

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΠΛΟΙΟΥ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ**

**ΕΛΙΚΤΙΚΕΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΕΣ ΠΛΟΙΩΝ ΣΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΑ ΝΕΡΑ  
ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΣΕ ΚΑΝΑΛΙ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ  
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΑΛΛΗ**



**ΑΘΗΝΑ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2007**

**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b> .....	<b>3</b>
<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	<b>4</b>
<b>ΓΕΝΙΚΑ</b> .....	<b>6</b>
<b>ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΜΕΛΕΤΗΣ</b> .....	<b>9</b>
<b>ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ</b> .....	<b>11</b>
<b><u>ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ ΠΟΥ ΔΡΟΥΝ ΣΤΗΝ ΓΑΣΤΡΑ</u></b> .....	<b>24</b>
<b>ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</b> .....	<b>32</b>
1.1 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΤΩΝ ΔΙΝΩΝ .....	32
1.2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΗΣ SWAY - ΡΟΠΗΣ YAW .....	57
1.3 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ.....	58
<b><u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</u></b> .....	<b>71</b>
<u>ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ</u> .....	71
<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u> .....	73

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οφείλω να ευχαριστήσω όλους αυτούς τους ανθρώπους που με στήριξαν και με βοήθησαν από την αρχή της πορείας μου στην Σχολή Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών ως και το τελείωμα της, τον επιβλέποντα καθηγητή αυτής της εργασίας κ.κ. Κωνσταντίνο Σπύρου και όλους τους οικείους μου, που στάθηκαν δίπλα μου στις δύσκολες στιγμές. Ευελπιστώ αυτή η μελέτη να είναι κίνητρο, προς εμένα και τους συναδέλφους μου, περαιτέρω έρευνας, επίλυσης και αξιολόγησης των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την ελικτική συμπεριφορά ενός πλοίου μέσα σ' ένα κανάλι. Η σπουδαιότητα και η αναγκαιότητα τέτοιων ερευνών τις καθιστά όλο και περισσότερο απαραίτητες για την ασφαλή πλεύση των σκαφών.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι ελικτικές ικανότητες ενός πλοίου έχουν αποκτήσει ιδιαίτερο και σημαντικό ενδιαφέρον για την σχεδίαση του τα τελευταία σαράντα χρόνια, ως αποτέλεσμα των τεράστιων θαλάσσιων καταστροφών και συγκεκριμένα για την προστασία του περιβάλλοντος. Ο αυξανόμενος αριθμός στη θαλάσσια κυκλοφορία, με όλο και περισσότερο μεγαλύτερου μεγέθους πλοία έχει μεγεθύνει τον αριθμό συγκρούσεων και προσaráξεων αυτών. Το τεράστιο περιβαλλοντικό και οικονομικό κόστος από τη διαρροή πετρελαίου και άλλων χημικών υγρών, εξαιτίας των ατυχημάτων, έχουν οδηγήσει σε μια προσπάθεια βελτίωσης των ελικτικών ικανοτήτων των πλοίων. Όταν ένα πλοίο διασχίζει μια περιοχή, όπου τα νερά είναι περιορισμένα, συνιστά ένα σημαντικό πρόβλημα διότι οι η δυνατότητα χειρισμών είναι αρκετά δύσκολη και έχει μείζονα σημασία η διερεύνηση της ελικτικής συμπεριφοράς του. Ειδικότερα πρέπει να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή στην ελικτική ικανότητα ενός πλοίου που βρίσκεται σε περιορισμένα νερά, όπως λιμάνια, κανάλια και κόλπους, επειδή κινείται πλησίον είτε άλλων πλοίων, είτε του τοιχώματος του καναλιού είτε του μώλου. Η κίνηση κοντά σε αυτά τα εμπόδια είναι ενδεχομένως επικίνδυνη και είναι σημαντικό το πλοίο να μην αποκλίνει από την πορεία του. Έτσι έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τα ακριβή ελικτικά χαρακτηριστικά του πλοίου, συνυπολογίζοντας και την επίδραση των άλλων πλοίων ή του τοιχώματος του καναλιού ή του μώλου.

Υπάρχουν Μαθηματικά Μοντέλα, τα οποία είναι αρκετά ακριβή για τη μελέτη ελικτικής ικανότητας σε βαθιά νερά, γενικότερα όμως δεν προβλέπουν ικανοποιητικά τη συμπεριφορά ενός πλοίου σε περιοχές όπως λιμάνια και κανάλια.

Τα ήδη υπάρχοντα εργαλεία δεν είναι ωστόσο αρκετά για την ανάπτυξη σχεδίασης γαστρών, έτσι μέχρι σήμερα δεν υπάρχει μια δεδομένη διαδικασία μελέτης της ελικτικότητας για αβαθή και περιορισμένα νερά. Εάν είχαν δημιουργηθεί τέτοιες τεχνικές η εφαρμογή τους θα βοηθούσε σε πιθανόν λιγότερες δοκιμές πλοίων σε αβαθή και περιορισμένα νερά, οι οποίες δεν είναι οικονομικά συμφέρουσες.

## ΓΕΝΙΚΑ

Η μέθοδος των «ταιριασμένων ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων» εφαρμόζεται στο πρόβλημα που αντιμετωπίζει ένα πλοίο, που κινείται με σταθερή ταχύτητα μέσα σε ένα κανάλι ορθογωνικής διατομής. Το βάθος του καναλιού θεωρείται μικρό, έτσι ώστε να μπορεί αναπτυχθεί μια γραμμική λύση για αβαθή νερά. Το πλοίο λαμβάνεται υποθετικά ότι είναι λεπτόγραμμο και στην εξωτερική του περιοχή έναν ορίζουμε συνδυασμό από πηγές και δίνες. Όπως έχει διατυπωθεί και σε άλλες θεωρίες για λεπτόγραμμο πλοία σε αβαθή νερά, η ένταση της πηγής είναι ανάλογη στη μεταβολή της εγκάρσιας επιφάνειας διατομής του πλοίου. Η ένταση της δίνης μπορεί να υπολογιστεί λύνοντας μια ολοκληρωτική εξίσωση.

Χρησιμοποιώντας τις εντάσεις των πηγών και των δινών, αναπτύσσονται εκφράσεις υπολογισμού για την πλευρική δύναμη (side force), την ροπή ως προς τον άξονα z (yaw moment), τη βύθιση του πλοίου και τη διαγωγή του. Τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται δείχνουν πως δεν απέχουν πολύ από τα πειραματικά αποτελέσματα.

Ένας από τους ερευνητές, ο Tuck, χρησιμοποίησε τη μέθοδο των «ταιριασμένων ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων» για να στηρίξει και να αναπτύξει μια θεωρία για τη βύθιση, τη διαγωγή και την αντίσταση κυματισμού του πλοίου που διέρχεται από αβαθή νερά απεριόριστης έκτασης. Μετά από αυτό, οι Tuck και Taylor(1970) εξέτασαν το ίδιο πρόβλημα, αλλά στην περίπτωση που έχουν καθορισμένο βάθος. Βρήκαν ότι για ένα μαθηματικά σχεδιασμένο πλοίο τα αποτελέσματα σε αβαθή νερά έδωσαν αποδεκτά νούμερα για ένα βάθος νερού ως προς το μήκος του πλοίου, ίσο με 1/10.

Ο Tuck(1967) επέκτεινε την ανάλυση του για το βύθισμα και τη διαγωγή ώστε να συμπεριληφθεί και η περίπτωση κίνησης ενός πλοίου σε κανάλι ορθογωνικής διατομής ή διώρυγα.

Στη συνέχεια οι Beck, Newman και Tuck(1975) επέκτειναν ακόμα περισσότερο την ανάλυση αυτή για να συμπεριλάβουν την κίνηση ενός πλοίου σε ένα εκβαθυμένο κανάλι που περιβάλλεται και από της δυο πλευρές από αβαθή νερά. Και στις δυο αυτές έρευνες έχει ληφθεί ως υπόθεση πως το πλοίο κινείται πάνω στο διαμήκη άξονα συμμετρίας του καναλιού.

