Mαψ 16, 2023

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

ΕΥΑ Ι. ΚΑΛΛΙΤΣΗ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ: ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΣΜΥΡΛΗΣ (ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ), ΒΑΣΙΛΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ, ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΝΕΛΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΪΟΣ 2023

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γεώργιο Σμυρλή για την επιστημονική συμβολή του στην έρευνα και τις δημοσιεύσεις μας, καθώς και για τη συστηματική και λεπτομερή επίβλεψη και διόρθωση της εργασίας και για την ουσιαστική ενασχόλησή του με την ολοκλήρωση και παρουσίασή της.

Θερμές ευχαριστίες και στον ομότιμο καθηγητή Βασίλειο Παπανικολάου για την καθοριστική επιστημονική συμβολή του στην έρευνά μας, με τις πρωτότυπες ιδέες του και την καταλυτική συμβολή του στη συγγραφή και διάδοση των δημοσιεύσεων. Ευχαριστώ επίσης τον καθηγητή κ. Βασίλειο Κανελλόπουλο για τις προτάσεις του για τη βελτίωση της εργασίας και ιδιαίτερα για την ήρεμη και ‘‘εξισορροπιστική’’ υποστήριξή του.

Τέλος, ευχαριστώ και τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς επιτροπής: τους καθηγητές κ. Αρβανιτάκη, Γιαννακάκη, Γρηγοριάδη και Χαραλαμπόπουλο.

Περιεχόμενα-Εισαγωγή

1 ΚΙΝΗΤΡΟ-ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΕΙΚΑΣΙΕΣ RIEMANN ΚΑΙ NEUMANN 9

2 ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ 13
- 2.1 Ισοδύναμες αναλυτικές μορφές ακέραιας συνάρτησης 13
- 2.2 Χαρακτηριστικές ιδιότητες των συναρτήσεων - λύσεων της εξίσωσης θερμότητας 14
- 2.3 Ιδιότητες και χρήσεις Θερμικών πολυωνύμων - Πολυωνύμων Hermite 15

3 Η ΤΑΞΗ ΚΑΙ Ο ΤΥΠΟΣ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 29
- 3.1 Τάξη Ακέραιας Συνάρτησης 29
- 3.2 Τύπος της Τάξεως Ακέραιας Συνάρτησης 31
- 3.3 Επιπλέον Ιδιότητες της Τάξης 41

4 ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ 45

5 ΤΑΞΗ ΚΑΙ ΤΥΠΟΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ 49

6 ΣΗΜΕΙΑ ΜΗΔΕΝΙΣΜΟΥ, ΑΡΤΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 79
- 6.1 Ιδιότητες ριζών των λύσεων της εξίσωσης θερμότητας 79
- 6.2 Σχέσεις παραγώγων συναρτήσεων των ριζών 83
- 6.3 Άρτιες- Περιττές Λύσεις της Εξίσωσης θερμότητας 87
- 6.4 Γενικά παραδείγματα 88

7 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 91

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διδακτορική διατριβή αποσκοπεί στη μελέτη συγκεκριμένων χαρακτηριστικών ιδιοτήτων των ακέραιων λύσεων της **εξίσωσης θερμότητας**:

$$\partial_t F(t,z) = \partial_{zz} F(t,z), \quad t, z \in \mathbb{C},$$

κυρίως αναφορικά με την τάξη και τον τύπο τους ως προς κάθε μία από τις δύο μιγαδικές μεταβλητές. Επιπλέον, μελετώνται και ιδιότητες των ριζών των λύσεων αυτών.

Το κίνητρο για την εργασία αυτή προήλθε από το πρόσφατο άρθρο των Rodgers και Tao [18] σχετικά με την απόδειξη της εικασίας του Newman [11], εικασία που μπορεί να θεωρηθεί και ως ένα "συμπλήρωμα" στην υπόθεση του Bernard Riemann, που είχε διατυπωθεί το 1859 ως εξής: "Οι μη τετριμμένες ρίζες της συνάρτησης ζήτα του Riemann, έχουν όλες πραγματικό μέρος 1/2." . Στην εργασία [16] αποδεικνύεται ότι η υπόθεση Riemann είναι ισοδύναμη με το ότι όλες οι ρίζες της συνάρτησης Ξ του Riemann είναι πραγματικές, όπου

$$\Xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

ζ είναι η ζήτα συνάρτηση του Riemann και Γ η συνάρτηση Γάμμα.

Σε μια προσπάθεια να προσεγγίσει την υπόθεση Riemann, ο de Brujin ([1]) εισήγαγε τη συνάρτηση

$$H(t,z) := \int_0^\infty e^{tx^2} \Phi(x) \cos(zx) dx, \quad t, z \in \mathbb{C},$$

όπου Φ η μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης

$$H_0(z) = \frac{1}{8} \Xi\left(\frac{1}{2} + \frac{iz}{2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Η συνάρτηση $\tilde{H}(t,z) = H(-t,z), \;\; t, z \in \mathbb{C}$ είναι ακέραια λύση της εξίσωσης θερμότητας. Ταυτόχρονα, η H συνδέεται άμεσα με την εικασία του Newman που αποδείχθηκε στην [18].

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας παρατίθενται λεπτομέρειες της σύνδεσης των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης θερμότητας με τις εικασίες των Riemann και Newman.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρονται στοιχεία που χαρακτηρίζουν τις διάφορες μορφές και τις ιδιότητες των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης θερμότητας.

Ειδική περίπτωση τέτοιων λύσεων αποτελούν τα "θερμικά πολυώνυμα" $P_m(t,z)$, $m \in \mathbb{N}$, μέσω των οποίων αναπαριστώνται με τη μορφή σειράς οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης θερμότητας. Αποδεικνύονται κάποιες ιδιότητες των πολυωνύμων αυτών χρήσιμων στα επόμενα κεφάλαια, π.χ. ο τρόπος που συσχετίζονται οι ρίζες των πολυωνύμων $P_m(t,z),\ P_{m-1}(t,z)$.

Στο τρίτο κεφάλαιο αποδεικνύονται κάποια πρωτότυπα αποτελέσματα που αφορούν στην τάξη και στον τύπο μιας ακέραιας συνάρτησης, ανεξάρτητου ενδιαφέροντος για τη θεωρία των ακέραιων συναρτήσεων. Το σημαντικότερο από αυτά διατυπώνεται ως εξής:

Έστω g ακέραια συνάρτηση πεπερασμένης τάξης ρ και πεπερασμένου τύπου τ και με ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n, \quad z\in\mathbb{C}.$$

Θέτουμε

$$a_n(z)=\frac{g^{(n)}(z)}{n!}, \quad z\in\mathbb{C}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Εάν $\nu=\{n_k\}_{k\geq 1}$ μία γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων, ορίζονται η *γενικευμένη τάξη και ο γενικευμένος τύπος* της g αντίστοιχα, μέσω των σχέσεων

$$\rho_\nu(z)=\limsup_k \frac{n_k \ln n_k}{-\ln|a_{n_k}(z)|}, \qquad \tau_\nu(z)=\frac{1}{e\rho}\limsup_k n_k|a_{n_k}(z)|^{\rho/n_k}, \quad z\in\mathbb{C}.$$

Αποδεικνύεται ότι εάν

$$\lim_k \frac{n_{k+1}}{n_k}=1,$$

τότε

$$\rho_\nu(z)=\rho, \quad \tau_\nu(z)=\tau, \quad \text{σ.π. στο } \mathbb{C}.$$

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρατίθενται κάποιες βασικές και χρήσιμες για τη συνέχεια ιδιότητες των κανονικών γινομένων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αποδεικνύονται διάφορες ενδιαφέρουσες ιδιότητες των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης θερμότητας.

Ένα πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα προς αυτή την κατεύθυνση διατυπώνεται ως εξής:

Έστω f ακέραια συνάρτηση τάξης ρ. Το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ.)

$$\partial_z F=\partial_z^2 F, \quad F(0,z)=f(z), \quad z\in\mathbb{C}$$

έχει ακέραια λύση αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- $0\leq\rho<2$.
- $\rho=2,\ \tau=0$.

Δύο επιπλέον ενδιαφέρουσες ιδιότητες που αποδεικνύονται στο κεφ. 5 είναι οι παρακάτω:

Έστω F ακέραια λύση του παραπάνω Π.Α.Τ.

- Για σταθερό $t \in \mathbb{C}$, η τάξη και ο τύπος της ακέραιας συνάρτησης $z \mapsto F(t,z)$ είναι ποσότητες ανεξάρτητες του t.
- Υπάρχει σύνολο $E \subset \mathbb{C}$ με συμπλήρωμα μηδενικού μέτρου Lebesgue τέτοιο ώστε για σταθερό $z \in E$, η τάξη και ο τύπος των ακέραιων συναρτήσεων

  $$t \mapsto F(t,z), \quad t \mapsto \partial_z F(t,z)$$

  είναι ποσότητες ίσες μεταξύ τους και ανεξάρτητες του $z \in \mathbb{C}$.

Στο έκτο κεφάλαιο αποδεικνύεται ότι το σύνολο των ριζών (t_0, z_0) μιας μη μηδενικής ακέραιας λύσης F της εξίσωσης θερμότητας με την ιδιότητα

$$\partial_z F(t_0, z_0) = 0,$$

είναι διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{C}^2$.

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι υπάρχει σύνολο $S \subset \mathbb{C}$ με συμπλήρωμα μηδενικού μέτρου Lebesgue τέτοιο ώστε για σταθερό $t \in S$, οι διαφορετικές ανά δύο ρίζες

$$z_k(t), \quad k \geq 1$$

της ακέραιας συνάρτησης $z \mapsto F(t,z)$ ικανοποιούν το σύστημα Σ.Δ.Ε.

$$z_k'(t) = 2 \sum_{j \neq k} \frac{1}{z_k(t) - z_j(t)}, \quad k \geq 1.$$

Σημειώνουμε ότι το παραπάνω σύστημα χρησιμοποιήθηκε από τους Rodgers -Tao στην εργασία [18] για να αποδείξουν την εικασία του Newman.

Τέλος, λαμβάνονται παρόμοιες εξισώσεις για τις περιπτώσεις που η αρχική συνθήκη f είναι άρτια ή περιττή.

Ακολουθεί το Παράρτημα, στο οποίο παρατίθενται χωριστά συγκεκριμένοι ορισμοί εννοιών που θίγονται στο κυρίως κείμενο και είναι ευρύτερα γνωστοί από τη βιβλιογραφία.

Τέλος, παρατίθεται η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή των παραπάνω αποτελεσμάτων, καθώς και οι δύο δημοσιεύσεις της ομάδας μας σε διεθνή περιοδικά, στις οποίες καταγράφηκαν με επιστημονική τεκμηρίωση τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής.

Κεφάλαιο 1

ΚΙΝΗΤΡΟ-ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΕΙΚΑΣΙΕΣ RIEMANN ΚΑΙ NEUMANN

Στο παρόν Κεφάλαιο ανακαλούμε και αναδεικνύουμε κρίσιμα σημεία -σταθμούς της βιβλιογραφίας που, αφενός σχετίζονται με διάσημα μαθηματικά προβλήματα (όπως η εικασία του Riemann), αφετέρου αποκτούν καθοριστική σημασία για την πορεία της έρευνας γύρω από την εξίσωση θερμότητας και τις ιδιότητες των μιγαδικών λύσεων αυτής.

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, ουσιαστικό ρόλο στην πορεία αυτή κατέχει η συνάρτηση Ξ του Riemann, η οποία ορίστηκε από τον ίδιο ([16]) ως εξής:

$$\Xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \tag{1.1}$$

όπου ζ είναι η *ζήτα συνάρτηση του Riemann* και Γ *η συνάρτηση Γάμμα.*

Η Ξ είναι ακέραια και $\Xi(1-s) = \Xi(s)$, δηλ. οι ρίζες της Ξ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\mathrm{Re}s = 1/2$.

Αποδεικνύεται ([16]) ότι η εικασία του Riemann είναι ισοδύναμη με το ότι όλες οι ρίζες της Ξ είναι πραγματικές.

Ας συνοψίσουμε τις κυριότερες ιδέες που σχετίζονται με την εικασία του Newman, ώστε να αναδείξουμε τη σύνδεση του θέματος αυτού με τις αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης θερμότητας. Ακολουθώντας το συμβολισμό της [18], θέτουμε

$$H_0(z) = \frac{1}{8}\Xi\left(\frac{1}{2} + \frac{iz}{2}\right). \tag{1.2}$$

Η συνάρτηση H_0 είναι ακέραια, *τάξεως 1 και με maximal τύπο* (βλ. κεφ. 3).

Αποδεικνύεται ([16]) ότι η εικασία του Riemann είναι ισοδύναμη με το ότι όλες οι ρίζες της H_0 είναι πραγματικές.

Πρόταση 1. *Η συνάρτηση H_0 είναι άρτια, δηλαδή*

$$H_0(z) = H_0(-z).$$

Απόδειξη: Αν θέσουμε στην (1.2) όπου z το $-z$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\Xi\left(\frac{1}{2}+\frac{iz}{2}\right) = \Xi\left(\frac{1}{2}-\frac{iz}{2}\right).$$

Γι' αυτό το σκοπό, θα θέσουμε όπου z τα $\frac{1}{2}+\frac{iz}{2}$ και $\frac{1}{2}-\frac{iz}{2}$ αντίστοιχα στην (1.1). Τότε

$$s = i\left(\frac{1}{2}+\frac{iz}{2}\right)+\frac{1}{2} = \frac{-z+i+1}{2}$$

και

$$s' = i\left(\frac{1}{2}-\frac{iz}{2}\right) = \frac{z+i+1}{2}$$

αντίστοιχα, και, με βάση την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης Γάμμα (βλ. Παράρτημα),

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{-z+i+1}{4}-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty t^{\frac{-z+i-3}{4}}e^{-t}dt$$

και

$$\Gamma\left(\frac{s'}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{z+i+1}{4}-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty t^{\frac{z+i-3}{4}}e^{-t}dt$$

αντίστοιχα.

Βάσει όλων των παραπάνω έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Xi\left(\frac{1}{2}+\frac{iz}{2}\right) &= \frac{-z+i+1}{2}\frac{-z+i-1}{2}\pi^{\frac{z-i-1}{4}}\Gamma\left(\frac{-z+i+1}{4}\right)\zeta\left(\frac{-z+i+1}{2}\right)/8\\ &= (z^2+2iz-2)\pi^{\frac{z-i-1}{4}}\Gamma\left(\frac{-z+i+1}{4}\right)\zeta\left(\frac{-z+i+1}{2}\right)/8\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\Xi\left(\frac{1}{2}-\frac{iz}{2}\right) &= \frac{z+i+1}{2}\frac{z+i-1}{2}\pi^{\frac{-z-i-1}{4}}\Gamma\left(\frac{z+i+1}{4}\right)\zeta\left(\frac{z+i+1}{2}\right)/8\\ &= (z^2-2iz-2)\pi^{\frac{-z-i-1}{4}}\Gamma\left(\frac{z+i+1}{4}\right)\zeta\left(\frac{z+i+1}{2}\right)/8.\end{aligned}$$

□

Με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier της H_0, ο Riemann απέδειξε τη σχέση

$$H_0(z) = \int_0^\infty \Phi(x)\cos(zx)dx,$$

όπου Φ είναι η συνάρτηση

$$\Phi(x) := \sum_{n=1}^{\infty}(2\pi^2 n^4 e^{9x} - 3\pi n^2 e^{5x})\exp(-\pi n^2 e^{4x}).$$

Η σειρά που ορίζει η $\Phi(x)$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αλλά και για κάθε $x \in \mathbb{C}$ με $\cos(4\mathrm{Im}(x)) > 0$.

Επιπλέον, η Φ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της άρτιας συνάρτησης H_0 και συνεπώς είναι και η ίδια άρτια συνάρτηση.

Σε μια προσπάθεια να προσεγγίσει την υπόθεση Riemann, ο de Brujin ([1]) εισήγαγε τη συνάρτηση

$$H(t,z) := \int_0^\infty e^{tx^2}\Phi(x)\cos(zx)dx.$$

Προφανώς, η συνάρτηση αυτή είναι άρτια ως προς $z \in \mathbb{C}$.

Επιπλέον η H είναι ακέραιη ως προς z, τάξεως 1 και με maximal type (βλ. κεφ. 3), ενώ είναι ακέραιη και ως προς t. Επιπλέον, η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την αντίστροφη εξίσωση θερμότητας

$$\partial_t H = -\partial_z^2 H,$$

αφού

$$\begin{aligned}\partial_t H = \frac{\partial H(t,z)}{\partial t} &= \frac{\partial \int_0^\infty e^{tx^2}\Phi(x)\cos(zx)dx}{\partial t}\\ &= \int_0^\infty \frac{\partial\left(e^{tx^2}\Phi(x)\cos(zx)dx\right)}{\partial t} = \int_0^\infty x^2 e^{tx^2}\Phi(x)\cos(zx)dx\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}-\partial_z^2 H = -\frac{\partial^2 H(t,z)}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 \int_0^\infty e^{tx^2}\Phi(x)\cos(zx)dx}{\partial z}\\ &= -\int_0^\infty \frac{\partial^2\left(e^{tx^2}\Phi(x)\cos(zx)dx\right)}{\partial z} = -\int_0^\infty -\frac{\partial\left(xe^{tx^2}\Phi(x)\sin(zx)dx\right)}{\partial z}\\ &= \int_0^\infty \frac{\partial\left(xe^{tx^2}\Phi(x)\sin(zx)dx\right)}{\partial z} = \int_0^\infty x^2 e^{tx^2}\Phi(x)\cos(zx)dx.\end{aligned}$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι, αν θέσουμε $\widetilde{H}(t,z) = H(-t,z)$, η συνάρτηση $\widetilde{H}$ ικανοποιεί την κλασική εξίσωση θερμότητας, δηλαδή

$$\partial_t \widetilde{H} = \partial_z^2 \widetilde{H}.$$

Οι αρχικές συνθήκες των δύο παραπάνω παραλλαγών της εξίσωσης θερμότητας είναι οι

$$H(0,z) = \widetilde{H}(0,z) = H_0(z).$$

Στην εργασία [1] αποδεικνύεται μία **κρίσιμη** ιδιότητα της συνάρτησης H:
"υπάρχει πραγματική σταθερά Λ τέτοια ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

η συνάρτηση $z \mapsto H(t,z)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $t \geq \Lambda$."

Η σταθερά Λ είναι γνωστή ως η **σταθερά de Brujin-Newman**.

Από τα παραπάνω έπεται ότι **η εικασία του Riemann είναι ισοδύναμη με το ότι** $\Lambda \leq 0$.

Εικασία Newman ([11]): $\Lambda \geq 0$.

Μετά από μια σημαντική πρόοδο προς την κατεύθυνση της απόδειξης της εικασίας του Newman (ενδεικτικά παραθέτουμε τις εργασίες [3], [7], [8]), **οι Rodgers και Tao στην εργασία [18] κατάφεραν να αποδείξουν την εικασία του Newman.**

Από τα παραπάνω έπεται ότι τελικά **η εικασία του Riemann είναι ισοδύναμη με το ότι** $\Lambda = 0$.

Καθοριστικό στοιχείο της απόδειξης των Rodgers και Tao αποτέλεσε η εισαγωγή ενός συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν τα σημεία μηδενισμού $z_k(t)$ της συνάρτησης $z \mapsto H(t,z)$.
Το σύστημα αυτό ταυτόχρονα κατέχει τη θέση ενός τύπου "χαρακτηριστικών" της εξίσωσης θερμότητας και συνοψίζεται στην εξής σχέση:

$$z_k'(t) = -2\sum_{j \neq k} \frac{1}{z_k(t) - z_j(t)}\,, \qquad \text{όπου } t > \Lambda.$$

Με κίνητρο και αφορμή τα παραπάνω βιβλιογραφικά στοιχεία, προχωρούμε στα επόμενα κεφάλαια στα αποτελέσματα της έρευνάς μας.

Κεφάλαιο 2

ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

2.1 Ισοδύναμες αναλυτικές μορφές ακέραιας συνάρτησης

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνουμε κάποιες ισοδύναμες εκφράσεις αναλυτικών, ακεραίων συναρτήσεων στο $\mathbb{C}^2$ και ορισμένες ιδιότητες των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης θερμότητας. Επιπλέον, αναφέρουμε συγκεκριμένα παραδείγματα συναρτήσεων που επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση, όπως τα θερμικά πολυώνυμα και τα πολυώνυμα Hermite.

Ας υποθέσουμε ότι μία συνάρτηση $F(t,z)$ είναι ακέραιη ως προς t για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και ως προς z για κάθε $t \in \mathbb{C}$.

Τότε, για κάθε ζεύγος (t_0, z_0) μιγαδικών , η συνάρτηση $F(t,z)$ γράφεται ισοδύναμα ως ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο (t_0, z_0), δηλαδή

$$F(t,z) = \sum_{j,k \geq 0} c_{jk} (t-t_0)^j (z-z_0)^k, \quad c_{jk} = \frac{\partial_t^j \partial_z^k F(t_0, z_0)}{j!k!}, \quad j,k \geq 0.$$

Επιπλέον, η παραπάνω σειρά συγκλίνει απολύτως για όλα τα ζεύγη (t,z) μιγαδικών αριθμών, αφού είναι γνωστό από τη θεωρία ότι το αντίστοιχο ανάπτυγμα

$$\widetilde{F}(t,z) = \sum_{j,k \geq 0} c_{jk} t^j z^k, \qquad \text{όπου } c_{jk} = \frac{\partial_t^j \partial_z^k F(0,0)}{j!k!}, \quad j,k \geq 0,$$

επίσης συγκλίνει απολύτως ως προς t και ως προς $z \in \mathbb{C}$, ενώ ταυτόχρονα η F αποτελεί μια απλή μετατόπιση της $\widetilde{F}$ στο $\mathbb{C}^2$.

Ως συνέπεια της απόλυτης σύγκλισης ως προς z, η $F(t,z)$ μπορεί να γραφεί

$$F(t,z) = \sum_{k\geq 0} a_k(t-t_0)^k$$

και, ως συνέπεια της απόλυτης σύγκλισης ως προς t, ισχύει

$$F(t,z) = \sum_{j\geq 0} b_z(t-t_0)^j,$$

όπου $a_k(t)_{k\geq 0}$, $b_j(z)_{j\geq 0}$ ακέραιες συναρτήσεις.

2.2 Χαρακτηριστικές ιδιότητες των συναρτήσεων - λύσεων της εξίσωσης θερμότητας

Στην υποενότητα αυτή θα αναφερθούμε σε ορισμένες ιδιότητες "επέκτασης" και "μεταφοράς" που αποτελούν χαρακτηριστικό γνώρισμα των συναρτήσεων που επιλύουν την εξίσωση θερμότητας.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι μία μιγαδική συνάρτηση $F(t,z)$ ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας:

$$\partial_t F(t,z) = \partial_z^2 F(t,z) \tag{2.1}$$

με αρχική συνθήκη $f(z) = F(0,z)$.

Πρόταση 2.

Αν η εξίσωση θερμότητας ικανοποιείται σε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}^2$, τότε ικανοποιείται αυτομάτως για όλα τα $t, z \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα εφαρμόζοντας το Θεώρημα Αναλυτικής Επέκτασης (βλ. Παράρτημα) στις συναρτήσεις $\partial_t F(t,z)$ και $\partial_z^2 F(t,z)$, το οποίο μας επιτρέπει να τις ταυτίσουμε σε ολόκληρο το $\mathbb{C}^2$. $\square$

Με παραγώγιση κατά t της (2.1) προκύπτει

$$\partial_t^2 F(t,z) = \frac{\partial\left(\partial_t F(t,z)\right)}{\partial t} = \frac{\partial\left(\partial_z^2 F(t,z)\right)}{\partial t} = \partial_z^2\left(\frac{\partial F(t,z)}{\partial t}\right)$$

και, λόγω της εξίσωσης θερμότητας, τελικά

$$\partial_t^2 F(t,z) = \partial_z^2\left(\partial_z^2 F(t,z)\right) = \partial_z^4 F(t,z).$$

Αν συνεχίσουμε τις διαδοχικές παραγωγίσεις με τον ίδιο τρόπο, εύκολα προκύπτει ότι

$$\partial_t^j F(t,z) = \partial_z^{2j} F(t,z), \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Πρόταση 3.

Την εξίσωση θερμότητας, συνεπώς και την (2.2), ικανοποιεί και η συνάρτηση $\widetilde{F}(t,z) = F(t+t_0, z+z_0)$.

Απόδειξη: Με την αντικατάσταση $t \to t+t_0, z \to z+z_0$ και με χρήση της εξίσωσης θερμότητας για την F προκύπτει

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{F}(t,z) = \partial_t F(t+t_0, z+z_0) = \partial_t F(\widetilde{t}, \widetilde{z}) \\ = \partial_z^2 F(\widetilde{t}, \widetilde{z}) = \partial_z^2 F(t+t_0, z+z_0) = \partial_z^2 \widetilde{F}(t,z), \end{aligned} \tag{2.3}$$

ενώ με εφαρμογή της (2.2) στη συνάρτηση $\partial_z^k F(t,z)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} F(t,z) = \sum_{j,k\geq 0} \frac{\partial_t^j \partial_z^k F(t_0,z_0)}{j!k!}(t-t_0)^j (z-z_0)^k \\ \Rightarrow F(t+t_0, z+z_0) = \sum_{j,k\geq 0} \frac{\partial_t^j \partial_z^k F(t_0,z_0)}{j!k!} t^j z^k \\ = \sum_{j,k\geq 0} \frac{\partial_z^{2j} \partial_z^k F(t_0,z_0)}{j!k!} t^j z^k = \sum_{j,k\geq 0} \frac{\partial_z^{2j+k} F(t_0,z_0)}{j!k!} t^j z^k, \quad \text{για κάθε } t, z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

□

2.3 Ιδιότητες και χρήσεις Θερμικών πολυωνύμων - Πολυωνύμων Hermite

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε σε δύο είδη χαρακτηριστικών πολυωνύμων: Τα θερμικά πολυώνυμα, στα οποία κάνουμε ιδιαίτερη αναφορά λόγω της ιδιότητάς τους να επιλύουν την εξίσωση θερμότητας και στα πολυώνυμα Hermite, και θα εξερευνήσουμε ορισμένες από τις κρισιμότερες ιδιότητες των παραπάνω πολυωνύμων και τους τρόπους με τους οποίους συσχετίζονται.

Θα επικεντρωθούμε αρχικά στα αποκαλούμενα "θερμικά πολυώνυμα". Ως *θερμικό πολυώνυμο* m-τάξεως ορίζουμε την εξής έκφραση:

$$P_m(t,z) = \sum_{2j+k=m} \frac{m!}{j!k!} t^j z^k = \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{m!}{j!(m-2j)!} t^j z^{m-2j}, \quad m \geq 0. \tag{2.5}$$

Εάν F ακέραια λύση της εξίσωσης θερμότητας και t_0 , $z_0 \in \mathbb{C}$, η (2.4) συνεπάγεται ότι

$$F(t+t_0, z+z_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial_z^m F(t_0,z_0)}{m!} \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{m!}{j!(m-2j)!} t^j z^{m-2j}$$

ή ισοδύναμα

$$F(t+t_0, z+z_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial_z^m F(t_0,z_0)}{m!} P_m(t,z). \tag{2.6}$$

Πρόταση 4.

