

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΣΧΟΛΗ  
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



Φερμιονικές και μποζονικές συμμετρίες σε ατομικούς  
πυρήνες

Διδακτορική διατριβή  
της Σμαράγδας Σαραντοπούλου

Οκτώβριος 2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΣΧΟΛΗ  
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



Φερμιονικές και μποζονικές συμμετρίες σε ατομικούς  
πυρήνες

Διδακτορική διατριβή  
της Σμαράγδας Σαραντοπούλου

Τριμελής Επιτροπή

Μπονάτσος Διονύσιος, Ερευνητής ΕΚΕΦΕ "Δ"

Κουτσούμπας Γεώργιος, Καθηγητής ΕΜΠ

Ήργες Νικόλαος, Καθηγητής ΕΜΠ

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή

Μπονάτσος Διονύσιος, Ερευνητής ΕΚΕΦΕ "Δ"

Γαϊτάνος Θεόδωρος, Αναπληρωτής Καθηγητής  
ΑΠΘ

Διακάκη Μαρία, Επίκουρη Καθηγήτρια ΕΜΠ

Ήργες Νικόλαος, Καθηγητής ΕΜΠ

Κόκκορης Μιχαήλ, Καθηγητής ΕΜΠ

Κουτσούμπας Γεώργιος, Καθηγητής ΕΜΠ

Μουστακίδης Χαράλαμπος, Αναπληρωτής Καθηγητής  
ΑΠΘ





## Αναγνωρίσεις

Ολοκληρώνοντας την διατριβή μου θα ήθελα να ευχαριστήσω τον δάσκαλό μου Δρ. Διονύση Μπονάτσο για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε και για την υπομονή του όλα αυτά τα χρόνια. Τον ευχαριστώ θερμά για την διαρκή επιστημονική καθοδήγηση και για τις πολύτιμες ευκαιρίες που μου έδωσε σε κάθε πτυχή της πολυετούς πλέον συνεργασίας μας. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον καθηγητή Γεώργιο Κουτσούμπα και τον καθηγητή Νίκο Ήργε για την συνεργασία τους.

Σημαντική ήταν η παρουσία, η βοήθεια και η οικονομική στήριξη για την συμμετοχή μου σε συνέδρια, του καθηγητή Ν. Μίνκον, συνεργάτη από την Σόφια, καθ' όλη την διάρκεια του διδακτορικού μου.

Δεν θα κατάφερα να ολοκληρώσω αυτό το ταξίδι στην Πυρηνική Φυσική χωρίς την πολύτιμη βοήθεια και συμπαράσταση της φίλης μου Δρ. Ανδριάνας Μαρτίνου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της ομάδας μας, τον Δρ. Ιωάννη Ασημάκη και τον Σπύρο Περούλη για τις πολύτιμες συμβουλές τους και για τις αναμνήσεις που φτιάξαμε μαζί όλα αυτά τα χρόνια.

Η ολοκλήρωση της διδακτορικής μου διατριβής θα ήταν αδύνατη χωρίς την έμπρακτη συμπαράσταση της οικογένειάς μου. Οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου και στις αδερφές μου για όλα όσα κάνουν για μένα καθημερινά και κυρίως για την αδιαπραγμάτευτη αγάπη και την πίστη τους σε μένα.

Οφείλω βαθιά ευγνωμοσύνη στον σύζυγό μου Νικόδημο Γιαννακόπουλο για την υποστήριξη και την βοήθειά του σε όλα τα επίπεδα. Τον ευχαριστώ για την διαρκή συμπαράστασή του, για την υπομονή με την οποία άκουσε όλες τις ιδέες και προβληματισμούς μου και για την ακλόνητη πίστη του ότι θα τα καταφέρω.

Τέλος, θα ήθελα να αφιερώσω την διδακτορική μου διατριβή στα γλυκά μου λουλουδάκια, την Νεφέλη και την Ισμήνη, που στόλισαν αυτές τις σελίδες με ζωγραφιές, γέλια και κλάματα.

## Περίληψη

Η παρουσία συμμετριών στους ατομικούς πυρήνες έχει διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της μελέτης της πυρηνικής δομής. Εφόσον οι πυρήνες αποτελούνται από νουκλεόνια, τα οποία είναι φερμιόνια, είναι αναμενόμενο οι φερμιονικές συμμετρίες να έχουν το προβάδισμα, ιδιαίτερα για την μελέτη πυρήνων μεσαίου και μεγάλου βάρους, όπου οι σχετικοί υπολογισμοί υπερβαίνουν κατά πολλές τάξεις μεγέθους τις υπάρχουσες υπολογιστικές δυνατότητες.

Η παρούσα διατριβή επικεντρώνεται στη μελέτη της συμμετρίας proxy-SU(3), η οποία επιτρέπει τη χρήση της συμμετρίας SU(3) σε πυρήνες μεσαίου και μεγάλου βάρους. Τα κυριότερα αποτελέσματα που θα μελετηθούν στην συνέχεια είναι τα εξής:

α) Η συμμετρία proxy-SU(3), χωρίς τη χρήση ελεύθερων παραμέτρων, απαντά το επί δεκαετίες αναπάντητο ερώτημα της επικράτησης των ωσειδών σχημάτων έναντι των πεπλατυσμένων στην θεμελιώδη κατάσταση των άρτιων-άρτιων πυρήνων και επιπλέον προβλέπει αλλαγή φάσης/σχήματος από ωσειδές σε πεπλατυσμένο σε βαρείς πυρήνες των οποίων και τα πρωτόνια και τα νετρόνια πλησιάζουν την κορυφή του αντίστοιχου φλοιού σθένους. Το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται και σε ατομικά συσσωματώματα αλκαλίων, δείχνοντας την καθολικότητα της χρησιμοποιούμενης μεθόδου. Από μαθηματικής πλευράς, το κύριο αποτέλεσμα της παρούσας διατριβής είναι ότι η θεμελιώδης κατάσταση του ατομικού πυρήνα χαρακτηρίζεται από την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της SU(3) που έχει το μέγιστο βάρος και όχι από την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση που έχει την μεγαλύτερη ιδιοτιμή του δεύτερης τάξης τελεστή Casimir της SU(3), όπως ήταν γενικά παραδεκτό μέχρι τώρα.

β) Η συμμετρία proxy-SU(3) αποδίδει ορθά την συμπεριφορά των ενεργειών σύνδεσης και των ενεργειών διαχωρισμού δύο νετρονίων σε σειρές ισοτόπων πυρήνων μεσαίου και μεγάλου βάρους, δείχνοντας ότι τα βασικά χαρακτηριστικά της πυρηνικής αλληλεπίδρασης έχουν συμπεριληφθεί επαρκώς στην εν λόγω θεωρία.

γ) Η σύνδεση της συμμετρίας proxy-SU(3) με το πρότυπο φλοιών διαφωτίζει την μικροσκοπική δομή των ζευγών πρωτονίων-νετρονίων τα οποία οδηγούν στην ανάπτυξη της πυρηνικής παραμόρφωσης και ενοποιεί σχετικές επιμέρους παρατηρήσεις και θεωρητικές προτάσεις του παρελθόντος. Από μαθηματικής πλευράς, το κύριο αποτέλεσμα της παρούσας διατριβής είναι η απόδειξη της ύπαρξης ενός μοναδιακού μετασχηματισμού ο οποίος συνδέει τα πυρηνικά τροχιακά που αντικαθίστανται κατά την προσέγγιση proxy-SU(3) με τους αντικαταστάτες τους, γεγονός το οποίο καταδεικνύει ότι η proxy-SU(3) δεν είναι ένα αυθαίρετο κατασκεύασμα, αλλά το προϊόν ενός αυστηρά καθορισμένου μαθηματικού μετασχηματισμού.

## Abstract

The presence of symmetries in atomic nuclei has played an important role in the development of nuclear structure studies. Since nuclei consist of nucleons, which are fermions, it is expected that fermionic symmetries will prevail, especially for the study of medium mass and heavy nuclei, in which the relevant calculations exceed by several orders of magnitude the existing computational capabilities.

This dissertation focuses on the study of the proxy-SU(3) symmetry, which allows the use of the SU(3) symmetry in medium mass and heavy nuclei. The main results obtained in the framework of the present study are as follows:

a) The proxy-SU(3) symmetry, without use of any free parameters, answers the long-standing question of the dominance of prolate over oblate shapes in the ground states of even-even nuclei, and predicts a shape/phase transition from prolate to oblate shapes in heavy nuclei, in which both protons and neutrons approach the top of the corresponding shell. This phenomenon also appears in atomic alkali clusters, demonstrating the universality of the method used.

b) The proxy-SU(3) symmetry correctly describes the behavior of the binding energies and the two-neutron separation energies of medium mass and heavy nuclei, showing that the basic characteristics of the nuclear interaction have been adequately included in this theory.

c) The connection of the proxy-SU(3) symmetry to the shell model illuminates the microscopic structure of proton-neutron pairs that lead to the development of nuclear deformation and unifies relevant individual observations and earlier theoretical approaches. From a mathematical perspective, the main result of this thesis is the proof of the existence of a unitary transformation connecting the nuclear orbitals that are replaced by the proxy-SU(3) approximation with their replacements (proxies), thus demonstrating that the proxy-SU(3) symmetry is not an arbitrary construction but the consequence of a strictly defined mathematical transformation.

## List of Figures

1	Οι κλειστοί φλοιοί καθορίζονται από τους μαγικούς αριθμούς των νουκλεονίων. Η σύζευξη του σπιν με την τροχιακή στροφορμή μεταβάλλει την μορφή του δυναμικού και επομένως έχει σαν συνέπεια την μεταβολή της ενέργειας των σταθμών και τον διαχωρισμό τους. [266] . . . . .	14
2	Το τρίγωνο συμμετριών του IBM με τις τρεις δυναμικές συμμετρίες και τις συμμετρίες κρίσιμου σημείου $E(5)$ και $X(5)$ . Στο σχήμα φαίνονται επίσης η περιοχή συνύπαρξης φάσεων [38], ανάμεσα σε δύο γραμμές που ξεκινούν από την συμμετρία $X(5)$ και καταλήγουν σε ένα σημείο στη συμμετρία $E(5)$ , αλλά και το τόξο κανονικότητας των Alhassid–Whelan [39, 40, 41, 42] . . . . .	16
3	Τροχιά νουκλεονίου σε παραμορφωμένο πυρήνα κατά Nilsson. [267] . . . . .	22
4	Ενεργειακό διάγραμμα Nilsson για 50-82 νετρόνια [105]. Στο βιβλίο [105] μπορούν να βρεθούν αντίστοιχα ενεργειακά διαγράμματα για όλους τους φλοιούς πρωτονίων και νετρονίων. . . . .	23
5	Τροχιακά του προτύπου φλοιών στην περιχή του φλοιού 50-82 [10]. . . . .	27
6	Διαγράμματα Young για ωσειδείς, τριαξονικούς, και πεπλατυσμένους πυρήνες. . . . .	42
7	Παραμόρφωση $\beta$ στην θεμελιώδη κατάσταση των πυρήνων για διάφορες σειρές ισοτόπων [11]. Το κρίσιμο σημείο αλλαγής φάσης/σχήματος από ωσειδείς σε πεπλατυσμένο για τον φλοιό νετρονίων 82-126 βρίσκεται στα 116 νετρόνια. . . . .	43
8	Σύγκριση της proxy-SU(3) [11] με τα πειραματικά δεδομένα [139] και τα αποτελέσματα του σχετικιστικού μέσου πεδίου (RMF) [140]. . . . .	44
9	Σύγκριση της proxy-SU(3) [11] με τα πειραματικά δεδομένα [139] και τα αποτελέσματα του σχετικιστικού μέσου πεδίου (RMF) [140]. . . . .	45
10	Σύγκριση της proxy-SU(3) [11] με τα πειραματικά δεδομένα [139] και τα αποτελέσματα του σχετικιστικού μέσου πεδίου (RMF) [140]. . . . .	46
11	Αποτελέσματα της proxy-SU(3) για την συλλογική ποσότητα $\gamma$ για βαρείς πυρήνες και σύγκρισή τους με εμπειρικές τιμές του $\gamma$ που έχουν εξαχθεί από πειραματικά δεδομένα [11]. . . . .	47
12	Αλλαγή του φάσματος και του λόγου $R_{4/2}$ κατά την μετάβαση από σχεδόν μαγικούς πυρήνες σε παραμορφωμένους. [268] . . . . .	50
13	Αλλαγή σχήματος του πυρήνα με βάση τους κβαντικούς αριθμούς $(\lambda, \mu)$ . . . . .	51
14	Προβλέψεις για τις ενέργειες σύνδεσης των ισοτόπων του Ce με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. . . . .	63
15	Προβλέψεις για τις ενέργειες διαχωρισμού δύο νετρονίων των ισοτόπων του Ce με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. . . . .	64
16	Προβλέψεις για τις ενέργειες σύνδεσης των ισοτόπων του Nd με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. . . . .	65



17	Προβλέψεις για τις ενέργειες διαχωρισμού δύο νετρονίων των ισοτόπων του Nd με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. . . . .	66
18	Προβλέψεις για τις ενέργειες σύνδεσης των ισοτόπων του Sm με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. . . . .	67
19	Προβλέψεις για τις ενέργειες διαχωρισμού δύο νετρονίων των ισοτόπων του Sm με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. . . . .	68
20	Προβλέψεις για τις ενέργειες σύνδεσης των ισοτόπων του Gd με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. . . . .	69
21	Προβλέψεις για τις ενέργειες διαχωρισμού δύο νετρονίων των ισοτόπων του Gd με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. . . . .	70
22	Προβλέψεις για τις ενέργειες σύνδεσης των ισοτόπων του Dy με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. . . . .	71
23	Προβλέψεις για τις ενέργειες διαχωρισμού δύο νετρονίων των ισοτόπων του Dy με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. . . . .	72
24	Προβλέψεις για τις ενέργειες σύνδεσης των ισοτόπων του Er με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. . . . .	73
25	Προβλέψεις για τις ενέργειες διαχωρισμού δύο νετρονίων των ισοτόπων του Er με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. . . . .	74
26	Προβλέψεις για τις ενέργειες σύνδεσης των ισοτόπων του Yb με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. . . . .	75
27	Προβλέψεις για τις ενέργειες διαχωρισμού δύο νετρονίων των ισοτόπων του Yb με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. . . . .	76
28	Δράση του τελεστή $T$ στις παρείσακτες καταστάσεις του φλοιού 50-82. Το παρείσακτο τροχιακό $1\eta_{11/2}^{11/2}$ δεν έχει αντίστοιχο στην proxy-SU(3) συμμετρία [13]. . . . .	89

## List of Tables

1	Οι παράμετροι $\zeta$ και $\chi$ ορίζουν έναν παραμετρικό χώρο που ονομάζεται τρίγωνο του Casten [33]. . . . .	17
2	Οι παράμετροι $\kappa, \mu'$ [60] της χαμιλτονιανής του Nilsson. . . . .	21
3	Τροχιακά Nilsson πριν και μετά την proxy-αντικατάσταση [78]. . . . .	28
4	Τροχιακά Nilsson πριν και μετά την proxy-αντικατάσταση [78]. . . . .	29
5	Μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις μεγίστου βάρους (h.w.) στον φλοιό $pf$ με συμμετρία $U(10)$ [15]. Η περισσότερο παραμορφωμένη αναγωγίσιμη αναπαράσταση, δηλαδή αυτή που έχει την μέγιστη ιδιοτιμή του δεύτερης τάξης τελεστή Casimir $C_2$ της $SU(3)$ δεν είναι εν γένει πιο συμμετρική από την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μεγίστου βάρους. . . . .	37
6	Μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις μεγίστου βάρους (hw) στους φλοιούς του τρισδιάστατου ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή [85]. Στους πρώτους 4 φλοιούς έχουν προστεθεί χάριν συγκρίσεως και οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις (C) οι οποίες παρουσιάζουν την μέγιστη ιδιοτιμή του δεύτερης τάξης τελεστή Casimir της $SU(3)$ . . . . .	39
7	Μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις μεγίστου βάρους (hw) στους φλοιούς του τρισδιάστατου ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή [85]. Στους πρώτους 4 φλοιούς έχουν προστεθεί χάριν συγκρίσεως και οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις (C) οι οποίες παρουσιάζουν την μέγιστη ιδιοτιμή του δεύτερης τάξης τελεστή Casimir της $SU(3)$ . . . . .	40
8	Μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις ( $\lambda, \mu$ ) πυρήνων σπανίων γαιών με 50-82 πρωτόνια και 82-126 νετρόνια [11]. . . . .	47
9	Μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις ( $\lambda, \mu$ ) πυρήνων σπανίων γαιών με 50-82 πρωτόνια και 50-82 νετρόνια [11]. . . . .	48
10	Αλλαγή φάσης/σχήματος από ωοειδές σε πεπλατυσμένο σχήμα για τα ισότοπα του Os. . . . .	52
11	Αλλαγή φάσης/σχήματος από ωοειδές σε πεπλατυσμένο σχήμα για την αλυσίδα ισοτόπων Hf-Hg. . . . .	52
12	Αλλαγή φάσης/σχήματος για τα ισότοπα του W. . . . .	53
13	Αλλαγή φάσης/σχήματος των ισοτόπων του Pt. . . . .	53
14	Οι τιμές του $N_0$ στον τρισδιάστατο ισοτροπικό αρμονικό ταλαντωτή [104]. . .	58
15	Τιμές της δυναμικής ενέργειας του φρέατος για κάθε πυρήνα μετά την προσαρμογή στα πειραματικά δεδομένα. . . . .	62
16	Ο πίνακας μετασχηματισμού για $\mathcal{N} = 1$ . Η πρώτη γραμμή περιέχει τα τροχιακά του μοντέλου των φλοιών, ενώ η πρώτη στήλη περιέχει τα τροχιακά του Elliott. Τα παρακάτω τροχιακά χρησιμοποιούνται στον φλοιό του αρμονικού ταλαντωτή 2-8 ή στην proxy- $SU(3)$ στον φλοιό 6-12 μετά την αντικατάσταση των αδελφών τροχιακών με τα αντίστοιχα των Shalit-Goldhaber. [92] . . . . .	80
17	Ο αντίστροφος μετασχηματισμός του πίνακα για $\mathcal{N} = 1$ . [92] . . . . .	80

18	Ομοίως με τον Πίνακα 16 αλλά για $\mathcal{N} = 2$ . Σχετίζεται με τον φλοιό του ταλαντωτή 8-20 ή στον proxy-SU(3) φλοιό 14-26.[92] . . . . .	81
19	Ομοίως με τον Πίνακα 17 αλλά για $\mathcal{N} = 2$ . [92] . . . . .	81
20	Τροχιακά και φλοιοί στα πλαίσια του προτύπου φλοιών, της συμμετρίας proxy-SU(3) και του τρισδιάστατου ιστροπικού αρμονικού ταλαντωτή. Τα τροχιακά που αντικαθίστανται σημειώνονται με έντονα στοιχεία. . . . .	92

## Contents

<b>1</b>	<b>Ο Πυρήνας</b>	<b>12</b>
1.1	Εισαγωγή . . . . .	12
1.2	Δύο κεντρικές προσεγγίσεις . . . . .	12
1.3	Μαγικοί Αριθμοί . . . . .	13
1.4	Παραμορφωμένος πυρήνας . . . . .	14
1.4.1	Η ειδική μοναδιαία ομάδα $SU(3)$ . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Πρότυπα περιγραφής παραμορφωμένων πυρήνων</b>	<b>19</b>
2.1	Ιστορική ανάπτυξη των μοντέλων της πυρηνικής δομής . . . . .	19
2.2	Το μοντέλο του Nilsson . . . . .	21
2.3	Το πρότυπο του Elliott . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Η proxy - <math>SU(3)</math></b>	<b>26</b>
3.1	Θεμελίωση της proxy- $SU(3)$ . . . . .	26
3.2	Τα “αδελφά” τροχιακά . . . . .	26
3.3	Διαγράμματα Young . . . . .	29
3.4	Μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $SU(3)$ . . . . .	30
3.4.1	Με βάση το πρότυπο του Elliott . . . . .	30
3.4.2	Η κυματοσυνάρτηση πολλών σωματιδίων . . . . .	36
3.4.3	Η προτιμώμενη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της $SU(3)$ . . . . .	38
3.5	Υπολογισμός της παραμόρφωσης . . . . .	41
3.6	Αλλαγή φάσης/σχήματος του πυρήνα . . . . .	49
3.7	Η επικράτηση των ωσειδών επί των πεπλατυσμένων σχημάτων . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Ενέργειες σύνδεσης πυρήνων και διαχωρισμού νουκλεονίων</b>	<b>55</b>
4.1	Ενέργεια σύνδεσης του πυρήνα . . . . .	55
4.1.1	Ισχυρή πυρηνική δύναμη . . . . .	55
4.2	Υπολογισμός της ενέργειας σύνδεσης με την proxy- $SU(3)$ . . . . .	56
4.3	Υπολογισμός του $N_0$ στα τροχιακά του απλού αρμονικού ταλαντωτή . . . . .	57
4.4	Υπολογισμός του $N_0$ με την proxy- $SU(3)$ . . . . .	59
4.5	Ενέργεια διαχωρισμού δύο νουκλεονίων . . . . .	59
4.6	Αποτελέσματα υπολογισμών . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Η σχέση της proxy - <math>SU(3)</math> με το Μοντέλο των Φλοιών</b>	<b>77</b>
5.1	Μετασχηματισμός ανάμεσα στο σφαιρικό μοντέλο των φλοιών και την καρτεσιανή βάση του Elliott . . . . .	77
5.2	Ζεύγη νουκλεονίων που ευνοούν την παραμόρφωση . . . . .	82
5.3	Η δομή των ζευγών de Shalit-Goldhaber . . . . .	83
5.4	Η proxy-αντικατάσταση ως μοναδιακός μετασχηματισμός . . . . .	85
5.4.1	Μοναδιακός μετασχηματισμός στον αρμονικό ταλαντωτή . . . . .	85
5.4.2	Μοναδιακός μετασχηματισμός στην pseudo- $SU(3)$ . . . . .	86

5.4.3	Μοναδιακός μετασχηματισμός στην $\text{proxu-SU}(3)$ . . . . .	87
5.5	Σύνδεση της συμμετρίας $\text{proxu-SU}(3)$ με το πρότυπο φλοιών . . . . .	91
5.5.1	Τροχιακά και φλοιοί στα διάφορα πρότυπα . . . . .	91
5.5.2	Συνέπειες στην συνύπαρξη σχημάτων . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Σύνοψη και προοπτικές</b>	<b>94</b>

# 1 Ο Πυρήνας

## 1.1 Εισαγωγή

Βασικός σκοπός της Πυρηνικής Φυσικής είναι η περιγραφή των ιδιοτήτων των πυρήνων βάσει μαθηματικών μοντέλων για την δομή τους και τις μεταβολές της. Ο πυρήνας είναι ένα χβαντικό σύστημα και έτσι πρέπει να περιγράφεται. Ένας πυρήνας όμως περιέχει πολλά νουκλεόνια και η αντίστοιχη εξίσωση Schrödinger περιλαμβάνει πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές. Επομένως, δεν μπορεί να βρεθεί ακριβής αναλυτική λύση της και θα πρέπει να γίνουν διάφορες προσεγγίσεις και παραδοχές.

## 1.2 Δύο κεντρικές προσεγγίσεις

Δύο είναι οι προσεγγίσεις που χρησιμεύουν ως αφετηρία των υπολογισμών και οδηγούν σε δύο τύπους μοντέλων. Στο πρώτο μοντέλο, θεωρούμε ότι η κυματοσυνάρτηση δεν είναι διαχωρίσιμη, οπότε ο πυρήνας θεωρείται ως ενιαίο χβαντικό σωματίδιο. Η κυματοσυνάρτηση πρέπει να περιγράφει το σχήμα του πυρήνα, ενώ το δυναμικό πρέπει να εξαρτάται από το σχήμα. Αν παραμορφώνεται το σχήμα, το δυναμικό θα πρέπει να αλλάξει. Η κινητική ενέργεια θα είναι αυτή ενός περιστρεφόμενου και δονούμενου σώματος. Παράδειγμα τέτοιου μοντέλου είναι το συλλογικό πρότυπο της υγρής σταγόνας [1, 2]. Στο μοντέλο αυτό θεωρείται ότι ο πυρήνας μοιάζει με σταγόνα υγρού, ασυμπίεστη και ομοιόμορφα φορτισμένη. Η προσομοίωση αυτή στηρίζεται στα εξής:

- η ενέργεια σύνδεσης των νουκλεονίων στον πυρήνα είναι σταθερή, μοιάζει με τα μόρια υγρού όπου οι δυνάμεις συνοχής είναι ίδιες για όλα τα μόρια.
- η επιφανειακή τάση παρουσιάζεται και στον πυρήνα, ο οποίος αντιστέκεται στις δυνάμεις Coulomb.
- όπως και στα μόρια του υγρού, τα νουκλεόνια αναπτύσσουν δυνάμεις μόνο με τα γειτονικά τους. Δηλαδή δυνάμεις μικρής εμβέλειας για αυτό και είναι ανάλογες του  $A$  και όχι του  $A^2$ .
- το φορτίο κατανέμεται ομοιογενώς στην επιφάνεια της σφαίρας, όπως και στην σταγόνα υγρού.

Το δεύτερο μοντέλο, το πρότυπο των φλοιών αναπτύχθηκε από την Maria Goeppert-Mayer και τον Hans Jensen [3, 4, 5, 6] και δίνει έμφαση στις τροχιές ξεχωριστών νουκλεονίων εντός του πυρήνα. Εφόσον τα νουκλεόνια είναι φερμιόνια, οι ενεργειακές στάθμες τους γεμίζουν από την χαμηλότερη προς την υψηλότερη καθώς νουκλεόνια προστίθενται στον πυρήνα. Υπάρχουν ξεχωριστά ενεργειακά επίπεδα για τα πρωτόνια και τα νετρόνια, τα οποία γεμίζουν την κάθε ενεργειακή κατάσταση σε τροχιακά με καθορισμένη στροφορμή. Πολλές πυρηνικές ιδιότητες καθορίζονται από το τελευταίο πλήρες ή μη πλήρες επίπεδο σθένους. Το μοντέλο αυτό ερμηνεύει την ύπαρξη των "μαγικών αριθμών".

### 1.3 Μαγικοί Αριθμοί

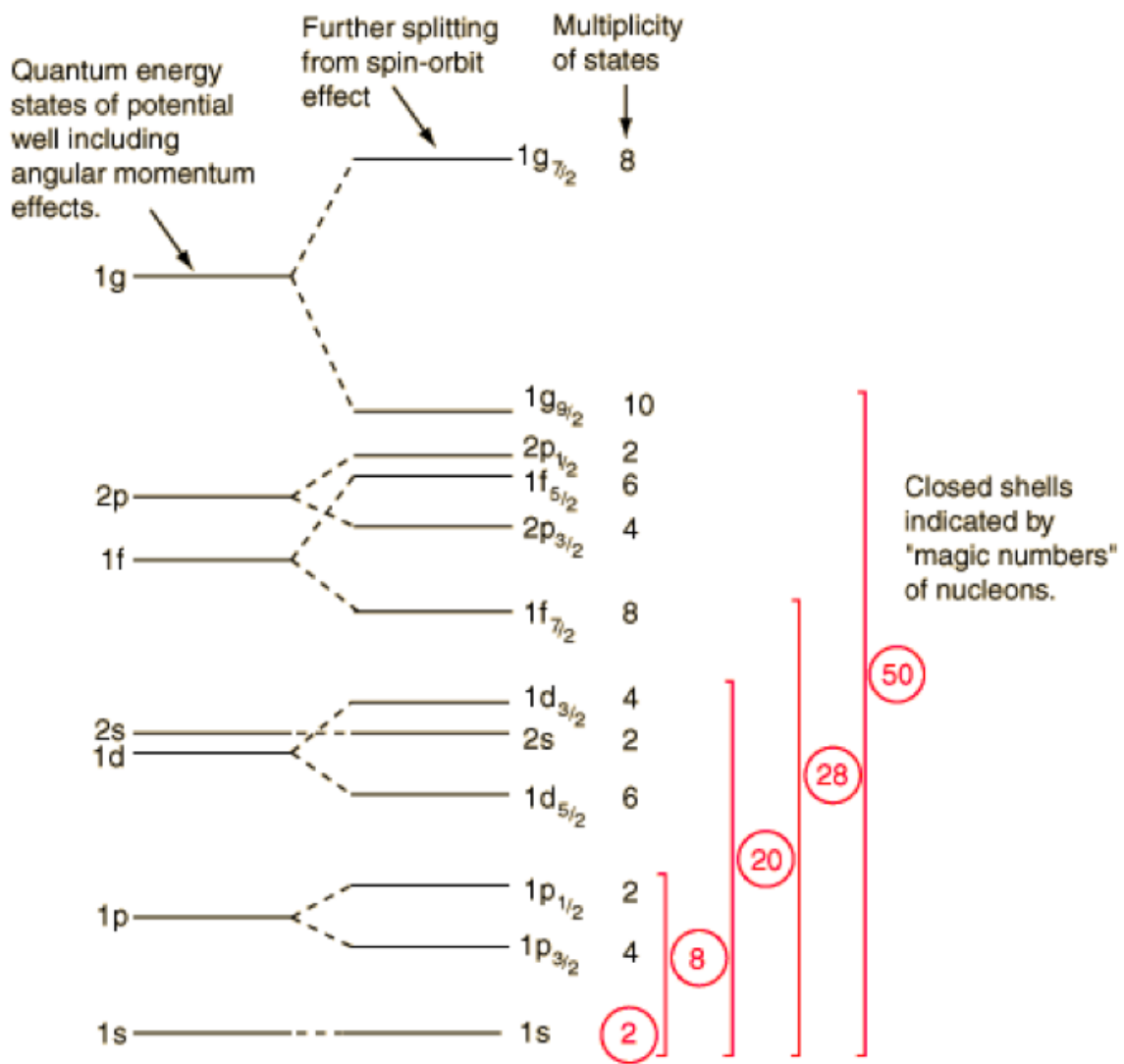
Στην Πυρηνική Φυσική εμφανίζονται οι αριθμοί [3, 4, 5, 6]

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, \dots$$

που αναφέρονται σε αριθμό είτε πρωτονίων είτε νετρονίων και για τους οποίους υπάρχει μία σειρά από ξεχωριστές ιδιότητες στους αντίστοιχους πυρήνες, όπως η μεγαλύτερη σταθερότητα. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται κατά παράδοση στην Πυρηνική Φυσική "μαγικοί αριθμοί". Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το πρότυπο των φλοιών ερμηνεύει την ύπαρξη των "μαγικών αριθμών". Όμως η επίλυση της εξίσωσης Schrödinger που περιλαμβάνει μόνο την τροχιακή στροφορμή, οδηγεί σε πλήρωση φλοιών με αριθμούς πρωτονίων ή νετρονίων [7, 8, 9] :

$$2, 8, 20, 40, 70, 112, 168, \dots$$

και όχι στους μαγικούς 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, ... . Για να οδηγηθούμε σε πλήρωση φλοιών με μαγικούς αριθμούς πρέπει να συμπεριληφθεί στο δυναμικό και ένας επιπλέον όρος, αυτός για την αλληλεπίδραση του σπιν με την τροχιακή στροφορμή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



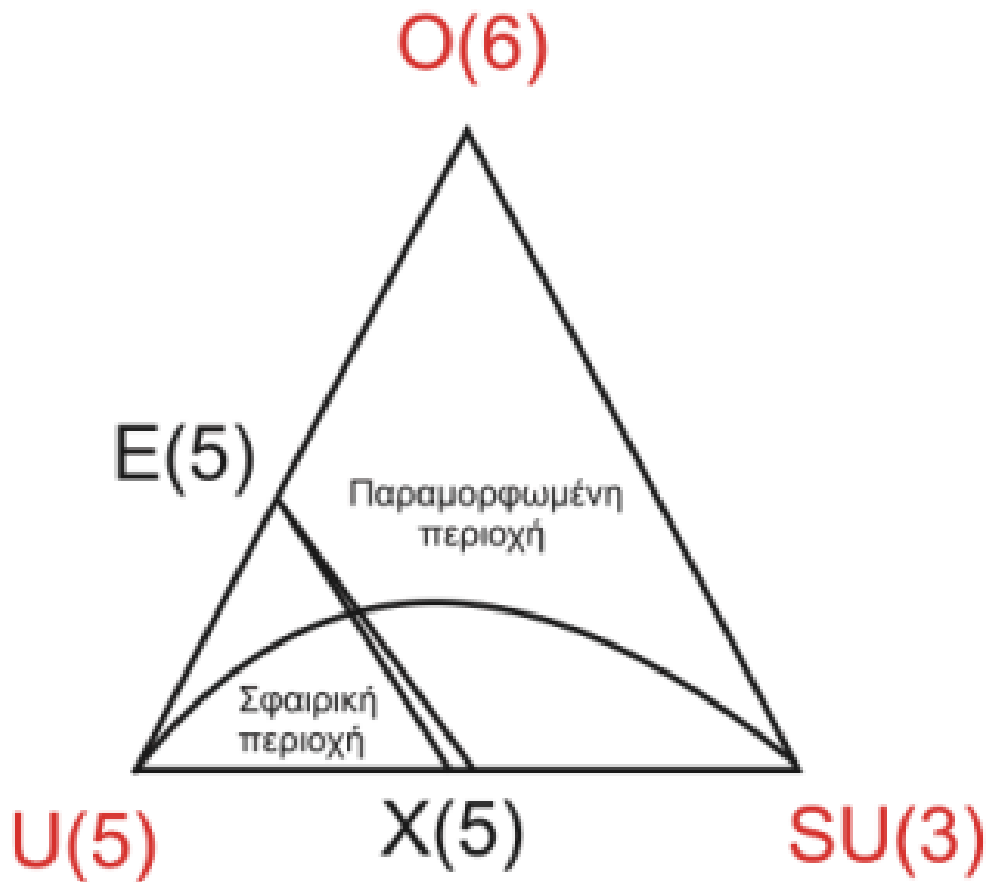
Σχήμα 1: Οι κλειστοί φλοιοί καθορίζονται από τους μαγικούς αριθμούς των νουκλεονίων. Η σύζευξη του σπιν με την τροχιακή στροφορμή μεταβάλλει την μορφή του δυναμικού και επομένως έχει σαν συνέπεια την μεταβολή της ενέργειας των σταθμών και τον διαχωρισμό τους. [266]

#### 1.4 Παραμορφωμένος πυρήνας

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην Πυρηνική Φυσική αλλά και στην παρούσα διατριβή παρουσιάζουν οι άρτιοι - άρτιοι πυρήνες που χαρακτηρίζονται από παραμορφωμένο σχήμα. Το φαινόμενο αυτό της παραμόρφωσης, δηλαδή της απόκλισης από το σφαιρικό σχήμα και το κρίσιμο σημείο της αλλαγής φάσης του πυρήνα θα μελετήσουμε σε επόμενη ενότητα χρησιμοποιώντας το μοντέλο



$pxoy-SU(3)$  [10, 11, 12, 13, 14, 15]. Στο παρελθόν, οι αλλαγές φάσεις [16, 17, 18] έχουν μελετηθεί στα πλαίσια του Interacting Boson Model (IBM) [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]. Έχει βρεθεί [27, 28, 29, 30, 31, 32] ότι υπάρχει αλλαγή φάσης πρώτης τάξης μεταξύ των συμμετριών  $U(5)$  και  $SU(3)$ , αλλαγή φάσης δεύτερης τάξης μεταξύ των συμμετριών  $U(5)$  και  $O(6)$ , ενώ δεν υπάρχει καμία αλλαγή φάσης μεταξύ των συμμετριών  $O(6)$  και  $SU(3)$ . Αυτές οι αλλαγές φάσης μπορούν να τοποθετηθούν στο τρίγωνο συμμετριών του IBM, το οποίο αναφέρεται και ως τρίγωνο του Casten [33] και φαίνεται στο Σχήμα 2. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στο τρίγωνο του Casten εμφανίζονται δύο ειδών συμμετρίες με διαφορετικό υπόβαθρο. Οι συμμετρίες  $U(5)$ ,  $SU(3)$  και  $O(6)$  είναι δυναμικές συμμετρίες οι οποίες προκύπτουν στο πλαίσιο του αλγεβρικού προτύπου IBM [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26], του οποίου η γενική συμμετρία είναι  $U(6)$ . Αντίθετα, οι  $E(5)$  και  $X(5)$  είναι συμμετρίες οι οποίες αντιστοιχούν στο κρίσιμο σημείο της αλλαγής φάσης/σχήματος από σφαιρικούς/δονητικούς πυρήνες (που περιγράφονται αλγεβρικά από την δυναμική συμμετρία  $U(5)$ ) σε πυρήνες ασταθείς ως προς την τριαξονική παραμόρφωση (που περιγράφονται αλγεβρικά από την δυναμική συμμετρία  $O(6)$ ), ή σε παραμορφωμένους (επιμηκυμένους) πυρήνες (που περιγράφονται αλγεβρικά από την δυναμική συμμετρία  $SU(3)$ ) αντίστοιχα. Οι συμμετρίες κρίσιμου σημείου  $E(5)$  και  $X(5)$  [28, 29, 30, 31, 32] έχουν κατασκευαστεί στα πλαίσια της μελέτης ειδικών λύσεων της Χαμιλτονιανής του συλλογικού προτύπου του Bohr [1, 2]. Συνδυατικό κρίκο ανάμεσα στις δύο περιγραφές αποτελεί το κλασικό όριο [34, 35, 36, 37] του IBM, στο οποίο κάθε δυναμική συμμετρία του IBM αντιστοιχεί σε διαφορετικό δυναμικό της Χαμιλτονιανής του Bohr.



Σχήμα 2: Το τρίγωνο συμμετριών του IBM με τις τρεις δυναμικές συμμετρίες και τις συμμετρίες κρίσιμου σημείου  $E(5)$  και  $X(5)$ . Στο σχήμα φαίνονται επίσης η περιοχή συνύπαρξης φάσεων [38], ανάμεσα σε δύο γραμμές που ξεκινούν από την συμμετρία  $X(5)$  και καταλήγουν σε ένα σημείο στη συμμετρία  $E(5)$ , αλλά και το τόξο κανονικότητας των Alhassid–Whelan [39, 40, 41, 42]

Το IBM παρουσιάστηκε το 1975 από τους Arima και Iachello [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]. Οι δομικοί λίθοι του είναι  $s$  μποζόνια με στροφορμή 0 και  $d$  μποζόνια με στροφορμή 2, τα οποία αναπαρίστανται με τους τελεστές δημιουργίας  $s^+$ ,  $d^+$  και τους τελεστές καταστροφής  $s$ ,  $d$ . Η πιο γενική Χαμιλτονιανή του IBM μπορεί να γραφεί συναρτήσει των τελεστών Casimir των αλγεβρών  $U(5)$ ,  $O(5)$ ,  $O(3)$ ,  $SU(3)$  και  $O(6)$  [23, 25]. Όμως οι ιδιοτιμές της μπορούν να βρεθούν αναλυτικά μόνο αν η Χαμιλτονιανή μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση των τελεστών Casimir [9, 23, 25] μιας μόνο πλήρους αλυσίδας υποομάδων της  $U(6)$ , η οποία αντιστοιχεί σε μία από τις τρεις δυναμικές συμμετρίες. Αν αυτό δεν συμβαίνει, η Χαμιλτονιανή πρέπει να διαγωνοποιηθεί αριθμητικά. Επειδή η γενικότερη δυνατή μορφή της Χαμιλτονιανής του IBM

περιέχει πολλούς όρους, των οποίων οι συντελεστές είναι ελεύθερες παράμετροι, αναζητήθηκε εμπειρικά μια πιο "οικονομική" Χαμιλτονιανή, η οποία να μπορεί να συμπεριλάβει τα βασικά χαρακτηριστικά και των τριών δυναμικών συμμετριών του IBM, αλλά παράλληλα να περιέχει τον ελάχιστο αριθμό ελεύθερων παραμέτρων. Η γενικά αποδεκτή μορφή της Χαμιλτονιανής η οποία χρησιμοποιείται για αριθμητικούς υπολογισμούς έχει τη μορφή [43, 44]:

$$H(\zeta, \chi) = c \left[ (1 - \zeta) \hat{n}_d - \frac{\zeta}{4N_B} \hat{Q}^x \cdot \hat{Q}^x \right], \quad (1)$$

όπου  $\hat{n}_d = d^\dagger \cdot \tilde{d}$  είναι ο πρώτης τάξης τελεστής Casimir της  $U(5)$ ,  $\hat{Q}^x = (s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s) + \chi (d^\dagger)^{(2)}$  είναι ο τετραπολικός τελεστής,  $N_B$  είναι ο αριθμός μποζονίων σθένους και  $c$  είναι ο παράγοντας κλίμακας. Η παραπάνω Χαμιλτονιανή περιέχει δύο παραμέτρους, τις  $\zeta$  και  $\chi$ . Η παράμετρος  $\zeta$  παίρνει τιμές από το 0 έως το 1 και η  $\chi$  από το 0 μέχρι το  $-\sqrt{7}/2$ . Ο όρος  $\hat{n}_d$  σηκώνει το βάρος της εκπροσώπησης του δονητικού ορίου  $U(5)$ , ενώ ο όρος  $\hat{Q}^x \cdot \hat{Q}^x$  αντιστοιχεί στο παραμορφωμένο όριο  $SU(3)$  για τιμή της παραμέτρου  $\chi = -\sqrt{7}/2$ , ενώ για  $\chi = 0$  αντιστοιχεί στην ασταθή ως προς την τριαξονική παραμόρφωση συμμετρία  $O(6)$ . Στον παρακάτω Πίνακα 1 φαίνεται η σχέση των παραμέτρων με την παραμόρφωση του πυρήνα.

$\zeta$	$\chi$	Συμμετρία	Πυρήνας
0	τυχαία	$U(5)$	δονητικός
1	$-\sqrt{7}/2$	$SU(3)$	ωσειδής
1	0	$O(6)$	ασταθής

Πίνακας 1: Οι παράμετροι  $\zeta$  και  $\chi$  ορίζουν έναν παραμετρικό χώρο που ονομάζεται τρίγωνο του Casten [33].

