



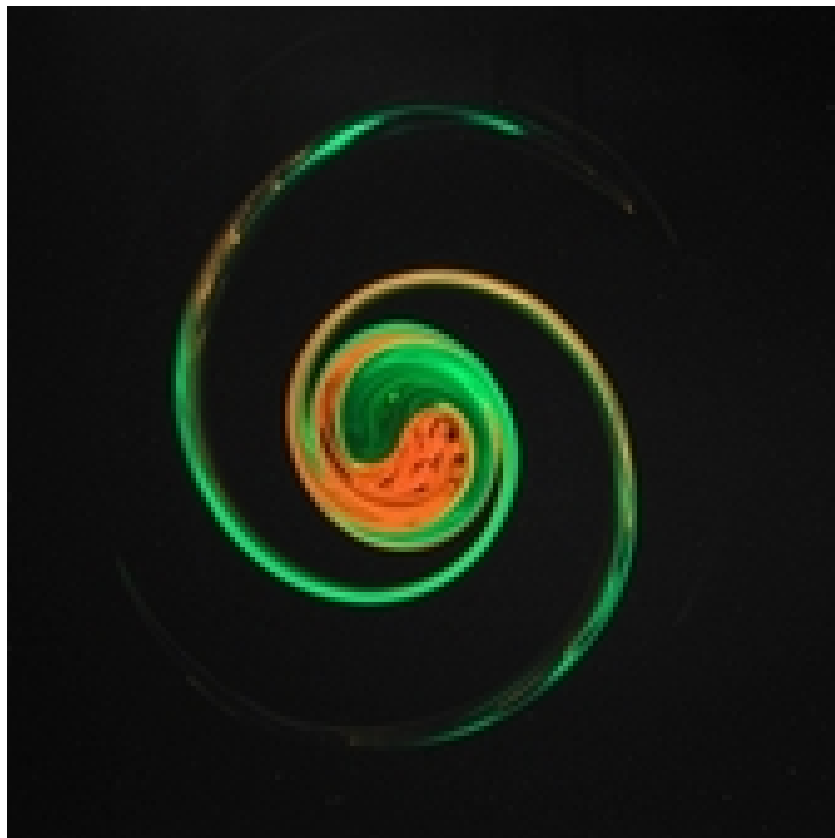
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**“ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΚΛΙΜΑΚΕΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΔΙΝΩΝ ”**

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Ι. ΤΖΩΡΤΖΗΣ

Επιβλέπων : Σπ. Γ. ΒΟΥΤΣΙΝΑΣ Αναπλ. Καθηγητής



ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2007

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στην οικογένεια μου τόσο για την κατανόηση όσο και για την διαρκή ενθάρρυνση και υποστήριξη τους κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Επίσης, καθοριστικής σημασίας ήταν η συμβολή του Επιβλέποντα Καθηγητή κ. Σπύρου Βουτσινά τόσο για την ανάθεση της εργασίας αλλά κυρίως για την καθοδήγηση και ουσιαστική βοήθεια του όσον αφορά το γνωστικό αντικείμενο, που συνετέλεσε στην ολοκλήρωση της όλης προσπάθειας. Τον ευχαριστώ ιδιαίτερα!

Τέλος δε θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω όλους τους υπόλοιπους προπτυχιακούς φοιτητές, μαζί με τους οποίους περάσαμε πολλές ώρες δουλεύοντας στις εργασίες μας, στο εργαστήριο υπολογιστών του Κτιρίου Ρευστών τόσο για την παρέα όσο και για την υποστήριξή τους.

Περίληψη εργασίας

Ένα πολύ διαδεδομένο πρόβλημα στην ιστορία της Μηχανικής των Ρευστών είναι η μελέτη της συμπεριφοράς συστημάτων N σημειακών δινών στις δύο διαστάσεις. Στην παρούσα εργασία μελετώνται οι περιπτώσεις $N = 2$, $N = 3$ και $N = 4$ και τα συμπεράσματα που εξάγονται συνδυαζόμενα με μία τυπική μέθοδο δινών-πλέγματος (particle-mesh) μας οδηγούν στην κατασκευή μίας αριθμητικής διαδικασίας που υπολογίζει τη χρονική εξέλιξη μη συνεκτικών πεδίων στροβιλότητας κάνοντας υπολογισμούς σε περισσότερες από μια κλίμακες.

Η εργασία απαρτίζεται από 3 κεφάλαια, στο καθένα από τα οποία παρουσιάζεται και ένα διαφορετικό θεματικό μέρος. Στο Κεφάλαιο 1 αφού γίνει μια συνοπτική παρουσίαση των τρόπων δυναμικής περιγραφής του συστήματος των N δινών, εξετάζονται πιο αναλυτικά οι περιπτώσεις $N = 2$ και $N = 3$. Το βασικό συμπέρασμα είναι ότι τα συστήματα είναι ολοκληρώσιμα σε όλες τις περιπτώσεις και συνεπώς έχουν πάντοτε αναλυτικά υπολογίσιμες περιοδικές λύσεις.

Στο κεφάλαιο 2 εξετάζεται η περίπτωση $N = 4$ και εντοπίζονται εκείνες οι αρχικές διατάξεις των τεσσάρων δινών που μας οδηγούν σε χαοτική συμπεριφορά του συστήματος. Ένα από τα βασικά συμπεράσματα αυτού του κεφαλαίου αφορά στην περίπτωση όπου μία δίνη εκ των τεσσάρων βρίσκεται σε κατά πολύ μεγαλύτερες σχετικές αποστάσεις από τις υπόλοιπες τρεις, από ότι οι υπόλοιπες τρεις δίνες μεταξύ τους. Διαπιστώνεται ότι σε αυτή την περίπτωση η απομονωμένη δίνη τείνει να αντιλαμβάνεται το σύστημα των υπολοίπων δινών σαν μια μόνο δίνη.

Στο τελευταίο και πιο εφαρμοσμένο κεφάλαιο, αφού γίνει μια συνοπτική εισαγωγή στις μεθόδους με τις οποίες χρησιμοποιώντας σημειακές δίνες σε συνδυασμό με πλέγματα μπορούμε να υπολογίσουμε τη χρονική εξέλιξη πεδίων στροβιλότητας, κατασκευάζεται σε Fortran η ρουτίνα `remesh.f` που αποτελεί ένα τυπικό παράδειγμα μιας τέτοιας μεθόδου. Στη συνέχεια γίνεται μια συζήτηση σχετικά με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της μεθόδου αυτής –με το σημαντικότερο αυτών να είναι η ενδογενής και αναπόφευκτη αριθμητική διάχυση που εισάγεται στην όλη διαδικασία λόγω του επιλεγμένου τρόπου ανακατανομής στροβιλότητας στο πλέγμα, ο οποίος οδηγεί σε συνεχή αύξηση του συνολικού αριθμού δινών στο πλέγμα. Έπειτα με χρήση της ρουτίνας `remesh.f` ελέγχεται και επιβεβαιώνεται η εγκυρότητα του βασικού συμπεράσματος του 2^{ου} κεφαλαίου και υπολογίζονται οι σχετικές αποστάσεις που οριοθετούν το χώρο μέσα στον οποίο αυτό ισχύει μέχρι ακρίβειας 6^{ου} δεκαδικού ψηφίου, για τρία πλέγματα διαφορετικών πυκνοτήτων, το κάθε ένα εκ των οποίων αντιπροσωπεύει μια διαφορετική κλίμακα στην οποία θα μπορούσε κάποιος να απεικονίσει το πεδίο στροβιλότητας. Όλα τα παραπάνω συνδυάζονται στη ρουτίνα `group.f` η οποία λειτουργεί όπως η `remesh.f` με τη βασική διαφορά ότι κάνει τους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα και τα τρία προαναφερθέντα πλέγματα, δηλαδή ουσιαστικά χρησιμοποιεί τρεις διαφορετικές κλίμακες για να υπολογίσει τις επαγόμενες ταχύτητες σε κάθε δίνη-κόμβο του πλέγματος. Επίσης, ακολουθεί μια ανάλυση που αποδεικνύει γιατί η `group.f` μπορεί να υπολογίσει τα ίδια πεδία στροβιλότητας έως και 23 φορές γρηγορότερα σε σχέση με τη `remesh.f` και παρατίθενται 5 εφαρμογές όπου η εν λόγω ρουτίνα υπολογίζει την εξέλιξη κάποιων πολύ χαρακτηριστικών πεδίων στροβιλότητας. Η εργασία τελειώνει με το σχολιασμό των αποτελεσμάτων και κάποιες προτάσεις που αφορούν την βελτιστοποίηση της ρουτίνας όσον αφορά την επίτευξη ακόμα καλύτερων χρόνων υπολογισμού καθώς επίσης και τις τροποποιήσεις που θα πρέπει κάποιος να πραγματοποιήσει έτσι ώστε η `group.f` να υπολογίζει και συνεκτικές ροές.

Abstract

A very wide problem in the history of Fluid Mechanics is the study of the two-dimensional dynamical system of N point vortices. At this paper we analyze the cases $N = 2$, $N = 3$ and $N = 4$ and the conclusions obtained, combined with a standard Particle – Mesh method lead us to the construction of a program that calculates non viscous vorticity fields in more than one scales.

The structure of the paper combines of 3 main chapters and in each chapter a different basic topic is raised. In chapter 1 after a very abstract exposition of the formalism of the system of N point vortices is performed, the cases $N = 2$ and $N = 3$ are more thoroughly analyzed. The main conclusion obtained is the stochastic behavior of these two cases, which means that we can always calculate periodical solutions.

In chapter 2 the case $N = 4$ is examined and the initial 4-vortex configurations that lead our system to chaotic solutions are detected and explained. One of the most important conclusions of this chapter concerns an initial vortex configuration, in which one of the vortices is located very far away from the system of the remaining three vortices. It is proved that the far-away vortex tends to apprehend the system of the remaining three vortices as if, only one vortex was located in their place.

In the third and final chapter of the paper after a brief introduction in some of the basic Particle – Mesh methods that are used for calculating vorticity fields, the `remesh.f` code built in FORTRAN is presented and explained. A very analytical discussion about the advantages and disadvantages of the method in use follows which concludes at the result that the main disadvantage lies in the fact that the vortex-particle remeshing method used, constantly augments the total number of particles thus introducing a kind of arithmetical diffusion. After that, by using the `remesh.f` routine the correctness of the main conclusion of chapter 2 is confirmed and the radius, in which the conclusion holds within a sixth decimal digit accuracy, is calculated. Those calculations are being made for three separate meshes of different density, with each mesh representing a different scale from which we can observe a particular vorticity field. All the above are combined in the `group.f` routine that resembles to the `remesh.f` yet it has a very important difference : it calculates the speed at the knots of the mesh using at the same time all the three meshes mentioned above or in other words it performs multi-scaled calculations. Also, an analysis follows which proves why our multi-scale method can calculate a certain vorticity field up to 23 times faster when compared with the `remesh.f` method, and some applications of the `group.f` routine calculating some very characteristic vorticity fields are presented. The paper concludes with the annotation of the application results while some proposals are being made concerning possible ways in which one can make the routine even faster or what modifications should be made so that the routine calculates viscous flow as well.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	13
ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΔΙΝΩΝ	13
1.1 ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ Ν ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΔΙΝΩΝ	13
1.2 Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $N = 2$	15
1.2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ	15
1.2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΔΙΝΩΝ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ.....	15
1.3 Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $N = 3$	18
1.3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ	18
1.3.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΔΙΝΩΝ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ.....	20
Η περίπτωση $\Theta = 1$	20
Η περιοχή τιμών $1 < \Theta < 2$	21
Η περίπτωση 1 με $\Theta = 1.4049$, $\Lambda = 0.8437$	21
Η περίπτωση 2 με $\Theta = 1.7089$, $\Lambda = 0.7649$	23
Η περίπτωση $\Theta = 2$	25
Η περιοχή τιμών $2 < \Theta < \infty$	27
Η περίπτωση 1 με $\Theta = 3.7256$, $\Lambda = 0.5181$	28
Η περίπτωση 2 με $\Theta = 11.2675$, $\Lambda = 0.2979$	29
1.3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΠΕΡΙΟΔΟΥ T	31
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.....	33
ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΔΙΝΩΝ-ΧΑΟΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ	35
2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ	35
2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΩΝ ΔΙΝΩΝ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ	36
Η περίπτωση $\Theta = 1.40466$, $\Lambda = 1$	36
Η περιοχή τιμών $1.40466 < \Theta < \Theta_c/4$	38
Η περίπτωση 1 με $\Theta = 2.0985$, $\Lambda = 0.8181$	38
Η περίπτωση $\Theta = \Theta_c/4 = 2.3703$	40
Η περιοχή τιμών $\Theta_c/4 < \Theta < \Theta_c$	41
Η περίπτωση 1 με $\Theta = 2.9918$, $\Lambda = 0.6852$	42
Η περίπτωση 2 με $\Theta = 7.2522$, $\Lambda = 0.4401$	44
Σχόλιο περί των περιοχών μετάβασης στο χάος	46
Η περίπτωση $\Theta = \Theta_c = 9.4812$	50
Η περιοχή τιμών $\Theta > \Theta_c$	51
Η περίπτωση 1 με $\Theta = 10.880$, $\Lambda = 0.3593$	52
Η περίπτωση 2 $\Theta = 62.429$, $\Lambda = 0.15$	53
Η περίπτωση 3 με $\Theta = 43233.61$, $\Lambda = 0.0057$	55
Η περίπτωση 4 με $\Theta = 26.55$, $\Lambda = 0.23$	55
2.3 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	56
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.....	57
ΧΡΗΣΗ ΔΙΝΩΝ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΚΛΙΜΑΚΕΣ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΠΕΔΙΩΝ ΡΟΗΣ	57

3.1	ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΟΛΛΩΝ ΔΙΝΩΝ	57
3.2	ΧΡΗΣΗ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ	59
3.3	ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ	66
3.4	ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΔΙΝΩΝ & ΔΕΝΔΡΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ	69
3.4.1	ΜΕΛΕΤΩΝΤΑΣ ΜΑΚΡΟΣΚΟΠΙΚΑ ΕΝΑ ΣΥΜΠΛΕΓΜΑ ΔΙΝΩΝ	69
3.4.2	ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ.....	74
3.5	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	78
3.5.1	ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ ΠΤΕΡΥΓΑΣ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ.....	78
3.5.2	ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ ΠΤΕΡΥΓΑΣ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ ΜΕ ΠΤΕΡΥΓΙΟ - ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ι.....	80
3.5.3	ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ ΠΤΕΡΥΓΑΣ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ ΜΕ ΠΤΕΡΥΓΙΟ - ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙ.....	83
3.5.4	ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ ΔΥΟ ΚΟΝΤΙΝΩΝ ΠΤΕΡΥΓΩΝ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ.....	85
3.5.5	ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ ΠΤΕΡΥΓΑΣ A340	87
	ΕΠΙΛΟΓΟΣ.....	91
	ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.....	93
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	97

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς ενός δισδιάστατου συστήματος N σημειακών δινών είναι ένα πρόβλημα που έχει απασχολήσει πολλούς επιστήμονες την περίοδο των τελευταίων εκατό ετών. Το συγκεκριμένο ζήτημα έχει μεγάλο ενδιαφέρον τόσο από τη μεριά της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων όσο και από τη μεριά της υπολογιστικής Ρευστομηχανικής. Εργασίες έχουν γίνει πολλές κυρίως όσον αφορά στις περιπτώσεις των συστημάτων τριών και των τεσσάρων δινών. Τα συγκεκριμένα συστήματα θα εξεταστούν και στην παρούσα εργασία για την περίπτωση όπου όλες οι δίνες μεταφέρουν ίσες τιμές στροβιλότητας.

Το γενικότερο πρόβλημα του συστήματος των τριών δινών, το οποίο φέρει πολλές ομοιότητες με το πρόβλημα των τριών σωμάτων της ουράνιας μηχανικής (βλέπε JORNA, 1978¹), έχει αποδειχθεί ολοκληρώσιμο για όλες τις πιθανές πεπερασμένες τιμές της τριάδας των στροβιλοτήτων. Το σύστημα εξισώσεων των τριών δινών είναι πάντα ολοκληρώσιμο και συνεπώς η κίνησή τους πάντα υπολογίσιμη και περιοδική. Αρκετά κατατοπιστικές είναι οι εργασίες των AREF^{2 3}, N.ROTT⁴ και E.A.NOVIKOV⁵, όπου το πρόβλημα εξετάζεται για κάποιες συγκεκριμένες τριάδες τιμών στροβιλότητας. Στην παρούσα εργασία η αντιμετώπιση του συστήματος των τριών ίσων δινών γίνεται με περισσότερο αριθμητικές μεθόδους, και αφότου βρεθούν εκείνες οι αρχικές τοποθετήσεις των δινών που οδηγούν σε σταθερά περιστρεφόμενους σχηματισμούς, υπολογίζονται οι τροχιές και τα διαγράμματα φάσης όλων των υπόλοιπων περιπτώσεων. Παρόλα αυτά μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα μπορεί να βρεθεί και στην εργασία των H.AREF και N.POMPHREY⁶, όπου παρουσιάζεται ένας μαθηματικός μετασχηματισμός ο οποίος έχει την ιδιότητα να ρίχνει τους βαθμούς ελευθερίας ενός συστήματος δινών μετατρέποντας τους γενικά από N σε $N-2$, και ο οποίος εφαρμοζόμενος στο συγκεκριμένο πρόβλημα το μετατρέπει από πρόβλημα τριών σε πρόβλημα ενός βαθμού ελευθερίας. Έτσι λοιπόν οι εξισώσεις απλοποιούνται και το πρόβλημα λύνεται με αναλυτικές μεθόδους.

Τα πράγματα γίνονται αρκετά πιο πολύπλοκα στην περίπτωση όπου προστεθεί ακόμα μια δίνη στο σύστημα. Το σύστημα των τεσσάρων δινών έχει περιοδικές και διπεριοδικές λύσεις, αλλά αυτό που το κάνει αρκετά ενδιαφέρον είναι η ύπαρξη και χαοτικών λύσεων. Μια αναλυτική απόδειξη της εμφάνισης χαοτικών λύσεων έχει δοθεί από τον W.M.OLIVA⁷. Το γενικότερο πρόβλημα της μη ολοκληρωσιμότητας του συστήματος συζητιέται αναλυτικά και στις εργασίες των S.L.ZIGLIN⁸ και K.M.KHANIN⁹. Αριθμητικά παραδείγματα με τα σχετικά διαγράμματα φάσεων και τροχιών των δινών δίνονται και από τους H.AREF⁶, B.ECKHARDT¹⁰, N.ROTT^{11 12} σε αντίστοιχες εργασίες. Εδώ, το πρόβλημα εξετάζεται με την ίδια τακτική που ακολουθείται και στο σύστημα των τριών δινών. Ιδιαίτερα σημαντική είναι η σύνδεση της χαοτικής συμπεριφοράς με το πρόβλημα της μη-προβλεψιμότητας ροής δισδιάστατου ρευστού αφού μας υποδεικνύει ότι η αδυναμία πρόβλεψης δεν οφείλεται μόνο στην έλλειψη γνώσης του τι συμβαίνει στις μικρότερες κλίμακες, αλλά το ίδιο το σύστημα δινών εισαγάγει και στοιχεία απροσδιοριστίας στη ροή. Ένα ακόμα ενδιαφέρον ζήτημα προς εξέταση αποτελεί αυτό της σύνδεσης του προβλήματος της χαοτικής συμπεριφοράς συστημάτων με $N \geq 4$ δινών με το πρόβλημα της τύρβης. Μια σχετική συζήτηση γίνεται και στην εργασία των NOVIKOV-SEDOV¹³.

Στο τρίτο και τελευταίο μέρος της εργασίας γίνεται μια απόπειρα χρήσης τέτοιων συστημάτων πολλών δινών, όπου η χαοτική συμπεριφορά εμφανίζεται σε πολύ μεγάλο βαθμό, για υπολογισμό και προσομοίωση πεδίων στροβιλότητας. Γενικά

υπάρχουν διάφορες μέθοδοι που μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει που περιλαμβάνουν χρήση πλεγμάτων σταθερής ή μεταβλητής πυκνότητας με σταθερό ή μεταβλητό αριθμό σωματιδίων. (Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις μεθόδους βλέπε vortex methods¹⁴). Μια αρκετά διαδεδομένη μέθοδος είναι αυτή όπου έχουμε μια αρχική διακριτοποίηση του πεδίου στροβιλότητας σε Λαγκρατζιανά στοιχεία στροβιλότητας τα οποία είναι οι εν λόγω δίνες. Η γενικότερη ιδέα της μεθόδου είναι ότι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δινών και κατά συνέπεια η κίνηση τους ισοδυναμεί με την εξέλιξη του πεδίου. Μετά από κάθε χρονικό βήμα, η συνολική στροβιλότητα με βάση έναν αλγόριθμο αναδιανομής, ξαναμοιράζεται σε στοιχεία στροβιλότητας στους κόμβους του πλέγματος. Στη παρούσα εργασία εξετάζεται μια παραλλαγή-βελτίωση της παραπάνω μεθόδου υπό την έννοια της διακριτοποίησης του εκάστοτε αρχικού πεδίου σε διάφορα πλέγματα όλο και πυκνότερης υφής, το κάθε ένα από τα οποία αντιπροσωπεύει και μια διαφορετική κλίμακα από την οποία μπορούμε να παρατηρήσουμε το πρόβλημα. Με αυτό τον τρόπο οι υπολογισμοί γίνονται ταυτόχρονα σε περισσότερες από μια κλίμακες προσφέροντας έτσι στον τελικό αλγόριθμο ταχύτητα-γιατί χρησιμοποιούνται λιγότερες συνολικά δίνες- και ακρίβεια-γιατί τα τελικά αποτελέσματα παράγονται στην λεπτότερη δυνατή κλίμακα. Στο τέλος, παρουσιάζονται κάποιες εφαρμογές και τα σχετικά αποτελέσματα σχολιάζονται και συγκρίνονται με αυτά που έχουν προκύψει από υπολογισμούς συγκεκριμένων πεδίων ροής που υπολογίστηκαν με άλλες μεθόδους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΔΙΝΩΝ

Στο πρώτο αυτό κεφάλαιο γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση του φορμαλισμού που ακολουθείται για την δυναμική περιγραφή του συστήματος των N διακριτών δινών και αναλύονται εκτενέστερα οι περιπτώσεις του συστήματος δυο και τριών δινών.

1.1 ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ N ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΔΙΝΩΝ

Σε αυτό το κομμάτι εξετάζεται ένα σύστημα n διακριτών δινών και δίνονται οι συμβολισμοί που θα ισχύουν και στη συνέχεια της εργασίας. Γενικά οι εξισώσεις κίνησης που διέπουν ένα σύστημα n δινών που φυσικά ισοδυναμεί με ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας μπορούν να δοθούν με δυο ισοδύναμους τρόπους:

1. Θεωρώντας ότι ο χώρος περιγράφεται από ένα μιγαδικό σύστημα συντεταγμένων όπου κάθε δίνη $\alpha=1,2,3,\dots,n$ έχει μια θέση $z_\alpha=x_\alpha + iy_\alpha$ για μια στροβιλότητα Γ_α σταθερή στο χρόνο. Η κίνηση κάθε δίνης διέπεται από την εξίσωση:

$$\frac{\partial z_\alpha^*}{\partial t} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\Gamma_\beta}{2\pi i \cdot (z_\alpha - z_\beta)}$$

για κάθε $\alpha=1,\dots,n$ και $\beta \neq \alpha$. Η κάθε μια σημειακή δίνη δεν συνεισφέρει στην δική της ταχύτητα.

2. Από τους διανυσματικούς τύπους

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\Gamma_\beta}{2\pi} \cdot \frac{\vec{k} \times \vec{r}_{\alpha\beta}}{|\vec{r}_{\alpha\beta}|^2}$$

όπου \vec{k} το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο x - y και

$$|\vec{r}_{\alpha\beta}|^2 = (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2$$

η απόσταση μεταξύ των δύο δινών.

Και στις δύο περιπτώσεις μετά από πράξεις προκύπτουν οι εξής αναλυτικές εκφράσεις για τις διαφορικές εξισώσεις των συντεταγμένων της κάθε δίνης :

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial t} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\Gamma_\beta}{2\pi} \cdot \frac{y_\beta - y_\alpha}{(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2}$$

$$\frac{\partial y_a}{\partial t} = \sum_{\beta \neq a} \frac{\Gamma \beta}{2\pi} \cdot \frac{x_a - x_\beta}{(x_a - x_\beta)^2 + (y_a - y_\beta)^2},$$

με τις αθροίσεις να γίνονται σε όλα τα $\beta=1,2,\dots,n$ εκτός από το a .

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν και ως εξής :

$$\Gamma \alpha \cdot \frac{\partial x_a}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial y_a} \quad \text{και} \quad \Gamma \alpha \cdot \frac{\partial y_a}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x_a}$$

Που μοιάζουν με τις γνωστές εξισώσεις του Χάμιλτον με H τη Χαμιλτονιανή του συστήματος που ισούται με :

$$H = - \sum_{b \neq a} \frac{1}{4 \cdot \pi} \Gamma \alpha \cdot \Gamma \beta \cdot \ln |z_\alpha - z_\beta|$$

Η ποσότητα H έχει νόημα ως η ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ των δινών και είναι μία από τις σταθερές της κίνησης. Άλλο ένα χαρακτηριστικό της H είναι ότι μένει αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς μεταφοράς και στροφής των συντεταγμένων. Αυτό στη γλώσσα των δυναμικών συστημάτων μεταφράζεται στο ότι υπάρχουν μεγέθη πέραν της H που διατηρούνται. Αυτά δίνονται από τους τύπους :

$$\sum \Gamma \alpha \cdot x_\alpha = Q$$

$$\sum \Gamma \alpha \cdot y_\alpha = P$$

$$\sum \Gamma \alpha \cdot (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) = L^2$$

Οι ποσότητες Q , P , L^2 μένουν σταθερές κατά τη διάρκεια της κίνησης και θα μπορούσαμε να πούμε ότι αντιπροσωπεύουν την ισορροπία δυνάμεων (τα P , Q) και την ισορροπία ροπών (το L^2) δίνοντας τους έτσι και φυσική σημασία.

Τέλος ένας αρκετά ενδιαφέρων φορμαλισμός όσον αφορά το σύστημα των N δινών έχει αναπτυχθεί από τον Poisson. Κατ' αρχήν ορίζεται το λεγόμενο Poisson bracket ως εξής :

$$[f, g] = \sum \frac{\partial f}{\partial q_a} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_a}$$

εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι :

$$[f, g] = \sum \frac{1}{\Gamma \alpha} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_\alpha} \right)$$

Και στη συνέχεια εφαρμόζοντας τον τύπο για $f = z_\alpha$ και $g = z_\beta$ παρατηρούμε ότι για τις θέσεις ισχύει :

$$[za, z\beta] = 0, \quad [za, z\beta^*] = -2t \cdot \frac{\delta\alpha\beta}{\Gamma\alpha}$$

Ενώ για τις ποσότητες Q, P, L^2 και H ισχύει :

$$\begin{aligned} [H, P] &= [H, Q] = [H, L^2] = 0 \\ [Q, P] &= \sum \Gamma\alpha \\ [Q, L^2] &= 2P \\ [P, L^2] &= -2Q \text{ και} \\ [P^2 + Q^2, L^2] &= 0 \end{aligned}$$

1.2 Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $N = 2$

1.2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Η περίπτωση του συστήματος των δυο δινών είναι σχετικά απλή: Αν υποθεθεί ότι έχουμε τις δίνες 0 στη θέση (x_0, y_0) και 1 στη θέση (x_1, y_1) με στροβιλότητες Γ_0 και Γ_1 αντίστοιχα τότε οι εξισώσεις κίνησης είναι οι εξής:

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{y_1 - y_0}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial t} = -\frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{x_1 - x_0}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \frac{y_0 - y_1}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = -\frac{\Gamma_0}{2\pi} \frac{x_0 - x_1}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

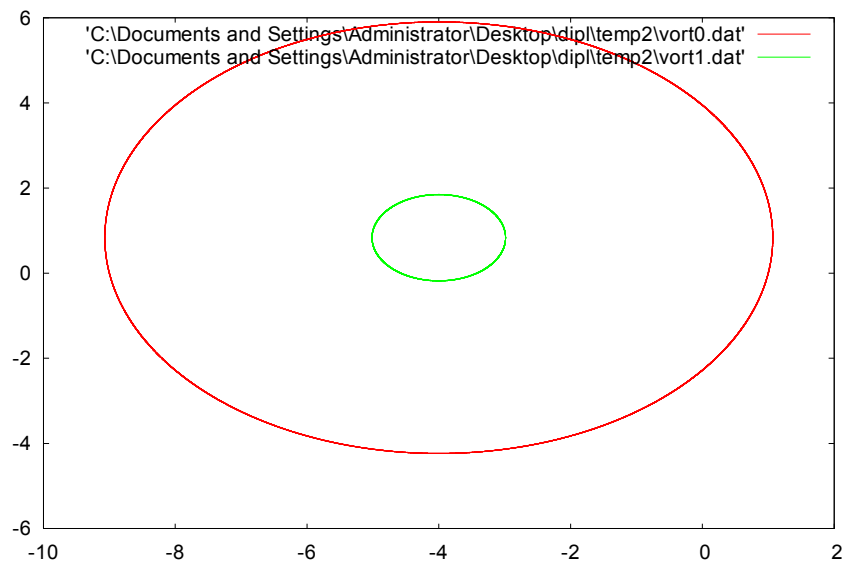
Το σύστημα έχει αναλυτικές λύσεις. Για τους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε η ρουτίνα 2vort.f γραμμένη σε γλώσσα Fortran που δέχεται ως δεδομένα τις αρχικές θέσεις (x_0, y_0) και (x_1, y_1) των δινών και τις στροβιλότητες τους Γ_0 και Γ_1 και με τη μέθοδο Runge – Kutta 4^{ης} τάξης επιλύει το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την κίνηση.

1.2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΔΙΝΩΝ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ

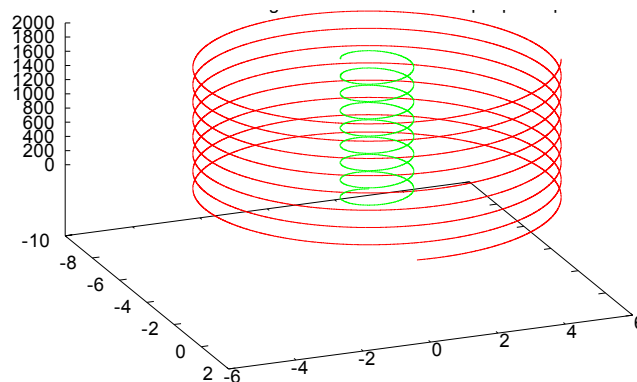
Έχουμε δυο περιπτώσεις λύσεων :

A. Την περίπτωση όπου οι δυο δίνες έχουν ιδίου προσήμου στροβιλότητες Γ_0 και Γ_1 οπότε περιστρέφονται και οι δυο γύρω από το κέντρο στροβιλότητας –που βρίσκεται ανάμεσά τους, κάπου πάνω στη ευθεία

που τις ενώνει -τους διατηρώντας τον προσανατολισμό τους, όπως φαίνεται και στα παρακάτω σχήματα για τις δίνες $(1, 0)$ και $(-5, 1)$ με $\Gamma_0 = 1$ και $\Gamma_1 = 5$.

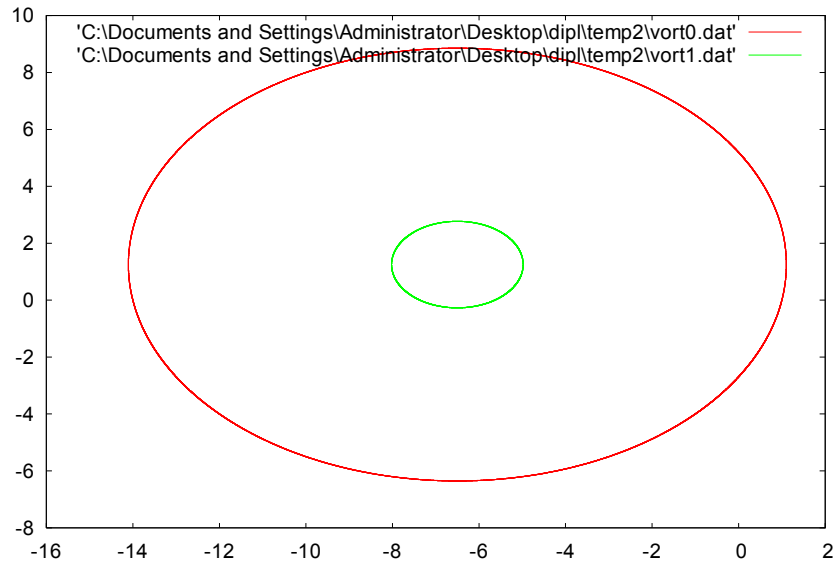


Σχήμα 1.1 : Κίνηση δινών στο επίπεδο x-y

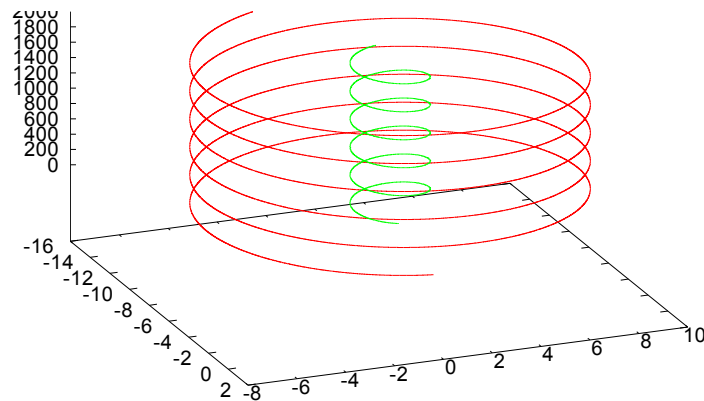


Σχήμα 1.2 : Κίνηση δινών στον χρόνο t

B. Την περίπτωση όπου οι δυο δίνες έχουν στροβιλότητες αντίθετου πρόσημου οπότε και πάλι περιστρέφονται γύρω από το κέντρο στροβιλότητας τους, το οποίο όμως αυτή τη φορά βρίσκεται επάνω στην ευθεία που τις ενώνει αλλά όχι ανάμεσα στις δίνες, όπως φαίνεται παρακάτω για τις δίνες $(1, 0)$ και $(-5, 1)$ με $\Gamma_0 = 1$ και $\Gamma_1 = 5$.

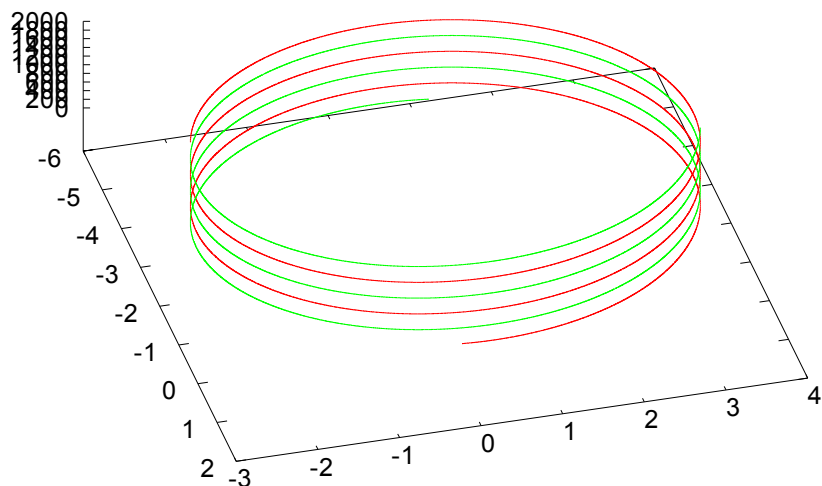


Σχήμα 1.3 : Κίνηση δινών στο επίπεδο x-y



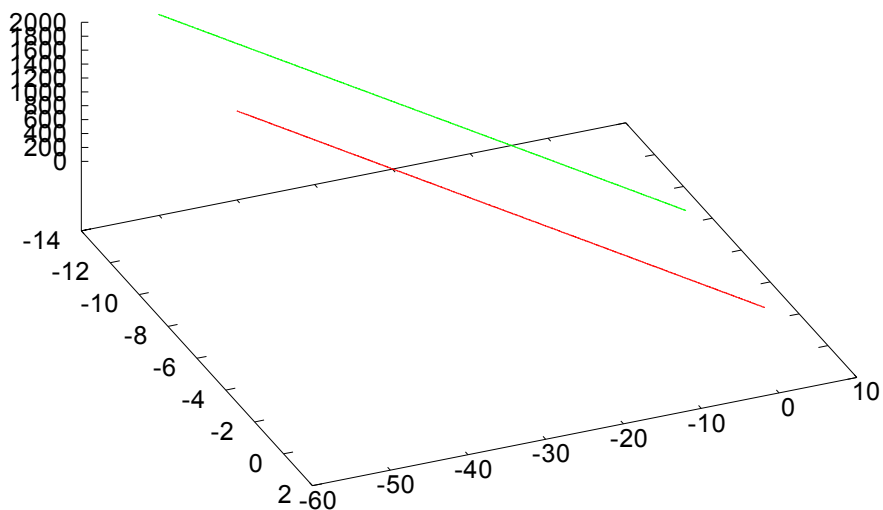
Σχήμα 1.4 : Κίνηση δινών στο χρόνο t

Στην ειδική περίπτωση όπου οι δίνες είναι ίδιας κατά μέτρο στροβιλότητας που μας ενδιαφέρει εδώ, παρατηρούμε ότι σε ομόσημες στροβιλότητες οι δυο δίνες διαγράφουν ακριβώς την ίδια τροχιά με κάποια διαφορά φάσης ενώ σε ετεροσήμες στροβιλότητες διαγράφουν ευθείες τροχιές διατηρώντας τη μεταξύ τους απόσταση σταθερή. Άκρως διαφωτιστικά είναι τα παρακάτω σχήματα για τις δίνες $(1, 0)$ και $(-5, 1)$.



Σχήμα 1.5 : Κίνηση δινών με ίσες στροβιλότητες στο χρόνο t

Καθώς επίσης και το σχήμα δινών με ίσες κατά μέτρο και αντίθετες στροβιλότητες :



Σχήμα 1.6 : Κίνηση δινών με ίσες και αντίθετες στροβιλότητες στο χρόνο t

1.3 Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $N = 3$

Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε επιτυχώς για πρώτη φορά από τον Kelvin ο οποίος έδειξε ότι σύστημα τριών δινών με ίδια στροβιλότητα Γ τοποθετημένες στις κορυφές ορθογωνίου τριγώνου, έχει περιοδική ευσταθή λύση ενώ στην περίπτωση όπου οι δίνες τοποθετηθούν ισαπέχουσες στην ίδια ευθεία η λύση είναι ασταθής.

1.3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Υποθέτουμε ότι έχουμε τρεις δίνες τις $0, 1, 2$ στις θέσεις $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ με στροβιλότητες $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ αντίστοιχα. Οι εξισώσεις που διέπουν αυτή τη σχετική κίνηση διατυπωμένες για την δίνη 0 είναι οι εξής :

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{y_1 - y_0}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} + \frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{y_2 - y_0}{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2}$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial t} = -\frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{x_1 - x_0}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} - \frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{x_2 - x_0}{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2}$$

Για τις δίνες 1 , 2 οι αντίστοιχες εξισώσεις προκύπτουν από τις προηγούμενες με κυκλική μετάθεση των δεικτών 0 , 1 , 2 .

Στη συγκεκριμένη εργασία εξετάζεται το πρόβλημα για δίνες ίσης στροβιλότητας δηλαδή για $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, οπότε οι εξισώσεις τροποποιούνται ανάλογα. Κάπου εδώ είναι χρήσιμο να ορίσουμε τα μεγέθη :

$$d_{01} = |z_0 - z_1| , d_{02} = |z_0 - z_2| , d_{12} = |z_1 - z_2|$$

δηλαδή τις σχετικές αποστάσεις των δινών, καθώς και τον παράγοντα r :

$$r = \sqrt{\frac{1}{3}(d_{01}^2 + d_{02}^2 + d_{12}^2)} ,$$

ως παράγοντα αδιαστατοποίησης του μήκους.

Μια βασική παράμετρος που χρησιμοποιείται για τη μελέτη αυτής της κίνησης είναι ο λόγος αριθμητικού / γεωμετρικού μέσου Θ όπου:

$$\Theta = \frac{\left(\frac{d_{01}^2 + d_{02}^2 + d_{12}^2}{3} \right)_3}{d_{01}^2 \cdot d_{02}^2 \cdot d_{12}^2}$$

Στην περίπτωση εάν διαλέξουμε ως αρχή των συντεταγμένων το κέντρο στροβιλότητας δηλαδή το σημείο όπου ισχύει $P = Q = 0$ έχουμε :

$$d_{01}^2 + d_{02}^2 + d_{12}^2 = 3L^2 \quad \text{και} \quad d_{01}^2 \cdot d_{02}^2 \cdot d_{12}^2 = e^{-4\pi H}$$

Άρα για το Θ ισχύει :

$$\Theta = L^6 \cdot e^{4\pi H}$$

Το οποίο σημαίνει ότι από την ανισότητα Cauchy – Schwartz $\Theta \geq 1$ και θα ονομάσουμε την ελάχιστη αυτή τιμή του Θ , που επιτυγχάνεται στην περίπτωση όπου οι δίνες είναι αρχικά τοποθετημένες στις κορυφές ισοσκελούς τριγώνου, ως Θ_0 για να ορίσουμε την παράμετρο Λ ως:

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\Theta_0}{\Theta}} , \quad \text{όπου φυσικά θα ισχύει } 0 < \Lambda \leq 1 .$$

Βέβαια στη συγκεκριμένη περίπτωση μελετήθηκε το πρόβλημα με αρχή των συντεταγμένων το σημείο (0,0) και για στροβιλότητες $\Gamma = 1$. Για τους υπολογισμούς

χρησιμοποιήθηκε η, γραμμένη σε γλώσσα Fortran, ρουτίνα 3vort.f που λύνει το σύστημα των διαφορικών μας εξισώσεων με βάση τη μέθοδο Runge – kutta 4^{ης} τάξης. Έτσι σε κάθε βήμα υπολογίζονται οι νέες θέσεις των δινών και καταγράφονται στα αρχεία vort0.dat, vort1.dat, vort2.dat, για τις τρεις δίνες συναρτήσει του χρόνου. Οι ταχύτητες των τριών δινών σε κάθε χρονικό βήμα καταγράφονται στο αρχείο speed.dat.

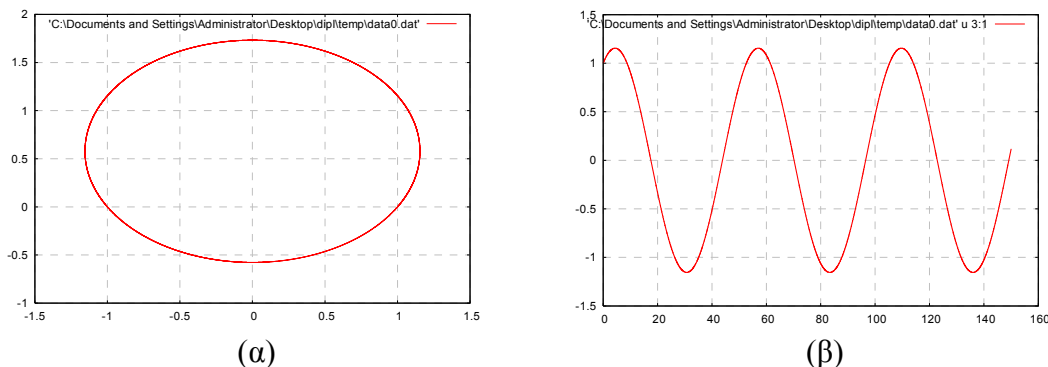
1.3.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΔΙΝΩΝ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ

Όπως ειπώθηκε και πριν βασική παράμετρος της κίνησης είναι το Θ οπότε συναρτήσει αυτής θα διερευνηθεί η χρονική εξέλιξη του συστήματος των δινών. Η ανάλυση θα γίνει ξεκινώντας από την ελάχιστη τιμή $\Theta = 1$ και αυξάνοντας σε τιμές.

