



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ**

**ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ**  
**ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

**ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗΣ ΣΠΑΝΟΥΔΑΚΗ**  
Διπλωματούχου Χημικού Μηχανικού Ε.Μ.Π.  
Environmental Eng. (M.Sc., D.I.C.)

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:**  
Α. Ι. ΣΤΑΜΟΥ  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2011



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

## ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

### ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

## ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

### ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

#### ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

#### **ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗΣ ΣΠΑΝΟΥΔΑΚΗ**

Διπλωματούχου Χημικού Μηχανικού Ε.Μ.Π.,  
Environmental Eng. (M.Sc., D.I.C.)

*Ημερομηνία προφορικής εξέτασης: 20 Δεκεμβρίου 2011*

#### **Εξεταστική επιτροπή:**

Στάμου Αναστάσιος, Καθηγητής Σχολής Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π., Επιβλέπων

Χριστοδούλου Γεώργιος, Καθηγητής Σχολής Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.,  
Μέλος Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής

Νάνου–Γιάνναρου Αικατερίνη, Λέκτορας Σχολής Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.,  
Μέλος Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής

Ανδρεαδάκης Ανδρέας, Καθηγητής Σχολής Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.,  
Μέλος Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής

Καρατζάς Γεώργιος, Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Περιβάλλοντος Πολυτεχνείου Κρήτης,  
Μέλος Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής

Μπαμπατζιμόπουλος Χρήστος, Καθηγητής Γεωπονικής Σχολής Α.Π.Θ.,  
Μέλος Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής

Τσιχριντζής Βασίλειος, Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Περιβάλλοντος Πολυτεχνικής Σχολής  
Δ.Π.Θ., Μέλος Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής

Στην οικογένεια μου,  
που είναι πάντα δίπλα μου

---

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Υδραυλικής του Τομέα Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π. Η διατριβή χρηματοδοτήθηκε από το Πρόγραμμα Ενίσχυσης Ερευνητικού Δυναμικού (ΠΕΝΕΔ) 2003 της Γενικής Γραμματείας Έρευνας και Τεχνολογίας.

Στον επιβλέποντα της παρούσας διδακτορικής διατριβής, Αναστάσιο Στάμου, Καθηγητή Ε.Μ.Π., θέλω να εκφράσω βαθύτατη εκτίμηση και ευγνωμοσύνη για τη βοήθειά του στην επιλογή του θέματος της διατριβής, την ενθάρρυνσή του στο ξεκίνημα μου, τη συνεχή επιστημονική του καθοδήγηση, την πρόθυμη συμμετοχή του στην επίλυση των προβλημάτων που παρουσιάστηκαν και κυρίως την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και την ηθική στήριξη που μου παρείχε.

Θερμές ευχαριστίες απευθύνονται στους Γεώργιο Χριστοδούλου, Καθηγητή Ε.Μ.Π. και Αικατερίνη Νάνου–Γιάνναρου, Λέκτορα Ε.Μ.Π., μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής, για τις εποικοδομητικές συζητήσεις και τις ουσιαστικές υποδείξεις τους κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής. Στην κα Νάνου–Γιάνναρου οφείλω ιδιαίτερες ευχαριστίες για τις πολύτιμες οδηγίες που μου έδωσε σχετικά με το απαιτούμενο γνωστικό υπόβαθρο και τις πολλές ώρες συνεργασίας στο γραφείο της για την επίλυση προβλημάτων.

Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω επίσης τον Roger A. Falconer, Καθηγητή του Πανεπιστημίου του Cardiff, για τη δυνατότητα που μου έδωσε να διεξάγω το πειραματικό τμήμα της διδακτορικής διατριβής στο εργαστήριο Hyder Hydraulics του Πανεπιστημίου του Cardiff. Η καθοδήγηση τόσο του ίδιου, όσο και της Bettina Bockelmann–Evans, Λέκτορα του πανεπιστημίου του Cardiff, κατά τη διάρκεια διεξαγωγής των πειραμάτων ήταν πολύ σημαντική.

Στους Ανδρέα Ανδρεαδάκη, Καθηγητή Ε.Μ.Π., Γεώργιο Καρατζά, Καθηγητή του Πολυτεχνείου Κρήτης, Χρήστο Μπαμπατζιμόπουλο, Καθηγητή του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης και Βασίλειο Τσιχριντζή, Καθηγητή Δ.Π.Θ., απευθύνονται θερμές ευχαριστίες για την προθυμία τους να αποτελέσουν μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής της παρούσας διδακτορικής διατριβής.



Ευχαριστώ επίσης όλους τους συναδέλφους στο Εργαστήριο Υδραυλικής για τη βοήθεια και τη συμπαράστασή τους.

Τέλος, στην οικογένειά μου και στον αγαπημένο μου Μανόλη οφείλω το μεγαλύτερο ευχαριστώ για την ανεξάντλητη υπομονή και την αμέριστη ηθική και οικονομική συμπαράσταση.

Κατερίνα Σπανουδάκη

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα επιφανειακά και τα υπόγεια νερά δεν αποτελούν μεμονωμένες συνιστώσες του υδρολογικού κύκλου. Αντιθέτως, πολύ συχνά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω της κοινής τους διεπιφάνειας με αποτέλεσμα να επηρεάζεται τόσο η ποσότητα όσο και η ποιότητά τους. Η εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών έχει μεγάλη σημασία για την αποτελεσματική διαχείριση των υδατικών πόρων. Σημαντικά εργαλεία για την πρόβλεψη της αλληλεπίδρασης ροής και ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών και την κατάσχεση αποτελεσματικών διαχειριστικών σχεδίων αποτελούν τα αριθμητικά μοντέλα.

Αντικείμενο της παρούσας διδακτορικής διατριβής ήταν η αριθμητική προσομοίωση και η πειραματική διερεύνηση της αλληλεπίδρασης ροής και ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Αναπτύχθηκε ένα τρισδιάστατο ολοκληρωμένο αριθμητικό μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων υδάτων (Integrated surface water-groundwater model, IRENE), το οποίο αποτελείται από (α) ολοκληρωμένο υδροδυναμικό μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων νερών (IRENE-HYD) και (β) ολοκληρωμένο μοντέλο ποιότητας επιφανειακών–υπόγειων νερών (IRENE-QUAL). Οι υπολογιστικοί κώδικες καταστρώθηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN 95.

Το IRENE-HYD αποτελείται από (α) τρισδιάστατο υπό–μοντέλο ροής επιφανειακών νερών και (β) τρισδιάστατο υπό–μοντέλο ροής υπόγειων νερών. Στο υπό–μοντέλο ροής επιφανειακών νερών του IRENE-HYD επιλύονται οι εξισώσεις συνέχειας και ποσότητας κίνησης για ρηχά νερά σταθερής πυκνότητας. Στο υπό–μοντέλο ροής υπόγειων νερών επιλύεται η μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την τρισδιάστατη μη μόνιμη ροή υπόγειων υδάτων στην κορεσμένη ζώνη ετερογενούς ανισότροπου πορώδους μέσου. Για την επίλυση των εξισώσεων ρηχών νερών χρησιμοποιείται ένα ημι–πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών, ενώ η εξίσωση που περιγράφει τη ροή των υπόγειων νερών επιλύεται εφαρμόζοντας ένα πλήρως πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών. Οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων συνδυάζονται στην κοινή διεπιφάνεια των επιφανειακών–υπόγειων νερών μέσω του νόμου του Darcy και επιλύονται εφαρμόζοντας είτε (α) έναν αλγόριθμο ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης, είτε (β) έναν αλγόριθμο εσωτερικού συνδυασμού.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο της ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης, οι συνδυασμένες εξισώσεις των επιφανειακών και των υπόγειων νερών επιλύονται ταυτόχρονα σε κάθε χρονικό βήμα προκειμένου να προσδιορισθούν οι μεταβλητές της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων. Το ημι-πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιείται για την επίλυση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών υδάτων επιτρέπει την ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών με τρόπο ο οποίος δεν είναι υπολογιστικά δαπανηρός. Ο αλγόριθμος της ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης προϋποθέτει τη χρήση κοινού μεγέθους χρονικού βήματος κατά την επίλυση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο εσωτερικού συνδυασμού, οι εξισώσεις των επιφανειακών και των υπόγειων νερών επιλύονται χωριστά, αλλά επαναληπτικά στο ίδιο χρονικό βήμα, υπολογίζοντας σε κάθε επανάληψη το ρυθμό διήθησης επιφανειακού νερού προς τον υπόγειο υδροφόρα ή τροφοδοσία του επιφανειακού υδάτινου σώματος από τα υπόγεια νερά μέσω του νόμου του Darcy. Η διαδοχική επαναληπτική επίλυση των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων σε κάθε χρονικό βήμα, ολοκληρώνεται όταν επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση για τις τιμές της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών νερών και των πιεζομετρικών φορτίων των υπόγειων νερών. Ο αλγόριθμος του εσωτερικού συνδυασμού επιτρέπει τη χρήση διαφορετικού μεγέθους χρονικού βήματος για την επίλυση των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων.

Το IRENE-HYD μπορεί να εφαρμοστεί για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υπόγειων νερών και παράκτιων υδάτων, εκβολών ποταμών, υγροτόπων ή λιμνών, σε περιπτώσεις όπου μπορεί να γίνει η παραδοχή ρηχών νερών αλλά η υπόθεση πως οι ταχύτητες ροής είναι περίπου οριζόντιες και δε μεταβάλλονται σημαντικά με το βάθος δεν είναι ρεαλιστική, οπότε θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα τρισδιάστατο αριθμητικό μοντέλο για την προσομοίωση της υδροδυναμικής κυκλοφορίας στο επιφανειακό υδάτινο σώμα. Σημαντικά χαρακτηριστικά του IRENE-HYD αποτελούν (α) η απλή και πρωτότυπη μέθοδος εκτίμησης της χρονικά μεταβαλλόμενης θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών, (β) η ικανότητα εκτίμησης της επιφάνειας διήθησης (seepage face) και (γ) η ικανότητα εκτίμησης της χρονικά μεταβαλλόμενης θέσης της ελεύθερης επιφάνειας επιφανειακών και υπόγειων νερών σε συστήματα επιφανειακών-υπόγειων υδάτων, σε δύσκολες περιπτώσεις όπου λαμβάνει χώρα διαβροχή και ξήρανση περιοχών του υπολογιστικού πεδίου.

Η ακρίβεια των αριθμητικών μεθόδων που εφαρμόζονται στο IRENE–HYD για την επίλυση των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων και τη μεταξύ τους αλληλεπίδραση ελέγχθηκε συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του μοντέλου με αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων που ισχύουν για απλές περιπτώσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, καθώς και με αριθμητικές λύσεις μαθηματικών μοντέλων των οποίων η αξιοπιστία και η ακρίβεια είναι αποδεκτή. Ο έλεγχος της ακρίβειας του IRENE–HYD πραγματοποιήθηκε διερευνώντας έξι διαφορετικές περιπτώσεις, οι οποίες επιλέχθηκαν έτσι ώστε να είναι δυνατή η αξιολόγηση διαφορετικών συνιστωσών του μοντέλου. Πιο συγκεκριμένα, εξετάστηκαν: (1) η μέθοδος εκτίμησης της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων, (2) η μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών του επιφανειακού υδάτινου σώματος, (3) η ικανότητα του IRENE–HYD να εκτιμήσει τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας επιφανειακών και υπόγειων νερών σε συστήματα επιφανειακών–υπόγειων υδάτων όταν λαμβάνει χώρα διαβροχή και ξήρανση περιοχών του υπολογιστικού πεδίου, (4) η ικανότητα του IRENE–HYD να εκτιμήσει τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών σε συστήματα επιφανειακών–υπόγειων υδάτων, (5) η ικανότητα του IRENE–HYD να προσομοιώνει την αλληλεπίδραση μεταξύ λιμνών και υπόγειων νερών και (6) η ικανότητα του IRENE–HYD να προσομοιώνει την αλληλεπίδραση μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών.

Το ολοκληρωμένο μοντέλο ποιότητας επιφανειακών–υπόγειων νερών IRENE–QUAL αποτελείται από (α) τρισδιάστατο υπό–μοντέλο ποιότητας επιφανειακών νερών και (β) τρισδιάστατο υπό–μοντέλο ποιότητας υπόγειων νερών. Στο υπό–μοντέλο ποιότητας επιφανειακών νερών του IRENE–QUAL επιλύεται η εξίσωση που περιγράφει τη μεταφορά, διάχυση και τις φυσικές, χημικές ή βιολογικές διεργασίες που υφίσταται ρύπος που εισάγεται σε τρισδιάστατο τυρβώδες πεδίο ροής επιφανειακών νερών. Αντίστοιχα, στο υπό–μοντέλο ποιότητας υπόγειων νερών επιλύεται η εξίσωση που περιγράφει τη μεταφορά, διασπορά και τις φυσικές, χημικές ή βιολογικές διεργασίες που υφίσταται ρύπος που εισάγεται σε τρισδιάστατο πεδίο ροής υπόγειων υδάτων. Το IRENE–QUAL μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης της ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών υδάτινων σωμάτων και υπόγειων νερών για περιπτώσεις συντηρητικών ρύπων ή ρύπων των οποίων η βιολογική ή ραδιενεργός διάσπαση ακολουθεί κινητική πρώτης τάξης. Στο υπό–μοντέλο ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL είναι δυνατόν να προσομοιωθεί η προσρόφηση ρύπου από το πορώδες μέσο, η οποία θεωρείται ότι περιγράφεται από τη γραμμική ισόθερμη προσρόφησης ισορροπίας, την ισόθερμη

προσρόφησης ισορροπίας Freundlich ή την ισόθερμη προσρόφησης ισορροπίας Langmuir. Λόγω του μικτού υπερβολικού–παραβολικού χαρακτήρα των εξισώσεων μεταφοράς–τυρβώδους διάχυσης ρύπων σε επιφανειακά νερά και μεταφοράς–διασποράς ρύπων σε υπόγεια νερά, στο IRENE–QUAL συμπεριλαμβάνονται διάφορα αριθμητικά σχήματα για την αποτελεσματική επίλυση των όρων μεταφοράς και των όρων τυρβώδους διάχυσης ή υδροδυναμικής διασποράς των εξισώσεων. Οι όροι τυρβώδους διάχυσης και διασποράς επιλύονται χρησιμοποιώντας ρητό ή πεπλεγμένο σχήμα κεντρικών διαφορών. Οι όροι μεταφοράς μπορούν να επιλυθούν εφαρμόζοντας (α) ρητό σχήμα ανάντη διαφορών, (β) ένα μικτό αριθμητικό σχήμα Euler–Lagrange ή (γ) το ρητό σχήμα TVD (Total Variation Diminishing) τρίτης τάξης ULTIMATE–QUICKEST.

Οι εξισώσεις των υπό–μοντέλων ποιότητας επιφανειακών και υπόγειων υδάτων του IRENE–QUAL συνδυάζονται στην κοινή διεπιφάνεια των επιφανειακών–υπόγειων νερών υπολογίζοντας –σε αντίθεση με προηγούμενες εργασίες– τη ροή μάζας ρύπου εγκάρσια προς την κοινή διεπιφάνεια μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, που οφείλεται τόσο στο μηχανισμό της μεταφοράς όσο και στο μηχανισμό της διασποράς. Αν χρησιμοποιηθεί κοινό μέγεθος χρονικού βήματος στα υπό–μοντέλα ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων, οι συνδυασμένες εξισώσεις ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών γράφονται υπό τη μορφή ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων, οι οποίες επιλύονται ταυτόχρονα σε κάθε χρονικό βήμα με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων ή με τη μέθοδο LANCZOS/ORTHOMIN με προρύθμιση μη πλήρους διάσπασης κατά Cholesky. Εναλλακτικά, για περιπτώσεις συστημάτων επιφανειακών–υπόγειων νερών μεγάλης έκτασης, με σημαντικά διαφορετικές χρονικές κλίμακες στη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων νερών και συνεπώς στη μεταφορά ρύπων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διαφορετικό μέγεθος χρονικού βήματος στα υπό–μοντέλα ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων. Στην περίπτωση αυτή, οι εξισώσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά ποιοτικών παραμέτρων σε επιφανειακά και υπόγεια νερά επιλύονται διαδοχικά, αλλά επαναληπτικά σε κάθε χρονικό βήμα του υπό–μοντέλου ποιότητας των υπόγειων υδάτων, έως ότου επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση για τις τιμές των συγκεντρώσεων των ποιοτικών παραμέτρων σε επιφανειακά και υπόγεια νερά.

Η ακρίβεια των αριθμητικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται στο IRENE–QUAL ελέγχθηκε συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του μοντέλου με τα αποτελέσματα διαθέσιμων αναλυτικών λύσεων. Το IRENE–QUAL εφαρμόστηκε επίσης σε μία

υποθετική περίπτωση αλληλεπίδρασης ροής και ρύπανσης μεταξύ υδροφορέα και υδατορεύματος. Τα αποτελέσματα του IRENE–QUAL για αυτήν περίπτωση αξιολογήθηκαν ποιοτικά και διαπιστώθηκε η ικανότητα του μοντέλου του να εκτιμά τα ρυπαντικά φορτία σε ένα σύστημα επιφανειακών–υπόγειων νερών.

Η πειραματική διερεύνηση του φαινομένου της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο Hyder Hydraulics του Πανεπιστημίου του Cardiff υπό την επίβλεψη του Καθηγητή Roger A. Falconer, διευθυντή του εργαστηρίου. Η διεξαγωγή των πειραμάτων έγινε σε δύο φάσεις. Κατά την Α΄ Φάση διερευνήθηκε η αλληλεπίδραση ροής και ρύπανσης μεταξύ υδατορεύματος και υπόγειου υδροφορέα σε πειραματική διάταξη η οποία περιελάμβανε ευθύγραμμο κανάλι ορθογωνικής διατομής το οποίο διερχόταν μέσα από ομογενή και ισότροπο υδροφορέα, ο οποίος κατασκευάστηκε από ειδικό πορώδες υλικό του εμπορίου (polyurethane foam). Δημιουργήθηκαν συνθήκες μόνιμης ροής και μετρήθηκαν: (α) η στάθμη του νερού στο πορώδες μέσο και (β) οι συγκεντρώσεις συντηρητικού δείκτη (Ροδαμίνη WT) στο πορώδες μέσο. Κατά τη Β΄ Φάση διεξαγωγής των πειραματικών μετρήσεων διερευνήθηκε η αλληλεπίδραση ροής και ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών σε πειραματική διάταξη η οποία κατασκευάστηκε με στόχο την προσομοίωση ιδεατής υδρολογικής λεκάνης που περιλαμβάνει υδατόρευμα και μικρή λίμνη, τα οποία επικοινωνούν μέσω αμμώδους φράγματος. Δημιουργήθηκαν συνθήκες μόνιμης και μη μόνιμης ροής και μετρήθηκαν (α) η στάθμη του νερού στο αμμώδες φράγμα και στα επιφανειακά νερά και (β) οι συγκεντρώσεις συντηρητικού δείκτη στο αμμώδες φράγμα και στο υδατόρευμα. Οι συνθήκες μη μόνιμης ροής δημιουργήθηκαν επιβάλλοντας παλιρροιακούς κυματισμούς στο κατάντη όριο του υδατορεύματος με τη βοήθεια υπερχειλιστή. Δοκιμάστηκαν διάφοροι περίοδοι κυματισμών ώστε να επιτευχθούν διαφορετικές συνθήκες ροής μεταξύ του υδατορεύματος και της λίμνης. Οι πειραματικές μετρήσεις των Φάσεων Α΄ και Β΄ χρησιμοποιήθηκαν για τη ρύθμιση και την επιβεβαίωση του IRENE. Κατά την επιβεβαίωση του μοντέλου, η σύγκλιση μεταξύ των αριθμητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων ήταν πολύ ικανοποιητική. Τέλος, το IRENE εφαρμόστηκε στην περιοχή των υδρολογικών λεκανών Αχελώου–Λυσιμαχείας–Τριχωνίδας.



## EXTENDED ABSTRACT

Surface water and groundwater are not isolated components of the hydrologic cycles. Instead, all surface water bodies (e.g. streams, lakes, wetlands and estuaries) are often hydraulically connected to groundwater and the interaction between them affects both their quantity and quality. Effective water resources management requires a realistic and detailed description of the interactions between surface water and groundwater. Coupled modelling of surface and subsurface systems is a valuable tool for quantifying surface water-groundwater interactions.

The objectives of the present research work were: (a) the numerical modelling and (b) the experimental investigation of flow and pollution interaction between surface water and groundwater. A 3-D Integrated surface water-groundwater model (IRENE) was developed, which consists of (a) an integrated surface water-groundwater flow model (IRENE-HYD) and (b) an integrated surface water-groundwater quality model (IRENE-QUAL). IRENE is written in FORTRAN 95 programming language.

IRENE-HYD consists of (a) a 3-D surface water flow sub-model and (b) a 3-D saturated groundwater flow sub-model. The governing equations of the surface water flow sub-model of IRENE-HYD are the continuity and momentum equations describing constant density shallow water flows. The momentum equations are derived from the 3-D, non-steady state Navier-Stokes equations after Reynolds averaging and with the assumption that the pressure distribution is hydrostatic. The groundwater flow sub-model of IRENE-HYD solves the equation for 3-D saturated groundwater flow of constant density in heterogeneous anisotropic porous media. The governing equations of the surface water flow sub-model are solved using a semi-implicit finite difference scheme; while the groundwater flow equation is solved using a fully implicit finite difference scheme. The surface water and groundwater flow equations are coupled at the common interface of the surface water and groundwater bodies using Darcy's law and are solved simultaneously in such a fashion, which guarantees computational efficiency at a low computational cost.

The above-described simultaneous solution algorithm requires the use of a common time step size for the temporal discretisation of the governing surface water and groundwater flow equations of IRENE-HYD. This constraint can occasionally



result in long simulation periods due to the different time scales, which apply in surface water and groundwater flows. Therefore, an alternative iterative solution algorithm is also included in IRENE–HYD, which allows for the use of different time step sizes for the surface water and groundwater flow equations. Under this algorithm, several surface water time steps may be solved for each groundwater time step. The surface water and groundwater flow equations are solved subsequently, but iteratively several times in each groundwater time step. At each iteration, Darcy's law is used to compute the specific discharge at the common surface water–groundwater interface. The subsequent iterative solution of the surface water and groundwater flow equations at each time step, continues until sufficient convergence is achieved for the surface water free surface elevation and the groundwater piezometric head values.

IRENE–HYD can be used for modelling the interaction between groundwater and coastal waters, estuaries, wetlands and lakes, in cases where the shallow water approximation can be made but the assumption that the velocities are nearly horizontal and surface water flow does not exhibit a 3–D structure is not valid, therefore a 3–D model should be used for the simulation of surface water flow. Some important properties of IRENE–HYD are the following: (a) the simple and novel approach for estimating the groundwater free surface elevation, (b) its ability to estimate the seepage face created at the downstream external boundary of the groundwater flow domain between the phreatic surface and the free surface of the external surface water body and (c) its ability to estimate the location of the moving surface water and groundwater free surface, in difficult cases where wetting and/or drying of parts of the computational domain takes place.

The accuracy of the numerical methods used in IRENE–HYD were tested by comparing the model results with the results of available analytical solutions for simple cases of surface water–groundwater interaction, as well as the results of other widely applied and well–accepted numerical models. IRENE–HYD was applied to six test cases, which were chosen so that different components of the model could be verified. In more detail, the following components of the model were tested: (1) its ability to estimate the groundwater free surface elevation, (2) the wetting and drying method employed in the surface water flow sub–model, (3) its ability to predict the location of the moving surface water and groundwater free surface in cases where wetting and drying of parts of the computational domain takes place, (4) its ability to estimate the temporal evolution of the groundwater free surface elevation in surface

water-groundwater systems, (5) its ability to simulate lake-aquifer interaction and (6) its ability to simulate stream-aquifer interaction.

The integrated surface water-groundwater quality model IRENE-QUAL, consists of (a) a 3-D surface water quality sub-model and (b) a 3-D groundwater quality sub-model. The surface water quality sub-model of IRENE-QUAL solves the partial differential equation describing the fate and transport of contaminants introduced in a 3-D turbulent flow field and the groundwater quality sub-model of IRENE-QUAL solves the partial differential equation describing the fate and transport of contaminants in 3-D transient groundwater flow systems. IRENE-QUAL can be used for modelling pollution interaction between surface water and groundwater for cases of conservative pollutants or non-conservative pollutants undergoing first-order kinetic reactions. The groundwater quality sub-model of IRENE-QUAL is capable of handling equilibrium-controlled linear or non-linear sorption, described by the Freundlich or Langmuir isotherms. Due to the dual hyperbolic-parabolic nature of the advection-turbulent diffusion equation describing contaminant transport in surface waters and the advection-dispersion equation describing contaminant transport in groundwater, several different numerical schemes are included in IRENE-QUAL for the solution of the advection and turbulent diffusion or hydrodynamic dispersion terms of these equations. The turbulent diffusion and hydrodynamic dispersion terms are solved using an explicit or an implicit central differencing scheme. The advection terms can be solved using (a) an explicit upstream differencing scheme, (b) a mixed Eulerian-Lagrangian numerical scheme or (c) the explicit third-order TVD (Total Variation Diminishing) ULTIMATE-QUICKEST scheme.

The governing equations of the surface water and groundwater quality sub-models of IRENE-QUAL are coupled at the common surface water-groundwater interface through the total contaminant mass flux (advective and dispersive) normal to the surface water-groundwater interface. If a common time step size is used in the surface water and groundwater quality sub-models, the coupled surface water and groundwater quality equations are written in a single matrix format and are solved simultaneously at each time step using either the iterative conjugate gradient method or the LANCZOS/ORTHOMIN method with Modified Incomplete Cholesky (MIC) preconditioning. For cases of large surface water-groundwater systems, with significantly different time scales in surface water and groundwater flows and therefore pollutant transport, an alternative iterative solution algorithm of the coupled surface water and groundwater quality equations can be used, which allows for

different time step sizes in the surface water and groundwater quality sub-models. Under this algorithm, several surface water time steps may be solved for each groundwater time step. The surface water and groundwater quality equations are solved subsequently, but iteratively in each groundwater time step. At each iteration, the total contaminant mass flux (advective and dispersive) through the surface water-groundwater interface is computed. The subsequent iterative solution of the surface water and groundwater quality equations at each time step continues until sufficient convergence is achieved for the contaminant concentrations in both surface water and groundwater.

The accuracy of the numerical methods used in IRENE-QUAL was tested by comparing the model results with the results of available analytical solutions for simple test cases. IRENE-QUAL was also applied to a hypothetical test case of flow and pollution interaction between a stream and a confined aquifer. The qualitative assessment of the model results for this test case demonstrated its ability to simulate contaminant transport in interacting surface water-groundwater systems.

The experimental part of the present research work was performed at Cardiff's School of Engineering Hydr Hydraulics Laboratory, in Cardiff University, under the supervision of Professor Roger A. Falconer, head of the Laboratory. The experiments were conducted in two phases. During the first phase, flow and pollution interaction between surface water and groundwater was measured in an experimental setup simulating a rectangular channel flowing through a homogeneous and isotropic aquifer. A novel approach was used for the construction of the aquifer, which involved the use of porous permeable polyurethane foam with a density of 60 ppi (pores per inch). Steady state flow conditions between the porous medium and the channel were created and the transport of a conservative tracer (Rhodamine WT), injected in the porous foam, was studied in the channel-aquifer system. Both water levels and tracer concentrations in the porous foam and the channel were measured. The experiments of the second phase were conducted in an experimental setup simulating a hypothetical hydrological basin consisting of a river and a small lake interacting through a sand embankment. Both steady state and non-steady state flow conditions between the river and the lake were simulated. Non-steady state flow conditions were simulated using a weir located at the downstream river boundary to create tidal waves. Tidal waves of different periods were imposed at the downstream river boundary in order to create several different flow scenarios between the river and the lake. For both steady state and non-steady steady flow

experiments, the transport of Rhodamine WT, injected in the sand embankment, was monitored in the surface water–groundwater system. Water levels and tracer concentrations were measured in both the river and the sand embankment. The experimental data collected during the simulation of surface water–groundwater interaction at the two different experimental setups were used for the calibration and the verification of IRENE. Finally, IRENE was applied to the area of the hydrological basins of Acheloos river, lake Lisimachia and lake Trichonida.



---

**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b> .....	<b>I</b>
<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ</b> .....	<b>III</b>
<b>EXTENDED ABSTRACT</b> .....	<b>IX</b>
<b>ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ</b> .....	<b>XXI</b>
<b>ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ</b> .....	<b>XXIII</b>
<b>1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	<b>1-1</b>
1.1 Τοποθέτηση του προβλήματος .....	1-1
1.2 Διάρθρωση της διατριβής.....	1-14
1.3 Πρωτότυπα στοιχεία της διατριβής.....	1-16
<b>2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ</b> .....	<b>2-1</b>
2.1 Εισαγωγή.....	2-1
2.2 Αναλυτικές λύσεις αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών .....	2-1
2.2.1 Αναλυτικές λύσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ υπόγειων νερών και υδατορευμάτων: επίλυση της εξίσωσης υπόγειας ροής.....	2-2
2.2.1.1 Περιορισμένοι υδροφορείς .....	2-3
2.2.1.2 Φρεάτιοι υδροφορείς .....	2-9
2.2.1.3 Υδροφορείς με διαρροή .....	2-21
2.2.2 Αναλυτικές λύσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ υπόγειων νερών και υδατορευμάτων: ταυτόχρονη θεώρηση των εξισώσεων της επιφανειακής και της υπόγειας ροής .....	2-24

2.2.3 Αναλυτικές λύσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ υπόγειων νερών και λιμνών.....	2-27
2.3 Ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών.....	2-28
2.4 Πειραματική διερεύνηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών .....	2-45
2.5 Συμπεράσματα .....	2-46
<b>3 ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΟ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ–ΥΠΟΓΕΙΩΝ ΝΕΡΩΝ .....</b>	<b>3-1</b>
3.1 Εισαγωγή.....	3-1
3.2 Μαθηματική διατύπωση .....	3-2
3.2.1 Εξισώσεις του υπό–μοντέλου ροής επιφανειακών υδάτων .....	3-2
3.2.1.1 Αρχικές και οριακές συνθήκες.....	3-9
3.2.1.2 Εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας .....	3-12
3.2.2 Εξισώσεις του υπό–μοντέλου ροής υπόγειων υδάτων .....	3-13
3.2.2.1 Γενικά .....	3-13
3.2.2.2 Ο νόμος του Darcy .....	3-14
3.2.2.3 Εξίσωση συνέχειας.....	3-16
3.2.2.4 Αρχικές και οριακές συνθήκες.....	3-18
3.3 Αριθμητική επίλυση.....	3-21
3.3.1 Γενικά.....	3-21
3.3.2 Διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου.....	3-29
3.3.3 Επίλυση των εξισώσεων του υπό–μοντέλου ροής επιφανειακών υδάτων.....	3-32
3.3.3.1 Μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών του επιφανειακού υδάτινου σώματος.....	3-40

3.3.3.2	Ευστάθεια του ημι-πεπλεγμένου υπολογιστικού σχήματος επίλυσης των εξισώσεων του υπό-μοντέλου ροής επιφανειακών υδάτων.....	3-42
3.3.3.3	Διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς και οριζόντιας διάχυσης των εξισώσεων ποσότητας κίνησης.....	3-47
3.3.4	Επίλυση των εξισώσεων του υπό-μοντέλου ροής υπόγειων υδάτων.....	3-57
3.3.5	Συνδυασμός των υπό-μοντέλων ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων.....	3-70
3.3.6	Αλγόριθμος επίλυσης.....	3-75
3.4	Έλεγχος της ακρίβειας του ολοκληρωμένου υδροδυναμικού μοντέλου επιφανειακών-υπόγειων υδάτων IRENE-HYD.....	3-80
3.4.1	Έλεγχος της μεθόδου εκτίμησης της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων.....	3-81
3.4.2	Έλεγχος της μεθόδου διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών του επιφανειακού υδάτινου σώματος.....	3-86
3.4.3	Έλεγχος της ικανότητας του IRENE-HYD να εκτιμήσει τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων και την επιφάνεια διήθησης σε ένα σύστημα επιφανειακών-υπόγειων νερών.....	3-95
3.4.4	Έλεγχος της ικανότητας του IRENE-HYD να προσομοιώνει την αλληλεπίδραση με ταξύ λιμνών και υπόγειων νερών.....	3-106
3.4.5	Έλεγχος της ικανότητας του IRENE-HYD να προσομοιώνει την αλληλεπίδραση με ταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών.....	3-113
3.5	Συμπεράσματα.....	3-126
<b>4</b>	<b>ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ-ΥΠΟΓΕΙΩΝ ΝΕΡΩΝ.....</b>	<b>4-1</b>
4.1	Εισαγωγή.....	4-1



4.2 Μαθηματική διατύπωση .....	4-2
4.2.1 Εξισώσεις του υπό-μοντέλου ποιότητας επιφανειακών υδάτων.....	4-2
4.2.1.1 Αρχικές και οριακές συνθήκες.....	4-3
4.2.2 Εξισώσεις του υπό-μοντέλου ποιότητας υπόγειων υδάτων .....	4-4
4.2.2.1 Αρχικές και οριακές συνθήκες.....	4-10
4.3 Αριθμητική επίλυση.....	4-11
4.3.1 Γενικά.....	4-11
4.3.2 Επίλυση της εξίσωσης του υπό-μοντέλου ποιότητας επιφανειακών νερών .....	4-13
4.3.2.1 Μέθοδος ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών.....	4-15
4.3.2.2 Μικτό αριθμητικό σχήμα Euler–Lagrange .....	4-23
4.3.3 Επίλυση της εξίσωσης του υπό-μοντέλου ποιότητας υπόγειων νερών.....	4-25
4.3.3.1 Μέθοδος ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών.....	4-26
4.3.3.2 Μικτό αριθμητικό σχήμα Euler–Lagrange .....	4-43
4.3.4 Συνδυασμός των υπό-μοντέλων ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών.....	4-44
4.4 Έλεγχος της ακρίβειας του ολοκληρωμένου μοντέλου ποιότητας επιφανειακών–υπόγειων υδάτων IRENE–QUAL.....	4-52
4.4.1 Μονοδιάστατη κίνηση ρύπου σε ομοιόμορφο πεδίο ροής υπόγειων υδάτων.....	4-52
4.4.2 Διδιάστατη κίνηση ρύπου σε ομοιόμορφο πεδίο ροής υπόγειων υδάτων.....	4-55
4.4.3 Υποθετική περίπτωση αλληλεπίδρασης ροής και ρύπανσης μεταξύ υδροφορέα και υδατορεύματος.....	4-57
4.5 Συμπεράσματα .....	4-63

<b>5 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ.....</b>	<b>5-1</b>
5.1 Εισαγωγή.....	5-1
5.2 Πειραματικές μετρήσεις Α΄ Φάσης.....	5-2
5.2.1 Πειραματική διάταξη.....	5-2
5.2.2 Ιδιότητες του πορώδους υλικού.....	5-4
5.2.2.1 Διαπερατότητα.....	5-4
5.2.2.2 Πορώδες.....	5-8
5.2.3 Όργανα, αντιδραστήρια και πειραματική διαδικασία.....	5-9
5.2.4 Αρχικές πειραματικές μετρήσεις.....	5-11
5.2.5 Πειραματικές μετρήσεις στη νέα πειραματική διάταξη.....	5-16
5.3 Ρύθμιση και επιβεβαίωση του αριθμητικού μοντέλου IRENE με τις πειραματικές μετρήσεις της Α΄ Φάσης.....	5-19
5.4 Πειραματικές μετρήσεις Β΄ Φάσης.....	5-30
5.5 Ρύθμιση και επιβεβαίωση του αριθμητικού μοντέλου IRENE με τις πειραματικές μετρήσεις της Β΄ Φάσης.....	5-36
5.5.1 Ρύθμιση του IRENE με τις πειραματικές μετρήσεις του σεναρίου 1 ..	5-37
5.5.2 Επιβεβαίωση του IRENE με τις πειραματικές μετρήσεις των σεναρίων 2 έως 5.....	5-44
5.6 Συμπεράσματα.....	5-53
<b>6 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ IRENE ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΩΝ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΛΕΚΑΝΩΝ ΑΧΕΛΩΟΥ–ΛΥΣΙΜΑΧΕΙΑΣ–ΤΡΙΧΩΝΙΔΑΣ.....</b>	<b>6-1</b>
6.1 Εισαγωγή.....	6-1
6.2 Περιγραφή της περιοχής μελέτης.....	6-1
6.2.1 Οριοθέτηση της περιοχής μελέτης.....	6-1

---

6.2.2 Φυσικό περιβάλλον .....	6-2
6.2.3 Χρήσεις γης.....	6-3
6.2.4 Υδρολογικές λεκάνες–Υδρογεωλογία .....	6-3
6.2.4.1 Υδρολογική λεκάνη Τριχωνίδας .....	6-3
6.2.4.2 Υδρολογική λεκάνη Λυσιμαχείας.....	6-8
6.2.4.3 Υδρολογική λεκάνη Αχελώου.....	6-11
6.2.5 Κλιματολογικές συνθήκες .....	6-14
6.2.5.1 Σχέση βροχόπτωσης–στάθμης των υπόγειων νερών .....	6-17
6.2.6 Υδατικό ισοζύγιο συστήματος λεκανών Αχελώου, Λυσιμαχείας και Τριχωνίδας.....	6-18
6.3 Εφαρμογή του IRENE–HYD στην περιοχή μελέτης.....	6-20
6.4 Συμπεράσματα .....	6-26
<b>7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....</b>	<b>7-1</b>
<b>8 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>	<b>8-1</b>

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 2.1: Αναλυτικές λύσεις της μονοδιάστατης εξίσωσης διάχυσης για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–περιορισμένου υδροφορέα.....	2-8
Πίνακας 2.2: Εργασίες στις οποίες επιλύεται η εξίσωση Boussinesq (2.7) ή μία από τις γραμμικοποιημένες της μορφές (2.8α) και (2.8β), για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–φρεάτιου υδροφορέα .....	2-12
Πίνακας 2.3: Αναλυτικές λύσεις για το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορεύματος και φρεάτιου υδροφορέα με κεκλιμένο πυθμένα .....	2-16
Πίνακας 2.4: Ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών...2-41	
Πίνακας 3.1: Κριτήρια ευστάθειας για τις διάφορες διεργασίες που περιλαμβάνονται στις εξισώσεις ρηχών υδάτων (ρητό σχήμα Leap–Frog, Leendertse et al., 1973) .....	3-33
Πίνακας 3.2: Τιμές της επιφάνειας διήθησης για το πρόβλημα του σχήματος 3.18 (α) σύμφωνα με τα αριθμητικά μοντέλα IRENE–HYD και MODFLOW και την αναλυτική λύση της Polubarinova–Kochina (1962).....	3-105
Πίνακας 3.3: Ορισμός των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται στις εξισώσεις (3.123α)–(3.123β) .....	3-116
Πίνακας 4.1: Αριθμητικά σχήματα που περιλαμβάνονται στο IRENE–QUAL για την επίλυση της εξίσωσης του υπό–μοντέλου ποιότητας επιφανειακών νερών.....	4-12
Πίνακας 4.2 Αριθμητικά σχήματα που περιλαμβάνονται στο IRENE–QUAL για την επίλυση της εξίσωσης του υπό–μοντέλου ποιότητας υπόγειων νερών .....	4-13
Πίνακας 5.1: Στοιχεία μέτρησης της διαπερατότητας .....	5-7
Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα μέτρησης διαπερατότητας του αφρού πολυουρεθάνης...5-7	
Πίνακας 5.3: Σύνοψη αποτελεσμάτων και υπολογισμών .....	5-7
Πίνακας 5.4: Μετρήσεις πορώδους .....	5-8
Πίνακας 5.5: Μετρήσεις στάθμης για το Σενάριο Β .....	5-17

---

Πίνακας 5.6: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης για το Σενάριο Β.....	5-20
Πίνακας 5.7: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης για το Σενάριο Β, θεωρώντας υδραυλική αγωγιμότητα $K_x = K_y = 0.6$ m/s για τα υπολογιστικά κελιά που βρίσκονται στις περιοχές των ενώσεων μεταξύ των κομματιών του αφρού.....	5-21
Πίνακας 5.8: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης για το Σενάριο Α.....	5-22
Πίνακας 5.9: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης για το Σενάριο Γ.....	5-24
Πίνακας 5.10: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης για το Σενάριο 1.....	5-37
Πίνακας 6.1: Πίνακας συντεταγμένων και πιεζομετρικών φορτίων στις γεωτρήσεις παρατήρησης. Μέσος όρος των ετών 1997–1999.....	6-22
Πίνακας 6.2: Γεωλογικοί σχηματισμοί της περιοχής μελέτης και αντίστοιχες τιμές υδραυλικής αγωγιμότητας που χρησιμοποιήθηκαν στο IRENE–HYD.....	6-24
Πίνακας 6.3: Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD και των μετρήσεων πεδίου για τις στάθμες στις γεωτρήσεις παρατήρησης.....	6-26

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1: Περιπτώσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών υδάτινων σωμάτων και υπόγειων νερών .....	1-3
Σχήμα 2.1: Γενική περίπτωση αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–περιορισμένου υδροφορέα, αναλυτική επίλυση μονοδιάστατης οριζόντιας υπόγειας ροής .....	2-3
Σχήμα 2.2: Περίπτωση αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–περιορισμένου υδροφορέα που εξετάστηκε από τον Singh (2004): (α) πραγματική περίπτωση και (β) απλοποιημένη περίπτωση .....	2-6
Σχήμα 2.3: Περιπτώσεις αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–φρεάτιου υδροφορέα, αναλυτική επίλυση μονοδιάστατης οριζόντιας υπόγειας ροής.....	2-10
Σχήμα 2.4: Περιπτώσεις αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–κεκλιμένου φρεάτιου υδροφορέα που έχουν επιλυθεί αναλυτικά .....	2-15
Σχήμα 2.5: Περιπτώσεις αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–φρεάτιου υδροφορέα, θεώρηση διδιάστατης υπόγειας ροής στο επίπεδο $x-z$ .....	2-18
Σχήμα 2.6: Περιπτώσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορεύματος και υδροφορέα με διαρροή που έχουν επιλυθεί αναλυτικά.....	2-23
Σχήμα 2.7: Περίπτωση αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–υδροφορέα που εξετάστηκε στις εργασίες των Hantush et al. (2002) και Hantush (2005) .....	2-25
Σχήμα 2.8: Περίπτωση αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–υδροφορέα που εξετάστηκε στην εργασία του Lal (2001).....	2-26
Σχήμα 3.1: Ορισμός μεταβλητών του υπό–μοντέλου ροής επιφανειακών υδάτων .....	3-8
Σχήμα 3.2: Ορισμός μεταβλητών του υπό–μοντέλου ροής υπόγειων υδάτων.....	3-21
Σχήμα 3.3: Διακριτοποίηση υπολογιστικού πεδίου χρησιμοποιώντας (α) οριζόντια στρώματα και (β) μη οριζόντια στρώματα που αντιπροσωπεύουν διαφορετικούς γεωλογικούς σχηματισμούς στην περιοχή του υδροφορέα .....	3-30
Σχήμα 3.4: Ορισμός των μεταβλητών του IRENE–HYD στο υπολογιστικό πλέγμα...	3-31

Σχήμα 3.5: Συμβολισμός των μεταβλητών στη διεπιφάνεια μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών .....	3-72
Σχήμα 3.6: Γραμμική παρεμβολή των τιμών των πιεζομετρικών φορτίων των υπόγειων υδάτων για κάθε χρονικό βήμα του υπό-μοντέλου ροής των επιφανειακών υδάτων .....	3-79
Σχήμα 3.7: Γεωμετρία της περίπτωσης ελέγχου της μεθόδου που εφαρμόζεται στο IRENE-HYD για την εκτίμηση της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων .....	3-82
Σχήμα 3.8: Διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου του προβλήματος που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.7 στο κατακόρυφο επίπεδο $x-z$ .....	3-83
Σχήμα 3.9: Χρονική εξέλιξη της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων για το πρόβλημα του σχήματος 3.7 σύμφωνα με το υπό-μοντέλο υπόγειων νερών του IRENE-HYD.....	3-84
Σχήμα 3.10: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του υπό-μοντέλου ροής υπόγειων νερών του IRENE-HYD και του MODFLOW για τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων στον υδροφόρα του σχήματος 3.7 .....	3-85
Σχήμα 3.11: Γεωμετρία της πρώτης περίπτωσης ελέγχου της μεθόδου διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών που εφαρμόζεται στο FLOW-3DL: παράκτια λεκάνη με πυθμένα ομοιόμορφης κλίσης.....	3-87
Σχήμα 3.12: Διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος παράκτιας λεκάνης με πυθμένα ομοιόμορφης κλίσης εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαβροχής και ξήρανσης του FLOW-3DL και τη μέθοδο MLU. Τα γραφήματα (α) και (γ) αντιστοιχούν στην κατιούσα παλίρροια και τα γραφήματα (β) και (δ) στην ανερχόμενη παλίρροια. ....	3-88
Σχήμα 3.13: Γεωμετρία της δεύτερης περίπτωσης ελέγχου της μεθόδου διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών που εφαρμόζεται στο FLOW-3DL: παράκτια λεκάνη με πυθμένα μεταβλητής κλίσης.....	3-89
Σχήμα 3.14: Διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος παράκτιας λεκάνης με πυθμένα μεταβλητής κλίσης εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαβροχής και ξήρανσης του FLOW-3DL και τη μέθοδο MLU. Τα γραφήματα (α) και (γ) αντιστοιχούν στην κατιούσα παλίρροια και τα γραφήματα (β) και (δ) στην ανερχόμενη παλίρροια. ....	3-90

- Σχήμα 3.15: Διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος παράκτιας λεκάνης με πυθμένα μεταβλητής κλίσης, εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαβροχής και ξήρανσης του FLOW-3DL, για  $\Delta x_j = 600$  m και  $\Delta x_j = 1200$  m. Τα γραφήματα (α) και (γ) αντιστοιχούν στην κατιούσα παλίρροια και τα γραφήματα (β) και (δ) στην ανερχόμενη παλίρροια. ....3-92
- Σχήμα 3.16: Γεωμετρία της περίπτωσης ελέγχου της ικανότητας του IRENE-HYD να εκτιμήσει τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας επιφανειακών και υπόγειων υδάτων .....3-94
- Σχήμα 3.17: Διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας επιφανειακών και υπόγειων υδάτων κατά μήκος του υπολογιστικού πεδίου της περίπτωσης ελέγχου του σχήματος 3.16, όπως υπολογίζεται με το IRENE-HYD. Τα γραφήματα (α) και (γ) αντιστοιχούν στην κατιούσα παλίρροια και τα γραφήματα (β) και (δ) στην ανερχόμενη παλίρροια. ....3-95
- Σχήμα 3.18: Περίπτωση ελέγχου της ικανότητας του IRENE-HYD να προσομοιώνει τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της επιφάνειας των υπόγειων υδάτων σε ένα σύστημα επιφανειακών-υπόγειων νερών: (α) γεωμετρία και (β) διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου στο επίπεδο  $x-y$  .....3-98
- Σχήμα 3.19: Στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων στον φρεάτιο υδροφορέα του σχήματος 3.18 (α) κατά τις χρονικές στιγμές  $t = 0.08$  h,  $t = 0.28$  h,  $t = 0.69$  h και σε συνθήκες μόνιμης ροής, όπως υπολογίζεται με το IRENE-HYD και την αναλυτική λύση των Serrano and Workman (1998) θεωρώντας ότι ισχύει η παραδοχή Dupuit οριζόντιας ροής .....3-99
- Σχήμα 3.20: Σύγκριση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων που υπολογίζεται εφαρμόζοντας τα αριθμητικά μοντέλα IRENE-HYD και MODFLOW για την περίπτωση αλληλεπίδρασης επιφανειακών-υπόγειων νερών του σχήματος 3.18 (α) .....3-103
- Σχήμα 3.21: Πεδίο ροής και κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στον φρεάτιο υδροφορέα του σχήματος 3.18 (α), όπως υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά μοντέλα IRENE-HYD και MODFLOW .....3-104
- Σχήμα 3.22: Περίπτωση ελέγχου της ικανότητας του μοντέλου να προσομοιώνει την αλληλεπίδραση μεταξύ λιμνών και υπόγειων νερών: (α) γεωμετρία και (β) σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων .....3-106



Σχήμα 3.23: Γεωμετρία της περίπτωσης ελέγχου στο επίπεδο  $x0z$ : (α) περίπτωση περιορισμένου υδροφορέα, η λίμνη τροφοδοτείται από τα υπόγεια νερά, (β) περίπτωση περιορισμένου υδροφορέα, η λίμνη εν μέρει τροφοδοτείται και εν μέρει τροφοδοτεί τον υδροφορέα και (γ) περίπτωση φρεάτιου υδροφορέα, η λίμνη εν μέρει τροφοδοτείται και εν μέρει τροφοδοτεί τα υπόγεια νερά .....3-108

Σχήμα 3.24: Πρώτο στρώμα του πλέγματος διακριτοποίησης του υπολογιστικού πεδίου του IRENE–HYD για την περίπτωση αλληλεπίδρασης που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.22. Η εντονότερη μαύρη γραμμή αποτελεί το όριο των υπολογιστικών κελιών της λίμνης .....3-109

Σχήμα 3.25: Σύγκριση των πιεζομετρικών φορτίων που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση του Kacimov (2000) και το IRENE–HYD για την περίπτωση αλληλεπίδρασης λίμνης–υπόγειων νερών που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.22.....3-111

Σχήμα 3.26: Σύγκριση των πεδίων ταχυτήτων που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση του Kacimov (2000) και το IRENE–HYD για την περίπτωση αλληλεπίδρασης λίμνης–υπόγειων νερών που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.22.....3-112

Σχήμα 3.27: Γεωμετρία της περίπτωσης αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–υδροφορέα που εξετάστηκε στην εργασία του Lal (2001) και χρησιμοποιείται για την επιβεβαίωση του IRENE–HYD .....3-117

Σχήμα 3.28: Κατακόρυφη διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου του IRENE–HYD για το πρόβλημα του σχήματος 3.27. Με γκρι χρώμα φαίνονται οι περιοχές που βρίσκονται εκτός του υπολογιστικού πεδίου.....3-119

Σχήμα 3.29: Σύγκριση των αποτελεσμάτων της αναλυτικής λύσης του Lal (2001) και του IRENE–HYD για το πρόβλημα αλληλεπίδρασης του σχήματος 3.27: (α) χρονική διακύμανση της στάθμης του υδατορεύματος στις θέσεις  $x = 10000$  m και  $x = 25000$  m και (β) χρονική διακύμανση των πιεζομετρικών φορτίων στις θέσεις  $x = 10000$  m,  $y = 53$  m και  $x = 10000$ ,  $y = 123$  m .....3-120

Σχήμα 3.30: Σύγκριση των πιεζομετρικών φορτίων που υπολογίζονται εφαρμόζοντας (α) την τρισδιάστατη εκδοχή του IRENE–HYD και (β) την αναλυτική λύση του Lal (2001) για το πρόβλημα του σχήματος 3.27. Κατακόρυφη τομή στο επίπεδο  $y-z$  στη θέση  $x = 10000$  m, για χρόνο  $t = \tau / 4$  .....3-123

Σχήμα 3.31: Κατακόρυφη διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου του IRENE–HYD στο επίπεδο  $y-z$  ( $i=1$ ), για την περίπτωση αλληλεπίδρασης μεταξύ υδροφορέα και υδατορεύματος μερικής διείσδυσης του σχήματος 2.8.....3-124

Σχήμα 3.32: Ελεύθερη επιφάνεια των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων και πιεζομετρικές επιφάνειες για  $z=37$  m ( $k=8$ ) και  $z=1$  m ( $k=26$ ), κατά τους χρόνους (α)  $t=\tau/4$  και (β)  $t=3\tau/4$ , όπως υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το IRENE–HYD για την περίπτωση αλληλεπίδρασης μεταξύ υδροφορέα και υδατορεύματος μερικής διείσδυσης που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.8.....3-125

Σχήμα 4.1: Απεικόνιση μονοτονικής κατανομής συγκεντρώσεων μεταξύ των κόμβων  $(i-1, j, k)$  και  $(i+1, j, k)$  που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της συγκέντρωσης στο μέτωπο  $(i+1/2, j, k)$  σύμφωνα με το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST.....4-20

Σχήμα 4.2: Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων των αναλυτικών λύσεων (μαύρη γραμμή) των van Genuchten and Alves (1982) και των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL (σύμβολα) για μονοδιάστατη κίνηση ρύπου σε ομοιόμορφο πεδίο ροής υπόγειων νερών .....4-54

Σχήμα 4.3: Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων της αναλυτικής λύσης των Wilson and Miller (1978) και των αποτελεσμάτων του υπό–μοντέλου ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL, για την περίπτωση διδιάστατης μεταφοράς–διασποράς ρύπου σε ομοιόμορφο πεδίο ροής. Το υπολογιστικό πλέγμα είναι προσανατολισμένο υπό γωνία  $45^\circ$  προς τη διεύθυνση της ροής .....4-56

Σχήμα 4.4: Γεωμετρία της περίπτωσης αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–περιορισμένου υδροφορέα .....4-58

Σχήμα 4.5: Αποτελέσματα του IRENE–HYD για (α) την κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στο επίπεδο  $x-y$  για  $z=4.75$  m (πρώτο στρώμα του υδροφορέα) και (β) την κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων και το πεδίο ταχυτήτων στο κατακόρυφο επίπεδο  $x-z$ , στη θέση  $y=185$  m ( $j=19$ ). Στο Σχήμα 4.5 (α) η διακεκομμένη γραμμή συμβολίζει τα όρια του υδατορεύματος. Η ισοδιάσταση των ισοδυναμικών γραμμών που απεικονίζονται στο σχήμα είναι 0.2 m. 4-59

Σχήμα 4.6: Συγκεντρώσεις του ρύπου στο σύστημα υδροφορέα–υδατορεύματος για $t = 1.5$ days και $t = 7.5$ days. Οι τιμές των συγκεντρώσεων απεικονίζονται στο επίπεδο $x-y$ για $z = 4.75$ m και $z = 0.25$ m.....	4-61
Σχήμα 4.7: Κατανομή των συγκεντρώσεων του ρύπου σε κατακόρυφες τομές του υπολογιστικού πεδίου στο επίπεδο $x-z$ στις θέσεις $y = 15$ m, $y = 95$ m, $y = 185$ m, $y = 215$ m και $y = 295$ m, κατά τους χρόνους $t = 1.5$ days και $t = 7.5$ days.....	4-62
Σχήμα 5.1: Πειραματική δεξαμενή στο εργαστήριο Hyder Hydraulics του πανεπιστημίου του Cardiff.....	5-3
Σχήμα 5.2: Υπερχειλιστής (αριστερά), διάτρητος σωλήνας για την παροχή νερού στην δεξαμενή (μέσο) και περατό χώρισμα (δεξιά).....	5-3
Σχήμα 5.3: Αρχική πειραματική διάταξη.....	5-4
Σχήμα 5.4: Δίσκοι αφρού πολυουρεθάνης.....	5-5
Σχήμα 5.5: Δίσκοι αφρού πολυουρεθάνης στον ογκομετρικό κύλινδρο.....	5-6
Σχήμα 5.6: Μέτρηση διαπερατότητας αφρού πολυουρεθάνης.....	5-6
Σχήμα 5.7: Εκτίμηση της υδραυλικής αγωγιμότητας του αφρού πολυουρεθάνης.....	5-8
Σχήμα 5.8: Μετρητής στάθμης.....	5-10
Σχήμα 5.9: Φασματοφωτόμετρο 10-AU, Turner designs.....	5-10
Σχήμα 5.10: Σωληνάκι στερεωμένο σε μεταλλική ράβδο για την άντληση δείγματος από το σημείο μέτρησης.....	5-11
Σχήμα 5.11: Μεταλλικά βαρίδια τοποθετημένα επάνω στα κομμάτια του αφρού πολυουρεθάνης.....	5-12
Σχήμα 5.12: Σημεία διάθεσης και μέτρησης της Ροδαμίνης WT.....	5-13
Σχήμα 5.13: (α) Αποτελέσματα του IRENE για τη μεταβολή της συγκέντρωσης της Ροδαμίνης WT με το χρόνο στο σημείο A για εισαγωγή 75 ml διαλύματος συγκέντρωσης 1 g/l επί 2 λεπτά, (β) πειραματικά αποτελέσματα για τη μεταβολή της συγκέντρωσης της Ροδαμίνης WT με το χρόνο στο σημείο A και (γ) στάθμη υπερχειλιστή .....	5-14

Σχήμα 5.14: Διάγραμμα όπου φαίνεται πώς κολλήθηκαν τα κομμάτια του αφρού στην ένωση .....	5-15
Σχήμα 5.15: Διάγραμμα της πειραματικής διάταξης όπου φαίνονται τα σημεία μέτρησης και ο τρόπος ονομασίας τους.....	5-16
Σχήμα 5.16: Νέα πειραματική διάταξη .....	5-17
Σχήμα 5.17: Μέτρηση της συγκέντρωσης της Ροδαμίνης WT στη νέα πειραματική διάταξη .....	5-18
Σχήμα 5.18: Αποτελέσματα του IRENE–HYD για το Σενάριο Β .....	5-19
Σχήμα 5.19: Αποτελέσματα του IRENE–HYD για το Σενάριο Β θεωρώντας υδραυλική αγωγιμότητα $K_x = K_y = 0.6$ m/s για τα υπολογιστικά κελιά που βρίσκονται στις περιοχές των ενώσεων μεταξύ των κομματιών του αφρού.....	5-21
Σχήμα 5.20: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης στις διατομές Α και C (βλ. Σχήμα 5.15) για το Σενάριο Β, θεωρώντας υδραυλική αγωγιμότητα $K_x = K_y = 0.6$ m/s για τα υπολογιστικά κελιά που βρίσκονται στις περιοχές των ενώσεων μεταξύ των κομματιών του αφρού .....	5-22
Σχήμα 5.21: Αποτελέσματα του IRENE–HYD για το Σενάριο Γ .....	5-23
Σχήμα 5.22: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης στις διατομές Α και C για το Σενάριο Γ .....	5-24
Σχήμα 5.23: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο C1 για το Σενάριο Β.....	5-26
Σχήμα 5.24: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο C3 για το Σενάριο Β.....	5-26
Σχήμα 5.25: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο C5 για το Σενάριο Β.....	5-27
Σχήμα 5.26: Συγκριτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων του μοντέλου στα σημεία C1, C3 και C5 για το Σενάριο Β .....	5-27
Σχήμα 5.27: Κατανομή στων συγκεντρώσεων στο υπολογιστικό πεδίο για $t = 10$ min, $t = 15$ min, $t = 20$ min και $t = 30$ min .....	5-28

Σχήμα 5.28: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο C1 για το Σενάριο Γ .....	5-28
Σχήμα 5.29: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο C3 για το Σενάριο Γ .....	5-29
Σχήμα 5.30: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο C5 για το Σενάριο Γ .....	5-29
Σχήμα 5.31: Πειραματική διάταξη Β΄ Φάσης μετρήσεων .....	5-30
Σχήμα 5.32: Φωτογραφία της πειραματικής διάταξης της Β΄ Φάσης μετρήσεων .....	5-31
Σχήμα 5.33: Διαστάσεις της πειραματικής διάταξης της Β΄ Φάσης μετρήσεων .....	5-31
Σχήμα 5.34: Αρίθμηση των σημείων μέτρησης .....	5-32
Σχήμα 5.35: Περατόμετρο σταθερού φορτίου που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της διαπερατότητας της άμμου στο εργαστήριο Hyder Hydraulics .....	5-32
Σχήμα 5.36: Εκτίμηση της υδραυλικής αγωγιμότητας της άμμου που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του φράγματος .....	5-33
Σχήμα 5.37: Φωτογραφία πειράματος μέτρησης συγκέντρωσης .....	5-35
Σχήμα 5.38: Φωτογραφία πειράματος μέτρησης συγκέντρωσης .....	5-36
Σχήμα 5.39: Αποτελέσματα του IRENE–HYD για τη στάθμη επιφανειακών και υπόγειων νερών και την κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στο φράγμα για το Σενάριο 1. Τα αποτελέσματα απεικονίζονται στο κατακόρυφο επίπεδο $x-z$ στη θέση $y = 1.075$ m .....	5-38
Σχήμα 5.40: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στα σημεία 4, 5 και 6, στη θέση $z = 12.5$ cm (στρώμα 6), για το Σενάριο 1 .....	5-39
Σχήμα 5.41: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο 8, στη θέση $z = 12.5$ cm (στρώμα 6), για την περίπτωση ΣΤ του σεναρίου 1 .....	5-40
Σχήμα 5.42: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο 4 στις θέσεις $z = 12.5$ cm (στρώμα 6), $z = 10$ cm (στρώμα 7) και $z = 7.5$ cm (στρώμα 8) για το Σενάριο 1 .....	5-41

- Σχήμα 5.43: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο 6 στις θέσεις  $z = 12.5$  cm (στρώμα 6) και  $z = 10$  cm (στρώμα 7) για το Σενάριο 1 .....5-41
- Σχήμα 5.44: Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL και των πειραματικών μετρήσεων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο κανάλι, στη θέση B σε ύψος  $z = 10$  cm (στρώμα 7).....5-43
- Σχήμα 5.45: Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL και των πειραματικών μετρήσεων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο κανάλι, στη θέση C σε ύψος  $z = 10$  cm (στρώμα 7).....5-43
- Σχήμα 5.46: Αποτελέσματα του IRENE–HYD για τη στάθμη επιφανειακών και υπόγειων νερών και την κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στο φράγμα για το Σενάριο 2. Τα αποτελέσματα απεικονίζονται στο κατακόρυφο επίπεδο  $x-z$  στη θέση  $y = 4.175$  m.....5-45
- Σχήμα 5.47: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στα σημεία 4, 5 και 6, στη θέση  $z = 15$  cm (στρώμα 5), για το Σενάριο 2.....5-46
- Σχήμα 5.48: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης δείκτη στο σημείο 4, στις θέσεις  $z = 15$  cm (στρώμα 5),  $z = 12.5$  cm (στρώμα 6) και  $z = 10$  cm (στρώμα 7) ,για το Σενάριο 2 .....5-47
- Σχήμα 5.49: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο 6 στις θέσεις  $z = 15$  cm (στρώμα 5) και  $z = 12.5$  cm (στρώμα 6) για το Σενάριο 2 .....5-47
- Σχήμα 5.50: Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL και των πειραματικών μετρήσεων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο κανάλι στη θέση B, σε ύψος  $z = 12.5$  cm (στρώμα 6), για το Σενάριο 2.....5-48
- Σχήμα 5.51: Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD και των πειραματικών μετρήσεων για τη στάθμη στο κανάλι στη θέση D και τη στάθμη στο φράγμα στα σημεία μέτρησης 7 και 8. Σενάριο 3,  $t = 20$  min .....5-48
- Σχήμα 5.52: Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD και των πειραματικών μετρήσεων για τη στάθμη στο κανάλι στη θέση D και τη στάθμη στο φράγμα στα σημεία μέτρησης 7 και 8. Σενάριο 4,  $t = 30$  min .....5-49

Σχήμα 5.53: Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD και των πειραματικών μετρήσεων για τη στάθμη στο κανάλι στη θέση D και τη στάθμη στο φράγμα στα σημεία μέτρησης 7 και 8. Σενάριο 5, $\tau = 10$ min .....	5-49
Σχήμα 5.54: Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL και των πειραματικών μετρήσεων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο σημείο μέτρησης 4 στη θέση $z = 10$ cm (στρώμα 7). Σενάριο 3, $\tau = 20$ min .....	5-51
Σχήμα 5.55: Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL και των πειραματικών μετρήσεων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο σημείο μέτρησης 4 στη θέση $z = 10$ cm (στρώμα 7). Σενάριο 4, $\tau = 30$ min .....	5-51
Σχήμα 5.56: Σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο σημείο μέτρησης 4 στη θέση $z = 10$ cm (στρώμα 7). Σενάριο 5, $\tau = 10$ min .....	5-52
Σχήμα 5.57: Σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο σημείο μέτρησης 6 στη θέση $z = 10$ cm (στρώμα 7). Σενάριο 3, $\tau = 20$ min .....	5-52
Σχήμα 5.58: Σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο σημείο μέτρησης 6 στη θέση $z = 10$ cm (στρώμα 7). Σενάριο 4, $\tau = 10$ min .....	5-53
Σχήμα 6.1: Γεωλογικός χάρτης και οριοθέτηση της περιοχής μελέτης .....	6-2
Σχήμα 6.2: Υδρολογικές λεκάνες της περιοχής μελέτης (με χρήση προγράμματος Autocad Architecture 2008) .....	6-4
Σχήμα 6.3: Διακύμανση του υψομέτρου της ευρύτερης περιοχής της λίμνης Τριχωνίδας σε μέτρα (δημιουργία σε Arcview / 3D Analyst, με χρήση τοπογραφικού υποβάθρου Γ.Υ.Σ., 1:50.000) .....	6-5
Σχήμα 6.4: Φωτογραφία της λίμνης Τριχωνίδας .....	6-5
Σχήμα 6.5: Εικόνα του θυρογράμματος Τριχωνίδας–Λυσιμαχείας από την πλευρά της Λυσιμαχείας .....	6-6
Σχήμα 6.6: Φωτογραφία της λίμνης Λυσιμαχείας.....	6-9
Σχήμα 6.7: Εγκιβωτισμένη κοίτη ποταμού Αχελώου.....	6-11

Σχήμα 6.8: Φυσική κοίτη ποταμού Αχελώου.....	6-12
Σχήμα 6.9: Φωτογραφία από αρδευτικό κανάλι στην περιοχή μελέτης .....	6-12
Σχήμα 6.10: Μέσο μηνιαίο ύψος βροχόπτωσης στο σταθμό Καλλιθέας κατά τα έτη 1997, 1998 και 1999.....	6-15
Σχήμα 6.11: Μέσο μηνιαίο ύψος βροχόπτωσης στο σταθμό Αγρινίου κατά τα έτη 1997, 1998 και 1999.....	6-15
Σχήμα 6.12: Μέσο μηνιαίο ύψος βροχόπτωσης στο σταθμό Προσήλιας κατά τα έτη 1997, 1998 και 1999.....	6-16
Σχήμα 6.13: Μέσο μηνιαίο ύψος βροχής στο σταθμό Αγίου Ανδρέα κατά τα έτη 1997, 1998 και 1999.....	6-16
Σχήμα 6.14: Μέσο μηνιαίο ύψος βροχής στο σταθμό Δοκιμίου κατά τα έτη 1997, 1998 και 1999 .....	6-16
Σχήμα 6.15: Μέση μηνιαία στάθμη της γεώτρησης παρατήρησης ΠΓ4 που βρίσκεται στον αλλουβιακό υδροφόρα του Αχελώου.....	6-18
Σχήμα 6.16: Μέση μηνιαία βροχόπτωση στην περιοχή μελέτης.....	6-18
Σχήμα 6.17: Γεωμετρία της περιοχής μελέτης που εισήχθη στο IRENE–HYD .....	6-20
Σχήμα 6.18: Θέσεις των γεωτρήσεων παρατήρησης στην περιοχή μελέτης .....	6-21
Σχήμα 6.19: Τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας που χρησιμοποιήθηκαν στην περιοχή μελέτης κατά τη βαθμονόμηση του IRENE–HYD .....	6-23
Σχήμα 6.20: Τιμές κατείσδυσης που χρησιμοποιήθηκαν στην περιοχή μελέτης κατά τη βαθμονόμηση του IRENE–HYD .....	6-24
Σχήμα 6.21: Αποτελέσματα του IRENE–HYD για τις τιμές των πιεζομετρικών φορτίων, τη στάθμη των επιφανειακών νερών και το πεδίο ταχυτήτων στην περιοχή μελέτης .....	6-25





## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

---

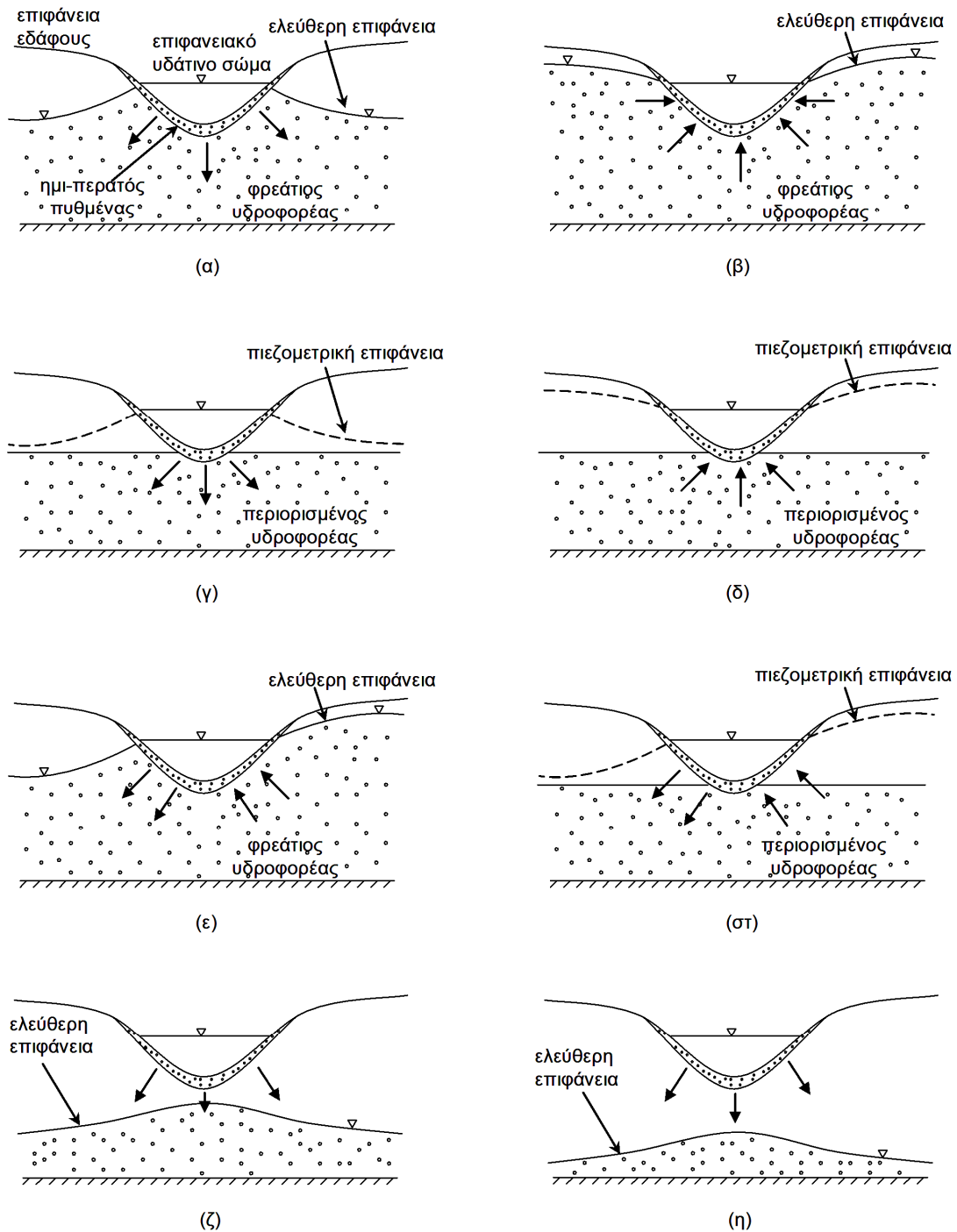
### 1.1 Τοποθέτηση του προβλήματος

Το νερό της Γης βρίσκεται πάντα σε κίνηση και αλλάζει κατάσταση, από υγρή σε αέρια ή σε πάγο και αντίστροφα (Perlman, 2008). Η συνεχής αυτή κυκλοφορία του νερού στην επιφάνεια της Γης, καθώς και πάνω και κάτω από αυτή περιγράφεται από τον πολύ γνωστό υδρολογικό κύκλο. Τα επιφανειακά και τα υπόγεια νερά δεν αποτελούν μεμονωμένες συνιστώσες του υδρολογικού κύκλου. Αντιθέτως, πολύ συχνά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω της κοινής τους διεπιφάνειας (επιφάνεια εδάφους, πυθμένας επιφανειακών υδάτινων σωμάτων) με αποτέλεσμα να επηρεάζεται τόσο η ποσότητα όσο και η ποιότητά τους. Ανάλογα με τη σχετική στάθμη των επιφανειακών νερών ως προς τη στάθμη των υπόγειων νερών, νερό και ρύποι διηθούνται από τα επιφανειακά υδάτινα σώματα προς τα υπόγεια νερά ή αντιστρόφως τα υπόγεια νερά τροφοδοτούν τα επιφανειακά. Γενικά, μπορούν να διακριθούν οι ακόλουθες περιπτώσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών υδάτινων σωμάτων και υπόγειων νερών:

- i. Αν μεταξύ του επιφανειακού υδάτινου σώματος και του υπόγειου υδροφορέα δεν υφίσταται ακόρεστη ζώνη, τότε το σύστημα των επιφανειακών–υπόγειων νερών βρίσκεται σε υδραυλική επαφή. Στην περίπτωση που η στάθμη του νερού στο

επιφανειακό υδάτινο σώμα είναι ψηλότερη από τη στάθμη των υπόγειων νερών, νερό και ρύποι διηθούνται από το επιφανειακό υδάτινο σώμα προς τα υπόγεια νερά (Σχήμα 1.1 (α) και (γ)), ενώ στην αντίθετη περίπτωση ο υπόγειος υδροφορέας τροφοδοτεί το επιφανειακό υδάτινο σώμα (Σχήμα 1.1 (β) και (δ)). Υπάρχουν επίσης πολλές περιπτώσεις στις οποίες ένα τμήμα του επιφανειακού υδάτινου σώματος τροφοδοτείται από τα υπόγεια νερά ενώ ένα άλλο τμήμα τα τροφοδοτεί, ανάλογα με τη χωρική κατανομή της στάθμης των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων (Σχήμα 1.1 (ε) και (στ)). Έτσι, για παράδειγμα, ένα υδατόρευμα μπορεί να τροφοδοτείται από τα υπόγεια νερά ή να τα τροφοδοτεί σε όλο του το μήκος ή κατά τμήματα (*gaining or losing stream, gaining or losing stream reaches*). Ακόμη, μπορεί κάποιο τμήμα του υδατορεύματος να τροφοδοτείται από τα υπόγεια νερά μέσω μέρους του πυθμένα του και να τα τροφοδοτεί μέσω κάποιου άλλου μέρους (*flow-through stream reach*). Πρέπει να σημειωθεί ότι ο όρος υδατόρευμα χρησιμοποιείται χωρίς να γίνεται διάκριση κλίμακας και περιλαμβάνει από μικρά ρέματα και ρυάκια μέχρι μεγάλα ποτάμια.

- ii. Αν μεταξύ του επιφανειακού υδάτινου σώματος και του υπόγειου υδροφορέα υφίσταται ακόρεστη ζώνη, τότε επιφανειακά και υπόγεια νερά δε βρίσκονται σε υδραυλική επαφή και λαμβάνει χώρα διήθηση επιφανειακού νερού προς τον υδροφορέα διά μέσου της ακόρεστης ζώνης του πορώδους μέσου (Σχήμα 1.1 (ζ) και (η)). Ωστόσο, ακόμα και όταν υπάρχει ακόρεστη ζώνη ανάμεσα στο επιφανειακό υδάτινο σώμα και τον υδροφορέα, μπορεί να θεωρηθεί ότι επιφανειακά και υπόγεια νερά βρίσκονται σε υδραυλική επικοινωνία, υπό την έννοια ότι περαιτέρω πτώση της στάθμης του υπόγειου νερού μπορεί να αυξήσει το ρυθμό διήθησης επιφανειακού νερού προς τον υδροφορέα (Σχήμα 1.1 (ζ)) (Peterson and Wilson, 1988). Έχει όμως παρατηρηθεί ότι για κάποια κρίσιμη τιμή της στάθμης του υπόγειου νερού, η περαιτέρω πτώση της δεν έχει καμία επίδραση στο ρυθμό διήθησης του επιφανειακού νερού (Σχήμα 1.1 (η)) (Bouwer and Maddock, 1997, Osman and Bruen, 2002). Στην κρίσιμη αυτή στάθμη του υπόγειου νερού, η οποία εξαρτάται από τη γεωμετρία και τη θέση του επιφανειακού υδάτινου σώματος στον υδροφορέα, από την περατότητα του πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος και από τη γεωμετρία και τις υδραυλικές ιδιότητες του υδροφορέα (υδραυλική αγωγιμότητα, αποθηκευτικότητα, κλπ), ο υδροφορέας παύει να βρίσκεται σε υδραυλική επαφή με το επιφανειακό υδάτινο σώμα (Osman and Bruen, 2002, Bruen and Osman, 2004).



**Σχήμα 1.1:** Περιπτώσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών υδάτινων σωμάτων και υπόγειων νερών

Η αλληλεπίδραση μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων υδάτων καθορίζεται, εκτός από τη χωρική και χρονική κατανομή της στάθμης τους, από τα χαρακτηριστικά του πορώδους μέσου, από τις υδραυλικές ιδιότητες του πυθμένα των επιφανειακών υδάτινων σωμάτων και από τη θέση των επιφανειακών υδάτινων σωμάτων στο πορώδες μέσο (Winter, 1999). Τα χαρακτηριστικά του πορώδους μέσου αναφέρονται στις υδραυλικές του ιδιότητες και στην αρχικά περιεχόμενη σε αυτό υγρασία.

Η κατανομή της περιεχόμενης στο πορώδες μέσο υγρασίας είναι σημαντική γιατί καθορίζει την ύπαρξη ακόρεστης ζώνης μεταξύ του επιφανειακού υδάτινου σώματος και του υδροφορέα. Οι υδραυλικές ιδιότητες του πορώδους μέσου και του πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος καθορίζουν το ρυθμό διήθησης επιφανειακού νερού στο πορώδες μέσο ή τροφοδοσίας των επιφανειακών νερών από τα υπόγεια, ο οποίος εξαρτάται, εκτός από την υδραυλική κλίση μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, από το μέγεθος και την κατανομή της υδραυλικής αγωγιμότητας στους γεωλογικούς σχηματισμούς που περιβάλλουν το επιφανειακό υδάτινο σώμα και από την περατότητα του πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος.

Η θέση των επιφανειακών υδάτινων σωμάτων στο σύστημα των υπόγειων υδάτων καθορίζει πολύ συχνά το αν τροφοδοτούνται από τα υπόγεια νερά (αν βρίσκονται σε τοπογραφικά χαμηλές περιοχές) ή αν τα τροφοδοτούν (αν βρίσκονται σε τοπογραφικά υψηλές περιοχές) (Sophocleous, 2000). Ειδικά για την περίπτωση αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών, σημαντικό ρόλο παίζει ο προσανατολισμός του υδατορεύματος σε σχέση με το σύστημα των υπόγειων υδάτων. Όταν το υδατόρευμα είναι προσανατολισμένο περίπου κάθετα προς το πεδίο ροής των υπόγειων υδάτων, συμβαίνει συχνά κάποια τμήματά του να τροφοδοτούνται από τα υπόγεια νερά μέσω μέρους του πυθμένα τους και να τα τροφοδοτούν μέσω κάποιου άλλου μέρους, ενώ όταν το υδατόρευμα είναι προσανατολισμένο περίπου παράλληλα με το πεδίο ροής των υπόγειων υδάτων, το πιθανότερο είναι να τροφοδοτείται από τα υπόγεια νερά ή να τα τροφοδοτεί σε όλο του το μήκος ή κατά ολόκληρα τμήματα (Wroblicky et al., 1998, Woessner, 1998, Woessner, 2000).

Σε ένα σύστημα επιφανειακών–υπόγειων υδάτων, η χωρική και χρονική κατανομή της στάθμης του επιφανειακού και του υπόγειου νερού και γενικότερα τα χαρακτηριστικά της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων, καθορίζονται από τις κλιματικές συνθήκες, την τοπογραφία και τη γεωλογία. Συνεπώς η κατανόηση της επίδρασης των παραγόντων αυτών στη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων νερών είναι απαραίτητη για την κατανόηση της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης (Winter, 1999, Sophocleous, 2002).

Η ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων σε μια υδρολογική λεκάνη εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την τοπογραφία. Όπως έδειξε ο Hubert (1940), θεωρώντας ομοιόμορφη βροχόπτωση και ομοιόμορφο ρυθμό διήθησης σε μια

περιοχή, η ελεύθερη επιφάνεια του υπόγειου νερού θα διαμορφωθεί σαν ακριβές αντίγραφο της επιφάνειας του εδάφους. Η στάθμη και το πεδίο ροής των υπόγειων υδάτων διαμορφώνονται επίσης σε συνάρτηση με τις υδραυλικές ιδιότητες των διάφορων γεωλογικών σχηματισμών στην υδρολογική λεκάνη. Εκτός από την τοπογραφία και τη γεωλογία, τα χαρακτηριστικά της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων νερών εξαρτώνται από τις κλιματικές συνθήκες, οι οποίες καθορίζουν τις διαθέσιμες ποσότητες νερού στην επιφάνεια της Γης. Η επίδραση του κλίματος, της τοπογραφίας και της γεωλογίας στην αλληλεπίδραση επιφανειακών–υπόγειων υδάτων παρουσιάζεται διεξοδικά στις εργασίες των Winter (1999) και Sophocleous (2002).

Η κατανόηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών είναι πολύ σημαντική για την αποτελεσματική διαχείριση των υδατικών πόρων. Για παράδειγμα, κατά το σχεδιασμό υδροληψιών από υπόγειους υδροφορείς, ποτάμια και λίμνες με σκοπό την ύδρευση, την άρδευση, τη βιομηχανική χρήση, κλπ, θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη η αλληλεπίδραση μεταξύ των επιφανειακών υδάτινων σωμάτων και των υπόγειων νερών, καθώς η άντληση υπόγειου νερού μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική μείωση της ποσότητας του νερού σε επιφανειακά υδάτινα σώματα που βρίσκονται σε υδραυλική επικοινωνία με τον υπόγειο υδροφόρο και η υδροληψία από ποτάμια και λίμνες μπορεί, αντίστοιχα, να προκαλέσει πτώση της στάθμης των υπόγειων νερών.

Η εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών είναι επίσης πολύ σημαντική για την πρόβλεψη και τη διαχείριση πλημμυρικών παροχών σε υδατορεύματα. Η μη θεώρηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ της ροής κατά μήκος υδατορευμάτων και της υπόγειας ροής οδηγεί σε υπερεκτίμηση του βάθους της επιφανειακής ροής κατά τον ανερχόμενο κλάδο του υδρογραφήματος και σε υποεκτίμηση κατά τον κατερχόμενο κλάδο του υδρογραφήματος (Wallach et al., 1997, Winter et al., 1998). Συνεπώς ο συνδυασμός της επιφανειακής και της υπόγειας ροής είναι απαραίτητος για την ακριβή και λεπτομερή περιγραφή της ροής κατά μήκος υδατορευμάτων.

Σε πολλές περιπτώσεις, πηγή ρύπανσης των επιφανειακών υδάτινων σωμάτων αποτελούν τα υπόγεια νερά ενώ και η ρύπανση των υπόγειων υδροφορέων μπορεί να οφείλεται σε επιφανειακά υδάτινα σώματα με τα οποία τα υπόγεια νερά βρίσκονται σε υδραυλική επικοινωνία. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η ρύπανση λόγω θρεπτικών, που είναι ένα σοβαρό πρόβλημα σε πολλές λεκάνες απορροής

παγκοσμίως (Falconer, 1992, Stapleton et al., 2000). Τα θρεπτικά, που προέρχονται κυρίως από τη χρήση λιπασμάτων, διηθούνται από την επιφάνεια του εδάφους προς τα υπόγεια νερά και μπορεί να καταλήξουν μέσω της εκφόρτισης υπόγειου νερού σε επιφανειακά υδάτινα σώματα. Τα θρεπτικά μπορεί επίσης να κινηθούν επιφανειακά και να καταλήξουν σε ποτάμια, λίμνες και υγρότοπους από όπου μπορεί να διηθηθούν στα υπόγεια νερά. Γενικά, η κατάσταση αποτελεσματικών διαχειριστικών σχεδίων προϋποθέτει την εκτίμηση της συνεισφοράς των υπόγειων νερών στη ρύπανση επιφανειακών υδάτινων σωμάτων καθώς και την εκτίμηση της επίδρασης των επιφανειακών νερών στη ρύπανση των υπόγειων υδροφορέων.

Τα παραπάνω αποτελούν μερικά μόνο παραδείγματα από τα οποία γίνεται φανερό ότι η αποτελεσματική διαχείριση των υδατικών πόρων επιβάλλει την ολοκληρωμένη θεώρηση επιφανειακών και υπόγειων νερών. Η μελέτη της αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων υδάτων ξεκινά τη δεκαετία του '60 με τη διερεύνηση της αλληλεπίδρασης υδατορευμάτων και λιμνών με τα υπόγεια νερά, εξαιτίας του ενδιαφέροντος για το πρόβλημα του ευτροφισμού και τις επιπτώσεις της όξινης βροχής στους υδατικούς πόρους (π.χ. Livingstone, 1963, Meyboom et al., 1966, Garrels et al., 1967, Meyboom, 1967, Vaux, 1968, Dune and Black, 1970, Τόθ, 1970). Τις τρεις τελευταίες δεκαετίες το ενδιαφέρον για το θέμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών έχει ενταθεί, καθώς η αυξημένη ζήτηση νερού που οφείλεται στην αύξηση του παγκόσμιου πληθυσμού και οι ορατές πλέον ανθρωπογενείς επιδράσεις στα υδατικά συστήματα καθιστούν αναγκαία την ολοκληρωμένη διαχείριση των υδατικών πόρων (Winter et al., 1998).

Έτσι, τις τελευταίες δεκαετίες έχουν γίνει σημαντικές προσπάθειες μαθηματικής προσομοίωσης και πειραματικής διερεύνησης της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών (π.χ. Hunt, 1990, Storm and Refsgaard, 1993, Swain and Wexler, 1996, Hantush et al., 2002, Panday and Huyakorn, 2004, Ebrahimi et al., 2007, Serrano and Workman, 2008). Η ανάγκη για ενιαία θεώρηση των υδατικών πόρων αποτυπώνεται και στην ευρωπαϊκή νομοθεσία με την Οδηγία Πλαίσιο 2000/60/EK του Ευρωπαϊκού Κοινοβουλίου για τα νερά, η οποία στοχεύει στην ολοκληρωμένη διαχείριση, προστασία και αποκατάσταση επιφανειακών και υπόγειων υδάτων σε επίπεδο λεκάνης απορροής.

Η μαθηματική προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ της ροής επιφανειακών και υπόγειων νερών δεν είναι απλή, καθώς απαιτείται η επίλυση, στον ίδιο χρόνο, των εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων, οι

οποίες συνδυάζονται στην κοινή διεπιφάνεια των επιφανειακών–υπόγειων νερών μέσω κάποιας σχέσης για τη διήθηση επιφανειακού νερού στον υπόγειο υδροφόρα ή τροφοδοσία των επιφανειακών νερών από τα υπόγεια. Η επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων μπορεί να επιτευχθεί με αναλυτικές ή αριθμητικές μεθόδους. Οι αναλυτικές λύσεις προβλημάτων αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών βασίζονται συνήθως σε απλουστευτικές παραδοχές ως προς τις οριακές συνθήκες, τις υδραυλικές ιδιότητες του υδροφόρα, τη χωρική διάσταση της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων, κλπ, έτσι ώστε να απλοποιηθεί η μαθηματική περιγραφή του φαινομένου και να είναι εφικτή η αναλυτική επίλυση των ισχυουσών μερικών διαφορικών εξισώσεων (Hantush, 2005). Συνεπώς η εφαρμογή των αναλυτικών λύσεων περιορίζεται μόνο σε απλές περιπτώσεις αλληλεπίδρασης. Για τη μελέτη πολύπλοκων προβλημάτων χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν ολοκληρωμένα μαθηματικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών, στα οποία οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων επιλύονται με αριθμητικές μεθόδους. Συνήθως χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένων στοιχείων και πεπερασμένων όγκων.

Παρόλο που οι αναλυτικές λύσεις μπορούν να εφαρμοστούν μόνο σε απλά προβλήματα, αποτελούν σημαντικά εργαλεία για την προκαταρκτική κατανόηση και εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών και την επιβεβαίωση αριθμητικών μοντέλων (Singh, 2004). Πρέπει να σημειωθεί ότι εκτός από ειδικές περιπτώσεις, οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων δεν έχουν ακριβείς αναλυτικές λύσεις με αποτέλεσμα πολύ συχνά να διατυπώνονται προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις για προβλήματα αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών. Οι προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις βασίζονται συνήθως στη μέθοδο διαταραχών (π.χ. Hunt, 1990, Lal, 2001).

Το πρόβλημα διατύπωσης αναλυτικών λύσεων αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων υδάτων συνήθως απλοποιείται επιλύοντας μόνο τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την υπόγεια ροή. Οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή των επιφανειακών υδάτων δεν επιλύονται αλλά η διακύμανση της στάθμης του νερού στο επιφανειακό υδάτινο σώμα που βρίσκεται σε υδραυλική επαφή με τα υπόγεια νερά θεωρείται γνωστή και λαμβάνεται υπ' όψη ως οριακή συνθήκη στην επίλυση της εξίσωσης της υπόγειας ροής (π.χ. Hall and Moench, 1972, Marino, 1973, Singh and



Rai, 1980, Ilyinsky and Kacimov, 1992, Govindaraju and Koelliker, 1994, Ostfeld et al., 1999, Kacimov, 2000, Bakker, 2004). Σε τέσσερις μόνο δημοσιεύσεις με θέμα την αλληλεπίδραση μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών, θεωρούνται οι εξισώσεις τόσο της επιφανειακής όσο και της υπόγειας ροής για τη διατύπωση αναλυτικών λύσεων (Hunt, 1990, Lal, 2001, Hantush et al., 2002, Hantush, 2005).

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, για την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν αριθμητικά μοντέλα. Ο συνδυασμός της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων σε ένα αριθμητικό μοντέλο δεν είναι απλή διαδικασία. Η διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων νερών, καθώς και της εξίσωσης που εκφράζει τη διήθηση επιφανειακού νερού στον υπόγειο υδροφορέα ή την τροφοδοσία των επιφανειακών νερών από τα υπόγεια, οδηγεί σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, οι οποίες πρέπει να επιλυθούν ταυτόχρονα για να προσομοιωθεί όσο το δυνατόν ακριβέστερα το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων υδάτων (Gunduz and Aral, 2005). Η ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων που περιγράφουν το φαινόμενο, εκτός του ότι είναι δυσχερής, επιβάλλει τη χρήση κοινού μεγέθους χρονικού βήματος για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών, με αποτέλεσμα να μην αξιοποιείται η διαφορετική χρονική κλίμακα που ισχύει για τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων και να οδηγούμαστε συχνά σε μεγάλους υπολογιστικούς χρόνους (Panday and Huyakorn, 2004, Gunduz and Aral, 2005).

Λόγω των δυσκολιών ταυτόχρονης επίλυσης των εξισώσεων που περιγράφουν την αλληλεπίδραση μεταξύ των επιφανειακών και των υπόγειων νερών, σε πολλά αριθμητικά μοντέλα (π.χ. Freeze, 1972, Akan and Yen, 1981, Swain and Wexler, 1996, Jobson and Harbaugh, 1999, Morita and Yen, 2002, Prudic et al., 2004, Erduran et al., 2005) ακολουθείται μία διαφορετική μέθοδος συνδυασμού της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων, η οποία είναι γνωστή σαν μέθοδος εσωτερικού συνδυασμού. Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων νερών επιλύονται χωριστά αλλά επαναληπτικά σε κάθε χρονικό βήμα, χρησιμοποιώντας την εξίσωση υπολογισμού της διήθησης επιφανειακού νερού στον υπόγειο υδροφορέα ή τροφοδοσίας των επιφανειακών νερών από τα υπόγεια σαν κοινή οριακή συνθήκη στη διεπιφάνεια επιφανειακών–υπόγειων υδάτων. Κάθε φορά που επιλύεται ένα από τα υπό–μοντέλα των επιφανειακών ή των υπόγειων νερών κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος, τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της διήθησης/τροφοδοσίας στη διεπιφάνεια των επιφανειακών–

υπόγειων νερών και την εν συνεχεία επίλυση του άλλου υπό-μοντέλου. Η διαδικασία επίλυσης εναλλάσσεται μεταξύ των υπό-μοντέλων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών μέχρι οι επιμέρους λύσεις τους να ικανοποιήσουν κάποιο προκαθορισμένο κριτήριο σύγκλισης, οπότε οι υπολογισμοί προχωράνε στο επόμενο χρονικό βήμα.

Η χωριστή επίλυση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων επιτρέπει τη χρήση διαφορετικού μεγέθους χρονικού βήματος για την επιφανειακή και την υπόγεια ροή. Έτσι, ενώ οι εξισώσεις των επιφανειακών υδάτων πρέπει να επιλυθούν χρησιμοποιώντας ένα σχετικά μικρό χρονικό βήμα για λόγους ακρίβειας και αριθμητικής ευστάθειας, για την επίλυση των εξισώσεων της υπόγειας ροής μπορεί να χρησιμοποιηθεί μεγαλύτερο χρονικό βήμα, καθώς οι ταχύτητες ροής των υπόγειων νερών είναι πολύ μικρότερες σε σχέση με αυτές των επιφανειακών. Συνεπώς σε κάθε χρονικό βήμα του υπό-μοντέλου υπόγειων νερών μπορούν να επιλυθούν περισσότερα από ένα χρονικά βήματα του υπό-μοντέλου επιφανειακών νερών, μειώνοντας έτσι τον υπολογιστικό χρόνο. Αυτός είναι ένας βασικός λόγος που στα περισσότερα ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών-υπόγειων νερών επιλέγεται οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων να επιλυθούν χωριστά. Η χωριστή επίλυση των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών σε ένα αριθμητικό μοντέλο προσομοίωσης της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης είναι επίσης απλούστερη, αν και λιγότερο ακριβής, σε σχέση με την ταυτόχρονη επίλυσή τους (Gunduz and Aral, 2005). Περισσότερες πληροφορίες για τις μεθόδους συνδυασμού της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων στα αριθμητικά μοντέλα δίνονται στο Κεφάλαιο 2.

Εξαιτίας των δυσκολιών αριθμητικής προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης μεταξύ της ροής επιφανειακών και υπόγειων υδάτων, ο αριθμός των ολοκληρωμένων αριθμητικών μοντέλων επιφανειακών-υπόγειων νερών που έχουν κατά καιρούς αναπτυχθεί είναι περιορισμένος σε σχέση με τα αριθμητικά μοντέλα που είναι διαθέσιμα για την προσομοίωση της ροής μόνο των επιφανειακών ή μόνο των υπόγειων υδάτων. Στα μοντέλα υπόγειων νερών η υδραυλική επικοινωνία με επιφανειακά υδάτινα σώματα συνήθως λαμβάνεται υπ' όψη σαν οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet ή Cauchy (π.χ. Querner, 1988, Harbaugh and McDonald, 1996). Στα μοντέλα επιφανειακών υδάτων η επικοινωνία με τα υπόγεια νερά είτε αγνοείται είτε προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας κάποια αλγεβρική εξίσωση για τον υπολογισμό της διήθησης, όπως είναι οι εξισώσεις των Green–Ampt (1911), Kostiaikov (1932), Horton

(1933, 1935) και Philip (1957). Σε πολλά υδρολογικά μοντέλα φυσικής βάσης, για παράδειγμα, η διήθηση υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση Green–Ampt (Freyberg et al., 1980). Αλγεβρικές εξισώσεις για τον υπολογισμό της διήθησης έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί σε αρκετά αριθμητικά μοντέλα προσομοίωσης της ροής κατά μήκος φυσικών υδατορευμάτων και της άρδευσης με αυλάκια, λωρίδες και λεκάνες (π.χ. Katopodes and Strelkoff, 1977, Dillon and Ligget, 1983, Akabni and Katopodes, 1988, Savadi, 1993, Playan et al., 1994, Singh and Bhallamudi, 1996, Bradford and Katopodes, 2001, Liu et al., 2004). Τέτοιου είδους μοντέλα δε μπορεί να θεωρηθεί ότι προσομοιώνουν με ακρίβεια την αλληλεπίδραση μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, προσεγγίζουν όμως σε κάποιο βαθμό το φαινόμενο, ανάλογα βέβαια και με την ακρίβεια του μοντέλου διήθησης που χρησιμοποιείται (Morita and Yen, 2002).

Τα ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων υδάτων που έχουν κατά καιρούς αναπτυχθεί διαφέρουν σε ακρίβεια και πολυπλοκότητα ανάλογα με τη μαθηματική περιγραφή του φαινομένου (τύπος και χωρική διάσταση των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων) και τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για το συνδυασμό και την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών. Στις περισσότερες περιπτώσεις εξετάζεται η αλληλεπίδραση της επίγεια ροής (ροή που πραγματοποιείται στην επιφάνεια του εδάφους καταλήγοντας στα ποτάμια, overland flow) ή της ροής κατά μήκος υδατορευμάτων με την υπόγεια ροή (π.χ. Freeze, 1972, Akan and Yen, 1981, Swain and Wexler, 1996, Vanderkwaak, 1999, Ewen et al., 2000, Morita and Yen, 2002, Panday and Huyakorn, 2004, Gunduz and Aral, 2005). Ο αριθμός των μοντέλων που έχουν αναπτυχθεί για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης παράκτιων υδάτων, εκβολών ποταμών, λιμνών και υγροτόπων με τα υπόγεια νερά είναι σχετικά μικρός (π.χ. Ebrahimi, 2004, Langevin et al., 2005, Sparks, 2005, 2008).

Η εξίσωση που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της υπόγεια ροής σε ένα ολοκληρωμένο αριθμητικό μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων υδάτων εξαρτάται από το αν εξετάζεται η περίπτωση υδραυλικής επαφής μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, οπότε θεωρείται η υπόγεια ροή μόνο στην κορεσμένη ζώνη (π.χ. Pinder and Sauer, 1971, Swain and Wexler, 1996, Hussein and Schwartz, 2003, Erduran et al., 2005, Liang et al., 2007), ή η περίπτωση που επιφανειακά και υπόγεια νερά μπορεί να μη βρίσκονται σε υδραυλική επαφή οπότε προσομοιώνεται η υπόγεια ροή τόσο στην κορεσμένη όσο και στην ακόρεστη ζώνη (π.χ. Freeze, 1972, Storm and Refsgaard, 1996, Ewen et al., 2000, Panday and Huyakorn, 2004, Markstrom et

al., 2008). Η κορεσμένη υπόγεια ροή θεωρείται γενικά διδιάστατη, οριζόντια ή στο κατακόρυφο επίπεδο, ή τρισδιάστατη. Για την περιγραφή της κορεσμένης–ακόρεστης ροής, η οποία θεωρείται τρισδιάστατη, διδιάστατη στο κατακόρυφο επίπεδο ή μονοδιάστατη στην κατακόρυφη διεύθυνση, χρησιμοποιείται η εξίσωση Richards (Richards, 1931).

Η ροή των επιφανειακών υδάτων στα ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών που έχουν αναπτυχθεί μέχρι σήμερα θεωρείται μονοδιάστατη ή διδιάστατη. Μονοδιάστατη θεωρείται η ροή κατά μήκος υδατορευμάτων, για την προσομοίωση της οποίας επιλύονται αριθμητικά οι εξισώσεις Saint Venant είτε στην πλήρη τους μορφή (π.χ. Freeze, 1972, Akan and Yen, 1981, Swain and Wexler, 1996, Gunduz and Aral, 2005) είτε έπειτα από απλοποιητικές παραδοχές, οπότε προκύπτουν οι εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας και του κινηματικού κύματος (π.χ. Querner, 1997, Jobson and Harbaugh, 1999, Hussein and Schwartz, 2003). Η ροή των επιφανειακών υδάτων θεωρείται διδιάστατη στα μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ της επίγειας και της υπόγειας ροής ή της αλληλεπίδρασης παράκτιων υδάτων, εκβολών ποταμών και υγροτόπων με τα υπόγεια νερά. Για την περιγραφή της επίγειας ροής χρησιμοποιούνται συνήθως οι εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας (π.χ. Restrepo et al., 1998, Vanderkwaak, 1999, Morita and Yen, 2000, Panday and Huyakorn, 2004). Για την προσομοίωση της υδροδυναμικής κυκλοφορίας σε παράκτιες περιοχές, εκβολές ποταμών και υγροτόπους επιλύονται οι διδιάστατες εξισώσεις ρηχών υδάτων (π.χ. Ebrahimi, 2004, Langevin et al., 2005, Sparks, 2005).

Η προσεγγιστική παραδοχή της σχεδόν οριζόντιας ροής ρηχών υδάτων, που σημαίνει την αμέληση των κατακόρυφων επιταχύνσεων και τη θεώρηση υδροστατικής κατανομής της πίεσης, απλοποιεί σημαντικά τη μαθηματική διατύπωση και την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων κυκλοφορίας (Χριστοδούλου, 1991). Υπάρχουν όμως πολλές περιπτώσεις που μπορεί να γίνει η παραδοχή ρηχών υδάτων αλλά η υπόθεση πως οι ταχύτητες ροής είναι περίπου οριζόντιες και δε μεταβάλλονται σημαντικά με το βάθος δεν είναι ρεαλιστική. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί ένα τρισδιάστατο μοντέλο για την προσομοίωση της υδροδυναμικής κυκλοφορίας στα επιφανειακά υδάτινα σώματα. Σημαντική ανομοιομορφία των ταχυτήτων ροής κατά την κατακόρυφο παρουσιάζεται για παράδειγμα σε περιπτώσεις ανεμογενούς κυκλοφορίας ή σε περιπτώσεις που υπάρχουν διαφορές πυκνότητας. Ο υπολογισμός του τρισδιάστατου πεδίου ροής

είναι επίσης σημαντικός για την εκτίμηση ρυπαντικών φορτίων σε παράκτια ύδατα, εκβολές ποταμών, λίμνες και υγροτόπους (Vreugdenhil, 1994). Ωστόσο, στη βιβλιογραφία δεν έχει δημοσιευθεί κάποιο ολοκληρωμένο αριθμητικό μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων νερών στο οποίο να θεωρείται τρισδιάστατη η ροή τόσο των επιφανειακών όσο και των υπόγειων υδάτων.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η αλληλεπίδραση μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών δεν επηρεάζει μόνο την ποσότητα αλλά και την ποιότητά τους. Η εκτίμηση των ρυπαντικών φορτίων σε ένα σύστημα επιφανειακών–υπόγειων νερών με τη χρήση αριθμητικών μοντέλων απαιτεί την προσομοίωση (α) της ροής των επιφανειακών υδάτων, (β) της ροής των υπόγειων υδάτων, (γ) των διεργασιών που καθορίζουν τη συμπεριφορά ρύπων στα επιφανειακά νερά (μεταφορά, διάχυση, γένεση ή απώλεια ρύπου λόγω φυσικοχημικών ή βιολογικών διεργασιών) (δ) των διεργασιών που καθορίζουν τη συμπεριφορά ρύπων στα υπόγεια νερά (μεταφορά, μοριακή διάχυση, κινηματική διασπορά, γένεση ή απώλεια ρύπου λόγω φυσικοχημικών ή βιολογικών διεργασιών) και (ε) της ανταλλαγής νερού και ρύπων μεταξύ των επιφανειακών και των υπόγειων νερών μέσω της κοινής τους διεπιφάνειας. Παρόλο που έχει αναπτυχθεί ένας σημαντικός αριθμός αριθμητικών μοντέλων για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ της ροής επιφανειακών και υπόγειων υδάτων, δεν είναι πολλά τα αριθμητικά μοντέλα προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης ροής και ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Μερικά παραδείγματα αποτελούν τα μοντέλα που παρουσιάζονται στις εργασίες των Vanderkwaak (1999), Ewen et al. (2000), Faidi et al. (2002), Lin and Medina (2003), Hussein and Schwartz (2003), Ebrahimi (2004), Gunduz and Aral (2005), Sparks (2005, 2008), Zerihun et al. (2005b) και Storm and Refsgaard (1996).

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν επίσης ελάχιστες εργασίες πειραματικής διερεύνησης της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών χρησιμοποιώντας εργαστηριακά μοντέλα (π.χ. Rowe, 1960, Ebrahimi et al., 2007, Serrano and Workman, 2008), παρόλο που υπάρχουν αρκετές εργασίες πειραματικής διερεύνησης της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών στο πεδίο. Σε εργαστηριακό επίπεδο έχουν πραγματοποιηθεί πειραματικές μετρήσεις κυρίως για την επιβεβαίωση αναλυτικών λύσεων αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών (π.χ. Rowe, 1960, Serrano and Workman, 2008). Οι μετρήσεις αυτές δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επιβεβαίωση αριθμητικών μοντέλων παρά μόνο για πολύ απλές περιπτώσεις αλληλεπίδρασης.

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή αναπτύχθηκε ένα τρισδιάστατο ολοκληρωμένο αριθμητικό μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων νερών (Integrated surface water–groundwater model, IRENE). Το IRENE αποτελείται από (α) ολοκληρωμένο υδροδυναμικό μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων νερών (IRENE–HYD) και (β) ολοκληρωμένο μοντέλο ποιότητας επιφανειακών–υπόγειων νερών (IRENE–QUAL). Οι υπολογιστικοί κώδικες καταστρώθηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN 95.

Στο IRENE–HYD επιλύονται οι εξισώσεις συνέχειας και ποσότητας κίνησης για ρηχά νερά σταθερής πυκνότητας και η μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την τρισδιάστατη μη μόνιμη ροή υπόγειων υδάτων στην κορεσμένη ζώνη ετερογενούς ανισότροπου πορώδους μέσου. Για την επίλυση των εξισώσεων ρηχών νερών χρησιμοποιείται ένα ημι–πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών, ενώ η εξίσωση που περιγράφει τη ροή των υπόγειων νερών επιλύεται εφαρμόζοντας ένα πλήρως πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών. Οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων συνδυάζονται στην κοινή διεπιφάνεια των επιφανειακών–υπόγειων νερών μέσω του νόμου του Darcy και επιλύονται εφαρμόζοντας είτε (α) έναν αλγόριθμο ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης, είτε (β) έναν αλγόριθμο εσωτερικού συνδυασμού.

Στο IRENE–QUAL χρησιμοποιούνται αριθμητικά σχήματα πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς–διάχυσης ρύπου σε τρισδιάστατο τυρβώδες πεδίο ροής επιφανειακών νερών και της εξίσωσης μεταφοράς–διασποράς ρύπου που εισάγεται σε τρισδιάστατο πεδίο ροής υπόγειων νερών. Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά ρύπων σε επιφανειακά και υπόγεια νερά συνδυάζονται στην κοινή διεπιφάνεια των επιφανειακών–υπόγειων υδάτων υπολογίζοντας τη ροή μάζας ρύπου, εγκάρσια προς την κοινή διεπιφάνεια μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, που οφείλεται τόσο στο μηχανισμό της μεταφοράς όσο και στο μηχανισμό της διασποράς. Όπως και στο IRENE–HYD, οι συνδυασμένες εξισώσεις ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών επιλύονται χρησιμοποιώντας είτε (α) έναν αλγόριθμο ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης, είτε (β) έναν αλγόριθμο εσωτερικού συνδυασμού.

Το IRENE μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης ροής και ρύπανσης μεταξύ υπόγειων νερών και παράκτιων υδάτων, εκβολών ποταμών, υγροτόπων ή λιμνών, σε περιπτώσεις όπου μπορεί να γίνει η παραδοχή ρηχών νερών αλλά η υπόθεση πως οι ταχύτητες ροής είναι περίπου οριζόντιες και δε

μεταβάλλονται σημαντικά με το βάθος δεν είναι ρεαλιστική, οπότε θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα τρισδιάστατο αριθμητικό μοντέλο για την προσομοίωση της υδροδυναμικής κυκλοφορίας στο επιφανειακό υδάτινο σώμα.

Εκτός από την αριθμητική προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, το φαινόμενο διερευνήθηκε και πειραματικά, διεξάγοντας μετρήσεις στο εργαστήριο Hyder Hydraulics του πανεπιστημίου του Cardiff. Συγκεκριμένα, διερευνήθηκε η αλληλεπίδραση ροής και ρύπανσης μεταξύ υδατορεύματος και υπόγειου υδροφορέα σε πειραματική διάταξη η οποία περιλαμβάνει ευθύγραμμο κανάλι ορθογωνικής διατομής, το οποίο διέρχεται μέσα από ομογενή και ισότροπο υδροφορέα, ο οποίος είναι κατασκευασμένος από ειδικό πορώδες υλικό του εμπορίου (polyurethane foam). Διερευνήθηκε επίσης η αλληλεπίδραση ροής και ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών σε πειραματική διάταξη η οποία κατασκευάστηκε με στόχο την προσομοίωση ιδεατής υδρολογικής λεκάνης που περιλαμβάνει υδατόρευμα και μικρή λίμνη, τα οποία επικοινωνούν μέσω αμμώδους φράγματος. Και στις δύο περιπτώσεις δημιουργήθηκαν συνθήκες μόνιμης και μη μόνιμης ροής και μετρήθηκαν (α) η στάθμη του νερού στο κανάλι και στο πορώδες μέσο και (β) οι συγκεντρώσεις συντηρητικού δείκτη στο κανάλι και στο πορώδες μέσο. Οι μετρήσεις χρησιμοποιήθηκαν για την επιβεβαίωση του IRENE. Τέλος, το IRENE εφαρμόστηκε στην περιοχή των υδρολογικών λεκανών Αχελώου, Λυσιμαχείας και Τριχωνίδας.

## 1.2 Διάρθρωση της διατριβής

Η διατριβή συγκροτήθηκε σε επτά κεφάλαια ως εξής:

### Κεφάλαιο 1

Αποτελεί την Εισαγωγή της διατριβής και περιλαμβάνει την περιγραφή του αντικειμένου και των πρωτότυπων στοιχείων της διατριβής.

### Κεφάλαιο 2

Παρουσιάζεται η βιβλιογραφική ανασκόπηση των αναλυτικών λύσεων και των αριθμητικών μοντέλων που έχουν αναπτυχθεί για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, καθώς και της πειραματικής διερεύνησης του φαινομένου στο εργαστήριο και στο πεδίο.

### **Κεφάλαιο 3**

Παρουσιάζεται το ολοκληρωμένο υδροδυναμικό αριθμητικό μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων νερών IRENE–HYD. Αρχικά διατυπώνονται οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στο IRENE–HYD για την περιγραφή της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων και στη συνέχεια παρουσιάζεται η αριθμητική τους επίλυση χρησιμοποιώντας αριθμητικά σχήματα πεπερασμένων διαφορών. Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή του συνδυασμού των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων στην κοινή διεπιφάνεια επιφανειακών–υπόγειων νερών μέσω του νόμου του Darcy και της εν συνεχεία ταυτόχρονης επίλυσής τους σε κάθε χρονικό βήμα. Περιγράφεται επίσης η μέθοδος εσωτερικού συνδυασμού των εξισώσεων των υπό–μοντέλων των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων, η οποία περιλαμβάνεται στο IRENE–HYD ως εναλλακτική της μεθόδου ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης των εξισώσεων. Τέλος, ελέγχεται η ακρίβεια του IRENE–HYD συγκρίνοντας τα αποτελέσματά του με αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων που ισχύουν για απλές περιπτώσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, καθώς και με αριθμητικές λύσεις μαθηματικών μοντέλων των οποίων η αξιοπιστία και η ακρίβεια είναι αποδεκτή.

### **Κεφάλαιο 4**

Παρουσιάζεται η ανάπτυξη του ολοκληρωμένου αριθμητικού μοντέλου ποιότητας επιφανειακών–υπόγειων νερών IRENE–QUAL. Διατυπώνονται αρχικά οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στο IRENE–QUAL για την περιγραφή της συμπεριφοράς ποιοτικών παραμέτρων σε επιφανειακά και υπόγεια νερά και στη συνέχεια παρουσιάζεται η αριθμητική τους επίλυση με μεθόδους πεπερασμένων διαφορών. Ακολούθως περιγράφεται ο συνδυασμός των εξισώσεων ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών στην κοινή διεπιφάνεια των επιφανειακών–υπόγειων υδάτων και η εν συνεχεία επίλυσή τους εφαρμόζοντας είτε έναν αλγόριθμο ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης είτε έναν αλγόριθμο εσωτερικού συνδυασμού. Τέλος παρουσιάζεται ο έλεγχος της ακρίβειας των αριθμητικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται στο IRENE–QUAL συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του μοντέλου με διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις.

### **Κεφάλαιο 5**

Περιγράφεται η διεξαγωγή των πειραματικών μετρήσεων στο εργαστήριο Hyder Hydraulics του πανεπιστημίου του Cardiff. Συγκεκριμένα περιγράφονται αναλυτικά οι πειραματικές διατάξεις στις οποίες διεξήχθησαν οι μετρήσεις, τα όργανα και τα



αντιδραστήρια που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και οι μετρήσεις στάθμεων και συγκεντρώσεων συντηρητικού δείκτη που πραγματοποιήθηκαν για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Παρουσιάζεται επίσης η ρύθμιση και η επιβεβαίωση του IRENE χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα.

### **Κεφάλαιο 6**

Παρουσιάζεται η εφαρμογή του IRENE–HYD στην περιοχή των υδρολογικών λεκανών Αχελώου–Λυσιμαχείας–Τριχωνίδα.

### **Κεφάλαιο 7**

Παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την παρούσα διατριβή.

## **1.3 Πρωτότυπα στοιχεία της διατριβής**

Πρωτότυπα στοιχεία της διατριβής αποτελούν τα παρακάτω:

- ✓ Η ανάπτυξη ενός τρισδιάστατου ολοκληρωμένου αριθμητικού μοντέλου προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης ροής και ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Σημαντικά στοιχεία του μοντέλου αποτελούν η δυνατότητα εκτίμησης της χρονικά μεταβαλλόμενης θέσης της ελεύθερης επιφάνειας επιφανειακών και υπόγειων νερών σε δύσκολες περιπτώσεις όπου λαμβάνει χώρα διαβροχή και ξήρανση περιοχών του υπολογιστικού πλέγματος, καθώς και η δυνατότητα εκτίμησης της επιφάνειας διήθησης (seepage face).
- ✓ Η μέθοδος συνδυασμού των εξισώσεων που χρησιμοποιούνται στο IRENE–HYD για την περιγραφή της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων. Συγκεκριμένα, οι συνδυασμένες εξισώσεις των επιφανειακών και των υπόγειων νερών επιλύονται ταυτόχρονα σε κάθε χρονικό βήμα με τρόπο ο οποίος δεν είναι υπολογιστικά δαπανηρός. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι το μικρό υπολογιστικό της ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης των εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων νερών οφείλεται στο ημί–πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιείται στο υπό–μοντέλο ροής επιφανειακών υδάτων του IRENE–HYD. Εφαρμόζοντας το εν λόγω ημί–πεπλεγμένο σχήμα, η επίλυση των εξισώσεων συνέχειας και ποσότητας κίνησης των επιφανειακών νερών

ανάγεται ουσιαστικά στην επίλυση μίας μόνο εξίσωσης, όπου το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών νερών είναι ο μοναδικός άγνωστος. Έτσι, η προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών επιτυγχάνεται με την ταυτόχρονη επίλυση δύο μόνο εξισώσεων, των συνδυασμένων εξισώσεων της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων και συνέχειας των υπόγειων υδάτων.

- ✓ Η μέθοδος που εφαρμόζεται στο υπό-μοντέλο ροής υπόγειων νερών του IRENE-HYD για την εκτίμηση της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών έχει πρωτότυπα στοιχεία και είναι η πρώτη φορά που παρόμοια μέθοδος εφαρμόζεται σε κώδικα πεπερασμένων διαφορών.

Ο υπολογισμός της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας είναι μία από τις βασικότερες δυσκολίες στην προσομοίωση της ροής των υπόγειων υδάτων. Στο IRENE-HYD ακολουθείται ένας αλγόριθμος σταθερού πλέγματος για τον προσδιορισμό της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών, δηλαδή το υπολογιστικό πλέγμα παραμένει αμετάβλητο κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης και προσδιορίζεται η θέση της ελεύθερης επιφάνειας εντός αυτού. Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου που εφαρμόζεται στο IRENE-HYD για τον προσδιορισμό της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών είναι ότι υπολογίζονται πιεζομετρικά φορτία για όλους τους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος των υπόγειων υδάτων – και όχι μόνο για το τμήμα του υπολογιστικού πλέγματος που βρίσκεται κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια των υπόγειων νερών – οπότε δεν υπάρχει ανάγκη απομόνωσης των ‘ξηρών’ υπολογιστικών κελιών από το υπολογιστικό πεδίο και μετέπειτα μετατροπής τους σε ‘ενεργά’ (μερικώς ή πλήρως κορεσμένα) κελιά. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο χειρισμός των ‘ξηρών’ υπολογιστικών κελιών στα αριθμητικά μοντέλα είναι δύσκολος και η μετατροπή τους από ‘ανενεργά’ σε ‘ενεργά’ μερικώς ή πλήρως κορεσμένα κελιά μπορεί να οδηγήσει σε σφάλματα ισοζυγίου μάζας και ταλαντώσεις στην αριθμητική λύση.

- ✓ Η μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών του επιφανειακού υδάτινου σώματος που εφαρμόζεται στο υπό-μοντέλο επιφανειακών νερών του IRENE-HYD. Η μέθοδος που εφαρμόζεται αποτελεί βελτίωση της μεθόδου MLU (Maximum Level Upstreaming) (Casulli and Cheng, 1992) και δεν οδηγεί σε υπερεκτίμηση του όγκου νερού που μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα υπολογιστικό κελί.

- ✓ Η πειραματική διερεύνηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών στο εργαστήριο. Παρόμοιες εργασίες δεν υπάρχουν διαθέσιμες στην βιβλιογραφία και οι πειραματικές μετρήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επιβεβαίωση αριθμητικών μοντέλων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

---

### 2.1 Εισαγωγή

Στις επόμενες παραγράφους γίνεται μία συστηματική και κριτική παρουσίαση των δημοσιεύσεων με θέμα τη διατύπωση αναλυτικών λύσεων και την ανάπτυξη αριθμητικών μοντέλων για τη μελέτη προβλημάτων αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών, καθώς και την πειραματική διερεύνηση του φαινομένου στο εργαστήριο και στο πεδίο.

### 2.2 Αναλυτικές λύσεις αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών

Οι αναλυτικές λύσεις που έχουν αναπτυχθεί για προβλήματα αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών είναι σημαντικές γιατί (α) η εφαρμογή τους είναι απλή και αποτελούν την ευκολότερη και γρηγορότερη μέθοδο εκτίμησης της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, (β) αναδεικνύουν ποιες είναι οι βασικές παράμετροι που επηρεάζουν την επιφανειακή και την υπόγεια ροή σε ένα σύστημα επιφανειακών–υπόγειων υδάτων και (γ) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επιβεβαίωση αριθμητικών μοντέλων (Singh, 2004). Το βασικό μειονέκτημα

των αναλυτικών λύσεων είναι ότι μπορούν να εφαρμοστούν μόνο σε απλές περιπτώσεις αλληλεπίδρασης.

Η πλειονότητα των αναλυτικών λύσεων που έχουν αναπτυχθεί για την αλληλεπίδραση επιφανειακών–υπόγειων νερών αφορούν στην αλληλεπίδραση μεταξύ υπόγειων νερών και υδατορευμάτων (π.χ. Hall and Moench, 1972, Marino, 1973, Singh and Rai, 1980, Govindaraju and Koelliker, 1994, Workman et al., 1997, Ostfeld et al., 1999, Parlange et al., 2000), ενώ υπάρχει και ένας μικρός αριθμός δημοσιεύσεων, οι οποίες έχουν ως θέμα την αλληλεπίδραση μεταξύ υπόγειων νερών και λιμνών (π.χ. Ilyinsky and Kacimov, 1992, Kacimov, 2000, Bakker, 2004). Όλες οι αναλυτικές λύσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ υπόγειων νερών και λιμνών και οι περισσότερες αναλυτικές λύσεις που έχουν αναπτυχθεί για την αλληλεπίδραση μεταξύ υπόγειων νερών και υδατορευμάτων, έχουν προκύψει επιλύοντας μόνο τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την υπόγεια ροή. Η υδραυλική επικοινωνία με το υδατόρευμα ή τη λίμνη λαμβάνεται υπ' όψη ως οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet ή Cauchy για την επίλυση της εξίσωσης της υπόγεια ροής. Στη βιβλιογραφία συναντά κανείς τέσσερις μόνο δημοσιεύσεις με θέμα την αλληλεπίδραση μεταξύ υπόγειων νερών και υδατορευμάτων, στις οποίες θεωρούνται οι εξισώσεις τόσο της επιφανειακής όσο και της υπόγεια ροής για τη διατύπωση αναλυτικών λύσεων (Hunt, 1990, Lal, 2001, Hantush et al., 2002, Hantush, 2005).

### **2.2.1 Αναλυτικές λύσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ υπόγειων νερών και υδατορευμάτων: επίλυση της εξίσωσης υπόγεια ροής**

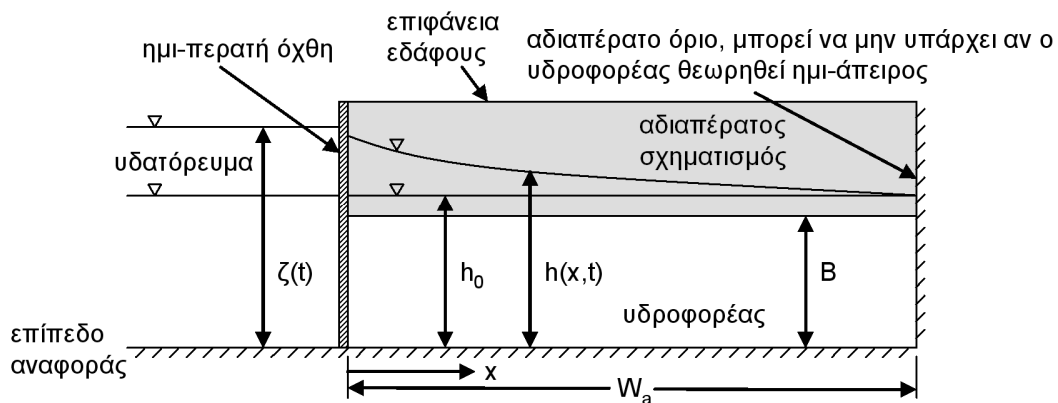
Ένας μεγάλος αριθμός αναλυτικών λύσεων έχει διατυπωθεί για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών, λύνοντας μόνο την εξίσωση που περιγράφει την υπόγεια ροή. Οι λύσεις αυτές μπορούν να διακριθούν με βάση τον τύπο του υδροφορέα που αλληλεπιδρά με το υδατόρευμα (περιορισμένος, φρεάτιος ή με διαρροή) και την εξίσωση που επιλύεται για την εξαγωγή τους.

Στις εργασίες που παρουσιάζονται στις επόμενες παραγράφους θεωρείται μη μόνιμη υπόγεια ροή. Οι αναλυτικές λύσεις προβλημάτων μη μόνιμης ροής παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον σε σύγκριση με τις λύσεις μόνιμης ροής, καθώς μπορεί να εκτιμηθεί η απόκριση του υδροφορέα σε μεταβολές της στάθμης του νερού στο υδατόρευμα. Αναλυτικές λύσεις προβλημάτων μόνιμης υπόγεια ροής,

οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υπόγειων νερών και υδατορευμάτων, παρουσιάζονται στα βιβλία της Polubarinova-Kochina (1962), των Avarin and Numerov (1965) και του Bear (1979). Ενδεικτικά αναφέρονται επίσης οι ακόλουθες δημοσιεύσεις: Bakker (1999), Kallin et al. (2000) και Anderson (2002, 2003a, b).

2.2.1.1 Περιορισμένοι υδροφορείς

Στις εργασίες με θέμα την αλληλεπίδραση υδατορεύματος–περιορισμένου υδροφορέα, ο υδροφορέας θεωρείται ομογενής και ισότροπος και η υπόγεια ροή οριζόντια μονοδιάστατη. Στην πλειονότητα των δημοσιεύσεων εξετάζεται η αλληλεπίδραση περιορισμένου υδροφορέα με υδατόρευμα πλήρους διεύθυνσης όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1. Ο υδροφορέας μπορεί να είναι πεπερασμένου πλάτους ή ημι-άπειρος. Έχει σταθερό πάχος και οριζόντιο, αδιαπέρατο πυθμένα. Στη διεύθυνση  $x$  περιορίζεται στο ένα άκρο του από το υδατόρευμα και στο άλλο άκρο του, αν είναι πεπερασμένου πλάτους, από αδιαπέρατο όριο. Το υδατόρευμα και ο υδροφορέας μπορεί να βρίσκονται σε άμεση υδραυλική επαφή ή να διαχωρίζονται από την ημι-περατή όχθη του υδατορεύματος, για την οποία γίνεται η παραδοχή ότι έχει μηδενική αποθηκευτικότητα. Θεωρώντας τον υδροφορέα ομογενή και ισότροπο και την υπόγεια ροή οριζόντια, μονοδιάστατη στη διεύθυνση  $x$ , περιγράφεται από την εξίσωση διάχυσης (2.1) (βλ. Bear, 1979, σελ. 105). Οι αρχικές και οριακές συνθήκες για το πρόβλημα δίνονται από τις εξισώσεις (2.2)–(2.4β).



**Σχήμα 2.1:** Γενική περίπτωση αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–περιορισμένου υδροφορέα, αναλυτική επίλυση μονοδιάστατης οριζόντιας υπόγεια ροής

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h(x,t)}{\partial t}, \quad x \geq 0 \text{ ή } 0 \leq x \leq W_a, \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

$$h(x, 0) = h_0, \quad x \geq 0 \text{ ή } 0 \leq x \leq W_a \quad (2.2)$$

$$h(0, t) = \zeta(t), \quad t \geq 0, \text{ για υδατόρευμα σε άμεση επαφή με τον υδροφορέα} \quad (2.3\alpha)$$

$$\frac{\partial h(0, t)}{\partial x} = \frac{1}{a} [h(0, t) - \zeta(t)], \quad t \geq 0, \text{ για υδατόρευμα με ημι-περατή όχθη} \quad (2.3\beta)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x, t) = h_0, \quad t \geq 0, \text{ για ημι-άπειρο υδροφορέα} \quad (2.4\alpha)$$

$$\frac{\partial h(W_a, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0, \text{ για υδροφορέα πεπερασμένου πλάτους} \quad (2.4\beta)$$

Στο Σχήμα 2.1 και στις εξισώσεις (2.1)–(2.4β),  $t$  [T] είναι ο χρόνος,  $h(x, t)$  [L] είναι το πιεζομετρικό φορτίο,  $S$  και  $T$  [ $L^2T^{-1}$ ] είναι η αποθηκευτικότητα και η διοχευτικότητα του υδροφορέα, αντίστοιχα,  $\zeta(t)$  [L] είναι το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας του νερού στο υδατόρευμα (ή διαφορετικά η στάθμη του νερού στο υδατόρευμα),  $h_0$  [L] είναι η αρχική τιμή των πιεζομετρικών φορτίων στον υδροφορέα, η οποία συμπίπτει με την αρχική τιμή της στάθμης του νερού στο υδατόρευμα και  $W_a$  [L],  $B$  [L] είναι το πλάτος και το πάχος του υδροφορέα, αντίστοιχα. Η παράμετρος  $a$  [L] εκφράζει την αντίσταση που προκαλείται στη ροή μεταξύ του υδατορεύματος και του υδροφορέα λόγω της ημι-περατής όχθης του υδατορεύματος και ορίζεται σύμφωνα με τον Hantush (1965) ως  $a = Kb/K_b$ , όπου  $K$  [ $LT^{-1}$ ] είναι η υδραυλική αγωγιμότητα του υδροφορέα και  $b$  [L],  $K_b$  [ $LT^{-1}$ ] είναι το πάχος και η υδραυλική αγωγιμότητα της ημι-περατής όχθης, αντίστοιχα. Η παράμετρος  $a$  μπορεί να θεωρηθεί ως ένα υποθετικό πλάτος υδροφορέα με μηδενική αποθηκευτικότητα, το οποίο θα χρειαζόταν για να προκαλέσει την ίδια πτώση πιεζομετρικού φορτίου με αυτήν που προκαλείται λόγω της ημι-περατής όχθης του υδατορεύματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το πρόβλημα εκτίμησης της αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–περιορισμένου υδροφορέα καταλήγει στο πρόβλημα επίλυσης της εξίσωσης διάχυσης για διάφορες οριακές συνθήκες. Η εξίσωση διάχυσης μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά χρησιμοποιώντας διάφορες μεθόδους (βλ. π.χ. Pipes and Harvill, 1970). Για παράδειγμα, πολύ συχνά χρησιμοποιείται η μέθοδος μετασχηματισμών Laplace (Pipes and Harvill, 1970). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι περισσότερες αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης διάχυσης που διατυπώνονται στις εργασίες που εξετάζουν την αλληλεπίδραση υδατορεύματος–περιορισμένου υδροφορέα είναι γνωστές από την επίλυση ανάλογων προβλημάτων αγωγής θερμότητας (Carslaw and Jaeger, 1959).

Οι Rowe (1960) και Hantush (1961a) παρουσίασαν αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης διάχυσης για ημι-άπειρο υδροφορέα, για την περίπτωση γραμμικής

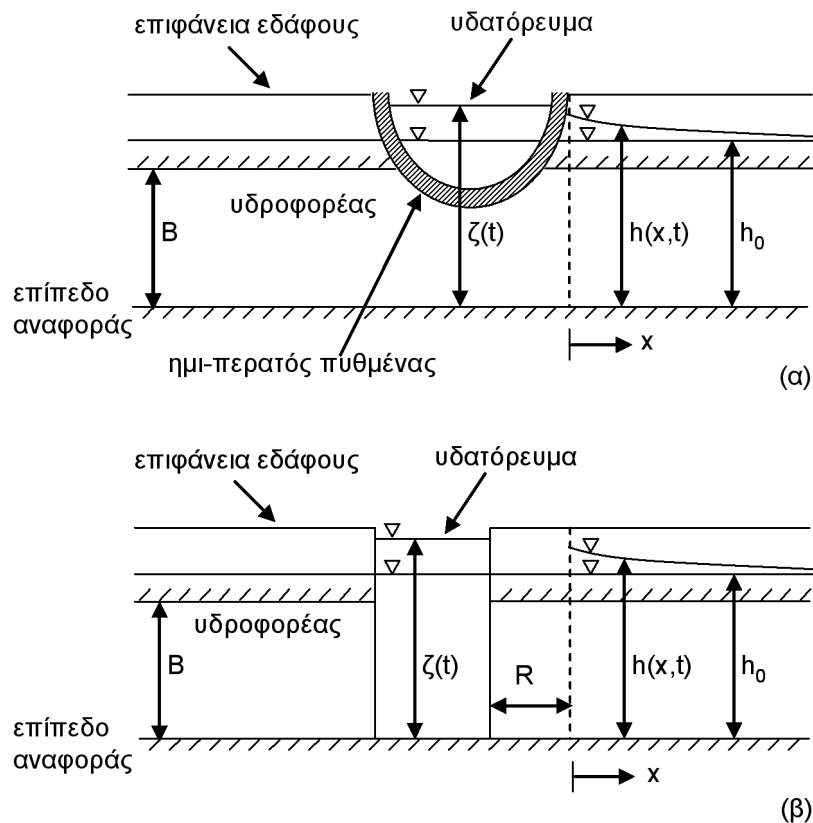
μεταβολής της στάθμης του υδατορεύματος με το χρόνο. Στην εργασία των Cooper and Rorabaugh (1963) αναπτύχθηκαν λύσεις για ημι-άπειρο και για πεπερασμένου πλάτους υδροφορέα, για πλημμυρικό κύμα ημιτονοειδούς μορφής στο υδατόρευμα. Ο Ferris (1963) παρουσίασε μία αναλυτική λύση για τα πιεζομετρικά φορτία σε ημι-άπειρο υδροφορέα, για συνεχή ημιτονοειδή διακύμανση της στάθμης του νερού στο υδατόρευμα. Η λύση του Ferris (1963) ισχύει μετά την αποκατάσταση μόνιμης περιοδικής ροής. Σε πάρα πολλές εργασίες διατυπώθηκαν αναλυτικές λύσεις για ημι-άπειρο και για πεπερασμένου πλάτους υδροφορέα, για την περίπτωση διακύμανσης της στάθμης του υδατορεύματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση μοναδιαίου βήματος (Stallman, 1962, Pinder et al., 1969, Singh, 1969, Venetis, 1970, Hall and Moench, 1972). Στην εργασία των Hall and Moench (1972) εξετάστηκε για πρώτη φορά η περίπτωση υδατορεύματος με ημι-περατή όχθη.

Η εργασία του Singh (2004) αποτελεί εξέλιξη των προηγούμενων εργασιών, καθώς ο συγγραφέας εξέτασε την αλληλεπίδραση ομογενούς και ισότροπου περιορισμένου υδροφορέα άπειρου πλάτους με υδατόρευμα μερικής διείσδυσης (Σχήμα 2.2 (α)). Παρουσίασε αναλυτικές λύσεις για την απόκριση του υδροφορέα σε: (α) συνεχή ημιτονοειδή διακύμανση της στάθμης του υδατορεύματος, (β) πλημμυρικό κύμα ημιτονοειδούς μορφής στο υδατόρευμα, (γ) διακύμανση της στάθμης του υδατορεύματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση μοναδιαίου βήματος και (δ) γραμμική μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος.

Ο Singh (2004) απλοποίησε την επίλυση του πραγματικού προβλήματος θεωρώντας την ισοδύναμη περίπτωση ενός υδατορεύματος πλήρους διείσδυσης (Σχήμα 2.2 (β)). Εισήγαγε ένα πρόσθετο, υποθετικό πλάτος υδροφορέα,  $R$  [L], με μηδενική αποθηκευτικότητα, το οποίο θα χρειαζόταν για να προκαλέσει την ίδια πτώση πιεζομετρικού φορτίου με αυτή που προκαλείται λόγω της ημι-περατότητας του πυθμένα και των όχθων και της μερικής διείσδυσης του υδατορεύματος. Συνεπώς η παράμετρος  $R$  έχει την ίδια φυσική σημασία με την παράμετρο  $a$  του Hantush (1965). Εκφράζουν και οι δύο την αντίσταση στη ροή μεταξύ του υδατορεύματος και του υδροφορέα. Η παράμετρος  $R$  περιλαμβάνει όμως επιπλέον την αντίσταση που οφείλεται στη μερική διείσδυση του υδατορεύματος στον υδροφορέα. Θεωρώντας την υπόγεια ροή οριζόντια, μονοδιάστατη στη διεύθυνση  $x$ , το απλοποιημένο πρόβλημα του σχήματος 2.2 (β) περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.1), (2.2), (2.3β) και (2.4α), αν η παράμετρος  $a$  αντικατασταθεί από την παράμετρο  $R$ .



Οι αναλυτικές λύσεις που παρουσίασε ο Singh (2004) είναι οι πιο γενικές από τις λύσεις που έχουν αναπτυχθεί για ημι-άπειρους περιορισμένους υδροφορείς. Πολλές από τις λύσεις παλαιότερων εργασιών προκύπτουν σαν ειδικές περιπτώσεις των λύσεων του Singh (2004). Πιο συγκεκριμένα: (α) για  $R=0$  (υδατόρευμα πλήρους διείσδυσης σε άμεση υδραυλική επαφή με τον υδροφόρα), οι λύσεις του Singh (2004) για πλημμυρικό κύμα και για γραμμική μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος συμπίπτουν με τις λύσεις των Cooper and Rorabaugh (1963) και Hantush (1961a), αντίστοιχα, (β) η λύση που παρουσίασε ο Singh (2004) για διακύμανση της στάθμης του υδατορεύματος που περιγράφεται από τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση είναι όμοια με τη λύση των Hall and Moench (1972), αν η παράμετρος  $R$  αντικατασταθεί από την παράμετρο  $a$  και (γ) για  $R=0$  και για μεγάλες τιμές του χρόνου, οπότε έχει αποκατασταθεί μόνιμη περιοδική ροή, η λύση που παρουσίασε ο Singh (2004) για ημιτονοειδή μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος συμπίπτει με τη λύση του Ferris (1963).



**Σχήμα 2.2:** Περίπτωση αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–περιορισμένου υδροφόρα που εξετάστηκε από τον Singh (2004): (α) πραγματική περίπτωση και (β) απλοποιημένη περίπτωση

Σε όλες τις εργασίες που αναλύθηκαν παραπάνω, διατυπώθηκαν αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης διάχυσης για απλές οριακές συνθήκες, όπως π.χ. για ημιτονοειδή ή γραμμική μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος με το χρόνο. Ωστόσο, η διακύμανση της στάθμης του νερού σε ένα υδατόρευμα συνήθως δεν περιγράφεται από κάποια αναλυτική συνάρτηση. Για την εκτίμηση της απόκρισης του υδροφορέα σε τυχαία διακύμανση της στάθμης του υδατορεύματος, χρησιμοποιούνται ολοκληρώματα συνέλιξης. Το ολοκλήρωμα συνέλιξης ή ολοκλήρωμα Duhamel είναι ένας τρόπος υπολογισμού της απόκρισης ενός γραμμικού συστήματος σε τυχαία διαταραχή, χρησιμοποιώντας τη γνωστή απόκριση του συστήματος σε διαταραχή που περιγράφεται από τη μοναδιαία βηματική ή από τη μοναδιαία κρουστική συνάρτηση (Meirovitch, 1986).

Για την περίπτωση της αλληλεπίδρασης υδατορευμάτων–υπόγειων νερών, η απόκριση των πιεζομετρικών φορτίων σε τυχαία μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος μπορεί να υπολογιστεί από τα ακόλουθα ολοκληρώματα συνέλιξης (Hall and Moench, 1972):

$$h(x,t) = \int_0^t \zeta(\tau) h_p(x,t-\tau) d\tau \quad \text{ή} \quad h(x,t) = \int_0^t \frac{\partial \zeta(\tau)}{\partial \tau} h_s(x,t-\tau) d\tau \quad (2.5)$$

όπου  $h_p(x,t)$  και  $h_s(x,t)$  συμβολίζουν τις αποκρίσεις των πιεζομετρικών φορτίων σε διακυμάνσεις της στάθμης του υδατορεύματος που περιγράφονται από τις συναρτήσεις μοναδιαίας κρούσης και μοναδιαίου βήματος, αντίστοιχα. Καθώς η στάθμη του υδατορεύματος είναι συνήθως γνωστή σε διακριτές χρονικές στιγμές, τα ολοκληρώματα συνέλιξης λύνονται αριθμητικά, αφού γραφτούν σε διακριτοποιημένη μορφή:

$$h(x, nst\Delta t) = \sum_{n=1}^{nst} \zeta(n) h_p [x, (nst - n + 1)\Delta t] \quad \text{ή} \quad (2.6)$$

$$h(x, nst\Delta t) = \sum_{n=1}^{nst} \frac{\Delta \zeta(n)}{\Delta t} h_s [x, (nst - n + 1)\Delta t]$$

όπου  $\Delta t$  είναι το μέγεθος του χρονικού βήματος ανά το οποίο είναι γνωστή η στάθμη του υδατορεύματος,  $nst$  είναι ο αριθμός των χρονικών βημάτων,  $n$  είναι ο δείκτης του χρονικού βήματος και  $\Delta \zeta(n) = \zeta(n) - \zeta(n-1)$  είναι η μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών.

Ολοκληρώματα συνέλιξης για τον υπολογισμό της απόκρισης περιορισμένου υδροφορέα σε τυχαία μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος χρησιμοποίησε ο Singh (2004). Οι Barlow et al. (2000) χρησιμοποίησαν επίσης ολοκληρώματα συνέλιξης για να εκτιμήσουν τη μεταβολή των πιεζομετρικών φορτίων σε περιορισμένο υδροφορέα, λόγω τυχαίας διακύμανσης της στάθμης του υδατορεύματος, για τις ίδιες περιπτώσεις αλληλεπίδρασης που εξέτασαν οι Hall and Moench (1972).

Στον Πίνακα 2.1 συνοψίζονται οι αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης διάχυσης που χρησιμοποιούνται συχνότερα για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–περιορισμένου υδροφορέα.

**Πίνακας 2.1:** Αναλυτικές λύσεις της μονοδιάστατης εξίσωσης διάχυσης για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–περιορισμένου υδροφορέα

Εργασία	Οριακές συνθήκες	Μέθοδος επίλυσης
Hantush (1961a)	(2.3α) και (2.4α), $\zeta(t) = h_0 + ct$	μετασχηματισμοί Laplace, γνωστή λύση από την επίλυση ανάλογου προβλήματος αγωγής θερμότητας (Carslaw and Jaeger, 1959, σελ. 335–336)
Ferris (1963)	(2.3α) και (2.4α), $\zeta(t) = h_0 + \zeta' \sin(\omega t + \varepsilon)$	γνωστή λύση από την επίλυση ανάλογου προβλήματος αγωγής θερμότητας (Ingersoll et al., 1948, σελ. 46–47)
Cooper and Rorabaugh (1963)	(2.3α) και (2.4β), $\zeta(t) = \begin{cases} h_0 + N\zeta'e^{-\delta t}(1 - \cos \omega t), & 0 \leq t \leq t_d \\ h_0, & t \geq t_d \end{cases}$	μετασχηματισμοί Laplace
Cooper and Rorabaugh (1963)	(2.3α) και (2.4α), $\zeta(t) = \begin{cases} h_0 + 0.5\zeta''(1 - \cos \omega t), & 0 \leq t \leq t_d \\ h_0, & t \geq t_d \end{cases}$	μετασχηματισμοί Laplace και ολοκληρώματα συνέλιξης
Hall and Moench (1972)	(2.3α) και (2.4α), $\zeta(t) = \begin{cases} h_0, & t = 0 \\ h_0 + 1, & t \geq 0 \end{cases}$	μετασχηματισμοί Laplace, γνωστή λύση από Carslaw and Jaeger (1959, σελ. 305)
Hall and Moench (1972)	(2.3α) και (2.4β)	μετασχηματισμοί Laplace και ολοκληρώματα συνέλιξης, γνωστή λύση από Cooper and Rorabaugh (1963, σελ. 352)
Hall and Moench (1972)	(2.3β) και (2.4α)	μετασχηματισμοί Laplace, γνωστή λύση από Carslaw and Jaeger (1959, σελ. 306)

Hall and Moench (1972)	(2.3β) και (2.4β)	μετασχηματισμοί Laplace, γνωστή λύση από Carslaw and Jaeger (1959, σελ. 317)
Singh (2004)	(2.3β) και (2.4α), $\zeta(t) = h_0 + \zeta' \sin(\omega t + \varepsilon)$	μετασχηματισμοί Laplace, γνωστή λύση από Carslaw and Jaeger (1959, σελ. 399–402)
Singh (2004)	(2.3β) και (2.4α), $\zeta(t) = \begin{cases} h_0, & t = 0 \\ h_0 + 1, & t \geq 0 \end{cases}$	μετασχηματισμοί Laplace, γνωστή λύση από Carslaw and Jaeger (1959, σελ. 306)
Singh (2004)	(2.3β) και (2.4α), $\zeta(t) = h_0 + ct$	μετασχηματισμοί Laplace, γνωστή λύση από Carslaw and Jaeger (1959, σελ. 335–336)
Singh (2004)	(2.3β) και (2.4α), $\zeta(t) = \begin{cases} h_0 + 0.5\zeta'(1 - \cos\omega t), & 0 \leq t \leq t_d \\ h_0, & t \geq t_d \end{cases}$	μετασχηματισμοί Laplace, γνωστή λύση από Carslaw and Jaeger (1959, σελ. 387–388)
Singh (2004)	(2.3β) και (2.4α), τυχαία μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος	ολοκληρώματα συνέλιξης

όπου:  $c$ =σταθερά,  $\zeta'$ =πλάτος κυματισμού [L],  $\tau$ =περίοδος κυματισμού [T],  $\omega = 2\pi/\tau$ =γωνιακή συχνότητα [T<sup>-1</sup>],  $\varepsilon$ =διαφορά φάσης,  $t_d$ =διάρκεια πλημμυρικού κύματος [T],  $\delta = \omega c \cot(\omega t_c/2)$ =σταθερά που καθορίζει το βαθμό ασυμμετρίας του πλημμυρικού κύματος,  $t_c$ =χρόνος που παρατηρείται η κορυφή του πλημμυρικού κύματος και

$$N = \frac{\delta^2 + \omega^2}{2\omega^2} e^{2\delta/\omega} \arctan(\omega/\delta)$$

### 2.2.1.2 Φρεάτιοι υδροφορείς

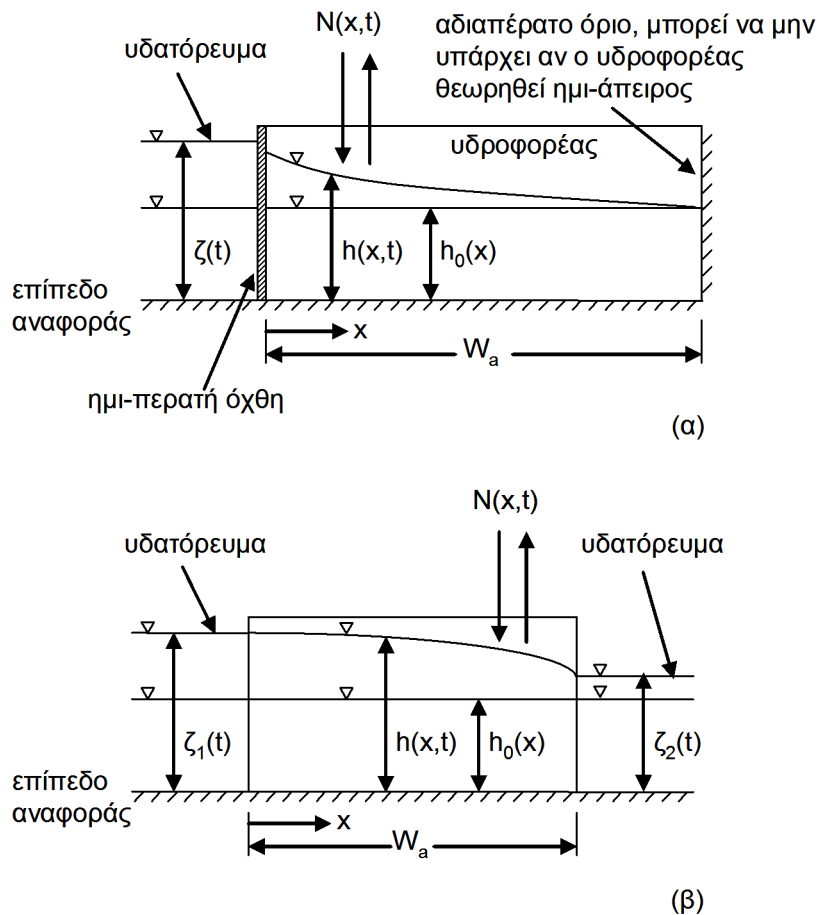
Το πρόβλημα της διατύπωσης αναλυτικών λύσεων για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορευμάτων και φρεάτιων υδροφορέων έχει προσεγγιστεί με δύο τρόπους στις σχετικές εργασίες. Σύμφωνα με την πρώτη προσέγγιση, θεωρείται μονοδιάστατη οριζόντια ροή σε ομογενή και ισότροπο υδροφορέα. Η δεύτερη προσέγγιση θεωρεί την υπόγεια ροή διδιάστατη στο κατακόρυφο επίπεδο  $x-z$ .

Οι περιπτώσεις αλληλεπίδρασης που εξετάζονται στις εργασίες που ακολουθούν την πρώτη προσέγγιση φαίνονται στο Σχήμα 2.3. Ο υδροφορέας μπορεί να είναι ημι-άπειρος ή πεπερασμένου πλάτους και περιορίζεται στο ένα άκρο του από υδατόρευμα πλήρους διείσδυσης (Σχήμα 2.3 (α)). Η περίπτωση υδροφορέα πεπερασμένου πλάτους που περιορίζεται από δύο υδατορεύματα πλήρους διείσδυσης (Σχήμα 2.3 (β)), έχει επίσης διερευνηθεί σε αρκετές δημοσιεύσεις. Θεωρώντας ότι ισχύει η παραδοχή Dupuit οριζόντιας ροής και ότι ο φρεάτιος

υδροφορέας είναι ομογενής και ισότροπος, η υπόγεια ροή περιγράφεται από την εξίσωση Boussinesq (Boussinesq, 1904):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h(x,t) \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{N(x,t)}{K} = \frac{S_y}{K} \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \quad (2.7)$$

όπου  $N(x,t)$  [ $LT^{-1}$ ] συμβολίζει την κατακόρυφη διήθηση (π.χ. λόγω βροχόπτωσης) ή την εξατμισοδιαπνοή και  $S_y$  είναι η ειδική απόδοση του υδροφορέα. Αφού η ροή στον φρεάτιο υδροφορέα θεωρείται οριζόντια, οι τιμές των πιεζομετρικών φορτίων  $h(x,t)$  συμπίπτουν με το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας του υπόγειου νερού. Στο Σχήμα 2.3, το αρχικό υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας, η οποία δεν είναι απαραίτητα οριζόντια, συμβολίζεται με  $h_0(x)$ .



**Σχήμα 2.3:** Περιπτώσεις αλληλεπίδρασης υδατορέυματος–φρεατίου υδροφορέα, αναλυτική επίλυση μονοδιάστατης οριζόντιας υπόγεια ροής

Η εξίσωση Boussinesq είναι μία μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση και η αναλυτική της επίλυση δεν είναι εύκολη. Οι περισσότερες αναλυτικές λύσεις που έχουν διατυπωθεί μέχρι σήμερα ισχύουν για απλές αρχικές και οριακές συνθήκες

(π.χ. Polubarinova–Kochina, 1962, Basak, 1979, Singh and Rai, 1980). Μία πιο γενική λύση της εξίσωσης Boussinesq, για ημι-άπειρο και για πεπερασμένου πλάτους υδροφορέα (Σχήμα 2.3 (β)), αναπτύχθηκε από τους Parlange et al. (2000), οι οποίοι θεώρησαν ότι η μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος περιγράφεται από κάποια αναλυτική συνάρτηση. Επίσης, οι Serrano and Workman (1998) διατύπωσαν μία αναλυτική λύση για το πρόβλημα του σχήματος 2.3 (β), θεωρώντας ότι οι στάθμες  $\zeta_1(t)$  και  $\zeta_2(t)$  των δύο υδατορευμάτων μπορεί να περιγράφονται από κάποια αναλυτική συνάρτηση ή να μεταβάλλονται τυχαία. Για την επίλυση της εξίσωσης Boussinesq, οι Serrano and Workman (1998) χρησιμοποίησαν τη μέθοδο διάσπασης του Adomian (Adomian decomposition method, Adomian, 1994). Σε μία πιο πρόσφατη εργασία των Serrano et al. (2007), οι συγγραφείς εφάρμοσαν τις μεθόδους χωρικής μερικής διάσπασης (spatial partial decomposition) και χρονικής μερικής διάσπασης (temporal partial decomposition) κατά Adomian για την επίλυση της εξίσωσης Boussinesq, για ημιτονοειδή μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των αναλυτικών λύσεων με αυτά μίας αριθμητικής λύσης, συμπέραναν ότι η μέθοδος της χρονικής–μερικής διάσπασης είναι πιο ακριβής από τη μέθοδο της χωρικής–μερικής διάσπασης.

Ωστόσο, η εξίσωση Boussinesq συνήθως γραμμικοποιείται ώστε να απλοποιηθεί η διαδικασία επίλυσης. Έτσι, στις περισσότερες εργασίες (π.χ. Marino, 1973, 1974, Govindaraju and Koelliker, 1994, Hogarth et al., 1997, 1999, Workman et al., 1997, Ostfeld et al., 1999, Kim and Ann, 2001) επιλύεται μία από τις γραμμικοποιημένες μορφές (2.8α) και (2.8β) της εξίσωσης Boussinesq (βλ. Bear, 1972, σελ. 408, 417) για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορεύματος και φρεάτιου υδροφορέα:

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} + \frac{N(x,t)}{\bar{T}} = \frac{S_y}{\bar{T}} \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \quad (2.8\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 h^2(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2N(x,t)}{K} = \frac{S_y}{\bar{T}} \frac{\partial h^2(x,t)}{\partial t} \quad (2.8\beta)$$

όπου  $\bar{T} = K\bar{D}$  είναι η μέση διοχετευτικότητα του υδροφορέα και  $\bar{D}$  συμβολίζει μία μέση τιμή για το κορεσμένο βάθος ροής.

Η εξίσωση (2.8α), η οποία είναι η μονοδιάστατη, μη ομογενής εξίσωση διάχυσης, προκύπτει από την εξίσωση Boussinesq κάνοντας την παραδοχή ότι οι διακυμάνσεις της ελεύθερης επιφάνειας του υδροφορέα είναι μικρές σε σύγκριση με το μέσο

κορεσμένο βάθος ροής. Έτσι, το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας  $h(x,t)$  μέσα στον πρώτο μερικό διαφορικό τελεστή στην εξίσωση Boussinesq, θεωρείται σταθερό και ίσο με  $D$  (Bear, 1972). Η εξίσωση (2.8β), η οποία είναι γραμμική εξίσωση του  $h^2$ , προκύπτει γράφοντας το δεξί μέλος της εξίσωσης Boussinesq ως  $\frac{S_y}{D} \frac{\partial (h^2 / 2)}{\partial t}$  (Bear, 1972). Η εξίσωση (2.8β) είναι ουσιαστικά η μη ομογενής εξίσωση διάχυσης ως προς  $h^2$ .

Μερικές από τις συχνότερα εφαρμοζόμενες αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης Boussinesq (2.7) ή κάποιας από τις γραμμικοποιημένες της μορφές (2.8α) και (2.8β) για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–φρεάτιου υδροφορέα, συνοψίζονται στον Πίνακα 2.2. Λόγω της ομοιότητας της εξίσωσης (2.8α) με την εξίσωση (2.1), οι αναλυτικές λύσεις για περιορισμένο υδροφορέα που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο μπορούν επίσης να εφαρμοστούν για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–φρεάτιου υδροφορέα, αν η αποθηκευτικότητα  $S$  αντικατασταθεί από την ειδική απόδοση  $S_y$  και το πάχος του υδροφορέα  $B$  από το μέσο κορεσμένο βάθος ροής  $\bar{D}$ .

**Πίνακας 2.2:** Εργασίες στις οποίες επιλύεται η εξίσωση Boussinesq (2.7) ή μία από τις γραμμικοποιημένες της μορφές (2.8α) και (2.8β), για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–φρεάτιου υδροφορέα

Εργασία	Εξίσωση	Αρχικές συνθήκες	Οριακές συνθήκες	Μέθοδος επίλυσης
Boussinesq (1903)	(2.7), όπου $N(x,t) = 0$	ελλειπτική μορφή της ελεύθερης επιφάνειας, $h_0(0) = h_0(W_a) = 0$ $h_0(W_a/2) = h_{max}$	$h(0,t) = \zeta_1(t)$ και $\frac{\partial h(W_a / 2, t)}{\partial x} = 0$ , $\zeta_1(t) = \zeta_2(t) = 0$	μέθοδος χωριζόμενων μεταβλητών
Polubarinova–Kochina (1962, σελ. 500–517)	(2.7), όπου $N(x,t) = 0$	$h_0(x) = h_0$	(2.3α) και (2.4α), $\zeta(t) = \begin{cases} h_0, t = 0 \\ h_0 + \Delta\zeta, t \geq 0 \end{cases}$	μέθοδος δυναμοσειρών
Marino (1973)	(2.8β), όπου $N(x,t) = 0$	$h_0(x) = h_0$	(2.3β) και (2.4α) ή (2.3β) και (2.4β), $\zeta(t) = \begin{cases} h_0, t = 0 \\ h_0 + \Delta\zeta, t \geq 0 \end{cases}$	μετασχηματισμοί Laplace
Basak (1979)	(2.7), όπου $N(x,t) = \text{σταθερή}$	ελλειπτική μορφή της ελεύθερης επιφάνειας, $h_0(0) = h_0(W_a) = 0$ $h_0(W_a/2) = h_{max}$	$h(0,t) = \zeta_1(t)$ και $\frac{\partial h(W_a / 2, t)}{\partial x} = 0$ , $\zeta_1(t) = \zeta_2(t) = 0$	ολοκληρωματική μέθοδος του Goodman (Goodman, 1964) θεωρώντας: $\partial h / \partial t \neq f(x)$

Singh and Rai (1980)	(2.7), όπου $N(x,t) = N(t)$	ελλειπτική μορφή της ελεύθερης επιφάνειας, $h_0(0) = h_0(W_a) = 0$ $h_0(W_a/2) = h_{max}$	$h(0,t) = \zeta_1(t)$ και $\frac{\partial h(W_a/2,t)}{\partial x} = 0$ , $\zeta_1(t) = \zeta_2(t) = 0$	ολοκληρωματική μέθοδος του Goodman (Goodman, 1964)
Govindaraju and Koelliker (1994), Hogarth et al. (1997)	(2.8α), όπου $N(x,t) = 0$	$h_0(x)$	(2.3α) και $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x,t) = \lim_{x \rightarrow \infty} h_0(x)$ $\zeta(t)$ μπορεί να μεταβάλλεται τυχαία	μετασχηματισμοί Laplace και ολοκληρώματα συνέλιξης
Guo (1997)	(2.7), όπου $N(x,t) = 0$	$h_0(x) = h_0$	(2.3α) και (2.4α), $\zeta(t) = \begin{cases} h_0, t = 0 \\ h_0 + \Delta\zeta, t \geq 0 \end{cases}$	μετασχηματισμός Boltzman και μέθοδος Newton Raphson (ημι-αναλυτική λύση)
Workman et al. (1997)	(2.8 <sup>α</sup> ), όπου $N(x,t) = \text{σταθερή}$	$h_0(x)$	$h(0,t) = \zeta_1(t)$ και $h(W_a, t) = \zeta_2(t)$ , $\zeta_1(t)$ μπορεί να μεταβάλλεται τυχαία $\zeta_2(t) = \text{σταθερή}$	μέθοδος διαχωρισμού μεταβλητών
Serrano and Workman (1998)	(2.7), όπου $N(x,t) = \text{σταθερή}$	$h_0(x)$	$h(0,t) = \zeta_1(t)$ και $h(W_a, t) = \zeta_2(t)$ , $\zeta_1(t)$ και $\zeta_2(t)$ μπορεί να μεταβάλλονται τυχαία	Adomian decomposition
Ostfeld et al. (1999)	(2.8β)	$h_0(x)$	$h(0,t) = \zeta_1(t)$ και $h(W_a, t) = \zeta_2(t)$ , $\zeta_1(t)$ και $\zeta_2(t)$ περιγράφονται από αναλυτικές συναρτήσεις	μετασχηματισμοί Laplace
Kim and Ann (2001)	(2.8α), όπου $N(x,t) = \text{σταθερή}$	$h_0(x)$	$h(0,t) = \zeta_1(t)$ και $h(W_a, t) = \zeta_2(t)$ , $\zeta_1(t) = \text{σταθερή}$ $\zeta_2(t) = \text{σταθερή}$	μέθοδος χωριζόμενων μεταβλητών
Serrano et al. (2007)	(2.7), όπου $N(x,t) = \text{σταθερή}$	$h_0(x)$	$h(0,t) = \zeta_1(t)$ και $\frac{\partial h(W_a, t)}{\partial x} = 0$ , $\zeta_1(t)$ μπορεί να μεταβάλλεται τυχαία	Adomian decomposition

όπου:  $h_{max}$ = αρχικό υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας στο μέσο του υδροφορέα [L] και  $\Delta\zeta$ = μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος [L]

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι λύσεις της εξίσωσης Boussinesq χωρίς προηγούμενη γραμμικοποίηση, προβλέπουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τη μεταβολή του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας του υπόγειου νερού σε σύγκριση με τις λύσεις των γραμμικοποιημένων εξισώσεων (2.8α) και (2.8β). Η απόκλιση μεταξύ των γραμμικών και των μη γραμμικών λύσεων αυξάνει όσο αυξάνουν οι διακυμάνσεις της ελεύθερης επιφάνειας και μπορεί να μειωθεί με κατάλληλη επιλογή τιμής για το μέσο κορεσμένο βάθος ροής  $\bar{D}$  (Marino, 1973, Hogarth et al., 1997, Ostfeld et al., 1999, Kim and



Ann, 2001). Ένα πλεονέκτημα της εξίσωσης (2.8β) σε σχέση με την εξίσωση (2.8α) είναι ότι για μόνιμη ροή η εξίσωση (2.8β) είναι μη γραμμική.