Τα θερμικά πολυώνυμα P_m τάξεως m είναι *παραβολικά m-ομογενή*, δηλ.

$$P_m(\lambda^2 t, \lambda z) = \lambda^m P_m(t,z), \qquad \forall\ \lambda,\ t,\ z \in \mathbb{C}.$$

Απόδειξη:
Από τον ορισμό των θερμικών πολυωνύμων, ισχύει

$$P_m(\lambda^2 t, \lambda z) = \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{m!}{j!(m-2j)!} (\lambda^2 t)^j (\lambda z)^{m-2j} = \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{m!}{j!(m-2j)!} \lambda^{2j} \lambda^{-2j+m} t^j z^{m-2j}.$$

Άρα

$$P_m(\lambda^2 t, \lambda z) = \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{m!}{j!(m-2j)!} \lambda^m t^j z^{m-2j} = \lambda^m \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{m!}{j!(m-2j)!} t^j z^{m-2j}$$

Από την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Ακολούθως, παραθέτουμε ενδεικτικά τον τρόπο σχηματισμού των πρώτων 5 θερμικών πολυωνύμων:

$$P_0(t,z) = \sum_{j=0}^{0} \frac{0!}{0!0!} t^j z^0 - 2j = 1t^0 z^0 = 1,$$

$$P_1(t,z) = \sum_{j=0}^{[1/2]=0} \frac{1!}{j!(1-2j)!} t^j z^{1-2j} = \frac{1}{0!(1-0)!} t^0 z^1 = z,$$

$$P_2(t,z) = \sum_{j=0}^{[2/2]=1} \frac{2!}{j!(2-2j)!} t^j z^{2-2j} = \frac{2}{0!2!} t^0 z^2 + \frac{2!}{0!} t z^0 = z^2 + 2t,$$

$$P_3(t,z) = \sum_{j=0}^{[3/2]=1} \frac{3!}{j!(3-2j)!} t^j z^{3-2j} = \frac{2\cdot 3}{0!3!} t^0 z^3 + \frac{2\cdot 3}{1\cdot 1!} tz = z^3 + 6tz = z(z^2+6t),$$

$$P_4(t,z) = \sum_{j=0}^{[4/2]=2} \frac{4!}{j!(4-2j)!} t^j z^{4-2j} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{0!4!} t^0 z^4 + \frac{4!}{1!2!} tz^2 + \frac{4!}{0!2!} t^2 = z^4 + 12tz^2 + 12t^2,$$

$$P_5(t,z) = \sum_{j=0}^{2} \frac{5!}{j!(5-2j)!} t^j z^{5-2j} = \frac{5!}{0!5!} t^0 z^5 + \frac{5!}{1!3!} t z^{5-2} + \frac{5!}{2!1!} t^2 z = z^5 + 20tz^3 + t^2 z.$$

Η επόμενη πρόταση κατατάσσει τα θερμικά πολυώνυμα στις συναρτήσεις με αυξημένο ενδιαφέρον για το αντικείμενο της παρούσας μελέτης.

Πρόταση 5.

Τα P_m ικανοποιούν την εξίσωση θερμότητας, για κάθε $m \geq 0$, με αρχική συνθήκη $P(0,z) = z^m$.

Απόδειξη:
Με παραγώγιση ενός θερμικού πολυωνύμου m-τάξεως ως προς t προκύπτει

$$\partial_t P_m(t,z) = \partial_t \left(\sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{m!}{j!(m-2j)!} t^j z^{m-2j} \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{[m/2]} \frac{m! j}{j!(m-2j)!} t^{j-1} z^{m-2j} = \sum_{j=1}^{[m/2]} \frac{m!}{(j-1)!(m-2j)!} t^{j-1} z^{m-2j}$$

$$= \sum_{j=0}^{[(m-2)/2]} \frac{m!}{j!(m-2j-2)!} t^j z^{m-2j-2} \tag{2.7}$$

(σημ. ότι $[m/2] - 1 = [(m-2)/2]$).

Ταυτόχρονα, με παραγώγιση ως προς z δύο φορές κι επειδή για $j = [m/2]$ ισχύει $z^{m-2j} = 1$ ή z, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\partial_z^2 P_m(t,z) &= \sum_{j=0}^{[m/2]-1} \frac{m!(m-2j)(m-2j-1)}{j!(m-2j)!} t^j z^{m-2j-2}\\ &= \sum_{j=0}^{[(m-2)/2]} \frac{m!}{j!(m-2j-2)!} t^j z^{m-2j-2}\end{aligned}$$

και λόγω της (2.7),

$$\partial_t P_m(t,z) = \partial_z^2 P_m(t,z).$$

Όσον αφορά στην απόδειξη της ισχύος της αρχική συνθήκης της εξίσωσης θερμότητας, χρησιμοποιούμε το εξής επιχείρημα: λόγω της μορφής των P_m, για κάθε $j \neq 0$, όλοι οι όροι του αθροίσματος $P_m(0,z)$ μηδενίζονται. Απομένει λοιπόν μόνο ο όρος με $j = 0$. Άρα

$$P_m(0,z) = \frac{m!}{0!m!} t^0 z^m = \frac{m!}{1 \cdot m!} 1 \cdot z^m = z^m.$$

□

Σχόλιο 1.

Από τον standard ολοκληρωτικό τύπο που δίνει τη λύση της εξίσωσης θερμότητας ως προς την αρχική συνθήκη, προκύπτει

$$P_m(t,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4t}} \xi^m d\xi, \quad \Re(t) > 0.$$

Σχόλιο 2.

Οι συντελεστές των θερμικών πολυωνύμων είναι θετικοί ακέραιοι, αφού

$$\frac{m!}{j!(m-2j)!} = \frac{m!}{(2j)!(m-2j)!}(j+1)(j+2).......2j$$

ή

$$\frac{m!}{j!(m-2j)!} = (j+1)(j+2)....2j\binom{m}{2j}.$$

Συνεπώς, για κάθε m, όλοι οι συντελεστές θερμικών πολυωνύμων αναλύονται σε ένα γινόμενο θετικών ακέραιων επί το πλήθος των συνδυασμών m ανά $2j$, που ως γνωστόν είναι επίσης φυσικός αριθμός.

Η επόμενη Πρόταση αποδεικνύει την ύπαρξη ενός άνω φράγματος για τα θερμικά πολυώνυμα το οποίο εξαρτάται από την τάξη τους m.

Πρόταση 6.

Ισχύει

$$|P_m(t,z)| \leq \frac{m!([m/2]+1)}{k_m!(m-2k_m)!} \max_{0\leq j\leq [m/2]} |t|^j |z|^{m-2j}, \quad \text{όπου } k_m = \left[\frac{4m-1-\sqrt{8m+17}}{8}\right]+1.$$

Απόδειξη: Η (2.5) δίνει

$$|P_m(t,z)| \ \leq \ m!([m/2]+1)\cdot \max_{0\leq j\leq [m/2]} A_j \cdot \max_{0\leq j\leq [m/2]} |t|^j |z|^{m-2j},$$

όπου

$$A_j = \frac{1}{j!(m-2j)!}\ .$$

Η ποσότητα A_j "χονδρικά" μεγιστοποιείται όταν ο "ρυθμός μεταβολής" της ως προς j είναι 0, που "μεταφράζεται" στο να σταθεροποιηθεί η A_j, κάτι το οποίο θα συμβεί όταν για κάποιο j μεταξύ 0 και $[m/2]$,

$$A_j = A_{j+1}$$

ή

$$j!(m-2j)! = (j+1)!(m-2j-2)! \ \Leftrightarrow\ (m-2j-1)(m-2j) = j+1$$

$$\Leftrightarrow\ 4j^2 + (1-4m)j + (m^2-m-1) = 0.$$

Η τελευταία δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς j έχει ρίζες (εν γένει μη ακέραιες)

$$j_2 = \frac{4m-1-\sqrt{8m+17}}{8} \ < \ \frac{m}{2} \ < \ j_1 = \frac{4m-1+\sqrt{8m+17}}{8}\ .$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε ακέραιο j μεταξύ 0 και $[m/2]$, έχουμε

- $A_j \ \leq \ A_{j+1}$, για $j \leq [j_2]$. Ειδικότερα, $A_{[j_2]} \ \leq \ A_{[j_2]+1}$.
- $A_j \ \geq \ A_{j+1}$, για $[j_2]+1 \ \leq \ j \ \leq \ [m/2]$.

Έπεται άμεσα ότι για κάθε ακέραιο j μεταξύ 0 και $[m/2]$,

- $A_j \ \leq \ A_{[j_2]}$, για $j \leq [j_2]$.
- $A_j \ \geq \ A_{[j_2]+1}$, για $[j_2]+1 \ \leq \ j \ \leq \ [m/2]$.

Συνεπώς,

$$\max_{0\leq j\leq [m/2]} A_j \ \leq \ A_{[j_2]+1}\ ,$$

που είναι η αποδεικτέα, αν θέσουμε $k_m = [j_2]+1$. □

Αν παραγωγίσουμε την (2.5) ως προς z προκύπτει

$$\begin{aligned}\partial_z P_m(t,z) = \sum_{2j+k=m} \frac{m!}{j!(k-1)!} t^j z^{k-1} &= m \sum_{2k+l=m-1} \frac{(m-1)!}{j!l!} t^j z^l \\ &= m P_{m-1}(t,z), \quad m \geq 1.\end{aligned}$$

Αφού το $P_m(t,z)$ αποτελεί λύση της εξίσωσης θερμότητας με $P_m(0,z) = z^m$, η $\partial_z P_m(t,z)$ επίσης αποτελεί λύση της, με αρχική συνθήκη τη $\partial_z P_m(0,z) = z^{m-1}$, αφού

$$\partial_z^2 \partial_z P_m(t,z) = \partial_z(\partial_z^2 P_m(t,z)) = \partial_z(\partial_t P_m(t,z)) \Rightarrow \partial_z^2 \partial_z P_m(t,z) = \partial_t \partial_z P_m(t,z).$$

Η συνάρτηση $E_\lambda(t,z) = e^{\lambda^2 t + \lambda z}$ είναι ακέραια στο $\mathbb{C}^2$ Επίσης ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας, αφού

$$\partial_t E_\lambda = \partial_z^2 E_\lambda = \lambda^2 e^{\lambda^2 t + \lambda z}.$$

Επιπλέον, όπως έχει αποδειχθεί ότι ισχύει για κάθε συνάρτηση-λύση της εξίσωσης θερμότητας, μπορούμε να διατυπώσουμε την παραπάνω στη μορφή

$$E_\lambda(t,z) = e^{\lambda^2 t + \lambda z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial_z^m E_\lambda(0,0)}{m!} P_m(t,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} P_m(t,z),$$

αφού

$$\partial_z^m E_\lambda(t,z) = \lambda^m e^{\lambda^2 t + \lambda z} \Rightarrow \partial_z^m E_\lambda(0,0) = \lambda^m.$$

Επομένως, η $e^{\lambda^2 t + \lambda z}$ είναι η "γεννήτρια συνάρτηση" των θερμικών πολυωνύμων. Θέτοντας $t = -1$ στην (2.5) προκύπτει

$$P_m(-1,2z) = m! \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^j}{j!(m-2j)!} (2z)^{m-2j} = H_m(z), \qquad m \geq 0,$$

όπου το H_m καλείται πολυώνυμο "Hermite" τάξεως m και ορίζεται ως

$$P_m(-1,2z) = H_m(z), \qquad m \geq 0.$$

Λόγω της ομογένειας των P_m που εξασφαλίζει τη σχέση

$$P_m(\lambda^2 t, \lambda z) = \lambda^m P_m(t,z), \qquad m \geq 0,$$

προκύπτει, αν θέσουμε όπου z το $\dfrac{z}{2i\sqrt{t}}$,

$$P_m(t,z) = P_m(-i^2 t, z) = P_m\left(-(i\sqrt{t})^2, \frac{2zi\sqrt{t}}{2i\sqrt{t}}\right) = (i\sqrt{t})^m P_m\left(-1, \frac{2z}{2i\sqrt{t}}\right)$$

ή

$$P_m(t,z) = (i\sqrt{t})^m H_m\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right).$$

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε μία πρόταση που μας επιτρέπει να ταυτίσουμε σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο δύο συναρτήσεις που επιλύουν την εξίσωση θερμότητας και των οποίων ταυτίζονται μόνο οι αρχικές συνθήκες.

Πρόταση 7.

Αν οι $F(t,z), G(t,z)$ είναι δύο ακέραιες λύσεις της εξίσωσης θερμότητας με $F(0,z) = G(0,z)$ ή γενικότερα $F(t_0,z) = G(t_0,z)$, για κάποιο $t_0 \in \mathbb{C}$ και για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τότε θα ταυτίζονται σε ολόκληρο το $\mathbb{C}^2$, δηλαδή

$$F(t,z) = G(t,z), \quad \text{για κάθε } t,z \in \mathbb{C}.$$

Απόδειξη:
Έστω ότι $F(0,z) = G(0,z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Τότε, μέσω της αρχικής συνθήκης $f(z) = F(0,z)$ και της (2.6), παίρνουμε

$$F(t,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial_z^m F(0,0)}{m!} P_m(t,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial_z^m F(0,0)}{m!} (i\sqrt{t})^m H_m\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} (i\sqrt{t})^m H_m\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial_z^m G(0,0)}{m!} (i\sqrt{t})^m H_m\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial_z^m G(0,0)}{m!} P_m(t,z) = G(t,z).$$

Επιπλέον, έστω ότι $F(t_0,z) = G(t_0,z)$, για κάποιο $t_0 \in \mathbb{C}$ και για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
Εφαρμόζοντας το παραπάνω για τις ακέραιες λύσεις

$$(t,z) \mapsto F(t_0+t,z), \quad (t,z) \mapsto G(t_0+t,z)$$

(βλ. και Πρόταση 3), παίρνουμε

$$F(t_0+t,z) = G(t_0+t,z), \quad \text{για κάθε } t,z \in \mathbb{C}.$$

Θέτοντας στη συνέχεια όπου t το $t - t_0$ παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Πόρισμα 1.

Εάν f ακέραια συνάρτηση, το πρόβλημα

$$\partial_t F = \partial_z^2 F, \quad F(0,z) = f(z),$$

έχει το πολύ μία ακέραια λύση.

Σχόλιο 3.

Η παραπάνω Πρόταση μας επιτρέπει να προβούμε σε μία σημαντική παρατήρηση που αφορά σε μία ακέραια λύση F της εξίσωσης θερμότητας:
Αν για κάποιο t_0 ισχύει $F(t_0\,, z) = 0,\ \forall\, z \in \mathbb{C},$ τότε $F(t,z) = 0,\ \forall\, t, z \in \mathbb{C}$.

Ωστόσο η σχέση $F(t, z_0) = 0,\ \forall\, t \in \mathbb{C},$ για κάποιο σταθερό z_0 δεν συνεπάγεται γενικά ότι $F(t,z) = 0,\ \ \forall\, t, z \in \mathbb{C}$.
Ως παράδειγμα της τελευταίας διαπίστωσης χρησιμοποιούμε το ακόλουθο

Παράδειγμα 1.

Έστω f μη μηδενική ακέραια περιττή συνάρτηση και $F(t,z)$ μια ακέραια λύση του προβλήματος

$$\partial_t F = \partial_z^2 F, \quad F(0,z) = f(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, η F είναι περιττή ως προς z, οπότε $F(t,0) = 0,\ \forall\, t \in \mathbb{C}$, ενώ η F δεν είναι η μηδενική συνάρτηση.

Πράγματι, αν θέσουμε $G(t,z) = -F(t,-z),\ t,\ z \in \mathbb{C},$ τότε η G είναι ακέραια και

$$\partial_z G = \partial_z F(t,-z), \quad \partial_z^2 G = -\partial_z^2 F(t,-z) = -\partial_t F(t,-z) = \partial_t G, \quad t,\ z \in \mathbb{C},$$

$$G(0,z) = F(0,z) = f(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Από το Πόρισμα 1 έπεται ότι οι $F,\ G$ ταυτίζονται και άρα η F είναι περιττή ως προς z.

Ακολουθεί μία πρόταση η οποία αναδεικνύει έναν απλό τρόπο διαπίστωσης αν τα πολυώνυμα Hermite είναι άρτια ή περιττά.

Πρόταση 8.

Ως προς τα πολυώνυμα Hermite ισχύουν τα ακόλουθα: Η $H_m(z)$ είναι άρτια (αντίστοιχα περιττή), αν και μόνο αν το m είναι άρτιο (αντίστοιχα περιττό).

Απόδειξη:
Έστω ότι ο m είναι άρτιος. Τότε και ο $m-2j$ είναι επίσης άρτιος. Άρα

$$(-2z)^{m-2j} = (2z)^{m-2j} \Rightarrow m! \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^j}{j!(m-2j)!}(-2z)^{m-2j} = m! \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^j}{j!(m-2j)!}(2z)^{m-2j}$$

$$\Leftrightarrow H_m(-z) = H_m(z),$$

δηλαδή το $H_m(z)$ είναι άρτιο ως προς z. Αντίστοιχα, αν m περιττός, τότε και $m-2j$ περιττός και

$$(-2z)^{m-2j} = -(2z)^{m-2j} \Rightarrow m! \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^j}{j!(m-2j)!}(-2z)^{m-2j} = -m! \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^j}{j!(m-2j)!}(2z)^{m-2j}$$

δηλαδή $H_m(-z) = -H_m(z)$ και το $H_m(z)$ είναι περιττό ως προς z.

Αντίστροφα: Έστω ότι η $H_m(z)$ είναι άρτια συνάρτηση. Τότε, $H_m(-z) = H_m(z)$ άρα

$$m! \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^j}{j!(m-2j)!}(2z)^{m-2j}(-1)^{m-2j} = m! \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^j}{j!(m-2j)!}(2z)^{m-2j}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^j}{j!(m-2j)!}(2z)^{m-2j}[(-1)^{m-2j} - 1] = 0 \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Επομένως, οι συντελεστές του πολυώνυμου αυτού πρέπει να είναι όλοι 0. Άρα,

$$(-1)^j/j!(m-2j)![(-1)^{m-2j} - 1] = 0, \forall j \in [0, [m/2]].$$

Επομένως $(-1)^{m-2j} = 1, \forall j \Rightarrow m-2j$ άρτιος, $\forall j \in [0, [m/2]] \Rightarrow m$ άρτιος.

Με ακριβώς ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι αν m περιττός, τότε $H_m(z)$ περιττό και αντίστροφα. □

Οι δύο τελευταίες Προτάσεις του παρόντος Κεφαλαίου συσχετίζουν τα σημεία μηδενισμού των πολυωνύμων Hermite με εκείνα των θερμικών πολυωνύμων, καθώς επίσης και τις ρίζες των τελευταίων με εκείνες των $z-$ παραγώγων τους. Οι προτάσεις αυτές είναι ιδιαίτερα σημαντικές και βρίσκουν άμεση εφαρμογή στη μελέτη των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης θερμότητας, εφόσον εκείνες εξαρτούν τις αρχικές συνθήκες τους με τα θερμικά πολυώνυμα.

Πρόταση 9.

Θέτουμε $l = [m/2]$ και έστω $r_k, 1 \le k \le l$ οι θετικές ρίζες του πολυωνύμου Hermite $H_m(z)$. Τότε, οι μη μηδενικές ρίζες (ως προς z) του $P_m(t,z)$ είναι οι $\pm 2\sqrt{t} r_k, 1 \le k \le l$. Επιπλέον, υπάρχουν μοναδικά $0 < \rho_{m,1} < \rho_{m,2} < .... < \rho_{m,l}$ ώστε για οποιαδήποτε $t \neq 0,\ z \in \mathbb{C}$ να ισχύει:

1. $P_m(t,z) = \prod_{j=1}^{l}(z^2 + \rho_{m,j} t), \qquad$ εάν $m = 2l$

2. $P_m(t,z) = z\prod_{j=1}^{l}(z^2 + \rho_{m,j} t), \qquad$ εάν $m = 2l + 1$.

Απόδειξη:

Είναι γνωστό από τη θεωρία ότι όλα τα σημεία μηδενισμού των πολυωνύμων Hermite είναι πραγματικοί αριθμοί. Είναι, επίσης, απλές ρίζες.

Έστω ένα πολυώνυμο Hermite $H_m(z)$ για το οποίο θέτουμε $m = 2l$. Αφού οι ρίζες του H_m είναι απλές και πραγματικές, τότε το πλήθος τους ταυτίζεται με το βαθμό m του H_m. Γνωρίζουμε ότι, αν m άρτιος, τότε H_m άρτιο. Άρα, αν r_1 ρίζα του H_m, τότε και η $-r_1$ αποτελεί ρίζα. Επομένως, θα υπάρχουν l σε πλήθος θετικές πραγματικές ρίζες, και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε $0 < r_1 < r_2 ... < r_l$. Άρα, το $H_m(z)$ μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} H_m(z) &= c(z - r_1)(z + r_1)(z - r_2)(z + r_2).....(z - r_{m/2})(z + r_{m/2}) \\ &= (z^2 - r_1^2)(z^2 - r_2^2).....(z^2 - r_l^2) = \prod_{j=1}^{l}\left(z^2 - r_j^2\right) \end{aligned}$$

όπου $c = 2^m = 4^l$,

μέσω της οποίας το αντίστοιχο θερμικό πολυώνυμο $P_m(t,z)$ παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} P_m(t,z) = (i\sqrt{t})^m H_m\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right) &= c(i\sqrt{t})^{2l}\left[\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right)^2 - r_1^2\right]\left[\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right)^2 - r_2^2\right]....\left[\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right)^2 - r_l^2\right] \\ &= c(i\sqrt{t})^2\left[\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right)^2 - r_1^2\right](i\sqrt{t})^2\left[\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right)^2 - r_2^2\right]....(i\sqrt{t})^2\left[\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right)^2 - r_l^2\right] \\ &= c\left(\frac{z^2}{4} - i^2 r_1^2 \sqrt{t}^2\right)\left(\frac{z^2}{4} - i^2 r_2^2 \sqrt{t}^2\right)....\left(\frac{z^2}{4} - i^2 r_l^2 \sqrt{t}^2\right) \\ &= c\left(\frac{z^2}{4} + r_1^2 t\right)\left(\frac{z^2}{4} + r_2^2 t\right)....\left(\frac{z^2}{4} + r_l^2 t\right) = c\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{z^2}{4} + r_j^2 t\right) = \prod_{j=1}^{l}\left(z^2 + 4r_j^2 t\right). \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\rho_{mj} = 4r_j^2$, με $j = 1, ...l$, το $P_m(t,z)$ καταλήγει στην ισοδύναμη μορφή

$$P_m(t,z) = \prod_{j=1}^{l}(z^2 + \rho_{m,j}t),$$

όπου, λόγω του ορισμού των $\rho_{m,j}$ και της διάταξης των $r_1, r_2, ...r_l$, θα είναι $\rho_{m,1} < \rho_{m,2} < ... < \rho_{m,l}$.

Σε αυτό το σημείο, αν μηδενίσουμε οποιαδήποτε από τις παρενθέσεις της προηγούμενης σχέσης, παρατηρούμε ότι τα σημεία μηδενισμού των P_m δεν είναι τα $\rho_{m,j}$, αλλά τα $\pm 2i\sqrt{t}r_1, ... \pm 2i\sqrt{t}r_l$.

Ας περάσουμε στην περίπτωση που m περιττός, δηλαδή $m = 2l + 1$. Γνωρίζουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση και η $H_m(z)$ είναι περιττή, άρα η $z = 0$ θα τη μηδενίζει οπωσδήποτε, και αφού οι ρίζες είναι όλες απλές και πραγματικές, το πλήθος τους θα είναι $m = 2l + 1$, επομένως οι μη μηδενικές ρίζες είναι σε πλήθος $2l$ και κατατάσσονται ξανά σε l ζεύγη αντιθέτων αριθμών, αφού, αν z_0 ρίζα, τότε $H_m(-z) = -H_m(z) = 0$. Συνεπώς, θα έχουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned} H_m(z) &= cz(z - r_1)(z + r_1)(z - r_2)(z + r_2).....(z - r_l)(z + r_l) \\ &= cz(z^2 - r_1^2)(z^2 - r_2^2).....(z^2 - r_l^2) = z\prod_{j=1}^{l}(z^2 - r_j^2), \end{aligned}$$

όπου $c = 2^m = 2 \cdot 4^l$ και το αντίστοιχο θερμικό πολυώνυμο θα είναι:

$$P_m(t,z) = (i\sqrt{t})^m H_m\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right)$$

$$= c(i\sqrt{t})^{2l+1}\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right)\left[\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right)^2 - r_1^2\right]\left[\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right)^2 - r_2^2\right]....\left[\left(\frac{z}{2i\sqrt{t}}\right)^2 - r_l^2\right]$$

$$=\widetilde{c}z(i\sqrt{t})^2\left[\left(\tfrac{z}{2i\sqrt{t}}\right)^2 - r_1^2\right](i\sqrt{t})^2\left[\left(\tfrac{z}{2i\sqrt{t}}\right)^2 - r_2^2\right]....(i\sqrt{t})^2\left[\left(\tfrac{z}{2i\sqrt{t}}\right)^2 - r_l^2\right]$$

$$=\widetilde{c}z\left(\tfrac{z^2}{4} - i^2r_1^2\sqrt{t}^2\right)\left(\tfrac{z^2}{4} - i^2r_2^2\sqrt{t}^2\right)....\left(\tfrac{z^2}{4} - i^2r_l^2\sqrt{t}^2\right) \quad (2.\text{-}22)$$

$$=\widetilde{c}z\left(\tfrac{z^2}{4} + r_1^2t\right)\left(\tfrac{z^2}{4} + r_2^2t\right)....\left(\tfrac{z^2}{4} + r_l^2t\right) = \widetilde{c}z\prod_{j=1}^{l}\left(\tfrac{z^2}{4} + r_j^2t\right),$$

όπου $\widetilde{c} = \frac{c}{2} = 4^l$. Τότε ομοίως τα P_m μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$P_m(t,z) = z\prod_{j=1}^{l}(z^2 + \rho_{m,j}t), \text{ όπου } \rho_{m,j} = 4r_j^2, 1 \le j \le l.$$

Επομένως οι ρίζες του $P_m(t,z)$ είναι σ' αυτήν την περίπτωση οι $0, \pm 2i\sqrt{t}r_1, ... \pm 2i\sqrt{t}r_l$. □

Σχόλιο 4.

Παρατηρούμε ότι, και στις δύο περιπτώσεις, οι ρίζες των $P_m(t,z)$, τις οποίες θεωρούμε ως πολυώνυμα του z, είναι απλές, για οποιονδήποτε μη μηδενικό μιγαδικό t. Η περίπτωση $t = 0$ είναι ιδιαίτερη, καθώς τότε το P_m εκφυλίζεται στη μορφή $P_m(0,z) = z^m$ και οι ρίζες παύουν να είναι απλές.

Επιπλέον συμπέρασμα εξάγεται από την παρατήρηση ότι, αν m άρτιος, λόγω της μορφής των P_m και της διάταξης $\rho_{m,i} > 0, \forall i \in 1,...l$, ρίζα του P_m παρουσιάζεται όταν

$$z^2 + \rho_{m,i}t = 0 \Leftrightarrow z^2 = -\rho_{m,i}t$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, η z είναι πραγματική ρίζα, αν και μόνο αν $t \in (-\infty, 0]$. Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για m περιττό, όσο αφορά στις μη μηδενικές ρίζες των $P_m(t,z)$.

Πρόταση 10.

Έστω $m \geq 2$ και $\rho_{m,j}, 1 \leq j \leq l = [m/2]$ όπως στην Πρόταση 9. Τότε:

1. $$\rho_{m,1} < \rho_{m-1,1} < \rho_{m,2} < \rho_{m-1,2} < \rho_{m,3} < ... < \rho_{m,l}$$

   εάν $m = 2l$ και

2. $$\rho_{m-1,1} < \rho_{m,1} < \rho_{m-1,2} < \rho_{m,2} < \rho_{m-1,3} < ... < \rho_{m,l}$$

   εάν $m = 2l + 1$.

