



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Προβλήματα Σχεδιασμού Ανάδρασης Συστημάτων Ελέγχου

Διδακτορική διατριβή

ΧΡΥΣΑΦΗ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ

Επιβλέπων καθηγητής:
ΚΑΡΑΦΥΛΛΗΣ ΙΑΣΩΝ

Απρίλιος 2023

Αικατερίνη Χρυσάφη

Διδακτόρισα της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών ΕΜΠ, Τομέας Μαθηματικών

© 2023 All rights reserved

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξολοκλήρου ή τμήματος αυτής για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσεως, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό, πρέπει να απευθύνονται προς τη συγγραφέα.

Προβλήματα Σχεδιασμού Ανάδρασης Συστημάτων Ελέγχου

Διδακτορική Διατριβή της
ΧΡΥΣΑΦΗ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗΣ

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την: 27/04/2023

Τριμελής συμβουλευτική επιτροπή

- (1) Καραφύλλης Ιάσων (Επιβλέπων), Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- (2) Τσινιάς Ιωάννης (Μέλος), Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- (3) Κοκκίνης Βασίλειος (Μέλος), Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Επταμελής εξεταστική επιτροπή

- (1) Καραφύλλης Ιάσων, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- (2) Τσινιάς Ιωάννης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- (3) Κοκκίνης Βασίλειος, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- (4) Χαραλαμπίδης Αντώνιος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- (5) Γκιντίδης Δρόσος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- (6) Χρυσάφης Κωνσταντίνος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- (7) Κολέτσος Ιωάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Ευχαριστίες

Πρωτίστως θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της διατριβής μου, κ. Καραφύλλη Ιάσωνα, Αναπληρωτή Καθηγητή. Η συνεχής υποστήριξη της προσπάθειάς μου, η άρτια επιστημονική καθοδήγηση και οι συμβουλές που μου παρείχε, αποτέλεσαν κομβικούς παράγοντες για την πραγμάτωση της παρούσας εργασίας. Θεωρώ ιδιαίτερα ευνοημένο τον εαυτό μου που μαθήτευσα στον σπουδαίο αυτόν πανεπιστημιακό Δάσκαλο που τυγχάνει διεθνούς αναγνώρισης στο πεδίο της μαθηματικής θεωρίας ελέγχου. Μου άνοιξε νέους δρόμους στη μαθηματική σκέψη και με μύησε στον καθαρά επιστημονικό τρόπο έρευνας.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω επίσης στον κ. Τσινιά Ιωάννη, Καθηγητή, ο οποίος αδιάκοπα πρόσφερε τόσο την επιστημονική όσο και την ψυχολογική υποστήριξη που επέβαλαν οι εκάστοτε συνθήκες προκειμένου να επιτευχθούν οι τιθέμενοι στόχοι της εν λόγω ερευνητικής προσπάθειας. Πέρα από τη δεσπόζουσα παρουσία του στο χώρο της μαθηματικής επιστήμης, αποτελεί και ένα σπάνιο άνθρωπο από αυτούς που δύσκολα συναντάει κανείς στη ζωή. Ιδιαίτερα τον ευχαριστώ για την εμπιστοσύνη με την οποία με περιέβαλε από την εκκίνηση της μεταπτυχιακής μου εργασίας μέχρι το πέρας της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Ελπίζω να φάνηκα αντάξια...

Θερμές ευχαριστίες αποδίδω στον κ. Κοκκίνη Βασίλειο, Αναπληρωτή Καθηγητή, ο οποίος δέχτηκε να συμμετάσχει στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή της εργασίας μου. Επιπλέον, ευχαριστώ ιδιαιτέρως τους κυρίους: Χαραλαμπίδου Αντώνιο, Καθηγητή, Γκιντίδη Δρόσο, Καθηγητή, Χρυσάφινο Κωνσταντίνο, Καθηγητή και Κολέτσο Ιωάννη, Αναπληρωτή Καθηγητή, οι οποίοι δέχτηκαν να πλαισιώσουν την επταμελή εξεταστική επιτροπή της διατριβής μου. Η συμμετοχή όλων των παραπάνω στην επιτροπή, αποτελεί μεγάλη τιμή για εμένα.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον Θεοδόση Διονύσιο, διδάκτορα ΕΜΠ, για την πολύτιμη επιστημονική και τεχνική βοήθεια που προσέφερε σε πολλά σημαντικά σημεία της παρούσας διατριβής, καθώς και για τα ιδιαίτερα εποικοδομητικά του σχόλια σχετικά με τη συγγραφή

της διατριβής και τη διαδικασία της τελικής εξέτασης.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου: Σοφία Γκόρα, Μιχάλη Χαϊντούτη, Θεόβη Στύλλου και Σήλια Μανούσιου για την ενθάρρυνση και τη στήριξή τους σε ιδιαίτερα δύσκολες στιγμές, καθώς και για τις όμορφες αναμνήσεις που δημιουργήσαμε μαζί και έκαναν αυτή τη διαδικασία λιγότερο επώδυνη. Επίσης, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στους: Γιώργο Φαρμάκη, Μαθηματικό PhD, Αλέξανδρο Κολιάτο, Μηχανολόγο Μηχανικό και Ερευνητή και Δέσποινα Καμπουρίδου, Ηλεκτρολόγο Μηχανικό PhD, οι οποίοι με έκαναν να πιστέψω στις δυνατότητες μου και με ενέπνεαν διαρκώς να συνεχίσω την προσπάθειά μου.

Το έργο αυτό δε θα είχε ολοκληρωθεί χωρίς την αμέριστη συμπαράσταση και υποστήριξη από την οικογένειά μου καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Όλοι τους ήταν πάντα εκεί όποτε τους χρειάστηκα και δε σταμάτησαν ποτέ να πιστεύουν σε εμένα και στις δυνάμεις μου. Ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου: Θεοδώρα και Κώστα, που από πολύ μικρή μου εμφύσησαν την αγάπη για το διάβασμα και τη μάθηση και με παρότρυναν να εμβαθύνω όλο και περισσότερο στο αντικείμενό μου. Επιπλέον, ευχαριστώ τα αδέρφια μου: Σταυρούλα και Χρήστο, για τις όμορφες και άκρως αγχολυτικές στιγμές που περάσαμε μαζί.

Τελευταίος μεν, εξίσου σημαντικός δε, στον κατάλογο των ευχαριστιών βρίσκεται ο Βαγγέλης Πλιάκης. Ήρθε στη ζωή μου σε μια ιδιαίτερα δύσκολη και κομβική περίοδο και έκτοτε, δε σταμάτησε να βρίσκεται δίπλα μου σε όμορφες και άσχημες στιγμές αυτής της διαδικασίας. Μου πρόσφερε περίσσεια συμπαράσταση και ενθάρρυνση και έδειξε αξιοθαύμαστη υπομονή και κατανόηση όταν οι συνθήκες ήταν άκρως πιεστικές για εμένα. Τον ευχαριστώ από τα βάθη της καρδιάς μου για πάρα πολλά πράγματα και του οφείλω ακόμα περισσότερα.

Περίληψη

Η παρούσα διατριβή κλιμακώνεται σε δύο αυτόνομα και ανεξάρτητα μέρη, σε καθένα από τα οποία μελετάται και ένα διαφορετικό πρόβλημα ελέγχου και παρουσιάζονται διαφορετικές μεθοδολογίες σχεδιασμού ανάδρασης για το εκάστοτε σύστημα. Κατά το πρώτο μέρος, παρουσιάζουμε ένα νέο σχήμα προσαρμοστικού συνοριακού ελέγχου για παραβολικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ) στις οποίες εμφανίζονται άγνωστες παράμετροι. Το εν λόγω σχήμα, είναι βασισμένο στην αρχή της *certainty equivalence* και συνοδεύεται από έναν εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων ο οποίος λειτουργεί με *event-triggering* βασισμένο στο μέγεθος του *regulation error*. Επιπλέον, το νέο σχήμα εγγυάται εκθετική σύγκλιση της κατάστασης στο μηδέν ως προς την L^2 νόρμα, καθώς και σύγκλιση των εκτιμήσεων των άγνωστων παραμέτρων στις πραγματικές τους τιμές εντός πεπερασμένου χρόνου. Η αντίστοιχη ανάλυση πραγματοποιείται με σημείο αναφοράς ένα συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών με συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet, όπου οι μοναδικές άγνωστες παράμετροι είναι ο *reaction coefficient* και το *high frequency gain*. Αξίζει να σημειωθεί ότι για το συγκεκριμένο πρόβλημα, δεν είχε αναπτυχθεί πρότινος κάποιο προσαρμοστικό σχήμα ελέγχου το οποίο μπορεί να χειριστεί την άγνωστη παράμετρο του *high frequency gain*. Επιπλέον, παρατίθεται ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα όπου επιτρέπεται η σύγκριση του σχήματος που περιγράφεται, με άλλα προσαρμοστικά σχήματα ελέγχου που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία. Το δεύτερο μέρος εστιάζει στην επέκταση πρόσφατων αποτελεσμάτων από τη βιβλιογραφία σχετικά με τη σταθεροποίηση γραμμικών ως προς τον έλεγχο μη γραμμικών συστημάτων, μέσω δειγματοληπτικής ανάδρασης. Συγκεκριμένα, εξάγονται ικανές συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν σταθεροποίηση με χρήση δειγματοληπτικής και χρονικά μεταβαλλόμενης ανάδρασης σε μια μεγάλη κατηγορία μη γραμμικών συστημάτων ελέγχου των οποίων τα δυναμικά είναι γραμμικά στην είσοδο. Οι προτεινόμενες συνθήκες εκφράζονται μέσω της Lie άλγεβρας των δυναμικών του συστήματος, καθώς και μιας γενικευμένης συνάρτησης ελέγ-

χου Lyapunov. Τα κεντρικά αποτελέσματα αποτελούν γενικεύσεις του γνωστού Θεωρήματος “Artstein-Sontag” πάνω στην ασυμπτωτική σταθεροποίηση μέσω μιας σχεδόν λείας ανάδρασης. Η ανάλυση που πραγματοποιείται, περιορίζεται στην περίπτωση μιας εισόδου σε γραμμικά ως προς τον έλεγχο μη γραμμικά συστήματα με μη μηδενικό drift term, ωστόσο, τα εξαγόμενα συμπεράσματα μπορούν εύκολα να επεκταθούν και για την περίπτωση πολλαπλών εισόδων.

Abstract

The present thesis is organized in two independent parts. Each part contains a control design problem for different types of control systems. In the first part we focus on control systems described by parabolic PDEs and we present a new certainty equivalence-based adaptive boundary control scheme with a least-squares identifier of an event-triggering type, where the triggering is based on the size of the regulation error (as opposed to the identifier updates being triggered by the estimation error, or the control changes being triggered by the regulation error). The scheme guarantees exponential convergence of the state to zero in the L^2 norm and a finite-time convergence of the parameter estimates to the true values of the unknown parameters. The scheme is developed for a specific benchmark problem with Dirichlet actuation, where the only unknown parameters are the reaction coefficient and the high-frequency gain. For this specific problem, no existing adaptive scheme can handle the unknown high-frequency gain. Additionally, an illustrative example allows the comparison with other adaptive control design methodologies. The work presented in the second part, extends recent results concerning sampled-data feedback stabilization for affine in the control of nonlinear systems with nonzero drift term, under the presence of a generalized control Lyapunov function associated with appropriate Lie algebraic hypotheses concerning the dynamics of the system. The main results of present work, constitute a generalization of the well-known “Artstein-Sontag” theorem on asymptotic stabilization by means of an almost smooth feedback controller. The analysis is limited to the affine single-input nonlinear systems with nonzero drift term, however, the results can also easily be extended to the multi-input case.

Πρόλογος

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος διδακτορικών σπουδών του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής ΕΜΦΕ του ΕΜΠ. Η κλιμάκωσή της πραγματοποιείται σε δύο αυτόνομα και ανεξάρτητα μέρη, το περιεχόμενο των οποίων περιγράφεται συνοπτικά παρακάτω.

Κατά το πρώτο μέρος, αναπτύσσονται προσαρμοστικοί έλεγχοι στην περίπτωση των μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) παραβολικού τύπου. Συγκεκριμένα, η μελέτη επικεντρώνεται σε παραβολικές ΜΔΕ στις οποίες εμφανίζονται άγνωστες παράμετροι. Στο πλαίσιο της εν λόγω προσέγγισης, θεωρούνται προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών, όπου ο έλεγχος ενεργοποιείται σε μία από τις συνοριακές συνθήκες της ΜΔΕ (συνοριακός έλεγχος). Η μέθοδος που εφαρμόζεται, συνδυάζει και περιλαμβάνει μεθόδους σχεδιασμού ανάδρασης που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία και βασίζεται στην προσέγγιση της τιμής της άγνωστης παραμέτρου με χρήση υβριδικών παρατηρητών. Προκύπτει επομένως ένα certainty-equivalence προσαρμοστικό σχήμα ελέγχου, εφοδιασμένο με έναν εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων (least-squares identifier) βασισμένο στην εκθετική σύγκλιση (regulation) της κατάστασης στο μηδέν σε πεπερασμένο χρόνο. Το σχήμα αναπτύχθηκε προς επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος αναφοράς, όπου τις άγνωστες παραμέτρους αποτελούν: ο reaction coefficient της ΜΔΕ και το high-frequency gain. Το νέο προσαρμοστικό σχήμα ελέγχου εγγυάται:

- (i) Ολική εκθετική σύγκλιση της κατάστασης του συστήματος στο μηδέν με τον ίδιο ρυθμό σύγκλισης που παρουσιάζει το σύστημα κλειστού βρόχου με ανάδραση που σχεδιάζεται με γνώση των άγνωστων παραμέτρων (nominal feedback).
- (ii) Σύγκλιση των εκτιμήσεων των άγνωστων παραμέτρων που εμφανίζονται στο αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών στις ακριβείς πραγματικές τιμές τους εντός πεπερασμένου χρόνου, υπό συγκεκριμένες συνθήκες.

Η δομή του Μέρους I της παρούσας διατριβής είναι η εξής: Στο Κεφάλαιο 1, γίνεται μια εισαγωγή στο πρόβλημα που πρόκειται να μας απασχολήσει. Αρχικά, γίνεται αναφορά σε προηγούμενες μεθοδολογίες σχεδιασμού προσαρμοστικού συνοριακού ελέγχου αποκλειστικά για γραμμικές παραβολικές ΜΔΕ και παρατίθενται κάποιες πολυπλοκότερες περιπτώσεις ΜΔΕ στις οποίες έχει επεκταθεί η ιδέα της ανάπτυξης προσαρμοστικών συνοριακών ελέγχων. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται εν συντομία τα χαρακτηριστικά και τίθενται οι στόχοι του προτεινόμενου προσαρμοστικού σχήματος ελέγχου. Στο Κεφάλαιο 2, περιγράφεται λεπτομερώς το προτεινόμενο σχήμα προσαρμοστικού συνοριακού ελέγχου και γίνεται ανάλυση των επιμέρους συνιστωσών του: δηλαδή του certainty-equivalence ελέγχου, του event-trigger και του εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων. Επιπλέον, διατυπώνεται το κεντρικό αποτέλεσμα του πρώτου μέρους της παρούσας διατριβής (Θεώρημα 2.5.1) και πραγματοποιείται λεπτομερής συζήτηση σε ό,τι αφορά τις συνέπειές του. Το Κεφάλαιο 3, είναι αφιερωμένο στην επιλογή της συνοριακής ανάδρασης στην περίπτωση όπου οι τιμές των άγνωστων παραμέτρων της ΜΔΕ είναι γνωστές. Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε τον όρο: «Βασικός Νόμος Ανάδρασης (Nominal Feedback)». Συγκεκριμένα, δείχνεται με ποιόν τρόπο το προτεινόμενο προσαρμοστικό σχήμα μπορεί να συνδυαστεί με τις μεθόδους σχεδιασμού: backstepping και reduced model. Το Κεφάλαιο 4, περιλαμβάνει ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα κατά το οποίο, η απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου υπό το προτεινόμενο προσαρμοστικό σχήμα συγκρίνεται με την αντίστοιχη απόκριση που προκύπτει εφαρμόζοντας:

- τον προσαρμοστικό έλεγχο με passive identifier
- τον backstepping έλεγχο με γνωστές παραμέτρους

Τα αποτελέσματα των παραπάνω συγκρίσεων αναλύονται εκτενώς και διαφαίνονται άμεσα τα πλεονεκτήματα που προσφέρει η εφαρμογή του προτεινόμενου προσαρμοστικού σχήματος ελέγχου. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5, περιλαμβάνεται η απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος που διατυπώνεται κατά το Κεφάλαιο 2.

Κατά το δεύτερο μέρος, μελετάται το πρόβλημα της σταθεροποίησης μη γραμμικών, αυτόνομων συστημάτων πεπερασμένης διάστασης μέσω δειγματοληπτικής ανάδρασης. Αναφορικά με το πρόβλημα της σταθεροποίησης μη γραμμικών συστημάτων ελέγχου μέσω δειγματοληπτικής και υβριδικής ανάδρασης έχει καταγραφεί πληθώρα σημαντικών συνεισφορών στη σχετική βιβλιογραφία. Στην παρούσα διατριβή, επεκτείνονται

τα πλέον πρόσφατα αποτελέσματα τα οποία αφορούν στη σταθεροποίηση μέσω δειγματοληπτικής ανάδρασης γραμμικών ως προς τον έλεγχο μη γραμμικών συστημάτων (affine in the control nonlinear systems) με μη μηδενικό drift term, δηλαδή με μη μηδενικό όρο ο οποίος είναι ανεξάρτητος από τη μεταβλητή της εισόδου ελέγχου, παρουσία μιας γενικευμένης συνάρτησης ελέγχου Lyapunov συνοδευόμενη από κατάλληλες Lie αλγεβρικές υποθέσεις στις οποίες εμπλέκονται τα δυναμικά του συστήματος. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν, επεκτείνουν αποτελέσματα προηγούμενων εργασιών όπου οι συνθήκες είναι περισσότερο περιοριστικές. Η δομή του Μέρους II της παρούσας διατριβής είναι η εξής:

Στο Κεφάλαιο 6, πραγματοποιείται μία μικρή παρουσίαση του προβλήματος σταθεροποίησης που μελετάται και εισάγονται οι απαραίτητοι προαπαιτούμενοι ορισμοί. Στο Κεφάλαιο 7, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας και παρατίθενται σχόλια και μερικές συγκρίσεις με συμπεράσματα εργασιών που έχουν προηγηθεί και ασχολούνται με το ίδιο πρόβλημα. Στο Κεφάλαιο 8, παρατίθενται αναλυτικά οι αποδείξεις των κεντρικών αποτελεσμάτων. Τέλος, το Κεφάλαιο 9, περιλαμβάνει ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα όπου αποτυπώνεται το περιεχόμενο των προτάσεων που διατυπώνονται κατά το Κεφάλαιο 7.

Περιεχόμενα

Συμβολισμοί και Ακρωνύμια	1
I Ανάπτυξη προσαρμοστικών συνοριακών ελέγχων σε παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις με άγνωστες παραμέτρους	3
1 Εισαγωγή	4
2 Το προσαρμοστικό σχήμα ελέγχου	7
2.1 Ο προσαρμοστικός νόμος ελέγχου	7
2.2 Ο Certainty-Equivalence έλεγχος	9
2.3 Το event-trigger	9
2.4 Ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων	11
2.5 Βασικό αποτέλεσμα: Ιδιότητες του συστήματος υπό τον προσαρμοστικό έλεγχο	14
2.6 Συζήτηση επί του regulation-triggered προσαρμοστικού σχήματος	15
3 Κατασκευή του βασικού νόμου ανάδρασης	18
3.1 Σχεδιασμός Backstepping	18
3.2 Σχεδιασμός με Reduced Model	21
4 Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα	22
4.1 Περίπτωση 1: Άγνωστος reaction coefficient	22
4.2 Περίπτωση 2: Δύο άγνωστες παράμετροι	25
4.3 Σύγκριση με τον passive identifier	27
5 Απόδειξη βασικού αποτελέσματος	31
5.1 Βοηθητικά αποτελέσματα	31
5.1.1 Πρώτο βοηθητικό αποτέλεσμα	31
5.1.2 Δεύτερο βοηθητικό αποτέλεσμα	41
5.1.3 Τρίτο βοηθητικό αποτέλεσμα	42

5.2 Απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1	44
II Μία γενικευμένη κλάση Συναρτήσεων Ελέγχου Lyapunov και σταθεροποίηση μέσω δειγματοληπτι- κής ανάδρασης	50
6 Εισαγωγή	51
6.1 Παρουσίαση προβλήματος	51
6.2 Ορισμοί	52
6.2.1 Διατυπώσεις	52
6.2.2 Παρατηρήσεις	54
6.2.3 Επεκτάσεις	54
6.3 Βοηθητικές έννοιες	55
6.3.1 Lie brackets	56
6.3.2 Ένα υποσύνολο της Lie Άλγεβρας $Lie\{f, g\}$	57
7 Κύρια αποτελέσματα	59
7.1 Διατυπώσεις Προτάσεων	59
7.2 Σχόλια και Παρατηρήσεις	61
8 Αποδείξεις των Αποτελεσμάτων	63
8.1 Απόδειξη της Πρότασης 7.1.1:	63
8.2 Απόδειξη της Πρότασης 7.1.2	73
9 Παράδειγμα	76
9.1 Γενική μορφή συστήματος	76
9.2 Ειδική περίπτωση	81
Παραρτήματα	87
A' Η Ανισότητα Cauchy-Schwartz και η Ταυτότητα του Parseval	88
B' Απόδειξη του Λήμματος 2.4.1	89
Γ' Αποδείξεις των Λημμάτων 5.1.1-5.1.4	95
Δ' Εξαγωγή της (5.34)	104
E' Συναρτήσεις Ελέγχου Lyapunov και η συνθήκη "Artstein-Sontag"	106

ΣΤΑγκύλη Lie και η Campbell-Baker-Hausdorff Formula	108
Z' Εξαγωγή των σχέσεων (8.9)-(8.11)	111
Βιβλιογραφία	116

Συμβολισμοί και Ακρωνύμια

Συμβολισμοί

- $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$. Συμβολίζουμε με Z_+ το σύνολο όλων των μη αρνητικών ακεραιών.
- Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα σύνολο για το οποίο ισχύει: $\text{int}(U) \neq \emptyset$. Θεωρούμε το υποσύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με $C^0(U; \Omega)$ την κλάση των συνεχών συναρτήσεων ορισμένων στο σύνολο U , οι οποίες λαμβάνουν τιμές εντός του συνόλου Ω . Επιπλέον, συμβολίζουμε με $C^k(U; \Omega)$, όπου $k \geq 1$, την κλάση των συνεχών συναρτήσεων ορισμένων στο σύνολο U , οι οποίες έχουν συνεχείς παραγώγους έως και τάξης k στο U και λαμβάνουν τιμές εντός του συνόλου Ω .
- Έστω το διάνυσμα $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Συμβολίζουμε με $|x|$ τη συνήθη Ευκλείδεια νόρμα του x . Δηλαδή:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$$

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς a_i , $i = 1, \dots, m$. Συμβολίζουμε με $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ το διαγώνιο τετραγωνικό πίνακα ο οποίος έχει τα στοιχεία a_1, a_2, \dots, a_m στις θέσεις της κυρίας διαγωνίου του. Για έναν πίνακα $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$, η νόρμα πίνακα $|W|$ ορίζεται ως εξής:

$$|W| := \sup\{|Wx| : x \in \mathbb{R}^m, |x| = 1\}$$

- Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $L^2(0, 1)$ για το χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων μετρήσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων ορισμένων στο $(0, 1)$. Συμβολίζουμε και ορίζουμε την L^2 -νόρμα ως ακολούθως:

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(z)|^2 dz \right)^{1/2} < +\infty, \text{ για } f \in L^2(0, 1)$$

- Θεωρούμε το διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}_+$. Ο χώρος $C^0(I; L^2(0, 1))$ ορίζεται να είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $I \ni t \rightarrow u[t] \in L^2(0, 1)$.
- Έστω η δοθείσα συνάρτηση $u : \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Υιοθετούμε το συμβολισμό $u[t]$ για το προφίλ της u σε κάποιο συγκεκριμένο $t \geq 0$. Ειδικότερα: $(u[t])(z) = u(t, z)$, για κάθε $z \in [0, 1]$.

Ακρωνύμια

- **ΜΔΕ:** Μερική Διαφορική Εξίσωση
- **PE:** Persistence of Excitation
- **SDF-WGAS:**
Weakly Global(ly) Asymptotical(ly) Stabilizability/Stabilizable by Sampled-Data Feedback, ανάλογα με τα συμφραζόμενα.
- **(B)SDF-SGAS:**
Semi Global(ly) Asymptotical(ly) Stabilizability/Stabilizable by (Bounded) Sampled-Data Feedback, ανάλογα με τα συμφραζόμενα.
- **CBH:** Campbell-Baker-Hausdorff (για την CBH formula)
- **CLF:** Control Lyapunov Function
- **HCC:** Hermes Controllability Condition

Μέρος I

Ανάπτυξη προσαρμοστικών
συνοριακών ελέγχων σε
παραβολικές μερικές διαφορικές
εξισώσεις με άγνωστες
παραμέτρους

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η ανάπτυξη προσαρμοστικών ελέγχων στην περίπτωση συστημάτων που περιγράφονται μέσω παραβολικών ΜΔΕ αποτελεί επιτακτική ανάγκη λόγω της ευρείας χρήσης των παραβολικών ΜΔΕ σε σωρεία σημαντικών προβλημάτων ελέγχου. Ένα καίριο ζήτημα στις περισσότερες περιπτώσεις, αποτελεί το γεγονός ότι κάποιες από τις παραμέτρους που εμφανίζονται στην παραβολική ΜΔΕ δεν είναι επακριβώς γνωστές. Ειδικότερα, κάτι τέτοιο παρατηρείται στις περισσότερες εφαρμογές μηχανικής (παραπέμπουμε στην εργασία [16]), καθώς και σε πληθώρα βιολογικών εφαρμογών (βλέπε εργασία [60]). Σύμφωνα με τη μέχρι στιγμής βιβλιογραφία, έχουν προταθεί τρεις διαφορετικές μεθοδολογίες σχεδιασμού προσαρμοστικού συνοριακού ελέγχου για γραμμικές παραβολικές ΜΔΕ (παραπέμπουμε στις εργασίες [44], [46], [47], [70], [71] και [72]):

- (i) Lyapunov-based design,
- (ii) design with passive identifiers
- (iii) design with swapping identifiers.

Οι παραπάνω μεθοδολογίες παράγουν σχεδιασμούς τύπου certainty-equivalence (όπου εκτιμώνται άγνωστες παράμετροι της ΜΔΕ) με διαφορετικά σχήματα ελέγχου για τους εκάστοτε εκτιμητές. Η κύρια μέθοδος που χρησιμοποιείται για το σχεδιασμό ενός συνοριακού ελέγχου, είναι εκείνη του backstepping (βλέπε εργασίες [48], [69]).

Κατά την πρόσφατη βιβλιογραφία, η ιδέα της ανάπτυξης προσαρμοστικών ελέγχων έχει επεκταθεί και σε πολύπλοκότερες περιπτώσεις όπως:

- παραβολικές ΜΔΕ με καθυστέρηση εισόδου (input delays) (βλέπε εργασία [22])

- παραβολικές ΜΔΕ με κατανομημένες παραμέτρους και εισόδους (distributed parameters and inputs) (βλέπε εργασία [56])
- ΜΔΕ υπερβολικού τύπου (παραπέμπουμε στις εργασίες [4], [5], [6], [7], [14], [15], [18], [19], [20], [21] και [45]).

Ο σκοπός του πρώτου μέρους της παρούσας διατριβής, έγκειται στην ανάπτυξη ενός καινοτόμου προσαρμοστικού σχήματος συνοριακού ελέγχου τύπου certainty-equivalence για παραβολικές ΜΔΕ. Η προτεινόμενη μεθοδολογία, η οποία αναπτύσσεται στην εργασία [43], βασίζεται στην προέκταση του αντίστοιχου προσαρμοστικού σχήματος ελέγχου που παρουσιάζεται κατά την εργασία [41], όπου μελετώνται συστήματα πεπερασμένης διάστασης. Η εν λόγω προέκταση αναφέρεται στην περίπτωση συστημάτων άπειρης διάστασης που περιγράφονται μέσω παραβολικών ΜΔΕ.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα του εν λόγω certainty-equivalence προσαρμοστικού σχήματος συνοριακού ελέγχου ο οποίος είναι ενσωματωμένος με έναν regulation-based εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων (least-squares identifier), αποτελεί το γεγονός ότι έχει τη δυνατότητα να συνδυαστεί με όλες τις υπάρχουσες μεθοδολογίες σχεδιασμού στατικής συνοριακής ανάδρασης για παραβολικές ΜΔΕ. Ειδικότερα, το προτεινόμενο σχήμα μπορεί να συνδυαστεί με τις παρακάτω μεθοδολογίες:

- (i) **backstepping design**, η οποία προτάθηκε μέσω των εργασιών [48] και [69].
- (ii) **reduced model design**, η οποία αναπτύσσεται στις εργασίες [24] και [50].

Ένα άλλο βασικό χαρακτηριστικό του νέου σχήματος αφορά στην εξαγωγή του εκτιμητή της εκάστοτε άγνωστης παραμέτρου. Συγκεκριμένα, για την εν λόγω διαδικασία δεν απαιτείται η γνώση ενός κατάλληλου Lyapunov συναρτησιακού για την παραβολική ΜΔΕ που μελετάται. Το παραπάνω χαρακτηριστικό είναι απότοκο της ακριβούς εκτίμησης των παραμέτρων εντός πεπερασμένου χρόνου, δηλαδή, οι τροχιές του συστήματος κλειστού βρόχου με το προτεινόμενο προσαρμοστικό σχήμα, με το πέρας μίας περιόδου μετάβασης (transient period), ταυτίζονται με τις τροχιές του συστήματος κλειστού βρόχου υπό το βασικό νόμο ανάδρασης, ο οποίος προκύπτει από το ίδιο σύστημα με γνωστές τις τιμές των παραμέτρων της ΜΔΕ (Nominal Feedback).

Τέλος, επισημαίνεται ότι το σύστημα κλειστού βρόχου που προκύπτει με την εφαρμογή του προτεινόμενου προσαρμοστικού σχήματος ελέγχου, αποτελεί ένα υβριδικό απειροδιάστατο σύστημα. Η μελέτη

υβριδικών συστημάτων κατανεμημένων παραμέτρων (hybrid distributed-parameter systems) αποτελεί πόλο έλξης πληθώρας ερευνητών κατά την τελευταία δεκαετία. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες [31] και [67], οι οποίες ασχολούνται με παραβολικές ΜΔΕ, τις εργασίες [32], [33], [49] και [66], στις οποίες μελετώνται συστήματα τα οποία αναπαρίστανται μέσω υπερβολικών ΜΔΕ και τέλος τις εργασίες [39] και [55] οι οποίες αφορούν αφαιρετικά απειροδιάστατα συστήματα.

Κεφάλαιο 2

Το προσαρμοστικό σχήμα ελέγχου

Στο παρόν κεφάλαιο, παρουσιάζονται εκτενώς τα κεντρικά αποτελέσματα της εργασίας [43]. Συγκεκριμένα, αναπτύσσουμε ένα καινοτόμο σχήμα προσαρμοστικού συνοριακού ελέγχου για παραβολικές ΜΔΕ, το οποίο εγγυάται ολική εκθετική σύγκλιση της κατάστασης στο μηδέν, ως προς την L^2 νόρμα, καθώς και εκτίμηση των τιμών των άγνωστων παραμέτρων σε πεπερασμένο χρόνο. Πρόκειται για ένα certainty-equivalence προσαρμοστικό σχήμα ελέγχου, εφοδιασμένο με έναν εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων βασισμένο στην εκθετική σύγκλιση της κατάστασης στο μηδέν σε πεπερασμένο χρόνο. Το σχήμα αναπτύχθηκε προς επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος αναφοράς, όπου τις άγνωστες παραμέτρους αποτελούν: ο reaction coefficient της ΜΔΕ και το high frequency gain.

2.1 Ο προσαρμοστικός νόμος ελέγχου

Θεωρούμε την παραβολική εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \theta u(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (0, 1) \quad (2.1)$$

όπου οι παράμετροι $p, c > 0$ και $\theta \in \mathbb{R}$ είναι σταθερές, με συνοριακές συνθήκες:

$$u(t, 0) = 0, \quad \text{για } t > 0 \quad (2.2)$$

$$u(t, 1) = cU(t), \quad \text{για } t > 0 \quad (2.3)$$

όπου $U(t) \in \mathbb{R}$ είναι η είσοδος ελέγχου. Οι τιμές των παραμέτρων $\theta \in \mathbb{R}$ (reaction coefficient) και $c > 0$ (high frequency gain) είναι άγνωστες και

αναμένεται να εκτιμηθούν.

Θεωρούμε τις απεικονίσεις $\mathfrak{R} \ni \theta \rightarrow N(\theta) \in \{1, 2, 3, \dots\}$ και $\mathfrak{R} \ni \theta \rightarrow (k_1(\theta), \dots, k_N(\theta)) \in \mathfrak{R}^{N(\theta)}$ με την εξής ιδιότητα :

Για κάθε $\theta \in \mathfrak{R}$, υπάρχουν σταθερές $R_\theta, \omega_\theta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $u_0 \in L^2(0, 1)$, το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.3) με

$$U(t) = c^{-1} \int_0^1 k(\theta, x)u(t, x)dx \quad (2.4)$$

όπου

$$k(\theta, x) = \sum_{n=1}^{N(\theta)} k_n(\theta)\phi_n(x), \quad x \in [0, 1] \quad (2.5)$$

$$\phi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

και αρχική συνθήκη $u_0 = u[0]$, έχει μοναδική λύση

$$u \in C^0(\mathfrak{R}_+; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, +\infty) \times [0, 1]) \text{ με } u[t] \in C^2([0, 1]), \text{ για } t > 0$$

η οποία επιπλέον ικανοποιεί την παρακάτω εκτίμηση:

$$\|u[t]\| \leq R_\theta \exp(-\omega_\theta t) \|u_0\|, \quad t \geq 0 \quad (2.7)$$

Από αυτήν τη στιγμή, ο έλεγχος που δίνεται από τις σχέσεις (2.4), (2.5), (2.6) θα αναφέρεται με τον όρο: «Βασικός Νόμος Ανάδρασης (Nominal Feedback)». Σημειωτέον ότι η υλοποίηση του εν λόγω ελέγχου προϋποθέτει τη γνώση των ακριβών πραγματικών τιμών των παραμέτρων $\theta \in \mathfrak{R}$ και $c > 0$. Το προτεινόμενο προσαρμοστικό σχήμα μπορεί να λειτουργήσει με οποιοδήποτε βασικό νόμο ανάδρασης της μορφής (2.4), (2.5) ο οποίος εγγυάται τη σχέση (2.7). Υπάρχουν δύο τρόποι σχεδιασμού των απαιτούμενων απεικονίσεων $\mathfrak{R} \ni \theta \rightarrow N(\theta) \in \{1, 2, 3, \dots\}$ και $\mathfrak{R} \ni \theta \rightarrow (k_1(\theta), \dots, k_N(\theta)) \in \mathfrak{R}^{N(\theta)}$ με τις παραπάνω ιδιότητες :

1. Η πεπερασμένη εκδοχή προσέγγισης με το σχεδιασμό backstepping (παραπέμπουμε στις εργασίες [48], [69]) και
2. Η μέθοδος σχεδιασμού reduced model (βλέπε εργασίες [24], [50]).

Μία εκτενής συζήτηση πάνω στην κατασκευή των απεικονίσεων $\mathfrak{R} \ni \theta \rightarrow N(\theta) \in \{1, 2, 3, \dots\}$ και $\mathfrak{R} \ni \theta \rightarrow (k_1(\theta), \dots, k_N(\theta)) \in \mathfrak{R}^{N(\theta)}$ γίνεται στο επόμενο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 3).

Ο certainty-equivalence προσαρμοστικός έλεγχος με τη regulation-triggered εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων που πρόκειται να παρουσιαστεί, έχει τρεις διαφορετικές συνιστώσες:

- (i) Τον certainty-equivalence έλεγχο,
- (ii) Το event-trigger και
- (iii) Τον εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων

Η κάθε συνιστώσα περιγράφεται λεπτομερώς στη συνέχεια.

2.2 Ο Certainty-Equivalence έλεγχος

Η επίδραση του ελέγχου στο διάστημα μεταξύ δύο συνεχόμενων events πραγματοποιείται υπό το βασικό νόμο ανάδρασης όπου οι άγνωστες παράμετροι $\theta \in \mathbb{R}$, $c > 0$ αντικαθίστανται από τις εκτιμήσεις τους $\hat{\theta} \in \mathbb{R}$ και $\hat{c} > 0$ αντίστοιχα στην αρχή κάθε χρονικού διαστήματος. Επιπλέον, οι εκτιμήσεις $\hat{\theta} \in \mathbb{R}$, $\hat{c} > 0$ των άγνωστων $\theta \in \mathbb{R}$ και $c > 0$ αντίστοιχα, διατηρούνται σταθερές ανάμεσα σε δύο διαδοχικά events. Με άλλα λόγια, θα ισχύει:

$$U(t) = (\hat{c}(\tau_i))^{-1} \int_0^1 k(\hat{\theta}(\tau_i), x)u(t, x)dx, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in Z_+ \quad (2.8)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(\tau_i), \quad \hat{c}(t) = \hat{c}(\tau_i), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in Z_+ \quad (2.9)$$

όπου $\{\tau_i \geq 0\}_{i=0}^{\infty}$ είναι η ακολουθία των χρονικών στιγμών των events και ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \tau_{i+1} &= \min(\tau_i + T, r_i) \quad , \quad i \in Z_+ \\ \tau_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

όπου $T > 0$ είναι μια θετική σταθερά (μία από τις ρυθμιζόμενες παραμέτρους του προτεινόμενου προσαρμοστικού σχήματος) και $r_i > \tau_i$ είναι μία χρονική στιγμή η οποία καθορίζεται από το event trigger.

2.3 Το event-trigger

Το προτεινόμενο event trigger βασίζεται στην εξέλιξη του regulation της κατάστασης του συστήματος. Έστω $a > 0$ μία θετική σταθερά, η

οποία αποτελεί μία από τις ρυθμιζόμενες παραμέτρους του προτεινόμενου σχήματος. Το event trigger καθιστά την $r_i > \tau_i$ να είναι η μικρότερη τιμή του χρόνου $t > \tau_i$ για την οποία συμβαίνει το εξής :

$$\|u[t]\| = R_{\hat{\theta}(\tau_i)}(1+a) \|u[\tau_i]\| \quad (2.11)$$

όπου με $u[t]$ συμβολίζουμε τη λύση του προβλήματος (2.1), (2.2), (2.3) με τον έλεγχο της σχέσης (2.8) και $R_{\hat{\theta}} > 0$ είναι ο συντελεστής που εμπλέκεται στην εκτίμηση (2.7). Σε περίπτωση όπου δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t > \tau_i$ που να ικανοποιεί την (2.11), θέτουμε $r_i = +\infty$. Κατά την περίπτωση όπου ισχύει: $u[\tau_i] = 0$, θέτουμε $r_i := \tau_i + T$.