Εκτός από τις εργασίες που αναλύθηκαν παραπάνω, στις οποίες θεωρείται υδροφορέας με οριζόντιο πυθμένα, σε κάποιες δημοσιεύσεις προσεγγίζεται το πρόβλημα αλληλεπίδρασης υδατορεύματος με ομογενή και ισότροπο φρεάτιο υδροφορέα με κεκλιμένο πυθμένα. Οι περιπτώσεις αλληλεπίδρασης που εξετάζονται στις δημοσιεύσεις αυτές φαίνονται στο Σχήμα 2.4. Θεωρώντας ότι η κλίση του πυθμένα είναι αρκετά μικρή ώστε να μπορεί να γίνει η παραδοχή Dupuit οριζόντιας ροής, η υπόγεια ροή περιγράφεται από την εξίσωση Boussinesq για υδροφορέα με κεκλιμένο πυθμένα (Boussinesq, 1904):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (h(x,t) - z_{base}(x)) \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{N(x,t)}{K} = \frac{S_y}{K} \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \quad (2.9)$$

όπου  $z_{base}(x)$  [L] είναι το υψόμετρο του πυθμένα του υδροφορέα, μετρούμενο από το οριζόντιο επίπεδο αναφοράς (Σχήμα 2.4). Η εξίσωση (2.9) μπορεί να γραφτεί διαφορετικά ως:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D(x,t) \frac{\partial D(x,t)}{\partial x} \right) + s \frac{\partial D(x,t)}{\partial x} + \frac{N(x,t)}{K} = \frac{S_y}{K} \frac{\partial D(x,t)}{\partial t} \quad (2.10)$$

όπου  $D(x,t) = h(x,t) - z_{base}(x)$  είναι το κορεσμένο βάθος ροής και  $s = \partial z_{base}(x) / \partial x$  είναι η κλίση του πυθμένα.

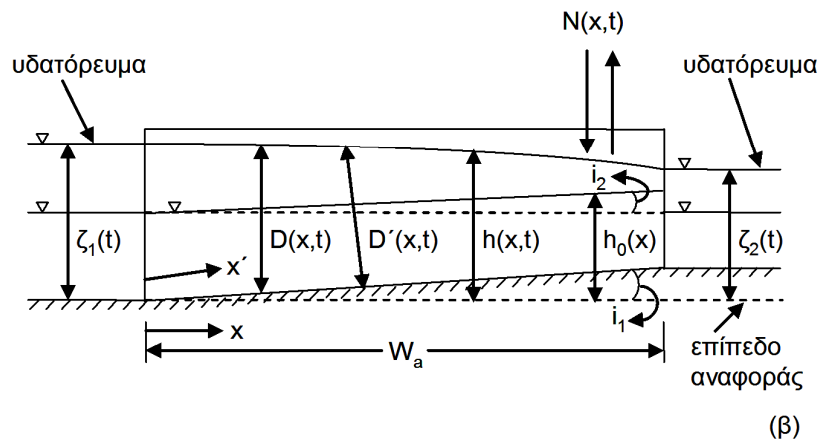
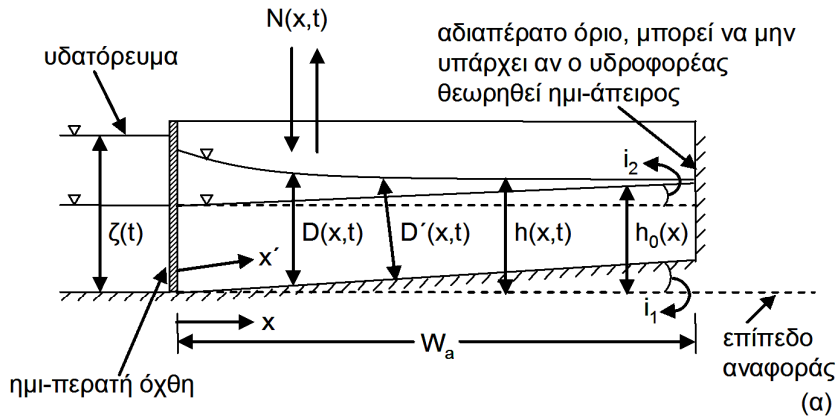
Στις διάφορες εργασίες, η εξίσωση Boussinesq για κεκλιμένο υδροφορέα (2.9) ή (2.10) επιλύεται αφού προηγουμένως γραμμικοποιηθεί με κάποιο τρόπο. Σε πολλές δημοσιεύσεις (π.χ. Polubarinova–Kochina, 1962, Chauhan et al., 1968, Upadhyaya and Chauhan, 2001) διατυπώνονται αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων (2.11α) και (2.11β), οι οποίες είναι γραμμικές μορφές των εξισώσεων (2.9) και (2.10), αντίστοιχα (Polubarinova–Kochina, 1962, σελ. 521, Bear, 1972, σελ. 408). Μία άλλη γραμμικοποιημένη μορφή της εξίσωσης (2.10) που επιλύεται σε πολλές δημοσιεύσεις (π.χ. Sewa Ram and Chauhan, 1987, Singh et al., 1991, Upadhyaya and Chauhan, 2002) είναι η εξίσωση (2.12) (Werner, 1957).

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} + \frac{N(x,t)}{\bar{T}} = \frac{S_y}{\bar{T}} \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \quad (2.11\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial D(x,t)}{\partial x} + \frac{N(x,t)}{\bar{T}} = \frac{S_y}{\bar{T}} \frac{\partial D(x,t)}{\partial t} \quad (2.11\beta)$$

$$\frac{\partial^2 D^2(x,t)}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial D^2(x,t)}{\partial x} + \frac{2N(x,t)}{K} = \frac{S_y}{\bar{T}} \frac{\partial D^2(x,t)}{\partial t} \quad (2.12)$$

όπου  $\beta = s/2\bar{D}$ .



**Σχήμα 2.4:** Περιπτώσεις αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–κεκλιμένου φρεατίου υδροφορέα που έχουν επιλυθεί αναλυτικά

Σε αρκετές από τις δημοσιεύσεις στις οποίες εξετάζεται η αλληλεπίδραση υδατορεύματος με κεκλιμένο φρεάτιο υδροφορέα, η υπόγεια ροή δεν θεωρείται οριζόντια αλλά παράλληλη προς τον πυθμένα του υδροφορέα (Boussinesq, 1877a, σελ.255–256). Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση που περιγράφει την υπόγεια ροή μπορεί να γραφτεί ως (Wooding and Chapman, 1966, Chapman, 1980):

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left( D'(x',t) \frac{\partial D'(x',t)}{\partial x'} \right) + \frac{\partial D'(x',t)}{\partial x'} \tan i_1 + \frac{N(x,t)}{K} \left( 1 + \frac{\partial D'(x',t)}{\partial x'} \tan i_1 \right) = \frac{S_y}{K \cos i_1} \frac{\partial D'(x',t)}{\partial t} \quad (2.13)$$

όπου  $i_1$  είναι η γωνία που σχηματίζει ο πυθμένας του υδροφορέα με το οριζόντιο επίπεδο,  $x'$  [L] είναι η απόσταση κατά μήκος του κεκλιμένου πυθμένα και  $D'(x',t)$  [L] είναι το βάθος ροής μετρούμενο κάθετα προς τον κεκλιμένο πυθμένα του υδροφορέα (Σχήμα 2.4). Ο Charman (1980) πρότεινε μία τροποποιημένη, απλοποιημένη διατύπωση της εξίσωσης (2.13) ως προς  $x$  και  $D(x,t)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D(x,t) \frac{\partial D(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial D(x,t)}{\partial x} \tan i_1 + \frac{N(x,t)}{K \cos^2 i_1} = \frac{S_y}{K \cos^2 i_1} \frac{\partial D(x,t)}{\partial t} \quad (2.14)$$

Οι εξισώσεις (2.13) και (2.14) είναι μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Αναλυτικές λύσεις έχουν διατυπωθεί για τις γραμμικοποιημένες τους μορφές (2.15) και (2.16) (π.χ. Sanford et al., 1993, Brutsaert, 1994, Verhoest and Troch, 2000, Zissis et al., 2001, Akylas and Koussis, 2007, Koussis and Akylas, 2007).

$$\frac{\partial^2 D'(x,t)}{\partial x'^2} + \frac{\tan i_1}{\bar{D}'} \frac{\partial D'(x',t)}{\partial x'} + \frac{N(x,t)}{K \bar{D}'} \left( 1 + \frac{\partial D'(x',t)}{\partial x'} \tan i_1 \right) = \frac{S_y}{K \bar{D}' \cos i_1} \frac{\partial D'(x',t)}{\partial t} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 D^2(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\tan i_1}{D} \frac{\partial D^2(x,t)}{\partial x} + \frac{2N(x,t)}{K \cos^2 i_1} = \frac{S_y}{\bar{T} \cos^2 i_1} \frac{\partial D^2(x,t)}{\partial t} \quad (2.16)$$

όπου  $\bar{D}'$  [L] συμβολίζει μία μέση τιμή για το βάθος ροής μετρούμενο κάθετα προς τον κεκλιμένο πυθμένα του υδροφορέα. Στον Πίνακα 2.3 παρουσιάζονται συνοπτικά μερικές από τις αναλυτικές λύσεις που χρησιμοποιούνται συχνότερα για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορεύματος και υδροφορέα με κεκλιμένο πυθμένα.

**Πίνακας 2.3:** Αναλυτικές λύσεις για το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορεύματος και φρεάτιου υδροφορέα με κεκλιμένο πυθμένα

Εργασία	Εξίσωση	Αρχικές συνθήκες	Οριακές συνθήκες	Μέθοδος επίλυσης
Polubarinova–Kochina (1962, σελ. 520–526)	(2.11α), όπου $N(x,t) = 0$	$h_0(x) = \zeta(0) + s'x$	$h(0,t) = \zeta(t)$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x,t) = h_0(x)$ , $\zeta(t) = \zeta(0) + \Delta\zeta$	μετασχηματισμοί Laplace
Polubarinova–Kochina (1962, σελ. 526–531)	(2.11α), όπου $N(x,t) = 0$	$h_0(x) = \zeta(0) + s'x$	$h(0,t) = \zeta_1(t)$ και $h(Wa,t) = \zeta_2(t)$ , $\zeta_1(t) = \zeta(0) + \Delta\zeta_1$ , $\zeta_2(t) = \zeta(0) + \Delta\zeta_2$	μετασχηματισμοί Laplace
Sewa Ram and Chauhan (1987)	(2.12), όπου $N(x,t) = \text{σταθερή}$	$D(x,0) = 0$	$D(0,t) = 0$ και $D(Wa,t) = 0$	μετασχηματισμός της (2.12) στην εξίσωση διάχυσης, επίλυση με μετασχηματισμούς Laplace

Singh (1991)	(2.12), όπου $N(x,t) = N(t)$	$D(x,0) = 0$	$D(0,t) = 0$ και $D(W_a,t) = 0$	μέθοδος χωριζόμενων μεταβλητών
Upadhyaya and Chauhan (2001)	(2.11β), όπου $N(x,t) = \text{σταθερή}$	ελεύθερη επιφάνεια παράλληλη με τον πυθμένα, ομοιόμορφο βάθος ροής $D_0$	$D(0,t) = D_0 + \Delta\zeta$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} D(x,t) = D_0$	μετασχηματισμός της (2.11β) στην εξίσωση διάχυσης, επίλυση με μετασχηματισμούς Laplace
Zissis et al. (2001)	(2.16), όπου $N(x,t) = \text{σταθερή}$	”	$D(0,t) = D_{\max} - (D_{\max} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \infty} D(x,t) = D_0$	μετασχηματισμοί Laplace
Upadhyaya and Chauhan (2002)	(2.12), όπου $N(x,t) = \text{σταθερή}$	”	$D(0,t) = D_0 + \Delta\zeta_1$ και $D(W_a,t) = D_0 + \Delta\zeta_2$	μετασχηματισμός της (2.12) στην εξίσωση διάχυσης, επίλυση με μετασχηματισμούς Laplace
Akylas and Koussis (2007)	(2.15), όπου $N(x,t) = 0$	ελεύθερη επιφάνεια παράλληλη με τον πυθμένα	$\frac{\partial D'(0,t)}{\partial x'} = \frac{1}{a} [D'(0,t) - \text{ και } \frac{\partial D'(W_a,t)}{\partial x'} = 0, \zeta(t) = \zeta(0) + \Delta\zeta$	μετασχηματισμοί Laplace

όπου:  $s' = \sin(i_2)$  = κλίση της αρχικής ελεύθερης επιφάνειας,  $i_2$  = γωνία που σχηματίζει η αρχική ελεύθερη επιφάνεια με το οριζόντιο επίπεδο (Σχήμα 2.4),  $\Delta\zeta_1, \Delta\zeta_2$  = μεταβολές της στάθμης των υδατορευμάτων [L]

Αναλυτικές λύσεις για το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–φρεάτιου υδροφορέα, θεωρώντας την υπόγεια ροή διδιάστατη στο κατακόρυφο επίπεδο  $x-z$ , έχουν διατυπωθεί στις εργασίες των Higgins (1980), Neuman (1981), van de Giesen et al. (1994), Moench and Barlow (2000), Barlow et al. (2000) και Serrano (2003). Οι περιπτώσεις αλληλεπίδρασης που εξετάζονται στις εργασίες αυτές φαίνονται στο Σχήμα 2.5.

Ο Higgins (1980) διατύπωσε αναλυτική λύση για την περίπτωση ημι–άπειρου, ομογενούς και ισότροπου υδροφορέα, ο οποίος περιορίζεται στο ένα άκρο του, στη διεύθυνση  $x$ , από υδατόρευμα πλήρους διεύθυνσης (Σχήμα 2.5 (α)). Θεωρώντας τον εδαφικό σκελετό και το υπόγειο νερό ασυμπίεστα, η ελαστική αποθηκευτικότητα μπορεί να αμεληθεί και η ροή στον φρεάτιο υδροφορέα περιγράφεται από τη διδιάστατη εξίσωση Laplace (2.17) (Bear, 1979, σελ. 105). Οι αρχικές και οριακές συνθήκες για το πρόβλημα δίνονται από τις εξισώσεις (2.18)–(2.22).

$$\frac{\partial^2 h(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(x, z, t)}{\partial z^2} = 0, \quad x \geq 0, 0 \leq z \leq h_0, t \geq 0 \quad (2.17)$$

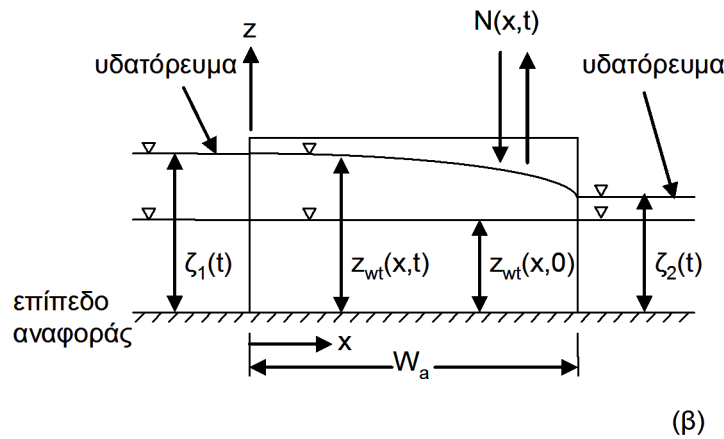
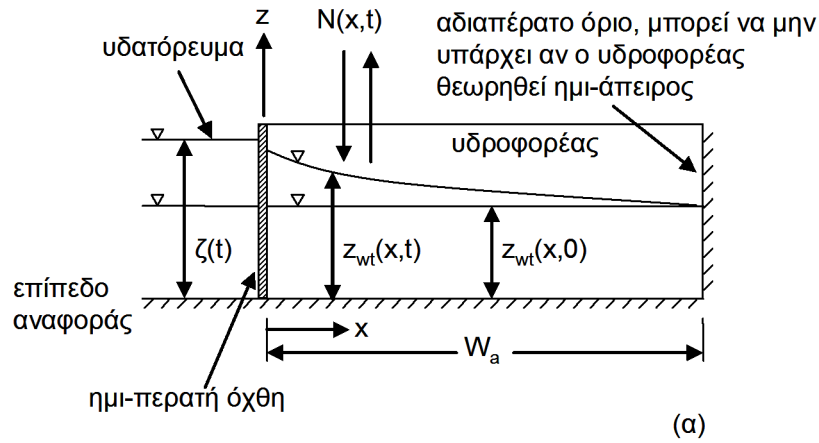
$$h(x, z, 0) = z_{wt}(x, 0) = h_0, \quad x \geq 0, 0 \leq z \leq h_0 \quad (2.18)$$

$$h(0, z, t) = \zeta(t), \quad 0 \leq z \leq h_0, t \geq 0 \quad (2.19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x, z, t) = h_0, \quad 0 \leq z \leq h_0, t \geq 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial h(x, h_0, t)}{\partial t} + \frac{K}{S_y} \frac{\partial h(x, h_0, t)}{\partial z} = 0, \quad x \geq 0, t \geq 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial h(x, 0, t)}{\partial z} = 0, \quad x \geq 0, t \geq 0 \quad (2.22)$$



**Σχήμα 2.5:** Περιπτώσεις αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–φρεάτιου υδροφορέα, θεώρηση διδιάστατης υπόγειας ροής στο επίπεδο  $x-z$

Στην εξίσωση (2.18) και στο Σχήμα 2.5,  $z_{wt}(x, t)$  είναι το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας. Η οριακή συνθήκη (2.21) προκύπτει από γραμμικοποίηση της κινηματικής οριακής συνθήκης στην ελεύθερη επιφάνεια (Bear, 1979, σελ. 99), θεωρώντας ότι οι διακυμάνσεις της ελεύθερης επιφάνειας του υδροφορέα είναι μικρές

σε σύγκριση με το αρχικό υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας  $h_0$ . Ο Higgins (1980) ανέπτυξε αναλυτική λύση για το πρόβλημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.17)–(2.22), για απότομη μεταβολή της στάθμης του νερού στο υδατόρευμα, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο διαχωρισμού μεταβλητών.

Ο Neuman (1981) εξέλιξε την εργασία του Higgins (1980) λαμβάνοντας υπ' όψη την ελαστική αποθηκευτικότητα και θεωρώντας τον υδροφορέα ανισότροπο. Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις (2.17) και (2.21) γράφονται ως:

$$K_x \frac{\partial^2 h(x, z, t)}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 h(x, z, t)}{\partial z^2} = S_s \frac{\partial h(x, z, t)}{\partial t}, \quad x \geq 0, 0 \leq z \leq h_0, t \geq 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial h(x, h_0, t)}{\partial t} + \frac{K_z}{S_y} \frac{\partial h(x, h_0, t)}{\partial z} = 0, \quad x \geq 0, t \geq 0 \quad (2.24)$$

όπου  $S_s [L^{-1}]$  είναι η ειδική αποθηκευτικότητα και  $K_x, K_z [LT^{-1}]$  είναι οι συνιστώσες της υδραυλικής αγωγιμότητας στις διευθύνσεις  $x$  και  $z$ , αντίστοιχα, οι οποίες θεωρούνται παράλληλες στις κύριες διευθύνσεις της υδραυλικής αγωγιμότητας. Ο Neuman (1981) χρησιμοποίησε τη μέθοδο μετασχηματισμών Laplace για τη διατύπωση αναλυτικής λύσης για τα πιεζομετρικά φορτία  $h(x, z, t)$ .

Οι van de Giesen et al. (1994) ακολούθησαν την προσέγγιση του Higgins (1980) (θεώρησαν ομογενή και ισότροπο υδροφορέα, οριζόντια αρχική ελεύθερη επιφάνεια, τη γραμμικοποιημένη κινηματική οριακή συνθήκη (2.21) στην ελεύθερη επιφάνεια και αγνόησαν την ελαστική αποθηκευτικότητα) αλλά για υδροφορέα πεπερασμένου πλάτους που περιορίζεται στα δύο άκρα του από υδατορεύματα πλήρους διείδυσης (Σχήμα 2.5 (β)). Θεωρώντας ότι οι μεταβολές της στάθμης των υδατορευμάτων μπορεί να περιγράφονται από τυχαίες αναλυτικές συναρτήσεις, οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν τη μέθοδο των σειρών Fourier για την επίλυση του προβλήματος.

Εξέλιξη της εργασίας του Neuman (1981) αποτελεί η εργασία των Moench and Barlow (2000), οι οποίοι χρησιμοποίησαν μετασχηματισμούς Laplace για να εκτιμήσουν την απόκριση του υδροφορέα σε απότομη μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος για τις ακόλουθες περιπτώσεις: (α) ημι-άπειρος υδροφορέας σε άμεση υδραυλική επαφή με το υδατόρευμα, (β) ημι-άπειρος υδροφορέας και υδατόρευμα με ημι-περατή όχθη, (γ) υδροφορέας πεπερασμένου πλάτους σε άμεση υδραυλική επαφή με το υδατόρευμα και (δ) υδροφορέας πεπερασμένου πλάτους και υδατόρευμα με ημι-περατή όχθη. Η πρώτη περίπτωση είναι όμοια με αυτή που

εξέτασε ο Neuman (1981) και οι αναλυτικές λύσεις των δύο εργασιών συμπίπτουν. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις, δεν είναι δυνατός ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των λύσεων αναλυτικά. Μπορεί όμως να επιτευχθεί αριθμητικά με τη χρήση του αλγορίθμου Stehfest (1970). Στη συμπληρωματική εργασία των Barlow et al. (2000), οι λύσεις για την απόκριση του υδροφορέα σε απότομη μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος χρησιμοποιήθηκαν σε ολοκληρώματα συνέλιξης ώστε να υπολογιστεί η απόκριση του υδροφορέα σε τυχαία μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος.

Ο Serrano (2003) παρουσίασε μία αναλυτική λύση για το πρόβλημα του σχήματος 2.5 (β). Θεώρησε (α) ανισότροπο υδροφορέα, (β) σταθερή και ομοιόμορφη κατακόρυφη διήθηση  $N(x,t)=N$  και (γ) ότι οι μεταβολές της στάθμης των υδατορευμάτων περιγράφονται από αναλυτικές συναρτήσεις. Αγνοώντας την ελαστική αποθηκευτικότητα, η ροή στον φρεάτιο υδροφορέα περιγράφεται από την εξίσωση (2.25):

$$K_x \frac{\partial^2 h(x, z, t)}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 h(x, z, t)}{\partial z^2} + N = 0, \quad 0 \leq x \leq W_a, \quad 0 \leq z \leq z_{wt}, \quad t \geq 0 \quad (2.25)$$

Ο Serrano (2003) είναι ο μόνος ο οποίος θεώρησε τη μη γραμμική μορφή της κινηματικής οριακής συνθήκης στην ελεύθερη επιφάνεια (Bear, 1979, σελ. 105):

$$\frac{\partial h(x, z_{wt}, t)}{\partial t} - \frac{1}{S_y} \left[ K_x \left( \frac{\partial h(x, z_{wt}, t)}{\partial x} \right)^2 + K_z \left( \frac{\partial h(x, z_{wt}, t)}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial h(x, z_{wt}, t)}{\partial z} (K_z + N) + N \right] = 0$$

$$0 \leq x \leq W_a, \quad t \geq 0 \quad (2.26)$$

Χρησιμοποίησε τη μέθοδο διάσπασης του Adomian (Adomian, 1994) για τη διατύπωση αναλυτικής λύσης για τα πιεζομετρικά φορτία  $h(x, z, t)$  και το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας  $z_{wt}(x, t)$ .

Σε αντίθεση με τις προηγούμενες λύσεις (π.χ. Higgins, 1980, Neuman, 1981), η λύση του Serrano (2003) μπορεί να εφαρμοστεί ακόμη και σε περιπτώσεις μεγάλων διακυμάνσεων του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας (εφόσον θεωρείται η μη γραμμική κινηματική οριακή συνθήκη (2.26) στην ελεύθερη επιφάνεια). Ωστόσο, η εφαρμογή της λύσης του Serrano (2003) δεν είναι απλή. Η μέθοδος διάσπασης χρησιμοποιείται πρώτα για την εκτίμηση του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας και στη συνέχεια για τον υπολογισμό των πιεζομετρικών φορτίων. Η λύση χρειάζεται συνήθως να βελτιωθεί επαναληπτικά: (α) η λύση για τα πιεζομετρικά φορτία

χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της οριζόντιας και κατακόρυφης κλίσης στην ελεύθερη επιφάνεια  $\partial(x, z_{wt}, t) / \partial x$  και  $\partial(x, z_{wt}, t) / \partial z$ , αντίστοιχα, (β) υπολογίζεται το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας και (γ) υπολογίζονται τα πιεζομετρικά φορτία με βάση το νέο υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας.

### 2.2.1.3 Υδροφορείς με διαρροή

Οι αναλυτικές λύσεις που έχουν αναπτυχθεί για υδροφορείς με διαρροή είναι πολύ λιγότερες σε σχέση με αυτές που είναι διαθέσιμες για περιορισμένους και φρεάτιους υδροφορείς. Η πιο ολοκληρωμένη προσέγγιση του προβλήματος αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορευμάτων και υδροφορέων με διαρροή πραγματοποιήθηκε από τους Moench and Barlow (2000) και Barlow et al. (2000). Οι συγγραφείς θεώρησαν μονοδιάστατη οριζόντια ροή σε ομογενή και ισότροπο υδροφορέα και μονοδιάστατη, κατακόρυφη ροή στον ημι-περατό σχηματισμό που υπέρκειται του υδροφορέα (Σχήμα 2.6).

Για το πρόβλημα του σχήματος 2.6, η ροή στον υδροφορέα περιγράφεται από την εξίσωση (2.27) (Bear, 1972, σελ. 261) και οι αρχικές και οριακές συνθήκες από τις εξισώσεις (2.28)–(2.30):

$$\frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} + q' = \frac{S}{T} \frac{\partial h(x, t)}{\partial t}, \quad x \geq 0 \text{ ή } 0 \leq x \leq W_a, \quad t \geq 0 \quad (2.27)$$

$$h(x, 0) = h_0, \quad x \geq 0 \text{ ή } 0 \leq x \leq W_a \quad (2.28)$$

$$h(0, t) = \zeta(t), \quad t \geq 0, \text{ για υδατόρευμα σε άμεση επαφή με τον υδροφορέα} \quad (2.29\alpha)$$

$$\frac{\partial h(0, t)}{\partial x} = \frac{1}{a} [h(0, t) - \zeta(t)], \quad t \geq 0, \text{ για υδατόρευμα με ημι-περατή όχθη} \quad (2.29\beta)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x, t) = h_0, \quad t \geq 0, \text{ για ημι-άπειρο υδροφορέα} \quad (2.30\alpha)$$

$$\frac{\partial h(W_a, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0, \text{ για υδροφορέα πεπερασμένου πλάτους} \quad (2.30\beta)$$

όπου  $q' = (K' / KB)(\partial h'(B, t) / \partial z)$  είναι η διαρροή από ή προς τον υδροφορέα [ $L^{-1}$ ],  $h'(z, t)$  συμβολίζει τα πιεζομετρικά φορτία στον ημι-περατό σχηματισμό και  $K'$  είναι η υδραυλική αγωγιμότητα του ημι-περατού σχηματισμού.

Για τη ροή στον ημι-περατό σχηματισμό ισχύει η εξίσωση (2.31) ενώ οι αρχικές και οριακές συνθήκες περιγράφονται από τις εξισώσεις (2.32)–(2.34):



$$\frac{\partial^2 h'(z,t)}{\partial z'} = \frac{S'_s}{K'}, B \leq z \leq B+B', t \geq 0 \quad (2.31)$$

$$h'(z,0) = h_0, B \leq z \leq B+B' \quad (2.32)$$

$$h'(B,t) = h(B,t), t \geq 0 \quad (2.33)$$

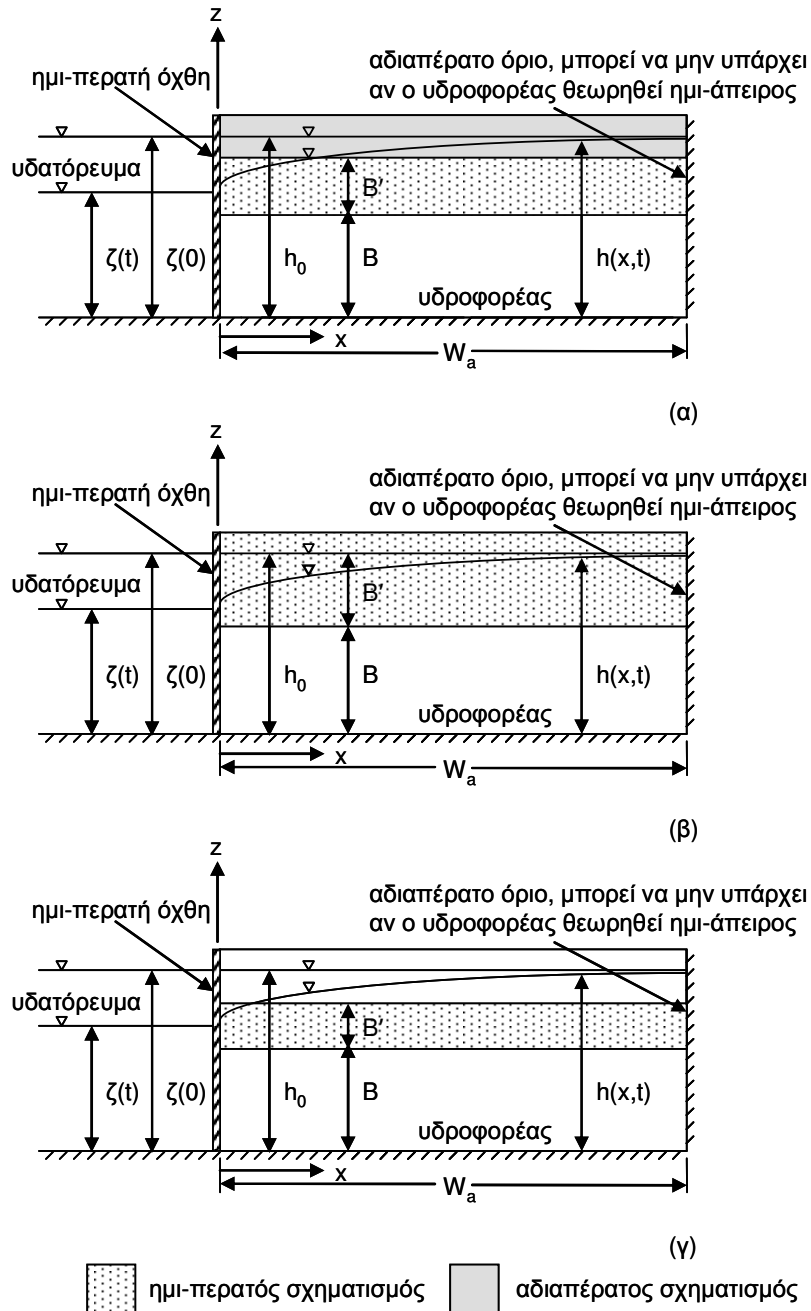
$$\frac{\partial h'(B+B',t)}{\partial z} = 0, t \geq 0 \quad (2.34\alpha)$$

$$\frac{\partial h'(B+B',t)}{\partial z} + \frac{K'}{S'_y} \frac{\partial h'(B+B',t)}{\partial z}, t \geq 0 \quad (2.34\beta)$$

$$h'(B+B',t) = h_0, t \geq 0 \quad (2.34\gamma)$$

όπου  $S'_s$  και  $S'_y$  είναι η ειδική αποθηκευτικότητα και η ειδική απόδοση του ημι-περατού σχηματισμού, αντίστοιχα. Η οριακή συνθήκη (2.34α) ισχύει για την περίπτωση του σχήματος 2.6 (α) στην οποία ένας αδιαπέρατος σχηματισμός υπέρκειται του ημι-περατού σχηματισμού. Για την περίπτωση ημι-περατού σχηματισμού με ελεύθερη επιφάνεια (Σχήμα 2.6 (β)) ισχύει η οριακή συνθήκη (2.34β) ενώ αν υδροφορέας με σταθερό πιεζομετρικό φορτίο υπέρκειται του ημι-περατού σχηματισμού (Σχήμα 2.6 (γ)) ισχύει η εξίσωση (2.34γ). Η εξίσωση (2.34β) είναι η γραμμικοποιημένη κινηματική οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια.

Οι Moench and Barlow (2000) θεώρησαν απότομη μεταβολή της στάθμης του νερού στο υδατόρευμα και χρησιμοποίησαν μετασχηματισμούς Laplace για την επίλυση του προβλήματος που ορίζεται από τις εξισώσεις (2.27)–(2.34γ). Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των λύσεων που παρουσίασαν μπορεί να επιτευχθεί αριθμητικά με τον αλγόριθμο Stehfest (1970). Στην εργασία των Barlow et al. (2000), οι λύσεις για την απόκριση του υδροφορέα σε απότομη μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος χρησιμοποιήθηκαν σε ολοκληρώματα συνέλιξης ώστε να υπολογιστεί η απόκριση του υδροφορέα σε τυχαία μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος.



**Σχήμα 2.6:** Περιπτώσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορεύματος και υδροφορέα με διαρροή που έχουν επιλυθεί αναλυτικά

Αναλυτικές λύσεις για το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορευμάτων και υδροφορέων με διαρροή έχουν επίσης διατυπωθεί στις εργασίες των Peterson (1961), Hantush (1961b), Zhang (1992) και Kabala and Thorne (1997). Οι Hantush (1961b) και Kabala and Thorne (1997) εξέτασαν την περίπτωση στην οποία υδροφορέας με σταθερό πιεζομετρικό φορτίο υπέρκειται του ημι-περατού σχηματισμού, για τον οποίο έκαναν την παραδοχή ότι έχει μηδενική αποθηκευτικότητα. Διατύπωσαν αναλυτικές λύσεις για ημι-άπειρο υδροφορέα

θεωρώντας απότομη μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος. Η λύση του Hantush (1961b) αποτελεί εξέλιξη της λύσης του Peterson (1961) για μόνιμη ροή ενώ οι Kabala and Thorne (1997) παρουσίασαν λύσεις για υδατορεύματα πλήρους και μερικής διείσδυσης. Ο Zhang (1992) θεώρησε ημι-άπειρο υδροφορέα που υπόκειται ημι-περατού σχηματισμού με ελεύθερη επιφάνεια. Παρουσίασε αναλυτικές λύσεις για απότομη και για γραμμική μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος λαμβάνοντας υπ' όψη την ειδική απόδοση του ημι-περατού σχηματισμού, σε αντίθεση με τις προηγούμενες εργασίες στις οποίες έγινε η παραδοχή μηδενικής αποθηκευτικότητας για τον ημι-περατό σχηματισμό.

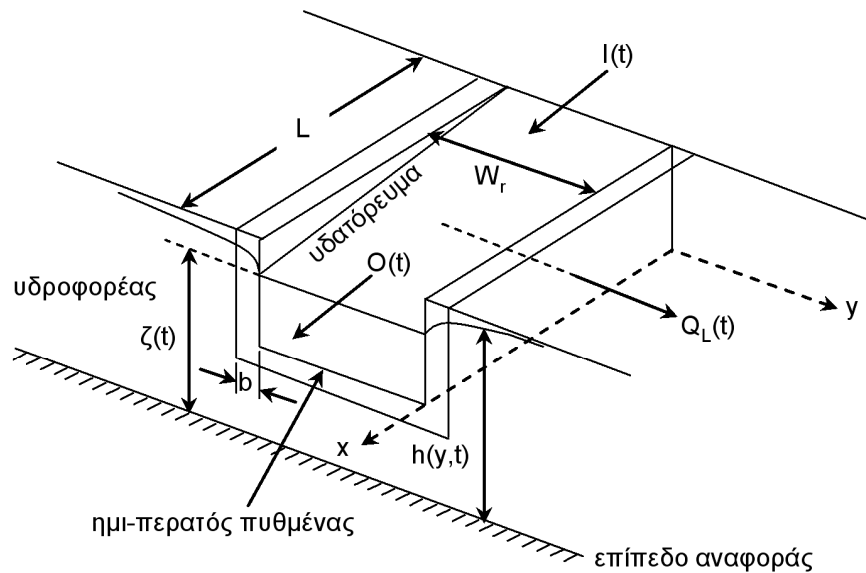
### **2.2.2 Αναλυτικές λύσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ υπόγειων νερών και υδατορευμάτων: ταυτόχρονη θεώρηση των εξισώσεων της επιφανειακής και της υπόγειας ροής**

Σε τέσσερις μόνο δημοσιεύσεις, αυτές των Hunt (1990), Hantush et al. (2002), Hantush (2005) και Lal (2001) επιλύονται οι εξισώσεις τόσο της επιφανειακής όσο και της υπόγειας ροής για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών.

Ο Hunt (1990) εξέτασε την περίπτωση αλληλεπίδρασης ομογενούς και ισότροπου φρεάτιου υδροφορέα, πεπερασμένου ή άπειρου πλάτους, με υδατόρευμα πλήρους διείσδυσης, το οποίο βρίσκεται σε άμεση υδραυλική επαφή με τον υδροφορέα. Το υδατόρευμα θεωρήθηκε ορθογωνικής διατομής σταθερού πλάτους και ο υδροφορέας πεπερασμένου ή άπειρου πλάτους. Για την περιγραφή της μονοδιάστατης ροής κατά μήκος του υδατορεύματος χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις κινηματικού κύματος (βλ. π.χ. Chow et al., 1988). Η υπόγεια ροή θεωρήθηκε οριζόντια μονοδιάστατη, κάθετη προς τη διεύθυνση ροής του υδατορεύματος, για την περιγραφή της οποίας χρησιμοποιήθηκε η γραμμικοποιημένη εξίσωση Boussinesq (2.8α). Για την περίπτωση υδροφορέα άπειρου πλάτους, ο Hunt (1990) διατύπωσε ακριβή αναλυτική λύση για το σύστημα των εξισώσεων της επιφανειακής και της υπόγειας ροής χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Laplace. Για την περίπτωση υδροφορέα πεπερασμένου πλάτους χρησιμοποίησε τη μέθοδο διαταραχών για να διατυπώσει μία προσεγγιστική αναλυτική λύση για το πρόβλημα.

Στην εργασία των Hantush et al. (2002) διερευνήθηκε η περίπτωση αλληλεπίδρασης ομογενούς και ισότροπου φρεάτιου υδροφορέα με υδατόρευμα

μερικής διείσδυσης (Σχήμα 2.7). Ο υδροφορέας θεωρήθηκε άπειρου πλάτους στη διεύθυνση  $y$  και πεπερασμένου μήκους  $L$  στη διεύθυνση  $x$ , στην οποία περιορίζεται από αδιαπέρατα όρια. Οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν τη μέθοδο Muskingum (βλ. π.χ. Chow et al., 1988) για τη διόδευση πλημμυρικού κύματος στο υδατόρευμα. Κάνοντας την παραδοχή ότι οι διακυμάνσεις της στάθμης του υδατορεύματος κατά μήκος του τμήματος μήκους  $L$  είναι μικρές, θεώρησαν μία μέση κατά μήκος στάθμη, η οποία είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου. Για τη ροή στον υδροφορέα θεώρησαν ότι είναι οριζόντια, μονοδιάστατη στη διεύθυνση  $y$  και περιγράφεται από τη γραμμικοποιημένη εξίσωση Boussinesq (2.8α). Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Laplace και ολοκληρώματα συνέλιξης, διατύπωσαν λύσεις για την παροχή εκροής  $O(t)$  [ $L^3T^{-1}$ ] και το ρυθμό διήθησης επιφανειακού νερού στον υπόγειο υδροφορέα ή τροφοδοσίας του υδατορεύματος από τα υπόγεια νερά  $Q_L(t)$  [ $L^3T^{-1}$ ].

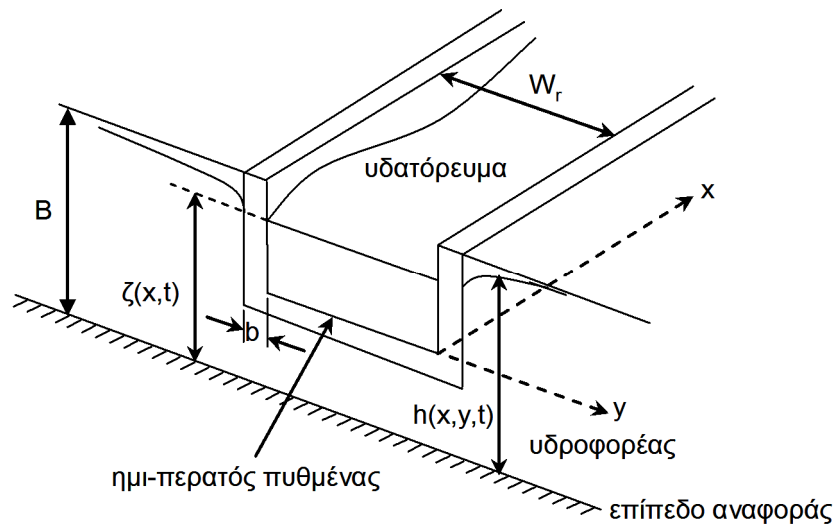


$I(t)$  = παροχή εισροής  
 $O(t)$  = παροχή εκροής

**Σχήμα 2.7:** Περίπτωση αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–υδροφορέα που εξετάστηκε στις εργασίες των Hantush et al. (2002) και Hantush (2005)

Εξέλιξη της εργασίας των Hantush et al. (2002) αποτελεί η εργασία του Hantush (2005) στην οποία εξετάστηκαν επιπλέον οι περιπτώσεις (α) ορίων σταθερού πιεζομετρικού φορτίου και (β) αδιαπέρατων ορίων στη διεύθυνση  $y$ . Ο Hantush (2005) θεώρησε επίσης (α) την επιφανειακή απορροή, (β) την εξάτμιση από την επιφάνεια του υδατορεύματος και (γ) την κατακόρυφη διήθηση ή εξατμισοδιαπνοή από τον υδροφορέα.

Μία πολύ ενδιαφέρουσα εργασία είναι αυτή του Lal (2001), ο οποίος διατύπωσε μία προσεγγιστική αναλυτική λύση για το πρόβλημα του σχήματος 2.8. Θεώρησε ομογενή και ισότροπο υδροφορέα, ημι-άπειρο στη διεύθυνση  $x$  και άπειρου πλάτους στη διεύθυνση  $y$ , ο οποίος αλληλεπιδρά με υδατόρευμα μερικής διείσδυσης, το οποίο διαχωρίζεται από τον υδροφορέα από ημι-περατό πυθμένα και όχθες και έχει ορθογωνική διατομή σταθερού πλάτους  $W_r$ . Ο Lal (2001) θεώρησε μονοδιάστατη ροή κατά μήκος του υδατορεύματος και διδιάστατη οριζόντια ροή στον υδροφορέα. Χρησιμοποίησε τη μέθοδο διαταραχών για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (2.35)–(2.38), οι οποίες περιγράφουν τη ροή κατά μήκος του υδατορεύματος, τη ροή στον υδροφορέα και τη διήθηση επιφανειακού νερού στον υπόγειο υδροφορέα ή την τροφοδοσία του υδατορεύματος από τα υπόγεια νερά, θεωρώντας μία συνεχή, μικρού πλάτους ημιτονοειδή διακύμανση της στάθμης του υδατορεύματος στο ανάντη όριο.



**Σχήμα 2.8:** Περίπτωση αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–υδροφορέα που εξετάστηκε στην εργασία του Lal (2001)

$$\frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q_r(x,t)}{\partial x} - q_L(x,t) = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial x} + S_f = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial^2 h(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(x,y,t)}{\partial y^2} = \frac{S_c}{T} \frac{\partial h(x,y,t)}{\partial t} \quad (2.37)$$

$$q_L(x,t) = -\frac{K_b \rho}{W_r} \frac{\zeta(x,t) - h(x,b,t)}{b} \quad (2.38)$$

Στις εξισώσεις (2.35) και (2.36), οι οποίες είναι οι εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας (βλ. π.χ. Chow et al., 1988),  $q_L(x,t)$  [ $L^2T^{-1}$ ] είναι η παροχή ανά μονάδα πλάτους του υδατορεύματος,  $S_f$  είναι η κλίση τριβών και  $q_L(x,t)$  [ $LT^{-1}$ ] συμβολίζει γενικά την εισροή/εκροή νερού από την ελεύθερη επιφάνεια (βροχόπτωση ή εξάτμιση) ή τις όχθες του υδατορεύματος, ανά μονάδα μήκους και ανά μονάδα πλάτους του υδατορεύματος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση,  $q_L(x,t)$  είναι ο ρυθμός διήθησης επιφανειακού νερού στον υπόγειο υδροφορέα ή τροφοδοσίας του υδατορεύματος από τα υπόγεια νερά, ανά μονάδα μήκους και ανά μονάδα πλάτους του υδατορεύματος. Στην εξίσωση διάχυσης (2.37), η οποία ισχύει για περιορισμένους υδροφορείς ή για φρεάτιους υδροφορείς όπου οι διακυμάνσεις της ελεύθερης επιφάνειας είναι μικρές σε σύγκριση με το μέσο κορεσμένο βάθος ροής  $\bar{D}$ ,  $S_c$  είναι ο συντελεστής αποθηκευτικότητας του υδροφορέα. Για την περίπτωση περιορισμένου υδροφορέα  $S_c = S_s B$  και  $T = KB$ , ενώ για φρεάτιο υδροφορέα ισχύει  $S_c = S_y$  και  $T = K\bar{D}$ . Στην εξίσωση (2.38)  $\rho$  [L] είναι η βρεχόμενη περίμετρος της διατομής του υδατορεύματος.

Ο Lal (2001) παρουσίασε στην εργασία του την πιο ολοκληρωμένη, μέχρι σήμερα, αντιμετώπιση του προβλήματος διατύπωσης αναλυτικών λύσεων για την αλληλεπίδραση μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών. Οι λύσεις που ανέπτυξε για τη στάθμη και την παροχή του υδατορεύματος και τις τιμές των πιεζομετρικών φορτίων στον υδροφορέα είναι εύκολα εφαρμόσιμες και ενδείκνυνται για τη μελέτη απλών περιπτώσεων αλληλεπίδρασης υδατορευμάτων–υπόγειων νερών και την επιβεβαίωση αριθμητικών μοντέλων.

### **2.2.3 Αναλυτικές λύσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ υπόγειων νερών και λιμνών**

Οι αναλυτικές λύσεις που έχουν διατυπωθεί για την αλληλεπίδραση μεταξύ υπόγειων νερών και λιμνών είναι πολύ λίγες σε σύγκριση με αυτές που είναι διαθέσιμες για την αλληλεπίδραση μεταξύ υπόγειων νερών και υδατορευμάτων. Στις περισσότερες περιπτώσεις γίνεται η παραδοχή ότι η λίμνη βρίσκεται σε άμεση υδραυλική επαφή με τον υδροφορέα, ο οποίος θεωρείται ομογενής και ισότροπος. Η υπόγεια ροή θεωρείται μόνιμη και διδιάστατη, είτε οριζόντια είτε στο κατακόρυφο επίπεδο, οπότε περιγράφεται από την εξίσωση Laplace (π.χ. Polubarinova–Kochina, 1962, Strack, 1989, Ilyinsky and Kacimov, 1992). Την περίπτωση λίμνης με ημι–

περατό πυθμένα εξέτασε ο Bakker (2002, 2004). Παρουσίασε αναλυτικές λύσεις για μόνιμη, διδιάστατη οριζόντια υπόγεια ροή, θεωρώντας λίμνη ημικυκλικού και ημιελλειπτικού πυθμένα, η οποία διεισδύει ελάχιστα ή καθόλου στον υδροφορέα.

Η μοναδική εργασία στην οποία θεωρείται τρισδιάστατη υπόγεια ροή είναι αυτή του Kasimov (2000), ο οποίος διατύπωσε αναλυτική λύση για την περίπτωση λίμνης ημισφαιρικού πυθμένα που διεισδύει μερικώς σε ομογενή και ισότροπο περιορισμένο υδροφορέα άπειρου πάχους. Όπως και στις εργασίες που αναφέρθηκαν προηγουμένως, θεωρείται μόνιμη υπόγεια ροή.

### **2.3 Ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών**

Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί διάφορα αριθμητικά μοντέλα για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Στα μοντέλα αυτά, οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων επιλύονται συνήθως με τη βοήθεια μεθόδων πεπερασμένων διαφορών ή πεπερασμένων στοιχείων (π.χ. Swain and Wexler, 1996, Vanderkwaak, 1999, Morita and Yen, 2002), ενώ λιγότερο συχνά χρησιμοποιείται η μέθοδος πεπερασμένων όγκων (π.χ. Erduran et al., 2005). Τα ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών μπορούν να διακριθούν με βάση δύο κύρια χαρακτηριστικά: (α) τον τύπο και τη χωρική διάσταση των εξισώσεων που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων και (β) τη μέθοδο συνδυασμού των εξισώσεων αυτών.

Στην πλειονότητα των ολοκληρωμένων αριθμητικών μοντέλων επιφανειακών–υπόγειων νερών εξετάζεται η αλληλεπίδραση της επίγειας ροής ή της ροής κατά μήκος φυσικών υδατορευμάτων ή τεχνητών ανοιχτών αγωγών (π.χ. αρδευτικά αυλάκια) με την υπόγεια ροή (π.χ. Freeze, 1972, Swain and Wexler, 1996, Vanderkwaak, 1999, Morita and Yen, 2002, Panday and Huyakorn, 2004, Gunduz and Aral, 2005). Για την περιγραφή της μη μόνιμης, μονοδιάστατης ροής κατά μήκος φυσικών υδατορευμάτων και τεχνητών ανοιχτών αγωγών χρησιμοποιούνται είτε οι πλήρεις εξισώσεις Saint Venant είτε οι απλούστερες εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας και του κινηματικού κύματος. Οι εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας επιλέγονται επίσης σε πολλά ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών για την περιγραφή της διδιάστατης επίγειας ροής (π.χ. Restrepo et al., 1998, Vanderkwaak, 1999, Morita and Yen, 2002, Panday

and Huyakorn, 2004). Μικρότερος είναι ο αριθμός των μοντέλων στα οποία η επίγεια ροή περιγράφεται από τις διδιάστατες εξισώσεις ρηχών υδάτων (π.χ. Erduran et al., 2005, Liang et al., 2007). Στο μικρό αριθμό αριθμητικών μοντέλων που έχουν αναπτυχθεί για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης παράκτιων υδάτων, εκβολών ποταμών και υδροτόπων με τα υπόγεια νερά, επιλύονται οι διδιάστατες εξισώσεις ρηχών υδάτων για την προσομοίωση της υδροδυναμικής κυκλοφορίας στα επιφανειακά υδάτινα σώματα (Ebrahimi, 2004, Langevin et al., 2005, Sparks, 2005, 2008).

Η εξίσωση που επιλέγεται για την περιγραφή της υπόγειας ροής σε ένα ολοκληρωμένο αριθμητικό μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων υδάτων εξαρτάται από το αν εξετάζεται η περίπτωση υδραυλικής επαφής μεταξύ επιφανειακών υδάτινων σωμάτων και υπόγειων νερών, οπότε θεωρείται η υπόγεια ροή στην κορεσμένη ζώνη (π.χ. Pinder and Sauer, 1971, Swain and Wexler, 1996, Jobson and Harbaugh, 1999, Hussein and Schwartz, 2003, Erduran et al., 2005, Liang et al., 2007), ή η περίπτωση που επιφανειακά και υπόγεια νερά μπορεί να μη βρίσκονται σε υδραυλική επαφή, οπότε προσομοιώνεται η υπόγεια ροή τόσο στην κορεσμένη όσο και στην ακόρεστη ζώνη (π.χ. Freeze, 1972, Storm and Refsgaard, 1996, Vanderkwaak, 1999, Ewen et al., 2000, Panday and Huyakorn, 2004, Markstrom et al., 2008). Η κορεσμένη υπόγεια ροή θεωρείται γενικά διδιάστατη, οριζόντια ή στο κατακόρυφο επίπεδο, ή τρισδιάστατη. Για την περιγραφή της κορεσμένης–ακόρεστης ροής, η οποία θεωρείται τρισδιάστατη, διδιάστατη στο κατακόρυφο επίπεδο ή μονοδιάστατη στην κατακόρυφη διεύθυνση, χρησιμοποιείται η εξίσωση Richards.

Μεταξύ των αριθμητικών μοντέλων που έχουν αναπτυχθεί για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ της ροής κατά μήκος υδατορευμάτων και της υπόγειας ροής θα πρέπει να αναφερθούν αυτά των Pinder and Sauer (1971), Freeze (1972), Akan and Yen (1981), Tabuada et al. (1995), Perkins and Koussis (1996), Swain and Wexler (1996), Querner (1997), Jobson and Harbaugh (1999), Hussein and Schwartz (2003), Gunduz and Aral (2005) και Zerihun et al. (2005a). Οι Pinder and Sauer (1971) συνδύασαν τις εξισώσεις Saint Venant, στην πλήρη τους μορφή, για τη μονοδιάστατη ροή κατά μήκος υδατορευμάτων ορθογωνικής διατομής, με την εξίσωση διδιάστατης οριζόντιας κορεσμένης υπόγειας ροής. Τις πλήρεις εξισώσεις Saint Venant για την περιγραφή της ροής κατά μήκος υδατορευμάτων χρησιμοποίησαν επίσης οι Freeze (1972) και Akan and Yen (1981). Ο Freeze (1972) θεώρησε υδατόρευμα ορθογωνικής διατομής και συνδύασε τις εξισώσεις Saint Venant με την εξίσωση Richards για τρισδιάστατη κορεσμένη–ακόρεστη υπόγεια



ροή. Οι Akan and Yen (1981) χρησιμοποίησαν την εξίσωση Richards για την περιγραφή της κορεσμένης–ακόρεστης υπόγειας ροής στο κατακόρυφο επίπεδο. Οι Tabuada et al. (1995) συνδύασαν τις εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας για την περιγραφή της ροής σε αρδευτικά κανάλια με την εξίσωση Richards για την κορεσμένη–ακόρεστη ροή στο κατακόρυφο επίπεδο. Τις εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας για την περιγραφή της ροής κατά μήκος υδατορευμάτων χρησιμοποίησαν επίσης οι Perkins and Koussis (1996) και τις συνδύασαν με την εξίσωση τρισδιάστατης κορεσμένης υπόγειας ροής.

Οι Swain and Wexler (1996) ανέπτυξαν το ολοκληρωμένο αριθμητικό μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων νερών MODBRANCH, στο οποίο συνδυάζεται το μοντέλο επιφανειακών νερών BRANCH (Swain and Wexler, 1991) με το πολύ διαδεδομένο μοντέλο υπόγειων νερών MODFLOW (McDonald and Harbaugh, 1988). Στο BRANCH επιλύονται αριθμητικά οι πλήρεις εξισώσεις Saint Venant για την προσομοίωση της ροής κατά μήκος υδατορευμάτων. Στο MODFLOW επιλύεται η εξίσωση τρισδιάστατης κορεσμένης υπόγειας ροής. Οι Jobson and Harbaugh (1999) συνδύασαν μία πιο πρόσφατη έκδοση του MODFLOW (Harbaugh and McDonald, 1996) με το μοντέλο επιφανειακών νερών DAFLOW (Jobson, 1989), στο οποίο η ροή κατά μήκος υδατορευμάτων προσομοιώνεται λύνοντας τις εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας.

Στην εργασία του Querner (1997) παρουσιάζεται το αριθμητικό μοντέλο MOGROW, το οποίο είναι αποτέλεσμα συνδυασμού του μοντέλου επιφανειακών υδάτων SIMWAT (Querner, 1986) με το μοντέλο υπόγειας ροής SIMGRO (Querner, 1988). Στο SIMWAT επιλύονται οι εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας για την προσομοίωση της μονοδιάστατης ροής σε ένα δίκτυο φυσικών υδατορευμάτων και τεχνητών ανοιχτών αγωγών. Στο SIMGRO η ροή στην κορεσμένη ζώνη προσομοιώνεται ως ψευδό-τρειςδιάστατη (quasi-3D) και η ροή στην ακόρεστη ζώνη θεωρείται μονοδιάστατη στην κατακόρυφη διεύθυνση. Στην εργασία των Hussein and Schwartz (2003) παρουσιάζεται το μαθηματικό μοντέλο FTSTREAM, στο οποίο οι εξισώσεις του κινηματικού κύματος για τη ροή κατά μήκος υδατορευμάτων συνδυάζονται με το μοντέλο FTWORK (Faust et al., 1993) για την προσομοίωση της τρισδιάστατης κορεσμένης υπόγειας ροής. Οι Gunduz and Aral (2005) συνδύασαν τις πλήρεις εξισώσεις Saint Venant με την εξίσωση διδιάστατης οριζόντιας κορεσμένης υπόγειας ροής. Τέλος, οι Zerihun et al. (2005a) προσομοιώνοντας την άρδευση με λεκάνες συνδύασαν τις εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας με το

μονοδιάστατο μοντέλο υπόγειας ροής HYDRUS-1D (Simunek et al., 1998), το οποίο βασίζεται στην εξίσωση Richards.

Κατά καιρούς έχουν αναπτυχθεί διάφορα αριθμητικά μοντέλα για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ της επίγειας και της υπόγειας ροής (π.χ. Gandolfi and Savi, 2000, Morita and Yen, 2002, Erduran et al., 2005, Liang et al., 2007). Περισσότερα ωστόσο είναι τα μοντέλα στα οποία προσομοιώνεται τόσο η αλληλεπίδραση μεταξύ της επίγειας και της υπόγειας ροής όσο και η αλληλεπίδραση μεταξύ της υπόγειας ροής και της ροής κατά μήκος υδατορευμάτων (π.χ. DHI, 1993, Restrepo et al., 1998, Vanderkwaak, 1999, Ewen et al., 2000, Panday and Huyakorn, 2004). Σε αρκετές περιπτώσεις αναπαρίστανται επίσης και άλλες βασικές διεργασίες του υδρολογικού κύκλου σε επίπεδο υδρολογικής λεκάνης, όπως η υδατοσυγκράτηση από τα φυτά, η εξατμισοδιαπνοή και η τήξη του χιονιού (π.χ. DHI, 1993, Ewen et al., 2000, Panday and Huyakorn, 2004).

Στο ινστιτούτο DHI (Danish Hydraulic Institute) αναπτύχθηκε το υδρολογικό μοντέλο φυσικής βάσης MIKE SHE (DHI, 1993, Storm and Refsgaard, 1996, Graham and Refsgaard, 2001, DHI, 2008), το οποίο αποτελεί εξέλιξη του υδρολογικού μοντέλου SHE (Abbott et al., 1986) και έχει εφαρμοστεί σε πολυάριθμες περιπτώσεις αλληλεπίδρασης επιφανειακών-υπόγειων υδάτων (π.χ. Xevi et al., 1997, Henriksen et al., 2003, Vazquez and Feyen, 2003, Thompson et al., 2004). Στο MIKE SHE αναπαρίστανται οι ακόλουθες διεργασίες του υδρολογικού κύκλου: υδατοσυγκράτηση από τα φυτά, εξατμισοδιαπνοή, χιονοκάλυψη και τήξη του χιονιού, επίγεια ροή, ροή κατά μήκος υδατορευμάτων και υπόγεια ροή στην κορεσμένη και την ακόρεστη ζώνη. Για την περιγραφή της διδιάστατης επίγειας ροής χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας. Για την προσομοίωση της μονοδιάστατης ροής κατά μήκος υδατορευμάτων, το μοντέλο παρέχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν (α) οι πλήρεις εξισώσεις Saint Venant, (β) οι εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας, (γ) οι εξισώσεις του κινηματικού κύματος, (δ) η μέθοδος Muskingum-Cunge (βλ. π.χ. Chow et al., 1988) ή (ε) η μέθοδος Muskingum. Η υπόγεια ροή στην ακόρεστη ζώνη θεωρείται μονοδιάστατη στην κατακόρυφη διεύθυνση και περιγράφεται από την εξίσωση Richards, ενώ η κορεσμένη υπόγεια ροή θεωρείται τρισδιάστατη. Η υδατοσυγκράτηση από τα φυτά προσεγγίζεται με τη μέθοδο Rutter (Rutter et al., 1971, 1972), η εξατμισοδιαπνοή υπολογίζεται με την εξίσωση Penman-Monteith (Monteith, 1965) και η χιονοκάλυψη και η τήξη του χιονιού υπολογίζονται χρησιμοποιώντας μία μέθοδο ενεργειακού ισοζυγίου (Anderson, 1968, Morris, 1982, 1983).

Ένα επίσης πολύ διαδεδομένο υδρολογικό μοντέλο φυσικής βάσης, το οποίο χρησιμοποιείται πολύ συχνά για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών σε επίπεδο λεκάνης απορροής, είναι το SHETRAN (Ewen et al., 2000). Το SHETRAN έχει αρκετές ομοιότητες με το MIKE SHE, καθώς και τα δύο μοντέλα βασίστηκαν στο υδρολογικό μοντέλο SHE και θεωρούνται σε αυτά οι ίδιες υδρολογικές διεργασίες. Στο SHETRAN, η μονοδιάστατη ροή κατά μήκος υδατορευμάτων και η διδιάστατη επίγεια ροή προσομοιώνονται επιλύοντας τις εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας. Για την προσομοίωση της υπόγειας ροής στην κορεσμένη και την ακόρεστη ζώνη χρησιμοποιείται η τρισδιάστατη εξίσωση Richards. Η υδατοσυγκράτηση από τα φυτά, η εξατμισοδιαπνοή, η χιονοκάλυψη και η τήξη του χιονιού υπολογίζονται ακολουθώντας όμοια μεθοδολογία με αυτή που ακολουθείται στο MIKE SHE.

Στα ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών InHM (Vanderkwaak, 1999) και MODHMS (Panday and Huyakorn, 2004) συνδυάζονται οι εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας για την περιγραφή της διδιάστατης επίγειας ροής και της μονοδιάστατης ροής κατά μήκος ενός δικτύου φυσικών υδατορευμάτων και τεχνητών ανοιχτών αγωγών, με την τρισδιάστατη εξίσωση Richards για την προσομοίωση της κορεσμένης–ακόρεστης υπόγειας ροής. Στο MODHMS προσομοιώνονται επίσης οι διεργασίες της υδατοσυγκράτησης από τα φυτά και της εξατμισοδιαπνοής.

Οι Morita and Yen (2002) συνδύασαν τις εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας, για την περιγραφή της διδιάστατης επίγειας ροής, με την τρισδιάστατη εξίσωση Richards για την περιγραφή της υπόγειας ροής στην κορεσμένη και την ακόρεστη ζώνη. Στα μοντέλα των Gandolfi and Savi (2000), Erduran et al. (2005) και Liang et al. (2007) επιλύονται οι διδιάστατες εξισώσεις ρηχών υδάτων για την προσομοίωση της επίγειας ροής, αμελώντας τους όρους που εκφράζουν εσωτερικές τριβές, την τριβή του ανέμου στην ελεύθερη επιφάνεια και τη δύναμη Coriolis. Οι Gandolfi and Savi (2000) συνδύασαν τις εξισώσεις ρηχών υδάτων με την εξίσωση Richards για την προσομοίωση της μονοδιάστατης κορεσμένης–ακόρεστης υπόγειας ροής στην κατακόρυφη διεύθυνση. Στα μοντέλα των Erduran et al. (2005) και Liang et al. (2007) οι εξισώσεις ρηχών υδάτων συνδυάζονται με την εξίσωση διδιάστατης οριζόντιας κορεσμένης υπόγειας ροής.

Οι διδιάστατες εξισώσεις ρηχών υδάτων επιλύονται επίσης στα αριθμητικά μοντέλα που ανέπτυξαν οι Ebrahimi (2004), Sparks (2005, 2008) και Langevin et al. (2005). Οι Ebrahimi (2004) και Sparks (2005, 2008) συνδύασαν, με διαφορετικές μεθόδους, το μοντέλο επιφανειακών νερών DIVAST (Falconer, 1992, Falconer et al., 2001) με την εξίσωση διδιάστατης οριζόντιας κορεσμένης υπόγειας ροής. Το DIVAST, το οποίο αναπτύχθηκε για την προσομοίωση της υδροδυναμικής κυκλοφορίας σε παράκτια ύδατα και εκβολές ποταμών, βασίζεται στις διδιάστατες εξισώσεις ρηχών υδάτων, χωρίς να αμελούνται οι όροι που εκφράζουν εσωτερικές τριβές, την τριβή του ανέμου στην ελεύθερη επιφάνεια και τη δύναμη Coriolis. Τα μοντέλα των Ebrahimi (2004) και Sparks (2005, 2008) έχουν βρει εφαρμογή σε περιπτώσεις αλληλεπίδρασης παράκτιων υδάτων, εκβολών ποταμών και υγροτόπων με παρακείμενους υδροφορείς (βλ. Ebrahimi, 2004, Sparks, 2005, 2008).

Οι Langevin et al. (2005) συνδύασαν το μοντέλο επιφανειακών νερών SWIFT2D (Leendertse, 1987), το οποίο βασίζεται στις διδιάστατες εξισώσεις ρηχών υδάτων μεταβλητής πυκνότητας, με το μοντέλο SEAWAT (Guo and Langevin, 2002), το οποίο αναπτύχθηκε για την προσομοίωση της ροής υπόγειου νερού μεταβλητής πυκνότητας στην κορεσμένη ζώνη. Η πυκνότητα τόσο του επιφανειακού όσο και του υπόγειου νερού θεωρείται ότι είναι συνάρτηση της αλατότητας και οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων επιλύονται ταυτόχρονα με τις εξισώσεις που περιγράφουν τη μεταφορά και τη διάχυση της αλατότητας στα επιφανειακά και τα υπόγεια νερά. Το ολοκληρωμένο αριθμητικό μοντέλο που παρουσιάζεται στην εργασία των Langevin et al. (2005) αναπτύχθηκε με στόχο να μελετηθεί η αλληλεπίδραση μεταξύ παράκτιων υδάτων, υπόγειων νερών και γειτονικών παράκτιων υγροτόπων στην περιοχή του Εθνικού Πάρκου Everglades στη Φλόριδα των Η.Π.Α. Γενικά, επειδή λαμβάνεται υπ' όψη η εξάρτηση της πυκνότητας από την αλατότητα, το μοντέλο ενδείκνυται για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών σε παράκτιες περιοχές.

Εκτός από τα ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών που παρουσιάστηκαν παραπάνω, στα οποία επιλύονται οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή τόσο των επιφανειακών όσο και των υπόγειων υδάτων, κατά καιρούς έχουν αναπτυχθεί κάποια απλούστερα μοντέλα, στα οποία η εξίσωση που επιλέγεται για την περιγραφή της υπόγειας ροής συνδυάζεται με μία απλή εξίσωση υδατικού ισοζυγίου για το επιφανειακό υδάτινο σώμα. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν τα μοντέλα που παρουσιάζονται στις εργασίες των Merrit and Konikow (2000) και Crowe et al. (2004). Οι Merrit and Konikow (2000) ανέπτυξαν

την υπορουτίνα LAK3 για το μοντέλο υπόγειων νερών MODFLOW (Harbaugh et al., 2000), με την οποία υπολογίζεται το υδατικό ισοζύγιο λίμνης, η οποία βρίσκεται σε υδραυλική επαφή με τα υπόγεια νερά. Στην εργασία των Crowe et al. (2004) παρουσιάζεται το αριθμητικό μοντέλο GW–WETLAND (βλ. επίσης Shikaze and Crowe, 1999), το οποίο αναπτύχθηκε για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υπόγειων νερών και υγροτόπων. Στο GW–WETLAND η εξίσωση υδατικού ισοζυγίου για τον υγρότοπο συνδυάζεται με την εξίσωση κορεσμένης υπόγειας ροής, η οποία θεωρείται διδιάστατη στο κατακόρυφο επίπεδο.

Ο συνδυασμός των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων στα ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών πραγματοποιείται στην κοινή διεπιφάνεια επιφανειακών–υπόγειων υδάτων (π.χ. επιφάνεια του εδάφους, πυθμένας επιφανειακού υδάτινου σώματος), μέσω του ρυθμού διήθησης επιφανειακού νερού στο υποκείμενο πορώδες μέσο ή τροφοδοσίας των επιφανειακών νερών από τα υπόγεια. Στα μοντέλα στα οποία εξετάζεται η περίπτωση υδραυλικής επαφής μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, οπότε προσομοιώνεται η κορεσμένη υπόγεια ροή, ο ρυθμός διήθησης/τροφοδοσίας στη διεπιφάνεια των επιφανειακών–υπόγειων νερών υπολογίζεται από κάποια εξίσωση που βασίζεται στο νόμο Darcy (βλ. Bear, 1972, σελ. 120). Στα μοντέλα στα οποία προσομοιώνεται η υπόγεια ροή τόσο στην κορεσμένη όσο και στην ακόρεστη ζώνη, η εξίσωση υπολογισμού του ρυθμού διήθησης στη διεπιφάνεια των επιφανειακών–υπόγειων νερών βασίζεται στο νόμο Darcy–Buckingham (βλ. Bear, 1972, σελ. 487), ο οποίος είναι το ανάλογο του νόμου Darcy για ακόρεστη ροή.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στα ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών που υπάρχουν διαθέσιμα στη βιβλιογραφία, ο συνδυασμός των υπό–μοντέλων των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων πραγματοποιείται συνήθως στην κατακόρυφη διεύθυνση (π.χ. Swain and Wexler, 1996, Restrepo et al., 1998, Jobson and Harbaugh, 1999, Vanderkwaak, 1999, Morita and Yen, 2000, Hussein and Schwartz, 2003, Erduran et al., 2005, Gunduz and Aral, 2005). Στα λίγα αριθμητικά μοντέλα, όπου επιλύονται οι διδιάστατες εξισώσεις ρηχών υδάτων για την προσομοίωση της υδροδυναμικής κυκλοφορίας σε παράκτια ύδατα, εκβολές ποταμών και υγροτόπους, ο συνδυασμός των υπό–μοντέλων των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ των επιφανειακών υδάτινων σωμάτων και παρακείμενων υδροφορέων πραγματοποιείται

στις οριζόντιες διευθύνσεις (π.χ. Ebrahimi, 2004, Langevin et al., 2005, Sparks, 2005, Yuan et al., 2008).

Γενικά, μπορούν να διακριθούν τρεις μέθοδοι συνδυασμού της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων στα ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών:

- (i) Μέθοδος ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης (simultaneous coupling method), όπως ονομάστηκε από τους Morita and Yen (2002). Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην ταυτόχρονη αριθμητική επίλυση, σε κάθε χρονικό βήμα, των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων και της εξίσωσης που εκφράζει το ρυθμό διήθησης/τροφοδοσίας στη διεπιφάνεια επιφανειακών–υπόγειων νερών. Η ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων απαιτεί τη χρήση κοινού μεγέθους χρονικού βήματος στα υπό–μοντέλα των επιφανειακών και των υπόγειων νερών. Στη βιβλιογραφία συναντά κανείς ένα μικρό αριθμό αριθμητικών μοντέλων, τα οποία βασίζονται στη μέθοδο της ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης. Μερικά παραδείγματα αποτελούν τα μοντέλα που παρουσιάζονται στις εργασίες των Vanderkwaak (1999), Panday and Huyakorn (2004), Gunduz and Aral (2005), Sparks (2005, 2008) και Liang et al. (2007).
- (ii) Μέθοδος εσωτερικού συνδυασμού (internal coupling method), όπως ονομάζεται στην εργασία του Freeze (1972), ή εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού (alternating iterative coupling method), όπως ονομάζεται στην εργασία των Morita and Yen (2002). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, οι εξισώσεις των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων επιλύονται χωριστά, αλλά επαναληπτικά σε κάθε χρονικό βήμα. Έτσι, σε κάθε χρονικό βήμα η διαδικασία επίλυσης εναλλάσσεται αρκετές φορές μεταξύ των υπό–μοντέλων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών. Κάθε φορά που επιλύεται το ένα από τα δύο υπό–μοντέλα κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος, ο ρυθμός διήθησης/τροφοδοσίας στη διεπιφάνεια των επιφανειακών–υπόγειων νερών υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα (π.χ. τιμές πιεζομετρικών φορτίων) της πιο πρόσφατης επίλυσης του άλλου υπό–μοντέλου στο ίδιο χρονικό βήμα. Όπως ισχύει για κάθε επαναληπτική μέθοδο επίλυσης, η διαδικασία επίλυσης του ολοκληρωμένου αριθμητικού μοντέλου επιφανειακών–υπόγειων υδάτων για

ένα χρονικό βήμα ολοκληρώνεται όταν οι επιμέρους λύσεις των δύο υπό-μοντέλων ικανοποιήσουν ένα προκαθορισμένο κριτήριο σύγκλισης.

Καθώς με την εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδο συνδυασμού οι εξισώσεις των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων επιλύονται χωριστά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διαφορετικό μέγεθος χρονικού βήματος για τα υπό-μοντέλα των επιφανειακών και των υπόγειων νερών. Συνεπώς, ενώ οι εξισώσεις ροής των επιφανειακών υδάτων πρέπει να επιλυθούν χρησιμοποιώντας ένα σχετικά μικρό χρονικό βήμα, για λόγους ακρίβειας και αριθμητικής ευστάθειας, για την επίλυση των εξισώσεων της υπόγειας ροής μπορεί να χρησιμοποιηθεί μεγαλύτερο χρονικό βήμα καθώς οι ταχύτητες ροής των υπόγειων νερών είναι πολύ μικρότερες σε σχέση με αυτές των επιφανειακών. Έτσι, σε κάθε χρονικό βήμα του υπό-μοντέλου υπόγειων νερών επιλύονται ένα ή περισσότερα χρονικά βήματα του υπό-μοντέλου επιφανειακών νερών.

Η εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος είναι η συχνότερα χρησιμοποιούμενη μέθοδος συνδυασμού των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων σε ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών-υπόγειων νερών (π.χ. Pinder and Sauer, 1971, Freeze, 1972, Akan and Yen, 1981, Perkins and Koussis, 1996, Swain and Wexler, 1996, Jobson and Harbaugh, 1999, Morita and Yen, 2002, Hussein and Schwartz, 2003, Ebrahimi, 2004, Prudic et al., 2004, Erduran et al., 2005, Zerihun et al., 2005a).

- (iii) Μέθοδος εξωτερικού συνδυασμού (external coupling method), όπως ονομάστηκε από τον Freeze (1972), ή μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού (non-iterative coupling method), όπως ονομάστηκε από τους Morita and Yen (2002). Στα μοντέλα στα οποία χρησιμοποιείται η μέθοδος αυτή, τα υπό-μοντέλα των επιφανειακών και των υπόγειων νερών επιλύονται διαδοχικά, αλλά όχι επαναληπτικά, σε κάθε χρονικό βήμα και τα αποτελέσματα από την επίλυση του ενός χρησιμοποιούνται ως δεδομένα για την επίλυση του άλλου. Συνήθως, επιλύεται πρώτα το υπό-μοντέλο επιφανειακών νερών, χρησιμοποιώντας μέγεθος χρονικού βήματος μικρότερο ή ίσο με το μέγεθος του χρονικού βήματος που χρησιμοποιείται στο υπό-μοντέλο υπόγειων νερών. Το υπό-μοντέλο επιφανειακών νερών επιλύεται για τον αριθμό των χρονικών βημάτων που περιλαμβάνονται σε ένα χρονικό

βήμα του υπό-μοντέλου υπόγειων νερών. Τα αποτελέσματα της επίλυσης του υπό-μοντέλου επιφανειακών νερών (π.χ. υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών νερών) χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του ρυθμού διήθησης επιφανειακού νερού στο υποκείμενο πορώδες μέσο ή τροφοδοσίας των επιφανειακών νερών από τα υπόγεια. Στη συνέχεια, επιλύεται το υπό-μοντέλο υπόγειων νερών στο τρέχον χρονικό βήμα, λαμβάνοντας υπ' όψη το ρυθμό διήθησης/τροφοδοσίας στη διεπιφάνεια των επιφανειακών-υπόγειων νερών. Αφού ολοκληρωθεί η επίλυση του υπό-μοντέλου υπόγειων νερών, η διαδικασία διαδοχικής επίλυσης των δύο υπό-μοντέλων προχωράει στο επόμενο χρονικό βήμα.

Τη μη επαναληπτική μέθοδο συνδυασμού των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών ακολούθησαν, μεταξύ άλλων, οι Smith and Woolisher (1971), Abbot et al. (1986), Tabuada et al. (1995), Storm and Refsgaard (1996), Gandolfi and Savi (2000), Ewen et al. (2000), Sokrut (2001), Crowe et al. (2004) και Langevin et al. (2005).

Μεταξύ των τριών μεθόδων συνδυασμού των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών που αναλύθηκαν παραπάνω, η πιο σύνθετη αλλά και η πιο ακριβής είναι η μέθοδος ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης. Η μέθοδος αυτή θεωρείται ότι προσομοιώνει πιστότερα το φυσικό φαινόμενο της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων υδάτων και παρουσιάζει τα μικρότερα σφάλματα ισοζυγίου μάζας (Gunduz and Aral, 2005). Δεν επιτρέπει όμως τη χρήση διαφορετικού μεγέθους χρονικού βήματος στα υπό-μοντέλα των επιφανειακών και των υπόγειων νερών με αποτέλεσμα να μην αξιοποιείται η διαφορετική χρονική κλίμακα που ισχύει για τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων και να οδηγούμαστε συχνά σε μεγάλους υπολογιστικούς χρόνους (Panday and Huyakorn, 2004, Gunduz and Aral, 2005). Αυτός είναι και ο βασικότερος λόγος που τα περισσότερα ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών-υπόγειων νερών βασίζονται στην εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδο συνδυασμού των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων. Η μέθοδος αυτή είναι σαφώς απλούστερη σε σχέση με τη μέθοδο ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης. Ωστόσο, η εναλλασσόμενη επαναληπτική επίλυση των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών μέχρι να ικανοποιηθεί ένα προκαθορισμένο κριτήριο σύγκλισης μπορεί να οδηγήσει σε μεγαλύτερα σφάλματα ισοζυγίου μάζας (Gunduz and Aral, 2005). Τέλος, η μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού είναι η απλούστερη και γρηγορότερη μέθοδος από τις τρεις, καθώς οι εξισώσεις της ροής των επιφανειακών



και των υπόγειων υδάτων επιλύονται διαδοχικά, μία μόνο φορά σε κάθε χρονικό βήμα. Η μέθοδος αυτή είναι όμως και η λιγότερο ακριβής. Τα αποτελέσματα της επίλυσης του ενός υπό-μοντέλου χρησιμοποιούνται ως δεδομένα για την επίλυση του άλλου, χωρίς να υπάρχει η δυνατότητα επαναληπτικής βελτίωσης των επιμέρους λύσεων σε κάθε χρονικό βήμα, όπως συμβαίνει με την εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδο συνδυασμού (Morita and Yen, 2002, Gunduz and Aral, 2005). Όπως εύστοχα σχολιάζουν οι Morita and Yen (2002) πρόκειται στην ουσία για μία μέθοδο *μη συνδυασμένης επίλυσης*, αφού οι εξισώσεις των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων απλώς επιλύονται διαδοχικά.

Παρόλο που έχει αναπτυχθεί ένας σημαντικός αριθμός αριθμητικών μοντέλων για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ της ροής επιφανειακών και υπόγειων υδάτων, αρκετά από τα οποία παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, είναι πολύ λιγότερες οι προσπάθειες ταυτόχρονης αριθμητικής προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης ροής και ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Μερικά παραδείγματα αποτελούν τα μοντέλα που παρουσιάζονται στις εργασίες των Vanderkwaak (1999), Ewen et al. (2000), Faidi et al. (2002), Lin and Medina (2003), Hussein and Schwartz (2003), Ebrahimi (2004), Gunduz and Aral (2005), Sparks (2005, 2008), Zerihun et al. (2005b) και Storm and Refsgaard (1996).

Στο ολοκληρωμένο αριθμητικό μοντέλο επιφανειακών-υπόγειων νερών InHM (Vanderkwaak, 1999) προσομοιώνεται η κίνηση ρύπων σε υδατορεύματα, στην επιφάνεια του εδάφους, στην κορεσμένη και την ακόρεστη ζώνη, καθώς και η ανταλλαγή ρύπων μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Με το InHM μπορεί να προσομοιωθεί η γένεση ή η απώλεια μη συντηρητικών ρύπων λόγω φυσικών (προσρόφηση ρύπου από το πορώδες μέσο), χημικών και βιολογικών διεργασιών. Η προσρόφηση ρύπου από το πορώδες μέσο περιγράφεται από την εξίσωση γραμμικής ισόθερμης προσρόφησης ισορροπίας. Ο ρυθμός γένεσης ή απώλειας ρύπου λόγω χημικών ή βιολογικών διεργασιών περιγράφεται από κινητική πρώτης τάξης.

Τα καταμεμημένα υδρολογικά μοντέλα φυσικής βάσης SHETRAN (Ewen et al., 2000) και MIKE SHE (π.χ. Storm and Refsgaard, 1996, DHI, 2008) δίνουν την δυνατότητα προσομοίωσης της συμπεριφοράς μη συντηρητικών ρύπων σε επίπεδο λεκάνης απορροής. Και στα δύο μοντέλα η προσρόφηση ρύπων από το πορώδες μέσο περιγράφεται από κάποια εξίσωση ισόθερμης προσρόφησης ισορροπίας

(γραμμική, Freundlich ή Langmuir). Ο ρυθμός γένεσης ή απώλειας ρύπων λόγω χημικών ή βιολογικών διεργασιών περιγράφεται από κινητική πρώτης τάξης. Οι Birkinshaw and Ewen (2000) πρόσθεσαν στο SHETRAN υπό-ρουτίνα για την προσομοίωση των μετασχηματισμών του αζώτου. Οι μετασχηματισμοί του αζώτου σε επίπεδο λεκάνης απορροής μπορούν επίσης να προσομοιωθούν με το MIKE SHE, το οποίο συνδυάστηκε από τους Refsgaard et al. (1999) με το μαθηματικό μοντέλο DAISY (Hansen et al., 1991) που επιτρέπει την προσομοίωση των μετασχηματισμών του αζώτου στη ζώνη ριζοστρώματος.

Οι Faidi et al. (2002) πρόσθεσαν στο μαθηματικό μοντέλο MODBRANCH (Swain and Wexler, 1996) τη δυνατότητα προσομοίωσης της συμπεριφοράς συντηρητικών ρύπων σε ένα σύστημα υδατορευμάτων-υπόγειων νερών. Ως υπό-μοντέλο για την προσομοίωση της κίνησης ρύπων στην κορεσμένη ζώνη χρησιμοποίησαν το MT3DMS (Zheng and Wang, 1999) ενώ ανέπτυξαν υπό-μοντέλο για την προσομοίωση της διασποράς ρύπων σε υδατορεύματα. Οι Lin and Medina (2003) συνδύασαν το μαθητικό μοντέλο DAFLOW-MODFLOW (Jobson and Harbaugh, 1999), το οποίο αναπτύχθηκε για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ της ροής κατά μήκος υδατορευμάτων και της υπόγειας ροής, το μοντέλο MOC3D (Konikow et al., 1996) για την προσομοίωση της κίνησης μη συντηρητικών ρύπων στα υπόγεια νερά και υπό-μοντέλο, το οποίο ανέπτυξαν για την προσομοίωση της συμπεριφοράς μη συντηρητικών ρύπων σε υδατορεύματα. Στο MOC3D (Konikow et al., 1996) η προσρόφηση ρύπου από το πορώδες μέσο περιγράφεται από την εξίσωση γραμμικής ισόθερμης προσρόφησης ισορροπίας. Ο ρυθμός γένεσης ή απώλειας ρύπου στα επιφανειακά και τα υπόγεια νερά περιγράφεται από κινητική πρώτης τάξης.

Η ρύπανση σε ένα σύστημα υδατορευμάτων-υπόγειων νερών προσομοιώνεται επίσης στα μαθηματικά μοντέλα που ανέπτυξαν οι Hussein and Schwartz (2003), Gunduz and Aral (2005) και Zerihun et al. (2005b). Οι Gunduz and Aral (2005) και Zerihun et al. (2005b) θεώρησαν συντηρητικούς ρύπους. Στο FTSTREAM (Hussein and Schwartz, 2003) προσομοιώνεται η συμπεριφορά μη συντηρητικών ρύπων. Η προσρόφηση από το πορώδες μέσο περιγράφεται από την εξίσωση ισόθερμης προσρόφησης ισορροπίας του Freundlich και ο ρυθμός γένεσης ή απώλειας ρύπων λόγω χημικών ή βιολογικών αντιδράσεων από κινητική πρώτης τάξης.

Στα μαθηματικά μοντέλα που ανέπτυξαν οι Ebrahimi (2004) και Sparks (2005, 2008), στα οποία θεωρείται η αλληλεπίδραση μεταξύ της διδιάστατης ροής σε

παράκτια ύδατα και εκβολές ποταμών και της διδιάστατης οριζόντιας κορεσμένης υπόγειας ροής, προσομοιώνεται επίσης η αλληλεπίδραση συντηρητικών ρύπων μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στα αριθμητικά μοντέλα προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων υδάτων που συναντά κανείς στη βιβλιογραφία, ο συνδυασμός των εξισώσεων που περιγράφουν τη συμπεριφορά ρύπων στα επιφανειακά και στα υπόγεια νερά, στην κοινή τους διεπιφάνεια, βασίζεται στην παραδοχή ότι ο βασικός μηχανισμός ανταλλαγής ρύπων μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών είναι η μεταφορά (αμελείται δηλαδή ο μηχανισμός της διασποράς). Στο FTSTREAM (Hussein and Schwartz, 2003), για παράδειγμα, οι εξισώσεις των υπό-μοντέλων ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών συνδέονται μέσω της σχέσης (2.39):

$$S_{sgw} = \begin{cases} Q_L C_{gw} & (\text{τροφοδοσία υδατορεύματος από τα υπόγεια νερά}) \\ Q_L C_s & (\text{διήθηση επιφανειακού νερού στον υπόγειο υδροφορέα}) \end{cases} \quad (2.39)$$

όπου  $S_{sgw}$  [ $MT^{-1}$ ] είναι ο ρυθμός εισροής ρύπου από τον υπόγειο υδροφορέα στο υδατόρευμα ή εκροής ρύπου από το υδατόρευμα προς τον υπόγειο υδροφορέα,  $C_s$  [ $ML^{-3}$ ] είναι η συγκέντρωση του ρύπου στο υδατόρευμα,  $C_{gw}$  [ $ML^{-3}$ ] είναι η συγκέντρωση του ρύπου στα υπόγεια νερά κοντά στον πυθμένα του υδατορεύματος και  $Q_L$  [ $L^3T^{-1}$ ], όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι ο ρυθμός διήθησης επιφανειακού νερού στον υπόγειο υδροφορέα ή τροφοδοσίας του υδατορεύματος από τα υπόγεια νερά.

Όσον αφορά στις μεθόδους συνδυασμού των εξισώσεων που περιγράφουν τη συμπεριφορά ρύπων στα επιφανειακά και στα υπόγεια νερά, είναι όμοιες με τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για το συνδυασμό των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων, δηλαδή: μέθοδος ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης, εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού, μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού.

Στον Πίνακα 2.4 παρουσιάζονται συνοπτικά μερικά από τα πιο διαδεδομένα ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών-υπόγειων νερών.

Πίνακας 2.4: Ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών

Μοντέλο	Ροή επιφανειακών υδάτων	Ροή υπόγειων υδάτων	Προσομοίωση ρύπανσης	Μέθοδος συνδυασμού
Pinder and Sauer (1971)	1–D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων ορθογωνικής διατομής, εξισώσεις Saint Venant	2–D οριζόντια, κορεσμένη	—	εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
Freeze (1972)	1–D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων ορθογωνικής διατομής, εξισώσεις Saint Venant	3–D, κορεσμένη–ακόρεστη, εξίσωση Richards	—	εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
Akan and Yen (1981)	1–D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων, εξισώσεις Saint Venant	2–D στο κατακόρυφο επίπεδο, κορεσμένη–ακόρεστη, εξίσωση Richards	—	εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
Tabuada et al. (1995)	1–D ροή κατά μήκος αρδευτικών αυλακιών, εξισώσεις Saint Venant	2–D στο κατακόρυφο επίπεδο, κορεσμένη–ακόρεστη, εξίσωση Richards	—	μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
Perkins and Koussis (1996)	1–D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων, εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας	3–D, κορεσμένη (MODFLOW, McDonald and Harbaugh, 1988)	—	εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
MIKE SHE (Storm and Refsgaard, 1996)	1–D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων, πλήρεις εξισώσεις Saint Venant ή εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας ή του κινηματικού κύματος  2–D επίγεια ροή, εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας	κορεσμένη–ακόρεστη, 1–D στην κατακόρυφη διεύθυνση στην ακόρεστη ζώνη, εξίσωση Richards, 3–D στην κορεσμένη ζώνη	μη συντηρητικοί ρύποι, κινητική πρώτης τάξης (Storm and Refsgaard, 1996, DHI, 2008)  προσομοίωση μετασχηματισμών του αζώτου (Refsgaard et al., 1999)	μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού

MODBRANCH (Swain and Wexler, 1996)	1–D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων, εξισώσεις Saint Venant (BRANCH, Swain and Wexler, 1991)	3–D, κορεσμένη (MODFLOW, McDonald and Harbaugh, 1988)	συντηρητικοί ρύποι (Faidi et al., 2002)	εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
MOGROW (Querner, 1997)	1–D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων, εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας (SIMWAT, Querner, 1986)	κορεσμένη–ακόρεστη, quasi–3D στην κορεσμένη ζώνη, 1–D στην κατακόρυφη διεύθυνση στην ακόρεστη ζώνη (SIMGRO, Querner, 1988)	—	μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
Wetland MODFLOW module (Restrepo et al., 1998)	1–D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων 2–D επίγεια ροή, εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας	3–D, κορεσμένη (MODFLOW, Harbaugh and McDonald, 1996)	—	μέθοδος ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης
DAFLOW–MODLFLOW (Jobson and Harbaugh, 1999)	1–D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων, κύμα μηδενικής αδράνειας (DAFLOW, Jobson, 1989)	3–D, κορεσμένη (MODFLOW, Harbaugh and McDonald, 1996)	μη συντηρητικοί ρύποι, κινητική πρώτης τάξης (Lin and Medina, 2003)	εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
InHM (Vanderkwaak, 1999)	1–D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων 2–D επίγεια ροή, εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας	3–D κορεσμένη–ακόρεστη, εξίσωση Richards	μη συντηρητικοί ρύποι, κινητική πρώτης τάξης	μέθοδος ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης
Gandolfi and Savi (2000)	2–D επίγεια ροή, εξισώσεις ρηχών υδάτων	1–D στην κατακόρυφη διεύθυνση, εξίσωση Richards	—	μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
SHETRAN (Ewen et al., 2000)	1–D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων 2–D επίγεια ροή, εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας	3–D κορεσμένη–ακόρεστη, εξίσωση Richards	μη συντηρητικοί ρύποι, κινητική πρώτης τάξης προσομοίωση μετασχηματισμών του αζώτου (Birkinshaw and Ewen, 2000)	μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού

Lake MODFLOW module (LAK3) (Merrit and Konikow, 2000)	η στάθμη της λίμνης υπολογίζεται από απλή εξίσωση υδατικού ισοζυγίου	3-D, κορεσμένη (MODFLOW, Harbaugh et al., 2000)	συντηρητικοί ρύποι στη λίμνη, μη συντηρητικοί ρύποι στα υπόγεια νερά, κινητική πρώτης τάξης	μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού ή εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
ECOFLOW (Sokrut, 2001)	καταναμημένο υδρολογικό μοντέλο φυσικής βάσης (ECOMAG, Motovilov et al., 1999)	3-D, κορεσμένη (MODFLOW, Harbaugh et al., 2000)	μη συντηρητικοί ρύποι, κινητική πρώτης τάξης	μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
Morita and Yen (2002)	2-D επίγεια ροή, εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας	3-D κορεσμένη-ακόρεστη, εξίσωση Richards	—	εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
FTSTREAM, (Hussein and Schwartz, 2003)	1-D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων, εξισώσεις του κινηματικού κύματος	3-D, κορεσμένη (FTWORK, Faust et al., 1993)	μη συντηρητικοί ρύποι, κινητική πρώτης τάξης	εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
Crowe et al. (2004)	η στάθμη στον υγρότοπο υπολογίζεται από απλή εξίσωση υδατικού ισοζυγίου	2-D στο κατακόρυφο επίπεδο, κορεσμένη	συντηρητικοί ρύποι	μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
Streamflow Routing module (SFR1) (Prudic et al., 2004)	1-D μόνιμη ομοιόμορφη ροή κατά μήκος υδατορευμάτων, η διόδευση της ροής σε κάθε τμήμα υδατορεύματος βασίζεται στην εξίσωση συνέχειας θεωρώντας θεωρώντας μηδενική αποθήκευση νερού στο υδατόρευμα	3-D, κορεσμένη (MODFLOW, Harbaugh et al., 2000)	συντηρητικοί ρύποι στα υδατορεύματα, μη συντηρητικοί ρύποι στα υπόγεια νερά, κινητική πρώτης τάξης	εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
Ebrahimi (2004)	2-D εξισώσεις ρηχών υδάτων (DIVAST, Falconer, 1992)	2-D οριζόντια, κορεσμένη	συντηρητικοί ρύποι	εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
MODHMS (Panday and Huyakorn, 2004)	1-D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων  2-D επίγεια ροή, εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας	3-D κορεσμένη-ακόρεστη, εξίσωση Richards	—	μέθοδος ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης ή εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού

Erduran et al. (2005)	2-D επίγεια ροή, εξισώσεις ρηχών υδάτων	2-D οριζόντια, κορεσμένη	—	εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
Gunduz and Aral (2005)	1-D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων, εξισώσεις Saint Venant	2-D οριζόντια, κορεσμένη	μη συντηρητικοί ρύποι, κινητική πρώτης τάξης (Gunduz, 2004)	μέθοδος ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης
Langevin et al. (2005)	2-D εξισώσεις ρηχών υδάτων μεταβλητής πυκνότητας (SWIFT2D, Leendertse, 1987)	3-D κορεσμένη υπόγεια ροή μεταβλητής πυκνότητας (SEAWAT, Guo and Langevin, 2002)	προσομοίωση της αλατότητας	μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
Zerihun et al. (2005a)	1-D ροή κατά μήκος υδατορευμάτων, εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας	1-D στην κατακόρυφη διεύθυνση, εξίσωση Richards (HYDRUS-1D, Simunek et al., 1998)	συντηρητικοί ρύποι (Zerihun et al., 2005b)	εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
Sparks (2005, 2008)	2-D εξισώσεις ρηχών υδάτων (DIVAST, Falconer, 1992)	2-D οριζόντια, κορεσμένη	συντηρητικοί ρύποι	ταυτόχρονη συνδυασμένη επίλυση
Liang et al. (2007)	2-D επίγεια ροή, εξισώσεις ρηχών υδάτων	2-D οριζόντια, κορεσμένη	—	μέθοδος ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης
GSFLOW (Markstrom et al., 2008)	κατανεμημένο υδρολογικό μοντέλο φυσικής βάσης (PRMS, Leavesley et al., 1983, Leavesley et al., 2005), η ροή κατά μήκος υδατορευμάτων προσομοιώνεται από το SFR1 και το υδατικό ισοζύγιο λιμνών από το LAK3	κορεσμένη-ακόρεστη, 1-D στην κατακόρυφη διεύθυνση στην ακόρεστη ζώνη, εξίσωση Richards (UZF1, Niswonger et al., 2006), 3-D στην κορεσμένη ζώνη (MODFLOW, Harbaugh et al., 2000)	συντηρητικοί ρύποι στα υδατορεύματα και στις λίμνες, μη συντηρητικοί ρύποι στα υπόγεια νερά, κινητική πρώτης τάξης	εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού
Yuan et al. (2008)	2-D εξισώσεις ρηχών υδάτων (DIVAST, Falconer, 1992)	2-D οριζόντια, κορεσμένη	—	μέθοδος ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης

όπου: 1-D: μονοδιάστατη, 2-D: διδιάστατη, 3-D: τρισδιάστατη

## 2.4 Πειραματική διερεύνηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν ελάχιστες εργασίες πειραματικής διερεύνησης της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών χρησιμοποιώντας εργαστηριακά μοντέλα (π.χ. Rowe, 1960, Ebrahimi et al., 2007, Serrano and Workman, 2008). Ωστόσο, υπάρχουν πολλές εργασίες πειραματικής διερεύνησης της αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών στο πεδίο.

Ο Rowe (1960) πραγματοποίησε μετρήσεις πιεζομετρικών φορτίων σε πειραματική διάταξη για την επιβεβαίωση της αναλυτικής λύσης που ανέπτυξε για την απόκριση ημι-άπειρου, περιορισμένου υδροφορέα σε γραμμική μεταβολή της στάθμης υδατορεύματος, το οποίο διεισδύει πλήρως στον υδροφορέα. Πειραματικές μετρήσεις για την επιβεβαίωση αναλυτικών λύσεων αλληλεπίδρασης υδατορευμάτων–υπόγειων νερών, για ημιτονοειδή, γραμμική και εκθετική μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος με το χρόνο, πραγματοποίησαν επίσης οι Singh and Sagar (1977) χρησιμοποιώντας το πολύ διαδομένο κουτί άμμου ως εργαστηριακό μοντέλο (sand tank model). Οι Workman and Serrano (2008) χρησιμοποίησαν επίσης κουτί άμμου για να μελετήσουν τη μεταβολή του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας του υπόγειου νερού λόγω ημιτονοειδούς διακύμανσης της στάθμης στο ένα όριο. Οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν τις πειραματικές μετρήσεις που διεξήγαγαν για την επιβεβαίωση αναλυτικής λύσης της μη γραμμικής εξίσωσης Boussinesq, την οποία είχαν διατυπώσει σε προηγούμενη εργασία (Serrano et al., 2007).

Μία πολύ ενδιαφέρουσα εργασία είναι αυτή των Ebrahimi et al. (2007), οι οποίοι διερεύνησαν πειραματικά την αλληλεπίδραση ροής και ρύπανσης μεταξύ της παράκτιας ζώνης και γειτονικών υγροτόπων. Η πειραματική διάταξη που κατασκεύασαν ήταν ένα εξιδανικευμένο, φυσικό μοντέλο κλίμακας της λιμνοθάλασσας West Fleet, της παρακείμενης ακτής και των παράκτιων υδάτων στο Dorset του Ηνωμένου Βασιλείου. Στην πειραματική διάταξη, η ακτή προσομοιώθηκε κατασκευάζοντας αμμώδες ανάχωμα. Οι συγγραφείς μελέτησαν τη ροή και την κίνηση ρύπων μεταξύ των παράκτιων νερών και της λιμνοθάλασσας μέσω του αμμώδους αναχώματος. Δημιούργησαν ημιτονοειδείς κυματισμούς στην παράκτια περιοχή και πραγματοποίησαν μετρήσεις στάθμης και ταχυτήτων στη λιμνοθάλασσα και τα παράκτια νερά. Κατέγραψαν επίσης με βιντεοκάμερα την κίνηση συντηρητικού δείκτη μεταξύ της παράκτιας περιοχής και της λιμνοθάλασσας μέσω του αναχώματος. Οι Ebrahimi et al. (2007) κατέληξαν σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα



για την επίδραση του πορώδους μέσου (αμμώδες ανάχωμα) στην αλληλεπίδραση της παράκτιας ζώνης με γειτονικούς υδροτόπους. Τις πειραματικές μετρήσεις που πραγματοποίησαν τις χρησιμοποίησαν επίσης για την επιβεβαίωση του διδιάστατου ολοκληρωμένου αριθμητικού μοντέλου επιφανειακών–υπόγειων νερών που είχε αναπτύξει ο Ebrahimi (2004).

Οι εργασίες πειραματικής διερεύνησης της αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών στο πεδίο είναι πάρα πολλές. Στην πλειονότητα των εργασιών αυτών εξετάζεται η αλληλεπίδραση μεταξύ υπόγειων νερών και υδατορευμάτων (π.χ. Sophocleous et al., 1988, Lapham, 1989, Morrice et al., 1997, Wegner, 1997, Cey et al., 1998, Wroblicky et al., 1998, Crandball et al., 1999, Wett et al., 2002, Lambs, 2003, Fette, 2005, Keery et al., 2007), ενώ δεν είναι λίγες και οι εργασίες στις οποίες διερευνάται η αλληλεπίδραση μεταξύ υπόγειων νερών και λιμνών ή υπόγειων νερών και υδροτόπων (π.χ. Otz et al., 2003, Gurrieri and Furnis, 2004, Turner and Townley, 2006, Kluge et al., 2007).

Για την ποσοτικοποίηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών στο πεδίο, έχουν εφαρμοστεί διάφορες μέθοδοι όπως η χρήση μετρητών διαρροής (seepage meters) (π.χ. Cey et al., 1998, Wroblicky et al., 1998) ή ο προσδιορισμός των τιμών φυσικών δεικτών στα επιφανειακά και τα υπόγεια νερά (π.χ. Lapham, 1989, Wett et al., 2002, Gurrieri and Furnis, 2004, Fette, 2005, Turner and Townley, 2006, Keery et al., 2007). Φυσικοί δείκτες θεωρούνται η θερμοκρασία, η αγωγιμότητα, τα ευσταθή ισότοπα (π.χ.  $^{18}\text{O}$ ) και διάφορα ιόντα όπως  $\text{Ca}^{++}$ ,  $\text{K}^{+}$ ,  $\text{Mg}^{++}$ ,  $\text{Na}^{+}$ ,  $\text{Cl}^{-}$  κ.α. Οι τιμές των δεικτών αυτών διαφέρουν στα επιφανειακά και στα υπόγεια νερά και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της διήθησης επιφανειακού νερού στον υπόγειο υδροφόρα ή αντίστροφα την τροφοδοσία του επιφανειακού αποδέκτη από τα υπόγεια νερά.

## 2.5 Συμπεράσματα

Η βιβλιογραφική διερεύνηση έδειξε ότι τις τελευταίες δεκαετίες έχει αναπτυχθεί ένας σημαντικός αριθμός αναλυτικών λύσεων και αριθμητικών μοντέλων για τη μελέτη προβλημάτων αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, ενώ το θέμα έχει διερευνηθεί και πειραματικά.

Οι αναλυτικές λύσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για τη μελέτη απλών περιπτώσεων αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων υδάτων καθώς και για την επιβεβαίωση αριθμητικών μοντέλων. Η πλειονότητα των αναλυτικών λύσεων αφορούν στην αλληλεπίδραση μεταξύ υπόγειων νερών και υδατορευμάτων ενώ υπάρχει και ένας μικρός αριθμός δημοσιεύσεων, οι οποίες έχουν ως θέμα την αλληλεπίδραση μεταξύ υπόγειων νερών και λιμνών. Στις περισσότερες εργασίες διατυπώνονται αναλυτικές λύσεις επιλύοντας μόνο τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την υπόγεια ροή. Η υδραυλική επικοινωνία με το υδατόρευμα ή τη λίμνη λαμβάνεται υπ' όψη ως οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet ή Cauchy στην επίλυση της εξίσωσης της υπόγεια ροής. Σε τέσσερις μόνο δημοσιεύσεις με θέμα την αλληλεπίδραση μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών θεωρούνται οι εξισώσεις τόσο της επιφανειακής όσο και της υπόγεια ροής για τη διατύπωση αναλυτικών λύσεων.

Αναλυτικές λύσεις για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών, λύνοντας μόνο την εξίσωση που περιγράφει την υπόγεια ροή, έχουν αναπτυχθεί κυρίως για περιορισμένους και φρεάτιους υδροφορείς. Στις εργασίες στις οποίες διατυπώνονται αναλυτικές λύσεις για την αλληλεπίδραση μεταξύ υδατορευμάτων και περιορισμένων υδροφορέων, θεωρείται μονοδιάστατη οριζόντια ροή σε ομογενή και ισότροπο υδροφορέα, οπότε επιλύεται η εξίσωση διάχυσης για διάφορες οριακές συνθήκες, όπως π.χ. για γραμμική ή ημιτονοειδή μεταβολή της στάθμης του υδατορεύματος.

Το πρόβλημα της διατύπωσης αναλυτικών λύσεων για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορευμάτων και φρεάτιων υδροφορέων έχει προσεγγιστεί με δύο τρόπους στις σχετικές εργασίες. Σύμφωνα με την πρώτη προσέγγιση, θεωρείται μονοδιάστατη οριζόντια ροή σε ομογενή και ισότροπο υδροφορέα. Στην περίπτωση αυτή η υπόγεια ροή περιγράφεται από τη μονοδιάστατη εξίσωση Boussinesq, η οποία συνήθως γραμμικοποιείται πριν από την επίλυσή της. Μέχρι σήμερα έχουν διατυπωθεί ελάχιστες αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης Boussinesq χωρίς προηγούμενη γραμμικοποίηση, μεταξύ των οποίων οι πιο ενδιαφέρουσες είναι οι λύσεις που παρουσιάζονται στις εργασίες των Serrano and Workman (1998) και Parlange et al. (2000). Οι αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης Boussinesq χωρίς προηγούμενη γραμμικοποίηση προβλέπουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τις μεταβολές του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας του υπόγειου νερού σε σύγκριση με τις λύσεις κάποιας γραμμικοποιημένης μορφής της εξίσωσης Boussinesq.

Η δεύτερη προσέγγιση για τη διατύπωση αναλυτικών λύσεων αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορευμάτων και φρεάτιων υδροφορέων θεωρεί την υπόγεια ροή διδιάστατη στο κατακόρυφο επίπεδο. Στις περισσότερες δημοσιεύσεις που ακολουθούν αυτήν την προσέγγιση, η κινηματική οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια του υδροφορέα γραμμικοποιείται γύρω από το αρχικό υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας. Οι λύσεις που βασίζονται στη γραμμικοποίηση αυτή ισχύουν για μικρές διακυμάνσεις του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας σε σύγκριση με το αρχικό υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας του υδροφορέα. Η εργασία του Serrano (2003) είναι η μοναδική στην οποία θεωρείται η μη γραμμική μορφή της κινηματικής οριακής συνθήκης στην ελεύθερη επιφάνεια. Συνεπώς η λύση του Serrano (2003) μπορεί να εφαρμοστεί ακόμη και σε περιπτώσεις μεγάλων διακυμάνσεων του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας του υδροφορέα.

Στις δημοσιεύσεις στις οποίες θεωρούνται οι εξισώσεις τόσο της επιφανειακής όσο και της υπόγεια ροής για τη διατύπωση αναλυτικών λύσεων αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών, γίνεται η παραδοχή οριζόντιας υπόγεια ροής, μονοδιάστατης ή διδιάστατης, σε ομογενή και ισότροπο περιορισμένο ή φρεάτιο υδροφορέα. Για τη ροή στο υδατόρευμα χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας ή του κινηματικού κύματος καθώς και η μέθοδος Muskingum. Η πιο ολοκληρωμένη αντιμετώπιση του προβλήματος παρουσιάζεται στην εργασία του Lal (2001), ο οποίος συνδύασε τις εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας για τη ροή κατά μήκος του υδατορεύματος με τη διδιάστατη εξίσωση διάχυσης για την υπόγεια ροή. Οι προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις που ανέπτυξε για τα πιεζομετρικά φορτία στον υδροφορέα και τη στάθμη και την παροχή του υδατορεύματος είναι εύκολα εφαρμόσιμες και ενδείκνυνται για τη μελέτη απλών περιπτώσεων αλληλεπίδρασης υδατορευμάτων–υπόγειων νερών καθώς και για την επιβεβαίωση αριθμητικών μοντέλων.

Στις λίγες εργασίες στις οποίες διατυπώνονται αναλυτικές λύσεις για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υπόγειων νερών και λιμνών, εξετάζεται η περίπτωση μόνιμης υπόγεια ροής σε ομογενή και ισότροπο υδροφορέα, οπότε επιλύεται η εξίσωση Laplace. Στις περισσότερες περιπτώσεις η υπόγεια ροή θεωρείται διδιάστατη, είτε οριζόντια είτε στο κατακόρυφο επίπεδο. Η μοναδική εργασία στην οποία θεωρείται τρισδιάστατη υπόγεια ροή είναι αυτή του Kacimov (2000).

Τα ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών που συναντά κανείς στη βιβλιογραφία μπορούν να διακριθούν με βάση: (α) τον τύπο και

τη χωρική διάσταση των εξισώσεων που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων και (β) τη μέθοδο συνδυασμού των εξισώσεων αυτών. Στην πλειονότητα των ολοκληρωμένων αριθμητικών μοντέλων επιφανειακών–υπόγειων νερών που έχουν αναπτυχθεί εξετάζεται η αλληλεπίδραση της επίγεια ροής ή της ροής κατά μήκος υδατορευμάτων με την υπόγεια ροή. Για την περιγραφή της μη μόνιμης μονοδιάστατης ροής κατά μήκος υδατορευμάτων χρησιμοποιούνται είτε οι πλήρεις εξισώσεις Saint Venant είτε οι απλούστερες εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας και του κινηματικού κύματος. Για την περιγραφή της διδιάστατης επίγεια ροής χρησιμοποιούνται συνήθως οι εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας. Στο μικρό αριθμό αριθμητικών μοντέλων που έχουν αναπτυχθεί για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης παράκτιων υδάτων, εκβολών ποταμών και υγροτόπων με τα υπόγεια νερά, επιλύονται οι διδιάστατες εξισώσεις ρηχών υδάτων για την προσομοίωση της υδροδυναμικής κυκλοφορίας στα επιφανειακά υδάτινα σώματα.

Η εξίσωση που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της υπόγεια ροής σε ένα ολοκληρωμένο αριθμητικό μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων υδάτων εξαρτάται από το αν εξετάζεται η περίπτωση υδραυλικής επαφής μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, οπότε θεωρείται η υπόγεια ροή στην κορεσμένη ζώνη, ή η περίπτωση που επιφανειακά και υπόγεια νερά δε βρίσκονται σε υδραυλική επαφή, οπότε προσομοιώνεται η υπόγεια ροή τόσο στην κορεσμένη όσο και στην ακόρεστη ζώνη. Η κορεσμένη υπόγεια ροή θεωρείται διδιάστατη, οριζόντια ή στο κατακόρυφο επίπεδο, ή τρισδιάστατη. Για την περιγραφή της κορεσμένης–ακόρεστης ροής, η οποία θεωρείται τρισδιάστατη, διδιάστατη στο κατακόρυφο επίπεδο ή μονοδιάστατη στην κατακόρυφη διεύθυνση, χρησιμοποιείται η εξίσωση Richards.

Ο συνδυασμός των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων στα ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών πραγματοποιείται στην κοινή τους διεπιφάνεια μέσω του ρυθμού διήθησης επιφανειακού νερού στο υποκείμενο πορώδες μέσο ή τροφοδοσίας των επιφανειακών νερών από τα υπόγεια. Γενικά, μπορούν να διακριθούν τρεις μέθοδοι συνδυασμού της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων: η μέθοδος ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης, η εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού και η μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού.

Μεταξύ των τριών μεθόδων συνδυασμού των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων, η πιο σύνθετη αλλά και η πιο

ακριβής είναι η μέθοδος ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης, καθώς θεωρείται ότι προσομοιώνει πιστότερα το φυσικό φαινόμενο και παρουσιάζει τα μικρότερα σφάλματα ισοζυγίου μάζας. Ωστόσο, δεν επιτρέπει τη χρήση διαφορετικού χρονικού βήματος στα υπό-μοντέλα των επιφανειακών και των υπόγειων νερών με αποτέλεσμα να μην αξιοποιείται η διαφορετική χρονική κλίμακα που ισχύει για τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων και να οδηγεί συχνά σε μεγάλους υπολογιστικούς χρόνους. Αυτός είναι και ο βασικότερος λόγος που τα περισσότερα ολοκληρωμένα αριθμητικά μοντέλα επιφανειακών-υπόγειων νερών βασίζονται στην εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδο συνδυασμού των εξισώσεων της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων. Η μέθοδος αυτή είναι σαφώς απλούστερη από τη μέθοδο ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης, μπορεί όμως να οδηγήσει σε μεγαλύτερα σφάλματα ισοζυγίου μάζας. Τέλος, η μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού είναι η απλούστερη και γρηγορότερη μέθοδος από τις τρεις. Η μέθοδος αυτή είναι όμως και η λιγότερο ακριβής, καθώς δεν υπάρχει η δυνατότητα επαναληπτικής βελτίωσης των επιμέρους λύσεων των υπό-μοντέλων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών σε κάθε χρονικό βήμα. Πρόκειται στην ουσία για μία μέθοδο *μη συνδυασμένης επίλυσης*, αφού οι εξισώσεις των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων απλώς επιλύονται διαδοχικά.

Η βιβλιογραφική διερεύνηση έδειξε ότι αν και έχει αναπτυχθεί ένας σημαντικός αριθμός αριθμητικών μοντέλων για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ της ροής επιφανειακών και υπόγειων υδάτων, είναι πολύ λιγότερες οι προσπάθειες ταυτόχρονης αριθμητικής προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης ροής και ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Στα μοντέλα αυτά, ο συνδυασμός των εξισώσεων που περιγράφουν τη συμπεριφορά ρύπων στα επιφανειακά και στα υπόγεια νερά βασίζεται στην παραδοχή ότι ο βασικός μηχανισμός ανταλλαγής ρύπων μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων υδάτων είναι η μεταφορά (αμελείται δηλαδή ο μηχανισμός της διασποράς). Όσον αφορά στις μεθόδους συνδυασμού των εξισώσεων που περιγράφουν τη συμπεριφορά ρύπων στα επιφανειακά και στα υπόγεια νερά, είναι όμοιες με τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για το συνδυασμό των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων, δηλαδή: μέθοδος ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης, εναλλασσόμενη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού, μη επαναληπτική μέθοδος συνδυασμού.

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι στη βιβλιογραφία υπάρχουν ελάχιστες εργασίες πειραματικής διερεύνησης της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών χρησιμοποιώντας εργαστηριακά μοντέλα. Ωστόσο, υπάρχουν πολλές

εργασίες πειραματικής διερεύνησης της αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών στο πεδίο. Σε εργαστηριακό επίπεδο έχουν πραγματοποιηθεί πειραματικές μετρήσεις κυρίως για την επιβεβαίωση αναλυτικών λύσεων αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών. Στην πλειονότητα των εργασιών πειραματικής διερεύνησης της αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών που έχουν πραγματοποιηθεί στο πεδίο εξετάζεται η αλληλεπίδραση μεταξύ υπόγειων νερών και υδατορευμάτων, ενώ δεν είναι λίγες και οι εργασίες στις οποίες διερευνάται η αλληλεπίδραση μεταξύ υπόγειων νερών και λιμνών ή υπόγειων νερών και υγροτόπων.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΟ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ–ΥΠΟΓΕΙΩΝ ΝΕΡΩΝ

---

### 3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται το τρισδιάστατο ολοκληρωμένο υδροδυναμικό μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων υδάτων IRENE–HYD. Το υπό–μοντέλο ροής επιφανειακών νερών του IRENE–HYD βασίζεται στο αριθμητικό μοντέλο FLOW–3DL, το οποίο έχει αναπτυχθεί από τον επιβλέποντα της διδακτορικής διατριβής, Αναστάσιο Στάμου, Καθηγητή Ε.Μ.Π., για την προσομοίωση της υδροδυναμικής κυκλοφορίας μεταβατικών και παράκτιων υδάτων (π.χ. Stamou et al., 2007a, b). Το υπό–μοντέλο ροής υπόγειων υδάτων του IRENE–HYD αναπτύχθηκε από την υπόψηφια διδάκτορα στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής, για την προσομοίωση της ροής στην κορεσμένη ζώνη πορώδους μέσου. Το FLOW–3DL τροποποιήθηκε σημαντικά για τις ανάγκες της διδακτορικής διατριβής. Στη νέα έκδοσή του FLOW–3DL εφαρμόζεται ένα ημι–πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών υδάτων, ενώ στην αρχική μορφή του μοντέλου το αριθμητικό σχήμα επίλυσης ήταν ρητό. Στον κώδικα του FLOW–3DL προστέθηκε επίσης ένας αλγόριθμος “διαβροχής” και “ξήρανσης” (wetting and drying algorithm) κελιών του υπολογιστικού πλέγματος. Η προσομοίωση



της διαδικασίας διαβροχής αρχικά ξηρών περιοχών και το αντίστροφο, είναι σημαντική για την προσομοίωση της υδροδυναμικής κυκλοφορίας σε επιφανειακά υδάτινα σώματα, ιδιαίτερα όταν υπάρχει αλληλεπίδραση με τα υπόγεια νερά.

Στις επόμενες παραγράφους διατυπώνονται αρχικά οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στο IRENE-HYD για την περιγραφή της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων και στη συνέχεια παρουσιάζεται η αριθμητική τους επίλυση χρησιμοποιώντας ένα ημι-πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών και ένα πλήρως πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών, αντίστοιχα. Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή του συνδυασμού των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων στην κοινή διεπιφάνεια επιφανειακών-υπόγειων νερών μέσω του νόμου του Darcy και της εν συνεχεία ταυτόχρονης επίλυσής τους σε κάθε χρονικό βήμα. Περιγράφεται επίσης η μέθοδος εσωτερικού συνδυασμού των εξισώσεων των υπό-μοντέλων των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων, η οποία περιλαμβάνεται στο IRENE-HYD ως εναλλακτική της μεθόδου ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης των εξισώσεων. Τέλος, ελέγχεται η ακρίβεια του IRENE-HYD συγκρίνοντας τα αποτελέσματά του με αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων που ισχύουν για απλές περιπτώσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, καθώς και με αριθμητικές λύσεις μαθηματικών μοντέλων των οποίων η αξιοπιστία και η ακρίβεια είναι αποδεκτή. Ο έλεγχος της ακρίβειας του IRENE-HYD πραγματοποιείται διερευνώντας επτά περιπτώσεις, οι οποίες επιλέχθηκαν έτσι ώστε να είναι δυνατή η αξιολόγηση διαφορετικών συνιστωσών του μοντέλου.

## **3.2 Μαθηματική διατύπωση**

### **3.2.1 Εξισώσεις του υπό-μοντέλου ροής επιφανειακών υδάτων**

Οι εξισώσεις που επιλύονται στα διάφορα τρισδιάστατα αριθμητικά μοντέλα προσομοίωσης της υδροδυναμικής κυκλοφορίας σε επιφανειακά υδάτινα σώματα βασίζονται γενικά στις διαφορικές εξισώσεις συνέχειας και ποσότητας κίνησης που διέπουν την τυρβώδη ροή ασυμπίεστων ρευστών. Χρησιμοποιώντας καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, οι εξισώσεις αυτές μπορούν να διατυπωθούν ως εξής (βλ. π.χ. Versteeg and Malalasekera, 1995, Νουτσόπουλο και Χριστοδούλου, 1996):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial \rho \bar{u}' \bar{u}'}{\partial x} - \frac{\partial \rho \bar{u}' \bar{v}'}{\partial y} - \frac{\partial \rho \bar{u}' \bar{w}'}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = \rho f_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial \rho \bar{u}' \bar{v}'}{\partial x} - \frac{\partial \rho \bar{v}' \bar{v}'}{\partial y} - \frac{\partial \rho \bar{v}' \bar{w}'}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) - \frac{\partial \rho \bar{u}' \bar{w}'}{\partial x} - \frac{\partial \rho \bar{v}' \bar{w}'}{\partial y} - \frac{\partial \rho \bar{w}' \bar{w}'}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Η εξίσωση συνέχειας (3.1) εκφράζει την αρχή διατήρησης της μάζας και οι εξισώσεις ποσότητας κίνησης (3.2), (3.3) και (3.4) κατά τους άξονες  $x$ ,  $y$  και  $z$  του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, αντίστοιχα, εκφράζουν την αρχή διατήρησης της ορμής. Στις εξισώσεις (3.1)–(3.4),  $t$  [T] είναι ο χρόνος,  $\bar{u}(x,y,z,t)$ ,  $\bar{v}(x,y,z,t)$  και  $\bar{w}(x,y,z,t)$  [ $L T^{-1}$ ] είναι οι μέσες χρονικές τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$ , αντίστοιχα,  $\bar{p}(x,y,z,t)$  [ $M L^{-1} T^{-2}$ ] είναι η μέση χρονική τιμή της πίεσης,  $\rho(x,y,z,t)$  [ $M L^{-3}$ ] είναι η πυκνότητα του ρευστού,  $\mu(x,y,z)$  [ $M L^{-1} T^{-1}$ ] είναι ο συντελεστής δυναμικής μοριακής συνεκτικότητας, και  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$  [ $L T^{-2}$ ] συμβολίζουν τις συνιστώσες των καθολικών δυνάμεων που ασκούνται στο ρευστό, όπως είναι η δύναμη της βαρύτητας και η δύναμη Coriolis, ανά μονάδα μάζας ρευστού, στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$ , αντίστοιχα.

Οι εξισώσεις της ασυμπίεστης τυρβώδους ροής (3.1)–(3.4) προκύπτουν από τη μετατροπή των γενικών εξισώσεων συνέχειας και ποσότητας κίνησης (γνωστές σαν εξισώσεις Navier–Stokes, βλ. π.χ. Νουτσόπουλο και Χριστοδούλου, 1996) που διέπουν την κίνηση ασυμπίεστων συνεκτικών ρευστών και ισχύουν αυστηρά για τις στιγμιαίες τιμές της ταχύτητας και της πίεσης, σε εξισώσεις που περιγράφουν τις μέσες χρονικές τιμές των μεταβλητών της ροής. Στην τυρβώδη ροή οι στιγμιαίες τιμές δεν έχουν πρακτική σημασία καθώς το κύριο χαρακτηριστικό της τυρβώδους ροής είναι ότι η ταχύτητα, η πίεση και κάθε άλλο μέγεθος μεταβάλλονται συνεχώς σε τυχόν

σημείο του ρευστού με την πάροδο του χρόνου κατά τρόπο ακανόνιστο και φαινομενικά τυχαίο (Νουτσόπουλος και Χριστοδούλου, 1996). Η τυχαία συμπεριφορά της τυρβώδους ροής δεν επιτρέπει την αναλυτική μαθηματική περιγραφή της κίνησης όλων των ρευστών σωματιδίων. Έτσι, θεωρείται ότι οι στιγμιαίες τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας και της πίεσης συνίστανται από μία μέση χρονική τιμή  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  και  $\bar{p}$  και μία χρονικά κυμαινόμενη τιμή ή διακύμανση  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  και  $p'$ . Η εξαγωγή των εξισώσεων της τυρβώδους ροής παρουσιάζεται αναλυτικά στους Νουτσόπουλο και Χριστοδούλου (1996).

Οι εξισώσεις ποσότητας κίνησης (3.2)–(3.4) είναι γνωστές σαν εξισώσεις Reynolds. Είναι πανομοιότυπες με τις εξισώσεις Navier–Stokes με τη διαφορά ότι είναι διατυπωμένες ως προς τη μέση ροή και όχι ως προς τις στιγμιαίες τιμές της ταχύτητας και της πίεσης και περιλαμβάνουν πρόσθετους όρους που εκφράζουν την επίδραση των τυρβωδών διακυμάνσεων στη μέση ροή. Αυτοί οι πρόσθετοι όροι είναι οι κλίσεις των τυρβωδών τάσεων ή τάσεων Reynolds όπως ονομάζονται,  $\overline{\rho u' u'}$ ,  $\overline{\rho v' v'}$ ,  $\overline{\rho w' w'}$ ,  $\overline{\rho u' v'}$ ,  $\overline{\rho u' w'}$  και  $\overline{\rho v' w'}$ , που αναπτύσσονται λόγω των τυρβωδών διακυμάνσεων (Νουτσόπουλος και Χριστοδούλου, 1996). Οι άγνωστοι των τεσσάρων εξισώσεων της τυρβώδους ροής (3.1)–(3.4) είναι δέκα, τα τέσσερα μεγέθη της μέσης ροής  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  και  $\bar{p}$  και οι έξι τυρβώδεις τάσεις. Επομένως, για να είναι εφικτή η επίλυσή τους χρειάζονται πρόσθετες εξισώσεις για τον προσδιορισμό των τυρβωδών τάσεων. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται μοντέλα τύρβης.

Στην ανάπτυξη των μοντέλων τύρβης θεμελιώδης είναι η έννοια της τυρβώδους συνεκτικότητας που εισήγαγε ο Boussinesq το 1877 (Boussinesq, 1877b). Κατά την υπόθεση του Boussinesq οι τυρβώδεις τάσεις μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των κλίσεων της μέσης ταχύτητας. Ενδεικτικά, για την εξίσωση (3.2), οι τυρβώδεις τάσεις γράφονται σύμφωνα με την υπόθεση Boussinesq ως εξής:

$$\begin{aligned} -\overline{\rho u' u'} &= \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \\ -\overline{\rho u' v'} &= \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\ -\overline{\rho u' w'} &= \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

όπου  $\mu_t(x,y,z,t)$  [ $ML^{-1}T^{-1}$ ] είναι ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας. Ορίζεται επίσης ο συντελεστής κινηματικής τυρβώδους συνεκτικότητας  $\nu_t = \mu_t / \rho$  με διαστάσεις [ $L^2T^{-1}$ ]. Ενώ ο συντελεστής μοριακής συνεκτικότητας,  $\mu$ , αποτελεί ιδιότητα του ρευστού, ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας,  $\mu_t$ , δεν είναι ιδιότητα του ρευστού αλλά εξαρτάται από τις συνθήκες ροής και τα χαρακτηριστικά της τύρβης και για αυτό η τιμή του μπορεί να μεταβάλλεται σημαντικά μέσα στο πεδίο ροής καθώς και συναρτήσει του χρόνου αν η ροή είναι μη μόνιμη (Νουτσόπουλος και Χριστοδούλου, 1996). Για τον προσδιορισμό του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας έχουν αναπτυχθεί διάφορα μοντέλα τύρβης, τα οποία διακρίνονται σε αλγεβρικά μοντέλα ή μοντέλα μηδενικού αριθμού εξισώσεων, μοντέλα μίας εξίσωσης και μοντέλα δύο εξισώσεων ανάλογα με το αν περιλαμβάνουν αλγεβρικές εξισώσεις ή απαιτείται η επίλυση μίας ή δύο διαφορικών εξισώσεων – πρόσθετων προς τις εξισώσεις Reynolds – για την εκτίμηση του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας. Το απλούστερο μοντέλο τύρβης αποτελεί η θεώρηση μιας σταθερής τιμής για το συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας, η οποία εκτιμάται εμπειρικά. Παραλλαγή του μοντέλου σταθερής τυρβώδους συνεκτικότητας αποτελεί η χρήση σταθερών αλλά διαφορετικών μεταξύ τους τιμών του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας κατά τις τρεις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$ , και  $z$ , που εκφράζει την ενδεχόμενη ανισοτροπία της τυρβώδους μεταφοράς (Νουτσόπουλος και Χριστοδούλου, 1996). Στα αλγεβρικά μοντέλα τύρβης εντάσσεται επίσης η υπόθεση μήκους μίξεως του Prandtl (Prandtl, 1925) ενώ το συνηθέστερο μοντέλο δύο εξισώσεων είναι το λεγόμενο μοντέλο  $k-\epsilon$  (π.χ. Launder and Sharma, 1974, Launder and Spalding, 1974).

Εκφράζοντας τις τυρβώδεις τάσεις συναρτήσει των κλίσεων της μέσης ταχύτητας, οι εξισώσεις Reynolds παίρνουν τη μορφή των εξισώσεων Navier–Stokes με μόνη διαφορά ότι αντί του συντελεστή μοριακής συνεκτικότητας  $\mu$  εισέρχεται το άθροισμα  $(\mu + \mu_t)$ . Επειδή κατά κανόνα ισχύει ότι  $\mu_t \gg \mu$ , οι όροι της μοριακής συνεκτικότητας συνήθως αμελούνται, οπότε οι εξισώσεις της τυρβώδους ροής (3.1)–(3.4) γράφονται ως εξής:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.6)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu_t \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu_t \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \rho f_x \quad (3.7)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu_t \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu_t \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \rho f_y \quad (3.8)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_t \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_t \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu_t \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho f_z \quad (3.9)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, όπως και στη συνέχεια της διατριβής, το σύμβολο των μέσων τιμών της ταχύτητας και της πίεσης παραλείπεται για την απλοποίηση του συμβολισμού.

Οι εξισώσεις (3.6)–(3.9) μπορούν να επιλυθούν για την προσομοίωση της τρισδιάστατης ροής επιφανειακών υδάτων αφού επιλεγεί κάποιο μοντέλο για την εκτίμηση του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας και προσδιορισθούν οι καθολικές δυνάμεις. Σε υδάτινα σώματα μεγάλης έκτασης (π.χ. παράκτια ύδατα, εκβολές ποταμών), στις καθολικές δυνάμεις πρέπει να συμπεριληφθεί εκτός από τη δύναμη της βαρύτητας και η δύναμη Coriolis που εκφράζει την επίδραση της περιστροφής της γης. Θεωρώντας τους άξονες  $x$ ,  $y$  του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων οριζόντιους και τον άξονα  $z$  κατακόρυφο προς τα πάνω (βλ. Σχήμα 3.1), οι συνιστώσες των καθολικών δυνάμεων  $f_x$ ,  $f_y$  και  $f_z$  δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} f_x &= fv \\ f_y &= -fu \\ f_z &= -g \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου  $f = 2\omega \sin\phi$  [ $T^{-1}$ ] είναι η παράμετρος Coriolis, η οποία εκφράζεται συναρτήσει του γεωγραφικού πλάτους  $\phi$  και της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της γης  $\omega$ .

Η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων (3.6)–(3.9) συνεπάγεται αρκετό υπολογιστικό φόρτο για δύο κυρίως λόγους: (α) ο υπολογισμός του τρισδιάστατου πεδίου πιέσεων περιπλέκει τη διαδικασία αριθμητικής επίλυσης και (β) απαιτείται συνήθως πυκνό υπολογιστικό πλέγμα για λόγους ακρίβειας (Vreugdenhil, 1994, Choi and Wu, 2005). Έτσι, πολύ συχνά γίνεται η παραδοχή υδροστατικής κατανομής της πίεσης που απλοποιεί σημαντικά τη μαθηματική διατύπωση και την αριθμητική

επίλυση των εξισώσεων υδροδυναμικής κυκλοφορίας σε επιφανειακά υδάτινα σώματα. Η παραδοχή αυτή μπορεί να γίνει σε υδάτινα σώματα όπου τα βάθη και ιδιαίτερα οι μεταβολές τους λόγω της τοπογραφίας του πυθμένα και των διακυμάνσεων της ελεύθερης επιφάνειας είναι γενικά μικρές σε σύγκριση με τις οριζόντιες διαστάσεις, οπότε η κατακόρυφη επιτάχυνση της ροής μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα σε σύγκριση με την επιτάχυνση της βαρύτητας και την κατακόρυφη βαθμίδα της πίεσης (Χριστοδούλου, 1991, Falconer, 1993). Πρέπει να τονιστεί ότι σε περιπτώσεις βραχέων κυματισμών ή/και μεγάλων μεταβολών της κλίσης του πυθμένα δε μπορούν να αμεληθούν οι κατακόρυφες επιταχύνσεις και δε μπορεί να γίνει η παραδοχή υδροστατικής κατανομής της πίεσης.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του σχήματος 3.1 και θεωρώντας την πυκνότητα του νερού σταθερή, η παραδοχή υδροστατικής κατανομής της πίεσης εκφράζεται μαθηματικά με την εξίσωση (3.11):

$$p(x, y, z, t) = \rho g (\zeta(x, y, z, t) - z) + p_a \quad (3.11)$$

όπου  $\zeta(x, y, t)$  [L] είναι το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας μετρούμενο από το επίπεδο αναφοράς και  $p_a$  είναι η ατμοσφαιρική πίεση. Συνεπώς για τις βαθμίδες της πίεσης  $\partial p / \partial x$  και  $\partial p / \partial y$  που υπεισέρχονται στις εξισώσεις ποσότητας κίνησης (3.7) και (3.8) ισχύει:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial p_a}{\partial x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial p_a}{\partial y} \quad (3.12)$$

Η επίδραση των βαθμίδων της ατμοσφαιρικής πίεσης είναι γενικά μικρή και αμελείται (Vreugdenhil, 1994).

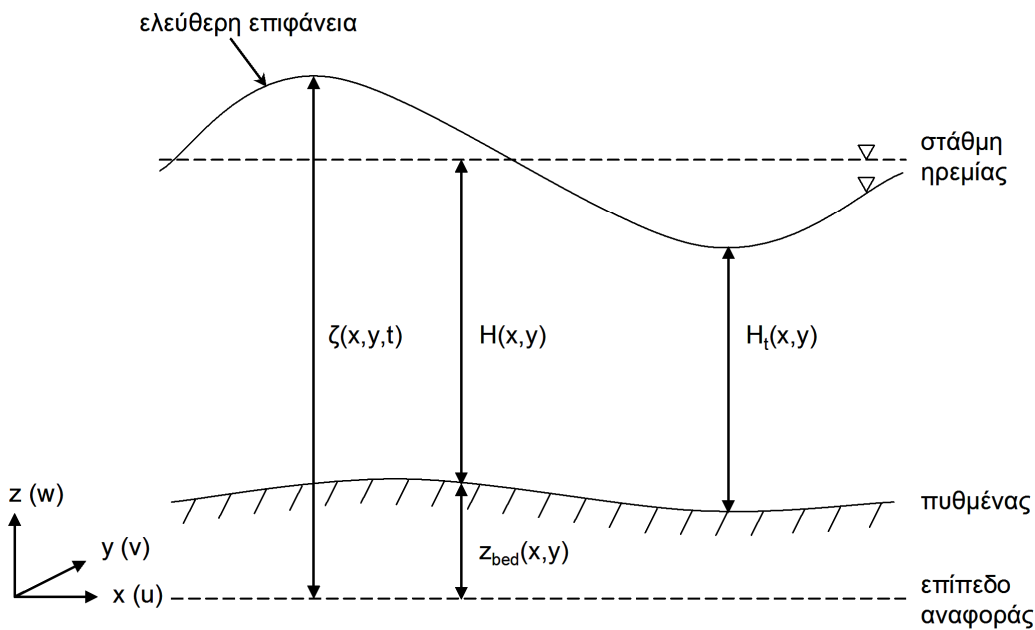
Εφαρμόζοντας τις παραπάνω παραδοχές (υδροστατική κατανομή της πίεσης, σταθερή πυκνότητα) στις εξισώσεις (3.7)–(3.9), διατυπώνονται οι εξισώσεις συνέχειας και ποσότητας κίνησης (3.13)–(3.15) για τη ροή ρηχών υδάτων υπό σταθερή πυκνότητα (βλ. π.χ. Falconer, 1993, Vreugdenhil, 1994), οι οποίες επιλύονται αριθμητικά στο FLOW-3DL για τον προσδιορισμό του τρισδιάστατου πεδίου ροής:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}}_1 = -g \underbrace{\frac{\partial \zeta}{\partial x}}_2 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_h \frac{\partial u}{\partial x} \right)}_3 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_h \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_4 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_v \frac{\partial u}{\partial z} \right)}_5 + \underbrace{f_v}_5 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}}_1 = -g \underbrace{\frac{\partial \zeta}{\partial y}}_2 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_h \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_3 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_h \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_4 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_v \frac{\partial v}{\partial z} \right)}_5 - \underbrace{f_u}_5 \quad (3.15)$$

όπου  $\nu_h(x,y,z,t)$  και  $\nu_v(x,y,z,t)$  είναι οι συντελεστές οριζόντιας και κατακόρυφης κινηματικής τυρβώδους συνεκτικότητας, αντίστοιχα. Οι αριθμημένοι όροι στις εξισώσεις ποσότητας κίνησης (3.14) και (3.15) αναφέρονται ως: ο όρος μεταφοράς (όρος 1), ο όρος βαθμίδας του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας (όρος 2), ο όρος οριζόντιας διάχυσης (όρος 3), ο όρος κατακόρυφης διάχυσης (όρος 4) και ο όρος επιτάχυνσης Coriolis (όρος 5).



**Σχήμα 3.1:** Ορισμός μεταβλητών του υπό-μοντέλου ροής επιφανειακών υδάτων

Στο FLOW-3DL υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν σταθερές τιμές για τους συντελεστές οριζόντιας και κατακόρυφης κινηματικής τυρβώδους συνεκτικότητας ή εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί το αλγεβρικό μοντέλο υποπλέγματος Smagorinsky (Smagorinsky, 1963) για το συντελεστή οριζόντιας κινηματικής τυρβώδους συνεκτικότητας και ένα μοντέλο μήκους μίξεως δύο στρωμάτων (Rodi, 1984) για το συντελεστή κατακόρυφης κινηματικής τυρβώδους συνεκτικότητας. Σύμφωνα με το μοντέλο τύρβης Smagorinsky ο συντελεστής οριζόντιας κινηματικής τυρβώδους συνεκτικότητας εκφράζεται ως:

$$v_h = c\Delta x\Delta y \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.16)$$

όπου  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  είναι οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα και  $c$  είναι σταθερά με τυπικό εύρος τιμών 0.01–0.4 στις διάφορες εφαρμογές (Vreugdenhil, 1994).

Το μοντέλο μήκους μίξεως δύο στρωμάτων ισοδυναμεί με την εξής έκφραση για το συντελεστή κατακόρυφης κινηματικής τυρβώδους συνεκτικότητας:

$$v_v = \ell_m^2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.17)$$

όπου  $\ell_m$  [L] είναι το μήκος μίξεως. Το μήκος μίξεως ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \ell_m &= \kappa z, \quad \text{αν } \kappa z \leq 0.1H_t \\ \ell_m &= 0.1H_t, \quad \text{αν } \kappa z > 0.1H_t \end{aligned} \quad (3.18)$$

όπου  $H_t(x,y,t)$  [L] είναι το ολικό βάθος νερού μετρούμενο από τον πυθμένα ως την ελεύθερη επιφάνεια του επιφανειακού υδάτινου σώματος (βλ. Σχήμα 3.1) και  $\kappa$  είναι η σταθερά του von Karman. Πειραματικές μετρήσεις σε διάφορες ροές έδειξαν ότι  $\kappa \approx 0.4$  (Rodi, 1984).

### 3.2.1.1 Αρχικές και οριακές συνθήκες

Για την επίλυση των εξισώσεων (3.13)–(3.14β) θα πρέπει να ορισθούν:

- αρχικές συνθήκες, δηλαδή να καθορισθούν τιμές για τις συνιστώσες της ταχύτητας και το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας στο εξεταζόμενο πεδίο ροής τη χρονική στιγμή εκκίνησης των υπολογισμών ( $t = 0$ ) και
- οριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια, στον πυθμένα και στα πλευρικά όρια του επιφανειακού υδάτινου σώματος.

Ως αρχική συνθήκη επιλέγεται συνήθως η κατάσταση ηρεμίας, δηλαδή οριζόντια ελεύθερη επιφάνεια και μηδενικές ταχύτητες σε όλη την έκταση του εξεταζόμενου πεδίου:  $u(x,y,z,0) = v(x,y,z,0) = w(x,y,z,0) = 0$  και  $\zeta(x,y,0) = z_{bed}(x,y) + H(x,y)$ , όπου  $z_{bed}(x,y)$  [L] είναι το υψόμετρο του πυθμένα μετρούμενο από το επίπεδο αναφοράς



και  $H(x,y)$  [L] είναι το βάθος νερού μετρούμενο από τον πυθμένα ως τη στάθμη ηρεμίας (βλ. Σχήμα 3.1).

Δύο ειδών οριακές συνθήκες ορίζονται στην ελεύθερη επιφάνεια και στον πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος: κινηματικές και δυναμικές οριακές συνθήκες. Στην μεταβαλλόμενη ελεύθερη επιφάνεια ισχύει η ακόλουθη κινηματική οριακή συνθήκη (Vreugdenhil, 1994):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = w, \quad \text{επάνω στο όριο } z = \zeta(x, y, t) \quad (3.19)$$

Για τον πυθμένα, η κινηματική οριακή συνθήκη διατυπώνεται ως εξής (Vreugdenhil, 1994):

$$w - u \frac{\partial z}{\partial x} - v \frac{\partial z}{\partial y} = Q_s, \quad \text{επάνω στο όριο } z = z_{bed}(x, y) \quad (3.20)$$

όπου  $Q_s(x,y,t)$  [ $\text{LT}^{-1}$ ] συμβολίζει την εισροή/εκροή νερού μέσω του πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος, όπως π.χ. τη διήθηση επιφανειακού νερού στο υποκείμενο πορώδες μέσο.

Στην ελεύθερη επιφάνεια ορίζονται δύο δυναμικές οριακές συνθήκες, μία για την πίεση (εξίσωση (3.21)) και μία για τη διατμητική τάση που μπορεί να ασκείται στην ελεύθερη επιφάνεια λόγω ανέμου (εξίσωση (3.22)), η οποία εκφράζεται συναρτησίως της ταχύτητας του ανέμου σε συμβατικό ύψος 10 m πάνω από την επιφάνεια του νερού (Wu, 1969):

$$p = p_a \quad (3.21)$$

$$\tau_{sx} = \nu_v \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\zeta} = C_s W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2}, \quad \tau_{sy} = \nu_v \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=\zeta} = C_s W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (3.22)$$

όπου  $\tau_{sx}$  και  $\tau_{sy}$  [ $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ ] συμβολίζουν τις διατμητικές τάσεις στην ελεύθερη επιφάνεια στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα,  $C_s$  είναι ο συντελεστής τριβής ανέμου και  $W_x(x,y,t)$ ,  $W_y(x,y,t)$  [ $\text{LT}^{-1}$ ] είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας του ανέμου στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα.

Στον πυθμένα ισχύει η δυναμική οριακή συνθήκη μη-ολίσθησης (no-slip boundary condition):

$$u \Big|_{z=z_{bed}} = v \Big|_{z=z_{bed}} = 0 \quad (3.23)$$

Ωστόσο, η αριθμητική μεταχείριση της οριακής συνθήκης (3.23) δεν είναι εύκολη. Η ποσότητα που ενδιαφέρει συνήθως στα αριθμητικά μοντέλα είναι οι διατμητικές τάσεις στον πυθμένα, οι οποίες εκφράζονται συναρτήσει των οριζόντιων συνιστωσών της ταχύτητας που υπολογίζονται για το στρώμα νερού ακριβώς πάνω από τον πυθμένα (βλ. π.χ. Koutitas, 1988, Vreugdenhil, 1994):

$$\begin{aligned}
 \tau_{bx} &= \nu_v \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=z_{bed}} = \frac{g \sqrt{u_b^2 + v_b^2}}{C_z^2} u_b \\
 \tau_{by} &= \nu_v \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=z_{bed}} = \frac{g \sqrt{u_b^2 + v_b^2}}{C_z^2} v_b
 \end{aligned} \quad (3.24)$$

όπου  $\tau_{bx}$  και  $\tau_{by}$  [ $ML^{-1}T^{-2}$ ] συμβολίζουν τις διατμητικές τάσεις στον πυθμένα στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα και  $C_z$  [ $L^{1/2}T^{-1}$ ] είναι ο συντελεστής Chezy. Ο δείκτης 'b' χρησιμοποιείται για να συμβολίσει τις τιμές των οριζόντιων συνιστωσών  $u$  και  $v$  της ταχύτητας που υπολογίζονται από το FLOW-3DL για το στρώμα νερού πάνω από τον πυθμένα.

Στα πλευρικά όρια του εξεταζόμενου πεδίου καθορίζονται η ταχύτητα ή το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας. Γενικά, δύο ειδών όρια διακρίνονται: κλειστά και ανοικτά όρια. Τα ανοικτά όρια είναι τεχνητά όρια ρευστού-ρευστού, όπου τερματίζεται το υπολογιστικό πλέγμα και το εξεταζόμενο π.χ. παράκτιο πεδίο συνδέεται με την ανοικτή θάλασσα ή με εκβολές ποταμών. Στα όρια αυτά καθορίζεται η χρονική μεταβολή εισροών ή εκροών, όπου είναι γνωστές, εισάγοντας τις αντίστοιχες ταχύτητες ή παροχές, ή καθορίζεται η διακύμανση του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας με το χρόνο, που μπορεί να εκφράζει την προσπίπτουσα παλίρροια ή άλλη διαταραχή. Τα κλειστά όρια είναι στερεά όρια, όπως π.χ. είναι οι ακτές και οι όχθες ποταμών και λιμνών. Στα μαθηματικά μοντέλα προσομοίωσης της ροής επιφανειακών υδάτων ορίζεται μηδενική εγκάρσια ταχύτητα ή παροχή (κινηματική οριακή συνθήκη) στα όρια αυτά. Ωστόσο, εφόσον στο IRENE-HYD προσομοιώνεται η αλληλεπίδραση μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, οι όχθες και ο πυθμένας επιφανειακών υδάτινων σωμάτων δεν αποτελούν όρια στα οποία επιβάλλεται μηδενική εγκάρσια ταχύτητα, εκτός βέβαια αν θεωρηθούν πρακτικά αδιαπέρατα.

### 3.2.1.2 Εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας

Στην παράγραφο αυτή διατυπώνεται η ονομαζόμενη εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας, η οποία περιγράφει τη διακύμανσή της με το χρόνο. Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας προκύπτει από την ολοκλήρωση της εξίσωσης συνέχειας (3.13) ως προς το βάθος, λαμβάνοντας υπ' όψη τις κινηματικές οριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια και στον πυθμένα (3.19) και (3.20), αντίστοιχα.

Πιο αναλυτικά, ολοκληρώνοντας την εξίσωση συνέχειας (3.13) κατά  $z$  από τον πυθμένα ως την ελεύθερη επιφάνεια προκύπτει:

$$\int_{z_{bed}}^{\zeta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{z_{bed}}^{\zeta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{z_{bed}}^{\zeta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = \int_{z_{bed}}^{\zeta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{z_{bed}}^{\zeta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + w|_{z=\zeta} - w|_{z=z_{bed}} = 0 \quad (3.25)$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα ολοκλήρωσης του Leibniz (1646–1716), η εξίσωση (3.25) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} w|_{z=\zeta} - w|_{z=z_{bed}} &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_{bed}}^{\zeta} u dz + u|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - u|_{z=z_{bed}} \frac{\partial z_{bed}}{\partial x} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_{bed}}^{\zeta} v dz + v|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - v|_{z=z_{bed}} \frac{\partial z_{bed}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις κινηματικές οριακές συνθήκες (3.19) και (3.20), προκύπτει τελικά η εξίσωση ελεύθερης επιφάνειας (3.27) (βλ. π.χ. Falconer, 1993):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{z_{bed}}^{\zeta} u dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{z_{bed}}^{\zeta} v dz \right) = Q_s \quad (3.27)$$

Ανακεφαλαιώνοντας, στο FLOW–3DL επιλύονται οι εξισώσεις (3.13), (3.14), (3.15) και (3.27) για τον προσδιορισμό του τρισδιάστατου πεδίου ροής και του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων. Οι οριακές συνθήκες που χρησιμοποιούνται στο FLOW–3DL για την επίλυση των εξισώσεων είναι οι (3.22) και (3.24), καθώς και οι συνθήκες που ορίζονται στα πλευρικά όρια του εξεταζόμενου πεδίου.

### 3.2.2 Εξισώσεις του υπό-μοντέλου ροής υπόγειων υδάτων

#### 3.2.2.1 Γενικά

Στο IRENE-HYD εξετάζεται η περίπτωση υδραυλικής επαφής μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, οπότε στο υπό-μοντέλο ροής υπόγειων υδάτων προσομοιώνεται η ροή στην κορεσμένη ζώνη πορώδους μέσου.

Η ροή υπόγειων υδάτων σε πορώδη μέσα χαρακτηρίζεται συνήθως από πολύ μικρές ταχύτητες (δεν ξεπερνούν λίγα χιλιοστά του μέτρου το δευτερόλεπτο), λόγω της πολύπλοκης γεωμετρίας των λεπτών σωληνίσκων που σχηματίζουν οι πόροι μέσα στους οποίους κινείται το νερό, έτσι ώστε οι όροι των δυνάμεων αδράνειας στις γενικές εξισώσεις κίνησης Navier-Stokes (αριστερό μέλος εξισώσεων, βλ. Νουτσόπουλο και Χριστοδούλου, 1996) να μπορούν να αμεληθούν. Επομένως, η ροή είναι στρωτή και διέπεται από την ισορροπία των δυνάμεων συνεκτικότητας και των δυνάμεων πίεσης-βαρύτητας (έρπουσα ροή) (Νουτσόπουλος και Χριστοδούλου, 1996). Ωστόσο, η ακριβής μαθηματική περιγραφή της ροής των υπόγειων υδάτων σε πορώδες μέσο, στην πραγματική μικροσκοπική κλίμακά της, με βάση τις εξισώσεις της έρπουσας ροής είναι πρακτικά αδύνατη, λόγω του πολύπλοκου σχήματος των σωληνίσκων της ροής και γενικότερα της χασοτικής γεωμετρίας του δικτύου των πόρων. Μόνο η μακροσκοπική εξέταση του προβλήματος είναι δυνατή χρησιμοποιώντας εμπειρικούς νόμους που θεωρούν κάποια υποθετική μέση ροή που πραγματοποιείται στο πορώδες μέσο (Domenico and Schwartz, 1998, Νάνου-Γιάνναρου και Παπαθανασιάδης, 2008).

Τη μακροσκοπική λύση έδωσε πρώτος ο Γάλλος μηχανικός Henry Philibert Gaspard Darcy (1803-1858) το 1856. Ο Darcy κατάστρωσε το φερώνυμο νόμο μελετώντας πειραματικά το πρόβλημα διέλευσης του πόσιμου νερού της πόλης Dijon μέσω φίλτρων άμμου για τον καθαρισμό του. Αργότερα αποδείχτηκε ότι ο νόμος του Darcy προκύπτει και θεωρητικά ως συνέπεια του νόμου Hagen-Poiseuille που διέπει τη στρωτή ροή μέσω των λεπτών διάκενων των πορωδών μέσων (βλ. π.χ. Bear, 1972, Domenico and Schwartz, 1996). Έτσι, ο νόμος του Darcy μπορεί να θεωρηθεί συνέπεια των εξισώσεων Navier-Stokes, σε μακροσκοπικό επίπεδο, με τις παραδοχές ότι (α) το πορώδες μέσο δεν έχει ασυνέχειες τύπου μεγάλων ρωγμών ή σχισμών, (β) το πεδίο δυνάμεων περιορίζεται στις δυνάμεις βαρύτητας και πίεσης και (γ) η ροή είναι κορεσμένη (Bear, 1972, Domenico and Schwartz, 1996).

### 3.2.2.2 Ο νόμος του Darcy

Χρησιμοποιώντας καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ο νόμος του Darcy για τρισδιάστατη ροή σε ανισότροπο πορώδες μέσο διατυπώνεται σε μητρική μορφή ως εξής (βλ. π.χ. Bear, 1979):

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}\mathbf{J} = -\mathbf{K}\text{grad}(h) \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

όπου  $\mathbf{q}$  είναι το διάνυσμα της ειδικής παροχής με συνιστώσες  $q_x(x,y,z,t)$ ,  $q_y(x,y,z,t)$  και  $q_z(x,y,z,t)$  στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$ , αντίστοιχα, του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων,  $\mathbf{K} \equiv [K_{ij}]$  είναι το μητρώο (ακριβέστερα ο τανυστής δεύτερης τάξης) της υδραυλικής αγωγιμότητας και  $\mathbf{J} = -\text{grad}(h)$  είναι η υδραυλική κλίση με συνιστώσες  $J_x = -\partial h / \partial x$ ,  $J_y = -\partial h / \partial y$  και  $J_z = -\partial h / \partial z$  κατά τις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$ , αντίστοιχα. Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η κίνηση του νερού γίνεται κατά την κατεύθυνση μείωσης του πιεζομετρικού ύψους,  $h(x,y,z,t)$ , το οποίο εκφράζει το άθροισμα του γεωμετρικού ύψους και του ύψους πίεσης, δηλαδή  $h = z + p/\rho g$ . Η εξίσωση (3.28) μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί το μακροσκοπικό στατιστικό ισοδύναμο των εξισώσεων Navier–Stokes για ασυμπύεστο ρευστό (Domenico and Schwartz, 1988).

Ως ειδική παροχή ή ταχύτητα Darcy ορίζεται η παροχή ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στη διεύθυνση της ροής. Η ειδική παροχή, που έχει διαστάσεις ταχύτητας, αντιπροσωπεύει μια εικονική μέση ταχύτητα ροής και είναι ένα λογιστικό μέγεθος. Στην πραγματικότητα η ροή πραγματοποιείται μόνο στο τμήμα της διατομής του πορώδους μέσου που δεν καταλαμβάνεται από στερεό υλικό, δηλαδή στους πόρους. Η πραγματική μέση ταχύτητα ροής,  $\mathbf{V}_p$  [ $\text{LT}^{-1}$ ], συνδέεται με την ειδική παροχή με τη σχέση  $\mathbf{V}_p = \mathbf{q}/n_e$ , όπου  $n_e$  είναι το ενεργό πορώδες.

Ο τανυστής της υδραυλικής αγωγιμότητας,  $\mathbf{K}$ , είναι συμμετρικός, δηλαδή  $K_{xy} = K_{yx}$ ,  $K_{xz} = K_{zx}$  και  $K_{yz} = K_{zy}$ . Η συνιστώσα  $K_{xx}$  συμβολίζει την υδραυλική αγωγιμότητα που καθορίζει την ειδική παροχή κατά τη διεύθυνση  $x$  λόγω υδραυλικής

κλίσης στη διεύθυνση  $x$ . Αντίστοιχα, η συνιστώσα  $K_{xy}$  συμβολίζει την υδραυλική αγωγιμότητα που καθορίζει την ειδική παροχή κατά τη διεύθυνση  $x$  λόγω υδραυλικής κλίσης στη διεύθυνση  $y$ , κ.ο.κ. Παρόλο που η υδραυλική αγωγιμότητα ενός πορώδους μέσου – σαν φυσικό μέγεθος – είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων που επιλέγεται, οι τιμές των συνιστωσών της,  $K_{ij}$ , εξαρτώνται από αυτό. Ο τανυστικός λογισμός παρέχει κανόνες μετασχηματισμού των συνιστωσών αυτών από ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο (βλ. π.χ. Bear, 1972). Επίσης αποδεικνύεται ότι είναι πάντα δυνατό να βρεθεί ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο μηδενίζονται όλοι οι μη διαγώνιοι όροι του τανυστή. Οι άξονες αυτού του συστήματος ονομάζονται κύριοι άξονες του ανισότροπου μέσου ή κύριοι άξονες της υδραυλικής αγωγιμότητας. Σε ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων, ο νόμος του Darcy γράφεται για τις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$  ως εξής:

$$q_x = -K_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.29)$$

$$q_y = -K_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.30)$$

$$q_z = -K_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (3.31)$$

όπου για απλοποίηση του συμβολισμού, στο σύστημα των κύριων αξόνων τίθεται:

$$K_x := K_{xx}, \quad K_y := K_{yy} \quad \text{και} \quad K_z := K_{zz}.$$

Οι εξισώσεις (3.28) και (3.29)–(3.31) ισχύουν φυσικά και για ομογενές και για ετερογενές ανισότροπο πορώδες μέσο. Στην περίπτωση ετερογενούς μέσου οι τιμές των συνιστωσών της υδραυλικής αγωγιμότητας δεν είναι σταθερές αλλά μεταβάλλονται συναρτήσει του χώρου.

Η γραμμική σχέση μεταξύ της ειδικής παροχής και της υδραυλικής κλίσης, που προβλέπει ο νόμος του Darcy, ισχύει (όπως έχει ήδη αναφερθεί) για στρωτή ροή. Κατ' αναλογία με τη ροή σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση, ορίζεται και για τη ροή σε πορώδες μέσο ο αδιάστατος αριθμός Reynolds ως εξής:

$$Re = qd / \nu \quad (3.32)$$

όπου  $\nu$  [ $L^2T^{-1}$ ] είναι η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού και  $d$  [L] είναι κάποια αντιπροσωπευτική διάσταση μήκους του πορώδους μέσου, όπως η μέση διάμετρος των κόκκων  $d_{50}$  ή η διάμετρος  $d_{10}$  ( $d_{10}$  ορίζεται η διάμετρος για την οποία ισχύει ότι

10% των κόκκων κατά βάρος έχουν διάμετρο μικρότερη από αυτήν) (Νάνου-Γιάνναρου και Παπαθανασιάδης, 2008). Πειράματα έδειξαν ότι η ροή παραμένει στρωτή εφόσον ο αριθμός Reynolds έχει τιμές μικρότερες της μονάδας, ενώ οι αποκλίσεις από τη γραμμικότητα δεν είναι σημαντικές για τιμές του αριθμού Reynolds που δεν ξεπερνούν το δέκα. Εξαιρέσεις από τον κανόνα της στρωτής ροής αποτελούν οι ροές σε καρστικούς ασβεστόλιθους και γενικότερα σε πετρώματα με μεγάλες ρωγμές, που υπόκεινται σε μεγάλες υδραυλικές κλίσεις, όπου η σχέση ανάμεσα στην ειδική παροχή και την υδραυλική κλίση γίνεται μη γραμμική (Domenico and Schwartz, 1996). Ωστόσο, τέτοιες ροές δεν εξετάζονται στην παρούσα διατριβή.

Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (3.28) περιγράφει ροές σταθερής πυκνότητας. Για ροή μεταβλητής πυκνότητας σε ανισότροπο πορώδες μέσο, ο νόμος του Darcy διατυπώνεται ως εξής (Bear, 1979):

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \left( \frac{1}{\rho g} \text{grad}(\rho) + \text{grad}(z) \right) \quad (3.33)$$

Στην εξίσωση (3.33) η πυκνότητα του ρευστού μπορεί να εξαρτάται από την πίεση, τη συγκέντρωση ρύπων (π.χ. αλατότητα) και τη θερμοκρασία.

### 3.2.2.3 Εξίσωση συνέχειας

Η μαθηματική διατύπωση της εξίσωσης συνέχειας για τρισδιάστατη μη μόνιμη ροή σε πορώδες μέσο προκύπτει από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης της μάζας ρευστού που εισέρχεται, εξέρχεται και αποθηκεύεται σε στοιχειώδη όγκο του πορώδους μέσου, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, όπως παρουσιάζεται αναλυτικά π.χ στον Bear (1979). Ο στοιχειώδης όγκος θεωρείται πλήρως κορεσμένος υπό πίεση. Χρησιμοποιώντας καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, η εξίσωση συνέχειας γράφεται ως:

$$-\left( \frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} \right) + \rho W = \frac{\partial(\rho n)}{\partial t} \quad \text{ή} \quad -\text{div}(\rho \mathbf{q}) + \rho W = \frac{\partial(\rho n)}{\partial t} \quad (3.34)$$

όπου  $n$  είναι το πορώδες και  $W(x,y,z,t)$  [ $T^{-1}$ ] συμβολίζει εισροές ή/και εκροές ρευστού στον/από τον υπόγειο υδροφόρα (π.χ αντλήσεις, παροχετεύσεις, κλπ) και έχει θετικό πρόσημο για εισροές και αρνητικό για εκροές. Η εξίσωση (3.34) θεωρείται το

μακροσκοπικό αντίστοιχο της γνωστής εξίσωσης συνέχειας της ρευστομηχανικής (Domenico and Schwartz, 1996).

Για τις ανάγκες της παρούσας διατριβής γίνεται η παραδοχή ότι οποιοσδήποτε μεταβολές της πυκνότητας του ρευστού οφείλονται αποκλειστικά στις μεταβολές της πίεσης, παραδοχή που ισχύει στην πράξη, εκτός από προβλήματα υφαλμύρισης. Για τη διατύπωση της εξίσωσης συνέχειας (3.34) συναρτήσει των πιεζομετρικών φορτίων  $h(x,y,z,t)$ , γίνονται επίσης οι ακόλουθες παραδοχές (Bear, 1979):

- Η υδραυλική αγωγιμότητα του υδροφορέα θεωρείται σταθερή, παρόλο που η πυκνότητα και η συνεκτικότητα του ρευστού εξαρτώνται από την πίεση. Αν το πορώδες μέσο είναι ετερογενές, η υδραυλική αγωγιμότητα μεταβάλλεται στο χώρο ανεξάρτητα από τις μεταβολές της πυκνότητας.
- Η υδραυλική αγωγιμότητα και η ειδική αποθηκευτικότητα του υδροφορέα δεν επηρεάζονται από μεταβολές του πορώδους, λόγω της παραμορφωσιμότητας της στερεάς ύλης του πορώδους μέσου. Οι μεταβολές αυτές θεωρούνται μικρές σε σύγκριση με την αρχική τιμή του πορώδους.
- $\mathbf{q} \text{grad} \rho \ll n \partial \rho / \partial t$ , δηλαδή θεωρείται ότι η χωρική μεταβολή της πυκνότητας του ρευστού είναι αμελητέα σε σύγκριση με την τοπική χρονική της μεταβολή, οπότε η εξίσωση (3.34) γράφεται ως εξής:  
$$-\rho \text{div} \mathbf{q} + \rho W = \partial(\rho n) / \partial t .$$

Υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις, η εξίσωση συνέχειας (3.34) μπορεί να διατυπωθεί διαφορετικά εκφράζοντας το αριστερό μέλος συναρτήσει του νόμου του Darcy (3.31) και το δεξί μέλος συναρτήσει της ειδικής αποθηκευτικότητας του υδροφορέα (Bear, 1979):

$$-\text{div} \mathbf{q} + W = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.35)$$

ή

$$\text{div} (\mathbf{K} \text{grad} (h)) + W = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.36)$$

Η ειδική αποθηκευτικότητα  $S_s(x,y,z)$  [ $L^{-1}$ ] συνδέεται με τους συντελεστές συμπιεστότητας του πορώδους μέσου και του νερού  $\alpha_p$  και  $\alpha_f$ , αντίστοιχα, με τη



σχέση:  $S_s = \rho g[\alpha_p + n\alpha]$ . Η εξίσωση (3.36) περιγράφει την τρισδιάστατη μη μόνιμη κορεσμένη ροή υπόγειων υδάτων σε ετερογενές ανισότροπο πορώδες μέσο και ισχύει για όλα τα πρακτικά προβλήματα, εκτός αν η πυκνότητα εξαρτάται σημαντικά από τη συγκέντρωση ρύπων ή/και τη θερμοκρασία (π.χ. υφαλμύριση παράκτιων υδροφορέων).