Αρκετά χρόνια μετά ο K.Kijima(1987) με μια πιο σύγχρονη μελέτη, διερευνά την κίνηση ενός πλοίου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του προϋπολογισμού (prediction method), εξετάζει τις υδροδυναμικές δυνάμεις που δρουν πάνω στο σκάφος, όταν αυτό διέρχεται από την κοντινή περιοχή ενός μη ομοιόμορφου τοιχώματος, όπως είναι ένας κυματοθραύστης που εκτείνεται προς την θάλασσα, και αναδεικνύει τη σπουδαιότητα της μελέτης στην επίδραση των ανομοιόμορφων τοιχωμάτων στις κινήσεις ελιγμών.

Το 1994 οι Y.Yavin, G.Zilman και T.Miloh θορυβημένοι από τον αυξανόμενο ρυθμό θαλάσσιων ατυχημάτων και κατά συνέπεια τη ρύπανση του υδάτινου οικοσυστήματος, και την αδυναμία της μεθόδου προσομοίωσης να αποδώσει τις βέλτιστες κινήσεις ελιγμών ούτως ώστε να διασφαλίσει την ικανότητα να εκτελούνται ακίνδυνοι ελιγμοί σε περιορισμένα νερά, παρουσίασαν μια διαφορετική άποψη, με βάση τη μεθοδολογία στοχαστικού ελέγχου(stochastic control methodology). Όταν αναφέρονται σε στοχαστικό βέλτιστο έλεγχο, εννοούν τη δυνατότητα να ενσωματωθεί η γεωμετρία του διαύλου, των εμποδίων κ.τ.λ. στην τυποποίηση του προβλήματος και να καθοδηγήσει σε μια παραμετρική μελέτη για ελικτική ικανότητα ενός πλοίου.

Όλες οι παραπάνω έρευνες δείχνουν την ανησυχία των επιστημόνων να καταλήξουν σε ένα, όσο το δυνατόν, βέλτιστο μοντέλο για τον προσδιορισμό των υδροδυναμικών δυνάμεων που επηρεάζουν και μεταβάλλουν την ελικτική συμπεριφορά ενός πλοίου, όταν αυτό κάνει ελιγμούς σε περιοχή περιορισμένων υδάτων. Πάνω σε αυτό το πλάνο θα εργαστούμε και εμείς βασιζόμενοι κυρίως στην θεωρία του Robert.F.Beck.



## ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΜΕΛΕΤΗΣ

Σε αυτή τη μελέτη θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το πλοίο κινείται σε παράλληλη διεύθυνση με αυτή του άξονα συμμετρίας του καναλιού, αλλά όχι πάνω σε αυτόν, το κανάλι είναι ορθογωνικής διατομής, με αβαθή νερά. Εξαιτίας της ασυμμετρίας του προβλήματος, παρουσιάζεται, πλέον της βύθισης και της διαγωγής και άλλες δυο δυνάμεις, μια πλευρική (side force) στην κατεύθυνση sway, και μια ροπή ως προς τον άξονα z (yaw moment). Υποθέτουμε πως η ταχύτητα του πλοίου είναι τέτοια ώστε ο αριθμός Froude που επηρεάζεται από το βάθος του καναλιού να παραμένει μικρότερος της μονάδας. Έτσι σε πρώτη εκτίμηση η αντίσταση κυματισμού να είναι μηδέν.

Το πρόβλημα μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των «ταιριασμένων ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων», η ανάλυση γίνεται με έναν τρόπο όμοιο με αυτόν που έχουν δουλέψει οι Tuck και Beck (1966, 1967), Newman και Tuck (1975), αν εξαιρέσουμε βέβαια ότι λαμβάνουμε υπόψη λόγω ασυμμετρίας την επαγόμενη εγκάρσια ροή κάτω από την επιφάνεια του πλοίου. Την εγκάρσια ροή την χειριζόμαστε με έναν τρόπο όμοιο με αυτό που διατυπώθηκε και αναπτύχθηκε από τον Newman (1967), τη ροή δηλαδή που διέρχεται μεταξύ ενός λεπτομηκού σώματος και δυο παράλληλων τοίχων. Αυτή τη μέθοδο χρησιμοποίησαν και οι Tuck και Newman (1974), για βρουν τις αλληλεπιδρόμενες δυνάμεις μεταξύ δυο πλοίων σε αβαθή νερά.

Εξαιτίας του υποτιθέμενου μικρού βάθους του καναλιού, το φαινόμενο των πηγών και δινών στην εξωτερική περιοχή του πλοίου, μπορεί να προσεγγιστεί και να λυθεί ως δισδιάστατο πρόβλημα στον διαμήκη άξονα συμμετρίας του πλοίου. Δηλαδή, τα φαινόμενα της ροής περί το πλοίο μπορούν να αντικατασταθούν από μια γραμμή πηγών και δινών πάνω στον διαμήκη άξονα συμμετρίας του πλοίου.

Οι εντάσεις που επάγονται από αυτές, είναι άγνωστες και πρέπει να βρεθούν συνδυάζοντας τα εσωτερικά και εξωτερικά αναπτύγματα.

Η θεωρία όλων των λεπτομηκών σωμάτων λέει πως η λύση του εσωτερικού προβλήματος περιλαμβάνει την επίλυση δισδιάστατων σειρών στην περιοχή της εγκάρσιας ροής. Η ροή σε αυτή την περιοχή περιλαμβάνει δυο στοιχεία:

- Το πρώτο είναι η πηγή, λόγω ροής, η οποία συνδέεται απευθείας με την μεταβολή της επιφάνειας της εγκάρσιας διατομής του σώματος και
- Το δεύτερο είναι η τυρβώδης ροή, η οποία οφείλεται στην ασυμμετρία της εξωτερικής περιοχής του σώματος.

Το μέγεθος της τυρβώδους ροής είναι άγνωστο και πρέπει επίσης να προσδιοριστεί από το συνδυασμό των αναπτυγμάτων. Έτσι συνδυάζουμε τα αποτελέσματα των εν λόγω αναπτυγμάτων σε μια ολοκληρωτική εξίσωση για τις εντάσεις λόγω δινών και εκφράζουμε τις εντάσεις των πηγών ως προς την αλλαγή της επιφάνειας της εγκάρσιας διατομής του πλοίου. Έχοντας λοιπόν τις εντάσεις λόγω πηγών και δινών είναι πλέον δυνατόν να προσδιορίσουμε τις δυνάμεις και τις ροπές που δρουν πάνω στο πλοίο, χρησιμοποιώντας το εσωτερικό ανάπτυγμα και ολοκληρώνοντας την πίεση που ασκείτε πάνω στη γάστρα.

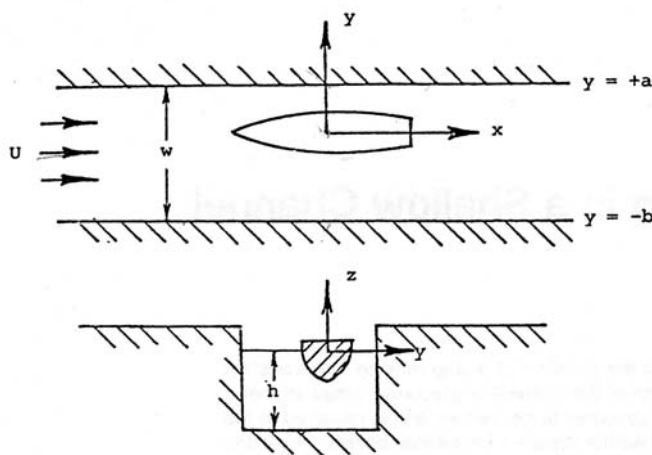
Εναλλακτικά, η πλευρική δύναμη (side force), κατεύθυνση sway, και ροπή ως προς τον άξονα z (yaw moment) μπορούν επίσης να βρεθούν υπολογίζοντας τη δύναμη και τη ροπή που ασκείτε μεμονωμένα και αντιπροσωπεύει την συμπεριφορά του πλοίου στην εξωτερική του περιοχή.

## ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Όπως παρουσιάζεται στο **Σχήμα 1**, θεωρώντας σταθερή ροή ενός συνεκτικού και ασυμπίεστου ρευστού που διαπερνά ένα λεπτομηκές πλοίο σε ένα κανάλι ορθογωνικής διατομής. Το εισερχόμενο ρεύμα έχει μια σταθερή ταχύτητα  $U$ . Η αρχή των συντεταγμένων του συστήματος ορίζεται στο μέσο του πλοίου με τον κατακόρυφο άξονα  $z$  θετικό προς τα επάνω.