#### 1.4.1 Η ειδική μοναδιαία ομάδα $SU(3)$

Στην παρούσα διατριβή θα χρησιμοποιηθούν μαθηματικά εργαλεία από την Θεωρία Ομάδων [7, 9, 45, 46, 47, 48, 49]. Συγκεκριμένα θα χρησιμοποιηθεί η  $SU(3)$  συμμετρία [50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57]. Στην Πυρηνική Φυσική υπάρχει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον για την αναπαράσταση των ομάδων και κυρίως των ομάδων Lie. Μια ομάδα της οποίας κάθε στοιχείο εξαρτάται συνεχώς από μία ή περισσότερες μεταβλητές και οι πράξεις ανάμεσα στα στοιχεία είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις αποτελεί μια ομάδα Lie. Υπενθυμίζουμε ότι η ομάδα  $U(n)$  αποτελείται από το σύνολο των μοναδιαίων πινάκων (με μιγαδικά στοιχεία), τάξης  $n$ , ενώ η ομάδα  $SU(n)$  από το σύνολο των μοναδιαίων πινάκων τάξης  $n$  με ορίζουσα  $+1$ . Προφανώς η ομάδα  $SU(n)$  είναι υποομάδα της  $U(n)$ . Η ομάδα  $SU(3)$  αποτελείται από όλους τους μοναδιαίους πίνακες τάξης 3 με ορίζουσα  $+1$ . Έχει  $3^2 - 1 = 8$  γεννήτορες, οι οποίοι συνήθως συμβολίζονται με  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8$  και μπορούν να επιλεγούν κατά πολλούς τρόπους. Έχει καθιερωθεί να χρησιμοποιούνται οι εξής πίνακες:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Οι μεταθέτες των γεννητόρων είναι:

$$[\lambda_j, \lambda_k] = 2i \sum_i c_{jkl} \lambda_i, \quad (2)$$

όπου οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή  $c_{jkl}$  είναι:

$$C_{123} = 1, \quad (3)$$

$$C_{147} = C_{516} = C_{246} = C_{257} = C_{345} = C_{637} = 1/2, \quad (4)$$

$$C_{458} = C_{678} = \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (5)$$

Οι πίνακες  $\lambda_3$  και  $\lambda_8$  είναι διαγώνιοι και επομένως μετατίθενται μεταξύ τους. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ουδείς άλλος πίνακας μετατίθεται με τους  $\lambda_3$  και  $\lambda_8$ . Η τάξη επομένως της ομάδας  $SU(3)$  είναι 2. Η ομάδα  $SU(3)$  έχει δύο τελεστές Casimir. Τελεστής Casimir μιας ομάδας Lie είναι ένα στοιχείο το οποίο μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες της ομάδας, ακριβώς όπως και η Χαμιλτονιανή όταν υπάρχει δυναμική συμμετρία. Η ιδιότητα αυτή οδηγεί στην χρήση των τελεστών Casimir για την έκφραση της Χαμιλτονιανής συνάρτησης. Ένας τελεστής Casimir δεύτερης τάξης είναι ένας τετραγωνικός συνδυασμός των γεννητόρων:

$$C_1 = 2i \sum_{i=1}^8 \lambda_i^2. \quad (6)$$

Ο τελεστής Casimir τρίτης τάξης δίνεται από έναν πολύπλοκο τριγραμμικό συνδυασμό των γεννητόρων. Αφού λοιπόν οι ιδιοτιμές των τελεστών Casimir είναι γνωστές και οι ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής είναι και ιδιοσυναρτήσεις των τελεστών Casimir, η έκφραση της Χαμιλτονιανής ως συνάρτησης των τελεστών Casimir οδηγεί σε μία καλή προσέγγιση της ενέργειας του συστήματος. Οι διάφορες παράμετροι που εμφανίζονται μπορούν να υπολογιστούν με την χρήση πειραματικών δεδομένων.

## 2 Πρότυπα περιγραφής παραμορφωμένων πυρήνων

### 2.1 Ιστορική ανάπτυξη των μοντέλων της πυρηνικής δομής

Στο κεφάλαιο 1 αναφέρθηκαν οι δύο κεντρικές προσεγγίσεις στην περιγραφή της πυρηνικής δομής, η μικροσκοπική προσέγγιση μέσω του προτύπου φλοιών και η μακροσκοπική προσέγγιση μέσω συλλογικών προτύπων, του συλλογικού προτύπου των Bohr και Mottelson αρχικά και του αλγεβρικού Interacting Boson Model των Arima και Iachello στη συνέχεια. Στο παρόν κεφάλαιο σκοπεύουμε να περιγράψουμε τα πυρηνικά πρότυπα τα οποία οδήγησαν στην εισαγωγή της συμμετρίας  $prox\text{-}SU(3)$ , τα οποία είναι το πρότυπο Nilsson για παραμορφωμένους πυρήνες και το αλγεβρικό πρότυπο του Elliott, το οποίο βασίζεται στην συμμετρία  $SU(3)$ . Πριν περιγράψουμε αυτά τα μοντέλα, είναι χρήσιμο να αναφερθούμε στην ανάπτυξη των μοντέλων της πυρηνικής δομής με χρονολογική σειρά, η οποία είναι διαφωτιστική ως προς την σταδιακή ωρίμανση των διαφόρων ιδεών σχετικά με την περιγραφή της πυρηνικής δομής.

Το θεμελιώδες μοντέλο της πυρηνικής δομής είναι το μοντέλο των φλοιών [3, 4, 5, 6], το οποίο εμφανίστηκε το 1949 και βασίζεται στο πρόβλημα του τρισδιάστατου ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή με πρόσθετο όρο αυτόν του σπιν-τροχιάς. Οι καταστάσεις του μοντέλου χαρακτηρίζονται από τον αριθμό των κβάντων  $n$ , την συνολική τροχιακή στροφορμή  $l$ , την συνολική στροφορμή  $j$ , καθώς και την προβολή της στον άξονα  $z$ ,  $m_j$ , και χρησιμοποιείται για αυτές ο συμβολισμός  $|nljm_j\rangle$ . Το μοντέλο των φλοιών θεωρείται επαρκές για την περιγραφή σχεδόν σφαιρικών πυρήνων με ελάχιστα νουκλεόνια σθένους εκτός των κλειστών φλοιών.

Το 1952 παρουσιάστηκε το συλλογικό μοντέλο των Bohr και Mottelson [1, 2] με σκοπό να επιτρέψει την περιγραφή των αποκλίσεων από το σφαιρικό σχήμα και την αξονική συμμετρία, χρησιμοποιώντας τις συλλογικές μεταβλητές  $\beta$  και  $\gamma$  αντίστοιχα.

Το 1955, ο Nilsson [58, 59, 60, 61] παρουσίασε μια τροποποιημένη μορφή του μοντέλου των φλοιών, εισάγοντας την αξονική πυρηνική παραμόρφωση, βασισμένη στο μοντέλο του τρισδιάστατου ανισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή με κυλινδρική συμμετρία [62, 63, 64, 65, 66, 67]. Στο μοντέλο του Nilsson οι καταστάσεις χαρακτηρίζονται από τον συνολικό αριθμό των κβάντων  $N$ , τον αριθμό των κβάντων στον  $z$ -άξονα,  $n_z$ , την προβολή κατά μήκος του  $z$ -άξονα της τροχιακής στροφορμής,  $\Lambda$ , και την προβολή κατά μήκος του  $z$ -άξονα της συνολικής στροφορμής,  $K$ . Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται είναι  $K[Nn_z\Lambda]$  [59, 60].

Το 1958 ο Elliott απέδειξε ότι η παραμόρφωση μέσα στον πυρηνικό φλοιό  $sd$  με συμμετρία  $U(6)$  μπορεί να περιγραφεί με όρους της  $SU(3)$  υποάλγεβρας [50, 51, 52, 53, 54, 55]. Στο μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται η καρτεσιανή βάση του τρισδιάστατου ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή, δηλαδή η  $[n_z n_x n_y m_s]$ , στην οποία εμφανίζονται οι αριθμοί των κβάντων κατά μήκος του κάθε καρτεσιανού άξονα και η προβολή του σπιν στον  $z$ -άξονα. Εκ των υστέρων έγινε αντιληπτό ότι το πρότυπο Nilsson μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση του προτύπου του Elliott [68].

Το 1972 έγινε κατανοητή [69] η αλγεβρική δομή του μοντέλου των Bohr και Mottelson, το οποίο έχει συνολική συμμετρία  $U(5)$  και κατέχει μια υποάλγεβρα  $O(5)$ . Ο κβαντικός αριθμός  $\tau$ , αποκαλούμενος “αρχαιότητα” (seniority), σχετιζόμενος με τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της συμμετρίας  $O(5)$ , διαδραματίζει πολύ σπουδαίο ρόλο στην ονομασία των

καταστάσεων [70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77].

Το 1975 παρουσιάστηκε το μοντέλο IBM (Interacting Boson Model) [19, 23, 24, 25, 26], το οποίο έχει συμμετρία  $U(6)$ , βασισμένη σε  $s$  μποζόνια μηδενικής στροφορμής και  $d$  μποζόνια στροφορμής 2. Το IBM περιέχει 3 δυναμικής συμμετρίες, την  $U(5)$  [20] για δονητικούς πυρήνες, η οποία είναι ισοδύναμη με το συλλογικό μοντέλο των Bohr και Mottelson, την  $O(6)$  [22] για τους  $\gamma$ -ασταθείς πυρήνες, οι οποίοι είναι επιρρεπείς σε τριαξονική παραμορφωση, και την  $SU(3)$  [21], κατάλληλη για παραμορφωμένους πυρήνες με αξονική συμμετρία.

Πάνω από τον  $sd$  πυρηνικό φλοιό είναι γνωστό ότι σπάει η συμμετρία της  $SU(3)$  λόγω της αλληλεπίδρασης σπιν-τροχιάς, η οποία «σπρώχνει» τα τροχιακά με την μεγαλύτερη στροφορμή  $j$  στον από κάτω φλοιό από αυτόν που ανήκουν. Σαν αποτέλεσμα αυτού, οι φλοιοί που αποτελούνται από τα τροχιακά που απέμειναν, τα οποία ονομάζονται κανονικής ομοτιμίας, ενώ τα τροχιακά που εισχώρησαν από τον από πάνω φλοιό έχοντας αντίθετη ομοτιμία, ονομάζονται «παρείσακτα» τροχιακά.

Το 2017 παρουσιάστηκε η συμμετρία proxy- $SU(3)$  [10, 11, 12, 78, 79, 80] στην οποία τα τροχιακά που εισβάλλουν σε κάθε φλοιό (εκτός από εκείνα με την μεγαλύτερη τιμή της προβολής  $m_j$  της συνολικής στροφορμής) αντικαθίστανται από τα τροχιακά που εγκατέλειψαν τον φλοιό εισχωρώντας στον ακριβώς από κάτω. Το αποτέλεσμα αυτής της αντικατάστασης είναι η αποκατάσταση της  $SU(3)$  συμμετρίας. Το τροχιακό με την μεγαλύτερη τιμή της προβολής  $m_j$  της συνολικής στροφορμής, το οποίο δεν έχει αντικαταστάτη, βρίσκεται πολύ ψηλά ενεργειακά και είναι αποξενωμένο και για αυτό τον λόγο είναι σχεδόν πάντα άδειο για τους περισσότερους πυρήνες. Επομένως, ως αποτέλεσμα της θέσης του, δεν επηρεάζει την δομή των περισσότερων βαρέων πυρήνων.

Η συμμετρία proxy- $SU(3)$  τεκμηριώθηκε αρχικά ως μια καλή προσέγγιση μέσω υπολογισμών [10, 14, 81, 82, 83] στα πλαίσια του προτύπου Nilsson. Μέσω της proxy- $SU(3)$  αποδείχθηκε η σημασία της προτιμώμενης μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης  $SU(3)$  [11, 12, 15, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91], η οποία χρησιμοποιήθηκε με μεγάλη επιτυχία για να προβλέψει της αλλαγή σχήματος του πυρήνα από ωσειδές σε πεπλατυσμένο για  $N = 114$  [11, 12, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91], για να εξηγήσει την επικράτηση του ωσειδούς σχήματος έναντι του πεπλατυσμένου στην θεμελιώδη κατάσταση άρτιων-άρτιων πυρήνων [11, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91], καθώς και για να προβλέψει συγκεκριμένες νησίδες στον πυρηνικό χάρτη όπου συνυπάρχουν δύο πολύ διαφορετικές παραμορφώσεις [92, 93, 94, 95, 96, 97, 98].

Στην παρούσα διατριβή θα συζητηθούν τα θέματα της προηγούμενης παραγράφου, καθώς και η απόδειξη της ισχύος της proxy- $SU(3)$  μέσω της σύνδεσης του προτύπου του Elliott με το πρότυπο φλοιών [13, 99, 100, 101, 102]. Επίσης θα συζητηθούν οι προβλέψεις της proxy- $SU(3)$  για τις ενέργειες σύνδεσης των πυρήνων καθώς και για τις ενέργειες διαχωρισμού 2 νετρονίων από τον πυρήνα [103, 104]. Στο υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου παρουσιάζονται αναλυτικά το μοντέλο του Nilsson και το πρότυπο του Elliott, ενώ η συμμετρία proxy- $SU(3)$  θα συζητηθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

## 2.2 Το μοντέλο του Nilsson

Το μοντέλο του Nilsson [58, 59, 60] στην πυρηνική δομή άρχισε να αναπτύσσεται στα μέσα της δεκαετίας του 1950. Ο κύριος λόγος για την ανάπτυξή του ήταν οι περιορισμοί που συνόδευαν τα ήδη υπάρχοντα μοντέλα. Ο Nilsson γενίκευσε το πρότυπο των φλοιών μαζί με το σφαιρικό δυναμικό που αυτό προϋποθέτει, έτσι ώστε να περιλαμβάνονται πυρήνες πεπλατυσμένοι στους πόλους και πυρήνες με ωσειδές σχήμα. Το μοντέλο του Nilsson βασίζεται σε ένα παραμορφωμένο δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή που περιλαμβάνει διορθώσεις που αφορούν την στροφορμή και την αλληλεπίδραση σπιν τροχιάς. Η χαμιλτονιανή του Nilsson για ένα απλό σωματίδιο είναι:

$$\hat{H} = -\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m [\omega_1^2(\hat{x}^2) + (\hat{y}^2) + \omega_z^2(\hat{z}^2)] - \kappa\hat{I}\hat{s} - \mu' (\hat{I}^2 - \langle \hat{I}^2 \rangle_N), \quad (7)$$

όπου  $\hat{p}$  είναι η ορμή,  $m$  είναι η μάζα του νουκλεονίου  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες,  $\hat{I}$  είναι η τροχιακή στροφορμή,  $\hat{s}$  είναι το σπιν,  $N$  ο κύριος κβαντικός αριθμός όπως και στον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή και  $\kappa, \mu'$  είναι σταθερές.

Ο πρώτος όρος στην χαμιλτονιανή αφορά την κινητική ενέργεια, ενώ ο δεύτερος όρος είναι το δυναμικό του παραμορφωμένου αρμονικού ταλαντωτή. Η παραμόρφωση υπεισέρχεται στην εξίσωση μέσω των συχνοτήτων του ταλαντωτή οι οποίες ορίζονται ως εξής:

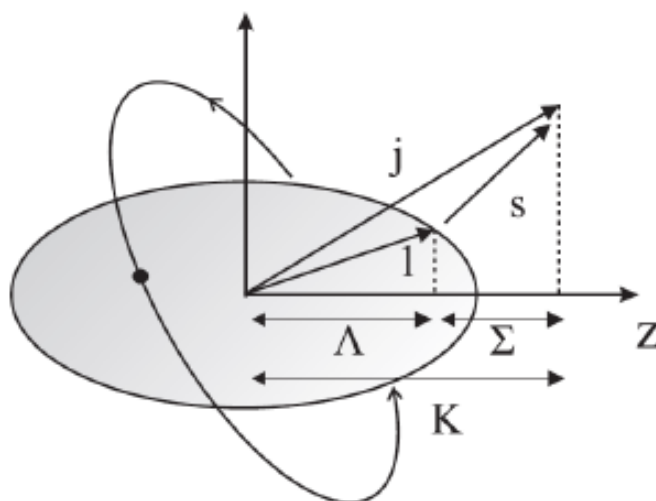
$$\omega_1 = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{3}\epsilon\right), \quad \omega_z = \omega_0 \left(1 - \frac{2}{3}\epsilon\right), \quad (8)$$

όπου  $\epsilon$  είναι ο συντελεστής της τετραπολικής παραμόρφωσης. Ο συντελεστής  $\epsilon$  είναι μηδέν για σφαιρικούς πυρήνες, θετικός για ωσειδείς πυρήνες και αρνητικός για πυρήνες με πεπλατυσμένο σχήμα στους πόλους.

Ο τρίτος και τέταρτος όρος αποτελούν διορθώσεις στο δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή. Συγκεκριμένα, ο τρίτος όρος είναι ένας όρος αλληλεπίδρασης σπιν-τροχιάς, ο οποίος επηρεάζει περισσότερο τα ενεργειακά επίπεδα όπου υπάρχει σύζευξη σπιν και μεγάλης τροχιακής στροφορμής. Ο τέταρτος όρος προσδίδει πεπλατυσμένο σχήμα στον πυθμένα του δυναμικού. Οι παράμετροι  $\kappa$  και  $\mu'$  προσδιορίζονται πειραματικά και λαμβάνουν διαφορετικές τιμές για διαφορετικούς φλοιούς, όπως φαίνεται στον πίνακα 2 [60].

Περιοχή	$\kappa$	$\mu'$
$N, Z < 50$	0.08	0
$50 < Z < 82$	0.0635	0.602
$82 < N < 126$	0.0635	0.422
$82 < Z < 126$	0.0575	0.652
$126 < N$	0.0635	0.324

Πίνακας 2: Οι παράμετροι  $\kappa, \mu'$  [60] της χαμιλτονιανής του Nilsson.



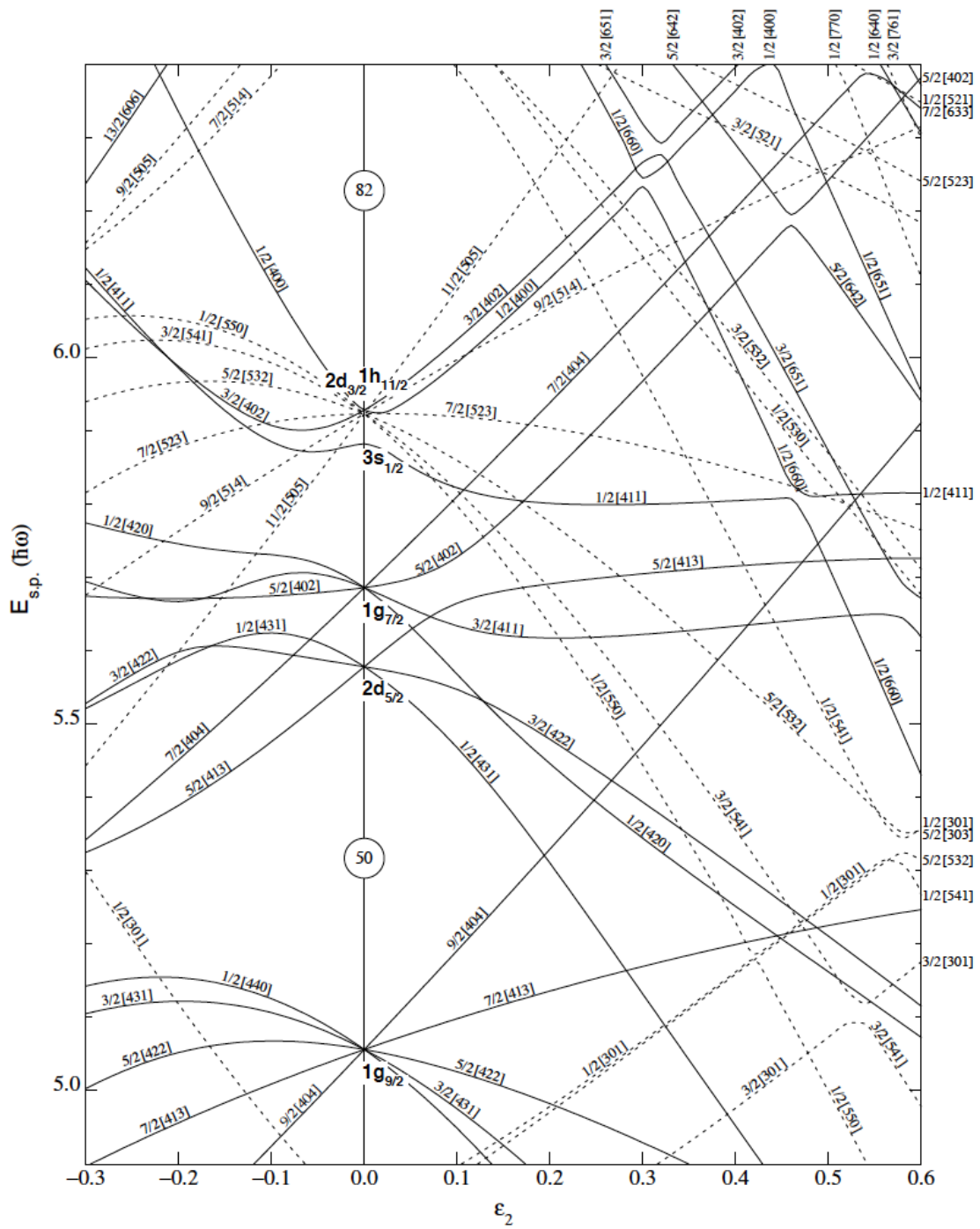
Σχήμα 3: Τροχιά νουκλεονίου σε παραμορφωμένο πυρήνα κατά Nilsson. [267]

Τα τροχιακά Nilsson έχουν την παρακάτω μορφή:

$$K[Nn_z\Lambda], \quad (9)$$

όπου  $K$  είναι η προβολή της συνολικής στροφορμής,  $N$  είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός,  $n_z$  είναι το πλήθος των κβάντων στον  $z$ -άξονα και  $\Lambda$  η προβολή της τροχιακής στροφορμής. Στο σχήμα 3 φαίνεται η τροχιά ενός νουκλεονίου σε έναν παραμορφωμένο πυρήνα μαζί με την σημασία των κβαντικών αριθμών της έκφρασης  $K[Nn_z\Lambda]$ . Με την αύξηση της παραμόρφωσης αλλάζει η σειρά πλήρωσης των τροχιακών. Στο σχήμα 4 [105] παρουσιάζεται η μεταβολή της ενέργειας των τροχιακών ως συνάρτηση της παραμόρφωσης  $\epsilon$ . Τα διαγράμματα αυτά αναφέρονται ως ενεργειακά διαγράμματα Nilsson. Πρέπει να τονιστεί ότι τα διαγράμματα Nilsson για περισσότερα από 50 νουκλεόνια είναι διαφορετικά για τα πρωτόνια και για τα νετρόνια [61], λόγω των διαφορετικών τιμών των παραμέτρων που εμφανίζονται στον πίνακα 2.





Σχήμα 4: Ενεργειακό διάγραμμα Nilsson για 50-82 νετρόνια [105]. Στο βιβλίο [105] μπορούν να βρεθούν αντίστοιχα ενεργειακά διαγράμματα για όλους τους φλοιούς πρωτονίων και νετρονίων.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, τα τροχιακά Nilsson συνήθως δίνονται στην μορφή  $K[Nn_Z\Lambda]$ . Όμως για να υπολογιστούν τα  $(\lambda, \mu)$  της  $SU(3)$  που θα δούμε παρακάτω, θα πρέπει να μετατραπούν αυτά τα τροχιακά σε μορφή καρτεσιανών τροχιακών  $(n_z, n_x, n_y)$ . Μέθοδοι υπολογισμού στοιχείων πίνακα στην ασυμπτωτική βάση Nilsson  $K[Nn_Z\Lambda]$  μπορούν να βρεθούν στις εργασίες [60, 106, 107, 108, 109]. Σχετικά με την μαθηματική περιγραφή αρμονικών ταλαντωτών με κυλινδρική συμμετρία μπορεί κάποιος να συμβουλευτεί τις εργασίες [110, 111, 112, 113, 114, 115].

### 2.3 Το πρότυπο του Elliott

Ο Elliott [50, 51, 52, 53, 54, 55] απέδειξε ότι το περιστροφικό φάσμα του πυρήνα προέρχεται από την συμμετρία  $SU(3)$ . Αυτό το συλλογικό, περιστροφικό φάσμα απορρέει από τα κατειλημμένα μονοσωματιδιακά τροχιακά των καρτεσιανών συντεταγμένων με τις πυρηνικές κυματοσυναρτήσεις που χαρακτηρίζονται από τους κβαντικούς αριθμούς του Elliott  $(\lambda, \mu)$ . Τα τροχιακά του φλοιού με  $N$  κβάντα στις καρτεσιανές είναι τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} |n_z, n_x, n_y\rangle : & |\mathcal{N}, 0, 0\rangle, |\mathcal{N} - 1, 1, 0\rangle, |\mathcal{N} - 1, 0, 1\rangle, \\ & |\mathcal{N} - 2, 2, 0\rangle, |\mathcal{N} - 2, 1, 1\rangle, |\mathcal{N} - 2, 0, 2\rangle, \dots, |0, 0, \mathcal{N}\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Σε παρακάτω ενότητα θα συζητηθεί η σχέση ανάμεσα στις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της  $U(3)$   $[f_1, f_2, f_3]$  και στις μονοσωματιδιακές καταστάσεις  $|n_z, n_x, n_y\rangle$ . Συνοπτικά, η σχέση για κάθε νουκλεόνιο σθένους είναι [50]:

$$\begin{aligned} f_1 &= \left\{ \sum n_z \right\}_{max}, \\ f_2 &= max \left\{ \sum n_x, \sum n_y \right\}, \mu \in \left\{ \sum n_z \right\}_{max}, \\ f_3 &= min \left\{ \sum n_x, \sum n_y \right\}, \mu \in \left\{ \sum n_z \right\}_{max}, \end{aligned}$$

όπου

$$f_1 \geq f_2 \geq f_3, \quad (11)$$

ενώ παρακάτω φαίνεται και η σχέση με τους κβαντικούς αριθμούς του Elliott [50]:

$$\begin{aligned} \lambda &= \left\{ \sum n_z \right\}_{max} - max \left\{ \sum n_x, \sum n_y \right\}, \\ \mu &= \left| \sum n_x - \sum n_y \right|, \mu \in \left\{ \sum n_z \right\}_{max}. \end{aligned} \quad (12)$$

Σε παρακάτω ενότητα θα μελετηθεί ο ισοτροπικός τρισδιάστατος απλός αρμονικός ταλαντωτής [7, 8, 9] με Χαμιλτονιανή:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2). \quad (13)$$

Η διαφορά ανάμεσα στο πρότυπο του Elliott και στο πρότυπο του Nilsson είναι ότι ο Elliott μελέτησε ισοτροπικό αρμονικό ταλαντωτή, σε αντίθεση με τον Nilsson, ο οποίος μελέτησε ανισοτροπικό αρμονικό ταλαντωτή με κυλινδρική συμμετρία.

Η απλούστερη Χαμιλτονιανή στο πρότυπο του Elliott είναι:

$$H = H_{osc} - V\hat{Q}^2, \quad (14)$$

όπου  $V$  μια σταθερά ενδεικτική της ισχύος της τετραπολικής αλληλεπίδρασης  $\hat{Q}^2$ , ενώ  $H_{osc}$  είναι η χαμιλτονιανή του ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή, στην ουσία μια σταθερά για νουκλεόνια του ίδιου μείζονος φλοιού. Η Χαμιλτονιανή αυτή είναι διαγώνια στην βάση του Elliott, η οποία χαρακτηρίζεται από την αλυσίδα αλγεβρών  $SU(3) \supset SO(3)$ .

Η τετραπολική αλληλεπίδραση δίνεται από την σχέση

$$\hat{Q}^2 = 4\hat{C}_2 - 3\hat{L}^2, \quad (15)$$

όπου  $\hat{L}^2$  είναι ο τελεστής του τετραγώνου της τροχιακής στροφορμής με ιδιοτιμές  $L(L+1)$  και  $\hat{C}_2$  είναι ο τελεστής Casimir δεύτερης τάξης (δηλαδή με όρους δύο σωμάτων) της  $SU(3)$  με ιδιοτιμές

$$C_2 = \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu) \quad (16)$$

στην μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση  $(\lambda, \mu)$  της  $SU(3)$ .

Η χρήση της δυναμικής συμμετρίας  $SU(3) \supset SO(3)$  επιτρέπει με απλούς υπολογισμούς την εξαγωγή του φάσματος του υπό θεώρηση πυρήνα [52].

### 3 Η proxy - SU(3)

#### 3.1 Θεμελίωση της proxy-SU(3)

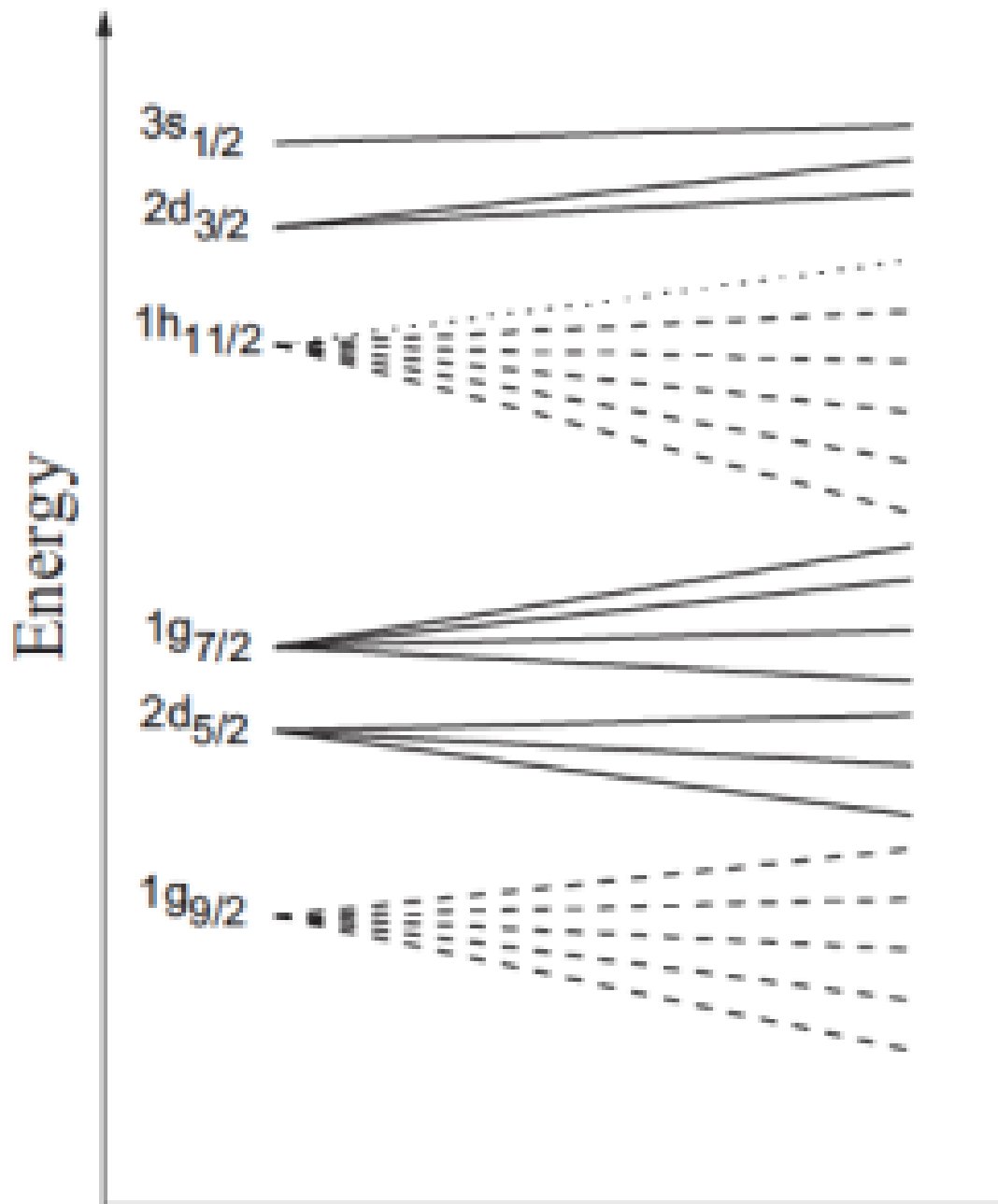
Η proxy-SU(3) αποτελεί ένα συλλογικό πρότυπο με κύριο χαρακτηριστικό του μοντέλου ο κάθε πυρήνας να μπορεί να εκπροσωπηθεί από μια μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της SU(3) άλγεβρας, η οποία έχει το μέγιστο βάρος, δηλαδή περιγράφει την πιο συμμετρική κατανομή των νουκλεονίων σθένους.

#### 3.2 Τα “αδελφά” τροχιακά

Το πρότυπο του Nilsson [58, 59, 60, 61] που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράφει ικανοποιητικά τις ιδιότητες των βαρέων παραμορφωμένων πυρήνων. Καθώς η παραμόρφωση  $\epsilon$  αυξάνεται, οι κυματοσυναρτήσεις του προτύπου πλησιάζουν οριακά σε μια ασυμπτωτική μορφή [60, 106, 107, 108, 109], στη οποία διατηρούνται οι εξής κβαντικοί αριθμοί: ο συνολικός αριθμός κβάντων του αρμονικού ταλαντωτή  $N$ , ο αριθμός των κβάντων στον κυλινδρικό άξονα συμμετρίας  $n_z$ , καθώς και οι προβολές της τροχιακής στροφορμής  $\Lambda$  και του σπιν  $\Sigma$  στον κυλινδρικό άξονα συμμετρίας. Η proxy-SU(3) αποτελεί μια προσέγγιση για την αποκατάσταση της SU(3) συμμετρίας, η οποία έχει χαθεί στα τροχιακά λόγω της αλληλεπίδρασης σπιν-τροχιάς. Η προσέγγιση αυτή λειτουργεί καλά στους παραμορφωμένους πυρήνες, δηλαδή εκεί όπου εφαρμόζεται το πρότυπο Nilsson. Η κεντρική ιδέα βασίζεται στην αντικατάσταση νουκλεονίων των οποίων οι κβαντικοί αριθμοί των ασυμπτωτικών κυματοσυναρτήσεων  $K[Nn_z\Lambda]$  διαφέρουν κατά  $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[1 \ 1 \ 0]$ .  $\Delta N = 1$  σημαίνει ότι διαφέρουν κατά ένα κβάντο συνολικά. Αυτή η διαφορά στα κβάντα πάντα επωμίζεται από τον άξονα  $z$ , γι' αυτό και ισχύει  $\Delta n_z = 1$ . Παρόλο που τα κβάντα διαφέρουν, οι προβολές των στροφορμών είναι ίσες. Έχει παρατηρηθεί πειραματικά [116, 117, 118, 119, 120, 121] και έχει αποδειχθεί υπολογιστικά [268, 123, 124, 125] στην περιοχή των σπάνιων γαιών, ότι ζευγάρια πρωτονίων-νετρονίων τα οποία διαφέρουν κατά  $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[1 \ 10]$  έχουν μεγάλη χωρική επικάλυψη. Για να γίνει πιο εύκολα αντιληπτή η αντικατάσταση των τροχιακών που ήδη αναφέρθηκε, θα χρησιμοποιηθεί το παράδειγμα του φλοιού 50–82, που εμφανίζεται στο σχήμα 5.

Ο φλοιός 50–82 αποτελείται από 32 νουκλεόνια, από τα οποία τα 20 ανήκουν στον “κατεστραμμένο” φλοιό του αρμονικού ταλαντωτή με κύριο κβαντικό αριθμό  $N = 4$  και τα υπόλοιπα νουκλεόνια έχουν “κατέβει” από τον φλοιό του αρμονικού ταλαντωτή με  $N = 5$  και έχουν αντίθετη ομοτιμία με τα υπόλοιπα. Τα 10 τροχιακά που ανήκουν στο  $N = 4$  είναι:  $1g_{9/2}$ ,  $1g_{7/2}$ ,  $2d_{5/2}$ ,  $2d_{3/2}$ ,  $3s_{1/2}$ .

Όμως λόγω της αλληλεπίδρασης σπιν-τροχιάς, το τροχιακό  $1g_{9/2}$  “κατέβηκε” στον από κάτω φλοιό με  $N = 3$  και τα τροχιακά με  $N = 4$  δέχθηκαν ένα καινούριο τροχιακό, το  $1h_{11/2}$ , το οποίο κατέβηκε από τον φλοιό  $N = 5$ . Συνοψίζοντας, φαίνεται ότι ο φλοιός με  $N = 4$  έχασε ένα τροχιακό ( $1g_{9/2}$ ) και δέχθηκε ένα τροχιακό από τον φλοιό με  $N = 5$  ( $1h_{11/2}$ ).



Σχήμα 5: Τροχιακά του προτύπου φλοιών στην περιχή του φλοιού 50-82 [10].

Το κέρδος είναι ότι πλέον ο φλοιός 50-82, μετά την αντικατάσταση της proxy-SU(3), προσεγγίζεται με έναν sdg φλοιό, του οποίου τα τροχιακά έχουν την δυναμική συμμετρία

$U(15)$  [126] . Πραγματοποιήθηκαν λεπτομερείς υπολογισμοί [10, 14, 81, 82, 83] για όλους τους φλοιούς και υπολογίστηκαν τα στοιχεία πίνακα της Χαμιλτονιανής Nilsson αρχικά με τα παλαιά και έπειτα με τα καινούρια τροχιακά λόγω της αντικατάστασης. Οι υπολογισμοί έδειξαν ότι οι αλλαγές στα στοιχεία πίνακα της Χαμιλτονιανής είναι πολύ μικρές και οι επιπτώσεις της proxy-αντικατάστασης είναι ακόμα μικρότερες στις ιδιοτιμές. Αυτό που περιγράφεται παραπάνω συμβαίνει σε όλα τα τροχιακά με  $N \geq 3$ , τα οποία εμφανίζονται στους πίνακες 3 και 4.

28-50 n, p	28-50 n, p	pf n, p	pf n, p	50-82 n	50-82 n	sdg n	sdg n
2p1/2	1/2[301]	2p1/2	1/2[301]	3s1/2	1/2[411]	3s1/2	1/2[411]
2p3/2	1/2[321]	2p3/2	1/2[321]	2d3/2	1/2[400]	2d3/2	1/2[400]
	3/2[312]		3/2[312]		3/2[402]		3/2[402]
1f5/2	1/2[310]	1f5/2	1/2[310]	2d5/2	1/2[431]	2d5/2	1/2[431]
	3/2[301]		3/2[301]		3/2[422]		3/2[422]
	5/2[303]		5/2[303]		5/2[413]		5/2[413]
1g9/2	1/2[440]	1f7/2	1/2[330]	1g7/2	1/2[420]	1g7/2	1/2[420]
	3/2[431]		3/2[321]		3/2[411]		3/2[411]
	5/2[422]		5/2[312]		5/2[402]		5/2[402]
	7/2[413]		7/2[303]		7/2[404]		7/2[404]
	9/2[404]			1h11/2	1/2[550]	1g9/2	1/2[440]
					3/2[541]		3/2[431]
					5/2[532]		5/2[422]
					7/2[523]		7/2[413]
					9/2[514]		9/2[404]
					11/2[505]		

Πίνακας 3: Τροχιακά Nilsson πριν και μετά την proxy-αντικατάσταση [78].

50-82	50-82	sdg	sdg	82-126	82-126	pfh	pfh
p	p	p	p	n	n	n	n
3s1/2	1/2[400]	3s1/2	1/2[400]	3p1/2	1/2[501]	3p1/2	1/2[501]
2d3/2	1/2[411]	2d3/2	1/2[411]	3p3/2	1/2[521]	3p3/2	1/2[521]
	3/2[402]		3/2[402]		3/2[512]		3/2[512]
2d5/2	1/2[420]	2d5/2	1/2[420]	2f5/2	1/2[510]	3f5/2	1/2[510]
	3/2[411]		3/2[411]		3/2[501]		3/2[501]
	5/2[402]		5/2[402]		5/2[503]		5/2[503]
1g7/2	1/2[431]	1g7/2	1/2[431]	2f7/2	1/2[541]	3f7/2	1/2[541]
	3/2[422]		3/2[422]		3/2[532]		3/2[532]
	5/2[413]		5/2[413]		5/2[523]		5/2[523]
	7/2[404]		7/2[404]		7/2[514]		7/2[514]
1h11/2	1/2[550]	1g9/2	1/2[440]	1h9/2	1/2[530]	1h9/2	1/2[530]
	3/2[541]		3/2[431]		3/2[521]		3/2[521]
	5/2[532]		5/2[422]		5/2[512]		5/2[512]
	7/2[523]		7/2[413]		7/2[503]		7/2[503]
	9/2[514]		9/2[404]		9/2[505]		9/2[505]
	11/2[505]			1i13/2	1/2[660]	1h11/2	1/2[550]
					3/2[651]		3/2[541]
					5/2[642]		5/2[532]
					7/2[633]		7/2[523]
					9/2[624]		9/2[514]
					11/2[615]		11/2[505]
					13/2[606]		

Πίνακας 4: Τροχιακά Nilsson πριν και μετά την proxy-αντικατάσταση [78].

### 3.3 Διαγράμματα Young

Έστω  $N$  ταυτοτικά σωματίδια τα οποία πρέπει να συζεύξουμε ώστε η συνολική κυματοσυνάρτηση να είναι αντισυμμετρική. Όταν η συμμετρία είναι  $U(n)$ , κάθε σωματίδιο σε ένα διάγραμμα Young [7, 9] συμβολίζεται με ένα κουτάκι. Αν το σωματίδιο είναι στην κατάσταση  $a$ , θα γράφουμε:

$$\boxed{a},$$

ενώ αν είναι στην  $b$  θα το συμβολίζουμε με

$$\boxed{b}.$$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί έχουμε δύο δυνατές μονοσωματιδιακές καταστάσεις, άρα η συμμετρία είναι  $U(2)$ . Οι δυνατοί συμμετρικοί συνδυασμοί στην ανταλλαγή των σωματιδίων, δίνουν τα ακόλουθα διαγράμματα Young:

$$\boxed{a} \boxed{a}, \boxed{a} \boxed{b}, \boxed{b} \boxed{a}, \boxed{b} \boxed{b}.$$

Τα παραπάνω διαγράμματα προέκυψαν χωρίς κανόνες. Όταν όμως έχουμε  $N$  σωματίδια σε  $n$  καταστάσεις και εμπλέκεται η απαγορευτική αρχή του Pauli, τότε χρειαζόμαστε τους παρακάτω κανόνες:

1. Αν το πλήθος των κουτιών στην πρώτη γραμμή είναι  $f_1$ , στην δεύτερη  $f_2$  κ.ο.κ., τότε:  $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \dots \geq f_u$ , και χρησιμοποιείται ο συμβολισμός  $[f_1, f_2, f_3, \dots, f_u]$ .
2.  $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_u = N$ .
3. Αν το κάθε σωματίδιο-κουτί φέρει έναν αριθμό  $1, 2, 3, \dots$ , τότε σε κάθε στήλη και γραμμή οι αριθμοί θα πρέπει να αυξάνονται.

