οπή	155
114	Μοντέλο 1α με 4 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.	156
115	Μοντέλο 1α με 4 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.	157
116	Μοντέλο 1α με 4 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας .	157
117	Μοντέλο 1α με 4 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	157
118	Βέλτιστη διακριτοποίηση με 4 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.	158
119	Βέλτιστη διακριτοποίηση με 4 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.	158
120	Βέλτιστη διακριτοποίηση με 4 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	159
121	Βέλτιστη διακριτοποίηση με 4 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	159

122	Μοντέλο 1β με 64 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.	160
123	Μοντέλο 1β με 64 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.	160
124	Μοντέλο 1β με 64 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας .	161
125	Μοντέλο 1β με 384 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	161
126	Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.	162
127	Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.	162
128	Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	163
129	Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	163
130	Αρχική και προσαρμοσμένη διακριτοποίηση, φορέα τετραγωνικής πλάκας με κεντρική, κυκλική οπή	166
131	Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.	167
132	Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.	167
133	Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	168
134	Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	168
135	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 128 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.	169
136	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 128 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.	169
137	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 128 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	170

138	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 128 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας	170
139	Χώρος εργασίας και τριδιάστατη απεικόνιση παραβολοειδούς στο Dynamo .	172
140	Αρχική και προσαρμοσμένη διακριτοποίηση, φορέα παραβολοειδούς κελύφους	173
141	Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.	174
142	Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας.	174
143	Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	175
144	Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας	175
145	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 384 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.	176
146	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 384 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας.	176
147	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 384 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	177
148	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 384 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας	177
149	Χώρος εργασίας και τριδιάστατη απεικόνιση υπερβολικού παραβολοειδούς στο Dynamo	179
150	Μοντέλα κελύφους, μορφής υπερβολικού παραβολοειδούς, προς ανάλυση . .	180
151	Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων με χρήση πλήρους και διαγωνίου μητρώου μάζας.	181
152	Αρχική διακριτοποίηση με 3960 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	182
153	Διακριτοποίηση με 3960 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας	182
154	Αρχική διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.	183

155	Αρχική διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.	183
156	Αρχική διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	184
157	Αρχική διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	184
158	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.	184
159	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.	185
160	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	185
161	Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας	186
162	Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας	194

Κατάλογος Πινάκων

5.1 Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	119
5.2 Διακριτοποίηση με 9 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	121
5.3 Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	123
5.4 Διακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	125
5.5 Συγκεντρωμένα αποτελέσματα αναλύσεων	125
5.6 Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλύσεων σε rad/sec	126
5.7 Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	128
5.8 Διακριτοποίηση με 9 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	130
5.9 Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	132
5.10 Διακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	134
5.11 Νέες διακριτοποιήσεις με 25, 49 και 196 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	140
5.12 Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλύσεων σε rad/sec	142
5.13 Τιμές ιδιοσυχνοτήτων νέων αναλύσεων σε rad/sec	142
5.14 Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλυτικής λύσης σε rad/sec	143
5.15 Μοντέλο 1α με 2 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	146
5.16 Βέλτιστη διακριτοποίηση με 2 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών . .	148
5.17 Μοντέλο 1β με 32 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	150
5.18 Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 32 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	152
5.19 Συγκεντρωμένα αποτελέσματα αναλύσεων	153
5.20 Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλύσεων σε rad/sec	154
5.21 Μοντέλο 1α με 4 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	156
5.22 Βέλτιστη διακριτοποίηση με 4 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών . .	159
5.23 Μοντέλο 1β με 64 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	161
5.24 Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	163
5.25 Συγκεντρωμένα αποτελέσματα αναλύσεων	164
5.26 Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλύσεων σε rad/sec	165
5.27 Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών . . .	168

5.28 Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 128 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	170
5.29 Συγκεντρωμένα αποτελέσματα αναλύσεων	171
5.30 Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλύσεων σε rad/sec	172
5.31 Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών . . .	175
5.32 Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 384 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	177
5.33 Συγκεντρωμένα αποτελέσματα αναλύσεων	178
5.34 Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλύσεων σε rad/sec	178
5.35 Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	181
5.36 Αρχική διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών . . .	182
5.37 Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών	186
5.38 Συγκεντρωμένα αποτελέσματα αναλύσεων	186
5.39 Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλύσεων σε rad/sec	187
A'.1 Συγκεντρωμένα αποτελέσματα αναλύσεων	191

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ιστορική ανασκόπηση

Οι κελυφωτές κατασκευές χρησιμοποιούνταν πολύ πριν οι άνθρωποι κατανοήσουν πλήρως τις ιδιότητές τους. Το μεγαλοπρεπές οικοδόμημα του Πάνθεον της Ρώμης, του οποίου η κατασκευή ολοκληρώθηκε το έτος 125 Μ.Χ., κατέχει τον τίτλο της πρώτης κελυφωτής κατασκευής και πυροδότησε τον σχεδιασμό πολλών άλλων παρόμοιων δομημάτων. Κάποιες άλλες αξιοσημείωτες τέτοιες κατασκευές είναι η γέφυρα Αηji, που είναι η πρώτη τοξωτή πέτρινη γέφυρα, της οποίας η κατασκευή ολοκληρώθηκε το 605 Μ.Χ., η πασίγνωστη Όπερα του Σίδνεϊ, με έτος ολοκλήρωσης το 1973 και ο Ναός του Λωτού, που χτίστηκε το 1986 στο Δελχί της Ινδίας.

Οι πλάκες και τα κελύφη αποτελούν πανταχού παρόντα στοιχεία στη φύση και στους περισσότερους κλάδους της μηχανικής. Ως πλάκα ορίζεται ένα αρχικώς επίπεδο σώμα, με τη διάσταση του πάχους του να είναι πολύ μικρότερη συγκριτικά με τις άλλες δύο. Τα κελύφη είναι παρόμοια στοιχεία, με μόνη διαφορά ότι έχουν αρχική καμπυλότητα. Η καμπυλότητα αυτή μπορεί να είναι κατά τη μία ή κατά τις δύο διευθύνσεις. Παρά τη λεπτότητά τους, έχουν τη δυνατότητα να φέρουν μεγάλου μεγέθους εξωτερικά φορτία και αυτός είναι και ο λόγος που αποτελούν ευρέως χρησιμοποιούμενα στοιχεία στη μηχανική.

Οι πλάκες μπορούν να θεωρηθούν ειδική περίπτωση κελυφών, καθώς είναι ουσιαστικά κελύφη με μηδενική καμπυλότητα. Το μικρό πάχος των εν λόγω στοιχείων συνεισφέρει σημαντικά στη μείωση του βάρους και του κόστους μιας κατασκευής. Ακόμη, η χρήση κελυφών έχει ως αποτέλεσμα, ιδιαίτερα αρχιτεκτονικά, αισθητικές κατασκευές. Για όλους τους προαναφερθέντες λόγους, η χρήση τους στη σημερινή εποχή είναι ολοένα και πιο συχνή. Μερικές κατασκευές στις οποίες αξιοποιούνται είναι οι στέγες μεγάλων ανοιγμάτων, οι δεξαμενές νερού, τα σιλό, διάφορα τμήματα αεροσκαφών και ναυπηγικών σκαφών, ακόμη και σε πυρηνικούς σταθμούς ηλεκτροπαραγωγής κ.λ.π. Στην εικόνα 2 παρατίθενται κάποια παραδείγματα κατασκευών όπου έγινε χρήση πλακών και κελυφών.

Το καμπύλο δοκάρι, οι πλάκες και τα κελύφη έχουν ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά



(i) Ναός του Πάνθεον, Ρώμη, Ιταλία



(ii) Γέφυρα Anji, Χεμπέι, Κίνα



(iii) Όπερα του Σίδνεϊ, Σίδνεϊ, Αυστραλία



(iv) Ναός του Λωτού, Δελχί, Ινδία

Σχήμα 1: Παραδείγματα κελυφωτών κατασκευών

και έτσι οι πρόοδοι στην ανάπτυξη των θεωριών ανάλυσής τους ήταν παράλληλες. Πολλά στοιχεία στις θεωρίες των δύο επιφανειακών φορέων είναι βασισμένα σε θεωρίες δοκών. Το 18^ο αιώνα γεννήθηκε η γνωστή θεωρία δοκού Euler - Bernoulli και ακολούθησαν η θεωρία δοκού Timoshenko και οι θεωρίες πλακών Kirchhoff - Love και Reissner - Mindlin. Οι δύο τελευταίες αποτελούν τις γνωστότερες θεωρίες λεπτότοιχων κατασκευών. Όλες οι παραπάνω χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα και πολυάριθμοι αλγόριθμοι έχουν βασιστεί σε αυτές, για να δώσουν λύση σε προβλήματα της εποχής.

Έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για την ακριβή περιγραφή της συμπεριφοράς των πλακών και των κελυφών, αρχικά με θεωρητικές, μαθηματικές μεθόδους και αργότερα με εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων. Μία από τις γνωστότερες είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) (Argyris et al. 1979). Πριν την ανάπτυξη και τη διάδοση αυτής, διάφορες άλλες πρακτικές χρησιμοποιούνταν για την επίλυση των υπολογιστικών προβλημάτων της μηχανικής. Η συνηθέστερη ήταν η χρήση μεθόδων διαφορικών εξισώσεων για την αξιολόγηση τάσεων, παραμορφώσεων και μετατοπίσεων μιας κατασκευής. Ωστόσο, τα διάφορα θεωρήματα που είχαν αναπτυχθεί τότε, αποδείχθηκαν ανεπαρκή σε μη γραμμικά προβλήματα και προβλήματα μεγαλύτερης κλίμακας, τα οποία απαιτούσαν γρηγορότερα και ακριβέστερα αποτελέσματα. Ως αποτέλεσμα, διεξήχθη πληθώρα ερευνών με σκοπό την παράκαμψη των προβλημάτων αυτών και έτσι προέκυψε η θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων. Αναπτύχθηκε αρχικά από τους I. Αργύρη και S. Kelsey το 1960 και λόγω της ταχείας εξέλιξης της και των πολλών πλεονεκτημάτων της σε σχέση με τις συμβατικές μεθόδους, έγινε



(i) Κελυφωτή στέγη, μεγάλου ανοίγματος



(ii) Κελύφη διατήρησης πυρηνικής ενέργειας, σε πυρηνικό σταθμό ηλεκτροπαραγωγής



(iii) Μεταλλική δεξαμενή νερού με εξωτερικό κυλινδρικό κέλυφος



(iv) Όψη δεξαμενόπλοιου, οι πλευρές του οποίου αποτελούν κομμάτια κελύφους

Σχήμα 2: Παραδείγματα εφαρμογής κελυφών

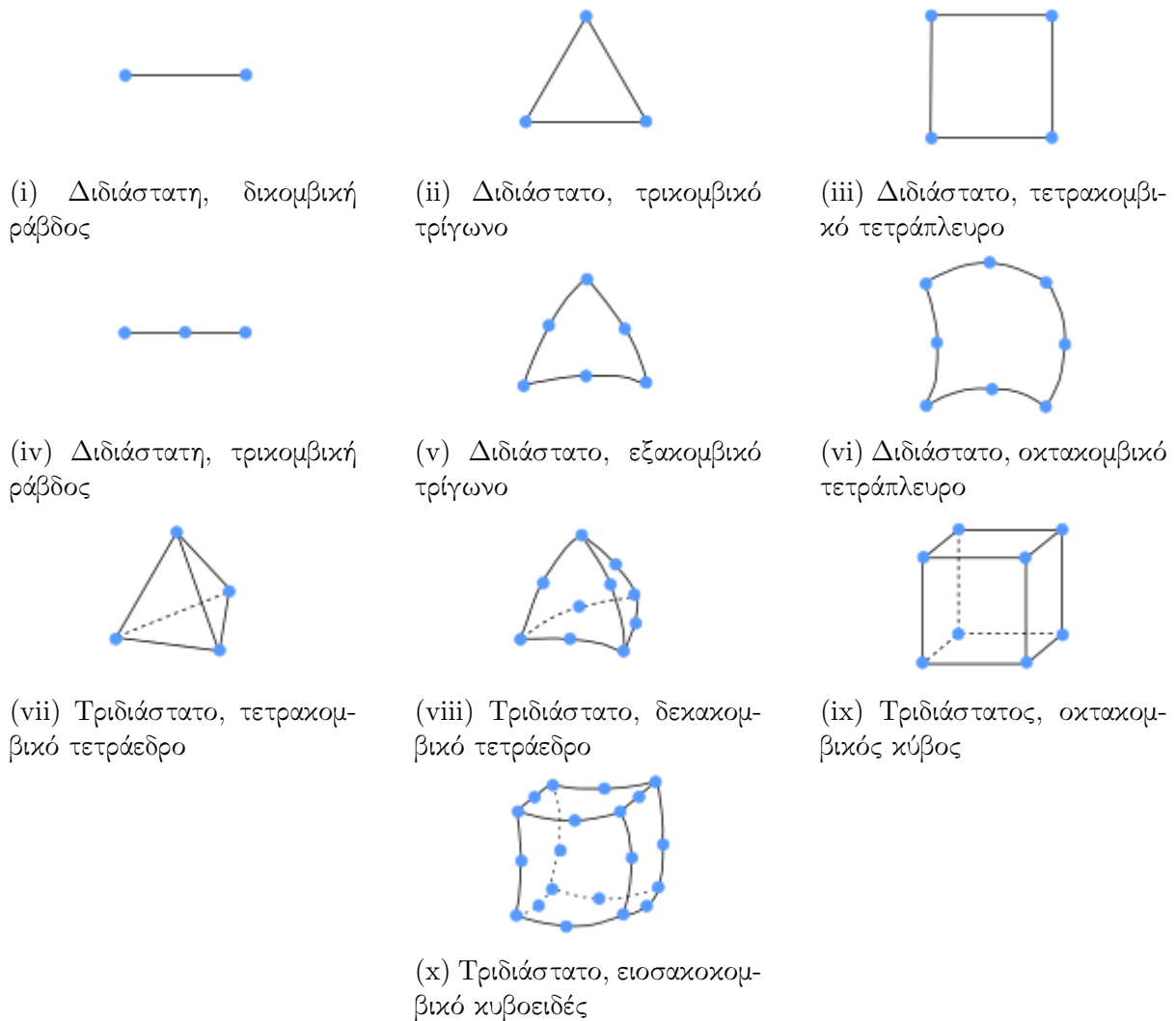
γρήγορα δημοφιλής. Ολοένα και περισσότερες έρευνες διενεργούνταν επί της μεθόδου και έτσι προέκυψαν αρκετές νέες θεωρίες, όπως αυτή των ισοπαραμετρικών στοιχείων. Η συγκεκριμένη βοήθησε στη γενίκευση της μεθόδου και στην αύξηση της αποδοτικότητάς της, σε προβλήματα με πιο περίπλοκη γεωμετρία.

Πλέον, διάφορα λογισμικά πεπερασμένων στοιχείων είναι διαθέσιμα στους μηχανικούς, τα οποία απλοποιούν την κάποτε σύνθετη και πολύχρονη διαδικασία της ανάλυσης. Μεγαλύτερη ταχύτητα και καλύτερη σύγκλιση επιτυγχάνεται καθημερινά και προβλήματα που κάποτε θεωρούνταν άλυτα, πλέον φαντάζουν απλά. Παρακάτω αναφέρονται μερικά ορόσημα στην εξέλιξη της μεθόδου.

Ο όρος πεπερασμένο στοιχείο εισήχθη από τον Clough το 1960, ωστόσο η πρώτη αναφορά σε πεπερασμένο στοιχείο - και συγκεκριμένα στο γραμμικό τρίγωνο - έγινε από τον Courant το 1943. Το γραμμικό τρίγωνο είναι το πιο απλό στοιχείο και ακόμα και σήμερα είναι πολυχρησιμοποιούμενο. Άλλη μια μέθοδος, άξια αναφοράς, είναι η γραμμική τετραεδρική μέθοδος που αναπτύχθηκε από τους Gallagher et al, το 1962. Από τη χρήση τριγωνικών και τετραεδρικών συντεταγμένων (βαρυκεντρικές συντεταγμένες), του τριγώνου Pascal και του τετραεδρικού στοιχείου, έγινε εμφανές ότι θα ήταν απλούστερο να δημιουργηθούν κατά κάποιο τρόπο C^0 - συνεχή¹ πεπερασμένα στοιχεία. Έτσι αναπτύχθηκε το διγραμμικό τετράπλευρο (quadrilateral) από τον Taig το 1961, το οποίο αποτελεί πρόγονο των ισοπαρα-

μετρικών στοιχείων (Irons, 1966, Zienkiewicz και Cheung, 1968). Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτών είναι ότι είναι εφαρμόσιμα σε οποιαδήποτε τοπολογία. Με τη χρήση τους, στοιχεία με ομαλές καμπύλες στο φυσικό χώρο μπορούν να μετατραπούν σε απλούστερα σχήματα, όπως τετράγωνα ή κύβοι, σε έναν παραμετρικό τομέα. Τέλος, ένα αξιοσημείωτο επίτευγμα ήταν το οκτακομβικό στοιχείο (serendipity quadrilateral) (Zienkiewicz et al. 1971), το οποίο οδήγησε στη συνέχεια στη έννοια του μεταβλητού αριθμού κόμβων.

Σημειώνεται, ότι σε μη γραμμικές εφαρμογές δυναμικής, σημαντικό ρόλο έχουν παίξει στοιχεία χαμηλής τάξης, ενώ στους μη γραμμικούς υπολογισμούς της μηχανικής των στερεών, έχει κυριαρχήσει το διγραμμικό τετραεδρικό στοιχείο υπό σταθερή πίεση και η τριδιάστατη γενίκευσή του (Hughes και Allik, 1969, Nagtegaal et al., 1974, Hughes, 1977, Malkus και Hughes, 1978).



Σχήμα 3: Διαφόρων ειδών διδιάστατα και τριδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία

¹Η “ομαλότητα” μιας συνάρτησης προσδιορίζεται από τον αριθμό των συνεχών παραγώγων της, δηλαδή την κατηγορία διαφοροποίησής της και εκφράζεται με τον παράγοντα C^a . Μία συνάρτηση είναι C^0 - συνεχής εάν είναι διαφοροποιήσιμη παντού και είναι C^∞ - συνεχής εάν έχει παράγωγα όλων των τάξεων στον τομέα της.

Παρά τα πολυάριθμα θετικά στοιχεία της, η θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων παρουσιάζει αρκετές ελλείψεις. Αυτός είναι και ο βασικός λόγος που διάφορες άλλες πρακτικές άρχισαν να εφαρμόζονται στην ανάλυση κατασκευών. Αποδείχθηκε ότι η ισοπαραμετρική ανάλυση είναι αποτελεσματική μόνο για C^0 - συνεχής παρεμβολή και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για παρεμβολή C^1 ή υψηλότερη. Το μεγάλο ενδιαφέρον για την ανάπτυξη συστημάτων C^1 - συνεχούς παρεμβολής, προερχόταν κυρίως από την επιθυμία για κατασκευή λεπτών πλακών και στοιχείων κελύφους για την δομική ανάλυση. Τα λεπτά στοιχεία κάμψης απαιτούν τετραγωνική ολοκληρωσιμότητα, γενικευμένων, δευτέρων παραγώνων και άρα C^1 - συνεχή στοιχεία. Κάποιες αξιοσημείωτες επιτεύξεις επί του θέματος πραγματοποιήθηκαν από τους Clough και Tocher, το 1965, I. Αργύρης et al, 1968, Cowper et al 1968, de Veubeke, 1968, Bell, 1969. Ωστόσο τα στοιχεία αυτά ήταν υπερβολικά περίπλοκα και ακριβά, επομένως άρχισαν να εξετάζονται διαφορετικές παραλλαγές.

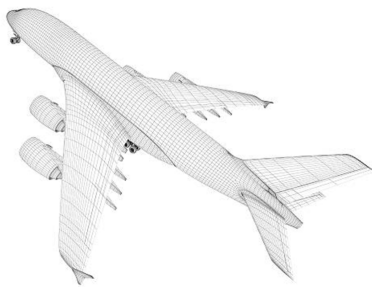
Αξίζει να αναφερθεί ότι έχουν εκτελεσθεί έρευνες πάνω στην κατασκευή συναρτήσεων σχήματος με εντελώς αντίθετη λογική από αυτή των κλασικών μεθόδων υποδιαίρεσης στοιχείων. Αυτές οι προσεγγίσεις είναι γνωστές ως μέθοδοι δίχως διακριτοποίηση (meshless methods) (Nayroles et al. 1992). Αξιοπρόσεκτες αναφορές για τις μεθόδους αυτές είναι η μέθοδος Galerkin ελευθέρων στοιχείων των Belytschko et al., 1994, η μέθοδος αναπαγωγής σωματιδίων πυρήνα των Liu et al., 1995, και η μέθοδος υποδιαίρεσης της μονάδας των Melenk και Babuska, 1996, κ.λ.π.

Παράλληλα με τον κλάδο της ανάλυσης, συνυπάρχει και ο τομέας της υπολογιστικής γεωμετρίας, ο οποίος είναι εξίσου σημαντικός για το σωστό σχεδιασμό μιας κατασκευής. Ο σχεδιασμός με τη χρήση υπολογιστή (Computer Aided Design - CAD) έχει πολλές εφαρμογές στον σημερινό κόσμο. Προσχέδια διαφόρων κατασκευών, όπως αυτοκινήτων, γεφυρών κ.α. δημιουργούνται στον υπολογιστή και τροποποιούνται με ευκολία έως ότου να βελτιστοποιηθούν.

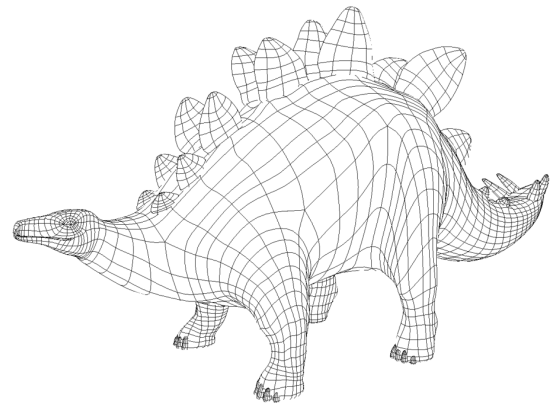
Η υπολογιστική γεωμετρία πρωτοεμφανίστηκε στη δεκαετία του 1950, με την εξέλιξη των βιομηχανικών αυτοκινήτων και αεροσκαφών. Δύο πρωτοπόροι μηχανικοί, ο Pierre Bézier της Renault και ο Paul de Casteljau της Citroen, εισήγαγαν την έννοια των B - spline καμπυλών, οι οποίες είναι αρκετά παρόμοιες με τις καμπύλες Bézier. Ο όρος Spline πρωτοεισήχθη στη μαθηματική βιβλιογραφία από τον Schoenberg, το 1964. Οι B - Splines συγκεκριμένα ορίζονται από τα αποκαλούμενα σημεία ελέγχου (control points), ο αριθμός των οποίων είναι ανεξάρτητος της πολυωνυμικής τάξης της καμπύλης. Κάποιος θα μπορούσε να αναφερθεί στις B - splines ως γενίκευση των καμπυλών Bézier, με μόνη διαφορά ότι η μεταβολή ενός σημείου δεν αλλάζει ολόκληρη την καμπύλη, αλλά μόνο ένα μέρος αυτής.

Ένα βασικό πρόβλημα των B - Splines είναι ότι δε μπορούν να αναπαραστήσουν ακριβώς κωνικές διατομές, δηλαδή κύκλους, κυλίνδρους, σφαίρες, ελλειψοειδή κ.λ.π. Λόγω αυτού, μέσω διάφορων πειραματισμών, αναπτύχθηκαν οι καμπύλες NURBS (Non - uniform rational B - splines). Ο πρώτος που εργάστηκε πάνω σε αυτές ήταν ο Ken Vesprille.

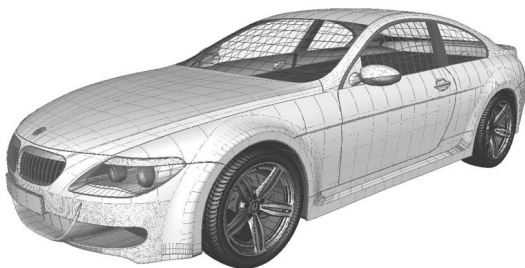
Μετά την ανακάλυψή τους, οι NURBS άρχισαν γρήγορα να διαδίδονται στην κοινότητα του CAD, καθώς κατέχουν πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Πλοία, αυτοκίνητα, αεροπλάνα, χαρακτήρες κινούμενων σχεδίων και πολλά άλλα σχεδιάζονται με τη χρήση τους. Ακόμη και σήμερα, ενώ υπάρχουν άλλες πολύ πιο κατάλληλες τεχνολογίες αναπαράστασης - όπως οι T – Splines - οι NURBS διατηρούν τη δημοτικότητα τους και είναι πανταχού παρούσες στα συστήματα CAD. Είναι εύχρηστες για μοντελοποίηση ελεύθερων επιφανειών, μπορούν να αναπαραστήσουν ακριβώς όλες τις κωνικές διατομές και υπάρχουν πολυάριθμοι, πολύ ικανοί και αριθμητικά σταθεροί αλγόριθμοι βασισμένοι σε αυτές (αναδρομή Cox – de Boor (Coz, 1971; de Boor, 1972), οι αλγόριθμοι de Boor (de Boor, 1978), ο αλγόριθμος Oslo, (Cohen et al 1980) κ.λ.π.). Κατέχουν ιδιότητες όπως C^{p-1} συνέχεια για καμπύλη τάξης p και ισχυρού περιβλήματος (convex hull). Ακόμη, έχουν εφευρεθεί και πολλές χρήσιμες τεχνικές, όπως η εισαγωγή κόμβων, η αύξηση της πολυωνυμικής τάξης, η προσαρμογή της καμπύλης και η χρήση πολλαπλών μακροστοιχείων, που τις καθιστούν ακόμα πιο εύχρηστες. Η υπεροχή τους στο σχεδιασμό στη μηχανική είναι αδιαμφισβήτητη και για αυτό αποτελούν πολύ καλό σημείο εκκίνησης της ισογεωμετρικής ανάλυσης, για την οποία θα γίνει λόγος παρακάτω.



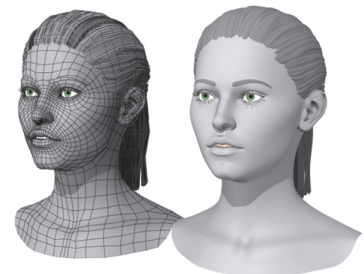
(i) Σχέδιο κελύφους αεροσκάφους



(ii) Σχέδιο προσομοιώματος κινούμενου σχεδίου



(iii) Σχεδιασμός περιβλήματος αυτοκινήτου



(iv) Προσομοίωμα προσώπου

Σχήμα 4: Αντικείμενα σχεδιασμένα με χρήση καμπυλών NURBS.

Αξίζει να γίνει επίσης μια μικρή αναφορά σε κάποιες νεότερες και πολλά υποσχόμενες τεχνολογίες. Μια από αυτές είναι οι T – Splines (Sederberg et al., 2003, Sederberg et al.,

2004), οι οποίες αποτελούν γενίκευση της τεχνολογίας των NURBS. Επιτρέπουν την τοπική προσαρμογή (refinement και coarsening) και είναι πολύ αποτελεσματικές στη σύνδεση γειτονικών μακροστοιχείων (patches). Οι αρχικές έρευνες για τη χρήση T – Splines στην ισογεωμετρική ανάλυση έγιναν από τους Bazilevs et al., το 2009 και Dorfel et al., το 2008, οι οποίοι απέδειξαν πως είναι πολύ αποδοτικές όσο αφορά την ισογεωμετρική ανάλυση.

1.2 Περιγραφή του προβλήματος

Η διαδικασία ανάλυσης που εφαρμόζεται για την επίλυση προβλημάτων στη σημερινή εποχή, δεν είναι τόσο αποτελεσματική και εύχρηστη. Παράλληλα η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων - σύμφωνα με την οποία γίνονται οι αναλύσεις - παρουσιάζει αρκετά ελαττώματα, όπως ήδη αναφέρθηκε. Παρακάτω παρατίθενται οι δυσκολίες της τωρινής μεθοδολογίας ανάλυσης και τα μειονεκτήματα της μεθόδου.

Τα βήματα που ακολουθούνται σήμερα για την ανάλυση ενός έργου έχουν ως εξής: οι σχεδιαστές παράγουν αρχεία CAD, τα οποία μετατρέπονται σε κατάλληλες για ανάλυση, διακριτοποιημένες γεωμετρίες. Στη συνέχεια, αυτές λειτουργούν ως δεδομένα με την μορφή input αρχείων, σε μεγάλης κλίμακας κώδικες ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων. Η διαδικασία αυτή είναι αρκετά απαιτητική και μάλιστα για περίπλοκα μηχανικά σχέδια εκτιμάται ότι καταναλίσκει περίπου το 80% του συνολικού χρόνου της ανάλυσης. Ταυτόχρονα, με την πάροδο του χρόνου και την εξέλιξη της τεχνολογίας, τα σχέδια γίνονται ολοένα και πιο σύνθετα. Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για ανάλυση ούτε παράγονται, ούτε διακριτοποιούνται αυτόματα από την γεωμετρία CAD. Πρέπει να επισημανθεί ότι η παραγωγή μοντέλου είναι μια χρονοβόρα και δύσκολη διαδικασία και επιπλέον, ένα μόνο διακριτοποιημένο μοντέλο δεν είναι πλέον αρκετό για ακριβείς αναλύσεις.

Ο λόγος χρόνου μοντελοποίησης προς χρόνο ανάλυσης 80/20, είναι αρκετά συχνός στη πράξη και παρά τη μεγάλη επιθυμία που υπάρχει για να αντιστραφεί, έχει εκπληρωθεί πολύ μικρή πρόοδος σε σχέση με την προσπάθεια για να γίνει αυτό. Ο μόνος τρόπος για να επιτευχθεί, είναι να πραγματοποιηθεί πλήρης ένωση του τομέα της υπολογιστικής γεωμετρίας (CAD) και της ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία (FEA).

Επιπροσθέτως, η ίδια η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων δυσχερώνει την όλη διαδικασία λόγω των ελαττωμάτων της. Το κατεξοχήν μειονέκτημά της, είναι ότι τα ισοπαραμετρικά στοιχεία ποτέ δεν αναπαριστούν επακριβώς την γεωμετρία CAD. Μπορούν να παράγουν μόνο μία προσέγγιση αυτής, με τμηματικά πολυώνυμα. Πολλά προβλήματα όμως απαιτούν την ακριβή αναπαράστασή της, για να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια.

Αφού έχει γίνει η διακριτοποίηση, η αρχική γεωμετρία δε χρησιμοποιείται καθόλου στη διαδικασία της ανάλυσης. Αυτό εκτός από το ότι είναι από μόνο του ανησυχητικό, ευθύνεται και για διαφόρων ειδών άλλα προβλήματα. Η προσέγγιση της γεωμετρίας σημαίνει ότι σίγουρα θα παρουσιαστούν προβλήματα σύγκλισης, ανεξάρτητου της μεθόδου επίλυσης

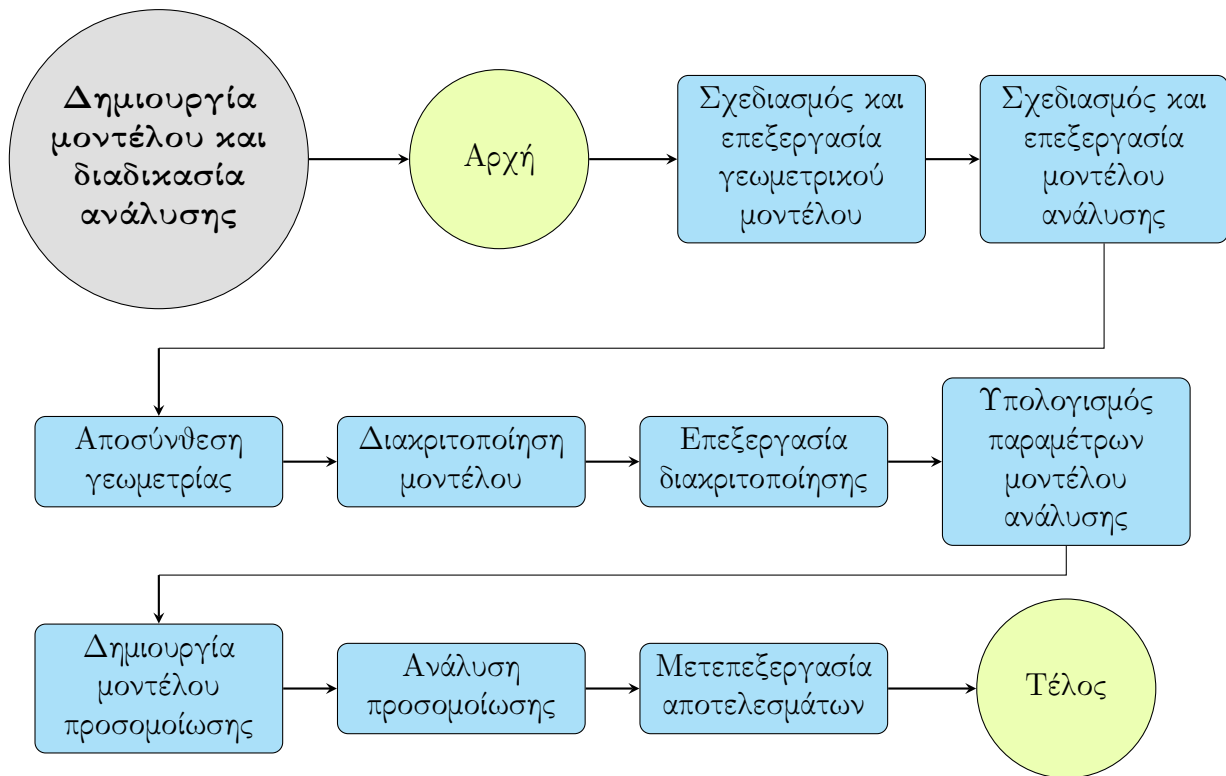


Σχήμα 5: Διάγραμμα χρόνου ανάλυσης, αναλογικά με την πολυπλοκότητα της κατασκευής και της διαθέσιμης υπολογιστικής δύναμης.

Εάν χρειάζεται προσαρμογή της διακριτοποίησης, ο αλγόριθμος θα γυρίσει στην αρχική γεωμετρία και θα παράξει ένα νέο διακριτοποιημένο μοντέλο, μια καινούρια προσέγγιση της γεωμετρίας. Το νέο μοντέλο δε μπορεί να προκύψει κατευθείαν από την αρχική διακριτοποίηση. Αυτή η διαδικασία μειώνει την αποδοτικότητα της μεθόδου, καθώς όλη η ανάλυση πρέπει να πραγματοποιηθεί ξανά για κάθε νέο διακριτοποιημένο μοντέλο, πράγμα που οδηγεί σε κύκλους επανάληψης. Ακόμα και για μικρές αλλαγές, όλη η πορεία της μεθόδου πρέπει να ακολουθηθεί από την αρχή.

Πολλά λάθη σχεδιασμού αποδίδονται στο γεγονός αυτό. Στη δομική μηχανική συγκεκριμένα, σπαταλάται πολύς χρόνος στις διάφορες φάσεις μεταξύ πρωταρχικού, πρώιμου και τελικού σχεδιασμού (initial, preliminary and final design). Το πρόβλημα μόνο επιδεινώνεται όσο η γεωμετρία γίνεται πιο περίεργη. Πλέον, στις περισσότερες περιπτώσεις μηχανικών σχεδίων περίπλοκης γεωμετρίας, είναι δυσχερέστερη η δημιουργία ενός μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων από τη γεωμετρία CAD, από ότι είναι η ανάλυση. Είναι εμφανές λοιπόν, ότι το κενό μεταξύ της γεωμετρίας και της διαδικασίας διακριτοποίησης είναι μεγάλο. Η υπολογιστική γεωμετρία δεν θα έπρεπε να είναι μια ανεξάρτητη διαδικασία στις εφαρμογές της μηχανικής. Οι οντότητες του σχεδιασμού θα έπρεπε να συνδυάζονται με τις μεθόδους των πεπερασμένων στοιχείων για να προκύψει το βέλτιστο αποτέλεσμα.

Οι ελλείψεις και τα ελαττώματα της τωρινής διαδικασίας μηχανικής ανάλυσης αποκλείουν επίσης την επιτυχή εφαρμογή σημαντικών τεχνικών, όπως η βελτιστοποίηση του σχεδιασμού, η επαλήθευση και η επικύρωση, η ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας κ.α. Για την επαλήθευση και επικύρωση, είναι αναγκαία η εκτίμηση σφάλματος και η προσαρμοστικότητα, τα οποία με τη σειρά τους, απαιτούν σύνδεση CAD γεωμετρίας, διακριτοποίησης και ανάλυσης. Η ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας χρειάζεται προσομοιώσεις με πολλά και διαφορετικά μοντέλα, από τα οποία παράγονται τελικά οι πιθανοτικές κατανομές. Αυτή η δειγματοληψία χρειάζεται την ικανότητα γρήγορης παραγωγής γεωμετρικών μοντέλων, δια-



Σχήμα 6: Διάγραμμα ροής διαδικασίας δημιουργίας μοντέλου και ανάλυσης

κριτοποιημένων μοντέλων και αναλύσεων, πράγμα που πάλι οδηγεί στην μεγάλη ανάγκη για ένωση γεωμετρίας, διακριτοποίησης και ανάλυσης. Τα πλεονεκτήματα της βελτιστοποίησης του σχεδιασμού δεν αξιοποιούνται, λόγω του ότι για να γίνει σχηματική βελτιστοποίηση η διαδικασία της διακριτοποίησης της CAD γεωμετρίας, πρέπει να είναι αυτόματη και διαφοροποιημένη. Αυτό δεν ισχύει όπως ήδη αναφέρθηκε, αφού τα διακριτοποιημένα μοντέλα είναι ασύνδετα από τις γεωμετρίες CAD από τις οποίες παράγονται.

Η επανεφεύρεση και η βελτίωση των τεχνικών της υπολογιστικής γεωμετρίας είναι το πρώτο βήμα στη γεφύρωση των κόσμων του σχεδιασμού και της ανάλυσης. Αυτό ακριβώς προτάθηκε από τον Thomas J.R. Hughes με την έννοια της ισογεωμετρικής ανάλυσης (Cottrell et al. 2009). Πρότεινε αντί να γίνεται προσπάθεια να συνδεθούν οι μοντέρνες CAD – CAE μεθοδολογίες, να επαναπροσδιοριστούν μαζί, σε μια νέα πρωτοποριακή μέθοδο. Η βασική ιδέα, είναι να γίνει χρήση των ίδιων συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται για την ακριβή αναπαράσταση της γεωμετρίας, για την περιγραφή του πεδίου επίλυσης. Η ισογεωμετρική ανάλυση επί τούτου, επεκτείνει αυτή των ισοπαραμετρικών στοιχείων, με διαφορά ότι η διαδικασία επαναπροσδιορισμού της γεωμετρίας για χάρη της ανάλυσης αντιστρέφεται. Αυτό οδηγεί στη δημιουργία ενός μοντέλου ικανού να αναπαραστήσει ακριβώς τη γεωμετρία αλλά και να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση. Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε αλλαγή, μικρή ή μεγάλη, μπορεί να ενσωματωθεί απευθείας στο μοντέλο χωρίς τον κίνδυνο σφαλμάτων και αποκλίσεων. Η ισογεωμετρική ανάλυση παντρεύει δύο κόσμους με διαφορετικές τεχνολογίες, συνδυάζοντας τα καλύτερα κομμάτια και των δύο. Επίσης, η μέθοδος ανάλυσης που

θα ακολουθηθεί βασίζεται στην προϋπάρχουσα των πεπερασμένων στοιχείων, γεγονός που καθιστά την ισογεωμετρική ανάλυση ακόμα πιο ελκυστική.

Υπάρχουν πολλές γεωμετρικές μορφές κατάλληλες για την ανάλυση, όπως οι NURBS, T – Splines, Splines κ.ο.κ. Κάθε γεωμετρία έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της, αλλά η ποικιλία που υπάρχει παρέχει τη δυνατότητα διαφόρων εναλλακτικών χρήσεων, ανάλογα με την περίπτωση. Αυτό εξασφαλίζει τη γενίκευση της μεθόδου και την δυνατότητα χρήσης της για πολλά και διάφορα προβλήματα.

Τέλος, αναφέρεται πως οι συναρτήσεις σχήματος των πεπερασμένων στοιχείων ορίζονται μόνο στο εσωτερικό του εκάστοτε στοιχείου και έχουν C^{-1} συνέχεια στα άκρα. Αντίθετα, οι συναρτήσεις σχήματος της ισογεωμετρικής ανάλυσης δεν περιέχονται αναγκαστικά σε ένα στοιχείο. Τις περισσότερες φορές ορίζονται μέσω πολλών. Αυτό εξασφαλίζει μεγαλύτερη συνέχεια και ενδοσυνδεσιμότητα (interconnectivity). Αυτή η διαφορετική προσέγγιση λειτουργεί πολύ καλύτερα και οδηγεί σε καλύτερη σύγκλιση από τις κλασικές μεθόδους ανάλυσης. Διαφορετικοί τρόποι διακριτοποίησης του μοντέλου στην ισογεωμετρική θεωρία, για τους οποίους θα γίνει λόγος παρακάτω, οδηγούν σε ακόμα πιο ακριβή αποτελέσματα.

1.3 Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με τη δυναμική ισογεωμετρική ανάλυση στοιχείων πλακών και κελυφών. Πιο συγκεκριμένα, τα στοιχεία τα οποία υποβάλλονται σε ανάλυση είναι λεπτότοιχα, απλής και σύνθετης γεωμετρίας, με και χωρίς οπές.

Η επιλεγθείσα μέθοδος ανάλυσης είναι η ισογεωμετρική, η οποία για όλους τους λόγους που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 1.2 θεωρείται πως είναι μια καινοτόμα και πολλά υποσχόμενη μέθοδος. Η συνένωση του τομέα της ανάλυσης και του τομέα της υπολογιστικής γεωμετρίας, προσφέρει μία εύχρηστη και αποδοτική μέθοδο ανάλυσης επιφανειακών φορέων. Στο τέλος της εργασίας, θα γίνουν εμφανή τα πλεονεκτήματα αυτής, σε σχέση με άλλες τεχνικές ανάλυσης.

Σε όλες τις εφαρμογές το επιβαλλόμενο φορτίο είναι αρμονικό, ομοιόμορφα κατανεμημένο και ημιτονοειδές. Τέτοιου είδους φορτία αποτελούν την απλούστατη μορφή δυναμικών φορτίων.

Ακόμη, όλοι οι φορείς οι οποίοι μελετώνται, προσομοιώνονται από διάφορα μοντέλα, με ένα και μοναδικό μακροστοιχείο (patch) και διαφορετικό αριθμό μικροστοιχείων (knot spans).

1.4 Ερευνητικοί στόχοι

Για τη σωστή μελέτη της συμπεριφοράς των διαφόρων φορέων υπό δυναμικά φορτία, τίθενται κάποιοι ερευνητικοί στόχοι, οι οποίοι αριθμούνται παρακάτω.

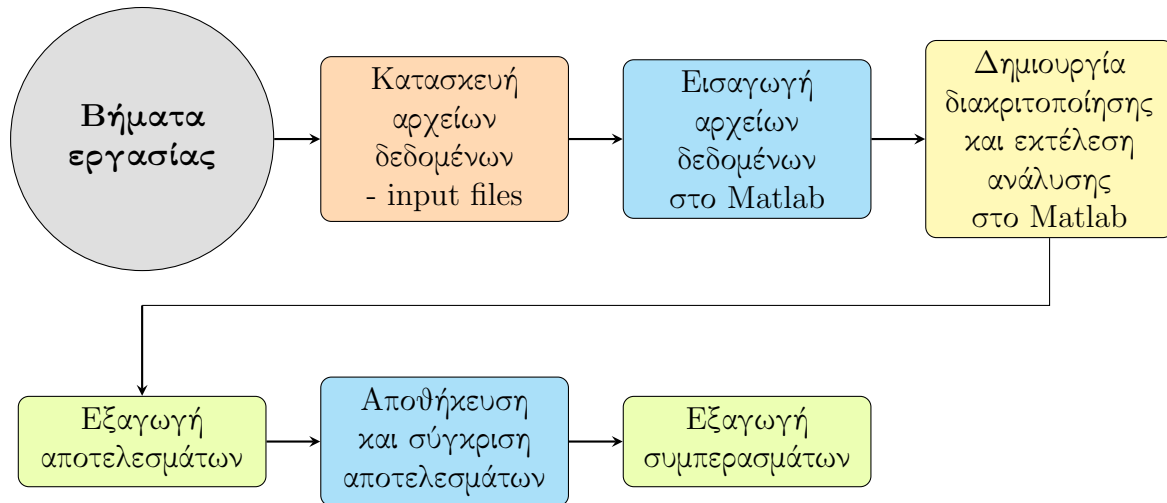
1. Βιβλιογραφική διερεύνηση των υπάρχοντων θεωριών λεπτότοιχων φορέων και των βασικών αρχών δυναμικής μηχανικής. Επιλογή της πιο κατάλληλης θεωρίας πλακών και κελυφών για την διεκπεραίωση της ανάλυσης και χρήση δύο τεχνικών δυναμικής για σύγκριση αποτελεσμάτων.
2. Σύνταξη κώδικα με βάσει τις αρχές της ισογεωμετρικής ανάλυσης και των επιλεγθέντων θεωριών, με σκοπό την μελέτη των φορέων των εφαρμογών.
3. Έλεγχος της αποδοτικότητας και της ακρίβειας του κώδικα. Διερεύνηση τεχνικών μείωσης της συνολικής χρονικής διάρκειας της ανάλυσης και έλεγχος σύγκλισης των αποτεσμάτων από τη χρήση διαφορετικών τεχνικών.
4. Χρήση κατάλληλου λογισμικού για την δημιουργία φορέων περίπλοκης γεωμετρίας, οι οποίοι θα λειτουργήσουν ως παραδείγματα εφαρμογών.

1.5 Μεθοδολογία

Για την ολοκλήρωση της παρούσης εργασίας, αρχικά καθορίστηκε με ακρίβεια το αντικείμενο αυτής και οι στόχοι της. Κατόπιν, μετά από την εξοικείωση με τις βασικές αρχές της ισογεωμετρικής μεθόδου και κάποιων ειδικών κεφαλαίων της θεωρίας λεπτότοιχων στοιχείων και ταλαντώσεων, έγινε η σύνταξη του κώδικα της ανάλυσης. Σε όλες τις εφαρμογές έχει χρησιμοποιηθεί η θεωρία πλακών και κελυφών Kirchhoff - Love και για τη δυναμική ανάλυση, η ιδιομορφική επίλυση και η μέθοδος άμεσης ολοκλήρωσης Newmark.

Ο κώδικας συντάχθηκε στο περιβάλλον προγραμματισμού Matlab και περιλαμβάνει όλες τις τεχνικές ανάλυσης και αποτύπωσης των αποτελεσμάτων αυτής. Τα δεδομένα της εκάστοτε εφαρμογής εισάγονται στο χώρο του Matlab μέσω αρχείων εισαγωγής δεδομένων (input αρχεία). Τα αρχεία αυτά περιέχουν όλες τις πληροφορίες γεωμετρίας και διακριτοποίησης του φορέα, καθώς και πληροφορίες για τα επιβαλλόμενα φορτία, τις συνοριακές συνθήκες, τα χαρακτηριστικά του υλικού και τον τρόπο διεξαγωγής της ανάλυσης, ανάλογα με τον εκάστοτε φορέα. Για εφαρμογές απλής γεωμετρίας είναι χειρωνακτικά γραμμένα, ενώ αυτά που αφορούν στοιχεία πολύπλοκης γεωμετρίας, εξάγονται απευθείας από το πρόγραμμα Dynamo του Revit. Στο Dynamo σχεδιάζεται ο φορέας σύμφωνα με τους γεωμετρικούς περιορισμούς του, εισάγονται στη συνέχεια και οι λοιπές πληροφορίες για το υλικό του, τις στηρίξεις του κ.ο.κ. και τελικώς παράγεται το αρχείο input. Η διαδικασία παραγωγής αρχείων δεδομένων Matlab από το Dynamo, αυτοματοποιείται μέσω προγραμματισμού με χρήση Python.

Τέλος, μετά την διεξαγωγή όλων των εφαρμογών, αναλύονται τα αποτελέσματα αυτών και αναγράφονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν. Σύμφωνα με αυτά προτείνονται ορισμένες βελτιώσεις και ιδέες για μελλοντικές παρόμοιες εργασίες.



Σχήμα 7: Διάγραμμα ροής διαδικασίας δημιουργίας μοντέλου και ανάλυσης

1.6 Διάρθρωση διπλωματικής εργασίας

Για την ολοκληρωμένη εικόνα της εργασίας, παρουσιάζονται παρακάτω συνοπτικά τα περιεχόμενα κάθε κεφαλαίου αυτής.

Στο κεφάλαιο 2 αναγράφονται οι απαραίτητες έννοιες για την κατανόηση των στοιχείων πλακών και κελυφών και της ανάλυσης αυτών. Δίδονται οι κλασικές θεωρίες τους και οι βασικές αρχές ταλαντώσεων τέτοιων φορέων.

Στο κεφάλαιο 3 δίνονται αναλυτικά όλα τα συστατικά στοιχεία της ισογεωμετρικής ανάλυσης και αναγράφονται συνοπτικά, τα βήματά της. Γίνεται επίσης αναφορά στις καμπύλες NURBS, οι οποίες θα αποτελέσουν τις συναρτήσεις σχήματος της μεθόδου.

Το κεφάλαιο 4 πραγματεύεται τα βασικά στοιχεία της γραμμικής ελαστικής ανάλυσης, καθώς εμβαθύνει σε έννοιες ελαστοστατικής και ελαστοδυναμικής. Δίνονται επίσης οι ορισμοί των μητρώων στιβαρότητας και μάζας, τα οποία αποτελούν απαραίτητα στοιχεία για την επίλυση όλων των εφαρμογών. Ακόμη, εξετάζονται οι βασικές έννοιες των ταλαντώσεων μονοβαθμίων και πολυβαθμίων συστημάτων και οι τρόποι επίλυσης αυτών.

Στο κεφάλαιο 5 εξετάζονται έξι εφαρμογές και τα αποτελέσματά τους. Κάθε μία διαφέρει ως προς το γεωμετρικό σχήμα του φορέα της, τη διακριτοποίηση του μοντέλου της και τις συνθήκες στηρίξεώς της.

Στο κεφάλαιο 6 γίνεται λόγος για τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από τις προηγούμενες εφαρμογές, τους πιθανούς τρόπους βελτίωσης της διαδικασίας ανάλυσης αυτών και παραδείγματα για περαιτέρω διερεύνηση.

Το κεφάλαιο 7 αποτελεί το παράρτημα της παρούσης εργασίας. Αναγράφονται αναλυτικότερα κάποια δεδομένα των εφαρμογών που εκτελέστηκαν.

Τέλος, αναγράφεται η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για την διεξαγωγή και ολοκλήρωση της εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Λεπτές πλάκες και στοιχεία κελύφους

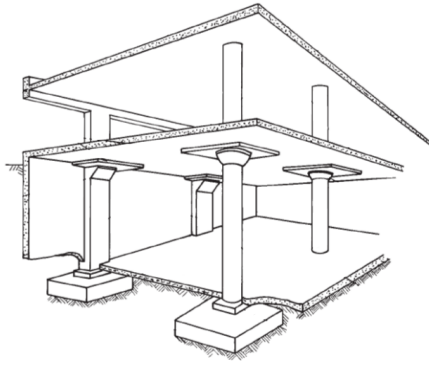
2.1 Εισαγωγή στα στοιχεία πλακών

Πλάκα αποκαλείται ένα αρχικώς επίπεδο, πολύ λεπτό, κατά τη διεύθυνση του πάχους του, σώμα. Τα φορτία που επιβαρύνουν συνήθως τις πλάκες - στατικά ή δυναμικά - είναι κατά κύριο λόγο κάθετα στις όψεις τους. Για να αντισταθμιστούν αυτά τα εγκάρσια φορτία αναπτύσσονται διατμητικές δυνάμεις, καμπτικές και στρεπτικές ροπές, συνήθως και κατά τις δύο διευθύνσεις του στοιχείου. Συγκεκριμένα οι ισότροπες πλάκες, λόγω της μεγάλης στρεπτικής ακαμψίας τους, εμφανίζουν αυξημένη στιβαρότητα σε σχέση με τα στοιχεία δοκού. Συνεπώς, είναι εμφανές ότι λόγω της ικανότητάς τους να δέχονται υψηλά φορτία με πολύ αποτελεσματικό τρόπο, οι πλάκες θεωρούνται αποδοτικά και οικονομικά στοιχεία (λόγω του μικρού πάχους τους). Λόγω όλων των προαναφερθέντων πλεονεκτημάτων τους χρησιμοποιούνται σε διάφορων ειδών έργα, όπως οικοδομικά έργα, γέφυρες, συγκοινωνιακά έργα, αεροπλάνα, πλοία κ.λ.π.

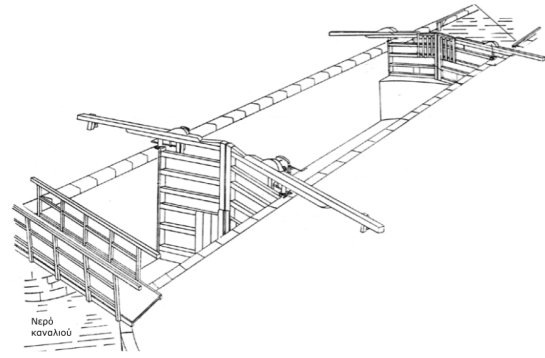
Μία βασική θεώρηση που γίνεται στην ανάλυση πλακών, είναι αυτή της μέσης επιφάνειας. Συνήθως, για την ανάλυση, χρησιμοποιείται το μέσο επίπεδο (middle plane/midplane), το οποίο βρίσκεται ακριβώς στη μέση των δύο παράλληλων όψεων της πλάκας και σε αυτό πραγματοποιούνται όλοι οι υπολογισμοί. Υποβαλλόμενο σε εγκάρσια φορτία, παραμορφώνεται, γίνεται καμπύλο και αναφέρεται πλέον, ως μέση επιφάνεια (middle surface).

Τα στοιχεία πλακών αντιστέκονται στα εγκάρσια φορτία που τους επιβάλλονται αποκλειστικά μέσω κάμψης. Οι καμπτικές ιδιότητες μιας πλάκας εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τη σύγκριση του πάχους της, σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις της. Έτσι μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με τον λόγο a/h , όπου a είναι η τυπική διάσταση μιας πλάκας σε ένα επίπεδο και h το πάχος της. Οι τρεις αυτές κατηγορίες είναι:

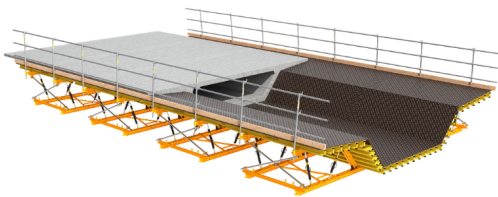
1. Παχιές πλάκες (thick plates) με τιμές λόγου $a/h \leq 8, \dots, 10$. Η ανάλυση αυτών



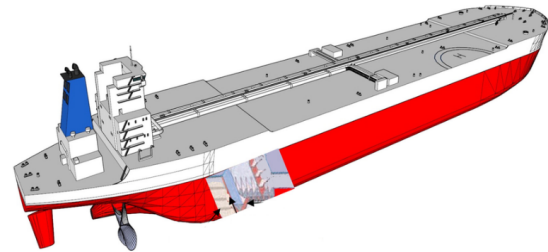
(i) Πλάκες ως βαθμίδες σε κτιριακό έργο



(ii) Πλάκες ως υδροφραχτικές πόρτες σε ρέμα



(iii) Πλάκα σκυροδέματος που λειτουργεί ως κατάστρωμα γέφυρας



(iv) Δεξαμενόπλοιο, το κέλυφος του οποίου περικλείεται στα πλάγια του από μεταλλικά στοιχεία πλακών

Σχήμα 8: Κατασκευές όπου έγινε χρήση στοιχείων πλακών

περιλαμβάνει όλες τις συνιστώσες των τάσεων, των παραμορφώσεων και των μετατοπίσεων, ακριβώς όπως απαιτείται για τα στερεά σώματα, όπου χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις τριδιάστατης ελαστικότητας.

2. Μεμβράνες (membranes) με τιμές λόγου $a/h \geq 80, \dots, 100$. Τα σώματα αυτά στερούνται καμπικής ακαμψίας και μεταφέρουν μόνο πλευρικά φορτία από εφελκυστικές αξονικές δυνάμεις N , οι οποίες δρουν στη μέση επιφάνεια. Οι δυνάμεις αυτές καλούνται μεμβρανικές (membrane forces).

3. Λεπτές πλάκες (thin plates) με τιμές λόγου $8, \dots, 10 \leq a/h \leq 80, \dots, 100$. Ανάλογα με το λόγο μέγιστης εκτροπής της πλάκας προς το πάχος της, w/h , το ποσοστό των καμπικών και των μεμβρανικών δυνάμεων μπορεί να διαφέρει. Επομένως αυτή η κατηγορία χωρίζεται σε δύο ακόμη υποκατηγορίες.

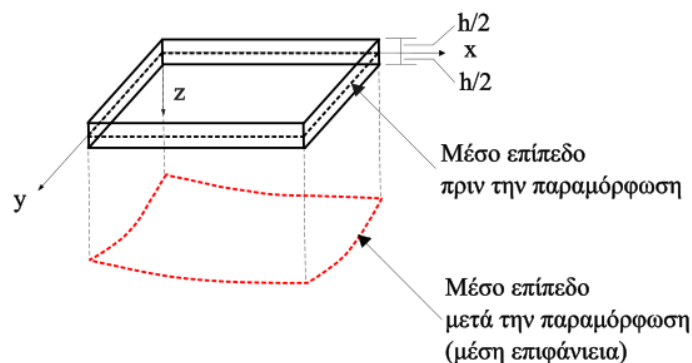
(α') Στιβαρές πλάκες (stiff plates) για $w/h \leq 0.2$. Οι στιβαρές πλάκες είναι άκαμπτες, λεπτές πλάκες. Μεταφέρουν φορτία δύο διαστάσεων, αναπτύσσοντας εσωτερικές διατμητικές δυνάμεις, στρεπτικές και καμπικές ροπές. Οι παραμορφώσεις και οι μεμβρανικές δυνάμεις του μέσου επιπέδου είναι αμελητέες. Συνήθως οι εφαρμογές μηχανικής που κάνουν αναφορά σε πλάκα, υπονοούν λεπτή στιβαρή πλάκα, καθώς αυτές δίνουν τη δυνατότητα πολλών απλοποιήσεων.

Θεμελιώδες χαρακτηριστικό αυτών, είναι ότι οι εξισώσεις στατικής ισορροπίας μπορούν να γραφούν για τον αρχικό, απαραμόρφωτο φορέα.

(β') Εύκαμπτες πλάκες για $w/h \geq 0.3$. Σε αυτή την περίπτωση οι πλευρικές παραμορφώσεις συνοδεύονται από επιμήκυνση της μέσης επιφάνειας. Οι εν λόγω πλάκες αποτελούν συνδυασμό των στιβαρών πλακών και των μεμβρανών και αντιστέκονται στα εξωτερικά φορτία αναπτύσσοντας εσωτερικές διατμητικές και μεμβρανικές δυνάμεις, στρεπτικές και καμπτικές ροπές. Όταν η μέγιστη εκτροπή είναι σημαντικά μεγαλύτερη από το πάχος της πλάκας, κυριαρχεί η μεμβρανική φύση. Επομένως, αν $w/h \geq 5$, η καμπτική ένταση είναι αμελητέα σε σχέση με τη μεμβρανική και άρα η πλάκα συμπεριφέρεται ως μεμβράνη.

Επισημαίνεται ότι η παραπάνω κατηγοριοποίηση είναι σχετική σε κάθε ανάλυση και εξαρτάται από πολλούς άλλους παράγοντες, όπως η ακρίβεια της ανάλυσης, ο τύπος της εξωτερικής φόρτισης, οι συνοριακές συνθήκες κ.ο.κ.

Σημειώνεται ότι στην παρούσα εργασία όλες οι εφαρμογές πλακών αφορούν στοιχεία με σταθερό πάχος.



Σχήμα 9: Μέσο επίπεδο πλάκας πριν την παραμόρφωση και μέση επιφάνεια ύστερα από την παραμόρφωση

2.1.1 Θεμελιώδεις παραδοχές της γραμμικής, ελαστικής θεωρίας λεπτών πλακών

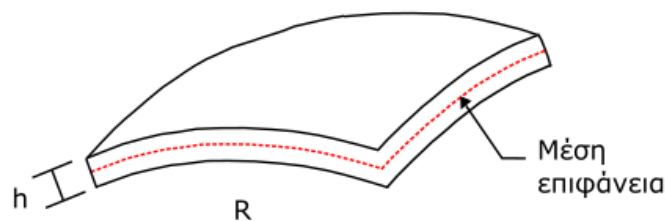
Πολλές από τις παρακάτω παραδοχές αποτελούν τμήμα των υποθέσεων του Kirchhoff και είναι ανάλογες με την απλή θεωρία κάμψης της δοκού. Οι υποθέσεις αυτές οδηγούν στη μείωση των διαστάσεων του προβλήματος πλακών, από τρεις σε δύο. Ο λόγος που είναι επιθυμητό να μειωθούν οι διαστάσεις του προβλήματος, είναι γιατί στα τριδιάστατα προβλήματα, χωρίς καμία παραδοχή, οι εξισώσεις είναι πολύπλοκες και δεν είναι εύκολο να λυθούν. Παρόλα αυτά και οι πλάκες και τα κελύφη δε παύουν να αποτελούν τριδιάστατα σώματα. Οι θεμελιώδεις παραδοχές είναι

1. Το υλικό του σώματος της πλάκας είναι ελαστικό, ομογενές και ισοτροπικό.
2. Η πλάκα είναι αρχικά επίπεδη.
3. Η εκτροπή του μέσου επιπέδου είναι μικρή, σχετικά με το πάχος της πλάκας.
4. Οι ευθείες γραμμές, αρχικά κάθετες στο μέσο επίπεδο πριν την κάμψη της πλάκας, παραμένουν ευθείες και κάθετες στη μέση επιφάνεια κατά την παραμόρφωση της. Το μέτρο αυτών δεν αλλάζει. Επομένως η ορθή παραμόρφωση ϵ_z και οι κάθετες διατμητικές παραμορφώσεις γ_{xz}, γ_{yz} μπορούν να αγνοούνται.
5. Η ορθή τάση σ_z του μέσου επιπέδου είναι μικρή, σε σχέση με τις άλλες συνιστώσες της τάσης και μπορεί να αγνοείται στις σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων.
6. Εφόσον οι παραμορφώσεις της πλάκας είναι μικρές, θεωρείται ότι η μέση επιφάνεια παραμένει απαραμόρφωτη μετά την κάμψη.

Το καμπτικό πρόβλημα πλακών που βασίζεται στις παραπάνω παραδοχές αναφέρεται ως Κλασική θεωρία πλακών ή θεωρία πλακών Kirchhoff.

Σκοπός της θεωρίας των πλακών/κελύφων είναι να ελαχιστοποιηθεί η εξάρτηση από την παράμετρο z , η οποία αντιστοιχεί στη διάσταση του πάχους της πλάκας. Έτσι, τα μεγέθη των τάσεων και των παραμορφώσεων θα εξαρτώνται και θα μπορούν να περιγραφούν από δύο μόνο μεταβλητές, τις x, y , οι οποίες αντιστοιχούν στο επίπεδο αναφοράς.

Η επιφάνεια αναφοράς είναι μια θεωρούμενη επιφάνεια για την ανάλυση των στοιχείων πλακών, στην οποία θεωρείται ότι συγκεντρώνονται όλα τα εξωτερικά επιβαλλόμενα φορτία και οι ιδιότητες του υλικού. Αντίστοιχα για τα κελύφη γίνεται η θεώρηση της καμπύλης αναφοράς.



Σχήμα 10: Μέση επιφάνεια κελύφους

Τα κελύφη προσδίδουν μία παραπάνω δυσκολία στην ανάλυση, καθώς λόγω της καμπυλότητάς τους, οι εξισώσεις τους γίνονται αυτομάτως πιο πολύπλοκες. Παρά τις προκλήσεις που παρουσιάζουν, πλεονεχτούν σε σχέση με τις πλάκες στο ότι αντέχουν πολύ υψηλότερα φορτία. Ο παράγοντας της καμπυλότητας είναι αυτός που τους προσδίδει αυτή την ανθεκτικότητα. Υποθέτοντας το ίδιο ασκούμενο φορτίο σε ένα σώμα πλάκας και σε

ένα σώμα κελύφους, στο κέλυφος υπάρχει η δυνατότητα μεγαλύτερης μείωσης της διάστασης του πάχους του, σε σχέση με την πλάκα. Το γεγονός αυτό εξασφαλίζει την κάλλιστη εκμετάλλευση και εξοικονόμηση του υλικού κατασκευής.

Οι δύο πλέον γνωστές και ευρέως χρησιμοποιούμενες θεωρίες πλακών - κελυφών είναι οι προαναφερθέντες Kirchhoff – Love και η Reissner – Mindlin. Η βασική διαφορά μεταξύ των δύο είναι ότι η δεύτερη, λαμβάνει υπόψη τη διατμητική παραμόρφωση, ενώ η πρώτη όχι. Τα δύο διαφορετικά μοντέλα προσδιορίζονται από δύο διαφορετικά σετ εξισώσεων. Αποτελεί κοινή λογική ότι ανεξαρτήτως ποιας θεωρίας πρόκειται να χρησιμοποιηθεί, οι εξισώσεις αυτές απλοποιούνται σημαντικά με τη μείωση των διαστάσεων του προβλήματος.

2.2 Ταλαντώσεις πλακών

Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές της μηχανικής, οι περισσότερες κατασκευές υπόκεινται σε δυναμικά φορτία, παραγόμενα από χρονικά εξαρτώμενες, εξωτερικές δυνάμεις ή μετατοπίσεις. Δυναμικά φορτία μπορούν να δημιουργηθούν από ριπές ανέμου, μετακινούμενα οχήματα, σεισμικές διαταραχές, δονήσεις μηχανών, ηχητικά κύματα κ.λ.π. Περισσότερα για τα φορτία αυτά αναφέρονται στην παράγραφο 4.2.1. Οι επιδράσεις των χρονοεξαρτώμενων δυναμικών φορτίων, ανήκουν στον τομέα της δυναμικής μηχανικής, η οποία ασχολείται με την ανάλυση των εσωτερικών δυνάμεων που αναπτύσσονται λόγω των φορτίων αυτών. Στόχος της είναι να προσδιοριστεί η επίδραση των δονήσεων στην απόδοση της κατασκευής.

Η δυναμική των πλακών, οι οποίες είναι συνεχή ελαστικά συστήματα, μπορεί να μοντελοποιηθεί μαθηματικά από μερικές διαφορικές εξισώσεις, βασισμένες στον νόμο του Newton ή με σχέσεις ολοκληρωμάτων. Στην πλειοψηφία των εφαρμογών, μόνο η πλευρική δόνηση είναι σημαντική, ενώ οι επιπτώσεις των δονήσεων στο μεσαίο επίπεδο αμελούνται. Συνεπώς, λαμβάνονται υπόψη οι δυνάμεις αδράνειας που σχετίζονται με την πλευρική μετατόπιση ενός στοιχείου πλάκας.

Η απόσβεση κατασκευών συνήθως προκαλείται είτε από εσωτερική τριβή, είτε από τον περιβάλλοντα χώρο. Παρόλο που η απόσβεση θεωρητικά είναι παρούσα σε όλες τις δονήσεις των στοιχείων, συνήθως δεν επηρεάζει τις ιδιοσυχνότητες και τα πλάτη της ταλάντωσης και για αυτό μπορεί αρχικώς να αγνοηθεί.

Η βασική εξίσωση κίνησης πλακών στις περισσότερες περιπτώσεις σχηματίζεται από την συγχώνευση της στατικής εξίσωσης, με τις προκύπτουσες δυνάμεις λόγω της επιτάχυνσης της μάζας της πλάκας. Αυτές είναι οι λεγόμενες δυνάμεις αδράνειας. Στη διαμόρφωση αυτής της εξίσωσης λαμβάνονται υπόψη και άλλου είδους χρονοεξαρτώμενες δυνάμεις, όπως οι δυνάμεις απόσβεσης. Οι δυνάμεις αυτές λαμβάνονται υπόψη ως αντίθετες δυνάμεις, σύμφωνα με την γνωστή αρχή του D’Alambert.

Υπάρχουν διάφορα είδη κίνησης πλακών. Η πιο απλή μορφή κίνησης είναι αυτή της ελεύθερης ταλάντωσης, η οποία συμβαίνει απουσία εφαρμοσμένων φορτίων και η οποία μπο-

ρεί να προκληθεί επιβάλλοντας αρχικές συνθήκες. Η ελεύθερη ταλάντωση μιας πλάκας έχει να κάνει με τα φυσικά χαρακτηριστικά της. Εκτελείται με διακριτές τιμές συχνότητας, οι οποίες εξαρτώνται από το υλικό κατασκευής και τη γεωμετρία του φορέα. Άλλη μία μορφή κίνησης είναι η εξαναγκασμένη ταλάντωση, η οποία προκαλείται με εφαρμογή χρονοεξαρτώμενων φορτίων. Οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, την αρμονική απόκριση και την παροδική απόκριση. Η αρμονική απόκριση προκαλείται από περιοδικές φορτίσεις στο στοιχείο πλάκας και η παροδική από μη περιοδικές δυνάμεις.

Για το σχηματισμό της ζητούμενης διαφορικής εξίσωσης γίνεται χρήση τη θεωρίας κάμψης πλακών του Kirchhoff. Λαμβάνονται υπόψη μόνο οι χρονοεξαρτώμενες μεταβλητές, δηλαδή, οι μετατοπίσεις, οι παραμορφώσεις και οι τάσεις. Δεδομένου ότι τα εφορμοζόμενα φορτία είναι κάποιου είδους συναρτήσεις του χρόνου, προστίθενται στο δεύτερο μέρος της εξίσωσης κάμψης πλακών, η οποία γίνεται

$$p(x, y, t) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, y, t) \quad 2.2.1$$

όπου τα p, w χωροχρονικές συναρτήσεις, ρ η πυκνότητα της μάζας του υλικού και h το πάχος της πλάκας.

Στην περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, ο παράγοντας $p(x, y, t)$ προκαλεί την δυναμική απόκριση.

Επομένως η διαφορική εξίσωση της εξαναγκασμένης κίνησης πλακών, χωρίς απόσβεση παίρνει τη μορφή

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x, y, t) = p(x, y, t) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, y, t) \quad 2.2.2$$

Παρακάτω αναλύεται πλήρως η περίπτωση των ελεύθερων ταλαντώσεων στοιχείων πλακών, καθώς αυτή η θεωρία χρησιμοποιήθηκε και στην επίλυση των εφαρμογών.

2.2.1 Ελεύθερες ταλαντώσεις ορθογωνικών πλακών

Έστω ορθογωνική πλάκα με τυχαίες στηρίξεις, υπό εγκάρσια επιφανειακά φορτία, κατανεμημένα στην επιφάνειά της. Τα φορτία προκαλούν την ανάπτυξη ταχυτήτων και μετατοπίσεων των μορίων, της μέσης επιφάνειας της πλάκας, κάθετες στο αρχικά απαραμόρφωτο μέσο επίπεδο. Σε δεδομένη στιγμή $t = 0$, αφαιρούνται τα εξωτερικά φορτία. Το πλέον αφόρτιστο σώμα έχει αποκτήσει αρχική μετατόπιση και ταχύτητα και αρχίζει να ταλαντώνεται. Η μέση επιφάνεια παραμορφώνεται κάθετα με την αρχική επίπεδη μορφή της και ως αποτέλεσμα η πλάκα καμπυλώνεται.

Ο όρος $p(x, y, t)$ τίθεται ίσος με το μηδέν και η εξίσωση 2.2.2 γίνεται

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, y, t) = 0 \quad 2.2.3$$

Η 2.2.3 είναι η βασική ομογενής, μερική διαφορική εξίσωση, τέταρτης τάξης, για ελεύθερες, γραμμικές ταλαντώσεις πλακών, χωρίς απόσβεση. Ο όρος της μετατόπισης w πρέπει να ικανοποιεί όλες τις συνοριακές συνθήκες της πλάκας και τις αρχικές συνθήκες. Οι αρχικές συνθήκες εν περιπτώσει είναι

$$\text{Για } t = 0 : \quad w = w_0(x, y) \quad 2.2.4$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = v_0(x, y) \quad 2.2.5$$

όπου w_0 και v_0 είναι η αρχική μετατόπιση και η αρχική ταχύτητα αντίστοιχα.

Η λύση ενός προβλήματος ελεύθερης ταλάντωσης μίας πλάκας είναι ουσιαστικά ο καθορισμός των μετατοπίσεων αυτής, σε κάθε σημείο και για κάθε χρονική στιγμή. Ωστόσο το σημαντικότερο μέρος είναι ο προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών της. Τότε η εξίσωση 2.2.3 γίνεται πρόβλημα ιδιοτιμών. Οι τιμές των προαναφερθέντων μεγεθών είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό των δυναμικών τάσεων που προκαλούνται από ένα μεταβλητό φορτίο. Η λύση της 2.2.3 μπορεί να παρθεί μέσω διαφόρων αναλυτικών και προσεγγιστικών μεθόδων. Παρακάτω παρουσιάζεται η επίλυση με την γενική αναλυτική μέθοδο Fourier.

Θεωρείται λύση της μορφής

$$\mathbf{w}(x, y, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \mathbf{W}(x, y) \quad 2.2.6$$

όπου $\mathbf{W}(x, y)$ οι συναρτήσεις σχήματος που περιγράφουν τις ιδιομορφές της ταλάντωσης και ω η ιδιοσυχνότητα της πλάκας με περίοδο T . Η ιδιοσυχνότητα συνδέεται με την περίοδο μέσω της σχέσης $\omega = 2\pi/T$.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση 2.2.6 στην 2.2.3, προκύπτει

$$D\nabla^2\nabla^2\mathbf{W}(x, y) - \omega^2\rho h\mathbf{W} = 0 \quad 2.2.7$$

Απαιτώντας οι συναρτήσεις σχήματος \mathbf{W} να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες και να είναι λύσεις της εξίσωσης 2.2.7, συνεπάγεται ένα σύστημα ομογενών εξισώσεων για τις άγνωστες σταθερές. Το σύστημα αυτό έχει λύσεις διάφορες του μηδενός, μόνο στην περίπτωση που η ορίζουσα $\Delta(\omega)$ είναι ίση με το μηδέν. Έτσι προκύπτει η εξίσωση συχνοτήτων ή αλλιώς η χαρακτηριστική εξίσωση του προβλήματος, η οποία είναι

$$\Delta(\omega) = 0 \quad 2.2.8$$

Η εξίσωση αυτή έχει άπειρο αριθμό λύσεων, που συνιστούν το φάσμα συχνοτήτων μιας δοσμένης πλάκας. Στη γενική περίπτωση, οι συχνότητες αυτές εξαρτώνται από δύο παραμέτρους, m και n ($m = 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$). Η χαμηλότερη συχνότητα αποκαλείται θεμε-

λιώδης. Για κάθε συχνότητα ω_{nm} υπάρχει μια αντίστοιχη συνάρτηση σχήματος $\mathbf{W}_{nm}(x, y)$, που στη βάση της ομογενούς εξίσωσης, καθορίζεται από έναν σταθερό πολλαπλασιαστή. Ο πολλαπλασιαστής αυτός μπορεί να θεωρηθεί ίσος με τη μονάδα.

Στην περίπτωση της ορθογωνικής πλάκας με απλές στηρίξεις, καθ' όλο το μήκος των πλευρών της, οι συναρτήσεις σχήματος λαμβάνονται από την εξίσωση

$$\mathbf{W}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad 2.2.9$$

όπου a και b οι διαστάσεις της πλάκας και C_{nm} το πλάτος της ταλάντωσης για κάθε τιμή m και n . Για ειδικές περιπτώσεις δυναμικού φορτίου ο παράγοντας C_{nm} προκύπτει από συγκεκριμένες σχέσεις. Ειδικότερα, για ομοιόμορφη επιφανειακή φόρτιση της μορφής $p \sin \Omega t$, είναι $C_{nm} = \frac{16p}{\pi^2 nm}$ όπου $n = m = 1, 3, 5, \dots, \infty$.

Αντικαθιστώντας την 2.2.9 στην 2.2.7 παράγεται η ομογενής αλγεβρική εξίσωση

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{\omega^2 \rho h}{D} = 0 \quad 2.2.10$$

Η λύση αυτής προς ω δίνει τις ιδιοσυχνότητες του προβλήματος.

$$\omega_{nm} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad 2.2.11$$

Η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα υπολογίζεται για $n = m = 1$.

Συγκεκριμένα να την περίπτωση τετραγωνικής πλάκας διαστάσεων a , η εξίσωση 2.2.11 γίνεται

$$\omega_{nm} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} (m^2 + n^2) \quad 2.2.12$$

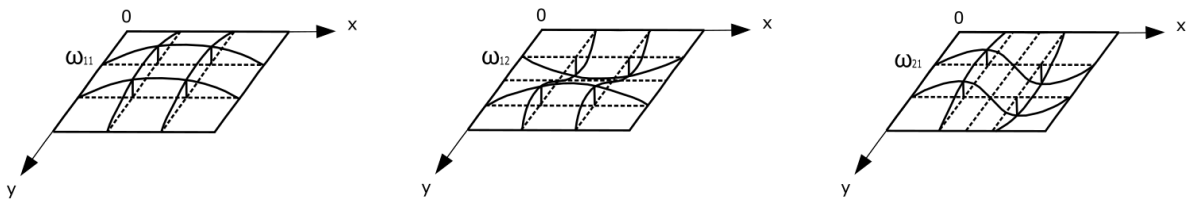
και η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα είναι

$$\omega_{11} = \frac{2\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad 2.2.13$$

Η θεμελιώδης ιδιομορφή του προβλήματος καμπτικής ταλάντωσης είναι ένα απλό σφαιροειδές κύμα κατά την x και την y διεύθυνση. Τέλος, επισημαίνεται ότι η μέγιστη σημειακή μετατόπιση της πλάκας είναι στο κέντρο της.

2.3 Εισαγωγή στα στοιχεία κελυφών

Τα κελύφη, όπως ήδη επισημάνθηκε, κατέχουν πρωταρχικό ρόλο στον τομέα της μηχανικής



(i) Ταλάντωση πλάκας με τη θεμελιώδη ιδιοσυχνότητα ω_{11}

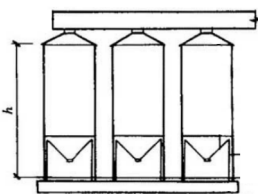
(ii) Ταλάντωση πλάκας με ιδιοσυχνότητα ω_{12}

(iii) Ταλάντωση πλάκας με ιδιοσυχνότητα ω_{21}

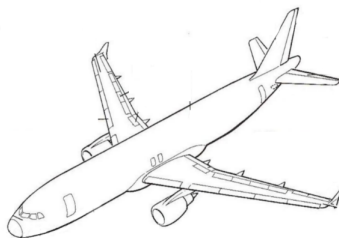
Σχήμα 11: Πλάκα σε ταλάντωση υπό τις συχνότητες ω_{11} , ω_{12} και ω_{21} . Η πλάκα στην 11i εμφανίζει μία μέγιστη εκτροπή, στο κέντρο της, ενώ στις 11ii, 11iii εμφανίζονται δύο.

νικής λόγω της υπεροχής τους σε σχέση με άλλα δομικά στοιχεία. Μερικά παραδείγματα χρήσης κελυφών στις κατασκευές, είναι μεγάλου ανοίγματος σκεπές και τρούλοι, δεξαμενές, κελύφη διατήρησης πυρηνικής ενέργειας και αρχιτεκτονικοί θόλοι. Η ευρεία χρήση τους οφείλεται στα παρακάτω πλεονεκτήματά τους.

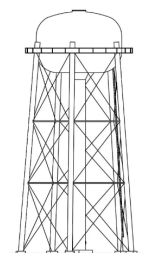
1. Μεγάλη ανοχή εξωτερικών φορτίων, λόγω της καμπυλότητάς τους.
2. Υψηλή συγκράτηση δύναμης και στατικής ακαιρεότητας.
3. Υψηλός λόγος δύναμης προς βάρος¹
4. Πολύ μεγάλη στιβαρότητα.
5. Εξοικονόμηση χώρου και κατ' επέκταση κεφαλαίου.
6. Υψηλή αισθητική αρχιτεκτονική αξία.



(i) Κυλινδρικά σιλό



(ii) Αεροσκάφος



(iii) Ανυψωμένη δεξαμενή νερού

Σχήμα 12: Παραδείγματα χρήσης κελυφών σε διάφορων ειδών κατασκευές

¹Ο λόγος αυτός χρησιμοποιείται συχνά ως κριτήριο για την αποτελεσματικότητα ενός στοιχείου. Όσο μεγαλύτερη η τιμή του, τόσο πιο βέλτιστο το δομικό στοιχείο.

2.3.1 Μηχανισμός ανάληψης φορτίων κελυφών

Τα κελύφη, μοιράζονται κάποια κοινά χαρακτηριστικά με τα στοιχεία δοκού και πλάκας. Ωστόσο, το κάθε δομικό στοιχείο έχει το δικό του τρόπο ανάληψης φορτίων. Θεωρούνται γενίκευση της πλάκας, όπως το καμπύλο δοκάρι θεωρείται γενίκευση του ευθείου. Είναι γνωστό, πως η υπεροχή του καμπύλου δοκαριού σε σχέση με το ευθύ, έγκειται κυρίως στην αντίστασή του στα εγκάρσια φορτία με την ανάπτυξη δύναμης αξονικής N , ελαχιστοποιώντας έτσι την διατμητική δύναμη V και την καμπτική ροπή M . Ανάλογα με τη μορφή της καμπύλης, η καμπτική ροπή διακυμαίνεται, έως και μηδενίζεται.