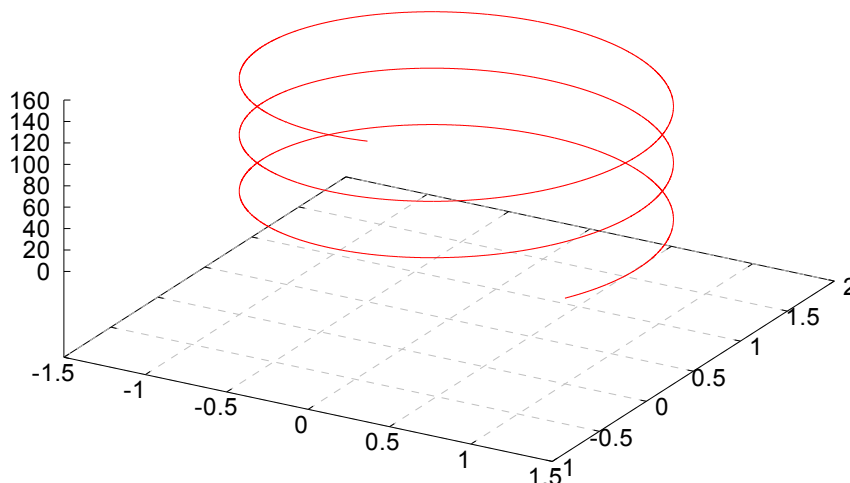
Η περίπτωση $\Theta = 1$

Εδώ οι αρχικές θέσεις των δινών ίδιες με αυτές των κορυφών ενός ισοσκελούς τριγώνου. Εδώ η σχετική κίνηση των δινών είναι ευσταθής και ουσιαστικά είναι μια περιστροφή του όλου συστήματος γύρω από το κέντρο στροβιλότητας του, που αντιστοιχεί και λόγω συμμετρίας στο βαρύκεντρο του τριγώνου.

Παρακάτω παρατίθενται γραφήματα της κίνησης της δίνης 0 στο χώρο στο χρόνο στην περίπτωση $\Theta = 1$.

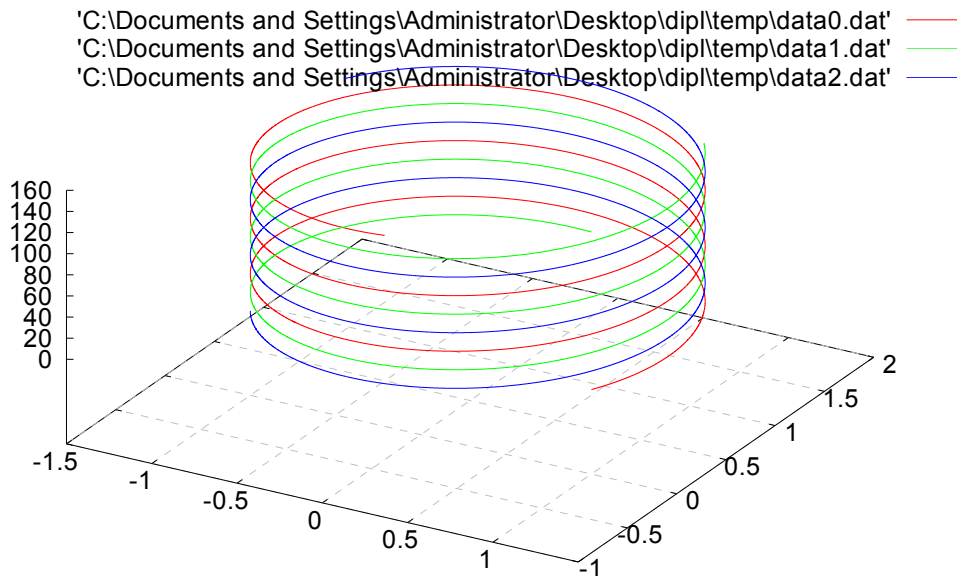


Σχήμα 1.7 : Κίνηση δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t



Σχήμα 1.8 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t

Καθώς επίσης και το γράφημα της σχετικής κίνησης και των τριών δινών στο χρόνο.

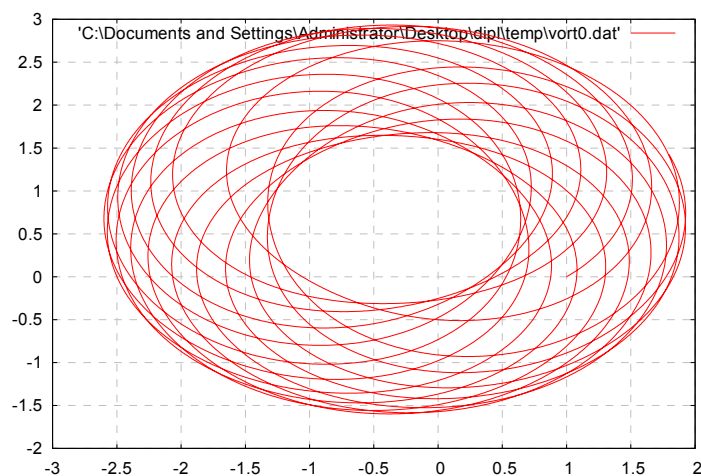


Σχήμα 1.9 : κίνηση και των τριών δινών στο χρόνο t

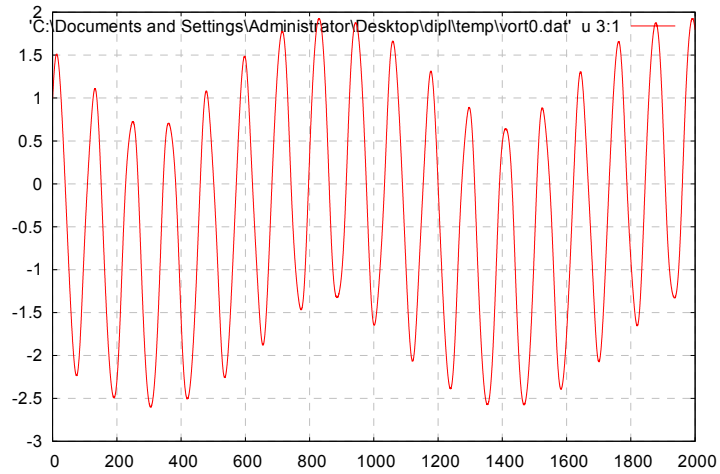
Η περιοχή τιμών $1 < \Theta < 2$

Η σχετική κίνηση των τριών δινών είναι περιοδική. Τα διαγράμματα φάσης των πλευρών βγαίνουν κλειστές συγκεντρικές καμπύλες και η ακτίνα τους αυξάνει με την αύξηση του Θ . Ακόμα ο προσανατολισμός των δινών δε γίνεται να αλλάξει στη πάροδο του χρόνου. Σε αυτό το πεδίο τιμών του Θ δεν έχουμε περιπτώσεις όπου οι τρεις δίνες ευθυγραμμίζονται. Τέλος όπως μπορεί να παρατηρηθεί και από τα διαγράμματα των πλευρών του νοητού τριγώνου, κάθε πλευρά ταλαντώνεται ημιτονοειδώς στο χρόνο. Παρακάτω παρατίθενται διαγράμματα για τη δίνη 0, τη σχετική κίνηση και των τριών δινών στο χώρο και τα διαγράμματα φάσης που σχεδιάστηκαν για την πλευρά d12 σε δύο περιπτώσεις τιμών του Θ .

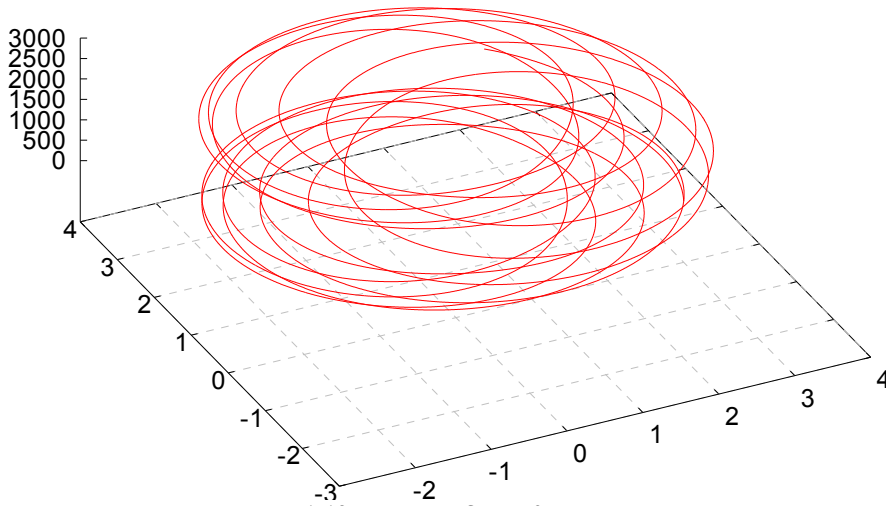
Η περίπτωση 1 με $\Theta = 1.4049$, $\Lambda = 0.8437$



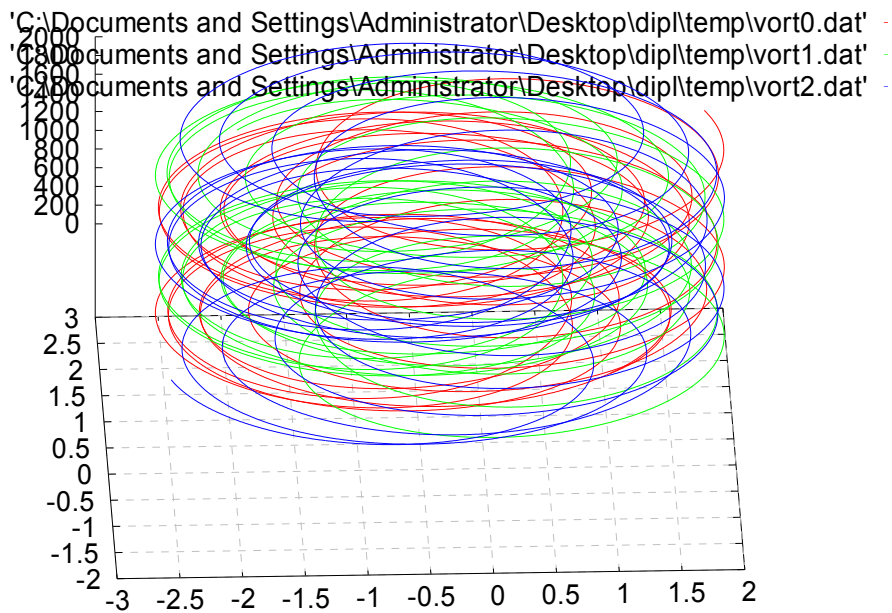
Σχήμα 1.10 : Κίνηση δίνης 0 στο επίπεδο x-y



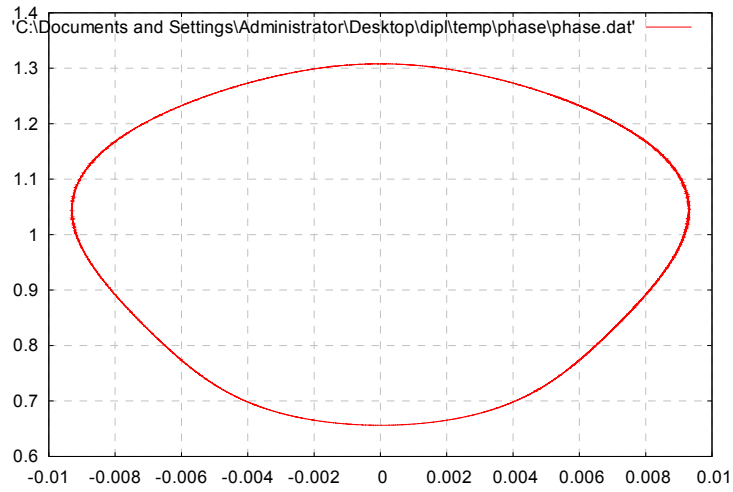
Σχήμα 1.11 : Κίνηση δίνης 0 στο επίπεδο x-t



Σχήμα 1.12 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t

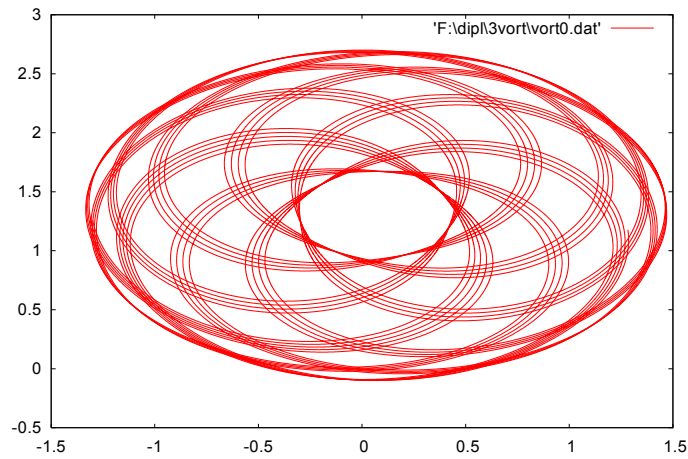


Σχήμα 1.13 : Κίνηση και των τριών δινών στο χρόνο t

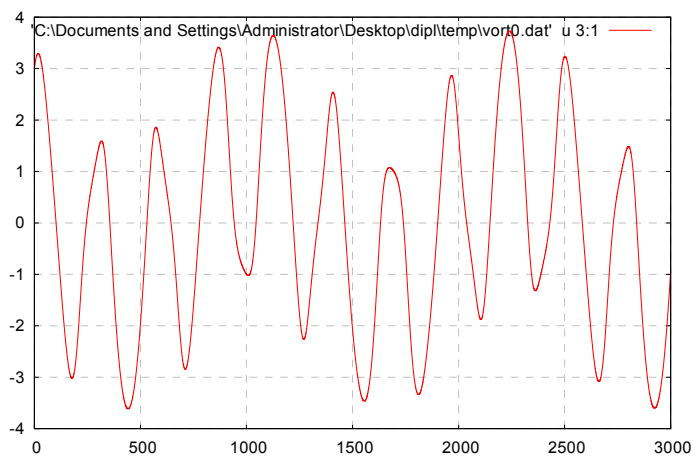


Σχήμα 1.14 : Διάγραμμα φάσης πλευράς d12

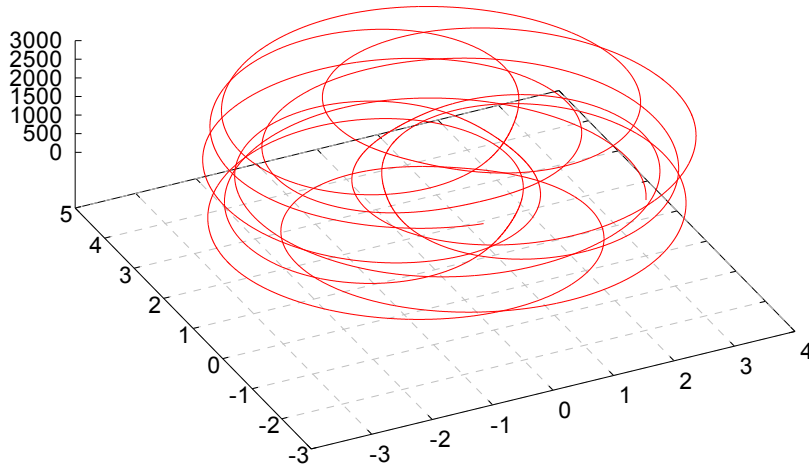
Η περίπτωση 2 με $\Theta = 1.7089$, $\Lambda = 0.7649$



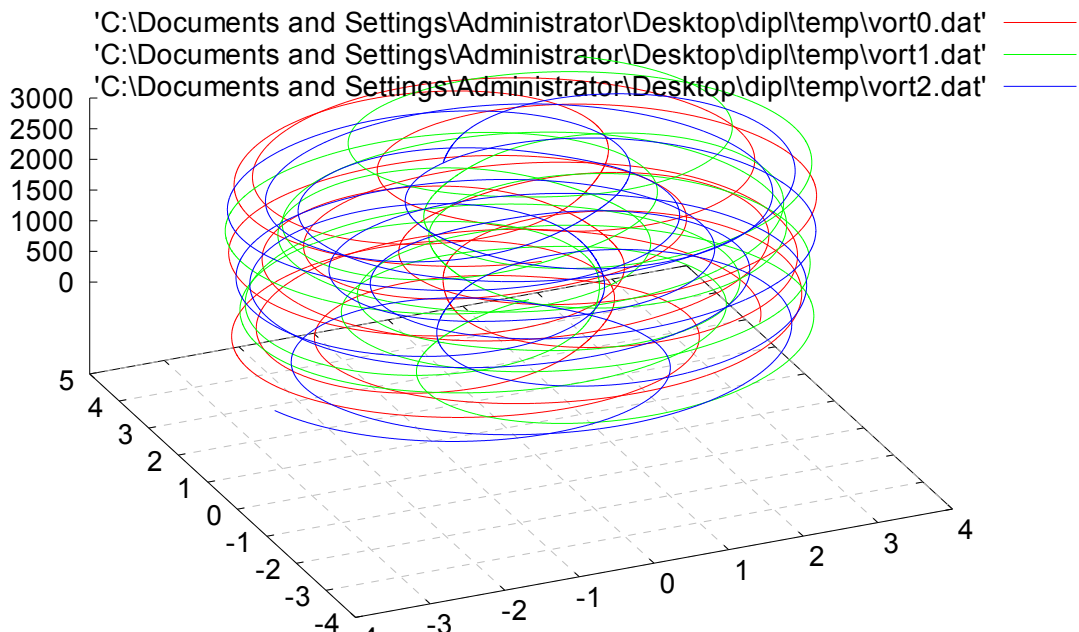
Σχήμα 1.15 : Κίνηση δίνης θ στο επίπεδο x-y



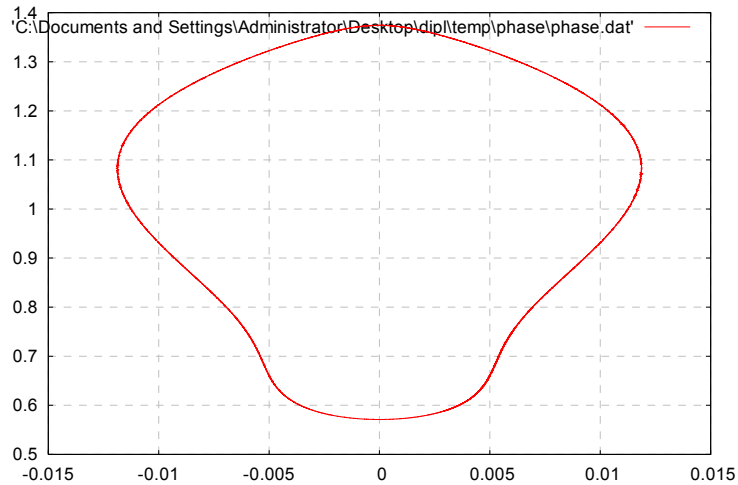
Σχήμα 1.16 : Κίνηση δίνης θ στο επίπεδο x-t



Σχήμα 1.17 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t



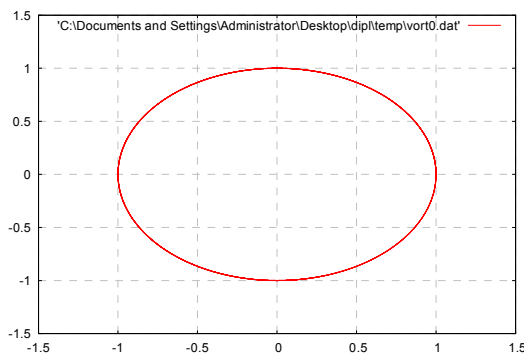
Σχήμα 1.18 : Κίνηση και των τριών δινών στο χρόνο t



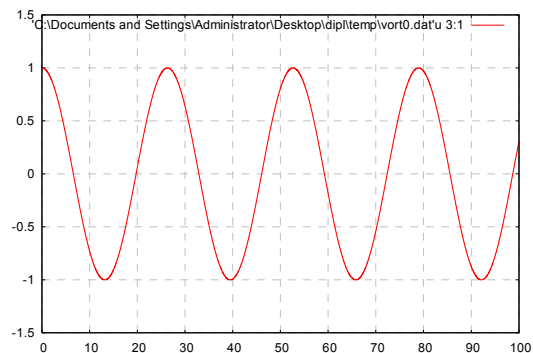
Σχήμα 1.19 : Διάγραμμα φάσης της πλευράς d12

Η περίπτωση $\Theta = 2$

Εδώ οι δίνες ξεκινούν τοποθετημένες σε ευθεία γραμμή και ισαπέχουσες. Ως κίνηση έχουμε απλά μια περιστροφή των δύο εκατέρωθεν δινών γύρω από την κεντρική. Πρόκειται για μία άκρως ασταθής λύση του συστήματος καθώς η παραμικρή διαταραχή "ρίχνει" το σύστημα από την κατάσταση $\Theta = 2$ σε μια από τις καταστάσεις $1 < \Theta < 2$ ή $2 < \Theta < \infty$. Ο προσανατολισμός των δινών δεν αλλάζει και φυσικά αυτή η κίνηση χαρακτηρίζεται ως απειροδίκης δεδομένου ότι η περίοδος φαίνεται να είναι άπειρη εφ' όσον η μεσαία δίνη παραμένει ακίνητη. Το διάγραμμα των φάσεων είναι πάλι μια κλειστή καμπύλη, όμως στην πραγματικότητα χωρίζεται σε τρεις διαφορετικές γραμμές από τα σημεία επαφής της με τις ευθείες. Αυτά τα σημεία αντιστοιχούν στους τρεις διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης των τριών δινών πάνω στην ευθεία. Προφανώς το σημείο $\Theta = 2$ είναι σημείο ασυνέχειας της περιόδου της σχετικής κίνησης. Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα για τη δίνη 0, για την κίνηση των δινών στο χώρο και το διάγραμμα φάσης της πλευράς d12.

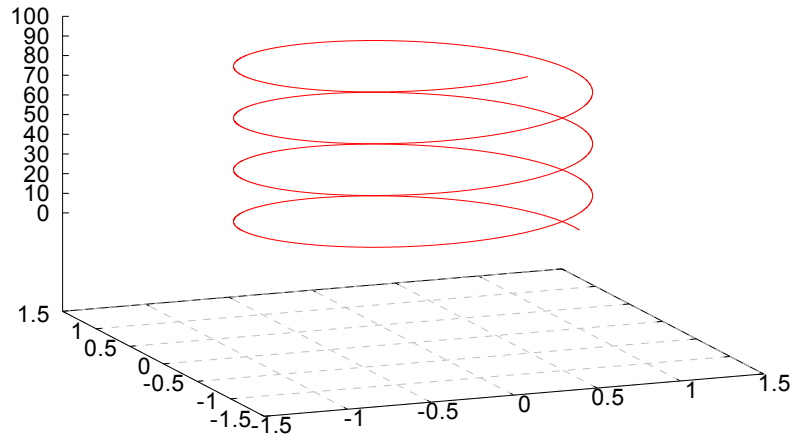


(α)



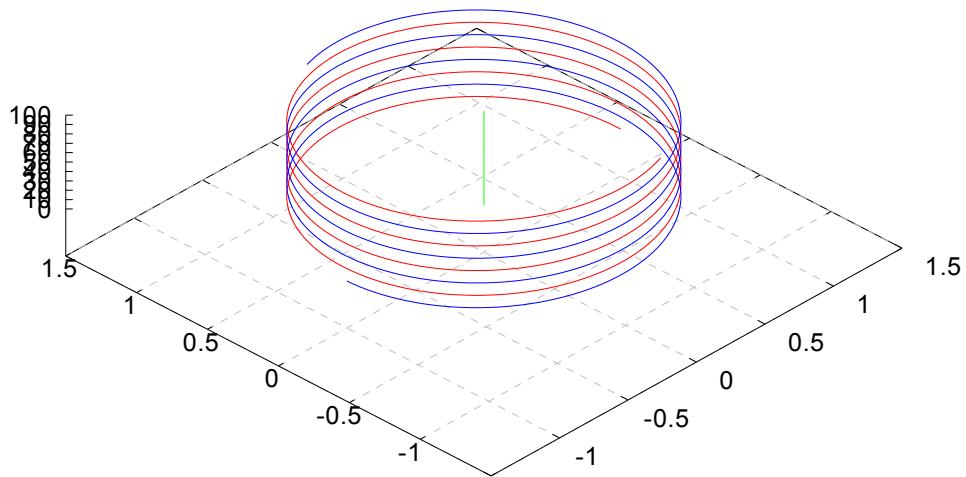
(β)

Σχήμα 1.20 Κίνηση δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t



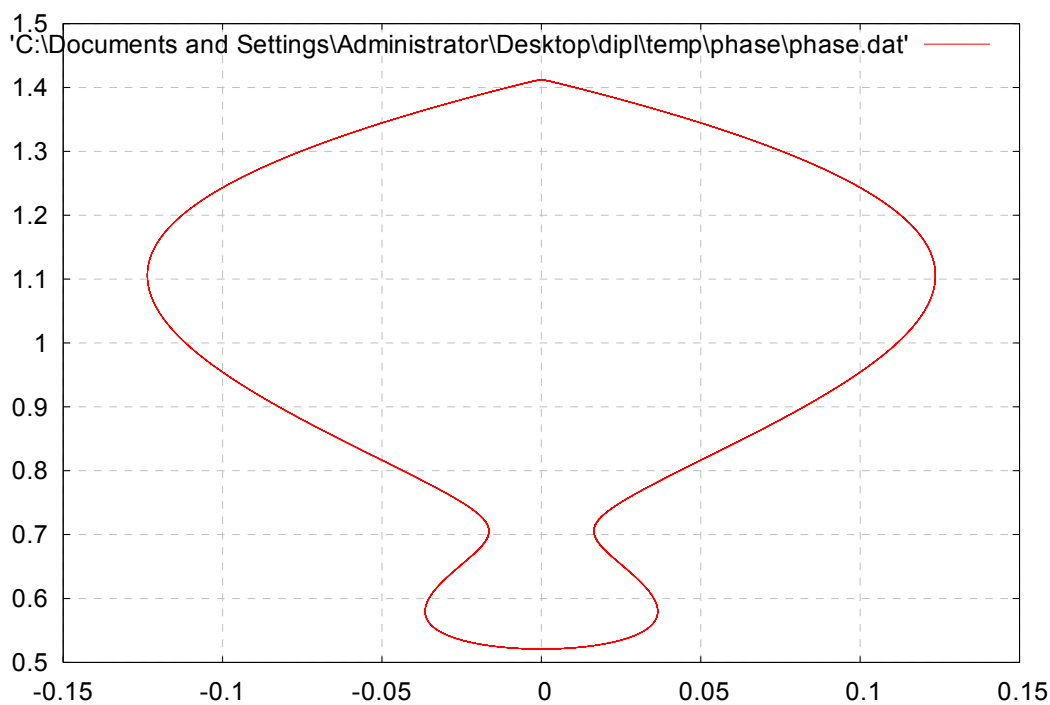
Σχήμα 1.21 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t

'C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\temp\vort0.dat' ———— red
 'C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\temp\vort1.dat' ———— green
 'C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\temp\vort2.dat' ———— blue



Σχήμα 1.22 : Κίνηση και των τριών δινών στο χρόνο t^1

¹ Η κατακόρυφη πράσινη γραμμή αντιπροσωπεύει τη δίνη 1 η οποία μένει ακίνητη στο κέντρο.

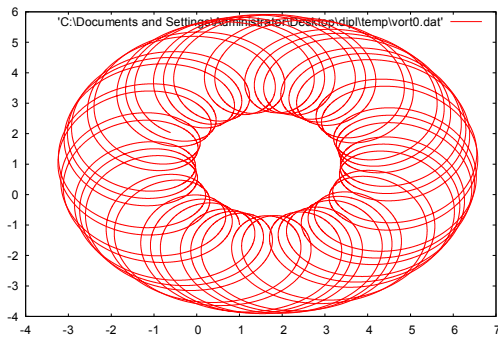


Σχήμα 1.23 : Διάγραμμα φάσης της πλευράς d12

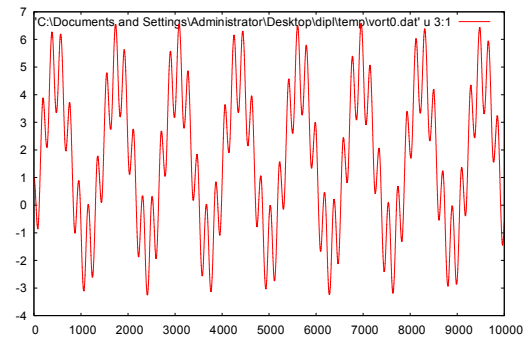
Η περιοχή τιμών $2 < \Theta < \infty$

Εδώ αντίθετα με τις προηγούμενες περιπτώσεις έχουμε αλλαγή του προσανατολισμού των δινών κατά την κίνηση. Πιο συγκεκριμένα οι δίνες κινούνται κανονικά έως ότου γίνουν συνευθειακές, από εκεί και πέρα αλλάζουν φορά περιστροφής. Η κίνηση αυτή είναι περιοδική και άλλο ένα μικρό χαρακτηριστικό της είναι ότι η μικρότερη πλευρά του τριγώνου παραμένει η μικρότερη σε όλα τα στάδια. Το διάγραμμα φάσης τώρα αποτελείται από τρία κομμάτια τα οποία προκύπτουν από τις τομές μιας κλειστής καμπύλης, κομμένης από τις ευθείες που περιγράψαμε πριν. Το Θ μπορεί να γίνει απεριόριστα μεγάλο. Βέβαια πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ κάτι το οποίο θα σχολιαστεί και παρακάτω : όσο το Θ τείνει στο άπειρο δυο από τις δίνες μας πλησιάζουν πολύ κοντά μεταξύ τους και φαίνεται σαν να περιστρέφονται μαζί γύρω από το κέντρο στροβιλότητας τους αγνοώντας την τρίτη δίνη. Όσον αφορά την τρίτη δίνη, αυτή δείχνει ότι αντιλαμβάνεται τις δυο άλλες δίνες σαν μία –προσαρμοσμένης φυσικά στροβιλότητας – και το συνολικό σύστημα μοιάζει με το σύστημα των δυο δινών που είδαμε με τη γνωστή περιστροφή τους γύρω από το κέντρο στροβιλότητας. Η όλη κίνηση όπως φαίνεται και στα διαγράμματα είναι μια ‘αργή’ περιστροφή των δυο κοντινών – σαν μία - και της απομακρυσμένης δίνης γύρω από το κοινό κέντρο στροβιλότητας τους. Παρακάτω παρατίθενται τα αντίστοιχα διαγράμματα για δυο περιπτώσεις τιμών του Θ .

Η περίπτωση 1 με $\Theta = 3.7256$, $\Lambda = 0.5181$

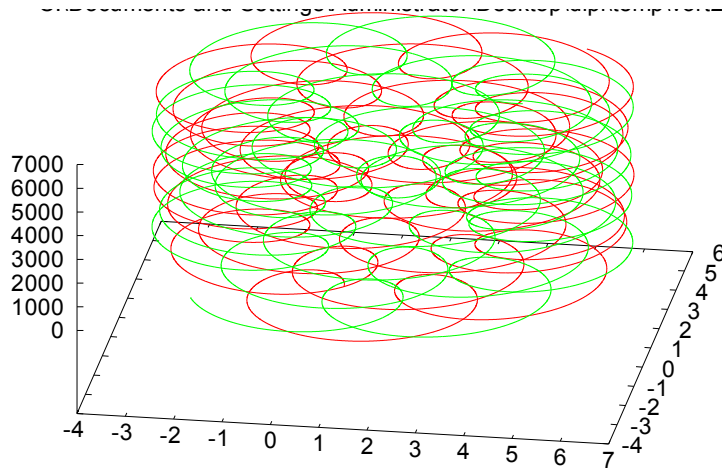


(α)

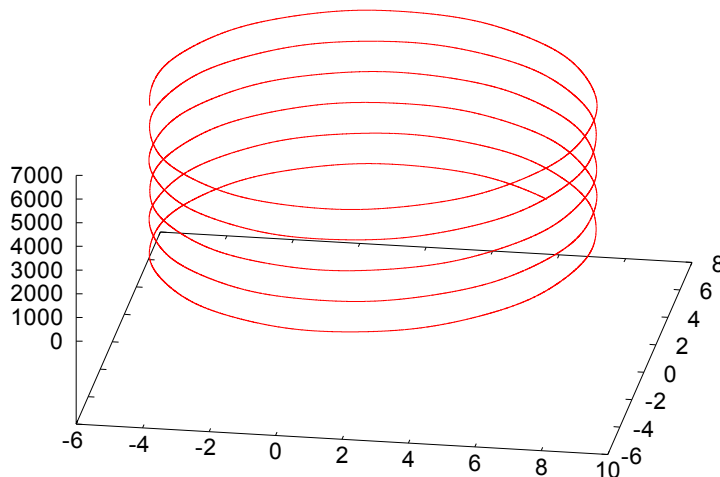


(β)

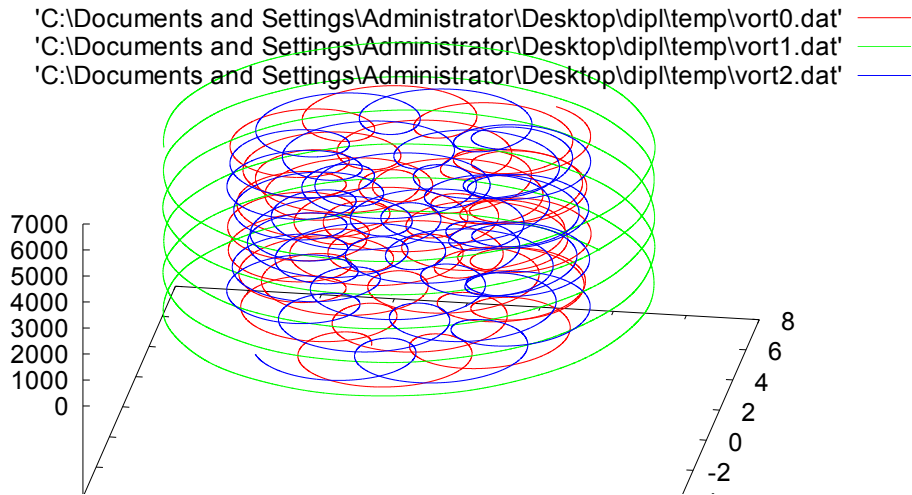
Σχήμα 1.24 : Κίνηση δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t



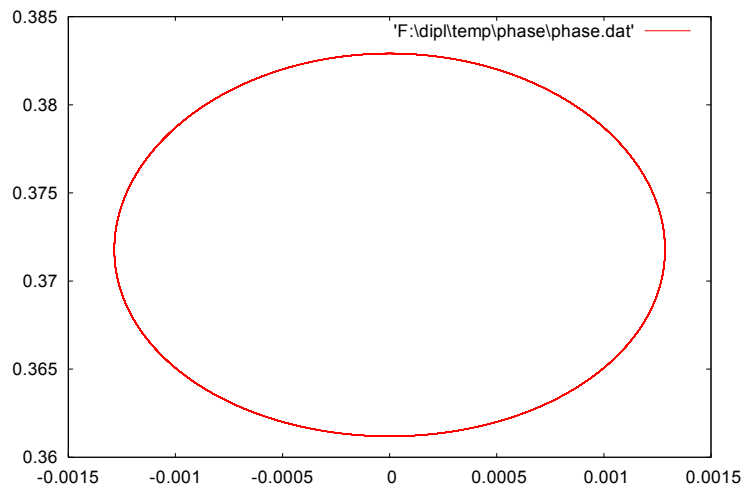
Σχήμα 1.25 : Κίνηση των κοντινών μεταξύ τους δινών 0 και 2 στο χρόνο t



Σχήμα 1.26 : Κίνηση απομακρυσμένης δίνης 2 στο χρόνο t

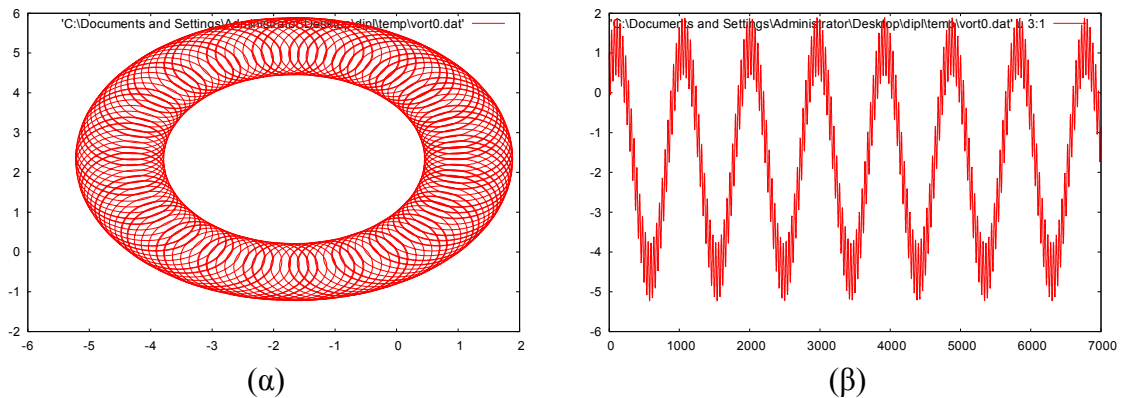


Σχήμα 1.27 : Κίνηση και των τριών διπών στο χρόνο t



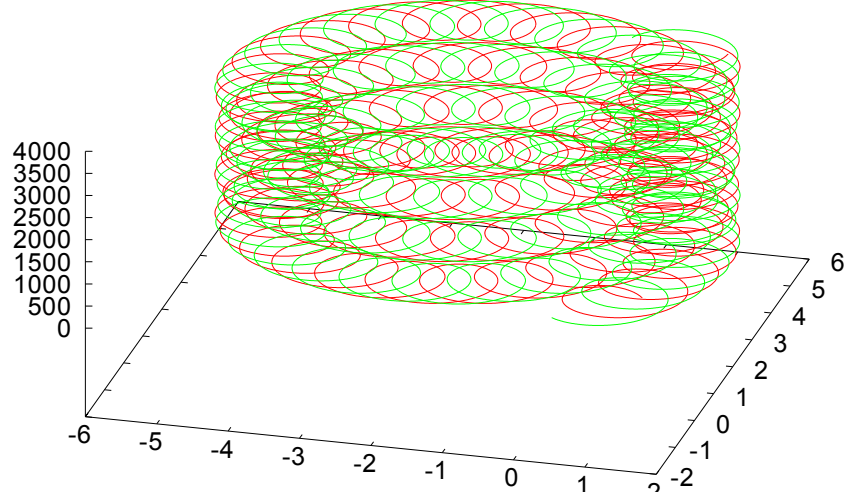
Σχήμα 1.28 : Διάγραμμα φάσης της πλευράς $d12$

Η περίπτωση 2 με $\Theta = 11.2675$, $\Lambda = 0.2979$



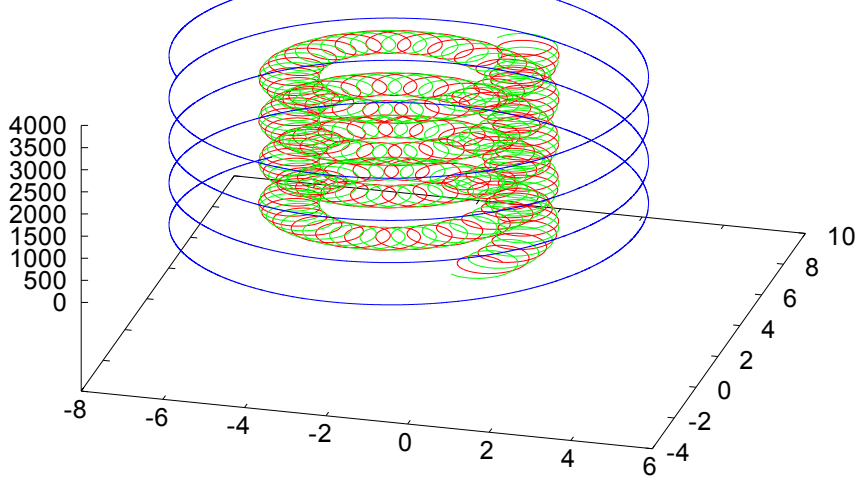
Σχήμα 1.29 : Κίνηση δίνης 0 (α) στο επίπεδο $x-y$ και (β) στο επίπεδο $x-t$

C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\temp\vort0.dat



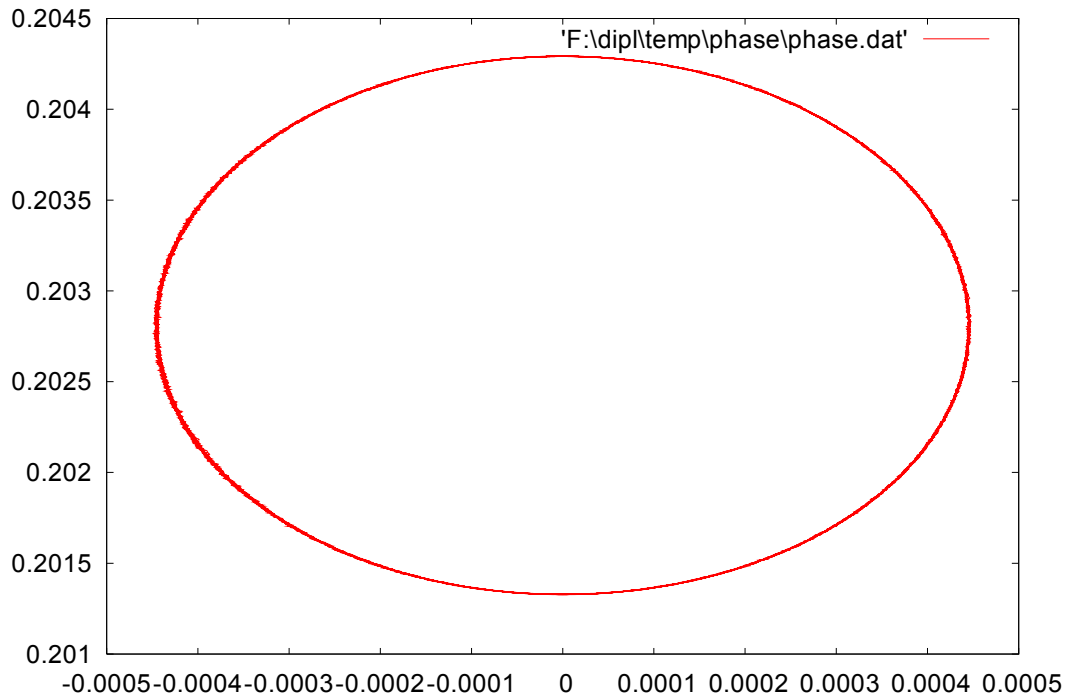
Σχήμα 1.30 : Κίνηση των δυο κοντινών δινών 0 και 1 στο χρόνο t

'C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\temp\vort0.dat' ————
'C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\temp\vort1.dat' ————
'C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\temp\vort2.dat' ————



Σχήμα 1.31 : Κίνηση και των τριών δινών στο χρόνο t

Είναι εμφανές ότι με την αύξηση του Θ , δυο από τις τρεις δίνες προσεγγίζουν μεταξύ τους σε τέτοιο βαθμό ώστε η σχετική τους απόσταση να είναι σημαντικά μικρότερη σε σύγκριση με τις σχετικές αποστάσεις τους από την τρίτη δίνη. Αυτό οδηγεί το σύστημα, όπως εύκολα παρατηρεί στα σχετικά σχήματα να λειτουργεί σαν το γνώριμο από προηγούμενως σύστημα των δυο δινών, με τις κοντινές δίνες 0 και 1 να λειτουργούν σαν μία δίνη μόνο.