1	3	4	5
2			

4. Σε μία στήλη μπορούμε να έχουμε μόνο διαφορετικές καταστάσεις, γιατί οι στήλες δηλώνουν αντισυμμετροποίηση και η απαγορευτική αρχή του Pauli δεν επιτρέπει επαναλαμβανόμενες καταστάσεις.
5. Αντιμεταθέτοντας δύο καταστάσεις της ίδιας γραμμής προκύπτει διάγραμμα ισοδύναμο με το αρχικό, αφού αυτές είναι συμμετρικές.

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω συμβολισμός είναι απλούστερος της κανονικής γραφής μίας κυματοσυνάρτησης, για αυτό και επινοήθηκε. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται κατά κόρον.

### 3.4 Μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $SU(3)$

#### 3.4.1 Με βάση το πρότυπο του Elliott

Οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις (irreps) της  $SU(3)$ ,  $(\lambda, \mu)$  μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας το πρότυπο του Elliott και τοποθετώντας τα νουκλεόνια σθένους στα τροχιακά. Παρακάτω θα χρησιμοποιηθεί ως παράδειγμα ο φλοιός  $pf$  ο οποίος αντιστοιχεί σε κύριο κβαντικό αριθμό απλού αρμονικού ταλαντωτή  $N = 3$ . Αυτό σημαίνει ότι ο φλοιός έχει 10 τροχιακά και μπορεί να φιλοξενήσει έως 20 νουκλεόνια, πρωτόνια ή νετρόνια. Σε αυτή την περίπτωση το διάγραμμα Young θα έχει το παρακάτω σχήμα:

□	□
□	□
□	□
□	□
□	□

όπου το κάθε κουτί αντιπροσωπεύει ένα νουκλεόνιο. Γενικά, το διάγραμμα Young ενός τριδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή με κύριο κβαντικό αριθμό  $N$  και συμμετρία  $U(\Omega)$ , έχει 2 στήλες για ταυτοτικά σωματίδια που υπακούουν στην απαγορευτική αρχή του Pauli.



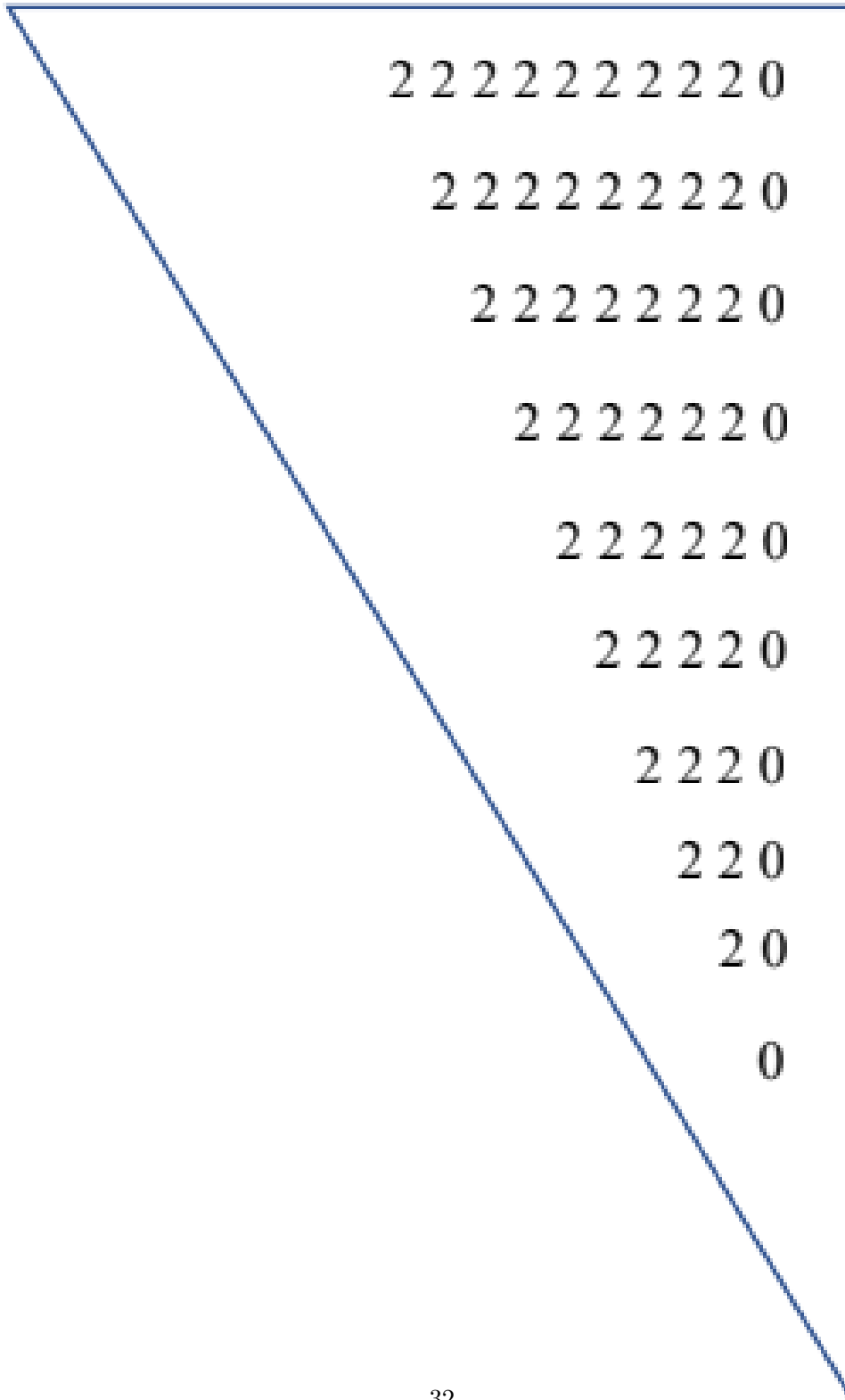
Στην συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί ως παράδειγμα ο πυρήνας  ${}_{46}^{106}\text{Pd}_{60}$  για την εξαγωγή των  $(\lambda, \mu)$ . Ο πυρήνας αυτός έχει 46 πρωτόνια, δηλαδή έχει 18 πρωτόνια σθένους, αφού ο προηγούμενος πυρηνικός φλοιός κλείνει στα 28 πρωτόνια. Σύμφωνα με την αντικατάσταση της  $\text{proxy-SU}(3)$  τα τροχιακά  $1g_{9/2}$  πρέπει να αντικατασταθούν με τα τροχιακά  $1f_{7/2}$ . Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ένας φλοιός pf με 20 τροχιακά και συμμετρία  $U(10)$ . Τα 18 πρωτόνια σθένους του πυρήνα καταλαμβάνουν 9 τροχιακά στον φλοιό. Συνεπώς το διάγραμμα Young για τα πρωτόνια θα είναι:

$$[f] = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 0]. \quad (17)$$

Έπειτα, θα πρέπει να βρεθεί η κύρια μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της  $SU(3)$ . Χρησιμοποιώντας την  $\text{proxy-SU}(3)$  θα επιλέξουμε εκείνη που έχει το μέγιστο βάρος αφού αντιστοιχεί στο διάγραμμα Young που παρουσιάζει την μεγαλύτερη συμμετρία. Το επόμενο βήμα για τον υπολογισμό της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης είναι η δημιουργία του τριγώνου Gel'fand-Zeitlin [127, 128] που αντιστοιχεί στο

$$[f] = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 0]. \quad (18)$$

Το τρίγωνο αυτό θα αποτελείται από 10 γραμμές και κάθε γραμμή θα έχει ένα στοιχείο λιγότερο από την γραμμή που βρίσκεται ακριβώς από πάνω της.



Χρησιμοποιώντας το παραπάνω τρίγωνο, θα υπολογιστούν τα αθροίσματα των στοιχείων κάθε γραμμής. Τα αθροίσματα είναι:

$$\Sigma_1 = 18, \quad \Sigma_2 = 16, \quad \Sigma_3 = 14, \quad \Sigma_4 = 12, \quad \Sigma_5 = 10, \quad (19)$$

$$\Sigma_6 = 8, \quad \Sigma_7 = 6, \quad \Sigma_8 = 4, \quad \Sigma_9 = 2, \quad \Sigma_{10} = 0. \quad (20)$$

Το διάνυσμα βάρους του διαγράμματος  $[f]$  είναι το:

$$w = (\Sigma_1 - \Sigma_2, \Sigma_2 - \Sigma_3, \Sigma_3 - \Sigma_4, \dots, \Sigma_9 - \Sigma_{10}, \Sigma_{10}) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 0). \quad (21)$$

Το κάθε στοιχείο δείχνει πόσα κβάντα έχουν τοποθετηθεί σε κάθε τροχιακό. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η σειρά εμφάνισης των τροχιακών για τον φλοιό 28 - 50 με παραμόρφωση  $\varepsilon \cong 0.6$ .

K $[Nn_z\Lambda]$	$(n_z, n_x, n_y)$
1/2 [3 3 0]	(3, 0, 0)
3/2 [3 2 1]	(2, 1, 0)
1/2 [3 2 1]	(2, 0, 1)
5/2 [3 1 2]	(1, 2, 0)
1/2 [3 1 0]	(1, 1, 1)
3/2 [3 1 2]	(1, 0, 2)
7/2 [3 0 3]	(0, 3, 0)
3/2 [3 0 1]	(0, 2, 1)
1/2 [3 0 1]	(0, 1, 2)
5/2 [3 0 3]	(0, 0, 3)

Το συνολικό πλήθος σε κάθε άξονα είναι:

$$n_z = 2 * 3 + 2 * 2 + 2 * 2 + 2 * 1 + 2 * 1 + 2 * 1 = 20, \quad (22)$$

$$n_x = 2 * 0 + 2 * 1 + 2 * 0 + 2 * 2 + 2 * 1 + 2 * 0 + 2 * 3 + 2 * 2 + 2 * 1 = 20, \quad (23)$$

$$n_y = 2 * 0 + 2 * 0 + 2 * 1 + 2 * 0 + 2 * 1 + 2 * 2 + 2 * 0 + 2 * 1 + 2 * 2 + 2 * 3 = 20. \quad (24)$$

Το διάγραμμα Young της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης  $[f]$  είναι το

$$[f] = [f_1, f_2, f_3] = [20, 20, 20]. \quad (25)$$

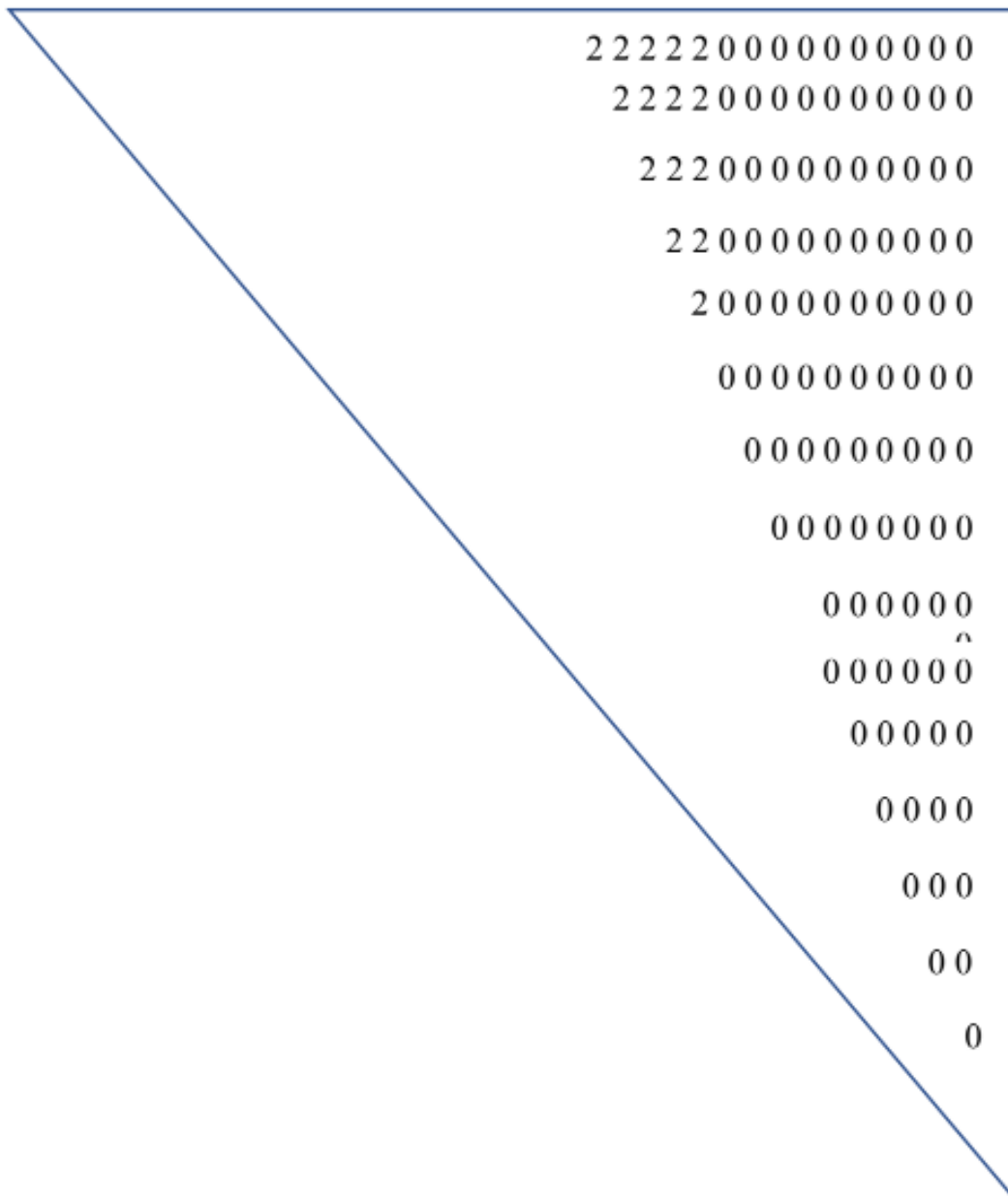
Τα  $(\lambda, \mu)$  βρίσκονται από την σχέση:

$$(\lambda, \mu) = (f_1 - f_2, f_2 - f_3) = (0, 0). \quad (26)$$

Με παρόμοιο τρόπο θα υπολογιστούν τα  $(\lambda, \mu)$  για τα νετρόνια του πυρήνα. Τα συνολικά νετρόνια είναι 60 επομένως τα νετρόνια σθένους είναι 10. Ο φλοιός 50-82 μετά την εφαρμογή της proxy-αντικατάστασης προσεγγίζεται με έναν *sdg* φλοιό αρμονικού ταλαντωτή με U(15) συμμετρία. Τα 10 νετρόνια σθένους του πυρήνα καταλαμβάνουν 5 τροχιακά από τα 15 του *sdg* φλοιού. Συνεπώς το διάγραμμα Young θα είναι:

$$[f] = [2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.] \quad (27)$$

Για τα 10 νετρόνια σθένους ισχύει το παρακάτω τρίγωνο.



Χρησιμοποιώντας το τρίγωνο αυτό θα υπολογιστούν τα αθροίσματα των στοιχείων κάθε γραμμής. Τα αθροίσματα είναι:

$$\Sigma_1 = 10, \quad \Sigma_2 = 8, \quad \Sigma_3 = 6, \quad \Sigma_4 = 4, \quad \Sigma_5 = 2, \quad (28)$$

$$\Sigma_6 = 0, \quad \Sigma_7 = 0, \quad \Sigma_8 = 0, \quad \Sigma_9 = 0, \quad \Sigma_{10} = 0, \quad (29)$$

$$\Sigma_{11} = 0, \quad \Sigma_{12} = 0, \quad \Sigma_{13} = 0, \quad \Sigma_{14} = 0, \quad \Sigma_{15} = 0. \quad (30)$$

Το διάνυσμα βάρους του διαγράμματος  $[f]$  είναι το:

$$w = (\Sigma_1 - \Sigma_2, \Sigma_2 - \Sigma_3, \Sigma_3 - \Sigma_4, \dots, \Sigma_{14} - \Sigma_{15}, \Sigma_{15}) = (2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0). \quad (31)$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η σειρά εμφάνισης των τροχιακών για τον φλοιό 50-82 με παραμόρφωση  $\varepsilon \cong 0.4$ .

K $[Nn_z\Lambda]$	$(n_z, n_x, n_y)$
1/2 [4 4 0]	(4, 0, 0)
3/2 [4 3 1]	(3, 1, 0)
1/2 [4 3 1]	(3, 0, 1)
5/2 [4 2 2]	(2, 2, 0)
1/2 [4 2 0]	(2, 1, 1)
3/2 [4 2 2]	(2, 0, 2)
7/2 [4 1 3]	(1, 3, 0)
3/2 [4 1 1]	(1, 2, 1)
9/2 [4 0 4]	(0, 4, 0)
5/2 [4 1 3]	(1, 0, 3)
1/2 [4 1 1]	(1, 1, 2)
5/2 [4 0 2]	(0, 3, 1)
7/2 [4 0 4]	(0, 0, 4)
1/2 [4 0 0]	(0, 2, 2)
3/2 [4 0 2]	(0, 1, 3)

Το συνολικό πλήθος σε κάθε άξονα είναι:

$$n_z = 2 * 4 + 2 * 3 + 2 * 3 + 2 * 2 + 2 * 2 = 28, \quad (32)$$

$$n_x = 2 * 0 + 2 * 1 + 2 * 0 + 2 * 2 + 2 * 1 = 8, \quad (33)$$

$$n_y = 2 * 0 + 2 * 0 + 2 * 1 + 2 * 0 + 2 * 1 = 4. \quad (34)$$

Επομένως,

$$[f] = [f_1, f_2, f_3] = [28, 8, 4]. \quad (35)$$

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως  $(\lambda, \mu) = (f_1 - f_2, f_2 - f_3) = (20, 4)$ . Ο πυρήνας  ${}^{106}_{46}\text{Pd}_{60}$  μπορεί πλέον να περιγραφεί από την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της  $\text{SU}(3)$ :

$$(\lambda, \mu) = (\lambda_p, \mu_p) + (\lambda_n, \mu_n) = (\lambda_p + \lambda_n, \mu_p + \mu_n) = (0 + 20, 0 + 4) = (20, 4). \quad (36)$$

### 3.4.2 Η κυματοσυνάρτηση πολλών σωματιδίων

Στον συμβολισμό  $(\lambda, \mu)$  του Elliott για τις μη αναγωγίσιμες αναπαράστασεις της  $SU(3)$  ισχύουν οι σχέσεις  $\lambda = f_1 - f_2$ ,  $\mu = f_2$ . Οι μη αναγωγίσιμες αναπαράστασεις της  $SU(3)$   $(\lambda, \mu)$  αντιπροσωπεύουν το χωρικό μέρος μιας κυματοσυνάρτησης πολλών σωματιδίων με συνολικό αριθμό κβάντων  $f_1 + f_2 = \lambda + 2\mu$ . Γενικά, η συμμετρία της κυματοσυνάρτησης περιγράφεται από την ποσότητα  $[f_1, f_2] = [\lambda + \mu, \mu]$ . Μια τέτοια κυματοσυνάρτηση μεταμορφώνεται σε τανυστή τάξης  $\lambda + 2\mu$ . Η επιμέρους ποσότητα  $\lambda + \mu$  είναι συμμετρική ενώ η ποσότητα  $\mu$  δεν είναι ούτε συμμετρική, ούτε αντισυμμετρική. Ακολουθεί ένα παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση. Έστω 3 πρωτόνια που τοποθετούνται στον πυρηνικό φλοιό  $p$  με  $N = 1$  με βάση το διάνυσμα μέγιστου βάρους  $w = (2, 1, 0)$ . Δύο από αυτά τοποθετούνται στα τροχιακά  $|n_z, n_x, n_y\rangle = |1, 0, 0\rangle$  και το τρίτο στο καρτεσιανό τροχιακό  $|0, 1, 0\rangle$ . Από τα παραπάνω προκύπτει για το χωρικό μέρος της  $U(3)$   $[f_1, f_2, f_3] = [2, 1, 0]$ . Η κατάσταση αυτή περιγράφεται από το παρακάτω διάγραμμα Young:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline z & z \\ \hline x & \\ \hline \end{array} .$$

Το παραπάνω διάγραμμα Young έχει μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της  $SU(3)$   $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ . Χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα Young για την περιγραφή του χωρικού μέρους της κυματοσυνάρτησης έχουμε:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline z & z \\ \hline x & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array},$$

όπου τα  $z, x, y$  αντιπροσωπεύουν ένα κβάντο σε κάθε καρτεσιανό άξονα, ενώ τα νούμερα 1, 2, 3 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απαρίθμηση των κβάντων και τοποθετούνται στο διάγραμμα Young κατά αύξουσα σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω. Το χωρικό μέρος της κυματοσυνάρτησης είναι:

$$\Psi_{spatial} = \sqrt{\frac{1}{6}} \{2y_z(1)y_z(2)y_x(3) - y_z(1)y_x(2)y_z(3) - y_x(1)y_z(2)y_z(3)\}, \quad (37)$$

όπου  $y_\alpha(q)$  είναι ένα πολυώνυμο Hermite με το  $q$ -οστό κβάντο στον άξονα  $\alpha = z, x, y$ . Προφανώς η παραπάνω κυματοσυνάρτηση είναι συμμετρική στις μεταθέσεις  $1 \leftrightarrow 2$ , αλλά δεν είναι συμμετρική στις μεταθέσεις  $1 \leftrightarrow 3$  και  $2 \leftrightarrow 3$ . Όντως, μόνο 2 κβάντα είναι συμμετρικά στις χωρικές μεταθέσεις, ενώ το τρίτο δεν είναι ούτε συμμετρικό ούτε αντισυμμετρικό. Ο αριθμός των συμμετρικών κβάντων υπολογίζεται από την ποσότητα  $\lambda + \mu = 2$ .

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, κρατάμε τα εξής: Η συνολική κυματοσυνάρτηση των πολλών σωματιδίων είναι αντισυμμετρική. Το χωρικό μέρος της είναι το πιο συμμετρικό, ενώ το σπιν μέρος της είναι το πιο αντισυμμετρικό. Η πιο συμμετρική χωρική κυματοσυνάρτηση συνδέεται με την μέγιστη ενέργεια σύνδεσης του πυρήνα [54].

Κλείνοντας αξίζει να σημειωθεί ότι μια μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση  $(\lambda, \mu)$  με  $\mu > 0$  περιγράφει μια κυματοσυνάρτηση με μικτή συμμετρία, ενώ για  $\mu=0$  έχουμε μια απολύτως

συμμετρική χωρική κυματοσυνάρτηση. Ορίζουμε τον λόγο:

$$r = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} * 100\%, \quad (38)$$

ο οποίος μετρά το ποσοστό των συμμετρικών κβάντων  $\lambda + \mu$  ως προς τον συνολικό αριθμό  $\lambda + 2\mu$ . Το ποσοστό αυτό μεγιστοποιείται για την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μέγιστου βάρους για κάθε αριθμό σωματιδίων μέσα σε έναν φλοιό, όπως φαίνεται στον πίνακα 5 για τον φλοιό  $pf$  με συμμετρία  $U(10)$ .

valence particles	$\lambda$	$\mu$	$C_2$	$r$ (%)	
1	3	0	18	100	
2	6	0	54	100	
3	7	1	81	89	
4	8	2	114	83	
5	10	1	144	92	
	7	4	126	73	
6	12	0	180	100	← h.w.
	9	3	153	80	
	6	6	144	67	
7	11	2	186	87	← h.w.
	8	5	168	72	
8	10	4	198	78	
9	10	4	198	78	← h.w.
	7	7	189	67	
10	10	4	198	78	← h.w.
	7	7	189	67	
	4	10	198	58	

Πίνακας 5: Μη αναγωγίσιμες αναπαράστασεις μέγιστου βάρους (h.w.) στον φλοιό  $pf$  με συμμετρία  $U(10)$  [15]. Η περισσότερο παραμορφωμένη αναγωγίσιμη αναπαράσταση, δηλαδή αυτή που έχει την μέγιστη ιδιοτιμή του δεύτερης τάξης τελεστή Casimir  $C_2$  της  $SU(3)$  δεν είναι εν γένει πιο συμμετρική από την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μέγιστου βάρους.

### 3.4.3 Η προτιμώμενη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της SU(3)

Στην ενότητα αυτή θα απαντηθεί το ερώτημα για το ποια τελικά είναι η χωρικά πιο συμμετρική μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της SU(3). Θα πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω δύο συνθήκες. Για έναν συγκεκριμένο αριθμό σωματιδίων σε έναν φλοιό του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή μια μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της SU(3) ( $\lambda', \mu'$ ) είναι πιο συμμετρική από μια άλλη με  $(\lambda, \mu)$  όταν:

$$\lambda' + \mu' \geq \lambda + \mu, \quad (39)$$

$$\frac{\lambda' + \mu'}{\lambda' + 2\mu'} * 100\% > \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} * 100\%. \quad (40)$$

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τις προτιμώμενες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της SU(3) στις συμμετρίες U(n) (n=6, 10, 15, 21, 28, 36) των φλοιών του τρισδιάστατου ιστροπικού αρμονικού ταλαντωτή φαίνονται στους πίνακες 6 και 7. Παρατηρούμε ότι μέχρι το μέσον κάθε φλοιού οι προτιμώμενες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις (hw) συμπίπτουν με τις αναπαραστάσεις (C) οι οποίες παρουσιάζουν την μέγιστη ιδιοτιμή του δεύτερης τάξης τελεστή Casimir της SU(3). Το ίδιο συμβαίνει και στις 5 τελευταίες θέσεις κάθε φλοιού. Όμως, αμέσως μετά το μέσον του κάθε φλοιού οι αναπαραστάσεις hw και C διαφέρουν ριζικά. Οι αναπαραστάσεις που διαφέρουν εμφανίζονται με έντονους χαρακτήρες. Ενώ οι αναπαραστάσεις C γίνονται αμέσως πεπλατυσμένες (δηλαδή έχουν  $\lambda < \mu$ ), οι αναπαραστάσεις hw παραμένουν ωσειδείς (δηλαδή έχουν  $\lambda > \mu$ ) για αρκετό διάστημα ακόμα και αρχίζουν να είναι πεπλατυσμένες πολύ αργότερα. Αυτό το καθαρά μαθηματικό αποτέλεσμα έχει σοβαρότατες επιπτώσεις στην δομή των πυρήνων. Όπως θα δούμε παρακάτω, προβλέπει αλλαγή φάσης/σχήματος των πυρήνων που βρίσκονται κοντά στο τέλος του φλοιού σθένους τόσο των πρωτονίων όσο και των νετρονίων (βλ. κεφάλαιο 3.6), καθώς επίσης ερμηνεύει την επικράτηση των ωσειδών σχημάτων έναντι των πεπλατυσμένων στην θεμελιώδη κατάσταση των άρτιων-άρτιων πυρήνων (βλ. κεφάλαιο 3.7).



M irrep	8-20	8-20	28-50	28-50	50-82	50-82	82-126	82-126	126-184	184-258
	sd	sd	pf	pf	sdg	sdg	pfh	pfh	sdgi	pfhj
	U(6)	U(6)	U(10)	U(10)	U(15)	U(15)	U(21)	U(21)	U(28)	U(36)
	hw	C	hw	C	hw	C	hw	C	hw	hw
0	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
1 [1]	(2,0)	(2,0)	(3,0)	(3,0)	(4,0)	(4,0)	(5,0)	(5,0)	(6,0)	(7,0)
2 [2]	(4,0)	(4,0)	(6,0)	(6,0)	(8,0)	(8,0)	(10,0)	(10,0)	(12,0)	(14,0)
3 [21]	(4,1)	(4,1)	(7,1)	(7,1)	(10,1)	(10,1)	(13,1)	(13,1)	(16,1)	(19,1)
4 [2 <sup>2</sup> ]	(4,2)	(4,2)	(8,2)	(8,2)	(12,2)	(12,2)	(16,2)	(16,2)	(20,2)	(24,2)
5 [2 <sup>2</sup> 1]	(5,1)	(5,1)	(10,1)	(10,1)	(15,1)	(15,1)	(20,1)	(20,1)	(25,1)	(30,1)
6 [2 <sup>3</sup> ]	(6,0)	(0,6)	(12,0)	(12,0)	(18,0)	(18,0)	(24,0)	(24,0)	(30,0)	(36,0)
7 [2 <sup>3</sup> 1]	<b>(4,2)</b>	(1,5)	(11,2)	(11,2)	(18,2)	(18,2)	(25,2)	(25,2)	(32,2)	(39,2)
8 [2 <sup>4</sup> ]	(2,4)	(2,4)	(10,4)	(10,4)	(18,4)	(18,4)	(26,4)	(26,4)	(34,4)	(42,4)
9 [2 <sup>4</sup> 1]	(1,4)	(1,4)	(10,4)	(10,4)	(19,4)	(19,4)	(28,4)	(28,4)	(37,4)	(46,4)
10 [2 <sup>5</sup> ]	(0,4)	(0,4)	(10,4)	(4,10)	(20,4)	(20,4)	(30,4)	(30,4)	(40,4)	(50,4)
11 [2 <sup>5</sup> 1]	(0,2)	(0,2)	<b>(11,2)</b>	(4,10)	(22,2)	(22,2)	(33,2)	(33,2)	(44,2)	(55,2)
12 [2 <sup>6</sup> ]	(0,0)	(0,0)	<b>(12,0)</b>	(4,10)	(24,0)	(24,0)	(36,0)	(36,0)	(48,0)	(60,0)
13 [2 <sup>6</sup> 1]			<b>(9,3)</b>	(2,11)	(22,3)	(22,3)	(35,3)	(35,3)	(48,3)	(61,3)
14 [2 <sup>7</sup> ]			<b>(6,6)</b>	(0,12)	(20,6)	(20,6)	(34,6)	(34,6)	(48,6)	(62,6)
15 [2 <sup>7</sup> 1]			<b>(4,7)</b>	(1,10)	(19,7)	(7,19)	(34,7)	(34,7)	(49,7)	(64,7)
16 [2 <sup>8</sup> ]			(2,8)	(2,8)	<b>(18,8)</b>	(6,20)	(34,8)	(34,8)	(50,8)	(66,8)
17 [2 <sup>8</sup> 1]			(1,7)	(1,7)	<b>(18,7)</b>	(3,22)	(35,7)	(35,7)	(52,7)	(69,7)
18 [2 <sup>9</sup> ]			(0,6)	(0,6)	<b>(18,6)</b>	(0,24)	(36,6)	(36,6)	(54,6)	(72,6)
19 [2 <sup>9</sup> 1]			(0,3)	(0,3)	<b>(19,3)</b>	(2,22)	(38,3)	(38,3)	(57,3)	(76,3)
20 [2 <sup>10</sup> ]			(0,0)	(0,0)	<b>(20,0)</b>	(4,20)	(40,0)	(40,0)	(60,0)	(80,0)
21 [2 <sup>10</sup> 1]					<b>(16,4)</b>	(4,19)	(37,4)	(4,37)	(58,4)	(79,4)
22 [2 <sup>11</sup> ]					<b>(12,8)</b>	(4,18)	<b>(34,8)</b>	(0,40)	(56,8)	(78,8)
23 [2 <sup>11</sup> 1]					<b>(9,10)</b>	(2,18)	<b>(32,10)</b>	(3,38)	(55,10)	(78,10)
24 [2 <sup>12</sup> ]					<b>(6,12)</b>	(0,18)	<b>(30,12)</b>	(6,36)	(54,12)	(78,12)
25 [2 <sup>12</sup> 1]					<b>(4,12)</b>	(1,15)	<b>(29,12)</b>	(7,35)	(54,12)	(79,12)
26 [2 <sup>13</sup> ]					(2,12)	(2,12)	<b>(28,12)</b>	(8,34)	(54,12)	(80,12)
27 [2 <sup>13</sup> 1]					(1,10)	(1,10)	<b>(28,10)</b>	(7,34)	(55,10)	(82,10)

Πίνακας 6: Μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις μεγίστου βάρους (hw) στους φλοιούς του τρισδιάστατου ιστροπικού αρμονικού ταλαντωτή [85]. Στους πρώτους 4 φλοιούς έχουν προστεθεί χάρην συγκρίσεως και οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις (C) οι οποίες παρουσιάζουν την μέγιστη ιδιοτιμή του δεύτερης τάξης τελεστή Casimir της SU(3).

28	$[2^{14}]$	(0,8)	(0,8)	<b>(28,8)</b>	(6,34)	(56,8)	(84,8)
29	$[2^{14}1]$	(0,4)	(0,4)	<b>(29,4)</b>	(3,35)	<b>(58,4)</b>	(87,4)
30	$[2^{15}]$	(0,0)	(0,0)	<b>(30,0)</b>	(0,36)	<b>(60,0)</b>	(90,0)
31	$[2^{15}1]$			<b>(25,5)</b>	(2,33)	<b>(56,5)</b>	(87,5)
32	$[2^{16}]$			<b>(20,10)</b>	(4,30)	<b>(52,10)</b>	(84,10)
33	$[2^{16}1]$			<b>(16,13)</b>	(4,28)	<b>(49,13)</b>	(82,13)
34	$[2^{17}]$			<b>(12,16)</b>	(4,26)	<b>(46,16)</b>	(80,16)
35	$[2^{17}1]$			<b>(9,17)</b>	(2,25)	<b>(44,17)</b>	(79,17)
36	$[2^{18}]$			<b>(6,18)</b>	(0,24)	<b>(42,18)</b>	(78,18)
37	$[2^{18}1]$			<b>(4,17)</b>	(1,20)	<b>(41,17)</b>	<b>(78,17)</b>
38	$[2^{19}]$			(2,16)	(2,16)	<b>(40,16)</b>	<b>(78,16)</b>
39	$[2^{19}1]$			(1,13)	(1,13)	<b>(40,13)</b>	<b>(79,13)</b>
40	$[2^{20}]$			(0,10)	(0,10)	<b>(40,10)</b>	<b>(80,10)</b>
41	$[2^{20}1]$			(0,5)	(0,5)	<b>(41,5)</b>	<b>(82,5)</b>
42	$[2^{21}]$			(0,0)	(0,0)	<b>(42,0)</b>	<b>(84,0)</b>
43	$[2^{21}1]$					<b>(36,6)</b>	<b>(79,6)</b>
44	$[2^{22}]$					<b>(30,12)</b>	<b>(74,12)</b>
45	$[2^{22}1]$					<b>(25,16)</b>	<b>(70,16)</b>
46	$[2^{23}]$					<b>(20,20)</b>	<b>(66,20)</b>
47	$[2^{23}1]$					<b>(16,22)</b>	<b>(63,22)</b>
48	$[2^{24}]$					<b>(12,24)</b>	<b>(60,24)</b>
49	$[2^{24}1]$					<b>(9,24)</b>	<b>(58,24)</b>
50	$[2^{25}]$					<b>(6,24)</b>	<b>(56,24)</b>
51	$[2^{25}1]$					<b>(4,22)</b>	<b>(55,22)</b>
52	$[2^{26}]$					(2,20)	<b>(54,20)</b>
53	$[2^{26}1]$					(1,16)	<b>(54,16)</b>
54	$[2^{27}]$					(0,12)	<b>(54,12)</b>
55	$[2^{27}1]$					(0,6)	<b>(55,6)</b>
56	$[2^{28}]$					(0,0)	<b>(56,0)</b>

Πίνακας 7: Μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις μεγίστου βάρους ( $hw$ ) στους φλοιούς του τρισδιάστατου ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή [85]. Στους πρώτους 4 φλοιούς έχουν προστεθεί χάρην συγκρίσεως και οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις ( $C$ ) οι οποίες παρουσιάζουν την μέγιστη ιδιοτιμή του δεύτερης τάξης τελεστή Casimir της  $SU(3)$ .

Οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις των πινάκων 6 και 7 έχουν υπολογιστεί με τον κώδικα [129]. Αναλυτικά αποτελέσματα μπορούν να βρεθούν στην διπλωματική εργασία [130].

### 3.5 Υπολογισμός της παραμόρφωσης

Έχει ήδη αναφερθεί ότι για τους τετραπολικώς παραμορφωμένους πυρήνες οι χβαντικοί αριθμοί  $(\lambda, \mu)$  συνδέονται με το σχήμα του πυρήνα. Για κάθε πυρήνα τα  $(\lambda_p, \mu_p)$  της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης που εκφράζει τα πρωτόνια προστίθενται με τα  $(\lambda_n, \mu_n)$  της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης που εκφράζει τα νετρόνια και έτσι προκύπτει η περιγραφή του πυρήνα από το ζεύγος των αριθμών  $(\lambda, \mu) = (\lambda_p + \lambda_n, \mu_p + \mu_n)$ .

Χρησιμοποιώντας το πρόβλημα του συμπαγούς περιστροφέα [131], θα γίνει σύγκριση του γεωμετρικού προτύπου με αυτό του συλλογικού [132, 133, 134, 135]. Εφόσον περιγράφεται το ίδιο φυσικό πρόβλημα, οι αναλλοίωτες ποσότητες τους θα πρέπει να είναι ίσες.

Στο γεωμετρικό πρότυπο υπάρχουν δύο αναλλοίωτες ποσότητες [132]:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \rightarrow (k\beta)^2, \quad (41)$$

$$\lambda_1 * \lambda_2 * \lambda_3 \rightarrow (k\beta)^3 \cos(3\gamma), \quad (42)$$

όπου  $k = \frac{5}{9\pi}(A\bar{\Gamma}^2)^2$ ,  $A$  ο μαζικός αριθμός,  $\beta$  η απόκλιση από την σφαιρικότητα,  $\bar{\Gamma}^2$  το τετράγωνο της μέσης ακτίνας του πυρήνα με  $\bar{\Gamma}^2 = 0.86 * A^{\frac{1}{3}}$  [136, 137, 138] και  $\gamma$  η γωνία που δείχνει το είδος της παραμόρφωσης του πυρήνα.

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενες ενότητες, στο συλλογικό πρότυπο, ο συμπαγής περιστροφέας έχει αναλλοίωτες ποσότητες τους τελεστές Casimir της SU(3) [132]:

$$C_2 = \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3(\lambda + \mu), \quad (43)$$

$$C_3 = (\lambda - \mu)(\lambda + 2\mu + 3)(2\lambda + \mu + 3). \quad (44)$$

Συνδυάζοντας και επιλύοντας τις εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στο γεωμετρικό αλλά και στο συλλογικό πρότυπο περιγραφής των παραμορφωμένων πυρήνων, εξάγουμε τις παρακάτω εξισώσεις [132]:

$$\lambda_1 = -\frac{(\lambda - \mu)}{3}, \quad \lambda_2 = -\frac{(\lambda + 2\mu + 3)}{3}, \quad \lambda_3 = \frac{(2\lambda + \mu + 3)}{3}, \quad (45)$$

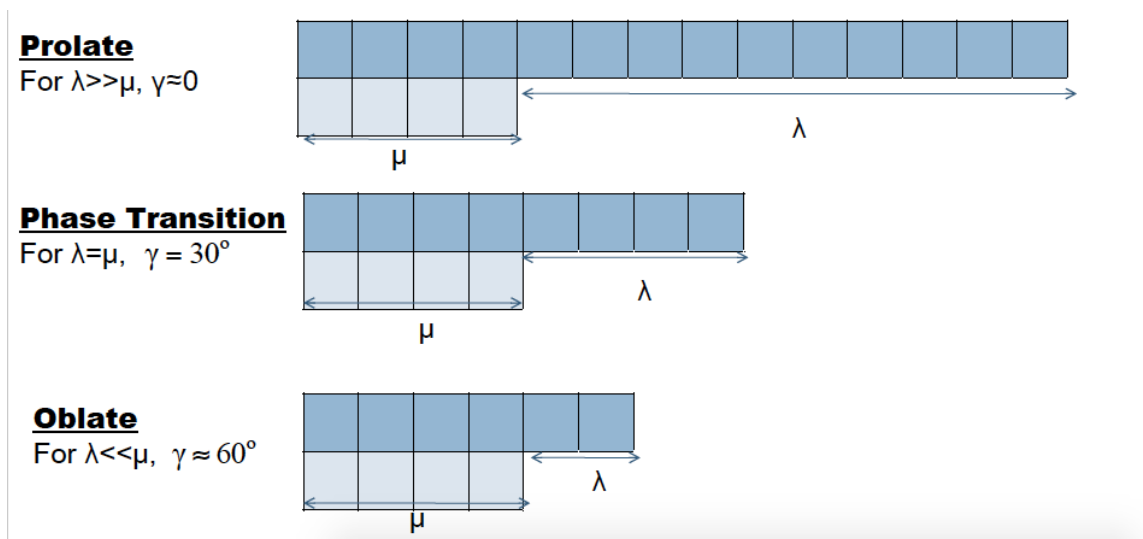
$$\beta^2 = \frac{4p}{5(A\bar{\Gamma}^2)^2}(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3(\lambda + \mu) + 3), \quad (46)$$

$$\gamma = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{3}(\mu + 1)}{2\lambda + \mu + 3} \right). \quad (47)$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις σε συνδυασμό με τα  $(\lambda, \mu)$  των πυρήνων μπορούν να μας δώσουν ποσοτική περιγραφή της παραμόρφωσης κάθε μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης. Ακολουθεί η διερεύνηση κάποιων ειδικών περιπτώσεων:

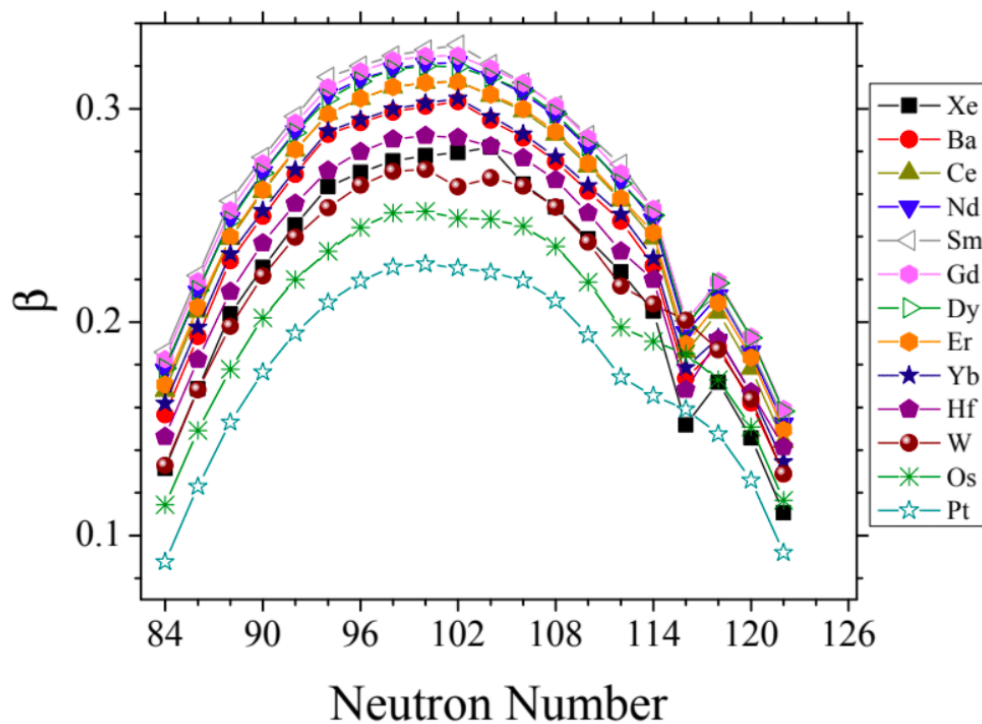
- Για  $\lambda \gg \mu$  προκύπτει  $\gamma \simeq 0$ , ενώ για  $\lambda > \mu$  προκύπτει  $0^\circ < \gamma < 30^\circ$ , που αντιστοιχούν σε ωσειδές σχήμα.
- Για  $\lambda \ll \mu$  προκύπτει  $\gamma \simeq \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^\circ$ , ενώ για  $\lambda < \mu$  η σχέση δίνει  $30^\circ < \gamma < 60^\circ$ , που αντιστοιχούν σε πεπλατυσμένο σχήμα.
- Για  $\lambda = \mu$  προκύπτει  $\gamma = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 30^\circ$ , το οποίο οδηγεί σε μέγιστη τριαξονικότητα στο σχήμα.