Ένα κέλυφος αντιστέκεται στα εγκάρσια φορτία με παρόμοιο τρόπο με αυτό του καμπύλου δοκαριού, αναπτύσσοντας εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις. Τα μεγέθη αυτά ονομάζονται μεμβρανικές τάσεις και είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο πάχος του στοιχείου. Παρόλο που οι διατμητικές δυνάμεις, οι καμπτικές και οι στρεπτικές ροπές είναι παρούσες στη γενική περίπτωση φόρτισης, οι μεμβρανικές τάσεις είναι ο κύριος μηχανισμός αντίστασης των κελυφών. Συνεπώς, σε αναλογία με τα καμπύλα δοκάρια, τα κελύφη παρουσιάζουν υπεροχή έναντι των στοιχείων πλακών, με μια ειδοποιό διαφορά: ένα τοξοτό δοκάρι δεδομένης μορφής, υποστηρίζει μόνο ένα καθορισμένο φορτίο χωρίς κάμψη, ενώ ένα κέλυφος γνωστής γεωμετρίας, με την προϋπόθεση ότι οι πλευρές του στηρίζονται κατάλληλα, έχει κατά κανόνα την ίδια ιδιότητα για ένα ευρύτερο φάσμα φορτίων.

Λόγω της καμπυλότητας των κελυφών, αυτά αποκτούν χωρική ακαμψία, η οποία τους προσδίδει την ικανότητα ανάληψης υψηλών φορτίων. Έτσι μπορούν να ισορροπήσουν εγκάρσια φορτία, με τις προαναφερθείσες μεμβρανικές τάσεις, χωρίς ταυτόχρονη κάμψη.

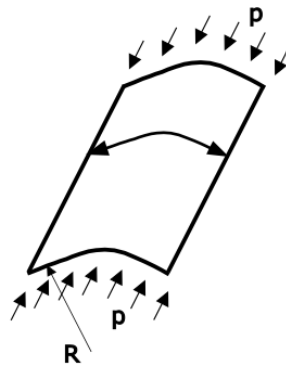
Η κάμψη των κελυφών δεν παρουσιάζει κάποιο πλεονέκτημα και το ιδανικό θα ήταν να αποφεύγεται. Στις περιπτώσεις που υπάρχει όμως, περιορίζεται σε περιοχές κάποιου είδους ασυνέχειας, όπως στηρίξεις κ.ο.κ. Μακριά από αυτούς του γεωμετρικούς τόπους, οι καμπτικές τάσεις μειώνονται ραγδαία. Επισημαίνεται, ότι όσο πιο λεπτό είναι το κέλυφος, τόσο πιο γρήγορα μειώνονται οι τάσεις αυτές.

Μία άλλη σημαντική μορφή παραμόρφωσης των κελυφών είναι ο λυγισμός. Για να αποφευχθεί ο λυγισμός, μια κελυφωτή κατασκευή θα πρέπει να σχεδιαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε το μεγαλύτερο κομμάτι της να είναι υπό εφελκυσμό ².

2.4 Θεμελιώδεις αρχές και ορισμοί των κελυφών

Ο όρος κέλυφος αναφέρεται σε στοιχεία που περικλείονται από δύο καμπύλες επιφάνειες, η απόσταση μεταξύ των οποίων είναι μικρή σε σχέση με τις υπόλοιπες διαστάσεις τους. Η απόσταση αυτή είναι το πάχος του κελύφους h . Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που βρίσκονται ακριβώς στη μέση αυτών των δύο επιφανειών ορίζει την μέση επιφάνεια του

²Ο λυγισμός προκαλείται από έντονες θλιπτικές δυνάμεις, σε συνδυασμό με κάποιους άλλους παράγοντες, όπως το πάχος σε σχέση με το μήκος του δομικού στοιχείου κ.λ.π.



Σχήμα 13: Λυγισμός κελύφους

στοιχείου, κατ' αντιστοιχία με το μέσο επίπεδο των στοιχείων πλακών. Ένα κέλυφος μπορεί να έχει μεταβλητό πάχος κατά το μήκος του. Στην παρούσα εργασία εξετάστηκαν μόνο περιπτώσεις κελυφών σταθερού πάχους.

Τα κελύφη έχουν όλα τα χαρακτηριστικά των πλακών που αναφέρθηκαν προηγουμένως, με ένα επιπλέον, την καμπυλότητα. Η καμπυλότητα είναι ο καθοριστικός τους παράγοντας, καθώς αυτή καθορίζει τη συμπεριφορά τους υπό οποιοδήποτε επιβληθέν φορτίο. Ανάλογα με την καμπυλότητα τα κελύφη διακρίνονται σε κυλινδρικά (κυκλικά και μη), κωνικά, σφαιρικά, ελλειψοειδή, παραβολοειδή, δακτυλιοειδή και υπερβολικά παραβολοειδή.

Αφού τα στοιχεία πλακών μπορούν να θεωρηθούν κελύφη με μηδενική καμπυλότητα, είναι αυτονόητο πως και οι θεωρίες κελυφών προκύπτουν από κλασική θεωρία πλακών, για την οποία έγινε λόγος προηγουμένως.

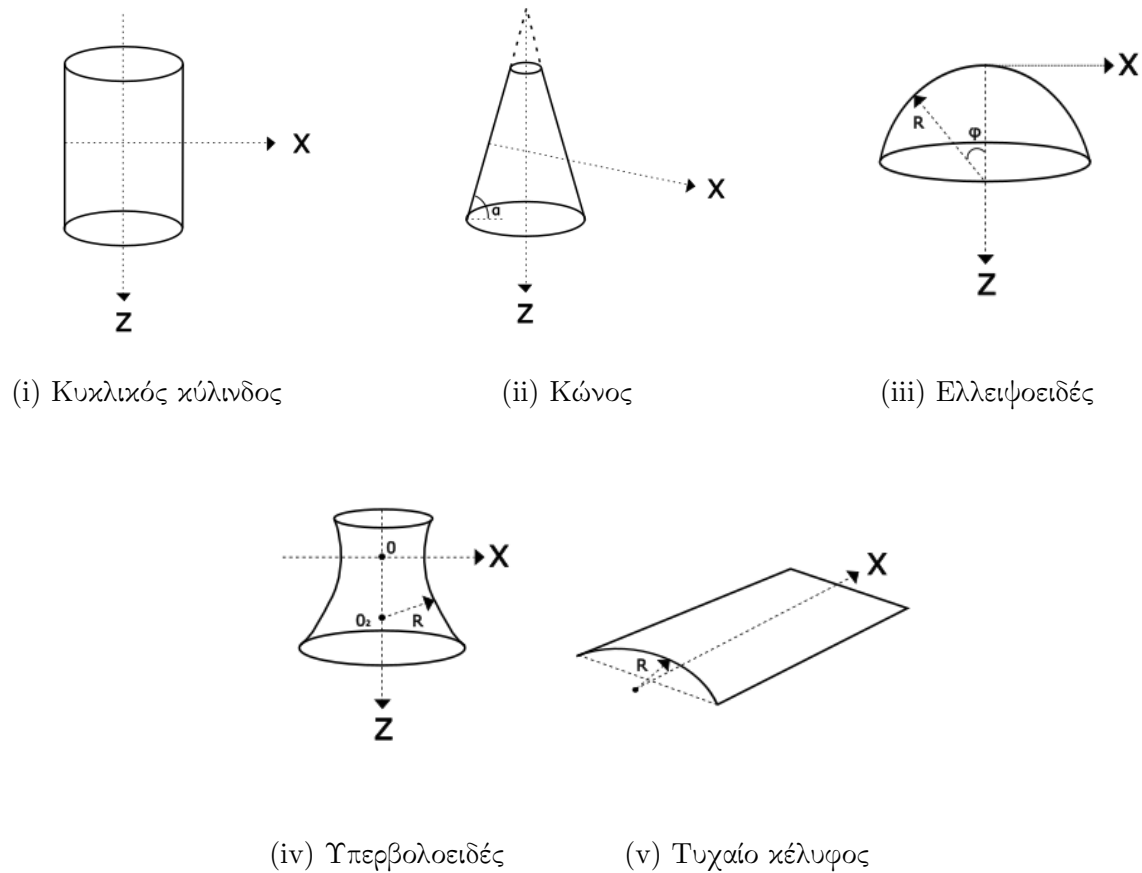
Τα κελύφη διαχωρίζονται επίσης σε δύο βασικές κατηγορίες ανάλογα με την τιμή του λόγου του πάχους τους προς την καμπυλότητά τους, h/R .

1. Λεπτά κελύφη, για τιμές του λόγου $\max \left(\frac{h}{R} \right) \leq \frac{1}{20}$
2. Παχιά κελύφη, για τιμές του λόγου $\max \left(\frac{h}{R} \right) \geq \frac{1}{20}$

Το παραπάνω κριτήριο είναι ένας αδρομερής διαχωρισμός. Στην πραγματικότητα η κατάταξη τους εξαρτάται και από άλλους γεωμετρικούς παράγοντες, όπως οι συνοριακές συνθήκες, τα εξωτερικά φορτία κ.λ.π. Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές, ο λόγος h/R κυμαίνεται στο διάστημα $\frac{1}{1000} \leq \frac{h}{R} \leq \frac{1}{20}$, δηλαδή στο εύρος των λεπτών κελυφών.

2.4.1 Γραμμικές θεωρίες στοιχείων κελύφους

Με την πάροδο του χρόνου, έχουν αναπτυχθεί διάφορες θεωρίες ανάλυσης, η ακρίβεια των οποίων εξαρτάται από το βαθμό απλοποίησης των εξισώσεων ελαστικότητας. Οι απαραίτητες



Σχήμα 14: Διάφορα είδη κελυφών

προσεγγίσεις για την ανάπτυξη μιας επαρκούς θεωρίας κελυφών, έχουν αποτελέσει το κύριο θέμα πολλών ερευνών. Οι δύο πιο δημοφιλείς θεωρίες σήμερα είναι η προαναφερθείσα Kirchhoff - Love και η θεωρία Reissner - Mindlin. Και οι δύο βασίζονται στις έννοιες της γραμμικής ελαστικότητας. Προσφέρουν επαρκή αποτελέσματα όσο αφορά τις τάσεις και τις παραμορφώσεις, δεδομένου ότι αναπτύσσονται μικρές και ελαστικές παραμορφώσεις. Μικρές χαρακτηρίζονται οι παραμορφώσεις για τις οποίες οι εξισώσεις ισορροπίας ενός στοιχείου είναι ίδιες στην παραμορφωμένη και στην απαραμόρφωτη κατάσταση και για τις οποίες ισχύει ο γνωστός νόμος του Hooke.

Τα κελύφη είναι τριδιάστατα σώματα, συνεπώς η ανάλυσή τους είναι πιο περίπλοκη από αυτή ενός προβλήματος διδιάστατης πλάκας. Για το λόγο αυτό, εφαρμόζεται η εναλλακτική, απλοποιημένη μέθοδος, σύμφωνα με την οποία ένα τέτοιο τριδιάστατο πρόβλημα, μπορεί να λυθεί αναλύοντας μόνο τη μέση επιφάνειά του. Έτσι, μαζί με κάποιες βασικές υποθέσεις, ένα λεπτό κέλυφος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα διδιάστατο σώμα.

Η βασική διαφορά μεταξύ των δύο θεωριών είναι ότι η δεύτερη, λαμβάνει υπόψη τη διατμητική παραμόρφωση, ενώ η πρώτη όχι. Τα δύο διαφορετικά μοντέλα προσδιορίζονται από δύο διαφορετικά σύνολα εξισώσεων. Αποτελεί κοινή λογική ότι ανεξαρτήτως ποιας θεωρίας πρόκειται να χρησιμοποιηθεί, οι εξισώσεις αυτές απλοποιούνται σημαντικά με τη

μείωση των διαστάσεων του προβλήματος.

Για παχιά κελύφη είναι πιο αποτελεσματική η θεωρία Reissner – Mindlin η οποία λαμβάνει υπόψη της διατμητικές παραμορφώσεις, ενώ για λεπτά κελύφη εφαρμόζεται η θεωρία Kirchhoff – Love όπου οι διατμητικές παραμορφώσεις αμελούνται. Σε περιπτώσεις εξαιρετικά λεπτών κελυφών ($R/t < 1000$), συνήθως οι παραμορφώσεις δε μπορούν να περιγραφούν με γραμμική συμπεριφορά και απαιτείται διεξαγωγή μη γραμμικής ανάλυσης.

Πρακτικά οι περισσότερες κελυφωτές κατασκευές ανήκουν στο εύρος λεπτές έως πολύ λεπτές, οπότε η πλειονότητα των αναλυτικών επιλύσεων είναι βασισμένες στην θεωρία Kirchhoff – Love. Παρά το γεγονός αυτό, θεωρία Reissner – Mindlin είναι πιο διαδεδομένη στους υπάρχοντες κώδικες πεπερασμένων στοιχείων. Αυτό συμβαίνει γιατί με την θεωρία αυτή απαιτείται συνέχεια τάξης C^0 μεταξύ των στοιχείων, πράγμα που επιτρέπει την χρήση πολύ απλών συναρτήσεων σχήματος για την ανάλυση. Ωστόσο αυτά τα χαμηλής τάξης στοιχεία παρουσιάζουν διάφορα φαινόμενα “κλειδώματος” (locking effects), τα οποία απαιτούν μεγάλη προσπάθεια για να παρακαμφθούν. Για την διεξαγωγή ανάλυσης σύμφωνα με την θεωρία Kirchhoff – Love απαιτείται C^1 συνέχεια μεταξύ στοιχείων, κάτι το οποίο είναι δύσκολο πραγματοποιήσιμο, ειδικά όταν πρόκειται για γεωμετρίες ελεύθερου σχήματος.

Τέλος, πριν αναλυθούν περαιτέρω οι δύο αυτές θεωρίες, θεωρείται σκόπιμο να γίνουν κάποιες αξιολογικές αναφορές και ορόσημα της εξέλιξης της ανάλυσης κελυφών.

Ο πρώτος ερευνητής που κατάφερε να παρουσιάσει μια επιτυχή προσεγγιστική θεωρία κελυφών, βασισμένη στην κλασική γραμμική ελαστικότητα, ήταν ο Love (Kagan et al. 2003), ο οποίος χρησιμοποίησε τις θεωρίες του Kirchhoff. Η θεωρία αυτή αναφέρεται συχνά ως προσεγγιστική θεωρία κελυφών πρώτης τάξης. Ο Reissner ανέπτυξε τη γραμμική θεωρία λεπτών κελυφών, βελτιώνοντας την θεωρία του Love (Reissner 1941). Ο Sanders ήταν ένας ακόμα ερευνητής που ανέπτυξε μια βελτιωμένη θεωρία, βασιζόμενος στην πρωταρχική του Love (Sanders Jr 1959). Ο Timoshenko παρουσίασε επίσης μια θεωρία λεπτών κελυφών, αρκετά παρόμοια με αυτή του Love. Οι Lur'ye, Flugge και Byrne ανέπτυξαν ανεξάρτητα, την προσεγγιστική θεωρία κελυφών δεύτερας τάξης. Μία άλλη έκδοση αυτής παρουσιάστηκε από τον Novozhilov (Novozhilov 1964). Σημαντικές προσθήκες στη θεωρία δεύτερας τάξης έγιναν από τους Vlasov (Vlasov n.d.), Reissner, Naghdi (Naghdi 1957) και άλλους.

2.4.2 Θεωρία κελυφών Kirchhoff - Love

Η θεωρία κελυφών Kirchhoff - Love βασίζεται στις παρακάτω βασικές παραδοχές:

1. Επίπεδες επιφάνειες, κάθετες στην μεσαία επιφάνεια, παραμένουν ευθείες και κάθετες σε αυτήν μετά την παραμόρφωση του στοιχείου. Δεν υποβάλλονται σε εφελκυσμό. Η παραδοχή αυτή υπονοεί πως οι παραμορφώσεις στην κατεύθυνση μιας καθέτου της μεσαίας επιφάνειας, εξαλείφονται.
2. Η εγκάρσια ορθή συνιστώσα της τάσης είναι μικρή, αναλογικά με τις υπόλοιπες ορθές

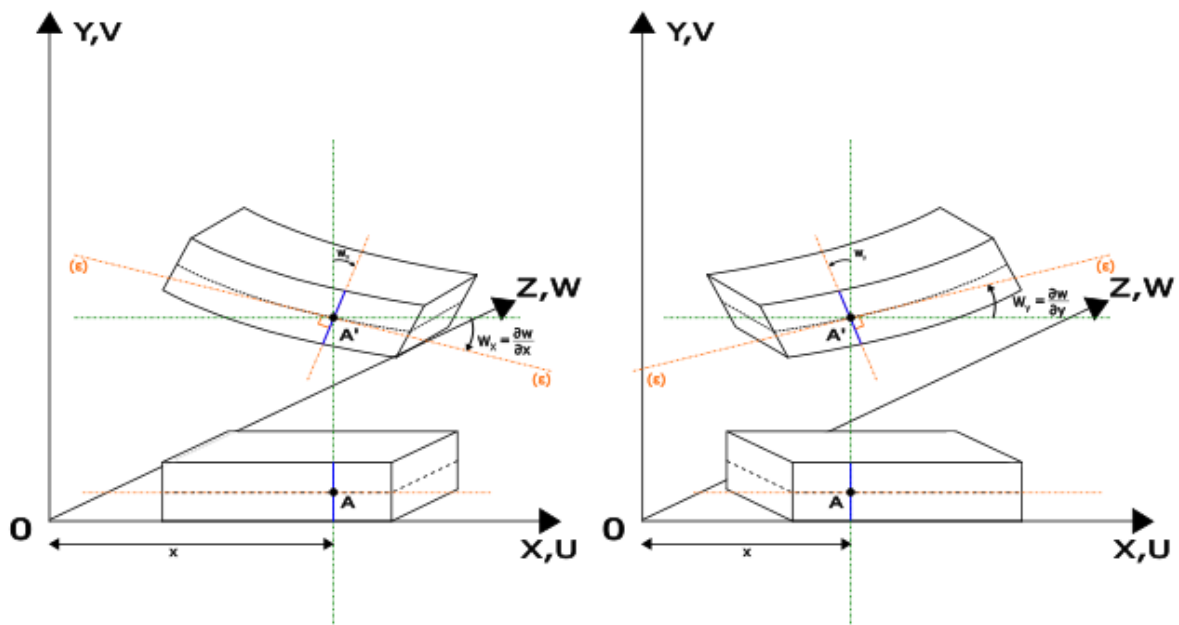
τάσεις και μπορεί να αμελείται.

3. Το πάχος του κελύφους είναι μικρό σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις του.
4. Οι μετατοπίσεις ενός τυχαίου σημείου του στοιχείου είναι μικρές αναλογικά με το πάχος του και οι στροφές της μέσης επιφάνειας είναι μικρές συγκριτικά με τη μονάδα. Απόρροια αυτού είναι η παράβλεψη των μετατοπίσεων και των μερικών παραγώγων τους, στις εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση, ως μικρές ποσότητες, δευτέρας τάξης.
5. Όλοι οι υπολογισμοί γίνονται στην αρχική απαραμόρφωτη εικόνα του κελύφους και όλες οι διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικές.

Σύμφωνα με αυτές τις παραδοχές, οι παραμορφώσεις κατά μήκος του όγκου ενός κελύφους, καθορίζονται από τις παραμορφώσεις και τις αλλαγές καμπυλότητας της μεσαίας επιφάνειας. Επομένως, το τριδιάστατο πρόβλημα κελύφους μετατρέπεται σε διδιάστατο, με την μεσαία επιφάνεια να αντιπροσωπεύει όλο το στοιχείο.

Η γραμμική θεωρία λεπτών κελυφών περιλαμβάνει τρία σύνολα εξισώσεων, τις κινηματικές, τις καταστατικές και τις εξισώσεις ισοροπίας.

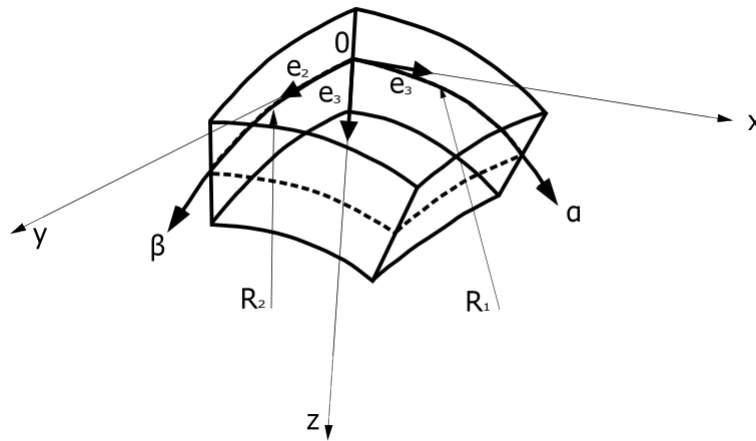
Σημειώνεται ξανά πως σε όλες τις εφαρμογές το υλικό των στοιχείων είναι ομογενές, ισότροπο και υπακούει στον νόμο του Hooke.



Σχήμα 15: Διατομή σε πλάκα Kirchhoff - Love

Κινηματικές εξισώσεις

Πριν δοθούν οι κινηματικές σχέσεις ενός κελυφωτού στοιχείου πρέπει να οριστούν τα συστήματα συντεταγμένων αυτού. Για τη μέση επιφάνεια, ορίζεται ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων α και β , του οποίου οι καμπύλες α, β ταυτίζονται με τις καμπύλες της μέσης επιφάνειας. Πέρα από το καθολικό Καρτεσιανό σύστημα, ορίζεται και ένα τοπικό σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων $Oxyz$. Οι άξονες x, y συμπίπτουν με τις διευθύνσεις των εφαπτομένων των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων α, β , σε ένα σημείο O της μέσης επιφάνειας και ο άξονας z έχει κατεύθυνση της καθέτου της επιφάνειας αυτής, στο ίδιο σημείο.



Σχήμα 16: Φορά αξόνων και μοναδιαίων διανυσμάτων στη μέση επιφάνεια κελύφους

Ένα τυχαίο σημείο M της अपαραμόρφωτης μέσης επιφάνειας, λόγω της παραμόρφωσης του στοιχείου, μεταφέρεται στο σημείο M_1 της μέσης επιφάνειας. Η μετατόπιση αυτή ορίζεται από ένα διάνυσμα D . Οι προβολές του D στις αξονικές κατευθύνσεις των x, y και z ορίζονται ως u, v και w , όπου u και v οι εφαπτομενικές μετατοπίσεις και w η κάθετη μετατόπιση.

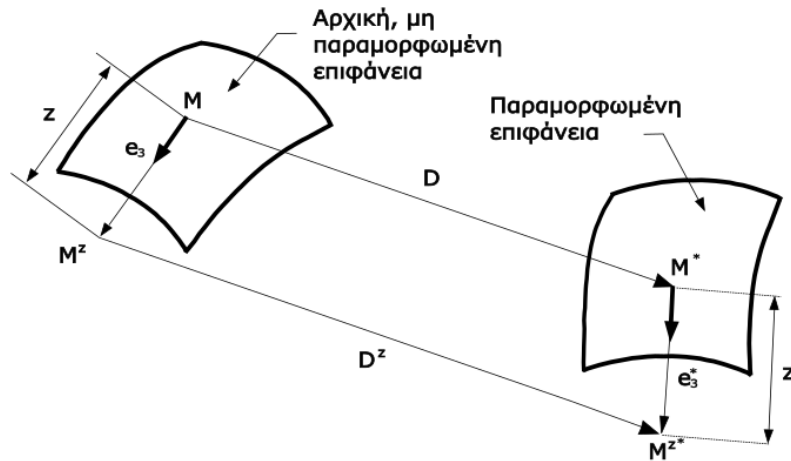
Έστω εσωτερικό σημείο του κελύφους M^z , σε απόσταση z από το σημείο M της μέσης επιφάνειας. Το διάνυσμα μετατοπίσεών του είναι D^z και οι συνιστώτες αυτού κατά μήκος των αξόνων x, y, z είναι u^z, v^z και w^z , οι οποίες εκφράζονται ως εξής:

$$u^z = u - z\theta_1 \quad 2.4.1$$

$$v^z = v - z\theta_2 \quad 2.4.2$$

$$w^z = w \quad 2.4.3$$

όπου θ_1, θ_2 οι γωνίες στροφής της καθέτου της μέσης επιφάνειας ως προς τις εφαπτόμενες



Σχήμα 17: Κίνηση τυχαίου σημείο M , της μέσης επιφάνειας κελύφους

των α και β αντίστοιχα. Δίνονται από την σχέση

$$\theta_1 = \frac{u}{R_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad 2.4.4$$

$$\theta_2 = \frac{v}{R_2} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad 2.4.5$$

όπου R_1 και R_2 οι ακτίνες καμπυλότητας της μέσης επιφάνειας στις δύο διευθύνσεις της και A και B οι παραμέτροι Lamè³.

Ορίζονται ως ϵ_1, ϵ_2 οι γραμμικές συνιστώσες της παραμόρφωσης, στις διευθύνσεις α και β αντίστοιχα και ως γ_{12} η διατμητική παραμόρφωση της μέσης επιφάνειας. Οι συνιστώσες αυτές εκφράζονται σε όρους των συνιστώσεων της μετατόπισης u, v και w , που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Είναι

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v - \frac{w}{R_1} \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u - \frac{w}{R_2} \\ \gamma_{12} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) \end{aligned} \quad 2.4.6$$

Γενικεύοντας αυτές τις σχέσεις για ένα οποιοδήποτε σημείο του στοιχείου, το οποίο απέχει

³Οι παράμετροι Lamè στην μηχανική συνεχών σωμάτων, είναι δύο παράμετροι που εξαρτώνται από το υλικό και οι οποίες χρησιμοποιούνται στις εξισώσεις τάσεων - παραμορφώσεων.

απόσταση z από τη μέση επιφάνεια, με $-h/2 \leq z \leq h/2$ προκύπτουν:

$$\epsilon_1^z = \frac{1}{1 - \frac{z}{R_1}} (\epsilon_1 + z\chi_1) \quad 2.4.7$$

$$\epsilon_2^z = \frac{1}{1 - \frac{z}{R_2}} (\epsilon_2 + z\chi_2) \quad 2.4.8$$

$$\gamma_{12}^z = \frac{1}{1 - \frac{z}{R_1}} (\omega_1 + z\tau_1) + \frac{1}{1 - \frac{z}{R_2}} (\omega_2 + z\tau_2) \quad 2.4.9$$

όπου

$$\begin{aligned} \chi_1 &= - \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial B} \theta_2 \right) = \\ &= - \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{R_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{v}{R_2} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right] \\ \chi_2 &= - \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta_1 \right) = \\ &= - \left[\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v}{R_2} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{R_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right] \end{aligned} \quad 2.4.10$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \\ \omega_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \end{aligned} \quad 2.4.11$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= - \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \theta_1 \right) \\ \tau_2 &= - \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta_2 \right) \end{aligned} \quad 2.4.12$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\tau_1 - \frac{\omega_2}{R_1} = \tau_2 - \frac{\omega_1}{R_2} \quad 2.4.13$$

Εισάγεται επίσης ο όρος:

$$\chi_{12} = \tau_1 - \frac{\omega_2}{R_1} = \tau_2 - \frac{\omega_1}{R_2} \quad 2.4.14$$

Αντικαθιστώντας τις 2.4.11 και 2.4.12 στην 2.4.14 προκύπτει:

$$\begin{aligned} \chi_{12} = & -\frac{1}{R_1} \left(\frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) - \\ & - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \end{aligned} \quad 2.4.15$$

Οι όροι χ_1, χ_2 αντιστοιχούν στις καμπυλότητες, γνωστές από τη θεωρία πλακών. Εφόσον πρόκειται για κελύφη (υπάρχει δηλαδή αρχική καμπυλότητα) οι όροι αυτοί αντικαθιστώνται από όρους που εκφράζουν τις αλλαγές στις καμπυλότητες της μέσης επιφάνειας, στις διευθύνσεις α και β . Ο παράγοντας γ_{12} αντιπροσωπεύει τη συστροφή της μέσης επιφάνειας.

Τελικά παράγεται η σχέση

$$\gamma_{12}^z = \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{R_1}\right) \left(1 - \frac{z}{R_2}\right)} \left\{ \gamma_{12} \left(1 - \frac{z^2}{R_1 R_2}\right) + 2z\chi_{12} \left[1 - \frac{z}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right] \right\} \quad 2.4.16$$

Οι εξισώσεις 2.4.7 και 2.4.16, αποτελούν τις συνιστώσες της παραμόρφωσης στο πάχος του στοιχείου κελύφους, για ένα τυχαίο σημείο. Λαμβάνοντας υπόψη πως στις περισσότερες εφαρμογές της μηχανικής ο λόγος h/R_{min} (όπου R_{min} η μικρότερη ακτίνα καμπυλότητας της μέσης επιφάνειας) είναι μικρότερος της τιμής $1/50$, ο λόγος z/R_{min} είναι μικρότερος του 1% και οι παραπάνω σχέσεις απλοποιούνται. Τελικά η διατμητική παραμόρφωση και οι δύο συνιστώσες της ορθής παραμόρφωσης του τυχαίου σημείου είναι

$$\begin{aligned} \epsilon_1^z &= \epsilon_1 + z\chi_1 \\ \epsilon_2^z &= \epsilon_2 + z\chi_2 \\ \gamma_{12}^z &= \gamma_{12} + z\chi_{12} \end{aligned} \quad 2.4.17$$

Είναι εμφανές πως οι παραπάνω όροι εξαρτώνται από τις εντός επιπέδου παραμορφώσεις της μέσης επιφάνειας, $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}$, οι οποίες εκφράζονται από τις σχέσεις 2.4.6. Επιπλέον επηρεάζονται από τις αλλαγές στην καμπυλότητα χ_1, χ_2 και τη συστροφή χ_{12} , των οποίων οι σχέσεις είναι οι 2.4.10 και 2.4.15 αντίστοιχα.

Λόγω της παραδοχής Kirchhoff ισχύει επίσης

$$\epsilon_3 = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0 \quad 2.4.18$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις 2.4.6 τιμές παραμέτρων $A = B = 1, R_1 = R_2 = \infty$ και $\alpha = x, \beta = y$ προκύπτουν οι σχέσεις μετατοπίσεων - παραμορφώσεων της θεωρίας της

κάμψης των επίπεδων πλακών.

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_2 &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{12} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{2.4.19}$$

Κάνοντας χρήση των παραπάνω εξισώσεων λύνεται ένα διδιάστατο πρόβλημα, στη θέση του αρχικού τριδιάστατου.

Καταστατικές εξισώσεις

Οι καταστατικές εξισώσεις για ένα τριδιάστατο ιστροπικό σώμα δίνονται από τις εξισώσεις 4.1.6, 4.1.7. Με προσαρμογή αυτών για τις συνιστώσες τάσεων της παρούσας παραγράφου προκύπτουν

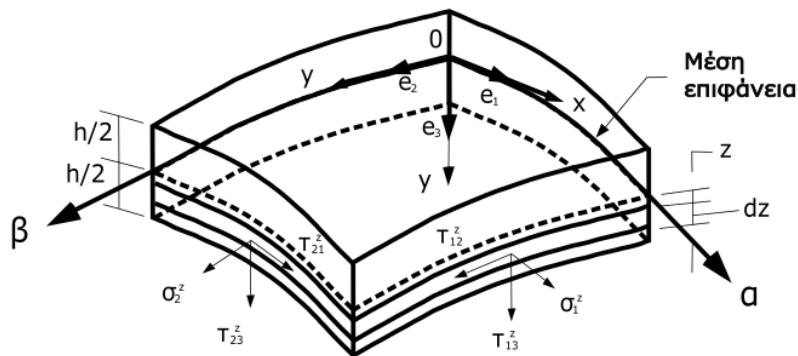
$$\begin{aligned}\epsilon_1^z &= \frac{1}{E} [\sigma_1^z - \nu (\sigma_2^z - \sigma_3^z)] \\ \epsilon_2^z &= \frac{1}{E} [\sigma_2^z - \nu (\sigma_1^z - \sigma_3^z)] \\ \epsilon_3^z &= \frac{1}{E} [\sigma_3^z - \nu (\sigma_1^z - \sigma_2^z)]\end{aligned}\tag{2.4.20}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{12}^z &= \frac{\tau_{12}^z}{G} \\ \gamma_{13}^z &= \frac{\tau_{13}^z}{G} \\ \gamma_{23}^z &= \frac{\tau_{23}^z}{G}\end{aligned}\tag{2.4.21}$$

Όπου σ_1^z, σ_2^z και σ_3^z οι ορθές τάσεις που δρουν σε επίπεδα των οποίων τα μοναδιαία διανύσματα είναι παράλληλα στις διευθύνσεις α, β και z αντίστοιχα και $\epsilon_1^z, \epsilon_2^z$ και ϵ_3^z οι γραμμικές παραμορφώσεις στις ίδιες διευθύνσεις. Οι συνιστώσες τ_{12}^z, τ_{13}^z και τ_{23}^z είναι οι διατμητικές τάσεις και οι $\gamma_{12}^z, \gamma_{13}^z$ και γ_{23}^z οι αντίστοιχες διατμητικές παραμορφώσεις.

Επικαλώντας ξανά τα αξιώματα του Kirchhoff, ισχύει $\epsilon_3^z = \gamma_{13}^z = \gamma_{23}^z = 0$ και $\sigma_3^z = 0$. Λύνοντας τις 2.4.20, 2.4.21 ως προς τις τάσεις εξάγονται οι εξισώσεις

$$\begin{aligned}\sigma_1^z &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_1^z + \nu \epsilon_2^z) \\ \sigma_2^z &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_2^z + \nu \epsilon_1^z) \\ \tau_{12}^z &= G \gamma_{12}^z = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{12}^z\end{aligned}\tag{2.4.22}$$



Σχήμα 18: Τάσεις στη μέση επιφάνεια κελύφους

2.4.3 Θεωρία κελυφών Reissner - Mindlin

Η δεύτερη πιο επικρατούσα θεωρία είναι αυτή των Reissner - Mindlin. Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, είναι πιο αποτελεσματική για παχιά στοιχεία, καθώς λαμβάνει υπόψη τις διατμητικές παραμορφώσεις που εμφανίζονται κατά την κάμψη. Εφόσον έχει γίνει ήδη ο παραλληλισμός των στοιχείων πλακών - κελυφών με τα στοιχεία δοκάρη - τόξο, πρέπει να αναφερθεί πως η εν λόγω θεωρία αντιστοιχεί στη θεωρία Timoshenko των δοκών και αποτελεί ουσιαστικά μια τροποποιημένη θεωρία Kirchhoff - Love. Η βασική παραδοχή Kirchhoff, σύμφωνα με την οποία επίπεδες επιφάνειες, κάθετες στην μέση επιφάνεια στην απαραμόρφωτη κατάσταση, παραμένουν επίπεδες και κάθετες σε αυτή και μετά την παραμόρφωση, τροποποιείται και διατυπώνεται ως εξής: Επίπεδες επιφάνειες, κάθετες στην αρχική απαραμόρφωτη μέση επιφάνεια, παραμένουν επίπεδες μετά την παραμόρφωση αλλά όχι απαραίτητα κάθετες σε αυτή.

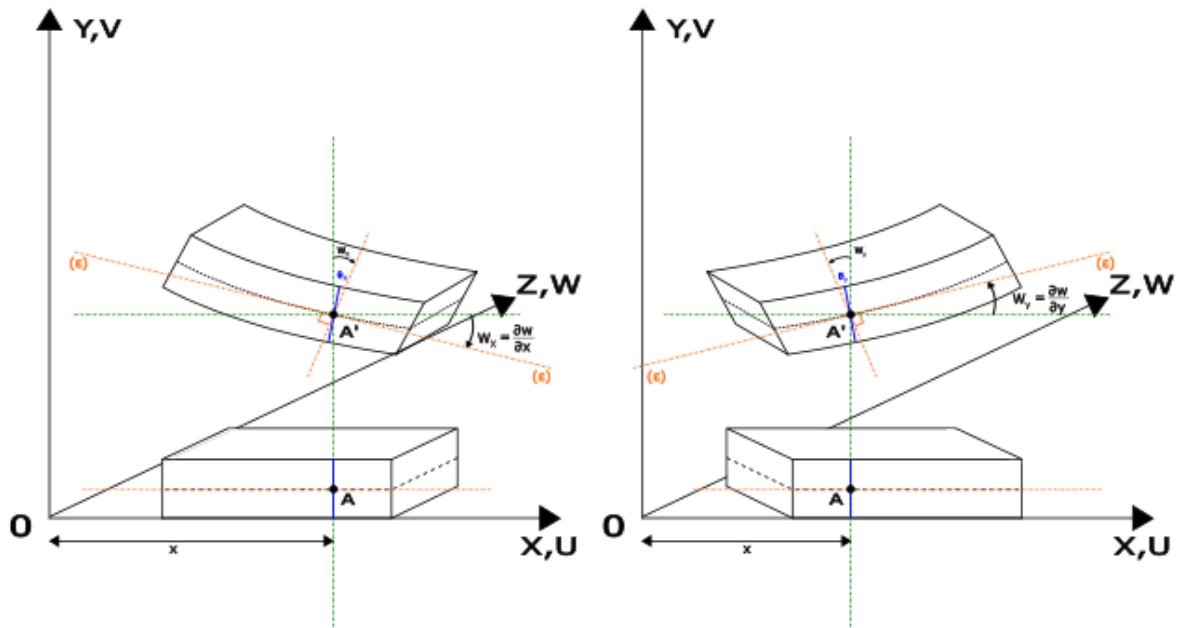
Κινηματικές εξισώσεις

Για να ληφθεί υπόψη και η διατμητική παραμόρφωση εκτός της καμπτικής σε ένα στοιχείο, πρέπει να συμπεριληφθούν στις κινηματικές εξισώσεις του και οι εκτός επιπέδου διατμητικές τάσεις γ_{13}, γ_{23} . Αυτές θεωρούνται ομοιόμορφα κατανομημένες κατά τη διεύθυνση του πάχους του στοιχείου και εκφράζονται με την απόκλιση του παραμορφωμένου κατακόρυφου επιπέδου αυτού, από το κάθετο επίπεδο στην παραμορφωμένη μέση επιφάνειά του.

Έστω για μια ευθεία γραμμή, αρχικά κάθετη προς τη απαραμόρφωτη μέση επιφάνεια, θ_y, θ_x οι συνιστώσες περιστροφής της γύρω από τους άξονες $+x$ και $-y$ αντίστοιχα. Οι διατμητικές παραμορφώσεις του στοιχείου θα είναι:

$$\gamma_{yz} = w_y - \theta_y \quad 2.4.23$$

$$\gamma_{zx} = w_x - \theta_x \quad 2.4.24$$



Σχήμα 19: Διατομή σε πλάκα Reissner - Mindlin

Όπου w_y και w_x οι γωνίες στροφής της ευθείας από την απαραμόρφωτη, στην παραμορφωμένη κατάσταση, όπως φαίνεται και στην εικόνα 19.

Γενικά, οι οντότητες w_y, θ_y και w_x, θ_x δεν είναι ίσες μεταξύ τους. Στη μόνη περίπτωση που ισχύει αυτό, είναι αν οι διατμητικές παραμορφώσεις γ_{yz}, γ_{zx} είναι ίσες και μηδέν. Αυτό συμβαίνει προφανώς στα λεπτά στοιχεία όπου οι εγκάρσιες διατομές παραμένουν συνεχώς κάθετες στο ουδέτερο επίπεδο αυτών. Στα παχιά στοιχεία, οι εγκάρσιες διατομές εκτελούν μια πρόσθετη περιστροφή, εκτός από αυτή της μέσης επιφάνειας, η οποία οδηγεί στην ανάπτυξη των εκτός επιπέδου διατμητικών τάσεων.

Οι μετατοπίσεις ορίζονται ως

$$u = u(x, y, z) = -z\theta_y(x, y) \quad 2.4.25$$

$$v = v(x, y, z) = -z\theta_x(x, y) \quad 2.4.26$$

και οι σχέσεις των ανηγμένων παραμορφώσεων της κλασικής θεωρίας πλακών 2.4.6 γίνονται

$$\epsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v - \frac{w}{R_1}$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u - \frac{w}{R_2} \quad 2.4.27$$

$$\epsilon_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) \\
\gamma_{23} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{w}{B} \right) - \theta_1 + \frac{u}{R_1} \\
\gamma_{31} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{w}{A} \right) - \theta_2 + \frac{v}{R_2}
\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

Καταστατικές εξισώσεις

Οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων της θεωρίας Reissner - Mindlin προκύπτουν από τις αντίστοιχες σχέσεις της τριδιάστατης ελαστικότητας της θεωρίας Kirchhoff - Love, 2.4.20 και 2.4.21, για $\sigma_3^z = 0$. Λύνοντας ως προς $\sigma_1^z, \sigma_2^z, \tau_{12}^z, \tau_{23}^z, \tau_{31}^z$ προκύπτει η εξίσωση $\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\}$. Σε μητρική μορφή είναι

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^z \\ \sigma_2^z \\ \sigma_3^z \\ \tau_{12}^z \\ \tau_{23}^z \\ \tau_{31}^z \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{2.4.29}$$

Είναι εμφανές από την παραπάνω σχέση πως το μητρώο ελαστικότητας που συνδέει τα διανύσματα τάσεων - παραμορφώσεων, είναι ένα μητρώο $[5 \times 5]$, σε αντίθεση με την περίπτωση Kirchhoff - Love όπου είναι $[3 \times 3]$.

Τέλος, επισημαίνεται πως η θεωρία Reissner - Mindlin μπορεί να εφαρμοστεί και για λεπτές πλάκες και κελύφη. Όμως σε αυτή την περίπτωση ενδέχεται να μην είναι το ίδιο αποτελεσματική όσο η Kirchhoff - Love, εξαιτίας της ύπαρξης διατμητικών δυνάμεων. Παρόλα αυτά, λόγω της ευκολίας της, είναι ευρέως διαδεδομένη και συχνά χρησιμοποιούμενη στους αλγόριθμους επίλυσης προβλημάτων μηχανικής.

2.5 Ταλαντώσεις κελυφών

Τα κελύφη επηρεάζονται από τα χρονοεξαρτώμενα φορτία με παρόμοιο τρόπο όπως οι πλάκες. Επομένως, η διαδικασία εξαγωγής εξισώσεων κίνησης κελυφών σε διάφορες ταλαντώσεις, ομοιάζει αυτή της δημιουργίας εξισώσεως κίνησης πλακών, της παραγράφου 2.2.

Θεωρείται πως οι εσωτερικές τάσεις ενός στοιχείου κελύφους κατά τη διάρκεια μίας ταλάντωσης, καθορίζονται από τις εξισώσεις ισορροπίας. Ακόμη, θεωρείται πως η μέση επιφάνεια αυτού, παραμορφώνεται σύμφωνα με τους ίδιους νόμους όπως και στην στατική κατάσταση.

Όπως και στις πλάκες, γίνεται διάκριση μεταξύ ελεύθερων και εξαναγκασμένων ταλαντώσεων. Σύμφωνα με το είδος του κελύφους (κωνικό, με μύτη, κ.ο.κ.) η παραγωγή των

εξισώσεων κίνησης προσεγγίζεται με διαφορετικό τρόπο.

Κεφάλαιο 3

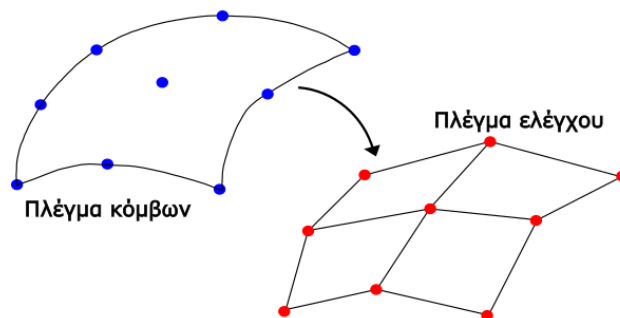
Ισογεωμετρική ανάλυση

3.1 Εισαγωγή

Μέχρι πρόσφατα, η πλειοψηφία χρηστών λογισμικών CAD δεν είχε συνειδητοποιήσει ότι σχεδιάζοντας ένα μοντέλο, δημιουργούνταν ταυτόχρονα η αντίστοιχη διακριτοποίηση πεπερασμένων στοιχείων. Πριν την ιδέα του Thomas Hughes γνωστή ως ισογεωμετρική ανάλυση (IGA), οι μηχανικοί συνήθιζαν να δημιουργούν μια νέα προσεγγιστική διακριτοποίηση, αντί να εκμεταλλευτούν το ήδη υπάρχον ακριβές μοντέλο. Η προσέγγιση αυτή της γεωμετρίας, έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός πρόσθετου σφάλματος, που καθιστά τη διαδικασία της ανάλυσης λιγότερο ακριβή και περισσότερο χρονοβόρα.

Σύμφωνα με την ισογεωμετρική θεωρία, για την ανάλυση γίνεται χρήση δύο ξεχωριστών διακριτοποιημένων μοντέλων, τα οποία παράγονται απευθείας από τη από γεωμετρική αναπαράσταση. Τα μοντέλα αυτά είναι

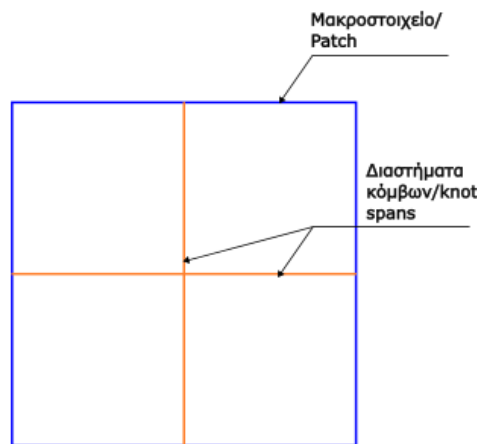
- Το πλέγμα των σημείων ελέγχου (control mesh)
- Το πλέγμα των κόμβων (knot mesh)



Σχήμα 20: Πλέγμα κόμβων και πλέγμα σημείων ελέγχου στοιχείου

Το πλέγμα ελέγχου προσδιορίζει τη γεωμετρία και τον πεπερασμένο αριθμό των βαθμών ελευθερίας που συντάσσουν την εξίσωση του προβλήματος. Ορίζεται από τα σημεία ελέγχου και παρεμβάλλεται επί αυτών. Αποτελείται από πολυγραμμικά στοιχεία, τα οποία σε δύο διαστάσεις είναι διγραμμικά τετράπλευρα και σε τρεις διαστάσεις είναι τριγραμμικά εξαεδρικά στοιχεία. Το πλέγμα ελέγχου δεν αναπαριστά την ακριβή γεωμετρία, αλλά αποτελεί ικρίωμα που την ελέγχει. Επιπλέον, έχει τη δυνατότητα να παραμορφωθεί σοβαρά και ακόμα και να αναστραφεί σε κάποιον βαθμό, ενώ παράλληλα για ικανοποιητικά λείες NURBS, η φυσική γεωμετρία παραμένει έγκυρη (σε αντίθεση με τα πεπερασμένα στοιχεία).

Το πλέγμα των κόμβων είναι ουσιαστικά μια αποσύνθεση της πραγματικής γεωμετρίας και παρέχει την κατάλληλη διακριτοποίηση για αριθμητική ολοκλήρωση και τα όρια των συναρτήσεων σχήματος του μοντέλου. Υπάρχουν δύο έννοιες στοιχείων σε αυτό, το τεμάχιο (patch) και το κομβοδιάστημα (knot span). Το patch ορίζεται ως ένας υποτομέας και αποτελεί ένα μακροστοιχείο. Κάθε ένα από αυτά έχει δύο απεικονίσεις, μια στο Καρτεσιανό σύστημα και μία στο Φυσικό. Στις διδιάστατες τοπολογίες ένα patch αναπαρίσταται ως ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο Καρτεσιανό σύστημα, ενώ στις τριδιάστατες ως ένα κυβοειδές.



Σχήμα 21: Απεικόνιση μακροστοιχείου και κομβοδιαστημάτων

Κάθε patch μπορεί να αποσυντεθεί σε κομβοδιαστήματα. Τα κομβοδιαστήματα είναι σημεία, γραμμές και επιφάνειες, σε τοπολογίες μονοδιάστατες, διδιάστατες και τριδιάστατες αντίστοιχα. Οριοθετούνται από τους κόμβους (knots) και ορίζουν τους τομείς των στοιχείων όπου οι συναρτήσεις σχήματος είναι λείες (C^∞ - συνεχείς). Γενικώς οι συναρτήσεις σχήματος είναι C^{p-m} συνεχείς στους κόμβους, όπου p ο βαθμός¹ του πολυωνύμου και m η πολλαπλότητα του εκάστοτε κόμβου.

¹Στη βιβλιογραφία της γεωμετρίας, η τάξη ενός πολυωνύμου ισούται με το βαθμό του πολυωνύμου συν ένα. Στην ανάλυση συχνά οι όροι τάξη και βαθμός χρησιμοποιούνται ως συνώνυμα. Στην παρούσα εργασία τηρείται η σύμβαση της ανάλυσης.

Τα διαστήματα κόμβων αναφέρονται ως μικροστοιχεία, επειδή είναι οι μικρότερες οντότητες που αντιμετωπίζει κανείς στην ισογεωμετρική ανάλυση. Και αυτά έχουν απεικονίσεις στο Καρτεσιανό και στο Φυσικό σύστημα. Στο παρόν κείμενο όταν αναφέρεται η έννοια στοιχείου, θα γίνεται λόγος για κομβοδιαστήματα.

Επιπροσθέτως, μια άλλη διαφορά με την θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων, είναι πως οι συναρτήσεις σχήματος είναι κατά βάση παρεμβαλλόμενες και μπορούν να έχουν αρνητικές και θετικές τιμές.

Άλλο ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της ισογεωμετρικής ανάλυσης με βάση τις NURBS, είναι οι χώροι που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση. Εισάγεται η έννοια του index χώρου ενός μακροστοιχείου. Σε αυτόν κάθε κόμβος προσδιορίζεται μοναδικά και γίνεται διάκριση μεταξύ των κόμβων που έχουν πολλαπλότητα μεγαλύτερη του ένα.

Παρακάτω αναλύονται περαιτέρω τα συστατικά στοιχεία και της Ισογεωμετρικής ανάλυσης.

3.2 Χώροι της ισογεωμετρικής ανάλυσης

Ακριβής γεωμετρικές αναπαραστάσεις του φυσικού μοντέλου σχεδιάζονται στο γνωστό Καρτεσιανό σύστημα, το οποίο ονομάζεται Φυσικός Χώρος. Για ευκολία και απλότητα, ειδικά όταν πρόκειται για περίπλοκες γεωμετρίες, κατασκευάζεται ένα μοντέλο σε έναν φανταστικό χώρο όπου όλες οι γεωμετρίες μπορούν να αναπαρασταθούν από γραμμές, ορθογώνια και κυβοειδή σχήματα. Αυτός ο χώρος αποκαλείται Παραμετρικός. Η προσέγγιση αυτή είναι ήδη γνωστή από τη θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων. Ο Παραμετρικός χώρος ενώ χρησιμοποιείται και στις δύο θεωρίες έχει βασικές διαφοροποιήσεις. Τέλος, στην ισογεωμετρική ανάλυση χρησιμοποιείται και ένας εντελώς καινούριος χώρος, που όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, αποκαλείται Index (Index space). Αυτός είναι απλώς βοηθητικός όταν πρόκειται για αναλύσεις με βάση τις NURBS, αλλά παίζει πολύ σημαντικό ρόλο για αναλύσεις με ορισμένα άλλα είδη Splines.

3.2.1 Index χώρος

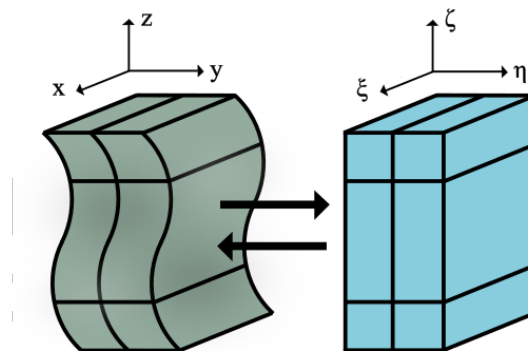
Ο χώρος Index είναι μια αναπαράσταση του μοντέλου σύμφωνα με τις τιμές των κόμβων του. Σε μονοδιάστατα προβλήματα αποτελεί μία γραμμή, η οποία εμπεριέχει όλες τις τιμές κόμβων σε ισαπέχουσες θέσεις. Ο χώρος αυτός επικεντρώνεται στη σειρά των τιμών των κόμβων και όχι στο πραγματικό αριθμητικό τους περιεχόμενο.

Περιγράφει την συνεισφορά της κάθε τιμής, κάθε κόμβου, στη δημιουργία μιας συγκεκριμένης συνάρτησης σχήματος, μορφής B - Spline. Αυτό βοηθάει στην αναγνώριση της ενδοσύνδεσης μεταξύ των συναρτήσεων σχήματος και της στήριξης της τιμής του κάθε κόμβου, της κάθε συνάρτησης. Τα σημεία ελέγχου επίσης αξιολογούνται στον Index χώρο. Ορίζονται ως το κέντρο της στήριξης των διαστημάτων των τιμών των κόμβων

(knot value spans). Όταν πρόκειται για διδιάστατα και τριδιάστατα προβλήματα, γίνεται λόγος για ορθογώνια και κυβοειδή σχήματα αντίστοιχα. Ό,τι αναφέρθηκε προηγουμένως για τη μονοδιάστατη περίπτωση γενικεύεται και εφαρμόζεται και σε διδιάστατα και τριδιάστατα προβλήματα. Εν κατακλείδι, ο Index χώρος παρέχει πληροφορίες που συμβάλουν στη κατανόηση μιας περίπλοκης γεωμετρικής αναπαράστασης.

3.2.2 Παραμετρικός χώρος

Ο Παραμετρικός χώρος είναι μια αναπαράσταση του μοντέλου σύμφωνα με τους κόμβους του. Σε αυτόν υπάρχουν μόνο γραμμές, ορθογώνια και κυβοειδή. Όλες οι οντότητες Spline συγκεκριμένα, αναπαριστώνται πάντα ως ορθογωνικά σχήματα. Για να μετατρέψουμε τα απλά αυτά μοτίβα σε πιο περίπλοκες γεωμετρίες, χρειάζεται μια διαδικασία χαρτογράφησης, η οποία πρέπει να λάβει χώρα από τον Παραμετρικό στον Φυσικό χώρο. Για αυτό και ο Παραμετρικός χώρος θεωρείται μια πρώιμη, αφηρημένη, αναπαράσταση του Φυσικού. Η χαρτογράφηση πραγματοποιείται με χρήση του πίνακα της Ιακωβιανής, μέσα από τις κατάλληλες υπολογιστικές πράξεις. Η ίδια λογική χρησιμοποιείται και στη θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων.

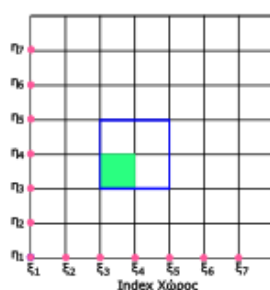


Σχήμα 22: Παράδειγμα μετασχηματισμού ενός B - Spline στερεού από τον παραμετρικό στο φυσικό χώρο και αντίστροφα

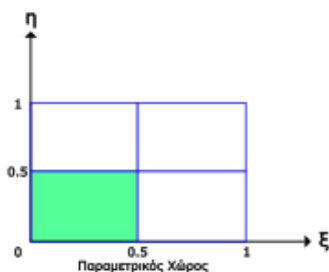
Η αναπαράσταση των συναρτήσεων σχήματος στον Παραμετρικό χώρο επιτρέπει τη καλύτερη κατανόηση εννοιών όπως η στήριξη, οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου και τον ρόλο των κόμβων στη δημιουργία των συναρτήσεων αυτών. Κάθε κόμβος σηματοδοτεί την αρχή και το πέρας ενός τομέα μιας συνάρτησης σχήματος. Με τον όρο τομέα εννοείται η περιοχή στην οποία η συνάρτηση σχήματος είναι μη μηδενική, καθώς όλες οι συναρτήσεις σχήματος είναι ορισμένες στον Παραμετρικό χώρο, αλλά είναι μη μηδενικές, μόνο σε συγκεκριμένα κομβοδιαστήματα. Οι συναρτήσεις σχήματος που μοιράζονται τον ίδιο τομέα, είναι αλληλοεπικαλυπτόμενα στοιχεία στον Παραμετρικό χώρο και ελέγχουν ένα κοινό κομμάτι της οντότητας στον Φυσικό χώρο.

3.2.3 Φυσικός χώρος

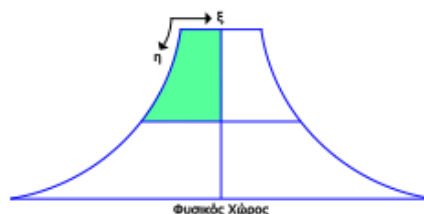
Ο Φυσικός χώρος είναι ο γνωστός Καρτεσιανός, όπου αναπαρίσταται η πραγματικότητα. Απλά ορθογωνικά σχήματα του Παραμετρικού τομέα μετατρέπονται σε περίπλοκες γεωμετρίες στο Φυσικό. Οι φυσικές συντεταγμένες των σημείων ελέγχου παίζουν σημαντικό ρόλο στην προαναφερόμενη χαρτογράφηση, αλλά εξίσου σημαντικό ρόλο κατέχουν και οι συναρτήσεις σχήματος. Για ένα δεδομένο σύνολο σημείων ελέγχου, μόνο ένα συγκεκριμένο σύνολο συναρτήσεων σχήματος μπορούν να οδηγήσουν στην ίδια γεωμετρία. Τα σημεία ελέγχου συχνά είναι εμφανή και έξω από το μοντέλο στο Φυσικό χώρο, σε αντίθεση με τους κόμβους της θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων, οι οποίοι πάντα ανήκουν σε αυτό. Αυτός είναι ένας από τους λόγους που οι NURBS και οι Splines αναπαριστούν γενικότερα πολλαπλούς τύπους γεωμετρίας.



(i) Index χώρος



(ii) Παραμετρικός χώρος



(iii) Φυσικός χώρος

Σχήμα 23: Φυσικός, Παραμετρικός και Index χώρος

3.3 Κομβοδιανύσματα (knot vectors)

Ένα διάνυσμα κόμβων (knot vector) μίας διεύθυνσης είναι ένα μη φθίνον σύνολο συντεταγμένων του Παραμετρικού χώρου, της μορφής $\{\Xi\} = \{\xi_1, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ όπου $\xi_i \in \mathbb{R}$ ο i -οστός κόμβος, i ο δείκτης του κόμβου, με $i = 1, 2, \dots, n + p + 1$, p η πολυωνυμική τάξη και n ο αριθμός των συναρτήσεων σχήματος που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή της B - Spline καμπύλης.

Τα διανύσματα κόμβων ονομάζονται ομοιόμορφα (uniform knot vector) αν οι κόμβοι είναι ισαπέχοντες στον Παραμετρικό χώρο και σε κάθε άλλη περίπτωση ονομάζονται ανομοιόμορφα (non - uniform knot vector). Η τιμή ενός κόμβου μπορεί να επαναλαμβάνεται, δηλαδή παραπάνω του ενός κόμβοι μπορούν να πάρουν την ίδια τιμή. Το σύνολο των φορών που εμφανίζεται η εκάστοτε τιμή ονομάζεται πολλαπλότητα (multiplicity) και έχει σημαντικές επιπτώσεις στις ιδιότητες της βάσης.

Ένα κομβοδιάνυσμα χαρακτηρίζεται ως ανοιχτό (open knot vector), εάν η πρώτη και η τελευταία τιμή του εμφανίζονται $p + 1$ φορές. Τέτοιου είδους διανύσματα είναι τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα στην υπολογιστική γεωμετρία. Απόρροια χρήσης τους σε πολλαπλές διευθύνσεις, είναι ότι το ίδιο το όριο ενός B - Spline αντικείμενου με d παραμετρικές διαστάσεις, αποτελεί B - Spline αντικείμενο διαστάσεων $d - 1$. Για παράδειγμα, κάθε πλευρά μιας B - Spline επιφάνειας είναι μία B - Spline καμπύλη. Σε μονοδιάστατα προβλήματα, οι συναρτήσεις σχήματος που συντάσσονται από ανοιχτά διανύσματα κόμβων, είναι παρεμβαλλόμενες στα άκρα του παραμετρικού χώρου $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$ και στις γωνίες των μακροστοιχείων, σε πολυδιάστατα προβλήματα. Γενικώς όμως δεν είναι παρεμβαλλόμενες σε εσωτερικούς κόμβους. Αυτή είναι μια ειδοποιός διαφορά μεταξύ των κόμβων της ισογεωμετρικής ανάλυσης (knots) και των κόμβων της ανάλυσης των πεπερασμένων στοιχείων (nodes).



(i) Κόμβοι (nodes) στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων

(ii) Κόμβοι (knots) στην ισογεωμετρική ανάλυση

Σχήμα 24: Κόμβοι στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων και κόμβοι στην ισογεωμετρική ανάλυση

3.4 Σημεία ελέγχου (control points)

Ένα επίσης βασικό χαρακτηριστικό της Ισογεωμετρικής ανάλυσης είναι η χρήση των σημείων ελέγχου για την κατασκευή καμπυλών, επιφανειών και στερεών. Αυτά δίνουν τη δυνατότητα τοπικού ελέγχου των B - Spline και των NURBS οντοτήτων. Η συνολική γεωμετρία του φορέα δεν επηρεάζεται πολύ εάν αλλαχθεί η θέση κάποιων σημείων. Ορίζονται συνήθως σε διανυσματική μορφή και αποτελούν συντελεστές της συνάρτησης βάσης του εκάστοτε αντικειμένου. Είναι παρόμοια με τις συντεταγμένες των κόμβων των πεπερασμένων στοιχείων (nodal coordinates) καθώς και αυτές αποτελούν συστατικά στοιχεία της συνάρτησης βάσης.

Επιπλέον, τα σημεία ελέγχου μπορεί να βρίσκονται εκτός της γεωμετρίας του φορέα, σε αντίθεση με τους κόμβους των πεπερασμένων στοιχείων.

3.5 Γεωμετρίες B - Spline

3.5.1 Συναρτήσεις σχήματος

Δεδομένου ενός διανύσματος κόμβων, ορίζονται οι συναρτήσεις σχήματος μορφής B - Spline, αναδρομικά.

Εάν p η πολυωνυμική τάξη, ξεκινώντας με $p = 0$, οι συναρτήσεις σχήματος είναι τμηματικές σταθερές και ίσες με

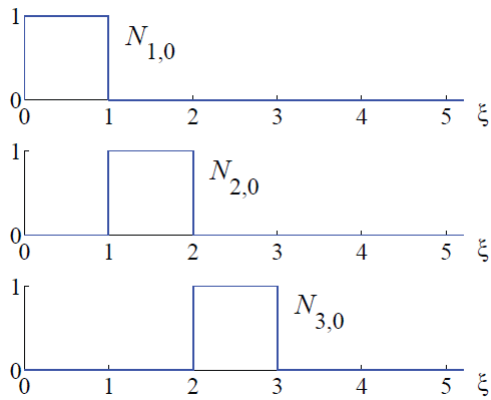
$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad 3.5.1$$

Για $p = 1, 2, 3, \dots$ ορίζονται ως:

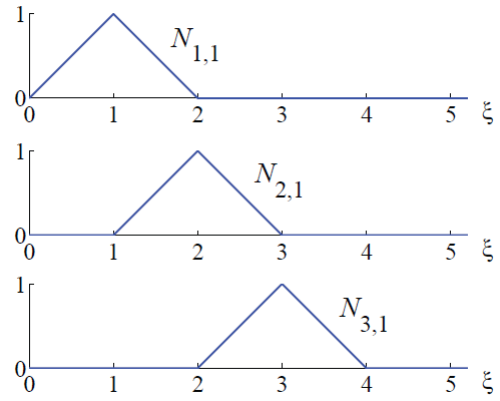
$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad 3.5.2$$

όπου γίνεται η παραδοχή ότι $\frac{0}{0} = 0$. Η παραπάνω διατύπωση είναι γνωστή ως η αναδρομική φόρμουλα του Cox - de Boor (Cox 1971, De Boor 1972). Θεωρώντας ένα ομοιόμορφο κομβοδιάνυσμα $\{\Xi\} = \{0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots\}$, η εφαρμογή των παραπάνω σχέσεων, για πολυωνυμικές τάξεις $p = 0, 1, 2$, δίνει τα αποτελέσματα της εικόνα 25.

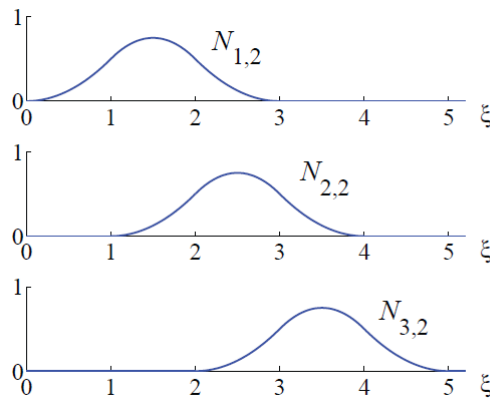
Για συναρτήσεις B - Spline βαθμού $p = 0$ και $p = 1$, το αποτέλεσμα είναι ταυτόσημο με αυτό των τμηματικών σταθερών και γραμμικών συναρτήσεων πεπερασμένων στοιχείων αντίστοιχα. Οι τετραγωνικές B - Spline συναρτήσεις (συναρτήσεις 2^{ου} βαθμού) και όλες οι υπόλοιπες ανωτέρας τάξης, διαφέρουν από τις ομόλογες πεπερασμένων στοιχείων. Είναι πανομοιότυπες αλλά έχουν διαφορετικές θέσεις η μία με την άλλη. Ακόμη, το σχήμα μιας τετραγωνικής συνάρτησης πεπερασμένων στοιχείων εξαρτάται από το αν αντιστοιχεί



(i) Συνατήσεις σχήματος τάξης $p = 0$.



(ii) Συνατήσεις σχήματος τάξης $p = 1$.



(iii) Συνατήσεις σχήματος τάξης $p = 2$.

Σχήμα 25: Συναρτήσεις σχήματος τάξης $p = 0, 1$ και $p = 2$ για ομοιόμορφο κομβοδιάγραμμα $\{\Xi\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, (Cottrell et al. 2009).

σε εσωτερικό κόμβο ή σε κόμβο πέρατος.

Ιδιότητες συναρτήσεων σχήματος

1. Η βάση αποτελεί διαίρεση της μονάδας, ήτοι $\forall \xi$,

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1 \quad 3.5.3$$

2. Κάθε συνάρτηση σχήματος είναι σημειακά, μη μηδενική σε ολόκληρο τον τομέα, δηλαδή $N_{i,p}(\xi) \geq 0, \forall \xi$. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα στοιχεία του μητρώου μάζας θα είναι θετικά.
3. Κάθε συνάρτηση τάξης p έχει $p - m_i$ συνεχή παράγωγα κατά μήκος του κόμβου ξ_i , όπου m_i η πολλαπλότητα της τιμής ξ_i στο κομβοδιάγραμμα. Εάν η πολλαπλότητα ενός κόμβου είναι ίση με p τότε η βάση είναι παρεμβαλλόμενη στον κόμβο αυτό. Όταν η πολλαπλότητα είναι $p + 1$, η βάση γίνεται ασυνεχής και έτσι δημιουργείται όριο

μακροστοιχείου.

4. Η στήριξη των συναρτήσεων B - Spline τάξης p , είναι πάντα $p + 1$ κομβοδιανύσματα. Συνεπώς οι συναρτήσεις υψηλής τάξης έχουν στήριξη σε πολύ μεγαλύτερο μέρος του τομέα, από ότι έχουν οι συναρτήσεις της κλασικής ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων².

Συναρτήσεις σχήματος δεδομένου ενός μη ομοιόμορφου κομβοδιανύσματος

Αξιίζει να σημειωθεί ότι η χρήση μη ομοιόμορφου διανύσματος κόμβων, επιτρέπει μια πιο σύνθετη απόκριση από αυτή που προκύπτει από ένα απλό ομοιόμορφο. Στην παρούσα εργασία έχουν χρησιμοποιηθεί αποκλειστικά ομοιόμορφα κομβοδιανύσματα.

3.5.2 Παράγωγα συναρτήσεων σχήματος

Τα παράγωγα αποδίδονται σε όρους καμπυλών B - Spline χαμηλής τάξης. Παρακάτω παρατίθεται ο τύπος υπολογισμού των παραγώγων των συναρτήσεων σχήματος, καθώς χρησιμοποιούνται στην ανάλυση.

Για δεδομένο κομβοδιάνυσμα $\{\Xi\}$ και πολυωνυμική τάξη p , το παράγωγο της i -οστής συνάρτησης σχήματος είναι

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad 3.5.4$$

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζεται σε όρους χαμηλής τάξεως συναρτήσεων σχήματος $N_{i,p-k}, \dots, N_{i+k,p-k}$ ως εξής:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} N_{i+1,p-k}(\xi) \quad 3.5.5$$

όπου

$$\begin{aligned} \alpha_{0,0} &= 1 \\ \alpha_{k,0} &= \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i} \\ \alpha_{k,j} &= \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \\ \alpha_{k,k} &= \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}} \end{aligned}$$

²Επισημαίνεται ότι η αυξημένη στήριξη δεν οδηγεί σε αυξημένο εύρος ζώνης της αριθμητικής μεθόδου.

Ισχύει η παραδοχή ότι στην περίπτωση που ο παρονομαστής προκύψει ίσος με το μηδέν - γεγονός που συμβαίνει όταν πρόκειται για επαναλαμβανόμενους κόμβους - ολόκληρο το κλάσμα τίθεται μηδέν.

Για την επίλυση των παραπάνω σχέσεων, έχουν αναπτυχθεί κατάλληλοι αλγόριθμοι (Piegl & Tiller 1996).

3.5.3 B - Spline καμπύλες

Οι καμπύλες B - Spline αποτελούν ένα γραμμικό συνδυασμό B - Spline συναρτήσεων σχήματος.

Δεδομένου n συναρτήσεων $N_{i,p}$ με $i = 1, 2, \dots, n$ και τα σημεία ελέγχου που αντιστοιχούν σε αυτές, $B_i \in \mathbb{R}^d$ με $i = 1, 2, \dots, n$ και d οι διαστάσεις του προβλήματος, μία τμηματική πολυωνυμική B - Spline καμπύλη δίνεται από τον τύπο

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad 3.5.6$$

Το εκάστοτε σημείο ελέγχου προσδιορίζεται από τον δείκτη i αυτού.

Με τμηματική γραμμική παρεμβολή των σημείων ελέγχου προκύπτει το πλέγμα ελέγχου, που στην περίπτωση διδιάστατων προβλημάτων είναι πολύγωνο (control polygon).

Ιδιότητες B - Spline καμπυλών

Οι ιδιότητες των B - Spline καμπυλών απαριθμίζονται παρακάτω:

1. Οι καμπύλες B - Spline έχουν τη ιδιότητα της αφινικής συνδιακύμανσης. Αυτό σημαίνει πως ένας αφινικός μετασχηματισμός³ μιας καμπύλης, μπορεί να πραγματοποιηθεί εφαρμόζοντάς τον απευθείας στα σημεία ελέγχου της. Η ιδιότητα αυτή παίζει σημαντικό ρόλο στα λεγόμενα τεστ patch ("patch test")
2. Γενικά μια καμπύλη θα έχει συνεχή παράγωγα κατά μήκος ενός ορίου ενός στοιχείου, τουλάχιστον ίσα με αυτά που έχουν οι συναρτήσεις σχήματος κατά μήκος της αντίστοιχης τιμής κόμβου. B - Spline καμπύλες βαθμού p έχουν $p - 1$ συνεχή παράγωγα, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν επαναλαμβανόμενοι κόμβοι ή σημεία ελέγχου.
3. Οι καμπύλες B - Spline, λόγω της στιβαρής στήριξης των συναρτήσεων σχήματός τους (που είναι επίσης μορφής B - Spline), έχουν τη ιδιότητα της τοπικότητας. Δηλαδή, μετακινώντας ένα και μοναδικό σημείο ελέγχου, επηρεάζεται η γεωμετρία έως και $p + 1$ στοιχείων της καμπύλης.

³Αφινικός μετασχηματισμός είναι μια χαρτογράφηση $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$: $\Phi(x) = Ax + v$, για κάποιον πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ και κάποιο διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$.

4. Το γεγονός ότι η βάση είναι μη αρνητική και διαίρεση της μονάδας, σε συνδυασμό με στιβαρή στήριξη των συναρτήσεων, έχει ως απόρροια μια καμπύλη B - Spline να εμπεριέχεται εντελώς μέσα σε ένα κυρτό κέλυφος (convex hull). Αυτό ορίζεται από τα σημεία ελέγχου της καμπύλης. Για καμπύλη βαθμού p , το κυρτό κέλυφος ορίζεται ως η ένωση όλων των κυρτών κελυφών που σχηματίζονται από $p+1$ διαδοχικά σημεία ελέγχου. Ειδικά για την περίπτωση μιας τμηματικής γραμμικής καμπύλης, το κέλυφος είναι το ίδιο το πολύγωνο ελέγχου. Στην εικόνα 26 απεικονίζονται τα κελύφη για πολυωνυμικές τάξεις $p = 1$ έως $p = 5$, για δεδομένα σημεία ελέγχου και οι αντίστοιχες καμπύλες τους.
5. Αυξηθείσας της πολυωνυμικής τάξης, η καμπύλη γίνεται ολοένα και πιο λεία. Παράλληλα, η μοναδική επιρροή κάθε σημείου ελέγχου εξαλείφεται.
6. Οι B - Spline καμπύλες κατέχουν επίσης την ιδιότητα μείωσης διακύμανσης (variation diminishing property). Εξαιτίας αυτής, οι καμπύλες είναι μονοτονικές⁴.
7. Για σταθερή πολυωνυμική τάξη και ένα μόνο στοιχείο (γίνεται χρήση πολυωνύμων και όχι τμηματικών πολυωνύμων), η Λαγκρανζιανή βάση και η βάση B - Spline, εκτείνονται ακριβώς στον ίδιο χώρο.

Είναι εμφανές ότι πολλές ιδιότητες των B - Spline καμπυλών είναι εξεπακόλουθες των ιδιοτήτων των συναρτήσεων σχήματός τους.

3.5.4 B - Spline επιφάνειες

Δεδομένου ενός συνόλου σημείων ελέγχου $B_{i,j}$ με $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$, πολυωνυμικές τάξεις p, q και κομβοδιανύσματα $\{\Xi\} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ και $\{H\} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$, μία επιφάνεια B - Spline ορίζεται από τη σχέση

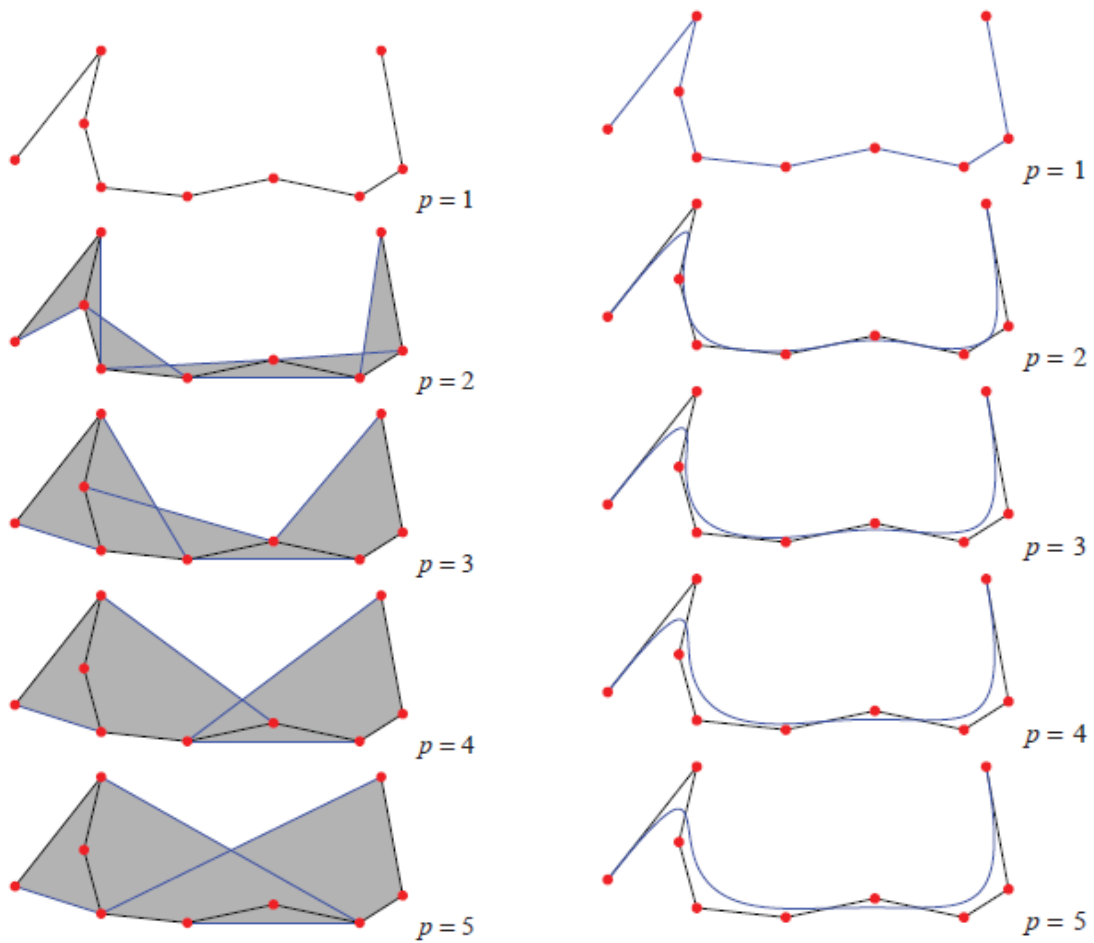
$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j} \quad 3.5.7$$

Όπου $N_{i,p}(\xi)$ και $M_{j,q}(\eta)$ οι μονομεταβλητές B - Spline συναρτήσεις σχήματος τάξης p και q , που αντιστοιχούν στα κομβοδιανύσματα $\{\Xi\}$ και $\{H\}$ αντίστοιχα.

Ιδιότητες B - Spline επιφανειών

Οι περισσότερες ιδιότητες των B - Spline επιφανειών είναι αντίστοιχες με αυτές των B - Spline καμπυλών.

⁴Ο όρος μονοτονία μιας συνάρτησης, αναφέρεται στο είδος και στην κατεύθυνση της μεταβολής των τιμών της, στο πεδίο ορισμού της ή σε τμήμα αυτού. Μια συνάρτηση είναι μονοτονική αν η πρώτη της παράγωγος δεν αλλάζει πρόσημο, ανεξάρτητα του αν είναι συνεχής ή όχι. Η έννοια αυτή ανήκει στο πλαίσιο της Θεωρίας της Τάξης στην μαθηματική βιβλιογραφία.



(i) Κυρτά κελύφη για πολυωνυμικές τάξεις $p = 1$ (ii) B-spline καμπύλες με το ίδιο πλέγμα ελέγχου της 26i για πολυωνυμικές τάξεις $p = 1$ έως και $p = 5$.

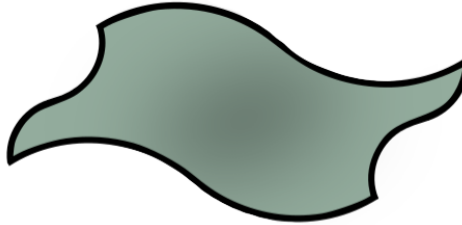
Σχήμα 26: Κυρτά κελύφη για πολυωνυμικές τάξεις $p = 1$ έως και $p = 5$ και οι αντίστοιχες B-spline καμπύλες τους, (Cottrell et al. 2009).

1. Η βάση είναι τμηματικά μη αρνητική και υποδιαίρεση της μονάδας καθώς $\forall(\xi, \eta) \in [\xi_1, \xi_{n+p+1}] \times [\eta_1, \eta_{m+q+1}]$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) = \left(\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \right) \left(\sum_{j=1}^m M_{j,q}(\eta) \right) = 1 \quad 3.5.8$$

2. Ο αριθμός των συνεχών παραγώγων σε μία δοσμένη παραμετρική διεύθυνση, καθορίζεται από το σχετικό μονοδιάστατο κομβοδιάγραμμα και την πολυωνυμική τάξη.
3. Οι B - Spline επιφάνειες κατέχουν τη προαναφερθείσα ιδιότητα αφινικής συνδιακύμανσης.
4. Οι B - Spline επιφάνειες κατέχουν επίσης ισχυρή ιδιότητα κυρτού ικριώματος.

5. Η τοπική στήριξη των συναρτήσεων σχήματος είναι ανάλογη των μονοδιάστατων συναρτήσεων που δημιουργούνται από αυτές. Η στήριξη μιας γνωστής διμεταβλητής συνάρτησης $\tilde{N}_{i,j;p,q}(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)$ είναι το διάστημα $[\xi_1, \xi_{n+p+1}] \times [\eta_1, \eta_{m+q+1}]$.



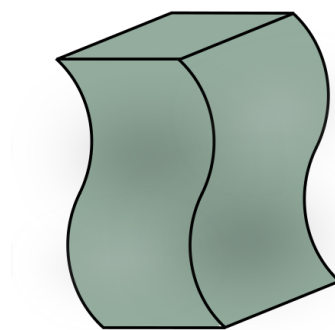
Σχήμα 27: B - Spline καμπύλη

3.5.5 B - Spline στερεά

Τα B - Spline στερεά ορίζονται όμοια με τις B - Spline καμπύλες. Δεδομένου ενός πλέγματος σημείων ελέγχου $B_{i,j,k}$ με $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, l$, πολυωνυμικές τάξεις p, q και r και κομβοδιανύσματα $\{\Xi\} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, $\{H\} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ και $\{Z\} = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{l+r+1}\}$ ένα στερεό B - Spline ορίζεται μέσω της σχέσης

$$S(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) B_{i,j,k} \quad 3.5.9$$

Οι ιδιότητες στερεών B - Spline είναι τριμεταβλητές γενικεύσεις των ιδιοτήτων των B - Spline επιφανειών.