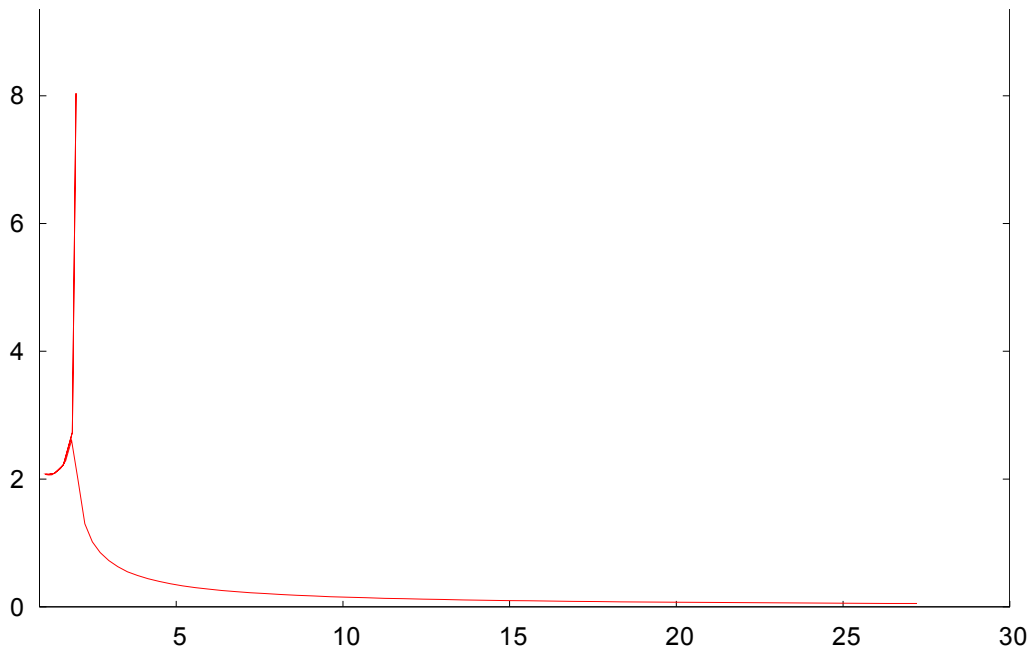
Σχήμα 1.32 : Διάγραμμα φάσης της πλευράς d12

1.3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΠΕΡΙΟΔΟΥ T

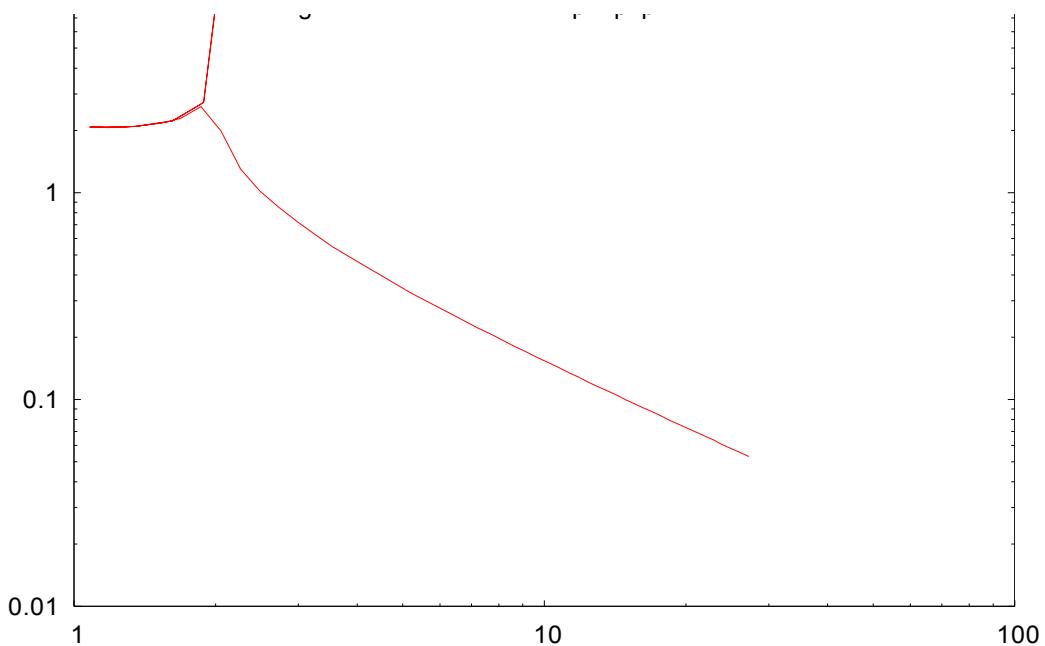
Για κάθε τιμή του $\Theta \geq 1$ υπάρχει και μία αναλυτική λύση του συστήματος η οποία αντιστοιχεί σε μία περιοδική κίνηση των δινών γύρω από το κέντρο στροβιλότητας τους. Παρακάτω υπολογίζεται η προκύπτουσα περίοδος T της σχετικής κίνησης των τριών δινών και παρατίθενται τα αποτελέσματα στα διαγράμματα που ακολουθούν. Ο υπολογισμός της περιόδου T σε κάθε περίπτωση του Θ γίνεται με την προσθήκη του κώδικα του Μετασχηματισμού Fourier (FFT^{II}) και στο διάγραμμα δίνεται η μεταβολή αδιαστατοποιημένης, με την παράμετρο r που είδαμε παραπάνω, περιόδου T1 συναρτήσει της χαρακτηριστικής παραμέτρου Θ , όπως αυτή υπολογίστηκε. Η αδιαστατοποίηση γίνεται με βάση τον τύπο που ακολουθεί.

$$T1 = \frac{\Gamma \cdot T}{2 \cdot \pi \cdot r^2}$$

^{II} Fast Fourier Transform



Σχήμα 1.33 : Διάγραμμα περιόδου T1 συναρτήσει της παραμέτρου Θ

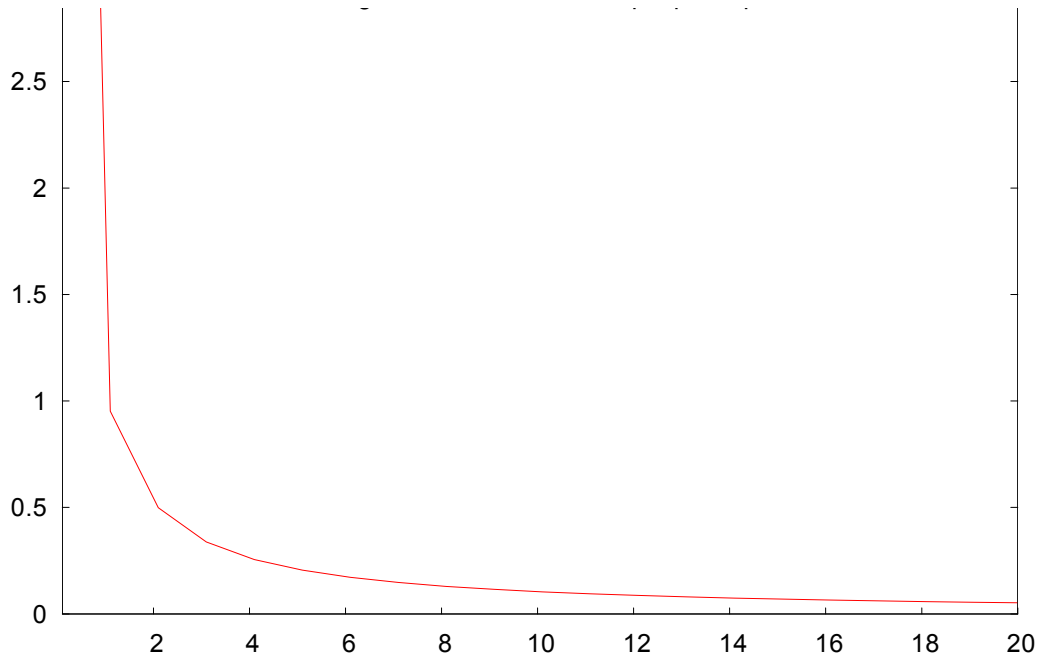


Σχήμα 1.34 : Διάγραμμα περιόδου T1 συναρτήσει παραμέτρου Θ σε λογαριθμική κλίμακα

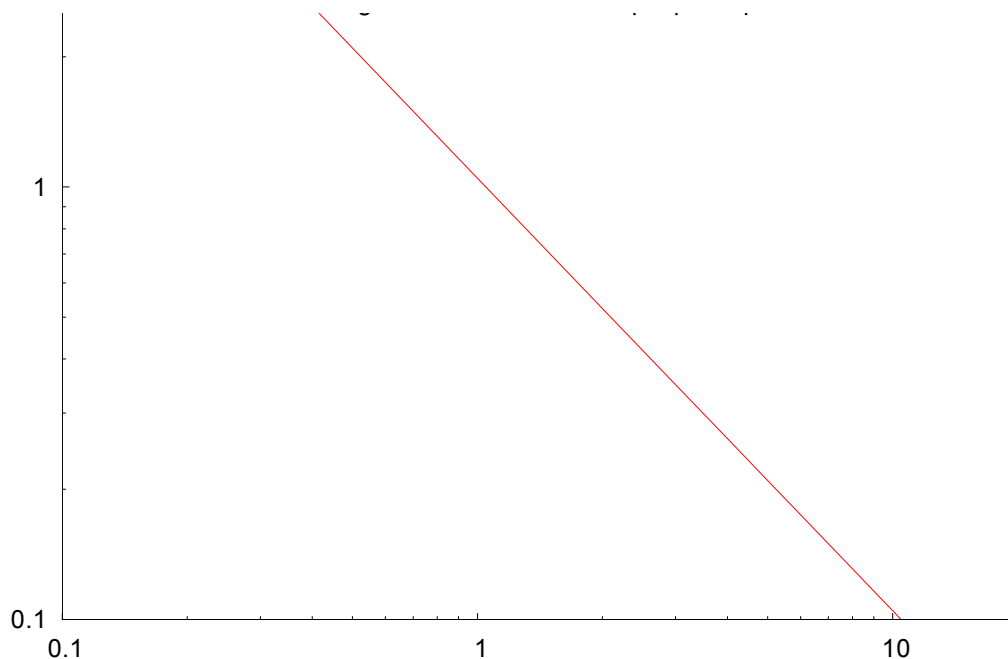
Παρατηρώντας το διάγραμμα της αδιαστατοποιημένης περιόδου βλέπουμε ότι επιβεβαιώνονται τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω. Στο σημείο $\Theta = 2$ έχουμε μια ασυνέχεια καθώς η περίοδος δείχνει να απειρίζεται. Με αναλυτικούς υπολογισμούς μπορεί ακόμα να αποδειχθεί ότι στο όριο $\Theta \rightarrow 1$ η περίοδος $T \rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{3} \approx 2,094$ κάτι που επαληθεύεται από το διάγραμμα μας καθώς και ότι στο όριο $\Theta \rightarrow \infty$ το διάγραμμα της περιόδου κατεβαίνει με ασυμπτωτική συμπεριφορά που μοιάζει με της

συνάρτησης $f(\Theta) = \frac{4 \cdot \pi}{9 \cdot \Theta}$. Το τελευταίο επαληθεύεται αν συγκρίνουμε το διάγραμμα

της T με τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{4 \cdot \pi}{9 \cdot x}$ που παρατίθεται παρακάτω.



Σχήμα 1.35 : Γραφική παράσταση της $f(x)$



Σχήμα 1.36 : Γραφική παράσταση της $f(x)$ σε λογαριθμική κλίμακα

Όπως παρατηρούμε οι ασυμπτωτικές συμπεριφορές των δυο διαγραμμάτων μοιάζουν σε πολύ μεγάλο βαθμό στο όριο $\Theta \rightarrow \infty$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΔΙΝΩΝ-ΧΑΟΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται η περίπτωση ενός συστήματος με $N = 4$ διακριτές δίνες. Το πρόβλημα αυτό έχει αντιμετωπιστεί από πολλούς επιστήμονες στο παρελθόν. Η πιο επιτυχής αναλυτική προσέγγιση που έχει χρησιμοποιηθεί αφορά ένα μετασχηματισμό των συντεταγμένων που 'ρίχνει' τους βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος από τέσσερις σε δύο και εκ νέου αντιμετώπιση του προκύπτοντος συστήματος. Το βασικό χαρακτηριστικό του συστήματος των τεσσάρων δινών αποτελεί η χαοτική συμπεριφορά που αυτό εμφανίζει σε κάποιες συγκεκριμένες περιοχές του χώρου φάσεων του ή αλλιώς, η χαοτική συμπεριφορά που αυτό εμφανίζει, για συγκεκριμένες αρχικές θέσεις των τεσσάρων δινών. Γενικά, όπως θα δούμε αναλυτικά και παρακάτω, το πρόβλημα αυτό έχει περιοδικές, ή πιο σωστά ήμι-περιοδικές λύσεις και χαοτικές ανάλογα με την τιμή της προαναφερθείσας παραμέτρου Θ , προσαρμοσμένης εδώ στην περίπτωση των τεσσάρων δινών.

2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Υποθέτουμε ότι έχουμε 4 δίνες τις 0, 1, 2, 3 στις θέσεις (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) με στροβιλότητες $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ αντίστοιχα. Οι εξισώσεις που διέπουν αυτή τη σχετική κίνηση διατυπωμένες για την δίνη 0 είναι οι εξής :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial t} &= \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{y_1 - y_0}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} + \frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{y_2 - y_0}{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2} \\ &+ \frac{\Gamma_3}{2\pi} \frac{y_3 - y_0}{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2} \\ \frac{\partial y_0}{\partial t} &= -\frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{x_1 - x_0}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} - \frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{x_2 - x_0}{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2} \\ &- \frac{\Gamma_3}{2\pi} \frac{x_3 - x_0}{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2} \end{aligned}$$

Για τις δίνες 1, 2, 3 οι αντίστοιχες εξισώσεις προκύπτουν από τις προηγούμενες με κυκλική μετάθεση των δεικτών 0, 1, 2, 3.

Στη συγκεκριμένη εργασία εξετάζεται το πρόβλημα για δίνες ίσης στροβιλότητας δηλαδή για $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma$ οπότε οι εξισώσεις τροποποιούνται ανάλογα. Όπως και πριν ορίζουμε τα αντίστοιχα μεγέθη :

$$\begin{aligned} d_{01} &= |z_0 - z_1|, \quad d_{02} = |z_0 - z_2|, \quad d_{03} = |z_0 - z_3| \\ d_{12} &= |z_1 - z_2|, \quad d_{13} = |z_1 - z_3|, \quad d_{23} = |z_2 - z_3| \end{aligned}$$

δηλαδή τις σχετικές αποστάσεις των δινών.

Παρόμοια ορίζουμε το λόγο αριθμητικού / γεωμετρικού μέσου Θ όπου :

$$\Theta = \frac{\left(\frac{d01^2 + d02^2 + d03^2 + d12^2 + d13^2 + d23^2}{6} \right)^6}{d01^2 \cdot d02^2 \cdot d12^2 \cdot d03^2 \cdot d13^2 \cdot d23^2}$$

Στην περίπτωση όπου θα επιλεγεί ως αρχή των συντεταγμένων το κέντρο στροβιλότητας δηλαδή το σημείο όπου ισχύει $P = Q = 0$ έχουμε :

$$d01^2 + d02^2 + d03^2 + d12^2 + d13^2 + d23^2 = 4L^2 \quad \text{και}$$

$$d01^2 \cdot d02^2 \cdot d12^2 \cdot d03^2 \cdot d13^2 \cdot d23^2 = e^{-4\pi H}$$

Άρα για το Θ ισχύει :

$$\Theta = \left(\frac{2}{3} \right)^6 \cdot L^{12} \cdot e^{4\pi H}$$

Το οποίο σημαίνει ότι $\Theta \geq 1.40466$ και θα ονομάσουμε την ελάχιστη αυτή τιμή του Θ , που επιτυγχάνεται στην περίπτωση όπου οι δίνες είναι αρχικά τοποθετημένες στις κορυφές τετραγώνου, ως Θ_0^{III} για να ορίσουμε την παράμετρο Λ ως :

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\Theta_0}{\Theta}}, \quad \text{όπου φυσικά θα ισχύει } 0 < \Lambda \leq 1 .$$

Βέβαια στη συγκεκριμένη περίπτωση μελετήθηκε το πρόβλημα με αρχή των συντεταγμένων το σημείο (0,0) και για στροβιλότητες $\Gamma = 1$. Για τους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε η, γραμμένη σε γλώσσα Fortran, ρουτίνα 4vort.f που λύνει το σύστημα των διαφορικών μας εξισώσεων με βάση τη μέθοδο Runge – kutta 4^{ης} τάξης. Έτσι σε κάθε βήμα υπολογίζονται οι νέες θέσεις των δινών και καταγράφονται στα αρχεία vort0.dat , vort1.dat , vort2.dat , vort3.dat για τις τέσσερις δίνες συναρτήσει του χρόνου. Οι ταχύτητες των τεσσάρων δινών σε κάθε χρονικό βήμα καταγράφονται στο αρχείο speed.dat .

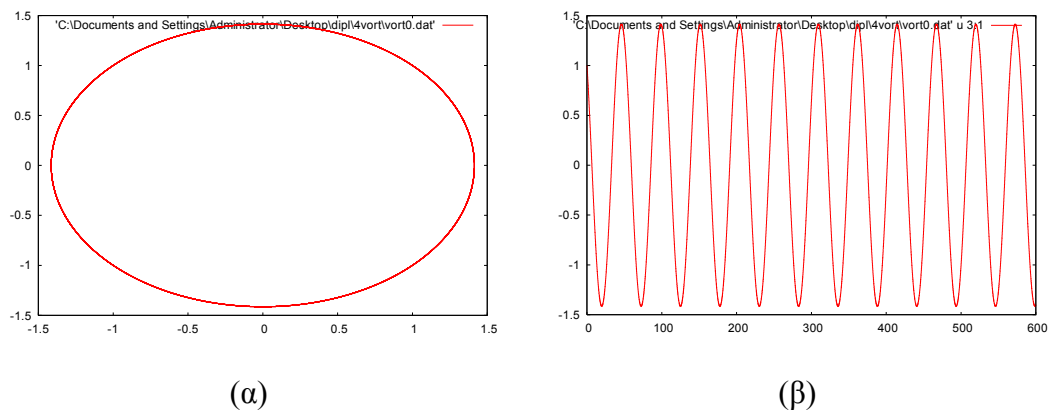
2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΩΝ ΔΙΝΩΝ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ

Η μελέτη αυτή θα γίνει με βάση τις παραμέτρους Θ και Λ που ορίστηκαν προηγουμένως, αν και υπάρχουν κάποιες βασικές διαφορές σε σχέση με πριν. Η περίπτωση $\Theta = 1$ δε νοείται πλέον καθώς το Θ ξεκινάει από την τιμή 1.40466 και ‘τρέχει’ έως το άπειρο .

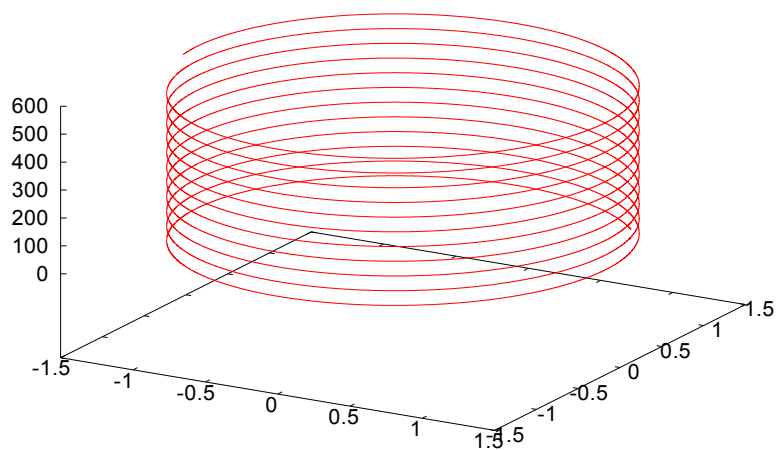
Η περίπτωση $\Theta = 1.40466, \Lambda = 1$

^{III} Το πώς υπολογίστηκε η ελάχιστη τιμή του $\Theta_0 = 1.40466$ αποτελεί ένα αρκετά πολύπλοκο πρόβλημα από μόνο του και σκόπιμα δεν αναλύεται περαιτέρω στη παρούσα εργασία .

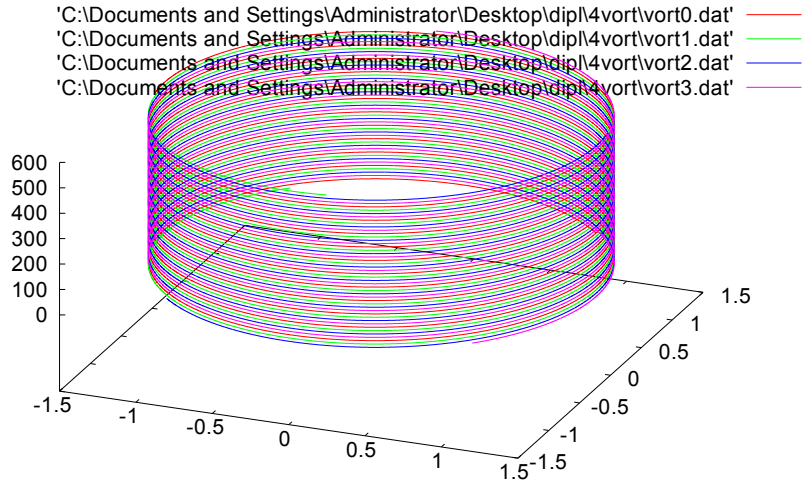
Εδώ οι αρχικές θέσεις των δινών ταυτίζονται με τις κορυφές ενός τετραγώνου. Η κίνηση των δινών είναι ευσταθής και αποτελείται από την περιστροφή κάθε δίνης γύρω από το κέντρο στροβιλότητας του συστήματος, το οποίο συμπίπτει λόγω συμμετρίας με το κέντρο του τετραγώνου. Παρακάτω παρατίθενται γραφήματα της κίνησης της δίνης 0 τόσο στο επίπεδο $x - y$, στο επίπεδο $x - t$ όσο και στο χώρο :



(α) (β)
Σχήμα 2.1 : Κίνηση δίνης 0 (α) στο επίπεδο $x-y$ και (β) στο επίπεδο $x-t$



Σχήμα 2.2 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t



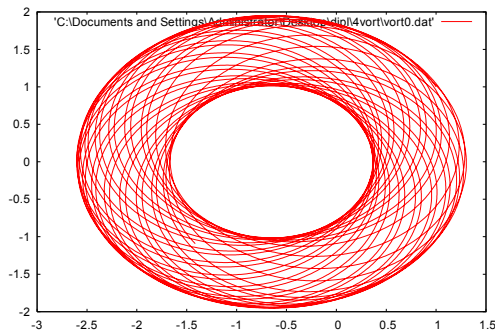
Σχήμα 2.3 : Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t

Είναι σαφές ότι οι υπόλοιπες δίνες 1, 2 και 3 ακολουθούν ακριβώς την ίδια τροχιά με την δίνη 0, με διαφορά φάσης 90° μοιρών .

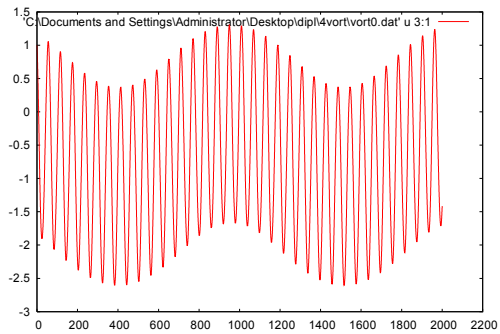
Η περιοχή τιμών $1.40466 < \Theta < \Theta_c/4$

Το Θ_c είναι μια συγκεκριμένη τιμή του Θ η οποία, όπως θα δούμε αναλυτικά παρακάτω, αντιστοιχεί σε μια σταθερά περιστρεφόμενη αρχική τοποθέτηση του συστήματος των δινών, ισχύει $\Theta_c = 9.4815$. Το Λ 'τρέχει' στην περιοχή $2\Lambda_c < \Lambda < 1$, με $\Lambda_c = 0,3849$. Εδώ το σύστημα των τεσσάρων δινών έχει περιοδική λύση (περιοδικές συστολές και διαστολές ενός παραλληλογράμμου) και τα διαγράμματα φάσης βγαίνουν κλειστές καμπύλες. Το όλο σύστημα διατηρεί τον προσανατολισμό του, κάτι που επαληθεύτηκε από το γεγονός ότι το εμβαδόν που περικλείουν οι τέσσερις δίνες δεν παίρνει ποτέ του αρνητική τιμή.

Η περίπτωση 1 με $\Theta = 2.0985$, $\Lambda = 0.8181$

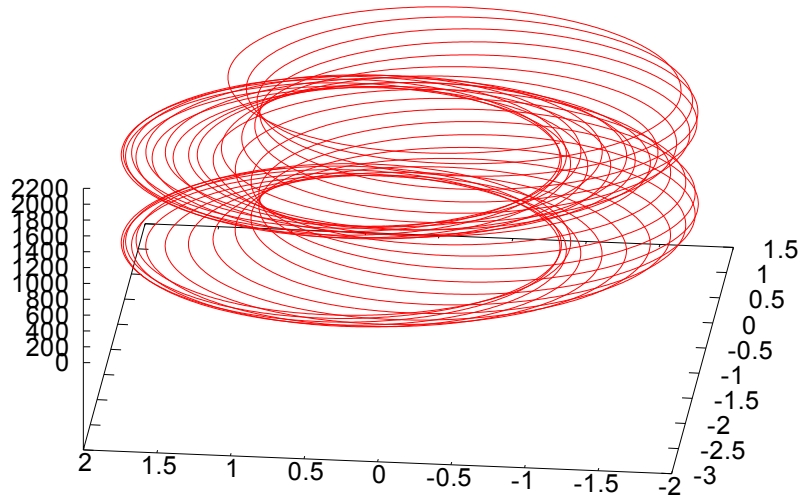


(α)

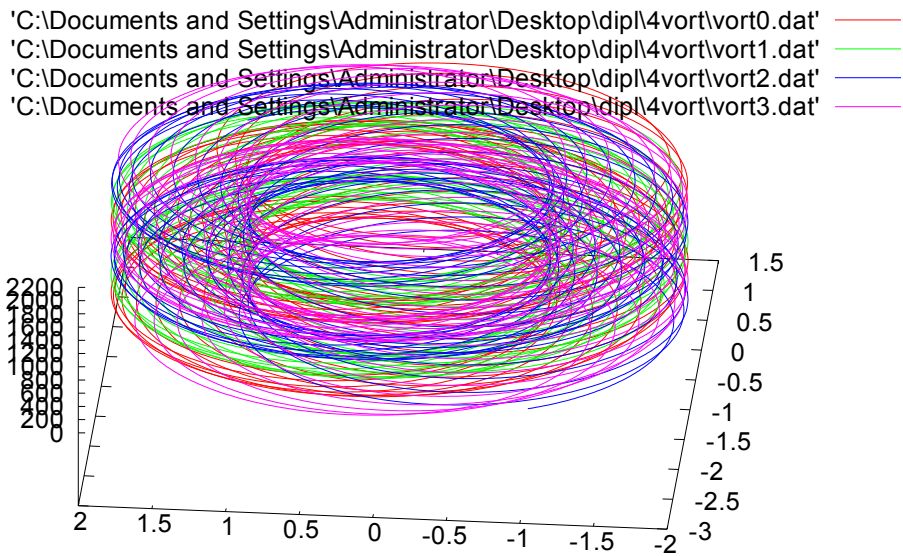


(β)

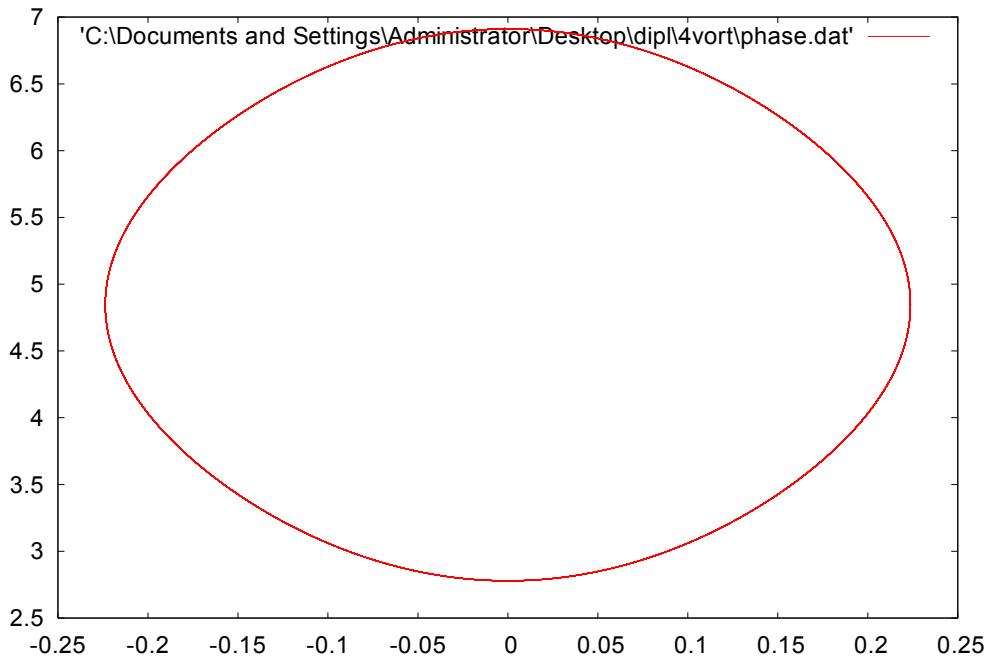
Σχήμα 2.4 : Κίνηση δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t



Σχήμα 2.5 : Κίνηση δίνης θ στο χρόνο t



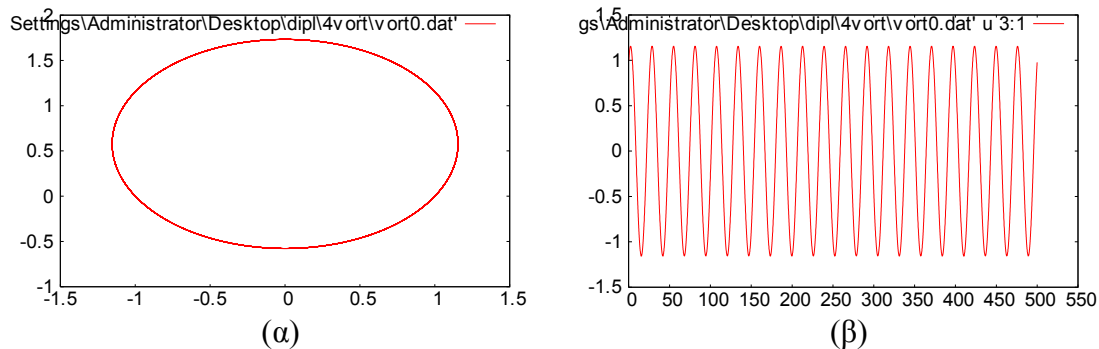
Σχήμα 2.6 : Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t



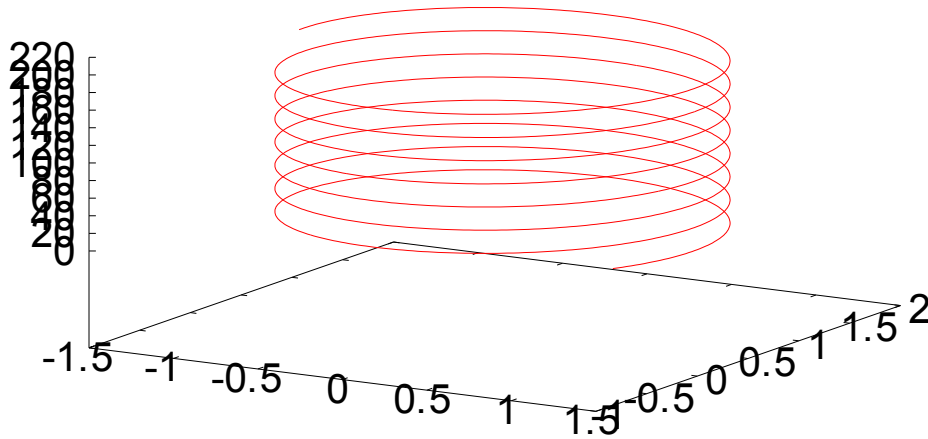
Σχήμα 2.7 : Διάγραμμα φάσης της πλευράς d12

Η περίπτωση $\Theta = \Theta_c/4 = 2.3703$

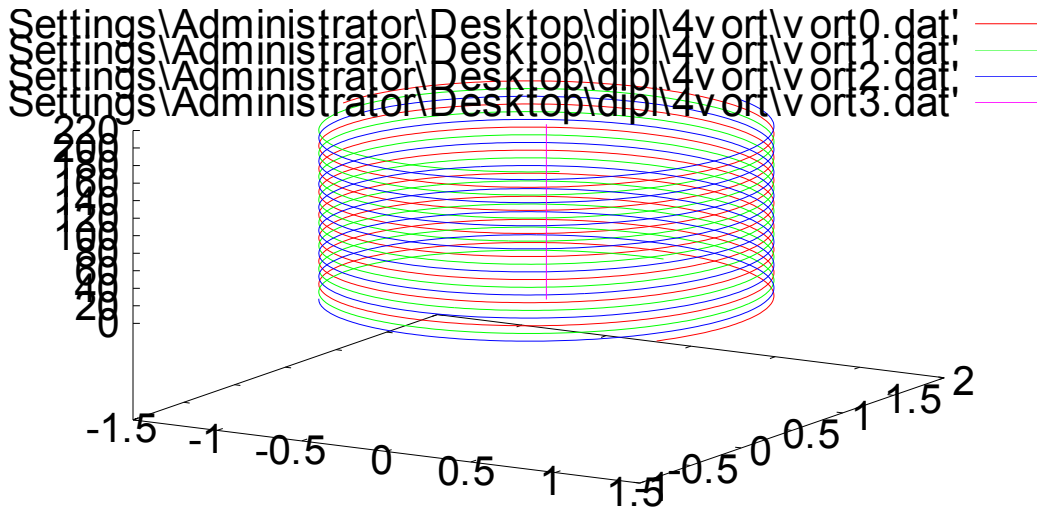
Σε αυτή την τιμή του Θ έχουμε άλλη μια περίπτωση σταθερά περιστρεφόμενης αρχικής τοποθέτησης των δινών. Το Λ ισούται με $\Lambda = 2\Lambda_c = 0.7698$ και οι τέσσερις δίνες είναι αρχικά τοποθετημένες ως εξής : οι τρεις δίνες πάνω στις κορυφές ενός ισοσκελούς τριγώνου και η τέταρτη στο βαρύκεντρό του. Εδώ η λύση του συστήματος είναι ευσταθής υπό προϋποθέσεις. Αυτό σημαίνει ότι από ένα σημείο και μετά που οι διαταραχές γίνονται αρκετά μεγάλες το ευσταθές μας σύστημα ‘πηδάει’ σε ένα χαοτικό με Θ λίγο μεγαλύτερο του $\Theta_c/4$, κάτι που άλλωστε φάνηκε και στους υπολογισμούς όπου, μετά από κάποιες επαναλήψεις η συσσώρευση αριθμητικού σφάλματος από τη μέθοδο επίλυσης του συστήματος έδωσε σφάλμα μεγαλύτερο από όσο μπορούσε να ‘αντέξει’ το σύστημα και έγινε χαοτικό. Σε γενικές γραμμές η κίνηση που πραγματοποιούν οι τέσσερις δίνες είναι μια περιστροφή των τριών δινών στις κορυφές, γύρω από το βαρύκεντρο (παρόμοια με τη περίπτωση των τριών δινών τοποθετημένες σε κορυφές ισοσκελούς τριγώνου) και την τέταρτη δίνη να παραμένει ακίνητη στο βαρύκεντρο. Παρακάτω παρατίθενται διαγράμματα για $\Theta = \Theta_c/4 = 2.3703$, $\Lambda = 2\Lambda_c = 0.7698$.



Σχήμα 2.8 : Κίνηση δίνης θ (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t



Σχήμα 2.9 : Κίνηση δίνης θ στο χρόνο t



Σχήμα 2.10 : Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t^{IV}

Η περιοχή τιμών $\Theta_c/4 < \Theta < \Theta_c$

Εδώ ισχύει $\Lambda_c < \Lambda < 2\Lambda_c$, με $\Lambda_c = 0.3849$. Το σύστημα φαίνεται να έχει χαοτική συμπεριφορά, ή αλλιώς μη στοχαστική συμπεριφορά, όπως θα έλεγε κάποιος πιο εξοικειωμένος με τη μαθηματική ορολογία. Παρακάτω ακολουθεί μια πιο αναλυτική εξήγηση του τι γενικά σημαίνει ο όρος χαοτική συμπεριφορά.

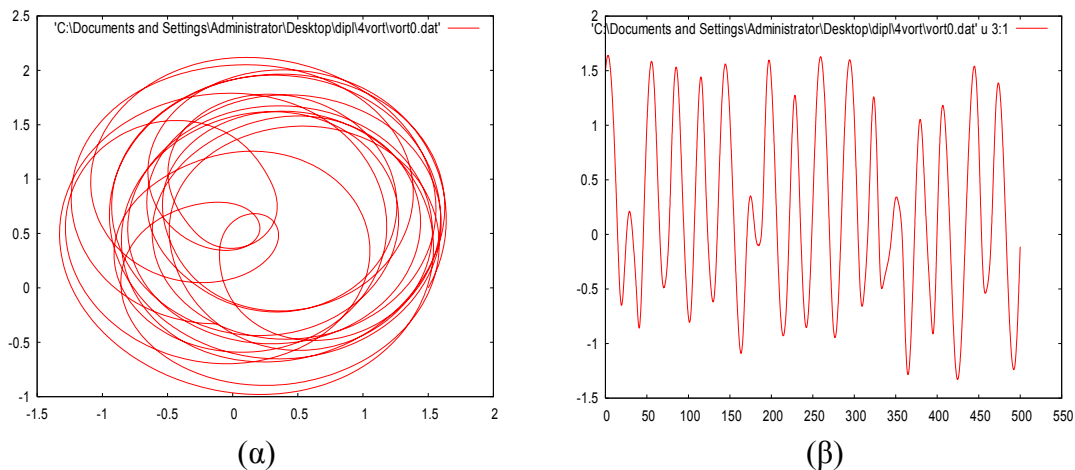
Μέχρι τώρα τα διάφορα σενάρια αρχικής τοποθέτησης δινών που εξετάστηκαν -τόσο στην περίπτωση των τριών δινών αλλά και των τεσσάρων - έδιναν λύσεις στο σύστημα που ήταν περιοδικές ή διπεριοδικές και γενικότερα οι τροχιές των δινών είχαν κάποια λογική και κάποια ομοιότητα μεταξύ τους. Σε αυτές τις μέχρι τώρα περιπτώσεις αυτό συνέβαινε γιατί τα προς αντιμετώπιση συστήματα ήταν μαθηματικά ολοκληρώσιμα, δηλαδή η καταγραφή και επεξεργασία των εξισώσεων οδηγούσε σε αναλυτικές λύσεις του συστήματος. Παρόλα αυτά κάτι τέτοιο δε φαίνεται να συμβαίνει στην περιοχή τιμών του Λ που εξετάστηκε εδώ. Οι τροχιές των τεσσάρων δινών, αν εξεταστούν η καθεμιά ξεχωριστά αλλά και όλες μαζί σε ένα διάγραμμα δε βγάζουν κανένα νόημα και δε φαίνεται να 'κρύβουν' κανενός είδους

^{IV} Η μοβ γραμμή αντιπροσωπεύει τη δίνη 3 η οποία μένει ακίνητη.

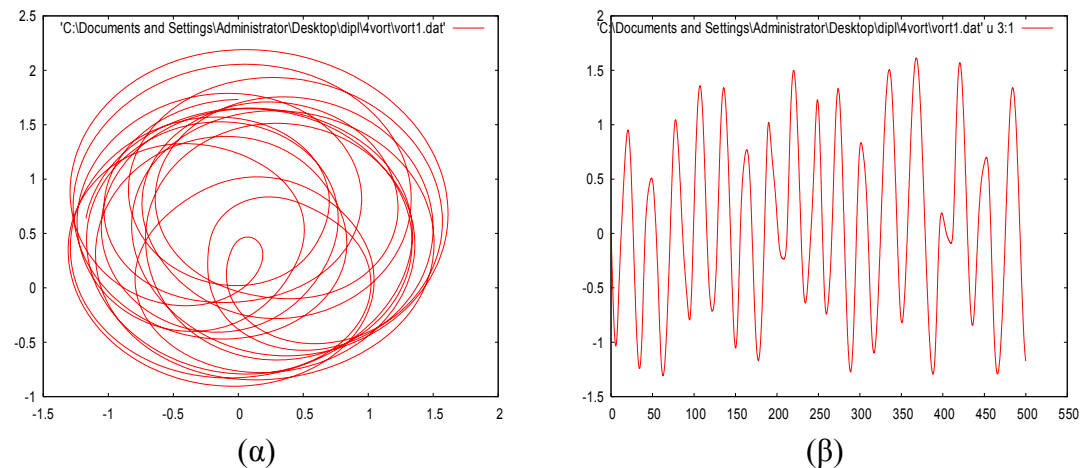
περιοδική ή διπεριοδική συμπεριφορά. Επίσης, πολύ μικρές αλλαγές στις αρχικές συνθήκες, οπότε και πολύ μικρές αλλαγές στην τιμή του Λ , δίνουν τροχιές εντελώς διαφορετικές με πριν, κάτι που δεν είχε παρατηρηθεί έως τώρα, όπου μικρές αλλαγές στο Λ έδιναν διαφορετικές μεν τροχιές αλλά κατά πολύ ομοιάζουσες με τις προηγούμενες. Αυτό το φαινόμενο έχει οριστεί σαν βασικό χαρακτηριστικό της χαοτικής συμπεριφοράς ενός συστήματος και είναι γνωστό ως ‘ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες’. Άλλο ένα στοιχείο υπέρ της χαοτικής συμπεριφοράς του συστήματός είναι το ότι αντίθετα με πριν αν γίνει απόπειρα επίλυσης των εξισώσεων εφαρμόζοντας όλες τις γνωστές μεθόδους, καταλήγουμε σε ολοκληρώματα τα οποία δεν μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά. Το τι πρακτικά τι σημαίνουν όλα αυτά φαίνεται στις παρακάτω περιπτώσεις όπου το σύστημα εξετάζεται για τιμές του Λ στο διάστημα $0,3849 < \Lambda < 0,7698$, όπου εντοπίζεται η χαοτική συμπεριφορά.

Η περίπτωση 1 με $\Theta = 2.9918$, $\Lambda = 0.6852$

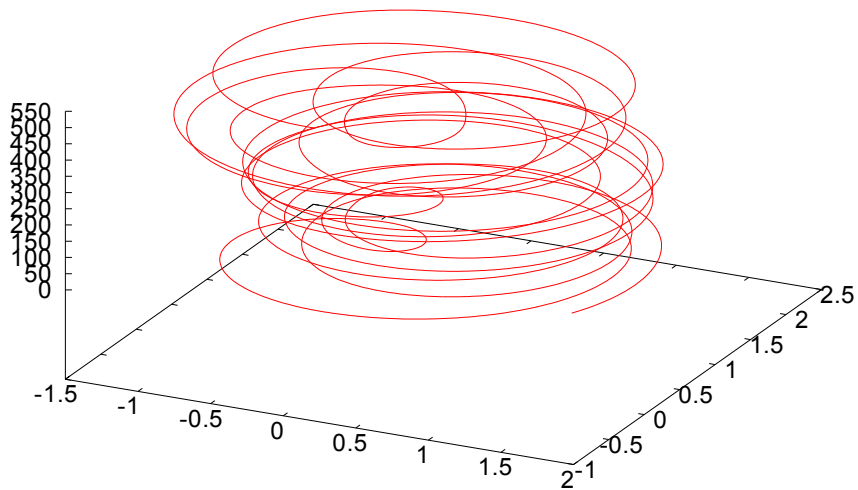
Οι υπολογισμοί έγιναν με τη γνωστή ρουτίνα για χρόνο έως 500 sec. Στα παρακάτω διαγράμματα που παρατίθενται η αρχική τοποθέτηση των δινών δεν έχει καμία λογική –οι τέσσερις δίνες απλά σχηματίζουν ένα τυχαίο τετράπλευρο. Το γεγονός ότι δεν υπάρχει κάποια περιοδικότητα στην κίνηση τους, επαληθεύτηκε και αριθμητικά με χρήση του μετασχηματισμού Fourier σε υπολογισμούς που έγιναν μέχρι τα 3000 sec κίνησης.