Το επίπεδο που ορίζεται από τους άξονες  $x$ - $y$ , συμπίπτει με το επίπεδο του ήρεμου νερού του καναλιού, και ο  $x$  άξονας έχει κατεύθυνση προς την πρύμνη. Τα τοιχώματα του καναλιού ορίζονται σε απόσταση  $y = a$  και  $y = -b$  από την αρχή των αξόνων. Το πλάτος του καναλιού, κατά αυτόν τον τρόπο, είναι  $w = a + b$ , και το βάθος καθορίζεται ως  $h$ .

Το δυναμικό της ταχύτητας  $\varphi(x,y,z)$  που αναπαριστά τη διαταραχή των ταχυτήτων εξαιτίας του πλοίου, θα ικανοποιήσει την εξίσωση Laplace μέσα στην περιοχή επιρροής του ρευστού, (εκτός από την περίπτωση ρυμούλκησης σε περιοχή που αναπτύσσονται δίνες από απόνερα). Αυτό το δυναμικό της ταχύτητας μπορεί να αναλυθεί σε μια ελεύθερη επιφάνεια σε οριακή κατάσταση, και σε μια κινηματική κατάσταση μεταξύ των τοίχων του καναλιού και της γάστρας του πλοίου. Επιπλέον πρέπει να επιβληθεί και μια κατάλληλη κατάσταση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.



**Σχήμα 1**

Σε αυτή την μελέτη, μόνο το γραμμικό ή αλλιώς, το πρωτοβάθμιο πρόβλημα θα επιλυθεί. Θα υποθέσουμε ότι το μήκος  $L$  του πλοίου είναι πρωτεύων όρος, και γι' αυτό το πλάτος, το βύθισμα και το βάθος του καναλιού πρέπει να είναι μικρότερα σε σύγκριση με αυτό, (έτσι έχουμε,  $O(\varepsilon)$  όπου  $\varepsilon$  είναι μια μικρή παράμετρος). Οι τοίχοι του καναλιού, υποθέτουμε, πως βρίσκονται σε μια σημαντική απόσταση ( $O(1)$ ) μακριά από το πλοίο.

Αυτό σημαίνει πως οι τοίχοι του καναλιού ανήκουν στην εξωτερική περιοχή. Γι' αυτό θα συζητήσουμε τη σημασία της υπόθεσης όταν θα εξετάσουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα.

Αν το κανάλι είναι αρκετά ρηχό, και η τοπική διαταραχή του πλοίου θεωρηθεί αμελητέα, τότε το δυναμικό της ταχύτητας μπορεί να περιγραφεί πιο απλουστευμένα στην εξωτερική περιοχή

$$\phi(x, y, z) \cong \phi(x, y)$$

που, όπως έχει δειχτεί από τον Tuck (1969), η δισδιάστατη συνάρτηση  $\phi(x, y)$  ικανοποιεί την ισότητα:

$$(1 - F_h^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad (1)$$

με  $F_h = U / \sqrt{gh}$ , ο αριθμός Froude βασισμένος στο βύθισμα του καναλιού. Οι οριακές συνθήκες της  $\phi(x, y)$  στα τοιχώματα του καναλιού είναι:

$$\phi(x, y) = 0 \quad y = \begin{cases} a \\ -b \end{cases} \quad (2)$$

Στην εξωτερική περιοχή η γάστρα του πλοίου συρρικνώνεται σε μια λεπτή γραμμή πάνω στον x-άξονα. Οι οριακές συνθήκες πάνω σε αυτή την γραμμή, πρέπει να προσαρμοστούν, και να ταιριάξουν στο εσωτερικό ανάπτυγμα (inner expansion).

Επιπρόσθετα, αναμένουμε ένα άλμα του δυναμικού εγκάρσια στα απόνερα του πλοίου (ο x-άξονας έχει κατεύθυνση, αυτή της ροής του ρευστού), που οφείλεται στην παρουσία του στροβιλισμού.

Μια γενική λύση του προβλήματος μπορεί να βρεθεί κατανέμοντας τις πηγές και τις δίνες κατά μήκος της λεπτής αυτής γραμμής. Βέβαια, οι πηγές και οι δίνες πρέπει να έχουν την κατάλληλη μορφή στο σύστημα, έτσι ώστε, να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες του καναλιού. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να γράψουμε:

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} \int_{-l}^l d\xi [\sigma(\xi)G_s(Z; \xi) + \gamma(\xi)G_v(Z; \xi)] \quad (3)$$

όπου:

$$G_s(Z; \xi) = \frac{1}{2\pi} (\ln[\sinh k_0(Z - \xi)] + \ln\{\sinh[k_0(Z - \xi) - i\alpha]\})$$

$$G_v(Z; \xi) = \frac{-i}{2\pi} (\ln[\sinh k_0(Z - \xi)] - \ln\{\sinh[k_0(Z - \xi) - i\alpha]\}) \quad (4)$$

$$Z = x + i\beta y$$

$$\beta = \sqrt{1 - F_h^2}$$

$$k_0 = \pi / 2w\beta \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{\pi a}{w}$$

Στην εξίσωση (3), το  $G_s(Z; \xi)$  είναι το δυναμικό που οφείλεται σε μια ομάδα πηγών, σε δισδιάστατο κανάλι με τους τοίχους του σε απόσταση  $y=a$  και  $y=-b$  από την αρχή των αξόνων του συστήματος μας. Παρομοίως, το  $G_v(Z; \xi)$  είναι το δυναμικό που οφείλεται σε μια ομάδα δινών. Η σταθερά  $\beta$  εμφανίζεται για να επιμηκύνει τις  $y$ -συντεταγμένες, έτσι ώστε, η εξίσωση (1) να ικανοποιείται, αντί να γίνει χρήση της εξίσωσης Laplace's. Επίσης, τα  $\sigma(\xi)$  και  $\gamma(\xi)$  είναι τα άγνωστα δυναμικά των πηγών και των δινών. Η ένταση των οποίων πρέπει να προσδιοριστεί με βάση τις λοιπές συνθήκες του προβλήματος.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η μορφή της εξίσωσης (3) δηλώνει ότι οι εντάσεις των πηγών και των δινών έχουν την ίδια τάξη μεγέθους. Στο παρόν στάδιο της ανάλυσης δεν έχουμε τη δυνατότητα να επιβεβαιώσουμε αυτή την υπόθεση. Η πραγματική συσχετιζόμενη τάξη μεγέθους των δυο αυτών εντάσεων πρέπει να προσδιοριστεί από το ταίριασμα, (matching).

Συμπεραίνοντας από αυτό, βλέπουμε ότι οι εντάσεις των πηγών και των δυνών εξαρτώνται από το διάκενο που υπάρχει μεταξύ τρόπιδας και πυθμένα καναλιού.

Για μηδενικό ή πολύ μικρό διάκενο, οι δυο εντάσεις έχουν την ίδια τάξη μεγέθους. Για μετρίου μεγέθους διάκενο (αυτό δείχνει η αναλογία  $(h-T)/h$ , όταν δεν είναι πολύ μικρή), η ένταση της πηγής γίνεται σχετικά πιο σημαντική. Αυτό συντελεί, στη μεταβολή της κατάστασης των εντάσεων των δυνών, σε ανώτερου βαθμού, στο εξωτερικό ανάπτυγμα του πλοίου μας. Στην παρούσα ανάλυση θα διατηρήσουμε μαζί τις εντάσεις των πηγών και των δυνών σε χαμηλότερου βαθμού κατάσταση στο εξωτερικό ανάπτυγμα [εξίσωση (3)].

Βασικά αυτή είναι μια διευκόλυνση, η οποία οδηγεί σε μια ολοκληρωτική εξίσωση για το  $\gamma(x)$  και είναι έγκυρη είτε για μηδενικό είτε για μετρίου μεγέθους διάκενο. Ωστόσο πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι για μετρίου μεγέθους διάκενο, κάτω από την τρόπιδα, το δυναμικό της πηγής είναι ελαφρώς χαμηλότερου βαθμού εντατικής κατάστασης από αυτόν της δίνης.