Σχήμα 28: B - Spline στερεό

3.6 Τεχνικές προσαρμογής

Οι B - Splines προσδίνουν τη δυνατότητα εμπλουτισμού της βάσης με διάφορους τρόπους, διατηρώντας την υποκείμενη γεωμετρία και την παραμετροποίησή της άθικτη. Σε αντίθεση

με τις τεχνικές προσαρμογής των πεπερασμένων στοιχείων, επιτρέπουν όχι μόνο τον έλεγχο σχετικά με το μέγεθος του στοιχείου και της τάξη της βάσης, αλλά και της συνέχειας αυτής.

3.6.1 Εισαγωγή κόμβων

Η πρώτη τεχνική με την οποία μπορεί να επιτευχθεί προσαρμογή είναι η εισαγωγή κόμβων (knot insertion). Με τον όρο αυτό εννοείται η εισαγωγή είτε ενός μοναδικού κόμβου, είτε πολλών ταυτόχρονα. Η τοποθέτηση νέων κόμβων δεν επηρεάζει την καμπύλη ούτε γεωμετρικά, ούτε παραμετρικά. Για ένα δοσμένο κομβοδιάνυσμα $\{\Xi\} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, εισάγεται η έννοια του εκτεταμένου κομβοδιανύσματος $\{\tilde{\Xi}\} = \{\tilde{\xi}_1 = \xi_1, \xi_2, \dots, \tilde{\xi}_{n+m+p+1} = \xi_{n+p+1}\}$, τέτοιο ώστε $\Xi \in \tilde{\Xi}$. Οι συναρτήσεις σχήματος - που είναι συνολικά $n + m$ - υπολογίζονται κατά τα γνωστά, με χρήση του εκτεταμένου διανύσματος $\tilde{\Xi}$. Με τη δημιουργία του $\{\Xi\}$, γεννιέται και ένα νέο σετ σημείων ελέγχου \tilde{B} , τα οποία επίσης αριθμούνται σε $n + m$. Τα σημεία ελέγχου $\tilde{B} = \{\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_{n+m}\}^T$ αποτελούν γραμμικό συνδυασμό των αρχικών σημείων $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}^T$, ο οποίος εκφράζεται με τη σχέση

$$\tilde{B} = T^p B \quad 3.6.1$$

όπου

$$T_{i,j}^0 = \begin{cases} 1 & \tilde{\xi}_i \in [\xi_i, \xi_{j+1}) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad 3.6.2$$

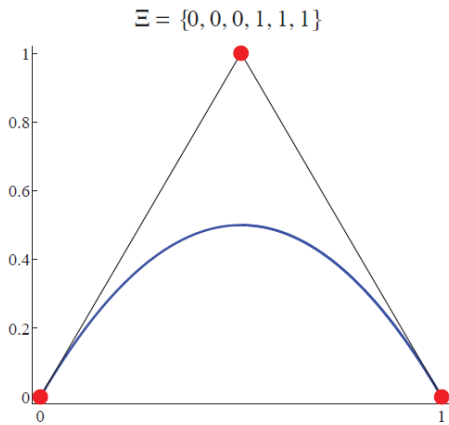
Και

$$T_{i,j}^{q+1} = \frac{\tilde{\xi}_{i+q} - \xi_j}{\xi_{j+q} - \xi_j} T_{ij}^q + \frac{\xi_{i+q+1} - \tilde{\xi}_{j+q}}{\xi_{j+q+1} - \xi_{j+1}} T_{ij+1}^q \quad \text{για } q = 0, 1, 2, \dots, p-1 \quad 3.6.3$$

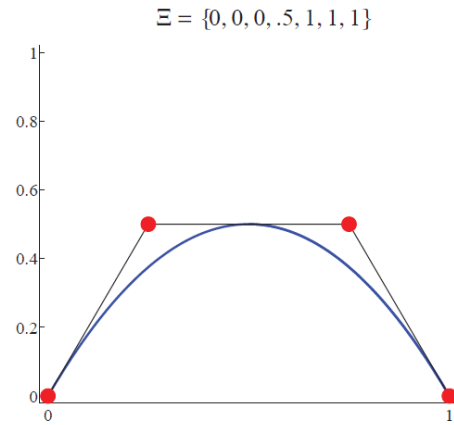
Επισημαίνεται πως υπάρχουσες τιμές κόμβων μπορούν μέσω της εν λόγω τεχνικής να επαναληφθούν, αυξάνοντας έτσι την πολλαπλότητα. Απόρροια αυτού, είναι η μείωση της συνέχειας της βάσης, για τους λόγους που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Παρόλα αυτά, αν ακολουθηθεί η σωστή διαδικασία, η συνέχεια της καμπύλης μπορεί να διατηρηθεί.

Η τεχνική εισαγωγής κόμβων είναι παρόμοια με αυτή της h - προσαρμογής στην ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων. Και οι δύο διαδικασίες χωρίζουν τα υπάρχοντα στοιχεία σε καινούρια. Διαφέρουν ωστόσο στον αριθμό των νέων συναρτήσεων που σχηματίζονται, καθώς και στη συνέχεια της βάσης κατά μήκος των νεοδημιουργούμενων ορίων των στοιχείων. Η συνέχεια της βάσης με τη διαδικασία εισαγωγής κόμβων είναι C^{p-1} . Για να επέλθει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό της h - προσαρμογής, πρέπει κάθε νέα τιμή κόμβου να εισαχθεί p φορές, έτσι ώστε οι συναρτήσεις να είναι C^0 - συνεχείς κατά μήκος του νέου ορίου. Εναλλακτικά, αυξάνοντας την πολλαπλότητα των ήδη υπάρχοντων κόμβων θα προ-

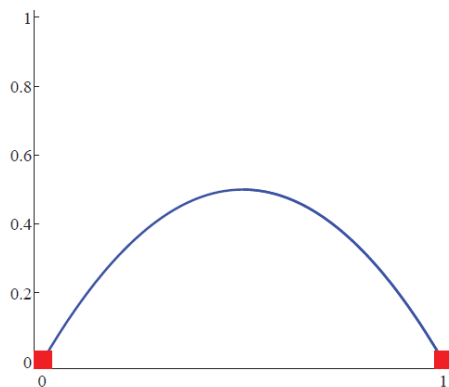
κληθεί μείωση της βάσης, δίχως να υπάρξει δημιουργία νέων στοιχείων. Η διαδικασία αυτή δεν έχει ακριβώς ανάλογη στην ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων, διότι σε αυτήν τα διακριτοποιημένα μοντέλα έχουν εξαρχής C^0 - συνεχή όρια.



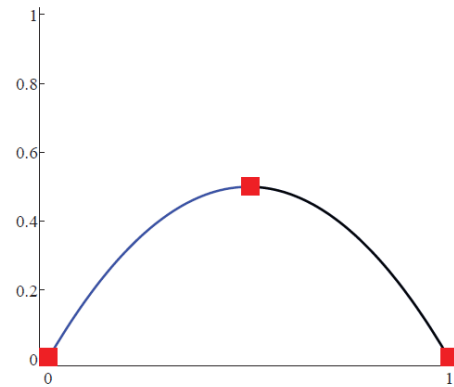
(i) Αρχική καμπύλη με τα σημεία ελέγχου της



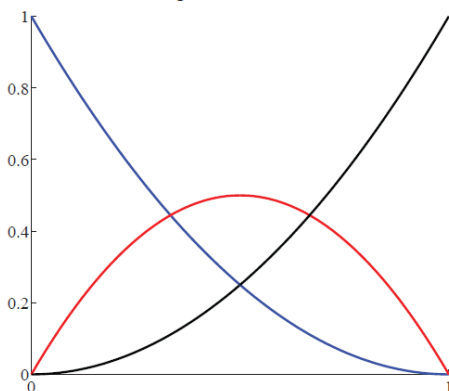
(ii) Προσαρμοσμένη καμπύλη με τα σημεία ελέγχου της



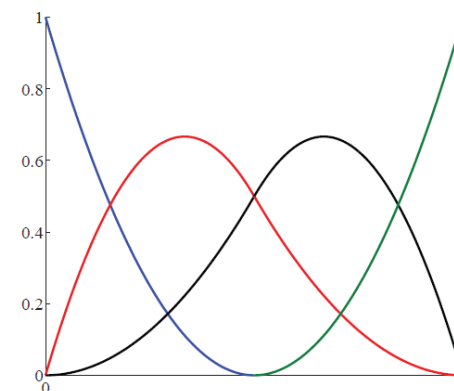
(iii) Αρχική διακριτοποίηση ενός στοιχείου με τους κόμβους της



(iv) Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση δύο στοιχείων με τους κόμβους της

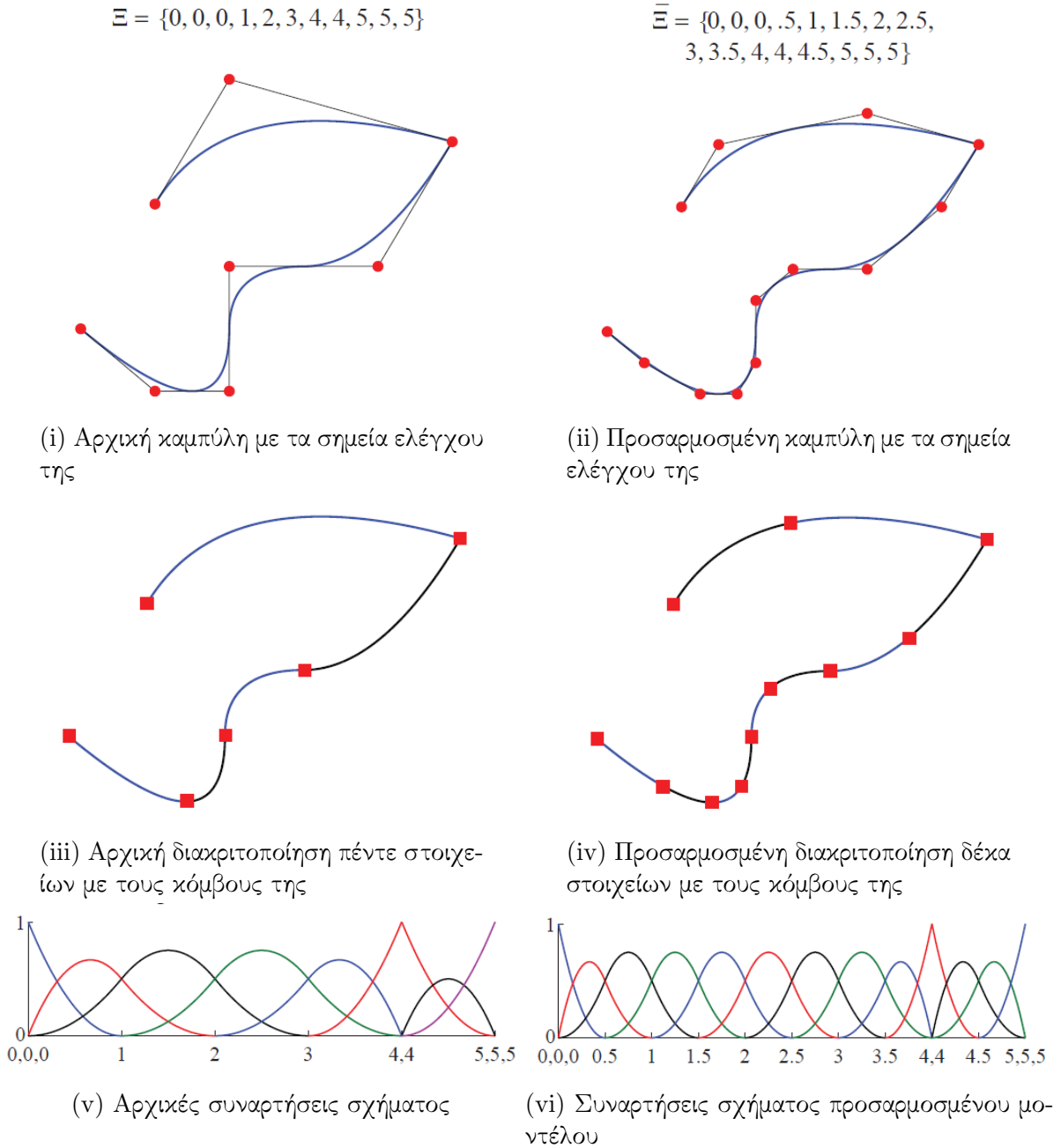


(v) Αρχικές συναρτήσεις σχήματος



(vi) Συναρτήσεις σχήματος προσαρμοσμένου μοντέλου

Σχήμα 29: Παράδειγμα εισαγωγής κόμβων σε μια απλή καμπύλη. Τα σημεία ελέγχου δημιουργούν τα πλέγμα του μοντέλου και οι κόμβοι το διαχωρίζουν σε στοιχεία, (Cottrell et al. 2009).

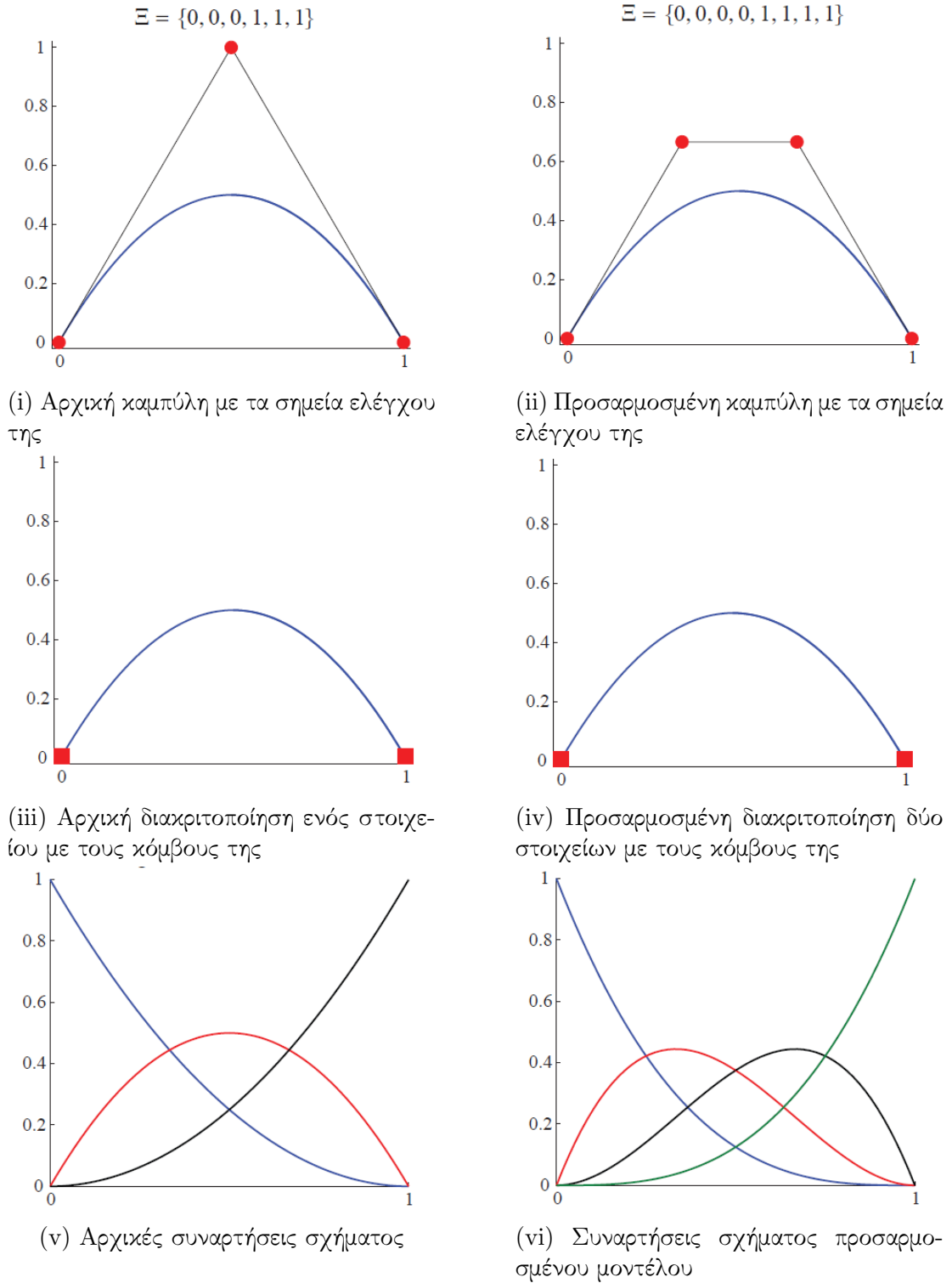


Σχήμα 30: Παράδειγμα εισαγωγής κόμβων σε καμπύλη περίεργης γεωμετρίας. Τα σημεία ελέγχου δημιουργούν τα πλέγμα του μοντέλου και οι κόμβοι το διαχωρίζουν σε στοιχεία. (Cottrell et al. 2009).

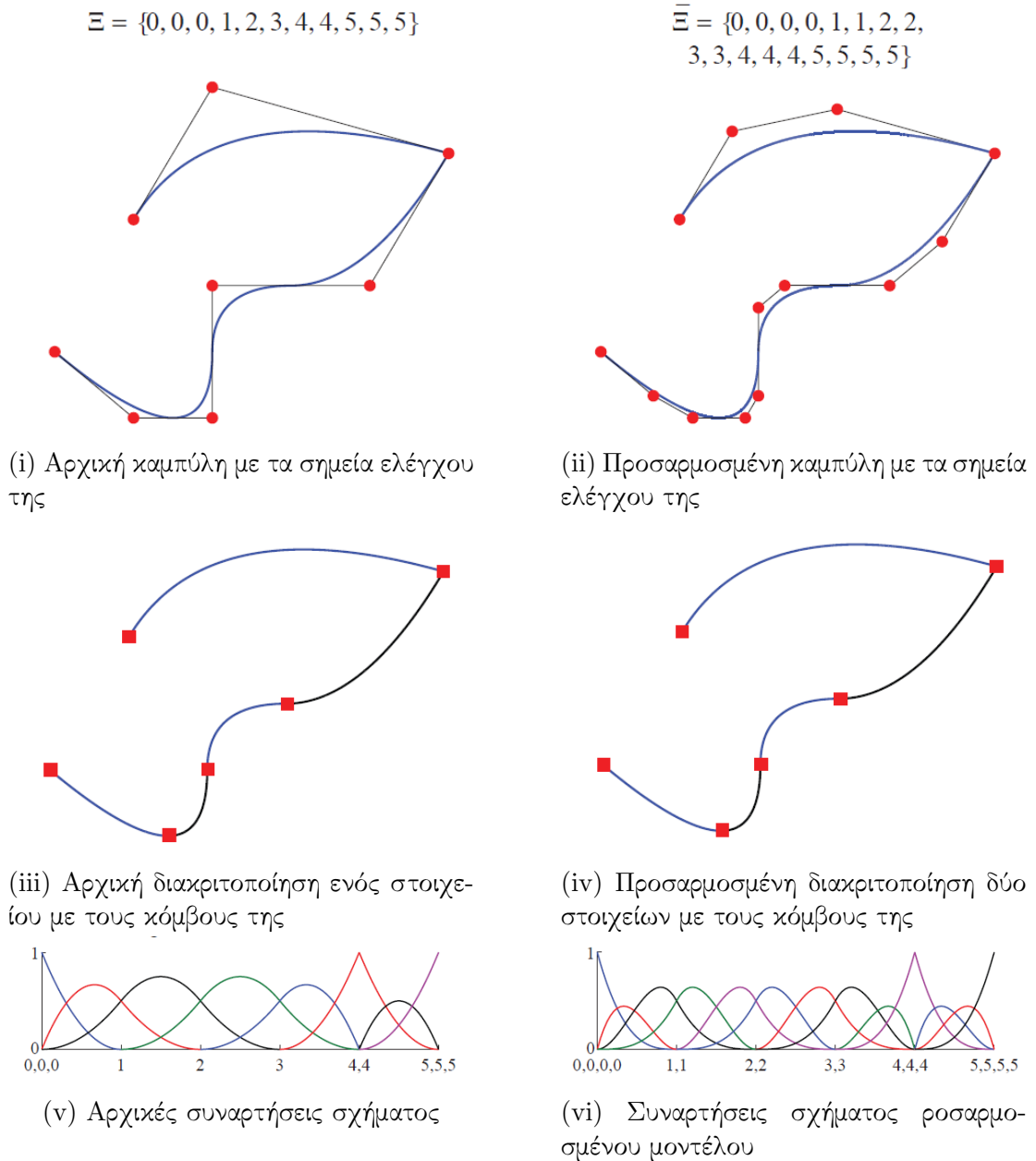
3.6.2 Αύξηση πολυωνυμικού βαθμού

Ο δεύτερος μηχανισμός με τον οποίο μπορεί να πραγματοποιηθεί προσαρμογή, είναι η αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού (order elevation). Η διαδικασία, όπως είναι εμφανές και από το όνομά της, περιλαμβάνει την αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού συναρτήσεων σχήματος δεδομένης γεωμετρίας. Ως γνωστόν ο αριθμός των συνεχών παραγώγων της βάσης είναι $p - m_i$ στα όρια των στοιχείων, επομένως είναι εμφανές πως για να διατηρηθεί ο υπάρχων βαθμός συνέχειας, αν αυξηθεί το p πρέπει να αυξηθεί και το m_i . Επισημαίνεται ότι αλλάζει η πολλαπλότητα των κόμβων, αλλά δε προστίθενται νέες τιμές. Ακόμη, όπως και στην διαδικασία εισαγωγής κόμβων, η γεωμετρία και η παραμετροποίηση του μοντέλου παραμένουν άθικτες.

Η διεξαγωγή της εν λόγω ρουτίνας ξεκινά με την αντικατάσταση των υπάρχοντων κόμβων, έως ότου η πολλαπλότητά τους να ισούται με τον πολυωνυμικό βαθμό. Έτσι η καμπύλη υποδιαιρείται σε πολλές καμπύλες Bèzier (Rogers 2001), (Farin 1999). Κατόπιν, ανυψώνεται η πολυωνυμική τάξη καθενός από αυτά τα μεμονωμένα τμήματα. Τέλος οι περισσευούμενοι κόμβοι απαλείφονται, ώστε να συνδυαστούν τα τμήματα σε μία καμπύλη B - Spline, μεγαλύτερου βαθμού από τον αρχικό (Piegl & Tiller 1996). Όπως και η διαδικασία εισαγωγής κόμβων είναι παραπλήσια της h - προσαρμογής των πεπερασμένων στοιχείων, έτσι και η διαδικασία αύξησης του πολυωνυμικού βαθμού παρομοιάζει την p - προσαρμογή. Η ειδοποιός διαφορά τους είναι ότι ενώ η p - προσαρμογή αρχίζει πάντα με μια βάση C^0 - συνεχής παντού, η αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού μπορεί να εφαρμοστεί ανεξαρτήτως τάξης συνέχειας στην υπάρχουσα B - Spline, ακατέργαστη διακριτοποίηση. Είναι εφαρμόσιμη ακόμα και σε περιπτώσεις συνδυασμού διαφορετικών συνεχειών της βάσης. Για να είναι ταυτόσημες οι δύο διαδικασίες επιβάλλεται να έχουμε ένα αρχικό μοντέλο, στο οποίο όλες οι συναρτήσεις είναι C^0 - συνεχείς στα όρια των στοιχείων.



Σχήμα 31: Παράδειγμα εισαγωγής κόμβων σε μια απλή καμπύλη. Τα σημεία ελέγχου δημιουργούν τα πλέγμα του μοντέλου και οι κόμβοι το διαχωρίζουν σε στοιχεία. (Cottrell et al. 2009).



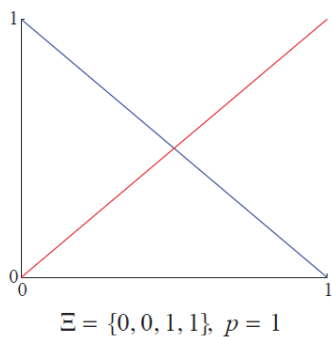
Σχήμα 32: Παράδειγμα εισαγωγής κόμβων σε μια απλή καμπύλη. Τα σημεία ελέγχου δημιουργούν τα πλέγμα του μοντέλου και οι κόμβοι το διαχωρίζουν σε στοιχεία. (Cottrell et al. 2009).

3.6.3 k - προσαρμογή

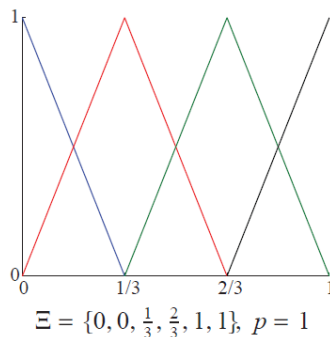
Ο τελευταίος και πιο πρωτότυπος μηχανισμός είναι η k - προσαρμογή. Διευκρινίζεται πως η παρούσα διαδικασία δεν είναι ίδια με την διαδικασία k - σύγκλισης (Kagan et al. 1998), σύμφωνα με την οποία αλλάζουν οι θέσεις των κόμβων. Είναι όμως παρόμοια με την k - υποπερίπτωση ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων (Surana et al. 2002), όπου αλλάζουν οι κόμβοι. Παρόλα αυτά δεν υπάρχει αντίστοιχη διαδικασία στην θεωρία της κλασικής ανάλυσης των πεπερασμένων στοιχείων, όπως στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

Σύμφωνα με k - προσαρμογή, ανυψώνεται ο πολυωνυμικός βαθμός σε q , χωρίς ταυτόχρονη αύξηση της πολλαπλότητας των κόμβων, αρχικών και νεοεισαχθέντων. Συνεπώς δε διατηρείται σταθερός ο αριθμός των συνεχών παραγώγων της βάσης, εν αντιθέσει με την διαδικασία της αύξησης του πολυωνυμικού βαθμού. Αν κατόπιν εισαχθεί ένας νέος, καινούριος κόμβος ξ , μεταξύ δύο διακριτών τιμών κόμβων της καμπύλης, ο αριθμός των συνεχών παραγώγων της βάσης σε αυτόν θα είναι $q - 1$. Ακολουθώντας την διαδικασία της αύξησης του πολυωνυμικού βαθμού, τα συνεχή παράγωγα θα αριθμούνται σε $p - 1$.

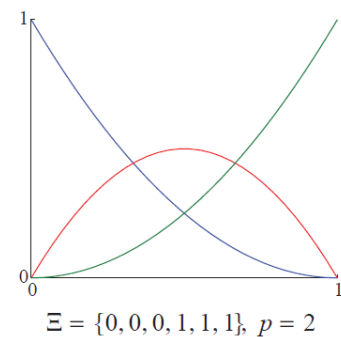
Η k - προσαρμογή είναι πιθανώς η καλύτερη προσέγγιση υψηλής ακρίβειας ανάλυσης, καθώς στα μακροστοιχεία η δομή είναι ομογενής και επιπλέον, το σύνολο των μεταβλητών ελέγχου αυξάνεται περιορισμένα.



(i) Συναρτήσεις σχήματος απλού γραμμικού στοιχείου προς προσαρμογή



(ii) Προσαρμογή με αύξηση πολυωνυμικής τάξης. Πραγματοποιείται πρώτα εισαγωγή κόμβων, για την δημιουργία πολυάρθρωτων στοιχείων χαμηλής τάξης. Κατόπιν εκτελείται αύξηση της τάξης, με την οποία διατηρείται C^0 - συνέχεια κατά το μήκος των στοιχείων



(iii) Προσαρμογή με χρήση της τεχνικής k . Πραγματοποιείται αύξηση πολυωνυμικής τάξης και ακολουθεί εισαγωγή κόμβων. Προκύπτει C^{p-1} - συνέχεια κατά μήκος των νεοσχηματισμένων στοιχείων.

Σχήμα 33: Συναρτήσεις σχήματος πριν και μετά την προσαρμογή απλού γραμμικού στοιχείου, με χρήση των τεχνικών αύξησης πολυωνυμικής τάξης και k προσαρμογής, (Cottrell et al. 2009).

3.6.4 Συνδυασμός μηχανισμών προσαρμογής

Όλοι οι προαναφερθέντες μηχανισμοί χρησιμοποιούν δύο βασικές τεχνικές για να την προσαρμογή της διακριτοποίησης. Αυτές είναι η εισαγωγή νέων κόμβων και η αύξηση του πολυωνυμικού βαθμού της καμπύλης. Επομένως, συνδυάζοντας τις παραπάνω μεθόδους μπορούν να επιτευχθούν διαφόρων ειδών νέες τεχνικές, πέρα από τις απλές h, p και k .

Με την απλή k - προσαρμογή αυξάνεται η τάξη συνέχειας μαζί με τον πολυωνυμικό βαθμό. Με την p - προσαρμογή ανυψώνεται ο πολυωνυμικός βαθμός, ενώ η βάση παραμένει C^0 - συνεχής. Τέλος, με την βασική h - προσαρμογή εισάγονται νέες κομβικές τιμές, των οποίων η πολλαπλότητα είναι p . Έτσι, δημιουργούνται και νέα στοιχεία με C^0 - συνεχή όρια.

Με προσθήκη για παράδειγμα νέων τιμών κόμβων πολλαπλότητας ίσης με ένα, δε μειώνεται ο ελάχιστος βαθμός συνέχειας ευρισκόμενος στο μοντέλο. Επιτυγχάνεται λοιπόν προσαρμογή του μοντέλου χωρίς να έχει ακολουθεί αυστηρά κάποια από τις τρεις κύριες μεθόδους. Με τον κατάλληλο συνδυασμό, μπορεί να επιτευχθεί η βέλτιστη και πιο αποδοτική προσαρμογή ενός μοντέλου.

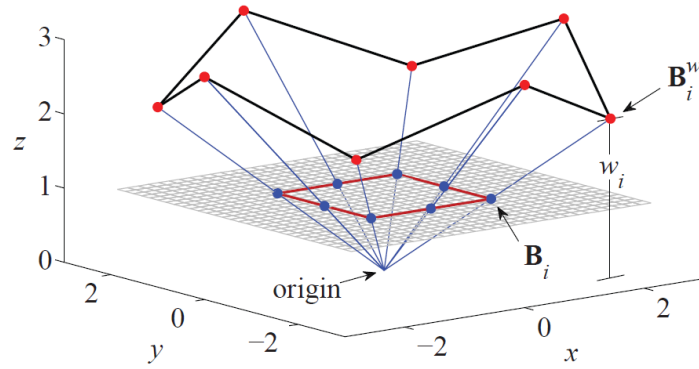
3.7 Μη ομοιόμορφες, ρητές B-Splines (Non - Uniform Rational B - Splines - NURBS)

Ένα ευρύ φάσμα γεωμετριών, που είναι πανταχού παρούσες στο μηχανικό σχέδιο, δε μπορεί να αναπαρασταθεί με απλά πολυώνυμα. Οι NURBS (Non - Uniform Rational B - Splines), που αποτελούν γενίκευση των B-Splines, προσφέρουν περισσότερες ικανότητες σχετικά με την αναπαράσταση αντικειμένων και κάνουν δυνατή την απεικόνιση περίπλοκων γεωμετριών. Οι καμπύλες αυτές ορίζονται αλγεβρικά και γεωμετρικά.

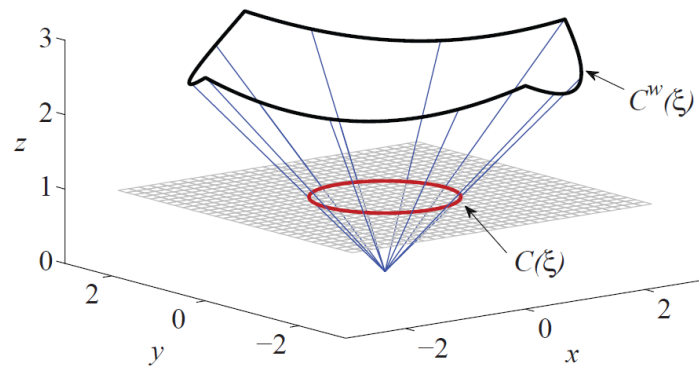
3.7.1 Γεωμετρικός ορισμός των NURBS

Μία NURBS οντότητα στον \mathbb{R}^d , όπου d οι διαστάσεις του προβλήματος, προκύπτει από τον προβολικό μετασχηματισμό μίας B - Spline οντότητας του \mathbb{R}^{d+1} . Συγκεκριμένα, οι κωνικές τομές, οι κύκλοι και οι ελλείψεις μπορούν να κατασκευαστούν ακριβώς από τον προβολικό μετασχηματισμό τμηματικών, τετραγωνικών καμπυλών. Η προβολική γεωμετρία αποτελεί ολόκληρο μαθηματικό κλάδο, στον οποίο η χρήση NURBS αποτελεί υποπερίπτωση (Farin 1999). Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας δίνεται το παρακάτω παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας του μετασχηματισμού, για τη δημιουργία NURBS αντικειμένων.

Στην 34 απεικονίζεται ένας κύκλος στον \mathbb{R}^2 χώρο, ο οποίος κατασκευάζεται από μία τμηματική, τετραγωνική B - Spline καμπύλη στον \mathbb{R}^3 . Ο μετασχηματισμός εφαρμόζεται προβάλλοντας κάθε σημείο της καμπύλης στο επίπεδο $z = 1$, μέσω μιας ημιευθείας από την καμπύλη προς το σημείο αναφοράς του εν λόγω επιπέδου. Τα σημεία ελέγχου της καμπύλης NURBS προκύπτουν από ακριβώς την ίδια διαδικασία προβολικού μετασχηματισμού των



(i) Πολύγωνο ελέγχου



(ii) Καμπύλες

Σχήμα 34: Δημιουργία κύκλου στον διδιάστατο χώρο \mathbb{R}^2 , από τον προβολικό μετασχηματισμό τμηματικής, τετραγωνικής B - Spline συνάρτησης στον τριδιάστατο χώρο \mathbb{R}^3 , (Cottrell et al. 2009).

σημείων ελέγχου της B - Spline καμπύλης. Στο πλαίσιο αυτό λοιπόν είναι αναγκαίο να επαναπροσδιοριστούν οι έννοιες της καμπύλης και των σημείων ελέγχου. Από εδώ και πέρα η καμπύλη B - Spline θα επονομάζεται προβολική καμπύλη $C^w(\xi)$ (projective curve) και τα σημεία ελέγχου της B_i^w , προβολικά (projective control points). Ο όρος καμπύλη $C(\xi)$ και σημεία ελέγχου B_i υιοθετούνται αποκλειστικά από τα αντικείμενα NURBS.

Δεδομένης μιας προβολικής B - Spline καμπύλης και των αντίστοιχων σημείων της, τα σημεία ελέγχου της NURBS προσδιορίζονται από τον τύπο

$$(B_i)_j = (B_i^w)_j / w_i \quad \text{με } j = 1, 2, \dots, d \quad 3.7.1$$

Όπου

$$w_i = (B_i^w)_{d+1} \quad \text{το } i - \text{οστό βάρος.} \quad 3.7.2$$

Γενικώς τα βάρη αποτελούν την $d + 1$ συνιστώσα των προβολικών σημείων και όπως είναι εμφανές από την εικόνα, στο προκείμενο παράδειγμα, τα βάρη είναι η z συνιστώσα τους. Επειδή οι τιμές τους είναι συνήθως θετικές στις εφαρμογές μηχανικού περιεχομένου,

γίνεται η παραδοχή θετικότητάς τους για όλες τις απακόλουθες εφαρμογές.

Η διαίρεση των προβολικών σημείων ελέγχου με τα βάρη τους, είναι ισοδύναμη με τον προβολικό μετασχηματισμό. Με την ίδια λογική, είναι θεμιτό να επιτευχθεί ο ίδιος μετασχηματισμός σε όλα τα σημεία της καμπύλης. Αυτό επιτυγχάνεται με την λεγόμενη συνάρτηση βάρους (weighting function) .

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i \quad 3.7.3$$

όπου οι $N_{i,p}(\xi)$ είναι οι κλασικές συναρτήσεις σχήματος B - Spline. Στον χώρο του \mathbb{R}^3 ισχύει $W(\xi) = z(\xi)$ όπου $z(\xi)$ είναι το ύψος της καμπύλης. Σύμφωνα με όλα τα προαναφερθέντα, μια NURBS καμπύλη ορίζεται ως

$$(C(\xi))_j = \frac{(C^w(\xi))_j}{W(\xi)} \text{ με } j = 1, 2, \dots, d \quad 3.7.4$$

Εφόσον οι συντελεστές $C^w(\xi)$ και $W(\xi)$ της εξίσωσης είναι τμηματικές πολυωνυμικές συναρτήσεις, οι καμπύλη $C(\xi)$ είναι τμηματικά, ρητή συνάρτηση και μέσα σε κάθε στοιχείο αποτελεί πολυώνυμο, διαιρεμένο από ένα άλλο πολυώνυμο. Τα δύο αυτά πολυώνυμα έχουν την ίδια τάξη, επομένως όταν γίνεται αναφορά στην τάξη της καμπύλης NURBS, εννοείται η τάξη της καμπύλης B - Spline από την οποία αυτή παράχθηκε.

3.7.2 Αλγεβρικός ορισμός των NURBS

Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά των B - Splines είναι ότι η μορφή τους αλλάζει με τη προσαρμογή των σημείων ελέγχου της. Για να μπορεί να ισχύει το ίδιο και για τις NURBS, πρέπει να οριστεί η βάση του χώρου τους από κομβοδιανύσματα, όπως ακριβώς και στις B - Splines. Ύστερα, οι καμπύλες, οι επιφάνειες και τα στερεά NURBS θα παράγονται κάνοντας χρήση αυτής.

Η βάση των NURBS δίνεται από την εξίσωση

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i} \quad 3.7.5$$

Η οποία εμφανώς είναι τμηματική ρητή εξίσωση.

Η 3.7.5 σε συνδυασμό με την 3.7.1 δίνει την εξίσωση της καμπύλης NURBS, η οποία είναι

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi)B_i \quad 3.7.6$$

Παρατηρείται ότι η 3.7.6 είναι της ίδια μορφής με την αντίστοιχη εξίσωση καμπυλών B - Splines. Παρομοίως ορίζονται οι επιφάνειες NURBS, ως

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)w_{\hat{i},\hat{j}}} \quad 3.7.7$$

και τα NURBS στερεά, τα οποία αποτελούν εξώθηση NURBS επιφανειών, περικλυσμένες από NURBS καμπύλες.

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m \sum_{\hat{k}=1}^l N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)L_{\hat{k},r}(\zeta)w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}} \quad 3.7.8$$

Οι 3.7.7, 3.7.8 αποτελούν επίσης ρητές συναρτήσεις, ομοιάζουσες με τις αντίστοιχες των B - Splines.

3.7.3 Ιδιότητες καμπυλών NURBS

Οι περισσότερες ιδιότητες των καμπυλών NURBS είναι ίδιες με αυτές των B - Splines, γεγονός που είναι απόλυτα λογικό καθώς αποτελούν γενίκευσή τους.

1. Στις περισσότερες περιπτώσεις, ο μέγιστος βαθμός συνέχειας δεν περιορίζεται από την ίδια την καμπύλη, αλλά από την προβολική της.
2. Για την επίτευξη ενός αφινικού μετασχηματισμού ενός NURBS αντικειμένου, αρκεί να εφαρμοστεί απευθείας στα σημεία ελέγχου του, αφήνοντας τα βάρη άθικτα.
3. Ο πολλαπλασιασμός όλων των προβολικών σημείων ελέγχου με μια σταθερά⁵, δεν επηρεάζει καθόλου την προκύπτουσα καμπύλη NURBS. Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε σημείο της προβολικής καμπύλης μετατοπίζεται μόνο πάνω στην ακτίνα του.
4. Τα βάρη δεν αποτελούν συνιστώσες των σημείων ελέγχου. Κάθε βάρος σχετίζεται με ένα συγκεκριμένο σημείο, όμως δεν αποτελεί παράγοντά του.
5. Εάν όλα τα σημεία ελέγχου έχουν το ίδιο βάρος, τότε ισχύει $R_i^p(\xi) = N_{i,p}(\xi)$, δηλαδή η καμπύλη είναι πολυωνυμική.
6. Η συνέχεια των συνερτήσεων και η στήριξή τους προκύπτουν από τα κομβοδιανύσματα.

⁵ Αυτό αποτελεί τον απλούστατο αφινικό μετασχηματισμό της προβολικής καμπύλης.

7. Η βάση είναι υποδιαίρεση της μονάδας και τμηματικά μη αρνητική.
8. Οι παραπάνω δύο ιδιότητες οδηγούν στην γνωστή ιδιότητα του ισχυρού κελύφους για τις NURBS.

3.7.4 Παράγωγοι των συνερτήσεων NURBS

Όπως και οι NURBS συναρτήσεις σχήματος σχηματίζονται από τις αντίστοιχες συναρτήσεις B - Splines, οι παράγωγοι των ρητών συναρτήσεων, εξαρτώνται από τις παραγώγους των μη ρητών ομολογών τους. Έτσι είναι:

$$\frac{d}{d\xi} R_i^p(\xi) = w_i \frac{W(\xi)N_{i,p}'(\xi) - W'(xi)N_{i,p}(\xi)}{W(\xi)^2} \quad 3.7.9$$

όπου $N_{i,p}'(\xi) = \frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi)$ και

$$W'(\xi) = \sum_{\hat{i}=1}^n N_{\hat{i},p}'(\xi)w_{\hat{i}} \quad 3.7.10$$

Αντίστοιχα υπάρχουν και κατάλληλοι αλγόριθμοι υπολογισμού των παραγώγων μη ρητών συναρτήσεων (Piegl & Tiller 1996).

Παράγωγα υψηλής τάξης, ρητών συναρτήσεων, εκφράζονται με όρους χαμηλής τάξεως παραγώγων ως εξής:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} R_{i,p}(\xi) = \frac{A_i^{(k)}(\xi) - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} W^{(j)}(\xi) \frac{d^{k-j}}{d\xi^{k-j}} R_i^p(\xi)}{W(\xi)} \quad 3.7.11$$

όπου

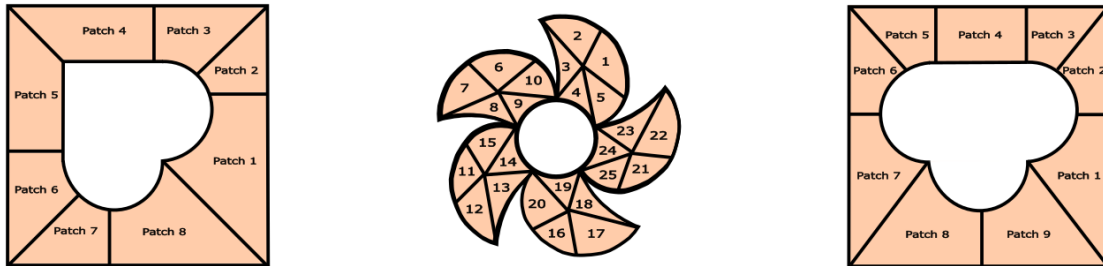
$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \quad 3.7.12$$

3.8 Χρήση πολλαπλών μακροστοιχείων

Στις περισσότερες περιπτώσεις η χρήση περισσότερων του ενός μακροστοιχείων patches είναι αναγκαία για την περιγραφή του τομέα. Παραδείγματος χάριν, εάν σε ένα μοντέλο γίνεται χρήση διαφορετικών υλικών ή φυσικών μοντέλων, σε διάφορα τμήματα ενός τομέα, είναι πιο εύχρηστο οι υποτομείς αυτοί να περιγραφούν από διαφορετικά μακροστοιχεία. Επιπροσθέτως, εάν πρόκειται να αξιοποιηθούν παράλληλοι επεξεργαστές, είναι πιο εύχρηστο να υπάρχουν πολλαπλά patches. Έτσι, κάθε επεξεργαστής θα έχει τη δική του δομή

δεδομένων, παρά να υπάρχει μία και μοναδική δομή, η οποία αναγκαστικά θα πρέπει να χωρίζεται μεταξύ των διαφορετικών επεξεργαστών. Ακόμη, ένα και μοναδικό μακροστοιχείο είναι δύσκολο να αναπαραστήσει ακριβώς περίπλοκες γεωμετρίες που αποκλίνουν από την κλασική κυβική τοπολογία.

Τέλος, επισημαίνεται πως στην παρούσα εργασία, όλα τα μοντέλα των εφαρμογών έχουν σχεδιαστεί με ένα και μοναδικό μακροστοιχείο.



Σχήμα 35: Παραδείγματα χρήσης πολλαπλών μακροστοιχείων

3.9 Βήματα της ανάλυσης

Με την ολοκλήρωση της θεωρίας περί ισογεωμετρικής ανάλυσης, θεωρείται σκόπιμο να παραταθούν συνοπτικά τα βήματα της ανάλυσης ένα προς ένα.

3.9.1 Πρωταρχικές παρατηρήσεις

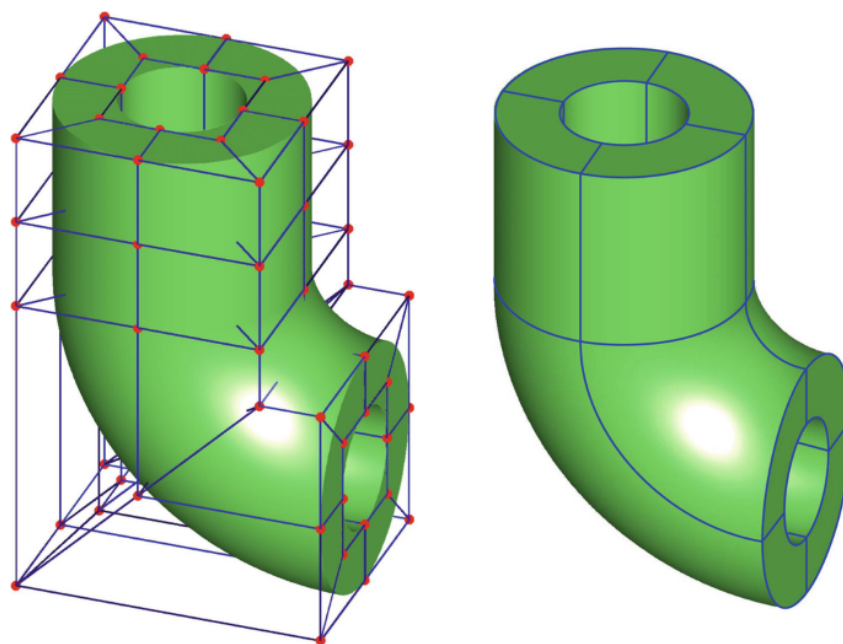
Για την κατασκευή του γεωμετρικού μοντέλου, πρέπει πρώτα να γίνουν κάποιες αρχικές παρατηρήσεις σχετικά με αυτό, οι οποίες θα βοηθήσουν στο σχεδιασμό του. Είναι πολύ σημαντικό να γνωστοποιηθούν εξ αρχής κάποια σημεία που θα παίξουν καθοριστικό ρόλο στην επιλογή κομβοδιανυσμάτων, σημείων ελέγχου και πολυωνυμικών τάξεων. Η γεωμετρία εξετάζεται στην ύπαρξη των παρακάτω στοιχείων:

1. Ιδιαίτερα γεωμετρικά χαρακτηριστικά όπως γωνίες και παρεμβαλλόμενα σημεία μεταξύ υποτημάτων.
2. Εξωτερικές πλευρές και οποιουδήποτε άλλου είδους γεωμετρικά σχήματα, μειωμένης συνέχειας.
3. Γνωστά γεωμετρικά σχήματα και αντικείμενα NURBS χαμηλής τάξης.
4. Επιφάνειες που μπορούν να δημιουργηθούν εκ περιστροφής, με εξώθηση, συμμετρικά στοιχεία και άλλα τέτοιου είδους οντότητες.

5. Περίπλοκες γεωμετρίες που μπορούν να χωριστούν σε απλούστερες, με τη χρήση πολλαπλών μακροστοιχείων.

Οι γωνίες σε ένα γεωμετρικό σχήμα προσδιορίζουν εύκολα τα σημεία ελέγχου που συμπεφτουν με αυτές. Επιπλέον, σημεία μεταξύ υποτμημάτων εκφράζονται με επαναλαμβανόμενα σημεία ελέγχου.

Τα γνωστά απλά γεωμετρικά σχήματα, συνήθως αποτελούν πρότυπα δημιουργίας κάποιου αντικειμένου. Για παράδειγμα, ένας σωλήνας μπορεί να κατασκευαστεί γεωμετρικά δημιουργώντας πρώτα μία κυκλική επιφάνεια με μια οπή και στη συνέχεια εξωθώντας αυτή στο κατάλληλο ύψος.



Σχήμα 36: Παράδειγμα τριδιάστατου φορέα ο οποίος κατασκευάζεται με εξώθηση της γνωστής διδιάστατης γεωμετρίας κύκλου, (Cottrell et al. 2009).

3.9.2 Επιλογή πολυωνυμικών τάξεων

Για την ευκολία της ανάλυσης είναι επιθυμητό να χρησιμοποιηθεί η χαμηλότερη δυνατή πολυωνυμική τάξη για κάθε παραμετρική διεύθυνση. Οι πολυωνυμικές τάξεις καθορίζονται από τα γεωμετρικά σχήματα που πρέπει να αναπαρασταθούν. Οπότε αν σε κάποια διεύθυνση υπάρχει μία κυκλική διατομή, πολυωνυμική τάξη ίση με δύο είναι απαραίτητη για την απεικόνιση αυτής. Αν δεν υπάρχει κάποιο ιδιαίτερο γεωμετρικό χαρακτηριστικό, τότε οι γραμμικές συναρτήσεις επαρκούν, δηλαδή πολυωνυμική τάξη ίση με ένα.

3.9.3 Επιλογή κομβοδιανυσμάτων

Η επιλογή των κομβοδιανυσμάτων γίνεται αφότου αποφασιστεί ο απαραίτητος αριθμός μικροστοιχείων που θα εμφανιστούν στην ανάλυση και τι βαθμός συνέχειας απαιτείται μεταξύ

τους. Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο ο αριθμός των μικροστοιχείων, σε μία παραμετρική διεύθυνση, καθορίζεται από τις διακεκριμένες τιμές του κομβοδιανύσματος της διεύθυνσης αυτής. Η συνέχεια, καθορίζει το βαθμό πολλαπλότητας των ενδιάμεσων τιμών του διανύσματος.

Τέλος, σημειώνεται πως προτιμάται να γίνεται χρήση κομβοδιανυσμάτων που ανήκουν στο διάστημα $[0, 1]$. Αυτό μπορεί εύκολα να επιτευχθεί απευθείας, είτε διαιρώντας τη μονάδα στις επιθυμητές τιμές, είτε δημιουργώντας ένα διάνυσμα με τιμές μεγαλύτερες της μονάδας και διαιρώντας τες με το μέγιστο παράγοντα.

3.9.4 Επιλογή σημείων ελέγχου

Τελευταίο βήμα πριν την ανάλυση, είναι ο καθορισμός των σημείων ελέγχου, ο οποίος είναι δυνατός μόνο μετά τον προσδιορισμό των παραπάνω. Αρχικά γνωστοποιούνται τα σημεία που αντιστοιχούν στις τυχόν γωνίες του σχήματος και τα σημεία αλλαγής γεωμετρίας, όπως εξηγήθηκε στην εισαγωγική παράγραφο. Ύστερα ανάλογα με την οντότητα η οποία είναι προς ανάλυση, προσδιορίζονται τα λοιπά σημεία, είτε από πρότυπα γεωμετρικά σχήματα, είτε μέσω κάποιας αυτοματοποιημένης διαδικασίας προσδιορισμού, αλγοριθμικά.

Κεφάλαιο 4

Γραμμική ελαστική ανάλυση καμπύλων φορέων με ισογεωμετρικά στοιχεία

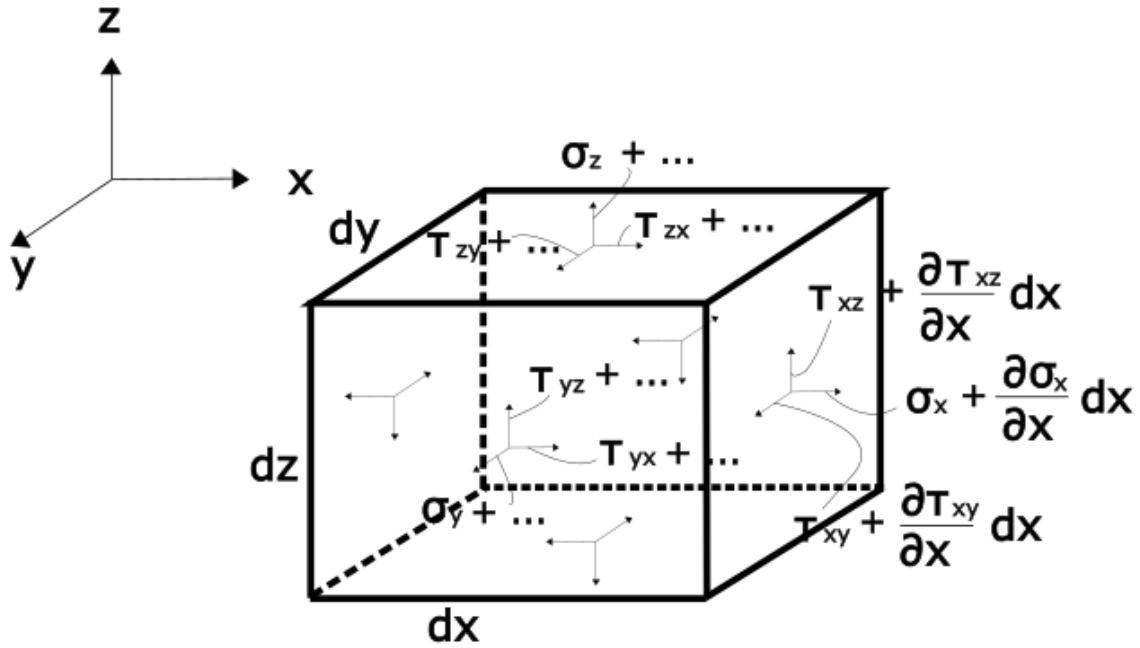
4.1 Γραμμική ελαστοστατική

Το παρόν κεφάλαιο αφορά τα συστατικά στοιχεία της θεωρίας ελαστικότητας γραμμικών φορέων. Το πρόβλημα της γραμμικής ελαστικότητας είναι ένα κλασικό θέμα, με πλούσια ιστορία και είναι κατάλληλο για εξέταση υπό ισογεωμετρική ανάλυση, καθώς παρέχει γεωμετρική ακρίβεια και υψηλή ποιότητα του πεδίου τάσεων, λόγω της χρήσης C^0 συνεχούς βάσης. Οι παρακάτω πληροφορίες είναι εστιασμένες στις γνώσεις που είναι εφαρμοσμένες στην ισογεωμετρική θεωρία και είναι απαραίτητες για την κατανόηση αυτής, στη στατική και στη δυναμική ανάλυση των κατασκευών.

Όλες οι κλασικές θεωρίες πλακών και κελυφών, αποτελούν εφαρμογές της θεωρίας ελαστικότητας. Ένα σώμα που υποβάλλεται σε εξωτερικές δυνάμεις, παραμορφώνεται και παράγει εσωτερικές τάσεις και παραμορφώσεις. Η θεωρία της ελαστικότητας αφορά τις σχέσεις μεταξύ δυνάμεων, μετατοπίσεων, τάσεων και παραμορφώσεων σε ένα γραμμικό, ελαστικό σώμα. Βασίζεται σε δύο βασικές παραδοχές, ότι το σώμα είναι ομογενές και ισότροπο, δηλαδή όλες οι μηχανικές του ιδιότητές του, παραμένουν ίδιες σε όλα τα σημεία και σε όλες τις διευθύνσεις του.

4.1.1 Τάσεις σε σημείο

Έστω ελαστικό σώμα, τυχαίου σχήματος, που υποβάλλεται σε εξωτερικά φορτία, το οποίο ισορροπεί. Ένα τυχαίο σημείο, καρτεσιανών συντεταγμένων, στο εσωτερικό του, αναπαριστάται από ένα απειροελάχιστο στοιχείο με τη μορφή παραλληλεπίπεδου, με όψεις dx , dy και dz , παράλληλες στους άξονες καρτεσιανού συστήματος (x, y, z) .



Σχήμα 37: Τάσεις σε σημείο

Οι τάσεις που δρουν στις όψεις του στοιχείου αναλύονται σε μία κάθετη (ορθή) και δύο διατμητικές ανά πλευρά. Για παράδειγμα, όπως φαίνεται και από την εικόνα 37 στην πλευρά δρουν οι τάσεις $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$. Ο πρώτος δείκτης υποδεικνύει την κατεύθυνση του εξωτερικού διανύσματος, προς την όψη στην οποία δρα η τάση και ο δεύτερος αναφέρεται στην κατεύθυνση της τάσης.

Ισχύει η ακόλουθη σύμβαση περί προσήμων: Θετικές θεωρούνται οι τάσεις που εφελκύνουν το σώμα και αρνητικές αυτές που το θλίβουν. Όλες οι τάσεις που απεικονίζονται στην εικόνα 37 είναι θετικές.

Σε κάθε όψη, οι τρεις συνιστώσες της τάσης συνιστούν ένα διάνυσμα που αποκαλείται επιφανειακή τάση. Οι τάσεις όλων των όψεων του στοιχείου δημιουργούν τον λεγόμενο τανυστή τάσεων (stress tensor).

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad 4.1.1$$

Είναι συμμετρικός ως προς τη διαγώνιο καθώς ισχύει $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ και $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ και περιγράφει πλήρως την τριδιάστατη κατάσταση τάσεων του εκάστοτε σημείου. Συγκεκριμένα, για την περίπτωση ελαστικής ανάλυσης πλακών ισχύει $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ και ο τανυστής έχει τη μορφή:

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad 4.1.2$$

όπου $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

4.1.2 Παραμορφώσεις σε σημείο

Για σημείο με αναπαράσταση απειροελάχιστου παραλληλογράμμου, με τη θεώρηση μικρών παραμορφώσεων, οι συνολικές παραμορφώσεις εκφράζονται μέσα από έξι παράγοντες. Αυτοί, είναι τρεις ορθές ή αλλιώς γραμμικές παραμορφώσεις και τρεις διατμητικές. Οι πρώτες τρεις εκφράζουν την επιμήκυνση ή τη συστολή του στοιχείου και ορίζονται ως

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad 4.1.3$$

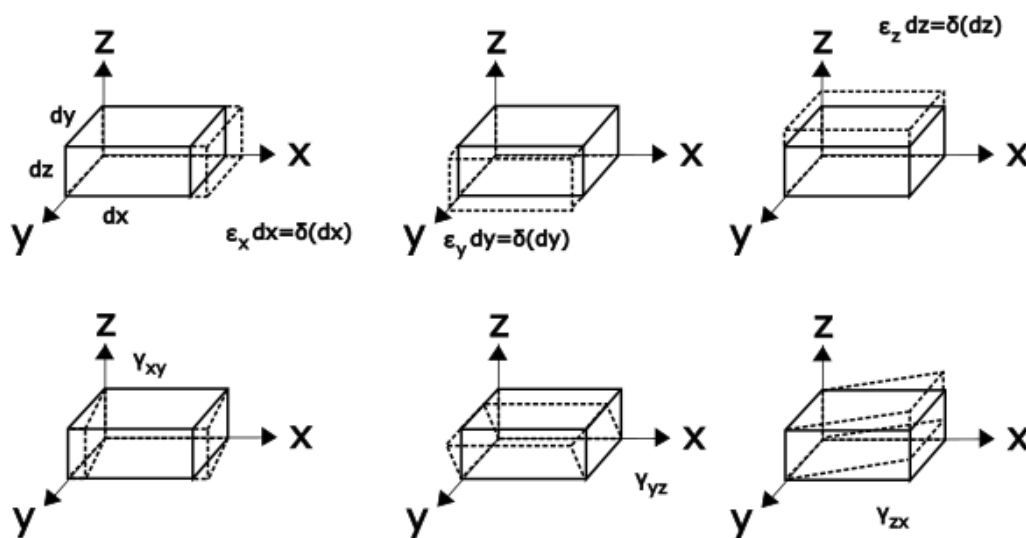
όπου u , v , w οι μετατοπίσεις στο καρτεσιανό σύστημα αξόνων (x, y, z) αντίστοιχα. Οι τρεις διατμητικοί παράγοντες, εκφράζουν την εκτροπή μιας αρχικά ορθής γωνίας, μεταξύ των όψεων του στοιχείου και ορίζονται ως

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad 4.1.4$$

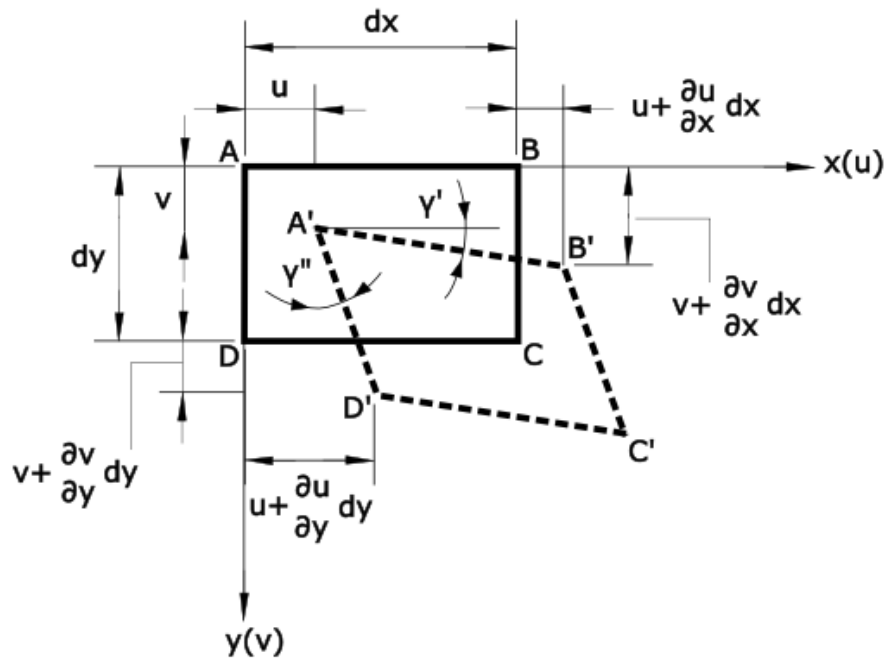
Αντίστοιχα με τον τανυστή τάσεων, ορίζεται και ο τανυστής παραμορφώσεων.

$$\mathbf{T}_D = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad 4.1.5$$

Λόγω συμμετρίας ισχύει $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$ και $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$.



Σχήμα 38: Οι έξι απλούστατες μορφές παραμόρφωσης



Σχήμα 39: Παραμορφώσεις σε σημείο

4.1.3 Καταστατικές εξισώσεις

Οι καταστατικές σχέσεις συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις. Για γραμμικά ελαστικά σώματα, οι εξισώσεις αυτές αντιπροσωπεύουν τον νόμο του Hook.

Για τριδιάστατο ισοτροποπικό σώμα οι καταστατικές εξισώσεις είναι

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] \end{aligned} \quad 4.1.6$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{aligned} \quad 4.1.7$$

όπου E , ν , G το μέτρο ελαστικότητας, ο λόγος του Poisson και το μέτρο διάτμησης. Τα μεγέθη αυτά συνδέονται με τη σχέση

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad 4.1.8$$

4.1.4 Εξισώσεις ισορροπίας

Οι παράγοντες της τάσης πρέπει να πληρούν τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad 4.1.9$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \quad 4.1.10$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + F_z = 0 \quad 4.1.11$$

όπου F_x , F_y και F_z οι δράσεις που δρουν στο σώμα (αδρανειακές, μαγνητικές, εξωτερικές δράσεις, κ.ο.κ.).

4.1.5 Εξισώσεις συμβιβαστού

Οι εξισώσεις συμβιβαστού είναι το τελευταίο κομμάτι των τριδιάστατων προβλημάτων ελαστικότητας και εκφράζουν τη συνέχεια του σώματος. Είναι

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad 4.1.12\alpha'$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad 4.1.12\beta'$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad 4.1.12\gamma'$$

$$4.1.12\delta'$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} \quad 4.1.12\epsilon'$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} \quad 4.1.12\zeta'$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} \quad 4.1.12\eta'$$

$$4.1.12\theta'$$

4.2 Γραμμική ελαστοδυναμική

Οι περισσότερες κατασκευές στην πραγματικότητα υποβάλλονται εκτός από τα στατικά φορτία και σε δυναμικά. Δυναμικά αποκαλούνται τα φορτία των οποίων το μέγεθος, η διε-

ύθιυνη, ή και η θέση μεταβάλλονται συναρτήσσει του χρόνου. Η ανάλυση των φορτίων αυτών και της συμπεριφοράς μιας κατασκευής, υποβληθείσα σε αυτά, αποτελεί αντικείμενο της Δυναμικής Ανάλυσης των Κατασκευών. Η στατική και η δυναμική ανάλυση διαφοροποιούνται ως εξής:

1. Η στατική ανάλυση έχει να κάνει με σταθερά φορτία και ως εκ τούτου, οι εντάσεις και οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στον εκάστοτε φορέα, είναι μοναδικές εφόσον πρόκειται για γραμμικά προβλήματα. Αντίθετα, λόγω των χρονοεξαρτώμενων φορτίων της δυναμικής, τα μεγέθη του φορέα είναι και αυτά συναρτήσεις του χρόνου, οπότε μεταβάλλονται σε κάθε χρονική στιγμή.
2. Στη δυναμική ανάλυση, η θέση των σημείων του φορέα είναι επίσης χρονοεξαρτώμενη. Συνεπώς, καθώς βρίσκονται σε κίνηση, αναπτύσσουν ταχύτητες και επιταχύνσεις. Απόρροια αυτών είναι η δημιουργία αδρανειακών δυνάμεων, εφόσον πρόκειται για σώμα με μάζα. Αυτές οι δυνάμεις επιδεινώνουν την καταπόνηση του φορέα.

4.2.1 Δυναμικά φορτία

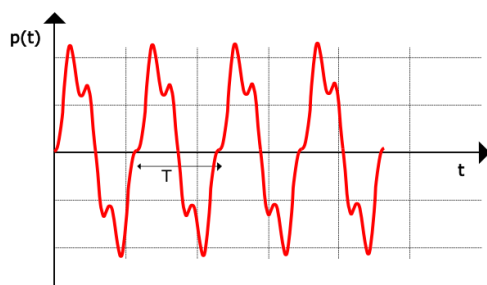
Ως δυναμικά μπορούν να χαρακτηριστούν τα φορτία που οφείλονται σε κίνηση οχημάτων, σε εκρήξεις, σε δόνηση μηχανών, σε ανεμοπίεση, σε σεισμικές δυνάμεις κλπ. Όλα αυτά είναι φορτία των οποίων η ένταση μεταβάλλεται με το χρόνο. Τα δυναμικά φορτία χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τα ντετερμινιστικά ή αιτιοκρατικά φορτία και στα τυχαία ή στοχαστικά. Η πρώτη κατηγορία, έχει να κάνει με φορτία των οποίων η χρονική μεταβολή, είναι γνωστή σε όλη την υπό εξέταση διάρκεια και είναι δυνατόν να αναπαρασταθούν από μία αναλυτική ή γενικευμένη συνάρτηση. Η δεύτερη κατηγορία αφορά φορτία των οποίων η χρονική μεταβολή δεν είναι πλήρως γνωστή, αλλά μπορεί να προσδιορισθεί με ειδικευμένες μεθόδους. Στην παρούσα εργασία εξετάζονται περιπτώσεις κατασκευών οι οποίες υπόκεινται αποκλειστικά σε ντετερμινιστικά φορτία.

Τα φορτία αυτά χωρίζονται επίσης σε δύο βασικές κατηγορίες, οι οποίες είναι τα περιοδικά και τα απεριοδικά φορτία. Περιοδικά είναι τα φορτία εκείνα, τα οποία μεταβάλλονται με ένα συγκεκριμένο, σταθερό χρονικό βήμα, το οποίο προφανώς αποτελεί υποδιαίρεση της συνολικής χρονικής διάρκειας επιβολής του φορτίου. Απεριοδικά είναι όλα τα υπόλοιπα φορτία. Τα περιοδικά εκφράζονται με μια περιοδική συνάρτηση της μορφής

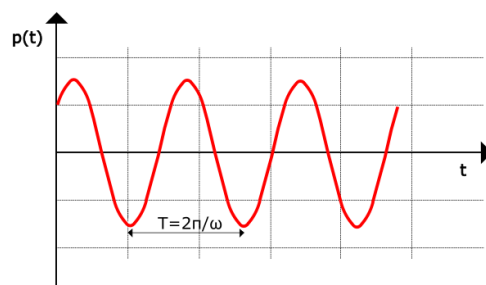
$$p(t) = p(t + nT) \quad 4.2.1$$

όπου n ένας φυσικός αριθμός και T μια σταθερά που εκφράζει τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο ισχύει η 4.2.1, η οποία ονομάζεται περίοδος της φορτίσεως. Τέλος, τα δυναμικά φορτία μικρής χρονικής διάρκειας, ονομάζονται ωστικά φορτία ή πλήγματα.

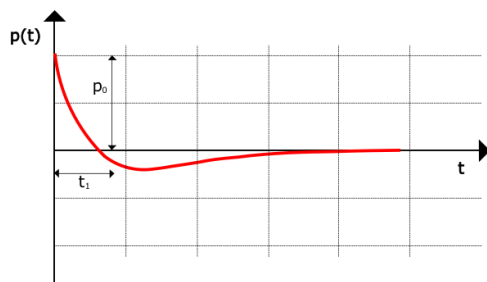
Αξίζει να αναφερθεί πως τα στατικά φορτία αποτελούν στην πραγματικότητα μερική περίπτωση των δυναμικών, καθώς έχουν αρχικά μηδενική ένταση και τελικώς την σταθερή



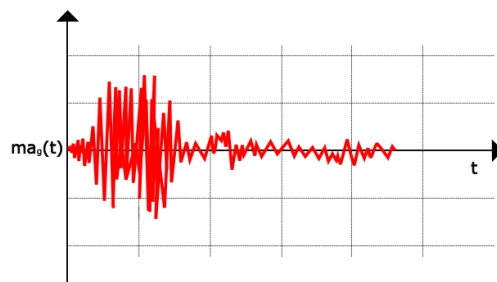
(i) Περιοδική φόρτιση



(ii) Αρμονική φόρτιση



(iii) Απειροική φόρτιση



(iv) Σεισμική φόρτιση

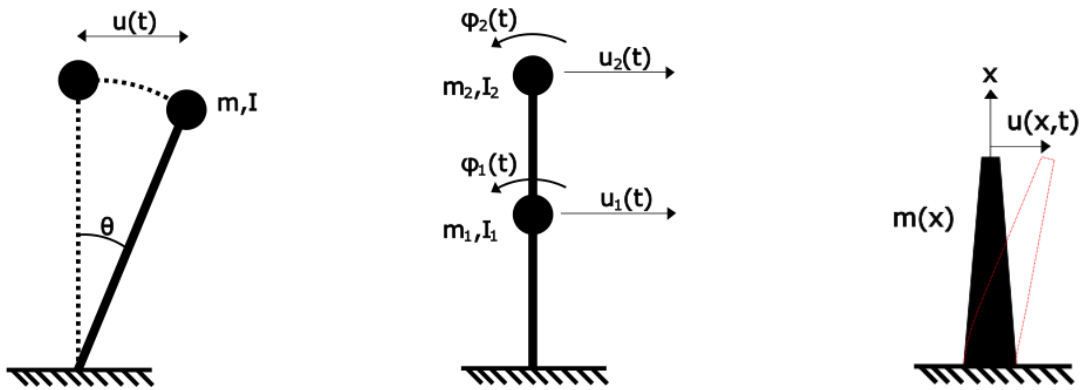
Σχήμα 40: Τέσσερις περιπτώσεις δυναμικών φορτίων

τιμή τους. Ωστόσο, λόγω του τρόπου επιβολής τους, οι επιταχύνσεις που αναπτύσσονται σε αυτό το μικρό χρονικό διάστημα είναι αμελητέες.

4.2.2 Βαθμοί ελευθερίας προβλήματος

Η παραμορφωμένη κατάσταση μιας κατασκευής, προσδιορίζεται σε κάθε χρονική στιγμή από τις μετατοπίσεις των κομβικών σημείων της, τα οποία όπως αναφέρθηκε προηγουμένως είναι χρονοεξαρτώμενες ποσότητες. Το πλήθος μετατοπίσεων, ανεξάρτητων κομβικών σημείων, που απαιτούνται για να περιγράψουν την παραμορφωμένη κατάσταση της κινούμενης κατασκευής, εκφράζει τους βαθμούς ελευθερίας κινήσεώς της. Προφανώς, τα συνεχή συστήματα έχουν άπειρους βαθμούς. Επισημαίνεται πως ο βαθμός ελευθερίας κίνησης του φορέα δεν είναι το ίδιο με τον βαθμό κινηματικής αοριστίας του. Η κινηματική αοριστία καθορίζεται από το πλήθος των δεσμεύσεων που πρέπει να επιβληθούν στον φορέα για την παγίωσή του.

Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας αποκαλούνται μονοβάθμια, ενώ συστήματα με βαθμούς περισσότερους του ενός, πολυβάθμια. Προφανώς μπορούν να γίνουν και ενδιάμεσες συγκεκριμένες αναφορές, όπως διβάθμια συστήματα, τριβάθμια κ.ο.κ. Σε ένα πολυβάθμιο σύστημα, οι βαθμοί ελευθερίας κίνησης είναι ίσοι με το πλήθος των ανεξάρτητων εξισώσεων κινήσεων αυτού, που μπορούν να εξαχθούν κατά την εξέταση της κίνησής του.



(i) Μονοβάθμιο σύστημα

(ii) Πολυβάθμιο σύστημα

(iii) Απειροβάθμιο σύστημα

Σχήμα 41: Συστήματα ταλάντωσης με διάφορους βαθμούς ελευθερίας

4.2.3 Δυναμικό προσομοίωμα κατασκευής

Για την διεκπεραίωση της δυναμικής ανάλυσης μιας κατασκευής, πρέπει να διατυπωθεί ένα δυναμικό προσομοίωμα, που να αντιστοιχεί στην πραγματική κατασκευή.

Για μονοβάθμιο σύστημα, το προσομοίωμα συνήθως αποτελείται από μία μάζα, ένα ελατήριο και έναν αποσβεστήρα. Αυτά αντιπροσωπεύουν το σώμα της κατασκευής, τις ελαστικές δυνάμεις και τις δυνάμεις τριβής (απώλειας ενέργειας) της κατασκευής, αντιστοίχως. Πολυβάθμια, ή ακόμη και απειροβάθμια συστήματα μπορούν να προσεγγισθούν με μονοβάθμια. Η αξιοπιστία αυτής της μεθόδου, εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Εφόσον οι φυσικές ιδιότητες του συστήματος (κατανομή μάζας και ακαμψίας) το εξαναγκάζουν σε κίνηση αποδεκτής μορφής, τότε η προσέγγισή του με μονοβάθμιο δίνει επαρκή αποτελέσματα. Ο βαθμός αξιοπιστίας ωστόσο, είναι δύσκολο να καθορισθεί. Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές η συμπεριφορά των κατασκευών προσομοιώνεται με πολυβάθμια συστήματα. Παρατηρείται συχνά η συγκέντρωση μάζας και ροπής αδράνειας σε ορισμένα σημεία ή περιοχές ενός φορέα. Έτσι, η κίνηση των απειροβάθμιων συστημάτων προσομοιώνεται με πολυβάθμιο σύστημα, λαμβάνοντας ως συντεταγμένες της παραμόρφωσής του, τις συνιστώσες μετατόπισης των σημείων της κατασκευής που παρουσιάζουν συγκέντρωση των αδρανειακών χαρακτηριστικών τους (μάζες και ροπές αδράνειας).

Τα πολυβάθμια συστήματα διαχωρίζονται στις εξής πέντε κατηγορίες:

1. Συστήματα με εντοπισμένη¹ μάζα και δυσκαμψία.
2. Συστήματα με εντοπισμένη μάζα και συγκεντρωμένη ακαμψία.
3. Συστήματα με εντοπισμένη μάζα και κατανομημένη ακαμψία.
4. Συστήματα με κατανομημένη μάζα και ακαμψία.

5. Μικτά συστήματα, με συνδυασμό των ανωτέρων περιπτώσεων.

Μονοβάθμια συστήματα

Έστω $u(t)$ η μετατόπιση του σώματος τη χρονική στιγμή t , από τη θέση ισορροπίας του. Κατά τη δεδομένη χρονική στιγμή αυτή, στο σώμα ασκούνται οι ακόλουθες δυνάμεις,

1. Η εξωτερική δύναμη $p(t)$.
2. Η ελαστική δύναμη f_S , η οποία τείνει να επαναφέρει το σώμα στην αρχική του κατάσταση.
3. Η δύναμη απόσβεσης f_D , η οποία εκφράζει τις απώλειες ενέργειας εξαιτίας των εσωτερικών ή εξωτερικών τριβών της κατασκευής.
4. Η αδρανειακή δύναμη f_I .

Η ελαστική δύναμη f_S εξαρτάται από τη μετατόπιση u και εκφράζεται με τη γραμμική συνάρτηση $f_S = f_S(u)$ του $u(t)$. Στην περίπτωση μονοβάθμιου συστήματος, γραμμικής συμπεριφοράς, η ελαστική δύναμη είναι

$$f_S = ku \quad 4.2.2$$

όπου k η σταθερά ακαμψίας του ελατηρίου, με μονάδες kN/m . Η δύναμη απόσβεσης στην πιο απλή της μορφή, δηλαδή όταν πρόκειται για ιξώδη απόσβεση, είναι ανάλογη της ταχύτητας της κινήσεως και είναι

$$f_D = c\dot{u} \quad 4.2.3$$

όπου c η σταθερά απόσβεσης, η οποία μπορεί να εξακριβωθεί πειραματικά. Η αδρανειακή δύναμη, εξαρτάται από τη μάζα και την επιτάχυνση του συστήματος και εκφράζεται από το γνωστό δεύτερο νόμο του Newton.

$$f_I = m\ddot{u} \quad 4.2.4$$

Με δεδομένο το δυναμικό προσομοίωμα της κατασκευής, διατυπώνεται η εξίσωση κίνησης του συστήματος. Για μονοβάθμιο σύστημα η εξίσωση προκύπτει με άμεση εφαρμογή του νόμου του Newton, ήτοι

$$m\ddot{u} = F \quad 4.2.5$$

¹Ο όρος εντοπισμένη μάζα υποδηλώνει και την πιθανή ύπαρξη ροπής αδρανείας στο σημείο της συγκεντρωμένης μάζας, ενώ ο όρος συγκεντρωμένη υποδηλώνει μηδενική ροπή αδρανείας.

όπου

$$F = p(t) - f_S - f_D \quad 4.2.6$$

η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων.

Η σχέση 4.2.5 με εφαρμογή των 4.2.2, 4.2.3, 4.2.6 γράφεται

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad 4.2.7$$

Αυτή είναι η τελική μορφή της εξίσωσης του συστήματος, η οποία εκφράζει την δυναμική ισορροπία του και αποτελεί διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης, ως προς την άγνωστη μεταβλητή της ταχύτητας $u(t)$. Η επίλυσή της, δίνει τη μετατόπιση συναρτήσει χρόνου. Για πολυβάθμια συστήματα διατυπώνονται εξισώσεις κίνησης ισάριθμες με τους βαθμούς ελευθερίας τους.

Πολυβάθμια συστήματα

Σε αντιστοιχία με τα μονοβάθμια συστήματα, ορίζεται $\{\mathbf{u}(t)\}$ το διάνυσμα της μετατόπισης του συστήματος, τη χρονική στιγμή t .

$$\{\mathbf{u}^T(t)\} = \{u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_N\} \quad 4.2.8$$

όπου

$$\{\mathbf{u}_i\} = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \phi_{xi} \quad \phi_{yi} \quad \phi_{zi}\} \quad 4.2.9$$

Με $i = 1, 2, \dots, n$, όπου n ο αριθμός κόμβων του συστήματος και N ο αριθμός των συνολικών βαθμών ελευθερίας του συστήματος.

Οι δυνάμεις που καταπονούν το σύστημα είναι και εδώ οι εξωτερικές $p(t)$, οι ελαστικές, οι δυνάμεις απόσβεσης και οι δυνάμεις αδράνειας. Οι εξωτερικές ορίζονται επίσης σε διανυσματική μορφή και είναι

$$\{\mathbf{p}^T(t)\} = \{p_1 \quad p_2(t) \quad \dots \quad p_n\} \quad 4.2.10$$

όπου

$$\{\mathbf{p}_i\} = \{p_{xi}(t) \quad p_{yi}(t) \quad p_{wi}(t) \quad M_{1i} \quad M_{2i} \quad M_{3i}\} \quad 4.2.11$$

Οι ελαστικές εξαρτώνται γενικώς από όλες τις μετατοπίσεις. Για ένα γραμμικό σύστημα,

σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, ισχύει

$$\mathbf{f}_{S_i} = k_{i1}u_1 + k_{i1}u_1 + \dots + k_{ij}u_j + \dots + k_{iN}u_N \quad 4.2.12$$

όπου k_{ij} οι σταθερές που εκφράζουν τους συντελεστές επιρροής δυσκαμψίας, που συσχετίζουν την ελαστική δύναμη f_{S_i} , με τη μετατόπιση u_j . Το φυσικό της νόημα, είναι η δύναμη που ασκείται κατά τη διεύθυνση i για μοναδιαία μετατόπιση κατά τη διεύθυνση j , ενώ οι άλλες μετατοπίσεις είναι μηδενικές. Η παραπάνω σχέση σε μητρική μορφή είναι

$$\left\{ f_{S_1} \quad f_{S_2} \quad \dots \quad f_{S_N} \right\} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \left\{ u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_N \right\} \quad 4.2.13$$

Ο πίνακας

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \quad 4.2.14$$

είναι ο τετραγωνικός πίνακας δυσκαμψίας της κατασκευής, που υπολογίζεται από τις γνωστές στατικές μεθόδους και για τον οποίο θα γίνει λόγος παρακάτω. Οι δυνάμεις απόσβεσης εκφράζονται με την ίδια λογική ως

$$\mathbf{f}_{D_i} = c_{i1}\dot{u}_1 + c_{i2}\dot{u}_2 + \dots + c_{ij}\dot{u}_j + \dots + c_{iN}\dot{u}_N \quad 4.2.15$$

Η 4.2.17 για $i = 1, 2, \dots, N$ δίνει N εξισώσεις, οι οποίες γράφονται υπό μητρική μορφή ως

$$\left\{ f_{D_1} \quad f_{D_2} \quad \dots \quad f_{D_N} \right\} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \left\{ \dot{u}_1 \quad \dot{u}_2 \quad \dots \quad \dot{u}_N \right\} \quad 4.2.16$$

Το τετραγωνικό μητρώο c με διαστάσεις $N \times N$ είναι το μητρώο απόσβεσης της κατασκευής. Τέλος, οι αδρανειακές δυνάμεις ορίζονται με ανάλογο τρόπο ως

$$\mathbf{f}_{I_i} = m_{i1}\ddot{u}_1 + m_{i2}\ddot{u}_2 + \dots + m_{ij}\ddot{u}_j + \dots + m_{iN}\ddot{u}_N \quad 4.2.17$$

και σε μητρική μορφή:

$$\{f_{I_1} \quad f_{I_2} \quad \dots \quad f_{I_N}\} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix} \{\ddot{u}_1 \quad \ddot{u}_2 \quad \dots \quad \ddot{u}_N\} \quad 4.2.18$$

όπου το τετραγωνικό μητρώο m διαστάσεων $N \times N$ είναι το μητρώο μάζας της κατασκευής. Το στοιχείο m_{ij} εκφράζει τη δύναμη αδράνειας κατά τη διεύθυνση i , για μοναδιαία επιτάχυνση \ddot{u}_1 κατά τη διεύθυνση j , όταν οι επιταχύνσεις κατά τις κατευνθύνσεις των άλλων βαθμών ελευθερίας είναι μηδέν.