Σχήμα 2.11 : Κίνηση της δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t

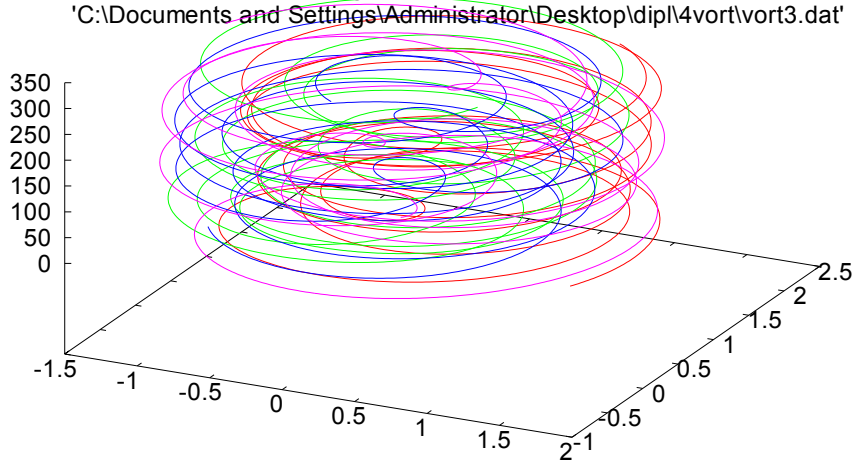


Σχήμα 2.12 : Κίνηση της δίνης 1 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t

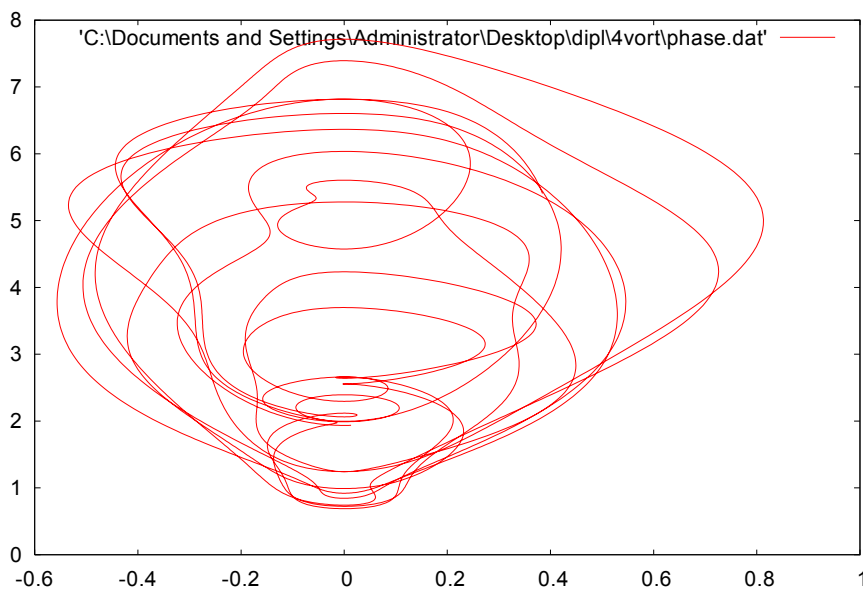


Σχήμα 2.13 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t

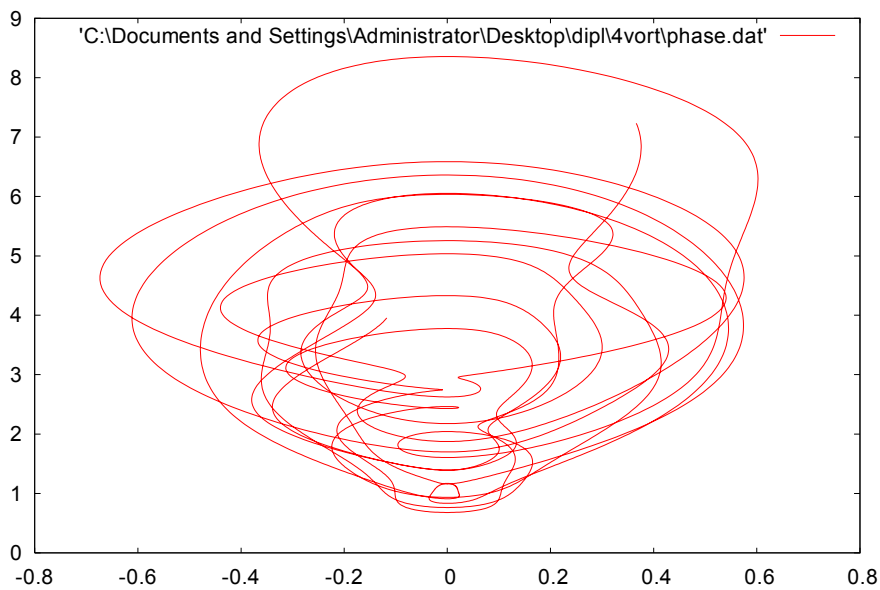
'C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\4vort\vort0.dat' — red
 'C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\4vort\vort1.dat' — green
 'C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\4vort\vort2.dat' — blue
 'C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\4vort\vort3.dat' — magenta



Σχήμα 2.14 : Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t



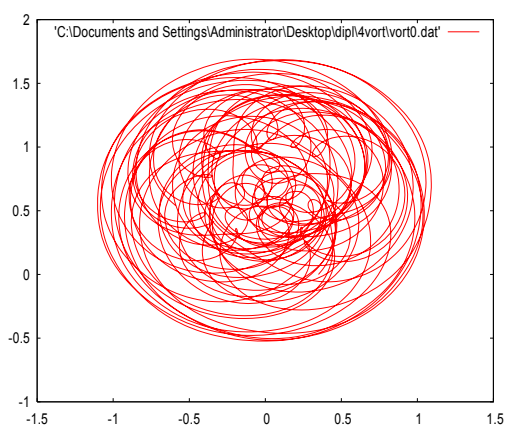
Σχήμα 2.15 : Διάγραμμα φάσης για την πλευρά d01



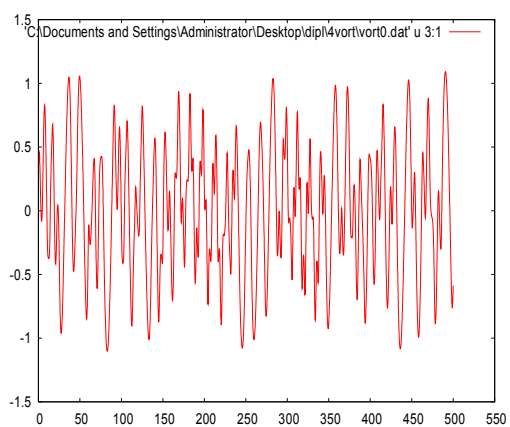
Σχήμα 2.16 : Διάγραμμα φάσης για την πλευρά d12

Είναι προφανές ότι τα διαγράμματα φάσης δεν μας υποδεικνύουν κανένα είδος περιοδικής συμπεριφοράς.

Η περίπτωση 2 με $\Theta = 7.2522$, $\Lambda = 0.4401$

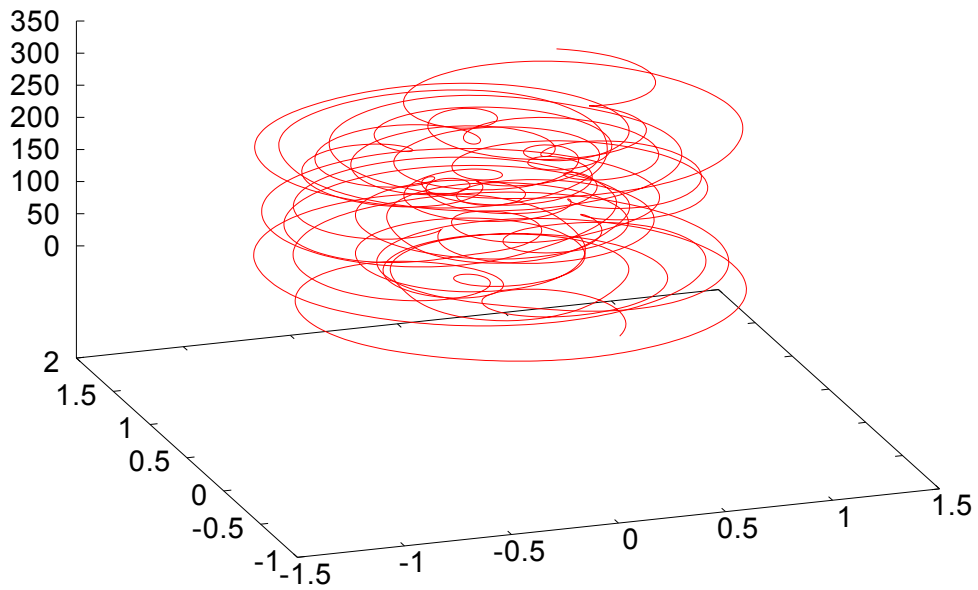


(α)

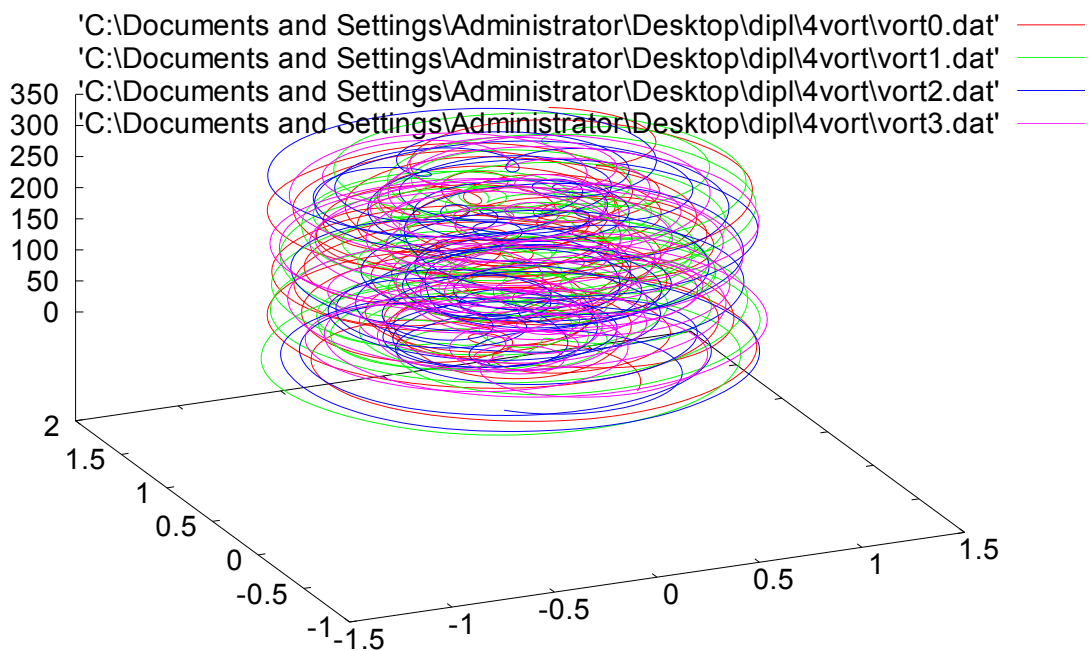


(β)

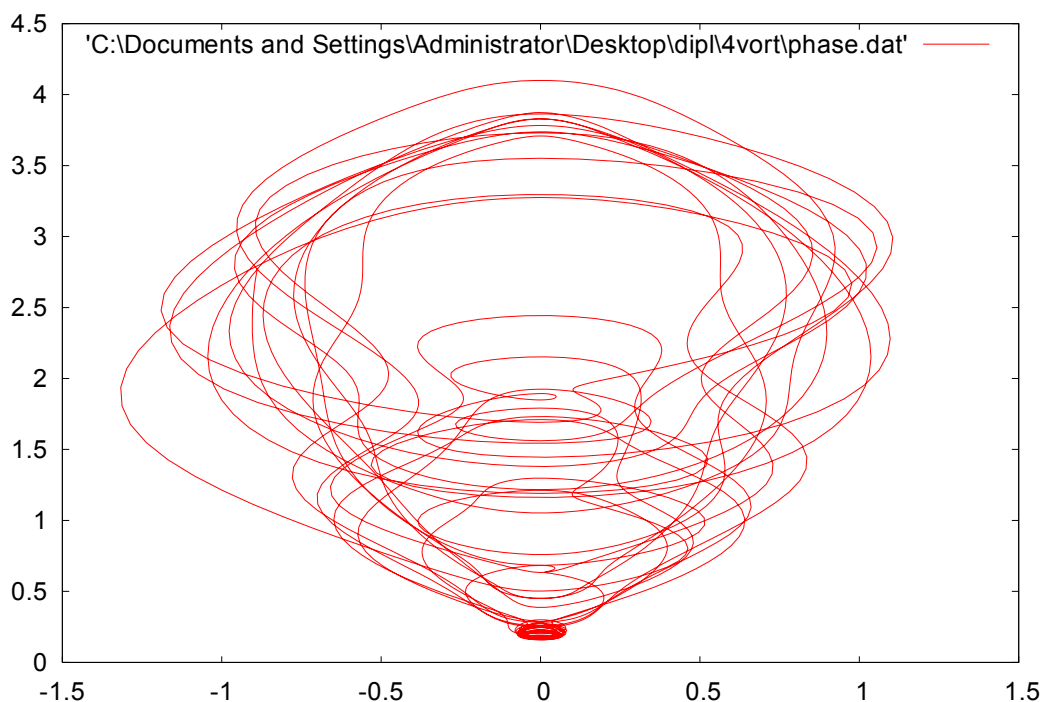
Σχήμα 2.17 : Κίνηση δίνης θ (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t



Σχήμα 2.18 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t



Σχήμα 2.19 : Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t



Σχήμα 2.20 : Διάγραμμα φάσης πλευράς d01

Όπως φαίνεται και στη δεύτερη περίπτωση, ούτε εδώ υπάρχει κανένα ίχνος περιοδικότητας και οι δύο περιπτώσεις $\Lambda = 0.4401$ και $\Lambda = 0.6852$ δεν ομοιάζουν σε τίποτα.

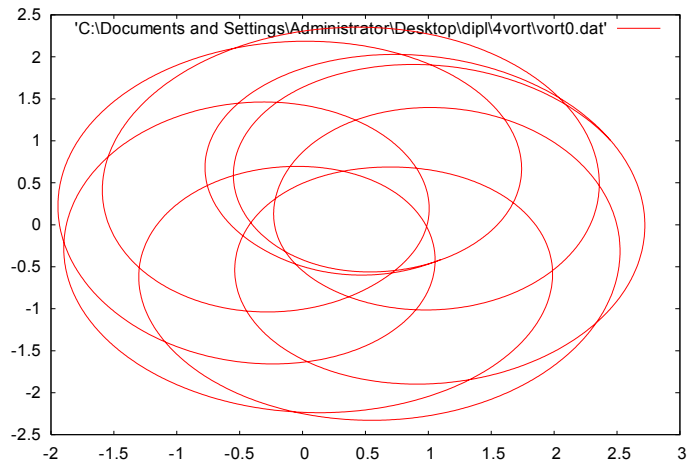
Σχόλιο περί των περιοχών μετάβασης στο χάος

Ένα άλλο ενδιαφέρον ζήτημα –αλλά και λογική απορία του αναγνώστη σε αυτό το σημείο- αποτελεί ίσως το ερώτημα του πότε ακριβώς γίνεται αυτή η μετάβαση στο χάος; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δεν είναι απλή. Δηλαδή δεν μπορούμε να πούμε ότι ακριβώς στην τιμή $\Lambda = \Lambda_c$ το σύστημα γίνεται χαοτικό ενώ ακριβώς πριν από αυτή ήταν ολοκληρώσιμο. Η μετάβαση στο χάος γίνεται σταδιακά και οι τιμές Λ_c και $2\Lambda_c$ δεν είναι παρά εκτιμήσεις. Στην πραγματικότητα –όπως αποδεικνύεται και παρακάτω- αυτό που φαίνεται να συμβαίνει είναι το εξής : Όσο μειώνεται η τιμή του Λ και πλησιάζει την τιμή $2\Lambda_c$, οι μέχρι τώρα ομαλές και περιοδικές κινήσεις των δυνών δείχνουν να έχουν κάποιες μικρές διαταραχές από το αναμενόμενο σε κάποια σημεία, η κίνηση έχει περιοδικότητα, αλλά ταυτόχρονα δείχνει να έχει κάποιες μικρές ατέλειες. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι αυτά είναι τα πρώτα σημάδια εμφάνισης χάους ή όπως θα ήταν πιο μαθηματικά παρατηρείται εμφάνιση ‘χάου μικρής κλίμακας’.

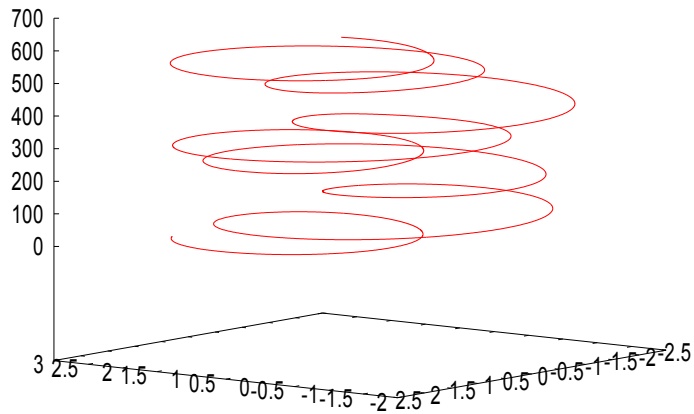
Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται αυτή η μετάβαση στο χάος και η εμφάνιση χάους μικρής κλίμακας όσο το Λ μειώνεται προς την κρίσιμη τιμή $2\Lambda_c$ και την εμφάνιση χάους μεγάλης κλίμακας όταν την ξεπερνά.

Η περίπτωση 1 με $\Theta = 2.2405$, $\Lambda = 0.7918$

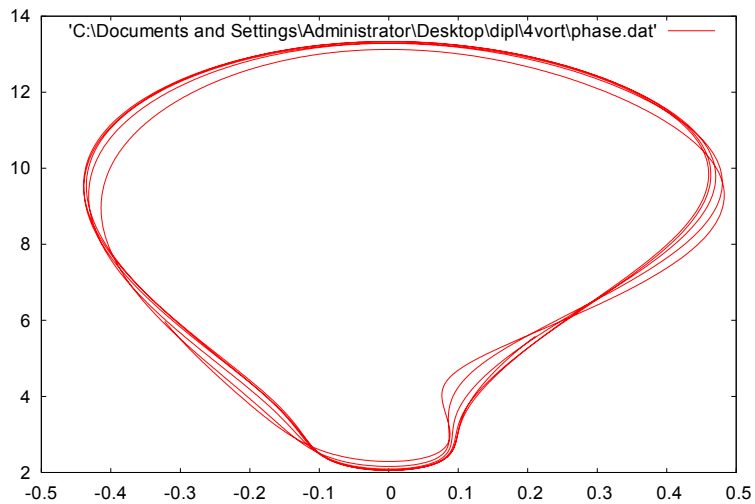
Εδώ το Λ απέχει αρκετά από το Λ_c . Είναι εμφανή τα πρώτα σημάδια εμφάνισης ‘διαταραχών’ στη ομαλή μέχρι τώρα κίνηση της δίνης 0, κάτι που παρατηρείται κυρίως από το διάγραμμα φάσης.



Σχήμα 2.21 : Κίνηση δίνης 0 στο επίπεδο x-y



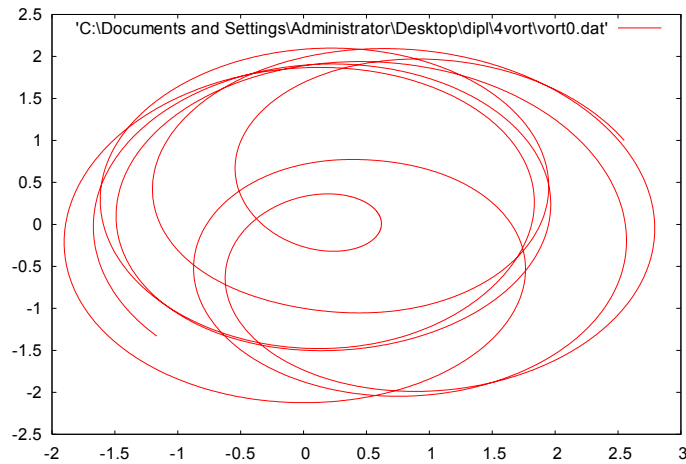
Σχήμα 2.22 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t



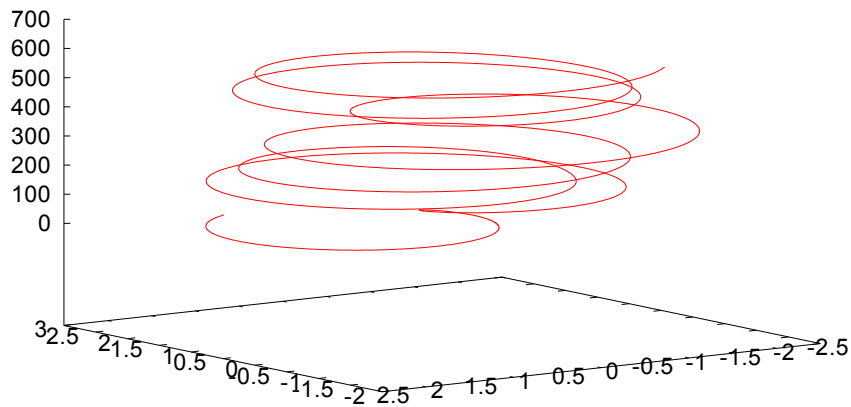
Σχήμα 2.23 : Διάγραμμα φάσης πλευράς d01

Τα πράγματα αρχίζουν να γίνονται αρκετά πιο ξεκάθαρα στην παρακάτω περίπτωση, όπου είναι πλέον εμφανής η πιο έντονη εμφάνιση του χάους – οι διαταραχές εμφανίζονται όλο και πιο συχνά και σε μεγαλύτερο βαθμό.

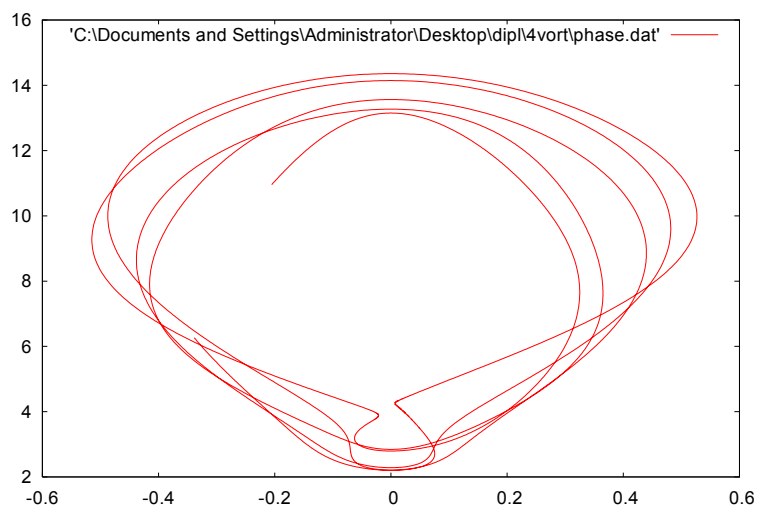
Η περίπτωση 2 με $\Theta = 2,3617$, $\Lambda = 0.7712$



Σχήμα 2.24 : Κίνηση δίνης θ στο επίπεδο x-y



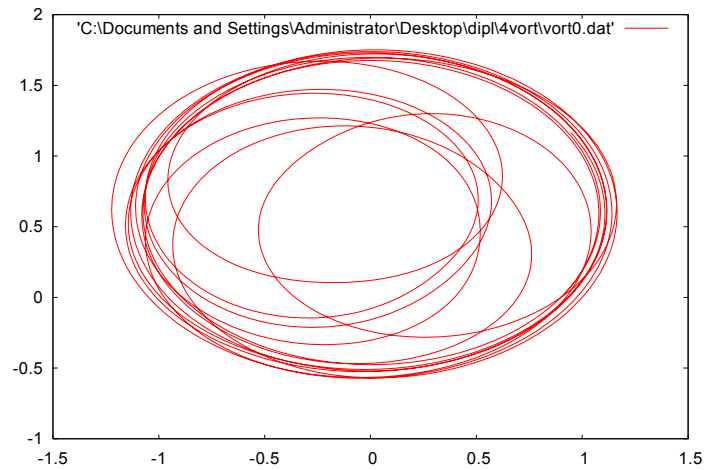
Σχήμα 2.25 : Κίνηση δίνης θ στο χρόνο t



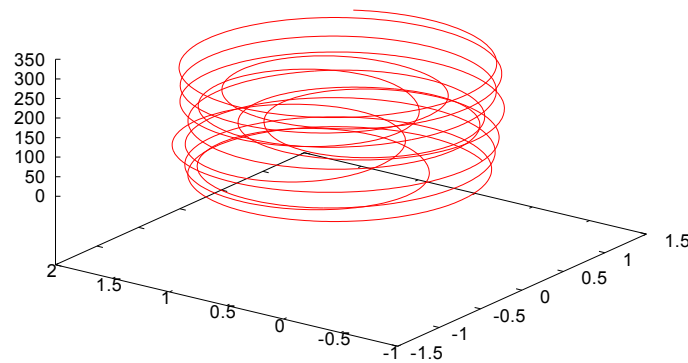
Σχήμα 2.26 : Διάγραμμα φάσης πλευράς $d01$

Τέλος παρουσιάζεται η περίπτωση του $\Lambda = 0,7690$ – δηλαδή κατά 0,008 της τιμής του Λ κάτω από το κρίσιμο $2\Lambda_c = 0,7698$ - όπου το χάος πλέον εμφανίζεται σε αρκετά μεγάλη κλίμακα.

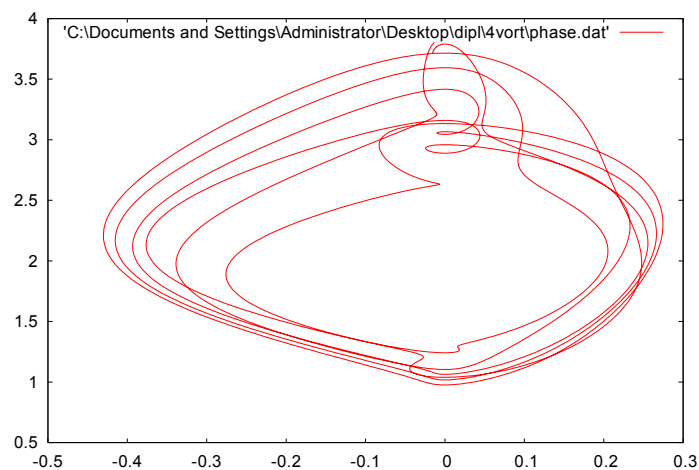
Η περίπτωση 3 με $\Theta = 2.216$, $\Lambda = 0.7690$



Σχήμα 2.27 : Κίνηση δίνης θ στο επίπεδο x-y



Σχήμα 2.28 Σχήμα 2.29 : Κίνηση δίνης θ στο χρόνο t



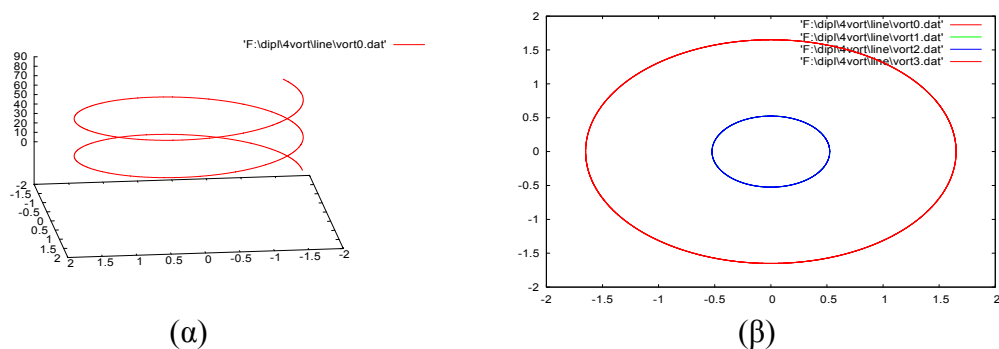
Σχήμα 2.30 : Διάγραμμα φάσης πλευράς d01

Από τα παραπάνω διαγράμματα και ειδικά τα διαγράμματα φάσης, προκύπτει ίσως ένας απλοϊκός ορισμός του χάους σαν μια διαταραχή που ξεκινώντας από τις μικρότερες διαδίδεται στις μεγαλύτερες κλίμακες, μετατρέποντας μια κατάσταση 'τάξης' σε μια κατάσταση πλήρους 'αταξίας'. Κάτι παρόμοιο συμβαίνει και στο κάτω άκρο του χαοτικού διαστήματος, δηλαδή στην τιμή $\Lambda_c = 0.3849$, από την οποία και

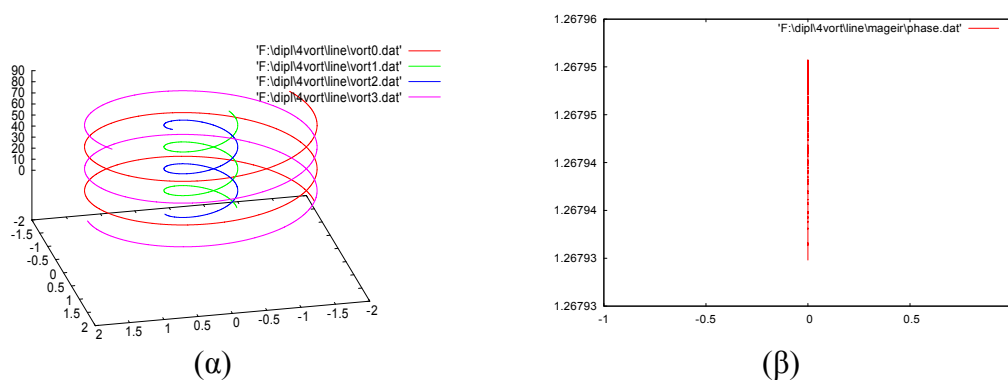
μετά όσο η παράμετρος Λ μειώνεται, το σύστημα αρχίζει να αποκτά ξανά περιοδικές ή διπεριοδικές λύσεις – τροχιές.

Η περίπτωση $\Theta = \Theta_c = 9.4812$

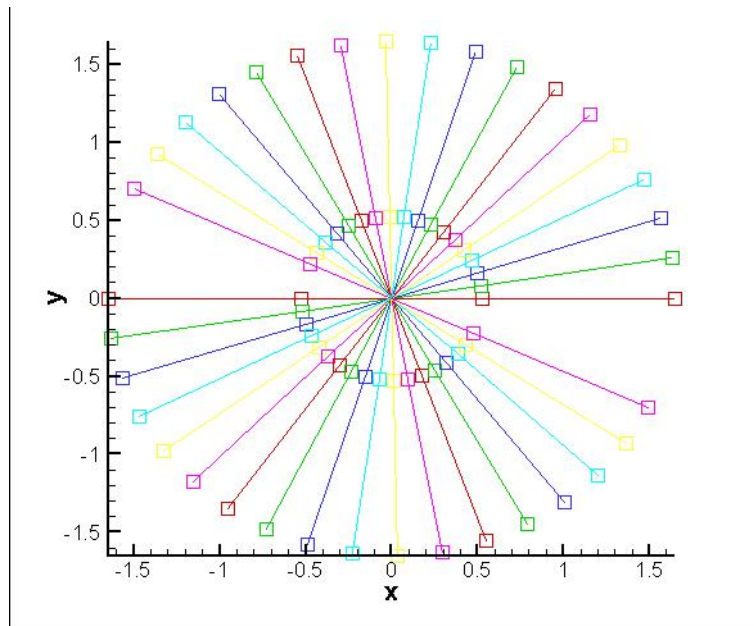
Εδώ είναι $\Lambda = \Lambda_c = 0.3849$ και η αρχική τοποθέτηση των τεσσάρων δινών είναι η πιο απλή πιθανή που θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί – η ευθεία γραμμή. Οι δίνες βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία γραμμή όμως σε αντίθεση με την πλήρως συμμετρική και συνεπώς απλοϊκή περίπτωση των τριών δινών εδώ δεν είναι ισαπέχουσες. Οι σχετικές τους αποστάσεις πάνω στην ευθεία, ή πιο απλά οι θέσεις τους δίνονται από τις ρίζες τους 4^{OY} πολυωνύμου του Χερμίτ. Οι ρίζες αυτές δεν είναι άλλες από τις $\sqrt{3+\sqrt{6}}$, $-\sqrt{3+\sqrt{6}}$, $\sqrt{3-\sqrt{6}}$, $-\sqrt{3-\sqrt{6}}$. Βάζοντας τα νούμερα αυτά σαν την x – συντεταγμένη της κάθε μίας εκ των τεσσάρων δινών επιτυγχάνεται εκείνη η συγγραμμική τοποθέτηση δινών η οποία εμφανίζει περιοδική συμπεριφορά ή αλλιώς περιοδική περιστροφή των τεσσάρων δινών γύρω από ένα κοινό κέντρο στροβιλότητας –το οποίο βρίσκεται στο μέσον του ευθυγράμμου τμήματος που βρίσκεται ανάμεσα στις δυο μεσαίες δίνες. Όλα τα παραπάνω φαίνονται ξεκάθαρα στα παρακάτω σχήματα :



Σχήμα 2.31 : (α) Κίνηση δίνης θ στο χρόνο t και (β) Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο επίπεδο $x-y$



Σχήμα 2.32 : (α) Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t και (β) Διάγραμμα φάσης της πλευράς $d01$



Σχήμα 2.33 : Απεικόνιση της κίνησης που κάνει η γραμμή που ενώνει τις τέσσερις δίνες

Το τελευταίο αυτό διάγραμμα είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον καθώς αποκαλύπτει άλλο ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της λύσης του συστήματος των τεσσάρων δινών για $\Lambda = \Lambda_c$. Οι τέσσερις δίνες όχι μόνο περιστρέφονται γύρω από ένα κοινό κέντρο στροβιλότητας που βρίσκεται στο κέντρο του ευθύγραμμου τμήματος που τις ενώνει, αλλά περιστρέφονται και με τέτοιο τρόπο ώστε να παραμένουν πάντα συγγραμμικές.

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι η περίπτωση $\Lambda = \Lambda_c$ που εξετάζεται είναι **εξαιρετικά ασταθής**, όπως άλλωστε συνέβαινε και στην περίπτωση των τριών δινών τοποθετημένων σε ευθεία γραμμή όπου είχαμε αντίστοιχα $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Αυτό σημαίνει

ότι ακόμα και αν οι αρχικές θέσεις των δινών εισαχθούν στον υπολογιστή με ακρίβεια μέχρι και $8^{\text{ο}}$ δεκαδικού ψηφίου, μετά από κάποιες επαναλήψεις το αριθμητικό σφάλμα του υπολογιστή θα συσσωρευτεί και θα προκαλέσει μια μικρή μεταβολή στα νούμερα που υπολογίζονται που θα οδηγήσει σε μεταβολή του αρχικού Λ και συνεπώς σε μετάπτωση είτε σε μια περιοδική κίνηση με $\Lambda < \Lambda_c$ είτε σε μια χαοτική με $\Lambda > \Lambda_c$.

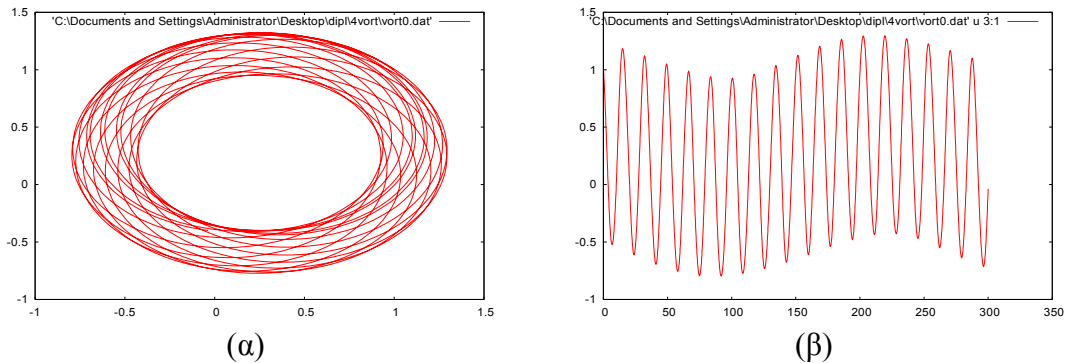
Η περιοχή τιμών $\Theta > \Theta_c$

Εδώ βρισκόμαστε στην περίπτωση όπου $\Lambda < \Lambda_c$, και έχουμε επιστροφή στις περιπτώσεις όπου το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο και έχει αναλυτικές λύσεις. Η κίνηση των τεσσάρων δινών εμφανίζει για ακόμα μια φορά περιοδικό και διπεριοδικό χαρακτήρα και φαίνεται να είναι ποιο απλή από όλες τις περιπτώσεις τιμών του Λ που έχουμε εξεταστεί μέχρι τώρα. Βέβαια το ενδιαφέρον στην περίπτωση αυτή εντοπίζεται στο γεγονός ότι υπάρχει και μια ποιοτική εξήγηση του γιατί συμβαίνει αυτό : Όσο το Λ μειώνεται, κρατώντας σταθερό το L^2 αυτό που ουσιαστικά συμβαίνει είναι το ότι η ενέργεια του συστήματος αυξάνεται. Η αρχική τοποθέτηση των δινών είναι ένα τυχαίο τετράπλευρο, αλλά η ενέργεια του συστήματος αυξάνει γιατί τουλάχιστον δυο δίνες βρίσκονται η μία κοντά στην άλλη περισσότερο από ότι οι υπόλοιπες μεταξύ τους. Έτσι το πρόβλημα των τεσσάρων δινών απλοποιείται και προσεγγίζει την περίπτωση των τριών ή ακόμα και των δύο δινών το οποίο έχει εξεταστεί και είναι γνωστό ότι το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο. Αυτό εξηγεί και το

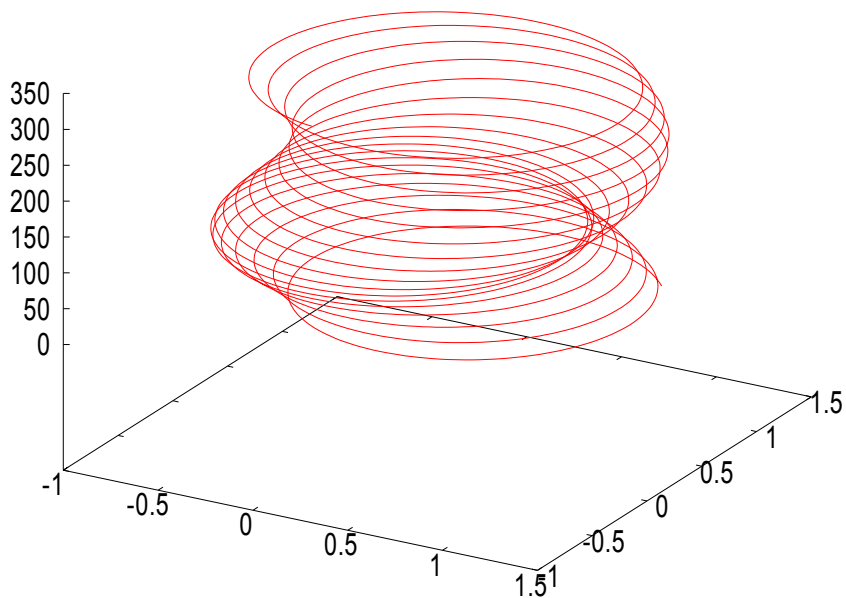
γιατί η κίνηση φαίνεται πιο απλή τώρα – η κίνηση των τεσσάρων εκφυλίστηκε σε κίνηση λιγότερων δινών! Παρακάτω ακολουθούν δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Η περίπτωση 1 με $\Theta = 10.880$, $\Lambda = 0.3593$

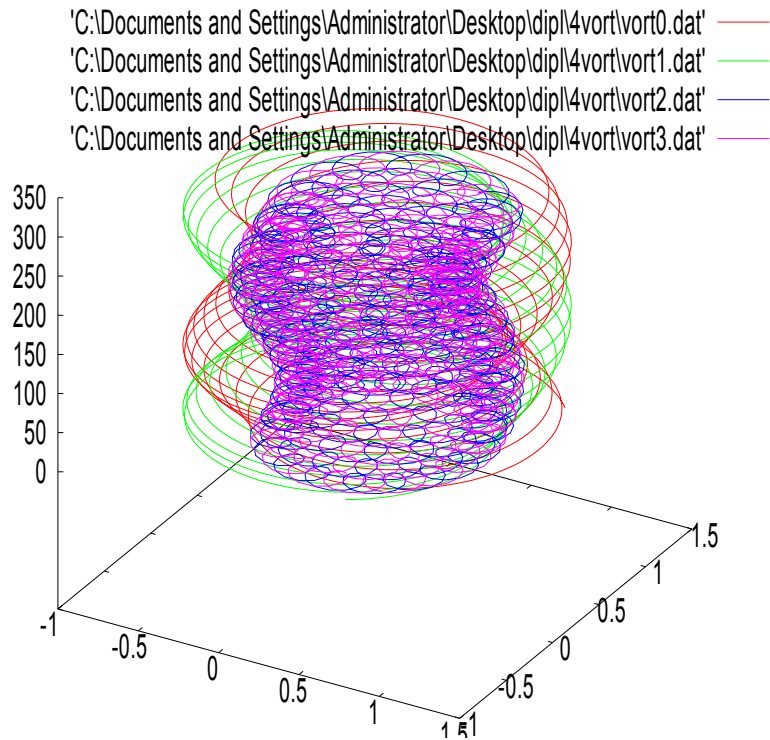
Εδώ βρισκόμαστε αρκετά παρακάτω από το όριο Λ_c . Δίνονται τα γνωστά διαγράμματα. Χαρακτηριστικό είναι το διάγραμμα κίνησης και των τεσσάρων δινών στο χώρο όπου αρχίζει να διαφαίνεται το γεγονός ότι οι δίνες 2 και 3 –δηλαδή η τρίτη και η τέταρτη– ξεκινούν η μία κοντά στην άλλη και μακροσκοπικά δείχνουν να συμπεριφέρονται σαν μία.



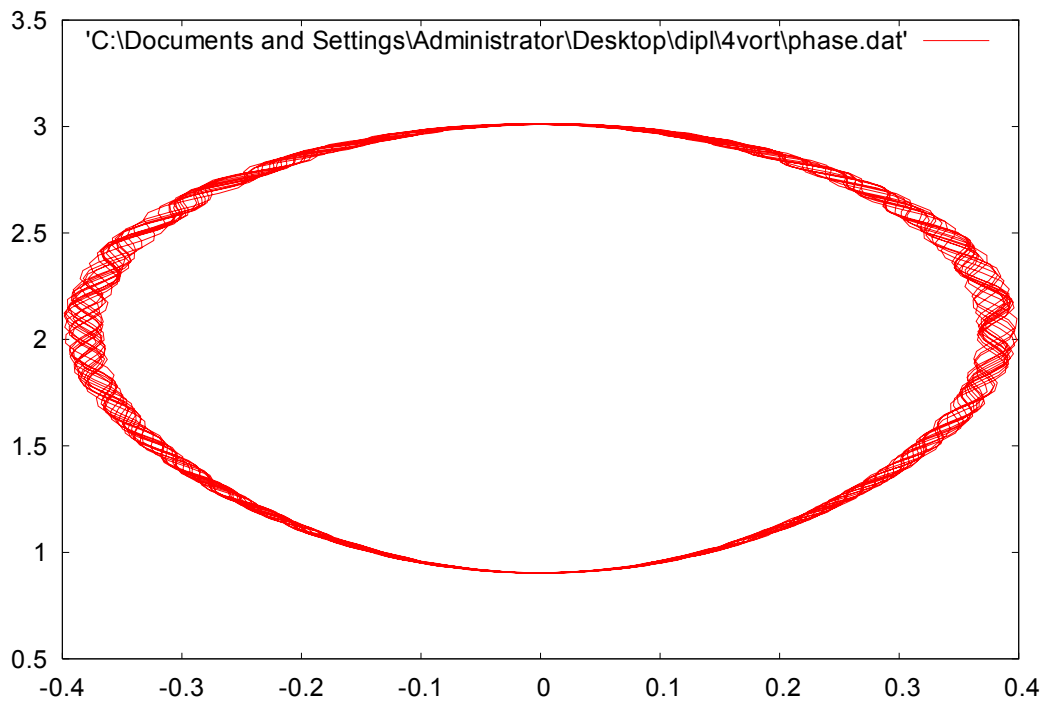
Σχήμα 2.34 : Κίνηση της δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t



Σχήμα 2.35 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t



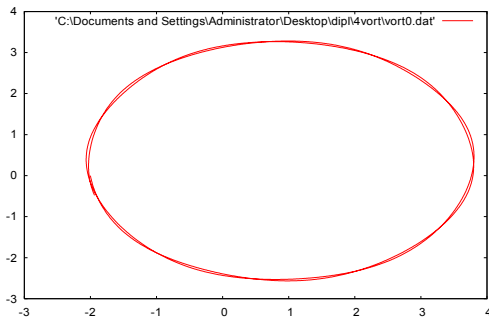
Σχήμα 2.36 : Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t



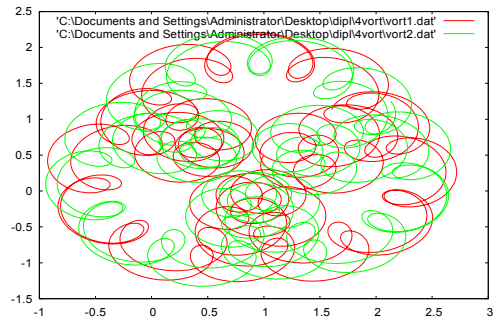
Σχήμα 2.37 : Διάγραμμα φάσης πλευράς $d01$

Η περίπτωση $2\Theta = 62.429$, $\Lambda = 0.15$

Εδώ εξετάζονται τα χαρακτηριστικά διαγράμματα της δίνης θ στο επίπεδο $x - y$ αλλά και των δινών 1 και 2 που ξεκινούν πολύ κοντά. Τα όσα ειπώθηκαν παραπάνω φαίνονται με σαφήνεια.