Για ετερογενές ανισότροπο πορώδες μέσο, όπου οι κύριες διευθύνσεις της υδραυλικής αγωγιμότητας συμπίπτουν με τις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$  του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, η εξίσωση (3.36) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) + W = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.37)$$

Η εξίσωση (3.37) επιλύεται αριθμητικά στο υπό-μοντέλο ροής υπόγειων υδάτων του IRENE-HYD για τον προσδιορισμό των πιεζομετρικών φορτίων,  $h(x,y,z,t)$ , στο εξεταζόμενο πεδίο. Για τον υπολογισμό των συνιστωσών της ειδικής παροχής στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$  χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις (3.29)–(3.31).

Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινιστεί ότι όταν η ροή είναι μόνιμη ή όταν το πορώδες μέσο και το νερό θεωρούνται ασυμπίεστα (όπως γίνεται στην περίπτωση φρεάτιων υδροφορέων), ο όρος αποθήκευσης,  $S_s \partial h / \partial t$ , στις εξισώσεις (3.35)–(3.37) μηδενίζεται.

#### 3.2.2.4 Αρχικές και οριακές συνθήκες

Για την επίλυση της εξίσωσης (3.36) θα πρέπει:

- να ορισθούν αρχικές συνθήκες, δηλαδή να καθορισθούν οι τιμές των πιεζομετρικών φορτίων στο εξεταζόμενο πεδίο τη χρονική στιγμή  $t = 0$  και
- να διατυπωθούν οι οριακές συνθήκες για το υπό εξέταση πεδίο.

Στα προβλήματα ροής σε πορώδες μέσο μπορούν να διακριθούν οι ακόλουθοι τύποι ορίων και αντίστοιχων οριακών συνθηκών (βλ. π.χ. Bear, 1979, Νάνου-Γιάνναρου και Παπαθανασιάδης, 2008):

- (i) Όρια δεδομένου πιεζομετρικού φορτίου. Στα όρια αυτά καθορίζεται το πιεζομετρικό φορτίο, που μπορεί να μεταβάλλεται χρονικά. Όρια δεδομένου

πιεζομετρικού φορτίου παρατηρούνται όταν το εξεταζόμενο πεδίο συνορεύει με κάποιο επιφανειακό υδάτινο σώμα. Ειδική περίπτωση αποτελεί η ύπαρξη ορίου σταθερού πιεζομετρικού φορτίου, οπότε το όριο αυτό αποτελεί ταυτόχρονα και ισοδυναμική επιφάνεια. Στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων αυτού του τύπου οι οριακές συνθήκες καλούνται οριακές συνθήκες Dirichlet ή οριακές συνθήκες πρώτου τύπου.

- (ii) Όρια δεδομένης εισροής ή εκροής. Είναι όρια στα οποία υπάρχει γνωστή εισροή ή εκροή, πιθανόν χρονικά μεταβαλλόμενη, οπότε καθορίζεται η εγκάρσια ειδική παροχή. Ειδική περίπτωση αποτελεί η ύπαρξη αδιαπέρατου ορίου, όπου μηδενίζεται η εγκάρσια ειδική παροχή. Στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων αυτού του τύπου οι οριακές συνθήκες καλούνται οριακές συνθήκες Neumann ή οριακές συνθήκες δεύτερου τύπου.
- (iii) Ημι-περατά όρια. Στα όρια αυτά υπάρχουν ταυτόχρονα δεδομένο πιεζομετρικό φορτίο και δεδομένη εισροή ή εκροή. Αυτού του τύπου η οριακή συνθήκη ονομάζεται οριακή συνθήκη Cauchy ή μικτή οριακή συνθήκη τρίτου τύπου στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων. Στα προβλήματα ροής υπόγειων υδάτων η οριακή συνθήκη Cauchy παρατηρείται όταν το πορώδες μέσο είναι σε επαφή με κάποιο επιφανειακό υδάτινο σώμα, ωστόσο το πορώδες και το επιφανειακό υδάτινο σώμα διαχωρίζονται από τον ημι-περατό πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος.
- (iv) Ελεύθερη επιφάνεια. Στη μεταβαλλόμενη ελεύθερη επιφάνεια φρεάτιου υδροφορέα ισχύουν οι ακόλουθες οριακές συνθήκες:

$$p|_{z=z_{wt}} = p_a = 0, \quad \text{ή} \quad h|_{z=z_{wt}} = z_{wt} \quad (3.38)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{z=z_{wt}} - \frac{1}{S_y} \left( K_{xx} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 - K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} + N \right) \Big|_{z=z_{wt}} = 0 \quad (3.39)$$

όπου  $z_{wt}(x, y, t)$  [L] είναι το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας του υπόγειου νερού (βλ. Σχήμα 3.2) και  $N(x, y, t)$  [LT<sup>-1</sup>] συμβολίζει κατακόρυφη διήθηση (π.χ. λόγω βροχόπτωσης) ή εξατμισοδιαπνοή. Το υψόμετρο της ελεύθερης

επιφάνειας  $z_w(x,y,t)$  είναι άγνωστο και ο προσδιορισμός του συνιστά στοιχείο της λύσης του προβλήματος της ροής υπόγειων υδάτων.

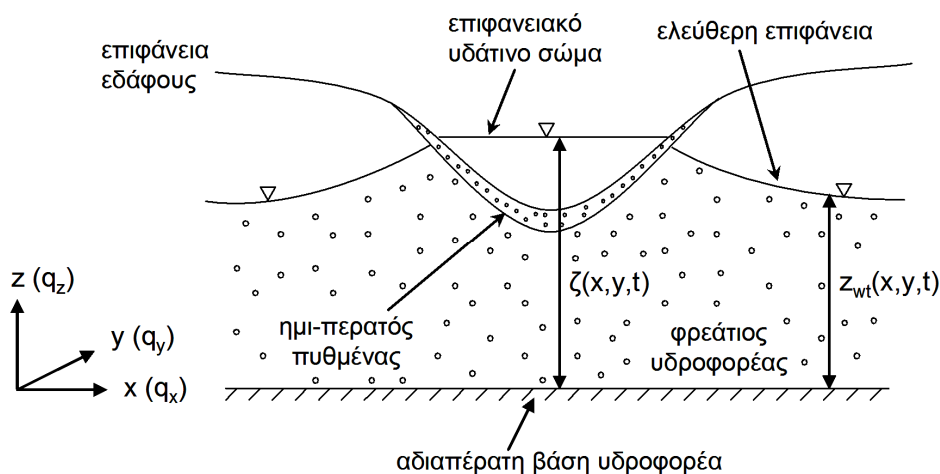
Η δυναμική οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet (3.38) δηλώνει ότι η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια είναι ίση με την ατμοσφαιρική (κατά σύμβαση  $p_a=0$ ). Η μη γραμμική κινηματική οριακή συνθήκη (3.39) δηλώνει ότι η ταχύτητα μεταβολής της ελεύθερης επιφάνειας του υπόγειου νερού εξαρτάται από τις ταχύτητες και στις δύο πλευρές της ελεύθερης επιφάνειας.

Η εξίσωση (3.39), η εξαγωγή της οποίας παρουσιάζεται μεταξύ άλλων στους De Wiest (1965, σελ. 331), Remson et al. (1971, σελ. 51), Pinder and Celia (2006, σελ. 180) και Chen et al. (2010), είναι διαφορετική από την κινηματική οριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας που παρουσιάζεται σε κλασσικά κείμενα υπόγειας υδραυλικής (π.χ Polubarinova-Kochina 1952, Bear, 1972, Bear, 1979, de Marsily, 1986) και η οποία είναι λανθασμένη. Στην εργασία των Chen et al. (2010) αποδεικνύεται το λάθος που πραγματοποιείται στα κείμενα αυτά κατά την διατύπωση της κινηματικής οριακής συνθήκης στην ελεύθερη επιφάνεια υπόγειων υδάτων.

- (v) Επιφάνεια διήθησης. Όταν η ελεύθερη επιφάνεια ενός υδροφορέα προσεγγίζει το κατάντη όριο του υπολογιστικού πεδίου των υπόγειων υδάτων, καταλήγει πάντοτε σε κάποιο σημείο ψηλότερα από την ελεύθερη επιφάνεια του επιφανειακού υδάτινου σώματος που βρίσκεται έξω από το υπολογιστικό πεδίο. Το τμήμα του ορίου του υπολογιστικού πεδίου των υπόγειων υδάτων πάνω από την κατάντη ελεύθερη επιφάνεια των επιφανειακών υδάτων και κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του υδροφορέα καλείται επιφάνεια διήθησης (Bear, 1979). Κατά μήκος της επιφάνειας αυτής, νερό αναβλύζει από το πορώδες μέσο και ρέει προς το επιφανειακό υδάτινο σώμα.

Πάνω στην επιφάνεια διήθησης η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική, δηλαδή  $p=0$  ή  $h=z$ . Η γεωμετρία της επιφάνειας διήθησης είναι γνωστή, καθώς συμπίπτει με το όριο του πορώδους μέσου, εκτός από τη θέση του άνω ορίου της, που ταυτόχρονα ανήκει στην άγνωστη ελεύθερη επιφάνεια των υπόγειου νερού. Συνεπώς ο προσδιορισμός του άνω ορίου της

επιφάνειας διήθησης αποτελεί μέρος της λύσης του προβλήματος της ροής υπόγειων υδάτων.



Σχήμα 3.2: Ορισμός μεταβλητών του υπό-μοντέλου ροής υπόγειων υδάτων

### 3.3 Αριθμητική επίλυση

#### 3.3.1 Γενικά

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στο IRENE-HYD για την περιγραφή της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων δεν είναι δυνατόν, στη γενική περίπτωση, να επιλυθούν αναλυτικά, οπότε πρέπει να προσεγγισθούν με αριθμητικές μεθόδους. Η διεθνής βιβλιογραφία είναι πλούσια σε μαθηματικά μοντέλα επιφανειακών και υπόγειων νερών όπου οι εν λόγω εξισώσεις επιλύονται με τη βοήθεια διάφορων αριθμητικών τεχνικών, εκ των οποίων οι πιο δημοφιλείς είναι οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένων στοιχείων και πεπερασμένων όγκων, ενώ λιγότερο συχνά χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι οριακών στοιχείων, ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών και αναλυτικών στοιχείων.

Η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων συνίσταται στα ακόλουθα βήματα (βλ. π.χ. Morton and Mayers, 2005):

- (i) Αντικατάσταση του συνεχούς πεδίου ορισμού της μερικής διαφορικής εξίσωσης από ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων ή διακριτοποίηση, όπως ονομάζεται, του συνεχούς πεδίου ορισμού. Με τη διακριτοποίηση του

συνεχούς πεδίου ορισμού καθίσταται εφικτή η προσέγγιση της άγνωστης εξαρτημένης μεταβλητής της μερικής διαφορικής εξίσωσης με τη διακριτή της τιμή. Η διακριτοποίηση στη διάσταση του χρόνου επιτυγχάνεται επιλέγοντας το μέγεθος του χρονικού βήματος  $\Delta t$  (που μπορεί να είναι και μεταβλητό) και το συνολικό αριθμό χρονικών βημάτων. Η διακριτοποίηση στο χώρο επιτυγχάνεται αντικαθιστώντας το εξεταζόμενο πεδίο με υπολογιστικό πλέγμα, σε καθορισμένα σημεία του οποίου προσδιορίζονται οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής σε κάθε χρονικό βήμα. Τα σημεία αυτά καλούνται κόμβοι του υπολογιστικού πλέγματος.

- (ii) Διατύπωση μίας αλγεβρικής εξίσωσης για κάθε κόμβο –έστω  $P$ – του υπολογιστικού πλέγματος, η οποία περιλαμβάνει την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής στον κόμβο  $P$  και σε γειτονικούς κόμβους. Η αλγεβρική εξίσωση που διατυπώνεται για κάθε κόμβο του υπολογιστικού πλέγματος αποτελεί προσέγγιση της μερικής διαφορικής εξίσωσης στον κόμβο αυτόν. Η μεθοδολογία διατύπωσης και η μορφή της αλγεβρικής εξίσωσης εξαρτώνται από την εφαρμοζόμενη αριθμητική μέθοδο. Στη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, για παράδειγμα, οι μερικές παράγωγοι στους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος προσεγγίζονται με αλγεβρικές εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών που προκύπτουν με δύο κυρίως τρόπους: (α) την ανάπτυξη σε σειρές Taylor και (β) την πολυωνυμική παρεμβολή. Διάφορες αλγεβρικές εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση των μερικών παραγώγων, εκ των οποίων οι δημοφιλέστερες είναι οι εκφράσεις κατάντη, ανάντη και κεντρικών διαφορών (βλ. π.χ. Smith, 1985, Rübenkönig, 2006).

Εάν το υπολογιστικό πλέγμα αποτελείται από  $N$  κόμβους, η αντικατάσταση της μερικής διαφορικής εξίσωσης από αλγεβρικές εξισώσεις ή η διακριτοποίηση, όπως ονομάζεται, της μερικής διαφορικής εξίσωσης οδηγεί σε ένα σύστημα  $N$  αλγεβρικών εξισώσεων με  $N$  αγνώστους, τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής στους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος. Το σύστημα αυτό των αλγεβρικών εξισώσεων καλείται υπολογιστικό ή αριθμητικό σχήμα. Εάν σε κάθε εξίσωση του σχήματος υπάρχει ένας μόνο άγνωστος τότε το σχήμα ονομάζεται ρητό. Εάν κάθε εξίσωση περιέχει περισσότερους από έναν αγνώστους, οι οποίοι είναι δυνατόν να υπολογισθούν λύνοντας το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων, τότε το

σχήμα ονομάζεται πεπλεγμένο. Γενικά, ανάλογα με τη χρησιμοποιούμενη αριθμητική μέθοδο, διακρίνονται διάφορα ρητά και πεπλεγμένα σχήματα πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένων στοιχείων, πεπερασμένων όγκων, κλπ.

- (iii) Επίλυση των εξισώσεων του αριθμητικού σχήματος για κάθε χρονικό βήμα, οπότε προσδιορίζονται οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής στους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος, οι οποίες θεωρούνται προσεγγιστικές σε σχέση με τις τιμές που θα προέκυπταν από την αναλυτική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης. Τα ρητά υπολογιστικά σχήματα είναι πιο απλά από τα πεπλεγμένα, καθώς δεν απαιτείται η επίλυση αλγεβρικού συστήματος για τον υπολογισμό των άγνωστων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής. Όμως για να είναι ευσταθές ένα ρητό σχήμα επιβάλλεται συχνά η χρήση πολύ μικρού χρονικού βήματος, με αποτέλεσμα να απαιτείται μεγάλος όγκος αριθμητικών πράξεων και να επιβαρύνεται έτσι ο συνολικά απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος για την επίλυση των αλγεβρικών εξισώσεων του σχήματος. Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι ένα αριθμητικό σχήμα καλείται ευσταθές όταν το μέγεθος μιας διαταραχής που εισάγεται από τις αρχικές ή/και τις οριακές συνθήκες ή εμφανίζεται λόγω υπολογιστικού σφάλματος, παραμένει πεπερασμένο και δεν μεγεθύνεται πέρα από ένα μέγιστο όριο κατά τη διάρκεια της πορείας επίλυσης των αλγεβρικών εξισώσεων του σχήματος (Higham, 1996). Σήμερα, με την εξέλιξη της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών, το παραπάνω μειονέκτημα των ρητών σχημάτων δεν είναι τόσο μεγάλης σημασίας.

Σε αντίθεση με τα ρητά υπολογιστικά σχήματα, τα πεπλεγμένα σχήματα δεν υπόκεινται σε πολύ περιοριστικά κριτήρια ευστάθειας για το χρονικό βήμα, δηλαδή είναι ευσταθή για μεγαλύτερα χρονικά βήματα. Η επίλυση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων πεπλεγμένων σχημάτων, για την εύρεση των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής στους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος, μπορεί να επιτευχθεί με άμεσες ή επαναληπτικές μεθόδους, όπως είναι π.χ. οι μέθοδοι απαλοιφής Gauss, παραγοντοποίησης LU, Gauss–Seidel, διαδοχικής υπερχαλάρωσης, συζυγών κλίσεων, κ.α. (βλ. π.χ. Kelley, 1995, Poole, 2006).

Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών είναι η πρώτη αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση προβλημάτων ροής. Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχει πληθώρα αλγορίθμων πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση των εξισώσεων ρηχών υδάτων. Ενδεικτικά αναφέρονται εδώ οι ακόλουθες εργασίες: Leendertse et al. (1973), Blumberg and Mellor (1980), Blumberg and Herring (1987), Blumberg and Mellor (1987), Heaps (1987), Leendertse (1989), Falconer and Chen (1991), Casulli and Cheng (1992), Stansby and Lloyd (1995), Lin and Falconer (1997), Lin and Falconer (2001), Tao et al. (2001), Barron et al. (2006) και Zhang (2009). Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών είναι ιδιαίτερα δημοφιλής για την προσομοίωση της τρισδιάστατης κυκλοφορίας επιφανειακών υδάτων, αλλά και γενικότερα για την επίλυση προβλημάτων ροής, κυρίως λόγω της εύκολης διακριτοποίησης του υπολογιστικού πεδίου και των μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν το φαινόμενο. Το βασικό της μειονέκτημα σε σχέση με τις μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων και πεπερασμένων όγκων είναι ότι τα υπολογιστικά πλέγματα πεπερασμένων διαφορών δεν είναι δυνατόν να προσεγγίσουν με ακρίβεια σύνθετες γεωμετρίες. Συνήθως, ο περιορισμός αυτός της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών αντιμετωπίζεται χρησιμοποιώντας πυκνό υπολογιστικό πλέγμα κοντά στα όρια του εξεταζόμενου πεδίου, επιβαρύνοντας όμως έτσι τον υπολογιστικό χρόνο επίλυσης του προβλήματος.

Εκτός από τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, η μέθοδος πεπερασμένων όγκων χρησιμοποιείται επίσης πολύ συχνά για την επίλυση των εξισώσεων ρηχών υδάτων. Μερικά παραδείγματα αριθμητικών μοντέλων επιφανειακών υδάτων που βασίζονται στη μέθοδο πεπερασμένων όγκων αποτελούν τα μοντέλα που παρουσιάζονται στις εργασίες των Sweby (1984), Stansby (1997), Casulli and Walters (2000), Martins et al. (2001), Chen et al. (2003), Zhang et al. (2004), Ham et al. (2005), Shchepetkin and McWilliams (2005) και Mohammadian (2009). Το πιο ελκυστικό χαρακτηριστικό της μεθόδου, πέρα από τη δυνατότητα χρήσης μεγάλης ποικιλίας υπολογιστικών πλεγμάτων, είναι ότι οι διακριτοποιημένες εξισώσεις πεπερασμένων όγκων ικανοποιούν τις αρχές διατήρησης της μάζας και της ορμής που εκφράζουν οι μερικές διαφορικές εξισώσεις από τις οποίες έχουν προκύψει. Έτσι, η λύση των εξισώσεων πεπερασμένων όγκων εξασφαλίζει τη διατήρηση της μάζας και της ορμής σε κάθε πεπερασμένο όγκο αναφοράς και σε ολόκληρο το υπολογιστικό πεδίο σαν σύνολο (Versteeg and Malalasekera, 1995).

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων προσφέρει μεγάλη ευελιξία στη διακριτοποίηση σύνθετων γεωμετριών. Ωστόσο, τα υπολογιστικά σχήματα πεπερασμένων στοιχείων είναι πιο σύνθετα στην κατασκευή τους και υπολογιστικά πιο δαπανηρά σε σύγκριση με τα σχήματα πεπερασμένων διαφορών και πεπερασμένων όγκων, με αποτέλεσμα να είναι λιγότερο δημοφιλή για την επίλυση των εξισώσεων ρηχών νερών (Vreugdenhill, 1994, Hervouet, 2007). Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων έχει χρησιμοποιηθεί, μεταξύ άλλων, στα αριθμητικά μοντέλα των Robert and Ouellet (1987), Lynch and Werner (1991), Fontana et al. (1999), Miglio et al. (1999), Rebollo and Gomez (2005) και Zhang and Baptista (2008).

Πρέπει να αναφερθεί ότι σε αρκετές περιπτώσεις οι όροι των εξισώσεων ρηχών υδάτων διακριτοποιούνται με διαφορετικές αριθμητικές μεθόδους με στόχο να συνδυαστούν τα πλεονεκτήματά τους. Για παράδειγμα οι Wang and Liu (2005) χρησιμοποίησαν τη μέθοδο πεπερασμένων όγκων για τη διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς και τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων για τη διακριτοποίηση των όρων διάχυσης, ενώ στα αριθμητικά μοντέλα των Koutitas and O'Connor (1980) και Abualtayef et al. (2008) οι εξισώσεις των ρηχών υδάτων διακριτοποιούνται στις οριζόντιες διευθύνσεις με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών και στην κατακόρυφη διεύθυνση με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Αναλυτική παρουσίαση της εφαρμογής των διάφορων αριθμητικών τεχνικών στην επίλυση των εξισώσεων ρηχών υδάτων μπορεί να βρει ο αναγνώστης στα κείμενα των Stelling (1984), Casulli (1990a), Cheng and Smith (1990), Goede (1993), Vreugdenhil (1994) και Hervouet (2007).

Η χρήση των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών και πεπερασμένων στοιχείων σε προβλήματα υπόγειων ροών παρουσιάζεται στους Wang and Anderson (1982), Λατινόπουλο (1986), Anderson et al. (1993) και Bear and Cheng (2008). Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών έχει βρει ευρύτατη εφαρμογή στην επίλυση προβλημάτων ροής υπόγειων υδάτων σε πορώδες μέσο. Ενδεικτικά, αναφέρονται εδώ τα ακόλουθα αριθμητικά μοντέλα υπόγειων νερών που βασίζονται στη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών: SWIFT (Reeves et al., 1986), SIMGRO (Querner, 1988), MODFLOW (McDonald and Harbaugh, 1988, Harbaugh and McDonald, 1996, Harbaugh et al., 2000 Harbaugh, 2005), FTWORK (Faust et al., 1993), HST3D (Kipp, 1997, μέθοδος ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών) και SEAWAT (Guo and Langevin, 2002). Οι μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων και πεπερασμένων όγκων είναι επίσης



ιδιαίτερα δημοφιλείς στην επίλυση προβλημάτων υπόγειας ροής, εξαιτίας της ευχέρειας που προσφέρουν στην προσέγγιση υδροφορέων με σύνθετη γεωμετρία και διαφορετικούς γεωλογικούς σχηματισμούς. Παραδείγματα αριθμητικών μοντέλων υπόγειων νερών στα οποία χρησιμοποιείται η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων αποτελούν τα FE3DGW (Gupta et al., 1984), AQUIFEM-N (Townley, 1990), GW3DFEM (Yu and Singh, 1994), FEMWATER (1997) και FEFLOW (DHI-WASY GmbH, 2010), ενώ η μέθοδος πεπερασμένων όγκων εφαρμόζεται, μεταξύ άλλων, στα αριθμητικά μοντέλα των Demirdzic (1982), Peric (1985), Clauster et al. (2003), Loudyi et al. (2007) και Ruhaak et al. (2008).

Γενικά, η επιλογή αριθμητικής μεθόδου και πιο συγκεκριμένα αριθμητικού σχήματος για την επίλυση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή επιφανειακών και υπόγειων υδάτων είναι θέμα προσωπικής προτίμησης του ερευνητή. Ωστόσο, το αριθμητικό σχήμα που επιλέγεται θα πρέπει να παρουσιάζει συγκεκριμένες ιδιότητες, όπως να είναι ευσταθές, να συγκλίνει, να εξασφαλίζει τη διατήρηση της μάζας και της ορμής τοπικά αλλά και σε ολόκληρο το υπολογιστικό πεδίο σαν σύνολο και να είναι κατά το δυνατόν ακριβές, δηλαδή η αριθμητική λύση να αποτελεί μία ικανοποιητική προσέγγιση της ακριβούς αναλυτικής λύσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τη ροή (Morton and Mayers, 2005). Στο IRENE-HYD, οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων επιλύονται με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών. Οι επιθυμητές ιδιότητες υπολογιστικών σχημάτων πεπερασμένων διαφορών περιγράφονται συνοπτικά παρακάτω (βλ. π.χ. Smith, 1895, Higham, 1996, Cebeci et al., 2005):

- (i) Συνοχή. Στη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών στόχος είναι η αντικατάσταση των μερικών διαφορικών εξισώσεων από αλγεβρικές εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών. Είναι σημαντικό η μεθοδολογία αντικατάστασης να εξασφαλίζει τη συμβατότητα των εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών με τις μερικές διαφορικές εξισώσεις, δηλαδή καθώς οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος και το μέγεθος του χρονικού βήματος τείνουν στο μηδέν, οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών να αναπαράγουν τις αρχικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Εφόσον ικανοποιείται το κριτήριο της συμβατότητας μεταξύ των αλγεβρικών εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών ενός αριθμητικού σχήματος και των μερικών διαφορικών εξισώσεων από τις οποίες προέκυψαν, τότε λέγεται ότι το αριθμητικό σχήμα έχει συνοχή. Η διαφορά

μεταξύ των αρχικών μερικών διαφορικών εξισώσεων και των διακριτοποιημένων προσεγγίσεων τους αποτελεί το σφάλμα αποκοπής. Για να παρουσιάζει ένα αριθμητικό σχήμα συνοχή, θα πρέπει το σφάλμα αποκοπής να τείνει στο μηδέν όταν το χρονικό βήμα και οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος τείνουν στο μηδέν. Η συνοχή ενός αριθμητικού σχήματος εξασφαλίζει ότι η λύση του συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων του σχήματος αποτελεί λύση των αρχικών μερικών διαφορικών εξισώσεων και όχι κάποιων άλλων τροποποιημένων μερικών διαφορικών εξισώσεων.

- (ii) Ευστάθεια. Η ευστάθεια υπολογιστικών σχημάτων έχει ήδη οριστεί σε προηγούμενη παράγραφο. Ένας λόγος αριθμητικής αστάθειας ενός σχήματος πεπερασμένων διαφορών μπορεί να είναι το σφάλμα αποκοπής. Η αριθμητική αστάθεια μπορεί επίσης να οφείλεται σε μικρές διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος και σε μεγάλο χρονικό βήμα. Η ευστάθεια ενός αριθμητικού σχήματος είναι δύσκολο να διερευνηθεί. Η πλέον διαδεδομένη τεχνική για τη διερεύνηση της ευστάθειας υπολογιστικών σχημάτων πεπερασμένων διαφορών είναι η ανάλυση von Neumann, η οποία περιγράφεται αναλυτικά στα κείμενα των Smith (1985) και Isaacson and Keller (1994) και βρίσκει εφαρμογή σε γραμμικά προβλήματα.
- (iii) Σύγκλιση. Ένα αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών συγκλίνει εάν η λύση του συστήματος των εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών του σχήματος προσεγγίζει την αναλυτική λύση των αρχικών μερικών διαφορικών εξισώσεων καθώς οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος και το μέγεθος του χρονικού βήματος τείνουν στο μηδέν. Σύμφωνα με το θεώρημα του Lax, όταν ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών που προσεγγίζει ένα γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών έχει συνοχή, αναγκαία και επαρκής συνθήκη για να συγκλίνει είναι η ευστάθειά του.
- (iv) Συντηρητικότητα. Αφού οι προς επίλυση μερικές διαφορικές εξισώσεις αποτελούν τη μαθηματική διατύπωση των αρχών διατήρησης της μάζας και της ορμής, θα πρέπει η λύση των διακριτοποιημένων εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών να ικανοποιεί τις αρχές αυτές τοπικά αλλά και σε ολόκληρο το υπολογιστικό πεδίο σαν σύνολο.

- (v) Ακρίβεια. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι αριθμητικές λύσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων αποτελούν προσεγγιστικές λύσεις. Η διαφορά μεταξύ της ακριβούς αναλυτικής λύσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν το εξεταζόμενο πρόβλημα και της ακριβούς λύσης του αλγεβρικού συστήματος εξισώσεων που έχουν προκύψει από τη διακριτοποίηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων ονομάζεται σφάλμα διακριτοποίησης. Το σφάλμα διακριτοποίησης δεν πρέπει να συγχέεται με το σφάλμα αποκοπής, καθώς το σφάλμα αποκοπής αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ των αρχικών μερικών διαφορικών εξισώσεων και των διακριτοποιημένων προσεγγίσεών τους που τελικά επιλύονται και όχι τη διαφορά μεταξύ των λύσεων. Βέβαια το σφάλμα αποκοπής αποτελεί ένα μέτρο της ακρίβειας του σχήματος πεπερασμένων διαφορών και παρέχει μία ένδειξη σχετικά με το πώς συμπεριφέρεται το σφάλμα της αριθμητικής λύσης όταν γίνεται πύκνωση του υπολογιστικού πλέγματος. Για παράδειγμα, αν το σφάλμα αποκοπής είναι δεύτερης τάξης, το σφάλμα στην αριθμητική λύση υποτετραπλασιάζεται αν υποδιπλασιαστούν οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος.

Μία μέθοδος διερεύνησης της επίδρασης του σφάλματος διακριτοποίησης στην αριθμητική λύση των μερικών διαφορικών εξισώσεων αποτελεί ο έλεγχος ανεξαρτησίας πλέγματος, κατά τον οποίο διεξάγονται υπολογιστικά πειράματα με διαφορετικές διαστάσεις πλέγματος και παρατηρούνται οι μεταβολές στην αριθμητική λύση (Vreugdenhill, 1994). Στην περίπτωση που η αριθμητική λύση μεταβάλλεται σημαντικά χρειάζεται επιπλέον πύκνωση του υπολογιστικού πλέγματος, διαφορετικά σημαίνει ότι η αριθμητική λύση είναι ανεξάρτητη του πλέγματος που χρησιμοποιείται. Ο έλεγχος ανεξαρτησίας πλέγματος παρέχει μία ένδειξη ότι η αριθμητική λύση είναι ακριβής ως προς τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων που δεν μεταβάλλονται. Για παράδειγμα, αν κατά τη διεξαγωγή των υπολογιστικών πειραμάτων παρατηρηθεί ότι δεν αλλάζουν 3 σημαντικά ψηφία της αριθμητικής λύσης, τότε η λύση έχει ακρίβεια 3 σημαντικών ψηφίων.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ανεξάρτητα από την αριθμητική μέθοδο που χρησιμοποιείται για την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων, το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων του αριθμητικού σχήματος επιλύεται συνήθως με επαναληπτικές μεθόδους (π.χ. διαδοχικής υπερχαλάρωσης,

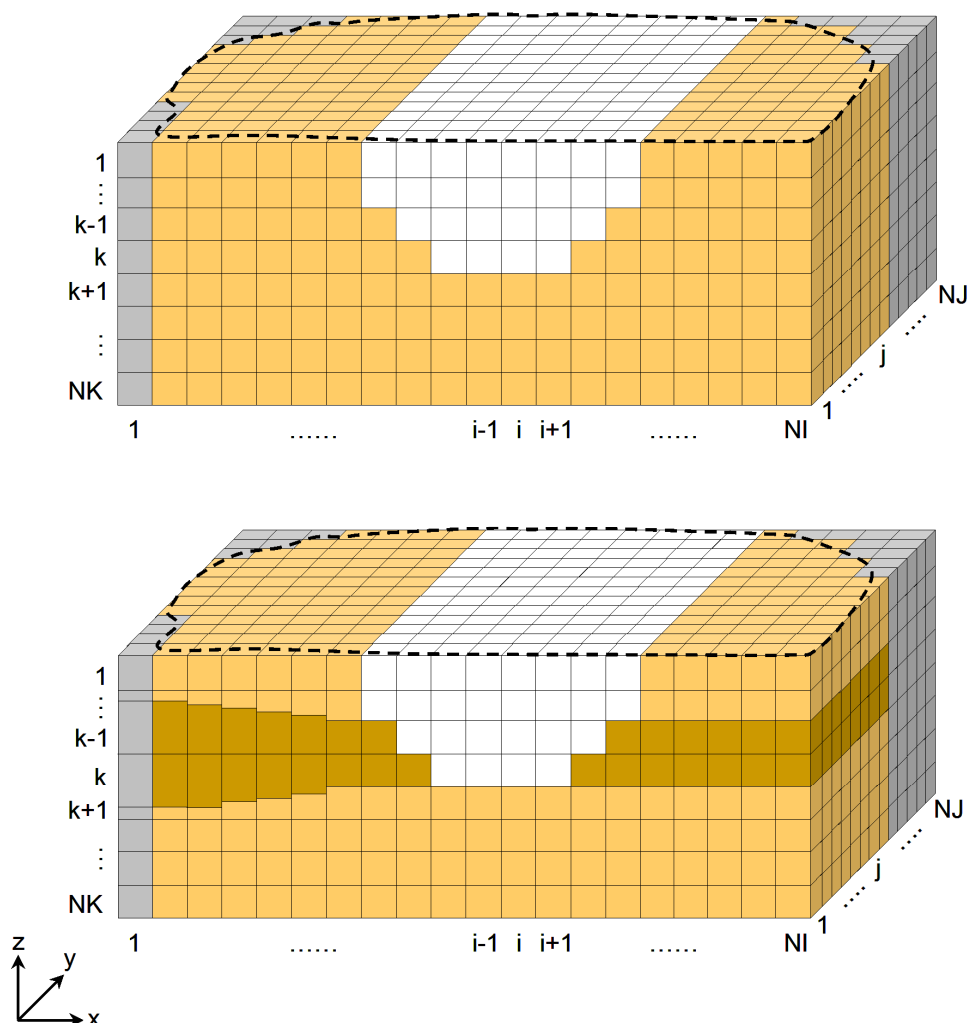
συζυγών κλίσεων, κ.α.), οπότε η αριθμητική λύση συμπεριλαμβάνει το σφάλμα της επαναληπτικής μεθόδου που εφαρμόζεται. Το σφάλμα επίλυσης ενός αλγεβρικού συστήματος εξισώσεων με κάποια επαναληπτική μέθοδο ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ της ακριβούς λύσης του συστήματος – που προκύπτει από την άμεση επίλυσή του – και της λύσης που προκύπτει από την εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου (Trefethen, 2006). Βέβαια, ακόμα και αν το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων του αριθμητικού σχήματος επιλυθεί με άμεσο τρόπο, η λύση δεν είναι ακριβής λόγω του σφάλματος στρογγύλευσης. Το σφάλμα στρογγύλευσης οφείλεται στο ότι δεν είναι δυνατό να αποθηκευθεί στον υπολογιστή ο κάθε αριθμός που υπολογίζεται με απόλυτη ακρίβεια, λόγω του πεπερασμένου αριθμού ψηφίων (χώρου) που διατίθεται (Trefethen, 2006). Συνεπώς οι αριθμητικές λύσεις περιλαμβάνουν σφάλματα διακριτοποίησης, σφάλματα στρογγύλευσης και σε κάποιες περιπτώσεις σφάλματα που οφείλονται στην επαναληπτική μέθοδο επίλυσης των διακριτοποιημένων αλγεβρικών εξισώσεων (Trefethen, 2006).

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αναλύονται οι ιδιότητες των σχημάτων πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιούνται στα υπό-μοντέλα ροής επιφανειακών και υπόγειων υδάτων του IRENE-HYD.

### **3.3.2 Διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου**

Προκειμένου να επιλυθούν με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στο IRENE-HYD για την περιγραφή της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων, το εξεταζόμενο πεδίο διακριτοποιείται με υπολογιστικό πλέγμα που αποτελείται από ορθογωνικούς διαφορικούς όγκους (ή υπολογιστικά κελιά) (βλ. Σχήμα 3.3). Τα κέντρα των διαφορικών όγκων αποτελούν τους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3, το υπολογιστικό πεδίο χωρίζεται σε  $N_I$  στήλες,  $N_J$  γραμμές και  $N_K$  στρώματα στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$ , αντίστοιχα, του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Οι δείκτες  $i = 1, 2, \dots, N_I$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_J$  και  $k = 1, 2, \dots, N_K$  χρησιμοποιούνται για το συμβολισμό του αριθμού της στήλης, της γραμμής και του στρώματος, αντίστοιχα. Οι κόμβοι του υπολογιστικού πλέγματος συμβολίζονται ως  $(i, j, k)$  και τα μέτωπα (πλευρές) των διαφορικών όγκων ως  $(i \pm 1/2, j, k)$ ,  $(i, j \pm 1/2, k)$ , και  $(i, j, k \pm 1/2)$ .

Κάθε διαφορικός όγκος καταλαμβάνεται εξ' ολοκλήρου είτε από το επιφανειακό υδάτινο σώμα ή από το πορώδες μέσο.



----- όριο υπολογιστικού πεδίου

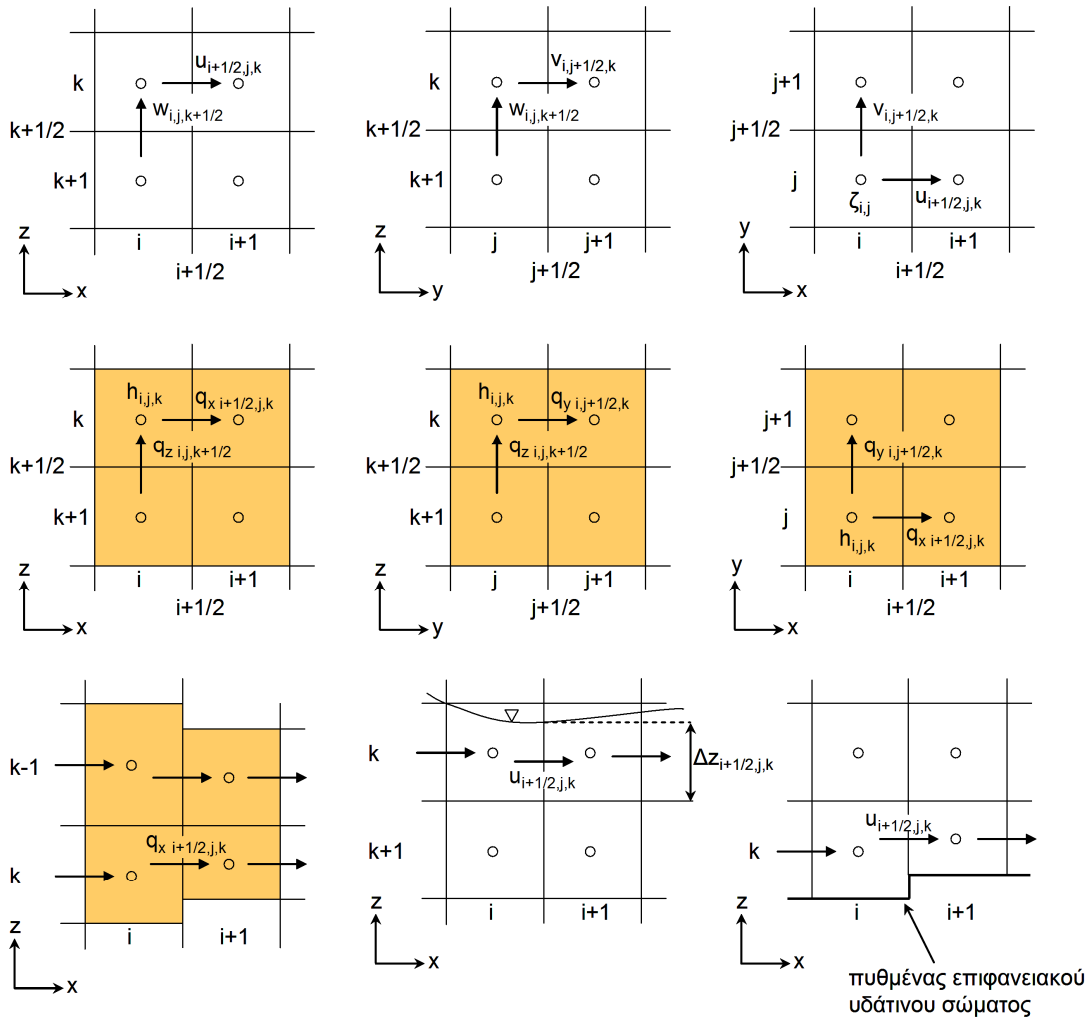
  διαφορικοί όγκοι διαφορετικών γεωλογικών σχηματισμών

 διαφορικοί όγκοι εκτός ορίων του υπολογιστικού πεδίου ("ανενεργοί" διαφορικοί όγκοι)

**Σχήμα 3.3:** Διακριτοποίηση υπολογιστικού πεδίου χρησιμοποιώντας (α) οριζόντια στρώματα και (β) μη οριζόντια στρώματα που αντιπροσωπεύουν διαφορετικούς γεωλογικούς σχηματισμούς στην περιοχή του υδροφορέα

Το υπολογιστικό πλέγμα είναι εναλλασσόμενο (staggered grid), δηλαδή τα διάφορα βαθμωτά μεγέθη (η πίεση, τα πιεζομετρικά φορτία, η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων και η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων) υπολογίζονται στους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος, ενώ

οι συνιστώσες της ταχύτητας των επιφανειακών υδάτων και οι συνιστώσες της ειδικής παροχής των υπόγειων υδάτων υπολογίζονται στο κέντρο των μετώπων των διαφορικών όγκων (βλ. Σχήμα 3.4). Τα πλεονεκτήματα της χρήσης εναλλασσόμενου υπολογιστικού πλέγματος για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ρηχών υδάτων παρουσιάζονται στους Harlow and Welch (1965), Vreugdenhill (1994) και Versteeg and Malalasekera (1995).



Σχήμα 3.4: Ορισμός των μεταβλητών του IRENE-HYD στο υπολογιστικό πλέγμα

Στις οριζόντιες διευθύνσεις  $x$  και  $y$ , το υπολογιστικό πλέγμα είναι ορθογώνιο και μπορούν να χρησιμοποιηθούν μεταβλητές διαστάσεις  $\Delta x_i$  και  $\Delta y_j$ , αντίστοιχα. Στη διεύθυνση  $z$ , τα στρώματα στα οποία διαιρείται το υπολογιστικό πεδίο είναι οριζόντια στην περιοχή των επιφανειακών υδάτων, ενώ στην περιοχή του υδροφορέα μπορεί να μην είναι οριζόντια ώστε να ακολουθούν τα όρια διαφορετικών γεωλογικών σχηματισμών (βλ. Σχήμα 3.3 (β)). Επίσης, το πάχος των διαφορικών όγκων του τελευταίου στρώματος του επιφανειακού υδάτινου σώματος μπορεί να μην είναι

ομοιόμορφο, καθώς το κάτω όριό τους καθορίζεται από τον πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος. Συνεπώς, το πάχος των διαφορικών όγκων του υπολογιστικού πλέγματος,  $\Delta z_{i,j,k}$ , μπορεί γενικά να είναι μεταβλητό στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$ . Το υπολογιστικό πλέγμα παραμένει αμετάβλητο κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης (fixed grid), ενώ η ελεύθερη επιφάνεια των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων μπορεί να μετακινηθεί σε οποιοδήποτε υψόμετρο εντός του υπολογιστικού πεδίου.

### 3.3.3 Επίλυση των εξισώσεων του υπό-μοντέλου ροής επιφανειακών υδάτων

Μία βασική διαφοροποίηση μεταξύ των διάφορων αριθμητικών μοντέλων πεπερασμένων διαφορών που έχουν εφαρμοστεί για την προσομοίωση της τρισδιάστατης κυκλοφορίας ρηχών υδάτων αποτελεί η μέθοδος διακριτοποίησης των εξισώσεων στο χρόνο. Στην περίπτωση ρητών σχημάτων, το μέγεθος του χρονικού βήματος περιορίζεται αυστηρά από το κριτήριο ευστάθειας Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) (Courant et al., 1928) που λαμβάνει υπ' όψη την ταχύτητα διάδοσης των επιφανειακών κυμάτων βαρύτητας,  $\sqrt{gH}$ , και συχνά επιβάλλει τη χρήση πολύ μικρού χρονικού βήματος. Από την άλλη πλευρά, ένα πλήρως πεπλεγμένο σχήμα, το οποίο δεν υπόκειται σε κανένα περιορισμό του χρονικού βήματος, συνεπάγεται αρκετό υπολογιστικό φόρτο καθώς απαιτείται η ταυτόχρονη επίλυση ενός μεγάλου αριθμού μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Επιπλέον, για λόγους ακρίβειας, το χρονικό βήμα επίλυσης των εξισώσεων ρηχών υδάτων δε μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλο, οπότε η χρήση πλήρως πεπλεγμένων αριθμητικών σχημάτων συχνά δεν είναι ιδιαίτερα πρακτική.

Προκειμένου να επιτευχθεί ένα χαλαρό κριτήριο ευστάθειας και ταυτόχρονα να αποφευχθεί ο υπολογιστικός φόρτος που συνεπάγεται ένα πλήρως πεπλεγμένο σχήμα, σε αρκετές περιπτώσεις εφαρμόζονται ημι-πεπλεγμένα σχήματα πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση των εξισώσεων ρηχών υδάτων (π.χ. Backhaus, 1985, Leendertse, 1989, Casulli and Cheng, 1992, Stansby and Lloyd, 1995, Casulli and Walters, 2000, Chen, 2003, Zhang and Lu, 2007), όπου κάποιοι από τους όρους των εξισώσεων διακριτοποιούνται με ρητό και κάποιοι με πεπλεγμένο τρόπο, έτσι ώστε το κριτήριο ευστάθειας να μην εξαρτάται από την ταχύτητα διάδοσης των επιφανειακών κυμάτων. Για παράδειγμα, στις εργασίες των Backhaus (1985) και Zhang and Lu (2007) η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας

υπολογίζεται επιλύοντας τις ολοκληρωμένες κατά βάθος εξισώσεις συνέχειας και ποσότητας κίνησης με πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών, ενώ στη συνέχεια οι συνιστώσες της ταχύτητας  $u$ ,  $v$  και  $w$  προσδιορίζονται με ρητό τρόπο.

Στον Πίνακα 3.1 παρουσιάζονται τα κριτήρια ευστάθειας που επιβάλλονται από τις διάφορες φυσικές διεργασίες που περιλαμβάνονται στις εξισώσεις συνέχειας και ποσότητας κίνησης που διέπουν τη ροή ρηχών νερών (διάδοση επιφανειακών κυμάτων, μεταφορά, διάχυση, επιτάχυνση Coriolis). Τα κριτήρια αυτά ισχύουν για το ρητό σχήμα Leap-Frog (βλ. π.χ. Leendertse et al., 1973) και προκύπτουν εφαρμόζοντας την ανάλυση ευστάθειας von Neumann (βλ. π.χ. Kowalik and Murty, 1993, σελ. 122–140). Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.1, εκτός από τη διάδοση επιφανειακών κυμάτων, σημαντικό περιορισμό στο χρονικό βήμα επιβάλλει και ο όρος της κατακόρυφης διάχυσης. Συνεπώς, στα ημι-πεπλεγμένα σχήματα ο όρος της κατακόρυφης διάχυσης συχνά διακριτοποιείται με πεπλεγμένο τρόπο (π.χ. Casulli and Cheng, 1992, Stansby and Lloyd, 1995, Chen, 2003 και Zhang and Lu, 2007).

Στο FLOW-3DL χρησιμοποιείται ένα ημι-πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών (Casulli and Cheng, 1992), όπου η εξίσωση συνέχειας (3.13), η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας (3.27) και ο όρος βαθμίδας του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας στις εξισώσεις ποσότητας κίνησης (3.14) και (3.15) διακριτοποιούνται με πεπλεγμένο τρόπο, ώστε η ευστάθεια του σχήματος να μην εξαρτάται από την ταχύτητα διάδοσης των επιφανειακών κυμάτων. Ο όρος κατακόρυφης διάχυσης στις εξισώσεις ποσότητας κίνησης διακριτοποιείται επίσης με πεπλεγμένο τρόπο, για λόγους ευστάθειας, ενώ οι όροι μεταφοράς, οριζόντιας διάχυσης και επιτάχυνσης Coriolis διακριτοποιούνται με ρητό τρόπο.

**Πίνακας 3.1:** Κριτήρια ευστάθειας για τις διάφορες διεργασίες που περιλαμβάνονται στις εξισώσεις ρηχών υδάτων (ρητό σχήμα Leap-Frog, Leendertse et al., 1973)

Φυσική διεργασία	Κριτήριο ευστάθειας	$\Delta t$ (s)
διάδοση επιφανειακών κυμάτων	$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2gH}}$	50
μεταφορά στις οριζόντιες διευθύνσεις $x$ και $y$	$\Delta t \leq \left( \frac{ u }{\Delta x} + \frac{ v }{\Delta y} \right)^{-1}$	1000
μεταφορά στην κατακόρυφη διεύθυνση $z$	$\Delta t \leq \frac{\Delta z}{ w }$	$4 \times 10^4$



διάχυση στις οριζόντιες διευθύνσεις $x$ και $y$	$\Delta t \leq \left( \frac{2\nu_h}{\Delta x^2} + \frac{2\nu_h}{\Delta y^2} \right)^{-1}$	$2.5 \times 10^4$
διάχυση στην κατακόρυφη διεύθυνση $z$	$\Delta t \leq \frac{\Delta z^2}{4\nu_v}$	100
επιτάχυνση Coriolis	$\Delta t \leq \frac{1}{f}$	$10^4$

Οι τιμές του χρονικού βήματος,  $\Delta t$ , που παρουσιάζονται στην τελευταία στήλη έχουν υπολογιστεί για το ακόλουθο παράδειγμα:  $H=20$  m,  $u=1$  ms<sup>-1</sup>,  $v=0$  ms<sup>-1</sup>,  $w=5 \times 10^{-5}$  ms<sup>-1</sup>,  $\nu_h=10$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>,  $\nu_v=0.01$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>,  $f=10^{-5}$  ms<sup>-1</sup>,  $\Delta x=\Delta y=1000$  m,  $\Delta z=2$  m.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές για την προσέγγιση των μερικών παραγώγων, οι εξισώσεις ποσότητας κίνησης (3.14) και (3.15) μπορούν να διατυπωθούν στην ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή:

$$u_{i+1/2,j,k}^{n+1} = Fu_{i+1/2,j,k}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x_{i+1/2}} \left( \zeta_{i+1,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1} \right) + \Delta t \frac{v_{i+1/2,j,k-1/2}^n \frac{u_{i+1/2,j,k-1}^{n+1} - u_{i+1/2,j,k}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,j,k-1/2}^n} - v_{i+1/2,j,k+1/2}^n \frac{u_{i+1/2,j,k}^{n+1} - u_{i+1/2,j,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,j,k+1/2}^n}}{\Delta z_{i+1/2,j,k}^n} \quad (3.40)$$

$$v_{i,j+1/2,k}^{n+1} = Fv_{i,j+1/2,k}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta y_{j+1/2}} \left( \zeta_{i,j+1}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1} \right) + \Delta t \frac{v_{i,j+1/2,k-1/2}^n \frac{v_{i,j+1/2,k-1}^{n+1} - v_{i,j+1/2,k}^{n+1}}{\Delta z_{i,j+1/2,k-1/2}^n} - v_{i,j+1/2,k+1/2}^n \frac{v_{i,j+1/2,k}^{n+1} - v_{i,j+1/2,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i,j+1/2,k+1/2}^n}}{\Delta z_{i,j+1/2,k}^n} \quad (3.41)$$

όπου οι όροι κατακόρυφης διάχυσης έχουν προσεγγιστεί με εκφράσεις κεντρικών διαφορών και  $F$  είναι ένας μη γραμμικός τελεστής πεπερασμένων διαφορών που περιλαμβάνει τη ρητή διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς, οριζόντιας διάχυσης και επιτάχυνσης Coriolis. Η ακριβής διατύπωση των  $Fu_{i+1/2,j,k}^n$  και  $Fv_{i,j+1/2,k}^n$  εξαρτάται από τη μέθοδο διακριτοποίησης των όρων μεταφοράς και οριζόντιας διάχυσης και αναλύεται σε επόμενες παραγράφους. Στις εξισώσεις (3.40) και (3.41),  $\Delta z_{i+1/2,j,k}^n$  και  $\Delta z_{i,j+1/2,k}^n$  συμβολίζουν το βρεχόμενο πάχος των μετώπων  $(i+1/2,j,k)$  και  $(i,j+1/2,k)$ , αντίστοιχα, κατά το χρονικό βήμα  $n$ , που γενικά είναι ίσο με το πάχος του στρώματος  $k$  εκτός εάν κάποιο μέτωπο τέμνεται από την ελεύθερη επιφάνεια ή τον πυθμένα του

επιφανειακού υδάτινου σώματος (βλ. Σχήμα 3.4). Ως  $\Delta z_{i+1/2,j,k+1/2}^n$  συμβολίζεται ο μέσος όρος των  $\Delta z_{i+1/2,j,k}^n$  και  $\Delta z_{i+1/2,j,k+1}^n$ . Με αντίστοιχο τρόπο ορίζονται τα  $\Delta z_{i+1/2,j,k-1/2}^n$ ,  $\Delta z_{i,j+1/2,k+1/2}^n$  και  $\Delta z_{i,j+1/2,k-1/2}^n$ . Τέλος,  $\Delta x_{i+1/2} = 0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})$  και  $\Delta y_{j+1/2} = 0.5(\Delta y_j + \Delta y_{j+1})$ .

Στην ελεύθερη επιφάνεια και στον πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος οι διακριτοποιημένες εξισώσεις ποσότητας κίνησης (3.40) και (3.41) διαφοροποιούνται, καθώς εισάγονται οι οριακές συνθήκες (3.22) και (3.24), οι οποίες γράφονται σε μορφή πεπερασμένων διαφορών ως:

$$v_{i+1/2,j,M-1/2}^n \frac{u_{i+1/2,j,M-1}^{n+1} - u_{i+1/2,j,M}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,j,M-1/2}^n} = \tau_{sx} = c_s W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (3.42)$$

$$v_{i,j+1/2,M-1/2}^n \frac{v_{i,j+1/2,M-1}^{n+1} - v_{i,j+1/2,M}^{n+1}}{\Delta z_{i,j+1/2,M-1/2}^n} = \tau_{sy} = c_s W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$$

$$v_{i+1/2,j,m+1/2}^n \frac{u_{i+1/2,j,m}^n - u_{i+1/2,j,m+1}^n}{\Delta z_{i+1/2,j,m+1/2}^n} = \gamma_{i+1/2,j,m}^n u_{i+1/2,j,m}^{n+1} \quad (3.43)$$

$$v_{i,j+1/2,m+1/2}^n \frac{v_{i,j+1/2,m}^n - v_{i,j+1/2,m+1}^n}{\Delta z_{i,j+1/2,m+1/2}^n} = \gamma_{i,j+1/2,m}^n v_{i,j+1/2,m}^{n+1}$$

όπου:

$$\gamma_{i+1/2,j,m}^n = \frac{g \sqrt{(u_{i+1/2,j,m}^n)^2 + (v_{i+1/2,j,m}^n)^2}}{C_z^2} \quad \text{και} \quad \gamma_{i,j+1/2,m}^n = \frac{g \sqrt{(u_{i,j+1/2,m}^n)^2 + (v_{i,j+1/2,m}^n)^2}}{C_z^2}$$

Οι δείκτες  $M$  και  $m$  χρησιμοποιούνται για να συμβολίσουν το στρώμα στο οποίο η ελεύθερη επιφάνεια και ο πυθμένας του επιφανειακού υδάτινου σώματος, αντίστοιχα, τέμνουν τα μέτωπα  $(i+1/2, j)$  και  $(i, j+1/2)$ . Βέβαια τα  $M$ ,  $m$  μεταβάλλονται ανάλογα με τη θέση στο υπολογιστικό πεδίο, ενώ η τιμή του  $M$  μεταβάλλεται επίσης με το χρόνο, οπότε ο ακριβής συμβολισμός τους θα έπρεπε να είναι  $M_{i+1/2,j}^n$ ,  $M_{i,j+1/2}^n$ ,  $m_{i+1/2,j}$  και  $m_{i,j+1/2}$ . Ωστόσο, για λόγους συντομίας ο συμβολισμός αυτός συνήθως απλοποιείται.

Στις εξισώσεις (3.42) και (3.43), οι τιμές των ταχυτήτων  $u$  και  $v$  στα επίπεδα  $M-1$  και  $m+1$  είναι πλασματικές. Οι τιμές αυτές εμφανίζονται και στις διακριτοποιημένες εξισώσεις ποσότητας κίνησης (3.40) και (3.41) όταν  $k=M$  και  $k=m$ . Εισάγοντας όμως τις οριακές συνθήκες (3.42) και (3.43) στις εξισώσεις (3.40) και (3.41), οι πλασματικές τιμές των ταχυτήτων απαλείφονται και αντικαθίστανται από τιμές που ορίζονται εντός του υπολογιστικού πεδίου.

Γράφοντας τις εξισώσεις (3.40) και (3.41) για ολόκληρο το υπολογιστικό πλέγμα διακριτοποίησης του επιφανειακού υδάτινου σώματος, προκύπτουν τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων, διατυπωμένα σε μητρική μορφή:

$$\mathbf{A}_{i+1/2,j}^n \mathbf{u}_{i+1/2,j}^{n+1} = \mathbf{B}_{i+1/2,j}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x_{i+1/2}} \left( \zeta_{i+1,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1} \right) \Delta \mathbf{Z}_{i+1/2,j}^n \quad (3.44)$$

$$\mathbf{A}_{i,j+1/2}^n \mathbf{v}_{i,j+1/2}^{n+1} = \mathbf{B}_{i,j+1/2}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta y_{j+1/2}} \left( \zeta_{i,j+1}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1} \right) \Delta \mathbf{Z}_{i,j+1/2}^n \quad (3.45)$$

όπου  $\mathbf{A}_{i+1/2,j}^n$  και  $\mathbf{A}_{i,j+1/2}^n$  είναι τα μητρώα συντελεστών των άγνωστων διανυσμάτων των οριζόντιων ταχυτήτων  $\mathbf{u}_{i+1/2,j}^{n+1}$  και  $\mathbf{v}_{i,j+1/2}^{n+1}$ , αντίστοιχα,  $\mathbf{B}_{i+1/2,j}^n$  και  $\mathbf{B}_{i,j+1/2}^n$  είναι γνωστά διανύσματα που περιλαμβάνουν τους όρους των εξισώσεων ποσότητας κίνησης που διακριτοποιούνται με ρητό τρόπο και  $\Delta \mathbf{Z}_{i+1/2,j}^n$ ,  $\Delta \mathbf{Z}_{i,j+1/2}^n$  συμβολίζουν διανύσματα με στοιχεία τα βρεχόμενα πάχη των μετώπων των διαφορικών όγκων στις θέσεις  $(i+1/2, j)$  και  $(i, j+1/2)$ , αντίστοιχα. Τα μητρώα συντελεστών  $\mathbf{A}_{i+1/2,j}^n$  και  $\mathbf{A}_{i,j+1/2}^n$  είναι τριδιαγώνια, συμμετρικά και θετικά ορισμένα και έχουν διαστάσεις  $(m_{i+1/2,j} - M_{i+1/2,j}^n + 1) \times (m_{i+1/2,j} - M_{i+1/2,j}^n + 1)$  και  $(m_{i,j+1/2} - M_{i,j+1/2}^n + 1) \times (m_{i,j+1/2} - M_{i,j+1/2}^n + 1)$ , αντίστοιχα. Αναλυτικά:

$$\mathbf{u}_{i+1/2,j}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_{i+1/2,j,M}^{n+1} \\ u_{i+1/2,j,M+1}^{n+1} \\ u_{i+1/2,j,M+2}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{i+1/2,j,m}^{n+1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{i,j+1/2}^{n+1} = \begin{bmatrix} v_{i,j+1/2,M}^{n+1} \\ v_{i,j+1/2,M+1}^{n+1} \\ v_{i,j+1/2,M+2}^{n+1} \\ \vdots \\ v_{i,j+1/2,m}^{n+1} \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \Delta z_M \\ \Delta z_{M+1} \\ \Delta z_{M+2} \\ \vdots \\ \Delta z_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta z_M + \frac{v_{v_{M+1/2}} \Delta t}{\Delta z_{M+1/2}} & \frac{-v_{v_{M+1/2}} \Delta t}{\Delta z_{M+1/2}} & \dots & 0 \\ \frac{-v_{v_{M+1/2}} \Delta t}{\Delta z_{M+1/2}} & \Delta z_{M+1} + \frac{v_{v_{M+1/2}} \Delta t}{\Delta z_{M+1/2}} + \frac{v_{v_{M+3/2}} \Delta t}{\Delta z_{M+3/2}} & \frac{-v_{v_{M+3/2}} \Delta t}{\Delta z_{M+3/2}} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{-v_{v_{m-1/2}} \Delta t}{\Delta z_{m-1/2}} & \Delta z_m + \frac{v_{v_{m-1/2}} \Delta t}{\Delta z_{m-1/2}} + \gamma \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{i+1/2,j}^n = \begin{bmatrix} \Delta z_M^n F u_{i+1/2,j,M}^n + \tau_{sx} \Delta t \\ \Delta z_{M+1}^n F u_{i+1/2,j,M+1}^n \\ \Delta z_{M+2}^n F u_{i+1/2,j,M+2}^n \\ \vdots \\ \Delta z_m^n F u_{i+1/2,j,m}^n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{i,j+1/2}^n = \begin{bmatrix} \Delta z_M^n F v_{i,j+1/2,M}^n + \tau_{sy} \Delta t \\ \Delta z_{M+1}^n F v_{i,j+1/2,M+1}^n \\ \Delta z_{M+2}^n F v_{i,j+1/2,M+2}^n \\ \vdots \\ \Delta z_m^n F v_{i,j+1/2,m}^n \end{bmatrix}$$

Οι εξισώσεις (3.44) και (3.45) αποτελούν γραμμικά αλγεβρικά συστήματα, από την επίλυση των οποίων δεν είναι δυνατόν να προσδιορισθούν οι άγνωστες οριζόντιες συνιστώσες της ταχύτητας κατά το χρονικό βήμα  $n+1$ , καθώς στις εξισώσεις υπεισέρχονται και οι άγνωστες τιμές του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας κατά το χρονικό βήμα  $n+1$ . Συνεπώς οι εξισώσεις (3.44) και (3.45) θα πρέπει να επιλυθούν σε συνδυασμό με την εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας (3.27), η οποία σύμφωνα με το ημι-πεπλεγμένο σχήμα που εφαρμόζεται στο FLOW-3DL γράφεται στην ακόλουθη μορφή πεπερασμένων διαφορών:

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \left( \sum_{k=m}^M \Delta z_{i+1/2,j,k}^n u_{i+1/2,j,k}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i-1/2,j,k}^n u_{i-1/2,j,k}^{n+1} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y_j} \left( \sum_{k=m}^M \Delta z_{i,j+1/2,k}^n v_{i,j+1/2,k}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i,j-1/2,k}^n v_{i,j-1/2,k}^{n+1} \right) + \Delta t Q_{s_{i,j}} \quad (3.46)$$

ή σε μητρική μορφή:

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \left[ \left( \Delta \mathbf{z}_{i+1/2,j}^n \right)^T \mathbf{u}_{i+1/2,j}^{n+1} - \left( \Delta \mathbf{z}_{i-1/2,j}^n \right)^T \mathbf{u}_{i-1/2,j}^{n+1} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y_j} \left[ \left( \Delta \mathbf{z}_{i,j+1/2}^n \right)^T \mathbf{v}_{i,j+1/2}^{n+1} - \left( \Delta \mathbf{z}_{i,j-1/2}^n \right)^T \mathbf{v}_{i,j-1/2}^{n+1} \right] + \Delta t Q_{s_{i,j}} \quad (3.47)$$

Οι εξισώσεις (3.44), (3.45) και (3.47) αποτελούν ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, το οποίο πρέπει να επιλυθεί σε κάθε χρονικό βήμα ώστε να υπολογισθούν οι οριζόντιες συνιστώσες της ταχύτητας και το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας σε ολόκληρο το υπολογιστικό πεδίο των επιφανειακών υδάτων. Το σύστημα αυτό μπορεί να απλοποιηθεί αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τα διανύσματα των οριζόντιων ταχυτήτων,  $\mathbf{u}_{i\pm 1/2,j}^{n+1}$  και  $\mathbf{v}_{i,j\pm 1/2}^{n+1}$ , από τις εξισώσεις (3.44) και (3.45) στην εξίσωση (3.47), οπότε προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων όπου το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας κατά το χρονικό βήμα  $n+1$  είναι ο μοναδικός άγνωστος:

$$D_{i,j-1/2}^n \zeta_{i,j-1}^{n+1} + D_{i-1/2,j}^n \zeta_{i-1,j}^{n+1} + D_{i,j}^n \zeta_{i,j}^{n+1} + D_{i+1/2,j}^n \zeta_{i+1,j}^{n+1} + D_{i,j+1/2}^n \zeta_{i,j+1}^{n+1} = G_{i,j}^n \quad (3.48)$$

ή υπό μορφή μητρώων:

$$\mathbf{D}^n \boldsymbol{\zeta}^{n+1} = \mathbf{G}^n \quad (3.49)$$

Οι συντελεστές των άγνωστων υψομέτρων της ελεύθερης επιφάνειας ορίζονται ως εξής:

$$D_{i+1/2,j}^n = -g \frac{\Delta t^2}{\Delta x_i \Delta x_{i+1/2}} \left[ (\boldsymbol{\Delta Z})^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Delta Z} \right]_{i+1/2,j}^n$$

$$D_{i-1/2,j}^n = -g \frac{\Delta t^2}{\Delta x_i \Delta x_{i-1/2}} \left[ (\boldsymbol{\Delta Z})^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Delta Z} \right]_{i-1/2,j}^n$$

$$D_{i,j+1/2}^n = -g \frac{\Delta t^2}{\Delta y_j \Delta y_{j+1/2}} \left[ (\boldsymbol{\Delta Z})^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Delta Z} \right]_{i,j+1/2}^n$$

$$D_{i,j-1/2}^n = -g \frac{\Delta t^2}{\Delta y_j \Delta y_{j-1/2}} \left[ (\boldsymbol{\Delta Z})^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Delta Z} \right]_{i,j-1/2}^n$$

$$D_{i,j}^n = 1 - D_{i+1/2,j}^n - D_{i-1/2,j}^n - D_{i,j+1/2}^n - D_{i,j-1/2}^n$$

$$G_{i,j}^n = \zeta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left[ \left[ (\boldsymbol{\Delta Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \right]_{i+1/2,j}^n - \left[ (\boldsymbol{\Delta Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \right]_{i-1/2,j}^n \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y_j} \left[ \left[ (\boldsymbol{\Delta Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \right]_{i,j+1/2}^n - \left[ (\boldsymbol{\Delta Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \right]_{i,j-1/2}^n \right] + \Delta t Q_{s_{i,j}}$$

Παρατηρώντας την εξίσωση (3.48) και τις σχέσεις ορισμού των συντελεστών των άγνωστων υψομέτρων της ελεύθερης επιφάνειας, εύκολα συμπεραίνεται ότι το

μητρώο συντελεστών,  $\mathbf{D}$ , έχει πέντε διαγώνιους μη μηδενικές ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι μηδενικά και είναι συμμετρικό. Εφόσον ο πίνακας  $\mathbf{A}$  είναι θετικά ορισμένος, ο αντίστροφος πίνακας  $\mathbf{A}^{-1}$  είναι επίσης θετικά ορισμένος, οπότε το γινόμενο  $(\Delta\mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta\mathbf{Z}$  είναι μη αρνητικός αριθμός. Συνεπώς το μητρώο  $\mathbf{D}$  έχει αυστηρή διαγώνια κυριαρχία και θετικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο. Άρα το μητρώο συντελεστών  $\mathbf{D}$  είναι θετικά ορισμένο και το σύστημα εξισώσεων (3.49) έχει μοναδική λύση (βλ. Isaacson and Keller, 1994). Για περιπτώσεις όπου δεν εξετάζεται η αλληλεπίδραση μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων υδάτων, το γραμμικό πενταδιαγώνιο σύστημα εξισώσεων (3.49) μπορεί σε αυτό το σημείο να επιλυθεί πολύ αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο συζυγών κλίσεων (Conjugate Gradient method) (Hestenes and Stiefel, 1952, Bertolazzi, 1990).

Με γνωστές πλέον τις τιμές του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας,  $\zeta_{i,j}^{n+1}$ , σε ολόκληρο το υπολογιστικό πεδίο των επιφανειακών υδάτων, οι εξισώσεις (3.44) και (3.45) μπορούν να επιλυθούν με άμεσο τρόπο (αλγόριθμος Thomas, Conte and deBoor, 1972) για τον προσδιορισμό των οριζόντιων συνιστωσών της ταχύτητας κατά το χρονικό βήμα  $n+1$ . Τέλος, οι κατακόρυφες συνιστώσες της ταχύτητας κατά το χρονικό βήμα  $n+1$  υπολογίζονται από την επίλυση της εξίσωσης συνέχειας (3.13), για τη διακριτοποίηση της οποίας ακολουθείται προσέγγιση ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών. Έτσι, ολοκληρώνοντας την εξίσωση συνέχειας στους διαφορικούς όγκους του υπολογιστικού πλέγματος διακριτοποίησης του επιφανειακού υδάτινου σώματος, γράφεται στην ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή:

$$w_{i,j,k-1/2}^{n+1} = w_{i,j,k+1/2}^{n+1} - \frac{\Delta z_{i+1/2,j,k}^n u_{i+1/2,j,k}^{n+1} - \Delta z_{i-1/2,j,k}^n u_{i-1/2,j,k}^{n+1}}{\Delta x_j} - \frac{\Delta z_{i,j+1/2,k}^n v_{i,j+1/2,k}^{n+1} - \Delta z_{i,j-1/2,k}^n v_{i,j-1/2,k}^{n+1}}{\Delta y_j}, \quad k = m, m-1, \dots, M \quad (3.50)$$

Η εξίσωση (3.50) εφαρμόζεται ξεκινώντας από το τελευταίο στρώμα του επιφανειακού υδάτινου σώματος, καθώς για περιπτώσεις που δεν ενδιαφέρει η αλληλεπίδραση μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών επιβάλλεται μηδενική εγκάρσια ταχύτητα στον πυθμένα, δηλαδή  $w_{i,j,m+1/2}^{n+1} = 0$ .

Πρέπει τέλος να σημειωθεί ότι στην περίπτωση που η υδροδυναμική κυκλοφορία σε ένα επιφανειακό υδάτινο σώμα μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά

χρησιμοποιώντας ένα στρώμα για την κατακόρυφη διακριτοποίηση, το FLOW-3DL μετατρέπεται αυτόματα σε διδιάστατο μοντέλο ροής επιφανειακών υδάτων. Οι οριζόντιες συνιστώσες της ταχύτητας  $u_{i\pm 1/2,j}^{n+1}$  και  $v_{i,j\pm 1/2}^{n+1}$  και το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας  $\zeta_{i,j}^{n+1}$  υπολογίζονται με τον ίδιο αλγόριθμο που παρουσιάστηκε παραπάνω για την τρισδιάστατη μορφή του FLOW-3DL.

### 3.3.3.1 Μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών του επιφανειακού υδάτινου σώματος

Η μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών του επιφανειακού υδάτινου σώματος που εφαρμόζεται στο FLOW-3DL αποτελεί τροποποίηση της μεθόδου που προτάθηκε από τους Casulli and Cheng (1992) και η οποία συχνά αναφέρεται ως μέθοδος MLU (Maximum Level Upstreaming method) (βλ. π.χ. Balzano, 1998 και Atzeni et al., 2001).

Στο τέλος κάθε χρονικού βήματος, αφού έχουν υπολογισθεί οι συνιστώσες της ταχύτητας και το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας, θα πρέπει να ενημερωθούν οι τιμές των  $\Delta z_{i\pm 1/2,j,k}$  και  $\Delta z_{i,j\pm 1/2,k}$  λαμβάνοντας υπ' όψη τη νέα θέση της ελεύθερης επιφάνειας. Οι νέες τιμές του ολικού βάθους νερού στα μέτωπα  $(i \pm 1/2, j)$  και  $(i, j \pm 1/2)$  μίας στήλης νερού  $(i, j)$  υπολογίζονται ως εξής:

$$H_{i\pm 1/2,j}^{n+1} = \max \left[ 0, \max (\zeta_{i,j}^{n+1}, \zeta_{i\pm 1,j}^{n+1}) - z_{bed_{i\pm 1/2,j}} \right]$$

$$H_{i,j\pm 1/2}^{n+1} = \max \left[ 0, \max (\zeta_{i,j}^{n+1}, \zeta_{i,j\pm 1}^{n+1}) - z_{bed_{i,j\pm 1/2}} \right]$$
(3.51)

Στο αριθμητικό μοντέλο των Casulli and Cheng (1992) τα βάθη ορίζονται στα μέτωπα των υπολογιστικών κελιών, οπότε η εφαρμογή της εξίσωσης (3.51) είναι προφανής. Στο FLOW-3DL, όπου το υπολογιστικό πεδίο διακριτοποιείται με ορθογωνικούς διαφορικούς όγκους και άρα η διακριτοποίηση της τοπογραφίας του πυθμένα είναι κλιμακωτή (stair-step bottom representation), η μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης που πρότειναν οι Casulli and Cheng (1992) προσαρμόζεται κατάλληλα υπολογίζοντας το υψόμετρο του πυθμένα στα μέτωπα  $(i \pm 1/2, j)$  και  $(i, j \pm 1/2)$  ως τον σταθμικό αριθμητικό μέσο όρο των τιμών των γειτονικών κελιών και θεωρώντας ότι η εξίσωση (3.51) ισχύει εφόσον ισχύει η συνθήκη (3.53):

$$z_{bed_{i\pm 1/2,j}} = \frac{\Delta x_i z_{bed_{i,j}} + \Delta x_{i\pm 1} z_{bed_{i\pm 1,j}}}{\Delta x_i + \Delta x_{i\pm 1}} \quad (3.52)$$

$$z_{bed_{i,j\pm 1/2}} = \frac{\Delta y_j z_{bed_{i,j}} + \Delta y_{j\pm 1} z_{bed_{i,j\pm 1}}}{\Delta y_j + \Delta y_{j\pm 1}}$$

$$\begin{aligned} \max(\zeta_{i,j}^{n+1}, \zeta_{i\pm 1,j}^{n+1}) &> \max(z_{bed_{i,j}}, z_{bed_{i\pm 1,j}}) \text{ και αντίστοιχα} \\ \max(\zeta_{i,j}^{n+1}, \zeta_{i,j\pm 1}^{n+1}) &> \max(z_{bed_{i,j}}, z_{bed_{i,j\pm 1}}) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Αν σε κάποιο από τα μέτωπα  $(i \pm 1/2, j)$  και  $(i, j \pm 1/2)$  δεν ισχύει η συνθήκη (3.53), τότε το ολικό βάθος νερού στο μέτωπο αυτό τίθεται ίσο με το μηδέν.

Όταν η τιμή του ολικού βάθους νερού σε ένα μέτωπο είναι μηδενική, τότε το μέτωπο αυτό θεωρείται “ξηρό”, οπότε όλα τα μέτωπα των διαφορικών όγκων κατά μήκος του μετώπου αυτού θα έχουν μηδενικό βρεχόμενο πάχος. Αντιθέτως, αν το ολικό βάθος νερού σε ένα μέτωπο μιας στήλης νερού έχει θετική τιμή, τότε το μέτωπο αυτό θεωρείται “υγρό” και κάποια από τα μέτωπα των διαφορικών όγκων κατά μήκος του μετώπου αυτού θα έχουν μη μηδενικό βρεχόμενο πάχος. Στα μέτωπα με μηδενικό βρεχόμενο πάχος η αντίστοιχη συνιστώσα της ταχύτητας  $u_{i\pm 1/2,j,k}^{n+1}$  ή  $v_{i,j\pm 1/2,k}^{n+1}$  είναι μηδενική. Αντίστοιχα, σε ένα ξηρό μέτωπο μιας στήλης νερού το διάνυσμα των ταχυτήτων  $\mathbf{u}_{i\pm 1/2,j}^{n+1}$  ή  $\mathbf{v}_{i,j\pm 1/2}^{n+1}$  είναι μηδενικό ώσπου, σε κάποιο επόμενο χρονικό βήμα, το ολικό βάθος νερού στο μέτωπο αυτό αποκτήσει θετική τιμή. Άρα σε ένα ξηρό μέτωπο οι εξισώσεις (3.44) ή (3.45) αντικαθίστανται από τις εξισώσεις  $\mathbf{u}_{i\pm 1/2,j}^{n+1} = 0$  ή  $\mathbf{v}_{i,j\pm 1/2}^{n+1} = 0$ , αντίστοιχα. Μία στήλη νερού  $(i, j)$  θεωρείται ξηρή μόνο εάν και τα τέσσερα μέτωπα  $(i \pm 1/2, j)$  και  $(i, j \pm 1/2)$  είναι ξηρά. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις (3.46) και (3.47) παίρνουν τη μορφή  $\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^n$ , δηλαδή σε μία ξηρή στήλη νερού δεν υπάρχει μεταβολή του υψόμετρου της ελεύθερης επιφάνειας. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι ο αλγόριθμος επίλυσης των εξισώσεων του FLOW-3DL επιτρέπει την επίλυση της εξίσωσης (3.48) σε ολόκληρο το υπολογιστικό πεδίο, χωρίς να χρειάζεται να εξαιρεθούν τα ξηρά υπολογιστικά κελιά από τους υπολογισμούς ή να χρησιμοποιηθεί μία πλασματική τιμή για το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας σε μία ξηρή στήλη νερού. Η διαβροχή μίας ξηρής στήλης νερού μπορεί να επιτευχθεί σε επόμενο χρονικό βήμα, όταν η τιμή του ολικού βάθους



νερού σε ένα τουλάχιστον από τα τέσσερα μέτωπα  $(i \pm 1/2, j)$  και  $(i, j \pm 1/2)$  υπολογισθεί μεγαλύτερη του μηδενός.

### 3.3.3.2 Ευστάθεια του ημι-πεπλεγμένου υπολογιστικού σχήματος επίλυσης των εξισώσεων του υπό-μοντέλου ροής επιφανειακών υδάτων

Η διερεύνηση της ευστάθειας του ημι-πεπλεγμένου σχήματος πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιείται στο FLOW-3DL για την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων συνέχειας και ποσότητας κίνησης (3.13), (3.14), (3.15) και (3.27), πραγματοποιείται εφαρμόζοντας τη μέθοδο von Neumann. Προκειμένου να εφαρμοστεί η ανάλυση ευστάθειας κατά von Neumann είναι απαραίτητο να γίνουν οι παραδοχές ότι οι εξισώσεις (3.13), (3.14), (3.15) και (3.27) είναι γραμμικές, με σταθερούς συντελεστές και ορίζονται σε οριζόντιο πεδίο άπειρων διαστάσεων ή σε οριζόντιο πεδίο πεπερασμένων διαστάσεων αν οι οριακές συνθήκες είναι περιοδικές (Smith, 1985).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, θεωρείται ότι (α) οι συντελεστές οριζόντιας και κατακόρυφης κινηματικής τυρβώδους συνεκτικότητας,  $\nu_h$  και  $\nu_v$ , είναι σταθεροί, (β) οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$  είναι σταθερές, (γ) οι όροι  $\gamma_{i+1/2,j,m}^n$  και  $\gamma_{i,j+1/2,m}^n$  στα μητρώα συντελεστών  $\mathbf{A}_{i+1/2,j}^n$  και  $\mathbf{A}_{i,j+1/2}^n$  των εξισώσεων (3.43) και (3.44) είναι σταθεροί και (δ)  $\tau_{sx} = 0$ ,  $\tau_{sy} = 0$ , οπότε οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών (3.44), (3.45) και (3.47) μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_{i+1/2,j}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\zeta_{i+1,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1}) \Delta \mathbf{Z} = \Delta z F \mathbf{u}_{i+1/2,j}^n \quad (3.54)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_{i,j+1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta y} (\zeta_{i,j+1}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1}) \Delta \mathbf{Z} = \Delta z F \mathbf{v}_{i,j+1/2}^n \quad (3.55)$$

$$\zeta_{i+1,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{u}_{i+1/2,j}^{n+1} - (\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{u}_{i-1/2,j}^{n+1} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ (\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{v}_{i,j+1/2}^{n+1} - (\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{v}_{i,j-1/2}^{n+1} \right] \quad (3.56)$$

όπου  $F \mathbf{u}_{i+1/2,j}^n$  και  $F \mathbf{v}_{i,j+1/2}^n$  συμβολίζουν τη ρητή διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς και οριζόντιας διάχυσης (η επιτάχυνση Coriolis θεωρείται αμελητέα) και ο

τελεστής πεπερασμένων διαφορών  $F$  θεωρείται γραμμικός. Οι τιμές των στοιχείων του μητρώου  $\mathbf{A}$  είναι σταθερές σε ολόκληρο το υπολογιστικό πεδίο. Αναλυτικά:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta z + \frac{v_v \Delta t}{\Delta z} & -\frac{v_v \Delta t}{\Delta z} & \dots & 0 \\ -\frac{v_v \Delta t}{\Delta z} & \Delta z + 2\frac{v_v \Delta t}{\Delta z} & -\frac{v_v \Delta t}{\Delta z} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{v_v \Delta t}{\Delta z} & \Delta z + \frac{v_v \Delta t}{\Delta z} + \gamma \end{bmatrix}$$

Προκειμένου να μελετηθεί η ευστάθεια του ημι-πεπλεγμένου σχήματος πεπερασμένων διαφορών (3.54)–(3.56) με τη μέθοδο von Neumann, οι άγνωστοι  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  και  $\zeta$  γράφονται στη διαχωρίσιμη μορφή  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(t) f(x, y)$ ,  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}(t) f(x, y)$  και  $\zeta = \hat{\zeta}(t) f(x, y)$  – υποθέτοντας ότι ο διαχωρισμός της χρονικής και της χωρικής μεταβλητής είναι εφαρμόσιμος – και στη συνέχεια η συνάρτηση  $f(x, y)$  αναπτύσσεται σε μιγαδική σειρά Fourier (Smith, 1985). Εφόσον οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών (3.54)–(3.56) είναι γραμμικές, αρκεί να θεωρηθεί ένας όρος της σειράς Fourier για τη διερεύνηση της ευστάθειας του αριθμητικού σχήματος, οπότε  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(t) e^{I(k_1 x + k_2 y)}$ ,  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}(t) e^{I(k_1 x + k_2 y)}$  και  $\zeta = \hat{\zeta}(t) e^{I(k_1 x + k_2 y)}$ , όπου  $\hat{\mathbf{u}}(t)$ ,  $\hat{\mathbf{v}}(t)$  και  $\hat{\zeta}(t)$  είναι οι συναρτήσεις πλάτους των  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  και  $\zeta$ ,  $I = \sqrt{-1}$  και  $k_1, k_2$  είναι οι αριθμοί κύματος. Οι παραπάνω εκφράσεις για τα  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  και  $\zeta$  αντικαθίστανται στις εξισώσεις (3.54)–(3.56), οπότε:

$$\mathbf{u}_{i+1/2, j}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}^{n+1} e^{I[k_1(x+\Delta x/2) + k_2 y]}, \quad \mathbf{u}_{i+1/2, j}^n = \hat{\mathbf{u}}^n e^{I[k_1(x+\Delta x/2) + k_2 y]}$$

$$\mathbf{v}_{i, j+1/2}^{n+1} = \hat{\mathbf{v}}^{n+1} e^{I[k_1 x + k_2(y+\Delta y/2)]}, \quad \mathbf{v}_{i, j+1/2}^n = \hat{\mathbf{v}}^n e^{I[k_1 x + k_2(y+\Delta y/2)]}$$

$$\zeta_{i, j}^{n+1} = \hat{\zeta}^{n+1} e^{I(k_1 x + k_2 y)}, \quad \zeta_{i+1, j}^{n+1} = \hat{\zeta}^{n+1} e^{I[k_1(x+\Delta x) + k_2 y]}, \quad \zeta_{i, j+1}^{n+1} = \hat{\zeta}^{n+1} e^{I[k_1 x + k_2(y+\Delta y)]}$$

Έπειτα από τις σχετικές πράξεις και απλοποιήσεις, οι εξισώσεις (3.54)–(3.56) γράφονται ως:

$$\mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}^{n+1} + I p g \hat{\zeta}^{n+1} \Delta \mathbf{Z} = \Delta z \xi \hat{\mathbf{u}}^n \quad (3.57)$$

$$\mathbf{A} \hat{\mathbf{v}}^{n+1} + I q g \hat{\zeta}^{n+1} \Delta \mathbf{Z} = \Delta z \xi \hat{\mathbf{v}}^n \quad (3.58)$$

$$\hat{\zeta}^{n+1} + I\rho(\Delta\mathbf{Z})^T \hat{\mathbf{u}}^{n+1} + Iq(\Delta\mathbf{Z})^T \hat{\mathbf{v}}^{n+1} = \hat{\zeta}^n \quad (3.59)$$

όπου  $\rho = 2(\Delta t / \Delta x)\sin(k_1 \Delta x / 2)$ ,  $q = 2(\Delta t / \Delta y)\sin(k_1 \Delta y / 2)$  και  $\xi$  είναι ο συντελεστής ενίσχυσης (amplification factor) του τελεστή διαφορών  $F$ , δηλαδή της ρητής διακριτοποίησης των όρων μεταφοράς και οριζόντιας διάχυσης. Γενικά, ο συντελεστής ενίσχυσης ενός σχήματος διακριτοποίησης μπορεί να είναι πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός και το μέτρο του αντιπροσωπεύει τον τρόπο με τον οποίο τα υπολογιστικά σφάλματα διαδίδονται από το ένα χρονικό βήμα στο επόμενο. Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε τα σφάλματα να αποσβένουν, είναι το μέτρο του συντελεστή ενίσχυσης να είναι μικρότερο ή ίσο της μονάδας (βλ. π.χ. Morton, 1971, Smith, 1985).

Παρακάτω αποδεικνύεται ότι το ημι-πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών (3.54)–(3.56) είναι ευσταθές αν το μέτρο του συντελεστή ενίσχυσης του ρητού τελεστή διαφορών  $F$  είναι μικρότερο ή ίσο της μονάδας, δηλαδή αν  $|\xi| \leq 1$ . Συνεπώς αποδεικνύεται ότι η ευστάθεια του ημι-πεπλεγμένου υπολογιστικού σχήματος εξαρτάται από τη μέθοδο διακριτοποίησης των όρων μεταφοράς και οριζόντιας διάχυσης των εξισώσεων ποσότητας κίνησης. Η διαδικασία που ακολουθείται για την απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν που παρουσιάζεται στους Casulli and Cattani (1994).

### Απόδειξη

Οι εξισώσεις (3.57)–(3.59) μπορούν να διατυπωθούν στην ακόλουθη μητρική μορφή:

$$\mathbf{R}\hat{\mathbf{W}}^{n+1} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{W}}^n \quad (3.60)$$

όπου

$$\hat{\mathbf{W}}^n = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}^n \\ \hat{\mathbf{v}}^n \\ \hat{\zeta}^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 & I\rho g\Delta\mathbf{Z} \\ 0 & \mathbf{A} & Iq g\Delta\mathbf{Z} \\ I\rho(\Delta\mathbf{Z})^T & Iq(\Delta\mathbf{Z})^T & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \xi\Delta z \mathbf{I}_d & 0 & 0 \\ 0 & \xi\Delta z \mathbf{I}_d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και  $\mathbf{I}_d$  είναι το μοναδιαίο μητρώο τάξης  $N_z$ , αν  $N_z$  συμβολίζει τον αριθμό των στρωμάτων στα οποία χωρίζεται το επιφανειακό υδάτινο σώμα. Συνεπώς το μητρώο ενίσχυσης του ημι-πεπλεγμένου σχήματος πεπερασμένων διαφορών είναι  $\mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}$

και η συνθήκη ευστάθειας απαιτεί η φασματική ακτίνα του μητρώου  $\mathbf{P}$  να είναι μικρότερη ή ίση της μονάδας. Ισοδύναμα, το μέτρο κάθε ιδιοτιμής,  $\lambda$ , του αντίστροφου μητρώου  $\mathbf{P}^{-1}$  θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο της μονάδας (Smith, 1985). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου  $\mathbf{P}^{-1}$  είναι:

$$\det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{S}) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \xi \Delta z \mathbf{I}_d & 0 & I p g \Delta \mathbf{Z} \\ 0 & \mathbf{A} - \lambda \xi \Delta z \mathbf{I}_d & I q g \Delta \mathbf{Z} \\ I p (\Delta \mathbf{Z})^T & I q (\Delta \mathbf{Z})^T & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (3.61)$$

Θα αποδειχθεί ότι η εξίσωση (3.61) δεν ικανοποιείται από κανέναν μιγαδικό αριθμό  $\lambda$  για τον οποίο ισχύει  $|\lambda| < 1$ .

Ας υποθέσουμε ότι  $|\lambda| < 1$ . Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι στην περίπτωση αυτή  $\det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{S}) \neq 0$ . Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό ότι το μητρώο  $\mathbf{A}$  είναι πραγματικό, συμμετρικό και έχει αυστηρή διαγώνια κυριαρχία. Αν  $|\xi| \leq 1$ , τότε  $|\lambda \xi \Delta z| < \Delta z$ , οπότε το μητρώο  $\mathbf{A} - \lambda \xi \Delta z \mathbf{I}_d$  διατηρεί την ιδιότητα της αυστηρής διαγώνιας κυριαρχίας και είναι αντιστρέψιμο. Θεωρείται λοιπόν το ακόλουθο μητρώο  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_d & 0 \\ -I p (\Delta \mathbf{Z})^T [\mathbf{A} - \lambda \xi \Delta z \mathbf{I}_d]^{-1} & -I q (\Delta \mathbf{Z})^T [\mathbf{A} - \lambda \xi \Delta z \mathbf{I}_d]^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

έτσι ώστε  $\det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{S}) = \det(\mathbf{T}) \det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{S}) = \det[\mathbf{T}(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{S})]$

Επομένως, η εξίσωση (3.61) μπορεί εναλλακτικά να γραφτεί ως:

$$\det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{S}) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \xi \Delta z \mathbf{I}_d & 0 & I p g \Delta \mathbf{Z} \\ 0 & \mathbf{A} - \lambda \xi \Delta z \mathbf{I}_d & I q g \Delta \mathbf{Z} \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} = 0 \quad (3.62)$$

όπου

$$e = g(p^2 + q^2) (\Delta \mathbf{Z})^T [\mathbf{A} - \lambda \xi \Delta z \mathbf{I}_d]^{-1} \Delta \mathbf{Z} + 1 - \lambda \quad (3.63)$$

Αφού  $\det(\mathbf{A} - \lambda \xi \Delta z \mathbf{I}_d) \neq 0$ , αρκεί να αποδειχθεί ότι  $e \neq 0$  ώστε  $\det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{S}) \neq 0$ .

Εφόσον το μητρώο  $\mathbf{A}$  είναι πραγματικό και συμμετρικό, έχει  $N_z$  πραγματικές ιδιοτιμές,  $\lambda_r$  (Smith, 1985). Αν ληφθεί υπ' όψη ότι  $\det(\mathbf{A} - \lambda\xi\Delta z \mathbf{I}_d) \neq 0$  και  $|\lambda\xi\Delta z| < \Delta z$ , προκειμένου να ικανοποιηθεί η εξίσωση  $\det(\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I}_d) = 0$  θα πρέπει  $\lambda_r \geq \Delta z$ . Επιπλέον, τα ιδιοδιανύσματα,  $x_r$ , του πραγματικού συμμετρικού μητρώου  $\mathbf{A}$  σχηματίζουν μία ορθοκανονική βάση (Smith, 1985), οπότε το διάνυσμα  $[\mathbf{A} - \lambda\xi\Delta z \mathbf{I}_d]^{-1} \Delta \mathbf{Z}$  μπορεί να εκφραστεί ως:

$$[\mathbf{A} - \lambda\xi\Delta z \mathbf{I}_d]^{-1} \Delta \mathbf{Z} = \sum_{r=1}^{N_z} \frac{(\Delta \mathbf{Z})^T x_r}{\lambda_r - \lambda\xi\Delta z} x_r$$

και άρα

$$e = g(p^2 + q^2) \sum_{r=1}^{N_z} \frac{[(\Delta \mathbf{Z})^T x_r]^2}{|\lambda_r - \lambda\xi\Delta z|^2} (\lambda_r - \bar{\lambda}\bar{\xi}\Delta z) + 1 - \lambda \quad (3.64)$$

Στην εξίσωση (3.64) είναι προφανές ότι:

$$g(p^2 + q^2) \frac{[(\Delta \mathbf{Z})^T x_r]^2}{|\lambda_r - \lambda\xi\Delta z|^2} \geq 0 \text{ και } \operatorname{Re}(1 - \lambda) > 0$$

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι:

$$\operatorname{Re}(\lambda_r - \bar{\lambda}\bar{\xi}\Delta z) > 0$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(\lambda_r - \bar{\lambda}\bar{\xi}\Delta z) \\ &= \lambda_r - \Delta z [\operatorname{Re}(\bar{\lambda})\operatorname{Re}(\bar{\xi}) - \operatorname{Im}(\bar{\lambda})\operatorname{Im}(\bar{\xi})] \\ &= \lambda_r - \Delta z [\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(\xi) - \operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\xi)] \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} & [\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(\xi) - \operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\xi)]^2 + [\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Im}(\xi) - \operatorname{Re}(\xi)\operatorname{Im}(\lambda)]^2 = |\lambda\xi|^2 = |\lambda|^2 |\xi|^2 < 1 \Rightarrow \\ & |\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(\xi) - \operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\xi)| < 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$-1 < \operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(\xi) - \operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\xi) < 1$$

Η τελευταία ανισότητα υποδηλώνει ότι:

$$\operatorname{Re}(\lambda_r - \bar{\lambda}\bar{\xi}\Delta z) = \lambda_r - \Delta z [\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(\xi) - \operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(\xi)] > 0$$

Τα παραπάνω αποδεικνύουν ότι ο μιγαδικός αριθμός  $e$  έχει θετικό πραγματικό μέρος και άρα  $e \neq 0$ . Συνεπώς αποδεικνύεται ότι όταν  $|\xi| \leq 1$  το μητρώο  $\mathbf{P}^{-1}$  δεν έχει ιδιοτιμές με μέτρο  $|\lambda| < 1$ . Ισοδύναμα, η φασματική ακτίνα του μητρώου ενίσχυσης  $\mathbf{P}$  είναι μικρότερη ή ίση του ένα, οπότε το ημι-πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών (3.54)–(3.56) είναι ευσταθές.

### 3.3.3.3 Διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς και οριζόντιας διάχυσης των εξισώσεων ποσότητας κίνησης

Μία απλή διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς και οριζόντιας διάχυσης των εξισώσεων ποσότητας κίνησης (3.13) και (3.14) προκύπτει προσεγγίζοντας τους όρους μεταφοράς με εκφράσεις ανάντη διαφορών και τους όρους οριζόντιας διάχυσης με εκφράσεις κεντρικών διαφορών. Στην περίπτωση αυτή, οι όροι  $Fu_{i+1/2,j,k}^n$  και  $Fv_{j,j+1/2,k}^n$  στις εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών (3.40) και (3.41) παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} Fu_{i+1/2,j,k}^n &= u_{i+1/2,j,k}^n + \Delta t f v_{i+1/2,j,k}^n - u_{i+1/2,j,k}^n \Delta t \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x_j} \\ &- v_{i+1/2,j,k}^n \Delta t \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i+1/2,j-1,k}^n}{\Delta y_j} - w_{i+1/2,j,k}^n \Delta t \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i+1/2,j,k+1}^n}{\Delta z_{i+1/2,j,k}} \\ &+ \Delta t \frac{v_{h_{i+1,j,k}}^n \frac{u_{i+3/2,j,k}^n - u_{i+1/2,j,k}^n}{\Delta x_{j+1}} - v_{h_{i,j,k}}^n \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x_j}}{\Delta x_{j+1/2}} \\ &+ \Delta t \frac{v_{h_{i+1/2,j+1/2,k}}^n \frac{u_{i+1/2,j+1,k}^n - u_{i+1/2,j,k}^n}{\Delta y_{j+1/2}} - v_{h_{i+1/2,j-1/2,k}}^n \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i+1/2,j-1,k}^n}{\Delta y_{j-1/2}}}{\Delta y_j} \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned}
 Fv_{i,j+1/2,k}^n &= v_{i,j+1/2,k}^n - \Delta t f u_{i,j+1/2,k}^n - u_{i,j+1/2,k}^n \Delta t \frac{v_{i,j+1/2,k}^n - v_{i-1,j+1/2,k}^n}{\Delta x_j} \\
 &- v_{i,j+1/2,k}^n \Delta t \frac{v_{i,j+1/2,k}^n - u_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y_j} - w_{i,j+1/2,k}^n \Delta t \frac{v_{i,j+1/2,k}^n - v_{i,j+1/2,k+1}^n}{\Delta z_{i,j+1/2,k}} \\
 &+ \Delta t \frac{v_{h_{i+1/2,j+1/2,k}}^n \frac{v_{i+1,j+1/2,k}^n - v_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta x_{i+1/2}} - v_{h_{i-1/2,j+1/2,k}}^n \frac{v_{i,j+1/2,k}^n - v_{i-1,j+1/2,k}^n}{\Delta x_{i-1/2}}}{\Delta x_i} \\
 &+ \Delta t \frac{v_{h_{i,j+1,k}}^n \frac{v_{i,j+3/2,k}^n - v_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta y_{j+1}} - v_{h_{i,j,k}}^n \frac{v_{i,j+1/2,k}^n - v_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y_j}}{\Delta y_{j+1/2}}
 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Στις εξισώσεις (3.65) και (3.66), οι ανάντη εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών διατυπώνονται θεωρώντας, χωρίς άρση της γενικότητας, ότι οι τιμές των ταχυτήτων  $u_{i+1/2,j,k}^n$ ,  $v_{i+1/2,j,k}^n$ ,  $w_{i+1/2,j,k}^n$  και  $u_{i,j+1/2,k}^n$ ,  $v_{i,j+1/2,k}^n$ ,  $w_{i,j+1/2,k}^n$  είναι θετικές.

Ο συντελεστής ενίσχυσης,  $\xi$ , του τελεστή πεπερασμένων διαφορών  $F$  μπορεί να προσδιορισθεί εφαρμόζοντας την ανάλυση ευστάθειας von Neumann για τη γραμμικοποιημένη μορφή της εξίσωσης (3.65) ή (3.66). Ενδεικτικά, η εξίσωση (3.66) γράφεται στην ακόλουθη γραμμικοποιημένη μορφή:

$$\begin{aligned}
 Fu_{i+1/2,j,k}^n &= u_{i+1/2,j,k}^n - u \Delta t \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} - v \Delta t \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i+1/2,j-1,k}^n}{\Delta y} \\
 &- w \Delta t \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i+1/2,j,k+1}^n}{\Delta z} + v_h \Delta t \frac{u_{i+3/2,j,k}^n - 2u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x^2} \\
 &+ v_h \Delta t \frac{u_{i+1/2,j+1,k}^n - 2u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1/2,j-1,k}^n}{\Delta y^2}
 \end{aligned} \quad (3.67)$$

όπου οι ταχύτητες  $u$ ,  $v$  και  $w$  θεωρούνται σταθερές και η επιτάχυνση Coriolis θεωρείται αμελητέα. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο von Neumann προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 \xi &= 1 - c_x \left[ 1 - \cos(k_1 \Delta x) + I \sin(k_1 \Delta x) \right] - c_y \left[ 1 - \cos(k_2 \Delta y) + I \sin(k_2 \Delta y) \right] \\
 &- c_z \left[ 1 - \cos(k_3 \Delta z) + I \sin(k_3 \Delta z) \right] - 2 \left( \frac{v_h \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{v_h \Delta t}{\Delta y^2} \right) + 2 \frac{v_h \Delta t}{\Delta x^2} \cos(k_1 \Delta x) \\
 &+ 2 \frac{v_h \Delta t}{\Delta x^2} \cos(k_1 \Delta x) + 2 \frac{v_h \Delta t}{\Delta y^2} \cos(k_2 \Delta y)
 \end{aligned} \quad (3.68)$$

όπου  $c_x = u \Delta t / \Delta x$ ,  $c_y = v \Delta t / \Delta y$  και  $c_z = w \Delta t / \Delta z$  είναι οι αριθμοί Courant.

Προκειμένου το μέτρο του συντελεστή ενίσχυσης,  $\xi$ , να είναι μικρότερο ή ίσο της μονάδας θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη συνθήκη για το μέγεθος του χρονικού βήματος (Hindmarsh et al., 1984):

$$\Delta t \leq \left[ \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} + 2v_h \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right]^{-1} \quad (3.69)$$

Συνεπώς, αν οι όροι μεταφοράς των εξισώσεων ποσότητας κίνησης διακριτοποιηθούν με σχήμα ανάντη διαφορών, το κριτήριο ευστάθειας του ημι-πεπλεγμένου σχήματος πεπερασμένων διαφορών (3.54)–(3.56) καθορίζεται από την ανισότητα (3.69). Βέβαια, επειδή σε πραγματικές εφαρμογές οι ταχύτητες  $u$ ,  $v$  και  $w$  δεν είναι σταθερές και στο FLOW-3DL μπορεί οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος να είναι μεταβλητές, η συνθήκη (3.69) προσαρμόζεται ως εξής:

$$\Delta t \leq \min_{i,j,k} \left[ \frac{|u_{i,j,k}|}{\Delta x_i} + \frac{|v_{i,j,k}|}{\Delta y_j} + \frac{|w_{i,j,k}|}{\Delta z_{i,j,k}} + 2v_{h_{i,j,k}} \left( \frac{1}{\Delta x_i^2} + \frac{1}{\Delta y_j^2} \right) \right]^{-1} \quad (3.70)$$

Μία επίσης απλή μορφή του τελεστή πεπερασμένων διαφορών  $F$  μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας κεντρικές διαφορές για τη διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς και οριζόντιας διάχυσης. Στην περίπτωση αυτή η ακρίβεια προσέγγισης των μερικών παραγώγων από τις αλγεβρικές εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών είναι 2<sup>ης</sup> τάξης, αν βέβαια οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$  είναι σταθερές, ενώ όταν χρησιμοποιούνται ανάντη διαφορές για τη διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς η ακρίβεια της προσέγγισης είναι μόνο 1<sup>ης</sup> τάξης. Αποδεικνύεται όμως ότι αν οι όροι μεταφοράς διακριτοποιηθούν με σχήμα κεντρικών διαφορών, το μέτρο του συντελεστή ενίσχυσης,  $\xi$ , δε μπορεί να είναι μικρότερο ή ίσο της μονάδας (Hindmarsh et al., 1984), οπότε το ημι-πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών (3.54)–(3.56) δεν είναι ευσταθές.

Το πρόβλημα με την ανάντη διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς είναι ότι εισάγεται τεχνητή (ή αριθμητική) διάχυση που μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τις τιμές των ταχυτήτων που προσδιορίζονται από την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ποσότητας κίνησης, όπως εξηγείται παρακάτω.



Ας θεωρηθεί η τρισδιάστατη εξίσωση μεταφοράς και διάχυσης (3.71), όπου οι ταχύτητες  $u$ ,  $v$  και  $w$  θεωρούνται σταθερές.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_h \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_v \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (3.71)$$

Σύμφωνα με το ημι-πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών που εφαρμόζεται στο FLOW-3DL, η εξίσωση (3.71) γράφεται στην ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή:

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_{i,j,k}^{n+1} - \varphi_{i,j,k}^n}{\Delta t} + u \frac{\varphi_{i,j,k}^n - \varphi_{i-1,j,k}^n}{\Delta x} + v \frac{\varphi_{i,j,k}^n - \varphi_{i,j-1,k}^n}{\Delta y} + w \frac{\varphi_{i,j,k}^n - \varphi_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} \\ & = v_h \left( \frac{\varphi_{i+1,j,k}^n - 2\varphi_{i,j,k}^n + \varphi_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1,k}^n - 2\varphi_{i,j,k}^n + \varphi_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} \right) \\ & + v_{v_{i,j,k-1/2}} \frac{\varphi_{i,j,k-1}^{n+1} - \varphi_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta z^2} - v_{v_{i,j,k+1/2}} \frac{\varphi_{i,j,k}^{n+1} - \varphi_{i,j,k+1}^{n+1}}{\Delta z^2} \end{aligned} \quad (3.72)$$

όπου οι όροι μεταφοράς έχουν διακριτοποιηθεί με σχήμα ανάντη διαφορών και οι όροι διάχυσης με σχήμα κεντρικών διαφορών. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.72) τα αναπτύγματα Taylor των όρων  $\varphi_{i,j,k}^{n+1}$ ,  $\varphi_{i-1,j,k}^n$ ,  $\varphi_{i,j-1,k}^n$ ,  $\varphi_{i,j,k-1}^n$  και  $\varphi_{i,j,k+1}^n$ , προκύπτει μετά από κατάλληλες πράξεις και απλοποιήσεις:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_h \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_v \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \\ & + \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\Delta t} \left[ \Delta x^2 c_x (1-c_x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Delta y^2 c_y (1-c_y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \Delta z^2 c_z (1-c_z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right. \right.} \\ & \quad \left. \left. - \Delta x \Delta y c_x c_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \Delta x \Delta z c_x c_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \Delta y \Delta z c_y c_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \right] + \text{OAT} \right\}}_{\text{σφάλμα αποκοπής}} \end{aligned} \quad (3.73)$$

όπου OAT = όροι ανώτερης τάξης. Ο όρος

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} \left[ \Delta x^2 c_x (1-c_x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Delta y^2 c_y (1-c_y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \Delta z^2 c_z (1-c_z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right. \\ & \quad \left. - \Delta x \Delta y c_x c_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \Delta x \Delta z c_x c_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \Delta y \Delta z c_y c_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \right] \end{aligned} \quad (3.74)$$

έχει τη μορφή όρου διάχυσης και αντιπροσωπεύει την αριθμητική διάχυση που εισάγεται τεχνητά λόγω της προσέγγισης των όρων μεταφοράς με ανάντη εκφράσεις

πεπερασμένων διαφορών. Σε προβλήματα όπου η διεργασία της μεταφοράς της ροής είναι σημαντικότερη από εκείνη της διάχυσης, η αριθμητική διάχυση υπερισχύει της φυσικής τυρβώδους διάχυσης και οι τιμές των μεταβλητών που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (3.71) μπορεί να έχουν μεγάλη απόκλιση από τις τιμές που θα προέκυπταν από την αναλυτική της επίλυση.

Προκειμένου να βελτιωθεί η ακρίβεια και η ευστάθεια της ρητής διακριτοποίησης των όρων μεταφοράς και οριζόντιας διάχυσης των εξισώσεων ποσότητας κίνησης, εφαρμόζεται μία μικτή μέθοδος Euler–Lagrange (Cheng et al., 1984). Για να γίνει κατανοητή η μέθοδος, ας διατυπωθεί η εξίσωση (3.71) κατά Lagrange:

$$\frac{D\varphi}{Dt} = v_h \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_v \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (3.75)$$

όπου η υλική παράγωγος  $D\varphi/Dt$  εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του  $\varphi$  επί της τροχιάς (pathline) ενός σωματιδίου ρευστού κατά την κίνησή του στο πεδίο ροής, η οποία περιγράφεται από τις εκφράσεις:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w \quad (3.76)$$

Η εξίσωση (3.75) μπορεί να διατυπωθεί στην ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{i,j,k}^{n+1} - \varphi_{i-c_x, j-c_y, k-c_z}^n}{\Delta t} = v_h \left( \frac{\varphi_{i+1,j,k}^n - 2\varphi_{i,j,k}^n + \varphi_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1,k}^n - 2\varphi_{i,j,k}^n + \varphi_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} \right) \\ + v_{v_{i,j,k-1/2}} \frac{\varphi_{i,j,k-1}^{n+1} - \varphi_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta z^2} - v_{v_{i,j,k+1/2}} \frac{\varphi_{i,j,k}^{n+1} - \varphi_{i,j,k+1}^{n+1}}{\Delta z^2} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Η εξίσωση (3.77) δηλώνει ότι η τιμή του μεγέθους  $\varphi$  στο σημείο  $(i, j, k)$  κατά τη χρονική στιγμή  $t_{n+1}$  σχετίζεται με την τιμή του  $\varphi$  στο σημείο  $(i - c_x, j - c_y, k - c_z)$  κατά τη χρονική στιγμή  $t_n$ . Ουσιαστικά, η τιμή του  $\varphi$  στο σημείο  $(i - c_x, j - c_y, k - c_z)$  κατά τη χρονική στιγμή  $t_n$  αποτελεί την τιμή του μεγέθους  $\varphi$  στο σημείο  $(i, j, k)$  κατά τη χρονική στιγμή  $t_{n+1}$  που οφείλεται αποκλειστικά στο φαινόμενο της μεταφοράς (Neuman, 1981, Cheng et al., 1984).

Γενικά, οι αριθμοί Courant  $c_x$ ,  $c_y$  και  $c_z$  δεν είναι ακέραιοι, οπότε το σημείο  $(i - c_x, j - c_y, k - c_z)$  δεν αποτελεί κόμβο του υπολογιστικού πλέγματος. Συνεπώς η τιμή του  $\varphi$  στο σημείο  $(i - c_x, j - c_y, k - c_z)$  υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή των τιμών του  $\varphi$  στους οχτώ γειτονικούς κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος. Αν  $c_x = l + \rho$ ,  $c_y = m + q$  και  $c_z = n + r$ , όπου  $l$ ,  $m$  και  $n$  είναι τα ακέραια μέρη των  $c_x$ ,  $c_y$  και  $c_z$ , αντίστοιχα και  $\rho$ ,  $q$  και  $r$  αποτελούν τα δεκαδικά τους μέρη, τότε:

$$\begin{aligned} \varphi_{i-c_x, j-c_y, k-c_z}^n = & (1-r) \left\{ (1-\rho) \left[ (1-q)\varphi_{i-l, j-m, k-n}^n + q\varphi_{i-l, j-m-1, k-n}^n \right] \right. \\ & \left. + \rho \left[ (1-q)\varphi_{i-l-1, j-m, k-n}^n + q\varphi_{i-l-1, j-m-1, k-n}^n \right] \right\} \\ & + r \left\{ (1-\rho) \left[ (1-q)\varphi_{i-l, j-m, k-n-1}^n + q\varphi_{i-l, j-m-1, k-n-1}^n \right] \right. \\ & \left. + \rho \left[ (1-q)\varphi_{i-l-1, j-m, k-n-1}^n + q\varphi_{i-l-1, j-m-1, k-n-1}^n \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Η αριθμητική διάχυση που εισάγεται τεχνητά από την παραπάνω μέθοδο Euler-Lagrange, προσδιορίζεται αναπτύσσοντας κάθε όρο στην εξίσωση (3.77) σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο  $(i - c_x, j - c_y, k - c_z)$ , οπότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} = & v_h \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_v \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \\ + \underbrace{\frac{1}{2\Delta t} \left[ \Delta x^2 \rho (1-\rho) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Delta y^2 q (1-q) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \Delta z^2 r (1-r) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]}_{\text{σφάλμα αποκοπής}} & + \text{OAT} \end{aligned} \quad (3.79)$$

όπου ο όρος

$$\frac{1}{2\Delta t} \left[ \Delta x^2 \rho (1-\rho) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Delta y^2 q (1-q) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \Delta z^2 r (1-r) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \quad (3.80)$$

αντιπροσωπεύει την αριθμητική διάχυση. Εφόσον τα  $\rho$ ,  $q$  και  $r$  αποτελούν το δεκαδικό μέρος των αριθμών Courant  $c_x$ ,  $c_y$  και  $c_z$ , αντίστοιχα, η αριθμητική διάχυση που περιγράφεται από την εξίσωση (3.80) είναι μικρότερη σε σχέση με την αριθμητική διάχυση που οφείλεται στην ανάντη διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς και περιγράφεται από την εξίσωση (3.74). Περαιτέρω μείωση της αριθμητικής διάχυσης της μεθόδου Euler-Lagrange μπορεί να επιτευχθεί αυξάνοντας τις τιμές  $c_x$ ,  $c_y$  και  $c_z$ , δηλαδή μειώνοντας τις διαστάσεις  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  και  $\Delta z$  του υπολογιστικού

πλέγματος. Η αριθμητική διάχυση μπορεί να μηδενιστεί χρησιμοποιώντας παρεμβολή ανώτερης τάξης για τον προσδιορισμό της τιμής του  $\varphi$  στο σημείο  $(i - c_x, j - c_y, k - c_z)$ . Στην περίπτωση αυτή, ωστόσο, η αριθμητική λύση μπορεί να παρουσιάσει ταλαντώσεις (Cheng et al., 1984).

Η ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος (3.77) αποδεικνύεται ότι καθορίζεται από την ακόλουθη ανισότητα (Greenspan and Casulli, 1988):

$$\Delta t \leq \left[ 2v_h \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right]^{-1} \quad (3.81)$$

Η συνθήκη ευστάθειας (3.81) είναι πολύ λιγότερο περιοριστική για το μέγεθος του χρονικού βήματος σε σύγκριση με τη συνθήκη (3.70) που ισχύει όταν οι όροι μεταφοράς διακριτοποιούνται με σχήμα ανάντη διαφορών.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Euler–Lagrange που περιγράφηκε παραπάνω, για τη διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς και οριζόντιας διάχυσης των εξισώσεων ποσότητας κίνησης, οι όροι  $Fu_{i+1/2,j,k}^n$  και  $Fv_{i,j+1/2,k}^n$  στις εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών (3.40) και (3.41) διατυπώνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} Fu_{i+1/2,j,k}^n &= u_{i+1/2-c_x,j-c_y,k-c_z}^n + \Delta t f v_{i+1/2,j,k}^n \\ &+ \Delta t \frac{v_{h_{i+1,j,k}}^n \frac{u_{i+3/2,j,k}^n - u_{i+1/2,j,k}^n}{\Delta x_{i+1}} - v_{h_{i,j,k}}^n \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x_i}}{\Delta x_{i+1/2}} \\ &+ \Delta t \frac{v_{h_{i+1/2,j+1/2,k}}^n \frac{u_{i+1/2,j+1,k}^n - u_{i+1/2,j,k}^n}{\Delta y_{j+1/2}} - v_{h_{i+1/2,j-1/2,k}}^n \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i+1/2,j-1,k}^n}{\Delta y_{j-1/2}}}{\Delta y_j} \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} Fv_{i,j+1/2,k}^n &= v_{i-c_x,j+1/2-c_y,k-c_z}^n - \Delta t f u_{i,j+1/2,k}^n \\ &+ \Delta t \frac{v_{h_{i+1/2,j+1/2,k}}^n \frac{v_{i+1,j+1/2,k}^n - v_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta x_{i+1/2}} - v_{h_{i-1/2,j+1/2,k}}^n \frac{v_{i,j+1/2,k}^n - v_{i-1,j+1/2,k}^n}{\Delta x_{i-1/2}}}{\Delta x_i} \\ &+ \Delta t \frac{v_{h_{i,j+1,k}}^n \frac{v_{i,j+3/2,k}^n - v_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta y_{j+1}} - v_{h_{i,j,k}}^n \frac{v_{i,j+1/2,k}^n - v_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y_j}}{\Delta y_{j+1/2}} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, επειδή οι ταχύτητες  $u$ ,  $v$  και  $w$  δεν είναι σταθερές, οι τιμές των αριθμών Courant  $c_x$ ,  $c_y$  και  $c_z$  προσδιορίζονται από την επίλυση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (3.76). Δεδομένου ότι οι τιμές των ταχυτήτων  $u$ ,  $v$  και  $w$  στο υπολογιστικό πεδίο είναι γνωστές μόνο κατά τη χρονική στιγμή  $t_n$ , θεωρούνται αμετάβλητες κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος και οι εξισώσεις (3.76) ολοκληρώνονται αριθμητικά από  $t = t_{n+1}$  μέχρι  $t = t_n$  με τη μέθοδο Euler. Συγκεκριμένα, το χρονικό βήμα  $\Delta t$  χωρίζεται σε  $ns$  ίσα μέρη μεγέθους  $\Delta\tau = \Delta t / ns$  και οι εξισώσεις (3.76) διακριτοποιούνται σε κάθε μέτωπο  $(i+1/2, j, k)$  και  $(i, j+1/2, k)$  των διαφορικών όγκων του υπολογιστικού πλέγματος ως εξής (π.χ. Konikow and Bredehoeft 1978, Goode and Konikow 1989, Casulli, 1990):

$$\begin{aligned} x^{s-1} &= x^s - \Delta\tau u^n(x^s, y^s, z^s), & x^{ns} &= x_{i+1/2} \\ y^{s-1} &= y^s - \Delta\tau v^n(x^s, y^s, z^s), & y^{ns} &= y_j \\ z^{s-1} &= z^s - \Delta\tau w^n(x^s, y^s, z^s), & z^{ns} &= z_k \end{aligned} \quad s = ns, ns-1, ns-2, \dots, 2, 1 \quad (3.84)$$

Οι εκφράσεις (3.84) ισχύουν για τα μέτωπα  $(i+1/2, j, k)$ . Αντίστοιχη είναι η διακριτοποίηση και στα μέτωπα  $(i, j+1/2, k)$ . Οι ταχύτητες  $u^n(x^s, y^s, z^s)$ ,  $v^n(x^s, y^s, z^s)$  και  $w^n(x^s, y^s, z^s)$  υπολογίζονται μέσω γραμμικής παρεμβολής με σχέσεις όμοιες με την (3.78). Το τελικό σημείο  $(x^0, y^0, z^0)$  που προσδιορίζεται από τις σχέσεις (3.84) καθορίζει το σημείο  $(i+1/2-c_x, j-c_y, k-c_z)$ .

Η ανισότητα (3.81) αποτελεί το κριτήριο ευστάθειας του ημι-πεπλεγμένου σχήματος πεπερασμένων διαφορών (3.54)–(3.56), όταν οι όροι μεταφοράς και οριζόντιας διάχυσης των εξισώσεων ποσότητας κίνησης διακριτοποιούνται με τη μικτή μέθοδο Euler–Lagrange. Επειδή στο FLOW–3DL ο συντελεστής οριζόντιας κινηματικής τυρβώδους συνεκτικότητας και οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος μπορεί να είναι μεταβλητά, η συνθήκη ευστάθειας (3.81) προσαρμόζεται ως εξής:

$$\Delta t \leq \min_{i,j,k} \left[ 2v_{h_{i,j,k}} \left( \frac{1}{\Delta x_i^2} + \frac{1}{\Delta y_j^2} \right) \right]^{-1} \quad (3.85)$$

Παρόλο που η συνθήκη (3.85) εξασφαλίζει την ευστάθεια του ημι-πεπλεγμένου σχήματος πεπερασμένων διαφορών που εφαρμόζεται στο FLOW–3DL, για λόγους

ακρίβειας, η υποδιαίρεση  $\tau$  κάθε χρονικού βήματος επιλέγεται έτσι ώστε οι αντίστοιχοι αριθμοί Courant να μην ξεπερνούν τη μονάδα, δηλαδή (Casulli, 1990):

$$\tau \leq \min_{i,j,k} \left( \frac{\Delta x_{i+1/2}}{|u_{i+1/2,j,k}^n|}, \frac{\Delta y_{j+1/2}}{|v_{i,j+1/2,k}^n|}, \frac{\Delta z_{k+1/2}}{|w_{i,j,k+1/2}^n|} \right) \quad (3.86)$$

Συνοψίζοντας, στο FLOW-3DL περιλαμβάνονται και οι δύο μέθοδοι διακριτοποίησης των όρων μεταφοράς και οριζόντιας διάχυσης των εξισώσεων ποσότητας κίνησης που περιγράφηκαν παραπάνω, οπότε οι όροι  $Fu_{i+1/2,j,k}^n$  και  $Fv_{i,j+1/2,k}^n$  γράφονται στις αντίστοιχες μορφές (3.65) και (3.66) ή (3.82) και (3.83). Με τη μικτή μέθοδο Euler-Lagrange βελτιώνεται σημαντικά η ακρίβεια και η ευστάθεια του ημι-πεπλεγμένου σχήματος πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιείται στο FLOW-3DL, οπότε και επιλέγεται σε περιπτώσεις όπου επικρατεί η διεργασία μεταφοράς της ροής (αριθμός Peclet  $P_e > 4$ ). Σε περιπτώσεις όπου δεν επικρατεί σημαντικά το φαινόμενο της μεταφοράς (αριθμός Peclet  $P_e < 4$ ), μπορεί να εφαρμοστεί η ανάντη διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς, μειώνοντας έτσι τον υπολογιστικό χρόνο που συνεπάγεται η χρήση της μεθόδου Euler-Lagrange.

Όσον αφορά στην ακρίβεια του ημι-πεπλεγμένου σχήματος πεπερασμένων διαφορών (3.44)–(3.46), είναι 1<sup>ης</sup> τάξης στο χρόνο αλλά και στο χώρο, εφόσον οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος,  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_j$  και  $\Delta z_{i,j,k}$ , είναι μεταβλητές. Ενδεικτικά, το σφάλμα αποκοπής όρων των αναπτυγμάτων Taylor κατά την προσέγγιση των μερικών παραγώγων  $\partial \zeta / \partial x$  και  $\partial \zeta / \partial y$  είναι  $O(\Delta x_{i+1} - \Delta x_i)$  και  $O(\Delta y_{j+1} - \Delta y_j)$ , αντίστοιχα. Πιο αναλυτικά, η μερική παράγωγος  $\partial \zeta / \partial x$  στη θέση  $(i+1/2, j)$  μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα κατά Taylor του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας,  $\zeta(x,y,t)$ , στις θέσεις  $(i+1, j)$  και  $(i, j)$ :

$$\begin{aligned} \zeta_{i+1,j}^{n+1} = & \zeta_{i+1/2,j}^{n+1} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j}^n \frac{\Delta x_{i+1}}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Big|_{i+1/2,j}^n \left( \frac{\Delta x_{i+1}}{2} \right)^2 \\ & + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \Big|_{i+1/2,j}^n \left( \frac{\Delta x_{i+1}}{2} \right)^3 + \text{OAT} \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i+1/2,j}^{n+1} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j}^n \frac{\Delta x_i}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Big|_{i+1/2,j}^n \left( \frac{\Delta x_i}{2} \right)^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \Big|_{i+1/2,j}^n \left( \frac{\Delta x_i}{2} \right)^3 + \text{OAT} \quad (3.88)$$

Αφαιρώντας την εξίσωση (3.88) από την εξίσωση (3.87) προκύπτει, έπειτα από κατάλληλες πράξεις και απλοποιήσεις, η γνωστή έκφραση πεπερασμένων διαφορών πρώτης τάξης για την παράγωγο  $\partial \zeta / \partial x$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j}^n &= \frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Big|_{i+1/2,j}^n \left( \frac{\Delta x_{i+1} - \Delta x_i}{2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \Big|_{i+1/2,j}^n \left[ \left( \frac{\Delta x_{i+1} - \Delta x_i}{2} \right)^2 + \frac{\Delta x_{i+1} \Delta x_i}{4} \right] + \text{OAT} \\ &\cong \frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} + O(\Delta x_{i+1} - \Delta x_i) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Ωστόσο, αν οι διαστάσεις  $\Delta x_i$  και  $\Delta y_j$  του υπολογιστικού πλέγματος μεταβάλλονται βαθμιαία έτσι ώστε  $\Delta x_{i+1} = \Delta x_i (1 + \alpha \Delta x_i)$  και  $\Delta y_{j+1} = \Delta y_j (1 + \beta \Delta y_j)$ , όπου  $\alpha$  και  $\beta$  είναι σταθερές, αποδεικνύεται εύκολα από την εξίσωση (3.88) ότι η ακρίβεια των εκφράσεων πεπερασμένων διαφορών που αντικαθιστούν τις μερικές παραγώγους  $\partial \zeta / \partial x$  και  $\partial \zeta / \partial y$  θα είναι 2<sup>ης</sup> τάξης (Davies, 1991):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j}^{n+1} &= \frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1}}{0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} + O(\Delta x_i^2) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Big|_{i,j+1/2}^{n+1} &= \frac{\zeta_{i,j+1}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1}}{0.5(\Delta y_j + \Delta y_{j+1})} + O(\Delta y_j^2) \end{aligned} \quad (3.90)$$

Παρομοίως, όταν  $\Delta x_{i+1} = \Delta x_i (1 + \alpha \Delta x_i)$  και  $\Delta y_{j+1} = \Delta y_j (1 + \beta \Delta y_j)$  και επιπλέον θεωρηθεί μια σταθερή τιμή για το συντελεστή οριζόντιας κινηματικής τυρβώδους συνεκτικότητας στο υπολογιστικό πεδίο, η ακρίβεια προσέγγισης των όρων οριζόντιας διάχυσης με εκφράσεις κεντρικών διαφορών – η οποία είναι γενικά 1<sup>ης</sup> τάξης – γίνεται 2<sup>ης</sup> τάξης. Κάτι αντίστοιχο δεν ισχύει για τις εκφράσεις κεντρικών διαφορών που προσεγγίζουν τους όρους κατακόρυφης διάχυσης. Επειδή σε αυτές υπεισέρχεται το βρεχόμενο πάχος των μετώπων των διαφορικών όγκων, το οποίο επηρεάζεται από τη θέση της ελεύθερης επιφάνειας, η ακρίβειά τους παραμένει 1<sup>ης</sup>

τάξης ακόμα και εάν θεωρηθεί μια σταθερή τιμή για το συντελεστή κατακόρυφης κινηματικής τυρβώδους συνεκτικότητας και το πάχος των στρωμάτων μεταβάλλεται βαθμιαία με συγκεκριμένο τρόπο.

### 3.3.4 Επίλυση των εξισώσεων του υπό-μοντέλου ροής υπόγειων υδάτων

Η εξίσωση (3.37), που περιγράφει την τρισδιάστατη μη μόνιμη κορεσμένη ροή υπόγειων υδάτων σε ετερογενές ανισότροπο πορώδες μέσο, επιλύεται χρησιμοποιώντας ένα πλήρως πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (3.37) στον διαφορικό όγκο  $(i, j, k)$  κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \int_n^{n+1} \int_{\Delta V_{i,j,k}} \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) dV dt + \int_n^{n+1} \int_{\Delta V_{i,j,k}} \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) dV dt \\ & + \int_n^{n+1} \int_{\Delta V_{i,j,k}} \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) dV dt + \int_n^{n+1} \int_{\Delta V_{i,j,k}} W dV dt = \int_n^{n+1} \int_{\Delta V_{i,j,k}} S_s \frac{\partial h}{\partial t} dV dt \end{aligned} \quad (3.91)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης του Gauss (βλ. π.χ. Weisstein, 2003), η εξίσωση (3.91) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} & \int_n^{n+1} \left[ \left( K_x A \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i+1/2,j,k} - \left( K_x A \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i-1/2,j,k} \right] dt \\ & + \int_n^{n+1} \left[ \left( K_y A \frac{\partial h}{\partial y} \right)_{i,j+1/2,k} - \left( K_y A \frac{\partial h}{\partial y} \right)_{i,j-1/2,k} \right] dt \\ & + \int_n^{n+1} \left[ \left( K_z A \frac{\partial h}{\partial z} \right)_{i,j,k-1/2} - \left( K_z A \frac{\partial h}{\partial z} \right)_{i,j,k+1/2} \right] dt + \int_n^{n+1} W \Delta V_{i,j,k} dt \\ & = \int_{\Delta V_{i,j,k}} \left[ \int_n^{n+1} S_s \frac{\partial h}{\partial t} dt \right] dV \end{aligned} \quad (3.92)$$

Στις εξισώσεις (3.91) και (3.92)  $\Delta V_{i,j,k}$  [ $L^3$ ] συμβολίζει τον όγκο του υπολογιστικού κελιού  $(i, j, k)$  που καταλαμβάνεται από τα υπόγεια νερά και  $A$  [ $L^2$ ] συμβολίζει την επιφάνεια διατομής της ροής στα μέτωπα του υπολογιστικού κελιού.



Εφαρμόζοντας πλήρως πεπλεγμένο σχήμα για τη χρονική ολοκλήρωση και χρησιμοποιώντας σχήμα κεντρικών διαφορών για την εκτίμηση των μερικών παραγώγων στα μέτωπα των διαφορικών όγκων, η εξίσωση (3.92) διατυπώνεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & (K_x A)_{i+1/2,j,k} \frac{h_{i+1,j,k}^{n+1} - h_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} - (K_x A)_{i-1/2,j,k} \frac{h_{i,j,k}^{n+1} - h_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x_{i-1/2}} \\
 & + (K_y A)_{i,j+1/2,k} \frac{h_{i,j+1,k}^{n+1} - h_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta y_{j+1/2}} - (K_y A)_{i,j-1/2,k} \frac{h_{i,j,k}^{n+1} - h_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y_{j-1/2}} \\
 & + (K_z A)_{i,j,k-1/2} \frac{h_{i,j,k-1}^{n+1} - h_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta z_{i,j,k-1/2}} - (K_z A)_{i,j,k+1/2} \frac{h_{i,j,k}^{n+1} - h_{i,j,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i,j,k+1/2}} \\
 & + Q_{g_{i,j,k}} = S_{s_{i,j,k}} \frac{h_{i,j,k}^{n+1} - h_{i,j,k}^n}{\Delta t} \Delta V_{i,j,k}
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

Η ακρίβεια του σχήματος κεντρικών διαφορών είναι 1<sup>ης</sup> τάξης, δεδομένου ότι οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος,  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_j$  και  $\Delta z_{i,j,k}$ , είναι μεταβλητές. Ωστόσο, αν οι διαστάσεις  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_j$  και  $\Delta z_{i,j,k}$ , του υπολογιστικού πλέγματος μεταβάλλονται βαθμιαία έτσι ώστε  $\Delta x_{i+1} = \Delta x_i (1 + \alpha \Delta x_i)$ ,  $\Delta y_{j+1} = \Delta y_j (1 + \beta \Delta y_j)$  και  $\Delta z_{i,j,k} = \Delta y_j (1 + \gamma \Delta y_j)$ , όπου  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  είναι σταθερές, η ακρίβεια των εκφράσεων κεντρικών διαφορών που αντικαθιστούν τις μερικές παραγώγους,  $\partial h / \partial x$ ,  $\partial h / \partial y$  και  $\partial h / \partial z$  είναι 2<sup>ης</sup> τάξης.

Στην εξίσωση (3.93) ο όρος  $Q_{g_{i,j,k}}$  [ $L^3 T^{-1}$ ] συμβολίζει εισροές ή/και εκροές στον/από τον διαφορικό όγκο  $(i, j, k)$ , που προέρχονται ή κατευθύνονται εξωτερικά του υδροφορέα, όπως π.χ. γνωστές πλευρικές εισροές ή εκροές στα όρια του υδροφορέα (οριακή συνθήκη Neumann), βροχόπτωση, εξατμισοδιαπνοή, αντλήσεις, κλπ. Για περιορισμένους υδροφορείς  $\Delta V_{i,j,k} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k}$  ενώ για φρεάτιους υδροφορείς ο όγκος του υπολογιστικού κελιού  $(i, j, k)$  που καταλαμβάνεται από τα υπόγεια νερά υπολογίζεται ως:  $\Delta V_{i,j,k} = \Delta x_i \Delta y_j Hsat_{i,j,k}$ , όπου  $Hsat_{i,j,k}$  [L] συμβολίζει το κορεσμένο πάχος του κελιού  $(i, j, k)$ . Το κορεσμένο πάχος ενός υπολογιστικού κελιού σε μια δεδομένη χρονική στιγμή εξαρτάται από τη θέση της ελεύθερης επιφάνειας και ορίζεται ως εξής:

$$Hsat_{i,j,k} = \Delta z_{i,j,k}, \text{ αν } z_{wt_{i,j}} \geq z_{top_{i,j,k}}$$

$$Hsat_{i,j,k} = z_{wt_{i,j}} - z_{bot_{i,j,k}}, \quad \text{αν } z_{bot_{i,j,k}} < z_{wt_{i,j}} < z_{top_{i,j,k}}$$

$$Hsat_{i,j,k} = 0, \quad \text{αν } z_{wt_{i,j}} \leq z_{bot_{i,j,k}}$$

όπου  $z_{top_{i,j,k}}$  και  $z_{bot_{i,j,k}}$  συμβολίζουν το υψόμετρο του επάνω και του κάτω μετώπου του υπολογιστικού κελιού  $(i, j, k)$ , αντίστοιχα. Όταν  $z_{wt_{i,j}} \geq z_{top_{i,j,k}}$  το κελί θεωρείται κορεσμένο. Αντίστοιχα, όταν  $z_{bot_{i,j,k}} < z_{wt_{i,j}} < z_{top_{i,j,k}}$  θεωρείται μερικώς κορεσμένο, ενώ όταν  $z_{wt_{i,j}} \leq z_{bot_{i,j,k}}$  θεωρείται “ξηρό”.

Στην εξίσωση (3.93), τα γινόμενα της υδραυλικής αγωγιμότητας και της επιφάνειας διατομής της ροής στα μέτωπα του διαφορικού όγκου  $(i, j, k)$  μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$(K_x A)_{i\pm 1/2,j,k} = T_{x_{i\pm 1/2,j,k}} \Delta y_j$$

$$(K_y A)_{i,j\pm 1/2,k} = T_{y_{i,j\pm 1/2,k}} \Delta x_i$$

$$(K_z A)_{i,j,k\pm 1/2} = K_{z_{i,j,k\pm 1/2}} \Delta x_i \Delta y_j$$

όπου  $T_{x_{i\pm 1/2,j,k}}$  και  $T_{y_{i,j\pm 1/2,k}}$  συμβολίζουν τη μέση διοχετευτικότητα στα μέτωπα των διαφορικών όγκων στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα και  $K_{z_{i,j,k\pm 1/2}}$  συμβολίζει τη μέση κατακόρυφη υδραυλική αγωγιμότητα στα μέτωπα των διαφορικών όγκων. Η υδραυλική αγωγιμότητα και η διοχετευτικότητα στο κοινό μέτωπο μεταξύ δύο γειτονικών διαφορικών όγκων υπολογίζονται ως ο σταθμικός αρμονικός μέσος όρος των υδραυλικών αγωγιμοτήτων και των διοχετευτικοτήτων, αντίστοιχα, των δύο διαφορικών όγκων. Οι συντελεστές στάθμισης είναι οι διαστάσεις των διαφορικών όγκων. Γενικά, σε αριθμητικά μοντέλα πεπερασμένων διαφορών και πεπερασμένων όγκων, είναι σύνηθες να χρησιμοποιείται ο αρμονικός μέσος όρος για την εκτίμηση της υδραυλικής αγωγιμότητας και της διοχετευτικότητας στα μέτωπα μεταξύ γειτονικών διαφορικών όγκων (π.χ Harbaugh et al., 2000, Loudyi et al., 2007, Ruhaak et al., 2008), καθώς ο αρμονικός μέσος αποτελεί τον πιο αντιπροσωπευτικό μέσο όρο (truest average) για ρυθμούς (Weisstein, 2003). Ενδεικτικά, η διοχετευτικότητα  $T_{x_{i\pm 1/2,j,k}}$  υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$T_{x_{i+1/2,j,k}} = \frac{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}}{\frac{\Delta x_j}{T_{x_{i,j,k}}} + \frac{\Delta x_{j+1}}{T_{x_{i+1,j,k}}}} \quad (3.94)$$

Για περιορισμένους υδροφορείς  $T_{x_{i,j,k}} = K_{x_{i,j,k}} \Delta z_{i,j,k}$ , ενώ για φρεάτιους υδροφορείς ισχύει  $T_{x_{i,j,k}} = K_{x_{i,j,k}} Hsat_{i,j,k}$ .

Η εξίσωση (3.93) μπορεί να διατυπωθεί στην ακόλουθη πιο συνεπτυγμένη μορφή:

$$\begin{aligned} & CC_{i,j,k-1/2}^{n+1} h_{i,j,k-1}^{n+1} + CC_{i,j-1/2,k}^{n+1} h_{i,j-1,k}^{n+1} + CC_{i-1/2,j,k}^{n+1} h_{i-1,j,k}^{n+1} + CC_{i,j,k}^{n+1} h_{i,j,k}^{n+1} \\ & + CC_{i+1/2,j,k}^{n+1} h_{i+1,j,k}^{n+1} + CC_{i,j+1/2,k}^{n+1} h_{i,j+1,k}^{n+1} + CC_{i,j,k+1/2}^{n+1} h_{i,j,k+1}^{n+1} = E_{i,j,k}^{n+1} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Οι συντελεστές  $CC_{i\pm 1/2,j,k}$ ,  $CC_{i,j\pm 1/2,k}$ ,  $CC_{i,j,k\pm 1/2}$  και  $CC_{i,j,k}$  [ $L^2T^{-1}$ ] των άγνωστων πιεζομετρικών φορτίων και ο όρος  $E_{i,j,k}$  [ $L^3T^{-1}$ ] ορίζονται ως εξής:

$$CC_{i\pm 1/2,j,k} = -\frac{T_{x_{i\pm 1/2,j,k}} \Delta y_j}{\Delta x_{i\pm 1/2}} \quad (3.96\alpha)$$

$$CC_{i,j\pm 1/2,k} = -\frac{T_{y_{i,j\pm 1/2,k}} \Delta x_j}{\Delta y_{j\pm 1/2}} \quad (3.96\beta)$$

$$CC_{i,j,k\pm 1/2} = -\frac{K_{z_{i,j,k\pm 1/2}} \Delta x_i \Delta y_j}{\Delta z_{i,j,k\pm 1/2}} \quad (3.96\gamma)$$

$$\begin{aligned} CC_{i,j,k} = & -CC_{i,j,k-1/2} - CC_{i,j-1/2,k} - CC_{i-1/2,j,k} \\ & -CC_{i+1/2,j,k} - CC_{i,j+1/2,k} - CC_{i,j,k+1/2} + SV_{i,j,k} \end{aligned} \quad (3.96\delta)$$

$$E_{i,j,k} = Q_{g_{i,j,k}} + SV_{i,j,k} h_{i,j,k}^n \quad (3.96\epsilon)$$

$$\text{όπου } SV_{i,j,k} = \frac{S_{s_{i,j,k}} \Delta V_{i,j,k}}{\Delta t}$$

Είναι προφανές ότι ενώ για περιορισμένους υδροφορείς οι τιμές των  $CC_{i\pm 1/2,j,k}$ ,  $CC_{i,j\pm 1/2,k}$ ,  $CC_{i,j,k\pm 1/2}$ ,  $CC_{i,j,k}$  και  $E_{i,j,k}$  είναι σταθερές για κάθε χρονικό βήμα, για φρεάτιους υδροφορείς είναι συνάρτηση του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων. Εφόσον το αριθμητικό σχήμα που εφαρμόζεται για την επίλυση της εξίσωσης (3.37) είναι πλήρως πεπλεγμένο, στην εξίσωση (3.95) οι

συντελεστές  $CC_{i\pm 1/2,j,k}$ ,  $CC_{i,j\pm 1/2,k}$ ,  $CC_{i,j,k\pm 1/2}$  και  $CC_{i,j,k}$  και ο όρος  $E_{i,j,k}$  εκφράζονται στο χρονικό βήμα  $n+1$ .

Γράφοντας την εξίσωση (3.95) για όλους τους διαφορικούς όγκους του υπολογιστικού πλέγματος διακριτοποίησης του υπόγειου υδροφορέα, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων, διατυπωμένο σε μητρική μορφή, το οποίο πρέπει να επιλυθεί σε κάθε χρονικό βήμα για τον υπολογισμό των πιεζομετρικών φορτίων στο υπολογιστικό πεδίο των υπόγειων υδάτων:

$$\mathbf{CC}^{n+1} \mathbf{h}^{n+1} = \mathbf{E}^{n+1} \quad (3.97)$$

όπου  $\mathbf{CC}^{n+1}$  συμβολίζει το μητρώο συντελεστών του διανύσματος των άγνωστων πιεζομετρικών φορτίων,  $\mathbf{h}^{n+1}$ , και  $\mathbf{E}^{n+1}$  είναι ένα διάνυσμα με στοιχεία τους όρους του δεξιού μέλους της εξίσωσης (3.93). Το μητρώο συντελεστών  $\mathbf{CC}^{n+1}$  έχει επτά διαγώνιους μη μηδενικές ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι μηδενικά και είναι συμμετρικό. Όπως φαίνεται από τις σχέσεις ορισμού των συντελεστών των άγνωστων πιεζομετρικών φορτίων, το μητρώο  $\mathbf{CC}^{n+1}$  έχει αυστηρή διαγώνια κυριαρχία και θετικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο, άρα είναι θετικά ορισμένο. Για περιορισμένους υδροφορείς το αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων (3.97) είναι γραμμικό. Ωστόσο, για φρεάτιους υδροφορείς, η εξάρτηση των τιμών των στοιχείων του μητρώου συντελεστών  $\mathbf{CC}^{n+1}$  και του διανύσματος  $\mathbf{E}^{n+1}$  από το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων – και άρα από τις τιμές των πιεζομετρικών φορτίων – κατά το χρονικό βήμα  $n+1$ , δημιουργεί ένα μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Έτσι, για προβλήματα ροής σε φρεάτιους υδροφορείς, εκτός από τη δυσκολία προσδιορισμού της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας, θα πρέπει να επιλυθεί και ένα μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων.

Ο προσδιορισμός της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας είναι μία από τις βασικότερες δυσκολίες στην προσομοίωση της ροής των υπόγειων υδάτων. Από φυσικής πλευράς, η προσομοίωση της ροής τόσο στην κορεσμένη όσο και στην ακόρεστη ζώνη πορώδους μέσου αποτελεί την ακριβέστερη αντιμετώπιση του προβλήματος. Ωστόσο η αριθμητική επίλυση της τρισδιάστατης εξίσωσης Richards δεν είναι απλή και επιπλέον σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι διαθέσιμα τα απαραίτητα δεδομένα για την εφαρμογή των βασικών συναρτησιακών σχέσεων της ακόρεστης ροής (Diersch, 1998). Για τους λόγους αυτούς, στην πλειονότητα των

αριθμητικών μοντέλων υπόγειων νερών θεωρείται η ροή μόνο στην κορεσμένη ζώνη (βλ. π.χ. Reeves et al., 1986, McDonald and Harbaugh, 1988, Faust et al., 1993, Yeh et al., 1994, Knupp, 1996, Kirp, 1997, Loudyi et al., 2007, Ruhaak et al., 2008). Σε κάποιες περιπτώσεις (π.χ. Yeh et al., 1994, Knupp, 1996), εφαρμόζονται αλγόριθμοι κινούμενου πλέγματος (moving grid algorithms) που προσαρμόζεται στη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας. Στη συντριπτική όμως πλειοψηφία των αριθμητικών μοντέλων προσομοίωσης της ροής στην κορεσμένη ζώνη πορώδους μέσου, όπως και στο υπό-μοντέλο υπόγειων νερών του IRENE-HYD, το υπολογιστικό πλέγμα παραμένει αμετάβλητο και προσδιορίζεται η θέση της ελεύθερης επιφάνειας εντός αυτού.

Οι αλγόριθμοι κινούμενου πλέγματος μπορεί να έχουν μεγάλη ακρίβεια, είναι όμως γενικά σύνθετοι στην εφαρμογή τους, ειδικά σε υδροφορείς που παρουσιάζουν μεγάλη ετερογένεια. Το κινούμενο πλέγμα πρέπει, σε κάθε χρονικό βήμα, να προσαρμόζεται κατά το δυνατόν στους διαφορετικούς γεωλογικούς σχηματισμούς που αποτελούν τον υδροφορέα, ώστε να ελαχιστοποιηθεί η παρεμβολή των τιμών των υδραυλικών παραμέτρων των γεωλογικών σχηματισμών (υδραυλική αγωγιμότητα, ειδική αποθηκευτικότητα, κλπ) που αποτελεί πηγή σημαντικών σφαλμάτων (Diersch, 1998). Από την άλλη πλευρά, αριθμητικά μοντέλα στα οποία χρησιμοποιείται σταθερό υπολογιστικό πλέγμα αποτελούν συχνά το αντικείμενο αρνητικής κριτικής (βλ. π.χ. Yeh et al., 1994, Knupp, 1996, Diersch, 1998) για δύο λόγους κυρίως: (α) η κινηματική οριακή συνθήκη (3.39) συνήθως αγνοείται κατά τον προσδιορισμό της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας (π.χ. Reeves et al., 1986, Kirp, 1997, Harbaugh et al., 2000) και (β) προκύπτουν δυσκολίες λόγω της εμφάνισης ξηρών υπολογιστικών κελιών κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Ο χειρισμός τέτοιων ξηρών υπολογιστικών κελιών συχνά δεν έχει φυσική βάση και μπορεί να οδηγήσει σε σφάλματα ισοζυγίου μάζας και ταλαντώσεις στην αριθμητική λύση. Για παράδειγμα, πολύς λόγος έχει γίνει για την προσέγγιση που ακολουθείται στο ευρύτατα διαδεδομένο μοντέλο υπόγειων νερών MODFLOW (McDonald and Harbaugh, 1988, Harbaugh and McDonald, 1996, Harbaugh et al., 2000 Harbaugh, 2005), προκειμένου κελιά που σε ένα δεδομένο χρονικό βήμα είναι ξηρά και θεωρούνται “ανενεργά”, να μετατραπούν σε μερικώς ή πλήρως κορεσμένα κελιά σε κάποιο επόμενο χρονικό βήμα. Οι αδυναμίες της μεθόδου συνοψίζονται στα κείμενα των Yeh et al. (1994) και Knupp (1996).

Σε πολλές περιπτώσεις, οι αλγόριθμοι που εφαρμόζονται σε μοντέλα όπου το υπολογιστικό πλέγμα παραμένει αμετάβλητο κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης, κατά κάποιο τρόπο “μιμούνται” τις συνθήκες της ακόρεστης ροής για τα μερικώς κορεσμένα και τα ξηρά υπολογιστικά κελιά (π.χ. Bathe and Khosgoftaar, 1979, Desai and Li, 1983, Huyakorn et al., 1994, Wu et al., 1994, HydroGeoLogic, 1998, Nanou–Giannarou and Helmig, 1998, DHI–WASY GmbH, 2010). Πρακτικά, επειδή προφανώς στόχος είναι να αποφευχθεί η προσομοίωση της ροής στην ακόρεστη ζώνη, οι εμπειρικές συναρτήσεις των Brooks and Corey, 1966, Brutsaert, 1966, van Genuchten, 1980, κλπ, που χρησιμοποιούνται συνήθως για την περιγραφή της σχέσης μεταξύ της υδραυλικής αγωγιμότητας και του ύψους πίεσης του εδαφικού νερού κατά την προσομοίωση της ακόρεστης ροής, αντικαθίστανται από απλές προσεγγιστικές σχέσεις μεταξύ της υδραυλικής αγωγιμότητας και του ύψους πίεσης του νερού. Για παράδειγμα, στο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων των Bathe and Khosgoftaar (1979) η υδραυλική αγωγιμότητα ενός στοιχείου τίθεται ίση με μία πολύ μικρή σταθερή τιμή μόλις η πίεση γίνει αρνητική, πιο αναλυτικά:  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_s / 1000$  όταν  $p < 0$  και  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_s$  όταν  $p \geq 0$ , όπου  $\mathbf{K}_s$  είναι ο τανυστής της κορεσμένης υδραυλικής αγωγιμότητας. Πρόκειται βέβαια για μια ιδιαίτερα χονδροειδή προσέγγιση, καθώς δεν υπάρχει διαφοροποίηση της υδραυλικής αγωγιμότητας σε σχέση με το βαθμό κορεσμού των στοιχείων.

Οι Desai and Li (1983) βελτίωσαν την τεχνική των Bathe and Khosgoftaar (1979) θεωρώντας γραμμική σχέση μεταξύ της υδραυλικής αγωγιμότητας και του ύψους πίεσης του εδαφικού νερού. Η σχετική υδραυλική αγωγιμότητα που υπολογίζεται από τη γραμμική αυτή σχέση λειτουργεί σαν πολλαπλασιαστής των όρων της διακριτοποιημένης εξίσωσης της υπόγειας ροής. Στην ίδια συλλογιστική κινήθηκαν και τα μοντέλα των Huyakorn et al., (1994), Wu et al. (1994), HydroGeoLogic (1998), Nanou–Giannarou and Helmig (1998) και DHI–WASY GmbH (2010), όπου αντί να θεωρηθεί μία γραμμική σχέση μεταξύ της υδραυλικής αγωγιμότητας και της πίεσης, χρησιμοποιείται ισοδύναμα ο βαθμός κορεσμού των υπολογιστικών κελιών. Στους κώδικες πεπερασμένων στοιχείων των Nanou–Giannarou and Helmig (1998) και DHI–WASY GmbH (2010), για παράδειγμα, ο βαθμός κορεσμού ενός στοιχείου ορίζεται ως ο λόγος του όγκου του στοιχείου που καλύπτεται από τα υπόγεια νερά προς το συνολικό όγκο του στοιχείου και υπολογίζεται σαν γραμμική συνάρτηση της πίεσης στους κόμβους του στοιχείου (βλ. π.χ. DHI–WASY GmbH, 2010). Οι όροι της εξίσωσης πεπερασμένων στοιχείων που προκύπτει από την εξίσωση υπόγειας ροής πολλαπλασιάζονται με τον βαθμό κορεσμού ώστε να ληφθεί υπ’ όψη ο κορεσμένος

όγκος των στοιχείων στη διαδικασία επίλυσης. Ο βαθμός κορεσμού των στοιχείων μπορεί να θεωρηθεί σαν μια ισοδύναμη σχετική υδραυλική αγωγιμότητα, οπότε προκύπτει η αναλογία της μεθόδου των Nanou–Giannarou and Helmig (1998) και DHI–WASY GmbH (2010) με τη μέθοδο των Desai and Li (1983).

Μία παρεμφερής μέθοδος με τις παραπάνω εφαρμόζεται στο υπό–μοντέλο υπόγειων νερών του IRENE–HYD για τον προσδιορισμό της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας. Στο IRENE–HYD, όπως συμβαίνει και στα αριθμητικά μοντέλα των Huyakorn et al. (1994) Wu et al. (1994) και HydroGeologic (1998), γίνεται η παραδοχή ότι στο πορώδες μέσο νερό και αέρας διαχωρίζονται πλήρως (gravity segregated vertical equilibrium assumption). Αυτό σημαίνει ότι στην περιοχή του υπολογιστικού πεδίου που βρίσκεται πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια, ο βαθμός κορεσμού,  $S_w$ , του πορώδους μέσου θεωρείται μηδενικός. Άρα η χαρακτηριστική καμπύλη εδαφικής υγρασίας,  $S_w(p)$ , περιγράφεται από την ακόλουθη απλή βηματική συνάρτηση:

$$\begin{aligned} S_w(p) &= S_{wr} = 0 \text{ αν } p < 0 \\ S_w(p) &= 1 \text{ αν } p \geq 0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

όπου  $S_{wr} = \theta_r / \theta_s$  είναι ο υπολειμματικός βαθμός κορεσμού του πορώδους μέσου,  $\theta_r$  [ $L^3/L^3$ ] είναι η υπολειμματική υγρασία και  $\theta_s$  [ $L^3/L^3$ ] είναι η υγρασία κορεσμού. Ο βαθμός κορεσμού,  $\bar{S}_w$ , ενός υπολογιστικού κελιού υπολογίζεται εύκολα ολοκληρώνοντας τη βηματική συνάρτηση (3.98) κατά  $z$  στο πάχος του υπολογιστικού κελιού:

$$\bar{S}_{w_{i,j,k}} = \frac{1}{\Delta z_{i,j,k}} \int_{\Delta z_{i,j,k}} S_w(p) dz = \begin{cases} 0 & \text{για ξηρά υπολογιστικά κελιά} \\ \frac{Hsat_{i,j,k}}{\Delta z_{i,j,k}} & \text{για μερικώς κορεσμένα κελιά} \\ 1 & \text{για κορεσμένα υπολογιστικά κελιά} \end{cases} \quad (3.99)$$

Για τα κελιά που δεν είναι πλήρως κορεσμένα θεωρούνται μικρότερες τιμές υδραυλικής αγωγιμότητας. Αυτό επιτυγχάνεται μεταβάλλοντας τη σχετική υδραυλική αγωγιμότητα,  $K_r$ , ενός υπολογιστικού κελιού ανάλογα με το βαθμό κορεσμού:

$K_{r_{i,j,k}} = \bar{S}_{w_{i,j,k}}$  (Huyakorn et al., 1994, Wu et al., 1994). Έτσι, στην εξίσωση της υπόγειας ροής (3.37) οι συνιστώσες της υδραυλικής αγωγιμότητας  $K_x$ ,  $K_y$  και  $K_z$

αντικαθίστανται από τις υδραυλικές αγωγιμότητες  $K_r K_x$ ,  $K_r K_y$  και  $K_r K_z$ , αντίστοιχα. Παρομοίως, ο όρος αποθήκευσης,  $S_s \partial h / \partial t$ , πολλαπλασιάζεται με το βαθμό κορεσμού των υπολογιστικών κελιών.

Η εξίσωση (3.37) ολοκληρώνεται τώρα σε ολόκληρο τον όγκο των υπολογιστικών κελιών και όχι μόνο στον κορεσμένο όγκο που καταλαμβάνουν τα υπόγεια νερά. Η εξίσωση πεπερασμένων διαφορών που προκύπτει έχει τη μορφή της εξίσωσης (3.95) ή της εξίσωσης (3.97) όταν γράφεται για όλους τους διαφορικούς όγκους του υπολογιστικού πλέγματος διακριτοποίησης του υπόγειου υδροφορέα, με διαφοροποιημένους όμως τους συντελεστές των άγνωστων πιεζομετρικών φορτίων, οι οποίοι διατυπώνονται ως εξής:

$$CC_{i\pm 1/2,j,k} = -\frac{(K_r K_x A)_{i\pm 1/2,j,k}}{0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i\pm 1})} = -\frac{K_{x_{i\pm 1/2,j,k}} (K_r \Delta z)_{i\pm 1/2,j,k} \Delta y_j}{0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i\pm 1})} \quad (3.100\alpha)$$

$$\text{όπου } (K_r \Delta z)_{i\pm 1/2,j,k} = \begin{cases} K_{r_{i,j,k}} \Delta z_{i,j,k} & \text{αν } h_{i,j,k} > h_{i\pm 1,j,k} \\ K_{r_{i\pm 1,j,k}} \Delta z_{i\pm 1,j,k} & \text{αν } h_{i\pm 1,j,k} > h_{i,j,k} \end{cases} \quad \text{και}$$

$$K_{x_{i\pm 1/2,j,k}} = \frac{\Delta x_j + \Delta x_{j\pm 1}}{\frac{\Delta x_j}{K_{x_{i,j,k}}} + \frac{\Delta x_{j\pm 1}}{K_{x_{i\pm 1,j,k}}}}$$

$$CC_{i,j\pm 1/2,k} = -\frac{(K_r K_y A)_{i,j\pm 1/2,k}}{0.5(\Delta y_j + \Delta y_{j\pm 1})} = -\frac{K_{y_{i,j\pm 1/2,k}} (K_r \Delta z)_{i,j\pm 1/2,k} \Delta x_i}{0.5(\Delta y_j + \Delta y_{j\pm 1})} \quad (3.100\beta)$$

$$\text{όπου } (K_r \Delta z)_{i,j\pm 1/2,k} = \begin{cases} K_{r_{i,j,k}} \Delta z_{i,j,k} & \text{αν } h_{i,j,k} > h_{i,j\pm 1,k} \\ K_{r_{i,j\pm 1,k}} \Delta z_{i,j\pm 1,k} & \text{αν } h_{i,j\pm 1,k} > h_{i,j,k} \end{cases} \quad \text{και}$$

$$K_{y_{i,j\pm 1/2,k}} = \frac{\Delta y_j + \Delta y_{j\pm 1}}{\frac{\Delta y_j}{K_{y_{i,j,k}}} + \frac{\Delta y_{j\pm 1}}{K_{y_{i,j\pm 1,k}}}}$$

$$CC_{i,j,k\pm 1/2} = -\frac{(K_r K_z)_{i,j,k\pm 1/2} \Delta x_i \Delta y_j}{0.5(\Delta z_{i,j,k} + \Delta z_{i,j,k\pm 1})} \quad (3.100\gamma)$$



$$\text{όπου } (K_r K_z)_{i,j,k \pm 1/2} = \frac{\Delta z_{i,j,k} + \Delta z_{i,j,k \pm 1}}{\frac{\Delta z_{i,j,k}}{K_{r,i,j,k} K_{z,i,j,k}} + \frac{\Delta z_{i,j,k \pm 1}}{K_{r,i,j,k \pm 1} K_{z,i,j,k \pm 1}}}$$

$$CC_{i,j,k} = -CC_{i,j,k-1/2} - CC_{i,j-1/2,k} - CC_{i-1/2,j,k} - CC_{i+1/2,j,k} - CC_{i,j+1/2,k} - CC_{i,j,k+1/2} + SV_{i,j,k} \quad (3.100\delta)$$

$$E_{i,j,k} = Q_{g_{i,j,k}} + SV_{i,j,k} h_{i,j,k}^n \quad (3.100\epsilon)$$

$$\text{όπου } SV_{i,j,k} = \frac{\bar{S}_{w_{i,j,k}} S_{s_{i,j,k}} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k}}{\Delta t}$$

Στις παραπάνω σχέσεις, η υδραυλική αγωγιμότητα στα κοινά μέτωπα μεταξύ δύο γειτονικών διαφορικών όγκων υπολογίζεται ως ο σταθμικός αρμονικός μέσος όρος των υδραυλικών αγωγιμοτήτων των δύο διαφορικών όγκων. Οι εκφράσεις  $(K_r \Delta z)_{i \pm 1/2, j, k}$  και  $(K_r \Delta z)_{i, j \pm 1/2, k}$  αντιπροσωπεύουν το κορεσμένο πάχος των μετώπων  $(i \pm 1/2, j, k)$  και  $(i, j \pm 1/2, k)$ , το οποίο υπολογίζεται μέσω ανάντη στάθμισης του κορεσμένου πάχους των διαφορικών όγκων που μοιράζονται το κάθε μέτωπο. Για παράδειγμα, αν  $h_{i,j,k} > h_{i+1,j,k}$ , τότε  $(K_r \Delta z)_{i+1/2, j, k} = K_{r,i,j,k} \Delta z_{i,j,k}$ , όπου το γινόμενο  $K_{r,i,j,k} \Delta z_{i,j,k}$  ισούται με το κορεσμένο πάχος του διαφορικού όγκου  $(i, j, k)$ . Η ανάντη στάθμιση χρησιμοποιείται σε αρκετά μοντέλα πεπερασμένων διαφορών (π.χ. Forsyth et al., 1995, HydroGeologic, 1998, Painter et al., 2008, Keating and Zyvoloski, 2009) για τον υπολογισμό του κορεσμένου πάχους στα μέτωπα των υπολογιστικών κελιών, καθώς με αυτόν τον τρόπο κελιά που σε ένα δεδομένο χρονικό βήμα είναι ξηρά, μπορούν εύκολα να μετατραπούν σε μερικώς ή πλήρως κορεσμένα κελιά σε κάποιο επόμενο χρονικό βήμα.

Η παραδοχή που γίνεται στο IRENE-HYD ότι νερό και αέρας διαχωρίζονται πλήρως στο πορώδες μέσο, υποθέτει τη “στιγμιαία” μεταφορά του εδαφικού νερού προς την ελεύθερη επιφάνεια του υδροφορέα. Για αυτόν τον λόγο η σχετική υδραυλική αγωγιμότητα στην κατακόρυφη διεύθυνση θεωρείται ίση με τη μονάδα, ώστε η ροή στην κατακόρυφη διεύθυνση να πραγματοποιείται υπό συνθήκες κορεσμού (η παραδοχή αυτή είναι ορθότερη από φυσικής άποψης σε σύγκριση με τη “στιγμιαία” μεταφορά) (Huyakorn et al., 1994). Συνεπώς στη σχέση (3.100γ)

υπολογισμού των συντελεστών  $CC_{i,j,k\pm 1/2}$ , ισχύει  $K_r = 1$ . Τέλος, είναι προφανές ότι η σχέση (3.100ε) υπολογισμού του όρου  $E_{i,j,k}$  είναι ισοδύναμη με τη σχέση (3.96ε).

Οι εξισώσεις (3.100α)–(3.100ε) χρησιμοποιούνται για φρεάτιους υδροφορείς. Για περιορισμένους υδροφορείς χρησιμοποιούνται οι σχέσεις (3.96α)–(3.96ε) –με την διοχετευτικότητα στα μέτωπα των διαφορικών όγκων να υπολογίζεται ως ο αρμονικός μέσος όρος– και το γραμμικό σύστημα εξισώσεων (3.97) επιλύεται χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο συζυγών κλίσεων (Hestenes and Stiefel, 1952) με προρύθμιση μη πλήρους διάσπασης κατά Cholesky (Modified Incomplete Cholesky preconditioning) (Gustafsson, 1978, Axelsson and Lindskog, 1986).

Για προβλήματα ροής σε φρεάτιους υδροφορείς το σύστημα εξισώσεων (3.97) είναι μη γραμμικό και επιλύεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο επαναλήψεων Picard (Remson et al., 1971), σύμφωνα με την οποία διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathbf{CC}^{n+1,\ell} \mathbf{h}^{n+1,\ell+1} = \mathbf{E}^{n+1,\ell} \quad (3.101)$$

όπου  $\ell$  και  $\ell + 1$  συμβολίζουν διαδοχικές επαναλήψεις Picard κατά το χρονικό βήμα  $n+1$ . Οι τιμές των στοιχείων του μητρώου συντελεστών  $\mathbf{CC}$  και του διανύσματος  $\mathbf{E}$  ανανεώνονται μεταξύ των διαδοχικών επαναλήψεων Picard με βάση τις τιμές των πιεζομετρικών φορτίων που υπολογίστηκαν κατά την τελευταία επανάληψη. Σε κάθε επανάληψη Picard το γραμμικό σύστημα εξισώσεων (3.101) επιλύεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Bi-CGSTAB (Bi-Conjugate Gradient Stabilised method) (van den Vorst, 1992) με προρύθμιση μη πλήρους διάσπασης κατά Stone (Stone Incomplete decomposition) (Stone, 1968). Η μέθοδος Bi-CGSTAB ενδείκνυται για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων (3.101) λόγω της γρήγορης και ομαλής σύγκλισης που παρουσιάζει κατά την επίλυση μεγάλων, αραιών γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων (van der Vorst, 1992). Αφού υπολογισθούν οι τιμές των πιεζομετρικών φορτίων και προτού ο αλγόριθμος επίλυσης προχωρήσει στην επόμενη επανάληψη Picard, προσδιορίζεται το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας στο υπολογιστικό πεδίο των υπόγειων νερών και ανανεώνονται οι πίνακες  $\mathbf{CC}$  και  $\mathbf{E}$ . Οι επαναλήψεις συνεχίζονται ώσπου να επιτευχθεί ικανοποιητική σύγκλιση για τις τιμές των πιεζομετρικών φορτίων, οπότε ο αλγόριθμος προχωράει στο επόμενο χρονικό βήμα.