Με σκοπό να επιτυγχάνουμε το ταίριασμα αυτό θα χρειαστούμε το τρισδιάστατο εσωτερικό ανάπτυγμα του εξωτερικού αναπτύγματος. Το διδιάστατο εξωτερικό ανάπτυγμα είναι απλό:

$$\Phi(x, y, z) \approx Ux + \phi(x, y) \quad (6)$$

Όπως είναι αποδεδειγμένο, το τρισδιάστατο εσωτερικό ανάπτυγμα του (6) έχει τη μορφή:

$$\Phi(x, y, z) \approx Ux + \phi_1(x, y) \pm \Delta\phi_1(x) + y[V(x) \pm \Delta V(x)] \quad (7)$$

όπου

$$\phi_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} d\xi \left\{ \sigma(\xi) \left[ \ln[\sinh k_0(x-\xi)] + \frac{1}{2} \ln[\sinh^2 k_0(x-\xi) + \sin^2 \alpha] \right] + \gamma(\xi) \tan^{-1} \left[ \frac{\cosh k_0(x-\xi) \sin \alpha}{\sinh k_0(x-\xi) \cos \alpha} \right] \right\} \quad (8)$$

$$\Delta\phi_1 = -\frac{1}{2} \int d\xi \gamma(\xi) H(x-\xi) \quad (9)$$

$$V(x) = \frac{1}{4w} \int_{-l}^l d\xi \left( \frac{-\sigma(\xi) \sin 2\alpha}{\cosh 2k_0(x-\xi) - \cos 2\alpha} + \gamma(\xi) \coth[k_0(x-\xi)] \frac{1 - \cos 2\alpha}{\cosh 2k_0(x-\xi) - \cos 2\alpha} \right)$$

$$\Delta V(x) = \beta \frac{\sigma(x)}{2}$$

$$H(x-\xi) = \text{Heaviside step function} \quad (10)$$

Η εξίσωση (7) μας δίνει το δυναμικό της κίνησης το στοιχειώδες δυναμικό της κίνησης, την ταχύτητα και τη στοιχειώδη ταχύτητα κατά μήκος της λεπτής γραμμής, που έχουμε υποθέσει, με άγνωστους όρους την ένταση των πηγών και την ένταση των δινών. Για το ταίριασμα θα απαιτήσουμε το διδιάστατο εξωτερικό ανάπτυγμα του τρισδιάστατου εσωτερικού αναπτύγματος. Το τρισδιάστατο εσωτερικό ανάπτυγμα είναι:

$$\Phi \approx Ux + \phi_1 + \phi_2 \quad (11)$$

όπου  $\phi_1$  είναι σε μικρότερο από το  $\phi_2$ . Οι λεπτομέρειες της επίλυσης για τα  $\phi_1$  και τα  $\phi_2$  έχουν αναπτυχθεί από τον Tuck(1966), και δεν θα παρουσιαστούν σε αυτή την μελέτη.



Αντί ενός μόνο σύντομου αποτελέσματος για τα  $\phi_1$  και  $\phi_2$  εντοπίζονται προβλήματα τέτοια ώστε να μπορούμε να συλλέξουμε τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε.

Όπως είναι συνηθισμένο σε θεωρίες για λεπτομηκή πλοία, και τα δυο μαζί,  $\phi_1$  και  $\phi_2$ , ικανοποιούν τη διδιάστατη εξίσωση Laplace σε ένα κανάλι ορθογωνικής διατομής. Οι οριακές συνθήκες για το  $\phi_1$  δυναμικό είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= 0 & z &= -h \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= 0 & z &= 0 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial N} &= 0 & y &= \pm f(x, z) \end{aligned} \quad (12)$$

όπου  $N$  είναι η διδιάστατη κανονική μονάδα στην επιφάνεια του σώματος [δίδεται από  $y = \pm f(x, z)$ ] σε κανάλι ορθογωνικής διατομής. Η κατάλληλη οριακή συνθήκη στο άπειρο της εσωτερικής περιοχής προέρχεται από το ταίριασμα με την εξωτερική περιοχή. Εξετάζοντας την εξίσωση (7) βλέπουμε ότι στο άπειρο του  $\phi_1$  πρέπει να είναι μια το πολύ συνάρτηση του  $x$ . Ξεκάθαρα η επίλυση στο πρόβλημα του  $\phi_1$  δεν είναι παρά μια συνάρτηση του  $x$  και επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$\phi_1 = F_1(x) \quad (13)$$

όπου  $F_1(x)$  μπορεί να βρεθεί με ταίριασμα

Οι οριακές συνθήκες στο  $\phi_2$  πρόβλημα είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= 0 & z &= -h \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= 0 & z &= 0 \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial N} &= \pm U f_x / \sqrt{1 + f_x^2} & y &= \pm f(x, z)
\end{aligned} \tag{14}$$

Σε μεγάλη απόσταση, σε ένα κανάλι ορθογωνικής διατομής, το  $\phi_2$  μπορεί να έχει συμπεριφορά με χαρακτηριστικά πηγής, εξαιτίας της ομαλής ταχύτητας στα όρια της ορθογωνικής διατομής του καναλιού. Επιπλέον μπορούμε να επιβάλλουμε μια ροή που έχει μηδενική σταθερή ταχύτητα στην ορθογωνική διατομή. Συνδυάζοντας αυτές τις δυο συμπεριφορές, μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \phi_2(y, z) = V_1(x)[y \pm C(x)] \pm V_2(x)y \tag{15}$$

Για οποιαδήποτε, δοθείσα, εγκάρσια διατομή τα  $V_1$ ,  $V_2$  και  $C$  είναι σταθερά, αλλά μπορούν να ποικίλουν από διατομή σε διατομή. Ο πρώτος όρος της εξίσωσης (10),  $[V_1(y \pm C)]$  αντιπροσωπεύει την κυκλοφορία της ροής που περνά από την εγκάρσια διατομή του πλοίου και είναι άγνωστου μεγέθους. Η έκφραση  $C(x)$ , είναι κοινά γνωστή ως συντελεστής αποκλεισμού “blockage coefficient” [Tuck and Taylor (1968)]. Είναι το άλμα στο δυναμικό το οποίο ευθύνεται όταν κάποιος λύνει το δισδιάστατο πρόβλημα του Neumann σε μοναδιαία κυκλοφορία ροής που διέρχεται από μια γάστρα όταν αυτή βρίσκεται σε ένα κανάλι.

Για μια δοσμένη γάστρα και το διάκενο της ανάμεσα στους τοίχους του καναλιού, ο συντελεστής αποκλεισμού “blockage coefficient”  $C(x)$  είναι μια μοναδικά προσδιοριστέα ποσότητα που μπορεί να θεωρηθεί γνωστή.

Όσο πιο μικρό είναι το διάκενο μεταξύ της γάστρας και των τοίχων του καναλιού τόσο μεγαλύτερο  $C(x)$  έχουμε. Η οριακή τιμή του συντελεστή αποκλεισμού “blockage coefficient”  $C(x)$  είναι το άπειρο ( $\infty$ ) το οποίο ισοδυναμεί με ολόκληρο τον αποκλεισμό (blockage), όταν δηλαδή η γάστρα εφάπτεται, και από τις δυο πλευρές, πάνω στα τοιχώματα του καναλιού. Όταν  $C(x) = 0$  δηλαδή δεν υπάρχει αποκλεισμός και ως εκ τούτου δεν υφίσταται γάστρα στο κανάλι.

Για τον προσδιορισμό του  $\phi_2$  βλέπουμε ότι, εξαρτώμενος από το διάκενο γάστρας - πυθμένα και γάστρας – τοιχωμάτων καναλιού, η τάξη μεγέθους του συντελεστή αποκλεισμού  $C(x)$  μπορεί να ποικίλει. Καθώς το μέγεθος του  $C(x)$  διαφέρει, έχει ως αποτέλεσμα να υπάρχει διαφορά μεταξύ εξωτερικού αναπτύγματος και εσωτερικού αναπτύγματος. Αυτό στην πράξη οδηγεί σε συνθήκες συνδυασμού, μεταξύ των εσωτερικών και των εξωτερικών αναπτυγμάτων. Συγκεκριμένα, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, τα συσχετιζόμενα μεγέθη των εντάσεων των πηγών και των δινών, στην εξωτερικά περιοχή επίλυσης, καθορίζονται από το μέγεθος του συντελεστή  $C(x)$ .