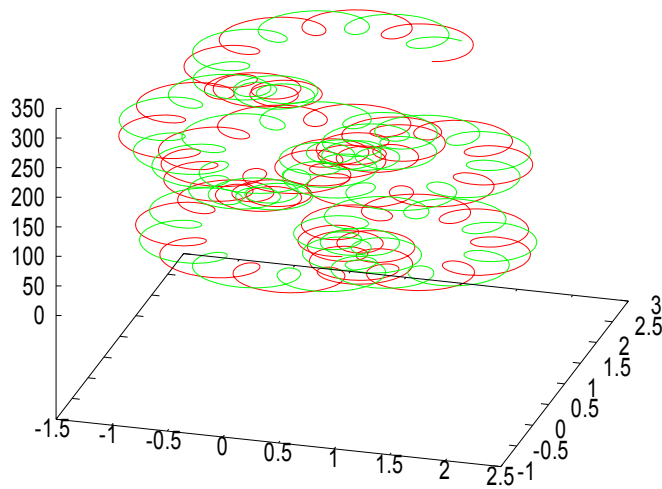


(α)



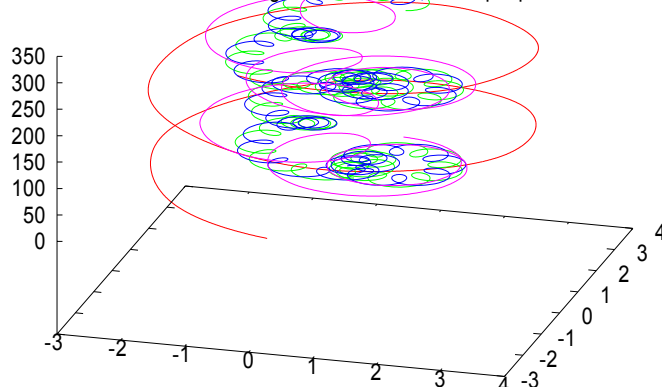
(β)

Σχήμα 2.38 : (α) Διάγραμμα φάσης πλευράς d01 και (β) κίνηση δινών 1 και 2 στο επίπεδο x-y



Σχήμα 2.39 : Κίνηση δινών 1 και 2 στο χρόνο t

'C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\4\vort\vort0.dat' ————
 'C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\4\vort\vort1.dat' ————
 'C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\4\vort\vort2.dat' ————
 'C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\dip\4\vort\vort3.dat' ————

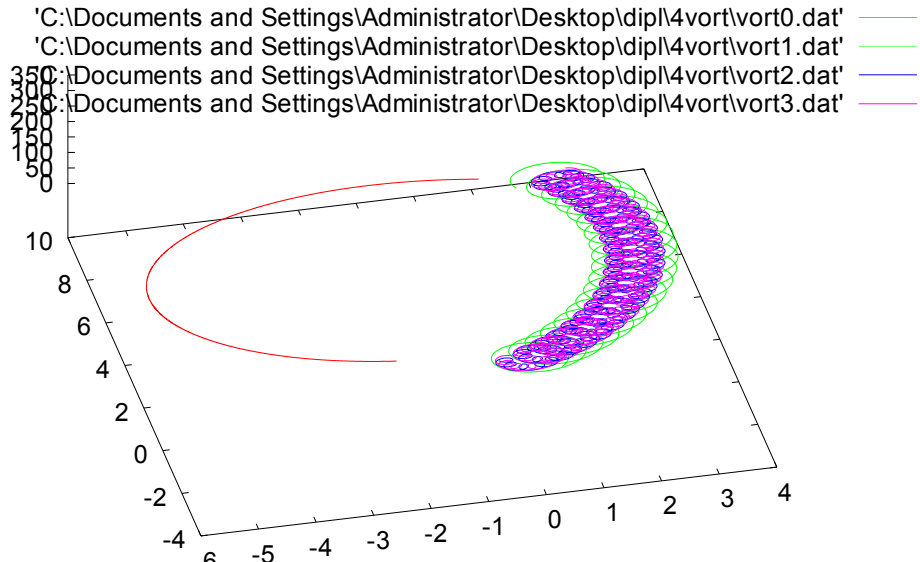


Σχήμα 2.40 : Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t

Στο τελευταίο αυτό διάγραμμα φαίνεται ξεκάθαρα ότι οι δυο κοντινές δίνες 1 και 2 (μπλε και πράσινο) μακροσκοπικά φαίνονται να συμπεριφέρονται σαν μια δίνη. Παρακάτω εξετάζεται και ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα όπου τρεις από τις δίνες ξεκινούν πολύ κοντά μεταξύ τους και εν τέλει συμπεριφέρονται σαν μία υποβιβάζοντας έτσι το πρόβλημα μας σε πρόβλημα δυο δινών. Όπως πολύ σωστά θα μπορούσε να σκεφτεί κάποιος σε αυτή την περίπτωση η ενέργεια του συστήματος

αναμένεται αρκετά υψηλή – πράγματι εδώ το Λ είναι πάρα πολύ μικρό, μόλις 0.0057...

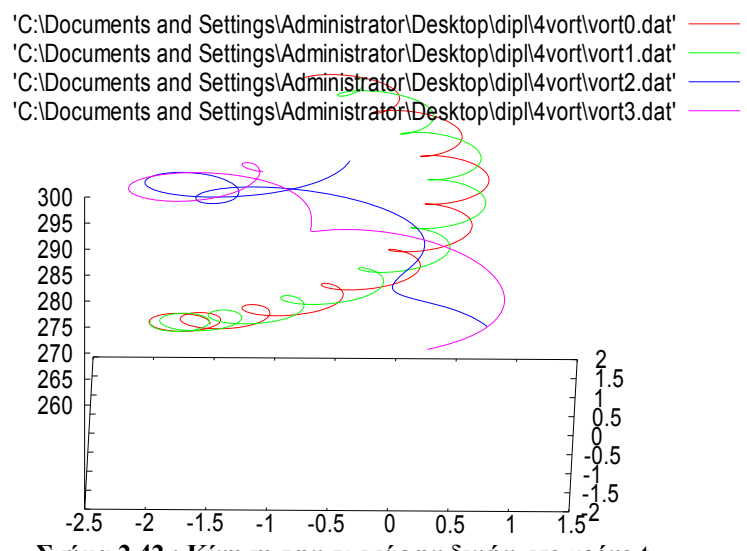
Η περίπτωση 3 με $\Theta = 43233.61$, $\Lambda = 0.0057$



Σχήμα 2.41 : Κίνηση των τεσσάρων δινών στο χρόνο t

Φυσικά το προηγούμενο φαινόμενο μπορεί να εμφανιστεί και στην περίπτωση όπου έχουμε σύμπτυξη όχι τριών δινών σε μια αλλά των δυο σε μια και των άλλων δυο σε άλλη μια όπως φαίνεται στο σχετικό σχήμα του παρακάτω παραδείγματος.

Η περίπτωση 4 με $\Theta = 26.55$, $\Lambda = 0.23$



Σχήμα 2.42 : Κίνηση των τεσσάρων δινών στο χρόνο t

Στο σχήμα 2.42 είναι εμφανές ότι οι δίνες 0 με την 1 (κόκκινο και πράσινο) και οι 2 με την 3 (μοβ και μπλε) κινούνται σαν μία, και συνολικά το σύστημα έχει πολλές ομοιότητες με αυτό των δυο δινών.

2.3 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Κλείνοντας αυτό κεφάλαιο πρέπει να αναφερθεί ότι το παραπάνω συμπέρασμα— δηλαδή το φαινόμενο του να συμπεριφέρονται σαν μια, δυο ή περισσότερες δίνες που βρίσκονται κοντά μεταξύ τους δεν είναι κάτι καινούργιο. Το αντιμετωπίσαμε και στην περίπτωση των τριών δινών όταν δυο δίνες ξεκινώντας σε πιο κοντινή απόσταση μεταξύ τους σε σχέση με την τρίτη συμπεριφέρονταν σαν μια. Μάλιστα, όσο πιο μικρή ήταν η μεταξύ τους απόσταση σε σχέση με τις αποστάσεις από την τρίτη δίνη, τόσο πιο έντονο ήταν το φαινόμενο — δηλαδή η τρίτη δίνη τις αντιλαμβανόταν σαν μία. Αυτό φυσικά επιβεβαιώνεται ότι ισχύει και στην περίπτωση των τεσσάρων, κάτι το οποίο είναι πολύ σημαντικό γιατί εκφυλίζει ένα γενικά μη ολοκληρώσιμο σύστημα —αυτό των τεσσάρων δινών— σε ένα αποδεδειγμένα ολοκληρώσιμο — αυτό των τριών. Δυστυχώς κάτι τέτοιο δε μπορεί να γενικευτεί και στις περιπτώσεις των N δινών με $N \geq 5$, καθώς σε αυτή την περίπτωση αν εφαρμοστεί αυτή η παρατήρηση και τοποθετηθούν δυο από τις δίνες πολύ κοντά, θα προκύψει ένας υποβιβασμός του συστήματος των π.χ πέντε δινών σε ένα των τεσσάρων πιθανά χαοτικό !

Βέβαια το πολύ σημαντικό συμπέρασμα που βγαίνει και είναι αποφασιστικής σημασίας για το επόμενο κεφάλαιο, είναι ότι σε ένα σύστημα δινών, άμα τοποθετηθούν κάποιες από αυτές σε μεταξύ τους αποστάσεις κοντινότερες από ότι των υπολοίπων, τότε το σύστημα των υπολοίπων τείνει να ‘ αντιληφθεί ’ τις προηγούμενες σαν μία μοναχά δίνη — και η τάση αυτή είναι τόσο δυνατότερη όσο μεγαλύτερες είναι οι σχετικές αποστάσεις των κοντινών σε σχέση με τις μακρινές δίνες. Το κατά πόσο τώρα ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα η αντικατάσταση πολλών δινών με μια — εννοώντας το κατά πόσο είναι πραγματικά οι δυο περιπτώσεις ισοδύναμες - είναι ένα ζήτημα που αποτελεί ένα από τα κεντρικά σημεία συζήτησης στο επόμενο κεφάλαιο .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΧΡΗΣΗ ΔΙΝΩΝ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΚΛΙΜΑΚΕΣ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΠΕΔΙΩΝ ΡΟΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται η περίπτωση πεδίου ροής που δημιουργεί συνεχή κατανομή στροβιλότητας, οπότε η σχετική προσομοίωση περιλαμβάνει μεγάλο αριθμό δινών. Σχετικές εργασίες υπάρχουν πολλές. Η προσέγγιση που επιχειρείται εδώ είναι διαφορετική από την άποψη ότι γίνεται προσπάθεια εισαγωγής αλληλουχίας κλιμάκων στις δίνες με απώτερο στόχο την διερεύνηση της δυνατότητας προσομοίωσης τυρβωδών ροών.

3.1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΟΛΛΩΝ ΔΙΝΩΝ

Οι νόμοι που διέπουν τα συστήματα πολλών δινών παρουσιάστηκαν αναλυτικά στην αρχή αυτής της εργασίας. Ας κάνουμε εδώ συνοπτικά μια μικρή επανάληψη. Γενικά μια δίνη έχει συντεταγμένες (x_a, y_a) και μια τιμή στροβιλότητας Γ_a . Σε ένα σύστημα όπου συνυπάρχει και με άλλες δίνες, αλληλεπιδρά με αυτές και της επάγεται από την κάθε μια από αυτές μία ταχύτητα.

Στο επίπεδο οι συνιστώσες τις ταχύτητας αυτής που επάγεται στη δίνη a από τις υπόλοιπες δίνες που θα συμβολίσουμε με β ($\beta=1, \dots, n$) δίνονται από τους παρακάτω τύπους :

$$\frac{\partial x_a}{\partial t} = \sum_{\beta \neq a} \frac{\Gamma_\beta}{2\pi} \cdot \frac{y_\beta - y_a}{(x_a - x_\beta)^2 + (y_a - y_\beta)^2}$$
$$\frac{\partial y_a}{\partial t} = \sum_{\beta \neq a} \frac{\Gamma_\beta}{2\pi} \cdot \frac{x_a - x_\beta}{(x_a - x_\beta)^2 + (y_a - y_\beta)^2},$$

με τις αθροίσεις να γίνονται σε όλα τα $\beta=1, 2, \dots, n$ εκτός από το a .

Η επίλυση των απλών αυτών διαφορικών εξισώσεων γίνεται για κάποιο dt που ορίζεται από εμάς και έτσι υπολογίζεται η ταχύτητα και κατά συνέπεια την μετατόπιση της κάθε δίνης στον χρόνο dt .

Η βασική ιδέα εδώ είναι το να διακριτοποιηθεί ένα αρχικά δεδομένο πεδίο ροής, βάζοντας σε κάθε σημείο διακριτοποίησης μία δίνη με την κατάλληλη στροβιλότητα. Στη συνέχεια οι δίνες να αλληλεπιδρούν με βάση τις παραπάνω εξισώσεις και ως αποτέλεσμα υπολογίζονται οι νέες θέσεις των δινών, δηλαδή η εξέλιξη του πεδίου μετά από χρόνο dt . Ένα πρώτο βήμα στο να γίνει αυτό είναι η γενίκευση της ρουτίνας που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της κίνησης των τεσσάρων δινών σε ρουτίνα που να δουλεύει για N δίνες. Μία τέτοια γενίκευση γίνεται στη ρουτίνα `manyvort.f` όπου υπολογίζει την κίνηση N δινών σε χρόνο t , διαμερισμένο σε k διαστήματα χρόνου dt , ανάλογα με το dt που θα οριστεί. Κάπου εδώ πρέπει να παρατεθούν δυο σημαντικές παρατηρήσεις :

- Α. Αν πρόκειται να χρησιμοποιηθούν δίνες για τον υπολογισμό της χρονικής εξέλιξης ενός πεδίου ροής ρευστού ή ισοδύναμα ενός πεδίου στροβιλότητας

πρέπει να γνωρίζουμε ότι οι αλληλεπιδράσεις των δινών μπορούν να υπολογίσουν τους όρους συναγωγής αλλά όχι και τους όρους διάχυσης.

Γενικά η χρονική εξέλιξη ενός πεδίου στροβιλότητας στις 2 διαστάσεις και εφ' όσον αναφερόμαστε σε ένα συνεκτικό ρευστό μπορεί να εκφραστεί μέσω μίας εξίσωσης που περιέχει την ταχύτητα \vec{u} και τη γωνιακή ταχύτητα ω του ρευστού η οποία προκύπτει από τις εξισώσεις NAVIER – STOKES. Η εξίσωση αυτή είναι η εξής :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla \omega + \nu \cdot \Delta \omega,$$

όπου ν είναι η συνεκτικότητα του ρευστού. Και αυτό που υποδεικνύει είναι το ότι η χρονική μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας και κατ' επέκταση της στροβιλότητας, γενικά αποτελείται από δύο όρους :

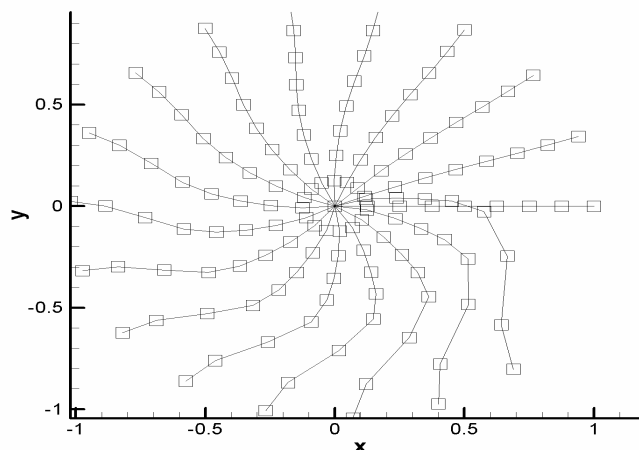
$$\text{την συναγωγή : } \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla \omega$$

$$\text{και την διάχυση : } \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \cdot \Delta \omega$$

Το κομμάτι της συναγωγής ασχολείται με τη μετατόπιση του κάθε ενός στοιχείου στροβιλότητας του ρευστού, που στην προκειμένη περίπτωση είναι οι δίνες που χρησιμοποιούνται, ενώ το κομμάτι της διάχυσης ασχολείται με την ανακατανομή της στροβιλότητας στα στοιχεία αυτά. Η συνολική χρονική μεταβολή της στροβιλότητας δίνεται σαν υπέρθεση των δύο αυτών όρων. Κάπου εδώ, για να επιστρέψουμε και στο αρχικό θέμα συζητήσεως, είναι κατανοητό ότι με τη χρήση συστημάτων δινών για τον υπολογισμό της εξέλιξης ενός πεδίου στροβιλότητας δύναται να υπολογιστεί **μόνο** η μεταβολή της στροβιλότητας λόγω της συναγωγής. Αν χρειαστεί να συμπεριληφθεί και η μεταβολή λόγω διάχυσης θα πρέπει να προστεθεί κάτι επιπλέον, μια επιπλέον εξίσωση στο εκάστοτε πρόγραμμα.

- B.** Το δεύτερο πράγμα που πρέπει να τονιστεί, είναι ότι πλέον χρησιμοποιούνται συστήματα N δινών, και από ότι είδαμε μέχρι τώρα, συστήματα N δινών με $N > 4$ κατά πάσα πιθανότητα είναι **χαοτικά**. Αυτό σημαίνει ότι μετά από κάποιες επαναλήψεις η συμπεριφορά του συστήματός θα αρχίσει να γίνεται υπερβολικά απρόβλεπτη, με ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες, και συνεπώς αρκετά ευπαθής σε οποιοδήποτε αριθμητικό σφάλμα ακριβείας το οποίο θα μεγιστοποιείται και θα οδηγεί σε ένα λανθασμένο αποτέλεσμα. Δηλαδή μία μη πραγματική εξέλιξη του πεδίου στροβιλότητας που εξετάζεται. Ένα καλό παράδειγμα όλων αυτών είναι το παρακάτω, όπου γίνεται μια προσπάθεια προσομοίωσης του πεδίου ροής μίας μεγάλης δίνης με χρήση 65 μικρών δινών, με την τοποθέτηση μιας μικρής δίνης στο κέντρο και τις υπόλοιπες 64 σε 8 ομόκεντρους κύκλους με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε οκτάδα δινών να σχηματίζει κάθε μια από τις 8 ακτίνες με τις στροβιλότητές τους κατανεμημένες έτσι ώστε να προσεγγίζουν όσο καλύτερα γίνεται το πραγματικό αρχικό πεδίο ροής. Ένα τέτοιο πεδίο ροής, δηλαδή μία μεγάλη δίνη χωρίς διάχυση, θα ήταν αναμενόμενο απλά να μένει απaráλλακτο στο χρόνο κάνοντας συνεχείς περιστροφές γύρω από το κέντρο της. Άρα θα περιμέναμε οι ακτίνες που σχηματίζει κάθε οκτάδα δινών να παραμένουν ευθείες. Παρατηρώντας όμως το παρακάτω σχήμα 3.1, όπου καταγράφεται η

εξέλιξη μίας, εκ των 8, τέτοιας ακτίνας μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι αν και στην αρχή παραμένει ευθεία, σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα δηλαδή πριν ακόμα προλάβει το σύστημα να κάνει μια πλήρη περιστροφή, η ακτίνα αρχίζει να γίνεται καμπύλη, με τις κοντινές στο κέντρο δίνες να ‘τρέχουν’ και τις πιο μακρινές να μένουν πίσω. Φανταστείτε λοιπόν την χαοτική εικόνα του συστήματος μετά από 15 ή 20 περιστροφές!



Σχήμα 3.1 : Χρονική εξέλιξη μιας οκτάδας δινών που ξεκινάνε τοποθετημένες σε ευθεία γραμμή

Από όλα τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι η περιγραφή ενός πεδίου στροβιλότητας από ένα σύστημα δινών δεν είναι τόσο απλή υπόθεση. Οι κινήσεις των δινών να μην μπορούν να προσομοιάσουν τους όρους της συναγωγής, αλλά σε καμία περίπτωση η διακριτοποίηση ενός πεδίου ροής με τη χρήση αντίστοιχων δινών με τις κατάλληλες στροβιλότητες και η κίνηση που αυτές θα πραγματοποιήσουν δε θα δώσει σωστά αποτελέσματα. Το τελικό αποτέλεσμα θα είναι χαοτικό και συνεπώς λανθασμένο! Πρέπει να γίνει κάτι πολύ πιο έξυπνο από αυτό, όπως περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο.

3.2 ΧΡΗΣΗ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ

Όλα τα προβλήματα που περιγράφηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούν να αποφευχθούν εύκολα άμα διακριτοποιηθεί το εκάστοτε πεδίο στροβιλότητας χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα. Ας δοθεί όμως μια εξήγηση του τι ακριβώς σημαίνει αυτό: Έχοντας ως δεδομένο ένα κάποιο αρχικό πεδίο στροβιλότητας, επιλέγεται ένα επίπεδο λίγο μεγαλύτερο από το αρχικό πεδίο, έτσι ώστε να είμαστε σίγουροι ότι σε αυτό μπορεί να περιέχεται όλο το αρχικό πεδίο και εκεί ορίζεται ένα πλέγμα. Γίνεται μια διαμέριση δηλαδή του επιπέδου σε μικρά ορθογώνια παραλληλόγραμμα με πλευρές dx και dy . Εδώ για λόγους ευκολίας και χωρίς να χάνεται η γενικότητα, προτιμάται τα σχηματιζόμενα ορθογώνια παραλληλόγραμμα να είναι τετράγωνα, δηλαδή $dx = dy$. Το πόσα τέτοια τετράγωνα θα χρησιμοποιηθούν είναι κάτι που το καθορίζουμε εμείς ανάλογα με τη διάσταση dx που θα επιλεγεί και το πόσο χώρο απαιτείται να καλύπτει. Γενικά είναι προτιμότερο το dx να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο, γιατί μικρότερο dx σημαίνει καλύτερη και ακριβέστερη διαμέριση του επιπέδου και συνεπώς μεγαλύτερη ακρίβεια, χωρίς αυτό να σημαίνει

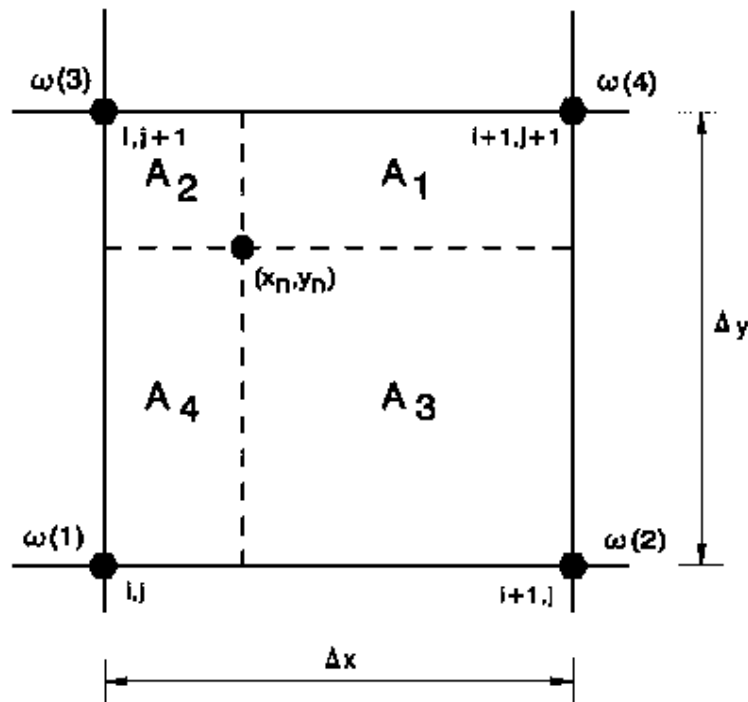
όμως ότι το Δx μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε, αφού ο ίδιος ο υπολογιστής θέτει κάποια όρια στην ακρίβεια που μπορεί να επιτευχθεί.

Το επόμενο στάδιο είναι η τοποθέτηση των δινών. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο πιθανά σενάρια. Το ένα είναι η τοποθέτηση μιας δίνης στο κέντρο κάθε κελιού, και το δεύτερο είναι η τοποθέτηση μιας δίνης σε κάθε κόμβο του πλέγματος. Γενικά αυτά τα δύο σενάρια είναι ισοδύναμα, εδώ όμως προτιμάται το δεύτερο ως απλούστερο και ως πιο βολικό στη διακριτοποίηση του πεδίου μας. Τοποθετείται λοιπόν μία δίνη σε κάθε κόμβο και της δίνεται ταχύτητα περιστροφής ω , ίση με το ω που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο σημείο του δεδομένου πεδίου στροβιλότητάς. Στη συνέχεια το ω μετατρέπεται σε στροβιλότητα Γ με έναν απλό πολ/σμό $\Gamma = \omega \times \Delta x^2$, αφού η κάθε δίνη αναφέρεται σε περιοχή ίση με την περιοχή που ορίζει το κάθε κελί του πλέγματος.

Εφ' όσον τελειώνει αυτό, ορίζεται ένα dt και οι δίνες αλληλεπιδρούν και μετατοπίζονται. Φυσικά η κάθε δίνη θα μετακινηθεί από την αρχική θέση της και θα καταλήξει μέσα σε κάποιο από τα κελιά. Το επόμενο λογικό βήμα είναι η αναγωγή των δινών αυτών σε δίνες στους κόμβους του πλέγματος. Αυτό γίνεται με μια μέθοδο που ονομάζεται vortex interpolation η οποία είναι σχετικά απλή: Κάθε δίνη που βρίσκεται μέσα σε ένα από τα κελιά, το χωρίζει σε τέσσερα κομμάτια ανάλογα με το ποία είναι η θέση της μέσα στο κελί. Στόχος είναι να μοιραστεί η στροβιλότητα της δίνης αυτής σε δίνες στους τέσσερις κόμβους του κελιού. Τελικά η στροβιλότητα που θα αποκτήσει η κάθε μια από τις τέσσερις δίνες δίνεται από τον τύπο :

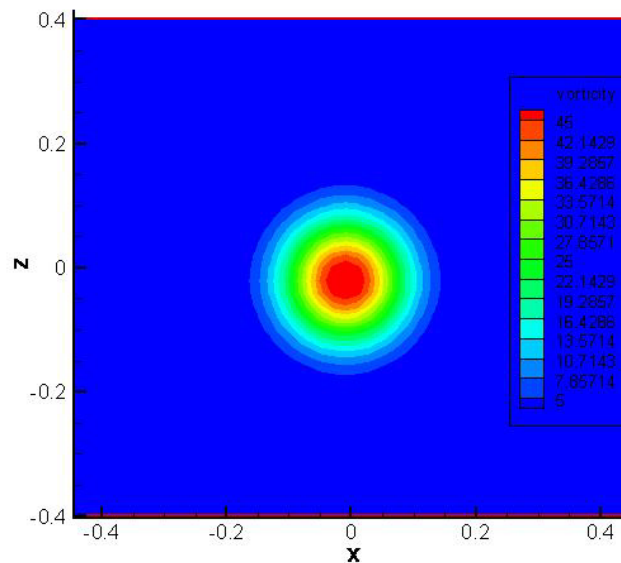
$$\Gamma_k = \frac{A_k}{A} \cdot \Gamma$$

όπου $A = \Delta x^2$ το συνολικό εμβαδόν του κελιού, A_k το εμβαδόν που αντιστοιχεί στον κόμβο i όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2 και Γ , η στροβιλότητα της αρχικής δίνης.



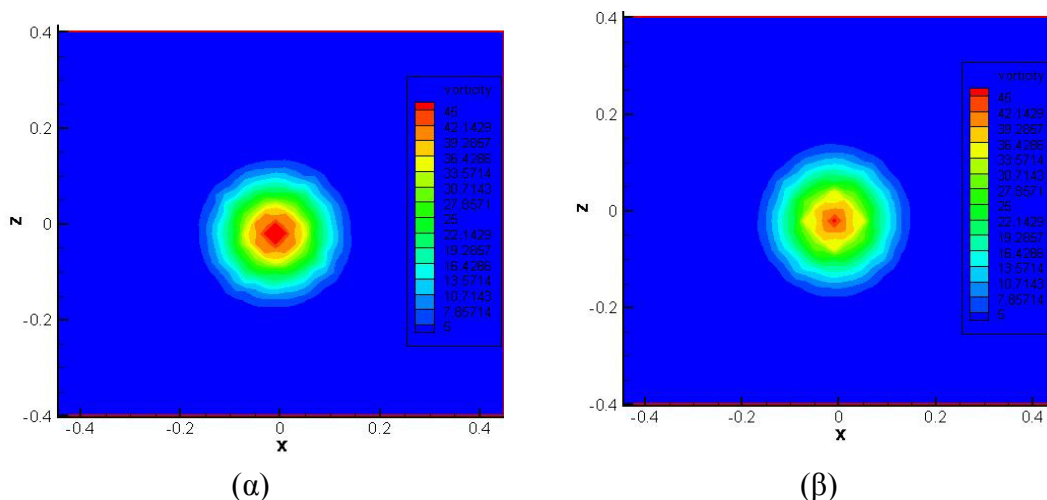
Σχήμα 3.2 : Αντιστοιχία εμβαδών-κόμβων για vortex interpolation

Αφ' ότου αναχθεί λοιπόν η στροβιλότητα στις δίνες στους κόμβους κάθε κελιού έχει υπολογιστεί και η χρονική εξέλιξη του πεδίου μετά από χρόνο dt και είμαστε έτοιμοι για την επόμενη επανάληψη. Όλα τα παραπάνω πραγματοποιούνται στη ρουτίνα `remesh.f` γραμμένη σε Fortran, την οποία πρέπει να υποβάλλουμε σε κάποιο τεστ για να ελεγχθεί η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων. Παρακάτω εξετάζεται για ακόμα μια φορά η περίπτωση της μίας μεγάλης δίνης, όπου ουσιαστικά έχει γίνει κατανομή μιας αρχικής σημειακής δίνης έντασης $\Gamma = 50$ σε 64 δίνες με βάση τον τύπο της ελλειπτικής κατανομής. Το αρχικό πεδίο φαίνεται στο σχήμα 3.3.

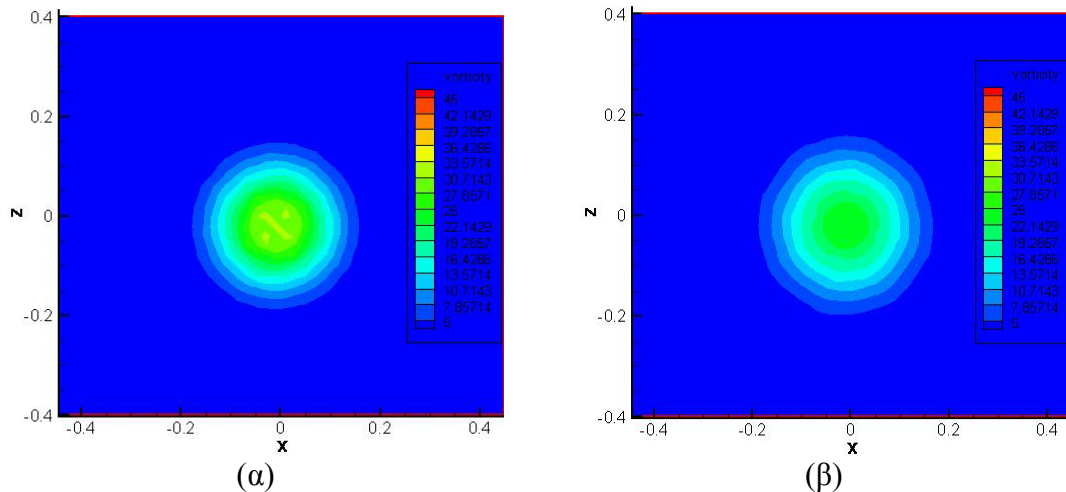


Σχήμα 3.3 : Αρχικό πεδίο ελλειπτικά κατανομημένης δίνης έντασης $\Gamma=50$

Για αυτό το αρχικό λοιπόν πεδίο στροβιλότητας τρέχουμε το `remesh.f` με χρονικό βήμα $dt = 0.03$ sec και με ακρίβεια πλέγματος $dx = dy = 0.02$. Η εξέλιξη που αναμένεται να έχει ένα τέτοιο σύστημα, εφ' όσον δεν συμπεριλήφθηκε στις εξισώσεις η διάχυση είναι σχετικά απλή. Η μεγάλη δίνη θα παραμείνει ακίνητη και αμετάβλητη στο χρόνο. Στα παρακάτω σχήματα 3.4 έως 3.7 φαίνεται το τι υπολογίζει το πρόγραμμα σε χρόνους $t = 0.06$ sec , $t = 0.15$ sec , $t = 0.45$ sec , $t = 0.9$ sec.



Σχήμα 3.4 : Εικόνες της δίνης $\Gamma=50$ μετά από (α) $t=0.06$ sec και (β) $t=0.15$ sec για $dt=0.03$



Σχήμα 3.5 : Εικόνα της δίνης $\Gamma=50$ μετά από (α) $t=0.45\text{sec}$ και (β) $t=0.9\text{sec}$ για $dt=0.03$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι αν και δεν υπήρχε διάχυση στις εξισώσεις, η δίνη με το πέρασμα του χρόνου άνοιξε σε διάμετρο και τείνοντας να απλώνει την αρχικά συγκεντρωμένη στο κέντρο μεγάλη στροβιλότητά της. Αυτό συμβαίνει γιατί αν και δε χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση της διάχυσης, το ίδιο το σύστημα, το πλέγμα και ο τρόπος υπολογισμού που χρησιμοποιείται εδώ έχει **ενδογενή αριθμητική διάχυση**, η οποία δεν μπορούμε να αποφευχθεί. Κάτι το οποίο ήταν μάλλον αναμενόμενο αφού χρησιμοποιήθηκε πλέγμα – δηλαδή ορθογώνια γεωμετρία - για την προσομοίωση μίας κυκλικής δίνης η οποία φυσικά εμπεριέχει καμπύλη γεωμετρία. Επιπλέον ένας ακόμα βασικός λόγος για την εμφάνιση αυτού του είδους διάχυσης αποκαλύπτεται αν σκεφτούμε λίγο πάνω στον τρόπο με τον οποίο γίνεται η αναγωγή των δινών σε δίνες στους κόμβους του πλέγματος μετά από κάθε βήμα dt : Μία δίνη, αρχικά ευρισκόμενη πάνω σε κάποιο κόμβο, καταλήγει σε κάποιο από τα τέσσερα επίπεδα – κελιά που περιβάλλουν τον αρχικό κόμβο μετά από μία επανάληψη. Στην πορεία αυτή η δίνη ανάγεται σε τέσσερις δίνες στους τέσσερις κόμβους του κελιού αυτού. Εκεί δηλαδή που υπήρχε μία δίνη, υπάρχουν τώρα τέσσερις απλωμένες στον τριγύρω χώρο και με στροβιλότητες μικρότερες από αυτή της αρχικής. Σε κάθε βήμα ο συνολικός αριθμός των δινών που χρησιμοποιούνται αυξάνει! Είναι κατανοητό λοιπόν γιατί η ‘μεγάλη’ δίνη του σχήματος 3.3 έχει την τάση να απλώνει στο χώρο και να ‘ξεθωριάζει’ -δηλαδή να μοιράζει την αρχικά συγκεντρωμένη στο κέντρο μεγάλη στροβιλότητά της στις τριγύρω δίνες, και μάλιστα τόσο γρηγορότερα όσο μεγαλύτερο είναι το πλέγμα που χρησιμοποιείται, δηλαδή το dx και το dy που ορίστηκε. Βέβαια εδώ πρέπει να παρατεθεί και άλλος ένας σημαντικός λόγος για τον οποίο εμφανίζονται τα παραπάνω φαινόμενα διάχυσης. Το γεγονός ότι η παραπάνω δίνη διαλύεται τόσο γρήγορα οφείλεται στο ότι αρχικά μεταξύ των δινών που βρίσκονται προς το κέντρο της διάταξης ασκούνται μεγάλες δυνάμεις λόγω των μικρών αποστάσεων και των μεγάλων τιμών στροβιλότητας που επικρατούν εκεί. Μην ξεχνάμε ότι ο τύπος που υπολογίζει τις δυνάμεις που θα ασκηθούν είναι ανάλογος του Γ . Οι μεγάλες λοιπόν δυνάμεις έχουν ως αποτέλεσμα μεγάλες μετατοπίσεις των δινών σε σχέση με την αρχική τους θέση. Και από το σχήμα 3.2 σε συνδυασμό με τον αντίστοιχο τύπο είναι κατανοητό ότι όσο πιο μακριά φύγει μια δίνη από την αρχική της θέση, τόσο περισσότερο μέρος της στροβιλότητάς της θα ‘μοιράσει’ στους τριγύρω κόμβους του πλέγματος. Μια πιο αναλυτική εξήγηση του τι ακριβώς σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερα είναι τα Γ , τόσο πιο μεγάλες είναι οι μετατοπίσεις, δίνεται παρακάτω. Γίνεται η υπόθεση ότι έχουμε τις δίνες α και β και για λόγους

απλότητας ασχολούμαστε μόνο με την ταχύτητα στον άξονα των x. Η δίνη β επάγει στην α ταχύτητα που δίνεται από τον τύπο :

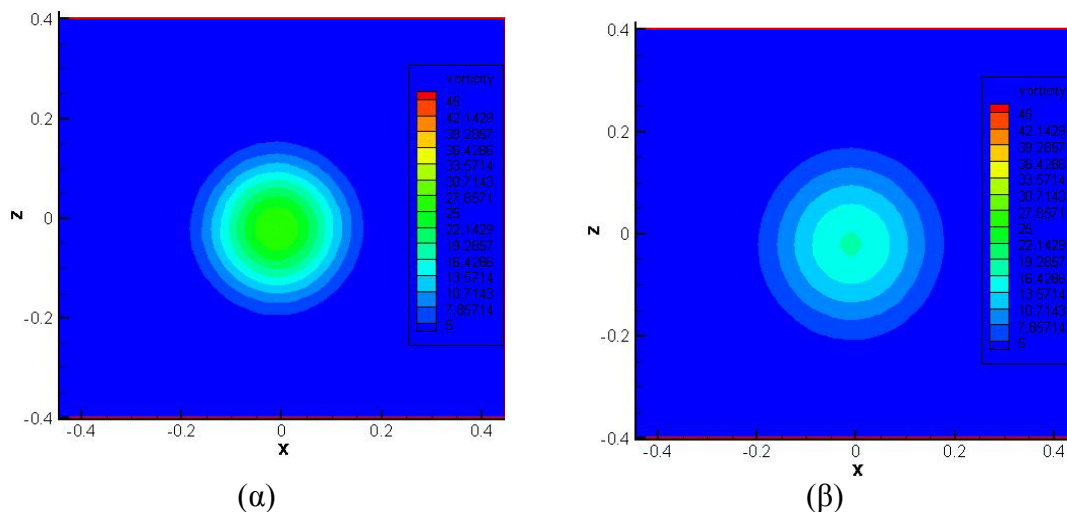
$$\frac{\partial x_a}{\partial t} = \frac{\Gamma \beta}{2\pi} \cdot \frac{y\beta - y_a}{(x_a - x\beta)^2 + (y_a - y\beta)^2}$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι :

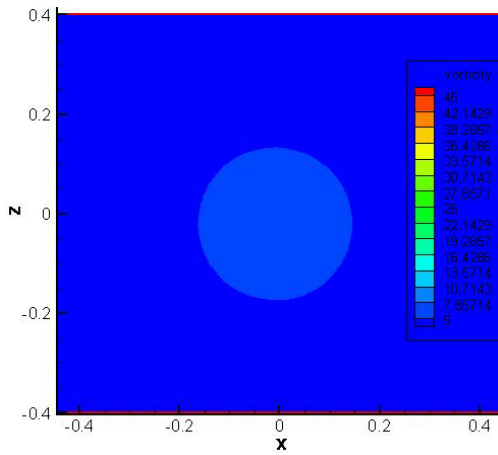
$$\partial x_a = \partial t \cdot \frac{\Gamma \beta}{2\pi} \cdot \frac{y\beta - y_a}{(x_a - x\beta)^2 + (y_a - y\beta)^2}$$

Είναι ξεκάθαρο λοιπόν ότι η μετατόπιση που θα υποστεί η δίνη α λόγω της παρουσίας της δίνης β είναι ανάλογη του χρονικού βήματος dt, της στροβιλότητας Γβ της δίνης β, της κατά τον άξονα των y απόστασης των δύο δινών και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης των δύο δινών. Συνεπώς είναι πλέον κατανοητό ότι όσο υπολογίζονται κοντινές δίνες με μεγάλες στροβιλότητες και σε μεγάλα χρονικά βήματα dt αναπόφευκτα θα παρατηρείται το φαινόμενο των μεγάλων μετατοπίσεων κοντινών δινών και συνεπώς της γρήγορης διάχυσης της στροβιλότητας. Αυτός είναι και ο λόγος άλλωστε που η στρογγυλή κόκκινη περιοχή του σχήματος 3.3 που αντιπροσωπεύει την περιοχή όπου είναι συγκεντρωμένη η περισσότερη στροβιλότητα της δίνης, στα επόμενα σχήματα, αντί να παραμείνει κυκλική, εμφανίζει κάποιες "περίεργες" γεωμετρίες που φυσικά δεν αντιστοιχούν στην πραγματικότητα. Αυτό που έχει συμβεί είναι το ότι οι εκεί αρχικά γειτονικές δίνες μετατοπίστηκαν υπερβολικά και 'διέλυσαν' την εν λόγω περιοχή.

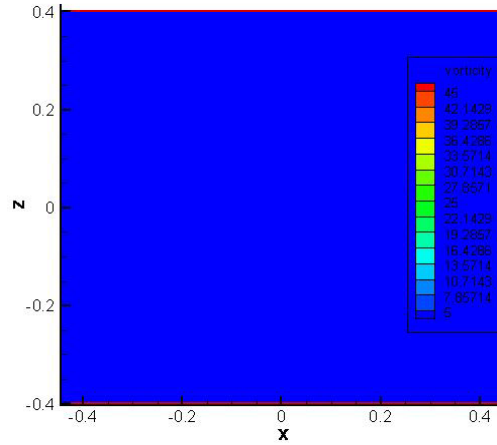
Ας δούμε τώρα τι θα γινόταν αν χρησιμοποιούνταν χρονικό βήμα μιας τάξης μεγέθους μικρότερο. Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα των υπολογισμών για dt = 0.003 της ίδιας δίνης στο ίδιο πλέγμα για τους ίδιους χρόνους με προηγουμένως.