Σε κάθε χρονικό βήμα, υπολογίζονται πιεζομετρικά φορτία για όλους τους κόμβους του υπολογιστικού πεδίου των υπόγειων υδάτων. Τα ξηρά υπολογιστικά κελιά δεν θεωρούνται ανενεργά και δεν απομονώνονται από το υπολογιστικό πεδίο, καθώς ο τρόπος με τον οποίον υπολογίζονται οι συντελεστές  $CC_{i\pm 1/2,j,k}$ ,  $CC_{i,j\pm 1/2,k}$  και  $CC_{i,j,k\pm 1/2}$  στα μέτωπα των υπολογιστικών κελιών μέσω των εξισώσεων (3.100α)–(3.100γ), επιτρέπει τον προσδιορισμό πιεζομετρικών φορτίων για τα ξηρά κελιά. Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας στο υπολογιστικό πεδίο προσδιορίζεται σε κάθε χρονικό βήμα μέσω γραμμικής παρεμβολής στο πεδίο πιέσεων που υπολογίζεται από τις τιμές των πιεζομετρικών φορτίων, ώστε να εκτιμηθεί το υψόμετρο όπου ικανοποιείται η οριακή συνθήκη (3.38), δηλαδή  $p = 0$  (Kirp, 1997, Nanou–Giannarou and Helmig, 1998). Η γραμμική παρεμβολή πραγματοποιείται μεταξύ δύο γειτονικών κόμβων στην κατακόρυφη διεύθυνση, ο ένας από τους οποίους έχει θετικό ύψος πίεσης, δηλαδή βρίσκεται κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια και ο άλλος έχει αρνητικό ύψος πίεσης, δηλαδή βρίσκεται πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια. Αν το ύψος πίεσης για κάποιον κόμβο υπολογισθεί ίσο με το μηδέν, τότε ο κόμβος αυτός βρίσκεται πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια.

Ένα ξηρό υπολογιστικό κελί μπορεί να δεχτεί πλευρικές εισροές από μερικώς ή πλήρως κορεσμένα γειτονικά κελιά, λόγω της ανάντη στάθμισης που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του κορεσμένου πάχους στα πλευρικά μέτωπα των διαφορικών όγκων κατά τον υπολογισμό των συντελεστών  $CC_{i\pm 1/2,j,k}$  και  $CC_{i,j\pm 1/2,k}$ . Το πιεζομετρικό φορτίο που υπολογίζεται για ένα ξηρό κελί μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το πιεζομετρικό φορτίο ενός γειτονικού μερικώς κορεσμένου ή πλήρως κορεσμένου κελιού. Ωστόσο σύμφωνα με τις σχέσεις (3.100α) και (3.100β), δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν πλευρικές εκροές από ένα ξηρό υπολογιστικό κελί, κάτι το οποίο άλλωστε δεν έχει φυσική βάση. Εκροή από ένα ξηρό κελί μπορεί να υπάρξει στην κατακόρυφη διεύθυνση, προς το υποκείμενο υπολογιστικό κελί, υπό συνθήκες κορεσμού, εφόσον θεωρείται ότι στην κατακόρυφη διεύθυνση  $K_r = 1$  (Huyakorn et al., 1994, HydroGeologic, 1998).

Αν ένα ξηρό κελί παραμένει ξηρό κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος, ο όρος αποθήκευσης είναι μηδενικός ( $S_s = 0$  και  $\bar{S}_w = 0$ ), οπότε η εισροή από γειτονικά στις οριζόντιες διευθύνσεις κελιά, από υπερκείμενα κελιά και από εξωτερικές πηγές (π.χ. βροχόπτωση) είναι ίση με την εκροή προς το υποκείμενο υπολογιστικό κελί. Για παράδειγμα, αν ένα ξηρό υπολογιστικό κελί δέχεται εισροή

από μία εξωτερική πηγή και το υποκείμενο κελί είναι μερικώς κορεσμένο, το πιεζομετρικό φορτίο του ξηρού κελιού μπορεί να εκτιμηθεί εξισώνοντας την εξωτερική εισροή με την εκροή προς το υποκείμενο κελί. Η τιμή του πιεζομετρικού φορτίου που υπολογίζεται για το ξηρό κελί θα είναι μεγαλύτερη από την τιμή του πιεζομετρικού φορτίου στο μερικώς κορεσμένο κελί, τέτοια ώστε η εκροή στην κατακόρυφη διεύθυνση να είναι ίση με την εισροή στο ξηρό κελί. Αν βέβαια η συνολική εισροή προς ένα ξηρό υπολογιστικό κελί είναι μηδενική, θα είναι μηδενική και η εκροή στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε το πιεζομετρικό φορτίο του ξηρού κελιού θα είναι ίσο με το πιεζομετρικό φορτίο του υποκείμενου κελιού.

Στο IRENE-HYD, χρησιμοποιούνται διαφορετικές τιμές ειδικής αποθηκευτικότητας για τα μερικώς κορεσμένα και τα πλήρως κορεσμένα υπολογιστικά κελιά. Ένα πλήρως κορεσμένο κελί θεωρείται ότι συμπεριφέρεται σαν περιορισμένος υδροφορέας, οπότε η ειδική του αποθηκευτικότητα θεωρείται ίση με την ειδική αποθηκευτικότητα περιορισμένου υδροφορέα. Αντίστοιχα, η ειδική αποθηκευτικότητα μερικώς κορεσμένων υπολογιστικών κελιών θεωρείται ίση με την ειδική αποθηκευτικότητα φρεάτιου υδροφορέα. Στην περίπτωση φρεάτιων υδροφορέων, ο εδαφικός σκελετός και το υπόγειο νερό μπορούν να θεωρηθούν πρακτικά ασυμπύεστα, οπότε η ελαστική αποθηκευτικότητα μπορεί να αμεληθεί (Bear, 1979). Συνεπώς η ειδική αποθηκευτικότητα ενός μερικώς κορεσμένου κελιού μπορεί να θεωρηθεί ίση με το μηδέν. Ωστόσο στο υπό-μοντέλο υπόγειων νερών του IRENE-HYD μπορούν να χρησιμοποιηθούν οποιεσδήποτε τιμές για την ειδική αποθηκευτικότητα μερικώς και πλήρως κορεσμένων υπολογιστικών κελιών. Οι τιμές αυτές είναι συνήθως το αποτέλεσμα βαθμονόμησης.

Παρόλο που η ροή σε πορώδες μέσο είναι τρισδιάστατη, για κάποιες πρακτικές εφαρμογές μπορεί να θεωρηθεί οριζόντια, οπότε χρησιμοποιείται ένα στρώμα για την κατακόρυφη διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου των υπόγειων νερών. Για περιπτώσεις φρεάτιων υδροφορέων, αν θεωρηθεί ότι ισχύει η παραδοχή Dupuit οριζόντιας ροής, τα πιεζομετρικά φορτία,  $h(x,y,t)$ , που υπολογίζονται από το μοντέλο συμπίπτουν με το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών. Επιπλέον, χρησιμοποιείται η ειδική απόδοση του φρεάτιου υδροφορέα στη θέση της ειδικής αποθηκευτικότητας στον όρο αποθήκευσης, οπότε:

$$SV_{i,j} = \frac{S_{y_{i,j}} \Delta x_i \Delta y_j}{\Delta t} \quad (3.102)$$

Η μέθοδος που εφαρμόζεται στο IRENE-HYD για τον προσδιορισμό της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας αποτελεί ουσιαστικά έναν συνδυασμό των μεθόδων που εφαρμόζονται στα αριθμητικά μοντέλα των Huyakorn et al. (1994), Kipp (1997), HydroGeologic (1998) και Nanou-Giannarou and Helmig (1998). Είναι η πρώτη φορά που παρόμοια μέθοδος εφαρμόζεται σε μη εμπορικό κώδικα πεπερασμένων διαφορών. Βασίζεται στην παραδοχή ότι στο πορώδες μέσο νερό και αέρας διαχωρίζονται πλήρως και στην αντίστοιχη μεταβολή της σχετικής υδραυλικής αγωγιμότητας ανάλογα με το βαθμό κορεσμού των διαφορικών όγκων. Το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι τα ξηρά υπολογιστικά κελιά δεν απομονώνονται από το υπολογιστικό πεδίο. Η οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet (3.38) ικανοποιείται άμεσα, όμως δεν συμβαίνει το ίδιο με την κινηματική οριακή συνθήκη (3.39). Ωστόσο η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας μεταβάλλεται σε σχέση με την καθαρή αποθήκευση ή απώλεια νερού στη ζώνη του πορώδους μέσου κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια, οπότε εξασφαλίζεται η διατήρηση της μάζας.

Σε κάθε χρονικό βήμα, αφού επιλυθεί η εξίσωση (3.97) ή (3.101) και υπολογισθούν τα πιεζομετρικά φορτία και το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας, οι συνιστώσες της ταχύτητας Darcy υπολογίζονται από τις εξισώσεις (3.29)–(3.31), οι οποίες σε μορφή πεπερασμένων διαφορών γράφονται ως:

$$q_{x_{i+1/2,j,k}}^{n+1} = -K_{x_{i+1/2,j,k}} \frac{h_{i+1,j,k}^{n+1} - h_{i,j,k}^{n+1}}{0.5(\Delta x_j + \Delta x_{j+1})} \quad (3.103)$$

$$q_{y_{i,j+1/2,k}}^{n+1} = -K_{y_{i,j+1/2,k}} \frac{h_{i,j+1,k}^{n+1} - h_{i,j,k}^{n+1}}{0.5(\Delta y_j + \Delta y_{j+1})} \quad (3.104)$$

$$q_{z_{i,j,k+1/2}}^{n+1} = -K_{z_{i,j,k+1/2}} \frac{h_{i,j,k}^{n+1} - h_{i,j,k+1}^{n+1}}{0.5(\Delta z_{i,j,k} + \Delta z_{i,j,k+1})} \quad (3.105)$$

### 3.3.5 Συνδυασμός των υπό-μοντέλων ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων

Ο συνδυασμός των υπό-μοντέλων ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων του IRENE-HYD πραγματοποιείται στην κοινή διεπιφάνεια των επιφανειακών-υπόγειων νερών μέσω του νόμου του Darcy. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του σχήματος 3.5, η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας,  $u_{i+1/2,j,k}^{*n+1}$ , για

παράδειγμα, στην κοινή διεπιφάνεια των επιφανειακών–υπόγειων νερών, υπολογίζεται σύμφωνα με την εξίσωση (3.106). Για τη διατύπωση της εξίσωσης (3.106) θεωρείται ότι το νερό κινείται διαμέσου του πορώδους μέσου και του πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος.

$$u_{i+1/2,j,k}^{*n+1} = -K_{x_{i+1/2,j,k}}^* \frac{h_{i+1,j,k}^{n+1} - h_{i,j,k}^{n+1}}{b + 0.5\Delta x_{i+1}} = -K_{x_{i+1/2,j,k}}^* \frac{h_{i+1,j,k}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1}}{b + 0.5\Delta x_{i+1}} \quad (3.106)$$

$$\text{όπου } K_{x_{i+1/2,j,k}}^* = \frac{b + 0.5\Delta x_{i+1}}{\frac{b}{K_b} + \frac{0.5\Delta x_{i+1}}{K_{x_{i+1,j,k}}}}$$

Ο δείκτης \* χρησιμοποιείται για το συμβολισμό των μεταβλητών στα κοινά μέτωπα μεταξύ διαφορικών όγκων επιφανειακών και υπόγειων υδάτων. Στο επιφανειακό υδάτινο σώμα η κατανομή της πίεσης θεωρείται υδροστατική, οπότε για τα πιεζομετρικά φορτία στα υπολογιστικά κελιά του επιφανειακού υδάτινου σώματος ισχύει  $h_{i,j,k} = \zeta_{i,j}$ . Έτσι, στην εξίσωση (3.106),  $h_{i+1,j,k}^{n+1} = \zeta_{i,j}^{n+1}$ . Η υδραυλική αγωγιμότητα στο μέτωπο  $(i + 1/2, j, k)$  υπολογίζεται ως ο σταθμικός αρμονικός μέσος όρος των υδραυλικών αγωγιμοτήτων του πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος και του κελιού των υπόγειων υδάτων  $(i + 1, j, k)$ . Οι συνιστώσες της ταχύτητας στις διευθύνσεις  $y$  και  $z$ , στη διεπιφάνεια των επιφανειακών–υπόγειων νερών, υπολογίζονται μέσω εξισώσεων ανάλογων με την εξίσωση (3.106):

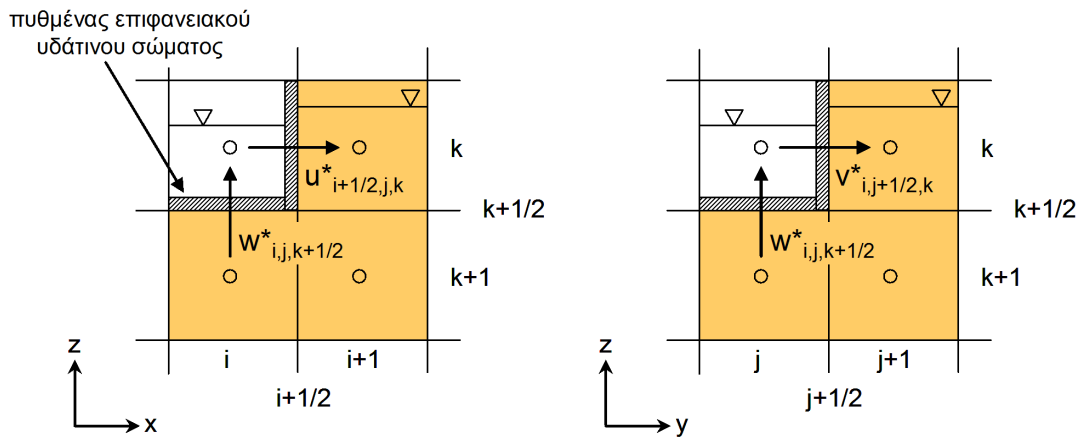
$$v_{i,j+1/2,k}^{*n+1} = -K_{y_{i,j+1/2,k}}^* \frac{h_{i,j+1,k}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1}}{b + 0.5\Delta y_{j+1}} \quad (3.107)$$

$$w_{i,j,k+1/2}^{*n+1} = -K_{z_{i,j,k+1/2}}^* \frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - h_{i,j,k+1}^{n+1}}{b + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}} \quad (3.108)$$

Για τη διατύπωση της σχέσης (3.108) υπολογισμού της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας στην διεπιφάνεια των επιφανειακών–υπόγειων υδάτων, θεωρείται ότι το υπολογιστικό κελί  $(i, j, k + 1)$  των υπόγειων υδάτων παραμένει πλήρως κορεσμένο κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Αν το κελί  $(i, j, k + 1)$  των υπόγειων υδάτων είναι μερικώς κορεσμένο ή ξηρό, τότε η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας στο μέτωπο  $(i, j, k + 1/2)$  υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση (McDonald and Harbaugh, 1988):

$$w_{i,j,k+1/2}^{*n+1} = -K_b \frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - z_{top_{i,j,k+1}}}{b} \quad (3.109)$$

Η εξίσωση (3.109) βασίζεται στην υπόθεση ότι ο πυθμένας του επιφανειακού υδάτινου σώματος παραμένει πλήρως κορεσμένος κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης, οπότε το πιεζομετρικό φορτίο στη βάση του πυθμένα είναι ίσο με το υψόμετρο της βάσης του πυθμένα, δηλαδή ίσο με το υψόμετρο του επάνω μετώπου του κελιού  $(i, j, k + 1)$ . Σύμφωνα με τη σχέση (3.109), η τιμή της ταχύτητας  $w_{i,j,k+1/2}^{*n+1}$  στην κοινή διεπιφάνεια των επιφανειακών-υπόγειων νερών δεν εξαρτάται από την τιμή του πιεζομετρικού φορτίου στο κελί υπόγειων υδάτων  $(i, j, k + 1)$ .



**Σχήμα 3.5:** Συμβολισμός των μεταβλητών στη διεπιφάνεια μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών

Οι συνιστώσες της ταχύτητας στη διεπιφάνεια μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, όπως υπολογίζονται μέσω του νόμου του Darcy, εισάγονται στις διακριτοποιημένες εξισώσεις της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων (3.48) και συνέχειας των υπόγειων υδάτων (3.95), οι οποίες τροποποιούνται στις εξισώσεις (3.110) και (3.111), αντίστοιχα. Στην εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων, ο όρος  $Q_s$ , που εκφράζει την εισροή/εκροή νερού μέσω του πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος, τίθεται ίσος με την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας στη διεπιφάνεια επιφανειακών-υπόγειων υδάτων. Η μέθοδος επαναλήψεων Picard εφαρμόζεται για την επίλυση και των δύο εξισώσεων (3.110) και (3.111).

$$D_{i,j-1/2}^{n+1,\ell} \zeta_{i,j-1}^{n+1,\ell+1} + D_{i-1/2,j}^{n+1,\ell} \zeta_{i-1,j}^{n+1,\ell+1} + D'_{i,j}{}^{n+1,\ell} \zeta_{i,j}^{n+1,\ell+1} + D_{i+1/2,j}^{n+1,\ell} \zeta_{i+1,j}^{n+1,\ell+1} + D_{i,j+1/2}^{n+1,\ell} \zeta_{i,j+1}^{n+1,\ell+1} = G'_{i,j}{}^{n+1,\ell} \quad (3.110)$$

$$CC_{i,j,k-1/2}^{n+1,\ell} h_{i,j,k-1}^{n+1,\ell+1} + CC_{i,j-1/2,k}^{n+1,\ell} h_{i,j-1,k}^{n+1,\ell+1} + CC_{i-1/2,j,k}^{n+1,\ell} h_{i-1,j,k}^{n+1,\ell+1} + CC'_{i,j,k}{}^{n+1,\ell} h_{i,j,k}^{n+1,\ell+1} + CC_{i+1/2,j,k}^{n+1,\ell} h_{i+1,j,k}^{n+1,\ell+1} + CC_{i,j+1/2,k}^{n+1,\ell} h_{i,j+1,k}^{n+1,\ell+1} + CC_{i,j,k+1/2}^{n+1,\ell} h_{i,j,k+1}^{n+1,\ell+1} = E'_{i,j,k}{}^{n+1,\ell} \quad (3.111)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, οι συντελεστές  $D'_{i,j}{}^{n+1,\ell}$  και  $CC'_{i,j,k}{}^{n+1,\ell}$  και οι όροι  $G'_{i,j}{}^{n+1,\ell}$  και  $E'_{i,j,k}{}^{n+1,\ell}$  ορίζονται ως εξής:

$$D'_{i,j}{}^{n+1,\ell} = D_{i,j}^{n+1,\ell} + \frac{\Delta t}{\Delta x_i \Delta y_j} \left( \sum_{k=m}^M CC_{i,j-1/2,k}^*{}^{n+1,\ell} + \sum_{k=m}^M CC_{i-1/2,j,k}^*{}^{n+1,\ell} + \sum_{k=m}^M CC_{i+1/2,j,k}^*{}^{n+1,\ell} + \sum_{k=m}^M CC_{i,j,m+1/2}^*{}^{n+1,\ell} \right) \quad (3.112\alpha)$$

$$G'_{i,j}{}^{n+1,\ell} = G_{i,j}^{n+1,\ell} + \frac{\Delta t}{\Delta x_i \Delta y_j} \left( \sum_{k=m}^M CC_{i,j-1/2,k}^*{}^{n+1,\ell} h_{i,j-1,k}^{n+1,\ell} + \sum_{k=m}^M CC_{i-1/2,j,k}^*{}^{n+1,\ell} h_{i-1,j,k}^{n+1,\ell} + \sum_{k=m}^M CC_{i+1/2,j,k}^*{}^{n+1,\ell} h_{i+1,j,k}^{n+1,\ell} + \sum_{k=m}^M CC_{i,j,m+1/2}^*{}^{n+1,\ell} h_{i,j,m+1}^{n+1,\ell} \right) \quad (3.112\beta)$$

$$CC'_{i,j,k}{}^{n+1,\ell} = CC_{i,j,k}^{n+1,\ell} + CC_{i,j,k-1/2}^*{}^{n+1,\ell} + CC_{i,j-1/2,k}^*{}^{n+1,\ell} + CC_{i-1/2,j,k}^*{}^{n+1,\ell} + CC_{i+1/2,j,k}^*{}^{n+1,\ell} + CC_{i,j+1/2,k}^*{}^{n+1,\ell} \quad (3.112\gamma)$$

$$E'_{i,j,k}{}^{n+1,\ell} = E_{i,j,k}^{n+1,\ell} + CC_{i,j,k-1/2}^*{}^{n+1,\ell} \zeta_{i,j}^{n+1,\ell} + CC_{i,j-1/2,k}^*{}^{n+1,\ell} \zeta_{i,j-1}^{n+1,\ell} + CC_{i-1/2,j,k}^*{}^{n+1,\ell} \zeta_{i-1,j}^{n+1,\ell} + CC_{i+1/2,j,k}^*{}^{n+1,\ell} \zeta_{i+1,j}^{n+1,\ell} + CC_{i,j+1/2,k}^*{}^{n+1,\ell} \zeta_{i,j+1}^{n+1,\ell} \quad (3.112\delta)$$

Στις εξισώσεις (3.112α)–(3.112δ), οι συντελεστές  $CC_{i\pm 1/2,j,k}^*{}^{n+1,\ell}$ ,  $CC_{i,j\pm 1/2,k}^*{}^{n+1,\ell}$  και  $CC_{i,j,k\pm 1/2}^*{}^{n+1,\ell}$  στα κοινά μέτωπα μεταξύ διαφορικών όγκων επιφανειακών και υπόγειων νερών υπολογίζονται σύμφωνα με σχέσεις αντίστοιχες με τις σχέσεις (3.96α)–(3.96γ), όπου η διοχετευτικότητα στα κοινά μέτωπα μεταξύ υπολογιστικών κελιών επιφανειακών και υπόγειων νερών υπολογίζεται ως ο σταθμικός αρμονικός μέσος όρος των διοχετευτικότητων του πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος και του κελιού των υπόγειων υδάτων. Ενδεικτικά, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του σχήματος 3.5, για το μέτωπο  $(i + 1/2, j, k)$  ισχύει:



$$CC^*_{i+1/2,j,k} = \frac{\Delta y_j}{\frac{b}{K_b \Delta H_{i,j,k}} + \frac{0.5 \Delta x_{i+1}}{K_{x_{i+1,j,k}} K_{r_{i+1,j,k}} \Delta z_{i+1,j,k}}} \quad (3.113)$$

όπου  $\Delta H_{i,j,k}$  [L] είναι το ύψος νερού στο κελί  $(i, j, k)$  των επιφανειακών υδάτων. Το ύψος νερού στα υπολογιστικά κελιά του επιφανειακού υδάτινου σώματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta H_{i,j,k} = \Delta z_{i,j,k}, \quad \text{αν } \zeta_{i,j} \geq z_{top_{i,j,k}}$$

$$\Delta H_{i,j,k} = \zeta_{i,j} - z_{bot_{i,j,k}}, \quad \text{αν } z_{bot_{i,j,k}} < \zeta_{i,j} < z_{top_{i,j,k}}$$

$$\Delta H_{i,j,k} = 0, \quad \text{αν } \zeta_{i,j} \leq z_{bot_{i,j,k}}$$

Στο IRENE-HYD υπάρχει η δυνατότητα εκτίμησης της επιφάνειας διήθησης στο κατάντη όριο του υπολογιστικού πεδίου των υπόγειων υδάτων. Η οριακή συνθήκη  $p=0$  ή  $h=z$ , που ισχύει πάνω στην επιφάνεια διήθησης, εφαρμόζεται σε όλους τους κόμβους των υπολογιστικών κελιών του επιφανειακού υδάτινου σώματος, στην κοινή διεπιφάνεια επιφανειακών-υπόγειων νερών, που βρίσκονται πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια των επιφανειακών υδάτων και κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια των υπόγειων υδάτων. Οι συνιστώσες της ταχύτητας στα κοινά μέτωπα αυτών των υπολογιστικών κελιών των επιφανειακών υδάτων με τα κελιά των υπόγειων υδάτων υπολογίζονται μέσω των εξισώσεων (3.106) και (3.107) και συμπεριλαμβάνονται στη διακριτοποιημένη εξίσωση συνέχειας των υπόγειων υδάτων (3.111) αλλά όχι στην εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων (3.110), καθώς δεν συνεισφέρουν μάζα στο επιφανειακό υδάτινο σώμα.

Γράφοντας τις εξισώσεις (3.110) και (3.111) για όλους τους διαφορικούς όγκους του υπολογιστικού πεδίου των επιφανειακών και των υπόγειων νερών, αντίστοιχα, προκύπτουν τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων, διατυπωμένα σε μητρική μορφή:

$$\mathbf{D}'^{n+1,\ell} \boldsymbol{\zeta}^{n+1,\ell+1} = \mathbf{G}'^{n+1,\ell} \quad (3.114)$$

$$\mathbf{CC}'^{n+1,\ell} \mathbf{h}^{n+1,\ell+1} = \mathbf{E}'^{n+1,\ell} \quad (3.115)$$

Οι εξισώσεις (3.114) και (3.115) δημιουργούν ένα σύστημα εξισώσεων, οι οποίες πρέπει να επιλυθούν ταυτόχρονα σε κάθε χρονικό βήμα για τον υπολογισμό του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων και των

πιεζομετρικών φορτίων στο υπολογιστικό πεδίο των υπόγειων υδάτων. Αυτό το σύστημα εξισώσεων μπορεί να διατυπωθεί υπό τη μορφή μίας μόνο μητρικής εξίσωσης, ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{CC}' \end{bmatrix}^{n+1,\ell} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}^{n+1,\ell+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' \\ \mathbf{E}' \end{bmatrix}^{n+1,\ell+1} \quad (3.116)$$

Σε κάθε επανάληψη Picard, τα συστήματα εξισώσεων (3.114) και (3.115) που αποτελούν την εξίσωση (3.116) επιλύονται με τις μεθόδους συζυγών κλίσεων και Bi-GSTAB, όπως παρουσιάζεται αναλυτικά στις παραγράφους 3.3.3 και 3.3.4. Συνήθως δύο ή τρεις επαναλήψεις Picard επαρκούν για τη σύγκλιση της λύσης της εξίσωσης (3.116) κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι το ημι-πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιείται στο υπό-μοντέλο ροής επιφανειακών υδάτων του IRENE-HYD, επιτρέπει την ταυτόχρονη συνδυασμένη επίλυση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων με τρόπο ο οποίος δεν είναι υπολογιστικά δαπανηρός. Όπως περιγράφεται αναλυτικά στην παράγραφο 3.3.3, η επίλυση των εξισώσεων συνέχειας (3.13) και ποσότητας κίνησης (3.14)–(3.15) των επιφανειακών νερών ανάγεται ουσιαστικά στην επίλυση της εξίσωσης (3.49), όπου το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων είναι ο μοναδικός άγνωστος. Συνεπώς, η προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών επιτυγχάνεται με την ταυτόχρονη επίλυση δύο μόνο εξισώσεων, των συνδυασμένων εξισώσεων της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων και συνέχειας των υπόγειων υδάτων (3.114) και (3.115), αντίστοιχα.

### 3.3.6 Αλγόριθμος επίλυσης

Στα αρχεία εισόδου και στον υπολογιστικό κώδικα του IRENE χρησιμοποιείται ένας αριθμητικός κωδικός (cell identification index, cind) για τη διάκριση των διαφορετικών τύπων υπολογιστικών κελιών: cind=1 για τα υπολογιστικά κελιά του επιφανειακού υδάτινου σώματος, cind=2 για τα υπολογιστικά κελιά των υπόγειων υδάτων και cind=0 για κελιά που βρίσκονται εκτός ορίων του υπολογιστικού πεδίου των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων (ανενεργά κελιά). Ο αλγόριθμος

επίλυσης των συνδυασμένων εξισώσεων ροής των επιφανειακών και των υπόγειων νερών μπορεί να συνοψιστεί στα ακόλουθα βήματα για το χρονικό βήμα  $n+1$ :

1. Στην αρχή κάθε επανάληψης Picard, πριν από την επίλυση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων (3.116), υπολογίζονται οι τιμές των στοιχείων του μητρώου συντελεστών  $\mathbf{D}'$  και του διανύσματος  $\mathbf{G}'$  για τα κελιά των επιφανειακών υδάτων ( $ci_{nd}=1$ ) και οι τιμές των στοιχείων του μητρώου συντελεστών  $\mathbf{CC}'$  και του διανύσματος  $\mathbf{E}'$  για τα κελιά των υπόγειων υδάτων ( $ci_{nd}=2$ ), χρησιμοποιώντας τις τιμές του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας και της ταχύτητας των επιφανειακών υδάτων και του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων που έχουν υπολογισθεί κατά την προηγούμενη επανάληψη Picard ή κατά το προηγούμενο χρονικό βήμα, προκειμένου για την πρώτη επανάληψη Picard. Στη συνέχεια επιλύεται το σύστημα εξισώσεων (3.116) για τον υπολογισμό των  $\zeta^{n+1, \ell+1}$  και  $h^{n+1, \ell+1}$ .
2. Προτού ο αλγόριθμος προχωρήσει στην επόμενη επανάληψη Picard πραγματοποιείται ο έλεγχος διαβροχής και ξήρανσης των υπολογιστικών κελιών των επιφανειακών νερών και προσδιορίζεται η θέση της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων. Με βάση τις νέες θέσεις της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων, εφρμόζεται η οριακή συνθήκη που ισχύει στην επιφάνεια διήθησης στους κόμβους των υπολογιστικών κελιών του επιφανειακού υδάτινου σώματος, στην κοινή διεπιφάνεια επιφανειακών-υπόγειων νερών, που βρίσκονται πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια των επιφανειακών υδάτων και κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια των υπόγειων υδάτων. Τέλος, υπολογίζονται οι οριζόντιες συνιστώσες της ταχύτητας των επιφανειακών υδάτων από την επίλυση των εξισώσεων (3.44) και (3.45), οι συνιστώσες της ταχύτητας στην κοινή διεπιφάνεια επιφανειακών-υπόγειων νερών από την επίλυση των εξισώσεων (3.106) και (3.107) και οι κατακόρυφες συνιστώσες της ταχύτητας των επιφανειακών υδάτων από την επίλυση της εξίσωσης (3.50).
3. Για την επόμενη επανάληψη Picard ο αλγόριθμος επίλυσης επιστρέφει στο βήμα 1. Οι επαναλήψεις Picard συνεχίζονται ώσπου να επιτευχθεί ικανοποιητική σύγκλιση για τις τιμές του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων και των πιεζομετρικών φορτίων των υπόγειων υδάτων, οπότε ο αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα 4.

4. Με γνωστά πλέον τα  $\zeta^{n+1}$  και  $h^{n+1}$  προσδιορίζεται το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών κατά το χρονικό βήμα  $n+1$  και στη συνέχεια επιλύονται οι εξισώσεις (3.44) και (3.45) για τον υπολογισμό των οριζόντιων συνιστωσών της ταχύτητας των επιφανειακών υδάτων  $u_{i+1/2,j,k}^{n+1}$  και  $v_{i,j+1/2,k}^{n+1}$ , οι εξισώσεις (3.103)–(3.105) για τον υπολογισμό των ταχυτήτων Darcy  $q_{x_{i+1/2,j,k}}^{n+1}$ ,  $q_{y_{i,j+1/2,k}}^{n+1}$  και  $q_{z_{i,j,k+1/2}}^{n+1}$  και οι εξισώσεις (3.106)–(3.108) για τον υπολογισμό των ταχυτήτων  $u_{i+1/2,j,k}^{*n+1}$ ,  $v_{i,j+1/2,k}^{*n+1}$  και  $w_{i,j,k+1/2}^{*n+1}$  στη διεπιφάνεια επιφανειακών–υπόγειων νερών. Τέλος, οι κατακόρυφες συνιστώσες της ταχύτητας των επιφανειακών υδάτων,  $w_{i,j,k-1/2}^{n+1}$ , προσδιορίζονται από την επίλυση της εξίσωσης (3.50) και ο αλγόριθμος επίλυσης συνεχίζει στο επόμενο χρονικό βήμα.

Ο αλγόριθμος της ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης των εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων (simultaneous coupling method) ο οποίος εφαρμόζεται στο IRENE–HYD, όπως περιγράφηκε αναλυτικά παραπάνω, απαιτεί τη χρήση κοινού μεγέθους χρονικού βήματος κατά την επίλυση των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών. Αυτός ο περιορισμός, όπως έχει ήδη εξηγηθεί στην παράγραφο 2.3, μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλους υπολογιστικούς χρόνους, καθώς δεν αξιοποιείται η διαφορετική χρονική κλίμακα που ισχύει για τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων. Για αυτόν τον λόγο, στο IRENE–HYD συμπεριλαμβάνεται και ένας δεύτερος αλγόριθμος επίλυσης, ο οποίος βασίζεται στη μέθοδο εσωτερικού συνδυασμού των εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων νερών (internal coupling method) και επιτρέπει τη χρήση διαφορετικού χρονικού βήματος στα υπό–μοντέλα ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων. Σύμφωνα με αυτόν τον αλγόριθμο επίλυσης, σε κάθε χρονικό βήμα του υπό–μοντέλου ροής των υπόγειων νερών μπορούν να επιλυθούν περισσότερα από ένα χρονικά βήματα του υπό–μοντέλου ροής των επιφανειακών νερών. Οι εξισώσεις των επιφανειακών και των υπόγειων νερών επιλύονται διαδοχικά αρκετές φορές σε κάθε χρονικό βήμα του υπό–μοντέλου ροής των υπόγειων νερών. Ο αλγόριθμος επίλυσης συνοψίζεται στα ακόλουθα βήματα για το χρονικό βήμα των υπόγειων νερών  $n+1$ :

1. Αρχικά επιλύεται το σύστημα εξισώσεων (3.111), οπότε υπολογίζονται τα πιεζομετρικά φορτία και το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων κατά το χρονικό βήμα  $n+1$ . Σε κάθε επανάληψη Picard, οι τιμές των στοιχείων των  $\mathbf{C}\mathbf{C}'$  και  $\mathbf{E}'$  υπολογίζονται με βάση τις τιμές του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων που έχουν υπολογισθεί στο τέλος του προηγούμενου χρονικού βήματος,  $n$ .
2. Επιλύονται οι εξισώσεις (3.110), (3.44)–(3.45), (3.106)–(3.108) και (3.50) για τον αριθμό των χρονικών βημάτων του υπό-μοντέλου ροής των επιφανειακών υδάτων,  $NST$ , που περιλαμβάνονται σε ένα χρονικό βήμα του υπό-μοντέλου ροής των υπόγειων υδάτων, οπότε υπολογίζονται το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων, οι οριζόντιες συνιστώσες της ταχύτητας των επιφανειακών υδάτων, οι συνιστώσες της ταχύτητας στην κοινή διεπιφάνεια επιφανειακών-υπόγειων νερών και τέλος οι κατακόρυφες συνιστώσες της ταχύτητας των επιφανειακών υδάτων. Για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων (3.110) δεν χρησιμοποιείται η μέθοδος επαναλήψεων Picard, οπότε διατυπώνεται ως εξής:

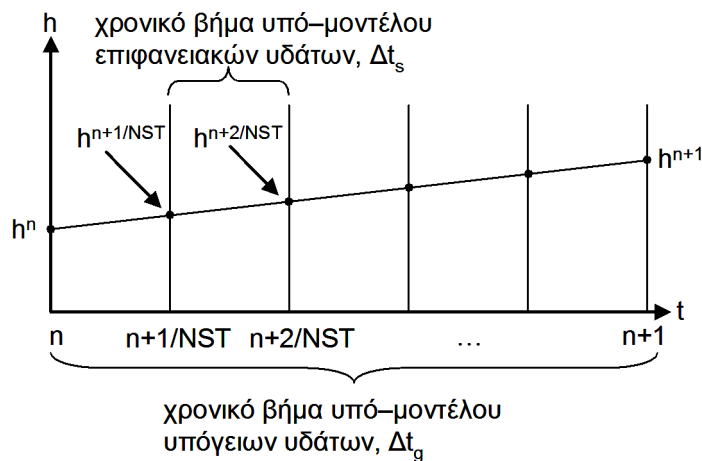
$$\mathbf{D}'^n \boldsymbol{\zeta}^{n+1/NST} = \mathbf{G}'^n \quad (3.117)$$

Σε κάθε χρονικό βήμα των επιφανειακών νερών, οι τιμές των πιεζομετρικών φορτίων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των τιμών των στοιχείων των πινάκων  $\mathbf{D}'$  και  $\mathbf{G}'$  και τον προσδιορισμό των ταχυτήτων στη διεπιφάνεια επιφανειακών-υπόγειων νερών, προκύπτουν μέσω γραμμικής παρεμβολής των τιμών των πιεζομετρικών φορτίων στην αρχή και στο τέλος του χρονικού βήματος του υπό-μοντέλου ροής των υπόγειων υδάτων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.6.

3. Το σύστημα εξισώσεων (3.111) επιλύεται χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά τις τιμές του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων που υπολογίσθηκαν κατά το τελευταίο χρονικό βήμα του υπό-μοντέλου ροής των επιφανειακών υδάτων που περιλαμβάνεται στο χρονικό βήμα του υπό-μοντέλου ροής των υπόγειων υδάτων. Έτσι προκύπτει μία καινούρια εκτίμηση για τις τιμές των πιεζομετρικών φορτίων στο τέλος του χρονικού βήματος  $n+1$ .

4. Ο αλγόριθμος επίλυσης επιστρέφει στο βήμα 2. Η διαδοχική επίλυση των συνδυασμένων εξισώσεων ροής των επιφανειακών και των υπόγειων νερών συνεχίζεται ώσπου να επιτευχθεί ικανοποιητική σύγκλιση για τις τιμές του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων και των πιεζομετρικών φορτίων των υπόγειων υδάτων, οπότε ο αλγόριθμος προχωράει στο βήμα 5.
5. Με γνωστά πλέον τα  $\zeta^{n+1}$  και  $h^{n+1}$  προσδιορίζονται οι ταχύτητες Darcy  $q_{x_{i+1/2,j,k}}^{n+1}$ ,  $q_{y_{i,j+1/2,k}}^{n+1}$  και  $q_{z_{i,j,k+1/2}}^{n+1}$  από την επίλυση των εξισώσεων (3.103)–(3.105). Στη συνέχεια αλγόριθμος επίλυσης συνεχίζει στο επόμενο χρονικό βήμα του υπό-μοντέλου ροής των υπόγειων υδάτων.

Μεταξύ των δύο αλγορίθμων επίλυσης των συνδυασμένων εξισώσεων ροής των επιφανειακών και των υπόγειων νερών που περιλαμβάνονται στο IRENE-HYD, ο αλγόριθμος της ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης επιλέγεται σε περιπτώσεις συστημάτων επιφανειακών-υπόγειων υδάτων μικρής σχετικά έκτασης, με έντονη αλληλεπίδραση, ενώ ο αλγόριθμος του εσωτερικού συνδυασμού προτιμάται για συστήματα μεγάλης έκτασης με σημαντικά διαφορετικές χρονικές κλίμακες στη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων νερών, ώστε να μειωθεί ο υπολογιστικός χρόνος.



**Σχήμα 3.6:** Γραμμική παρεμβολή των τιμών των πιεζομετρικών φορτίων των υπόγειων υδάτων για κάθε χρονικό βήμα του υπό-μοντέλου ροής των επιφανειακών υδάτων

### 3.4 Έλεγχος της ακρίβειας του ολοκληρωμένου υδροδυναμικού μοντέλου επιφανειακών–υπόγειων υδάτων IRENE–HYD

Στις επόμενες παραγράφους ελέγχεται η ακρίβεια των αριθμητικών μεθόδων που εφαρμόζονται στο IRENE–HYD για την επίλυση των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων και τη μεταξύ τους αλληλεπίδραση, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του μοντέλου με αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων που ισχύουν για απλές περιπτώσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, καθώς και με αριθμητικές λύσεις μαθηματικών μοντέλων των οποίων η αξιοπιστία και η ακρίβεια είναι αποδεκτή. Ο έλεγχος της ακρίβειας του IRENE–HYD πραγματοποιείται διερευνώντας επτά περιπτώσεις, οι οποίες επιλέχθηκαν έτσι ώστε να είναι δυνατή η αξιολόγηση διαφορετικών συνιστωσών του μοντέλου. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζονται: (1) η μέθοδος εκτίμησης της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων, (2) η μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών που εφαρμόζεται στο υπό–μοντέλο ροής επιφανειακών υδάτων του IRENE–HYD, (3) η ικανότητα του IRENE–HYD να εκτιμήσει τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών σε συστήματα επιφανειακών–υπόγειων υδάτων, (4) η ικανότητα του IRENE–HYD να προσομοιώνει την αλληλεπίδραση μεταξύ λιμνών και υπόγειων νερών και (5) η ικανότητα του IRENE–HYD να προσομοιώνει την αλληλεπίδραση μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών. Σε όλες τις περιπτώσεις ελέγχου που εξετάζονται στις επόμενες παραγράφους χρησιμοποιείται κοινό μέγεθος χρονικού βήματος στα υπό–μοντέλα ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων.

Ως μέτρο εκτίμησης της σύγκλισης μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD και των αποτελεσμάτων των αναλυτικών λύσεων ή των αριθμητικών μοντέλων που εφαρμόζονται στις περιπτώσεις ελέγχου που εξετάζονται παρακάτω, χρησιμοποιείται το μέσο σχετικό σφάλμα, *MRE*:

$$MRE = \frac{\sum_{p=1}^{np} \frac{|A_p - M_p|}{|A_p|}}{np} \quad (3.118)$$

όπου  $M_p$  και  $A_p$  συμβολίζουν τα αποτελέσματα του IRENE–HYD (π.χ. τιμές πιεζομετρικών φορτίων, ταχυτήτων, κλπ) και τα αποτελέσματα των αναλυτικών

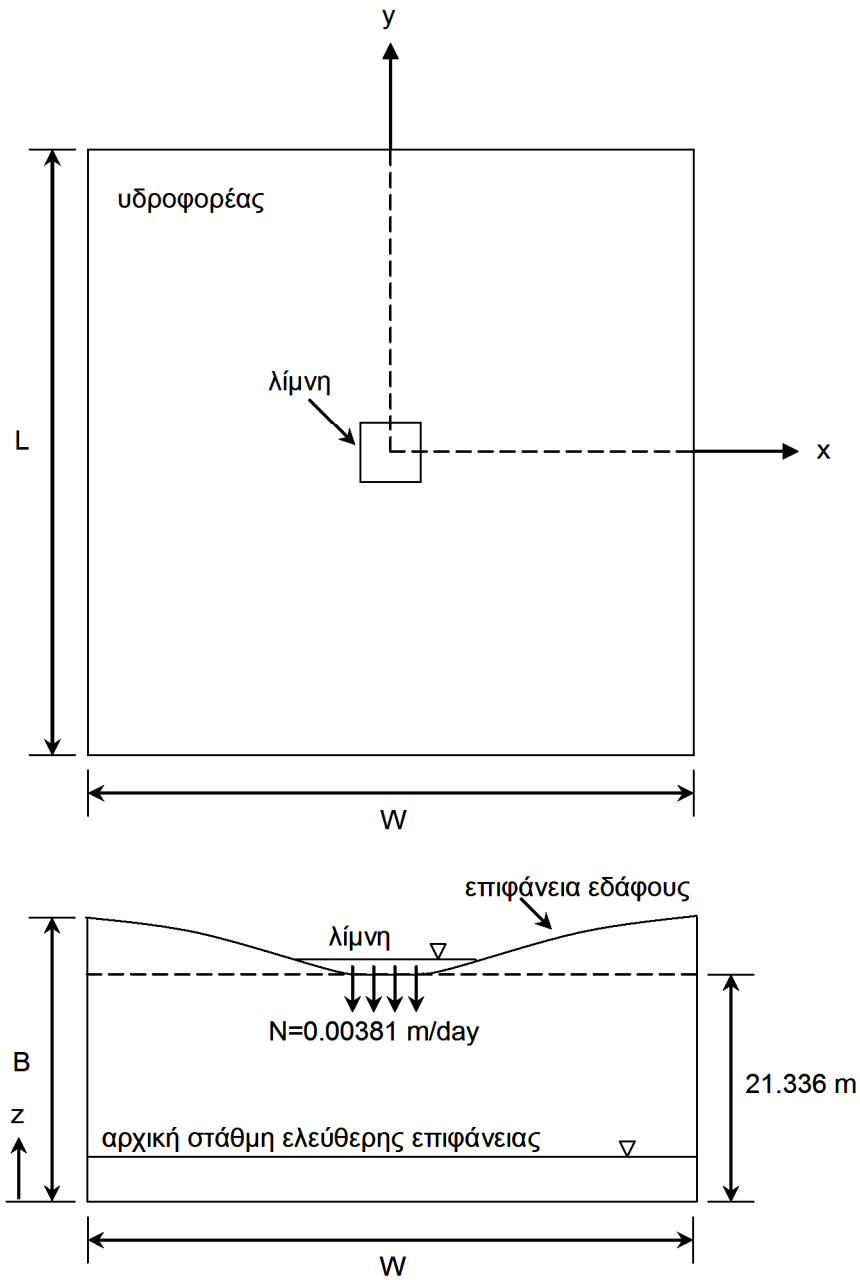
λύσεων ή των άλλων αριθμητικών μοντέλων που εφαρμόζονται, αντίστοιχα, και  $np$  είναι ο αριθμός των αποτελεσμάτων που συγκρίνονται.

### 3.4.1 Έλεγχος της μεθόδου εκτίμησης της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων

Η περίπτωση ελέγχου που εξετάζεται προκειμένου να αξιολογηθεί η μέθοδος εκτίμησης της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων που εφαρμόζεται στο υπό-μοντέλο ροής των υπόγειων νερών του IRENE-HYD, είναι όμοια με αυτήν που διερευνήθηκε στους McDonald et al. (1992). Πρόκειται για ένα πρόβλημα τρισδιάστατης ροής υπόγειων υδάτων σε φρεάτιο υδροφορέα, το οποίο επιλέχθηκε για τον έλεγχο της μεθόδου εκτίμησης της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών που χρησιμοποιείται στο IRENE-HYD επειδή περιλαμβάνει τη μετατροπή ξηρών υπολογιστικών κελιών σε μερικώς ή πλήρως κορεσμένα κελιά και το αντίστροφο.

Το πρόβλημα περιλαμβάνει φρεάτιο υδροφορέα μήκους  $L = 3048$  m, πλάτους  $W = 3048$  m και πάχους  $B = 24.384$  m. Η αρχική στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας του υπόγειου νερού στον υδροφορέα είναι ίση με  $z_{wt_0} = 7.62$  m. Στη συνέχεια ο υδροφορέας επαναφορτίζεται μέσω της διήθησης επιφανειακού νερού από μία μικρή λίμνη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7. Η επιφάνεια του πυθμένα της λίμνης μέσω του οποίου γίνεται η διήθηση επιφανειακού νερού προς τον υπόγειο υδροφορέα είναι  $92903.04$  m<sup>2</sup>. Ο ρυθμός διήθησης επιφανειακού νερού προς τον υπόγειο υδροφορέα θεωρείται ίσος με  $N = 0.00381$  m/day. Τα όρια του υδροφορέα θεωρούνται όρια σταθερού πιεζομετρικού φορτίου  $h = 7.62$  m. Ο υδροφορέας είναι ομογενής με οριζόντια υδραυλική αγωγιμότητα  $K_x = K_y = 1.524$  m/day και κατακόρυφη υδραυλική αγωγιμότητα  $K_z = 7.62 \times 10^{-2}$  m/day.

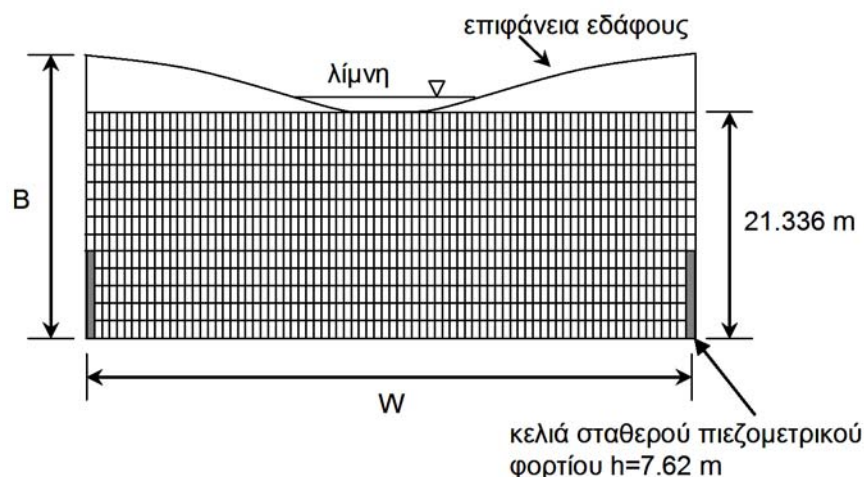




**Σχήμα 3.7:** Γεωμετρία της περίπτωσης ελέγχου της μεθόδου που εφαρμόζεται στο IRENE–HYD για την εκτίμηση της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων

Ο έλεγχος της μεθόδου που εφαρμόζεται στο IRENE–HYD για την εκτίμηση της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων πραγματοποιείται συγκρίνοντας τα αποτελέσματά του για το πρόβλημα που περιγράφηκε παραπάνω με τα αποτελέσματα του αριθμητικού μοντέλου υπόγειων νερών MODFLOW για το ίδιο πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε το Visual MODFLOW 4.2 (Waterloo Hydrogeologic Inc., 2005), το οποίο βασίζεται στο ομώνυμο λογισμικό ανοιχτού κώδικα της USGS (βλ. Harbaugh and McDonald, 1996, Harbaugh et al.,

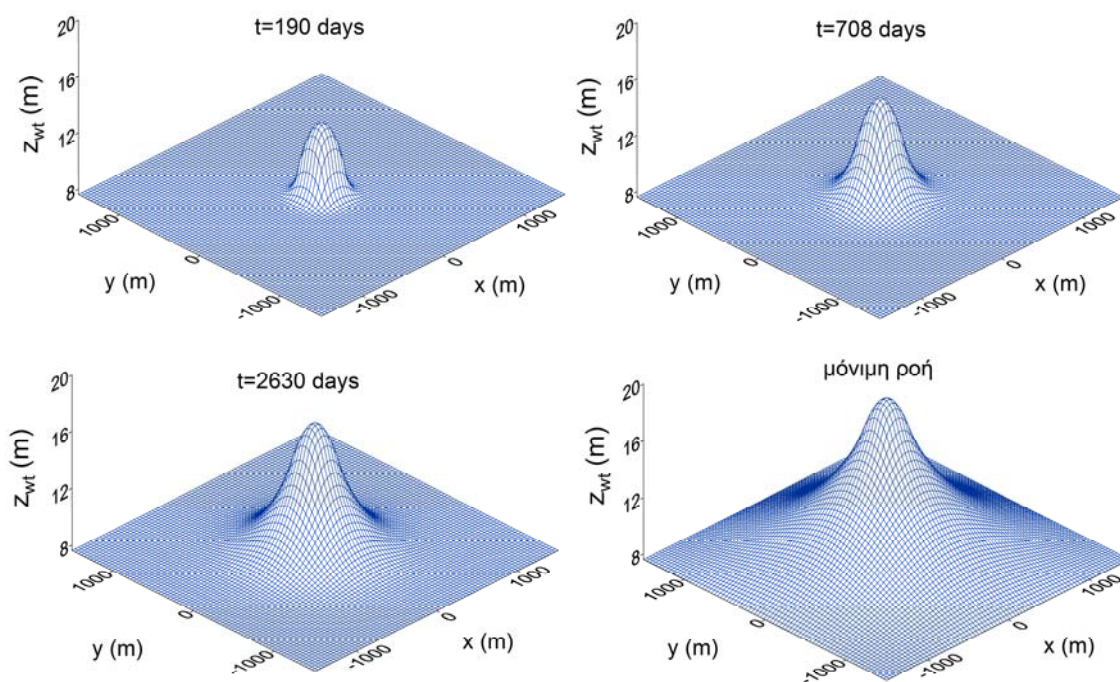
2000, Harbaugh, 2005). Η βασική διαφορά μεταξύ των δύο αριθμητικών μοντέλων όσων αφορά στη μέθοδο εκτίμησης της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών, έγκειται στο ότι στο MODFLOW, σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει στο υπό-μοντέλο ροής υπόγειων νερών του IRENE-HYD, υπολογίζονται τα πιεζομετρικά φορτία μόνο στο τμήμα του υπολογιστικού πλέγματος που βρίσκεται κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια των υπόγειων νερών. Τα ξηρά υπολογιστικά κελιά θεωρούνται ανενεργά κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης και απομονώνονται από το υπολογιστικό πεδίο. Ένα ξηρό υπολογιστικό κελί μπορεί κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος να μετατραπεί σε μερικώς ή πλήρως κορεσμένο κελί, αν το πιεζομετρικό φορτίο σε κάποιο από τα γειτονικά κελιά υπερβεί κάποιο όριο που ορίζεται αυθαίρετα από το χρήστη (McDonald et al., 1992). Επίσης, στο MODFLOW η πίεση στα μερικώς κορεσμένα κελιά θεωρείται υδροστατική, οπότε το πιεζομετρικό φορτίο στα μερικώς κορεσμένα κελιά είναι ίσο με τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας.



**Σχήμα 3.8:** Διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου του προβλήματος που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.7 στο κατακόρυφο επίπεδο  $x-z$

Τόσο στο IRENE-HYD όσο και στο MODFLOW, το υπολογιστικό πεδίο για την περίπτωση ελέγχου που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.7 διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας 80 στήλες ( $N_I = 80$ ), 80 γραμμές ( $N_J = 32$ ) και 14 στρώματα ( $N_K = 14$ ). Οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$  είναι  $\Delta x_j = 38.1$  m και  $\Delta y_j = 38.1$  m, αντίστοιχα. Το πάχος κάθε στρώματος είναι  $\Delta z_k = 1.524$  m. Η διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου στο κατακόρυφο επίπεδο  $x-z$  φαίνεται στο Σχήμα 3.8.

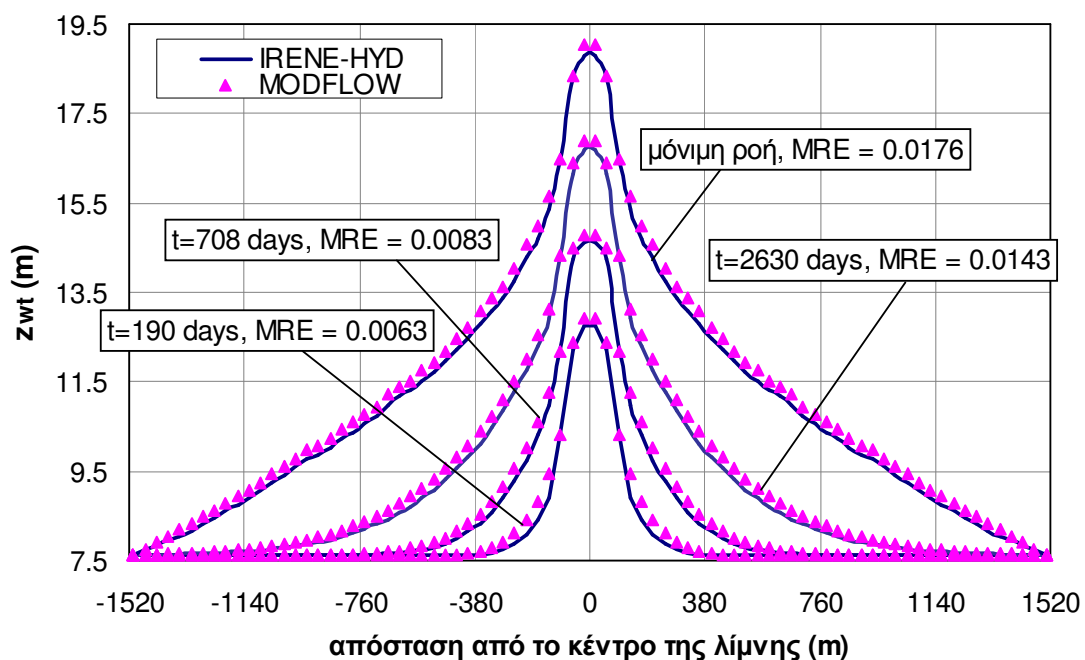
Στο Σχήμα 3.9 παρουσιάζεται η μεταβολή της στάθμης του υδροφόρου ορίζοντα, λόγω της επαναφόρτισης του υδροφορέα μέσω της διήθησης επιφανειακού νερού από τη λίμνη, όπως προβλέπεται από το υπό-μοντέλο υπόγειων υδάτων του IRENE-HYD. Στο Σχήμα 3.10 συγκρίνονται τα αποτελέσματα του υπό-μοντέλου υπόγειων νερών του IRENE-HYD και του MODFLOW για τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων στον υδροφορέα κατά τις χρονικές στιγμές  $t = 190$  days,  $t = 708$  days και  $t = 2630$  days και μετά την αποκατάσταση μόνιμης ροής. Το πρόβλημα παρουσιάζει συμμετρία ως προς τους άξονες  $x$  και  $y$ , οπότε στο Σχήμα 3.10 παρουσιάζονται οι τιμές της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας ως προς την απόσταση από το κέντρο της λίμνης. Οι αποκλίσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE-HYD και του MODFLOW είναι πολύ μικρές, όπως αποδεικνύεται άλλωστε και από τις τιμές του μέσου σχετικού σφάλματος που υπολογίζονται για τις διάφορες χρονικές στιγμές (βλ. Σχήμα 3.10). Η μέγιστη απόκλιση (0.30 m) παρατηρείται σε απόσταση 19.05 m για συνθήκες μόνιμης ροής.



**Σχήμα 3.9:** Χρονική εξέλιξη της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων για το πρόβλημα του σχήματος 3.7 σύμφωνα με το υπό-μοντέλο υπόγειων νερών του IRENE-HYD

Γενικά, οι τιμές της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας που υπολογίζονται με το IRENE-HYD είναι χαμηλότερες σε σύγκριση με αυτές που υπολογίζονται με το MODFLOW. Οι μικρές αποκλίσεις που παρατηρούνται μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο μοντέλων οφείλονται προφανώς στις διαφορετικές μεθόδους που

ακολουθούνται για την εκτίμηση της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων αλλά και στο ότι στο MODFLOW η διοχετευτικότητα μεταξύ γειτονικών διαφορικών όγκων υπολογίζεται ως ο σταθμικός αρμονικός μέσος όρος των διοχετευτικότητων των γειτονικών διαφορικών όγκων (βλ. Harbaugh and McDonald, 1996, Harbaugh et al., 2000, Harbaugh, 2005), ενώ στο υπό-μοντέλο ροής υπόγειων νερών του IRENE-HYD χρησιμοποιείται ανάντη στάθμιση. Το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου που χρησιμοποιείται στο IRENE-HYD για την εκτίμηση της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων είναι ότι δεν υπάρχει ανάγκη απομόνωσης των ξηρών υπολογιστικών κελιών από το υπολογιστικό πεδίο και μετέπειτα μετατροπή τους σε 'ενεργά' (μερικώς ή πλήρως κορεσμένα) κελιά. Ωστόσο στη συγκεκριμένη περίπτωση ελέγχου, όπου είναι μεγάλος ο αριθμός των ξηρών υπολογιστικών κελιών, ο υπολογιστικός χρόνος που χρειάζεται το IRENE-HYD για την επίλυση του προβλήματος είναι περίπου 1.7 φορές μεγαλύτερος του υπολογιστικού χρόνου που απαιτείται από το MODFLOW.

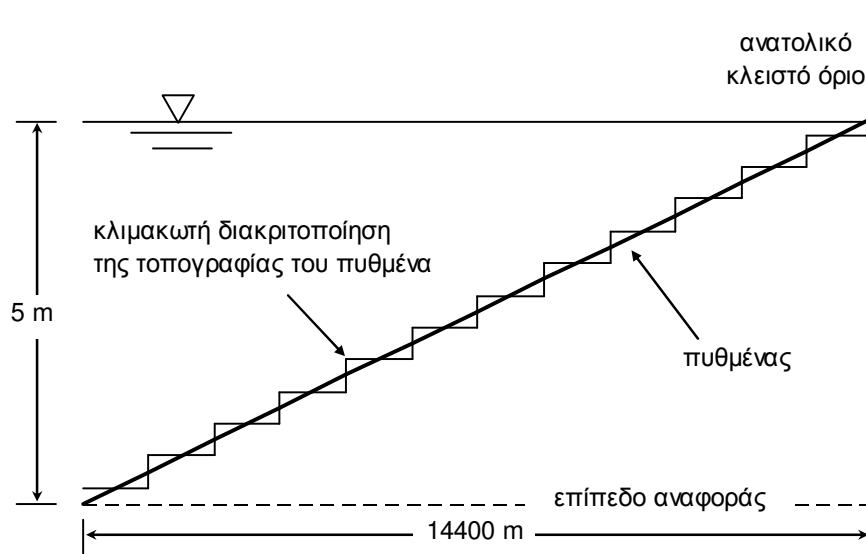


**Σχήμα 3.10:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του υπό-μοντέλου ροής υπόγειων νερών του IRENE-HYD και του MODFLOW για τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων στον υδροφορέα του σχήματος 3.7

### 3.4.2 Έλεγχος της μεθόδου διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών του επιφανειακού υδάτινου σώματος

Προκειμένου να αξιολογηθεί η μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών που χρησιμοποιείται στο FLOW-3DL, εξετάζονται δύο περιπτώσεις οι οποίες είναι όμοιες με αυτές που διερευνήθηκαν στους Falconer and Owens (1987), Falconer and Chen (1991) και Balzano (1998). Στην πρώτη περίπτωση ελέγχου θεωρείται παράκτια λεκάνη απείρου πλάτους, με μήκος 14400 m και πυθμένα με ομοιόμορφη κλίση, με βάθος που μεταβάλλεται από 5 m στο δυτικό ανοικτό όριο της λεκάνης σε 0 m στο ανατολικό κλειστό όριο (βλ. Σχήμα 3.11). Στο ανοικτό όριο επιβάλλεται ημιτονοειδής διαταραχή της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας με πλάτος  $\zeta' = 2$  m και περίοδο  $\tau = 43200$  s. Για την αριθμητική προσομοίωση της χρονικά μεταβαλλόμενης θέσης της ελεύθερης επιφάνειας με το FLOW-3DL, το υπολογιστικό πεδίο διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας ένα στρώμα μεταβλητού πάχους στην κατακόρυφη διεύθυνση, ενώ στη διεύθυνση  $x$  χρησιμοποιείται βήμα διακριτοποίησης  $\Delta x_j = 1200$  m. Η επιτάχυνση Coriolis θεωρείται αμελητέα, ο συντελεστής τραχύτητας Manning ίσος με  $n = 0.02$  s/m<sup>1/3</sup> και το χρονικό βήμα ίσο με  $\Delta t = 360$  s. Λόγω της κλίσης του πυθμένα, της οριακής συνθήκης που επιβάλλεται στο ανοικτό όριο της λεκάνης και της διακριτοποίησης που χρησιμοποιείται, το παραπάνω πρόβλημα αποτελεί μία δύσκολη περίπτωση ελέγχου της μεθόδου διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών που εφαρμόζεται στο FLOW-3DL.

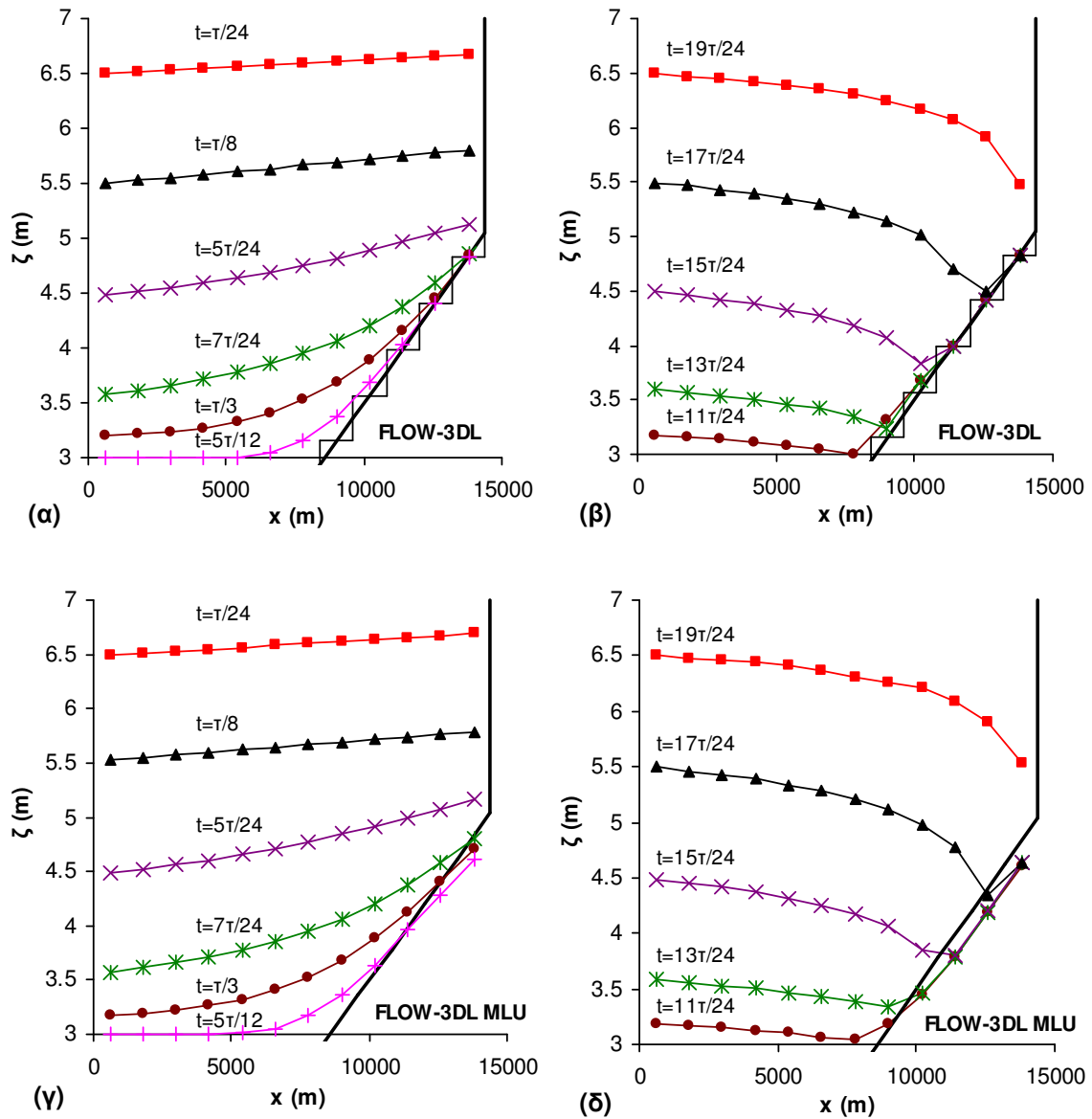
Στα γραφήματα (α) και (β) του σχήματος 3.12 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του FLOW-3DL για τη διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος του υπολογιστικού πεδίου σε διάφορες χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια μιας περιόδου. Για λόγους σύγκρισης, στον κώδικα του FLOW-3DL προγραμματίστηκε και η μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης MLU που προτάθηκε από τους Casulli and Cheng (1992), τροποποίηση της οποίας αποτελεί η μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης που εφαρμόζεται στο FLOW-3DL. Τα αποτελέσματα του FLOW-3DL για τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος του υπολογιστικού πεδίου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο MLU παρουσιάζονται στα γραφήματα (γ) και (δ) του σχήματος 3.12. Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι και για τις δύο περιπτώσεις ελέγχου που εξετάζονται σε αυτήν την παράγραφο, η μέθοδος MLU εφαρμόστηκε ορίζοντας τα βάθη στα μέτωπα των υπολογιστικών κελιών του FLOW-3DL.



**Σχήμα 3.11:** Γεωμετρία της πρώτης περίπτωσης ελέγχου της μεθόδου διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών που εφαρμόζεται στο FLOW-3DL: παράκτια λεκάνη με πυθμένα ομοιόμορφης κλίσης

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.12, τα προφίλ της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις δύο διαφορετικές μεθόδους διαβροχής και ξήρανσης είναι ομαλά, χωρίς περιέργες ταλαντώσεις. Η σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων κρίνεται πολύ ικανοποιητική, με κάποιες αποκλίσεις να παρατηρούνται κατά τις χρονικές στιγμές  $t = \pi/3$  και  $t = 5\pi/12$  (κατιούσα παλίρροια) και  $t = 11\pi/24$  ως  $t = 17\pi/24$  (ανερχόμενη παλίρροια) για τα ξηρά υπολογιστικά κελιά που βρίσκονται κοντά στο ανατολικό κλειστό όριο του πεδίου. Οι τιμές της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας που υπολογίζονται για αυτά τα κελιά χρησιμοποιώντας τη μέθοδο MLU είναι χαμηλότερες από το υψόμετρο του πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η μέθοδος MLU επιτρέπει την πτώση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας σε ένα κελί στο ελάχιστο από τα υψόμετρα πυθμένα που ορίζονται στα μέτωπα του υπολογιστικού κελιού. Με άλλα λόγια, αναφορικά με τον όγκο νερού που μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα κελί, όταν εφαρμόζεται η μέθοδος MLU το FLOW-3DL ισοδυναμεί με ένα μοντέλο όπου η τοπογραφία του πυθμένα διακριτοποιείται κλιμακωτά, με το υψόμετρο του πυθμένα κάθε κελιού να είναι ίσο με το ελάχιστο από τα υψόμετρα του πυθμένα που ορίζονται στα μέτωπα του κελιού, δηλαδή

$$z_{bed_{i,j}} = \min(z_{bed_{i\pm 1/2,j}}, z_{bed_{i,j\pm 1/2}}) \text{ (Balzano, 1998).}$$

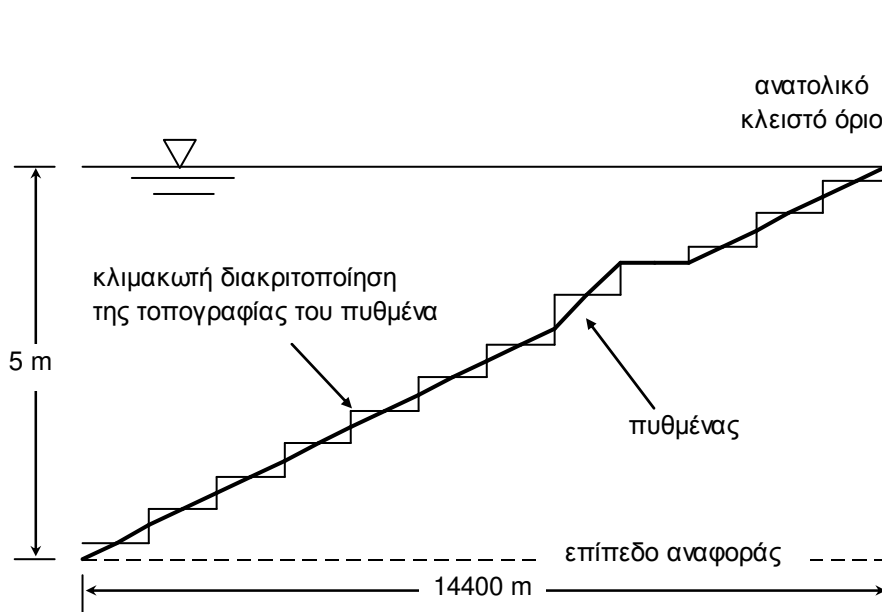


**Σχήμα 3.12:** Διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος παράκτιας λεκάνης με πυθμένα ομοιόμορφης κλίσης εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαβροχής και ξήρανσης του FLOW-3DL και τη μέθοδο MLU. Τα γραφήματα (α) και (γ) αντιστοιχούν στην κατιούσα παλίρροια και τα γραφήματα (β) και (δ) στην ανερχόμενη παλίρροια.

Με τη μέθοδο διαβροχής και ξήρανσης του FLOW-3DL δεν παρατηρείται αυτή η υπερεκτίμηση του όγκου νερού που μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα υπολογιστικό κελί, γεγονός που οφείλεται εν μέρει στην ίδια τη μέθοδο και εν μέρει στη διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου, που είναι αντιπροσωπευτική της τοπογραφίας του πυθμένα στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Σε περιπτώσεις όπου η διακριτοποίηση δεν απεικονίζει την πραγματική τοπογραφία του πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος, η μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης που εφαρμόζεται στο FLOW-3DL μπορεί να οδηγήσει σε υπερεκτίμηση ή υποεκτίμηση του όγκου νερού που μπορεί να

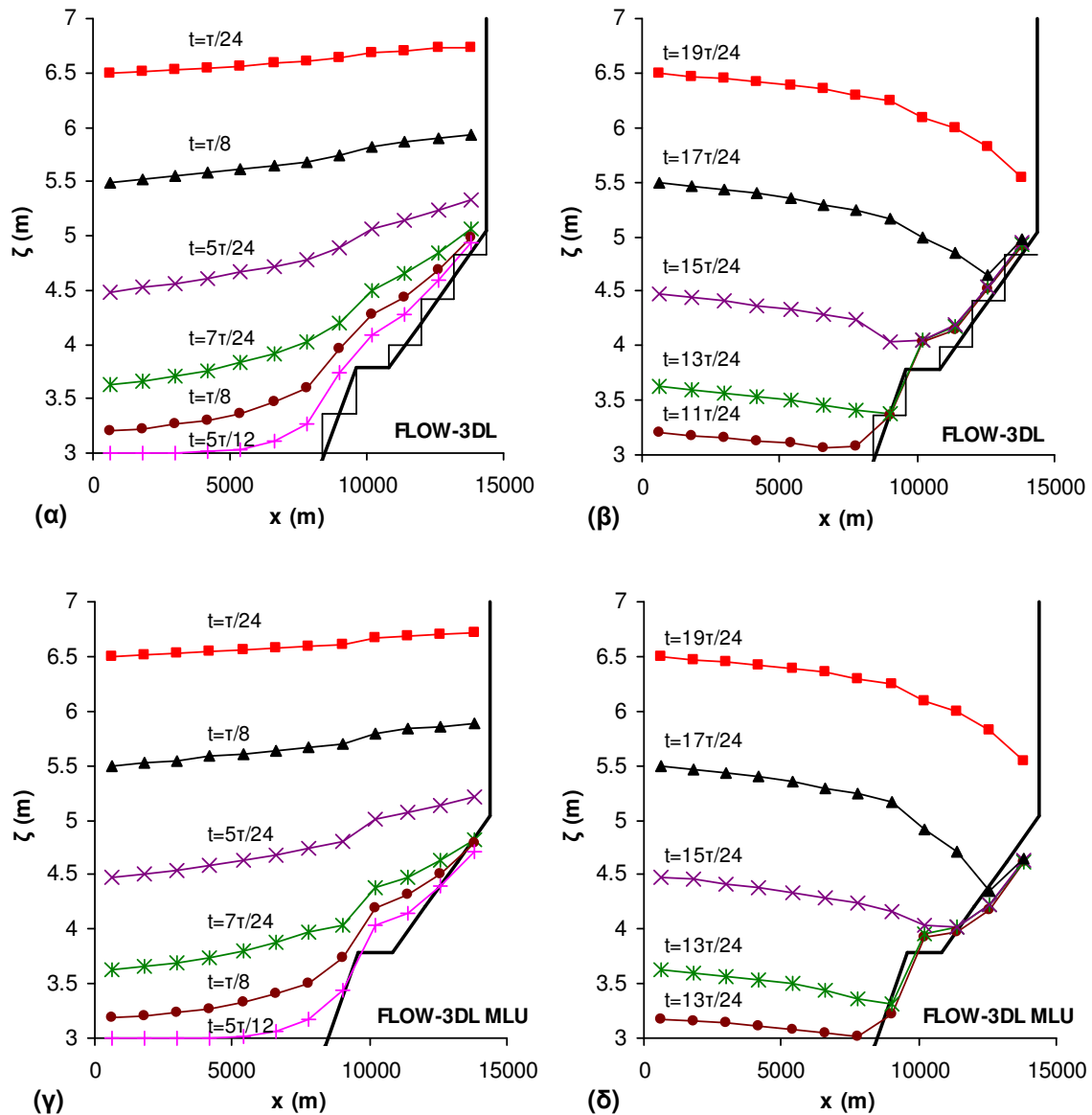
αποθηκευτεί σε ένα υπολογιστικό κελί. Συνεπώς, επειδή στο FLOW-3DL τα βάθη ορίζονται στο κέντρο των διαφορικών όγκων, σε περιπτώσεις με πολύπλοκη τοπογραφία πυθμένα απαιτείται πυκνότερη διακριτοποίηση σε σχέση με αυτήν που χρησιμοποιείται σε αριθμητικά μοντέλα όπου τα βάθη ορίζονται στα μέτωπα των διαφορικών όγκων.

Τα παραπάνω γίνονται κατανοητά στη δεύτερη περίπτωση ελέγχου της μεθόδου διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών του FLOW-3DL. Τα χαρακτηριστικά της δεύτερης περίπτωσης ελέγχου είναι όμοια με αυτά της πρώτης, με τη διαφορά ότι ο πυθμένας της παράκτιας λεκάνης έχει τώρα μεταβλητή κλίση (βλ. Σχήμα 3.13). Η τοπογραφία του πυθμένα της παράκτιας λεκάνης για τη δεύτερη περίπτωση ελέγχου προκύπτει θέτοντας το υψόμετρο του πυθμένα στη θέση  $x = 9600$  m ίσο με το υψόμετρο του πυθμένα στη θέση  $x = 10800$  m.



**Σχήμα 3.13:** Γεωμετρία της δεύτερης περίπτωσης ελέγχου της μεθόδου διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών που εφαρμόζεται στο FLOW-3DL: παράκτια λεκάνη με πυθμένα μεταβλητής κλίσης





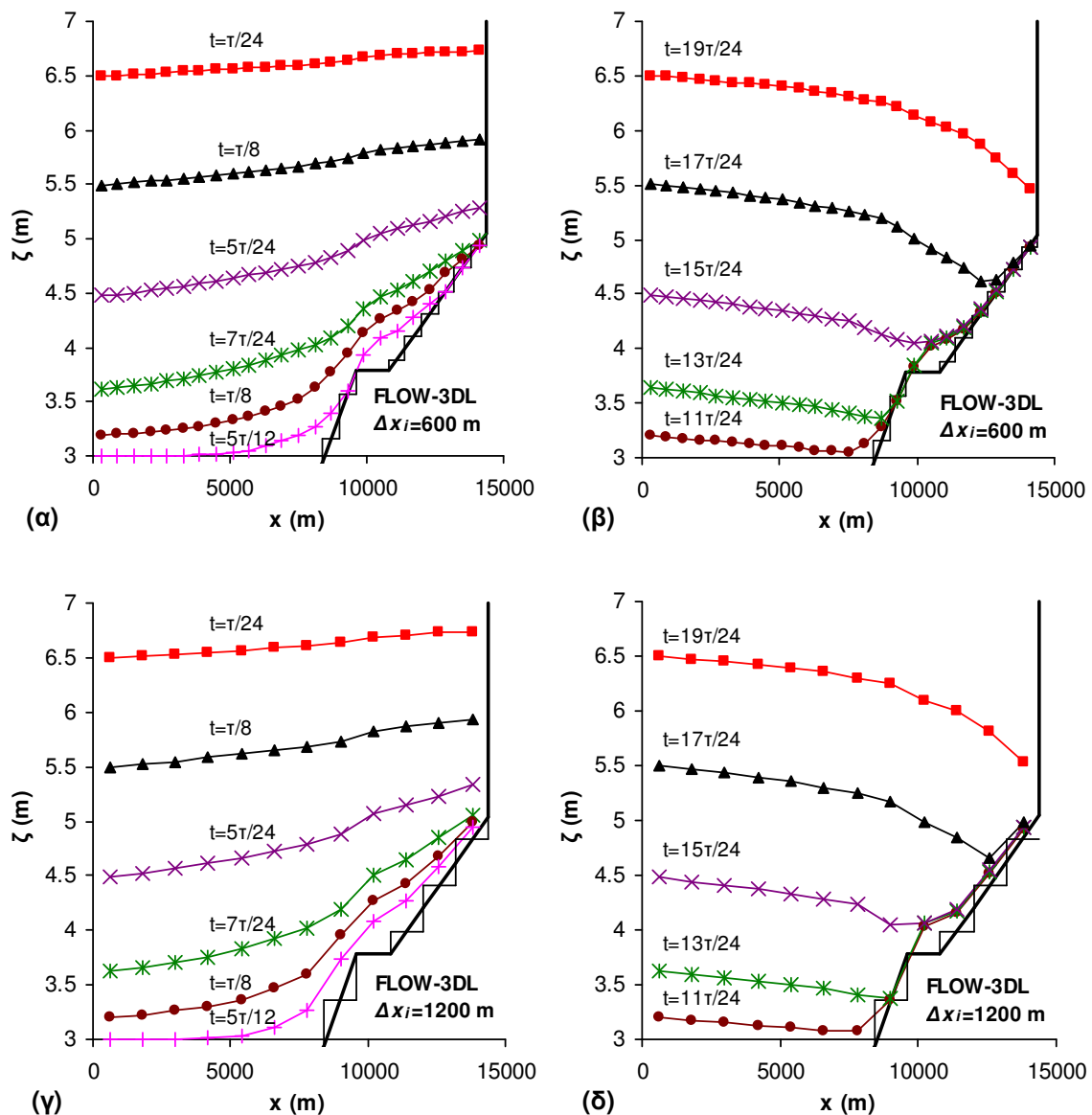
**Σχήμα 3.14:** Διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος παράκτιας λεκάνης με πυθμένα μεταβλητής κλίσης εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαβροχής και ξήρανσης του FLOW-3DL και τη μέθοδο MLU. Τα γραφήματα (α) και (γ) αντιστοιχούν στην κατιούσα παλίρροια και τα γραφήματα (β) και (δ) στην ανερχόμενη παλίρροια.

Το Σχήμα 3.14 απεικονίζει τη διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος του υπολογιστικού πεδίου, σε διάφορες χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, όπως υπολογίζεται με το FLOW-3DL χρησιμοποιώντας τις δύο διαφορετικές μεθόδους διαβροχής και ξήρανσης. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.14, οι δύο μέθοδοι διαβροχής και ξήρανσης δεν προκαλούν περίεργες ταλαντώσεις στα προφίλ της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας. Οι τιμές του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο διαβροχής και ξήρανσης του FLOW-3DL για τις θέσεις  $x = 600$  m ως  $x = 7800$  m είναι σχεδόν

όμοιες με αυτές που υπολογίζονται με τη μέθοδο MLU. Ωστόσο στις θέσεις  $x = 9000$  m ( $i=8$ ),  $x = 10200$  m ( $i=9$ ) και  $x = 11400$  m ( $i=10$ ) κατά τις χρονικές στιγμές  $t = 7\pi/24$  ως  $t = 15\pi/24$  παρατηρούνται αποκλίσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων. Πιο συγκεκριμένα, σε αυτήν την περίπτωση ελέγχου, η σχέση (3.52) που χρησιμοποιείται στο FLOW-3DL για τον προσδιορισμό του υψομέτρου του πυθμένα στα μέτωπα των διαφορικών όγκων οδηγεί σε υπερεκτίμηση του πραγματικού υψομέτρου του πυθμένα της παράκτιας λεκάνης στα μέτωπα  $(7+1/2)$ ,  $(8+1/2)$  και  $(9+1/2)$ , δηλαδή στις θέσεις  $x = 8400$  m,  $x = 9600$  m και  $x = 10800$  m που αποτελούν θέσεις μεταβολής της κλίσης του πυθμένα της λεκάνης. Το γεγονός αυτό σε συδυασμό με τη συνθήκη (3.53) που χρησιμοποιείται στη μέθοδο διαβροχής και ξήρανσης του FLOW-3DL έχει σαν αποτέλεσμα την υποεκτίμηση των παροχών στα μέτωπα  $(7+1/2)$ ,  $(8+1/2)$  και  $(9+1/2)$  και τη συνακόλουθη υπερεκτίμηση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας στις θέσεις  $x = 9000$  m,  $x = 10200$  m και  $x = 11400$  m. Αυτή η υπερεκτίμηση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας δεν παρατηρείται όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος MLU. Από την άλλη πλευρά, η μέθοδος MLU οδηγεί και σε αυτήν την περίπτωση ελέγχου σε υπερεκτίμηση του όγκου νερού που μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα υπολογιστικό κελί, όπως αποδεικνύεται από τις τιμές της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας που υπολογίζονται για τις θέσεις  $x = 12600$  m ( $i=11$ ) και  $x = 13800$  m ( $i=12$ ).

Μία περισσότερο αντιπροσωπευτική απεικόνιση της τοπογραφίας του πυθμένα της παράκτιας λεκάνης στο FLOW-3DL μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας μικρότερο βήμα διακριτοποίησης στη διεύθυνση  $x$ . Στην περίπτωση αυτή διαφοροποιούνται οι τιμές του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας που υπολογίζονται εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαβροχής και ξήρανσης του FLOW-3DL, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.15, όπου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του μοντέλου για τη διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος του υπολογιστικού πεδίου χρησιμοποιώντας χωρικό βήμα  $\Delta x_i = 600$  m. Για λόγους σύγκρισης, στο ίδιο σχήμα παρουσιάζονται επίσης τα αποτελέσματα του FLOW-3DL για χωρικό βήμα  $\Delta x_i = 1200$  m. Υποδιπλασιάζοντας το βήμα διακριτοποίησης στη διεύθυνση  $x$ , οι τιμές που υπολογίζονται μέσω της σχέσης (3.52) για το υψόμετρο του πυθμένα της παράκτιας λεκάνης στα μέτωπα  $(14+1/2)$ ,  $(16+1/2)$  και  $(18+1/2)$ , δηλαδή στις θέσεις  $x = 8400$  m,  $x = 9600$  m και  $x = 10800$  m όπου μεταβάλλεται η κλίση του πυθμένα, είναι πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές του υψομέτρου του πυθμένα της λεκάνης. Έτσι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.15, οι τιμές της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας που υπολογίζονται μεταξύ των θέσεων  $x = 8400$  m και  $x = 11400$  m κατά

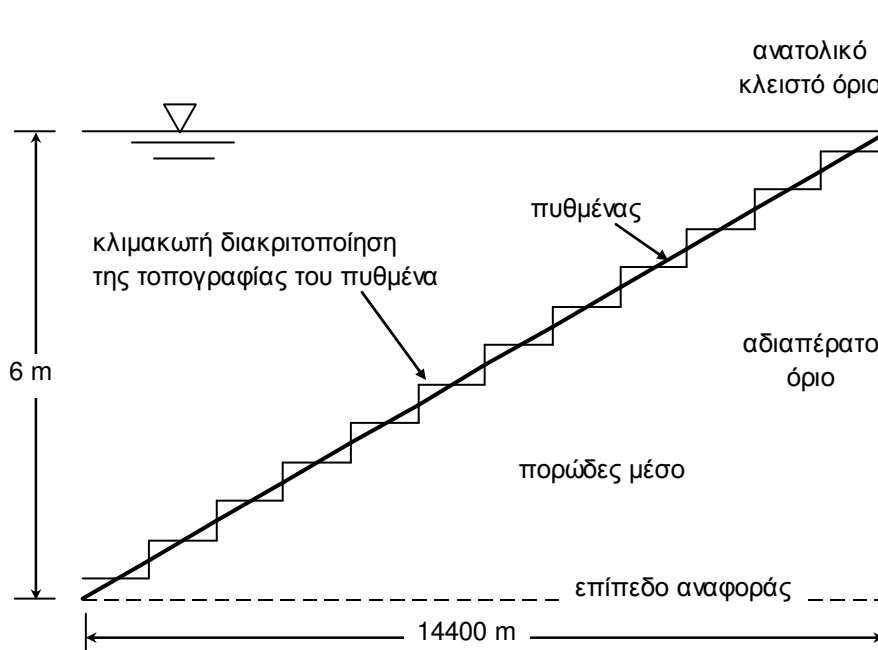
τις χρονικές στιγμές  $t=7\tau/24$  ως  $t=15\tau/24$  είναι σημαντικά χαμηλότερες σε σύγκριση με αυτές που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας χωρικό βήμα  $\Delta x_i=1200$  m και προσεγγίζουν τις τιμές που υπολογίζονται με τη μέθοδο MLU (βλ. Σχήμα 3.14 (γ) και (δ)). Από τα παραπάνω γίνεται φανερή η επίδραση της ακρίβειας με την οποία απεικονίζεται ο πυθμένας του επιφανειακού υδάτινου σώματος στο FLOW-3DL, στην διαβροχή και ξήρανση υπολογιστικών κελιών και τον προσδιορισμό της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων.



**Σχήμα 3.15:** Διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος παράκτιας λεκάνης με πυθμένα μεταβλητής κλίσης, εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαβροχής και ξήρανσης του FLOW-3DL, για  $\Delta x_i = 600$  m και  $\Delta x_i = 1200$  m. Τα γραφήματα (α) και (γ) αντιστοιχούν στην κατιούσα παλίρροια και τα γραφήματα (β) και (δ) στην ανερχόμενη παλίρροια.

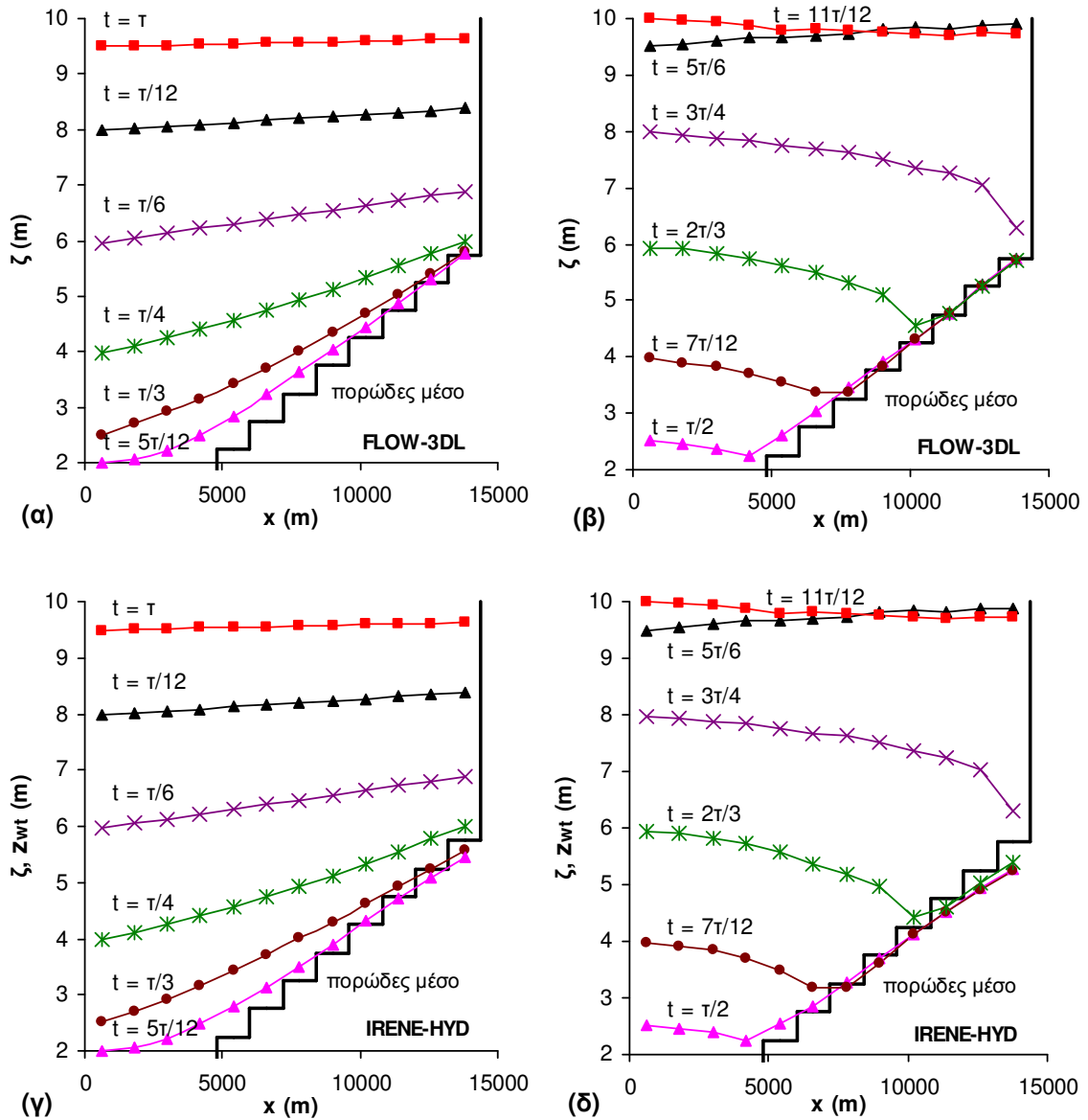
Γενικά, αξιολογώντας τα αποτελέσματα του FLOW-3DL για τις δύο περιπτώσεις ελέγχου που εξετάστηκαν σε αυτήν την παράγραφο, προκύπτει ότι το υπό-μοντέλο επιφανειακών νερών του IRENE-HYD μπορεί με ακρίβεια να προσομοιώσει τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων σε δύσκολα προβλήματα όπου λαμβάνει χώρα διαδοχική ξήρανση και διαβροχή υπολογιστικών κελιών. Και στις δύο περιπτώσεις ελέγχου, οι τιμές της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας που υπολογίζονται εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαβροχής και ξήρανσης του FLOW-3DL προσεγγίζουν τις τιμές που υπολογίζονται εφαρμόζοντας τη μέθοδο MLU που προτάθηκε από τους Casulli and Cheng (1992). Η μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης που εφαρμόζεται στο FLOW-3DL δεν οδηγεί σε υπερεκτίμηση του όγκου νερού που μπορεί να αποθηκευτεί στα υπολογιστικά κελιά, όπως συμβαίνει όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος MLU. Ωστόσο επειδή στο FLOW-3DL τα βάθη ορίζονται στο κέντρο των διαφορικών όγκων, στις περισσότερες περιπτώσεις απαιτείται πυκνότερο υπολογιστικό πλέγμα σε σύγκριση με αυτό που χρησιμοποιείται σε αριθμητικά μοντέλα όπου τα βάθη ορίζονται στα μέτωπα των διαφορικών όγκων, καθώς, όπως αποδεικνύεται στη δεύτερη περίπτωση ελέγχου, η ακρίβεια απεικόνισης του πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος στο FLOW-3DL επιδρά στην ακρίβεια υπολογισμού της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας.

Και στις δύο περιπτώσεις ελέγχου που διερευνήθηκαν παραπάνω, ο πυθμένας της παράκτιας λεκάνης θεωρήθηκε αδιαπέρατος, προκειμένου να αξιολογηθεί η μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών του επιφανειακού υδάτινου σώματος. Θεωρώντας τον πυθμένα της λεκάνης διαπερατό, μπορεί να διαπιστωθεί η ικανότητα του IRENE-HYD να εκτιμήσει τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας στο σύστημα των επιφανειακών-υπόγειων υδάτων. Για αυτόν τον λόγο, το IRENE-HYD εφαρμόζεται στην περίπτωση ελέγχου που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.16, λαμβάνοντας αυτή τη φορά υπ' όψη την υδραυλική επικοινωνία μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Τα χαρακτηριστικά της περίπτωσης ελέγχου του σχήματος 3.16 είναι όμοια με αυτά της πρώτης περίπτωσης ελέγχου που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.11, με τη διαφορά ότι το βάθος μεταβάλλεται από 6 m στο δυτικό ανοικτό όριο σε 0 m στο ανατολικό κλειστό όριο και ότι το πλάτος της ημιτονοειδούς διαταραχής της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων που επιβάλλεται στο ανοικτό όριο είναι  $\zeta' = 4$  m. Για την ειδική αποθηκευτικότητα και την υδραυλική αγωγιμότητα του πορώδους μέσου επιλέγονται οι ακόλουθες τιμές:  $S_y = 0.1$  και  $K = 0.001$  m/s.



**Σχήμα 3.16:** Γεωμετρία της περίπτωσης ελέγχου της ικανότητας του IRENE-HYD να εκτιμήσει τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας επιφανειακών και υπόγειων υδάτων

Στο Σχήμα 3.17 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του IRENE-HYD για τη διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος του υπολογιστικού πεδίου σε διάφορες χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια μιας περιόδου. Για λόγους σύγκρισης στο ίδιο σχήμα παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα του FLOW-3DL, θεωρώντας φυσικά ότι ο πυθμένας της παράκτιας λεκάνης είναι αδιαπέρατος. Τα αποτελέσματα του IRENE-HYD διαφοροποιούνται σε σχέση με τα αποτελέσματα του FLOW-3DL κατά τους χρόνους  $t = \tau/3$  και  $t = 5\tau/12$  (κατιούσα παλίρροια), στις θέσεις  $x = 12600$  m ως  $x = 13800$  m ( $i = 11-12$ ) και  $x = 11400$  m ως  $x = 13800$  m ( $i = 10-12$ ), αντίστοιχα, και κατά τους χρόνους  $t = \tau/2$ ,  $t = 7\tau/12$  και  $t = 2\tau/3$ , στις θέσεις  $x = 9000$  m ως  $x = 13800$  m ( $i = 8-12$ ),  $x = 7800$  m ως  $x = 13800$  m ( $i = 7-12$ ) και  $x = 11400$  m ως  $x = 13800$  m ( $i = 10-12$ ), αντίστοιχα. Στις παραπάνω θέσεις, κατά τους χρόνους  $t = \tau/3$  ως  $t = 2\tau/3$ , προκύπτουν ξηρά υπολογιστικά κελιά σύμφωνα με το FLOW-3DL, ενώ με το IRENE-HYD είναι δυνατή η εκτίμηση της στάθμης του υπόγειου νερού.



**Σχήμα 3.17:** Διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας επιφανειακών και υπόγειων υδάτων κατά μήκος του υπολογιστικού πεδίου της περίπτωσης ελέγχου του σχήματος 3.16, όπως υπολογίζεται με το IRENE-HYD. Τα γραφήματα (α) και (γ) αντιστοιχούν στην κατιούσα παλίρροια και τα γραφήματα (β) και (δ) στην ανερχόμενη παλίρροια.

### 3.4.3 Έλεγχος της ικανότητας του IRENE-HYD να εκτιμήσει τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων και την επιφάνεια διήθησης σε ένα σύστημα επιφανειακών-υπόγειων νερών

Η ικανότητα του IRENE-HYD να προσομοιώνει τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών σε συστήματα επιφανειακών-

υπόγειων υδάτων ελέγχεται συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του μοντέλου με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης των Serrano and Workman (1998) για την περίπτωση αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.18 (α). Οι Serrano and Workman (1998), όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2, θεώρησαν την περίπτωση ομογενούς φρεάτιου υδροφορέα ο οποίος περιορίζεται στο δυτικό και ανατολικό όριο του στη διεύθυνση  $x$  από δύο υδατορεύματα πλήρους διεύθυνσης (βλ. Σχήμα 3.18 (α)). Θεωρώντας τη ροή στον υδροφορέα οριζόντια, μονοδιάστατη στη διεύθυνση  $x$ , περιγράφεται από τη μη γραμμική εξίσωση Boussinesq (2.7). Για το πρόβλημα του σχήματος 3.18 (α) ισχύουν οι ακόλουθες αρχικές και οριακές συνθήκες:

$$h(x,0) = h_0(x), \quad h(0,t) = \zeta_W(t), \quad h(W_a,t) = \zeta_E(t) \quad (3.118)$$

όπου  $\zeta_W(t)$  και  $\zeta_E(t)$  συμβολίζουν τη χρονικά μεταβαλλόμενη στάθμη των δύο υδατορευμάτων που βρίσκονται στο δυτικό και ανατολικό όριο του υδροφορέα, αντίστοιχα. Οι Serrano and Workman (1998) χρησιμοποίησαν τη μέθοδο διάσπασης του Adomian (Adomian decomposition method, Adomian, 1994) για την επίλυση της μονοδιάστατης εξίσωσης Boussinesq. Πιο συγκεκριμένα, εφάρμοσαν τις μεθόδους χωρικής μερικής διάσπασης ( $x$ -partial decomposition) και χρονικής μερικής διάσπασης ( $t$ -partial decomposition) κατά Adomian καταλήγοντας έτσι σε λύσεις υπό μορφή σειρών. Για τις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές ο ρυθμός σύγκλισης των σειρών είναι υψηλός, οπότε οι πρώτοι δύο ή τρεις όροι αρκούν για μία ακριβή λύση (Serrano and Workman, 1998). Οι τιμές των πιεζομετρικών φορτίων που υπολογίζονται από την επίλυση της εξίσωσης Boussinesq (2.7) συμπίπτουν βέβαια με το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων, αφού η ροή στον φρεάτιο υδροφορέα θεωρείται οριζόντια.

Στην περίπτωση ελέγχου που εξετάζεται εδώ, θεωρείται υδροφορέας με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:  $W_a = 15$  m,  $K = 0.0005$  m/s και  $S_y = 0.2$ . Αρχικά, η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας του νερού στο υδατόρευμα που βρίσκεται στο δυτικό όριο του υδροφορέα είναι  $\zeta_W(0) = 5$  m και η στάθμη του υδατορεύματος που βρίσκεται στο ανατολικό όριο του υδροφορέα είναι  $\zeta_E(0) = 4$  m. Η αρχική κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στον υδροφορέα θεωρείται γραμμική, δηλαδή:  $h_0(x) = 5 - (1/15)x$ . Κατά τη χρονική στιγμή  $t = 0 + \varepsilon$ , όπου  $\varepsilon$  είναι ένας πολύ μικρός αριθμός, θεωρείται μία απότομη πτώση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας του

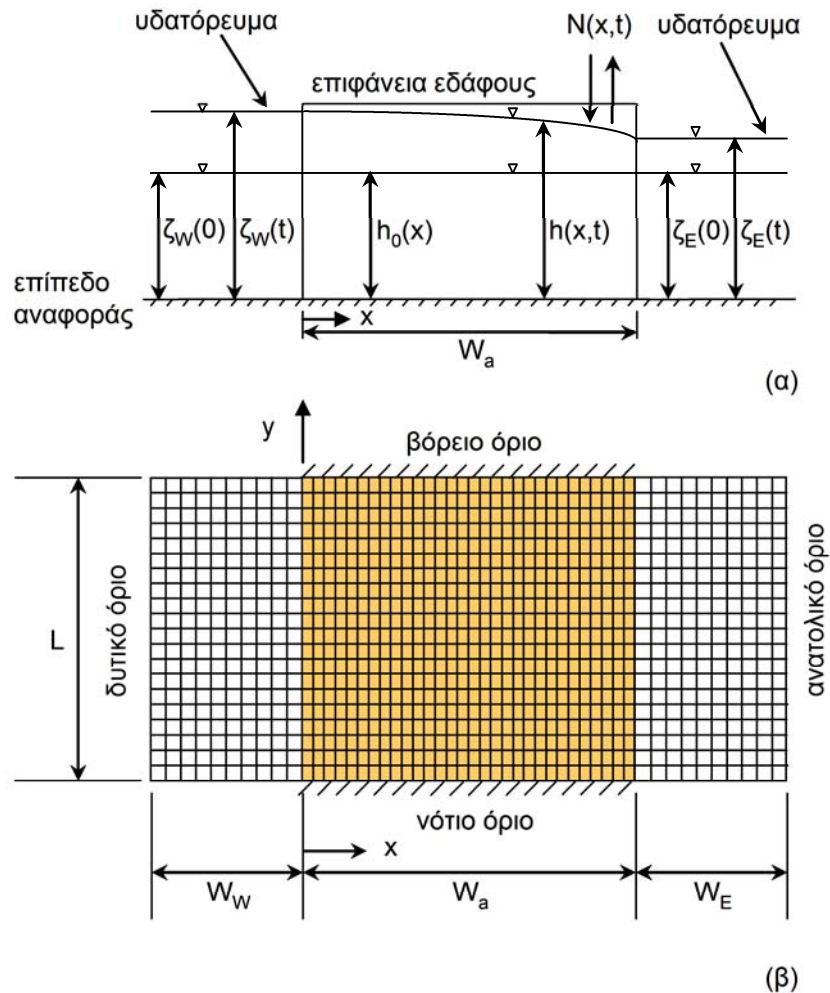
νερού στο ανατολικό υδατόρευμα από 4 m σε 0.5 m. Στη συνέχεια η στάθμη του υδατορεύματος παραμένει σταθερή, δηλαδή  $\zeta_E(t) = 0.5 \text{ m}$ ,  $t \geq \varepsilon$ . Η στάθμη του νερού στο υδατόρευμα που βρίσκεται στο δυτικό όριο του υδροφορέα θεωρείται ότι παραμένει σταθερή στα 5 m, δηλαδή  $\zeta_W(t) = 5 \text{ m}$ ,  $t \geq 0$ .

Είναι προφανές ότι για την παραπάνω περίπτωση αλληλεπίδρασης, οι διακυμάνσεις της ελεύθερης επιφάνειας του υδροφορέα δε μπορούν να θεωρηθούν μικρές σε σύγκριση με το μέσο κορεσμένο βάθος ροής. Αυτός είναι και ο λόγος που για την επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων του μοντέλου επιλέγεται η λύση των Serrano and Workman της μη γραμμικής εξίσωσης Boussinesq (2.7) και όχι κάποια από την πληθώρα αναλυτικών λύσεων των γραμμικοποιημένων εξισώσεων Boussinesq (2.8α) και (2.8β) που είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία. Τόσο η λύση που προκύπτει με τη μέθοδο της χωρικής μερικής διάσπασης όσο και η λύση που προκύπτει με τη μέθοδο της χρονικής μερικής διάσπασης μπορούν εύκολα να εφαρμοστούν χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της περίπτωσης ελέγχου που εξετάζεται εδώ. Πιο αναλυτικά, η θέση της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων μετά την απότομη πτώση της στάθμης του νερού στο ανατολικό υδατόρευμα, προσδιορίζεται εφαρμόζοντας την αναλυτική λύση που προκύπτει με τη μέθοδο της χωρικής μερικής διάσπασης, θεωρώντας ότι  $\varepsilon = 10 \text{ s}$ . Στη συνέχεια, η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων υπολογίζεται εφαρμόζοντας την αναλυτική λύση που προκύπτει με τη μέθοδο της χρονικής μερικής διάσπασης, χρησιμοποιώντας χρονικό βήμα  $\Delta t = 10 \text{ s}$ . Σε κάθε χρονικό βήμα, ως αρχική θέση της ελεύθερης επιφάνειας θεωρείται αυτή που προσδιορίστηκε από την εφαρμογή της αναλυτικής λύσης κατά το προηγούμενο χρονικό βήμα.

Προκειμένου να προσομοιωθεί η χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων με το IRENE-HYD, επιλέγονται οι ακόλουθες διαστάσεις για το μήκος,  $L$ , του υδροφορέα στη διεύθυνση  $y$  και τα πλάτη,  $W_W$  και  $W_E$ , των δύο υδατορευμάτων που βρίσκονται στο δυτικό και ανατολικό όριο του υδροφορέα:  $L = 20 \text{ m}$ ,  $W_W = 10 \text{ m}$  και  $W_E = 10 \text{ m}$ . Στο Σχήμα 3.18 (β) φαίνεται η διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου στο οριζόντιο επίπεδο  $x$ - $y$  χρησιμοποιώντας 50 στήλες ( $N = 50$ ) και 20 γραμμές ( $NJ = 20$ ). Στη διεύθυνση  $x$  χρησιμοποιείται χωρικό βήμα  $\Delta x_j = 1 \text{ m}$  στην περιοχή των επιφανειακών υδάτων και  $\Delta x_j = 0.5 \text{ m}$  στην περιοχή του υδροφορέα, προκειμένου το υψόμετρο της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων να υπολογισθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια. Στη



διεύθυνση  $y$  το χωρικό βήμα είναι ίσο με  $\Delta y_j = 1$  m. Στην κατακόρυφη διεύθυνση χρησιμοποιείται ένα στρώμα ( $NK = 1$ ) πάχους 5.5 m.

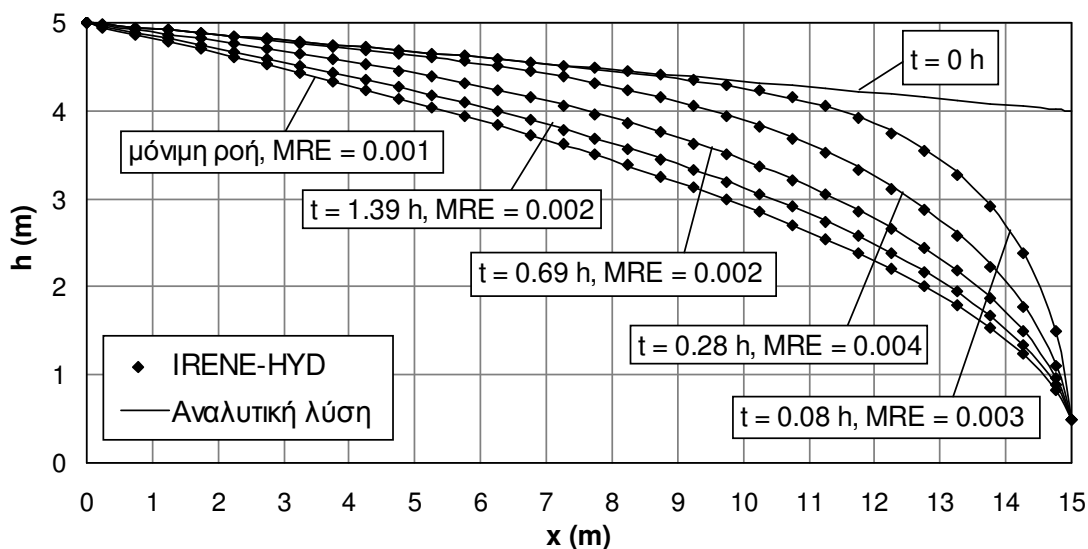


**Σχήμα 3.18:** Περίπτωση ελέγχου της ικανότητας του IRENE-HYD να προσομοιώνει τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της επιφάνειας των υπόγειων υδάτων σε ένα σύστημα επιφανειακών-υπόγειων νερών: (α) γεωμετρία και (β) διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου στο επίπεδο  $x$ - $y$

Το βόρειο και το νότιο όριο του υδροφορέα θεωρούνται αδιαπέρατα (βλ. Σχήμα 3.18 (β)). Το αρχικό βάθος νερού στα δύο υδατορεύματα που βρίσκονται στο δυτικό και ανατολικό όριο του υδροφορέα είναι  $H_W = 5$  m και  $H_E = 0.5$  m, αντίστοιχα. Στο νότιο ανοικτό όριο των δύο υδατορευμάτων επιβάλλεται σταθερή ταχύτητα εισροής ίση με 0.1 m/s. Αυτή η τιμή της ταχύτητας εισροής επιλέχθηκε έτσι ώστε, κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης, η στάθμη του νερού στο δυτικό και το ανατολικό υδατόρευμα να μπορεί να θεωρηθεί ότι παραμένει αμετάβλητη στα 5 m και 0.5 m, αντίστοιχα, παρουσιάζοντας μικρές μόνο διακυμάνσεις στη διεύθυνση  $y$ . Έτσι, η

υπόγεια ροή μπορεί να θεωρηθεί μονοδιάστατη στη διεύθυνση  $x$ , ώστε τα αποτελέσματα του IRENE-HYD να είναι συγκρίσιμα με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης των Serrano and Workman (1998).

Στο Σχήμα 3.19 παρουσιάζεται η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων στον φρεάτιο υδροφορέα, κατά τις χρονικές στιγμές  $t=0.08$  h,  $t=0.28$  h,  $t=0.69$  h και μετά την αποκατάσταση μόνιμης ροής, όπως υπολογίζεται με το IRENE-HYD και την αναλυτική λύση των Serrano and Workman (1998). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.19, η σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων του μοντέλου και των αποτελεσμάτων της αναλυτικής λύσης είναι εξαιρετική. Οι τιμές του μέσου σχετικού σφάλματος που υπολογίζονται για τις διάφορες χρονικές στιγμές είναι πολύ κοντά στο μηδέν (βλ. Σχήμα 3.19). Συνεπώς το μοντέλο μπορεί με ακρίβεια να προσομοιώσει τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων σε αυτήν την περίπτωση αλληλεπίδρασης επιφανειακών-υπόγειων νερών όπου γίνεται η παραδοχή μονοδιάστατης οριζόντιας υπόγεια ροής.



**Σχήμα 3.19:** Στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων στον φρεάτιο υδροφορέα του σχήματος 3.18 (α) κατά τις χρονικές στιγμές  $t=0.08$  h,  $t=0.28$  h,  $t=0.69$  h και σε συνθήκες μόνιμης ροής, όπως υπολογίζεται με το IRENE-HYD και την αναλυτική λύση των Serrano and Workman (1998) θεωρώντας ότι ισχύει η παραδοχή Dupuit οριζόντιας ροής

Η παραδοχή Dupuit οριζόντιας ροής, ωστόσο, οδηγεί σε μειωμένη ακρίβεια στον υπολογισμό της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών, ιδιαίτερα κοντά στο ανατολικό όριο του υδροφορέα, καθώς δεν είναι δυνατόν να εκτιμηθεί η επιφάνεια διήθησης. Προκειμένου να προσδιορισθεί με ακρίβεια η θέση της

ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων, πρέπει η υπόγεια ροή στο πρόβλημα αλληλεπίδρασης του σχήματος 3.18 (α) να θεωρηθεί διδιάστατη στο κατακόρυφο επίπεδο  $x-z$ . Έτσι, στο IRENE-HYD, το υπολογιστικό πεδίο διακριτοποιείται τώρα στην κατακόρυφη διεύθυνση  $z$  χρησιμοποιώντας 10 στρώματα ( $NK=10$ ). Το πάχος του πρώτου στρώματος επιλέγεται ίσο με  $\Delta z_1 = 1$  m, ενώ για τα στρώματα 2-10 ισχύει  $\Delta z_k = 0.5$  m. Ελλείπει κάποια αναλυτική λύση για το πρόβλημα αλληλεπίδρασης του σχήματος 3.18 (α) όταν η ροή στον φρεάτιο υδροφορέα θεωρείται διδιάστατη στο κατακόρυφο επίπεδο  $x-z$ , χρησιμοποιείται το αριθμητικό μοντέλο υπόγειων νερών MODFLOW (Visual MODFLOW 4.2, Waterloo Hydrogeologic Inc., 2005) για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του IRENE-HYD.

Στο MODFLOW, το υπολογιστικό πεδίο για την περίπτωση αλληλεπίδρασης του σχήματος 3.18 (α) διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας 32 στήλες ( $NJ=32$ ), 1 γραμμή ( $NJ=1$ ) και 10 στρώματα ( $NK=10$ ). Το χωρικό βήμα στη διεύθυνση  $x$  επιλέγεται ίσο με  $\Delta x_j = 0.5$  m, όπως και στο IRENE-HYD, εκτός από την πρώτη και την τελευταία στήλη για τις οποίες  $\Delta x_j = 0.1$  m. Οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος στις διευθύνσεις  $y$  και  $z$  είναι όμοιες με αυτές που χρησιμοποιούνται στο IRENE-HYD, δηλαδή  $\Delta y_j = 1$  m,  $\Delta z_1 = 1$  m και  $\Delta z_k = 0.5$  m για τα στρώματα 2-10. Η υδραυλική επικοινωνία μεταξύ του υδροφορέα και των υδατορευμάτων λαμβάνεται υπ' όψη ως οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet. Έτσι, για τα υπολογιστικά κελιά της πρώτης στήλης καθορίζεται σταθερό πιεζομετρικό φορτίο ίσο με 5 m ( $h_{1,1,k} = 5$  m,  $k=1,10$ ) προκειμένου να προσομοιωθεί η αλληλεπίδραση μεταξύ του φρεάτιου υδροφορέα και του υδατορεύματος που βρίσκεται στο δυτικό του όριο. Αντίστοιχα, για το κελί ( $i=32, j=1, k=10$ ) καθορίζεται σταθερό πιεζομετρικό φορτίο ίσο με 0.5 m ( $h_{32,1,10} = 0.5$  m), προκειμένου να προσομοιωθεί η αλληλεπίδραση μεταξύ του φρεάτιου υδροφορέα και του υδατορεύματος που βρίσκεται στο ανατολικό του όριο.

Και στα δύο αριθμητικά μοντέλα η ειδική αποθηκευτικότητα των πλήρως κορεσμένων υπολογιστικών κελιών θεωρείται ίση με  $0.003 \text{ m}^{-1}$ . Στο IRENE-HYD, η ειδική αποθηκευτικότητα κελιών που είναι μερικώς κορεσμένα θεωρείται ίση με το μηδέν. Στο MODFLOW χρησιμοποιείται η ειδική απόδοση για υπολογιστικά κελιά τα οποία είναι μερικώς κορεσμένα, η τιμή της οποίας επίσης θεωρείται μηδενική.

Στο IRENE–HYD, η επιφάνεια διήθησης στο κατάντη όριο του υπολογιστικού πεδίου των υπόγειων υδάτων μπορεί να εκτιμηθεί όπως περιγράφεται αναλυτικά στην παράγραφο 3.3.5. Στο MODFLOW, παρόλο που δεν περιλαμβάνεται κάποια μέθοδος υπολογισμού της επιφάνειας διήθησης, αυτή μπορεί να εκτιμηθεί με έμμεσο τρόπο χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό πακέτο ‘drain’. Πρόκειται για μια υπορουτίνα του MODFLOW που σχεδιάστηκε με σκοπό την προσομοίωση της λειτουργίας στραγγιστικών καναλιών. Στην υπορουτίνα ‘drain’ του MODFLOW θεωρείται ότι ένα στραγγιστικό κανάλι αφαιρεί νερό από τον υδροφορέα με ρυθμό ανάλογο της διαφοράς μεταξύ του πιεζομετρικού φορτίου στο υπολογιστικό κελί όπου βρίσκεται το στραγγιστικό κανάλι και της στάθμης του νερού στο κανάλι. Όταν βέβαια το πιεζομετρικό φορτίο στο υπολογιστικό κελί είναι χαμηλότερο της στάθμης του νερού στο στραγγιστικό κανάλι, θεωρείται ότι δεν υφίσταται αλληλεπίδραση μεταξύ του υδροφορέα και του στραγγιστικού καναλιού (McDonald and Harbaugh, 1988). Στην περίπτωση αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών που εξετάζεται εδώ, τοποθετούνται στραγγιστικά κανάλια στα κελιά της τελευταίας στήλης του υπολογιστικού πλέγματος του MODFLOW ( $i = 32$ ) που βρίσκονται στα στρώματα  $k = 1–9$ . Η στάθμη του νερού σε κάθε στραγγιστικό κανάλι θεωρείται ίση με το υψόμετρο του επάνω μετώπου του κελιού στο οποίο βρίσκεται το κανάλι. Με αυτόν τον τρόπο, επί της ουσίας επιβάλλεται η οριακή συνθήκη που ισχύει επάνω στην επιφάνεια διήθησης σε όλα τα κελιά που βρίσκονται πάνω από το κελί σταθερού πιεζομετρικού φορτίου ( $i = 32, j = 1, k = 10$ ), το οποίο ουσιαστικά αντιπροσωπεύει το υδατόρευμα στο ανατολικό όριο του υδροφορέα.

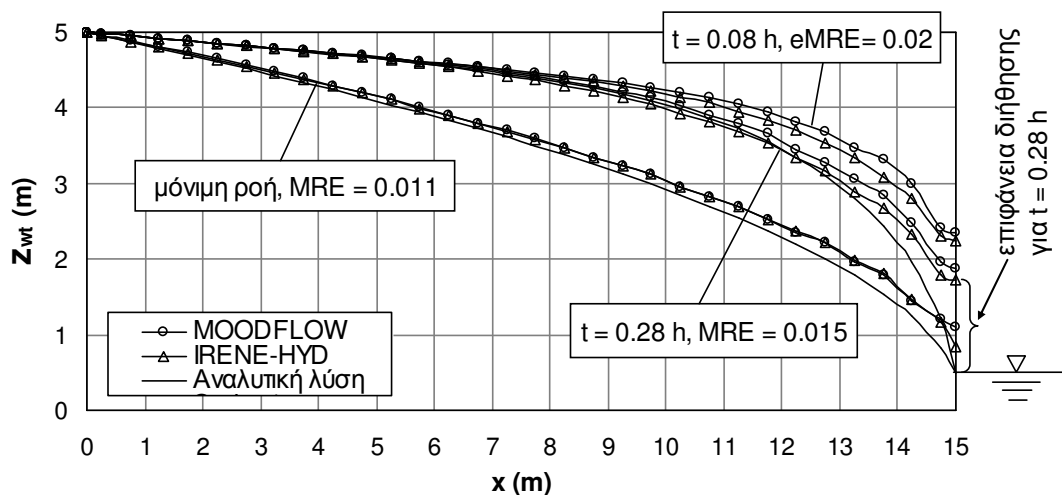
Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι στο MODFLOW η αλληλεπίδραση μεταξύ του υδροφορέα και των δύο υδατορευμάτων θα μπορούσε να προσομοιωθεί χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό πακέτο ‘general head boundary’. Στο υπολογιστικό αυτό πακέτο του MODFLOW, το οποίο έχει σχεδιαστεί για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών, η υδραυλική επικοινωνία μεταξύ του πορώδους μέσου και επιφανειακών υδάτινων σωμάτων λαμβάνεται υπ’ όψη ως οριακή συνθήκη τύπου Cauchy ή Dirichlet. Ωστόσο επιλέγεται να χρησιμοποιηθούν κελιά σταθερού πιεζομετρικού φορτίου για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ των υδατορευμάτων και του φρεάτιου υδροφορέα, ώστε να εφαρμοστεί το πακέτο ‘drain’ για τα υπολογιστικά κελιά που βρίσκονται πάνω από το κελί σταθερού πιεζομετρικού φορτίου ( $i = 32, j = 1, k = 10$ ) που αντιπροσωπεύει το υδατόρευμα που βρίσκεται στο ανατολικό όριο του υδροφορέα και να εκτιμηθεί με αυτόν τον τρόπο η επιφάνεια διήθησης. Πρέπει

επίσης να σημειωθεί ότι ενώ στη διεύθυνση  $x$  χρησιμοποιείται χωρικό βήμα  $\Delta x_i = 0.5$  m, για τις στήλες  $i = 1$  και  $i = 32$  επιλέγεται  $\Delta x_i = 0.1$  m προκειμένου να μειωθεί η απόσταση που χρειάζεται να ταξιδέψει το νερό μεταξύ των κελιών σταθερού πιεζομετρικού φορτίου που αντιπροσωπεύουν τα υδατορεύματα και των κελιών του υδροφορέα και επομένως να προσομοιωθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια η αλληλεπίδραση μεταξύ του φρεάτιου υδροφορέα και των υδατορευμάτων.

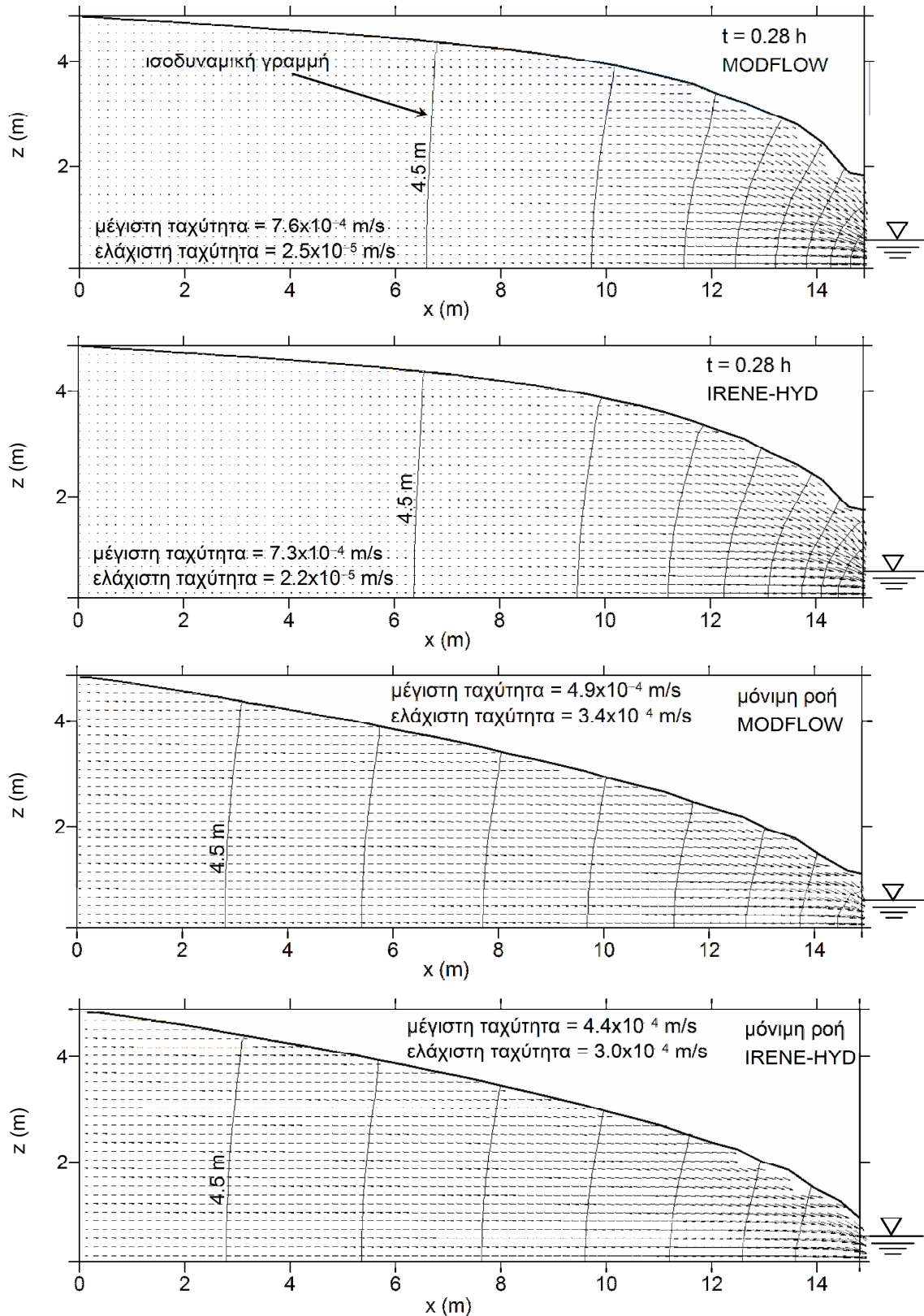
Στο Σχήμα 3.20 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του IRENE-HYD και του MODFLOW για τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων κατά τις χρονικές στιγμές  $t = 0.08$  h,  $t = 0.28$  h και μετά την αποκατάσταση μόνιμης ροής. Στο Σχήμα 3.21 απεικονίζονται το πεδίο ροής και η κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στον υδροφορέα, όπως υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τα δύο αριθμητικά μοντέλα, κατά τη χρονική στιγμή  $t = 0.28$  h και σε συνθήκες μόνιμης ροής. Για λόγους σύγκρισης, στο Σχήμα 3.20 παρουσιάζονται επίσης τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης των Serrano and Workman (1998) για  $t = 0.28$  h και μετά την αποκατάσταση μόνιμης ροής. Όπως ήταν αναμενόμενο, κοντά στο κατάντη όριο του φρεάτιου υδροφορέα, όπου σχηματίζεται η επιφάνεια διήθησης, παρατηρούνται μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων της αναλυτικής λύσης των Serrano and Workman (1998) και των αποτελεσμάτων των αριθμητικών μοντέλων IRENE-HYD και MODFLOW. Ενώ σύμφωνα με την αναλυτική λύση των Serrano and Workman (1998) η ελεύθερη επιφάνεια των υπόγειων υδάτων καταλήγει στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο υδατόρευμα που βρίσκεται στο ανατολικό όριο του υδροφορέα, με το IRENE-HYD υπολογίζονται οι ακόλουθες τιμές για την επιφάνεια διήθησης: 1.25 m κατά τη χρονική στιγμή  $t = 0.28$  h και 0.25 m σε συνθήκες μόνιμης ροής. Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας το MODFLOW υπολογίζεται επιφάνεια διήθησης 0.88 m κατά τη χρονική στιγμή  $t = 0.28$  h και 0.1 m μετά την αποκατάσταση μόνιμης ροής. Καθώς η απόσταση από το υδατόρευμα που βρίσκεται στο ανατολικό όριο του υδροφορέα αυξάνεται, η απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων της αναλυτικής λύσης των Serrano and Workman (1998) και των αποτελεσμάτων των αριθμητικών μοντέλων μειώνεται.

Παρατηρώντας τα σχήματα 3.20 και 3.21 διαπιστώνεται ότι υπάρχει ικανοποιητική συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE-HYD και του MODFLOW για τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας, τα πιεζομετρικά φορτία και τις ταχύτητες ροής των υπόγειων υδάτων στον φρεάτιο υδροφορέα. Στο Σχήμα 3.20 σημειώνονται άλλωστε και οι τιμές του μέσου σχετικού σφάλματος για τη στάθμη της

ελεύθερης επιφάνειας, οι οποίες είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Αντίστοιχα, για τα πιεζομετρικά φορτία υπολογίζεται μέσο σχετικό σφάλμα  $MRE = 0.014$  για τη χρονική στιγμή  $t = 0.28$  h και  $MRE = 0.004$  για συνθήκες μόνιμης ροής. Οι τιμές του μέσου σχετικού σφάλματος για τις ταχύτητες είναι επίσης μικρές:  $MRE = 0.1$  για τη χρονική στιγμή  $t = 0.28$  h και  $MRE = 0.04$  για συνθήκες μόνιμης ροής. Παρά τις μικρές διαφορές που παρατηρούνται μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο μοντέλων, στο Σχήμα 3.20 φαίνεται ότι η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων που υπολογίζεται με το IRENE-HYD είναι συστηματικά χαμηλότερη σε σύγκριση με αυτήν που υπολογίζεται με το MODFLOW. Αυτό προκύπτει και από την κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στον υδροφορέα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.21, όπου φαίνεται ότι όταν χρησιμοποιείται το IRENE-HYD οι ισοδυναμικές γραμμές είναι μετατοπισμένες προς τα αριστερά σε σύγκριση με τις ισοδυναμικές γραμμές που προκύπτουν όταν χρησιμοποιείται το MODFLOW. Οι μεγαλύτερες αποκλίσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο μοντέλων παρατηρούνται κοντά στο κατάντη όριο του υδροφορέα και οφείλονται στις διαφορετικές μεθόδους εκτίμησης της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας και της επιφάνειας διήθησης που εφαρμόζονται στο IRENE-HYD και το MODFLOW.



**Σχήμα 3.20:** Σύγκριση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων που υπολογίζεται εφαρμόζοντας τα αριθμητικά μοντέλα IRENE-HYD και MODFLOW για την περίπτωση αλληλεπίδρασης επιφανειακών-υπόγειων νερών του σχήματος 3.18 (α)



ισοδιάσταση ισοδυναμικών γραμμών: 0.5 m

**Σχήμα 3.21:** Πεδίο ροής και κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στον φρεάτιο υδροφορέα του σχήματος 3.18 (α), όπως υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά μοντέλα IRENE-HYD και MODFLOW

Στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζονται οι τιμές της επιφάνειας διήθησης που υπολογίζονται με το IRENE-HYD και το MODFLOW σε διάφορες χρονικές στιγμές. Στον ίδιο πίνακα φαίνεται και η τιμή της επιφάνειας διήθησης που προκύπτει εφαρμόζοντας την αναλυτική λύση της Polubarinova-Kochina (1962), η οποία ισχύει για μόνιμη ροή. Η τιμή αυτή πάρθηκε από γράφημα στο βιβλίο του Harr (1962, σελ. 207), στο οποίο παρουσιάζονται τιμές της επιφάνειας διήθησης που υπολογίζονται με την αναλυτική λύση της Polubarinova-Kochina (1962), συναρτήσει του λόγου  $\zeta_E / \zeta_W$ , για διάφορες τιμές του λόγου  $W_a / \zeta_W$ . Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.2, η τιμή της επιφάνειας διήθησης για συνθήκες μόνιμης ροής που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το IRENE-HYD είναι πολύ κοντά στην τιμή που προκύπτει με την αναλυτική λύση της Polubarinova-Kochina (1962), πιο κοντά σε σύγκριση με την τιμή που υπολογίζεται με το MODFLOW.

**Πίνακας 3.2:** Τιμές της επιφάνειας διήθησης για το πρόβλημα του σχήματος 3.18 (α) σύμφωνα με τα αριθμητικά μοντέλα IRENE-HYD και MODFLOW και την αναλυτική λύση της Polubarinova-Kochina (1962)

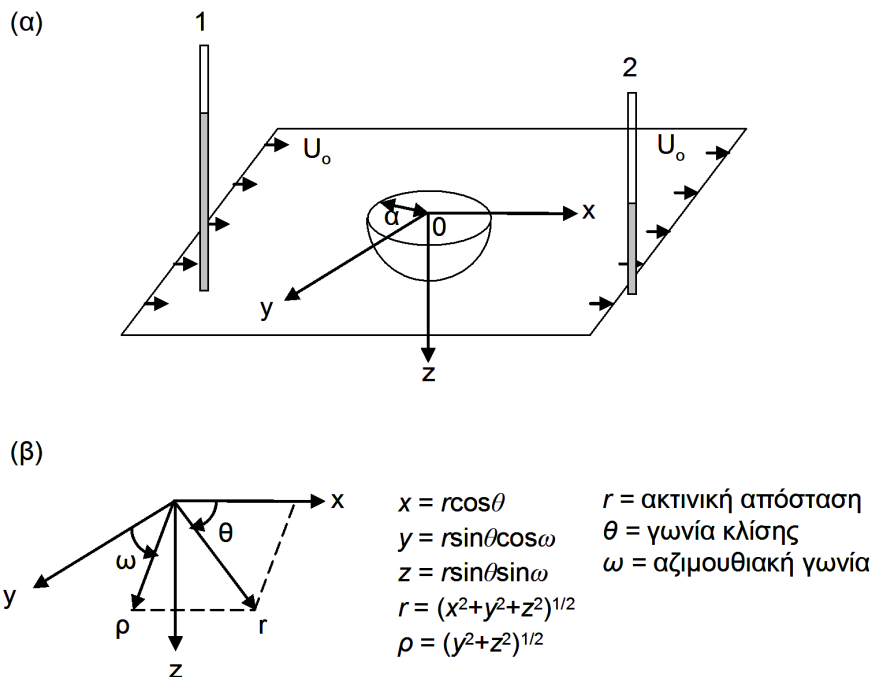
t (h)	Επιφάνεια διήθησης (m) IRENE-HYD	Επιφάνεια διήθησης (m) MODFLOW	Επιφάνεια διήθησης (m) Αναλυτική λύση Polubarinova-Kochina (1962)
0.08	1.75	1.86	
0.28	1.25	1.38	
0.69	0.75	0.82	
μόνιμη ροή	0.25	0.60	0.3

Εν κατακλείδι, η σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE-HYD με αυτά του MODFLOW και της αναλυτικής λύσης της Polubarinova-Kochina (1962), οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το IRENE-HYD μπορεί να εκτιμήσει με ακρίβεια τη θέση της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων, την επιφάνεια διήθησης, την κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων και το πεδίο ροής για την περίπτωση αλληλεπίδρασης επιφανειακών-υπόγειων νερών του σχήματος 3.18 (α) όταν η ροή στον υδροφορέα θεωρείται διδιάστατη στο κατακόρυφο επίπεδο x-z.



### 3.4.4 Έλεγχος της ικανότητας του IRENE-HYD να προσομοιώνει την αλληλεπίδραση με ταξύ λιμνών και υπόγειων νερών

Στην περίπτωση ελέγχου που εξετάζεται σε αυτήν την παράγραφο, τα αποτελέσματα του IRENE-HYD επιβεβαιώνονται χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση του Kacimov (2000), η οποία περιγράφει την τρισδιάστατη μόνιμη ροή των υπόγειων υδάτων σε ομογενή και ισότροπο υδροφορέα, 'απείρων' θεωρητικά διαστάσεων στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$ , ο οποίος αλληλεπιδρά με λίμνη ημισφαιρικού πυθμένα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.22. Η συγκεκριμένη περίπτωση ελέγχου επιλέχθηκε προκειμένου να αξιολογηθούν τα αποτελέσματα του IRENE-HYD για τα πιεζομετρικά φορτία και το πεδίο ροής των υπόγειων υδάτων σε ένα πρόβλημα αλληλεπίδρασης επιφανειακών-υπόγειων νερών όπου η υπόγεια ροή θεωρείται τρισδιάστατη.



**Σχήμα 3.22:** Περίπτωση ελέγχου της ικανότητας του μοντέλου να προσομοιώνει την αλληλεπίδραση μεταξύ λιμνών και υπόγειων νερών: (α) γεωμετρία και (β) σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας της λίμνης, η οποία βρίσκεται σε άμεση υδραυλική επαφή με τον υδροφορέα, θεωρείται ότι παραμένει σταθερή. Καθώς  $x \rightarrow \pm\infty$ , η ροή στον υδροφορέα είναι ομοιόμορφη με ειδική παροχή  $U_0$  στη διεύθυνση  $x$  (βλ. Σχήμα 3.22). Τα πιεζόμετρα 1 και 2 που φαίνονται στο Σχήμα 3.22

μετρούν τις τιμές των πιεζομετρικών φορτίων για  $x \rightarrow \pm\infty$ . Κατά μήκος του πυθμένα της λίμνης το πιεζομετρικό φορτίο είναι ίσο με  $h(x, y, z) = -h_\ell$ , όπου  $h_\ell$  είναι η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας της λίμνης που μετράται σε σχέση με την αρχή του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.23. Σε μεγάλη απόσταση από τη λίμνη, μπορεί να θεωρηθεί ότι η ροή των υπόγειων υδάτων δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη της λίμνης. Συνεπώς σε μεγάλη απόσταση από τη λίμνη η ροή στον υδροφορέα είναι μονοδιάστατη στη διεύθυνση  $x$  και η πτώση των πιεζομετρικών φορτίων κατά τη διεύθυνση της ροής είναι γραμμική:  $h(x, y, z) \sim -U_o x / K$ , όπου  $K$  είναι η υδραυλική αγωγιμότητα του υδροφορέα. Ανάλογα με τις τιμές των  $U_o$  και  $h_\ell$  διακρίνονται οι ακόλουθες περιπτώσεις: (α) η λίμνη τροφοδοτείται από τα υπόγεια νερά (gaining lake) (βλ. Σχήμα 3.23 (α)), (β) ο υπόγειος υδροφορέας τροφοδοτείται από τη λίμνη (losing lake) ή (γ) η λίμνη τροφοδοτείται από τα υπόγεια νερά μέσω ενός τμήματος του πυθμένα της ενώ ταυτόχρονα τροφοδοτεί τον υδροφορέα μέσω του υπόλοιπου τμήματος του πυθμένα (flow-through lake) (βλ. Σχήμα 3.23 (β)).

Εισάγοντας την έννοια του δυναμικού ταχύτητας  $\Phi = -Kh(x, y, z)$  [ $L^2T^{-1}$ ] και ορίζοντας το αδιάστατο δυναμικό ως  $\hat{\Phi} = \Phi / (K |h_\ell|)$ , η εξίσωση Laplace και οι οριακές συνθήκες που ισχύουν για την περίπτωση αλληλεπίδρασης που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.22 μπορούν να διατυπωθούν ως εξής (Kacimov, 2000):

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial z^2} = 0$$

$$\hat{\Phi} \sim \beta X, \text{ καθώς } R = r / \alpha = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \rightarrow \infty \quad (3.119)$$

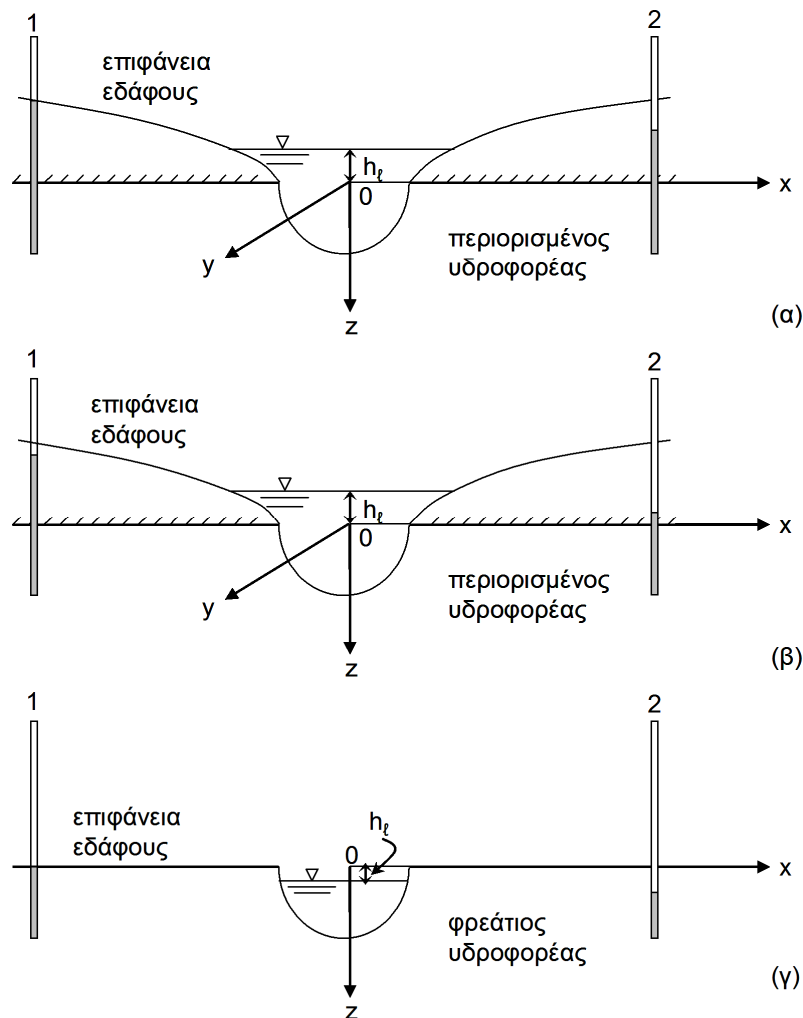
$\hat{\Phi} = \pm 1$  κατά μήκος της επιφάνειας του πυθμένα της λίμνης  
ανάλογα με το πρόσημο του  $h_\ell$

όπου  $\alpha$  είναι η ακτίνα της λίμνης,  $(X, Y, Z) = (x, y, z) / \alpha$  είναι οι αδιάστατες συντεταγμένες,  $\beta = \alpha U_o / (Kh_\ell)$  είναι μία αδιάστατη παράμετρος και  $r$  είναι η ακτινική συντεταγμένη του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων που φαίνεται στο Σχήμα 3.22 (β). Ο Kacimov (2000) χρησιμοποίησε τη μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών για την επίλυση του προβλήματος οριακών τιμών (3.119). Η λύση μπορεί να διατυπωθεί σε σφαιρικές συντεταγμένες ως εξής:

$$\hat{\phi}(r, \theta, \omega) = \frac{1}{R} - \frac{\beta \cos \theta}{R^2} + \beta R \cos \theta \quad \text{ή} \quad (3.120)$$

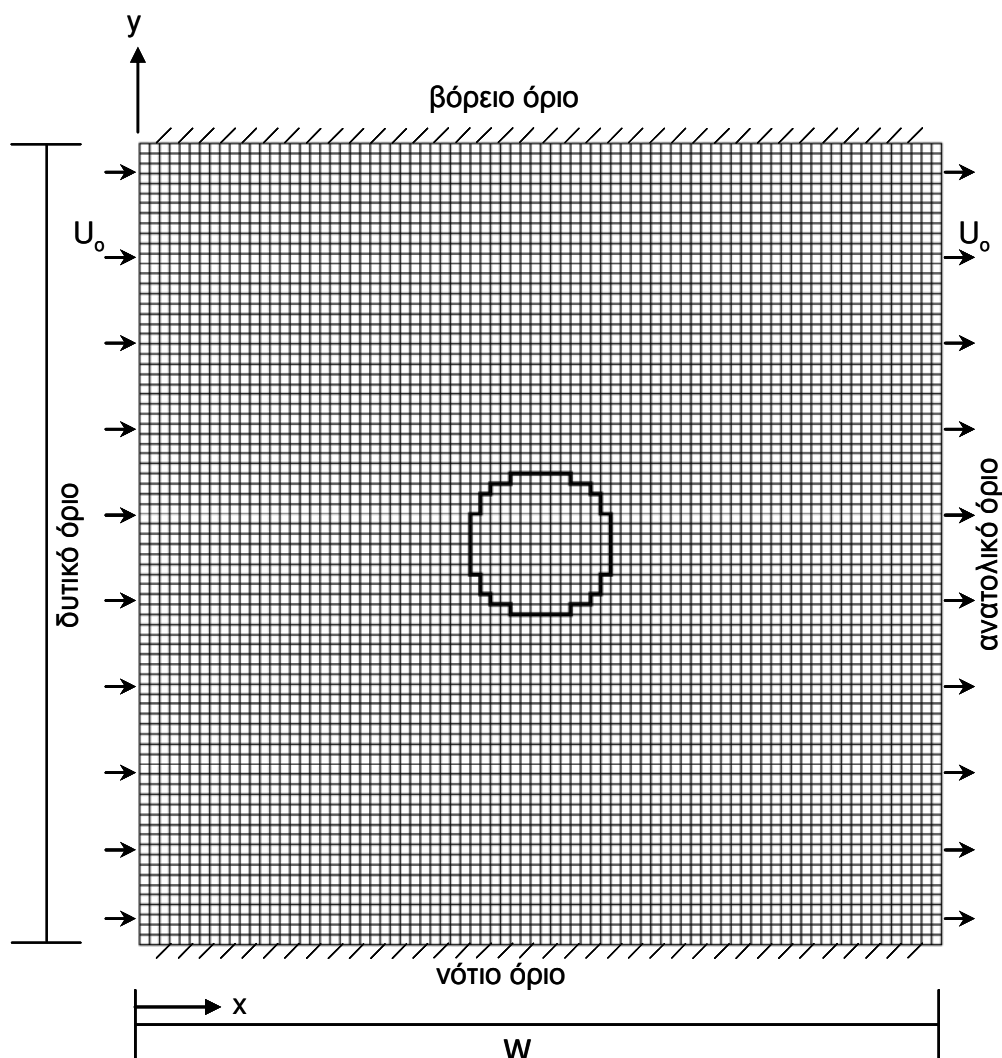
$$h(r, \theta, \omega) = -\frac{|h_\ell|}{R} + \frac{|h_\ell| \beta \cos \theta}{R^2} - |h_\ell| \beta R \cos \theta$$

Η αναλυτική λύση του Kacimov (2000), όπως φαίνεται από τις οριακές συνθήκες της σχέσης (3.119), διατυπώθηκε για περιορισμένο υδροφορέα απείρων διαστάσεων. Πρακτικά μπορεί να εφαρμοστεί και σε φρεάτιο υδροφορέα με μικρή υδραυλική κλίση (βλ. Σχήμα 3.23 (γ)), ενώ οι διαστάσεις του υδροφορέα θα πρέπει να είναι τέτοιες ώστε σε μεγάλη απόσταση από τη λίμνη η ροή των υπόγειων υδάτων να μην επηρεάζεται από την ύπαρξη της λίμνης και να είναι μονοδιάστατη στη διεύθυνση  $x$ .



**Σχήμα 3.23:** Γεωμετρία της περίπτωσης ελέγχου στο επίπεδο  $xOz$ : (α) περίπτωση περιορισμένου υδροφορέα, η λίμνη τροφοδοτείται από τα υπόγεια νερά, (β) περίπτωση περιορισμένου υδροφορέα, η λίμνη εν μέρει τροφοδοτείται και εν μέρει τροφοδοτεί τον υδροφορέα και (γ) περίπτωση φρεάτιου υδροφορέα, η λίμνη εν μέρει τροφοδοτείται και εν μέρει τροφοδοτεί τα υπόγεια νερά

Το IRENE-HYD και η αναλυτική λύση του Kacimov (2000) εφαρμόζονται για την περίπτωση αλληλεπίδρασης μεταξύ ενός φρεατίου υδροφορέα και μιας μικρής λίμνης, η οποία εν μέρει τροφοδοτείται και εν μέρει τροφοδοτεί τα υπόγεια νερά. Η ακτίνα της λίμνης και η υδραυλική αγωγιμότητα του υδροφορέα επιλέγονται ως  $a = 14$  m και  $K = 0.001$  m/s, αντίστοιχα. Η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας της λίμνης θεωρείται ότι βρίσκεται 0.5 m κάτω από την αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και η ειδική παροχή για  $x \rightarrow \pm\infty$  θεωρείται ίση με  $U_o = 0.013 \times 10^{-3}$  m/s. Η εξίσωση (3.120) εύκολα εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δεδομένα.

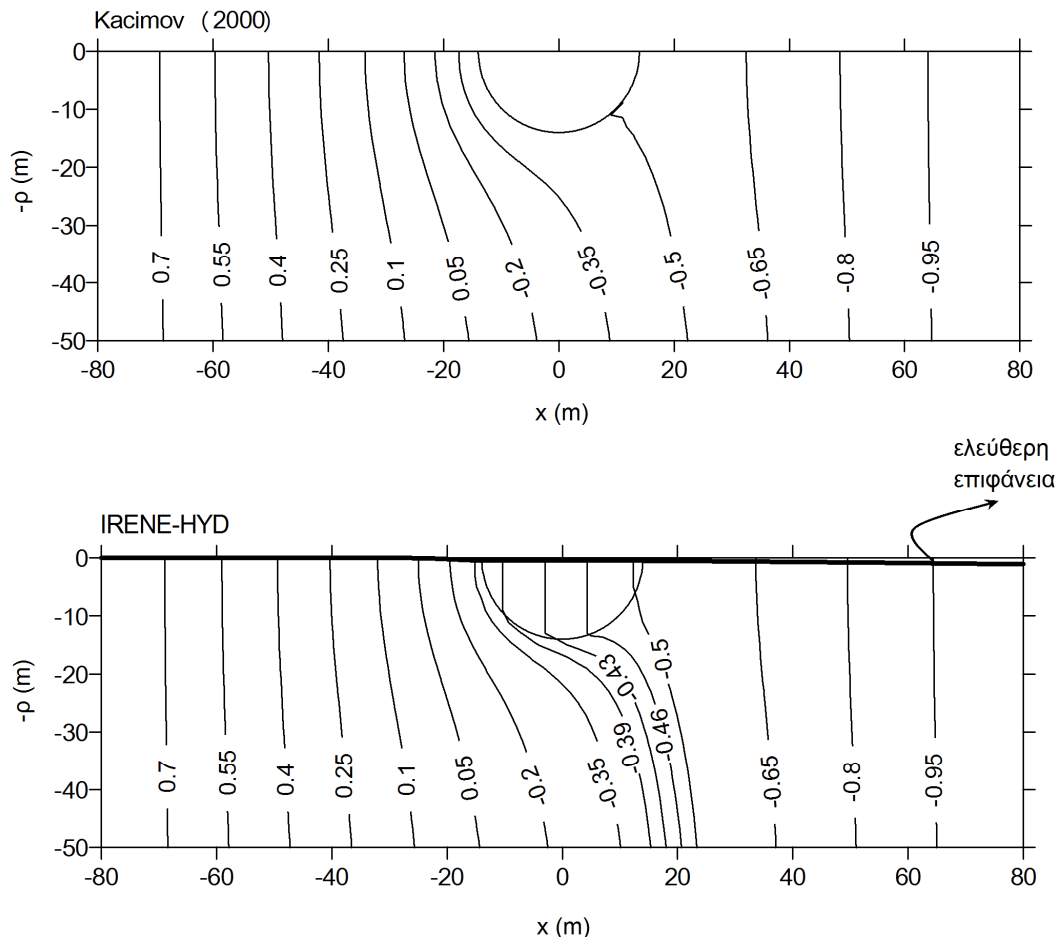


**Σχήμα 3.24:** Πρώτο στρώμα του πλέγματος διακριτοποίησης του υπολογιστικού πεδίου του IRENE-HYD για την περίπτωση αλληλεπίδρασης που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.22. Η εντονότερη μαύρη γραμμή αποτελεί το όριο των υπολογιστικών κελιών της λίμνης

Προκειμένου να προσομοιωθεί η αλληλεπίδραση μεταξύ της λίμνης και των υπόγειων νερών χρησιμοποιώντας IRENE-HYD, επιλέγονται οι ακόλουθες διαστάσεις για τον υδροφορέα: πλάτος  $W = 160$  m, μήκος  $L = 160$  m και πάχος  $B = 250$  m. Το υπολογιστικό πεδίο διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας 80 στήλες ( $NJ = 80$ ), 80 γραμμές ( $NJ = 80$ ) και 25 στρώματα ( $NK = 25$ ). Οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$  είναι  $\Delta x_i = \Delta y_j = \Delta z_{i,j,k} = 2$  m. Το πρώτο στρώμα του υπολογιστικού πλέγματος φαίνεται στο Σχήμα 3.24. Στο δυτικό και το ανατολικό όριο του υδροφορέα καθορίζεται εγκάρσια ειδική παροχή  $U_o = 0.012 \times 10^{-3}$  m/s, ενώ το βόρειο και το νότιο όριο του υδροφορέα θεωρούνται αδιαπέρατα. Θεωρώντας τη βάση του υδροφορέα ως το επίπεδο αναφοράς, η αρχική στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας του νερού στη λίμνη τίθεται ίση με  $\zeta = 249.50$  m και το IRENE-HYD εκτελείται έως ότου αποκατασταθεί μόνιμη ροή.

Όπως προκύπτει από την εξίσωση (3.120), οι τιμές των πιεζομετρικών φορτίων είναι ανεξάρτητες της αζιμουθιακής γωνίας  $\omega$ . Συνεπώς η ροή των υπόγειων υδάτων είναι αξονοσυμμετρική και μπορεί να αναλυθεί σε οποιοδήποτε επίπεδο που ορίζεται από την εξίσωση  $\omega = \text{σταθερή}$ . Με άλλα λόγια, η ροή μπορεί να αναλυθεί σε οποιαδήποτε διατομή διέρεχεται από τον άξονα  $x$  χρησιμοποιώντας τις σχετικές συντεταγμένες  $x$ ,  $\rho$ , όπου  $\rho = (y^2 + z^2)^{0.5}$ . Στο Σχήμα 3.25 συγκρίνονται τα πιεζομετρικά φορτία που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το IRENE-HYD και την αναλυτική λύση του Kacimov (2000) για τη διατομή  $xOz$ . Η διατομή αυτή επιλέγεται προς χάριν ευκολίας αναπαράστασης των αποτελεσμάτων του IRENE-HYD. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.25, η συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων του μοντέλου και της αναλυτικής λύσης είναι πολύ καλή. Το μέσο σχετικό σφάλμα είναι  $MRE = 0.05$ . Οι μεγαλύτερες αποκλίσεις μεταξύ της αναλυτικής λύσης του Kacimov (2000) και των αποτελεσμάτων του IRENE-HYD παρατηρούνται στην περιοχή ακριβώς ανάντη της λίμνης, όπου τα πιεζομετρικά φορτία που υπολογίζονται με το μοντέλο είναι 1–4 cm υψηλότερα σε σύγκριση με αυτά που υπολογίζονται εφαρμόζοντας την αναλυτική λύση. Πλησιάζοντας στο όρια του υδροφορέα η σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων του μοντέλου και της αναλυτικής λύσης είναι εξαιρετική. Θα πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.25, κοντά στα όρια του υδροφορέα οι ισοδυναμικές γραμμές είναι σχεδόν κατακόρυφες. Συνεπώς οι διαστάσεις που επιλέχθηκαν για την προσομοίωση του υδροφορέα στο IRENE-HYD επαρκούν ώστε κοντά στα όρια η ροή των υπόγειων υδάτων να μην επηρεάζεται από την ύπαρξη της λίμνης και να είναι μονοδιάστατη στη διεύθυνση  $x$  όπως απαιτείται από την αναλυτική λύση.

Οι αποκλίσεις που παρατηρούνται μεταξύ των τιμών των πιεζομετρικών φορτίων που υπολογίζονται με το IRENE-HYD και την αναλυτική λύση του Kacimov (2000) για το τμήμα του υδροφορέα ακριβώς ανάντη της λίμνης, οφείλονται στο γεγονός ότι στο IRENE-HYD η λίμνη δεν θεωρείται όριο σταθερού πιεζομετρικού φορτίου  $h = -0.5$  m όπως συμβαίνει στην αναλυτική λύση. Αντιθέτως, στο IRENE-HYD επιλύονται οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή των επιφανειακών υδάτων και υπολογίζονται οι συνιστώσες της ταχύτητας και η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας για τα υπολογιστικά κελιά που αποτελούν τη λίμνη. Η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας των υδάτων της λίμνης που υπολογίζεται με το IRENE-HYD είναι υψηλότερη από  $-0.5$  m, κυμαίνεται μεταξύ  $-0.037$  m στο ανατολικό όριο της λίμνης και  $-0.5$  m στο δυτικό όριο της λίμνης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.25.



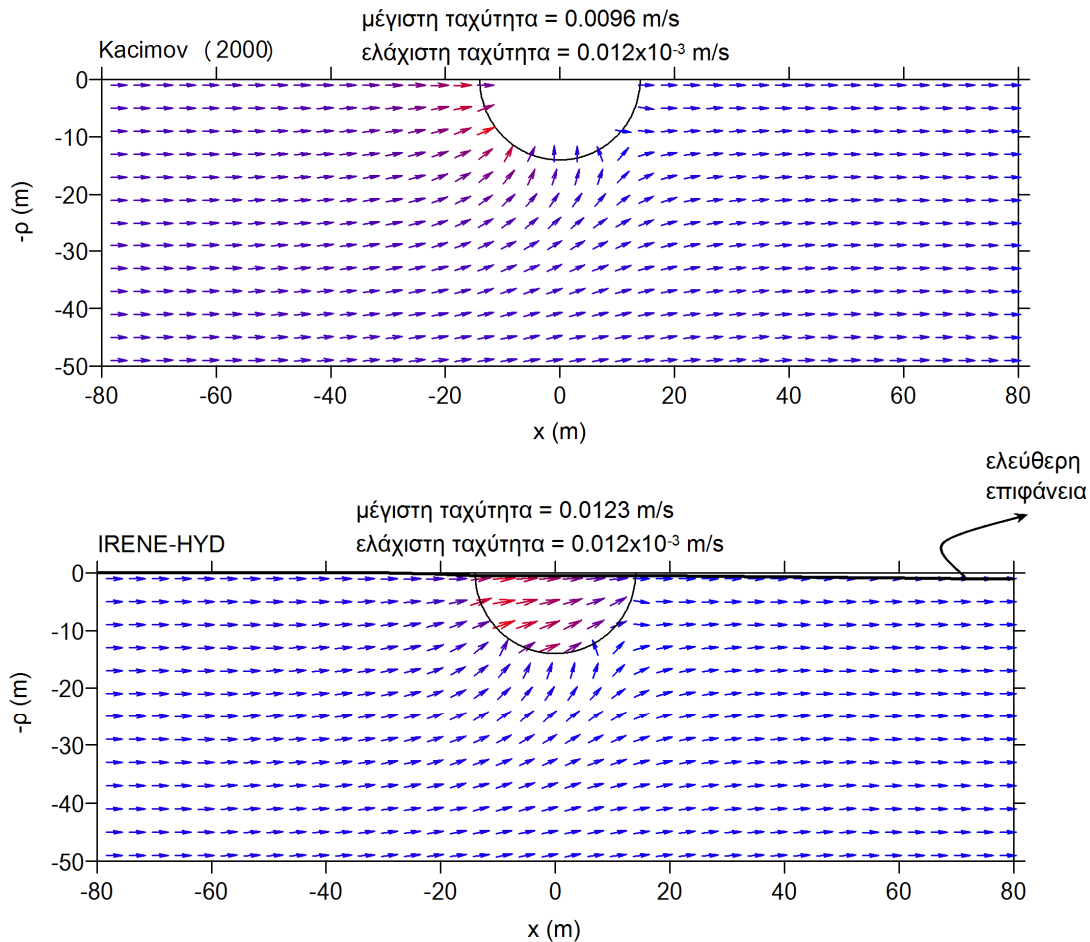
οι ισοδυναμικές γραμμές που απεικονίζονται στο σχήμα δίνονται σε m

**Σχήμα 3.25:** Σύγκριση των πιεζομετρικών φορτίων που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση του Kacimov (2000) και το IRENE-HYD για την περίπτωση αλληλεπίδρασης λίμνης-υπόγειων νερών που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.22

Από την εξίσωση (3.120) προκύπτουν οι συνιστώσες της ειδικής παροχής της αξονοσυμμετρικής ροής των υπόγειων υδάτων:

$$q_x(x, \rho) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} K |h_\ell| \alpha + \beta \frac{K |h_\ell|}{\alpha} - \beta \frac{\rho^2 - 2x^2}{(x^2 + \rho^2)^{5/2}} K |h_\ell| \alpha^2 \quad (3.121\alpha)$$

$$q_\rho(x, \rho) = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -\frac{\rho}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} K |h_\ell| \alpha + 3\beta \frac{\rho x}{(x^2 + \rho^2)^{5/2}} K |h_\ell| \alpha^2 \quad (3.121\beta)$$



**Σχήμα 3.26:** Σύγκριση των πεδίων ταχυτήτων που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση του Kasimov (2000) και το IRENE–HYD για την περίπτωση αλληλεπίδρασης λίμνης–υπόγειων νερών που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.22

Στο Σχήμα 3.26 παρουσιάζεται η σύγκριση μεταξύ των ταχυτήτων που υπολογίζονται εφαρμόζοντας τις εξισώσεις (3.121α) και (3.121β) και το IRENE-HYD για τη διατομή  $x0z$ . Το μέσο σχετικό σφάλμα μεταξύ των αποτελεσμάτων του μοντέλου και της αναλυτικής λύσης είναι  $MRE = 0.013$ . Στο Σχήμα 3.26 διακρίνονται τρία διαφορετικά τμήματα της ροής των υπόγειων υδάτων: (α) το τμήμα της ροής που τροφοδοτεί τη λίμνη, (β) το τμήμα της ροής που πηγάζει από τη λίμνη και (γ) το τμήμα της ροής που παρακάμπτει τη λίμνη. Στο Σχήμα 3.26 παρουσιάζεται επίσης το πεδίο ταχυτήτων ροής των επιφανειακών υδάτων που υπολογίζεται με το IRENE-HYD. Παρόλο που οι ταχύτητες αυτές δεν είναι δυνατόν να επιβεβαιωθούν ποσοτικά χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση του Kacimov (2000), συμφωνούν ποιοτικά με το αναμενόμενο πεδίο ταχυτήτων στη λίμνη.