Για ένα δεδομένο πλοίο αυτό εξαρτάται από το διάκενο μεταξύ τρόπιδας και πυθμένα. Εάν υποθέσουμε ότι αυτό το διάκενο είναι πολύ μικρό, τότε οι εντάσεις των πηγών και των δινών θα είναι υπό την ίδια τάξη μεγέθους, και θα οδηγήσουν στο συνδυαστικό αποτέλεσμα που παρουσιάζεται παρακάτω.

Ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (10),  $(\pm V_2 y)$  είναι η ροή που οφείλεται σε πηγή. Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της μάζας, μπορούμε να βρούμε την τιμή για την  $V_2$  σε σχέση με την μεταβολή της καμπύλης κυβισμού της γάστρας που μελετάμε.

Έτσι:

$$2V_2(x)h = \int_C \frac{\partial \phi_2}{\partial N} dl = US'(x) \quad (16)$$

$$V_2(x) = \frac{U}{2h} S'(x)$$

όπου  $S'(x)$  είναι η πρώτη παράγωγος της καμπύλης κυβισμού οποιασδήποτε εγκάρσιας διατομής.

Για να γίνει ο συνδυασμός με το εξωτερικό ανάπτυγμα, χρειαζόμαστε το διδιάστατο εξωτερικό ανάπτυγμα του τρισδιάστατου εσωτερικού αναπτύγματος. Από την επίλυση των εξισώσεων (6), (8) και (9) βρίσκουμε ότι ζητούμενο ανάπτυγμα είναι απλό:

$$\Phi \approx Ux + F_1(x) \pm \frac{US'(x)}{2h} y + V_1(x)[y \pm C(x)] \quad (17)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις εξισώσεις (12) και (7) έχουμε τις παρακάτω συνθήκες:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \phi_1(x) = F_1(x) \\ \text{b)} \quad & \Delta \phi_1(x) = V_1(x)C(x) \\ \text{c)} \quad & V(x) = V_1(x) \\ \text{d)} \quad & \Delta V(x) = \frac{US'(x)}{2h} \end{aligned} \quad (18)$$

Από τις παραπάνω συνθήκες που προέκυψαν από τον συνδυασμό των εξισώσεων (12) και (7), η συνθήκη (d) μας δίνει απευθείας την άγνωστη έως τώρα ένταση της πηγής.

$$\Delta V(x) = \beta \frac{\sigma(x)}{2} = \frac{US'(x)}{2h} \quad (19)$$

$$\sigma(x) = \frac{US'(x)}{\beta h}$$

Για να βρούμε την άγνωστη ένταση της δίνης, αντικαθιστούμε την σχέση (18)(c) στην (18)(b) και χρησιμοποιούμε την έκφραση για την  $V(x)$  και την  $\Delta\phi_1(x)$  από την σχέση (7). Χρησιμοποιώντας και την τιμή της έντασης της πηγής, από την σχέση (19), συγκεντρώνουμε όλους τους όρους συνδέονται με τη  $\gamma(x)$  στο ένα μέλος της εξίσωσης και έτσι καταλήγουμε στο παρακάτω απλά ορισμένο ολοκλήρωμα για τη  $\gamma(x)$ .

$$\int_{-1}^1 d\xi \gamma(\xi) \left[ \left( \frac{1 - \cos 2\alpha}{\cosh 2k_0(x - \xi) - \cos 2\alpha} \right) \cdot \coth k_0(x - \xi) + \frac{2w}{C(x)} H(x - \xi) \right] = \quad (20)$$

$$\frac{-\pi U}{wh^2 \beta} \sin 2\alpha \int_{-1}^1 d\xi S(\xi) \frac{\sinh 2k_0(x - \xi)}{[\cosh 2k_0(x - \xi) - \cos 2\alpha]^2}$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (20) έχουμε ολοκληρώσει το ολοκλήρωμα που περιέχει το  $S'(x)$ , σε επιμέρους τμήματα, και καταλήγουμε στο ολοκλήρωμα που υπάρχει το  $S(x)$ . Αυτό μπορεί να κάνει τους αριθμητικούς υπολογισμούς πιο απλούς, αλλά έχουμε άτυπα υποθέσει ότι η καμπύλη κυβισμού είναι μηδενική στα άκρα.

Αρκετά σχόλια πρέπει να λεχθούν για την εξίσωση (20). Πρώτον, δίνει αποτέλεσμα υποθέτοντας ότι το διάκενο μεταξύ τροπίδας και πυθμένα είναι μικρό [ $C(x)=0(1)$ ]. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση (20) υποδεικνύει ότι η εντάσεις των πηγών και των δινών στο εξωτερικό ανάπτυγμα είναι υπό την ίδια τάξη μεγέθους,

το οποίο είναι σε συμφωνία με την αρχική μας υπόθεση. Σε μετρίου μεγέθους υπό την τρόπιδα διάκενο  $[C(x)=0(\varepsilon)]$ , ο δεύτερος όρος του πυρήνα υπερισχύει και η λύση για την ένταση της δίνης θα είναι μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερη από αυτή της έντασης της πηγής. Όπως έχουμε και πιο πίσω αναφέρει, αυτό είναι ακριβώς η συμπεριφορά που αναμέναμε.

Η εξίσωση (20) είναι όμοια με τη δισδιάστατη εξίσωση μια αεροτομής. Για  $C(x) = \infty$  (το πλοίο ακουμπά στο πυθμένα) η εξίσωση (20) είναι ενδεικτική στο διδιάστατο πρόβλημα μια συμμετρικής αεροτομής που βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας μιας αεροδυναμικής σήραγγας. Η κυκλοφορία αυξάνεται λόγω της λεπτόγραμμης γάστρας και της ασυμμετρίας των τοίχων. Για τις διάφορες ιδιότητες της επίλυσης της εξίσωσης (20), γίνεται αναφορά στο Παράρτημα 2. Χρησιμοποιώντας τις τεχνικές που παρουσιάστηκαν από τον Muskhelishvili(1953), επεξηγείτε ότι τα χαρακτηριστικά της επίλυσης είναι όμοια με αυτά της εξίσωσης της αεροτομής. Σε απόσταση  $x = -l$ , όπου εκεί είναι και η πλώρη του σκάφους, παρουσιάζεται, μια αξιοσημείωτη τετραγωνική ρίζα στο  $\gamma(x)$ . Στην αντίθετη κατεύθυνση και σε απόσταση  $x = l$ , όπου εκεί είναι η πρύμνη του σκάφους, πρέπει να εφαρμόσουμε μια Kutta συνθήκη  $[\gamma(l) = 0]$  με την προϋπόθεση ότι η λύση της να είναι μοναδική. Επιπροσθέτως, φαίνεται ότι αν το δεξιό μέλος της εξίσωσης (20) ισοδυναμεί με μηδέν, τότε η δινητικότητα είναι επίσης μηδέν οπουδήποτε. Το δεξιό μέλος της εξίσωσης (20) τείνει στο μηδέν, καθώς το πλοίο πλησιάζει τον διαμήκη άξονα συμμετρίας του καναλιού  $a = \frac{\pi}{2}$ .

Έτσι όπως γνωρίζουμε και από την συμμετρία, δεν υπάρχει κυκλοφορία γύρω από το πλοίο, (και ως εκ τούτου καμία πλευρική δύναμη), όταν το πλοίο λόγω της διευθύνεται κατά τον διαμήκη άξονα συμμετρίας του καναλιού. Επίσης καθώς το πλοίο πλησιάζει τα τοιχώματα,

η εξίσωση δεν είναι ισχύει πλέον εφόσον ήταν εξ'αρχής δεδομένο πως τα τοιχώματα βρίσκονται στην εξωτερική περιφέρεια. Συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι, καθώς το  $a$  τείνει στο μηδέν ( $a \rightarrow 0, \pi$ ) ταυτόχρονα το δεξιό μέλος και ο πυρήνας ταυτίζονται με κατώρευμα των δινών και η απεικόνιση του συστήματος αυτού τείνει στο μηδέν. Αυτό συμβαίνει γιατί, μαθηματικά όταν το πλοίο βρίσκεται στο δεξιά πάνω στον τοίχο, το πρόβλημα είναι και πάλι συμμετρικό.