Απόδειξη:

1. Έστω ότι $m = 2l$. Θέτουμε

   $$\varphi(x) = \prod_{j=1}^{l}(x^2 - \rho_{m,j}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   Λόγω της Πρότασης 9, $\forall z \in \mathbb{C}$, ισχύει

   $$P_m(-1,z) = \varphi(z) \Rightarrow \partial_z P_m(-1,z) = \varphi'(z).$$

   Αλλά, για κάθε $z \in \mathbb{C}$,

   $$\partial_z P_m(-1,z) = mP_{m-1}(-1,z) = m\prod_{j=1}^{l}(z^2 - \rho_{m,j})$$

(βλ. Πρόταση 9). Επομένως, $\forall z \in \mathbb{C}$ είναι

$$\varphi'(z) = m \prod_{j=1}^{l} (z^2 - \rho_{m-1,j}).$$

Οι θετικές ρίζες του $\varphi(x)$ είναι οι $\sqrt{\rho_{m,1}}, \sqrt{\rho_{m,2}}, ..., \sqrt{\rho_{m,l}}$ και του $\varphi'(x)$ οι $\sqrt{\rho_{m-1,1}}, \sqrt{\rho_{m-1,2}}, ..., \sqrt{\rho_{m-1,l}}$. Το συμπέρασμα τώρα έπεται από το Θεώρημα Rolle.

2. Έστω ότι $m = 2l + 1$. Θέτουμε

$$\psi(x) = x \prod_{j=1}^{l} (x^2 - \rho_{m,j}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Λόγω της Πρότασης 9, $\forall z \in \mathbb{C}$, ισχύει

$$P_m(-1, z) = z \prod_{j=1}^{l} (z^2 - \rho_{m,j}) = \psi(z) \Rightarrow \partial_z P_m(-1, z) = \psi'(z).$$

Αλλά, για κάθε $z \in \mathbb{C}$,

$$\partial_z P_m(-1, z) = m P_{m-1}(-1, z) = m \prod_{j=1}^{l} (z^2 - \rho_{m-1,j})$$

(βλ. Πρόταση 9). Επομένως, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\psi'(z) = m \prod_{j=1}^{l} (z^2 - \rho_{m-1,j}).$$

Οι μη αρνητικές ρίζες του $\psi(x)$ είναι οι $0, \sqrt{\rho_{m,1}}, \sqrt{\rho_{m,2}}, ..., \sqrt{\rho_{m,l}}$ και του $\psi'(x)$ οι $\sqrt{\rho_{m-1,1}}, \sqrt{\rho_{m-1,2}}, ..., \sqrt{\rho_{m-1,l}}$. Το συμπέρασμα έπεται πάλι από το Θεώρημα Rolle.

$\square$

Πόρισμα 2.

Έστω $m \geq 2$ και $\rho_{m,j}, \quad 1 \leq j \leq l = [m/2]$ όπως στην Πρόταση 9. Τότε προκύπτει ότι

$$\{\rho_{m,j} : 1 \leq j \leq l\} \quad \bigcap \quad \{\rho_{m-1,j} : 1 \leq j \leq l\} = \emptyset.$$

Κεφάλαιο 3

Η ΤΑΞΗ ΚΑΙ Ο ΤΥΠΟΣ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

3.1 Τάξη Ακέραιας Συνάρτησης

Έστω

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n, \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{3.0}$$

μία ακέραια συνάρτηση. Ορίζουμε επίσης το παρακάτω "φράγμα πάνω σε δίσκους":

$$M(r) = M_g(r) := \sup_{|z|\leq r} |g(z)| = \max_{|z|=r} |g(z)|, \qquad r > 0. \tag{3.1}$$

Η **τάξη (order)** μιας ακέραιας συνάρτησης $g(z)$ ορίζεται στη βιβλιογραφία (βλ. [5]) από τον παρακάτω τύπο:

$$\rho = \rho_g := \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}. \tag{3.2}$$

Ισχύει προφανώς

$$0 \leq \rho \leq \infty.$$

Θα αποδείξουμε ότι η σχέση (3.2) είναι ισοδύναμη με την παρακάτω

Πρόταση 11.

Η τάξη ρ της $g(z)$ είναι ο ελάχιστος εκθέτης $\rho' \geq 0$ έτσι ώστε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $r_0 = r_0(\varepsilon) > 0$ ώστε

$$|g(z)| \leq \exp\left(|z|^{\rho'+\varepsilon}\right), \qquad \forall z \in \mathbb{C} \text{ με } |z| \geq r_0.$$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Η (3.2) διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής: $\exists r_0$, ώστε $\forall r \geq r_0$,

$$\begin{aligned} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \leq \varepsilon + \rho \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\ln M(r) \leq (\varepsilon+\rho)\ln r \\ &\Leftrightarrow \quad e^{\ln\ln M(r)} \leq e^{(\varepsilon+\rho)\ln r} \Leftrightarrow \ln M(r) \leq e^{\ln r^{\varepsilon+\rho}} = r^{\varepsilon+\rho} \\ &\Leftrightarrow \quad M(r) \leq e^{r^{\varepsilon+\rho}}. \end{aligned}$$

Από την (3.1) και την τελευταία, για $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \geq r_0$, αν θέσουμε $r = |z|$ τότε

$$|g(z)| \leq M(r) \leq e^{|z|^{\varepsilon+\rho}}.$$

Έστω τώρα $\widetilde{\rho} \geq 0$ με την ιδιότητα που περιγράφει η εκφώνηση. Θα δείξουμε ότι $\rho \leq \widetilde{\rho}$.

Επιλέγουμε $\varepsilon > 0, r_0 > 0$ ώστε $\forall z \in \mathbb{C}$ με $|z| \geq r_0$ ισχύει $|g(z)| \leq e^{|z|^{\varepsilon+\widetilde{\rho}}}$.

Τότε, $\forall r \geq r_0$,

$$M(r) \leq e^{r^{\varepsilon+\widetilde{\rho}}}$$

ή

$$\begin{aligned} \ln M(r) \leq r^{\varepsilon+\widetilde{\rho}} \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\ln M(r) \leq \ln r^{\varepsilon+\widetilde{\rho}} = (\varepsilon+\widetilde{\rho})\ln r \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \leq \varepsilon + \widetilde{\rho}\,. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα,

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \leq \varepsilon + \widetilde{\rho} \Leftrightarrow \rho \leq \varepsilon + \widetilde{\rho}, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Συνεπώς, πράγματι $\rho \leq \widetilde{\rho}$. $\square$

Εν συνεχεία μεταβαίνουμε στον ορισμό του τύπου της τάξεως ακέραιας συνάρτησης.

3.2 Τύπος της Τάξεως Ακέραιας Συνάρτησης

Ο **τύπος (type)** τ μιας ακέραιας συνάρτησης (βλ. [5]), ή ακριβέστερα ο τύπος της τάξεως ρ της ακέραιας συνάρτησης $g(z)$, ορίζεται στην περίπτωση που η τάξη της είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή $0 < \rho < \infty$, ως εξής:

$$\tau = \tau_g := \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln M(r)}{r^\rho} \ .$$

Για το εύρος των τιμών του τ ισχύει $0 \le \tau \le \infty$.

Πρόταση 12.

Ο τύπος τ της g είναι ο ελάχιστος αριθμός $\tau' \ge 0$ ή και άπειρο, έτσι ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $r_0 = r_0(\varepsilon) > 0$ ώστε

$$|g(z)| \le \exp\Big((\tau' + \varepsilon)|z|^\rho\Big), \qquad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{με} \quad |z| \ge r_0.$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \tau = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{r^\rho} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, r_0 : \frac{\ln M(r)}{r^\rho} < \tau + \varepsilon, \quad \forall\, r > r_0 \\ &\Leftrightarrow \quad M(r)^{\frac{1}{r^\rho}} < e^{\tau+\varepsilon} \ \Leftrightarrow\ M(r) < e^{(\tau+\varepsilon)r^\rho}, \quad \forall r > r_0 \ . \end{aligned}$$

Τότε,

$$|g(z)| \ \le\ M(|z|) \ \le\ e^{(\tau+\varepsilon)|z|^\rho}, \quad \forall\, z \ \text{με}\ |z| > r_0 \ .$$

Για να δείξουμε ότι ο τ είναι ο ελάχιστος με αυτήν την ιδιότητα, εργαζόμαστε όπως στην απόδειξη της Πρότασης 11.

$\square$

Για τις ακραίες τιμές του τύπου, δηλαδή για $\tau = 0$, $\tau = +\infty$, η $g(z)$ καλείται "minimal" και "maximal" τύπου, αντίστοιχα, ενώ για τιμές της τάξεως $\rho = 0, \rho = +\infty$ ο τύπος δεν ορίζεται.

Πρόταση 13.

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Τότε:
(i). Οι τάξεις ρ των ακεραίων συναρτήσεων $g(z)$ και $\widetilde{g}(z) = g(z+z_0)$ ταυτίζονται.
(ii). Για $\rho \in (0, +\infty)$, οι τύποι των τάξεων των g και $\widetilde{g}$ επίσης ταυτίζονται.

Απόδειξη: (i). Θέτουμε

$$M(r) = \max_{|z|=r} |g(z)|, \qquad \widetilde{M}(r) = \max_{|z|=r} |\widetilde{g}(z)|, \qquad r > 0.$$

Αλλά, $\forall z$ με $|z| = r$, $|z + z_0| \leq |z| + |z_0| = r + |z_0|$ επομένως, από τον ορισμό του $M(r)$, ισχύει

$$|\widetilde{g}(z)| = |g(z+z_0)| \leq \max_{|w| \leq r + |z_0|} |g(w)| = M(r + |z_0|).$$

Επομένως,

$$\widetilde{M}(r) \leq M(|z_0| + r), \qquad \forall r > 0.$$

Από τον ορισμό της τάξεως $\rho_{\widetilde{g}}$ της $\widetilde{g}$ και λαμβάνοντας υπόψη το όριο

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln(r + |z_0|)}{\ln r} = 1,$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\rho_{\widetilde{g}} = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln \widetilde{M}(r)}{\ln r} \quad &\leq \quad \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M(r+|z_0|)}{\ln r} = \\
&= \quad \limsup_{r\to+\infty} \left[\frac{\ln\ln M(r+|z_0|)}{\ln(r+|z_0|)} \cdot \frac{\ln(r+|z_0|)}{\ln r} \right] = \rho_g \\
&\Rightarrow \quad \rho_{\widetilde{g}} \; \leq \; \rho_g \; .
\end{aligned}$$

Επιπλέον, $\forall z$ με $|z| = r$,

$$|z - z_0| \leq |z| + |z_0| = r + |z_0| \;\Rightarrow\; |g(z)| = |\widetilde{g}(z - z_0)| \leq \widetilde{M}(r + |z_0|),$$

οπότε

$$M(r) \leq \widetilde{M}(|z_0| + r)$$

και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, προκύπτει ότι και $\rho_{\widetilde{g}} \geq \rho_g$.

(ii). Αφού γνωρίζουμε από το (i) ότι

$$\rho_g = \rho_{\widetilde{g}} = \rho, \quad \widetilde{M}(r) \leq M(r + |z_0|), \quad \forall r > 0,$$

από τον ορισμό του τύπου μιας ακέραιας συνάρτησης παίρνουμε

$$\begin{aligned} \tau_{\widetilde{g}} &= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \widetilde{M}(r)}{r^\rho} \leq \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r+|z_0|)}{r^\rho} \\ \Leftrightarrow \quad \tau_{\widetilde{g}} &\leq \limsup_{r\to+\infty} \left[\frac{\ln M(r+|z_0|)}{(r+|z_0|)^\rho} \cdot \frac{(r+|z_0|)^\rho}{r^\rho} \right] = \tau_g \cdot 1 = \tau_g \, . \end{aligned}$$

Βάσει της σχέσης

$$M(r) \leq \widetilde{M}(|z_0|+r), \; r>0,$$

καταλήγουμε όμοια στο ότι $\tau_g \leq \tau_{\widetilde{g}}$ και άρα $\tau_{\widetilde{g}} = \tau_g$. □

Επιπλέον διαδεδομένες στη βιβλιογραφία ([5]) εκδοχές για την έκφραση των ποσοτήτων "τάξη" και "τύπος τάξης" μιας ακέραιας συνάρτησης

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{C}$$

είναι και οι παρακάτω:

$$\rho = \limsup_n \frac{n \ln n}{-\ln |a_n|}$$

και για $0 < \rho < \infty$,

$$\tau = \frac{1}{e\rho} \limsup_n n |a_n|^{\rho/n}$$

αντίστοιχα, όπου a_n, $n = 0, 1, \ldots$, οι συντελεστές της δυναμοσειράς που περιγράφει την συνάρτηση g.

Στη συνέχεια, θέτουμε

$$a_n(z) := \frac{g^{(n)}(z)}{n!} \, , \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

Προφανώς, $a_n(0) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)(w-z)^n$$

ισούται με 0, οπότε

$$\lim_n |a_n(z)|^{1/n} = 0 \implies \lim_n |a_n(z)| = 0, \quad -\ln|a_n(z)| > 0, \quad \text{τελικώς}.$$

Πρόταση 14.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \rho = \limsup_n \frac{n \ln n}{-\ln |a_n(z)|}$$

και αν $0 < \rho < \infty$,

$$\tau = \frac{1}{e\rho} \limsup_n n|a_n(z)|^{\rho/n} = \frac{e^{\rho-1}}{\rho} \limsup_n n^{1-\rho}|g^{(n)}(z)|^{\rho/n}.$$

Απόδειξη: Έστω $z \in \mathbb{C}$.
Θεωρούμε την ακέραια συνάρτηση

$$\tilde{g}(w) = g(w+z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) w^n, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 13 για "z_0" $= z$ παίρνουμε ότι η τάξη της $\tilde{g}$ ισούται με την τάξη ρ της g. Ταυτόχρονα, ισούται με

$$\limsup_n \frac{n \ln n}{-\ln |a_n(z)|}$$

κι έτσι έπεται η πρώτη αποδεικτέα.

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι $0 < \rho < \infty$,
Εφαρμόζοντας πάλι την Πρόταση 13 για "z_0" $= z$ παίρνουμε ότι ο τύπος της $\tilde{g}$ ισούται με τον τύπο τ της g. Ταυτόχρονα, ισούται με

$$\frac{1}{e\rho} \limsup_n n|a_n(z)|^{\rho/n} = \frac{1}{e\rho} \limsup_n n\Big|\frac{g^{(n)}(z)}{n!}\Big|^{\rho/n}.$$

Επομένως, με χρήση του τύπου του Stirling για το παραγοντικό (βλ. Παράρτημα), προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{1}{e\rho} \limsup_n n \left[\frac{|g^{(n)}(z)|}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}\right]^{\rho/n} \\
&= \frac{1}{e\rho} \limsup_n \Big[\frac{n}{\sqrt{2\pi n}^{\rho/n}} \cdot \frac{|g^{(n)}(z)|^{\rho/n}}{\frac{n^\rho}{e^\rho}}\Big] \\
&= \frac{e^{\rho-1}}{\rho} \limsup_n \left[\frac{1}{((2\pi)^\rho)^{1/2n} \cdot (n^{1/n})^{\rho/2}} \cdot n^{1-\rho}|g^{(n)}(z)|^{\rho/n}\right]
\end{aligned}$$

και επειδή

$$\lim_{n\to\infty}((2\pi)^{\rho})^{1/n} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1,$$

παίρνουμε τη δεύτερη αποδεικτέα. $\square$

Πόρισμα 3.

Ισχύει

$$e^{-\frac{1}{\rho}} = \limsup_n |a_n(z)|^{\frac{1}{n\ln n}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Απόδειξη: Λόγω της Πρότασης 14 έχουμε

$$\rho = \limsup_n \frac{n\ln n}{-\ln|a_n(z)|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \liminf_n \frac{-\ln|a_n(z)|}{n\ln n} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\rho} = \limsup_n \frac{\ln|a_n(z)|}{n\ln n}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\frac{1}{\rho}} = \limsup_n \left(e^{\ln|a_n(z)|}\right)^{\frac{1}{n\ln n}} = \limsup_n |a_n(z)|^{\frac{1}{n\ln n}}.$$

$\square$

Για να προχωρήσουμε στα επόμενα συμπεράσματα, θα χρειαστεί να αποδείξουμε την εξής

Πρόταση 15.

$$\lim_n (n!)^{\frac{1}{n\ln n}} = e.$$

Απόδειξη: Με χρήση του τύπου του Stirling παίρνουμε

$$\lim_n (n!)^{\frac{1}{n\ln n}} = \lim_n \left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]^{\frac{1}{n\ln n}} = \lim_n \left[\sqrt{2\pi}^{\frac{1}{n\ln n}} \cdot \left(n^{1/n}\right)^{\frac{1}{2\ln n}} \cdot n^{\frac{1}{\ln n}} \cdot e^{-\frac{1}{\ln n}}\right]$$

και έχουμε χωριστά:

$$\lim_n \sqrt{2\pi}^{\frac{1}{n\ln n}} = (2\pi)^0 = 1,$$

$$\lim_n \left(n^{1/n}\right)^{\frac{1}{2\ln n}} = 1^0 = 1 \text{ (αφού } \lim_n \frac{\ln n}{n} = 0),$$

$$\lim_n \ln\left(n^{\frac{1}{\ln n}}\right) = \frac{1}{\ln n} \cdot \ln n = 1 \ \Leftrightarrow \ \lim_n n^{\frac{1}{\ln n}} = e,$$

$$\lim_n e^{\frac{1}{\ln n}} = e^0 = 1.$$

Μέσω των παραπάνω ορίων, οδηγούμαστε τελικά στη ζητούμενη σχέση. $\square$

Ορίζουμε την ποσότητα

$$\theta := \theta(\rho) = e^{1-\frac{1}{\rho}}.$$

Λόγω της Πρότασης 15 και του Πορίσματος 3, ισχύει

$$e^{1-\frac{1}{\rho}} = \limsup_n \left| g^{(n)}(z) \right|^{\frac{1}{n \ln n}}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Πρόταση 16.

Η $\theta = \theta(\rho)$ για $\rho \in (0, +\infty)$ είναι: I.) γνησίως αύξουσα, II) λεία, III) έχει σύνολο τιμών $(0, e)$.

Απόδειξη: I. Έστω $\rho_1 < \rho_2, \rho_1, \rho_2 \in [0, +\infty]$. Τότε

$$\rho_1 < \rho_2 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho_1} > \frac{1}{\rho_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\rho_1} < -\frac{1}{\rho_2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\rho_1} < 1 - \frac{1}{\rho_2} \Leftrightarrow e^{1-\frac{1}{\rho_1}} < e^{1-\frac{1}{\rho_2}}$$

$\Leftrightarrow \theta(\rho_1) < \theta(\rho_2)$

Άρα η θ είναι γνησίως αύξουσα.

II. Η θ είναι λεία, δηλαδή συνεχώς παραγωγίσιμη, με παράγωγο

$$\theta'(\rho) = e^{1-\frac{1}{\rho}} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)' = \frac{1}{\rho^2} \cdot e^{1-\frac{1}{\rho}}.$$

III. Αφού η θ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το $\big(\lim_{\rho \to 0} \theta(\rho), \lim_{\rho \to \infty} \theta(\rho)\big) = (0, e)$. $\square$

Ακολούθως, αναφέρουμε μία πρόταση και ορισμένες σχέσεις, οι οποίες θα χρησιμεύσουν για αντιπαραβολή με τις εκφράσεις της τάξεως και του τύπου, αντίστοιχα.

Πρόταση 17.

(i) Εάν $0 \leq \rho < \infty$, τότε

$$\lim_n n|a_n|^{\rho'/n} = 0, \quad \forall\, \rho' > \rho.$$

(ii) Εάν $0 < \rho \leq \infty$, τότε

$$\lim_n n|a_n|^{\rho'/n} = +\infty, \quad \forall\, \rho' \in (0,\ \rho).$$

Απόδειξη:

(i). Για μεγάλα n,

$$\rho = \limsup_n \frac{n \ln n}{-\ln |a_n|} \Leftrightarrow \frac{n \ln n}{-\ln |a_n|} \leq \rho + \varepsilon_n \Leftrightarrow \ln\Big(|a_n|^{1/n}\Big) \leq -\frac{\ln n}{\rho + \varepsilon_n},$$

για μία ακολουθία θετικών αριθμών ε_n με $\varepsilon_n \to 0$.

Επομένως, για $\rho' > \rho$ ισχύει

$$\ln\Big(n|a_n|^{\rho'/n}\Big) = \ln n + \rho' \ln\Big(|a_n|^{1/n}\Big) \leq -\Big(\frac{\rho'}{\rho + \varepsilon_n} - 1\Big) \ln n,$$

για μεγάλα n.

Η παραπάνω σχέση, αφού τελικώς ισχύει $\rho' > \rho + \varepsilon_n \Leftrightarrow \frac{\rho'}{\rho+\varepsilon_n} - 1 > 0$, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$\lim_n n|a_n|^{\rho'/n} = 0 \qquad \text{για } \ \rho' > \rho.$$

(ii). Έστω ότι $0 < \rho \leq \infty$. Τότε, από τον ορισμό της τάξεως

$$\rho = \limsup_n \frac{n \ln n}{-\ln |a_n|},$$

προκύπτει ότι υπάρχει υπακολουθία α_{n_k} τέτοια ώστε

$$\lim_k \frac{n_k \ln n_k}{-\ln |a_{n_k}|} = \rho.$$

Συνάγεται ότι

$$\frac{\ln |a_{n_k}|}{n_k \ln n_k} = -\frac{1}{\rho} + o(1) \Leftrightarrow \ln\big(|a_{n_k}|^{1/n_k}\big) = -\frac{1}{\rho} \ln n_k + o(\ln n_k).$$

Επομένως, για $\rho' \in (0, \rho)$ η προηγούμενη σχέση οδηγεί στο ότι

$$\ln\big(n_k |a_{n_k}|^{\rho'/n_k}\big) = \big(1 - \frac{\rho'}{\rho}\big) \ln n_k + o(\ln n_k).$$

Συνεπώς, $\lim_k n_k |a_{n_k}|^{\rho'/n_k} = +\infty$ για $\rho' \in (0, \rho)$. □

Πρόταση 18.

Έστω η ακέραια συνάρτηση $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, τάξεως $\rho \in (0,\infty)$ και καθορισμένου τύπου τ με $0 \leq \tau \leq \infty$.

Υποθέτουμε ότι $0 < \tau \leq \infty$, και έστω υπακολουθία a_{n_k} της a_n, τέτοια ώστε να ισχύει

$$\tau = \frac{1}{e\rho} \lim_k n_k |a_{n_k}|^{\rho/n_k}.$$

Τότε,

$$\rho = \lim_k \frac{n_k \ln n_k}{-\ln|a_{n_k}|}.$$

Απόδειξη:

1η περίπτωση:

Έστω ότι $\tau < \infty$. Τότε,

$$|a_{n_k}|^{\rho/n_k} = \frac{e\rho\tau}{n_k} + o\left(\frac{1}{n_k}\right) = \frac{e\rho\tau}{n_k}\left[1+o(1)\right] \Leftrightarrow \frac{\rho}{n_k}\ln|a_{n_k}| = \ln(e\rho\tau) - \ln(n_k) + o(1)$$

ή

$$\frac{\rho \ln|a_{n_k}|}{n_k \ln n_k} = -1 + o\left(\frac{1}{\ln n_k}\right).$$

Επομένως,

$$\lim_k \frac{n_k \ln n_k}{-\ln|a_{n_k}|} = \rho,$$

δηλαδή το $\limsup$ στην $\rho = \limsup_n \frac{n \ln n}{-\ln|a_n|}$ επίσης επιτυγχάνεται για την ίδια υπακολουθία a_{n_k}.

2η περίπτωση:

Έστω ότι $\tau = \infty$. Τότε, για κάθε $M > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
|a_{n_k}|^{\rho/n_k} &\geq \frac{M}{n_k}, \qquad \text{για μεγάλα } k \\
\Leftrightarrow \ln\left(|a_{n_k}|^{\rho/n_k}\right) \geq \ln\left(\frac{M}{n_k}\right) \Leftrightarrow \ln|a_{n_k}|\frac{\rho}{n_k} &\geq \ln M - \ln n_k \\
\Leftrightarrow \frac{\rho \ln|a_{n_k}|}{n_k \ln n_k} &\geq -1 + \frac{\ln M}{\ln n_k},
\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει εκ νέου ότι το $\limsup$ στην ρ επίσης επιτυγχάνεται για την ίδια υπακολουθία, a_{n_k}. □

Σχόλιο 5.

Το αντίστροφο της Πρότασης 9 δεν ισχύει πάντα. Αν a_{n_k} μια υπακολουθία για την οποία το $\limsup$ στην ρ επιτυγχάνεται, μπορεί να μην ισχύει το ίδιο για το τ, πχ $g(z) = \sin z + \cos(2z)$ με $a_{n_k} = a_{2k+1}$.

Σχόλιο 6.

Αν $\tau = 0$, τότε από την $\tau = \frac{1}{e\rho} \limsup_n n|a_n|^{\rho/n}$ ισχύει

$$\lim_n n|a_n|^{\rho/n} = 0.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, ωστόσο, είναι δυνατόν να υπάρχει υπακολουθία a_{n_k} για την οποία το $\limsup$ δεν επιτυγχάνεται. Ενδεικτικά αναφέρουμε την $g(z) = g_e(z) + g_o(z)$, όπου $g_e(z)$ ακέραια, τάξεως ρ και τύπου 0, ενώ η $g_o(z)$ είναι περιττή ακέραια συνάρτηση τάξεως $< \rho$. Η $g(z)$ έχει τάξη ρ και τύπο $\tau = 0$, ωστόσο το $\limsup$ δεν επιτυγχάνεται για την υπακολουθία $a_{n_k} = a_{2k+1}$.

Στο σημείο αυτό, εισάγουμε ένα χρήσιμο εργαλείο για την απόδειξη των βασικών αποτελεσμάτων της μελέτης αυτής. Το εργαλείο αυτό θα αποτελέσει ο τελεστής ($^\sharp$) που ορίζεται ως εξής:

$$g^\sharp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n,$$

όπου $g(z)$ ακέραια συνάρτηση με το γνωστό ανάπτυγμα, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Προφανώς, η $g^\sharp$ είναι επίσης ακέραια. Παρατηρούμε ότι $\forall r > 0$ ισχύει

$$\max_{|z| \le r} |g(z)| \le g^\sharp(r) = \max_{|z| \le r} \left| g^\sharp(z) \right|,$$

αφού

$$\max_{|z| \le r} |g(z)| = \max_{|z| \le r} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \le \max_{|z| \le r} \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n z^n \right| \le \max_{|z| \le r} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z^n|$$

$\le r \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = g^\sharp(r) = \max_{|z| \le r} \left| g^\sharp(z) \right|$,

όπου η ανισότητα ενδέχεται να είναι αυστηρή.