#### **3.4.5 Έλεγχος της ικανότητας του IRENE-HYD να προσομοιώνει την αλληλεπίδραση με ταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών**

Στις περιπτώσεις αλληλεπίδρασης επιφανειακών-υπόγειων νερών που διερευνήθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, χρησιμοποιήθηκαν αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης που περιγράφει τη ροή των υπόγειων υδάτων στο σύστημα των επιφανειακών-υπόγειων νερών για την επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων του IRENE-HYD. Για τη διατύπωση αυτών των αναλυτικών λύσεων, η διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων θεωρήθηκε γνωστή και χρησιμοποιήθηκε ως οριακή συνθήκη για την επίλυση της εξίσωσης που περιγράφει τη ροή των υπόγειων υδάτων. Έτσι, παρόλο που στο IRENE-HYD η υδραυλική επικοινωνία μεταξύ υπόγειων νερών και επιφανειακών υδάτινων σωμάτων δε λαμβάνεται υπ' όψη ως οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet ή Cauchy, στις περιπτώσεις αλληλεπίδρασης επιφανειακών-υπόγειων νερών που εξετάστηκαν προηγουμένως ήταν δυνατή η επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων του μοντέλου μόνο για τις μεταβλητές της ροής των υπόγειων υδάτων. Στην περίπτωση ελέγχου που εξετάζεται σε αυτήν την παράγραφο τα αποτελέσματα του μοντέλου επιβεβαιώνονται χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική αναλυτική λύση του Lal (2001). Η εργασία του Lal (2001) είναι μία από τις ελάχιστες στις οποίες επιλύονται οι εξισώσεις τόσο της επιφανειακής όσο και της υπόγειας ροής για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών. Συνεπώς σε αυτήν την περίπτωση ελέγχου μπορούν να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα του IRENE-HYD για τις μεταβλητές της ροής τόσο των επιφανειακών όσο και των υπόγειων υδάτων.



Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2, ο Lal (2001) διερεύνησε την αλληλεπίδραση μεταξύ ομογενούς και ισότροπου υδροφορέα, θεωρητικά ημί-άπειρου στη διεύθυνση  $x$  και άπειρου πλάτους στη διεύθυνση  $y$ , και υδατορεύματος μερικής ή πλήρους διείσδυσης, το οποίο διαχωρίζεται από τον υδροφορέα από ημι-περατό πυθμένα και όχθες και έχει ορθογωνική διατομή σταθερού πλάτους  $W_r$  (βλ. Σχήμα 2.8). Ο Lal (2001) θεώρησε μονοδιάστατη ροή κατά μήκος του υδατορεύματος και διδιάστατη οριζόντια ροή στον υδροφορέα. Χρησιμοποίησε τη μέθοδο διαταραχών για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων (2.35)–(2.38), οι οποίες περιγράφουν τη ροή κατά μήκος του υδατορεύματος (εξισώσεις (2.35) και (2.36), οι οποίες αποτελούν τις εξισώσεις του κύματος μηδενικής αδράνειας), τη ροή στον υδροφορέα (εξίσωση (2.37), η οποία είναι η εξίσωση διάχυσης) και τη διήθηση επιφανειακού νερού στον υπόγειο υδροφορέα ή την τροφοδοσία του υδατορεύματος από τα υπόγεια νερά (εξίσωση (2.38)), θεωρώντας μία συνεχή, μικρού πλάτους ημιτονοειδή διαταραχή της στάθμης του υδατορεύματος στο ανάντη όριο ( $x = 0$ ).

Ο Lal (2001) θεώρησε περιοδικές λύσεις εκθετικής μορφής για τις μεταβλητές  $\zeta(x,t)$ ,  $q_r(x,t)$  και  $h(x,y,t)$ :

$$\zeta(x,t) = \zeta_0(x) + \zeta' \exp(i\omega t + \lambda x) \quad (3.122\alpha)$$

$$q_r(x,t) = q_{r_0}(x) + q_r' \exp(i\omega t + \lambda x) \quad (3.122\beta)$$

$$h(x,t) = h_0(x,y) + \zeta' \exp(i\omega t + \lambda x + \theta y), \quad 0 < y \leq b \quad (3.122\gamma)$$

$$h(x,t) = h_0(x,y) + \zeta' \exp[i\omega t + \lambda x + \theta b + \mu(y-b)], \quad y > b \quad (3.122\delta)$$

όπου  $\zeta_0(x)$ ,  $q_{r_0}(x)$  και  $h_0(x,y)$  συμβολίζουν τις αρχικές κατανομές της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας του υδατορεύματος, της παροχής του υδατορεύματος και των πιεζομετρικών φορτίων στον υδροφορέα, αντίστοιχα,  $\zeta'$  είναι το πλάτος της ημιτονοειδούς διακύμανσης της στάθμης του υδατορεύματος στο ανάντη όριο και  $q_r'$  είναι το πλάτος της διακύμανσης της παροχής στο ανάντη όριο του υδατορεύματος. Στις εξισώσεις (3.122α)–(3.122γ),  $f = f_1 + f_2 I$ ,  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 I$ ,  $\mu = \mu_1 + \mu_2 I$  και  $\theta = \theta_1 + \theta_2 I$  είναι μιγαδικές σταθερές, όπου:  $\lambda_1$  = συντελεστής απομείωσης του πλάτους της διακύμανσης της στάθμης του υδατορεύματος κατά τη διεύθυνση  $x$  [ $L^{-1}$ ]  $\mu_1$  = συντελεστής απομείωσης του πλάτους της διακύμανσης των πιεζομετρικών

φορτίων κατά τη διεύθυνση  $y$ ,  $\lambda_2$  = αριθμός κύματος της διακύμανσης της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας του υδατορεύματος στη διεύθυνση  $x$  [ $L^{-1}$ ],  $\mu_2$  = αριθμός κύματος της διακύμανσης των πιεζομετρικών φορτίων στη διεύθυνση  $y$  [ $L^{-1}$ ],  $f_1$  = συντελεστής χρονικής απομείωσης των διακυμάνσεων [ $T^{-1}$ ] και  $f_2$  = συχνότητα των διακυμάνσεων [ $T^{-1}$ ]. Τέλος,  $\theta = 2\mu T / K_b \rho$  [ $L^{-1}$ ]. Υπενθυμίζεται ότι  $\rho$  [ $L$ ] είναι η βρεχόμενη περίμετρος της διατομής του υδατορεύματος.

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.122α)–(3.122δ) στις εξισώσεις (2.35)–(2.38) προκύπτει, έπειτα από τις απαραίτητες πράξεις και απλοποιήσεις, το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων προς επίλυση (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Lal, 2001):

$$P_r (\hat{\lambda}^2 + \hat{\mu}^2) = \hat{f} \quad (3.123\alpha)$$

$$\hat{\lambda}^2 - \frac{\hat{\lambda}}{P_d} + \frac{2\hat{\mu}P_r}{P_b} \exp\left(\frac{\hat{\mu}P_r}{P_m}\right) = \hat{f} \quad (3.123\beta)$$

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στις εξισώσεις (3.123α)–(3.123β) ορίζονται στον Πίνακα 3.3. Το σύστημα εξισώσεων (3.123α)–(3.123β) μπορεί να επιλυθεί για δύο από τις τρεις μιγαδικές μεταβλητές  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\mu}$  και  $\hat{f}$  όταν η τρίτη είναι γνωστή. Στη συνέχεια, με γνωστές τις τιμές των μεταβλητών  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\mu}$  και  $\hat{f}$  υπολογίζονται οι τιμές των  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $f$  και  $\theta$  (βλ. Πίνακα 3.3), οι οποίες αντικαθίστανται στις εξισώσεις (3.124α)–(3.124δ) ώστε να προκύψουν οι λύσεις για τις μεταβλητές  $\zeta(x,t)$ ,  $q_r(x,t)$  και  $h(x,y,t)$ :

$$\zeta(x,t) = \zeta_0(x) + \zeta' \exp(f_1 t + \lambda_1 x) \sin(f_2 t + \lambda_2 x) \quad (3.124\alpha)$$

$$q_r(x,t) = q_{r0}(x) + q_r' \exp(f_1 t + \lambda_1 x) \sin(f_2 t + \lambda_2 x) \quad (3.124\beta)$$

$$h(x,t) = h_0(x,y) + \zeta' \exp(f_1 t + \lambda_1 x + \theta_1 y) \sin(f_2 t + \lambda_2 x + \theta_2 y), \quad 0 < y \leq b \quad (3.124\gamma)$$

$$h(x,t) = h_0(x,y) + \zeta' \exp[f_1 t + \lambda_1 x + \theta_1 b + \mu_1(y-b)] \sin[f_2 t + \lambda_2 x + \theta_2 b + \mu_2(y-b)], \quad y > b \quad (3.124\delta)$$

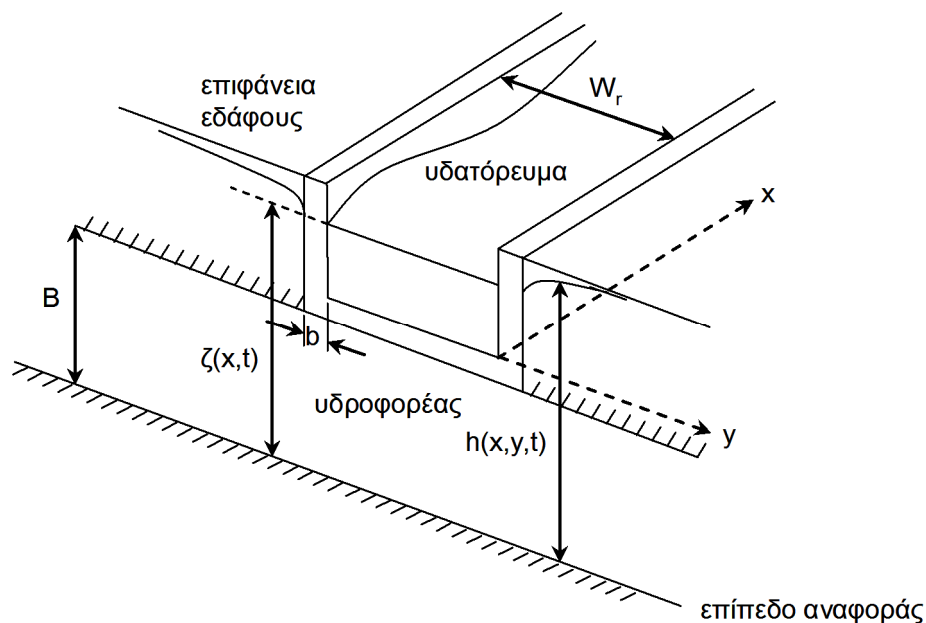
**Πίνακας 3.3:** Ορισμός των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται στις εξισώσεις (3.123α)–(3.123β)

Μεταβλητή	Περιγραφή	Ορισμός	Τιμή για την περίπτωση ελέγχου του IRENE-HYD
$\hat{f}$ [-]	μιγαδική μεταβλητή	$\hat{f} = f / f_r = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 I$	$I$
$f_r$ [ $T^{-1}$ ]	χαρακτηριστική συχνότητα	$f_r = 2\pi / \tau$	$3.49 \times 10^{-1} s^{-1}$
$\hat{\lambda}$ [-]	μιγαδική μεταβλητή	$\hat{\lambda} = \lambda \Lambda = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 I$	$-0.952 - 0.715 I$
$\Lambda$ [L]	χαρακτηριστικό μήκος	$\Lambda = \sqrt{q_{r_0} / n S_f f_r}$	12350 m
$\hat{\mu}$ [-]	μιγαδική μεταβλητή	$\hat{\mu} = \mu \Lambda = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 I$	$-126.37 - 126.37 I$
$P_r$ [-]	αδιάστατη μεταβλητή που χαρακτηρίζει τη διοχετευτικότητα και την αποθηκευτικότητα του υδροφορέα και το συντελεστή τριβών του υδατορεύματος	$P_r = T / S_c f_r \Lambda^2$	$3.131 \times 10^{-5}$
$P_b$ [-]	αδιάστατη μεταβλητή που χαρακτηρίζει το πλάτος του υδατορεύματος	$P_b = W_r / S_c \Lambda$	0.016
$P_d$ [-]	αδιάστατη μεταβλητή που χαρακτηρίζει το βάθος ροής και την κλίση του πυθμένα του υδατορεύματος	$P_d = \frac{H_0}{(n + m) S_f \Lambda}$	9.717
$P_m$ [-]	αδιάστατη μεταβλητή που χαρακτηρίζει την αντίσταση του πυθμένα του υδατορεύματος στη ροή μεταξύ του υδατορεύματος και του υδροφορέα	$P_m = \frac{K_b W_r}{b f_r \Lambda S_c}$	0.065
$\hat{\lambda}_{ni}$ [-]	μιγαδική μεταβλητή	$\hat{\lambda}_{ni} = \hat{\lambda}_{1ni} + \hat{\lambda}_{2ni} I$	$-0.657 - 0.706 I$
$\theta$ [ $L^{-1}$ ]	μιγαδική μεταβλητή	$\theta = \theta_1 + \theta_2 I$	$-0.233 - 0.233 I$

όπου:  $q_{r_0}$  = παροχή ομοιόμορφης ροής,  $H_0$  = βάθος ομοιόμορφης ροής,  $S_f = \eta^2 u^n / H^m$  ή  $S_f = \frac{1}{C_z^2} u^n / H^m$  και  $n, m$  = σταθερές. Αν χρησιμοποιηθεί η εξίσωση Manning,  $n = 2$  και  $m = 4/3$ , ενώ για την εξίσωση Chezy  $n = 2$  και  $m = 1$ .

Για τον έλεγχο του IRENE-HYD επιλέγεται η περίπτωση περιορισμένου υδροφορέα στο μέσο του οποίου βρίσκεται υδατόρευμα το οποίο δεν διεισδύει καθόλου στον υδροφορέα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.27. Συνεπώς η διήθηση επιφανειακού νερού προς τον υπόγειο υδροφορέα πραγματοποιείται αποκλειστικά μέσω του πυθμένα του υδατορεύματος, δηλαδή  $p = W_r$ . Το μήκος του υδατορεύματος και του υδροφορέα στη διεύθυνση  $x$  είναι  $L = 50000$  m και το πλάτος

του υδροφορέα στη διεύθυνση  $y$  είναι  $W_a = 500$  m. Το πλάτος του υδατορεύματος είναι  $W_s = 30$  m, το πάχος και η υδραυλική αγωγιμότητα του πυθμένα του υδατορεύματος είναι  $b = 500$  m και  $K_b = 7 \times 10^{-4}$  m/s, αντίστοιχα, και η κλίση του πυθμένα του υδατορεύματος είναι  $S_0 = 10^{-5}$ . Η υδραυλική αγωγιμότητα του υδροφορέα επιλέγεται ίση με  $K = 0.001$  m/s και ο συντελεστής αποθηκευτικότητας ίσος με  $S_c = 0.15$ . Το πάχος του υδροφορέα μεταβάλλεται από  $D = 50$  m στο ανάντη όριο ως  $D = 49.5$  m στο κατόντη όριο προκειμένου να ακολουθεί την κλίση του πυθμένα του υδατορεύματος.



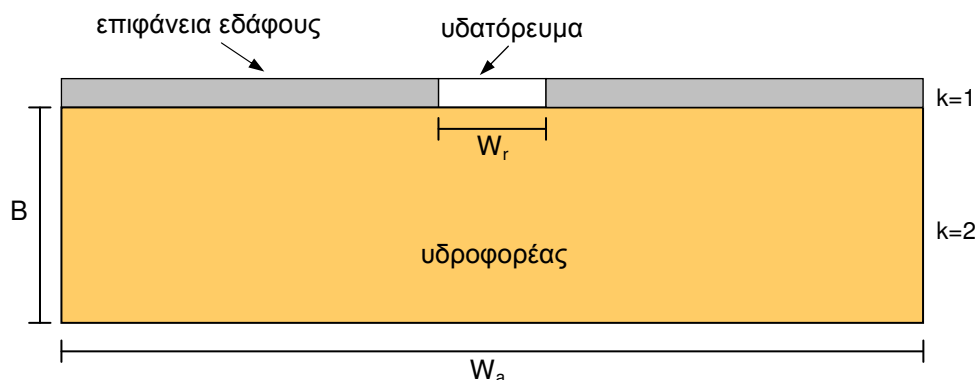
**Σχήμα 3.27:** Γεωμετρία της περίπτωσης αλληλεπίδρασης υδατορεύματος-υδροφορέα που εξετάστηκε στην εργασία του Lal (2001) και χρησιμοποιείται για την επιβεβαίωση του IRENE-HYD

Αρχικά το βάθος ροής κατά μήκος του υδατορεύματος θεωρείται ίσο με το βάθος ομοιόμορφης ροής  $H_0 = 4$  m, που υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης Manning για παροχή  $q_{r0} = 1.064$  m<sup>2</sup>/s (η ταχύτητα ομοιόμορφης ροής είναι  $u_0 = 0.266$  m/s), κλίση τριβών  $S_f = S_0 = 10^{-5}$  και συντελεστή τραχύτητας Manning  $\eta = 0.03$  m<sup>-1/3</sup>s. Ο υδροφορέας και το υδατόρευμα βρίσκονται αρχικά σε υδραυλική ισορροπία, δηλαδή  $h_0(x, y) = \zeta_0(x)$ . Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  επιβάλλεται στο ανάντη όριο του υδατορεύματος ημιτονοειδής διαταραχή της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας της μορφής:  $\zeta = \zeta_0 + \zeta' \sin(2\pi / \tau)$ , όπου  $\zeta' = 1$  m και  $\tau = 5$  h. Από την εξίσωση του

ημιτονοειδούς κυματισμού προκύπτει ότι  $f_1 = 0$  και  $f_2 = f_r = 2\pi/\tau$ , οπότε  $\hat{f} = I$ . Οι εξισώσεις (3.123α) και (3.123β) μπορούν τώρα να επιλυθούν επαναληπτικά (βλ. Lal, 2001) για τις μιγαδικές μεταβλητές  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\mu}$  χρησιμοποιώντας τη γνωστή τιμή της  $\hat{f}$ . Οι τιμές των αδιάστατων παραμέτρων  $P_r$ ,  $P_b$ ,  $P_d$ ,  $P_m$  που υπολογίζονται από τα δεδομένα της περίπτωσης ελέγχου και χρησιμοποιούνται για την επίλυση των εξισώσεων (3.123α) και (3.123β) φαίνονται στον Πίνακα 3.3. Στον ίδιο πίνακα φαίνονται και οι τιμές που προκύπτουν για τις μεταβλητές  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\mu}$  και  $\theta$  από την επίλυση των εξισώσεων (3.123α) και (3.123β), καθώς και η τιμή της μεταβλητής  $\hat{\lambda}$  για την περίπτωση που επιφανειακά και υπόγεια νερά δεν αλληλεπιδρούν (π.χ. πρακτικά αδιαπέρατος πυθμένας υδατορεύματος). Αν θεωρηθεί ότι δεν υφίσταται αλληλεπίδραση μεταξύ του υδατορεύματος και του υδροφορέα, οι παράμετροι  $P_r$ ,  $P_b$  και  $P_m$  δεν ορίζονται και η τιμή της μεταβλητής  $\hat{\lambda}$ , η οποία σε αυτήν την περίπτωση συμβολίζεται ως  $\hat{\lambda}_{ni}$ , μπορεί να υπολογιστεί άμεσα μέσω της εξίσωσης (3.123β).

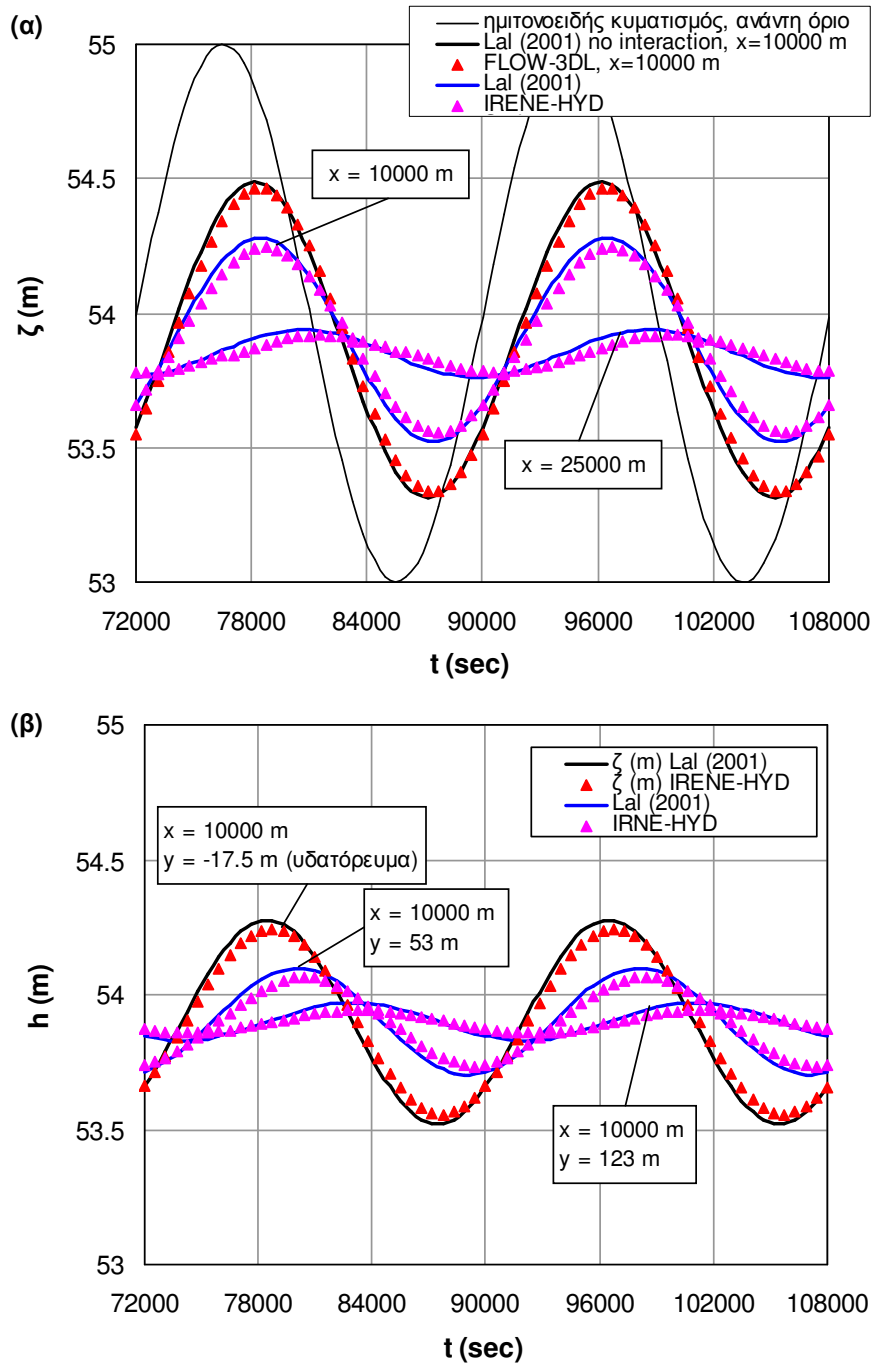
Προκειμένου να προσομοιωθεί η αλληλεπίδραση μεταξύ του υδατορεύματος και του υδροφορέα με το IRENE-HYD, το υπολογιστικό πεδίο διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας 100 στήλες, 100 γραμμές και 2 στρώματα. Οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$  είναι  $\Delta x_j = 500$  m και  $\Delta y_j = 5$  m. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.28, το υδατόρευμα βρίσκεται στο πρώτο στρώμα του υπολογιστικού πλέγματος, ενώ το δεύτερο στρώμα καταλαμβάνεται από τον υδροφορέα. Τα μοναδικά 'ενεργά' υπολογιστικά κελιά στο πρώτο στρώμα είναι τα κελιά που αποτελούν το υδατόρευμα. Τα στρώματα δεν είναι οριζόντια έτσι ώστε να ακολουθούν την κλίση του πυθμένα του υδατορεύματος, οπότε το πάχος των υπολογιστικών κελιών είναι μεταβλητό στη διεύθυνση  $x$ . Πιο συγκεκριμένα, το πάχος των υπολογιστικών κελιών του πρώτου στρώματος κυμαίνεται μεταξύ 5 m ( $x = 0$ ) και 5.5 m ( $x = L$ ), ενώ το πάχος των υπολογιστικών κελιών του δεύτερου στρώματος κυμαίνεται μεταξύ 50 m ( $x = 0$ ) και 49.5 m ( $x = L$ ). Τα όρια του υδροφορέα θεωρούνται αδιαπέρατα. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  επιβάλλεται ο ημιτονοειδής κυματισμός στο ανάντη όριο του υδατορεύματος και το IRENE-HYD εκτελείται έως ότου αποκατασταθεί μόνιμη περιοδική ροή. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση εκτιμάται ότι για  $x \geq 40000$  m και  $y \geq 235$  m οι τιμές των πιεζομετρικών φορτίων στον υδροφορέα επηρεάζονται ελάχιστα από τις

διακυμάνσεις της στάθμης του υδατορεύματος. Συνεπώς οι διαστάσεις που επιλέχθηκαν για τον υδροφορέα ικανοποιούν την αναλυτική λύση στην οποία θεωρείται πεδίο άπειρων διαστάσεων.



**Σχήμα 3.28:** Κατακόρυφη διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου του IRENE–HYD για το πρόβλημα του σχήματος 3.27. Με γκρι χρώμα φαίνονται οι περιοχές που βρίσκονται εκτός του υπολογιστικού πεδίου.

Στο Σχήμα 3.29 παρουσιάζεται η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD και της αναλυτικής λύσης του Lal (2001). Στο Σχήμα 3.29 (α) φαίνεται η χρονική διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας του υδατορεύματος στις θέσεις  $x = 10000$  m και  $x = 25000$ . Στο ίδιο σχήμα, για λόγους σύγκρισης, παρουσιάζονται επίσης τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης και του FLOW–3DL για τη χρονική διακύμανση της στάθμης του υδατορεύματος στη θέση  $x = 10000$  m, θεωρώντας ότι δεν υφίσταται αλληλεπίδραση μεταξύ του υδατορεύματος και του υδροφορέα. Τα αποτελέσματα του IRENE–HYD και του FLOW–3DL που απεικονίζονται στο Σχήμα 3.29 (α) είναι για τη θέση  $y = -17.5$  m (μέσο του υδατορεύματος). Το Σχήμα 3.29 (β) δείχνει τη χρονική διακύμανση των πιεζομετρικών φορτίων κατά τη διεύθυνση  $y$ , πιο συγκεκριμένα στις θέσεις  $x = 10000$  m,  $y = 53$  m και  $x = 10000$ ,  $y = 123$  m. Όπως φαίνεται στα γραφήματα 3.29 (α) και 3.29 (β), η σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων του μοντέλου και της αναλυτικής λύσης είναι ικανοποιητική. Το μέσο σχετικό σφάλμα μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD και των αποτελεσμάτων της αναλυτικής λύσης του Lal (2001) είναι  $MRE = 0.042$  για τις τιμές της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας του υδατορεύματος και  $MRE = 0.063$  για τις τιμές των πιεζομετρικών φορτίων.



**Σχήμα 3.29:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων της αναλυτικής λύσης του Lal (2001) και του IRENE-HYD για το πρόβλημα αλληλεπίδρασης του σχήματος 3.27: (α) χρονική διακύμανση της στάθμης του υδατορεύματος στις θέσεις  $x = 10000$  m και  $x = 25000$  m και (β) χρονική διακύμανση των πιεζομετρικών φορτίων στις θέσεις  $x = 10000$  m,  $y = 53$  m και  $x = 10000$  m,  $y = 123$  m

Αν θεωρηθεί ότι το υδατόρευμα και ο υδροφορέας δεν αλληλεπιδρούν, από την επίλυση της εξίσωσης (3.123β) προκύπτει:  $\hat{\lambda}_{1_{ni}} = -0.657$  και  $\hat{\lambda}_{2_{ni}} = -0.706$ . Η

σύγκριση μεταξύ των τιμών αυτών και των τιμών  $\hat{\lambda}_1 = -0.952$  και  $\hat{\lambda}_2 = -0.715$ , που προκύπτουν εφαρμόζοντας την αναλυτική λύση του Lal (2001) για την περίπτωση που το υδατόρευμα αλληλεπιδρά με τα υπόγεια νερά, δείχνει ότι ο συντελεστής απομείωσης του πλάτους της χρονικής διακύμανσης της στάθμης του υδατορεύματος στη διεύθυνση  $x$ ,  $\hat{\lambda}_1$ , επηρεάζεται σημαντικά από την υδραυλική επικοινωνία με τα υπόγεια νερά. Επιπλέον, ο αριθμός κύματος,  $\hat{\lambda}_2$ , μεταβάλλεται από  $-0.706$  σε  $-0.715$  που σημαίνει ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των χρονικών διακυμάνσεων της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας κατά μήκος του υδατορεύματος αυξάνεται. Τα παραπάνω διαπιστώνονται στο Σχήμα 3.29 (α), όπου φαίνεται ότι η διακύμανση της στάθμης του υδατορεύματος στη θέση  $x = 10000$  m που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τόσο την αναλυτική λύση όσο και το IRENE-HYD, θεωρώντας ότι το υδατόρευμα αλληλεπιδρά με τα υπόγεια νερά, έχει μειωμένο πλάτος και είναι ελαφρώς μετατοπισμένη στο χρόνο σε σύγκριση με τη διακύμανση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας του υδατορεύματος που προβλέπεται από την αναλυτική και το FLOW-3DL για την περίπτωση που δεν υφίσταται αλληλεπίδραση μεταξύ του υδατορεύματος και του υδροφορέα. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι απόλυτες τιμές της στάθμης του υδατορεύματος που υπολογίζονται εφαρμόζοντας το FLOW-3DL είναι έως 35% υψηλότερες σε σχέση με αυτές που υπολογίζονται εφαρμόζοντας το ολοκληρωμένο αριθμητικό μοντέλο επιφανειακών-υπόγειων νερών IRENE-HYD. Συνεπώς σε ένα σύστημα υδατορευμάτων-υπόγειων νερών είναι σημαντικό να λαμβάνεται υπ' όψη η μεταξύ τους αλληλεπίδραση προκειμένου να αποφευχθούν σημαντικά λάθη στην εκτίμηση των μεταβλητών της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων.

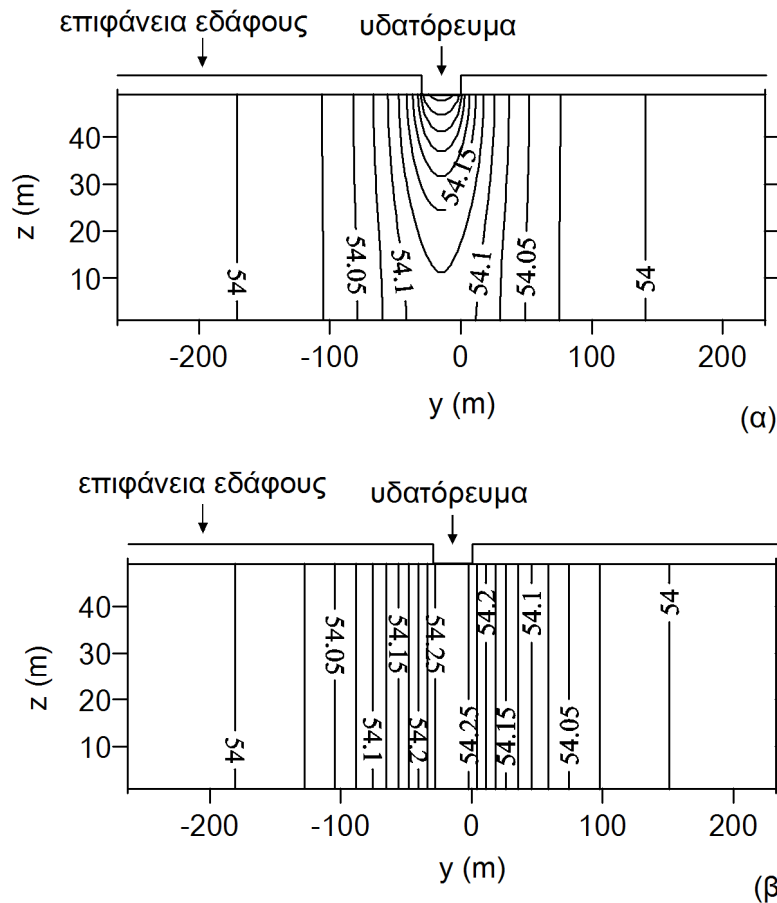
Η αναλυτική λύση του Lal (2001) διατυπώθηκε θεωρώντας διδιάστατη οριζόντια ροή στον υδροφορέα. Ωστόσο, η παραδοχή οριζόντιας ροής οδηγεί σε σημαντικά σφάλματα στον υπολογισμό των πιεζομετρικών φορτίων και των ταχυτήτων ροής των υπόγειων υδάτων στην περιοχή του υδροφορέα κοντά στο υδατόρευμα, όπου η κατακόρυφη συνιστώσα της ροής είναι σημαντική. Προκειμένου να επιτευχθεί μία ακριβής εκτίμηση των μεταβλητών της ροής των υπόγειων υδάτων στο τμήμα του υδροφορέα που βρίσκεται κοντά στο υδατόρευμα, εφαρμόζεται ξανά το IRENE-HYD για το πρόβλημα του σχήματος 3.27, χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά 25 στρώματα για την κατακόρυφη διακριτοποίηση του υδροφορέα. Στο Σχήμα 3.30 παρουσιάζεται η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE-HYD και της αναλυτικής λύσης του Lal (2001) για την κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στο κατακόρυφο



επίπεδο  $y-z$  στη θέση  $x = 10000$  m, κατά το χρόνο  $t = \tau / 4$ . Στο Σχήμα 3.30 (α) φαίνεται ότι οι ισοδυναμικές γραμμές κοντά στο υδατόρευμα δεν είναι κατακόρυφες λόγω του τρισδιάστατου χαρακτήρα της ροής. Η μέγιστη απόκλιση μεταξύ των πιεζομετρικών φορτίων που υπολογίζονται με το μοντέλο και των πιεζομετρικών φορτίων που υπολογίζονται με την αναλυτική λύση είναι 0.15 m και παρατηρείται στο τμήμα του υδροφορέα που βρίσκεται κάτω από τον πυθμένα του υδατορεύματος. Για αποστάσεις από το υδατόρευμα  $y > 80$  m, οι ισοδυναμικές γίνονται κατακόρυφες – υποδεικνύοντας ότι η ροή μπορεί να θεωρηθεί οριζόντια – και οι αποκλίσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων του μοντέλου και της αναλυτικής λύσεις είναι μικρές.

Τα χαρακτηριστικά της τρισδιάστατης ροής των υπόγειων υδάτων για το πρόβλημα που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.27, είναι δυνατόν να εκτιμηθούν χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε από τα αριθμητικά μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών, στα οποία θεωρείται τρισδιάστατη υπόγεια ροή και μονοδιάστατη επιφανειακή ροή και όπου τα υπό-μοντέλα επιφανειακών και υπόγειων νερών συνδυάζονται στην κατακόρυφη διεύθυνση (π.χ. Swain and Wexler, 1996, Jobson and Harbaugh, 1999, Hussein and Schwartz, 2003, Prudic et al., 2004). Ωστόσο, για περιπτώσεις μεγαλύτερων υδατορευμάτων που διεισδύουν μερικώς στον υδροφορέα θα πρέπει ιδανικά να χρησιμοποιηθεί ένα μοντέλο επιφανειακών-υπόγειων νερών, όπως είναι το IRENE-HYD, όπου η ροή των επιφανειακών υδάτων μπορεί να θεωρηθεί διδιάστατη ή τρισδιάστατη και τα υπό-μοντέλα ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων συνδυάζονται στην κοινή διεπιφάνεια επιφανειακών-υπόγειων νερών, τόσο στην κατακόρυφη όσο και στις οριζόντιες διευθύνσεις. Προκειμένου το IRENE-HYD να εφαρμοστεί σε μία τέτοια περίπτωση αλληλεπίδρασης υδατορεύματος-υπόγειων νερών, το πρόβλημα του σχήματος 3.27 τροποποιείται ως εξής: (α) το πλάτος του υδατορεύματος θεωρείται ίσο με  $W_r = 90$  m και το πλάτος του υδροφορέα ίσο με  $W_a = 1500$  m, (β) το πάχος του υδροφορέα είναι  $B = 53$  m και το υδατόρευμα διεισδύει μερικώς στον υδροφορέα, (γ) θεωρώντας ότι  $S_0 = 10^{-5}$ , το βάθος διείσδυσης του υδατορεύματος στον υδροφορέα κυμαίνεται μεταξύ 13 m στο ανάντη όριο και 13.5 στο κατόντη όριο και (δ) αρχικά το βάθος ροής κατά μήκος του υδατορεύματος θεωρείται ίσο με το βάθος ομοιόμορφης ροής  $H_0 = 12$  m, που υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης Manning για παροχή  $q_{r_0} = 6.624$  m<sup>2</sup>/s, κλίση τριβών  $S_f = S_0 = 10^{-5}$  και συντελεστή τραχύτητας Manning  $\eta = 0.03$  m<sup>-1/3</sup>s. Τα υπόλοιπα

χαρακτηριστικά του προβλήματος παραμένουν τα ίδια, δηλαδή ο υδροφορέας και το υδατόρευμα βρίσκονται αρχικά σε υδραυλική ισορροπία και τη χρονική στιγμή  $t = 0$  επιβάλλεται στο ανάντη όριο του υδατορεύματος ημιτονοειδής διαταραχή της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας, με πλάτος  $\zeta' = 1$  m και περίοδο  $\tau = 5$  h.

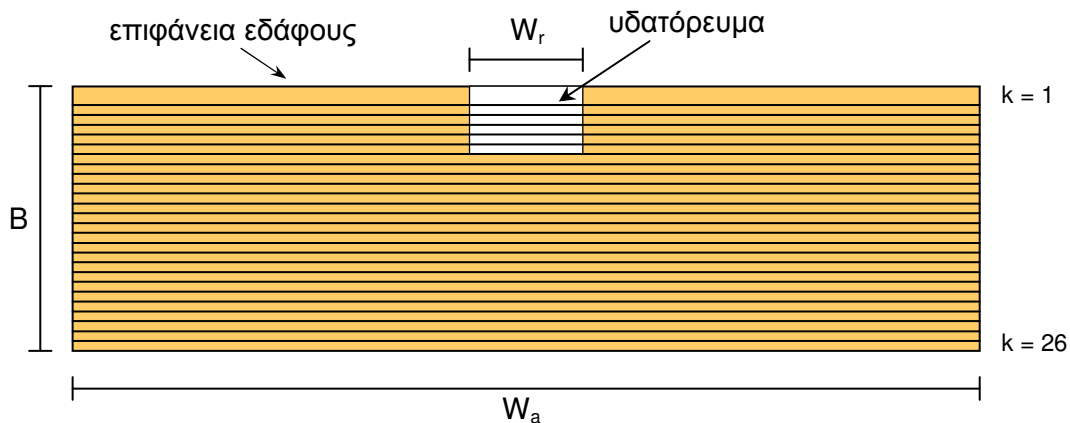


οι ισοδυναμικές γραμμές που απεικονίζονται στο σχήμα δίνονται σε m  
ισοδιάσταση ισοδυναμικών γραμμών: 0.025 m

**Σχήμα 3.30:** Σύγκριση των πιεζομετρικών φορτίων που υπολογίζονται εφαρμόζοντας (α) την τρισδιάστατη εκδοχή του IRENE-HYD και (β) την αναλυτική λύση του Lal (2001) για το πρόβλημα του σχήματος 3.27. Κατακόρυφη τομή στο επίπεδο  $y$ - $z$  στη θέση  $x = 10000$  m, για χρόνο  $t = \tau / 4$ .

Το υπολογιστικό πεδίο του IRENE-HYD διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας 100 στήλες, 200 γραμμές και 26 στρώματα. Οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$  είναι  $\Delta x_j = 500$  m και  $\Delta y_j = 7.5$  m. Το πάχος των υπολογιστικών στρωμάτων είναι ίσο με 2 m, εκτός από το πρώτο στρώμα για το οποίο ισχύει  $\Delta z_{i,j,1} = 3$  m και τα στρώματα 6-7 τα οποία δεν είναι οριζόντια, έτσι

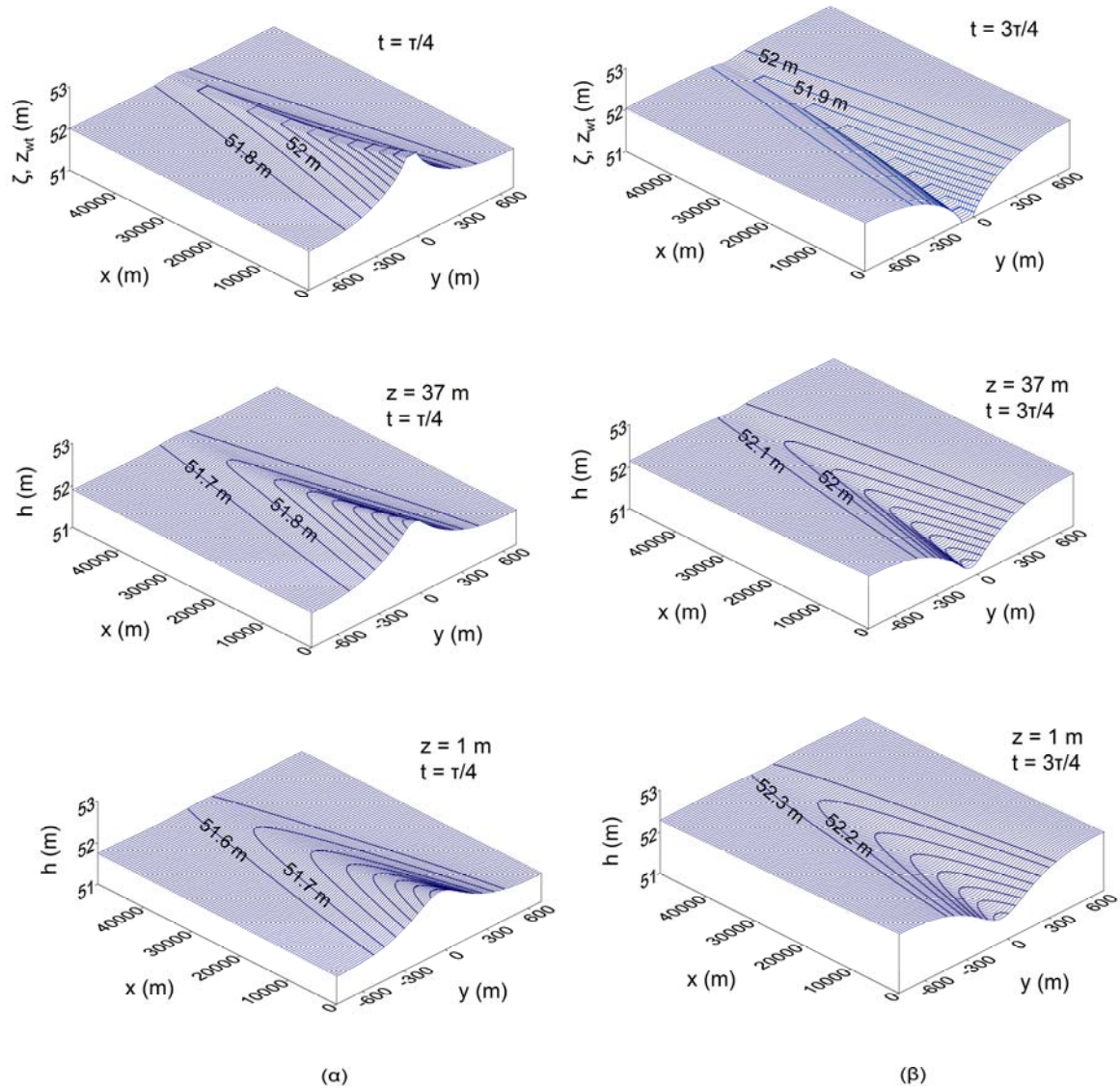
ώστε να ακολουθούν την κλίση του πυθμένα του υδατορεύματος, οπότε το πάχος των υπολογιστικών κελιών είναι μεταβλητό στη διεύθυνση  $x$ . Η κατακόρυφη διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου φαίνεται στο Σχήμα 3.31.



**Σχήμα 3.31:** Κατακόρυφη διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου του IRENE-HYD στο επίπεδο  $y-z$  ( $i=1$ ), για την περίπτωση αλληλεπίδρασης μεταξύ υδροφορέα και υδατορεύματος μερικής διείσδυσης του σχήματος 2.8

Ο τρισδιάστατος χαρακτήρας του προβλήματος φαίνεται στο Σχήμα 3.32, όπου παρουσιάζονται η ελεύθερη επιφάνεια των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων κατά τους χρόνους  $t=\pi/4$  και  $t=3\pi/4$  και οι πιεζομετρικές επιφάνειες για  $z=37$  m ( $k=8$ ) και  $z=1$  m ( $k=26$ ) κατά τους ίδους χρόνους. Για  $t=\pi/4$ , η στάθμη του υδατορεύματος είναι υψηλότερη από τις τιμές των πιεζομετρικών φορτίων στον υδροφορέα, οπότε το υδατόρευμα τροφοδοτεί τα υπόγεια νερά (βλ. Σχήμα 3.32 (α)). Το αντίθετο ισχύει για  $t=3\pi/4$ , δηλαδή ο υδροφορέας τροφοδοτεί το υδατόρευμα. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.32 (β), η πιεζομετρική επιφάνεια για  $z=37$  m είναι υψηλότερη από τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών και η πιεζομετρική επιφάνεια για  $z=1$  m είναι υψηλότερη από την πιεζομετρική επιφάνεια για  $z=37$  m. Ο συνδυασμός των υπό-μοντέλων των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων του IRENE-HYD τόσο στην κατακόρυφη όσο και στις οριζόντιες διευθύνσεις, επιτρέπει την ακριβή εκτίμηση της διήθησης επιφανειακού νερού προς τον υπόγειο υδροφορέα κατά το ανερχόμενο τμήμα του ημιτονοειδούς κυματισμού και της μετέπειτα εκφόρτισης του νερού που αποθηκεύεται στον υδροφορέα κατά το ανερχόμενο τμήμα του κυματισμού, προς το υδατόρευμα, κατά το κατερχόμενο τμήμα του κυματισμού. Η ακριβής προσομοίωση τέτοιων φαινομένων αλληλεπίδρασης είναι σημαντική όχι μόνο για την πρόβλεψη και τη

διαχείριση πλημμυρικών παροχών σε υδατορεύματα αλλά κυρίως για την εκτίμηση της μεταφοράς ρύπων μεταξύ υδατορευμάτων και υπόγειων νερών.



**Σχήμα 3.32:** Ελεύθερη επιφάνεια των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων και πιεζομετρικές επιφάνειες για  $z = 37 \text{ m}$  ( $k = 8$ ) και  $z = 1 \text{ m}$  ( $k = 26$ ), κατά τους χρόνους (α)  $t = \pi/4$  και (β)  $t = 3\pi/4$ , όπως υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το IRENE-HYD για την περίπτωση αλληλεπίδρασης μεταξύ υδροφορέα και υδατορεύματος μερικής διείσδυσης που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.8

### 3.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε το τρισδιάστατο ολοκληρωμένο υδροδυναμικό μοντέλο επιφανειακών-υπόγειων νερών IRENE-HYD. Στο υπό-μοντέλο ροής επιφανειακών υδάτων του IRENE-HYD επιλύονται οι εξισώσεις ρηχών νερών σταθερής πυκνότητας και στο υπό-μοντέλο ροής των υπόγειων υδάτων επιλύεται η εξίσωση που περιγράφει την τρισδιάστατη μη μόνιμη κορεσμένη ροή σε ετερογενές ανισότροπο πορώδες μέσο. Το IRENE-HYD μπορεί να εφαρμοστεί για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υπόγειων νερών και παράκτιων υδάτων, εκβολών ποταμών, υγροτόπων ή λιμνών, σε περιπτώσεις όπου μπορεί να γίνει η παραδοχή ρηχών νερών αλλά η υπόθεση πως οι ταχύτητες ροής είναι περίπου οριζόντιες και δε μεταβάλλονται σημαντικά με το βάθος δεν είναι ρεαλιστική, οπότε θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα τρισδιάστατο αριθμητικό μοντέλο για την προσομοίωση της υδροδυναμικής κυκλοφορίας στο επιφανειακό υδάτινο σώμα.

Σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει στα ολοκληρωμένα μαθηματικά μοντέλα επιφανειακών-υπόγειων νερών που υπάρχουν διαθέσιμα στη βιβλιογραφία, όπου τα υπό-μοντέλα ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων συνδυάζονται είτε στην κατακόρυφη είτε στις οριζόντιες διευθύνσεις, ο τρισδιάστατος χαρακτήρας του IRENE-HYD επιτρέπει τον λεπτομερή συνδυασμό της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων τόσο στην κατακόρυφη όσο στις οριζόντιες διευθύνσεις. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί σημαντικό, για παράδειγμα, όταν ενδιαφέρει η ακριβής προσομοίωση της κίνησης ρύπων μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών.

Ένας από τους λόγους που δεν είχε μέχρι σήμερα δημοσιευθεί κάποιο ολοκληρωμένο αριθμητικό μοντέλο επιφανειακών-υπόγειων νερών στο οποίο να θεωρείται τρισδιάστατη η ροή τόσο των επιφανειακών όσο και των υπόγειων υδάτων, είναι το υπολογιστικό κόστος μίας τέτοιας προσέγγισης. Στο IRENE-HYD ωστόσο, το ημι-πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιείται στο υπό-μοντέλο ροής των επιφανειακών υδάτων, επιτρέπει την ταυτόχρονη συνδυασμένη επίλυση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων νερών με τρόπο ο οποίος δεν είναι υπολογιστικά δαπανηρός. Συγκεκριμένα, η προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών επιτυγχάνεται με την ταυτόχρονη επίλυση δύο μόνο εξισώσεων, των συνδυασμένων εξισώσεων της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων και συνέχειας των υπόγειων υδάτων. Ο αλγόριθμος της ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης των εξισώσεων

που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων νερών που προτείνεται στην παρούσα διατριβή και εφαρμόζεται στο IRENE-HYD, μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα τρισδιάστατα ολοκληρωμένα μαθηματικά μοντέλα επιφανειακών-υπόγειων υδάτων, όπου γίνεται η παραδοχή υδροστατικής κατανομής της πίεσης στο επιφανειακό υδάτινο σώμα. Βέβαια, η ταυτόχρονη συνδυασμένη επίλυση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων απαιτεί τη χρήση κοινού μεγέθους χρονικού βήματος στα υπό-μοντέλα των επιφανειακών και των υπόγειων νερών. Για αυτόν τον λόγο, στο IRENE-HYD συμπεριλαμβάνεται και ένας δεύτερος αλγόριθμος επίλυσης, ο οποίος βασίζεται στη μέθοδο εσωτερικού συνδυασμού των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών και επιτρέπει τη χρήση διαφορετικού χρονικού βήματος στα υπό-μοντέλα ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων.

Οι περιπτώσεις ελέγχου που διερευνήθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο έδειξαν ότι το IRENE-HYD μπορεί να εκτιμήσει με ακρίβεια την αλληλεπίδραση μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Τα αποτελέσματα του μοντέλου συγκρίθηκαν με αυτά αναλυτικών λύσεων που ισχύουν σε απλές περιπτώσεις αλληλεπίδρασης. Η περίπτωση αλληλεπίδρασης μεταξύ λίμνης και υπόγειων νερών, για την οποία ισχύει η αναλυτική λύση του Kacimov (2000), επιλέχθηκε ώστε να αξιολογηθούν τα αποτελέσματα του IRENE-HYD για τα πιεζομετρικά φορτία και το πεδίο ροής των υπόγειων υδάτων σε ένα πρόβλημα αλληλεπίδρασης επιφανειακών-υπόγειων νερών όπου η υπόγεια ροή θεωρείται τρισδιάστατη. Το πρόβλημα αλληλεπίδρασης μεταξύ υδατορεύματος και υπόγειων νερών, για το οποίο ισχύει η προσεγγιστική αναλυτική λύση του Lal (2001), επιλέχθηκε προκειμένου να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα του IRENE-HYD για τις μεταβλητές της ροής τόσο των επιφανειακών όσο και των υπόγειων υδάτων, καθώς η αναλυτική λύση του Lal (2001) είναι μία από τις ελάχιστες αναλυτικές λύσεις που έχουν διατυπωθεί επιλύοντας τις εξισώσεις τόσο της επιφανειακής όσο και της υπόγειας ροής.

Στο υπό-μοντέλο ροής επιφανειακών υδάτων του IRENE-HYD συμπεριλαμβάνεται αλγόριθμος διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών του επιφανειακού υδάτινου σώματος, ο οποίος αποτελεί τροποποίηση της μεθόδου MLU που προτάθηκε από τους Casulli and Cheng (1992). Οι δύο περιπτώσεις ελέγχου που διερευνήθηκαν έδειξαν ότι το FLOW-3DL μπορεί να εκτιμήσει τη διακύμανση της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων σε δύσκολα προβλήματα όπου λαμβάνει χώρα διαβροχή ή ξήρανση περιοχών του υπολογιστικού πλέγματος.

Σε αντίθεση με τη μέθοδο MLU, η μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης που εφαρμόζεται στο FLOW-3DL δεν οδηγεί σε υπερεκτίμηση του όγκου νερού που μπορεί να αποθηκευτεί στα υπολογιστικά κελιά. Ωστόσο επειδή στο FLOW-3DL τα βάθη ορίζονται στο κέντρο των διαφορικών όγκων, στις περισσότερες περιπτώσεις απαιτείται πυκνότερο υπολογιστικό πλέγμα σε σύγκριση με αυτό που χρησιμοποιείται σε αριθμητικά μοντέλα όπου τα βάθη ορίζονται στα μέτωπα των διαφορικών όγκων, καθώς, όπως αποδείχτηκε στη δεύτερη περίπτωση ελέγχου, η ακρίβεια απεικόνισης του πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος στο FLOW-3DL επιδρά στην ακρίβεια υπολογισμού της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας.

Η μέθοδος εκτίμησης της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών που εφαρμόζεται στο υπό-μοντέλο ροής υπόγειων υδάτων του IRENE-HYD αποτελεί έναν συνδυασμό των μεθόδων που χρησιμοποιούνται στα αριθμητικά μοντέλα των Huyakorn et al. (1994), HydroGeologic (1998) και Nanou-Giannarou and Helmig (1998). Είναι η πρώτη φορά που παρόμοια μέθοδος εφαρμόζεται σε μη εμπορικό κώδικα πεπερασμένων διαφορών. Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι υπολογίζονται πιεζομετρικά φορτία για όλους τους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος των υπόγειων υδάτων – και όχι μόνο για το τμήμα του υπολογιστικού πλέγματος που βρίσκεται κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια των υπόγειων νερών – οπότε δεν υπάρχει ανάγκη απομόνωσης των ξηρών υπολογιστικών κελιών από το υπολογιστικό πεδίο και μετέπειτα μετατροπής τους σε ‘ενεργά’ (μερικώς ή πλήρως κορεσμένα) κελιά. Όπως αποδείχτηκε από την πρώτη περίπτωση ελέγχου που διερευνήθηκε σε αυτό το κεφάλαιο, η μέθοδος που χρησιμοποιείται στο IRENE-HYD μπορεί να εκτιμήσει με ακρίβεια τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων. Ωστόσο, επειδή ακριβώς υπολογίζονται πιεζομετρικά φορτία για όλους τους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος των υπόγειων υδάτων, μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις που είναι μεγάλος ο αριθμός των ξηρών κελιών να οδηγήσει σε μεγάλους υπολογιστικούς χρόνους.

Είναι επίσης σημαντικό να αναφερθεί ότι η περίπτωση ελέγχου που εξετάστηκε για να αξιολογηθεί η ικανότητα του IRENE-HYD να εκτιμήσει τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων σε ένα σύστημα επιφανειακών-υπόγειων νερών, έδειξε ότι με το IRENE-HYD μπορεί να υπολογισθεί με ικανοποιητική ακρίβεια η επιφάνεια διήθησης.

Εκτός από τις περιπτώσεις ελέγχου της μεθόδου εκτίμησης της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων και της μεθόδου διαβροχής και ξήρανσης περιοχών του υπολογιστικού πλέγματος των επιφανειακών υδάτων, διερευνήθηκε και η περίπτωση παράκτιας λεκάνης με διαπερατό πυθμένα ομοιόμορφης κλίσης, στο ανοικτό όριο της οποίας επιβλήθηκε ημιτονοειδής διαταραχή της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας, προκειμένου να αξιολογηθούν τα αποτελέσματα του μοντέλου για τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας του νερού σε ένα σύστημα των επιφανειακών–υπόγειων υδάτων. Τα προφίλ της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας επιφανειακών και υπόγειων υδάτων που υπολογίστηκαν με το IRENE–HYD, για διάφορες χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, ήταν ομαλά, χωρίς περιέργες ταλαντώσεις. Η ικανότητα εκτίμησης της χρονικά μεταβαλλόμενης θέσης της ελεύθερης επιφάνειας επιφανειακών και υπόγειων υδάτων σε συστήματα επιφανειακών–υπόγειων νερών αποτελεί ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του IRENE–HYD.

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι μία αδυναμία του IRENE–HYD αποτελεί η χρήση απλού υπολογιστικού πλέγματος. Παρόλο που οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος μπορεί να είναι μεταβλητές στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$  και τα στρώματα στα οποία διαιρείται το υπολογιστικό πεδίο μπορεί να μην είναι οριζόντια, έτσι ώστε να ακολουθούν τα όρια διαφορετικών γεωλογικών σχηματισμών, δεν είναι δυνατόν να προσεγγισθούν με ακρίβεια σύνθετες γεωμετρίες. Ωστόσο η μέθοδος συνδυασμού των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών που προτείνεται εδώ θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε ολοκληρωμένα μαθηματικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών όπου χρησιμοποιείται η μέθοδος πεπερασμένων όγκων και υπάρχει η δυνατότητα χρήσης μεγάλης ποικιλίας υπολογιστικών πλεγμάτων.





## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ–ΥΠΟΓΕΙΩΝ ΝΕΡΩΝ

---

### 4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται το ολοκληρωμένο μοντέλο ποιότητας επιφανειακών–υπόγειων υδάτων IRENE–QUAL. Το IRENE–QUAL αποτελείται από τρισδιάστατο υπό–μοντέλο ποιότητας επιφανειακών νερών και τρισδιάστατο υπό–μοντέλο ποιότητας υπόγειων νερών. Το μοντέλο ποιότητας IRENE–QUAL συνδέθηκε με το υδροδυναμικό μοντέλο IRENE–QUAL ώστε τα δεδομένα εξόδου του IRENE–HYD (τιμές ταχυτήτων και πιεζομετρικών φορτίων, στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας, κλπ) να μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν δεδομένα εισόδου στο IRENE–QUAL. Στις επόμενες παραγράφους διατυπώνονται αρχικά οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στο IRENE–QUAL για την περιγραφή της συμπεριφοράς ποιοτικών παραμέτρων σε επιφανειακά και υπόγεια νερά και στη συνέχεια παρουσιάζεται η αριθμητική τους επίλυση χρησιμοποιώντας διάφορα αριθμητικά σχήματα. Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή του συνδυασμού των εξισώσεων των δύο υπό–μοντέλων στην κοινή διεπιφάνεια επιφανειακών–υπόγειων νερών, λαμβάνοντας υπ’ όψη τόσο το μηχανισμό της μεταφοράς όσο και το μηχανισμό της διασποράς για την περιγραφή της ανταλλαγής ρύπων μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Στη συνέχεια ελέγχεται η ακρίβεια των αριθμητικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται

στο IRENE–QUAL συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του μοντέλου με διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις. Τέλος, τα αποτελέσματα του IRENE–QUAL αξιολογούνται ποιοτικά για μια υποθετική περίπτωση αλληλεπίδρασης μεταξύ υδροφορέα και υδατορεύματος.

## 4.2 Μαθηματική διατύπωση

### 4.2.1 Εξισώσεις του υπό–μοντέλου ποιότητας επιφανειακών υδάτων

Η αρχή διατήρησης της μάζας τυχαίας ουσίας που εισάγεται σε επιφανειακό υδάτινο σώμα χωρίς να επηρεάζει το πεδίο ταχυτήτων, εκφράζεται με την εξίσωση μεταφοράς–διάχυσης, που σε τρισδιάστατο τυρβώδες πεδίο ροής και αμελώντας τη συμβολή της μοριακής διάχυσης γράφεται ως (βλ. π.χ Harleman, 1966, Χριστούλας και λοιποί, 1997):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial(uC)}{\partial x} + \frac{\partial(vC)}{\partial y} + \frac{\partial(wC)}{\partial z}}_1 + \underbrace{\frac{\partial(\overline{u'C'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v'C'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{w'C'})}{\partial z}}_2 = \underbrace{q_{ss}C_{ss}}_3 + R_s \quad (4.1)$$

όπου  $C$  και  $C'$  [ $\text{ML}^{-3}$ ] συμβολίζουν τη μέση χρονική τιμή της συγκέντρωσης της διαλυμένης στο νερό ουσίας και τη διακύμανσή της, αντίστοιχα,  $q_{ss}$  [ $\text{T}^{-1}$ ] συμβολίζει την παροχή εισροής ή εκροής ύδατος στο/από το επιφανειακό υδάτινο σώμα, ανά μονάδα όγκου του επιφανειακού υδάτινου σώματος,  $C_{ss}$  [ $\text{ML}^{-3}$ ] είναι η συγκέντρωση της διαλυμένης ουσίας στην εισροή/εκροή και  $R_s$  [ $\text{ML}^{-3}\text{T}^{-1}$ ] είναι ο ρυθμός πρόσθεσης ή απώλειας της ουσίας λόγω φυσικών, χημικών ή βιολογικών διεργασιών. Η αρίθμηση στην εξίσωση (4.1) αναφέρεται στους όρους μεταφοράς της ουσίας με τη μέση ροή του νερού (όροι με τον αριθμό 1), τους όρους τυρβώδους διάχυσης (όροι με τον αριθμό 2) και τους όρους πρόσθεσης ή απώλειας της ουσίας (όροι με τον αριθμό 3).

Οι ποσότητες  $\overline{u'C'}$ ,  $\overline{v'C'}$  και  $\overline{w'C'}$  παριστάνουν τη μέση χρονική ροή μάζας (ανά μονάδα επιφάνειας) που οφείλεται στην τυρβώδη ροή. Κατ' αναλογία προς το νόμο του Fick της μοριακής διάχυσης, μπορεί να θεωρηθεί ότι η ροή μάζας που οφείλεται στην τυρβώδη ροή είναι ανάλογη της κλίσης της μέσης χρονικής τιμής της συγκέντρωσης (βλ. π.χ. Harleman, 1966):

$$\overline{u'c'} = -D_{tx} \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \overline{v'c'} = -D_{ty} \frac{\partial C}{\partial y}, \quad \overline{w'c'} = -D_{tz} \frac{\partial C}{\partial z} \quad (4.2)$$

όπου  $D_{tx}$ ,  $D_{ty}$  και  $D_{tz}$  [ $ML^{-2}T^{-1}$ ] είναι οι συντελεστές τυρβώδους διάχυσης στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$ , αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.2) στην (4.1), η τελευταία γράφεται ως:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial(uC)}{\partial x} - \frac{\partial(vC)}{\partial y} - \frac{\partial(wC)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{tx} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{ty} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_{tz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) + q_{ss} C_{ss} + R_s \quad (4.3)$$

Η εξίσωση μεταφοράς–διάχυσης για τυρβώδη ροή (4.3) επιλύεται αριθμητικά στο υπό–μοντέλο ποιότητας επιφανειακών υδάτων του IRENE–QUAL για την εκτίμηση των συγκεντρώσεων ρυπαντικών φορτίων και γενικότερα ποιοτικών παραμέτρων των επιφανειακών νερών.

#### 4.2.1.1 Αρχικές και οριακές συνθήκες

Για την επίλυση της εξίσωσης (4.3) θα πρέπει να ορισθούν αρχικές συνθήκες – δηλαδή οι τιμές της συγκέντρωσης των ποιοτικών παραμέτρων στο εξεταζόμενο πεδίο για  $t=0$ – και οριακές συνθήκες. Σε κλειστά όρια, η ροή μάζας ρύπου εγκάρσια στο όριο λόγω μεταφοράς και διάχυσης είναι μηδενική, δηλαδή:  $D_{tx_i} \frac{\partial C}{\partial x_i} - v_{x_i} C = 0$  (οριακή συνθήκη τύπου Cauchy), όπου  $x_i$  συμβολίζει τη διεύθυνση εγκάρσια στο όριο και  $v_{x_i}$  είναι η ταχύτητα εγκάρσια στο όριο. Σε ανοικτά όρια γνωστής συγκέντρωσης ισχύει  $C = C_i$  (οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet), όπου  $C_i$  είναι η γνωστή τιμή της συγκέντρωσης. Σε ανοικτά όρια άγνωστης συγκέντρωσης ισχύει  $D_{tx_i} \frac{\partial C}{\partial x_i} = 0$  (οριακή συνθήκη τύπου Neuman). Η φυσική σημασία της τελευταίας συνθήκης είναι ότι εγκάρσια στο όριο η συγκέντρωση φθίνει με τρόπο που δεν επηρεάζεται από το χρόνο –σε μη μόνιμες συνθήκες– άρα δεν δημιουργείται δυναμικό για την επανείσοδο ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο.

#### 4.2.2 Εξισώσεις του υπό-μοντέλου ποιότητας υπόγειων υδάτων

Η μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει τους μηχανισμούς κίνησης και τις φυσικές, χημικές ή βιολογικές διεργασίες που υφίσταται ρύπος που εισάγεται σε τρισδιάστατο πεδίο ροής υπόγειων υδάτων, προκύπτει από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης της μάζας του ρύπου σε στοιχειώδη όγκο του πορώδους μέσου και διατυπώνεται ως εξής (βλ. π.χ. Bear, 1972, 1979):

$$\begin{aligned}
 n_e \frac{\partial C}{\partial t} = & \underbrace{-\frac{\partial(n_e u_p C)}{\partial x} - \frac{\partial(n_e v_p C)}{\partial y} - \frac{\partial(n_e w_p C)}{\partial z}}_1 \\
 & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( n_e D_{h_{xx}} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( n_e D_{h_{xy}} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( n_e D_{h_{xz}} \frac{\partial C}{\partial z} \right)}_2 \\
 & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( n_e D_{h_{yx}} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( n_e D_{h_{yy}} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( n_e D_{h_{yz}} \frac{\partial C}{\partial z} \right)}_2 \\
 & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( n_e D_{h_{zx}} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( n_e D_{h_{zy}} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( n_e D_{h_{zz}} \frac{\partial C}{\partial z} \right)}_2 + \underbrace{q_{gs} C_{gs} + R_g}_3
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

ή σε μητρική μορφή:

$$n_e \frac{\partial C}{\partial t} = \underbrace{-\operatorname{div} \left( n_e \mathbf{V}_p C \right)}_1 + \underbrace{\operatorname{div} \left( n_e \mathbf{D}_h \operatorname{grad} (C) \right)}_2 + \underbrace{q_{gs} C_{gs} + R_g}_3 \tag{4.5}$$

Στις εξισώσεις (4.4) και (4.5),  $u_p$ ,  $v_p$  και  $w_p$  [ $\text{LT}^{-1}$ ] είναι οι συνιστώσες της πραγματικής μέσης ταχύτητας ροής των υπόγειων υδάτων,  $\mathbf{V}_p$ , στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$ , αντίστοιχα,  $q_{gs}$  [ $\text{T}^{-1}$ ] συμβολίζει την παροχή εισροής ή εκροής ρυπασμένου ύδατος στον/από τον υδροφορέα ανά μονάδα όγκου του υδροφορέα,  $C_{gs}$  [ $\text{ML}^{-3}$ ] είναι η συγκέντρωση του διαλυμένου ρύπου στην εισροή/εκροή του ρυπασμένου ύδατος,  $R_g$  [ $\text{ML}^{-3}\text{T}^{-1}$ ] είναι ο ρυθμός πρόσθεσης ή απώλειας ρύπου λόγω φυσικών, χημικών ή βιολογικών διεργασιών και  $\mathbf{D}_h$  συμβολίζει το συμμετρικό τανυστή των συντελεστών υδροδυναμικής διασποράς  $D_{h_{xx}}$ ,  $D_{h_{yy}}$ ,  $D_{h_{zz}}$ ,  $D_{h_{xy}}$ ,  $D_{h_{yx}}$ ,  $D_{h_{xz}}$ ,  $D_{h_{zx}}$ ,  $D_{h_{yz}}$  και  $D_{h_{zy}}$  [ $\text{L}^2\text{T}^{-1}$ ]. Η αρίθμηση στις εξισώσεις (4.4) και (4.5) αναφέρεται στους όρους μεταφοράς ρύπων με τη μέση ροή των υπόγειων υδάτων (όροι με τον

αριθμό 1), τους όρους υδροδυναμικής διασποράς (όροι με τον αριθμό 2) και τους όρους πρόσθεσης ή απώλειας του ρύπου (όροι με τον αριθμό 3).

Η υδροδυναμική διασπορά εκφράζει το άθροισμα των μηχανισμών της μοριακής διάχυσης και της μηχανικής διασποράς. Η μηχανική διασπορά είναι αποτέλεσμα των αποκλίσεων των πραγματικών ταχυτήτων της ροής σε μικροσκοπική κλίμακα από τη μέση ταχύτητα της ροής των υπόγειων υδάτων που θεωρείται σε μακροσκοπική κλίμακα (Bear, 1972, 1979). Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο τανυστής υδροδυναμικής διασποράς εκφράζεται ως:

$$\mathbf{D}_h = \begin{bmatrix} D_{h_{xx}} & D_{h_{xy}} & D_{h_{xz}} \\ D_{h_{yx}} & D_{h_{yy}} & D_{h_{yz}} \\ D_{h_{zx}} & D_{h_{zy}} & D_{h_{zz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xx} + D^* & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} + D^* & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} + D^* \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

όπου  $D_{xx}$ ,  $D_{yy}$ ,  $D_{zz}$ ,  $D_{xy}$ ,  $D_{yx}$ ,  $D_{xz}$ ,  $D_{zx}$ ,  $D_{yz}$  και  $D_{zy}$  [ $L^2T^{-1}$ ] είναι οι συντελεστές μηχανικής διασποράς και  $D^*$  [ $L^2T^{-1}$ ] είναι ο συντελεστής μοριακής διάχυσης.

Οι συντελεστές μηχανικής διασποράς, για ένα ισότροπο πορώδες μέσο, ορίζονται συναρτήσει της μέσης ταχύτητας ροής ως εξής (βλ. Bear, 1972, 1979):

$$D_{xx} = \alpha_L \frac{u_p^2}{|\mathbf{V}_p|} + \alpha_T \frac{v_p^2}{|\mathbf{V}_p|} + \alpha_T \frac{w_p^2}{|\mathbf{V}_p|} \quad (4.7\alpha)$$

$$D_{yy} = \alpha_L \frac{v_p^2}{|\mathbf{V}_p|} + \alpha_T \frac{u_p^2}{|\mathbf{V}_p|} + \alpha_T \frac{w_p^2}{|\mathbf{V}_p|} \quad (4.7\beta)$$

$$D_{zz} = \alpha_L \frac{w_p^2}{|\mathbf{V}_p|} + \alpha_T \frac{u_p^2}{|\mathbf{V}_p|} + \alpha_T \frac{v_p^2}{|\mathbf{V}_p|} \quad (4.7\gamma)$$

$$D_{xy} = D_{yx} = (\alpha_L - \alpha_T) \frac{u_p v_p}{|\mathbf{V}_p|} \quad (4.7\delta)$$

$$D_{xz} = D_{zx} = (\alpha_L - \alpha_T) \frac{u_p w_p}{|\mathbf{V}_p|} \quad (4.7\epsilon)$$

$$D_{yz} = D_{zy} = (\alpha_L - \alpha_T) \frac{v_p w_p}{|\mathbf{V}_p|} \quad (4.7\sigma\tau)$$

όπου  $|\mathbf{V}_p|$  συμβολίζει το μέτρο της μέσης ταχύτητας ροής των υπόγειων υδάτων,  $\alpha_L$  [L] είναι ο ανοιγμένος συντελεστής διαμήκου διασποράς (longitudinal dispersivity) και  $\alpha_T$  [L] είναι ο ανοιγμένος συντελεστής εγκάρσιας διασποράς (transverse dispersivity). Οι εξισώσεις (4.7α)–(4.7στ) δεν ισχύουν για ανισότροπο πορώδες μέσο, καθώς σε αυτήν την περίπτωση απαιτούνται πέντε – και όχι μόνο δύο – ανεξάρτητοι ανοιγμένοι συντελεστές διασποράς για τον υπολογισμό των συντελεστών μηχανικής διασποράς. Ωστόσο, δεν είναι εφικτό να μετρηθούν πέντε διαφορετικοί συντελεστές διασποράς στο πεδίο (Bear, 1979). Μία πρακτική εναλλακτική αποτελεί η χρήση δύο ανοιγμένων συντελεστών εγκάρσιας διασποράς, ενός ανοιγμένου συντελεστή οριζόντιας εγκάρσιας διασποράς,  $\alpha_{TH}$  (horizontal transverse dispersivity) και ενός ανοιγμένου συντελεστή κατακόρυφης εγκάρσιας διασποράς,  $\alpha_{TV}$  (vertical transverse dispersivity), όπως προτάθηκε από τους Burnett and Frind, 1987:

$$D_{xx} = \alpha_L \frac{u_p^2}{|\mathbf{V}_p|} + \alpha_{TH} \frac{v_p^2}{|\mathbf{V}_p|} + \alpha_{TV} \frac{w_p^2}{|\mathbf{V}_p|} \quad (4.8\alpha)$$

$$D_{yy} = \alpha_L \frac{v_p^2}{|\mathbf{V}_p|} + \alpha_{TH} \frac{u_p^2}{|\mathbf{V}_p|} + \alpha_{TV} \frac{w_p^2}{|\mathbf{V}_p|} \quad (4.8\beta)$$

$$D_{zz} = \alpha_L \frac{w_p^2}{|\mathbf{V}_p|} + \alpha_{TV} \frac{u_p^2}{|\mathbf{V}_p|} + \alpha_{TV} \frac{v_p^2}{|\mathbf{V}_p|} \quad (4.8\gamma)$$

$$D_{xy} = D_{yx} = (\alpha_L - \alpha_{TH}) \frac{u_p v_p}{|\mathbf{V}_p|} \quad (4.8\delta)$$

$$D_{xz} = D_{zx} = (\alpha_L - \alpha_{TV}) \frac{u_p w_p}{|\mathbf{V}_p|} \quad (4.8\epsilon)$$

$$D_{yz} = D_{zy} = (\alpha_L - \alpha_{TV}) \frac{v_p w_p}{|\mathbf{V}_p|} \quad (4.8\sigma\tau)$$

Ερευνητικές εργασίες που βασίζονται σε στοχαστικές αναλύσεις της χωρικής μεταβλητότητας των υδραυλικών παραμέτρων και της ταχύτητας ροής σε υπόγειους υδροφορείς έδειξαν ότι οι συντελεστές διασποράς  $\alpha_T$ ,  $\alpha_{TH}$  και  $\alpha_{TV}$  δεν εξαρτώνται αποκλειστικά και μόνο από τις ιδιότητες του πορώδους μέσου αλλά εξαρτώνται και από το πεδίο ταχυτήτων (π.χ. Gelhar and Axness, 1983, Gelhar et al., 1992, Rehfeldt and Gelhar, 1992). Πρέπει τέλος να αναφερθεί ότι η συμβολή του μηχανισμού της μοριακής διάχυσης στην εξάπλωση ρύπων στα υπόγεια νερά μπορεί συνήθως να

θεωρηθεί αμελητέα σε σύγκριση με τη συμβολή του μηχανισμού μηχανικής διασποράς ( $D_{xx}, D_{yy}, D_{zz} \gg D^*$ ), εκτός από την περίπτωση που οι ταχύτητες ροής των υπόγειων υδάτων είναι πολύ μικρές.

Υπολογιστικά, είναι ευκολότερο να χρησιμοποιηθεί ένας ταυιστής φαινόμενης υδροδυναμικής διασποράς,  $\hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{h}}$ , ο οποίος ορίζεται ως:  $\hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{h}} = n_e \mathbf{D}_{\mathbf{h}}$ . Οι συντελεστές φαινόμενης υδροδυναμικής διασποράς ορίζονται συναρτήσει της ειδικής παροχής ή ταχύτητας Darcy αντί της πραγματικής μέσης ταχύτητας ροής:

$$\hat{D}_{h_{xx}} = \alpha_L \frac{q_x^2}{|\mathbf{q}|} + \alpha_{TH} \frac{q_y^2}{|\mathbf{q}|} + \alpha_{TV} \frac{q_z^2}{|\mathbf{q}|} + n_e D^* \quad (4.9\alpha)$$

$$\hat{D}_{h_{yy}} = \alpha_L \frac{q_y^2}{|\mathbf{q}|} + \alpha_{TH} \frac{q_x^2}{|\mathbf{q}|} + \alpha_{TV} \frac{q_z^2}{|\mathbf{q}|} + n_e D^* \quad (4.9\beta)$$

$$\hat{D}_{h_{zz}} = \alpha_L \frac{q_z^2}{|\mathbf{q}|} + \alpha_{TV} \frac{q_x^2}{|\mathbf{q}|} + \alpha_{TV} \frac{q_y^2}{|\mathbf{q}|} + n_e D^* \quad (4.9\gamma)$$

$$\hat{D}_{h_{xy}} = \hat{D}_{h_{yx}} = (\alpha_L - \alpha_{TH}) \frac{q_x q_y}{|\mathbf{q}|} \quad (4.9\delta)$$

$$\hat{D}_{h_{xz}} = \hat{D}_{h_{zx}} = (\alpha_L - \alpha_{TV}) \frac{q_x q_z}{|\mathbf{q}|} \quad (4.9\epsilon)$$

$$\hat{D}_{h_{yz}} = \hat{D}_{h_{zy}} = (\alpha_L - \alpha_{TV}) \frac{q_y q_z}{|\mathbf{q}|} \quad (4.9\sigma\tau)$$

Οι κυριότεροι μηχανισμοί γένεσης ή απώλειας ρύπων είναι η προσρόφηση ρύπων από το πορώδες μέσο και η βιολογική ή ραδιενεργός διάσπαση ρύπων (Bear, 1972). Σε αυτήν την περίπτωση ο όρος  $R_g$  διατυπώνεται ως:

$$R_g = -\rho_p \frac{\partial C^s}{\partial t} - \lambda_1 n_e C - \lambda_2 \rho_p S \quad (4.10)$$

όπου  $\rho_p$  [ $\text{ML}^{-3}$ ] είναι η φαινόμενη πυκνότητα του πορώδους μέσου,  $S$  [ $\text{MM}^{-1}$ ] είναι η μάζα ρύπου που προσροφάται από τους κόκκους του πορώδους μέσου ανά μονάδα μάζας των κόκκων και  $\lambda_1, \lambda_2$  [ $\text{T}^{-1}$ ] είναι οι σταθερές διάσπασης του ρύπου που είναι διαλυμένος στα υπόγεια νερά (υδατική φάση) και του ρύπου που έχει προσροφηθεί στην επιφάνεια των κόκκων του πορώδους μέσου (προσροφούμενη



φάση), αντίστοιχα (Bear, 1972). Η διάσπαση του ρύπου θεωρείται ότι ακολουθεί κινητική πρώτης τάξης.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.10) στην εξίσωση (4.4), η τελευταία μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$\begin{aligned}
 R_d n_e \frac{\partial C}{\partial t} = & -\frac{\partial(n_e u_p C)}{\partial x} - \frac{\partial(n_e v_p C)}{\partial y} - \frac{\partial(n_e w_p C)}{\partial z} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left( n_e D_{h_{xx}} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( n_e D_{h_{xy}} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( n_e D_{h_{xz}} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left( n_e D_{h_{yx}} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( n_e D_{h_{yy}} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( n_e D_{h_{yz}} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left( n_e D_{h_{zx}} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( n_e D_{h_{zy}} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( n_e D_{h_{zz}} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \\
 & + q_{gs} C_{gs} - \lambda_1 n_e C - \lambda_2 \rho_p S
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

όπου  $R_d = 1 + \frac{\rho_p}{n_e} \frac{\partial S}{\partial C}$  είναι ένας αδιάστατος συντελεστής που ονομάζεται

συντελεστής προσρόφησης. Στο υπό-μοντέλο ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE-QUAL μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας από τους ακόλουθους τύπους ισόθερμων προσρόφησης σε κατάσταση ισορροπίας (ως ισόθερμη προσρόφησης ισορροπίας αναφέρεται η συναρτησιακή σχέση μεταξύ των συγκεντρώσεων του ρύπου στην υδατική και την προσροφούμενη φάση υπό συνθήκες σταθερής θερμοκρασίας) για την περιγραφή της προσρόφησης ρύπου από το πορώδες μέσο: γραμμική ισόθερμη, ισόθερμη Freundlich, ισόθερμη Langmuir. Η χρήση ισόθερμων προσρόφησης ισορροπίας βασίζεται στις παραδοχές ότι υφίστανται συνθήκες ισορροπίας μεταξύ των συγκεντρώσεων της υδατικής και της στερεάς φάσης και ότι η προσρόφηση ρύπου από το πορώδες μέσο είναι αρκετά γρήγορη, σε σύγκριση με την ταχύτητα ροής των υπόγειων υδάτων, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί στιγμιαία (Bear and Cheng, 2008).

- (i) Γραμμική ισόθερμη προσρόφησης. Η γραμμική ισόθερμη προσρόφησης ισορροπίας εκφράζεται μαθηματικά από την ακόλουθη εμπειρική εξίσωση (βλ. π.χ. Bear, 1972):

$$S = K_d C \tag{4.12}$$

όπου  $K_d$  [ $L^3M^{-1}$ ] είναι ο συντελεστής κατανομής (ή συντελεστής διαχωρισμού). Ο συντελεστής προσρόφησης,  $R_d$ , στην περίπτωση αυτή εκφράζεται ως εξής:

$$R_d = 1 + \frac{\rho_p}{n_e} \frac{\partial S}{\partial C} = 1 + \frac{\rho_p}{n_e} K_d \quad (4.13)$$

- (ii) Ισόθερμη του Freundlich. Η ισόθερμη του Freundlich είναι μία μη γραμμική ισόθερμη, η οποία εκφράζεται μαθηματικά από την ακόλουθη εμπειρική σχέση (βλ. π.χ. Bear, 1972):

$$S = K_f C^f \quad (4.14)$$

όπου  $K_f$  [ $L^3M^{-1}$ ]<sup>f</sup> είναι η σταθερά Freundlich και  $f$  [-] είναι ο εκθέτης Freundlich. Όταν  $f = 1$ , η ισόθερμη προσρόφησης του Freundlich είναι ισοδύναμη με τη γραμμική ισόθερμη προσρόφησης. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.13), ο συντελεστής προσρόφησης,  $R_d$ , διατυπώνεται ως εξής:

$$R_d = 1 + \frac{\rho_p}{n_e} \frac{\partial S}{\partial C} = 1 + \frac{\rho_p}{n_e} K_f f C^{f-1} \quad (4.15)$$

- (iii) Ισόθερμη του Langmuir. Η ισόθερμη προσρόφησης του Langmuir περιγράφεται μαθηματικά από την ακόλουθη εμπειρική εξίσωση (βλ. π.χ. Novotny and Olem, 1994):

$$S = \frac{K_\ell \bar{S} C}{1 + K_\ell C} \quad (4.16)$$

όπου  $K_\ell$  [ $L^3M^{-1}$ ] είναι η σταθερά Langmuir και  $\bar{S}$  [ $MM^{-1}$ ] είναι εμπειρική σταθερά που αντιστοιχεί στη μέγιστη δυνατή συγκέντρωση προσροφημένου ρύπου. Σύμφωνα με την εξίσωση (4.15), ο συντελεστής προσρόφησης,  $R_d$ , γράφεται ως:

$$R_d = 1 + \frac{\rho_p}{n_e} \frac{\partial S}{\partial C} = 1 + \frac{\rho_p}{n_e} \left[ \frac{K_\ell \bar{S}}{(1 + K_\ell C)^2} \right] \quad (4.17)$$

Οι τιμές των σταθερών  $K_d$ ,  $K_f$ ,  $f$ ,  $K_\ell$ ,  $\bar{S}$  εξαρτώνται από τις ιδιότητες του ρύπου και του πορώδους μέσου, καθώς και από τη θερμοκρασία και προσδιορίζονται πειραματικά.

Η προσομοίωση της προσρόφησης ρύπων από το πορώδες μέσο είναι σημαντική κυρίως για προβλήματα ρύπανσης από οργανικές ενώσεις, φώσφορο, αμμωνιακά ιόντα και βαρέα μέταλλα.

#### 4.2.2.1 Αρχικές και οριακές συνθήκες

Προκειμένου να επιλυθεί η εξίσωση (4.11) χρειάζεται να καθορισθούν οι τιμές της συγκέντρωσης στο υπολογιστικό πεδίο των υπόγειων υδάτων για  $t = 0$  και οι οριακές συνθήκες. Οι ακόλουθοι τύποι οριακών συνθηκών μπορούν να διακριθούν (βλ. π.χ. Bear, 1972, 1979):

(i) Οριακή συνθήκη τύπου Dirichlet. Καθορίζεται η τιμή της συγκέντρωσης στο όριο, η οποία μπορεί να μεταβάλλεται χρονικά.

(ii) Οριακή συνθήκη τύπου Neuman. Καθορίζεται η ροή μάζας ρύπου εγκάρσια στο όριο λόγω διασποράς, δηλαδή:

$$n_e D_{h_{ij}} \frac{\partial C}{\partial x_j} = f_i(x, y, z, t), \text{ όπου } f_i(x, y, z, t) \text{ είναι γνωστή συνάρτηση.}$$

(iii) Οριακή συνθήκη τύπου Cauchy. Καθορίζεται η ροή μάζας ρύπου εγκάρσια στο όριο λόγω μεταφοράς και διασποράς, δηλαδή:

$$n_e D_{h_{ij}} \frac{\partial C}{\partial x_j} - q_j C = g_j(x, y, z, t), \text{ όπου } g_j(x, y, z, t) \text{ είναι γνωστή συνάρτηση.}$$

$$\text{Για αδιαπέρατο όριο ισχύει: } n_e D_{h_{ij}} \frac{\partial C}{\partial x_j} - q_j C = 0.$$

### 4.3 Αριθμητική επίλυση

#### 4.3.1 Γενικά

Οι εξισώσεις μεταφοράς–τυρβώδους διάχυσης ρύπων σε επιφανειακά νερά και μεταφοράς–διασποράς ρύπων σε υπόγεια νερά (4.3) και (4.11), αντίστοιχα, έχουν μικτό υπερβολικό–παραβολικό χαρακτήρα και αποτελούν ουσιαστικά σύνθεση των εξισώσεων απλής μεταφοράς και απλής διάχυσης ή διασποράς. Σε προβλήματα όπου υπερισχύει το φαινόμενο της μεταφοράς, οι εξισώσεις (4.3) και (4.11) έχουν τα χαρακτηριστικά μερικών διαφορικών εξισώσεων υπερβολικού τύπου, ενώ όταν υπερισχύει ο μηχανισμός της τυρβώδους διάχυσης σε επιφανειακά νερά και αντίστοιχα της υδροδυναμικής διασποράς σε υπόγεια νερά, οι εξισώσεις (4.3) και (4.11) έχουν τα χαρακτηριστικά μερικών διαφορικών εξισώσεων παραβολικού τύπου.

Ο μικτός υπερβολικός–παραβολικός χαρακτήρας των εξισώσεων (4.3) και (4.11) δυσχεραίνει την αριθμητική τους επίλυση (Mitchell, 1984, Leonard, 1988). Κατά καιρούς έχουν εφαρμοστεί διάφορες αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς–διάχυσης ή διασποράς. Οι μέθοδοι αυτές διακρίνονται στις ακόλουθες γενικές κατηγορίες: (i) μέθοδοι Euler, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένων στοιχείων και πεπερασμένων όγκων (π.χ. Bencala and Walters, 1983, Leonard and Noye, 1989, Leonard, 1991, Stamou, 1991, Stamou, 1992, Chen and Falconer, 1994, Zhang, 1998, Spatz and Carey, 2001), (ii) μέθοδοι Lagrange (π.χ. McBride and Rutherford, 1984, Jobson, 1987, Yu and Li, 1994, Manson et al., 2001) και (iii) μικτές μέθοδοι Euler–Lagrange (π.χ. Holly and Preissman, 1977, Bedford et al., 1983, Oliveira and Baptista, 1995, Manson and Wallis, 1995). Για περισσότερες λεπτομέρειες, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο κείμενο των Zheng and Bennett (1995), όπου γίνεται μία κριτική παρουσίαση των παραπάνω μεθόδων και των σχετικών πλεονεκτημάτων και αδυναμιών τους. Συνήθως, λόγω του μικτού υπερβολικού–παραβολικού χαρακτήρα της εξίσωσης μεταφοράς–διάχυσης ή διασποράς, χρησιμοποιούνται διαφορετικά αριθμητικά σχήματα για την αντιμετώπιση των όρων μεταφοράς και των όρων διάχυσης ή διασποράς (π.χ. μέθοδος χαρακτηριστικών, σχήμα ανάντη πεπερασμένων διαφορών ή σχήμα πεπερασμένων διαφορών ανώτερης τάξης για τους όρους μεταφοράς και σχήμα κεντρικών διαφορών για τους όρους διάχυσης ή διασποράς). Δεδομένου ότι τα προβλήματα αριθμητικής επίλυσης της εξίσωσης

μεταφοράς–διάχυσης ή διασποράς σχετίζονται με τους μεταθετικούς όρους, για περιπτώσεις όπου επικρατεί σημαντικά ο μηχανισμός της μεταφοράς ( $P_e > 4$ ), η σχετική βιβλιογραφία επικεντρώνεται κυρίως στην ανάπτυξη αριθμητικών σχημάτων για την επίλυση της εξίσωσης απλής μεταφοράς (βλ. Zheng and Bennett, 1995).

Ακολουθώντας τις αριθμητικές μεθόδους που εφαρμόζονται στο IRENE–HYD, στο IRENE–QUAL χρησιμοποιείται η μέθοδος ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση των εξισώσεων (4.3) και (4.11). Εναλλακτικά μπορεί να εφαρμοστεί το μικτό αριθμητικό σχήμα Euler–Lagrange (Cheng et al., 1984) που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 3.3.3.3. Η χρήση της μεθόδου ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών διευκολύνει την εφαρμογή του IRENE–QUAL, καθώς οι ταχύτητες ροής των επιφανειακών και των υπόγειων νερών που υπολογίζονται με το IRENE–HYD μπορούν να χρησιμοποιηθούν άμεσα στο ολοκληρωμένο μοντέλο ποιότητας επιφανειακών–υπόγειων νερών χωρίς να απαιτείται κάποια παρεμβολή των τιμών τους. Στον Πίνακα 4.1 και 4.2 παρουσιάζονται συνοπτικά τα αριθμητικά σχήματα που περιλαμβάνονται στο IRENE–QUAL για την επίλυση των εξισώσεων (4.3) και (4.11).

**Πίνακας 4.1:** Αριθμητικά σχήματα που περιλαμβάνονται στο IRENE–QUAL για την επίλυση της εξίσωσης του υπό–μοντέλου ποιότητας επιφανειακών νερών

<b>Δυνατοί συνδυασμοί αριθμητικών σχημάτων για την επίλυση της εξίσωσης (4.3) του υπό–μοντέλου ποιότητας επιφανειακών νερών του IRENE–QUAL</b>	
<b>Αριθμητικά σχήματα επίλυσης των όρων μεταφοράς</b>	<b>Αριθμητικά σχήματα επίλυσης των όρων διάχυσης και των όρων απώλειας ή πρόσθεσης ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο</b>
Ρητό σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών ✓ οι τιμές της συγκέντρωσης στα μέτωπα των διαφορικών όγκων προσεγγίζονται με σχήμα ανάντη διαφορών	Ρητό ή πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών ✓ οι μερικές παράγωγοι στα μέτωπα των διαφορικών όγκων προσεγγίζονται με σχήμα κεντρικών διαφορών
Ρητό σχήμα TVD (Total Variation Diminishing, μείωσης της ολικής απόκλισης) τρίτης τάξης: ✓ σχήμα ULTIMATE–QUICKEST (Leonard, 1979, Leonard and Niknafs, 1990)	Ρητό ή πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών ✓ οι μερικές παράγωγοι στα μέτωπα των διαφορικών όγκων προσεγγίζονται με σχήμα κεντρικών διαφορών
Μικτό αριθμητικό σχήμα Euler–Lagrange (Cheng et al., 1984)	Ρητό ή πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών ✓ οι μερικές παράγωγοι στα μέτωπα των διαφορικών όγκων προσεγγίζονται με σχήμα κεντρικών διαφορών

**Πίνακας 4.2** Αριθμητικά σχήματα που περιλαμβάνονται στο IRENE–QUAL για την επίλυση της εξίσωσης του υπό–μοντέλου ποιότητας υπόγειων νερών

<b>Δυνατοί συνδυασμοί αριθμητικών σχημάτων για την επίλυση της εξίσωσης (4.11) του υπό–μοντέλου ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL</b>	
<b>Αριθμητικά σχήματα επίλυσης των όρων μεταφοράς</b>	<b>Αριθμητικά σχήματα επίλυσης των όρων διασποράς και των όρων απώλειας ή πρόσθεσης ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο</b>
Ρητό σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών ✓ οι τιμές της συγκέντρωσης στα μέτωπα των διαφορικών όγκων προσεγγίζονται με σχήμα ανάντη διαφορών	Ρητό ή πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών ✓ οι μερικές παράγωγοι στα μέτωπα των διαφορικών όγκων προσεγγίζονται με σχήμα κεντρικών διαφορών
Ρητό σχήμα TVD τρίτης τάξης: ✓ σχήμα ULTIMATE–QUICKEST	Ρητό ή πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών ✓ οι μερικές παράγωγοι στα μέτωπα των διαφορικών όγκων προσεγγίζονται με σχήμα κεντρικών διαφορών
Μικτό αριθμητικό σχήμα Euler–Lagrange (Cheng et al., 1984)	Ρητό ή πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών ✓ οι μερικές παράγωγοι στα μέτωπα των διαφορικών όγκων προσεγγίζονται με σχήμα κεντρικών διαφορών
Πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών ✓ οι τιμές της συγκέντρωσης στα μέτωπα των διαφορικών όγκων προσεγγίζονται με σχήμα ανάντη ή κεντρικών διαφορών	Πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών ✓ οι μερικές παράγωγοι στα μέτωπα των διαφορικών όγκων προσεγγίζονται με σχήμα κεντρικών διαφορών

#### **4.3.2 Επίλυση της εξίσωσης του υπό–μοντέλου ποιότητας επιφανειακών νερών**

Απαραίτητα δεδομένα για την επίλυση της εξίσωσης (4.3), που περιγράφει τη μεταφορά, τυρβώδη διάχυση και γένεση ή απώλεια ρύπου λόγω φυσικοχημικών ή βιολογικών διεργασιών σε επιφανειακά νερά, αποτελούν οι τιμές των ταχυτήτων ροής των επιφανειακών νερών που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το υπό–μοντέλο ροής επιφανειακών υδάτων του IRENE–HYD. Για περιπτώσεις μή μόνιμης ροής, οι ταχύτητες ροής των επιφανειακών νερών είναι γνωστές ανά  $\Delta t_s$ . Όπως αναλύθηκε στην παράγραφο 3.3.3.3, το μέγεθος του χρονικού βήματος,  $\Delta t_s$ , που χρησιμοποιείται στο FLOW–3DL υπόκειται στη συνθήκη (3.70) ή τη συνθήκη (3.85), ανάλογα με το αν οι όροι μεταφοράς των εξισώσεων ποσότητας κίνησης (3.13) και (3.14) προσεγγίζονται με ρητό σχήμα ανάντη πεπερασμένων διαφορών ή με ένα μικτό αριθμητικό σχήμα Euler–Lagrange (Cheng et al., 1984), αντίστοιχα. Για λόγους

ακρίβειας, το χρονικό βήμα που χρησιμοποιείται στο υπό-μοντέλο ποιότητας επιφανειακών νερών του IRENE–QUAL θα πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο με το χρονικό βήμα που χρησιμοποιείται στο FLOW–3DL. Αν στο υπό-μοντέλο ποιότητας επιφανειακών νερών του IRENE–QUAL χρησιμοποιηθεί χρονικό βήμα μικρότερο από το χρονικό βήμα που χρησιμοποιείται στο FLOW–3DL, τότε για τον αριθμό των χρονικών βημάτων του υπό-μοντέλου ποιότητας επιφανειακών νερών που περιλαμβάνονται σε ένα χρονικό βήμα του FLOW–3DL οι τιμές των ταχυτήτων ροής και του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών νερών θεωρούνται σταθερές.

Λόγω των περιορισμών που επιβάλλονται στο μέγεθος του χρονικού βήματος διακριτοποίησης της εξίσωσης (4.3) για λόγους ακρίβειας, η χρήση ρητών σχημάτων για την επίλυσή της αποδεικνύεται συμφέρουσα υπολογιστικά, καθώς δεν απαιτείται η επίλυση ενός μεγάλου συστήματος εξισώσεων σε κάθε χρονικό βήμα. Ωστόσο, σε προβλήματα με μεγάλους συντελεστές τυρβώδους διάχυσης και/ή μικρές διαστάσεις υπολογιστικού πλέγματος, η ρητή διακριτοποίηση τόσο των όρων μεταφοράς όσο και διάχυσης έχει σαν αποτέλεσμα η συνθήκη ευστάθειας του αριθμητικού σχήματος επίλυσης να είναι ιδιαίτερα περιοριστική για το μέγεθος του χρονικού βήματος. Για αυτόν τον λόγο, στο υπό-μοντέλο ποιότητας επιφανειακών νερών του IRENE–QUAL υπάρχει, μεταξύ άλλων, η δυνατότητα εφαρμογής πεπλεγμένου υπολογιστικού σχήματος για την επίλυση των όρων διάχυσης της εξίσωσης (4.3) (βλ. Πίνακα 4.1).

Το απλούστερο από τα αριθμητικά σχήματα επίλυσης της εξίσωσης (4.3) που περιλαμβάνονται στο υπό-μοντέλο ποιότητας επιφανειακών νερών του IRENE–QUAL, είναι το ρητό σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών, όπου για τους όρους μεταφοράς χρησιμοποιείται σχήμα ανάντη διαφορών και για τους όρους διάχυσης σχήμα κεντρικών διαφορών. Ωστόσο, όπως έχει ήδη αναφερθεί στην παράγραφο 3.3.3.3, σε προβλήματα όπου ο μηχανισμός της μεταφοράς υπερισχύει σημαντικά του μηχανισμού της τυρβώδους διάχυσης, η αριθμητική διάχυση που εισάγεται στη λύση λόγω της ανάντη διακριτοποίησης των όρων μεταφοράς είναι σημαντική και μπορεί να υπερισχύει της φυσικής τυρβώδους διάχυσης, επηρεάζοντας έτσι τις υπολογιζόμενες τιμές της συγκέντρωσης στο υπολογιστικό πεδίο. Σε τέτοιες περιπτώσεις θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί το μικτό σχήμα Euler–Lagrange (Cheng et al., 1984) ή το σχήμα TVD (Total Variation Diminishing, μείωσης της ολικής απόκλισης) τρίτης τάξης ULTIMATE–QUICKEST (Universal Limiter for Transient Interpolation Modelling of the Advective Transport Equations–Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics with Estimated Streaming Terms) (Leonard,

1979, Leonard and Niknafs, 1990), που περιλαμβάνονται στο υπό-μοντέλο ποιότητας επιφανειακών νερών του IRENE–QUAL, για τη διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς. Έχει αποδειχθεί στην πράξη (βλ. π.χ. Zheng and Bennett, 1995), ότι σε περιπτώσεις όπου ισχύει  $P_e > 4$ , η ανάντη διακριτοποίηση των όρων μεταφοράς οδηγεί σε αποτελέσματα ικανοποιητικής ακρίβειας, οπότε μπορεί να εφαρμοστεί, μειώνοντας έτσι τον υπολογιστικό χρόνο που συνεπάγεται η χρήση του μικτού αριθμητικού σχήματος Euler–Lagrange ή του σχήματος ULTIMATE–QUICKEST.

Ανεξάρτητα από την επιλογή αριθμητικού σχήματος για την προσέγγιση των όρων μεταφοράς, η χρονική διακριτοποίηση των όρων διάχυσης μπορεί να γίνει με ρητό ή πεπλεγμένο τρόπο. Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι στο υπό-μοντέλο ποιότητας επιφανειακών νερών του IRENE–QUAL δεν υπάρχει η δυνατότητα εφαρμογής σχήματος κεντρικών διαφορών για τους όρους μεταφοράς, καθώς εάν χρησιμοποιηθεί πεπλεγμένο σχήμα για τους όρους διάχυσης το αριθμητικό σχήμα επίλυσης της εξίσωσης (4.3) είναι ασταθές, ενώ εάν χρησιμοποιηθεί ρητό σχήμα για τους όρους διάχυσης, η συνθήκη ευστάθειας είναι πολύ περιοριστική για το μέγεθος του χρονικού βήματος (βλ. Hindmarsh et al., 1984). Γενικά, η επιλογή του κατάλληλου αριθμητικού σχήματος, μεταξύ αυτών που παρουσιάζονται συνοπτικά στον Πίνακα 4.1, για την προσέγγιση των όρων μεταφοράς και των όρων διάχυσης της εξίσωσης (4.3), αποτελεί έναν συμβιβασμό μεταξύ της επιθυμητής ακρίβειας της λύσης και του υπολογιστικού κόστους της κάθε προσέγγισης.

Στις επόμενες παραγράφους περιγράφονται αναλυτικά τα αριθμητικά σχήματα επίλυσης της εξίσωσης (4.3) που περιλαμβάνονται στο υπό-μοντέλο ποιότητας επιφανειακών νερών του IRENE–QUAL.

#### 4.3.2.1 Μέθοδος ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών

Ολοκληρώνοντας τη μερική διαφορική εξίσωση (4.3) στον διαφορικό όγκο  $(i, j, k)$  (βλ. Σχήμα 3.4), κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος, μπορεί να διατυπωθεί στην ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή:

$$\frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} = Q_{ss_{i,j,k}} C_{ss_{i,j,k}} + R_s (C_{i,j,k}^{n+1}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} - \left( u_{i+1/2,j,k} \Delta z_{i+1/2,j,k} \Delta y_j C_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k} \Delta z_{i-1/2,j,k} \Delta y_j C_{i-1/2,j,k}^n \right)$$



$$\begin{aligned}
 & - \left( v_{i,j+1/2,k} \Delta z_{i,j+1/2,k} \Delta x_i C_{i,j+1/2,k}^n - v_{i,j-1/2,k} \Delta z_{i,j-1/2,k} \Delta x_i C_{i,j-1/2,k}^n \right) \\
 & - \left( w_{i,j,k-1/2} \Delta x_i \Delta y_j C_{i,j,k-1/2}^n - w_{i,j,k+1/2} \Delta x_i \Delta y_j C_{i,j,k+1/2}^n \right) \\
 & + \left( D_{tx_{i+1/2,j,k}} \Delta z_{i+1/2,j,k} \Delta y_j \frac{C_{i+1,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} - D_{tx_{i-1/2,j,k}} \Delta z_{i-1/2,j,k} \Delta y_j \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x_{i-1/2}} \right) \\
 & + \left( D_{ty_{i,j+1/2,k}} \Delta z_{i,j+1/2,k} \Delta x_i \frac{C_{i,j+1,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta y_{j+1/2}} - D_{ty_{i,j-1/2,k}} \Delta z_{i,j-1/2,k} \Delta x_i \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y_{j-1/2}} \right) \\
 & + \left( D_{tz_{i,j,k-1/2}} \Delta x_i \Delta y_j \frac{C_{i,j,k-1}^{n+1} - C_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta z_{i,j,k-1/2}} - D_{tz_{i,j,k+1/2}} \Delta x_i \Delta y_j \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i,j,k+1/2}} \right)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

όπου  $Q_{ss_{i,j,k}} = q_{ss_{i,j,k}} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k}$  και  $R_s(C_{i,j,k}^{n+1})$  συμβολίζει την πρόσθεση ή απώλεια ρύπου λόγω φυσικοχημικών ή βιολογικών διεργασιών που υπολογίζεται σαν συνάρτηση της συγκέντρωσης  $C_{i,j,k}^{n+1}$ . Για παράδειγμα, αν θεωρηθεί ότι η βιολογική διάσπαση ρύπου ακολουθεί κινητική πρώτης τάξης, τότε  $R_s(C_{i,j,k}^{n+1}) = -\lambda C_{i,j,k}^{n+1}$ , όπου  $\lambda$  [ $T^{-1}$ ] είναι η σταθερά διάσπασης. Η εξίσωση (4.18) προκύπτει εφαρμόζοντας ρητό σχήμα για τη χρονική ολοκλήρωση των όρων μεταφοράς και πεπλεγμένο σχήμα για τη χρονική ολοκλήρωση των όρων διάχυσης και απώλειας ή πρόσθεσης ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο και χρησιμοποιώντας σχήμα κεντρικών διαφορών για την εκτίμηση των μερικών παραγώγων στα μέτωπα των διαφορικών όγκων.

Αν εφαρμοστεί ρητό σχήμα για τη χρονική ολοκλήρωση της εξίσωσης (4.3), όλοι οι όροι εκφράζονται στη χρονική στάθμη  $t_n$ , οπότε προκύπτει η ακόλουθη αλγεβρική εξίσωση:

$$\begin{aligned}
 & \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} = Q_{ss_{i,j,k}} C_{ss_{i,j,k}} + R_s(C_{i,j,k}^n) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} \\
 & - \left( u_{i+1/2,j,k} \Delta z_{i+1/2,j,k} \Delta y_j C_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k} \Delta z_{i-1/2,j,k} \Delta y_j C_{i-1/2,j,k}^n \right) \\
 & - \left( v_{i,j+1/2,k} \Delta z_{i,j+1/2,k} \Delta x_i C_{i,j+1/2,k}^n - v_{i,j-1/2,k} \Delta z_{i,j-1/2,k} \Delta x_i C_{i,j-1/2,k}^n \right) \\
 & - \left( w_{i,j,k-1/2} \Delta x_i \Delta y_j C_{i,j,k-1/2}^n - w_{i,j,k+1/2} \Delta x_i \Delta y_j C_{i,j,k+1/2}^n \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( D_{tx_{i+1/2,j,k}} \Delta z_{i+1/2,j,k} \Delta y_j \frac{C_{i+1,j,k}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta x_{i+1/2}} - D_{tx_{i-1/2,j,k}} \Delta z_{i-1/2,j,k} \Delta y_j \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i-1,j,k}^n}{\Delta x_{i-1/2}} \right) \\
 & + \left( D_{ty_{i,j+1/2,k}} \Delta z_{i,j+1/2,k} \Delta x_i \frac{C_{i,j+1,k}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta y_{j+1/2}} - D_{ty_{i,j-1/2,k}} \Delta z_{i,j-1/2,k} \Delta x_i \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j-1,k}^n}{\Delta y_{j-1/2}} \right) \\
 & + \left( D_{tz_{i,j,k-1/2}} \Delta x_i \Delta y_j \frac{C_{i,j,k-1}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta z_{i,j,k-1/2}} - D_{tz_{i,j,k+1/2}} \Delta x_i \Delta y_j \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j,k+1}^n}{\Delta z_{i,j,k+1/2}} \right)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Στις εξισώσεις (4.18) και (4.19), οι τιμές των συγκεντρώσεων,  $C_{i\pm 1/2,j,k}$ ,  $C_{i,j\pm 1/2,k}$  και  $C_{i,j,k\pm 1/2}$ , στα μέτωπα των διαφορικών όγκων μπορούν να εκτιμηθούν χρησιμοποιώντας σχήμα ανάντη διαφορών ή το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST (Leonard, 1979, Leonard and Nijkamp, 1990). Όταν χρησιμοποιούνται ανάντη διαφορές, οι συγκεντρώσεις στα μέτωπα των διαφορικών όγκων υπολογίζονται ως:

$$\begin{aligned}
 C_{i+1/2,j,k} &= \begin{cases} C_{i,j,k}, & \text{αν } u_{i+1/2,j,k} > 0 \\ C_{i+1,j,k}, & \text{αν } u_{i+1/2,j,k} < 0 \end{cases} \\
 C_{i,j+1/2,k} &= \begin{cases} C_{i,j,k}, & \text{αν } v_{i,j+1/2,k} > 0 \\ C_{i,j+1,k}, & \text{αν } v_{i,j+1/2,k} < 0 \end{cases} \\
 C_{i,j,k+1/2} &= \begin{cases} C_{i,j,k+1}, & \text{αν } w_{i,j,k+1/2} > 0 \\ C_{i,j,k}, & \text{αν } w_{i,j,k+1/2} < 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Όταν χρησιμοποιείται το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST, οι τιμές των συγκεντρώσεων στα μέτωπα των διαφορικών όγκων υπολογίζονται μέσω πολυωνυμικής παρεμβολής τρίτης τάξης μεταξύ των συγκεντρώσεων των γειτονικών κόμβων (Leonard, 1979, Leonard and Nijkamp, 1990). Η τιμή της συγκέντρωσης στο μέτωπο  $(i + 1/2, j, k)$ , για παράδειγμα, υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned}
 C_{i+1/2,j,k} &= \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} C_{i,j,k} + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} C_{i+1,j,k} - \frac{d_x}{2} f_x - \frac{d_y}{2} f_y - \frac{d_z}{2} f_z \\
 & - \frac{(\Delta x_{i+1/2}^2 - d_x^2)}{6} f_{xx} + \left( \frac{d_y^2}{6} - \frac{\Delta y_{j-1/2} d_y}{4} \right) f_{yy} + \left( \frac{d_z^2}{6} - \frac{\Delta z_{k+1/2} d_z}{4} \right) f_{yy} \\
 & + \left( \frac{d_x d_y}{3} - \frac{\Delta x_{i+1/2} d_y}{4} \right) f_{xy} + \left( \frac{d_x d_z}{3} - \frac{\Delta x_{i+1/2} d_z}{4} \right) f_{xz} + \frac{d_y d_z}{3} f_{yz}
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

όπου

$$d_x = u_{i+1/2,j,k} \Delta t \quad (4.22\alpha)$$

$$d_y = v_{i+1/2,j,k} \Delta t \quad (4.22\beta)$$

$$d_z = w_{i+1/2,j,k} \Delta t \quad (4.22\gamma)$$

$$f_x = \frac{C_{i+1,j,k} - C_{i,j,k}}{\Delta x_{i+1/2}} \quad (4.23)$$

$$f_y = \begin{cases} (C_{i,j,k} - C_{i,j-1,k}) / \Delta y_{j-1/2}, & \text{αν } u_{i+1/2,j,k} > 0, v_{i+1/2,j,k} > 0 \\ (C_{i,j+1,k} - C_{i,j,k}) / \Delta y_{j+1/2}, & \text{αν } u_{i+1/2,j,k} > 0, v_{i+1/2,j,k} < 0 \\ (C_{i,j,k} - C_{i,j-1,k}) / \Delta y_{j-1/2}, & \text{αν } u_{i+1/2,j,k} < 0, v_{i+1/2,j,k} > 0 \\ (C_{i,j+1,k} - C_{i,j,k}) / \Delta y_{j+1/2}, & \text{αν } u_{i+1/2,j,k} < 0, v_{i+1/2,j,k} < 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

$$f_z = \begin{cases} (C_{i,j,k} - C_{i,j,k+1}) / \Delta z_{k+1/2}, & \text{αν } u_{i+1/2,j,k} > 0, w_{i+1/2,j,k} > 0 \\ (C_{i,j,k-1} - C_{i,j,k}) / \Delta z_{k-1/2}, & \text{αν } u_{i+1/2,j,k} > 0, w_{i+1/2,j,k} < 0 \\ (C_{i,j,k} - C_{i,j,k+1}) / \Delta z_{k+1/2}, & \text{αν } u_{i+1/2,j,k} < 0, w_{i+1/2,j,k} > 0 \\ (C_{i,j,k-1} - C_{i,j,k}) / \Delta z_{k-1/2}, & \text{αν } u_{i+1/2,j,k} < 0, w_{i+1/2,j,k} < 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

$$f_{xx} = \begin{cases} [f_x|_{i+1/2,j,k} - f_x|_{i-1/2,j,k}] / \Delta x_i, & \text{αν } u_{i+1/2,j,k} > 0 \\ [f_x|_{i+1+1/2,j,k} - f_x|_{i+1/2,j,k}] / \Delta x_{i+1}, & \text{αν } u_{i+1/2,j,k} < 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

Στις σχέσεις (4.22α)–(4.22γ), οι ταχύτητες  $v_{i+1/2,j,k}$  και  $w_{i+1/2,j,k}$  στο μέτωπο  $(i+1/2, j, k)$  υπολογίζονται μέσω γραμμικής παρεμβολής μεταξύ των τιμών των ταχυτήτων  $v_{i,j-1/2,k}$ ,  $v_{i,j+1/2,k}$ ,  $v_{i+1,j-1/2,k}$ ,  $v_{i+1,j+1/2,k}$  και  $w_{i,j,k-1/2}$ ,  $w_{i,j,k+1/2}$ ,  $w_{i+1,j,k-1/2}$ ,  $w_{i+1,j,k+1/2}$ , αντίστοιχα. Οι τιμές της συγκέντρωσης στα μέτωπα  $(i-1/2, j, k)$ ,  $(i, j \pm 1/2, k)$  και  $(i, j, k \pm 1/2)$  υπολογίζονται μέσω εξισώσεων αντίστοιχων της εξίσωσης (4.21).

Λόγω της πολυωνυμικής παρεμβολής τρίτης τάξης που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των τιμών της συγκέντρωσης στα μέτωπα των διαφορικών όγκων, η τεχνητή διάχυση που εισάγεται στην αριθμητική λύση της εξίσωσης (4.3) όταν εφαρμόζεται το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST είναι ελάχιστη (Leonard, 1979). Αυτός

είναι και ο λόγος που το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST επιλέγεται σε προβλήματα όπου ο μηχανισμός της μεταφοράς ρύπων επικρατεί σημαντικά σε σχέση με το μηχανισμό της διάχυσης. Ωστόσο, ο υπολογισμός των συγκεντρώσεων στα μέτωπα των διαφορικών όγκων μέσω σχέσεων αντίστοιχων της σχέσης (4.21), μπορεί να προκαλέσει ανεπιθύμητες ταλαντώσεις στην αριθμητική λύση (Leonard and Niknafs, 1990). Προκειμένου να αποφευχθούν οι ταλαντώσεις στην αριθμητική λύση, στο σχήμα ULTIMATE–QUICKEST χρησιμοποιούνται κατάλληλες σχέσεις περιορισμού για τη ρύθμιση των τιμών που υπολογίζονται στα μέτωπα των διαφορικών όγκων μέσω της πολυωνυμικής παρεμβολής, ώστε να εξασφαλίζεται η μονοτονία και το φραγμένο (απουσία ταλαντώσεων) της λύσης (Leonard and Niknafs, 1990). Η ρύθμιση των τιμών της συγκέντρωσης στα μέτωπα των διαφορικών όγκων, μέσω των σχέσεων περιορισμού που χρησιμοποιούνται στο σχήμα ULTIMATE–QUICKEST, εξηγείται στις ακόλουθες παραγράφους.

Ας θεωρηθεί το Σχήμα 4.1, όπου απεικονίζονται οι τιμές της συγκέντρωσης στους τρεις κόμβους  $(i-1, j, k)$ ,  $(i, j, k)$  και  $(i+1, j, k)$  και στα μέτωπα  $(i-1/2, j, k)$  και  $(i+1/2, j, k)$ . Αφού υπολογισθεί η τιμή της συγκέντρωσης στο μέτωπο  $(i+1/2, j, k)$  μέσω της σχέσης (4.21), πρέπει να ελεγχθεί αν το προφίλ των συγκεντρώσεων μεταξύ των κόμβων  $(i-1, j, k)$  και  $(i+1, j, k)$  παρουσιάζει μονοτονία, καθώς σε διαφορετική περίπτωση θα πρέπει να ρυθμιστεί η τιμή της συγκέντρωσης στο μέτωπο  $(i+1/2, j, k)$  μέσω των σχέσεων περιορισμού που χρησιμοποιούνται στο σχήμα ULTIMATE–QUICKEST. Αναγκαίες συνθήκες ώστε το προφίλ των συγκεντρώσεων μεταξύ των τριών κόμβων να είναι μονότονο είναι οι ακόλουθες:

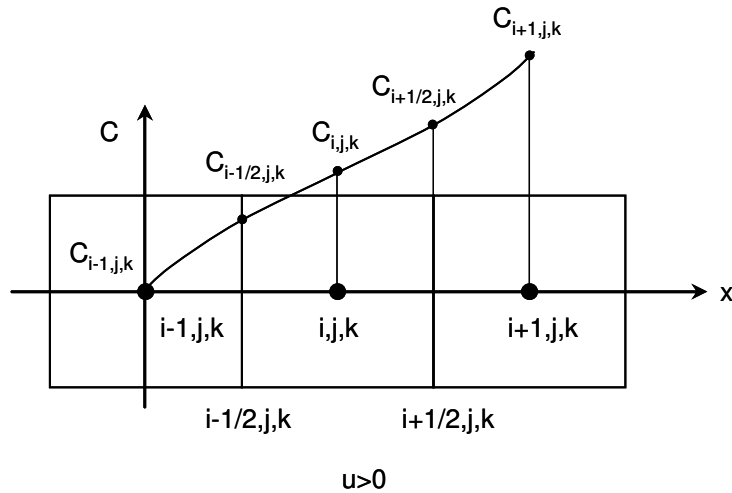
$$\widehat{C}_{i,j,k}^n \leq \widehat{C}_{i+1/2,j,k}^n \leq 1 \quad (4.27)$$

και

$$0 \leq \widehat{C}_{i-1/2,j,k}^n \leq \widehat{C}_{i,j,k}^n \quad (4.28)$$

όπου οι συγκεντρώσεις κανονικοποιούνται σύμφωνα με τη σχέση (4.29):

$$\widehat{C} = \frac{C - C_{i-1,j,k}}{C_{i+1,j,k} - C_{i-1,j,k}} \quad (4.29)$$



**Σχήμα 4.1:** Απεικόνιση μονοτονικής κατανομής συγκεντρώσεων μεταξύ των κόμβων  $(i-1, j, k)$  και  $(i+1, j, k)$  που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της συγκέντρωσης στο μέτωπο  $(i+1/2, j, k)$  σύμφωνα με το σχήμα ULTIMATE-QUICKEST

Οι συνθήκες (4.27) και (4.28) είναι αναγκαίες αλλά όχι ικανές να εξασφαλίσουν ότι το προφίλ των συγκεντρώσεων είναι τοπικά μονότονο. Θα πρέπει επίσης να ισχύει η ακόλουθη διπλή ανισότητα:

$$\widehat{C}_{i-1,j,k}^{n+1} \leq \widehat{C}_{i,j,k}^{n+1} \leq \widehat{C}_{i+1,j,k}^{n+1} \quad (4.30)$$

Η δυσμενέστερη περίπτωση που προκύπτει από την ανισότητα (4.30) περιγράφεται από την ανισότητα (4.31):

$$0 \leq \widehat{C}_{i,j,k}^{n+1} \leq 1 \quad (4.31)$$

Η συγκέντρωση στον κόμβο  $(i, j, k)$  κατά τη χρονική στιγμή  $t_{n+1}$ , που οφείλεται αποκλειστικά στο φαινόμενο της μεταφοράς κατά τη διεύθυνση  $x$ , υπολογίζεται σύμφωνα με το ρητό σχήμα πεπερασμένων διαφορών ως:

$$\widehat{C}_{i,j,k}^{n+1} = \widehat{C}_{i,j,k}^n - c_x \left( \widehat{C}_{i+1/2,j,k}^n - \widehat{C}_{i-1/2,j,k}^n \right) \quad (4.32)$$

όπου  $c_x$  συμβολίζει τον αριθμό Courant. Η ανισότητα του δεξιού μέλους της διπλής ανισότητας (4.30) ισχύει, καθώς όπως προκύπτει από την εξίσωση (4.32) όταν  $\widehat{C}_{i+1/2,j,k}^n > \widehat{C}_{i-1/2,j,k}^n$ , τότε  $\widehat{C}_{i,j,k}^{n+1} \leq \widehat{C}_{i,j,k}^n \leq 1$ . Από την ανισότητα του αριστερού μέλους της διπλής ανισότητας (4.31) προκύπτει, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.32), ότι:

$$\widehat{C}_{i+1/2,j,k}^n \leq \widehat{C}_{i-1/2,j,k}^n + \widehat{C}_{i,j,k}^n / c_x \quad (4.33)$$

Η δυσμενέστερη περίπτωση, οπότε  $\widehat{C}_{i-1/2,j,k} = 0$ , οδηγεί στον ακόλουθο περιορισμό για την τιμή της συγκέντρωσης στο μέτωπο  $(i + 1/2, j, k)$ :

$$\widehat{C}_{i+1/2,j,k}^n \leq \widehat{C}_{i,j,k}^n / c_x \quad (4.34)$$

Οι ανισότητες (4.27) και (4.34) αποτελούν τις σχέσεις περιορισμού που χρησιμοποιούνται στο σχήμα ULTIMATE–QUICKEST για τη ρύθμιση της τιμής της συγκέντρωσης στο μέτωπο  $(i + 1/2, j, k)$ , όταν  $0 \leq \widehat{C}_{i,j,k}^n \leq 1$ . Εάν οι ανισότητες (4.27) και (4.34) δεν ικανοποιούνται, η συγκέντρωση  $\widehat{C}_{i+1/2,j,k}^n$  ρυθμίζεται θέτωντας:

$$\widehat{C}_{i+1/2,j,k}^n = \widehat{C}_{i,j,k}^n \quad (4.35)$$

Αντίστοιχη διαδικασία με αυτήν που περιγράφηκε παραπάνω, ακολουθείται για τη ρύθμιση των τιμών της συγκέντρωσης στα υπόλοιπα μέτωπα ενός διαφορικού όγκου.

Ανεξάρτητα από το εάν εφαρμόζεται το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST ή σχήμα ανάντη διαφορών για την εκτίμηση των τιμών της συγκέντρωσης στα μέτωπα των διαφορικών όγκων, η επίλυση της εξίσωσης (4.19), που προκύπτει χρησιμοποιώντας ρητό σχήμα για τη χρονική διακριτοποίηση της εξίσωσης (4.3), είναι άμεση και εύκολη. Εάν εφαρμοστεί πεπλεγμένο σχήμα για τους όρους διάχυσης και απώλειας ή προσθεσης ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο, οπότε προκύπτει η εξίσωση (4.18), χρειάζεται να επιλυθεί ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό των συγκεντρώσεων του ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο.

Η εξίσωση (4.18) μπορεί να διατυπωθεί στην ακόλουθη πιο συνεπτυγμένη μορφή:

$$\begin{aligned} & A_{s_{i,j,k-1/2}} C_{i,j,k-1}^{n+1} + A_{s_{i,j-1/2,k}} C_{i,j-1,k}^{n+1} + A_{s_{i-1/2,j,k}} C_{i-1,j,k}^{n+1} + A_{s_{i,j,k}} C_{i,j,k}^{n+1} \\ & + A_{s_{i+1/2,j,k}} C_{i+1,j,k}^{n+1} + A_{s_{i,j+1/2,k}} C_{i,j+1,k}^{n+1} + A_{s_{i,j,k+1/2}} C_{i,j,k+1}^{n+1} = B_{s_{i,j,k}} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Οι συντελεστές  $A_{s_{i\pm 1/2,j,k}}$ ,  $A_{s_{i,j\pm 1/2,k}}$ ,  $A_{s_{i,j,k\pm 1/2}}$  και  $A_{s_{i,j,k}}$  [ $L^3T^{-1}$ ] των άγνωστων συγκεντρώσεων και ο όρος  $B_{s_{i,j,k}}$  [ $MT^{-1}$ ] ορίζονται σύμφωνα με τις εξισώσεις (4.37α)–(4.37η):

$$A_{s_{i+1/2,j,k}} = -D_{tx_{i+1/2,j,k}} \frac{\Delta z_{i+1/2,j,k} \Delta y_j}{\Delta x_{i+1/2}} \quad (4.37\alpha)$$

$$A_{s_{i-1/2,j,k}} = -D_{tx_{i-1/2,j,k}} \frac{\Delta z_{i-1/2,j,k} \Delta y_j}{\Delta x_{i-1/2}} \quad (4.37\beta)$$

$$A_{s_{i,j+1/2,k}} = -D_{ty_{i,j+1/2,k}} \frac{\Delta z_{i,j+1/2,k} \Delta x_i}{\Delta y_{j+1/2}} \quad (4.37\gamma)$$

$$A_{s_{i,j-1/2,k}} = -D_{ty_{i,j-1/2,k}} \frac{\Delta z_{i,j-1/2,k} \Delta x_i}{\Delta y_{j-1/2}} \quad (4.37\delta)$$

$$A_{s_{i,j,k-1/2}} = -D_{tz_{i,j,k-1/2}} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{\Delta z_{i,j,k-1/2}} \quad (4.37\epsilon)$$

$$A_{s_{i,j,k+1/2}} = -D_{tz_{i,j,k+1/2}} \frac{\Delta x_i \Delta y_j}{\Delta z_{i,j,k+1/2}} \quad (4.37\sigma\tau)$$

$$A_{s_{i,j,k}} = \frac{\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k}}{\Delta t} + \lambda \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} - A_{s_{i+1/2,j,k}} - A_{s_{i-1/2,j,k}} - A_{s_{i,j+1/2,k}} - A_{s_{i,j-1/2,k}} - A_{s_{i,j,k+1/2}} - A_{s_{i,j,k-1/2}} \quad (4.37\zeta)$$

$$B_{s_{i,j,k}} = \frac{C_{i,j,k}^n}{\Delta t} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} + Q_{ss_{i,j,k}} C_{ss_{i,j,k}} + \left( u_{i+1/2,j,k} \Delta z_{i+1/2,j,k} \Delta y_j C_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k} \Delta z_{i-1/2,j,k} \Delta y_j C_{i-1/2,j,k}^n \right) + \left( v_{i,j+1/2,k} \Delta z_{i,j+1/2,k} \Delta x_i C_{i,j+1/2,k}^n - v_{i,j-1/2,k} \Delta z_{i,j-1/2,k} \Delta x_i C_{i,j-1/2,k}^n \right) + \left( w_{i,j,k-1/2} \Delta x_i \Delta y_j C_{i,j,k-1/2}^n - w_{i,j,k+1/2} \Delta x_i \Delta y_j C_{i,j,k+1/2}^n \right) \quad (4.37\eta)$$

Γράφοντας την εξίσωση (4.36) για όλους τους διαφορικούς όγκους του υπολογιστικού πλέγματος, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων, διατυπωμένο σε μητρική μορφή, το οποίο πρέπει να επιλυθεί σε κάθε χρονικό βήμα για τον υπολογισμό των συγκεντρώσεων του ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο των επιφανειακών νερών:

$$\mathbf{A}_s \mathbf{C}^{n+1} = \mathbf{B}_s \quad (4.38)$$

όπου  $\mathbf{A}_s$  συμβολίζει το μητρώο συντελεστών του διανύσματος των άγνωστων συγκεντρώσεων,  $\mathbf{C}^{n+1}$ , και  $\mathbf{B}_s$  είναι ένα διάνυσμα με στοιχεία τους όρους του δεξιού μέλους της εξίσωσης (4.36). Το μητρώο συντελεστών  $\mathbf{A}_s$  έχει επτά διαγώνιους μη μηδενικές ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι μηδενικά και είναι συμμετρικό. Όπως φαίνεται από τις σχέσεις ορισμού των συντελεστών των άγνωστων συγκεντρώσεων, το μητρώο  $\mathbf{A}_s$  έχει αυστηρή διαγώνια κυριαρχία και θετικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο, άρα είναι θετικά ορισμένο. Για περιπτώσεις όπου δεν εξετάζεται η αλληλεπίδραση μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων υδάτων, το γραμμικό σύστημα εξισώσεων (4.38) μπορεί σε αυτό το σημείο να επιλυθεί πολύ αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο συζυγών κλίσεων με προρύθμιση μη πλήρους διάσπασης κατά Cholesky (Incomplete Cholesky preconditioning) (Gustafsson, 1978, Axelsson and Lindskog, 1986).

Η συνθήκη ευστάθειας του ημι-πεπλεγμένου σχήματος ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών (4.18) περιγράφεται από την ανισότητα (4.39), ενώ η ευστάθεια του ρητού σχήματος ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών (4.19) καθορίζεται από την ανισότητα (4.40) (Hindmarsh et al., 1984):

$$\Delta t \leq \min_{i,j,k} \left[ \frac{|u_{i,j,k}|}{\Delta x_i} + \frac{|v_{i,j,k}|}{\Delta y_j} + \frac{|w_{i,j,k}|}{\Delta z_{i,j,k}} \right]^{-1} \quad (4.39)$$

$$\Delta t \leq \min_{i,j,k} \left[ \frac{|u_{i,j,k}|}{\Delta x_i} + \frac{|v_{i,j,k}|}{\Delta y_j} + \frac{|w_{i,j,k}|}{\Delta z_{i,j,k}} + 2 \left( \frac{D_{tx_{i,j,k}}}{\Delta x_i^2} + \frac{D_{ty_{i,j,k}}}{\Delta y_j^2} + \frac{D_{tz_{i,j,k}}}{\Delta z_{i,j,k}^2} \right) + |\lambda| \right]^{-1} \quad (4.40)$$

#### 4.3.2.2 Μικτό αριθμητικό σχήμα Euler–Lagrange

Το μικτό αριθμητικό σχήμα Euler–Lagrange (Cheng et al., 1984) που χρησιμοποιείται για την επίλυση των όρων μεταφοράς της εξίσωσης (4.3) περιγράφηκε στην παράγραφο 3.3.3.3, οπότε δεν επαναλαμβάνεται αναλυτικά εδώ. Όταν οι όροι διάχυσης και απώλειας ή πρόσθεσης ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο διακριτοποιούνται με ρητό τρόπο, η εξίσωση (4.3) γράφεται στην ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή:



$$\begin{aligned}
 & \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i-c_x, j-c_y, k-c_z}^n}{\Delta t} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} = Q_{ss_{i,j,k}} C_{ss_{i,j,k}} + R_s \left( C_{i,j,k}^n \right) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} \\
 & + \left( D_{tx_{i+1/2,j,k}} \Delta z_{i+1/2,j,k} \Delta y_j \frac{C_{i+1,j,k}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta x_{i+1/2}} - D_{tx_{i-1/2,j,k}} \Delta z_{i-1/2,j,k} \Delta y_j \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i-1,j,k}^n}{\Delta x_{i-1/2}} \right) \\
 & + \left( D_{ty_{i,j+1/2,k}} \Delta z_{i,j+1/2,k} \Delta x_i \frac{C_{i,j+1,k}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta y_{j+1/2}} - D_{ty_{i,j-1/2,k}} \Delta z_{i,j-1/2,k} \Delta x_i \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j-1,k}^n}{\Delta y_{j-1/2}} \right) \\
 & + \left( D_{tz_{i,j,k-1/2}} \Delta x_i \Delta y_j \frac{C_{i,j,k-1}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta z_{i,j,k-1/2}} - D_{tz_{i,j,k+1/2}} \Delta x_i \Delta y_j \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j,k+1}^n}{\Delta z_{i,j,k+1/2}} \right)
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Όταν χρησιμοποιείται πεπλεγμένο σχήμα για τους όρους διάχυσης και απώλειας ή πρόσθεσης ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο, προκύπτει η ακόλουθη αλγεβρική εξίσωση από τη διακριτοποίηση της εξίσωσης (4.3):

$$\begin{aligned}
 & \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i-c_x, j-c_y, k-c_z}^n}{\Delta t} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} = Q_{ss_{i,j,k}} C_{ss_{i,j,k}} + R_s \left( C_{i,j,k}^{n+1} \right) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} \\
 & + \left( D_{tx_{i+1/2,j,k}} \Delta z_{i+1/2,j,k} \Delta y_j \frac{C_{i+1,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} - D_{tx_{i-1/2,j,k}} \Delta z_{i-1/2,j,k} \Delta y_j \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x_{i-1/2}} \right) \\
 & + \left( D_{ty_{i,j+1/2,k}} \Delta z_{i,j+1/2,k} \Delta x_i \frac{C_{i,j+1,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta y_{j+1/2}} - D_{ty_{i,j-1/2,k}} \Delta z_{i,j-1/2,k} \Delta x_i \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y_{j-1/2}} \right) \\
 & + \left( D_{tz_{i,j,k-1/2}} \Delta x_i \Delta y_j \frac{C_{i,j,k-1}^{n+1} - C_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta z_{i,j,k-1/2}} - D_{tz_{i,j,k+1/2}} \Delta x_i \Delta y_j \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k+1}^{n+1}}{\Delta z_{i,j,k+1/2}} \right)
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Υπευθυμίζεται ότι η τιμή της συγκέντρωσης στο σημείο  $(i - c_x, j - c_y, k - c_z)$  κατά τη χρονική στιγμή  $t_n$  αποτελεί ουσιαστικά την τιμή της συγκέντρωσης στο σημείο  $(i, j, k)$  κατά τη χρονική στιγμή  $t_{n+1}$  που οφείλεται αποκλειστικά στο φαινόμενο της μεταφοράς (Neuman, 1981, Cheng et al., 1984). Η τιμή της συγκέντρωσης στο σημείο  $(i - c_x, j - c_y, k - c_z)$ , το οποίο γενικά δεν αποτελεί κόμβο του υπολογιστικού πλέγματος, υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή των τιμών της συγκέντρωσης στους οχτώ γειτονικούς κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος, σύμφωνα με την εξίσωση (3.78). Η αριθμητική διάχυση που εισάγεται τεχνητά από την παραπάνω μέθοδο Euler–Lagrange είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με την αριθμητική διάχυση που οφείλεται στο σχήμα ανάντη διαφορών και μπορεί να μηδενιστεί χρησιμοποιώντας παρεμβολή ανώτερης τάξης για τον προσδιορισμό της τιμής της

συγκέντρωσης στο σημείο  $(i - c_x, j - c_y, k - c_z)$ . Στην περίπτωση αυτή, ωστόσο, η αριθμητική λύση μπορεί να παρουσιάσει ταλαντώσεις (Cheng et al., 1984).

Η εξίσωση (4.41) μπορεί να επιλυθεί άμεσα για τον υπολογισμό των συγκεντρώσεων ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο των επιφανειακών νερών. Εάν εφαρμοστεί πεπλεγμένο σχήμα για τους όρους διάχυσης και απώλειας ή προσθεσης ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο, οπότε προκύπτει η εξίσωση (4.42), χρειάζεται να επιλυθεί ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Η εξίσωση (4.42) μπορεί να διατυπωθεί στην πιο συνεπτυγμένη μορφή της εξίσωσης (4.36), όπου οι συντελεστές  $A_{s_{i\pm 1/2,j,k}}$ ,  $A_{s_{i,j\pm 1/2,k}}$ ,  $A_{s_{i,j,k\pm 1/2}}$  και  $A_{s_{i,j,k}}$  των άγνωστων συγκεντρώσεων ορίζονται σύμφωνα με τις εξισώσεις (4.37α)–(4.37ζ), όμως ο όρος  $B_{s_{i,j,k}}$  διαφοροποιείται και ορίζεται από την εξίσωση (4.43):

$$B_{s_{i,j,k}} = \frac{C_{i-c_x, j-c_y, k-c_z}^n}{\Delta t} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} + Q_{ss_{i,j,k}} C_{ss_{i,j,k}} \quad (4.43)$$

Η διαφοροποίηση του όρου  $B_{s_{i,j,k}}$  δεν επηρεάζει την επίλυση του γραμμικού συστήματος εξισώσεων (4.39) με την επαναληπτική μέθοδο συζυγών κλίσεων με προρύθμιση μη πλήρους διάσπασης κατά Cholesky, για τον υπολογισμό των συγκεντρώσεων του ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο των επιφανειακών νερών.

Η ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος (4.41) αποδεικνύεται ότι καθορίζεται από την ακόλουθη ανισότητα (Greenspan and Casulli, 1988):

$$\Delta t \leq \min_{i,j,k} \left[ 2 \left( \frac{D_{tx_{i,j,k}}}{\Delta x_i^2} + \frac{D_{ty_{i,j,k}}}{\Delta y_j^2} + \frac{D_{tz_{i,j,k}}}{\Delta z_{i,j,k}^2} \right) + |\lambda| \right]^{-1} \quad (4.44)$$

Το αριθμητικό σχήμα (4.42) είναι ευσταθές χωρίς όριο (unconditionally stable).

### 4.3.3 Επίλυση της εξίσωσης του υπό-μοντέλου ποιότητας υπόγειων νερών

Τα αριθμητικά σχήματα που περιλαμβάνονται στο υπό-μοντέλο ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE-QUAL για την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς-διασποράς (4.11), είναι όμοια με αυτά που χρησιμοποιούνται στο υπό-μοντέλο

ποιότητας επιφανειακών νερών για την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς–διάχυσης (4.3) (βλ. Πίνακα 4.2), καθώς η μορφή των δύο εξισώσεων είναι κοινή. Ωστόσο, οι ταχύτητες ροής των υπόγειων νερών είναι συνήθως μικρές, με αποτέλεσμα τα σχετικά μεγέθη των μηχανισμών της μεταφοράς και της υδροδυναμικής διασποράς ρύπων στα υπόγεια νερά να μην απέχουν στο βαθμό που μπορεί να απέχουν οι αντίστοιχες διεργασίες στα επιφανειακά νερά. Συνεπώς στα μοντέλα ποιότητας υπόγειων νερών χρησιμοποιούνται πολύ συχνά τα κλασσικά αριθμητικά σχήματα Euler, μεταξύ των οποίων συγκαταλέγεται και το σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών που περιλαμβάνεται, μεταξύ άλλων, στο υπό–μοντέλο ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL (Zheng and Bennett, 1995). Εκτός από το ρητό και το ημι–πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών, στο υπό–μοντέλο ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL περιλαμβάνεται και ένα πλήρως πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση της εξίσωσης (4.11). Η χρήση του πεπλεγμένου σχήματος μειώνει τον υπολογιστικό χρόνο σε περιπτώσεις μικρών ταχυτήτων ροής, οπότε δε χρειάζεται να επιβληθούν περιορισμοί στο μέγεθος του χρονικού βήματος για λόγους ακρίβειας. Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται αναλυτικά τα αριθμητικά σχήματα επίλυσης της εξίσωσης (4.11) που χρησιμοποιούνται στο IRENE–QUAL.

Πρέπει να σημειωθεί ότι το χρονικό βήμα αριθμητικής επίλυσης της εξίσωσης (4.11) μπορεί να είναι μικρότερο ή ίσο του χρονικού βήματος που χρησιμοποιείται στο υπό–μοντέλο ροής υπόγειων υδάτων του IRENE–HYD. Αν στο υπό–μοντέλο ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL χρησιμοποιηθεί χρονικό βήμα μικρότερο από το χρονικό βήμα που χρησιμοποιείται στο υπό–μοντέλο ροής υπόγειων υδάτων του IRENE–HYD, τότε για τον αριθμό των χρονικών βημάτων του υπό–μοντέλου ποιότητας υπόγειων νερών που περιλαμβάνονται σε ένα χρονικό βήμα του υπό–μοντέλου ροής υπόγειων νερών, οι τιμές των πιεζομετρικών φορτίων και του υψομέτρου της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών θεωρούνται σταθερές.

#### 4.3.3.1 Μέθοδος ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (4.11) στον διαφορικό όγκο  $(i, j, k)$  κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος, μπορεί να διατυπωθεί στην ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή:

$$\begin{aligned}
 R_{d_{i,j,k}} n_{e_{i,j,k}} \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t} \Delta V_{i,j,k} = & \\
 - \left( q_{x_{i+1/2,j,k}} A_{i+1/2,j,k} C_{i+1/2,j,k}^n - q_{x_{i-1/2,j,k}} A_{i-1/2,j,k} C_{i-1/2,j,k}^n \right) & \\
 - \left( q_{y_{i,j+1/2,k}} A_{i,j+1/2,k} C_{i,j+1/2,k}^n - q_{y_{i,j-1/2,k}} A_{i,j-1/2,k} C_{i,j-1/2,k}^n \right) & \\
 - \left( q_{z_{i,j,k-1/2}} A_{i,j,k-1/2} C_{i,j,k-1/2}^n - q_{z_{i,j,k+1/2}} A_{i,j,k+1/2} C_{i,j,k+1/2}^n \right) & \\
 + \hat{D}_{h_{xx_{i+1/2,j,k}}} A_{i+1/2,j,k} \frac{C_{i+1,j,k}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta x_{i+1/2}} - \hat{D}_{h_{xx_{i-1/2,j,k}}} A_{i-1/2,j,k} \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i-1,j,k}^n}{\Delta x_{i-1/2}} & \\
 + \hat{D}_{h_{xy_{i+1/2,j,k}}} A_{i+1/2,j,k} \frac{\omega_{x_{i+1/2}} C_{i,j+1,k}^n + (1 - \omega_{x_{i+1/2}}) C_{i+1,j+1,k}^n - \omega_{x_{i+1/2}} C_{i,j-1,k}^n - (1 - \omega_{x_{i+1/2}}) C_{i+1,j-1,k}^n}{0.5 \Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5 \Delta y_{j+1}} & \\
 - \hat{D}_{h_{xy_{i-1/2,j,k}}} A_{i-1/2,j,k} \frac{\omega_{x_{i-1/2}} C_{i-1,j+1,k}^n + (1 - \omega_{x_{i-1/2}}) C_{i,j+1,k}^n - \omega_{x_{i-1/2}} C_{i-1,j-1,k}^n - (1 - \omega_{x_{i-1/2}}) C_{i,j-1,k}^n}{0.5 \Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5 \Delta y_{j+1}} & \\
 + \hat{D}_{h_{xz_{i+1/2,j,k}}} A_{i+1/2,j,k} \frac{\omega_{x_{i+1/2}} C_{i,j,k-1}^n + (1 - \omega_{x_{i+1/2}}) C_{i+1,j,k-1}^n - \omega_{x_{i+1/2}} C_{i,j,k+1}^n - (1 - \omega_{x_{i+1/2}}) C_{i+1,j,k+1}^n}{0.5 \Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5 \Delta z_{i,j,k+1}} & \\
 - \hat{D}_{h_{xz_{i-1/2,j,k}}} A_{i-1/2,j,k} \frac{\omega_{x_{i-1/2}} C_{i-1,j,k-1}^n + (1 - \omega_{x_{i-1/2}}) C_{i,j,k-1}^n - \omega_{x_{i-1/2}} C_{i-1,j,k+1}^n - (1 - \omega_{x_{i-1/2}}) C_{i,j,k+1}^n}{0.5 \Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5 \Delta z_{i,j,k+1}} & \\
 + \hat{D}_{h_{yx_{i,j+1/2,k}}} A_{i,j+1/2,k} \frac{\omega_{y_{j+1/2}} C_{i+1,j,k}^n + (1 - \omega_{y_{j+1/2}}) C_{i+1,j+1,k}^n - \omega_{y_{j+1/2}} C_{i-1,j,k}^n - (1 - \omega_{y_{j+1/2}}) C_{i-1,j+1,k}^n}{0.5 \Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5 \Delta x_{i+1}} & \\
 - \hat{D}_{h_{yx_{i,j-1/2,k}}} A_{i,j-1/2,k} \frac{\omega_{y_{j-1/2}} C_{i+1,j-1,k}^n + (1 - \omega_{y_{j-1/2}}) C_{i+1,j,k}^n - \omega_{y_{j-1/2}} C_{i-1,j-1,k}^n - (1 - \omega_{y_{j-1/2}}) C_{i-1,j,k}^n}{0.5 \Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5 \Delta x_{i+1}} & \\
 + \hat{D}_{h_{yy_{i,j+1/2,k}}} A_{i,j+1/2,k} \frac{C_{i,j+1,k}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta y_{j+1/2}} - \hat{D}_{h_{yy_{i,j-1/2,k}}} A_{i,j-1/2,k} \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j-1,k}^n}{\Delta y_{j-1/2}} & \\
 + \hat{D}_{h_{yz_{i,j+1/2,k}}} A_{i,j+1/2,k} \frac{\omega_{y_{j+1/2}} C_{i,j,k-1}^n + (1 - \omega_{y_{j+1/2}}) C_{i,j+1,k-1}^n - \omega_{y_{j+1/2}} C_{i,j,k+1}^n - (1 - \omega_{y_{j+1/2}}) C_{i,j+1,k+1}^n}{0.5 \Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5 \Delta z_{i,j,k+1}} & \\
 - \hat{D}_{h_{yz_{i,j-1/2,k}}} A_{i,j-1/2,k} \frac{\omega_{y_{j-1/2}} C_{i,j-1,k-1}^n + (1 - \omega_{y_{j-1/2}}) C_{i,j,k-1}^n - \omega_{y_{j-1/2}} C_{i,j-1,k+1}^n - (1 - \omega_{y_{j-1/2}}) C_{i,j,k+1}^n}{0.5 \Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5 \Delta z_{i,j,k+1}} & \\
 + \hat{D}_{h_{zx_{i,j,k-1/2}}} A_{i,j,k-1/2} \frac{\omega_{z_{k-1/2}} C_{i+1,j,k-1}^n + (1 - \omega_{z_{k-1/2}}) C_{i+1,j,k}^n - \omega_{z_{k-1/2}} C_{i-1,j,k-1}^n - (1 - \omega_{z_{k-1/2}}) C_{i-1,j,k}^n}{0.5 \Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5 \Delta x_{i+1}} & \\
 - \hat{D}_{h_{zx_{i,j+1/2,k}}} A_{i,j+1/2,k} \frac{\omega_{z_{k+1/2}} C_{i+1,j,k}^n + (1 - \omega_{z_{k+1/2}}) C_{i+1,j,k+1}^n - \omega_{z_{k+1/2}} C_{i-1,j,k}^n - (1 - \omega_{z_{k+1/2}}) C_{i-1,j,k+1}^n}{0.5 \Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5 \Delta x_{i+1}} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\hat{D}_{h_{zy},i,j,k-1/2} A_{i,j,k-1/2} \frac{\omega_{z_{k-1/2}} C_{i,j+1,k-1}^n + (1-\omega_{z_{k-1/2}}) C_{i,j+1,k}^n - \omega_{z_{k-1/2}} C_{i,j-1,k-1}^n - (1-\omega_{z_{k-1/2}}) C_{i,j-1,k}^n}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}} \\
 & -\hat{D}_{h_{zy},i,j,k+1/2} A_{i,j,k+1/2} \frac{\omega_{z_{k+1/2}} C_{i,j+1,k}^n + (1-\omega_{z_{k+1/2}}) C_{i,j+1,k+1}^n - \omega_{z_{k+1/2}} C_{i,j-1,k}^n - (1-\omega_{z_{k+1/2}}) C_{i,j-1,k+1}^n}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}} \\
 & +\hat{D}_{h_{zz},i,j,k-1/2} A_{i,j,k-1/2} \frac{C_{i,j,k-1}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta z_{i,j,k-1/2}} - \hat{D}_{h_{zz},i,j,k+1/2} A_{i,j,k+1/2} \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j,k+1}^n}{\Delta z_{i,j,k+1/2}} \\
 & Q_{gs,i,j,k} C_{gs,i,j,k} - (\lambda_1 n_{e,i,j,k} C_{i,j,k}^n + \lambda_2 n_{e,i,j,k} S_{i,j,k}^n) \Delta V_{i,j,k}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Η εξίσωση (4.45) προκύπτει εφαρμόζοντας ρητό σχήμα για τη χρονική ολοκλήρωση της εξίσωσης (4.11) και χρησιμοποιώντας σχήμα κεντρικών διαφορών για την εκτίμηση των μερικών παραγώγων στα μέτωπα των διαφορικών όγκων. Ο όγκος του υπολογιστικού κελιού  $(i, j, k)$  που καταλαμβάνεται από τα υπόγεια νερά και η επιφάνεια διατομής της ροής,  $A$ , στα μέτωπα του υπολογιστικού κελιού υπολογίζονται ως:

$$\Delta V_{i,j,k} = \Delta x_i \Delta y_j Hsat_{i,j,k},$$

$$A_{i\pm 1/2,j,k} = Hsat_{i\pm 1/2,j,k} \Delta y_j,$$

$$A_{i,j,\pm 1/2,k} = Hsat_{i,j,\pm 1/2,k} \Delta x_i \text{ και}$$

$$A_{i,j,k\pm 1/2} = \Delta x_i \Delta y_j.$$

Οι τιμές των  $q_{x_{i\pm 1/2,j,k}}$ ,  $q_{y_{i,j,\pm 1/2,k}}$ ,  $q_{y_{i,j,k\pm 1/2}}$ ,  $Hsat_{i,j,k}$ ,  $Hsat_{i\pm 1/2,j,k}$  και  $Hsat_{i,j,\pm 1/2,k}$  είναι γνωστές από την επίλυση του υπό-μοντέλου ροής υπόγειων νερών του IRENE-HYD. Οι συντελεστές  $\omega_{x_{i\pm 1/2}}$ ,  $\omega_{y_{j\pm 1/2}}$  και  $\omega_{z_{k\pm 1/2}}$  ορίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις (4.46α)–(4.46στ):

$$\omega_{x_{i+1/2}} = \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \tag{4.46α}$$

$$\omega_{x_{i-1/2}} = \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \tag{4.46β}$$

$$\omega_{y_{j+1/2}} = \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \tag{4.46γ}$$

$$\omega_{y_{j-1/2}} = \frac{\Delta y_j}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \quad (4.46\delta)$$

$$\omega_{z_{k-1/2}} = \frac{\Delta z_{i,j,k-1}}{\Delta z_{i,j,k} + \Delta z_{i,j,k-1}} \quad (4.46\epsilon)$$

$$\omega_{z_{k+1/2}} = \frac{\Delta z_{i,j,k}}{\Delta z_{i,j,k} + \Delta z_{i,j,k+1}} \quad (4.46\sigma\tau)$$

Οι συντελεστές φαινόμενης υδροδυναμικής διασποράς στα μέτωπα των διαφορικών όγκων υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.9α)–(4.9στ). Για παράδειγμα, οι τιμές των  $\hat{D}_{h_{xx}}$ ,  $\hat{D}_{h_{xy}}$  και  $\hat{D}_{h_{xz}}$  στο μέτωπο  $(i+1/2, j, k)$  υπολογίζονται ως:

$$\hat{D}_{h_{xx_{i+1/2,j,k}}} = \frac{\alpha_{L_{i+1/2,j,k}} q_{x_{i+1/2,j,k}}^2}{q_{i+1/2,j,k}} + \frac{\alpha_{TH_{i+1/2,j,k}} q_{y_{i+1/2,j,k}}^2}{q_{i+1/2,j,k}} + \frac{\alpha_{TV_{i+1/2,j,k}} q_{z_{i+1/2,j,k}}^2}{q_{i+1/2,j,k}} \quad (4.47\alpha)$$

$$\hat{D}_{h_{xy_{i+1/2,j,k}}} = \left( \alpha_{L_{i+1/2,j,k}} - \alpha_{TH_{i+1/2,j,k}} \right) \frac{q_{x_{i+1/2,j,k}} q_{y_{i+1/2,j,k}}}{q_{i+1/2,j,k}} \quad (4.47\beta)$$

$$\hat{D}_{h_{xz_{i+1/2,j,k}}} = \left( \alpha_{L_{i+1/2,j,k}} - \alpha_{TV_{i+1/2,j,k}} \right) \frac{q_{x_{i+1/2,j,k}} q_{z_{i+1/2,j,k}}}{q_{i+1/2,j,k}} \quad (4.47\gamma)$$

όπου

$$q_{y_{i+1/2,j,k}} = \frac{1}{2} \left[ \left( q_{y_{i,j-1/2,k}} + q_{y_{i,j+1/2,k}} \right) \omega_{x_{i+1/2}} \right] + \frac{1}{2} \left[ \left( q_{y_{i+1,j-1/2,k}} + q_{y_{i+1,j+1/2,k}} \right) \left( 1 - \omega_{x_{i+1/2}} \right) \right] \quad (4.47\delta)$$

$$q_{z_{i+1/2,j,k}} = \frac{1}{2} \left[ \left( q_{z_{i,j,k-1/2}} + q_{z_{i,j,k+1/2}} \right) \omega_{x_{i+1/2}} \right] + \frac{1}{2} \left[ \left( q_{z_{i+1,j,k-1/2}} + q_{z_{i+1,j,k+1/2}} \right) \left( 1 - \omega_{x_{i+1/2}} \right) \right] \quad (4.47\epsilon)$$

$$q_{i+1/2,j,k} = \sqrt{q_{x_{i+1/2,j,k}}^2 + q_{y_{i+1/2,j,k}}^2 + q_{z_{i+1/2,j,k}}^2} \quad (4.47\sigma\tau)$$

$$\alpha_{L_{i+1/2,j,k}} = \alpha_{L_{i,j,k}} \omega_{x_{i+1/2}} + \alpha_{L_{i+1,j,k}} (1 - \omega_{x_{i+1/2}}) \quad (4.47\zeta)$$

$$\alpha_{TH_{i+1/2,j,k}} = \alpha_{TH_{i,j,k}} \omega_{x_{i+1/2}} + \alpha_{TH_{i+1,j,k}} (1 - \omega_{x_{i+1/2}}) \quad (4.47\eta)$$

$$\alpha_{TV_{i+1/2,j,k}} = \alpha_{TV_{i,j,k}} \omega_{x_{i+1/2}} + \alpha_{TV_{i+1,j,k}} (1 - \omega_{x_{i+1/2}}) \quad (4.47\theta)$$

Όπως προαναφέρθηκε, η εξίσωση (4.45) προκύπτει εφαρμόζοντας ρητό σχήμα για τη χρονική ολοκλήρωση της εξίσωσης (4.11). Αν χρησιμοποιηθεί ρητό σχήμα για τη χρονική ολοκλήρωση των όρων μεταφοράς της εξίσωσης (4.11) και πεπλεγμένο σχήμα για τη χρονική ολοκλήρωση των όρων διασποράς και απώλειας ή πρόσθεσης ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο, προκύπτει η εξίσωση (4.48). Αντίστοιχα, αν εφαρμοστεί πεπλεγμένο σχήμα για τη χρονική ολοκλήρωση της εξίσωσης (4.11), όλοι οι όροι εκφράζονται στη χρονική στάθμη  $t_{n+1}$ , οπότε προκύπτει η αλγεβρική εξίσωση (4.49).

$$\begin{aligned} R_{d_{i,j,k}} n_{e_{i,j,k}} \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t} \Delta V_{i,j,k} = \\ - \left( q_{x_{i+1/2,j,k}} A_{i+1/2,j,k} C_{i+1/2,j,k}^n - q_{x_{i-1/2,j,k}} A_{i-1/2,j,k} C_{i-1/2,j,k}^n \right) \\ - \left( q_{y_{i,j+1/2,k}} A_{i,j+1/2,k} C_{i,j+1/2,k}^n - q_{y_{i,j-1/2,k}} A_{i,j-1/2,k} C_{i,j-1/2,k}^n \right) \\ - \left( q_{z_{i,j,k-1/2}} A_{i,j,k-1/2} C_{i,j,k-1/2}^n - q_{z_{i,j,k+1/2}} A_{i,j,k+1/2} C_{i,j,k+1/2}^n \right) \\ + L(C^{n+1}) \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} R_{d_{i,j,k}} n_{e_{i,j,k}} \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t} \Delta V_{i,j,k} = \\ - \left( q_{x_{i+1/2,j,k}} A_{i+1/2,j,k} C_{i+1/2,j,k}^{n+1} - q_{x_{i-1/2,j,k}} A_{i-1/2,j,k} C_{i-1/2,j,k}^{n+1} \right) \\ - \left( q_{y_{i,j+1/2,k}} A_{i,j+1/2,k} C_{i,j+1/2,k}^{n+1} - q_{y_{i,j-1/2,k}} A_{i,j-1/2,k} C_{i,j-1/2,k}^{n+1} \right) \\ - \left( q_{z_{i,j,k-1/2}} A_{i,j,k-1/2} C_{i,j,k-1/2}^{n+1} - q_{z_{i,j,k+1/2}} A_{i,j,k+1/2} C_{i,j,k+1/2}^{n+1} \right) \\ + L(C^{n+1}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Στις εξισώσεις (4.48) και (4.49),  $L$  είναι ένας τελεστής ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών που περιλαμβάνει την πεπλεγμένη διακριτοποίηση των όρων διασποράς και απώλειας ή πρόσθεσης ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο.

Στις εξισώσεις (4.45) και (4.48), οι τιμές των συγκεντρώσεων,  $C_{i\pm 1/2,j,k}$ ,  $C_{i,j\pm 1/2,k}$  και  $C_{i,j,k\pm 1/2}$ , στα μέτωπα των διαφορικών όγκων μπορούν να εκτιμηθούν χρησιμοποιώντας σχήμα ανάντη διαφορών ή το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST σύμφωνα με τις σχέσεις (4.20) και (4.21), αντίστοιχα. Στην εξίσωση (4.49) οι τιμές των συγκεντρώσεων στα μέτωπα των διαφορικών όγκων υπολογίζονται χρησιμοποιώντας σχήμα ανάντη ή σχήμα κεντρικών διαφορών. Σε αυτήν την περίπτωση, οι συγκεντρώσεις  $C_{i\pm 1/2,j,k}$ ,  $C_{i,j\pm 1/2,k}$  και  $C_{i,j,k\pm 1/2}$  μπορούν να εκφραστούν στην ακόλουθη γενική μορφή:

$$C_{i+1/2,j,k}^{n+1} = \alpha_{x_{i+1/2}} C_{i,j,k}^{n+1} + (1 - \alpha_{x_{i+1/2}}) C_{i+1,j,k}^{n+1} \quad (4.50\alpha)$$

$$C_{i-1/2,j,k}^{n+1} = \alpha_{x_{i-1/2}} C_{i-1,j,k}^{n+1} + (1 - \alpha_{x_{i-1/2}}) C_{i,j,k}^{n+1} \quad (4.50\beta)$$

$$C_{i,j+1/2,k}^{n+1} = \alpha_{y_{j+1/2}} C_{i,j,k}^{n+1} + (1 - \alpha_{y_{j+1/2}}) C_{i,j+1,k}^{n+1} \quad (4.50\gamma)$$

$$C_{i,j-1/2,k}^{n+1} = \alpha_{y_{j-1/2}} C_{i,j-1,k}^{n+1} + (1 - \alpha_{y_{j-1/2}}) C_{i,j,k}^{n+1} \quad (4.50\delta)$$

$$C_{i,j,k-1/2}^{n+1} = \alpha_{z_{k-1/2}} C_{i,j,k}^{n+1} + (1 - \alpha_{z_{k-1/2}}) C_{i,j,k-1}^{n+1} \quad (4.50\epsilon)$$

$$C_{i,j,k+1/2}^{n+1} = \alpha_{z_{k+1/2}} C_{i,j,k+1}^{n+1} + (1 - \alpha_{z_{k+1/2}}) C_{i,j,k}^{n+1} \quad (4.50\sigma\tau)$$

Οι συντελεστές  $\alpha_{x_{i\pm 1/2}}$ ,  $\alpha_{y_{j\pm 1/2}}$  και  $\alpha_{z_{k\pm 1/2}}$  ορίζονται με διαφορετικό τρόπο για τα σχήματα ανάντη και κεντρικών διαφορών:

#### Σχήμα ανάντη διαφορών

$$\alpha_{x_{i\pm 1/2}} = \begin{cases} 1 & \text{αν } q_{x_{i\pm 1/2,j,k}} > 0 \\ 0 & \text{αν } q_{x_{i\pm 1/2,j,k}} < 0 \end{cases} \quad (4.51\alpha)$$

$$\alpha_{y_{j\pm 1/2}} = \begin{cases} 1 & \text{αν } q_{y_{i,j\pm 1/2,k}} > 0 \\ 0 & \text{αν } q_{y_{i,j\pm 1/2,k}} < 0 \end{cases} \quad (4.51\beta)$$

$$\alpha_{z_{k\pm 1/2}} = \begin{cases} 1 & \text{αν } q_{z_{i,j,k\pm 1/2}} > 0 \\ 0 & \text{αν } q_{z_{i,j,k\pm 1/2}} < 0 \end{cases} \quad (4.51\gamma)$$



Σχήμα κεντρικών διαφορών

$$\alpha_{x_{i+1/2}} = \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \quad (4.52\alpha)$$

$$\alpha_{x_{i-1/2}} = \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \quad (4.52\beta)$$

$$\alpha_{y_{j+1/2}} = \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \quad (4.52\gamma)$$

$$\alpha_{y_{j-1/2}} = \frac{\Delta y_j}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \quad (4.52\delta)$$

$$\alpha_{z_{k-1/2}} = \frac{\Delta z_{i,j,k-1}}{\Delta z_{i,j,k} + \Delta z_{i,j,k-1}} \quad (4.52\epsilon)$$

$$\alpha_{z_{k+1/2}} = \frac{\Delta z_{i,j,k}}{\Delta z_{i,j,k} + \Delta z_{i,j,k+1}} \quad (4.52\sigma\tau)$$

Η εξίσωση (4.45) μπορεί να επιλυθεί άμεσα για τον υπολογισμό των συγκεντρώσεων ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο των υπόγειων νερών. Ο προσδιορισμός των ρυπαντικών φορτίων στα υπόγεια νερά μέσω της εξίσωσης (4.48) ή της εξίσωσης (4.49) απαιτεί την επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων.