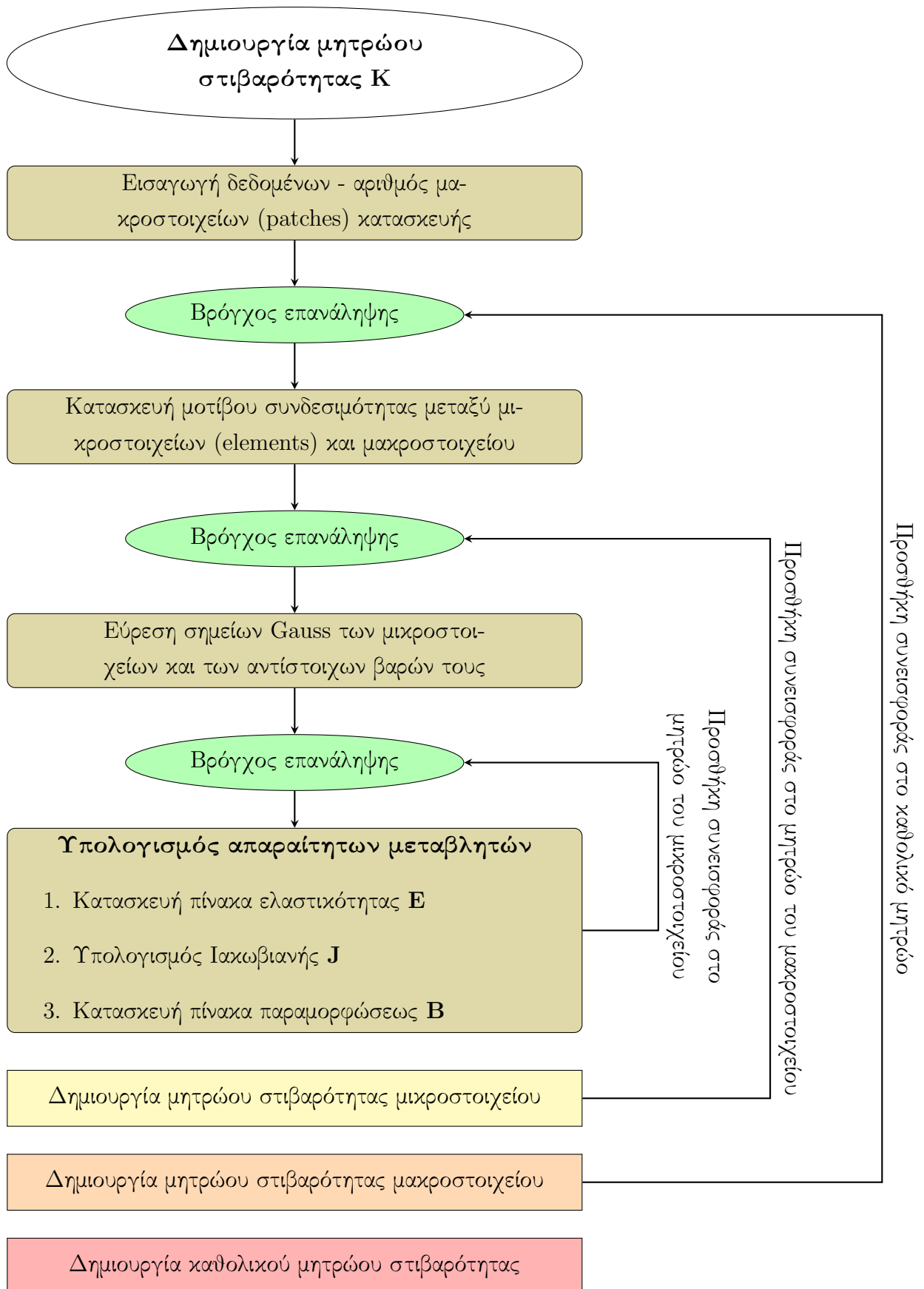
4.2.4 Επιρροή των φορτίων βαρύτητας

Μαζί με τις λοιπές εξωτερικές δυνάμεις πρέπει να ληφθεί υπόψη και το βάρος του σώματος. Οποιοδήποτε σώμα, έχει μία επιμήκυνση οφειλόμενη στο βάρος του, η οποία είναι σταθερή και αμετάβλητη, δεδομένου ότι η βαρυτική του δύναμη παραμένει επίσης σταθερή. Συμπεραίνεται πως κατά τη δυναμική συμπεριφορά μιας κατασκευής, τα μόνιμα φορτία βαρύτητας μπορούν να αγνοηθούν, εάν οι συνιστώσες της δυναμικής μετατόπισης υπολογίζονται με αφετηρία το παραμορφωμένο σχήμα της κατασκευής, λόγω βαρυτικών φορτίων. Είναι προφανές πως για τον υπολογισμό των ολικών βελών, πρέπει στα δυναμικά να προστεθούν και τα αντίστοιχα στατικά.

4.3 Δημιουργία μητρώου στιβαρότητας

Ένα από τα σημαντικότερα βήματα της ανάλυσης είναι η κατασκευή των μητρώων στιβαρότητας και μάζας. Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται η δημιουργία του μητρώου στιβαρότητας στην ισογεωμετρική ανάλυση. Η γενική διαδικασία είναι επαναληπτική και δε διαφέρει από την αντίστοιχη της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Για τη συγκρότηση του καθολικού μητρώου ακαμψίας αλγοριθμικά, εκτελείται βρόχος επανάληψης στον οποίο υπολογίζεται το μητρώο στιβαρότητας κάθε μακροστοιχείου, η συνεισφορά του οποίου, προστίθεται στο καθολικό. Για τον υπολογισμό της ακαμψίας αυτών πρέπει πρώτα να καθοριστεί η στιβαρότητα του κάθε μικροστοιχείου, τα οποία εξ' ορισμού συγκοτούν τα μακροστοιχεία. Επομένως, μέσα στον προαναφερόμενο βρόγχο, εμφωλεύεται ένας ακόμη ο οποίος υπολογίζει την ακαμψία των μικροστοιχείων. Η διαδικασία αυτή επεκτείνεται σε ακόμα πιο μικρές οντότητες, τα σημεία Gauss κάθε μικροστοιχείου, για τα οποία δημιουργείται ένας τρίτος, διπλά εμφωλευμένος βρόγχος. Έτσι η όλη διαδικασία περιλαμβάνει τρεις βρόγχους επανάληψης, των μακροστοιχείων, των μικροστοιχείων και των σημείων ολοκλήρωσης Gauss. Η διαδικασία αποτυπώνεται καλύτερα στο διάγραμμα 42.



Σχήμα 42: Διάγραμμα ροής κατασκευής μητρώου στιβαρότητας

4.3.1 Αριθμητική ολοκλήρωση Gauss

Πριν αναπτυχθεί περαιτέρω η πορεία κατασκευής του καθολικού μητρώου στιβαρότητας, είναι δέον να γίνει η κατάλληλη αναφορά στα σημεία Gauss, ή αλλιώς σημεία ολοκλήρωσης. Για τον τμηματικό τομέα κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης βάσης, επιλέγεται συγκεκριμένος αριθμός σημείων Gauss, για να εκτελεσθεί ακριβώς αριθμητική ολοκλήρωση. Ο τομέας αυτός, είναι τα γνωστά μικροστοιχεία, ή απλά στοιχεία, δηλαδή τα κομβοδιαστήματα.

Στον αλγόριθμο της αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss, οι θέσεις των σημείων ολοκλήρωσης και τα βάρη τους, επιλέγονται σύμφωνα με τον βαθμό του πολυωνύμου που πρόκειται να ολοκληρωθεί, ώστε το αποτέλεσμα να είναι ακριβές. Εφόσον ένα πολυώνυμο βαθμού p , έχει $p + 1$ συντελεστές και m σημεία Gauss έχουν $2m$ παραμέτρους (θέσεις και βάρη), ο υψηλότερος βαθμός πολυωνύμου που μπορεί να ολοκληρωθεί ακριβώς, είναι

$$p = 2m - 1 \quad 4.3.1$$

Αφότου επιλεγθεί ο αριθμός σημείων Gauss για κάθε στοιχείο, η διαδικασία ολοκλήρωσης είναι σχετικά απλή. Υπολογίζονται οι παραμετρικές συντεταγμένες σε στοιχείο αναφοράς που εκτείνεται στο διάστημα $[-1, 1]$. Αυτό επιτυγχάνεται με τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων και των βαρών τους, από το κομβοδιάστημα αναφοράς $\xi^{\mathbb{R}}$, στο επιθυμητό κομβοδιάστημα $[\xi_i, \xi_{i+1}]$. Οι σχέσεις μετασχηματισμού είναι

$$\xi = \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i) \xi^{\mathbb{R}} + (\xi_{i+1} + \xi_i)}{2} \quad 4.3.2$$

$$w^{GP} = \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)}{2} w_{\xi}^{\mathbb{R}} \quad 4.3.3$$

Προκύπτουν παρόμοιες εξισώσεις και για τις άλλες δύο παραμετρικές διευθύνσεις.

$$\eta = \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i) \eta^{\mathbb{R}} + (\eta_{i+1} + \eta_i)}{2} \quad 4.3.4$$

$$w^{GP} = \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i)}{2} w_{\eta}^{\mathbb{R}} \quad 4.3.5$$

$$\zeta = \frac{(\zeta_{i+1} - \zeta_i) \zeta^{\mathbb{R}} + (\zeta_{i+1} + \zeta_i)}{2} \quad 4.3.6$$

$$w^{GP} = \frac{(\zeta_{i+1} - \zeta_i)}{2} w_\zeta^{\mathbb{R}} \quad 4.3.7$$

Αριθμός σημείων Gauss

Η αριθμητική ολοκλήρωση εφαρμόζεται για τον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας, το οποίο είναι ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} B^T E B d\Omega \quad 4.3.8$$

όπου E ο καταστατικός πίνακας του φορέα και B ο πίνακας παραμορφώσεων, του οποίου οι διαστάσεις εξαρτώνται από τον αριθμό των παραγώγων, των συναρτήσεων σχήματος.

Σε μονοδιάστατα προβλήματα, συναρτήσεων σχήματος πολυωνυμικού βαθμού p , η διαφορίση παράγει ένα πολυώνυμο βαθμού $p - 1$. Ως αποτέλεσμα, το μητρώο στιβαρότητας, όπως είναι εμφανές από τη σχέση 4.3.8, θα είναι διαστάσεων $(p - 1) + (p - 1) = 2p - 2$. Έτσι ο ελάχιστος αριθμός σημείων ολοκλήρωσης είναι

$$\frac{(2p - 2) + 2}{2} = p \quad 4.3.9$$

Σε διδιάστατα και τριδιάστατα προβλήματα, ο αριθμός των μερικών παραγώγων που προκύπτουν από τη διαδικασία της διαφορίσης είναι $2p$. Οπότε, ο ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός σημείων Gauss είναι

$$\frac{2p + 2}{2} = p + 1 \quad 4.3.10$$

4.3.2 Μητρώο Στιβαρότητας σε μονοδιάστατα προβλήματα

Καταρχάς είναι σκόπιμο να αναπτυχθεί η λογική δημιουργίας του μητρώου ακαμψίας μονοδιάστατων προβλημάτων, καθώς αυτή στη συνέχεια γενικεύεται για διδιάστατα και τριδιάστατα προβλήματα.

Γενικώς τα μονοδιάστατα προβλήματα αποτελούν εφαρμογές, οι οποίες αφορούν ένα σώμα με μόνη καταπόνηση την αξονική. Άρα η παραμόρφωση του στοιχείου είναι $u(x) = u(F(\xi)) = u(\xi)$. Ο πίνακας παραμορφώσεων είναι

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{[1 \times 1]} = [\varepsilon_x] = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad 4.3.11$$

Για τον υπολογισμό της μερικής παραγώγου της μεταβλητής u , πρέπει πρώτα να επιτευχθεί ένας μετασχηματισμός από τον Φυσικό στον Παραμετρικό χώρο. Ο μετασχηματισμός

αυτός εκφράζεται ως

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad 4.3.12$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad 4.3.13$$

ή αλλιώς,

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] = [J] \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \quad 4.3.14$$

όπου $[J]$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας, ο οποίος κάνει δυνατό το μετασχηματισμό από τον Φυσικό στον Παραμετρικό χώρο και αντίστροφα. Ορίζεται από τις συναρτήσεις σχήματος και τις καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων ελέγχου ως

$$[\mathbf{J}(\xi)]_{[1 \times 1]} = \left\{ \begin{array}{cccc} R_{1,\xi}(\xi) & R_{2,\xi}(\xi) & \dots & R_{n,\xi}(\xi) \end{array} \right\}_{[1 \times n]} \left\{ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{array} \right\}_{[n \times 1]} \quad 4.3.15$$

$$\text{όπου } R_{i,\xi}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} R_i(\xi).$$

Τα δύο σημαντικότερα χαρακτηριστικά της Ιακωβιανής, είναι ότι πρέπει πάντοτε να έχει θετική ορίζουσα και να είναι αντιστρέψιμη. Αυτό γιατί πολλές φορές χρησιμοποιείται ο αντίστροφος πίνακας για την ανάλυση, ήτοι,

$$[\mathbf{J}]_{[1 \times 1]}^{-1} = \frac{1}{[\mathbf{J}]_{[1 \times 1]}} \quad 4.3.16$$

Για να εξασφαλιστούν αυτές οι δύο ιδιότητες, η θετική κατεύθυνση των αξόνων στον Φυσικό και στον Παραμετρικό χώρο πρέπει να είναι ταυτόσημες.

Τελευταίο βήμα για τον προσδιορισμό του μητρώου στιβαρότητας, είναι η παραγωγή του μητρώου παραμορφώσεων $[\mathbf{B}]$. Ο πίνακας αυτός κατασκευάζεται από τη συνεισφορά δύο ξεχωριστών πινάκων παραμορφώσεων, τους $[B_1]$ και $[B_2]$. Ο πρώτος μεταφέρει τις παραμορφώσεις του στοιχείου από το Παραμετρικό στο Φυσικό χώρο, ενώ ο δεύτερος μεταφέρει τις μετατοπίσεις των κόμβων των στοιχείων, στις παραμορφώσεις στον Παραμετρικό χώρο. Ο πίνακας $[B_1]$ υπολογίζεται σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις.

$$\{\epsilon\}_{[1 \times 1]} = [B_1]_{[1 \times 1]} \{u_\xi\}_{[1 \times 1]} \quad 4.3.17$$

όπου

$$[\mathbf{B}_1(\xi)]_{[1 \times 1]} = \left[\frac{1}{J_{11}} \right] \quad 4.3.18$$

$$\{\epsilon\}_{[1 \times 1]} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = [J]^{-1} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \right] \quad 4.3.19$$

και

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \right] = \left\{ R_{1,\xi}(\xi) \quad R_{2,\xi}(\xi) \quad \dots \quad R_{n,\xi}(\xi) \right\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad 4.3.20$$

Και ο πίνακας $[B_2]$ από τη σχέση

$$\{u\}_{[1 \times 1]} = [\mathbf{B}_2]_{[1 \times n]} \{d\}_{[n \times 1]} \quad 4.3.21$$

με

$$[\mathbf{B}_2(\xi)]_{[1 \times n]} = \left\{ R_{1,\xi}(\xi) \quad R_{2,\xi}(\xi) \quad \dots \quad R_{n,\xi}(\xi) \right\} \quad 4.3.22$$

Τελικά, το μητρώο παραμορφώσεων είναι

$$[\mathbf{B}(\xi)]_{[1 \times n]} = [B_1(\xi)]_{[1 \times 1]} [\mathbf{B}_2(\xi)]_{[1 \times n]} \quad 4.3.23$$

Από τη σχέση 4.3.23, σε συνδυασμό με τη χρήση των επικύμβιων μετατοπίσεων, υπολογίζονται οι παραμορφώσεις σε οποιοδήποτε σημείο της κατασκευής ως εξής:

$$\{\epsilon(\xi)\}_{[1 \times 1]} = [B(\xi)]_{[1 \times n]} \{d\}_{[n \times 1]} \quad 4.3.24$$

Τέλος, το μητρώο στιβαρότητας ενός μακροστοιχείου προκύπτει από την σχέση

$$[\mathbf{K}]_{[n \times n]} = \int_{\xi_0}^{\xi_{n+p+1}} [\mathbf{B}(\xi)]^T_{[n \times 1]} [E]_{[1 \times 1]} [\mathbf{B}(\xi)]_{[n \times 1]} Adet[J] d\xi \quad 4.3.25$$

Η άμεση ολοκλήρωση της 4.3.25 δε είναι δυνατή σχεδόν ποτέ. Το ολοκλήρωμα

υπολογίζεται με την αριθμητική ολοκλήρωση Gauss ως εξής:

$$[\mathbf{K}]_{[n \times n]} = \sum_{i=1}^{GP_{\xi}} \left\{ \begin{matrix} [\mathbf{B}(\xi_i)]^T & [E] & [\mathbf{B}(\xi_i)] & Adet[J]w_i^{GP_{\xi}} \\ [n \times 1] & [1 \times 1] & [n \times 1] & \end{matrix} \right\} \quad 4.3.26$$

όπου A η επιφάνεια της διατομής, GP_{ξ} ο συνολικός αριθμός σημείων Gauss στο εκάστοτε στοιχείο, ξ_i η συντεταγμένη του συγκεκριμένου σημείου Gauss και $w_i^{GP_{\xi}}$ το βάρος που του αντιστοιχεί.

4.3.3 Μητρώο Στιβαρότητας σε διδιάστατα προβλήματα

Η κατασκευή του μητρώου στιβαρότητας σε διδιάστατα προβλήματα πραγματοποιείται με την ίδια λογική όπως στα μονοδιάστατα, με μόνη διαφορά την χρήση μίας ακόμα διάστασης. Ο Παραμετρικός χώρος ορίζεται στο σύστημα (ξ, η) και ο Φυσικός στο (x, y) , οι μετατοπίσεις είναι $u(x, y) = u(F(\xi, \eta)) = u(\xi, \eta)$ και $v(x, y) = v(F(\xi, \eta)) = v(\xi, \eta)$ αντίστοιχα.

Το διάνυσμα παραμορφώσεων ορίζεται ως

$$\{\epsilon\}_{[3 \times 1]} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\epsilon\}_{[3 \times 1]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad 4.3.27$$

Ο μετασχηματισμός μιας συνάρτησης ϕ από τον Φυσικό στον Παραμετρικό χώρο και αντίστροφα γίνεται μέσω των σχέσεων

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad 4.3.28$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad 4.3.29$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad 4.3.30$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad 4.3.31$$

Ο διδιάστατος Ιακωβιανός πίνακας μετασχηματισμού είναι

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}]_{[2 \times 2]} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} \quad 4.3.32$$

Και αντίστροφα,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} = \underset{[2 \times 2]}{[\mathbf{J}]^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad 4.3.33$$

όπου

$$\underset{[2 \times 2]}{[\mathbf{J}]} = \begin{bmatrix} R_{1,\xi}(\xi, \eta) & R_{2,\xi}(\xi, \eta) & \dots & R_{N,\xi}(\xi, \eta) \\ R_{1,\eta}(\xi, \eta) & R_{2,\eta}(\xi, \eta) & \dots & R_{N,\eta}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ \vdots & \vdots \\ X_N & Y_N \end{bmatrix} \quad 4.3.34$$

με $N = nm$ ο συνολικός αριθμός σημείων ελέγχου. Ο αντίστροφος πίνακας της Ιακωβιανής είναι

$$\underset{[2 \times 2]}{[\mathbf{J}]^{-1}} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad 4.3.35$$

Η ορίζουσά της

$$\det[\mathbf{J}] = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12} \quad 4.3.36$$

Οι επιμέρους πίνακες παραμόρφωσης $[B_1]$ και $[B_2]$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\{\epsilon\} = \underset{[3 \times 3]}{[\mathbf{B}_1(\xi, \eta)]} \underset{[4 \times 1]}{\mathbf{u}_\xi} \quad 4.3.37$$

$$\underset{[3 \times 4]}{[\mathbf{B}_1(\xi, \eta)]} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{12} & J_{11} \\ -J_{12} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \quad 4.3.38$$

$$\underset{[1 \times 1]}{\mathbf{u}} = \underset{[1 \times n]}{[\mathbf{B}_2]} \underset{[n \times 1]}{\mathbf{d}} \quad 4.3.39$$

και

$$\{\mathbf{u}\} = \underset{[4 \times 1]}{[\mathbf{B}_2]} \{\mathbf{d}\} \underset{[4 \times n]}{[n \times 1]} \quad 4.3.40$$

$$[\mathbf{B}_2(\xi, \eta)]_{[2 \times 2N]} = \begin{bmatrix} R_{1,\xi} & 0 & R_{2,\xi} & 0 & \dots & R_{N,\xi} & 0 \\ R_{1,\eta} & 0 & R_{2,\eta} & 0 & \dots & R_{N,\eta} & 0 \\ 0 & R_{1,\xi} & 0 & R_{2,\xi} & \dots & 0 & R_{N,\xi} \\ 0 & R_{1,\eta} & 0 & R_{2,\eta} & \dots & 0 & R_{N,\eta} \end{bmatrix} \quad 4.3.41$$

Το τελικό μητρώο παραμόρφωσης είναι

$$[\mathbf{B}(\xi, \eta)]_{[3 \times 2N]} = [\mathbf{B}_1(\xi, \eta)]_{[3 \times 4]} [\mathbf{B}_2(\xi, \eta)]_{[4 \times 2N]} \quad 4.3.42$$

Το μητρώο στιβαρότητας προκύπτει από τη σχέση

$$[\mathbf{K}]_{[2N \times 2N]} = \int_{\xi_0}^{\xi_{n+p+1}} \int_{\eta_0}^{\eta_{m+q+1}} [\mathbf{B}(\xi)]_{[2N \times 3]}^T [\mathbf{E}]_{[3 \times 3]} [\mathbf{B}(\xi)]_{[3 \times 2N]} t \det[\mathbf{J}] d\eta d\xi \quad 4.3.43$$

η αριθμητική ολοκλήρωση της οποίας οδηγεί στη σχέση

$$[\mathbf{K}]_{[2N \times 2N]} = \sum_{i=1}^{GP_\xi} \sum_{j=1}^{GP_\eta} \left\{ [\mathbf{B}(\xi_i, \eta_j)]_{[2N \times 3]}^T [\mathbf{E}]_{[3 \times 3]} [\mathbf{B}(\xi_i, \eta_j)]_{[3 \times 2N]} t \det[\mathbf{J}] w_i^{GP_\xi} w_j^{GP_\eta} \right\} \quad 4.3.44$$

όπου t το πάχος της διατομής, GP_ξ ο συνολικός αριθμός σημείων Gauss στη διεύθυνση ξ του στοιχείου και GP_η ο συνολικός αριθμός σημείων Gauss στη διεύθυνση η του στοιχείου αντίστοιχα, ξ_i, η_j οι συντεταγμένες του συγκεκριμένου σημείου και $w_i^{GP_\xi}, w_j^{GP_\eta}$ τα βάρη που τους αντιστοιχούν.

4.3.4 Μητρώο Στιβαρότητας σε τριδιάστατα προβλήματα

Οι σχέσεις για την κατασκευή του μητρώου στιβαρότητας στα τριδιάστατα προβλήματα αποτελούν απλή επέκταση των σχέσεων των διδιάστατων προβλημάτων. Με την ίδια λογική, είναι προφανές πως οποιοδήποτε πρόβλημα λιγότερων διαστάσεων μπορεί να λυθεί με τις σχέσεις των τριδιάστατων, καθώς θα είναι υποβίβαση του γενικού προβλήματος.

Ο Παραμετρικός χώρος ορίζεται στο σύστημα (ξ, η, ζ) και ο Φυσικός στο (x, y, z) . Το πεδίο των μετατοπίσεων είναι $u(x, y, z) = u(F(\xi, \eta, \zeta)) = u(\xi, \eta, \zeta)$, $v(x, y, z) = v(F(\xi, \eta, \zeta)) =$

$v(\xi, \eta, \zeta)$ και $w(x, y, z) = w(F(\xi, \eta, \zeta)) = w(\xi, \eta, \zeta)$. Το διάνυσμα παραμορφώσεων είναι

$$\{\epsilon\}_{[6 \times 1]} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\epsilon\}_{[6 \times 1]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad 4.3.45$$

Ο πίνακας της Ιακωβιανής είναι

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}]_{[3 \times 3]} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} \quad 4.3.46$$

Και αντίστροφα,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}]_{[3 \times 3]}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad 4.3.47$$

όπου

$$[\mathbf{J}]_{[3 \times 3]} = \begin{bmatrix} R_{1,\xi}(\xi, \eta, \zeta) & R_{2,\xi}(\xi, \eta, \zeta) & \dots & R_{N,\xi}(\xi, \eta, \zeta) \\ R_{1,\eta}(\xi, \eta, \zeta) & R_{2,\eta}(\xi, \eta, \zeta) & \dots & R_{N,\eta}(\xi, \eta, \zeta) \\ R_{1,\zeta}(\xi, \eta, \zeta) & R_{2,\zeta}(\xi, \eta, \zeta) & \dots & R_{N,\zeta}(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_N & Y_N & Z_N \end{bmatrix} \quad 4.3.48$$

Ακόμη, ισχύει

$$[\mathbf{J}]_{[3 \times 3]}^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad 4.3.49$$

Ο επιμέρους πίνακας παραμόρφωσης \mathbf{B}_1 είναι

$$[\mathbf{B}_1(\xi, \eta, \zeta)]_{[6 \times 9]} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & 0 & 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \end{bmatrix} \quad 4.3.50$$

και ο \mathbf{B}_2 είναι

$$[\mathbf{B}_2(\xi, \eta, \zeta)]_{[9 \times 3N]} = \begin{bmatrix} R_{1,\xi} & 0 & 0 & R_{2,\xi} & 0 & 0 & \dots & R_{N,\xi} & 0 & 0 \\ R_{1,\eta} & 0 & 0 & R_{2,\eta} & 0 & 0 & \dots & R_{N,\eta} & 0 & 0 \\ R_{1,\zeta} & 0 & 0 & R_{2,\zeta} & 0 & 0 & \dots & R_{N,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & R_{1,\xi} & 0 & 0 & R_{2,\xi} & 0 & \dots & 0 & R_{N,\xi} & 0 \\ 0 & R_{1,\eta} & 0 & 0 & R_{2,\eta} & 0 & \dots & 0 & R_{N,\eta} & 0 \\ 0 & R_{1,\zeta} & 0 & 0 & R_{2,\zeta} & 0 & \dots & 0 & R_{N,\zeta} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & R_{1,\xi} & 0 & 0 & R_{2,\xi} & \dots & 0 & 0 & R_{N,\xi} \\ 0 & 0 & R_{1,\eta} & 0 & 0 & R_{2,\eta} & \dots & 0 & 0 & R_{N,\eta} \\ 0 & 0 & R_{1,\zeta} & 0 & 0 & R_{2,\zeta} & \dots & 0 & 0 & R_{N,\zeta} \end{bmatrix} \quad 4.3.51$$

Ο τελικός πίνακας παραμόρφωσης είναι

$$[\mathbf{B}(\xi, \eta, \zeta)]_{[6 \times 3N]} = [\mathbf{B}_1(\xi, \eta, \zeta)]_{[6 \times 9]} [\mathbf{B}_2(\xi, \eta, \zeta)]_{[9 \times 3N]} \quad 4.3.52$$

Το μητρώο στιβαρότητας προκύπτει από την σχέση

$$[\mathbf{K}]_{[3N \times 3N]} = \int_{\xi_0}^{\xi_{n+p+1}} \int_{\eta_0}^{\eta_{m+q+1}} \int_{\zeta_0}^{\zeta_{l+r+1}} [\mathbf{B}(\xi)]^T_{[3N \times 6]} [\mathbf{E}]_{[6 \times 6]} [\mathbf{B}(\xi)]_{[6 \times 3N]} \det[\mathbf{J}] d\zeta d\eta d\xi \quad 4.3.53$$

Η αριθμητική ολοκλήρωση της 4.3.53 οδηγεί στη σχέση

$$[\mathbf{K}]_{[3N \times 3N]} = \sum_{i=1}^{GP_\xi} \sum_{j=1}^{GP_\eta} \sum_{k=1}^{GP_\zeta} \left\{ [\mathbf{B}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)]^T_{[3N \times 6]} [\mathbf{E}]_{[6 \times 6]} [\mathbf{B}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)]_{[6 \times 3N]} \det[\mathbf{J}] w_i^{GP_\xi} w_j^{GP_\eta} w_k^{GP_\zeta} \right\} \quad 4.3.54$$

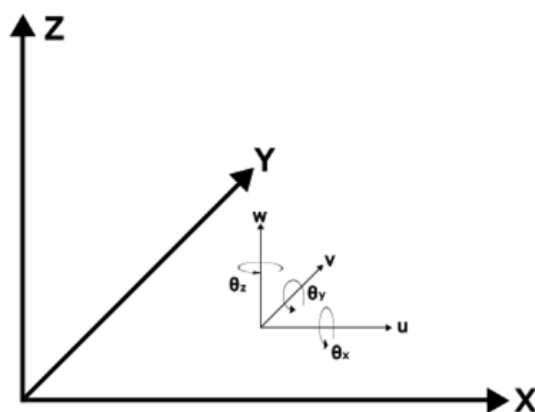
όπου GP_ξ ο συνολικός αριθμός σημείων Gauss στη διεύθυνση ξ του στοιχείου, GP_η ο συνολικός αριθμός σημείων Gauss στη διεύθυνση η του στοιχείου και GP_ζ ο συνολικός αριθμός σημείων Gauss στη διεύθυνση ζ του στοιχείου αντίστοιχα, ξ_i, η_j, ζ_k οι συντεταγμένες του συγκεκριμένου σημείου και $w_i^{GP_\xi}, w_j^{GP_\eta}$ και $w_k^{GP_\zeta}$ τα βάρη που τους αντιστοιχούν.

4.3.5 Μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας με υπέρθεση της καμπτικής και μεμβρανικής ακαμψίας

Τα στοιχεία κελύφους και τα στοιχεία πλάκας υποβάλλονται σε καμπτικές και σε μεμβρανικές δυνάμεις. Μία προσέγγιση για την ανάπτυξη και ανάλυση τέτοιου είδους φορέων είναι συνδυάζοντας δύο άλλα ξεχωριστά στοιχεία, ένα μεμβρανικό και ένα καμπτικό. Η μεμβρανική ακαμψία, είναι η αντίσταση του στοιχείου στα εντός επιπέδου φορτία, ενώ η καμπτική είναι η αντίσταση στα φορτία, απόρροια των οποίων είναι εκτός επιπέδου παραμορφώσεις του στοιχείου.

Η μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας κατ' αυτόν τον τρόπο προϋποθέτει τον υπολογισμό των επιμέρους μητρώων, μεμβρανικού και καμπτικού στοιχείου και την υπέρθεση τους σε κάθε κόμβο του καθολικού συστήματος. Στο γενικό τριδιάστατο πρόβλημα, οι επικόμβιες μετατοπίσεις αναπαριστώνται από ένα διάνυσμα $[6 \times 1]$, καθώς οι βαθμοί ελευθερίας είναι συνολικά 6 (3 μεταφορικοί και 3 στρωφικοί). Το καμπτικό μητρώο στιβαρότητας έχει διαστάσεις $[3 \times 3]$ και εκπροσωπείται από τη μεταβλητή $[\mathbf{K}_b]_{[3 \times 3]}$, ενώ το μεμβρανικό έχει διαστάσεις $[2 \times 2]$ και εκπροσωπείται από τη μεταβλητή $[\mathbf{K}_m]_{[2 \times 2]}$. Με την υπέρθεση αυτών των δύο σε κάθε κόμβο, προκύπτει το τελικό μητρώο, σε κάθε κόμβο, διαστάσεων $[6 \times 6]$ και μεταβλητής $[\mathbf{K}]_{[6 \times 6]}$.

Όλες οι εφαρμογές στην παρούσα διπλωματική εργασία έχουν μόνο μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας. Ο συνδυασμός του καμπτικού και του μεμβρανικού πίνακα ακαμψίας, οδηγεί σε ορισμένες μηδενικές τιμές στο τελικό μητρώο στιβαρότητας, καθώς οι στρωφικοί βαθμοί ελευθερίας δεν έχουν ληφθεί υπόψη ούτε στο καμπτικό, ούτε στο μεμβρανικό στοιχείο.



Σχήμα 43: Βαθμοί ελευθερίας

Για τις πλάκες και τα κελύφη, ο τανυστής των τάσεων είναι

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} \quad 4.3.55$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας και ν ο λόγος του Poisson. Οι τάσεις αποσυντίθενται σε μεμβρανικές και καμπτικές. Μετά την ολοκλήρωση στο πάχος του στοιχείου, προκύπτουν οι παρακάτω παράγοντες για δυνάμεις και ροπές αντίστοιχα.

$$m = \begin{bmatrix} m^{11} \\ m^{22} \\ m^{12} \end{bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad 4.3.56$$

$$b = \begin{bmatrix} b^{11} \\ b^{22} \\ b^{12} \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} \quad 4.3.57$$

όπου ϵ οι μεμβρανικές παραμορφώσεις και κ οι καμπτικές.

Σύμφωνα με τις αρχές της ισογεωμετρικής ανάλυσης, η επιφάνεια ενός στοιχείου κελύφους ή πλάκας και το πεδίο μετατοπίσεων αυτού, ορίζονται με τις ίδιες συναρτήσεις σχήματος

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n R(\xi, \eta) B_i \quad 4.3.58$$

όπου $R(\xi, \eta)$, B_i είναι συναρτήσεις σχήματος και τα σημεία ελέγχου αντίστοιχα.

Το πεδίο μετατοπίσεων, παράγεται από την παρεμβολή των μετατοπίσεων των σημείων ελέγχου, καθώς όπως αναφέρθηκε προηγουμένως δεν υπάρχουν στρωφικοί βαθμοί ελευθερίας. Είναι

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n R(\xi, \eta) u_i \quad 4.3.59$$

όπου u_i η μετατόπιση του εκάστοτε σημείου ελέγχου του στοιχείου.

Οι μεμβρανικές και οι καμπτικές παραμορφώσεις είναι αντίστοιχα

$$\epsilon(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n B_m^i(\xi, \eta) u_i \quad 4.3.60$$

$$\kappa(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n B_b^i(\xi, \eta) u_i \quad 4.3.61$$

όπου B_m^i και B_b^i τα μητρώα παραμόρφωσης για το μεμβρανικό και καμπτικό στοιχείο, τα οποία είναι

$$\mathbf{B}_m^i = \begin{bmatrix} R_1^i A_1 e_1 & R_1^i A_1 e_2 & R_1^i A_1 e_3 \\ R_2^i A_2 e_1 & R_2^i A_2 e_2 & R_2^i A_2 e_3 \\ (R_2^i A_1 + R_1^i A_2) e_1 & (R_2^i A_1 + R_1^i A_2) e_2 & (R_2^i A_1 + R_1^i A_2) e_3 \end{bmatrix} \quad 4.3.62$$

$$\mathbf{B}_b^i = \begin{bmatrix} B_{b11}^i e_1 & B_{b11}^i e_2 & B_{b11}^i e_3 \\ B_{b22}^i e_1 & B_{b22}^i e_2 & B_{b22}^i e_3 \\ 2B_{b12}^i e_1 & 2B_{b12}^i e_2 & 2B_{b21}^i e_3 \end{bmatrix} \quad 4.3.63$$

Τα e_1, e_2, e_3 είναι τα μοναδιαία διανύσματα ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων και οι παράγοντες $B_{b\alpha\beta}$ ορίζονται ως:

$$B_{b\alpha\beta}^i = \Phi_{\alpha\beta} T \frac{1}{j} [R_1^i (\Phi_2 \times T) - R_2^i (\Phi_1 \times T)] + \frac{1}{j} [R_1^i (\Phi_{\alpha\beta} \times \Phi_2) - R_2^i (\Phi_{\alpha\beta} \times \Phi_1)] - R_{\alpha\beta}^i T \quad 4.3.64$$

όπου R^i η i -οστή συνάρτηση σχήματος.

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ένα σύστημα προς επίλυση, για τις άγνωστες μετατοπίσεις u , το οποίο είναι $Ku = F$. Ο παράγοντας K είναι το μητρώο στιβαρότητας και ο F το διάνυσμα των εξωτερικών φορτίων. Ορίζονται ως εξής:

$$\mathbf{k}^{ij} = \int_A (h(B_m^i)^T D B_n^j + \frac{h^3}{12} (B_b^i)^T D B_b^j) d\xi d\eta \quad 4.3.65$$

$$\mathbf{F}^i = \int_A q R_i j d\xi d\eta = \int_{\partial A} p R_i \|\Phi_t\| dl_\xi \quad 4.3.66$$

Το καθολικό μητρώο στιβαρότητας προκύπτει από την υπέρθεση των υπομητρώων των στοιχείων του φορέα, σε αυτό. Κάθε υπομητρώο k_{ij} τοποθετείται στη θέση (I, J) του καθολικού μητρώου K . Στην περίπτωση που στην ίδια θέση πρέπει να τοποθετηθούν παραπάνω του ενός μητρώα, οι τιμές τους αθροίζονται.

Τέλος, η σχέση 4.3.65 μετασχηματίζεται στην παρακάτω, μέσω αριθμητικής ολοκλήρω-

σης Gauss.

$$\mathbf{K} = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_1^{nel} \sum_1^{ng} \left((B_m^i)^T DB_m^j + \frac{t^3}{12} (B_b^i)^T DB_b^j \right) jw^g \quad 4.3.67$$

όπου nel ο αριθμός των στοιχείων του φορέα και ng ο αριθμός των σημείων Gauss.

4.4 Δημιουργία μητρώου μάζας

Για τη διεξαγωγή δυναμικής ανάλυσης, είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός και η χρήση του μητρώου μάζας του φορέα. Για την δημιουργία αυτού, ακολουθείται η ίδια διαδικασία και οι ίδιες τεχνικές με την κατασκευή του μητρώου στιβαρότητας. Δηλαδή, αρχικά υπολογίζονται τα μητρώα μάζας των μεμονωμένων στοιχείων με βάση τις τοπικές συντεταγμένες, μετατρέπονται στο καθολικό σύστημα και υπερθέτονται στο καθολικό μητρώο. Η διαδικασία αποτυπώνεται καλύτερα στο διάγραμμα ροής του σχήματος 44.

4.4.1 Ιδιότητες μητρώου μάζας

Τα μητρώα μάζας πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες ιδιότητες, οι οποίες αποτελούν χρήσιμο εργαλείο για την επαλήθευση της ορθότητας της ανάλυσης.

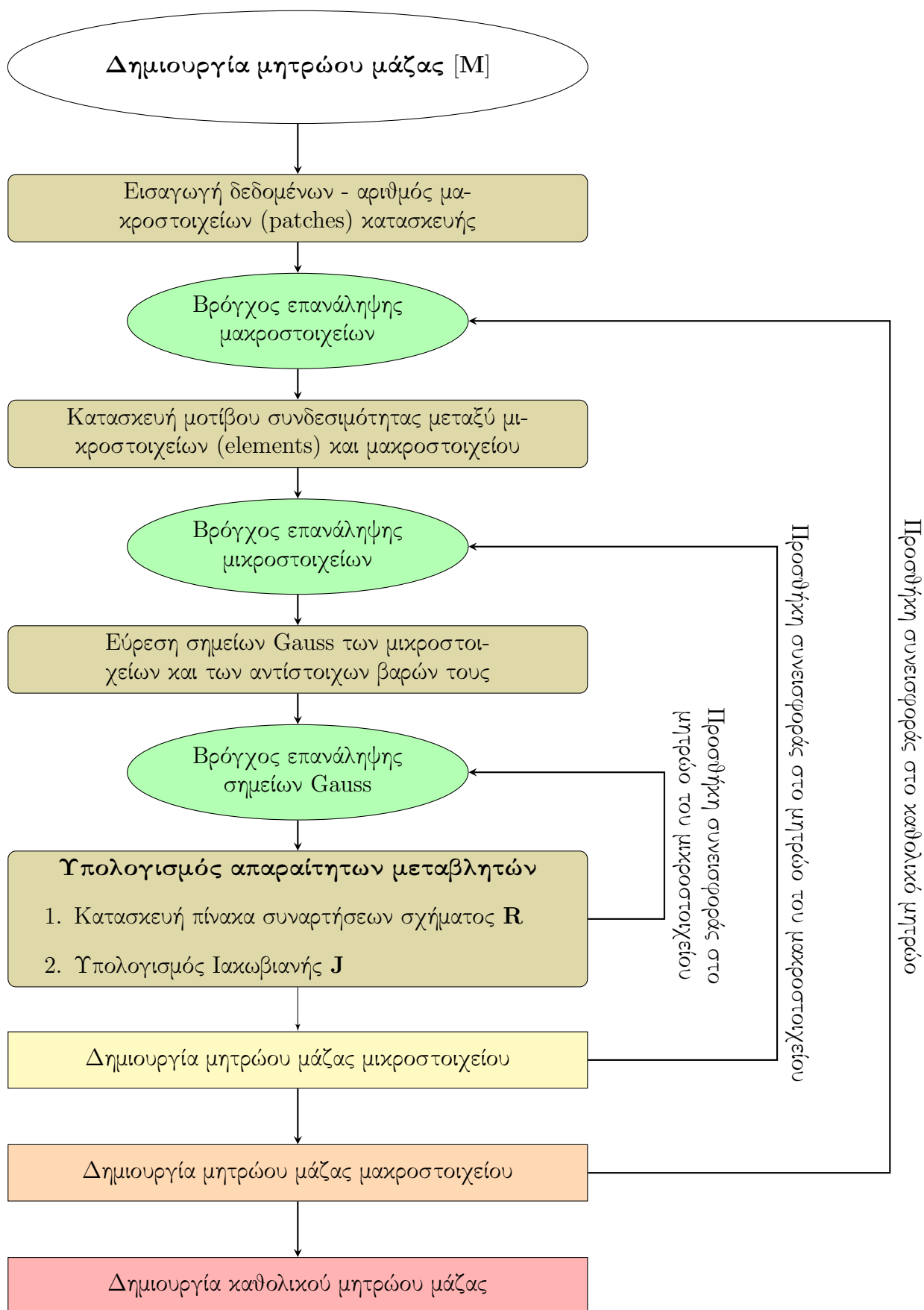
1. Το μητρώο πρέπει να είναι συμμετρικό, δηλαδή να ικανοποιείται η σχέση

$$(\mathbf{M}^e)^T = \mathbf{M}^e \quad \text{όπου } M^e \text{ μητρώο μάζας στοιχείου.} \quad 4.4.1$$

2. Οι φυσικές συμμετρίες του εκάστοτε στοιχείου πρέπει να ανακλώνται στο μητρώο μάζας του. Παραδείγματος χάρη το μητρώο μάζας μιας πρισματικής ράβρου πρέπει να είναι συμμετρικό στην στην αντιδιαγώνιο, πρέπει δηλαδή να ισχύει $M_{11} = M_{22}$. Έτσι αν οι ακραίοι κόμβοι αντιστραφούν, ο φορέας παραμένει αμετάλλαχτος και το ίδιο και το μητρώο μάζας του.
3. Να υπάρχει διατήρηση της μάζας του στοιχείου. Αυτό επαληθεύεται εύκολα, ελέγχοντας αν το άθροισμα όλων των στοιχείων του πίνακα ισούται με τη συνολική μάζα του στοιχείου.
4. Να είναι θετικό. Για κάθε μη μηδενικό πεδίο ταχυτήτων, οι τιμές του μητρώου μάζας πρέπει να είναι θετικές. Δηλαδή,

$$\text{Για κάθε } \dot{u}^e \neq 0, \quad (\dot{u}^e)^T \mathbf{M}^e \dot{u}^e > 0 \quad 4.4.2$$

Ο πίνακας μάζας πρέπει να είναι δηλαδή μη αρνητικός, θετικά ορισμένος². Η ιδιότητα

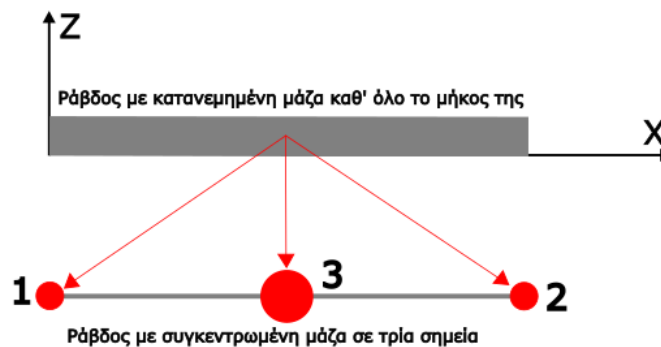


Σχήμα 44: Διάγραμμα ροής κατασκευής μητρώου μάζας

αυτή μπορεί να ελεγχθεί είτε από τις ίδιες τις τιμές είτε από τις ιδιοτιμές του μητρώου M^e .

4.4.2 Πλήρες και σωρικό μητρώο μάζας

Στην ανάλυση, αντί του πλήρους μητρώου μάζας, μπορεί να γίνει χρήση ενός ισοδύναμου, διαγώνιου. Γίνεται λοιπόν η διάκριση μεταξύ πλήρους και διαγώνιου ή σωρικού μητρώου μάζας. Το πρώτο λαμβάνει υπόψη τη μάζα του φορέα κατανεμημένη σε όλη την επιφάνειά του, ενώ το δεύτερο συγκεντρωμένη στους κόμβους του.



Σχήμα 45: Κατανεμημένη και συγκεντρωμένη μάζα στοιχείου ράβδου

Το πλήρες μητρώο μάζας υπολογίζεται από τη γενική έκφραση

$$M_{cons} = \int \rho [\mathbf{R}]^T [\mathbf{R}] dV \quad 4.4.3$$

η οποία οδηγεί σε τιμές και σε θέσεις εκτός της διαγωνίου του.

Για τον υπολογισμό του διαγώνιου πίνακα υπάρχουν διάφορες τεχνικές που μπορούν να ακολουθηθούν. Οι δύο πιο ευρέως χρησιμοποιούμενες είναι η άθροιση των γραμμών ή των στηλών του πλήρους πίνακα. Στις εφαρμογές για τις οποίες θα γίνει λόγος παρακάτω, έχει γίνει χρήση και των δύο μητρώων. Για τη συγκρότηση του σωρικού, χρησιμοποιήθηκε η

²Ένας πίνακας είναι θετικά ορισμένος, αν είναι συμμετρικός και όλες του οι ιδιοτιμές είναι θετικές. Επειδή η διαδικασία υπολογισμού των ιδιοτιμών είναι δυσχερής, ο θετικός ορισμός ενός πίνακα μπορεί να επαληθευθεί και από τις εξής προτάσεις: α) Ένας πίνακας είναι θετικά ορισμένος αν είναι συμμετρικός και όλα τα οδηγία σημεία (pivots) του είναι θετικά, β) Αν ισχύει $x^T A x > 0$ για κάθε διάνυσμα $x \neq 0$, γ) Αν και μόνο αν μπορεί να γραφτεί ως $A = R^T R$ για κάποιον τετραγωνικό πίνακα R με ανεξάρτητες στήλες.

τεχνική άθροισης γραμμών. Σύμφωνα με αυτή, όλα τα στοιχεία της κάθε σειράς αθροίζονται και το σύνολο τοποθετείται στις αντίστοιχες θέσεις της διαγωνίου. Δηλαδή,

$$\tilde{\mathbf{M}}_{AB} = \begin{cases} \int_{\Omega} \rho \mathbf{R}_A d\Omega & A = B \\ 0 & A \neq B \end{cases} \quad 4.4.4$$

Για την επαλήθευση της άθροισης των στηλών, ισχύει επίσης

$$\sum_{B=1}^{n_{eq}} \int_{\Omega} \rho \mathbf{R}_A \mathbf{R}_B d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{R}_A \left(\sum_{B=1}^{n_{eq}} \mathbf{R}_B \right) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{R}_A d\Omega \quad 4.4.5$$

όπου η τελευταία ισότητα της 4.4.5 προκύπτει από την ιδιότητα της κατάτμησης της μονάδος της βάσης.

Με τη χρήση NURBS, εξασφαλίζεται μέσω της τμηματικής θετικότητας των συναρτήσεων σχήματος, ότι όλες οι εντότητες σε ένα μητρώο, κατά σειρά αθροισμένο, θα είναι θετικές. Αυτό είναι προφανώς επιθυμητό καθώς ο πλήρης πίνακας μάζας είναι θετικά ορισμένος και ιδανικά, πρέπει να είναι και ο σωρικός που προκύπτει από αυτόν. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί πως υψηλής τάξης, πεπρασμένα στοιχεία, C^0 συνέχειας, ενδέχεται να παράξουν μηδενικά ή και αρνητικά μητρώα μάζας, κάτι που είναι μη αποδεκτό στη μηχανική.

Ένα σωρικό καθολικό μητρώο, μιας και έχει τιμές μόνο στη διαγώνιο και μπορεί να αποθηκευτεί αλγοριθμικά με τη μορφή διανύσματος. Επιπλέον, αν όλες οι τιμές του είναι μη μηδενικές μπορεί να αντιστραφεί εύκολα, καθώς με την αντιστροφή ενός διαγώνιου μητρώου προκύπτει επίσης διαγώνιο μητρώο. Προφανέστατα, ένα σωρικό μητρώο συνεπάγεται σημαντικά υπολογιστικά πλεονεκτήματα. Η χρήση του όμως, έχει και ορισμένα μειονεκτήματα. Περαιτέρω διαφορές και επιδράσεις των δύο ειδών πινάκων στα αποτελέσματα μιας ανάλυσης, αναφέρονται σε επόμενη φάση, στο κεφάλαιο 6. Παρακάτω γράφονται αναλυτικά τα πλήρη και διαγώνια μητρώα για μονοδιάστατα, διδιάστατα και τριδιάστατα προβλήματα.

4.4.3 Μητρώο μάζας σε μονοδιάστατα προβλήματα

Το πλήρες μητρώο μάζας σε προβλήματα μίας διάστασης υπολογίζεται από τη σχέση

$$[\mathbf{M}]_{[N \times N]} = \int_l \rho \mathbf{R}^T \mathbf{R}(\xi) \rho A d\xi \quad 4.4.6$$

όπου $m = \rho A l$ η συνολική μάζα του στοιχείου. Το διαγώνιο μητρώο είναι

$$[\mathbf{M}]_{[N \times N]} = \int_{\xi_0}^{\xi_{n+p+1}} \rho \mathbf{R}(\xi) \det[J] d\xi \quad 4.4.7$$

Με χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss, εκτελώντας βρόγχο επανάληψης, για όλα

τα σημεία ολοκλήρωσης ενός στοιχείου και των βαρών τους, το σωρικό μητρώο υπολογίζεται ως

$$[\mathbf{M}]_{[N \times N]} = \sum_{i=1}^{GP_\xi} \rho \mathbf{R}(\xi) \det[\mathbf{J}] w_i^{GP_\xi} \quad 4.4.8$$

όπου ρ η πυκνότητα ανά μονάδα μάζας, $\det[\mathbf{J}]$ η ορίζουσα της Ιακωβιανής, GP_ξ ο συνολικός αριθμός σημείων Gauss, ξ_i η συντεταγμένη του εκάστοτε σημείου ολοκλήρωσης και $w_i^{GP_\xi}$ το βάρος που του αντιστοιχεί.

4.4.4 Μητρώο μάζας σε διδιάστατα προβλήματα

Με γενίκευση των σχέσεων μονοδιάστατων προβλημάτων, προκύπτουν και οι σχέσεις για τα διδιάστατα προβλήματα. Η έκφραση του πλήρους πίνακα είναι

$$[\mathbf{M}]_{[2N \times 2N]} = \int_A \rho \mathbf{R}^T \mathbf{R}(\xi, \eta) \rho A d\eta d\xi \quad 4.4.9$$

Το διαγώνιο μητρώο υπολογίζεται από τη σχέση

$$[\mathbf{M}]_{[2N \times 2N]} = \int_{\xi_0}^{\xi_{n+p+1}} \int_{\eta_0}^{\eta_{n+q+1}} \rho \mathbf{R}(\xi, \eta) \det[\mathbf{J}] d\eta d\xi \quad 4.4.10$$

Με χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss, η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται στην

$$[\mathbf{M}]_{[2N \times 2N]} = \sum_{i=1}^{GP_\xi} \sum_{j=1}^{GP_\eta} \rho \mathbf{R}(\xi, \eta) \det[\mathbf{J}] w_j^{GP_\eta} w_i^{GP_\xi} \quad 4.4.11$$

όπου ρ η πυκνότητα ανά μονάδα μάζας, $\det[\mathbf{J}]$ η ορίζουσα της Ιακωβιανής, GP_ξ, GP_η ο συνολικός αριθμός σημείων Gauss κατά τη διεύθυνση ξ και η αντίστοιχα, ξ_i, η_i οι συντεταγμένες του εκάστοτε σημείου ολοκλήρωσης και $w_i^{GP_\xi}, w_i^{GP_\eta}$ τα βάρη που τους αντιστοιχούν.

4.4.5 Μητρώο μάζας σε τριδιάστατα προβλήματα

Τέλος, για τριδιάστατα προβλήματα, το πλήρες μητρώο μάζας εκφράζεται ως

$$[\mathbf{M}]_{[3N \times 3N]} = \int_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{R}^T(\xi, \eta, \zeta) \rho A d\zeta d\eta d\xi \quad 4.4.12$$

Το διαγώνιο μητρώο είναι

$$[\mathbf{M}]_{[3N \times 3N]} = \int_{\xi_0}^{\xi_{n+p+1}} \int_{\eta_0}^{\eta_{n+q+1}} \int_{\zeta_0}^{\zeta_{n+r+1}} \rho \mathbf{R}(\xi, \eta, \zeta) \det[\mathbf{J}] d\zeta d\eta d\xi \quad 4.4.13$$

Με χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης η παραπάνω σχέση γίνεται

$$[\mathbf{M}]_{[3N \times 3N]} = \sum_{i=1}^{GP_\xi} \sum_{j=1}^{GP_\eta} \sum_{k=1}^{GP_\zeta} \rho \mathbf{R}(\xi, \eta, \zeta) \det[\mathbf{J}] w_k^{GP_\zeta} w_j^{GP_\eta} w_i^{GP_\xi} \quad 4.4.14$$

όπου ρ η πυκνότητα ανά μονάδα μάζας, $\det[\mathbf{J}]$ η ορίζουσα της Ιακωβιανής, $GP_\xi, GP_\eta, GP_\zeta$ ο συνολικός αριθμός σημείων Gauss κατά τη διεύθυνση ξ, η και ζ αντίστοιχα, ξ_i, η_i, ζ_i οι συντεταγμένες του εκάστοτε σημείου ολοκλήρωσης και $w_i^{GP_\xi}, w_j^{GP_\eta}, w_k^{GP_\zeta}$ τα βάρη που τους αντιστοιχούν.

4.5 Ταλαντώσεις

Οι ταλαντώσεις κατηγοριοποιούνται σε δύο βασικές κατηγορίες, στις ελεύθερες και στις εξαναγκασμένες. Οποιαδήποτε από τις δυο κατηγορίες, μπορεί να είναι είτε με, είτε χωρίς απόσβεση. Στο κεφάλαιο αυτό θα δοθούν οι βασικές συναρτήσεις κάθε είδους, για τα μονοβάθμια και πολυβάθμια συστήματα.

4.5.1 Ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση

Ελεύθερες ονομάζονται οι ταλαντώσεις των συστημάτων, στα οποία δε επενεργεί εξωτερική δύναμη, δηλαδή $p(t) = 0$. Τα συστήματα αυτά διεγείρονται από αρχική μετατόπιση ή/και ταχύτητα.

Μονοβάθμια συστήματα

Ένα δυναμικό προσομοίωμα μονοβάθμιου συστήματος, ελεύθερης ταλάντωσης φαίνεται στην εικόνα 46.

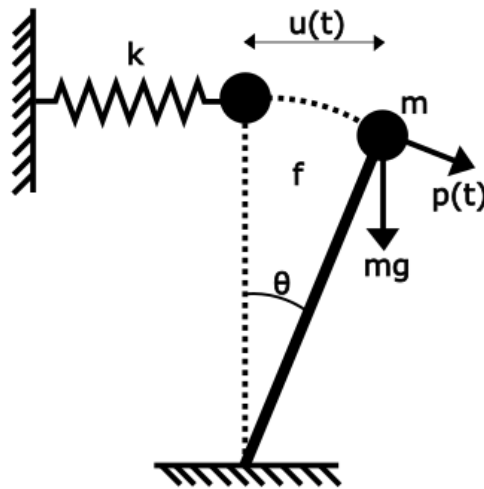
Η εξίσωση κινήσεως είναι

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad 4.5.1$$

Από μαθηματική άποψη, η 4.5.1 είναι γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση, δευτέρας τάξης, με σταθερούς συντελεστές, η οποία επιλύεται κατά τα γνωστά. Όταν είναι $c = 0$ το σύστημα δεν έχει απόσβεση και συμπεριφέρεται διαφορετικά από ότι αν $c \neq 0$. Είναι σημαντικό να διευκρινιστεί πως στον πραγματικό κόσμο δεν υπάρχει ταλάντωση χωρίς απόσβεση, αλλά έχει μεγάλη αξία μελέτης καθώς προσφέρει γνώσεις για τις ταλαντώσεις με απόσβεση.

Η εξίσωση γίνεται

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad 4.5.2$$



Σχήμα 46: Μονοβάθμιος ταλαντωτής

Από τα γνωστά για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων, η λύση που αναζητείται είναι της μορφής

$$u = e^{\lambda t} \quad 4.5.3$$

όπου λ προσδιοριζόμαστε σταθερά.

Με αντικατάσταση της 4.5.3 στην 4.5.2 προκύπτει

$$(m\lambda^2 + k) e^{\lambda t} = 0 \quad 4.5.4$$

Η οποία για $t \geq 0$ αληθεύει μόνο όταν

$$m\lambda^2 + k = 0 \quad 4.5.5$$

Η 4.5.5 ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης 4.5.2 και έχει λύσεις τις εξής:

$$\lambda_1 = i\omega, \lambda_2 = -i\omega \quad \text{με} \quad i = \sqrt{-1} \quad 4.5.6$$

όπου

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0 \quad 4.5.7$$

είναι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος, ή διαφορετικά η φυσική του συχνότητα. Έχει μονάδες sec^{-1} και μετριέται σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο. Εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος και αποτελεί χαρακτηριστικό δυναμικό μέγεθος αυτού. Α-

ποκαλείται επίσης και ιδιοσυχνότητα, καθώς προκύπτει ως ιδιοτιμή του ιδιοπροβλήματος της γραμμικής άλγεβρας.

Ύστερα από μερικά μαθηματικά προκύπτει η λύση της 4.5.2, η οποία είναι

$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad 4.5.8$$

όπου A, B αυθαίρετες σταθερές, οι οποίες προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Ως αρχικές συνθήκες ορίζονται η αρχική θέση της κατασκευής $u(t_0)$ και η αρχική της ταχύτητα $\dot{u}(t_0)$, τη χρονική στιγμή t_0 . Ως t_0 λαμβάνεται η αρχή της κινήσεως του συστήματος.

Η ταχύτητα υπολογίζεται από την 4.5.8, με παραγώγιση ως προς το χρόνο και είναι

$$\dot{u}(t) = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t \quad 4.5.9$$

Για $t = 0$ οι σταθερές A, B είναι

$$A = u(0), \quad B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \quad 4.5.10$$

Επισημαίνεται, πως για να υπάρχει κίνηση πρέπει ένα από τα δύο μεγέθη $u(0)$ ή $\dot{u}(0)$, να είναι διάφορο του μηδενός.

Ειδικά για την περίπτωση της αρμονικής ταλάντωσης, η λύση της 4.5.2 γράφεται ως

$$u(t) = \rho \cos \omega t - \theta \quad 4.5.11$$

όπου ρ το μέγιστο εύρος της ταλάντωσης $|u(t)|_{max} = \rho$ και θ η διαφορά φάσεως, η οποία υπολογίζεται ως

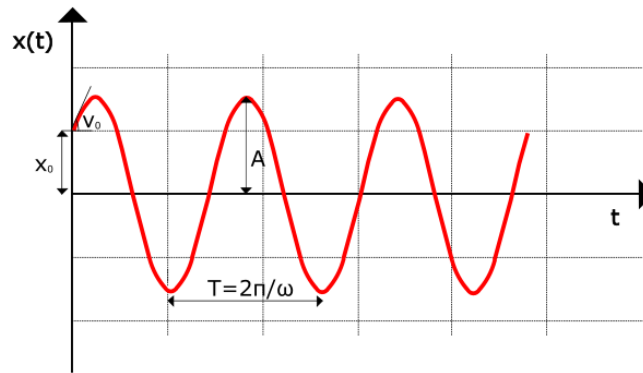
$$\theta = \tan^{-1} \frac{\dot{u}(0)}{\omega u(0)} \quad 4.5.12$$

Ο χρόνος που απαιτείται για να εκτελέσει το σύστημα μια πλήρη ταλάντωση ονομάζεται φυσική περίοδος ή ιδιοπερίοδος της ταλάντωσης και είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad 4.5.13$$

Ο αριθμός των πλήρων ταλαντώσεων ανά μονάδα χρόνου εκφράζεται σε Hertz (sec^{-1}), ονομάζεται φυσική κυκλική συχνότητα του συστήματος και είναι

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad 4.5.14$$



Σχήμα 47: Απόκριση μονοβάθμιου ταλαντωτή χωρίς απόσβεση

Πολυβάθμια συστήματα

Τα πολυβάθμια συστήματα που εκτελούν ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση, έχουν την ίδια εξίσωση κίνησης με τα αντίστοιχα μονοβάθμια, με τη διαφορά ότι οι συντελεστές της είναι μητρώα και οι όροι της μετατόπισης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης είναι διανυσματικοί. Η εξίσωση είναι δηλαδή

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad 4.5.15$$

όπου \mathbf{M} το μητρώο μάζας της κατασκευής, \mathbf{K} το μητρώο στιβαρότητας και $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ το διάνυσμα μετατοπίσεων.

Θέμα της παρούσης παραγράφου αποτελεί το πρόβλημα που χαρακτηρίζεται από την εξίσωση 4.5.15 και τις αρχικές συνθήκες $\mathbf{u}(0), \dot{\mathbf{u}}(0)$. Προς επίλυση αυτού, αναζητούνται λύσεις της μορφής

$$u_1 = \beta_1 T(t), u_2 = \beta_2 T(t), \dots, u_N = \beta_N T(t) \quad 4.5.16$$

όπου $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ σταθερές οι οποίες ορίζουν το διάνυσμα $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}^T$ και $T(t)$ χρονική συνάρτηση, κοινή για όλες τις μετατοπίσεις. Η εξίσωση 4.5.16 γράφεται και ως

$$\mathbf{u} = \beta T(t) \quad 4.5.17$$

Η μόνη αποδεκτή λύση που προκύπτει έχει τη μορφή

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \beta T(t) = 0 \quad 4.5.18$$

η οποία ισχύει για κάθε $t \geq 0$, άρα πρέπει

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \beta = 0 \quad 4.5.19$$

Η 4.5.19 είναι η εξίσωση συχνοτήτων του συστήματος και αποτελεί ομογενές σύστημα N αλγεβρικών εξισώσεων, το οποίο για να έχει λύση πρέπει η ορίζουσά του να είναι μηδέν, δηλαδή

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad 4.5.20$$

Το ανάπτυγμα της 4.5.20 είναι πολυώνυμο N - οστού βαθμού ως προς ω^2 . Επομένως η σχέση 4.5.19 αληθεύει για τιμές ω^2 με $\omega > 0$. Οι τιμές αυτές είναι οι ιδιοσυχνότητες ή φυσικές συχνότητες του συστήματος. Διατάσσονται κατά αύξουσα σειρά και η μικρότερη αυτών αποκαλείται θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα. Ακόμη, ανάλογα το πρόβλημα, οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων μπορεί να είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους ή κάποιες να εμφανίζουν πολλαπλότητα.

Για κάθε τιμή ιδιοσυχνότητας ω_i η εξίσωση 4.5.17 δίνει μια λύση της μορφής

$$u_i = \beta_i (c_i \cos \omega_i t + d \sin \omega_i t) = \beta_i \alpha_i \cos \omega t - \theta_i \quad 4.5.21$$

η οποία ονομάζεται ιδιολύση. Κάθε ιδιολύση προσδιορίζει και μία διαφορετική παραμορφωμένη κατάσταση του συστήματος.

Η επαλληλία όλων των λύσεων της 4.5.21 για $i = 1, 2, \dots, N$ δίνει τη γενική λύση του προβλήματος, που είναι

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \beta_i (c_i \cos \omega_i t + d \sin \omega_i t) = \sum_{i=1}^N \beta_i \alpha_i \cos \omega t - \theta_i \quad 4.5.22$$

Οι συντελεστές c, d, a, θ των παραπάνω εξισώσεων είναι σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι ιδιομορφές, οι οποίες εξαρτώνται από τα ιδιοδιανύσματα β_i , αντιπροσωπεύουν τις παραμορφωμένες εικόνες της κατασκευής. Κάθε παραμορφωμένη εικόνα ονομάζεται ιδιομορφή της ελεύθερης ταλάντωσης. Οπότε το ιδιοδιάνυσμα β_i , αντιστοιχεί στην i - οστή ιδιομορφή του συστήματος. Τα ιδιοδιανύσματα είναι απόλυτα μεγέθη, με απροσδιόριστο μέτρο, που καθορίζουν μόνο διευθύνσεις στο χώρο. Για το λόγο αυτό εκτελείται μια διαδικασία αποκαλούμενη κανονικοποίηση, ώστε να υπάρχει κάποια ένδειξη για το μέτρο τους.

Η συνηθέστερη μέθοδος κανονικοποίησης - και αυτή που χρησιμοποιήθηκε στις παρακάτω εφαρμογές - περιλαμβάνει τη διαίρεση όλων των ποσοτήτων του κάθε ιδιοδιανύσματος,

με την μέγιστη τιμή εξ' αυτών. Είναι δηλαδή

$$\phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{bmatrix} = \frac{1}{\max \beta_{ki}} \begin{bmatrix} \beta_{1i} \\ \beta_{2i} \\ \vdots \\ \beta_{Ni} \end{bmatrix} \quad 4.5.23$$

Τα διανύσματα ϕ_i , με $i = 1, 2, \dots, N$, είναι οι κανονικές ιδιομορφές του συστήματος. Μπορούν να αναγραφούν σε ένα τετραγωνικό μητρώο, κάθε στήλη του οποίου αντιπροσωπεύει μια κανονική ιδιομορφή. Το μητρώο αυτό ονομάζεται ιδιομορφικό και είναι

$$\Phi = \left\{ \phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_N \right\} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \quad 4.5.24$$

Αναφέρεται πως άλλη μια μέθοδος κανονικοποίησης είναι η κανονικοποίηση ως προς τη μάζα. Η μέθοδος αυτή απαιτεί να ικανοποιείται η σχέση

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1 \quad 4.5.25$$

Τέλος, αφού πλέον έχει δωθεί και ο ορισμός των κανονικών ιδιομορφών, μπορούν να προσδιοριστούν οι μεταβλητές c, d, a, θ της εξίσωσης λύσης του εν λόγω προβλήματος. Είναι

$$c_i = \frac{\phi_i^T \mathbf{M} u(0)}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i} \quad 4.5.26$$

$$d_i = \frac{1}{\omega_i} \phi_i^T \mathbf{M} \dot{u}(0) \quad 4.5.27$$

$$\alpha = \sqrt{c_i + d_i} \quad 4.5.28$$

$$\theta_i = \tan^{-1} d_i / c_i \quad 4.5.29$$

4.5.2 Ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση

Στην περίπτωση ελεύθερης ταλάντωσης με απόσβεση, ισχύει $c \neq 0$.

Μονοβάθμια συστήματα

Για τα μονοβάθμια συστήματα, η εξίσωση κίνησης είναι η 4.5.1

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad 4.5.30$$

η οποία εκφράζει αποσβενυμένη ή φθίνουσα κίνηση. Αναζητώντας πάλι λύση της μορφής 4.5.3 προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad 4.5.31$$

Η 4.5.31 γράφεται και ως

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \omega^2 = 0 \quad 4.5.32$$

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, εξαρτώνται από τη διακρίνουσά της

$$\Delta = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2 \quad 4.5.33$$

Η 4.5.33 έχει 2 διακεκριμένες, πραγματικές ρίζες αν είναι θετική, μη μηδενική, μία διπλή πραγματική ρίζα, αν ισούται με το μηδέν και δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, αν είναι αρνητική, μη μηδενική.

Εάν $\Delta = 0$ λοιπόν, η απόσβεση ονομάζεται κρίσιμη και είναι

$$c = c_{cr} = 2m\omega \quad 4.5.34$$

Η λύση της 4.5.30 γράφεται

$$u(t) = (A + Bt)e^{-\omega t} \quad 4.5.35$$

όπου και πάλι οι αυθαίρετες σταθερές A, B υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Ορίζεται ο λόγος αποσβέσεως

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega} \quad 4.5.36$$

Στην περίπτωση που ισχύει $\xi < 1$ η απόσβεση ονομάζεται υποκρίσιμη.

Ορίζεται και ένα ακόμα νέο μέγεθος, αυτό της συχνότητας αποσβέσεως ω_D που είναι

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad 4.5.37$$

Η περίοδος ταλάντωσης με απόσβεση είναι αντίστοιχα

$$T = \frac{2\pi}{\omega_D} \quad 4.5.38$$

Στην εν λόγω περίπτωση, η λύση της εξίσωσης κίνησης είναι

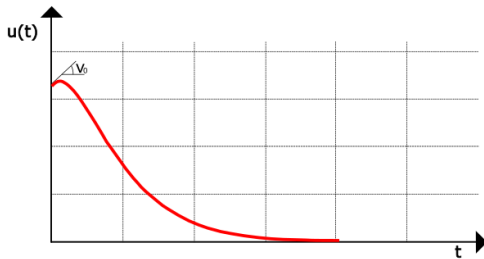
$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) \quad 4.5.39$$

Για $\xi > 1$ η απόσβεση ονομάζεται υπερκρίσιμη και η λύση της εξίσωσης είναι

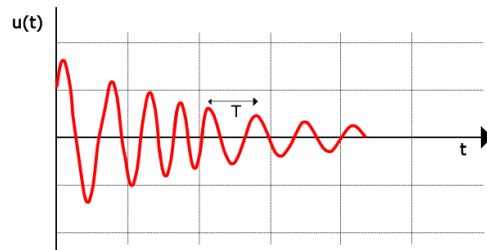
$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A'e^{\Omega t} + B'e^{-\Omega t}) \quad 4.5.40$$

όπου

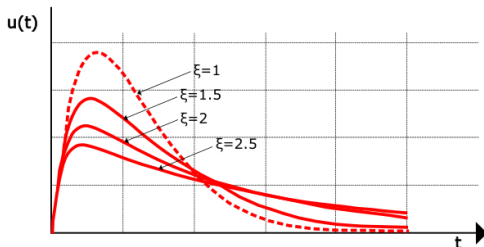
$$\Omega = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad 4.5.41$$



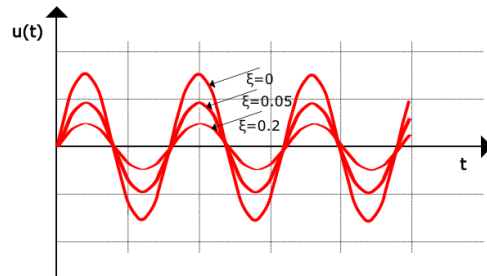
(i) Απόκριση συστήματος με κρίσιμη απόσβεση



(ii) Απόκριση συστήματος με υποκρίσιμη απόσβεση



(iii) Απόκριση συστήματος με υπερκρίσιμη απόσβεση



(iv) Απόκριση συστήματος για διάφορες τιμές απόσβεσης

Σχήμα 48: Αποκρίσεις συστημάτων ταλάντωσης με διαφορετικές αποσβέσεις

Πολυβάθμια συστήματα

Η εξίσωση κίνησης του προβλήματος ελεύθερης ταλάντωσης με απόσβεση, με αρχικές συνθήκες $u(0), \dot{u}(0)$ είναι

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad 4.5.42$$

Μπορεί λυθεί με διαφορους τρόπους. Κάποιοι από αυτούς είναι η άμεση λύση της διαφορικής εξίσωσης, γραμμικοποίηση του ιδιοπροβλήματος και χρήση αναλογικού μητρώου ιξώδους απόσβεσης.

4.5.3 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση

Η κίνηση, ενός συστήματος εξαναγκασμένης ταλάντωσης, διέπεται από τη γενική εξίσωση

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad 4.5.43$$

όπου ο παράγοντας c είναι μηδενικός. Ο συντελεστής $p(t)$ που αντιπροσωπεύει την εξωτερική φόρτιση είναι τυχούσα συνάρτηση χρόνου. Η φόρτιση μπορεί να είναι αρμονική και το μέγεθός της να εκφράζεται από ημιτονική, συνημιτονική χρονική συνάρτηση ή τυχαία. Σε κάθε περίπτωση η διαδικασία επίλυσης είναι διαφορετική. Στην παρούσα διπλωματική εργασία όλες οι εφαρμογές έχουν να κάνουν με απόκριση σε αρμονικές φορτίσεις.

Για μια αρμονική φόρτιση, ο παράγοντας $p(t)$ ορίζεται ως

$$\mathbf{p}(t) = p_0 \sin \bar{\omega}t \quad 4.5.44$$

ή

$$\mathbf{p}(t) = p_0 \cos \bar{\omega}t \quad 4.5.45$$

όπου p_0 είναι σταθερό μέγεθος με φυσικές διαστάσεις δυνάμεως και $\bar{\omega}$ η κυκλική συχνότητα της αρμονικής δυνάμεως, ονομαζόμενη αλλιώς και συχνότητα διεγέρσεως ή διεγείρουσα συχνότητα.

Μονοβάθμια συστήματα

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, η εξίσωση κίνησης ενός μονοβαθμίου συστήματος που υπόκειται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς απόσβεση είναι

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin \bar{\omega}t \quad 4.5.46$$

Η 4.5.46 είναι ομογενής διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης, η γενική λύση της οποίας είναι

$$\mathbf{u}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \bar{\omega}t \quad 4.5.47$$

Κατά τα γνωστά, οι αυθαίρετες σταθερές A, B προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Η έκφραση της ταχύτητας προκύπτει με παραγωγή της παραπάνω σχέσεως ως προς

το χρόνο και είναι

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t + \frac{p_0}{k} \frac{\bar{\omega}}{1 - \beta^2} \cos \bar{\omega} t \quad 4.5.48$$

Σημειώνεται πως το μέγεθος

$$u_{st} = \frac{p_0}{k} \quad 4.5.49$$

αντιπροσωπεύει το στατικό βέλος που θα προκαλούσε η μέγιστη τιμή p_0 της φορτίσεως, στην περίπτωση στατικής επιβολής.

Πολυβάθμια συστήματα

Η εξίσωση ενός πολυβάθμιου συστήματος σε εξαναγκασμένη ταλάντωση, με αρχικές συνθήκες $u(0), \dot{u}(0)$, χωρίς απόσβεση είναι

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \quad 4.5.50$$

όπου $\mathbf{p}(t)$ το διάνυσμα εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στην κατασκευή.

Οι μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση αυτής είναι

1. Μέθοδος επαλληλίας ιδιομορφών
2. Μέθοδος του φάσματος αποκρίσεως
3. Άμεση αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης
4. Ανάλυση στο πεδίο συχνοτήτων

Η μέθοδος άμεσης ολοκλήρωσης περιγράφεται αναλυτικά στην παράγραφο 4.6.

4.5.4 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση

Μονοβάθμια συστήματα

Στην περίπτωση που υπάρχει απόσβεση, η εξίσωση μονοβάθμιου συστήματος υπό αρμονική φόρτιση είναι

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \bar{\omega} t \quad 4.5.51$$

η οποία είναι της ίδιας μορφής με την εξίσωση κίνησης μονοβάθμιου συστήματος σε εξαναγκασμένη ταλάντωση, χωρίς απόσβεση. Η γενική λύση της 4.5.51 είναι

$$\mathbf{u}(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi)^2} [(1 - \beta^2)2\xi\beta \sin \bar{\omega} t + (1 - \beta^2) \cos \bar{\omega} t]$$

Ο πρώτος όρος της εξίσωσης εκφράζει την παροδική απόκριση (transient response) και φθίνει με την πάροδο του χρόνου. Έτσι μπορεί να αμελείται μετά από ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Ο δεύτερος όρος εκφράζει την μόνιμη απόκριση (steady state response) και από αυτή κυρίως εξαρτάται η απόκριση του συστήματος.

Η μεταβλητή β ορίζεται ως

$$\beta = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad 4.5.53$$

Πολυβάθμια συστήματα

Η εξίσωση ενός πολυβάθμιου συστήματος σε εξαναγκασμένη ταλάντωση, με αρχικές συνθήκες $u(0)$, $\dot{u}(0)$, με απόσβεση είναι

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \quad 4.5.54$$

Οι λύσεις της προσδιορίζονται με τις ίδιες μεθόδους που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 4.5.3, για τα πολυβάθμια συστήματα.

4.5.5 Ειδικά θέματα ταλαντώσεων

Ορθογωνικότητα ιδιομορφών

Οι ιδιοσυχνότητες ω_i είναι πραγματικοί, θετικοί αριθμοί για τα προβλήματα της δυναμικής και ικανοποιούν δύο συνθήκες ορθογωνικότητας. Η πρώτη συνθήκη είναι

$$\phi_n^T \mathbf{M} \phi_i = 0 \quad 4.5.55$$

η οποία είναι εμφανές πως εκφράζει ότι οι ιδιομορφές είναι κανονικές ως προς το μητρώο μάζας της κατασκευής. Η δεύτερη συνθήκη εκφράζει πως οι ιδιομορφές είναι ορθογωνικές ως προς το μητρώο στιβρότητας της κατασκευής και είναι

$$\phi_n^T \mathbf{K} \phi_i = 0 \quad 4.5.56$$

4.6 Μέθοδοι επίλυσης εξίσωσης κίνησης πολυβάθμιων συστημάτων σε εξαναγκασμένη ταλάντωση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναλύθηκαν οι συνηθέστερες μορφές ταλάντωσης, μονοβαθ-

μίων και πολυβαθμίων συστημάτων. Όλες οι εφαρμογές που ακολουθούν αφορούν πολυβάθμια συστήματα σε εξαναγκασμένη ταλάντωση, τα οποία απαιτούν πιο πολύπλοκους τρόπους επίλυσης από τα απλά μονοβάθμια. Παρακάτω αναλύονται δύο από τις βασικότερες μεθόδους επίλυσής του. Η πρώτη είναι η μέθοδος επαλληλίας ιδιομορφών και η δεύτερη είναι η άμεση αριθμητική ολοκλήρωση της εξισώσεως κινήσεως του συστήματος. Η δεύτερη μέθοδος, πλεονεκτεί σε σχέση με την πρώτη, στο γεγονός ότι μπορεί να εφαρμοστεί για οποιασδήποτε μορφής φορτίο. Στις εφαρμογές της παρούσα διπλωματικής έχει γίνει χρήση και των δύο μεθόδων για να παρθούν οι ιδιομορφές.

4.6.1 Μέθοδος επαλληλίας ιδιομορφών

Η μέθοδος επαλληλίας ιδιομορφών βασίζεται στο ανάπτυγμα του εξής θεωρήματος: Ένα τυχαίο διάνυσμα u με διάσταση N , μπορεί να παρασταθεί ως επαλληλία των ιδιοδιανυσμάτων του ιδιοπροβλήματος, ήτοι

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_N x_N \quad 4.6.1$$

ή

$$\mathbf{u} = \mathbf{X}\alpha \quad 4.6.2$$

όπου X το διάνυσμα των ιδιομορφών και α το διάνυσμα των συντελεστών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα λοιπόν, το διάνυσμα των μετατοπίσεων μπορεί να γραφτεί ως

$$u(t) = \phi_1 Y_1(t) + \phi_2 Y_2(t) + \dots + \phi_N Y_N(t) = \Phi Y(t) \quad 4.6.3$$

Η 4.6.3 μετασχηματίζει τις συνιστώσες του διανύσματος, από $\mathbf{u} = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N\}^T$, σε $\mathbf{u} = \{U_1 \ U_2 \ \dots \ U_N\}^T$ στο σύστημα, με βάση τις ιδιομορφές $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$. Οι συνιστώσες Y_n με $n = 1, 2, \dots, N$ ονομάζονται γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος και είναι οι ιδιομορφικές ή κανονικές συντεταγμένες αυτού.