Ιδιαίτερα χρήσιμη ιδιότητα του τελεστή $^\sharp$ αποτελεί το γεγονός ότι η τάξη και ο τύπος της g δεν μεταβάλλονται υπό την επίδρασή του, δηλαδή

$$\rho_{g^\sharp} = \rho_g = \rho \qquad \text{και} \qquad \tau_{g^\sharp} = \tau_g = \tau,$$

αφού από τους βασικούς τύπους της τάξεως και του τύπου λαμβάνουμε:

$$\rho_{g^\sharp} = \rho = \limsup_n \frac{n \ln n}{-\ln \left| |a_n| \right|} = \limsup_n \frac{n \ln n}{-\ln |a_n|} = \rho_g$$

και $\quad \tau_{g^\sharp} = \frac{1}{e\rho} \limsup_n n\Big||a_n|\Big|^{\rho/n} = \frac{1}{e\rho} \limsup_n n|a_n|^{\rho/n} = \tau_g.$

Πρόσθετη ενδιαφέρουσα ιδιότητα του $\sharp$ είναι ότι μπορεί να εναλλάσσεται με την παράγωγο, αφού, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$(g')^\sharp(z) = (g'(z))^\sharp = \left(\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big)'\right)^\sharp =$$

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right)^\sharp = \sum_{n=0}^{\infty} |n a_n| z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n|a_n| z^{n-1}$
και

$$\left(g^\sharp\right)'(z) = \left(g^\sharp(z)\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n|a_n| z^{n-1},$$

επομένως

$$(g')^\sharp(z) = \left(g^\sharp\right)'(z).$$

Αν θέσουμε, τώρα,

$$\theta^\sharp = \limsup_n \left|\left(g^\sharp\right)^{(n)}(z)\right|^{\frac{1}{n\ln n}}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι $\theta^\sharp = \theta$, αφού, μέσω της $\rho_{g^\sharp} = \rho_g = \rho$ έχουμε:

$$\theta^\sharp = e^{1-\frac{1}{\rho}} = \theta.$$

Συνεπώς, εάν θέσουμε

$$m_n(r) := \max_{|z|\le r} \left|g^{(n)}(z)\right|, \qquad r > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

τότε είναι

$$m_n(r) = \max_{|z|\le r} \left|g^{(n)}(z)\right| \le \max_{|z|\le r} \left|(g^{(n)})^\sharp(z)\right| = (g^{(n)})^\sharp(r) = (g^\sharp)^{(n)}(r)$$

επομένως

$$\theta = \limsup_n \left[m_n(r)\right]^{\frac{1}{n\ln n}} = \limsup_n \left[\left(g^\sharp\right)^{(n)}(r)\right]^{\frac{1}{n\ln n}}, \qquad r > 0.$$

Ομοίως, αφού $\tau_{g^\sharp} = \tau_g = \tau$, για $0 < \rho < \infty$, έχουμε ότι

$$\tau = \frac{e^{\rho-1}}{\rho} \limsup_n n^{1-\rho} \left[m_n(r)\right]^{\rho/n} = \frac{e^{\rho-1}}{\rho} \limsup_n n^{1-\rho} \left[\left(g^\sharp\right)^{(n)}(r)\right]^{\rho/n}, \quad r > 0.$$

3.3 Επιπλέον Ιδιότητες της Τάξης

Στην παράγραφο αυτή εισάγουμε κάποιες κρίσιμες διαπιστώσεις σχετικά με την προσέγγιση της συμπεριφοράς της τάξεως και του τύπου ακεραίων συναρτήσεων, που, εκτός από το ενδιαφέρον που παρουσιάζουν, θα μπορούσαν να βρουν εφαρμογή και στο πεδίο της επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Έστω $\nu = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ μία γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων δεικτών. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εκφράσεις

$$\rho_\nu(z) := \limsup_k \frac{n_k \ln(n_k)}{-\ln|a_{n_k}(z)|}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

και

$$\tau_\nu(z) := \frac{1}{e\rho} \limsup_k n_k\, |a_{n_k}(z)|^{\rho/n_k}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Εισάγουμε επίσης την ποσότητα $\mathrm{Ran}\,(\nu) := \{n_1, n_2, \ldots\}$, που μπορεί να θεωρηθεί το "εύρος" του ν, ενώ $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ είναι το σύνολο των φυσικών. Αν το σύνολο $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Ran}\,(\nu)$ είναι πεπερασμένο, τότε, λόγω των ορισμών

$$\rho = \limsup_n \frac{n \ln n}{-\ln|a_n(z)|}$$

και, στην περίπτωση όπου $0 < \rho < \infty$,

$$\tau = \frac{1}{e\rho} \limsup_n n|a_n(z)|^{\rho/n} = \frac{e^{\rho-1}}{\rho} \limsup_n n^{1-\rho} \left|g^{(n)}(z)\right|^{\rho/n}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

είναι σαφές ότι $\rho_\nu(z) = \rho$ και, εάν $0 < \rho < \infty$, $\tau_\nu(z) = \tau$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Υποθέτουμε ωστόσο κάτι ακόμα πιο ενδιαφέρον, ότι δηλαδή η ακολουθία δεικτών ν είναι κατασκευασμένη με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε το σύνολο $\mathbb{N} \setminus \mathrm{Ran}\,(\nu)$ να είναι άπειρο. Σε αυτή την περίπτωση, είναι σαφές ότι υπάρχει μοναδική ακολουθία απείρων δεικτών $\mu = \{m_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\mathrm{Ran}\,(\mu) \cap \mathrm{Ran}\,(\nu) = \emptyset$ και $\mathrm{Ran}\,(\mu) \cup \mathrm{Ran}\,(\nu) = \mathbb{N}$, την οποία αποκαλούμε "συμπληρωματική" ακολουθία της ν. Τότε, είναι σαφές ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\rho = \max\{\rho_\nu(z),\, \rho_\mu(z)\}$$

και

$$\tau = \max\{\tau_\nu(z),\, \tau_\mu(z)\}$$

(βλ. και Πρόταση 14).

Στα παραπάνω δεδομένα στηρίζονται ορισμένα από τα βασικότερα αποτελέσματα που ακολουθούν.

Π.χ., αν υποθέσουμε ότι η ακολουθία δεικτών $\nu = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ ικανοποιεί την αυξητική συνθήκη

$$n_{k+1}/n_k \to 1,$$

θα αποδείξουμε στη συνέχεια (Κεφ. 5) ότι, εάν $\tau < \infty$, τότε $\rho_\nu(z) = \rho$ σχεδόν για κάθε $z \in \mathbb{C}$, καθώς και ότι $\tau_\nu(z) = \tau$ σχεδόν για κάθε $z \in \mathbb{C}$, ενώ εάν $\tau = \infty$, τότε υπάρχει ένα πυκνό G_δ υποσύνολο S του $\mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $\tau_\nu(z) = \infty$ για κάθε $z \in S$.

Τώρα, για μία ακολουθία δεικτών $\nu = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\mathbb{N}\backslash \mathrm{Ran}\,(\nu)$ να είναι απειροσύνολο, η έκφραση $\theta(\rho)$ που εισήχθη μετά την Πρόταση 15 μας προτρέπει να θεωρήσουμε την ποσότητα

$$\theta_\nu(z) := \exp\left(1 - \frac{1}{\rho_\nu(z)}\right) = \limsup_k \left|g^{(n_k)}(z)\right|^{\frac{1}{n_k \ln(n_k)}}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, εάν μ είναι η συμπληρωματική ακολουθία της ν, τότε λόγω της

$$\rho = \max\{\rho_\nu(z),\, \rho_\mu(z)\}$$

προκύπτει ότι

$$0 \leq \theta = \max\{\theta_\nu(z),\, \theta_\mu(z)\} \leq e.$$

Σε αυτό το σημείο, θα επιθυμούσαμε να προσδιορίσουμε κατά πόσο η ποσότητα $\rho_\nu(z)$ "προσεγγίζει" την τάξη ρ της $g(z)$ ή, ισοδύναμα, πόσο "κοντά" είναι η έκφραση $\theta_\nu(z)$ στην παραπάνω σταθερά θ.

Θα χρειαστεί επίσης η παρακάτω

Πρόταση 19.

Εάν μία συνάρτηση $A(z)$ είναι αναλυτική και όχι ταυτοτικά 0 σε ένα πεδίο $\Omega \subset \mathbb{C}$, τότε η συνάρτηση φ με

$$\varphi(z) = \ln|A(z)|, \quad \text{για} \quad A(z) \neq 0, \quad \varphi(z) = -\infty, \quad \text{για} \quad A(z) = 0$$

είναι *subharmonic* στο Ω (βλ. Παράρτημα 7).

Επιπλέον, αν $\alpha > 0$, η συνάρτηση $z \mapsto |A(z)|^\alpha$ είναι subharmonic στο Ω.

Για μια απόδειξη της παραπάνω πρότασης βλ. [17], chap. 17, Th.17.2.

Πρόταση 20.

Η συνάρτηση $\theta_\nu(z)$ είναι subharmonic στο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη:

Θέτουμε

$$\Phi_n(z) := \sup_{k \geq n} \left| g^{(n_k)}(z) \right|^{\frac{1}{n_k \ln(n_k)}}, \qquad n \geq 2.$$

Στη συνέχεια σταθεροποιούμε ένα $r > 0$ και περιορίζουμε τη μιγαδική μεταβλητή $z \in D_r := D_r(0) = \{z : |z| \leq r\}$. Τότε, $|g^{(n_k)}(z)| \leq (g^\sharp)^{(n_k)}(r)$. Επιπλέον, έχοντας ήδη παρατηρήσει ότι

$$\theta = \limsup_n \left[(g^\sharp)^{(n)}(r) \right]^{\frac{1}{n \ln n}} \leq e,$$

καταλήγουμε στο ότι υπάρχει σταθερά $M = M(r) > 0$, τέτοια ώστε $\Phi_n(z) \leq M$, για κάθε $n \geq 2$ και $z \in D_r$.

Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $|g^{(n_k)}(z)|^{\frac{1}{n_k \ln(n_k)}}$ είναι subharmonic για κάθε $k \geq 2$. Συνεπώς, προκύπτει εύκολα ότι και η $\Phi_n(z)$ (ως πεπεασμένη και ως subremum ακολουθίας subharmonic μιγαδικών συναρτήσεων) είναι subharmonic στο D_r για κάθε $n \geq 2$. Επιπλέον, η $\Phi_n(z)$ είναι φθίνουσα ως προς n και, βάσει του τρόπου με τον ορποίο ορίσαμε την ποσότητα $\theta_\nu(z)$,

$$\theta_\nu(z) = \lim_n \Phi_n(z), \qquad z \in D_r.$$

Επομένως, με μία απλή εφαρμογή του θεωρήματος φραγμένης σύγκλισης, καταλήγουμε στο ότι η $\theta_\nu(z)$ είναι subharmonic στο D_r. Άρα, αφού η επιλογή του r υπήρξε τυχαία, η $\theta_\nu(z)$ είναι subharmonic στο $\mathbb{C}$. □

Σχόλιο 7.

Είναι ευρέως γνωστό από τη βιβλιογραφία ([10]) ότι μία subharmonic συνάρτηση $\phi(z)$ σε ένα πεδίο Ω ισούται με μια άνω ημισυνεχή συνάρτηση $\hat{\phi}(z)$ σχεδόν παντού στο $z \in \Omega$. Τότε, με χρήση του παραπάνω λήμματος, εξάγεται το συμπέρασμα ότι

$$\theta_\nu(z) = \hat{\theta}_\nu(z) \qquad \text{σχεδόν για κάθε } z \in \mathbb{C},$$

όπου η $\hat{\theta}_\nu(z)$ είναι άνω ημισυνεχής στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 2.

Θεωρούμε την ακολουθία $n_k = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, καθώς και τη μιγαδική συνάρτηση $g(z) = \sin(\lambda z)$, όπου $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Τότε $\rho = 1$ και $\tau = |\lambda|$. Επιπλέον, αφού ισχύει

$$g^{(2k)}(z) = (-1)^k \lambda^{2k} \sin(\lambda z),$$

τότε, από τον ορισμό της $\theta_\nu(z)$,

$$\theta_\nu(z) = \begin{cases} 1, & \lambda z/\pi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}; \\ 0, & \lambda z/\pi \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

όπου $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων. Προφανώς, η $\theta_\nu(z)$ είναι τότε subharmonic και ταυτιζόμενη με την $\hat{\theta}_\nu(z) \equiv 1$ για όλα τα $z \in \mathbb{C}$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους.

Κλείνουμε με τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 1.

Έστω $g(z)$ ακέραια συνάρτηση κατά τα γνωστά, με τάξη $\rho \in (0, \infty)$ και τύπο τάξεως τ.

Παραθέτουμε κάποιους ορισμούς και συμβολισμούς που θα σταθούν χρήσιμοι στην συνέχεια της εργασίας.

1. Εάν $0 < \rho < \infty$, τότε:
   (a) Εάν $0 < \tau < \infty$, τότε ορίζουμε ως <u>ακριβή τάξη</u> της $g(z)$ την ρ.
   (b) Εάν $\tau = 0$, τότε θα λέμε ότι η ακριβής τάξη της $g(z)$ είναι ρ^-.
   (c) Εάν $\tau = \infty$, τότε ορίζουμε ακριβή τάξη της $g(z)$ την ρ^+.
2. Εάν $\rho = 0$ or $\rho = \infty$, θα θεωρούμε για τη συνέχεια ότι οι έννοιες της τάξεως και της ακριβούς τάξεως της $g(z)$ ταυτίζονται.
3. Η φράση "η ακριβής τάξη ακέραιας συνάρτησης $g(z)$ ανήκει στο $[0, 2^-]$, σημαίνει ότι η συνάρτηση έχει τάξη από 0 μέχρι και 2, και στην περίπτωση που $\rho = 1$ έχουμε $\tau = 0$.

Κεφάλαιο 4

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παραθέσουμε κάποιες βασικές και χρήσιμες για το σκοπό της μελέτης μας ιδιότητες των κανονικών γινομένων -canonical products (βλ. και [17], chap. 15, pp. 298 -300.)

Έστω $z_1, z_2, \dots$ πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία μη μηδενικών μιγαδικών, έτσι ώστε

$$\sigma := \inf \left\{ s \geq 0 \, : \, \sum_{k\geq 1} \frac{1}{|z_k|^s} < \infty \right\} < \infty.$$

Τότε, το **κανονικό γινόμενο** ως προς $\{z_k\}_{k\geq 1}$ είναι η παρακάτω έκφραση:

$$\Pi(z) := \prod_{k\geq 1} e_p\left(\frac{z}{z_k}\right),$$

όπου

$$e_0(z) := 1 - z, \qquad e_p(z) := (1-z)\exp\left(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right)$$

και $p \in \mathbb{N}$ που σχετίζεται με το σ ως εξής:

(i) Αν ο σ δεν είναι ακέραιος, τότε $p = [\sigma]$.

(ii) Αν ο σ είναι ακέραιος και

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{|z_k|^\sigma} = \infty,$$

τότε $p = \sigma$.

(iii) Αν ο σ είναι ακέραιος και

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{|z_k|^\sigma} < \infty,$$

τότε $p = \max\{\sigma - 1, 0\}$.

Από την τελευταία προκύπτει ότι $\sigma = 0 \Leftrightarrow \{z_k\}$ πεπερασμένη ακολουθία.

Είναι γνωστό από τη μιγαδική ανάλυση ([14]) ότι η έκφραση του κανονικού γινομένου $\Pi(z)$ που ορίσαμε είναι ακέραια ως προς z με τάξη σ.

Επιπλέον, αν $\sigma > 0$ και

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{|z_k|^\sigma} < \infty,$$

η $\Pi(z)$ έχει minimal τύπο ($\tau = 0$), χωρίς να ισχύει απαραίτητα και το αντίστροφο.

Πρόταση 21.

Εάν $p \geq 1$, τότε

$$\frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)} = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} + \frac{z}{z_k^2} + \cdots + \frac{z^{p-1}}{z_k^p} \right)$$

και

$$\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)} = 0, \quad \Pi'(0) = 0.$$

Γενικότερα,

$$\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} \left[\frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)} \right] \Bigg|_{z=0} = 0, \quad \Pi^{(r)}(z) = 0, \quad \text{για } \ r = 1, 2, \ldots, p.$$

Απόδειξη:

Το κανονικό γινόμενο μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως εξής:

$$\Pi(z) = \prod_{k\geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) e^{\frac{z}{z_k} + \frac{z^2}{2z_k^2} + \cdots + \frac{z^p}{p z_k^p}},$$

με

$$\Pi(0) = 1.$$

Θεωρούμε τις ποσότητες

$$A_k(z) = e^{\frac{z}{z_k} + \frac{z^2}{2z_k^2} + \cdots + \frac{z^p}{p z_k^p}}, \quad k \geq 1,$$

$$B_k(z) = \frac{1}{z_k} + \frac{z}{z_k^2} + \cdots + \frac{z^{p-1}}{z_k^p}, \quad k \geq 1$$

και παρατηρούμε ότι

$$A_k'(z) = A_k(z) B_k(z), \quad k \geq 1.$$

Αν επιπλέον θέσουμε

$$C_k(z) = \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) A_k(z), \quad k \geq 1,$$

το κανονικό γινόμενο γράφεται συντομότερα:

$$\Pi(z) = \prod_{k\geq 1} C_k(z).$$

Από τον τύπο της παραγώγου γινομένου λαμβάνουμε

$$\Pi'(z) = \sum_{k\geq 1}\left(C_k'(z)\prod_{j\neq k} C_j(z)\right) = \Pi(z)\sum_{k\geq 1}\frac{C_k'(z)}{C_k(z)}\,.$$

Αλλά, $\forall\, k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
C_k'(z) &= -\frac{1}{z_k}A_k(z) + \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) A_k(z)B_k(z) = \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) A_k(z)\left(B_k(z) + \frac{1}{z - z_k}\right) \\
&= C_k(z)\left(B_k(z) + \frac{1}{z - z_k}\right) \\
&\Rightarrow \;\; \Pi'(z) = \sum_{k\geq 1}\left(B_k(z) + \frac{1}{z - z_k}\right)\Pi(z),
\end{aligned}$$

ή

$$\frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)} = \sum_{k\geq 1}\left(B_k(z) + \frac{1}{z - z_k}\right).$$

Επομένως,

$$\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)} = \sum_{k\geq 1}\left(B_k(0) + \frac{1}{0 - z_k}\right) = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{z_k} - \frac{1}{z_k}\right) = 0$$

και αφού $\Pi(0) = 1$, προκύπτει $\Pi'(0) = 0$.

Θα προχωρήσουμε τώρα στην απόδειξη των γενικότερων σχέσεων.

Παρατηρούμε αρχικά ότι για $r = 2, \ldots, p$,

$$\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left(\frac{1}{z - z_k}\right) = (-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{(z - z_k)^r},$$

ενώ για $p \geq 1,\ r = 2, \ldots, p$,

$$\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left(\frac{z^{p-1}}{z_k^p}\right) = \frac{1}{z_k^p}(p-1)\ldots[p-(r-1)]z^{p-r} = \frac{(p-1)!}{(p-r)!z_k^p}z^{p-r}.$$

Επειδή
$$\frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)} = \sum_{k\geq 1}\left(B_k(z) + \frac{1}{z-z_k}\right),$$
από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι για $r = 2, \ldots, p$,

$$\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left[\frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)}\right] = \sum_{k\geq 1}\left[(-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{(z-z_k)^r} + \sum_{p\geq 1}\frac{(p-1)!}{(p-r)!z_k^p}z^{p-r}\right].$$

κι επομένως,

$$\begin{aligned}
\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left[\frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)}\right]\Bigg|_{z=0} &= \sum_{k\geq 1}\left[(-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{(-z_k)^r} + \frac{(r-1)!}{z_k^r}\right] \\
&= \sum_{k\geq 1}\left[(-1)^{r-1-r}\frac{(r-1)!}{z_k^r} + \frac{(r-1)!}{z_k^r}\right] \\
&= \sum_{k\geq 1}\left[(-1)\frac{(r-1)!}{z_k^r} + \frac{(r-1)!}{z_k^r}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε, τέλος, ότι $\Pi^{(r)}(0) = 0, \forall r = 1, 2, \ldots, p$.
Για $r = 1$, προφανώς ισχύει.
Έστω $r \in \{2, \ldots, p\}$.
Θέτουμε $\varphi(z) = \Pi'(z)/\Pi(z),\ \ z \in \mathbb{C}$.
Από τα παραπάνω έχουμε ότι
$$\varphi^{(k)}(0) = 0, \quad \forall\, k = 0, 2, \ldots, r-1.$$
Από τον τύπο του Leibniz για παραγώγους γινομένου παίρνουμε
$$\Pi^{(r)}(0) = (\varphi \cdot \Pi)^{(r-1)}(0) = \sum_{k=0}^{r-1}\binom{r-1}{k}\varphi^{(k)}(0)\cdot \Pi^{(r-1-k)}(0) = 0.$$

□

Συνέπεια της παραπαπάνω πρότασης είναι η παρακάτω

Παρατήρηση: Εάν
$$g(z) := e^{A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_m z^m}\Pi(z),$$
όπου $A_1, A_2, \ldots, A_m$ μιγαδικές σταθερές, τότε
$$g(0) = 1, \qquad g'(0) = A_1.$$
Επιπλεόν, αν $p \geq 2$, τότε
$$g''(0) = A_1^2 + 2A_2.$$

Κεφάλαιο 5

ΤΑΞΗ ΚΑΙ ΤΥΠΟΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε σημαντικά αποτελέσματα που αφορούν στην τάξη και τον τύπο μίας ακέραιας συνάρτησης-λύσης της εξίσωσης θερμότητας.

Θα υπενθυμίσουμε πρώτα κάποιους ορισμούς και ορισμένα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3. Έστω

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

μια ακέραια συνάρτηση με τάξη ρ και τύπο τ. Θέτουμε

$$\alpha_n(z) = \frac{g^{(n)}(z)}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \qquad (\Rightarrow \alpha_n(0) = \alpha_n, n \geq 0).$$

Τότε, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\rho = \limsup_n \frac{n \ln n}{-\ln |a_n(z)|}$$

και εάν $\rho \in (0, \infty)$

$$\tau = \frac{1}{e\rho} \limsup_n n|a_n(z)|^{\rho/n}.$$

Θέτουμε και

$$\theta = e^{1-\frac{1}{\rho}}.$$

Τότε, επειδή $\lim_n (n!)^{\frac{1}{n \ln n}} = e,$ ισχύει

$$\theta = \limsup_n |g^{(n)}(z)|^{\frac{1}{n \ln n}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Επιπλέον, θεωρούμε μία γνησίως αύξουσα ακολουθία $\nu = \{n_k\}_{k\geq 1}$ θετικών ακεραίων. Θέτουμε

$$\rho_\nu(z) = \limsup_k \frac{n_k \ln n_k}{-\ln|a_{n_k}(z)|}, \qquad \tau_\nu(z) = \frac{1}{e\rho} \limsup_k n_k |a_{n_k}(z)|^{\rho/n_k} \quad z \in \mathbb{C}$$

και

$$\theta_\nu(z) = e^{1-\frac{1}{\rho_\nu(z)}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, πάλι επειδή $\lim_k (n_k!)^{\frac{1}{n_k \ln n_k}} = e$, ισχύει

$$\theta_\nu(z) = \limsup_k |g^{(n_k)}(z)|^{\frac{1}{n_k \ln n_k}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η συμπληρωματική ακολουθία $\mu = \{m_k\}_{k\geq 1}$ της ν είναι άπειρη. Τότε, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\rho = \max\{\rho_\nu(z),\ \rho_\mu(z)\}, \quad \tau = \max\{\tau_\nu(z),\ \tau_\mu(z)\}, \quad \theta = \max\{\theta_\nu(z),\ \theta_\mu(z)\}.$$

Θεωρούμε τώρα τις ειδικές περιπτώσεις

$$\nu_0 = \{2k\}_{k\geq 1}, \quad \nu_1 = \{2k+1\}_{k\geq 1}$$

και θέτουμε

$$\rho_0(z) = \rho_{\nu_0}(z), \quad \rho_1(z) = \rho_{\nu_1}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\rho_0(z) = \limsup_k \frac{2k \ln(2k)}{-\ln|a_{2k}(z)|} = 2 \limsup_k \frac{k \ln k}{-\ln|a_{2k}(z)|},$$

$$\rho_1(z) = \limsup_k \frac{(2k+1)\ln(2k+1)}{-\ln|a_{2k+1}(z)|} = 2 \limsup_k \frac{k \ln k}{-\ln|a_{2k+1}(z)|}.$$

Επιπλέον θέτουμε

$$\theta_0(z) = e^{1-\frac{1}{\rho_0(z)}}, \quad \theta_1(z) = e^{1-\frac{1}{\rho_1(z)}}.$$

Τέλος, θέτουμε

$$\tau_0(z) = \tau_{\nu_0}(z), \quad \tau_1(z) = \tau_{\nu_1}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\tau_0(z) = \frac{2}{e\rho} \limsup_k k |a_{2k}(z)|^{\rho/2k},$$

$$\tau_1(z) = \frac{2}{e\rho} \limsup_k (2k+1)|a_{2k+1}(z)|^{\rho/2k+1} = \frac{2}{e\rho} \limsup_k k|a_{2k+1}(z)|^{\rho/2k}.$$

Συνεχίζουμε με ένα λήμμα που θα χρησιμεύσει στην απόδειξη του επόμενου Θεωρήματος.

Λήμμα 1.

Έστω $\{n_k\}_{k\geq 1}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων που χαρακτηρίζεται από subexponential growth, δηλαδή

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \to 1 \qquad \text{καθώς } \ k \to \infty.$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι η συμπληρωματική ακολουθία $\mu = \{m_k\}_{k\geq 1}$ της ν είναι άπειρη.

Για κάθε $l \geq 1$, θέτουμε

$$k[l] = \max\{k \geq 1 : n_k < m_l\}.$$

Τότε,

$$k[l] < k[l+1], \quad n_{k[l]} < m_l \leq n_{k[l]+1}, \ \ \forall\, l \geq 1.$$

Επιπλέον,

$$\lim_l \frac{m_l - n_{k[l]}}{m_l \ln m_l} = 0, \quad \lim_l \frac{n_{k[l]} \ln n_{k[l]}}{m_l \ln m_l} = 1.$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία $\mu = \{m_k\}_{k\geq 1}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $l \geq 1$. Επειδή οι ακολουθίες μ, ν είναι συμπληρωματικές, υπάρχει δείκτης $j \geq 1$ ώστε $m_l < n_j < m_{l+1}$.

Από τον ορισμό του $k[l]$ παίρνουμε $m_l \leq n_{k[l]+1}$ (αφού $k[l]+1 > k[l]$) και

$$j \leq k[l+1], \quad n_{k[l]} < m_l < n_j \ \Rightarrow \ k[l] < j \leq k[l+1].$$

Επομένως,

$$k[l] < k[l+1], \quad n_{k[l]} < m_l \leq n_{k[l]+1}, \ \ \forall\, l \geq 1.$$

Είναι σαφές ότι η $\{n_{k[l]}\}_{l\geq 1}$ είναι υπακολουθία της $\{n_k\}_{k\geq 1}$, οπότε

$$\lim_l \frac{n_{k[l]+1}}{n_{k[l]}} = 1.$$

Επιπλέον, $\forall\, l \geq 1$,

$$1 < \frac{m_l}{n_{k[l]}} \leq \frac{n_{k[l]+1}}{n_{k[l]}}, \quad 0 < \frac{\ln m_l}{\ln n_{k[l]}} - 1 = \frac{1}{n_{k[l]}} \ln\left(\frac{m_l}{n_{k[l]}}\right) \leq \frac{1}{l} \ln\left(\frac{m_l}{n_{k[l]}}\right).$$

Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται τώρα ότι

$$\lim_l \frac{m_l}{n_{k[l]}} = \lim_l \frac{\ln m_l}{\ln n_{k[l]}} = 1.$$

Τέλος,

$$\lim_l \frac{m_l - n_{k[l]}}{m_l \ln m_l} = \lim_l \frac{1 \; - \; \dfrac{n_{k[l]}}{m_l}}{\ln m_l} = 0,$$

$$\lim_l \frac{n_{k[l]} \ln n_{k[l]}}{m_l \ln m_l} = \lim_l \frac{n_{k[l]}}{m_l} \cdot \lim_l \frac{\ln n_{k[l]}}{\ln m_l} = 1$$

και ολοκληρώθηκε η απόδειξη του λήμματος. □

Θεώρημα 1.

Έστω $\{n_k\}_{k\geq 1}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων που χαρακτηρίζεται από subexponential growth, δηλ.

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \to 1 \qquad \text{καθώς } \; k \to \infty.$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι η συμπληρωματική της ακολουθία $\mu = \{m_k\}_{k\geq 1}$ της ν είναι άπειρη. Τότε, για μία ακέραια συνάρτηση $g(z)$ έχουμε

$$\theta_\nu(z) = \theta, \qquad \rho_\nu(z) = \rho, \qquad \text{σχεδόν παντού στο } \mathbb{C}.$$

Απόδειξη: Από την Πρόταση 20 του Κεφαλαίου 3, προκύπτει ότι η $\theta_\nu(z)$ είναι subharmonic στο $\mathbb{C}$. Λόγω της σχέσης

$$0 \leq \theta = \max\{\theta_\nu(z), \theta_\mu(z)\} \leq e,$$

προκύπτει

$$\theta_\nu(w) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r(w)} \theta_\nu(z)\, dxdy \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r(w)} \theta\, dxdy \leq \theta$$

για κάθε $w \in \mathbb{C}$ και για κάθε $r > 0$. Επομένως, αν για κάποιο $w \in \mathbb{C}$ ισχύει $\theta_\nu(w) = \theta$, τότε από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $\theta_\nu(z) = \theta$ σχεδόν για όλα τα $z \in D_r(w)$, επομένως, αφού το r είναι τυχαίο, $\theta_\nu(z) = \theta$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{C}$.