Βάσει των προηγούμενων, το event trigger περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις

$$r_i := \inf \left\{ t > \tau_i : \|u[t]\| = R_{\hat{\theta}(\tau_i)}(1+a) \|u[\tau_i]\| \right\}, \text{ όταν } u[\tau_i] \neq 0 \quad (2.12)$$

$$r_i := \tau_i + T, \text{ όταν } u[\tau_i] = 0 \quad (2.13)$$

Οι λόγοι για τους οποίους το event-trigger ορίζεται κατά τον παρόντα τρόπο, σύμφωνα με τις (2.10), (2.12), (2.13), είναι οι εξής:

- (i) Το event-trigger (2.10), (2.12), (2.13) εγγυάται ότι η διαφορά μεταξύ των χρονικών στιγμών όπου συμβαίνουν δύο διαδοχικά events, δε θα είναι μεγαλύτερη από $T > 0$. Συνεπώς, θα έχουμε μια συχνή ανανέωση της εκτίμησης των παραμέτρων, γεγονός το οποίο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε περιπτώσεις όπου οι παράμετροι μεταβάλλονται με αργό ρυθμό.
- (ii) Το event-trigger (2.10), (2.12), (2.13) εγγυάται ότι η λύση του συστήματος κλειστού βρόχου ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα:

$$\|u[t]\| \leq R_{\hat{\theta}(\tau_i)}(1+a) \|u[\tau_i]\|, \text{ για κάθε } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$$

και για κάθε ακέραιο $i \geq 0$

Η παραπάνω ανισότητα, θέτει ένα όριο στην αύξηση της νόρμας της λύσης του συστήματος κλειστού βρόχου (ακόμα και κατά την περίπτωση όπου η εκτίμηση της παραμέτρου δεν είναι επιτυχής) και είναι απαραίτητη για την απόδειξη της ισχύος μιας εκτίμησης η οποία υποδηλώνει εκθετική ευστάθεια για το σύστημα κλειστού βρόχου.

2.4 Ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων

Η περιγραφή του regulation-triggered προσαρμοστικού σχήματος ελέγχου ολοκληρώνεται με την εισαγωγή του parameter update law ο οποίος ενεργοποιείται ακριβώς κατά τις χρονικές στιγμές των events.

Υποθέτοντας ότι διαθέτουμε μία επαρκώς κανονική λύση

$$u \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1)) \cap (C^1(0, +\infty) \times [0, 1])$$

με $u[t] \in C^2([0, 1])$ για $t > 0$, εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις (2.1), (2.2), (2.3) ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1: Αρχής γενομένης από την εξίσωση (2.1), θέτουμε όπου $t = \tau > 0$ και πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της με $\sin(n\pi x)$. Έτσι, για κάθε $\tau > 0$ και $n = 1, 2, \dots$ λαμβάνουμε

$$\frac{d}{d\tau} (\sin(n\pi x)u(\tau, x)) = p \sin(n\pi x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x) + \theta \sin(n\pi x)u(\tau, x) \quad (2.14)$$

Βήμα 2: Ολοκληρώνοντας τη (2.14) ως προς $x \in [0, 1]$, έχουμε για κάθε $\tau > 0$ και $n = 1, 2, \dots$ την παρακάτω ισότητα:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \sin(n\pi x)u(\tau, x)dx &= p \int_0^1 \sin(n\pi x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x)dx \\ &+ \theta \int_0^1 \sin(n\pi x)u(\tau, x)dx \end{aligned} \quad (2.15)$$

Βήμα 3: Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα του δευτέρου μέλους της (2.15) με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και λαμβάνοντας υπόψη τις (2.2), (2.3), προκύπτει για κάθε $\tau > 0$ και $n = 1, 2, \dots$, ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \sin(n\pi x)u(\tau, x)dx &= -(-1)^n p n \pi c U(\tau) \\ &+ (\theta - n^2 \pi^2 p) \int_0^1 \sin(n\pi x)u(\tau, x)dx \end{aligned} \quad (2.16)$$

Βήμα 4: Ολοκληρώνουμε τη (2.16) ως προς $\tau \in [s, t]$ και λαμβάνουμε για κάθε $t, s \geq 0$ και $n = 1, 2, \dots$ το παρακάτω

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(n\pi x)(u(t, x) - u(s, x))dx &= -(-1)^n p n \pi c \int_s^t U(\tau)d\tau \\ &+ (\theta - n^2 \pi^2 p) \int_s^t \int_0^1 \sin(n\pi x)u(\tau, x)dx d\tau \end{aligned} \quad (2.17)$$

Βήμα 5: Θέτοντας

$$f_n(t, s) := \int_0^1 \sin(n\pi x)(u(t, x) - u(s, x))dx + n^2\pi^2 p \int_s^t \int_0^1 \sin(n\pi x)u(\tau, x)dx d\tau \quad (2.18)$$

$$g_n(t, s) := \int_s^t \int_0^1 \sin(n\pi x)u(\tau, x)dx d\tau, \quad j_n(t, s) := -(-1)^n p n \pi \int_s^t U(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

λαμβάνουμε από τις (2.16), (2.18) και (2.19) το εξής :

$$f_n(t, s) = \theta g_n(t, s) + c j_n(t, s) \quad (2.20)$$

Βήμα 6: Στο σημείο αυτό, θεωρούμε έναν αυθαίρετο θετικό ακέραιο $\tilde{N} \geq 1$. Πρόκειται για την τελευταία ρυθμιζόμενη παράμετρο του προτεινόμενου προσαρμοστικού σχήματος. Ορίζουμε για κάθε $i \in Z_+$ και $n = 1, 2, \dots$ τη συνάρτηση $h_{i,n} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ με τύπο

$$h_{i,n}(\vartheta_1, \vartheta_2) := \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} (f_n(t, s) - \vartheta_1 g_n(t, s) - \vartheta_2 j_n(t, s))^2 ds dt \quad (2.21)$$

όπου

$$\mu_{i+1} := \min \left\{ \tau_j : j \in \{0, \dots, i\}, \tau_j \geq \tau_{i+1} - \tilde{N}T \right\}. \quad (2.22)$$

Σχόλιο: Η χρονική στιγμή μ_{i+1} όπως έχει οριστεί από τη (2.22) αναφέρεται σε ένα παρελθοντικό event και πρόκειται να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο υπό την έννοια ότι : οι εκτιμήσεις $\hat{\theta}(\tau_{i+1}), \hat{c}(\tau_{i+1})$ στο χρόνο $t = \tau_{i+1}$ πραγματοποιούνται με τη χρήση των μετρήσεων του plant state στο διάστημα $[\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$. Ο ορισμός (2.22) εγγυάται ότι τα διαστήματα της μορφής $[\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$ για $i \in Z_+$ θα έχουν τελικά επαρκώς μεγάλο μήκος.

Βήμα 7: Λόγω των σχέσεων (2.20) και (2.21) προκύπτει ότι για κάθε $i \in Z_+$ και $n = 1, 2, \dots$ η συνάρτηση $h_{i,n}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ έχει ένα ολικό ελάχιστο στο σημείο $(\vartheta_1, \vartheta_2) \equiv (\theta, c)$, με $h_{i,n}(\theta, c) = 0$. Συνεπώς, από το θεώρημα του Fermat (για τα ακρότατα) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\partial h}{\partial \vartheta_1}(\theta, c) = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \vartheta_2}(\theta, c) = 0 \quad (2.24)$$

Από τις (2.23), (2.24) λαμβάνουμε αντίστοιχα

$$H_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) = \theta Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) + c Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}), \quad (2.25)$$

$$H_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) = \theta Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) + c Q_{n,3}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) \quad (2.26)$$

όπου

$$H_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) := \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} f_n(t, s) g_n(t, s) ds dt, \quad (2.27)$$

$$H_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) := \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} f_n(t, s) j_n(t, s) ds dt, \quad (2.28)$$

$$Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) := \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} g_n^2(t, s) ds dt, \quad (2.29)$$

$$Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) := \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} g_n(t, s) j_n(t, s) ds dt, \quad (2.30)$$

$$Q_{n,3}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) := \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} j_n^2(t, s) ds dt. \quad (2.31)$$

Ορίζουμε το ακόλουθο σύνολο στο χώρο παραμέτρων για $i \geq 0$:

$$S_i := \left\{ (\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathfrak{R}^2 : H_{n,j}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) = \sum_{l=1}^2 \vartheta_l Q_{n,j+l-1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}), \right. \\ \left. n = 1, 2, \dots, j = 1, 2 \right\} \quad (2.32)$$

Από τις εξισώσεις (2.25) και (2.26) έπεται ότι $(\theta, c) \in S_i$. Συνεπώς, αν το S_i είναι ένα μονοσύνολο, τότε το μοναδικό του στοιχείο θα είναι η ακριβής εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων του αγνώστου διανύσματος παραμέτρων (θ, c) στο διάστημα $[\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$.

Το ακόλουθο λήμμα διασαφηνίζει τη μορφή του συνόλου S_i στο χώρο παραμέτρων. Παραπέμπουμε στο Παράρτημα Β' για την απόδειξή του.

Λήμμα 2.4.1 [43] Έστω $\tau_{i+1} > \mu_{i+1} \geq 0$, $p, c > 0$, $\theta \in \mathfrak{R}$ δοθείσες σταθερές και έστω $u \in C^0([\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]; L^2(0, 1))$, $U \in C^0((\mu_{i+1}, \tau_{i+1}))$ δοθείσες απεικονίσεις οι οποίες ικανοποιούν τις (2.18), (2.19), (2.20) για κάθε $t, s \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$ και $n = 1, 2, \dots$. Τότε, ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές:

i) Αν $Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) = 0$, για $n = 1, 2, \dots$, τότε $u \equiv 0$ και $S_i = \mathfrak{R}^2$.

ii) Αν $S_i = \mathfrak{R}^2$, τότε $u \equiv 0$ και $Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) = 0$, για $n = 1, 2, \dots$

iii) Αν $S_i \neq \{(\theta, c)\}$ και $S_i \neq \mathbb{R}^2$ τότε

$$U(t) \equiv 0 \text{ και } S_i := \{(\theta, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2 : \vartheta_2 \in \mathbb{R}\}$$

Από το Λήμμα 2.4.1 προκύπτει ότι η προβολή $proj_{S_i}((\hat{\theta}(\tau_i), \hat{c}(\tau_i)))$ του ζεύγους $(\hat{\theta}(\tau_i), \hat{c}(\tau_i)) \in \mathbb{R}^2$ στο σύνολο S_i , μπορεί να λάβει τρεις τιμές:

- (i) $(\hat{\theta}(\tau_i), \hat{c}(\tau_i))$, όταν $S_i = \mathbb{R}^2$
- (ii) $(\theta, \hat{c}(\tau_i))$, όταν $S_i \neq \{(\theta, c)\}$ και $S_i \neq \mathbb{R}^2$ και
- (iii) (θ, c) , όταν $S_i = \{(\theta, c)\}$

Είμαστε επομένως εις θέση να ορίσουμε τον ακόλουθο parameter update law:

$$(\hat{\theta}(\tau_{i+1}), \hat{c}(\tau_{i+1})) = proj_{S_i}((\hat{\theta}(\tau_i), \hat{c}(\tau_i))) \quad (2.33)$$

Παρατηρούμε ότι αν $\hat{c}(\tau_i) > 0$, τότε $\hat{c}(\tau_{i+1}) > 0$.

2.5 Βασικό αποτέλεσμα: Ιδιότητες του συστήματος υπό τον προσαρμοστικό έλεγχο

Το κύριο αποτέλεσμα της παρούσας ενότητας εξασφαλίζει ολική εκθετική σύγκλιση της κατάστασης u στο μηδέν ως προς την $L^2(0, 1)$ νόρμα.

Θεώρημα 2.5.1 [43] Έστω $T, a > 0$ θετικές σταθερές και έστω $\tilde{N} \geq 1$ ένας θετικός ακέραιος. Τότε, υπάρχει μια οικογένεια σταθερών $M_{\theta, \hat{\theta}, c, \hat{c}} > 0$, παραμετροποιημένες από τα $\theta \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $\hat{\theta} \in \mathbb{R}$, $\hat{c} > 0$, ούτως ώστε για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $u_0 \in L^2(0, 1)$, $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}$, $\hat{c}_0 > 0$ το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.3) υπό τις (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.22), (2.33) και αρχικές συνθήκες $u[0] = u_0$, $\hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0$, $\hat{c}(0) = \hat{c}_0$ έχει μοναδική λύση, με την έννοια ότι υπάρχουν μοναδικές απεικονίσεις $\hat{\theta}, \hat{c} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1))$ με $u \in C^1(I \times [0, 1])$, $u[t] \in C^2([0, 1])$, για $t > 0$, όπου $I = \mathbb{R}_+ \setminus \{\tau_i \geq 0, i = 0, 1, 2, \dots\}$, οι οποίες ικανοποιούν τις (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.22), (2.33), τις ισότητες $u[0] = u_0$, $\hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0$, $\hat{c}(0) = \hat{c}_0$ και

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \theta u(t, x), \text{ για κάθε } (t, x) \in I \times (0, 1) \quad (2.34)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) - cU(t) = 0, \text{ για κάθε } t \in I \quad (2.35)$$

Επιπλέον, η εκτίμηση $\|u[t]\| \leq M_{\theta, \hat{\theta}_0, c, \hat{c}_0} \exp(-\omega_\theta t) \|u_0\|$ ισχύει για κάθε $t \geq 0$, όπου $\omega_\theta > 0$ είναι η παραμετροποιημένη οικογένεια σταθερών που εμφανίζεται στη σχέση (2.7). Τέλος, αν $u_0 \neq 0$, τότε $\hat{\theta}(t) = \theta$, για κάθε $t \geq \tau_1$ και σε περίπτωση που υπάρχει $t \geq 0$ με $U(t) \neq 0$, τότε $\hat{c}(t) = c$, για κάθε $t \geq \tau_2$.

Ένα πιθανό ερώτημα που μπορεί να δημιουργηθεί στο σημείο αυτό, είναι αν η τιμή του ακεραίου $N(\hat{\theta}(t))$ είναι φραγμένη ή όχι. Κατά την απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1, δείχνεται ότι ο $N(\hat{\theta}(t))$ μπορεί να λάβει μόνο δύο τιμές όταν $u_0 \neq 0$:

- (i) την τιμή $N(\hat{\theta}_0)$, για $t \in [0, \tau_1)$ και
- (ii) την τιμή $N(\theta)$, για $t \geq \tau_1$ η οποία ανταποκρίνεται στην πραγματική τιμή της παραμέτρου θ .

Πρόκειται για μία άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι $\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}_0$, για $t \in [0, \tau_1)$ και $\hat{\theta}(t) = \theta$, για $t \geq \tau_1$, όταν $u_0 \neq 0$. Με άλλα λόγια, το σφάλμα εκτίμησης της παραμέτρου θ γίνεται ίσο με μηδέν μετά τη χρονική στιγμή του πρώτου event (single-trigger σύγκλιση). Μια άλλη πιθανή ερώτηση που μπορεί να προκύψει είναι αν μπορεί να εμφανιστεί η Zeno behavior, δηλαδή, η ακολουθία των χρονικών στιγμών των events να έχει πεπερασμένο όριο. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1 προκύπτει ότι η Zeno behavior δεν είναι πιθανό να συμβεί. Ειδικότερα, ισχύει

$$\tau_i = \begin{cases} \tau_2 + (i - 2)T & , \text{για κάθε } i \geq 2, \text{ όταν } u_0 \neq 0 \\ iT & , \text{για } i \geq 0, \text{ όταν } u_0 = 0 \end{cases}$$

2.6 Συζήτηση επί του regulation-triggered προσαρμοστικού σχήματος

Έχοντας διατυπώσει το Θεώρημα 2.5.1, βρισκόμαστε σε θέση να αναλύσουμε το προτεινόμενο προσαρμοστικό σχήμα ελέγχου. Τα πλεονεκτήματα του συγκεκριμένου regulation-triggered προσαρμοστικού σχήματος, είναι τα ακόλουθα:

- (i) Εγγυάται ολική εκθετική σύγκλιση της κατάστασης στο μηδέν με τον ίδιο ρυθμό σύγκλισης με το βασικό νόμο ανάδρασης (με γνωστές τις τιμές των παραμέτρων).

- (ii) Εγγυάται σύγκλιση των εκτιμήσεων των παραμέτρων στις ακριβείς πραγματικές τιμές τους σε πεπερασμένο χρόνο (υπό συγκεκριμένες συνθήκες). Ο απαιτούμενος χρονικός ορίζοντας για την ακριβή εκτίμηση των παραμέτρων μπορεί να καθοριστεί αυθαίρετα a priori επιλέγοντας κατάλληλα την τιμή της σταθεράς $T > 0$. Τη στιγμή που τα υπάρχοντα προσαρμοστικά σχήματα ελέγχου για ΜΔΕ χρησιμοποιούν αναδρομική εκτίμηση παραμέτρου, το παρόν σχήμα επιστρατεύει εκτίμηση ενός συνόλου δεδομένων (batch estimation), η οποία μπορεί να είναι επαναλαμβανόμενη έτσι ώστε το σχήμα να έχει την ίδια ικανότητα με τα αναδρομικά σχήματα στο να φέρνει εις πέρας την εκτίμηση παραμέτρων οι οποίες μεταβάλλονται με αργό ρυθμό.
- (iii) Η κατασκευή του προσαρμοστικού ελέγχου δεν απαιτεί τη γνώση ενός συναρτησιακού Lyapunov για το σύστημα ελέγχου.
- (iv) Μπορεί να λειτουργήσει με κάθε συνοριακή ανάδραση που εξασφαλίζει εκθετική ευστάθεια δεδομένης της γνώσης των τιμών των παραμέτρων.
- (v) Μπορεί να διαχειριστεί την περίπτωση της παρουσίας ενός αγνώστου high frequency gain χωρίς κανένα πρόβλημα.

Στον αντίποδα ωστόσο, το προτεινόμενο regulation-triggered προσαρμοστικό σχήμα, συγκρινόμενο με τα υπάρχοντα προσαρμοστικά σχήματα για παραβολικές ΜΔΕ παρουσιάζει ορισμένα μειονεκτήματα:

- (i) Το Θεώρημα 2.5.1 δεν καλύπτει την περίπτωση όπου ο diffusion coefficient (δηλαδή το p από την εξίσωση (2.1)) είναι άγνωστος ή την περίπτωση όπου παρουσιάζεται advection term με άγνωστο συντελεστή στη ΜΔΕ.
- (ii) Το Θεώρημα 2.5.1 δεν καλύπτει την περίπτωση χωρικά μεταβαλλόμενων συντελεστών (δηλαδή μεταβαλλόμενων ως προς x).
- (iii) Είναι πιθανόν η απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου υπό το προτεινόμενο προσαρμοστικό σχήμα να παρουσιάζει ένα μεγαλύτερο overshoot από εκείνο που εμφανίζει η απόκριση με άλλα προσαρμοστικά σχήματα (παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 4 για περισσότερες λεπτομέρειες).

Ακολούθως, παρατίθεται μια λίστα στοιχείων τα οποία διαφωτίζουν το ρόλο των παραμέτρων $a, T > 0$ και $\tilde{N} \geq 1$ του προτεινόμενου προσαρμοστικού σχήματος.

- (i) Ένα μεγαλύτερο $a > 0$ και/ή ένα μεγαλύτερο $T > 0$ θα προσέφερε, εν γένει, μία λιγότερο συχνή αλληλουχία events (υπενθυμίζουμε τις σχέσεις (2.10), (2.12), (2.13)). Μία λιγότερο συχνή αλληλουχία events επιτρέπει την εμφάνιση ενός μεγαλύτερου overshoot στην απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου και παράλληλα καθιστά το σύστημα κλειστού βρόχου λιγότερο εύρωστο σε χρονικά μεταβαλλόμενες άγνωστες παραμέτρους. Το τελευταίο συμβαίνει για το λόγο ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων ανανεώνονται με μικρότερη συχνότητα.
- (ii) Επιπροσθέτως, μια μεγαλύτερη τιμή της σταθεράς $T > 0$ και/ή μια μεγαλύτερη τιμή του θετικού ακεραίου $\tilde{N} \geq 1$ θα επέτρεπε στον εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων να βασίζεται σε ένα μεγαλύτερο σύνολο δεδομένων. Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό καθιστά τον identifier πιο εύρωστο ως προς σφάλματα μετρήσεων καθώς και προσθετικό τυχαίο θόρυβο που μπορεί να είναι παρών στη ΜΔΕ.
- (iii) Μία μικρότερη τιμή της σταθεράς $T > 0$ θα επέφερε, εν γένει, μια γρηγορότερη εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων. Ωστόσο, μια αμεσότερη εκτίμηση είναι πάντοτε πιο ευαίσθητη σε σφάλματα μετρήσεων.

Το overshoot που μπορεί να υπάρχει στην απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου δε σχετίζεται μόνο με την επιλογή των τιμών των ρυθμιζόμενων παραμέτρων $a, T > 0$ και $\tilde{N} \geq 1$. Συγκεκριμένα, εξαρτάται επιπλέον σε μεγάλο βαθμό από της ιδιότητες του βασικού νόμου ανάδρασης και το συντελεστή R_θ που εμφανίζεται στις σχέσεις (2.7) και (2.10), με τον εξής τρόπο: Μία λιγότερο ακριβής εκτίμηση του R_θ (δηλαδή αδικαιολόγητα μεγάλες τιμές του R_θ), θα επέτρεπε την εμφάνιση ενός μεγαλύτερου overshoot στην απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου.

Κεφάλαιο 3

Κατασκευή του βασικού νόμου ανάδρασης

Ένας νόμος ανάδρασης με γνωστές τις τιμές των παραμέτρων που εμφανίζονται στη ΜΔΕ καλείται: “Βασικός νόμος ανάδρασης” (Nominal Feedback) μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές μεθοδολογίες:

- (1) Την πεπερασμένη εκδοχή προσέγγισης του σχεδιασμού backstepping.
- (2) Τη μεθοδολογία σχεδιασμού reduced model

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τις δύο παραπάνω μεθοδολογίες για το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1)-(2.6).

3.1 Σχεδιασμός Backstepping

Το Theorem 2 στην εργασία [69] εγγυάται για κάθε $\theta > 0$, $\beta \geq 0$ την ύπαρξη συναρτήσεων $K_\theta, L_\theta \in C^2([0, 1]^2)$ ούτως ώστε ο παρακάτω μετασχηματισμός Volterra για $(t, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$

$$v(t, z) = u(t, z) - \int_0^z K_\theta(z, s)u(t, s)ds, \quad (3.1)$$

με αντίστροφο

$$u(t, z) = v(t, z) + \int_0^z L_\theta(z, s)v(t, s)ds, \quad (3.2)$$

όπου ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για $0 \leq s \leq z \leq 1$

$$K_\theta(z, s) := -(\theta + \beta)s \frac{I_1 \left(\sqrt{p^{-1}(\theta + \beta)(z^2 - s^2)} \right)}{\sqrt{p^{-1}(\theta + \beta)(z^2 - s^2)}}, \quad (3.3\alpha)$$

$$L_\theta(z, s) := -(\theta + \beta)s \frac{J_1\left(\sqrt{p^{-1}(\theta + \beta)}(z^2 - s^2)\right)}{\sqrt{p^{-1}(\theta + \beta)}(z^2 - s^2)} \quad (3.3\beta)$$

να απεικονίζει τις λύσεις του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.3) στις λύσεις του

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, z) - p \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(t, z) + \beta v(t, z) = 0, \quad (3.4)$$

$$v(t, 0) = v(t, 1) - cU(t) + \int_0^1 \tilde{k}_\theta(s)u(t, s)ds = 0, \quad (3.5)$$

με $\tilde{k}_\theta(z) = K_\theta(1, z)$, για κάθε $z \in [0, 1]$. Ορίζουμε επιπλέον $\tilde{k}_\theta \equiv 0$, για $\theta \leq 0$. Ακολουθώντας την ανάλυση στο Appendix της εργασίας [42], είμαστε εις θέση να εγγυηθούμε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.3) με $u[0] = u_0 \in L^2(0, 1)$, ικανοποιεί την ακόλουθη εκτίμηση:

$$\begin{aligned} \|v[t]\| &\leq G \exp(-\sigma pt) \|v_0\| \\ &+ \gamma \sup \left(\left| cU(s) - \int_0^1 \tilde{k}_\theta(x)u(s, x)dx \right| \exp(-\sigma p(t-s)) \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

για κάθε $\theta > 0, \sigma \in (0, \pi^2 + p^{-1}\beta)$, και $t \geq 0$

όπου ο όρος $v[t]$ δίνεται από την (3.1), $G := \sqrt{1 + B^{-1}}$, για κάθε $B > 0$ και

$$\gamma := \sqrt{1 + B} \begin{cases} \frac{(\pi^2 + \mu^2)\sqrt{\sinh(2\mu) - 2\mu}}{2\sqrt{\mu}(\pi^2 + \mu^2 - \sigma)\sinh(\mu)} & \text{αν } \mu > 0 \\ \frac{\pi^2}{\sqrt{3}(\pi^2 - \sigma)} & \text{αν } \mu = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

όπου $\mu := \sqrt{\beta/p}$. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η εκτίμηση (3.6) ισχύει για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $u[0] = u_0 \in L^2(0, 1)$ και για κάθε τοπικά φραγμένη είσοδο $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.3) έχει λύση.

Στην παρούσα περίπτωση, έχουμε τη δυνατότητα να επιλέξουμε $N(\theta) \geq 1$ να είναι ένας ακέραιος αρκούντως μεγάλος, έτσι ώστε να ισχύει

$$\gamma \tilde{L}_\theta \left\| \tilde{k}_\theta - h_\theta \right\| < 1 \quad (3.8\alpha)$$

όπου

$$\tilde{L}_\theta := 1 + \left(\int_0^1 \left(\int_0^z |L_\theta(z, s)|^2 ds \right) dz \right)^{1/2}, \quad (3.8\beta)$$

$$h_\theta(z) := \sum_{n=1}^{N(\theta)} k_n(\theta) \phi_n(z), \text{ για } z \in [0, 1] \quad (3.8\gamma)$$

όπου ο όρος $L_\theta(z, s)$ ορίζεται από τη σχέση (3.3β), η συνάρτηση ϕ_n δίνεται από τη (2.6) και

$$k_n(\theta) = \int_0^1 \tilde{k}_\theta(x) \phi_n(x) dx, \text{ για } n = 1, \dots, N(\theta). \quad (3.8\delta)$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την εκτίμηση (3.6) και τις (3.8α), (3.8β), (3.8γ), (3.8δ) σε συνδυασμό με τους μετασχηματισμούς (3.1), (3.2), βρισκόμαστε εις θέση να δείξουμε ότι η λύση του συστήματος κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3) υπό τις (2.4), (2.5), (2.6), ικανοποιεί την εκτίμηση (2.7), θέτοντας

$$R_\theta := \frac{G\tilde{L}_\theta\tilde{K}_\theta}{1 - \gamma \|\tilde{k}_\theta - h_\theta\| \tilde{L}_\theta}, \quad \omega_\theta := \sigma p$$

και

$$\tilde{K}_\theta = 1 + \left(\int_0^1 \left(\int_0^z |K_\theta(z, s)|^2 ds \right) dz \right)^{1/2}$$

Επιπλέον, με χρήση των ορισμών (3.3), λαμβάνουμε τις ανισότητες

$$\tilde{L}_\theta \leq 1 + \frac{\theta + \beta}{4p\sqrt{3}} \quad (3.9)$$

$$\tilde{K}_\theta \leq 1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\theta + \beta}{3p}} I_1 \left(\sqrt{\frac{\theta + \beta}{p}} \right) \quad (3.10)$$

Οι ανισότητες (3.9), (3.10) σε συνδυασμό με την (3.7) και το γεγονός ότι:

$$\|\tilde{k}_\theta - h_\theta\| = \sqrt{\int_0^1 \tilde{k}_\theta^2(x) dx - \sum_{n=1}^{N(\theta)} k_n^2(\theta)},$$

επιτρέπουν την εκτίμηση του μεγέθους της σταθεράς R_θ , καθώς και μιας εκτίμησης του πόσο μεγάλη θα πρέπει να επιλεγεί να είναι η τιμή του ακεραίου $N(\theta) \geq 1$. Το τελευταίο γεγονός διαφαίνεται στον Πίνακα 1 για την περίπτωση όπου $\beta = 0$, $p = \sigma = 1$, $B = 1/10$. Για $\theta \leq 0$ (υπενθυμίζουμε ότι $k_\theta(z) \equiv 0$), ορίζουμε να είναι $N(\theta) = 1$. Με αυτόν τον τρόπο, το σύστημα κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3), με $\theta \leq 0$, (2.4), (2.5), (2.6) ικανοποιεί την (2.7) όπου $R_\theta := 1$, $\omega_\theta := \pi^2 p$.

Πίνακας 1: Οι μικρότερες τιμές του ακεραίου $N(\theta)$ για τις οποίες ισχύει ότι $\gamma \tilde{L}_\theta \left\| \tilde{k}_\theta - h_\theta \right\| < 1$, για $\beta = 0$, $p = \sigma = 1$, $B = 1/10$.

θ	$N(\theta)$
0.1	1
3	1
5	2
6	3
7	5
8	7
9	10
π^2	13
10	14
11	19
12	25

3.2 Σχεδιασμός με Reduced Model

Η μεθοδολογία σχεδιασμού reduced model, εισάγεται και αναπτύσσεται στις εργασίες [24], [50]. Κατά τη συγκεκριμένη προσέγγιση, ο θετικός ακέραιος $N(\theta) \geq 1$ επιλέγεται να είναι αρκούντως μεγάλος, έτσι ώστε να ισχύει $p(N(\theta) + 1)^2 \pi^2 > \theta$.

Ορίζουμε

$$g(\theta) := \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{N(\theta)} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

όπου

$$g_n := -p\sqrt{2}(-1)^n n\pi \neq 0, \quad n = 1, \dots, N(\theta) \quad (3.12)$$

Αποδεικνύεται ότι το ζεύγος πινάκων $-p\pi^2 \text{diag}(1, \dots, N^2(\theta)) + \theta I_{N(\theta)}$ και $g(\theta)$ (όπως έχει οριστεί κατά τις (3.11), (3.12)) είναι ελέγξιμο (παράπεμπουμε στην ανάλυση κατά την απόδειξη του Lemma 3.1 από την εργασία [42]). Η απεικόνιση $\mathfrak{R} \ni \theta \rightarrow (k_1(\theta), \dots, k_{N(\theta)}(\theta)) \in \mathfrak{R}^{N(\theta)}$ κατασκευάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε ο πίνακας

$$-p\pi^2 \text{diag}(1, \dots, N^2(\theta)) + \theta I_{N(\theta)} + g(\theta) [k_1(\theta), \dots, k_{N(\theta)}(\theta)]$$

να είναι Hurwitz για κάθε $\theta \in \mathfrak{R}$.

Κεφάλαιο 4

Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα

Στο παρόν κεφάλαιο, θεωρούμε το σύστημα ελέγχου (2.1), (2.2), (2.3), όπου $p = c = 1$ και $\theta = 11$. Για τις συγκεκριμένες τιμές των εν λόγω παραμέτρων, το σύστημα ανοιχτού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3) με $U(t) \equiv 0$ είναι ασταθές με εκθετικά αυξανόμενες λύσεις. Εξετάζουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις :

- (i) την περίπτωση όπου η τιμή του high frequency gain $c = 1$ θεωρείται γνωστή και η μόνη άγνωστη παράμετρος είναι ο reaction coefficient θ και
- (ii) την περίπτωση όπου αμφότερες οι παράμετροι c, θ είναι άγνωστες.

4.1 Περίπτωση 1: Άγνωστος reaction coefficient

Κατά την πρώτη περίπτωση, (με γνωστή την τιμή της παραμέτρου $c > 0$), αντί της (2.8) χρησιμοποιείται ο ακόλουθος νόμος ελέγχου:

$$U(t) = c^{-1} \int_0^1 k(\hat{\theta}(\tau_i), x)u(t, x)dx, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in Z_+ \quad (4.1)$$

και αντί της (2.33), χρησιμοποιούμε τις ισότητες

$$\hat{\theta}(\tau_{i+1}) = \begin{cases} \hat{\theta}(\tau), & \text{αν } Q_n(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) = 0, \text{ για } n = 1, 2, \dots \\ \frac{H_{m(\tau_i)}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{m(\tau_i)}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (4.2)$$

όπου

$$m(\tau_{i+1}) := \min\{n \geq 1 : Q_n(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) > 0\} \quad (4.3)$$

$$H_n(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) := \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} f_n(t, s) g_n(t, s) ds dt \quad (4.4)$$

$$Q_n(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) := \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} \int_{\mu_{i+1}}^{\tau_{i+1}} g_n^2(t, s) ds dt \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} f_n(t, s) := & \int_0^1 \sin(n\pi x) (u(t, x) - u(s, x)) dx \\ & + (-1)^n c p n \pi \int_s^t U(\tau) d\tau + n^2 \pi^2 p \int_s^t \int_0^1 \sin(n\pi x) u(\tau, x) dx d\tau \end{aligned} \quad (4.6)$$

και η συνάρτηση $g_n(t, s)$ ορίζεται από τη σχέση (2.19).

Επικεντρωνόμαστε στην εφαρμογή του σχεδιασμού με τη μέθοδο backstepping (η οποία εξηγήθηκε στην ενότητα 3.1) με $\beta = 0$. Οι προσομοιώσεις πραγματοποιήθηκαν με χρήση ενός σχήματος πεπερασμένων διαφορών με 100 spatial grid points. Όλα τα ολοκληρώματα έχουν υπολογιστεί με χρήση του κανόνα του τραπεζίου.

Το Theorem 2 από την εργασία [69] εγγυάται ότι ο νόμος ανάδρασης

$$U(t) = -11 \int_0^1 s \frac{I_1\left(\sqrt{11(1-s^2)}\right)}{\sqrt{11(1-s^2)}} u(t, s) ds \quad (4.7)$$

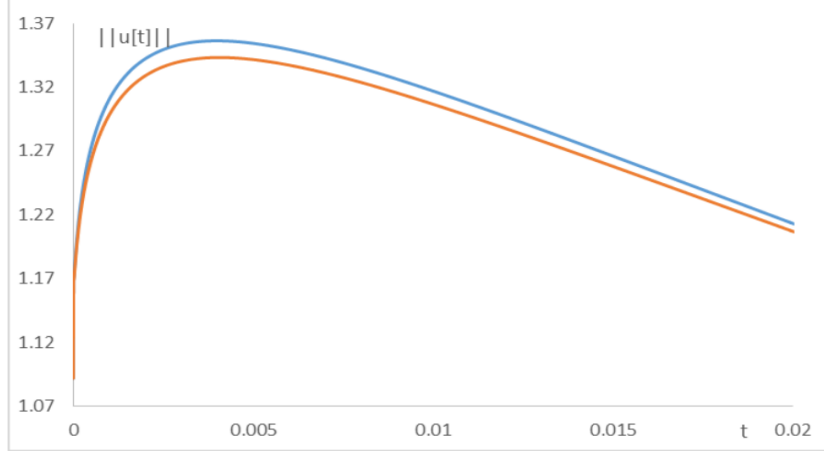
επιτυγχάνει ολική εκθετική ευστάθεια του $0 \in L^2(0, 1)$ στην L^2 νόρμα για το σύστημα κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3) με τον έλεγχο να ορίζεται από τη σχέση (4.7). Η ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στην ενότητα 3.1, έδειξε ότι ο νόμος ανάδρασης (2.4), (2.5), (2.6) όπου $N(\theta) = N(11) = 20$ και

$$k_n = -11\sqrt{2} \int_0^1 s \frac{I_1\left(\sqrt{11(1-s^2)}\right)}{\sqrt{11(1-s^2)}} \sin(n\pi s) ds, \text{ για } n = 1, \dots, 20 \quad (4.8)$$

επιτυγχάνει ολική εκθετική ευστάθεια του μηδενός στην L^2 νόρμα για το σύστημα κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3), υπό τις (2.4), (2.5) και (2.6).

Η διαφορά μεταξύ του συστήματος κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3), (4.7) και του συστήματος κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3), υπό τις (2.4), (2.5) και (2.6) ελέγχθηκε αριθμητικά. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε μια μικρή διαφοροποίηση στην αρχική transient period, αλλά μετά το πέρας αυτής, δεν εντοπίζεται εμφανής διαφορά στην απόκριση του συστήματος. Το γεγονός αυτό διαφαίνεται στο Σχήμα 1 για την αρχική συνθήκη $u_0(x) = \sqrt{2} \sin(\pi x) + x^2 - x^3$, $x \in [0, 1]$.

Σχήμα 1



Η καμπύλη χρώματος κόκκινου αντιπροσωπεύει την εξέλιξη της τιμής $\|u[t]\|$ συναρτήσει του χρόνου $t \geq 0$ για το σύστημα κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3) με τη συνθήκη ελέγχου (4.7). Η καμπύλη χρώματος μπλε εκφράζει την εξέλιξη της τιμής $\|u[t]\|$ συναρτήσει του χρόνου $t \geq 0$ για το σύστημα κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3) σε συνδυασμό με τις (2.4), (2.5) και (4.8).