Μπορούμε επίσης να δούμε από την (20) ότι το  $C(x)$  είναι ο κυρίαρχος παράγοντας του δεύτερου όρου του πυρήνα. Εξαιτίας αυτού πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στο τελείωμα του γάστρας σκάφους, όπου το  $C(x)$  μπορεί να τείνει στο μηδέν. Στη πρώτη,  $x = -l$ , δεν υπάρχει πρόβλημα εφόσον η εξίσωση βήματος Heaviside είναι επίσης μηδέν. Στην πλήρη, δεν μπορούμε να επιτρέψουμε να συμβεί  $C(x) = 0$ . Ωστόσο, το  $C(x) = 0$  υποδηλώνει πως η γάστρα του σκάφους είναι αιχμηρή εκεί, και αυτό θα ήταν ασυμβίβαστο με την προϋπόθεση που έχουμε για την συνθήκη Kutta για την πρυμναία άκρη του πλοίου. Με σκοπό να εφαρμόσουμε με συνθήκη Kutta πρέπει να υπάρχει αυτή η οξεία πρυμναία άκρη. Αυτή η άκρη μοιάζει σαν μια γραμμή μηδενικής πυκνότητας στην εγκάρσια όψη. Αυτή είναι ακριβώς η γεωμετρία, η οποία προκύπτει, αν απαιτήσουμε  $C(x) \neq 0$  και  $S(x) = 0$  στην πρύμνη.

Λύνοντας την εξίσωση (20) μπορούμε να γνωρίζουμε ταυτόχρονα τις άγνωστες ως τώρα εντάσεις των πηγών και των δινών. Αυτή είναι η μοναδική πληροφορία που χρειαζόμαστε για να βρούμε τις πρωτοτάξιες δυνάμεις που δρουν στη γάστρα του πλοίου. Πριν ασχοληθούμε με την επίλυση της εξίσωσης (20) θα εξάγουμε εκφράσεις για τις δυνάμεις που δρουν στο πλοίο χρησιμοποιώντας τις εντάσεις των πηγών και των δινών.

## **ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ ΠΟΥ ΔΡΟΥΝ ΣΤΗΝ ΓΑΣΤΡΑ**

Οι δυνάμεις και οι ροπές που δρουν στη γάστρα, καθορίζονται από την ολοκλήρωση των υδροδυναμικών πιέσεων, που ασκούνται πάνω στην επιφάνεια της γάστρας. Οι κατώτερης τάξης δυνάμεις βρίσκονται από την επίδραση, των γνωστών πλέον, εντάσεων των πηγών και των δινών, χρησιμοποιώντας το εσωτερικό ανάπτυσμα. Ενδιαφερόμαστε κυρίως για την πλευρική δύναμη (sway), την στροφή γύρω από τον άξονα z (yaw moment), κατακόρυφη δύναμη (vertical force) και την ροπή γύρω από τον άξονα y (trim moment). Δυνάμεις και ροπές που παρουσιάζονται στο **Σχήμα 1**.

Σε αυτή την, όχι και τόσο σημαντική υπόθεση, θεωρούμε μηδενική αντίσταση λόγω κυματισμού. Αυτό μπορεί εύκολα να φανεί εφαρμόζοντας το θεώρημα των ροπών στην εξωτερική περιοχή. Έχοντας μια ρυθμισμένη ένταση κατά μήκος των τοίχων του καναλιού και κλείνοντας πολύ μακρύτερα, αντίθετα προς τη ροή κατεύθυνσης ή και κατά την ροή κατεύθυνσης του ρεύματος, μπορούμε να δούμε ότι οι μοναδικές επιφάνειες ελέγχου, οι οποίες επηρεάζουν την οπισθέλκουσα δύναμη, αυτές που είναι αντίθετα προς τη ροή κατεύθυνσης ή και κατά την ροή κατεύθυνσης του ρεύματος. Έκτοτε, σε πρωτοτάξιους όρους, η εκτρεπόμενες ταχύτητες λόγω της παρουσίας της γάστρας, πέφτουν εκθετικά σε αυτές τις κατευθύνσεις και έτσι μπορούμε να πούμε ότι η αντίσταση κυματισμού είναι μηδενική.

Μια εναλλακτική μέθοδος για να εντοπίσουμε την πλευρική δύναμη (sway), και την ροπή γύρω από τον άξονα z (yaw moment), είναι να χρησιμοποιήσουμε το εξωτερικό ανάπτυσμα και να υπολογίσουμε την δύναμη και την ροπή που δρουν και διανέμονται στην μοναδιαία αναπαράσταση του πλοίου. Σε χαμηλότερης τάξης, οι δυο μέθοδοι συμφωνούν απόλυτα.



Χρησιμοποιώντας το εξωτερικό ανάπτυσμα, ωστόσο, μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε εύκολα σε ανώτερης τάξης συνθήκες, συμπεριλαμβάνοντας τα τετράγωνα των εντάσεων των πηγών και των δινών. Θα δούμε ότι αυτές οι ανώτερης τάξης συνθήκες, παίζουν σημαντικό ρόλο. Έτσι, για ευκολία, θα χρησιμοποιούμε το εσωτερικό ανάπτυσμα για να προσδιορίσουμε την πλευρική δύναμη (sway) και τη ροπή στρέψης περί τον άξονα z (yaw). Η πλήρης περιγραφή των δυο μεθόδων μπορεί να βρεθεί στον Beck(1976).

Στρέφοντας την προσοχή μας, πρώτα να βρούμε την κατακόρυφη δύναμη και την ροπή γύρω από τον y-άξονα, ακολουθούμε τα αποτελέσματα από τον Tuck(1966). Σε πρώτη τάξη η πίεση στην εσωτερική περιοχή δίνεται από:

$$p \approx -\rho U \phi_{1x} \quad (21)$$

όπου το  $\phi_1$  υπολογίστηκε στην εξίσωση (7). Διαφοροποιώντας το  $\phi_1$  όσο αφορά το x βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \phi_{1x} = & \frac{U}{4\beta^2 hw} \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \coth[k_0(x-\xi)] \left[ \frac{2 \sinh^2 k_0(x-\xi) + \sin^2 a}{\sinh^2 k_0(x-\xi) + \sin^2 a} \right] \\ & - \frac{1}{4\beta w} \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \left[ \frac{\sin a \cdot \cos a}{\sinh^2 k_0(x-\xi) + \sin^2 a} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Από τον Tuck(1966), τις εξισώσεις (19) και (20), η κατακόρυφη δύναμη (θετική προς τα άνω) δίδεται:

$$F_3 = -\rho U \int_{-l}^l dx \phi_{1x}(x) B(x) \quad (23)$$

και η ροπή περί τον y-άξονα(θετική όταν η πλώρη ανυψώνεται):

$$F_4 = \rho U \int_{-l}^l dx \phi_{1x}(x) x B(x) \quad (24)$$

Αν το πλοίο κινείται στο διαμήκη άξονα συμμετρίας του καναλιού, δηλαδή  $\alpha = \pi/2$

και  $\gamma(\xi) = 0$ . Γι' αυτή την περίπτωση η εξίσωση (22) απλοποιείται σε:

$$\phi_{1x} = \frac{U}{2\beta^2 h_w} \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \coth[2k_0(x - \xi)] \quad (25)$$

και οι εξισώσεις (23) και (24) παραμένουν ίδιες με τις εκφράσεις που βρέθηκαν από τον Tuck(1967), [ή βλέπε Beck, Newman και Tuck (1975)], για τις δυνάμεις διαγωγής και βύθισης που δρουν σε ένα πλοίο το οποίο κινείται κατά μήκος του διαμήκη άξονα συμμετρίας του καναλιού.

Η πλευρική δύναμη και η ροπή στρέψης περί τον z-άξονα βρίσκονται καθόσον υπολογίσουμε τη δύναμη και τη ροπή δρουν και διανέμονται μοναδιαία σε ένα ευρύ πεδίο. Εφόσον η εξωτερική περιοχή είναι δισδιάστατη στο x-y επίπεδο, το πρόβλημα είναι παρόμοιο με το να βρούμε τις δυνάμεις και τις ροπές που ασκούνται πάνω σε μια δισδιάστατη αεροτομή. Αφού πολλαπλασιάσουμε με το βάθος του νερού, τότε παίρνουμε εκφράσεις για την συνολική δύναμη και ροπή που δρουν πάνω στο πλοίο.