Γενικότερα, ας υποθέσουμε ότι το supremum της $\theta_\nu(z)$ σε ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ είναι θ, δηλαδή ότι υπάρχει ακολουθία $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $\lim_n z_n = z_* \in \mathbb{C}$ και $\lim_n \theta_\nu(z_n) = \theta$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και εδώ $\theta_\nu(z) = \theta$, σχεδόν παντού στο $\mathbb{C}$.

Σταθεροποιούμε ένα δίσκο $D_r(z_*)$ και θεωρούμε τους δίσκους $D_n := D_{r_n}(z_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, έτσι ώστε r_n είναι η μεγαλύτερη ακτίνα για την οποία ισχύει $D_n \subset D_r(z_*)$. Θέτοντας $w = z_n$ και $D_r(w) = D_n$ στην παραπάνω σχέση, προκύπτει

$$\theta_\nu(z_n) \leq \frac{1}{\pi r_n^2} \int_{D_n} \theta_\nu(z)\, dxdy \leq \frac{1}{\pi r_n^2} \int_{D_r(z_*)} \theta_\nu(z)\, dxdy \leq \frac{r^2}{r_n^2}\, \theta, \qquad n \geq 1,$$

συνεπώς, για $n \to \infty$ λαμβάνουμε

$$\theta \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r(z_*)} \theta_\nu(z)\, dxdy \leq \theta.$$

Από την τελευταία εξάγουμε το συμπέρασμα ότι $\theta_\nu(z) = \theta$, σχεδόν για όλα τα $z \in D_r(z_*)$ και αφού το r είναι τυχαίο, $\theta_\nu(z) = \theta$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{C}$.

Στο τελευταίο στάδιο της απόδειξης του θεωρήματος αυτού, θα δείξουμε ότι η υπόθεση

$$\Theta_\nu(r) := \sup_{|z| \leq r} \theta_\nu(z) < \theta \qquad \text{για κάθε } r > 0$$

είναι άτοπη.

Σταθεροποιούμε μία ακτίνα $r > 0$ και υποθέτουμε ότι ισχύει η τελευταία σχέση. Έστω $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε

$$\Theta_\nu(r) + \varepsilon < \theta.$$

Τότε, από την παραπάνω και τη σχέση

$$\theta_\nu(z) := \exp\left(1 - \frac{1}{\rho_\nu(z)}\right) = \limsup_k \left| g^{(n_k)}(z) \right|^{\frac{1}{n_k \ln n_k}}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

προκύπτει ότι για κάθε $z \in D_r(0)$ υπάρχει θετικός ακέραιος $K = K(z)$ έτσι ώστε

$$\sup_{k \geq K(z)} \left| g^{(n_k)}(z) \right|^{\frac{1}{n_k \ln n_k}} < \Theta_\nu(r) + \varepsilon.$$

Συνεπώς, αν θέσουμε

$$G_j := \left\{ z \in D_r(0) \,:\, \sup_{k \geq j} \left| g^{(n_k)}(z) \right|^{\frac{1}{n_k \ln n_k}} < \Theta_\nu(r) + \varepsilon \right\},$$

τότε

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = D_r(0).$$

Άρα, υπάρχει j_0 για το οποίο το σύνολο G_{j_0} έχει θετικό (Lebesgue) μέτρο.

Όπως έχει αποδειχθεί στο Κεφάλαιο 3, η συνάρτηση

$$\phi(z) := \sup_{k \geq j_0} \left| g^{(n_k)}(z) \right|^{\frac{1}{n_k \ln k}}$$

είναι subharmonic.

Σύμφωνα με το Σχόλιο 7 του Κεφαλαίου 3, υπάρχει μία άνω ημισυνεχής συνάρτηση $\tilde{\phi}(z)$ έτσι ώστε $\phi(z) = \tilde{\phi}(z)$ σχεδόν παντού στο $D_r(0)$. Συνεπώς, τα σύνολα

$$G_{j_0} = \{ z \in D_r(0) \,:\, \phi(z) < \Theta_\nu(r) + \varepsilon \} \text{ και } \tilde{G} := \left\{ z \in D_r(0) \,:\, \tilde{\phi}(z) < \Theta_\nu(r) + \varepsilon \right\}$$

διαφέρουν κατά ένα σύνολο μέτρου 0, ή ισοδύναμα το σύνολο $G_{j_0} \triangle \tilde{G}$ έχει μέτρο Lebesgue 0. Επιπλέον, η άνω ημισυνέχεια της $\tilde{\phi}(z)$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι [10] το $\tilde{G}$ είναι ανοικτό (και μη κενό, αφού το G_{j_0} έχει θετικό μέτρο). Συνεπώς, κάθε ανοικτός δίσκος $D_\delta(z_0) \subset \tilde{G}$ περιλαμβάνεται σχεδόν εξ ολοκλήρου στο σύνολο G_{j_0}, υπό την έννοια ότι η συμμετρική διαφορά των δύο αυτών συνόλων έχει Lebesgue μέτρο 0, δηλαδή τα εμβαδά της τομής $D_\delta(z_0) \cap G_{j_0}$ και του δίσκου $D_\delta(z_0)$ είναι ίσα, και συγκεκριμένα $\pi\delta^2$.

Ακολούθως, παρατηρούμε ότι η σχέση

$$\Theta_\nu(r) := \sup_{|z|\le r} \theta_\nu(z) < \theta, \quad \text{για κάθε } \ r > 0$$

σημαίνει ότι $\theta_\nu(z) < \theta, \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Επομένως

$$\theta_\mu(z) = \theta, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

όπου $\mu = \{m_l\}_{l\ge 1}$ η συμπληρωματική ακολουθία της ν.

Έστω τώρα $D_\delta(z_0)$ δίσκος ($\delta > 0$) τέτοιος ώστε $D_\delta(z_0) \subset \tilde{G}$. Εάν Γ είναι το σύνορο του $D_\delta(z_0)$, τότε βάσει των προαναφερθέντων μπορούμε να επιτύχουμε η συμμετρική διαφορά των συνόλων G_{j_0} και Γ να έχει μονοδιάστατο μέτρο 0 (δηλαδή το μήκος του $\Gamma \cap G_{j_0}$ να ισούται με το μήκος του Γ, δηλαδή $2\pi\delta$).

Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε ότι

$$g^{(m_l)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{g^{(n_{k[l]})}(z)}{(z-z_0)^{m_l - n_{k[l]}+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma\cap G_{j_0}} \frac{g^{(n_{k[l]})}(z)}{(z-z_0)^{m_l - n_{k[l]}+1}}\,dz,$$

όπου

$$k[l] := \max\{k : n_k < m_l\}.$$

Η τελευταία με χρήση μέτρων μιγαδικών οδηγεί στην ανισότητα

$$\left|g^{(m_l)}(z_0)\right| \le \frac{1}{2\pi\delta^{m_l - n_{k[l]}+1}}\oint_{\Gamma\cap G_{j_0}} \left|g^{(n_{k[l]})}(z)\right|\,ds,$$

όπου ds το στοιχειώδες τόξο του Γ.

Επειδή

$$G_{j_0} := \left\{ z \in D_r(0) \, : \, \sup_{k\ge j_0} \left|g^{(n_k)}(z)\right|^{\frac{1}{n_k \ln n_k}} < \Theta_\nu(r) + \varepsilon \right\},$$

έχουμε ότι

$$\left|g^{(n_{k[l]})}(z)\right| < \left[\Theta_\nu(r) + \varepsilon\right]^{n_{k[l]}\ln n_{k[l]}}$$

για κάθε $l \ge j_0$ και για όλα τα $z \in \Gamma \cap G_{j_0}$. (Σημ. ότι $k[l] \ge l, \ \forall\, l \ge 1$.)

Αν συνδυάσουμε τις δύο τελευταίες ανισότητες προκύπτει

$$\begin{aligned} \left|g^{(m_l)}(z_0)\right| &\le \frac{1}{2\pi\delta^{m_l - n_{k[l]}+1}}\oint_{\Gamma\cap G_{j_0}} \left[\Theta_\nu(r)+\varepsilon\right]^{n_{k[l]}\ln n_{k[l]}}\,ds \\ &= \frac{\left[\Theta_\nu(r)+\varepsilon\right]^{n_{k[l]}\ln n_{k[l]}}}{\delta^{m_l - n_{k[l]}}}, \quad l \ge j_0, \end{aligned}$$

ή

$$\left|g^{(m_l)}(z_0)\right|^{\frac{1}{m_l \ln m_l}} \leq \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{m_l - n_{k[l]}}{m_l \ln m_l}} [\Theta_\nu(r)+\varepsilon]^{\frac{n_{k[l]} \ln n_{k[l]}}{m_l \ln m_l}}, \qquad l \geq j_0 \, .$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με το Λήμμα 1 και τον ορισμό της θ_μ οδηγεί στην

$$\theta_\mu(z_0) = \limsup_l \left|g^{(m_l)}(z_0)\right|^{\frac{1}{m_l \ln m_l}} \leq \Theta_\nu(r)+\varepsilon < \theta,$$

που αντικρούει το ότι $\theta_\mu(z) \equiv \theta, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Επομένως η αρχική μας υπόθεση είναι εσφαλμένη, δηλαδή υπάρχει $r > 0$ έτσι ώστε $\sup_{|z|\leq r} \theta_\nu(z) = \theta$, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\theta_\nu(z) = \theta$, για όλα σχεδόν τα $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Σχόλιο 8.

Υποθέτουμε ότι και η συμπληρωματική ακολουθία $\mu = \{m_l\}_{l\geq 1}$ της ν έχει subexponential growth, δηλαδή ικανοποιεί την

$$\frac{m_{l+1}}{m_l} \to 1.$$

Θεωρούμε τα σύνολα

$$\mathcal{F}_\nu := \{z \in \mathbb{C} \, : \, \rho_\nu(z) = \rho\}, \quad \mathcal{F}_\mu := \{z \in \mathbb{C} \, : \, \rho_\mu(z) = \rho\}.$$

Από το Θεώρημα 1 προκύπτει ότι τα σύνολα

$$\mathcal{F}_\nu^c := \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}_\nu, \quad \mathcal{F}_\mu^c := \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}_\mu$$

είναι μηδενικού μέτρου Lebesgue.

Ανοικτό ερώτημα.

Είναι τα σύνολα $\mathcal{F}_\nu^c$, $\mathcal{F}_\mu^c$ πουθενά πυκνά στο $\mathbb{C}$; Είναι αριθμήσιμα ;

Πόρισμα 4.

Εάν $\rho_0(z), \rho_1(z), \theta_0(z), \theta_1(z), \quad z \in \mathbb{C}$ όπως ορίστηκαν στην αρχή του παρόντος Κεφαλαίου, τότε

$$\rho_0(z) = \rho_1(z) = \rho, \qquad \theta_0(z) = \theta_1(z) = \theta, \qquad \text{σχεδόν παντού στο } \mathbb{C}.$$

Θεώρημα 2.

Έστω τ ο τύπος τάξεως ακέραιας συνάρτησης $g(z)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tau_\nu(z)$ όπως ορίστηκε στο Κεφάλαιο 3, με ν ακουλουθία δεικτών με subexponential growth. Τότε:

(i) Αν $\tau < \infty$, τότε

$$\tau_\nu(z) = \tau \text{ σχεδόν παντού στο } \mathbb{C}.$$

(ii) Αν $\tau = \infty$, τότε το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : \tau_\nu(z) = \infty\}$ είναι πυκνό G_δ (συνεπώς υπεραριθμήσιμο) υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Απόδειξη:

(i) Αν $\tau < \infty$, μπορούμε να αποδείξουμε, εργαζόμενοι όμοια με την απόδειξη (βλ. Πρόταση 20, Κεφ. 3) ότι η συνάρτηση $\tau_\nu(z)$ είναι subharmonic στο $\mathbb{C}$. Στη συνέχεια, το συμπέρασμά μας προκύπτει εύκολα ακολουθώντας τα ίδια βήματα με εκείνα που ακολουθήθηκαν στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.

(ii) Έστω ότι $\tau = \infty$. Τότε, επειδή

$$\tau = \frac{e^{\rho-1}}{\rho} \limsup_n n^{1-\rho} \left|g^{(n)}(z)\right|^{\rho/n} \qquad \text{(βλ. Πρόταση 14)},$$

έχουμε ότι

$$\sigma(z) := \sup_n n^{1-\rho} \left|g^{(n)}(z)\right|^{\rho/n} = \infty, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Έστω $\mu = \{m_l\}_{l=1}^{\infty}$. Εισάγουμε τις ποσότητες

$$\sigma_\nu(z) := \sup_k \,(n_k)^{1-\rho} \left|g^{(n_k)}(z)\right|^{\rho/n_k}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

και

$$\sigma_\mu(z) := \sup_k \,(m_l)^{1-\rho} \left|g^{(m_l)}(z)\right|^{\rho/m_l}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Είναι σαφές ότι

$$\max\{\sigma_\nu(z),\, \sigma_\mu(z)\} = \infty, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Παρατηρούμε ότι $\tau_\nu(z) = \infty$ αν και μόνο αν $\sigma_\nu(z) = \infty$. Άρα, αρκεί να αποδείξουμε το συμπέρασμά μας για την $\sigma_\nu(z)$, αντί της $\tau_\nu(z)$.

Υποθέτουμε ότι σε κάποιο δίσκο D ισχύει

$$\sup_{z\in D} \sigma_\nu(z) < \infty.$$

Τότε, βάσει της προηγούμενης σχέσης, $\sigma_\mu(z) = \infty$, $\forall z \in D$.

Με βάση τις δύο τελευταίες σχέσεις και ακολουθώντας το μοτίβο της απόδειξης του Θεωρήματος 1, ξεκινώντας από τον τύπο

$$g^{(m_l)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{g^{(n_{k[l]})}(z)}{(z-z_0)^{m_l - n_{k[l]}+1}}\, dz,$$

καταλήγουμε σε άτοπο.

Συνεπώς,

$$\sup_{z \in D} \sigma_\nu(z) = \infty, \qquad \text{για κάθε δίσκο } \ D.$$

Επιπλέον, η σχέση

$$\sigma_\nu(z) := \sup_k \, (n_k)^{1-\rho} \left| g^{(n_k)}(z) \right|^{\rho/n_k}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η $\sigma_\nu(z)$ είναι κάτω ημισυνεχής στο $\mathbb{C}$, ως supremum συνεχών συναρτήσεων, ή ισοδύναμα στο συμπέρασμα ότι το σύνολο

$$G_N := \{ z \in \mathbb{C} \, : \, \sigma_\nu(z) > N \}$$

είναι ανοικτό, $\forall N \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον, από το γεγονός ότι

$$\sup_{z \in D} \sigma_\nu(z) = \infty, \qquad \text{για κάθε δίσκο } \ D,$$

προκύπτει ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$, το G_N είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

[Πράγματι, για κάθε δίσκο D υπάρχει $z \in D$ ώστε $\sigma_\nu(z) > N$].

Έπεται ότι το σύνολο

$$\{ z \in \mathbb{C} \, : \, \sigma_\nu(z) = \infty \} = \bigcap_{N=1}^{\infty} G_N$$

είναι ένα πυκνό G_δ υποσύνολο του $\mathbb{C}$. □

Πόρισμα 5.

Εάν $\tau_0(z), \ \tau_1(z), \ \ z \in \mathbb{C}$, όπως ορίστηκαν στην αρχή του παρόντος Κεφαλαίου και $\tau < \infty$, τότε

$$\tau_0(z) = \tau_1(z) = \tau, \quad \text{σχεδόν παντού στο } \ \mathbb{C}.$$

Σχόλιο 9.

Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία δεικτών μ είναι επίσης subexponential. Τότε το σύνολο

$$\{ z \in \mathbb{C} \, : \, \sigma_\nu(z) = \infty \} \cap \{ z \in \mathbb{C} \, : \, \sigma_\mu(z) = \infty \},$$

ως τομή δύο πυκνών G_δ συνόλων είναι επίσης ένα G_δ υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Σχόλιο 10.

Όπως διαπιστώσαμε στο Κεφάλαιο 3, οι συναρτήσεις $\left|g^{(n)}(z)\right|^{\rho/n}$, $n = 1, 2, \ldots$, είναι subharmonic. Συνάγεται, λοιπόν, ότι οι αντίστοιχη $\sigma_\nu(z)$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\sigma_\nu(z_0) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r(z_0)} \sigma_\nu(z)\, dxdy$$

σε οποιονδήποτε δίσκο $D_r(z_0)$.

[Σημ. ότι η $\sigma_\nu(z)$ μπορεί να μην είναι subharmonic, αφού μπορεί για κάποιο $z \in \mathbb{C}$ να είναι μη πεπερασμένη ή να μην είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.]

Ας υποθέσουμε ότι $\tau = \infty$. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2 προκύπτει ότι

$$\sup_{z \in D} \sigma_\nu(z) = \infty, \qquad \text{για κάθε δίσκο } D.$$

Αν εργαστούμε όμοια με την αρχή της απόδειξης του Θεωρήματος 1, παίρνουμε ότι

$$\int_D \sigma_\nu(z)\, dxdy = \infty, \qquad \text{για κάθε δίσκο } D.$$

Με τη χρήση του ολοκληρωτικού τύπου του Poisson για αρμονικές συναρτήσεις και την αξιοποίηση του γεγονότος ότι σε οποιοδήποτε επαρκώς λείο χωρίο μία συνάρτηση subharmonic "κυριαρχείται" από μια αντίστοιχη αρμονική συνάρτηση με τις ίδιες συνοριακές τιμές, μπορούμε μάλιστα να ενισχύσουμε την τελευταία σχέση και να συμπεράνουμε ότι

$$\int_\Gamma \sigma_\nu(z)\, ds = \infty, \qquad \text{για κάθε κύκλο } \Gamma.$$

Επιπλέον, αφού όπως προαναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3 η $\ln|g^{(n)}(z)|$ είναι subharmonic, μπορούμε στη θέση της $\sigma_\nu(z)$ να χρησιμοποιήσουμε την $\ln \sigma_\nu(z)$ και να καταλήξουμε στη σχέση

$$\int_\Gamma \ln \sigma_\nu(z)\, ds = \infty, \qquad \text{για κάθε κύκλο } \Gamma.$$

Σχόλιο 11.

Παρά τις παραπάνω διαπιστώσεις, ανοικτό παραμένει το ερώτημα εάν $\tau_\nu(z) = \infty$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{C}$, στην περίπτωση που $\tau = \infty$.

Για τη διατύπωση του Θεωρήματος που ακολουθεί, υπενθυμίζουμε ότι μία ακέραια συνάρτηση $f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^k$ έχει τάξη ρ που εκφράζεται μέσω της σχέσης

$$\rho = \limsup_k \frac{k \ln k}{-\ln|c_k|}, \qquad \text{με} \qquad c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k \geq 0.$$

Το επόμενο Θεώρημα μας δίνει μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το πρόβλημα (2.1) με αρχική συνθήκη $f(z)$ να έχει λύση.

Θα χρειαστούμε το παρακάτω

Λήμμα 2.

Εάν f ακέραια συνάρτηση, τότε οι f, f' έχουν την ίδια τάξη.

Απόδειξη: Εάν

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \text{ και } \rho = ord(f),$$

τότε

$$\rho = \limsup_n \frac{n \ln n}{-\ln|\alpha_n|}.$$

Επιπλέον,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1}, \quad z \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad ord(f') = \widetilde{\rho} = \limsup_n \frac{n \ln n}{-\ln(n|\alpha_n|)}.$$

Έχουμε, $\quad \forall n \geq 1$,

$$\frac{n \ln n}{-\ln n - \ln|\alpha_n|} = \frac{n \ln n}{-\ln|\alpha_n|} \cdot \frac{\ln|\alpha_n|}{\ln n + \ln|\alpha_n|} = \frac{n \ln n}{-\ln|\alpha_n|} \cdot \frac{1}{\frac{\ln n}{\ln|\alpha_n|} + 1}.$$

Αλλά

$$\lim_n \frac{\ln n}{\ln|\alpha_n|} = 0.$$

Πράγματι:

$$\lim |\alpha_n|^{1/n} = 0 \quad \Rightarrow \quad |\alpha_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{τελικώς} \quad \Rightarrow \quad \ln|\alpha_n| < -n\ln 2, \text{τελικώς}$$

$$\Rightarrow \quad \Big|\ln|\alpha_n|\Big| > n\ln 2, \text{τελικώς} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\ln n}{\ln|\alpha_n|}\right| < \frac{\ln n}{n \ln 2}, \text{τελικώς}$$

$$\text{και} \quad \lim_n \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Έπεται ότι $\rho = \widetilde{\rho}$. $\square$

Θεώρημα 3.

Έστω ότι η $f(z)$ είναι η αρχική συνθήκη μίας ακέραιας λύσης $F(t,z)$ της εξίσωσης θερμότητας που περιγράφει η (2.1). Τότε για την τάξη της ρ ισχύει $0 \leq \rho \leq 2$. Στην περίπτωση που $\rho = 2$, ο τύπος της $f(z)$ είναι 0 (minimal type). Δηλαδή, η ακριβής τάξη της $f(z)$ ανήκει στο $[0, 2^-]$.

Αντίστροφα, εάν θεωρήσουμε ακέραια συνάρτηση $f(z)$ με ακριβή τάξη στο $[0, 2^-]$, τότε υπάρχει $F(t,z)$ ακέραια που ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας (2.1) με $F(0,z) = f(z)$.

Απόδειξη: Έστω

$$f(z) = \sum_{j\geq 0} c_j z^j, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Θα χρειαστεί να διαχωρίσουμε, εκ νέου, τις περιπτώσεις $k = 2j$ και $k = 2j+1$.

Γνωρίζουμε ότι $\rho = \max\{\rho_0, \rho_1\}$, με

$$\rho_0 := \limsup_j \frac{2j\,\ln(2j)}{-\ln|c_{2j}|} = 2\,\limsup_j \frac{j\,\ln j}{-\ln|c_{2j}|}$$

και

$$\rho_1 := \limsup_j \frac{(2j+1)\,\ln(2j+1)}{-\ln|c_{2j+1}|} = 2\,\limsup_j \frac{j\,\ln j}{-\ln|c_{2j+1}|}.$$

Θα εκτιμήσουμε αρχικά τη συνάρτηση ρ_0. Λόγω του Θεωρήματος Taylor στη συνάρτηση $t \to F(t,z)$, έχουμε, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$F(t,z) = \sum_{j\geq 0} \frac{\partial_t^j F(0,z)}{j!} t^j = \sum_{j\geq 0} \frac{\partial_z^{2j} F(0,z)}{j!} t^j = \sum_{j\geq 0} \frac{f^{(2j)}(z)}{j!} t^j.$$

Για $z = 0$, προκύπτει ότι

$$F(t,0) = \sum_{j\geq 0} \frac{t^j}{j!} f^{(2j)}(0) = \sum_{j\geq 0} \frac{(2j)!\,c_{2j}}{j!}\, t^j.$$

Αφού η δεύτερη δυναμοσειρά της παραπάνω σχέσης συγκλίνει ως προς $t \in \mathbb{C}$ (έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης), έχουμε ότι

$$\limsup_j \left| \frac{(2j)!\,c_{2j}}{j!} \right|^{1/j} = 0$$

άρα

$$\lim_j \left| \frac{(2j)!\,c_{2j}}{j!} \right|^{1/j} = 0.$$

Ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία $\varepsilon_j \to 0$ έτσι ώστε

$$|c_{2j}|^{1/j} < \varepsilon_j \left[\frac{j!}{(2j)!} \right]^{1/j}.$$

Εάν εφαρμόσομε τον ασυμπτωτικό τύπο Stirling για τα $j!, (2j)!$ προκύπτει ότι υπάρχει ακολουθία (με την έννοια της υπακολουθίας και χωρίς βλάβη της γενικότητας) $\varepsilon_j \to 0$, και όχι απαραίτητα η ίδια ε_j με εκείνη που εμφανίζεται στην παραπάνω ανισότητα, έτσι ώστε $|c_{2j}|^{1/j} < \frac{\varepsilon_j}{j}$, τελικώς. Πράγματι,

$$|c_{2j}|^{1/j} \quad < \varepsilon_j \left[\tfrac{j!}{(2j)!}\right]^{1/j} \sim \varepsilon_j \left[\frac{\sqrt{2\pi j}(\frac{j}{e})^j}{\sqrt{2\pi 2j}(\frac{2j}{e})^{2j}}\right]^{1/j} \quad \sim \varepsilon_j \left[\frac{j^j e^j}{\sqrt{2}(2j)^{2j}}\right]^{1/j} \sim \varepsilon_j \frac{je}{1 \cdot 4j^2} = \frac{\widetilde{\varepsilon}_j}{j}$$

με $\widetilde{\varepsilon}_j \to 0$.

Επίσης, μέσω της $\rho_0 = 2 \limsup_j \frac{j \ln j}{-\ln |c_{2j}|}$ συνάγεται ότι η έκφραση $2/\rho_0$ αποτελεί το supremum όλων των εκθετών $r > 0$, έτσι ώστε

$$|c_{2j}|^{1/j} < \frac{1}{j^r} \qquad \text{τελικώς.}$$

Πράγματι, εάν

$$\alpha_j = \frac{j \ln j}{-\ln |c_{2j}|}, \quad j \geq 0 \text{ και } L = \limsup_j aj,$$

τότε

$$\frac{2}{\rho_0} = \frac{1}{L} \text{ και } L = inf\{M > 0 : \alpha_j < M, \text{τελικώς}\} \Rightarrow \frac{2}{\rho_0} = sup\{r > 0 : \alpha_j < \frac{1}{r}, \text{τελικώς}\}.$$

Αλλά η σχέση $\alpha_j < \frac{1}{r}$ είναι ισοδύναμη με την $|c_{2j}|^{1/j} < \frac{1}{j^r}$. Συμπερασματικά, από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι

$$2/\rho_0 \geq 1, \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho_0 \leq 2.$$

Για τον προσδιορισμό της ποσότητας ρ_1, παραγωγίζουμε τη σχέση

$$F(t, z) = \sum_{j \geq 0} \frac{f^{(2j)}(z)}{j!} t^j,$$

ως προς z και λαμβάνουμε

$$\partial_z F(t, z) = \sum_{j \geq 0} \frac{t^j}{j!} f^{(2j+1)}(z).$$

Στη συνέχεια, ακολουθώντας τα ίδια ακριβώς βήματα με την περίπτωση της ρ_0, συμπεραίνουμε αντίστοιχα ομοίως ότι υπάρχει $\varepsilon_j \to 0$ τέτοια, ώστε

$$|c_{2j+1}|^{1/j} < \frac{\varepsilon_j}{j}.$$

Άρα,

$$\rho_1 \leq 2$$

Επομένως, για την τάξη της $f(z)$ ισχύει πράγματι $\rho \leq 2$.