. Αυτές οι τρεις περιπτώσεις εικονίζονται στο σχήμα 6.



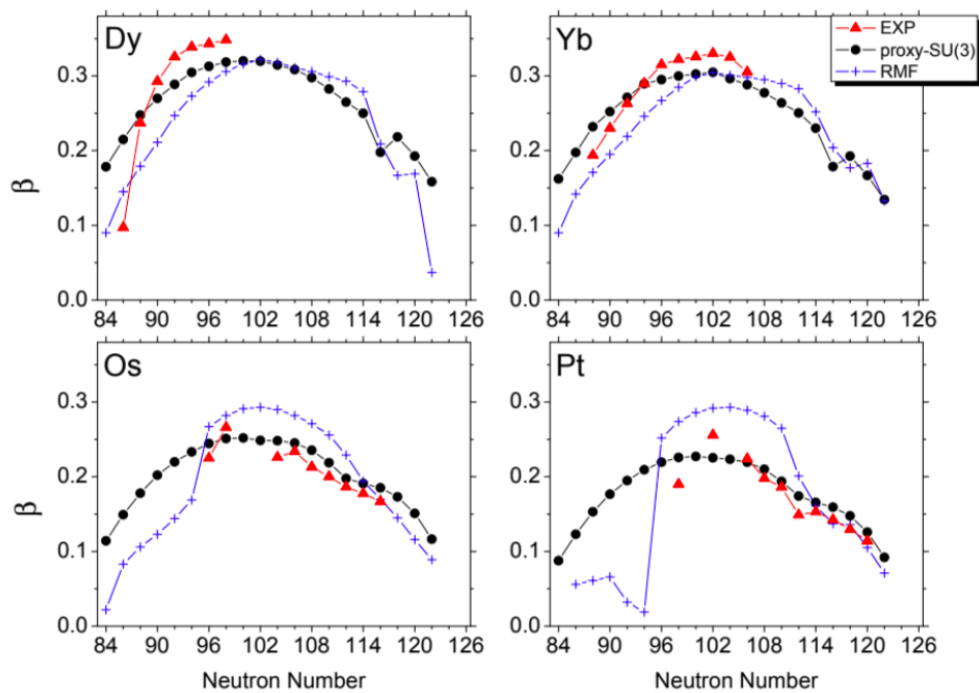
Σχήμα 6: Διαγράμματα Young για ωσειδείς, τριαξονικούς, και πεπλατυσμένους πυρήνες.

Στο σχήμα 7 φαίνονται οι προβλέψεις της proxy-SU(3) για διαφορετικές σειρές ισοτόπων. Παρατηρείται μια χαρακτηριστική συμπεριφορά για  $N = 116$ , η οποία σηματοδοτεί την αλλαγή φάσης/σχήματος από ωσειδές σε πεπλατυσμένο, η οποία θα συζητηθεί εκτενέστερα στο κεφάλαιο 3.6

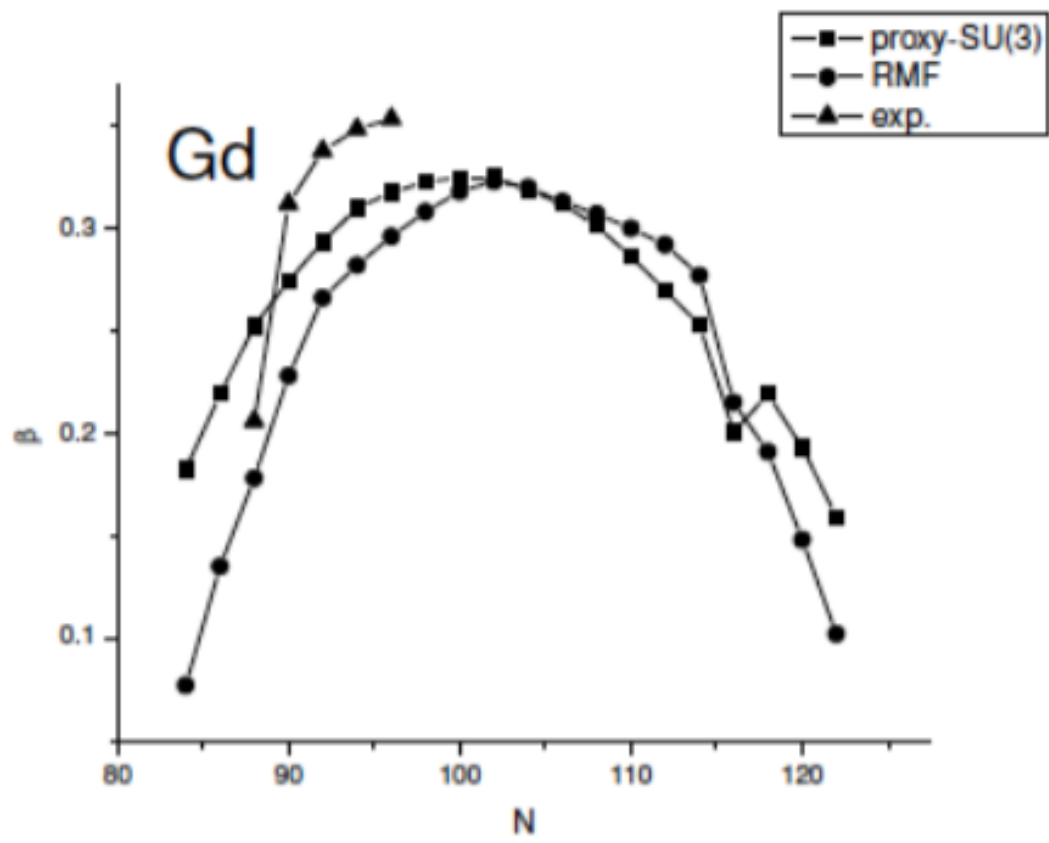


Σχήμα 7: Παραμόρφωση  $\beta$  στην θεμελιώδη κατάσταση των πυρήνων για διάφορες σειρές ισotόπων [11]. Το κρίσιμο σημείο αλλαγής φάσης/σχήματος από ωσειδές σε πεπλατυσμένο για τον φλοιό νετρονίων 82-126 βρίσκεται στα 116 νετρόνια.

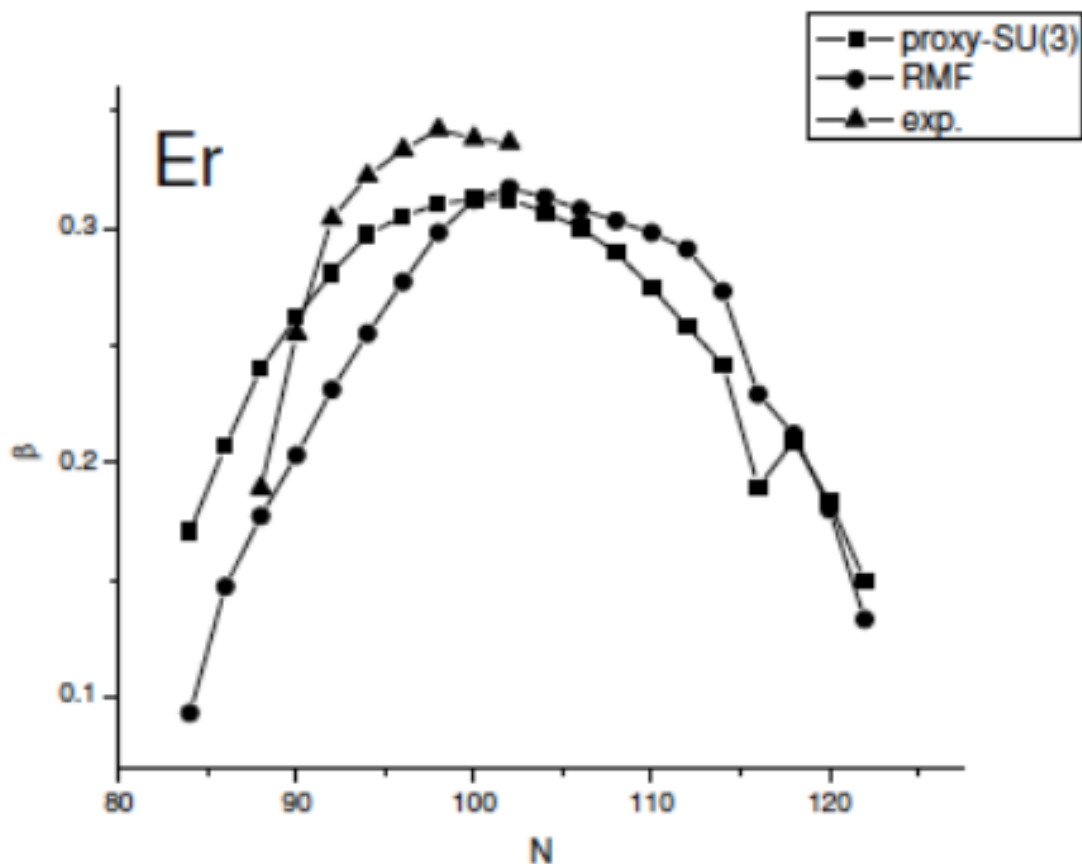
Στα σχήματα 8 - 10 συγκρίνονται τα πειραματικά δεδομένα [139] και τα αποτελέσματα του σχετικιστικού μέσου πεδίου (RMF) [140] με αυτά της proxy-SU(3). Παρατηρούμε ότι η proxy-SU(3) βρίσκεται σε καλή συμφωνία τόσο με τα πειραματικά δεδομένα, όσο και με τις προβλέψεις του σχετικιστικού μέσου πεδίου. Πρέπει να τονιστεί ότι οι προβλέψεις της proxy-SU(3) ΔΕΝ περιέχουν ελεύθερες παραμέτρους, αλλά προκύπτουν από τις ιδιότητες της συμμετρίας και μόνον. Η συμφωνία είναι καλύτερη στο δεύτερο ήμισυ του φλοιού, ενώ οι μεγαλύτερες αποκλίσεις παρατηρούνται στους ελαφρύτερους πυρήνες, ενδεχομένως λόγω της απουσίας της αλληλεπίδρασης σύζευξης (pairing) από το πρότυπο της proxy-SU(3).



Σχήμα 8: Σύγκριση της proxy-SU(3) [11] με τα πειραματικά δεδομένα [139] και τα αποτελέσματα του σχετικιστικού μέσου πεδίου (RMF) [140].



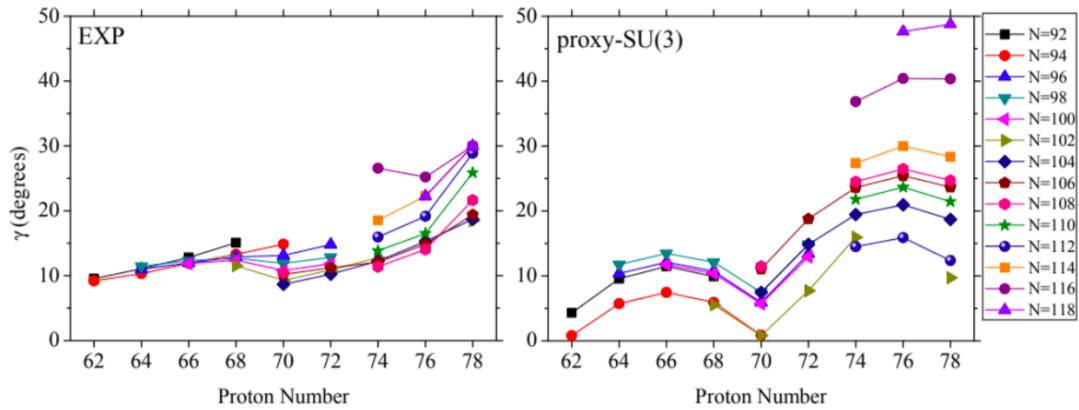
Σχήμα 9: Σύγκριση της proxy-SU(3) [11] με τα πειραματικά δεδομένα [139] και τα αποτελέσματα του σχετικιστικού μέσου πεδίου (RMF) [140].



Σχήμα 10: Σύγκριση της proxy-SU(3) [11] με τα πειραματικά δεδομένα [139] και τα αποτελέσματα του σχετικιστικού μέσου πεδίου (RMF) [140].

Στο σχήμα 11 καταγράφονται σχηματικά οι προβλέψεις της proxy-SU(3) για την συλλογική ποσότητα  $\gamma$  για διάφορες σειρές ισοτόπων και συγκρίνονται με εκτιμήσεις της τιμής του  $\gamma$  που έχουν παραχθεί από πειραματικά δεδομένα με την μέθοδο που περιγράφεται στην εργασία [11]. Στον κατακόρυφο άξονα είναι η γωνία  $\gamma$  που δείχνει το είδος της παραμόρφωσης του πυρήνα. Η γωνία  $\gamma$  έχει μια κυματοειδή μορφή. Παρουσιάζει ελάχιστο εκεί όπου  $\mu = 0$ . Σε αυτές τις περιπτώσεις η κυματοσυνάρτηση της SU(3) είναι πλήρως συμμετρική. Η ποιοτική συμφωνία με τις εμπειρικές τιμές είναι ικανοποιητική.





Σχήμα 11: Αποτελέσματα της proxy-SU(3) για την συλλογική ποσότητα  $\gamma$  για βαρείς πυρήνες και σύγκρισή τους με εμπειρικές τιμές του  $\gamma$  που έχουν εξαχθεί από πειραματικά δεδομένα [11].

Για τους προαναφερθέντες υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκαν οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις  $(\lambda, \mu)$  πυρήνων με πρωτόνια στο φλοιό 50-82 και νετρόνια στον φλοιό 82-126, οι οποίες εμφανίζονται στον πίνακα 8. Με έντονο χρώμα τονίζονται οι περιπτώσεις με  $R_{4/2} \geq 2.5$ , με \* τονίζονται οι πυρήνες με  $2.8 > R_{4/2} > 2.5$ , και με \*\* τονίζονται οι λίγοι πυρήνες με  $R_{4/2} < 2.5$ . Οι πυρήνες που το σχήμα τους είναι πεπλατυσμένο υπογραμμίζονται.

$N$	$N_{\text{val}}$	$Z$	$Z_{\text{val}}$	irrep	Ba	Ce	Nd	Sm	Gd	Dy	Er	Yb	Hf	W	Os	Pt
					56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78
88	6	(24,0)	(18,0)	(18,0)	(42,0)*	(42,4)*	(44,4)*		(20,6)	(18,8)	(18,6)	(20,0)	(12,8)	(6,12)	(2,12)	(0,8)
90	8	(26,4)	(18,4)	(18,4)	<b>(44,4)</b>	<b>(44,8)</b>	<b>(46,8)</b>	<b>(50,4)</b>	<b>(46,10)</b>	<b>(44,12)</b>	(44,10)*	(46,4)*	(38,12)*			
92	10	(30,4)	(20,0)	(20,0)	<b>(48,4)</b>	<b>(48,8)</b>	<b>(50,8)</b>	<b>(54,4)</b>	<b>(50,10)</b>	<b>(48,12)</b>	<b>(48,10)</b>	<b>(50,4)</b>	(42,12)*			
94	12	(36,0)	(24,0)	(24,0)	(54,0)	<b>(54,4)</b>	<b>(56,4)</b>	<b>(60,0)</b>	<b>(56,6)</b>	<b>(54,8)</b>	<b>(54,6)</b>	<b>(56,0)</b>	<b>(48,8)</b>	<b>(42,12)</b>	(38,12)*	
96	14	(34,6)	(28,0)	(28,0)	(52,6)	(52,10)	<b>(54,10)</b>	<b>(58,6)</b>	<b>(54,12)</b>	<b>(52,14)</b>	<b>(52,12)</b>	<b>(54,6)</b>	<b>(46,14)</b>	<b>(40,18)</b>	(36,18)*	
98	16	(34,8)	(30,0)	(30,0)	(52,8)	(52,12)	(54,12)	<b>(58,8)</b>	<b>(54,14)</b>	<b>(52,16)</b>	<b>(52,14)</b>	<b>(54,8)</b>	<b>(46,16)</b>	<b>(40,20)</b>	(36,20)*	
100	18	(36,6)	(32,0)	(32,0)	(54,6)	(54,10)	(56,10)	(60,6)	<b>(56,12)</b>	<b>(54,14)</b>	<b>(54,12)</b>	<b>(56,6)</b>	<b>(48,14)</b>	<b>(42,18)</b>	<b>(38,18)</b>	(36,14)*
102	20	(40,0)	(34,0)	(34,0)	(58,0)	(58,4)	(60,4)	(64,0)	<b>(60,6)</b>	<b>(58,8)</b>	<b>(58,6)</b>	<b>(60,0)</b>	<b>(52,8)</b>	<b>(46,12)</b>	<b>(42,12)</b>	(40,8)*
104	22	(34,8)	(36,0)	(36,0)	(52,8)	(52,12)	(54,12)	(58,8)	(54,14)	<b>(52,16)</b>	<b>(52,14)</b>	<b>(54,8)</b>	<b>(46,16)</b>	<b>(40,20)</b>	<b>(36,20)</b>	(34,16)*
106	24	(30,12)	(38,0)	(38,0)	(48,12)	(48,16)	(50,16)	(54,12)	(50,18)	(48,20)	<b>(48,18)</b>	<b>(50,12)</b>	<b>(42,20)</b>	<b>(36,24)</b>	<b>(32,24)</b>	(30,20)*
108	26	(28,12)	(40,0)	(40,0)	(46,12)	(46,16)	(48,16)	(52,12)	(48,18)	(46,20)	(46,18)	<b>(48,12)</b>	<b>(40,20)</b>	<b>(34,24)</b>	<b>(30,24)</b>	(28,20)*
110	28	(28,8)	(42,0)	(42,0)	(46,8)	(46,12)	(48,12)	(52,8)	(48,14)	(46,16)	(46,14)	(48,8)	<b>(40,16)</b>	<b>(34,20)</b>	<b>(30,20)</b>	(28,16)*
112	30	(30,0)	(44,0)	(44,0)	(48,0)	(48,4)	(50,4)	(54,0)	(50,6)	(48,8)	(48,6)	(50,0)	<b>(42,8)</b>	<b>(36,12)</b>	<b>(32,12)</b>	(30,8)**
114	32	(20,10)	(46,0)	(46,0)	(38,10)	(38,14)	(40,14)	(44,10)	(40,16)	(38,18)	(38,16)	(40,10)	(32,18)	<b>(26,22)</b>	<b>(22,22)</b>	(20,18)**
116	34	(12,16)	(48,0)	(48,0)	(30,6)	(30,10)	(32,10)	(36,6)	(32,12)	(30,14)	(30,12)	(32,6)	(24,14)	(18,28)*	<b>(14,28)</b>	(12,24)**
118	36	(6,18)	(50,0)	(50,0)	(24,18)	(24,22)	(26,22)	(30,18)	(26,24)	(24,16)	(24,24)	(26,18)	(18,26)	(12,30)	(8,30)*	(6,26)**
120	38	(2,16)	(52,0)	(52,0)	(20,16)	(20,20)	(22,20)	(26,16)	(22,22)	(20,24)	(20,22)	(22,16)	(14,24)	(8,28)	(4,28)*	(2,24)**

Πίνακας 8: Μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις  $(\lambda, \mu)$  πυρήνων σπανίων γαιών με 50-82 πρωτόνια και 82-126 νετρόνια [11].

Παρόμοια αποτελέσματα παρατηρούνται και στον πίνακα 9, όπου τα πρωτόνια ανήκουν στον φλοιό 50-82 και τα νετρόνια επίσης στον φλοιό 50-82.

			Ba	Ce	Nd	Sm	Gd	Dy	Er	Yb	Hf	W	Os	Pt
		Z	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78
		Z <sub>val</sub>	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
N	N <sub>val</sub>	irrep	(18,0)	(18,4)	(20,4)	(24,0)	(20,6)	(18,8)	(18,6)	(20,0)	(12,8)	(6,12)	(2,12)	(0,8)
56	6	(18,0)	(36,0)	(36,4)	(38,4)	(42,0)	(38,6)	(36,8)	(36,6)	(38,0)	(30,8)	(24,12)	(20,12)	(18,8)
58	8	(18,4)	(36,4)	(36,8)	(38,8)	(42,4)	(38,10)	(36,12)	(36,10)	(38,4)	(30,12)	(24,16)	(20,16)	(18,12)
60	10	(20,4)	(28,4)	(38,8)	(40,8)	(44,4)	(40,10)	(38,12)	(38,10)	(40,4)	(32,12)	(26,16)	(22,16)	(20,12)
62	12	(24,0)	<b>(42,0)</b>	(42,4)	(44,4)	(48,0)	(44,6)	(42,8)	(42,6)	(44,0)	(36,8)	(30,12)	(26,12)	(24,8)
64	14	(20,6)	<b>(38,6)</b>	<b>(38,10)</b>	(40,10)	(44,6)	(40,12)	(38,14)	(38,12)	(40,6)	(32,14)	(26,18)	(22,18)	(20,14)
66	16	(18,8)	<b>(36,8)</b>	<b>(36,12)</b>	(38,12)	(32,8)	(38,14)	(36,16)	(36,14)	(38,8)	(30,16)	(24,20)	(20,20)	(18,16)
68	18	(18,6)	<b>(36,6)</b>	<b>(36,10)</b>	<b>(38,10)</b>	(42,6)	(38,12)	(36,14)	(36,12)	(38,6)	(30,14)	(24,18)	(20,18)	(18,14)
70	20	(20,0)	(38,0)*	<b>(38,4)</b>	<b>(40,4)</b>	<b>(44,0)</b>	(40,6)	(38,8)	(38,6)	(40,0)	(32,8)	(26,12)	(22,12)	(20,8)
72	22	(12,8)	(30,8)*	(30,12)*	<b>(32,12)</b>	<b>(36,8)</b>	(32,14)	(30,16)	(30,14)	(32,8)	(24,16)	(18,20)	(14,20)	(12,16)
74	24	(6,12)	(24,12)*	(24,16)*	(26,16)*	(30,12)*	(26,18)*	<b>(24,20)</b>	(24,18)	(26,12)	(18,20)	(12,24)	(8,24)	(6,20)
76	26	(2,12)		(20,16)*	(22,16)*	(26,12)*	(22,18)*	(20,20)*	(20,18)	(22,12)	(14,20)	(8,24)	(4,24)	(2,20)
78	28	(0,8)							(18,14)	(20,8)	(12,16)	(6,20)	(2,20)	(0,16)

Πίνακας 9: Μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις ( $\lambda$ ,  $\mu$ ) πυρήνων σπανίων γαιών με 50-82 πρωτόνια και 50-82 νετρόνια [11].

Πρόσθετα αποτελέσματα για τις συλλογικές ποσότητες  $\beta$  και  $\gamma$  στα πλαίσια της proxy-SU(3) και σύγκρισής τους με πειραματικά δεδομένα και αποτελέσματα άλλων θεωρητικών υπολογισμών μπορούν να βρεθούν στις εργασίες [141, 142, 143, 144].

### 3.6 Αλλαγή φάσης/σχήματος του πυρήνα

Οι αλλαγές φάσης/σχήματος έχουν γίνει αντικείμενο εντατικής μελέτης στα πλαίσια της πυρηνικής δομής [16, 17, 18]. Αλλαγές φάσης/σχήματος πρώτης τάξης (στην ταξινόμηση του Ehrenfest) από σφαιρικούς σε ωσειδείς πυρήνες και δεύτερης τάξης από σφαιρικούς σε γ-ασταθείς πυρήνες (επιρρεπείς σε τριαξονική παραμόρφωση) βρέθηκαν [27] αρχικά στα πλαίσια του Interacting Boson Model (IBM) [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]. Στη συνέχεια μελετήθηκαν στα πλαίσια της Χαμιλτονιανής του Bohr [1, 2] οι συμμετρίες κρίσιμου σημείου  $X(5)$  [30, 31] και  $E(5)$  [28, 29], οι οποίες αντιστοιχούν στις προαναφερθείσες αλλαγές φάσης. Η θεωρητική ανάπτυξη της  $E(5)$  μπορεί να ακολουθηθεί στις εργασίες [28, 70, 71, 72, 73, 74, 74, 75, 76, 77, 145, 146, 147, 148, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163], ενώ αυτή της  $X(5)$  στις εργασίες [30, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 163, 176, 177, 178, 179, 180]. Πειραματικές ενδείξεις για την συμμετρία κρίσιμου σημείου  $E(5)$  μπορούν να βρεθούν στις εργασίες [29, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191], ενώ για την  $X(5)$  στις εργασίες [31, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207]. Η συμμετρία κρίσιμου σημείου  $E(5)$  έχει επεκταθεί και σε περιττούς πυρήνες [208, 209, 210, 211, 212, 213].

Στα πλαίσια της Χαμιλτονιανής του Bohr προέκυψε μια ακόμα αλλαγή φάσης, αυτή από ωσειδείς σε πεπλατυσμένους πυρήνες, η οποία περιγράφεται με την κρίσιμη συμμετρία  $Z(5)$  [214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222]. Πειραματικές ενδείξεις για αυτή την αλλαγή φάσης μπορούν να βρεθούν στις εργασίες [214, 216].

Η αλλαγή φάσης από ωσειδείς σε πεπλατυσμένο σχήμα έχει θεωρηθεί και από πολλές άλλες διαφορετικές σκοπιές, χρησιμοποιώντας θεωρίες τόσο μέσου πεδίου [223, 224, 225, 226, 227, 228] όσο και μικροσκοπικές, δηλαδή το πρότυπο φλοιών [229]. Οι προβλέψεις τους συγκλίνουν στην μετάβαση από ωσειδείς σε πεπλατυσμένο σχήμα στην περιοχή του  $N = 116$ , σε συμφωνία με τα υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα [230, 231, 232, 233, 234]. Στα πλαίσια του Interacting Boson Model (IBM) θεωρήθηκε η δυνατότητα η δυναμική συμμετρία  $O(6)$  να αποτελεί την συμμετρία κρίσιμου σημείου για την αλλαγή φάσης/σχήματος από ωσειδείς σε πεπλατυσμένους πυρήνες [235, 236, 237, 238, 239, 240]. Τα πειραματικά δεδομένα για μια αλυσίδα πυρήνων που διαφέρουν κατά 2 πρωτόνια ή δύο νετρόνια συμφωνούν με την σχετική πρόβλεψη του IBM [234].

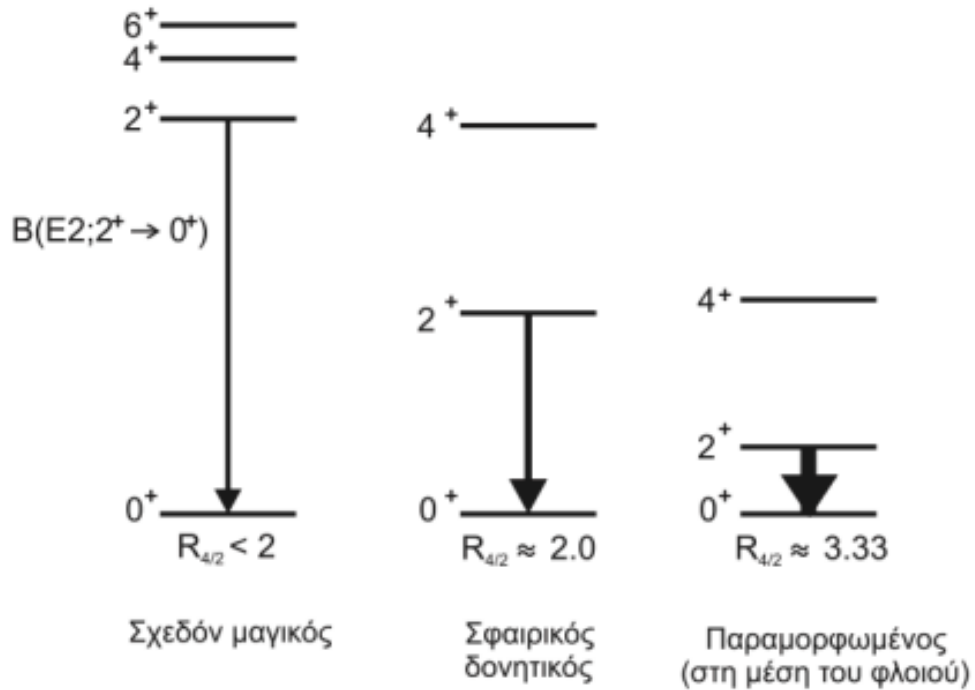
Όπως θα δούμε στο παρόν κεφάλαιο, η proxy-SU(3), βασιζόμενη μόνο στους χβαντικούς αριθμούς  $(\lambda, \mu)$  και χωρίς να χρησιμοποιεί ελεύθερες παραμέτρους, προβλέπει το κρίσιμο σημείο αλλαγής φάσης/σχήματος σε κάθε αλυσίδα ισοτόπων σωστά και σε συμφωνία τόσο με τους μικροσκοπικούς υπολογισμούς που είχαν γίνει στο παρελθόν, όσο και με τα υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα.

Στην περιγραφή που θα ακολουθήσει, είναι χρήσιμος ο λόγος  $R_{4/2}$ , ο οποίος ορίζεται ως ο λόγος των ενεργειών της  $4^+$  ενεργειακής στάθμης προς την  $2^+$  της θεμελιώδους ζώνης, συμβολικά

$$R_{4/2} = \frac{E(4_1^+)}{E(2_1^+)}. \quad (48)$$

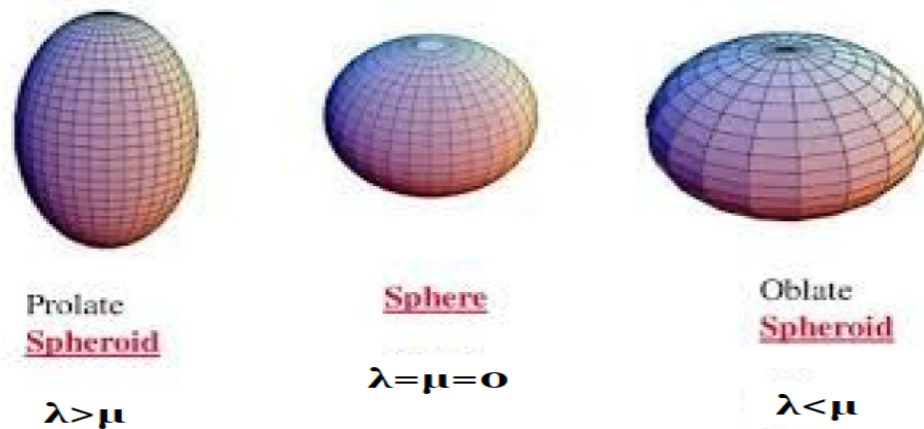
Ο παραπάνω λόγος παίρνει τιμές μικρότερες του 2 για πυρήνες οι οποίοι βρίσκονται κοντά σε

κλειστούς φλοιούς. Αν  $2 < R_{4/2} < 2.4$  τότε ο πυρήνας αναμένεται να έχει φάσμα κοντά στο δονητικό, ενώ για τιμές μεγαλύτερες του 3 το φάσμα αναμένεται κοντά στο περιστροφικό, όπως φαίνεται στο σχήμα 12.



Σχήμα 12: Αλλαγή του φάσματος και του λόγου  $R_{4/2}$  κατά την μετάβαση από σχεδόν μαγικούς πυρήνες σε παραμορφωμένους. [268]

Όπως έχει ήδη συζητηθεί, πυρήνες με  $\lambda > \mu$  έχουν ωσειδές σχήμα, ενώ όταν  $\lambda < \mu$ , το σχήμα είναι πεπλατυσμένο. Στους πυρήνες που ισχύει  $\lambda = \mu = 0$  το σχήμα είναι σφαιρικό, δηλαδή δεν υπάρχει καθόλου παραμόρφωση. Οι τρεις αυτές περιπτώσεις απεικονίζονται στο σχήμα 13.



Σχήμα 13: Αλλαγή σχήματος του πυρήνα με βάση τους κβαντικούς αριθμούς ( $\lambda, \mu$ ).

Στους πίνακες 10 - 13 εμφανίζονται οι σειρές ισοτόπων W, Os, Pt, καθώς και η αλυσίδα πυρήνων που έχει μελετηθεί στην εργασία [234]. Οι κβαντικοί αριθμοί ( $\lambda, \mu$ ) είναι αυτοί που προκύπτουν από την proxy-SU(3), ενώ οι λόγοι  $R_{4/2}$  είναι πειραματικοί [241]. Σε όλες τις περιπτώσεις πεπλατυσμένα σχήματα ( $\lambda < \mu$ ) αρχίζουν να εμφανίζονται στο  $N = 116$ , σε πλήρη συμφωνία με την χαρακτηριστική συμπεριφορά της παραμόρφωσης  $\beta$  που εμφανίστηκε στο σχήμα 9 αυτού του κεφαλαίου.

N	96	98	100	102	104	106	108	110	112	114	<b>116</b>	118
Nucleus	<sup>172</sup> Os	<sup>174</sup> Os	<sup>176</sup> Os	<sup>178</sup> Os	<sup>180</sup> Os	<sup>182</sup> Os	<sup>184</sup> Os	<sup>186</sup> Os	<sup>188</sup> Os	<sup>190</sup> Os	<sup>192</sup> Os	<sup>194</sup> Os
(λ,μ)	(36,18)	(36,20)	(38,18)	(42,12)	(36,20)	(32,24)	(30,24)	(30,20)	(32,12)	(22,22)	<b>(14,28)</b>	(8,30)
R <sub>4/2</sub>	2.661	2.740	2.925	3.016	3.091	3.154	3.204	3.165	3.083	2.934	<b>2.820</b>	2.753

Πίνακας 10: Αλλαγή φάσης/σχήματος από ωσειδές σε πεπλατυσμένο σχήμα για τα ισότοπα του Os.

N	108	108	110	112	112	114	<b>116</b>	116	118	118	120
Nucleus	<sup>180</sup> Hf	<sup>182</sup> W	<sup>184</sup> W	<sup>186</sup> W	<sup>188</sup> Os	<sup>190</sup> Os	<sup>192</sup> Os	<sup>194</sup> Pt	<sup>196</sup> Pt	<sup>198</sup> Hg	<sup>200</sup> Hg
(λ,μ)	(40,20)	(34,24)	(34,20)	(36,12)	(32,12)	(22,22)	<b>(14,28)</b>	(12,24)	(6,26)	(6,18)	(2,16)
R <sub>4/2</sub>	3.307	3.291	3.274	3.242	3.083	2.934	<b>2.820</b>	2.470	2.465	2.546	2.574

Πίνακας 11: Αλλαγή φάσης/σχήματος από ωσειδές σε πεπλατυσμένο σχήμα για την αλυσίδα ισωτόπων Hf-Hg.

N	94	96	98	100	102	104	106	108	110	112	114	<b>116</b>	118
Nucleus	<sup>168</sup> W	<sup>170</sup> W	<sup>172</sup> W	<sup>174</sup> W	<sup>176</sup> W	<sup>178</sup> W	<sup>180</sup> W	<sup>182</sup> W	<sup>184</sup> W	<sup>186</sup> W	<sup>188</sup> W	<sup>190</sup> W	<sup>192</sup> W
(λ,μ)	(42,12)	(40,18)	(40,20)	(42,18)	(46,12)	(40,20)	(36,24)	(34,24)	(34,20)	(36,12)	(26,22)	<b>(18,28)</b>	(12,30)
R <sub>4/2</sub>	2.815	2.953	3.067	3.172	3.209	3.241	3.262	3.291	3.274	3.242	3.091	<b>2.725</b>	-

Πίνακας 12: Αλλαγή φάσης/σχήματος για τα ισότοπα του W.

N	106	108	110	112	114	<b>116</b>	118	120	122
Nucleus	<sup>184</sup> Pt	<sup>186</sup> Pt	<sup>188</sup> Pt	<sup>190</sup> Pt	<sup>192</sup> Pt	<sup>194</sup> Pt	<sup>196</sup> Pt	<sup>198</sup> Pt	<sup>200</sup> Pt
(λ,μ)	(30,18)	(28,20)	(28,16)	(30,8)	(20,18)	<b>(12,24)</b>	(6,26)	(2,24)	(0,18)
R <sub>4/2</sub>	2.675	2.559	2.525	2.492	2.479	<b>2.470</b>	2.465	2.419	2.358

Πίνακας 13: Αλλαγή φάσης/σχήματος των ισωτόπων του Pt.

Σε όλους τους παραπάνω πίνακες με σκούρο έντονο χρώμα εμφανίζεται η περιοχή αλλαγής φάσης/σχήματος του πυρήνα στα 116 νετρόνια. Παρατηρούμε ότι η αλλαγή φάσης/σχήματος προκύπτει σε περιοχή όπου ο λόγος  $R_{4/2}$  βαίνει μειούμενος με αυξανόμενη τιμή του αριθμού νετρονίων, πράγμα αναμενόμενο, αφού οι πυρήνες αυτοί βρίσκονται πάνω από το μέσον ( $N = 104$ ) του φλοιού σθένους των νετρονίων, οπότε η παραμόρφωσή τους μειώνεται όσο περισσότερο προσεγγίζεται το άνω όριο του φλοιού.

### 3.7 Η επικράτηση των ωοειδών επί των πεπλατυσμένων σχημάτων

Ένα από τα επί δεκαετίες αναπάντητα προβλήματα της πυρηνικής φυσικής είναι η πειραματική διαπίστωση ότι η θεμελιώδης κατάσταση μεγάλης πλειοψηφίας των άρτιων-άρτιων πυρήνων έχει ωοειδές σχήμα, ενώ πεπλατυσμένο σχήμα παρουσιάζεται στις θεμελιώδεις καταστάσεις σχετικά λίγων άρτιων-άρτιων πυρήνων. Καίτοι έχουν πραγματοποιηθεί σχετικές μελέτες στα πλαίσια του προτύπου Nilsson [33, 242], καθώς επίσης και στα πλαίσια της μεθόδου Nilsson–Strutinsky, όπου μελετήθηκε η επιρροή της αλληλεπίδρασης σπιν-τροχιάς [243, 244, 245], το ερώτημα θεωρείται ακόμα αναπάντητο [246].

Από τους πίνακες 8 και 9 του παρόντος κεφαλαίου η επικράτηση των ωοειδών έναντι των πεπλατυσμένων σχημάτων καθίσταται προφανής. Πεπλατυσμένα σχήματα εμφανίζονται μόνο όταν και τα πρωτόνια και τα νετρόνια σθένους ενός πυρήνα βρίσκονται κοντά στο τέλος του αντίστοιχου φλοιού. Τα βαθύτερα αίτια αυτού του φαινομένου φαίνονται στο σχήμα 8 του παρόντος κεφαλαίου και πηγάζουν από την επικράτηση των μη αναγωγισίμων αναπαραστάσεων μεγίστου βάρους έναντι των αναπαραστάσεων που έχουν την μέγιστη ιδιοτιμή του δευτερης τάξης τελεστή Casimir της  $SU(3)$ .

Οι συνέπειες αυτού του μαθηματικού αποτελέσματος, το οποίο εδράζεται στην συμμετρία  $SU(3)$  και την απαγορευτική αρχή του Pauli, δεν περιορίζονται στα όρια της πυρηνικής φυσικής, αλλά βρίσκουν ευρύτερη εφαρμογή. Ένα παράδειγμα αποτελούν τα ατομικά συσσωματώματα [247, 248, 249, 250, 251, 252], ιδιαίτερα αυτά των αλκαλίων (Na, K). Σε αυτά τα ατομικά συσσωματώματα παρατηρούνται πειραματικά [253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260] μαγικοί αριθμοί, οι οποίοι διαφέρουν από τους μαγικούς αριθμούς της πυρηνικής φυσικής, αφού στην περίπτωση των ατομικών συσσωματωμάτων δεν υπάρχει αλληλεπίδραση σπιν-τροχιάς [252]. Μάλιστα μια από τις πρώτες θεωρητικές περιγραφές των ατομικών συσσωματωμάτων δόθηκε με το μοντέλο του Clemenger [247], το οποίο είναι το μοντέλο του Nilsson χωρίς την αλληλεπίδραση σπιν-τροχιάς. Στα ατομικά συσσωματώματα αλκαλίων παρατηρούνται πειραματικά [261, 262, 263, 264, 265] πεπλατυσμένα σχήματα κάτω από τους μαγικούς αριθμούς και ωοειδή σχήματα πάνω από αυτούς, σε πλήρη συμφωνία με τα ευρήματα του παρόντος κεφαλαίου για τους ατομικούς πυρήνες.



## 4 Ενέργειες σύνδεσης πυρήνων και διαχωρισμού νουκλεονίων

### 4.1 Ενέργεια σύνδεσης του πυρήνα

Κατά των σχηματισμό ενός πυρήνα  ${}^Z_A X_N$  θα περίμενε κανείς ότι η μάζα του θα είναι ίση με το άθροισμα των μαζών των συστατικών του:

$$m({}^Z_A X) = Zm_p + Zm_e + Nm_n,$$

όπου  $m_p$ ,  $m_e$ ,  $m_n$  η μάζα του πρωτονίου, ηλεκτρονίου, νετρονίου αντίστοιχα. Όμως η πειραματικά προσδιοριζόμενη μάζα του πυρήνα  ${}^Z_A X_N$  είναι μικρότερη από το άθροισμα των μαζών των συστατικών του. Αυτή η διαφορά στην μάζα,  $\Delta m$ , ονομάζεται έλλειμμα μάζας. Τέτοια απώλεια μάζας συμβαίνει χωρίς εξαίρεση κατά τον σχηματισμό όλων των πυρήνων από τα συστατικά τους νουκλεόνια.