Σχήμα 3.6 : Εικόνες της δίνης Γ=50 μετά από (α) t=0.06sec και (β) t=0.15sec για dt=0.003



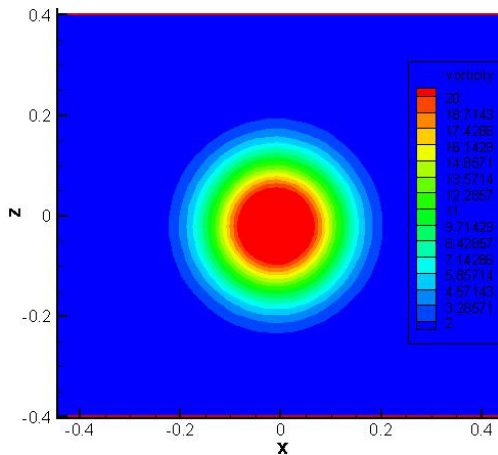
(α)



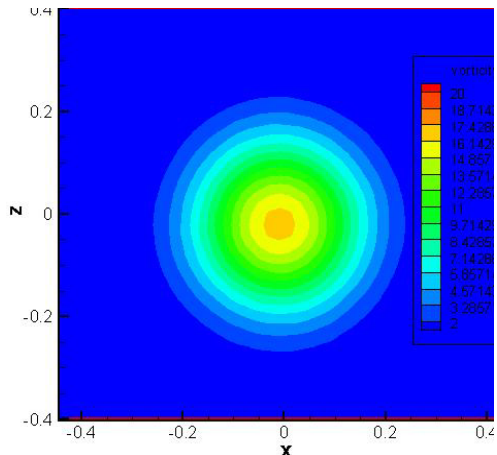
(β)

Σχήμα 3.7 : Εικόνες της δίνης $\Gamma=50$ μετά από (α) $t=0.45\text{sec}$ και (β) $t=0.9\text{sec}$ για $dt=0.003$

Τα σχήματα είναι ακόμα πιο διαφωτιστικά αν παρατηρηθούν στο εύρος τιμών στροβιλότητας 2 έως 20, αντί του 5 έως 45. Πράγματι :

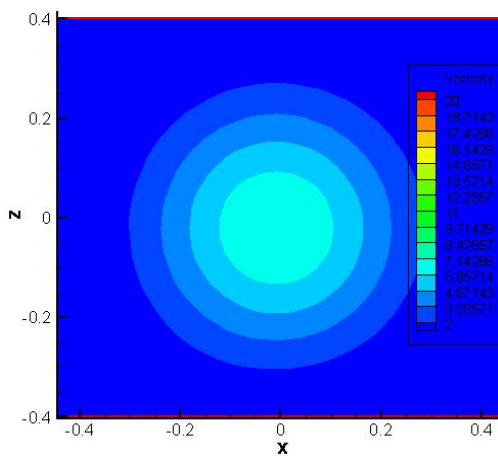


(α)

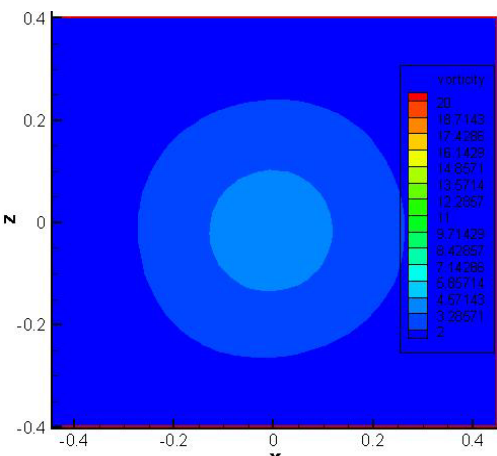


(β)

Σχήμα 3.8 : Εικόνες της δίνης $\Gamma=50$ μετά από (α) $t=0.06\text{sec}$ και (β) $t=0.15\text{sec}$ για $dt=0.003$, απεικονισμένες σε μικρότερο εύρος τιμών στροβιλότητας



(α)



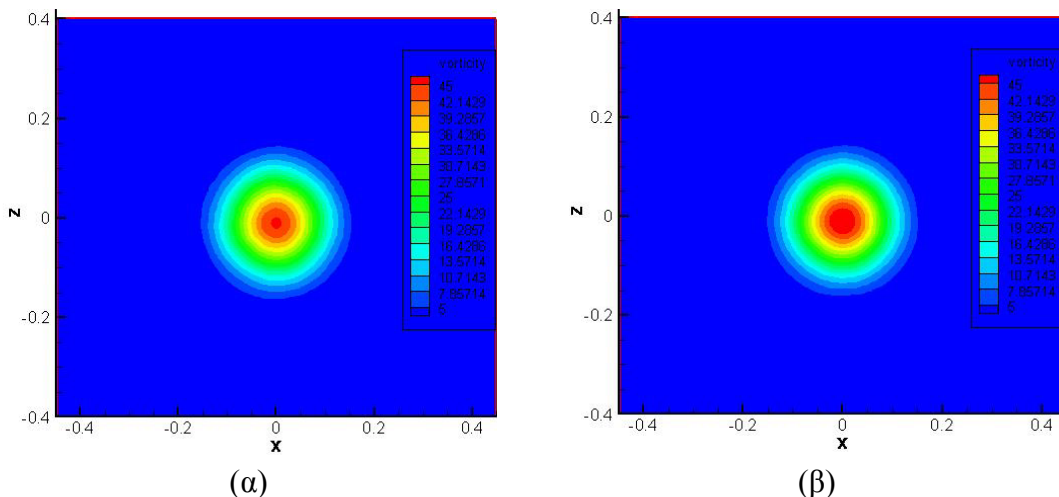
(β)

Σχήμα 3.9 : Εικόνες της δίνης $\Gamma=50$ μετά από (α) $t=0.45\text{sec}$ και (β) $t=0.9\text{sec}$ για $dt=0.003$, απεικονισμένες σε μικρότερο εύρος τιμών στροβιλότητας

Είναι εμφανές λοιπόν ότι η χρήση μιας τάξης μεγέθους μικρότερο χρονικό βήμα αύξησε το φαινόμενο της διάχυσης στη δίνη. Αυτό όμως δε θα έπρεπε να μας εκπλήσσει καθόλου. Η μείωση του dt κατά μια τάξη μεγέθους, σημαίνει ότι για να επιτευχθούν οι απαιτούμενοι χρόνοι t , πρέπει να πραγματοποιηθούν μια τάξη μεγέθους προς τα πάνω, σε σχέση με προηγουμένως επαναλήψεις της ρουτίνας. Αντί δηλαδή να φτάσουμε στο χρόνο $t = 0.06$ sec με δυο επαναλήψεις όπως έγινε προηγουμένως, χρειαστήκαμε 20 επαναλήψεις! Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η ενδογενής και αναπόφευκτη αριθμητική διάχυση για την οποία έγινε λόγος πιο πάνω να εμφανιστεί σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό. Αυτό όμως που κερδήθηκε με το μικρότερο χρονικό βήμα είναι ο περιορισμός της δεύτερης βασικής αιτίας που οδηγούσε σε μη πραγματικά αποτελέσματα, δηλαδή οι παράλογα μεγάλες μετατοπίσεις μεταξύ γειτονικών δινών. Πράγματι όπως φαίνεται και από τα σχήματα 3.6β έως 3.9β είναι προφανές ότι η δίνη δεν εμφανίζει πλέον εκείνες τις ‘περίεργες’ γεωμετρικές και σπασίματα που παρατηρήθηκαν στα σχήματα 3.4 και 3.5.

Τι θα μπορούσε όμως να γίνει για να εξαλειφθεί η πρώτη βασική αιτία – η ενδογενής αριθμητική διάχυση; Η αλήθεια είναι ότι **δεν μπορεί** να εξαλειφθειεντελώς εφ’ όσον αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου αναγωγής που χρησιμοποιούμε, αλλά σίγουρα μπορεί να **μετριαστεί** χρησιμοποιώντας όλο και μικρότερα πλέγματα. Αυτό γίνεται γιατί με τη χρήση ενός ποιο λεπτού πλέγματος έρχονται όλο και πιο κοντά οι εκάστοτε γειτονικοί κόμβοι – δίνες. Έτσι όταν μια δίνη μετατοπίζεται και στη συνέχεια ανάγεται στους κόμβους αυτούς, η αρχική της στροβιλότητα θα μοιράζεται σε μια απόσταση μικρότερη σε σχέση με προηγουμένως μειώνοντας έτσι το συνολικό ρυθμό αριθμητικής διάχυσης στο χώρο. Επιπλέον, με τη χρήση ενός ποιο λεπτού πλέγματος αν και μικραίνουν ακόμα περισσότερο οι αποστάσεις (πράγμα αρνητικό αν στόχος είναι η αποφυγή των υπερβολικών μετατοπίσεων γειτονικών δινών), ταυτόχρονα κατανέμεται το πεδίο σε όλο και περισσότερους κόμβους ρίχνοντας έτσι τη μέση τιμή στροβιλότητας ανά κόμβο. Μη ξεχνάμε άλλωστε ότι ισχύει $\Gamma = \omega \times dx^2$, άρα η χρήση ενός πιο λεπτού πλέγματος με το π.χ μισό dx σε σχέση με πριν σημαίνει ότι τα αντίστοιχα Γ που θα τοποθετηθούν στους κόμβους θα αναφέρονται σε μια περιοχή τέσσερις φορές μικρότερη. Άρα τα αντίστοιχα Γ των δινών στους κόμβους θα διαιρεθούν με το τέσσερα μειώνοντας έτσι τη στροβιλότητα ανά κόμβο και συνάμα κρατώντας τη συνολική στροβιλότητα σταθερή. Συνεπώς με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται και κάτι ακόμα, δεν υπάρχουν πια μεγάλες τιμές στροβιλότητας συγκεντρωμένες σε μεμονωμένους κόμβους, κάτι που λειτουργεί υπέρ στο να μην συμβούν μεγάλες μετατοπίσεις δινών. Βέβαια ας τονιστεί εδώ κάτι το οποίο θα συζητηθεί πιο αναλυτικά και παρακάτω. Αν πρόκειται να χρησιμοποιηθεί μικρότερο πλέγμα πρέπει να θεωρηθεί δεδομένο ότι θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί και ένα αντίστοιχα μικρότερο dt ! Αν δε γίνει αυτό θα δημιουργηθεί πρόβλημα καθώς η χρήση μικρότερου dx με το όχι αντίστοιχο dt θα οδηγήσει σε μεγιστοποίηση του παράγοντα των υπερβολικών μετατοπίσεων γειτονικών δινών για τον οποίο γίνεται λόγος πιο πάνω και θα διαλύσει το πεδίο σε ακανόνιστα σχήματα!

Πολύ χαρακτηριστικά παραδείγματα όλων όσων εξηγούνται παραπάνω φαίνονται στα δυο παρακάτω σχήματα όπου έχει υπολογιστεί η γνωστή δίνη, (α) χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα μεγέθους κελιού 0.01×0.01 σε χρονικό βήμα $dt = 0.003$ sec έως το χρόνο $t = 0.06$ sec (δηλαδή για 20 επαναλήψεις) και (β) χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα μεγέθους 0.005×0.005 σε χρονικό βήμα $dt = 0.002$ έως τον ίδιο χρόνο (δηλαδή για 30 επαναλήψεις).



Σχήμα 3.10 : Εικόνα της δίνης $\Gamma=50$ σε χρόνο $t=0.06\text{sec}$ (α) για 20 επαναλήψεις σε $dt=0.003$ και (β) για 30 επαναλήψεις σε $dt=0.002$

Από το εν λόγω σχήμα επαληθεύονται έως ένα βαθμό όσα αναφέρθηκαν παραπάνω. Η χρήση λεπτότερου πλέγματος -σχήμα 3.10(α)- σε χρονικό βήμα 0.003 sec – δηλαδή μετά 20 επαναλήψεις δεν προκάλεσε τόση διάχυση στη δίνη σε σχέση με αυτό που παρατηρήθηκε στο σχήμα 3.8(α) με πλέγμα 0.02×0.02 , όπου η δίνη έχει ανοίξει αισθητά σε διάμετρο. Τα αποτελέσματα είναι ακόμα πιο εντυπωσιακά στο σχήμα 3.10(β) αν και γίνονται ακόμα περισσότερες επαναλήψεις για την επίτευξη του χρόνου t . Πρέπει πάντως κανείς να παρατηρήσει, ότι στο σχήμα 3.10(β) έχει γίνει και η αντίστοιχη αναπροσαρμογή για την τιμή του dt , για τους λόγους που αναφέραμε πιο πριν.

3.3 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Όλα τα παραπάνω οδηγούν στο να γίνει μια μικρή συζήτηση σχετικά με τα κριτήρια σύγκλισης της ρουτίνας remesh.f. Λέγοντας κριτήρια σύγκλισης εννοούνται τα όρια στα οποία πρέπει να βρίσκονται κάποιες από τις παραμέτρους έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται τα σφάλματα που υπεισέρχονται στα αποτελέσματα και οφείλονται στον τρόπο που γίνονται οι υπολογισμοί. Είδαμε παραπάνω ότι υπάρχουν δυο ειδών τέτοια σφάλματα. Το πρώτο είναι η ενδογενής αριθμητική διάχυση, για την οποία δυστυχώς δεν μπορεί να γίνει τίποτα άλλο παρά η χρήση όλο και λεπτότερων πλεγμάτων, και το δεύτερο είναι οι μεγάλες ταχύτητες που επάγονται μεταξύ γειτονικών δινών μεγάλης στροβιλότητας και τις αναγκάζουν να κινηθούν πολύ γρήγορα μακριά από τις αρχικές τους θέσεις, διαλύοντας έτσι ταχύτατα το σύστημα δινών. Για το δεύτερο αυτό είδος σφαλμάτων μπορούν να καθοριστούν διαστήματα μέσα στα οποία θα ορίζονται οι αρχικές παράμετροι υπολογισμού έτσι ώστε να τα ελαχιστοποιούν.

Στην προηγούμενη παράγραφο έγινε μια μικρογραφία αυτής της διαδικασίας μειώνοντας το χρονικό βήμα dt . Θα ήταν δυνατόν να προκύψουν τα ίδια αποτελέσματα μειώνοντας την αρχική συνολική στροβιλότητα Γ . Όμως στη γενική περίπτωση η στροβιλότητα Γ είναι κάτι δεδομένο. Είναι χαρακτηριστικό του αρχικού πεδίου στροβιλότητας που θα δοθεί, συνεπώς δεν είναι παράμετρος. Ως παράμετροι λοιπόν θεωρούνται το χρονικό βήμα dt και η πυκνότητα του πλέγματος –δηλαδή οι αποστάσεις dx και dy . Οι εξισώσεις που δίνουν την μετατόπιση που θα υποστεί μια δίνη a στο σημείο (x_a, y_a) λόγω της παρουσίας της δίνης b στο σημείο (x_b, y_b) είναι οι :

$$\partial xa = \partial t \cdot \frac{\Gamma\beta}{2\pi} \cdot \frac{y\beta - ya}{(xa - x\beta)^2 + (ya - y\beta)^2}$$

$$\partial ya = -\partial t \cdot \frac{\Gamma\beta}{2\pi} \cdot \frac{xa - x\beta}{(xa - x\beta)^2 + (ya - y\beta)^2}$$

Το χειρότερο σενάριο είναι το να βρίσκονται δυο δίνες δίπλα – δίπλα. Εδώ θα συζητηθεί η γενική περίπτωση, που είναι το να βρίσκονται διαγώνια. Αυτό σημαίνει ότι $x\beta = xa + dx$ και $y\beta = ya + dy$. Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις έχουμε :

$$|\partial xa| = \left| \partial t \cdot \frac{\Gamma\beta}{2\pi} \cdot \frac{\partial y}{(\partial x)^2 + (\partial y)^2} \right|$$

$$|\partial ya| = \left| -\partial t \cdot \frac{\Gamma\beta}{2\pi} \cdot \frac{\partial x}{(\partial x)^2 + (\partial y)^2} \right|$$

Δεδομένου όμως ότι επιλέγηκε $dx = dy$ οι εξισώσεις γίνονται :

$$|\partial xa| = \left| \partial t \cdot \frac{\Gamma\beta}{2\pi} \cdot \frac{\partial x}{2(\partial x)^2} \right|$$

$$|\partial ya| = \left| -\partial t \cdot \frac{\Gamma\beta}{2\pi} \cdot \frac{\partial x}{2(\partial x)^2} \right|$$

Η σε συμπτυγμένη μορφή :

$$|\partial xa| = \left| \frac{\Gamma\beta \cdot \partial t}{4\pi \cdot \partial x} \right|$$

$$|\partial ya| = \left| \frac{\Gamma\beta \cdot \partial t}{4\pi \cdot \partial x} \right|$$

Από εδώ και πέρα το μόνο που μένει είναι να επιλεγεί το κριτήριο με βάση το οποίο θα θελήσουμε να κάνουμε υπολογισμούς. Ένα τέτοιο κριτήριο είναι το να απαιτείται σε κάθε χρονικό βήμα dt η δίνη να μην φεύγει έξω από το επίπεδο που ορίζουν τα τέσσερα γειτονικά κελιά της δίνης. Δηλαδή :

$$|\partial xa| \leq \partial x \quad \text{και} \quad |\partial ya| \leq \partial x \quad (\text{αφού } \partial x = \partial y)$$

$$\text{που σημαίνει : } |\Gamma \cdot \partial t| \leq 4 \cdot \pi \cdot \partial x^2$$

Θα μπορούσε επίσης να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο το να μη φεύγει η δίνη έξω από το νοητό κελί πλευράς ∂x , κάτι που θα κατέληγε στο :

$$|\Gamma \cdot \partial t| \leq 2 \cdot \pi \cdot \partial x^2$$

δηλαδή σε όπως είναι αναμενόμενο ένα πιο αυστηρό κριτήριο.

Το τι κριτήριο θα χρησιμοποιηθεί τελικά εξαρτάται από το πόσο ακριβές αποτέλεσμα απαιτείται. Γενικά ας έχουμε υπ' όψιν ότι το κριτήριο εξετάζει την ακραία περίπτωση των γειτονικών δινών και ότι ουσιαστικά είναι ένα κριτήριο το οποίο αναφέρεται στο dt εφ' όσον το Γ είναι κάτι δεδομένο και τα dx και dy είναι κάτι που ορίζεται με βάση την ακρίβεια που απαιτείται κάθε φορά να επιτευχθεί στους υπολογισμούς. Μη ξεχνάμε άλλωστε ότι όσο μικρότερες διαστάσεις πλέγματος χρησιμοποιούνται τόσο οι διακριτοί υπολογισμοί προσεγγίζουν την πραγματικότητα, ή οποία δεν είναι διακριτή αλλά συνεχής. Όσο όμως μικραίνει το dx σε τάξεις μεγέθους το dt πρέπει να πέφτει δύο φορές περισσότερες τάξεις μεγέθους για να μη 'σπάει' το κριτήριό, και αυτό είναι κάτι που δεν μπορεί πάντα να πραγματοποιηθεί, εκτός και αν έχουμε στη διάθεσή μας υπερβολικά γρήγορους υπολογιστές με τεράστιες μνήμες. Ποιο συγκεκριμένα, αν εφαρμοστεί το πρώτο από τα δύο κριτήρια που εξάχθηκαν παραπάνω στο πρόβλημα της μεγάλης δίνης με $\Gamma = 50$ που υπολογίσαμε παραπάνω και με δεδομένα τα $dx = 0,02$ δίνει :

$$|dt| \leq \frac{4 \cdot \pi \cdot dx^2}{\Gamma} \approx 0.0001004$$

Ενώ ο αρχικός υπολογισμός που παρουσιάζεται πιο πάνω έγινε με $dt = 0.03$ δηλαδή με dt δύο τάξεων μεγέθους μεγαλύτερο!!! Συνεπώς δεν θα έπρεπε να προξενούν περιέργεια αυτά τα περίεργα "σπασίματα" που παρατηρούνται στο κέντρο των σχημάτων 3.4 και 3.5, όπου οι κοντινές δίνες έχουν μεγάλες στροβιλότητες. Βέβαια στον επόμενο υπολογισμό όπου χρησιμοποιείται $dt = 0.003$ τα αποτελέσματα είναι καλύτερα γιατί όλο και προσεγγίζεται η βέλτιστη τιμή 0.0001.

Ας τονιστεί όμως ότι χρησιμοποιώντας $dt = 0.03$ για να φτάσει η ρουτίνα τα 1.5 sec χρειάζεται να κάνει 40 επαναλήψεις ενώ αν ικανοποιούνταν το κριτήριο που λέει $dt = 0.0001$ θα απαιτούνταν 9.000 επαναλήψεις περίπου!!!

Το τελικό συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι το παραπάνω κριτήριο δεν είναι πάντα εύκολο να ικανοποιείται –ειδικά άμα απαιτούνται αποτελέσματα γρήγορα– αλλά τουλάχιστον πρέπει κανείς να φροντίζει να μην υπερβαίνει το θεωρητικό dt παραπάνω από μία τάξη μεγέθους. Άλλωστε δεν υπάρχει και λόγος το κριτήριο να ικανοποιείται στην εντέλεια του γιατί όπως είπώθηκε και προηγουμένως αναφέρεται σε μια ακραία περίπτωση. Πράγματι αυτό ακριβώς συμβαίνει όταν γίνονται υπολογισμοί με το $dt = 0.003$ και τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά. Άλλωστε όσο μικρότερα dt χρησιμοποιούνται τόσες περισσότερες επαναλήψεις χρειάζονται για να επιτευχθεί ένας επιθυμητός χρόνος, και περισσότερες επαναλήψεις σημαίνουν αναπόφευκτα περισσότερη ενδογενής αριθμητική διάχυση. Άρα ουσιαστικά αν το παρακάνουμε με υπερβολικά πολλές επαναλήψεις το αποτέλεσμα και πάλι θα είναι καταστροφικό καθώς η ενδογενής διάχυση θα διαλύσει και πάλι το πεδίο όσο μικρό πλέγμα και αν χρησιμοποιηθεί.

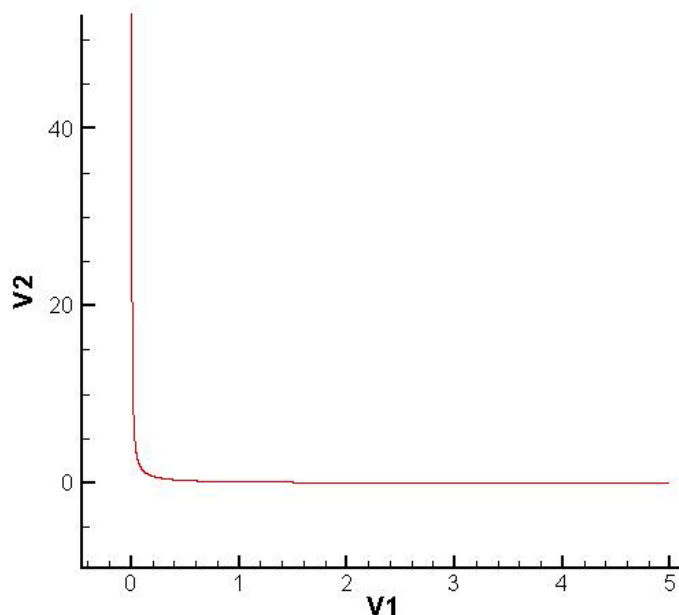
3.4 ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΔΙΝΩΝ & ΔΕΝΔΡΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

3.4.1 ΜΕΛΕΤΩΝΤΑΣ ΜΑΚΡΟΣΚΟΠΙΚΑ ΕΝΑ ΣΥΜΠΛΕΓΜΑ ΔΙΝΩΝ

Ένα μεγάλο μειονέκτημα της ρουτίνας remesh.f είναι οι υπερβολικά πολλοί υπολογισμοί που κάνει λόγω του πλέγματος που χρησιμοποιείται. Για ένα πλέγμα της τάξης των 86×81 κόμβων που για ένα τυπικό dx ίσο με 0.01 αντιστοιχεί σε ένα πλέγμα διαστάσεων 0.86 επί 0.81 απαιτούνται $86 \cdot 81 = 6966$ υπολογισμοί σε κάθε χρονικό βήμα. Για ένα πιο 'πραγματικό' πλέγμα με ένα πιο ακριβές $dx = 0.001$ που να υπολογίζει μια περιοχή περίπου 1 m^2 χρειάζονται $1000 \cdot 1000 = 1000000$ κόμβοι, δηλαδή 1000000 πράξεις ανά επανάληψη!

Κάπου εδώ έρχονται να εφαρμοστούν τα συμπεράσματα του κεφαλαίου 2. Και πιο συγκεκριμένα το τελευταίο συμπέρασμα που βγήκε και υποδεικνύει ότι από κάποιες αποστάσεις και μετά μία δίνη δεν μπορεί να διακρίνει αν δέχεται δυνάμεις από μία μεμονωμένη δίνη ή από ένα γκρουπ δινών. Πράγματι στο κεφάλαιο 2 προέκυψε ότι σε ένα πρόβλημα 4 δινών αν η μία από αυτές αρχικά εκκινήσει ευρισκόμενη, σε σχέση με τις άλλες τρεις, σε αποστάσεις αρκετά μεγαλύτερες από ότι οι αποστάσεις μεταξύ των τριών, τείνει να τις αντιληφθεί σαν μία και το όλο πρόβλημα θυμίζει το απλό πρόβλημα των 2 δινών. Συνεπώς η υποψία ότι μια απομακρυσμένη δίνη μπορεί να βλέπει ένα γκρουπ δινών από μακριά σαν μία μεγάλη δίνη όσον αφορά το τι ταχύτητα θα της επάγει έχει μια δυνατή βάση. Ας το τσεκάρουμε αυτό κάνοντας ένα μικρό πείραμα :

Καταρχήν χαρακτηριστικό είναι το σχήμα 3.11 όπου απεικονίζεται το πεδίο ταχύτητας που δημιουργεί μια δίνη σε σχέση με την απόσταση από το κέντρο της.

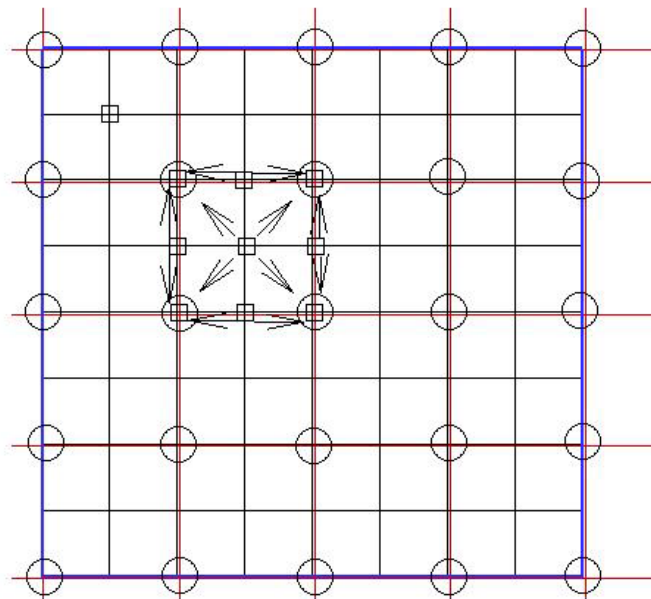


Σχήμα 3.11 : Πεδίο ταχύτητας σημειακής δίνης

Όπως φαίνεται από το σχήμα, σε αρκετά μικρή απόσταση από τη δίνη η καμπύλη αρχίζει να προσεγγίζει ασυμπτωτικά κάποια ευθεία γραμμή. Αν όμως το πεδίο ταχυτήτων αρχίζει να γίνεται γραμμικό από κάποια απόσταση και μετά, αυτό

σημαίνει ότι βάζοντας άλλη μια δίνη δίπλα στην αρχική, το πεδίο και της δεύτερης αυτής δίνης παρομοίως θα γίνεται γραμμικό. Άρα από κάποια απόσταση και μετά και τα δυο πεδία είναι ταυτόχρονα γραμμικά και συνεπώς υπερτίθενται. Συνεπώς δεν έχει σημασία αν υπάρχουν μία ή περισσότερες δίνες στο κέντρο!

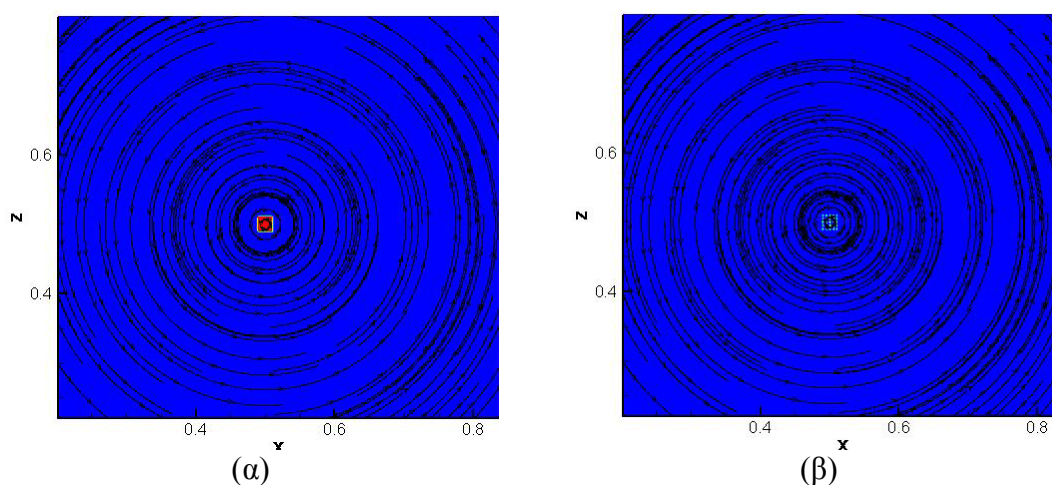
Ας περάσουμε όμως στο πείραμα. Παρακάτω παρατίθενται εικόνες από γκρουπ δινών που μακροσκοπικά φτιάχνουν μία μεγάλη δίνη. Το πείραμα αυτό εκτελείται για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις αρχικής στροβιλότητας, ξεκινώντας από κάποιο Γ και ανεβαίνοντας κάθε φορά μία τάξη μεγέθους. Η γενική ιδέα πίσω από τους υπολογισμούς αυτούς είναι η εξής : να οριστούν τρία διαφορετικά πλέγματα διαφορετικής κλίμακας. Ένα πολύ λεπτό $400 \cdot 400 = 160000$ κόμβων, ένα ενδιάμεσο $200 \cdot 200 = 40000$ κόμβων και το παχύτερο εκ των τριών $100 \cdot 100 = 10000$ κόμβων. Αυτά τα τρία πλέγματα ορίζουν τρεις διαφορετικές κλίμακες με βάση τις οποίες παρατηρείται κάθε φορά το πρόβλημα. Ξεκινώντας από την πιο λεπτή κλίμακα, δηλαδή την κλίμακα με το πιο λεπτό πλέγμα, ορίζεται ένα τετράγωνο $9 \cdot 9 = 81$ δινών, δίνεται στην κάθε μια η τιμή $\Gamma = 10$ και υπολογίζεται το πεδίο των ταχυτήτων που αυτές επάγουν στον υπόλοιπο χώρο. Στη συνέχεια περνάμε στην επόμενη κλίμακα, δηλαδή στο πλέγμα με τους μισούς κόμβους ανά πλευρά σε σχέση με το προηγούμενο και ανάγεται ο αρχικός σχηματισμός των 81 δινών στον αντίστοιχο σχηματισμό δινών σε αυτή την κλίμακα. Το πως γίνεται αυτό φαίνεται στο σχήμα 3.12.



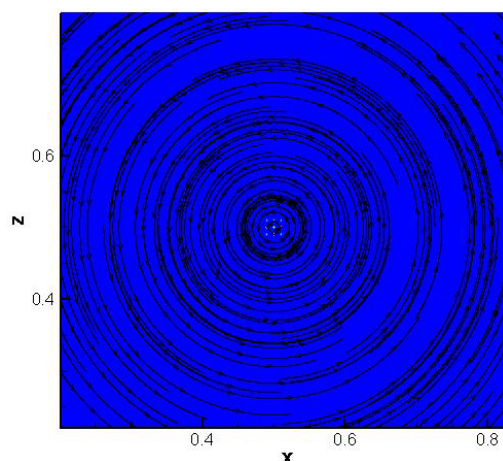
Σχήμα 3.12 : Αναγωγή στροβιλότητας μεταξύ δυο διαφορετικών κλιμάκων

Το κόκκινο πλέγμα αναπαριστά την μεγαλύτερη κλίμακα ενώ το μαύρο την λεπτότερη. Τα κυκλάκια αντιστοιχούν σε δίνες στη μεγάλη κλίμακα ενώ τα τετράγωνα σε δίνες στη λεπτότερη κλίμακα. Το ζητούμενο είναι η 'μετάφραση' όλων των δινών - τετράγωνα σε δίνες - κυκλάκια, το πέρασμα δηλαδή από τη λεπτότερη στην παχύτερη κλίμακα. Καταρχήν πρέπει να παρατηρηθεί ότι αν η στροβιλότητα που εκφράζουν οι δίνες - τετράγωνα αναφέρεται σε μια επιφάνεια εμβαδού $dx \cdot dy$, τότε οι δίνες - κυκλάκια αναφέρονται σε επιφάνεια $2 \cdot dx \cdot 2 \cdot dy$. Άρα αρχικά για να βρισκόμαστε στην ίδια κλίμακα πρέπει να πολ/στούν όλες οι στροβιλότητες των δινών - τετράγωνα με το λόγο $\frac{2 \cdot dx \cdot 2 \cdot dy}{dx \cdot dy} = 4$. Έπειτα εξετάζεται το πώς θα

μοιραστούν οι δίνες - τετράγωνα στις δίνες - κύκλους. Υπάρχουν τριών ειδών δίνες – τετράγωνα. Αυτές που συμπίπτουν με μια δίνη – κύκλο, και της δίνουν αυτούσια τη στροβιλότητά τους. Αυτές που βρίσκονται ανάμεσα σε δυο δίνες – κύκλους (πάνω στην ευθεία γραμμή που ενώνει δυο διαδοχικές δίνες - κύκλους) και μοιράζουν τη στροβιλότητά τους ακριβώς στο μισό σε κάθε μια δίνη – κύκλο. Τέλος αυτές που βρίσκονται στο κέντρο του τετραγώνου που έχει ως κορυφές τέσσερις δίνες – κύκλους και μοιράζουν τη στροβιλότητά τους σε τέσσερα ίσα μέρη δίνοντας το κάθε ένα σε μια από τις 4 δίνες – κύκλους. Κάπως έτσι λοιπόν μεταφράζεται η διάταξη των 81 δινών της λεπτής κλίμακας σε μια διάταξη 25 δινών ισοδύναμης στροβιλότητας στην ενδιάμεση κλίμακα. Ακριβώς με την ίδια διαδικασία μεταφράζονται και οι 25 δίνες της ενδιάμεσης σε 9 δίνες ισοδύναμης στροβιλότητας στην τελευταία – παχύτερη κλίμακα. Στα παρακάτω σχήματα λοιπόν αναπαριστώνται κατά σειρά οι τρεις κλίμακες και τα πεδία ταχυτήτων που αυτές δημιουργούν.



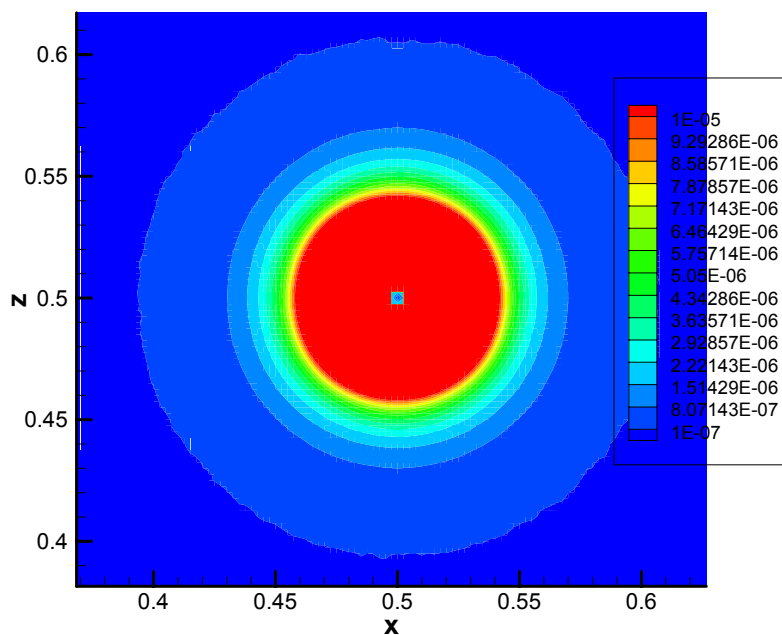
Σχήμα 3.13 : Πεδία ταχυτήτων σε (α) λεπτό πλέγμα με 81 δίνες και σε (β) ενδιάμεσο πλέγμα 25 δίνες



Σχήμα 3.14 :: Πεδία ταχυτήτων σε χοντρό πλέγμα με 9 δίνες

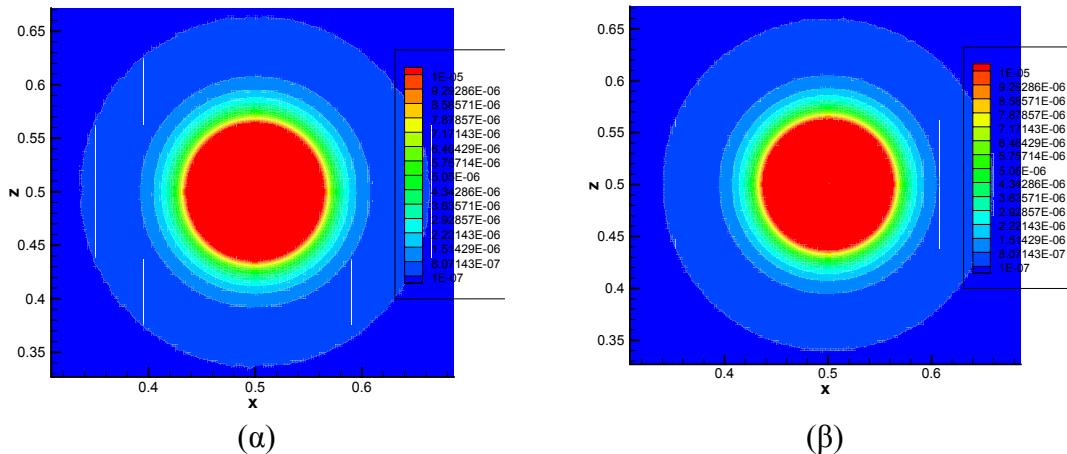
Όπως παρατηρούμε, από κάποια ακτίνα και μετά τα πεδία ταχυτήτων φαίνονται πανομοιότυπα. Αυτό όμως φαίνεται ακόμα καλύτερα στα παρακάτω σχήματα όπου απεικονίζεται πάνω στο λεπτό πλέγμα η απόλυτη τιμή της κατά μέτρον διαφοράς των ταχυτήτων που επάγει η κάθε μία από τις τρεις διατάξεις δινών που περιγράψαμε. Στο σχήμα 3.15 φαίνεται η διαφορά ταχυτήτων μεταξύ του λεπτού και του ενδιάμεσου πλέγματος. Όπως μπορεί εύκολα κανείς να δει και από τη λεζάντα

τιμών, το πεδίο τιμών στο οποίο είναι ενδιαφέρον να παρατηρηθεί το σχήμα κυμαίνεται μεταξύ στο 10^{-5} και στο 10^{-8} . Αυτό είναι απολύτως λογικό καθώς αυτό που ουσιαστικά απαιτείται είναι να βρεθεί μια ακτίνα από την οποία και πέρα η διαφορά ταχυτήτων να είναι μικρότερη από 10^{-6} , και συνεπώς το σφάλμα να θεωρείται αμελητέο. Γιατί διαλέγεται η τιμή 10^{-6} ; Απλά, αν σε ένα σημείο επαχθεί ταχύτητα της τάξης του 10^{-6} , αυτή πολ/ζόμενη με το χρονικό βήμα dt που θα είναι της τάξης του 10^{-2} ή 10^{-3} , θα δώσει μια μετατόπιση της τάξης του 10^{-8} με 10^{-9} . Δεδομένου τώρα ότι στη συνέχεια της εργασίας δεν θα χρησιμοποιηθεί πουθενά πλέγμα λεπτότερο από 10^{-3} , γίνεται κατανοητό ότι μια μετατόπιση της τάξης του 10^{-9} σε πλέγμα τάξης 10^{-3} , σημαίνει διαφορά 6 δεκαδικών ψηφίων, και ουσιαστικά είναι αμελητέα.



Σχήμα 3.15 : Διαφορά ταχυτήτων μεταξύ λεπτού και ενδιάμεσου πλέγματος

Επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία, και κατασκευάζονται και τα σχήματα διαφορών μεταξύ λεπτού και χοντρού καθώς και μεταξύ ενδιάμεσου και χοντρού πλέγματος. Όπως είναι λογικό στο σχήμα 3.16(α) όπου συγκρίνεται το λεπτό με το χοντρό πλέγμα, η διαφορά είναι μεγαλύτερη αφού γίνεται προσπάθεια προσομοίωσης 81 δινών με χρήση μόνο 9 δινών. Είναι συνεπώς αναμενόμενο το σφάλμα να είναι μεγαλύτερο και συνεπώς οι αντίστοιχες με το προηγούμενο σχήμα χρωματιστές κυκλικές περιοχές να έχουν μεγαλύτερες ακτίνες. Αρκετά ενδιαφέρον αλλά ουσιαστικά δευτερεύουσας σημασίας είναι και το σχήμα 3.16(β) που συγκρίνεται το ενδιάμεσο πλέγμα με το χοντρό.



Σχήμα 3.16 : Διαφορά ταχυτήτων μεταξύ (α) λεπτού και χοντρού πλέγματος και (β) ενδιάμεσου και χοντρού πλέγματος

Το πολύ σημαντικό συμπέρασμα που βγαίνει από αυτά τα σχήματα ,αν εξεταστούν προσεκτικά, είναι το εξής : αν γύρω από μια περιοχή σε ακτίνα 0.05 όταν κατά την μετάβαση από το λεπτό πλέγμα στο ενδιάμεσο, τοποθετηθούν δίνες, η ταχύτητα που θα επαχθεί στις δίνες αυτές είναι ανεξάρτητη από το γεγονός του αν η στροβιλότητα της περιοχής αυτής είναι εκφρασμένη στο λεπτό ή στο ενδιάμεσο πλέγμα. Με λίγα λόγια οι δίνες έξω από την ακτίνα αυτή **δεν αντιλαμβάνονται διαφορά** είτε έχουμε 81 είτε 25 δίνες στο κέντρο! Όσον αφορά το πέρασμα από το λεπτό στο χοντρό πλέγμα, η ακτίνα αυτή είναι μεγαλύτερη – όπως άλλωστε είναι λογικό– και υπολογίζεται περίπου ίση με 0.1. Το σχήμα 3.16(β) θεωρείται δευτερεύουσας σημασίας γιατί δίνει πληροφορίες που έχουν ήδη εξαχθεί εφ’ όσον η τελική αναγωγή γίνεται στο λεπτότερο των πλεγμάτων. Παρ’ όλα αυτά παρατίθεται εδώ μόνο για αυτή την περίπτωση .

Το επόμενο ερώτημα που εξετάζεται είναι το εξής: Αυτές οι ακτίνες που υπολογίστηκαν ισχύουν για οποιαδήποτε ένταση στροβιλότητας; Η λογική λέει ότι μάλλον όχι. Ποια θα είναι όμως η διαφορά στις ακτίνες;

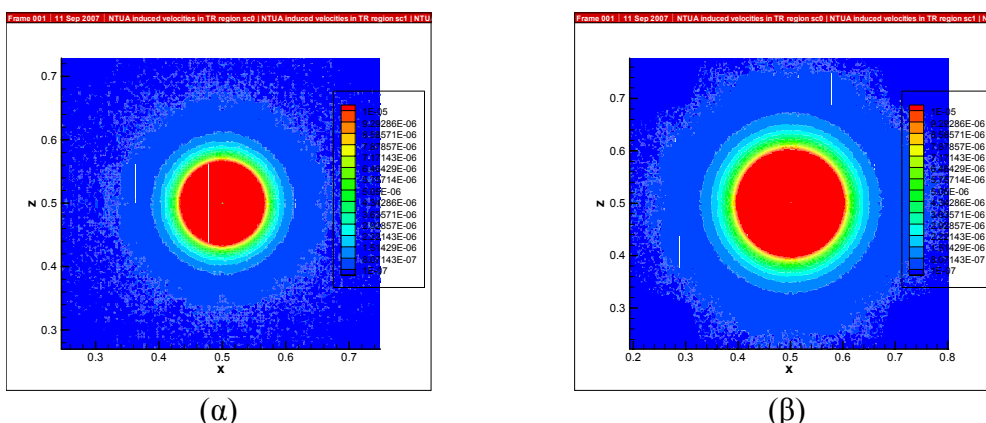
Στα παρακάτω σχήματα της επόμενης σελίδας έχουν υπολογιστεί και παρατίθενται συνοπτικά οι αντίστοιχες διαφορές ταχυτήτων για τις περιπτώσεις στροβιλότητας $\Gamma = 100$ και $\Gamma = 1000$. Δηλαδή για στροβιλότητες έως δυο τάξεις μεγέθους παραπάνω. (προφανώς οι προς τα κάτω τάξεις μεγέθους δεν έχουν ενδιαφέρον!)

Στο σχήμα 3.17 φαίνεται η διαφορά ταχυτήτων για $\Gamma = 100$ μεταξύ λεπτού και ενδιάμεσου και μεταξύ λεπτού και χοντρού αντίστοιχα. Στο σχήματα 3.18 φαίνονται οι αντίστοιχες διαφορές για την περίπτωση $\Gamma = 1000$.