Θα προχωρήσουμε, σε αυτό το σημείο, στην εκτίμηση του τύπου τ της $f(z)$, στην ειδική περίπτωση όπου $\rho = 2$. Όπως έχει αναφερθεί και στο Κεφάλαιο 3, με αντικατάσταση της τιμής $\rho = 2$, λαμβάνουμε

$$\tau = \frac{1}{2e} \limsup_k k\, |c_k|^{2/k}.$$

Θεωρούμε, αντίστοιχα, εκ νέου χωριστά τις περιπτώσεις $k = 2j$ και $k = 2j+1$ και καταλήγουμε στο ότι, αν θέσουμε

$$\tau_0 := \frac{1}{e} \limsup_j j\, |c_{2j}|^{1/j} \qquad \text{και} \qquad \tau_1 := \frac{1}{e} \limsup_j j\, |c_{2j+1}|^{1/j}.$$

τότε $\tau = \max\{\tau_0, \tau_1\}$. Αφού ισχύουν οι $|c_{2j}|^{1/j} < \frac{\varepsilon_j}{j}$ και $|c_{2j+1}|^{1/j} < \frac{\varepsilon_j}{j}$, τελικώς, προκύπτει κατευθείαν ότι $\tau_0 = \tau_1 = 0$, συνεπώς, $\tau = 0$. Δηλαδή, αν η $f(z)$ έχει τάξη 2, τότε έχει τύπο τάξεως 0.

Αντίστροφα, έστω $f(z)$ ακέραια συνάρτηση με ακριβή τάξη στο $[0, 2^-]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(t,z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2/4} f(z + \eta\sqrt{t}) d\eta, \quad t, z \in \mathbb{C}, \Re(t) > 0.$$

Για $t, z \in \mathbb{R},\ \ t > 0$,

$$\begin{aligned}
\partial_t F(t,z) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2/4} f'(z+\eta\sqrt{t}) \frac{\eta}{2\sqrt{t}} d\eta = \\
&-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\eta}\left(e^{-\eta^2/4}\right) \frac{f'(z+\eta\sqrt{t})}{\sqrt{t}} d\eta = \\
= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} &\left[\frac{e^{-\eta^2/4} f'(z+\eta\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\right]_{\eta=-\infty}^{\eta=+\infty} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2/4} f''(z+\eta\sqrt{t}) d\eta.
\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος του παραπάνω αθροίσματος μηδενίζεται διότι $ord(f') = ord(f) \leq 2$ (βλ. Λήμμα 2), οπότε

$$\partial_t F(t,z) = \partial_{zz} F(t,z) \text{ στο σύνολο } U = \{(t,z) \in \mathbb{C}^2 : \Re(t) > 0, z \in \mathbb{R}\}$$

που είναι ανοικτό στο $\mathbb{C}^2$. Λόγω αναλυτικής επέκτασης, έπεται ότι $\partial_t F(t,z) = \partial_{zz} F(t,z)$ στο $\mathbb{C}^2$.

Τέλος, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$F(0,z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2/4} f(z) d\eta = \frac{f(z)}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2/4} d\eta = f(z).$$

Πόρισμα 6.

Έστω $f(z) \neq 0$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε το Πρόβλημα

$$\partial_t F = \partial_z^2 F, \qquad F(0,z) = f(z)$$

να έχει ακέραια λύση. Τότε, $\exists \lambda, \beta \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{N}$, ώστε

$$f(z) = e^{\lambda z + \beta} z^d \prod_{k \geq 1} e_p \left(\frac{z}{\alpha_k} \right),$$

όπου $p \in \{0,1,2\}$ και $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ οι μη μηδενικές ρίζες της f.

Απόδειξη:
Άμεση από τα Θεωρήματα 3 και Hadamard (βλ. Παράρτημα και Κεφ. 4.) $\square$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την τάξη και τον τύπο των λύσεων $F(t,z), \quad t,z \in \mathbb{C}$ τς εξίσωσης θερμότητας, για σταθεροποιημένο t ή z. Για την πρώτη περίπτωση θα χρειαστούμε το παρακάτω

Θεώρημα 4. *([2], Th.1.1.)*

Έστω f, h ακέραιες συναρτήσεις με

$$ord(f) = \rho \in (0,+\infty), \quad type(f) = \tau, \quad ord(h) = \widetilde{\rho} \in (0,+\infty), \quad type(h) = \widetilde{\tau}.$$

Θέτουμε

$$f_h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^{(m)}(0)}{m!} f^{(m)}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

(Η f_h δεν είναι πάντα καλώς ορισμένη.)

1. Εάν
$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\widetilde{\rho}} > 1,$$
τότε η f_h είναι καλώς ορισμένη και ακέραια συνάρτηση με
$$ord(f_h) = \rho, \quad type(f_h) = \tau.$$

2. Εάν
$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\widetilde{\rho}} = 1 \text{ και } (\rho\tau)^{1/\rho} \cdot (\widetilde{\rho}\widetilde{\tau})^{1/\widetilde{\rho}} < 1,$$
τότε η f_h είναι καλώς ορισμένη και ακέραια συνάρτηση με
$$ord(f_h) = \rho, \quad type(f_h) = b\tau,$$
όπου
$$b = [1 - (\rho\tau)^{1/\rho} \cdot (\widetilde{\rho}\widetilde{\tau})^{1/\widetilde{\rho}}]^{1-\rho}.$$

Η επόμενη Πρόταση μας εξασφαλίζει ότι, για σταθερό $t \in \mathbb{C}$, η τάξη και ο τύπος μιας λύσης $F(t,z), z \in \mathbb{C}$ της εξίσωσης θερμότητας δεν εξαρτώνται από το t.

Πρόταση 22.

Έστω f ακέραια συνάρτηση και $F(t,z), \quad t, z \in \mathbb{C}$ ακέραια λύση του προβλήματος

$$\partial_t F = \partial_z^2 F, \quad F(0,z) = f(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Σταθεροποιούμε ένα $t \in \mathbb{C}$. Εάν ρ, τ η τάξη και ο τύπος της f αντίστοιχα, τότε η τάξη και ο τύπος της συνάρτησης $z \mapsto F(t,z)$ είναι

$$ord_z F(t,z) = \rho, \qquad type_z F(t,z) = \tau.$$

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 3 ότι είτε $\rho \in [0,2)$ είτε $\rho = 2$, $\tau = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(z) = e^{tz^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Προφανώς, $ord(h) = \widetilde{\rho} = 2$. Θέτουμε $\widetilde{\tau} = type(h)$. Εάν $\rho \in [0,2)$ τότε

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\widetilde{\rho}} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} > 1 \quad (\frac{1}{0^+} = \infty),$$

ενώ αν $\rho = 2$ τότε

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\widetilde{\rho}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

και $\tau = 0$, οπότε

$$(\rho\tau)^{1/\rho} \cdot (\widetilde{\rho}\widetilde{\tau})^{1/\widetilde{\rho}} = 0 < 1.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4, η συνάρτηση

$$f_h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^{(m)}(0)}{m!} f^{(m)}(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

είναι ακέραια με τάξη και τύπο ρ και τ αντίστοιχα. Έχουμε

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k z^{2k}}{k!} \Rightarrow \frac{h^{(m)}(0)}{m!} = \begin{cases} 0, \text{ εάν } m \text{ περιττός} \\ \frac{t^k}{k!}, \text{ εάν } m = 2k \end{cases}$$

$\Rightarrow f_h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} f^{(2k)}(z), \quad z \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow f_h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \partial_z^{(2k)} F(0,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \partial_t^{(k)} F(0,z) = F(t,z), \quad z \in \mathbb{C}.$

(Στην τελευταία εφαρμόσαμε το Θεώρημα Taylor για τη συνάρτηση $t' \mapsto F(t',z)$, για σταθερό z.)

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$ord_z F(t,z) = \rho, \qquad type_z F(t,z) = \tau. \qquad \square$$

Στόχος του Θεωρήματος που ακολουθεί είναι να διαλευκάνει τις έννοιες της t-τάξεως και του t-τύπου μιας ακέραιας συνάρτησης -λύσης της εξίσωσης θερμότητας $F(t,z)$ και να τις συσχετίσει με την z-τάξη και τον z-τύπο τάξεώς της, αντίστοιχα. Για σταθεροποιημένο $z \in \mathbb{C}$, μελετάμε την τάξη και τον τύπο της $t \mapsto F(t,z)$.

Θεώρημα 5.

Έστω $F(t,z)$ ακέραια λύση της εξίσωσης θερμότητας (2.1), με αρχική συνθήκη $F(0,z) = f(z)$, όπου f ακέραια συνάρτηση τάξης ρ και τύπου τ. Σταθεροποιούμε τη μεταβλητή $z \in \mathbb{C}$ και θεωρούμε τις τάξεις των συναρτήσεων $F(t,z)$ and $\partial_z F(t,z)$, ως συναρτήσεις αποκλειστικά της μεταβλητής t, δηλαδή

$$\rho_{t,0}(z) := \mathrm{ord}_t F(t,z) \qquad \text{και} \qquad \rho_{t,1}(z) := \mathrm{ord}_t \partial_z F(t,z).$$

Θέτουμε επίσης

$$\rho_t := \max\{\rho_{t,0}(z),\ \rho_{t,1}(z)\}.$$

Τότε αποδεικνύονται τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) Η τάξη ρ_t είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής z, σχετίζεται ωστόσο με την τάξη ως προς z ($\rho_z = \rho$) της $F(t,z)$ μέσω της σχέσης

$$\rho_t = \frac{\rho}{2-\rho}$$

και ειδικότερα:

1. Εάν $\rho = 2$, τότε $\rho_t = \infty$.
2. Εάν $\rho \in [0,2)$, τότε $0 < \rho < \infty$.
3. Εάν $\rho = 0 \Leftrightarrow \rho_t = 0$.

(ii) Για όλα σχεδόν τα $z \in \mathbb{C}$, ισχύει

$$\rho_{t,0}(z) = \rho_t \qquad \text{και} \qquad \rho_{t,1}(z) = \rho_t.$$

Απόδειξη:
(i) Έστω $f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k z^k, z \in \mathbb{C}$. Θέτουμε

$$c_k(z) := \frac{f^{(k)}(z)}{k!}, \qquad k \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

έτσι ώστε $c_k(0) = c_k, k \geq 0$.

Τότε, λόγω του Θεωρήματος Taylor στην $t \mapsto F(t,z)$ και επειδή

$$\partial_t F = \partial_z^2 F, \quad F(0,z) = f(z),$$

από την τελευταία παίρνουμε

$$F(t,z)=\sum_{j\geq 0}\frac{f^{(2j)}(z)}{j!}\,t^j=\sum_{j\geq 0}\frac{(2j)!}{j!}\,c_{2j}(z)\,t^j.$$

Επιπλέον,

$$\partial_z F(t,z)=\sum_{j\geq 0}\frac{(2j)!}{j!}\,c'_{2j}(z)\,t^j=\sum_{j\geq 0}\frac{(2j+1)!}{j!}\,c_{2j+1}(z)\,t^j.$$

Επομένως, από τη σχέση

$$\rho=\limsup_n\frac{n\ln n}{-\ln|a_n|}$$

που δίνει την τάξη μιας ακέραιας συνάρτησης $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n w^n$, προκύπτει ότι, στη συγκεκριμένη περίπτωση,

$$\rho_{t,0}(z)=\mathrm{ord}_t F(t,z)=\limsup_j\frac{j\,\ln j}{-\ln|c_{2j}(z)(2j)!/j!|},$$

σχέση που αναλύεται περαιτέρω ως

$$\rho_{t,0}(z)=\limsup_j\frac{1}{\frac{-\ln|c_{2j}(z)|}{j\,\ln j}-\frac{\ln((2j)!)}{j\,\ln j}+\frac{\ln(j!)}{j\,\ln j}}.$$

Από τον τύπο του Stirling για το παραγοντικό προκύπτει (βλ. αναλυτικές αποδείξεις στο Παράρτημα) ότι

$$\ln\left((2j)!\right)/(j\,\ln j)\to 2,\qquad \ln\left(j!\right)/(j\,\ln j)\to 1,\quad j\to\infty.$$

Η τελευταία γίνεται

$$\rho_{t,0}(z)=\limsup_j\frac{1}{\frac{-\ln|c_{2j}(z)|}{j\,\ln j}-1}=\limsup_j\frac{\frac{j\,\ln j}{-\ln|c_{2j}(z)|}}{1-\frac{j\,\ln j}{-\ln|c_{2j}(z)|}}=\frac{\rho_0(z)}{2-\rho_0(z)},$$

όπου

$$\rho_0(z):=2\limsup_j\frac{j\,\ln j}{-\ln|c_{2j}(z)|}.$$

Ομοίως, για την $t-$ τάξη της $z-$παραγώγου λαμβάνουμε

$$\rho_{t,1}(z)=\mathrm{ord}_t\partial_z F(t,z)=\limsup_j\frac{j\,\ln j}{-\ln|c_{2j+1}(z)(2j+1)!/j!|}$$

και, ομοίως, όπως παραπάνω:

$$\rho_{t,1}(z)=\frac{\rho_1(z)}{2-\rho_1(z)},$$

με

$$\rho_1(z) := 2\limsup_j \frac{j\ \ln j}{-\ln|c_{2j+1}(z)|}.$$

Με βάση το Πόρισμα που ακολουθεί το Θεώρημα 1, έχουμε ότι $\rho_0(z) = \rho_1(z) = \rho$, σχεδόν παντού στο $\mathbb{C}$. Επομένως,

$$\rho_{t,0}(z) = \rho_{t,1}(z) = \rho_t = \frac{\rho}{2-\rho}, \quad \text{για όλα σχεδόν τα } z \in \mathbb{C}.$$

$\square$

Για τη συνέχεια, θέτουμε

$$\mathcal{E}_0 := \{z \in \mathbb{C} : \rho_{t,0}(z) = \rho_t\} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{E}_1 := \{z \in \mathbb{C} : \rho_{t,1}(z) = \rho_t\}.$$

Τότε,

$$\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1 \ = \mathbb{C}.$$

Σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα, κάθε ένα από τα $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ έχει πλήρες μέτρο Lebesgue . Επομένως, η τομή

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}_0 \cap \mathcal{E}_1$$

συνιστά επίσης ένα υποσύνολο πλήρους μέτρου. Ωστόσο, μπορεί να υπάρχουν z_0 ώστε $\rho_{t,0}(z_0) < \rho_t$ και $z_1 \neq z_0$ με $\rho_{t,1}(z_1) < \rho_t$.

Παράδειγμα 3.

Έστω $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$. Θέτουμε $F(t,z) = e^{-\lambda^2 t}\sin(\lambda z)$, με $\rho_t = 1$, στην οποία $F(t,z_0) \equiv 0$ για $z_0 = k\pi/\lambda$, $k \in \mathbb{Z}$, ενώ $\partial_z F(t,z_1) \equiv 0$ για $z_1 = [k + (1/2)]\pi/\lambda$, $k \in \mathbb{Z}$, με αποτέλεσμα $\rho_{t,0}(z_0) = \rho_{t,1}(z_1) = 0$.

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί ένα ανάλογο του Θεωρήματος 5 και αφορά στον t-τύπο της συνάρτησης $F(t,z)$.

Θεώρημα 6.

Έστω $F(t,z)$ λύση της εξίσωσης θερμότητας με αρχική συνθήκη $f(z)$ τάξεως $\rho \in (0,2)$ και τύπου τ. [Η Πρόταση 22 και το Θεώρημα 5 μας εξασφαλίζουν ότι, $\forall t \in \mathbb{C}, ord_z F(t,z) = \rho_z = \rho, \quad type_z F(t,z) = \tau_z = \tau$ και $\forall z \in \mathbb{C} \quad \rho_t = \frac{2}{2-\rho} \in (0,+\infty)$]. Θέτουμε

$$\tau_{t,0}(z) := \mathrm{type}_t F(t,z), \qquad z \in \mathcal{E}_0$$

και

$$\tau_{t,1}(z) := \mathrm{type}_t \partial_z F(t,z), \qquad z \in \mathcal{E}_1,$$

με τα αντίστοιχα σύνολα $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ όπως ορίστηκαν παραπάνω. Ορίζουμε επίσης τη συνάρτηση

$$\tau_t := \max\{\tau_{t,0}(z),\ \tau_{t,1}(z)\}, \qquad z \in \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cap \mathcal{E}_1.$$

Τότε,

1. Η συνάρτηση τ_t είναι ανεξάρτητη του $z \in \mathcal{E}$ και σχετίζεται με την z-τάξη ρ_z $(= \rho)$ και τον z-τύπο τ_z $(= \tau)$ της $F(t,z)$ ως εξής:

$$\tau_t = \left(1 - \frac{\rho}{2}\right)(2\rho)^{\frac{\rho}{2-\rho}}\,\tau^{\frac{2}{2-\rho}}.$$

2. Ισχύει $\tau_t = 0$ αν και μόνο αν $\tau = 0$.

3. Αν $\tau_t < \infty$ τότε

$$\tau_{t,0}(z) = \tau_t \qquad \text{και} \qquad \tau_{t,1}(z) = \tau_t \qquad \text{για όλα σχεδόν τα } z \in \mathbb{C}.$$

4. Ισχύει $\tau_t = \infty$ αν και μόνο αν $\tau = \infty$.

Απόδειξη:
Έστω $f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}$. Θέτουμε

$$c_k(z) = \frac{f^{(k)}(z)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

1. Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 3, ο τύπος τ της συνάρτησης $f(z) = F(0,z)$ δίνεται από τη σχέση

$$\tau = \frac{1}{e\rho}\limsup_k k\,|c_k(z)|^{\rho/k} \qquad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Θέτουμε

$$\tau_0(z) := \frac{2}{e\rho}\limsup_j j\,|c_{2j}(z)|^{\rho/2j}, \tau_1(z) := \frac{2}{e\rho}\limsup_j j|c_{2j+1}(z)|^{\rho/2j}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, αφού το $\limsup$ είναι το ανώτατο υπακολουθιακό όριο, από την έκφραση του τ προκύπτει ότι

$$\tau = \max\{\tau_0(z),\, \tau_1(z)\}, \qquad \text{για κάθε } \ z \in \mathbb{C}.$$

Παράλληλα, εάν $\tau_t < \infty$,

$$\tau_0(z) = \tau \qquad \text{και} \qquad \tau_1(z) = \tau, \qquad \text{σχεδόν παντού στο } \mathbb{C}$$

(βλ. Πόρισμα που ακολουθεί το Θεώρημα 2). Ορίζουμε τις εκφράσεις

$$\hat{\tau}_{t,0}(z) := \frac{1}{e\rho_t}\limsup_j j\left|\frac{(2j)!\,c_{2j}(z)}{j!}\right|^{\rho_t/j}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

και

$$\hat{\tau}_{t,1}(z) := \frac{1}{e\rho_t}\limsup_j j\left|\frac{(2j+1)!\,c_{2j+1}(z)}{j!}\right|^{\rho_t/j}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Τότε, επειδή

$$F(t,z)=\sum_{j\geq 0}\frac{(2j)!}{j!}c_{2j}(z)t^j,\quad \partial_z F(t,z)=\sum_{j\geq 0}\frac{(2j+1)!}{j!}c_{2j+1}(z)t^j,$$

από τον τρόπο που ορίστηκαν παραπάνω οι εκφράσεις $\tau_{t,0}(z)$ και $\tau_{t,1}(z)$ προκύπτει ότι

$$\hat{\tau}_{t,0}(z)=\tau_{t,0}(z)\qquad \text{για κάθε } z\in\mathcal{E}_0$$

και

$$\hat{\tau}_{t,1}(z)=\tau_{t,1}(z)\qquad \text{για κάθε } z\in\mathcal{E}_1.$$

Αν εφαρμοστεί ο ασυμπτωτικός τύπος του Stirling για τα παραγοντικά που περιέχονται στην έκφραση του $\hat{\tau}_{t,0}(z)$, δηλαδή

$$j!\sim\sqrt{2\pi j}\left(\frac{j}{e}\right)^j,\quad (2j)!\sim\sqrt{2\pi 2j}\left(\frac{2j}{e}\right)^{2j},$$

τότε

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}_{t,0}(z)&=\frac{1}{e\rho_t}\limsup_j j\left|\frac{\sqrt{2\pi 2j}\left(\frac{2j}{e}\right)^{2j}c_{2j}(z)}{\sqrt{2\pi j}\left(\frac{j}{e}\right)^j}\right|^{\rho_t/j}\\
&=\frac{1}{e\rho_t}\limsup_j j\left|\frac{\sqrt{2}2^{2j}\frac{j^{2j}}{e^{2j}}c_{2j}(z)}{\frac{j^j}{e^j}}\right|^{\rho_t/j}\\
&=\frac{1}{e\rho_t}\limsup_j j\,(\sqrt{2})^{1/j}\left|\frac{4^j j^{2j-j}c_{2j}(z)}{e^{2j-j}}\right|^{\rho_t/j}\\
&=\frac{1}{e\rho_t}\limsup_j j\,1\cdot\left|\frac{4^{j/j}j^{j/j}}{e^{j/j}}\right|^{\rho_t}\left(|c_{2j}(z)|^{1/j}\right)^{\rho_t}\\
&=\frac{1}{e\rho_t}\limsup_j j\left(\frac{4j}{e}\right)^{\rho_t}\left(|c_{2j}(z)|^{1/j}\right)^{\rho_t}\\
&=\frac{4^{\rho_t}}{\rho_t\,e^{\rho_t+1}}\left[\limsup_j j\left(|c_{2j}(z)|^{1/j}\right)^{\frac{\rho_t}{\rho_t+1}}\right]^{\rho_t+1},\qquad z\in\mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Επίσης, αφού

$$\rho_t=\frac{\rho}{2-\rho}\Leftrightarrow\frac{\rho_t}{\rho_t+1}=\frac{\rho}{2},$$

αν συνδυάσουμε τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}_{t,0}(z) &= \frac{4^{\rho_t}}{\rho_t\, e^{\rho_t+1}} \left[\limsup_j j|c_{2j}(z)|^{\rho/2j}\right]^{\rho_t+1} \\
&= \frac{4^{\rho_t}}{\rho_t\, e^{\rho_t+1}} \left[\frac{e\rho\tau_0(z)}{2}\right]^{\rho_t+1} \\
&= \frac{4^{\frac{\rho}{2-\rho}}}{\frac{\rho}{2-\rho}\, e^{\frac{\rho}{2-\rho}+1}} \left[\frac{e\rho\tau_0(z)}{2}\right]^{\frac{\rho}{2-\rho}+1} \\
&= \frac{2^{\frac{2\rho}{2-\rho}}(2-\rho)}{\rho\, e^{\frac{2}{2-\rho}}} \left[\frac{e\rho\tau_0(z)}{2}\right]^{\frac{2}{2-\rho}} \\
&= 2^{\frac{2\rho-2}{2-\rho}} \cdot 2 \cdot \left(1-\frac{\rho}{2}\right) \cdot \rho^{\frac{2}{2-\rho}}\, \tau_0(z)^{\frac{2}{2-\rho}} \\
&= \left(1-\frac{\rho}{2}\right) (2\rho)^{\frac{\rho}{2-\rho}}\, \tau_0(z)^{\frac{2}{2-\rho}}, \qquad z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Ακριβώς με όμοιο τρόπο, λαμβάνουμε και την αντίστοιχη έκφραση για το $\hat{\tau}_{t,1}(z)$:

$$\hat{\tau}_{t,1}(z) = \left(1-\frac{\rho}{2}\right) (2\rho)^{\frac{\rho}{2-\rho}}\, \tau_1(z)^{\frac{2}{2-\rho}}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Παρατηρούμε ότι, βάσει των παραπάνω εκφράσεων των $\hat{\tau}_{t,0}(z), \hat{\tau}_{t,0}(z)$, προκύπτει

$$\tau_t = \left(1-\frac{\rho}{2}\right) (2\rho)^{\frac{\rho}{2-\rho}}\, \tau^{\frac{2}{2-\rho}},$$

στο σύνολο $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cap \mathcal{E}_1$, το οποίο έχει πλήρες μέτρο στο $\mathbb{C}$. $\square$

Σχόλιο 12.

Παραμένει ανοικτό το ερώτημα εάν η ιδιότητα

$$\tau_{t,0}(z) = \tau_t \qquad \text{και} \qquad \tau_{t,1}(z) = \tau_t, \qquad \text{σχεδόν παντού στο } \mathbb{C}$$

μπορεί να επεκταθεί για $\tau_t = \infty$.

Παράδειγμα 4.

Στην ειδική περίπτωση όπου $\rho_z = \rho = 1$, είναι

$$\rho_t = \frac{\rho}{2-\rho} = \frac{1}{2-1} = 1,$$

επομένως

$$\tau_t = \left(1-\frac{\rho}{2}\right) (2\rho)^{\frac{\rho}{2-\rho}}\, \tau^{\frac{2}{2-\rho}} = \tau_t = \left(1-\frac{1}{2}\right) (2\cdot 1)^{\frac{1}{2-1}}\, \tau^{\frac{2}{2-1}} = \tau^2 = \tau_z^2.$$

Θεωρούμε ενδεικτικά τη λύση της εξίσωσης θερμότητας $E_\lambda(t,z) = e^{\lambda^2 t+\lambda z}$, με

$$\partial_z^2 E_\lambda(t,z) = \partial_t E_\lambda(t,z) = \lambda^2 e^{\lambda^2 t+\lambda z},$$

η οποία έχει $\rho_z = \rho_t = 1$, $\tau_z = |\lambda|$ και $\tau_t = |\lambda|^2$.

Σχόλιο 13.

Αφού η t-τάξη ρ_t μιας συνάρτησης-λύσης της εξίσωσης θερμότητας $F(t,z)$ δίνεται από τη σχέση

$$\rho_t = \max\{\rho_{t,0}(z), \rho_{t,1}(z)\},$$

γνωρίζουμε ότι

$$\rho_{t,0}(z) = ord_t F(t,z) \leq \rho_t \quad \text{και} \quad \rho_{t,1}(z) = ord_t \partial_z F(t,z) \leq \rho_t, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Υπάρχουν, ωστόσο περιπτώσεις στις οποίες ο t-type $\tau_t F(t,z)$ της $F(t,z)$ ή ο t-type $\tau_t \partial_z F(t,z)$ της $\partial_z F(t,z)$ υπερβαίνουν την τιμή του caloric t-type τ_t της $F(t,z)$ για κάποιες επιλεγμένες τιμές της μιγαδικής μεταβλητής z.

Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, όπου η τάξη της $f_1(z)$ είναι μικρότερη από την τάξη της $f_2(z)$ και ο τύπος της $f_1(z)$ είναι μεγαλύτερος από τον τύπο της $f_2(z)$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η $f_2(z)$ είναι περιττή συνάρτηση. Τότε, μπορούμε να κατασκευάσουμε παραδείγματα με $\text{type}_t F(t,0) > \tau_t F(t,z)$.

Παράδειγμα 5.

(i) Έστω η μιγαδική συνάρτηση

$$f(z) = e^{az^2}, \qquad \text{με } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

η οποία έχει $\rho = 2$ (ακριβή τάξη 2) και $\tau = |a| > 0$. Τότε, μία συνάρτηση $F(t,z)$ που μπορούμε να κατασκευάσουμε ώστε να ικανοποιεί τόσο την εξίσωση θερμότητας όσο και την αρχική συνθήκη $F(0,z) = f(z)$ είναι η εξής:

$$F(t,z) = \frac{1}{\sqrt{1-4at}} \exp\left(\frac{az^2}{1-4at}\right).$$

Απόδειξη: Πράγματι,

$$\partial_t F(t,z) = (-1/2)(1-4at)^{-3/2}(-4a) \exp\left(\frac{az^2}{1-4at}\right) +$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-4at}} \exp\left(\frac{az^2}{1-4at}\right) az^2 (4at-1)^{-2} 4a =$$
$$\exp\left(\frac{az^2}{1-4at}\right) \frac{2a}{\sqrt{1-4at}^3} + \exp\left(\frac{az^2}{1-4at}\right) \frac{4a^2 z^2}{\sqrt{1-4at}^5}$$

και

$$\partial_{zz}F(t,z) = \partial_z \left(\frac{1}{\sqrt{1-4at}} \exp\left(\frac{az^2}{1-4at} \right) \frac{2az}{1-4at} \right) =$$
$$\exp\left(\frac{az^2}{1-4at} \right) \frac{2a}{\sqrt{1-4at}^3} + \frac{2az}{\sqrt{1-4at}^3} \exp\left(\frac{az^2}{1-4at} \right) =$$
$$\exp\left(\frac{az^2}{1-4at} \right) \frac{2a}{\sqrt{1-4at}^3} + \frac{2az}{\sqrt{1-4at}^3} \exp\left(\frac{az^2}{1-4at} \right) \frac{2az}{1-4at} =$$
$$\exp\left(\frac{az^2}{1-4at} \right) \frac{2a}{\sqrt{1-4at}^3} + \exp\left(\frac{az^2}{1-4at} \right) \frac{4a^2z^2}{\sqrt{1-4at}^5},$$

ενώ

$$F(0,z) = \frac{1}{\sqrt{1-0}} \exp\left(\frac{az^2}{1-0} \right) = e^{az^2} = f(z).$$

□

Σχόλιο 14.