Ακολούθως, πρόκειται να αναπτυχθούν οι regulation-triggered προσαρμοστικοί έλεγχοι. Ακολουθώντας τις εκτιμήσεις που προέκυψαν στο προηγούμενο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 3), ο προσαρμοστικός έλεγχος για την πρώτη περίπτωση (με γνωστό c), δίνεται από τις σχέσεις (2.9), (2.10), (2.13), (2.25), (4.2), (4.3) καθώς και από τις παρακάτω ισότητες:

$$U(t) = \frac{\sqrt{2}}{c} \sum_{n=1}^{N(\hat{\theta}(\tau_i))} k_n(\hat{\theta}(\tau_i)) \int_0^1 \sin(n\pi x) u(t, x) dx, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in Z_+ \quad (4.9)$$

$$k_n(\vartheta) = -\vartheta\sqrt{2} \int_0^1 s \frac{I_1(\sqrt{\vartheta(1-s^2)})}{\sqrt{\vartheta(1-s^2)}} \sin(n\pi s) ds, \quad \text{για } \vartheta > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

$$r_i := \inf \left\{ t > \tau_i : \frac{\|u[t]\|}{\bar{K} \|u[\tau_i]\|} = (1 + \hat{\theta}(\tau_i)) \left(1 + \sqrt{\hat{\theta}(\tau_i)} I_1(\sqrt{\hat{\theta}(\tau_i)}) \right) \right\}, \quad \text{για } u[\tau_i] \neq 0 \quad (4.11)$$

όπου $M \geq 1$, $a > 0$, $\tilde{N} \geq 1$, $T > 0$ είναι ρυθμιζόμενες παράμετροι, $\bar{K} = 12(1+a)M\sqrt{11}(\pi^2 - 1)$ και $N(\vartheta) \geq 1$ ορίζεται, για κάθε $\vartheta > 0$, να

είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει

$$12(\pi^2 - 1) - \sqrt{\frac{11}{10}}\pi^2(4\sqrt{3} + \vartheta) \sqrt{\int_0^1 \tilde{k}_\vartheta^2(x)dx - \sum_{n=1}^{N(\vartheta)} k_n^2(\vartheta)} \geq \frac{1}{M}$$

όπου

$$\tilde{k}_\vartheta(s) := -\vartheta s \frac{I_1(\sqrt{\vartheta(1-s^2)})}{\sqrt{\vartheta(1-s^2)}}, \text{ για } s \in [0, 1).$$

Θέτοντας $R_\theta = \tilde{K}(1+\theta)(1+\sqrt{\theta}I_1(\sqrt{\theta}))$ και $\tilde{K} = 12M\sqrt{11}(\pi^2 - 1)$, η ισότητα (4.11), ταυτίζεται με την ισότητα (2.12). Επιπλέον, η ποσότητα που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της ισότητας (4.11), αποτελεί άνω φράγμα της ποσότητας

$$\frac{G\tilde{L}_\theta\tilde{K}_\theta}{1 - \gamma \left\| \tilde{K}_\theta - h_\theta \right\| \tilde{L}_\theta}$$

η οποία προκύπτει με χρήση της σχέσης (3.7), από τις ανισότητες

$$\tilde{L}_\theta \leq 1 + \frac{\theta}{4\sqrt{3}}, \quad \tilde{K}_\theta \leq 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta}{3}}I_1(\sqrt{\theta}),$$

από το γεγονός ότι

$$\left\| \tilde{K}_\theta - h_\theta \right\| = \sqrt{\int_0^1 \tilde{K}_\theta^2(x)dx - \sum_{n=1}^{N(\theta)} k_n^2(\theta)}, \quad \sigma = 1, \quad \beta = \frac{1}{10}$$

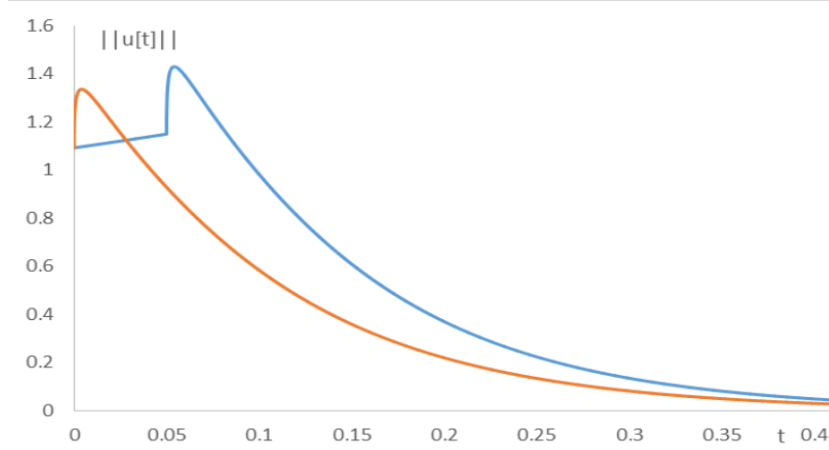
και απαιτώντας να ισχύει

$$\gamma \left\| \tilde{K}_\theta - h_\theta \right\| \tilde{L}_\theta \leq 1 - \frac{1}{12M}$$

4.2 Περίπτωση 2: Δύο άγνωστες παράμετροι

Για τη δεύτερη περίπτωση (με αμφότερες τις παραμέτρους θ, c άγνωστες) ο regulation-triggered προσαρμοστικός έλεγχος δίνεται από τις σχέσεις (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.18), (2.19), (2.22), (2.27)-(2.33). Το Σχήμα 2 δείχνει την εξέλιξη της νόρμας $\|u[t]\|$ συναρτήσεως του χρόνου $t \geq 0$ για το σύστημα κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3) υπό τις (2.9), (2.10), (2.13), (2.22), (2.25), (4.2), (4.3), (4.9), (4.10), (4.11) με τις

Σχήμα 2



Η καμπύλη χρώματος μπλε, δείχνει την εξέλιξη της τιμής $\|u[t]\|$ συναρτήσει του χρόνου $t \geq 0$ για το σύστημα κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3) σε συνδυασμό με τις (2.9), (2.10), (2.13), (2.22), (2.25), (4.2), (4.3), (4.9), (4.10), (4.11) και (4.12). Η καμπύλη χρώματος κόκκινου δείχνει την εξέλιξη της τιμής $\|u[t]\|$ συναρτήσει του χρόνου $t \geq 0$ για το σύστημα κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3) σε συνδυασμό με τις (2.4), (2.5) και (4.8).

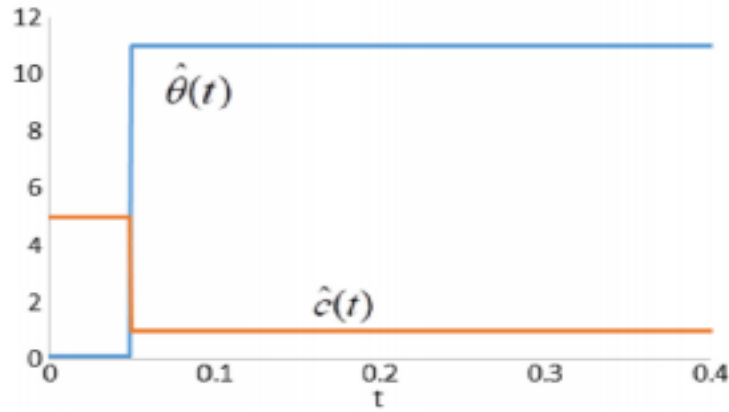
ακόλουθες επιλογές για τις ρυθμιζόμενες παραμέτρους και την αρχική συνθήκη:

$$\begin{aligned} T = 0.05, \quad a = 1, \quad M = 10, \quad \tilde{N} = 1, \quad \hat{c}_0 = 5 \\ u_0(x) = \sqrt{2} \sin(\pi x) + x^2 - x^3, \quad x \in [0, 1], \quad \hat{\theta}_0 = 0.1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, για την παραπάνω επιλογή παραμέτρων, δεν υφίσταται ορατή διαφορά ανάμεσα στην απόκριση του συστήματος κατά την περίπτωση του γνωστού c και στην απόκριση του συστήματος με αμφότερες τις παραμέτρους θ και c άγνωστες (Περιπτώσεις 1 και 2 αντίστοιχα). Συνεπώς, η καμπύλη μπλε χρώματος στο Σχήμα 2, αναπαριστά την εξέλιξη της νόρμας $\|u[t]\|$ συναρτήσει του χρόνου $t \geq 0$, για το σύστημα κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3) υπό τις (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.18), (2.19), (2.22), (2.27)-(2.33). Αιτία έλλειψης αυτής της διαφοράς αποτελεί η έντονη αρχική απόκλιση στην εκτίμηση της παραμέτρου θ . Πράγματι, μια τέτοια αδύναμη εκτίμηση, οδηγεί σε πολύ μικρές τιμές της εισόδου ελέγχου και κατά συνέπεια, ουσιαστικά σε μία λειτουργία συστήματος ανοιχτού βρόχου προτού συμβεί το πρώτο trigger.

Στο Σχήμα 2 επιπλέον, διαφαίνεται η διαφορά μεταξύ της απόκρισης

Σχήμα 3



Στην καμπύλη χρώματος μπλε διαφαίνεται η εξέλιξη της εκτίμησης παραμέτρου $\hat{\theta}(t)$ και η κόκκινη καμπύλη εκφράζει την εξέλιξη της εκτίμησης παραμέτρου $\hat{c}(t)$ συναρτήσει του χρόνου $t \geq 0$ για το σύστημα κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3) σε συνδυασμό με τις (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.18), (2.19), (2.22) και (2.27)-(2.33).

του συστήματος κλειστού βρόχου υπό το regulation-triggered προσαρμοστικό σχήμα και της απόκρισης του συστήματος κλειστού βρόχου υπό το βασικό νόμο ανάδρασης (nominal feedback), όπου αμφότερες οι τιμές των παραμέτρων θ και c είναι γνωστές. Για την πρώτη περίπτωση, το event trigger ενεργοποιείται τη χρονική στιγμή $t = T$, κατά την οποία πραγματοποιείται και η εύρεση της ακριβούς τιμής της παραμέτρου $\theta = 11$. Σε ό,τι αφορά τη δεύτερη περίπτωση, το event trigger γίνεται ενεργό τη χρονική στιγμή $t = T$ και αμφότερες οι τιμές των παραμέτρων $\theta = 11$, $c = 1$ ευρίσκονται τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, όπως διαφαίνεται και στο Σχήμα 3. Αργότερα από αυτήν τη χρονική στιγμή, ο προσαρμοστικός έλεγχος συμπίπτει με το βασικό νόμο ανάδρασης.

4.3 Σύγκριση με τον passive identifier

Για λόγους σύγκρισης με προηγούμενα αποτελέσματα παλαιότερων εργασιών, έχουμε προσομοιώσει τον προσαρμοστικό έλεγχο που έχει δοθεί στις εργασίες [70] και [72] με τον passive identifier. Συγκεκριμένα

με τον έλεγχο

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}(t, x) + \hat{\theta}(t)u(t, x) + \gamma^2 \|u[t]\|^2 (u(t, x) - \hat{u}(t, x)), \quad (4.13)$$

για $t > 0$, και $x \in (0, 1)$

$$\hat{u}(t, 0) = \hat{u}(t, 1) - U(t) = 0, \quad \text{για } t > 0 \quad (4.14)$$

$$U(t) = -\hat{\theta}(t) \int_0^1 s \frac{I_1 \left(\sqrt{\hat{\theta}(t)(1-s^2)} \right)}{\sqrt{\hat{\theta}(t)(1-s^2)}} u(t, s) ds \quad (4.15)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt}(t) = \gamma \int_0^1 (u(t, x) - \hat{u}(t, x)) u(t, x) dx \quad (4.16)$$

με τις ακόλουθες τιμές παραμέτρων και τις ίδιες αρχικές συνθήκες όπως προηγουμένως:

$$u_0(x) = \hat{u}(0, x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x) + x^2 - x^3, \quad x \in [0, 1] \quad (4.17)$$

$$\hat{\theta}_0 = \hat{\theta}(0) = 0.1, \quad \gamma = 100$$

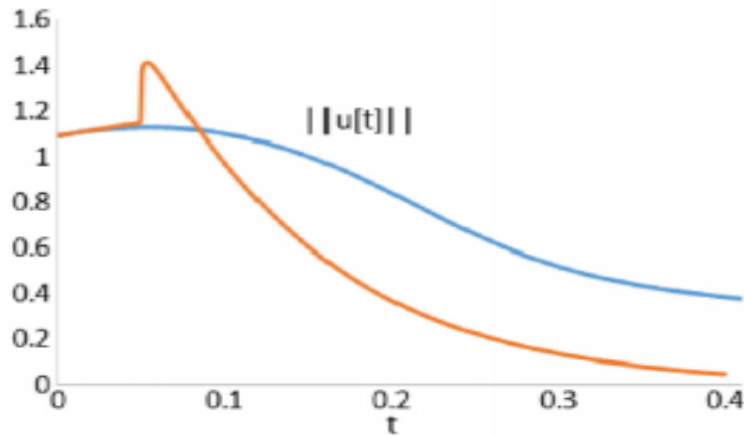
Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στο γεγονός ότι ο προσαρμοστικός έλεγχος με τον passive identifier (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) απαιτεί τη γνώση της τιμής του high frequency gain, δηλαδή της παραμέτρου $c > 0$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 4 και στο Σχήμα 5. Το overshoot της L^2 νόρμας για τον προσαρμοστικό έλεγχο με τον passive identifier, είναι μικρότερο από το overshoot της L^2 νόρμας για τον regulation-triggered προσαρμοστικό έλεγχο. Παρ' όλα αυτά, η σύγκλιση της κατάστασης στο μηδέν είναι πολύ πιο αργή.

Επιπροσθέτως, η εκτίμηση της παραμέτρου δεν είναι ακριβής για τον passive identifier. Ειδικότερα, ο passive identifier υπερεκτιμά σε μεγάλο βαθμό την τιμή της άγνωστης παραμέτρου και προκύπτουν αρκετά μεγάλες τιμές.

Ένας μεγάλος αριθμός αριθμητικών πειραμάτων έχει εκτελεστεί προκειμένου να δοκιμαστούν έκαστη φορά, διαφορετικές τιμές των παραμέτρων γ, T, a, \tilde{N} και διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Τα απότοκα της παρούσας ενότητας είναι αντιπροσωπευτικά όλων των αριθμητικών πειραμάτων και δοκιμών. Σε κάθε περίπτωση που εξετάζεται, προκύπτει ότι ο προσαρμοστικός έλεγχος που παρουσιάζεται στις εργασίες [70], [72] με τον passive identifier, διέπεται από τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

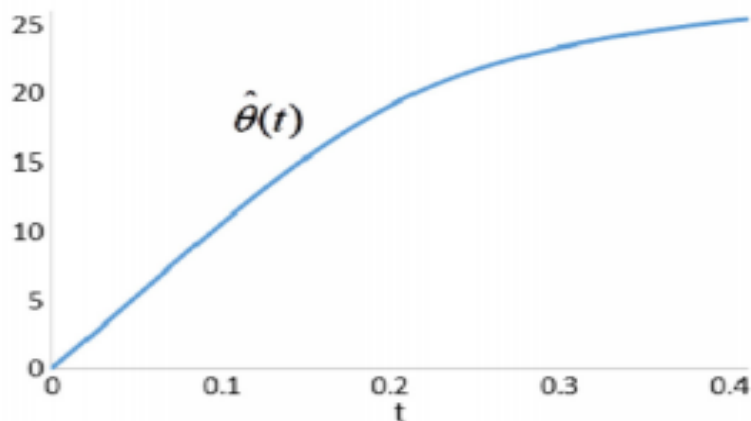
- (i) Δεν επιτυγχάνει ακριβή εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου.

Σχήμα 4



Η καμπύλη χρώματος μπλε εκφράζει την εξέλιξη της τιμής $\|u[t]\|$ συναρτήσει του χρόνου $t \geq 0$ για το σύστημα κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3) σε συνδυασμό με τις (2.25), (4.2), (4.3), (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) και (4.17). Η καμπύλη χρώματος κόκκινου δείχνει την εξέλιξη της τιμής $\|u[t]\|$ συναρτήσει του χρόνου $t \geq 0$ για το σύστημα κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3) σε συνδυασμό με τις (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.18), (2.19), (2.22) και (2.27)-(2.33).

Σχήμα 5



Η εξέλιξη της εκτίμησης παραμέτρου $\hat{\theta}(t)$ συναρτήσει του χρόνου $t \geq 0$ για το σύστημα κλειστού βρόχου (2.1), (2.2), (2.3) σε συνδυασμό με τις (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) και (4.17).

- (ii) Εμφανίζει ένα μικρότερο overshoot από εκείνο της περίπτωσης του regulation-triggered προσαρμοστικού σχήματος.
- (iii) Παρουσιάζει έναν πολύ πιο αργό ρυθμό σύγκλισης από ότι το regulation-triggered προσαρμοστικό σχήμα.

Τη στιγμή που δε θα ήταν πρόπον να γίνει μια γενική σύγκριση είτε της μεταβατικής περιόδου (transient period) (δηλαδή της χρονικής περιόδου που απαιτείται έως ότου ξεκινήσει η εκθετική σύγκλιση της κατάστασης στο μηδέν), είτε της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς ανάμεσα στα δύο προσαρμοστικά σχήματα ελέγχου, καθώς το πρώτο ανακινεί την πεπερασμένου χρόνου εκτιμητική ιδιότητα και το δεύτερο επιχειρεί να πετύχει σύγκλιση σε άπειρο χρόνο όπου είναι απόν το persistence of excitation (PE), σημειώνεται ότι το νέο σχήμα έχει εξ αρχής θυσιάσει την transient performance η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με αυτό, ξεκινώντας με ένα γραμμικό έλεγχο με σταθερή και λανθασμένη εκτίμηση, για να αλλάξει μετά το πρώτο trigger σε βασικό γραμμικό έλεγχο (nominal feedback). Το τελευταίο έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας ανώτερης ασυμπτωτικής απόδοσης. Εν αντιθέσει, το σχήμα βασισμένο στη μέθοδο του passive identifier δεν πραγματοποιεί κάποια τέτοιου είδους αρχική παραχώρηση και δεν επενδύει στη δημιουργία PE, επομένως οδηγεί σε κατώτερη ασυμπτωτική απόδοση.

Κεφάλαιο 5

Απόδειξη βασικού αποτελέσματος

5.1 Βοηθητικά αποτελέσματα

Προς απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1, απαιτείται πρωτίστως η ανάπτυξη τριών βοηθητικών αποτελεσμάτων τα οποία διατυπώνονται στη συνέχεια.

5.1.1 Πρώτο βοηθητικό αποτέλεσμα

Το πρώτο από τα βοηθητικά αποτελέσματα που πρόκειται να διατυπώσουμε, ασχολείται με την ακόλουθη παραβολική ΜΔΕ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (0, 1) \quad (5.1)$$

όπου $p > 0$ είναι μια σταθερά, με συνοριακές συνθήκες

$$u(t, 0) = 0, \quad \text{για } t > 0 \quad (5.2)$$

$$u(t, 1) = U(t), \quad \text{για } t > 0 \quad (5.3)$$

όπου $U(t)$ είναι η είσοδος ελέγχου, η οποία δίνεται από ένα νόμο ανάδρασης της μορφής

$$U(t) = \int_0^1 k(s)u(t, s)ds \quad (5.4)$$

όπου

$$k(x) = \sum_{n=1}^N k_n \phi_n(x), \quad \text{για } x \in [0, 1], \quad (5.5)$$

οι συναρτήσεις ϕ_n ορίζονται από τη σχέση (2.6) και οι k_n , $n = 1, 2, \dots, N$ είναι σταθερές.

Στο σημείο αυτό, διατυπώνεται το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.1.1 [43] *Θεωρούμε το σύστημα (5.1), (5.2), (5.3), όπου $p > 0$ είναι μια σταθερά. Τότε, για κάθε ακέραιο $N \geq 1$ και για κάθε $(k_1, k_2, \dots, k_N) \in \mathfrak{R}^N$ υπάρχουν σταθερές $Q, \sigma > 0$ ούτως ώστε για κάθε $u_0 \in L^2(0, 1)$, το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) με αρχική συνθήκη $u_0 = u[0]$, όπου η συνάρτηση k ορίζεται από τις (5.5), (2.6), έχει μοναδική λύση $u \in C^0(\mathfrak{R}_+; L^2(0, 1)) \cap (C^1(0, +\infty) \times [0, 1])$ με $u[t] \in C^2([0, 1])$ για $t > 0$ η οποία επιπλέον ικανοποιεί την παρακάτω εκτίμηση:*

$$\|u[t]\| \leq Q \exp(\sigma t) \|u_0\|, \text{ για } t \geq 0 \quad (5.6)$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1 βασίζεται σε τέσσερα τεχνικά Λήμματα τα οποία διατυπώνονται παρακάτω:

Λήμμα 5.1.1 [43] *Έστω $k \in C^2([0, 1])$ δοθείσα συνάρτηση. Υπάρχει σταθερά $\sigma > 0$ τέτοια ώστε για κάθε λύση*

$$w \in C^0(\mathfrak{R}_+; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, +\infty) \times [0, 1])$$

με $w[t] \in C^2([0, 1])$ για $t > 0$ του επόμενου προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x}(t, x) &= p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) - p(x + \gamma k(x)) \int_0^1 k''(x) w(t, s) ds \\ &+ a \left(k''(x) + (x + \gamma k(x)) \|k'\|^2 \right) \int_0^1 k(s) w(t, s) ds, \text{ για } t > 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

όπου $p > 0$, $a, \gamma \in \mathfrak{R}$ είναι σταθερές, με αρχική συνθήκη:

$$w[0] = w_0 \in L^2(0, 1) \quad (5.8)$$

και συνοριακές συνθήκες:

$$w(t, 0) = w(t, 1) = 0, \text{ για } t > 0 \quad (5.9)$$

ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:

$$\|w[t]\| \leq \exp(\sigma t) \|w_0\|, \text{ για κάθε } t \geq 0 \quad (5.10)$$

Λήμμα 5.1.2 [43] Έστω $N \geq 1$ ένας ακέραιος και έστω δοθέν διάνυσμα $(k_1, k_2, \dots, k_N) \in \mathbb{R}^N$. Υπάρχουν σταθερές $Q, \sigma > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε λύση $u \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, +\infty) \times [0, 1])$, με $u[t] \in C^2([0, 1])$, για $t > 0$, του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), με $u[0] = u_0$ και τη συνάρτηση k ως έχει οριστεί στις σχέσεις (5.5) και (2.6), να ισχύει η εκτίμηση (5.6).

Λήμμα 5.1.3 [43] Έστω $N \geq 1$ ένας ακέραιος και έστω δοθέν διάνυσμα $(k_1, k_2, \dots, k_N) \in \mathbb{R}^N$. Για κάθε αρχική συνθήκη $u_0 \in L^2(0, 1)$, υπάρχει **το πολύ μία** λύση $u \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, +\infty) \times [0, 1])$ με $u[t] \in C^2([0, 1])$ για $t > 0$ για το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), με αρχική συνθήκη: $u[0] = u_0$, όπου η k ορίζεται κατά τις (5.5) και (2.6).

Λήμμα 5.1.4 [43] Έστω $p > 0$, $a, \gamma \in \mathbb{R}$ δοσμένες σταθερές, έστω $N \geq 1$ ένας ακέραιος και έστω δοθέν διάνυσμα $(k_1, k_2, \dots, k_N) \in \mathbb{R}^N$. Ορίζουμε το διάνυσμα

$$r := \pi^2 [k_1(ab + p), \dots, k_N(ab + pN^2)] \quad (5.11)$$

και τον πίνακα $A = \{A_{i,j} : i, j = 1, \dots, N\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ως ακολούθως

$$A_{i,j} := k_i k_j \pi^2 (a\gamma b + p\gamma j^2 - i^2 a) + L_i k_j \pi^2 (ab + pj^2) - i^2 \pi^2 p \delta_{i,j} \quad (5.12)$$

όπου

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases} \quad (5.13)$$

$$b := \sum_{n=1}^N n^2 k_n^2 \quad (5.14)$$

$$L_n = -\frac{(-1)^n \sqrt{2}}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.15)$$

Για κάθε $w_0 \in L^2(0, 1)$, $T > 0$, η συνάρτηση $w : [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη από τους παρακάτω τύπους :

$$\begin{aligned} w(t, x) = & \sum_{n=N+1}^{\infty} L_n \phi_n(x) \left(\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-s)) r \exp(As) \xi ds \right) \\ & + \sum_{n=1}^N \phi_n(x) e_n \exp(At) \xi + \sum_{n=N+1}^{\infty} \exp(-pn^2\pi^2 t) c_n \phi_n(x), \end{aligned} \quad (5.16)$$

για $x \in [0, 1]$, $t \in (0, T]$

και

$$w(0, x) = w_0(x), \text{ για } x \in [0, 1] \quad (5.17)$$

όπου οι συναρτήσεις ϕ_n ορίζονται από τη σχέση (2.6), $e_n \in \mathbb{R}^N$, $n = 1, \dots, N$ με

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_N = (0, \dots, 0, 1), \quad (5.18)$$

$$c_n := \int_0^1 w_0(x) \phi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.19)$$

$$\xi := \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

είναι κλάσεως $C^0((0, T] \times [0, 1])$. Επιπλέον, η απεικόνιση $[0, T] \ni t \rightarrow w[t] \in L^2(0, 1)$ είναι συνεχής και $w[t] \in C^1([0, 1])$ για κάθε $t \in (0, T]$.

Παραπέμπουμε στο Παράρτημα Γ' για τις αποδείξεις των Λημμάτων 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3 και 5.1.4. Έχοντας εξάγει τα συμπεράσματα των Λημμάτων 5.1.1-5.1.4, είμαστε εις θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα 5.1.1.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1

Η μοναδικότητα της λύσης προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 5.1.3. Έστω $\gamma \in \mathbb{R}$ μία σταθερά τέτοια ώστε

$$\int_0^1 xk(x)dx + \gamma \|k\|^2 \neq 1 \quad (5.21)$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε συνάρτηση $k \in C^2([0, 1])$ υπάρχουν άπειρες τιμές του $\gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η (5.21). Ορίζουμε

$$\beta := \frac{1}{1 - \int_0^1 sk(s)ds - \gamma \|k\|^2} \quad (5.22)$$

$$a := \beta p \gamma \quad (5.23)$$

Θεωρούμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό Fredholm και τον αντίστροφό του για $t \geq 0$ και $x \in [0, 1]$:

$$w(t, x) = u(t, x) - (x + \gamma k(x)) \int_0^1 k(s)u(t, s)ds \quad (5.24)$$

$$u(t, x) = w(t, x) + \beta(x + \gamma k(x)) \int_0^1 k(s)w(t, s)ds \quad (5.25)$$

Με χρήση των σχέσεων (5.24), (5.25), (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), Μπορούμε να εγγυηθούμε ότι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) με αρχική συνθήκη $u[0] = u_0$ μετασχηματίζεται στο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (5.7), (5.8), (5.9) με

$$w_0 = u_0(x) - (x + \gamma k(x)) \int_0^1 k(s)u_0(s)ds, \text{ για } x \in [0, 1] \quad (5.26)$$

Συνεπώς, αρκεί να αποδειχθεί ότι για κάθε $T > 0$, υπάρχει μία συνάρτηση $w \in C^0([0, T]; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, T] \times [0, 1])$ για την οποία ισχύει $w[t] \in C^2([0, 1])$, για $t \in (0, T]$ και η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) &= p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) - p(x + \gamma k(x)) \int_0^1 k''(x)w(t, s)ds \\ &+ a \left(k''(x) + (x + \gamma k(x)) \|k'\|^2 \right) \int_0^1 k(s)w(t, s)ds, \end{aligned} \quad (5.27)$$

για $t \in (0, T]$, $x \in (0, 1)$

$$w[0] = w_0 \in L^2(0, 1) \quad (5.28)$$

$$w(t, 0) = w(t, 1) = 0, \text{ για } t \in (0, T] \quad (5.29)$$

Όπου η αρχική συνθήκη w_0 ορίζεται από τη σχέση (5.26). Η ανισότητα (5.6) αποτελεί συνέπεια του Λήμματος 5.1.2. Σε ό,τι ακολουθεί από αυτό το σημείο και έπειτα, η σταθερά $T > 0$ είναι αυθαίρετη.

Ακολουθώντας, ισχυριζόμαστε ότι η συνάρτηση $w : [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ ορισθείσα από τις (5.16)-(5.20) είναι η ζητούμενη συνάρτηση. Αρχικά παρατηρούμε ότι λόγω του Λήμματος 5.1.4, ισχύει ότι:

$$w \in C^0([0, T]; L^2(0, 1)) \cap C^0((0, T] \times [0, 1]),$$

με $w[t] \in C^1([0, 1])$, για $t \in (0, T]$. Εν συνεχεία δείχνουμε ότι η συνάρτηση w η οποία ορίζεται από τις (5.16)-(5.20) ικανοποιεί τη συνθήκη: $w[t] \in C^2([0, 1])$, για $t \in (0, T]$ και ότι η χρονική παράγωγος $\frac{\partial w}{\partial t}(t, x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στην περιοχή $(0, T] \times [0, 1]$, για $t \in (0, T]$. Η αποδεικτική διαδικασία για τις παραπάνω συνθήκες, κλιμακώνεται στα εξής βήματα:

Βήμα 1: Παρατηρούμε ότι, με χρήση της μεθόδου της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της (5.16) γράφεται:

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-s))r \exp(As)\xi ds &= \frac{1}{pn^2\pi^2}r \exp(At)\xi - r\xi \frac{\exp(-pn^2\pi^2t)}{pn^2\pi^2} \\ &\quad - \frac{1}{pn^2\pi^2} \int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-s))rA \exp(As)\xi ds \end{aligned} \quad (5.30)$$

Αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα σύμφωνα με την (5.30), η (5.16) μετατρέπεται στην ακόλουθη ισότητα:

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \sum_{n=1}^N \phi_n(x)e_n \exp(At)\xi + \sum_{n=N+1}^{\infty} \exp(-pn^2\pi^2t)c_n\phi_n(x) \\ &\quad + r \exp(At)\xi \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{L_n\phi_n(x)}{pn^2\pi^2} - r\xi \sum_{n=N+1}^{\infty} L_n\phi_n(x) \frac{\exp(-pn^2\pi^2t)}{pn^2\pi^2} \\ &\quad - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{L_n\phi_n(x)}{pn^2\pi^2} \left(\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-s))rA \exp(As)\xi ds \right) \\ &\quad \text{για } x \in [0, 1], t \in (0, T] \end{aligned} \quad (5.31)$$

Στο σημείο αυτό, παρατηρούμε ότι

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{L_n\phi_n(x)}{pn^2\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n\phi_n(x)}{pn^2\pi^2} - \sum_{n=1}^N \frac{L_n\phi_n(x)}{pn^2\pi^2} \quad (5.32)$$

Συνδυάζοντας τις (5.31), (5.32), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \sum_{n=1}^N \phi_n(x)e_n \exp(At)\xi + \sum_{n=N+1}^{\infty} \exp(-pn^2\pi^2t)c_n\phi_n(x) \\ &\quad + r \exp(At)\xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n\phi_n(x)}{pn^2\pi^2} - r\xi \sum_{n=N+1}^{\infty} L_n\phi_n(x) \frac{\exp(-pn^2\pi^2t)}{pn^2\pi^2} \\ &\quad - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{L_n\phi_n(x)}{pn^2\pi^2} \left(\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-s))rA \exp(As)\xi ds \right) \\ &\quad - r \exp(At)\xi \sum_{n=1}^N \frac{L_n\phi_n(x)}{pn^2\pi^2}, \text{ για } x \in [0, 1], t \in (0, T] \end{aligned} \quad (5.33)$$

Επιπλέον, λόγω των ορισμών (2.6) και (5.15), ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n \phi_n(x)}{n^2 \pi^2} = \frac{x - x^3}{6}, \text{ για } x \in [0, 1] \quad (5.34)$$

Παραπέμπουμε στο Παράρτημα Δ' για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την εξαγωγή της (5.34).

Λαμβάνοντας επομένως υπόψη τις (5.33), (5.34), έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \sum_{n=1}^N \phi_n(x) e_n \exp(At) \xi + \sum_{n=N+1}^{\infty} \exp(-pn^2 \pi^2 t) c_n \phi_n(x) \\ &+ r \exp(At) \xi \frac{x - x^3}{6p} - r \xi \sum_{n=N+1}^{\infty} L_n \phi_n(x) \frac{\exp(-pn^2 \pi^2 t)}{pn^2 \pi^2} \\ &- \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{L_n \phi_n(x)}{pn^2 \pi^2} \left(\int_0^t \exp(-pn^2 \pi^2 (t-s)) r A \exp(As) \xi ds \right) \\ &- r \exp(At) \xi \sum_{n=1}^N \frac{L_n \phi_n(x)}{pn^2 \pi^2}, \text{ για } x \in [0, 1], t \in (0, T] \end{aligned} \quad (5.35)$$

Βήμα 2: Παραγωγίζοντας την (5.35) όρο προς όρο δύο φορές ως προς $x \in [0, 1]$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) &= \sum_{n=1}^N \phi_n''(x) e_n \exp(At) \xi + \sum_{n=N+1}^{\infty} \exp(-pn^2 \pi^2 t) c_n \phi_n''(x) \\ &- r \exp(At) \xi \frac{x}{p} - r \xi \sum_{n=N+1}^{\infty} L_n \phi_n''(x) \frac{\exp(-pn^2 \pi^2 t)}{pn^2 \pi^2} \\ &- \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{L_n \phi_n''(x)}{pn^2 \pi^2} \left(\int_0^t \exp(-pn^2 \pi^2 (t-s)) r A \exp(As) \xi ds \right) \\ &- r \exp(At) \xi \sum_{n=1}^N \frac{L_n \phi_n''(x)}{pn^2 \pi^2} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Στο σημείο αυτό, με χρήση του ορισμού (2.6), παρατηρούμε ότι

$$\phi_n''(x) = -\sqrt{2} n^2 \pi^2 \sin(n\pi x) = -n^2 \pi^2 \phi_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.37)$$

Αντικαθιστώντας την (5.37) στην (5.36), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) = & - \sum_{n=1}^N n^2 \pi^2 \phi_n(x) e_n \exp(At) \xi - \sum_{n=N+1}^{\infty} n^2 \pi^2 \exp(-pn^2 \pi^2 t) c_n \phi_n(x) \\
& - r \exp(At) \xi \frac{x}{p} + \frac{r \xi}{p} \sum_{n=N+1}^{\infty} L_n \phi_n(x) \exp(-pn^2 \pi^2 t) \\
& + \frac{1}{p} \sum_{n=N+1}^{\infty} L_n \phi_n(x) \left(\int_0^t \exp(-pn^2 \pi^2 (t-s)) r A \exp(As) \xi ds \right) \\
& + \frac{r \exp(At) \xi}{p} \sum_{n=1}^N L_n \phi_n(x), \text{ για } x \in [0, 1], t \in (0, T]
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Παραγωγίζοντας επίσης την (5.35) όρο προς όρο ως προς $t \in (0, T]$, οδηγούμαστε στην παρακάτω ισότητα

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = & \sum_{n=1}^N n^2 \pi^2 \phi_n(x) e_n A \exp(At) \xi - \sum_{n=N+1}^{\infty} pn^2 \pi^2 \exp(-pn^2 \pi^2 t) c_n \phi_n(x) \\
& + r \xi \sum_{n=N+1}^{\infty} L_n \phi_n(x) \exp(-pn^2 \pi^2 t) \\
& + \sum_{n=N+1}^{\infty} L_n \phi_n(x) \left(\int_0^t \exp(-pn^2 \pi^2 (t-s)) r A \exp(As) \xi ds \right)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Βήμα 3: Εν συνεχεία, αποδεικνύουμε ότι για κάθε αρχική συνθήκη $w_0 \in L^2(0, 1)$ και για κάθε $T > 0$, η συνάρτηση w , ορισθείσα από τις (5.16)-(5.20), ικανοποιεί την (5.38) και ταυτοχρόνως, η μερική παράγωγος $\frac{\partial w}{\partial t}(t, x)$ είναι συνεχής στην περιοχή $(0, T] \times [0, 1]$ και ικανοποιεί την ισότητα (5.39).

Αρχικά, επιβάλλεται να δειχθεί ότι οι άπειρες σειρές που εμφανίζονται στο δεξί μέλος των σχέσεων (5.38) και (5.39) είναι ομοιόμορφα και απολύτως συγκλίνουσες. Υπενθυμίζουμε ότι λόγω του ορισμού (5.15), ισχύει

$$|L_n| \leq \frac{\sqrt{2}}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{5.40}$$

Επιπλέον, από τον ορισμό (5.19) και με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwartz και αξιοποιώντας το ότι $\|\phi_n\| = 1$, για $n = 1, 2, \dots$ προκύπτει ότι

$$|c_n| \leq \|w_0\|, \quad n = 1, 2, \dots \tag{5.41}$$

Πέραν των παραπάνω, αξιοποιούμε το γεγονός ότι

$$x^a \exp(-x) \leq a^a \exp(-a), \text{ για κάθε } x \geq 0, a > 0 \quad (5.42)$$

Σημειωτέον ότι η (5.42) αποδεικνύεται εύκολα με παραγωγή και εύρεση μεγίστου της συνάρτησης $f(x) = x^a \exp(-x)$, για $x \geq 0$ και για κάθε $a > 0$.

Συνδυάζοντας τις (5.41) και (5.42) για $x = pn^2\pi^2t$, $t \in (0, T]$ και $a = 2$, λαμβάνουμε την παρακάτω ανισότητα:

$$\begin{aligned} |n^2\pi^2c_n \exp(-pn^2\pi^2t)| &\leq \frac{4 \exp(-2)}{p^2n^2\pi^2t_0^2} \|w_0\|, \\ \text{για } t_0 \in (0, T], n = 1, 2, \dots \text{ και } t \in [t_0, T] \end{aligned} \quad (5.43)$$

Με χρήση των (5.40) και (5.42) για $x = pn^2\pi^2t$ και $a = 1$, προκύπτει η ακόλουθη εκτίμηση

$$|L_n \exp(-pn^2\pi^2t)| \leq \frac{\sqrt{2} \exp(-1)}{pn^3\pi^3t_0}, \text{ για } t_0 \in (0, T], n = 1, 2, \dots \text{ και } t \in [t_0, T] \quad (5.44)$$

Τέλος, συνδυάζοντας την (5.40) με το γεγονός ότι $\|\phi_n\| = 1$, για $n = 1, 2, \dots$ και την ανισότητα:

$$|\exp(At)| \leq \exp(|A|t), \text{ για κάθε } t \geq 0,$$

προκύπτει, λόγω της ανισότητας Cauchy-Schwartz, η ακόλουθη εκτίμηση:

$$\begin{aligned} \left| L_n \int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-s)) r A \exp(As) \xi ds \right| &\leq |r| |A| |\xi| \exp(|A|T) \frac{\sqrt{2}}{pn^3\pi^3}, \\ \text{για } t_0 \in (0, T], n = 1, 2, \dots \text{ και } t \in [t_0, T] \end{aligned} \quad (5.45)$$

Οι ανισότητες (5.43), (5.44) και (5.45), εγγυώνται ότι οι άπειρες σειρές που εμφανίζονται στο δεξί μέλος των ισοτήτων (5.38), (5.39) συγκλίνουν ομοιόμορφα και απολύτως στην περιοχή $[t_0, T] \times [0, 1]$, για κάθε $t_0 \in (0, T]$. Συνεπώς, $w[t] \in C^2([0, 1])$, για κάθε $t \in (0, T]$ και η μερική παράγωγος $\frac{\partial w}{\partial t}(t, x)$ είναι συνεχής στην περιοχή $(0, T] \times [0, 1]$.