Η ενέργεια που ισοδυναμεί στο έλλειμμα μάζας  $\Delta m$  ονομάζεται ενέργεια σύνδεσης (binding energy (BE)) του πυρήνα και είναι αυτή που χρειάζεται για να διασπαστεί ο πυρήνας. Η ενέργεια σύνδεσης αποτελεί σημαντικό χαρακτηριστικό κάθε πυρήνα (σταθερού ή ασταθούς) και συνδέεται άμεσα με τις πυρηνικές δυνάμεις. Επίσης αποτελεί μέτρο σταθερότητας του πυρήνα.

#### 4.1.1 Ισχυρή πυρηνική δύναμη

Η ισχυρή πυρηνική δύναμη εφαρμόζεται ανάμεσα στα νουκλεόνια του πυρήνα και τα συγκρατεί ώστε να συσταθεί ο πυρήνας. Η δύναμη αυτή προέρχεται από την αλληλεπίδραση μεταξύ κουάρκ και γκλουονίων και υπακούει στις εξισώσεις της κβαντικής χρωμοδυναμικής [269], οι οποίες δεν έχουν επιλυθεί ακόμα, οπότε η αλληλεπίδραση μεταξύ νουκλεονίων παραμένει άγνωστη. Παρ' όλα αυτά, κάποιες ιδιότητες του ενεργού δυναμικού, από το οποίο προέρχεται η ισχυρή αυτή πυρηνική δύναμη, είναι γνωστές [270, 271, 272] και έτσι υπάρχουν κάποια γενικά χαρακτηριστικά ανάλογα με την κλίμακα μεγέθους [273]:

- Για απόσταση μεταξύ των νουκλεονίων μεγαλύτερη των 2 fm ( $d > 2$  fm), κυριαρχεί η τανυστική δύναμη, η οποία παρουσιάζει εξάρτηση από το σπιν-ισοσπίν [274, 275].
- Για απόσταση  $1 \text{ fm} < d < 2 \text{ fm}$  μια ελκτική αλληλεπίδραση ανεξάρτητη από το σπιν-ισοσπιν συγκρατεί τα νουκλεόνια συνδεδεμένα [275, 276].
- Σε πολύ μικρές αποστάσεις  $d < 1 \text{ fm}$  εμφανίζεται μια ισχυρή απωστική δύναμη, κυρίως λόγω της απαγορευτικής αρχής του Pauli [277]. Η δύναμη αυτή εμφανίζεται ακόμα και μεταξύ πρωτονίων-νετρονίων, οφειλόμενη στα συστατικά τους [276, 278, 279].

Οι παραπάνω ιδιότητες της ισχυρής πυρηνικής δύναμης λαμβάνονται υπόψη στην συμμετρία SU(4) του Wigner [280] και στην SU(3) συμμετρία του Elliott [50, 51, 52, 53, 54, 55]. Πιο συγκεκριμένα, η τανυστική δύναμη λαμβάνεται υπ' όψιν στα πλαίσια του προτύπου φλοιών [3, 4, 5, 6] και του μοντέλου του Elliott μέσω της αλληλεπίδρασης σπιν-τροχιάς [274], ενώ η

ανεξάρτητη από το σπιν-ισοσπίν αλληλεπίδραση λαμβάνεται υπ' όψιν στα πλαίσια της συμμετρίας SU(4) του Wigner [280]. Τέλος η απωστική δύναμη σε πολύ μικρές αποστάσεις λαμβάνεται υπ' όψιν μέσω της απαγορευτικής αρχής του Pauli [277].

## 4.2 Υπολογισμός της ενέργειας σύνδεσης με την proxy-SU(3)

Για τον υπολογισμό της ενέργειας σύνδεσης του πυρήνα χρησιμοποιείται η πιο απλή χαμιλτονιανή του Elliott [50, 51, 52, 53, 281]:

$$H = H_0 - \frac{\chi}{2} \hat{Q}\hat{Q}, \quad (49)$$

όπου  $H_0$  είναι η χαμιλτονιανή του τρισδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή για το σύστημα πολλών σωματιδίων, η οποία δίνεται από την σχέση:

$$H_0 = \sum_{n=1}^A \left( \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{r}_i^2 \right), \quad (50)$$

όπου  $\hat{Q}$  ο τετραπολικός τελεστής και  $\mathbf{p}_i$ ,  $\mathbf{r}_i$ ,  $m$  η ορμή, η θέση και η μάζα του σωματιδίου αντίστοιχα, ενώ  $\omega$  είναι η συχνότητα ταλάντωσης και  $A$  είναι ο μαζικός αριθμός του πυρήνα.

Αν  $\hbar\omega = 1$ , τότε η παραπάνω εξίσωση έχει ιδιοτιμές  $N_0$ , οι οποίες υπολογίζονται από την έκφραση [282]

$$N_0 = \sum_{n=1}^A \left( \aleph_i + \frac{3}{2} \right), \quad (51)$$

όπου  $\aleph_i$  είναι ο αριθμός των κβάντων του αρμονικού ταλαντωτή για το  $i$ -οστό σωματίδιο. Η παράμετρος  $\frac{\chi}{2}$  είναι η ισχύς της τετραπολικής αλληλεπίδρασης  $\hat{Q}\hat{Q}$  και δίνεται από την έκφραση [283]

$$\frac{\chi}{2} = \frac{\hbar\omega}{8N_0}, \quad (52)$$

όπου [60]

$$\hbar\omega = \frac{41}{A^{\frac{1}{3}}} \text{MeV}. \quad (53)$$

Στην SU(3) συμμετρία του Elliott η κυματοσυνάρτηση των πολλών σωματιδίων περιγράφεται από τους κβαντικούς αριθμούς  $(\lambda, \mu)$ . Για την πυρηνική θεμελιώδη κατάσταση οι κβαντικοί αριθμοί  $(\lambda, \mu)$  αναφέρονται στην μη αναγωγίσιμη κατάσταση μέγιστου βάρους. Οι ιδιοτιμές του δεύτερης τάξης τελεστή Casimir της SU(3) δίνονται από την σχέση [9]

$$C_2 = \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu). \quad (54)$$

Αν  $L$  είναι η τροχιακή στροφορμή της πυρηνικής κατάστασης, τότε οι ιδιοτιμές της τετραπολικής αλληλεπίδρασης δίνονται από την σχέση [284]

$$QQ = 4C_2 - 3L(L + 1). \quad (55)$$

Υποθέτοντας ότι το βάθος του φρέατος στο μοντέλο του τρισδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι  $V_0$ , η ενέργεια σύνδεσης για έναν πυρήνα με  $Z$  πρωτόνια και  $N$  νετρόνια δίνεται από την σχέση:

$$BE(Z, N) = AV_0 - \left( H_0 - \frac{x}{2} QQ \right). \quad (56)$$

Η παραπάνω έκφραση αντιπροσωπεύει την ελάχιστη ενέργεια που κάποιος πρέπει να προσφέρει ώστε να εξάγει τα σωματίδια από το φρέαρ δυναμικού. Το βάθος του φρέατος προσεγγιστικά δίνεται από την σχέση [60]:

$$V_0 = 50 \left( 1 - \frac{N - Z}{A} \right) \text{ MeV}. \quad (57)$$

Για να πετύχουμε την αναγκαία ακρίβεια, στους υπολογισμούς της ενέργειας σύνδεσης με την  $proxy-SU(3)$  συμμετρία, η ποσότητα  $V_0$  θεωρείται ελεύθερη παράμετρος. Οι τιμές αυτής της παραμέτρου έχουν υπολογιστεί μέσω της πολυωνυμικής συνάρτησης:

$$V_0 = c_1 + c_2 N + c_3 N^2, \quad (58)$$

η οποία προσαρμόζεται στα πειραματικά δεδομένα. Στις σπάνιες γαίες η τιμή που προκύπτει από τις προσαρμογές είναι περίπου  $V_0 = 44 \text{ MeV}$ , ευρισκόμενη σε καλή συμφωνία με τις προβλέψεις της παραπάνω προσεγγιστικής εξίσωσης (57).

### 4.3 Υπολογισμός του $N_0$ στα τροχιακά του απλού αρμονικού ταλαντωτή

Η  $SU(3)$  συμμετρία του Elliott χρησιμοποιείται στους φλοιούς του τρισδιάστατου ιστροπικού αρμονικού ταλαντωτή [7, 8, 9], στους οποίους παρουσιάζονται οι μαγικοί αριθμοί 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168,... Κάθε φλοιός έχει εκφυλισμό  $(N + 1)(N + 2)$ .

Έτσι ο πρώτος φλοιός με  $N = 0$  μπορεί να φιλοξενήσει έως 2 πανομοιότυπα σωματίδια, ο επόμενος με  $N = 1$  μέχρι 6 ταυτοτικά σωματίδια κ.ο.κ. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί ως παράδειγμα ένας πυρήνας με 6 πρωτόνια και 8 νετρόνια, όπως είναι ο άνθρακας  ${}^{14}_6\text{C}_8$ . Τα πρώτα 2 πρωτόνια βρίσκονται στο τροχιακό με  $N = 0$  και τα υπόλοιπα 4 υπάρχουν στο  $N = 1$  τροχιακό. Για τα πρωτόνια ισχύει:

$$N_{0,Z} = 2 \left( 0 + \frac{3}{2} \right) + 4 \left( 1 + \frac{3}{2} \right) = 13. \quad (59)$$

Ομοίως για τα 8 νετρόνια ισχύει:

$$N_{0,N} = 2 \left( 0 + \frac{3}{2} \right) + 6 \left( 1 + \frac{3}{2} \right) = 18. \quad (60)$$

Η συνολική τιμή θα είναι:

$$N_0 = N_{0,Z} + N_{0,N} = 13 + 18 = 31. \quad (61)$$

Με τον ίδιο τρόπο αναπαράγονται οι ιδιοτιμές της Χαμιλτονιανής του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή  $N_0$ , οι οποίες δίνονται στον παρακάτω πίνακα 14.

$p$	$N_0$	$\mathcal{N}$	$p$	$N_0$	$\mathcal{N}$	$p$	$N_0$	$\mathcal{N}$
2	3	0	42	161	4	86	419	5
			44	172		88	432	
4	8	1	46	183		90	445	
6	13		48	194		92	458	
8	18		50	205		94	471	
			52	216		96	484	
10	29	2	54	227		98	497	
12	32		56	238		100	510	
14	38		58	249		102	523	
16	46		60	260		104	536	
18	53		62	271		106	549	
20	60		64	282		108	562	
			66	293		110	575	
22	69	3	68	304		112	588	
24	78		70	315				
26	87					114	603	6
28	96		72	328	5	116	618	
30	105		74	341		118	633	
32	114		76	354		120	648	
34	123		78	367		122	663	
36	132		80	380		124	678	
38	141		82	393		126	693	
40	150		84	406				

Πίνακας 14: Οι τιμές του  $N_0$  στον τρισδιάστατο ισοτροπικό αρμονικό ταλαντωτή [104].

#### 4.4 Υπολογισμός του $N_0$ με την proxy-SU(3)

Έχει ήδη αναφερθεί η εικόνα που προκύπτει όταν οι φλοιοί του τρισδιάστατου ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή αναμειγνύονται λόγω της αλληλεπίδρασης σπιν-τροχιάς. Οι μαγικοί αριθμοί διαμορφώνονται ως εξής: 6, 14, 28, 50, 82, 126, ... Οι φλοιοί αυτοί περιλαμβάνουν τα τροχιακά κανονικής ομοτιμίας με κβαντικό αριθμό  $N$  καθώς και τα παρείσακτα τροχιακά με  $N + 1$ . Μέσω της proxy-SU(3) εφαρμόζεται μια αντικατάσταση στα παρείσακτα τροχιακά, όπως έχει ήδη αναφερθεί στο κεφ. 3, που μειώνει τον αριθμό των κβάντων κατά μία μονάδα, δηλαδή το τροχιακό με  $N + 1$  γίνεται  $N$ . Η αντικατάσταση αυτή δεν επηρεάζει το σύστημά μας, αφού το τελευταίο τροχιακό βρίσκεται πολύ ψηλά ενεργειακά και δεν εμπεριέχει σωματίδια του πυρήνα. Συνεπώς, οι φλοιοί που προκύπτουν από την proxy-αντικατάσταση είναι οι 6-12, 14-26, 28-48, 50-80, 82-124, ... και κάθε proxy-φλοιός περιλαμβάνει τροχιακά με αριθμό κβάντων  $N_{Proxy} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$  αντίστοιχα. Επομένως, αν υπάρχει ένας πυρήνας με νετρόνια σθένους για παράδειγμα στον φλοιό 6-14, τότε η τιμή  $N_0$  ισούται με την αντίστοιχη για τον κλειστό φλοιό συν την τιμή  $N_0$  για τα τροχιακά σθένους, δηλαδή ισχύει:

$$N_{0,SO} = N_{0,core} + N_{0,val}. \quad (62)$$

Στο παράδειγμα του πυρήνα  ${}^6_6\text{C}_8$  που χρησιμοποιήθηκε νωρίτερα, τα 6 νετρόνια θα ανήκουν στον φλοιό 0-6, ενώ τα δύο τελευταία θα κατανεμηθούν στα τροχιακά 6-14. Επομένως θα ισχύει:

$$N_{0N,S0} = 13 + (8 - 6) \left(1 + \frac{3}{2}\right), \quad (63)$$

όπου  $N_{0,core} = 13$  η τιμή που υπάρχει στον παραπάνω πίνακα για τα 6 πρώτα νετρόνια, ενώ το  $N_{0,val}$  αντιστοιχεί στα 2 νετρόνια σθένους που βρίσκονται στο τροχιακό  $N + 1$ , στο οποία θα ισχύει

$$N_{0,val} = (8 - 6) \left(1 + \frac{3}{2}\right). \quad (64)$$

Γενικά εφαρμόζεται η παρακάτω σχέση:

$$N_{0,SO} = N_{0,core} + \sum_{n=1}^{A_{val}} \left(N_{i,Proxy} + \frac{3}{2}\right). \quad (65)$$

#### 4.5 Ενέργεια διαχωρισμού δύο νουκλεονίων

Η ενέργεια διαχωρισμού δύο νετρονίων  $S_{2n}$  είναι η ενέργεια που πρέπει να προσφερθεί σε έναν πυρήνα ώστε να απομακρυνθούν 2 νετρόνια. Ορίζεται, μέσω της ενέργειας σύνδεσης ως εξής:

$$S_{2n} = BE(Z, N) - BE(Z, N - 2). \quad (66)$$

Τα πειραματικά δεδομένα που χρησιμοποιούνται στην παρούσα διατριβή έχουν συλλεχθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. Ομοίως μπορεί να υπολογιστεί και η ενέργεια διαχωρισμού 2 πρωτονίων  $S_{2p}$ .

$$S_{2p} = BE(Z, N) - BE(Z - 2, N). \quad (67)$$

## 4.6 Αποτελέσματα υπολογισμών

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση που αναφέρθηκε στην παρ. 4.2,

$$BE(Z, N) = AV_0 - \left( H_0 - \frac{\chi}{2} QQ \right), \quad (68)$$

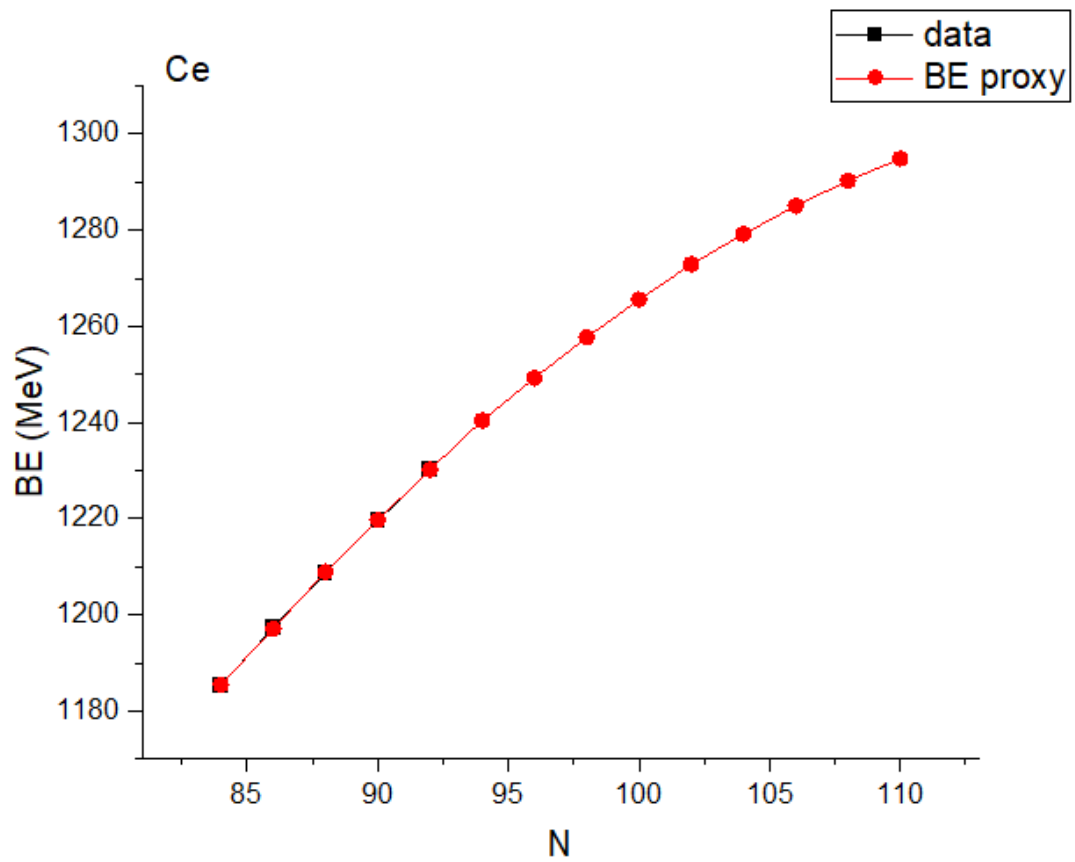
πραγματοποιήθηκαν υπολογισμοί για τις ενέργειες σύνδεσης των πυρήνων των σπάνιων γαιών χρησιμοποιώντας το μοντέλο της proxy-SU(3). Η μοναδική ελεύθερη παράμετρος σε αυτόν τον υπολογισμό είναι η σταθερά  $V_0$ , οι τιμές της οποίας εμφανίζονται στον Πίνακα 15, αφού η ποσότητα  $\chi$  προσδιορίζεται όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 4.2. Αφού υπολογιστούν οι ενέργειες σύνδεσης, το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της ενέργειας διαχωρισμού δύο νουκλεονίων. Όπως παρατηρείται και από τις επόμενες γραφικές παραστάσεις (σχήματα 14 - 27) τα αποτελέσματα που έχουν εξαχθεί χρησιμοποιώντας στο μοντέλο της proxy-SU(3) την απλούστερη Χαμιλτονιανή του Elliott βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα της συλλογής Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285]. Ειδικότερα, οι βαθμίδες που παρατηρούνται στα πειραματικά δεδομένα της  $S_{2n}$  αναπαράγονται σε ικανοποιητικό βαθμό [104].

	Z	N	$V_0$ (Mev)
Ce			
	58	84	44,55443
	58	86	44,5395
	58	88	44,51533
	58	90	44,49213
	58	92	44,4653
Dy			
	66	82	44,08505
	66	84	44,1046
	66	86	44,11804
	66	88	44,12423
	66	90	44,13142
	66	92	44,13573
	66	94	44,13497
	66	96	44,13237
	66	98	44,1248
	66	100	44,11071
Er			44,09233
	68	84	43,96557
	68	86	43,98745
	68	88	44,00234
	68	90	44,01546
	68	92	44,02495
	68	94	44,02885
	68	96	44,03307
	68	98	44,03216
	68	100	44,0261
	68	102	44,01285
	68	104	43,99703
Gd			
	64	84	44,23389
	64	86	44,23905
	64	88	44,23649
	64	90	44,23736
	64	92	44,23558
	64	94	44,22807
	64	96	44,21913
	64	98	44,20377

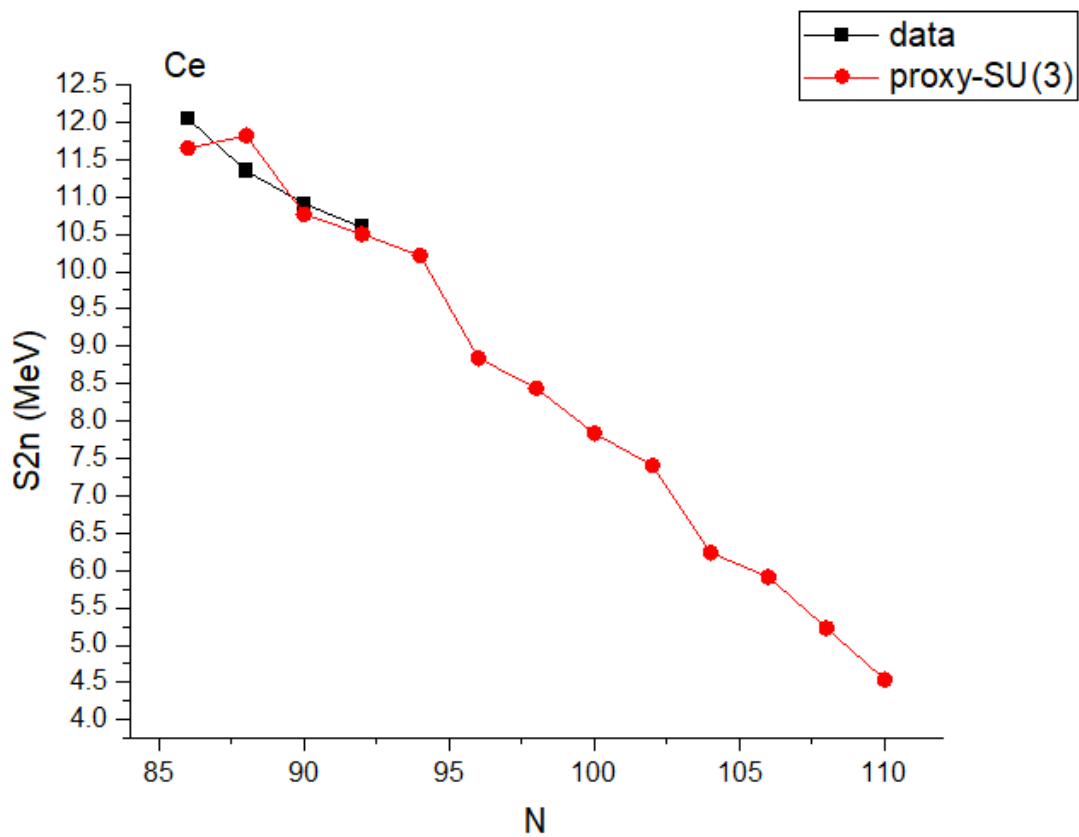
Nd			
	60	88	44,43283
	60	90	44,41824
	60	92	44,40326
	60	94	44,38058
	60	96	44,35887
Sm			
	62	84	44,34942
	62	86	44,34782
	62	88	44,33669
	62	90	44,3311
	62	92	44,32271
	62	94	44,30677
	62	96	44,29204
	62	98	44,26981
Yb			
	70	84	43,81753
	70	86	43,84777
	70	88	43,86874
	70	90	43,88925
	70	92	43,90365
	70	94	43,91237
	70	96	43,92289
	70	98	43,92766
	70	100	43,92663
	70	102	43,91968
	70	104	43,91282
	70	106	43,89696
	70	108	43,8787

Πίνακας 15: Τιμές της δυναμικής ενέργειας του φρέατος για κάθε πυρήνα μετά την προσαρμογή στα πειραματικά δεδομένα.

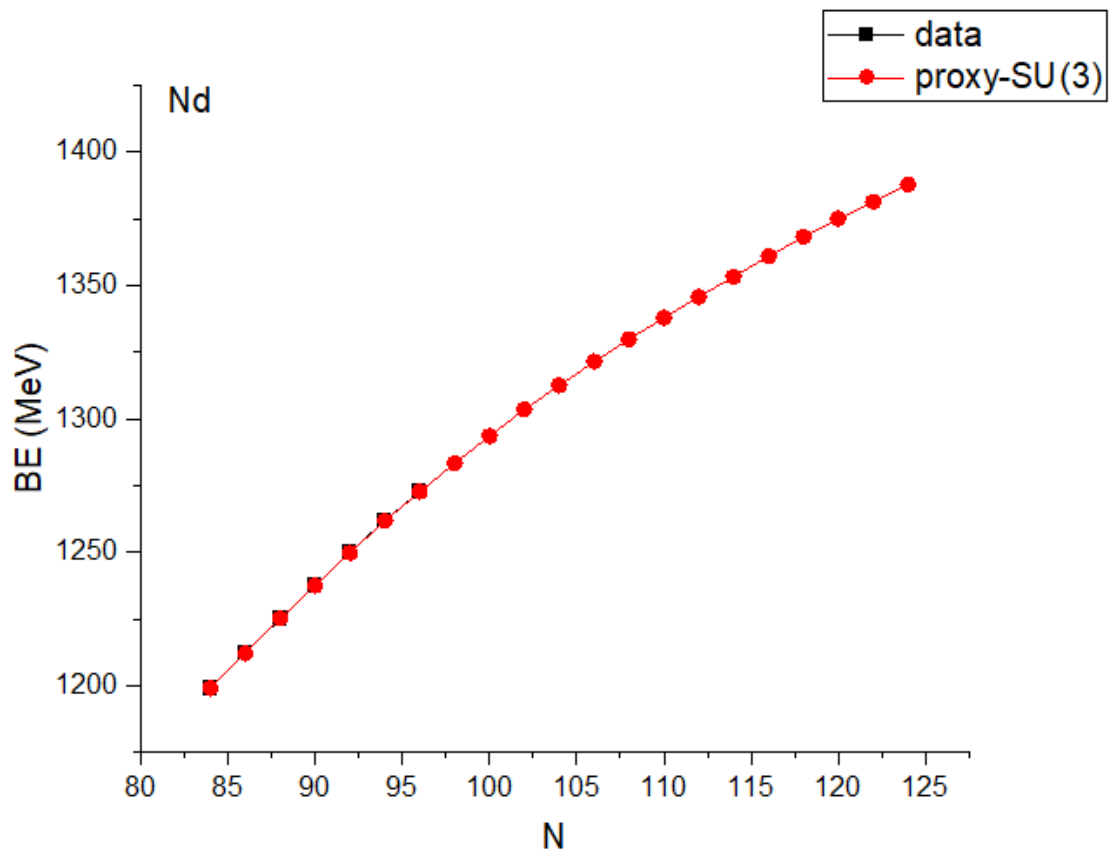




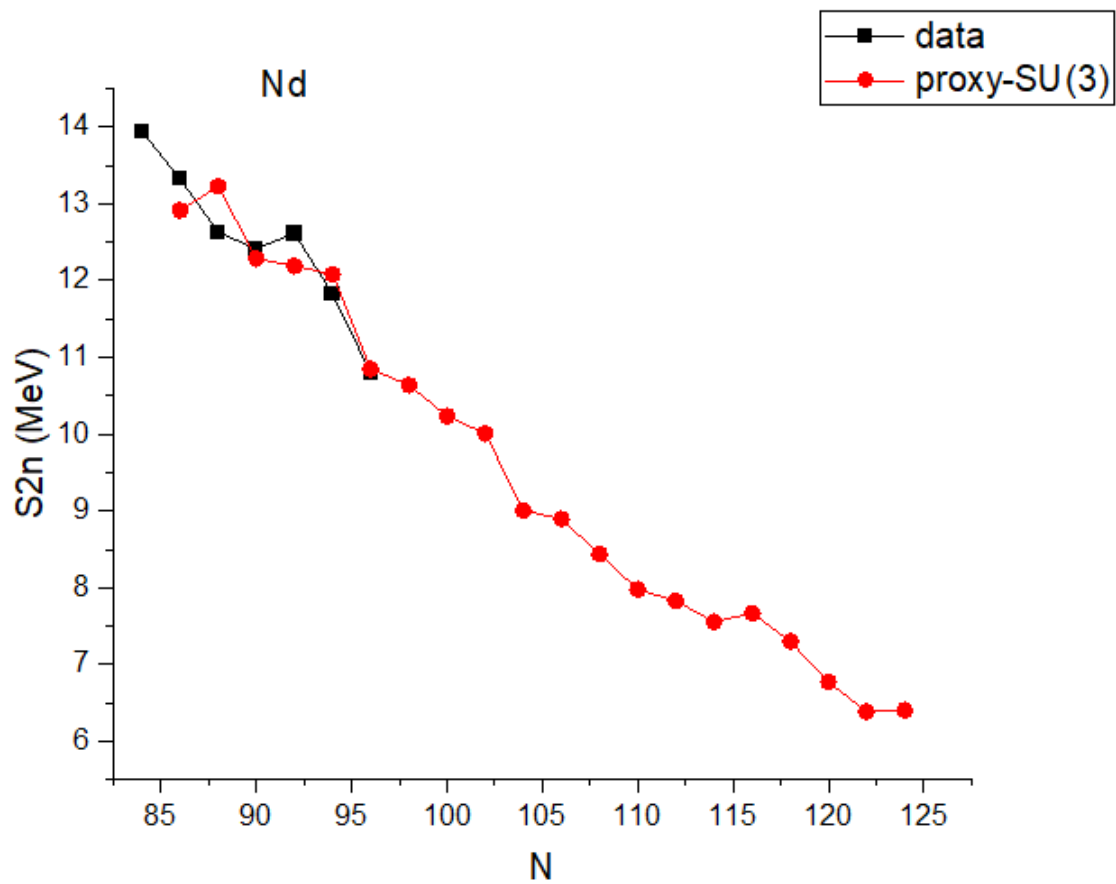
Σχήμα 14: Προβλέψεις για τις ενέργειες σύνδεσης των ισωτόπων του Ce με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285].



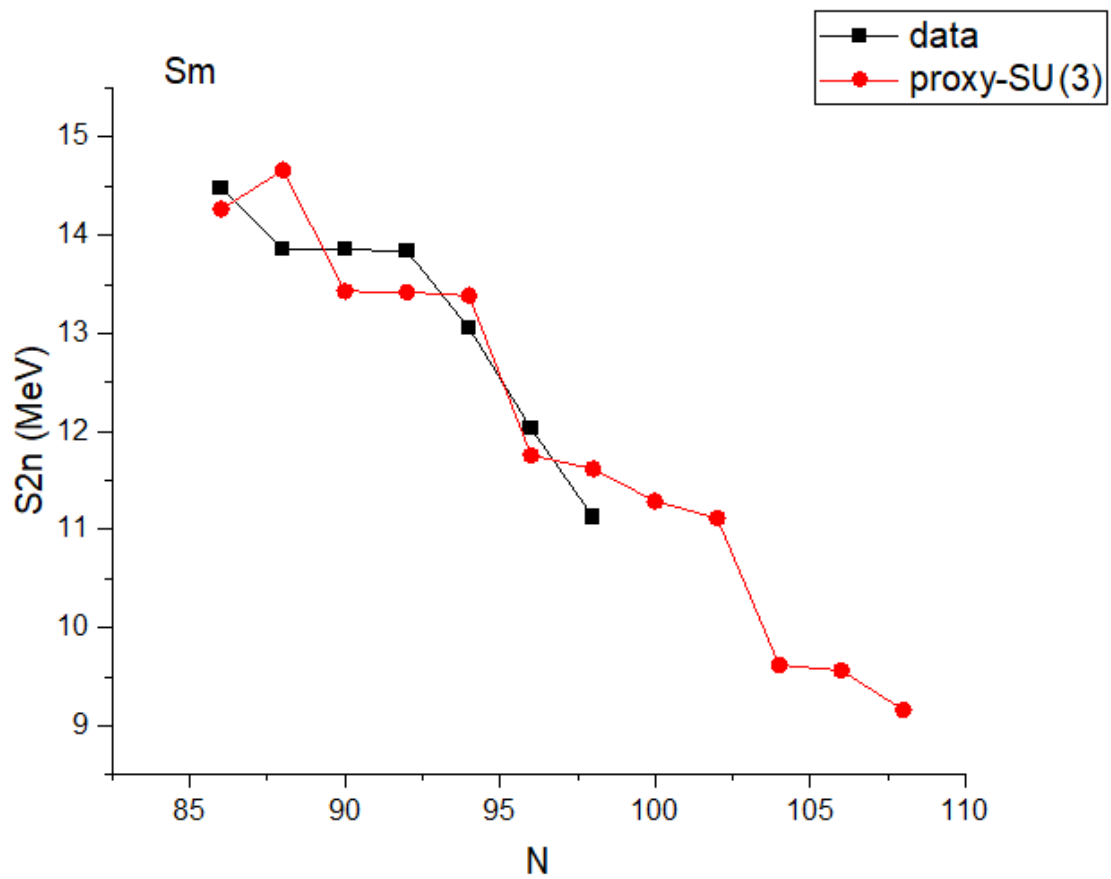
Σχήμα 15: Προβλέψεις για τις ενέργειες διαχωρισμού δύο νετρονίων των ισotόπων του Ce με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285].



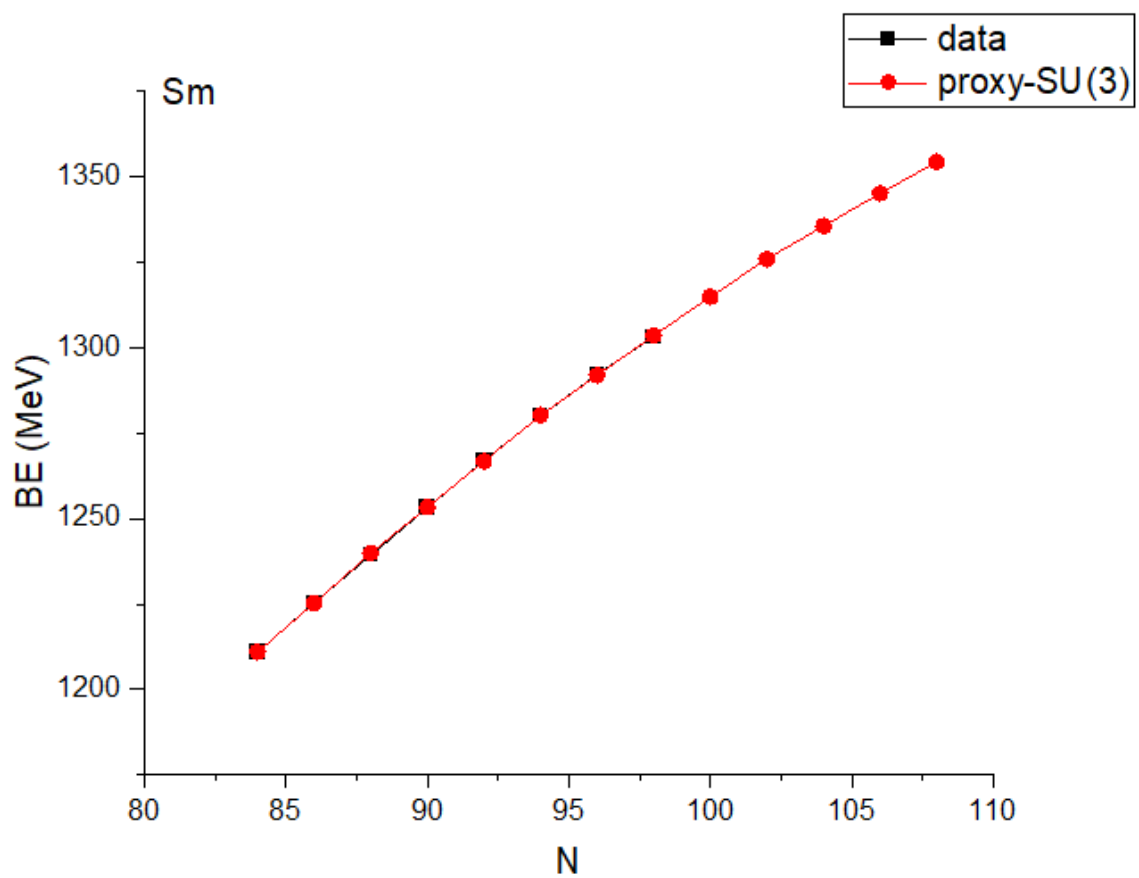
Σχήμα 16: Προβλέψεις για τις ενέργειες σύνδεσης των ισοτόπων του Nd με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285].



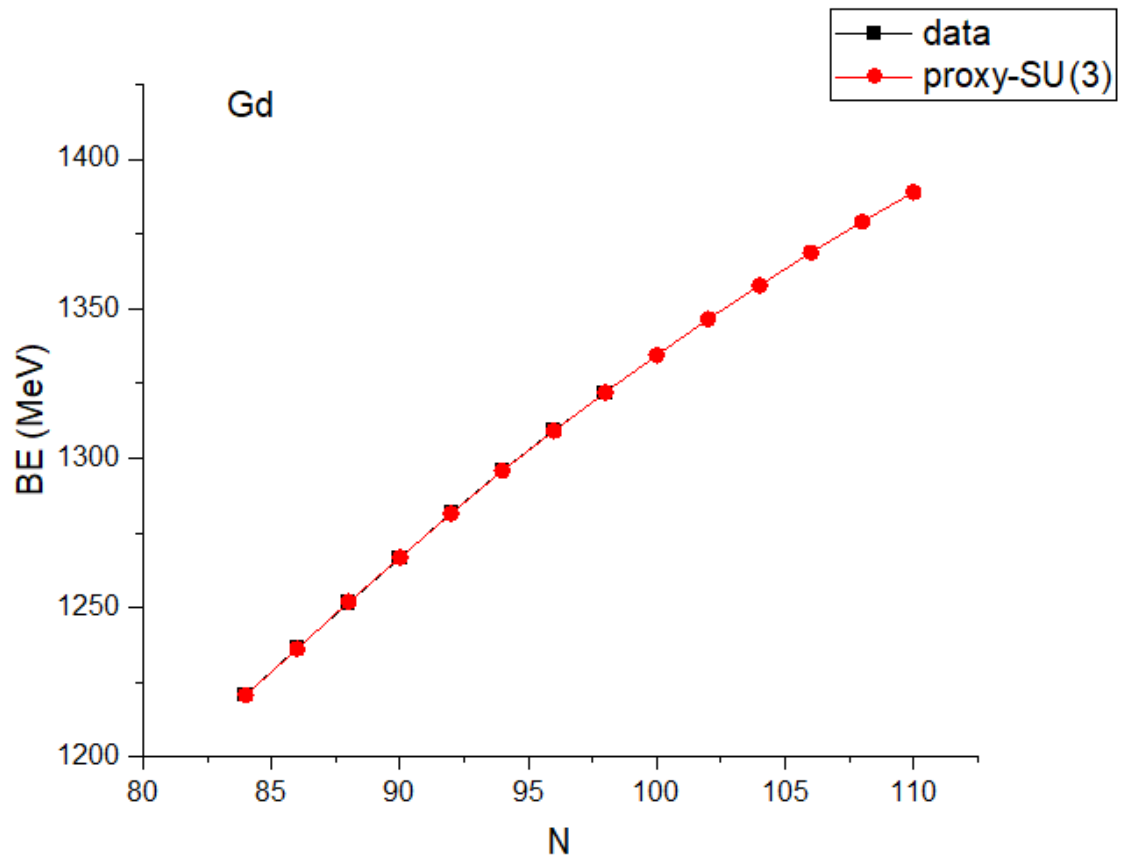
Σχήμα 17: Προβλέψεις για τις ενέργειες διαχωρισμού δύο νετρονίων των ισοτόπων του Nd με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285].



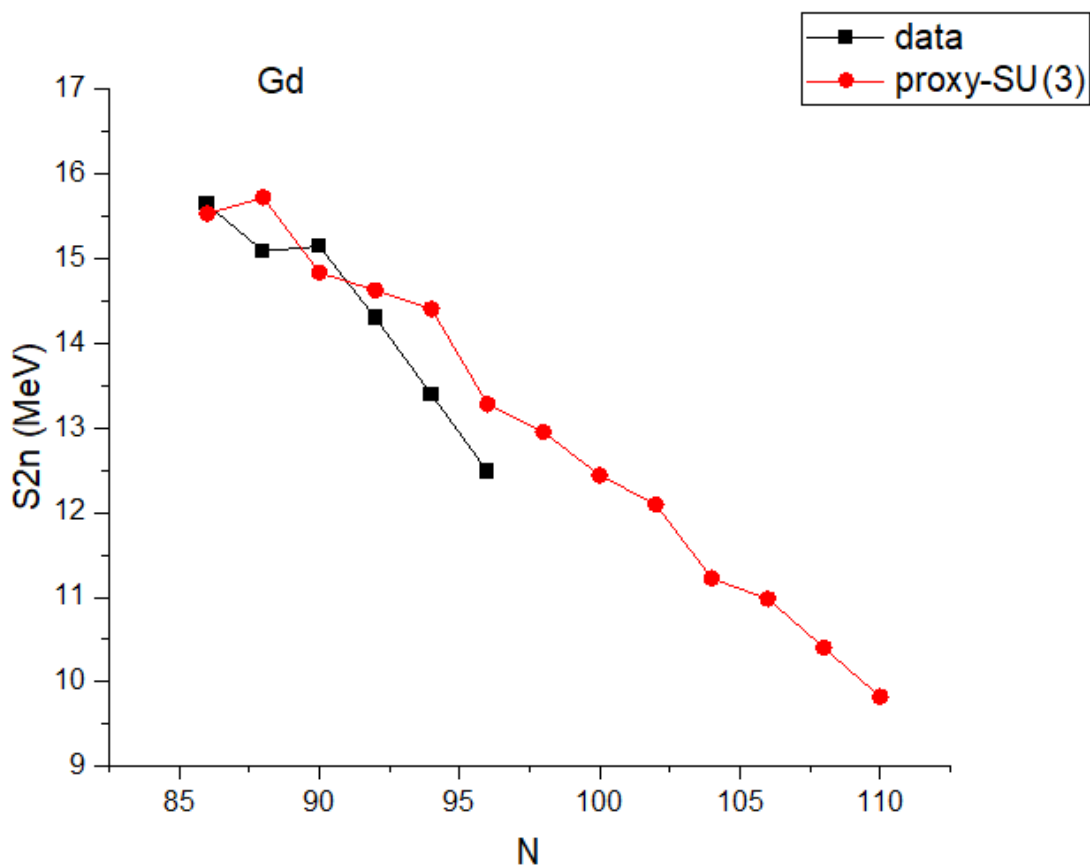
Σχήμα 18: Προβλέψεις για τις ενέργειες σύνδεσης των ισοτόπων του Sm με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285].



Σχήμα 19: Προβλέψεις για τις ενέργειες διαχωρισμού δύο νετρονίων των ισοτόπων του Sm με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285].