Υπάρχουν αρκετοί πιθανοί τρόποι να προσδιορίσουμε τις δυνάμεις και τις ροπές που εμφανίζονται σαν μοναδιαία διανομή. Θα επικαλεστούμε τον μαθηματικό τύπο του Blasius [βλέπε για παράδειγμα Milne-Thompson (1968)], όπως παρακάτω:

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C dZ \left( \frac{dW}{dZ} \right)^2 \quad (26 \alpha)$$

$$N = \operatorname{Re} \left( -\frac{1}{2} \rho \oint_C dZ Z \left( \frac{dW}{dZ} \right)^2 \right) \quad (26 \beta)$$

όπου:

$X$  = δύναμη ανά μονάδα μήκους, θετική στην +x κατεύθυνση

$Y$  = δύναμη ανά μονάδα μήκους, θετική στην +y κατεύθυνση

$N$  = ροπή ανά μονάδα μήκους, θετική στρέφοντας δεξιά

$W(Z)$  = το μιγαδικό δυναμικό της ταχύτητας στην εξωτερική περιοχή

$$W(Z) = UZ + \int_{-l}^l d\xi [\sigma(\xi) + \gamma(\xi)G_v(Z; \xi)] \quad (26 \gamma)$$

όπου οι  $G_s(Z; \xi)$  και  $G_v(Z; \xi)$  είναι οι συναρτήσεις Green για μοναδιαία πηγή και δίνη, αντίστοιχα. Οι εκφράσεις για  $G_s(Z; \xi)$  και  $G_v(Z; \xi)$  μπορούν να βρεθούν από την εξίσωση (3). Η καμπύλη  $C$  επιλέγεται τέτοια ώστε να περιβάλλει πλήρως τις ιδιομορφίες, αλλά να παραμένει μέσα στα όρια του καναλιού.

Στην αναφορά που ακολουθεί, εμφανίζεται η παράγωγος της πλευρικής δύναμης. Η παράγωγος για τη ροπή γύρω από τον  $y$ -άξονα ακολουθεί αμέσως μετά, και δίδεται στα τελικά αποτελέσματα. Πρώτα πρέπει να διαφορίσουμε το  $W(Z)$  ως προς  $Z$  και να υψώσουμε το αποτέλεσμα στο τετράγωνο. Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση (26 α) ανταλλάξουμε τους όρους της ολοκλήρωσης, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
X - iY &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 \\
I_1 &= \frac{i\rho}{2} U^2 \oint_C dZ \\
I_2 &= \frac{i\rho}{2} \frac{U}{w\beta} \int_{-l}^l d\xi \sigma(\xi) \oint_C dZ \frac{\sinh[2k_0(Z - \xi) - ia]}{D(Z - \xi)} \\
I_3 &= \frac{-i\rho}{2} \frac{U}{w\beta} \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \oint_C dZ \frac{\sin a}{D(Z - \xi)} \\
I_4 &= \frac{-i\rho}{4} \frac{1}{w^2 \beta^2} \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \int_{-l}^l d\zeta \gamma(\zeta) \oint_C dZ \frac{\sinh[2k_0(Z - \xi) - ia]}{D(Z - \xi)} \times \frac{\sin a}{D(Z - \zeta)} \\
I_5 &= \frac{i\rho}{8} \frac{1}{w^2 \beta^2} \int_{-l}^l d\xi \sigma(\xi) \int_{-l}^l d\zeta \sigma(\zeta) \oint_C dZ \frac{\sinh[2k_0(Z - \xi) - ia]}{D(Z - \xi)} \times \frac{\sinh[2k_0(Z - \zeta) - ia]}{D(Z - \zeta)} \\
I_6 &= \frac{\rho}{8} \frac{1}{w^2 \beta^2} \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \int_{-l}^l d\zeta \gamma(\zeta) \oint_C dZ \frac{\sin a}{D(Z - \xi)} \times \frac{\sin a}{D(Z - \zeta)} \\
D(Z) &= 2 \sinh(k_0 Z) \sinh(k_0 Z - ia)
\end{aligned} \tag{27}$$

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα της εξίσωσης (27) είναι δυνατόν να υπολογιστούν αναλυτικά χρησιμοποιώντας το θεώρημα του υπολοίπου. Όπως μπορούμε να δούμε, όταν αυτό πραγματοποιηθεί, τα αποτελέσματα είναι αμιγώς φανταστικά κι έτσι η δύναμη στην x-κατεύθυνση είναι ταυτόσημη με μηδέν. Αυτό το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, από τότε που το σταθερό δισδιάστατο πρόβλημα μιας αεροτομή, μπορεί να γίνει μόνο ανυψωτικό και όχι οπισθέλκουσα. Αυτό επίσης συμφωνεί με το γεγονός ότι για αριθμό Froude που βασίζεται στο βύθισμα και είναι μικρότερος της μονάδας, η αντίσταση κυματισμού είναι μηδέν.

Οι πρώτοι δυο όροι στην εξίσωση (27), ( $I_1$ ,  $I_2$ ) είναι ίσοι με μηδέν. Το  $I_1$  είναι μηδέν διότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ίσο με μηδέν. Ο δεύτερος όρος  $I_2$  ισοδυναμεί με μηδέν διότι για ένα κλειστό σώμα το ολοκλήρωμα της εντάσεως της πηγής είναι μηδέν.

Ο τρίτος όρος δίνει την μικρότερης τάξεως συνεισφορά στην πλευρική δύναμη. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπολογίζεται αν παρατηρήσουμε ότι υπάρχει ένα σημείο αναφοράς στο  $Z = \xi$  και χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία του υπολοίπου.

Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$\oint_C dZ \frac{\sin a}{D(Z-\xi)} = -2w\beta$$

και το  $I_3$  προκύπτει:

$$I_3 = +i\rho U \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \quad (28)$$

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα στα  $I_4$ ,  $I_5$  και  $I_6$  είναι υπολογισμένα αφού παρατηρήσουμε ότι έχουν σημεία αναφοράς στα  $Z = \xi$  και  $Z = \zeta$ . Χρησιμοποιώντας τη θεωρία του υπολοίπου, έχουμε ότι το αποτέλεσμα του επικαμπύλιου ολοκληρώματος είναι απλά  $2\pi i$  φορές του αθροίσματος των υπολοίπων. Όταν  $Z = \xi = \zeta$  τα δυο σημεία αναφοράς συγκλίνουν σε διπλό σημείο και πρέπει να ληφθούν κατάλληλα όρια. Τα αθροίσματα των υπολοίπων πρέπει τότε να συνδυαστούν μέσα από μακριές αλγεβρικές πράξεις.

Όπως τονίστηκε νωρίτερα, η συνολική δύναμη και ροπή που δρουν στο πλοίο βρέθηκαν αφού πολλαπλασιάσαμε τα  $Y$  και  $N$  με  $h$ . Οι τελικές εκφράσεις για τη συνολική πλευρική δύναμη και τη ροπή περί τον z-άξονα δίνονται παρακάτω:

$$\begin{aligned} F_2 = & -\rho h U \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) + \frac{\rho U}{2w\beta^2} \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\zeta \gamma(\zeta) \frac{\sinh 2k_0(\xi - \zeta)}{\cosh 2k_0(\xi - \zeta) - \cos 2a} \\ & + \frac{\rho U^2}{4w\beta^3 h} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\zeta S'(\zeta) \frac{1}{\cosh 2k_0(\xi - \zeta) - \cos 2a} \\ & + \frac{\rho h}{4w\beta} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \int_{-l}^l d\zeta \gamma(\zeta) \frac{1}{\cosh 2k_0(\xi - \zeta) - \cos 2a} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
F_6 = & -\rho U h \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) - \frac{\rho U}{2w\beta^2} \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\zeta \gamma(\zeta) \left[ \frac{(\xi - \zeta) \sin^2 a \coth k_0 (\xi - \zeta) - \zeta \sinh 2k_0 (\xi - \zeta)}{\cosh 2k_0 (\xi - \zeta) - \cos 2a} \right] \\
& + \frac{\rho U^2}{8w\beta^3 h} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\zeta S'(\zeta) \frac{(\xi + \zeta)}{\cosh 2k_0 (\xi - \zeta) - \cos 2a} \\
& + \frac{\rho h}{8w\beta} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \int_{-l}^l d\zeta \gamma(\zeta) \frac{(\xi + \zeta)}{\cosh 2k_0 (\xi - \zeta) - \cos 2a}
\end{aligned} \tag{30}$$

Στις εξισώσεις (29) και (30) ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους είναι μικρότερης τάξης αποτέλεσμα. Περιλαμβάνει μόνο την ένταση της δίνης και είναι όμοια με την έκφραση που δίνει την ανύψωση και τη ροπή στο πρόβλημα μιας λεπτής αεροτομής. Στον Beck(1976) δίνεται ότι, αυτοί οι όροι είναι ταυτόσημοι με τις εκφράσεις των εξισώσεων που βρέθηκαν για της χαμηλότερης τάξης πλευρική δύναμη και ροπή στρέψης, χρησιμοποιώντας τη λύση της εσωτερικής περιοχής και ολοκληρώνοντας την πίεση που ασκείται πάνω στο σκάφος.