Βήμα 4: Απομένει να δειχθεί ότι ισχύουν οι ισότητες (5.27), (5.28),

(5.29). Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (5.38) με $p > 0$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) &= - \sum_{n=1}^N p n^2 \pi^2 \phi_n(x) e_n \exp(At) \xi \\
&\quad - \sum_{n=N+1}^{\infty} p n^2 \pi^2 \exp(-p n^2 \pi^2 t) c_n \phi_n(x) \\
&\quad - r \exp(At) \xi x + r \xi \sum_{n=N+1}^{\infty} L_n \phi_n(x) \exp(-p n^2 \pi^2 t) \\
&\quad + \sum_{n=N+1}^{\infty} L_n \phi_n(x) \left(\int_0^t \exp(-p n^2 \pi^2 (t-s)) r A \exp(As) \xi ds \right) \\
&\quad + r \exp(At) \xi \sum_{n=1}^N L_n \phi_n(x), \quad \text{για } x \in [0, 1], t \in (0, T]
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (5.46) και (5.39), οδηγούμαστε στην ισότητα:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) &= p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) + r \exp(At) \xi x - r \exp(At) \xi \sum_{n=1}^N L_n \phi_n(x) \\
&\quad + \sum_{n=1}^N \phi_n(x) e_n A \exp(At) \xi + p \sum_{n=1}^N n^2 \pi^2 \phi_n(x) e_n \exp(At) \xi, \\
&\quad \text{για } t \in (0, T], x \in (0, 1)
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τους ορισμούς (5.11)-(5.16), ισχύει:

$$e_n A = -n^2 \pi^2 p e_n + L_n r + \gamma k_n r - a n^2 \pi^2 k_n \bar{k}, \quad \text{για } n = 1, \dots, N \tag{5.48\alpha}$$

όπου

$$\bar{k} := [k_1, \dots, k_N]. \tag{5.48\beta}$$

Συνδυάζοντας τις (5.47), (5.48\alpha), (5.48\beta) με τις (5.5), (2.6), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) &= p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) + r \exp(At) \xi (x + \gamma k(x)) + a \bar{k} \exp(At) \xi k''(x), \\
&\quad \text{για } t \in (0, T], x \in (0, 1)
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Αξιοποιώντας τις (5.5), (2.6), (5.14) και (5.16), λαμβάνουμε τις εξής ισότητες:

$$b\pi^2 = \|k'\|^2 \quad (5.50)$$

$$\bar{k} \exp(At)\xi = \int_0^1 k(s)w(t, s)ds, \text{ για } t \in (0, T], x \in (0, 1) \quad (5.51)$$

$$r \exp(At)\xi = ab\pi^2 \int_0^1 k(s)w(t, s)ds - p \int_0^1 k''(s)w(t, s)ds, \quad (5.52)$$

για $t \in (0, T], x \in (0, 1)$

Από τις (5.49), (5.50), (5.51) και (5.52), προκύπτουν άμεσα οι επιθυμητές σχέσεις (5.27), (5.28) και (5.29).

Συμπεραίνουμε επομένως ότι, η συνάρτηση w όπως έχει οριστεί από τις (5.16)-(5.20) είναι μια συνάρτηση κλάσεως $C^0([0, T]; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, T] \times [0, 1])$, με $w[t] \in C^2([0, 1])$, για $t \in (0, T]$ η οποία ικανοποιεί τις ισότητες (5.27), (5.28), (5.29). Συνεπώς, σύμφωνα με την (5.25) Και τους ορισμούς (5.5), (2.6), προκύπτει ότι $u \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, +\infty) \times [0, 1])$, με $u[t] \in C^2([0, 1])$, για $t > 0$ και ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), όπου η συνάρτηση k ορίζεται από τις σχέσεις (5.5), (2.6). \triangleleft

5.1.2 Δεύτερο βοηθητικό αποτέλεσμα

Το δεύτερο βοηθητικό αποτέλεσμα που επιστρατεύεται κατά την απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1, συνίσταται στο ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 5.1.1 [43] Έστω $N \geq 1$ ένας ακέραιος και $(k_1, k_2, \dots, k_N) \in \mathbb{R}^N$ ένα δοθέν διάνυσμα. Τότε, υπάρχουν σταθερές $Q, \sigma > 0$ ούτως ώστε για κάθε αρχική συνθήκη $\tilde{u}_0 \in L^2(0, 1)$, το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t, x) = p \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(t, x) + \theta \tilde{u}(t, x), \quad t > 0, x \in (0, 1) \quad (5.53)$$

όπου $p > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ είναι σταθερές με συνοριακές συνθήκες:

$$\tilde{u}(t, 0) = 0, \text{ για } t > 0 \quad (5.54)$$

$$\tilde{u}(t, 1) = \tilde{U}(t), \text{ για } t > 0 \quad (5.55)$$

και με την είσοδο $\tilde{U}(t)$ να δίνεται από τον τύπο:

$$\tilde{U}(t) = \int_0^1 k(s)\tilde{u}(t, s)ds, \text{ για } t > 0 \quad (5.56)$$

όπου η συνάρτηση $k : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ ορίζεται κατά τις (5.5), (2.6), με αρχική συνθήκη $\tilde{u}[0] = \tilde{u}_0 \in L^2(0, 1)$, έχει μοναδική λύση $\tilde{u} \in C^0(\mathfrak{R}_+; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, +\infty) \times [0, 1])$, με $\tilde{u}[t] \in C^2([0, 1])$, για $t > 0$, η οποία επιπλέον ικανοποιεί την εκτίμηση (5.6).

Απόδειξη του Πορίσματος 5.1.1

Ορίζουμε

$$\tilde{u}(t, x) = \exp(\theta t)u(t, x) \quad (5.57)$$

όπου $u \in C^0(\mathfrak{R}_+; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, +\infty) \times [0, 1])$, με $u[t] \in C^2([0, 1])$, για $t > 0$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), με αρχική συνθήκη $u[0] = \tilde{u}_0$. Παρατηρούμε ότι η $\tilde{u}(t, x)$ ορισμένη από την (5.57) είναι λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (5.53), (5.54), (5.55), (5.56). Τα υπόλοιπα αποτελούν άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.1.1. \triangleleft

5.1.3 Τρίτο βοηθητικό αποτέλεσμα

Το τρίτο και τελευταίο βοηθητικό αποτέλεσμα, ασχολείται με την περίπτωση όπου η είσοδος του συστήματος είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν και συνίσταται στο ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 5.1.5 [43] Έστω $N \geq 1$ ένας ακέραιος, $p > 0$, $\theta \in \mathfrak{R}$, $T > 0$ σταθερές και $(k_1, k_2, \dots, k_N) \in \mathfrak{R}^N$ δοθέν διάνυσμα. Υποθέτουμε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (5.53), (5.54), (5.55), (5.56), όπου η συνάρτηση k ορίζεται από τις σχέσεις (5.5) και (2.6), με αρχική συνθήκη $\tilde{u}[0] = \tilde{u}_0$, ικανοποιεί την ισότητα: $\tilde{U}(t) = 0$, για $t \in [0, T)$. Τότε ισχύει

$$k_n \int_0^1 \sin(n\pi x) \tilde{u}(t, x) dx = 0, \text{ για κάθε } t \in [0, T), n = 1, \dots, N. \quad (5.58)$$

Απόδειξη του Λήμματος 5.1.5

Ορίζουμε:

$$a_n(t) := \int_0^1 \sin(n\pi x) \tilde{u}(t, x) dx, \text{ για } n = 1, \dots, N \quad (5.59)$$

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της σχέσης (5.59) προκύπτει ότι:

$$\dot{a}_n(t) = \int_0^1 \sin(n\pi x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t, x) dx, \text{ για } n = 1, \dots, N \quad (5.60)$$

Αντικαθιστώντας τον όρο $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t, x)$ από την εξίσωση (5.53) και λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό (5.59), η ισότητα (5.60) γράφεται:

$$\dot{a}_n(t) = p \int_0^1 \sin(n\pi x) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(t, x) dx + \theta a_n(t), \text{ για } n = 1, \dots, N \quad (5.61)$$

Με χρήση της μεθόδου της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και αξιοποιώντας τις σχέσεις (5.54), (5.55), καθώς και το γεγονός ότι $\tilde{U}(t) = 0$, για $t \in [0, T)$, από τη σχέση (5.61) λαμβάνουμε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$\dot{a}_n(t) = (\theta - n^2\pi^2 p) a_n(t), \text{ για } n = 1, \dots, N, t \in [0, T) \quad (5.62)$$

Ολοκληρώνουμε τις διαφορικές εξισώσεις (5.62), χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\tilde{u} \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1))$ (από το οποίο συνεπάγεται ότι οι απεικονίσεις $t \rightarrow a_n(t)$ είναι συνεχείς). Οπότε προκύπτουν οι ακόλουθες αντίστοιχες λύσεις:

$$a_n(t) = \exp((\theta - n^2\pi^2 p)t) a_n(0), \text{ για } n = 1, \dots, N \quad (5.63)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.5), (2.6), (5.59) με το γεγονός ότι $\tilde{U}(t) = 0$, για $t \in [0, T)$, η (5.63) μετατρέπεται στην εξής ισότητα:

$$\sum_{n=1}^N k_n (n^2\pi^2)^m a_n(0) = 0, \text{ για } m = 1, \dots, N-1 \quad (5.64)$$

Οι εξισώσεις που αναγράφονται στη σχέση (5.64) μπορούν να γραφούν σε μορφή ομογενούς συστήματος $Ax = 0$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & (1^2\pi^2) & \dots & (1^2\pi^2)^{N-1} \\ 1 & (2^2\pi^2) & \dots & (2^2\pi^2)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (N^2\pi^2) & \dots & (N^2\pi^2)^{N-1} \end{bmatrix}^T, \text{ και } x = \begin{bmatrix} k_1 a_1(0) \\ k_2 a_2(0) \\ \vdots \\ k_N a_N(0) \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A όπως έχει οριστεί κατά τη σχέση (5.65) είναι ο ανάστροφος ενός τετραγωνικού $N \times N$ πίνακα Vandermonde (Υπενθυμίζεται ότι σε έναν πίνακα Vandermonde τα στοιχεία κάθε γραμμής είναι όροι γεωμετρικής προόδου). Συνεπώς θα ισχύει:

$$\det(A) = \det(A^T) = \pi^{2N} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (j^2 - i^2) \neq 0 \quad (5.66)$$

Από την (5.66) προκύπτει άμεσα ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση $x = 0$. Από τον ορισμό (5.65) λαμβάνουμε

$$k_n a_n(0) = 0, \text{ για κάθε } n = 1, \dots, N \quad (5.67)$$

Η ζητούμενη ισότητα (5.58), αποτελεί άμεση συνέπεια των σχέσεων (5.67), (5.63) και του ορισμού (5.59). ◁

5.2 Απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1

Είμαστε τώρα σε ετοιμότητα για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1.

Με τον όρο: “λύση” $(u[t], \hat{\theta}(t), \hat{c}(t))$, του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.3), (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.22), (2.33) σε ένα διάστημα $[0, \bar{t}]$ με $\bar{t} > 0$, εννοούμε απεικονίσεις $\hat{\theta}, \hat{c}: [0, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}$ και $u \in C^1(I_{\bar{t}} \times [0, 1])$, $u[t] \in C^2([0, 1])$, για $t \in (0, \bar{t}]$, όπου

$$I_{\bar{t}} = (\mathbb{R}_+ \setminus \{\tau_i, i = 0, 1, 2, \dots\}) \cap [0, \bar{t}],$$

η οποία επιπλέον ικανοποιεί τις σχέσεις (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.22), (2.33), για κάθε $t \in [0, \bar{t}]$ και για κάθε $i \in Z_+$ με $\tau_i \leq \bar{t}$, καθώς και τις ακόλουθες ισότητες

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \theta u(t, x), \quad (t, x) \in I_{\bar{t}} \times (0, 1) \quad (5.68)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) - cU(t) = 0, \text{ για κάθε } t \in I_{\bar{t}} \quad (5.69)$$

Παρομοίως, μπορούμε να ορίσουμε τη λύση $(u[t], \hat{\theta}(t), \hat{c}(t))$ του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.3), (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.22), (2.33) σε ένα διάστημα $[0, \bar{t}]$, με $\bar{t} > 0$, αντικαθιστώντας όλες τις προαναφερθείσες ανισότητες οι οποίες εμπεριέχουν τη μεταβλητή \bar{t} με αυστηρές ανισότητες και επιπλέον, αντικαθιστώντας το διάστημα $[0, \bar{t}]$ με το διάστημα $[0, \bar{t})$, σε όλες τις προαναφερθείσες σχέσεις. Η απόδειξη του παρόντος θεωρήματος, χωρίζεται σε τρία μέρη, τα οποία περιγράφονται ακολούθως:

- **Μέρος I:** Αποδεικνύεται ότι για κάθε αρχική συνθήκη, η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.3), (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.22), (2.33) είναι μοναδική και ορίζεται στο διάστημα $[0, \lim_{i \rightarrow +\infty}(\tau_i))$.

- **Μέρος II:** Αποδεικνύεται ότι $\lim_{i \rightarrow +\infty} (\tau_i) = +\infty$ και κατά συνέπεια η λύση είναι ορισμένη σε όλο το \mathbb{R}_+ .
- **Μέρος III:** Επιβεβαιώνουμε την επιθυμητή εκτίμηση εκθετικής ευστάθειας.

Μέρος I

Κατά το πρώτο μέρος της απόδειξης, η λύση κατασκευάζεται σε κάθε χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικά events. Η διαδικασία αυτή, πραγματοποιείται μέσω του ακόλουθου ισχυρισμού:

Ισχυρισμός 1: Αν μία λύση $(u[t], \hat{\theta}(t), \hat{c}(t))$ του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.3), (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.22), (2.33) ορίζεται για $t \in [0, \tau_i]$, για συγκεκριμένο $i \in \mathbb{Z}_+$, τότε η λύση ορίζεται και για $t \in [0, \tau_{i+1}]$. Επιπροσθέτως, ισχύει ότι

$$\|u[t]\| \leq R_{\hat{\theta}(\tau_i)}(1+a) \|u[\tau_i]\|, \text{ για κάθε } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \quad (5.70)$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) + \theta w(t, x), \quad t > 0, x \in (0, 1) \quad (5.71)$$

$$w(t, 0) = w(t, 1) - \frac{c}{\hat{c}(\tau_i)} \int_0^1 k(\hat{\theta}(\tau_i), x) w(t, x) dx = 0, \quad \text{για } t > 0 \quad (5.72)$$

$$w[0] = u[\tau_i], \quad \text{για } t > 0 \quad (5.73)$$

όπου η συνάρτηση $k(\theta, x)$ ορίζεται από τη σχέση (2.5). Λαμβάνοντας υπόψη το πόρισμα 5.1.1, προκύπτει ότι υπάρχει μία μοναδική λύση $w \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, +\infty) \times [0, 1])$ με $w[t] \in C^2([0, 1])$, για $t > 0$. Εν συνεχεία, ορίζουμε $\tau_{i+1} > \tau_i$ μέσω της σχέσης (2.10), όπου

$$r_i = \tau_i + \inf \left\{ s > 0 : \|w[s]\| = R_{\hat{\theta}(\tau_i)}(1+a) \|w[0]\| \right\}, \quad \text{για } w[0] \neq 0 \quad (5.74)$$

$$r_i := \tau_i + T, \quad \text{για } w[0] = 0 \quad (5.75)$$

Ακολούθως, ορίζουμε

$$u[\tau_i + s] = w[s], \quad \text{για } s \in (0, \tau_{i+1} - \tau_i) \quad (5.76)$$

και το ζεύγος $(\hat{\theta}(t), \hat{c}(t))$ για $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ μέσω των σχέσεων (2.9), (2.22) και (2.33).

Βάσει όλων των παραπάνω, μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί ότι η απεικόνιση $(u[t], \hat{\theta}(t), \hat{c}(t))$ είναι μία λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.3), (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.22), (2.33) ορισμένη στο $t \in [0, \tau_{i+1}]$. Επιπλέον, με χρήση των σχέσεων (5.73), (5.74), (5.75) και (5.76) προκύπτει ότι ισχύει η επιθυμητή ανισότητα (5.70). \triangleleft

Από τον Ισχυρισμό 1, καθώς και από την κατασκευή της λύσης βήμα προς βήμα, προκύπτει ότι για κάθε αρχική συνθήκη $u_0 \in L^2(0, 1)$, $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}$, $\hat{c}_0 \in \mathbb{R}$, η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.3), (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.22), (2.33) με αρχικές συνθήκες $u[0] = u_0$, $\hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0$, $\hat{c}(0) = \hat{c}_0$, είναι μοναδική και ορίζεται στο διάστημα $[0, \lim_{i \rightarrow +\infty}(\tau_i))$.

Μέρος II

Κατά το δεύτερο μέρος της απόδειξης, δείχνουμε ότι $\lim_{i \rightarrow +\infty}(\tau_i) = +\infty$ και συνεπώς η λύση είναι ορισμένη σε όλο το \mathbb{R}_+ . Προκειμένου να αποδείξουμε το προαναφερθέν, απαιτείται αρχικά, να αποδειχθούν ορισμένες βοηθητικές ιδιότητες για το σύστημα κλειστού βρόχου.

Οι δύο ισχυρισμοί που ακολουθούν, αποτελούν άμεσες συνέπειες του Λήμματος 2.4.1.

Ισχυρισμός 2: Αν μία λύση $(u[t], \hat{\theta}(t), \hat{c}(t))$ του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.3), (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.22), (2.33) ικανοποιεί την ισότητα: $\hat{\theta}(\tau_i) = \theta$ (ή $\hat{c}(\tau_i) = c$) για συγκεκριμένο $i \in \mathbb{Z}_+$, τότε η λύση ικανοποιεί επιπλέον και την ισότητα $\hat{\theta}(t) = \theta$ (ή $\hat{c}(t) = c$), για κάθε $t \in [\tau_i, \lim_{i \rightarrow +\infty}(\tau_i))$.

Ισχυρισμός 3: Αν $u_0 \neq 0$, τότε $\hat{\theta}(\tau_1) = \theta$.

Εν συνεχεία, αποδεικνύουμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Ισχυρισμός 4: Αν $u_0 \neq 0$ και $\hat{c}(\tau_2) \neq c$, τότε $U(t) = 0$, για $t \in [0, \lim_{k \rightarrow +\infty}(\tau_k))$ και η (2.4) ισχύει για $t \in [0, \lim_{k \rightarrow +\infty}(\tau_k))$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 4

Από τον Ισχυρισμό 2, προκύπτει ότι $\hat{c}(\tau_l) \neq c$, για $l = 0, 1$. Λόγω του Λήμματος 2.4.1, έχουμε ότι $U(t) = 0$, για $t \in [0, \tau_2)$. Από το Λήμμα 5.1.5, τους Ισχυρισμούς 2 και 3 καθώς και από τις σχέσεις (2.5), (2.6), (2.8), (2.9), λαμβάνουμε:

$$k_n(\theta) \int_0^1 \sin(n\pi x) u(t, x) dx = 0, \text{ για } t \in [\tau_1, \tau_2) \text{ και } n = 1, \dots, N(\theta) \quad (5.77)$$

Στο σημείο αυτό, παρατηρούμε ότι, η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (2.1), (2.2), (2.3), (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.22), (2.33), δίνεται από τον τύπο:

$$u(t, x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp((\theta - n^2 \pi^2 p)(t - \tau_1)) \sin(n\pi x) \int_0^1 \sin(n\pi z) u(\tau_1, z) dz$$

Επομένως, από τις σχέσεις (5.77), (2.5), (2.6), (2.8), (2.9), συμπεραίνουμε ότι $U(t) = 0$, για $t \in [\tau_1, \lim_{k \rightarrow +\infty}(\tau_k))$. Επίσης από την (5.77), συμπεραίνουμε εκ νέου ότι ισχύει η (2.4) για $t \in [\tau_1, \lim_{k \rightarrow +\infty}(\tau_k))$. Ο Ισχυρισμός έχει αποδειχθεί. \triangleleft

Συνεπώς, από τους Ισχυρισμούς 2 και 4, προκύπτει ότι η ισότητα (2.4) ισχύει για κάθε $t \in [\tau_2, \lim_{k \rightarrow +\infty}(\tau_k))$, όταν $u_0 \neq 0$. Ο πέμπτος και τελευταίος ισχυρισμός, προσδιορίζει τις χρονικές στιγμές των events.

Ισχυρισμός 5: Αν $u_0 \neq 0$, τότε η λύση ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ και ικανοποιεί την ισότητα $\tau_j = \tau_2 + (j - 2)T$, για $j \geq 2$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 5

Αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι $\tau_{i+1} = \tau_i + T$, για $i \geq 2$ σε αμφότερες τις περιπτώσεις όπου $u[\tau_i] \neq 0$ και $u[\tau_i] = 0$. Έστω $i \geq 2$ ένας ακέραιος. Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τους Ισχυρισμούς 2 και 4, ισχύει ότι $\hat{\theta}(t) = \theta$ και ότι η (2.4) ισχύει για κάθε $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$.

Αρχικά υποθέτουμε ότι $u[\tau_i] \neq 0$. Από τη σχέση (2.7) και εφόσον ισχύει η (2.4), λαμβάνουμε:

$$\|u[t]\| \leq R_{\hat{\theta}(\tau_i)} \|u[\tau_i]\|, \text{ για κάθε } t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$\|u[t]\| \leq R_{\hat{\theta}(\tau_i)} \|u[\tau_i]\| < R_{\hat{\theta}(\tau_i)}(1+a) \|u[\tau_i]\|, \text{ για } t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$$

Συνεπώς, καταλήγουμε ότι λόγω των σχέσεων (2.10), (2.12), ισχύει: $\tau_{i+1} = \tau_i + T$. Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς (2.10) και (2.13) κατά την περίπτωση όπου $u[\tau_i] = 0$. ◁

Βάσει του Ισχυρισμού 5, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{i \rightarrow +\infty} (\tau_i) = +\infty$, όταν $u_0 \neq 0$. Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και όταν $u_0 = 0$.

Μέρος III

Στο πλαίσιο του τρίτου και τελευταίου μέρους της απόδειξης του Θεωρήματος 2.5.1, επιβεβαιώνεται η απαιτούμενη εκτίμηση για την ευστάθεια της λύσης.

Λόγω του Ισχυρισμού 5 και της σχέσης (2.7), υπάρχουν σταθερές $R_\theta \geq 1$ και $\omega_\theta > 0$, ούτως ώστε, όταν $u_0 \neq 0$, να ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:

$$\|u[t]\| \leq R_\theta \exp(-\omega_\theta(t - \tau_2)) \|u[\tau_2]\|, \text{ για } t \geq \tau_2 \quad (5.78)$$

Χρησιμοποιώντας το Πρόρισμα 5.1.1 και το Λήμμα 2.4.1 (σύμφωνα με το οποίο ισχύει ότι $\hat{c}(\tau_1) = c$ ή $\hat{c}(\tau_1) = \hat{c}_0$), προκύπτει ότι υπάρχουν σταθερές $Q(\hat{\theta}_0, \hat{c}_0, \theta, c)$, $\sigma(\hat{\theta}_0, \hat{c}_0, \theta, c) > 0$, εξαρτώμενες από το $\hat{\theta}_0 \in \mathfrak{R}$ έτσι ώστε να ισχύει η εξής ανισότητα:

$$\|u[t]\| \leq Q(\hat{\theta}_0, \hat{c}_0, \theta, c) \exp(\sigma(\hat{\theta}_0, \hat{c}_0, \theta, c)t) \|u_0\|, \text{ για } t \in [0, \tau_2] \quad (5.79)$$

Η ανισότητα (5.78) σε συνδυασμό με την (5.79) για $t = \tau_1$, οδηγούν στην παρακάτω εκτίμηση όταν $u_0 \neq 0$:

$$\|u[t]\| \leq R_\theta \exp((\omega_\theta + \sigma(\hat{\theta}_0, \hat{c}_0, \theta, c)\tau_2)Q(\hat{\theta}_0, \hat{c}_0, \theta, c) \exp(-\omega_\theta t) \|u_0\|, \quad (5.80)$$

για $t \geq 0$

Σημειωτέον ότι η εκτίμηση (5.80) ισχύει, ακόμα και στην περίπτωση όπου $u_0 = 0$, διότι κατά τη συγκεκριμένη περίπτωση, η λύση ικανοποιεί την ισότητα $\|u[t]\| = 0$, για κάθε $t \geq 0$.

Θέτοντας

$$M_{\theta, \hat{\theta}_0, c, \hat{c}_0} = R_\theta \exp((\omega_\theta + \sigma(\hat{\theta}_0, \hat{c}_0, \theta, c)\tau_2)Q(\hat{\theta}_0, \hat{c}_0, \theta, c) > 0$$

προκύπτει άμεσα από την (5.80), ότι η κάτωθι εκτίμηση:

$$\|u[t]\| \leq M_{\theta, \hat{\theta}_0, c, \hat{c}_0} \exp(-\omega_\theta t) \|u_0\|$$

ισχύει για κάθε $t \geq 0$.

Τελικώς, υποθέτοντας ότι $u_0 \neq 0$ και αξιοποιώντας τους Ισχυρισμούς 2 και 3, λαμβάνουμε την ισότητα:

$$\hat{\theta}(t) = \theta, \text{ για κάθε } t \geq T.$$

Επιπλέον, αν υπάρχει $t \geq 0$ με $U(t) \neq 0$, τότε από τους Ισχυρισμούς 2 και 4, ισχύει:

$$\hat{c}(t) = c, \text{ για κάθε } t \geq \tau_2.$$

Σημειώνεται ότι η περίπτωση όπου $u_0 = 0$ εξαιρείται, καθώς, στην περίπτωση αυτή, ισχύει ότι $U(t) \equiv 0$. ◁

Μέρος II

Μία γενικευμένη κλάση
Συναρτήσεων Ελέγχου
Lyapunov και σταθεροποίηση
μέσω δειγματοληπτικής
ανάδρασης

Κεφάλαιο 6

Εισαγωγή

6.1 Παρουσίαση προβλήματος

Στο πλαίσιο προβλημάτων τα οποία αφορούν στη σταθεροποίηση μη γραμμικών αυτόνομων συστημάτων μέσω δειγματοληπτικής και υβριδικής ανάδρασης, έχουν καταγραφεί σημαντικά αποτελέσματα στη σχετική βιβλιογραφία. Παραβάλλουμε ενδεικτικά τις ακόλουθες εργασίες: [3], [8], [11], [26], [27], [34], [36], [40]- [68] και σχετικές αναφορές εντός των παραπάνω εργασιών.

Στις εργασίες [82]- [85], εισάγονται διάφορες έννοιες σταθεροποίησης μέσω δειγματοληπτικής ανάδρασης σε συστήματα με γενική μορφή:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad f(0, 0) = 0 \quad (6.1)$$

και επιπλέον εδραιώνονται ικανές συνθήκες τύπου Lyapunov, οι οποίες εγγυώνται ημι-ολική ασυμπτωτική σταθεροποίηση μέσω δειγματοληπτικής ανάδρασης (Semi Global Asymptotic Stabilization by Sampled-Data Feedback (SDF-SGAS)). Ειδικότερα, για την περίπτωση γραμμικών ως προς τον έλεγχο (affine in the control) μη γραμμικών συστημάτων ελέγχου της παρακάτω μορφής:

$$\dot{x} = F(x, u) := f(x) + ug(x), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad f(0) = 0 \quad (6.2)$$

εξάγονται στις εργασίες [82], [84] και [85] ικανές Lie αλγεβρικές συνθήκες για την εξασφάλιση της SDF-SGAS. Οι συνθήκες αυτές, αποτελούν επεκτάσεις της γνωστής τύπου Lyapunov ικανής συνθήκης “Artstein-Sontag” (βλέπε Παράρτημα Ε’) για ασυμπτωτική σταθεροποίηση συστημάτων της μορφής (6.2) μέσω μιας σχεδόν λείας ανάδρασης (παράπεμπουμε στις εργασίες: [9], [74], [76], [79] και [81]).

Τέλος, αναφέρουμε την εργασία [25], το αποτέλεσμα της οποίας αποτελεί μια ουσιώδη προέκταση του αποτελέσματος της Πρότασης 3 από την εργασία [85], εδραιώνοντας ένα γενικό σύνολο ικανών συνθηκών, μέσω των οποίων εξασφαλίζονται:

- Η ιδιότητα SDF-SGAS για συστήματα της μορφής (6.2).
- Η ιδιότητα SDF-SGAS για συστήματα της μορφής (6.2) μαζί με την επιπρόσθετη ιδιότητα της φραγμένης αντίστοιχης δειγματοληπτικής ανάδρασης.

6.2 Ορισμοί

6.2.1 Διατυπώσεις

Για τη διατύπωση των Ορισμών που ακολουθούν και αφορούν το σύστημα (6.1), υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι Lipschitz συνεχής και συμβολίζουμε με $\pi(\cdot) = \pi(\cdot, s, x, u)$ την τροχιά του συστήματος (6.1) με αρχική συνθήκη: $\pi(s, s, x, u) = x \in \mathbb{R}^n$, η οποία αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο μετρήσιμο και τοπικά ουσιωδώς φραγμένο έλεγχο $u : [s, T_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου $T_{\max} = T_{\max}(s, x, u)$ είναι το αντίστοιχο μέγιστο διάστημα ύπαρξης της τροχιάς. Εν συνεχεία διατυπώνουμε τον παρακάτω ορισμό από την εργασία [85]:

Ορισμός 6.2.1 Λέμε ότι το σύστημα (6.1) είναι Ασθενώς Ολικά Ασυμπτωτικά Σταθεροποιήσιμο μέσω Δειγματοληπτικής Ανάδρασης (*Weakly Globally Asymptotically Stabilizable by Sampled-Data Feedback (SDF-WGAS)*), αν για κάθε σταθερό $\tau > 0$, υπάρχουν απεικονίσεις $T : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ για τις οποίες ισχύει:

$$T(\pi) \leq \tau, \text{ για κάθε } \pi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (6.3)$$

και $k(t, \pi; x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ούτως ώστε για κάθε σταθερό $(\pi, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, η απεικόνιση $k(\cdot, \pi, x) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ να είναι μετρήσιμη και τοπικά ουσιωδώς φραγμένη και έτσι ώστε για κάθε $x \neq 0$, να υπάρχει ακολουθία χρονικών στιγμών:

$$t_1 := 0 < t_2 < t_3 < \dots < t_\nu < \dots, \text{ με } t_\nu \rightarrow \infty \quad (6.4)$$

κατά τρόπο ώστε η τροχιά $\pi(\cdot)$ του παρακάτω δειγματοληπτικού συστήματος κλειστού βρόχου:

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &= f(\pi, k(t, \pi(t_i); x)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots \\ \pi(0) &= x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (6.5)$$

να ικανοποιεί την ισότητα:

$$t_{i+1} - t_i = T(\pi(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6.6)$$

καθώς και τις ακόλουθες ιδιότητες:

- **Stability:**

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |\pi(0)| \leq \delta, \\ \Rightarrow |\pi(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

- **Attractivity:**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t) = 0, \quad \text{για κάθε } \pi(0) \in \mathbb{R}^n \quad (6.8)$$

όπου με $|\pi|$ συμβολίζουμε την Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος π .

Στις εργασίες [82] και [84] παρουσιάζεται η έννοια της SDF-WGAS για συστήματα της μορφής (6.1) και επιπλέον εξετάζονται ικανοί χαρακτηρισμοί τύπου Lyapunov για την εν λόγω ιδιότητα. Ειδικότερα, στην Πρόταση 2 της εργασίας [84], εδραιώνεται μία ικανή Lie αλγεβρική συνθήκη προς απόδοση της ιδιότητας SDF-WGAS σε συστήματα της μορφής (6.2).

Εν συνεχεία, παρουσιάζεται η έννοια της SDF-SGAS όπως έχει εισαχθεί κατά την εργασία [85] και αποτελεί μία ισχυρότερη εκδοχή της έννοιας SDF-WGAS.

Ορισμός 6.2.2 Λέμε ότι το σύστημα (6.1) είναι *Ημι-Ολικά Ασυμπτωτικά Σταθεροποιήσιμο μέσω Δειγματοληπτικής Ανάδρασης (Semi-Globally Asymptotically Stabilizable by Sampled-Data Feedback (SDF-SGAS))*, αν για κάθε $R > 0$ και για κάθε δοσμένη διαμέριση χρονικών στιγμών

$$\begin{aligned} T_1 := 0 < T_2 < T_3 < \dots < T_\nu < \dots, \quad \text{με } T_\nu \rightarrow \infty \\ \text{και } T_{\nu+1} - T_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.9)$$

υπάρχει μια γειτονιά Ω του μηδενός με $B[0, R] := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\} \subset \Omega$; (με $|x|$ συμβολίζουμε τη συνήθη Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$) και μία απεικόνιση $k : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \Omega$, η απεικόνιση $k(\cdot, x) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ να είναι μετρήσιμη και ουσιωδώς φραγμένη και η τροχιά $\pi(\cdot)$ του παρακάτω δειγματοληπτικού συστήματος κλειστού βρόχου:

$$\begin{aligned} \dot{\pi} = f(\pi, k(t, \pi(T_i))), \quad t \in [T_i, T_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, \\ \text{με αρχική συνθήκη } \pi(0) \in \Omega \end{aligned} \quad (6.10)$$

να ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) **Stability:** Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ούτως ώστε

$$|\pi(0)| \leq \delta \Rightarrow |\pi(t)| \leq \varepsilon, \text{ για κάθε } t \geq 0, \text{ και για κάθε } \pi(0) \in \Omega.$$

(ii) **Attractivity:** Ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \pi(t) = 0, \text{ για κάθε αρχική συνθήκη } \pi(0) \in \Omega.$$

6.2.2 Παρατηρήσεις

Παρατήρηση 6.2.1 Σύμφωνα με τις εργασίες [77], [85], μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί ότι η SDF-SGAS συνεπάγεται την SDF-WGAS, η οποία συνεπάγεται την ισχύ της Ολικής Ασυμπτωτικής Ελεγχιμότητας (Global Asymptotic Controllability) στο $0 \in \mathbb{R}^n$ (παραπέμπουμε στις εργασίες [2], [10], [12], [28], [35], [74] και [75] για τους σχετικούς ορισμούς).

Παρατήρηση 6.2.2 Η ιδιότητα της SDF-SGAS όπως έχει διατυπωθεί κατά τον Ορισμό 6.2.2, είναι ισχυρότερη από την έννοια της Ημι-Ολικής Ασυμπτωτικής Σταθεροποίησης μέσω Δειγματοληπτικής Ανάδρασης η οποία έχει υιοθετηθεί σε προηγούμενες από την [85] εργασίες στη βιβλιογραφία. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει το παραπάνω, είναι ότι η επιλογή της διαμέρισης χρόνων σύμφωνα με τη σχέση (6.9), είναι αυθαίρετη. Επιπλέον, σύμφωνα με τους Ορισμούς 6.2.1 και 6.2.2, το πλεονέκτημα της SDF-SGAS έναντι της SDF-WGAS είναι ότι η διαμέριση χρονικών στιγμών (6.9) και ο αντίστοιχος έλεγχος στο σύστημα (6.10) είναι ανεξάρτητα της αρχικής κατάστασης x , την ίδια στιγμή που η διαμέριση χρόνων κατά τη σχέση (6.4) και ο αντίστοιχος έλεγχος που εμπλέκεται στη σχέση (6.5), εξαρτώνται, εν γένει, από την αρχική συνθήκη, κάτι το οποίο αποτελεί και τη βασική διαφορά μεταξύ των εννοιών SDF-SGAS και SDF-WGAS [77].

6.2.3 Επεκτάσεις

Αρχικά, προς επέκταση του Ορισμού 6.2.2, εισάγουμε την έννοια της ιδιότητας SDF-SGAS μέσω φραγμένης ανάδρασης. Παραθέτουμε τον ακόλουθο Ορισμό από την εργασία [25]:

Ορισμός 6.2.3 Λέμε ότι το σύστημα (6.2) είναι Ημι-Ολικά Ασυμπτωτικά Σταθεροποιήσιμο μέσω Φραγμένης Δειγματοληπτικής Ανάδρασης (Semi-Globally Asymptotically Stabilizable by Bounded Sampled-Data Feedback

(BSDF-SGAS)), αν είναι SDF-SGAS και επιπλέον υπάρχει μία σταθερά $C = C_\Omega > 0$ έτσι ώστε η αντίστοιχη απεικόνιση $k : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ να ικανοποιεί το εξής :

$$|k(t, x)| \leq C, \text{ για κάθε } x \in \Omega, t \geq 0, \text{ κοντά στο μηδέν.}$$

Έχοντας στη διάθεσή μας τον Ορισμό 6.2.3 της BSDF-SGAS, παραθέτουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο εμπεριέχεται στην εργασία [25] και συνιστά μια ευθεία επέκταση του περιεχομένου της Πρότασης 2 από την εργασία [81].

Πρόταση 6.2.1 Για το σύστημα (6.1) υποθέτουμε ότι υπάρχει μία θετικά ορισμένη και proper C^0 συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ και μία συνάρτηση $a \in K$ (δηλαδή, η $a(\cdot)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα με $a(0) = 0$) τέτοιες ώστε για κάθε $x \neq 0$ και $\varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν, υπάρχει ένας μετρήσιμος και τοπικά ουσιαδώς φραγμένος έλεγχος $u(\cdot, x) : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ο οποίος ικανοποιεί τα εξής:

$$V(\pi(\varepsilon, 0, x, u(\cdot, x))) < V(x); \quad (6.11\alpha)$$

$$V(\pi(s, 0, x, u(\cdot, x))) \leq a(V(x)), \quad \forall s \in [0, \varepsilon] \quad (6.11\beta)$$

Τότε, το σύστημα (6.1) είναι SDF-SGAS. Αν, έχοντας υπόψη τις ιδιότητες (6.11α) και (6.11β) υποθέσουμε επιπλέον ότι για κάθε φραγμένη μη κενή γειτονιά Ω του μηδενός: $0 \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει μια σταθερά $C = C_\Omega > 0$ τέτοια ώστε η αντίστοιχη τιμή του $u(\cdot, \cdot)$ να ικανοποιεί το παρακάτω

$$|u(t, x)| \leq C, \quad \forall x \in \Omega, t \geq 0 \text{ κοντά στο μηδέν,} \quad (6.12)$$

τότε το σύστημα (6.1) είναι BSDF-SGAS.

Επισημαίνουμε ότι το κομμάτι της Πρότασης 6.2.1 το οποίο αφορά στην εξασφάλιση της SDF-SGAS για το σύστημα (6.1), αποδεικνύεται στην εργασία [81]. Η επιπλέον συνθήκη (6.12) εγγυάται ότι το σύστημα (6.1) ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Ορισμού 6.2.3 και συνεπώς είναι BSDF-SGAS.

6.3 Βοηθητικές έννοιες

Στην παρούσα ενότητα, παρέχονται όλοι οι συμβολισμοί και ορισμοί από την εργασία [25], οι οποίοι είναι απαραίτητοι για τη διατύπωση των αποτελεσμάτων του επόμενου κεφαλαίου.