Παρατηρώντας τα σχήματα συμπεραίνει κανείς ότι όντως οι ακτίνες αλλάζουν. Πράγματι στην περίπτωση $\Gamma = 100$ στο πέρασμα από το λεπτό στο ενδιάμεσο πλέγμα η ακτίνα έγινε περίπου ίση με 0.1 και στο πέρασμα από το λεπτό στο χοντρό περίπου ίση με 0.15. Δηλαδή ανέβηκε η στροβιλότητα κατά μια τάξη μεγέθους και οι αντίστοιχες ακτίνες ανέβηκαν κατά περίπου 0.05. Ακριβώς το ίδιο παρατηρούμε και στην περίπτωση $\Gamma = 1000$ όπου οι αντίστοιχες ακτίνες είναι 0.15 και 0.2. Δηλαδή ανέβηκε η στροβιλότητα δυο τάξεις μεγέθους και οι ακτίνες ανέβηκαν κατά 0.1.

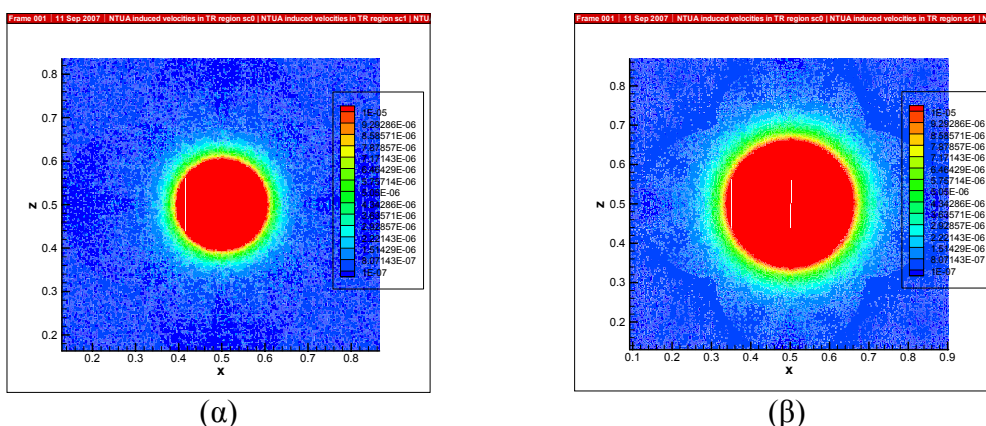
Ποιο συμπέρασμα βγαίνει όμως από όλα αυτά; Ποιες ακτίνες τελικά θα επιλέγουν;

Η περίπτωση $\Gamma = 100$



Σχήμα 3.17 : Διαφορά ταχυτήτων μεταξύ (α) λεπτού και χοντρού πλέγματος και (β) ενδιάμεσου και χοντρού πλέγματος για $\Gamma=100$

Η περίπτωση $\Gamma = 1000$



Σχήμα 3.18 : Διαφορά ταχυτήτων μεταξύ (α) λεπτού και χοντρού πλέγματος και (β) ενδιάμεσου και χοντρού πλέγματος για $\Gamma=1000$

Η απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα είναι απλή. Μια σωστή επιλογή ακτινών είναι η τιμή 0.1 για το πέρασμα από το μικρότερο πλέγμα στο ενδιάμεσο και η τιμή 0.15 για το πέρασμα από το μικρότερο στο μεγαλύτερο. Αυτό συμβαίνει γιατί πρακτικά τιμές στροβιλότητας της τάξεως του 10^3 είναι πάρα πολύ μεγάλες για ένα λεπτό πλέγμα όπως το $dx = dy = 0.0025$ που χρησιμοποιείται εδώ. Και πεδία με τέτοιες τιμές στροβιλότητας δεν θα εξεταστούν στην παρούσα εργασία. Οπότε πρακτικά δεν υπάρχει λόγος να ληφθούν υπ' όψιν τα συμπεράσματα για την τιμή $\Gamma = 1000$, τα διαγράμματα της οποίας παρατίθενται εδώ για να φανεί πιο ξεκάθαρα η εξάρτηση των προαναφερθέντων ακτινών από την τιμή της συνολικής στροβιλότητας Γ , και τα οποία τελικά αναφέρονται σε ακραίες καταστάσεις στροβιλότητας.

3.4.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ

Το συμπέρασμα που βγαίνει από την προηγούμενη παράγραφο είναι σαφές. Από κάποιες αποστάσεις και μετά δεν έχει σημασία σε ποια κλίμακα παρατηρείται ένα σύστημα δινών. Οι ταχύτητες που θα επάγει αυτό το σύστημα θα είναι με πολύ καλή προσέγγιση οι ίδιες. Φυσικά οι τιμές αυτών των αποστάσεων εξαρτώνται από

παραμέτρους όπως η συνολική στροβιλότητα του συστήματος δινών, αλλά εφ' όσον φροντίζουμε να βρισκόμαστε εντός κάποιων ορίων για τις παραμέτρους αυτές μπορούμε να έχουμε σαφείς τιμές για τις αποστάσεις με πολύ μικρό συνολικό σφάλμα.

Αυτό το συμπέρασμα δίνει μια πολύ καλή ιδέα στο πώς θα μπορούσε να εξαιρεθεί ένα από τα σημαντικότερα μειονεκτήματα της ρουτίνας `remesh.f` που εξετάστηκε προηγουμένως. Το μειονέκτημα αυτό είναι οι υπερβολικά πολλές πράξεις που η ρουτίνα εκτελεί όταν χειρίζεται πολύ αναλυτικά πλέγματα, που οδηγούν σε πάρα πολύ μεγάλους χρόνους για την εξαγωγή του αποτελέσματος. Γιατί συμβαίνει αυτό; Απλά, σε ένα αναλυτικό πλέγμα υπάρχουν πάρα πολλοί κόμβοι και η `remesh.f` πρέπει σε κάθε χρονικό βήμα για τον κάθε κόμβο να υπολογίσει το τι θα του επάγει σε ταχύτητα κάθε ένας από τους λοιπούς κόμβους του πλέγματος. Με βάση όμως όσα συζητήθηκαν παραπάνω είναι άδικος κόπος μετά από κάποιες αποστάσεις να γίνονται υπολογισμοί που βασίζονται στη λεπτότερη δυνατή κλίμακα αφού οι ίδιες τιμές ταχυτήτων θα προκύψουν και αν γίνουν οι υπολογισμοί σε κάποια μεγαλύτερη. Καταλήγουμε δηλαδή στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει λόγος ένα πεδίο ροής να υπολογίζεται σε κάθε σημείο του με βάση τη μικρότερη κλίμακα, θα ήταν δυνατόν να βρεθούν οι απαιτούμενες αποστάσεις και να γίνονται οι υπολογισμοί κάθε φορά στην κλίμακα που συμφέρει, μειώνοντας έτσι κατά πολύ τις απαιτούμενες πράξεις. Κάτι τέτοιο πραγματοποιείται στη ρουτίνα `group.f`, όπου χρησιμοποιούνται τρία πλέγματα, δηλαδή τρεις κλίμακες. Τις τρεις αυτές κλίμακες ονομάζουμε `scale0`, `scale1` και `scalet`. Η κλίμακα `scale0` είναι η μεγαλύτερη από τις τρεις και χρησιμοποιεί ένα πλέγμα 100×100 κόμβων με $dx = dy = 0.01$. Η κλίμακα `scale1` είναι η ενδιάμεση και χρησιμοποιεί ένα πλέγμα 200×200 κόμβων με $dx = dy = 0.005$. Τέλος η κλίμακα `scalet` είναι η τελευταία και λεπτότερη δυνατή, με πλέγμα 400×400 κόμβων και $dx = dy = 0.0025$. Όπως θα μπορούσε να παρατηρήσει κανείς επιλέχθηκαν οι κλίμακες και οι διαστάσεις των πλεγμάτων έτσι ώστε να ταιριάζουν με αυτές που εξετάστηκαν στην παράγραφο Α ώστε να χρησιμοποιηθούν απευθείας τα συμπεράσματα που εξήχθησαν όσον αφορά τις αποστάσεις από τις οποίες και είναι δυνατόν να "ανεβούμε" κλίμακα χωρίς να υπάρχουν σφάλματα. Αυτό που κάνει λοιπόν η `group.f` περιγράφεται συνοπτικά στην επόμενη παράγραφο :

Καταρχήν καθορίζονται οι παράμετροι που αφορούν το χρονικό βήμα, τις διαστάσεις και τον αριθμό κόμβων του κάθε πλέγματος. Στη συνέχεια εισάγεται ως δεδομένο το αρχικό πεδίο στροβιλότητας που φροντίζουμε να περιγράφεται στο λεπτότερο δυνατό πλέγμα `scalet`. Στη συνέχεια με βάση τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω για την "μετάφραση" της στροβιλότητας από μια κλίμακα σε μία παχύτερη κλίμακα γράφεται το πεδίο στροβιλότητας στα `scale1` και `scale0`, κατασκευάζεται δηλαδή η εικόνα του πεδίου αν αυτό περιγραφόταν στο `scale1` και στη συνέχεια στο `scale0`. Από εδώ και πέρα η ρουτίνα περνάει στους υπολογισμούς ταχυτήτων. Αρχικά για κάθε δίνη του `scale0` και σε ακτίνα 0.15 και μετά υπολογίζεται του τι ταχύτητα θα επάγει η εν λόγω περιοχή στη κάθε δίνη. Αυτό γίνεται για όλες τις δίνες του `scale0` και έτσι δημιουργείται ένα πεδίο ταχυτήτων για αυτή την κλίμακα. Στη συνέχεια κάνοντας γραμμική παρεμβολή, προβάλλεται το υπολογισμένο πεδίο ταχυτήτων στους κόμβους της ενδιάμεσης κλίμακας δηλαδή στο `scale1`.

Ακολουθεί το πέρασμα στην ενδιάμεση κλίμακα και εκεί υπολογίζεται για την κάθε δίνη – κόμβο του ενδιάμεσου πλέγματος το τι ταχύτητα θα του επάγουν οι δίνες αυτής της κλίμακας σε απόσταση ακτίνας μεγαλύτερης του 0.1 και μικρότερης του 0.15, στη συνέχεια σε αυτό που υπολογίστηκε προστίθεται και αυτό που έχει υπολογιστεί από την προηγούμενη κλίμακα. Για την κάθε δίνη του `scale1` λοιπόν έχει

βρεθεί το τι θα του δώσει σε ταχύτητα το scale0 και το scale1. Στη συνέχεια με τον ίδιο με πριν τρόπο γίνεται παρεμβολή αυτού του πεδίου ταχυτήτων στο τελικό και λεπτότερο δυνατό scalet. Και αφ'ότου υπολογιστεί για κάθε μία δίνη της τελικής αυτής κλίμακας το τι θα του επάγει κάθε άλλη δίνη του scalet σε απόσταση ακτίνας μικρότερης από 0.1, προστίθεται το προηγούμενο αποτέλεσμα. Συνολικά λοιπόν έχει γίνει το εξής : για κάθε μία δίνη του λεπτότερου δυνατού πλέγματος έχει υπολογιστεί το τι ταχύτητα θα του δώσει το υπόλοιπο πεδίο, κάνοντας υπολογισμούς στο λεπτότερο αυτό πλέγμα μέχρι την ακτίνα 0.1, μετά από την ακτίνα 0.1 έως 0.15 κάνοντας υπολογισμούς στο αμέσως επόμενη κλίμακας πλέγμα αφού για αυτές τις ακτίνες η δίνη δεν αντιλαμβάνεται διαφορά είτε είμαστε στο λεπτό είτε στο ενδιάμεσο πλέγμα και τέλος από την ακτίνα 0.15 και μετά κάνοντας υπολογισμούς στο παχύτερο πλέγμα. Είναι λοιπόν προφανές γιατί οι πράξεις είναι σημαντικά λιγότερες, αφού συνολικά η ρουτίνα υπολογίζει χρησιμοποιώντας λιγότερες δίνες.

Αφ'ότου τελειώσει λοιπόν και αυτή η διαδικασία, έχει υπολογιστεί το πεδίο ταχυτήτων στη λεπτή κλίμακα, και πορίζοντας με dt δίνει την απαιτούμενη μετατόπιση της κάθε δίνης. Στη συνέχεια όπως και πριν, αφού αυτή μετατοπιστεί, με την ίδια διαδικασία interpolation που περιγράφηκε προηγουμένως στη ρουτίνα remesh.f, προβάλλονται οι μετατοπισμένες δίνες ξανά σε δίνες στους κόμβους και ακολουθεί το επόμενο χρονικό βήμα.

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο διάγραμμα ροής του σχήματος 3.19 έτσι ώστε να υπάρχει μια πιο "συμπιεσμένη" επεξήγηση της λειτουργίας της group.f. εξεταστεί όμως εδώ και με αριθμητικά δεδομένα του κατά πόσο γρηγορότερη είναι η group.f σε σχέση με την remesh.f.

Αν γινόντουσαν οι υπολογισμοί με τη remesh.f, για να βρεθεί το τι ταχύτητα θα επαχθεί στην κάθε δίνη από τις 400×400 του πλέγματος πρέπει να γίνουν $400 \cdot 400 - 1 = 159999$ υπολογισμούς. Αυτό σημαίνει συνολικά :

$$400 \cdot 400 \cdot 159999 = 25599840000 \approx 2.56 \cdot 10^{10} \text{ υπολογισμούς !}$$

Στη group.f ισχύει :

Στην scale0 που περιέχει $100 \cdot 100 = 10000$ δίνες, για την κάθε δίνη υπολογίζεται η ταχύτητα που της επάγουν οι δίνες από απόσταση 0.15 και πάνω.

Αυτό σημαίνει ότι υπολογίζονται μόνο οι δίνες σε απόσταση $\frac{0.15}{0.01} = 15$ κόμβων (για το μεγάλο πλέγμα) και μετά, άρα παραλείπονται περίπου $30 \cdot 30 = 900$ δίνες. Δηλαδή για κάθε δίνη του scale0 γίνονται $10000 - 900 = 9100$ υπολογισμούς. Συνολικά :

$$100 \cdot 100 \cdot 9100 = 91000000 \text{ υπολογισμοί .}$$

Στην scale1 που περιέχει $200 \cdot 200 = 40000$ δίνες, για την κάθε μία δίνη οι υπολογισμοί γίνονται για απόσταση μικρότερη από 0.15 και μεγαλύτερη από 0.1.

Αυτό σημαίνει ότι υπολογίζονται οι δίνες από απόσταση $\frac{0.1}{0.005} = 20$ έως $\frac{0.15}{0.005} = 30$ κόμβων (για το ενδιάμεσο πλέγμα). Σε αυτή την περιοχή περικλείονται περίπου $60 \cdot 60 - 40 \cdot 40 = 3600 - 1600 = 2000$ δίνες το οποίο συνολικά δίνει :

$$200 \cdot 200 \cdot 2000 = 80000000 \text{ υπολογισμούς.}$$

Τέλος για το scalet που περιέχει $400 \cdot 400 = 160000$ δίνες, για την κάθε δίνη γίνονται υπολογισμοί σε απόσταση 0.1 και κάτω κάτι που σημαίνει απόσταση

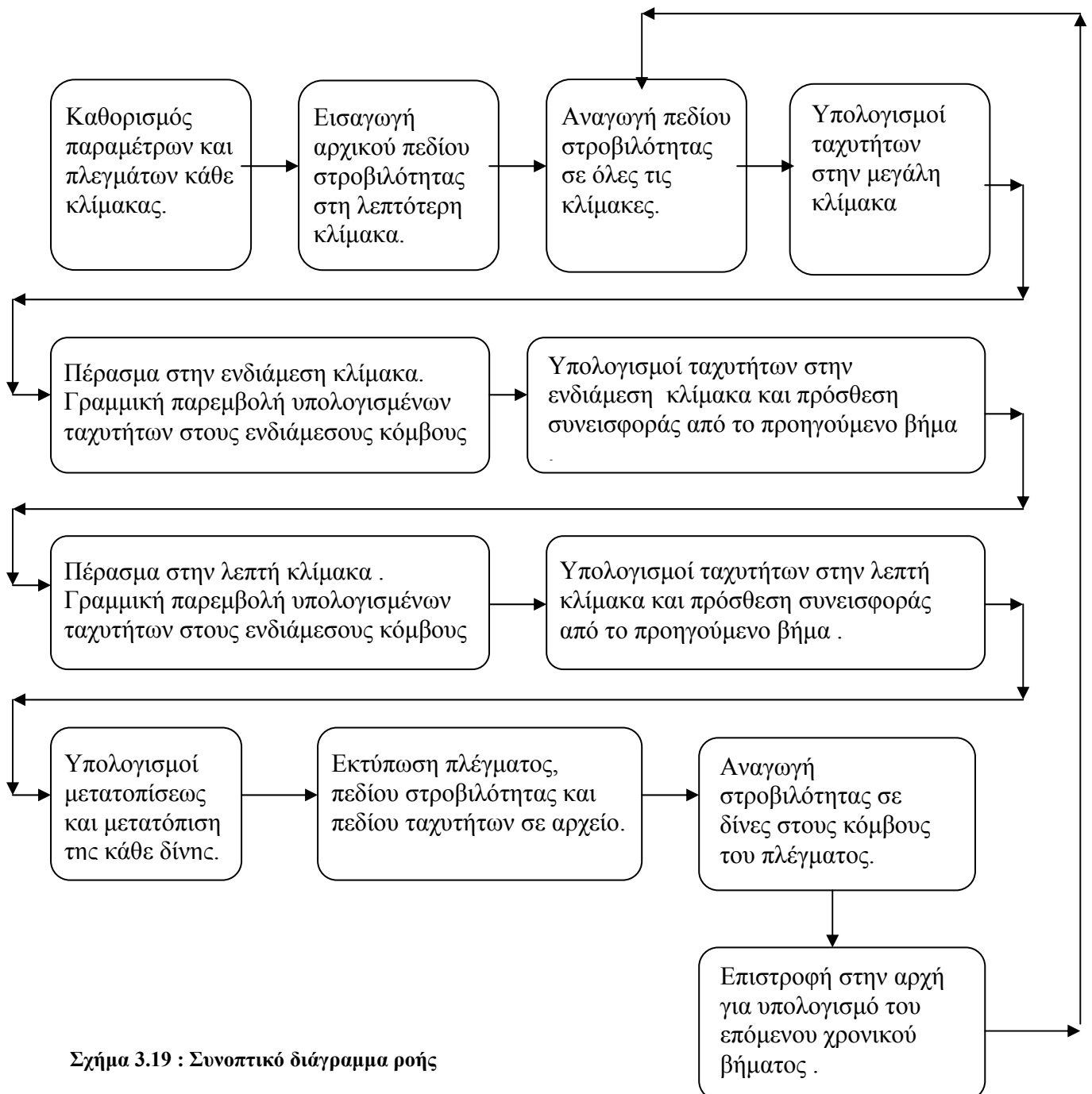
$\frac{0.1}{0.0025} = 40$ κόμβων (για το λεπτό πλέγμα). Για την κάθε δίνη λοιπόν είναι $80 \cdot 80 \cdot 40 = 256000$ υπολογισμοί. Συνολικά :

$400 \cdot 400 \cdot 6399 = 1023840000$ υπολογισμοί.

Αθροίζοντας τους υπολογισμούς και των τριών scale παίρνουμε :

$91000000 + 80000000 + 1023840000 = 1194840000 \approx 1.19 \cdot 10^9$ υπολογισμούς. Αυτό σημαίνει ότι ανά χρονικό βήμα γίνονται:

$$\frac{2.56 \cdot 10^{10}}{1.19 \cdot 10^9} \approx 21.51 \approx \mathbf{22 \text{ φορές λιγότεροι υπολογισμοί!!!}}$$



Σχήμα 3.19 : Συνοπτικό διάγραμμα ροής

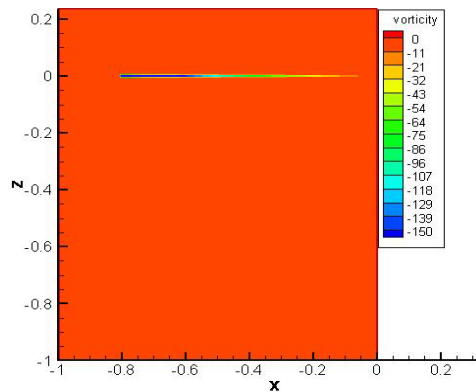
3.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Στο τελευταίο κομμάτι του κεφαλαίου αυτού εξετάζονται κάποιες εφαρμογές της ρουτίνας group.f, όπου υπολογίζεται η χρονική εξέλιξη πέντε χαρακτηριστικών πεδίων ροής. Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι τα παρακάτω πεδία, εξετάζονται για χρονικό βήμα $dt = 0.0015$ sec στις τρεις κλίμακες που χρησιμοποιήθηκαν και παραπάνω με πάχη πλεγμάτων $dx = dy = 0.0025$ για τη λεπτότερη κλίμακα, $dx = dy = 0.005$ για την ενδιάμεση και $dx = dy = 0.01$ για την παχύτερη αντίστοιχα. Επίσης στα πεδία που αρχικά ήταν κατανομές στροβιλότητας πάνω σε γραμμές κατά τον άξονα των x έχει δοθεί και μια κατακόρυφη διάσταση, κατανέμοντας κάθε μία δίνη σε πέντε αντίστοιχης στροβιλότητας κατά τον άξονα των y με βάση την τριγωνική κατανομή. Σε κάθε περίπτωση παρατίθεται η αρχική μορφή του πεδίου και 6 ακόμα σχήματα που απεικονίζουν την εξέλιξη του πεδίου σε κάποιες χαρακτηριστικές χρονικές στιγμές εφ' όσον προφανώς για λόγους χωρητικότητας δεν μπορούμε να παραθέσουμε όλες τις χρονικές στιγμές σε αυτή εδώ την εργασία. Παρόλα αυτά ο εκάστοτε ενδιαφερόμενος μπορεί να δει την πλήρη εξέλιξη των πεδίων στα dvd που συνοδεύουν την εργασία. Τέλος, πριν προχωρήσουμε πρέπει να αναφερθεί ότι στις τέσσερις πρώτες εφαρμογές, τα πεδία που περιγράφονται είναι συμμετρικά ως προς τις θέσεις και αντισυμμετρικά ως προς τις στροβιλότητες προς τον άξονα των y . Γι' αυτό εδώ παρουσιάζεται μόνο το αριστερό μέρος του κάθε πεδίου ενώ στην πραγματικότητα υπάρχει και στα δεξιά ένα πεδίο συμμετρικό ως προς τον κατακόρυφο άξονα με τις αντίθετες τιμές στροβιλότητας.

3.5.1 ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ ΠΤΕΡΥΓΑΣ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ

Εδώ εξετάζεται η χρονική εξέλιξη του πεδίου ροής που δημιουργεί μια πτέρυγα. Είναι γνωστό ότι το αρχικό πεδίο στροβιλότητας που δημιουργεί μια πτέρυγα ορθογωνικής διατομής δίνεται από τον τύπο :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \frac{\Gamma_0 \cdot x}{b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2}} \Leftrightarrow \Gamma = \partial x \cdot \frac{\Gamma_0 \cdot x}{b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2}}, \text{ όπου } b \text{ και } \Gamma_0 \text{ είναι σταθερές}$$

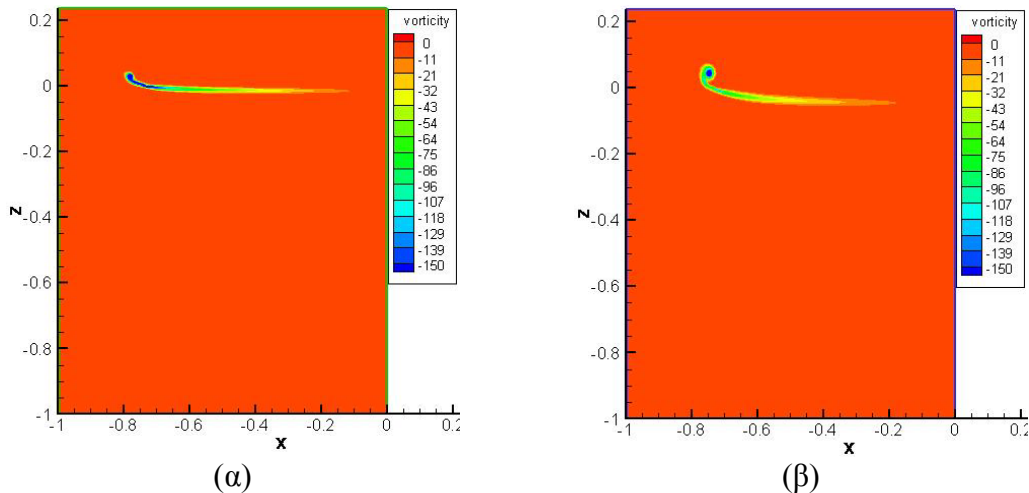


Σχήμα 3.20 : Αρχικό πεδίο στροβιλότητας πτέρυγας

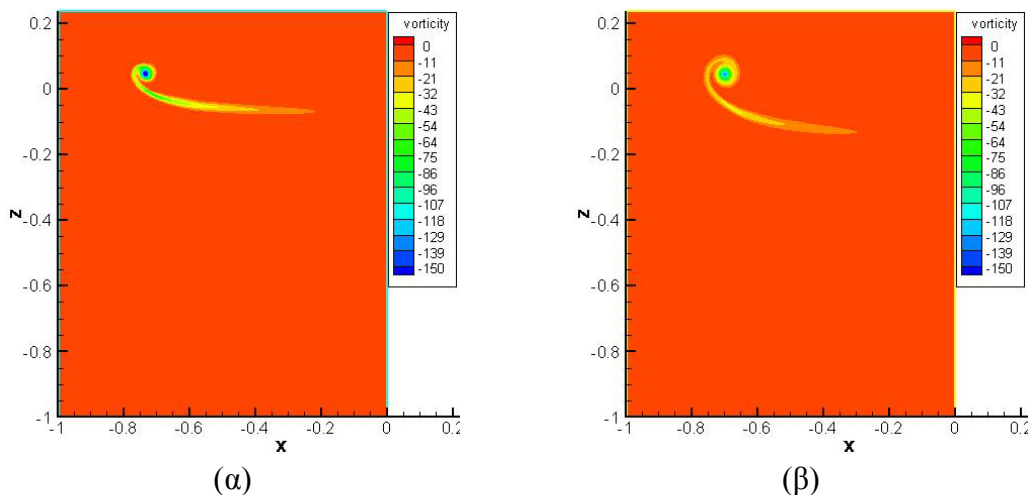
που αναφέρονται στο μήκος της πτέρυγας και στην αρχική στροβιλότητα αντίστοιχα

και καθορίζονται ανάλογα με τον τύπο της κατανομής που πρόκειται να μελετηθεί. Είναι προφανές ότι πρόκειται για μια συμμετρική κατανομή που έχει μηδενική τιμή στο κέντρο και μέγιστες τιμές στα άκρα των πτερύγων. Εδώ έχει επιλεγεί $\Gamma_0 = 2$, για πτέρυγα μήκους $b = 1.2$ m.

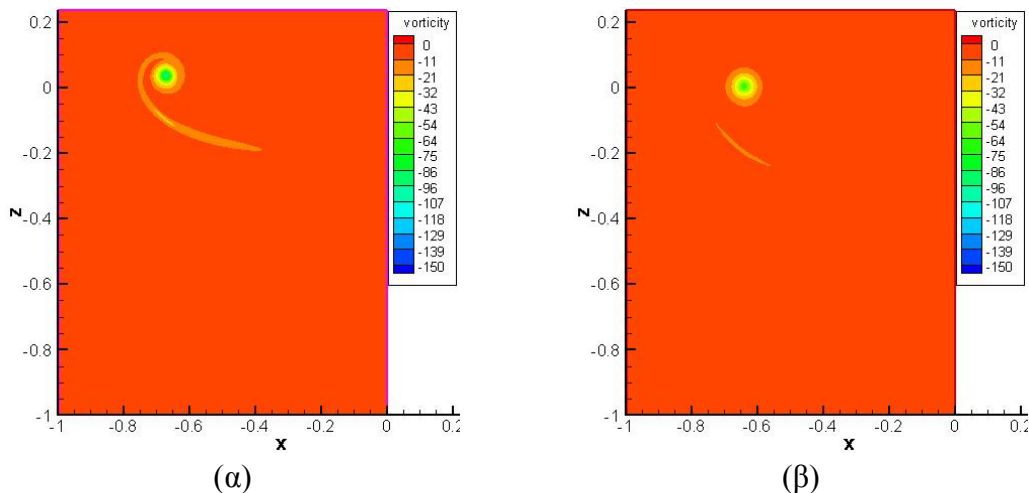
Το αρχικό πεδίο φαίνεται στο σχήμα 3.20 και η εξέλιξή του σε χρόνους $t = 0.03, 0.09, 0.135, 0.27, 0.42$ και 0.705 sec φαίνεται στα σχήματα 3.21 έως 3.23.



Σχήμα 3.21 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας μετά από (α) $t=0.03$ sec και (β) $t=0.09$ sec



Σχήμα 3.22 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας μετά από (α) $t=0.135$ sec και (β) $t=0.27$ sec

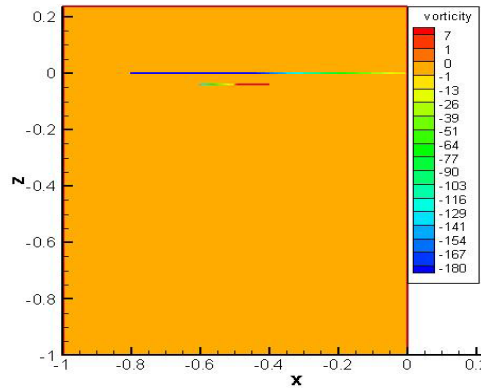


Σχήμα 3.23 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας μετά από (α) $t=0.42\text{sec}$ και (β) $t=0.705\text{sec}$

Για να κατανοηθούν πλήρως τα σχήματα πρέπει να έχουμε ταυτόχρονα στο νου μας ότι στα δεξιά του κάθε σχήματος βρίσκεται η άλλη μισή πτέρυγα όπου το πεδίο εξελίσσεται με συμμετρικό ως προς τον άξονα των y τρόπο με τη βασική διαφορά ότι οι δίνες του δεξιού μέρους έχουν ίδια σε απόλυτη τιμή αλλά αντίθετη σε πρόσημο στροβιλότητα σε σχέση με αντίστοιχες συμμετρικές τους στα αριστερά. Η εξέλιξη του πεδίου είναι σχετικά απλή και αναμενόμενη. Οι μεγάλες τιμές της στροβιλότητας που είναι συγκεντρωμένες στις άκρες τις πτέρυγας, τραβάνε προς το μέρος τους την υπόλοιπη στροβιλότητα σχηματίζοντας μία μεγάλη κυκλική δίνη. Αν μπειτε στον κόπο να δείτε τα βίντεο του πεδίου που περιέχονται στο dvd που συνοδεύει την εργασία θα παρατηρήσετε ότι στη συνέχεια η δίνη αυτή αρχίζει να κινείται πάνω σε μια ευθεία γραμμή με φορά κατακόρυφα προς τα κάτω, ενώ ταυτόχρονα διαλύεται λόγω της αριθμητικής διάχυσης. Αυτό δε θα πρέπει να μας εκπλήσσει καθόλου! Αν κοιτάξουμε την όλη χρονική εξέλιξη από μια πιο μακροσκοπική σκοπιά περιλαμβάνοντας και το δεξί συμμετρικό μέρος του πεδίου, ουσιαστικά πρόκειται για δύο δίνες συνολικά ίσης σε απόλυτη τιμή και αντίθετης σε πρόσημο στροβιλότητας, οι οποίες όπως εξετάστηκε στο Κεφάλαιο 1 αν αφεθούν να αλληλεπιδράσουν κινούνται πάνω σε παράλληλες ευθείες τροχιές με την ίδια φορά κίνησης και την ίδια ταχύτητα.

3.5.2 ΠΕΔΙΟ ΡΩΗΣ ΠΤΕΡΥΓΑΣ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ ΜΕ ΠΤΕΡΥΓΙΟ - ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ι

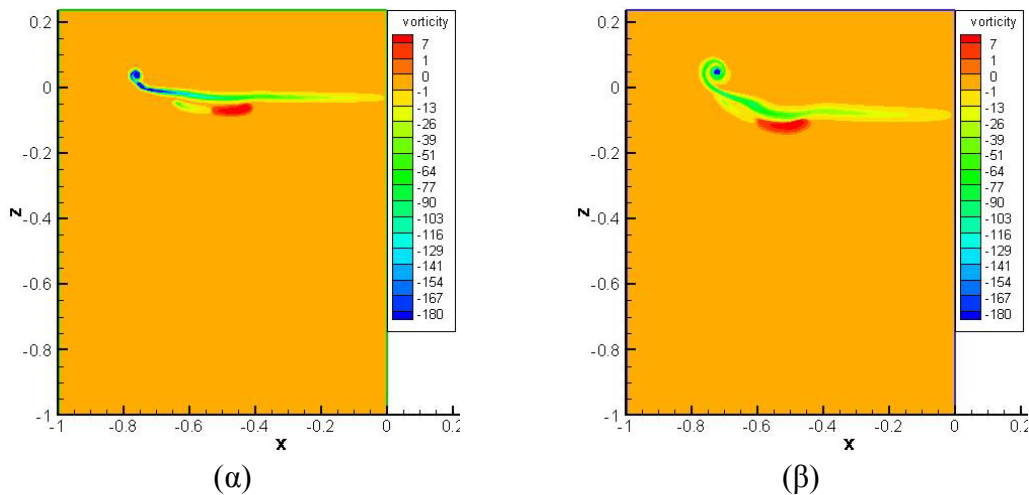
Εδώ εξετάζεται η περίπτωση μιας πτέρυγας όπως η προηγούμενη, με τη διαφορά ότι πάνω στην πτέρυγα βρίσκεται ένα πτερύγιο όπου μπορεί να κινείται προς τα πάνω ή προς τα κάτω σε σχέση με το επίπεδο της πτέρυγας. Το αρχικό πεδίο διαφέρει από το προηγούμενο παράδειγμα ως προς το ότι κάτω από την συμμετρική κατανομή στροβιλότητας της πτέρυγας εισάγεται και μια μικρότερη συμμετρική κατανομή που περιγράφεται από τον ίδιο τύπο με προηγουμένως και αναφέρεται στο πεδίο που δημιουργεί το πτερύγιο. Όλα αυτά φαίνονται πιο ξεκάθαρα στο παρακάτω σχήμα 3.24 όπου φαίνεται το αρχικό πεδίο στην περίπτωση κατά την οποία το πτερύγιο κινήθηκε προς τα πάνω (η αντίστοιχη περίπτωση με κίνηση του πτερυγίου προς τα κάτω εξετάζεται στην επόμενη εφαρμογή).



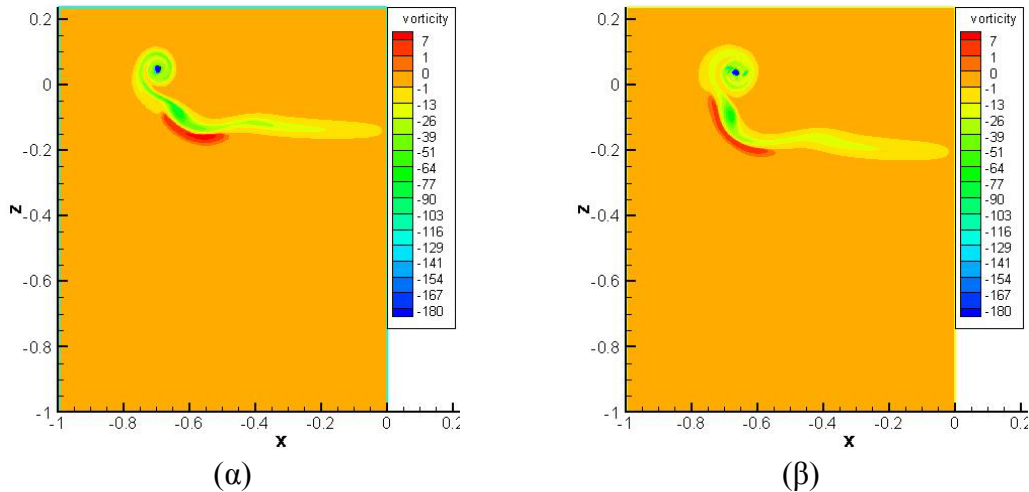
Σχήμα 3.24 : Αρχικό πεδίο στροβιλότητας πτέρυγας με πτερύγιο περίπτωσης I

Όπως φαίνεται και στο σχήμα το πτερύγιο έχει μήκος 0.2 m και είναι τοποθετημένο σε τέτοια θέση ώστε σχηματίζει το πεδίο του στα 0.04 m κάτω από την κύρια πτέρυγα, με το μέσον του να βρίσκεται σε απόσταση 0.5 m από τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας της πτέρυγας. Η κατανομή στροβιλότητας που δημιουργεί δίνεται από τον ίδιο τύπο για τον οποίο μιλήσαμε πριν. Για την πτέρυγα τα Γ_0 , b είναι ίδια με πριν ενώ για το πτερύγιο χρησιμοποιήθηκε $\Gamma_0 = 1$ και $b = 0.2$.

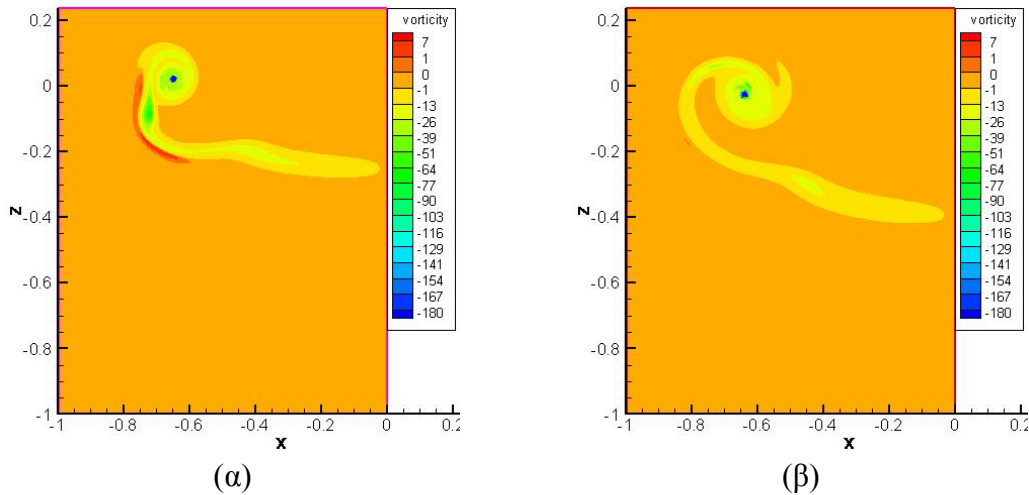
Η χρονική εξέλιξή του σε χρόνους $t = 0.036, 0.096, 0.157, 0.24, 0.315$ και 0.54 sec φαίνεται στα σχήματα 3.25 - .27 αντίστοιχα.



Σχήμα 3.25 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας-πτερυγίου μετά από (α) $t=0.036$ sec και (β) $t=0.096$ sec



Σχήμα 3.26 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας-περυγίου μετά από (α) $t=0.157\text{sec}$ και (β) $t=0.24\text{sec}$



Σχήμα 3.27 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας-περυγίου μετά από (α) $t=0.315\text{sec}$ και (β) $t=0.54\text{sec}$

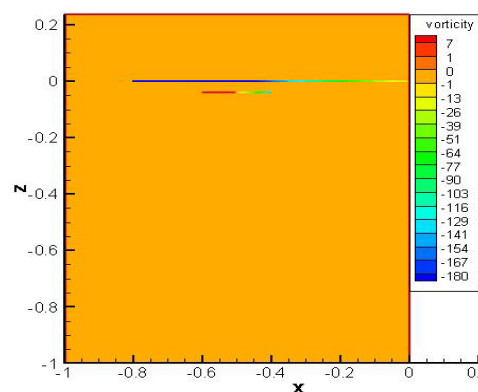
Σε αυτή την περίπτωση παρατέθηκαν εικόνες του πεδίου σε συνολικά μικρότερους χρόνους σε σχέση με πριν καθώς αυτό που έχει ενδιαφέρον δεν είναι τόσο η τελική κατάληξη, αλλά το τι γίνεται με το θετικό μέρος (με το κόκκινο χρώμα) του περυγίου. Αυτό που παρατηρείται σε σχέση με τα προηγούμενα αποτελέσματα είναι ότι η παρουσία του περυγίου εξαναγκάζει το πεδίο της πτέρυγας στο να σχηματίσει μια περίεργη καμπύλωση στην περιοχή που βρίσκεται το περυγίο, αποτέλεσμα λογικό αφού υπάρχουν οι αρνητικές και οι θετικές τιμές στροβιλότητας του περυγίου που "τραβάνε" το πεδίο προς τα κάτω. Στη συνέχεια το αρνητικό κομμάτι τιμών του περυγίου συγχωνεύεται με το πεδίο της πτέρυγας, ενώ το θετικό κομμάτι ακολουθώντας τη γενική αριστερόστροφη καμπύλωση του πεδίου απλώνει και προσεγγίζει την πτέρυγα. Τελικά, οι θετικές τιμές αλληλοαναιρούνται με τις αρνητικές και το θετικό κομμάτι ουσιαστικά απορροφάται από το πεδίο της πτέρυγας, οπότε παρομοίως με πριν το πεδίο καταλήγει σε μια μεγάλη δίνη συγκεντρωμένης αρνητικής στροβιλότητας.

Το ουσιαστικό εδώ συμπέρασμα είναι ότι η πτέρυγα, σε πολύ μικρό χρόνο καταστρέφει τη θετική στροβιλότητα που εισάγεται από την παρουσία του περυγίου. Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι υπάρχει και ένα μέρος της θετικής στροβιλότητας που διαφεύγει αυτής της διαδικασίας και καταλήγει στο πάνω αριστερό μέρος των

εικόνων. Οι τιμές στροβιλότητας που περιλαμβάνει είναι της τάξης του 10^{-3} και κάτω και φυσικά είναι ουσιαστικά αμελητέες στο εύρος τιμών στο οποίο εξετάζεται το φαινόμενο. Αυτό φυσικά δεν έχει καμία σχέση με την πραγματική εξέλιξη του πεδίου, αλλά οφείλεται στην αριθμητική διάχυση για την οποία έγινε λόγος παραπάνω.

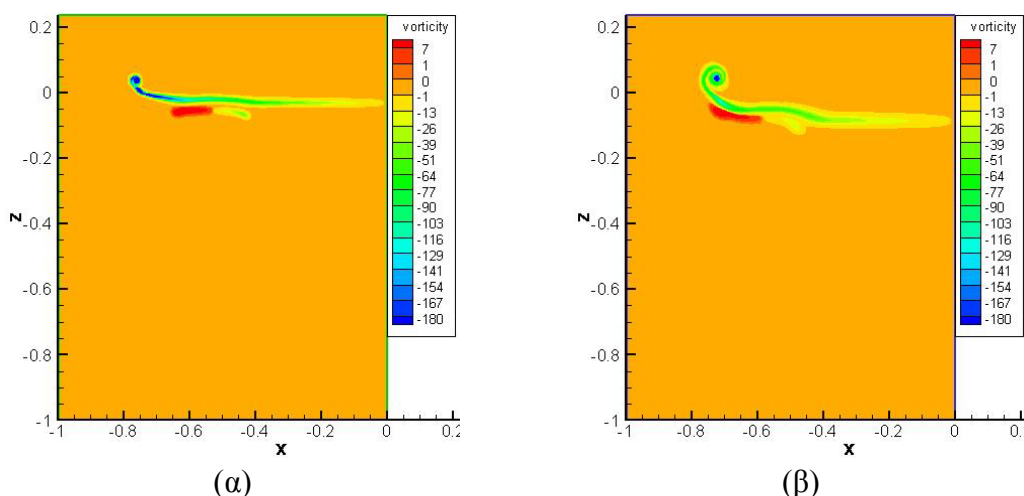
3.5.3 ΠΕΔΙΟ ΡΩΗΣ ΠΤΕΡΥΓΑΣ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ ΜΕ ΠΤΕΡΥΓΙΟ - ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ II

Είναι η ίδια με πριν περίπτωση με τη διαφορά ότι αυτή τη φορά το περυνγίο κινήθηκε προς τα κάτω και συνεπώς δημιούργησε ένα παρόμοιο από άποψη διαστάσεων και σχετικής θέσης του περυνγίου αλλά αντίθετο από άποψη στροβιλότητας πεδίο.