Οι εξισώσεις (4.48) και (4.49) μπορούν να διατυπωθούν στην ακόλουθη πιο συνεπτυγμένη μορφή:

$$\begin{aligned} &A_{g_{i,j,k-1/2}} C_{i,j,k-1}^{n+1} + A_{g_{i,j-1/2,k}} C_{i,j-1,k}^{n+1} + A_{g_{i-1/2,j,k}} C_{i-1,j,k}^{n+1} + A_{g_{i,j,k}} C_{i,j,k}^{n+1} \\ &+ A_{g_{i+1/2,j,k}} C_{i+1,j,k}^{n+1} + A_{g_{i,j+1/2,k}} C_{i,j+1,k}^{n+1} + A_{g_{i,j,k+1/2}} C_{i,j,k+1}^{n+1} = B_{g_{i,j,k}} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Οι συντελεστές  $A_{g_{i\pm 1/2,j,k}}$ ,  $A_{g_{i,j\pm 1/2,k}}$ ,  $A_{g_{i,j,k\pm 1/2}}$  και  $A_{g_{i,j,k}}$  [ $L^3T^{-1}$ ] των άγνωστων συγκεντρώσεων και ο όρος  $B_{g_{i,j,k}}$  [ $MT^{-1}$ ] ορίζονται με διαφορετικό τρόπο για τις εξισώσεις (4.48) και (4.49), όπως εξηγείται παρακάτω. Γράφοντας την εξίσωση (4.53) για όλους τους διαφορικούς όγκους του υπολογιστικού πλέγματος, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων, διατυπωμένο σε μητρική μορφή, το οποίο πρέπει να επιλυθεί σε κάθε χρονικό βήμα για τον υπολογισμό των συγκεντρώσεων του ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο των υπόγειων νερών:

$$\mathbf{A}_g \mathbf{C}^{n+1} = \mathbf{B}_g \quad (4.54)$$

όπου  $\mathbf{A}_g$  συμβολίζει το μητρώο συντελεστών του διανύσματος των άγνωστων συγκεντρώσεων,  $\mathbf{C}$ , και  $\mathbf{B}_g$  είναι ένα διάνυσμα με στοιχεία τους όρους του δεξιού μέλους της εξίσωσης (4.53). Το σύστημα εξισώσεων (4.54) είναι μη γραμμικό, καθώς η τιμή του όρου  $B_{g_{i,j,k}}$  και σε ορισμένες περιπτώσεις η τιμή του συντελεστή  $A_{g_{i,j,k}}$  δεν είναι σταθερές σε κάθε χρονικό βήμα αλλά είναι συνάρτηση των τιμών των συγκεντρώσεων του ρύπου στα υπόγεια νερά. Για την επίλυση του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων (4.54) χρησιμοποιείται η μέθοδος επαναλήψεων Picard, σύμφωνα με την οποία η εξίσωση (4.54) διατυπώνεται ως:

$$\mathbf{A}_g^{n+1,\ell} \mathbf{C}^{n+1,\ell+1} = \mathbf{B}_g^{n+1,\ell} \quad (4.55)$$

όπου  $\ell$  και  $\ell+1$  συμβολίζουν διαδοχικές επαναλήψεις Picard κατά το χρονικό βήμα  $n+1$ . Οι τιμές των στοιχείων του μητρώου συντελεστών  $\mathbf{A}_g$  και του διανύσματος  $\mathbf{B}_g$  ανανεώνονται μεταξύ των διαδοχικών επαναλήψεων Picard με βάση τις τιμές των συγκεντρώσεων που υπολογίστηκαν κατά την τελευταία επανάληψη. Η επίλυση του γραμμικού συστήματος εξισώσεων (4.55) σε κάθε επανάληψη Picard περιγράφεται σε επόμενες παραγράφους.

Όταν οι όροι μεταφοράς της εξίσωσης (4.11) διακριτοποιούνται με ρητό τρόπο και όροι διασποράς και απώλειας ή πρόσθεσης ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο με πεπλεγμένο τρόπο, οπότε προκύπτει η εξίσωση (4.48), οι συντελεστές  $A_{g_{i\pm 1/2,j,k}}$ ,

$A_{g_{i,j\pm 1/2,k}}$ ,  $A_{g_{i,j,k\pm 1/2}}$  και  $A_{g_{i,j,k}}$  των άγνωστων συγκεντρώσεων και ο όρος

$B_{g_{i,j,k}}$  ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$A_{g_{i+1/2,j,k}} = -\hat{D} h_{xx_{i+1/2,j,k}} \frac{A_{i+1/2,j,k}}{\Delta x_{i+1/2}} \quad (4.56\alpha)$$

$$A_{g_{i-1/2,j,k}} = -\hat{D} h_{xx_{i-1/2,j,k}} \frac{A_{i-1/2,j,k}}{\Delta x_{i-1/2}} \quad (4.56\beta)$$

$$A_{g_{i,j+1/2,k}} = -\hat{D} h_{yy_{i,j+1/2,k}} \frac{A_{i,j+1/2,k}}{\Delta y_{j+1/2}} \quad (4.56\gamma)$$

$$A_{g_{i,j-1/2,k}} = -\hat{D}_{h_{yy_{i,j-1/2,k}}} \frac{A_{i,j-1/2,k}}{\Delta y_{j-1/2}} \quad (4.56\delta)$$

$$A_{g_{i,j,k-1/2}} = -\hat{D}_{h_{zz_{i,j,k-1/2}}} A_{i,j,k-1/2} \frac{A_{i,j,k-1/2}}{\Delta z_{i,j,k-1/2}} \quad (4.56\epsilon)$$

$$A_{g_{i,j,k+1/2}} = -\hat{D}_{h_{zz_{i,j,k+1/2}}} \frac{A_{i,j,k+1/2}}{\Delta z_{i,j,k+1/2}} \quad (4.56\sigma\tau)$$

Περίπτωση γραμμικής ισόθερμης προσρόφησης:

$$A_{g_{i,j,k}} = \left( 1 + \frac{\rho_{p_{i,j,k}}}{n_{e_{i,j,k}}} K_d \right) \frac{\Delta V_{i,j,k}}{\Delta t} - A_{g_{i+1/2,j,k}} - A_{g_{i-1/2,j,k}} - A_{g_{i,j+1/2,k}} - A_{g_{i,j-1/2,k}} - A_{g_{i,j,k+1/2}} - A_{g_{i,j,k-1/2}} + \lambda_1 n_{e_{i,j,k}} \Delta V_{i,j,k} + \lambda_2 n_{e_{i,j,k}} K_d \Delta V_{i,j,k} \quad (4.56\zeta_1)$$

Περίπτωση ισόθερμης Freundlich:

$$A_{g_{i,j,k}}^{n+1,\ell} = R_{d_{i,j,k}}^{n+1,\ell} n_{e_{i,j,k}} \frac{\Delta V_{i,j,k}}{\Delta t} - A_{g_{i+1/2,j,k}} - A_{g_{i-1/2,j,k}} - A_{g_{i,j+1/2,k}} - A_{g_{i,j-1/2,k}} - A_{g_{i,j,k+1/2}} - A_{g_{i,j,k-1/2}} + \lambda_1 n_{e_{i,j,k}} \Delta V_{i,j,k} \quad (4.56\zeta_2)$$

όπου

$$R_{d_{i,j,k}}^{n+1,\ell} = 1 + \frac{\rho_{p_{i,j,k}}}{n_{e_{i,j,k}}} K_f f \left( C_{i,j,k}^{n+1,\ell} \right)^{f-1}$$

Περίπτωση ισόθερμης Langmuir:

$$A_{g_{i,j,k}}^{n+1,\ell} = R_{d_{i,j,k}}^{n+1,\ell} n_{e_{i,j,k}} \frac{\Delta V_{i,j,k}}{\Delta t} - A_{g_{i+1/2,j,k}} - A_{g_{i-1/2,j,k}} - A_{g_{i,j+1/2,k}} - A_{g_{i,j-1/2,k}} - A_{g_{i,j,k+1/2}} - A_{g_{i,j,k-1/2}} + \lambda_1 n_{e_{i,j,k}} \Delta V_{i,j,k} \quad (4.56\zeta_3)$$

όπου

$$R_{d_{i,j,k}}^{n+1,\ell} = 1 + \frac{\rho_{p_{i,j,k}}}{n_{e_{i,j,k}}} \left[ \frac{K_\ell \bar{S}}{\left( 1 + K_\ell C_{i,j,k}^{n+1,\ell} \right)^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 B_{g_{i,j,k}}^{n+1,\ell} = & R_{d_{i,j,k}}^{n+1,\ell} n_{e_{i,j,k}} \frac{C_{i,j,k}^n}{\Delta t} \Delta V_{i,j,k} + Q_{gs_{i,j,k}} C_{gs_{i,j,k}} - \lambda_2 n_{e_{i,j,k}} S_{i,j,k}^{n+1,\ell} \Delta V_{i,j,k} \\
 & + A_{g_{i+1/2,j,k}}^{cross} C_{i+1,j,k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i-1/2,j,k}}^{cross} C_{i-1,j,k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i,j+1/2,k}}^{cross} C_{i,j+1,k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i,j-1/2,k}}^{cross} C_{i,j-1,k}^{n+1,\ell} \\
 & + A_{g_{i,j,k+1/2}}^{cross} C_{i,j,k+1}^{n+1,\ell} + A_{g_{i,j,k-1/2}}^{cross} C_{i,j,k-1}^{n+1,\ell} + A_{g_{i+1/2,j,k-1/2}}^{cross} C_{i+1,j,k-1}^{n+1,\ell} + A_{g_{i-1/2,j,k-1/2}}^{cross} C_{i-1,j,k-1}^{n+1,\ell} \\
 & + A_{g_{i,j+1/2,k-1/2}}^{cross} C_{i,j+1,k-1}^{n+1,\ell} + A_{g_{i,j-1/2,k-1/2}}^{cross} C_{i,j-1,k-1}^{n+1,\ell} + A_{g_{i+1/2,j,k+1/2}}^{cross} C_{i+1,j,k+1}^{n+1,\ell} \\
 & + A_{g_{i-1/2,j,k+1/2}}^{cross} C_{i-1,j,k+1}^{n+1,\ell} + A_{g_{i+1/2,j+1/2,k}}^{cross} C_{i+1,j+1,k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i-1/2,j+1/2,k}}^{cross} C_{i-1,j+1,k}^{n+1,\ell} \\
 & + A_{g_{i+1/2,j-1/2,k}}^{cross} C_{i+1,j-1,k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i-1/2,j-1/2,k}}^{cross} C_{i-1,j-1,k}^{n+1,\ell} \\
 & + \left( q_{x_{i+1/2,j,k}} A_{i+1/2,j,k} C_{i+1/2,j,k}^n - q_{x_{i-1/2,j,k}} A_{i-1/2,j,k} C_{i-1/2,j,k}^n \right) \\
 & + \left( q_{y_{i,j+1/2,k}} A_{i,j+1/2,k} C_{i,j+1/2,k}^n - q_{y_{i,j-1/2,k}} A_{i,j-1/2,k} C_{i,j-1/2,k}^n \right) \\
 & + \left( q_{z_{i,j,k-1/2}} A_{i,j,k-1/2} C_{i,j,k-1/2}^n - q_{z_{i,j,k+1/2}} A_{i,j,k+1/2} C_{i,j,k+1/2}^n \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.56η}$$

όπου

$$\begin{aligned}
 A_{g_{i+1/2,j,k}}^{cross} = & \hat{D} h_{yx_{i,j+1/2,k}} A_{i,j+1/2,k} \frac{\omega_{y_{j+1/2}}}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}} \\
 & - \hat{D} h_{yx_{i,j-1/2,k}} A_{i,j-1/2,k} \frac{\left(1 - \omega_{y_{j-1/2}}\right)}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}} \\
 & + \hat{D} h_{zx_{i,j,k-1/2}} A_{i,j,k-1/2} \frac{\left(1 - \omega_{z_{k-1/2}}\right)}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}} \\
 & - \hat{D} h_{zx_{i,j+1/2,k}} A_{i,j+1/2,k} \frac{\omega_{z_{k+1/2}}}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}}
 \end{aligned}
 \tag{4.57α}$$

$$\begin{aligned}
 A_{g_{i-1/2,j,k}}^{cross} = & -\hat{D} h_{yx_{i,j+1/2,k}} A_{i,j+1/2,k} \frac{\omega_{y_{j+1/2}}}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}} \\
 & + \hat{D} h_{yx_{i,j-1/2,k}} A_{i,j-1/2,k} \frac{\left(1 - \omega_{y_{j-1/2}}\right)}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}} \\
 & - \hat{D} h_{zx_{i,j,k-1/2}} A_{i,j,k-1/2} \frac{\left(1 - \omega_{z_{k-1/2}}\right)}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}} \\
 & + \hat{D} h_{zx_{i,j+1/2,k}} A_{i,j+1/2,k} \frac{\omega_{z_{k+1/2}}}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}}
 \end{aligned}
 \tag{4.57β}$$

$$\begin{aligned}
 A_{g,j+1/2,k}^{cross} = & \hat{D}_{h_{xy_{i+1/2,j,k}}} A_{i+1/2,j,k} \frac{\omega_{x_{i+1/2}}}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}} \\
 & - \hat{D}_{h_{xy_{i-1/2,j,k}}} A_{i-1/2,j,k} \frac{(1-\omega_{x_{i-1/2}})}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}} \\
 & + \hat{D}_{h_{zy_{i,j,k-1/2}}} A_{i,j,k-1/2} \frac{(1-\omega_{z_{k-1/2}})}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}} \\
 & - \hat{D}_{h_{zy_{i,j,k+1/2}}} A_{i,j,k+1/2} \frac{\omega_{z_{k+1/2}}}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}}
 \end{aligned} \tag{4.57γ}$$

$$\begin{aligned}
 A_{g,j-1/2,k}^{cross} = & -\hat{D}_{h_{xy_{i+1/2,j,k}}} A_{i+1/2,j,k} \frac{\omega_{x_{i+1/2}}}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}} \\
 & + \hat{D}_{h_{xy_{i-1/2,j,k}}} A_{i-1/2,j,k} \frac{(1-\omega_{x_{i-1/2}})}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}} \\
 & - \hat{D}_{h_{zy_{i,j,k-1/2}}} A_{i,j,k-1/2} \frac{(1-\omega_{z_{k-1/2}}) C_{i,j-1,k}^n}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}} \\
 & + \hat{D}_{h_{zy_{i,j,k+1/2}}} A_{i,j,k+1/2} \frac{\omega_{z_{k+1/2}}}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}}
 \end{aligned} \tag{4.57δ}$$

$$\begin{aligned}
 A_{g,i,j,k-1/2}^{cross} = & \hat{D}_{h_{xz_{i+1/2,j,k}}} A_{i+1/2,j,k} \frac{\omega_{x_{i+1/2}}}{0.5\Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}} \\
 & - \hat{D}_{h_{xz_{i-1/2,j,k}}} A_{i-1/2,j,k} \frac{(1-\omega_{x_{i-1/2}})}{0.5\Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}} \\
 & + \hat{D}_{h_{yz_{i,j+1/2,k}}} A_{i,j+1/2,k} \frac{\omega_{y_{j+1/2}}}{0.5\Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}} \\
 & - \hat{D}_{h_{yz_{i,j-1/2,k}}} A_{i,j-1/2,k} \frac{(1-\omega_{y_{j-1/2}})}{0.5\Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}}
 \end{aligned} \tag{4.57ε}$$

$$\begin{aligned}
 A_{g_{i,j,k+1/2}}^{cross} = & -\hat{D}_{h_{xz_{i+1/2,j,k}}} A_{i+1/2,j,k} \frac{\omega_{x_{i+1/2}}}{0.5\Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}} \\
 & + \hat{D}_{h_{xz_{i-1/2,j,k}}} A_{i-1/2,j,k} \frac{(1-\omega_{x_{i-1/2}})}{0.5\Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}} \\
 & -\hat{D}_{h_{yz_{i,j+1/2,k}}} A_{i,j+1/2,k} \frac{\omega_{y_{j+1/2}}}{0.5\Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}} \\
 & + \hat{D}_{h_{yz_{i,j-1/2,k}}} A_{i,j-1/2,k} \frac{(1-\omega_{y_{j-1/2}})}{0.5\Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}}
 \end{aligned} \quad (4.57\sigma\tau)$$

$$\begin{aligned}
 A_{g_{i+1/2,j,k-1/2}}^{cross} = & \hat{D}_{h_{xz_{i+1/2,j,k}}} A_{i+1/2,j,k} \frac{(1-\omega_{x_{i+1/2}})}{0.5\Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}} \\
 & + \hat{D}_{h_{zx_{i,j,k-1/2}}} A_{i,j,k-1/2} \frac{\omega_{z_{k-1/2}}}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}}
 \end{aligned} \quad (4.57\zeta)$$

$$\begin{aligned}
 A_{g_{i-1/2,j,k-1/2}}^{cross} = & -\hat{D}_{h_{xz_{i-1/2,j,k}}} A_{i-1/2,j,k} \frac{\omega_{x_{i-1/2}}}{0.5\Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}} \\
 & -\hat{D}_{h_{zx_{i,j,k-1/2}}} A_{i,j,k-1/2} \frac{\omega_{z_{k-1/2}}}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}}
 \end{aligned} \quad (4.57\eta)$$

$$\begin{aligned}
 A_{g_{i,j+1/2,k-1/2}}^{cross} = & \hat{D}_{h_{yz_{i,j+1/2,k}}} A_{i,j+1/2,k} \frac{(1-\omega_{y_{j+1/2}})}{0.5\Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}} \\
 & + \hat{D}_{h_{zy_{i,j,k-1/2}}} A_{i,j,k-1/2} \frac{\omega_{z_{k-1/2}}}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}}
 \end{aligned} \quad (4.57\theta)$$

$$\begin{aligned}
 A_{g_{i,j-1/2,k-1/2}}^{cross} = & -\hat{D}_{h_{yz_{i,j-1/2,k}}} A_{i,j-1/2,k} \frac{\omega_{y_{j-1/2}}}{0.5\Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}} \\
 & -\hat{D}_{h_{zy_{i,j,k-1/2}}} A_{i,j,k-1/2} \frac{\omega_{z_{k-1/2}} C_{i,j-1,k-1}^n}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}}
 \end{aligned} \quad (4.57\iota)$$

$$\begin{aligned}
 A_{g_{i+1/2,j,k+1/2}}^{cross} = & -\hat{D}_{h_{xz_{i+1/2,j,k}}} A_{i+1/2,j,k} \frac{(1-\omega_{x_{i+1/2}})}{0.5\Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}} \\
 & -\hat{D}_{h_{zx_{i,j+1/2,k}}} A_{i,j+1/2,k} \frac{(1-\omega_{z_{k+1/2}})}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}}
 \end{aligned} \quad (4.57\kappa)$$

$$A_{g_{i-1/2,j,k+1/2}}^{cross} = \hat{D}_{h_{xz_{i-1/2,j,k}}} A_{i-1/2,j,k} \frac{\omega_{x_{i-1/2}}}{0.5\Delta z_{i,j,k-1} + \Delta z_{i,j,k} + 0.5\Delta z_{i,j,k+1}} + \hat{D}_{h_{zx_{i,j+1/2,k}}} A_{i,j+1/2,k} \frac{(1-\omega_{z_{k+1/2}})}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}} \quad (4.57\lambda)$$

$$A_{g_{i+1/2,j+1/2,k}}^{cross} = \hat{D}_{h_{xy_{i+1/2,j,k}}} A_{i+1/2,j,k} \frac{(1-\omega_{x_{i+1/2}})}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}} + \hat{D}_{h_{yx_{i,j+1/2,k}}} A_{i,j+1/2,k} \frac{(1-\omega_{y_{j+1/2}})}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}} \quad (4.57\mu)$$

$$A_{g_{i-1/2,j+1/2,k}}^{cross} = -\hat{D}_{h_{xy_{i-1/2,j,k}}} A_{i-1/2,j,k} \frac{\omega_{x_{i-1/2}}}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}} - \hat{D}_{h_{yx_{i,j+1/2,k}}} A_{i,j+1/2,k} \frac{(1-\omega_{y_{j+1/2}})}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}} \quad (4.57\nu)$$

$$A_{g_{i+1/2,j-1/2,k}}^{cross} = -\hat{D}_{h_{xy_{i+1/2,j,k}}} A_{i+1/2,j,k} \frac{(1-\omega_{x_{i+1/2}})}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}} - \hat{D}_{h_{yx_{i,j-1/2,k}}} A_{i,j-1/2,k} \frac{\omega_{y_{j-1/2}}}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}} \quad (4.57\xi)$$

$$A_{g_{i-1/2,j-1/2,k}}^{cross} = -\hat{D}_{h_{xy_{i-1/2,j,k}}} A_{i-1/2,j,k} \frac{\omega_{x_{i-1/2}}}{0.5\Delta y_{j-1} + \Delta y_j + 0.5\Delta y_{j+1}} - \hat{D}_{h_{yx_{i,j-1/2,k}}} A_{i,j-1/2,k} \frac{\omega_{y_{j-1/2}}}{0.5\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 0.5\Delta x_{i+1}} \quad (4.57\omicron)$$

Η εξίσωση (4.56η) ισχύει για την περίπτωση που η προσρόφηση ρύπου από το πορώδες μέσο περιγράφεται μέσω της ισόθερμης Freundlich ή της ισόθερμης Langmuir. Αν χρησιμοποιηθεί γραμμική ισόθερμη προσρόφησης ισορροπίας, ο όρος  $-\lambda_2 n_{e_{i,j,k}} S_{i,j,k}^{n+1,\ell} \Delta V_{i,j,k}$  απαλείφεται από την εξίσωση (4.56η) και για τον συντελεστή

προσρόφησης ισχύει:

$$R_{d_{i,j,k}}^{n+1,\ell} = R_{d_{i,j,k}} = 1 + \frac{\rho_{p_{i,j,k}}}{n_{e_{i,j,k}}} K_d$$

Όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (4.56α)–(4.56ζ) και (4.57α)–(4.57ο), όλες οι συγκεντρώσεις που σχετίζονται με τους διατμητικούς όρους του τανυστή υδροδυναμικής διασποράς τίθενται ίσες με τις τιμές της συγκέντρωσης που υπολογίστηκαν κατά το χρονικό βήμα  $n+1$ , κατά την προηγούμενη επανάληψη Picard,  $\ell$ . Κατ'αυτόν τον τρόπο, όλοι οι μη κύριοι όροι υδροδυναμικής διασποράς μεταφέρονται στο δεξί μέλος της εξίσωσης (4.55), στο διάνυσμα  $\mathbf{B}_g$ . Με αυτή την επιλογή, μειώνεται σημαντικά η απαιτούμενη υπολογιστική μνήμη και ο υπολογιστικός χρόνος επίλυσης του γραμμικού συστήματος εξισώσεων (4.55), με γενικά ασήμαντη απώλεια της ακρίβειας της λύσης (Zheng and Bennett, 1995), καθώς οι μη μηδενικές διαγώνιοι του μητρώου συντελεστών,  $\mathbf{A}_g$ , μειώνονται από δεκαεννιά σε επτά. Τα υπόλοιπα στοιχεία του μητρώου  $\mathbf{A}_g$  είναι μηδενικά. Επιπλέον, όπως φαίνεται από τις σχέσεις (4.56α)–(4.56εστ) ορισμού των συντελεστών των άγνωστων συγκεντρώσεων, το μητρώο  $\mathbf{A}_g$  είναι συμμετρικό, έχει αυστηρή διαγώνια κυριαρχία και θετικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο, άρα είναι θετικά ορισμένο. Σε κάθε επανάληψη Picard, το γραμμικό σύστημα εξισώσεων (4.55) μπορεί να επιλυθεί πολύ αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο συζυγών κλίσεων με προρύθμιση μη πλήρους διάσπασης κατά Cholesky (Incomplete Cholesky preconditioning) (Gustafsson, 1978, Axelsson and Lindskog, 1986).

Όταν όλοι οι όροι της εξίσωσης (4.11) διακριτοποιούνται με πεπλεγμένο τρόπο, οπότε προκύπτει η εξίσωση (4.49), οι συντελεστές  $A_{g_{i\pm 1/2,j,k}}$ ,  $A_{g_{i,j\pm 1/2,k}}$ ,  $A_{g_{i,j,k\pm 1/2}}$  και  $A_{g_{i,j,k}}$  των άγνωστων συγκεντρώσεων του ρύπου στα υπόγεια νερά και ο όρος  $B_{g_{i,j,k}}$  ορίζονται σύμφωνα με τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$A_{g_{i+1/2,j,k}} = q_{x_{i+1/2,j,k}} A_{i+1/2,j,k} \left(1 - \alpha_{x_{i+1/2}}\right) - \hat{D}_{h_{xx_{i+1/2,j,k}}} \frac{A_{i+1/2,j,k}}{\Delta x_{i+1/2}} \quad (4.58\alpha)$$

$$A_{g_{i-1/2,j,k}} = -q_{x_{i-1/2,j,k}} A_{i-1/2,j,k} \alpha_{x_{i-1/2}} - \hat{D}_{h_{xx_{i-1/2,j,k}}} \frac{A_{i-1/2,j,k}}{\Delta x_{i-1/2}} \quad (4.58\beta)$$

$$A_{g_{i,j+1/2,k}} = q_{y_{i,j+1/2,k}} A_{i,j+1/2,k} \left(1 - \alpha_{y_{j+1/2}}\right) - \hat{D}_{h_{yy_{i,j+1/2,k}}} \frac{A_{i,j+1/2,k}}{\Delta y_{j+1/2}} \quad (4.58\gamma)$$

$$A_{g_{i,j-1/2,k}} = -q_{y_{i,j-1/2,k}} A_{i,j-1/2,k} \alpha_{y_{j-1/2}} - \hat{D}_{h_{yy_{i,j-1/2,k}}} \frac{A_{i,j-1/2,k}}{\Delta y_{j-1/2}} \quad (4.58\delta)$$



$$A_{g_{i,j,k-1/2}} = q_{z_{i,j,k-1/2}} A_{i,j,k-1/2} \alpha_{z_{k-1/2}} - \hat{D}_{h_{zz_{i,j,k-1/2}}} A_{i,j,k-1/2} \frac{A_{i,j,k-1/2}}{\Delta z_{i,j,k-1/2}} \quad (4.58\epsilon)$$

$$A_{g_{i,j,k+1/2}} = -q_{z_{i,j,k+1/2}} A_{i,j,k+1/2} (1 - \alpha_{z_{k+1/2}}) - \hat{D}_{h_{zz_{i,j,k+1/2}}} A_{i,j,k+1/2} \frac{A_{i,j,k+1/2}}{\Delta z_{i,j,k+1/2}} \quad (4.58\sigma\tau)$$

Περίπτωση γραμμικής ισόθερμης προσρόφησης:

$$\begin{aligned} A_{g_{i,j,k}} = & \left( 1 + \frac{\rho_{p_{i,j,k}}}{n_{e_{i,j,k}}} K_d \right) \frac{\Delta V_{i,j,k}}{\Delta t} + \lambda_1 n_{e_{i,j,k}} \Delta V_{i,j,k} + \lambda_2 n_{e_{i,j,k}} K_d \Delta V_{i,j,k} \\ & + q_{x_{i+1/2,j,k}} A_{i+1/2,j,k} \alpha_{x_{i+1/2}} - q_{x_{i-1/2,j,k}} A_{i-1/2,j,k} (1 - \alpha_{x_{i-1/2}}) \\ & + q_{y_{i,j+1/2,k}} A_{i,j+1/2,k} \alpha_{y_{j+1/2}} - q_{y_{i,j-1/2,k}} A_{i,j-1/2,k} (1 - \alpha_{y_{j-1/2}}) \\ & + q_{z_{i,j,k-1/2}} A_{i,j,k-1/2} (1 - \alpha_{z_{k-1/2}}) - q_{z_{i,j,k+1/2}} A_{i,j,k+1/2} \alpha_{z_{k+1/2}} \\ & + \hat{D}_{h_{xx_{i+1/2,j,k}}} \frac{A_{i+1/2,j,k}}{\Delta x_{i+1/2}} + \hat{D}_{h_{xx_{i-1/2,j,k}}} \frac{A_{i-1/2,j,k}}{\Delta x_{i-1/2}} \\ & + \hat{D}_{h_{yy_{i,j+1/2,k}}} \frac{A_{i,j+1/2,k}}{\Delta y_{j+1/2}} + \hat{D}_{h_{yy_{i,j-1/2,k}}} \frac{A_{i,j-1/2,k}}{\Delta y_{j-1/2}} \\ & + \hat{D}_{h_{zz_{i,j,k-1/2}}} A_{i,j,k-1/2} \frac{A_{i,j,k-1/2}}{\Delta z_{i,j,k-1/2}} + \hat{D}_{h_{zz_{i,j,k+1/2}}} A_{i,j,k+1/2} \frac{A_{i,j,k+1/2}}{\Delta z_{i,j,k+1/2}} \end{aligned} \quad (4.58\zeta_1)$$

Περίπτωση ισόθερμης Freundlich:

$$\begin{aligned} A_{g_{i,j,k}}^{n+1,\ell} = & R_{d_{i,j,k}}^{n+1,\ell} n_{e_{i,j,k}} \frac{\Delta V_{i,j,k}}{\Delta t} + \lambda_1 n_{e_{i,j,k}} \Delta V_{i,j,k} \\ & + q_{x_{i+1/2,j,k}} A_{i+1/2,j,k} \alpha_{x_{i+1/2}} - q_{x_{i-1/2,j,k}} A_{i-1/2,j,k} (1 - \alpha_{x_{i-1/2}}) \\ & + q_{y_{i,j+1/2,k}} A_{i,j+1/2,k} \alpha_{y_{j+1/2}} - q_{y_{i,j-1/2,k}} A_{i,j-1/2,k} (1 - \alpha_{y_{j-1/2}}) \\ & + q_{z_{i,j,k-1/2}} A_{i,j,k-1/2} (1 - \alpha_{z_{k-1/2}}) - q_{z_{i,j,k+1/2}} A_{i,j,k+1/2} \alpha_{z_{k+1/2}} \\ & + \hat{D}_{h_{xx_{i+1/2,j,k}}} \frac{A_{i+1/2,j,k}}{\Delta x_{i+1/2}} + \hat{D}_{h_{xx_{i-1/2,j,k}}} \frac{A_{i-1/2,j,k}}{\Delta x_{i-1/2}} \\ & + \hat{D}_{h_{yy_{i,j+1/2,k}}} \frac{A_{i,j+1/2,k}}{\Delta y_{j+1/2}} + \hat{D}_{h_{yy_{i,j-1/2,k}}} \frac{A_{i,j-1/2,k}}{\Delta y_{j-1/2}} \\ & + \hat{D}_{h_{zz_{i,j,k-1/2}}} A_{i,j,k-1/2} \frac{A_{i,j,k-1/2}}{\Delta z_{i,j,k-1/2}} + \hat{D}_{h_{zz_{i,j,k+1/2}}} A_{i,j,k+1/2} \frac{A_{i,j,k+1/2}}{\Delta z_{i,j,k+1/2}} \end{aligned} \quad (4.58\zeta_2)$$

όπου

$$R_{d_{i,j,k}}^{n+1,\ell} = 1 + \frac{\rho_{p_{i,j,k}}}{n_{e_{i,j,k}}} K_f f (C_{i,j,k}^{n+1,\ell})^{f-1}$$

Περίπτωση ισόθερμης Langmuir:

$$\begin{aligned}
 A_{g_{i,j,k}}^{n+1,\ell} = & R_{d_{i,j,k}}^{n+1,\ell} n_{e_{i,j,k}} \frac{\Delta V_{i,j,k}}{\Delta t} + \lambda_1 n_{e_{i,j,k}} \Delta V_{i,j,k} \\
 & + q_{x_{i+1/2,j,k}} A_{i+1/2,j,k} \alpha_{x_{i+1/2}} - q_{x_{i-1/2,j,k}} A_{i-1/2,j,k} \left(1 - \alpha_{x_{i-1/2}}\right) \\
 & + q_{y_{i,j+1/2,k}} A_{i,j+1/2,k} \alpha_{y_{j+1/2}} - q_{y_{i,j-1/2,k}} A_{i,j-1/2,k} \left(1 - \alpha_{y_{j-1/2}}\right) \\
 & + q_{z_{i,j,k-1/2}} A_{i,j,k-1/2} \left(1 - \alpha_{z_{k-1/2}}\right) - q_{z_{i,j,k+1/2}} A_{i,j,k+1/2} \alpha_{z_{k+1/2}} \\
 & + \hat{D}_{h_{xx}} A_{i+1/2,j,k} \frac{\Delta x_{i+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} + \hat{D}_{h_{xx}} A_{i-1/2,j,k} \frac{\Delta x_{i-1/2}}{\Delta x_{i-1/2}} \\
 & + \hat{D}_{h_{yy}} A_{i,j+1/2,k} \frac{\Delta y_{j+1/2}}{\Delta y_{j+1/2}} + \hat{D}_{h_{yy}} A_{i,j-1/2,k} \frac{\Delta y_{j-1/2}}{\Delta y_{j-1/2}} \\
 & + \hat{D}_{h_{zz}} A_{i,j,k-1/2} \frac{\Delta z_{i,j,k-1/2}}{\Delta z_{i,j,k-1/2}} + \hat{D}_{h_{zz}} A_{i,j,k+1/2} \frac{\Delta z_{i,j,k+1/2}}{\Delta z_{i,j,k+1/2}}
 \end{aligned} \tag{4.58ζ3}$$

όπου

$$R_{d_{i,j,k}}^{n+1,\ell} = 1 + \frac{\rho_{p_{i,j,k}}}{n_{e_{i,j,k}}} \left[ \frac{K_{\ell} \bar{S}}{\left(1 + K_{\ell} C_{i,j,k}^{n+1,\ell}\right)^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 B_{g_{i,j,k}}^{n+1,\ell} = & R_{d_{i,j,k}}^{n+1,\ell} n_{e_{i,j,k}} \frac{C_{i,j,k}^n}{\Delta t} \Delta V_{i,j,k} + Q_{gs_{i,j,k}} C_{gs_{i,j,k}} - \lambda_2 n_{e_{i,j,k}} S_{i,j,k}^{n+1,\ell} \Delta V_{i,j,k} \\
 & + A_{g_{i+1/2,j,k}}^{cross} C_{i+1/2,j,k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i-1/2,j,k}}^{cross} C_{i-1/2,j,k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i,j+1/2,k}}^{cross} C_{i,j+1/2,k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i,j-1/2,k}}^{cross} C_{i,j-1/2,k}^{n+1,\ell} \\
 & + A_{g_{i,j,k+1/2}}^{cross} C_{i,j,k+1/2}^{n+1,\ell} + A_{g_{i,j,k-1/2}}^{cross} C_{i,j,k-1/2}^{n+1,\ell} + A_{g_{i+1/2,j,k-1/2}}^{cross} C_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1,\ell} + A_{g_{i-1/2,j,k-1/2}}^{cross} C_{i-1/2,j,k-1/2}^{n+1,\ell} \\
 & + A_{g_{i,j+1/2,k-1/2}}^{cross} C_{i,j+1/2,k-1/2}^{n+1,\ell} + A_{g_{i,j-1/2,k-1/2}}^{cross} C_{i,j-1/2,k-1/2}^{n+1,\ell} + A_{g_{i+1/2,j,k+1/2}}^{cross} C_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1,\ell} \\
 & + A_{g_{i-1/2,j,k+1/2}}^{cross} C_{i-1/2,j,k+1/2}^{n+1,\ell} + A_{g_{i+1/2,j+1/2,k}}^{cross} C_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i-1/2,j+1/2,k}}^{cross} C_{i-1/2,j+1/2,k}^{n+1,\ell} \\
 & + A_{g_{i+1/2,j-1/2,k}}^{cross} C_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i-1/2,j-1/2,k}}^{cross} C_{i-1/2,j-1/2,k}^{n+1,\ell}
 \end{aligned} \tag{4.58η}$$

Στην εξίσωση (4.58η), οι συντελεστές  $A_{g_{i+1/2,j,k}}^{cross}$ ,  $A_{g_{i-1/2,j,k}}^{cross}$ ,  $A_{g_{i,j+1/2,k}}^{cross}$ ,  $A_{g_{i,j-1/2,k}}^{cross}$ ,

$A_{g_{i,j,k+1/2}}^{cross}$ , κλπ, ορίζονται από τις εξισώσεις (4.57α)–(4.57ο). Η εξίσωση (4.58η)

ισχύει για την περίπτωση που η προσρόφηση ρύπου από το πορώδες μέσο περιγράφεται μέσω της ισόθερμης Freundlich ή της ισόθερμης Langmuir. Αν χρησιμοποιηθεί γραμμική ισόθερμη προσρόφησης ισορροπίας, ο όρος

$-\lambda_2 n_{e_{i,j,k}} S_{i,j,k}^{n+1,\ell} \Delta V_{i,j,k}$  απαλείφεται από την εξίσωση (4.58η) και για τον συντελεστή προσρόφησης ισχύει:

$$R_{d_{i,j,k}}^{n+1,\ell} = R_{d_{i,j,k}} = 1 + \frac{\rho_{p_{i,j,k}}}{n_{e_{i,j,k}}} K_d$$

Όταν χρησιμοποιείται πεπλεγμένο σχήμα πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση της εξίσωσης (4.11), οπότε οι συντελεστές  $A_{g_{i\pm 1/2,j,k}}$ ,  $A_{g_{i,j\pm 1/2,k}}$ ,  $A_{g_{i,j,k\pm 1/2}}$  και  $A_{g_{i,j,k}}$  των άγνωστων συγκεντρώσεων του ρύπου στα υπόγεια νερά ορίζονται σύμφωνα με τις εξισώσεις (4.58α)–(4.58ζ), το μητρώο συντελεστών  $\mathbf{A}_g$ , που έχει επτά διαγώνιους μη μηδενικές ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι μηδενικά, δεν είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο. Σε κάθε επανάληψη Picard, το γραμμικό σύστημα εξισώσεων (4.55) επιλύεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Lanczos/ORTHOMIN (Jea and Young, 1983) με προρύθμιση μη πλήρους διάσπασης κατά Cholesky (Modified Incomplete Cholesky preconditioning) (Gustafsson, 1978).

Η συνθήκη ευστάθειας του ρητού σχήματος ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών (4.45) περιγράφεται από την ανισότητα (4.59), ενώ η ευστάθεια του ημι-πεπλεγμένου σχήματος ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών (4.48) καθορίζεται από την ανισότητα (4.60):

$$\Delta t \leq \min_{i,j,k} \left[ \frac{R_{d_{i,j,k}}}{\frac{|u_{i,j,k}|}{\Delta x_i} + \frac{|v_{i,j,k}|}{\Delta y_j} + \frac{|w_{i,j,k}|}{\Delta z_{i,j,k}} + \frac{2D_{h_{xx}i,j,k}}{\Delta x_i^2} + \frac{2D_{h_{yy}i,j,k}}{\Delta y_j^2} + \frac{2D_{h_{zz}i,j,k}}{\Delta z_{i,j,k}^2} + |\lambda_1| + |\lambda_2|} \right] \quad (4.59)$$

$$\Delta t \leq \min_{i,j,k} \left[ \frac{R_{d_{i,j,k}}}{\frac{|u_{i,j,k}|}{\Delta x_i} + \frac{|v_{i,j,k}|}{\Delta y_j} + \frac{|w_{i,j,k}|}{\Delta z_{i,j,k}}} \right] \quad (4.60)$$

Το πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών (4.49) είναι ευσταθές χωρίς όριο.

#### 4.3.3.2 Μικτό αριθμητικό σχήμα Euler–Lagrange

Αν χρησιμοποιηθεί το μικτό αριθμητικό σχήμα Euler–Lagrange (Cheng et al., 1984) για την επίλυση των όρων μεταφοράς της εξίσωσης (4.11) και οι όροι διασποράς και απώλειας ή πρόσθεσης ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο διακριτοποιηθούν με ρητό τρόπο, η εξίσωση (4.11) γράφεται στην ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή:

$$R_{d_{i,j,k}} n_{e_{i,j,k}} \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i-c_x, j-c_y, k-c_z}^n}{\Delta t} \Delta V_{i,j,k} = L(C^n) \quad (4.61)$$

Όταν χρησιμοποιείται πεπλεγμένο σχήμα για τους όρους διασποράς και απώλειας ή πρόσθεσης ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο, προκύπτει η ακόλουθη αλγεβρική εξίσωση από τη διακριτοποίηση της εξίσωσης (4.11):

$$R_{d_{i,j,k}} n_{e_{i,j,k}} \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i-c_x, j-c_y, k-c_z}^n}{\Delta t} \Delta V_{i,j,k} = L(C^{n+1}) \quad (4.62)$$

Η εξίσωση (4.61) μπορεί να επιλυθεί άμεσα για τον υπολογισμό των συγκεντρώσεων ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο των υπόγειων νερών. Ο προσδιορισμός των συγκεντρώσεων ρύπου στα υπόγεια νερά μέσω της εξίσωσης (4.62) απαιτεί την επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων. Η εξίσωση (4.62) μπορεί να διατυπωθεί στην πιο συνεπτυγμένη μορφή της εξίσωσης (4.53), όπου οι συντελεστές  $A_{g_{i\pm 1/2, j, k}}$ ,  $A_{g_{i, j\pm 1/2, k}}$ ,  $A_{g_{i, j, k\pm 1/2}}$  και  $A_{g_{i, j, k}}$  των άγνωστων συγκεντρώσεων ορίζονται σύμφωνα με τις εξισώσεις (4.56α)–(4.56ζ), όμως ο όρος  $B_{g_{i, j, k}}$  διαφοροποιείται και ορίζεται από την εξίσωση (4.63):

$$\begin{aligned} B_{g_{i,j,k}}^{n+1,\ell} = & R_{d_{i,j,k}}^{n+1,\ell} n_{e_{i,j,k}} \frac{C_{i-c_x, j-c_y, k-c_z}^n}{\Delta t} \Delta V_{i,j,k} + Q_{gs_{i,j,k}} C_{gs_{i,j,k}} - \lambda_2 n_{e_{i,j,k}} S_{i,j,k}^{n+1,\ell} \Delta V_{i,j,k} \\ & + A_{g_{i+1/2, j, k}}^{cross} C_{i+1, j, k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i-1/2, j, k}}^{cross} C_{i-1, j, k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i, j+1/2, k}}^{cross} C_{i, j+1, k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i, j-1/2, k}}^{cross} C_{i, j-1, k}^{n+1,\ell} \\ & + A_{g_{i, j, k+1/2}}^{cross} C_{i, j, k+1}^{n+1,\ell} + A_{g_{i, j, k-1/2}}^{cross} C_{i, j, k-1}^{n+1,\ell} + A_{g_{i+1/2, j, k-1/2}}^{cross} C_{i+1, j, k-1}^{n+1,\ell} + A_{g_{i-1/2, j, k-1/2}}^{cross} C_{i-1, j, k-1}^{n+1,\ell} \\ & + A_{g_{i, j+1/2, k-1/2}}^{cross} C_{i, j+1, k-1}^{n+1,\ell} + A_{g_{i, j-1/2, k-1/2}}^{cross} C_{i, j-1, k-1}^{n+1,\ell} + A_{g_{i+1/2, j, k+1/2}}^{cross} C_{i+1, j, k+1}^{n+1,\ell} \\ & + A_{g_{i-1/2, j, k+1/2}}^{cross} C_{i-1, j, k+1}^{n+1,\ell} + A_{g_{i+1/2, j+1/2, k}}^{cross} C_{i+1, j+1, k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i-1/2, j+1/2, k}}^{cross} C_{i-1, j+1, k}^{n+1,\ell} \\ & + A_{g_{i+1/2, j-1/2, k}}^{cross} C_{i+1, j-1, k}^{n+1,\ell} + A_{g_{i-1/2, j-1/2, k}}^{cross} C_{i-1, j-1, k}^{n+1,\ell} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Αν χρησιμοποιηθεί γραμμική ισόθερμη προσρόφησης ισορροπίας για την περιγραφή της προσρόφησης ρύπου από το πορώδες μέσο, ο όρος  $-\lambda_2 n_{e_{i,j,k}} S_{i,j,k}^{n+1,\ell} \Delta V_{i,j,k}$  απαλείφεται από την εξίσωση (4.63) και για τον συντελεστή προσρόφησης ισχύει:

$$R_{d_{i,j,k}}^{n+1,\ell} = R_{d_{i,j,k}} = 1 + \frac{\rho_{p_{i,j,k}}}{n_{e_{i,j,k}}} K_d$$

Η διαφοροποίηση του όρου  $B_{g_{i,j,k}}$  δεν επηρεάζει την επίλυση του γραμμικού συστήματος εξισώσεων (4.55) με την επαναληπτική μέθοδο συζυγών κλίσεων με προρύθμιση μη πλήρους διάσπασης κατά Cholesky, για τον υπολογισμό των συγκεντρώσεων του ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο των υπόγειων νερών. Η ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος (4.61) καθορίζεται από την ακόλουθη ανισότητα:

$$\Delta t \leq \min_{i,j,k} \left[ \frac{R_{d_{i,j,k}}}{\frac{2D_{h_{xx_{i,j,k}}}}{\Delta x_i^2} + \frac{2D_{h_{yy_{i,j,k}}}}{\Delta y_j^2} + \frac{2D_{h_{zz_{i,j,k}}}}{\Delta z_{i,j,k}^2} + |\lambda_1| + |\lambda_2|} \right] \quad (4.64)$$

Το αριθμητικό σχήμα (4.62) είναι ευσταθές χωρίς όριο.

#### 4.3.4 Συνδυασμός των υπό-μοντέλων ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών

Ο συνδυασμός των υπό-μοντέλων ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων του IRENE-QUAL πραγματοποιείται στην κοινή διεπιφάνεια των επιφανειακών-υπόγειων νερών, θεωρώντας –σε αντίθεση με προηγούμενες εργασίες– ότι τόσο ο μηχανισμός της μεταφοράς όσο και ο μηχανισμός της διασποράς συμβάλλουν στην ανταλλαγή ρύπων μεταξύ των επιφανειακών και των υπόγειων νερών. Ο μηχανισμός της διασποράς είναι σημαντικός για την εκτίμηση της ανταλλαγής ρύπων μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων υδάτων σε περιπτώσεις μικρών υδραυλικών κλίσεων μεταξύ των επιφανειακών και των υπόγειων νερών και άρα μικρών ταχυτήτων στην κοινή τους διεπιφάνεια.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του σχήματος 3.5, η ροή μάζας ρύπου εγκάρσια προς το μέτωπο  $(i + 1/2, j, k)$ ,  $g_{i+1/2,j,k}$  [MT<sup>-1</sup>], λόγω μεταφοράς και διασποράς, περιγράφεται από την εξίσωση (4.65):

$$g_{i+1/2,j,k} = -u_{i+1/2,j,k}^* A_{i+1/2,j,k} C_{i+1/2,j,k} + D_{x_{i+1/2,j,k}}^* A_{i+1/2,j,k} \frac{C_{i+1,j,k} - C_{i+1,j,k}}{\Delta x_{i+1/2}} \quad (4.65)$$

Υπενθυμίζεται ότι ο δείκτης \* χρησιμοποιείται για το συμβολισμό των μεταβλητών και των παραμέτρων στα κοινά μέτωπα μεταξύ διαφορικών όγκων επιφανειακών και υπόγειων υδάτων. Η ροή μάζας ρύπου εγκάρσια προς τη διεπιφάνεια μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών στις διευθύνσεις  $y$  και  $z$  μπορεί να εκτιμηθεί μέσω σχέσεων αντίστοιχων με τη σχέση (4.65).

Στην εξίσωση (4.65), ο συντελεστής διασποράς  $D_{x_{i+1/2,j,k}}^*$  στο κοινό μέτωπο μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών  $(i + 1/2, j, k)$  υπολογίζεται ως εξής:

$$D_{x_{i+1/2,j,k}}^* = D_{tx_{i,j,k}} \omega_{x_{i+1/2}} + \hat{D}_{h_{xx_{i+1,j,k}}} (1 - \omega_{x_{i+1/2}}) \quad (4.66)$$

Οι συντελεστές διασποράς στις διευθύνσεις  $y$  και  $z$ , στα κοινά μέτωπα μεταξύ διαφορικών όγκων επιφανειακών και υπόγειων νερών, υπολογίζονται μέσω εξισώσεων αντίστοιχων με την εξίσωση (4.66), δηλαδή:

$$D_{y_{i,j+1/2,k}}^* = D_{ty_{i,j,k}} \omega_{y_{j+1/2}} + \hat{D}_{h_{yy_{i,j+1,k}}} (1 - \omega_{y_{j+1/2}}) \quad (4.67)$$

$$D_{z_{i,j,k+1/2}}^* = D_{tz_{i,j,k}} \omega_{z_{k+1/2}} + \hat{D}_{h_{zz_{i,j,k+1}}} (1 - \omega_{z_{k+1/2}}) \quad (4.68)$$

Συνήθως, επειδή επιφανειακά και υπόγεια νερά διαχωρίζονται από τον ημι-περατό πυθμένα του επιφανειακού υδάτινου σώματος, η τιμή του συντελεστή διασποράς στην κοινή διεπιφάνεια των επιφανειακών-υπόγειων νερών προσδιορίζεται μέσω βαθμονόμησης. Οι εξισώσεις (4.66), (4.67) και (4.68) παρέχουν μια αρχική μόνο εκτίμηση.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ανεξάρτητα από την επιλογή αριθμητικών σχημάτων για την επίλυση των εξισώσεων των υπό-μοντέλων ποιότητας επιφανειακών και υπόγειων νερών του IRENE-QUAL, οι αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν συνδυάζονται στα κοινά μέτωπα μεταξύ διαφορικών όγκων επιφανειακών και

υπόγειων νερών χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες  $u_{i\pm 1/2,j,k}^*$ ,  $v_{i,j\pm 1/2,k}^*$  και  $w_{i,j,k\pm 1/2}^*$  της ταχύτητας Darcy, οι οποίες είναι γνωστές από την επίλυση του IRENE–HYD, για τον υπολογισμό της μεταφοράς ρύπου και τους συντελεστές διασποράς  $D_{x_{i\pm 1/2,j,k}}^*$ ,  $D_{y_{i,j\pm 1/2,k}}^*$  και  $D_{z_{i,j,k\pm 1/2}}^*$  για τον υπολογισμό της διασποράς ρύπου.

Ας θεωρηθεί για παράδειγμα ο διαφορικός όγκος των επιφανειακών νερών  $(i, j, k)$  και ο διαφορικός όγκος των υπόγειων νερών  $(i + 1, j, k)$ . Ας θεωρηθεί επίσης ότι το μέτωπο  $(i + 1/2, j, k)$  είναι το μοναδικό κοινό μέτωπο μεταξύ του υπολογιστικού κελιού  $(i, j, k)$  και κελιών υπόγειων νερών, καθώς και το μοναδικό κοινό μέτωπο μεταξύ του υπολογιστικού κελιού  $(i + 1, j, k)$  και υπολογιστικών κελιών επιφανειακών νερών. Τότε, η εξίσωση (4.19) που προκύπτει εφαρμόζοντας ρητό σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση της εξίσωσης (4.3) του υπό–μοντέλου ποιότητας επιφανειακών νερών, γράφεται ως εξής για τον διαφορικό όγκο  $(i, j, k)$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} = Q_{ss_{i,j,k}} C_{ss_{i,j,k}} + R_s (C_{i,j,k}^n) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} \\
 & - \left( u_{i+1/2,j,k}^* A_{i+1/2,j,k} C_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k} \Delta z_{i-1/2,j,k} \Delta y_j C_{i-1/2,j,k}^n \right) \\
 & - \left( v_{i,j+1/2,k} \Delta z_{i,j+1/2,k} \Delta x_i C_{i,j+1/2,k}^n - v_{i,j-1/2,k} \Delta z_{i,j-1/2,k} \Delta x_i C_{i,j-1/2,k}^n \right) \\
 & - \left( w_{i,j,k-1/2} \Delta x_i \Delta y_j C_{i,j,k-1/2}^n - w_{i,j,k+1/2} \Delta x_i \Delta y_j C_{i,j,k+1/2}^n \right) \\
 & + \left( D_{x_{i+1/2,j,k}}^* A_{i+1/2,j,k} \frac{C_{i+1,j,k}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta x_{i+1/2}} - D_{tx_{i-1/2,j,k}} \Delta z_{i-1/2,j,k} \Delta y_j \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i-1,j,k}^n}{\Delta x_{i-1/2}} \right) \\
 & + \left( D_{ty_{i,j+1/2,k}} \Delta z_{i,j+1/2,k} \Delta x_i \frac{C_{i,j+1,k}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta y_{j+1/2}} - D_{ty_{i,j-1/2,k}} \Delta z_{i,j-1/2,k} \Delta x_i \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j-1,k}^n}{\Delta y_{j-1/2}} \right) \\
 & + \left( D_{tz_{i,j,k-1/2}} \Delta x_i \Delta y_j \frac{C_{i,j,k-1}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta z_{i,j,k-1/2}} - D_{tz_{i,j,k+1/2}} \Delta x_i \Delta y_j \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j,k+1}^n}{\Delta z_{i,j,k+1/2}} \right)
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Παρομοίως, η εξίσωση (4.41), που προκύπτει χρησιμοποιώντας μικτό σχήμα Euler–Lagrange για την επίλυση των όρων μεταφοράς και ρητό σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση των όρων διάχυσης και πρόσθεσης ή απώλειας ρύπου, γράφεται για τον διαφορικό όγκο  $(i, j, k)$  ως:

$$\begin{aligned}
 & \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i-c_x,j-c_y,k-c_z}^n}{\Delta t} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} = Q_{ss_{i,j,k}} C_{ss_{i,j,k}} + R_s \left( C_{i,j,k}^n \right) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_{i,j,k} \\
 & + \left( D_{x_{i+1/2,j,k}}^* \Delta z_{i+1/2,j,k} \Delta y_j \frac{C_{i+1,j,k}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta x_{i+1/2}} - D_{tx_{i-1/2,j,k}} \Delta z_{i-1/2,j,k} \Delta y_j \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i-1,j,k}^n}{\Delta x_{i-1/2}} \right) \\
 & + \left( D_{ty_{i,j+1/2,k}} \Delta z_{i,j+1/2,k} \Delta x_i \frac{C_{i,j+1,k}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta y_{j+1/2}} - D_{ty_{i,j-1/2,k}} \Delta z_{i,j-1/2,k} \Delta x_i \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j-1,k}^n}{\Delta y_{j-1/2}} \right) \\
 & + \left( D_{tz_{i,j,k-1/2}} \Delta x_i \Delta y_j \frac{C_{i,j,k-1}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta z_{i,j,k-1/2}} - D_{tz_{i,j,k+1/2}} \Delta x_i \Delta y_j \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j,k+1}^n}{\Delta z_{i,j,k+1/2}} \right)
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Αντίστοιχα τροποποιείται και η εξίσωση (4.45), που προκύπτει εφαρμόζοντας ρητό σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση της εξίσωσης (4.11) του υπό-μοντέλου ποιότητας υπόγειων νερών, καθώς και η εξίσωση (4.61), που προκύπτει εφαρμόζοντας μικτό σχήμα Euler–Lagrange για την επίλυση των όρων μεταφοράς και ρητό σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση των όρων διασποράς και πρόσθεσης ή απώλειας ρύπου. Η εξίσωση (4.45), για παράδειγμα, γράφεται για τον διαφορικό όγκο των υπόγειων νερών  $(i+1, j, k)$  που γεινιάζει με τον διαφορικό όγκο των επιφανειακών νερών  $(i, j, k)$ , ως εξής:

$$\begin{aligned}
 & R_{d_{i+1,j,k}} n_{e_{i+1,j,k}} \frac{C_{i+1,j,k}^{n+1} - C_{i+1,j,k}^n}{\Delta t} \Delta V_{i+1,j,k} = \\
 & - \left( q_{x_{i+1/2,j,k}} A_{i+1/2,j,k} C_{i+1/2,j,k}^n - u_{i+1/2,j,k}^* A_{i+1/2,j,k} C_{i+1/2,j,k}^n \right) \\
 & - \left( q_{y_{i+1,j+1/2,k}} A_{i+1,j+1/2,k} C_{i+1,j+1/2,k}^n - q_{y_{i+1,j-1/2,k}} A_{i+1,j-1/2,k} C_{i+1,j-1/2,k}^n \right) \\
 & - \left( q_{z_{i+1,j,k-1/2}} A_{i+1,j,k-1/2} C_{i+1,j,k-1/2}^n - q_{z_{i+1,j,k+1/2}} A_{i+1,j,k+1/2} C_{i+1,j,k+1/2}^n \right) \\
 & + \hat{D}_{h_{xx_{i+1/2,j,k}}} A_{i+1/2,j,k} \frac{C_{i+2,j,k}^n - C_{i+1,j,k}^n}{\Delta x_{i+1/2}} - D_{x_{i+1/2,j,k}}^* A_{i+1/2,j,k} \frac{C_{i+1,j,k}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta x_{i+1/2}} \\
 & + M \left( C^n \right)
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

όπου  $M$  είναι ένας τελεστής ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών που περιλαμβάνει τη ρητή διακριτοποίηση των όρων διασποράς στις διευθύνσεις  $y$  και  $z$  και των όρων απώλειας ή πρόσθεσης ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο.



Γενικά, αν για ένα πρόβλημα αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών επιλεχθεί ρητό σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση των εξισώσεων του IRENE–QUAL, ή το σχήμα Euler–Lagrange για την επίλυση των όρων μεταφοράς και ρητό σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση των όρων τυρβώδους διάχυσης και υδροδυναμικής διασποράς και των όρων πρόσθεσης ή απώλειας ρύπου από το υπολογιστικό πεδίο, η διαδικασία επίλυσης των συνδυασμένων εξισώσεων των υπό–μοντέλων ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών είναι απλή: η εξίσωση (4.19) ή η εξίσωση (4.41) λύνεται για τον υπολογισμό των συγκεντρώσεων στα κελιά του επιφανειακού υδάτινου σώματος (cind=1) και η εξίσωση (4.45) ή η εξίσωση (4.61) λύνεται για τον υπολογισμό των συγκεντρώσεων στα κελιά των υπόγειων νερών (cind=2). Στα κοινά μέτωπα μεταξύ διαφορικών όγκων επιφανειακών και υπόγειων νερών χρησιμοποιούνται οι τιμές των ταχυτήτων  $u_{i\pm 1/2,j,k}^*$ ,  $v_{i,j\pm 1/2,k}^*$  και  $w_{i,j,k\pm 1/2}^*$  για τους όρους μεταφοράς και οι συντελεστές διασποράς  $D_{x_{i\pm 1/2,j,k}}^*$ ,  $D_{y_{i,j\pm 1/2,k}}^*$  και  $D_{z_{i,j,k\pm 1/2}}^*$  για τους όρους τυρβώδους διάχυσης και υδροδυναμικής διασποράς.

Όταν η εξίσωση (4.36) –που προκύπτει διακριτοποιώντας του όρους διάχυσης και τους όρους απώλειας ή πρόσθεσης ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο των επιφανειακών υδάτων με πεπλεγμένο τρόπο (ανεξάρτητα από το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιείται για τους όρους μεταφοράς)– γραφτεί για τον διαφορικό όγκο των επιφανειακών νερών  $(i,j,k)$  που συνορεύει με τον διαφορικό όγκο των υπόγειων νερών  $(i+1,j,k)$ , ο συντελεστής  $A_{s_{i+1/2,j,k}}$  και ο όρος  $B_{s_{i,j,k}}$  υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την τιμή της ταχύτητας Darcy  $u_{i+1/2,j,k}^*$  και του συντελεστή διασποράς  $D_{x_{i+1/2,j,k}}^*$  στο κοινό μέτωπο μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών  $(i+1/2,j,k)$ . Παρομοίως, γράφοντας την εξίσωση (4.53) των υπόγειων υδάτων για τον διαφορικό όγκο  $(i+1,j,k)$ , ο οποίος συνορεύει με τον διαφορικό όγκο των επιφανειακών νερών  $(i,j,k)$ , οι τιμές των  $A_{g_{i+1/2,j,k}}$  και  $B_{g_{i,j,k}}$  θα πρέπει επίσης να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας την ταχύτητα Darcy  $u_{i+1/2,j,k}^*$  και το συντελεστή διασποράς  $D_{x_{i+1/2,j,k}}^*$ . Υπευθυμίζεται ότι η εξίσωση (4.53) μπορεί να προκύψει είτε χρησιμοποιώντας ένα πλήρως πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση της εξίσωσης (4.11), είτε

χρησιμοποιώντας πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών για τους όρους διασποράς και τους όρους πρόσθεσης ή απώλειας ρύπου και ρητό σχήμα ανάντη διαφορών, το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST ή μικτό σχήμα Euler–Lagrange για τους όρους μεταφοράς.

Γράφοντας την εξίσωση (4.36) για όλα τα υπολογιστικά κελιά του επιφανειακού υδάτινου σώματος και την εξίσωση (4.53) για όλα τα υπολογιστικά κελιά των υπόγειων νερών, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων, διατυπωμένο σε μητρική μορφή, το οποίο πρέπει να επιλυθεί σε κάθε χρονικό βήμα για τον υπολογισμό των συγκεντρώσεων του ρύπου σε ένα σύστημα των επιφανειακών–υπόγειων νερών:

$$\mathbf{A}_{sg}^{n+1,\ell} \mathbf{C}_{sg}^{n+1,\ell+1} = \mathbf{B}_{sg}^{n+1,\ell} \quad (4.72)$$

Σε κάθε επανάληψη Picard, οι τιμές των στοιχείων του μητρώου συντελεστών  $\mathbf{A}_{sg}$  υπολογίζονται μέσω των εξισώσεων (4.37α)–(4.37ζ) για τα κελιά των επιφανειακών υδάτων (cind=1) και μέσω των εξισώσεων (4.56α)–(4.56ζ) ή (4.58α)–(4.58ζ) για τα κελιά των υπόγειων υδάτων (cind=2). Οι τιμές των στοιχείων του διανύσματος  $\mathbf{B}_{sg}$  υπολογίζονται μέσω της εξίσωσης (4.37η) ή (4.43) για τα υπολογιστικά κελιά των επιφανειακών νερών και μέσω της εξίσωσης (4.56η), (4.58η) ή (4.63) για τα υπολογιστικά κελιά των υπόγειων νερών. Για τα κελιά των επιφανειακών υδάτων που γειτνιάζουν με κελιά υπόγειων νερών και το αντίστροφο, τα στοιχεία του μητρώου συντελεστών  $\mathbf{A}_{sg}$  και του διανύσματος  $\mathbf{B}_{sg}$  υπολογίζονται, όπου χρειάζεται, χρησιμοποιώντας τις ταχύτητες  $u_{i\pm 1/2,j,k}^*$ ,  $v_{i,j\pm 1/2,k}^*$  και  $w_{i,j,k\pm 1/2}^*$  και τους συντελεστές διασποράς  $D_{x_{i\pm 1/2,j,k}}^*$ ,  $D_{y_{i,j\pm 1/2,k}}^*$  και  $D_{z_{i,j,k\pm 1/2}}^*$ .

Το μητρώο  $\mathbf{A}_{sg}$  έχει επτά διαγώνιους μη μηδενικές ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι μηδενικά. Εκτός από την περίπτωση που χρησιμοποιείται πεπλεγμένο σχήμα για την επίλυση της εξίσωσης (4.11) που περιγράφει τη συμπεριφορά ποιοτικών παραμέτρων στα υπόγεια νερά, το μητρώο  $\mathbf{A}_{sg}$  είναι συμμετρικό και έχει αυστηρή διαγώνια κυριαρχία και θετικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο, άρα είναι θετικά ορισμένο. Σε κάθε επανάληψη Picard, το γραμμικό σύστημα εξισώσεων (4.72) επιλύεται με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων με προρύθμιση μη πλήρους διάσπασης κατά Cholesky. Όταν χρησιμοποιείται πεπλεγμένο σχήμα για την επίλυση της

εξίσωσης (4.11), το μητρώο συντελεστών  $A_{sg}$  δεν είναι συμμετρικό και το γραμμικό σύστημα εξισώσεων (4.72) επιλύεται με τη μέθοδο Lanczos/ORTHOMIN με προϋπόθεση μη πλήρους διάσπασης κατά Cholesky.

Η επίλυση του συστήματος εξισώσεων (4.72) απαιτεί τη χρήση κοινού μεγέθους χρονικού βήματος στα υπό-μοντέλα ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών του IRENE-QUAL. Στην περίπτωση αυτή, το χρονικό βήμα που χρησιμοποιείται μπορεί να είναι μικρότερο ή ίσο του χρονικού βήματος που χρησιμοποιείται στο υπό-μοντέλο ροής επιφανειακών νερών του IRENE-HYD. Για τον αριθμό των χρονικών βημάτων επίλυσης της εξίσωσης (4.72) που περιλαμβάνονται σε ένα χρονικό βήμα επίλυσης του FLOW-3DL, οι τιμές των μεταβλητών της ροής των επιφανειακών νερών που έχουν υπολογιστεί με το FLOW-3DL θεωρούνται σταθερές. Αντίστοιχα, για τον αριθμό των χρονικών βημάτων επίλυσης της εξίσωσης (4.72) που περιλαμβάνονται σε ένα χρονικό βήμα επίλυσης του υπό-μοντέλου ροής υπόγειων υδάτων του IRENE-HYD, οι τιμές των μεταβλητών της ροής των υπόγειων νερών που έχουν υπολογιστεί με το υπό-μοντέλο ροής υπόγειων υδάτων του IRENE-HYD θεωρούνται σταθερές.

Όπως έχει ήδη εξηγηθεί στην παράγραφο 2.3, η χρήση κοινού μεγέθους χρονικού βήματος στα υπό-μοντέλα ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών ενός ολοκληρωμένου αριθμητικού μοντέλου επιφανειακών-υπόγειων υδάτων μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλους υπολογιστικούς χρόνους, καθώς δεν αξιοποιείται η διαφορετική χρονική κλίμακα που ισχύει για τα επιφανειακά και τα υπόγεια νερά. Για αυτόν τον λόγο, στο IRENE-QUAL συμπεριλαμβάνεται ένας ακόμη αλγόριθμος επίλυσης, ο οποίος βασίζεται στη μέθοδο εσωτερικού συνδυασμού των εξισώσεων που περιγράφουν τη συμπεριφορά ποιοτικών παραμέτρων στα επιφανειακά και τα υπόγεια νερά και επιτρέπει τη χρήση διαφορετικού μεγέθους χρονικού βήματος στα υπό-μοντέλα ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων. Σύμφωνα με αυτόν τον αλγόριθμο επίλυσης, σε κάθε χρονικό βήμα του υπό-μοντέλου ποιότητας των υπόγειων νερών μπορούν να επιλυθούν περισσότερα από ένα χρονικά βήματα του υπό-μοντέλου ποιότητας των επιφανειακών νερών. Οι εξισώσεις των υπό-μοντέλων ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών επιλύονται διαδοχικά αρκετές φορές σε κάθε χρονικό βήμα του υπό-μοντέλου ποιότητας των υπόγειων νερών. Ο αλγόριθμος επίλυσης συνοψίζεται στα ακόλουθα βήματα για το χρονικό βήμα των υπόγειων νερών  $n$  έως  $n+1$ :

1. Αρχικά επιλύεται το σύστημα εξισώσεων (4.55), οπότε υπολογίζονται οι τιμές των συγκεντρώσεων του ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο των υπόγειων υδάτων κατά το χρονικό βήμα  $n+1$ . Η αλληλεπίδραση με τα επιφανειακά νερά λαμβάνεται υπόψη ως οριακή συνθήκη τύπου Cauchy, οπότε χρησιμοποιείται η εξίσωση (4.65) –και αντίστοιχες αυτής για τις διευθύνσεις  $y$  και  $z$ – για τον υπολογισμό της ροής μάζας ρύπου εγκάρσια προς τα κοινά μέτωπα μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Στην εξίσωση (4.65) χρησιμοποιούνται οι τιμές των συγκεντρώσεων του ρύπου στα επιφανειακά νερά που έχουν υπολογισθεί στο τέλος του προηγούμενου χρονικού βήματος,  $n$ .
2. Επιλύεται το σύστημα εξισώσεων (4.38) για τον αριθμό των χρονικών βημάτων του υπό–μοντέλου ποιότητας των επιφανειακών υδάτων που περιλαμβάνονται σε ένα χρονικό βήμα του υπό–μοντέλου ποιότητας των υπόγειων υδάτων. Η αλληλεπίδραση με τα υπόγεια νερά λαμβάνεται υπόψη ως οριακή συνθήκη τύπου Cauchy, οπότε χρησιμοποιείται η εξίσωση (4.65) για τον υπολογισμό της ροής μάζας ρύπου εγκάρσια προς τα κοινά μέτωπα μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Σε κάθε χρονικό βήμα του υπό–μοντέλου ποιότητας των επιφανειακών νερών, χρησιμοποιούνται στην εξίσωση (4.65) οι τιμές των συγκεντρώσεων του ρύπου στα υπόγεια νερά που έχουν υπολογιστεί για το χρονικό βήμα  $n+1$  κατά την προηγούμενη επίλυση του υπό–μοντέλου ποιότητας των υπόγειων νερών.
3. Το σύστημα εξισώσεων (4.55) επιλύεται χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά τις τιμές των συγκεντρώσεων του ρύπου στα επιφανειακά νερά, που υπολογίσθηκαν κατά το τελευταίο χρονικό βήμα του υπό–μοντέλου ποιότητας των επιφανειακών υδάτων που περιλαμβάνεται στο χρονικό βήμα του υπό–μοντέλου ποιότητας των υπόγειων υδάτων. Έτσι προκύπτει μία καινούρια εκτίμηση για τις τιμές των συγκεντρώσεων του ρύπου στο υπολογιστικό πεδίο των υπόγειων υδάτων, στο τέλος του χρονικού βήματος  $n+1$ .
4. Ο αλγόριθμος επίλυσης επιστρέφει στο βήμα 2. Η διαδοχική επίλυση των συνδυασμένων εξισώσεων που περιγράφουν τη συμπεριφορά ποιοτικών παραμέτρων σε επιφανειακά και υπόγεια νερά συνεχίζεται ώσπου να επιτευχθεί ικανοποιητική σύγκλιση για τις τιμές των συγκεντρώσεων στα

επιφανειακά και τα υπόγεια νερά, οπότε ο αλγόριθμος προχωράει στο επόμενο χρονικό βήμα του υπό-μοντέλου ποιότητας των υπόγειων υδάτων.

Γενικά, η επίλυση του συστήματος εξισώσεων (4.72) επιλέγεται σε περιπτώσεις συστημάτων επιφανειακών-υπόγειων νερών μικρής σχετικά έκτασης, με έντονη αλληλεπίδραση, ενώ ο αλγόριθμος του εσωτερικού συνδυασμού προτιμάται για συστήματα μεγάλης έκτασης με σημαντικά διαφορετικές χρονικές κλίμακες στη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων νερών και συνεπώς στη μεταφορά ρύπων.

#### **4.4 Έλεγχος της ακρίβειας του ολοκληρωμένου μοντέλου ποιότητας επιφανειακών-υπόγειων υδάτων IRENE-QUAL**

Στις επόμενες παραγράφους ελέγχεται η ακρίβεια των αριθμητικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται στο μαθηματικό μοντέλο IRENE-QUAL συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του μοντέλου με τα αποτελέσματα διαθέσιμων αναλυτικών λύσεων. Το IRENE-QUAL εφαρμόζεται επίσης σε μία υποθετική περίπτωση αλληλεπίδρασης ροής και ρύπανσης μεταξύ υδροφορέα και υδατορεύματος. Τα αποτελέσματα του IRENE-QUAL για αυτήν περίπτωση αξιολογούνται ποιοτικά και διαπιστώνεται η ικανότητά του να εκτιμά τα ρυπαντικά φορτία σε ένα σύστημα επιφανειακών-υπόγειων νερών.

##### **4.4.1 Μονοδιάστατη κίνηση ρύπου σε ομοιόμορφο πεδίο ροής υπόγειων υδάτων**

Οι van Genuchten and Alves (1982) διατύπωσαν αναλυτικές λύσεις για τη μονοδιάστατη κίνηση ρύπου σε ομοιόμορφο πεδίο ροής υπόγειων υδάτων. Οι λύσεις που διατύπωσαν αφορούν διάφορες οριακές συνθήκες και περιλαμβάνουν τους μηχανισμούς της μεταφοράς, της διασποράς και της απώλειας ρύπου λόγω διάσπασης και προσρόφησης από το πορώδες μέσο. Στην περίπτωση που εξετάζεται εδώ, η ροή θεωρείται μονοδιάστατη στη διεύθυνση  $x$  και ισχύουν οι ακόλουθες αρχικές και οριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} C(x,0) &= 0 \\ C(0,t) &= C_0, \quad t > 0 \\ \frac{\partial C}{\partial x}(\infty,t) &= 0, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (4.73)$$

Προκειμένου να προσομοιωθούν οι παραπάνω οριακές συνθήκες στο υπό-μοντέλο ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL, θεωρείται υπολογιστικό πεδίο με τις ακόλουθες διαστάσεις: μήκος  $L = 1010$  m στη διεύθυνση  $x$ , πλάτος  $W = 1$  m στη διεύθυνση  $y$  και πάχος  $B = 1$  m στη διεύθυνση  $z$ . Οι διαστάσεις στις διευθύνσεις  $y$  και  $z$  επιλέγονται αρκετά μικρές ώστε να μπορεί να θεωρηθεί στιγμιαία πλήρης ανάμιξη του ρύπου σε αυτές. Το μήκος του υπολογιστικού πεδίου επιλέγεται αρκετά μεγάλο ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι ικανοποιείται η παραδοχή πεδίου άπειρου μήκους της αναλυτικής λύσης και ότι  $\frac{\partial C}{\partial x}(L,t) = 0, \quad t > 0$ .

Το υπολογιστικό πεδίο του υπό-μοντέλου ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας 101 στήλες ( $NJ = 101$ ), 1 γραμμή ( $NJ = 1$ ) και 1 στρώμα ( $NK = 1$ ). Οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$  είναι:  $\Delta x = 10$  m,  $\Delta y = 1$  m και  $\Delta z = 1$  m. Στην πρώτη στήλη του υπολογιστικού πλέγματος καθορίζεται όριο σταθερής συγκέντρωσης  $C = C_0$ . Η ταχύτητα Darcy στη διεύθυνση  $x$  θεωρείται ίση προς  $q_x = 0.06$  m/day και τα αποτελέσματα του μοντέλου συγκρίνονται με τα αποτελέσματα αναλυτικών λύσεων των van Genuchten and Alves (1982) για τέσσερις υποπεριπτώσεις, οι οποίες επιλέχθηκαν έτσι ώστε να αξιολογηθεί η ικανότητα του IRENE–QUAL να προσομοιώνει: (α) απλή μεταφορά ρύπου, (β) μεταφορά–διασπορά ρύπου, (γ) μεταφορά, διασπορά και προσρόφηση ρύπου από το πορώδες μέσο και (δ) μεταφορά, διασπορά, προσρόφηση και διάσπαση ρύπου. Σημειώνεται ότι θεωρείται ότι η προσρόφηση ρύπου από το πορώδες μέσο περιγράφεται από γραμμική ισόθερμη προσρόφησης ισορροπίας και ότι η διάσπαση του ρύπου ακολουθεί κινητική πρώτης τάξης. Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή της αναλυτικής λύσης των van Genuchten and Alves (1982) και του υπό-μοντέλου ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL είναι τα εξής:

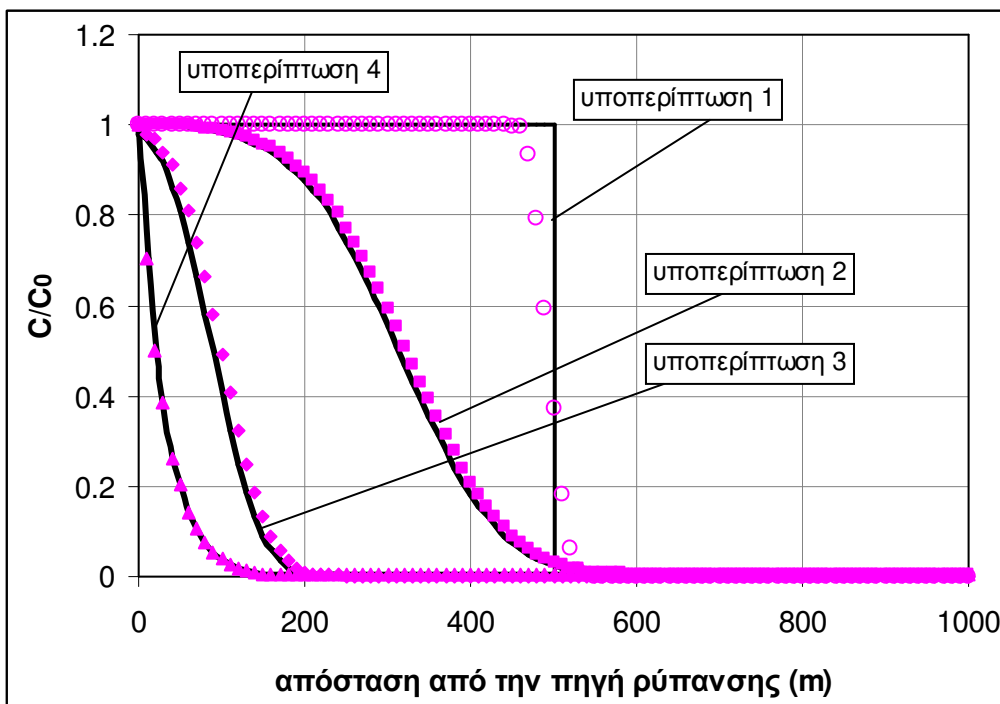
Υποπερίπτωση 1:  $q_x = 0.06$  m/day,  $n_e = 0.25$ ,  $\alpha_L = 0$  m,  $R_d = 1$ ,  $\lambda = 0$  d<sup>-1</sup>

Υποπερίπτωση 2:  $q_x = 0.06$  m/day,  $n_e = 0.25$ ,  $\alpha_L = 10$  m,  $R_d = 1$ ,  $\lambda = 0$  d<sup>-1</sup>

Υποπερίπτωση 3:  $q_x = 0.06$  m/day,  $n_e = 0.25$ ,  $\alpha_L = 10$  m,  $R_d = 6$ ,  $\lambda = 0$  d<sup>-1</sup>

Υποπερίπτωση 4:  $q_x = 0.06$  m/day,  $n_e = 0.25$ ,  $\alpha_L = 10$  m,  $R_d = 6$ ,  $\lambda = 0.003$  d<sup>-1</sup>

Στην πρώτη υποπερίπτωση χρησιμοποιείται το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης απλής μεταφοράς. Στις υποπεριπτώσεις 2–4 χρησιμοποιείται το πλήρως πεπλεγμένο σχήμα ολοκληρωμένων πεπερασμένων διαφορών, όπου οι συγκεντρώσεις στα μέτωπα των διαφορικών όγκων στους όρους μεταφοράς προσεγγίζονται με σχήμα κεντρικών διαφορών. Στο Σχήμα 4.2 παρουσιάζεται η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων των αναλυτικών λύσεων των van Genuchten and Alves (1982) και του υπό–μοντέλου ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL για τις τέσσερις υποπεριπτώσεις, για χρόνο  $t = 1500$  days. Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι αποκλίσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων του μοντέλου και των αναλυτικών λύσεων είναι μικρές. Το μέσο σχετικό σφάλμα είναι ίσο με  $MRE = 0.03$ ,  $MRE = 0.01$ ,  $MRE = 0.018$  και  $MRE = 0.008$  για τις τέσσερις υποπεριπτώσεις, αντίστοιχα. Το αριθμητικό σχήμα ULTIMATE–QUICKEST δεν αναπαράγει ακριβώς την αναλυτική λύση για την περίπτωση της απλής μεταφοράς, ωστόσο η αριθμητική διασπορά που εισάγεται στη λύση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2, είναι μικρή.



**Σχήμα 4.2:** Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων των αναλυτικών λύσεων (μαύρη γραμμή) των van Genuchten and Alves (1982) και των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL (σύμβολα) για μονοδιάστατη κίνηση ρύπου σε ομοιόμορφο πεδίο ροής υπόγειων νερών

#### 4.4.2 Διδιάστατη κίνηση ρύπου σε ομοιόμορφο πεδίο ροής υπόγειων υδάτων

Οι Wilson and Miller (1978) διατύπωσαν μία αναλυτική λύση της διδιάστατης εξίσωσης μεταφοράς–διασποράς ρύπου, ο οποίος εισάγεται από συνεχή σημειακή πηγή σε ομοιόμορφο πεδίο ροής υπόγειων νερών. Η λύση των Wilson and Miller (1978) διατυπώθηκε θεωρώντας: (α) σταθερούς συντελεστές διασποράς στις οριζόντιες διευθύνσεις  $x$  και  $y$ , (β) πεδίο άπειρων διαστάσεων στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$  και μικρού πάχους στη διεύθυνση  $z$  ώστε να μπορεί να γίνει η παραδοχή στιγμιαίας πλήρους ανάμιξης του ρύπου στην κατακόρυφη διεύθυνση και (γ) ότι η παροχή του ρυπασμένου ύδατος δεν επηρεάζει το πεδίο ροής των υπόγειων νερών.

Το πρόβλημα μεταφοράς–διασποράς ρύπου που εξετάζεται εδώ ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα του υπό–μοντέλου ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης των Wilson and Miller (1978), έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

πραγματική μέση ταχύτητα ροής υπόγειων νερών:  $V = 1$  m/day

$$n_e = 0.14$$

$$\alpha_L = 2$$
 m

$$\alpha_{TH} = 0.2$$
 m

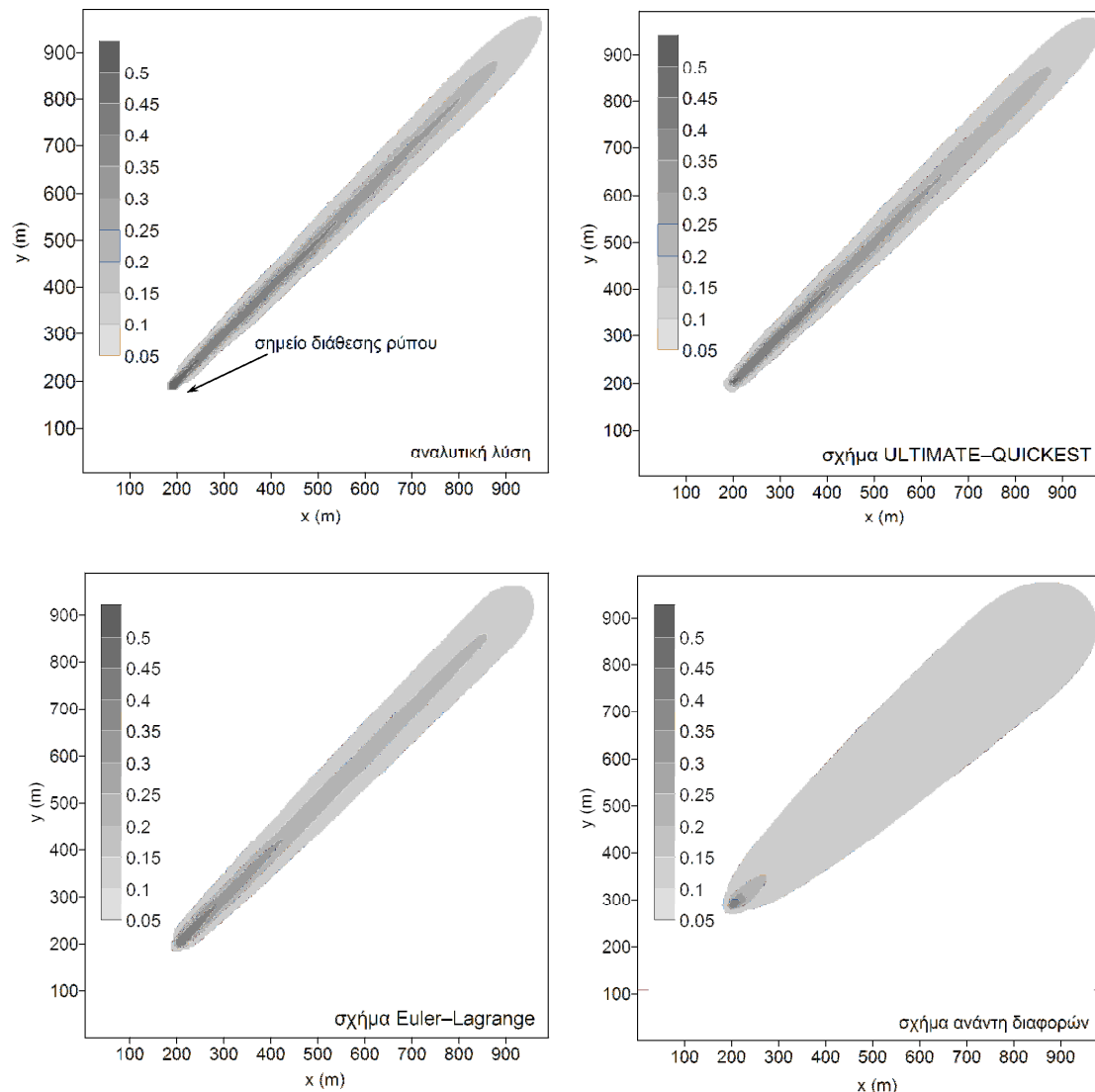
παροχή εισροής ρυπασμένου ύδατος:  $Q_{gs} = 0.01$  m<sup>3</sup>/day

συγκέντρωση ρύπου στην εισροή ύδατος:  $C_{gs} = 1000$  ppm

Στο υπό–μοντέλο ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL θεωρείται υπολογιστικό πεδίο με μήκος  $L = 1000$  m στη διεύθυνση  $x$ , πλάτος  $W = 1000$  m στη διεύθυνση  $y$  και πάχος  $B = 1$  m στη διεύθυνση  $z$ . Οι διαστάσεις που επιλέγονται στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$  θεωρούνται αρκετά μεγάλες ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη πεδίου άπειρων οριζόντιων διαστάσεων της αναλυτικής λύσης. Το υπολογιστικό πεδίο του υπό–μοντέλου ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας 100 στήλες ( $N_I = 100$ ), 100 γραμμές ( $N_J = 100$ ) και 1 στρώμα ( $N_K = 1$ ). Οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$  είναι:  $\Delta x = 10$  m,  $\Delta y = 10$  m και  $\Delta z = 1$  m. Θεωρώντας τη διεύθυνση ροής των υπόγειων νερών υπό γωνία  $45^\circ$  ως προς τις στήλες και τις γραμμές του υπολογιστικού πλέγματος, ο αριθμός Peclet στη διεύθυνση  $x$  είναι ίσος με 5 και ο αριθμός Peclet στη διεύθυνση  $y$  είναι ίσος με 50. Συνεπώς, το πρόβλημα αυτό αποτελεί μία δύσκολη περίπτωση ελέγχου της ακρίβειας των αριθμητικών σχημάτων



επίλυσης των όρων μεταφοράς της εξίσωσης μεταφοράς–διασποράς (4.11). Στο Σχήμα 4.3 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης και τα αποτελέσματα του μοντέλου χρησιμοποιώντας το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST, το μικτό σχήμα Euler–Lagrange που προτάθηκε από τους Cheng et al. (1984) και σχήμα ανάντη διαφορών για την επίλυση των όρων μεταφοράς. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για  $t = 1000$  days .



**Σχήμα 4.3:** Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων της αναλυτικής λύσης των Wilson and Miller (1978) και των αποτελεσμάτων του υπό-μοντέλου ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL, για την περίπτωση διδιάστατης μεταφοράς–διασποράς ρύπου σε ομοιόμορφο πεδίο ροής. Το υπολογιστικό πλέγμα είναι προσανατολισμένο υπό γωνία  $45^\circ$  προς τη διεύθυνση της ροής

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3, περισσότερο ακριβές είναι το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST. Το μικτό σχήμα Euler–Lagrange που προτάθηκε από τους Cheng et al.

(1984) είναι λιγότερο ακριβές από το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST, ωστόσο η αριθμητική διασπορά είναι σημαντικά μικρότερη από την αριθμητική διασπορά του σχήματος ανάντη διαφορών. Χρησιμοποιώντας το ίδιο χρονικό βήμα, διαπιστώθηκε ότι από άποψη υπολογιστικού χρόνου το μικτό σχήμα Euler–Lagrange και το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST είναι περίπου ισοδύναμα, με το μικτό σχήμα Euler–Lagrange να είναι λίγο γρηγορότερο, ενώ το σχήμα ανάντη διαφορών είναι περίπου 3.5 φορές γρηγορότερο από τα άλλα δύο.

Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι παρόλο που στις περιπτώσεις που διερευνήθηκαν στην προηγούμενη και σε αυτήν την παράγραφο, αξιολογήθηκαν οι αριθμητικές μέθοδοι του υπό–μοντέλου ποιότητας των υπόγειων νερών του IRENE–QUAL, τα συμπεράσματα που εξήχθησαν μπορούν να επεκταθούν και για το υπό–μοντέλο ποιότητας επιφανειακών νερών του IRENE–QUAL, καθώς οι εξισώσεις των δύο υπό–μοντέλων έχουν κοινή μορφή και χρησιμοποιούνται τα ίδια αριθμητικά σχήματα επίλυσης.

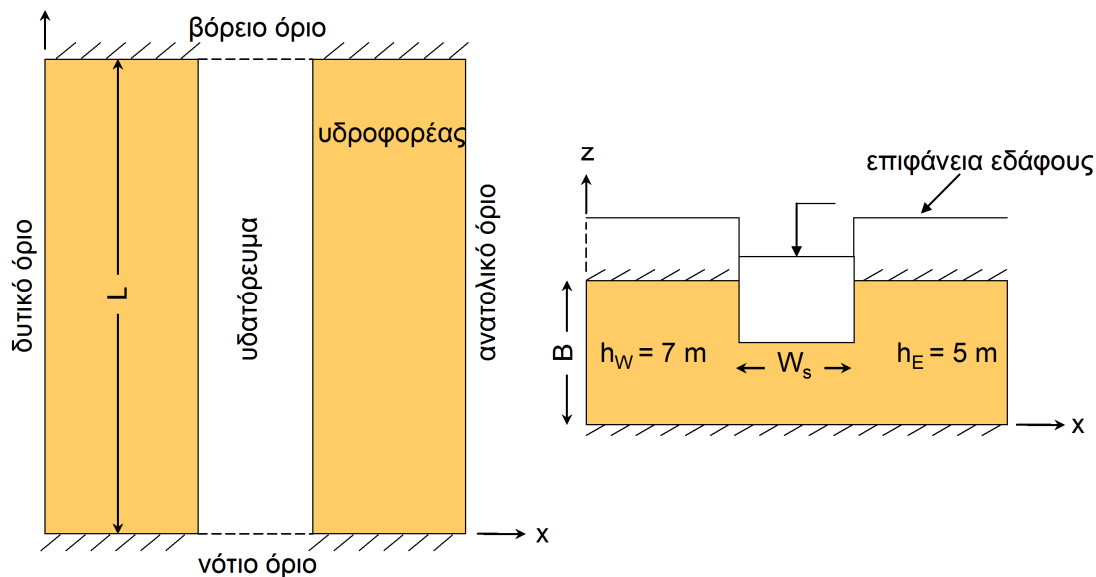
#### **4.4.3 Υποθετική περίπτωση αλληλεπίδρασης ροής και ρύπανσης μεταξύ υδροφορέα και υδατορεύματος**

Σε αυτήν την παράγραφο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του IRENE για μία υποθετική περίπτωση αλληλεπίδρασης ροής και ρύπανσης μεταξύ υδροφορέα και υδατορεύματος. Η περίπτωση αυτή επιλέχθηκε έτσι ώστε να αξιολογηθούν ποιοτικά τα αποτελέσματα του IRENE–QUAL και να διαπιστωθεί η ικανότητά του να εκτιμά τα ρυπαντικά φορτία σε ένα σύστημα επιφανειακών–υπόγειων νερών.

Στην περίπτωση που παρουσιάζεται εδώ, εξετάζεται η αλληλεπίδραση μεταξύ περιορισμένου υδροφορέα και υδατορεύματος μερικής διείσδυσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4. Ο υδροφορέας έχει τις ακόλουθες διαστάσεις: μήκος  $L = 370$  m στη διεύθυνση  $y$ , πλάτος  $W_a = 210$  m στη διεύθυνση  $y$  και πάχος  $B = 5$  m στη διεύθυνση  $z$ . Θεωρείται ομογενής και ισότροπος με υδραυλική αγωγιμότητα  $K = 0.005$  m/s. Το υδατόρευμα έχει πλάτος  $W_s = 5$  m και θεωρείται ότι βρίσκεται σε άμεση υδραυλική επαφή με τον υδροφορέα στον οποίο διεισδύει κατά 2 m. Το δυτικό όριο και το ανατολικό όριο του υδροφορέα θεωρούνται όρια σταθερού πιεζομετρικού φορτίου, συγκεκριμένα  $h_w = 7$  m και  $h_E = 5$  m (βλ. Σχήμα 4.4). Το νότιο όριο και το βόρειο όριο του υδροφορέα θεωρούνται αδιαπέρατα. Η αρχική στάθμη του νερού στο

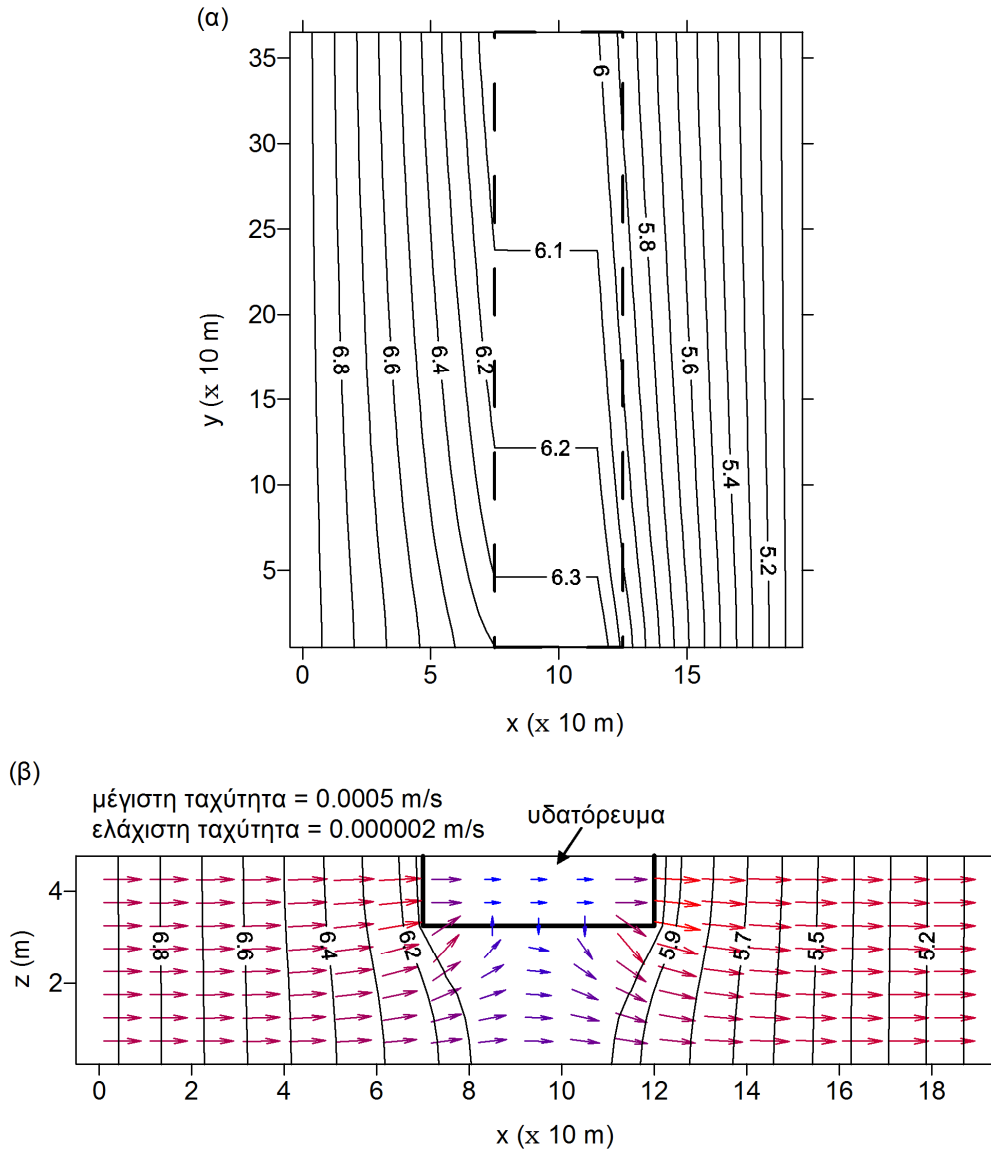
υδατόρευμα είναι ίση με 6 m. Το νότιο όριο και το βόρειο όριο του υδατορεύματος θεωρούνται ανοικτά όρια και στο νότιο όριο καθορίζεται σταθερή εισροή ίση με  $15 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Το υπολογιστικό πεδίο διακριτοποιείται στο IRENE χρησιμοποιώντας 21 στήλες ( $N_I=21$ ), 37 γραμμές ( $N_J=37$ ) και 12 στρώματα ( $N_K=12$ ). Οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$  είναι:  $\Delta x=10 \text{ m}$ ,  $\Delta y=10 \text{ m}$  και  $\Delta z=0.5 \text{ m}$ .



**Σχήμα 4.4:** Γεωμετρία της περίπτωσης αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–περιορισμένου υδροφορέα

Στο Σχήμα 4.5 (α) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του IRENE–HYD για την κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στο επίπεδο  $x$ – $y$ , για  $z=4.75 \text{ m}$  (πρώτο στρώμα του υδροφορέα), μετά την αποκατάσταση μόνιμης ροής. Το πρώτο στρώμα του υδροφορέα τέμνει το υδατόρευμα από  $x=80 \text{ m}$  έως  $x=130 \text{ m}$ . Στο Σχήμα 4.5 (α) απεικονίζεται και η στάθμη του νερού στο υδατόρευμα. Στο σχήμα 4.5 (β) φαίνονται τα πιεζομετρικά φορτία και το πεδίο ταχυτήτων στο κατακόρυφο επίπεδο  $x$ – $z$ , στη θέση  $y=185 \text{ m}$  ( $j=19$ ). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.5, η διεύθυνση της ροής των υπόγειων υδάτων είναι από το δυτικό προς το ανατολικό όριο του υδροφορέα. Ένα τμήμα της υπόγειας ροής τροφοδοτεί το υδατόρευμα, ενώ το άλλο τμήμα της υπόγειας ροής, μαζί με την τροφοδοσία των υπόγειων νερών από το υδατόρευμα μέσω του ανατολικού τμήματος του πυθμένα και της όχθης, κατευθύνεται προς το ανατολικό όριο του υδροφορέα.



**Σχήμα 4.5:** Αποτελέσματα του IRENE–HYD για (α) την κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στο επίπεδο  $x$ – $y$  για  $z = 4.75$  m (πρώτο στρώμα του υδροφορέα) και (β) την κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων και το πεδίο ταχυτήτων στο κατακόρυφο επίπεδο  $x$ – $z$ , στη θέση  $y = 185$  m ( $j = 19$ ). Στο Σχήμα 4.5 (α) η διακεκομμένη γραμμή συμβολίζει τα όρια του υδατορεύματος. Η ισοδιάσταση των ισοδυναμικών γραμμών που απεικονίζονται στο σχήμα είναι 0.2 m.

Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  θεωρείται στο δυτικό όριο του υδροφορέα ( $x = 0$  m) συνεχής πηγή ρύπανσης σταθερής συγκέντρωσης  $C = 1000$  mg/L. Το μέτωπο του συντηρητικού ρύπου που εισέρχεται στο πεδίο ροής από το δυτικό όριο του υδροφορέα εκτείνεται από  $y = 50$  m έως  $y = 100$  m και από  $z = 0$  m έως  $z = 5$  m. Για την εφαρμογή του IRENE–QUAL στο παραπάνω πρόβλημα ρύπανσης θεωρούνται τα ακόλουθα δεδομένα:  $n_e = 0.2$ ,  $D_{tx} = 1.5$  m<sup>2</sup>/s,  $D_{ty} = 1.0$  m<sup>2</sup>/s,

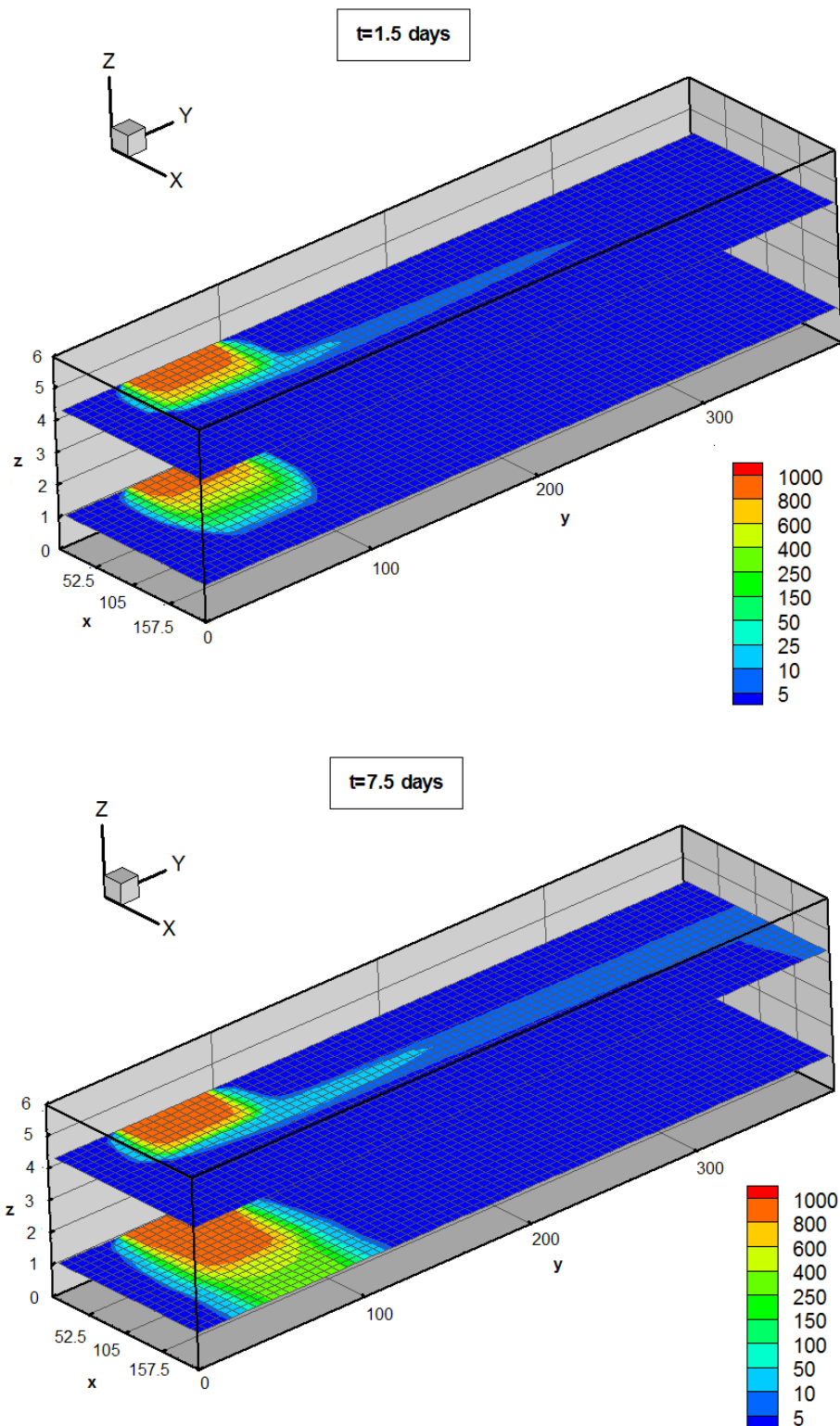
$D_{Lz} = 0.5 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\alpha_L = 2 \text{ m}$ ,  $\alpha_{TH} = 0.2 \text{ m}$  και  $\alpha_{TV} = 0.2 \text{ m}$ . Για την εκτίμηση των συγκεντρώσεων του ρύπου στο σύστημα των επιφανειακών–υπόγειων υδάτων επιλύεται το σύστημα εξισώσεων (4.72), χρησιμοποιώντας το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST για την επίλυση των όρων μεταφοράς.

Στο Σχήμα 4.6 απεικονίζονται οι τιμές των συγκεντρώσεων του ρύπου στο σύστημα των επιφανειακών–υπόγειων νερών κατά τους χρόνους  $t = 1.5 \text{ days}$  και  $t = 7.5 \text{ days}$ . Οι συγκεντρώσεις απεικονίζονται στο επίπεδο  $x-y$  για  $z = 4.75 \text{ m}$  (πρώτο στρώμα του υδροφορέα) και  $z = 0.25 \text{ m}$  (τελευταίο στρώμα του υδροφορέα). Για χρόνο  $t = 1.5 \text{ days}$ , ο ρύπος έχει ήδη εισέλθει στο υδατόρευμα, όπου υπερिशύει ο μηχανισμός της μεταφοράς του ρύπου κατάντη. Στο τελευταίο στρώμα του υδροφορέα ο ρύπος κινείται προς το ανατολικό όριο.

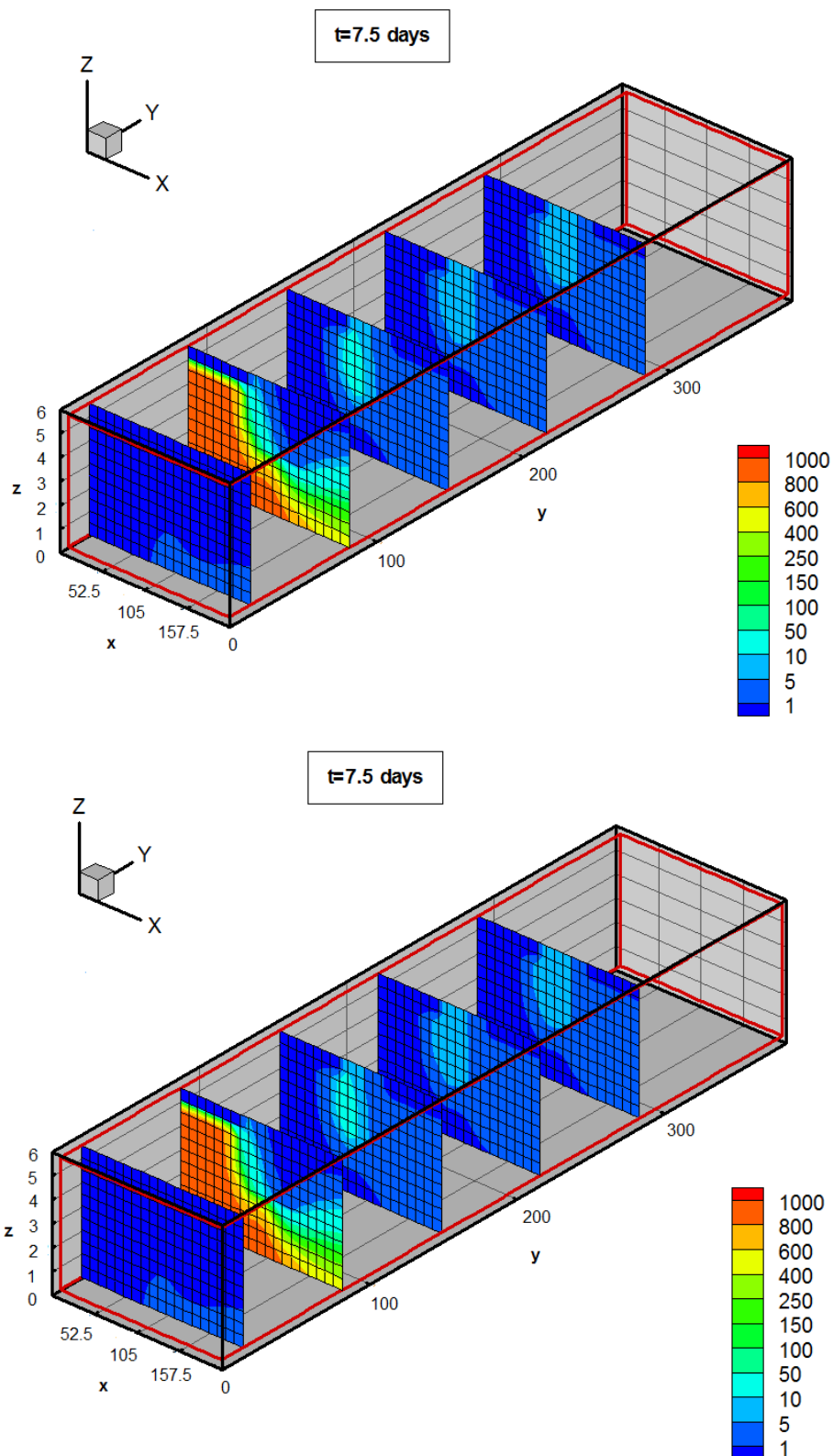
Στο Σχήμα 4.7 παρουσιάζεται η κατανομή των συγκεντρώσεων του ρύπου σε κατακόρυφες τομές του υπολογιστικού πεδίου στο επίπεδο  $x-z$  στις θέσεις  $y = 15 \text{ m}$ ,  $y = 95 \text{ m}$ ,  $y = 185 \text{ m}$ ,  $y = 215 \text{ m}$  και  $y = 295 \text{ m}$ , κατά τους χρόνους  $t = 1.5 \text{ days}$  και  $t = 7.5 \text{ days}$ . Η τομή στη θέση  $y = 95 \text{ m}$  τέμνει το μέτωπο εισόδου του ρύπου στο πεδίο ροής. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7, ένα τμήμα της μάζας του ρύπου εισέρχεται στο υδατόρευμα μέσω της δυτικής όχθης και του δυτικού τμήματος του πυθμένα. Το ποσοστό της μάζας του ρύπου που εισέρχεται στο πεδίο στα μεγαλύτερα βάθη, κοντά στον πυθμένα του υδροφορέα, δεν εισέρχεται στο υδατόρευμα αλλά κινείται προς το ανατολικό όριο. Επίσης, ένα μέρος της μάζας του ρύπου που έχει εισέλθει στο υδατόρευμα, εκρέει μέσω της ανατολικής όχθης και του ανατολικού τμήματος του πυθμένα του υδατορεύματος, λόγω της υδραυλικής κλίσης που υφίσταται μεταξύ του υδατορεύματος και του ανατολικού ορίου του υδροφορέα. Οι τομές στις θέσεις  $y = 185 \text{ m}$ ,  $y = 215 \text{ m}$  και  $y = 295 \text{ m}$  δείχνουν την κίνηση του ρύπου στο υδατόρευμα. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7, το σχήμα ULTIMATE–QUICKEST που χρησιμοποιείται εισάγει μικρή αριθμητική διάχυση στη λύση, οπότε διατηρείται το μέτωπο του ρύπου κατά μήκος του υδατορεύματος.

Εκτιμήθηκε ότι περίπου το 75% της μάζας του ρύπου που εισρέει στο υπολογιστικό πεδίο από το δυτικό όριο, εισέρχεται στο υδατόρευμα. Το υπόλοιπο 25% κινείται προς το ανατολικό όριο του υδροφορέα. Ωστόσο, όπως φαίνεται στα σχήματα 4.6 και 4.7, οι συγκεντρώσεις του ρύπου στο υδατόρευμα είναι μικρές σε σύγκριση με τις συγκεντρώσεις του ρύπου στον υδροφορέα. Αυτό οφείλεται στις

συγκριτικά σημαντικά μεγαλύτερες ταχύτητες ροής στο υδατόρευμα, οπότε ο ρύπος μεταφέρεται κατάντη και εξέρχεται του υπολογιστικού πεδίου.



**Σχήμα 4.6:** Συγκεντρώσεις του ρύπου στο σύστημα υδροφορέα–υδατορεύματος για  $t = 1.5$  days και  $t = 7.5$  days. Οι τιμές των συγκεντρώσεων απεικονίζονται στο επίπεδο  $x$ – $y$  για  $z = 4.75$  m και  $z = 0.25$  m.



**Σχήμα 4.7:** Κατανομή των συγκεντρώσεων του ρύπου σε κατακόρυφες τομές του υπολογιστικού πεδίου στο επίπεδο  $x-z$  στις θέσεις  $y = 15$  m,  $y = 95$  m,  $y = 185$  m,  $y = 215$  m και  $y = 295$  m, κατά τους χρόνους  $t = 1.5$  days και  $t = 7.5$  days

Αξιολογώντας ποιοτικά τα αποτελέσματα του IRENE για την παραπάνω υποθετική περίπτωση αλληλεπίδρασης μεταξύ υδροφορέα και υδατορεύματος αποδεικνύεται (α) η ικανότητα του IRENE–QUAL να εκτιμά τα ρυπαντικά φορτία σε ένα σύστημα επιφανειακών–υπόγειων νερών και (β) η ανάγκη να χρησιμοποιηθεί ένα τρισδιάστατο ολοκληρωμένο αριθμητικό μοντέλο ποιότητας επιφανειακών–υπόγειων νερών για την ακριβή εκτίμηση της ρύπανσης σε συστήματα επιφανειακών–υπόγειων υδάτων.

#### 4.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε το τρισδιάστατο ολοκληρωμένο μοντέλο ποιότητας επιφανειακών–υπόγειων νερών IRENE–QUAL. Στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει δημοσιευμένο κάποιο άλλο τρισδιάστατο μοντέλο ποιότητας επιφανειακών–υπόγειων νερών. Το IRENE–QUAL μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης της ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών υδάτινων σωμάτων και υπόγειων νερών για περιπτώσεις συντηρητικών ρύπων ή ρύπων των οποίων η βιολογική ή ραδιενεργός διάσπαση ακολουθεί κινητική πρώτης τάξης. Στο υπό–μοντέλο ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL είναι δυνατόν να προσομοιωθεί η προσρόφηση ρύπου από το πορώδες μέσο, η οποία θεωρείται ότι περιγράφεται από τη γραμμική ισόθερμη προσρόφησης ισορροπίας, την ισόθερμη προσρόφησης ισορροπίας Freundlich ή την ισόθερμη προσρόφησης ισορροπίας Langmuir.

Λόγω του μικτού υπερβολικού–παραβολικού χαρακτήρα των εξισώσεων μεταφοράς–τυρβώδους διάχυσης ρύπων σε επιφανειακά νερά και μεταφοράς–διασποράς ρύπων σε υπόγεια νερά, στο IRENE–QUAL συμπεριλαμβάνονται διάφορα αριθμητικά σχήματα για την αποτελεσματική επίλυση των όρων μεταφοράς και των όρων τυρβώδους διάχυσης ή υδροδυναμικής διασποράς των εξισώσεων.

Ο συνδυασμός των υπό–μοντέλων ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων του IRENE–QUAL πραγματοποιείται στην κοινή διεπιφάνεια των επιφανειακών–υπόγειων νερών, θεωρώντας –σε αντίθεση με προηγούμενες εργασίες– ότι τόσο ο μηχανισμός της μεταφοράς όσο και ο μηχανισμός της διασποράς συμβάλλουν στην ανταλλαγή ρύπων μεταξύ των επιφανειακών και των υπόγειων νερών. Ο μηχανισμός της διασποράς είναι σημαντικός για την εκτίμηση της



ανταλλαγής ρύπων μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων υδάτων σε περιπτώσεις μικρών υδραυλικών κλίσεων μεταξύ των επιφανειακών και των υπόγειων νερών και άρα μικρών ταχυτήτων στην κοινή τους διεπιφάνεια. Αν χρησιμοποιηθεί κοινό μέγεθος χρονικού βήματος στα υπό-μοντέλα ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών οι αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν από τη διακριτοποίηση των εξισώσεων μεταφοράς-τυρβώδους διάχυσης ρύπων σε επιφανειακά νερά και μεταφοράς-διασποράς ρύπων σε υπόγεια νερά μπορούν να γραφτούν υπό τη μορφή ενός συστήματος εξισώσεων, το οποίο επιλύεται σε κάθε χρονικό βήμα για τον υπολογισμό των ρυπαντικών φορτίων σε επιφανειακά και υπόγεια νερά με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων ή με τη μέθοδο LANGZOS/ORTHOMIN με προρύθμιση μη πλήρους διάσπασης κατά Cholesky. Εναλλακτικά, για περιπτώσεις συστημάτων επιφανειακών-υπόγειων νερών μεγάλης έκτασης, με σημαντικά διαφορετικές χρονικές κλίμακες στη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων νερών και συνεπώς στη μεταφορά ρύπων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διαφορετικό χρονικό βήμα στα υπό-μοντέλα ποιότητας επιφανειακών και υπόγειων υδάτων. Τότε, οι εξισώσεις των υπό-μοντέλων ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών επιλύονται διαδοχικά αρκετές φορές σε κάθε χρονικό βήμα του υπό-μοντέλου ποιότητας των υπόγειων υδάτων, ώσπου να επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση για τις τιμές των συγκεντρώσεων σε επιφανειακά και υπόγεια νερά.

Οι περιπτώσεις ελέγχου που διερευνήθηκαν στο κεφάλαιο αυτό έδειξαν ότι οι αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στο IRENE-QUAL μπορούν με ακρίβεια να αναπαράγουν τα αποτελέσματα των αναλυτικών λύσεων. Τέλος, από την ποιοτική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του μοντέλου για την υποθετική περίπτωση αλληλεπίδρασης μεταξύ υδροφορέα και υδατορεύματος, αποδεικνύεται η ικανότητα του IRENE-QUAL να εκτιμά τα ρυπαντικά φορτία σε συστήματα επιφανειακών-υπόγειων νερών.

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

---

### 5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι πειραματικές μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο Hyder Hydraulics του Πανεπιστημίου του Cardiff στο Ηνωμένο Βασίλειο και χρησιμοποιήθηκαν για την επιβεβαίωση του IRENE. Η εκτέλεση των πειραμάτων έγινε σε 2 φάσεις:

Α΄ Φάση πειραματικών μετρήσεων: Διερευνήθηκε η αλληλεπίδραση ροής και ρύπανσης μεταξύ υδατορεύματος και υπόγειου υδροφορέα σε πειραματική διάταξη η οποία περιελάμβανε ευθύγραμμο κανάλι ορθογωνικής διατομής το οποίο διερχόταν μέσα από ομογενή και ισότροπο υδροφορέα ο οποίος κατασκευάστηκε από ειδικό πορώδες υλικό του εμπορίου (polyurethane foam), με πυκνότητα πόρων σύμφωνα με τον κατασκευαστή 60 ppi (pores per inch). Δημιουργήθηκαν συνθήκες μόνιμης ροής και μετρήθηκαν: (α) η στάθμη του νερού στον υδροφορέα και (β) οι συγκεντρώσεις συντηρητικού δείκτη στον υδροφορέα.

Β΄ Φάση πειραματικών μετρήσεων: Διερευνήθηκε η αλληλεπίδραση ροής και ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών σε πειραματική διάταξη η οποία κατασκευάστηκε με στόχο την προσομοίωση ιδεατής υδρολογικής λεκάνης που

περιλαμβάνει υδατόρευμα και μικρή λίμνη, τα οποία επικοινωνούν μέσω αμμώδους φράγματος. Δημιουργήθηκαν συνθήκες μόνιμης και μη μόνιμης ροής και μετρήθηκαν (α) η στάθμη του νερού στο αμμώδες φράγμα και στα επιφανειακά νερά και (β) οι συγκεντρώσεις συντηρητικού δείκτη στο αμμώδες φράγμα και στο υδατόρευμα.

## 5.2 Πειραματικές μετρήσεις Α΄ Φάσης

### 5.2.1 Πειραματική διάταξη

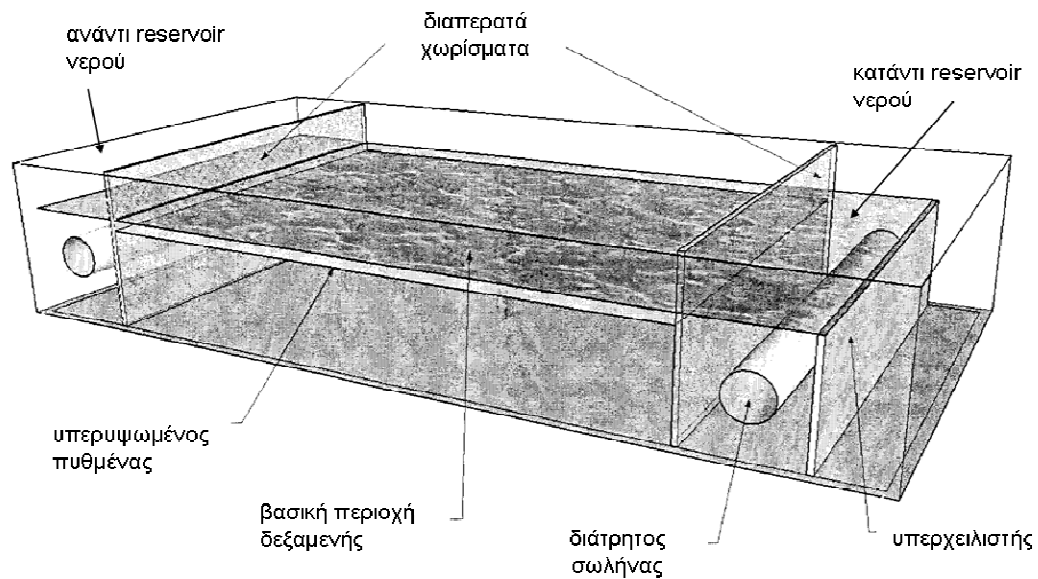
Στο εργαστήριο Hyder Hydraulics του Πανεπιστημίου του Cardiff υπάρχει μία μεγάλη ορθογωνική δεξαμενή στην οποία μπορούν να προσομοιωθούν παλιρροιακοί κυματισμοί. Στη δεξαμενή αυτή πραγματοποιήθηκαν οι πειραματικές μετρήσεις τόσο της Α΄ όσο και της Β΄ Φάσης.

Η δεξαμενή (βλ. Σχήμα 5.1) έχει υπερυψωμένο πυθμένα και η παροχή του νερού σε αυτήν γίνεται μέσω σωληνώσεων που συνδέονται με τη βασική δεξαμενή νερού του εργαστηρίου. Το νερό εισέρχεται στη δεξαμενή μέσω ενός μεγάλου διάτρητου σωλήνα και συγκεντρώνεται κάτω από τον υπερυψωμένο πυθμένα της. Οι οπές που βρίσκονται στον πυθμένα της δεξαμενής επιτρέπουν στο νερό να ανέλθει σε στάθμη που ρυθμίζεται από υπερχειλιστή (βλ. Σχήμα 5.2). Η παροχή του νερού είναι συνεχής στην περιοχή της δεξαμενής ανάμεσα στον υπερχειλιστή και το διαπερατό χώρισμα ώστε να διασφαλιστεί ότι η στάθμη του νερού στη δεξαμενή είναι πάντα αυτή που ορίζεται από τη θέση του υπερχειλιστή. Η κίνηση του υπερχειλιστή ελέγχεται από σχετικό πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή και η μεταβολή της στάθμης του νερού μέσα στη δεξαμενή ακολουθεί την κίνηση του υπερχειλιστή.

Η δεξαμενή έχει διαστάσεις 5.0 m × 4.0 m × 0.50 m. Στην πειραματική διάταξη η οποία κατασκευάστηκε σ'αυτήν για την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης υδατορεύματος–υδροφορέα, επιλέχθηκε ειδικό πορώδες υλικό του εμπορίου (polyurethane foam) με πυκνότητα πόρων 60 ppi (pores per inch) για την κατασκευή του υδροφορέα. Αρχικές μετρήσεις διαπερατότητας έδειξαν ότι το υλικό αυτό είναι λίγο περισσότερο διαπερατό από την άμμο.

Το πορώδες υλικό υπάρχει στο εμπόριο σε διαστάσεις 3.0 m × 2.0 m × 0.5 m. Τα κομμάτια αυτά μπορούν να κοπούν ώστε να δημιουργηθούν διάφορες διατομές

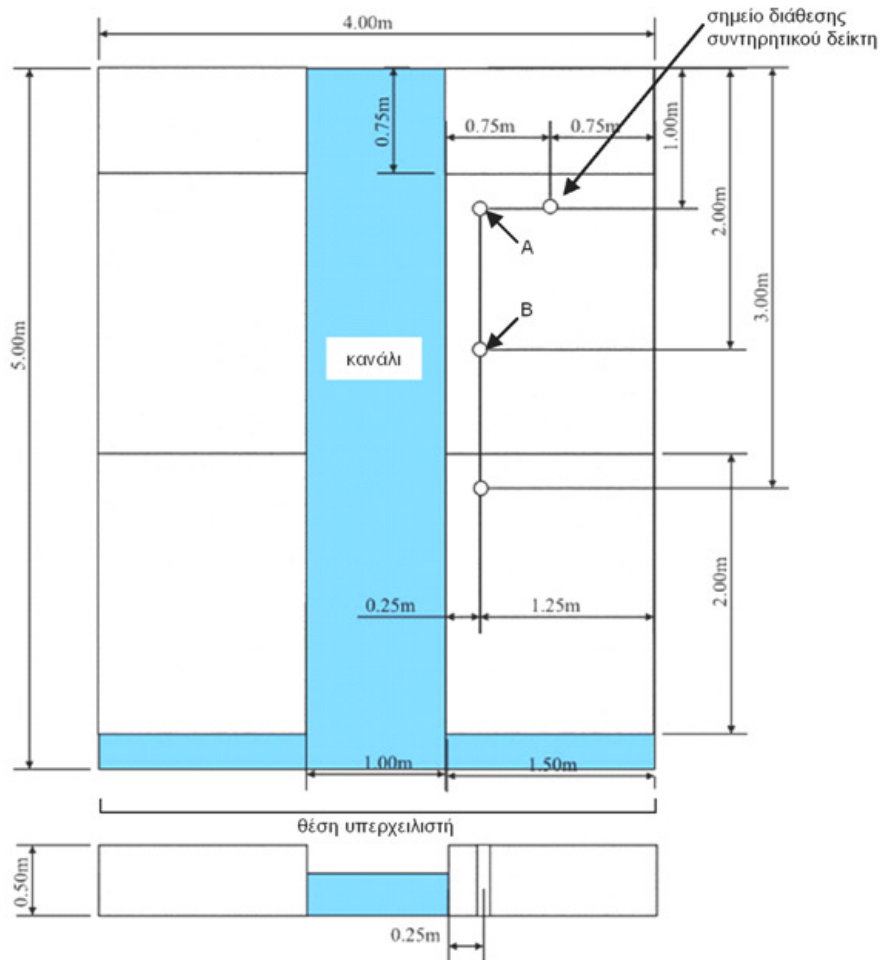
καναλιού και γεωμετρίες υδροφορέα. Αρχικά, τα κομμάτια του πορώδους υλικού κόπηκαν σε διαστάσεις  $1.5 \text{ m} \times 2.0 \text{ m} \times 0.3 \text{ m}$  και τοποθετήθηκαν στη δεξαμενή όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3. Δημιουργήθηκαν κάποιες οπές (γεωτρήσεις παρατήρησης) στο υλικό ώστε να μπορούν να μετρηθούν εκεί στάθμες και συγκεντρώσεις του συντηρητικού δείκτη στο πορώδες υλικό που προσομοιώνει τον υπόγειο υδροφόρο. Χρησιμοποιώντας αυτήν τη διάταξη (βλ. Σχήμα 5.3) πραγματοποιήθηκαν κάποιες αρχικές μετρήσεις στάθμων και συγκεντρώσεων χρησιμοποιώντας τη Ροδαμίνη WT ως συντηρητικό δείκτη.



**Σχήμα 5.1:** Πειραματική δεξαμενή στο εργαστήριο Hyder Hydraulics του πανεπιστημίου του Cardiff



**Σχήμα 5.2:** Υπερχειλιστής (αριστερά), διάτρητος σωλήνας για την παροχή νερού στην δεξαμενή (μέσο) και περατό χωρίσμα (δεξιά)



Σχήμα 5.3: Αρχική πειραματική διάταξη

## 5.2.2 Ιδιότητες του πορώδους υλικού

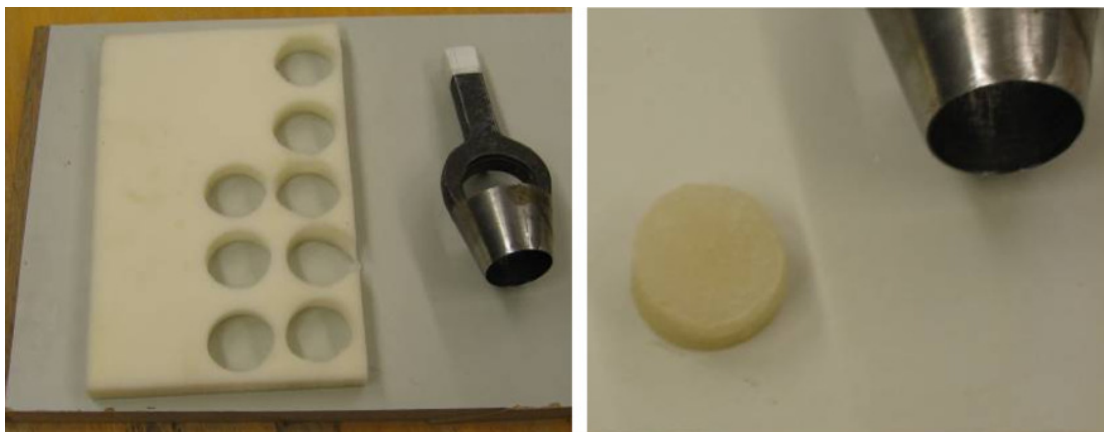
Πριν από τη διεξαγωγή των πειραμάτων μετρήθηκαν στο εργαστήριο η διαπερατότητα και το πορώδες του υλικού.

### 5.2.2.1 Διαπερατότητα

Η μέτρηση της διαπερατότητας για διάφορους εδαφικούς σχηματισμούς μπορεί να γίνει στο εργαστήριο χρησιμοποιώντας περατόμετρα σταθερού ή πίπτοντος φορτίου. Ωστόσο η διαδικασία μέτρησης της διαπερατότητας για το συγκεκριμένο πορώδες υλικό δεν περιγράφεται από κάποιο πρότυπο (π.χ. σύμφωνα με Βρετανικά πρότυπα, British Standards BS 1377: Part 5: 1990) και δεν είναι πολύ απλή γιατί ο αφρός πολουρεθάνης δε μπορεί να πάρει το σχήμα του κυλίνδρου όπου γίνεται η μέτρηση των εδαφικών σχηματισμών. Παρακάτω περιγράφεται η μέτρηση της

διαπερατότητας του αφρού πολυουρεθάνης, η οποία έγινε με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που ορίζεται στα βρετανικά πρότυπα για εδαφικούς σχηματισμούς.

Από ένα κομμάτι του υλικού κόπηκαν δίσκοι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4. Οι δίσκοι τοποθετήθηκαν σε έναν ογκομετρικό κύλινδρο με περίπου την ίδια διάμετρο με τους δίσκους. Δημιουργήθηκε μία σπή στη βάση του κυλίνδρου ώστε να μπορεί να προστίθεται νερό σε αυτόν και στη συνέχεια ο κύλινδρος γυρίστηκε ανάποδα και σταθεροποιήθηκε σε μεταλλικό στήριγμα (Σχήμα 5.5). Ένας δεύτερος μεγαλύτερος ογκομετρικός κύλινδρος τοποθετήθηκε κάτω από τον πρώτο έτσι ώστε να συλλέγεται το νερό. Προστέθηκε νερό στον πρώτο κύλινδρο ώστε να διατηρείται σταθερό πιεζομετρικό φορτίο επάνω από τους δίσκους του αφρού πολυουρεθάνης μειώνοντας ή αυξάνοντας τη ροή κατάλληλα (Σχήμα 5.6). Όταν δημιουργήθηκε σταθερό πιεζομετρικό φορτίο μετρήθηκε ο χρόνος για να συλλεχθεί γνωστή ποσότητα νερού στον δεύτερο κύλινδρο. Διαφορετικός αριθμός δίσκων χρησιμοποιήθηκε ώστε να δημιουργηθούν διάφορες υδραυλικές κλίσεις μεταξύ της επάνω και της κάτω πλευράς των δίσκων του πορώδους υλικού.



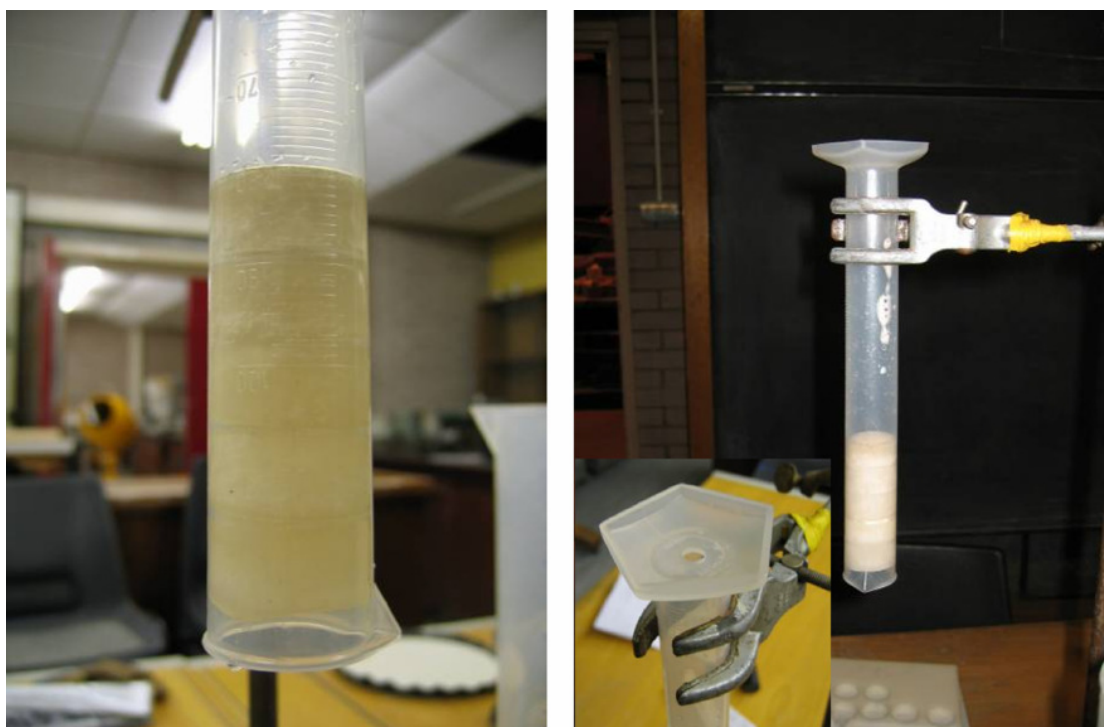
Σχήμα 5.4: Δίσκοι αφρού πολυουρεθάνης

Τα αποτελέσματα της μέτρησης της διαπερατότητας του αφρού πολυουρεθάνης φαίνονται στον Πίνακα 6.2. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του οδηγού British Standards (BS1377 1990), η διαπερατότητα υπολογίστηκε ως:

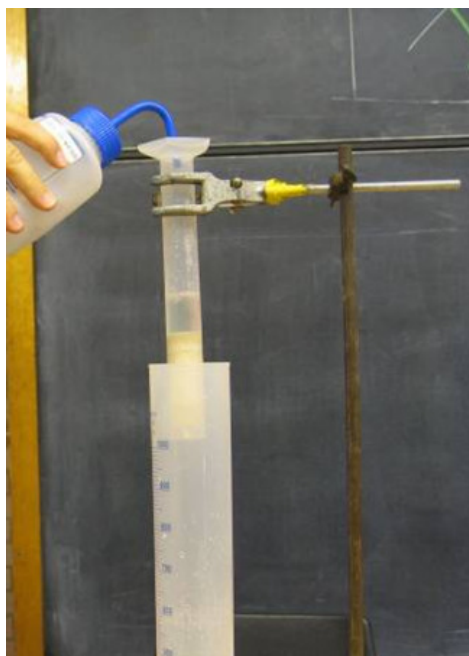
$$k = \frac{Q}{J} \frac{R_t}{A} \quad (5.1)$$

όπου  $k$  είναι η διαπερατότητα [ $LT^{-1}$ ],  $Q$  είναι η παροχή [ $L^3T^{-1}$ ],  $J$  είναι η υδραυλική κλίση  $dh/L$  όπου  $dh$  είναι η διαφορά των πιεζομετρικών φορτίων μεταξύ της επάνω και της κάτω πλευράς των δίσκων του πορώδους υλικού,  $L$  είναι το συνολικό πάχος

των δίσκων του πορώδους υλικού,  $R_t$  είναι ένας θερμοκρασιακός συντελεστής διόρθωσης για το ιξώδες του νερού και  $A [L^2]$  είναι η επιφάνεια των δίσκων.



Σχήμα 5.5: Δίσκοι αφρού πολυουρεθάνης στον ογκομετρικό κύλινδρο



Σχήμα 5.6: Μέτρηση διαπερατότητας αφρού πολυουρεθάνης

**Πίνακας 5.1:** Στοιχεία μέτρησης της διαπερατότητας

Στοιχείο		
διάμετρος κυλίνδρου	27.63 mm	0.02763 m
διάμετρος δίσκων	31.78 mm	0.03178 m
πάχος δίσκου	15 mm	0.015 m
επιφάνεια κυλίνδρου	599.59 mm <sup>2</sup>	0.0005996 m <sup>2</sup>

**Πίνακας 5.2:** Αποτελέσματα μέτρησης διαπερατότητας του αφρού πολυουρεθάνης

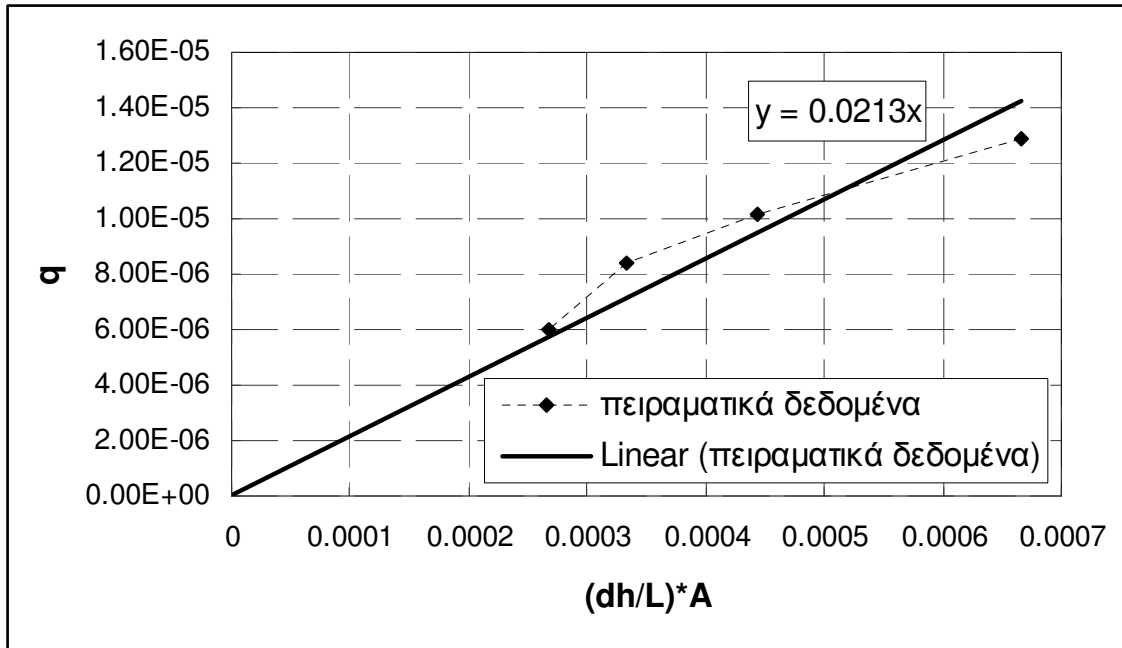
Όγκος νερού πάνω από το υλικό	dh (m)	t (s)	Όγκος νερού που συλλέχθηκε (ml)	Αριθμός δίσκων		
20	0.033356	7.97	100	2	0.030	12.5470
20	0.033356	7.66	100	2	0.030	13.0550
20	0.033356	7.71	100	2	0.030	12.9700
20	0.033356	9.89	100	3	0.045	10.1110
20	0.033356	9.73	100	3	0.045	10.2770
20	0.033356	9.66	100	3	0.045	10.3520
20	0.033356	11.90	100	4	0.060	8.4034
20	0.033356	17.95	100	4	0.060	8.3565
20	0.033356	17.16	100	4	0.060	8.7413
20	0.033356	12.09	100	4	0.060	8.2713
20	0.033356	24.74	100	5	0.075	6.0631
20	0.033356	25.77	100	5	0.075	5.8207
20	0.033356	27.89	100	5	0.075	5.3783
20	0.033356	23.90	100	5	0.075	6.2762
20	0.033356	22.81	100	5	0.075	6.5761

**Πίνακας 5.3:** Σύνοψη αποτελεσμάτων και υπολογισμών

Αριθ. δίσκων	dh (m)	L	q (m <sup>3</sup> /s)	dh/L	A (m <sup>2</sup> )	(dh/L)*A	k (m/s)
2	0.033	0.030	1.29E-05	1.1119	5.996E-04	6.67E-04	1.93E-02
3	0.033	0.045	1.02E-05	0.7412	5.996E-04	4.44E-04	2.31E-02
4	0.033	0.060	8.44E-06	0.5559	5.996E-04	3.33E-04	2.53E-02
5	0.033	0.075	6.02E-06	0.4447	5.996E-04	2.67E-04	2.26E-02
<b>Μέσος όρος</b>							2.26E-02
<b>Τυπική απόκλιση</b>							2.5E-03

Η μέση διαπερατότητα η οποία υπολογίστηκε ήταν  $0.0226 \pm 0.0025$  m/s. Στο γράφημα του σχήματος 5.7 παρουσιάζεται η παροχή  $q$  (m<sup>3</sup>/s) συναρτήσεως της υδραυλικής κλίσης  $dh/L$ . Στο ίδιο γράφημα φαίνεται και η βέλτιστη ευθεία στην οποία προσαρμόζονται τα πειραματικά δεδομένα. Η κλίση της ευθείας αυτής με μηδενική αποκλίνοσα, προσεγγίζει την υδραυλική αγωγιμότητα, η οποία υπολογίστηκε ίση με  $K = 0.0213$  m/s.





Σχήμα 5.7: Εκτίμηση της υδραυλικής αγωγιμότητας του αφρού πολυουρεθάνης

### 5.2.2.2 Πορώδες

Μετρήσεις του πορώδους διεξάχθηκαν χρησιμοποιώντας σαν δείγμα ένα κυλινδρικό κομμάτι του υλικού. Μετρήθηκε ο όγκος και η μάζα του δείγματος αρχικά. Στη συνέχεια το δείγμα βυθίστηκε σε ογκομετρικό κύλινδρο και συμπιέστηκε μέχρι να μην διακρίνονται φυσαλλίδες αέρα να βγαίνουν από το δείγμα ώστε να διασφαλιστεί ότι είναι πλήρως κορεσμένο σε νερό. Έπειτα το δείγμα μετεφέρθηκε πολύ γρήγορα επάνω από κενό ογκομετρικό κύλινδρο και μετρήθηκε ο όγκος του νερού που στραγγίστηκε υπό την επίδραση της βαρύτητας. Στη συνέχεια το δείγμα στραγγίστηκε υπό πίεση και καταγράφηκε και πάλι ο όγκος νερού στον ογκομετρικό κύλινδρο. Τέλος, το δείγμα ζυγίστηκε ώστε να υπολογιστεί η ποσότητα του νερού που συγκρατήθηκε στους πόρους. Από τις μετρήσεις αυτές, διαφορετικά είδη πορώδους μπορούν να υπολογιστούν. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.4.

Πίνακας 5.4: Μετρήσεις πορώδους

Μετρήσεις δείγματος	Τιμή	Πορώδες
διάμετρος	50 mm	
πάχος	272 mm	
ξηρή μάζα (A)	12.395 g	
όγκος νερού που στραγγίστηκε υπό βαρύτητα (B)	260 ml	0.486827 ή 48.68 % (ειδική απόδοση)
όγκος νερού που στραγγίστηκε υπό πίεση (C)	400 ml	0.748964 ή 74.90% (ενεργό πορώδες)
τελική μάζα δείγματος (D)	31.41 g	

νερό που συγκρατείται στους πόρους (D-A=E)	19.015 g	
ολική ποσότητα νερού στο δείγμα (C+E)	419.015 ml	0.784568 ή 78.46% (ολικό πορώδες)

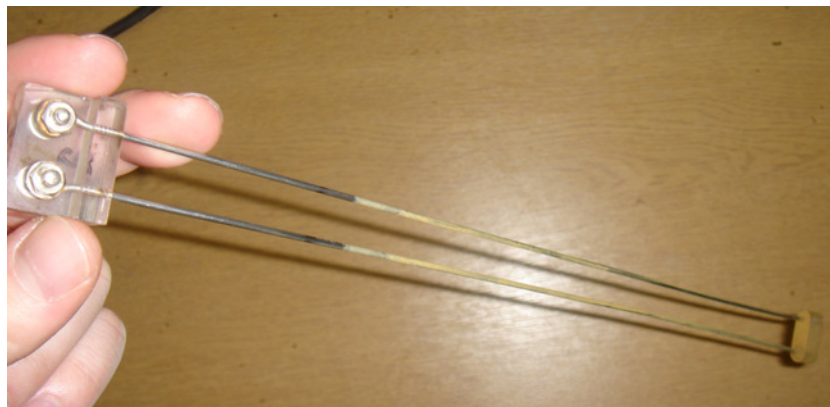
Από τις μετρήσεις που παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.4 συμπεραίνεται ότι το ολικό πορώδες του αφρού πολουρεθάνης είναι περίπου 80% και το ενεργό πορώδες είναι περίπου 50%. Συνεπώς ο αφρός πολουρεθάνης που επιλέχθηκε είναι πολύ πιο πορώδης από την άμμο.

### 5.2.3 Όργανα, αντιδραστήρια και πειραματική διαδικασία

Μετρητές στάθμης. Οι μετρητές που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση της στάθμης του νερού στο κανάλι και στο πορώδες υλικό ήταν τύπου αντίστασης και αποτελούνταν από 2 ηλεκτρόδια στερεωμένα σε στέλεχος στηριζόμενο σε εντατήρα, ο οποίος στερεώθηκε στον φορέα που χρησιμοποιήθηκε για να διατρέχεται η δεξαμενή. Η αρχή λειτουργίας των μετρητών βασίζεται στη διαφορά δυναμικού που οφείλεται στη μεταβολή της στάθμης του νερού και η ακρίβειά τους είναι  $\pm 2\%$ . Μετά από κατάλληλη βαθμονόμηση η διαφορά δυναμικού αποδίδει τη μεταβολή της στάθμης του νερού. Οι μετρητές συνδέθηκαν με ηλεκτρονικό υπολογιστή, ο οποίος μέσω κατάλληλου λογισμικού κατέγραψε τις μεταβολές της στάθμης του νερού. Οι μετρητές στάθμης βαθμονομούνταν κάθε φορά πριν από τη διεξαγωγή των πειραματικών μετρήσεων.

Μετρητές συγκέντρωσης. Για τη μέτρηση της συγκέντρωσης του συντηρητικού δείκτη χρησιμοποιήθηκαν 2 φασματοφωτόμετρα ορατού/υπεριώδους (UV/Vis). Τα φασματοφωτόμετρα βαθμονομήθηκαν χρησιμοποιώντας δείγματα νερού γνωστής συγκέντρωσης του συντηρητικού δείκτη. Η ακρίβειά τους είναι  $\pm 5\%$ . Τα φασματοφωτόμετρα έχουν ενσωματωμένο σύστημα καταγραφής της συγκέντρωσης σε συνεχή ροή ανά πολύ μικρά χρονικά διαστήματα (1/10 s). Μία περισταλτική αντλία χρησιμοποιήθηκε ώστε να συλλέγεται νερό από τα σημεία μέτρησης. Ο ρυθμός άντλησης διατηρήθηκε στα 200 rpm και θεωρήθηκε αρκετά χαμηλός ώστε να μην επηρεαστούν οι στάθμες στο κανάλι και στον υδροφορέα. Καθώς ο ρυθμός άντλησης ήταν χαμηλός υπήρχε μία υστέρηση ανάμεσα στον πραγματικό χρόνο δειγματοληψίας και στο χρόνο καταγραφής της συγκέντρωσης από το φασματοφωτόμετρο. Για να εκτιμηθεί η χρονική αυτή υστέρηση μετρήθηκε ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει το δείγμα από την πειραματική διάταξη στο

φασματοφωτόμετρο μέσω της αντλίας. Ο χρόνος αυτός εκτιμήθηκε στα 20 s και λήφθηκε υπόψη στην επεξεργασία των μετρήσεων συγκέντρωσης του συντηρητικού δείκτη.



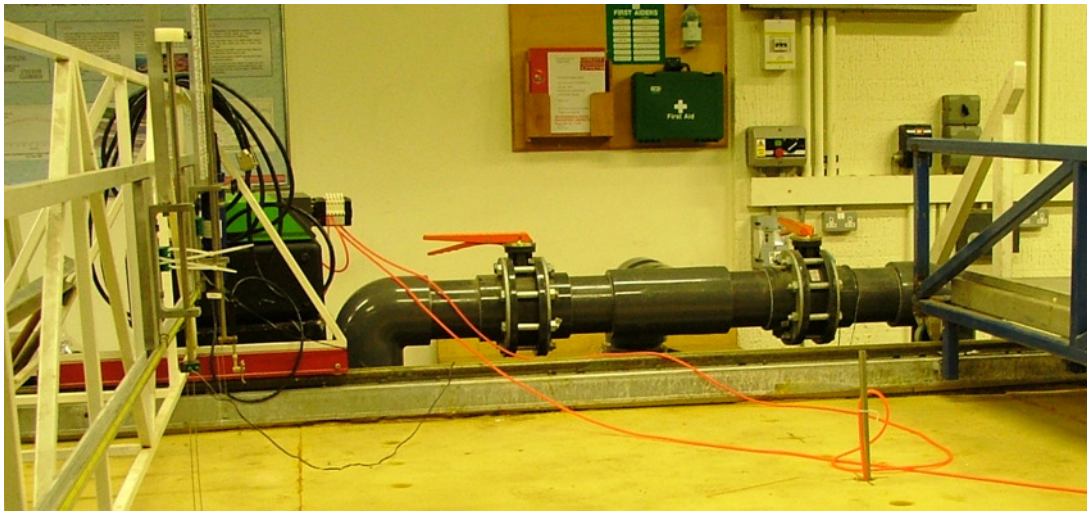
Σχήμα 5.8: Μετρητής στάθμης



Σχήμα 5.9: Φασματοφωτόμετρο 10-AU, Turner designs

Συντηρητικός δείκτης. Επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί η Ροδαμίνη WT ( $C_{29}H_{29}N_2Na_2Cl$ ) σαν συντηρητικός δείκτης για την διεξαγωγή των πειραμάτων. Η Ροδαμίνη WT δεν είναι τοξική, είναι εύκολα μετρήσιμη σε χαμηλές συγκεντρώσεις και δεν χάνει την ισχύ της (είναι σταθερή) κατά την διάρκεια των πειραμάτων. Επίσης προσροφάται λιγότερο από πορώδη μέσα σε σύγκριση με τη Ροδαμίνη B. Η Ροδαμίνη WT είναι μια εξαιρετικά φθορίζουσα κόκκινη χρωστική ουσία με τη μοναδική ιδιότητα να απορροφά πράσινο φως και να εκπέμπει ερυθρό. Ελάχιστες χημικές ενώσεις έχουν αυτήν την ιδιότητα και έτσι οι παρεμβάσεις από άλλες ενώσεις κατά τη διάρκεια των μετρήσεων είναι πολύ σπάνιες. Όλα τα παραπάνω καθιστούν την Ροδαμίνη WT έναν ιδανικό συντηρητικό δείκτη για τη διεξαγωγή των πειραματικών μετρήσεων.

Διαδικασία μέτρησης συντηρητικού δείκτη. Η διάθεση του δείκτη στις γεωτρήσεις παρατήρησης πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας τροχοείδα ώστε να διατηρείται σταθερός ο ρυθμός διάθεσης. Χρονομετρήθηκε κάθε φορά ο χρόνος εισαγωγής γνωστού όγκου διαλύματος του δείκτη. Τα σωληνάκια τα οποία συνδέθηκαν με την περισταλτική αντλία για την άντληση δείγματος από τα σημεία μέτρησης στερεώθηκαν σε μεταλλικές ράβδους οι οποίες τοποθετήθηκαν σε αυτά (Σχήμα 5.10). Με τον τρόπο αυτό διασφαλίστηκε ότι τα σωληνάκια παρέμειναν στο κέντρο και σε δεδομένο ύψος μέσα στα σημεία μέτρησης.



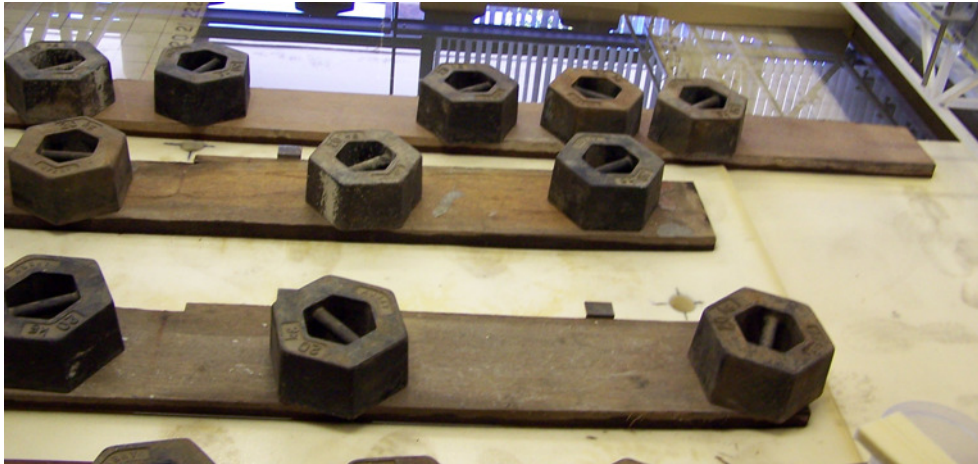
**Σχήμα 5.10:** Σωληνάκι στερεωμένο σε μεταλλική ράβδο για την άντληση δείγματος από το σημείο μέτρησης

#### **5.2.4 Αρχικές πειραματικές μετρήσεις**

Στην παράγραφο αυτή περιγράφονται κάποιες αρχικές πειραματικές μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν στην πειραματική διάταξη του Σχήματος 5.3 και οι οποίες αποτέλεσαν τη βάση για το σχεδιασμό και τη διεξαγωγή των υπόλοιπων μετρήσεων. Παρουσιάζονται τα προβλήματα που προέκυψαν και οι λύσεις οι οποίες δόθηκαν.

Αρχικά η στάθμη του νερού στην πειραματική διάταξη ρυθμίστηκε στα 20 cm. Γύρω από αυτό το μέσο βάθος ροής, επιβλήθηκε στο κατάντη όριο, με τη βοήθεια του υπερχειλιστή, ημιτονοειδής μεταβολή της στάθμης στο κανάλι με πλάτος 9 cm και περίοδο 30 min και μετρήθηκαν οι συγκεντρώσεις της Ροδαμίνης WT στον υδροφορέα. Αποδείχτηκε ότι καθώς αυξανόταν η στάθμη του νερού, τα κομμάτια του αφρού άρχισαν να επιπλέουν λόγω άνωσης. Το φαινόμενο αποδόθηκε στον αέρα

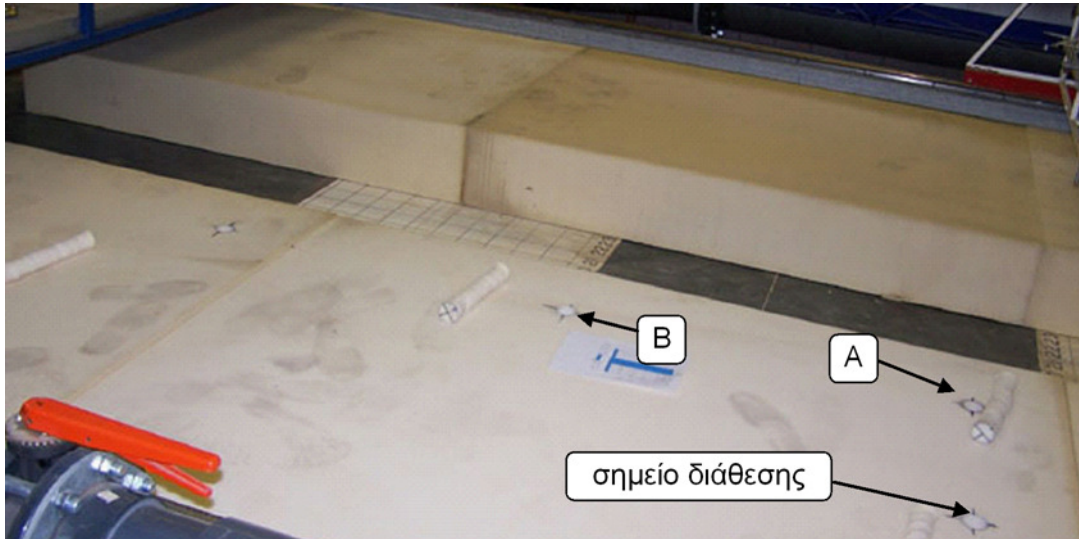
που παγιδεύεται στους πόρους του αφρού πολυουρεθάνης και εμποδίζει τη ροή του νερού μέσα στα κομμάτια του αφρού. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα και να διατηρηθούν τα κομμάτια του αφρού προσκολλημένα στον πυθμένα της δεξαμενής χρησιμοποιήθηκαν μεταλλικά βαρίδια 20 kg τα οποία τοποθετήθηκαν επάνω στον αφρό όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.11.