Ορίζονται επίσης δύο νέα μεγέθη, αυτά της γενικευμένης μάζας και της γενικευμένης ακαμψίας. Είναι

$$\mathbf{M}_n = \phi_n^T \mathbf{M} \phi_n \quad 4.6.4$$

και

$$\mathbf{K}_n = \phi_n^T \mathbf{K} \phi_n \quad 4.6.5$$

Επιπλέον εφόσον ισχύει $\mathbf{K}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{M}\phi_n$, προκύπτει

$$\mathbf{K}_n = \omega_n^2 \mathbf{M}_n \quad 4.6.6$$

Τελικώς η εξίσωση κίνησης σύμφωνα με τα παραπάνω μετασχηματίζεται στην

$$\ddot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad 4.6.7$$

Ο μετασχηματισμός αυτός μετατρέπει το σύστημα N συζευγμένων εξισώσεων, σε σύστημα N ασύζευκτων εξισώσεων μονοβάθμιου ταλαντωτή. Ως εκ τούτου, η λύση της n -οστής εξίσωσης θα είναι

$$Y_n = \frac{\dot{Y}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t + Y_n(0) \cos \omega_n t \quad 4.6.8$$

με $n = 1, 2, \dots, N$. Τα μεγέθη $Y_n(0), \dot{Y}_n(0)$ αντιπροσωπεύουν την αρχική μετατόπιση και ταχύτητα των μετασχηματισμένων εξισώσεων και εξάγονται από τις δεδομένες αρχικές συνθήκες $u(0), \dot{u}(0)$. Οι σχέσεις από τις οποίες υπολογίζονται είναι

$$\mathbf{Y}_n(t) = \frac{\phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{u}(t)}{\mathbf{M}_n}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad 4.6.9$$

και με παραγωγήση ως προς t

$$\dot{\mathbf{Y}}_n(t) = \frac{\phi_n^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(t)}{\mathbf{M}_n}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad 4.6.10$$

Με αντικατάση $t = 0$ προκύπτουν τα μεγέθη $Y_n(0), \dot{Y}_n(0)$.

Τέλος επισημαίνεται πως εάν οι ιδιομορφές είναι ορθοκανονικοποιημένες ως προς τη μάζα, σύμφωνα με την 4.5.25, οι παραπάνω σχέσεις απλοποιούνται και γίνονται

$$\mathbf{M}_n = \phi_n^T \mathbf{M} \phi_n = 1 \quad 4.6.11$$

$$\mathbf{K}_n = \omega_n^2 \quad 4.6.12$$

$$\mathbf{Y}_n(t) = \phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{u}(0), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad 4.6.13$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_n(t) = \phi_n^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(0), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad 4.6.14$$

Το διάνυσμα $u_n = \phi_n Y_n$ εκφράζει τη συμβολή της n -οστής ιδιομορφής στο διάνυσμα μετατοπίσεως u και αποκαλείται n -οστή ιδιομορφική συνιστώσα του διανύσματος μετατο-

πίσεως. Οπότε η αρχική σχέση 4.6.3 γίνεται

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_N \quad 4.6.15$$

Η 4.6.15 υποδηλώνει πως το διάνυσμα των μετατοπίσεων αποτελεί επαλληλία των ιδιομορφικών συνιστωσών του. Δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή t , είναι η επαλληλία των ιδιομορφών, κάθε μία των οποίων είναι πολλαπλασιασμένη με ένα συντελεστή βάρους, ο οποίος εξαρτάται από τον χρόνο.

4.6.2 Μέθοδος άμεσης ολοκλήρωσης Newmark

Η μέθοδος της επαλληλίας των ιδιομορφών, μπορεί να εφαρμοσθεί υπό δύο συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Είναι αναγκαίο το μητρώο απόσβεσης να είναι αναλογικής μορφής, ώστε να επιτυγχάνεται η απόξευση των εξισώσεων κίνησης των πολυβαθμίων συστημάτων και επιπλέον πρέπει το σύστημα να είναι γραμμικό. Στην ειδική περίπτωση που η συνάρτηση της φορτίσεως είναι απλή, τότε μπορεί να επιτευχθεί λύση κλειστής μορφής (αναλυτική). Στις περισσότερες και συνηθέστερες περιπτώσεις όμως, η εξίσωση φορτίσεως της κατασκευής είναι πολύπλοκη (π.χ. σεισμική κίνηση), επομένως η αναλυτική λύση των εξισώσεων δεν είναι εφικτή. Τότε η λύση πρέπει να γίνει χρήση αριθμητικών μεθόδων, με χρονικά βήματα.

Υπάρχουν πολλές τέτοιες μέθοδοι προσδιορισμού του δυναμικού βέλους $u(t)$ ή των ιδιομορφικών συντεταγμένων $Y_n(t)$ αντίστοιχα, ανάλογα με το αν πρόκειται για μονοβάθμιο ή πολυβάθμιο σύστημα. Οι πιο γνωστές είναι η μέθοδος κεντρικών διαφορών (Central Difference Method), η μέθοδος Houbold, η μέθοδος θ του Wilson και η μέθοδος Newmark. Κάθε μία από τις μεθόδους αυτές, εκκινεί με δεδομένες τις αρχικές συνθήκες $u(t), \dot{u}(t)$ ή $Y(t), \dot{Y}(t)$ και η άγνωστη μεταβλητή υπολογίζεται βήμα προς βήμα. Από τις τιμές της μετατόπισης και της ταχύτητας την χρονική στιγμή $t = 0$, υπολογίζεται και η αρχική επιτάχυνση μέσω της βασικής εξίσωσης κίνησης του προβλήματος και στη συνέχεια, τα μεγέθη $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ ή $\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}}, \ddot{\mathbf{Y}}$ σε κάθε χρονικό βήμα $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$, με Δt συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Όλες οι μέθοδοι άμεσης αριθμητικής ολοκλήρωσης έχουν ισχύ υπό δύο βασικές παραδοχές. Η πρώτη είναι πως η διαφορική εξίσωση κίνησης ικανοποιείται σε διακεκριμένες χρονικές στιγμές οι οποίες απέχουν μεταξύ τους Δt . Η δεύτερη είναι ότι η μετατόπιση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση μεταβάλλονται σε κάθε χρονικό διάστημα Δt σύμφωνα με κάποιο γνωστό νόμο. Από την πρώτη παραδοχή, γίνεται κατανοητό πως η ισορροπία δυνάμεων εξασφαλίζεται μόνο σε διακεκριμένες χρονικές στιγμές, μέσα στη συνολική χρονική διάρκεια του προβλήματος, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τη μεθοδολογία των αναλυτικών λύσεων όπου η εξίσωση ικανοποιείται μια τυχούσα χρονική στιγμή t .

Τέλος επισημαίνεται πως η ακρίβεια, η ευστάθεια και η αποτελεσματικότητα των λύσεων των μεθόδων άμεσης ολοκλήρωσης εξαρτώνται από την παραδοχή του νόμου της μετατόπισης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης στο χρονικό διάστημα Δt και από το μέγεθος

του διαστήματος αυτού.

Στην παρούσα παράγραφο αναπτύσσεται περαιτέρω η μέθοδος άμεσης ολοκλήρωσης Newmark, που έχει χρησιμοποιηθεί στην επίλυση των εφαρμογών. Η μέθοδος είναι από τις πιο εύχρηστες και ευρέως διαδεδομένες μεθόδους άμεσης ολοκλήρωσης και χωρίζεται σε δύο βασικές υποκατηγορίες. Η πρώτη είναι η Μέθοδος της Μέσης Επιτάχυνσης, σύμφωνα με την οποία η μεταβολή της επιτάχυνσης σε ένα χρονικό διάστημα Δt , είναι ίση με τη μέση τιμή της και σταθερή και η δεύτερη είναι η Μέθοδος της Γραμμικής Επιτάχυνσης, κατά την οποία η τιμή της επιτάχυνσης σε ένα χρονικό διάστημα μεταβάλλεται γραμμικά. Στον κώδικα επίλυσης έχει χρησιμοποιηθεί η πρώτη υποκατηγορία.

Σύμφωνα με τη μέθοδο Newmark, η μεταβολή των μεγεθών του βέλους, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, εξαρτάται από δύο παραμέτρους β και γ . Οι τιμές αυτών παίζουν ρόλο και στην ευστάθεια και ακρίβεια της μεθόδου. Γενικώς η επιλογή των τιμών των παραγόντων β, γ είναι αυθαίρετη και σύμφωνη με τα κριτήρια

$$\beta \geq \frac{\gamma + 0.5^2}{4} \quad 4.6.16$$

$$\gamma \geq 1/2 \quad 4.6.17$$

Για τη μέθοδο μέσης επιτάχυνσης οι τιμές των παραμέτρων λαμβάνουν τις τιμές

$$\beta = 1/4 \quad 4.6.18$$

$$\gamma = 1/2 \quad 4.6.19$$

και για τη μέθοδο γραμμικής επιτάχυνσης

$$\beta = 1/6 \quad 4.6.20$$

$$\gamma = 1/2 \quad 4.6.21$$

Γενικεύοντας, οι παράμετροι β και γ παίρνουν τις τιμές

$$1/6 \leq \beta \leq 1/4 \quad 4.6.22$$

$$\gamma = 1/2 \quad 4.6.23$$

Με γνωστές τις ποσότητες μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης³τη τυχαία χρονική στιγμή t_i , υπολογίζονται οι αντίστοιχες ποσότητες του επόμενου χρονικού βήματος t_{i+1} . Αυτό επιτυγχάνεται μέσω μιας διαδικασίας συνδυασμού δύο βασικών εξισώσεων Newmark, με την γνωστή εξίσωση κίνησης του προβλήματος. Προς χάριν ευκολίας οι ποσότητες μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης θα συμβολίζονται u, \dot{u} και \ddot{u} αντίστοιχα, είτε είναι αριθμοί είτε διανυσματικές, καθώς αυτό δεν παίζει κάποιο ρόλο στην ανάπτυξη της μεθόδου και επιπλέον οι αριθμητικές ποσότητες αποτελούν υποπερίπτωση διανυσμάτων. Οι δύο βα-

σικές εξισώσεις λοιπόν είναι

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1 + \gamma)\ddot{u}_i + \gamma\ddot{u}_{i+1}] \Delta t \quad 4.6.24$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + [(0.5 - \beta)\ddot{u}_i + \beta\ddot{u}_{i+1}] \Delta t^2 \quad 4.6.25$$

Όπως είναι εμφανές από τις 4.6.31, η άγνωστη ποσότητα της επιτάχυνσης \ddot{u}_{i+1} βρίσκεται στο δεύτερο μέλος. Αυτό σημαίνει πως για τον υπολογισμό των u_{i+1}, \dot{u}_{i+1} απαιτείται επαναλαπτητική διαδικασία. Προς αποφυγή αυτού, θα χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω αυξητικές ποσότητες για την επαναδιατύπωση των 4.6.24 και 4.6.25

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i \quad 4.6.26$$

$$\Delta \dot{u}_i = \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i \quad 4.6.27$$

$$\Delta \ddot{u}_i = \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i \quad 4.6.28$$

$$\Delta P u_i = P_{i+1} - P_i \quad 4.6.29$$

$$4.6.30$$

Οι εξισώσεις 4.6.24, 4.6.25 γράφονται ως

$$\Delta \dot{u}_i = \Delta t \ddot{u}_i + \gamma \Delta t \Delta \ddot{u}_i \quad 4.6.31$$

$$\Delta u_i = \Delta t \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_i + \beta \Delta t^2 \Delta \ddot{u}_i \quad 4.6.32$$

Η 4.6.32 λύνεται ως προς την αυξητική επιτάχυνση

$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i \quad 4.6.33$$

και αντικαθιστώντας την 4.6.33 στην 4.6.31 προκύπτει

$$\Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_i \quad 4.6.34$$

Τέλος, η εξίσωση κίνησης με τα αυξητικά μεγέθη είναι

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C} \Delta \dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}_i = \Delta \mathbf{P}_i \quad 4.6.35$$

Αντικαθιστώντας τις 4.6.33, 4.6.34 στην παραπάνω, προκύπτει

$$\hat{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{u}_i = \Delta \hat{\mathbf{P}}_i \quad 4.6.36$$

³Οι τρεις αυτές ποσότητες αποτελούν είτε αριθμούς είτε διανύσματα, ανάλογα με το αν το σύστημα προς επίλυση είναι μονοβάθμιο ή πολυβάθμιο αντίστοιχα.

όπου

$$\hat{K} = K + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}C + \frac{1}{\beta\Delta t^2}M \quad 4.6.37$$

και

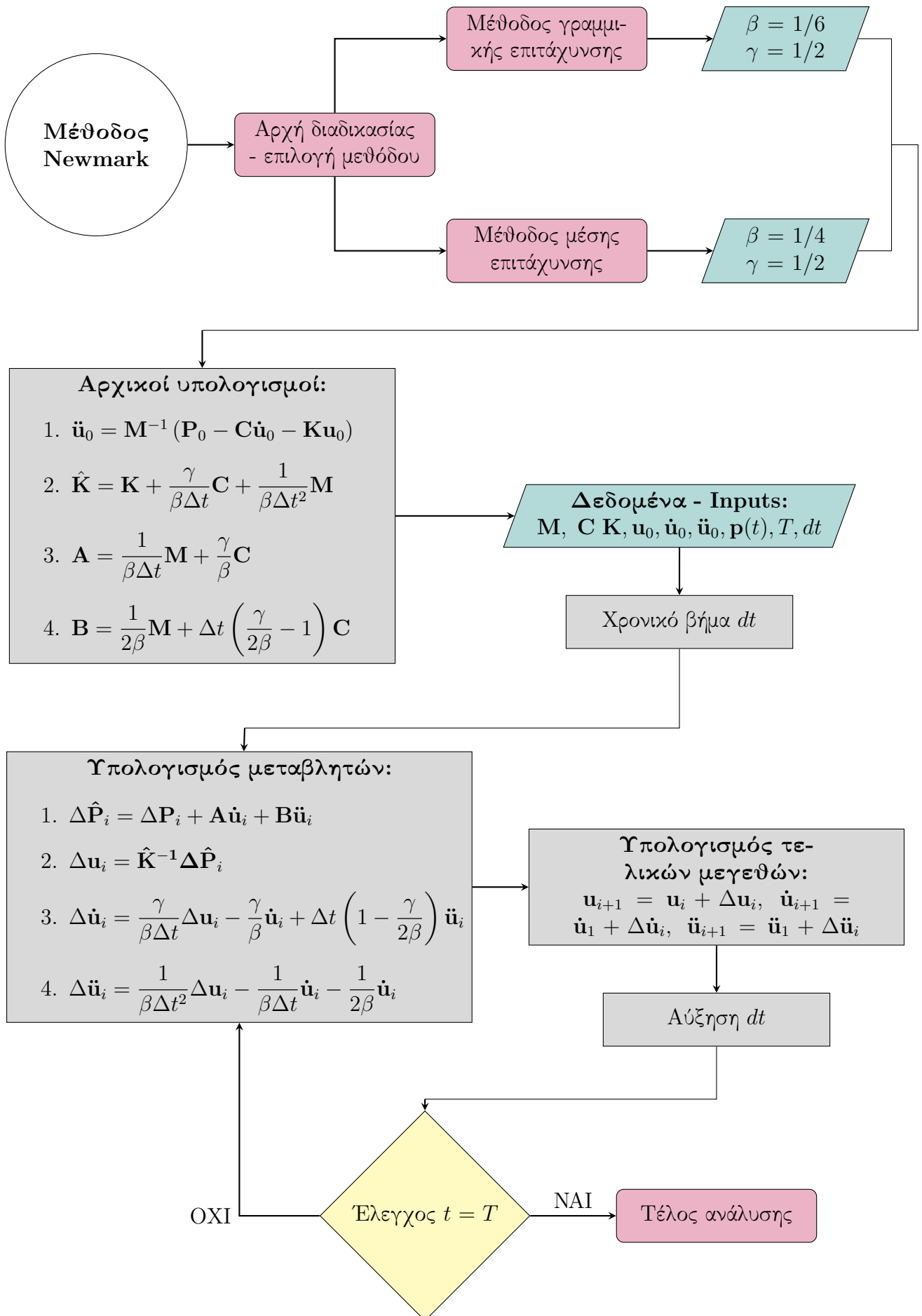
$$\Delta\hat{P}_i = \Delta P_i + \left(\frac{1}{\beta\Delta t}M + \frac{\gamma}{\beta}C\right)\dot{u}_i + \left[\frac{1}{2\beta}M + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)C\right]\ddot{u}_i \quad 4.6.38$$

Με γνωστές αυτές τις ποσότητες υπολογίζεται και η αυξητική μετατόπιση

$$\Delta\mathbf{u}_i = \hat{\mathbf{K}}^{-1}\Delta\hat{\mathbf{P}}_i \quad 4.6.39$$

Οι παράγοντες $\Delta\dot{u}_i$, $\Delta\ddot{u}_i$, υπολογίζονται από τις εξισώσεις 4.6.34 και 4.6.33 αντίστοιχα.

Για την εφαρμογή της μεθόδου απαιτούνται οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος, δηλαδή οι ποσότητες u_0 , \dot{u}_0 . Η πορεία επίλυσης των εξισώσεων απεικονίζεται καλύτερα στο παρακάτω σχεδιάγραμμα.



Σχήμα 49: Διάγραμμα ροής αλγοριθμικής διαδικασίας Newmark

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές

5.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται κατά σειρά όλες οι εφαρμογές που πραγματοποιήθηκαν. Πριν αναλυθεί κάθε μία από αυτές, θεωρείται σκόπιμο να γίνει αναφορά στα βασικά βήματα της ανάλυσης που ακολουθήθηκε και στη λογική πίσω από την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Όλα τα στοιχεία των εφαρμογών αναλύθηκαν σύμφωνα με τη θεωρία Kirchhoff - Love και η ανάλυσή τους επιτεύχθηκε σύμφωνα με τις αρχές της ισογεωμετρικής θεωρίας. Όλοι οι φορείς υποβλήθηκαν σε ημιτονοειδές, αρμονικό, δυναμικό φορτίο. Η διεκπαιρέωση της ανάλυσης πραγματοποιήθηκε με το πρόγραμμα Matlab, όπου συντάχθηκαν οι κατάλληλες συναρτήσεις. Τα δεδομένα του εκάστοτε προβλήματος, εισήχθησαν στο πρόγραμμα με τη μορφή αρχείων δεδομένων. Τα αρχεία δεδομένων για τους κελυφωτούς φορείς παρήχθησαν από το πρόγραμμα Dynamo του Revit. Τα μοντέλα είτε προσομοιώθηκαν με καμπύλες NURBS, είτε με ακριβείς γεωμετρικούς τύπους.

Για την κατασκευή των συναρτήσεων σχήματος, χρησιμοποιήθηκαν καμπύλες NURBS. Επιπλέον, όλα τα στοιχεία έχουν μόνο μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή τους τρεις u_x , u_y και u_z βαθμούς.

Σε όλες τις εφαρμογές εκτελέστηκε αρχικά μία πρωταρχική ανάλυση, με την “τραχύτερη” διακριτοποίηση και με συναρτήσεις σχήματος πολυωνυμικής τάξης ίση με δύο ή τρία. Εν συνεχεία, μέσω των τεχνικών προσαρμογής που αναφέρθηκαν προηγουμένως, έγινε εισαγωγή κόμβων, η οποία οδήγησε σε αύξηση του αριθμού των σημείων ελέγχου και κατ’ επέκταση και του αριθμού των στοιχείων και ανύψωση πολυωνυμικών ταξεων. Επιπροσθέτως, έγινε χρήση και του πλήρους και του διαγώνιου μητρώου μάζας, σε κάθε ανάλυση. Τέλος, οι φορείς δοκιμάστηκαν σε αναλύσεις ίδιας χρονικής διάρκειας, με τρία διαφορετικά χρονικά βήματα. Η τιμή του χρονικού βήματος παίζει σημαντικό ρόλο στην ακρίβεια και την διάρκεια της διαδικασίας.

Αφότου πραγματοποιήθηκε ορισμένος αριθμός αναλύσεων για την εκάστοτε εφαρμο-

γή, συγκρίνονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη χρήση πλήρους και διαγωνίου μητρώου μάζας, ως προς την ακρίβεια, την απόκριση, τη σύγκλιση και τη χρονική διάρκεια. Επισημαίνεται πως για την πρώτη εφαρμογή έχει προγραμματιστεί και η αναλυτική λύση του φορέα.

Αναφέρεται συνοπτικά η αλγοριθμική διαδικασία που ακολουθείται για την ανάλυση. Για κάθε χρονικό βήμα υπολογίζονται το διάνυσμα ισοδύναμων δυνάμεων στους κόμβους, λόγω εξωτερικής φόρτισης, $\{\mathbf{P}\}$, το καθολικό μητρώο στιβαρότητας $[\mathbf{K}]$, και το καθολικό μητρώο μάζας $[\mathbf{M}]$. Ακολούθως υπολογίζονται το διάνυσμα εσωτερικών δυνάμεων $\{\mathbf{P}_{int}\}$ και τα διανύσματα μετατοπίσεων, ταχυτήτων και επιταχύνσεων $\{\mathbf{u}\}$, $\{\dot{\mathbf{u}}\}$ και $\{\ddot{\mathbf{u}}\}$, αντίστοιχα. Ελέγχεται εάν επέρχεται σύγκλιση του αλγόριθμου, με αναφορά τον βαθμό ανοχής 1^{-5} . Έστερα από τη δυναμική, εκτελείται ιδιομορφική ανάλυση και άμεση ολοκλήρωση Newmark. Επισημαίνεται ότι για τα δύο τελευταία κομμάτια του αλγόριθμου έγινε χρήση του μητρώου στιβαρότητας $[\mathbf{K}_{ff}]$ και του μητρώου μάζας $[\mathbf{M}_{ff}]$, των ελεύθερων μόνο βαθμών ελευθερίας.

Οι φορείς που εξετάστηκαν είναι

1. Απλή τετραγωνική πλάκα
2. Τετραγωνική πλάκα με διάφορες οπές
3. Τριδιάστατο παραβολοειδές κέλυφος
4. Υπερβολικό παραβολοειδές κέλυφος

Όλοι οι φορείς έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά υλικού και φορτίου και τα στοιχεία εφαρμογών που αφορούν τετραγωνική πλάκα έχουν τις ίδιες ακριβώς διαστάσεις. Τα δεδομένα δίνονται αναλυτικότερα παρακάτω.

5.2 Τετραγωνική πλάκα

Η πρώτη εφαρμογή που εκτελέστηκε αφορά απλή τετραγωνική πλάκα. Το στοιχείο αποτελεί απλό επιφανειακό φορέα, η γεωμετρία του οποίου ορίζεται στο επίπεδο (X, Y) . Παρακάτω αναφέρονται συνοπτικά τα δεδομένα του και οι παράμετροι του φορτίου στο οποίο υποβάλλεται. Επισημαίνεται ξανά, πως τα δεδομένα αυτά, πέρα από τη γεωμετρία, παραμένουν ίδια για όλες τις επόμενες εφαρμογές.

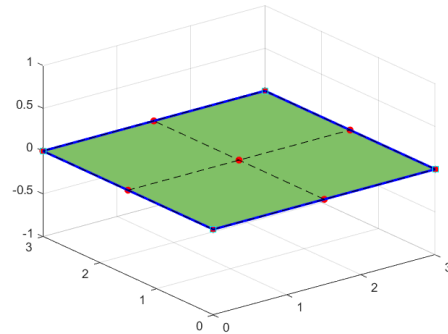
1. Δεδομένας πλάκας

- $l_x = 3 \text{ m}$, $l_y = 3 \text{ m}$, $h = 0.08 \text{ m}$
- Μέτρο ελαστικότητας υλικού $E = 30 \text{ GPa}$

- Λόγος Poisson $\nu = 0.2$
- Πυκνότητα μάζας $\gamma = 78.50 \text{ kN/m}^3$

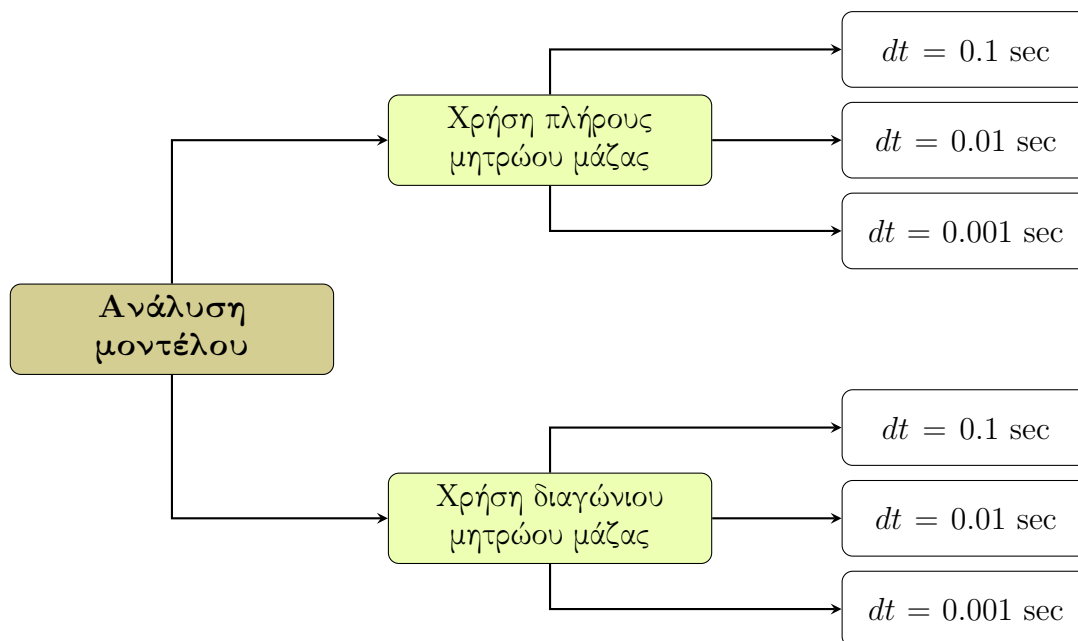
2. Δεδομένα φορτίου και ανάλυσης

- Πλάτος φορτίου $A = 100 \text{ mm}$
- Συχνότητα $f = 15 \text{ Hz}$
- Αρχική φάση $\phi = 0$
- Φορτίο $fz = 100 \sin(15t)$
- Χρόνος ανάλυσης 10 sec
- Χρονικά βήματα $dt = 0.01, 0.01$
και 0.001 sec



Σχήμα 50: Φορέας απλής τετραγωνικής πλάκας

Εξετάσθηκαν δύο τρόποι στήριξης της πλάκας. Ο πρώτος είναι με επιβολή σημειακών στηρίξεων στα τέσσερα γωνικά σημεία της και ο δεύτερος με επιβολή γραμμικών εδράσεων, καθ' όλο το μήκος των τεσσάρων πλευρών της. Ο φορέας αναλύεται με τέσσερις διαφορετικές διακριτοποιήσεις, οι οποίες παρήχθησαν με τη χρήση της μεθόδου προσαρμογής εισαγωγής κόμβων. Κάθε μοντέλο αναλύεται με τη χρήση πλήρους και διαγώνιου μητρώου μάζας. Η όλη αλγοριθμική διαδικασία, ανεξαρτήτου το είδους μητρώου μάζας που χρησιμοποιείται, εκτελείται για τρία χρονικά βήματα, $dt = 0.1 \text{ sec}$, $dt = 0.01 \text{ sec}$ και $dt = 0.001 \text{ sec}$. Η διαδικασία αποτυπώνεται καλύτερα στο σχεδιάγραμμα 51



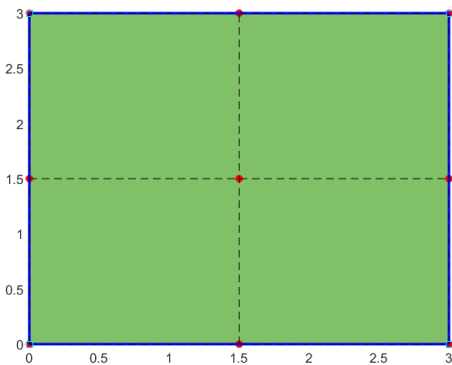
Σχήμα 51: Διάγραμμα ροής περιπτώσεων ανάλυσης

Κάθε ανάλυση εκτελείται είκοσι φορές συνολικά. Ο μέσος όρος των τιμών της χρονικής διάρκειας των είκοσι αυτών επαναλήψεων, λαμβάνεται ως ο τελικός χρόνος ανάλυσης του εκάστοτε μοντέλου.

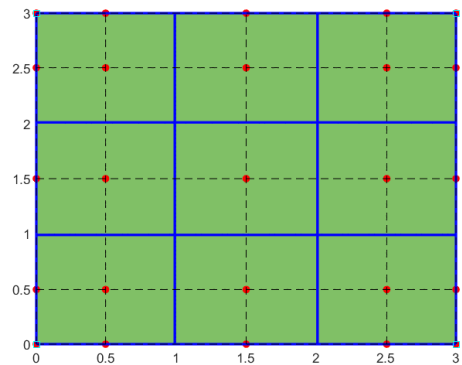
Η πολυωνυμική τάξη των συναρτήσεων σχήματος, τίθεται και για τις δύο διευθύνσεις ίση με δύο, δηλαδή $p = 2$, $\eta = 2$ και τα κομβοδιανύσματα που ορίστηκαν αρχικά είναι $\{\Xi\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$ και $\{H\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$.

5.2.1 Σημειακές στηρίξεις στις τέσσερις γωνίες της πλάκας

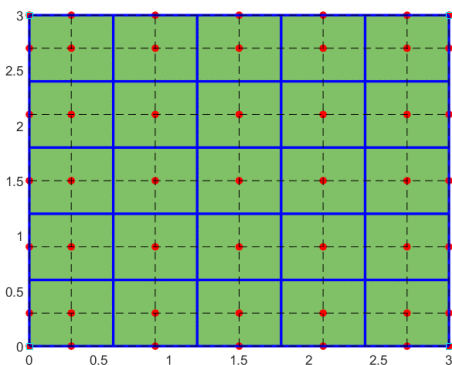
Το μοντέλο προς ανάλυση φαίνεται στην εικόνα 50. Οι στηρίξεις επιβάλλονται στα γωνιακά σημεία, όπου δεσμεύονται όλοι οι μεταφορικοί βαθμοί ελευθερίας. Όπως προαναφέρθηκε, πραγματοποιήθηκαν τέσσερις διακριτοποιήσεις στον προκείμενο φορέα, τα μοντέλα των οποίων φαίνονται στην εικόνα 52. Παρακάτω παρουσιάζονται κατά αύξουσα σειρά στοιχείων διακριτοποίησης, τα αποτελέσματα του κάθε φορέα. Όλα τα αποτελέσματα παραθέτονται συνοπτικά στους πίνακες 5.5 και 5.6.



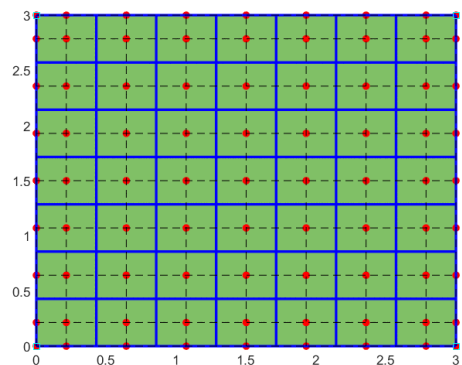
(i) Διακριτοποίηση 1 με ένα στοιχείο ανά πλευρά και συνολικά ένα στοιχείο



(ii) Διακριτοποίηση 2 με τρία στοιχεία ανά πλευρά και εννιά συνολικά



(iii) Διακριτοποίηση 3 με πέντε στοιχεία ανά πλευρά και είκοσι πέντε συνολικά

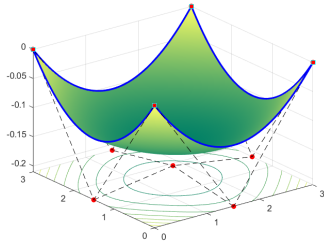


(iv) Διακριτοποίηση 4 με εννιά στοιχεία ανά πλευρά και σαράντα εννιά συνολικά

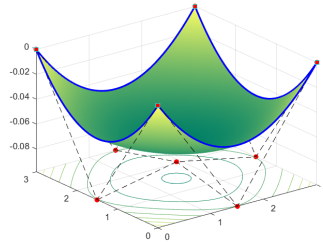
Σχήμα 52: Οι διαφορετικές διακριτοποιήσεις που πραγματοποιούνται στον φορέα 50

Διακριτοποίηση με ένα στοιχείο

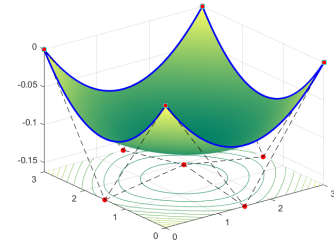
Η πρώτη διακριτοποίηση που εκτελείται είναι αυτή του σχήματος 52i, η οποία έχει εννιά σημεία ελέγχου, που συγκροτούν το ένα και μοναδικό στοιχείο της. Απεικονίζονται κατά σειρά, για όλα τα διαφορετικά χρονικά βήματα, ο παραμορφωμένος φορέας και η απόκρισή του.



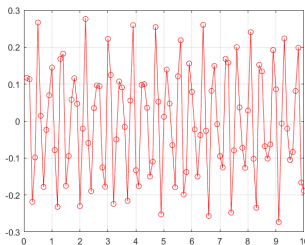
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



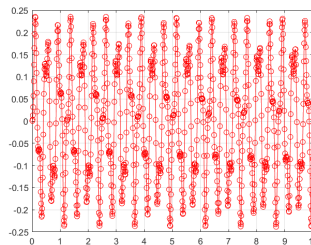
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



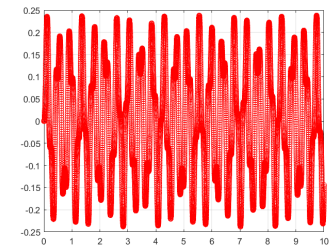
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



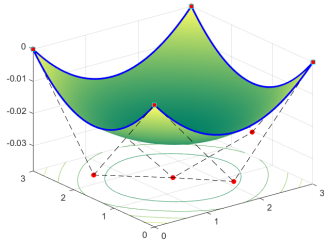
(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

Σχήμα 53: Τετραγωνική Πλάκα - Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας

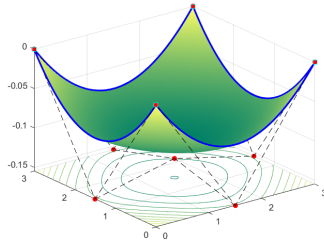
Από τα σχήματα 53, 54 είναι εμφανές πως η μορφή της παραμόρφωσης παραμένει ίδια, ανεξάρτητα του αριθμού των χρονικών βημάτων και το είδος του μητρώου μάζας που χρησιμοποιείται στην ανάλυση. Ωστόσο η τιμές των παραμορφώσεων διαφέρουν και για χρήση διαφορετικού μητρώου μάζας και για τα διαφορετικά χρονικά βήματα. Όσο αφορά τα διαγράμματα απόκρισης και η μορφή τους και οι τιμές τους διαφέρουν για τα δύο είδη ανάλυσης.

Το σύνολο των ιδιομορφών που προέκυψαν είναι δεκαπέντε για κάθε περίπτωση. Παρατηρείται πως όλες οι ιδιομορφές μετά την πέμπτη είναι μεμβρανικές και μη σημαντικές. Για τους σκοπούς σύγκρισης, παρουσιάζονται μόνο αυτές με τις τρεις μεγαλύτερες ιδιοπεριόδους. Όλες οι ιδιοσυχνότητες αναγράφονται αναλυτικά στον πίνακα 5.6 Στο παράρτημα Α' φαίνονται όλες οι προκύπτουσες ιδιομορφές για σκοπούς πληρότητας.

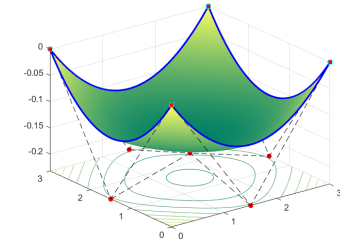
Παρατηρείται πως μόνο η πρώτη ιδιομορφή είναι ίδιας μορφής και στις δύο περιπτώσεις ανάλυσης. Ωστόσο, οι τιμές των ιδιοπεριόδων τους διαφέρουν, όπως συμβαίνει προφανώς και στις υπόλοιπες δυάδες προς σύγκριση. Μάλιστα, οι τελευταίες δύο δυάδες παρουσιάζουν



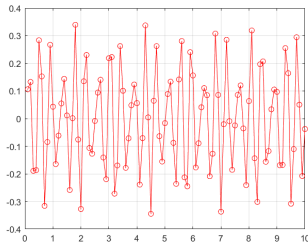
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



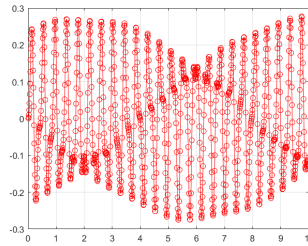
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



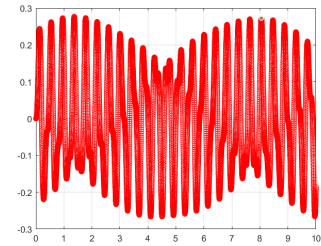
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

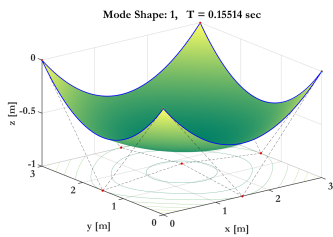


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

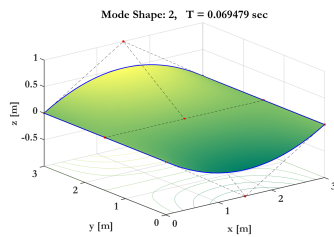


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

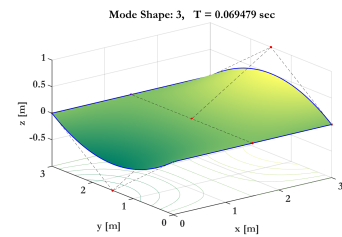
Σχήμα 54: Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1

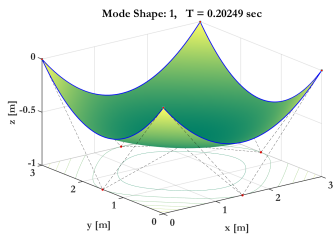


(ii) Ιδιομορφή 2

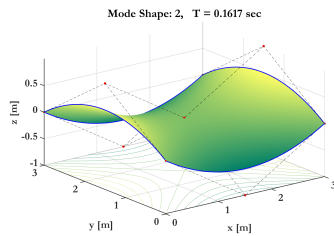


(iii) Ιδιομορφή 3

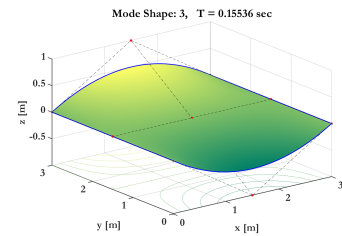
Σχήμα 55: Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1



(ii) Ιδιομορφή 2



(iii) Ιδιομορφή 3

Σχήμα 56: Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Ιδιομορφές με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας

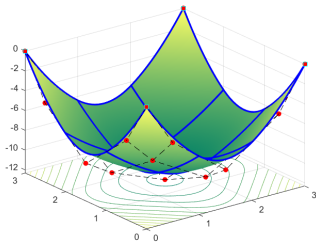
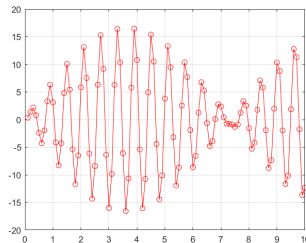
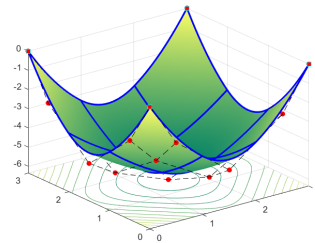
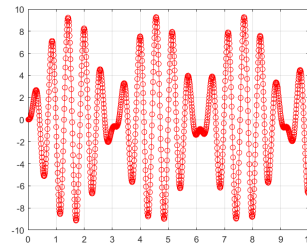
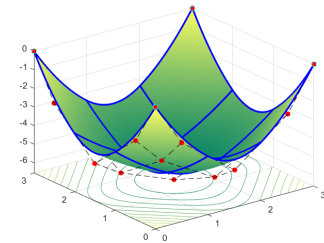
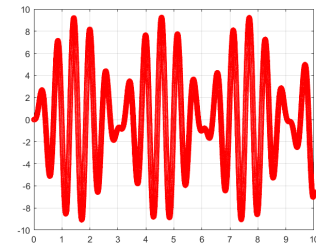
και μεγάλη διαφορά στην αριθμητική τάξη των ιδιοπεριόδων τους, όπως φαίνεται στον πίνακα 5.1.

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.15514	0.20249
2	0.069479	0.1617
3	0.069479	0.15536

Πίνακας 5.1: Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

Διακριτοποίηση με εννιά στοιχεία

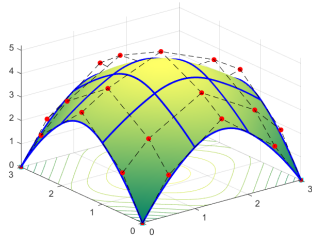
Το επόμενο μοντέλο συντάσσεται από είκοσι πέντε σημεία ελέγχου, τρία στοιχεία ανά πλευρά και εννιά συνολικά. Ομοίως, απεικονίζονται κατά σειρά, για όλα τα διαφορετικά χρονικά βήματα, ο παραμορφωμένος φορέας και η απόκρισή του.

(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

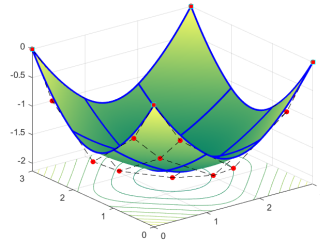
Σχήμα 57: Διακριτοποίηση με 9 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας

Η μορφή του παραμορφωμένου φορέα παραμένει ίδια με του μοντέλου διακριτοποίησης με ένα στοιχείο παντού, εκτός από αυτή της ανάλυσης με διαγώνιο μητρώο μάζας και 100 χρονικά βήματα. Η παραμόρφωση σε αυτή έχει αντίθετη φορά σε σχέση με όλες τις υπόλοιπες. Ακόμη, η μορφή της απόκρισης τώρα είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις αναλύσεων με διαφορετικό είδος μητρώου μάζας. Η διαφορά τους έγκειται στον χρόνο εκτέλεσης των κύκλων ταλάντωσης και στα μέγιστά τους. Στις εικόνες 57iv και 58iv, απεικονίζεται πιο καθαρά η μεταξύ τους διαφοροποίηση.

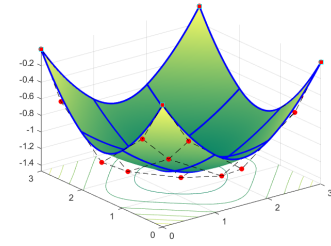
Όσο αφορά τις τιμές των ιδιοπεριόδων παρατηρείται μεγαλύτερη σύγκλιση μεταξύ των δύο περιπτώσεων ανάλυσης. Όλες οι δυάδες σύγκρισης είναι της ίδια αριθμητικής τάξης.



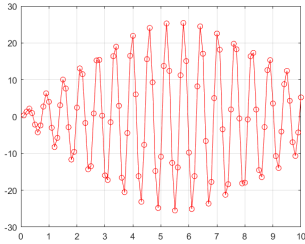
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



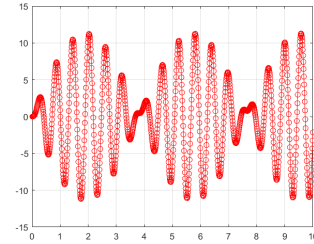
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



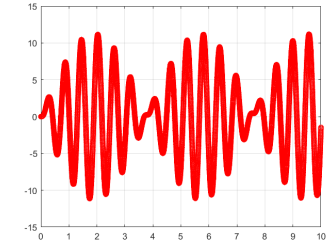
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

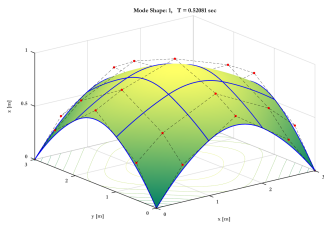


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

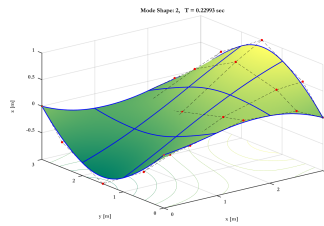


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

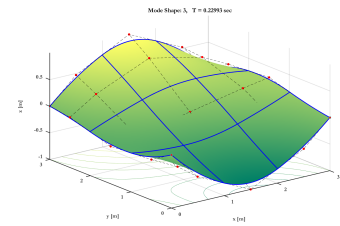
Σχήμα 58: Διακριτοποίηση με 9 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1

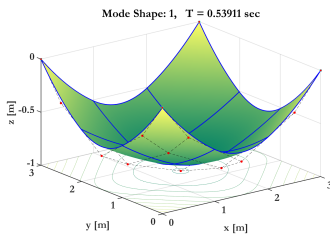


(ii) Ιδιομορφή 2

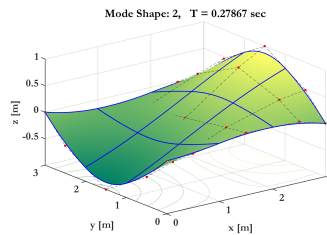


(iii) Ιδιομορφή 3

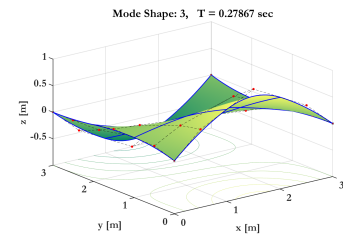
Σχήμα 59: Διακριτοποίηση με 9 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1



(ii) Ιδιομορφή 2



(iii) Ιδιομορφή 3

Σχήμα 60: Διακριτοποίηση με 9 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας

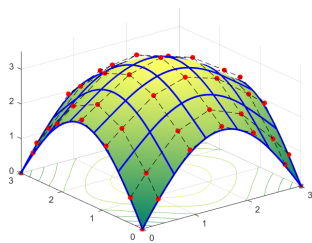
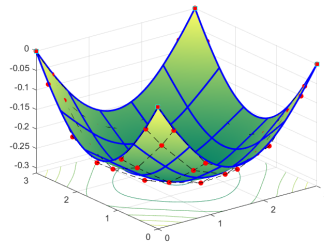
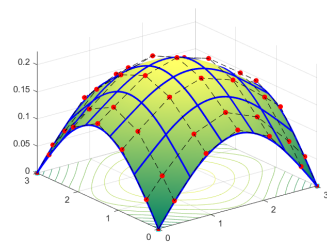
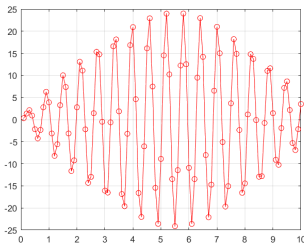
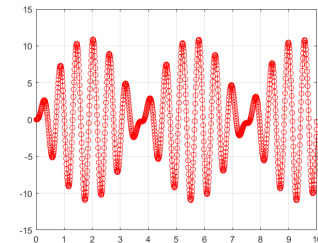
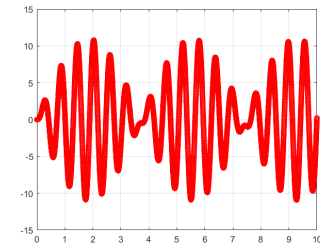
Επιπλέον, επισημαίνεται πως η δεύτερη και η τρίτη ιδιομορφή, ανεξαρτήτου είδους μητρώου μάζας, έχουν την ίδια ιδιοπερίοδο, κάτι το οποίο είναι αποτέλεσμα της συμμετρίας του φορέα. Οι δεύτερες συγκεκριμένα, είναι ακριβώς ίδιας μορφής στις δύο περιπτώσεις. Το ίδιο ισχύει και για τις τελευταίες, με τη διαφορά πως αυτές έχουν περιστραμμένο σύστημα αξόνων.

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.52081	0.53911
2	0.22993	0.27867
3	0.22993	0.27867

Πίνακας 5.2: Διακριτοποίηση με 9 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

Διακριτοποίηση με είκοσι πέντε στοιχεία

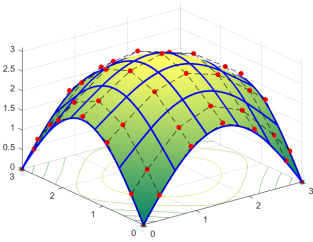
Η επόμενη διακριτοποίηση απαρτίζεται από σαράντα εννιά σημεία ελέγχου, πέντε στοιχεία ανά πλευρά και είκοσι πέντε συνολικά.

(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

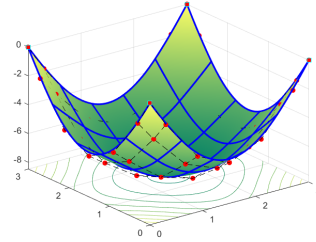
Σχήμα 61: Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας

Το προκείμενο μοντέλο παρήγαγε στις μισές αναλύσεις, παραμορφωμένο φορέα της παρεκκλίνουσας μορφής του σχήματος 58i της προηγούμενης διακριτοποίησης. Όσο αφορά τα διαγράμματα απόκρισης, η μορφή τους είναι σχεδόν ίδια και για τις δύο περιπτώσεις μητρώου μάζας Όπως και προηγουμένως, υπάρχει διαφοροποίηση ως προς τη διάρκεια του κύκλου της ταλάντωσης. Αυτό απεικονίζεται καλύτερα στα σχήματα 61iv, 62iv.

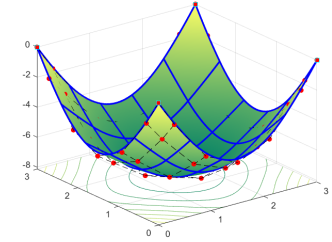
Οι τιμές των ιδιοπεριόδων παρουσιάζουν ακόμα μεγαλύτερη σύγκλιση. Όπως και στην προηγούμενη διακριτοποίηση, η δεύτερη και η τρίτη περίοδος της εκάστοτε περίπτωσης είναι ίσες και το απεικονιζόμενο σχήμα διαφέρει ως προς τους άξονες περιστροφής της παραμόρφωσής του.



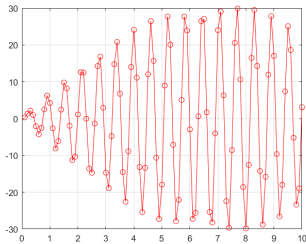
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



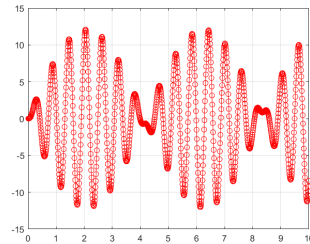
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



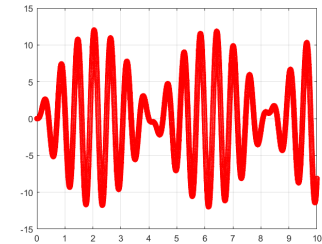
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

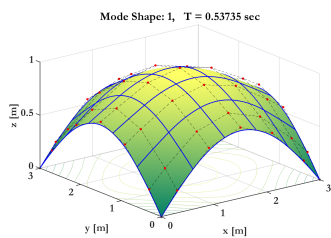


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

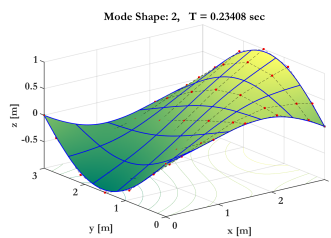


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

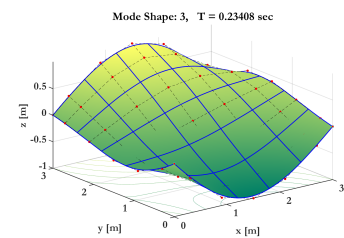
Σχήμα 62: Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1

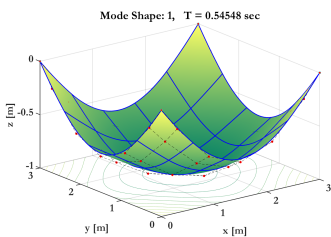


(ii) Ιδιομορφή 2

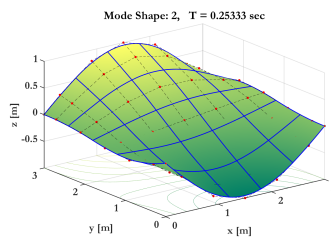


(iii) Ιδιομορφή 3

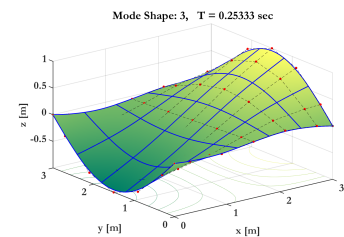
Σχήμα 63: Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1



(ii) Ιδιομορφή 2



(iii) Ιδιομορφή 3

Σχήμα 64: Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας

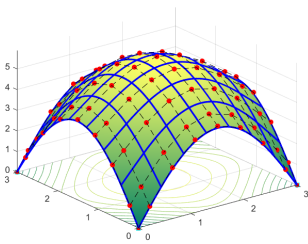
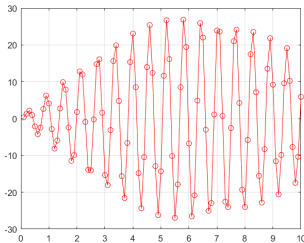
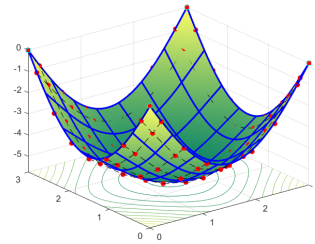
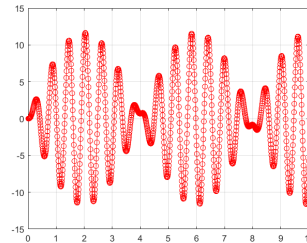
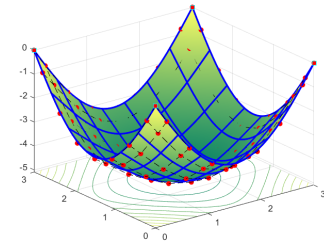
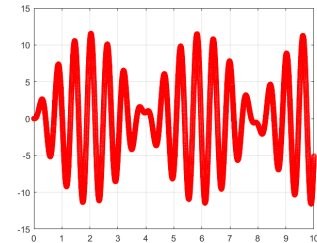
Διακριτοποίηση με σαράντα εννιά στοιχεία

Τέλος, εκτελέσθηκε διακριτοποίηση αποτελούμενη από ογδόντα ένα σημεία ελέγχου, εφτά στοιχεία ανά πλευρά και σαράντα εννιά συνολικά.

Οι προκύπτοντες παραμορφωμένοι φορείς είναι ίδια μορφής μεταξύ των περιπτώσεων

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.53735	0.54548
2	0.23408	0.25333
3	0.23408	0.25333

Πίνακας 5.3: Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

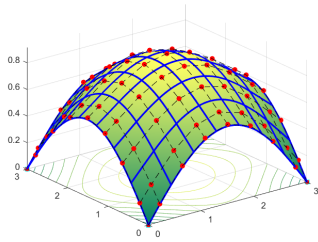
Σχήμα 65: Διακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας

ανάλυσης. Για τις αναλύσεις με 100 χρονικά βήματα, η παραμόρφωση έχει πάλι την παρεκκλίνουσα μορφή του σχήματος 58i. Όσο αφορά τις αποκρίσεις, εμφανίζουν σύγκλιση ως προς τη μορφή και τα μέγιστα τους.

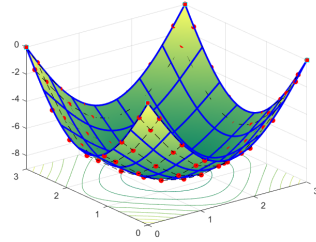
Όπως φαίνεται στον πίνακα 5.4, οι τιμές των ιδιοπεριόδων παρουσιάζουν οριακή σύγκλιση. Μάλιστα, οι δύο πρώτες ιδιοπεριόδοι έχουν κοινά τα δύο πρώτα δεκαδικά τους ψηφία, ενώ οι επόμενες δύο διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία βαθμίδα, δεύτερου δεκαδικού αριθμού. Επιπροσθέτως, όμοια με τις προηγούμενες διακριτοποιήσεις, η δεύτερη και η τρίτη ιδιομορφή κάθε ανάλυσης, μοιράζονται την ίδια περίοδο και έχουν σχήμα ίδιας μορφής αλλά περιστραμμένο.

Στον πίνακα 5.5 παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα κάθε ανάλυσης. Ως μέγεθος σύγκρισης της απόκρισης έχει επιλεχθεί η μετατόπιση του κεντρικού σημείου της πλάκας, με συντεταγμένες $X = 1.5$, $Y = 1.5$ και $Z = 0.0$.

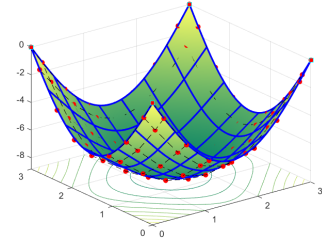
Από τον πίνακα αυτό γίνεται αντιληπτό πως δεν υπάρχει κάποιο μοτίβο σχετικά με τις τιμές της μετατόπισης. Ακόμη, οι χρόνοι διάρκειας ανάλυσης των περιπτώσεων χρήσης



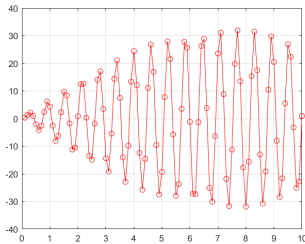
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



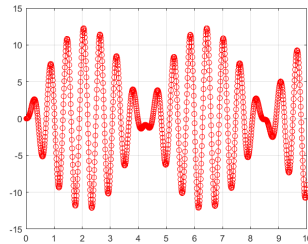
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



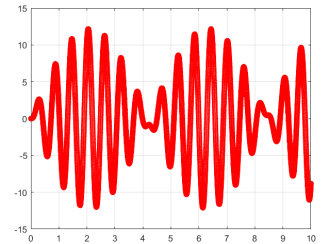
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

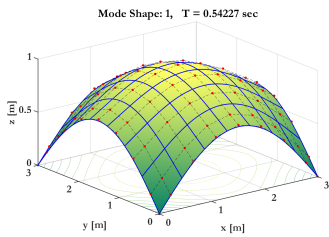


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

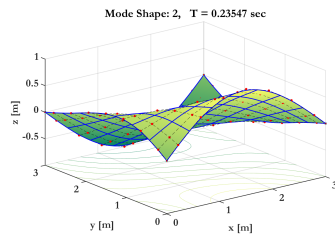


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

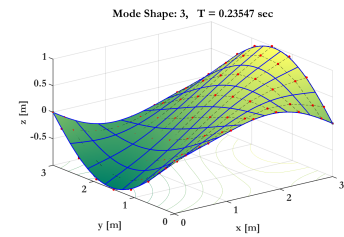
Σχήμα 66: Διακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1

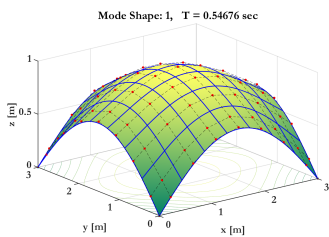


(ii) Ιδιομορφή 2

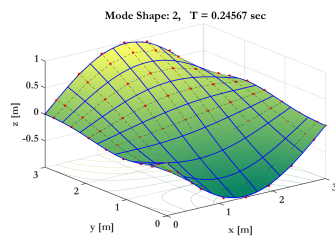


(iii) Ιδιομορφή 3

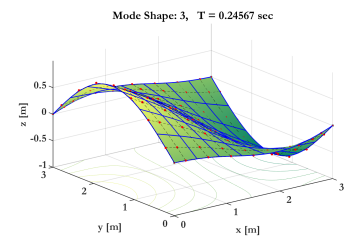
Σχήμα 67: Διακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1



(ii) Ιδιομορφή 2



(iii) Ιδιομορφή 3

Σχήμα 68: Διακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας

διαγωνίου μητρώου δεν διαφέρουν ιδιαίτερα από αυτές της χρήσης του πλήρους μητρώου. Αυτό συμβαίνει γιατί δεν γίνεται κάποια περίπλοκη χρήση του μητρώου μάζας στον κώδικα ανάλυσης και επειδή τα μοντέλα διακριτοποίησης δεν αποτελούνται από υπερβολικά μεγάλο αριθμό σημείων ελέγχου και στοιχείων.

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.54227	0.54676
2	0.23547	0.24567
3	0.23547	0.24567

Πίνακας 5.4: Διακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΑΠΛΑ ΣΤΗΡΙΓΜΕΝΗ ΣΤΙΣ ΓΩΝΙΕΣ ΤΗΣ					
Διακριτοποίηση	Αριθμός σημείων ελέγχου	Τύπος [M]	$dt(sec)$	$T(sec)$	$U(mm)$
$1 \times 1 = 1$ στοιχείο	9	M_{cons}	0.1	4.18	-0.0379
		M_{lum}		3.91	-0.1886
		M_{cons}	0.01	40	-0.1305
		M_{lum}		41.7	-0.0851
		M_{cons}	0.001	419	-0.1443
		M_{lum}		426	-0.1857
$3 \times 3 = 9$ στοιχεία	25	M_{cons}	0.1	7.69	-12.3342
		M_{lum}		7.53	5.2219
		M_{cons}	0.01	79	-6.3599
		M_{lum}		86	-2.1393
		M_{cons}	0.001	755	-6.5566
		M_{lum}		758	-1.4723
$5 \times 5 = 25$ στοιχεία	49	M_{cons}	0.1	13.7	3.5259
		M_{lum}		14	3.1120
		M_{cons}	0.01	157	-0.3136
		M_{lum}		176	-8.4811
		M_{cons}	0.001	1400	-0.2004
		M_{lum}		1360	-8.1312
$7 \times 7 = 49$ στοιχεία	81	M_{cons}	0.1	21.1	5.9170
		M_{lum}		23.9	0.9179
		M_{cons}	0.01	206	-5.7479
		M_{lum}		210	-9.0118
		M_{cons}	0.001	2140	-5.0959
		M_{lum}		2220	-8.8263

Πίνακας 5.5: Συγκεντρωμένα αποτελέσματα αναλύσεων

Από τον πίνακα 5.6 εξακριβώνεται πως η αύξηση των σημείων ελέγχου, και κατ' επέκταση και του συνολικού αριθμού των στοιχείων και των βαθμών ελευθερίας του προβλήματος, οδηγεί σε μεγαλύτερη σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων των αναλύσεων με χρήση πλήρους μητρώου μάζας και αναλύσεων με χρήση διαγωνίου. Ακόμη, κοιτώντας τις τιμές της κάθε διακριτοποίησης ξεχωριστά, φαίνεται πως όσο μεγαλύτερη είναι η διακριτοποίηση, τόσο μικρότερη είναι η διαφορά κλίμακας των τιμών των μεγαλύτερων ιδιοσυχνοτήτων. Στο πρώτο μοντέλο, οι ιδιοσυχνότητες που αντιστοιχούν στη δέκατη πέμπτη ιδιομορφή είναι

Διακριτοποίηση 1 × 1		Διακριτοποίηση 3 × 3		Διακριτοποίηση 5 × 5		Διακριτοποίηση 7 × 7	
M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}
31.03	40.49	11.66	12.06	11.52	11.69	11.49	11.59
38.86	90.43	22.550	27.33	24.80	26.84	25.58	26.68
40.44	90.43	22.55	27.33	24.80	26.84	25.58	26.68
40.4426	122.87	24.95	35.02	28.71	33.99	30.53	33.71
44.42	269.04	42.90	72.21	57.31	66.45	60.08	64.81
528.94	849.65	48.75	75.57	59.56	74.70	65.44	74.14
528.94	849.65	54.66	100.26	68.36	89.35	74.24	86.64
874.12	1972.92	54.66	100.26	68.36	89.35	74.24	86.64
874.14	2103.14	54.72	149.24	84.39	123.47	96.21	120.36
882.32	3033.19	67.38	163.57	95.25	139.55	110.29	135.86
940.56	3119.47	69.84	163.57	95.25	139.55	110.29	135.86
1356.49	3760.31	69.84	166.00	112.68	171.07	129.72	161.63
1395.07	3760.31	71.95	222.68	119.07	208.01	149.97	197.64
1475.19	5337.19	74.05	226.62	122.49	208.01	149.97	197.64
1475.19	5337.19	74.0535	226.6191	123.8213	213.43	151.21	205.66

Πίνακας 5.6: Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλύσεων σε rad/sec

1475.1957 rad/sec και 5337.1984 rad/sec, ενώ στο τελευταίο είναι 151.2069 rad/sec και 205.6552 rad/sec. Η διαφορά μεταξύ των δύο τιμών της πρώτης περίπτωσης είναι εμφανώς πολύ μεγαλύτερη από αυτή της τελευταίας.

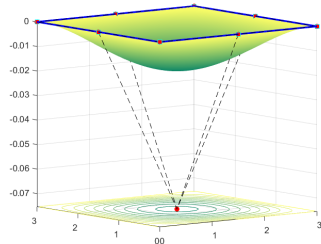
5.2.2 Γραμμικές στηρίξεις στις τέσσερις πλευρές

Το μοντέλο παραμένει ίδιο (εικόνα 50), ενώ οι στηρίξεις αυτή τη φορά είναι γραμμικές καθ' όλο το μήκος των τεσσάρων πλευρών του φορέα. Στη προκειμένη περίπτωση, έχει προγραμματιστεί και η αναλυτική λύσης της πλάκας, επομένως θα υπάρξει σύγκριση και ως προς τα αποτελέσματα αυτής σχετικά με τις ιδιοσυχνότητες. Ο αριθμός των σημείων ελέγχου και των στοιχείων (ανά πλευρά και συνολικά) σε κάθε διακριτοποίηση παραμένει ίδιος με τα αντίστοιχα μοντέλα της περίπτωσης των σημειακών στηρίξεων. Όπως και πριν, αρχικά απεικονίζονται οι παραμορφώσεις και οι αποκρίσεις του φορέα, για τα τρία διαφορετικά χρονικά βήματα και στο τέλος συνοπτικά σε μορφή πινάκων, οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων και των λοιπών παραμέτρων των αναλύσεων.

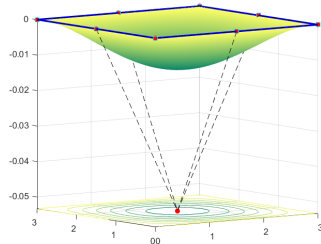
Διακριτοποίηση με ένα στοιχείο

Η μορφή του παραμορφωμένου φορέα είναι ίδια σε κάθε υποπερίπτωση ανάλυσης. Η απόκριση αποτυπώνεται με διαφορετικής μορφής διαγράμματα στην ανάλυση με χρήση πλήρους μητρώου μάζας και στην ανάλυση με χρήση διαγωνίου. Οι τιμές των μέγιστων τιμών της διαφέρουν επίσης.

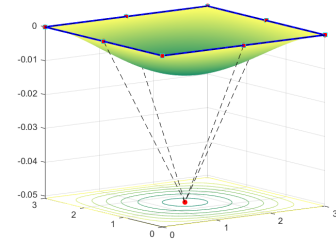
Οι συνολικές ιδιομορφές που προέκυψαν είναι τρεις, καθώς υπάρχει μόνο ένα ελεύθερο



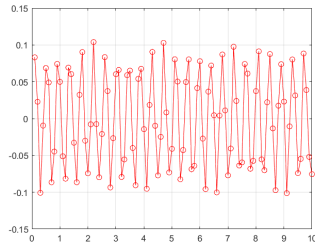
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



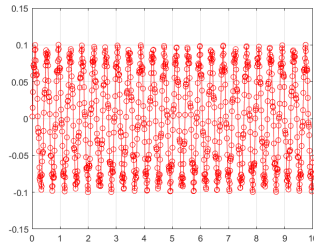
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



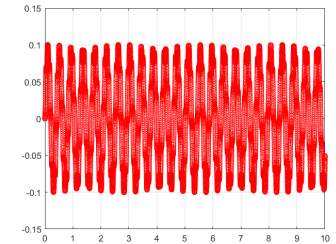
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

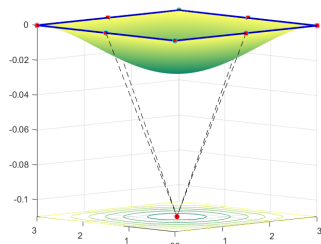


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

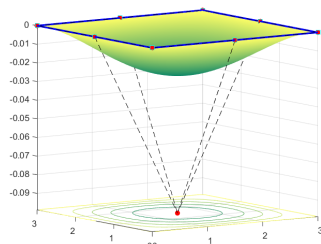


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

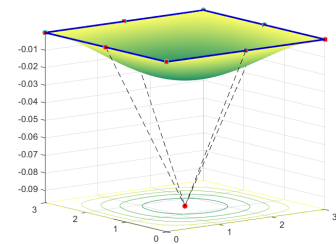
Σχήμα 69: Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



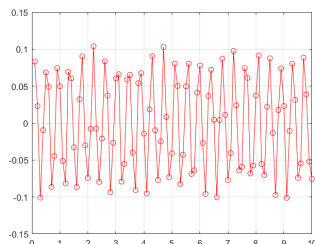
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



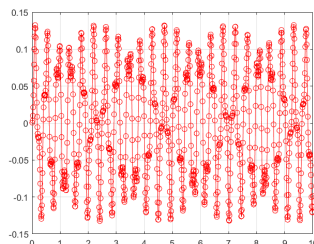
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



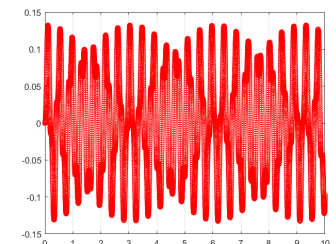
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

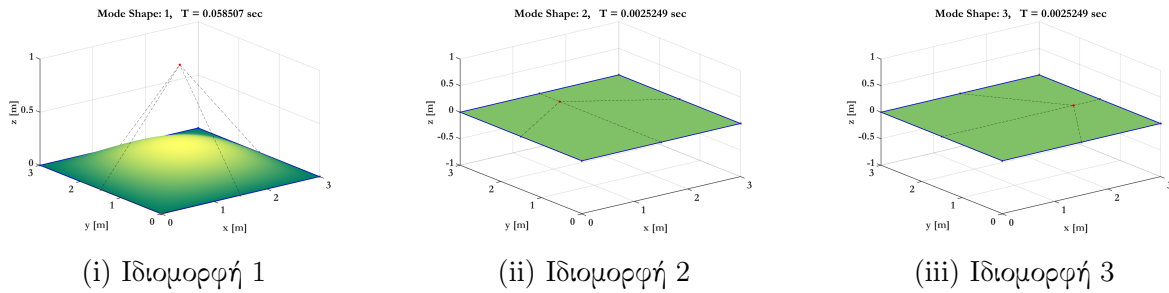


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

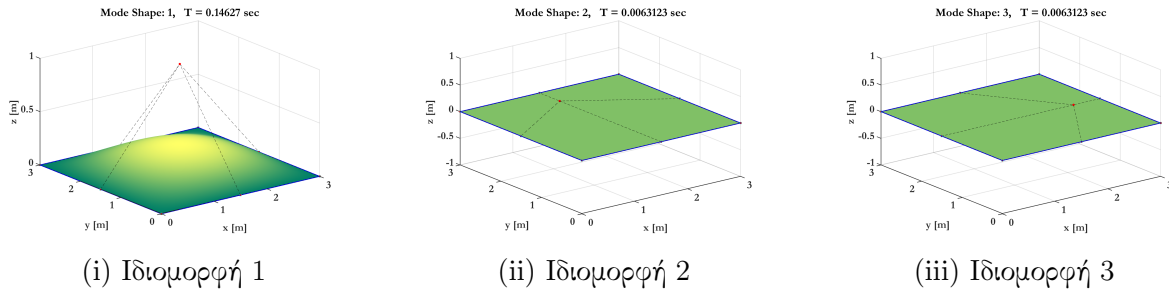
Σχήμα 70: Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

προς κίνηση σημείο Το σημείο αυτό είναι το κεντρικό σημείο της πλάκας.

Οι πρώτη ιδιομορφή είναι καμπτική και οι υπόλοιπες δύο είναι μεμβρανικές, με ίδια ιδιοπε-



Σχήμα 71: Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



Σχήμα 72: Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Ιδιομορφές με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας

ρίοδο ανά περίπτωση ανάλυσης. Οι δεύτερες και οι τρίτες ιδιομορφές των δύο περιπτώσεων ανάλυσης, είναι ορθογωνικές. Επισημαίνεται ωστόσο πως οι τιμές των ιδιοπεριόδων - ειδικά της πρώτης - διαφέρουν κατά πολύ μεταξύ τους.

Διακριτοποίηση με εννιά στοιχεία

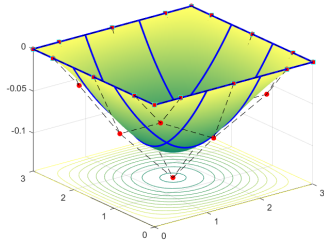
Οι παραμορφώσεις είναι ίδιας μορφής σε κάθε υποπερίπτωση. Συγκρίνοντας και τις προκύπτουσες αποκρίσεις, είναι εμφανές πως αν και υπάρχουν μικροδιαφοροποιήσεις ως προς τη μορφή και φυσικά ως προς την τάξη μεγέθους, υπάρχει οριακή σύγκλιση.

Οι ιδιομορφές αυτή τη φορά είναι είκοσι επτά, μιας και υπάρχουν εννιά ελεύθερα σημεία. Οι πρώτες τρεις απεικονίζονται παρακάτω.

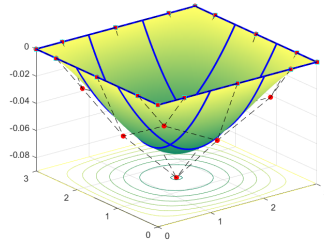
Εδώ παρατηρείται μεγαλύτερη σύγκλιση των ιδιοπεριόδων των πρώτων ιδιομορφών και απόκλιση μεταξύ των υπόλοιπων ζευγαριών ιδιοτιμών. Μάλιστα, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας προκύπτουν, όπως είναι αναμενόμενο, δύο ορθογωνικές ιδιομορφές, ενώ με χρήση διαγωνίου, εμφανίζονται δύο διαφορετικές μεταξύ τους ιδιομορφές.

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.058507	0.14627
2	0.0025249	0.0063123
3	0.0025249	0.0063123

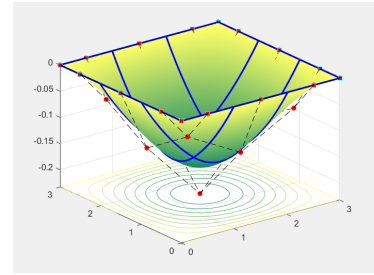
Πίνακας 5.7: Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών



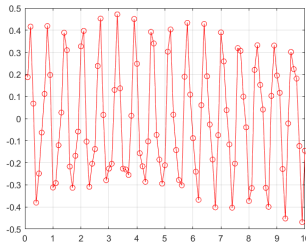
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης 100 χρονικών βημάτων



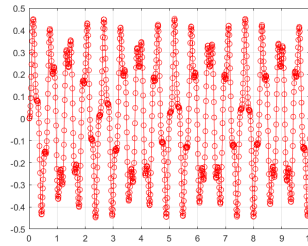
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης 1000 χρονικών βημάτων



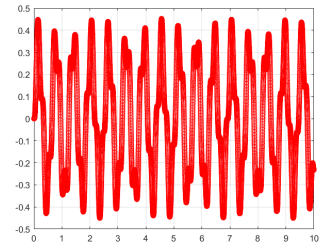
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης 10000 χρονικών βημάτων



(iv) Απόκριση ανάλυσης 100 χρονικών βημάτων

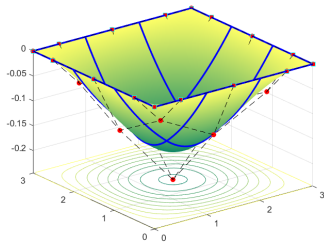


(v) Απόκριση ανάλυσης 1000 χρονικών βημάτων

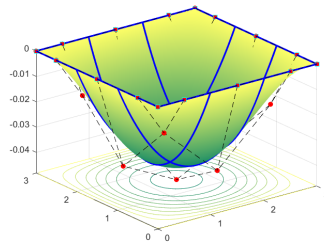


(vi) Απόκριση ανάλυσης 10000 χρονικών βημάτων

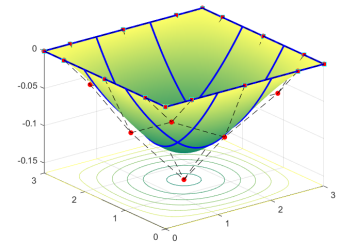
Σχήμα 73: Οι παραμορφωμένοι φορείς και οι αποκρίσεις τους, που προέκυψαν από αναλύσεις με 100, 1000 και 10000 χρονικά βήματα αντίστοιχα και χρήση πλήρους μητρώου μάζας



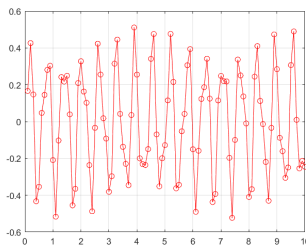
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης 100 χρονικών βημάτων



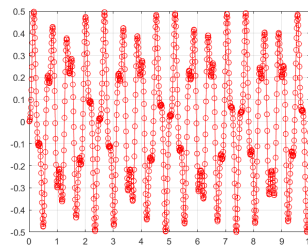
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης 1000 χρονικών βημάτων



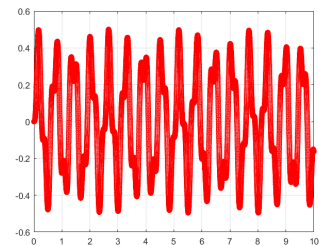
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης 10000 χρονικών βημάτων



(iv) Απόκριση ανάλυσης 100 χρονικών βημάτων

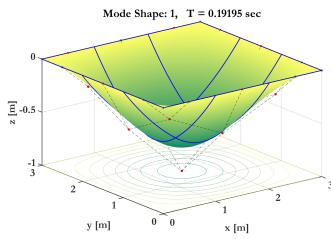


(v) Απόκριση ανάλυσης 1000 χρονικών βημάτων

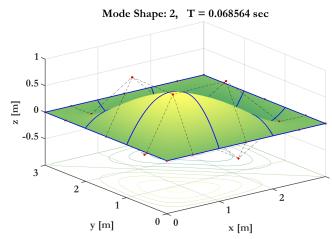


(vi) Απόκριση ανάλυσης 10000 χρονικών βημάτων

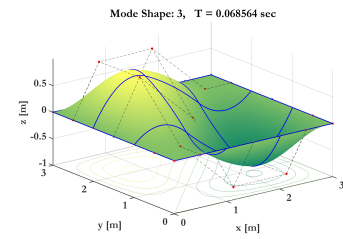
Σχήμα 74: Οι παραμορφωμένοι φορείς και οι αποκρίσεις τους, που προέκυψαν από αναλύσεις με 100, 1000 και 10000 χρονικά βήματα αντίστοιχα και χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1

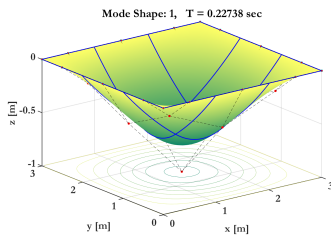


(ii) Ιδιομορφή 2

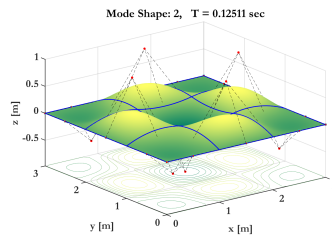


(iii) Ιδιομορφή 3

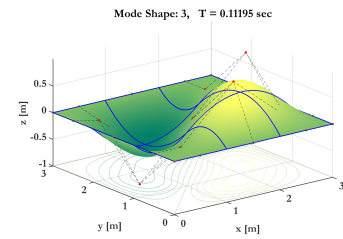
Σχήμα 75: Ιδιομορφές τετραγωνικής πλάκας, γραμμικά στηριγμένη στις εξωτερικές πλευρές, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1



(ii) Ιδιομορφή 2



(iii) Ιδιομορφή 3

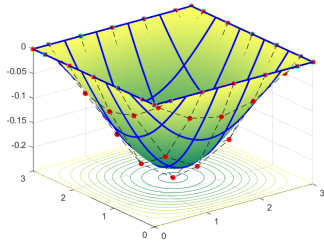
Σχήμα 76: Ιδιομορφές τετραγωνικής πλάκας, γραμμικά στηριγμένη στις εξωτερικές πλευρές, με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας

Διακριτοποίηση με είκοσι πέντε στοιχεία

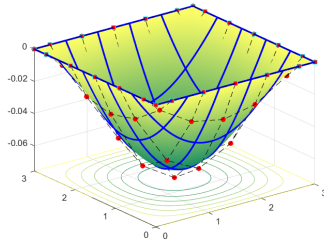
Στην προκείμενη περίπτωση, από την ανάλυση με χρήση πλήρους μητρώου μάζας, προέκυψαν τα ίδια αποτελέσματα παραμόρφωσης και απόκρισης, με τα αντίστοιχα της προηγούμενης διακριτοποίησης. Ακόμα και τα μέγιστα της απόκρισης είναι σχεδόν όμοια. Όμως, είναι αξιοπρόσεκτο το γεγονός ότι η ανάλυση με χρήση σωρικού μητρώου μάζας, εμφάνισε διάγραμμα απόκρισης εντελώς διαφορετικής μορφής, ειδικά αν ληφθεί υπόψη ότι στην προηγούμενη διακριτοποίηση είχε σχεδόν επέλθει σύγκλιση. Συμπεραίνεται λοιπόν, πως το παρόν μοντέλο δεν είναι ικανό να παράξει επαρκή αποτελέσματα. Καθώς είναι ευρέως γνωστό και επιβεβαιωμένο από το πρώτο παράδειγμα της πλάκας με σημειακές στηρίξεις, πως η αύξηση των σημείων ελέγχου και κατ' επέκταση και των μικροστοιχείων ενός μοντέλου οδηγεί σε υψηλότερης ακρίβειας αποτελέσματα, είναι εμφανές πως η ανικανότητα του εν λόγω φορέα οφείλεται στις πολυωνυμικές τάξεις του. Για σκοπούς πληρότητας, δίνονται και οι τρεις πρώτες ιδιομορφές του παραδείγματος. Κατόπιν, για περαιτέρω σύγκριση και επιβεβαίωση,

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.19195	0.22738
2	0.068546	0.12511
3	0.068546	0.11195

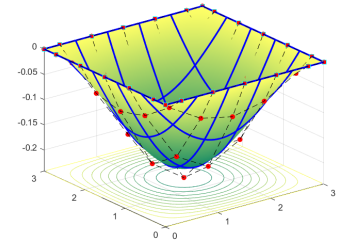
Πίνακας 5.8: Διακριτοποίηση με 9 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών



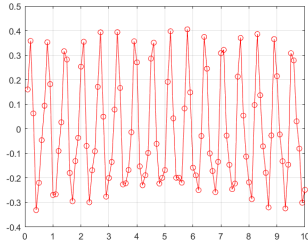
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



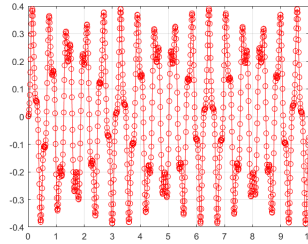
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



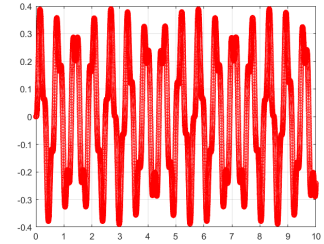
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

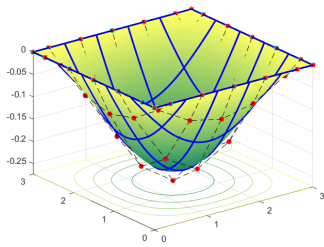


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

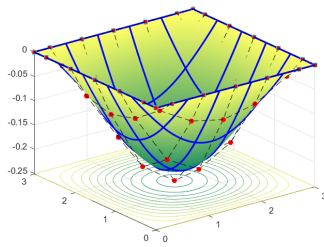


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

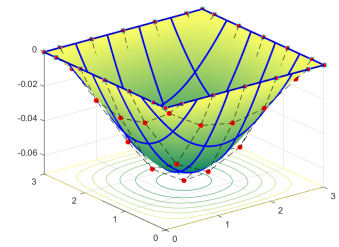
Σχήμα 77: Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



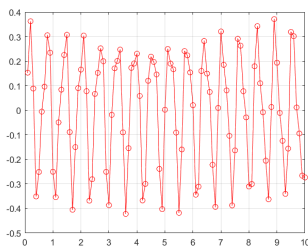
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



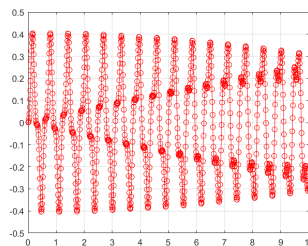
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



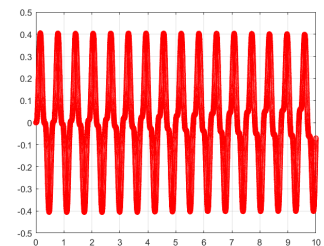
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



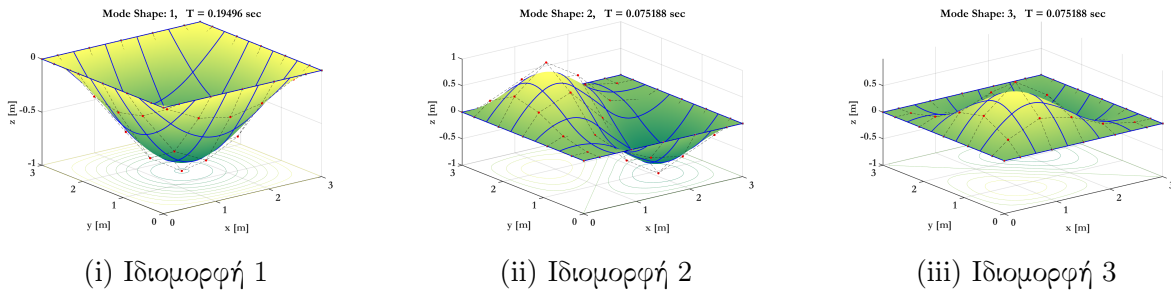
(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



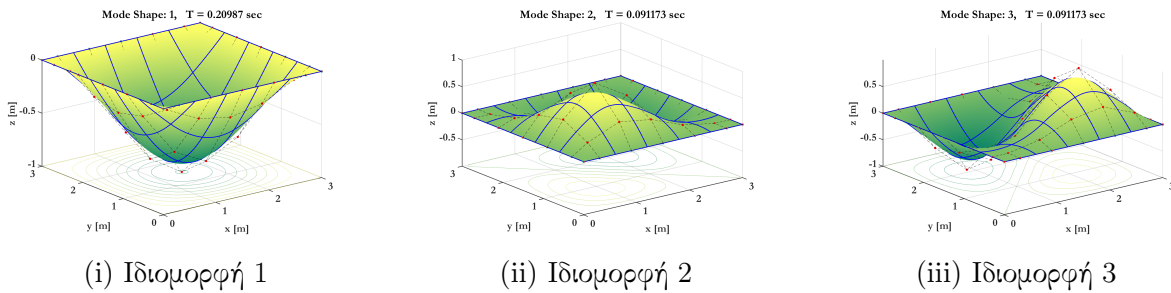
(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

Σχήμα 78: Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

εκτελείται και η ανάλυση της τελευταίας διακριτοποίησης της εφαρμογής, με επτά στοιχεία ανά πλευρά και πολυωνυμικές τάξεις, ίδιες με τις αρχικές, ήτοι δύο.