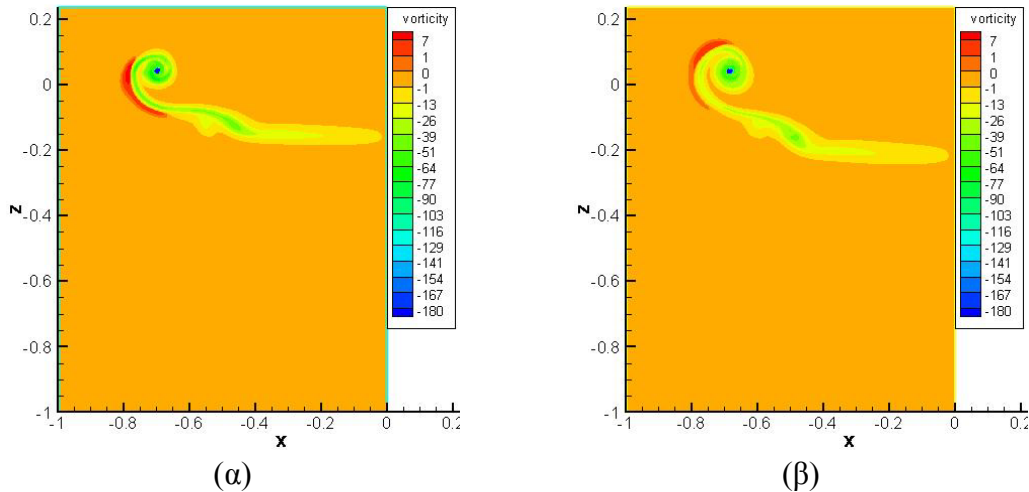


Σχήμα 3.28 : Αρχικό πεδίο στροβιλότητας πτέρυγας με περυνγίο περίπτωσης II

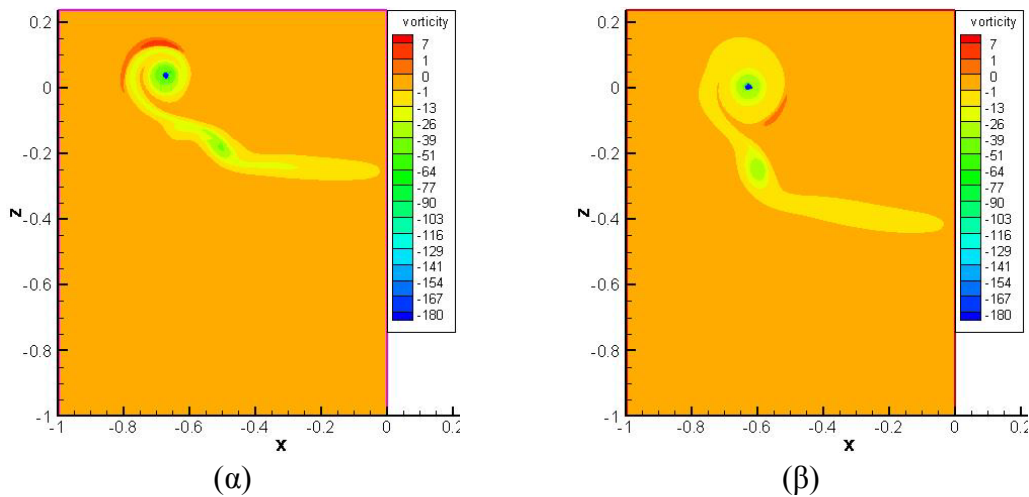
Στο σχήμα 3.28 φαίνεται η αρχική κατανομή στροβιλότητας που δημιουργεί η πτέρυγα και το περυνγίο. Η κατανομή του περυνγίου δημιουργήθηκε για $\Gamma_0 = -1$ και $b_2 = 0.2$. Ο συνολικός χρόνος για τον οποίο παρατίθενται οι παρακάτω εικόνες είναι ίδιος με αυτόν του προηγούμενου παραδείγματος έτσι ώστε να είναι ευκολότερη η σύγκριση των δυο περιπτώσεων. Η χρονική εξέλιξη του πεδίου σε χρόνους $t = 0.036, 0.103, 0.18, 0.25, 0.3$ και 0.54 sec δίνεται στα σχήματα 3.29 - .31 αντίστοιχα.



Σχήμα 3.29 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας-περυνγίου II μετά από (α) $t=0.036$ sec και (β) $t=0.103$ sec



Σχήμα 3.30 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας-πτερυγίου II μετά από (α) $t=0.18\text{sec}$ και (β) $t=0.25\text{sec}$



Σχήμα 3.31 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας-πτερυγίου II μετά από (α) $t=0.3\text{sec}$ και (β) $t=0.54\text{sec}$

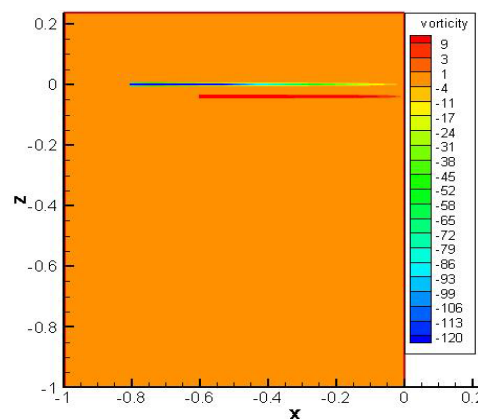
Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι παρατηρείται μια τόσο διαφορετική εξέλιξη αλλάζοντας απλά την πολικότητα του πεδίου που δημιουργεί το πτερύγιο. Παρατηρούμε την ίδια μορφή καμπύλωσης στη στροβιλότητα της πτέρυγας για την οποία έγινε λόγος και πριν με τη βασική διαφορά όμως ότι αυτή τη φορά οι δυνάμεις που την προκαλούν είναι αντίθετες με πριν. Συνεπώς το κομμάτι στροβιλότητας της πτέρυγας το οποίο κατέβαινε και συναντώντας τα θετικά μέρη στροβιλότητας τα κατέστρεφε σε αυτή την περίπτωση κινείται ανάποδα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το θετικό τμήμα της στροβιλότητας που παράγεται αρχικά από το πτερύγιο να σχηματίζει ένα είδος δίπολου με την μεγάλη δίνη αρνητικής στροβιλότητας που σχηματίζεται από το πεδίο της πτέρυγας. Οι αρνητικές τιμές του πτερυγίου όπως είναι αναμενόμενο συγχωνεύονται με αυτές τις πτέρυγας. Φυσικά η περιοχή όπου οι θετικές και αρνητικές τιμές συγκρούονται υπάρχει και εδώ αλλά αυτή τη φορά δεν οφείλεται σε σύγκρουση λόγω τροχιάς αλλά στο γεγονός ότι η αριθμητική διάχυση σιγά-σιγά κάνει τις δύο ετερόσημες περιοχές να "απλώνουν" και συνεπώς να προσεγγίζουν η μία την άλλη και να αλληλοκαταστρέφονται.

Το ουσιαστικό συμπέρασμα εδώ είναι η εμφάνιση του δίπολου που μας επιτρέπει φτάνοντας στον ίδιο χρόνο με πριν να έχουμε ακόμα αρκετά μεγάλες θετικές τιμές της στροβιλότητας. Αρκετά ενδιαφέροντα είναι και η μετέπειτα εξέλιξη

του πεδίου, όπου οι το θετικό κομμάτι περιστρεφόμενο γύρω από τη μεγάλη αρνητική δίνη συνεχώς μειώνει σε ένταση και τελικά καταστρέφεται συγκρουόμενο με την αρνητική δίνη.

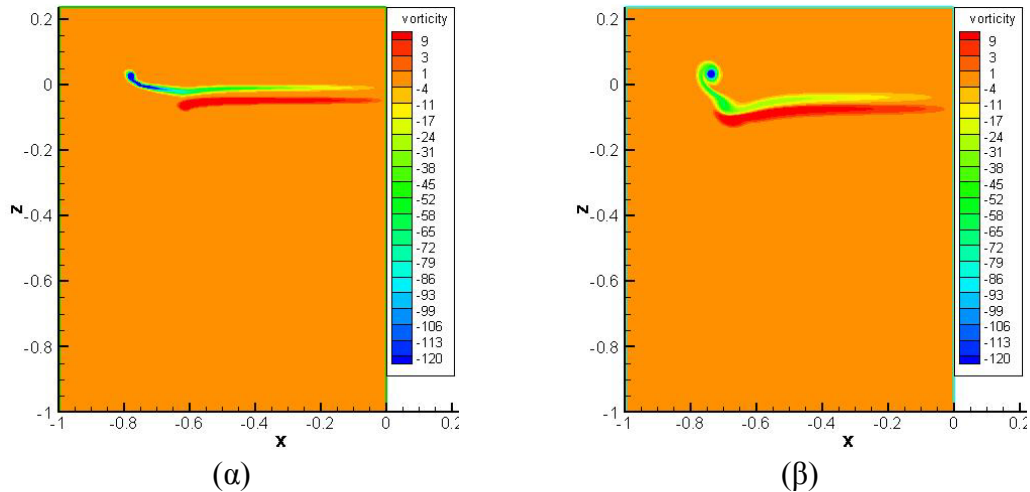
3.5.4 ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ ΔΥΟ ΚΟΝΤΙΝΩΝ ΠΤΕΡΥΓΩΝ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ

Σε αυτή την εφαρμογή μελετάται η χρονική εξέλιξη του πεδίου που σχηματίζεται τη στιγμή όπου δυο πτέρυγες κινούμενες με αντίθετες φορές και έχοντας μια μικρή υψομετρική διαφορά συναντιούνται. Για να καταλάβετε ποιο εύκολα τι σημαίνει αυτό, σκεφτείτε δυο αεροσκάφη που κινούνται στην ίδια τροχιά με αντίθετες φορές. Το ένα αεροσκάφος είναι αυτό που είδαμε και στην εφαρμογή Α και το άλλο είναι ένα πανομοιότυπο με μικρότερο όμως μήκος πτερύγων και κινούμενο με μικρότερη ταχύτητα. Τα δύο αεροσκάφη έχουν μια μικρή υψομετρική διαφορά (περίπου 0.04 m) και οι ευθείες που σχηματίζουν οι δυο άξονες συμμετρίας τους βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Το πεδίο που θα σχηματιστεί τη στιγμή που οι πτέρυγες του ενός θα βρεθούν ακριβώς πάνω από τις πτέρυγες του άλλου φαίνεται στο σχήμα 3.32.

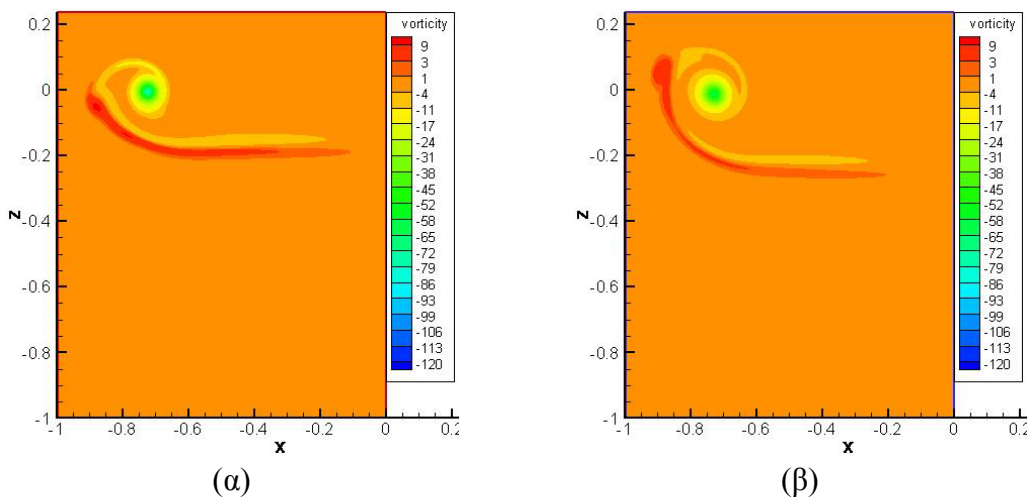


Σχήμα 3.32 : Αρχικών πεδίο στροβιλότητας δυο αντιμέτωπων πτερύγων

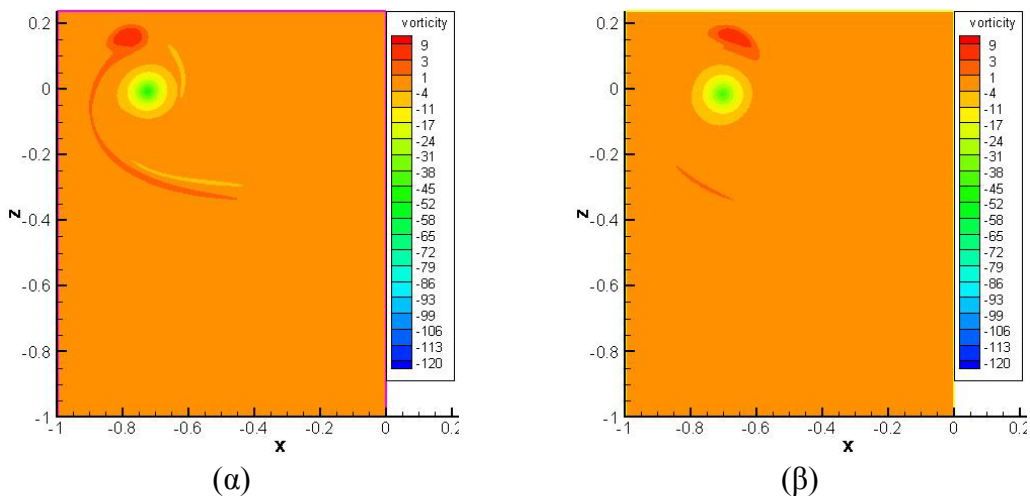
Η μεγάλη πτέρυγα έχει υπολογιστεί με $\Gamma_01 = 2$ και $b1 = 0.16m$ και η μικρότερη για $\Gamma_02 = -1$ και $b2 = 1.2m$. Η χρονική εξέλιξη του πεδίου σε χρόνους $t = 0.036, 0.135, 0.55, 0.814, 1.2$ και 1.5 sec δίνεται στα σχήματα 3.33 - .35 αντίστοιχα.



Σχήμα 3.33 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγών μετά από (α) $t=0.036\text{sec}$ και (β) $t=0.135\text{sec}$



Σχήμα 3.34 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγών μετά από (α) $t=0.55\text{sec}$ και (β) $t=0.814\text{sec}$



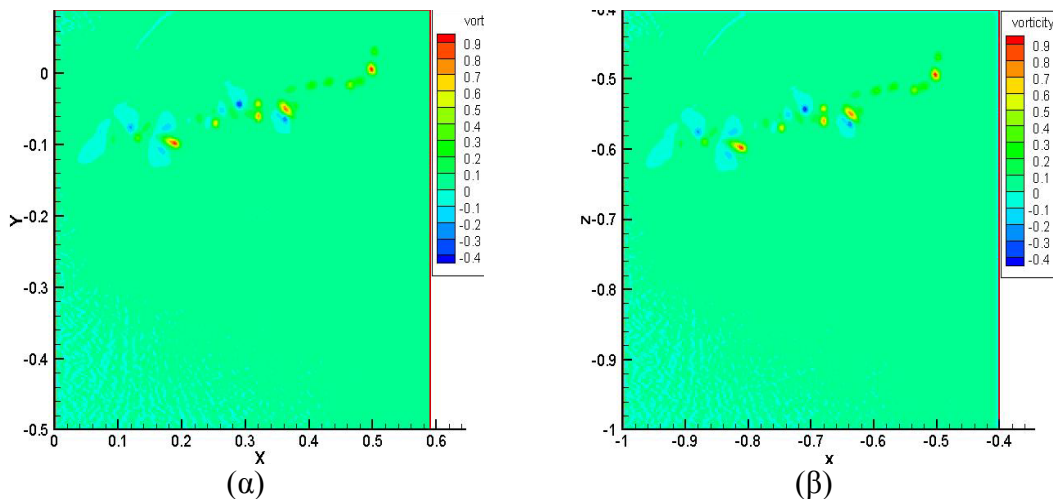
Σχήμα 3.35 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγών μετά από (α) $t=1.2\text{sec}$ και (β) $t=1.5\text{sec}$

Πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό του πεδίου αυτού και συνεπώς ο βασικός λόγος για τον οποίο αυτό παρουσιάζεται εδώ είναι η δημιουργία δίπολου. Οι δυο πτέρυγες αρχικά καμπυλώνουν προς διαφορετικές κατευθύνσεις η κάθε μια, ξεκινώντας να σχηματίζουν δυο μεγάλες δίνες μια θετικής και μια αρνητικής στροβιλότητας. Στη συνέχεια λόγω του ότι το πεδίο αρνητικής στροβιλότητας είναι

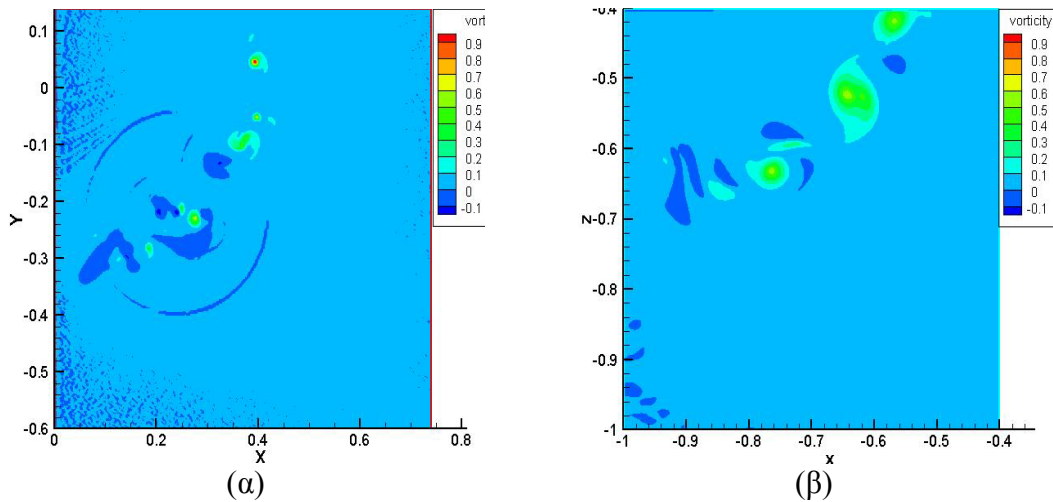
συνολικά μεγαλύτερης εντάσεως, παρασύρει στο στροβιλισμό του και το θετικό κομμάτι. Αυτό σε συνδυασμό με το ότι τα δυο πεδία ξεκινούν σε πολύ μικρή μεταξύ τους απόσταση και την αριθμητική διάχυση που υπεισέρχεται στους υπολογισμούς οδηγεί στη δημιουργία μιας περιοχής όπου τα δυο πεδία συγκρούονται και αλληλοαναιρούν τις στροβιλιότητές τους. Παρόλα αυτά περίπου από τα 0.8 sec και μετά όπως φαίνεται και στα σχήματα, ο σχηματισμός των δυο μεγάλων δινών είναι εμφανής και από εκεί και πέραν κινούνται σαν ένα δίπολο δινών γύρω από το κοινό κέντρο στροβιλιότητάς τους.

3.5.5 ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ ΠΤΕΡΥΓΑΣ A340

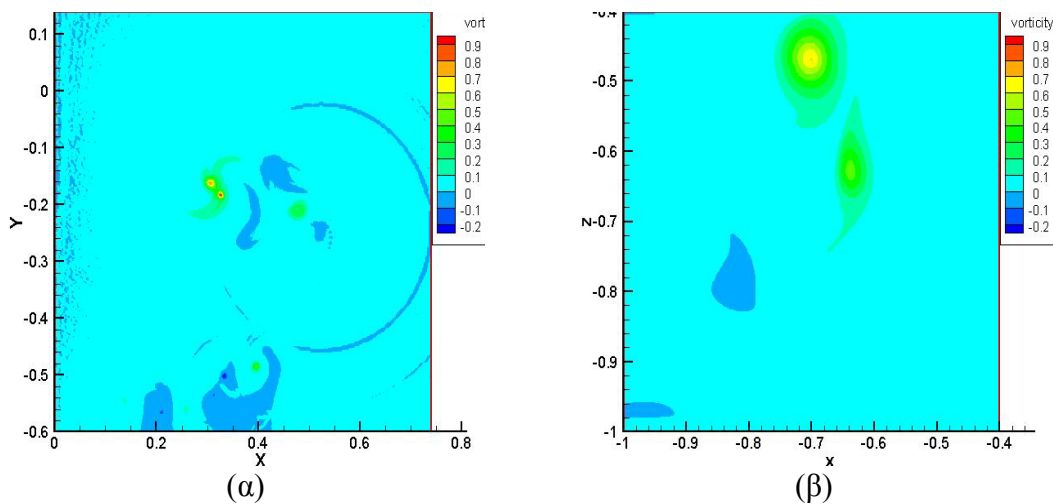
Στην τελευταία αυτή εφαρμογή μελετάται το πεδίο ροής της πτέρυγας A340. Τα πειραματικά δεδομένα που έχουμε αφορούν μετρήσεις που έγιναν στο πεδίο που δημιουργεί η πτέρυγα σε τρεις διαφορετικές αποστάσεις από την στιγμή της δημιουργίας του. Οι αποστάσεις αυτές αδιαστατοποιημένες με το μήκος b της πτέρυγας είναι οι $\frac{x}{b} = 0.03$, $\frac{x}{b} = 1.5$ και $\frac{x}{b} = 5.56$. Η πρώτη μέτρηση χρησιμοποιείται σαν το αρχικό πεδίο στροβιλιότητας και στη συνέχεια με τη ρουτίνα group.f υπολογίζεται η εξέλιξη του πεδίου. Στη συνέχεια γίνονται οι συγκρίσεις με τα πειραματικά δεδομένα. Πριν περάσουμε στα αντίστοιχα σχήματα πρέπει να αναφερθεί ότι στο συγκεκριμένο πεδίο για τους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκαν όπως προηγουμένως τρία πλέγματα όμως με αντίστοιχες πυκνότητες $dx = dy = 0.003$ (λεπτό), 0.006 (ενδιάμεσο), 0.012 (παχύ) καθώς τα πειραματικά δεδομένα δίνονται σε πλέγμα 0.003 και συνεπώς γίνεται ευκολότερα η σχετική σύγκριση. Τα σχήματα στα αριστερά αντιπροσωπεύουν τις μετρήσεις ενώ τα δεξιά τις προβλέψεις που υπολογίζει η ρουτίνα.



Σχήμα 3.36 : (α) Πειραματικές μετρήσεις – (β) θεωρητική πρόβλεψη για $\frac{x}{b} = 0.03$



Σχήμα 3.37 : (α) Πειραματικές μετρήσεις – (β) θεωρητική πρόβλεψη για $\frac{x}{b} = 1.5$



Σχήμα 3.38 : Πειραματικές μετρήσεις – θεωρητική πρόβλεψη για $\frac{x}{b} = 5.56$

Η περίπτωση $\frac{x}{b} = 0.03$ παρατίθεται έτσι ώστε να είναι βέβαιο το ότι οι αρχικές συνθήκες είναι σωστές και ότι δεν έγινε κάποιο λάθος κατά την ανάγνωση των δεδομένων. Στην περίπτωση $\frac{x}{b} = 1.5$ παρατηρώντας τα σχήματα φαίνεται ότι υπάρχει συμφωνία πειράματος και πρόβλεψης. Τα τρία μεγάλα συμπλέγματα δινών θετικής καθώς και τα τέσσερα συμπλέγματα αρνητικής στροβιλότητας που υπάρχουν στην αριστερή εικόνα έχουν σχηματιστεί και στη δεξιά. Το πολύ θετικό είναι ότι βρισκόμαστε περίπου στην ίδια κλίμακα στροβιλότητας αν και από το γεγονός ότι στην δεξιά εικόνα δεν παρατηρούνται περιοχές τόσο έντονης θετικής στροβιλότητας βγαίνει το συμπέρασμα ότι μάλλον η αριθμητική διάχυση που εισάγεται στους υπολογισμούς πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη φυσική διάχυση που χαρακτηρίζει το σύστημα. Άλλη μια παρατήρηση που θα μπορούσε να γίνει είναι το γεγονός ότι κατά τους υπολογισμούς το πεδίο δείχνει να καθυστερεί σε σχέση με τα

πειραματικά δεδομένα. Όσον αφορά την περίπτωση $\frac{x}{b} = 5.56$ οι διαφορές είναι πλέον πολύ σημαντικές. Το κεντρικό σύμπλεγμα δινών που αποτελείται από δύο βασικές δίνες μεγάλης συγκεντρωμένης στροβιλότητας του αριστερό σχήματος, φαίνεται να έχει σπάσει σε δύο διαφορετικά, ενώ διάφορα άλλα συμπλέγματα δινών δεν υπάρχουν καθόλου. Είναι προφανές και αναμενόμενο ότι μετά από τόσες επαναλήψεις η αριθμητική διάχυση έχει ουσιαστικά διαλύσει το αρχικό πεδίο αλλοιώνοντας τα αποτελέσματα, και μάλλον αποτελεί τον σημαντικότερο λόγο για τον οποίο τα αποτελέσματα δεν συμφωνούν. Ένας ακόμα λόγος θα μπορούσε να είναι το γεγονός ότι το αρχικά δεδομένο πεδίο προκύπτει από ένα τρισδιάστατο πρόβλημα, ενώ εδώ η επεξεργασία γίνεται με δισδιάστατες μεθόδους, οπότε πιθανώς υπάρχουν επαγόμενες ταχύτητες που η ρουτίνα δεν μπορεί να υπολογίσει.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Ο υπολογισμός των τροχιών σε ένα σύστημα N διακριτών σημειακών δινών στις δυο αλλά και στις τρεις διαστάσεις είναι ένα πρόβλημα που μένει ανοικτό ακόμα και σήμερα και αποτελεί πεδίο έρευνας πολλών ερευνητών. Στην παρούσα εργασία είδαμε ότι ένα τέτοιο σύστημα δινών εμφανίζει χαοτική συμπεριφορά για $N \geq 4$, παρόλα αυτά μια εμφανής αντίθεση με αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η δισδιάστατη εξίσωση του Euler, που είναι η προφανής γενίκευση ενός συστήματος N δινών στο όριο $N \rightarrow \infty$, παραμένει ολοκληρώσιμη.

Όσον αφορά τα όσα συζητήθηκαν στο τελευταίο κεφάλαιο, πρέπει να αναφερθεί ότι η ρουτίνα `group.f` μπορεί πολύ εύκολα να επεκταθεί έτσι ώστε να περιγράφει και συνεκτικά πεδία ροής απλά με την προσθήκη στον υπάρχοντα κώδικα μίας υπορουτίνας που θα διορθώνει σε κάθε χρονικό βήμα την στροβιλότητα Γ κάθε δίνης του πλέγματος με βάση την εξίσωση μετάδοσης της διάχυσης :

$$\Gamma = \Gamma + \frac{1}{\pi \cdot \nu \cdot \partial t} \sum_i (\omega - \omega_i) \cdot e^{-\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \nu \cdot \partial t} \cdot ((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2)}$$

όπου με ν συμβολίζεται η συνεκτικότητα του ρευστού και τα x, y είναι οι συντεταγμένες τις κάθε δίνης. Η άθροιση γίνεται σε όλες τις υπόλοιπες δίνες του πλέγματος εκτός από αυτή η οποία διορθώνεται. Βέβαια η προσθήκη της παραπάνω εξίσωσης θα κάνει την ρουτίνα εμφανώς πιο αργή καθώς οι υπολογισμοί γίνονται μόνο στο λεπτότερο των πλεγμάτων, κάτι που στην περίπτωση των πλεγμάτων που εξετάστηκαν παραπάνω θα σήμαινε επιπλέον 400×400 υπολογισμούς σε κάθε χρονικό βήμα. Άλλη μια προσθήκη που θα μπορούσε να γίνει στον κώδικα αφορά τις πράξεις που γίνονται στο δεξί μέρος του αθροίσματος που φαίνεται στους παρακάτω γνωστούς πλέον τύπους, οι οποίες σε κάθε χρονικό βήμα επαναλαμβάνονται ξανά και ξανά παρόλο που μετά από κάθε επανάληψη οι δίνες επιστρέφουν ξανά στους κόμβους οπότε οι διαφορές Δx και Δy πρακτικά παραμένουν

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial t} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\Gamma_\beta}{2\pi} \cdot \frac{y_\beta - y_\alpha}{(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2}, \quad \frac{\partial y_\alpha}{\partial t} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\Gamma_\beta}{2\pi} \cdot \frac{x_\alpha - x_\beta}{(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2}$$

οι ίδιες. Θα ήταν δυνατό λοιπόν με τον υπολογισμό των όρων των δεξιών μελών του αθροίσματος μία φορά στην αρχή και με αποθήκευση τους σε ένα πίνακα να κερδίσουμε σε πράξεις και συνεπώς σε χρόνο υπολογισμού πληρώνοντας το τίμημα απλά σε μνήμη του υπολογιστή.

Κλείνοντας κάτι επιπλέον που αξίζει τον κόπο να ειπωθεί εδώ είναι το ότι η ρουτίνα `group.f` μπορεί πολύ εύκολα να τροποποιηθεί έτσι ώστε να κάνει υπολογισμούς σε περισσότερες από τρεις κλίμακες. Θεωρητικά μπορεί να υπολογίσει σε όσες κλίμακες τις ζητηθούν, πράγμα που σημαίνει ότι θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για υπολογισμούς σε όλο και πιο λεπτά διαδοχικά πλέγματα κατεβαίνοντας με αυτό τον τρόπο σε κλίμακες μέχρις ότου φτάσουμε σε εκείνες τις κλίμακες όπου μπορούν να περιγράψουν την τύρβη. Ένα πολύ καλό ερώτημα λοιπόν προς μελλοντική διερεύνηση αποτελεί το ποιο είναι το όριο αυτών των προς τα κάτω κλιμάκων τις οποίες η `group.f` μπορεί να φτάσει και το αν θα μπορούσε αυτό να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τυρβώδεις ροές.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1 : Κίνηση δινών στο επίπεδο x-y	16
Σχήμα 1.2 : Κίνηση δινών στον χρόνο t	16
Σχήμα 1.3 : Κίνηση δινών στο επίπεδο x-y	17
Σχήμα 1.4 : Κίνηση δινών στο χρόνο t	17
Σχήμα 1.5 : Κίνηση δινών με ίσες στροβιλότητες στο χρόνο t	18
Σχήμα 1.6 : Κίνηση δινών με ίσες και αντίθετες στροβιλότητες στο χρόνο t	18
Σχήμα 1.7 : Κίνηση δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t.....	20
Σχήμα 1.8 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t.....	20
Σχήμα 1.9 : κίνηση και των τριών δινών στο χρόνο t.....	21
Σχήμα 1.10 : Κίνηση δίνης 0 στο επίπεδο x-y	21
Σχήμα 1.11 : Κίνηση δίνης 0 στο επίπεδο x-t.....	22
Σχήμα 1.12 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t.....	22
Σχήμα 1.13 : Κίνηση και των τριών δινών στο χρόνο t.....	22
Σχήμα 1.14 : Διάγραμμα φάσης πλευράς d12	23
Σχήμα 1.15 : Κίνηση δίνης 0 στο επίπεδο x-y	23
Σχήμα 1.16 : Κίνηση δίνης 0 στο επίπεδο x-t.....	23
Σχήμα 1.17 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t.....	24
Σχήμα 1.18 : Κίνηση και των τριών δινών στο χρόνο t.....	24
Σχήμα 1.19 : Διάγραμμα φάσης της πλευράς d12	25
Σχήμα 1.20 Κίνηση δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t.....	25
Σχήμα 1.21 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t.....	26
Σχήμα 1.22 : Κίνηση και των τριών δινών στο χρόνο t.....	26
Σχήμα 1.23 : Διάγραμμα φάσης της πλευράς d12	27
Σχήμα 1.24 : Κίνηση δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t.....	28
Σχήμα 1.25 : Κίνηση των κοντινών μεταξύ τους δινών 0 και 2 στο χρόνο t.....	28
Σχήμα 1.26 : Κίνηση απομακρυσμένης δίνης 2 στο χρόνο t	28
Σχήμα 1.27 : Κίνηση και των τριών δινών στο χρόνο t.....	29
Σχήμα 1.28 : Διάγραμμα φάσης της πλευράς d12	29
Σχήμα 1.29 : Κίνηση δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t.....	29
Σχήμα 1.30 : Κίνηση των δυο κοντινών δινών 0 και 1 στο χρόνο t	30
Σχήμα 1.31 : Κίνηση και των τριών δινών στο χρόνο t.....	30
Σχήμα 1.32 : Διάγραμμα φάσης της πλευράς d12	31
Σχήμα 1.33 : Διάγραμμα περιόδου T1 συναρτήσει της παραμέτρου Θ	32
Σχήμα 1.34 : Διάγραμμα περιόδου T1 συναρτήσει παραμέτρου Θ σε λογαριθμική κλίμακα	32
Σχήμα 1.35 : Γραφική παράσταση της $f(x)$	33
Σχήμα 1.36 : Γραφική παράσταση της $f(x)$ σε λογαριθμική κλίμακα	33
Σχήμα 2.1 : Κίνηση δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t.....	37
Σχήμα 2.2 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t.....	37
Σχήμα 2.3 : Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t.....	38
Σχήμα 2.4 : Κίνηση δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t.....	38
Σχήμα 2.5 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t.....	39
Σχήμα 2.6 : Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t.....	39
Σχήμα 2.7 : Διάγραμμα φάσης της πλευράς d12	40
Σχήμα 2.8 : Κίνηση δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t.....	40
Σχήμα 2.9 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t.....	41
Σχήμα 2.10 : Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t.....	41
Σχήμα 2.11 : Κίνηση της δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t	42

Σχήμα 2.12 : Κίνηση της δίνης 1 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t	42
Σχήμα 2.13 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t.....	43
Σχήμα 2.14 : Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t.....	43
Σχήμα 2.15 : Διάγραμμα φάσης για την πλευρά d01.....	43
Σχήμα 2.16 : Διάγραμμα φάσης για την πλευρά d12.....	44
Σχήμα 2.17 : Κίνηση δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t.....	44
Σχήμα 2.18 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t.....	45
Σχήμα 2.19 : Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t.....	45
Σχήμα 2.20 : Διάγραμμα φάσης πλευράς d01	46
Σχήμα 2.21 : Κίνηση δίνης 0 στο επίπεδο x-y	47
Σχήμα 2.22 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t.....	47
Σχήμα 2.23 : Διάγραμμα φάσης πλευράς d01	47
Σχήμα 2.24 : Κίνηση δίνης 0 στο επίπεδο x-y	48
Σχήμα 2.25 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t.....	48
Σχήμα 2.26 : Διάγραμμα φάσης πλευράς d01	48
Σχήμα 2.27 : Κίνηση δίνης 0 στο επίπεδο x-y	49
Σχήμα 2.28 Σχήμα 2.29 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t	49
Σχήμα 2.30 : Διάγραμμα φάσης πλευράς d01	49
Σχήμα 2.31 : (α) Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t και (β) Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο επίπεδο x-y.....	50
Σχήμα 2.32 : (α) Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t και (β) Διάγραμμα φάσης της πλευράς d01.....	50
Σχήμα 2.33 : Απεικόνιση της κίνησης που κάνει η γραμμή που ενώνει τις τέσσερις δίνες	51
Σχήμα 2.34 : Κίνηση της δίνης 0 (α) στο επίπεδο x-y και (β) στο επίπεδο x-t	52
Σχήμα 2.35 : Κίνηση δίνης 0 στο χρόνο t.....	52
Σχήμα 2.36 : Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t.....	53
Σχήμα 2.37 : Διάγραμμα φάσης πλευράς d01	53
Σχήμα 2.38 : (α) Διάγραμμα φάσης πλευράς d01 και (β) κίνηση δινών 1 και 2 στο επίπεδο x-y.....	54
Σχήμα 2.39 : Κίνηση δινών 1 και 2 στο χρόνο t.....	54
Σχήμα 2.40 : Κίνηση και των τεσσάρων δινών στο χρόνο t.....	54
Σχήμα 2.41 : Κίνηση των τεσσάρων δινών στο χρόνο t.....	55
Σχήμα 2.42 : Κίνηση των τεσσάρων δινών στο χρόνο t.....	55
Σχήμα 3.1 : Χρονική εξέλιξη μιας οκτάδας δινών που ξεκινάνε τοποθετημένες σε ευθεία γραμμή.....	59
Σχήμα 3.2 : Αντιστοιχία εμβαδών-κόμβων για vortex interpolation.....	60
Σχήμα 3.3 : Αρχικό πεδίο ελλειπτικά κατανεμημένης δίνης έντασης $\Gamma=50$	61
Σχήμα 3.4 : Εικόνας της δίνης $\Gamma=50$ μετά από (α) $t=0.06\text{sec}$ και (β) $t=0.15\text{sec}$ για $dt=0.03$	61
Σχήμα 3.5 : Εικόνα της δίνης $\Gamma=50$ μετά από (α) $t=0.45\text{sec}$ και (β) $t=0.9\text{sec}$ για $dt=0.03$	62
Σχήμα 3.6 : Εικόνας της δίνης $\Gamma=50$ μετά από (α) $t=0.06\text{sec}$ και (β) $t=0.15\text{sec}$ για $dt=0.003$	63
Σχήμα 3.7 : Εικόνα της δίνης $\Gamma=50$ μετά από (α) $t=0.45\text{sec}$ και (β) $t=0.9\text{sec}$ για $dt=0.003$	64
Σχήμα 3.8 : Εικόνας της δίνης $\Gamma=50$ μετά από (α) $t=0.06\text{sec}$ και (β) $t=0.15\text{sec}$ για $dt=0.003$, απεικονισμένες σε μικρότερο εύρος τιμών στροβιλότητας.....	64
Σχήμα 3.9 : Εικόνα της δίνης $\Gamma=50$ μετά από (α) $t=0.45\text{sec}$ και (β) $t=0.9\text{sec}$ για $dt=0.003$, απεικονισμένες σε μικρότερο εύρος τιμών στροβιλότητας.....	64

Σχήμα 3.10 : Εικόνα της δίνης $\Gamma=50$ σε χρόνο $t=0.06\text{sec}$ (α) για 20 επαναλήψεις σε $dt=0.003$ και (β) για 30 επαναλήψεις σε $dt=0.002$	66
Σχήμα 3.11 : Πεδίο ταχύτητας σημειακής δίνης.....	69
Σχήμα 3.12 : Αναγωγή στροβιλότητας μεταξύ δυο διαφορετικών κλιμάκων.....	70
Σχήμα 3.13 : Πεδία ταχυτήτων σε (α) λεπτό πλέγμα με 81 δίνες και σε (β) ενδιάμεσο πλέγμα 25 δίνες.....	71
Σχήμα 3.14 :: Πεδία ταχυτήτων σε χοντρό πλέγμα με 9 δίνες.....	71
Σχήμα 3.15 : Διαφορά ταχυτήτων μεταξύ λεπτού και ενδιάμεσου πλέγματος.....	72
Σχήμα 3.16 : Διαφορά ταχυτήτων μεταξύ (α) λεπτού και χοντρού πλέγματος και (β) ενδιάμεσου και χοντρού πλέγματος.....	73
Σχήμα 3.17 : Διαφορά ταχυτήτων μεταξύ (α) λεπτού και χοντρού πλέγματος και (β) ενδιάμεσου και χοντρού πλέγματος για $\Gamma=100$	74
Σχήμα 3.18 : Διαφορά ταχυτήτων μεταξύ (α) λεπτού και χοντρού πλέγματος και (β) ενδιάμεσου και χοντρού πλέγματος για $\Gamma=1000$	74
Σχήμα 3.19 : Συνοπτικό διάγραμμα ροής.....	77
Σχήμα 3.20 : Αρχικό πεδίο στροβιλότητας πτέρυγας.....	78
Σχήμα 3.21 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας μετά από (α) $t=0.03\text{sec}$ και (β) $t=0.09\text{sec}$	79
Σχήμα 3.22 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας μετά από (α) $t=0.135\text{sec}$ και (β) $t=0.27\text{sec}$	79
Σχήμα 3.23 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας μετά από (α) $t=0.42\text{sec}$ και (β) $t=0.705\text{sec}$	80
Σχήμα 3.24 : Αρχικό πεδίο στροβιλότητας πτέρυγας με πτερύγιο περίπτωσης I.....	81
Σχήμα 3.25 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας-πτερυγίου μετά από (α) $t=0.036\text{sec}$ και (β) $t=0.096\text{sec}$	81
Σχήμα 3.26 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας-πτερυγίου μετά από (α) $t=0.157\text{sec}$ και (β) $t=0.24\text{sec}$	82
Σχήμα 3.27 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας-πτερυγίου μετά από (α) $t=0.315\text{sec}$ και (β) $t=0.54\text{sec}$	82
Σχήμα 3.28 : Αρχικό πεδίο στροβιλότητας πτέρυγας με πτερύγιο περίπτωσης II.....	83
Σχήμα 3.29 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας-πτερυγίου II μετά από (α) $t=0.036\text{sec}$ και (β) $t=0.103\text{sec}$	83
Σχήμα 3.30 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας-πτερυγίου II μετά από (α) $t=0.18\text{sec}$ και (β) $t=0.25\text{sec}$	84
Σχήμα 3.31 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτέρυγας-πτερυγίου II μετά από (α) $t=0.3\text{sec}$ και (β) $t=0.54\text{sec}$	84
Σχήμα 3.32 : Αρχικών πεδίο στροβιλότητας δυο αντιμέτωπων πτερυγίων.....	85
Σχήμα 3.33 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτερυγίων μετά από (α) $t=0.036\text{sec}$ και (β) $t=0.135\text{sec}$	86
Σχήμα 3.34 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτερυγίων μετά από (α) $t=0.55\text{sec}$ και (β) $t=0.814\text{sec}$	86
Σχήμα 3.35 : Εικόνα πεδίου στροβιλότητας πτερυγίων μετά από (α) $t=1.2\text{sec}$ και (β) $t=1.5\text{sec}$	86
Σχήμα 3.36 : (α) Πειραματικές μετρήσεις – (β) θεωρητική πρόβλεψη για $\frac{x}{b} = 0.03$.87	
Σχήμα 3.37 : (α) Πειραματικές μετρήσεις – (β) θεωρητική πρόβλεψη για $\frac{x}{b} = 1.5$...88	
Σχήμα 3.38 : Πειραματικές μετρήσεις – θεωρητική πρόβλεψη για $\frac{x}{b} = 5.56$88	

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- ¹ S. JORNA, *Topics in non-linear dynamics. A tribute to sir Edward Bullard*, AIP Conf. Proc. No. **46**, New York : American Institute of Physics, 1978.
- ² H. AREF, *Motion of three vortices*, Phys. Fluids **22**, 393 (1979).
- ³ H. AREF, *Three vortex motion with zero total circulation: Addendum*, J. Appl. Math. Phys. **40**, 495 (1989).
- ⁴ N. ROTT, *Three vortex motion with zero total circulation*, J. Appl. Math. Phys. **40**, 473 (1989).
- ⁵ E. A. NOVIKOV, *Motion of three identical vortices*, Soviet Phys. JETP. **41**, 937 (1975).
- ⁶ H. AREF and N. POMPHREY, *Integrable and chaotic motion of four vortices: I. The case of identical vortices*, Proc.R. Soc. London, **380 A** (1982), 359 – 387.
- ⁷ W.M. OLIVA, *On the chaotic behavior and the non-integrability of the four vortices problem*, Ann. Inst. Henri Poincare, Vol **55**, no 2, (1991), 707 – 718.
- ⁸ S. L. ZIGLIN, *Non integrability of the problem of motion of four point vortices*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **250** (1990) no.6, 1296 - 1300.
- ⁹ K. M. KHANIN, *Quasi periodic motions of vortex systems*, Physica D, **4** (1982), 261 – 296.
- ¹⁰ B. ECKHARDT, *Integrable four vortex motion*, Phys. Fluids **31** (1988) 2796 – 2801.
- ¹¹ N. ROTT, *Constrained three- and four- vortex problems*, Phys. Fluids A. **2**, 1477 (1990).
- ¹² N. ROTT, *Four vortices on doubly periodic paths*, Phys. Fluids **6**, 760 (1994).
- ¹³ E. A. NOVIKOV and SEDOV, Soviet Phys. JETP. **48**, 440 (1978).
- ¹⁴ G. H. COTTET and P. D. KOUMOUTSAKOS, *Vortex methods, theory and practice*, Cambridge U. P, London, 2000
- ¹⁵ G. K. BATCHELOR, *An introduction to Fluid Mechanics*, Cambridge U. P, London, 1967
- ¹⁶ A. J. CHORIN and J. E. MARSDEN, *A Mathematical introduction to Fluid Mechanics*, Springer – Verlag, (1979).
- ¹⁷ H. AREF, *The numerical experiment in Fluid Mechanics*, J. Fluid Mech. **173**, 15 - 41 (1986)