**Σχήμα 5.11:** Μεταλλικά βαρίδια τοποθετημένα επάνω στα κομμάτια του αφρού πολυουρεθάνης

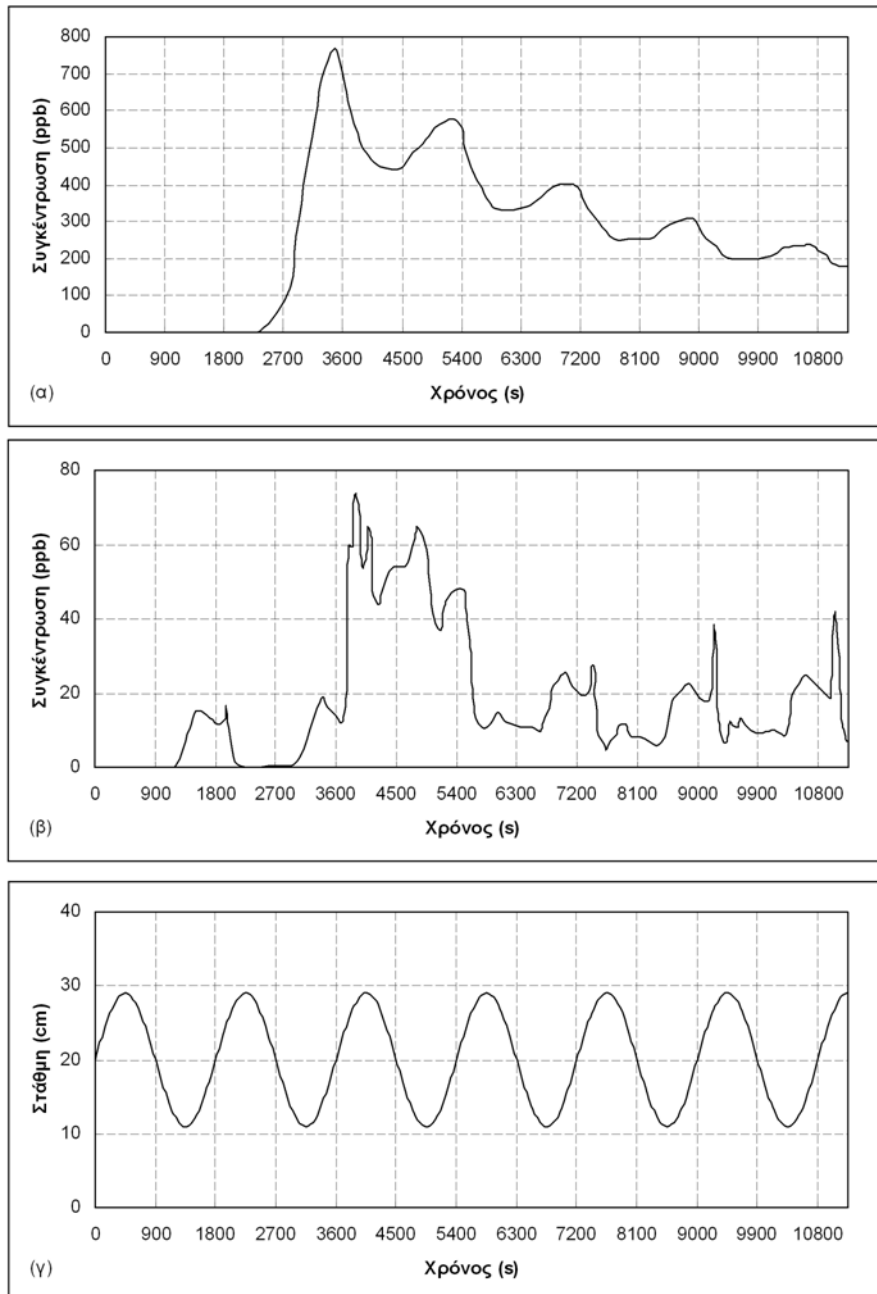
Οι σπές οι οποίες δημιουργήθηκαν στο πορώδες υλικό και φαίνονται στο Σχήμα 5.3, είχαν διάμετρο 10 cm και διαπερνούσαν όλο το πάχος του αφρού. Τόσο στο Σχήμα 5.3 όσο και στη φωτογραφία του Σχήματος 5.12 φαίνονται τα σημεία τα οποία επιλέχθηκαν για τη διάθεση και τη μέτρηση του συντηρητικού δείκτη. Η θέση του σημείου διάθεσης επιλέχθηκε ώστε να απέχει από τα πλευρικά όρια και να μειωθεί η επίδραση της συγκέντρωσης του δείκτη που ήταν αναμενόμενο να συσσωρευθεί κοντά στα τοιχώματα της δεξαμενής. Το σημείο μέτρησης A επιλέχθηκε για να μελετηθεί η μεταφορά και η επιμήκης διασπορά του δείκτη προς το κανάλι και το σημείο B επιλέχθηκε για να μελετηθεί η εγκάρσια διασπορά του δείκτη στον υδροφορέα. Στο σημείο διάθεσης εισήχθησαν 50 ml και 75 ml του διαλύματος Ροδαμίνης WT συγκέντρωσης 1 g/l. Ο χρόνος διάθεσης ήταν 2 min και η διάθεση του ρύπου ξεκίνησε τη στιγμή  $t=2250$  s, δηλαδή στην κορυφή του παλιρροιακού κύματος. Τα σωληνάκια τα οποία συνδέθηκαν με την περισταλτική αντλία στερεώθηκαν 5 cm πάνω από τα άκρα των μεταλλικών ράβδων ώστε να υπάρχει συνεχής ροή προς τα φασματοφωτόμετρα καθ'όλη τη διάρκεια των πειραμάτων (το ελάχιστο του παλιρροιακού κυματισμού ήταν στα 11 cm).





**Σχήμα 5.12:** Σημεία διάθεσης και μέτρησης της Ροδαμίνης WT

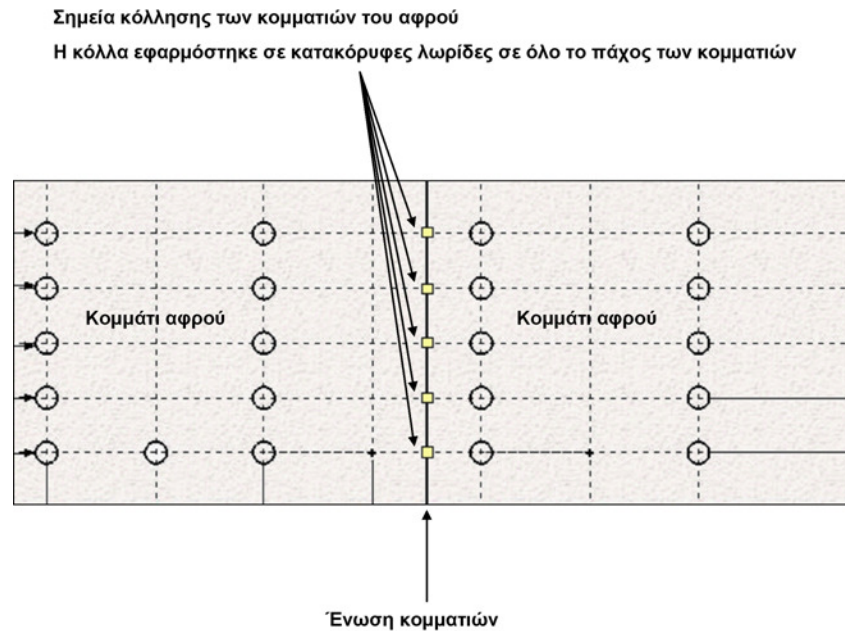
Στο Σχήμα 5.13 φαίνονται τα πειραματικά αποτελέσματα για τη μεταβολή της συγκέντρωσης της Ροδαμίνης WT στο σημείο A για την περίπτωση εισαγωγής 75 ml διαλύματος συγκέντρωσης 1 g/l επί 2 min. Τα πειραματικά αποτελέσματα συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα του IRENE. Η σύγκριση μεταξύ των πειραματικών μετρήσεων και των αριθμητικών αποτελεσμάτων δείχνει ότι ενώ υπάρχει ικανοποιητική συσχέτιση, η μέγιστη συγκέντρωση που προβλέπεται από το μοντέλο είναι 750 ppb (parts per billion) ενώ στο εργαστήριο η μέγιστη συγκέντρωση η οποία καταγράφηκε ήταν περίπου μία τάξη μεγέθους χαμηλότερη. Αυτό δείχνει ότι μία μεγάλη ποσότητα δείκτη «χάθηκε» από τον υδροφορέα. Το πιθανότερο σενάριο είναι ότι η μεγαλύτερη ποσότητα δείκτη μεταφέρθηκε γρήγορα προς το κανάλι κινούμενος κάτω από τα κομμάτια του αφρού τα οποία προφανώς δεν ήταν πλήρως προσκολλημένα στον πυθμένα της δεξαμενής κατά τη διάρκεια των πειραμάτων. Ένα γεγονός που ενισχύει αυτήν την θεωρία είναι ότι τα πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν ότι μετά από  $t = 6300$  s παρατηρούνται επαναλαμβανόμενα μέγιστα στις συγκεντρώσεις της Ροδαμίνης WT κατά την αύξηση της στάθμης του καναλιού, οπότε νερό από το κανάλι εισέρχεται στον υδροφορέα. Συνεπώς η αύξηση της συγκέντρωσης οφείλεται στην μεγάλη ποσότητα του δείκτη που έχει συγκεντρωθεί στο κανάλι και επανεισέρχεται από το κανάλι στον υδροφορέα. Αντίθετα, το μοντέλο προβλέπει, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι κατά την αύξηση της στάθμης του καναλιού μειώνεται η συγκέντρωση της Ροδαμίνης WT γιατί το νερό το οποίο εισέρχεται από το κανάλι στον υδροφορέα έχει μικρότερες συγκεντρώσεις Ροδαμίνης WT από ότι ο υδροφορέας και προκαλεί τη διάλυσή της σε αυτόν.



**Σχήμα 5.13:** (α) Αποτελέσματα του IRENE για τη μεταβολή της συγκέντρωσης της Ροδαμίνης WT με το χρόνο στο σημείο A για εισαγωγή 75 ml διαλύματος συγκέντρωσης 1 g/l επί 2 λεπτά, (β) πειραματικά αποτελέσματα για τη μεταβολή της συγκέντρωσης της Ροδαμίνης WT με το χρόνο στο σημείο A και (γ) στάθμη υπερχειλιστή

Έπειτα από τα όσα διαπιστώθηκαν από τα παραπάνω αποτελέσματα αποφασίστηκε να κολληθούν τα κομμάτια του αφρού στον πυθμένα της δεξαμενής ώστε να μην επιπλέουν κατά τη διάρκεια των κυματισμών. Επίσης κολλήθηκαν τα κομμάτια του αφρού μεταξύ τους, σε ορισμένα σημεία, ώστε να περιοριστεί η διαφυγή του δείκτη αλλά ταυτόχρονα να μην εμποδίζεται η ροή μεταξύ των κομματιών (Σχήμα 5.14). Τα κομμάτια του αφρού κολλήθηκαν επίσης και στα

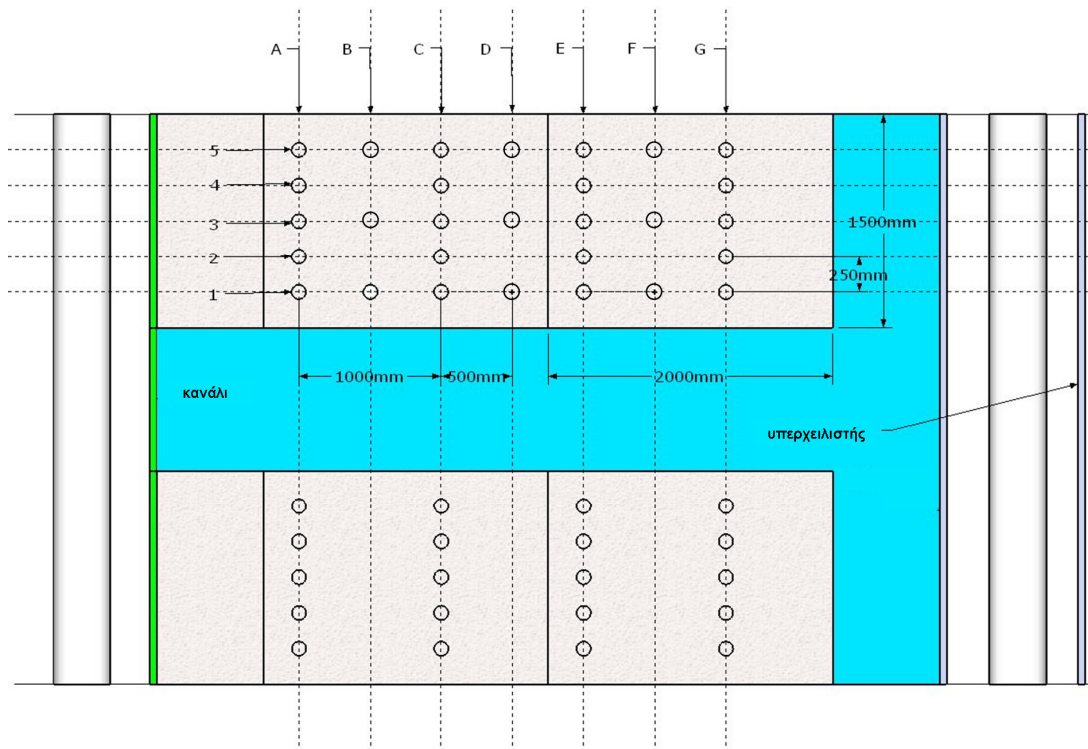
πλευρικά τοιχώματα της δεξαμενής. Τέλος δημιουργήθηκαν περισσότερες οπές ώστε να υπάρχουν περισσότερα σημεία μέτρησης (Σχήμα 5.15).



**Σχήμα 5.14:** Διάγραμμα όπου φαίνεται πώς κολλήθηκαν τα κομμάτια του αφρού στην ένωση

Αφού κολλήθηκαν τα κομμάτια του αφρού στον πυθμένα και στα τοιχώματα της δεξαμενής αλλά και μεταξύ τους, πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις της στάθμης στον υδροφορέα και στο κανάλι και της συγκέντρωσης του συντηρητικού δείκτη στον υδροφορέα, για κυματισμούς διαφόρων περιόδων και πλάτους στο κατάντη όριο. Παρατηρήθηκε μία σχεδόν ταυτόχρονη μεταβολή της στάθμης ανάμεσα στα διάφορα σημεία μέτρησης στον υδροφορέα. Υπήρχε δηλαδή πολύ μικρή διαφορά φάσης ανάμεσα στις ημιτονοειδείς μεταβολές της στάθμης, ιδιαίτερα ανάμεσα στα σημεία μέτρησης τα οποία βρίσκονταν στην ίδια ευθεία (π.χ. A1 και A3). Συνεπώς οι ταχύτητες υπόγειας ροής οι οποίες δημιουργήθηκαν ήταν πολύ μικρές με αποτέλεσμα να υπερισχύει η μοριακή διάχυση της μεταφοράς και της υδροδυναμικής διασποράς του συντηρητικού δείκτη και αυτός στην ουσία να «παγιδεύεται» στον υδροφορέα. Για τον λόγο αυτόν, οι συγκεντρώσεις Ροδαμίνης WT οι οποίες μετρήθηκαν ήταν πολύ μικρές. Η μικρή διαφορά φάσης η οποία παρατηρήθηκε οφείλεται πιθανότατα στην εισροή επιφανειακού νερού ανάμεσα στα κομμάτια του αφρού και μεταξύ των κομματιών του αφρού και των πλευρικών τοιχωμάτων της δεξαμενής. Η υψηλή διαπερατότητα του αφρού επίσης έπαιξε ρόλο.





**Σχήμα 5.15:** Διάγραμμα της πειραματικής διάταξης όπου φαίνονται τα σημεία μέτρησης και ο τρόπος ονομασίας τους

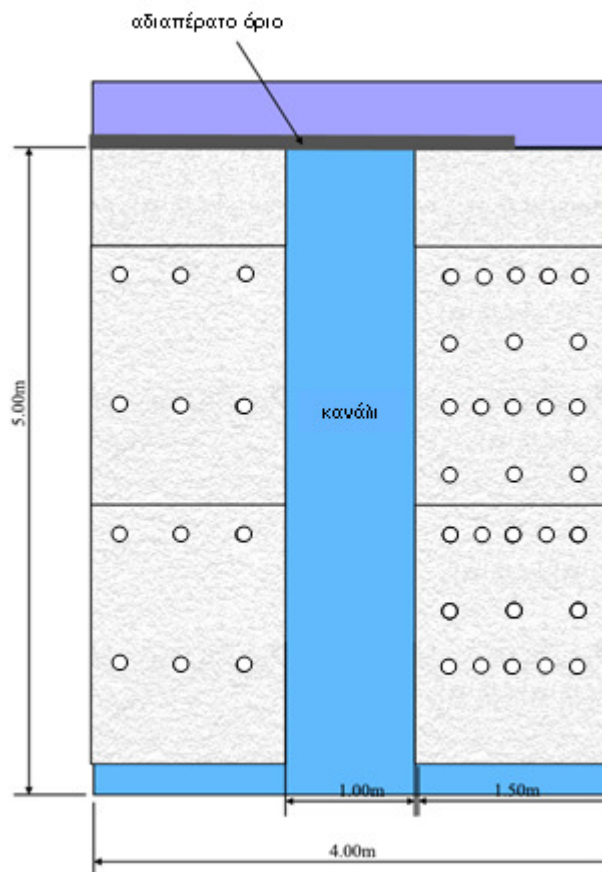
### 5.2.5 Πειραματικές μετρήσεις στη νέα πειραματική διάταξη

Έπειτα από τα όσα διαπιστώθηκαν από τις αρχικές πειραματικές μετρήσεις, κρίθηκε αναγκαίο να τροποποιηθεί η πειραματική διάταξη ώστε να αυξηθεί η υδραυλική κλίση μεταξύ του καναλιού και του υδροφορέα. Δημιουργήθηκε αδιαπέρατο όριο ανάντη τοποθετώντας ένα λεπτό κομμάτι πλαστικού ανάμεσα στη βασική περιοχή της δεξαμενής και το διαπερατό χώρισμα (Σχήμα 5.16). Το αδιαπέρατο όριο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.16, αφήνει ακάλυπτο ένα τμήμα του αφρού το οποίο είναι σε άμεση επαφή με το διαπερατό χώρισμα και το ανάντη reservoir νερού. Χρησιμοποιήθηκε αντλία για την παροχή νερού σε αυτό το reservoir. Η παροχή της αντλίας και η στάθμη του υπερχειλιστή διατηρήθηκαν σταθερά. Με τον τρόπο αυτό δημιουργήθηκε σταθερή διαφορά στάθμης μεταξύ του ανάντη reservoir και του καναλιού, η οποία είχε σαν αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μόνιμη ροή από το τμήμα του υδροφορέα που είναι σε επαφή με το ανάντη reservoir νερού προς το κανάλι.

Μετρήσεις στάθμης. Η στάθμη του υπερχειλιστή διατηρήθηκε στα 70 mm, ενώ η παροχή της αντλίας ρυθμίστηκε κατάλληλα ώστε να επιτευχθούν διάφορες στάθμες στο ανάντη reservoir. Έτσι δημιουργήθηκαν τα ακόλουθα σενάρια ροής:

- ✓ Σενάριο Α: στάθμη υπερχειλιστή στα 70 mm, στάθμη στο ανάντη reservoir στα 150 mm.
- ✓ Σενάριο Β: στάθμη υπερχειλιστή στα 70 mm, στάθμη στο ανάντη reservoir στα 220 mm.
- ✓ Σενάριο Γ: στάθμη υπερχειλιστή στα 70 mm, στάθμη στο ανάντη reservoir στα 300 mm.

Για κάθε σενάριο μετρήθηκαν οι στάθμες στον υδροφορέα και στο κανάλι. Στον Πίνακα 5.5 δίνονται οι μετρήσεις στάθμης για το Σενάριο Β.

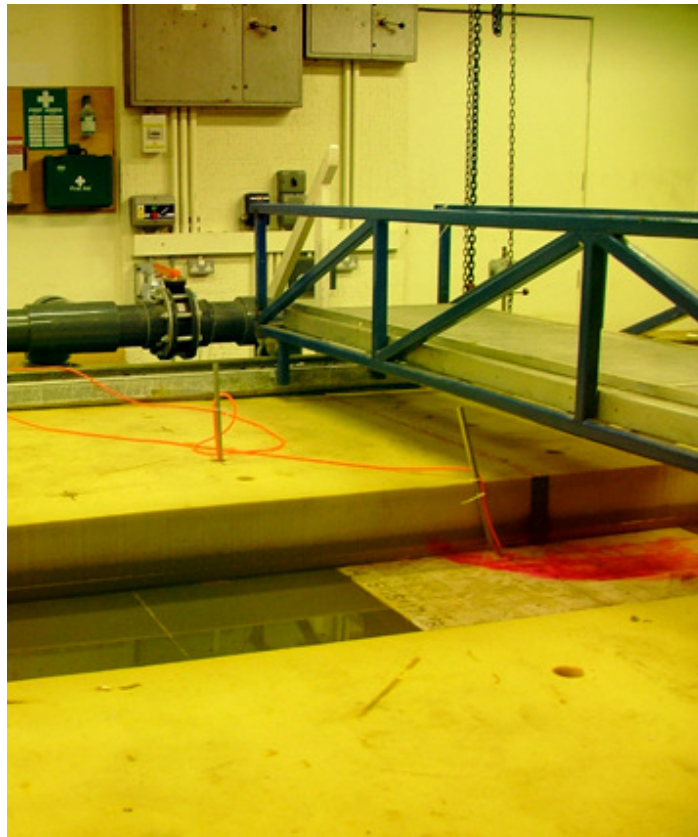


**Σχήμα 5.16:** Νέα πειραματική διάταξη

**Πίνακας 5.5:** Μετρήσεις στάθμης για το Σενάριο Β

Σημείο μέτρησης	Στάθμη (mm)
ανάντη reservoir	220.00
κανάλι στη θέση Α	70.00

A1	77.00
A3	103.70
A4	109.40
A5	108.80
B1	70.30
C1	70.00
C2	71.00
C3	76.00
C4	80.10
C5	82.20
D1	70.00
D3	70.60
D5	79.40
E1	70.00
E3	70.00
E5	73.90
κανάλι στη θέση E	70.00



**Σχήμα 5.17:** Μέτρηση της συγκέντρωσης της Ροδαμίνης WT στη νέα πειραματική διάταξη

Μετρήσεις συγκέντρωσης. Για κάθε σενάριο μετρήθηκαν οι συγκεντρώσεις της Ροδαμίνης WT στον υδροφορέα και στο κανάλι. Εισήχθησαν κάθε φορά 100 ml διαλύματος Ροδαμίνης συγκέντρωσης 1 ppt (parts per thousand) στη θέση A5. Ο χρόνος διάθεσης ήταν 90 sec. Η συγκέντρωση του δείκτη μετρήθηκε στα σημεία C1, C3 και C5 καθώς και στο κανάλι στη θέση εξόδου του δείκτη. Στη φωτογραφία του

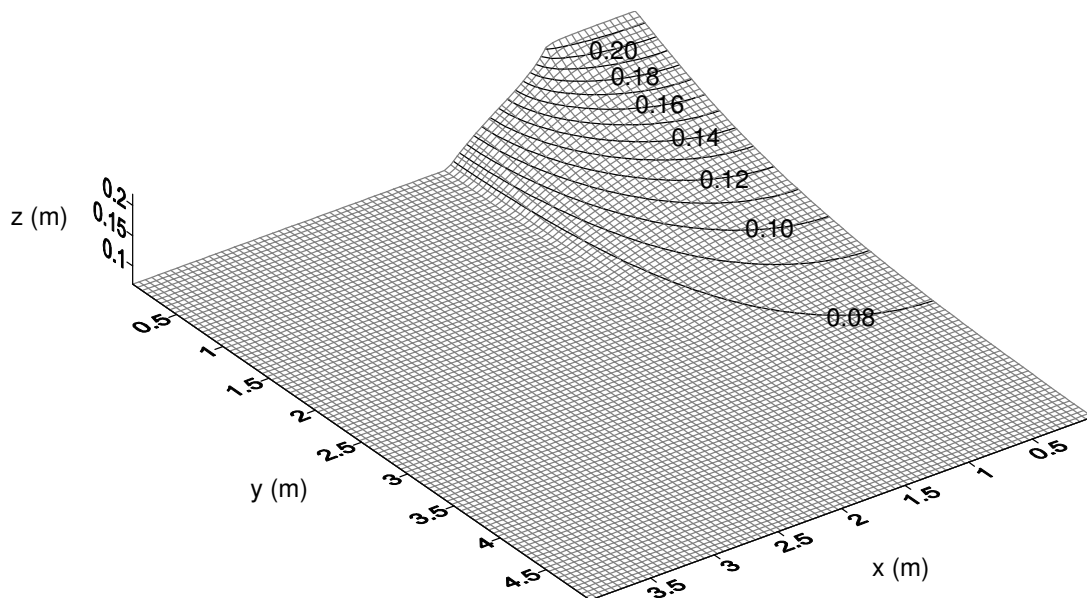
σχήματος 5.17 φαίνεται ο δείκτης καθώς εξέρχεται από τον αφρό και κινείται στο κανάλι.

### 5.3 Ρύθμιση και επιβεβαίωση του αριθμητικού μοντέλου IRENE με τις πειραματικές μετρήσεις της Α΄ Φάσης

Από τις πειραματικές μετρήσεις της Α΄ Φάσης, αυτές του Σεναρίου Β χρησιμοποιήθηκαν για τη ρύθμιση του IRENE, ενώ αυτές των Σεναρίων Α και Γ χρησιμοποιήθηκαν για την επιβεβαίωσή του.

Για την προσομοίωση της πειραματικής διάταξης στο IRENE χρησιμοποιήθηκε υπολογιστικό πλέγμα με διαστάσεις  $\Delta x = 0.05$  m και  $\Delta y = 0.05$  m. Στη διεύθυνση z χρησιμοποιήθηκε ένα στρώμα με πάχος  $\Delta z = 0.3$  m. Καθορίστηκαν επίσης οι ακόλουθες οριακές συνθήκες:

- Στο στερεό αδιαπέρατο τμήμα του ανάντη ορίου ορίστηκε μηδενική ταχύτητα εγκάρσια προς το όριο. Στο ανοικτό τμήμα του ανάντη ορίου καθορίστηκε η στάθμη στο reservoir σαν οριακή συνθήκη.
- Στο ανοικτό κατάντη όριο ορίστηκε η στάθμη του υπερχειλιστή σαν οριακή συνθήκη.



Σχήμα 5.18: Αποτελέσματα του IRENE-HYD για το Σενάριο Β

Η τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας που χρησιμοποιήθηκε ήταν  $K_x = K_y = 0.02$  m/s. Επίσης η τιμή της ειδικής απόδοσης ορίστηκε ίση με  $S_y = 0.5$ . Στο Σχήμα 5.18 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του IRENE–HYD για τη στάθμη επιφανειακών–υπόγειων νερών στην πειραματική διάταξη για το Σενάριο Β. Στον Πίνακα 5.6 συγκρίνονται τα αποτελέσματα του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις.

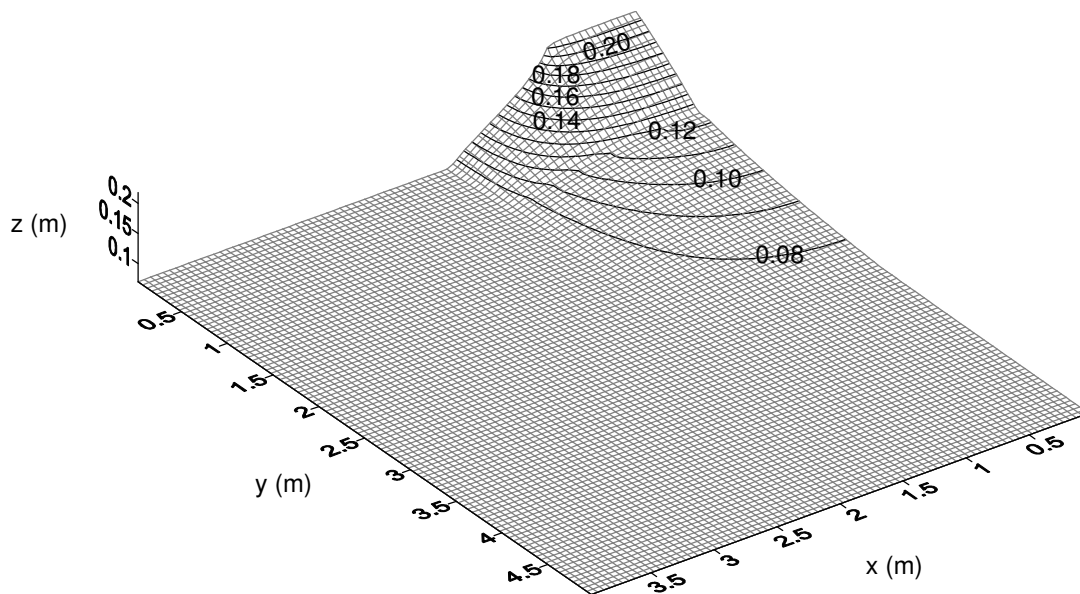
**Πίνακας 5.6:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης για το Σενάριο Β

Σημείο μέτρησης	Στάθμη (mm) πειραματικά αποτελέσματα	Στάθμη (mm) IRENE–HYD	Σχετικό σφάλμα %
A1	77.00	95.50	24.03
A3	103.70	128.70	24.11
A4	109.40	138.60	26.69
A5	108.80	144.30	32.63
B1	70.30	86.10	22.48
C1	70.00	79.90	14.14
C2	71.00	88.20	24.23
C3	76.00	94.80	24.74
C4	80.10	99.50	24.22
C5	82.20	102.30	24.45
D1	70.00	76.00	8.57
D3	70.60	85.45	12.03
D5	79.40	90.46	13.92
E1	70.00	73.56	5.09
E3	70.00	79.36	13.37
E5	73.90	82.53	11.68
<b>MRE</b>			<b>19.91</b>

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 5.6 υπάρχει μεγάλη απόκλιση ανάμεσα στα αποτελέσματα του μοντέλου και τα πειραματικά δεδομένα. Οι πειραματικές μετρήσεις είναι σημαντικά χαμηλότερες από τις προβλέψεις του IRENE–HYD για τις στάθμες στα σημεία μέτρησης. Καθώς πρόκειται για μόνιμη ροή, αλλαγές στις τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας και της ειδικής απόδοσης δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα του μοντέλου.

Το μοντέλο δεν προσομοιώνει ικανοποιητικά τις πειραματικές μετρήσεις πιθανότατα λόγω του τρόπου ένωσης των κομματιών του αφρού, που επιτρέπει την είσοδο επιφανειακού νερού ανάμεσά τους με αποτέλεσμα την πτώση της στάθμης στο πορώδες μέσο. Για να εξεταστεί αν ισχύει αυτή η υπόθεση πραγματοποιήθηκαν διάφορα αριθμητικά πειράματα με το IRENE–HYD αυξάνοντας την τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας για τα υπολογιστικά κελιά στις περιοχές των ενώσεων των κομματιών του αφρού. Η ελάχιστη δυνατή απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων του

μοντέλου και των πειραματικών μετρήσεων παρατηρήθηκε όταν χρησιμοποιήθηκε υδραυλική αγωγιμότητα  $K_x = K_y = 0.6 \text{ m/s}$  για τα υπολογιστικά κελιά στις περιοχές των ενώσεων των κομματιών του αφρού (βλ. Σχήμα 5.19). Η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD και των πειραματικών μετρήσεων σε αυτήν την περίπτωση φαίνεται στον Πίνακα 5.7 και στο Σχήμα 5.20. Χρησιμοποιώντας αυξημένη τιμή υδραυλικής αγωγιμότητας στις ενώσεις μειώθηκε το σφάλμα για το σημείο A5, για παράδειγμα, από 32.6 % (35.5 mm) σε 3.6% (4 mm). Ο μέσος όρος των σφαλμάτων μειώθηκε από 20% σε 4.5% ενώ η μέγιστη τιμή σφάλματος μειώθηκε από 32.6% σε 11.04%.

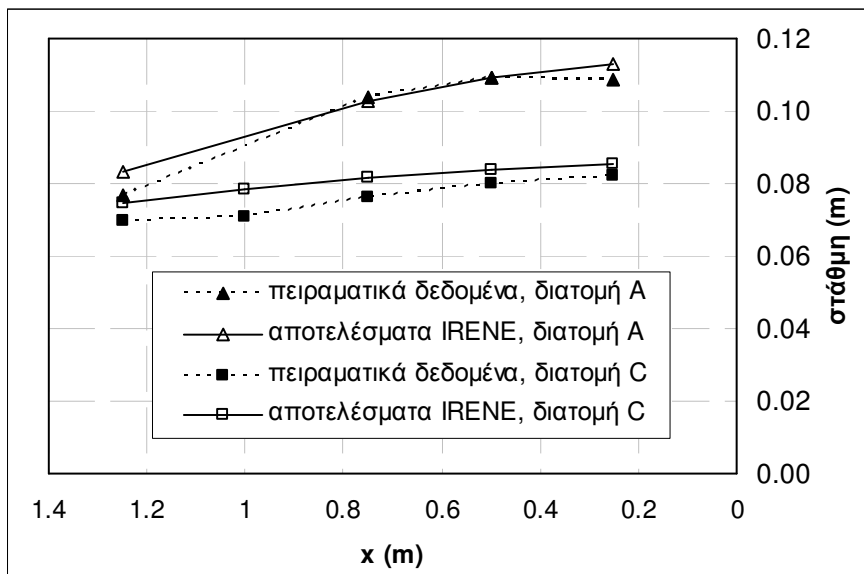


**Σχήμα 5.19:** Αποτελέσματα του IRENE–HYD για το Σενάριο Β θεωρώντας υδραυλική αγωγιμότητα  $K_x = K_y = 0.6 \text{ m/s}$  για τα υπολογιστικά κελιά που βρίσκονται στις περιοχές των ενώσεων μεταξύ των κομματιών του αφρού

**Πίνακας 5.7:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης για το Σενάριο Β, θεωρώντας υδραυλική αγωγιμότητα  $K_x = K_y = 0.6 \text{ m/s}$  για τα υπολογιστικά κελιά που βρίσκονται στις περιοχές των ενώσεων μεταξύ των κομματιών του αφρού

Σημείο μέτρησης	Στάθμη (mm) Πειραματικές μετρήσεις	Στάθμη (mm) IRENE–HYD	Σχετικό σφάλμα %
A1	77.00	83.48	8.42
A3	103.70	102.96	0.72
A4	109.40	109.07	0.30
A5	108.80	112.74	3.62
B1	70.30	78.06	11.04
C1	70.00	74.43	6.33

C2	71.00	78.34	10.34
C3	76.00	81.55	7.30
C4	80.10	83.93	4.78
C5	82.20	85.39	3.88
D1	70.00	71.86	2.66
D3	70.60	74.98	6.20
D5	79.40	76.72	3.37
E1	70.00	70.79	1.13
E3	70.00	72.13	3.04
E5	73.90	72.90	1.35
<b>MRE</b>			<b>4.56</b>



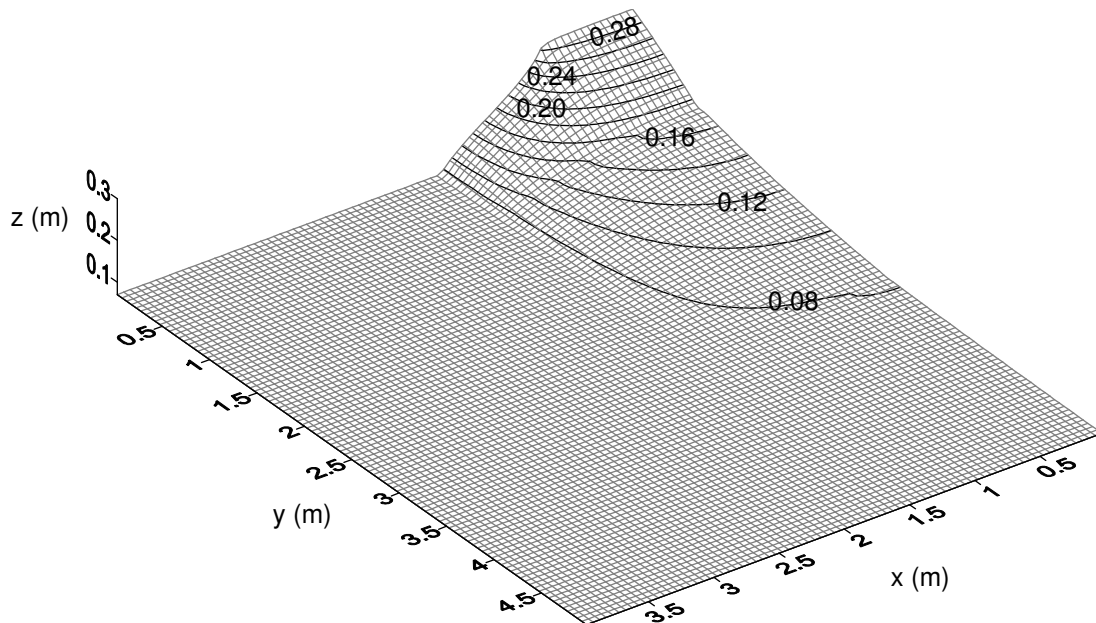
**Σχήμα 5.20:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης στις διατομές A και C (βλ. Σχήμα 5.15) για το Σενάριο B, θεωρώντας υδραυλική αγωγιμότητα  $K_x = K_y = 0.6 \text{ m/s}$  για τα υπολογιστικά κελιά που βρίσκονται στις περιοχές των ενώσεων μεταξύ των κομματιών του αφρού

**Πίνακας 5.8:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης για το Σενάριο A

Σημείο μέτρησης	Στάθμη (mm) Πειραματικές μετρήσεις	Στάθμη (mm) IRENE–HYD	Σχετικό σφάλμα %
A1	72.00	76.55	6.32
A3	98.70	97.83	0.32
A4	103.40	104.0	0.58
A5	102.80	104.4	1.55
B1	70.00	71.36	1.94
C1	70.00	73.64	5.2
C2	70.00	75.9	8.43
C3	71.00	76.33	7.50
C4	73.10	79.94	4.78

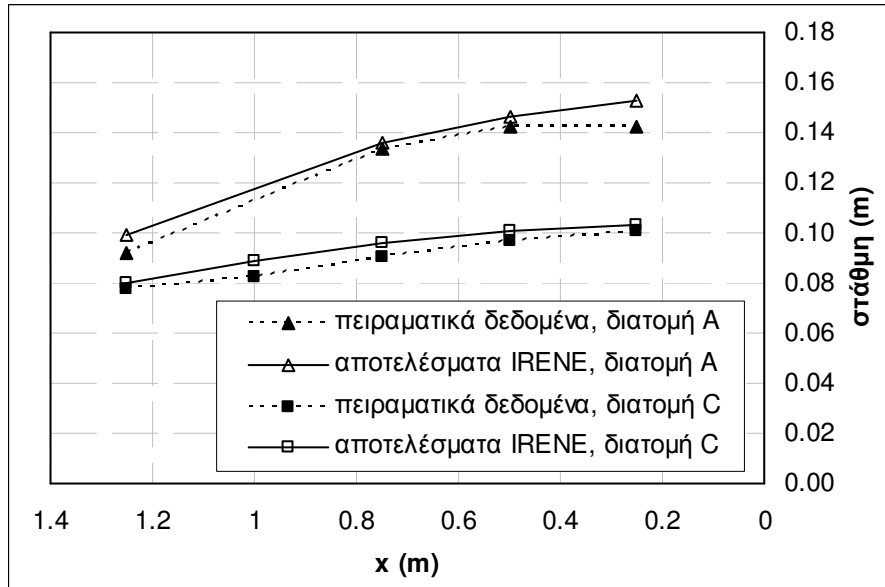
C5	77.10	79.18	2.7
D1	70.00	71.18	1.68
D3	70.20	73.68	5.7
D5	72.30	74.20	3.37
E1	70.00	70.88	0.98
E3	70.00	72.22	2.88
E5	71.90	73.9	1.4
<b>MRE</b>			<b>3.46</b>

Μετά την βαθμονόμηση του IRENE–HYD για το Σενάριο Β, χρησιμοποιήθηκαν οι μετρήσεις στάθμης των Σεναρίων Α και Γ για την επιβεβαίωσή του. Στον Πίνακα 5.8 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του μοντέλου σε σύγκριση με τις πειραματικές μετρήσεις για το Σενάριο Α. Στο Σχήμα 5.21 φαίνονται τα αποτελέσματα του IRENE–HYD για τη στάθμη επιφανειακών και υπόγειων νερών στην πειραματική διάταξη για το Σενάριο Γ. Στο Σχήμα 5.22 και στον Πίνακα 5.9 παρουσιάζεται η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του μοντέλου και των πειραματικών μετρήσεων για το Σενάριο Γ.



Σχήμα 5.21: Αποτελέσματα του IRENE–HYD για το Σενάριο Γ





Σχήμα 5.22: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης στις διατομές A και C για το Σενάριο Γ

Πίνακας 5.9: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης για το Σενάριο Γ

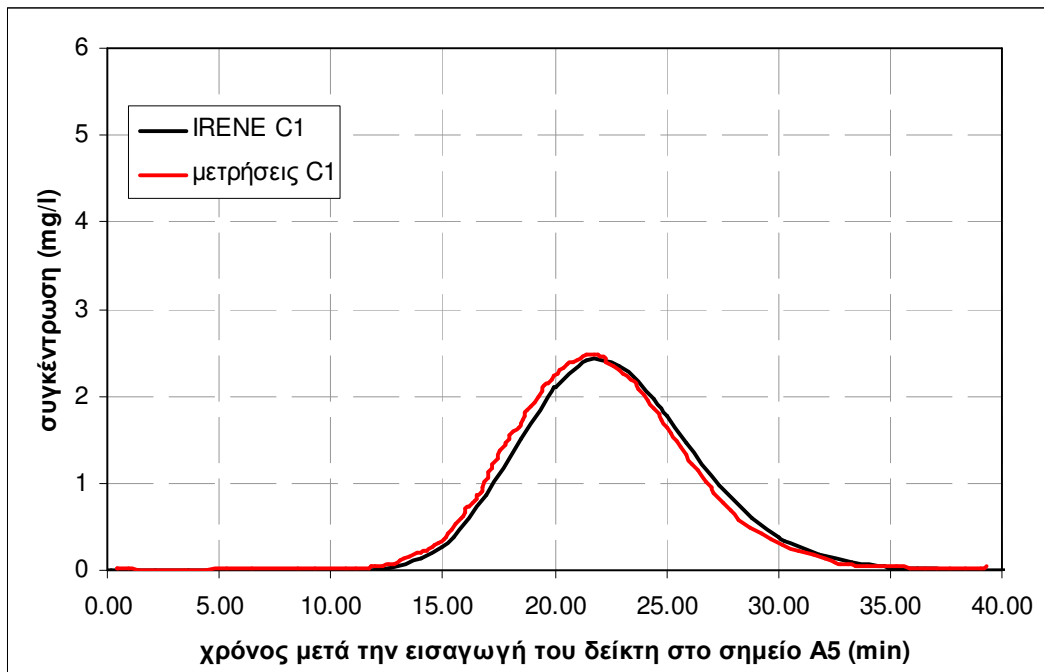
Σημείο μέτρησης	Στάθμη (mm) Πειραματικές μετρήσεις	Στάθμη (mm) IRENE–HYD	Σχετικό σφάλμα %
A1	92.16	98.97	7.39
A3	133.59	135.65	1.54
A4	142.55	146.55	2.81
A5	142.58	152.99	7.30
B1	80.67	87.98	9.06
C1	77.27	80.32	3.95
C2	82.43	88.88	7.82
C3	90.67	95.63	5.47
C4	97.17	100.51	3.44
C5	100.68	103.45	2.75
D1	74.79	75.78	1.32
D3	80.72	82.41	2.09
D5	93.13	96.51	3.62
E1	72.89	74.00	1.51
E3	76.92	78.14	1.59
E5	83.05	86.27	3.87
		<b>MRE</b>	<b>4.10</b>

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.22 και στους Πίνακες 5.8 και 5.9, το IRENE–HYD προβλέπει με ικανοποιητική ακρίβεια τις τιμές της στάθμης στα σημεία μέτρησης για τα Σενάρια A και Γ.

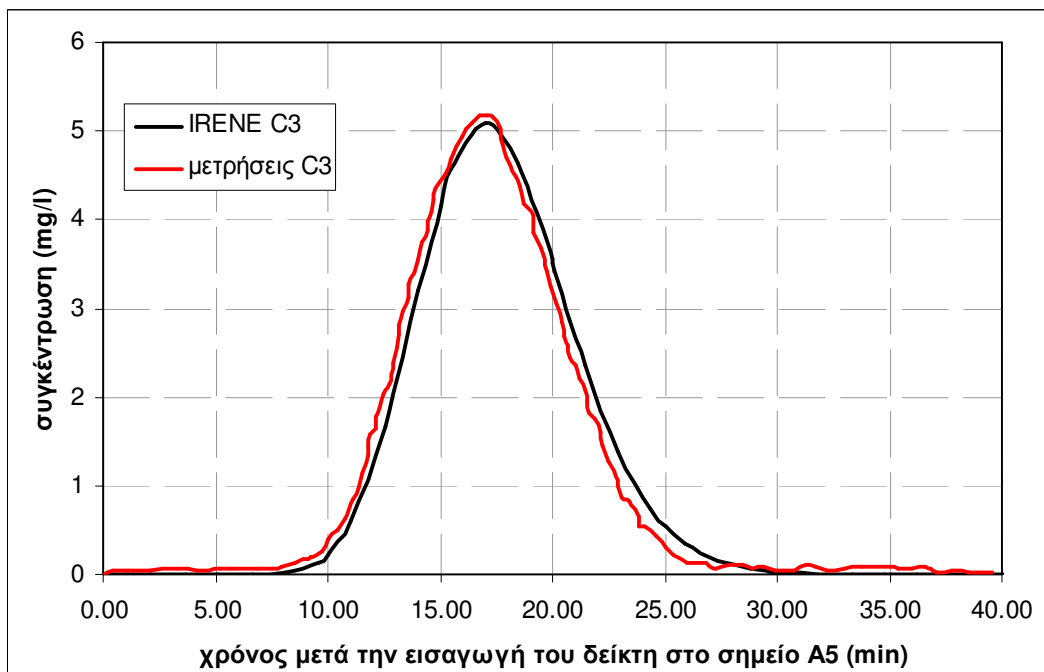
Η παραπάνω διαδικασία ρύθμισης και επιβεβαίωσης που ακολουθήθηκε για το IRENE–HYD, ακολουθήθηκε και για το IRENE–QUAL. Οι μετρήσεις συγκέντρωσης

του Σεναρίου Β χρησιμοποιήθηκαν για τη ρύθμιση του μοντέλου, ενώ οι μετρήσεις συγκέντρωσης των Σεναρίων Α και Γ χρησιμοποιήθηκαν για την επιβεβαίωση του μοντέλου. Κατά τη βαθμονόμηση δοκιμάστηκαν διάφορες τιμές για τους ανοιγμένους συντελεστές διαμήκους και εγκάρσιας διασποράς  $\alpha_L$  και  $\alpha_{TH}$ , αντίστοιχα, ώστε τα αποτελέσματα του μοντέλου για τις συγκεντρώσεις της Ροδαμίνης WT στα σημεία C1, C3 και C5 να έχουν τη μικρότερη δυνατή απόκλιση από τις συγκεντρώσεις που μετρήθηκαν στα σημεία αυτά κατά τη διεξαγωγή των πειραμάτων. Η βέλτιστη σύγκλιση μεταξύ των αριθμητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων επιτεύχθηκε χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες τιμές συντελεστών:  $\alpha_L = 2.8 \text{ m}$ ,  $\alpha_{TH} \approx \alpha_L / 10 = 0.25 \text{ m}$ .

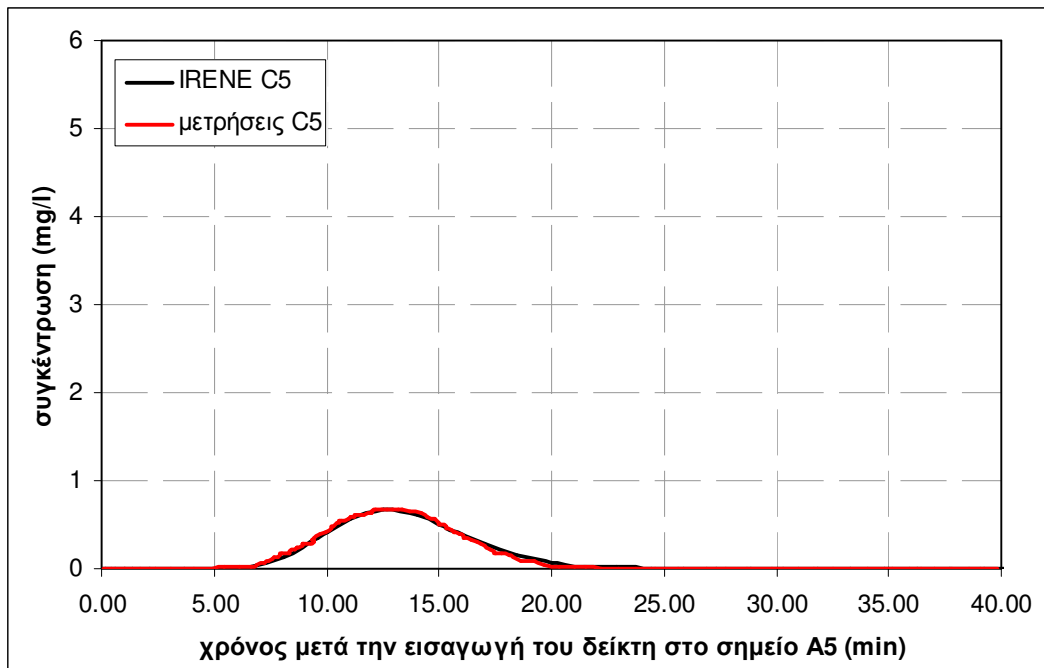
Στα Σχήματα 5.23, 5.24 και 5.25 παρουσιάζεται η σύγκριση μεταξύ αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων για τα σημεία C1, C3 και C5 για το σενάριο Β. Η απόκλιση μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων και των πειραματικών δεδομένων είναι πολύ μικρή για όλα τα σημεία μέτρησης. Στο σχήμα 5.26 συγκρίνονται οι καμπύλες διάχυσης του δείκτη από τα σημεία C1, C3 και C5. Στο σημείο C5 ο δείκτης φθάνει γρηγορότερα αλλά με μειωμένη συγκέντρωση που οφείλεται κυρίως στη διασπορά. Ο δείκτης φθάνει στο σημείο C3 σχεδόν στον ίδιο χρόνο που φθάνει στο σημείο C5. Στο σημείο C3 παρατηρούνται οι υψηλότερες τιμές συγκεντρώσεων μεταξύ των τριών σημείων. Οι τιμές αυτές συγκέντρωσης οφείλονται κυρίως στο μηχανισμό της μεταφοράς. Η έλευση του δείκτη στο σημείο C1 πραγματοποιείται σε επόμενο χρόνο. Στο σημείο C1 παρατηρούνται υψηλότερες συγκεντρώσεις σε σύγκριση με τις συγκεντρώσεις που παρατηρούνται στο σημείο C5, λόγω του φαινομένου της μεταφοράς. Τα παραπάνω γίνονται ευκολότερα κατανοητά στο Σχήμα 5.27, όπου απεικονίζεται η κίνηση του συντηρητικού δείκτη στο υπολογιστικό πεδίο, όπως υπολογίζεται με το IRENE–QUAL. Η επιβεβαίωση του κώδικα με τις μετρήσεις του Σεναρίου Γ παρουσιάζεται στα σχήματα 5.28, 5.29 και 5.30.



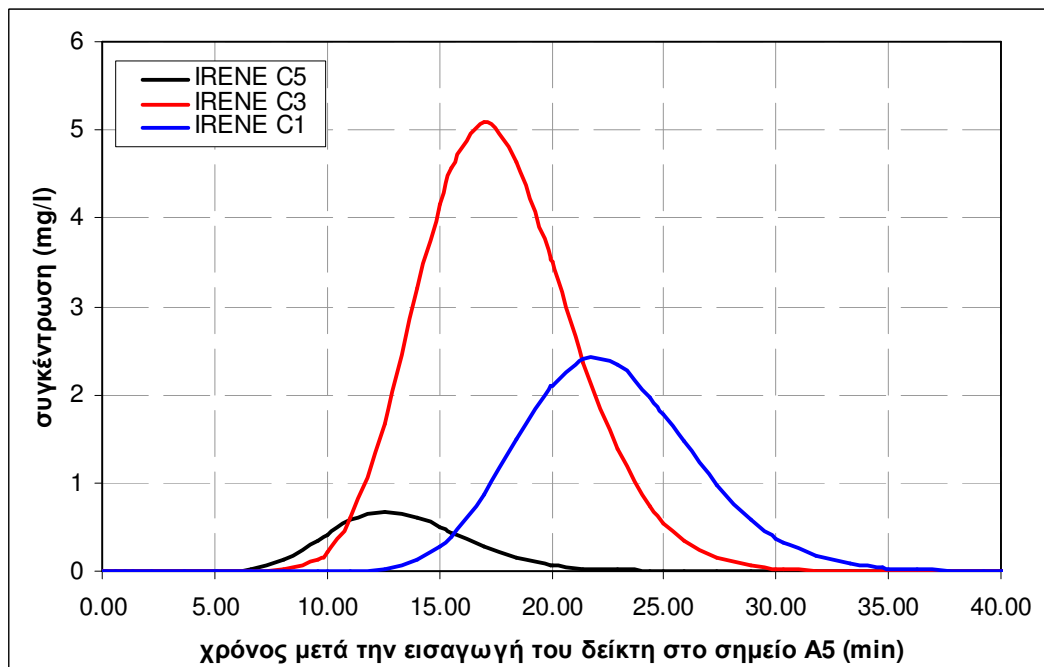
**Σχήμα 5.23:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο C1 για το Σενάριο Β



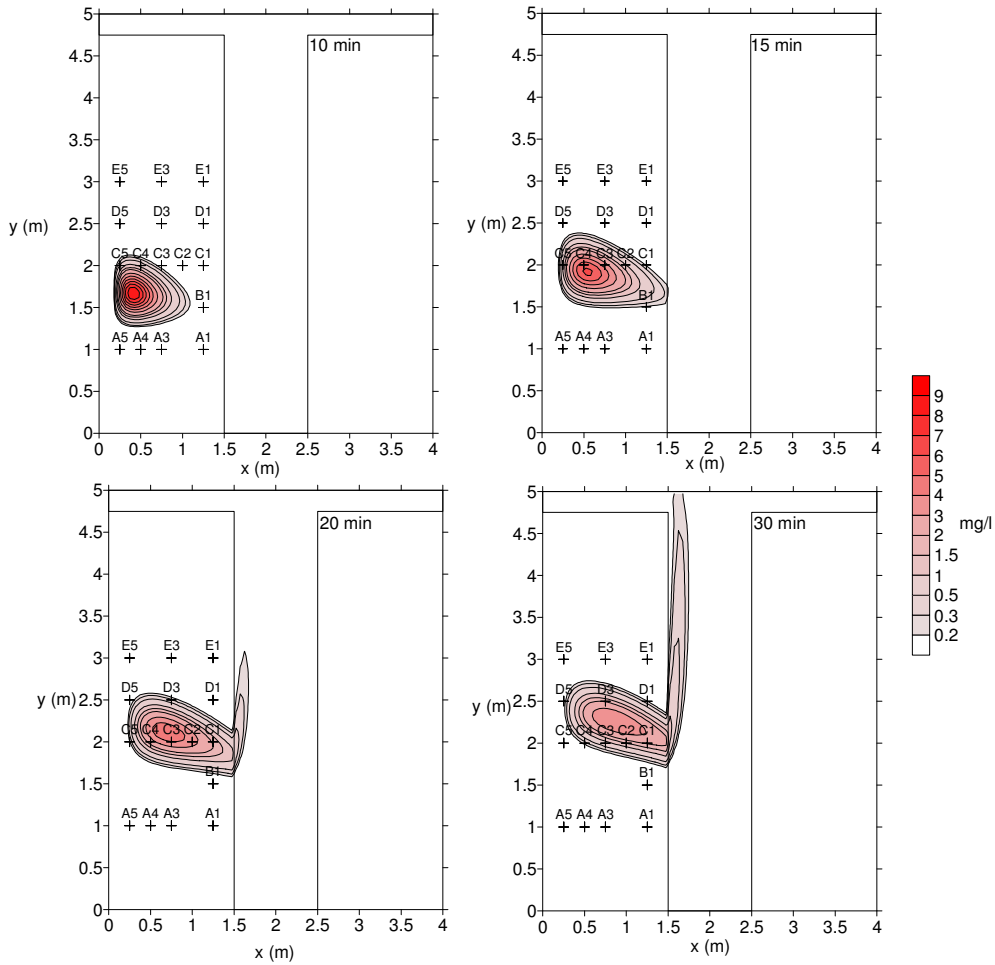
**Σχήμα 5.24:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο C3 για το Σενάριο Β



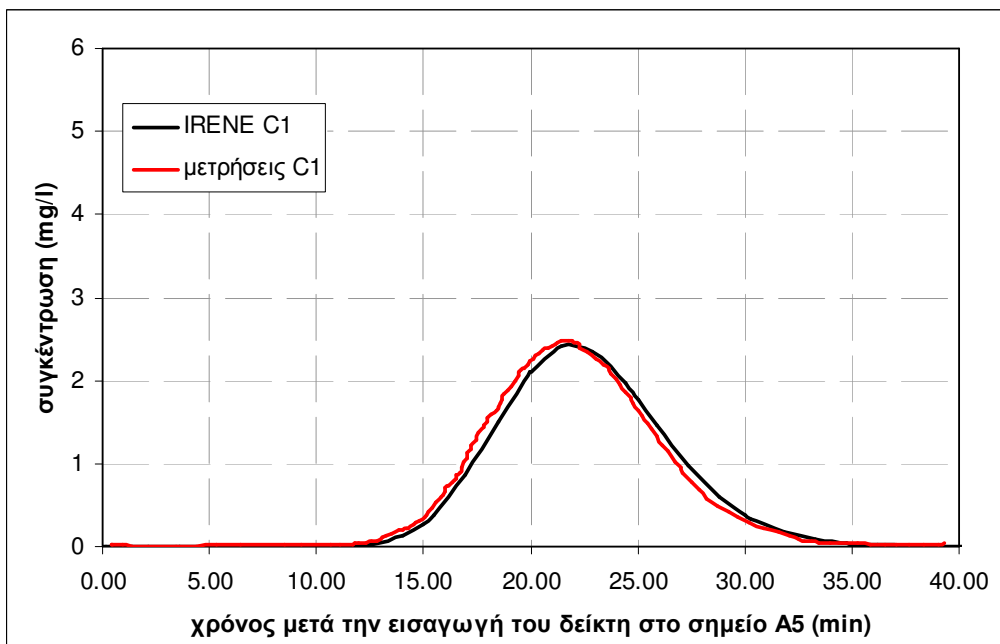
Σχήμα 5.25: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο C5 για το Σενάριο B



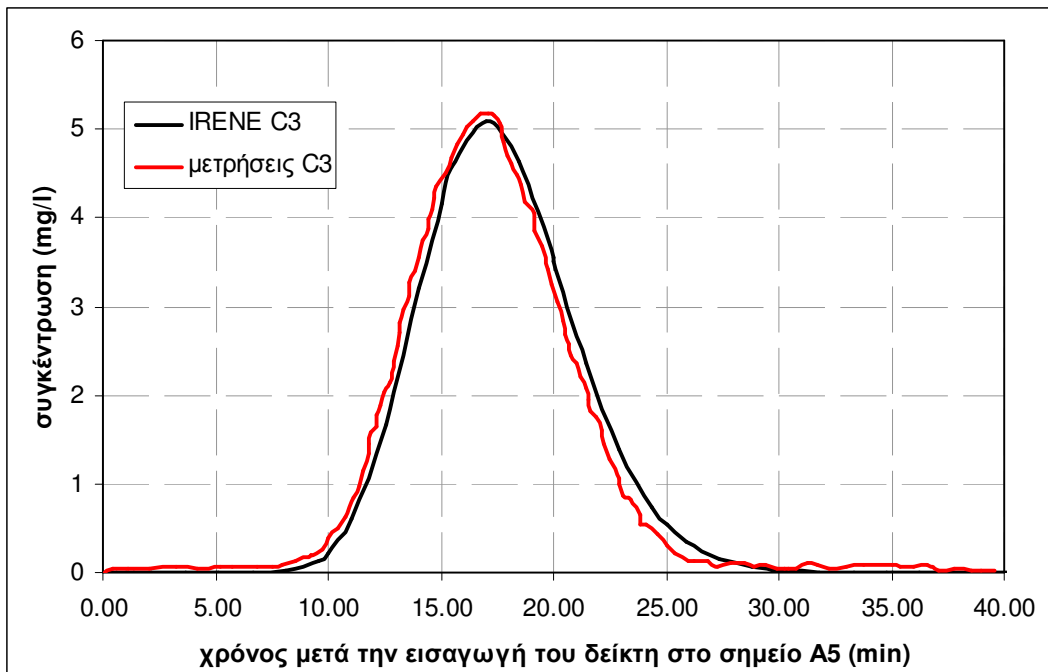
Σχήμα 5.26: Συγκριτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων του μοντέλου στα σημεία C1, C3 και C5 για το Σενάριο B



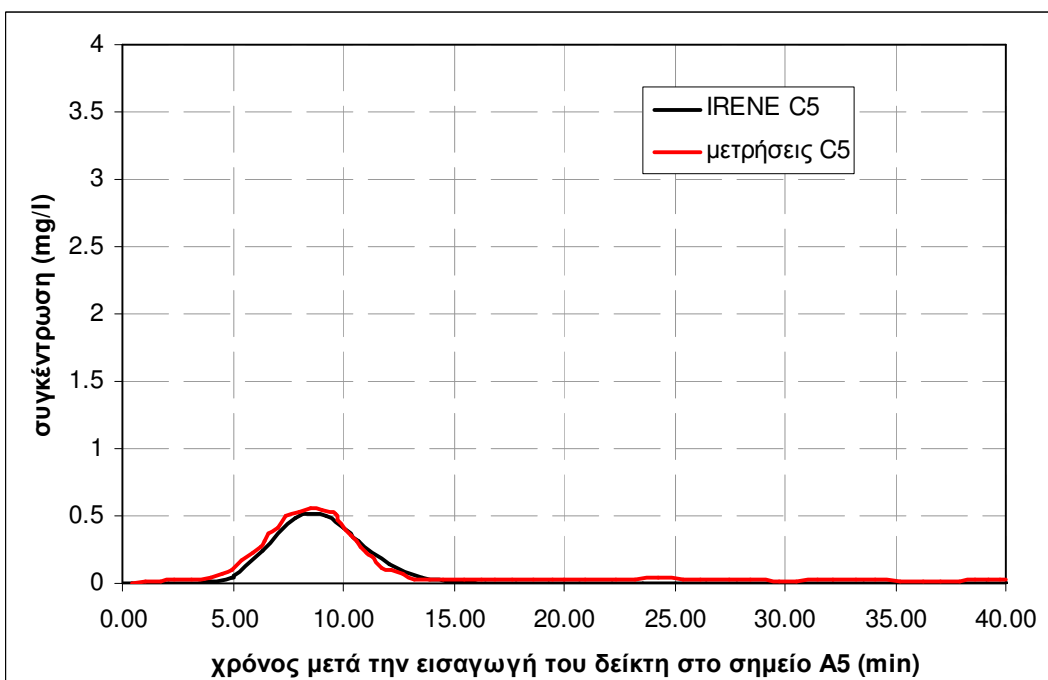
Σχήμα 5.27: Κατανομή στων συγκεντρώσεων στο υπολογιστικό πεδίο για  $t = 10 \text{ min}$ ,  $t = 15 \text{ min}$ ,  $t = 20 \text{ min}$  και  $t = 30 \text{ min}$



Σχήμα 5.28: Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο C1 για το Σενάριο Γ



**Σχήμα 5.29:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο C3 για το Σενάριο Γ



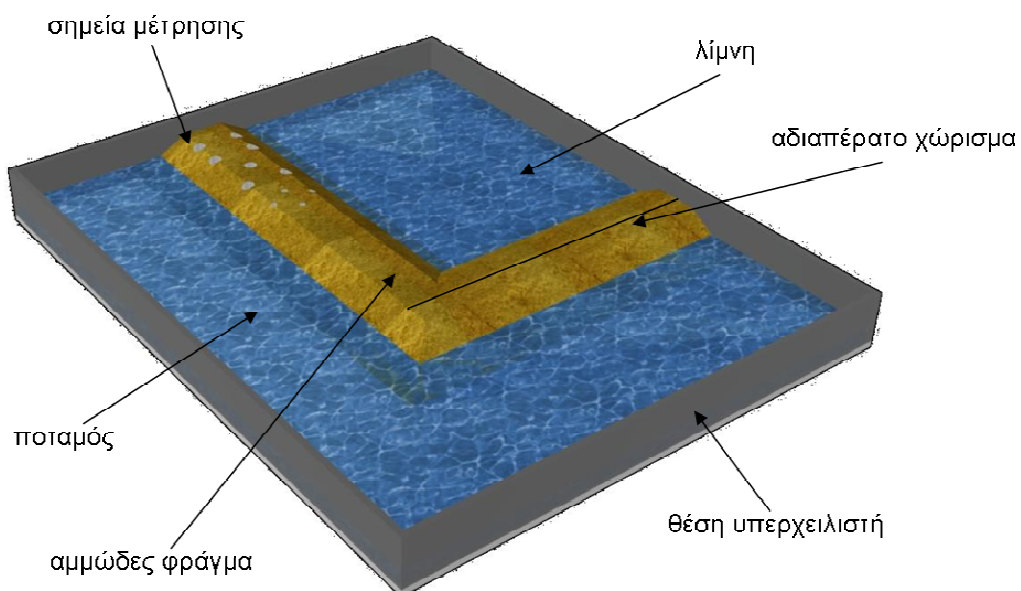
**Σχήμα 5.30:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο C5 για το Σενάριο Γ

Όπως φαίνεται στα σχήματα 5.28–5.30, το μοντέλο προβλέπει με ικανοποιητική ακρίβεια τις συγκεντρώσεις στα σημεία μέτρησης για το Σενάριο Γ.

## 5.4 Πειραματικές μετρήσεις Β΄ Φάσης

Στη Β΄ Φάση των πειραματικών μετρήσεων διερευνήθηκε η αλληλεπίδραση ροής και ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών σε πειραματική διάταξη η οποία κατασκευάστηκε στη δεξαμενή του εργαστηρίου για να προσομοιώσει ιδεατή υδρολογική λεκάνη που περιλαμβάνει υδατόρευμα και λίμνη τα οποία επικοινωνούν μέσω αμμώδους φράγματος (Σχήμα 5.31).

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.31, τοποθετήθηκε ένα αδιαπέρατο κατακόρυφο χώρισμα στο τμήμα του φράγματος που είναι παράλληλο στον υπερχειλιστή, ώστε να υπάρχει αλληλεπίδραση ανάμεσα στη λίμνη και στον ποταμό μόνο μέσω του ενός τμήματος του φράγματος. Επίσης χρησιμοποιήθηκε μία αντλία για την παροχή νερού στο ανάντη reservoir που είναι σε άμεση επαφή με τη λίμνη. Κατ'αυτόν τον τρόπο μπορεί να επιτευχθεί μία σημαντική διαφορά στάθμης ανάμεσα στο υδατόρευμα και τη λίμνη. Στο αμμώδες φράγμα δημιουργήθηκαν σημεία μέτρησης τοποθετώντας μεταλλικούς διάτρητους κυλίνδρους διαμέτρου 5 cm και αφαιρώντας από το εσωτερικό τους την άμμο (βλ. Σχήμα 5.34). Οι διάτρητοι κύλινδροι διαπερνούσαν όλο το πάχος του φράγματος. Το Σχήμα 5.33 δείχνει τις διαστάσεις της πειραματικής διάταξης και το Σχήμα 5.34 την αρίθμηση των σημείων μέτρησης. Τα σημεία μέτρησης απείχαν μεταξύ τους 50 cm στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$ .

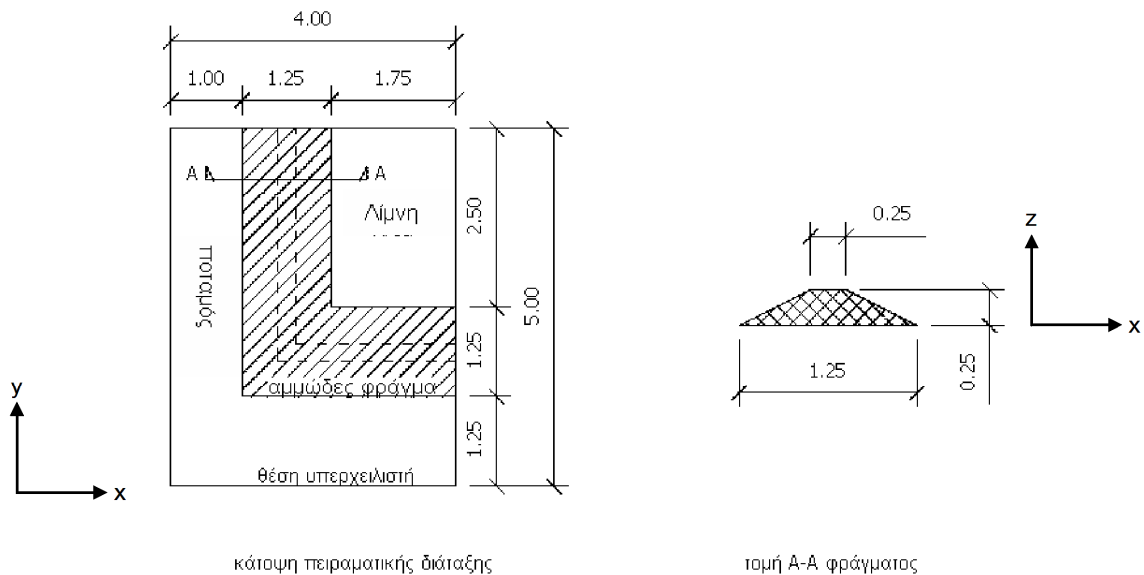


**Σχήμα 5.31:** Πειραματική διάταξη Β΄ Φάσης μετρήσεων

Η υδραυλική αγωγιμότητα της άμμου που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του φράγματος μετρήθηκε στο εργαστήριο χρησιμοποιώντας περατόμετρο σταθερού φορτίου (βλ. Σχήμα 5.35). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.36, η υδραυλική αγωγιμότητα της άμμου υπολογίστηκε ίση με  $K = 0.01$  m/s.

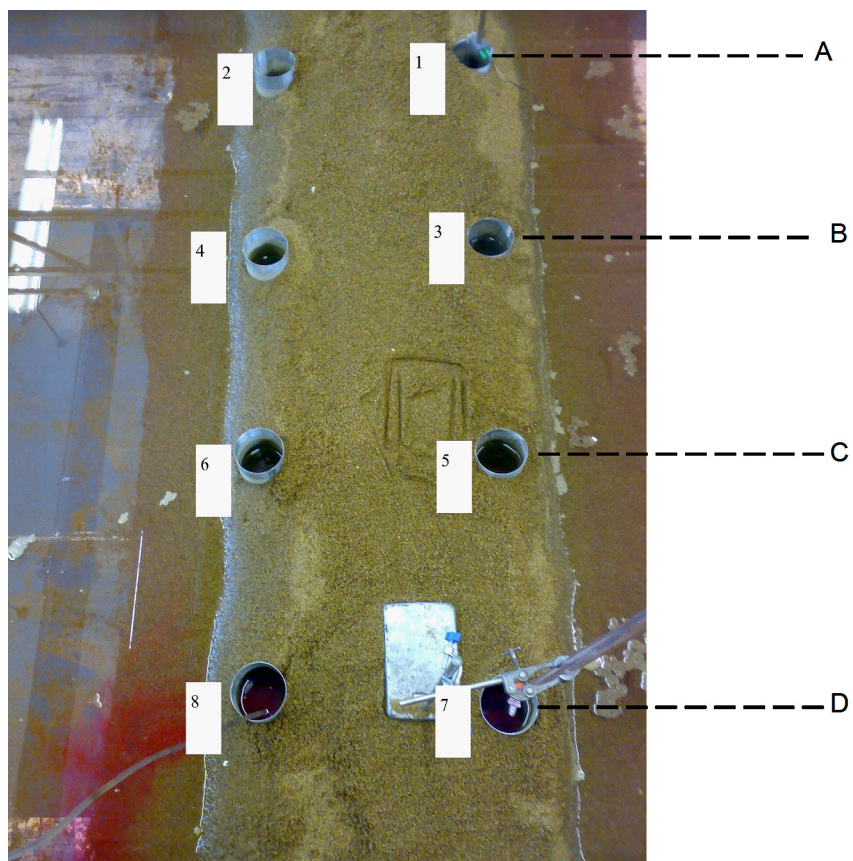


Σχήμα 5.32: Φωτογραφία της πειραματικής διάταξης της Β΄ Φάσης μετρήσεων



Σχήμα 5.33: Διαστάσεις της πειραματικής διάταξης της Β΄ Φάσης μετρήσεων

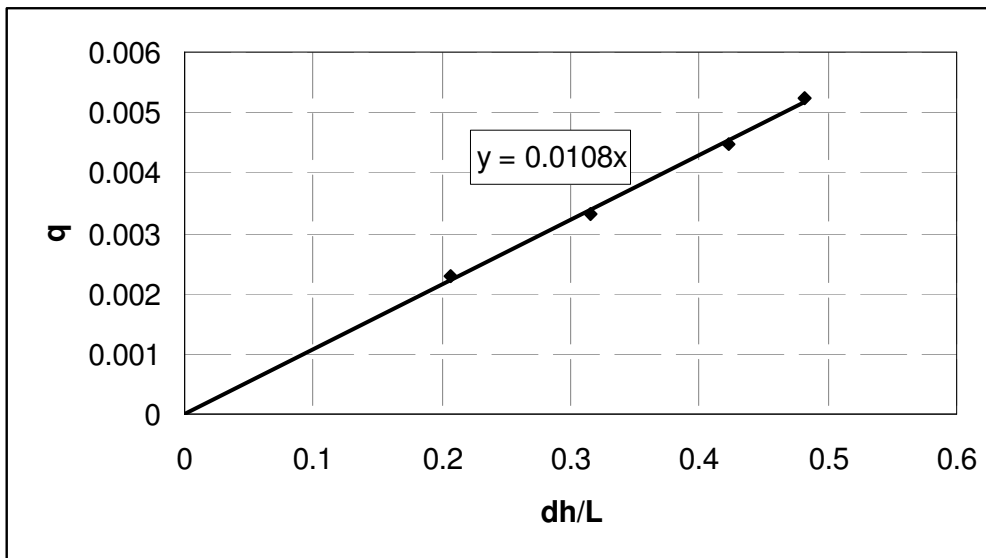




Σχήμα 5.34: Αρίθμηση των σημείων μέτρησης



Σχήμα 5.35: Περατόμετρο σταθερού φορτίου που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της διαπερατότητας της άμμου στο εργαστήριο Hyder Hydraulics



**Σχήμα 5.36:** Εκτίμηση της υδραυλικής αγωγιμότητας της άμμου που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του φράγματος

Στην πειραματική διάταξη του σχήματος 5.31 δημιουργήθηκαν διάφορα σενάρια μόνιμης και μή μόνιμης ροής και μετρήθηκαν οι στάθμες και οι συγκεντρώσεις της Ροδαμίνης WT στο φράγμα και στο υδατόρευμα. Για τα σενάρια μόνιμης ροής η παροχή της αντλίας και η στάθμη του υπερχειλιστή διατηρήθηκαν σταθερά ώστε να επιτευχθεί μία σταθερή διαφορά στάθμης ανάμεσα στη λίμνη και το υδατόρευμα (η στάθμη της λίμνης ήταν σε όλες τις περιπτώσεις υψηλότερη από τη στάθμη του υδατορεύματος). Για τα σενάρια μή μόνιμης ροής δημιουργήθηκαν παλιρροιακοί κυματισμοί στο κατάντη όριο με τη βοήθεια του υπερχειλιστή. Δοκιμάστηκαν διάφορες περίοδοι κυματισμών για να επιτευχθούν διαφορετικές συνθήκες ροής μεταξύ του υδατορεύματος και της λίμνης. Σε κάθε πείραμα ήταν δυνατόν να μετρηθούν ταυτόχρονα οι συγκεντρώσεις του συντηρητικού δείκτη σε δύο σημεία μέτρησης, καθώς ήταν δύο τα διαθέσιμα φασματοφωτόμετρα. Μία σύνοψη των σεναρίων μόνιμης και μή μόνιμης ροής δίνεται παρακάτω:

- Σενάριο 1. Μόνιμη ροή. Στάθμη στη λίμνη: 16 cm. Στάθμη υπερχειλιστή: 11.6 cm. Σημείο διάθεσης δείκτη: 3. Εισαγωγή 100 ml διαλύματος Ροδαμίνης WT συγκέντρωσης 0.5 ppt επί 2 min.
  - Περίπτωση Α: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 και 5 στη θέση  $z = 12.5$  cm.
  - Περίπτωση Β: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 και 6 στη θέση  $z = 12.5$  cm.
  - Περίπτωση Γ: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 στη θέση  $z = 10$  cm και 5 στη θέση  $z = 12.5$  cm.

- Περίπτωση Δ: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 στη θέση  $z = 7.5$  cm και 5 στη θέση  $z = 12.5$  cm.
  - Περίπτωση Ε: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 και 6 στη θέση  $z = 10$  cm.
  - Περίπτωση ΣΤ: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 στη θέση  $z = 12.5$  cm και 8 στη θέση  $z = 12.5$  cm.
  - Περίπτωση Ζ: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 στη θέση  $z = 10$  cm και στο υδατόρευμα στη θέση  $x = 3.025$  m,  $y = 1.075$  m και  $z = 0.1$  m (δηλαδή στη θέση Β, δίπλα στο σημείο 4).
  - Περίπτωση Η: Σημεία μέτρησης δείκτη: 6 στη θέση  $z = 10$  cm και στο υδατόρευμα στη θέση  $x = 3.025$  m,  $y = 1.575$  m και  $z = 0.1$  m (δηλαδή στη θέση C, δίπλα στο σημείο 6).
- Σενάριο 2. Μόνιμη ροή. Στάθμη στη λίμνη: 21.3 cm. Στάθμη υπερχειλιστή: 11.6 cm. Σημείο διάθεσης δείκτη: 3. Εισαγωγή 100 ml διαλύματος Ροδαμίνης WT συγκέντρωσης 0.5 ppt επί 2 min.
    - Περίπτωση Α: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 και 5 στη θέση  $z = 15$  cm.
    - Περίπτωση Β: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 και 6 στη θέση  $z = 15$  cm.
    - Περίπτωση Γ: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 στη θέση  $z = 12.5$  cm και 5 στη θέση  $z = 15$  cm.
    - Περίπτωση Δ: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 στη θέση  $z = 10$  cm και 5 στη θέση  $z = 15$  cm.
    - Περίπτωση Ε: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 και 6 στη θέση  $z = 12.5$  cm.
    - Περίπτωση ΣΤ: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 στη θέση  $z = 12.5$  cm και στο υδατόρευμα στη θέση  $x = 3.025$  m,  $y = 1.075$  m και  $z = 0.125$  m (δηλαδή στη θέση Β, δίπλα στο σημείο 4).
  - Σενάριο 3. Μή μόνιμη ροή. Αρχική στάθμη στη λίμνη: 16 cm. Αρχική στάθμη υπερχειλιστή: 11.5 cm. Πλάτος κύματος: 3 cm. Περίοδος κυματισμού 20 min. Σημείο διάθεσης δείκτη: 3. Εισαγωγή 100 ml διαλύματος Ροδαμίνης WT συγκέντρωσης 0.5 ppt επί 2 min.
    - Περίπτωση Α: Σημεία μέτρησης δείκτη: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 και 5 στη θέση  $z = 10$  cm.
    - Περίπτωση Β: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 και 6 στη θέση  $z = 10$  cm.
    - Περίπτωση Γ: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 στη θέση  $z = 7.5$  cm και 6 στη θέση  $z = 10$  cm.
    - Περίπτωση Δ: Σημεία μέτρησης δείκτη: 4 και 6 στη θέση  $z = 7.5$  cm.

- Σενάριο 4. Όμοιο με το Σενάριο 3 με τη διαφορά ότι η περίοδος του κυματισμού ήταν 30 min.
- Σενάριο 5. Όμοιο με το Σενάριο 4 με τη διαφορά ότι η περίοδος του κυματισμού ήταν 10 min.



**Σχήμα 5.37:** Φωτογραφία πειράματος μέτρησης συγκέντρωσης

Στα παραπάνω σενάρια, τα σημεία μέτρησης επιλέχθηκαν έτσι ώστε να μπορεί να υπολογιστεί η μεταφορά και η διαμήκης διασπορά, η οριζόντια εγκάρσια διασπορά και η κατακόρυφη εγκάρσια διασπορά ρύπου. Σε όλες τις περιπτώσεις των σεναρίων 1–6, ένα σημείο μέτρησης κρατήθηκε σταθερό, π.χ. για όλες τις περιπτώσεις του Σεναρίου 1 μετρήθηκε η συγκέντρωση στο σημείο 4. Κατ' αυτόν τον τρόπο διαπιστώθηκε ότι υπήρχαν μικρές αποκλίσεις μεταξύ των τιμών της συγκέντρωσης του δείκτη που μετρήθηκαν στο σταθερό σημείο σε κάθε περίπτωση διεξαγωγής του πειράματος, οπότε διασφαλίστηκε η επαναληψιμότητα των μετρήσεων. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι κάθε πείραμα, όπως αυτά περιγράφονται από τα σενάρια 1–6, πραγματοποιήθηκε 4 φορές και χρησιμοποιήθηκε ο μέσος όρος των μετρήσεων για τη ρύθμιση και την επιβεβαίωση του IRENE.



Για όλα τα σενάρια μόνιμης και μη μόνιμης ροής, μετρήθηκαν οι στάθμες σε όλα τα σημεία μέτρησης στο αμμώδες φράγμα, καθώς και στο μέσον του υδατορεύματος και της λίμνης στις θέσεις A, B, C και D.



Σχήμα 5.38: Φωτογραφία πειράματος μέτρησης συγκέντρωσης

### 5.5 Ρύθμιση και επιβεβαίωση του αριθμητικού μοντέλου IRENE με τις πειραματικές μετρήσεις της Β΄ Φάσης

Από τις πειραματικές μετρήσεις της Β΄ Φάσης, αυτές του Σεναρίου 1 χρησιμοποιήθηκαν για τη ρύθμιση του μοντέλου IRENE, ενώ αυτές των υπόλοιπων σεναρίων χρησιμοποιήθηκαν για την επιβεβαίωσή του.

Για την προσομοίωση της πειραματικής διάταξης στο IRENE χρησιμοποιήθηκε υπολογιστικό πλέγμα με διαστάσεις  $\Delta x = \Delta y = 5$  cm στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$ . Στη διεύθυνση  $z$  χρησιμοποιήθηκαν 11 στρώματα μεταβλητού πάχους για την ακριβέστερη διακριτοποίηση του αμμώδους φράγματος. Συγκεκριμένα, τα πάχη των στρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν ήταν:  $\Delta z_1 = 1.25$  cm,  $\Delta z_2 - \Delta z_{10} = 2.5$  cm και  $\Delta z_{11} = 1.25$  cm. Καθορίστηκαν επίσης οι ακόλουθες οριακές συνθήκες:

- Στο στερεό αδιαπέρατο τμήμα του ανάντη ορίου ορίστηκε μηδενική ταχύτητα εγκάρσια προς το όριο. Στο ανοικτό τμήμα του ανάντη ορίου καθορίστηκε η στάθμη στο reservoir σαν οριακή συνθήκη.
- Στο ανοικτό κατόντη όριο ορίστηκε η στάθμη του υπερχειλιστή σαν οριακή συνθήκη.

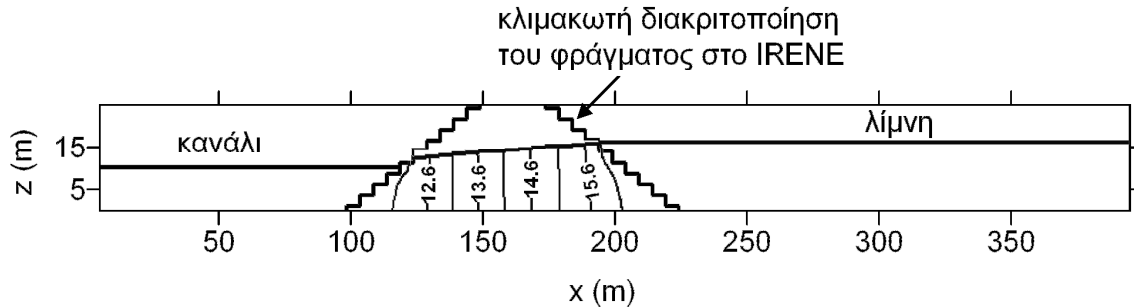
### 5.5.1 Ρύθμιση του IRENE με τις πειραματικές μετρήσεις του σεναρίου 1

Στον Πίνακα 5.10 συγκρίνονται τα αποτελέσματα του IRENE–HYD με τις πειραματικές μετρήσεις της στάθμης επιφανειακών και υπόγειων νερών για το Σενάριο 1. Στο Σχήμα 5.39 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του μοντέλου για τη στάθμη επιφανειακών και υπόγειων νερών και την κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στο φράγμα, για μία κατακόρυφη τομή του υπολογιστικού πεδίου στο επίπεδο  $x-z$  στη θέση  $y = 1.075$  m (θέση Β). Όπως φαίνεται στον Πίνακα 5.10, η σύγκλιση μεταξύ των πειραματικών μετρήσεων και των αριθμητικών αποτελεσμάτων είναι πολύ καλή, με το μέσο σχετικό σφάλμα να υπολογίζεται ίσο με  $MRE = 2.2$  %. Στο Σχήμα 5.39 φαίνεται (α) ότι η κατεύθυνση της ροής είναι από τη λίμνη προς το κανάλι μέσω του αμμώδους φράγματος, (β) ο τρισδιάστατος χαρακτήρας του προβλήματος και (γ) η επιφάνεια διήθησης που σχηματίζεται στο κατόντη όριο του φράγματος. Η επιφάνεια διήθησης στη θέση Β υπολογίζεται ίση με 0.35 cm.

**Πίνακας 5.10:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης για το Σενάριο 1

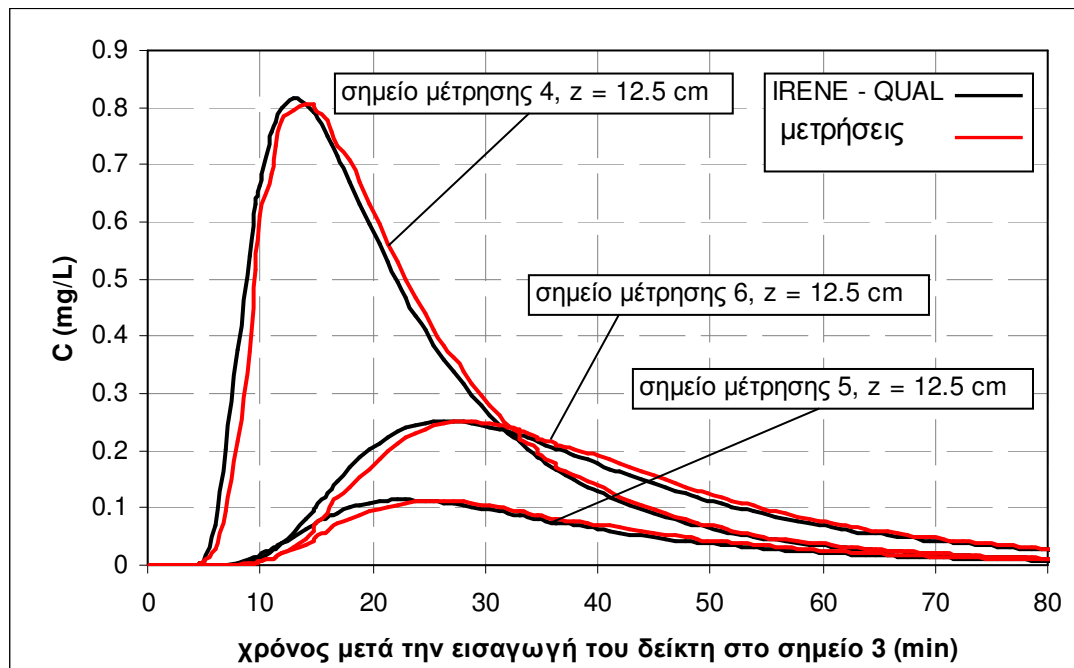
Σημείο μέτρησης	Στάθμη (cm) πειραματικά αποτελέσματα Μέσος όρος $\pm$ τυπική απόκλιση	Στάθμη (cm) IRENE–HYD	Σχετικό σφάλμα %
1	16.1 $\pm$ 0.22	15.8	1.86
2	12.8 $\pm$ 0.25	12.5	2.34
3	16 $\pm$ 0.2	15.6	2.5
4	12.7 $\pm$ 0.3	12.3	3.15
5	15.9 $\pm$ 0.21	15.5	2.52
6	12.6 $\pm$ 0.2	12.2	3.17
7	15.9 $\pm$ 0.15	15.42	3.02
8	12.6 $\pm$ 0.12	12.1	3.4
Κανάλι στη θέση Α	12.07 $\pm$ 0.2	12	0.58
Κανάλι στη θέση Β	12 $\pm$ 0.3	11.95	0.67
Κανάλι στη θέση C	12 $\pm$ 0.2	11.9	0.83
Κανάλι στη θέση D	11.9 $\pm$ 0.2	11.8	0.84
Λίμνη στη θέση Α	16.3 $\pm$ 0.4	15.95	2.15
Λίμνη στη θέση Β	16.2 $\pm$ 0.32	15.8	2.47

Λίμνη στη θέση C	$16.1 \pm 0.21$	15.72	2.36
Λίμνη στη θέση D	$16.1 \pm 0.1$	15.65	2.8
<b>MRE</b>			<b>2.22</b>



**Σχήμα 5.39:** Αποτελέσματα του IRENE–HYD για τη στάθμη επιφανειακών και υπόγειων νερών και την κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στο φράγμα για το Σενάριο 1. Τα αποτελέσματα απεικονίζονται στο κατακόρυφο επίπεδο  $x$ – $z$  στη θέση  $y = 1.075$  m.

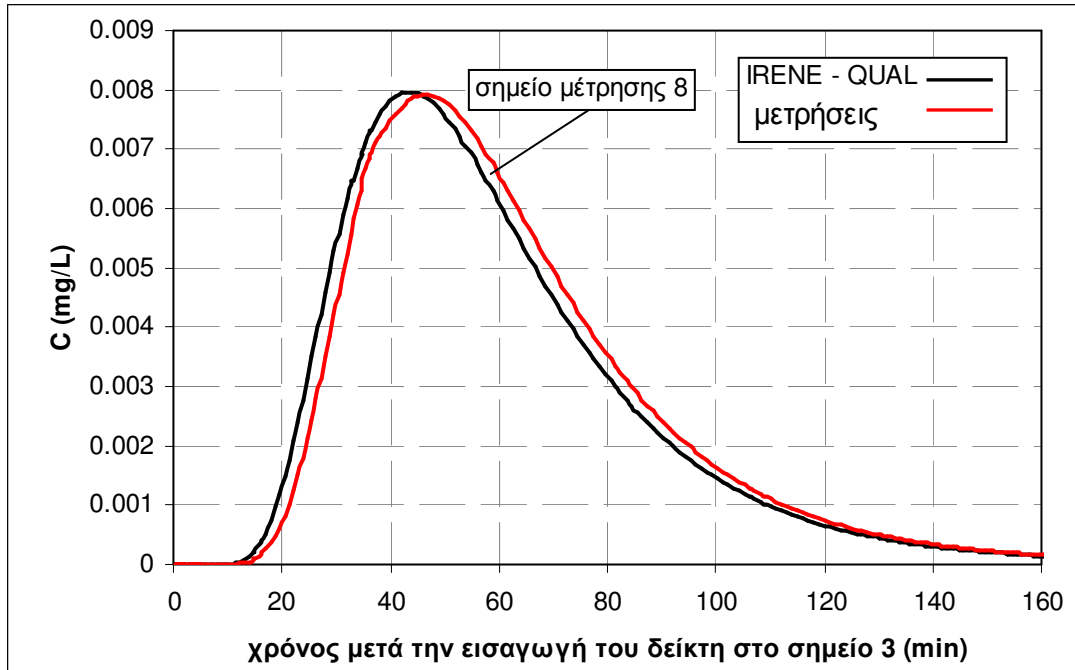
Οι μετρήσεις συγκέντρωσης του Σεναρίου 1 χρησιμοποιήθηκαν για τη ρύθμιση του IRENE–QUAL. Χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις συγκέντρωσης των περιπτώσεων A και B ρυθμίστηκαν οι τιμές των ανοιγμένων συντελεστών διαμήκους και οριζόντιας εγκάρσιας διασποράς,  $\alpha_L$  και  $\alpha_{TH}$ , αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, κατά τη ρύθμιση του IRENE–QUAL δοκιμάστηκαν διάφορες τιμές για το συντελεστή  $\alpha_L$ , ώστε τα αποτελέσματα του μοντέλου για τις συγκεντρώσεις της Ροδαμίνης WT στο σημείο μέτρησης 4 στη θέση  $z = 12.5$  cm (στρώμα 6) να έχουν τη μικρότερη δυνατή απόκλιση από τις συγκεντρώσεις που μετρήθηκαν στο σημείο αυτό κατά τη διεξαγωγή των πειραμάτων. Αντίστοιχα, δοκιμάστηκαν διάφορες τιμές για το συντελεστή  $\alpha_{TH}$ , ώστε τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις συγκεντρώσεις της Ροδαμίνης WT στα σημεία μέτρησης 5 και 6, στη θέση  $z = 12.5$  cm, να έχουν τη μικρότερη δυνατή απόκλιση από τις πειραματικές μετρήσεις. Ο συνδυασμός των τιμών των  $\alpha_L$  και  $\alpha_{TH}$  που είχε σαν αποτέλεσμα τις μικρότερες αποκλίσεις μεταξύ αριθμητικών αποτελεσμάτων και πειραματικών δεδομένων ήταν:  $\alpha_L = 10$  m και  $\alpha_{TH} = 5$  m. Μετά τον προσδιορισμό των  $\alpha_L$  και  $\alpha_{TH}$ , η σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL και των πειραματικών μετρήσεων βελτιώθηκε θεωρώντας ότι ο δείκτης προσροφάται από την άμμο και ότι η προσρόφηση περιγράφεται από την ισόθερμη του Freundlich (βλ. Flury and Wai, 2003). Η βέλτιστη σύγκλιση επιτεύχθηκε χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες τιμές συντελεστών:  $f = 0.8$  και  $K_f = 0.003$  (g/L)<sup>0.6</sup>.



**Σχήμα 5.40:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στα σημεία 4, 5 και 6, στη θέση  $z = 12.5$  cm (στρώμα 6), για το Σενάριο 1

Στο Σχήμα 5.40 παρουσιάζεται η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL και των πειραματικών μετρήσεων για τα σημεία 4, 5 και 6, στη θέση  $z = 12.5$  cm, για το Σενάριο 1. Η απόκλιση μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων και των πειραματικών μετρήσεων είναι πολύ μικρή και για τα τρία σημεία μέτρησης. Οι συγκεντρώσεις στο σημείο 4 οφείλονται στο μηχανισμό της μεταφοράς και της διαμήκου διασποράς. Η καμπύλη διέλευσης του δείκτη από το σημείο 5 είναι μετατοπισμένη χρονικά σε σχέση με την καμπύλη διέλευσης από το σημείο 4. Οι τιμές των συγκεντρώσεων που υπολογίζονται για το σημείο 5 είναι σημαντικά χαμηλότερες σε σχέση με τις τιμές των συγκεντρώσεων στο σημείο 4 και οφείλονται στην εγκάρσια διασπορά. Η καμπύλη διέλευσης του δείκτη από το σημείο 6 είναι ελαφρώς μετατοπισμένη χρονικά σε σχέση με την καμπύλη διέλευσης από το σημείο 5, καθώς ο βασικός μηχανισμός κίνησης του δείκτη προς το σημείο 6 είναι η εγκάρσια διασπορά από το σημείο 4, ενώ ο βασικός μηχανισμός κίνησης του δείκτη προς το σημείο 5 είναι η εγκάρσια διασπορά από το σημείο 3. Το σημείο 3 είναι το σημείο διάθεσης, οπότε η έλευση του δείκτη στο σημείο 5 πραγματοποιείται ελαφρώς νωρίτερα χρονικά σε σχέση με την έλευση του δείκτη στο σημείο 6. Ταυτόχρονα, οι συγκεντρώσεις του δείκτη στο σημείο 6 είναι σημαντικά υψηλότερες σε σύγκριση με τις συγκεντρώσεις του δείκτη που υπολογίζονται για το σημείο 5.

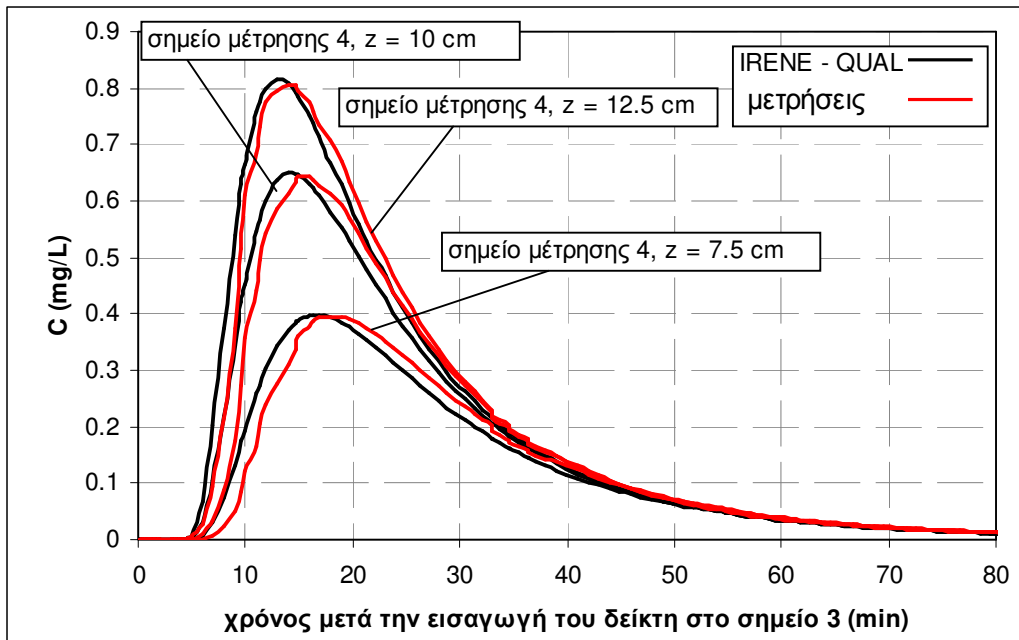




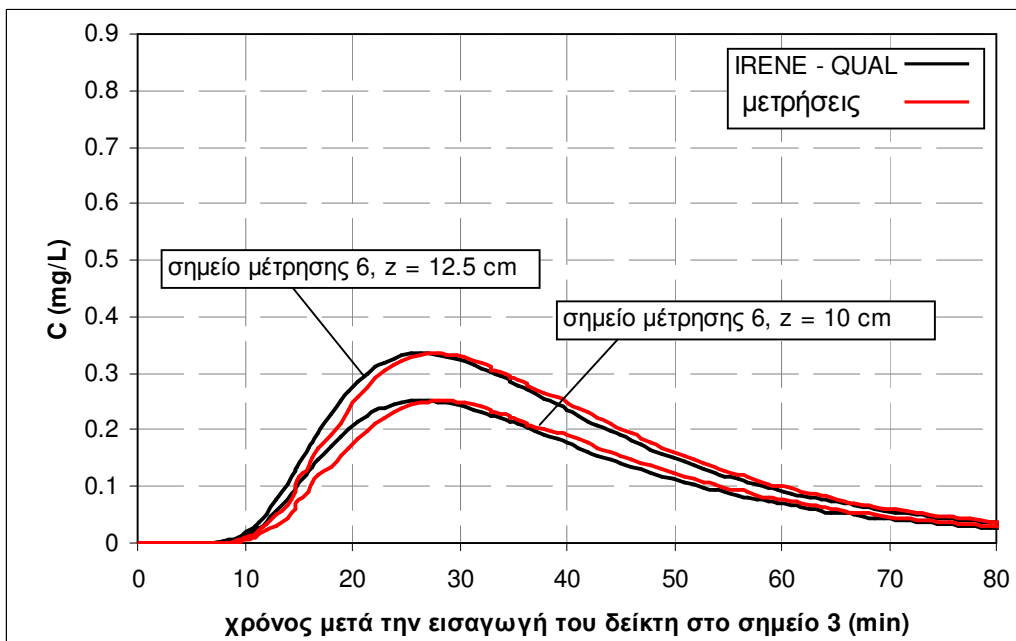
**Σχήμα 5.41:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο 8, στη θέση  $z = 12.5$  cm (στρώμα 6), για την περίπτωση ΣΤ του σεναρίου 1

Στο Σχήμα 5.41 συγκρίνονται τα αποτελέσματα του IRENE–QUAL με τα πειραματικά αποτελέσματα για το σημείο μέτρησης 8, στη θέση  $z = 12.5$  cm (στρώμα 6), για το Σενάριο 1. Οι συγκεντρώσεις του δείκτη που φτάνει στο σημείο 8 λόγω εγκάρσιας διασποράς είναι κατά πολύ μικρότερες σε σύγκριση με τις συγκεντρώσεις στα σημεία 4, 5 και 6 και παρατηρείται επίσης μεγαλύτερη χρονική υστέρηση.

Οι περιπτώσεις Γ και Δ του σεναρίου 1 σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να ρυθμιστεί η τιμή του ανοιγμένου συντελεστή κατακόρυφης εγκάρσιας διασποράς,  $\alpha_{TV}$ . Πρέπει βεβαίως να σημειωθεί ότι για τα αριθμητικά αποτελέσματα των σχημάτων 5.40 και 5.41 χρησιμοποιήθηκε, έπειτα από κάποιες δοκιμές, η ακόλουθη τιμή για τον ανοιγμένο συντελεστή κατακόρυφης εγκάρσιας διασποράς:  $\alpha_{TV} = 0.5$  m. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις των περιπτώσεων Γ και Δ του σεναρίου 1, ρυθμίστηκε περαιτέρω η τιμή του συντελεστή  $\alpha_{TV}$ . Διεξάγωντας αρκετά αριθμητικά πειράματα, διαπιστώθηκε ότι η τιμή του ανοιγμένου συντελεστή κατακόρυφης εγκάρσιας διασποράς που οδηγεί στην καλύτερη δυνατή σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL και των πειραματικών μετρήσεων για τις περιπτώσεις Γ και Δ του σεναρίου 1, είναι  $\alpha_{TV} = 0.42$  m.



**Σχήμα 5.42:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο 4 στις θέσεις  $z = 12.5$  cm (στρώμα 6),  $z = 10$  cm (στρώμα 7) και  $z = 7.5$  cm (στρώμα 8) για το Σενάριο 1



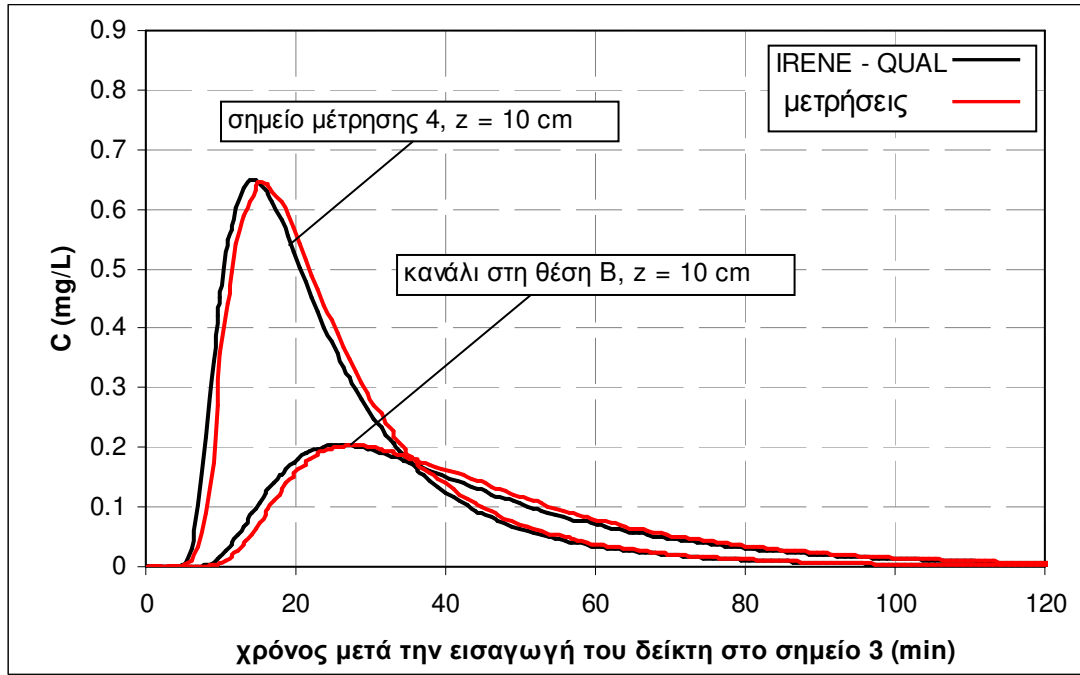
**Σχήμα 5.43:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο 6 στις θέσεις  $z = 12.5$  cm (στρώμα 6) και  $z = 10$  cm (στρώμα 7) για το Σενάριο 1

Στα σχήματα 5.42 και 5.43 παρουσιάζεται η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του μοντέλου και των πειραματικών αποτελεσμάτων για τις συγκεντρώσεις του δείκτη στο σημείο μέτρησης 4 στις θέσεις  $z = 10$  cm (στρώμα 7)

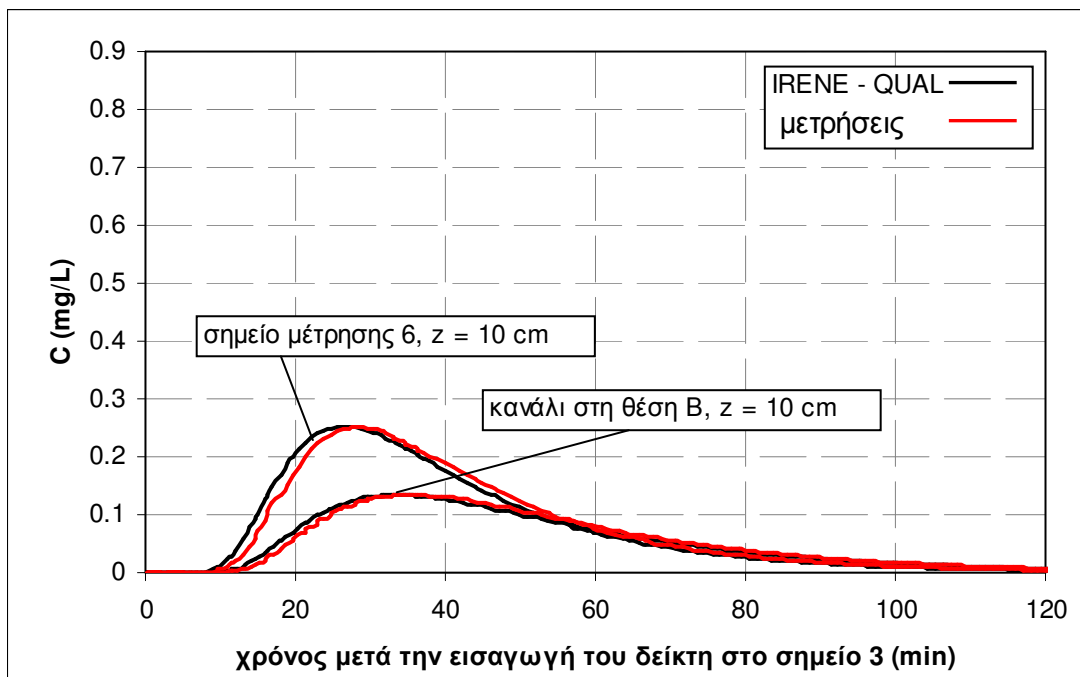
και  $z = 7.5$  cm (στρώμα 8) και στο σημείο μέτρησης 6 στη θέση  $z = 10$  cm. Η συμφωνία μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων και των πειραματικών μετρήσεων είναι πολύ ικανοποιητική. Όπως ήταν αναμενόμενο, οι τιμές των συγκεντρώσεων του δείκτη στις θέσεις  $z = 10$  cm και  $z = 7.5$  cm, είναι χαμηλότερες σε σύγκριση με τις συγκεντρώσεις που υπολογίζονται στη θέση  $z = 12.5$  cm.

Οι περιπτώσεις Z και H του Σεναρίου 1 σχεδιάστηκαν με στόχο τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL για τις τιμές των συγκεντρώσεων του δείκτη στο κανάλι. Οι συγκεντρώσεις του συντηρητικού δείκτη στο κανάλι στις θέσεις  $x = 3.025$  m,  $y = 1.075$  m,  $z = 0.1$  m (θέση B, δίπλα στο σημείο 4) και  $x = 3.025$  m,  $y = 1.575$  m,  $z = 0.1$  m (θέση C, δίπλα στο σημείο 6) χρησιμοποιήθηκαν για τη ρύθμιση των τιμών των συντελεστών τυρβώδους διάχυσης  $D_{tx}$ ,  $D_{ty}$  και  $D_{tz}$ , ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι αποκλίσεις μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων και των πειραματικών μετρήσεων. Η θέση  $z = 0.1$  m αποτελεί τη θέση εξόδου του δείκτη από το πορώδες φράγμα προς το κανάλι. Η τιμή του συντελεστή  $D_{tx}$  χρησιμοποιείται για το συνδυασμό των υπό–μοντέλων ποιότητας επιφανειακών και υπόγειων νερών του IRENE–QUAL στην κοινή διεπιφάνεια επιφανειακών–υπόγειων υδάτων (βλ. παράγραφο 4.3.4) και καθορίζει τη διασπορά του δείκτη μεταξύ του φράγματος και του καναλιού. Η τιμή του συντελεστή  $D_{ty}$  μπορεί να εκτιμηθεί από τη μορφή της καμπύλης διέλευσης του δείκτη από τα σημεία μέτρησης στο κανάλι.

Στα σχήματα 5.44 και 5.45 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του IRENE–QUAL και οι τιμές των πειραματικών μετρήσεων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο κανάλι στις θέσεις B και C σε ύψος  $z = 0.1$  m. Οι τιμές των συντελεστών τυρβώδους διάχυσης που χρησιμοποιήθηκαν, έπειτα από πολλές δοκιμές, στο IRENE–QUAL ήταν οι ακόλουθες:  $D_{tx} = 0.8$  m<sup>2</sup>/s,  $D_{ty} = 2.0$  m<sup>2</sup>/s και  $D_{tz} = 0.5$  m<sup>2</sup>/s. Όπως φαίνεται στα σχήματα 5.44 και 5.45 υπάρχει μία χρονική υστέρηση στην εμφάνιση του δείκτη στο κανάλι και οι συγκεντρώσεις που υπολογίζονται πειραματικά και αριθμητικά είναι χαμηλότερες σε σχέση με τις συγκεντρώσεις του δείκτη στο φράγμα, λόγω της διάλυσης του δείκτη στο κανάλι και της μεταφοράς του κατάντη.



**Σχήμα 5.44:** Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE-QUAL και των πειραματικών μετρήσεων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο κανάλι, στη θέση B σε ύψος  $z = 10$  cm (στρώμα 7)



**Σχήμα 5.45:** Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE-QUAL και των πειραματικών μετρήσεων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο κανάλι, στη θέση C σε ύψος  $z = 10$  cm (στρώμα 7)

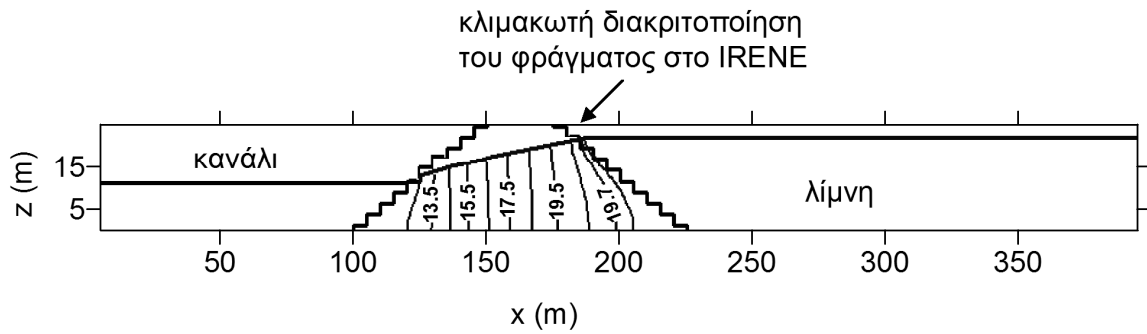
**5.5.2 Επιβεβαίωση του IRENE με τις πειραματικές μετρήσεις των σεναρίων 2 έως 5**

Οι τιμές των  $\alpha_L$ ,  $\alpha_{TH}$ ,  $\alpha_{TV}$ ,  $D_{tx}$ ,  $D_{ty}$  και  $D_{tz}$  που προέκυψαν από τη ρύθμιση του IRENE, χρησιμοποιήθηκαν για την αριθμητική προσομοίωση των σεναρίων 2 έως 5.

Στον Πίνακα 5.11 συγκρίνονται τα αποτελέσματα του IRENE–HYD με τις πειραματικές μετρήσεις της στάθμης επιφανειακών και υπόγειων νερών για το Σενάριο 2. Στο Σχήμα 5.45 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του μοντέλου για τη στάθμη επιφανειακών και υπόγειων νερών και την κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στο φράγμα, για μία κατακόρυφη τομή του υπολογιστικού πεδίου στο επίπεδο x–z στη θέση  $y = 4.175$  m (θέση D). Όπως φαίνεται στον Πίνακα 5.11, η σύγκλιση μεταξύ των πειραματικών μετρήσεων και των αριθμητικών αποτελεσμάτων είναι πολύ καλή με το μέσο σχετικό σφάλμα να υπολογίζεται ίσο με  $MRE = 2.19$  %. Στο Σχήμα 5.46 φαίνεται η επιφάνεια διήθησης που σχηματίζεται στο κατάντη όριο του φράγματος. Η επιφάνεια διήθησης στη θέση D υπολογίζεται ίση με 0.45 cm.

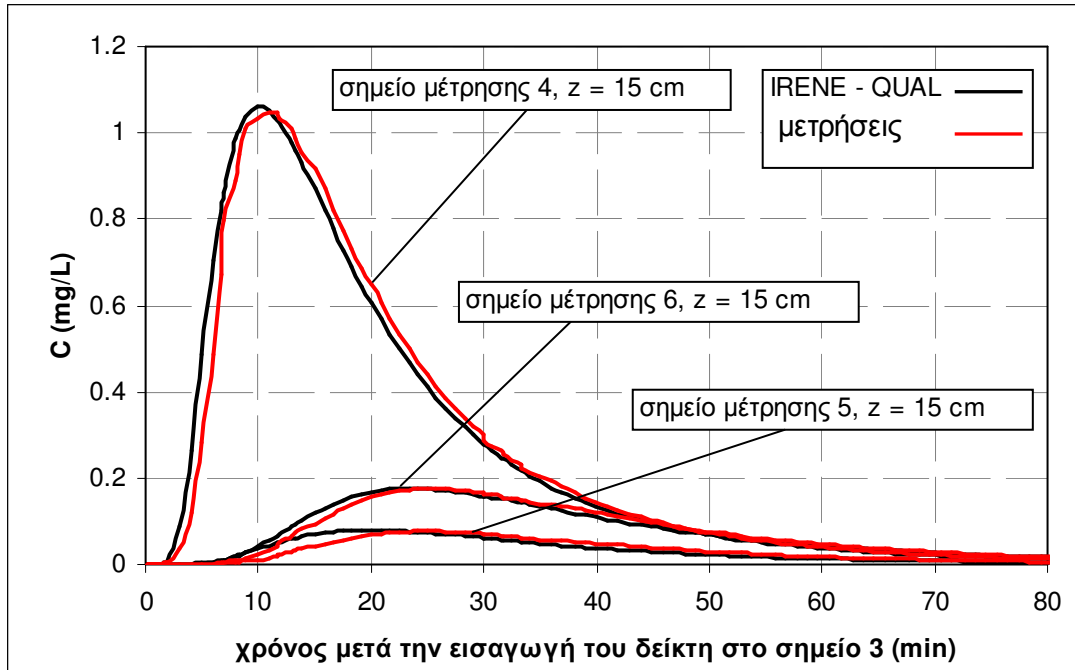
**Πίνακας 5.11:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD με τις πειραματικές μετρήσεις στάθμης για το Σενάριο 2

Σημείο μέτρησης	Στάθμη (cm) πειραματικά αποτελέσματα Μέσος όρος ± τυπική απόκλιση	Στάθμη (cm) IRENE–HYD	Σχετικό σφάλμα %
1	20.4 ± 0.22	20.1	1.5
2	15.02 ± 0.25	14.74	1.39
3	20.25 ± 0.2	19.85	2.5
4	14.89 ± 0.3	14.49	1.99
5	19.75 ± 0.21	19.35	2.0
6	14.39 ± 0.2	13.99	2.85
7	19.13 ± 0.15	18.65	2.57
8	13.79 ± 0.12	13.29	3.76
Κανάλι στη θέση A	13.47 ± 0.2	13.4	0.97
Κανάλι στη θέση B	13.2 ± 0.3	13.15	1.7
Κανάλι στη θέση C	12.8 ± 0.2	12.65	1.2
Κανάλι στη θέση D	12.05 ± 0.2	11.95	1.24
Λίμνη στη θέση A	21.33 ± 0.4	21.25	2.56
Λίμνη στη θέση B	21.4 ± 0.32	21.0	2.87
Λίμνη στη θέση C	20.88 ± 0.21	20.5	2.76
Λίμνη στη θέση D	20.25 ± 0.1	19.8	3.2
		<b>MRE</b>	<b>2.22</b>



**Σχήμα 5.46:** Αποτελέσματα του IRENE–HYD για τη στάθμη επιφανειακών και υπόγειων νερών και την κατανομή των πιεζομετρικών φορτίων στο φράγμα για το Σενάριο 2. Τα αποτελέσματα απεικονίζονται στο κατακόρυφο επίπεδο  $x$ – $z$  στη θέση  $y = 4.175$  m

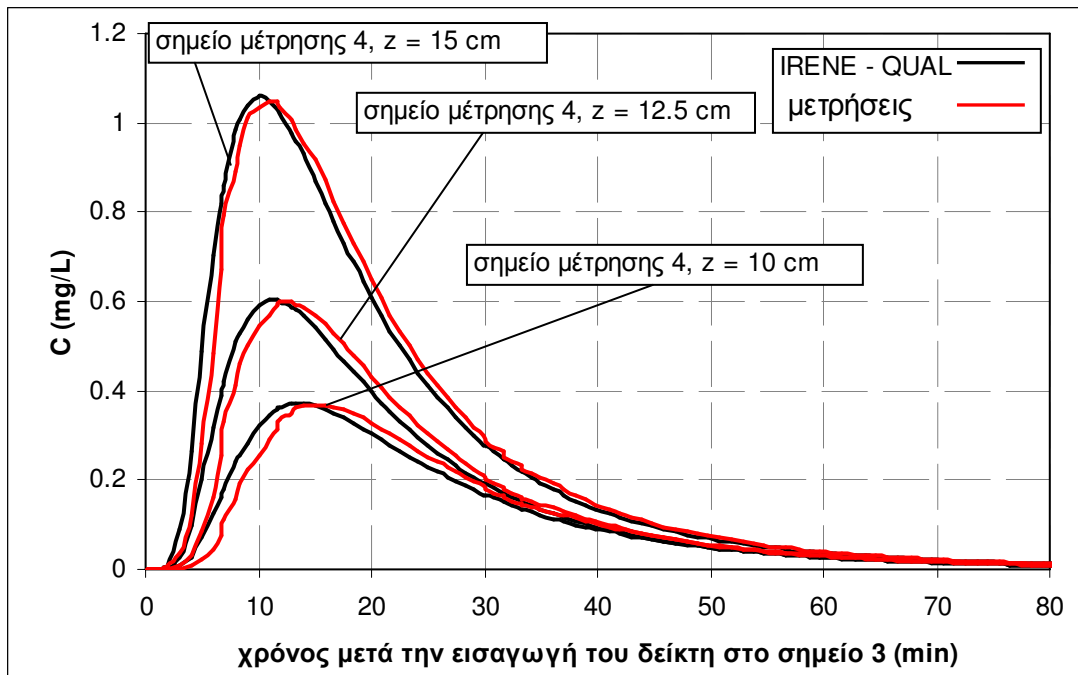
Στο Σχήμα 5.47 παρουσιάζεται η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL και των πειραματικών μετρήσεων για τα σημεία 4, 5 και 6, στη θέση  $z = 15$  cm (στρώμα 5), για το Σενάριο 2. Η απόκλιση μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων και των πειραματικών μετρήσεων είναι πολύ μικρή και για τα τρία σημεία μέτρησης. Συγκρίνοντας τα σχήματα 5.47 και 5.40, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα: (α) οι καμπύλες διέλευσης του δείκτη από τα σημεία 4, 5, και 6 παρουσιάζουν για το Σενάριο 2 (βλ. Σχήμα 5.46) μικρότερη χρονική υστέρηση σε σχέση με αυτήν που παρατηρείται για το Σενάριο 1 (βλ. Σχήμα 5.39), (β) οι τιμές της συγκέντρωσης του δείκτη στο σημείο μέτρησης 4 είναι υψηλότερες στην περίπτωση του Σεναρίου 2 και (γ) οι τιμές της συγκέντρωσης του δείκτη στα σημεία μέτρησης 5 και 6 είναι χαμηλότερες στην περίπτωση του Σεναρίου 2. Τα παραπάνω οφείλονται στη μεγαλύτερη διαφορά στάθμης που δημιουργείται μεταξύ της λίμνης και του υδατορεύματος στην περίπτωση του Σεναρίου 2 σε σχέση με τη διαφορά στάθμης που υπάρχει στην περίπτωση του Σεναρίου 1. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα στο Σενάριο 2 να δημιουργούνται υψηλότερες ταχύτητες ροής, οπότε ο δείκτης μεταφέρεται γρηγορότερα και με υψηλότερες συγκεντρώσεις (λόγω τόσο της μεταφοράς όσο και της διαμήκους διασποράς) από το σημείο διάθεσης 3 προς το σημείο μέτρησης 4. Ταυτόχρονα μειώνεται η επίδραση του μηχανισμού της εγκάρσιας διασποράς, οπότε παρατηρούνται χαμηλές συγκεντρώσεις του δείκτη στα σημεία μέτρησης 5 και 6.



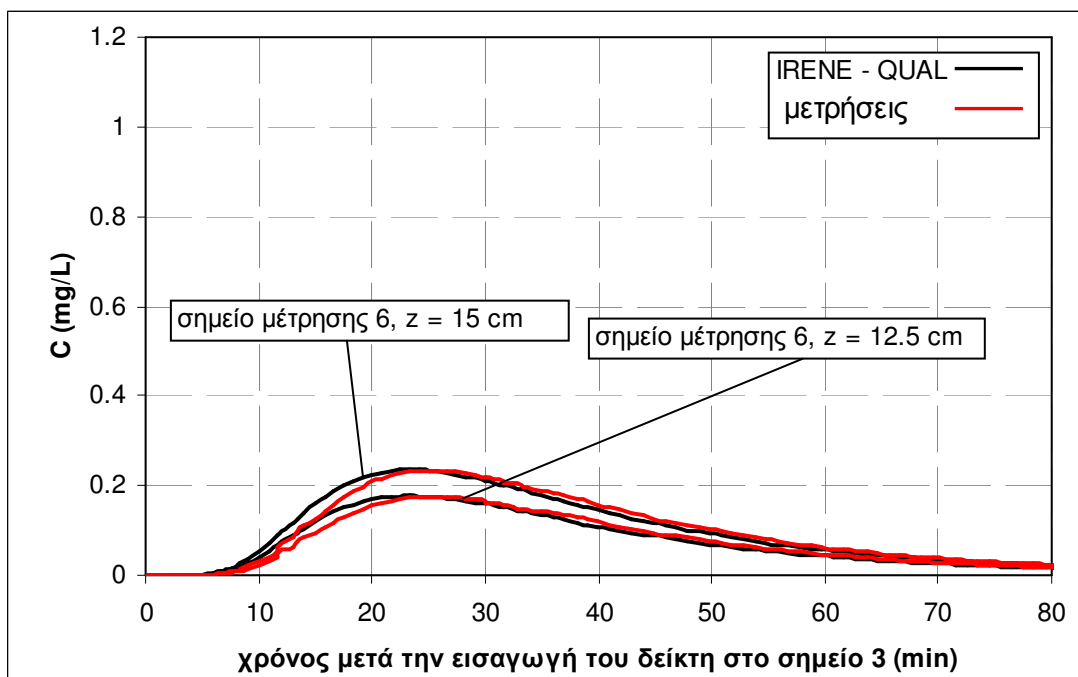
**Σχήμα 5.47:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE-QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στα σημεία 4, 5 και 6, στη θέση  $z = 15$  cm (στρώμα 5), για το Σενάριο 2

Στα σχήματα 5.48 και 5.49 παρουσιάζεται η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του μοντέλου και των πειραματικών αποτελεσμάτων για τις συγκεντρώσεις του δείκτη στο σημείο μέτρησης 4 στις θέσεις  $z = 15$  cm (στρώμα 5),  $z = 12.5$  cm (στρώμα 6) και  $z = 10$  cm (στρώμα 7) και στο σημείο μέτρησης 6 στις θέσεις  $z = 15$  cm και  $z = 12.5$  cm. Όπως ήταν αναμενόμενο, οι τιμές των συγκεντρώσεων του δείκτη στις θέσεις  $z = 12.5$  cm και  $z = 10$  cm είναι χαμηλότερες σε σύγκριση με τις συγκεντρώσεις που υπολογίζονται στη θέση  $z = 15$  cm. Η συμφωνία μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων και των πειραματικών μετρήσεων είναι πολύ ικανοποιητική, οπότε επιβεβαιώνεται η τιμή ρύθμισης του ανοιγμένου συντελεστή κατακόρυφης εγκάρσιας διασποράς  $\alpha_{TV}$ .

Στα Σχήμα 5.50 απεικονίζονται γραφικά τα αποτελέσματα του IRENE-QUAL και οι τιμές των πειραματικών μετρήσεων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο κανάλι στη θέση B σε ύψος  $z = 12.5$  cm. Η θέση  $z = 12.5$  cm αποτελεί τη θέση εξόδου του δείκτη από το πορώδες φράγμα προς το κανάλι. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.50, η σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων είναι πολύ καλή, οπότε επιβεβαιώνονται οι τιμές ρύθμισης των συντελεστών τυρβώδους διάχυσης  $D_{tx}$ ,  $D_{ty}$  και  $D_{tz}$ .

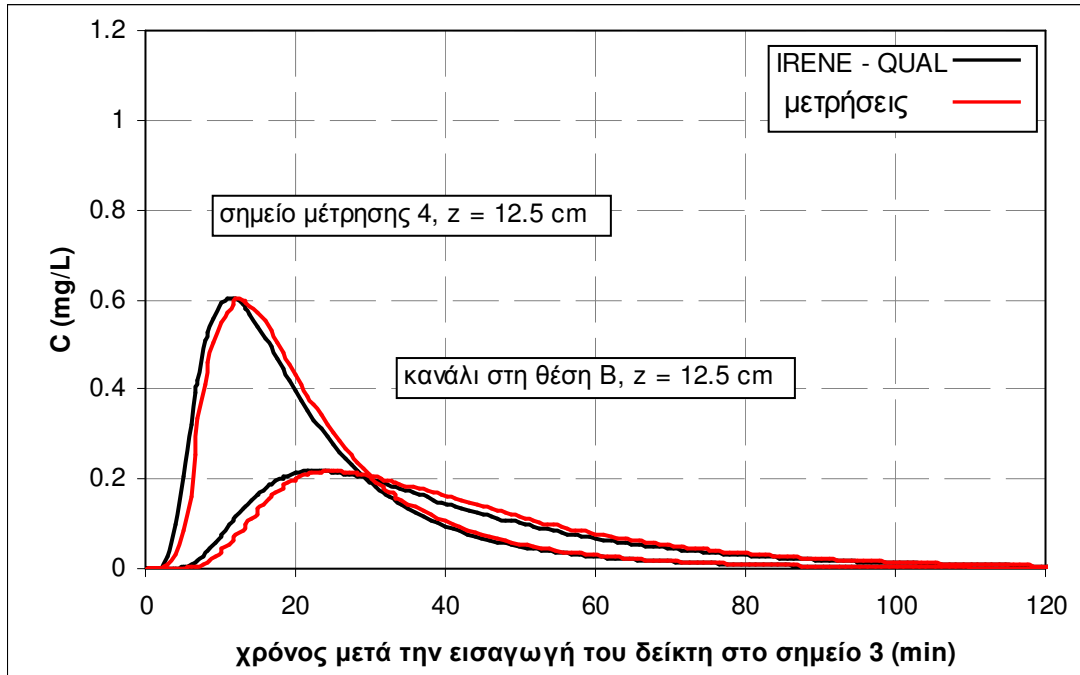


**Σχήμα 5.48:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE-QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης δείκτη στο σημείο 4, στις θέσεις  $z = 15$  cm (στρώμα 5),  $z = 12.5$  cm (στρώμα 6) και  $z = 10$  cm (στρώμα 7), για το Σενάριο 2

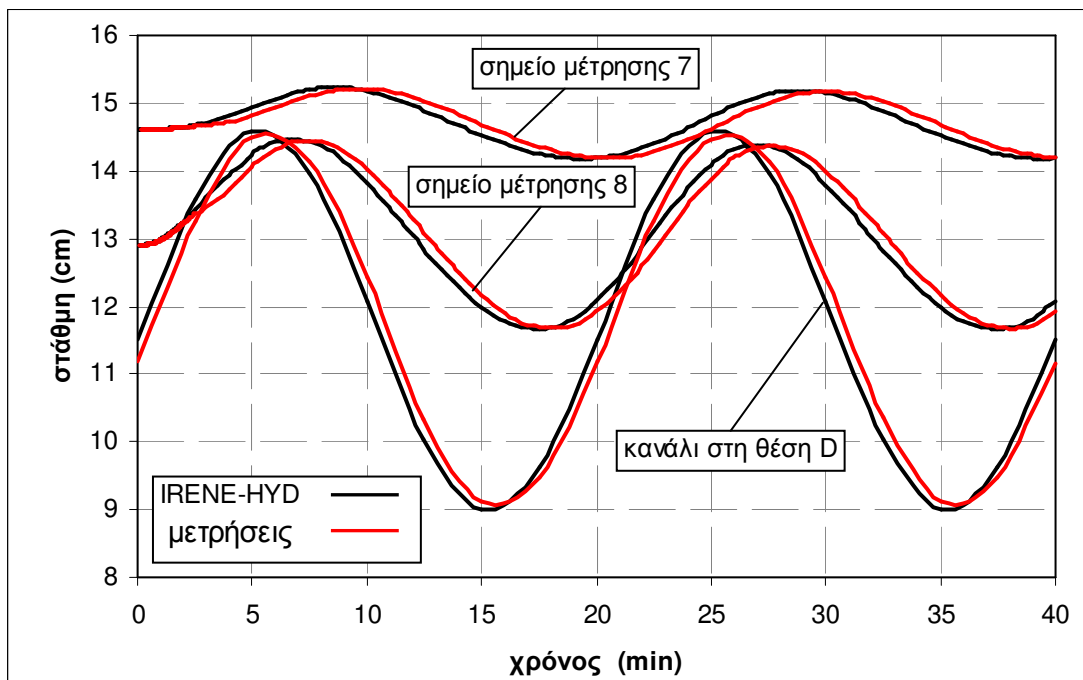


**Σχήμα 5.49:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων του IRENE-QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις συγκέντρωσης στο σημείο 6 στις θέσεις  $z = 15$  cm (στρώμα 5) και  $z = 12.5$  cm (στρώμα 6) για το Σενάριο 2

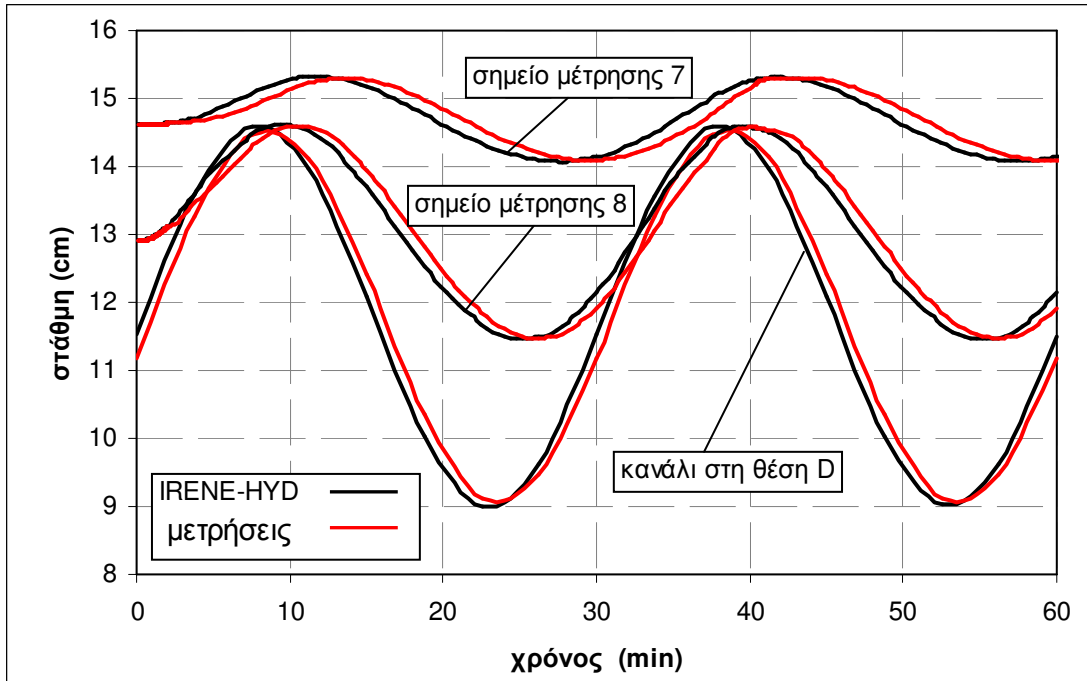




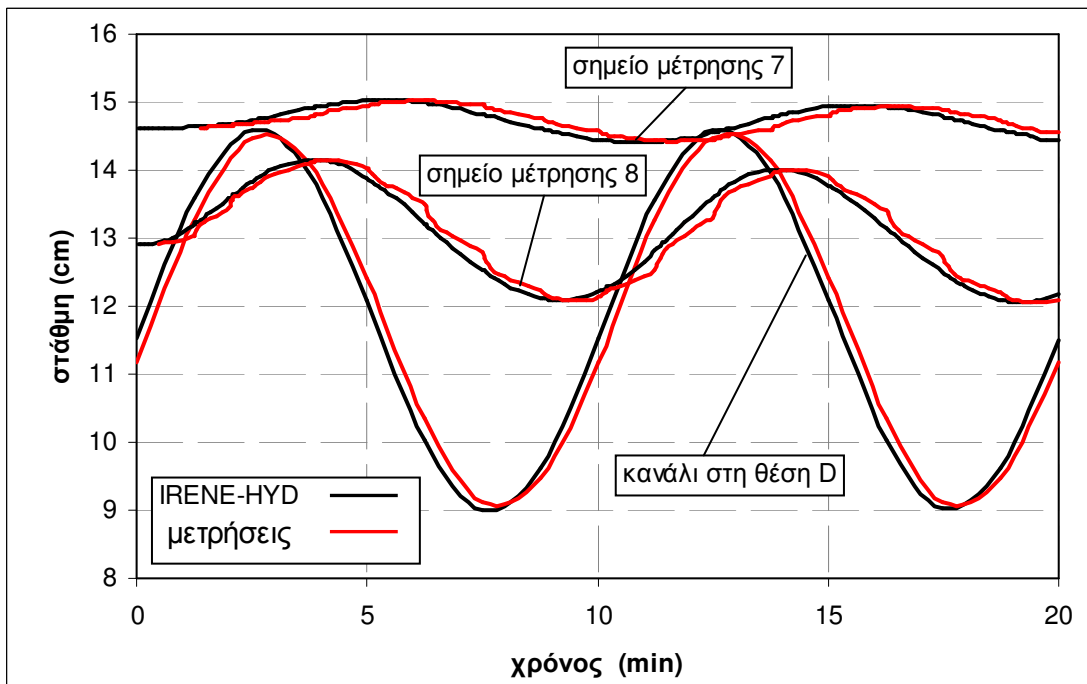
**Σχήμα 5.50:** Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL και των πειραματικών μετρήσεων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο κανάλι στη θέση B, σε ύψος  $z = 12.5$  cm (στρώμα 6), για το Σενάριο 2



**Σχήμα 5.51:** Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD και των πειραματικών μετρήσεων για τη στάθμη στο κανάλι στη θέση D και τη στάθμη στο φράγμα στα σημεία μέτρησης 7 και 8. Σενάριο 3,  $\tau = 20$  min



**Σχήμα 5.52:** Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD και των πειραματικών μετρήσεων για τη στάθμη στο κανάλι στη θέση D και τη στάθμη στο φράγμα στα σημεία μέτρησης 7 και 8. Σενάριο 4,  $\tau = 30$  min



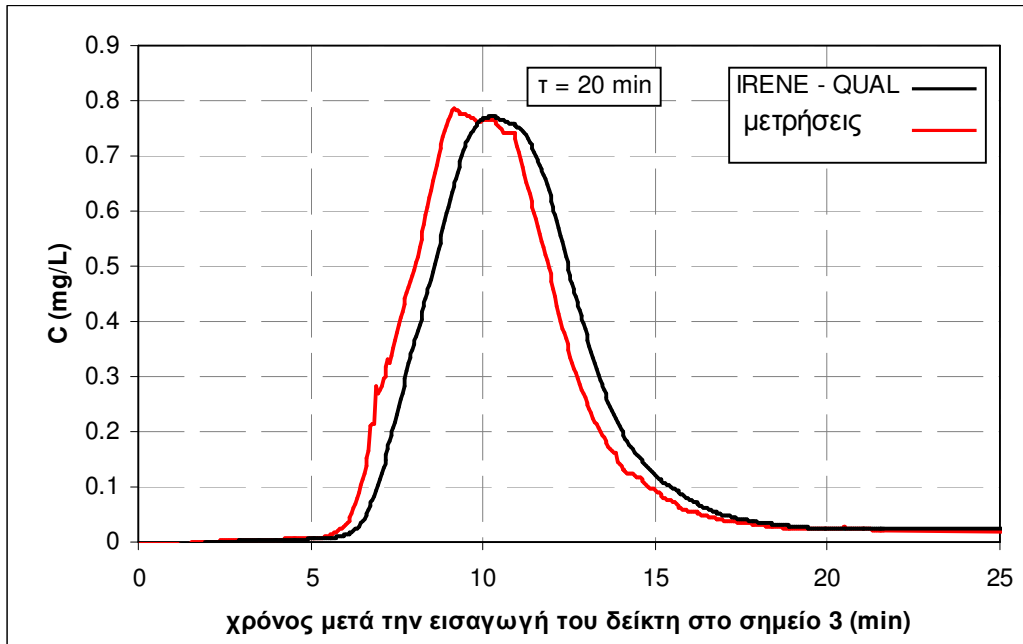
**Σχήμα 5.53:** Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD και των πειραματικών μετρήσεων για τη στάθμη στο κανάλι στη θέση D και τη στάθμη στο φράγμα στα σημεία μέτρησης 7 και 8. Σενάριο 5,  $\tau = 10$  min

Στα σενάρια 3–5 των πειραματικών μετρήσεων της Β΄ Φάσης διερευνήθηκαν συνθήκες μή μόνιμης ροής. Μέσω ειδικού λογισμικού, ρυθμίστηκε η μεταβολή της θέσης του υπερχειλιστή μεταξύ 14.6 cm και 8.6 cm με ημιτονοειδή τρόπο, για περιόδους 20 min, 30 min και 10 min.

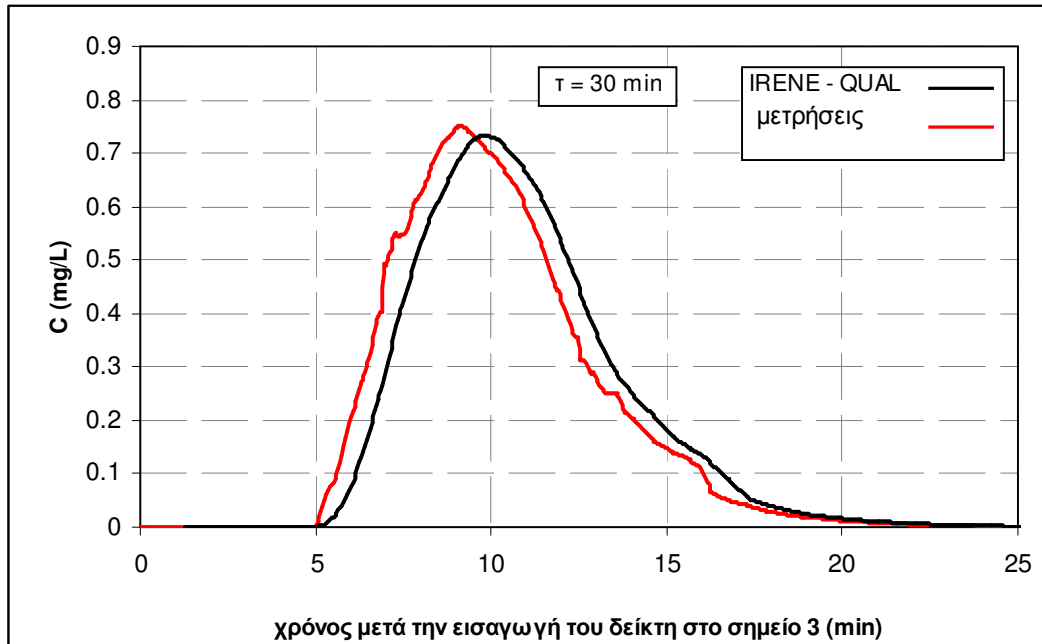
Στα σχήματα 5.51–5.53 παρουσιάζεται η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD και των πειραματικών δεδομένων για τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας επιφανειακών και υπόγειων νερών. Στα σχήματα συγκρίνονται τα αριθμητικά με τα πειραματικά αποτελέσματα για τη στάθμη στο κανάλι στη θέση D και τη στάθμη του νερού στο φράγμα στα σημεία μέτρησης 7 και 8. Η συμφωνία μεταξύ αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων είναι πολύ ικανοποιητική, ωστόσο παρατηρείται μία μικρή διαφορά φάσης ανάμεσα στα αποτελέσματα του μοντέλου και τις πειραματικές μετρήσεις.

Σε όλα τα πειράματα μή μόνιμης ροής, ως θέση εισαγωγής του συντηρητικού δείκτη στην πειραματική διάταξη επιλέχθηκε το σημείο 3 και η εισαγωγή του δείκτη πραγματοποιήθηκε για  $t = 0$ . Η χρονική εξέλιξη της συγκέντρωσης του δείκτη στο σημείο 4 για τα σενάρια 3, 4 και 5 απεικονίζεται στα σχήματα 5.54–5.56. Καθώς η περίοδος της ημιτονοειδούς διαταραχής που επιβάλλεται στο κατάντη όριο μειώνεται, παρατηρούνται υψηλότερες συγκεντρώσεις του δείκτη ενώ ταυτόχρονα το εύρος της καμπύλης διέλευσης μειώνεται. Αυτό οφείλεται στις μεγαλύτερες ταχύτητες ροής που δημιουργούνται μειώνοντας την περίοδο. Για παράδειγμα, για περίοδο  $\tau = 10$  min, η γρήγορη μεταβολή της στάθμης στο κανάλι έχει σαν αποτέλεσμα να δημιουργείται μεγαλύτερη διαφορά φάσης μεταξύ των διαταραχών της στάθμης του νερού στο κανάλι και στο φράγμα από ότι συμβαίνει όταν  $\tau = 20$  min ή  $\tau = 30$  min (βλ. σχήματα 5.51–5.53). Συνεπώς η διαφορά στάθμης και οι ταχύτητες ροής μεταξύ του φράγματος και του καναλιού είναι μεγαλύτερες.

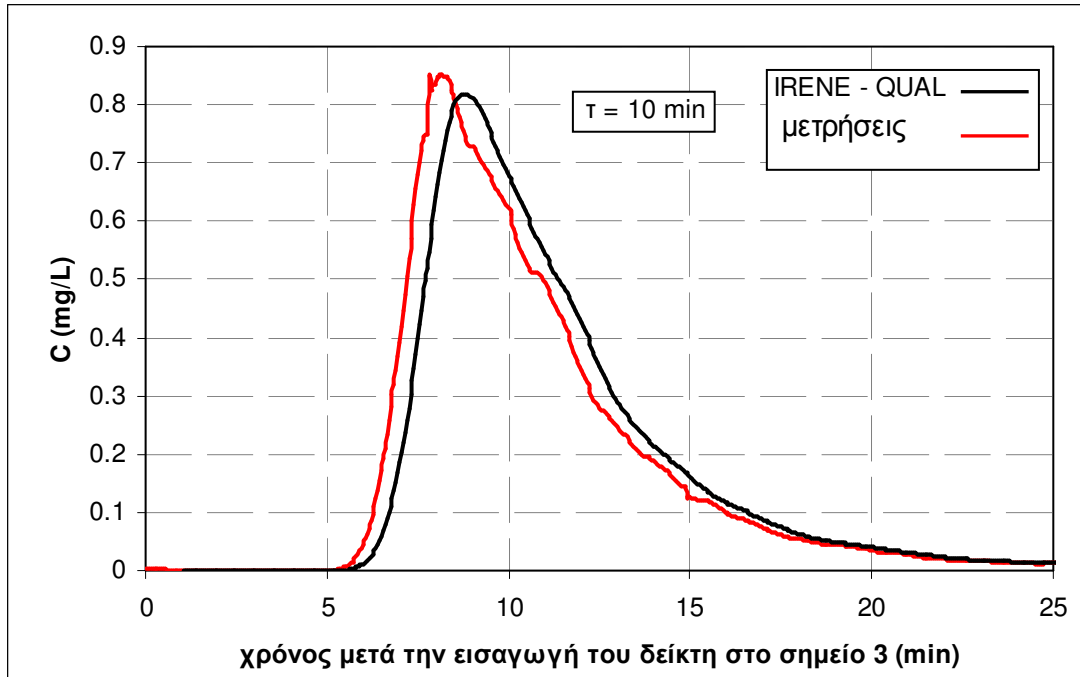
Παρατηρώντας τα σχήματα 5.53 και 5.56 αιτιολογείται πλήρως η μορφή της καμπύλης του σχήματος 5.56. Ο συντηρητικός δείκτης φτάνει στο σημείο μέτρησης 4 μετά από χρόνο  $t \approx 5$  min. Από  $t = 5$  min έως  $t = 10$  min η στάθμη στο φράγμα είναι υψηλότερη από τη στάθμη στο κανάλι οπότε ο δείκτης κινείται από το σημείο 3 προς το σημείο 4 και προς το κανάλι. Από  $t = 10$  min έως  $t = 15$  min η στάθμη στο κανάλι είναι υψηλότερη από τη στάθμη του νερού στο φράγμα, οπότε ένα μέρος του δείκτη επανεισέρχεται από το κανάλι στο φράγμα με αποτέλεσμα να μην παρατηρείται απότομη πτώση της συγκέντρωσης του δείκτη στο σημείο 4. Με αντίστοιχο τρόπο αιτιολογούνται και οι μορφές των καμπυλών των σχημάτων 5.54 και 5.55.



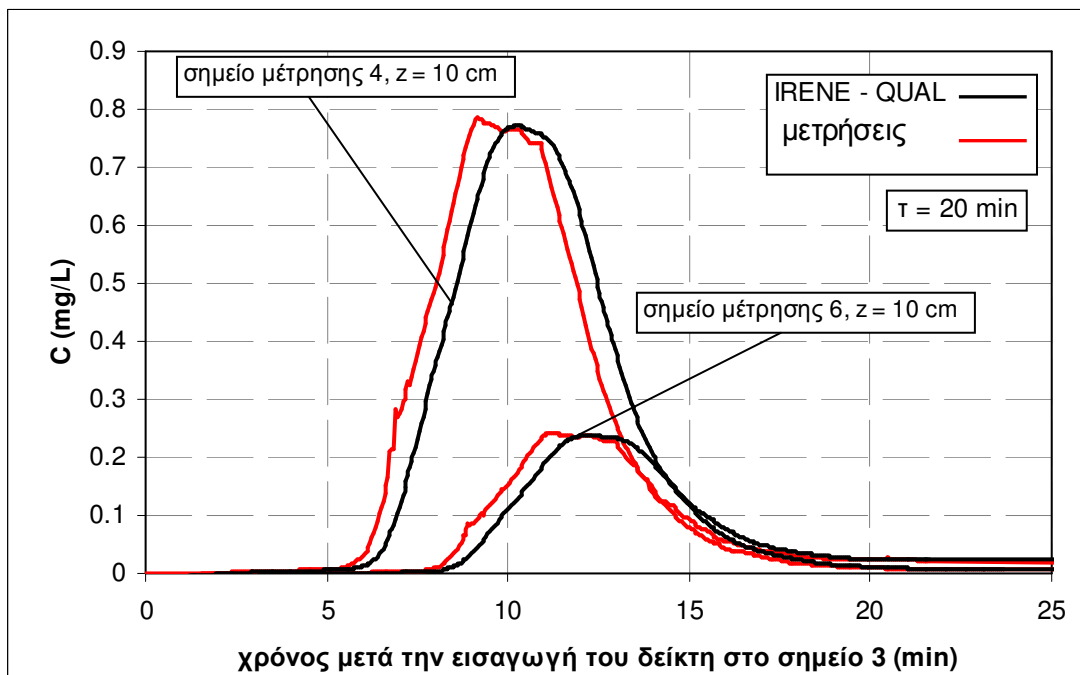
**Σχήμα 5.54:** Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL και των πειραματικών μετρήσεων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο σημείο μέτρησης 4 στη θέση  $z = 10$  cm (στρώμα 7). Σενάριο 3,  $\tau = 20$  min



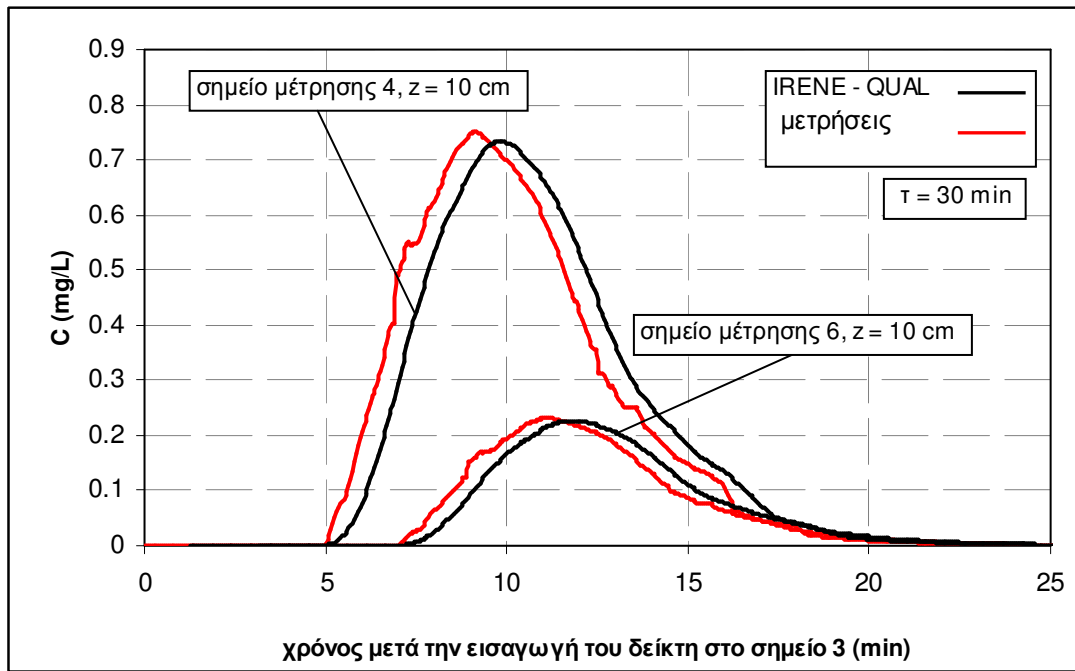
**Σχήμα 5.55:** Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–QUAL και των πειραματικών μετρήσεων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο σημείο μέτρησης 4 στη θέση  $z = 10$  cm (στρώμα 7). Σενάριο 4,  $\tau = 30$  min



**Σχήμα 5.56:** Σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο σημείο μέτρησης 4 στη θέση  $z = 10$  cm (στρώμα 7). Σενάριο 5,  $\tau = 10$  min



**Σχήμα 5.57:** Σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο σημείο μέτρησης 6 στη θέση  $z = 10$  cm (στρώμα 7). Σενάριο 3,  $\tau = 20$  min



**Σχήμα 5.58:** Σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων για τη συγκέντρωση του δείκτη στο σημείο μέτρησης 6 στη θέση  $z = 10$  cm (στρώμα 7). Σενάριο 4,  $\tau = 10$  min

Στα σχήματα 5.57 και 5.58 επιβεβαιώνονται τα αποτελέσματα του IRENE–QUAL με τις πειραματικές μετρήσεις της συγκέντρωσης του δείκτη στο σημείο 6, στη θέση  $z = 10$  cm. Οι τιμές των συγκεντρώσεων που ανιχνεύθηκαν στο σημείο 6 οφείλονται στο μηχανισμό της εγκάρσιας διασποράς και είναι σημαντικά χαμηλότερες σε σχέση με τις τιμές των συγκεντρώσεων που μετρήθηκαν στο σημείο 4. Γενικά, όπως προκύπτει από τα σχήματα 5.51–5.58, η συμφωνία μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων του IRENE και των πειραματικών μετρήσεων της στάθμης επιφανειακών και υπόγειων νερών και των συγκεντρώσεων του δείκτη στο φράγμα είναι πολύ ικανοποιητική. Τέλος, εδώ δεν παρουσιάζονται οι συγκεντρώσεις του συντηρητικού δείκτη στο κανάλι, καθώς οι τιμές που ανιχνεύθηκαν ήταν πολύ μικρές, εντός των ορίων του σφάλματος μέτρησης του φασφατοφωτόμετρου.

## 5.6 Συμπεράσματα

Κατά την πειραματική διερεύνηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών που πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο Hyder Hydraulics του πανεπιστημίου του Cardiff μελετήθηκαν: (α) η αλληλεπίδραση ροής και ρύπανσης μεταξύ υδατορεύματος και υπόγειου υδροφορέα σε πειραματική διάταξη η οποία

περιελάμβανε ευθύγραμμο κανάλι ορθογωνικής διατομής το οποίο διερχόταν μέσα από ομογενή και ισότροπο υδροφορέα ο οποίος κατασκευάστηκε από ειδικό πορώδες υλικό του εμπορίου (polyurethane foam) και (β) η αλληλεπίδραση ροής και ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών σε πειραματική διάταξη η οποία κατασκευάστηκε με στόχο την προσομοίωση ιδεατής υδρολογικής λεκάνης και περιελάμβανε υδατόρευμα και μικρή λίμνη, τα οποία επικοινωνούσαν μέσω αμμώδους φράγματος.

Η χρήση αφρού πολυουρεθάνης αποτελεί μία πρωτότυπη προσέγγιση για την προσομοίωση υπόγειων υδροφορέων σε εργαστηριακό επίπεδο. Ωστόσο, κατά τη διεξαγωγή των πειραμάτων παρουσιάστηκαν κάποια προβλήματα τα οποία δεν κατέστη δυνατόν να ξεπεραστούν πλήρως. Εκτός από τα κατασκευαστικά προβλήματα της πειραματικής διάταξης χρησιμοποιώντας κομμάτια αφρού πολυουρεθάνης, τα οποία θα ήταν εύκολο να μη δημιουργηθούν σε μελλοντικές ερευνητικές εργασίες, βασικό μειονέκτημα κατά την πειραματική διαδικασία αποτέλεσε η υψηλή διαπερατότητα του υλικού. Δεδομένου ότι το υλικό αυτό κυκλοφορεί στο εμπόριο με διαφορετικές πυκνότητες πόρων, θα μπορούσε να προταθεί ως ένα υλικό για την προσομοίωση υπόγειων υδροφορέων σε άλλες ερευνητικές εργασίες, επιλέγοντας μικρότερη πυκνότητα πόρων από 60 dpi.

Κατά τις Φάσεις Α' και Β' της πειραματικής διερεύνησης δημιουργήθηκαν συνθήκες μόνιμης και μη μόνιμης ροής και μετρήθηκαν (α) η στάθμη του νερού σε επιφανειακά και υπόγεια νερά και (β) οι συγκεντρώσεις του συντηρητικού δείκτη στο υδατόρευμα και στα υπόγεια νερά. Οι πειραματικές μετρήσεις χρησιμοποιήθηκαν στη συνέχεια για τη ρύθμιση και την επιβεβαίωση του ολοκληρωμένου αριθμητικού μοντέλου επιφανειακών-υπόγειων νερών IRENE. Κατά την επιβεβαίωση του μοντέλου, η σύγκλιση μεταξύ των αριθμητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων ήταν πολύ ικανοποιητική. Αξίζει να σημειωθεί ότι, εξ' όσων γνωρίζει η συγγραφέας της παρούσας διατριβής, δεν υπάρχουν στη βιβλιογραφία άλλες διαθέσιμες εργαστηριακές μετρήσεις της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Οι πειραματικές μετρήσεις που παρουσιάζονται στην παρούσα διατριβή μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε άλλες εργασίες για την επιβεβαίωση αριθμητικών μοντέλων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ IRENE ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΩΝ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΛΕΚΑΝΩΝ ΑΧΕΛΩΟΥ–ΛΥΣΙΜΑΧΕΙΑΣ– ΤΡΙΧΩΝΙΔΑΣ

---

### 6.1 Εισαγωγή

Στις επόμενες παραγράφους περιγράφεται η εφαρμογή του IRENE–HYD στην περιοχή των υδρολογικών λεκανών Αχελώου–Λυσιμαχείας–Τριχωνίδας. Οι πληροφορίες που δίνονται παρακάτω για την περιοχή προέρχονται από στοιχεία του ΙΓΜΕ που ευγενικά μας παρέιχε ο υδρογεωλόγος Γ. Ζαχαριουδάκης και από τη μελέτη του Ν. Κουρμούλη, 2001: Υδρογεωλογική έρευνα λεκανών Ν. Αιτωλοακαρνανίας. Δίαιτα και έλεγχος ποιότητας των υδάτινων πόρων.

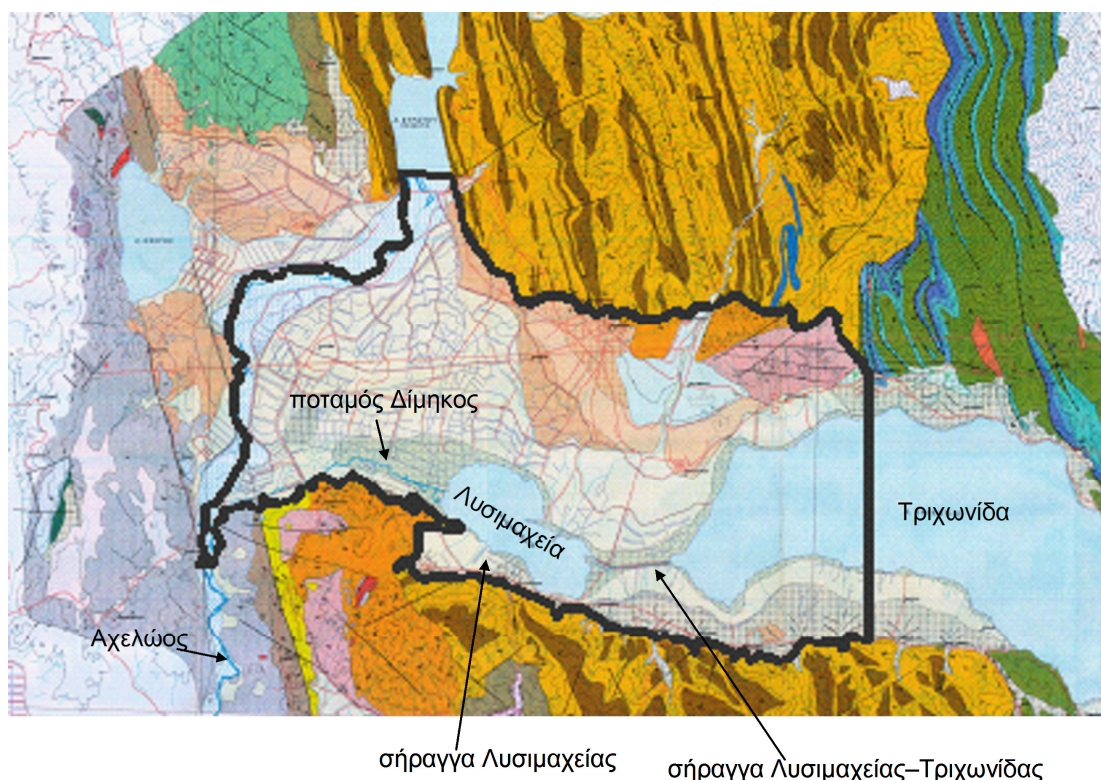
### 6.2 Περιγραφή της περιοχής μελέτης

#### 6.2.1 Οριοθέτηση της περιοχής μελέτης

Η περιοχή μελέτης βρίσκεται στα βορειοδυτικά της Ελλάδας, στο νομό Αιτωλοακαρνανίας, περίπου 250 km από την Αθήνα. Περιλαμβάνει τμήματα των



υδρολογικών λεκανών του Αχελώου, της Λυσιμαχείας και της Τριχωνίδας. Το μεγαλύτερο αστικό κέντρο της περιοχής είναι η πόλη του Αγρινίου. Πιο συγκεκριμένα, η περιοχή μελέτης οριοθετείται ανατολικά του ποταμού Αχελώου από το φράγμα του Στράτου και νότια έως το σημείο που ενώνεται με το Δίμηκο ποταμό και περιλαμβάνει τη λίμνη Λυσιμαχεία και ένα κομμάτι της λίμνης Τριχωνίδας έως τα καρστικά πετρώματα (πετρώματα με πράσινο χρώμα στο χάρτη του σχήματος 6.1). Στο βόρειο και νότιο τμήμα οριοθετείται από τα αδιαπέρατα πετρώματα του Φλύσχη (με κίτρινο χρώμα στο χάρτη του σχήματος 6.1). Στο χάρτη του σχήματος 6.1 φαίνεται το όριο της περιοχής μελέτης με έντονη μαύρη γραμμή.