6.3.1 Lie brackets

Για κάθε ζεύγος C^1 απεικονίσεων $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $Y : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$, υιοθετούμε το συμβολισμό:

$$XY := (DY)X, \text{ με } DY \text{ να είναι η παράγωγος της } Y$$

Συμβολίζουμε με $[\cdot, \cdot]$ τον τελεστή της Αγκύλης Lie (Lie bracket), δηλαδή:

$$[X, Y] = XY - YX$$

για κάθε ζεύγος C^1 απεικονίσεων $X, Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Επιπλέον, συμβολίζουμε με

$$\text{Lie} \{f, g\}$$

τη Lie Άλγεβρα η οποία έχει ως γεννήτορα το σύνολο $\{f, g\}$. Παραπέμπουμε στο Παράρτημα ΣΤ' για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον ορισμό και τις ιδιότητες του τελεστή της Αγκύλης Lie. Επιπρόσθετα, εισάγουμε κάποιες στοιχειώδεις έννοιες οι οποίες αφορούν την τάξη (order) ενός διανυσματικού πεδίου $\Delta \in \text{Lie} \{f, g\}$:

Ορισμός 6.3.1 Έστω

$$L_1 := \text{span} \{f, g\}$$

$$\text{και } L_{i+1} := \text{span} \{[X, Y], X \in L_i, Y \in L_1\}, i = 1, 2, \dots$$

Τότε, για κάθε μη μηδενικό διανυσματικό πεδίο $\Delta \in \text{Lie} \{f, g\}$ ορίζουμε:

$$\text{order}_{\{f, g\}} \Delta := 1, \text{ αν } \Delta \in L_1 \setminus \{0\}$$

και

$$\text{order}_{\{f, g\}} \Delta := k > 1, \text{ αν } \Delta = \Delta_1 + \Delta_2,$$

$$\text{με } \Delta_1 \in L_k \setminus \{0\} \text{ και } \Delta_2 \in \text{span} \left\{ \bigcup_{i=1}^{k-1} L_i \right\}$$

Για λόγους απλότητας, υιοθετούμε τον παρακάτω συμβολισμό

$$\text{order} \Delta = \text{order}_{\{f, g\}} \Delta$$

Τέλος, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$$\text{order}_{\{g\}} \Delta = l, l \in \mathbb{N}_0,$$

αναφερόμενοι στην περίπτωση κατά την οποία το διανυσματικό πεδίο $\Delta \in \text{Lie} \{f, g\}$ περιέχεται στη γραμμική θήκη όλων των Lie μονωνύμων των δυναμικών f και g τα οποία περιλαμβάνουν τον όρο g ακριβώς l φορές.

6.3.2 Ένα υποσύνολο της Lie Άλγεβρας $\text{Lie}\{f, g\}$

Προκειμένου να παρουσιαστούν τα νέα αποτελέσματα, απαιτείται, πρωτίστως, η εισαγωγή ενός υποσυνόλου της Lie Άλγεβρας $\text{Lie}\{f, g\}$, το οποίο διαδραματίζει πρωτεύοντα ρόλο στην παροχή των Lie-αλγεβρικών συνθηκών προς σταθεροποίηση του συστήματος (6.2) μέσω μιας δειγματοληπτικής ανάδρασης. Το συγκεκριμένο υποσύνολο προέκυψε από τη χρήση της Campbell-Baker-Hausdorff formula (βλέπε Παράρτημα ΣΤ') εντός της απόδειξης του βασικού μας αποτελέσματος (Κεφάλαιο 8), για τον υπολογισμό των χρονικών παραγώγων μιας δοθείσας πραγματικής συνάρτησης κατά μήκος των δειγματοληπτικών τροχιών ενός δυναμικού συστήματος.

Αρχικά, υποθέτουμε ότι τα δυναμικά του συστήματος (6.2) είναι λεία, δηλαδή ισχύει: $f, g \in C^\infty$, ωστόσο, τα βασικά μας αποτελέσματα μπορούν απευθείας να επεκταθούν για συστήματα της μορφής (6.2) υπό ασθενέστερες υποθέσεις κανονικότητας. Θεωρούμε τα ακόλουθα διανυσματικά πεδία:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,0} &:= f \\ \lambda_{\kappa,j} &:= \sum_{\substack{r_1, \dots, r_j \in \mathbb{N}_0, \\ r_1 + \dots + r_j = \kappa - j - 1}} \left\{ \left[\dots \left[\left[\dots \left[\left[\dots \left[f, g \right], f \right], \dots, f \right], g \right], \dots \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots, g \right], \underbrace{\dots, f}_{r_2}, g \right], \underbrace{f, \dots, f}_{r_1} \right] \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\kappa = 2, 3, \dots; \quad j = 1, \dots, \kappa - 1$$

Επί παραδείγματι, σύμφωνα με τον ορισμό (6.13) είναι:

$$\lambda_{2,1} = [f, g],$$

$$\lambda_{3,1} = [[f, g], f], \quad \lambda_{3,2} = [[f, g], g],$$

$$\lambda_{4,1} = [[[f, g], f], f], \quad \lambda_{4,2} = [[[f, g], f], g] + [[[f, g], g], f],$$

$$\lambda_{4,3} = [[[f, g], g], g],$$

$$\lambda_{5,1} = [[[[f, g], f], f], f],$$

$$\lambda_{5,2} = [[[[f, g], f], f], g] + [[[[f, g], f], g], f] + [[[[f, g], g], f], f],$$

$$\lambda_{5,3} = [[[[f, g], f], g], g] + [[[[f, g], g], f], g] + [[[[f, g], g], g], f],$$

$$\lambda_{5,4} = [[[[f, g], g], g], g] \text{ κλπ.}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ορίζουμε εν συνεχεία το παρακάτω υποσύνολο της Lie Άλγεβρας $\text{Lie}\{f, g\}$ ως εξής:

$$L\{f, g\} := \text{span}\{\lambda_{\kappa,j}, \kappa = 1, 2, \dots, j = 0, \dots, \kappa - 1\} \quad (6.14)$$

Προφανώς, ισχύει ότι $L\{f, g\} \subset \text{Lie}\{f, g\}$ και, λαμβάνοντας υπόψη την (6.13) και τους συμβολισμούς κατά τον Ορισμό 6.3.1, έχουμε

$$\text{order}\lambda_{\kappa,j} = \kappa \geq 1$$

και

$$\text{order}_{\{g\}}\lambda_{\kappa,j} = j \geq 0$$

Κεφάλαιο 7

Κύρια αποτελέσματα

7.1 Διατυπώσεις Προτάσεων

Είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε το βασικό μας αποτέλεσμα το οποίο παρέχει Lie αλγεβρικές συνθήκες προς εξασφάλιση της ιδιότητας SDF-SGAS για συστήματα της μορφής (6.2) και εκφράζεται μέσω των όρων του υποσυνόλου $L\{f, g\}$ της Lie Άλγεβρας $\text{Lie}\{f, g\}$ γενικεύοντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 3 της εργασίας [85]. Οι προτάσεις που ακολουθούν, εμπεριέχονται στην εργασία [25].

Πρόταση 7.1.1 Για το σύστημα (6.2) υποθέτουμε ότι υπάρχει μια λεία συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ η οποία είναι θετικά ορισμένη και proper, ούτως ώστε για κάθε $x \neq 0$, ή να ισχύει ότι $(gV)(x) \neq 0$, ή να ικανοποιείται μία από τις ακόλουθες ιδιότητες: Είτε

$$(gV)(x) = 0 \stackrel{\text{συνθήκη Artstein-Sontag}}{\Rightarrow} (fV)(x) < 0 \quad (7.1)$$

είτε υπάρχει ένας ακέραιος $N = N(x) \geq 1$ έτσι ώστε

$$(gV)(x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_k V)(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \forall \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k \in L\{f, g\} : \sum_{p=1}^k \text{order} \Delta_p \leq N \end{array} \right\} \quad (7.2)$$

και με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει μία από τις εξής δύο ιδιότητες:

$$\text{Ιδιότητα P1 :} \quad (f^{N+1}V)(x) < 0 \quad (7.3)$$

$$\text{Ιδιότητα P2 :} \quad (f^{N+1}V)(x) \leq 0 \quad (7.4)$$

όπου

$$(f^i V)(x) := f(f^{i-1} V)(x), \quad i = 2, 3, \dots, \quad (f^1 V)(x) := (fV)(x)$$

και επιπλέον, ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

P2(i): Ο N είναι ένας θετικός ακέραιος και υπάρχει ένας **περιττός** ακέραιος $j = j(N) \in \{1, \dots, N\}$ έτσι ώστε

$$(\lambda_{N+1,j}V)(x) \neq 0 \quad (7.5)$$

όπου τα διανυσματικά πεδία $\lambda_{N+1,i}$, $i \in \{1, \dots, N\}$, είναι ορισμένα στη σχέση (6.13) και αποτελούν τους γεννήτορες του Lie υποσυνόλου $L\{f, g\}$ που ορίζεται στην (6.14). Επιπλέον, μαζί με την (7.2), υποθέτουμε ότι:

$$(gV)(x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_k V)(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \forall \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k \in L\{f, g\} : \\ \sum_{p=1}^k \text{order} \Delta_p = N + 1; \quad \sum_{p=1}^k \text{order}_{\{g\}} \Delta_p = q \end{array} \right\} \quad (7.6\alpha)$$

για κάθε **άρτιο** θετικό ακέραιο $q < j$, υπό την προϋπόθεση ότι $j > 2$. (7.6β)

P2(ii): Ο N είναι ένας **περιττός** θετικός ακέραιος και υπάρχει ένας **περιττός** ακέραιος $j = j(N) \in \{1, \dots, N\}$ τέτοιος ώστε να ικανοποιείται η (7.5) και η συνεπαγωγή (7.6α) να είναι αληθής για κάθε **άρτιο** θετικό ακέραιο $q : j < q < N$, με την προϋπόθεση ότι $j < N$.

P2(iii) Ο N είναι **άρτιος** και

$$(\lambda_{N+1,N}V)(x) < 0 \quad (7.7)$$

Τότε, το σύστημα (6.2) ικανοποιεί τις συνθήκες (6.11α) και (6.11β) της Πρότασης 6.2.1, συνεπώς, είναι SDF-SGAS.

Στο ακόλουθο αποτέλεσμα, εδραιώνονται Lie αλγεβρικές συνθήκες, προς εξασφάλιση της ιδιότητας BSDF-SGAS για συστήματα της μορφής (6.2) σύμφωνα με τους όρους του υποσυνόλου $L\{f, g\}$.

Πρόταση 7.1.2 Για το σύστημα (6.2) υποθέτουμε ότι υπάρχει μια λεία συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, η οποία είναι θετικά ορισμένη και proper, με τρόπο ώστε να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες της Πρότασης 7.1.1. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι:

- Παράλληλα με την ισχύ της (7.1), υπάρχει ένα ζεύγος συνεχών, μη αρνητικών συναρτήσεων $\zeta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ και $\xi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ έτσι ώστε

$$|(fV)(\omega) + \zeta(\omega)| \leq \xi(|\omega|)|(gV)(\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n \quad (7.8)$$

- Η ιδιότητα P2(ii) ισχυροποιείται υποθέτοντας ότι αυτή ισχύει με $j = N$ (περιττός) και, επιπρόσθετα, ότι αληθεύει η παρακάτω συνεπαγωγή για συγκεκριμένο περιττό N :

$$(gV)(x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_k V)(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \forall \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k \in L\{f, g\} : \\ \sum_{p=1}^k \text{order} \Delta_p = N + 1; \\ \sum_{p=1}^k \text{order}_{\{g\}} \Delta_p \leq N - 1 \end{array} \right\} \quad (7.9)$$

- Η Ιδιότητα P2(iii) ισχυροποιείται, υποθέτοντας ότι ο αντίστοιχος άρτιος ακέραιος N ικανοποιεί την επιπρόσθετη συνεπαγωγή (7.9).

Τότε, το σύστημα (6.2) είναι BSDF-SGAS.

7.2 Σχόλια και Παρατηρήσεις

Παρατήρηση 7.2.1 Το αποτέλεσμα της Πρότασης 7.1.1 αποτελεί μια ουσιαστική επέκταση του αντίστοιχου αποτελέσματος της Πρότασης 3 από την εργασία [85], η οποία βασίζεται σε αυστηρότερες υποθέσεις. Ειδικότερα, οι υποθέσεις P2(i), P2(ii) της Πρότασης 7.1.1, ενδυναμώνονται κατά την εργασία [85] ως εξής:

P2'(i) Ο N είναι ένας περιττός θετικός ακέραιος και

$$(\lambda_{N+1, N} V)(x) \neq 0$$

P2'(ii) Ο N είναι ένας αυθαίρετος θετικός ακέραιος με

$$(f^{N+1} V)(x) = 0, \text{ και } (\lambda_{N+1, 1} V)(x) \neq 0.$$

Προφανώς, οι παραπάνω συνθήκες P2'(i),(ii) αποτελούν συγκεκριμένες περιπτώσεις των υποθέσεων της Πρότασης 7.1.1. Πράγματι, από την Ιδιότητα P2(ii), συνεπάγεται η P2'(i) θέτοντας $j = N$ στην (7.5). (Παρατηρούμε ότι για την περίπτωση όπου ισχύει $j = N$, δεν απαιτείται η ισχύς της συνθήκης (7.6)). Επίσης, από την Ιδιότητα P2(i) συνεπάγεται η P2'(ii) θέτοντας $j = 1$ στη σχέση (7.5). (Παρατηρούμε εκ νέου ότι η επιπλέον συνθήκη (7.6) δεν απαιτείται να ισχύει κατά την περίπτωση όπου είναι $j = 1$).

Μία άλλη ουσιώδης διαφορά μεταξύ του παρόντος αποτελέσματος και αυτού της εργασίας [85], συνίσταται στο γεγονός ότι, σε όλες τις διατυπώσεις των προτάσεων, εμπλέκεται το υποσύνολο $L\{f, g\} \subset \text{Lie}\{f, g\}$ αντί του υποσυνόλου $\text{Lie}\{f, g\} \setminus \{g\} \subset \text{Lie}\{f, g\}$, το οποίο χρησιμοποιείται στα αποτελέσματα της εργασίας [85].

Παρατήρηση 7.2.2 Η συνθήκη (7.6) ικανοποιείται, αν πραγματοποιείται το ακόλουθο

$$\begin{aligned} & \text{span} \left\{ (\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_k V)(x), k = 1, 2, \dots : \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k \in L\{f, g\}, \right. \\ & \left. \mu\epsilon \sum_{p=1}^k \text{order} \Delta_p = N + 1; \sum_{p=1}^k \text{order}_{\{g\}} \Delta_p = q \right\} \\ & = \text{span} \left\{ (\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_k V)(x), k = 1, 2, \dots : \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k \in L\{f, g\}, \right. \\ & \left. \mu\epsilon \sum_{p=1}^k \text{order} \Delta_p \leq N, \sum_{p=1}^k \text{order}_{\{g\}} \Delta_p = q - 1 \right\}, \end{aligned}$$

για κάθε $x \neq 0$, με $(gV)(x) = 0$ και θετικό άρτιο $q < j$

Πράγματι, η προηγούμενη ισότητα σε συνδυασμό με την (7.2) έχει ως συνέπεια τη συνθήκη (7.6). Στο σημείο αυτό, αξίζει να παρατηρηθεί ότι η παραπάνω υπόθεση, αποτελεί μια παραλλαγή της *Hermes Controllability Condition (HCC)* (παραπέμπουμε στην εργασία [38]). Συγκεκριμένα, σύμφωνα με την εν λόγω συνθήκη ισχύει ότι, όταν ο $q > 0$ είναι άρτιος, υποθέτουμε ότι για $x \neq 0$, η γραμμική θήκη (linear span) όλων των Lie μονωνύμων των f και g τα οποία περιέχουν το g **πολύ** $q - 1$ φορές, υπολογισμένα στο x , ισούται με τη γραμμική θήκη των αντίστοιχων Lie μονωνύμων των δυναμικών f και g στα οποία το g εμπεριέχεται **πολύ** q φορές.

Κεφάλαιο 8

Αποδείξεις των Αποτελεσμάτων

8.1 Απόδειξη της Πρότασης 7.1.1:

Αρχικά, επιλέγουμε μία συνεχή και μη αρνητική συνάρτηση $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ και ορίζουμε:

$$u = u(x) := \begin{cases} - \left(\frac{(fV)(x) + \theta(x)}{(gV)(x)^2} + 1 \right) (gV)(x), & (gV)(x) \neq 0 \\ 0, & (gV)(x) = 0 \text{ και } (fV)(x) < 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

Τότε, μπορούμε άμεσα να διαπιστώσουμε ότι, συνδυάζοντας τις (8.1) και (7.1), προκύπτει ότι για επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$, η αντίστοιχη τροχιά του συστήματος (6.2), με τον έλεγχο u ορισμένο κατά τη σχέση (8.1), ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα:

$$V(\pi(s, 0, x, u)) < V(x), \quad \forall s \in (0, \varepsilon] \quad (8.2\alpha)$$

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0 : \text{τέτοιο ώστε είτε } (gV)(x) \neq 0 \\ \text{είτε } (gV)(x) = 0 \text{ και } (fV)(x) < 0 \end{aligned} \quad (8.2\beta)$$

Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ακέραιος $N = N(x) \geq 1$ ο οποίος ικανοποιεί την (7.2) μαζί με μία από τις Ιδιότητες P1, P2. Εφαρμόζουμε μια επέκταση της διαδικασίας που επιστρατεύεται κατά την απόδειξη της Πρότασης 3 από την εργασία [85]. Ορίζουμε τα διανυσματικά πεδία:

$$X := f + u_1 g, \quad Y := f + u_2 g \quad (8.3)$$

και συμβολίζουμε με $X_t(z)$ και $Y_t(z)$ τις τροχιές των συστημάτων

$$\dot{x} = X(x) \text{ και } \dot{y} = Y(y)$$

αντίστοιχα, η οποίες ξεκινούν από τη χρονική στιγμή $t = 0$ από κάποιο $z \in \mathfrak{R}^n$. Για κάθε σταθερά $\rho > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$R(t) := (X_{\rho t} \circ Y_t)(x), \quad t \geq 0, \quad R(0) = x. \quad (8.4)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε την απεικόνιση:

$$m(t) := V(R(t)), \quad t \geq 0 \quad (8.5)$$

και συμβολίζουμε με $m^{(n)}(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$ τη n -οστή χρονική της παράγωγο. Αποδεικνύουμε ότι για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathfrak{R}^n$, η συνθήκη (7.2), μαζί με τις υπόλοιπες ιδιότητες οι οποίες επιβάλλονται από τη διατύπωση της Πρότασης 7.1.1, συνεπάγεται την ύπαρξη μιας σταθεράς

$$\rho = \rho(x) > 0$$

και ενός ζεύγους σταθερών

$$u_1 = u_1(x) \text{ και } u_2 = u_2(x)$$

ούτως ώστε να ισχύει:

$$m^{(n)}(0) = 0, \quad n = 1, \dots, N \quad (8.6)$$

και

$$m^{(N+1)}(0) < 0 \quad (8.7)$$

Προκειμένου να εδραιώσουμε τις (8.6) και (8.7), θα εκφράσουμε τις χρονικές παραγώγους $m^{(n)}(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$ της απεικόνισης $m(\cdot)$, όπως αυτή είναι ορισμένη κατά τη σχέση (8.5), εξαρτώμενες από όρους οι οποίοι αποτελούν στοιχεία του Lie υποσυνόλου $L\{f, g\}$ όπως ορίσθηκε στις (6.13), (6.14). Πράγματι, λαμβάνοντας υπόψη τους ορισμούς (8.3)-(8.5), εφαρμόζουμε την CBH formula στο δεξί μέλος της ισότητας (8.4) και εργαζόμενοι ομοίως όπως κατά την απόδειξη της Πρότασης 3 από την εργασία [85] (βλέπε Παράρτημα Z'), θέτουμε

$$u_2 := -\rho u_1, \quad \rho > 0 \quad (8.8)$$

Τότε προκύπτει ότι

$$m^{(1)}(0) = (\rho + 1)(fV)(x), \quad \text{για } n = 1 \quad (8.9\alpha)$$

$$m^{(2)}(0) = (\rho + 1)^2(f^2V)(x) + u_1\rho(\rho + 1)(\lambda_{2,1}V)(x), \quad \text{για } n = 2 \quad (8.9\beta)$$

$$\begin{aligned}
m^{(n)}(0) &= (\rho + 1)^n (f^n V)(x) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-2} u_1^i (\Pi_{n,i}(\rho; x) + \rho^{n-1}(\rho + 1)(\lambda_{n,i} V)(x)) \\
&+ u_1^{n-1} \rho^{n-1}(\rho + 1)(\lambda_{n,n-1} V)(x), \text{ για } n = 3, 4, \dots
\end{aligned} \tag{8.9\gamma}$$

όπου κάθε απεικόνιση $\Pi_{n,i}(\rho; x)$ για $n \geq 3$ και $i = 1, \dots, n-2$, η οποία εμφανίζεται στο δεξί μέλος της ισότητας (8.9\gamma), ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

I. Εξαρτάται αποκλειστικά από τα $\rho \in \mathfrak{R}$ και $x \in \mathfrak{R}^n$, επομένως, είναι ανεξάρτητη του u .

II. Για κάθε δοσμένο $x \in \mathfrak{R}^n$, η απεικόνιση $\Pi_{n,i}(\rho; x)$ είναι ένα μη μηδενικό πολυώνυμο ως προς ρ με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

$$\deg \Pi_{n,i}(\cdot; x) = n, \quad n \geq 3, \quad i = 1, \dots, n-2 \tag{8.10\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\text{Τα πολυώνυμα } \Pi_{n,i}(\rho; x) \text{ και } q(\rho) = \rho^{n-1}(\rho + 1), \quad n \geq 3 \\
\text{είναι γραμμικά ανεξάρτητα}
\end{aligned} \tag{8.10\beta}$$

III. Για κάθε $\rho \in \mathfrak{R}$ και $x \in \mathfrak{R}^n$, ισχύει το εξής:

$$\begin{aligned}
&\Pi_{n,i}(\rho; x) \\
&\in \text{span} \left\{ \begin{array}{l} (\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_k V)(x), \quad k = 1, 2, \dots, \\ \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k \in L\{f, g\} : \\ \sum_{p=1}^k \text{order} \Delta_p = n; \quad \sum_{p=1}^k \text{order}_{\{g\}} \Delta_p = i \end{array} \right\}, \tag{8.11} \\
&\forall i, n \in \mathbb{N} : n \geq 3, \quad 1 \leq i \leq n-2
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τους ορισμούς (6.13), (6.14), την υπόθεση (7.2) και εφαρμόζοντας την ιδιότητα (8.11) με $n = N$, βρίσκουμε:

$$\Pi_{N,i}(\rho; x) = 0, \quad i = 1, \dots, N-2, \quad \text{για κάθε } \rho \in \mathfrak{R} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned}
(f^i V)(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, N; \\
(\lambda_{N,j} V)(x) &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Από τις (8.12), (8.13) και την ισχύ των (8.9\alpha), (8.9\beta), (8.9\gamma) με $n = N$, προκύπτει ότι ισχύει η (8.6).

Ακολούθως, αποδεικνύουμε την ανισότητα (8.7). Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: Υποθέτουμε ότι η Ιδιότητα P1 ικανοποιείται, με άλλα λόγια, ισχύει η συνθήκη (7.3). Τότε, επικαλούμενοι την (8.9β) και την (8.9γ) με $n = N + 1$ και θέτοντας $u_1 = 0$, $u_2 := -\rho u_1 = 0$, προκύπτει άμεσα ότι η επιθυμητή ανισότητα (8.7) ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή της σταθεράς $\rho > 0$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: Υποθέτουμε εν συνεχεία ότι αμφότερες οι (7.4) και P2(i) αληθεύουν. Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση κατά την οποία είναι $N = 1$. Υπενθυμίζουμε την υπόθεση (7.5) για $j = 1$, σύμφωνα με την οποία έχουμε:

$$(\lambda_{2,1}V)(x) \neq 0 \quad (8.14)$$

Από τις (8.9β), (8.14) και την ισχύ της (7.4), προκύπτει ότι για κάθε $\rho > 0$ υπάρχει μία αυθαίρετα μικρή σταθερά $u_1 = u_1(x) \neq 0$, ούτως ώστε η ανισότητα (8.7) να ισχύει με $N = 1$.

Ακολούθως, πρόκειται να εδραιώσουμε την (8.7) για την περίπτωση όπου $N \geq 2$, υπό τις συνθήκες (7.4) και (7.5). Επικαλούμενοι την (8.9γ) με $n = N + 1$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} m^{(N+1)}(0) &= (\rho + 1)^{N+1}(f^{N+1}V)(x) \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} u_1^i (\Pi_{N+1,i}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,i}V)(x)) \\ &+ u_1^N \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,N}V)(x) \end{aligned} \quad (8.15)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (7.6α), (7.6β) και (8.11) με $n = N + 1$ και $i = 1, \dots, N - 1$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι κάθε απεικόνιση $\Pi_{N+1,i}(\rho; x)$, $N \geq 2$, $i = 1, \dots, N - 1$ που εμφανίζεται παραπάνω, ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα:

$$\begin{aligned} \Pi_{N+1,q}(\rho; x) &= 0, \text{ για κάθε άρτιο} \\ &\text{θετικό ακέραιο } q < j \text{ και για κάθε } \rho \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (8.16)$$

όπου $j \in \{1, \dots, N\}$ είναι ο περιττός ακέραιος ο οποίος ικανοποιεί την (7.5). Στο επόμενο στάδιο, επικαλούμαστε τους ορισμούς (6.13) και (6.14), σύμφωνα με τους οποίους ισχύει ότι

$$\begin{aligned} &(\lambda_{n,i}V)(x) \\ &\in \text{span} \left\{ \begin{array}{l} (\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_k V)(x), \quad k = 1, 2, \dots, \\ \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k \in L\{f, g\} : \\ \sum_{p=1}^k \text{order} \Delta_p = n; \quad \sum_{p=1}^k \text{order}_{\{g\}} \Delta_p = i \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

για $n \geq 2$, $i = 1, \dots, n - 1$

Από την ισότητα (8.17) με $n = N + 1$ και έχοντας υπόψη τις υποθέσεις (7.6α), (7.6β), λαμβάνουμε:

$$(\lambda_{N+1,q}V)(x) = 0, \text{ για κάθε άρτιο } q < j \quad (8.18)$$

Από τις (8.15), (8.16) και (8.18), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} m^{(N+1)}(0) &= (\rho + 1)^{N+1}(f^{N+1}V)(x) \\ &+ \sum_{k=0}^{\frac{j-1}{2}} u_1^{2k+1} \left(\Pi_{N+1,2k+1}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,2k+1}V)(x) \right) \\ &+ \sum_{k=j+1}^{N-1} u_1^k \left(\Pi_{N+1,k}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,k}V)(x) \right) \\ &+ u_1^N \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,N}V)(x), \text{ για } 1 \leq j \leq N \end{aligned} \quad (8.19)$$

Στο σημείο αυτό, βρισκόμαστε εις θέση να αποδείξουμε την ισχύ της ανισότητας (8.7). Πρόκειται να ακολουθήσουμε μία επαγωγική διαδικασία η οποία περιγράφεται αναλυτικά, βήμα προς βήμα, ως εξής:

Επαγωγικό Βήμα 1: Επειδή, σύμφωνα με την ιδιότητα (8.10β) με $n = N + 1$ και $i = 1$, τα πολυώνυμα $\Pi_{N+1,1}(\rho; x)$ και $q(\rho) = \rho^N(\rho + 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, εξετάζουμε δύο υποπεριπτώσεις:

Υποπερίπτωση i: Υπάρχει μία σταθερά $\rho = \rho(x) \in (0, 1]$, για την οποία ισχύει

$$\Pi_{N+1,1}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,1}V)(x) \neq 0.$$

Σημειωτέον ότι, εφόσον ο j είναι περιττός, κάθε ακέραιος της μορφής $2k + 1$, που εμφανίζεται στην (8.19) ως εκθέτης του u_1 για $k = 0, 1, \dots, (j - 1)/2$ θα ισούται με έναν περιττό θετικό ακέραιο. Συνεπώς, προκύπτει από την (8.19), ότι υπάρχουν σταθερές $u_1 = u_1(x)$, $u_2 := -\rho u_1$, με τις τιμές $|u_1|, |u_2|$ να είναι αυθαίρετα μικρές, για τις οποίες ικανοποιείται η (8.7).

Υποπερίπτωση ii: Ισχύει

$$\Pi_{N+1,1}(\rho; x) = 0, \text{ για κάθε } \rho \in \mathfrak{R} \text{ και } (\lambda_{N+1,1}V)(x) = 0.$$

Τότε, η (8.19) γράφεται εκ νέου ως εξής:

$$\begin{aligned}
m^{(N+1)}(0) &= (\rho + 1)^{N+1}(f^{N+1}V)(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{\frac{j-1}{2}} u_1^{2k+1} \left(\Pi_{N+1,2k+1}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,2k+1}V)(x) \right) \\
&+ \sum_{k=j+1}^{N-1} u_1^k \left(\Pi_{N+1,k}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,k}V)(x) \right) \\
&+ u_1^N \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,N}V)(x), \text{ δεδομένου ότι } 3 \leq j \leq N
\end{aligned} \tag{8.20}$$

και προχωρούμε στο επόμενο βήμα:

Επαγωγικό Βήμα 2: Εφόσον, σύμφωνα με την ιδιότητα (8.10β) με $n = N + 1$ και $i = 3$, τα πολυώνυμα $\Pi_{N+1,3}$ και $q(\rho) = \rho^N(\rho + 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διακρίνουμε εκ νέου δύο υποπεριπτώσεις:

Υποπερίπτωση i: Υπάρχει μία σταθερά $\rho = \rho(x) \in (0, 1]$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\Pi_{N+1,3}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,3}V)(x) \neq 0.$$

Τότε, από το παραπάνω και από την (8.20), προκύπτει ότι, υπάρχουν σταθερές $u_1 = u_1(x)$, $u_2 := -\rho u_1$, με τις τιμές $|u_1|, |u_2|$ να είναι αυθαίρετα μικρές, για τις οποίες ικανοποιείται η ανισότητα (8.7).

Υποπερίπτωση ii: Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$\Pi_{N+1,3}(\rho; x) = 0, \text{ για κάθε } \rho \in \mathfrak{R}, \text{ και } (\lambda_{N+1,3}V)(x) = 0.$$

Τότε, η (8.20) διαμορφώνεται ως εξής

$$\begin{aligned}
m^{(N+1)}(0) &= (\rho + 1)^{N+1}(f^{N+1}V)(x) \\
&+ \sum_{k=2}^{\frac{j-1}{2}} u_1^{2k+1} \left(\Pi_{N+1,2k+1}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,2k+1}V)(x) \right) \\
&+ \sum_{k=j+1}^{N-1} u_1^k \left(\Pi_{N+1,k}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,k}V)(x) \right) \\
&+ u_1^N \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,N}V)(x), \text{ δεδομένου ότι } 5 \leq j \leq N
\end{aligned} \tag{8.21}$$

και προχωρούμε στο επόμενο επαγωγικό βήμα. Ειδικότερα, λαμβάνοντας υπόψη την (8.21), είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε εργαζόμενοι ομοίως με επαγωγή και, εν τέλει, να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι:

- είτε θα ισχύει η ανισότητα (8.7), για συγκεκριμένες σταθερές $u_1 := u_1(x)$, $u_2 := -\rho u_1$, για κάποιο $\rho > 0$, με τις ποσότητες $|u_1|$, $|u_2|$ να είναι αυθαίρετα μικρές,
- είτε θα ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες

$$\begin{aligned} \Pi_{N+1,i}(\rho; x) = 0, \quad \forall \rho \in \mathfrak{R}, \\ \text{για κάθε περιττό } i \in \{1, 3, \dots, j-2\} \end{aligned} \quad (8.22\alpha)$$

$$(\lambda_{N+1,i}V)(x) = 0, \quad \text{για κάθε περιττό } i \in \{1, 3, \dots, j-2\} \quad (8.22\beta)$$

και η διαδικασία τερματίζεται στο Επαγωγικό Βήμα υπ' αριθμόν $(j+1)/2$, το οποίο περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω και κατά το οποίο, σύμφωνα με τις (8.22α) και (8.22β), η αρχική έκφραση (8.15), γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} m^{(N+1)}(0) &= (\rho+1)^{N+1}(f^{N+1}V)(x) \\ &+ \sum_{k=j}^{N-1} u_1^k \left(\Pi_{N+1,k}(\rho; x) + \rho^N(\rho+1)(\lambda_{N+1,k}V)(x) \right) \\ &+ u_1^N \rho^N(\rho+1)(\lambda_{N+1,N}V)(x) \end{aligned} \quad (8.23)$$

Επαγωγικό Βήμα $(j+1)/2$: Αρχικά επισημαίνεται ότι εφόσον ο j είναι περιττός, η ποσότητα $(j+1)/2$ ισούται με ένα θετικό ακέραιο αριθμό. Λόγω της (7.5), εξετάζεται μόνο μία περίπτωση. Συγκεκριμένα, εφόσον ο περιττός j ικανοποιεί την (7.5), τότε η (8.23) σε συνδυασμό με την (7.4), βεβαιώνουν ότι για κάθε $\rho \in (0, 1]$, υπάρχουν σταθερές $u_1 = u_1(x)$, $u_2 := -\rho u_1$, με τις τιμές $|u_1|$, $|u_2|$ να είναι αυθαίρετα μικρές, ούτως ώστε να αληθεύει η (8.7).

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: Κατά την τρίτη περίπτωση που μελετάται, υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η Ιδιότητα P2(ii). Δηλαδή, ο N είναι περιττός, η σχέση (7.4) αληθεύει και επιπλέον υπάρχει ένας περιττός ακέραιος $j = j(N) \in \{1, \dots, N\}$ ούτως ώστε οι (7.5) και (7.6α) να ισχύουν για όλους τους άρτιους θετικούς ακέραιους q , για τους οποίους ισχύει $j < q < N$.

Επισημαίνουμε αρχικά ότι η περίπτωση κατά την οποία ισχύει ότι $N = 1$ (και επομένως $j = 1$) έχει ήδη εξεταστεί κατά την ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2. Ειδικότερα, κατά την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στην ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2, προέκυψε ότι η (7.5) με $N = 1$ και $j = 1$, συνεπάγεται την (8.14). Από τις (8.9β), (8.14) και (7.4), προκύπτει ότι για κάθε $\rho > 0$ υπάρχει μία αυθαίρετα μικρή σταθερά $u_1 = u_1(x) \neq 0$, ούτως ώστε η ανισότητα (8.7) να ισχύει με $N = 1$. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι όταν

ικανοποιείται η Ιδιότητα P2(ii) με $j = 1$, δεν απαιτείται η ισχύς της συνθήκης (7.6).

Έχοντας παραθέσει την παραπάνω επισήμανση, χρησιμοποιώντας ως πιλοτική σχέση την (8.15), πραγματοποιούμε την αντίθετη επαγωγική διαδικασία με εκείνη που εφαρμόζεται στην ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2, προκειμένου να αποδειχθεί η (8.7). Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η ιδιότητα (7.6α) ισχύει για όλους τους άρτιους θετικούς ακераίους q με $j < q < N$, καθώς και το γεγονός ότι αμφοτεροι οι αριθμοί N, j είναι περιττοί, συμπεραίνουμε ότι η (8.15) γράφεται εκ νέου ως εξής

$$\begin{aligned}
m^{(N+1)}(0) &= (\rho + 1)^{N+1}(f^{N+1}V)(x) \\
&+ \sum_{k=1}^j u_1^k \left(\Pi_{N+1,k}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,k}V)(x) \right) \\
&+ \sum_{k=\frac{j+3}{2}}^{\frac{N-1}{2}} u_1^{2k-1} \left(\Pi_{N+1,2k-1}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,2k-1}V)(x) \right) \\
&+ u_1^N \rho^N (\rho + 1)(\lambda_{N+1,N}V)(x)
\end{aligned} \tag{8.24}$$

όπου, χάριν απλότητας, έχουμε υποθέσει ότι $N - j \geq 4$.

Επαγωγικό Βήμα 1: Επικεντρωνόμαστε στην έκφραση (8.24) και θεωρούμε δύο υποπεριπτώσεις:

Υποπερίπτωση i: Ισχύει ότι

$$(\lambda_{N+1,N}V)(x) \neq 0.$$

Επομένως, λόγω της (7.4) και της (8.24) προκύπτει ότι για κάθε $\rho = \rho(x) \in (0, 1]$, μπορούν να βρεθούν σταθερές $u_1 = u_1(x)$ και $u_2 := -\rho u_1$, με τις τιμές $|u_1|, |u_2|$ να είναι καταλλήλως μεγάλες, για τις οποίες ικανοποιείται η ανισότητα (8.7).

Υποπερίπτωση ii: Ισχύει ότι

$$(\lambda_{N+1,N}V)(x) = 0.$$

Τότε, η (8.24) διαμορφώνεται όπως παρακάτω

$$\begin{aligned}
m^{(N+1)}(0) &= (\rho + 1)^{N+1}(f^{N+1}V)(x) \\
&+ \sum_{k=1}^j u_1^k \left(\Pi_{N+1,k}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,k}V)(x) \right) \\
&+ \sum_{k=\frac{j+3}{2}}^{\frac{N-3}{2}} u_1^{2k-1} \left(\Pi_{N+1,2k-1}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,2k-1}V)(x) \right) \\
&+ u_1^{N-2} \left(\Pi_{N+1,N-2}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,N-2}V)(x) \right)
\end{aligned} \tag{8.25}$$

και βάσει την σχέσης (8.25), προχωρούμε στο επόμενο Βήμα.

Επαγωγικό Βήμα 2: Επειδή σύμφωνα με την ιδιότητα (8.10β) με $n = N + 1$ και $i = N - 2$, τα πολυώνυμα $\Pi_{N+1,N-2}(\rho; x)$ και $q(\rho) = \rho^N(\rho + 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

Υποπερίπτωση i: Υπάρχει μία σταθερά $\rho = \rho(x) \in (0, 1]$ για την οποία ισχύει

$$\Pi_{N+1,N-2}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,N-2}V)(x) \neq 0$$

Το τελευταίο, σε συνδυασμό με τις (7.4) και (8.25), επιβεβαιώνει ότι υπάρχουν σταθερές $u_1 = u_1(x)$, $u_2 := -\rho u_1$, με τις τιμές $|u_1|$, $|u_2|$ να είναι επαρκώς μεγάλες, οι οποίες ικανοποιούν την (8.7).