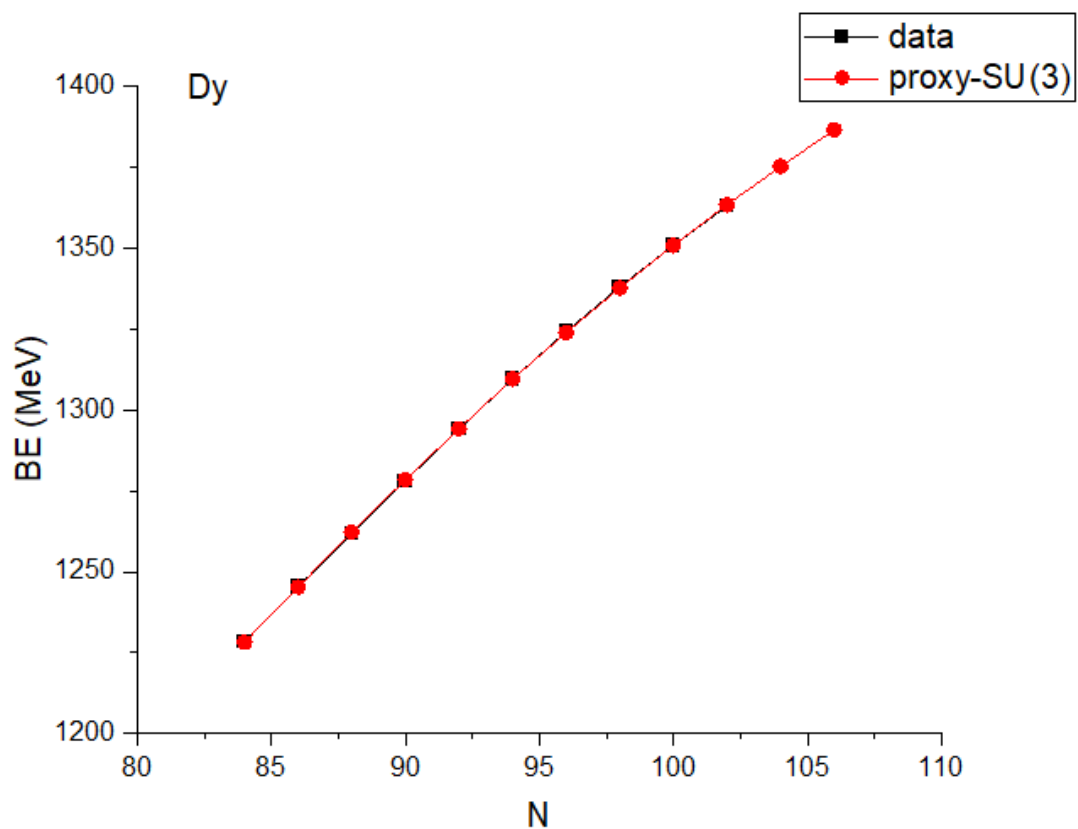


Σχήμα 20: Προβλέψεις για τις ενέργειες σύνδεσης των ισοτόπων του Gd με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285].

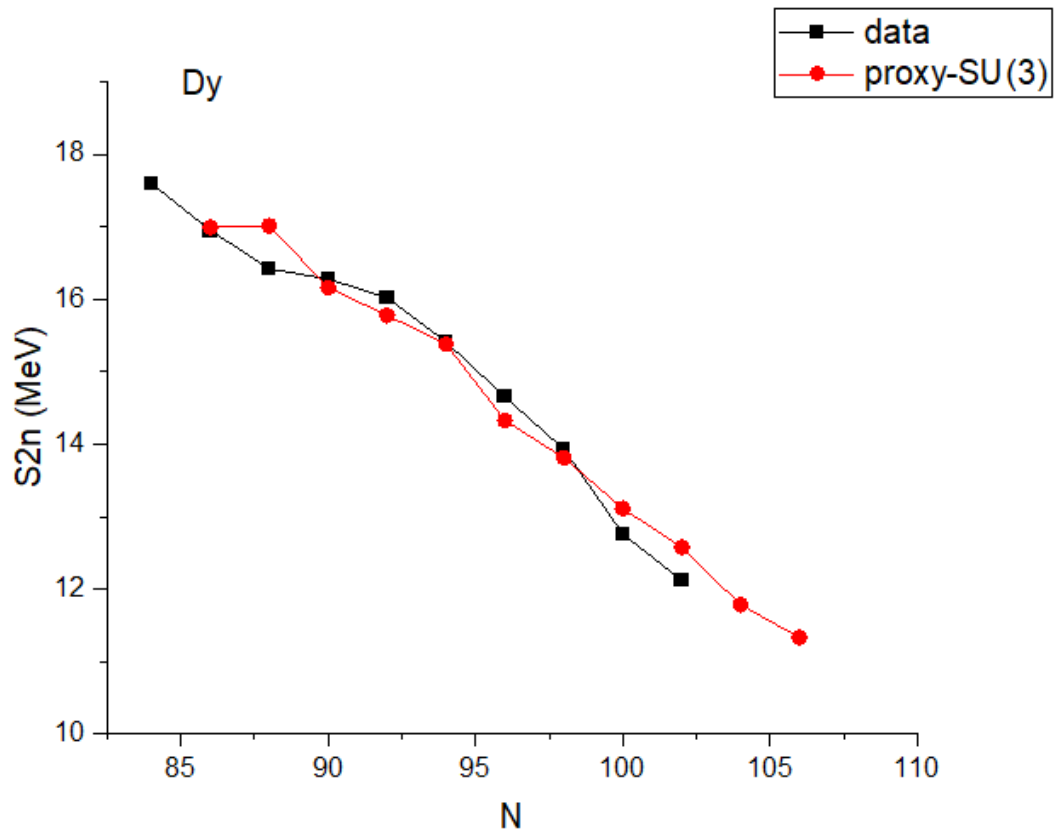


Σχήμα 21: Προβλέψεις για τις ενέργειες διαχωρισμού δύο νετρονίων των ισotόπων του Gd με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285].

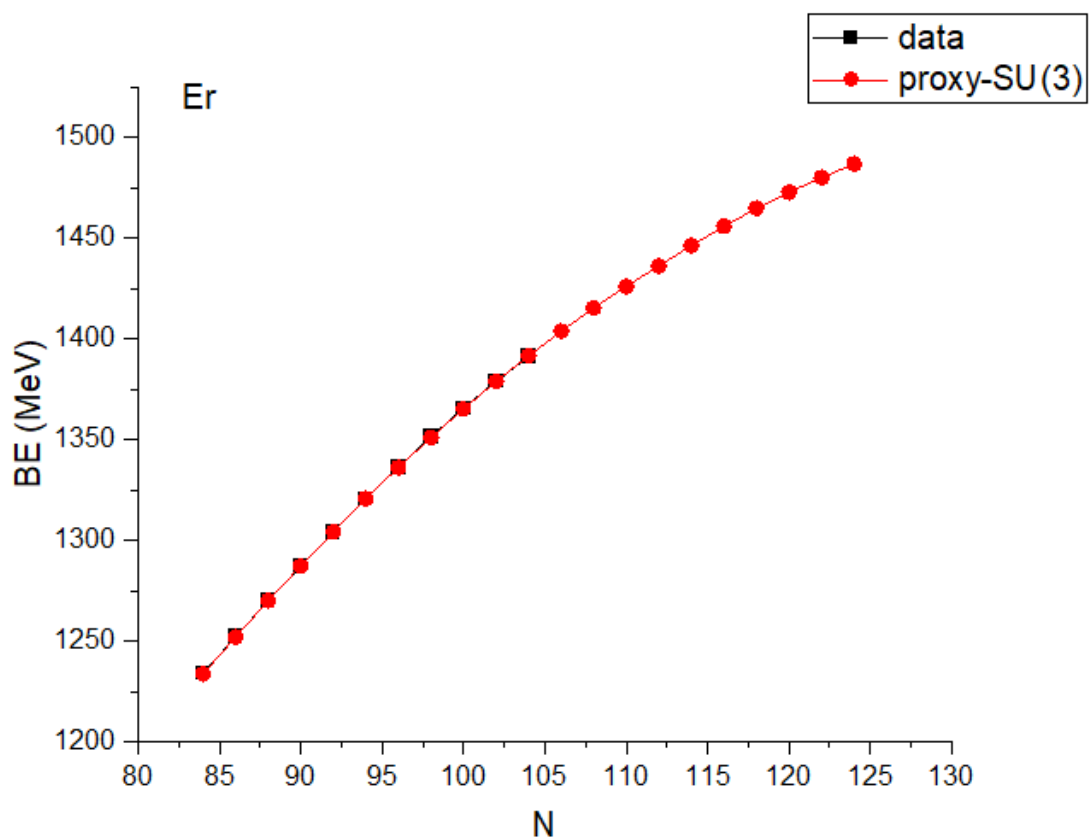




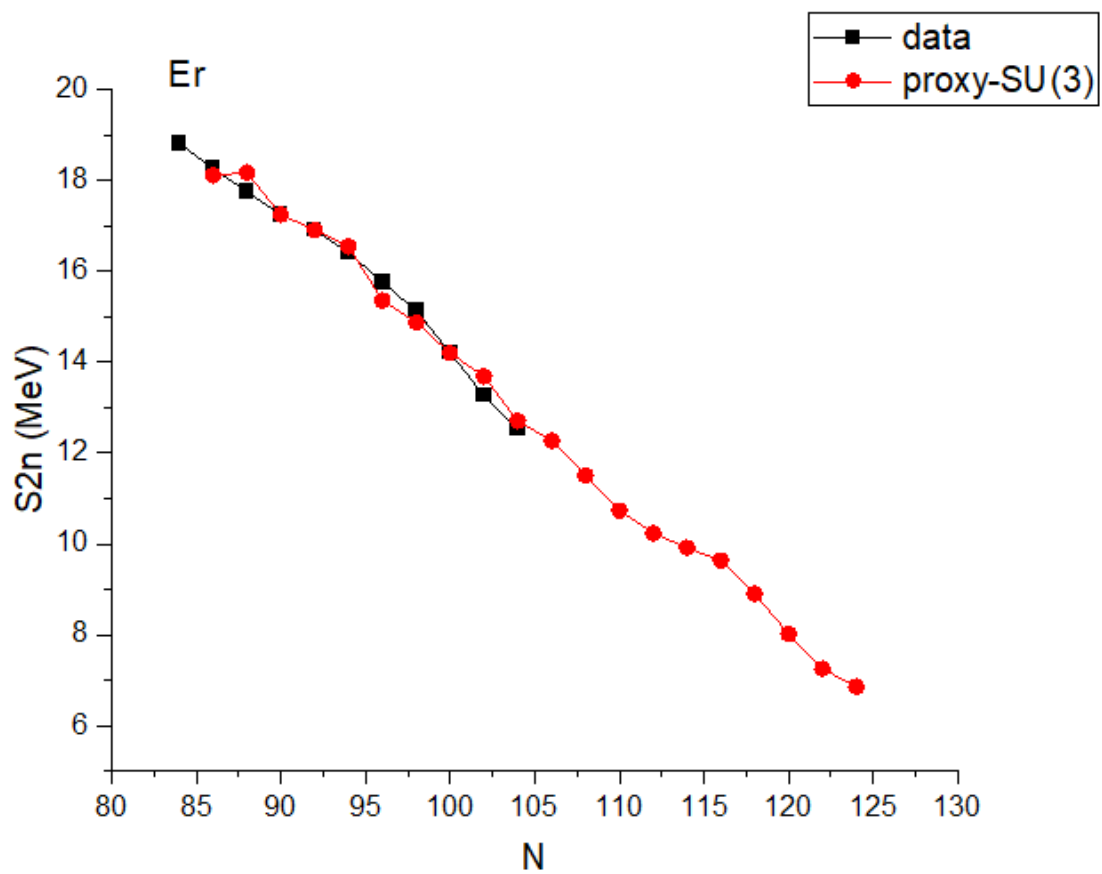
Σχήμα 22: Προβλέψεις για τις ενέργειες σύνδεσης των ισοτόπων του Dy με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285].



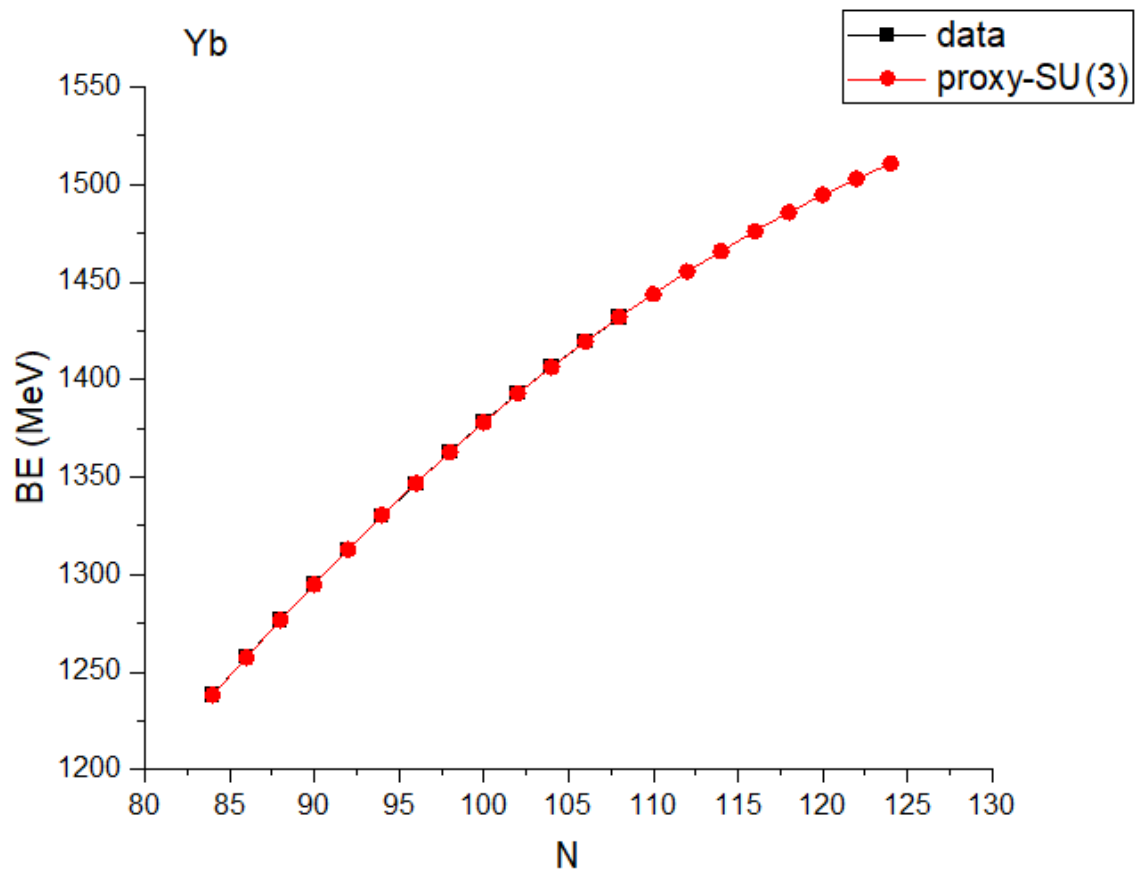
Σχήμα 23: Προβλέψεις για τις ενέργειες διαχωρισμού δύο νετρονίων των ισotόπων του Dy με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285].



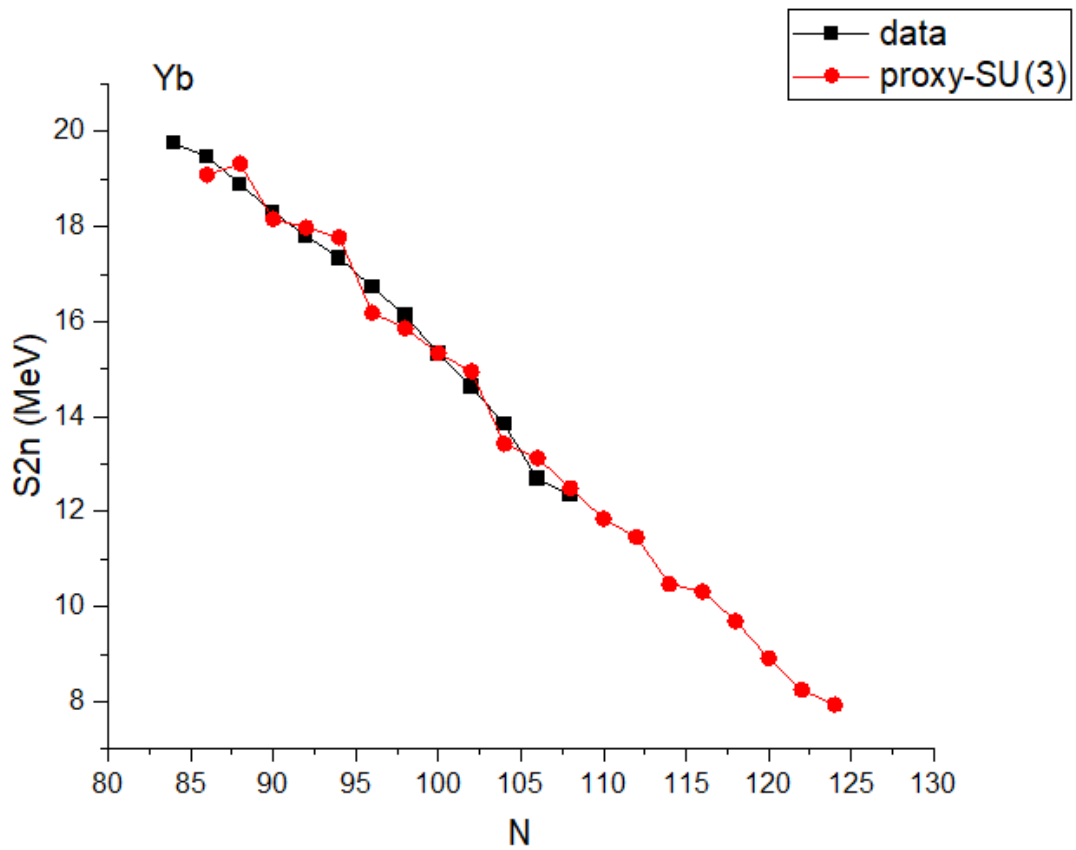
Σχήμα 24: Προβλέψεις για τις ενέργειες σύνδεσης των ισωτόπων του Er με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285].



Σχήμα 25: Προβλέψεις για τις ενέργειες διαχωρισμού δύο νετρονίων των ισοτόπων του Er με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285].



Σχήμα 26: Προβλέψεις για τις ενέργειες σύνδεσης των ισωτόπων του Yb με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285].



Σχήμα 27: Προβλέψεις για τις ενέργειες διαχωρισμού δύο νετρονίων των ισότοπων του Yb με την proxy-SU(3). Τα πειραματικά δεδομένα έχουν ληφθεί από την συλλογή Atomic Mass Evaluation 2016 (AME2016) [285].

## 5 Η σχέση της proxy – SU(3) με το Μοντέλο των Φλοιών

### 5.1 Μετασχηματισμός ανάμεσα στο σφαιρικό μοντέλο των φλοιών και την καρτεσιανή βάση του Elliott

Σε προηγούμενη παράγραφο έχει παρουσιαστεί το μοντέλο των φλοιών [3, 4, 5, 6] καθώς και αυτό του Elliott [50, 51, 52, 53]. Στην ενότητα που ακολουθεί, με απλό τρόπο θα φανεί η σχέση ανάμεσα στο σφαιρικό μοντέλο των φλοιών και την καρτεσιανή βάση του Elliott.

Η απλούστερη μονοσωματιδιακή Χαμιλτονιανή συνάρτηση που χρησιμοποιείται για ένα νουκλεόνιο είναι [3, 4]:

$$H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\hat{\mathbf{r}}^2 + V_{ls}\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}, \quad (69)$$

όπου οι δύο πρώτοι όροι αντιπροσωπεύουν τον τρισδιάστατο ισοτροπικό αρμονικό ταλαντωτή, με  $\hat{\mathbf{p}}$ ,  $\hat{\mathbf{r}}$ ,  $M$ ,  $\omega$  την ορμή, χωρική συντεταγμένη, μάζα και γωνιακή συχνότητα αντίστοιχα. Ο τελευταίος όρος δίνει την αλληλεπίδραση σπιν – τροχιάς, με  $\hat{\mathbf{l}}$ ,  $\hat{\mathbf{s}}$  την τροχιακή στροφορμή και το σπιν αντίστοιχα, ενώ  $V_{ls}$  είναι μία παράμετρος σχετική με την ισχύ της σύζευξης σπιν–τροχιάς. Οι λύσεις της Χαμιλτονιανής του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή είναι γνωστό ότι είναι οι μονοσωματιδιακές καταστάσεις του Elliott στην SU(3) συμμετρία [50, 51, 52, 53]  $|n_z, n_x, n_y\rangle$ , οι οποίες είναι πολυώνυμα Hermite [286]. Η Χαμιλτονιανή του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή μπορεί επίσης να επιλυθεί στις σφαιρικές συντεταγμένες, οι οποίες προτιμώνται στο πρότυπο φλοιών, οπότε προκύπτουν οι μονοσωματιδιακές καταστάσεις  $|n, l, m_l\rangle$  [286], με συνολικό αριθμό κβάντων  $N = 2n + l = n_z + n_x + n_y$ , και  $m_l$  την προβολή της τροχιακής στροφορμής στον z-άξονα, ενώ  $n$  είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός που παίρνει τιμές 0,1,2,3,...

Είναι δυνατόν να κατασκευαστεί ένας μοναδιακός (unitary) μετασχηματισμός ανάμεσα στην καρτεσιανή βάση  $|n_z, n_x, n_y\rangle$  και στην σφαιρική βάση  $|n, l, m_l\rangle$

$$|n_z, n_x, n_y\rangle = \sum_{n,l,m_l} \langle n, l, m_l | |n_z, n_x, n_y\rangle |n, l, m_l\rangle, \quad (70)$$

όπου  $l = N, N - 2, \dots, 1$  ή  $0$  και  $-l \leq m_l \leq l$ .

Για ένα δεδομένο φλοιό ταλαντωτή με κβάντα  $N$ , ο αριθμός των εκφυλισμένων καταστάσεων είναι  $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ .

Επειδή σε κάθε κατάσταση θα τοποθετηθούν δύο ταυτοτικά νουκλεόνια με αντίθετες προβολές του σπιν  $\pm\frac{1}{2}$ , όπως ορίζει η απαγορευτική αρχή του Pauli, πρέπει να διπλασιαστεί ο αριθμός των καταστάσεων. Το βήμα αυτό είναι απαραίτητο ώστε αργότερα να πολλαπλασιαστεί ο πίνακας  $R$  με τον πίνακα  $C$  στην παρακάτω εξίσωση:

$$[n_z n_x n_y m_s] = R \cdot C \cdot [nljm_j]. \quad (71)$$

Διπλασιάζοντας τις καρτεσιανές καταστάσεις  $|n_z, n_x, n_y\rangle$ , φτιάχνουμε τα στοιχεία ενός πίνακα με  $(N+1)(N+2) \times 1$  στοιχεία που αποτελείται από μία στήλη και τον συμβολίζουμε με  $[n_z n_x n_y]$ , ενώ ο πίνακας που αποτελείται από μία στήλη που περιέχει τις διπλασιασμένες σφαιρικές καταστάσεις  $|n, l, m_l\rangle$  συμβολίζεται ως  $[nlm_l]$ . Όσον αφορά τον πίνακα  $R$ , ο οποίος

αρχικά είχε διαστάσεις  $\frac{(N+1)(N+2)}{2} \times \frac{(N+1)(N+2)}{2}$ , μετά τον διπλασιασμό των καταστάσεων αποκτά διαστάσεις  $(N+1)(N+2) \times (N+1)(N+2)$ , οπότε ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$[n_z n_x n_y] = R \cdot [nlm_l]. \quad (72)$$

Τα στοιχεία πίνακα του πίνακα μετασχηματισμού  $R$  για  $m_l \geq 0$  δίνονται από την σχέση [287, 288, 289]:

$$\begin{aligned} \langle n, l, m_l | n_z, n_x, n_y \rangle &= \delta_{2n+l, n_x+n_y+n_z} (-1)^{\frac{2n+n_x+n_y-m_l}{2}} \cdot i_y^n \\ &\left( \frac{(2l+1)(l-m_l)!(n+l)!}{2^l(l+m_l)!n!(2n+2l+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{n_x+n_y+m_l}{2} \right)! \\ &(n_x!n_y!n_z!)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1+(-1)^{n_x+n_y+m_l}}{2} \right) \\ &\sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \frac{(-1)^t(2l-2t)!(n+t)!}{t!(l-t)!(l-2t-m_l)!(n+t-\frac{n_x+n_y-m_l}{2})!} \\ &\sum_{h=h_{min}}^{h_{max}} \frac{(-1)^h}{h!(n_x-h)!(h+\frac{n_y-n_x-m_l}{2})!(\frac{n_x+n_y+m_l}{2}-h)!}, \end{aligned} \quad (73)$$

όπου

$$\begin{aligned} t_{min} &= \begin{cases} 0, & \gamma \text{ια } n \geq \frac{n_x+n_y-m_l}{2} \\ \frac{n_x+n_y-m_l}{2} - n, & \gamma \text{ια } n < \frac{n_x+n_y-m_l}{2} \end{cases}, \\ t_{max} &= \begin{cases} \frac{l-m_l}{2}, & \alpha \nu \ l - m_l \ \alpha \rho \tau \iota \omicron \varsigma \\ \frac{l-m_l-1}{2}, & \alpha \nu \ l - m_l \ \pi \epsilon \rho \iota \tau \tau \omicron \varsigma \end{cases}, \\ h_{min} &= \begin{cases} 0, & \gamma \text{ια } n_y \geq n_x + m_l \\ \frac{n_x+m_l-n_y}{2} - n, & \gamma \text{ια } n_y < n_x + m_l \end{cases}, \\ h_{max} &= \begin{cases} n_x, & \gamma \text{ια } n_x \leq n_y + m_l \\ \frac{n_x+n_y+m_l}{2}, & \gamma \text{ια } n_x > n_y + m_l \end{cases}. \end{aligned} \quad (74)$$

Για  $m_l < 0$  ισχύει [289]:

$$\langle n, l, -m_l | n_z, n_x, n_y \rangle = (-1)^{n_x} \langle n, l, m_l | n_z, n_x, n_y \rangle. \quad (75)$$

Το επόμενο βήμα που απαιτείται είναι η μετάβαση από την σύζευξη  $l$ - $s$  στην σύζευξη  $j$ - $j$ , η οποία μπορεί να επιτευχθεί με την βοήθεια των συντελεστών Clebsch–Gordan [290, 291], όπως θα περιγραφεί παρακάτω.

Κάθε νουκλεόνιο έχει στην κυματοσυνάρτησή του ένα μέρος που αφορά το σπιν και είναι  $|s, m_s\rangle = |1/2, \pm 1/2\rangle$ . Η σύζευξη του σπιν με την τροχιακή στροφορμή δίνει την συνολική στροφορμή  $j = l + s$ . Τα τροχιακά που προκύπτουν μετά την σύζευξη του σπιν με την τροχιακή στροφορμή είναι  $|n, l, j, m_j\rangle$ , όπου  $m_j = m_l + m_s$ . Ο κύριος κβαντικός αριθμός  $n$



παίρνει ακέραιες τιμές 1, 2, 3, ... Ο δευτερεύων κβαντικός αριθμός παίρνει τιμές ανάλογα με την τιμή που έχει ο  $n$ , δηλαδή 0, 1, 2, ...,  $(n - 1)$ , ενώ τα ατομικά τροχιακά συμβολίζονται με γράμματα ως εξής:

$l$	0	1	2	3	...
τροχιακό	s	p	d	f	...

Χρησιμοποιώντας τους συντελεστές Clebsch–Gordan (CG) οι σφαιρικές βάσεις σε σύζευξη  $l-s$  και σύζευξη  $j-j$  συνδέονται ως εξής:

$$[nlm_l m_s] = C[nl j m_j], \quad (76)$$

όπου στην δεύτερη βάση εμφανίζονται η συνολική στροφορμή  $j$  καθώς και η προβολή της στον  $z$ -άξονα,  $m_j$ .

Η καρτεσιανή βάση του Elliott μπορεί να μετασχηματιστεί στην σφαιρική βάση μέσω του μοναδιαίου μετασχηματισμού που αναφέρθηκε παραπάνω. Συμπεριλαμβάνοντας και το σπιν στα διανύσματα βάσης, ο μοναδιαίος μετασχηματισμός παίρνει την μορφή:

$$[n_z n_x n_y m_s] = R[nl m_l m_s]. \quad (77)$$

Συνδυάζοντας τους 2 παραπάνω μετασχηματισμούς μπορεί να γραφεί τελικά ο παρακάτω μετασχηματισμός:

$$[n_z n_x n_y m_s] = RC[nl j m_j], \quad (78)$$

ο οποίος συνδέει την καρτεσιανή βάση του Elliott με την σφαιρική βάση με σύζευξη  $j-j$ .

Τα αποτελέσματα των σχετικών υπολογισμών για τους δύο πρώτους φλοιούς φαίνονται στους παρακάτω πίνακες 16 - 19. Πίνακες για τον τρίτο φλοιό έχουν δημοσιευτεί στην εργασία [13].

$ n, l, j, m_j\rangle$ $ n_z, n_x, n_y\rangle  \pm\rangle$	$1p_{-1/2}^{1/2}$	$1p_{1/2}^{1/2}$	$1p_{-3/2}^{3/2}$	$1p_{-1/2}^{3/2}$	$1p_{1/2}^{3/2}$	$1p_{3/2}^{3/2}$
$ 0, 0, 1\rangle  -\rangle$	0	$\frac{i}{\sqrt{3}}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{i}{\sqrt{6}}$	0
$ 0, 0, 1\rangle  +\rangle$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}$	0	0	$\frac{i}{\sqrt{6}}$	0	$\frac{i}{\sqrt{2}}$
$ 0, 1, 0\rangle  -\rangle$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	0
$ 0, 1, 0\rangle  +\rangle$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$ 1, 0, 0\rangle  -\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	0
$ 1, 0, 0\rangle  +\rangle$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0

Πίνακας 16: Ο πίνακας μετασχηματισμού για  $\mathcal{N} = 1$ . Η πρώτη γραμμή περιέχει τα τροχιακά του μοντέλου των φλοιών, ενώ η πρώτη στήλη περιέχει τα τροχιακά του Elliott. Τα παρακάτω τροχιακά χρησιμοποιούνται στον φλοιό του αρμονικού ταλαντωτή 2-8 ή στην proxy-SU(3) στον φλοιό 6-12 μετά την αντικατάσταση των αδελφών τροχιακών με τα αντίστοιχα των Shalit-Goldhaber. [92]

$ n_z, n_x, n_y\rangle  \pm\rangle$ $ n, l, j, m_j\rangle$	$ 0, 0, 1\rangle  -\rangle$	$ 0, 0, 1\rangle  +\rangle$	$ 0, 1, 0\rangle  -\rangle$	$ 0, 1, 0\rangle  +\rangle$	$ 1, 0, 0\rangle  -\rangle$	$ 1, 0, 0\rangle  +\rangle$
$1p_{-1/2}^{1/2}$	0	$\frac{i}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$1p_{1/2}^{1/2}$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$1p_{-3/2}^{3/2}$	$-\frac{i}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0
$1p_{-1/2}^{3/2}$	0	$-\frac{i}{\sqrt{6}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0
$1p_{1/2}^{3/2}$	$-\frac{i}{\sqrt{6}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
$1p_{3/2}^{3/2}$	0	$-\frac{i}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0

Πίνακας 17: Ο αντίστροφος μετασχηματισμός του πίνακα για  $\mathcal{N} = 1$ . [92]

$ n, l, j, m_j\rangle$ $ n_z, n_x, n_y\rangle  \pm\rangle$	$2s_{-1/2}^{1/2}$	$2s_{1/2}^{1/2}$	$1d_{-3/2}^{3/2}$	$1d_{-1/2}^{3/2}$	$1d_{1/2}^{3/2}$	$1d_{3/2}^{3/2}$	$1d_{-5/2}^{5/2}$	$1d_{-3/2}^{5/2}$	$1d_{-1/2}^{5/2}$	$1d_{1/2}^{5/2}$	$1d_{3/2}^{5/2}$	$1d_{5/2}^{5/2}$
$ 0, 0, 2\rangle  -\rangle$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{15}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	0	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	0
$ 0, 0, 2\rangle  +\rangle$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	0	0	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	0	$-\frac{1}{2}$
$ 0, 1, 1\rangle  -\rangle$	0	0	0	0	0	$-i\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	0	0	0	$-\frac{i}{\sqrt{10}}$	0
$ 0, 1, 1\rangle  +\rangle$	0	0	$-i\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	0	0	0	$\frac{i}{\sqrt{10}}$	0	0	0	$-\frac{i}{\sqrt{2}}$
$ 0, 2, 0\rangle  -\rangle$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{15}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	0	$\frac{1}{2\sqrt{5}}$	0
$ 0, 2, 0\rangle  +\rangle$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	0	0	$\frac{1}{2\sqrt{5}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	0	$\frac{1}{2}$
$ 1, 0, 1\rangle  -\rangle$	0	0	$\frac{i}{\sqrt{10}}$	0	$i\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	0	$i\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	$\frac{i}{\sqrt{5}}$	0	0
$ 1, 0, 1\rangle  +\rangle$	0	0	0	$-i\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$-\frac{i}{\sqrt{10}}$	0	0	$\frac{i}{\sqrt{5}}$	0	$i\sqrt{\frac{2}{5}}$	0
$ 1, 1, 0\rangle  -\rangle$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	0	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	0	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	0	0
$ 1, 1, 0\rangle  +\rangle$	0	0	0	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	0
$ 2, 0, 0\rangle  -\rangle$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$\frac{2}{\sqrt{15}}$	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	0	0
$ 2, 0, 0\rangle  +\rangle$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{2}{\sqrt{15}}$	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	0

Πίνακας 18: Ομοίως με τον Πίνακα 16 αλλά για  $\mathcal{N} = 2$ . Σχετίζεται με τον φλοιό του ταλαντωτή 8-20 ή στον proxy-SU(3) φλοιό 14-26.[92]

$ n_z, n_x, n_y\rangle  \pm\rangle$ $ n, l, j, m_j\rangle$	$ 0, 0, 2\rangle  -\rangle$	$ 0, 0, 2\rangle  +\rangle$	$ 0, 1, 1\rangle  -\rangle$	$ 0, 1, 1\rangle  +\rangle$	$ 0, 2, 0\rangle  -\rangle$	$ 0, 2, 0\rangle  +\rangle$	$ 1, 0, 1\rangle  -\rangle$	$ 1, 0, 1\rangle  +\rangle$	$ 1, 1, 0\rangle  -\rangle$	$ 1, 1, 0\rangle  +\rangle$	$ 2, 0, 0\rangle  -\rangle$	$ 2, 0, 0\rangle  +\rangle$
$2s_{-1/2}^{1/2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$2s_{1/2}^{1/2}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$1d_{-3/2}^{3/2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	0	$i\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{i}{\sqrt{10}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	0	0	0
$1d_{-1/2}^{3/2}$	$-\frac{1}{\sqrt{15}}$	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{15}}$	0	0	$i\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\frac{2}{\sqrt{15}}$	0
$1d_{1/2}^{3/2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	$-i\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	0	$-\frac{2}{\sqrt{15}}$
$1d_{3/2}^{3/2}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	0	$i\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	0	0	$\frac{i}{\sqrt{10}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	0	0
$1d_{-5/2}^{5/2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{i}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0
$1d_{-3/2}^{5/2}$	0	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	0	$-\frac{i}{\sqrt{10}}$	0	$\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$-i\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	0	0
$1d_{-1/2}^{5/2}$	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	0	0	$-\frac{i}{\sqrt{5}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	0
$1d_{1/2}^{5/2}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	0	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	$-\frac{i}{\sqrt{5}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	0	0	$\sqrt{\frac{2}{5}}$
$1d_{3/2}^{5/2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	0	$\frac{i}{\sqrt{10}}$	0	$\frac{1}{2\sqrt{5}}$	0	0	$-i\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	0
$1d_{5/2}^{5/2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 19: Ομοίως με τον Πίνακα 17 αλλά για  $\mathcal{N} = 2$ . [92]

## 5.2 Ζεύγη νουκλεονίων που ευνοούν την παραμόρφωση

Συχνά στην Πυρηνική Φυσική μελετώνται ξεχωριστά τα πρωτόνια από τα νετρόνια, λόγω της αλληλεπίδρασης σύζευξης (pairing) που παρουσιάζουν. Σταδιακά όμως έγινε κατανοητό ότι η αλληλεπίδραση πρωτονίου–νετρονίου είναι τόσο ισχυρή που επηρεάζει ριζικά την συνολική πυρηνική παραμόρφωση.

Ήδη από το 1953 οι deShalit and Goldhaber [292] μελέτησαν τις πιθανότητες για β μεταβάσεις και βρήκαν ότι τα νετρόνια αλληλεπιδρούν με τα πρωτόνια όταν αυτά βρίσκονται σε συγκεκριμένα τροχιακά, έχοντας σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση μεγαλύτερων χρόνων ημιζωής. Συγκεκριμένα παρατήρησαν ότι στα ζεύγη πρωτονίου–νετρονίου ( $1p_{3/2}, 1d_{5/2}$ ), ( $1d_{5/2}, 1f_{7/2}$ ), ( $1f_{7/2}, 1g_{9/2}$ ), ( $1g_{9/2}, 1h_{11/2}$ ), ( $1h_{11/2}, 1i_{13/2}$ ) τα νουκλεόνια του ενός είδους (π.χ. των πρωτονίων) σταθεροποιούν τα ζεύγη νουκλεονίων του άλλου είδους (π.χ. των νετρονίων), ευνοώντας κατ' αυτό τον τρόπο την παραμόρφωση του πυρήνα. Παρατηρούμε ότι τα τροχιακά που εμφανίζονται στα παραπάνω ζεύγη είναι αυτά που έχουν την μεγαλύτερη δυνατή ολική στροφορμή για δεδομένη τροχιακή στροφορμή. Επίσης παρατηρούμε ότι στον συνήθη συμβολισμό του προτύπου φλοιών  $|nljm_j\rangle$ , τροχιακά που σχηματίζουν ζεύγος (και αναγράφονται μέσα σε παρενθέσεις) διαφέρουν κατά  $|\Delta n \Delta l \Delta j \Delta m_j\rangle = |0110\rangle$ .

Ένα μεγάλο βήμα προς την κατανόηση των ενεργών αλληλεπιδράσεων και των σχημάτων σύζευξης στους πυρήνες απετέλεσε η εισαγωγή της αρχαιότητας (seniority) από τον Talmi [293, 294, 295, 296] το 1962. Η αρχαιότητα δηλοί τον αριθμό των ζευγών νουκλεονίων τα οποία δεν είναι συζευγμένα σε μηδενική ολική στροφορμή. Η ύπαρξη της αρχαιότητας εξήγησε την γραμμική εξάρτηση των ενεργειών διαχωρισμού νετρονίων από τον μαζικό αριθμό μέσα σε μια σειρά ισοτόπων.

Το 1977 οι Federman and Pittel [297, 298, 299] διαπίστωσαν ότι όταν προστίθενται πρωτόνια σθένους και νετρόνια σθένους σε ένα πυρήνα, τα ζεύγη πρωτονίου–νετρονίου ( $1d_{5/2}, 1d_{3/2}$ ), ( $1g_{9/2}, 1g_{7/2}$ ), ( $1h_{11/2}, 1h_{9/2}$ ), και ( $1i_{13/2}, 1i_{11/2}$ ) πρωταγωνιστούν στην έναρξη της πυρηνικής παραμόρφωσης, ενώ στη συνέχεια η παραμόρφωση ισχυροποιείται από τα ζεύγη πρωτονίου–νετρονίου ( $1d_{5/2}, 1f_{7/2}$ ), ( $1g_{9/2}, 1h_{11/2}$ ), ( $1h_{11/2}, 1i_{13/2}$ ), and ( $1i_{13/2}, 1j_{15/2}$ ), τα οποία εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα. Αυτά τα ζεύγη αντιστοιχούν σε  $|\Delta n \Delta l \Delta j \Delta m_j\rangle = |0010\rangle$  και  $|0110\rangle$  αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η δεύτερη ομάδα ζευγών συμπίπτει με τα ζεύγη de Shalit–Goldhaber.

	protons	neutrons	protons	neutrons
light	$1d^{5/2}$	$1d^{3/2}$	$1d^{5/2}$	$1f^{7/2}$
intermediate	$1g^{9/2}$	$1g^{7/2}$	$1g^{9/2}$	$1h^{11/2}$
rare earths	$1h^{11/2}$	$1h^{9/2}$	$1h^{11/2}$	$1i^{13/2}$
actinides	$1i^{13/2}$	$1i^{11/2}$	$1i^{13/2}$	$1j^{15/2}$

Ο καταλυτικός ρόλος που διαδραματίζουν τα ζεύγη πρωτονίου–νετρονίου στην πυρηνική παραμόρφωση καταδείχτηκε το 1985 με την εισαγωγή από τον Casten του σχήματος  $N_p N_n$  [33, 300, 301] και του παράγοντα  $P$ ,  $P = N_p N_n / (N_p + N_n)$  [33, 302], μέσω των οποίων φαίνεται καθαρά η συστηματική εξάρτηση πολλών παρατηρησίμων μεγεθών από τον ανταγωνισμό ανάμεσα στην τετραπολική παραμόρφωση, η οποία “μετριέται” με την τετραπολική αλληλεπίδραση μέσω του όρου  $N_p N_n$ , και στην αλληλεπίδραση σύζευξης (pairing), η οποία “μετριέται” με τον όρο  $N_p + N_n$ , όπου  $N_p$  ( $N_n$ ) είναι ο αριθμός των πρωτονίων (νετρονίων) σθένους.

Το 1995 εισήχθη η συμμετρία quasi-SU(3) [303, 304], η οποία βασίζεται στα ζεύγη πρωτονίου–νετρονίου  $(1g_{9/2}, 2d_{5/2})$ ,  $(1h_{11/2}, 2f_{7/2})$ ,  $(1i_{13/2}, 2g_{9/2})$ , τα οποία στον συμβολισμό του προτύπου φλοιών αντιστοιχούν σε  $|\Delta n \Delta l \Delta j \Delta m_j\rangle = |1220\rangle$  και οδηγούν σε αυξημένη τετραπολική παραμόρφωση [305].