**Σχήμα 6.1:** Γεωλογικός χάρτης και οριοθέτηση της περιοχής μελέτης

### 6.2.2 Φυσικό περιβάλλον

Η περιοχή μελέτης παρουσιάζει ήπιο σχετικά ανάγλυφο με εναλλαγές πεδινών και λοφωδών εκτάσεων. Το λοφώδες τοπίο εντοπίζεται νότια και βόρεια-βορειοανατολικά της λίμνης Τριχωνίδας όπου και εμφανίζονται οι μεγαλύτερες κλίσεις του ανάγλυφου καθώς και τα μεγαλύτερα υψόμετρα της λεκάνης. Το κλίμα της περιοχής χαρακτηρίζεται ως μεσογειακό ήπιο κατά την ψυχρή περίοδο, με μικρή νέφωση, χαμηλή ηλιοφάνεια και αυξημένη υγρασία, λόγω και των λιμνών. Το

καλοκαίρι χαρακτηρίζεται από υψηλές θερμοκρασίες άνω των είκοσι βαθμών Κελσίου (>20 °C), οι οποίες καταγράφονται κατά τους μήνες, Ιούνιο, Ιούλιο, Αύγουστο και Σεπτέμβριο. Η περιοχή του Δήμου Αγρινίου είναι μία από τις περιοχές της Ελλάδας, που σημειώνονται οι μεγαλύτερες θερμοκρασίες του θέρους.

### **6.2.3 Χρήσεις γης**

Η κύρια οικονομική ασχολία των κατοίκων της περιοχής είναι η γεωργία. Το 41% του ενεργού οικονομικά πληθυσμού ασχολείται με τη γεωργία, κτηνοτροφία και αλιεία. Το σύνολο των καλλιεργούμενων εκτάσεων φτάνει τα 1,295,639 στρέμματα, από τα οποία αρδεύονται τα 688,808 στρέμματα. Οι κύριες αγροκτηνοτροφικές δραστηριότητες αφορούν στην καλλιέργεια καπνού, βαμβακιού, ελαιοδέντρων, εσπεριδοειδών, κτηνοτροφών και στην παραγωγή ελαιόλαδου και γαλακτοκομικών προϊόντων, ενώ αξίζει να σημειωθεί ότι ο νομός Αιτωλοακαρνανίας είναι πρώτος νομός σε παραγωγή καπνού σε όλη τη χώρα.

Οι καλλιέργειες, που κατά κύριο λόγο υπάρχουν στην περιοχή, είναι: αραβόσιτος, τριφύλλια, βαμβάκια και ελιές. Είναι εφικτός ένας, σε γενικές γραμμές, χωρικός διαχωρισμός των καλλιεργειών:

- ✓ γύρω από την Τριχωνίδα, όπου κατά κύριο λόγο καλλιεργούνται ελιές
- ✓ στην πεδινή περιοχή των Καλυβιών – Δοκιμίου, όπου καλλιεργούνται τριφύλλια και αραβόσιτος.

### **6.2.4 Υδρολογικές λεκάνες–Υδρογεωλογία**

Στην περιοχή μελέτης διακρίνονται τρεις υδρογεωλογικές λεκάνες (Σχήμα 6.2). Οι δύο λίμνες που βρίσκονται στην περιοχή (η Τριχωνίδα και η Λυσιμαχεία) αποτελούν το "επίπεδο βάσης" εκφόρτισης των παρακείμενων υδροφόρων οριζόντων.

#### **6.2.4.1 Υδρολογική λεκάνη Τριχωνίδας**

Η υδρολογική λεκάνη της Τριχωνίδας βρίσκεται στο νοτιοανατολικό τμήμα του νομού Αιτωλοακαρνανίας. Γεωγραφικά, οριοθετείται στο βόρειο–βορειοανατολικό και ανατολικό τμήμα της από τις κορυφές του όρους Παναιτωλικού (1924 m), στα νότια–νοτιοδυτικά από το όρος Αράκυνθο και στα δυτικά από την υδρολογική λεκάνη της

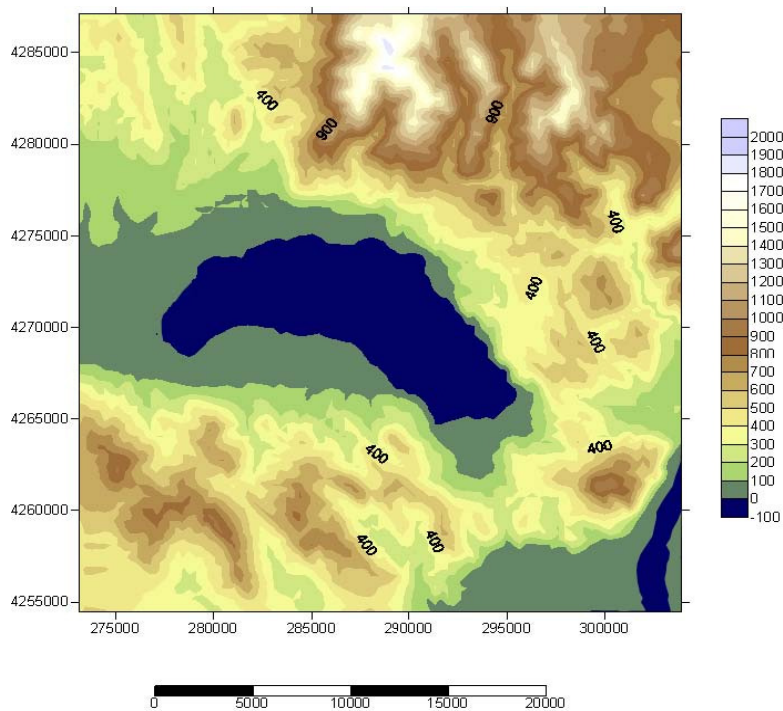
Λυσιμαχείας. Το εμβαδόν της υδρολογικής λεκάνης είναι 404.5 km<sup>2</sup> και η περίμετρός της είναι περίπου 111km. Πρόκειται για ένα τμήμα του ευρύτερου τεκτονικού βυθίσματος του Αγρινίου που περιλαμβάνει τις λίμνες Τριχωνίδα, Λυσιμαχεία, Οζερό, και Αμβρακία, το οποίο αρχικά ήταν ενιαίο και σταδιακά αποκόπηκε στις προαναφερθείσες λίμνες, λόγω ανυψωτικών ηπειρογενετικών κινήσεων και των συνεχώς αυξανόμενων προσχώσεων που λάμβαναν χώρα σε συγκεκριμένα τμήματα της υδρολογικής λεκάνης. Τα πρηνή της λεκάνης είναι σχετικά απότομα, κυρίως στα βόρεια και νότια τμήματα αυτής, με υψόμετρα που φθάνουν τα 1700 m στα βόρεια και 800 m στα νότια, ενώ το χαμηλότερο—που είναι και η επιφάνεια της Λ. Τριχωνίδας—στα 15 m περίπου. Επίσης, η μορφολογία των παραλίμνιων περιοχών της λεκάνης είναι γενικά ήπια, λόγω της προσχωματικής φύσεως των σχηματισμών που συνιστούν αυτές (βλ. Σχήμα 6.3). Στο Σχήμα 6.4 φαίνεται το ψηφιακό μοντέλο εδάφους της υδρολογικής λεκάνης της λίμνης Τριχωνίδας ενώ στο Σχήμα 6.5 φαίνεται μία φωτογραφία της λίμνης.



**Σχήμα 6.2:** Υδρολογικές λεκάνες της περιοχής μελέτης (με χρήση προγράμματος Autocad Architecture 2008)

Η λίμνη Τριχωνίδα είναι πολύ σημαντικός υδροβιότοπος διεθνούς σημασίας και έχει ενταχθεί στο Ευρωπαϊκό δίκτυο προστατευόμενων περιοχών NATURA 2000. Είναι το σημαντικότερο υδάτινο σώμα της περιοχής και είναι η μεγαλύτερη σε όγκο νερού λίμνη στην Ελλάδα ( $2.8 \times 10^9$  m<sup>3</sup> περίπου). Έχει εμβαδόν 96.6 m<sup>2</sup> και η περίμετρος της είναι περίπου 55 km. Έχει σχήμα τοξοειδές, με μέγιστο μήκος 20.5

km και μέγιστο πλάτος 6.5 km, περίπου. Γεωτεκτονικά αποτελεί ένα βύθισμα, που είναι αποτέλεσμα των εφελκυστικών τάσεων που επεκράτησαν στην περιοχή, μετά την Αλπική προγένεση. Η λίμνη, της οποίας το μέγιστο βάθος φθάνει τα 57 m, αποτελεί τον φυσικό αποδέκτη των επιφανειακών νερών της λεκάνης, αλλά και το "επίπεδο βάσης" των υπογείων νερών των παραλίμνιων υδροφόρων οριζώντων.



**Σχήμα 6.3:** Διακύμανση του υψομέτρου της ευρύτερης περιοχής της λίμνης Τριχωνίδας σε μέτρα (δημιουργία σε Arcview / 3D Analyst, με χρήση τοπογραφικού υποβάθρου Γ.Υ.Σ., 1:50.000)



**Σχήμα 6.4:** Φωτογραφία της λίμνης Τριχωνίδας



Η στάθμη του νερού της Τριχωνίδας ελέγχεται τεχνητά με υδατοφράκτη που έχει κατασκευαστεί, προκειμένου να ρυθμίζεται η εκφόρτισή της και να διατηρείται σε μέσο υψόμετρο 15.5 m με διακύμανση  $\pm 1$  m. περίπου. Η λίμνη Τριχωνίδα συνδέεται με τη λίμνη Λυσιμαχεία με σήραγγα που περιλαμβάνει θυροφράγμα και δίνει τη δυνατότητα για ελεγχόμενη τροφοδοσία νερού προς αυτήν και έπειτα μέσω συστήματος αρδευτικών καναλιών και σηράγγων προς την πεδιάδα του Μεσολογγίου και προς τον ποταμό Αχελώο (βλ. φωτογραφία σχήματος 6.5). Η ενωτική τάφρος που είναι το κύριο έργο διαχείρισης νερού στην περιοχή κατασκευάστηκε το 1957 προκειμένου να καλυφθούν αρδευτικές ανάγκες στις πεδιάδες του Μεσολογγίου και του Αιτωλικού και να εκφορτίζεται η περίσσεια νερού κατά τους χειμερινούς μήνες προς το υδρολογικό σύστημα του Αχελώου ώστε να αποφεύγονται πλημμυρικά γεγονότα στην περιοχή της Τριχωνίδας. Η μέγιστη παροχή του θυροφράγματος που βρίσκεται εντός της ενωτικής τάφρου είναι  $50 \text{ m}^3/\text{sec}$  ενώ η διατομή του είναι  $40 \text{ m}^2$  και η κλίση του  $3/2$ . Η διαχείριση του θυροφράγματος πραγματοποιείται από τη διεύθυνση Ελέγχου Κατασκευής Έργων (ΔΕΚΕ) Πατρών σε συνεργασία με το Γενικό Οργανισμό Εγγείων Βελτιώσεων (ΓΟΕΒ) Αγρινίου. Η κατασκευή της ενωτικής τάφρου οδήγησε στη σταδιακή μείωση της στάθμης της λίμνης Τριχωνίδας. Συγκεκριμένα, από 18.6 m που ήταν η μέγιστη στάθμη πριν την λειτουργία του θυροφράγματος έφτασε περίπου στα 16.7 m.



**Σχήμα 6.5:** Εικόνα του θυροφράγματος Τριχωνίδας–Λυσιμαχείας από την πλευρά της Λυσιμαχείας

Οι υδρογεωλογικές ενότητες που περιλαμβάνονται στα όρια της υδρολογικής λεκάνης αναφέρονται παρακάτω:

✓ Καρστικό σύστημα Ωλονού–Πίνδου

Στο σύστημα αυτό, που καταλαμβάνει το βορειοανατολικό και ανατολικό τμήμα της υδρολογικής λεκάνης, περιλαμβάνεται πλειάδα καρστικών υδροφόρων που έχουν διαμορφωθεί, αφενός από την στρωματογραφική επαλληλία των υδροπερατών ανθρακικών μερών της ζώνης Ωλονού–Πίνδου και των υδατοστεγανών αργιλοσχιστοκερατολιθικών διαστρώσεων της και αφετέρου από την τεκτονική των διαδοχικών επιπτεύσεων (λεπιών), που επανατάσει τη στρωματογραφική και υδρογεωλογική σειρά. Διαμορφώνεται έτσι μια χαρακτηριστική "παραλληλία" των καρστικών υδροφόρων, που αναπτύσσονται κυρίως εντός των Κρητιδικών ασβεστόλιθων της ζώνης και λιγότερο στους αντίστοιχους Τριαδικούς και Ιουρασικούς.

✓ Καρστική υδροφορία–υπόγεια απορροή

Η καρστική υδροφορία συντελείται κυρίως εντός των Κρητιδικών ασβεστόλιθων λόγω: (α) της μεγάλης τους επιφανειακής εξάπλωσης, που φθάνει πολύ πέραν των ορίων της υδρολογικής λεκάνης, (β) του έντονου τεκτονισμού και καρστικοποίησης τους, που επαυξάνουν την απευθείας κατείσδυση, (γ) του εμπλουτισμού τους (σε ορισμένες περιπτώσεις), με νερά της επιφανειακής απορροής από υδρορεύματα που διατέμνουν αυτούς.

Οι υδροφόροι που διαμορφώνονται στους άλλους ανθρακικούς σχηματισμούς (Ιουρασικοί–Τριαδικοί ασβεστόλιθοι) είναι ήσσονος σημασίας, καθ' ότι η στρωματογραφική τους θέση και η λιθοφασική σύσταση, δεν ευνοούν την ανάπτυξη υψηλής καρστικοποίησης και υδροπερατότητας.

Με τις προϋποθέσεις αυτές και δεδομένης της προς τα νότια κλίσης των λεπιών της ζώνης, είναι ευνόητο ότι μεγάλες ποσότητες νερών και από όμορες υδρολογικές λεκάνες διακινούνται και εκφορτίζονται είτε εντός της λίμνης Τριχωνίδας είτε ανάντη αυτής μέσω πηγών μεγάλης παροχής. Η κίνηση των υπόγειων νερών, έχει κατά κανόνα διεύθυνση Βορρά–Νότου

#### 6.2.4.2 Υδρολογική λεκάνη Λυσιμαχείας

Η υδρολογική λεκάνη της Λυσιμαχείας έχει εμβαδόν 253.8 km<sup>2</sup>, εκ των οποίων τα 13.1 km<sup>2</sup> αποτελούν τη λίμνη Λυσιμαχεία. Εκτείνεται δυτικά της λεκάνης Τριχωνίδας υπό μορφή ζωνώδους αναπτύγματος, οφειλόμενου στη διαμόρφωση της λεκάνης απορροής του υδατορεύματος Ερμίσα, το οποίο αποτελεί και τον κύριο άξονα απορροής των επιφανειακών νερών της λεκάνης. Η μορφολογία των πρηνών των παραλίμνιων περιοχών είναι ήπια σχεδόν πεδινή, ενώ στα υψηλότερα οι κλίσεις γίνονται απότομες και ιδιαίτερα στα βόρεια όπου τα υψόμετρα φθάνουν τα 1700 m. Στα νότια πρηνή της λεκάνης (όρος Αράκυνθος) οι κλίσεις είναι εξίσου απότομες, αλλά ο υδροκρίτης δεν υπερβαίνει το υψόμετρο των 800 m. Τέλος, ένα σημαντικό πρόβλημα, που εντοπίζεται στην περιοχή της Λυσιμαχείας, αφορά τις φερτές ύλες του ρέματος Ερμίσα, που διαχέονται στη λίμνη. Από την εκβολή του ρέματος και σε βάθος 300 μέτρων περίπου, έχει δημιουργηθεί φυσικό ανάχωμα, το οποίο απειλεί να αποκόψει τμήμα της λίμνης. Σύμφωνα με πληροφορίες των κατοίκων της περιοχής, η κατάσταση έχει επιδεινωθεί τα δέκα τελευταία χρόνια. Οι αιτίες της αύξησης των φερτών υλών δεν είναι γνωστές, θεωρείται όμως ως πιθανότερη αιτία, η αύξηση των διαβρωτικών διαδικασιών στον λεκάνιο χώρο του ρέματος Ερμίσα λόγω πυρκαγιών ή και άλλων ανθρωπογενών παρεμβάσεων.

Η λίμνη Λυσιμαχεία έχει σχήμα ελλειψοειδές, με μέγιστο μήκος 6.3 km και μέγιστο πλάτος 2.7 km περίπου. Γεωτεκτονικά, αποτελεί ένα βύθισμα, το οποίο αρχικά ήταν ενιαίο με εκείνο της λίμνης Τριχωνίδας, αλλά που στη συνέχεια απομονώθηκε λόγω των προσχώσεων του Αχελώου, αλλά και του υδατορεύματος Ερμίσα. Το βάθος της λίμνης δεν ξεπερνάει τα 8-9 m, ενώ το υψόμετρο της στάθμης της ρυθμίζεται τεχνητά στα 14.00–14.50 m (meters above sea level). Στη λίμνη καταλήγει ένα ακτινωτό και ελάχιστα ανεπτυγμένο υδρογραφικό δίκτυο, με εξαίρεση εκείνο του υδατορεύματος Ερμίσα, το οποίο είναι μέτρια πυκνό. Εκτός των εποχικών και χειμαρρώδους λειτουργίας υδρορευμάτων, που καταλήγουν στη λίμνη, αλλά και των περιμετρικά αυτής υδροφόρων οριζόντων που υπόγεια αποστραγγίζονται σ' αυτήν, η λίμνη δέχεται και τις ποσότητες νερών της λίμνης Τριχωνίδας, που προέρχονται από την υπερχειλίση, του τεχνητά ρυθμιζόμενου ταμιευτήρα της. Έτσι, η λίμνη Λυσιμαχεία αποτελεί τον τελικό αποδέκτη των επιφανειακών και υπογείων νερών των δύο υδρολογικών λεκανών (Τριχωνίδας–Λυσιμαχείας), με συνέπεια η εκτίμηση και διαχείριση του συνολικού υδατικού δυναμικού της, να συνιστούν σημαντικό αντικείμενο μελέτης.

Η αποχέτευση των νερών της λίμνης επιτυγχάνεται αφενός μέσω του Δίμηκου ποταμού –που αποτελεί και την φυσική έξοδο της λίμνης προς τον Αχελώο– και αφετέρου με τη σήραγγα που έχει διανοιχθεί και εξέρχεται προς την πλευρά της λιμνοθάλασσας Αιτωλικού.



**Σχήμα 6.6:** Φωτογραφία της λίμνης Λυσιμαχείας

Οι υδρογεωλογικοί σχηματισμοί που περιλαμβάνονται στην υδρολογική λεκάνη, αναφέρονται παρακάτω.

- ✓ Καρστικό σύστημα Ωλονού - Πίνδου

Αναπτύσσεται στο βορειοανατολικό άκρο της λεκάνης, σε υψόμετρο από 800 έως 1700 m και αποτελείται από Τριαδικούς, Ιουρασικούς και Κρητιδικούς ασβεστολίθους, με διαστρώσεις αργιλικών σχιστολίθων και κερατολίθων. Οι υδροφόροι ορίζοντες που διαμορφώνονται στα ανθρακικά μέρη της σειράς και που διατείνονται σε παραλληλίες, αποχετεύονται προς τα κατάντη και νότια εν μέρει στην λίμνη Τριχωνίδα και εν μέρει προς τις πηγές Νερομάνα, Μυρτιά και Αγ. Σοφία. Το αναπτυσσόμενο υδρογραφικό δίκτυο στο καρστικό σύστημα είναι αραιό και η επιφανειακή απορροή περιορισμένη, λόγω της αυξημένης κατείσδυσης των σχηματισμών, αλλά και της μικρής τους εξάπλωσης.



✓ Φλύσξης

Ο σχηματισμός αυτός, αποτελούμενος από αδιαπέρατα (αργιλομαργαϊκά στρώματα) και ημιπερατά πετρώματα (ψαμμιτικοί πάγκοι), στο σύνολο του συμπεριφέρεται σαν υδατοστεγανός σχηματισμός, ο οποίος απορρέει σχεδόν ολοκληρωτικά την βροχόπτωση που δέχεται. Υπόγεια απορροή συντελείται, σε μικρό βαθμό, εντός των ψαμμιτικών πάγκων, που εκφορτίζουν τελικά, με σχετική βραδύτητα, την υδροφορία τους μέσω πηγών μικρής παροχής 1-2 m<sup>3</sup>/h. Το υδρογραφικό δίκτυο στον σχηματισμό αυτό, είναι σχετικά μετρίου αναπτύγματος και τα δημιουργούμενα υδατορεύματα είναι εποχικής λειτουργίας. Οι κύριες εμφανίσεις φλύσξη, αναπτύσσονται στα βόρεια και νότια πρηνή της λεκάνης.

✓ Νεογενείς σχηματισμοί

Μικρές εμφανίσεις των σχηματισμών αυτών απαντώνται στα βορειοανατολικά και νοτιοδυτικά της λίμνης Λυσιμαχείας αποτελούμενες από άργιλο και άμμους. Το μικρό επιφανειακό ανάπτυγμα και η περιορισμένη περατότητα τους δεν τους επιτρέπει να έχουν σημαντικό ρόλο στην επιφανειακή και υπόγεια απορροή στην υδρολογική λεκάνη. Η πολύ περιορισμένη τους υδροφορία διοχετεύεται προς την λίμνη.

✓ Τεταρτογενείς αποθέσεις

Στις αποθέσεις αυτές περιλαμβάνονται ποτάμιες αποθέσεις του Αχελώου (κροκάλες, άμμοι, άργιλοι, λατύπες), πλευρικά κορήματα και ριπίδια (κροκάλες, άμμοι), αλλουβιακές αποθέσεις και αποθέσεις τεναγών. Καταλαμβάνουν το κεντρικό πεδινό τμήμα της λεκάνης Λυσιμαχείας, που είναι περίπου το ήμισυ της επωνομαζόμενης "Λεκάνης Αγρινίου". Η ποικιλότητα της κοκκομετρικής σύστασης των αποθέσεων, διαμορφώνει αντίστοιχες περατότητες αλλά και υδροφορίες. Έτσι, εντός των αλλουβιακών αποθέσεων και εκείνων του Αχελώου διαμορφώνεται υδροφόρος ορίζοντας πολύ μεγάλης υδροπερατότητας και αποθηκευτικότητας. Ο υδροφόρος αυτός βρίσκεται σε υδραυλική επικοινωνία με τη λίμνη στην οποία και εν μέρει αποχετεύεται. Μικρότεροι υδροφόροι διαμορφώνονται στις υπόλοιπες αποθέσεις

(Πλειστοκαινικές), οι οποίοι πάντως είτε μεταγγίζονται υπογείως προς τον κύριο υδροφόρο της λεκάνης, είτε απευθείας προς την λίμνη.

Στην περιοχή των εκβολών του υδατορεύματος Έρμιτσα -πλησίον της Λυσιμαχείας- παρατηρούνται φαινόμενα αρτεσιανισμού σε γεωτρήσεις που έχουν ανορυχθεί, γεγονός που οφείλεται στην ανάπτυξη υπό πίεση υδροφόρων, οι οποίοι δημιουργήθηκαν από τις επάλληλες αποθέσεις του υδατορεύματος. Το υδρογραφικό δίκτυο, στους Τεταρτογενείς σχηματισμούς, είναι πολύ αραιό καθώς το μεγαλύτερο μέρος της επιφανειακής απορροής, κατεισδύει στους υψηλής περατότητας σχηματισμούς που διατρέχει.

#### 6.2.4.3 Υδρολογική λεκάνη Αχελώου

Η οριοθέτηση της λεκάνης αυτής είναι τεχνητή, καθώς δεν αποτελεί υδρολογική λεκάνη με φυσικό υδροκρίτη. Η αναγκαιότητα διάκρισης, της περί τον Αχελώο ποταμό περιοχής σε ξεχωριστή υδρολογική ενότητα, προέκυψε από το γεγονός ότι το υδάτινο σώμα του ποταμού -το οποίο προέρχεται από μία πολύ μεγάλων διαστάσεων λεκάνη απορροής- επηρεάζει υδραυλικά τη Λεκάνη της Λυσιμαχείας. Η μορφολογία της περιοχής της λεκάνης είναι πεδινή -διαμορφωμένη από τις προσχώσεις του ποταμού- με χαμηλά και ήπια πρηνή που συνήθως φθάνουν σε υψόμετρο μέχρι 200m.



**Σχήμα 6.7:** Εγκιβωτισμένη κοίτη ποταμού Αχελώου

Κατά το μεγαλύτερο μέρος της λεκάνης, ο Αχελώος την διατρέχει διευθετημένος σετσιμεντένια αύλακα η οποία απάγει τα νερά που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή ενέργειας, από την τεχνητή λίμνη του Στράτου. Ένα μέρος των υδάτων της τεχνητής λίμνης –τα θεωρούμενα ως "υπερχειλιστικά"– διοχετεύονται στην παλαιά κοίτη του ποταμού και απορρέουν ελεύθερα.



**Σχήμα 6.8:** Φυσική κοίτη ποταμού Αχελώου



**Σχήμα 6.9:** Φωτογραφία από αρδευτικό κανάλι στην περιοχή μελέτης

Παράλληλα, από την τεχνητή λίμνη ξεκινά ένα δίκτυο διωρύγων, καναλιών και καναλέτων (βλ. φωτογραφία σχήματος 6.9), τα οποία διακλαδιζόμενα σε όλη την

περιοχή της λεκάνης Αγρινίου, διασφαλίζουν την άρδευσή της. Έτσι το υδάτινο σώμα του Αχελώου είτε άμεσα, με την απευθείας διάθεση του στους υπόγειους υδροφόρους, είτε έμμεσα με τα κατεισδύοντα νερά της άρδευσης, επηρεάζει θετικά την υπόγεια προσχωματική υδροφορία, με τη διατήρηση συνεχούς και σταθερού υδραυλικού φορτίου.

Στην υδρολογική λεκάνη του Αχελώου συναντώνται οι ακόλουθοι υδρογεωλογικοί σχηματισμοί:

- ✓ Τριαδικά λατυποπαγή

Βρίσκονται στα νοτιοδυτικά της λεκάνης και με τη χαμηλή υδροπερατότητα που τα χαρακτηρίζει, οριοθετούν τις υψηλές υδροπερατότητες της αλλουβιακής λεκάνης.

- ✓ Κρητιδικοί και Ηωκαινικοί ασβεστόλιθοι

Εμφανίσεις μικρού αναπτύγματος των σχηματισμών αυτών, συναντώνται στα βορειοδυτικά της λεκάνης. Η υπόγεια αποχέτευσή τους συντελείται προς τα βόρεια και εκτός λεκάνης προς τον Αμβρακικό κόλπο, μέσω των πηγών "Πετρονίκου" Αμφιλοχίας.

- ✓ Φλύσσης

Οι εμφανίσεις του σχηματισμού αυτού περιορίζονται στα βορειοανατολικά της λεκάνης και λόγω της χαμηλής τους υδροπερατότητας, αποτελούν τα βόρεια υδατοστεγανά όρια αυτής.

- ✓ Νεογενείς σχηματισμοί

Αποτελούν τα νότια ημιπερατά όρια της λεκάνης, συνιστάμενοι από ημιπερατά έως αδιαπέρατα πετρώματα, εντός των οποίων διαμορφώνονται ασθενείς έως πολύ ασθενείς επάλληλοι υδροφόροι. Η υπόγεια απορροή τους συντελείται προς διάφορες κατευθύνσεις, ανάλογα με την στρωματογραφική τους διάταξη. Η επιφανειακή απορροή γίνεται μέσω ενός πολύ αραιού υδρογραφικού δικτύου, που καταλήγει προς την λεκάνη Αγρινίου και τον Δίμηκο ποταμό.

✓ Πλειστοκαινικές (ποτάμιες) αποθέσεις

Καταλαμβάνουν σημαντικό τμήμα της υδρολογικής λεκάνης στα δυτικά, βορειοδυτικά και βορειοανατολικά μέρη της. Η λιθολογική τους διαφοροποίηση σε τρεις λιθοφάσεις έχει σαν επακόλουθο την αντίστοιχη διαβάθμιση της υδροπερατότητάς τους (μέτρια έως χαμηλή) και υδροφορίες που είναι ανάλογες προς αυτές. Οι υδροφόροι ορίζοντες που διαμορφώνονται στις αποθέσεις αυτές, βρίσκονται σε επικοινωνία με τον υδροφόρο των αλλουβιακών αποθέσεων καθώς και με τον Αχελώο ποταμό ο οποίος αποτελεί τον σταθερό τροφοδότη του συστήματος.

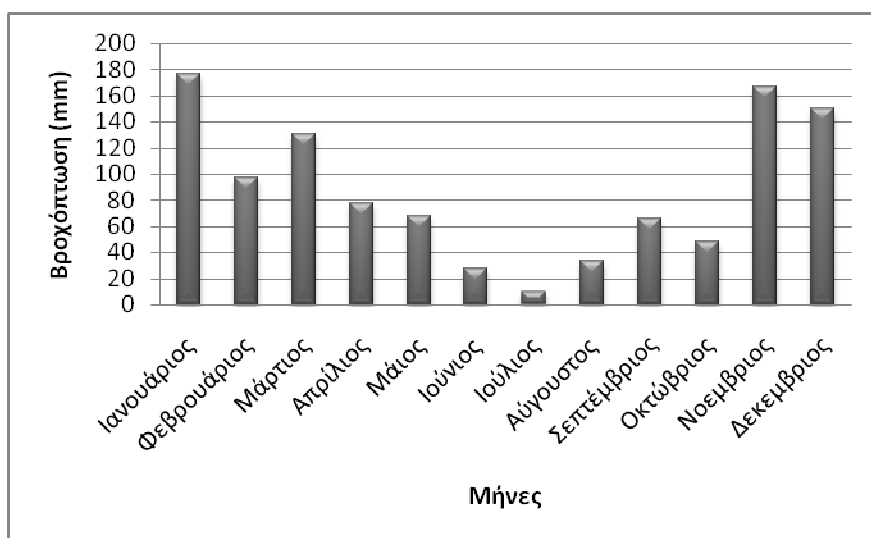
✓ Αλλουβιακές και ποτάμιες αποθέσεις

Συνιστούν το κεντρικό και μεγαλύτερο μέρος της λεκάνης, αποτελούμενες από αδρομερή (κροκάλες, άμμοι) κυρίως υλικά. Ο ενιαίος υδροφόρος ορίζοντας, που διαμορφώνεται στις αποθέσεις αυτές, είναι πολύ ισχυρός, μεγάλης υδροπερατότητας και υδροχωρητικότητας. Πέραν της απευθείας κατείσδυσης και των περιορισμένων τροφοδοσιών από επιφανειακά και υπόγεια νερά των πέριξ σχηματισμών, η κύρια πηγή τροφοδοσίας του προσχωματικού υδροφόρου είναι ο Αχελώος ποταμός, με τον οποίο βρίσκεται σε άμεση υδραυλική επικοινωνία. Έτσι, στα βόρεια της λεκάνης, ένα μέρος των νερών του ποταμού διηθούνται προς τον υδροφόρο για να καταλήξουν στη λίμνη Λυσιμαχεία και τον Δίμηκο ποταμό, ενώ ένα άλλο μέρος κινούμενο υπόγεια διοχετεύεται στη λίμνη του Οζερού. Τελικά το όλο σύστημα τόσο των επιφανειακών νερών (ποταμός Αχελώος, ποταμός Δίμηκος, λίμνη Λυσιμαχεία) όσο και των υπόγειων νερών (προσχωματικός υδροφόρος), αποχετεύεται προς τον Αχελώο ποταμό, στη νοτιότερη έξοδό του από τη λεκάνη.

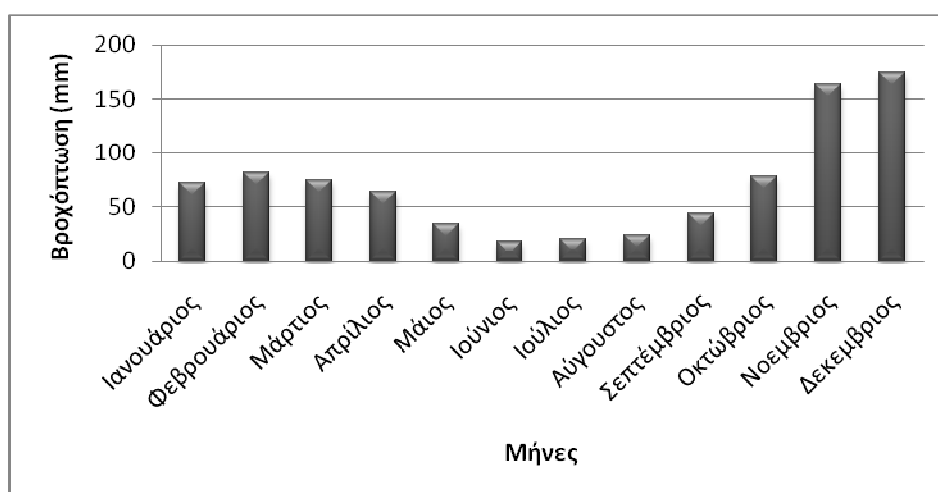
### **6.2.5 Κλιματολογικές συνθήκες**

Το κλιματικό καθεστώς της περιοχής μελέτης φαίνεται ότι διαμορφώνεται από τους ορεινούς όγκους που την περιβάλλουν στα βόρεια, νότια και ανατολικά, ενώ προς τα δυτικά η περιοχή δεν περιορίζεται από ορεινούς όγκους και ίσως επηρεάζεται από τη γειτονική θαλάσσια περιοχή του Ιονίου Πελάγους. Λαμβάνοντας

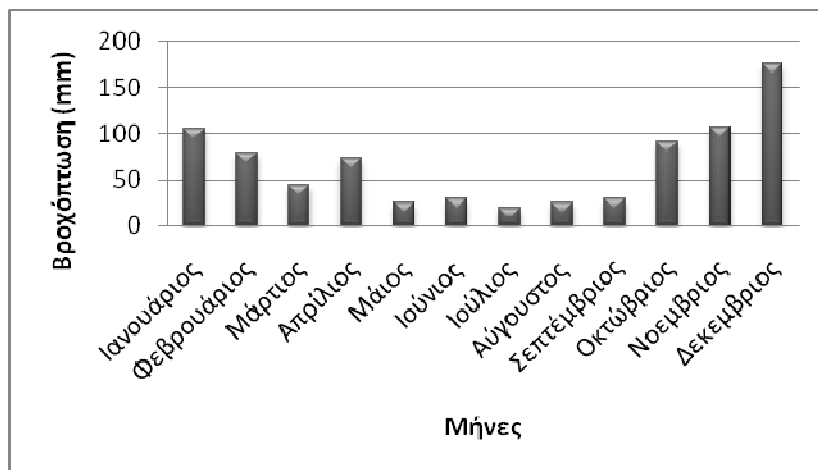
υπ' όψη τη θερμοκρασία και την υγρασία και σύμφωνα με το σύστημα ταξινόμησης Thornthwaite, ο κλιματικός τύπος της περιοχής κατατάσσεται ως ημίυγρο προς υγρό κλίμα, μεσόθερμο και με μεγάλη έλλειψη υγρασίας κατά την καλοκαιρινή περίοδο. Για την παρούσα διατριβή χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία θερμοκρασιών, ηλιοφάνειας και εξάτμισης από το σταθμό του Αγρινίου. Τα στοιχεία βροχοπτώσεων που χρησιμοποιήθηκαν είναι από τους σταθμούς Αγ. Ανδρέα, Δοκιμίου, Προσήλιας και Καλλιθέας.



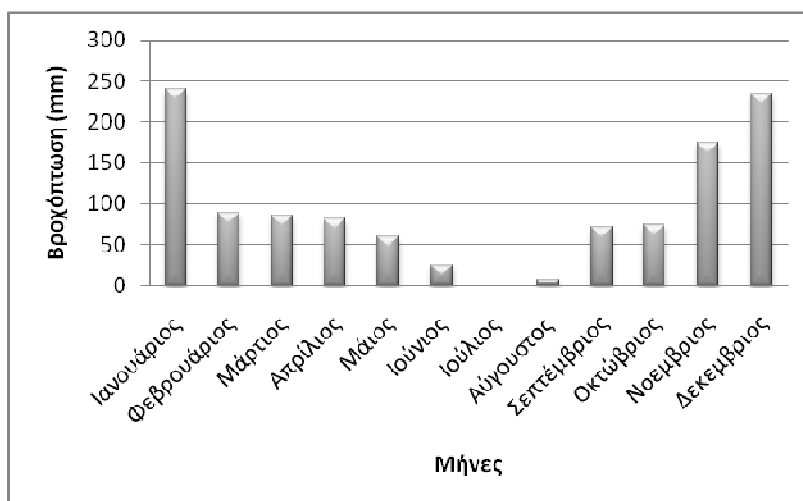
**Σχήμα 6.10:** Μέσο μηνιαίο ύψος βροχόπτωσης στο σταθμό Καλλιθέας κατά τα έτη 1997, 1998 και 1999



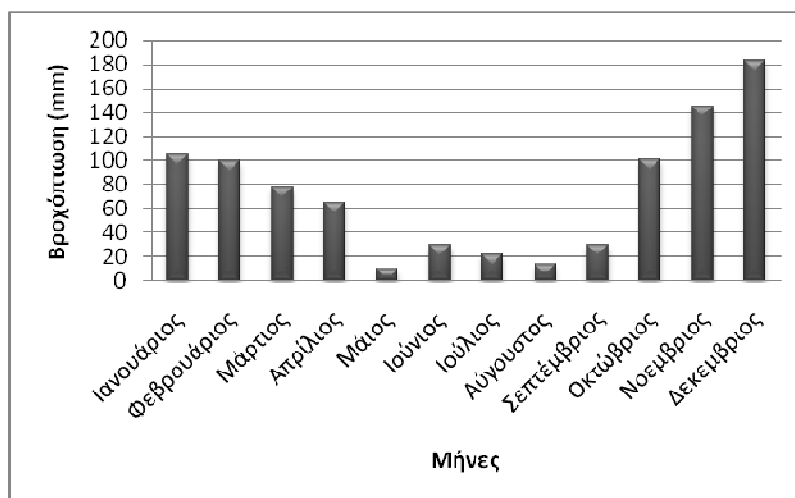
**Σχήμα 6.11:** Μέσο μηνιαίο ύψος βροχόπτωσης στο σταθμό Αγρινίου κατά τα έτη 1997, 1998 και 1999



Σχήμα 6.12: Μέσο μηνιαίο ύψος βροχόπτωσης στο σταθμό Προσήςλιας κατά τα έτη 1997, 1998 και 1999



Σχήμα 6.13: Μέσο μηνιαίο ύψος βροχής στο σταθμό Αγίου Ανδρέα κατά τα έτη 1997, 1998 και 1999



Σχήμα 6.14: Μέσο μηνιαίο ύψος βροχής στο σταθμό Δοκιμίου κατά τα έτη 1997, 1998 και 1999

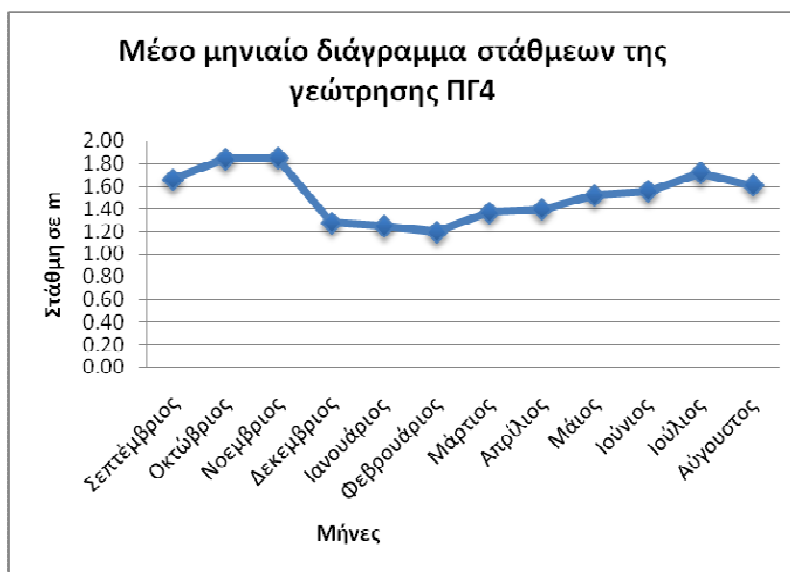
Η θερμοκρασία του αέρα στην ευρύτερη περιοχή μελέτης είναι σχετικά υψηλή, αφού η μέση ετήσια τιμή φτάνει τους 17 °C, ενώ η ελάχιστη τιμή σπάνια πέφτει κάτω από τους 3 °C. Οι μεταβολές της θερμοκρασίας στη διάρκεια του έτους είναι ομαλές και η μέση μηνιαία θερμοκρασία διατηρείται σε επίπεδα άνω των 10 °C για 9 τουλάχιστον μήνες ετησίως.

Από τη μελέτη των στοιχείων της εξάτμισης, (σταθμός Αγρινίου), διαπιστώνονται σχετικά υψηλές τιμές. Συγκεκριμένα, η μέση ετήσια τιμή εξάτμισης είναι 1395 mm, ενώ η απόλυτη ετήσια διακύμανση καταγράφεται στα 156 mm. Συνεπώς, παρατηρείται σταθερά υψηλή τιμή εξάτμισης σχεδόν καθ' όλη την διάρκεια του έτους. Οι μεγαλύτερες τιμές εξάτμισης συναντώνται κατά τους καλοκαιρινούς μήνες (Μάιος-Σεπτέμβριος, 62% της ετήσιας εξάτμισης), όταν και η θερμοκρασία βρίσκεται στα υψηλότερά της επίπεδα, ενώ οι μικρότερες τιμές καταγράφονται κατά τους χειμερινούς μήνες (Νοέμβριος-Μάρτιος, 23% της ετήσιας εξάτμισης). Η μέγιστη τιμή παρατηρείται κατά το μήνα Ιούλιο (14% της ετήσιας εξάτμισης) και η ελάχιστη κατά το μήνα Δεκέμβριο (3% της ετήσιας εξάτμισης).

#### *6.2.5.1 Σχέση βροχόπτωσης-στάθμης των υπόγειων νερών*

Θα περίμενε κανείς ότι η σχέση του ύψους της βροχόπτωσης και της μεταβολής της στάθμης των υπόγειων νερών θα είναι ανάλογη. Όμως, όπως φαίνεται και στα παρακάτω διαγράμματα αυτό δεν συμβαίνει. Παρατηρείται ότι κατά τους καλοκαιρινούς μήνες, όπου η βροχόπτωση είναι μειωμένη (έως μηδενική), η στάθμη των υπόγειων νερών ανεβαίνει σε σχέση με τους χειμερινούς μήνες. Αυτό είναι ένα αξιοσημείωτο γεγονός. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στον τρόπο άρδευσης των καλλιεργειών στην περιοχή αυτή. Η άρδευση γίνεται με τη μέθοδο της κατάκλισης μέσω ειδικών τσιμεντένιων αυλακιών. Όμως, τα αυλάκια έχουν σημαντικές ποσότητες νερού με αποτέλεσμα να χάνονται μεγάλες ποσότητες νερού προς τον υπόγειο υδροφόρα και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να ανεβαίνει η στάθμη των υπόγειων νερών κατά τους καλοκαιρινούς μήνες.





Σχήμα 6.15: Μέση μηνιαία στάθμη της γεώτρησης παρατήρησης ΠΓ4 που βρίσκεται στον αλλουβιακό υδροφόρα του Αχελώου



Σχήμα 6.16: Μέση μηνιαία βροχόπτωση στην περιοχή μελέτης

### 6.2.6 Υδατικό ισοζύγιο συστήματος λεκανών Αχελώου, Λυσιμαχείας και Τριχωνίδας

Είναι γνωστός ο τύπος που εκφράζει το ισοζύγιο εισροών και εκροών σε μία υδρολογική λεκάνη και έχει τη γενική μορφή:

$$P = E + R + I \quad (6.1)$$

όπου  $P$  [L] συμβολίζει τα ατμοσφαιρικά κατακρημνίσματα,  $R$  [L] είναι η απορροή,  $E$  [L] είναι η εξατμισοδιαπνοή και  $I$  [L] είναι η κατείσδυση.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην περιοχή μελέτης η μέτρηση των ατμοσφαιρικών κατακρημνισμάτων έγινε σε πέντε βροχόμετρα, που είναι εγκατεστημένα σε διάφορα υψόμετρα και θέσεις, έτσι ώστε να καλύπτουν το μέγιστο μέρος του συστήματος των λεκανών. Ως μέση ετήσια τιμή βροχόπτωσης, για το σύστημα των λεκανών, λαμβάνεται ο μέσος όρος των μέσων ετήσιων των πέντε βροχόμετρων, που είναι 941 mm.

Για τον υπολογισμό της πραγματικής εξατμισοδιαπνοής χρησιμοποιήθηκε ο εμπειρικός τύπος του Turk (1961). Χρησιμοποιώντας μετρήσεις της θερμοκρασίας στο σταθμό Αγρινίου, η μέση ετήσια θερμοκρασία για τα έτη 1997–1999 ήταν 16.9 °C και αυτή η τιμή χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της εξατμισοδιαπνοής σύμφωνα με τον εμπειρικό τύπο του Turk (1961). Η μέση ετήσια πραγματική εξατμισοδιαπνοή υπολογίστηκε ίση με 691.25 mm. Η τιμή αυτή της εξατμισοδιαπνοής αντιστοιχεί στο 73,4% της βροχόπτωσης, ποσοστό που κρίνεται αρκετά υψηλό, αλλά και αντιπροσωπευτικό των επικρατουσών υδρολογικών συνθηκών της περιοχής.

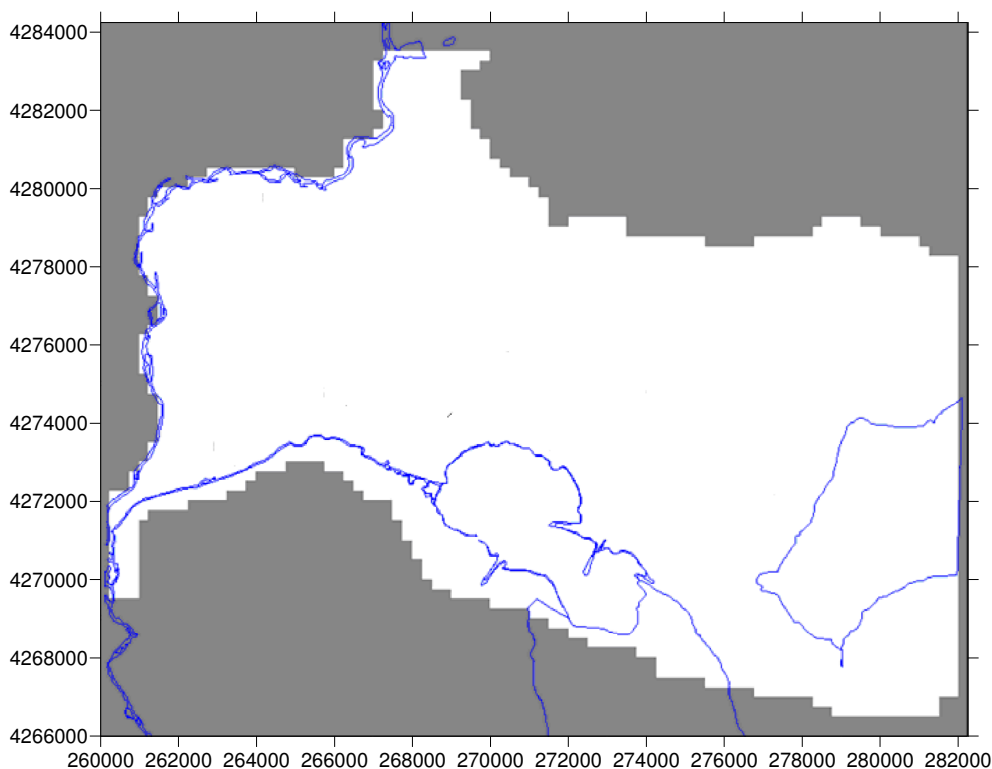
Στην περιοχή των υδρολογικών λεκανών Τριχωνίδας και Λυσιμαχείας, η φύση των πετρωμάτων ευνοούν είτε την ταχεία επιφανειακή απορροή προς τις λίμνες (φλύσχης -Νεογενή), είτε την υψηλή κατείσδυση προς υδροφόρους (καρστικούς - προσχωματικούς) υψηλής διαπερατότητας, που υπόγεια απορρέουν προς τις λίμνες. Οι προσχωματικοί σχηματισμοί παρουσιάζουν μέτρια έως υψηλή κατείσδυση και οι αβαθείς υδροφόροι ορίζοντες που διαμορφώνουν, απορρέουν υπογείως σε σχετικά μικρό χρονικό διάστημα προς τις λίμνες. Μετά από αυτά, γίνεται φανερό, ότι οι συνολικές εκροές από το σύστημα των λιμνών Τριχωνίδας και Λυσιμαχείας, αντιπροσωπεύουν το άθροισμα της επιφανειακής και υπόγειας απορροής, καθώς και της υποδερμικής ροής. Από συστηματικές μετρήσεις που έγιναν στις εξόδους του συστήματος προκύπτει ότι:

- ✓ Από τη σήραγγα Λυσιμαχείας απορρέει (τεχνητά, ελεγχόμενα) ποσότητα νερού της τάξης των  $228-240 \times 10^6 \text{ m}^3$  ετησίως.
- ✓ Από τον Δίμηκο ποταμό απορρέει (φυσικά) ποσότητα νερού της τάξης των  $120 \times 10^6 \text{ m}^3$  ετησίως.
- ✓ Η συνολική εκροή από το σύστημα λεκανών Τριχωνίδας–Λυσιμαχείας υπολογίζεται ότι ανέρχεται σε  $348-360 \times 10^6 \text{ m}^3$  ετησίως.

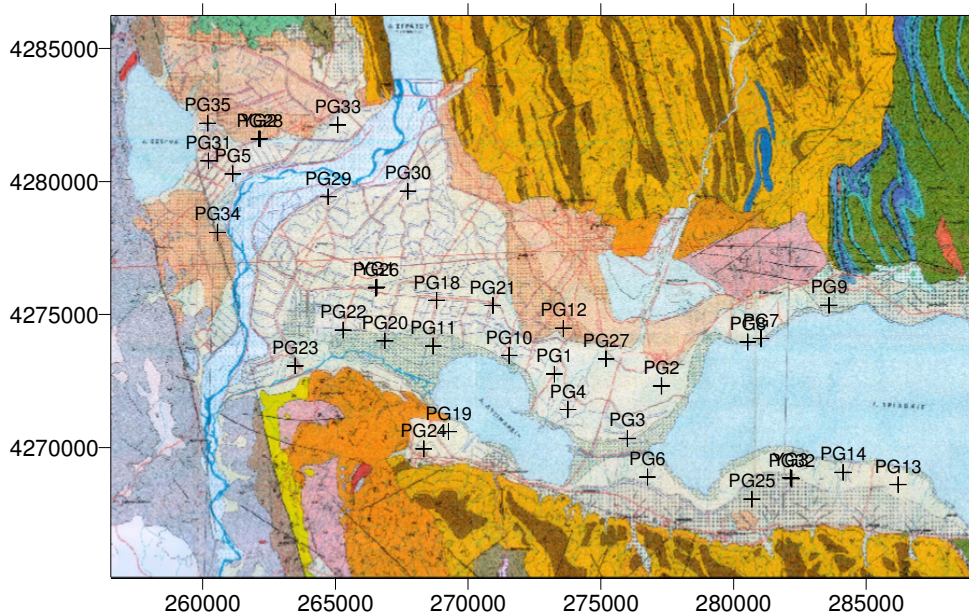
Πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι από το σύστημα καναλιών άρδευσης που ξεκινάει από τον Αχελώο διοχετεύεται κατά την περίοδο των αρδεύσεων (Απρίλιος–Σεπτέμβριος) ποσότητα νερού της τάξης των 120 m<sup>3</sup> ετησίως, κυρίως προς την προσχωματική λεκάνη Αγρινίου και μέχρι τις παραλίμνιες περιοχές της Τριχωνίδας (Παναϊώλιο - Καινούργιο), μεγάλο μέρος της οποίας κατεισδύει και εμπλουτίζει τον υδροφόρο ορίζοντα ο οποίος αναπτύσσεται σε μικρό βάθος από την επιφάνεια του εδάφους (1-6 m).

### 6.3 Εφαρμογή του IRENE–HYD στην περιοχή μελέτης

Στο Σχήμα 6.17 φαίνεται η γεωμετρία της περιοχής μελέτης, όπως αυτή εισήχθη στο IRENE–HYD. Με γκρι χρώμα φαίνεται η περιοχή που είναι εκτός του υπολογιστικού πεδίου του IRENE–HYD. Τα όρια των λιμνών Λυσιμαχείας και Τριχωνίδας, ο ποταμός Αχελώος και ο ποταμός Δίμηκος ψηφιοποιήθηκαν χρησιμοποιώντας το λογισμικό Arc GIS και φαίνονται με μπλε χρώμα στο Σχήμα 6.17. Στην περιοχή μελέτης υπάρχουν αρκετές γεωτρήσεις παρατήρησης, οι θέσεις των οποίων φαίνονται στο Σχήμα 6.18.



Σχήμα 6.17: Γεωμετρία της περιοχής μελέτης που εισήχθη στο IRENE–HYD



Σχήμα 6.18: Θέσεις των γεωτρήσεων παρατήρησης στην περιοχή μελέτης

Το πάχος του υδροφορέα, έπειτα από συζητήσεις με τον κύριο Γ. Ζαχαριουδάκη, υδρογεωλόγο του ΙΓΜΕ, θεωρήθηκε ίσο με 100 m. Το υπολογιστικό πεδίο διακριτοποιήθηκε στις διευθύνσεις x και y χρησιμοποιώντας 79 στήλες, 89 γραμμές και 2 στρώματα. Στις διευθύνσεις x και y οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος ήταν μεταβλητές και κυμαίνονταν μεταξύ 2 m (στην περιοχή των ποταμών Αχελώου και Δίμηκου) και 250 m. Το πάχος των υπολογιστικών κελιών στη διεύθυνση z ήταν μεταβλητό, καθώς τα δύο στρώματα δεν ήταν οριζόντια, ώστε να ακολουθούν την τοπογραφία του πυθμένα των επιφανειακών υδάτινων σωμάτων.

Στο IRENE–HYD εισήχθησαν οι ακόλουθες οριακές συνθήκες: (α) όλα τα όρια του υδροφορέα θεωρήθηκαν αδιαπέρατα λόγω της ύπαρξης Φλύσχη και (β) η λίμνη Τριχωνίδα θεωρήθηκε όριο σταθερού πιεζομετρικού φορτίου, ίσου με τη στάθμη του νερού στη λίμνη, που ήταν 15.5 m. Εκτός από τη λίμνη Τριχωνίδα, το πεδίο ροής στα άλλα επιφανειακά υδάτινα σώματα της περιοχής μελέτης αποτέλεσε μέρος της λύσης.

Ο Αχελώος αποτέλεσε το δυτικό όριο της περιοχής μελέτης. Σύμφωνα με πληροφορίες από τη ΔΕΗ, η παροχή που αφήνεται από το φράγμα του Στράτου στον Αχελώο είναι περίπου  $190 \text{ m}^3/\text{s}$ . Θεωρώντας το μέσο πλάτος του Αχελώου ίσο με 80 m, την κλίση του πημένα ίση με 0.001 και τον συντελεστή τραχύτητας Manning ίσο με 0.03, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Manning το βάθος ομοιόμορφης ροής υπολογίζεται ίσο με 6.0 m. Αρχικά, το βάθος ροής στον Αχελώο θεωρήθηκε ίσο με το

βάθος ομοιόμορφης ροής. Το βάθος διείσδυσης του Αχελώου στον υδροφορέα θεωρήθηκε ίσο με 6.5 m.

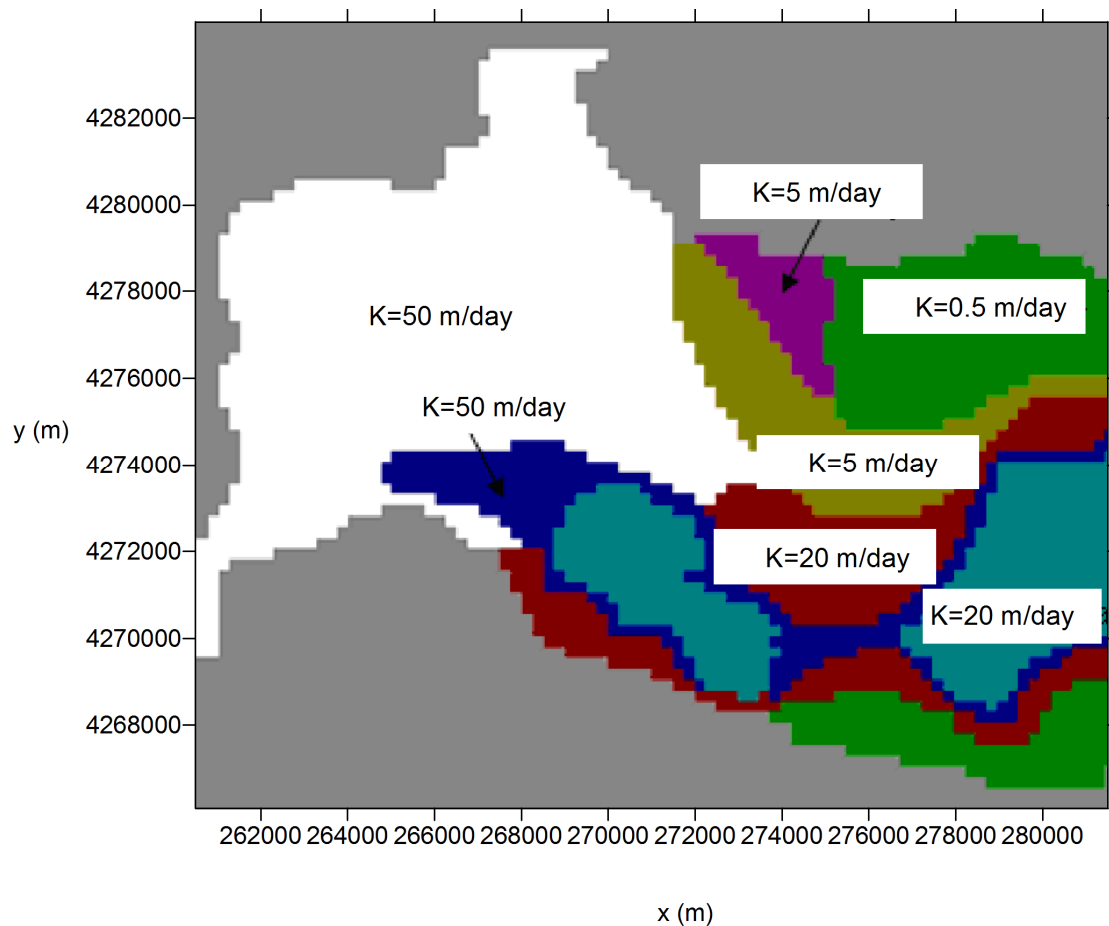
Σύμφωνα με την ψηφιοποίηση χαρτών του ΙΓΜΕ στο λογισμικό Arc GIS, το πλάτος του ποταμού Δίμηκου λήφθηκε ίσο με 12 m. Επίσης, σύμφωνα με τις εκτιμήσεις του ΙΓΜΕ, το βάθος διείσδυσης του ποταμού Δίμηκου στον υδροφορέα θεωρήθηκε ίσο με 6 m και το αρχικό βάθος ροής ίσο με 5 m. Το κανάλι που συνδέει τη Λυσιμαχεία με την Τριχωνίδα και η σήραγγα της Λυσιμαχείας δεν προσομοιώθηκαν ως επιφανειακά υδάτινα σώματα. Ωστόσο, η εκροή από τη λίμνη Τριχωνίδα προς τη λίμνη Λυσιμαχεία, που εκτιμήθηκε περίπου ίση με  $290 \times 10^6$  m<sup>3</sup>/έτος και η εκροή από τη λίμνη Λυσιμαχεία μέσω της σήραγγας Λυσιμαχείας, που εκτιμήθηκε περίπου ίση με  $220 \times 10^6$  m<sup>3</sup>/έτος, χρησιμοποιήθηκαν ως οριακές συνθήκες για τη λίμνη Λυσιμαχεία.

Δεδομένου ότι οι τιμές των πιεζομετρικών φορτίων στις γεωτρήσεις παρατήρησης δε μεταβάλλονται σημαντικά μεταξύ της υγρής και της ξηρής περιόδου λόγω της επαναπλήρωσης του υδροφορέα μέσω της άρδευσης, αποφασίστηκε να προσομοιωθούν συνθήκες μόνιμης ροής στην περιοχή μελέτης θεωρώντας τις μέσες ετήσιες τιμές της βροχόπτωσης και της εξατμισοδιαπνοής για τα έτη 1997–1999. Η βαθμονόμηση του μοντέλου πραγματοποιήθηκε για τις μέσες ετήσιες τιμές των πιεζομετρικών φορτίων στις γεωτρήσεις παρατήρησης για τα έτη 1997–1999, οι οποίες φαίνονται στον Πίνακα 6.1.

**Πίνακας 6.1:** Πίνακας συντεταγμένων και πιεζομετρικών φορτίων στις γεωτρήσεις παρατήρησης. Μέσος όρος των ετών 1997–1999.

Όνομασία	X	Y	Μ.Ο Στάθμης (m)
PG4	273251	4272764	16.30
PG5	277286	4272316	16.25
PG7	273760	4271434	15.8
PG9	276756	4268895	23.4
PG11	280538	4273971	17.00
PG13	271545	4273460	16.00
PG14	268683	4273813	16.00
PG15	273588	4274484	16.00
PG21	268815	4275534	18.00
PG25	265292	4274415	17.00
PG28	280690	4268060	34.27
PG29	266528	4276005	18.23
PG30	275197	4273337	19.00
PG32	264728	4279431	19.81
PG33	267731	4279635	19.20

Προκειμένου να επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση μεταξύ των τιμών των πιεζομετρικών φορτίων που υπολογίζονται με το IRENE–HYD και των τιμών των πιεζομετρικών φορτίων στις γεωτρήσεις παρατήρησης, έγιναν αρκετά αριθμητικά πειράματα μεταβάλλοντας τις τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας και τις τιμές της κατεισδυσσης. Τα όρια των τιμών της υδραυλικής αγωγιμότητας και της κατεισδυσσης για τα αριθμητικά πειράματα επιλέχθηκαν κατά περιοχή ανάλογα με την υδρογεωλογία, όπως αυτή περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Στον Πίνακα 6.2 και στα σχήματα 6.19 και 6.20 φαίνονται οι τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας και της επιφανειακής επαναπλήρωσης που έχουν σαν αποτέλεσμα τη βέλτιστη σύγκλιση μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων και των μετρήσεων πεδίου για τα πιεζομετρικά φορτία στην περιοχή μελέτης.

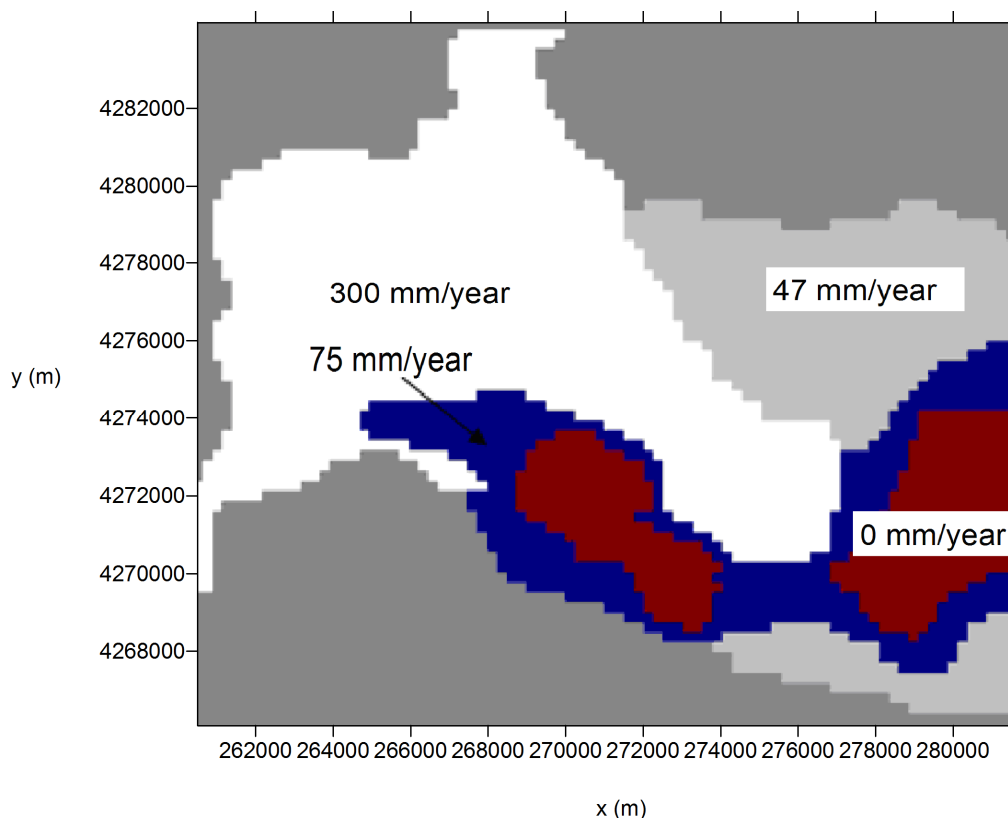


**Σχήμα 6.19:** Τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας που χρησιμοποιήθηκαν στην περιοχή μελέτης κατά τη βαθμονόμηση του IRENE–HYD

**Πίνακας 6.2:** Γεωλογικοί σχηματισμοί της περιοχής μελέτης και αντίστοιχες τιμές υδραυλικής αγωγιμότητας που χρησιμοποιήθηκαν στο IRENE–HYD

Γεωλογικοί σχηματισμοί	Υδραυλική Αγωγιμότητα K (m/day)
Αλλουβιακές αποθέσεις του Αχελώου ποταμού	50
Αποθέσεις ποτάμιες από αργιλόχους άμμους	20
Κώνιοι κορημάτων, ριπίδια και πλευρικά κορήματα	0.5
Άμμοι, κροκάλες και χαλίκια με μεταβλητό ποσοστό αργιλολύος	5
Κροκαλοπαγή σε εναλλαγές με άμμους	5

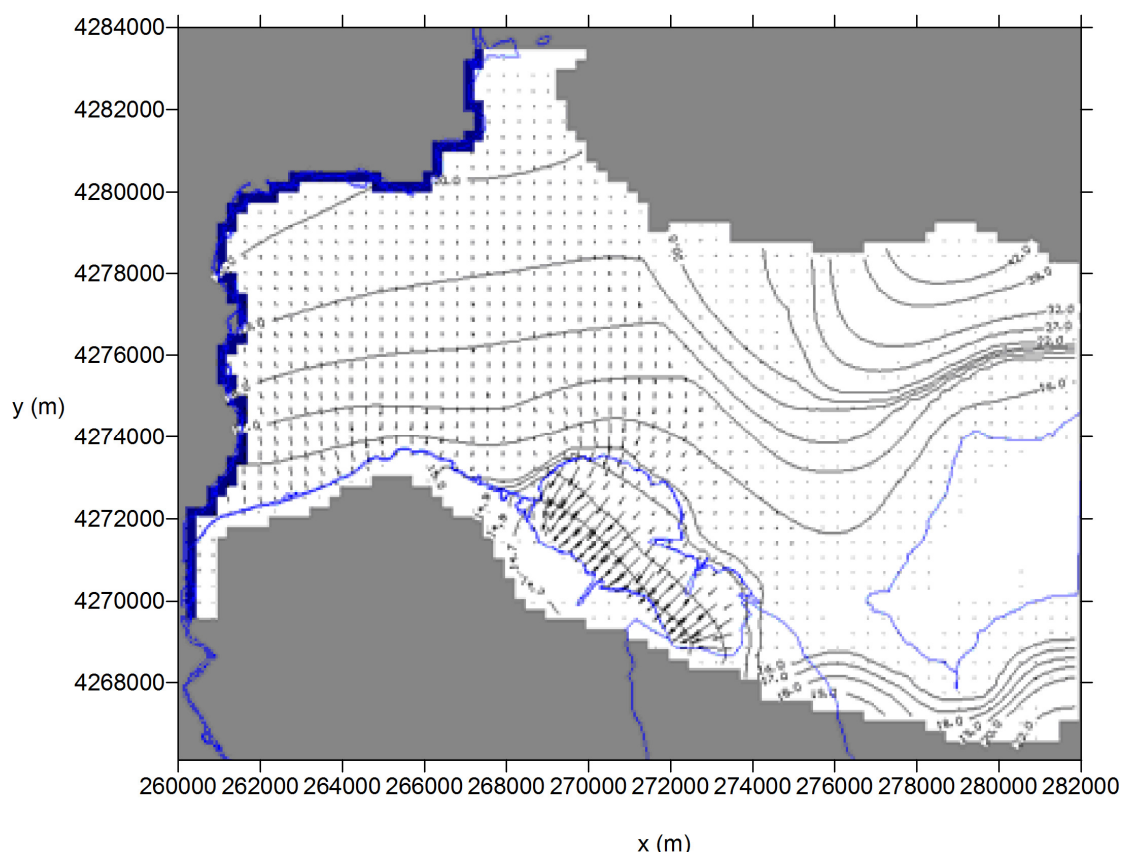
Στις αλλουβιακές αποθέσεις των υδρολογικών λεκανών του Αχελώου και της Λυσιμαχείας κατείσδυει ένα μεγάλο ποσοστό των ατμοσφαιρικών κατακρημνισμάτων και του αρδευτικού νερού, γεγονός που αιτιολογεί την υψηλή τιμή κατείσδυσης των 300 mm/year (συντελεστής κατείσδυσης 15%) που υπολογίστηκε κατά τη βαθμονόμηση του μοντέλου. Στις περιοχές γύρω από τη λίμνη Λυσιμαχεία και τη λίμνη Τριχωνίδα, όπου οι γεωλογικοί σχηματισμοί είναι λιγότερο περατοί, ο συντελεστής κατείσδυσης εκτιμήθηκε γύρω στο 8%, ενώ για τους ακόμα λιγότερο περατούς σχηματισμούς εκτιμήθηκε κατά τη βαθμονόμηση του μοντέλου συντελεστής κατείσδυσης 5%.



**Σχήμα 6.20:** Τιμές κατείσδυσης που χρησιμοποιήθηκαν στην περιοχή μελέτης κατά τη βαθμονόμηση του IRENE–HYD



Στο Σχήμα 6.21 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του μοντέλου για μόνιμη ροή, για τα πιεζομετρικά φορτία, τη στάθμη των επιφανειακών νερών και το πεδίο ταχυτήτων. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.21, ο Αχελώος τροφοδοτεί σε όλο του το μήκος τον υπόγειο υδροφόρα και τα υπόγεια νερά τροφοδοτούν τις λίμνες Λυσιμαχεία και Τριχωνίδα. Με το IRENE–HYD υπολογίστηκε ότι ο Αχελώος τροφοδοτεί με περίπου  $9.2 \times 10^6$  m<sup>3</sup> νερού ανά έτος τα υπόγεια νερά, ενώ επιπλέον περίπου  $40.8 \times 10^6$  m<sup>3</sup> νερού ανά έτος κατεισδύουν στον αλλουβιακό υδροφόρα των υδρολογικών λεκανών του Αχελώου και της Λυσιμαχείας. Αυτά τα συνολικά  $50 \times 10^6$  m<sup>3</sup> νερού ανά έτος καταλήγουν μέσω της υπόγειας ροής στη λίμνη Λυσιμαχεία. Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, η Λυσιμαχεία έχει επιπλέον εισροή  $290 \times 10^6$  m<sup>3</sup> νερού ανά έτος από τη λίμνη Τριχωνίδα μέσω της σήραγγας Λυσιμαχείας–Τριχωνίδας. Η εκροή της Λυσιμαχείας γίνεται μέσω του ποταμού Δίμηκου ( $120 \times 10^6$  m<sup>3</sup> νερού ανά έτος) και τη σήραγγα Λυσιμαχείας ( $220 \times 10^6$  m<sup>3</sup> νερού ανά έτος) που διοχετεύει το νερό στην υδρολογική λεκάνη του Αιτωλικού.



**Σχήμα 6.21:** Αποτελέσματα του IRENE–HYD για τις τιμές των πιεζομετρικών φορτίων, τη στάθμη των επιφανειακών νερών και το πεδίο ταχυτήτων στην περιοχή μελέτης



Στον Πίνακα 6.3 παρουσιάζεται η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD και των μετρήσεων πεδίου για τις στάθμες στις γεωτρήσεις παρατήρησης.

**Πίνακας 6.3:** Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων του IRENE–HYD και των μετρήσεων πεδίου για τις στάθμες στις γεωτρήσεις παρατήρησης

Όνομασία	Μ.Ο. Στάθμης (m)	Αποτελέσματα IRENE–HYD (m)	Σχετικό Σφάλμα (%)
PG4	16.3	15.94	2.21
PG5	16.25	16.05	1.23
PG7	15.8	15.36	2.78
PG9	16	15.79	1.31
PG11	17	15.5	8.82
PG13	16	15.72	1.75
PG14	16	16.03	0.19
PG15	16	17.49	9.31
PG21	18	17.71	1.61
PG25	17	16.82	1.06
PG28	34.27	19	44.56
PG29	18.23	18.1	0.71
PG30	19	17.38	8.53
PG32	19.81	20	0.96
PG33	19.2	19.98	4.06
		<b>MRE</b>	<b>3.18</b>

Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 6.3, η σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων και των μετρήσεων πεδίου είναι πολύ ικανοποιητική. Εξαίρεση αποτελεί η γεώτρηση PG28 όπου η μετρούμενη τιμή είναι στα 34.27 m και η υπολογιζόμενη τιμή από το IRENE–HYD είναι 19 μέτρα. Κατά μία επίσκεψη στην περιοχή μελέτης, παρατηρήθηκε ότι η περιοχή όπου βρίσκεται η γεώτρηση PG28 είναι ελώδης, οπότε έτσι δικαιολογείται η υψηλή στάθμη. Εξαιρώντας τη γεώτρηση PG28, το μέσο σχετικό σφάλμα μεταξύ αριθμητικών αποτελεσμάτων και μετρήσεων πεδίου είναι 3.18%.

## 6.4 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο το ολοκληρωμένο υδροδυναμικό μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων νερών IRENE–HYD εφαρμόστηκε στην περιοχή των υδρολογικών λεκανών Αχελώου–Λυσιμαχείας–Τριχωνίδας. Η περιοχή μελέτης έχει πολλές αγροτικές δραστηριότητες και αρδεύεται με αυλάκια, με αποτέλεσμα ένα σημαντικό ποσοστό του αρδευτικού νερού να κατεισδύει στον υπόγειο υδροφόρα. Από τις στάθμες που μετρήθηκαν σε γεωτρήσεις παρατήρησης που είναι εγκατεστημένες στην περιοχή,

προέκυψε ότι η στάθμη των υπόγειων υδάτων δε μεταβάλλεται σημαντικά μεταξύ υγρής και ξηρής περιόδου. Συνεπώς αποφασίστηκε να εφαρμοστεί το IRENE–HYD στην περιοχή μελέτης για συνθήκες μόνιμης ροής. Η σύγκλιση μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων και των μετρήσεων πεδίου για τα πιεζομετρικά φορτία ήταν πολύ ικανοποιητική. Από την εφαρμογή του IRENE–HYD επιβεβαιώθηκαν οι εκτιμήσεις που είχαν γίνει από μελέτες του ΙΓΜΕ για το υδατικό ισοζύγιο της περιοχής. Ωστόσο, η εφαρμογή του IRENE–HYD στη συγκεκριμένη περιοχή δεν αποτελεί μία διεξοδική αριθμητική προσομοίωση του συστήματος των υδρολογικών λεκανών του Αχελώου, της Λυσιμαχείας και της Τριχωνίδας, αλλά μία επιβεβαίωση ότι το IRENE–HYD μπορεί να εφαρμοστεί επιτυχώς σε πραγματικά προβλήματα αλληλεπίδρασης επιφανειακών–υπόγειων νερών με σύνθετη γεωμετρία και υδρογεωλογικές συνθήκες.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

---

Το αντικείμενο της παρούσας διδακτορικής διατριβής ήταν η αριθμητική προσομοίωση και η πειραματική διερεύνηση της αλληλεπίδρασης ροής και ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών.

Αναπτύχθηκε το ολοκληρωμένο μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων νερών IRENE, το οποίο αποτελείται από το τρισδιάστατο ολοκληρωμένο υδροδυναμικό μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων νερών IRENE–HYD και το τρισδιάστατο ολοκληρωμένο μοντέλο ποιότητας επιφανειακών–υπόγειων νερών IRENE–QUAL. Το IRENE–HYD αποτελείται από (α) υπό–μοντέλο ροής επιφανειακών υδάτων και (β) υπό–μοντέλο ροής υπόγειων υδάτων. Στο υπό–μοντέλο ροής επιφανειακών υδάτων του IRENE–HYD επιλύονται οι εξισώσεις ρηχών νερών σταθερής πυκνότητας και στο υπό–μοντέλο ροής των υπόγειων υδάτων επιλύεται η εξίσωση που περιγράφει την τρισδιάστατη μη μόνιμη κορεσμένη ροή σε ετερογενές ανισότροπο πορώδες μέσο. Το IRENE–HYD μπορεί να εφαρμοστεί για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ υπόγειων νερών και παράκτιων υδάτων, εκβολών ποταμών, υγροτόπων ή λιμνών, σε περιπτώσεις όπου μπορεί να γίνει η παραδοχή ρηχών νερών αλλά η υπόθεση πως οι ταχύτητες ροής είναι περίπου οριζόντιες και δε μεταβάλλονται σημαντικά με το βάθος δεν είναι ρεαλιστική, οπότε θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα τρισδιάστατο αριθμητικό μοντέλο για την προσομοίωση της υδροδυναμικής κυκλοφορίας στο

επιφανειακό υδάτινο σώμα. Σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει στα ολοκληρωμένα μαθηματικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών που υπάρχουν διαθέσιμα στη βιβλιογραφία, όπου τα υπό–μοντέλα ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων συνδυάζονται είτε στην κατακόρυφη είτε στις οριζόντιες διευθύνσεις, ο τρισδιάστατος χαρακτήρας του IRENE–HYD επιτρέπει τον λεπτομερή συνδυασμό της ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων τόσο στην κατακόρυφη όσο και στις οριζόντιες διευθύνσεις. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί σημαντικό, για παράδειγμα, όταν ενδιαφέρει η ακριβής προσομοίωση της κίνησης ρύπων μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών.

Ένας από τους λόγους που δεν είχε μέχρι σήμερα δημοσιευθεί κάποιο ολοκληρωμένο αριθμητικό μοντέλο επιφανειακών–υπόγειων νερών στο οποίο να θεωρείται τρισδιάστατη η ροή τόσο των επιφανειακών όσο και των υπόγειων υδάτων, είναι το υπολογιστικό κόστος μίας τέτοιας προσέγγισης. Στο IRENE–HYD ωστόσο, το ημι–πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιείται στο υπό–μοντέλο ροής των επιφανειακών υδάτων, επιτρέπει την ταυτόχρονη συνδυασμένη επίλυση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων νερών με τρόπο ο οποίος δεν είναι υπολογιστικά δαπανηρός. Συγκεκριμένα, η προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών επιτυγχάνεται με την ταυτόχρονη επίλυση δύο μόνο εξισώσεων, των συνδυασμένων εξισώσεων της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων και συνέχειας των υπόγειων υδάτων. Ο αλγόριθμος της ταυτόχρονης συνδυασμένης επίλυσης των εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων νερών που προτείνεται στην παρούσα διατριβή και εφαρμόζεται στο IRENE–HYD, μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα τρισδιάστα ολοκληρωμένα μαθηματικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων υδάτων, όπου γίνεται η παραδοχή υδροστατικής κατανομής της πίεσης στο επιφανειακό υδάτινο σώμα. Βέβαια, η ταυτόχρονη συνδυασμένη επίλυση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων απαιτεί τη χρήση κοινού μεγέθους χρονικού βήματος στα υπό–μοντέλα των επιφανειακών και των υπόγειων νερών. Για αυτόν τον λόγο, στο IRENE–HYD συμπεριλαμβάνεται και ένας δεύτερος αλγόριθμος επίλυσης, ο οποίος βασίζεται στη μέθοδο εσωτερικού συνδυασμού των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών και επιτρέπει τη χρήση διαφορετικού χρονικού βήματος στα υπό–μοντέλα ροής των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων.

Οι περιπτώσεις ελέγχου που διερευνήθηκαν έδειξαν ότι το IRENE–HYD μπορεί να εκτιμήσει με ακρίβεια την αλληλεπίδραση μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων

νερών. Τα αποτελέσματα του μοντέλου συγκρίθηκαν με αυτά αναλυτικών λύσεων που ισχύουν σε απλές περιπτώσεις αλληλεπίδρασης.

Στο υπό-μοντέλο ροής επιφανειακών υδάτων του IRENE-HYD συμπεριλαμβάνεται αλγόριθμος διαβροχής και ξήρανσης υπολογιστικών κελιών του επιφανειακού υδάτινου σώματος, ο οποίος αποτελεί τροποποίηση της μεθόδου MLU που προτάθηκε από τους Casulli and Cheng (1992). Οι δύο περιπτώσεις ελέγχου που διερευνήθηκαν στο Κεφάλαιο 3 έδειξαν ότι το FLOW-3DL μπορεί να εκτιμήσει τη διακύμανση της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των επιφανειακών υδάτων σε δύσκολα προβλήματα όπου λαμβάνει χώρα διαβροχή ή ξήρανση περιοχών του υπολογιστικού πλέγματος. Σε αντίθεση με τη μέθοδο MLU, η μέθοδος διαβροχής και ξήρανσης που εφαρμόζεται στο FLOW-3DL δεν οδηγεί σε υπερεκτίμηση του όγκου νερού που μπορεί να αποθηκευτεί στα υπολογιστικά κελιά.

Η μέθοδος εκτίμησης της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων νερών που εφαρμόζεται στο υπό-μοντέλο ροής υπόγειων υδάτων του IRENE-HYD αποτελεί έναν συνδυασμό των μεθόδων που χρησιμοποιούνται στα αριθμητικά μοντέλα των Huyakorn et al. (1994), HydroGeologic (1998) και Nanou-Giannarou and Helmig (1998). Είναι η πρώτη φορά που παρόμοια μέθοδος εφαρμόζεται σε μη εμπορικό κώδικα πεπερασμένων διαφορών. Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι υπολογίζονται πιεζομετρικά φορτία για όλους τους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος των υπόγειων υδάτων – και όχι μόνο για το τμήμα του υπολογιστικού πλέγματος που βρίσκεται κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια των υπόγειων νερών – οπότε δεν υπάρχει ανάγκη απομόνωσης των ξηρών υπολογιστικών κελιών από το υπολογιστικό πεδίο και μετέπειτα μετατροπής τους σε ‘ενεργά’ (μερικώς ή πλήρως κορεσμένα) κελιά. Όπως αποδείχτηκε από την πρώτη περίπτωση ελέγχου που διερευνήθηκε στο Κεφάλαιο 3, η μέθοδος που χρησιμοποιείται στο IRENE-HYD μπορεί να εκτιμήσει με ακρίβεια τη χρονικά μεταβαλλόμενη θέση της ελεύθερης επιφάνειας των υπόγειων υδάτων. Ωστόσο, επειδή ακριβώς υπολογίζονται πιεζομετρικά φορτία για όλους τους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος των υπόγειων υδάτων, μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις που είναι μεγάλος ο αριθμός των ξηρών κελιών να οδηγήσει σε μεγάλους υπολογιστικούς χρόνους.

Δύο ακόμη σημαντικά χαρακτηριστικά του IRENE-HYD αποτελούν (α) η δυνατότητα εκτίμησης της επιφάνειας διήθησης και (β) η ικανότητα εκτίμησης της χρονικά μεταβαλλόμενης θέσης της ελεύθερης επιφάνειας επιφανειακών και υπόγειων υδάτων σε συστήματα επιφανειακών-υπόγειων νερών.

Μία αδυναμία του IRENE–HYD αποτελεί η χρήση απλού υπολογιστικού πλέγματος. Παρόλο που οι διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος μπορεί να είναι μεταβλητές στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$  και τα στρώματα στα οποία διαιρείται το υπολογιστικό πεδίο μπορεί να μην είναι οριζόντια, έτσι ώστε να ακολουθούν τα όρια διαφορετικών γεωλογικών σχηματισμών, δεν είναι δυνατόν να προσεγγισθούν με ακρίβεια σύνθετες γεωμετρίες. Ωστόσο η μέθοδος συνδυασμού των εξισώσεων των επιφανειακών και των υπόγειων νερών που προτείνεται εδώ θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε ολοκληρωμένα μαθηματικά μοντέλα επιφανειακών–υπόγειων νερών όπου χρησιμοποιείται η μέθοδος πεπερασμένων όγκων και υπάρχει η δυνατότητα χρήσης μεγάλης ποικιλίας υπολογιστικών πλεγμάτων.

Εξ' όσων γνωρίζει η συγγραφέας της παρούσας διατριβής, το IRENE–QUAL είναι το μοναδικό τρισδιάστατο μοντέλο ποιότητας επιφανειακών–υπόγειων νερών που υπάρχει δημοσιευμένο στη βιβλιογραφία. Το IRENE–QUAL μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης της ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών υδάτινων σωμάτων και υπόγειων νερών για περιπτώσεις συντηρητικών ρύπων ή ρύπων των οποίων η βιολογική ή ραδιενεργός διάσπαση ακολουθεί κινητική πρώτης τάξης. Στο υπό–μοντέλο ποιότητας υπόγειων νερών του IRENE–QUAL είναι δυνατόν να προσομοιωθεί η προσρόφηση ρύπου από το πρώδες μέσο, η οποία θεωρείται ότι περιγράφεται από τη γραμμική ισόθερμη προσρόφηση ισορροπίας, την ισόθερμη προσρόφηση ισορροπίας Freundlich ή την ισόθερμη προσρόφηση ισορροπίας Langmuir.

Λόγω του μικτού υπερβολικού–παραβολικού χαρακτήρα των εξισώσεων μεταφοράς–τυρβώδους διάχυσης ρύπων σε επιφανειακά νερά και μεταφοράς–διασποράς ρύπων σε υπόγεια νερά, στο IRENE–QUAL συμπεριλαμβάνονται διάφορα αριθμητικά σχήματα για την αποτελεσματική επίλυση των όρων μεταφοράς και των όρων τυρβώδους διάχυσης ή υδροδυναμικής διασποράς των εξισώσεων. Υπάρχει έτσι η δυνατότητα επιλογής του κατάλληλου αριθμητικού σχήματος ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια της λύσης.

Ο συνδυασμός των υπό–μοντέλων ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων υδάτων του IRENE–QUAL πραγματοποιείται στην κοινή διεπιφάνεια των επιφανειακών–υπόγειων νερών, θεωρώντας –σε αντίθεση με προηγούμενες εργασίες– ότι τόσο ο μηχανισμός της μεταφοράς όσο και ο μηχανισμός της διασποράς συμβάλλουν στην ανταλλαγή ρύπων μεταξύ των επιφανειακών και των

υπόγειων νερών. Ο μηχανισμός της διασποράς είναι σημαντικός για την εκτίμηση της ανταλλαγής ρύπων μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων υδάτων σε περιπτώσεις μικρών υδραυλικών κλίσεων μεταξύ των επιφανειακών και των υπόγειων νερών και άρα μικρών ταχυτήτων στην κοινή τους διεπιφάνεια. Αν χρησιμοποιηθεί κοινό μέγεθος χρονικού βήματος στα υπό-μοντέλα ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών οι αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν από τη διακριτοποίηση των εξισώσεων μεταφοράς-τυρβώδους διάχυσης ρύπων σε επιφανειακά νερά και μεταφοράς-διασποράς ρύπων σε υπόγεια νερά μπορούν να γραφτούν υπό τη μορφή ενός συστήματος εξισώσεων, το οποίο επιλύεται σε κάθε χρονικό βήμα για τον υπολογισμό των ρυπαντικών φορτίων σε επιφανειακά και υπόγεια νερά με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων ή με τη μέθοδο LANCZOS/ORTHOMIN με προρύθμιση μη πλήρους διάσπασης κατά Cholesky. Εναλλακτικά, για περιπτώσεις συστημάτων επιφανειακών-υπόγειων νερών μεγάλης έκτασης, με σημαντικά διαφορετικές χρονικές κλίμακες στη ροή των επιφανειακών και των υπόγειων νερών και συνεπώς στη μεταφορά ρύπων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διαφορετικό χρονικό βήμα στα υπό-μοντέλα ποιότητας επιφανειακών και υπόγειων υδάτων. Τότε, οι εξισώσεις των υπό-μοντέλων ποιότητας των επιφανειακών και των υπόγειων νερών επιλύονται διαδοχικά αρκετές φορές σε κάθε χρονικό βήμα του υπό-μοντέλου ποιότητας των υπόγειων υδάτων, ώσπου να επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση για τις τιμές των συγκεντρώσεων σε επιφανειακά και υπόγεια νερά.

Οι περιπτώσεις ελέγχου που διερευνήθηκαν στο Κεφάλαιο 4 έδειξαν ότι οι αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στο IRENE-QUAL μπορούν με ακρίβεια να αναπαράγουν τα αποτελέσματα των αναλυτικών λύσεων. Από την ποιοτική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του μοντέλου για μία υποθετική περίπτωση αλληλεπίδρασης μεταξύ υδροφορέα και υδατορεύματος, αποδεικνύεται η ικανότητα του IRENE-QUAL να εκτιμά τα ρυπαντικά φορτία σε συστήματα επιφανειακών-υπόγειων νερών.

Η πειραματική διερεύνηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών έγινε σε δύο φάσεις. Κατά την πρώτη φάση διερευνήθηκε η αλληλεπίδραση ροής και ρύπανσης μεταξύ υδατορεύματος και υπόγειου υδροφορέα σε πειραματική διάταξη η οποία περιλαμβάνει ευθύγραμμο κανάλι ορθογωνικής διατομής το οποίο διέρχεται μέσα από ομογενή και ισότροπο υδροφορέα ο οποίος είναι κατασκευασμένος από ειδικό πορώδες υλικό του εμπορίου (polyurethane foam), με πυκνότητα πόρων σύμφωνα με τον κατασκευαστή 60 ppi (pores per inch). Δημιουργήθηκαν συνθήκες μόνιμης ροής και μετρήθηκαν: (α) η στάθμη του νερού



στον υδροφορέα και (β) οι συγκεντρώσεις συντηρητικού δείκτη στον υδροφορέα. Κατά τη δεύτερη φάση διερευνήθηκε η αλληλεπίδραση ροής και ρύπανσης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών σε πειραματική διάταξη η οποία κατασκευάστηκε με στόχο την προσομοίωση ιδεατής υδρολογικής λεκάνης που περιλαμβάνει υδατόρευμα και μικρή λίμνη, τα οποία επικοινωνούν μέσω αμμώδους φράγματος. Δημιουργήθηκαν συνθήκες μόνιμης και μη μόνιμης ροής και μετρήθηκαν (α) η στάθμη του νερού στο αμμώδες φράγμα και στα επιφανειακά νερά και (β) οι συγκεντρώσεις συντηρητικού δείκτη στο αμμώδες φράγμα και στο υδατόρευμα.

Η χρήση αφρού πολουρεθάνης αποτελεί μία πρωτότυπη προσέγγιση για την προσομοίωση υπόγειων υδροφορέων σε εργαστηριακό επίπεδο. Ωστόσο, κατά τη διεξαγωγή των πειραμάτων παρουσιάστηκαν κάποια προβλήματα τα οποία δεν κατέστη δυνατόν να ξεπεραστούν πλήρως. Εκτός από τα κατασκευαστικά προβλήματα της πειραματικής διάταξης χρησιμοποιώντας κομμάτια αφρού πολουρεθάνης, τα οποία θα ήταν εύκολο να μη δημιουργηθούν σε μελλοντικές ερευνητικές εργασίες, βασικό μειονέκτημα κατά την πειραματική διαδικασία αποτέλεσε η υψηλή διαπερατότητα του υλικού. Δεδομένου ότι το υλικό αυτό είναι διαθέσιμο στο εμπόριο με διαφορετικές πυκνότητες πόρων, θα μπορούσε να προταθεί ως ένα υλικό για την προσομοίωση υπόγειων υδροφορέων σε άλλες ερευνητικές εργασίες, επιλέγοντας μικρότερη πυκνότητα πόρων από 60 dpi.

Οι πειραματικές μετρήσεις χρησιμοποιήθηκαν για τη ρύθμιση και την επιβεβαίωση του ολοκληρωμένου αριθμητικού μοντέλου επιφανειακών-υπόγειων νερών IRENE. Κατά την επιβεβαίωση του μοντέλου, η σύγκλιση μεταξύ των αριθμητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων ήταν πολύ ικανοποιητική. Αξίζει να σημειωθεί ότι, εξ' όσων γνωρίζει η συγγραφέας της παρούσας διατριβής, δεν υπάρχουν στη βιβλιογραφία άλλες διαθέσιμες εργαστηριακές μετρήσεις της αλληλεπίδρασης μεταξύ επιφανειακών και υπόγειων νερών. Οι πειραματικές μετρήσεις που παρουσιάζονται στην παρούσα διατριβή μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε άλλες εργασίες για την επιβεβαίωση αριθμητικών μοντέλων.

---

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ****Διεθνής**

- Abbot, M.B., Bathurst, J.C., Cunge, J.A., O'Connell, P.E. and Rasmussen, J., 1986. An introduction to the European Hydrological System–Système Hydrologique Européen, “SHE”, 2: Structure of a physically–based, distributed modelling system. *Journal of Hydrology*, 87 (1–2), 61–77.
- Abuالتayef, M., Kuroiwa, M., Tanaka, K., Matsubara, Y. and Nakahira, J., 2008. Three–dimensional hydrostatic modeling of a bay coastal area. *Journal of Marine Science and Technology*, 13, 40–49.
- Adomian, G., 1994. Solving frontier problems in physics–the decomposition method. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Akanbi, A.A. and Katopodes, N.D., 1988. Model for flood propagation on initially dry land, *Journal of Hydraulic Engineering*, 114 (7), 689–706.
- Akan, A.O. and Yen, B.C., 1981. Mathematical model of shallow water flow over porous media. *Journal of the Hydraulics Division*, 107 (4), 479–494.
- Akylas, E. and Koussis, A.D., 2007. Response of sloping unconfined aquifer to stage changes in adjacent stream. I. Theoretical analysis and derivation of system response functions. *Journal of Hydrology*, 338 (1–2), 85–95.
- Anderson, E.A., 1968. Development and testing of snowpack energy balance equations. *Water Resources Research*, 4, 19–37.
- Anderson, E.I., 2002. Conformal mapping of groundwater flow fields with internal boundaries. *Advances in Water Resources*, 25 (3), 279–291.
- Anderson, E.I., 2003a. The effective resistance to vertical flow in Dupuit models. *Advances in Water Resources*, 26 (5), 513–523.
- Anderson, E.I., 2003b. An analytical solution representing surface water–groundwater interaction. *Water Resources Research*, 39 (3), 1071.
- Anderson, M.P., Ward, D.S., Lappala, E.G. and Prickett, T.A., 1993. Computer models for subsurface water. In: Maidment, D.R. (Ed.), *Handbook of Hydrology*, Chapter 22, McGraw–Hill, New York.
- Aral, M.M., 1990. *Groundwater Modeling in Multilayer Aquifers: Unsteady Flow*. Lewis Publishers, London.
- Atzeni, A., Balzano, A., Falconer, R.A., Lin, B.L. and Wu, Y., 2001. Comparison of shallow water models with accurate treatment of flooding and drying. *Proceedings of the XXIX IAHR Congress, Beijing*, pp. 350–357.

- Avarin, V.I. and Numerov, S.N., 1965. Theory of fluid flow in undeformable porous media. Daniel Davy, New York.
- Axelsson, O. and Lindskog, G., 1986. On the eigenvalue distribution of a class of preconditioning methods. *Numerical Mathematics*, 48, 479–498.
- Backhaus, J., 1985. A three-dimensional model for the simulation of shelf sea dynamics. *Deutsche Hydrographische Zeitschrift*, 38, 165–187.
- Bakker, M., 1999. Simulating groundwater flow in multi-aquifer systems with analytical and numerical Dupuit models. *Journal of Hydrology*, 222 (1–4), 55–64.
- Bakker, M., 2002. Two exact solutions for a cylindrical inhomogeneity in a multi-aquifer system. *Advances in Water Resources*, 25 (1), 9–18.
- Bakker, M., 2004. Modeling groundwater flow to elliptical lakes and through multi-aquifer elliptical inhomogeneities. *Advances in Water Resources*, 27 (5), 497–506.
- Balzano, A., 1998. Evaluation of methods for numerical simulation of wetting and drying in shallow water flow models. *Coastal Engineering*, 34, 83–107.
- Barlow, P.M., DeSimone, L.A. and Moench, A.F., 2000. Aquifer response to stream-stage and recharge variations. II. Convolution method and applications. *Journal of Hydrology*, 203 (3–4), 211–229.
- Barron, C.N., Kara, A.B., Martin, P.J., Rhodes, R.C., and Smedstad, L.F., 2006. Formulation, implementation and examination of vertical coordinate choices in the Global Navy Coastal Ocean Model (NCOM). *Ocean Modelling*, 11, 347–375.
- Basak, P., 1979. An analytical solution for the transient ditch drainage problem. *Journal of Hydrology*, 41 (3–4), 377–382.
- Bathe, K.J. and Khosroftaar, M.R., 1979. Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 3, 13–22.
- Bear, J., 1972. Dynamics of fluids in porous media. American Elsevier Publishing Company, New York.
- Bear, J., 1979. Hydraulics of groundwater. McGraw–Hill Book Company, New York.
- Bear, J. and Cheng, A., H.–D., 2008. Modelling groundwater flow and contaminant transport. Springer–Verlag New York Inc.
- Bedford, K.W., Sykes, R.M. and Libicki, C., 1983. Dynamic advective water quality model for rivers. *Journal of Environmental Engineering*, 109 (3), 535–554.
- Bencala, K.E. and Walters, R.A., 1983. Simulation of solute transport in a mountain pool-riffle stream: a transient storage model. *Water Resources Research*, 19 (3), 718–724.

- Bertolazzi, E., 1990. Metodo PCG ed applicazione ad un modello di acque basse. Thesis, Department of Mathematics, University of Trento.
- Binley, A.M., Elgy, J. and Beven, K.J., 1989a. A physically based model of heterogeneous hillslopes, 1: Runoff production. *Water Resources Research*, 25 (6), 1219–1226.
- Binley, A.M., Beven, K.J. and Elgy, J., 1989b. A physically based model of heterogeneous hillslopes, 2: Effective hydraulic conductivities. *Water Resources Research*, 25 (6), 1227–1234.
- Birkinshaw, S.J. and Ewen, J., 2000. Nitrogen transformation component for SHETRAN catchment nitrate transport modelling. *Journal of Hydrology*, 230, 1–17.
- Blumberg, A.F. and Mellor, G.L., 1980. A coastal ocean numerical model. In: J. Sundermann, J. and Holz, K.P. (Eds.), *Mathematical Modeling of Estuarine Physics*, Proc. Int. Symp., Hamburg, August 1978, Springer, Berlin, 1980, pp. 102–132.
- Blumberg, A.F. and Herring, H.J., 1987. Circulation modeling using orthogonal curvilinear coordinates. In: Nihoul, J.C.J. and Jamart, B.M. (Eds.), *Three Dimensional Models of Marine and Estuarine Dynamics*, Elsevier Oceanography Series, Vol. 45, Elsevier, Amsterdam, pp. 203–214.
- Blumberg, A.F. and Mellor, G.L., 1987. A description of a three dimensional coastal ocean circulation model. Heaps, N.S. (Eds.), *Three Dimensional Coastal Ocean Circulation Models*, Coastal and Estuarine Sciences, Vol. 4, AGU, Washington, DC, pp. 1–16.
- Boussinesq, J., 1877a. Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mém. présentés divers savants de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, 23 (1), 252–260.
- Boussinesq, J., 1877b. Théorie de l'écoulement tourbillant. *Mém. présentés divers savants de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, 23, 46–50.
- Boussinesq, J., 1903. Sur le débit, en temps de sécheresse, d'une source alimentée par une nappe d'infiltration. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 136, 1511–1517.
- Boussinesq, J., 1904. Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5me Ser., 10, 5–78.
- Bouwer, H. and Maddock, T., 1997. Making sense of the interaction between groundwater and streamflow: lessons for watermasters and adjudicators. *Rivers*, 6 (1), 19–31.

- Bradford, S.F. and Katopodes, N.D., 1998. Nonhydrostatic model for surface irrigation. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 124 (4), 200–212.
- Brooks, R.H. and Corey, A.T., 1966. Properties of porous media affecting fluid flow. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 92, 61–88.
- Bruen, M.P. and Osman, Y.Z., 2004. Sensitivity of stream–aquifer seepage to spatial variability of the saturated hydraulic conductivity of the aquifer. *Journal of Hydrology*, 293, 289–302.
- Brutsaert, W., 1966. Probability Laws of Pore-Size Distribution. *Soil Science*, 101, 85–92.
- Brutsaert, W., 1994. The unit response of groundwater outflow from a hillslope. *Water Resources Research*, 30 (10), 2759–2763.
- Burnett, R.D., and Frind, E.O., 1987. An alternating direction Galerkin technique for simulation of groundwater contaminant transport in three dimensions, 2, dimensionality effects. *Water Resources Research*, 23(4), 695–705.
- Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., 1959. *Conduction of heat in solids*. 2<sup>nd</sup> Edition, Oxford University Press, London.
- Casulli, V., 1988. Eulerian–Lagrangian methods for the Navier–Stokes equations at high Reynolds numbers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 8, 1349–1360.
- Casulli, V., 1990a. Numerical simulation of shallow water flow. In: Gambolati, G., Rinaldo, A., Brebbia, C.A., Gray, W.G. and Pinder, G.F. (Eds.), *Computational Methods in Surface Hydrology*, Springer, Berlin, pp. 13–22.
- Casulli, V., 1990b. Semi-implicit finite difference methods for the two-dimensional shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 86, 56–74.
- Casulli, V., and Cattani, E., 1994. Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method for three-dimensional shallow water flow. *Computers & Mathematics with Applications*, 27 (4), 99–112.
- Casulli, V., and Cheng, R.T., 1992. Semi-implicit finite difference methods for three-dimensional shallow water flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 15 (6), 629–648.
- Casulli, V. and Walters, R.A., 2000. An unstructured grid, three-dimensional model based on the shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 32, 331–348.
- Cebeci, T., Shao, J., Kafyeke, F. and Laurendeau, E., 2005. *Computational fluid dynamics for engineers*. Springer – Horizons Publishing Inc.

- Cey, E.E., Rudolph, D.L., Parkin, G.W. and Aravena, R., 1998. Quantifying groundwater discharge to a small perennial stream in southern Ontario, Canada. *Journal of Hydrology*, 210 (1–4), 21–37.
- Chapman, T.G., 1980. Modeling groundwater flow over sloping beds. *Water Resources Research*, 16 (6), 1114–1118.
- Chauhan, H.S., Schwab, G.O. and Hamdy, M.Y., 1968. Analytical and computer solutions of transient water tables for drainage of sloping land. *Water Resources Research*, 4 (3), 573–579.
- Chen, C., Kuang, X. and Jiao, J.J., 2010. Methods to derive the differential equation of the free surface boundary. *Ground Water*, 48 (3), 329–332.
- Chen, C., Liu, H., Beardsley, R.C., 2003. An unstructured grid, finite volume, three-dimensional, primitive equations ocean model: application to coastal ocean and estuaries. *J. Atmospheric and Oceanic Technology* 20, 159–186.
- Chen, X., 2003. A free-surface correction method for simulating shallow water flows. *Journal of Computational Physics*, 189, 557–578.
- Chen, Y. and Falconer, R.A., 1992. Advection-diffusion modeling using the modified QUICK scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 15, 1171–1196.
- Cheng, R.T., Casulli, V. and Milford, S.N., 1984. Eulerian-Lagrangian solution of the convection-dispersion equation in natural coordinates. *Water Resources Research*, 20 (7), 944–952.
- Cheng, R.T. and Smith, P.E., 1990. A survey of three-dimensional numerical estuarine models. In: Spaulding, M.L. (Ed.), *Estuarine and Coastal Modeling*, ASCE, New York.
- Choi, D.Y. and Wu, C.H., 2006. A new efficient 3D non-hydrostatic free-surface flow model for simulating water wave motions. *Ocean Engineering*, 33, 587–609.
- Chow, V.T. and Ben-Zvi, A., 1972. Hydrodynamic modelling of two-dimensional watershed flow. *Journal of the Hydraulics Division*, 99 (HY11), 2023–2040.
- Chow, V.T., Maidment, D.R. and Mays, L.W., 1988. *Applied hydrology*. McGraw-Hill Book Company, New York.
- Clauser, C., Bartels, J., Cheng, L., Ranalli, G., Chiang, W. and Pape H., 2003. *SHEMAT and processing SHEMAT—numerical simulation of reactive flow in hot aquifers*. Springer, Heidelberg–Berlin.
- Conte, S.D. and deBoor, C., 1972. *Elementary Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York.

- Cooper, H.H.Jr. and Rorabaugh, M.I., 1963. Groundwater movements and bank storage due to flood stages in surface streams. USGS, Water-Supply Paper 1536-J, pp. 343-366.
- Courant, R., Friedrichs, K. and Lewy, H., 1928. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100 (1), 32-74.
- Crandball, C.A., Katz, B.G. and Hirten, J.J., 1999. Hydrochemical evidence for mixing of river water and groundwater during high-flow conditions, lower Suwannee River basin, Florida, USA. *Hydrogeology Journal*, 7, 454-467.
- Crowe, A.S., Shikaze, S.G. and Ptacek, C.J., 2004. Numerical modelling of groundwater flow and contaminant transport to Point Pelee marsh, Ontario, Canada. *Hydrological Processes*, 18, 293-314.
- Davies, A.M., 1991. On the accuracy of finite difference and modal methods for computing tidal and wind wave current profiles. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 12, 101-124.
- de Marsily, G., 1986. *Quantitative Hydrogeology*. Academic Press, Orlando, Florida.
- de Wiest, R.J.M., 1965. *Geohydrology*. John Wiley, New York.
- Demirdzic, I.A., 1982. A finite volume method for computation of fluid flow in complex geometries. PhD thesis, University of London, Imperial College.
- Demuren, A.O. and Rodi, W., 1984. Calculation of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts. *Journal of Fluid Mechanics*, 140, 189-222.
- Desai, C.S. and Li, G.C., 1983. A residual flow procedure and application for free surface flow in porous media. *Advances in Water Resources*, 6, 27-35.
- DHI, 1993. MIKE SHE, Technical Reference Manual-Water movement module-release 1.0. Danish Hydraulic Institute, Denmark.
- DHI, 2008. MIKE SHE, User Manual, Volume 1: User Guide. Danish Hydraulic Institute, Denmark.
- DHI-WASY GmbH, 2010. FEFLOW Version 6, Finite Element Subsurface Flow and Transport Simulation System, User's Manual. DHI-WASY GmbH, Berlin.
- Diersch, H.-J.G., 1998. Treatment of free surfaces in 2D and 3D groundwater modelling. *Mathematische Geologie*, 2 (2), 17-43.
- Dillon, P.J. and Liggett, J. A., 1983. An ephemeral stream-aquifer interaction model. *Water Resources Research*, 19 (3), 621-626.
- Domenico, P.A., and Schwartz, F.W., 1998. *Physical and Chemical Hydrogeology*, 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons, New York.

- Ebrahimi, K., Falconer, R.A. and Lin B., 2007. Flow and solute fluxes in integrated wetland and coastal systems. *Environmental Modelling and Software*, 22 (9), 1337–1348.
- Ebrahimi, K., 2004. Development of an integrated free surface and groundwater flow model. PhD Thesis, Cardiff University, Cardiff, UK.
- Erduran, K.S., Kutija, V. And Mcalister, C.R., 2005. Finite volume solution to integrated shallow surface–saturated groundwater flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 49 (7), 763–783.
- Ewen, J., Parkin, G. and O’Connell, P.E., 2000. SHETRAN: Distributed river basin flow and transport modelling system. *Journal of Hydrologic Engineering*, 5 (3), 250–258.
- Faidi, H.A., Garcia, L.A., and Maurice, M.A., 2002. Development of a model for simulation of solute transport in a stream–aquifer system. *Environmental Modeling and Assessment*, 7, 191–206.
- Falconer, R.A. and Owens, P.H., 1987. Numerical simulation of flooding and drying in a depth–averaged tidal flow model. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 83 (2), 161–180.
- Falconer, R.A. and Chen, Y., 1991. An improved presentation of flooding and drying and wind stress effects in a two-dimensional tidal numerical model. *Proceedings of Institution of Civil Engineers, London, UK*, (2), 659–678.
- Falconer, R.A., 1992. Flow and water quality modelling in coastal and inland waters. *Journal of Hydraulic Research*, 20 (4), 437–452.
- Falconer R.A., 1993. An introduction to nearly horizontal flows. In: Abbot, M.B. and Price, W.A. (Eds.), *Coastal, Estuarial and Harbour Engineers’ Reference Book*. E. and F.N. Spon Ltd., London.
- Falconer, R.A. and Li, G., 1994. Numerical modelling of tidal eddies in narrow entranced coastal basins using the  $k-\epsilon$  turbulence model. In: Bevan K., Chatwin P. C. and Millbank J. H (Eds.), *Mixing and Transport in the Environment*, John Wiley and Sons Ltd., New York
- Falconer, R.A., Lin, B., Wu, Y and Harris, E., 2001. DIVAST Reference Manual. Environmental Water Management Research Centre, Cardiff School of Engineering, Cardiff University.
- Faust, C.R., Sims, P.N., Spalding, C.P., Andersen, P.F., Lester, B.H., Shupe, M.G. and Harrover, A., 1993. FTWORK: groundwater flow and solute transport in three dimensions. Documentation Versions 2.8. Geo-Trans, Sterling, VA.
- Feng, K. and Molz, F.J., 1997. A 2–D, diffusion–based, wetland flow model. *Journal of Hydrology*, 196 (1–4), 230–250.



- Ferris, J.G., 1963. Cyclic water level fluctuations as a basis for determining aquifer transmissibility. In: Bentall, R., Methods of determining permeability, transmissibility and drawdown (compilation of reports). USGS, Water Supply Paper 1536-I, pp. 305–318.
- Fette, M.W., 2005. Tracer studies of river–groundwater interaction under hydropeaking conditions. PhD Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Switzerland.
- Flury, M. and Wai, N.N., 2003. Dyes as tracers for vadose zone hydrology. Reviews of Geophysics, 41 (1), 1–31.
- Fontana, L., Miglio, E., Quarteroni, A. and Saleri, F., 1999. A finite element method for 3D hydrostatic water flows. Computing and Visualization in Science, 2, 85–93.
- Forsyth, P.A., Wu, Y.S. and Pruess, K., 1995. Robust numerical methods for saturated-unsaturated flow with dry initial conditions in heterogeneous media. Advances in Water Resources 18, 25–38.
- Freeze, R.A., 1971. Three–dimensional transient saturated–unsaturated flow in a groundwater basin. Water Resources Research, 7 (2), 347–366.
- Freeze, R. A., 1972. Role of subsurface flow in generating surface runoff: 1. Base flow contributions to channel flow. Water Resources Research, 8 (3), 609–623.
- Freeze, R.A. and Cherry, J.A., 1979. Groundwater. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- French, R.H., 1986. Open Channel Hydraulics. McGraw–Hill Book Company, Singapore.
- Freyberg, D.L., Reeder, J.W., Franzini, J.B. and Remson, I., 1980. Application of the Green–Ampt model to infiltration under time-dependent surface water depths. Water Resources Research 16 (3), 517–528.
- Gandolfi, C. and Savi, F., 2000. A mathematical model for the coupled simulation of surface runoff and infiltration. Journal of Agricultural Engineering Research, 75 (1), 49–55.
- Garrels, R.M., Mackenzie, F.T., 1967. Origin of the chemical compositions of some springs and lakes. In: Stumm, W., Proc Symp Equilibrium Concepts in Natural Water Systems, Advances in Chem Ser 67, American Chemical Society, Washington, DC, pp. 222–242.
- Gelhar, L.W. and Axness, C.L., 1983. Three–dimensional stochastic analysis of macrodispersion in aquifers. Water Resources Research, 19, 161–180.
- Gelhar, L.W., Welty, C. and Rehfeldt, K.R., 1992. A critical review of data on field–scale dispersion in aquifers. Water Resources Research, 28, 1955–1974.

- Goede, E.D., 1993. Numerical methods for the three-dimensional shallow water equations on super computers. Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam.
- Goode, D. J. and Konikow, L. F., 1989. Modification of a method of characteristics solute transport model to incorporate decay and equilibrium-controlled sorption and ion exchanges. USGS Water-Resources Investigations Report 89-4030.
- Govindaraju, R.S. and Koelliker, J.K., 1994. Applicability of the linearised Boussinesq equation for modeling bank storage under uncertain parameters. *Journal of Hydrology*, 157 (1-4), 349-366.
- Goodman, T.R., 1964. Application of integral methods to transient nonlinear heat transfer. In: Irvine JR, T.F. and Hartnett, J.P. (Eds.), *Advances in heat transfer*, Volume 1, Academic Press, Inc., New York, pp. 51-122.
- Gottardi, G. and Venutelli, M., 1993. A control-volume finite-element model for two-dimensional overland flow. *Advances in Water Resources*, 16 (5), 277-284.
- Graham, N., Refsgaard, A., 2001. MIKE SHE: A distributed, physically based modelling system for surface water/groundwater interactions. In: *Proceedings of MODFLOW 2001 and other modelling odysseys*, Golden, Colorado, pp. 321-327.
- Green, W.H. and Ampt, C.A., 1911. Studies on soil physics, I. Flow of air and water through soils. *Journal of Agricultural Science*, 4, 1-24.
- Greenspan, D. and Casulli, V., 1998. *Numerical Analysis for Applied Mathematics, Science and Engineering*. Addison-Wesley, Reading Massachusetts.
- Gunduz, O., Aral, M. M., 2005. River networks and groundwater flow: a simultaneous solution of a coupled system. *Journal of Hydrology*, 301 (1-4), 216-234.
- Guo, W., 1997. Transient groundwater flow between reservoirs and water-table aquifers. *Journal of Hydrology*, 195 (1-4), 370-384.
- Guo, W., Langevin, C.D., 2002. User's guide to SEAWAT: a computer program for simulation of three-dimensional variable density ground-water flow: USGS, Open-File Report 01-434.
- Gupta, S.K., Cole, C.R. and Pinder, G.F., 1984. A finite element three-dimensional groundwater (FE3DGW) model for multiaquifer system. *Water Resources Research*, 20 (5), 553-563.
- Gurrieri, J.T. and Furniss, G., 2004. Estimation of groundwater exchange in alpine lakes using non-steady mass-balance methods. *Journal of Hydrology*, 297 (1-4), 187-208.
- Gustafsson, I., 1978. A class of first order factorization methods. *BIT*, 18, 142-156.
- Hall, F.R. and Moench, A.F., 1972. Application of the convolution equation to stream-aquifer relationships. *Water Resources Research*, 8 (2), 487-493.

- Ham, D.A., Pietrzak, J., Stelling, G.S., 2005. A scalable unstructured grid 3-dimensional finite volume model for the shallow water equations. *Ocean Modelling*, 10, 153–169.
- Hansen, S., Jensen, H.E., Nielsen, N.E. and Svendsen, H., 1991. Simulation of nitrogen dynamics and biomass production in winter wheat using the Danish simulation model DAISY. *Fertilizer Research*, 27, 245–259.
- Hantush, M.S., 1961a. Discussion of paper by P.P. Rowe: An equation for estimating transmissibility and coefficient of storage from river–level fluctuations. *Journal of Geophysical Research*, 66 (4), 1310–1311.
- Hantush, M.S., 1961b. Discussion of paper by D.F. Peterson: Intercepting drainage wells in artesian aquifers. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 87 (IR4), 79–81.
- Hantush, M.S., 1965. Wells near stream with semipervious beds. *Journal of Geophysical Research*, 70 (12), 2829–2838.
- Hantush, M.M., 2005. Modeling stream–aquifer interactions with linear response functions. *Journal of Hydrology*, 311 (1–4), 59–79.
- Hantush, M.M., Harada, M. and Marino, M.A., 2002. Hydraulics of stream flow routing with bank storage. *Journal of Hydrologic Engineering*, 7 (1), 76–89.
- Harbaugh, A.W., 2005. MODFLOW–2005, The U.S. Geological Survey modular ground–water model—the ground–water flow process. USGS, Techniques and Methods 6–A16.
- Harbaugh, A.W. and McDonald, M.G., 1996. User’s documentation for MODFLOW–96, an update to the USGS modular finite-difference ground-water flow model. USGS Open-File Report 96-485.
- Harbaugh, A.W., Banta, E.R., Hill, M.C., and McDonald, M.G., 2000. MODFLOW–2000, the U.S. Geological Survey modular ground-water model—User guide to modularization concepts and the Ground-Water Flow Process. USGS, Open-File Report 00-92.
- Harleman, D.R.F., 1966. Diffusion processes in stratified flow. In: Ippen, A.T. (Ed.), *Estuary and Coastline Hydrodynamics*, Chapter 12, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, pp. 575-597.
- Harlow, F.J. and Welch, J.E., 1965. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 8, 2182–2189.
- Harr, M.E., 1962. *Groundwater and Seepage*. Mc-Graw-Hill, New York. pp. 206.
- Heaps, N.S. (Eds.), 1987. *Three Dimensional Coastal Ocean Circulation Models*, Coastal and Estuarine Sciences, Vol. 4, AGU, Washington, DC.

- Henriksen, H.J., Per Nyegaard, L.T., Sonnenborg, T.O., Refsgaard, J.C. and Madsen, B., 2003. Methodology for construction, calibration and validation of a national hydrological model for Denmark. *Journal of Hydrology*, 280, 52–71.
- Hervouet, J.M., 2007. *Hydrodynamics of free surface flows*. John Wiley and Sons Ltd.
- Hestenes, MR. and Stiefel, E., 1952. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research for the National Bureau of Standards*, 49 (6), 409–436.
- Higgins, D.T., 1980. Unsteady drawdown in 2–D water table aquifer. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 106 (IR3), 237–251.
- Higham, N.J., 1996. *Accuracy and stability of numerical algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, USA.
- Hindmarsh, A.C., Gresho, P.M. and Griffiths, D.F., 1984. *International Methods for Numerical Methods in Fluids*, 4, 853–897.
- Hogarth, W.L., Govindaraju, R.S., Parlange, J.Y. and Koelliker, J.K, 1997. Linearised Boussinesq equation for modeling bank storage – a correction. *Journal of Hydrology*, 198 (1–4), 377–385.
- Hogarth, W.L., Parlange, J.Y., Parlange, M.B. and Lockington, D., 1999. Approximate analytical solution of the Boussinesq equation with numerical validation. *Water Resources Research*, 35 (10), 3193–3197.
- Holly, F.M.Jr. and Preissmann, A., 1977. Accurate calculation of transport in two-dimensions. *Journal of Hydraulics Division*, 103 (HY11), 1259–1277.
- Horton, R.E., 1933. The role of infiltration in the hydrologic cycle. *Transactions of the American Geophysical Union*, 14, 446–460.
- Horton, R.E., 1935. *Surface runoff phenomena*. Horton Hydrological Laboratory, Voorheesville, N.Y.
- Hubbert, M.K., 1940. The theory of groundwater motion. *Journal of Geology*, 48, 785–944.
- Hunt, B., 1990. An approximation for the bank storage effect. *Water Resources Research*, 26 (11), 2769–2775.
- Hussein, M., Schwartz, F. W., 2003. Modelling of flow and contaminant transport in coupled stream-aquifer systems. *Journal of Contaminant Hydrology*, 65 (1-2), 41–64.
- Huyakorn, P.S., Springer, E.P., Guvanasen, V. and Wadsworth, T.D., 1986. A three-dimensional finite-element model for simulating water flow in variably-saturated porous media. *Water Resources Research*, 22 (13), 1790–1808.
- Huyakorn, P.S., Wu, Y.S. and Park, N.S., 1994. An improved sharp-interface model

- for assessing NAPL contamination and remediation in groundwater systems. *Journal of Contaminant Hydrology*, 16, 203–234.
- HydroGeoLogic, 1998. MODFLOW-SURFACT v. 3.0: A comprehensive MODFLOW-based flow and transport simulator. Code Documentation Report. HydroGeoLogic Inc., Reston, USA.
- Ilyinsky, N.B. and Kacimov, A.R., 1992. Analytic estimation of ground water flow around cutoff wall and into interceptor ditches. *Ground Water*, 30, 901–906.
- Ingersoll, L.R., Zobel, O.J. and Ingersoll, A.C., 1948. Heat conduction with engineering and geological applications. McGraw–Hill Book Company, New York.
- Isaacson, E. and Keller, H.B., 1994. Analysis of numerical methods. Dover Publications, New York.
- Jea, K.C. and Young, D.M., 1983. On the simplification of generalized conjugate gradient methods for nonsymmetrizable linear systems. *Linear Algebra and its Application* 52, 399–417.
- Jobson, H.E., 1987. Lagrangian model of nitrogen kinetics in the Chattahoochee River. *Journal of Environmental Engineering*, 113 (2), pp. 223-242.
- Jobson, H.E., 1989. User's manual for an open-channel streamflow model based on the diffusion analogy. USGS, Water Resources Investigations 89-4133.
- Jobson, H.E., Harbaugh, A.W., 1999. Modifications to the diffusion analogy surface water flow model (DAFLOW) for coupling to the modular finite-difference groundwater flow model (MODLFOW). USGS, Open File Report 99-217.
- Kabala, Z.J. and Thorne, B., 1997. Hydraulics of one- and two-dimensional flow fields in aquifers. *Hydrological Sciences*, 42 (1), 1–14.
- Kacimov, R.A., 2000. Three-dimensional groundwater flow to a lake: an explicit analytical solution. *Journal of Hydrology*, 240 (1–2), 80–89.
- Kallin, R.S., Govindaraju, R.S. and Parlange, J.Y., 2000. Steady-state analysis of water movement in a semi-infinite unconfined aquifer under constant accretion. *Transport in Porous Media*, 40 (1), 165–169.
- Katopodes, N.D. and Strelkoff, T., 1977. Hydrodynamics of border irrigation: Complete model. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 103 (3), 309–324.
- Keating, E. and Zyvoloski, G., 2009. A stable and efficient numerical algorithm for unconfined aquifer analysis. *Ground Water* 47 (4), 569–579.
- Keery, J., Binley, A., Crook, N. and Smith, J.W.N., 2007. Temporal and spatial variability of groundwater–surface water fluxes: Development and application of

- an analytical method using temperature time series. *Journal of Hydrology*, 336 (1–2), 1–16.
- Kelley, C.T., 1995. *Iterative methods for linear and non-linear equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, USA.
- Kim, D.J. and Ann, M.J., 2001. Analytical solutions of water table variation in a horizontal unconfined aquifer: Constant recharge and bounded by parallel streams. *Hydrological Processes*, 15 (13), 2691–2699.
- Kipp, K.L., 1997. *Guide to the revised Heat and Solute Transport Simulator: HST3D-Version 2*. USGS, Water-Resources Investigations Report 97-4157.
- Kluge, T., Ilmberger, J., von Rohden, C. and Aeschbach-Hertig, W., 2007. Tracing and quantifying groundwater inflow into lakes using a simple method for radon-222 analysis. *Hydrology and Earth Systems Science*, 11, 1621–1631.
- Knapp, A.W., 2006. *Basic Algebra*. Birkhauser Boston Inc., Boston.
- Knupp, P., 1996. A moving mesh algorithm for 3–D regional groundwater flow with water table and seepage face. *Advances in Water Resources*, 19 (2), 83–95.
- Konikow, L. F. and Bredehoeft, J. D., 1978. *Computer model of two-dimensional solute transport and dispersion in ground water*. USGS, Water Resources Investigations Book 7.
- Konikow, L.F., Goode, D.J. and Hornberger, G.Z., 1996. *A three-dimensional method-of-characteristics solute-transport model (MOC3D)*. USGS, Water-Resources Investigations Report 96-4267.
- Kostiakov, A.H., 1932. On the dynamics of the coefficients of water percolation in soils and on the necessity of studying it from a dynamic point of view for purpose of amelioration. *Transactions of the 6<sup>th</sup> Congress of the International Society of Soil Science, Moscow, Russia, Part A*, 7–21.
- Koussis, A.D. and Akylas, E., 2007. Response of sloping unconfined aquifer to stage changes in adjacent stream. II. Applications. *Journal of Hydrology*, 338 (1–2), 73–84.
- Koutitas C. and O'Connor, B., 1980. Modeling 3D wind-induced flows. *Journal of the Hydraulic Division*, 11, 1843–1865.
- Koutitas, C., 1988. *Mathematical models in coastal engineering*. Pentech Press, London.
- Kowalik, Z. and Murty, T. S., 1993. *Numerical modeling of ocean dynamics*. Advanced Series on Ocean Engineering, Volume 5. World Scientific, Singapore and River Edge, NJ.
- Lal, A.M.W., 2001. Modification of canal flow due to stream–aquifer interaction. *Journal of Hydraulic Engineering*, 127 (7), 567–576.

- Lambs, L., 2003. Interactions between groundwater and surface water at river banks and the confluence of rivers. *Journal of Hydrology*, 288 (3–4), 312–326.
- Langevin, C., Swain, E. and Wolfert, M., 2005. Simulation of integrated surface-water/ground-water flow and salinity for a coastal wetland and adjacent estuary. *Journal of Hydrology*, 314 (1–4), 212–234.
- Lapham, W.W., 1989. Use of temperature profiles beneath streams to determine rates of vertical groundwater flow and vertical hydraulic conductivity. USGS, Water Supply Paper 2337.
- Lauder, B.E., Reece, G.J. and Rodi, W., 1975. Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics*, 68 (3), 537–566.
- Lauder, B.E. and Sharma, B.I., 1974. Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in heat and mass transfer*, 1 (2), 131–138.
- Lauder, B. and Spalding, D., 1974. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3, 269–289.
- Lauder, B.E., 1989. The prediction of force field effects on turbulent shear flows via second-moment closure. In: Fernholz, H.H. and Fielder, H.E. (Eds.), *Advances in turbulence 2*. Springer, Heidelberg, pp. 338–358.
- Leavesley, G.H., Lichty, R.W., Troutman, B.M., and Saindon, L.G., 1983. *Precipitation-runoff modeling system—User’s manual*. USGS, Water-Resources Investigations Report 83-4238.
- Leavesley, G.H., Markstrom, S.L., Viger, R.J., and Hay, L.E., 2005. USGS Modular Modeling System (MMS)—Precipitation–Runoff Modeling System (PRMS) MMS-PRMS. In: Singh, V. and Frevert, D. (Eds.), *Watershed Models*. Boca Raton, Fla., CRC Press.
- Leendertse, J.J., Alexander, R.C. and Liu, S.K., 1973. A three-dimensional model for estuaries and coastal seas: Vol. I, Principles of computations. Rep. R-1417-0 WRR, Rand Corporation, Santa Monica, CA.
- Leendertse, J.J., 1987. Aspects of SIMSYS2D, a system for two-dimensional flow computation. Santa Monica, CA, Rand Corporation Report R-3572-USGS.
- Leendertse, J.J., 1989. A new approach to three-dimensional free-surface flow modeling. Rep. R-3712-NETHIRC. Rand Corporation, Santa Monica, CA.
- Leonard, B. P., 1979. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 19, 59–98.

- Leonard, B.P., 1988. Universal Limiter for transient interpolation modelling of the advective transport equations: The ULTIMATE conservative difference scheme. NASA Technical Memorandum 100916 ICOMP-88-11, Washington, DC.
- Leonard, B.P., 1991. The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 88, 17–74.
- Leonard, B. P. and Niknafs, H.S., 1990. Cost-effective accurate coarse-grid method for highly convective multidimensional unsteady flows. NASA Conference Publication 3078: Computational Fluid Dynamics Symposium on Aeropropulsion, Washington, DC.
- Leonard, B.P. and Noye, B.J., 1989. Second and third order two-level implicit FDM's for unsteady one-dimensional convection-diffusion. In: Hogart, W.L. and Noye, B.J. (Ed.), *Computational Techniques and Applications, CTAC-89*, pp. 311–317.
- Liang, D., Falconer, R. A. and Lin, B., 2007. Coupling surface and subsurface flows in a depth averaged flood wave model. *Journal of Hydrology*, 337 (1–2), 147-158.
- Lin, B. and Falconer, R.A., 1997. Tidal flow and transport modeling using the ULTIMATE QUICKEST scheme. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123 (4), 303–314.
- Lin, B.L. and Falconer, R.A., 2001. Numerical modeling of three-dimensional tidal currents and water quality indicators in the Bristol Channel. *Water Maritime Engineering*, (3), 155–166.
- Lin, H.C., Richards, D.R., Yeh, G.T., Cheng, H.P. and Jones, N.L., 1997. FEMWATER: a three-dimensional finite element computer model for simulating density dependent flow and transport, in variably saturated media. Report CHL-96-12, US Army Corps of Engineer, Vicksburg, MS.
- Lin, Y.-C. and Medina Jr., M.A., 2003. Incorporating transient storage in conjunctive stream-aquifer modelling. *Advances in Water Resources*, 26 (9), 1001-1020.
- Liu, P.L.-F., Lin, P., Chang, K.-A. and Sakakiyama, T., 1999. Numerical modelling of wave interaction with porous structures. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 125 (6), 322–330.
- Livingstone, D.A., 1963. Chemical composition of rivers and lakes. USGS, Professional Paper 440–G.
- Loudyi, D., Falconer, R. and Lin, B., 2007. Mathematical development and verification of a non-orthogonal finite volume model for groundwater flow applications. *Advances in Water Resources*, 30 (1), 29–42.



- Lynch, D.R. and Werner, F.E., 1991. Three-dimensional hydrodynamics on finite elements. Part 11: non-linear time stepping model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 12, 507–533.
- Manson, J.R. and Wallis, S.G., 1995. An accurate numerical algorithm for advective transport. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11, 1039–1045.
- Manson, J.R., Wallis, S.G. and Hope, D., 2001. A conservative semi-Lagrangian transport model for rivers with transient storage zones. *Water Resources Research*, 37 (12), 3321–3329.
- Marino, M.A., 1973. Water table fluctuations in semi-pervious stream-unconfined aquifer systems. *Journal of Hydrology*, 19 (1), 43–52.
- Marino, M.A., 1974. Water table fluctuation in response to recharge. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 100 (2), 117–125.
- Markstrom, S.L., Niswonger, R.G., Regan, R.S., Prudic, D.E., Barlow, P.M., 2008. GSFLOW-coupled Ground-water and Surface-water flow model based on the integration of the Precipitation-Runoff Modeling System (PRMS) and the modular ground-water flow Model (MODFLOW-2005). USGS, Techniques and Methods, Book 6, Section D, Chapter 1.
- Martins, F., Leitao, P., Silva, A., Neves, R., 2001. 3D modelling in the Sado estuary using a new generic vertical discretization approach. *Oceanologica Acta*, 24, S51–S62 Suppl. S.
- McBride, G.B. and Rutherford, J.C., 1984. Accurate modeling of river pollutant transport. *Journal of Environmental Engineering*, 110 (4), 808–827.
- McDonald, M.G. and Harbaugh, A.W., 1988. A modular three-dimensional finite difference groundwater flow model. USGS, Techniques of Water Resources Investigations, Book 6, Chapter A1.
- McDonald, M.G., Harbaugh, A.W., Orr, B.R. and Ackerman, D.J., 1992. A method of converting no-flow cells to variable head cells for the USGS modular finite-difference ground-water flow model. USGS, Open-File Report 91-536.
- Meirovitch, L., 1986. Elements of vibration analysis. McGraw-Hill Inc., Singapore.
- Merrit, L.M. and Konikow, L.F., 2000. Documentation of a computer program to simulate lake-aquifer interaction using the MODFLOW ground-water flow model and the MOC3D solute transport model. USGS, Water Resources Investigations Report 00-4167.
- Meyboom, P., 1967. Mass transfer studies to determine the groundwater regime of permanent lakes in hummocky moraine of western Canada. *Journal of Hydrology*, 5 (2), 117–142.

- Meyboom, P., van Everdingen, R.O., Freeze, R.A., 1966. Patterns of groundwater flow in seven discharge areas in Saskatchewan and Manitoba. *Geol Surv Can Bull* 147.
- Miglio, E., Quarteroni, A. and Saleri, F., 1999. Finite element approximation of quasi-3D shallow water equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 174, 355–369.
- Mitchell, A.R., 1984. Recent developments in the finite element method. In: Noye, J. and Fletcher, C.A.J., (Ed.), *Computational techniques and applications: CTAC-83*, Elsevier, North-Holland.
- Moench, A.F. and Barlow, P.M., 2000. Aquifer response to stream–stage and recharge variations. I. Analytical step response functions. *Journal of Hydrology*, 230 (3–4), 192–210.
- Mohammadian, A., 2009. Numerical approximation of viscous terms in finite volume models for shallow waters. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 63 (5), 584–599.
- Monteith, J.L., 1965. Evaporation and environment. In: *The state and movement of water in living organisms. Proceedings of the 15th Symposium of the Society for Experimental Biology*, Swansea. Cambridge University Press, London, pp. 205–234.
- Morita, M., Yen, B. C., 2002. Modelling of conjunctive two-dimensional surface-three-dimensional subsurface flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 128 (2), 184–200.
- Morrice, J.A., Vallet, H.M., Dahm, C.N. and Campana, M.E., 1997. Alluvial characteristics, surface water–groundwater exchange and hydrological retention in headwater streams. *Hydrological Processes*, 11, 253–267.
- Morris, E.M., 1982. Sensitivity of the European Hydrological System snow models. In: *Hydrological aspects of alpine and high mountain areas, Proceedings of the Symposium of the International Association of Hydrological Sciences*, Exeter, IAHS Publications, No. 138, pp. 221–231.
- Morris, E.M., 1983. Modelling the flow of mass and energy within a snowpack for hydrological forecasting. *Annals of Glaciology*, 4, 198–203.
- Morton, K.W., 1971. Stability and convergence in fluid flow problems. *Proceedings of the Royal Society of London*, 323, 237–253.
- Morton, K.W. and Mayers, D.F., 2005. *Numerical Solution of Partial Differential Equations, An Introduction*. Cambridge University Press.

- Motovilov, Y., Gottschalk, L., Engeland, K. and Belokurov, A., 1999. Distributed hydrological model ECOMAG: Application to the NOPEX area. NOPEX Technical Report, Oslo.
- Naot, D. And Rodi, W., 1982. Numerical simulation of secondary currents in channel flow. *Journal of the Hydraulics Division*, 108 (HY8), 948–968.
- Nanou–Giannarou, K. and Helmig, R., 1998. Simulation of 3-D groundwater flow with free surface. *Wissenschaftlicher Bericht 4*, Technische Universitat Carolo Wilhelmina zu Braunschweig, Institut fur Computer Anwendungen im Bauingenieurwesen, Braunschweig.
- Narasimhan, T.N. and Witherspoon, P.A., 1976. An integrated finite difference method for analyzing fluid flow in porous media. *Water Resources Research*, 12 (1), 57–64.
- Neuman, S., 1981. Delayed drainage in a stream–aquifer system. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 107 (IR4), 407–410.
- Neuman, S.P., 1981. A Eulerian–Lagrangian numerical scheme for the dispersion–convection equation using conjugate space–time grids. *Journal of Computational Physics*, 41 (2), 270–294.
- Niazi, S., 2000. Sensitivity Analysis of time-step in modeling river and aquifer interaction. MSc Thesis, University of Texas, Austin.
- Niswonger, R.G., Prudic, D.E. and Regan, R.S., 2006. Documentation of the Unsaturated-Zone Flow (UZF1) Package for modeling unsaturated flow between the land surface and the water table with MODFLOW–2005. USGS, Techniques and Methods 6-A19.
- Novotny, V. and Olem, H., 1994. *Water Quality: Prevention, Identification and Management of Diffuse Pollution*. Van Nostrand Reinhold, New York.
- Oliveira, A. and Baptista, A.M., 1995. A comparison of integration and interpolation Eulerian-Lagrangian methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 21, 183–204.
- Osman, Y.Z. and Bruen, M., 2002. Modelling stream–aquifer seepage: an improved loosing stream package for MODFLOW. *Journal of Hydrology*, 264, 69–86.
- Ostfeld, A., Muzaffar, E. and Lansley, K.E., 1999. Analytical ground water flow solutions for channel–aquifer interaction. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 125 (4), 196–202.
- Otz, M.H., Otz, H.K., Otz, I. and Siegel, D.I., 2003. Surface water/groundwater interaction in the Piora Aquifer, Switzerland: evidence from dye tracing tests. *Hydrogeology Journal*, 11, 228–239.
- Painter, S., Basagaoglu, H. and Liu, A.G., 2008. Robust representation of dry cells in

- single-layer MODFLOW Models. *Ground Water* 46, 873–881.
- Panday, S., Huyakorn, P.S., 2004. A fully-coupled physically-based spatially-distributed model for evaluating surface/subsurface flow. *Advances in Water Resources*, 27 (4), 361-382.
- Parlange, J.Y., Hogarth, W.L., Govindaraju, R.S., Parlange, M.B. and Lockington, D., 2000. On an exact analytical solution of the Boussinesq equation. *Transport in Porous Media*, 39 (3), 339–345.
- Peric, M., 1985. A finite volume method for the prediction of three-dimensional fluid flow in complex ducts. PhD thesis, University of London, Imperial College.
- Perkins, S.P. and Koussis, A.D., 1996. Stream-aquifer interaction model with diffusive wave routing. *Journal of Hydraulic Engineering*, 122 (4), 210–218.
- Perlman, H. USGS, The water cycle, [http://ga.water.usgs.gov/edu/watercycle\\_summary.html](http://ga.water.usgs.gov/edu/watercycle_summary.html) , accessed 10/9/2008.
- Peterson, D.F., 1961. Intercepting drainage wells in artesian aquifer. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 87 (IR1), 7–14.
- Peterson, D.M. and Wilson, J.L., 1988. Variably saturated flow between streams and aquifers. Technical Completion Report 233, New Mexico Water Resources Research Institute, Socorro.
- Philip, J.R., 1957. The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solution. *Soil Science*, 83 (5), 345–357.
- Pinder, G.F., Bredehoeft, J.D. and Cooper, H.H.Jr., 1969. Determination of aquifer diffusivity from aquifer response to fluctuations in river stage. *Water Resources Research*, 5 (4), 850–855.
- Pinder, G.F., and Celia, M.A., 2006. *Subsurface Hydrology*. John Wiley, New Jersey.
- Pinder, G.F. and Sauer, S.P., 1971. Numerical simulation of flow wave modification due to back storage effects. *Water Resources Research*, 7 (1), 63–70.
- Pipes, L.A. and Harvill, L.R., 1970. *Applied mathematics for engineers and scientists*. 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw–Hill Book Company, New York.
- Playan, E., Walker, W.R. and Merkley, G.P., 1994. Two-dimensional simulation of basin irrigation, 1: Theory. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 120 (5), 837–856.
- Polubarinova–Kochina, P.Y., 1962. *Theory of groundwater movement*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Ponce, V.M., Li, R.M. and Simons, D.B., 1978. Applicability of kinematic and diffusion wave models. *Journal of the Hydraulics Division*, 104 (HY3), 353–360.
- Poole, D., 2006. *Linear Algebra: A Modern Introduction*. 2<sup>nd</sup> edition, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, USA.

- Prandtl, L., 1925. Bericht uber untersuchungen zur ausgebildeten turbulenz. ZAMM, 3, 136–139.
- Preissmann, A., 1961. Propagation of translatory waves in channels and rivers. Proceedings of the First Congress of French Association for Computation, Grenoble, France, pp. 433–442.
- Prudic, D. E., Konikow, L. F., Banta, E. R., 2004. A new Streamflow-Routing (SFR1) Package to simulate stream–aquifer interaction with MODFLOW 2000. USGS, Open File Report 2004-1042.
- Quemer, E.P., 1986. An integrated surface and groundwater flow model for the design and operation of drainage systems. International Conference of Hydraulic Design in Water Resources Engineering: Land Drainage, Southampton, Springer, New York, pp. 101-108.
- Quemer, E.P., 1988. Description of a regional groundwater flow model SIMGRO and some applications. Agricultural Water Management, 14 (1–4), 209-218.
- Querner, E. P., 1997. Description and application of the combined surface and groundwater flow model MOGROW. Journal of Hydrology, 192 (1-4), 158-188.
- Rebollo T.C. and Gomez, D.R., 2005. A numerical solver for the primitive equations of the ocean using term-by-term stabilization. Applied Numerical Mathematics, 55 (1), 1–31.
- Reeves, M., Ward, D.S., Johns, N.D. and Cranwell, R.M., 1986. Theory and implementation for SWIFT II, the Sandia Waste Isolation Flow and Transport model for fractured media. NUREG/CR–3328 and SAND83–1159. Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico.
- Refsgaard, J.C., Thorsen, M., Jensen, J.B., Kleeschulte, S. and Hansen, S., 1999. Large scale modelling of groundwater contamination from nitrate leaching. Journal of Hydrology, 221, 117–140.
- Rehfeldt, K.R., and Gelhar, L.W., 1992. A critical review of data on field–scale dispersion in aquifers. Water Resources Research, 28, 2085–2099.
- Remson, I., Hornberger, G.M. and Molz, F.J., 1971. Numerical methods in subsurface hydrology: With an introduction to the finite element method. Wiley-Interscience, New York.
- Restrepo, J.I., Montoya, A.M. and Obeysekera, J., 1998. A wetland simulation module for the MODFLOW groundwater model. Ground Water, 36 (5), 764-770.
- Richards, L.A., 1931. Capillary conduction of liquids through porous mediums. Physics, 1 (5), 318–333.
- Robert, J.L. and Ouellet, Y., 1987. A three–dimensional finite–element model for the study of steady and non–steady natural flows. In: Nihoul, J.C.J. and Jamart,

- B.M., Three-dimensional models of marine and estuarine dynamics, Elsevier, Amsterdam–New York, pp. 359–372.
- Rodi, W., 1980. Turbulence models and their application in hydraulics—a state of the art review. IAHR, Delft, The Netherlands.
- Rowe, P.P., 1960. An equation for estimating transmissibility and coefficient of storage from river-level fluctuations. *Journal of Geophysical Research*, 65 (10), 3419–3424.
- Rübenkönig, O., 2006. The Finite Difference Method (FDM) – An introduction. Albert Ludwigs University of Freiburg.
- Ruhaak, W., Rath, V., Wolf, A. and Clauser, C., 2008. 3D finite volume groundwater and heat transport modeling with non-orthogonal grids, using a coordinate transformation method. *Advances in Water Resources*, 31 (3), 513–524.
- Sanford, W.E., Parlange, J.Y. and Steenhuis, T.S., 1993. Hillslope drainage with sudden drawdown: closed form solution and laboratory experiments. *Water Resources Research*, 29 (7), 2313–2321.
- Savadi, M.R., 1993. Modeling subsurface drainage and surface runoff with WEPP, *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 119 (5), 801–813.
- Serrano, S.E., 2003. Modelling groundwater flow under transient nonlinear free surface. *Journal of Hydrologic Engineering*, 8 (3), 123–132.
- Serrano, S.E. and Workman, S.R., 1998. Modeling transient stream/aquifer interaction with the non-linear Boussinesq equation and its analytical solution. *Journal of Hydrology*, 206 (3–4), 245–255.
- Serrano, S.E., Workman, S.R., Srivastava, K. and Miller–Van Kleeve, B., 2007. Models of nonlinear stream aquifer transients. *Journal of Hydrology*, 336 (1–2), 199–205.
- Sewa Ram and Chauhan, H.S., 1987. Drainage of sloping lands with constant replenishment. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 113 (2), 212–223.
- Schaffranek, R.W., Baltzer, R.A., and Goldberg, D.E., 1981. A model for simulation of flow in singular and interconnected channels. USGS, *Techniques of Water–Resources Investigations*, Book 7, Chapter 3.
- Shchepetkin, A.F., McWilliams, J.C., 2003. A method for computing horizontal pressure-gradient force in an oceanic model with a nonaligned vertical coordinate. *Journal of Geophysical Research*, 108, 1–34.
- Shikaze SG, Crowe AS. 1999. Users' guide for GW-WETLAND (version 1.0). Environment Canada, National Water Research Institute, Burlington, Ontario, NWRI Contribution 99–204.

- Simunek, J., Huang, K. and van Genuchten, M.Th., 1985. The SWMS\_3D code for simulating water flow and solute transport in three-dimensional variably saturated media, version 1.0. Research Report No. 139, U.S. Salinity Laboratory, USDA, ARS, Riverside, California.
- Simunek, J., Sejna, M. and van Genuchten, M.T., 1998. The HYDRUS-1D software package for simulating the movement of water, heat, and multiple solutes in variably saturated media, version 2.0. United States Salinity Laboratory, USDA-ARS, Riverside, California.
- Singh, K.P., 1969. Theoretical baseflow curves. *Journal of the Hydraulics Division*, 95 (HY6), 2029–2048.
- Singh, R.N. and Rai, S.N., 1980. On subsurface drainage of transient recharge. *Journal of Hydrology*, 48 (3–4), 303–311.
- Singh, R.N., Rai, S.N. and Ramama, D.V., 1991. Water table fluctuation in a sloping aquifer with transient recharge. *Journal of Hydrology*, 126 (3–4), 315–326.
- Singh, S.K., 2004. Aquifer response to sinusoidal or arbitrary stage of semipervious stream. *Journal of Hydraulic Engineering*, 130 (11), 1108–1118.
- Singh, S.R. and Sagar, B., 1977. Estimation of aquifer diffusivity in stream–aquifer system. *Journal of the Hydraulics Division*, 103 (11), 1293–1302.
- Singh, V. and Bhallamudi, S.M., 1996. Complete hydrodynamic border-strip irrigation model. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 122 (4), 189–197.
- Smagorinsky, J., 1963. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, 91 (3), 99–164.
- Smith, G.D., 1985. Numerical solution of partial differential equations: Finite difference methods. 3<sup>rd</sup> Edition, Oxford University Press, New York.
- Smith, R.E. and Woolhiser, D.A., 1971. Overland flow on an infiltration surface, *Water Resources Research*, 7 (4), 899–913.
- Sokrut, N., 2001. A distributed coupled model of surface and subsurface dynamics as a tool for catchment management. Licentiate Thesis, Royal Institute of Technology, Department of Land and Water Resources Engineering, Stockholm, Sweden.
- Sophocleous, M., 2002. Interactions between groundwater and surface water: the state of the science. *Hydrogeology Journal*, 10 (2), 52–67.
- Sophocleous, M., Townsend, M.A., Vogler, L.D., McClain, T.G., Marks, E.T. and Coble, G.R., 1988. *Journal of Hydrology*, 98 (3–4) 249–273.
- Sparks, T., 2005. Integrated modeling of 2–D surface water and groundwater flow with contaminant transport. In: Proceedings of 31<sup>st</sup> IAHR Congress, Seoul, pp. 6465–6476.

- Sparks, T.D., 2008. Integrated surface water–groundwater modelling linking surface water and groundwater using DIVAST SG. PhD Thesis, School of Engineering, Cardiff University, UK.
- Spotz, W.F. and Carey, G.F., 2001. Extension of high-order compact schemes to time dependent problems. *Numerical Methods in Partial Differential Equations*, 17, 657–672.
- Stallman, R.W., 1962. Channel methods—line sink or line source (constant head, nonsteady state, no recharge). In: Ferris, J.G., Knowles, D.B., Brown, R.H. and Stallman, R.W., *Theory of aquifer tests*. USGS, Water Supply Paper 1536–E, pp. 126–131.
- Stamou, A. I., 1991. Numerical modeling of water quality in rivers using the QUICK scheme. In: Tsakiris, G. (Ed.), *Advances in Water Resources Technology*, pp. 397–405.
- Stamou, A. I., 1992. Improving the numerical modeling of river water quality by using higher order difference schemes. *Water Research*, 26 (12), 1563–1570.
- Stamou, A.I., Memos, C.D. and Kapetanaki, M.E., 2007a. Modelling water renewal in a coastal embayment. *Proceedings of ICE – Maritime Engineering* 160 (MA3), 93–104.
- Stamou, A.I., Memos, C.D. and Spanoudaki, K., 2007b. Estimating water renewal times semi-enclosed coastal areas with complicated geometry using a hydrodynamic model. *Journal of Coastal Research* 50, 282–286.
- Stansby, P.K., 1997. Semi-implicit finite volume shallow water flow and solute transport solver with k- $\epsilon$  turbulence model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 25, 285–313.
- Stansby, P.K., Lloyd, P.M., 1995. A semi-implicit Lagrangian scheme for 3D shallow water flow with a two layer turbulence model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20 (2), 115–133.
- Stapleton, C.M., Kay, D., Jackson, G.F. and Wyer, M.D., 2000. Estimated inorganic nutrient inputs to the coastal waters of Jersey from catchment and wastewater sources. *Water Research*, 34 (3), 787–796.
- Stehfest, H., 1970. Numerical inversion of Laplace transforms. *Communications of the Association for Computing Machinery*, 13 (1), 47–49.
- Stelling, G.S., 1984. On the construction of computational methods for shallow water flow problems. *Rijkswaterstaat Communications No. 35*, The Hague.
- Stone, H., 1968. Iterative solution of implicit approximation of multidimensional partial differential equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 5, 530–558.



- Storm, B. and Refsgaard, A., 1996. Distributed physically-based modelling of the entire land phase of the hydrological cycle. In: Abbot, M.B. and Refsgaard, J.C. (Eds.), Distributed hydrological modelling. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp. 55–69.
- Strack, O.D.L., 1989. Groundwater Mechanics. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Swain, E.D. and Wexler, E.J., 1991. A coupled surface-water and ground-water model: Proceedings of the 1991 National Conference of the Irrigation and Drainage Division. American Society of Civil Engineers, pp. 330-335.
- Swain, E. D. and Wexler, E. J., 1996. A coupled surface-water and groundwater flow model (MODBRANCH) for simulation of stream-aquifer interaction. USGS, Techniques of Water Resources Investigations, Book 6, Chapter A6.
- Sweby, P.K., 1984. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. Siam Journal of Numerical Analysis, 21 (5), 995–1011.
- Tabuada, M.A., Rego, Z.J.C., Vachaud, G. and L.S. Pereira, 1995. Modelling of furrow irrigation. Advance with two dimensional infiltration. Agricultural Water Management, 28 (3), 201–221.
- Tao, J., Li, Q., Falconer, R.A. Lin, B., 2001. Modeling and assessment of water quality indicators in a semi-enclosed shallow bay. Journal of Hydraulic Research, 39 (6), 611–616.
- Thompson, J.R., Refstrup Sorenson, H., Gavin, H., Refsgaard, A., 2004. Application of the coupled MIKE SHE/MIKE 11 modelling system to a lowland wet grassland in southeast England. Journal of Hydrology, 293, 151–179.
- Tóth, J., 1970. A Conceptual Model of the Groundwater Regime and the hydrogeologic environment. Journal of Hydrology, 10, 164–176.
- Townley, L.R., 1990. AQUIFEM–N: a multi-layered finite element aquifer flow model, user’s manual and description. CSIRO Division of Water Resources, Perth, Western Australia.
- Trefethen, L.N., 2006. Numerical Analysis. In: Gowers, T. and Barrow–Green, J. (Eds.), Princeton Companion of Mathematics, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Turc, L., 1961. Evaluation des besoins en eau d’irrigation, évapotranspiration potentielle, formule climatique simplifiée et mise a jour. Annual Agronomy, 12, 13–49.
- Turner J.V. and Townley L.R., 2006. Determination of groundwater flow-through regimes of shallow lakes and wetlands from numerical analysis of stable isotope and chloride tracer distribution patterns. Journal of Hydrology, 320 (3–4), 451–483.

- Upadhyaya, A. and Chauhan, H.S., 2001. Interaction of stream and sloping aquifer receiving constant recharge. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 127 (5), 295–301.
- Upadhyaya, A. and Chauhan, H.S., 2002. Water table rise in sloping aquifer due to canal seepage and constant recharge. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 128 (3), 160–167.
- van de Giesen, N.C., Parlange, J.Y. and Steenhuis, T.S., 1994. Transient flow to open drains: comparison of linearized solutions with and without the Dupuit assumption. *Water Resources Research*, 30 (11), 3033–3039.
- van der Vorst, H.A., 1992. Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of non-symmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 13 (2), 631–644.
- van Genuchten, M.Th., 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44, 892–898.
- van Genuchten, M.Th. and Alves, W.J., 1982. Analytical solutions of the one-dimensional convective-dispersive solute transport equation. United States Department of Agriculture Technical Bulletin No. 1661.
- Vanderkwaak, J. E., 1999. Numerical simulation of flow and chemical transport in integrated surface-subsurface hydrologic systems. PhD Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario.
- Vaux, W.G., 1968. Intragravel flow and interchange of water in a streambed. *Fish Bulletin*, 66, 479–489.
- Vazquez, R.F. and Feyen, J., 2003. Effect of potential evapotranspiration estimates on effective parameters and performance of the MIKE SHE-code applied to a medium-size catchment. *Journal of Hydrology*, 270, 309–327.
- Venetis, C., 1970. Finite aquifers—characteristic responses and applications. *Journal of Hydrology*, 12(1), 53–62.
- Verhoest, N.E.C. and Troch, P.A., 2000. Some analytical solutions of the linearized Boussinesq equation for a sloping aquifer. *Water Resources Research*, 36 (3), 793–800.
- Versteeg, H.K. and Malalasekera, W., 1995. An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method. Longman Scientific and Technical, Longman Group Ltd., Essex, England.
- Vieira, J.H.D., 1983. Conditions governing the use of approximations for the Saint-Venant equations for shallow surface water flow. *Journal of Hydrology*, 60 (1–4), 43–58.

- Vreugdenhil, C.B., 1994. Numerical methods for shallow water flow. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Wallach, R., Grigoriu, G. and Rivlin, J., 1997. The errors in surface runoff prediction by neglecting the relationship between infiltration rate and overland flow depth. *Journal of Hydrology*, 200, 243–259.
- Wang, H.F. and Anderson, M.P., 1982. Introduction to groundwater modeling: Finite difference and finite element methods. Freeman and Co.
- Wang, J.-W. and Liu, R.-X., 2005. Combined finite volume–finite element method for shallow water equations. *Computer and Fluids*, 34, 1199–1222.
- Wegner, M.A., 1997. Transient groundwater and surface–water interactions at Fort Wainwright, Alaska. MSc Thesis, University of Alaska, Fairbanks, Alaska.
- Weisstein, E. W., 2003. CRC Concise Encyclopedia of Mathematics. 2<sup>nd</sup> edition, CRC Press.
- Werner, P.W., 1957. Some problems in non–artesian groundwater flow. *Transactions, American Geophysical Union*, 38 (4), 511–518.
- Wett, B., Jarosch, H. and Ingerle, K., 2002. Flood induced infiltration affecting a bank filtrate well at the River Enns, Austria. *Journal of Hydrology* 266 (3–4), 222–234.
- Wilson, J.L. and Miller, P.J., 1978. Two-dimensional plume in uniform ground-water flow. *Journal of the Hydraulic Division*, 11, 1843–1865.
- Winter, T.C., 1999. Relation of streams, lakes and wetlands to groundwater flow systems. *Hydrogeology Journal*, 7, 28–45.
- Winter, T.C., Harvey, J.W., Franke, O.L. and Alley, W.M., 1998. Groundwater and surface water – A single resource. USGS, Circular 1139.
- Woessner, W., 1998. Changing views of stream-groundwater interaction. In: van Brahana, J., Eckstein, Y., Ongley, L.W., Schneider, R. and Moore, J.E. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of Hydrogeologists and the Annual Meeting of the American Institute of Hydrology*, 1–6 St. Paul, Minnesota, American Institute of Hydrology.
- Woessner, W., 2000. Stream and fluvial plain ground water interactions: rescaling hydrogeologic thought. *Ground Water*, 38 (3), 423–429.
- Wooding, R.A. and Chapman, T.G., 1966. Groundwater flow over a sloping impermeable layer, 1, Application of the Dupuit–Forchheimer assumption. *Journal of Geophysical Research*, 71 (12), 2895–2902.
- Workman, S.R. and Serrano, S.E., 2008. Experimental verification of models of non–linear stream aquifer transients. *Journal of Hydrologic Engineering*, 13 (12), 1119–1124.

- Workman, S.R., Serrano, S.E. and Liberty, K., 1997. Development and application of an analytical model of stream–aquifer interaction. *Journal of Hydrology*, 200 (1–4), 149–163.
- Wroblicky, G.J., Campana, M.E., Vallet, H.M. and Dahm, C.N., 1998. Seasonal variation in surface–subsurface water exchange and lateral hyporheic area of two stream–aquifer systems. *Water Resource Research*, 34 (3), 317–328.
- Wu, J., 1969. Wind stress and surface roughness at air-sea interface. *Journal of Geophysical Research*, 74 (2), 444–455.
- Wu, Y.S., Huyakorn, P.S. and Park, N.S., 1994. A vertical equilibrium model for assessing nonaqueous phase liquid contamination and remediation of groundwater systems. *Water Resources Research*, 30, 903–912.
- Xevi, E., Christiaens, K., Espino, A., Sewnandan, W., Mallants, D., Sorensen, H. and Feyen, J., 1997. Calibration, validation and sensitivity analysis of the MIKE-SHE model using the Neuenkirchen catchment as case study. *Water Resources Management*, 11, 219–242.
- Yeh, G.–T., Chen, J.–R. and Bensabat, J.A., 1994. A three-dimensional finite–element model of transient free surface flow in aquifers. In: *Computational Methods in Water Resources X, Proceedings of X International Conference on Computational Methods in Water Resources*, Heidelberg, Germany. Kluwer Academic Publishers, pp. 131–138.
- Yu, T.S. and Li, C.W., 1994. Efficient higher order backward characteristics schemes for transient advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 19, 997–1021.
- Yu, F.X. and Singh, V.P., 1994. Modeling 3D groundwater flow by modified finite element method. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 120 (5), 892–909.
- Yuan, D., Lin, B., Falconer, R., 2008. Simulating moving boundary using a linked groundwater and surface water model. *Journal of Hydrology*, 349 (3-4), 524-535.
- Zerihun, D., Furman, A., Warrick, A.W. and Sanchez, C.A., 2005a. Coupled surface–subsurface flow model for improved basin irrigation management. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 131 (2), 111–128.
- Zerihun, D., Furman, A., Warrick, A.W. and Sanchez, C.A., 2005b. Coupled surface–subsurface solute transport model for irrigation borders and basins. I. Model development. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 131 (5), 396–406.
- Zhang, W.Z., 1992. Transient groundwater flow in an aquifer–aquitard system in response to water level changes in rivers or canals. *Journal of Hydrology*, 133 (3–4), 233–257.

- Zhang, W. and Cundy, T.W., 1989. Modeling of two-dimensional overland flow." Water Resources Research, Vol. 25, No. 9, pp. 2019-2035.
- Zhang, Y.L., Baptista, A.M. and Myers, E.P., 2004. A cross-scale model for 3D baroclinic circulation in estuary-plume-shelf systems: I. Formulation and skill assessment. Continental Shelf Research, 24 (18), 2187–2214.
- Zhang, Y.L. and Baptista, A.M., 2008. SELFE: A semi-implicit Eulerian–Lagrangian finite-element model for cross-scale ocean circulation Ocean Modelling, 21 (3–4), 71–96.
- Zhang, J. and Lu, X., 2007. Parameter estimation for a three-dimensional numerical barotropic tidal model with adjoint method. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 57, 47–92.
- Zhang, Z., 2009. A new implicit scheme for solving 3-D shallow water flows. Journal of Hydrodynamics, 21 (6), 790–798.
- Zheng, C. and Bennett, G.D., 1995. Applied contaminant transport modeling: Theory and practice. John Wiley and Sons, New York.
- Zheng, C. and Wang, P.P., 1999. MT3DMS: A modular three-dimensional multispecies transport model for simulation of advection, dispersion and chemical reactions of contaminants in groundwater systems. United States Army Corps of Engineers.
- Zissis, T.S., Teloglou, I.S. and Terzidis, G.A., 2001. Response of a sloping aquifer to constant replenishment and to stream varying water level. Journal of Hydrology, 243 (3–4), 180–191.

## Ελληνική

- Κορμούλης, Ν., 2001. Υδρογεωλογική έρευνα λεκανών Ν. Αιτωλοακαρνανίας. Δίαιτα και έλεγχος ποιότητας των υδάτινων πόρων. ΙΓΜΕ, Τομέας Υδρογεωλογίας, Διεύθυνση Υδρογεωλογίας Νοτίου Ελλάδας.
- Λατινόπουλος, Π.Δ., 1986. Υδραυλική των υπόγειων ροών. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη.
- Νάνου–Γιάνναρου, Α. και Παπαθανασιάδης, Τ., 2008. Υδραυλική υπόγειων νερών, Τεύχος Πρώτο. 1<sup>η</sup> Έκδοση, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.
- Νουτσόπουλος, Γ. Και Χριστοδούλου, Γ., 1996. Μαθήματα μηχανικής των ρευστών για πολιτικούς μηχανικούς. Α΄ Έκδοση, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Οδηγία 2000/60/ΕΚ του Ευρωπαϊκού Κοινοβουλίου και του Συμβουλίου της 23ης Οκτωβρίου 2000 για τη θέσπιση πλαισίου κοινοτικής δράσης στον τομέα της πολιτικής των υδάτων.

Χριστοδούλου, Γ.Χ., 1980. Μη μόνιμη ροή σε ανοικτούς αγωγούς. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Χριστοδούλου, Γ.Χ., 1991. Εισαγωγή στην υπολογιστική υδραυλική. 2<sup>η</sup> Έκδοση, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Χριστούλας, Δ, Ανδρεαδάκης, Α., Αραβαντινός, Α., Καββαδάς, Μ., Σταθόπουλος, Α., Στάμου Α. και Χατζημπίρος, Κ., 1997. Περιβαλλοντική Τεχνολογία. Β΄ Έκδοση, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.