Υποπερίπτωση ii: Ισχύουν ταυτόχρονα οι ισότητες:

$$\Pi_{N+1,N-2}(\rho; x) = 0, \text{ για κάθε } \rho \in \mathfrak{R}$$

$$(\lambda_{N+1,N-2}V)(x) = 0$$

Τότε, η (8.25) γράφεται ως ακολούθως

$$\begin{aligned}
m^{(N+1)}(0) &= (\rho + 1)^{N+1}(f^{N+1}V)(x) \\
&+ \sum_{k=1}^j u_1^k \left(\Pi_{N+1,k}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,k}V)(x) \right) \\
&+ \sum_{k=\frac{j+3}{2}}^{\frac{N-5}{2}} u_1^{2k-1} \left(\Pi_{N+1,2k-1}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,2k-1}V)(x) \right) \\
&+ u_1^{N-4} \left(\Pi_{N+1,N-4}(\rho; x) + \rho^N(\rho + 1)(\lambda_{N+1,N-4}V)(x) \right)
\end{aligned} \tag{8.26}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (8.26) είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε όμοια με το περιεχόμενο του Επαγωγικού Βήματος 1 και κάθε φορά να καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

- είτε η ανισότητα (8.7) ισχύει για κάποιες σταθερές $u_1 = u_1(x)$, $u_2 := -\rho u_1$, με τις τιμές $|u_1|$, $|u_2|$ να είναι επαρκώς μεγάλες,
- είτε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες

$$\begin{aligned} \Pi_{N+1,i}(\rho; x) &= 0, \quad \forall \rho \in \mathfrak{R}, \\ \text{για κάθε περιττό } i &\in \{j+2, \dots, N-2\} \end{aligned} \quad (8.27\alpha)$$

$$(\lambda_{N+1,i}V)(x) = 0, \quad \text{για κάθε περιττό } i \in \{j+2, \dots, N\} \quad (8.27\beta)$$

Η διαδικασία θα τερματιστεί στο Επαγωγικό Βήμα υπ' αριθμόν $(N-j+2)/2$ που περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω. Κατά το τελευταίο επαγωγικό βήμα, δεδομένης της ισχύος των (8.27α) και (8.27β), η πιλοτική έκφραση (8.15) διαμορφώνεται ως εξής

$$\begin{aligned} m^{(N+1)}(0) &= (\rho+1)^{N+1}(f^{N+1}V)(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{j-1} u_1^k \left(\Pi_{N+1,k}(\rho; x) + \rho^N(\rho+1)(\lambda_{N+1,k}V)(x) \right) \\ &+ u_1^j \left(\Pi_{N+1,j}(\rho; x) + \rho^N(\rho+1)(\lambda_{N+1,j}V)(x) \right) \end{aligned} \quad (8.28)$$

Επαγωγικό Βήμα $(N-j+2)/2$: (Παρατηρούμε ότι, επειδή αμφότεροι οι N και j είναι περιττοί, ο αριθμός $(N-j+2)/2$ είναι ένας θετικός ακέραιος) Στο τελευταίο επαγωγικό βήμα της εν λόγω διαδικασίας θεωρείται μόνο μία περίπτωση. Ειδικότερα, λόγω της (7.5), λαμβάνουμε

$$(\lambda_{N+1,j}V)(x) \neq 0$$

Το τελευταίο σε συνδυασμό με την (7.4), την (8.10β) με $n = N+1$, $i = j$ και την (8.28), μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, για κάθε $\rho = \rho(x) \in (0, 1]$, υπάρχουν σταθερές $u_1 = u_1(x)$, $u_2 := -\rho u_1$, με τις τιμές $|u_1|$, $|u_2|$ να είναι επαρκώς μεγάλες, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα (8.7).

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4: Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες (7.2), (7.4) και η Ιδιότητα P2(iii) είναι αληθείς. Με άλλα λόγια, υπάρχει ένας άρτιος ακέραιος $N \geq 2$, ο οποίος ικανοποιεί τις (7.2), (7.4) και (7.7). Συνεπώς, προκύπτει από την (8.9γ) με $n = N+1$ ότι για κάθε $\rho = \rho(x) \in (0, 1]$, υπάρχουν σταθερές $u_1 = u_1(x)$, $u_2 := -\rho u_1$, με τις τιμές $|u_1|$, $|u_2|$ να είναι επαρκώς μεγάλες, ούτως ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα (8.7).

Εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις (8.1)-(8.7) και επιχειρηματολογώντας όπως κατά την απόδειξη της Πρότασης 3 από την εργασία [85], προκύπτει ότι για κάθε $x \neq 0$ και $\varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν, υπάρχει ένας μετρήσιμος και τοπικά ουσιωδώς φραγμένος έλεγχος $u(\cdot, x) : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ο οποίος ικανοποιεί τις συνθήκες (6.11α), (6.11β) της Πρότασης 6.2.1, με $a(s) := 2s$, γεγονός το οποίο επιβεβαιώνει ότι το σύστημα (6.2) είναι SDF-SGAS.

Προς ολοκλήρωση της απόδειξης, σημειώνεται ότι για την περίπτωση όπου ισχύει

$$(gV)(x) = 0, \quad (fV)(x) \leq 0, \quad x \neq 0$$

ο αντίστοιχος έλεγχος ορίζεται ως ακολούθως:

Θεωρούμε αρχικά τις σταθερές $\rho = \rho(x) \in (0, 1]$, $u_1 = u_1(x)$, $u_2 := -\rho u_1$ όπως έχουν καθοριστεί παραπάνω, σύμφωνα με τις ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ 1-4. Ορίζουμε:

$$\eta(s; t, x) := \begin{cases} u_2 := -\rho u_1, & s \in [0, t] \\ u_1, & s \in (t, t + \rho t] \end{cases} \quad (8.29)$$

και επιπλέον, για οποιαδήποτε επαρκώς μικρά $\sigma = \sigma(x) > 0$ και $\varepsilon \in (0, \sigma]$ ορίζουμε:

$$u(\cdot, x) := \eta(\cdot; (\varepsilon/(1 + \rho)), x) \quad (8.30)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (8.3)-(8.7), (8.29) και (8.30), προκύπτει ότι η αντίστοιχη τροχιά $\pi(\cdot, 0, x, u)$ του συστήματος (6.2) ικανοποιεί ταυτοχρόνως τα ακόλουθα

$$V(\pi(\varepsilon, 0, x, u(\cdot, x))) < V(x) \quad (8.31)$$

και

$$V(\pi(s, 0, x, u(\cdot, x))) \leq 2V(x), \quad (8.32)$$

για κάθε $s \in (0, \varepsilon]$, για $\varepsilon > 0$, κοντά στο μηδέν

Από τις (8.31), (8.32) σε συνδυασμό με τις (8.1) και (8.2α), (8.2β) προκύπτουν αμφότερες οι (6.11α) και (6.11β). Συνεπώς το σύστημα (6.2) ικανοποιεί τις απαραίτητες προϋποθέσεις της Πρότασης 6.2.1 ώστε να είναι SDF-SGAS. ◁

8.2 Απόδειξη της Πρότασης 7.1.2

Θεωρούμε το σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ως μία μη κενή και φραγμένη γειτονιά του $0 \in \mathbb{R}^n$. Λόγω της (8.1), προκύπτει από την υπόθεση (7.8) ότι για

τον υποψήφιο έλεγχο u , υπάρχει ένα ζεύγος συνεχών, μη αρνητικών συναρτήσεων $\zeta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ και $\xi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, καθώς και μία σταθερά $C > 0$, ούτως ώστε να ισχύει

$$|u(x)| \leq \left(\frac{|(fV)(x) + \zeta(x)|}{|(gV)(x)|^2} + 1 \right) |(gV)(x)| \leq \xi(|x|) + |(gV)(x)| \leq C,$$

για κάθε $x \in \Omega$: είτε $(gV)(x) \neq 0$, είτε $(gV)(x) = 0$ και $(fV)(x) < 0$

Εν συνεχεία, εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: Θεωρούμε εκείνα τα μη μηδενικά x για τα οποία ισχύει $(gV)(x) = 0$ και συγχρόνως ικανοποιούνται οι υποθέσεις (7.2), (7.4) συνδυαζόμενες με κάποια από τις Ιδιότητες P1, P2(i). Τότε, εφαρμόζοντας ακριβώς την ίδια διαδικασία με εκείνη που περιγράφεται κατά την απόδειξη της Πρότασης 7.1.1, καταλήγουμε στο ότι, για κάθε $\mu > 0$, μπορεί να επιλεχθεί ένα διάνυσμα $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, ούτως ώστε να ικανοποιούνται οι (8.6) και (8.7) και επιπροσθέτως να ισχύουν τα ακόλουθα

$$|u(x)| \leq \mu \tag{8.33α}$$

$$\forall x \in \Omega \setminus \{0\} : (gV)(x) = 0, \tag{8.33β}$$

δεδομένου ότι ισχύει είτε η P1 είτε η P2(i)

Δείχνουμε εν συνεχεία ότι, όσον αφορά τις υπόλοιπες περιπτώσεις του περιεχομένου της Πρότασης 7.1.2, ικανοποιούνται οι ίδιες ιδιότητες. Συγκεκριμένα, για κάθε $\mu > 0$ και $\rho = \rho(x) \in (0, 1]$, μπορεί να επιλεχθεί ένα διάνυσμα $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ούτως ώστε οι συνθήκες (8.6), (8.7) και (8.33α), (8.33β) να είναι αληθείς.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: Θεωρούμε εκείνα τα μη μηδενικά x για τα οποία ισχύει $(gV)(x) = 0$ και υποθέτουμε ότι οι συνθήκες (7.2), (7.4), καθώς και η Ιδιότητα P2(ii) ικανοποιούνται με $j = j(N) = N$ για κάποιον περιττό ακέραιο $N = N(x) \geq 1$ και με τρόπο ώστε να ισχύει η επιπρόσθετη ιδιότητα (7.9). Κατά την παρούσα περίπτωση, είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία με εκείνη που επιστρατεύεται κατά την απόδειξη της Πρότασης 7.1.1, προκειμένου να αποδειχθεί η (8.6). Σε επόμενο στάδιο, εδραιώνουμε την ισχύ της ανισότητας (8.7) για συγκεκριμένες αυθαίρετα μικρές σταθερές $u_1 = u_1(x)$, $u_2 := -\rho u_1$ και $\rho \in (0, 1]$.

Παρατηρούμε ότι η συνθήκη (7.9) σε συνδυασμό με τις (8.11) και

(8.17), συνηγορούν στις παρακάτω ισότητες:

$$\Pi_{N+1,i}(\rho; x) = 0, \text{ για κάθε } i \in \{1, \dots, N-1\} \quad (8.34\alpha)$$

$$(\lambda_{N+1,i}V)(x) = 0, \text{ για κάθε } i \in \{1, \dots, N-1\} \quad (8.34\beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (8.9γ) με $n = N + 1$, καθώς και τις εξαγόμενες ισότητες (8.34α), (8.34β), έχουμε

$$\begin{aligned} m^{(N+1)}(0) &= (\rho + 1)^{N+1}(f^{N+1}V)(x) \\ &+ u_1^N \rho^N (\rho + 1)(\lambda_{N+1,N}V)(x) \end{aligned} \quad (8.35)$$

Εν τέλει, προκύπτει από τις (7.4), (7.5), (8.35) και το γεγονός ότι ο N είναι περιττός, ότι για κάθε $\mu > 0$ και $\rho = \rho(x) \in (0, 1]$, μπορεί να βρεθεί ένα διάνυσμα $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, για τις συντεταγμένες του οποίου ισχύει $u_1 = u_1(x)$, $u_2 := -\rho u_1$, με τέτοιο τρόπο ώστε να αληθεύουν οι συνθήκες (8.6), (8.7) και (8.33α).

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: Υποθέτουμε κατά την τελευταία περίπτωση ότι, επιπρόσθετα με τις συνθήκες (7.2), (7.4), ικανοποιούνται επίσης: Η Ιδιότητα P2(iii) και η συνθήκη (7.9) για κάποιον άρτιο ακέραιο $N = N(x) \geq 2$. Εφαρμόζοντας εκ νέου την ίδια διαδικασία με εκείνη που χρησιμοποιήθηκε κατά την απόδειξη της Πρότασης 7.1.1, αποδεικνύεται η (8.6). Προκειμένου να δείξουμε την ισχύ της (8.7), παρατηρούμε ότι, λόγω των σχέσεων (7.9), (8.11) και (8.17), ισχύουν οι ισότητες (8.34α), (8.34β) ισχύουν με $N = N(x) \geq 2$ άρτιο. Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη την (8.9γ) με $n = N + 1$ και τις (8.34α), (8.34β), προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} m^{(N+1)}(0) &= (\rho + 1)^{N+1}(f^{N+1}V)(x) \\ &+ u_1^N \rho^N (\rho + 1)(\lambda_{N+1,N}V)(x), \quad N \geq 2 \end{aligned} \quad (8.36)$$

(όπου τώρα ο $N \geq 2$ είναι άρτιος). Έχοντας υπόψη τις (7.4), (7.7) και (8.36), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι, για κάθε $\mu > 0$ και $\rho = \rho(x) \in (0, 1]$, μπορεί να βρεθεί ένα διάνυσμα $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, με $u_1 = u_1(x)$, $u_2 := -\rho u_1$ με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι (8.6), (8.7) και (8.33α).

Επικαλούμενοι τις σχέσεις (8.1)-(8.7), τα συμπεράσματα των ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ 1-3 που διατυπώνονται παραπάνω και τη σχέση (8.33), είμαστε εις θέση να επιβεβαιώσουμε, όπως και κατά την απόδειξη της Πρότασης 7.1.1, ότι σε κάθε περίπτωση, ικανοποιούνται οι επιθυμητές συνθήκες (6.11α), (6.11β) μαζί με την (6.12). Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 6.2.1, το σύστημα (6.2) είναι BSDF-SGAS. ◁

Κεφάλαιο 9

Παράδειγμα

9.1 Γενική μορφή συστήματος

Στην παρούσα ενότητα, αποτυπώνονται τα αποτελέσματα των Προτάσεων 7.1.1 και 7.1.2 οι οποίες προέρχονται από την εργασία [25]. Θεωρούμε συστήματα της μορφής:

$$(\dot{x}^T, \dot{y})^T = f + ug, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1, \quad y \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R} \quad (9.1\alpha)$$

όπου το T ως εκθέτης συμβολίζει τον ανάστροφο πίνακα και οι απεικονίσεις $f, g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= ((F(x, y))^T, 0)^T, \quad F(0, 0) = 0 \\ g(x, y) &:= (0^T, 1)^T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (9.1\beta)$$

όπου για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, όλες οι συνιστώσες της απεικόνισης $F(x, \cdot)$ είναι πολυώνυμα βαθμού $k = k(x) \in \mathbb{N}$ ως προς τη μεταβλητή $y \in \mathbb{R}$. Η σταθεροποίηση επίπεδων συστημάτων της παραπάνω μορφής, έχει μελετηθεί στην εργασία [80] και σε άλλες σχετικές αναφορές στη βιβλιογραφία. Αξίζει να επισημάνουμε ότι ένα επίπεδο σύστημα το οποίο ικανοποιεί την HCC γύρω από το μηδέν $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ είναι (τοπικά) ισοδύναμο με ένα σύστημα της μορφής (9.1α), (9.1β). Ειδικότερα, υπάρχει ένας ακέραιος $k > 0$, συνεχείς συναρτήσεις $a_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, k$, για τις οποίες ισχύει

$$a_0(0) = a_1(0) = \dots = a_{k-1}(0) = 0, \quad a_k(0) \neq 0$$

και μία συνεχής συνάρτηση $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ούτως ώστε

$$F(x, y) = \left(\sum_{i=0}^k a_i(x) y^i \right) q(x, y), \quad x, y \text{ κοντά στο μηδέν}$$

Αν επιπλέον, ο ακέραιος k είναι περιττός, τότε το σύστημα είναι πρακτικά σταθεροποιήσιμο (practically stabilizable). Παραπέμπουμε στην εργασία [80] για περισσότερες λεπτομέρειες.

Εν συνεχεία, χάριν απλότητας, θεωρούμε την περίπτωση συστήματος της μορφής (9.1α) και (9.1β) με $n > 1$ όπου

$$F(x, y) = a(x) + y\beta(x) + y^2\gamma(x) + y^3\delta(x) \quad (9.1\gamma)$$

για συγκεκριμένες λείες συναρτήσεις $a, \beta, \gamma, \delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $a(0) = 0$ και με τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχει μία λεία συνάρτηση $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ η οποία είναι θετικά ορισμένη και proper ούτως ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned} & |(aW)(x)| + |(\beta W)(x)| + |(\gamma W)(x)| + |(\delta W)(x)| \\ & + |[a, \delta]W(x)| \neq 0, \end{aligned} \quad (9.2\alpha)$$

$$(aW)(x), (\gamma W)(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (9.2\beta)$$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Εκτός από την (9.2), υποθέτουμε ότι ισχύουν ταυτοχρόνως και τα ακόλουθα

- Για κάθε $x \neq 0$, για το οποίο ισχύει ότι $(aW)(x) = 0$, έχουμε :

$$D(a^i W)(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (9.3)$$

- Για κάθε $x \neq 0$ για το οποίο ισχύει ότι $(aW)(x) = 0$ και επιπλέον ότι $(\beta W)(x) = 0$, ισχύει το παρακάτω

$$D^i(\beta W)(x) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (9.4)$$

- Για κάθε $x \neq 0$ για το οποίο ισχύει ότι $(aW)(x) = 0$ και επιπλέον ότι $(\beta W)(x) = 0$, $(\gamma W)(x) = 0$, ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες:

$$D^i(\gamma W)(x) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (9.5)$$

Τότε, υπό τις παραπάνω υποθέσεις, το σύστημα (9.1), (παρόλο που ίσως να μην ικανοποιεί τις ιδιότητες που επιβάλλει η Πρόταση 3 από την εργασία [85]), ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις των Προτάσεων 7.1.1 και 7.1.2 με την αντίστοιχη θετικά ορισμένη και proper συνάρτηση

$$V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

να έχει τη μορφή

$$V(x, y) := W(x) + y^2, \quad y \in \mathbb{R}$$

Επομένως, το σύστημα (9.1) είναι (B)SDF-SGAS. Προκύπτει επομένως ότι η απεικόνιση $V(x, y) = W(x) + y^2$ δεν είναι εν γένει μία τύπου Artstein-Sontag Control Lyapunov Function (CLF) (βλέπε Παράρτημα E') για το σύστημα (9.1), ωστόσο είναι μία γενικευμένη CLF, με την έννοια ότι ικανοποιείται η ιδιότητα (6.11) της Πρότασης 6.2.1.

Απόδειξη του Ισχυρισμού

Προφανώς, η συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, όπως έχει οριστεί παραπάνω, είναι θετικά ορισμένη και proper. Επίσης, σύμφωνα με την (9.1β), ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$(fV)(x, y) := (aW)(x) + y(\beta W)(x) + y^2(\gamma W)(x) + y^3(\delta W)(x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (9.6)$$

και λόγω της (9.3), η απεικόνιση aW λαμβάνει μη θετικές τιμές. Προκύπτει ότι η συνθήκη (7.8) της Πρότασης 7.1.2 ικανοποιείται με $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ αντί για $x \in \mathbb{R}^n$, $V(x, y) := W(x) + y^2$, $\zeta(x, y) := -(aW)(x)$, $(gV)(x) := 2y$ και για συγκεκριμένη συνεχή και μη αρνητική συνάρτηση $\xi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ για την οποία ισχύει

$$|y(\beta W)(x) + y^2(\gamma W)(x) + y^3(\delta W)(x)| \leq |y|\xi(|(x, y)|), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

Υποθέτουμε ακολούθως ότι για κάποιο μη μηδενικό (x, y) ισχύει:

$$(gV)(x, y) = 0 \stackrel{(9.1\beta)}{\Leftrightarrow} x \neq 0, y = 0 \quad (9.7)$$

Ορίζουμε τα παρακάτω σύνολα:

$$E_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (aW)(x) < 0\} \quad (9.8\alpha)$$

$$E_2 := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (aW)(x) = 0, (\beta W)(x) \neq 0\} \quad (9.8\beta)$$

$$E_3 := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (aW)(x) = (\beta W)(x) = 0, (\gamma W)(x) < 0\} \quad (9.8\gamma)$$

$$E_4 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \begin{array}{l} (aW)(x) = (\beta W)(x) = (\gamma W)(x) = 0, \\ (\delta W)(x) \neq 0 \end{array} \right\} \quad (9.8\delta)$$

$$E_5 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \begin{array}{l} (aW)(x) = (\beta W)(x) = (\gamma W)(x) = 0 \\ (\delta W)(x) = 0, ([a, \delta]W)(x) \neq 0 \end{array} \right\} \quad (9.8\epsilon)$$

Από τις (9.2) και (9.8), προκύπτει ότι

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (9.9)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε εν συνεχεία ότι κάθε σύνολο E_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ όπως έχει οριστεί κατά την (9.8) είναι μη κενό. Συνεπώς, επικαλούμενοι τις (9.3), (9.4), (9.5) και (9.8), λαμβάνουμε:

$$(aW)(x) = 0; D(a^j W)(x) = 0, j = 1, 2, \dots, \text{ για κάθε } x \in E_i, \quad (9.10\alpha) \\ i = 2, 3, 4, 5$$

$$(\Delta W)(x) = 0, (\Delta_1 \Delta_2 W)(x) = 0, \forall \Delta, \Delta_1, \Delta_2 \in \text{span}\{a, \beta, \gamma\}, \quad (9.10\beta)$$

για κάθε $x \in E_i, i = 3, 4, 5$

$$(\Delta W)(x) = 0, \forall \Delta \in \text{span}\{a, \beta, \gamma\}, \text{ για κάθε } x \in E_i, i = 4, 5 \quad (9.10\gamma)$$

$$(\Delta W)(x) = 0, \forall \Delta \in \text{span}\{a, \beta, \gamma, \delta\}, \text{ για κάθε } x \in E_5 \quad (9.10\delta)$$

$$(\Delta_1 \Delta_2 W)(x) = 0, \forall \Delta_1, \Delta_2 \in \text{span}\{a, \beta, \gamma\}, (\delta a W)(x) = 0, \quad (9.10\epsilon)$$

για κάθε $x \in E_5$

$$(\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 W)(x) = 0, \forall \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \in \text{span}\{a, \beta, \gamma\}, \quad (9.10\sigma\tau)$$

για κάθε $x \in E_5$

Σύμφωνα με τις (9.2) και (9.3)-(9.5), διακρίνουμε πέντε περιπτώσεις οι οποίες αφορούν την (9.7):

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: Ισχύουν

$$x \in E_1, y = 0$$

Τότε, λόγω της ισχύος των (9.2)-(9.10), προκύπτει ότι αληθεύει η συνθήκη (7.1) της Πρότασης 7.1.1 για τα δυναμικά f, g του συστήματος (9.1). Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι λόγω των (9.1β) και (9.8α) ισχύει:

$$(gV)(x, y) = 0 \Rightarrow y = 0, \text{ για κάθε } (x, y) \in E_1 \times \{0\} \quad (9.11)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (9.6), (9.8α) και (9.11), διαπιστώνεται ότι

$$(fV)(x, y) = (aW)(x) \stackrel{y=0}{=} (aW)(x) < 0, \text{ για κάθε } (x, y) \in E_1 \times \{0\} \quad (9.12)$$

Συνεπώς, ικανοποιείται η ακόλουθη συνεπαγωγή

$$(gV)(x, y) = 0 \Rightarrow (fV)(x, y) < 0, \text{ για } (x, y) \in E_1 \times \{0\}$$

η οποία ταυτίζεται με τη συνθήκη (7.1) της Πρότασης 7.1.1 κατά την περίπτωση όπου $(x, y) \in E_1 \times \{0\}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: Ισχύει ότι

$$x \in E_2, y = 0$$

Επικαλούμενοι τις σχέσεις (9.2)-(9.10), προκύπτει ότι ικανοποιείται η ιδιότητα P2(i) της Πρότασης 7.1.1. Ειδικότερα:

- αμφότερες οι (7.2) και η ισότητα (7.4) αληθεύουν με $N = 1$ και επίσης

- η συνθήκη (7.5) ικανοποιείται με $N = 1$ και (περιττό) $j = 1$, δηλαδή, ισχύει

$$(\lambda_{2,1}V)(x, y) = -(\beta W)(x) \neq 0$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: Ισχύουν:

$$x \in E_3, y = 0$$

Ακολουθώντας ανάλογη συλλογιστική πορεία όπως κατά την ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2, αποδεικνύουμε ότι αληθεύει η Ιδιότητα P2(iii) της Πρότασης 7.1.1, δηλαδή ικανοποιούνται:

- η (7.2) και η ισότητα στην (7.4) με $N = 2$,
- η συνθήκη (7.7) για άρτιο $N = 2$ και
- η συνθήκη (7.9) της Πρότασης 7.1.2. Ειδικότερα, αποδεικνύεται ότι

$$(\lambda_{3,2}V)(x) = 2(\gamma W)(x) < 0$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4: Ισχύει το παρακάτω:

$$x \in E_4, y = 0$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (9.2)-(9.10), προκύπτει ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες της Πρότασης 7.1.1:

- Η συνθήκη (7.2), με $N = 3$.
- Η ισότητα στη συνθήκη (7.4), με $N = 3$.
- Η ιδιότητα (7.5) με $N = 3$ και (περιττό) $j = 3$, δηλαδή

$$(\lambda_{4,3}V)(x, y) = -6(\delta W)(x) \neq 0.$$

- Η συνθήκη (7.6α), με $N = 3$, (περιττό) $j = 3$ και (άρτιο) $q = 2$, ειδικότερα

$$(\lambda_{4,2}V)(x, y) = 0.$$

Επιπλέον, συμπεραίνουμε ότι ισχύει η επιπρόσθετη συνθήκη (7.9) της Πρότασης 7.1.2, για (περιττό) $N = 3$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5: Κατά την τελευταία περίπτωση του εν λόγω παραδείγματος, ισχύει ότι:

$$x \in E_5, y = 0$$

Εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις (9.2)-(9.10), είμαστε σε θέση να επιβεβαιώσουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη (7.2), μαζί με την Ιδιότητα P2(i). Ειδικότερα, προκύπτει ότι ισχύουν οι εξής συνθήκες της Πρότασης 7.1.1:

- Η (7.2), με $N = 4$.
- Η ισότητα στην (7.4), με $N = 4$.
- Η (7.5), με $N = 4$ και (περιττό) $j = 3$. Δηλαδή, ισχύει το παρακάτω:

$$(\lambda_{5,3}V)(x, y) = 12([a, \delta]W)(x) \neq 0$$

- Οι (7.6α), (7.6β), με $N = 4$, (περιττό) $j = 3$ και (άρτιο) $q = 2$.

Ολόκληρη η παραπάνω ανάλυση συνδυασμένη με την (9.9) συνιστά σύμφωνα με τις Προτάσεις 7.1.1 και 7.1.2 το επιθυμητό συμπέρασμα, ότι δηλαδή, το σύστημα (9.1) είναι (B)SDF-SGAS.

9.2 Ειδική περίπτωση

Προκειμένου να αποτυπωθεί με σαφέστερο τρόπο το περιεχόμενο των υποθέσεων του Ισχυρισμού που διατυπώθηκε κατά την ενότητα 9.1, θεωρούμε την περίπτωση του συστήματος (9.1) με $n = 4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, $y \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ και τα δυναμικά $f, g : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ ορισμένα στην (9.1β), όπου η απεικόνιση $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ ορίζεται κατά τη σχέση (9.1γ), με

$$\begin{aligned} a(x) &:= (A_1 x_1^{k_1}, \cdot, \cdot, \cdot)^T, \quad \beta(x) := (\cdot, A_2 x_2^{k_2}, 0, 0)^T \\ \gamma(x) &:= (\cdot, \cdot, A_3 x_3^{k_3}, 0)^T, \quad \delta(x) := (\delta_1(x), \delta_2(x), \delta_3(x), \delta_4(x))^T \end{aligned} \quad (9.13)$$

όπου οι συναρτήσεις $\delta_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$ είναι λείες, οι όροι A_i , $i = 1, 2, 3$ είναι σταθερές για τις οποίες ισχύει

$$A_1, A_3 < 0 \quad (9.14)$$

και

$$A_2 \neq 0 \quad (9.15)$$

και k_i , $i = 1, 2, 3$ είναι θετικοί ακέραιοι με τους k_1, k_3 να είναι περιττοί αριθμοί. Ορίζουμε:

$$V(x, y) := W(x) + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \quad (9.16)$$

με τη $W : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$ να είναι θετικά ορισμένη και proper με τύπο:

$$W(x) := x_1^{p_1} + x_2^{p_2} + x_3^{p_3} + x_4^{p_4}, \quad \text{όπου } p_i \text{ άρτιος } > 2, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (9.17)$$

και υποθέτουμε ότι ισχύουν ταυτόχρονα τα παρακάτω

$$(aW)(x) \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^4 \quad (9.18\alpha)$$

$$(aW)(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad (9.18\beta)$$

$$\begin{aligned} x_4 \neq 0 \Rightarrow \text{είτε } \delta_4(0, 0, 0, x_4) \neq 0, \\ \text{είτε } a^T D\delta |_{x_1=x_2=x_3=0} \neq 0 \end{aligned} \quad (9.18\gamma)$$

Τότε, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (9.13) έως (9.18), είμαστε εις θέση να εξασφαλίσουμε ότι ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες των υποθέσεων (9.2), (9.3), (9.4) και (9.5) με τις λείες a, β, γ, δ ορισμένες στην (9.13) και τη συνάρτηση W ορισμένη σύμφωνα με τη σχέση (9.17). Πράγματι, εκμεταλλευόμενοι τις υποθέσεις (9.18), πραγματοποιούμε ορισμένους βοηθητικούς υπολογισμούς που περιγράφονται εν συνεχεία:

Αρχικά, υποθέτοντας ότι $(aW)(x) = 0$, προκύπτει άμεσα από την (9.18β) ότι $x_1 = 0$. Με δεδομένο το τελευταίο και αξιοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης $\beta : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ κατά τη σχέση (9.13), Καθώς και τον ορισμό (9.17), υπολογίζουμε:

$$(\beta W)(x) = A_2 p_2 x_2^{k_2+p_2-1} \quad (9.19)$$

Συνδυάζοντας τις (9.19) και (9.15) με το γεγονός ότι $p_2 > 0$ (άρτιος), λαμβάνουμε:

$$(\beta W)(x) = \begin{cases} A_2 p_2 x_2^{k_2+p_2-1} \neq 0 & \text{όταν } x_1 = 0, x_2 \neq 0, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \\ A_2 p_2 x_2^{k_2+p_2-1} = 0 & \text{όταν } x_1 = x_2 = 0, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (9.20)$$

Δεδομένου ότι $(\beta W)(x)$, δηλαδή σύμφωνα με την (9.20) ισχύει $x_1 = x_2 = 0$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης $\gamma : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ κατά τη σχέση (9.13), τον ορισμό (9.17) προκύπτει το εξής:

$$(\gamma W)(x) = A_3 p_3 x_3^{k_3+p_3-1} \quad (9.21)$$

Σημειωτέον ότι εφόσον ο αριθμός k_3 είναι περιττός θετικός ακέραιος και ο $p_2 > 2$ είναι άρτιος θετικός ακέραιος, ο αριθμός $k_3 + p_3 - 1$ θα είναι ένας άρτιος θετικός ακέραιος. Λαμβάνοντας υπόψη το τελευταίο, καθώς και τις σχέσεις (9.21), (9.14), συμπεραίνουμε ότι:

$$(\gamma W)(x) = \begin{cases} A_3 p_3 x_3^{k_3+p_3-1} < 0 & \text{όταν } x_1 = x_2 = 0, x_3 \neq 0, x_4 \in \mathbb{R} \\ A_3 p_3 x_3^{k_3+p_3-1} = 0 & \text{όταν } x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (9.22)$$

Υποθέτοντας ότι $(\gamma W)(x) = 0$, δηλαδή σύμφωνα με την (9.22) ότι $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ και συνδυάζοντας τον ορισμό της συνάρτησης $\delta : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ κατά τη σχέση (9.13) με τον ορισμό (9.17), υπολογίζουμε:

$$(\delta W)(x) = p_4 x_4^{p_4-1} \delta_4(x) \quad (9.23)$$

Από την ισότητα (9.23) και το γεγονός ότι $p_4 > 0$ (άρτιος), προκύπτει άμεσα ότι αν η ποσότητα $(\delta W)(x)$ μηδενίζεται, υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: είτε ισχύει ότι $x_4 = 0$, είτε ότι $\delta_4(0, 0, 0, x_4) = 0$. Παρατηρούμε ότι εφόσον $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, δεν είναι εφικτό να ισχύει και ότι $x_4 = 0$. Κατά τη συγκεκριμένη περίπτωση, ισχύει ότι $x = 0 \in \mathbb{R}^4$, ενώ στην παρούσα ειδική περίπτωση, επιχειρούμε την επιβεβαίωση των συνθηκών (9.2)-(9.5) για μη μηδενικά $x \in \mathbb{R}^4$. Συνεπώς, υποχρεωτικά θα ισχύει ότι $x_4 \neq 0$. Βάσει αυτού, προκύπτει ότι

$$(\delta W)(x) = 0 \Leftrightarrow \delta_4(0, 0, 0, x_4) = 0 \text{ και } x_4 \neq 0 \quad (9.24)$$

Στο σημείο αυτό, διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις που αφορούν την (9.18γ):

Υποπερίπτωση i: Ισχύει ότι $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $\delta_4(0, 0, 0, x_4) \neq 0$ και επιπλέον

$$x_4 \neq 0 \Rightarrow \delta_4(0, 0, 0, x_4) \neq 0 \quad (9.25)$$

Τότε, από τις (9.23), (9.24), (9.25) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} (\delta W)(x) = p_4 x_4^{p_4-1} \delta_4(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x = (0, 0, 0, x_4) \in \mathbb{R}^4, \text{ με } x_4 \neq 0 \\ \text{για το οποίο ισχύει ότι } \delta_4(x) \neq 0 \end{aligned} \quad (9.26)$$

Υποπερίπτωση ii: Ισχύει ότι $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $\delta_4(0, 0, 0, x_4) = 0$ και επιπλέον

$$x_4 \neq 0 \Rightarrow a^T D\delta |_{x_1=x_2=x_3=0} \neq 0 \quad (9.27)$$

Τότε, συνδυάζοντας την (9.27) με τον ορισμό (9.17),

$$(a\delta W)(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x = (0, 0, 0, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_4 \neq 0 \text{ και } \delta_4(x) = 0 \quad (9.28)$$

$$(daW)(x) = 0, \text{ για κάθε } x = (0, 0, 0, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_4 \neq 0 \text{ και } \delta_4(x) = 0 \quad (9.29)$$

Συνδυάζοντας τις (9.28) και (9.29), προκύπτει άμεσα ότι:

$$([a, \delta]W)(x) = (a\delta W)(x) \neq 0, \quad (9.30)$$

για κάθε $x = (0, 0, 0, x_4) \in \mathfrak{R}^4 : x_4 \neq 0$ και $\delta_4(x) = 0$

Στο σημείο αυτό, έχοντας υπολογίσει όλους τους απαραίτητους όρους, είμαστε εις θέση να επιβεβαιώσουμε την ισχύ των συνθηκών (9.2α), (9.2β), (9.3), (9.4), (9.5).

- Προς απόδειξη της ισχύος της συνθήκης (9.2α), επικαλούμαστε την υπόθεση (9.18α), καθώς και τις αποδειχθείσες κατά την παρούσα ανάλυση ιδιότητες (9.20), (9.22), (9.26) και (9.30). Από όλα τα παραπάνω προκύπτει άμεσα η ισχύς της υπόθεσης (9.2α), με $n = 4$.
- Από τις σχέσεις (9.18α) και (9.22), προκύπτει άμεσα ότι η συνθήκη (9.2β) αληθεύει με $n = 4$.
- Η συνθήκη (9.3), προκύπτει από τις υποθέσεις (9.18α), (9.18β) σε συνδυασμό με την (9.17). Πράγματι, σύμφωνα με την (9.18α), το μηδέν $0 \in \mathfrak{R}^4$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $(aW)(x)$. Επομένως, για κάθε $x \neq 0 \in \mathfrak{R}^4$, για το οποίο ισχύει ότι $(aW)(x) = 0$, θα ισχύει και ότι $D(aW)(x) = 0$. Εφόσον $(a^1W)(x) = (aW)(x)$ και $(a^iW)(x) = a(a^{i-1}W)(x) = D(a^{i-1}W)a(x)$, για $i = 2, 3, \dots$, προκύπτει επαγωγικά ότι ισχύει η συνθήκη (9.3), με $n = 4$.
- Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της συνάρτησης β κατά την (9.13), τον ορισμό (9.17) της συνάρτησης W , τη συνεπαγωγή (9.18β) και την ισότητα (9.20), παραγωγίζουμε την ισότητα (9.19) και προκύπτει ότι:

$$D(\beta W)(x) = (\beta W)_{x_2}(x) = A_2 p_2 (k_2 + p_2 - 1) x_2^{k_2 + p_2 - 2} = 0, \quad (9.31)$$

για κάθε $x : (aW)(x) = 0$ και $(\beta W)(x) = 0$

Σημειώνουμε ότι από τη στιγμή που ο αριθμός $p_2 > 2$ είναι άρτιος και ο αριθμός k_2 είναι θετικός ακέραιος, ο εκθέτης $k_2 + p_2 - 2$ στην παραπάνω ισότητα, είναι ένας αυστηρά θετικός ακέραιος. Επομένως, αποκλείουμε την περίπτωση του μηδενικού ή αρνητικού εκθέτη του $x_2 \in \mathfrak{R}$, όπου δε θα ήταν εφικτό να μηδενίζεται η $D(\beta W)(x)$ όπως προκύπτει από την (9.31).

Επιπρόσθετα, από την (9.31), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} D^2(\beta W)(x) &= (D\beta W)_{x_2}(x) = A_2 p_2 (k_2 + p_2 - 1)(k_2 + p_2 - 2) x_2^{k_2 + p_2 - 3} \\ &= 0, \text{ για κάθε } x : (aW)(x) = 0 \text{ και } (\beta W)(x) = 0 \end{aligned} \quad (9.32)$$

Εφόσον ο αριθμός $p_2 > 2$ είναι άρτιος και ο αριθμός k_2 είναι ένας θετικός ακέραιος, ο εκθέτης $k_2 + p_2 - 3$ στην παραπάνω ισότητα, είναι ένας αυστηρά θετικός ακέραιος. Επομένως, αποκλείουμε και εδώ, την περίπτωση του μηδενικού ή αρνητικού εκθέτη του $x_2 \in \mathfrak{R}$, όπου δε θα ήταν εφικτό να μηδενίζεται η $D^2(\beta W)(x)$ όπως προκύπτει από την (9.32).

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (9.31), (9.32), προκύπτει άμεσα ότι η συνθήκη (9.4) αληθεύει, με $n = 4$.