Μετά από λεπτομερείς μελέτες [116, 117, 118, 119, 120, 121] διπλών διαφορών ενεργειών σύνδεσης σε άρτιους–άρτιους πυρήνες μέσω της σχέσης:

$$|\delta V_{pn}(Z, N)| = \frac{1}{4} [(B_{Z,N} - B_{Z,N-2}) - (B_{Z-2,N} - B_{Z-2,N-2})], \quad (79)$$

το 2010 έγινε κατανοητό ότι ζεύγη πρωτονίου–νετρονίου τα οποία διαφέρουν στον συμβολισμό Nilsson [58, 60] κατά  $K[Nn_z\Lambda]$  by  $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$  διαδραματίζουν βασικό ρόλο στην εμφάνιση πυρηνικής παραμόρφωσης, ο οποίος οφείλεται στην μεγάλη χωρική επικάλυψη που τα χαρακτηρίζει [268, 123, 124, 125]. Τα ζεύγη αυτά ταυτίζονται με τις αντικαταστάσεις που γίνονται στα πλαίσια της proxy-SU(3) [10, 11, 12], πράγμα λογικό, αφού είναι αναμενόμενο η αντικατάσταση ενός τροχιακού από άλλο με πολύ παρόμοια χωρική έκταση/παρουσία και ταυτοτικές περιστροφικές ιδιότητες (ίδιες προβολές στροφορμών και σπιν) να συνιστά καλή προσέγγιση.

Ουδεμία συσχέτιση μεταξύ ζευγών πρωτονίου–νετρονίου τα οποία διαφέρουν κατά  $|\Delta n \Delta l \Delta j \Delta m_j\rangle = |0110\rangle$  στην γλώσσα του προτύπου φλοιών και ζευγών που διαφέρουν κατά  $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$  στη γλώσσα του προτύπου Nilsson έγινε μέχρι τώρα. Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε, μέσω της σύνδεσης της proxy-SU(3) με το πρότυπο φλοιών, ότι αυτά τα δύο είδη ζευγών ταυτίζονται.

### 5.3 Η δομή των ζευγών de Shalit–Goldhaber

Σε αυτή την παράγραφο, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της παραγράφου 5.1, θα αποδείξουμε ότι τα ζεύγη de Shalit–Goldhaber διαφέρουν μόνο κατά ένα κβάντο στον

καρτεσιανό άξονα  $z$  και συγκεκριμένα ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathcal{C} \hat{a}_z 1j_{m_j}^{15/2} = 1i_{m_j}^{13/2}, \quad (80)$$

$$\mathcal{C} \hat{a}_z 1i_{m_j}^{13/2} = 1h_{m_j}^{11/2}, \quad (81)$$

$$\mathcal{C} \hat{a}_z 1h_{m_j}^{11/2} = 1g_{m_j}^{9/2}, \quad (82)$$

$$\mathcal{C} \hat{a}_z 1g_{m_j}^{9/2} = 1f_{m_j}^{7/2}, \quad (83)$$

$$\mathcal{C} \hat{a}_z 1f_{m_j}^{7/2} = 1d_{m_j}^{5/2}, \quad (84)$$

$$\mathcal{C} \hat{a}_z 1d_{m_j}^{5/2} = 1p_{m_j}^{3/2}, \quad (85)$$

όπου  $\mathcal{C}$  είναι σταθερές κανονικοποίησης (διαφορετικές σε κάθε περίπτωση),  $\hat{a}_z$  είναι ο συνήθης τελεστής καταστροφής στον καρτεσιανό άξονα  $z$ , για τον οποίο ισχύει [286]

$$\hat{a}_z |n_z\rangle = \sqrt{n_z} |n_z - 1\rangle. \quad (86)$$

Ως παράδειγμα θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την απόδειξη της ισοδυναμίας του  $\mathcal{C}\hat{a}_z d_{3/2}^{5/2}$  με το τροχιακό  $1p_{3/2}^{3/2}$ . Οι υπολογισμοί για τις δυσκολότερες περιπτώσεις έγιναν με χρήση κώδικα. Από τους πίνακες της παρ. 5.1 βλέπουμε ότι η κατάσταση  $1d_{3/2}^{5/2}$  αναπτύσσεται στην βάση του Elliott  $|n_z, n_x, n_y\rangle |\pm\rangle$  στη μορφή

$$\begin{aligned} 1d_{3/2}^{5/2} = & -\frac{1}{2\sqrt{5}} |0, 0, 2\rangle |-\rangle + \frac{i}{\sqrt{10}} |0, 1, 1\rangle |-\rangle \\ & + \frac{1}{2\sqrt{5}} |0, 2, 0\rangle |-\rangle - i\sqrt{\frac{2}{5}} |1, 0, 1\rangle |+\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} |1, 1, 0\rangle |+\rangle. \end{aligned} \quad (87)$$

Η δράση του τελεστή καταστροφής σε αυτή την έκφραση δίνει

$$\hat{a}_z 1d_{3/2}^{5/2} = -i\sqrt{\frac{2}{5}} |0, 0, 1\rangle |+\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} |0, 1, 0\rangle |+\rangle. \quad (88)$$

Η σταθερά κανονικοποίησης είναι  $\mathcal{C} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Επομένως βρίσκουμε ότι

$$\mathcal{C} \hat{a}_z 1d_{3/2}^{5/2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} |0, 1, 0\rangle |+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |0, 0, 1\rangle |+\rangle, \quad (89)$$

ποσότητα η οποία με βάση τους πίνακες της παρ. 5.1 αντιστοιχεί στο τροχιακό  $1p_{3/2}^{3/2}$ . Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες σχέσεις.

Τα τροχιακά που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις, όπως ήδη αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι τροχιακά τα οποία παρουσιάζουν την μέγιστη δυνατή τιμή της ολικής στροφορμής για δεδομένη τροχιακή στροφορμή. Είναι λογικό να αναρωτηθεί κάποιος αν ισχύουν παρόμοιες σχέσεις και για άλλα τροχιακά. Π.χ. μπορεί κάποιος να ελέγξει αν το

τροχιακό  $1d_{1/2}^{3/2}$  διαφέρει μόνο κατά ένα κβάντο του άξονα  $z$  από το τροχιακό  $1p_{1/2}^{1/2}$ . Ακολουθώντας την παραπάνω μέθοδο βρίσκουμε ότι

$$C \hat{a}_z 1d_{1/2}^{3/2} \neq 1p_{1/2}^{1/2}. \quad (90)$$

Επομένως τα ζεύγη de Shalit–Goldhaber έχουν κάτι ξεχωριστό ανάμεσα στα ζεύγη που διαφέρουν κατά  $|\Delta n, \Delta l, \Delta j, \Delta m_j\rangle = |0, 1, 1, 0\rangle$ . Τα συγκεκριμένα ζεύγη διαφέρουν μόνο κατά ένα κβάντο του άξονα των  $z$ , άρα αναμένεται να έχουν παρόμοια δομή στο επίπεδο  $x-y$ .

Πράγματι, στην παράγραφο 2.3 είδαμε ότι οι κβαντικοί αριθμοί του Elliott δίνονται από τις σχέσεις [50]

$$\lambda = \left\{ \sum n_z \right\}_{max} - \max \left\{ \sum n_x, \sum n_y \right\}, \quad (91)$$

$$\mu = \left| \sum n_x - \sum n_y \right|, \mu \in \left\{ \sum n_z \right\}_{max}, \quad (92)$$

από τις οποίες φαίνεται ότι ο κβαντικός αριθμός  $\mu$  εξαρτάται μόνο από την κατανομή των κβάντων στο επίπεδο  $x-y$ . Όμως από τις ιδιότητες της  $SU(3)$  [50, 51, 52, 53, 23, 9] γνωρίζουμε ότι ο κβαντικός αριθμός  $K$ , ο οποίος καθορίζει τις υπάρχουσες ενεργειακές ζώνες σε ένα πυρήνα, δίνεται από την σχέση

$$K = \min\{\lambda, \mu\}, \min\{\lambda, \mu\} - 2, \dots, 1 \quad 0, \quad (93)$$

ανάλογα αν η ποσότητα  $\min\{\lambda, \mu\}$  είναι περιττός ή άρτιος αριθμός. Επομένως για πυρήνες στους οποίους ισχύει  $\lambda \geq \mu$ , οι τιμές του  $K$ , άρα και οι ενεργειακές ζώνες, καθορίζονται αποκλειστικά από την κατανομή των κβάντων στο επίπεδο  $x-y$ .

## 5.4 Η proxy-αντικατάσταση ως μοναδιακός μετασχηματισμός

Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε ότι η proxy-αντικατάσταση τροχιακών δεν είναι μια αυθαίρετη διαδικασία, αλλά ισοδυναμεί με ένα μοναδιακό μετασχηματισμό. Προς την κατεύθυνση αυτή θα περιγραφεί πρώτα ένας μοναδιακός μετασχηματισμός που εμφανίζεται στα πλαίσια του απλού αρμονικού ταλαντωτή, στη συνέχεια θα περιγραφεί ο μοναδιακός μετασχηματισμός που εμφανίζεται στα πλαίσια της συμμετρίας pseudo- $SU(3)$ , και τελικά θα περιγραφεί ο πολύ απλούστερος μετασχηματισμός ο οποίος εμφανίζεται στα πλαίσια της συμμετρίας proxy- $SU(3)$ .

### 5.4.1 Μοναδιακός μετασχηματισμός στον αρμονικό ταλαντωτή

Θεωρούμε έναν τελεστή  $\hat{G}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}})$ , όπου  $\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\hat{\mathbf{p}}$ ,  $\hat{\mathbf{S}}$  είναι αντίστοιχα η θέση, η ορμή και το σπιν. Ο τελεστής  $\hat{G}$  δεν είναι εν γένει μοναδιακός, αλλά μπορεί να καταστεί μοναδιακός μέσω της χρήσης του ερμιτιανού τελεστή [306]

$$\hat{O}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}}) = \hat{G}^\dagger(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}}) \hat{G}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}}), \quad (94)$$

παίρνοντας τον συνδυασμό

$$\hat{U} = \hat{G}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}})[\hat{O}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}})]^{-1/2}. \quad (95)$$

Εφόσον ο τελεστής  $\hat{O}$  είναι ερμιτιανός, είναι εφικτό να βρεθεί μια βάση στην οποία ο τελεστής αυτός θα είναι διαγώνιος. Στη βάση αυτή μπορεί να κατασκευαστεί ο τελεστής  $[\hat{O}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}})]^{-1/2}$ , παίρνοντας κατά μήκος της διαγωνίου τις τετραγωνικές ρίζες των αντίστροφων στοιχείων πίνακα, υπό τη προϋπόθεση ότι οι ιδιοτιμές του τελεστή  $\hat{O}$  είναι θετικές. Στην μαθηματική βιβλιογραφία η τετραγωνική ρίζα θετικού τελεστή είναι μια ποσότητα που έχει χρησιμοποιηθεί κατ' επανάληψη [307, 308, 309, 310].

Στην περίπτωση του απλού μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή ισχύουν οι γνωστές σχέσεις [286]:

$$\hat{H}_0 = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}), \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}), \quad (96)$$

όπου  $\hat{x}$  και  $\hat{p}$  είναι η θέση και η ορμή, ενώ  $\hat{a}^\dagger$  και  $\hat{a}$  είναι οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής στη βάση  $|n\rangle$ . Ο μοναδιακός τελεστής κατασκευάζεται από τον τελεστή καταστροφής  $\hat{a}$  και έχει τη μορφή [306]

$$\hat{U} = \hat{a}(\hat{a}^\dagger \hat{a})^{-1/2}. \quad (97)$$

Είναι φανερό ότι οι προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω ισχύουν, αφού ο τελεστής  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  στη βάση που χρησιμοποιείται είναι διαγώνιος και έχει θετικές ιδιοτιμές, ούτως ώστε να μπορούν να υπολογιστούν οι τετραγωνικές ρίζες των αντιστρόφων τους. Η Χαμιλτονιανή που προκύπτει από τον μοναδιακό μετασχηματισμό είναι [306]

$$\hat{H}'_0 = \hat{a}^\dagger \hat{a} + 1. \quad (98)$$

Η σχέση αυτή σημαίνει ότι οι ενεργειακές στάθμες που χαρακτηρίζονται από  $\mathcal{N}$  κβάντα στην παλιά Χαμιλτονιανή, έχουν  $\mathcal{N} - 1$  κβάντα στην καινούργια, διατηρώντας την ίδια ενέργεια, με μόνη εξαίρεση την θεμελιώδη κατάσταση της παλιάς Χαμιλτονιανής, η οποία δεν έχει αντίστοιχη κατάσταση. Με άλλα λόγια, η ποσότητα  $\mathcal{N}$  αντικαθίσταται στην νέα Χαμιλτονιανή από την ποσότητα  $\mathcal{N} - 1$ , αλλά η απώλεια ενέργειας αντισταθμίζεται από τον όρο  $+1$  που εμφανίζεται στην εξ. (98). Αυτός ο όρος  $+1$  παίζει σημαντικό ρόλο στην περίπτωση της προσέγγισης proxy-SU(3), όπως θα φανεί παρακάτω.

#### 5.4.2 Μοναδιακός μετασχηματισμός στην pseudo-SU(3)

Η pseudo-SU(3) συμμετρία [311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318] αποτελεί μια πολύ προγενέστερη της proxy-SU(3) προσπάθεια επέκτασης της συμμετρίας SU(3) του Elliott σε πυρήνες πέραν του φλοιού *sd*. Οι βασικές της υποθέσεις είναι εντελώς διαφορετικές, μπορούν δε να εκφραστούν με τη μορφή ενός μοναδιακού μετασχηματισμού [306, 323, 324], ο οποίος αφορά μόνο τα τροχιακά με την κανονική ομοτιμία (parity), για τα οποία αποκαθίσταται η συμμετρία SU(3), ενώ τα παρείσαια τροχιακά δεν συμμετέχουν στον μετασχηματισμό, αλλά παραμένουν χωριστά και πρέπει να τα μεταχειριστεί κάποιος στα πλαίσια του προτύπου φλοιών. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα ευρήματα του κεφαλαίου 3 σχετικά με τις προτιμώμενες μη αναγωγίσιμες



αναπαραστάσεις βρίσκουν εξ ίσου καλή εφαρμογή [319, 320, 321, 322] και στα πλαίσια της συμμετρίας pseudo-SU(3), παράγοντας μάλιστα αποτελέσματα [319, 320, 321, 322] για τις συλλογικές ποσότητες  $\beta$  και  $\gamma$  πολύ παρόμοια με αυτά της proxy-SU(3), καίτοι οι αρχικές παραδοχές των δύο μοντέλων είναι πολύ διαφορετικές.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, στα πλαίσια της συμμετρίας pseudo-SU(3) υπάρχει ένας μοναδιακός μετασχηματισμός ο οποίος συνδέει τα τροχιακά κανονικής ομοτιμίας με αυτά τα οποία τα αντικαθιστούν. Μια παιδαγωγική περιγραφή αυτού του μοναδιακού μετασχηματισμού δίδεται στην εργασία [306], όπου στο κεφάλαιο 4 περιγράφεται η περίπτωση του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή, στο κεφάλαιο 5 δίνεται ο μετασχηματισμός από την σφαιρική βάση του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή στην βάση της συμμετρίας pseudo-SU(3), ενώ στο κεφάλαιο 6 περιγράφεται ο μοναδιακός μετασχηματισμός που απαιτείται στην περίπτωση της σφαιρικής Χαμιλτονιανής Nilsson με μηδενική παραμόρφωση ( $\epsilon = 0$ ), η οποία περιλαμβάνει την αλληλεπίδραση σπιν-τροχιάς, καθώς και ένα όρο  $\hat{\mathbf{I}}^2$ , όπου  $\hat{\mathbf{I}}$  είναι η τροχιακή στροφορμή. Μια περιεκτική περιγραφή αυτών των μετασχηματισμών δίδεται στην εργασία [323], ενώ η γενίκευση του μοναδιακού μετασχηματισμού στην περίπτωση της παραμορφωμένης Χαμιλτονιανής Nilsson έχει δοθεί στην εργασία [324].

Για λόγους σύγκρισης, η αρχική Χαμιλτονιανή του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή για ένα σωματίδιο με σπιν 1/2 είναι

$$\hat{H}_0 = \hat{\mathbf{a}}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{a}}, \quad \hat{\mathbf{a}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{r}} - i\hat{\mathbf{p}}), \quad \hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{r}} + i\hat{\mathbf{p}}), \quad (99)$$

όπου  $\hat{\mathbf{r}}$  και  $\hat{\mathbf{p}}$  είναι οι συντεταγμένες και οι αντίστοιχες ορμές, ενώ  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$  και  $\hat{\mathbf{a}}$  είναι οι συνήθεις τελεστές δημιουργίας και καταστροφής. Ο μοναδιακός τελεστής λαμβάνεται από τον τελεστή  $(\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{S}})$ , όπου  $\hat{\mathbf{S}}$  είναι ο τελεστής του σπιν, και έχει τη μορφή [306]

$$\hat{U} = 2(\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{S}})(\hat{\mathbf{a}}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{a}} - 2\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}})^{-1/2}. \quad (100)$$

Η Χαμιλτονιανή που προκύπτει από τον μοναδιακό μετασχηματισμό είναι [306]:

$$\hat{H}'_0 = \hat{\mathbf{a}}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{a}} + 1. \quad (101)$$

Όπως και παραπάνω, η σχέση αυτή σημαίνει ότι οι ενεργειακές στάθμες που χαρακτηρίζονται από  $\mathcal{N}$  κβάντα στην παλιά Χαμιλτονιανή, έχουν  $\mathcal{N} - 1$  κβάντα στην καινούργια, διατηρώντας την ίδια ενέργεια, με μόνη εξαίρεση την θεμελιώδη κατάσταση της παλιάς Χαμιλτονιανής, η οποία δεν έχει αντίστοιχη κατάσταση. Με άλλα λόγια, η ποσότητα  $\mathcal{N}$  αντικαθίσταται στην νέα Χαμιλτονιανή από την ποσότητα  $\mathcal{N} - 1$ , αλλά η απώλεια ενέργειας αντισταθμίζεται από τον όρο  $+1$  που εμφανίζεται στην εξ. (101). Αυτός ο όρος  $+1$  παίζει σημαντικό ρόλο στην περίπτωση της προσέγγισης proxy-SU(3), όπως θα φανεί παρακάτω. Ο μοναδιακός μετασχηματισμός αυτής της παραγράφου είναι πολύ γενικός, αφού περιλαμβάνει και το σπιν και την τροχιακή στροφορμή.

### 5.4.3 Μοναδιακός μετασχηματισμός στην proxy-SU(3)

Θα κατασκευαστεί τώρα ο μοναδιακός μετασχηματισμός που αφορά την proxy-SU(3).

Ο παράγων κανονικοποίησης  $\mathcal{C}$  που εμφανίζεται στις εξισώσεις της παρ. 5.3 μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των τελεστών  $\hat{a}_z^\dagger, \hat{a}_z$ . Ο παράγων κανονικοποίησης είναι η αναμενόμενη τιμή

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \langle n, l, j, m_j | \hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z | n, l, j, m_j \rangle^{-1/2} \\ &= \langle \hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z \rangle^{-1/2} = \langle n_z \rangle^{-1/2}. \end{aligned} \quad (102)$$

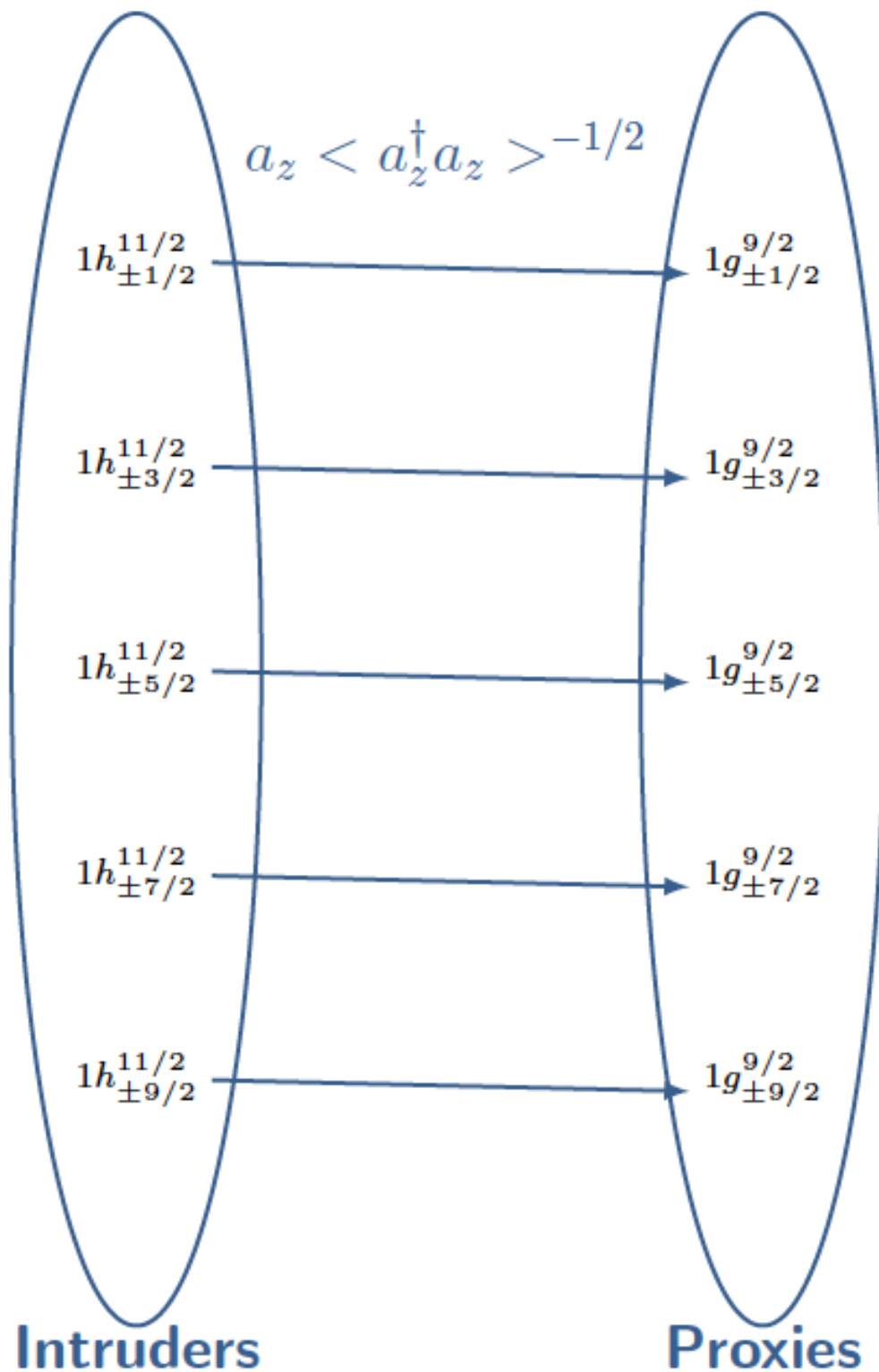
Κατά συνέπεια ο τελεστής

$$\hat{T} = \hat{a}_z \langle \hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z \rangle^{-1/2} \quad (103)$$

δρα στις παρείσακτες καταστάσεις, οι οποίες έχουν  $j_{max} = \mathcal{N} + 1/2$  και  $-(j_{max} - 1) \leq m_j \leq (j_{max} - 1)$ , ως εξής

$$\hat{T} |n, l, j_{max}, m_j\rangle = |n, l - 1, j_{max} - 1, m_j\rangle. \quad (104)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η δράση αυτή ισχύει μόνο για τις παρείσακτες καταστάσεις, καθώς και ότι οι παρείσακτες καταστάσεις με  $m_j = \pm j_{max}$  καταστρέφονται από τον τελεστή  $\hat{T}$ . Ως παράδειγμα, στο παρακάτω Σχήμα 28 φαίνεται η δράση του τελεστή  $\hat{T}$  στις παρείσακτες καταστάσεις του φλοιού 50-82.



Σχήμα 28: Δράση του τελεστή  $T$  στις παράσκατες καταστάσεις του φλοιού 50-82. Το παρείσακτο τροχιακό  $1h_{11/2}^{11/2}$  δεν έχει αντίστοιχο στην proxy-SU(3) συμμετρία [13].

Π.χ. για το τροχιακό  $1d_{3/2}^{5/2}$ , για το οποίο η αναλυτική έκφραση αναγράφεται στην παρ. 5.3, ισχύει

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z \rangle &= \langle 1d_{3/2}^{5/2} | \hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z | 1d_{3/2}^{5/2} \rangle = \\ &= \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{4}{5}, \end{aligned} \quad (105)$$

και επομένως

$$C = \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad (106)$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{T}1d_{3/2}^{5/2} &= \hat{a}_z \langle 1d_{3/2}^{5/2} | \hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z | 1d_{3/2}^{5/2} \rangle^{-1/2} 1d_{3/2}^{5/2} = \\ &= C \hat{a}_z 1d_{3/2}^{5/2} = 1p_{3/2}^{3/2}. \end{aligned} \quad (107)$$

Ο τελεστής  $\hat{T}$  έχει συμπεριφορά ανάλογη με αυτήν του τελεστή  $\hat{U}$  της παρ. 5.4.1. Στην περίπτωση του τρισδιάτατου αρμονικού ταλαντωτή χωρίς σπιν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο μοναδιακός τελεστής

$$\hat{U} = \hat{a}_z (\hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z)^{-1/2}, \quad (108)$$

ο οποίος επηρεάζει μόνο τον άξονα  $z$  και αφήνει άθικτους τους άξονες  $x, y$ .

Παρατηρούμε ότι ο μοναδιακός τελεστής που απαιτείται στην περίπτωση της proxy-SU(3) είναι κατά πολύ απλούστερος από τον τελεστή που απαιτείται στην pseudo-SU(3), ο οποίος περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Ο λόγος είναι ότι ο μοναδιακός μετασχηματισμός της proxy-SU(3) δεν εμπλέκει τις στροφορμές και το σπιν, όπως συμβαίνει στην pseudo-SU(3).

Σχετικά με τα προαπαιτούμενα της παρ. 5.4.1, στην παρούσα περίπτωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ερμιτιανός τελεστής

$$[\hat{O}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{S})]^{-1/2} = (\hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z)^{-1/2}. \quad (109)$$

Αφού ο  $\hat{O}$  είναι ερμιτιανός, είναι εφικτό να βρεθεί μια βάση, στην οποία αυτός να είναι διαγώνιος. Επιπλέον, στη βάση αυτή ο τελεστής  $\hat{O}^{-1/2}$  έχει νόημα, αφού κατασκευάζουμε την τετραγωνική ρίζα [307, 308, 309, 310] των αντιστρόφων στοιχείων της διαγωνίου, διαδικασία για την οποία αρκεί οι ιδιοτιμές του τελεστή  $\hat{O}$  να είναι θετικές. Στην παρούσα περίπτωση ο τελεστής  $\hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z$  είναι διαγώνιος στην βάση  $|n_z\rangle$  και οι ιδιοτιμές του είναι [286]:

$$\hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z |n_z\rangle = n_z |n_z\rangle. \quad (110)$$

Επομένως

$$(\hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z)^{-1/2} = (n_z)^{-1/2}. \quad (111)$$

Προφανώς ο τελεστής  $\hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z$  δεν είναι διαγώνιος στην βάση  $|n, l, j, m_j\rangle$  του προτύπου φλοιών. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε στην εξ. (103) την αναμενόμενη τιμή αυτού του τελεστή.

## 5.5 Σύνδεση της συμμετρίας proxy-SU(3) με το πρότυπο φλοιών

### 5.5.1 Τροχιακά και φλοιοί στα διάφορα πρότυπα

Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου εμφανίζονται περιληπτικά στον παρακάτω Πίνακα 20, όπου στην δεύτερη στήλη αναγράφονται τα τροχιακά του προτύπου φλοιών και στην τρίτη στήλη τα αντίστοιχα τροχιακά στην proxy-SU(3) συμμετρία.

Spin-orbit magic numbers	Original orbitals	proxy orbitals	Proxy $U(\Omega)$ symmetry	Proxy-SU(3) magic numbers	3D-HO magic numbers
6–14	$1p_{\pm 1/2}^{1/2}$ $1d_{\pm 1/2, \pm 3/2}^{5/2}$ $1d_{\pm 5/2}^{5/2}$	$1p_{\pm 1/2}^{1/2}$ $1p_{\pm 1/2, \pm 3/2}^{3/2}$ –	$U(3)$	6–12	2–8
14–28	$2s_{\pm 1/2}^{1/2}$ $1d_{\pm 1/2, \pm 3/2}^{3/2}$ $1f_{\pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2}^{7/2}$ $1f_{\pm 7/2}^{7/2}$	$2s_{\pm 1/2}^{1/2}$ $1d_{\pm 1/2, \pm 3/2}^{3/2}$ $1d_{\pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2}^{5/2}$ –	$U(6)$	14–26	8–20
28–50	$2p_{\pm 1/2}^{1/2}$ $2p_{\pm 1/2, \pm 3/2}^{3/2}$ $1f_{\pm 5/2, \pm 3/2, \pm 1/2}^{5/2}$ $1g_{\pm 1/2, \dots, \pm 7/2}^{9/2}$ $1g_{\pm 9/2}^{9/2}$	$2p_{\pm 1/2}^{1/2}$ $2p_{\pm 1/2, \pm 3/2}^{3/2}$ $1f_{\pm 5/2, \pm 3/2, \pm 1/2}^{5/2}$ $1f_{\pm 1/2, \dots, \pm 7/2}^{7/2}$ –	$U(10)$	28–48	20–40
50–82	$3s_{\pm 1/2}^{1/2}$ $2d_{\pm 1/2, \pm 3/2}^{3/2}$ $2d_{\pm 1/2, \dots, \pm 5/2}^{5/2}$ $1g_{\pm 1/2, \dots, \pm 7/2}^{7/2}$ $1h_{\pm 1/2, \dots, \pm 9/2}^{11/2}$ $1h_{\pm 11/2}^{11/2}$	$3s_{\pm 1/2}^{1/2}$ $2d_{\pm 1/2, \pm 3/2}^{3/2}$ $2d_{\pm 1/2, \dots, \pm 5/2}^{5/2}$ $1g_{\pm 1/2, \dots, \pm 7/2}^{7/2}$ $1g_{\pm 1/2, \dots, \pm 9/2}^{9/2}$ –	$U(15)$	50–80	40–70
82–126	$3p_{\pm 1/2}^{1/2}$ $3p_{\pm 1/2, \pm 3/2}^{3/2}$ $2f_{\pm 1/2, \dots, \pm 5/2}^{5/2}$ $2f_{\pm 1/2, \dots, \pm 7/2}^{7/2}$ $1h_{\pm 1/2, \dots, \pm 9/2}^{9/2}$ $1i_{\pm 1/2, \dots, \pm 11/2}^{13/2}$ $1i_{\pm 13/2}^{13/2}$	$3p_{\pm 1/2}^{1/2}$ $3p_{\pm 1/2, \pm 3/2}^{3/2}$ $2f_{\pm 1/2, \dots, \pm 5/2}^{5/2}$ $2f_{\pm 1/2, \dots, \pm 7/2}^{7/2}$ $1h_{\pm 1/2, \dots, \pm 9/2}^{9/2}$ $1h_{\pm 1/2, \dots, \pm 11/2}^{11/2}$ –	$U(21)$	82–124	70–112
126–184	$4s_{\pm 1/2}^{1/2}$ $3d_{\pm 1/2, \pm 3/2}^{3/2}$ $3d_{\pm 1/2, \dots, \pm 5/2}^{5/2}$ $2g_{\pm 1/2, \dots, \pm 7/2}^{7/2}$ $2g_{\pm 1/2, \dots, \pm 9/2}^{9/2}$ $1i_{\pm 1/2, \dots, \pm 11/2}^{11/2}$ $1j_{\pm 1/2, \dots, \pm 13/2}^{15/2}$ $1j_{\pm 15/2}^{15/2}$	$4s_{\pm 1/2}^{1/2}$ $3d_{\pm 1/2, \pm 3/2}^{3/2}$ $3d_{\pm 1/2, \dots, \pm 5/2}^{5/2}$ $2g_{\pm 1/2, \dots, \pm 7/2}^{7/2}$ $2g_{\pm 1/2, \dots, \pm 9/2}^{9/2}$ $1i_{\pm 1/2, \dots, \pm 11/2}^{11/2}$ $1i_{\pm 1/2, \dots, \pm 13/2}^{13/2}$ –	$U(28)$	126–182	112–168

Πίνακας 20: Τροχιακά και φλοιοί στα πλαίσια του προτύπου φλοιών, της συμμετρίας proxy-SU(3) και του τρισδιάστατου ιστροπικού αρμονικού ταλαντωτή. Τα τροχιακά που αντικαθίστανται σημειώνονται με έντονα στοιχεία.

Τα τροχιακά τα οποία αντικαθίστανται, όπως και οι αντικαταστάτες τους, αναγράφονται με έντονα στοιχεία. Είναι φανερό ότι το παρείσακτο τροχιακό του προτύπου φλοιών, το οποίο έχει την μεγαλύτερη προβολή της ολικής στροφορμής, δεν έχει αντίστοιχο τροχιακό στην proxy-SU(3). Αυτό αντικατοπτρίζεται στην έκταση των φλοιών, η οποία φαίνεται στην πρώτη στήλη για το πρότυπο φλοιών και στην πέμπτη στήλη για την proxy-SU(3) συμμετρία. Οι φλοιοί της proxy-SU(3) περιέχουν ένα τροχιακό λιγότερο (δύο νουκλεόνια λιγότερα) σε σύγκριση με τους αντίστοιχους φλοιούς του προτύπου φλοιών. Βέβαια, όπως έχει κατ' επανάληψη αναφερθεί, το παραλειπόμενο τροχιακό είναι αυτό το οποίο βρίσκεται ενεργειακά στην κορυφή του φλοιού, επομένως είναι κενό στην συντριπτική πλειοψηφία των πυρήνων. Στην τέταρτη στήλη αναγράφεται η συμμετρία του κάθε φλοιού στα πλαίσια της proxy-SU(3) συμμετρίας, η οποία περιέχει την υποάλγεβρα SU(3), οι προτιμώμενες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της οποίας καθορίζουν την δομή της θεμελιώδους κατάστασης του πυρήνα. Οι ίδιες συμμετρίες εμφανίζονται και στους φλοιούς του τρισδιάστατου ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή, η έκταση των οποίων εμφανίζεται στην τελευταία στήλη. Παρατηρούμε ότι οι φλοιοί της proxy-SU(3) είναι “μετατοπισμένοι” σε σχέση με τους φλοιούς του ταλαντωτή. Αυτό σημαίνει ότι ο ίδιος αριθμός νουκλεονίων αντιστοιχεί σε διαφορετική μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση στα πλαίσια της proxy-SU(3) και σε άλλη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση στα πλαίσια του ταλαντωτή. Επομένως κάθε πυρήνας αντιστοιχεί σε διαφορετική μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση στα πλαίσια της proxy-SU(3) και του ταλαντωτή. Το γεγονός αυτό έχει δραστικές συνέπειες στην ερμηνεία του φαινομένου της συνύπαρξης σχημάτων στους πυρήνες, όπως εν συντομία θα αναφερθεί στην επόμενη παράγραφο.

### 5.5.2 Συνέπειες στην συνύπαρξη σχημάτων

Συνύπαρξη σχημάτων [325, 326, 327, 328] σε ένα ατομικό πυρήνα καλείται η περίπτωση κατά την οποία εμφανίζονται πειραματικά στον ίδιο πυρήνα δύο ενεργειακές ζώνες με παρόμοιες ενέργειες αλλά πολύ διαφορετική δομή, π.χ. η μία μπορεί να είναι σφαιρική και η άλλη παραμορφωμένη, οι και οι δυο μπορεί να είναι παραμορφωμένες, αλλά η μία να είναι ωσειδής και η άλλη πεπλατυσμένη. Η υπέρξη του φαινομένου αποδίδεται σε ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της αλληλεπίδρασης νουκλεονίου-νουκλεονίου [329]. Η αλλοίωση των μαγικών αριθμών καθώς κάποιος απομακρύνεται από την κοιλάδα σταθερότητας [330] διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη δημιουργία του φαινομένου.

Ο παραπάνω Πίνακας 20 δείχνει ότι σε κάθε πυρήνα μπορούν να διαδραματίσουν ρόλο δύο σύνολα μαγικών αριθμών, αυτοί που παρουσιάζονται όταν η αλληλεπίδραση σπιν-τροχιάς είναι ισχυρή (14, 28, 50, 82, 126, 184), τους οποίους θα αποκαλούμε στο εξής μαγικούς αριθμούς SO (spin-orbit), και αυτοί που παρουσιάζονται όταν η αλληλεπίδραση σπιν-τροχιάς απουσιάζει, οι οποίοι είναι οι μαγικοί αριθμοί του τρισδιάστατου ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή (8, 20, 40, 70, 112, 168), τους οποίους θα αποκαλούμε στο εξής μαγικούς αριθμούς HO (harmonic oscillator). Έχει ήδη διαπιστωθεί [92] ότι η υπέρξη αυτών των δύο εναλλακτικών συνόλων μαγικών αριθμών οδηγεί στην πρόβλεψη ότι η συνύπαρξη σχημάτων μπορεί να εμφανιστεί μόνο σε συγκεκριμένες περιοχές του πυρηνικού χάρτη και όχι οπουδήποτε πάνω σε αυτόν, γεγονός το οποίο πρόσφατα επιβεβαιώθηκε μέσω υπολογισμών μέσου πεδίου [93].

## 6 Σύνοψη και προοπτικές

Για τη μελέτη όλων των προηγούμενων φαινομένων που αναφέρθηκαν ήδη στην παρούσα διατριβή και περιγράφονται εν συντομία στην Περίληψη, έχουν επί μακρόν χρησιμοποιηθεί και μποζονικές συμμετρίες, οι οποίες προκύπτουν από την προσέγγιση με μποζόνια κατάλληλα συσχετισμένων ζευγών φερμιονίων και έχει γίνει αναφορά στα σχετικά αποτελέσματα και σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα μετά την προσέγγιση με την proxy-SU(3).

Η εισαγωγή και ανάπτυξη της proxy-SU(3) συμμετρίας ανοίγει το δρόμο για πολλές μελλοντικές μελέτες στα πλαίσια της πυρηνικής δομής και όχι μόνο. Π.χ.:

α) Μπορούν να υπολογιστούν οι ρυθμοί ηλεκτρομαγνητικών μεταπτώσεων (B(E2), B(M1), κ.λπ.) χωρίς παρουσία παραμέτρων, τόσο σε γνωστούς πυρήνες για άμεση σύγκριση με υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα, όσο και σε άγνωστους, οι οποίοι καθίστανται σταδιακά προσβάσιμοι στις καινούργιες πειραματικές εγκαταστάσεις που αξιοποιούν δέσμες ραδιενεργών ιόντων.

β) Μπορούν να υπολογιστούν ενεργειακά φάσματα πυρήνων και από αυτά να μελετηθούν οι πυκνότητες ενεργειακών σταθμών, οι οποίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην πυρηνική αστροφυσική.

γ) Η χρήση της proxy-SU(3) για την κατανόηση του φαινομένου της συνύπαρξης δύο σχημάτων στον ίδιο ατομικό πυρήνα μπορεί να επεκταθεί και στην πρόβλεψη πολλαπλής συνύπαρξης (συνύπαρξης περισσότερων των δύο σχημάτων), για την οποία αρχίζουν να υπάρχουν πειραματικά δεδομένα.



## References

- [1] A. Bohr (1952) *Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk. Selsk.* **26** no. 14.
- [2] A. Bohr and B. R. Mottelson (1975) *Nuclear Structure Vol. II: Nuclear Deformations*. Benjamin, New York.
- [3] M. G. Mayer (1948) *Phys. Rev.* **74** 235.
- [4] M. G. Mayer (1949) *Phys. Rev.* **75** 1969.
- [5] O. Haxel, J.H.D. Jensen, and H.E. Suess (1949) *Phys. Rev.* **75** 1766.
- [6] M.G. Mayer and J.H.D. Jensen (1955) *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*. Wiley, New York.
- [7] B. G. Wybourne, *Classical Groups for Physicists* (Wiley, New York, 1974).
- [8] M. Moshinsky and Yu. F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics* (Harwood, Amsterdam, 1996).
- [9] F. Iachello, *Lie Algebras and Applications* (Springer, Berlin, 2006).
- [10] D. Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum (2017) *Phys. Rev. C* **95** 064325.
- [11] D. Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, S. Sarantopoulou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum (2017) *Phys. Rev. C* **95** 064326.
- [12] D. Bonatsos (2017) *Eur. Phys. J. A* **53** 148.
- [13] A. Martinou, D. Bonatsos, N. Minkov, I.E. Assimakis, S.K. Peroulis, S. Sarantopoulou, and J. Cseh (2020) *Eur. Phys. J. A* **56** 239.
- [14] D. Bonatsos, H. Sobhani, and H. Hassanabadi (2020) *Eur. Phys. J. Plus* **135** 710.
- [15] A. Martinou, D. Bonatsos, S. Sarantopoulou, I.E. Assimakis, S.K. Peroulis, and N. Minkov (2021) *Eur. Phys. J. A* **57** 83.
- [16] P. Cejnar, J. Jolie, and R. F. Casten, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2155 (2010).
- [17] R. F. Casten and E. A. McCutchan, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **34**, R285 (2007).
- [18] F. Iachello, *Int. J. Mod. Phys. B* **20**, 2687 (2006).
- [19] A. Arima and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett* **35**, 1069 (1975).
- [20] A. Arima and F. Iachello, *Ann. Phys. (NY)* **99**, 253-317 (1976).
- [21] A. Arima and F. Iachello. *Ann. Phys. (NY)* **111**, 201 (1978).

- [22] A. Arima and F. Iachello, *Ann. Phys. (NY)* **123**, 468 (1979).
- [23] F. Iachello and A. Arima, *The Interacting Boson Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987)
- [24] F. Iachello and P. Van Isacker, *The Interacting Boson-Fermion Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [25] A. Frank and P. Van Isacker, *Symmetry Methods in Molecules and Nuclei* (S y G editores, México D.F., 2005).
- [26] D. Bonatsos, *Interacting Boson Models of Nuclear Structure* (Clarendon, Oxford, 1988).
- [27] D. H. Feng, R. Gilmore, and S. R. Deans, *Phys. Rev. C* **23**, 1254—1258 (1981).
- [28] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3580 (2000).
- [29] R. F. Casten and N. V. Zamfir, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3584 (2000).
- [30] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 052502 (2001).
- [31] R. F. Casten and N. V. Zamfir, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 052503 (2001).
- [32] D. Bonatsos, D. Lenis, and D. Petrellis, *Rom. Rep. Phys.* **59**, 273 (2007).
- [33] R. F. Casten, *Nuclear Structure from a Simple Perspective*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [34] J. N. Ginocchio and M. W. Kirson, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1744 (1980).
- [35] A. E. L. Dieperink, O. Scholten, and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1747 (1980).
- [36] J. N. Ginocchio and M. W. Kirson, *Nucl. Phys. A* **350**, 31 (1980).
- [37] O. S. van Roosmalen, Ph.D. thesis, U. Groningen, The Netherlands (1982).
- [38] F. Iachello, N. V. Zamfir, and R. F. Casten, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1191 (1998).
- [39] Y. Alhassid and N. Whelan, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 816 (1991).
- [40] N. Whelan and Y. Alhassid, *Nucl. Phys. A* **556**, 42 (1993).
- [41] D. Bonatsos, E.A. McCutchan, and R.F. Casten, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 022502 (2010).
- [42] D. Bonatsos, S. Karampagia, and R.F. Casten, *Phys. Rev. C* **83**, 054313 (2011).
- [43] N. V. Zamfir, P. von Brentano, R. F. Casten, and J. Jolie, *Phys. Rev. C* **66**, 021304 (2002).