Προφανώς, η συγκεκριμένη συνάρτηση $F(t,z)$ δεν είναι ακέραια ως προς t αφού, ανεξαρτήτως της μεταβλητής z, παρουσιάζει ισχυρή ανωμαλία για $t = 1/4a$. Από την άλλη πλευρά, ο τύπος $\tau_z = |a||1-4at|^{-1}$ εξαρτάται από την t. Τέλος, παρατηρούμε ότι η $F(t,z)$ δεν μηδενίζεται ποτέ. Το συγκεκριμένο αντι-παράδειγμα μιας συνάρτησης - λύσης της εξίσωσης θερμότητας αλλά μη ακέραιης ως προς t έρχεται σε συμφωνία με τα προηγούμενα συμπεράσματα (βλ. Θεώρημα 3 και Πρόταση 22).

Ως παραλλαγή του παραδείγματος που προηγήθηκε μπορούμε να θεωρήσουμε επίσης την

$$f(z) = \cos(az^2) = \frac{e^{iaz^2} + e^{-iaz^2}}{2}, \qquad \text{με } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

στην οποία επίσης έχουμε $\rho = 2$ και $\tau = |a| > 0$. Εδώ, η συνάρτηση $F(t,z)$ που ικανοποιεί την εξίσωσης θερμότητας με αρχική συνθήκη $F(0,z) = f(z)$ εκφράζεται ως εξής:

$$F(t,z) = \frac{1}{2\sqrt{1-4iat}} \exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat} \right) + \frac{1}{2\sqrt{1+4iat}} \exp\left(\frac{-iaz^2}{1+4iat} \right).$$

και επιλύει την εξίσωση θερμότητας διότι

$$
\begin{aligned}
\partial_t F(t,z) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\sqrt{1-4iat}}\exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+4iat}}\exp\left(\frac{-iaz^2}{1+4iat}\right)\right) = \\
-\frac{-4ia}{4\sqrt{1-4iat}^3}\exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat}\right) + \frac{1}{2\sqrt{1-4iat}}\exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat}\right)\frac{-iaz^2(-4ia)}{(1-4iat)^2} - \\
\frac{4ia}{4\sqrt{1+4iat}^3}\exp\left(\frac{-iaz^2}{1+4iat}\right) + \frac{1}{2\sqrt{1+4iat}}\exp\left(\frac{-iaz^2}{1+4iat}\right)\frac{iaz^2(4ia)}{(1+4iat)^2} = \\
\frac{ia}{\sqrt{1-4iat}^3}\exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat}\right) - \frac{ia}{\sqrt{1+4iat}^3}\exp\left(\frac{-iaz^2}{1+4iat}\right) + \\
\frac{4i^2a^2z^2}{2\sqrt{1-4iat}^3}\exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat}\right) + \frac{4i^2a^2z^2}{2\sqrt{1+4iat}^3}\exp\left(\frac{-iaz^2}{1+4iat}\right) = \\
\frac{ia}{\sqrt{1-4iat}^3}\exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat}\right) - \frac{ia}{\sqrt{1+4iat}^3}\exp\left(\frac{-iaz^2}{1+4iat}\right) + \\
\frac{-2a^2z^2}{\sqrt{1-4iat}^3}\exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat}\right) + \frac{-2a^2z^2}{\sqrt{1+4iat}^3}\exp\left(\frac{-iaz^2}{1+4iat}\right)
\end{aligned}
$$

και ομοίως

$$\partial_{zz}F(t,z) = \frac{\partial^2}{\partial z}\left(\frac{1}{2\sqrt{1-4iat}}\exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat}\right)\right) + \frac{\partial^2}{\partial z}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+4iat}}\exp\left(\frac{-iaz^2}{1+4iat}\right)\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2\sqrt{1-4iat}}\exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat}\right)\frac{2iaz}{1-4iat}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+4iat}}\exp\left(\frac{-iaz^2}{1+4iat}\right)\frac{-2iaz}{1+4iat}\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{iaz}{\sqrt{1-4iat}^3}\exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{iaz}{\sqrt{1+4iat}^3}\exp\left(\frac{-iaz^2}{1+4iat}\right)\right) =$$

$$\frac{ia}{\sqrt{1-4iat}^3}\exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat}\right) + \frac{iaz}{\sqrt{1-4iat}^3}\exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat}\right)\frac{2iaz}{1-4iat} -$$

$$\frac{ia}{\sqrt{1+4iat}^3}\exp\left(\frac{iaz^2}{1+4iat}\right) - \frac{iaz}{\sqrt{1+4iat}^3}\exp\left(\frac{-iaz^2}{1+4iat}\right)\frac{-2iaz}{1+4iat} =$$

$$\frac{ia}{\sqrt{1-4iat}^3}\exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat}\right) - \frac{ia}{\sqrt{1+4iat}^3}\exp\left(\frac{-iaz^2}{1+4iat}\right) +$$

$$\frac{-2a^2z^2}{\sqrt{1-4iat}^3}\exp\left(\frac{iaz^2}{1-4iat}\right) + \frac{-2a^2z^2}{\sqrt{1+4iat}^3}\exp\left(\frac{-iaz^2}{1+4iat}\right)$$

Στο παράδειγμα αυτό, η $F(t,z)$ παρουσιάζει ισχυρές ανωμαλίες για $t = \pm 1/4ia$, ενώ διαθέτει άπειρα σημεία μηδενισμού. Για την ακρίβεια, ο z αποτελεί σημείο μηδενισμού της $F(t,z)$ αν και μόνο αν

$$z^2 = (1+16a^2t^2)\left[\frac{1}{4ia}\ln\left(\frac{1-4iat}{1+4iat}\right) + \frac{\pi}{2a}\right],$$

όπου $\ln(\cdot)$ είναι η πλειότιμη μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση.

Παράδειγμα 6.

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση στην οποία η αρχική συνθήκη παίρνει τη μορφή

$$f(z) = z^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Για αυτή την έκφραση της $f(z)$ η λύση της εξίσωσης θερμότητας δεν είναι ακέραια εκτός εάν ο αριθμός α είναι μη αρνητικός ακέραιος. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(t,z) := F(t,z;\alpha) := \frac{i^\alpha}{\Gamma(-\alpha)}\, t^{\alpha/2}\int_0^\infty \frac{e^{-\xi^2+it^{-1/2}z\xi}}{\xi^{\alpha+1}}\,d\xi, \qquad \Re(\alpha) < 0,$$

όπου η συνάρτηση γάμμα.

Η $F(t,z;\alpha)$ είναι ακέραια ως προς z για οποιαδήποτε μιγαδική μεταβλητή $t \neq 0$ και αναλυτική ως προς $t \neq 0$ για οποιαδήποτε μιγαδική μεταβλητή z.

Επιπλέον:

–η $F(t,z)$ ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

–αν $t \to 0$ έτσι ώστε $\Im(t^{-1/2}z) \geq 0$, τότε η $F(t,z;\alpha)$ πλησιάζει κάποιον κλάδο της z^α.

Ωστόσο, αν $t \to 0$ μέσω τυχαίας διαδρομής, τότε το όριο $\lim_{t\to 0} F(t,z;\alpha)$ μπορεί να μην ισούται με το z^α. Υπό αυτήν την έννοια, η αρχική συνθήκη $F(0,z;\alpha) = z^\alpha$ ικανοποιείται.

Η $F(t,z) = F(t,z;\alpha)$ μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$F(t,z) = \frac{i^\alpha t^{\alpha/2}}{\Gamma(-\alpha)} h\left(\frac{it^{-1/2}z}{2}\right), \quad \text{με} \quad h(x) = h(x;\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi^2+2x\xi}}{\xi^{\alpha+1}}\, d\xi,$$

όπου η $h(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση , δηλαδή

$$u''(x) - 2xu'(x) = -2\alpha u(x),$$

με

$$h(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi^2+2\xi\cdot 0}}{\xi^{\alpha+1}}\, d\xi = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^{\alpha+1}}\, d\xi$$

Με την αντικατάσταση $\xi^2 = \eta \Leftrightarrow d\eta = 2\xi d\xi$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$h(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta^{(\alpha+1)/2} 2\eta^{1/2}} d\eta = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta^{(\alpha/2+1)}}\, d\eta = \frac{1}{2}\int_0^\infty \eta^{-\alpha/2-1} e^{-\eta}\, d\eta$$

επομένως

$$h(0) = \frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right),$$

και με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$h'(0) = \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right).$$

Προφανώς, κάθε γενική λύση $u(x)$ είναι ακέραιη στο x και μπορεί να εκφραστεί ως

$$u(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n,$$

όπου οι συντελεστές a_n ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2(n-\alpha)}{(n+1)(n+2)}.$$

Μπορούμε να διαχωρίσουμε κατάλληλα δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις $u(x)$. Επιλέγοντας $a_0 = 1$ κα $a_1 = 0$ λαμβάνουμε την $u_e(x) = u_e(x;\alpha)$, η οποία είναι άρτια ως προς x και για $x = 0$ $u_e(0) = 1$, ενώ επιλέγοντας $a_0 = 0$ και $a_1 = 1$ λαμβάνουμε τη λύση $u_o(x) = u_o(x;\alpha)$, η οποία είναι περιττή ως προς x, με $u_o'(0) = 1$. Επομένως, στην πρώτη περίπτωση, θέτοντας στην αναδρομική σχέση $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, n = 0, 1, 2, ...$ λαμβάνουμε $\alpha_2 = \frac{-2\alpha}{2} = -\frac{-2^0\alpha}{(2\cdot 0)!}, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = \frac{4(2-\alpha)}{2\cdot 2)!}$, άρα γενικώς

$$u_e(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k \alpha(\alpha-2)\cdots\big(\alpha - 2(k-1)\big)}{(2k)!} \, x^{2k}$$

και, ομοίως, επιλέγοντας $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, n = 0, 1, 2, ...$ λαμβάνουμε

$$u_o(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k (\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2k+1)}{(2k+1)!} \, x^{2k+1}.$$

Προφανώς οι εκφράσεις $u_e(x;\alpha)$ και $u_o(x;\alpha)$, είναι επίσης ακέραιες ως προς α, αφού η αναλυτική τους έκφραση εξαρτάται από την παράμετρο αυτή. Επιπλέον, αξιοποιώντας τις ισοδύναμες εκφράσεις των $h(0)$ και $h'(0)$ στις οποίες καταλήξαμε με τη χρήση της συνάρτησης Γάμμα, καταλήγουμε στη σχέση

$$h(x) = h(x;\alpha) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) u_e(x;\alpha) + \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_o(x;\alpha).$$

Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, λόγω αναλυτικής συνέχειας της h ως προς α, μπορούμε να επεκτείνουμε τη συνάρτηση αυτή (διατηρώντας τον ίδιο συμβολισμό $h(x;\alpha)$, για κάθε μιγαδική μεταβλητή α.

Με τη βοήθεια της προηγούμενης σχέσης, η $F(t,z)$ μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα

$$F(t,z;\alpha) = \frac{i^\alpha t^{\alpha/2}}{\Gamma(-\alpha)} \left[\frac{1}{2}\,\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) u_e\left(\frac{it^{-1/2}z}{2};\alpha\right) + \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_o\left(\frac{it^{-1/2}z}{2};\alpha\right)\right],$$

Με χρήση του γνωστού τύπου "διπλασιασμού" Legendre για τη συνάρτηση Γάμμα (βλ. Παράρτημα)

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

καταλήγουμε στο ότι

$$\begin{aligned}
F(t,z;\alpha) = & \mathrm{i}^\alpha t^{\alpha/2} \left[\tfrac{1}{2\Gamma(-\alpha)}\Gamma\left(-\tfrac{\alpha}{2}\right) u_e\left(\tfrac{it^{-1/2}z}{2};\alpha\right) + \tfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\Gamma\left(\tfrac{1-\alpha}{2}\right) u_o\left(\tfrac{it^{-1/2}z}{2};\alpha\right)\right] \\
= i^\alpha t^{\alpha/2} & \left[\tfrac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma((-\alpha+1)/2)2^{-\alpha-1}} u_e\left(\tfrac{it^{-1/2}z}{2};\alpha\right) + \tfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma((-\alpha+1)/2)2^{-\alpha-1}}\Gamma\left(\tfrac{1-\alpha}{2}\right) u_o\left(\tfrac{it^{-1/2}z}{2};\alpha\right)\right] \\
= i^\alpha t^{\alpha/2} & \left[\tfrac{\sqrt{\pi}2^\alpha}{\Gamma((-\alpha+1)/2)} u_e\left(\tfrac{it^{-1/2}z}{2};\alpha\right) + \tfrac{2\sqrt{\pi}2^\alpha}{\Gamma((-\alpha+1)/2)}\Gamma\left(\tfrac{1-\alpha}{2}\right) u_o\left(\tfrac{it^{-1/2}z}{2};\alpha\right)\right] \\
\Leftrightarrow F(t,z;\alpha) = & \sqrt{\pi}(2i)^\alpha t^{\alpha/2} \left[\tfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} u_e\left(\tfrac{it^{-1/2}z}{2};\alpha\right) + \tfrac{2}{\Gamma(-\alpha/2)} u_o\left(\tfrac{it^{-1/2}z}{2};\alpha\right)\right].
\end{aligned}$$

Ώστε για $t \neq 0$, η συνάρτηση $F(t, z; \alpha)$ είναι ακέραια ως προς z και α, ενώ για οποιαδήποτε z και α είναι αναλυτική ως προς t, εξαιρουμένης της τιμής $t = 0$, για την οποία παρουσιάζεται ισχυρή ανωμαλία.

Σημειώνουμε ότι αν ωστόσο α μη αρνητικός ακέραιος, τότε η $F(t, z; m)$ ταυτίζεται με το αντίστοιχο m-θερμικό πολυώνυμο (βλ. Κεφάλαιο 2), δηλαδή

$$P_m(t, z) = \sum_{2j+k=m} \frac{m!}{j!k!} t^j z^k = \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{m!}{j!(m-2j)!} t^j z^{m-2j}, \quad m \geq 0,$$

$$F(t, z; m) = P_m(t, z).$$

Γενικά, η z-τάξη της $F(t, z; \alpha)$ είναι 2, ενώ ο z-τύπος της εξαρτάται από την t.

Στην ειδική περίπτωση $\alpha = -1$, έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον το γεγονός ότι οι εκφράσεις $u_e(x; \alpha)$ και $u_o(x; \alpha)$ γράφονται ισοδύναμα

$$u_e(x; -1) = e^{x^2} \qquad \text{και} \qquad u_o(x; -1) = e^{x^2} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi,$$

αντίστοιχα για κάθε $x \in \mathbb{C}$, αφού $-2(k-1) - 1$ περιττός,

$$\begin{aligned} u_e(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k(-1)(-1-2)\cdots\big(-1-2(k-1)\big)}{(2k)!} x^{2k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{-2^k(\cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2k-1)}{(k)!(k+1)(k+2)...(2k-1)(2k)} (x^2)^k \end{aligned}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \cdot 1 \cdot 3... \cdot (k-1)}{k!(k+2)(k+4)..2k} (x^2)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = e^{x^2}$$

και ομοίως

$$u_o(x; -1) = e^{x^2} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi.$$

Επομένως, με τη βοήθεια των δύο τελευταίων σχέσεων,

$$F(t, z; \alpha) = \frac{i^\alpha t^{\alpha/2}}{\Gamma(-\alpha)} \left[\frac{1}{2} \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) u_e\left(\frac{it^{-1/2}z}{2}; \alpha\right) + \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_o\left(\frac{it^{-1/2}z}{2}; \alpha\right) \right],$$

$$F(t, z; \alpha) = \frac{i^\alpha t^{\alpha/2}}{\int_0^\infty t^{-\alpha-1} e^{-t} dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^\infty t^{-\alpha/2-1} e^{it^{-1/2}z} dt + \int_0^\infty t^{(-\alpha-1)/2} e^{it^{-1/2}z} dt \int_0^{\frac{it^{-1/2}z}{2}} e^{-\xi^2} d\xi \right]$$

μετασχηματίζεται στην ακόλουθη έκφραση-λύση της θερμικής εξίσωσης:

$$
\begin{aligned}
F(t,z) = \frac{i}{\sqrt{t}}\, e^{-z^2/4t} \int_{-\infty}^{-iz/2\sqrt{t}} e^{-\xi^2} d\xi = \\
\frac{i}{\sqrt{t}}\, e^{-z^2/4t} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right) /2 + \int_{0}^{-iz/2\sqrt{t}} e^{-\xi^2} d\xi \right] = \\
\frac{i}{\sqrt{t}}\, e^{-z^2/4t} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_{0}^{-iz/2\sqrt{t}} e^{-\xi^2} d\xi \right),
\end{aligned}
$$

όπου το πρώτο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα λαμβάνεται σε σύνορο που προσεγγίζει τον αρνητικό ημιάξονα των πραγματικών αριθμών στο $-\infty$. Επίσης, η τελευταία σχέση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$
F(t,z) \to \frac{1}{z}, \quad \text{καθώς } \; t \to 0 \quad \text{σε καθορισμένες κατευθύνσεις.}
$$

Κεφάλαιο 6

ΣΗΜΕΙΑ ΜΗΔΕΝΙΣΜΟΥ, ΑΡΤΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

6.1 Ιδιότητες ριζών των λύσεων της εξίσωσης θερμότητας

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται στοιχεία για τη συμπεριφορά των ριζών των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης θερμότητας.

Αρχικά,με το ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύουμε ότι οι πολλαπλές ρίζες μίας μη τετριμμένης ακέραιης συνάρτησης $F(t,z)$ η οποία επιλύει την εξίσωση θερμότητας δεν μπορεί να αποτελούν σημεία συσσώρευσης στο $\mathbb{C}^2$.

Θεώρημα 7.

Έστω η μιγαδική συνάρτηση $F(t,z) \not\equiv 0$, ακέραια ως προς (t,z) που επιλύει την εξίσωση θερμότητας $\partial_t F(t,z) = \partial_{zz} F(t,z)$. Αν για κάποιο σημείο (t_0,z_0) ισχύει

$$F(t_0,z_0) = \partial_z F(t_0,z_0) = 0,$$

τότε υπάρχει ($\mathbb{C}^2$-ανοικτή) περιοχή U του (t_0,z_0) έτσι ώστε

$$|F(t,z)| + |\partial_z F(t,z)| > 0 \qquad \text{για κάθε} \quad (t,z) \in U \setminus \{(t_0,z_0)\}.$$

Απόδειξη:

Επιλέγουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το σημείο $t_0 = z_0 = 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής εις άτοπο. Αν το συμπέρασμα του θεωρήματος είναι εσφαλμένο, τότε αντιθέτως θα υπάρχει ακολουθία σημείων $(t_n, z_n) \neq (0,0)$, $n = 1, 2, \ldots$, τέτοια ώστε $(t_n, z_n) \to (0,0)$ και

$$F(t_n, z_n) = \partial_z F(t_n, z_n) = 0 \qquad \text{για κάθε} \quad n \geq 1.$$

και μάλιστα, μπορούμε με επιλογή κατάλληλων υπακολουθιών της ανωτέρω ακολουθίας μπορούμε να "εξαναγκάζουμε" την (t_n, z_n) (με την υπακολουθιακή έννοια) να προσεγγίζει το σημείο $(0,0)$ όσο γρήγορα επιθυμούμε.

Υποθέτουμε ότι μ είναι η ελάχιστη τιμή της m ώστε $\partial_z^m F(0,0) \neq 0$. Η ύπαρξη της μ είναι εξασφαλισμένη λόγω του ότι η $F(t,z)$ δεν είναι ταυτοτικά 0. Από τη σχέση $F(0,0) = \partial_z F(0,0) = 0$, θέτοντας στην (2.6) $t_0 = z_0 = 0$, προκύπτει ότι $\mu \geq 2$ και

$$F(t,z) = \frac{\partial_z^\mu F(0,0)}{\mu!}\, P_\mu(t,z) \,+ \sum_{m=\mu+1}^{\infty} \frac{\partial_z^m F(0,0)}{m!}\, P_m(t,z),$$

η οποία με παραγώγιση ως προς z δίνει

$$\partial_z F(t,z) = \frac{\partial_z^\mu F(0,0)}{\mu!}\, \partial_z P_\mu(t,z) \,+ \sum_{m=\mu+1}^{\infty} \frac{\partial_z^m F(0,0)}{m!}\, \partial_z P_m(t,z).$$

Λόγω της Πρότασης 6 (κεφ. 2), οι δύο τελευταίες σχέσεις ισοδυναμούν με το ότι, δοθείσης μίας ανοικτής μπάλας $B \subset \mathbb{C}^2$ κέντρου $(0,0)$, υπάρχει $C > 0$ (σταθερά που εξαρτάται από την B) έτσι ώστε για κάθε $(t,z) \in B$ έχουμε

$$\left| F(t,z) - \frac{\partial_z^\mu F(0,0)}{\mu!}\, P_\mu(t,z) \right| \leq C \max\left\{ |z|^{\mu+1}, |z|^{\mu-1}|t|, \ldots, |t|^{[(\mu+2)/2]} \right\}$$

και

$$\left| \partial_z F(t,z) - \frac{\partial_z^\mu h(0,0)}{\mu!}\, \partial_z P_\mu(t,z) \right| \leq C \max\left\{ |z|^{\mu}, |z|^{\mu-2}|t|, \ldots, |t|^{[(\mu+1)/2]} \right\}.$$

Αν σταθεροποιήσουμε μία ανοικτή μπάλα B ως ανωτέρω, τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $(t_n, z_n) \in B$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, αν συνδυάσουμε τις δύο παραπάνω σχέσεις με την $F(t_n, z_n) = \partial_z F(t_n, z_n) = 0, \quad$ για κάθε $\quad n \geq 1$ και θέσουμε

$$C' := \frac{\mu! C}{|\partial_z^\mu F(0,0)|},$$

λαμβάνουμε

$$|P_\mu(t_n, z_n)| \leq C' \max\left\{ |z_n|^{\mu+1}, |z_n|^{\mu-1}|t_n|, \ldots, |t_n|^{[\mu+2)/2]} \right\} \quad \text{για κάθε } n \geq n_0$$

και

$$|\partial_z P_\mu(t_n, z_n)| \leq C' \max\left\{|z_n|^\mu, |z_n|^{\mu-2}|t_n|, \ldots, |t_n|^{[\mu+1)/2]}\right\} \quad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση $\mu = 2l$. Τότε συνδυάζοντας τα μέχρι τώρα στοιχεία και την Πρόταση 9 του Κεφαλαίου 2,

$$|z_n^2+\rho_{\mu,1}\, t_n| \cdots |z_n^2+\rho_{\mu,l}\, t_n| \leq C' \max\left\{|z_n|^{2l+1}, |z_n|^{2l-1}|t_n|, \ldots, |z_n|\,|t_n|^l, |t_n|^{l+1}\right\}$$

για κάθε $n \geq n_0$, καθώς και

$$|z_n||z_n^2 + \rho_{\mu-1,1}\, t_n| \cdots |z_n^2 + \rho_{\mu-1,l-1}\, t_n|$$

$$\leq \tfrac{C'}{\mu} \max\left\{|z_n|^{2l}, |z_n|^{2l-2}|t_n|, \ldots, |z_n|^2|t_n|^{l-1}, |t_n|^l\right\}, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Αν $z_n = 0$, για άπειρα n, που σύμφωνα με την υπόθεσή μας συνεπάγεται $t_n \neq 0$, για άπειρα n, τότε ισχύει $|\rho_{\mu,1} \cdots \rho_{\mu,l}\, t_n^l| \leq C'|t_n|^{l+1}$, που αντιφάσκει με τη σύγκλιση $t_n \to 0, n \geq 1$. Επομένως, μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $z_n \neq 0$.

Θέτουμε

$$\lambda_n := \frac{t_n}{z_n^2}, \qquad n \geq 1.$$

Τότε οι δύο παραπάνω ανισότητες γίνονται αντίστοιχα

$$|1 + \rho_{\mu,1}\, \lambda_n| \cdots |1 + \rho_{\mu,l}\, \lambda_n| \leq C'|z_n| \max\left\{1, |\lambda_n|, \ldots, |\lambda_n|^l, |\lambda_n|^{l+1}|z_n|\right\}$$

και

$$|1 + \rho_{\mu-1,1}\, \lambda_n| \cdots |1 + \rho_{\mu-1,l-1}\, \lambda_n| \leq \frac{C'}{\mu}|z_n| \max\left\{1, |\lambda_n|, \ldots, |\lambda_n|^l\right\}$$

για αρκετά μεγάλο n.

Εάν η $|\lambda_n|$ γίνει αυθαίρετα μεγάλη, τότε προκύπτει από τα προηγούμενα ότι υπάρχει σταθερά $C'' > 0$ τέτοια ώστε

$$|\lambda_n|^l \leq C''|z_n| \max\left\{|\lambda_n|^l, |\lambda_n|^{l+1}|z_n|\right\} = C'' \max\left\{|\lambda_n|^l|z_n|, |\lambda_n|^l|t_n|\right\},$$

δηλαδή $1 \leq C'' \max\{|z_n|, |t_n|\}$, κάτι το οποίο είναι, προφανώς, αδύνατο λόγω της υπάρχουσας σύγκλισης $z_n, t_n \to 0$. Για αυτό το λόγο, η ακολουθία (λ_n) πρέπει να είναι φραγμένη και, συνεπώς, να υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$|1 + \rho_{\mu,1}\, \lambda_n| \cdots |1 + \rho_{\mu,l}\, \lambda_n| \leq M|z_n|$$

και

$$|1 + \rho_{\mu-1,1}\, \lambda_n| \cdots |1 + \rho_{\mu-1,l-1}\, \lambda_n| \leq M|z_n|$$

για αρκετά μεγάλο n. Έστω ότι η (λ_{n_k}) είναι μία συγκλίνουσα υπακολουθία της ακολουθίας λ_n, με $\lim \lambda_{n_k} = \lambda \in \mathbb{C}$. Ωστόσο, με υπολογισμό των ορίων καθώς $n_k \to \infty$ στις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει

$$|1 + \rho_{\mu,1}\,\lambda| \cdots |1 + \rho_{\mu,l}\,\lambda| = 0$$

και

$$|1 + \rho_{\mu-1,1}\,\lambda| \cdots |1 + \rho_{\mu-1,l-1}\,\lambda| = 0.$$

Έπεται ότι κάποιο από τα $\rho_{\mu,i}, \quad 1 \leq i \leq l$ ταυτίζεται με κάποιο από τα $\rho_{\mu-1,j}, \quad 1 \leq j \leq l-1$. Αυτό αντιφάσκει με το Πόρισμα που ακολουθεί την Πρόταση 9 στο Κεφάλαιο 2. Απομένει η περίπτωση κατά την οποία $\mu = 2l+1$. Τότε ομοίως λαμβάνουμε

$$|z_n||z_n^2 + \rho_{\mu,1}\,t_n| \cdots |z_n^2 + \rho_{\mu,l}\,t_n| \leq C' \max\left\{|z_n|^{2l+2}, |z_n|^{2l}|t_n|, \ldots, |t_n|^{l+1}\right\}$$

για κάθε $n \geq n_0$, ενώ επίσης προκύπτει

$$|z_n^2 + \rho_{\mu-1,1}\,t_n| \cdots |z_n^2 + \rho_{\mu-1,l}\,t_n| \leq \frac{C'}{\mu} \max\left\{|z_n|^{2l+1}, |z_n|^{2l-1}|t_n|, \ldots, |z_n|\,|t_n|^l, |t_n|^{l+1}\right\}$$

για κάθε $n \geq n_0$.