- Τέλος, προς απόδειξη της ισχύος της συνθήκης (9.5), επικαλούμαστε αρχικά τη συνεπαγωγή (9.18β), καθώς και τις ισότητες (9.20), (9.22). Εν συνεχεία, αξιοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης γ σύμφωνα με την (9.13) και τον ορισμό (9.17) της συνάρτησης W , παραγωγίζοντας την ισότητα (9.22), προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} D(\gamma W)(x) &= (\gamma W)_{x_3}(x) = A_3 p_3 (k_3 + p_3 - 1) x_3^{k_3 + p_3 - 2} = 0, \\ \text{για κάθε } x : (aW)(x) &= 0, (\beta W)(x) = 0 \text{ και } (\gamma W)(x) = 0 \end{aligned} \quad (9.33)$$

Παρατηρούμε ότι εφόσον ο αριθμός $p_3 > 2$ είναι άρτιος και ο αριθμός k_3 είναι (περιττός) θετικός ακέραιος, τότε ο εκθέτης $k_3 + p_3 - 2$ στο δεξί μέλος της (9.33), θα είναι ένας (άρτιος) θετικός ακέραιος. Επομένως, αποκλείουμε την περίπτωση του μηδενικού ή αρνητικού εκθέτη του $x_3 \in \mathfrak{R}$, όπου δε θα ήταν εφικτό να μηδενίζεται η $D(\gamma W)(x)$ όπως προκύπτει από την (9.33).

Επιπλέον, από την (9.33), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} D^2(\gamma W)(x) &= (D\gamma W)_{x_3}(x) = A_3 p_3 (k_3 + p_3 - 1)(k_3 + p_3 - 2) x_3^{k_3 + p_3 - 3} \\ &= 0, \text{ για κάθε } x : (aW)(x) = 0, (\beta W)(x) = 0 \text{ και } (\gamma W)(x) = 0 \end{aligned} \quad (9.34)$$

Εφόσον ο αριθμός $p_3 > 2$ είναι άρτιος και ο αριθμός k_3 είναι ένας (περιττός) θετικός ακέραιος, ο εκθέτης $k_3 + p_3 - 3$ στην ισότητα

(9.34), είναι ένας (άρτιος) θετικός ακέραιος. Επομένως, αποκλείουμε την περίπτωση του μηδενικού ή αρνητικού εκθέτη του $x_3 \in \mathbb{R}$, όπου δε θα ήταν εφικτό να μηδενίζεται η $D^2(\gamma W)(x)$ όπως προκύπτει από την (9.34).

Συνδυάζοντας τις (9.33), (9.34), προκύπτει άμεσα ότι η υπόθεση (9.5) είναι αληθής, με $n = 4$.

Έχοντας αποδείξει την ισχύ των συνθηκών (9.2α), (9.2β), (9.3), (9.4), (9.5), που διατυπώνονται στην ενότητα 9.1, συμπεραίνουμε ότι το αντίστοιχο σύστημα (9.1) με $n = 4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, $y \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ και τα δυναμικά $f, g : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ ορισμένα από τη σχέση (9.1β), με την $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ να ορίζεται κατά τις σχέσεις (9.1γ) και (9.13), είναι (B)SDF-SGAS.

Παρατήρηση 9.2.1 Οι υποθέσεις για την προαναφερθείσα περίπτωση μπορούν να τροποποιηθούν αντικαθιστώντας τις (9.2α) και (9.18γ), αντίστοιχα, με τις ακόλουθες ισχυρότερες υποθέσεις:

$$|(aW)(x)| + |(\beta W)(x)| + |(\gamma W)(x)| + |(\delta W)(x)| \neq 0, \forall x \neq 0; \quad (9.35)$$

$$x_4 \neq 0 \Rightarrow \delta_4(0, 0, 0, x_4) \neq 0 \quad (9.36)$$

Παραρτήματα

Παράρτημα Α΄

Η Ανισότητα Cauchy-Schwartz και η Ταυτότητα του Parseval

Ανισότητα Cauchy-Schwartz

Για κάθε $u, w \in L^2(0, 1)$, ισχύει ότι:

$$\int_0^1 u w dx \leq \left(\int_0^1 u^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 w^2 dx \right)^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

Η ανισότητα (A.1), μπορεί να λάβει άμεσα και την παρακάτω μορφή:

$$\int_0^1 u w dx \leq \|u\| \|w\| \quad (\text{A.2})$$

Σημειώνουμε ότι η ισότητα στις (A.1) και (A.2) ισχύει μόνο όταν οι δύο συναρτήσεις $u, w \in L^2(0, 1)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες.

Ταυτότητα του Parseval

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f \in L^2(0, 1)$. Τότε ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

όπου $c_n, n = 1, 2, \dots$ είναι οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης f .

Παράρτημα Β΄

Απόδειξη του Λήμματος 2.4.1

Αποδεικνύονται οι παραπάνω συνεπαγωγές (από τη διατύπωση του Λήμματος 2.4.1) μία προς μία:

Συνεπαγωγή (i): Έστω $Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) = 0$, για $n = 1, 2, \dots$. Τότε, ο ορισμός (2.29) σε συνδυασμό με τη συνέχεια της συνάρτησης $g_n(t, s)$ για $t, s \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$ (η οποία προκύπτει από τον ορισμό (2.19) και από το γεγονός ότι $u \in C^0([\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]; L^2(0, 1))$), μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι $g_n(t, s) = 0$, για $t, s \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$. Επιπλέον, από τη συνέχεια της απεικόνισης $\tau \rightarrow \int_0^1 \sin(n\pi x)u(\tau, x)dx$ για $\tau \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$ (η οποία αποτελεί συνέπεια του γεγονότος ότι $u \in C^0([\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]; L^2(0, 1))$) και από τον ορισμό (2.19), προκύπτει ότι $\int_0^1 \sin(n\pi x)u(\tau, x)dx = 0$, για $\tau \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$ και $n = 1, 2, \dots$. Εφόσον το σύνολο συναρτήσεων:

$$\left\{ \phi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x) : n = 1, 2, \dots \right\}$$

είναι μια ορθοκανονική βάση του $L^2(0, 1)$ (δηλαδή $\|\phi_n(x)\| = 1$, $n = 1, 2, \dots$), προκύπτει ότι $u[t] = 0$, για $t \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$. Δεδομένου του τελευταίου, προκύπτει άμεσα από τον ορισμό (2.18) ότι $f_n(t, s) = 0$, για $t, s \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$. Συνεπώς, θα ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$g_n(t, s) = f_n(t, s) = 0, \text{ για } t, s \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$$

Επιπλέον, δεδομένου ότι $c > 0$, συμπεραίνουμε από τη (2.20) ότι $j_n(t, s) = 0$, για $t, s \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$. Τέλος, σύμφωνα με τα παραπάνω και τους ορισμούς (2.30) και (2.31), λαμβάνουμε:

$$Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) = Q_{n,3}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) = 0, \text{ για } n = 1, 2, \dots$$

Συνεπώς, δεδομένου ότι $Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) = 0$, για $n = 1, 2, \dots$ και λόγω του ορισμού (2.32), το σύνολο S_i , διαμορφώνεται ως εξής:

$$S_i = \{(\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 = 0(\vartheta_1 + \vartheta_2)\}$$

Προφανώς, η ισότητα $0 = 0(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ ισχύει για οποιαδήποτε $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}$. Επομένως, προκύπτει ότι $S_i = \mathbb{R}^2$.

Συνεπαγωγή (ii): Υποθέτουμε ότι $S_i = \mathbb{R}^2$. Επιπλέον, προς εις άτοπον απαγωγή, υποθέτουμε ότι υπάρχει $n \in \{1, 2, \dots\}$ ούτως ώστε να ισχύει ότι:

$$Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) \neq 0.$$

Εν συνεχεία, από τον ορισμό (2.32) προκύπτει ότι

$$S_i \subseteq \left\{ (\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2 : \vartheta_1 = \frac{H_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})} - \vartheta_2 \frac{Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})} \right\},$$

γεγονός το οποίο αντίκειται στην αρχική μας υπόθεση ότι $S_i = \mathbb{R}^2$. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι $Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) = 0$, για $n = 1, 2, \dots$. Εργαζόμενοι όπως κατά την απόδειξη της Συνεπαγωγής (i), λαμβάνουμε ότι $u[t] = 0$ (ως προς τον $L^2(0, 1)$) για $t \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$.

Συνεπαγωγή (iii): Υποθέτουμε ότι $S_i \neq \{(\theta, c)\}$ και $S_i \neq \mathbb{R}^2$. Σύμφωνα με τη Συνεπαγωγή (i), υπάρχει θετικός ακέραιος $n \in \{1, 2, \dots\}$ έτσι ώστε

$$Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) \neq 0$$

Ορίζουμε το σύνολο I να είναι το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων για τους οποίους ισχύει $Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) \neq 0$. Θα δειχθεί αρχικά ότι $U(t) \equiv 0$.

Από τον ορισμό (2.32) προκύπτει ότι

$$S_i \subseteq \left\{ (\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2 : \vartheta_1 = \frac{H_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})} - \vartheta_2 \frac{Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}, n \in I \right\} \quad (\text{B.1})$$

Εφόσον $S_i \neq \{(\theta, c)\}$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια σταθερά $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\frac{Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})} = \lambda, \text{ για κάθε } n \in I. \quad (\text{B.2})$$

Πράγματι, υποθέτοντας ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι $k, m \in I$ για τους οποίους ισχύει

$$\frac{Q_{k,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{k,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})} \neq \frac{Q_{m,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{m,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}, \quad (\text{B.3})$$

και λαμβάνοντας υπόψη τις (2.25), (2.26), παρατηρούμε ότι το σύνολο

$$\left\{ (\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2 : \vartheta_1 = \frac{H_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})} - \vartheta_2 \frac{Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}, n \in I \right\}$$

διαμορφώνεται ως εξής:

$$\left\{ (\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2 : \vartheta_1 + \vartheta_2 \frac{Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})} = \theta + c \frac{Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}, n \in I \right\}$$

Θέτοντας διαδοχικά $n = k$ και $n = m$, παρατηρούμε ότι, λόγω της (B.3), το σύστημα εξισώσεων που ορίζεται από το παραπάνω σύνολο, θα έχει μοναδική λύση $(\vartheta_1, \vartheta_2) = (\theta, c)$, για όλα τα $n \in I$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι:

$$\left\{ (\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2 : \vartheta_1 = \frac{H_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})} - \vartheta_2 \frac{Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}, n \in I \right\} \quad (\text{B.4}) \\ = \{(\theta, c)\}$$

Συνδυάζοντας τις (B.1), (B.4) και το γεγονός ότι $(\theta, c) \in S_i$, προκύπτει άμεσα ότι $S_i = \{(\theta, c)\}$, γεγονός το οποίο αντιβαίνει στην αρχική μας υπόθεση. Επομένως οδηγούμαστε σε άτοπο και ισχύει η (B.2).

Εφόσον $S_i \neq \{(\theta, c)\}$ και $(\theta, c) \in S_i$, το σύστημα εξισώσεων που ορίζουν το σύνολο S_i δε θα έχει μοναδική λύση (το ζεύγος (θ, c)). Συνεπώς, από τον ορισμό (2.32), λαμβάνουμε

$$\det \begin{bmatrix} Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) & Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) \\ Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) & Q_{n,3}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) \end{bmatrix} = 0, \text{ για κάθε } n \in I \quad (\text{B.5})$$

Από τη (B.5), προκύπτει άμεσα η παρακάτω ισότητα:

$$(Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}))^2 = Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})Q_{n,3}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}), \text{ για κάθε } n \in I \quad (\text{B.6})$$

Στο σημείο αυτό, έχοντας υπόψη τους ορισμούς τους ορισμούς (2.29), (2.30), (2.31), εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwartz για το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (2.30), παρατηρούμε ότι εφόσον ισχύει η (B.6), δηλαδή η ισότητα στην ανισότητα Cauchy-Schwartz, Οι συναρτήσεις $j_n(t, s), g_n(t, s)$ θα είναι γραμμικώς εξαρτημένες, για κάθε $n \in I$ και $t, s \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$ (βλέπε Παράρτημα Α'). Συνεπώς, υπάρχει μια σταθερά $\gamma_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$j_n(t, s) = \gamma_n g_n(t, s), \text{ για } t, s \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}] \quad (\text{B.7})$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι $g_n \neq 0 \in L^2((\mu_{i+1}, \tau_{i+1})^2)$, αφού $n \in I$ και $Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) \neq 0$. Βάσει αυτού και λόγω της (B.2) σε συνδυασμό με τους ορισμούς (2.29), (2.30) και τη σχέση (B.7) ότι

$$j_n(t, s) = \lambda g_n(t, s), \text{ για } t, s \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}] \text{ και } n \in I. \quad (\text{B.8})$$

Οι ορισμοί (2.19) σε συνδυασμό με τη (B.8), μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε ότι

$$U(t) = -\frac{\lambda}{(-1)^{n_p n \pi}} \int_0^1 \sin(n\pi x) u(t, x) dx, \text{ για } t \in (\mu_{i+1}, \mu_{i+1}) \text{ και } n \in I \quad (\text{B.9})$$

Δεδομένης της (B.9), διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τη σταθερά $\lambda \in \mathfrak{R}$:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: Αν $\lambda = 0$, τότε προκύπτει άμεσα από τη (B.9) ότι $U(t) \equiv 0$, το οποίο αποτελεί το ζητούμενο.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: Υποθέτουμε ότι $\lambda \neq 0$ και δείχνουμε εκ νέου ότι $U(t) \equiv 0$. Στην προκειμένη περίπτωση, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος $m \in \{1, 2, \dots\}$ με $m \notin I$. Πράγματι, αν $m \notin I$ (δηλαδή $Q_{m,1}(\mu_{i+1}, \tau_{i+1}) = 0$), τότε, εργαζόμενοι ακριβώς όπως στην απόδειξη της Συνεπαγωγής (i), συμπεραίνουμε ότι $\int_0^1 \sin(m\pi x) u(\tau, x) dx = 0$, για $\tau \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$. Όμως, σε αυτήν στην περίπτωση, επικαλούμενοι τις σχέσεις (2.18), (2.19) και (2.20), λαμβάνουμε $j_m(t, s) = 0$, για $t, s \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$, από το οποίο προκύπτει ότι $U(t) \equiv 0$.

Μένει να αποδείξουμε ότι $S_i = \{(\theta, \vartheta_2) \in \mathfrak{R}^2 : \vartheta_2 \in \mathfrak{R}\}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι από τη (2.20) για $t, s \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$ προκύπτει η (2.16) για $t, s \in (\mu_{i+1}, \tau_{i+1})$. Βάσει του τελευταίου και λόγω της (B.9), καθώς και της συνέχειας της απεικόνισης $\tau \rightarrow \int_0^1 \sin(n\pi x) u(\tau, x) dx$, για $t, s \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$, λύνοντας τη διαφορική εξίσωση που προκύπτει, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(n\pi x) u(t, x) dx &= \exp((\theta - n^2 \pi^2 p + \lambda c)(t - \mu_{i+1})) \\ &\quad \times \int_0^1 \sin(n\pi x) u(\mu_{i+1}, x) dx, \quad (\text{B.10}) \\ &\text{για } t \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}] \text{ και } n \in I \end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό, υποθέτουμε ότι $m, n \in I$ (δηλαδή $Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) \neq 0$ και $Q_{m,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) \neq 0$). Τότε, από τη (B.9), έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} p \pi U(t) &= \frac{1}{(-1)^{n_n}} \int_0^1 \sin(n\pi x) u(t, x) dx \\ &= \frac{1}{(-1)^{m_m}} \int_0^1 \sin(m\pi x) u(t, x) dx, \text{ για } t \in (\mu_{i+1}, \tau_{i+1}) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Η συνέχεια των απεικονίσεων:

$\tau \rightarrow \int_0^1 \sin(n\pi x) u(t, x) dx$ και $\tau \rightarrow \int_0^1 \sin(m\pi x) u(t, x) dx$, για $\tau \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$ σε συνδυασμό με την (B.11), μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{(-1)^{n_n}} \int_0^1 \sin(n\pi x) u(t, x) dx &= \frac{1}{(-1)^{m_m}} \int_0^1 \sin(m\pi x) u(t, x) dx, \\ &\text{για } t \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Αν $\int_0^1 \sin(n\pi x) u(\mu_{i+1}, x) dx = 0$ ή $\int_0^1 \sin(m\pi x) u(\mu_{i+1}, x) dx = 0$, τότε λαμβάνοντας υπόψη τις (B.10) και (2.19), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) = 0 \text{ ή } Q_{m,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) = 0,$$

κάτι το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι $m, n \in I$. Επομένως θα ισχύει ότι

$$\int_0^1 \sin(n\pi x) u(\mu_{i+1}, x) dx \neq 0 \text{ και } \int_0^1 \sin(m\pi x) u(\mu_{i+1}, x) dx \neq 0 \quad (\text{B.13})$$

Εν συνεχεία, πολλαπλασιάζουμε τη δύο μέλη της (B.10) με $\frac{1}{(-1)^{n_n}}$, $n \in I$. Τότε, λόγω της (B.12), προκύπτει η ισότητα

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(-1)^{n_n}} \exp(-n^2 \pi^2 p(t - \mu_{i+1})) \int_0^1 \sin(n\pi x) u(t, x) dx \\ &= \frac{1}{(-1)^{m_m}} \exp((\theta - m^2 \pi^2 p)(t - \mu_{i+1})) \int_0^1 \sin(m\pi x) u(\mu_{i+1}, x) dx, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

για $t \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$

Από τη (B.14) σε συνδυασμό με τη (B.12) για $t = \mu_{i+1}$ και (B.13), οδηγούμαστε στην ισότητα

$$\exp(-n^2 \pi^2 p(t - \mu_{i+1})) = \exp(-m^2 \pi^2 p(t - \mu_{i+1})), \text{ για } t \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$$

η οποία μπορεί να είναι αληθής μόνο για $m = n$. Συνεπώς, υπάρχει θετικός ακέραιος $m \in [1, 2, \dots]$ τέτοιος ώστε $m \notin I$. Επομένως προκύπτει και κατά την περίπτωση όπου $\lambda \neq 0$, ότι $U(t) \equiv 0$.

Εφόσον $U(t) \equiv 0$, προκύπτει από τη (2.19) ότι $j_n(t, s) = 0$, για $t, s \in [\mu_{i+1}, \tau_{i+1}]$ και $n = 1, 2, \dots$. Κατά συνέπεια, συμπεραίνουμε από τις σχέσεις (2.30) και (2.31), ότι $Q_{n,2}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1}) = Q_{n,3}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})$, για $n = 1, 2, \dots$. Επομένως, από τον ορισμό (2.32), προκύπτει ότι:

$$S_i = \left\{ (\vartheta_1, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2 : \vartheta_1 = \frac{H_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}{Q_{n,1}(\tau_{i+1}, \mu_{i+1})}, n \in I \right\}$$

Δεδομένου ότι $(\theta, c) \in S_i$, συμπεραίνουμε εν τέλει ότι

$$S_i = \{(\theta, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2 : \vartheta_2 \in \mathbb{R}\}$$

Η απόδειξη είναι ολοκληρωμένη. \triangleleft

Παράρτημα Γ'

Αποδείξεις των Λημμάτων 5.1.1-5.1.4

Απόδειξη του Λήμματος 5.1.1

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (5.1), (5.2), (5.3) γράφεται σε αφαιρετική μορφή ως εξής:

$$\dot{w} = Aw + Bw$$

όπου A είναι ένας τελεστής ο οποίος είναι ο Infinitesimal generator μιας C_0 ημιομάδας (semigroup) συστολών (contractions) στον $L^2(0, 1)$ και B είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής στον $L^2(0, 1)$ (παραπέμπουμε στον Definition 1.1 στη σελίδα 1 του [63]). Το συμπέρασμα του Λήμματος 5.1.1, δηλαδή η εκτίμηση (5.10), είναι συνέπεια του Theorem 1.1 στη σελίδα 76 του [63]. ◁

Απόδειξη του Λήμματος 5.1.2

Έστω $\gamma \in \mathbb{R}$ μία σταθερά για την οποία ισχύει

$$\int_0^1 xk(x)dx + \gamma \|k\|^2 \neq 1 \quad (\Gamma.1)$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $k \in C^2([0, 1])$ υπάρχουν άπειρες τιμές της σταθεράς $\gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η (Γ.1). Ορίζουμε

$$\beta := \frac{1}{1 - \int_0^1 sk(s)ds - \gamma \|k\|^2} \quad (\Gamma.2)$$

$$a := \beta p \gamma \quad (\Gamma.3)$$

Έστω $\sigma > 0$ η σταθερά η οποία αντιστοιχεί στη συνάρτηση k που ορίζεται σύμφωνα με τις σχέσεις (5.5), (2.6) και στις σταθερές $a, \gamma \in \mathbb{R}$ ορισμένες κατά τις σχέσεις (Γ.2), (Γ.3) και για την οποία ισχύει η εκτίμηση (5.10) (ανακαλούμε το Λήμμα 5.1.1). Θεωρούμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό Fredholm:

$$w(t, x) = u(t, x) - (x + \gamma k(x)) \int_0^1 k(s) u(t, s) ds, \quad \text{για } t \geq 0, x \in [0, 1] \quad (\Gamma.4)$$

και τον αντίστροφό του:

$$u(t, x) = w(t, x) + \beta(x + \gamma k(x)) \int_0^1 k(s) w(t, s) ds, \quad \text{για } t \geq 0, x \in [0, 1] \quad (\Gamma.5)$$

όπου $u \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, +\infty) \times [0, 1])$ με $u[t] \in C^2([0, 1])$ για $t > 0$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) με $u[0] = u_0$ και τη συνάρτηση k ορισμένη κατά τις σχέσεις (5.5) και (2.6).

Αρχικά, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Γ.1), (Γ.2), (Γ.3), (Γ.4), (Γ.5), (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), δείχνουμε ότι η συνάρτηση

$$w \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, +\infty) \times [0, 1]),$$

με $w[t] \in C^2([0, 1])$ για $t > 0$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (5.7), (5.8), (5.9) με

$$w_0(x) = u_0(x) - (x + \gamma k(x)) \int_0^1 k(s) u_0(s) ds, \quad x \in [0, 1] \quad (\Gamma.6)$$

Πράγματι, η ισότητα (Γ.6) προκύπτει άμεσα θέτοντας στο μετασχηματισμό (Γ.4) όπου $t = 0$. Θα πρέπει εν συνεχεία να δειχθεί ότι η συνάρτηση $w \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, +\infty) \times [0, 1])$ με $w[t] \in C^2([0, 1])$ για $t > 0$ ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση (5.7) και τις συνοριακές συνθήκες δοθείσες από τη σχέση (5.9). Με χρήση των σχέσεων (5.2), (5.5), (2.6), η (Γ.4) για $x = 0$ γίνεται

$$w(t, 0) = 0, \quad \text{για } t \geq 0 \quad (\Gamma.7)$$

Παρομοίως, συνδυάζοντας τις (5.3), (5.4) και (Γ.4) για $x = 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$w(t, 1) = 0, \quad \text{για } t \geq 0 \quad (\Gamma.8)$$

Επομένως, λόγω των (Γ.7) και (Γ.8), ισχύει η σχέση (5.9).

Μένει να δειχθεί ότι η $w \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(0,1)) \cap C^1((0, +\infty) \times [0,1])$ με $w[t] \in C^2([0,1])$ για $t > 0$ ικανοποιεί την ισότητα (5.7). Παραγωγίζοντας τη σχέση (Γ.4) ως προς $t \geq 0$ λαμβάνουμε

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - (x + \gamma k(x)) \int_0^1 k(s) \frac{\partial u}{\partial t}(t, s) ds, \quad \text{για } t \geq 0, x \in [0, 1] \quad (\Gamma.9)$$

Αντικαθιστώντας τον όρο $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$ από την (5.1), η ισότητα (Γ.9) γίνεται

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) - p(x + \gamma k(x)) \int_0^1 k(s) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(t, s) ds, \quad (\Gamma.10)$$

για $t \geq 0, x \in [0, 1]$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (Γ.5) δύο φορές ως προς $x \in [0, 1]$, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) + \beta \gamma k''(x) \int_0^1 k(s) w(t, s) ds, \quad \text{για } t \geq 0, x \in [0, 1] \quad (\Gamma.11)$$

Συνδυάζοντας τις (Γ.9), (Γ.10), (Γ.11), (Γ.3), έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) &= p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) + a k''(x) \int_0^1 k(s) w(t, s) ds \\ &- p(x + \gamma k(x)) \int_0^1 k(s) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(t, s) ds \\ &- a(x + \gamma k(x)) \left(\int_0^1 k(\tau) w(t, \tau) d\tau \right) \int_0^1 k''(s) k(s) ds, \quad \text{για } t \geq 0, x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (\Gamma.12)$$

Με χρήση της μεθόδου της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και λαμβάνοντας υπόψη τις (Γ.7), (Γ.8), (5.5) και (2.6), προκύπτουν οι ακόλουθες ισότητες:

$$\int_0^1 k(s) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(t, s) ds = \int_0^1 k''(s) w(t, s) ds, \quad \text{για } t \geq 0 \quad (\Gamma.13)$$

και

$$\int_0^1 k''(s) k(s) ds = - \|k'\| \quad (\Gamma.14)$$

Αντικαθιστώντας τις (Γ.13), (Γ.14) στη (Γ.12), προκύπτει η επιθυμητή ισότητα (5.7). Συνεπώς, η συνάρτηση

$$w \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(0,1)) \cap C^1((0, +\infty) \times [0,1]),$$

με $w[t] \in C^2([0, 1])$ για $t > 0$, είναι λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (5.7), (5.8), (5.9) με την αρχική συνθήκη δοθείσα από τη σχέση (Γ.6).

Απομένει ναδειχθεί η ισχύς της εκτίμησης (5.6) για θετικές σταθερές $Q, \sigma > 0$. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα και συγχρόνως την ανισότητα Cauchy-Schwartz στη σχέση (Γ.5), λαμβάνουμε:

$$\|u[t]\| \leq (1 + |\beta| \|k\| + |\beta\gamma| \|k\|^2) \|w[t]\|, \text{ για } t \geq 0 \quad (\Gamma.15)$$

Επιπλέον, η εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας και της ανισότητας Cauchy-Schwartz στη σχέση (Γ.6), οδηγεί στην ακόλουθη εκτίμηση:

$$\|w_0\| \leq (1 + \|k\| + |\gamma| \|k\|^2) \|u_0\| \quad (\Gamma.16)$$

Υπενθυμίζουμε ότι από το Λήμμα 5.1.1, ισχύει η εκτίμηση (5.10) για τη λύση $w \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, +\infty) \times [0, 1])$ με $w[t] \in C^2([0, 1])$ για $t > 0$, του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (5.7), (5.8), (5.9) με την αρχική συνθήκη ορισμένη κατά τη σχέση (Γ.6). Συνδυάζοντας το τελευταίο γεγονός με τις ανισότητες (Γ.15) και (Γ.16), προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $\sigma > 0$ ούτως ώστε να ισχύει:

$$\|w[t]\| \leq (1 + |\beta| \|k\| + |\beta\gamma| \|k\|^2) (1 + \|k\| + |\gamma| \|k\|^2) \exp(\sigma t), \text{ για } t \geq 0 \quad (\Gamma.17)$$

Θέτοντας

$$Q := (1 + |\beta| \|k\| + |\beta\gamma| \|k\|^2) (1 + \|k\| + |\gamma| \|k\|^2) \quad (\Gamma.18)$$

Προκύπτει από τις (Γ.17), (Γ.18) η επιθυμητή ανισότητα (5.6). Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. \triangleleft

Παρατήρηση: Ο λόγος για τον οποίον επιλέξαμε κατά την παραπάνω απόδειξη τη σταθερά $\gamma \in \mathbb{R}$ κατά τρόπο ώστε να ισχύει η (Γ.1), σχετίζεται με τη διαδικασία εύρεσης του αντιστρόφου του μετασχηματισμού Fredholm που ορίζεται κατά τη (Γ.4). Συγκεκριμένα, προκειμένου να ορίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό του (Γ.4), γράφουμε αρχικά την εν λόγω ισότητα ως εξής:

$$u(t, x) = w(t, x) + (x + \gamma k(x)) \int_0^1 k(s) u(t, s) ds, \text{ για } t \geq 0, x \in [0, 1] \quad (\Gamma.19)$$

Εν συνεχεία, βάσει της (Γ.19), παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^1 k(s)u(t,s)ds &= \int_0^1 k(s)w(t,s)ds \\ &+ \left(\int_0^1 sk(s)ds + \gamma \|k\|^2 \right) \int_0^1 k(s)u(t,s)ds, \quad \text{για } t \geq 0 \end{aligned} \quad (\Gamma.20)$$

Από τη (Γ.20) προκύπτει άμεσα ότι

$$\begin{aligned} \left(1 - \int_0^1 sk(s)ds - \gamma \|k\|^2 \right) \int_0^1 k(s)u(t,s)ds &= \int_0^1 k(s)w(t,s)ds, \quad (\Gamma.21) \\ &\text{για } t \geq 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς, λόγω της (Γ.21), θα πρέπει υποχρεωτικά να απαιτήσουμε να ισχύει $1 - \int_0^1 sk(s)ds - \gamma \|k\|^2 \neq 0$, δηλαδή η (Γ.4). Η τελευταία απαίτηση οδηγεί στον ορισμό της σταθεράς $\beta \in \mathfrak{R}$ σύμφωνα με τη (Γ.2). Συνδυάζοντας τις (Γ.21) και (Γ.2), λαμβάνουμε:

$$\int_0^1 k(s)u(t,s)ds = \beta \int_0^1 k(s)w(t,s)ds, \quad \text{για } t \geq 0 \quad (\Gamma.22)$$

Από τις (Γ.19) και (Γ.22), προκύπτει ο αντίστροφος μετασχηματισμός (Γ.5).

Απόδειξη του Λήμματος 5.1.3

Υποθέτουμε ότι υπάρχει

$$\bar{u} \in C^0(\mathfrak{R}_+; L^2(0,1)) \cap C^1((0,+\infty) \times [0,1]) \text{ με } \bar{u}[t] \in C^2([0,1]), \text{ για } t > 0$$

η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (5.1) καθώς και τις συνοριακές συνθήκες (5.2), (5.3) και την αρχική συνθήκη $\bar{u}[0] = u_0 \in L^2(0,1)$. Από το γεγονός αυτό, προκύπτει ότι και η διαφορά $y = u - \bar{u}$ αποτελεί επίσης λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) με

$$y \in C^0(\mathfrak{R}_+; L^2(0,1)) \cap C^1((0,+\infty) \times [0,1]) \text{ και } y[t] \in C^2([0,1]) \text{ για } t > 0$$

η οποία ικανοποιεί τις (5.1), (5.2), (5.3) καθώς και την αρχική συνθήκη $y_0 = y[0] \equiv 0$. Όμως, λόγω του Λήμματος 5.1.2, η y θα ικανοποιεί επιπλέον και την εκτίμηση (5.6). Επομένως θα ισχύει:

$$\|y[t]\| \leq Q \exp(\sigma t) \|y_0\|, \quad \text{για } t \geq 0 \quad (\Gamma.23)$$

Εφόσον $y[0] \equiv 0 \in L^2(0, 1)$ προκύπτει από τη (Γ.23) ότι $y[t] \equiv 0$, για κάθε $t \geq 0$. Επομένως, αφού $y = u - \bar{u}$, καταλήγουμε εν τέλει ότι $u[t] = \bar{u}[t]$, για κάθε $t \geq 0$. Συνεπώς, το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) έχει το πολύ μία λύση. \triangleleft

Απόδειξη του Λήμματος 5.1.4

Η απόδειξη του Λήμματος 5.1.4 κλιμακώνεται σε τρία μέρη, τα οποία περιγράφονται ως εξής:

Μέρος I: Δείχνουμε ότι για τη συνάρτηση $w : [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$, η οποία ορίζεται από τις σχέσεις (5.16)-(5.20), ισχύει: $w \in C^0((0, T] \times [0, 1])$.

Μέρος II: Αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $[0, T] \ni t \rightarrow w[t] \in L^2(0, 1)$ είναι συνεχής.

Μέρος III: Αποδεικνύεται ότι $w[t] \in C^1([0, 1])$.

Καθένα από τα παραπάνω Μέρη, παρουσιάζεται αναλυτικά στη συνέχεια:

Μέρος I

Αρκεί να αποδειχθεί ότι οι άπειρες σειρές που εμφανίζονται στο δεξί μέλος της ισότητας (5.16) συγκλίνουν ομοιόμορφα και απολύτως στην περιοχή $[t_0, T] \times [0, 1]$, για $t_0 \in (0, T]$, για κάθε $T > 0$. Θέτουμε

$$B_n(t, x) = \exp(-pn^2\pi^2t)c_n\phi_n(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\Gamma.24)$$

για $x \in [0, 1], t \in (0, T], \forall T > 0$

$$\Gamma_n(t, x) = L_n\phi_n(x) \left(\int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-s))r \exp(As)\xi ds \right), \quad (\Gamma.25)$$

$n = 1, 2, \dots, \text{ για } x \in [0, 1], t \in (0, T], \forall T > 0$

Εν συνεχεία, βρίσκουμε ένα άνω φράγμα για τις συναρτήσεις $B_n(t, x)$ και $\Gamma_n(t, x)$ όπως αυτές έχουν οριστεί κατά τις (Γ.24) και (Γ.25) αντίστοιχα.

Αρχικά, επισημαίνεται ότι εφόσον το σύνολο

$$\left\{ \phi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x) : n = 1, 2, \dots \right\}$$

αποτελεί μία ορθοκανονική βάση του χώρου $L^2(0,1)$, ισχύει $\|\phi_n\| = 1$, $n = 1, 2, \dots$. Εκμεταλλευόμενοι το τελευταίο, καθώς και τον ορισμό (5.19) και εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwartz, προκύπτει ότι

$$\|c_n\| \leq \|w_0\|, \text{ για } n = 1, 2, \dots \quad (\Gamma.26)$$

Επιπλέον, διαπιστώνεται εύκολα με παραγωγή και εύρεση μεγίστου της συνάρτησης $f(x) = x \exp(-x)$, για $x \geq 0$, ότι

$$x \exp(-x) \leq \exp(-1), \text{ για } x \geq 0$$

Βάσει του παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι

$$\exp(-pn^2\pi^2t) \leq \frac{1}{epn^2\pi^2t_0}, \text{ } n = 1, 2, \dots, \text{ για κάθε } t_0 \in (0, T], \text{ και } t \in [t_0, T] \quad (\Gamma.27)$$

Συνδυάζοντας τις (Γ.26) και (Γ.27) με το γεγονός ότι:

$$|\sqrt{2} \sin(n\pi x)| \stackrel{(2.6)}{\leq} \sqrt{2}, \text{ } n = 1, 2, \dots$$

προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα:

$$|B_n(t, x)| \leq \frac{\sqrt{2} \|w_0\|}{epn^2\pi^2t_0}, \text{ } n = 1, 2, \dots, \text{ για κάθε } t_0 \in (0, T], \text{ και } t \in [t_0, T] \quad (\Gamma.28)$$

Εργαζόμενοι παρομοίως, βρίσκουμε ένα άνω φράγμα για τη συνάρτηση $\Gamma_n(t, x)$, ορισμένη από τη σχέση (Γ.25). Παρατηρούμε ότι λόγω του ορισμού (5.15), προκύπτει άμεσα ότι

$$|L_n| \leq \frac{\sqrt{2}}{n\pi}, \text{ } n = 1, 2, \dots \quad (\Gamma.29)$$

Χρησιμοποιώντας τις (Γ.25), (Γ.29), (2.6), το γεγονός ότι $|\exp(At)| \leq \exp(|A|t)$, για κάθε $t \geq 0$ και εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwartz στη σχέση (Γ.25), λαμβάνουμε την ακόλουθη εκτίμηση:

$$|\Gamma_n(t, x)| \leq \frac{\sqrt{2}|r||\xi| \exp(|A|T)}{pn^3\pi^3}, \text{ } n = 1, 2, \dots, \quad (\Gamma.30)$$

για κάθε $t_0 \in (0, T]$, και $t \in [t_0, T]$

Οι ανισότητες (Γ.28) και (Γ.30) επιβεβαιώνουν ότι πράγματι, οι άπειρες σειρές που εμφανίζονται στο δεξί μέλος της ισότητας (5.16) συγκλίνουν ομοιόμορφα και απολύτως στην περιοχή $[t_0, T] \times [0, 1]$, για $t_0 \in (0, T]$, για κάθε $T > 0$. Άρα $w \in C^0((0, T] \times [0, 1])$.

Μέρος II

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε να ισχύει:

$$\|w[t] - w_0\| \leq \varepsilon, \text{ για κάθε } t \in [0, \delta] \quad (\Gamma.31)$$

Πράγματι, αξιοποιώντας το γεγονός ότι $w_0 \in L^2(0, 1)$, την ταυτότητα του Parseval (βλέπε Παράρτημα Α') και τον ορισμό (5.19), συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty \quad (\Gamma.32)$$

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$|\exp(At) - I| \leq |A|t \exp(|A|t), \text{ για κάθε } t \geq 0 \quad (\Gamma.33)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.16), (5.17), (5.19), (5.20), (Γ.32), (Γ.33) και παράλληλα χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval, την ανισότητα Cauchy-Schwartz, την τριγωνική ανισότητα και το γεγονός ότι $\|\phi_n\| = 1$, προκύπτει η παρακάτω εκτίμηση:

$$\begin{aligned} \|w[t] - w_0\|^2 &\leq N|A|^2 t^2 \exp(2|A|T) \sum_{n=1}^N c_n^2 \\ &+ 2(1 - \exp(-pm^2\pi^2 t))^2 \sum_{n=N+1}^m c_n^2 \\ &+ 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n^2 + 2t|r|^2 \exp(2|A|T) \left(\sum_{n=1}^N c_n^2 \right) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{pn^4\pi^4}, \end{aligned} \quad (\Gamma.34)$$

για κάθε $t \in (0, T]$ και για κάθε ακέραιο $m \geq N + 1$

Κάθε όρος του δεξιού μέλους της ανισότητας (Γ.34) αποτελεί πεπερασμένη ποσότητα (επικαλούμαστε τη (Γ.32) και παρατηρούμε ότι η σειρά $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{pn^4\pi^4}$ συγκλίνει σε θετικό πραγματικό αριθμό λόγω του κριτηρίου της σύγκρισης), επομένως και η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των όρων αυτών θα ισούται με ένα θετικό πραγματικό αριθμό. Το τελευταίο οδηγεί στην επιβεβαίωση της ανισότητας (Γ.31) για m αρκούντως μεγάλο και $\delta > 0$, αρκετά μικρό. Επομένως η απεικόνιση $[0, T] \ni t \rightarrow w[t] \in L^2(0, 1)$ είναι συνεχής.