- [44] V. Werner, P. von Brentano, R. F. Casten, and J. Jolie, *Phys. Lett. B* **527**, 55 (2002).
- [45] D. J. Rowe and J. L. Wood, *Fundamentals of Nuclear Models: Foundational Models* (World Scientific, Singapore, 2010).
- [46] I. Talmi, *Simple Models of Complex Nuclei, Contemporary Concepts in Physics* vol. 7 (Harwood, New York, 1993), chapter 29. DOI 10.1201/9780203739716.
- [47] P. O. Lipas, in *Algebraic approaches to nuclear structure : interacting boson and fermion models, Contemporary Concepts in Physics*, vol. 6, ed. by R. F. Casten (Harwood, Chur, 1993).
- [48] J. P. Draayer, in *Algebraic approaches to nuclear structure: Interacting boson and fermion models, Contemporary Concepts in Physics*, vol. 6, ed. R. F. Casten (Harwood, Chur, 1993).
- [49] D. J. Rowe, Dynamical symmetries of nuclear collective models, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **37**, 265 (1996).
- [50] J. P. Elliott, *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **245**, 128(1958).
- [51] J. P. Elliott, *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **245**, 562 (1958).
- [52] J. P. Elliott and M. Harvey, *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **272**, 557 (1963).
- [53] M. Harvey, *The Nuclear SU(3) Model*, in *Advances in Nuclear Physics* **1**, ed. M. Baranger and E. Vogt (Prenum, New York, 1968) PAGE.
- [54] J. P. Elliott and C. E. Wilsdon, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A* **302**, 509 (1968).
- [55] C. E. Wilsdon, A survey of the nuclear s-d shell, using the SU(3) coupling scheme. Ph.D. thesis, University of Sussex (1965). URL <https://ethos.bl.uk/Home.do>. Ethos ID: 477554.
- [56] G. Rosensteel and D. J. Rowe, *Ann. Phys. (NY)* **126**, 343 (1980).
- [57] V.K.B. Kota, *SU(3) Symmetry in Atomic Nuclei* (Springer, Singapore, 2020).
- [58] S. G. Nilsson, *Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk. Selsk.* **29**, no. 16 (1955).
- [59] I. Ragnarsson, S. G. Nilsson, and R. K. Sheline, *Phys. Reports* **45**, 1 (1978).
- [60] S. G. Nilsson and I. Ragnarsson, *Shapes and Shells in Nuclear Structure* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [61] H. Sobhani, H. Hassanabadi, and D. Bonatsos, *Eur. Phys. J. Plus* (2021) 136 (2021) 398.
- [62] Y. Takahashi (1975) *Prog. Theor. Phys.* **53** 461.

- [63] R.M. Asherova, Yu.F. Smirnov, V.N. Tolstoy, and A.P. Shustov (1981) Nucl. Phys. A **355** 25.
- [64] G. Rosensteel and J. P. Draayer (1989) J. Phys. A: Math. Gen. **22** 1323.
- [65] W. Nazarewicz and J. Dobaczewski (1992) Phys. Rev. Lett. **68** 154.
- [66] W. Nazarewicz, J. Dobaczewski, and P. Van Isacker (1992) AIP Conf. Proc. **259** 30.
- [67] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, P. Kolokotronis, and D. Lenis (1994). arXiv: hep-th/9411218.
- [68] B. Mottelson, Phys. Scr. **T125** (2006) editorial.
- [69] G.N. Afanas'ev and P.P. Raychev (1972) Fiz. Elem. Chast. At. Yadra **3** 436. [Sov. J. Nucl. Phys. **3** 229].
- [70] L. Wilets and M. Jean, Phys. Rev. **102**, 788–796 (1956).
- [71] G. Rakavy, Nucl. Phys. **4**, 289-294 (1957).
- [72] D. R. Bès, Nucl. Phys. **10**, 373-385 (1959).
- [73] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, P. P. Raychev, and P. A. Terziev, Phys. Rev. C **69**, 044316 (2004).
- [74] M. A. Caprio and F. Iachello, Nucl. Phys. **A** (2006), doi:10.1016/j.nuclphysa.2006.10.032
- [75] G. G. Dussel and D. R. Bès, Nucl. Phys. **A 143**, 623–640 (1970).
- [76] E. Chacón and M. Moshinsky, J. Math. Phys. **18**, 870–880 (1977).
- [77] M. Moshinsky, J. Math. Phys. **25**, 1555–1564 (1984).
- [78] D. Bonatsos, I. E. Assimakis, and A. Martinou, Bulg. J. Phys. **42** (2015) 439.
- [79] A. Martinou, I. E. Assimakis, and D. Bonatsos, in the Proceedings of the 3rd Hellenic Institute of Nuclear Physics Workshop, Athens (4/2016), , ed. G.A. Souliotis and A. Pakou (2016), <http://hinp.physics.uoi.gr>, p. 28.
- [80] I. E. Assimakis, A. Martinou, and D. Bonatsos, in the Proceedings of the 3rd Hellenic Institute of Nuclear Physics Workshop, Athens (4/2016), ed. G.A. Souliotis and A. Pakou (2016), <http://hinp.physics.uoi.gr>, p. 31.
- [81] A. Martinou, I. E. Assimakis, N. Minkov, and D. Bonatsos, , in Nuclear Theory '35, Proceedings of the 35th International Workshop on Nuclear Theory (Rila 2016), ed. M. Gaidarov and N. Minkov (Heron Press, Sofia, 2016) 224.

- [82] I. E. Assimakis, D. Bonatsos, N. Minkov, A. Martinou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum, *Bulg. J. Phys.* 44 (2017) 398.
- [83] D. Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum, , in the Proceedings of the 4th Workshop of the Hellenic Institute of Nuclear Physics (HINPw4), Ioannina (2017), ed. A. Pakou and C. Papachristodoulou (2017) <http://hinp.physics.uoi.gr>, p. 50, arXiv 1706.05817 [nucl-th].
- [84] S. Sarantopoulou, A. Martinou, I. E. Assimakis, N. Minkov, and D. Bonatsos, in Nuclear Theory '35, Proceedings of the 35th International Workshop on Nuclear Theory (Rila 2016), ed. M. Gaidarov and N. Minkov (Heron Press, Sofia, 2016) 236.
- [85] S. Sarantopoulou, D. Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum, *Bulg. J. Phys.* 44 (2017) 417.
- [86] D. Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, S. Sarantopoulou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum, in the Proceedings of the 4th Workshop of the Hellenic Institute of Nuclear Physics (HINPw4), Ioannina (5/2017), ed. A. Pakou and C. Papachristodoulou (2017), <http://hinp.physics.uoi.gr>, p. 63, arXiv 1706.05844 [nucl-th].
- [87] D. Bonatsos, R. F. Casten, A. Martinou, I. E. Assimakis, N. Minkov, S. Sarantopoulou, R. B. Cakirli, and K. Blaum, *HNPS Advances in Nuclear Physics* 25 (2017) 6. Proceedings of the 26th Annual Symposium of the Hellenic Nuclear Physics Society (Anavyssos, 2017) ed. C. Tsabaris, R. Vlastou, M. Kokkoris, and D. Patiris (NTUA, Athens, 2018) . arXiv: 1712.04126 [nucl-th]. <http://dx.doi.org/10.12681/hmps.1951>.
- [88] A. Martinou, D. Bonatsos, N. Minkov, I.E. Assimakis, S. Sarantopoulou, and S. Peroulis, Nuclear Theory '37, Proceedings of the 37th International Workshop on Nuclear Theory (Rila 2018), ed. M. Gaidarov and N. Minkov (Heron Press, Sofia, 2018) 41. arXiv: 1810.11870 [nucl-th].
- [89] D. Bonatsos, I.E. Assimakis, A. Martinou, S. Peroulis, S. Sarantopoulou, and N. Minkov, Nuclear Theory '37, Proceedings of the 37th International Workshop on Nuclear Theory (Rila 2018), ed. M. Gaidarov and N. Minkov (Heron Press, Sofia, 2018) 126. arXiv: 1810.11866 [nucl-th].
- [90] D. Bonatsos, I.E. Assimakis, A. Martinou, S. Sarantopoulou, S. Peroulis, and N. Minkov, to appear in *HNPS Advances in Nuclear Physics : Proceedings of the 27th Annual Symposium of the Hellenic Nuclear Physics Society (Athens, 2018)*, ed. T. Mertzimekis, G.A. Souliotis, and E. Styliaris. arXiv: 1810.11858 [nucl-th].
- [91] A. Martinou, in the Proceedings of the 5th Workshop of the Hellenic Institute of Nuclear Physics (HINPw5), Thessaloniki (4/2019), ed. Ch. Moustakidis (2020), <http://hinp.physics.uoi.gr>, p. 59.

- [92] A. Martinou, D. Bonatsos, T.J. Mertzimekis, K. Karakatsanis, I.E. Assimakis, S.K. Peroulis, S. Sarantopoulou, and N. Minkov, Review article, *Eur. Phys. J. A* 57 (2021) 84 (32 pages). arXiv: 2102.05133 [nucl-th].
- [93] D. Bonatsos, K.E. Karakatsanis, A. Martinou, T.J. Mertzimekis, and N. Minkov, *Phys. Lett. B* 829 (2022) 137099 (6 pages). arXiv: 2204.00805 [nucl-th].
- [94] I.E. Assimakis, D. Bonatsos, A. Martinou, S. Sarantopoulou, S. Peroulis, T. Mertzimekis, and N. Minkov, *HNPS Advances in Nuclear Physics* 26 (2018) 9. Proceedings of the 27th Annual Symposium of the Hellenic Nuclear Physics Society (Athens, 2018), ed. T. Mertzimekis, G.A. Souliotis, and E. Styliaris. arXiv: 1811.01071 [nucl-th]. <http://dx.doi.org/10.12681/hnps.17989>.
- [95] A. Martinou, D. Bonatsos, N. Minkov, T. Mertzimekis, I.E. Assimakis, S. Peroulis, and S. Sarantopoulou, *HNPS Advances in Nuclear Physics* 26 (2018) 96. Proceedings of the 27th Annual Symposium of the Hellenic Nuclear Physics Society (Athens, 2018), ed. T. Mertzimekis, G.A. Souliotis, and E. Styliaris. arXiv: 1810.11860 [nucl-th]. <http://dx.doi.org/10.12681/hnps.1804>.
- [96] A. Martinou, in *Nuclear Theory '38, Proceedings of the 38th International Workshop on Nuclear Theory (Rila 2019)*, ed. M. Gaidarov and N. Minkov (Heron Press, Sofia, 2019) 31.
- [97] A. Martinou and D. Bonatsos, in *Nuclear Structure Physics*, ed. A. Shukla and S.K. Patra (CRC Press, Boca Raton, 2020) 1. arXiv: 1909.00233 [nucl-th].
- [98] A. Martinou, *Eur. Phys. J. Web of Conferences*, 252 (2021) 02005.
- [99] A. Martinou, N. Minkov, S. Sarantopoulou, S. Peroulis, I.E. Assimakis, and D. Bonatsos, *Bulg. J. Phys.* 46 (2019) 337.
- [100] D. Bonatsos, A. Martinou, I.E. Assimakis, S.K. Peroulis, S. Sarantopoulou, and N. Minkov, *Bulg. J. Phys.* 48 (2021) 441.
- [101] D. Bonatsos, A. Martinou, I.E. Assimakis, S.K. Peroulis, S. Sarantopoulou, and N. Minkov, *Eur. Phys. J. Web of Conferences*, 252 (2021) 02004.
- [102] D. Bonatsos, A. Martinou, I.E. Assimakis, S.K. Peroulis, S. Sarantopoulou, and N. Minkov, *HNPS Advances in Nuclear Physics (2021) to be published*. Proceedings of the 29th Annual Symposium of the Hellenic Nuclear Physics Society (Athens, 2021).
- [103] S. Sarantopoulou, A. Martinou, and D. Bonatsos, *Bulg. J. Phys.* **46**, 455 (2019).
- [104] A. Martinou, S. Sarantopoulou, K.E. Karakatsanis, and D. Bonatsos, *Eur. Phys. J. Web of Conferences* 252 (2021) 02006.
- [105] C.M. Lederer and V.S. Shirley (eds.), *Table of Isotopes*, 7th ed. (Wiley, New York, 1978).

- [106] B. R. Mottelson and S. G. Nilsson, Nucl. Phys. **13**, 281 (1959).
- [107] A. J. Rassey, Phys. Rev. **109**, 949 (1958).
- [108] P. Quentin and R. Babinet, Nucl. Phys. A **156**, 365 (1970).
- [109] J.P. Boisson and R. Piepenbring, Nucl. Phys. A **168**, 385 (1971).
- [110] G. Rosensteel and J. P. Draayer, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, 1323 (1989).
- [111] W. Nazarewicz and J. Dobaczewski, Phys. Rev. Lett. **68**, 154 (1992).
- [112] W. Nazarewicz, J. Dobaczewski, and P. Van Isacker, AIP Conf. Proc. **259**, 30 (1992).
- [113] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, P. Kolokotronis, and D. Lenis, arXiv: hep-th/9411218 (1994).
- [114] K. Sugawara-Tanabe and A. Arima, Nucl. Phys. A **619**, 88 (1997).
- [115] A. Arima, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **25**, 581 (1999).
- [116] R.B. Cakirli, D.S. Brenner, R.F. Casten, and E.A. Millman (2005) Phys. Rev. Lett. **94** 092501; erratum (2005) Phys. Rev. Lett. **95** 119903.
- [117] R.B. Cakirli and R.F. Casten (2006) Phys. Rev. Lett. **96** 132501.
- [118] D.S. Brenner, R.B. Cakirli and R.F. Casten (2006) Phys. Rev. C **73** 034315.
- [119] M. Stoitsov, R.B. Cakirli, R.F. Casten, W. Nazarewicz, and W. Satula (2007) Phys. Rev. Lett. **98** 132502.
- [120] R.B. Cakirli, R.F. Casten, R. Winkler, K. Blaum, and M. Kowalska (2009) Phys. Rev. Lett. **102** 082501.
- [121] R. B. Cakirli, K. Blaum and R. F. Casten (2010) Phys. Rev. C **82** 061304.
- [122] D. Bonatsos, S. Karampagia, R.B. Cakirli, R.F. Casten, K. Blaum, and L. Amon Susam (2013) Phys. Rev. C **88** 054309.
- [123] R.F. Casten, D. Bonatsos, S. Karampagia, R.B. Cakirli, and K. Blaum, in Beauty in Physics: Theory and Experiment (Cocoyoc 2012), AIP Conference Proceedings 1488 (2012) 150-154.
- [124] D. Bonatsos, in the Proceedings of the First Hellenic Institute of Nuclear Physics Workshop on New Aspects and Perspectives in Nuclear Physics, Ioannina (9/2012), ed. A. Pakou and C. Papachristodoulou (2012), <http://hinp.physics.uoi.gr>, p. 4.
- [125] S. Karampagia and D. Bonatsos, in the Proceedings of the 2nd Hellenic Institute of Nuclear Physics Workshop, Thessaloniki (4/2014), ed. Ch. Moustakidis, G. Lalazissis, and A. Pakou (2015), <http://hinp.physics.uoi.gr>, p. 52.

- [126] D. Bonatsos and A. Klein, *Ann. Phys. (NY)* **169**, 61 (1986).
- [127] I.M. Gel'fand and M.L. Zeitlin, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **71**, 825 (1950).
- [128] I.M. Gel'fand and M.L. Zeitlin, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **71**, 1017 (1950).
- [129] J. P. Draayer, Y. Leschber, S. C. Park, and R. Lopez, *Comput. Phys. Commun.* **56**, 279 (1989).
- [130] I. E. Assimakis, *Algebraic Models of Nuclear Structure with SU(3) Symmetry*, Master's thesis, National Technical University of Athens (2015). URL <http://dx.doi.org/10.26240/heal.ntua.3240>.
- [131] H. Ui, *Prog. Theor. Phys.* **44**, 703 (1970).
- [132] O. Castaños, J. P. Draayer, and Y. Leschber, *Z. Phys. A* **329**, 33 (1988).
- [133] J. P. Elliott, J. A. Evans, and P. Van Isacker, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1124 (1986).
- [134] J. P. Draayer, S. C. Park, and O. Castaños, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 20 (1989).
- [135] D. Troltenier, C. Bahri, and J. P. Draayer, *Nucl. Pys. A* **589**, 75 (1995).
- [136] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem* (Springer, Berlin, 1980).
- [137] H. De Vries, C. W. De Jager, and C. De Vries, *At. Data Nucl. Data Tables* **36**, 495 (1987).
- [138] J. R. Stone, N. J. Stone, and S. Moszkowski, *Phys. Rev. C* **89**, 044316 (2014).
- [139] S. Raman, C. W. Nestor, Jr., and P. Tikkanen, *At. Data Nucl. Data Tables* **78**, 1 (2001).
- [140] G. A. Lalazissis, S. Raman, and P. Ring, *At. Data Nucl. Data Tables* **71**, 1 (1999).
- [141] A. Martinou, D. Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, S. Sarantopoulou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum, *Bulg. J. Phys.* **44** (2017) 407.
- [142] D. Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, S. K. Peroulis, S. Sarantopoulou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum, *Bulg. J. Phys.* **44** (2017) 385.
- [143] D. Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, S. Sarantopoulou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum, in the Proceedings of the 4th Workshop of the Hellenic Institute of Nuclear Physics (HINPw4), Ioannina (5/2017), ed. A. Pakou and C. Papachristodoulou (2017), <http://hinp.physics.uoi.gr>, p. 57, arXiv 1706.05832 [nucl-th].



- [144] A. Martinou, S. Peroulis, D. Bonatsos, I. E. Assimakis, S. Sarantopoulou, N. Minkov, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum, HNPS Advances in Nuclear Physics 25 (2017) 21. Proceedings of the 26th Annual Symposium of the Hellenic Nuclear Physics Society (Anavyssos, 2017, ed. C. Tsabaris, R. Vlastou, M. Kokkoris, and D. Patiris (NTUA, Athens, 2018). arXiv: 1712.04134 [nucl-th]. <http://dx.doi.org/10.12681/hnps.1954>.
- [145] P. M. Davidson, Proc. R. Soc. **135**, 459 (1932).
- [146] J. P. Elliott, J. A. Evans, and P. Park, Phys. Lett. **B 169** 309 (1986).
- [147] D. J. Rowe and C. Bahri, J. Phys. **A 31**, 4947 (1998).
- [148] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P. P. Raychev, and P. A. Terziev, Phys. Lett. **B 584**, 40 (2004).
- [149] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P. P. Raychev, and P. A. Terziev, Phys. Rev. **C 70**, 024305 (2004).
- [150] C. M. Bender, S. Boettcher, H. F. Jones, and V. M. Savage, J. Phys. **A 32**, 6771 (1999).
- [151] J. M. Arias, C. E. Alonso, A. Vitturi, J. E. García-Ramos, J. Dukelsky, and A. Frank, Phys. Rev. **C 68**, 041302 (2003).
- [152] J. E. García-Ramos, J. Dukelsky, and J. M. Arias, Phys. Rev. **C 72**, 037301 (2005).
- [153] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Pietralla, and P. A. Terziev, Phys. Rev. **C 74**, 044306 (2006).
- [154] N. Pietralla and O. M. Gorbachenko, Phys. Rev. **C 70**, 011304 (2004).
- [155] K. Dusling and N. Pietralla, Phys. Rev. **C 72**, 011303 (2005).
- [156] M. A. Caprio, Phys. Rev. **C 65**, 031304 (2002).
- [157] A. V. Turbiner, Commun. Math. Phys. **118**, 467 (1988).
- [158] A. G. Ushveridze, *Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics*, Institute of Physics, Bristol, 1994.
- [159] G. Lèvai and J. M. Arias, Phys. Rev. **C 69**, 014304 (2004).
- [160] L. Fortunato and A. Vitturi, J. Phys. **G 29**, 1341 (2003).
- [161] L. Fortunato, Eur. Phys. J. **A 26**, s01, 1 (2005).
- [162] A. A. Raduta, A. C. Gheorghe, and A. Faessler, J. Phys. **G 31**, 337 (2005).
- [163] R. Fossion, D. Bonatsos, and G. A. Lalazissis, Phys. Rev. **C 73**, 044310 (2006).

- [164] R. Bijker, R. F. Casten, N. V. Zamfir, and E. A. McCutchan, Phys. Rev. **C 68** 064304 (2003). Erratum: Phys. Rev. **C 69**, 059901 (2004).
- [165] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, P. P. Raychev, and P. A. Terziev, Phys. Rev. **C 69**, 014302 (2004).
- [166] M. A. Caprio, Phys. Rev. **C 69**, 044307 (2004).
- [167] L. Fortunato and A. Vitturi, J. Phys. **G 30**, 627 (2004).
- [168] M. A. Caprio, Phys. Rev. **C 72**, 054323 (2005).
- [169] D. J. Rowe, Nucl. Phys. **A 735**, 372 (2004).
- [170] C. J. Rowe, P. S. Turner, and J. Repka, J. Math. Phys. **45** 2761 (2004).
- [171] D. J. Rowe and P. S. Turner, Nucl. Phys. **A 753**, 94 (2005).
- [172] D. Bonatsos, D. Lenis, E. A. McCutchan, D. Petrellis, and I. Yigitoglu, Phys. Lett. **B 649**, 394 (2007).
- [173] A. C. Gheorghe, A. A. Raduta, and A. Faessler, Phys. Lett. **B 648**, 171 (2007).
- [174] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, P. A. Terziev, and I. Yigitoglu, Phys. Lett. **B 632**, 238 (2006).
- [175] A. O. Barut and R. Raczka, *Theory of Group Representations and Applications*, World Scientific, Singapore, 1986.
- [176] J. Meng, W. Zhang, S. G. Zhou, H. Toki, and L. S. Geng, Eur. Phys. J. **A 25** 23 (2005).
- [177] Z.-Q. Sheng and J.-Y. Guo, Mod. Phys. Lett. **A 20**, 2711 (2005).
- [178] M. Yu, P.-F. Zhang, T.-N. Ruan, and J.-Y. Guo, Int. J. Mod. Phys. **E 15**, 939 (2006).
- [179] A. Leviatan, Phys. Rev. **C 72**, 031305 (2005).
- [180] J.-Y. Zhang, M. A. Caprio, N. V. Zamfir, and R. F. Casten, Phys. Rev. **C 60**, 061304 (1999).
- [181] N. V. Zamfir, *et al.*, Phys. Rev. **C 65**, 044325 (2002).
- [182] J. M. Arias, Phys. Rev. **C 63**, 034308 (2001).
- [183] G. Kalyva, *et al.*, in *Frontiers in Nuclear Structure, Astrophysics and Reactions (Kos 2005)*, ed. S. V. Harissopulos, P. Demetriou, and R. Julin, AIP CP **831**, 472 (2006).
- [184] A. Frank, C. E. Alonso, and J. M. Arias, Phys. Rev. **C 65**, 014301 (2001).

- [185] D.-L. Zhang and Y.-X. Liu, Phys. Rev. **C 65**, 057301 (2002).
- [186] J.-F. Zhang, G.-L. Long, Y. Sun, S.-J. Zhu, F.-Y. Liu, and Y. Jia, Chin. Phys. Lett. **20**, 1231 (2003).
- [187] D.-L. Zhang and Y.-X. Liu, Chin. Phys. Lett. **20**, 1028 (2003).
- [188] R. M. Clark, *et al.*, Phys. Rev. **C 69**, 064322 (2004).
- [189] M. W. Kirson, Phys. Rev. **C 70**, 049801 (2004).
- [190] H. von Garrel, *et al.*, Phys. Rev. **C 73**, 054315 (2006).
- [191] N. Marginean, *et al.*, Phys. Lett. **B 633**, 696 (2006).
- [192] R. Krücken, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 232501 (2002).
- [193] N. V. Zamfir, *et al.*, Phys. Rev. **C 65**, 067305 (2002).
- [194] R. M. Clark, M. Cromaz, M. A. Deleplanque, R. M. Diamond, P. Fallon, A. Görge, I. Y. Lee, A. O. Macchiavelli, F. S. Stephens, and D. Ward, Phys. Rev. **C 67**, 041302 (2003).
- [195] R. F. Casten, N. V. Zamfir, and R. Krücken, Phys. Rev. **C 68**, 059801 (2003).
- [196] D.-L. Zhang and H.-Y. Zhao, Chin. Phys. Lett. **19**, 779 (2002).
- [197] D. Tonev, A. Dewald, T. Klug, P. Petkov, J. Jolie, A. Fitzler, O. Möller, S. Heinze, P. von Brentano, and R. F. Casten, Phys. Rev. **C 69**, 034334 (2004).
- [198] A. Dewald, *et al.*, Eur. Phys. J. **A 20**, 173 (2004).
- [199] M. A. Caprio, *et al.*, Phys. Rev. **C 66**, 054310 (2002).
- [200] E. A. McCutchan, *et al.*, Phys. Rev. **C 69**, 024308 (2004).
- [201] E. A. McCutchan, N. V. Zamfir, R. F. Casten, M. A. Caprio, H. Ai, H. Amro, C. W. Beausang, A. A. Hecht, D. A. Meyer, and J. J. Ressler, Phys. Rev. **C 71**, 024309 (2005).
- [202] A. Dewald, *et al.*, J. Phys. **G 31**, S1427 (2005).
- [203] R. M. Clark, *et al.*, Phys. Rev. **C 68**, 037301 (2003).
- [204] D. S. Brenner, in *Mapping the Triangle*, ed. A. Aprahamian, J. A. Cizewski, S. Pittel, and N. V. Zamfir, AIP CP **638**, 223 (2002).
- [205] P. G. Bizzeti and A. M. Bizzeti-Sona, Phys. Rev. **C 66**, 031301 (2002).
- [206] C. Hutter, *et al.*, Phys. Rev. **C 67**, 054315 (2003).

- [207] C. Fransen, N. Pietralla, A. Linnemann, V. Werner, and R. Bijker, Phys. Rev. **C 69**, 014313 (2004).
- [208] F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **95**, 052503 (2005).
- [209] C. E. Alonso, J. M. Arias, and A. Vitturi, Phys. Rev. Lett. **98**, 052501 (2007).
- [210] C. E. Alonso, J. M. Arias, L. Fortunato, and A. Vitturi, Phys. Rev. **C 72**, 061302 (2005).
- [211] C. E. Alonso, J. M. Arias, and A. Vitturi, Phys. Rev. **C 74**, 027301 (2006).
- [212] J. Jolie, S. Heinze, P. Van Isacker, and R. F. Casten, Phys. Rev. **C 70**, 011305 (2004).
- [213] M. S. Fetea, *et al.*, Phys. Rev. **C 73**, 051301 (2006).
- [214] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, and P. A. Terziev, Phys. Lett. **B 588**, 172 (2004).
- [215] J. Meyer-ter-Vehn, Nucl. Phys. **A 249**, 111 (1975).
- [216] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, P. A. Terziev, and I. Yigitoglu, in *Symmetries and Low-Energy Phase Transition in Nuclear-Structure Physics (Camerino 2005)*, ed. G. Lo Bianco, U. Camerino, Camerino, 2006, p. 63. nucl-th/0512046.
- [217] L. Fortunato, Phys. Rev. **C 70**, 011302 (2004).
- [218] L. Fortunato, S. De Baerdemacker, and K. Heyde, Phys. Rev. **C 74**, 014310 (2006).
- [219] S. De Baerdemacker, L. Fortunato, V. Hellemans, and K. Heyde, Nucl. Phys. **A 769**, 16 (2006).
- [220] R. V. Jolos, Yad. Fiz. **67**, 955 (2004) [Phys. At. Nucl. **67**, 931 (2004)].
- [221] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, P. A. Terziev, and I. Yigitoglu, Phys. Lett. **B 621**, 102 (2005).
- [222] A. S. Davydov and A. A. Chaban, Nucl. Phys. **20**, 499 (1960).
- [223] K. Kumar, Phys. Rev. **C 1**, 369 (1970).
- [224] K. Kumar, Phys. Scripta **6**, 270 (1972).
- [225] P. Sarriguren, R. Rodríguez-Guzmán, and L. M. Robledo, Phys. Rev. **C 77**, 064322 (2008).
- [226] L. M. Robledo, R. Rodríguez-Guzmán, and P. Sarriguren, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **36**, 115104 (2009).
- [227] K. Nomura, T. Otsuka, R. Rodríguez-Guzmán, L. M. Robledo, P. Sarriguren, P. H. Regan, P. D. Stevenson, and Zs. Podolyák, Phys. Rev. **C 83**, 054303 (2011).

- [228] K. Nomura, T. Otsuka, R. Rodríguez-Guzmán, L. M. Robledo, and P. Sarriguren, *Phys. Rev. C* **84**, 054316 (2011).
- [229] Y. Sun, P. M. Walker, F.-R. Xu, and Y.-X. Liu, *Phys. Lett. B* **659**, 165 (2008).
- [230] R. F. Casten, A. I. Namenson, W. F. Davidson, D. D. Warner, and H. G. Borner, *Phys. Lett. B* **76**, 280 (1978).
- [231] N. Alkhomashi *et al.*, *Phys. Rev. C* **80**, 064308 (2009).
- [232] C. Wheldon, J. Garcés Narro, C. J. Pearson, P. H. Regan, Zs. Podolyák, D. D. Warner, P. Fallon, A. O. Macchiavelli, and M. Cromaz, *Phys. Rev. C* **63**, 011304(R) (2000).
- [233] Zs. Podolyák *et al.*, *Phys. Rev. C* **79**, 031305(R) (2009).
- [234] J. Jolie and A. Linnemann, *Phys. Rev. C* **68**, 031301(R) (2003).
- [235] J. Jolie, R. F. Casten, P. von Brentano, and V. Werner, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 162501 (2001).
- [236] J. Jolie, P. Cejnar, R. F. Casten, S. Heinze, A. Linnemann, and V. Werner, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 182502 (2002).
- [237] G. Thiamova and P. Cejnar *Nucl. Phys. A* **765**, 97 (2006).
- [238] L. Bettermann, V. Werner, E. Williams, and R. J. Casperson, *Phys. Rev. C* **81**, 021303(R) (2010).
- [239] Yu Zhang and Z. Zhang, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **40**, 105107 (2013).
- [240] Yu Zhang, Feng Pan, Y.-X. Liu, Y.-A. Luo, and J. P. Draayer, *Phys. Rev. C* **85**, 064312 (2012).
- [241] Brookhaven National Laboratory ENSDF database <http://www.nndc.bnl.gov/ensdf/>
- [242] I. Hamamoto and B. R. Mottelson, *Phys. Rev. C* **79**, 034317 (2009).
- [243] N. Tajima and N. Suzuki, *Phys. Rev. C* **64**, 037301 (2001).
- [244] S. Takahara, N. Onishi, Y. R. Shimizu, and N. Tajima, *Phys. Lett. B* **702**, 064323 (2012).
- [245] S. Takahara, N. Tajima, and Y. R. Shimizu, *Phys. Rev. C* **86**, 064323 (2012).
- [246] I. Hamamoto and B. Mottelson, *Scholarpedia* **7(4)**, 10693 (2012).
- [247] K. Clemenger, *Phys. Rev. B* **32**, 1359 (1985).
- [248] W. A. de Heer, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 611 (1993).

- [249] M. Brack, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 677 (1993).
- [250] V. O. Nesterenko, *Fiz. Elem. Chastits At. Yadra* **23**, 1665 (1992) [*Sov. J. Part. Nucl.* **23**, 726 (1992)].
- [251] W. A. de Heer, W. D. Knight, M. Y. Chou and M. L. Cohen, *Solid State Phys.* **40**, 93 (1987).
- [252] W. Greiner, *Z. Phys. A: Hadr. Nucl.* **349**, 315 (1994).
- [253] T. P. Martin, T. Bergmann, H. Göhlich and T. Lange, *Chem. Phys. Lett.* **172**, 209 (1990).
- [254] T. P. Martin, T. Bergmann, H. Göhlich and T. Lange, *Z. Phys. D: At. Mol. Clusters* **19**, 25 (1991).
- [255] S. Bjørnholm, J. Borggreen, O. Echt, K. Hansen, J. Pedersen and H. D. Rasmussen, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1627 (1990).
- [256] S. Bjørnholm, J. Borggreen, O. Echt, K. Hansen, J. Pedersen and H. D. Rasmussen, *Z. Phys. D: At. Mol. Clusters* **19**, 47 (1991).
- [257] W. D. Knight, K. Clemenger, W. A. de Heer, W. A. Saunders, M. Y. Chou and M. L. Cohen, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2141 (1984).
- [258] J. Pedersen, S. Bjørnholm, J. Borggreen, K. Hansen, T. P. Martin and H. D. Rasmussen, *Nature* **353**, 733 (1991).
- [259] C. Bréchnignac, Ph. Cahuzac, M. de Frutos, J.-Ph. Roux and K. Bowen, in *Physics and Chemistry of Finite Systems: From Clusters to Crystals*, edited by P. Jena *et al.* (Kluwer, Dordrecht, 1992), Vol. **1**, p. 369.
- [260] C. Bréchnignac, Ph. Cahuzac, F. Carlier, M. de Frutos and J. Ph. Roux, *Phys. Rev. B* **47**, 2271 (1993).
- [261] J. Borggreen, P. Chowdhury, N. Kebaïli, L. Lundsberg-Nielsen, K. Lützenkirchen, M. B. Nielsen, J. Pedersen, and H. D. Rasmussen, *Phys. Rev. B* **48**, 17507 (1993).
- [262] J. Pedersen, J. Borggreen, P. Chowdhury, N. Kebaïli, L. Lundsberg-Nielsen, K. Lützenkirchen, M. B. Nielsen, and H. D. Rasmussen, *Z. Phys. D: At. Mol. Clusters* **26**, 281 (1993).
- [263] J. Pedersen, J. Borggreen, P. Chowdhury, N. Kebaïli, L. Lundsberg-Nielsen, K. Lützenkirchen, M. B. Nielsen, and H. D. Rasmussen, in *Atomic and Nuclear Clusters*, edited by G. S. Anagnostatos and W. von Oertzen (Springer, Berlin, 1995) 30.
- [264] H. Haberland, *Nucl. Phys. A* **649**, 415 (1999).

- [265] M. Schmidt and H. Haberland, *Eur. Phys. J. D* **6**, 109 (1999).
- [266] T. Tzikas, Ph.D. Thesis, Aristotle University of Thessaloniki, 2014.
- [267] M. Moshinsky, T.H. Seligman and K.B. Wolf, *J. Math. Phys* **13**, 901 (1972).
- [268] S. Karampagia, Ph. D. thesis, National Technical U. of Athens, 2014.
- [269] W. Greiner, S. Schramm and E. Stein, *Quantum Chromodynamics* (Springer, Berlin, 2007).
- [270] R. Machleidt, *Phys. Rev. C* **63**, 024001 (2001).
- [271] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks and R. Schiavilla, *Phys. Rev. C* **51**, 38 (1995).
- [272] V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen and J. J. de Swart, *Phys. Rev. C* **49**, 2950 (1994).
- [273] S. Aoki, T. Hatsuda and N. Ishii, *Prog. Theor. Phys.* **123**, 89 (2010).
- [274] A. Arima, *Nucl. Phys.* **18**, 196 (1960).
- [275] A. Schmidt, J. R. Pybus, R. Weiss, E. P. Segarra, A. Hrnjic, A. Denniston, O. Hen, E. Piasezky, L. B. Weinstein, N. Barnea, M. Strikman, A. Larionov and D. Higinbotham, *Nature* **578**, 540 (2020).
- [276] R. Jastrow, *Phys. Rev. C* **81**, 165 (1951).
- [277] W. Pauli, in *Writings on Physics and Philosophy* (Springer, Berlin, 1994), p. 165.
- [278] A. Faessler, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **20**, 151 (1988).
- [279] F. Fernández, P. G. Ortega and D. R. Entem, *Frontiers in Physics* **7**, 233 (2020).
- [280] E. Wigner, *Phys. Rev.* **51**, 106 (1937).
- [281] Lipkin H., *Lie groups for pedestrians*, Dover Publications, New York (2014)
- [282] D. J. Rowe, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **43**, 024011 (2016)
- [283] D. J. Rowe, G. Thiamova, and J. L. Wood, *PRL* **97**, 202501 (2006).
- [284] J.P. Draayer, in *Algebraic Approaches to Nuclear Structure*, ed. R.F. Casten (Harwood, Chur, 1993), p. 423
- [285] M. Wang, G. Audi, F.G. Kondev, W.J. Huang, S. Naimi, X. Xu, *Chin. Phys. C* **41**, No. 3, 030003 (2017).
- [286] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum Mechanics* (Hermann, Paris, 1977), complement B<sub>VII</sub>.

- [287] K.T.R. Davies and S.J. Krieger, *Can. J. Phys.* **69**, 62 (1991).
- [288] R.R. Chasman and S. Wahlborn, *Nucl. Phys. A* **90**, 401 (1967).
- [289] E. Chacón and M. de Llano, *Rev. Mex. Fís.* **12** 57 (1963).
- [290] A.R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*(Princeton University Press, Princeton, 1957).
- [291] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev, and V.K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum* (World Scientific, Singapore, 1988).
- [292] A. de Shalit and M. Goldhaber (1953) *Phys. Rev.* **92** 1211.
- [293] I. Talmi (1962) *Rev. Mod. Phys.* **34** 704.
- [294] I. Talmi (1971) *Nucl. Phys. A* **172** 1.
- [295] I. Talmi (1973) *Riv. Nuovo Cim.* **3** 85.
- [296] I. Talmi, *Simple Models of Complex Nuclei: The Shell Model and the Interacting Boson Model* (Harwood, Chur, 1993).
- [297] P. Federman and S. Pittel (1977) *Phys. Lett. B* **69** 385.
- [298] P. Federman and S. Pittel (1978) *Phys. Lett. B* **77** 29.
- [299] P. Federman and S. Pittel (1979) *Phys. Rev. C* **20** 820.
- [300] R.F. Casten (1985) *Phys. Rev. Lett.* **54** 1991.
- [301] R.F. Casten (1985) *Nucl. Phys. A* **443** 1.
- [302] R.F. Casten, D.S. Brenner, and P.E. Haustein (1987) *Phys. Rev. Lett.* **58** 658.
- [303] A. P. Zuker, J. Retamosa, A. Poves, and E. Caurier, *Phys. Rev. C* **52**, R1741 (1995).
- [304] A. P. Zuker, A. Poves, F. Nowacki, and S. M. Lenzi, *Phys. Rev. C* **92**, 024320 (2015).
- [305] K. Kaneko, N. Shimizu, T. Mizusaki, and Y. Sun (2021) *Phys. Rev.* **103** L021301.
- [306] O. Castaños, M. Moshinsky, and C. Quesne, *Group Theory and Special Symmetries in Nuclear Physics Ann Arbor, 1991*, edited by J. P. Draayer and J. Jänecke (World Scientific, Singapore, 1992) p. 80.
- [307] P.R. Halmos, G. Lumer, and J.J. Schäffer, *Proc. Amer. Math. Soc.* **4**, 142 (1953).
- [308] P.R. Halmos and G. Lumer, *Proc. Amer. Math. Soc.* **5**, 589 (1954).
- [309] S.J. Bernau, *J. Austr. Math. Soc.* **8**, 17 (1968).



- [310] Z. Sebestyén and Zs. Tarcsay, *Period. Math. Hung.* **75**, 268 (2017).
- [311] K.T. Hecht and A. Adler, *Nucl. Phys. A* **137**, 129 (1969).
- [312] A. Arima, M. Harvey, and K. Shimizu, *Phys. Lett. B* **30**, 517 (1969).
- [313] R. D. Ratna Raju, J. P. Draayer, and K. T. Hecht *Nucl. Phys. A* **202**, 433 (1973).
- [314] J. P. Draayer, K. J. Weeks, and K. T. Hecht, *Nucl. Phys. A* **381**, 1 (1982).
- [315] J. P. Draayer and K. J. Weeks, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1422 (1983).
- [316] J. P. Draayer and K. J. Weeks, *Ann. Phys. (N.Y.)* **156**, 41 (1984).
- [317] J.N. Ginocchio, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 436 (1997).
- [318] J.N. Ginocchio, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **25**, 617 (1999).
- [319] D. Bonatsos, A. Martinou, S. Sarantopoulou, I.E. Assimakis, S. Peroulis, and N. Minkov, in “Role of Symmetries in Nuclear Physics”, ed. V.K.B. Kota and A.K. Jain, *Eur. Phys. J. ST* **229** (2020) 2367.
- [320] D. Bonatsos, A. Martinou, I.E. Assimakis, S. Sarantopoulou, S. Peroulis, and N. Minkov, in *Nuclear Theory '38, Proceedings of the 38th International Workshop on Nuclear Theory (Rila 2019)*, ed. M. Gaidarov and N. Minkov (Heron Press, Sofia, 2019) 128.
- [321] D. Bonatsos, A. Martinou, S. Sarantopoulou, I.E. Assimakis, S. Peroulis, and N. Minkov, in the *Proceedings of the 5th Workshop of the Hellenic Institute of Nuclear Physics (HINPw5), Thessaloniki (4/2019)*, ed. Ch. Moustakidis (2020), <http://hinp.physics.uoi.gr>, p. 61.
- [322] D. Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum, in the *Proceedings of the 4th Workshop of the Hellenic Institute of Nuclear Physics (HINPw4), Ioannina (5/2017)*, ed. A. Pakou and C. Papachristodoulou (2017) , <http://hinp.physics.uoi.gr>, p. 46.
- [323] O. Castaños, M. Moshinsky, and C. Quesne, *Phys. Lett. B* **277**, 238 (1992).
- [324] O. Castaños, V. Velázquez A., P.O. Hess, and J.G. Hirsch, *Phys. Lett. B* **321**, 303 (1994).
- [325] K. Heyde, P. Van Isacker, M. Waroquier, J.L. Wood, and R.A. Meyer, *Phys. Rep.* **102**, 291 (1983).
- [326] J.L. Wood, K. Heyde, W. Nazarewicz, M. Huyse, and P. Van Duppen, *Phys. Rep.* **215**, 101 (1992).
- [327] K. Heyde and J.L. Wood, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1467 (2011).

- [328] P.E. Garrett, M. Zielińska, and E. Clément, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **124**, 103931 (2022).
- [329] T. Otsuka, A. Gade, O. Sorlin, T. Suzuki, and Y. Utsuno, *Rev. Mod. Phys.* **92**, 015002 (2020).
- [330] O. Sorlin and M.-G. Porquet, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **61**, 602 (2008).