Σχήμα 79: Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



Σχήμα 80: Διακριτοποίηση με 25 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας

Υπάρχει μεγάλη ομοιότητα μεταξύ όλων των ζευγαριών των ιδιοτιμών. Επίσης η δεύτερη και η τρίτη ιδιομορφές είναι και στις δύο περιπτώσεις ίδιας μορφής, με ίδια ιδιοπερίοδο.

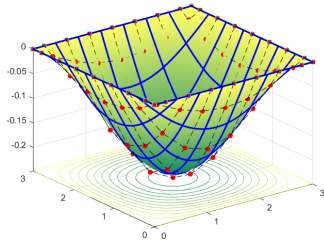
Διακριτοποίηση με σαράντα εννιά στοιχεία

Όπως ήταν αναμενόμενο, η απόκριση της ανάλυσης της διακριτοποίησης με σαράντα εννιά στοιχεία και πλήρες μητρώο μάζας, προέκυψε ίδια με αυτές των προηγούμενων δύο διακριτοποιήσεων. Αντίθετα, η απόκριση ανάλυσης με χρήση διαγωνίου μητρώου είναι διαφορετική από όλες τις προηγούμενες αντίστοιχες περιπτώσεις. Επιβεβαιώνεται λοιπόν, πως το μοντέλο αυτό με πολυωνυμικές τάξεις ίσες με δύο, δεν αποτελεί ικανό μοντέλο ανάλυσης, παρά τον αυξημένο αριθμό στοιχείων του.

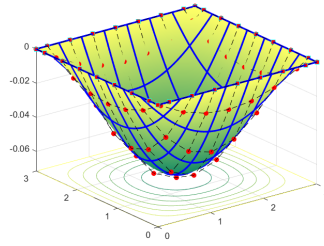
Το απλό γραμμικό πρόβλημα κάμψης πλάκας περιγράφεται από τη γνωστή εξίσωση $D\nabla^4 w = q(x, y)$, όπου D η χαμπτική ακαμψία του φορέα, w η μετατόπισή του κατά τον κατακόρυφο άξονα z και $q(x, y)$ το επιφανειακό φορτίο που τον καταπονεί. Η εξίσωση έχει τέσσερις παραγώγους και επομένως, για υψηλότερη ακρίβεια, χρειάζεται μοντέλο ανάλυσης με πολυωνυμικές τάξεις τρία. Έτσι, ακόμα και σε πιο αραιά πλέγματα από το συγκεκριμένο,

Τιμές ιδιοπεριοδών (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.19496	0.20987
2	0.075188	0.091173
3	0.075188	0.091173

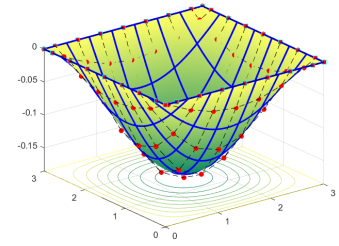
Πίνακας 5.9: Διακριτοποίηση με 25 στοιχείο: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών



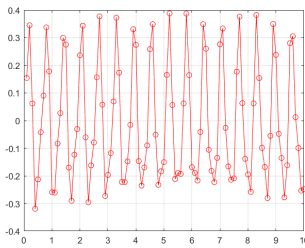
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης 100 χρονικών βημάτων



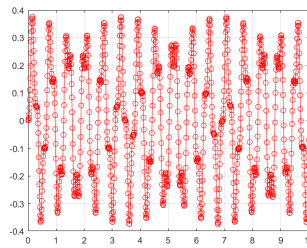
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης 1000 χρονικών βημάτων



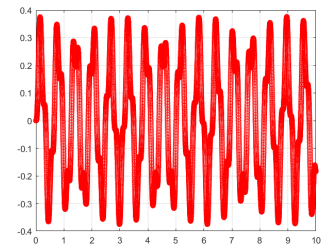
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης 10000 χρονικών βημάτων



(iv) Απόκριση ανάλυσης 100 χρονικών βημάτων

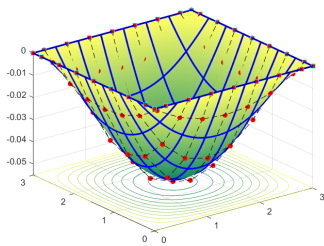


(v) Απόκριση ανάλυσης 1000 χρονικών βημάτων

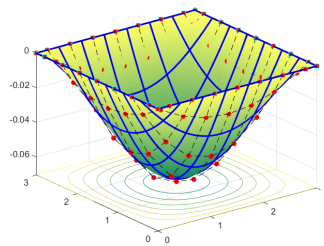


(vi) Απόκριση ανάλυσης 10000 χρονικών βημάτων

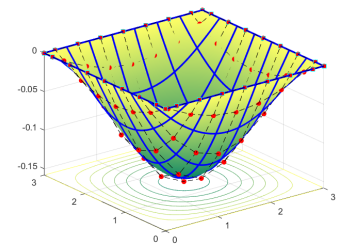
Σχήμα 81: Οι παραμορφωμένοι φορείς και οι αποκρίσεις τους, που προέκυψαν από αναλύσεις με 100, 1000 και 10000 χρονικά βήματα αντίστοιχα και χρήση πλήρους μητρώου μάζας



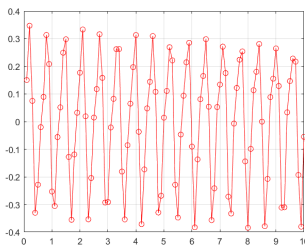
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης 100 χρονικών βημάτων



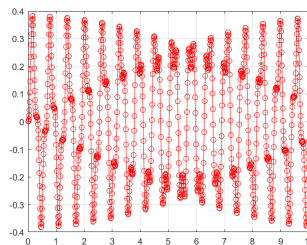
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης 1000 χρονικών βημάτων



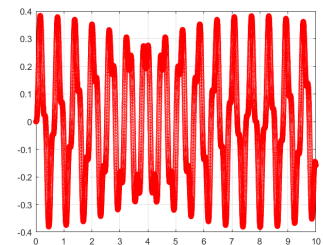
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης 10000 χρονικών βημάτων



(iv) Απόκριση ανάλυσης 100 χρονικών βημάτων



(v) Απόκριση ανάλυσης 1000 χρονικών βημάτων



(vi) Απόκριση ανάλυσης 10000 χρονικών βημάτων

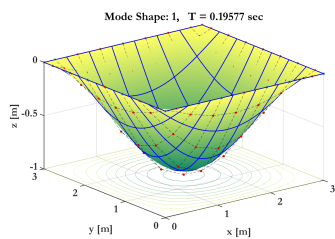
Σχήμα 82: Οι παραμορφωμένοι φορείς και οι αποκρίσεις τους, που προέκυψαν από αναλύσεις με 100, 1000 και 10000 χρονικά βήματα αντίστοιχα και χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.19496	0.20397
2	0.076903	0.08536
3	0.076903	0.08536

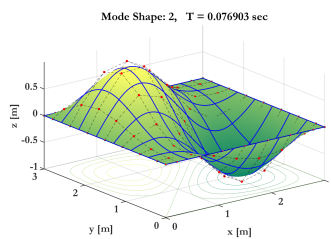
Πίνακας 5.10: Διακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

τα αποτελέσματα θα είναι επαρκή.

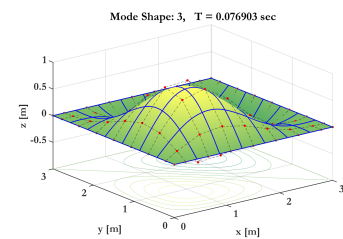
Παρουσιάζονται παρόλα αυτά οι τρεις πρώτες ιδιομορφές της παρούσης ανάλυσης. Εν συνεχεία, δίνονται αποτελέσματα αναλύσεων με αλλαγμένα μοντέλα ως προς τις πολυωνυμικές τάξεις τους. Υπάρχει μεγάλη ομοιότητα μεταξύ των τιμών, των δύο περιπτώσεων ανάλυσης. Ειδικά οι πρώτες ιδιομορφές έχουν οριακά ίδια ιδιοπερίοδο.



(i) Ιδιομορφή 1

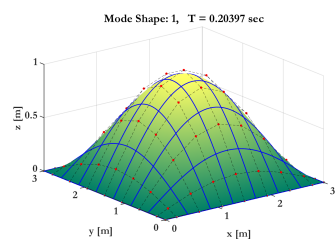


(ii) Ιδιομορφή 2

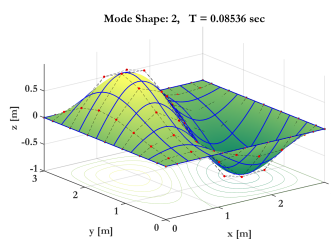


(iii) Ιδιομορφή 3

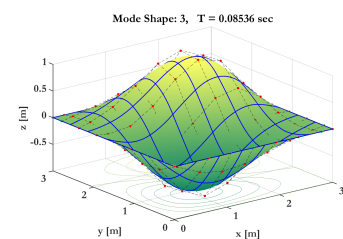
Σχήμα 83: Ιδιομορφές τετραγωνικής πλάκας, γραμμικά στηριγμένη στις εξωτερικές πλευρές, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1



(ii) Ιδιομορφή 2



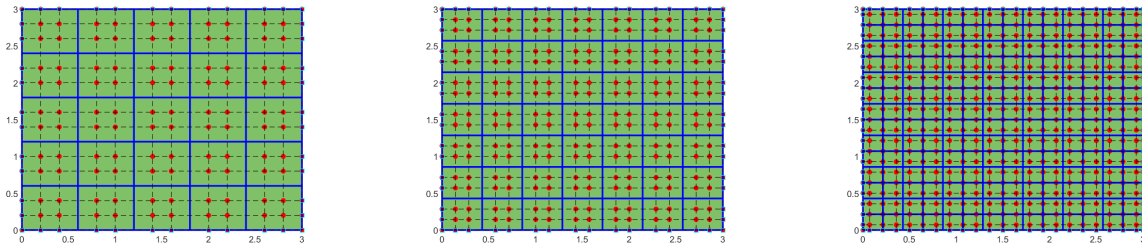
(iii) Ιδιομορφή 3

Σχήμα 84: Ιδιομορφές τετραγωνικής πλάκας, γραμμικά στηριγμένη στις εξωτερικές πλευρές, με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας

Νέα διακριτοποιημένα μοντέλα

Δημιουργούνται δύο νέα μοντέλα, με είκοσι πέντε και με σαράντα εννιά στοιχεία, κατ' αντιστοιχία με τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις αναλύσεων. Η διαφορά με τα προηγούμενα μοντέλα ανάλυσης, είναι ότι οι πολυωνυμικές τάξεις εδώ είναι ίσες με τρία, δηλαδή $p = q = 3$. Όσο αφορά τα κομβοδιανύσματα, οι κόμβοι και τα όριά τους παραμένουν ίδια, αλλά διαφοροποιούνται ως προς την πολλαπλότητα των τιμών τους. Για σκοπούς σύγκρισης

εκτελείται και η ενδεικτική ανάλυση μοντέλου με πολυωνυμικές τάξεις τρία και δεκατέσσερα στοιχεία ανά πλευρά. Όλες οι διακριτοποιήσεις φαίνονται στην εικόνα 85.



(i) Μοντέλο με 25 συνολικά στοιχεία και πολυωνυμικές τάξεις 3

(ii) Μοντέλο με 49 συνολικά στοιχεία και πολυωνυμικές τάξεις 3

(iii) Μοντέλο με 196 συνολικά στοιχεία και πολυωνυμικές τάξεις 3

Σχήμα 85: Νέες διακριτοποιήσεις των μοντέλων ανάλυσης, με ανυψωμένες πολυωνυμικές τάξεις

Εφόσον οι πολυωνυμικές τάξεις είναι αυξημένες αναφέρεται πως ο αριθμός σημείων ολοκλήρωσης Gauss είναι επίσης αυξημένος, σύμφωνα με τις αρχές της παραγράφου 4.3.1

Σε κάθε μοντέλο εκτελέστηκαν όλες οι διαφορετικές αναλύσεις που έγιναν και στις προηγούμενες εφαρμογές. Αναφέρεται πως κάθε φορά η παραμόρφωση προέκυπτε ίδια μορφής, με διαφορετική μέγιστη τιμή. Οι τιμές αυτές αναγράφονται στον τελικό πίνακα αποτελεσμάτων. Παρακάτω δίνονται όλα τα διαγράμματα απόκρισης που προέκυψαν, με χρήση πλήρους και διαγωνίου μητρώου μάζας

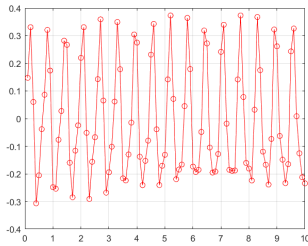
Όπως είναι εμφανές από αυτά, οι αναλύσεις με πλήρες μητρώο μάζας, παράγουν ίδιας μορφής αποκρίσεις, με οριακά ίδια μέγιστη τιμή. Οι αναλύσεις με σωρικό μητρώο, παράγουν ίδιας μορφής αποκρίσεις, με διαφορετικό χρόνο κύκλου ταλάντωσης. Με την αύξηση του αριθμού των στοιχείων φαίνεται να επέρχεται η σύγκλιση. Για παράδειγμα το διάγραμμα του σχήματος 87vi μοιάζει αρκετά την αντίστοιχη απόκριση της ανάλυσης με πλήρες μητρώο μάζας, του σχήματος 87iii.

Επίσης, είναι σημαντικό να σημειωθεί πως η μορφή των διαγραμμάτων αυτών διαφέρει κατά πολύ από ότι είχε προκύψει με τα ίδια μοντέλα, πολυωνυμικών τάξεων ίσων με δύο. Επαληθεύεται για ακόμα μια φορά, πως για ακριβή αποτελέσματα στον συγκεκριμένο φορέα, η τάξη δύο δεν αρκεί.

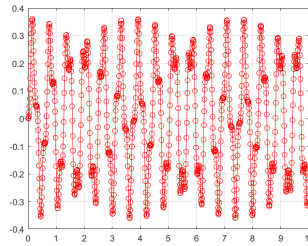
Τέλος, η ανάλυση με δεκατέσσερα μικροστοιχεία ανά πλευρά, δηλαδή με εκατόν ενενήντα έξι συνολικά, παρήγαγε, όπως ήταν αναμενόμενο, παραμορφώσεις είναι ίδιας μορφής με όλα τα προηγούμενα μοντέλα. Οι αποκρίσεις της διακριτοποίησης φαίνονται στο σχήμα 88.

Με το τελικό μοντέλο των δεκατεσσάρων στοιχείων ανά πλευρά φαίνεται να υπάρχει επιτέλους σχεδόν πλήρης σύγκλιση ως προς τη μορφή απόκρισης.

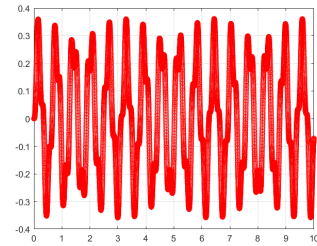
Κλασικά, δίνονται και οι τρεις πρώτες ιδιομορφές των νέων μοντέλων ανάλυσης, για κάθε είδος μητρώου μάζας



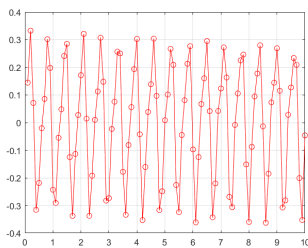
(i) Απόκριση ανάλυσης με πλήρες μητρώο μάζας και 100 χρονικά βήματα



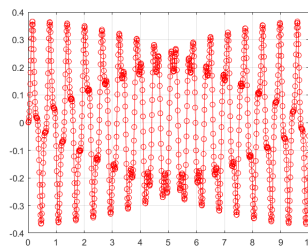
(ii) Απόκριση ανάλυσης με πλήρες μητρώο μάζας και 1000 χρονικά βήματα



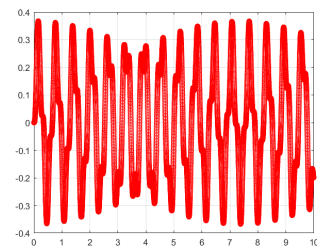
(iii) Απόκριση ανάλυσης με πλήρες μητρώο μάζας και 10000 χρονικά βήματα



(iv) Απόκριση ανάλυσης με διαγώνιο μητρώο μάζας και 100 χρονικά βήματα



(v) Απόκριση ανάλυσης με διαγώνιο μητρώο μάζας και 1000 χρονικά βήματα

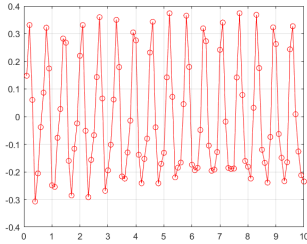


(vi) Απόκριση ανάλυσης με διαγώνιο μητρώο μάζας και 10000 χρονικά βήματα

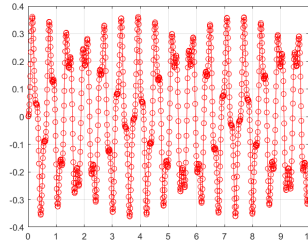
Σχήμα 86: Μοντέλο 25 στοιχείων - Αποκρίσεις αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων και χρήση πλήρους και διαγώνιου μητρώου μάζας

Η πρώτη ιδιομορφή κάθε περίπτωσης παραμένει ίδια, με εξαίρεση την ανάλυση του μοντέλου εκατόν ενενήντα έξι στοιχείων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας. Οι δεύτερες και οι τρίτες ιδιομορφές, έχουν όλες το ίδιο σχήμα παραμόρφωσης, αλλά με αντισυμμετρικούς άξονες. Από τις τιμές του πίνακα 5.11 φαίνεται πως οι ιδιοσυχνότητες των αναλύσεων με χρήση πλήρους μητρώου μάζας είναι ίδιες, ανεξάρτητα από το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε. Με την αύξηση της διακριτοποίησης, οι ιδιοσυχνότητες που προκύπτουν από το άλλο είδος ανάλυσης ολοένα και τις πλησιάζουν, ώσπου τελικά να επέλθει πλήρης σύγκλιση. Βέβαια, οι διαφορές των τιμών, μεταξύ των διάφορων μοντέλων είναι πολύ μικρές και έτσι δημιουργείται το εύλογο ερώτημα: μέχρι ποιο σημείο έχει νόημα η προσαρμογή (εκλέπτυνση) της διακριτοποίησης.

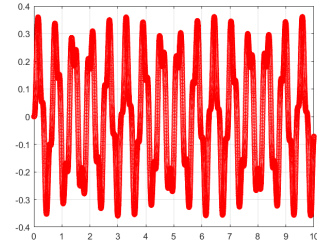
Προς απάντηση αυτού, θεωρείται δέον να γίνει μια απλή αναφορά σε μοντέλα ακόμα υψηλότερης πολυωνυμικής τάξης. Εκτελέστηκαν αναλύσεις ίδιας γεωμετρίας, με τάξεις ίσες με τέσσερα, πέντε και έξι. Οι αναλύσεις με τάξεις ίσες με τέσσερα, πέτυχαν ακόμα μεγαλύτερη ακρίβεια από αυτή των προηγούμενων. Στις λοιπές αναλύσεις με ακόμα πιο ανυψωμένες τάξεις και κατάλληλο χρονικό βήμα, δεν παρατηρήθηκε περαιτέρω αύξηση της ακρίβειας. Το γεγονός αυτό είναι απόλυτα λογικό, καθώς όπως προαναφέρθηκε, η εξίσωση της πλάκας χαρακτηρίζεται από τέσσερεις παραγώγους. Επομένως, συμπεραίνεται πως η αύξηση της πολυωνυμικής τάξης έχει νόημα έως ένα σημείο. Η παρατήρηση αυτή έχει μεγάλη σημασία, δεδομένου κιόλας, πως απόρροια της ανύψωσης της τάξης είναι η αύξηση



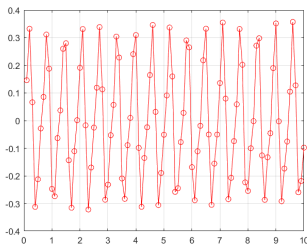
(i) Απόκριση ανάλυσης με πλήρες μητρώο μάζας και 100 χρονικά βήματα



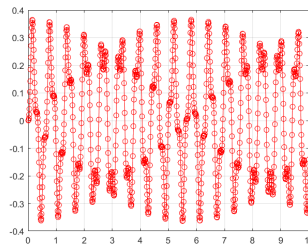
(ii) Απόκριση ανάλυσης με πλήρες μητρώο μάζας και 1000 χρονικά βήματα



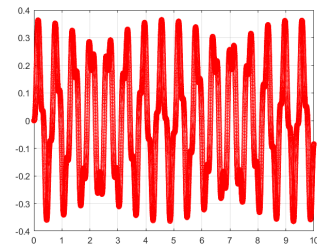
(iii) Απόκριση ανάλυσης με πλήρες μητρώο μάζας και 10000 χρονικά βήματα



(iv) Απόκριση ανάλυσης με διαγώνιο μητρώο μάζας και 100 χρονικά βήματα



(v) Απόκριση ανάλυσης με διαγώνιο μητρώο μάζας και 1000 χρονικά βήματα



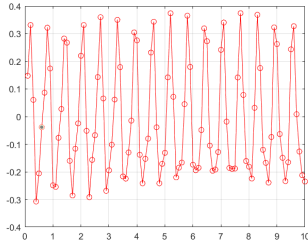
(vi) Απόκριση ανάλυσης με διαγώνιο μητρώο μάζας και 10000 χρονικά βήματα

Σχήμα 87: Μοντέλο 49 στοιχείων - Αποκρίσεις αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων και χρήση πλήρους και διαγώνιου μητρώου μάζας

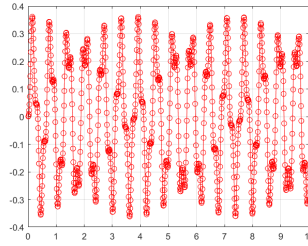
της διάρκειας της ανάλυσης. Επομένως, η συνεχής εκλέπτυνση της διακριτοποίησης, δεν συνεπάγεται αύξηση της απόδοσης της ανάλυσης.

Παρουσιάζονται συνοπτικά, όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα, σε μορφή διαγραμμάτων. Όλες οι τιμές αναγράφονται αναλυτικά στον πίνακα Α'.1 στο παράρτημα Α'. Δίδονται επίσης οι ιδιοσυχνότητες που προέκυψαν από κάθε επίλυση και από την αναλυτική λύση της συγκεκριμένης γεωμετρίας. Το σημείο αναφοράς σύγκρισης, της μέγιστης μετατόπισης, είναι το κεντρικό, με συντεταγμένες $X = 1.5$ m, $Y = 1.5$ m και $Z = 0.0$ m.

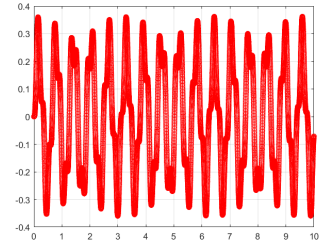
Σχετικά με τις μετατοπίσεις του πίνακα Α'.1, παρατηρείται πως είναι σχεδόν για όλες τις δυάδες ανάλυσης με χρήση πλήρους και διαγώνιου μητρώου μάζας, ίδιας αριθμητικής τάξης. Παρατηρείται πως στα πρώτα μοντέλα με ένα και εννιά συνολικά στοιχεία (όπου υπήρξε και συμπτωματική σύγκλιση των περιπτώσεων, με διαφορετικά μητρώα μάζας), οι μετατοπίσεις από τις αναλύσεις με χρονικό βήμα $dt = 0.001$ sec είναι της τάξης του 10^{-2} . Τα επόμενα μοντέλα, με είκοσι πέντε και σαράντα εννιά στοιχεία, πολυωνυμικές τάξεις δύο και με ίδιο χρονικό βήμα, παρεκκλίνουν από αυτό το μοτίβο και παρουσιάζουν μεγαλύτερες μετατοπίσεις. Οι νέες διακριτοποιήσεις ισάριθμων στοιχείων όμως παρουσιάζουν αποκρίσεις ίδιας τάξης με την αρχική. Επαληθεύεται για ακόμη μια φορά ότι μόνο τα νέα μοντέλα παρέχουν επαρκή ακρίβεια σε αυτού τους είδους τα πλέγματα. Επιπλέον, επισημαίνεται πως η νέα διακριτοποίηση επτά στοιχείων ανά πλευρά, παράγει πολύ κοντινά αποτελέσματα μεταξύ των διαφορετικών περιπτώσεων ανάλυσης, με χρήση άλλου μητρώου μάζας, συγκεκριμένα



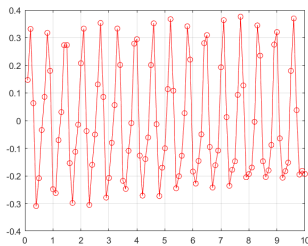
(i) Απόκριση ανάλυσης με πλήρες μητρώο μάζας και 100 χρονικά βήματα



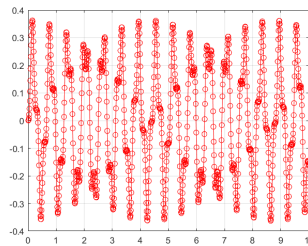
(ii) Απόκριση ανάλυσης με πλήρες μητρώο μάζας και 1000 χρονικά βήματα



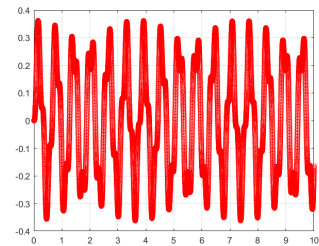
(iii) Απόκριση ανάλυσης με πλήρες μητρώο μάζας και 10000 χρονικά βήματα



(iv) Απόκριση ανάλυσης με διαγώνιο μητρώο μάζας και 100 χρονικά βήματα

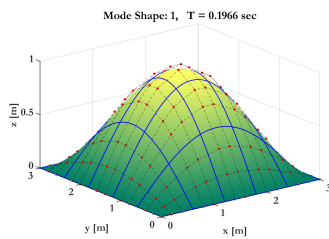


(v) Απόκριση ανάλυσης με διαγώνιο μητρώο μάζας και 1000 χρονικά βήματα

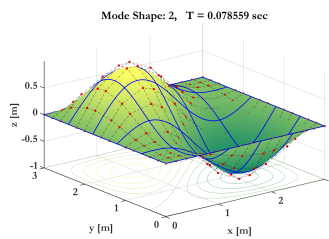


(vi) Απόκριση ανάλυσης με διαγώνιο μητρώο μάζας και 10000 χρονικά βήματα

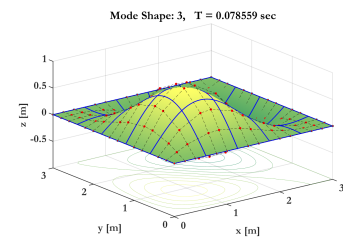
Σχήμα 88: Μοντέλο 196 στοιχείων - Αποκρίσεις αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων και χρήση πλήρους και διαγωνίου μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1

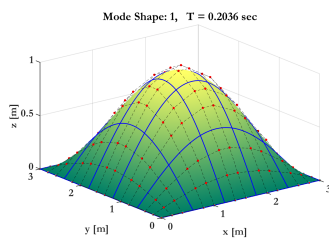


(ii) Ιδιομορφή 2

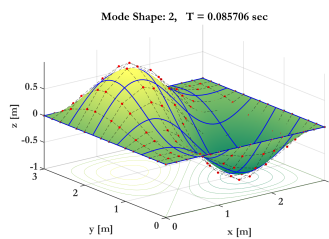


(iii) Ιδιομορφή 3

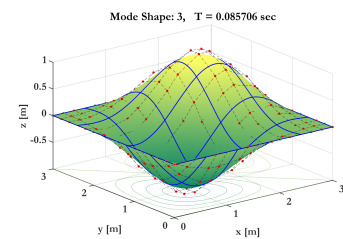
Σχήμα 89: Νέα δακρυτοποίηση με 25 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1



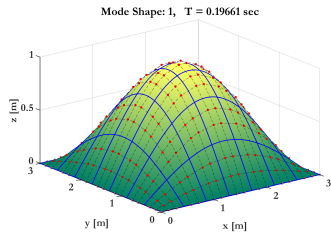
(ii) Ιδιομορφή 2



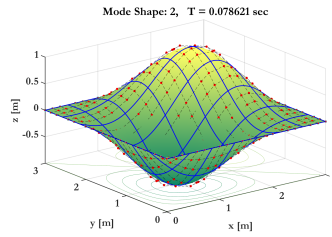
(iii) Ιδιομορφή 3

Σχήμα 90: Νέα δακρυτοποίηση με 25 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας

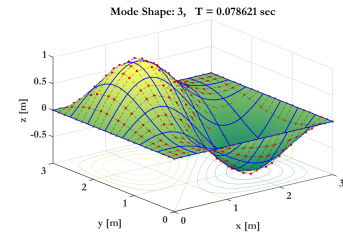
στα δύο μικρότερα χρονικά βήματα. Κάτι το οποίο δε συμβαίνει στην τελευταία και μέγιστη διακριτοποίηση, η οποία παρουσίασε και παρεκκλίνουσες ιδιομορφές όπως φαίνεται στις α-



(i) Ιδιομορφή 1

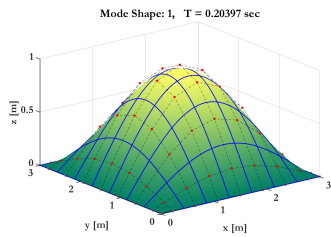


(ii) Ιδιομορφή 2

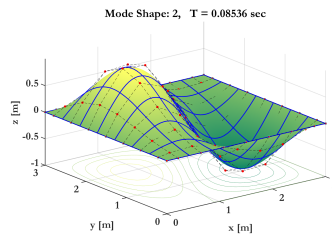


(iii) Ιδιομορφή 3

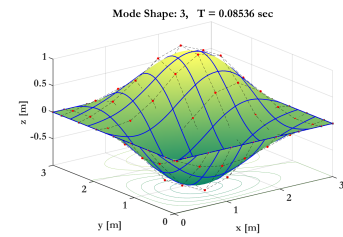
Σχήμα 91: Νέα δακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1

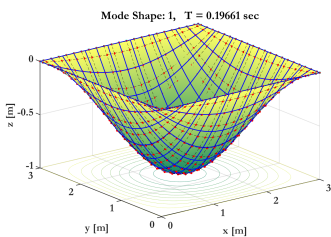


(ii) Ιδιομορφή 2

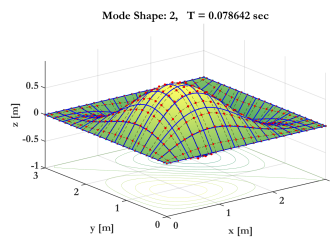


(iii) Ιδιομορφή 3

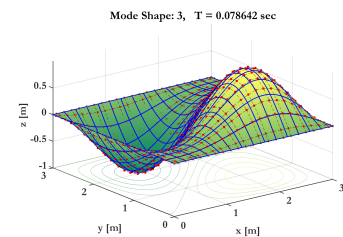
Σχήμα 92: Νέα δακριτοποίηση με 49 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1

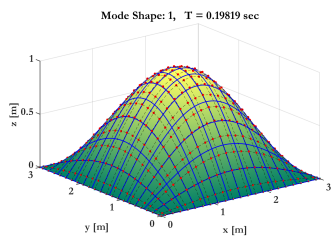


(ii) Ιδιομορφή 2

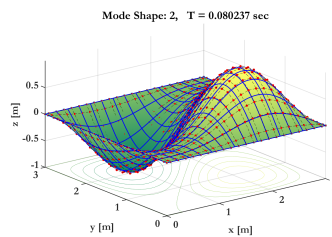


(iii) Ιδιομορφή 3

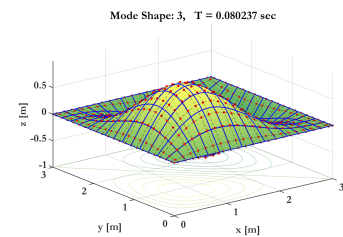
Σχήμα 93: Νέα δακριτοποίηση με 196 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1



(ii) Ιδιομορφή 2



(iii) Ιδιομορφή 3

Σχήμα 94: Νέα δακριτοποίηση με 196 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας

ντίσειες εικόνες. Το γεγονός αυτό αποτελεί εκ νέου μία επιβεβαίωση πως η διακριτοποίηση δεν έχει νόημα να προσαρμόζεται επ' άριστον, αλλά πρέπει να προσδιοριστεί το κατάλληλο μοντέλο για την πιο αποδοτική ανάλυση.

Στις περιπτώσεις μεγάλης διακριτοποίησης με μικρό χρονικό βήμα, η χρήση του σω-

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.1966	0.2036
2	0.078559	0.085706
3	0.078559	0.085706
1	0.19661	0.20397
2	0.078621	0.08536
3	0.078621	0.08536
1	0.19661	0.19819
2	0.078642	0.080237
3	0.078642	0.080237

Πίνακας 5.11: Νέες διακριτοποιήσεις με 25, 49 και 196 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

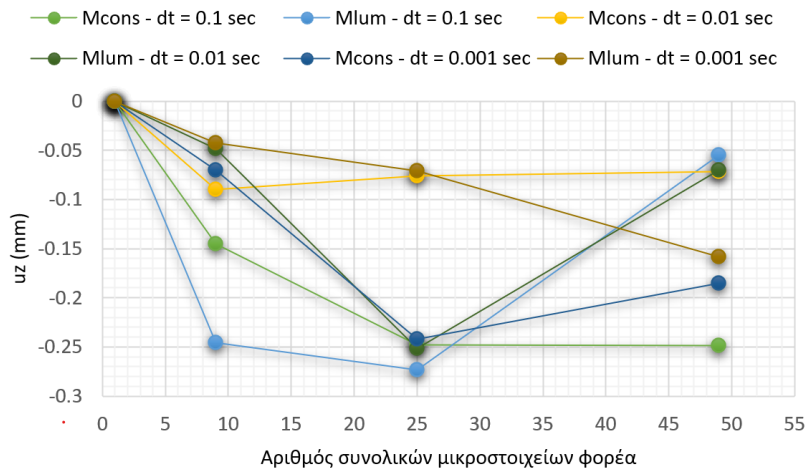
ρικού μητρώου μάζας μειώνει δραστικά τον ολικό χρόνο ανάλυσης. Παραδείγματος χάριν, στην περίπτωση διακριτοποίησης με είκοσι πέντε στοιχεία και χρονικό βήμα $dt = 0.001$ sec, ο χρόνος ανάλυσης με πλήρες μητρώο μάζας είναι 1510 sec, (25.17 min), ενώ της ανάλυσης με διαγώνιο μητρώο μάζας είναι μόλις 1420 sec, (23.67 min). Επίσης, στην ανάλυση με το μοντέλο των σαράντα εννιά στοιχείων οι αντίστοιχοι χρόνοι είναι 2130 sec, (35.5 min) και 1940 sec, (32.33 min). Οι αναλύσεις των νέων μοντέλων, με πολυωνυμικές τάξεις τρία, εκτελέστηκαν μία φορά ανά περίπτωση, με σκοπό σύγκρισης της απόκρισης. Επομένως οι αναγραφόμενοι χρόνοι ανάλυσης είναι ενδεικτικοί και ακατάλληλοι για την εξαγωγή συμπερασμάτων περί αυτών. Ωστόσο, είναι εμφανής η μεγάλη διαφορά της διάρκειας ανάλυσης, με την ολοένα και μεγαλύτερη προσαρμογή, με τη μέγιστη τιμή να φτάνει τα 22265.06 (sec), ή αλλιώς τις 6 ώρες, 11 λεπτά και 5 δευτερόλεπτα.

Στους πίνακες 5.12, 5.13 αναγράφονται οι ιδιοσυχνότητες όλων αναλύσεων των μοντέλων με πολυωνυμικές τάξεις δύο και τρία αντίστοιχα. Στον 5.14, δίνονται οι ιδιοσυχνότητες της αναλυτικής λύσης του φορέα τετραγωνικής πλάκας με γραμμικές, περιμετρικές στηρίξεις.

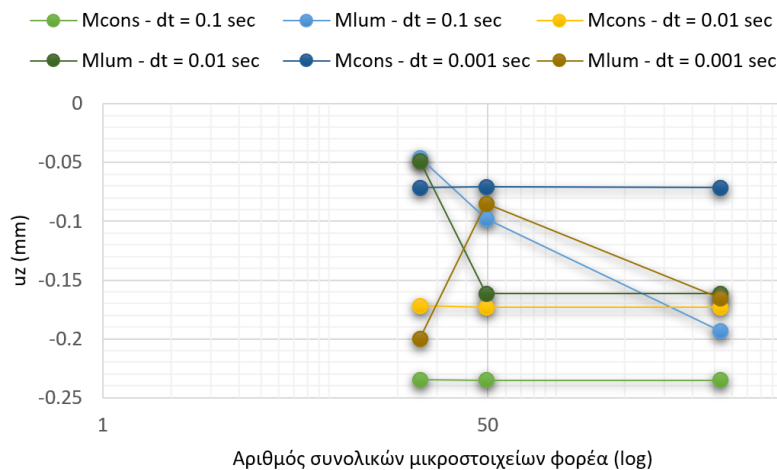
Όπως και στην πλάκα με σημειακές στηρίξεις, όσο πιο προσαρμοσμένη είναι η διακριτοποίηση, τόσο μεγαλύτερη τάση προς ομοίωση εντοπίζεται μεταξύ των τιμών των αναλύσεων με πλήρες και διαγώνιο μητρώο μάζας. Αυτό ισχύει για όλα τα διαφορετικά μοντέλα. Στον δεύτερο πίνακα ιδίως, 5.13, παρατηρείται υψηλή τάση προς σύγκλιση και στις μεγαλύτερες ιδιομορφές. Λαμβάνοντας υπόψη και τις ιδιοσυχνότητες της αναλυτικής λύσης, είναι εμφανές πως συγκλίνουν με τις αντίστοιχες όλων των μοντέλων με πολυωνυμικές τάξεις τρία και μόνο με αυτές της μέγιστης διακριτοποίησης, με τάξεις δύο.

5.3 Τετραγωνική πλάκα με οπή στη γωνία

Η δεύτερη εφαρμογή που εκτελέστηκε αφορά τετραγωνική πλάκα με οπή στη γωνία. Η



(i) Διάγραμμα σύγκρισης μετατοπίσεων - συνολικού αριθμού στοιχείων των αρχικών διακριτοποιήσεων



(ii) Διάγραμμα σύγκρισης μετατοπίσεων - συνολικού αριθμού στοιχείων των νέων διακριτοποιήσεων

Σχήμα 95: Διαγράμματα σύγκρισης μετατοπίσεων - συνολικού αριθμού στοιχείων

οπή είναι μορφής τεταρτοκυκλίου. Το σύστημα έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με αυτά της εφαρμογής της παραγράφου 5.2 και υποβάλλεται στο ίδιο αρμονικό φορτίο. Ο φορέας έχει γραμμικές στηρίξεις καθ' όλο το μήκος των τεσσάρων, ευθύγραμμων πλευρών του, ενώ η καμπύλη πλευρά της τεταρτοκυκλικής οπής, η οποία είναι εξωτερικό όριο της πλάκας, είναι ελεύθερη ως προς την κίνηση. Όπως και στην πρώτη εφαρμογή πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις με τα τρία διαφορετικά χρονικά βήματα, $dt = 0.1$ sec, $dt = 0.01$ sec και $dt = 0.001$ sec και κάθε ανάλυση επαναλήφθηκε είκοσι φορές.

Η αρχική διακριτοποίηση του φορέα αποτελείται από δύο μόνο στοιχεία και έχει επιτευχθεί με δύο διαφορετικές τοπολογίες. Τα μοντέλα αυτά απεικονίζονται στις εικόνες 96i, 96ii. Συγκεκριμένα, ο τρόπος διακριτοποίησης της 96ii είναι αποδεδειγμένα ο τοπολογικά βέλτιστος τρόπος διακριτοποίησης του εν προκειμένω φορέα, για καλύτερα και αποδοτικότερα αποτελέσματα. Και οι δύο διακριτοποιήσεις, στη συνέχεια τροποποιήθη-

Μοντέλο 1 × 1		Μοντέλο 3 × 3		Μοντέλο 5 × 5		Μοντέλο 7 × 7	
M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}
42.96	107.39	27.63	32.73	29.94	32.23	30.80	32.09
995.39	2488.47	50.22	91.64	68.91	83.57	73.6084	81.70
995.39	2488.47	56.13	91.64	68.92	83.57	73.61	81.71
		56.13	144.98	96.34	132.59	109.91	130.11
		67.84	174.45	119.22	181.37	137.27	170.26
		70.11	174.45	119.97	181.37	137.32	170.26
		70.11	226.07	123.04	227.18	163.53	216.79
		70.81	226.07	127.62	227.18	163.53	216.79
		73.97	305.69	127.62	315.91	201.23	300.18
		384.17	768.39	145.96	337.89	210.09	307.28
		384.17	768.39	145.96	337.89	210.09	307.28
		483.59	973.21	147.97	382.09	223.33	351.70
		522.31	1164.43	151.92	382.09	224.15	351.70
		536.95	1323.12	163.45	458.03	232.82	430.99
		536.95	1378.25	167.35	458.03	240.67	430.99

Πίνακας 5.12: Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλύσεων σε rad/sec

Νέο μοντέλο 5 × 5		Νέο μοντέλο 7 × 7		Νέο μοντέλο 14 × 14	
M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}
30.86	31.96	31.35	31.96	31.70	31.96
73.31	79.98	76.21	79.92	78.31	79.89
73.31	79.98	76.21	79.92	78.31	79.89
111.19	127.94	118.49	127.86	123.79	127.83
135.19	160.83	145.69	160.07	153.48	159.81
135.25	160.83	145.69	160.07	153.48	159.81
165.82	208.59	183.86	207.96	197.11	207.74
165.82	208.59	183.86	207.96	197.11	207.74
170.47	277.25	233.17	273.24	253.56	271.76
186.82	277.25	233.17	273.24	253.56	271.76
186.82	288.89	242.64	287.95	267.42	287.64
201.75	324.54	265.77	320.97	294.67	319.68
206.62	324.54	265.86	320.97	294.67	319.68
206.62	404.11	315.71	400.75	360.84	399.57
209.61	404.11	315.71	400.75	360.84	399.57

Πίνακας 5.13: Τιμές ιδιοσυχνοτήτων νέων αναλύσεων σε rad/sec

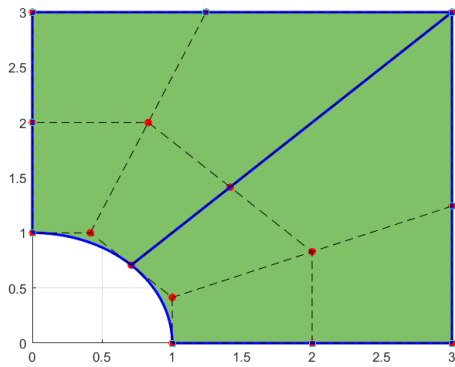
καν σύμφωνα με την k τεχνική προσαρμογής. Πραγματοποιήθηκε δηλαδή αύξηση πολυωνυμικής τάξης και παράλληλη εισαγωγή νέων κόμβων. Τα προσαρμοσμένα μοντέλα φαίνονται στις εικόνες 96iii, 96iv. Η αρχικές πολυωνυμικές τάξεις, των δύο διευσθύνσεων του φορέα είναι $p = q = 2$. Τα αρχικά κομβοδιανύσματα της πρώτης διακριτοποίη-

Ιδιομορφή	Ιδιοπερίοδος
1	31.9578
2	127.8312
3	288.0000
4	511.3247
5	798.9448
6	1150.4805
7	1565.9319
8	2045.2988
9	2588.5812
10	3195.7793
11	3866.8929
12	4601.9222
13	5400.8670
14	6263.7274
15	7190.5034

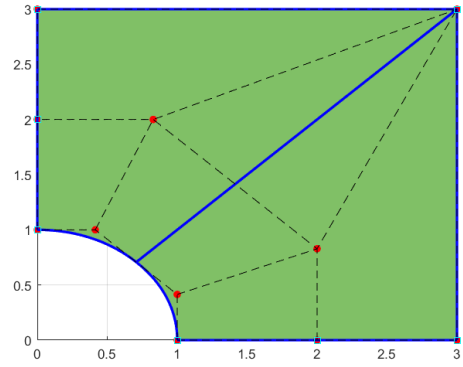
Πίνακας 5.14: Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλυτικής λύσης σε rad/sec

σης (σχήμα 96i) είναι $\{\Xi\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.5 \ 0.5 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$ και $\{H\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$, ενώ τα κομβοδιανύσματα της βέλτιστης διακριτοποίησης (σχήμα 96ii) είναι $\{\Xi\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.5 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$ και $\{H\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$. Η διαφορά έγκειται στην πολλαπλότητα της ενδιάμεσης τιμής των διανυσμάτων, 0.5. Στην πρώτη περίπτωση όπου ο κόμβος επαναλαμβάνεται επιτυγχάνεται μόνο C^0 - συνέχεια στις συναρτήσεις σχήματος, ενώ στη δεύτερη περίπτωση, ο βαθμός συνέχειας των συναρτήσεων σχήματος είναι C^1 . Άλλη μια διαφορά των δύο μοντέλων είναι ο αριθμός η θέση των σημείων ελέγχου τους. Η πρώτη διακριτοποίηση δημιουργήθηκε με τη χρήση δεκαπέντε σημείων ελέγχου, ενώ η βέλτιστη, με τη χρήση δώδεκα. Επίσης, επισημαίνεται πως το σημείο ελέγχου που αντιστοιχεί στην πάνω δεξιά γωνία της πλάκας, με συντεταγμένες $X = 3$, $Y = 3$, $Z = 3$, είναι επαναλαμβανόμενο στη βέλτιστη διακριτοποίηση, ενώ στην πρώτη δεν υπάρχουν επαναλαμβανόμενα σημεία.

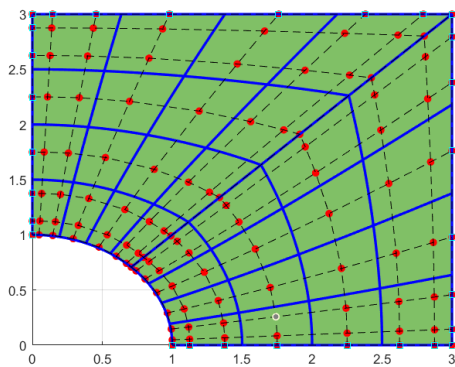
Σημειώνεται πως και στις δύο περιπτώσεις πραγματοποιήθηκε η ακριβώς ίδια προσαρμογή του μοντέλου. Με την διαδικασία προσαρμογής, οι πολυωνυμικές τάξεις και τα κομβοδιανύσματα τροποποιούνται αναλόγως. Οι νέες πολυωνυμικές τάξεις και στις δύο περιπτώσεις είναι $p = q = 4$. Τα προσαρμοσμένα κομβοδιανύσματα και των δύο μοντέλων προς ανάλυση, ανήκουν στο διάστημα $[0, 1]$, είναι ομοιόμορφα και η πρώτη και η τελευταία τιμή αυτών έχουν βαθμό πολλαπλότητας ίσο με πέντε, είναι δηλαδή $\{\Xi\} = \{H\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ \dots \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$. Για την περίπτωση του σχήματος 96iii, οι ενδιάμεσες τιμές είναι $[0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875]$ και $[0.25, 0.5, 0.5, 0.75]$ αντίστοιχα, ενώ στην περίπτωση του σχήματος 96iv, είναι $[0.125, 0.250, 0.375, 0.5, 0.5, 0.5, 0.625, 0.750, 0.875]$ και $[0.25, 0.5, 0.75]$ αντίστοιχα.



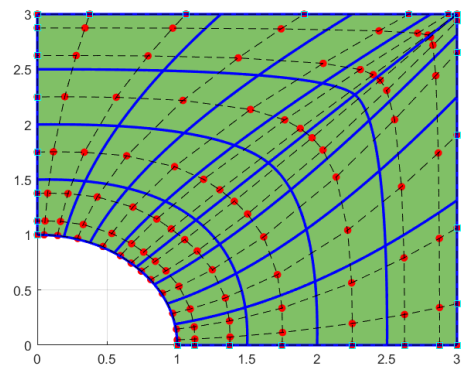
(i) Αρχική διακριτοποίηση - Μοντέλο 1α



(ii) Τοπολογικά βέλτιστη διακριτοποίηση - Μοντέλο 2α



(iii) Προσαρμοσμένη αρχική διακριτοποίηση - Μοντέλο 1β



(iv) Προσαρμοσμένη τοπολογικά βέλτιστη διακριτοποίηση - Μοντέλο 2β

Σχήμα 96: Αρχικές και προσαρμοσμένες διακριτοποιήσεις φορέα τετραγωνικής πλάκας με γωνιακή οπή

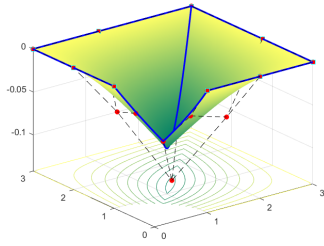
5.3.1 Αρχική διακριτοποίηση

Η μορφή του παραμορφωμένου φορέα είναι ίδια σε όλες τις αναλύσεις διαφορετικών χρονικών βημάτων και είδους μητρώου μάζας, ενώ η μορφή της απόκρισης διαφέρει.

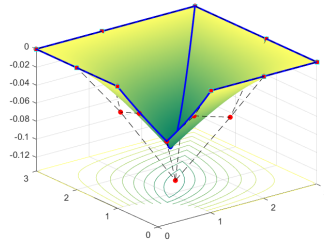
Οι πρώτες ιδιομορφές των δύο περιπτώσεων είναι ίδιας μορφής αλλά αντίθετης φοράς. Οι υπόλοιπες δύο είναι όμοιες ως προς τη μορφή. Όσο αφορά τις ιδιοτιμές, δεν παρατηρείται σύγκλιση, αλλά είναι της ίδιας αριθμητικής τάξης.

5.3.2 Τοπολογικά βέλτιστη διακριτοποίηση

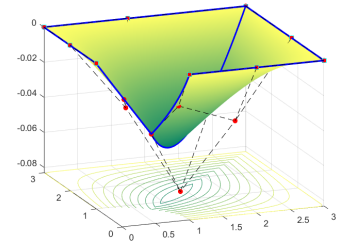
Στην προκειμένη περίπτωση της τοπολογικά βέλτιστης διακριτοποίησης παρατηρείται όχι μόνο όμοια μορφή παραμόρφωσης, αλλά και απόκρισης. Όμως, πρέπει να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα απόκρισης διαφέρουν από τα αντίστοιχα του ταρχικού μοντέλου, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας. Αυτό υποδηλώνει πως ακόμα και με βέλτιστη τοποθέτηση των σημείων ελέγχου στο πλέγμα της διακριτοποίησης, δεν είναι δυνατόν να εκτελεσθεί ακριβής ανάλυση με τόσα λίγα στοιχεία.



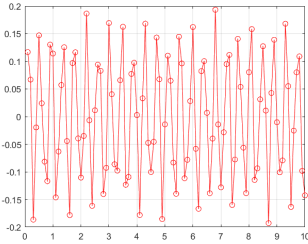
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



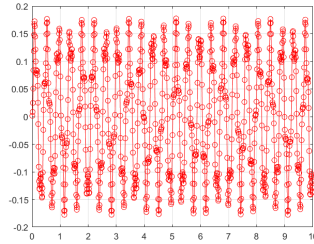
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



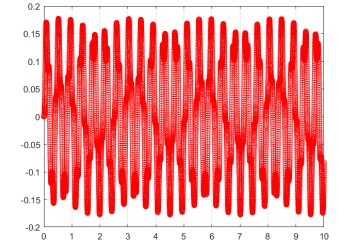
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

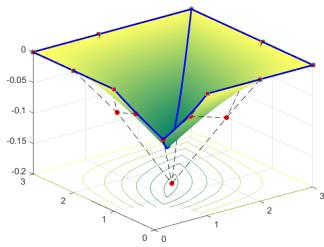


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

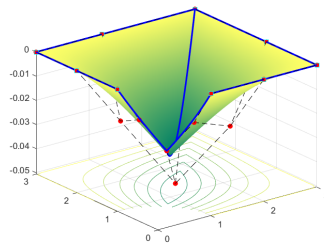


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

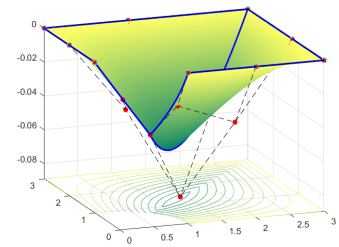
Σχήμα 97: Μοντέλο 1α με 2 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.



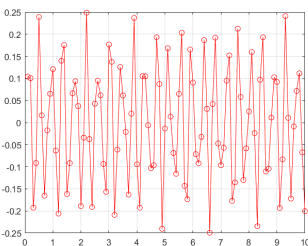
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



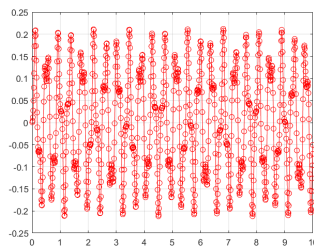
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



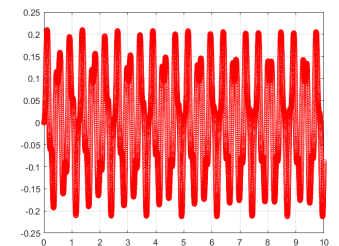
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



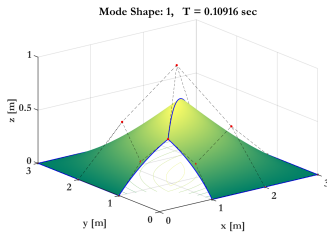
(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



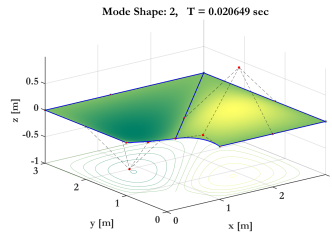
(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

Σχήμα 98: Μοντέλο 1α με 2 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.

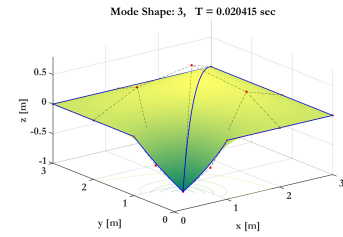
Ακόμη, είναι εμφανές πως οι παρόντες παραμορφωμένοι φορείς διαφέρουν από αυτούς της ανάλυσης της γεωμετρίας του μοντέλου 1α. Το θέμα αυτό θα συζητηθεί περαιτέρω στη



(i) Ιδιομορφή 1

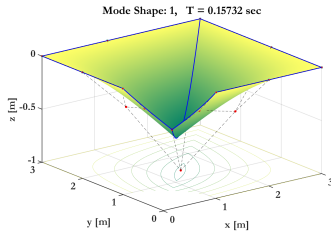


(ii) Ιδιομορφή 2

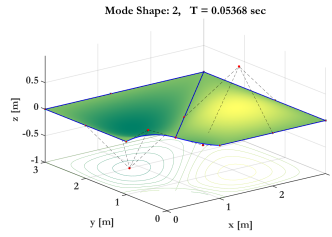


(iii) Ιδιομορφή 3

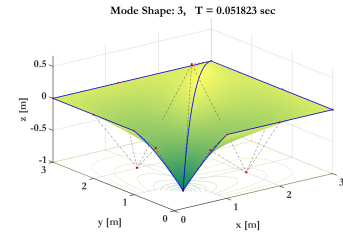
Σχήμα 99: Μοντέλο 1α με 2 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1



(ii) Ιδιομορφή 2



(iii) Ιδιομορφή 3

Σχήμα 100: Μοντέλο 1α με 2 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

συνέχεια.

Οι πρώτες και οι τρίτες ιδιομορφές παρουσιάζουν μεγάλη ομοιότητα. Οι δεύτερες επίσης είναι όμοιες αλλά με ανεστραμμένο σύστημα αξόνων. Όσο αφορά τις ιδιοτιμές, είναι όλες της ίδιας τάξης, χωρίς να υπάρχει ιδιαίτερη σύγκλιση.

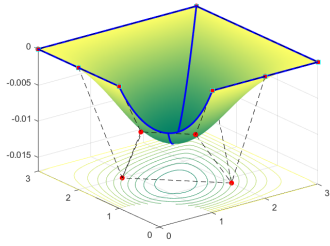
5.3.3 Προσαρμοσμένη αρχική διακριτοποίηση

Με την προσαρμογή του μοντέλου 1α, επέρχεται σύγκλιση της μορφής των διαγραμμάτων της απόκρισης μεταξύ των περιπτώσεων χρήσης πλήρους και διαγώνιου μητρώου μάζας. Φυσικά οι αριθμητικές τιμές τους διαφέρουν, αλλά αυτό θα σχολιαστεί στην τελική παρουσίαση των αποτελεσμάτων, στο τέλος της εφαρμογής.

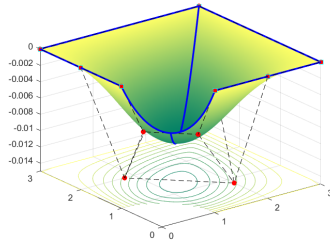
Οι πρώτες ιδιομορφές των δύο περιπτώσεων είναι ίδιας μορφής και φοράς. Οι επόμενες διαφέρουν από όλες τις απόψεις μεταξύ τους. Παρόλα αυτά, η αριθμητική τάξη παραμένει ίδια μεταξύ των δύο περιπτώσεων.

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.10916	0.15732
2	0.020649	0.05368
3	0.069479	0.020415

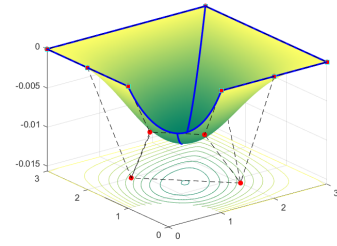
Πίνακας 5.15: Μοντέλο 1α με 2 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών



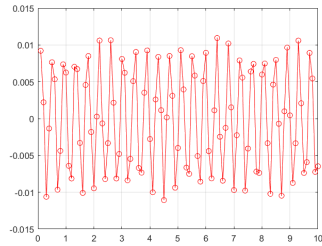
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



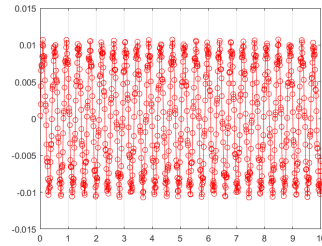
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



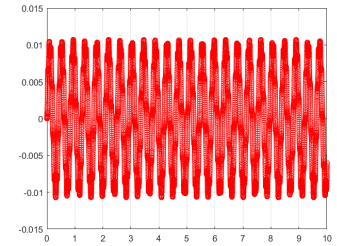
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

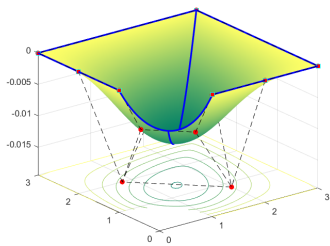


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

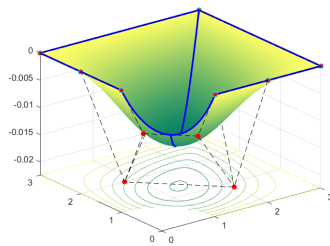


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

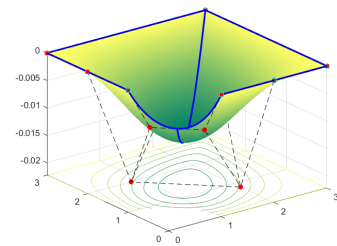
Σχήμα 101: Βέλτιστη διακριτοποίηση με 2 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.



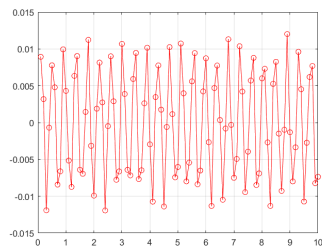
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



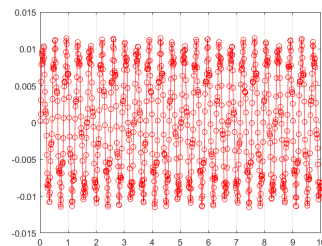
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



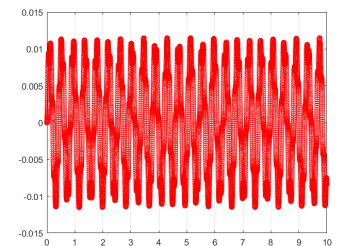
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

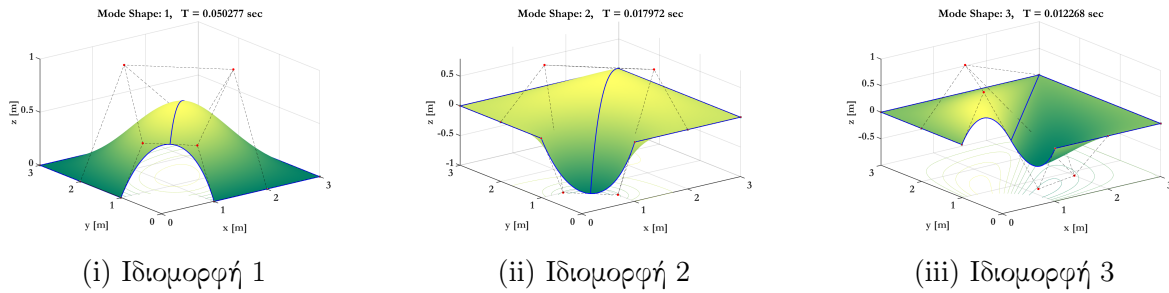


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

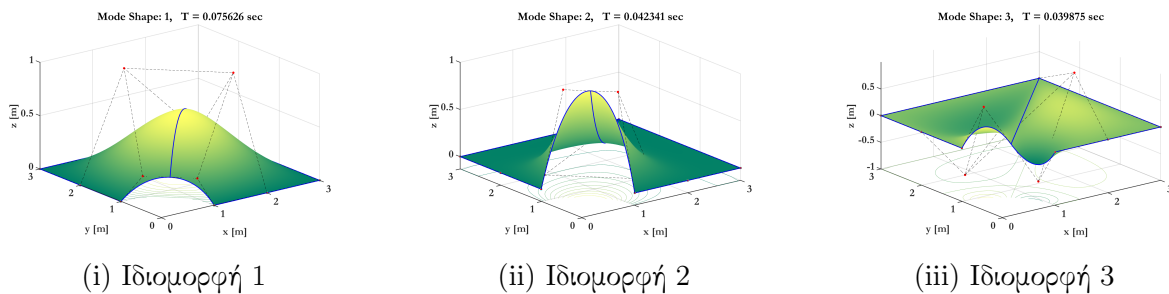


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

Σχήμα 102: Βέλτιστη διακριτοποίηση με 2 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.



Σχήμα 103: Βέλτιστη διακριτοποίηση με 2 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



Σχήμα 104: Βέλτιστη διακριτοποίηση με 2 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

5.3.4 Προσαρμοσμένη τοπολογικά βέλτιστη διακριτοποίηση

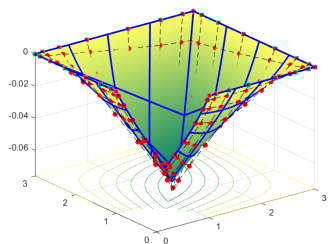
Τα διαγράμματα της απόκρισης μεταξύ αναλύσεων με χρήση πλήρους και διαγώνιου μητρώου μάζας διαφέρουν. Αυτά της πρώτης περίπτωσης είναι σχετικά όμοια με πριν την προσαρμογή του μοντέλου. Συμπεραίνεται πως ο συνολικός αριθμός μικροστοιχείων του πλέγματος πρέπει να αυξηθεί περαιτέρω για την επίτευξη της απόλυτης ακρίβειας.

Όμοια με την περίπτωση προσαρμοσμένης αρχικής γεωμετρίας, οι ιδιομορφές που προκύπτουν από τα δύο είδη αναλύσεων διαφέρουν μεταξύ τους. Μόνο οι πρώτες παρουσιάζουν κάποια ομοιότητα, καθώς είναι παρόμοιας παραμόρφωσης και αντίθετης φοράς. Οι ιδιοτιμές τους επίσης είναι αρκετά κοντά.

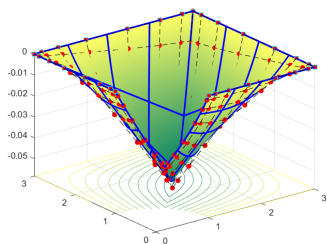
Στον πίνακα 5.19 παρατίθενται συνοπτικά τα αποτελέσματα κάθε ανάλυσης. Ως σημείο αναφοράς για τους σκοπούς σύγκρισης της απόκρισης, επιλέχθηκε το σημείο του φορέα με συντεταγμένες $X = 1.4142, Y = 1.4142$. Το σημείο αυτό υπάρχει στο πλέγμα σημείων ελέγχου του μοντέλου 1α, μη προσαρμοσμένης, διακριτοποίησης, ενώ στις υπόλοιπες

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.050277	0.075626
2	0.0179722	0.042341
3	0.012268	0.039875

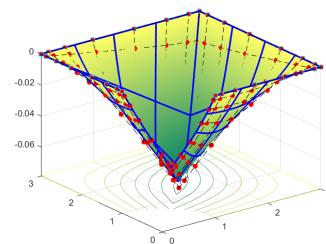
Πίνακας 5.16: Βέλτιστη διακριτοποίηση με 2 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών



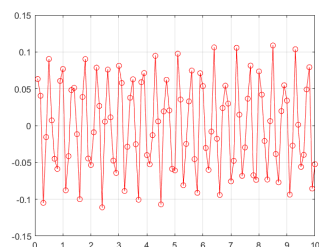
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



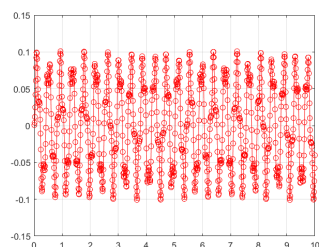
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



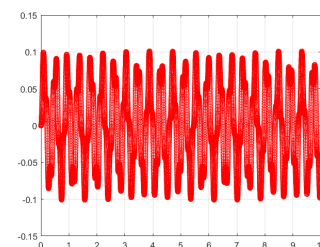
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

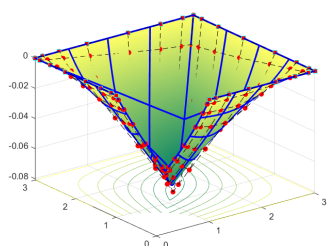


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

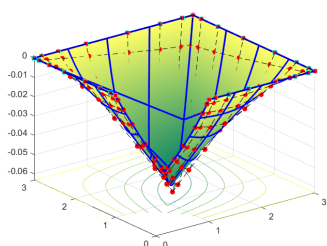


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

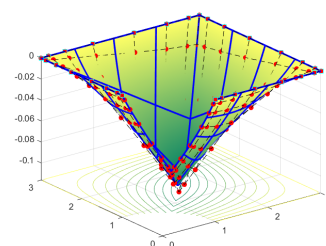
Σχήμα 105: Μοντέλο 1β με 32 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.



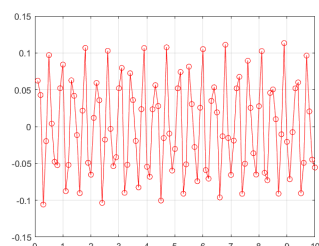
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



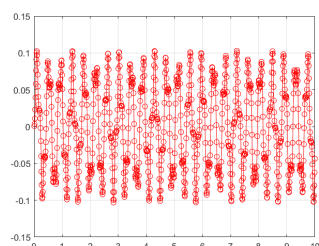
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



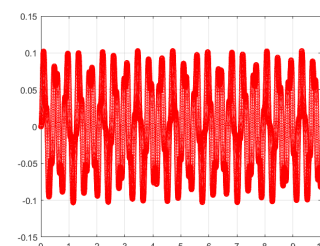
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



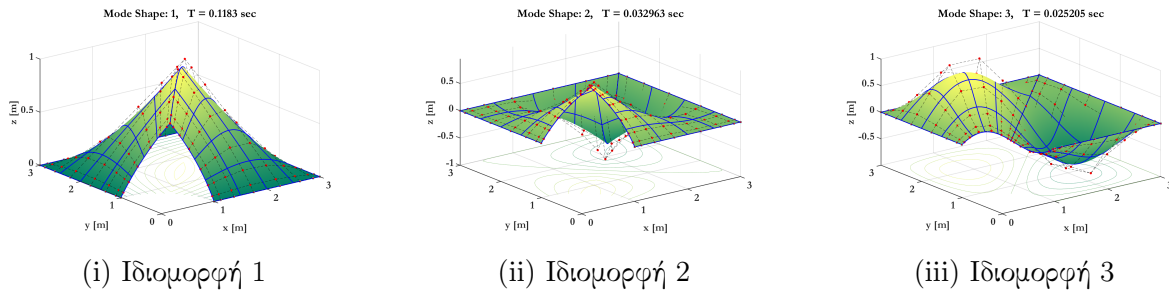
(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



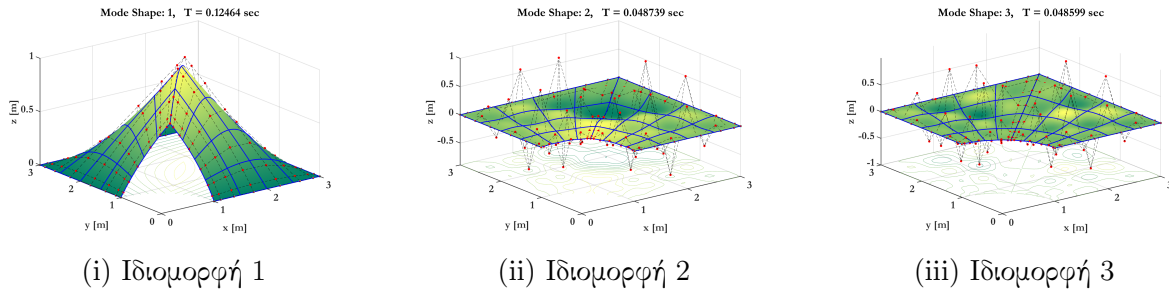
(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

Σχήμα 106: Μοντέλο 1β με 32 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.

υπολογίζεται η μετατόπιση αυτού μέσω του πλέγματος κόμβων.



Σχήμα 107: Μοντέλο 1β με 32 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



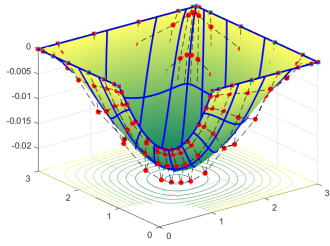
Σχήμα 108: Μοντέλο 1β με 32 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

Εν γένει, οι χρονικές διάρκειες των αναλύσεων των βελτιστοποιημένων μοντέλων, προσαρμοσμένου και μη, είναι αρκετά μικρότερες από τις αντίστοιχες των μοντέλων 1. Η διαφορά αυτή γίνεται ολοένα και πιο εμφανής, όσο αυξάνεται το σύνολο των χρονικών βημάτων και ο αριθμός των στοιχείων του μοντέλου. Έτσι η ανάλυση του προσαρμοσμένου αρχικού μοντέλου, με 10000 χρονικά βήματα και χρήση πλήρους μητρώου μάζας, διήρκεσε 9553.5 (sec), δηλαδή 2 ώρες, 39 λεπτά και 13 δευτερόλεπτα, ενώ η αντίστοιχη ανάλυση του προσαρμοσμένου βέλτιστου μοντέλου διήρκεσε μόλις 6964.6 (sec), δηλαδή 1 ώρα, 56 λεπτά και 4 δευτερόλεπτα.

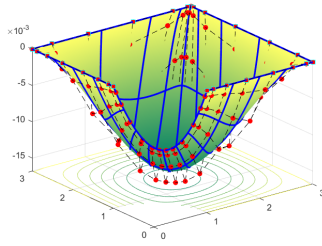
Οι χρόνοι των αναλύσεων με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας, δεν παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές από τις αντίστοιχες των αναλύσεων με πλήρες πίνακα. Μόνο η περίπτωση του μοντέλου 1β αποτελεί εξαίρεση. Παρατηρείται επίσης πως στην αρχική, μη προσαρμοσμένη γεωμετρία (μοντέλο 1α), οι χρόνοι ανάλυσης με πλήρες μητρώο, είναι ελαφρώς αυξημένοι. Συνεπώς, συμπεραίνεται πως η βέλτιστη κατανομή των σημείων ελέγχου στη γεωμετρία, δεν συνεισφέρει μόνο στη συνέχεια των μικροστοιχείων και στη μείωση του συνόλου των σημείων ελέγχου, αλλά συνεπάγεται και μειωμένη χρονική διάρκεια ανάλυσης,

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.1183	0.12464
2	0.032963	0.048739
3	0.025203	0.048599

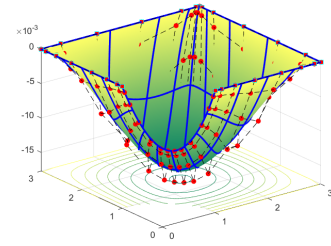
Πίνακας 5.17: Μοντέλο 1β με 32 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών



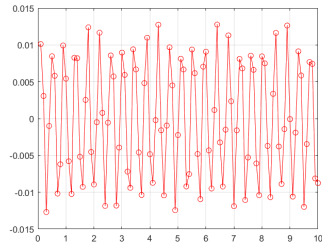
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



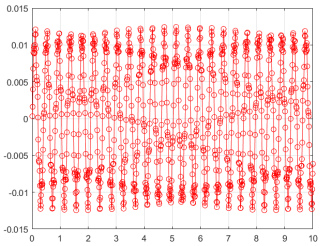
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



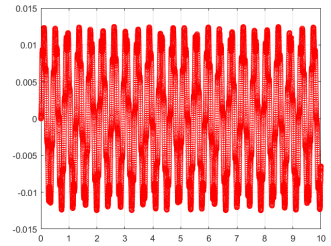
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

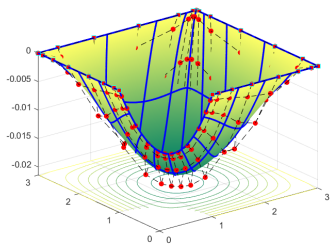


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

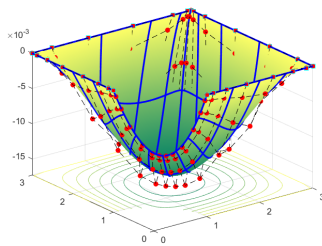


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

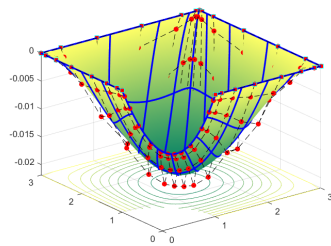
Σχήμα 109: Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 32 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.



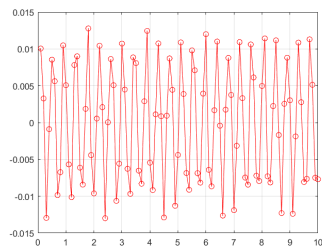
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



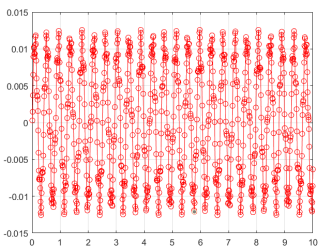
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



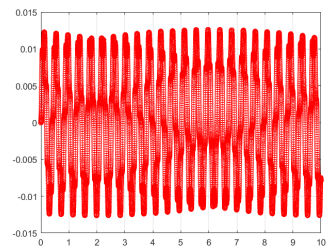
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

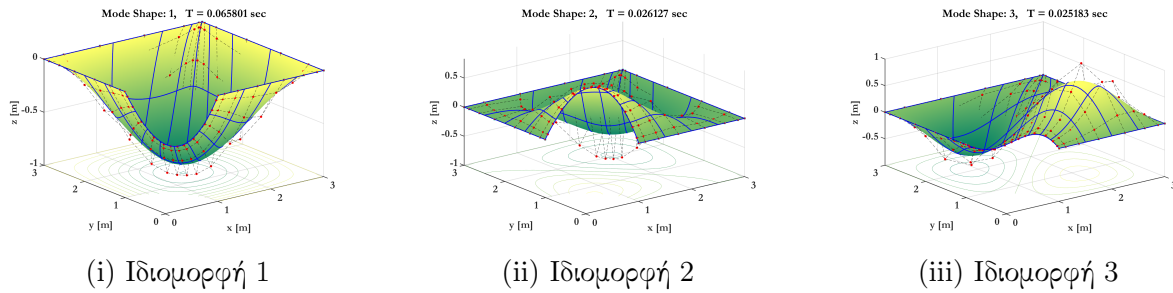


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

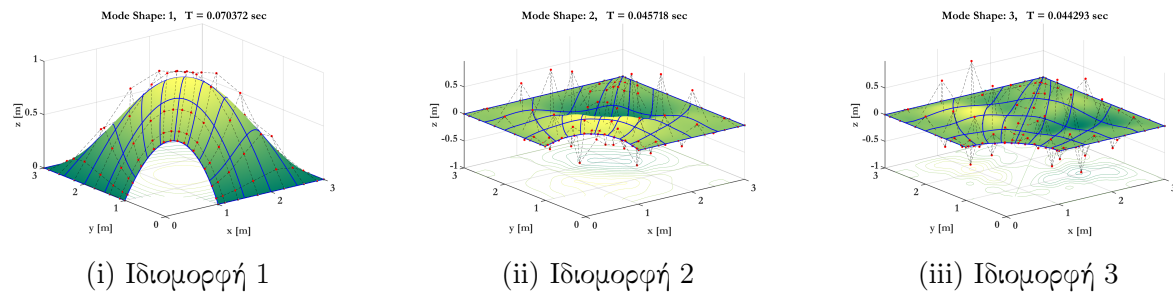


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

Σχήμα 110: Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 32 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.