Αν εξακολουθήσουμε με τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση $\mu = 2l$, καταλήγουμε εκ νέου σε αντίφαση. Συνεπώς, το συμπέρασμα του Θεωρήματος ισχύει.

□

Σχόλιο 15.

Μία άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 7 είναι ότι, αν η $F(t,z) \not\equiv 0$ είναι ακέραια ως προς (t,z) και αποτελεί λύση της εξίσωσης θερμότητας, τότε το σύνολο

$$\mathcal{M}_F := \{(t,z) \in \mathbb{C}^2 \,:\, F(t,z) = \partial_z F(t,z) = 0\}$$

είναι διακριτό στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}^2$. Αν, για παράδειγμα, η F είναι ένα θερμικό πολυώνυμο, τότε

$$\mathcal{M}_{P_m} = \{(0,0)\}, \quad m \geq 2, \qquad \text{ενώ} \qquad \mathcal{M}_{P_0} = \mathcal{M}_{P_1} = \emptyset.$$

Σχόλιο 16.

Δεύτερη συνέπεια του Θεωρήματος 7 αποτελεί η παρατήρηση ότι αν μία ακέραια συνάρτηση $A(t,z)$ μπορεί να μετασχηματιστεί ως

$$A(t,z) = A_1(t,z)^2 A_2(t,z),$$

όπου οι $A_1(t,z)$ και $A_2(t,z)$ είναι ακέραιες και $A_1(t_0,z_0) = 0$ σε κάποιο σημείο $(t_0,z_0) \in \mathbb{C}^2$, τότε η $A(t,z)$ αποκλείεται να επιλύει την εξίσωση θερμότητας. Πράγματι, έχουμε $A(t_0,z_0) = \partial_z A(t_0,z_0) = 0$. Αν A λύση της εξίσωσης θερμότητας, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 6 η (t_0,z_0) είναι μεμονωμένη, άτοπο (βλ. [9]).

Σχόλιο 17.

Το αντίστοιχο του Θεωρήματος δεν ισχύει εάν θεωρήσουμε την $F(t,z)$ ως συνάρτηση του t. Για παράδειγμα, για τη μιγαδική λύση της εξίσωσης θερμότητας $F(t,z) = e^{-\lambda^2 t}\sin(\lambda z)$ ισχύει ότι $F(t,0) \equiv 0$, που συνεπάγεται ότι $\partial_t^j F(t,0) \equiv 0$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$.

6.2 Σχέσεις παραγώγων συναρτήσεων των ριζών

Θα ξεκινήσουμε αυτήν την παράγραφο παραθέτοντας ένα γνωστό από τη βιβλιογραφία (βλ. [3]) Λήμμα, καθώς και τη σύντομη απόδειξή του.

Λήμμα 3.

Έστω $g(z)$ μία αναλυτική συνάρτηση, ορισμένη σε ένα χωρίο D του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$. Αν $z_0 \in D$ και $g(z_0) \neq 0$ και θέσουμε

$$G(z) := (z - z_0)g(z),$$

τότε

$$\frac{G''(z_0)}{G'(z_0)} = 2\,\frac{g'(z_0)}{g(z_0)}.$$

Απόδειξη:
Για $z \in D$ λαμβάνουμε

$$\frac{G''(z)}{G'(z)} = \frac{(z - z_0)g''(z) + 2g'(z)}{(z - z_0)g'(z) + g(z)}$$

και εύκολα για $z = z_0$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα.

Πόρισμα 7.

Έστω ότι η $G(z)$ είναι ακέραια συνάρτηση με ακολουθία ριζών $z_0, z_1, z_2, \ldots$, όπου η z_0 είναι απλή ρίζα. Υποθέτουμε επιπλέον, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $G(0) \neq 0$. Τότε

(i) Αν

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{|z_k|} < \infty$$

και

$$G(z) = Ce^{Az}\prod_{k\geq 0}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right),$$

όπου οι A και $C \neq 0$ είναι μιγαδικές σταθερές, τότε

$$\frac{G''(z_0)}{G'(z_0)} = 2A + 2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{z_0 - z_k}.$$

(ii) Αν
$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{|z_k|^2} < \infty$$
και
$$G(z) = Ce^{Az} \prod_{k\geq 0} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k},$$
με A και $C \neq 0$ μιγαδικές σταθερές, τότε
$$\frac{G''(z_0)}{G'(z_0)} = 2A + 2\sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{z_0 - z_k} + \frac{1}{z_k}\right).$$

Απόδειξη:
(i) Θέτουμε
$$g(z) := \frac{G(z)}{z - z_0}$$
(άρα αφού $G(0) \neq 0$, τότε $g(0) \neq 0$). Τότε από το Λήμμα προκύπτει
$$\frac{G''(z_0)}{G'(z_0)} = 2\,\frac{g'(z_0)}{g(z_0)}$$
και συμπεραίνουμε ότι
$$g(z) = ce^{Az} \prod_{k\geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right),$$
όπου $c \neq 0$. Συνεπώς, η ανάλυση Mittag-Leffler $g'(z)/g(z)$ είναι (βλ. [5], σελ. 200, άσκηση 7)
$$\frac{g'(z)}{g(z)} = A + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{z - z_k}.$$
Επομένως, ο ζητούμενος τύπος εξάγεται αν θέσουμε στην παραπάνω σχέση $z = z_0$ και αντικαταστήσουμε στην έκφραση $\dfrac{G''(z_0)}{G'(z_0)}$.

Ομοίως αποδεικνύεται και το **(ii)**. □

Σχόλιο 18.

Ας σημειώσουμε ότι ο τύπος
$$\frac{G''(z_0)}{G'(z_0)} = 2A + 2\sum_{k\geq 1} \frac{1}{z_0 - z_k}$$
διαφέρει από τον αντίστοιχο
$$\frac{G''(z_0)}{G'(z_0)} = 2A + 2\sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{z_0 - z_k} + \frac{1}{z_k}\right)$$

μόνο αν

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{|z_k|} = \infty.$$

Σχόλιο 19.

Έστω $F(t,z)$ ακέραια λύση της εξίσωσης θερμότητας. Ας θεωρήσουμε το σύνολο

$$\Gamma = \left\{(t,z) \in \mathbb{C}^2 \,:\, F(t,z) = 0\right\}.$$

Αν η $F(t,z)$ δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο, δηλαδή το Γ είναι κενό, τότε, από το Θεώρημα Παραγοντοποίησης του Hadamard (βλ. Παράρτημα), καθώς και από τα Θεωρήματα 3 και 4 του Κεφαλαίου 5 και από τη σχέση (2.2) προκύπτει ότι υπάρχουν σταθερές μιγαδικές $c, \lambda \in \mathbb{C}$, με $c \neq 0$, έτσι ώστε

$$F(t,z) = cE_\lambda(t,z) = c\, e^{\lambda^2 t + \lambda z}.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $F(t,z)$ είναι μη τετριμμένη ακέραιη λύση της εξίσωσης θερμότητας που δεν μπορεί να γραφεί στην προηγούμενη μορφή και, συνεπώς, μηδενίζεται για κάποια t και z. Τότε το Γ θα είναι μη κενό στο $\mathbb{C}^2$ και γνήσιο υποσύνολό του. Αν η $F(t,z)$ δεν μπορεί να γραφεί ως

$$F(t,z) = A_1(t,z)\, A_2(t,z),$$

όπου οι $A_1(t,z)$ and $A_2(t,z)$ είναι ακέραιες και έχουν σημείο συσσώρευσης το 0, τότε το Γ θα είναι μία καμπύλη στο $\mathbb{C}^2$. Πράγματι, σε αντίθετη περίπτωση το Γ θα αποτελεί μία ένωση καμπυλών, άτοπο, αφού, σύμφωνα με το Θεώρημα 6, δεν μπορεί να υπάρχουν πολλές χωριστές συνιστώσες του Γ. Για παράδειγμα, αν η F αποτελεί θερμικό πολυώνυμο, τότε, από τις σχέσεις (5) και (2.3) έχουμε

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{l} \{(z,t) \in \mathbb{C}^2 : z^2 + \rho_{m,j}\, t = 0\}, \qquad \text{για} \quad m = 2l$$

και

$$\Gamma = \{z = 0\} \cup \bigcup_{j=1}^{l} \{(z,t) \in \mathbb{C}^2 : z^2 + \rho_{m,j}\, t = 0\}, \qquad \text{για} \quad m = 2l+1.$$

Έστω τώρα $z_1(t), z_2(t), \ldots$ τα σημεία μηδενισμού της $F(t,z)$, τα οποία μπορούμε να θεωρήσουμε ως κλάδους μίας αναλυτικής συνάρτησης, της $Z(T)$, ορισμένης σε μία επιφάνεια Riemann Γ. Τα σημεία διακλάδωσης της Γ είναι τα (t_0, z_0) που ικανοποιούν την (6.1). Ταυτόχρονα, λόγω του Θεωρήματος 6, αυτά διαμορφώνουν ένα διακριτό σύνολο στο $\mathbb{C}^2$. Επομένως, για κάθε σημείο $z_k(t)$ ισχύει $\partial_z F(t, z_k(t)) \neq 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{C}$, και πιο συγκεκριμένα παντού εκτός από ένα διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Εν συνεχεία, παραγωγίζοντας την $F(t, z_k(t)) = 0$ ως προς t, ιδέα που εντοπίζουμε και στην εργασία [3] λαμβάνουμε

$$\partial_t F(t, z_k(t)) + \partial_z F(t, z_k(t)) z_k'(t) = 0$$

ή αλλιώς, λόγω της θερμικής εξίσωσης που ικανοποιεί η F,

$$z_k'(t) = -\frac{\partial_t F(t, z_k(t))}{\partial_z F(t, z_k(t))} = -\frac{\partial_z^2 F(t, z_k(t))}{\partial_z F(t, z_k(t))}, \qquad \text{σχεδόν παντού στο } \mathbb{C}.$$

Επομένως, αν για την $z-$ τάξη της $F(t, z)$ γνωρίζουμε ότι $\rho_z < 1$, τότε, αν συνδυάσουμε την τελευταία σχέση με το Πόρισμα 7, προκύπτει

$$z_k'(t) = -2 \sum_{j \neq k} \frac{1}{z_k(t) - z_j(t)}, \qquad \text{για όλα σχεδόν τα } t \in \mathbb{C}.$$

Παράδειγμα 7.

Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$z_k'(t) = -2 \sum_{j \neq k} \frac{1}{z_k(t) - z_j(t)}, \qquad 1 \leq k \leq N,$$

με αρχική συνθήκη

$$z_k(0) = a_k \qquad 1 \leq k \leq N,$$

με $a_1, \ldots, a_N$ διακριτοί, μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί. Με στόχο την επίλυση του συστήματος, διαμορφώνουμε το πολυώνυμο

$$f(z) := \left(1 - \frac{z}{a_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{a_N}\right) = 1 + A_1 z + \cdots + A_N z^N.$$

Τότε, το διάνυσμα $z_1(t), \ldots, z_N(t)$ της λύσης του συστήματος ταυτίζεται με το σύνολο των σημείων μηδενισμού της συνάρτησης

$$z \mapsto F(t, z) := 1 + \sum_{k=1}^{N} A_k P_k(t, z),$$

όπου $P_k(t, z)$ το θερμικό πολυώνυμο τάξεως k.

Κατ'αρχάς αφού $P_k(0, z) = z^k$, είναι προφανές ότι $F(0, z) = f(z)$. Επιπλέον, αφού η $F(t, z)$ είναι πολυώνυμο ως προς z θα έχει z-τάξη $= 0 < 1$. Έστω $z_1(t), ..., z_N(t)$ οι z-ρίζες της $F(t, z)$. Τότε, από το Θεώρημα 7 έπεται ότι ικανοποιούν το Σ.Δ.Ε. αλλά και τις αρχικές συνθήκες αφού

$$0 = F(0, z_k(0)) = f(z_k(0)) \Rightarrow z_k(0) = a_k, k \geq 1.$$

Αντίστροφα, έστω $z_1(t), ..., z_N(t)$ το διάνυσμα που επιλύει το Σ.Δ.Ε. με αρχικές συνθήκες

$$z_k(0) = a_k, k \geq 1.$$

Επειδή ικανοποιείται το Σ.Δ.Ε., τότε η ως προς t παράγωγος της $F(t, z_k(t))$ είναι 0 (βλ. Σχόλιο 3, Κεφ. 2). Ταυτόχρονα,

$$F(0, z_k(0)) = f(z_k(0)) = f(a_k) = 0 \Rightarrow F(t, z_k(t)) \equiv 0.$$

6.3 Άρτιες- Περιττές Λύσεις της Εξίσωσης θερμότητας

Άρτιες λύσεις

Ας υποθέσουμε ότι η αρχική συνθήκη $f(z)$ είναι άρτια ως προς z, δηλαδή $f(-z) = f(z)$. Τότε, από το Κεφάλαιο 2 και την έκφραση της λύσης της εξίσωσης θερμότητας $F(t, z)$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και εδώ ισχύει $F(t, -z) = F(t, z)$. Άρα $F(t, z) = \Phi(t, z^2)$, όπου η $\Phi(t, \mu)$ είναι ακέραια στο (t, μ). Αν η ρ_z είναι η z-τάξη της $F(t, z)$, τότε η μ- τάξη της $\Phi(t, \mu)$ είναι $\rho_z/2$. Επιπλέον, και η $\Phi(t, \mu)$ αποτελεί λύση ενός τύπου της εξίσωσης θερμότητας, συγκεκριμένα της εξίσωσης

$$\partial_t \Phi(t, z) = 4\mu \partial_\mu^2 \Phi(t, \mu) + 2\partial_\mu \Phi(t, \mu).$$

Τώρα, έστω $\pm z_1(t), \pm z_2(t), \ldots$ οι ρίζες της $F(t, z)$. Τότε τα σημεία μηδενισμού της $\Phi(t, \mu)$ είναι $\mu_1(t) = z_1(t)^2, \mu_2(t) = z_2(t)^2, \ldots$ και προκύπτει

$$\mu_k'(t) = -\frac{\partial_t \Phi(t, \mu_k(t))}{\partial_\mu \Phi(t, \mu_k(t))} = -4\mu_k(t)\frac{\partial_\mu^2 \Phi(t, \mu_k(t))}{\partial_\mu \Phi(t, \mu_k(t))} - 2, \qquad \text{σχεδόν παντού στο } \mathbb{C}.$$

Αν $\rho_z < 2$, τότε η μ-τάξη της $\Phi(t, \mu)$ είναι < 1.

Σε αυτήν την περίπτωση

$$\mu_k'(t) = -2 - 8\mu_k(t) \sum_{j \neq k} \frac{1}{\mu_k(t) - \mu_j(t)}, \qquad \text{σχεδόν παντού στο } \mathbb{C}.$$

Περιττές λύσεις

Αν για την αρχική συνάρτηση $f(z)$ ισχύει $f(-z) = -f(z)$, δηλαδή είναι περιττή, τότε ομοίως η λύση $F(t, z)$ της εξίσωσης θερμότητας επίσης ικανοποιεί τη σχέση $F(t, -z) = -F(t, z)$. Άρα $F(t, z) = z\Psi(t, z^2)$, όπου η $\Psi(t, \mu)$ είναι ακέραια ως προς (t, μ) και, αν ρ_z η z-τάξη της $F(t, z)$, τότε η μ-order της $\Psi(t, \mu)$ είναι $\rho_z/2$. Επιπλέον, η $\Psi(t, \mu)$ ικανοποιεί έναν άλλον τύπο της εξίσωσης θερμότητας:

$$\partial_t \Psi(t, z) = 4\mu \partial_\mu^2 \Psi(t, \mu) + 6\partial_\mu \Psi(t, \mu).$$

Αν οι $z_0(t) \equiv 0, \pm z_1(t), \pm z_2(t), \ldots$ αποτελούν τα σημεία μηδενισμού της $z \mapsto F(t,z)$, τότε τα αντίστοιχα σημεία μηδενισμού της $\Psi(t,\mu)$ είναι τα $\mu_1(t) = z_1(t)^2$, $\mu_2(t) = z_2(t)^2, \ldots$, και, αν παραγωγίσουμε, προκύπτει (6.3)

$$\mu_k'(t) = -\frac{\partial_t \Psi(t,\mu_k(t))}{\partial_\mu \Psi(t,\mu_k(t))} = -4\mu_k(t)\frac{\partial_\mu^2 \Psi(t,\mu_k(t))}{\partial_\mu \Psi(t,\mu_k(t))} - 6 \qquad \text{σχεδόν παντού στο } \mathbb{C}.$$

Αν $\rho_z < 2$, οπότε η μ-τάξη της $\Psi(t,\mu)$ είναι μικρότερη του 1, μπορούμε να καταλήξουμε στη σχέση

$$\mu_k'(t) = -6 - 8\mu_k(t)\sum_{j\neq k}\frac{1}{\mu_k(t) - \mu_j(t)}.$$

6.4 Γενικά παραδείγματα

Ξεκινάμε με την παρακάτω Παρατήρηση:

Αν η $F(t,z)$ επιλύει την εξίσωση θερμότητας, με $F(0,z) = f(z)$, τότε η συνάρτηση

$$G(t,z) := F(t, z+2\lambda t)\, E_\lambda(t,z) = F(t,z+2\lambda t)\, e^{\lambda^2 t + \lambda z},$$

όπου λ είναι μία μιγαδική σταθερά, επίσης επιλύει την εξίσωση θερμότητας με αρχική συνθήκη $G(0,z) = e^{\lambda z} f(z)$.

Αντίστροφα, αν $G(t,z)$ ακέραια λύση της εξίσωσης θερμότητας με αρχική συνθήκη $G(0,z) = e^{\lambda z} f(z)$, τότε

$$G(t,z) = e^{\lambda^2 t + \lambda z} F(t, z+2\lambda t), \quad z,t \in \mathbb{C}$$

(βλ. Πόρισμα 1, Κεφ. 2).

(i) Έστω $F(t,z)$ και $G(t,z)$ ακέραιες λύσεις της εξίσωσης θερμότητας με αρχικές συνθήκες

$$f(z) = \prod_k \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \qquad \text{και} \qquad g(z) = e^{\lambda z}\prod_k \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)$$

αντίστοιχα, όπου η τάξη του γινομένου $\Pi_k[1 - (z/a_k)]$ είναι $\sigma < 1$. Δηλαδή, $\exists \alpha < 1$ ώστε $\sum_k |\alpha_k|^{-\alpha} < \infty$ (βλ. Κεφάλαιο 4). Τότε, όπως έχουμε προαναφέρει, η z-τάξη της $F(t,z)$ είναι σ. Συμπεραίνουμε ότι, αν $z_1(t), z_2(t), \ldots$ είναι τα σημεία μηδενισμού της $z \mapsto F(t,z)$, τότε

$$\Sigma_k' |z_k(t)|^{-\alpha} < \infty$$

για κάποιο $\alpha < 1$ (ο τόνος στο παραπάνω άθροισμα σημαίνει ότι παραλείπουμε τα μηδενικά $z_k(t)$). Λόγω της αρχικής παρατήρησης,

$$G(t,z) = e^{\lambda^2 t + \lambda z} F(t, z+2\lambda t), \quad z,t \in \mathbb{C}.$$

Άρα, αν τα $w_1(t), w_2(t), \dots$ είναι τα σημεία μηδενισμού της $G(t,z)$, τότε

$$w_k(t) = z_k(t) - 2\lambda t, \qquad k \geq 1,$$

και καταλήγουμε στο ότι $\Sigma'_k |w_k(t)|^{-\alpha} < \infty$.

Τελικά, αφού από την τελευταία σχέση λαμβάνουμε $w'_k(t) = z'_k(t) - 2\lambda$, προκύπτει

$$w'_k(t) = -2\lambda - 2\sum_{j\neq k} \frac{1}{w_k(t) - w_j(t)}, \qquad \text{σχεδόν παντού στο } \mathbb{C}.$$

(ii) Έστω, ομοίως, $F(t,z)$ μία ακέραια λύση της εξίσωσης θερμότητας με αρχική συνθήκη

$$f(z) = e^{\lambda z} z^d \prod_k \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{z/a_k},$$

όπου, $d \geq 0$ ακέραιος και η τάξη ρ της $f(z)$ είναι < 2. Τότε, από το Πόρισμα 7, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα σημεία μηδενισμού $z_1(t), z_2(t), \dots$ της $z \mapsto F(t,z)$ ικανοποιούν την εξής σχέση:

$$z'_k(t) = -2\lambda - 2\sum_{j\neq k} \left[\frac{1}{z_k(t) - z_j(t)} + \frac{1}{z_j(t)}\right], \qquad \text{σχεδόν παντού στο } \mathbb{C}.$$

Κεφάλαιο 7

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. **Η Συνάρτηση Ζήτα**

   Η συνάρτηση Ζήτα είναι η αναλυτική επέκταση της εξής απολύτως συγκλίνουσας σειράς:

   $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 1$$

2. **Η Συνάρτηση Γάμμα**

   Η συνάρτηση Γάμμα, με πεδίο ορισμού κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $\Re(s) > 0$, δίνεται από τον τύπο:

   $$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

3. **Τύπος διπλασιασμού Legendre στη συνάρτηση Γάμμα**

   $$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

4. **Τύπος Poisson για Εκθετική Συνάρτηση**

   Η εκθετική συνάρτηση e^x αναπτύσσεται ως σειρά μέσω του παρακάτω τύπου:

   $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

5. **Το Θεώρημα Αναλυτικής Επέκτασης**

   Το θεώρημα αναλυτικής επέκτασης μιγαδικής συνάρτησης διατυπώνεται ως εξής: ‘Αν μία μιγαδική συνάρτηση ορίζεται σε ένα ανοικτό και συνεκτικό πεδίο του μιγαδικού επιπέδου, με τον ίδιο τύπο-αναλυτική έκφραση (εδώ, σειρά) μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση αυτή και σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, και μάλιστα με τρόπο μοναδικό.'

6. **Τύπος Παραγοντικού του Stirling**

   Ο τύπος του Stirling δίνει μία ασυμπτωτική προσέγγιση του παραγοντικού $n!$, για μεγάλα n, ως εξής:

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

7. **Ορισμός Subharmonic Συνάρτησης**

   Μία συνάρτηση $\phi(z)$, ορισμένη σε ανοικτό και συνεκτικό πεδίο Ω του μιγαδικού επιπέδου, η οποία παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, είναι **subharmonic** στο Ω, αν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και σε κάθε δίσκο $D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset \Omega$ ισχύει η σχέση:

$$\phi(z_0) \leq \frac{1}{\pi r^2}\int_{D_r(z_0)} \phi(z)\, dxdy$$

   Σε μία αυστηρότερη εκδοχή του ορισμού, απαιτείται η σχέση αυτή να ισχύει για κάθε z_0 σχεδόν παντού στο Ω.

8. **Λήμμα για Subharmonic συναρτήσεις.**

   Έστω $\{\phi_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία subharmonic συναρτήσεων σε ένα χωρίο Ω του μιγαδικού επιπέδου τέτοια ώστε η

$$\Phi(z) := \sup_k \phi_k(z), \qquad z \in \Omega,$$

   να είναι πεπερασμένη. Τότε η $\Phi(z)$ είναι subharmonic στο Ω.

   Απόδειξη: Αν $D_r(z_0) \subset \Omega$, τότε η υπόθεση που αφορά τις subharmonic συναρτήσεις συνεπάγεται ότι

$$\phi_k(z_0) \leq \frac{1}{\pi r^2}\int_{D_r(z_0)} \phi_k(z)\, dxdy \leq \frac{1}{\pi r^2}\int_{D_r(z_0)} \Phi(z)\, dxdy, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

   Επομένως

$$\Phi(z_0) = \sup_k \phi_k(z_0) \leq \frac{1}{\pi r^2}\int_{D_r(z_0)} \Phi(z)\, dxdy, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

   Με δεδομένο όμως ότι το $D_r(z_0) \subset \Omega$ είναι τυχαίο, προκύπτει τελικά ότι η $\Phi(z)$ είναι subharmonic στο Ω.

9. **Θεώρημα Παραγοντοποίησης Hadamard**

Κάθε μη μηδενική ακέραια συνάρτηση f πεπερασμένης τάξεως $\rho \geq 0$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(z) = e^{Q(z)} z^m \prod_{k \geq 1} e_p \left(\frac{z}{\alpha_k} \right), \qquad z \in \mathbb{C},$$

όπου $Q(z)$ πολυώνυμο βαθμού $\leq \rho$, $m \geq 0$ η πολλαπλότητα της ρίζας 0 και $\alpha_1, \alpha_2, ...,$ οι ρίζες της f διατεταγμένες κατά αύξουσα πολλαπλότητα.

Βιβλιογραφία

[1] N.C. de Bruijn, The roots of trigonometric integrals, *Duke J. Math.* **17** (1950), 197–226.

[2] Y. Cha, H. Ki, and Y.O. Kim, A note on differential operators of infinite order, *J. Math. Anal. Appl.* **290** (2004), 534–541.

[3] G. Csordas, W. Smith, and R.S. Varga, Lehmer pairs of zeros, the de Bruijn-Newman constant Λ, and the Riemann hypothesis, *Constr. Approx.* **10** (1994), 107–129.

[4] D.K. Dimitrov and P.K. Rusev, Zeros of entire Fourier transforms, *East Journal on Approximations*, **17**, No. 1 (2011), 1–110.

[5] E. Hille, *Analytic Function Theory*, *Volume II*, Chelsea Publishing Co., New York, N.Y., 1977.

[6] D. Khavinson, private communication, 2020.

[7] H. Ki and Y.O. Kim, De Bruijn's question on the zeros of Fourier transforms, *Journal d' Analyze Mathématique*, **91** (2003), 369–387.

[8] H. Ki, Y.O. Kim, and J. Lee, On the de Bruijn-Newman constant, *Advances in Mathematics*, **22** (2009), 281–306.

[9] S.G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, Second Edition, AMS Chelsea Publishing, 2001.

[10] E.H. Lieb and M. Loss, *Analysis*, Second Edition, Graduate Studies in Mathematics, Volume 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[11] C.M. Newman, Fourier transforms with only real zeroes, *Proc. Amer. Math. Soc.* **61** (1976), 246–251.

[12] V.G. Papanicolaou, E. Kallitsi and G. Smyrlis, Analytic Solutions of the Heat Equation, *Electr. J. Diff.Equ.* **2021** (2021), 1–25.

[13] V.G. Papanicolaou, E. Kallitsi and G. Smyrlis, On the Order and the Type of an Entire Function, *Analysis Mathematica*, DOI 10.1007/s10476-023-0210-x.

[14] P. Poláčik and V. Šverák, Zeros of complex caloric functions and singularities of complex viscous Burgers equation, *J. reine angew. Math.*, **616** (2008), 205–217.

[15] D.H.J. Polymath, Effective Approximation of Heat Flow Evolution of the Riemann ξ Function, and a New Upper Bound for the de Bruijn-Newman constant. arXiv:1904.12438 [math.NT] (29 Apr 2019).

[16] G.F.B. Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse (On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity), *Monatsberichte der Berliner Akademie* (November 1859), 671–680.

[17] W.Rudin, *Real and Complex Analysis*, MacGRAW -HILL, 3d edition, 1987.

[18] B. Rodgers and T. Tao, The de Bruijn-Newman constant is nonnegative, arXiv:1801.05914v1 [math.NT] (18 Jan 2018).

[19] G. Szego, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 4th ed., Vol. 23, Providence, RI 1975.

[20] E. Trubowitz, The Inverse Problem for Periodic Potentials, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **30** (1977), 321–337.

[21] Δ. Χ.Κραββαρίτης, Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση (2006).