Μέρος III

Απομένει να αποδειχθεί ότι η $w[t] \in C^1([0, 1])$ και ικανοποιεί την εξής ισότητα:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x}(t, x) &= \sum_{n=1}^N \phi'_n(x) e_n \exp(At)\xi + \sum_{n=N+1}^{\infty} \phi'_n(x) \exp(-pn^2\pi^2 t) c_n \\ &+ \sum_{n=N+1}^{\infty} L_n \phi'_n(x) \int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-s)) r \exp(As)\xi ds, \end{aligned} \quad (\Gamma.35)$$

για $(t, x) \in (0, T] \times [0, 1]$

Προκειμένου να δειχθούν τα παραπάνω, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι άπειρες σειρές που εμφανίζονται στο δεξί μέλος της (Γ.35) είναι ομοιόμορφα και απολύτως συγκλίνουσες στην περιοχή $[t_0, T] \times [0, 1]$, για κάθε $t_0 \in (0, T]$. Πρωτίστως, παρατηρούμε ότι βάσει του ορισμού (2.6), ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση

$$\max_{0 \leq x \leq 1} (|\phi'_n(x)|) \leq n\pi\sqrt{2}, \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \dots \quad (\Gamma.36)$$

Επίσης, προκύπτει εύκολα με παραγωγή και εύρεση μεγίστου της συνάρτησης $f(x) = x^a \exp(-x)$, με $x \geq 0$, $a > 0$, ότι

$$x^a \exp(-x) \leq a^a \exp(-a), \quad \text{για κάθε } x \geq 0, a > 0 \quad (\Gamma.37)$$

Εκμεταλλευόμενοι τη σχέση (Γ.26) (από το Μέρος I), την ανισότητα (Γ.37) για $x = pn^2\pi^2 t$, $t \in [t_0, T]$ με $t_0 \in (0, T]$ και $a = 3/2$ και με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwartz, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} |\phi'_n(x) \exp(-pn^2\pi^2 t) c_n| &\leq \|w_0\| \frac{1}{2n^2\pi^2} \left(\frac{3}{2pt_0 e} \right)^{3/2}, \\ n = 1, 2, \dots, \text{ για κάθε } x \in [0, 1], t_0 \in (0, T] \text{ και } t \in [t_0, T] \end{aligned} \quad (\Gamma.38)$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις (Γ.36), (Γ.30), (Γ.25) και την ανισότητα Cauchy-Schwartz, προκύπτει η ακόλουθη εκτίμηση

$$\begin{aligned} \left| L_n \phi'_n(x) \int_0^t \exp(-pn^2\pi^2(t-s)) r \exp(As)\xi ds \right| &\leq \frac{\sqrt{2}|r||\xi| \exp(|A|T)}{pn^2\pi^2}, \\ \text{για } n = 1, 2, \dots, \text{ και } x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (\Gamma.39)$$

Από τις ανισότητες (Γ.38) και (Γ.39), συμπεραίνουμε ότι για κάθε $T > 0$, οι άπειρες σειρές που παρουσιάζονται στο δεξί μέλος της (Γ.35) είναι ομοιόμορφα και απολύτως συγκλίνουσες στην περιοχή $[t_0, T] \times [0, 1]$, για κάθε $t_0 \in (0, T]$. Συνεπώς, $w[t] \in C^2([0, 1])$. ◁

Παράρτημα Δ'

Εξαγωγή της (5.34)

Αξιοποιώντας τους ορισμούς (2.6) και (5.15), προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n \phi_n(x)}{n^2 \pi^2} = -\frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\pi x)}{n^3}, \quad x \in [0, 1]$$

Η παραπάνω άπειρη σειρά αποτελεί μία σειρά Fourier. Συνεπώς μπορούμε να την προσεγγίσουμε μέσω ενός πολυωνύμου $P(x)$, με $x \in [0, 1]$, το οποίο θα είναι ένα κυβικό πολυώνυμο εφόσον εμφανίζεται ο όρος $\frac{1}{n^3}$.

Βάσει των ανωτέρω, το ζητούμενο πολυώνυμο $P(x)$, λαμβάνει τη μορφή

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad x \in [0, 1], \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad b, c, d \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς θα ισχύει:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = -\frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\pi x)}{n^3}, \quad x \in [0, 1] \quad (\Delta.1)$$

Από τη (Δ.1) για $x = 0$ και $x = 1$, προκύπτει αντίστοιχα ότι $d = 0$ και $c = -a - b$. Επιπλέον παραγωγίζοντας αμφότερα τα μέλη της (Δ.1) ως προς x και θέτοντας όπου $x = 0$ και $x = 1$, λαμβάνουμε:

$$c = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (\Delta.2)$$

$$2a + b \stackrel{c=-a-b}{=} -\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (\Delta.3)$$

Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ συγκλίνει στον αριθμό $-\frac{\pi^2}{12}$. Επομένως από τη (Δ.2), προκύπτει άμεσα ότι $c = \frac{1}{6} = -a - b$. Επιπλέον

γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει στον αριθμό $\frac{\pi^2}{6}$. Επομένως από τη (Δ.3) έχουμε ότι $2a + b = -\frac{1}{3}$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $a = -\frac{1}{6}$, $b = 0$. Συνεπώς $P(x) = \frac{x-x^3}{6}$. Βάσει του τελευταίου, η (5.34) είναι άμεση συνέπεια της (Δ.1).

Παράρτημα Ε΄

Συναρτήσεις Ελέγχου Lyapunov και η συνθήκη “Artstein-Sontag”

Ορισμός E.0.1 [74] Μία συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ ονομάζεται (ολική) Συναρτηση Ελέγχου Lyapunov ((global) Control Lyapunov Function (CLF)) για το σύστημα (6.1) (ως προς το μηδενικό σημείο ισορροπίας $0 \in \mathbb{R}^n$) αν είναι συνεχής και ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Η V είναι **proper** στο $0 \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq \varepsilon\}$$

είναι συμπαγές.

2. Η V είναι **θετικά ορισμένη** στο \mathbb{R}^n , δηλαδή, ισχύει ότι:

$$V(0) = 0 \text{ και } V(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n, \text{ με } x \neq 0.$$

3. Για κάθε αρχική κατάσταση $x \neq 0$ στο \mathbb{R}^n και για κάθε επαρκώς μικρό $\sigma > 0$ υπάρχει ένας έλεγχος $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$, ούτως ώστε, για την τροχιά $\pi(\cdot) = \pi(\cdot, x, u)$ η οποία αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο έλεγχο και στη συγκεκριμένη αρχική κατάσταση, να ισχύουν τα ακόλουθα:

$$V(\pi(t)) \leq V(x), \text{ για κάθε } t \in [0, \sigma)$$

και

$$V(\pi(\sigma)) < V(x)$$

Λήμμα E.0.1 [74] Θεωρούμε το σύστημα (6.1), το μηδενικό σημείο ισορροπίας $0 \in \mathbb{R}^n$ του (6.1) και μία συνεχώς διαφορίσιμη, θετικά ορισμένη και *proper* συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, με $x \neq 0$, υπάρχει $u \in \mathbb{R}^m$, ούτως ώστε να ισχύει ότι:

$$\nabla V(x)f(x, u) < 0 \quad (\text{E.1})$$

Τότε η V είναι (ολική) CLF για το σύστημα (6.1).

Επισημαίνουμε ότι, στην περίπτωση γραμμικών ως προς τον έλεγχο (affine in the control) συστημάτων της μορφής:

$$\dot{x} = f(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

όπου $f_0, g_1, \dots, g_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, η συνθήκη (E.1) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

$$\nabla V(x) \cdot g_1(x) = \dots = \nabla V(x) \cdot g_m(x) = 0, \quad \text{για } x \neq 0 \Rightarrow \nabla V(x) \cdot f_0(x) < 0.$$

Η παραπάνω συνεπαγωγή είναι γνωστή και ως **Συνθήκη Artstein-Sontag** [73].

Παράρτημα ΣΤ'

Αγκύλη Lie και η Campbell-Baker-Hausdorff Formula

Συμβολίζουμε με $\mathcal{V}(S)$, το σύνολο όλων των (λείων) διανυσματικών πεδίων σε ένα δοσμένο ανοικτό υποσύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Παραθέτουμε τους εξής Ορισμούς:

Ορισμός ΣΤ.0.1 Για κάθε $f, g \in \mathcal{V}(S)$, συμβολίζουμε με fg , τη Lie παράγωγο της g κατά μήκος της f . Δηλαδή, ορίζουμε:

$$(fg)(x) := (Dgf)(x) = Dg(x)f(x), \text{ για κάθε } f, g \in \mathcal{V}(S) \text{ και } x \in S$$

Όπου $Dg(x)$ είναι η παράγωγος της $g(x)$.

Ορισμός ΣΤ.0.2 Για κάθε $f, g \in \mathcal{V}(S)$, ορίζουμε τη διγραμμική απεικόνιση $[\cdot, \cdot] : \mathcal{V}(S) \times \mathcal{V}(S) \rightarrow \mathcal{V}(S)$, $(f, g) \rightarrow [f, g]$ ως εξής:

$$[f, g](x) := (fg)(x) - (gf)(x), \text{ για κάθε } f, g \in \mathcal{V}(S), x \in S$$

Ισοδύναμα,

$$f(g(\varphi)) - g(f(\varphi)) = [f, g](\varphi) \\ \text{για κάθε λεία συνάρτηση } \varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$$

Η παραπάνω απεικόνιση ονομάζεται Αγκύλη Lie (Lie bracket).

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, η Αγκύλη Lie έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- 1^η ιδιότητα: Ανακλαστικότητα

$$[f, f] = 0, \text{ για κάθε } f \in \mathcal{V}(S)$$

- 2^η ιδιότητα: Αντισυμμετρικότητα

$$[f, g] = -[g, f], \text{ για κάθε } f, g \in \mathcal{V}(S)$$

- 3^η ιδιότητα: Διγραμμικότητα

$$[rf_1 + f_2, g] = r[f_1, g] + [f_2, g], \text{ για κάθε } f_1, f_2, g \in \mathcal{V}(S), r \in \mathbb{R}$$

$$[f, rg_1 + g_2] = r[f, g_1] + [f, g_2], \text{ για κάθε } f, g_1, g_2 \in \mathcal{V}(S), r \in \mathbb{R}$$

- 4^η ιδιότητα: Ταυτότητα Jacobi

$$[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0, \text{ για κάθε } f, g, h \in \mathcal{V}(S)$$

Η Campbell-Baker-Hausdorff Formula

Ένα από τα βασικότερα εργαλεία το οποίο επιστρατεύεται προς απόδειξη των κύριων αποτελεσμάτων κατά την ενότητα 8.1 της παρούσας διατριβής, αποτελεί η έννοια της Campbell-Baker-Hausdorff (CBH) Formula. Τα σχετικά με τη CBH formula Θεωρήματα (παραπέμπουμε στις εργασίες [1], [13], [17], [23], [29], [30], [37] για ενδελεχέστερη ανάλυση), αφορούν στην έκφραση των παραγώγων μιας αναλυτικής συνάρτησης σε μορφή άπειρου αθροίσματος στο οποίο εμπλέκονται στοιχεία της Lie Άλγεβρας διανυσματικών πεδίων. Η χρήση της CBH formula αποδεικνύεται καθοριστική για την πορεία της απόδειξης των Προτάσεων 7.1.1, 7.1.2 και παράλληλα συνιστά έναυσμα για την κατασκευή και τον ορισμό του Lie υποσυνόλου $L\{f, g\}$ στο οποίο ανήκουν οι όροι που εμπλέκονται στις Lie Αλγεβρικές συνθήκες των παραπάνω Προτάσεων.

Θεωρούμε εκ νέου τα διανυσματικά πεδία $f, g \in \mathcal{V}(S)$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Ένας εναλλακτικός ορισμός για το Lie bracket τελεστή $[f, g]$ είναι ο εξής:

$$\begin{aligned} [f, g](x) = (Dgf)(x) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(D\Phi_{-t}^f g(\Phi_t^f(x)) - g(x))}{t} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (D\Phi_{-t}^f g(\Phi_t^f(x))), \text{ για κάθε } x \in S, \end{aligned} \quad (\text{ΣΤ.1})$$

όπου Φ_t^f είναι η ροή του διανυσματικού πεδίου f . Με άλλα λόγια, σύμφωνα με την (ΣΤ.1), η Αγκύλη Lie δύο διανυσματικών πεδίων $f, g \in \mathcal{V}(S)$ μπορεί επιπλέον να ερμηνευτεί και ως η παράγωγος ως προς $t \geq 0$ της συνάρτησης

$$W(t) = (D\Phi_{-t}^f g)(\Phi_t^f(x)), \quad x \in S \quad (\text{ΣΤ.2})$$

στο $t = 0$. Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι λεία και ότι για κάθε $k \geq 0$ ισχύει:

$$\left(\frac{d^k W(t)}{dt^k} \right)_{t=0} = ad_f^k g(p), \quad \text{για κάθε } x \in S$$

όπου $ad_f^0 g = g$ και $ad_f^k g = [f, ad_f^{k-1} g]$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $k > 0$. Αν η συνάρτηση $W(t)$ όπως έχει οριστεί κατά τη σχέση (ΣΤ.2) είναι αναλυτική σε μία γειτονιά του $t = 0$, τότε μπορεί να εκφραστεί στην ακόλουθη μορφή:

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} ad_f^k g(p) \frac{t^k}{k!}$$

Η παραπάνω ισότητα είναι γνωστή ως **Campbell-Baker-Hausdorff (CBH) Formula**.

Παράρτημα Ζ΄

Εξαγωγή των σχέσεων (8.9)-(8.11)

Για την εξαγωγή των ισοτήτων (8.9)-(8.11) παραθέτουμε τη διαδικασία που ακολουθείται κατά την εργασία [85] για την απόδειξη της Πρότασης 3 της εν λόγω εργασίας.

Παραγωγίζοντας την (8.5) μία φορά ως προς $t \geq 0$, σύμφωνα με την CBH formula βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= \rho X(R(t)) + (DX_{\rho t} Y) \cdot X_{-\rho t}(R(t)) \\ &= \rho X(R(t)) + Y(R(t)) + \rho t [Y, X](R(t)) + \frac{\rho^2 t^2}{2!} [[Y, X], X](R(t)) \quad (\text{Z.1}) \\ &+ \dots + \frac{\rho^k t^k}{k!} [\dots [[Y, X], X], \dots, X](R(t)) + O(t^k), \text{ για } t \geq 0 \end{aligned}$$

όπου $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{O(t)}{t} = 0$. Χάρην ευκολίας και απλότητας, ορίζουμε τα ακόλουθα διανυσματικά πεδία:

$$\begin{aligned} A_0 &:= \rho X + Y \\ A_\nu &:= [\dots [[Y, X], X], \dots, X], \quad \nu = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{Z.2})$$

Από τον ορισμό (Z.2), προκύπτει άμεσα ότι $A_\nu \in \text{Lie}\{X, Y\}$, για κάθε $\nu = 0, 1, 2, \dots$. Βάσει αυτού, είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε, σύμφωνα με τον Ορισμό 6.3.1, την τάξη (order) καθενός A_ν ως προς τη Lie Άλγεβρα των διανυσματικών πεδίων $\{X, Y\}$. Συγκεκριμένα, στην παρούσα περίπτωση, έχουμε:

$$\text{order}_{\{X, Y\}} A_\nu = \nu + 1, \text{ για κάθε } \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Z.3})$$

Με χρήση του ορισμού (Z.2), η ισότητα (Z.1) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\dot{R}(t) = \left(A_0 + \rho t A_1 + \frac{\rho^2 t^2}{2!} A_2 + \dots + \frac{\rho^k t^k}{k!} A_k \right) (R(t)) + O(t^k) \quad (\text{Z.4})$$

Συνεπώς, λόγω της (8.5), προκύπτει ότι για κάθε θετικό ακέραιο k , ισχύει:

$$m^{(1)}(t) = \sum_{i=0}^k \frac{\rho^i t^i}{i!} (A_i V)(R(t)) + O(t^k) \quad (\text{Z.5})$$

Εν συνεχεία υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της $m(t)$. Αξιοποιώντας τις (Z.4) και (Z.5), οδηγούμαστε στην παρακάτω έκφραση:

$$\begin{aligned} m^{(2)}(t) &= \sum_{i=0}^k \frac{\rho^i t^i}{i!} D(A_i V)(R(t)) \dot{R}(t) + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\rho^i t^{i-1}}{(i-1)!} (A_i V)(R(t)) \\ &+ O(t^{k-1}) \\ &\in (A_0^2(R(t)) + t \rho \text{span} \{A_1 A_0 V, A_0 A_1 V\} (R(t)) \\ &+ t^2 \rho^2 \text{span} \{A_2 A_0 V, A_1^2 V, A_0 A_2 V\} (R(t)) \\ &+ t^3 \rho^3 \text{span} \{A_0 A_3 V, A_2 A_1 V, A_1 A_2 V, A_3 A_0 V\} (R(t)) \\ &+ \dots + t^k \rho^k \text{span} \{A_k A_0 V, A_{k-1} A_1 V, \dots, A_0 A_k V\} (R(t)) \\ &+ \rho (A_1 V)(R(t)) \\ &+ \text{span} \{ \rho^2 t A_2 V, \rho^3 t^2 A_3 V, \dots, \rho^k t^{k-1} A_k V, \rho^{k+1} t^k A_{k+1} V \} (R(t)) \\ &+ O(t^{k-1}) \end{aligned} \quad (\text{Z.6})$$

Στην εργασία [85], αποδεικνύεται με επαγωγή ότι για κάθε ζεύγος ακεραίων n, k με $2 \leq n \leq k$, ισχύει ότι η n -οστή παράγωγος $m^{(n)}(\cdot)$ της $m(\cdot)$

ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα:

$$\begin{aligned}
m^{(n)}(t) &\in S_n(t, x) := (A_0^n V)(R(t)) \\
&+ \sum_{j=0}^{j=k} t^j \operatorname{span} \left\{ \begin{array}{l} \rho^{r_n^j} (A_{i_1^j} A_{i_2^j} \dots A_{i_\nu^j} V)(R(t)) : \nu \geq 2; \\ \sum_{s=1}^{\nu} \operatorname{order} A_{i_s^j} = n + j; \\ r_n^j = \sum_{s=1}^{\nu} i_s^j \in \{1, 2, \dots, n + j - 2\} \end{array} \right\} \quad (\text{Z.7}) \\
&+ \rho^{n-1} (A_{n-1} V)(R(t)) \\
&+ \operatorname{span} \{ \rho^n t (A_n V)(R(t)), \rho^{n+1} t^2 (A_{n+1} V)(R(t)), \dots, \\
&\rho^{n+k-1} t^k (A_{k+n-1} V)(R(t)) \} + O(t^{k-n+1})
\end{aligned}$$

Από τη σχέση (Z.7) για $t = 0$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
m^{(n)}(0) &\in (A_0^n V)(x) \\
&+ \operatorname{span} \left\{ \begin{array}{l} \rho^{r_n^0} (A_{i_1^0} A_{i_2^0} \dots A_{i_\nu^0} V)(x) : \nu \geq 2; \\ i_1^0, i_2^0, \dots, i_\nu^0 \in \mathbb{N}_0; \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{order} A_{i_j^0} = n; \\ r_n^0 = \sum_{j=1}^{\nu} i_j^0 \in \{1, 2, \dots, n - 2\} \end{array} \right\} \quad (\text{Z.8}) \\
&+ \rho^{n-1} (A_{n-1} V)(x), \text{ για } n \geq 2
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό (8.3), καθώς και τη σχέση (8.8), θα εκφράσουμε κάθε όρο A_ν , $\nu = 0, 1, 2, \dots$ όπως έχει οριστεί από τη σχέση (Z.2), συναρτήσει των στοιχείων του Lie υποσυνόλου $L\{f, g\}$, το οποίο ορίζεται από τις σχέσεις (6.13) και (6.14). Τοιουτοτρόπως, οι παράγωγοι τάξεως 1 έως n της $m(\cdot)$, θα μπορούν να γραφούν εκ νέου σύμφωνα με τα στοιχεία του $L\{f, g\}$. Αρχικά, διαπιστώνουμε ότι, επικαλούμενοι τις ιδιότητες του Lie αλγεβρικού τελεστή $[\cdot, \cdot]$ (Παράρτημα ΣΤ') και συνδυάζοντας τους ορισμούς (8.3), (8.8) και (Z.2), ο τελευταίος μπορεί

να γραφεί αναλυτικότερα ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
A_0 &:= (\rho + 1)f \\
A_1 &:= (\rho + 1)u_1[f, g] \\
A_2 &:= (\rho + 1)u_1[[f, g], f] + (\rho + 1)u_1^2[[f, g], g] \\
&\vdots \\
A_n &:= (\rho + 1)u_1[\dots[[f, g], \underbrace{f, \dots, f}_{n-1}], \\
&\quad + (\rho + 1)u_1^2\left(\underbrace{[[\dots[[f, g], f], \dots, f], f}_{n-2}, g\right) + \underbrace{[[\dots[[f, g], f], \dots, f], g, f}_{n-3} \\
&\quad + \dots + \underbrace{[[\dots[[f, g], g]f], \dots, f, f]}_{n-2}) + \dots \\
&\quad + (\rho + 1)u_1^{n-1}\left(\underbrace{[[\dots[f, g], \dots, g], g]}_{n-1}, f\right) + \underbrace{[[\dots[f, g], \dots, g], f, g]}_{n-2} \\
&\quad + \dots + \underbrace{[\dots[[f, g], f], g, \dots, g]}_{n-2}) \\
&\quad + (\rho + 1)u_1^n[\dots[\underbrace{[f, g], g]}_n, \dots, g], \quad n = 3, 4, \dots
\end{aligned} \tag{Z.9}$$

Στο σημείο αυτό, ενσωματώνοντας τον ορισμό (6.13) των στοιχείων του $L\{f, g\}$ στις ισότητες (Z.9), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
A_0 &:= (\rho + 1)f = (\rho + 1)\lambda_{1,0} \\
A_1 &:= (\rho + 1)u_1\lambda_{2,1} \\
A_2 &:= (\rho + 1)u_1\lambda_{3,1} + (\rho + 1)u_1^2\lambda_{3,2} \\
&\vdots \\
A_n &:= (\rho + 1)u_1\lambda_{n+1,1} \\
&\quad + (\rho + 1)u_1^2\lambda_{n+1,2} + \dots + (\rho + 1)u_1^{n-1}\lambda_{n+1,n-1} \\
&\quad + (\rho + 1)u_1^n\lambda_{n+1,n} = (\rho + 1)\sum_{i=1}^n u_1^i\lambda_{n+1,i}, \quad n = 3, 4, \dots
\end{aligned} \tag{Z.10}$$

Δεδομένων των (Z.9), (Z.10), παρατηρούμε ότι για κάθε ακέραιο $k \geq 0$, ισχύει

$$\begin{aligned}
&A_k \in \text{span} \{ \Delta \in \text{Lie}\{f, g\} \setminus \{g\} : \text{order}\Delta = k + 1, k = 0, 1, 2, \dots \} \\
\Rightarrow A_k &\in \text{span} \left\{ \begin{array}{l} \Delta \in L\{f, g\} : \text{order}\Delta = k + 1, \\ \text{και } \text{order}_{\{g\}}\Delta \in \{0, \dots, k\}, k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{Z.11}$$

Έχοντας υπόψη τη (Z.10), οι σχέσεις (8.9α) και (8.9β) προκύπτουν εύκολα από τις (Z.5) και (Z.6) αντίστοιχα, θέτοντας σε αυτές όπου $t = 0$. Λόγω των (Z.3) και (Z.8), έχουμε ότι:

$$r_n^0 = \sum_{j=1}^{\nu} i_j^0 \in \{1, 2, \dots, n-2\}$$

και

$$\sum_{j=1}^{\nu} \text{order} A_{i_j^0} = r_n^0 + \nu = n, \text{ με } \nu \geq 2$$

και επομένως $\nu \leq n-1$. Βάσει του τελευταίου και των σχέσεων (Z.8), (Z.9), (Z.10) και (Z.11) προκύπτει η (8.9γ), μαζί με τις ιδιότητες (8.10) και (8.11).

Βιβλιογραφία

- [1] Achilles, R. and A. Bonfiglioli, “The early proofs of the theorem of Campbell, Baker, Hausdorff, and Dynkin”, *Arch. Hist. Exact Sci*, 66, 2012, 295-358.
- [2] Albertini, F. and E. D. Sontag, “Continuous control-Lyapunov functions for asymptotically controllable time-varying systems”, *International Journal of Control*, 72(18), 1999, 1630-1641.
- [3] Ancona, F. and A. Bressan, “Patchy vector fields and asymptotic stabilization”, *ESAIM-COCV*, vol.4, 1999, 445-471.
- [4] Anfinsen, H. and O. M. Aamo, “Adaptive Stabilization of $n + 1$ Coupled Linear Hyperbolic Systems with Uncertain Boundary Parameters Using Boundary Sensing”, *Systems and Control Letters*, 99, 2017, 72-84.
- [5] Anfinsen, H. and O. M. Aamo, “Model Reference Adaptive Control of $n + 1$ Coupled Linear Hyperbolic PDEs”, *Systems and Control Letters*, 109, 2017, 1-11.
- [6] Anfinsen, H. and O. M. Aamo, “Adaptive Output Feedback Stabilization of Coupled Linear Hyperbolic PDEs with Uncertain Boundary Conditions”, *SIAM Journal of Control and Optimization*, 55, 2017, 3928-3946.
- [7] Anfinsen, H. , M. Diagne, O. M. Aamo, and M. Krstic, “An Adaptive Observer Design for $n + 1$ Coupled Linear Hyperbolic PDEs Based on Swapping”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61, 2016, 3979-3990.
- [8] Anta, A. and P. Tabuada, “To sample or not to sample: self-triggered control for nonlinear systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, 2010, 2030-2042.

- [9] Artstein, Z. , “Stabilization with relaxed controls”, *Nonlinear Analysis TMA*, vol.7, 1983, 1163-1173.
- [10] Bacciotti, A. , “Local Stabilizability of Nonlinear Control Systems”, *Series on advances in mathematics for applied sciences*, World Scientific, 1992.
- [11] Bacciotti, A. and L. Mazzi, “From Artstein-Sontag theorem to the min-projection strategy”, *Trans. of the Institute of Measurement and Control*, vol.32, no.6, 2010, 571-581.
- [12] Bacciotti, A. and L. Rosier, *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*, Communications and Control Engineering, Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [13] Baker, H. F. , “Alternants and continuous groups”, *Proc. London Math. Soc.* (2) 3, 1905, 24-47.
- [14] Bekiaris-Liberis, N. and M. Krstic, “Delay-Adaptive Feedback for Linear Feedforward Systems”, *Systems and Control Letters*, 59, 2010, 277-283.
- [15] Bernard, P. and M. Krstic, “Adaptive Output-Feedback Stabilization of Non-Local Hyperbolic PDEs”, *Automatica*, 50, 2014, 2692-2699.
- [16] Bird, R. B. , W. E. Stewart and E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, 2nd Ed, Wiley, 2006.
- [17] Bonfiglioli, A. and R. Fulci, *Topics in noncommutative algebra. The theorem of Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin*. Springer 2012.
- [18] Bresch-Pietri, D. and M. Krstic, “Adaptive Trajectory Tracking Despite Unknown Input Delay and Plant Parameters”, *Automatica*, 45, 2009, 2075-2081.
- [19] Bresch-Pietri, D. and M. Krstic, “Delay-Adaptive Predictor Feedback for Systems with Unknown Long Actuator Delay”, *IEEE TAC*, 55, 2010, 2106-2112.
- [20] Bresch-Pietri, D. and M. Krstic, “Delay-Adaptive Control for Nonlinear Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59, 2014, 1203-1218.

- [21] Bresch-Pietri, D. and M. Krstic, “Output-Feedback Adaptive Control of a Wave PDE with Boundary Anti-Damping”, *Automatica*, 50, 2014, 1407-1415.
- [22] Bresch-Pietri, D. and M. Krstic, “Adaptive Compensation of Diffusion-Advection Actuator Dynamics Using Boundary Measurements”, *Proceedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control*, 2015.
- [23] Campbell, J. E. , “On a law of combination of operators bearing on the theory of continuous transformation groups $I+II$ ”, *Proc. London Math. Soc.*, (1) 28, 1897, (1) 29, 1897, 14-32.
- [24] Christophides, P. , *Nonlinear and Robust Control of Partial Differential Equation Systems: Methods and Applications to Transport-Reaction Processes*, Birkhäuser, 2001.
- [25] Chrysafi, K. and J. Tsinias, “A General Class of Control Lyapunov Functions and Sampled-Data Stabilization”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 66, no. 11, Nov. 2021, 5362-5368.
- [26] Clarke, F. H. , Y. S. Ledyaev, E. D. Sontag and A. I. Subbotin, “Asymptotic controllability implies feedback stabilization”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 10, 1997, 1394-1407.
- [27] Clarke, F. H. , Y. S. Ledyaev, L. Rifford and R. J. Stern, “Feedback stabilization and Lyapunov functions”, *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 39, no. 1, 2000, 25-48.
- [28] Coron, J. M. , *Control and Nonlinearity*, Mathematical surveys and monographs, American Mathematical Society, 2007.
- [29] Dynkin, E. B. , “Calculation of the coefficients in the Campbell-Hausdorff formula [Russian]”. *Usp. Mat. Nauk.*, 57, 1947, 323-326. English translation in Yushkevich, A. A. , G. M. Seitz, A. L. Onishchik (eds.), *Selected papers of E. B. Dynkin with commentary*, American Mathematical Society 2000.
- [30] Dynkin, E. B. , “On the representation by means of commutators of the series $\log(e^X e^Y)$ for noncommutative X and Y [Russian]”, *Mat. Sb. (N.S.)*, 25(67), 1949, 155-162.
- [31] El-Farrah, N. and P. Christophides, “Hybrid Control of Parabolic PDE Systems”, *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 2002, 216-22.

- [32] Espitia, N. , A. Girard, N. Marchand and C. Prieur, “Event-Based Boundary Control of a Linear 2x2 Hyperbolic System Via Backstepping Approach”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 63, no. 8, Aug 2018, 2686-2693.
- [33] Espitia, N. , A. Girard and C. Prieur, “Event-Based Control of Linear Hyperbolic Systems of Conservation Laws”, *Automatica*, 70, 2016, 275-287.
- [34] Goebel, R. and A. R. Teel, “Direct design of robustly asymptotically stabilizing hybrid feedback”, *ESAIM-COCV*, vol. 15, no. 1, 2009, 205-213.
- [35] Grüne, L. , “Stabilization by sampled and discrete feedback with positive sampling rate”, *Springer London*, London, 1999, 165–182.
- [36] Grüne, L. and D. Nešić, “Optimization based stabilization of sampled-data nonlinear systems via their approximate discrete-time models”, *SIAM J. Control Optim.*, vol. 42, 2003, 98-122.
- [37] Hausdorff, F. , “Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie”, *Ber. Verh. Kgl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-phys. Kl.*, 58, 1906, 19-48.
- [38] Hermes, H. G. , “Controlled stability”, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, IV144, 1977, 103-119.
- [39] Jiang, Z. , B. Cui, W. Wu and B. Zhuang, “Event-Driven Observer-Based Control for Distributed Parameter Systems Using Mobile Sensor and Actuator”, *Computers and Mathematics with Applications*, 72, 2016, 2854-2864.
- [40] Karafyllis, I. , “Stabilization by means of time-varying hybrid feedback”, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 18, no. 3, 2006, 236-259.
- [41] Karafyllis, I. and M. Krstic, “Adaptive Certainty-Equivalence Control With Regulation Triggered Finite-Time Least-Squares Identification”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 63, no. 10, Oct. 2018, 3261-3275.
- [42] Karafyllis, I. and M. Krstic, “Sampled-Data Boundary Feedback Control of 1-D Parabolic PDEs”, *Automatica*, 87, 2018, 226-237.

- [43] Karafyllis, I. , M. Krstic and K. Chrysafi, "Adaptive boundary control of constant-parameter reaction–diffusion PDEs using regulation-triggered finite-time identification", *Automatica*, 103, 2019, 166-179.
- [44] Krstic, M. , "Systematization of Approaches to Adaptive Boundary Control of PDEs", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 16, 2006, 801-818.
- [45] Krstic M. , "Adaptive Control of an Unstable Wave PDE", *Proceedings of the 2009 American Control Conference*, 2009.
- [46] Krstic, M. and A. Smyshlyaev, "Adaptive Control of PDEs", *Annual Reviews in Control*, 32, 2008, 149-160.
- [47] Krstic, M. and A. Smyshlyaev, *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*, SIAM, 2008.
- [48] Krstic, M. and A. Smyshlyaev, "Adaptive Boundary Control for Unstable Parabolic PDEs - Part I: Lyapunov Design", *IEEE TAC*, 53, 2008, 1575-1591.
- [49] Lamare, P.-O. , A. Girard and C. Prieur, "Switching Rules for Stabilization of Linear Systems of Conservation Laws", *SIAM Journal of Control and Optimization*, 53, 2015, 1599-1624.
- [50] Lasiecka, I. and R. Triggiani, "Stabilization and Structural Assignment of Dirichlet Boundary Feedback Parabolic Equations", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 21, 1983, 766-803.
- [51] Lin, W. and W. Wei, "Semi-Global Asymptotic control by sampled-data output feedback", *IFAC*, vol. 51, no.18, 2018, 596-601.
- [52] Malisoff, M. , M. Krichman and E. D. Sontag, "Global Stabilization for Systems Evolving on Manifolds", *J Dyn Control Syst*, 12, 2006, 161–184.
- [53] Marchand, N. and M. Alamir, "Asymptotic controllability implies continuous discrete-time feedback stabilization", *Nonlinear Control in the Year 2000*, vol. 2, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.
- [54] Marchand, N, S. Durand and F. Guerrero-Castellanos, "A general formula for the stabilization of event-based controlled systems", *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2011.

- [55] Masashi, W. and S. Hideki, “Event-Triggered Control of Infinite Dimensional Systems”, *SIAM J. Control Optim.*, 58(2), 2018, 605–635.
- [56] Mechoud, S. , “Adaptive Distributed Parameter and Input Estimator in Linear Parabolic PDEs”, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 30, 2016.
- [57] Michalska, H. and M.Torres-Torriti, “A geometric approach to feedback stabilization of nonlinear systems with drift”, *Systems and Control Lett.*, vol. 50, no. 4, 2003, 303-318.
- [58] Monaco, S. , D. Normand-Cyrot and M. Mattioni, “Sampled-data stabilization of nonlinear dynamics with input delays through immersion and invariance”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 5, 2016, 1-1.
- [59] Motta, M. and F. Rampazzo, “Asymptotic controllability and Lyapunov-like functions determined by Lie brackets”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 56, no. 2, 2018, 1508-1534.
- [60] Murray, J. D. , *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications* , 3rd Ed., Springer, 2011.
- [61] Nešić, D. , A. R. Teel and P. V. Kokotovic, “Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations”, *Systems and Control Lett.*, vol. 38, no. 4-5, 1999, 259-270.
- [62] Nešić, D. and A. R. Teel, “A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, 2004, 1103-1122.
- [63] Pazy, A. , *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, New York, Springer, 1983.
- [64] Prieur, C. , “Asymptotic controllability and robust asymptotic stabilizability”, *SIAM J. Control Optim.*, vol.43, 2005, 1888-1912.
- [65] Prieur, C. , R. Goebel and A.R. Teel, “Hybrid feedback control and robust stabilization of nonlinear systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 11, 2007, 2103 - 2117.

- [66] Prieur, C. , A. Girard and E. Witrant, “Stability of Switched Linear Hyperbolic Systems by Lyapunov Techniques”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59, 2014, 2196-2202.
- [67] Selivanov, A. and E. Fridman, “Distributed Event-Triggered Control of Diffusion Semilinear PDEs”, *Automatica*, 68, 2016, 344-351.
- [68] Shim, H. and A. R. Teel, “Asymptotic controllability and observability imply semiglobal practical asymptotic stabilizability by sampled-data output feedback”, *Automatica*, vol. 39, 2003, 441-454.
- [69] Smyshlyaev, A. , and M. Krstic, “Closed-Form Boundary State Feedbacks for a Class of 1-D Partial Integro-Differential Equations”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49, 2004, 2185-2202.
- [70] Smyshlyaev, A. and M. Krstic, “Adaptive Boundary Control for Unstable Parabolic PDEs - Part II: Estimation-Based Designs”, *Automatica*, 43, 2007, 1543-1556.
- [71] Smyshlyaev, A. and M. Krstic, “Adaptive Boundary Control for Unstable Parabolic PDEs - Part III: Output-Feedback Examples with Swapping Identifiers”, *Automatica*, 43, 2007, 1557- 1564.
- [72] Smyshlyaev, A. and M. Krstic, *Adaptive Control of Parabolic PDEs*, Princeton University Press, 2010.
- [73] Sontag, E. D. , “A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 21, 1983, 462–471.
- [74] Sontag, E. D., *Mathematical control theory*, 2nd edn., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
- [75] Sontag, E. D. , “Stability and stabilization: discontinuities and the effect of disturbances”, Springer Netherlands, Dordrecht, 1999, 551–598.
- [76] Sontag, E. D. , “A “universal” construction of Artstein’s theorem on nonlinear stabilization”, *Systems and Control Lett.*, vol. 13, pp. 117-123, 1989.
- [77] Θεοδόσης, Δ. , “Προβλήματα Σχεδίασης για Μη-Γραμμικά Συστήματα”, διδακτορική διατριβή, doi: 10.12681/eadd/40384, 2017.

- [78] Theodosis, D. and J. Tsinias, “Sufficient Lie algebraic conditions for sampled-data feedback stabilization”, *54 th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Dec. 2015, 6490-6495.
- [79] Tsinias, J. , “Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization”, *Math. Contr. Sign. Syst.*, vol. 2, 1989, 343-357.
- [80] Tsinias, J. , “Planar nonlinear systems: Practical stabilization and Hermes controllability condition”, *Systems and Control Lett.*, vol. 17, 1991, 291-296.
- [81] Tsinias, J. , “An extension of Artstein’s theorem on stabilization by using ordinary feedback integrators”, *Systems and Control Lett.*, vol. 20, 1993, 141-148.
- [82] Tsinias, J. , “Remarks on asymptotic controllability and sampled-data feedback stabilization for autonomous systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, 2010, 721-726.
- [83] Tsinias, J. , “Small-gain type sufficient conditions for sampled-data feedback stabilization for autonomous composite systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, 2011, 1725-1729.
- [84] Tsinias, J. , “New results on sampled-data feedback stabilization for autonomous nonlinear systems”, *Systems and Control Letters*, vol. 61, 2012, 1032-1040.
- [85] Tsinias, J. and D. Theodosis, “Sufficient Lie algebraic conditions for sampled-data feedback stabilizability of affine in the control nonlinear systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, 2016, 1334-1339.