Σχήμα 111: Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 32 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



Σχήμα 112: Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 32 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

χωρίς χρήση άλλων μεθόδων, όπως η διαγωνιοποίηση του μητρώου μάζας.

Συγκρίνοντας τις αποκρίσεις που προέκυψαν από τα δύο είδη αναλύσεων, με τους διαφορετικούς πίνακες μάζας, φαίνεται πως με την αύξηση των χρονικών βημάτων και με την προσαρμογή των μοντέλων (η οποία οδηγεί σε μεγαλύτερο αριθμός σημείων ελέγχου και μικροστοιχείων), επέρχεται ολοένα και μεγαλύτερη σύγκλιση μεταξύ των τιμών δύο περιπτώσεων. Επιπροσθέτως, από τις βέλτιστες γεωμετρίες, προκύπτουν γενικά μικρότερες μετατοπίσεις, οι οποίες μάλιστα ανήκουν στην ίδια αριθμητική τάξη, πριν και μετά την προσαρμογή. Το ίδιο δεν ισχύει για τις μετατοπίσεις των άλλων μοντέλων.

Αποτελεί κοινή γνώση πως η ακρίβεια της ανάλυσης αυξάνεται με την προσαρμογή. Όμως, είναι αξιοσημείωτο πως με βέλτιστη κατανομή των σημείων ελέγχου, το μοντέλο είναι ικανό να παράγει καλύτερα αποτελέσματα ακόμα και με αραιά πλέγματα.

Φαίνεται πως το σύνολο των προκυπτόντων ιδιομορφών της μη προσαρμοσμένης, τοπολογικά βέλτιστης γεωμετρίας είναι λιγότερες από αυτές που προκύπτουν από το μοντέλο

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.065801	0.070372
2	0.026127	0.045718
3	0.025183	0.044293

Πίνακας 5.18: Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 32 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΟΠΗ ΣΤΗ ΓΩΝΙΑ ΤΗΣ					
Διακριτοποίηση	Αριθμός σημείων ελέγχου	Τύπος [M]	dt (sec)	T (sec)	U (mm)
Αρχική: 2 στοιχεία	15	M_{cons}	0.1	4.69	-0.1425
		M_{lum}		4.63	-0.2004
		M_{cons}	0.01	48.1	-0.1354
		M_{lum}		48.2	-0.0506
		M_{cons}	0.001	450	-0.0831
		M_{lum}		549	-0.0890
Βέλτιστη: 2 στοιχεία	12	M_{cons}	0.1	4.36	-0.0065
		M_{lum}		4.88	-0.0074
		M_{cons}	0.01	41.8	-0.0057
		M_{lum}		41.5	-0.0086
		M_{cons}	0.001	474	-0.0059
		M_{lum}		501	-0.0084
Προσαρμοσμένη πρω- -ταρχική: 32 στοιχεία	120	M_{cons}	0.1	84.2	-0.0524
		M_{lum}		96	-0.0556
		M_{cons}	0.01	1180	-0.0403
		M_{lum}		952	-0.0436
		M_{cons}	0.001	9553.5	-0.0543
		M_{lum}		7215.6	-0.0799
Προσαρμοσμένη βέλτιστη: 32 στοιχεία	112	M_{cons}	0.1	79.2	-0.0088
		M_{lum}		75.6	-0.0077
		M_{cons}	0.01	971.7	-0.0061
		M_{lum}		845.8	-0.0063
		M_{cons}	0.001	6964.6	-0.0065
		M_{lum}		6973.3	-0.0078

Πίνακας 5.19: Συγκεντρωμένα αποτελέσματα αναλύσεων

1α. Αυτό συμβαίνει γιατί τα σημεία ελέγχου του πρωτοαναφερόμενο μοντέλου, είναι συνολικά λιγότερα από αυτά του δεύτερου και επιπλέον, κατανέμονται διαφορετικά στο πλέγμα ελέγχου. Συνεπώς, υπάρχουν λιγότερα σημεία ελεύθερα προς κίνηση και άρα λιγότεροι ελεύθεροι βαθμοί ελευθερίας, απόρροια του οποίου είναι η παραγωγή λιγότερων ιδιομορφών.

Παρόλα τα πλεονεκτήματα της βελτιστοποίησης της τοπολογίας των σημείων ελέγχου, παρατηρείται μεγαλύτερη σύγκλιση των ιδιομορφών των αναλύσεων με χρήση πλήρους και με χρήση σωρικού μητρώου μάζας, στις περιπτώσεις του μοντέλου 1. Αλλά, με την προσαρμογή της βελτιστοποιημένης διακριτοποίησης, οι ιδιοσυχνότητες τείνουν ολοένα και περισσότερο να ομοιάσουν μεταξύ τους. Οπότε, είναι ασφαλές να γίνει η υπόθεση πως με ακόμα μεγαλύτερη προσαρμογή, θα επέλθει σύγκλιση των ιδιοσυχνοτήτων του μοντέλου αυτού.

Όσο αφορά τις αριθμητικές τιμές των ιδιοσυχνοτήτων, στις μη βελτιστοποιημένες γεωμετρικές είναι μικρότερες. Από τη γνωστή σχέση που συνδέει τα μεγέθη της ιδιοσυχνότητας

Μοντέλο 1-α		Μοντέλο 1-β		Μοντέλο 1-β		Μοντέλο 2-β	
M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}
39.94	57.56	83.08	124.97	50.41	53.11	89.29	95.49
117.05	304.28	148.39	349.62	128.92	190.6	137.43	240.48
121.24	307.78	157.57	512.18	129.29	249.29	141.86	249.51
123.83	462.73	203.06	866.55	138.73	313.64	153.21	400.81
273.25	788.87	995.35	2201.24	175.78	434.61	199.47	493.85
299.77	1244.35	1131.44	2625.17	205.02	491.29	202.72	508.96
1185.76	2205.75	1331.18	3301.39	211.94	593.86	205.44	659.45
1271.67	2475.57	1518.77	4257.66	214.71	648.02	223.33	697.25
1331.51	3208.22	1615.96	4811.02	218.47	746.02	236.63	863.55
1384.20	3943.08	1872.57	5226.91	255.66	814.32	278.28	880.29
1495.54	4742.19	2171.33	5951.99	261.71	849.06	282.75	992.31
1565.59	5008.69	2357.92	7011.09	266.69	1015.08	295.18	1086.94
1911.17	5238.56			266.80	1086.35	310.19	1282.65
2013.37	6006.46			293.98	1187.74	310.32	1395.34
2321.46	6874.45			313.01	1297.16	323.40	1422.09

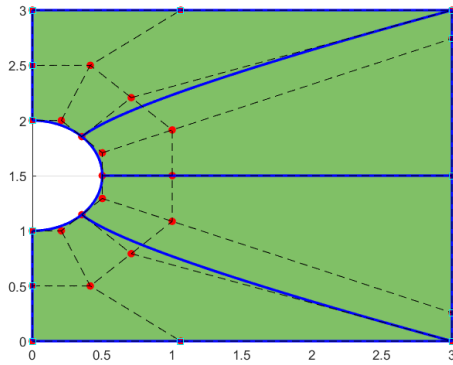
Πίνακας 5.20: Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλύσεων σε rad/sec

και της ιδιοπεριόδου, $\omega = 2\pi/T$, είναι προφανές πως υψηλές ιδιοσυχνότητες οδηγούν σε μικρές ιδιοπεριόδους. Γενικώς, στις κατασκευές είναι επιθυμητές οι μεγάλες ιδιοπεριόδοι, άρα τα αποτελέσματα των μοντέλων 1 είναι πιο θεμιτά. Όμως, με την προσαρμογή, παρατηρείται μεγαλύτερη αναλογικά αύξηση των ιδιοσυχνοτήτων των διακριτοποιήσεων αυτών, από ότι των βελτιστοποιημένων. Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, είναι λογικό το συμπέρασμα πως η αποδοτικότερη ανάλυση, θα πραγματοποιηθεί με πλέγματα μεγάλης πυκνότητας και βέλτιστης γεωμετρικής κατανομής σημείων ελέγχου.

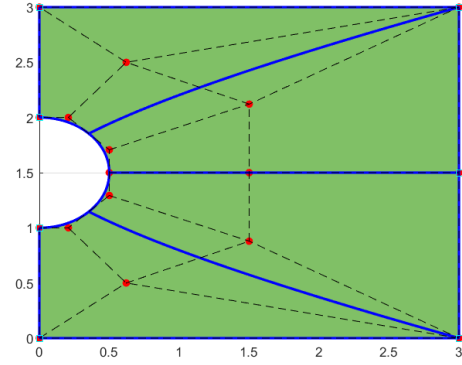
5.4 Τετραγωνική πλάκα με ημικυκλική οπή σε πλευρά της

Η επόμενη εφαρμογή που εκτελέστηκε είναι παρόμοια με αυτή της παραγράφου 5.3, με διαφορετικό είδος οπής. Αυτή τη φορά, η οπή είναι ημικυκλικού σχήματος και είναι τοποθετημένη στη μέση μιας εξωτερικής πλευράς της πλάκας. Το είδος των στηρίξεων είναι το ίδιο, δηλαδή επιβάλλονται απλές γραμμικές στηρίξεις σε όλες τις ευθύγραμμες εξωτερικές πλευρές του φορέα. Τα χαρακτηριστικά του υλικού της πλάκας και του επιβαλλόμενου φορτίου, παραμένουν ίδια. Εκτελούνται αναλύσεις σύμφωνα με τα ίδια τρία χρονικά βήματα, $dt = 0.1 \text{ sec}$, $dt = 0.01 \text{ sec}$ και $dt = 0.001 \text{ sec}$. Επιπλέον, πραγματοποιείται και εδώ κύκλος είκοσι επαναλήψεων κάθε ανάλυσης, για τον υπολογισμό της μέσης διάρκειας αυτής σε κάθε περίπτωση.

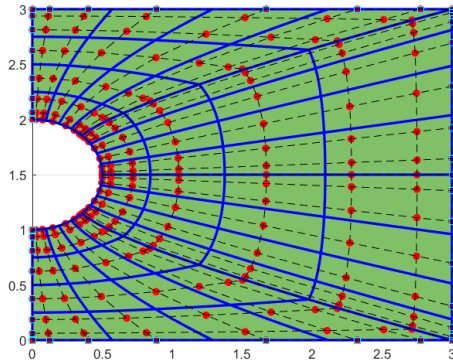
Η διακριτοποίηση του φορέα επιτυγχάνεται με δύο διαφορετικούς τρόπους, ο δεύτερος εκ των οποίων αποτελεί τον τοπολογικά βέλτιστο. Αρχικά, τα δύο διακριτοποιημένα μοντέλα αποτελούνται από τέσσερα στοιχεία και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική προσαρμογής k , δημιουργούνται διακριτοποιήσεις εξήντα τεσσάρων στοιχείων. Η αρχική, η βέλτιστη διακριτοποίηση και οι προσαρμογές αυτών απεικονίζονται στην εικόνα 113.



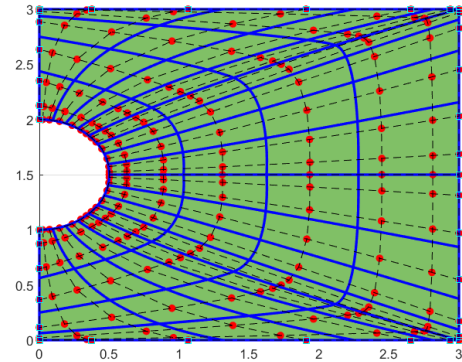
(i) Αρχική διακριτοποίηση - Μοντέλο 1α



(ii) Τοπολογικά βέλτιστη διακριτοποίηση - Μοντέλο 2α



(iii) Προσαρμοσμένη αρχική διακριτοποίηση - Μοντέλο 1β



(iv) Προσαρμοσμένη τοπολογικά βέλτιστη διακριτοποίηση - Μοντέλο 2β

Σχήμα 113: Αρχικές και προσαρμοσμένες διακριτοποιήσεις φορέα τετραγωνικής πλάκας με ημικυκλική πλευρική οπή

Οι αρχικές πολυωνυμικές τάξεις και για τα δύο μοντέλα είναι $p = q = 2$. Τα αρχικά κομβοδιανύσματα και των δύο μη προσαρμοσμένων μοντέλων είναι ομοιόμορφα, με την πρώτη και την τελευταία τιμή αυτών, να έχουν πολλαπλότητα ίση με τρία. Αναλυτικά, στο αρχικό μοντέλο (σχήμα 113i), αντιστοιχούν τα εξής διανύσματα κόμβων: $\{\Xi\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.75 \ 0.75 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$, $\{H\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$ και στο βέλτιστο μοντέλο (σχήμα 113ii), τα $\{\Xi\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$, $\{H\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$.

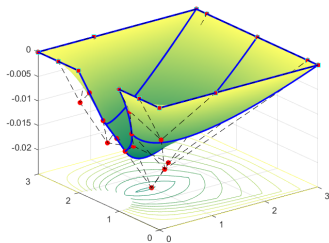
Μετά την προσαρμογή της διακριτοποίησης τα κομβοδιανύσματα παραμένουν ομοιόμορφα, με τις εξωτερικές τιμές τους να έχουν πλέον πολλαπλότητα ίση με πέντε. Του πρώτου μοντέλου είναι $\{\Xi\} = \{H\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ \dots \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$. Οι

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.064093	0.085515
2	0.040341	0.061348
3	0.030023	0.054733

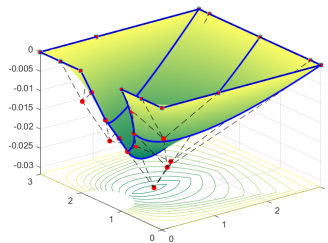
Πίνακας 5.21: Μοντέλο 1α με 4 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

ενδιάμεσες τιμές των μοντέλων των σχημάτων 96iii και 96iv αναγράφονται αναλυτικά στο παράρτημα Α', παράγραφο Α'.2.

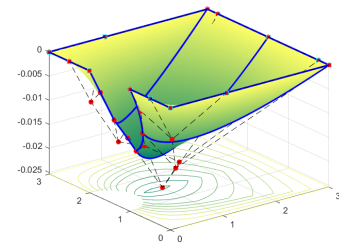
5.4.1 Αρχική διακριτοποίηση



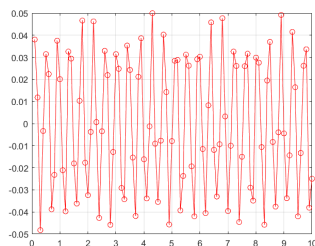
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



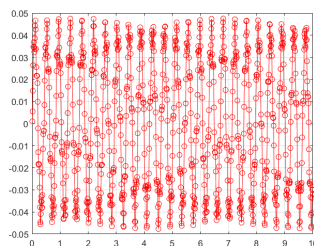
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



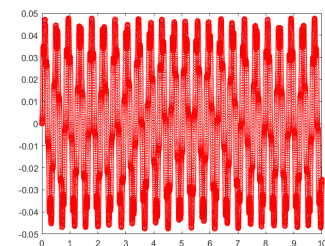
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



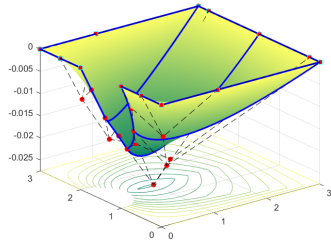
(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

Σχήμα 114: Μοντέλο 1α με 4 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.

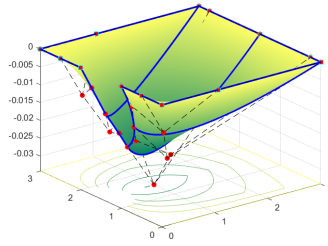
Η μορφή του παραμορφωμένου φορέα είναι ίδια σε όλες τις αναλύσεις διαφορετικών χρονικών βημάτων και είδους μητρώου μάζας. Τα διαγράμματα απόκρισης όμως διαφέρουν ως προς τη μορφή και τις τιμές τους και δεν επέρχεται σύγκλιση με την αύξηση των συνολικών χρονικών βημάτων.

Οι πρώτες ιδιομορφές των δύο περιπτώσεων είναι ίδιας μορφής αλλά αντίθετης φοράς. Οι υπόλοιπες δύο είναι όμοιες. Όσο αφορά τις ιδιοτιμές, δεν παρατηρείται σύγκλιση, ωστόσο είναι της ίδιας αριθμητικής τάξης.

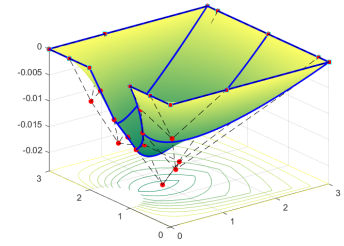
5.4. Τετραγωνική πλάκα με ημικυκλική οπή σε πλευρά της



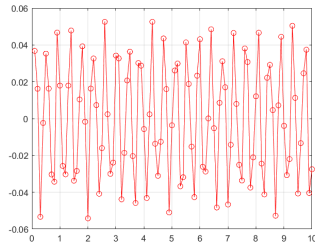
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



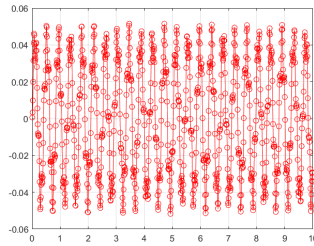
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



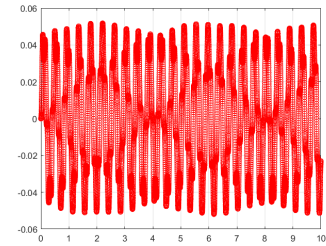
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

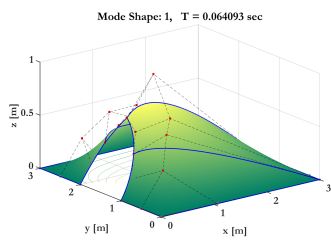


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

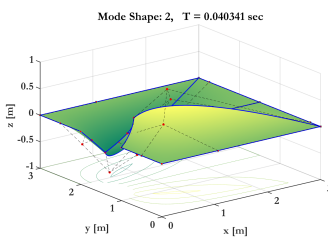


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

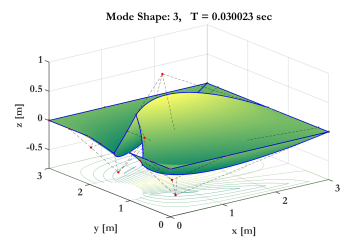
Σχήμα 115: Μοντέλο 1α με 4 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.



(i) Ιδιομορφή 1

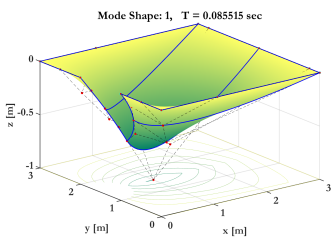


(ii) Ιδιομορφή 2

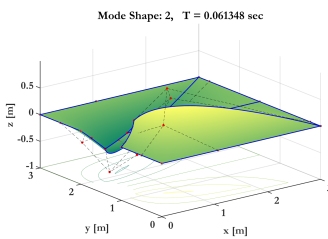


(iii) Ιδιομορφή 3

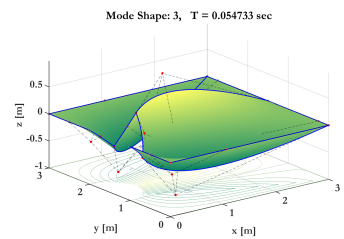
Σχήμα 116: Μοντέλο 1α με 4 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1



(ii) Ιδιομορφή 2



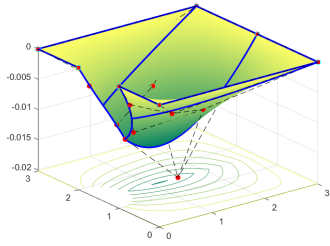
(iii) Ιδιομορφή 3

Σχήμα 117: Μοντέλο 1α με 4 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

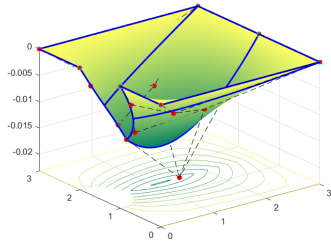
5.4.2 Τοπολογικά βέλτιστη διακριτοποίηση

Έχουν προκύψει ίδιοι παραμορφωμένοι φορείς. Οι αποκρίσεις διαφέρουν επίσης για μεγάλα χρονικά βήματα, αλλά φαίνεται πως υπάρχει κάποια μορφή σύγκλισης για $dt = 0.001$ sec.

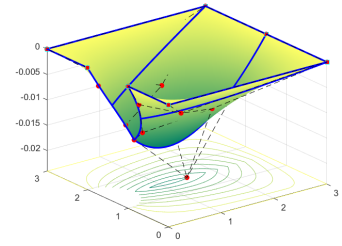
Όπως και στην δεύτερη εφαρμογή, της παραγράφου 5.3, το σχήμα των παραμορ-



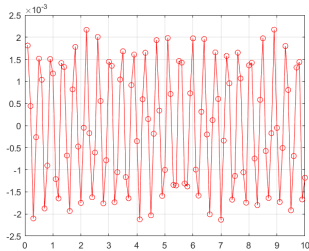
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



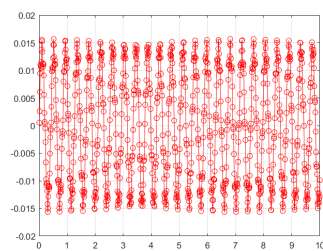
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



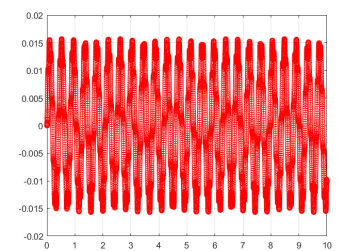
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

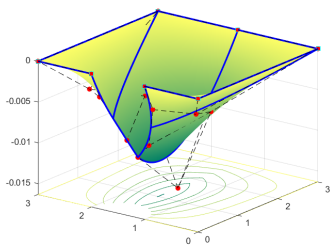


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

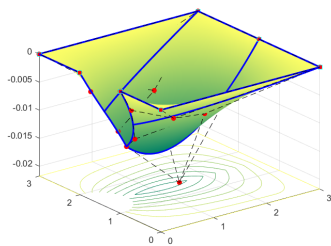


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

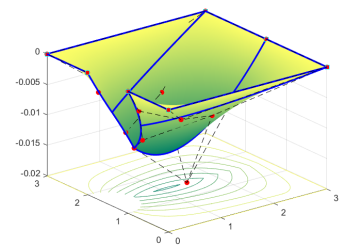
Σχήμα 118: Βέλτιστη διακριτοποίηση με 4 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.



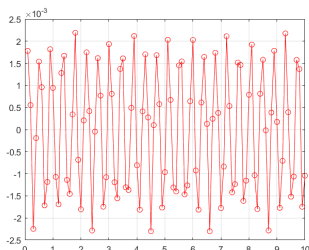
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



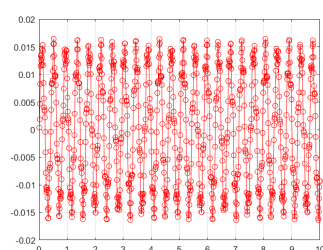
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



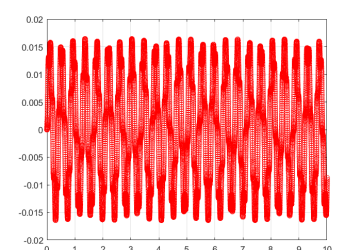
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

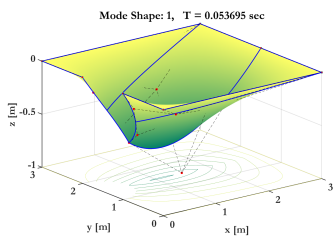
Σχήμα 119: Βέλτιστη διακριτοποίηση με 4 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.

φορμών φορέων των βελτιστοποιημένων μοντέλων, διαφέρει από αυτό των άλλων. Αυτό συμβαίνει λόγω της διαφοράς της πολλαπλότητας των ενδιάμεσων κόμβων των κομβοδια-

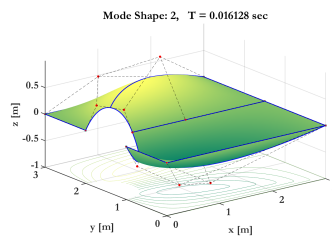
Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.053695	0.07263
2	0.016128	0.036932
3	0.015007	0.026131

Πίνακας 5.22: Βέλτιστη διακριτοποίηση με 4 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

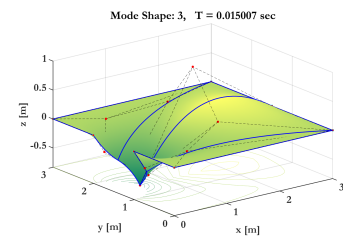
νυσμάτων. Και στις δύο περιπτώσεις βελτιστοποιημένης διακριτοποίησης, έχει επιτευχθεί μεγαλύτερος βαθμός συνέχειας. Απόρροια αυτού είναι μια πιο ρεαλιστική απεικόνιση της παραμόρφωσης, χωρίς “τσάκισμα” της γεωμετρίας.



(i) Ιδιομορφή 1

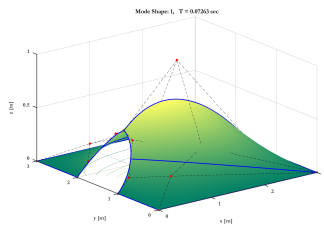


(ii) Ιδιομορφή 2

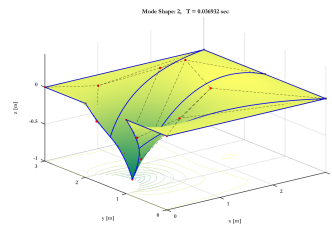


(iii) Ιδιομορφή 3

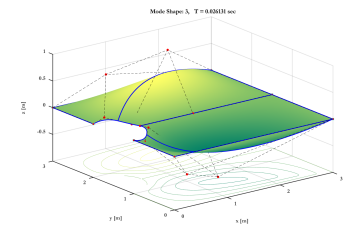
Σχήμα 120: Βέλτιστη διακριτοποίηση με 4 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



(i) Ιδιομορφή 1



(ii) Ιδιομορφή 2



(iii) Ιδιομορφή 3

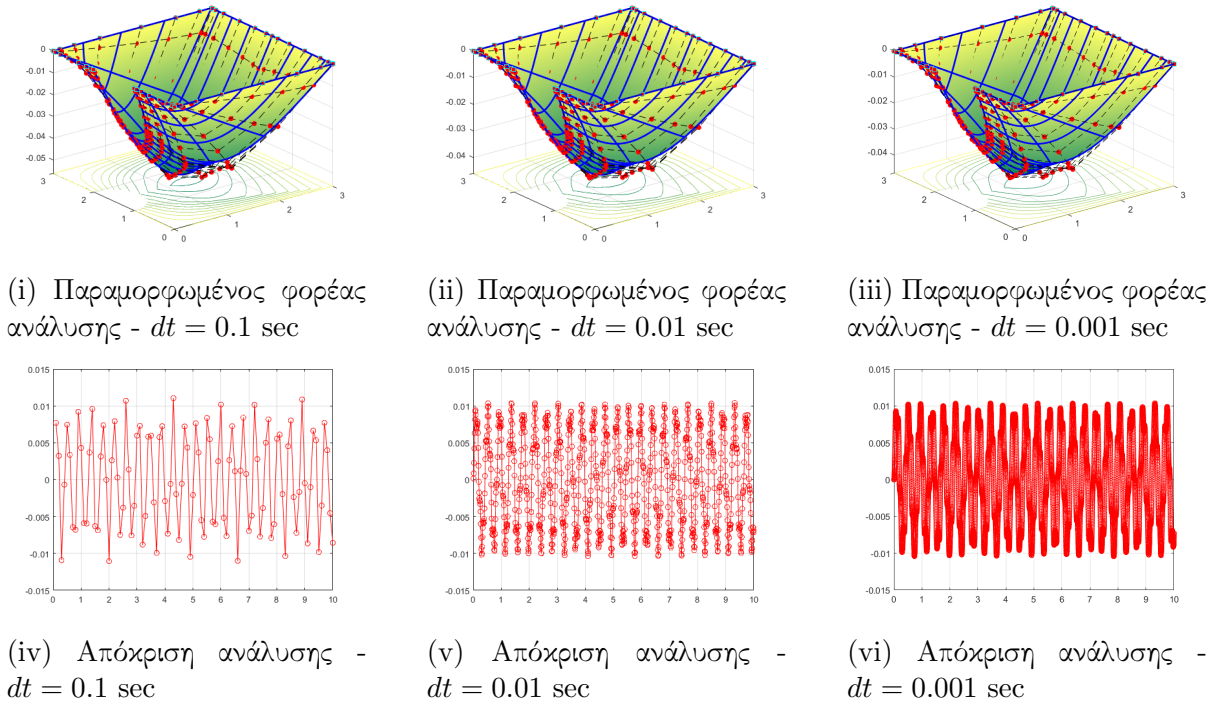
Σχήμα 121: Βέλτιστη διακριτοποίηση με 4 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

Δεν προκύπτει κανένα όμοιο μορφολογικά ζευγάρι ιδιομορφών από τις δύο περιπτώσεις ανάλυσης. Οι ιδιοσυχνότητες είναι αρκετά κοντά αριθμητικά σε όλες τις υποπεριπτώσεις.

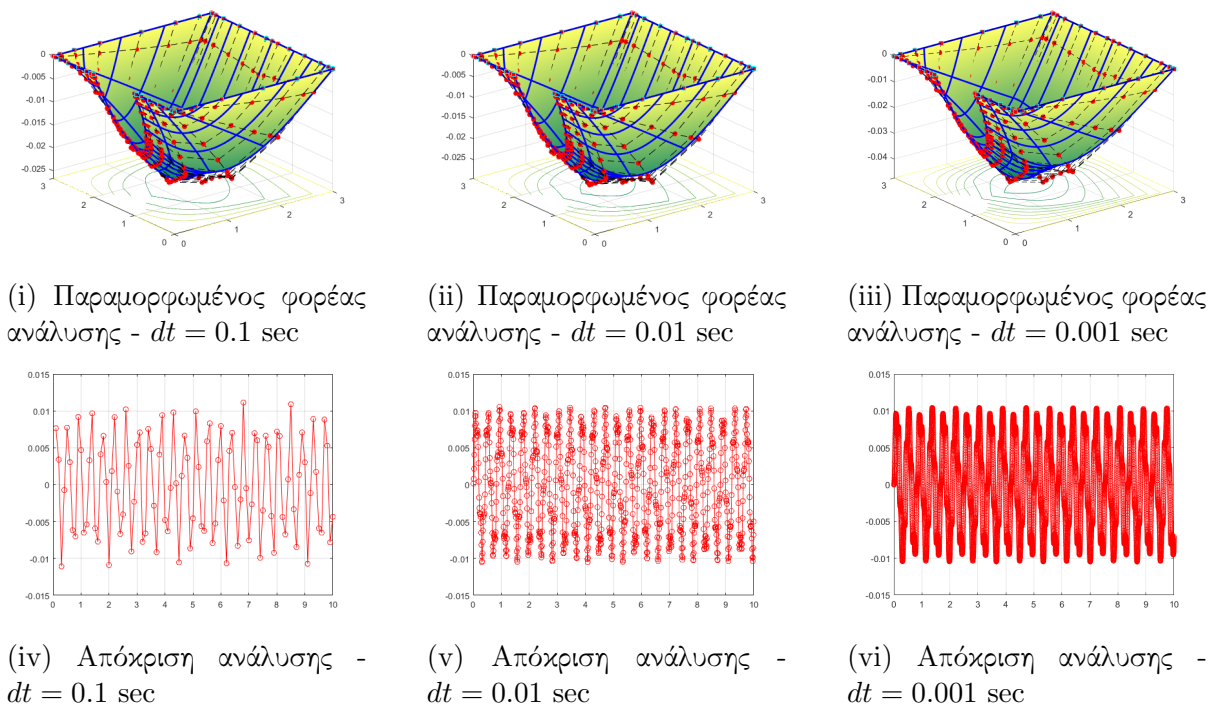
5.4.3 Προσαρμοσμένη πρωτογενής διακριτοποίηση

Η μορφή της απόκρισης είναι σχεδόν όμοια, στις δύο περιπτώσεις ανάλυσης με διαφορετικό είδος μητρώου μάζας.

Οι πρώτες και οι δεύτερες ιδιομορφές των δύο περιπτώσεων είναι ίδιας μορφής αλλά αντίθετης φοράς. Η τρίτες είναι ομοιάζουσες. Ακόμη, υπάρχει αρκετά καλή σύγκλιση ως προς τις αριθμητικές τιμές των ιδιοσυχνοτήτων.



Σχήμα 122: Μοντέλο 1β με 64 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.

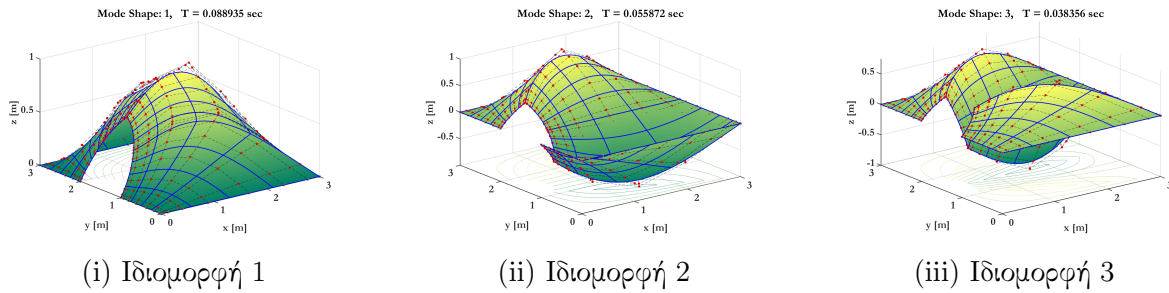


Σχήμα 123: Μοντέλο 1β με 64 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.

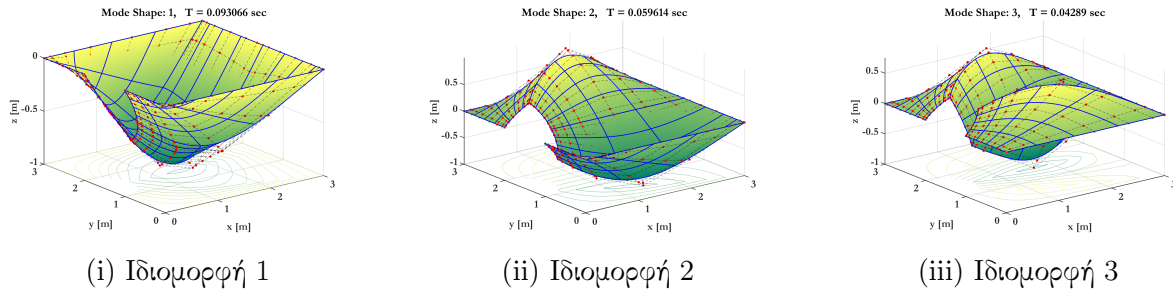
5.4.4 Προσαρμοσμένη τοπολογικά βέλτιστη διακριτοποίηση

Με χρονικό βήμα $dt = 0.01$ sec, προκύπτουν αποκρίσεις αρκετά κοντινής μορφής, εν αντι-

5.4. Τετραγωνική πλάκα με ημικυκλική οπή σε πλευρά της



Σχήμα 124: Μοντέλο 1β με 64 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



Σχήμα 125: Μοντέλο 1β με 384 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

θέσει με το μικρότερο χρονικό βήμα $dt = 0.001$ sec. Παρατηρώντας την μεγάλη ομοιότητα των σχημάτων 126ν και 127νι, συμπεραίνεται πως η μείωση του χρονικού βήματος, εάν και είναι αποτελεσματική μέθοδος αύξησης της ακρίβειας της ανάλυσης, δεν επιδρά παντού το ίδιο. Με μικρότερο χρονικό βήμα και χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας, επιτυγχάνεται όμοιο αποτέλεσμα με αυτό της ανάλυσης με $dt = 0.01$ sec και χρήση πλήρους πίνακα.

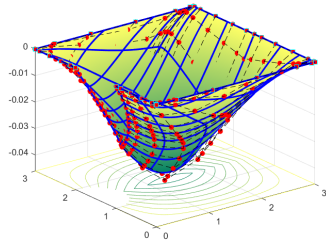
Ακόμη, είναι σημαντικό να αναφερθεί πως στο προκείμενο παράδειγμα έχει επέλθει μια μορφή σύγκλισης με την προσαρμογή του βέλτιστου μοντέλου, αντίθετα με την προηγούμενη εφαρμογή. Το γεγονός αυτό μπορεί να αποδοθεί στο ότι η γεωμετρία της πλάκας με ημικυκλική οπή, απαιτεί εξαρχής περισσότερα σημεία ελέγχου για να περιγραφεί, από ότι αυτή της πλάκας με τεταρτοκυκλική, γωνιακή οπή. Πράγμα που συμβάλει σε πυκνότερο πλέγμα του μοντέλου ανάλυσης.

Οι πρώτες ιδιομορφές είναι όμοιες. Οι υπόλοιπες δυάδες των δύο περιπτώσεων είναι ίδιας μορφής, με περιστραμμένο σύστημα αξόνων. Όλες οι ιδιοπεριόδους τους, είναι αρκετά κοντά αριθμητικά.

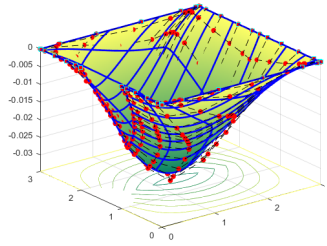
Στον πίνακα 5.25 παρατίθενται συνοπτικά τα αποτελέσματα κάθε ανάλυσης. Ως σημείο

Τιμές ιδιοπεριοδών (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.088935	0.093066
2	0.055872	0.059614
3	0.038356	0.04289

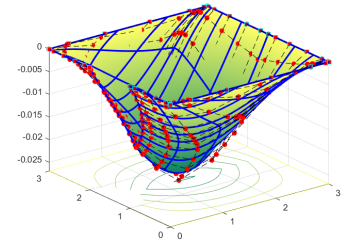
Πίνακας 5.23: Μοντέλο 1β με 64 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών



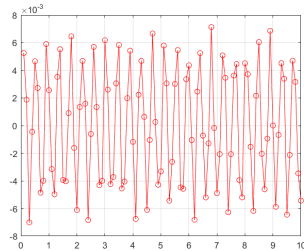
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



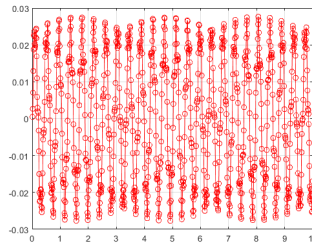
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



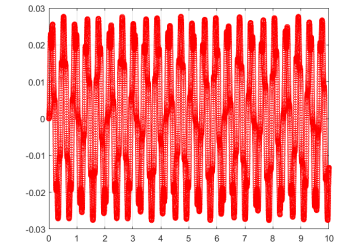
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

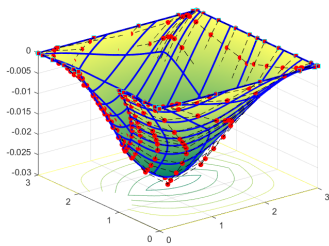


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

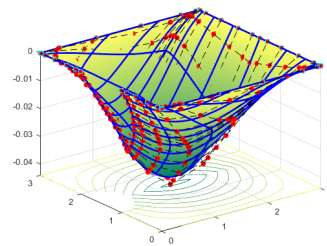


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

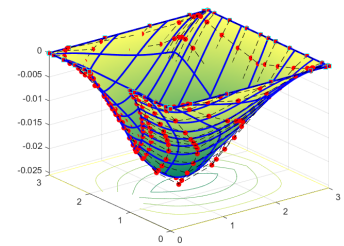
Σχήμα 126: Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.



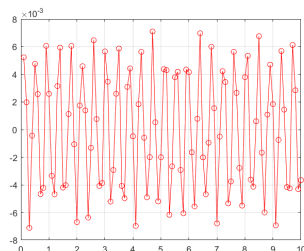
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



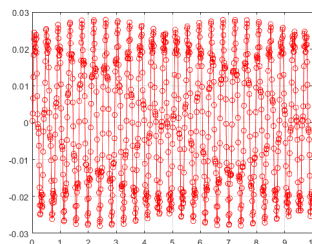
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



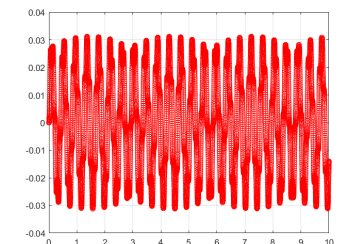
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



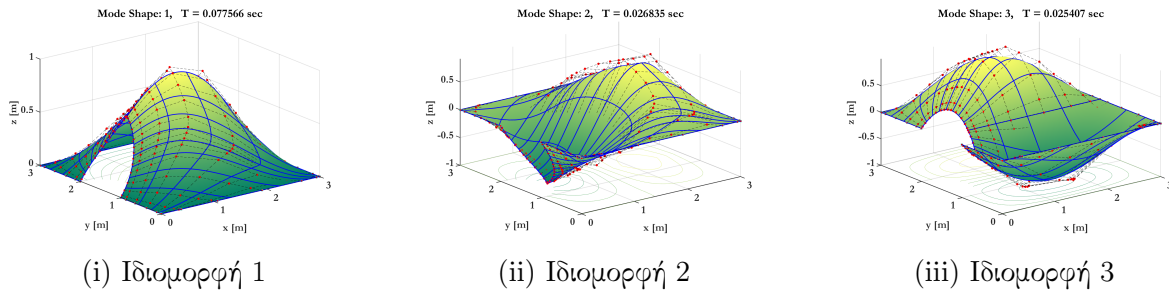
(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



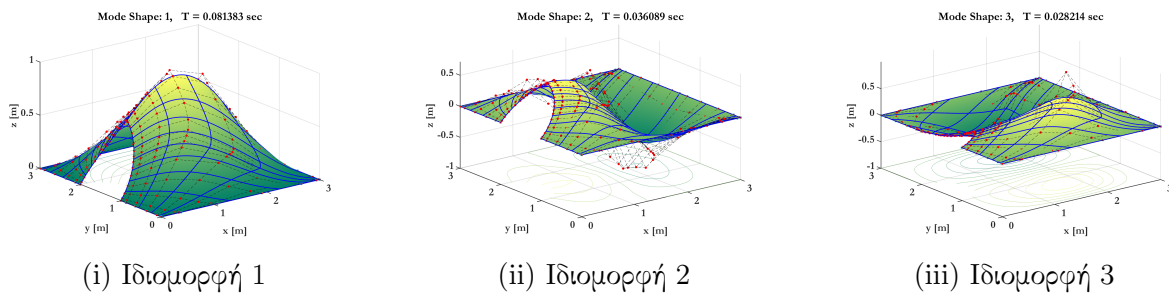
(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

Σχήμα 127: Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.

5.4. Τετραγωνική πλάκα με ημικυκλική οπή σε πλευρά της



Σχήμα 128: Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



Σχήμα 129: Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

αναφοράς για τους σκοπούς σύγκρισης της απόκρισης, επιλέχθηκε το κεντρικό σημείο της πλάκας, με συντεταγμένες $X = 1.50$, $Y = 1.50$, $Z = 1.50$. Η απόκριση αυτού βρέθηκε από το πλέγμα των κόμβων του εκάστοτε μοντέλου.

Οι αναλύσεις και των δύο προσαρμοσμένων μοντέλων, με χρονικό βήμα $dt = 0.001$ sec, είναι αδιαμφισβήτητα οι πιο χρονοβόρες. Και οι δύο περιπτώσεις παρουσίασαν μικρότερη χρονική διάρκεια όταν έγινε χρήση σωρικού μητρώου μάζας. Συγκρίνοντας τους δύο αυτούς χρόνους, είναι ξεκάθαρο πως η βέλτιστη διακριτοποίηση πλεονεκτεί σε σχέση με την αρχική.

Όσο αφορά τις τιμές της απόκρισης, παρατηρείται διατήρηση τάξης με την προσαρμογή του μοντέλου 1α και αύξηση τάξης με την προσαρμογή της βέλτιστης. Στη δεύτερη περίπτωση επιτυγχάνεται μεγαλύτερη σύγκλιση των μετατοπίσεων που προέκυψαν με χρονικά βήματα $dt = 0.01$ sec και $dt = 0.001$ sec. Και στα δύο προσαρμοσμένα μοντέλα, με $dt = 0.001$ sec οι τιμές από τις δύο διαφορετικές αναλύσεις είναι σχεδόν ίδιες, αλλά διαφέρουν μεταξύ μοντέλων. Ακόμη, οι μετατοπίσεις του αρχικού, τοπολογικά βέλτιστου

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.077566	0.081383
2	0.026835	0.036089
3	0.025407	0.028214

Πίνακας 5.24: Προσαρμοσμένη βέλτιστη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΗΜΙΚΥΚΛΙΚΗ ΟΠΗ ΣΤΗΝ ΠΛΕΥΡΑ ΤΗΣ					
Διακριτοποίηση	Αριθμός σημείων ελέγχου	Τύπος [M]	dt (sec)	T (sec)	U (mm)
Αρχική: 4 στοιχεία	27	M_{cons}	0.1	6.60	-0.0024
		M_{lum}		4.97	-0.0024
		M_{cons}	0.01	54.9	-0.0027
		M_{lum}		50.6	-0.0027
		M_{cons}	0.001	573	-0.0022
		M_{lum}		580	-0.0022
Βέλτιστη: 4 στοιχεία	21	M_{cons}	0.1	5.99	-0.0086
		M_{lum}		5.49	-0.0073
		M_{cons}	0.01	67	-0.0099
		M_{lum}		66.9	-0.0093
		M_{cons}	0.001	577.9	-0.010
		M_{lum}		570	-0.0088
Προσαρμοσμένη πρω- ταρχική: 64 στοιχεία	232	M_{cons}	0.1	494.8	-0.0086
		M_{lum}		403.5	-0.0043
		M_{cons}	0.01	1610.3	-0.0710
		M_{lum}		1447.3	-0.0050
		M_{cons}	0.001	16156.78	-0.0072
		M_{lum}		15946.26	-0.0071
Προσαρμοσμένη βέλτιστη: 64 στοιχεία	216	M_{cons}	0.1	141.6	-0.0223
		M_{lum}		140.2	-0.0148
		M_{cons}	0.01	1754	-0.0169
		M_{lum}		1573.7	-0.0213
		M_{cons}	0.001	16594.2	-0.0133
		M_{lum}		14388.2	-0.0127

Πίνακας 5.25: Συγκεντρωμένα αποτελέσματα αναλύσεων

μοντέλου, παρουσιάζουν μεγάλες διαφοροποιήσεις μεταξύ τους, ειδικά συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες της άλλης αρχικής διακριτοποίησης. Αυτό οφείλεται στο ότι το πρωτοαναφερόμενο μοντέλο ανάλυσης, συγκροτείται από λιγότερα σημεία ελέγχου και άρα έχει πιο λίγους βαθμούς ελευθερίας.

Παρατηρείται περίπου ίδια διαφορά μεταξύ των τιμών των ιδιοσυχνοτήτων των περιπτώσεων ανάλυσης με χρήση μητρώου πλήρους μάζας και αυτών με χρήση διαγώνιου και στις αρχικές και στις προσαρμοσμένες διακριτοποιήσεις. Ακόμη, επισημαίνεται πως με την προσαρμογή, οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων μειώνονται σε όλες τις γεωμετρίες. Στην προκείμενη περίπτωση, τα δύο μοντέλα παράγαγαν πολύ κοντινές τιμές ιδιοσυχνοτήτων.

Μοντέλο 1-α		Μοντέλο 1-β		Μοντέλο 1-β		Μοντέλο 2-β	
M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}
73.48	98.03	86.51	117.02	67.51	70.65	77.21	81.01
102.42	155.75	170.13	389.58	105.39	112.46	174.10	234.14
114.79	209.28	240.45	418.67	146.49	163.81	222.69	247.31
220.09	581.45	254.18	540.82	167.52	225.02	240.89	376.01
344.64	900.53	396.28	925.23	190.66	310.24	241.03	395.28
410.32	1189.95	484.39	1296.85	217.92	429.39	247.43	491.44
411.89	1233.20	564.87	1908.07	225.79	480.46	251.01	564.47
427.09	1449.07	594.49	2210.57	241.69	592.34	279.97	672.52
454.33	1765.36	784.56	2403.50	243.15	641.69	287.57	853.29
484.65	2176.01	805.71	2472.68	252.51	789.47	303.84	869.74
890.85	2219.55	1423.59	3056.58	293.45	872.99	326.83	908.01
958.87	2466.73	1424.88	3172.29	321.97	873.51	348.45	1002.76
1069.11	2795.29	1514.77	3562.03	346.36	903.13	358.83	1079.46
1073.89	3251.73	1622.75	4221.20	366.35	1032.55	370.04	1115.26
1582.41	3584.26	1695.27	4419.73	379.58	1057.74	393.19	1265.62

Πίνακας 5.26: Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλύσεων σε rad/sec

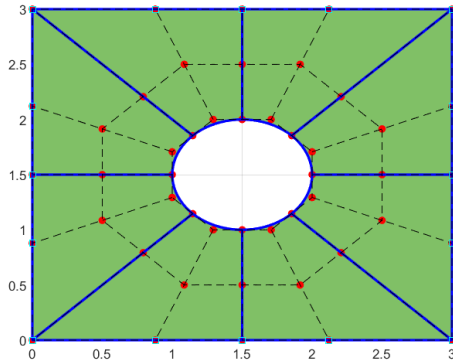
5.5 Τετραγωνική πλάκα με κυκλική οπή στο κέντρο της

Η τελευταία εφαρμογή που εκτελέστηκε και αφορά τετραγωνική πλάκα με οπή, είναι αυτή που της εικόνας 130i. Πρόκειται για τετραγωνική πλάκα με κυκλική οπή στο κέντρο της. Ως γνωστών, όλα τα χαρακτηριστικά υλικού, του φορτίου και της ανάλυσης παραμένουν αμετάβλητα.

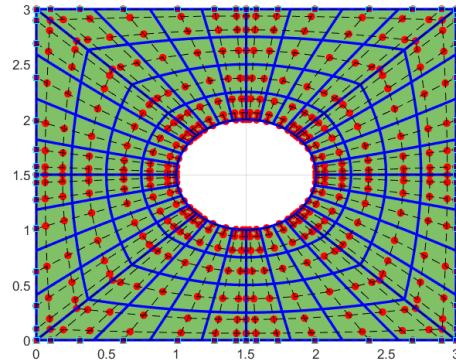
Το αρχικό μοντέλο ανάλυσης συντελείται από πενήντα ένα σημεία ελέγχου, τα οποία συγκροτούν οκτώ μικροστοιχεία. Η αρχικές πολυωνυμικές τάξεις του είναι $p = q = 2$, τα αρχικά κομβοδιανύσματα ανήκουν στο διάστημα $[0, 1]$ και οι ακραίες τιμές τους έχουν βαθμό πολλαπλότητας ίσο με τρία. Είναι δηλαδή $\{\Xi\} = \{H\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ \dots \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$, όπου οι ενδιάμεσες τιμές του $\{\Xi\}$ αναγράφονται αναλυτικά στο παράρτημα Α', παράγραφο Α'.2, ενώ το $\{H\}$ δεν έχει ενδιάμεσες τιμές.

Πραγματοποιήθηκε προσαρμογή της γεωμετρίας με τη χρήση της k τεχνικής, επομένως εκτελέστηκε προσθήκη νέων κόμβων και αύξηση πολυωνυμικής τάξης. Το προσαρμοσμένο διακριτοποιημένο μοντέλο απεικονίζεται στο σχήμα 130ii. Μετά την προσαρμογή οι πολυωνυμικές τάξεις μετατράπηκαν σε $p = q = 4$ και τα καινούρια κομβοδιανύσματα παρέμειναν ομοιόμορφα, με βαθμό πολλαπλότητας ακραίων τιμών ίσο με πέντε. Είναι $\{\Xi\} = \{H\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ \dots \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0, 1.0 \ 1.0\}$, όπου οι ενδιάμεσες τιμές τους αναγράφονται στο παράρτημα.

Αναφέρεται επίσης πως για το συγκεκριμένο μοντέλο, η βελτιστοποίηση της τοπο-



(i) Αρχική διακριτοποίηση



(ii) Τοπολογικά Αρχική διακριτοποίηση

Σχήμα 130: Αρχική και προσαρμοσμένη διακριτοποίηση, φορέα τετραγωνικής πλάκας με κεντρική, κυκλική οπή

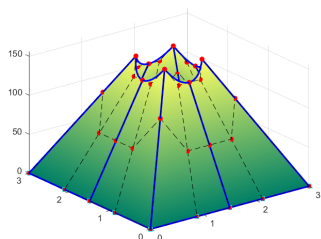
λογίας των σημείων ελέγχου της, θα απαιτούσε τη δημιουργία μοντέλου με τέσσερα μακροστοιχεία. Τα μακροστοιχεία αυτά θα χώριζαν ομοιόμορφα τον φορέα, δημιουργώντας τέσσερα στοιχεία τετραγωνικής πλάκας με οπή μορφής τεταρτοκυκλίου σε κάποια από τις τέσσερις γωνίες τους. Αξίζει να τονιστεί επίσης πως η βελτιστοποιημένη γεωμετρία της προηγούμενης εφαρμογής τετραγωνικής πλάκας με ημικυκλική οπή, δεν αποτελεί γενίκευση της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας της εφαρμογής τετραγωνικής πλάκας με γωνιακή οπή. Το γεγονός αυτό μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί από την τοπολογία των σημείων ελέγχου της εκάστοτε γεωμετρίας των δύο αυτών περιπτώσεων. Σύμφωνα με την προηγούμενη διευκρίνιση λοιπόν, είναι προφανής ο λόγος για τον οποίο δεν είναι δυνατόν να παραχθεί τοπολογικά βελτιστοποιημένο μοντέλο τετραγωνικής πλάκας με κυκλική οπή στο κέντρο της, με απλή γενίκευση των προηγούμενων.

Είναι επίσης σημαντικό να γίνει ακόμα μία παρατήρηση σχετικά με την τοπολογία των σημείων ελέγχου της διακριτοποίησης. Εφόσον τα κομβοδιανύσματα και ο αριθμός των σημείων παραμένει σταθερός, μικρές αλλαγές των συντεταγμένων αυτών, παραδείγματος χάριν μετατόπιση μόνο κατά τη διεύθυνση Y στα σημεία με συγκεκριμένη τιμή συντεταγμένης X , δεν οδηγεί σε αλλαγές στην μορφή της παραμόρφωσης και της απόκρισης του φορέα, παρά μόνο σε αλλαγή του πλέγματος ελέγχου.

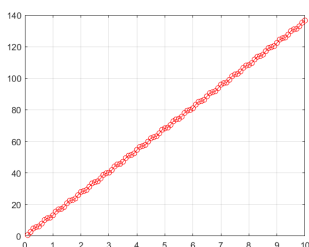
5.5.1 Αρχική διακριτοποίηση

Ο μικρός βαθμός συνέχειας των συναρτήσεων σχήματος είναι εμφανής από τους παραμορφωμένους φορείς που προκύπτουν. Στα σύνορα των μικροστοιχείων δημιουργείται “τσάχιση” της γεωμετρίας του φορέα, λόγω του C^0 βαθμού συνέχειας των συναρτήσεων σχήματος. Επίσης, η απόκριση, αν και ίδια παντού, είναι ιδιάζουσας μορφής. Η μορφή αυτή παραπέμπει σε βαθμιδωτά αυξανόμενο φορτίο ή σε απειροστή ιδιοπερίοδο. Δεδομένου ότι το φορτίο είναι σταθερό και αρμονικό, αναμένεται να προκύψει άπειρη περίοδος. Ο φορέας

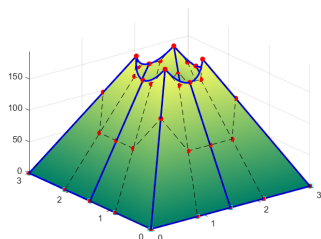
5.5. Τετραγωνική πλάκα με κυκλική οπή στο κέντρο της



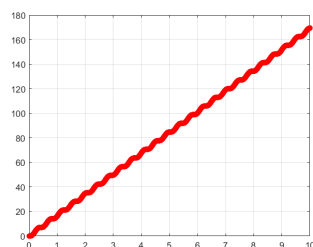
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



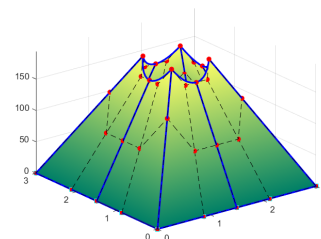
(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



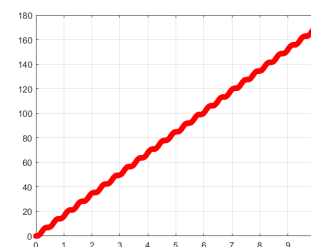
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

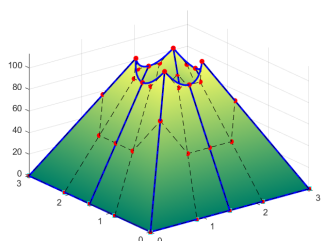


(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

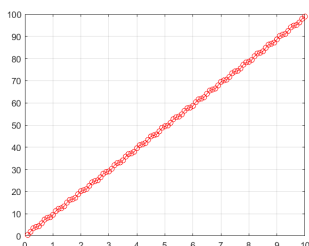


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

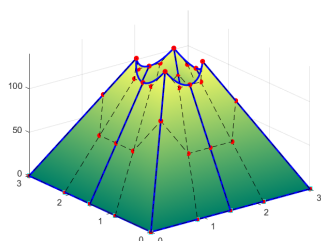
Σχήμα 131: Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.



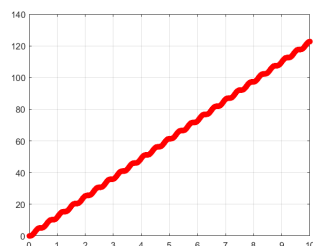
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



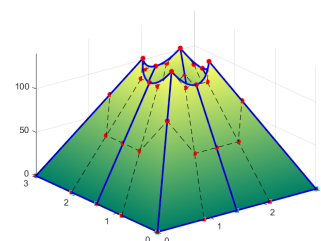
(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



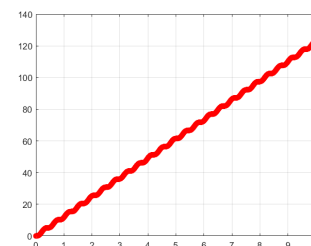
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

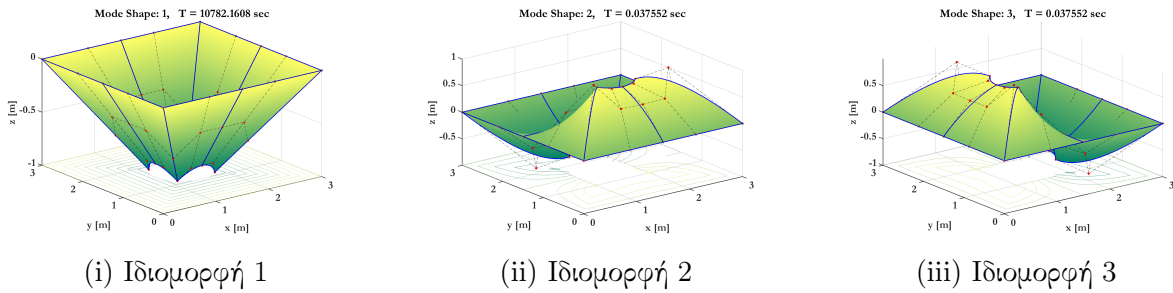


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

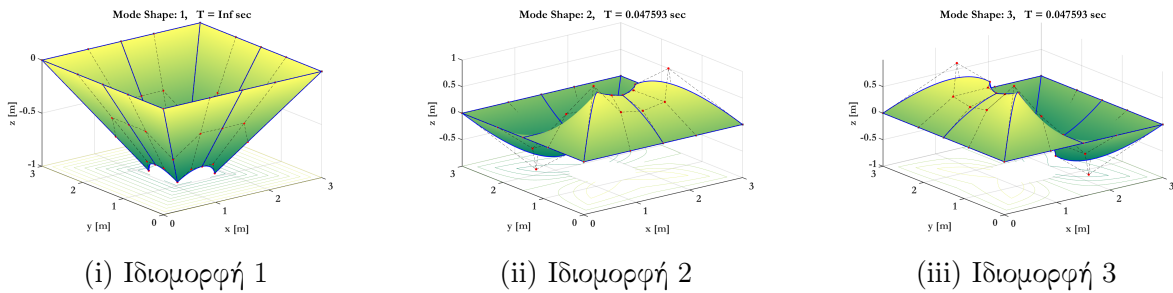
Σχήμα 132: Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.

δεν εκτελεί ταλάντωση.

Όπως ήταν αναμενόμενο από τη μορφή της απόκρισης, η πρώτη ιδιοσυχνότητα της



Σχήμα 133: Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



Σχήμα 134: Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

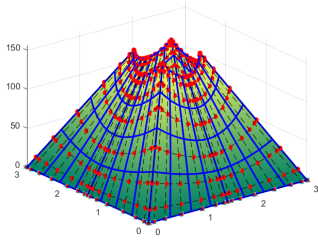
ανάλυσης με πλήρες μητρώο μάζας, είναι υπερβολικά μεγάλη και η αντίστοιχη της ανάλυσης με σωρικό πίνακα είναι ίση με άπειρο. Οι μεγάλες ιδιοπεριόδους, δεν αποκλείονται από κάποιο φυσικό νόμο και ουσιαστικά εκφράζουν ότι το ταλαντούμενο σώμα θα κάνει πάρα πολύ χρόνο να επανέλθει στην αρχική του θέση ή - στην περίπτωση της απειροστής ιδιοπεριόδου - ότι δε θα επανέλθει ποτέ. Όμως εν προκειμένω, δεν είναι λογικό να προκύπτει μία τέτοια ιδιοσυχνότητα. Το λάθος αυτό οφείλεται στην παραγωγή της διακριτοποίησης με ένα και μοναδικό μακροστοιχείο, καθώς όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, δημιουργούνται μεγάλες ασυνέχειες ενδιάμεσα στον φορέα.

Οι επόμενες δύο ιδιομορφές, έχουν λογικές τιμές συχνότητας, οι οποίες είναι και αρκετά κοντά αριθμητικά. Επιπλέον, παρατηρείται πως είναι μορφολογικά ίδιες, συγκρίνοντας μεταξύ των δύο ειδών αναλύσεων.

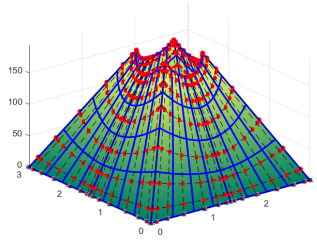
Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	10782.1608	∞
2	0.037552	0.047593
3	0.037552	0.047593

Πίνακας 5.27: Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

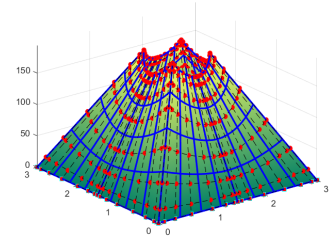
5.5. Τετραγωνική πλάκα με κυκλική οπή στο κέντρο της



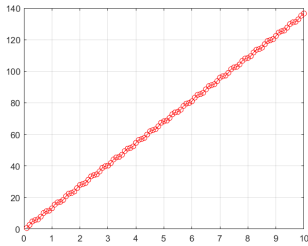
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



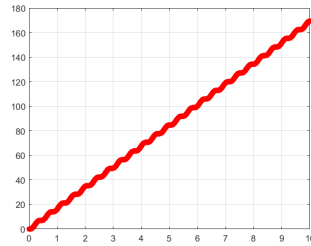
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



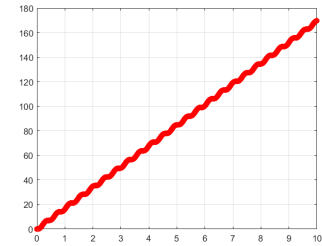
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

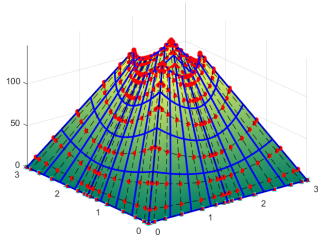


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

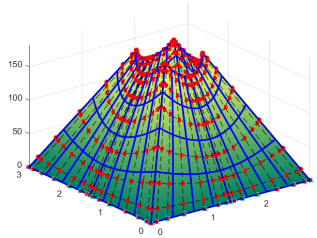


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

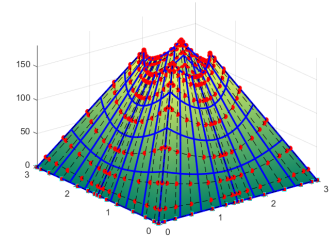
Σχήμα 135: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 128 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.



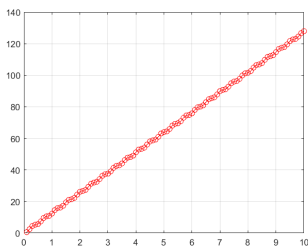
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



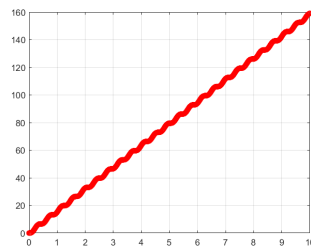
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



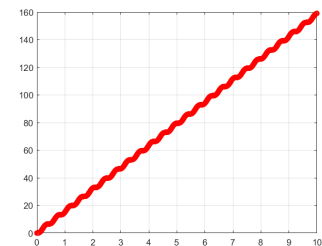
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

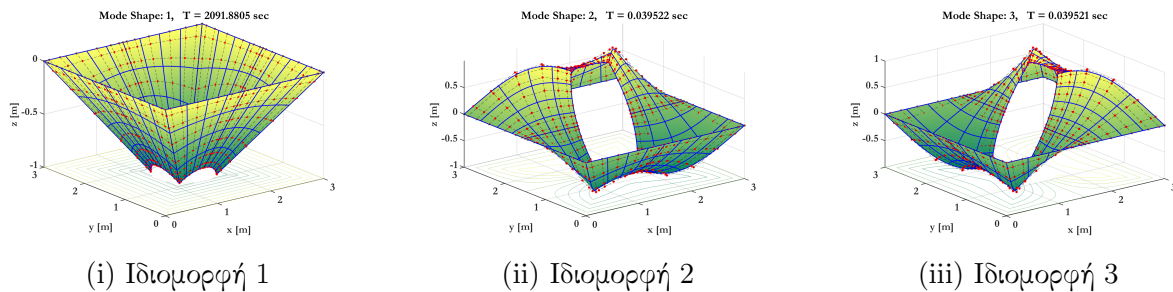
Σχήμα 136: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 128 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	2091.8805	∞
2	0.039522	0.040992
3	0.039521	0.040992

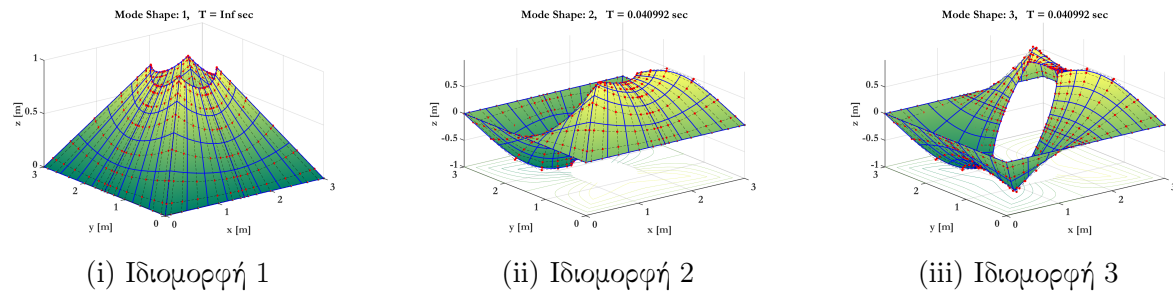
Πίνακας 5.28: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 128 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

5.5.2 Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση

Η προσαρμογή του μοντέλου δεν φαίνεται να επηρεάζει την ιδιάζουσα μορφή απόκρισης που προκύπτει, μιας και είναι ακριβώς ίδια με αυτή του αρχικού.



Σχήμα 137: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 128 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



Σχήμα 138: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 128 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

Σχετικά με τις ιδιομορφές και τις συχνότητές τους, ισχύουν τα ίδια με τη μη προσαρμοσμένη διακριτοποίηση. Η μόνη διαφορά είναι πως εδώ η πρώτη και η δεύτερη ιδιομορφή της περίπτωσης πλήρους μητρώου μάζας είναι αντίθετης φοράς με τις αντίστοιχες της περίπτωσης διαγώνιου. Είναι αξιοσημείωτο ωστόσο πως η ιδιοσυχνότητα της πρώτης ιδιομορφής, στην ανάλυση με πλήρες πίνακα μάζας, είναι πολύ μικρότερη από την αντίστοιχη του μη προσαρμοσμένου μοντέλου. Με ακόμα υψηλότερη προσαρμογή ίσως το μοντέλο μπορέσει να εκτελέσει μια ικανοποιητική ανάλυση, αλλά θα ήταν πολύ πιο πρόσφορο να δημιουργηθεί μια καταλληλότερη διακριτοποίηση για τη συγκεκριμένη γεωμετρία.

Στον πίνακα 5.29 δίνονται τα συνοπτικά αποτελέσματα. Επιλέχθηκε σημείο αναφοράς απόκρισης, με συντεταγμένες $X = 1.0000$, $Y = 1.5000$.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΚΥΚΛΙΚΗ ΟΠΗ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΗΣ					
Διακριτοποίηση	Αριθμός σημείων ελέγχου	Τύπος [M]	dt (sec)	T (sec)	U (mm)
Αρχική: 8 στοιχεία	51	M_{cons}	0.1	24.5	136.5878
		M_{lum}		14.4	98.9297
		M_{cons}	0.01	76.4	169.4965
		M_{lum}		87.2	122.7652
		M_{cons}	0.001	903.9	169.8133
		M_{lum}		770.4	122.9947
Προσαρμοσμένη: 128 στοιχεία	456	M_{cons}	0.1	316.9	136.5863
		M_{lum}		337.7	127.9632
		M_{cons}	0.01	3470.4	169.4945
		M_{lum}		3015.2	158.7939
		M_{cons}	0.001	40104.7	169.8134
		M_{lum}		26175.9	1.0000

Πίνακας 5.29: Συγκεντρωμένα αποτελέσματα αναλύσεων

Οι μετατοπίσεις δε φαίνεται να ακολουθούν κάποιο μοτίβο, όπως και οι χρόνοι ανάλυσης. Εν γένει, δεν υπάρχουν μεγάλες διαφορές μεταξύ των τιμών τους. Έτσι και αλλιώς δε υπάρχει νόημα στη σύγκριση των τιμών απόκρισης, όπως εξακριβώθηκε από τα διαγράμματα της. Στην τελευταία ανάλυση του προσαρμοσμένου μοντέλου, με το μικρότερο χρονικό διάστημα, όπου ο αριθμός των στοιχείων είναι μεγάλος και τα συνολικά βήματα είναι πολλά, φαίνεται η διαφορά στις χρονικές διάρκειες με χρήση πλήρους και διαγωνίου μητρώου. Στην πρώτη περίπτωση, η ανάλυση διήρκεσε 40.1047 sec, δηλαδή 11 ώρες, 8 λεπτά και 24 δευτερόλεπτα, ενώ στη δεύτερη περίπτωση διήρκεσε μόλις, 7 ώρες, 16 λεπτά και 15 δευτερόλεπτα.

Όπως ήταν αναμενόμενο από τις απειροστές ιδιοπεριόδους, οι πρώτες ιδιοσυχνότητες είναι μηδενικές. Εξαιρώντας αυτές και παρατηρώντας τις υπόλοιπες, συμπεραίνεται πως υπάρχει παρόλα αυτά καλή σύγκλιση μεταξύ των τιμών που προέκυψαν από ανάλυση με πλήρες μητρώο μάζας και αυτών που προέκυψαν από ανάλυση με διαγώνιο. Αυτό μάλιστα επαυξάνεται με την προσαρμογή του μοντέλου.

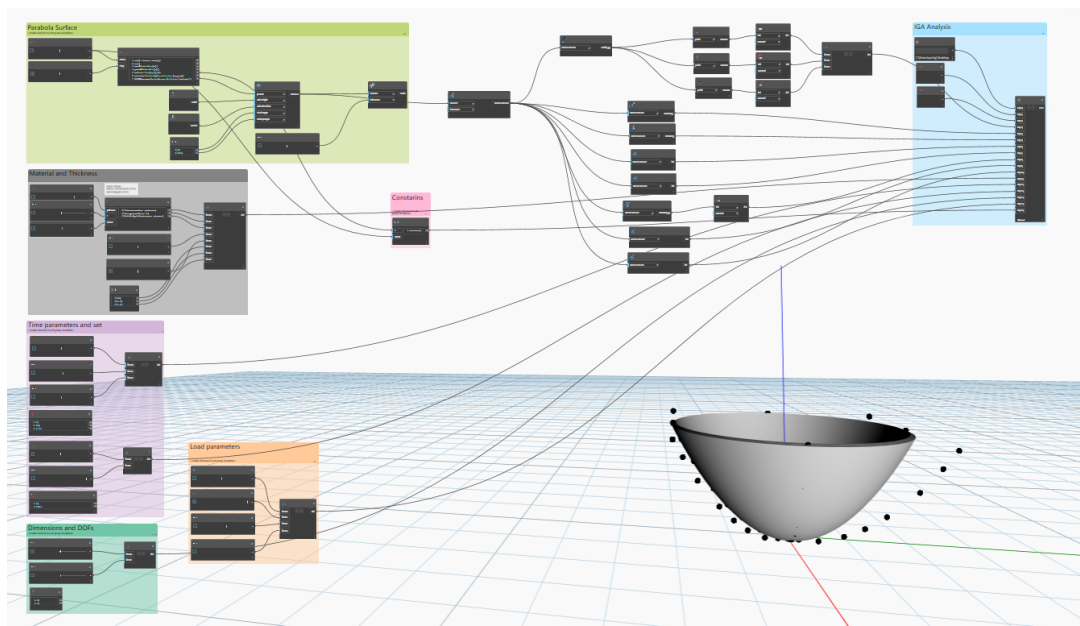
5.6 Παραβολοειδές κέλυφος

Εκτός από εφαρμογές με πλάκες εκτελέστηκαν και δύο εφαρμογές κελυφών, η πρώτη εκ των οποίων είναι το τριδιάστατο παραβολοειδές. Ο κελυφωτός φορέας κατασκευάστηκε γεωμετρικά στο περιβάλλον του Dynamo. Στη συνέχεια, στον ίδιο χώρο, προγραμματίστηκε η εξαγωγή ενός αρχείου δεδομένων, συμβατό με το Matlab, όπου εκτελέστηκε στη συνέχεια η ανάλυση του φορέα. Οι εντολές του χώρου εργασίας και η τριδιάστατη προκύπτουσα

Αρχικό μοντέλο		Προσαρμ. μοντέλο	
M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}
0	≈ 0	0	≈ 0
132.02	167.32	153.28	158.98
132.02	167.32	153.28	158.98
159.77	230.23	201.64	212.46
223.31	408.79	338.56	377.23
265.06	447.92	355.68	389.31
265.06	447.92	357.92	398.07
295.39	461.09	357.92	398.07
367.34	818.19	515.66	693.22
387.59	927.61	515.89	717.61
387.59	927.62	515.89	717.61
465.01	1217.12	516.03	762.46
468.19	1231.19	517.07	997.14
475.41	1394.20	517.11	1076.62
475.41	1406.09	517.11	1076.62

Πίνακας 5.30: Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλύσεων σε rad/sec

γεωμετρία του παραβολοειδούς, στο Dynamo, φαίνονται στην εικόνα 139.



Σχήμα 139: Χώρος εργασίας και τριδιάστατη απεικόνιση παραβολοειδούς στο Dynamo

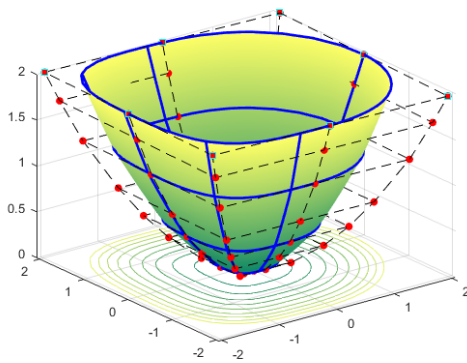
Η γεωμετρία εισάγεται με τη μορφή αρχείου δεδομένων στο Matlab, όπου δημιουργείται η διακριτοποίηση που απεικονίζεται στο σχήμα 140i.

Όπως και στις εφαρμογές των πλακών, τα χαρακτηριστικά του υλικού, του φορτίου και της ανάλυσης είναι τα ίδια που περιγράφηκαν στην παράγραφο 5.2.1. Η μόνη διαφορά είναι πως για το χρονικό βήμα $dt = 0.001$ sec δεν εκτελέστηκαν είκοσι κύκλοι επαναληπτι-

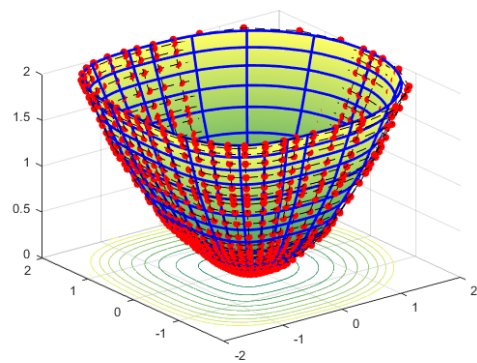
κής ανάλυσης, αλλά έγινε μία ανάλυση για σκοπούς πληρότητας των αποτελεσμάτων προς σύγκριση. Επομένως ο χρόνος ανάλυσης που αναγράφεται στον τελικό πίνακα σύνοψης αποτελεσμάτων, είναι ενδεικτικός. Επίσης οι στηρίξεις του φορέα ορίστηκαν σημειακά, σε όλα τα περιμετρικά σημεία του κελύφους που ικανοποιούν τη συνθήκη $z = z_{max}$.

Οι αρχικές πολυωνυμικές τάξεις του μοντέλου είναι $p = 3$ και $q = 2$. Τα αρχικά κομβοδιανύσματά του, εκτείνονται στο διάστημα $[0, 1]$ οι τιμές που το περικλείουν έχουν πολλαπλότητα τέσσερα και τρία αντίστοιχα. Είναι $\{\Xi\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ \dots \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$, με ενδιάμεσες τιμές τις $[0.1756, 0.2753, 0.3877, 0.5150, 0.6588]$ και $\{H\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ \dots \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$, με ενδιάμεσες τιμές τις $[0.25, 0.25, 0.50, 0.50, 0.75, 0.75]$. Σε αυτό το σημείο, επισημαίνεται πως το κομβοδιάνυσμα $\{\Xi\}$, δεν είναι ομοιόμορφο, καθώς δεν διατέμνεται από ισαπέχοντες κόμβους.

Εκτελέστηκε εκλέπτυνση του φορέα σύμφωνα με την γνωστή k τεχνική προσαρμογής. Ο νέος φορέας φαίνεται στην εικόνα 140ii.



(i) Αρχική διακριτοποίηση



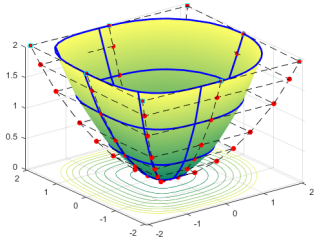
(ii) Τοπολογικά Αρχική διακριτοποίηση

Σχήμα 140: Αρχική και προσαρμοσμένη διακριτοποίηση, φορέα παραβολοειδούς κελύφους

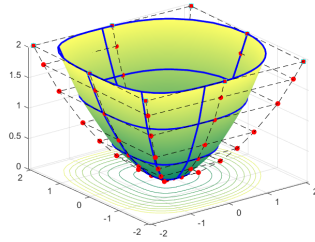
Οι πολυωνυμικές τάξεις του προσαρμοσμένου φορέα είναι $p = 5$ και $q = 4$. Τα νέα κομβοδιανύσματα είναι και τα δύο ομοιόμορφα, με ακραίες τιμές πολλαπλότητας έξι και πέντε αντίστοιχα για τα $\{\Xi\}$ και $\{H\}$. Σε αυτό το σημείο αναφέρεται πως η προσαρμογή πραγματοποιήθηκε μέσω του Matlab και για αυτό τα προκύπτοντα κομβοδιανύσματα είναι - και τα δύο - ομοιόμορφα, παρά το γεγονός πως το $\{\Xi\}$ ήταν αρχικά μη ομοιόμορφο, όπως παράτηγχε από το Dynamo. Επομένως, είναι $\{\Xi\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ \dots \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$, με τριάντα τρεις ενδιάμεσες τιμές και $\{H\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ \dots \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$, με εικοσιτέσσερις ενδιάμεσες τιμές. Οι τιμές αυτές και των δύο διανυσμάτων, αναγράφονται αναλυτικά στο παράρτημα Α', παράγραφο Α'.2.

5.6.1 Αρχική διακριτοποίηση

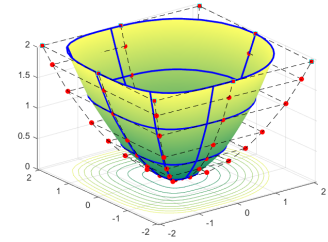
Οι παραμορφώσεις του φορέα δεν είναι ορατές σε καμία υποπερίπτωση ανάλυσης. Όμως υπάρχουν τιμές απόκρισης, απλά είναι πολύ μικρές. Αναγράφονται στον τελικό πίνακα α-



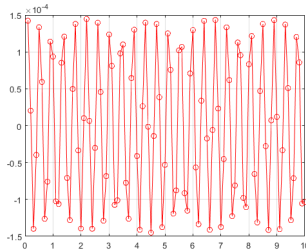
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



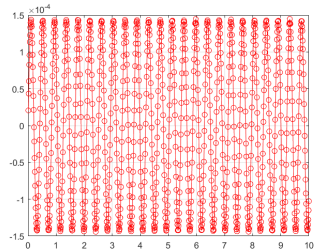
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



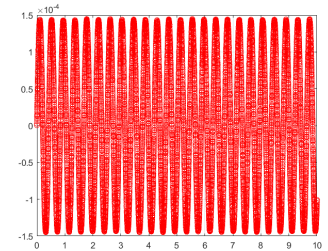
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

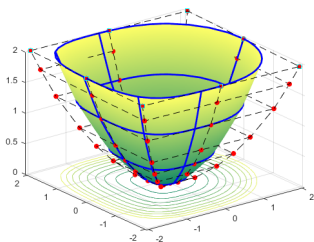


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

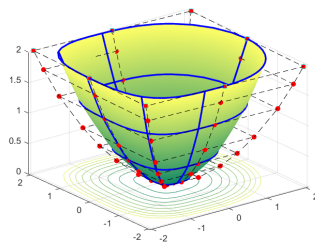


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

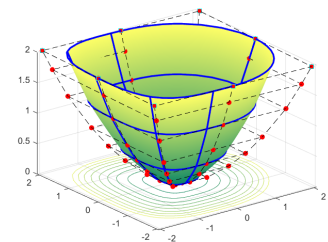
Σχήμα 141: Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.



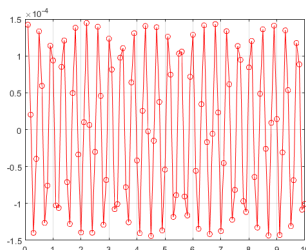
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



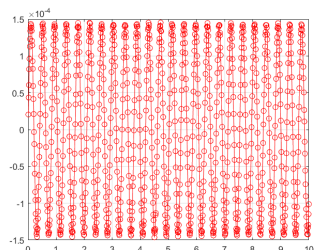
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



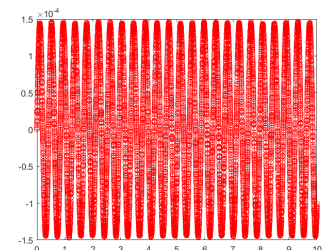
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

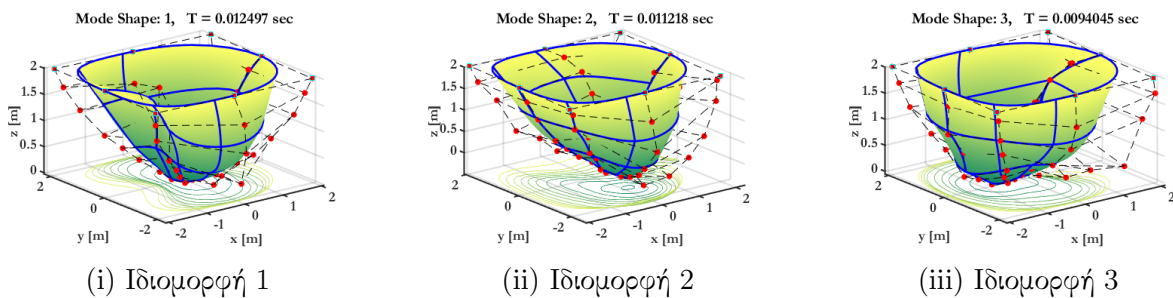
Σχήμα 142: Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.

ποτελεσμάτων 5.33. Κρίνοντας από την μορφή των διαγραμμάτων απόκρισης, για τα δύο μικρότερα χρονικά βήματα, ο φορέας εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερό πλάτος.

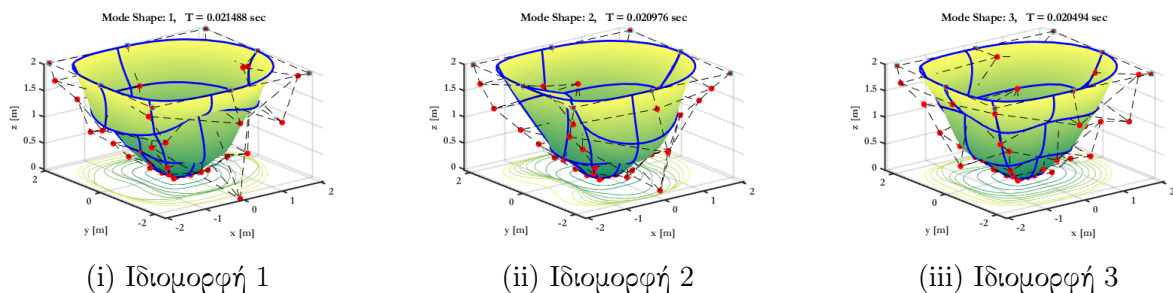
Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.012497	0.021488
2	0.011218	0.020976
3	0.0094045	0.020494

Πίνακας 5.31: Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

Επίσης, παρατηρείται σύγκλιση των αποτελεσμάτων μεταξύ των δύο περιπτώσεων ανάλυσης, από το πρώτο κιόλας χρονικό βήμα.



Σχήμα 143: Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



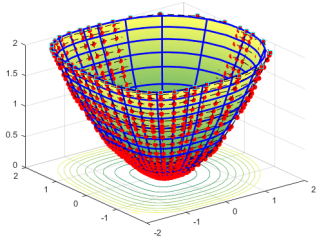
Σχήμα 144: Αρχική διακριτοποίηση με 8 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας

Όλες οι ιδιοπερίοδοι έχουν πολύ μικρές τιμές και οι ιδιομορφές είναι κυρίως μεμβρανικές. Όλες τους διαφέρουν μορφολογικά μεταξύ τους. Συγκεκριμένα για την περίπτωση ανάλυσης με χρήση σωρικού μητρώου μάζας, οι προκύπτουσες ιδιοτιμές είναι σχεδόν ίδιες αριθμητικά.

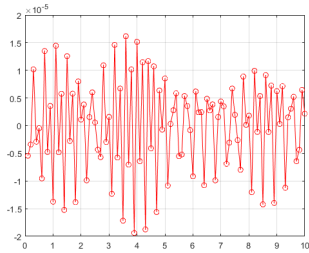
5.6.2 Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση

Με την προσαρμογή του μοντέλου προκύπτουν αποκρίσεις μη αρμονικής μορφής. Με το μικρότερο χρονικό βήμα $dt = 0.001$ sec, οι αποκρίσεις των δύο περιπτώσεων ανάλυσης αρχίζουν να ομοιάζουν πολύ μεταξύ τους. Οι παραμορφώσεις, ξανά δεν είναι εμφανείς, λόγω του μικρού μεγέθους τους.

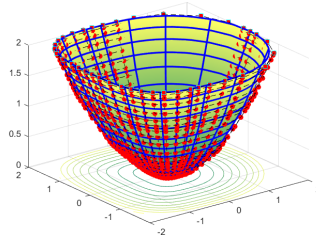
Όμοια με το μη προσαρμοσμένο μοντέλο, οι ιδιοτιμές είναι πολύ μικρές αριθμητικά και στην περίπτωση ανάλυσης με χρήση διαγωνίου μητρώου μάζας είναι όλες σχεδόν ίδιες με-



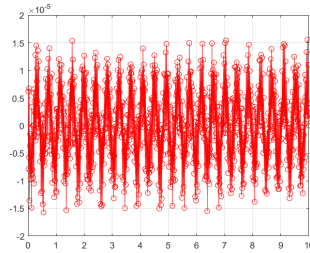
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



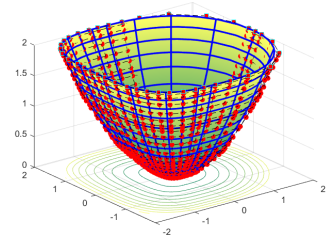
(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



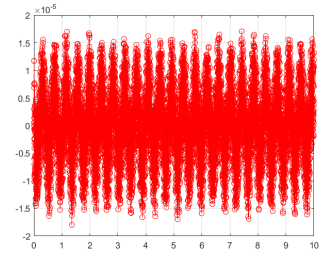
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

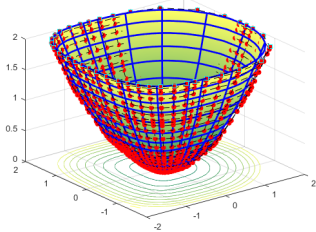


(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

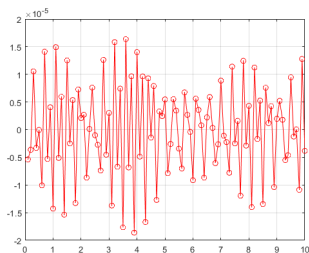


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

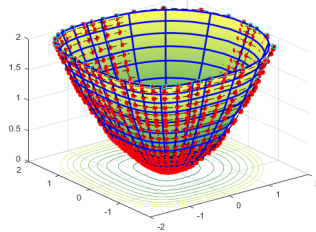
Σχήμα 145: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 384 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.



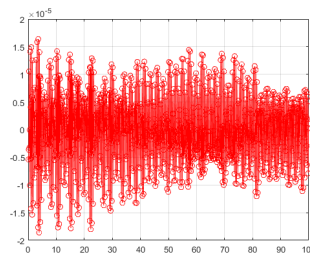
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



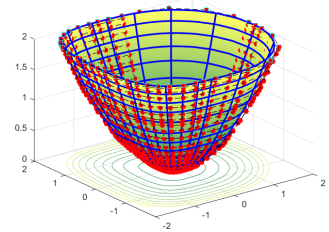
(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



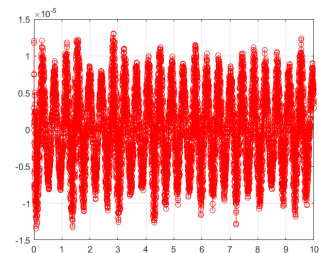
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

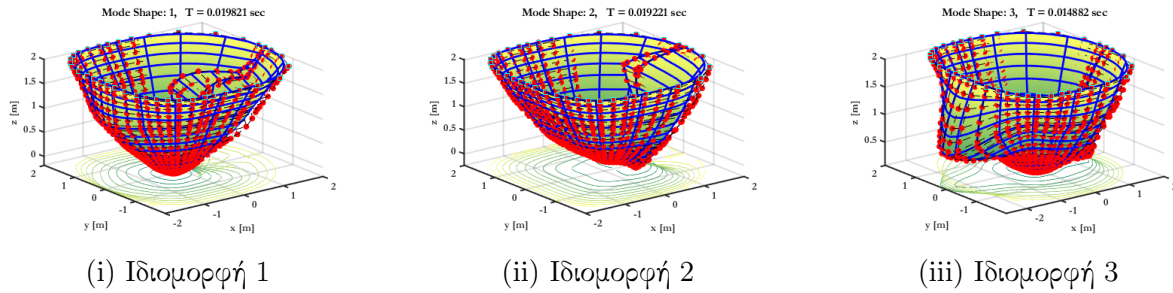


(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

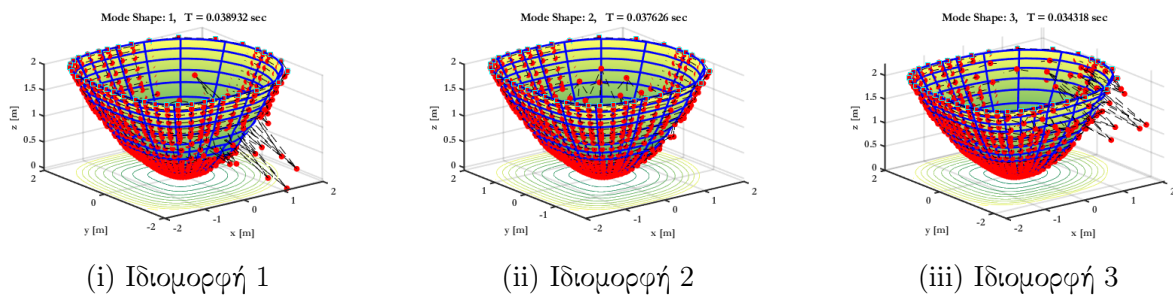


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

Σχήμα 146: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 384 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.



Σχήμα 147: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 384 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



Σχήμα 148: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 384 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

ταξύ τους. Όπως και στην αρχική διακριτοποίηση, οι ιδιομορφές είναι κυρίως μεμβρανικές. Τέλος, είναι άξιο παρατήρησης το γεγονός πως από την ανάλυση με χρήση σωρικού μητρώου, προκύπτουν ιδιομορφές το σχήμα των οποίων διαφέρει ελάχιστα από τον αρχικό απαραμόρφωτο φορέα. Η διαφορετική θέση των σημείων ελέγχου βέβαια, επιβεβαιώνει πως ο φορέας δεν παρέμεινε απαραμόρφωτος.

Στον πίνακα 5.33 παρατίθενται συνοπτικά τα αποτελέσματα κάθε ανάλυσης. Ως σημείο αναφοράς της απόκρισης, επιλέχθηκε αυτό με συντεταγμένες $X = 0.0, Y = 0.0$ και $Z = 0.0$.

Όλες τιμές που της μετατόπισης του παραβολοειδούς, είναι της τάξης του 10^{-4} ή ακόμα μικρότερες. Αυτός είναι και ο λόγος που στα παραμορφωμένα σχήματα δεν είναι εμφανής καμία αλλαγή στον φορέα, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Ωστόσο, η επιρροή της προσαρμογής της διακριτοποίησης είναι εμφανής. Οι τιμές της μετατόπισης στο αρχικό μοντέλο, για τα δύο μεγαλύτερα χρονικά βήματα, είναι πιο υψηλές συγκριτικά με όλες τις

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.019821	0.038932
2	0.019221	0.037626
3	0.014882	0.034318

Πίνακας 5.32: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 384 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΕΣ ΚΕΛΥΦΟΣ					
Διακριτοποίηση	Αριθμός σημείων ελέγχου	Τύπος [M]	dt (sec)	T (sec)	U (10 ⁻⁴ mm)
Αρχική: 24 στοιχεία	81	M_{cons}	0.1	18.4	-1.4957
		M_{lum}		18.4	-1.4857
		M_{cons}	0.01	184.3	-1.4768
		M_{lum}		198.9	-1.4618
		M_{cons}	0.001	1817.4	0.0296
		M_{lum}		1679.5	0.0296
Προσαρμοσμένη: 384 στοιχεία	1131	M_{cons}	0.1	1593.4	0.02089
		M_{lum}		1670.3	-0.03954
		M_{cons}	0.01	14840.2	0.0037
		M_{lum}		18244.6	0.1030
		M_{cons}	0.001	159118.65	0.1053
		M_{lum}		158016.35	0.0296

Πίνακας 5.33: Συγκεντρωμένα αποτελέσματα αναλύσεων

υπόλοιπες. Ακόμη, παρατηρείται και η επιρροή της τιμής του χρονικού βήματος. Στο πρώτο μοντέλο, με χρήση $dt = 0.001$ sec, προκύπτουν μετατοπίσεις ίδιες με αυτή του προσαρμοσμένου, ανάλυσης με χρήση διαγώνιου μητρώου. Επιβεβαιώνεται εκ νέου, πως η ακρίβεια της ανάλυσης αυξάνεται με τη μείωση του χρονικού βήματος (και αύξηση των συνολικών χρονικών βημάτων της ανάλυσης).

Αρχικό μοντέλο		Προσαρμ. μοντέλο	
M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}
292.40	502.79	161.09	295.08
299.52	560.09	166.64	316.98
306.59	668.10	182.48	326.89
328.98	706.42	187.29	394.83
345.89	736.73	220.89	422.20
351.51	875.72	226.65	478.65
363.05	901.69	227.97	499.81
366.51	939.71	228.87	584.99
380.01	1042.05	232.20	623.39
382.49	1076.71	250.56	630.38
417.41	1120.24	258.61	655.54
425.86	1147.32	259.19	707.54
434.52	1168.05	266.96	714.42
455.82	1212.56	270.38	716.45
464.42	1265.31	271.46	739.09

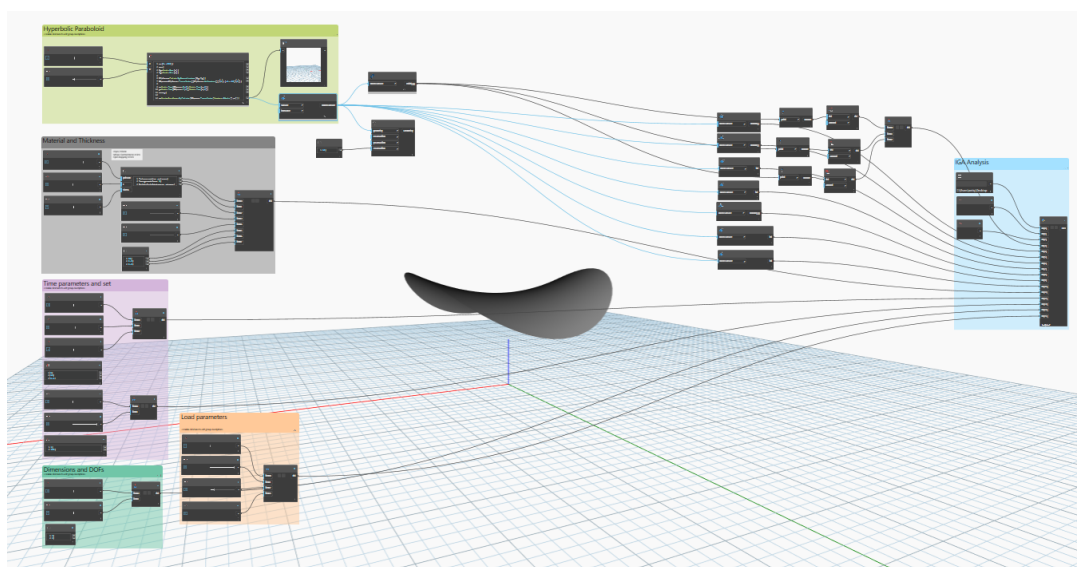
Πίνακας 5.34: Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλύσεων σε rad/sec

Κρίνοντας από τον πίνακα 5.34, το προσαρμοσμένο μοντέλο παρουσιάζει μεγαλύτερη

σύγκλιση μεταξύ των ιδιοσυχνοτήτων που πάρθηκαν από την ανάλυση με χρήση πλήρους μητρώου μάζας, σε σχέση με αυτές που πάρθηκαν από την ανάλυση με χρήση διαγωνίου. Επίσης παρατηρείται πως οι τιμές των αναλύσεων με πλήρες πίνακα, ομοιάζουν περισσότερο από αυτές των αναλύσεων με διαγώνιο.

5.7 Υπερβολικό παραβολοειδές κέλυφος

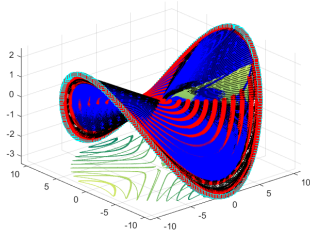
Η τελευταία εφαρμογή που εκτελέστηκε αφορά κέλυφος μορφής υπερβολικού παραβολοειδούς. Το μοντέλο παρήχθη με δύο διαφορετικούς τρόπους, με δημιουργία αρχείου δεδομένων με τη γεωμετρία του, όπως οι εφαρμογές των πλακών και με τη χρήση του προγράμματος Dynamo. Οι εντολές που ακολουθήθηκαν για τη δημιουργία του μοντέλου στο Dynamo, μαζί με τον όλο χώρο εργασίας απεικονίζονται στο σχήμα 149.



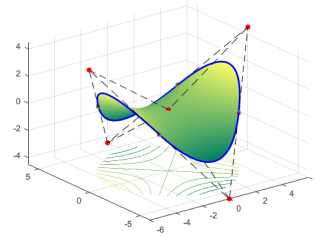
Σχήμα 149: Χώρος εργασίας και τριδιάστατη απεικόνιση υπερβολικού παραβολοειδούς στο Dynamo

Τα δύο διαφορετικά μοντέλα, όπως προβάλλονται στα γραφήματα του Matlab απεικονίζονται στις εικόνες 150i, 150ii.

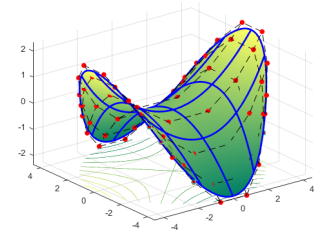
Η διακριτοποίηση του σχήματος 150ii, δημιουργήθηκε σύμφωνα με την τοπολογικά βέλτιστη τοποθέτηση των σημείων ελέγχου, το σύνολο των οποίων είναι εννιά. Τα σημεία αυτά συντελούν ένα και μοναδικό μικροστοιχείο. Αντίθετα, το μοντέλο που προέκυψε από το Dynamo, αποτελείται από πέντε χιλιάδες ογδόντα δύο σημεία, το πλέγμα των οποίων δημιουργεί τρεις χιλιάδες εννιακόσια εξήντα συνολικά μικροστοιχεία. Αυτός είναι και ο λόγος για την πολύπλοκη απεικόνισή του (σχήμα 150i). Τα δύο μοντέλα έχουν επίσης διαφορετικά κομβοδιανύσματα και πολυωνυμικές τάξεις. Το πρώτο διέπεται από πολυωνυμικούς βαθμούς $p = q = 2$, ενώ δεύτερο από $p = q = 3$. Τα κομβοδιανύσματα του πρώτου είναι $\{\Xi\} = \{H\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$, ενώ του δευτε-



(i) Φορέας δημιουργημένος στο Dynamo



(ii) Φορέας δημιουργημένος εκτός Dynamo



(iii) Προσαρμοσμένος φορέας (εκτός Dynamo)

Σχήμα 150: Μοντέλα κελύφους, μορφής υπερβολικού παραβολοειδούς, προς ανάλυση

ρου είναι $\{\Xi\} = \{H\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ \dots \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$, με τριακόσιες πενήντα εννιά ενδιάμεσες τιμές στο $\{\Xi\}$ και δέκα ενδιάμεσες τιμές στο $\{H\}$, τις $[0.0888, 0.1777, 0.2669, 0.3564, 0.4462, 0.5367, 0.6277, 0.7195, 0.812, 0.9055]$. Οι ενδιάμεσες τιμές του $\{\Xi\}$, αναγράφονται αναλυτικά στο παράρτημα Α', παράγραφος Α'.2. Αναφέρεται επιπλέον πως τα $\{\Xi\}$, $\{H\}$ τείνουν να είναι ομοιόμορφα, αλλά δεν είναι πλήρως. Επισημαίνεται ακόμη, πως το Dynamo παράγει κομβοδιανύσματα αριθμητικών τιμών έξω από το διάστημα $[0, 1]$. Τα προαναγραφόμενα προέκυψαν ύστερα από τροποποίηση της διαδικασίας εξαγωγής αρχείου δεδομένων, ώστε να έχουν την επιθυμητή μορφή. Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, συμπεραίνεται εύκολα πως το Dynamo δεν παράγει από μόνο του βέλτιστες διακριτοποιήσεις και όσο αφορά τα σημεία ελέγχου και την κατανομή τους στη γεωμετρία αλλά και όσο αφορά τις πολυωνυμικές τάξεις και τα κομβοδιανύσματα του φορέα. Για να επιτευχθεί αυτό θα έπρεπε το Dynamo να χρησιμοποιηθεί περισσότερο ως πλατφόρμα προγραμματισμού Python, παρά ως εφαρμογή γεωμετρικής σχεδίασης, όπως είναι κατασκευασμένο να λειτουργεί.

Το μοντέλο του σχήματος 150ii χρησιμοποιείται και για την παραγωγή νέου διακριτοποιημένου μοντέλου, με την τεχνική της k προσαρμογής. Ο προσαρμοσμένος φορέας φαίνεται στην εικόνα 150iii. Χαρακτηρίζεται από εξήντα τέσσερα σημεία ελέγχου και δεκαέξι συνολικά μικροστοιχεία. Έχει συναρτήσεις σχήματος τάξης $p = q = 4$ και ομοιόμορφα κομβοδιανύσματα, τα οποία ανήκουν στο διάστημα $[0, 1]$ και έχουν ακραίες τιμές με βαθμό πολυπλοκότητας πέντε. Αναλυτικά είναι $\{\Xi\} = \{H\} = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ \dots \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0\}$, με ενδιάμεσες τιμές τις $[0.25, 0.5, 0.75]$ και στα δύο.

Τα δύο αυτά μοντέλα υποβάλλονται σε όλες τις αναλύσεις και τις υποπεριπτώσεις τους, που πραγματοποιήθηκαν και στις προηγούμενες εφαρμογές. Τα χαρακτηριστικά υλικού και του φορτίου, παραμένουν αμετάλλακτα. Ο φορέας του Dynamo αναλύεται μόνο για χρονικό βήμα $dt = 0.1 \text{ sec}$, για σκοπούς σύγκρισης και πληρότητας. Αναφέρεται επίσης, πως όλοι οι φορείς είναι σημειακά στηριγμένοι σε τέσσερα περιμετρικά - ίδια σε όλες τις περιπτώσεις - σημεία.

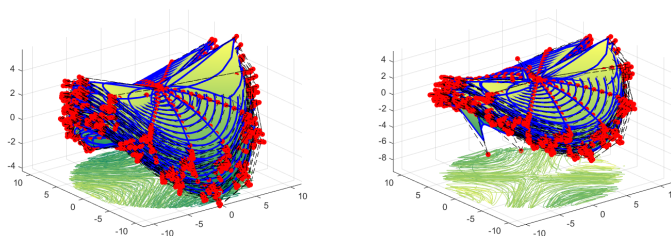
Πρώτα παρατίθεται τα αποτελέσματα του φορέα του σχήματος 150i και στη συνέχεια τα αποτελέσματα του βελτιστοποιημένου και του προσαρμοσμένου φορέα. Όπως πάντα,

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	3.0762	3.0915
2	2.9725	3.0796
3	2.8096	2.8144

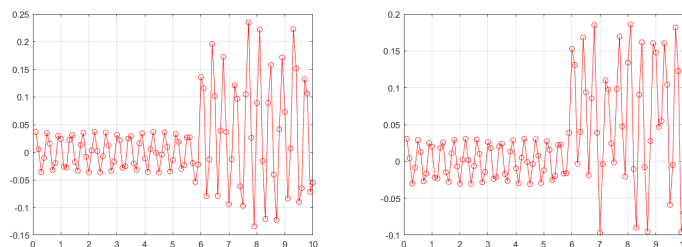
Πίνακας 5.35: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

απεικονίζονται κατά σειρά όλοι οι παραμορφωμένοι φορείς που προέκυψαν από κάθε υποπερίπτωση ανάλυσης, μαζί με τις αντίστοιχες αποκρίσεις τους. Τέλος, παρατίθενται και οι ιδιομορφές της κάθε περίπτωσης.

5.7.1 Διακριτοποίηση του Dynamo



(i) Παραμορφωμένος φορέας (ii) Παραμορφωμένος φορέας
 ανάλυσης πλήρους μητρώου ανάλυσης διαγωνίου μητρώου
 μάζας μάζας

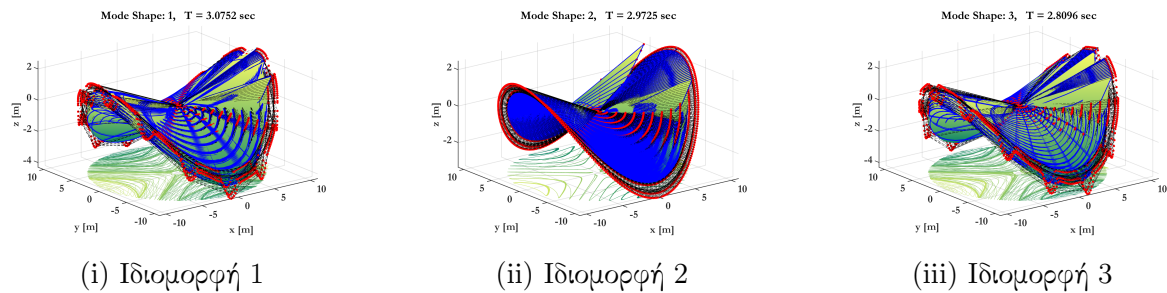


(iii) Απόκριση ανάλυσης (iv) Απόκριση ανάλυσης δια-
 πλήρους μητρώου μάζας γώνιου μητρώου μάζας

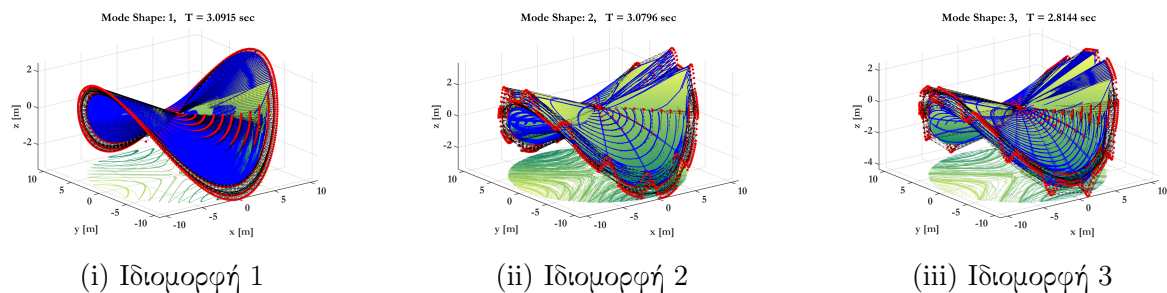
Σχήμα 151: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων με χρήση πλήρους και διαγωνίου μητρώου μάζας.

Στους παραμορφωμένους φορείς διακρίνεται ο υπερβολικά μεγάλος αριθμός σημείων ελέγχου και μάλιστα φαίνεται πως πολλά από αυτά κατέχουν σχεδόν την ίδια θέση, εάν και δεν υπάρχουν σημεία με ταυτόσημες συντεταγμένες. Προφανώς τα αποτελέσματα από το μοντέλο αυτό δε μπορούν να είναι ακριβή, ούτε να χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων. Όσο αφορά τις αποκρίσεις, παρατηρείται πως εκτελείται ταλάντωση σε δύο φάσεις. Με το πέρας της πρώτης, το πλάτος αυξάνεται δραματικά.

Με τα σχήματα των ιδιομορφών, επαληθεύεται ξανά πως δεν είναι δυνατόν να προκύψουν σωστά αποτελέσματα από αυτόν το φορέα, σχηματικά τουλάχιστον. Παρόλα αυτά,



Σχήμα 152: Αρχική διακριτοποίηση με 3960 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας



Σχήμα 153: Διακριτοποίηση με 3960 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

αναφέρεται πως οι ιδιοπερίοδοι που προέκυψαν είναι πολύ κοντά αριθμητικά στις δύο περιπτώσεις αναλύσεων και είναι όλες μικρές.

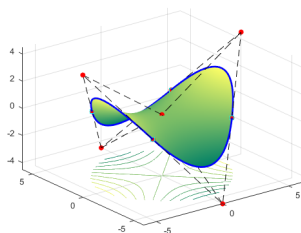
5.7.2 Βέλτιστη διακριτοποίηση

Τα παραμορφωμένα σχήματα, φαίνεται να είναι αμετάλλαχτα από την αρχική κατάσταση του φορέα. Αυτό συμβαίνει διότι οι παραμορφώσεις είναι πολύ μικρές. Οι τιμές τους αναγράφονται στον πίνακα 5.38. Ωστόσο, αυτό παρατηρείται σε όλες τις υποπεριπτώσεις ανάλυσης, δηλαδή υπάρχει ομοιομορφία. Σχετικά με τη μορφή της απόκρισης, στην ανάλυση με πλήρες μητρώο μάζας, είναι απλή αρμονική και διαφέρει με αυτή της ανάλυσης με χρήση σωρικού μητρώου. Ακόμα και με το μικρότερο χρονικό βήμα δεν επιτυγχάνεται σύγκλιση.

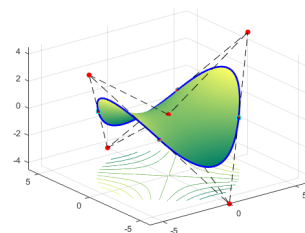
Οι παραμορφώσεις και στις ιδιομορφές δεν είναι τόσο εμφανείς απευθείας, καθώς είναι κυρίως μεμβρανικές, με μικρές μετατοπίσεις. Όπως φαίνεται από τις τιμές του πίνακα 5.36, οι ιδιοπερίοδοι αν και είναι της ίδιας τάξης, δεν έχουν κοντινές τιμές στις δύο περιπτώσεις

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.02141	0.054617
2	0.01845	0.045221
3	0.018449	0.045219

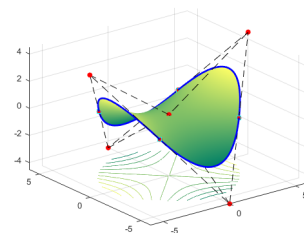
Πίνακας 5.36: Αρχική διακριτοποίηση με 1 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών



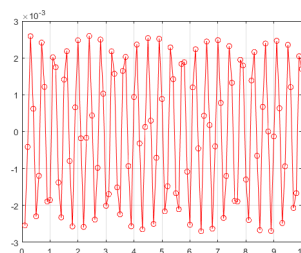
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



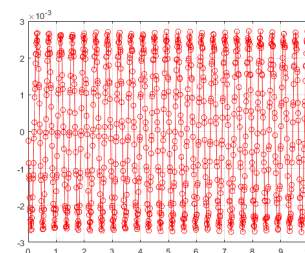
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



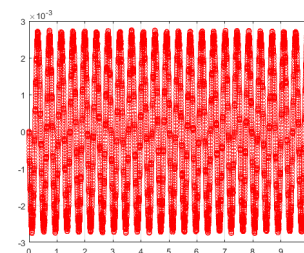
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec

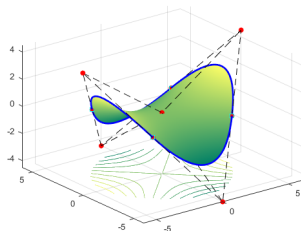


(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec

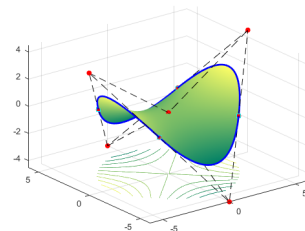


(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

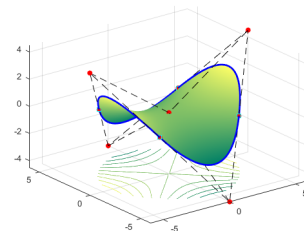
Σχήμα 154: Αρχική διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.



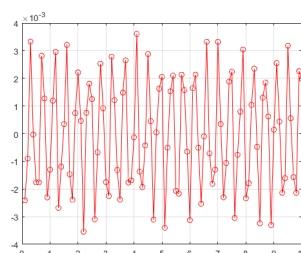
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



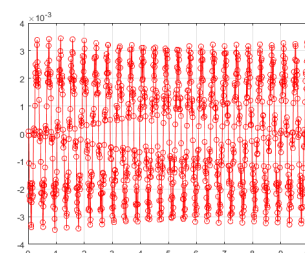
(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



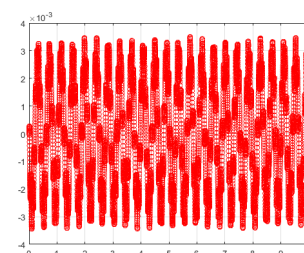
(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec



(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec



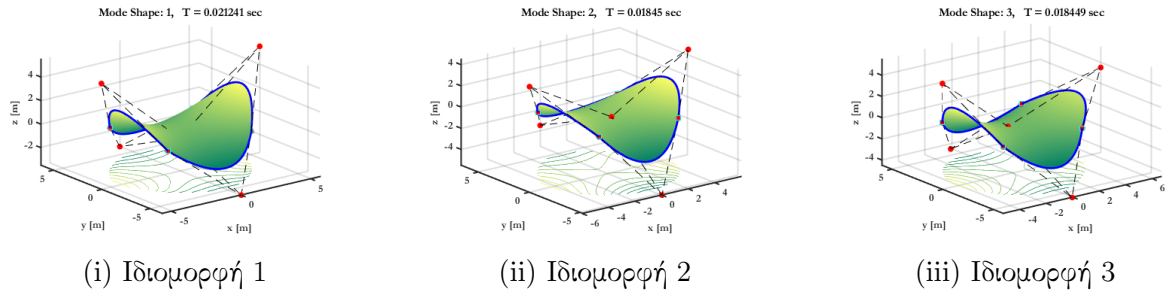
(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec



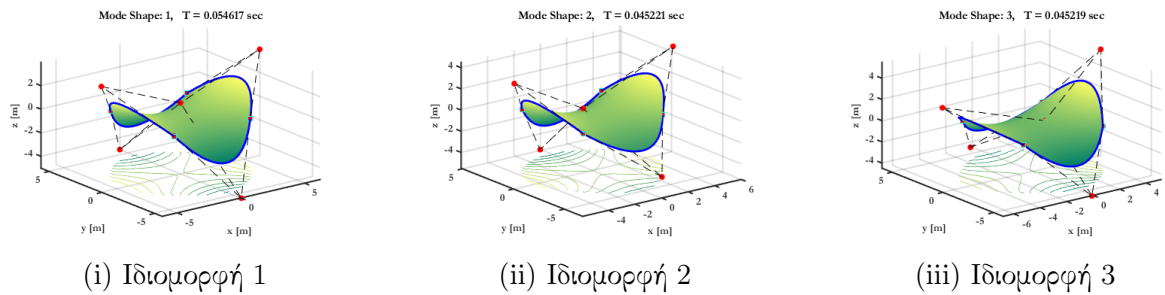
(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

Σχήμα 155: Αρχική διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.

ανάλυσης.

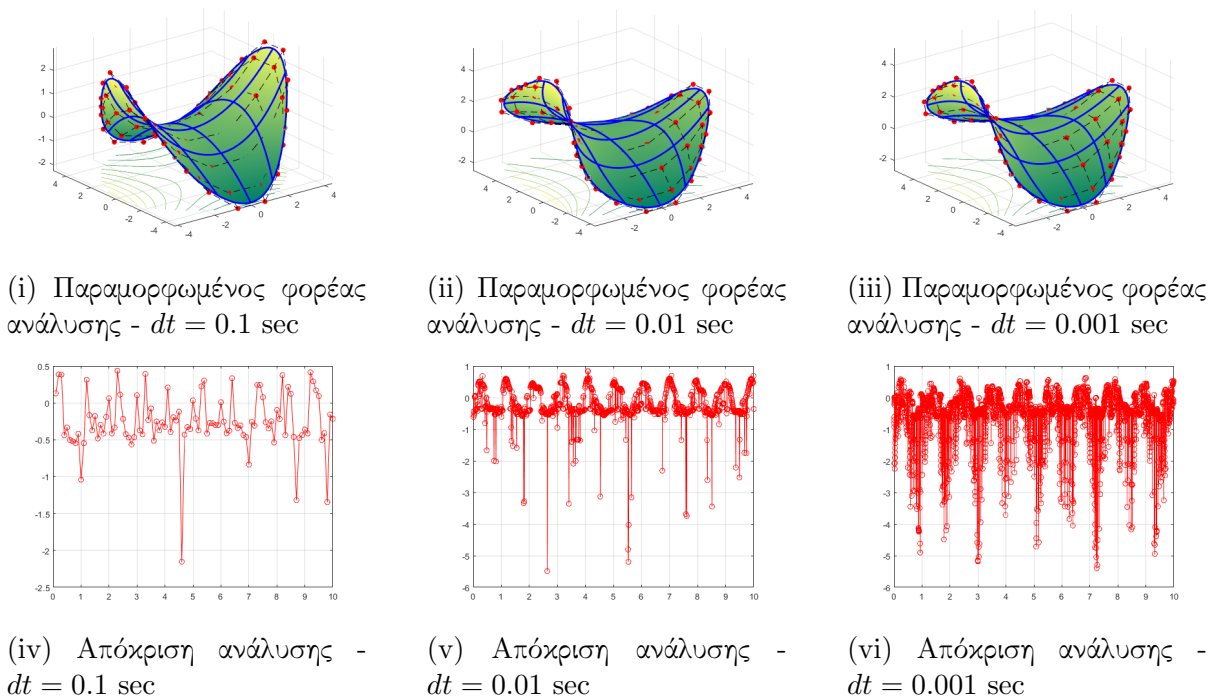


Σχήμα 156: Αρχική διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας

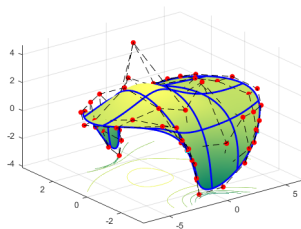
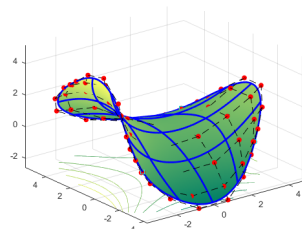
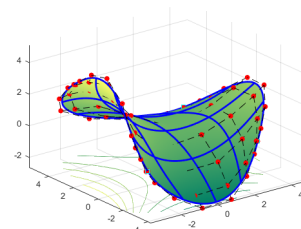
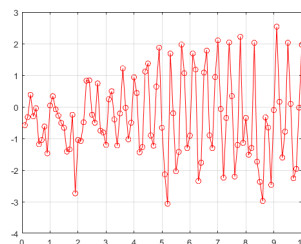
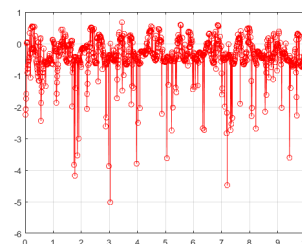
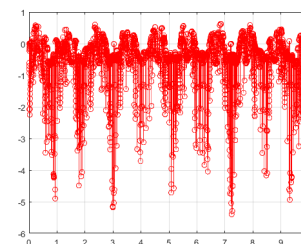


Σχήμα 157: Αρχική διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

5.7.3 Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση

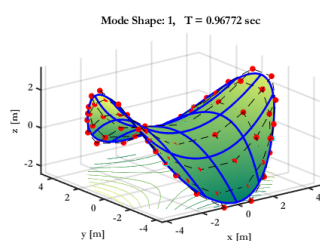


Σχήμα 158: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση πλήρους μητρώου μάζας.

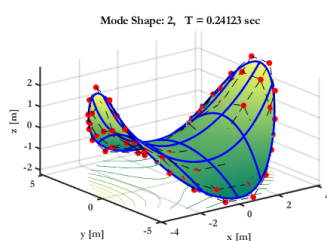
(i) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec(ii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec(iii) Παραμορφωμένος φορέας ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec(iv) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.1$ sec(v) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.01$ sec(vi) Απόκριση ανάλυσης - $dt = 0.001$ sec

Σχήμα 159: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Παραμορφωμένοι φορείς και αποκρίσεις, αναλύσεων 100, 1000 και 10000 χρονικών βημάτων, με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας.

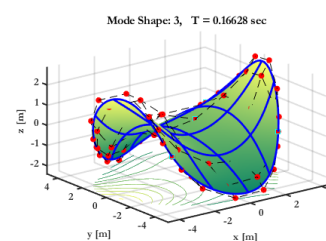
Με την προσαρμογή της διακριτοποίησης, οι παραμορφώσεις του φορέα σε κάθε χρονικό βήμα είναι πιο εμφανείς. Η απόκριση έχει αλλάξει εντελώς μορφή από αυτή του μη προσαρμοσμένου μοντέλου. Για το πρώτο και μεγαλύτερο χρονικό βήμα, οι προκύπτουσες αποκρίσεις και παραμορφώσεις διαφέρουν μεταξύ των αναλύσεων με διαφορετικά μητρώα μάζας. Οι επόμενες δύο αναλύσεις με χρονικά βήματα $dt = 0.01$ sec και $dt = 0.001$ sec, φαίνεται να παρουσιάζουν σύγκλιση. Κρίνοντας από το διάγραμμα του σχήματος 159iv, το οποίο παρουσιάζει σταδιακά αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης, είναι εμφανές πως με τόσο μεγάλο dt και με χρήση χωρικού μητρώου μάζας, το μοντέλο ανάλυσης δεν είναι ικανό να παράξει σωστά αποτελέσματα.



(i) Ιδιομορφή 1



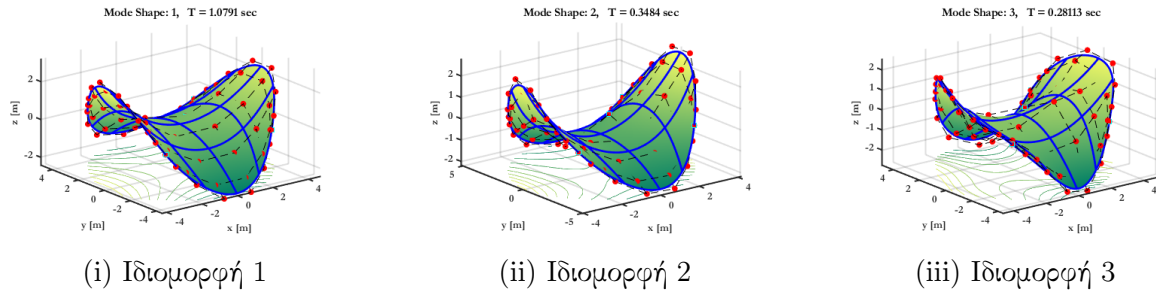
(ii) Ιδιομορφή 2



(iii) Ιδιομορφή 3

Σχήμα 160: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας

Οι ιδιοτιμές του προσαρμοσμένου μοντέλου προς σύγκριση (πίνακας 5.37), είναι πολύ



Σχήμα 161: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Ιδιομορφές με χρήση διαγώνιου μητρώου μάζας

Τιμές ιδιοπεριόδων (sec)		
A/I	Χρήση M_{cons}	Χρήση M_{lum}
1	0.96772	1.0791
2	0.24123	0.3484
3	0.16628	0.28113

Πίνακας 5.37: Προσαρμοσμένη διακριτοποίηση με 64 στοιχεία: Τιμές τριών πρώτων ιδιομορφών

πιο κοντά από τις αντίστοιχες του μη προσαρμοσμένου. Μάλιστα η πρώτη και η δεύτερη ιδιομορφή, είναι και μορφολογικά ίδιες.

Όλα τα αποτελέσματα κάθε ανάλυσης παρατίθενται στον πίνακα 5.38. Ως σημείο αναφοράς της απόκρισης, επιλέχθηκε το κεντρικό με συντεταγμένες $X = 0.0$, $Y = 0.0$ και $Z = 0.0$.

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟ ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΕΣ ΚΕΛΥΦΟΣ					
Διακριτοποίηση	Αριθμός σημείων ελέγχου	Τύπος [M]	dt (sec)	T (sec)	U (mm)
Με χρήση Dynamo: 3960 στοιχεία	5082	M_{cons}	0.1	13374.4	-0.0001
		M_{lum}		10894.2	-0.0001
Χωρίς χρήση Dynamo: 1 στοιχείο	9	M_{cons}	0.1	4.01	0.0017
		M_{lum}		4.11	0.0019
		M_{cons}	0.01	46.2	0.0017
		M_{lum}		44.1	0.0026
		M_{cons}	0.001	428.5	0.0019
		M_{lum}		413.8	0.0014
Χωρίς χρήση Dynamo, προσαρμοσμένη 16 στοιχεία	64	M_{cons}	0.1	51.1	-0.2151
		M_{lum}		51.6	1.9637
		M_{cons}	0.01	494.1	-0.3574
		M_{lum}		497.3	-0.1249
		M_{cons}	0.001	4708.9	0.4583
		M_{lum}		4390.9	0.5289

Πίνακας 5.38: Συγκεντρωμένα αποτελέσματα αναλύσεων

Στο αρχική διακριτοποίηση, με βέλτιστο τρόπο, μοντέλο όλες οι τιμές της μετατόπι-

σης φαίνεται να συγκλίνουν σε όλες τις αναλύσεις, ανεξαρτήτως είδους μητρώου μάζας και χρονικού βήματος. Δεν ισχύει το ίδιο για το προσαρμοσμένο μοντέλο. Μάλιστα μερικές μετατοπίσεις, διαφέρουν και ως προς την κατεύθυνση, κρίνοντας από το πρόσημό τους. Επίσης, είναι όλες αριθμητικά μεγαλύτερες συγκριτικά με του αρχικού μοντέλου. Αυτό ήταν αναμενόμενο, καθώς η μορφή της εκτελούμενης ταλάντωσης αλλάζει εντελώς με την προσαρμογή.

Μοντέλο Dynamo		Απλό μοντέλο		Προσαρμ. μοντέλο	
M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}	M_{lum}	M_{cons}
2.06	2.03	115.04	295.79	5.82	6.49
4.39	2.04	138.94	340.55	18.03	26.05
11.09	2.23	138.95	340.57	22.35	37.79
11.68	3.87	179.28	516.37	26.75	73.03
17.77	4.22	179.28	549.85	31.29	84.28
20.88	4.23	207.48	583.76	38.21	106.16
26.01	5.39	248.89	583.76	40.65	117.76
27.19	5.90	271.08	608.11	42.19	133.54
28.16	6.47	285.82	772.89	46.05	141.17
32.05	7.13	285.82	772.90	56.58	142.73
32.09	7.23	289.89	970.89	58.04	149.39
32.124	7.51	439.48	1031.51	60.33	188.81
32.21	7.57	454.33	1037.49	62.73	201.29
32.28	7.89	496.03	1213.53	63.31	203.49
32.30	8.11	496.04	1213.55	65.65	219.62

Πίνακας 5.39: Τιμές ιδιοσυχνοτήτων αναλύσεων σε rad/sec

Σχετικά με τις ιδιοσυχνότητες που προκύπτουν, φαίνεται να υπάρχει πολύ μεγάλη διαφορά τιμών στην περίπτωση του αρχικού μοντέλου του ενός στοιχείου και στην περίπτωση της προσαρμοσμένης διακριτοποίησης. Όμως είναι αξιοσημείωτο πως οι ιδιοσυχνότητες της γεωμετρίας του Dynamo, εκτός από το ότι εμφανίζουν πολύ καλή σύγκλιση μεταξύ των δύο περιπτώσεων ανάλυσης, με διαφορετικά είδη μητρώου μάζας, είναι και αρκετά κοντά αριθμητικά σε αυτές του προσαρμοσμένου πλέγματος. Η διακριτοποίηση του Dynamo αναμένεται να έχει πολύ καλή ακρίβεια τιμών, λόγω του μεγάλου αριθμού σημείων ελέγχου και στοιχείων. Παρά τα πολλά επαναλαμβανόμενα και αλληλεπικαλυπτόμενα σημεία ελέγχου και στοιχεία, ήταν ικανή να παράξει καλές τιμές ιδιοσυχνοτήτων.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία παρουσιάστηκε η δυναμική ανάλυση στοιχείων πλακών και κελυφών, με τη χρήση της ισογεωμετρικής θεωρίας. Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι εμφανή από την όλη διαδικασία προγραμματισμού της ανάλυσης του εκάστοτε φορέα. Παρακάτω, παρουσιάζονται συνοπτικά τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από την εκτέλεση των διάφορων εφαρμογών.

Ο αριθμός και η κατανομή των σημείων ελέγχου στο πλέγμα της διακριτοποίησης, οι πολυωνυμικές τάξεις, το μέγεθος των κομβοδιανυσμάτων και η πολλαπλότητα των τιμών του, επηρεάζουν δραματικά το μοντέλο ανάλυσης. Είναι κοινός γνωστό ότι πυκνότερα πλέγματα συντελούν σε υψηλότερης ακριβείας αναλύσεις. Όμως, περισσότερα σημεία ελέγχου δε σημαίνει κατ' ανάγκη βελτιστοποίηση και καλή προσαρμογή του πλέγματος. Η θέση τους στη διακριτοποίηση κατέχει πολύ σημαντικό ρόλο στη συμπεριφορά του μοντέλου. Το ίδιο ισχύει και για τα κομβοδιανύσματα. Γενικώς, μεγάλου μεγέθους διανύματα αντιστοιχούν σε υψηλός προσαρμοσμένα μοντέλα. Ταυτόχρονα όμως είναι σημαντική και η πολλαπλότητα των τιμών τους. Οποιοσδήποτε φορέας προς ανάλυση πρέπει να περιγράφεται από κομβοδιανύσματα με τιμές κατάλληλης πολλαπλότητας, αλλιώς δεν θα υπάρχει η επιθυμητή συνέχεια μεταξύ των μικροστοιχείων του και η ανάλυσή του δεν θα είναι ρεαλιστική. Η μειωμένη συνέχεια μεταξύ στοιχείων επιδρά αρνητικά και στα μεγέθη τάσεων και παραμορφώσεων, τα οποία θα εμφανίζουν επίσης ασυνέχειες και μεγάλες διακυμάνσεις στα όρια αυτά. Εφόσον λοιπόν όσο μεγαλύτερη είναι η πολλαπλότητα κάποιου κόμβου, τόσο μικρότερη είναι η συνέχεια της βάσης στο σημείο αυτό, συμπεραίνεται πως ένα κομβοδιάνυσμα δε μπορεί να κριθεί μόνο και μόνο από το μέγεθός του, χωρίς γνώση των ενδιαμέσων τιμών του. Οι πολυωνυμικές τάξεις αποτελούν επίσης ένα παράγοντα ο οποίος πρέπει να επιλεγεί προσεκτικά. Σύμφωνα με την ισογεωμετρική θεωρία, οι τάξεις επιλέγονται ώστε να μπορούν να περιγράψουν γεωμετρικά το μοντέλο. Ωστόσο, πρέπει να ληφθεί υπόψη και η μορφή παραμόρφωσής του στην ανάλυση που θα εκτελεσθεί. Άρα, πολλές φορές δεν αρκούν οι μικρότερες πολυωνυμικές τάξεις με τις οποίες μπορεί να σχεδιαστεί το μοντέλο στην αρχική, απαραμόρφωτη κατάσταση. Από την άλλη πλευρά, η αλόγιστη ανύψωσή τους, δεν επιφέρει κατ' ανάγκη καλύτερα αποτελέσματα.

Εξάλλου, σκοπός είναι η ανάλυση να είναι ικανή και αποδοτική, με όσο το δυνατόν πιο αραιά πλέγματα και απλές διακριτοποιήσεις. Γίνεται κατανοητό λοιπόν, πως η παραγωγή ενός ικανού και αποδοτικού μοντέλου είναι μια περίπλοκη και πλέον σημαντική διαδικασία για την ανάλυση.

Για το σκοπό της αύξησης της ακρίβειας μπορεί να πραγματοποιηθεί προσαρμογή του μοντέλου. Η πύκνωση του πλέγματος επιτυγχάνεται μέσω διάφορων τεχνικών, όπως ανύψωση πολυωνυμικού βαθμού, εισαγωγή κόμβων ή συνδυασμός μεθόδων. Κάθε μηχανισμός όμως επιδρά διαφορετικά στη διακριτοποίηση και κατ' επέκταση και στην ίδια τη διαδικασία ανάλυσης. Κάθε τεχνική οδηγεί σε διαφορετικό αριθμό σημείων ελέγχου και διαφορετικά κομβοδιανύσματα, η σημασία των οποίων συζητήθηκε προηγουμένως. Επίσης, αποτελεί κοινή γνώση πως η εκλέπτυνση του πλέγματος αυξάνει τη χρονική διάρκεια της ανάλυσης. Επομένως, η επιλογή του μηχανισμού προσαρμογής της διακριτοποίησης, πρέπει να γίνει προσεκτικά, έχοντας υπόψη το εκάστοτε μοντέλο προς ανάλυση στο οποίο θα εφαρμοστεί.

Άλλος ένας παράγοντας που επηρεάζει την ακρίβεια είναι η τιμή του χρονικού βήματος που χρησιμοποιείται. Όσο μικρότερη η τιμή του, τόσο περισσότερα τα συνολικά βήματα που εκτελούνται και έτσι τόσο καλύτερη η ακρίβεια. Η πρόταση αυτή βέβαια ισχύει μέχρι ένα σημείο. Τις περισσότερες φορές, η υπερβολική μείωση του dt , οδηγεί σε ελάχιστα καλύτερα αποτελέσματα. Εφόσον κιόλας με την μείωσή του ο χρόνος ανάλυσης αυξάνεται δραματικά, είναι εμφανές πως πρέπει να γίνει χρήση του κατάλληλου και όχι του μικρότερου δυνατού dt . Σύμφωνα και με όλα τα παραπάνω, κατανοείται πως δεν είναι εύλογη η χρήση μοντέλων υψηλής διακριτοποίησης και απειροελάχιστου χρονικού βήματος, με μοναδικό σκοπό την ακρίβεια.

Ένας παράγοντας που μπορεί να βοηθήσει στη μείωση της χρονικής διάρκειας της ανάλυσης, είναι η διαγωνιοποίηση του μητρώου μάζας. Η τεχνική αυτή έχει τα θετικά και τα αρνητικά της. Με χρήση πλήρους μητρώου μάζας, εξάγονται πιο ακριβή αποτελέσματα, ειδικά όταν πρόκειται για αραιά πλέγματα. Σε τέτοιου είδους μοντέλα επίσης δεν παρατηρούνται σπουδαίες διαφορές σχετικά με το συνολικό χρόνο ανάλυσης. Σε προσαρμοσμένα μοντέλα, η χρήση σωρικού μητρώου παρουσιάζει ξεκάθαρο πλεονέκτημα έναντι του πλήρους. Ακόμη, δεν υπάρχει θέμα ακρίβειας, καθώς όσο αυξάνεται το σύνολο των στοιχείων του μοντέλου ανάλυσης, τόσο μεγαλύτερη σύγκλιση επιτυγχάνεται μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο περιπτώσεων μητρώων. Επισημαίνεται επίσης, πως ο συνολικός χρόνος της όλης διαδικασίας με χρήση προσαρμοσμένου μοντέλου και σωρικού μητρώου μάζας, είναι φανερά μειωμένος σε σχέση με τον αντίστοιχο των αναλύσεων με χρήση πλήρους μητρώου. Από τις εφαρμογές όπου εκτελέστηκαν αναλύσεις με κανονικές και με βέλτιστες διακριτοποιήσεις, έγινε εμφανές πως η διαγωνιοποίηση του μητρώου μάζας είναι ευαίσθητη στην κατανομή των σημείων ελέγχου του πλέγματος. Μοντέλα ίδιας γεωμετρίας και αριθμού στοιχείων, με διαφορετική χωροθέτηση σημείων ελέγχου, παρήγαγαν εντελώς διαφορετικά αποτελέσμα-

τα, ειδικά στις περιπτώσεις χρήσης σωρικού μητρώου. Μόνο μετά την προσαρμογή υπήρξε κάποιου είδους σύγκλιση. Επιβεβαιώνεται για ακόμη μια φορά η σημασία της κατανομής των σημείων ελέγχου του πλέγματος και ορίζεται ως ένας παράγοντας που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη, εάν στην ανάλυση πρόκειται να γίνει χρήση διαγώνιου μητρώου. Συμπερασματικά, τα πλεονεκτήματα της διαγωνιοποίησης του μητρώου μάζας, είναι εμφανή μόνο σε διαδικασίες με περίπλοκους μαθηματικούς υπολογισμούς, για μοντέλα μεγάλης και συγκεκριμένης διακριτοποίησης. Εάν η επιθυμητή ανάλυση είναι απλή, δεν υπάρχει λόγος να γίνει χρήση αυτού.

Επιπροσθέτως, είναι σημαντικό να γίνει μια αναφορά και στα μειονεκτήματα της πλατφόρμας *Dynamo*, όσο αφορά την παραγωγή διακριτοποιήσεων. Το *Dynamo*, δε δημιουργεί αυτόματα τα βέλτιστα προς ανάλυση μοντέλα. Ο αριθμός των σημείων ελέγχου, δεν είναι ο ελάχιστος δυνατός και η χωροθέτηση αυτών στο μοντέλο δεν είναι η κάλλιστη. Ακόμη, ούτε οι πολυωνυμικές τάξεις και τα κομβοδιανύσματα είναι ιδανικά. Συγκεκριμένα για τα κομβοδιανύσματα, δεν υπάρχει τρόπος για να ελεγχθεί αν θα προκύψουν ομοιόμορφα ή όχι, ούτε σε ποιο διάστημα θα εκτείνονται. Εάν και το μοντέλο προκύπτει εντάξει γεωμετρικά, γεγονός αναμενόμενο καθώς το *Dynamo* αποτελεί πλατφόρμα γεωμετρικού σχεδιασμού, τα βασικά ισογεωμετρικά στοιχεία που το χαρακτηρίζουν απέχουν πολύ από τα βέλτιστα.

Τέλος, θεωρείται δέον να αναφερθούν και κάποιες προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση, μέσα στα πλαίσια της ισογεωμετρικής θεωρίας. Διεξαγωγή αναλύσεων στα ίδια στοιχεία, με διαφορετικό πάχος και χρήση της θεωρίας *Reissner - Mindlin* ή ακόμα και μη γραμμικών θεωριών, θα οδηγήσει σε καλύτερη κατανόηση των δυνατών σημείων της εκάστοτε θεωρίας. Άλλος παράγοντας της παρούσης εργασίας, ο οποίος μπορεί να αλλαχθεί με σκοπό την περαιτέρω διερεύνηση, είναι τα φορτία. Η χρήση άλλων ειδών δυναμικών φορτίων ή και συνδυασμό αυτών θα προσφέρει μια ευρύτερη κατανόηση ως προς την συμπεριφορά των επιφανειακών φορέων υπό αυτά. Επίσης, η προσαρμογή και η βελτιστοποίηση των μοντέλων ανάλυσης με χρήση πολλαπλών μακροστοιχείων, θα οδηγήσει σε έναν πολύ πιο ικανό υπολογιστικό κώδικα και σε πιο ακριβή αποτελέσματα. Επιπλέον, για την βελτίωση του κώδικα ανάλυσης, θα ήταν ύψιστης σημασίας η αυτοματοποίηση της διαδικασίας παραγωγής τοπολογικά βελτιστοποιημένων διακριτοποιήσεων προς ανάλυση, για οποιαδήποτε γεωμετρία. Τέλος, στο ίδιο πλαίσιο, θα ήταν πολύ ουσιαστική η αυτοματοποίηση παραγωγής βελτιστοποιημένων μοντέλων από το *Dynamo*, μέσω προγραμματισμού.

Παράρτημα Α'

Α'.1 Πίνακας αναλυτικών αποτελεσμάτων εφαρμογής τετραγωνικής πλάκας

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΛΕΤΡΕΣ ΤΗΣ					
Διακριτοποίηση	Αριθμός σημείων ελέγχου	Τύπος [M]	dt (sec)	T (sec)	U (mm)
1 × 1 = 1 στοιχείο	9	<i>M_{cons}</i>	0.1	1.14	-0.0754
		<i>M_{lum}</i>		1.16	-0.1096
		<i>M_{cons}</i>	0.01	13.8	-0.0532
		<i>M_{lum}</i>		15.3	-0.0987
		<i>M_{cons}</i>	0.001	162	-0.0506
		<i>M_{lum}</i>		169	-0.0970
3 × 3 = 9 στοιχεία	25	<i>M_{cons}</i>	0.1	4.12	-0.1454
		<i>M_{lum}</i>		4.05	-0.2455
		<i>M_{cons}</i>	0.01	41.9	-0.0899
		<i>M_{lum}</i>		41.2	-0.0482
		<i>M_{cons}</i>	0.001	465	-0.0705
		<i>M_{lum}</i>		528	-0.0426
5 × 5 = 25 στοιχεία	49	<i>M_{cons}</i>	0.1	10.2	-0.2482
		<i>M_{lum}</i>		11.1	-0.2735
		<i>M_{cons}</i>	0.01	102	-0.0758
		<i>M_{lum}</i>		97.1	-0.2515
		<i>M_{cons}</i>	0.001	1510	-0.2418
		<i>M_{lum}</i>		1420	-0.0709
7 × 7 = 49 στοιχεία	81	<i>M_{cons}</i>	0.1	18	-0.2483
		<i>M_{lum}</i>		26.4	-0.0551
		<i>M_{cons}</i>	0.01	221	-0.0716
		<i>M_{lum}</i>		171	-0.0705
		<i>M_{cons}</i>	0.001	2130	-0.1852
		<i>M_{lum}</i>		1940	-0.1585
5 × 5 = 49 στοιχεία	144	<i>M_{cons}</i>	0.1	32.33	-0.2345
		<i>M_{lum}</i>		30.28	-0.0460
		<i>M_{cons}</i>	0.01	341.43	-0.1717
		<i>M_{lum}</i>		321.60	-0.0483
		<i>M_{cons}</i>	0.001	3136.85	-0.0713
		<i>M_{lum}</i>		3053.41	-0.1996
7 × 7 = 49 στοιχεία	256	<i>M_{cons}</i>	0.1	61.45	-0.2349
		<i>M_{lum}</i>		50.74	-0.0979
		<i>M_{cons}</i>	0.01	2154.384	-0.1734
		<i>M_{lum}</i>		2075.92	-0.1611
		<i>M_{cons}</i>	0.001	6369.07	-0.0705
		<i>M_{lum}</i>		6048.53	-0.0846
14 × 14 = 196 στοιχεία	529	<i>M_{cons}</i>	0.1	184.92	-0.2349
		<i>M_{lum}</i>		208.42	-0.1932
		<i>M_{cons}</i>	0.01	2257.47	-0.1734
		<i>M_{lum}</i>		2244.15	-0.1611
		<i>M_{cons}</i>	0.001	22265.06	-0.0710
		<i>M_{lum}</i>		18292.75	-0.1654

Πίνακας Α'.1: Συγκεντρωμένα αποτελέσματα αναλύσεων

Α΄.2 Κομβοδιανύσματα μοντέλων ανάλυσης

Α΄.2.1 Εφαρμογή πλάκας με ημικυκλική οπή στην πλευρά της

Μετά την προσαρμογή, το μοντέλο 1β (σχήμα 96iii) έχει τις εξής τιμές κομβοδιανυσμάτων: [0.0625, 0.125, 0.1875, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.3125, 0.375, 0.4375, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5625, 0.625, 0.6875, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.8125, 0.875, 0.9375] για το $\{\Xi\}$ και [0.25, 0.5, 0.75] για το $\{H\}$. Το προσαρμοσμένο βέλτιστο μοντέλο (σχήμα 96iv), έχει ενδιαμέσες τιμές [0.0625, 0.125, 0.1875, 0.25, 0.25, 0.25, 0.3125, 0.375, 0.4375, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5625, 0.625, 0.687, 0.75, 0.75, 0.75, 0.8125, 0.875, 0.9375] για το $\{\Xi\}$ και [0.25, 0.5, 0.755] για το $\{H\}$.

Α΄.2.2 Εφαρμογή πλάκας με οπή στο κέντρο

Οι ενδιαμέσες τιμές του διανύσματος κόμβων $\{\Xi\}$, πριν την προσαρμογή είναι [0.1250, 0.1250, 0.25, 0.2, 0.375, 0.375, 0.5, 0.5, 0.625, 0.625, 0.75, 0.75, 0.8750, 0.8750] και μετά την προσαρμογή, [0.03125, 0.0625, 0.0937, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.15625, 0.1875, 0.2187, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.2812, 0.3125, 0.3437, 0.375, 0.375, 0.375, 0.375, 0.4062, 0.4375, 0.46875, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.53125, 0.5625, 0.59375, 0.625, 0.625, 0.625, 0.625, 0.65625, 0.6875, 0.7187, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.7812, 0.8125, 0.8437, 0.875, 0.875, 0.875, 0.875, 0.90625, 0.9375, 0.96875]. Οι ενδιαμέσες τιμές του $\{H\}$ μετά την προσαρμογή είναι [0.25, 0.5, 0.75].

Α΄.2.3 Εφαρμογή τριδιάστατου παραβολοειδούς κελύφους

Το παραβολοειδές τριδιάστατο κέλυφος, μετά την προσαρμογή, αποκτά τις επόμενες ενδιαμέσες τιμές κομβοδιανυσμάτων. Για το $\{\Xi\}$, [0.0439, 0.088, 0.132, 0.1756, 0.1756, 0.1756, 0.2005, 0.2254, 0.2504, 0.2753, 0.2753, 0.2753, 0.3034, 0.3315, 0.3596, 0.3877, 0.3877, 0.38775, 0.4195, 0.4513, 0.4832, 0.515, 0.515, 0.515, 0.55095, 0.5869, 0.62285, 0.6588, 0.6588, 0.6588, 0.7441, 0.8294, 0.9147] και για το $\{H\}$ είναι, [0.0625, 0.125, 0.1875, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.313, 0.375, 0.438, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5625, 0.625, 0.688, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.8125, 0.875, 0.938].

Α΄.2.4 Εφαρμογή υπερβολικού παραβολοειδούς κελύφους

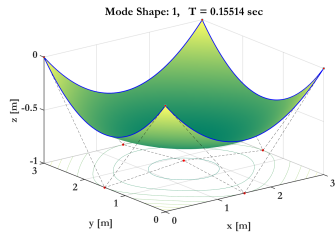
Το υπερβολικό παραβολοειδές που προέκυψε από το Dynamo, έχει κομβοδιάνυσμα $\{\Xi\}$ τεραστίων διαστάσεων. Οι ενδιαμέσες τιμές αυτού είναι οι εξής: [0.0027, 0.0054, 0.008, 0.0107, 0.0134, 0.0161, 0.0188, 0.0215, 0.0242, 0.0269, 0.0296, 0.0323, 0.0350, 0.0377, 0.0404, 0.0432, 0.0459, 0.0487, 0.0514, 0.0542, 0.0569, 0.0597, 0.0625, 0.0653, 0.0681, 0.0709,

0.0737, 0.0765, 0.0793, 0.0821, 0.0850, 0.0878, 0.0906, 0.0935, 0.0963, 0.0992, 0.1020, 0.1049, 0.1078, 0.1106, 0.1135, 0.1164, 0.1193, 0.1221, 0.1250, 0.1279, 0.1307, 0.1336, 0.1360, 0.1394, 0.1422, 0.1451, 0.1480, 0.1508, 0.1537, 0.1565, 0.1594, 0.1622, 0.1650, 0.1679, 0.1707, 0.1735, 0.1763, 0.1791, 0.1819, 0.1847, 0.1875, 0.1903, 0.1931, 0.1958, 0.1986, 0.2013, 0.2041, 0.2068, 0.2096, 0.2123, 0.2150, 0.2177, 0.2204, 0.2231, 0.2258, 0.2285, 0.2312, 0.2339, 0.2366, 0.2393, 0.2420, 0.2446, 0.2473, 0.2500, 0.2527, 0.2554, 0.2580, 0.2607, 0.2634, 0.2661, 0.2688, 0.2715, 0.2742, 0.2769, 0.2796, 0.2823, 0.2850, 0.2877, 0.2904, 0.2932, 0.2959, 0.2987, 0.3014, 0.3042, 0.3069, 0.3097, 0.3125, 0.3153, 0.3181, 0.3209, 0.3237, 0.3265, 0.3293, 0.3321, 0.3350, 0.3378, 0.3406, 0.3435, 0.3463, 0.3492, 0.3520, 0.3549, 0.3578, 0.3606, 0.3635, 0.3664, 0.3693, 0.3721, 0.3750, 0.3779, 0.3807, 0.3836, 0.3865, 0.3894, 0.3922, 0.3951, 0.3980, 0.4008, 0.4037, 0.4065, 0.4094, 0.4122, 0.4150, 0.4179, 0.4207, 0.4235, 0.4263, 0.4291, 0.4319, 0.4347, 0.4375, 0.4403, 0.4431, 0.4458, 0.4486, 0.4513, 0.4541, 0.4568, 0.4596, 0.4623, 0.4650, 0.4677, 0.4704, 0.4731, 0.4758, 0.4785, 0.4812, 0.4839, 0.4866, 0.4893, 0.4920, 0.4946, 0.4973, 0.5000, 0.5027, 0.5054, 0.5080, 0.5110, 0.5134, 0.5161, 0.5188, 0.5215, 0.5242, 0.5269, 0.5296, 0.5323, 0.5350, 0.5377, 0.5404, 0.5432, 0.5459, 0.5487, 0.5514, 0.5542, 0.5569, 0.5597, 0.5625, 0.5653, 0.5681, 0.5709, 0.5737, 0.5765, 0.5793, 0.5821, 0.5850, 0.5878, 0.5906, 0.5935, 0.5963, 0.5992, 0.6020, 0.6049, 0.6078, 0.6106, 0.6135, 0.6164, 0.6193, 0.6221, 0.6250, 0.6279, 0.6307, 0.6336, 0.6365, 0.6394, 0.6422, 0.6451, 0.6480, 0.6508, 0.6537, 0.6565, 0.6594, 0.6622, 0.6650, 0.6679, 0.6707, 0.6735, 0.6763, 0.6791, 0.6819, 0.6847, 0.6875, 0.6903, 0.6931, 0.6958, 0.6986, 0.7013, 0.7041, 0.7068, 0.7096, 0.7123, 0.7150, 0.7177, 0.7204, 0.7231, 0.7258, 0.7285, 0.7312, 0.7339, 0.7366, 0.7393, 0.7420, 0.7446, 0.7473, 0.7500, 0.7527, 0.7554, 0.7580, 0.7607, 0.7634, 0.7661, 0.7688, 0.7715, 0.7742, 0.7769, 0.7796, 0.7823, 0.7850, 0.7877, 0.7904, 0.7932, 0.7959, 0.7987, 0.8014, 0.8042, 0.8069, 0.8097, 0.8125, 0.8153, 0.8181, 0.8209, 0.8237, 0.8265, 0.8293, 0.8321, 0.8350, 0.8378, 0.8406, 0.8435, 0.8463, 0.8492, 0.8520, 0.8549, 0.8578, 0.8606, 0.8635, 0.8664, 0.8693, 0.8721, 0.8750, 0.8779, 0.8807, 0.8836, 0.8865, 0.8894, 0.8922, 0.8951, 0.8980, 0.9008, 0.9037, 0.9065, 0.9094, 0.9122, 0.9150, 0.9179, 0.9207, 0.9235, 0.9263, 0.9291, 0.9319, 0.9347, 0.9375, 0.9403, 0.9431, 0.9460, 0.9486, 0.9513, 0.9541, 0.9568, 0.9596, 0.9623, 0.9650, 0.9677, 0.9704, 0.9731, 0.9758, 0.9785, 0.9812, 0.9839, 0.9866, 0.9893, 0.9920, 0.9946, 0.9973].

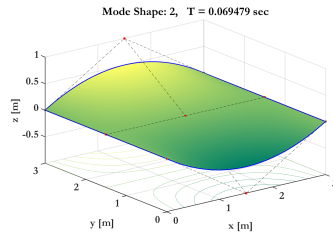
A'.3 Συνολικές ιδιομορφές εφαρμογών

Αναφέρεται ξανά, πως όλες οι εφαρμογές, εκτός από την περίπτωση της απλής, τετραγωνικής πλάκας με γραμμικές στηρίξεις, με διακριτοποίηση ενός στοιχείου, έχουν παραπάνω από τις τρεις ιδιομορφές που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 5. Στις περισσότερες περιπτώσεις μετά από κάποιο αριθμό ιδιομορφών, οι υπόλοιπες είναι μεμβρανικές και ασήμαντες,

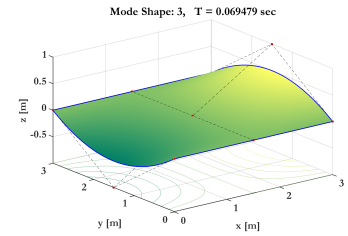
για αυτό θα ήταν και άσκοπο να παρουσιαστούν και να μελετηθούν στην παρούσα εργασία. Παρακάτω δίνονται οι συνολικές δεκαπέντε ιδιομορφές της πρώτης εφαρμογής, με σειρά φθίνουσας ιδιοπεριόδου, για σκοπούς πληρότητας.



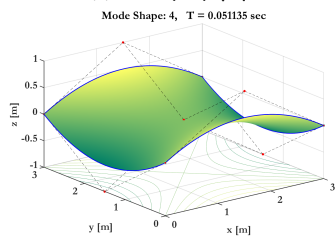
(i) Ιδιομορφή 1



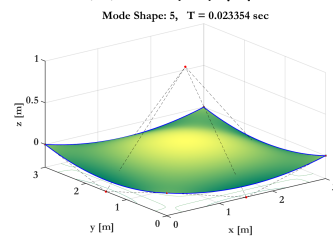
(ii) Ιδιομορφή 2



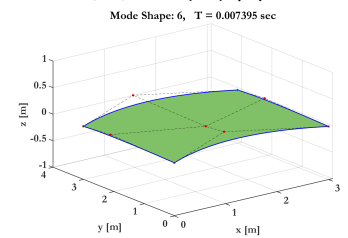
(iii) Ιδιομορφή 3



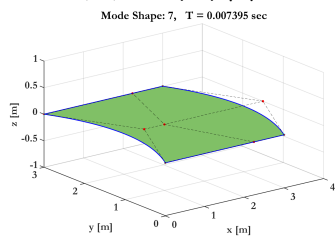
(iv) Ιδιομορφή 4



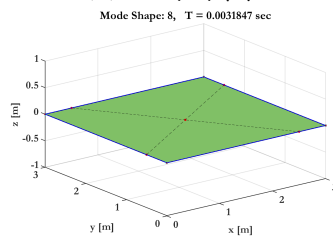
(v) Ιδιομορφή 5



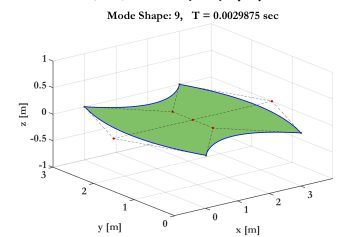
(vi) Ιδιομορφή 6



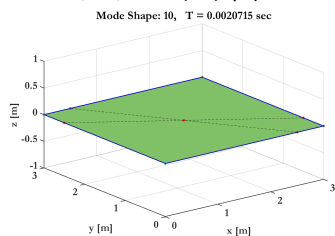
(vii) Ιδιομορφή 7



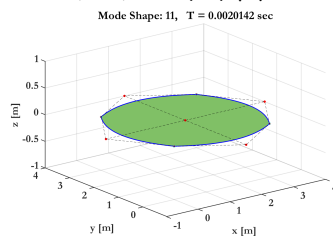
(viii) Ιδιομορφή 8



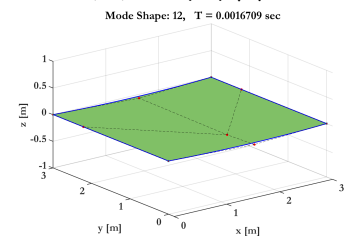
(ix) Ιδιομορφή 9



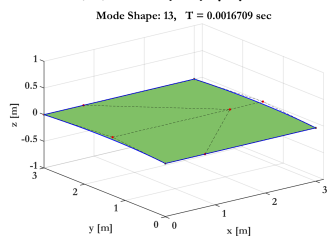
(x) Ιδιομορφή 10



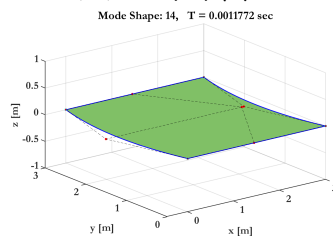
(xi) Ιδιομορφή 11



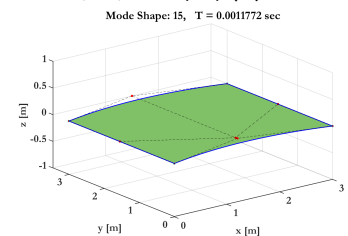
(xii) Ιδιομορφή 12



(xiii) Ιδιομορφή 13



(xiv) Ιδιομορφή 14



(xv) Ιδιομορφή 15

Σχήμα 162: Διακριτοποίηση με 1 στοιχείο: Ιδιομορφές με χρήση πλήρους μητρώου μάζας

Βιβλιογραφία

Argyris, J., Balmer, H., Doltsinis, J. S., Dunne, P., Haase, M., Kleiber, M., Malejannakis, G., Mlejnek, H.-P., Müller, M. & Scharpf, D. (1979), ‘Finite element method—the natural approach’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **17**, 1–106.

Cottrell, J. A., Hughes, T. J. & Bazilevs, Y. (2009), *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*, John Wiley & Sons.

Cox, M. (1971), ‘The numerical evaluation of b-splines. echnical report’, *National Physics Laboratory DNAC,(4)* .

De Boor, C. (1972), ‘On calculating with b-splines’, *Journal of Approximation theory* **6**(1), 50–62.

Farin, G. E. (1999), ‘From projective geometry to practical use’.

Kagan, P., Fischer, A. & Bar-Yoseph, P. Z. (1998), ‘New b-spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **41**(3), 435–458.

Kagan, P., Fischer, A. & Bar-Yoseph, P. Z. (2003), ‘Mechanically based models: Adaptive refinement for b-spline finite element’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **57**(8), 1145–1175.

Naghdi, P. (1957), ‘On the theory of thin elastic shells’, *Quarterly of applied Mathematics* **14**(4), 369–380.

Nayroles, B., Touzot, G. & Villon, P. (1992), ‘Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements’, *Computational mechanics* **10**(5), 307–318.

Novozhilov, V. (1964), ‘Thin shells’, *Theory, N00rdh00f Ltd., Groningen, The Netherlands* .

Piegl, L. & Tiller, W. (1996), *The NURBS book*, Springer Science & Business Media.

Reissner, E. (1941), ‘A new derivation of the equations for the deformation of elastic shells’, *American Journal of Mathematics* **63**(1), 177–184.

Rogers, D. F. (2001), *An introduction to NURBS: with historical perspective*, Morgan Kaufmann.

Sanders Jr, J. L. (1959), ‘An improved first-approximation theory for thin shells’, *NASA Rep.* .

Surana, K. S., Ahmadi, A. R. & Reddy, J. N. (2002), ‘The k-version of finite element method for self-adjoint operators in bvp’, *International Journal of Computational Engineering Science* **3**(02), 155–218.

Vlasov, V. (n.d.), ‘General theory of shells and its application in engineering’.

Zienkiewicz, O., Taylor, R. & Too, J. (1971), ‘Reduced integration technique in general analysis of plates and shells’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **3**(2), 275–290.