Ο δεύτερος, τρίτος και τέταρτος όρος είναι όλοι μεγαλύτερης τάξης εφόσον εμπλέκονται τα τετράγωνα των εντάσεων των πηγών και των δινών. Αυτά απεικονίζουν τις δυνάμεις και τις ροπές που δημιουργούνται από την ανάκλαση του συστήματος. Ο δεύτερος όρος προκύπτει από την αλληλεπίδραση του συστήματος της πηγής και της δίνης. Ο τρίτος όρος είναι η δύναμη που έλκει και δημιουργείται από το σύστημα των δινών.

Ο τελευταίος όρος είναι διορθωτικός για της πλευρική δύναμη και τη ροπή και δημιουργείται από την κυκλοφορία γύρω από τη γάστρα, εξαιτίας των δινών που ανακλώνται.

Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτός ο συνυπολογισμός των ανώτερης τάξης όρων είναι τεχνικά αντιφατικό. Κάνοντας την αρχική μας υπόθεση, θεωρήσαμε ότι η ένταση της πηγής και η ένταση της δίνης είναι υπό των ίδιων όρων μεγέθη.

Ως αποτέλεσμα, η έκφραση για την πρωτοτάξια πλευρική δύναμη και ροπή περί τον z-άξονα, συμπεριλαμβάνει μόνο την ένταση της δίνης. Όπως είδαμε, η ένταση των πηγών και των δινών είναι υπό την ίδια τάξη μεγέθους μόνο όταν διάκενο κάτω από την τρόπιδα είναι πολύ μικρό. Για μεσαίου μεγέθους διάκενο μεταξύ πυθμένα και γάστρας, η ένταση της δίνης γίνεται μεγαλύτερης τάξης μεγέθους. Σε αυτή την περίπτωση η διατήρηση των όρων που εξαρτώνται από την ένταση της πηγής μπορεί να είναι η ίδια. Ούτως ώστε να πετύχουμε εκφράσεις για την πλευρική δύναμη και τη ροπή γύρω από τον z-άξονα, οι οποίες δίνουν λογικές απαντήσεις για το φάσμα του διάκενου μεταξύ γάστρας και πυθμένα. Θα κάνουμε μια πραγματική προσέγγιση διατηρώντας όλους τους όρους των εξισώσεων (29) και (30).

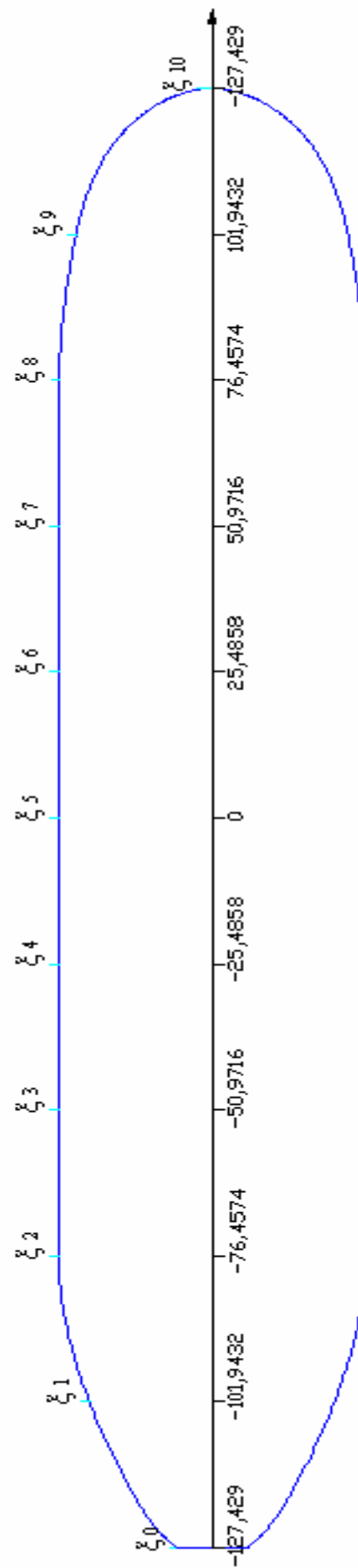
## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

### 1.1 Προσδιορισμός του δυναμικού των δινών

Για να υπολογίσουμε τις δυνάμεις και τις ροπές που δρουν πάνω στη γάστρα, όταν αυτή βρίσκεται μέσα σε ένα κανάλι, αντιμετωπίζουμε τη δυσκολία να επιλύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση (20), λόγω της άγνωστης κατανομής των δινών και των πηγών πάνω στη γάστρα. Αν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε ή και να προσδιορίσουμε αυτή την κατανομή, είναι δυνατόν να εντοπιστούν οι δυνάμεις και οι ροπές που δρουν πάνω στο πλοίο χρησιμοποιώντας τους τύπους της προηγούμενης ενότητας.

Για τη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (20) έχουν χρησιμοποιηθεί βασικές μαθηματικές τεχνικές. Αρχικά το πλοίο έχει διαιρεθεί σε ισομήκη τμήματα. Θεωρούμε ότι σε καθένα από αυτά η κατανομή έχει καθορισμένη μεταβολή. Ο μόνος άγνωστος σε αυτή την εξίσωση είναι το δυναμικό της δίνης. Υπολογίζοντας αυτό το δυναμικό μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε και στις υπόλοιπες σχέσεις και να προσδιορίσουμε τη δύναμη στροφής και την πλευρική δύναμη που δέχεται το πλοίο μέσα στο κανάλι. Η ολοκληρωτική εξίσωση μετατρέπεται σε ανάπτυγμα σειράς και στα δυο μέλη της, και εφαρμόζουμε κατάλληλες μαθηματικές τεχνικές για την επίλυσή τους. Για κάθε ισόμηκες τμήμα περιγράφουμε μαθηματικά την επίδραση των πηγών και των δινών που επιδρούν σε ολόκληρη την γάστρα. Έτσι δημιουργούμε ένα σύστημα  $N \times N$ , όπου ο μόνος άγνωστος, όπως είπαμε, είναι το δυναμικό της δίνης ( $\gamma(\xi)$ ).





Σχήμα 2

Τα χαρακτηριστικά του πλοίου που γίνεται η μελέτη είναι τα παρακάτω:

$$L = 254,858m$$

$$T = 16,00m$$

$$U = 3,73m/sec$$

$$\rho = 1025Kg/m^3$$

Τα χαρακτηριστικά του καναλιού δίνονται παρακάτω:

$$a = 36,70 m, b = -459,30 m, w = a - b, a = \pi \frac{a}{w}, n = \frac{a}{w}$$

$$h = 21 m, f_h = \frac{U}{\sqrt{9,81 * h}}, \beta = \sqrt{1 - f_h^2}, k_o = \frac{\pi}{2 * w * \beta}, \varepsilon = ((h - T)/h)$$

Οι παραπάνω διαστάσεις που αφορούν το κανάλι, καθώς και η ταχύτητα του πλοίου εντός του καναλιού έχουν επιλεγεί τέτοιες ώστε να είναι συγκρίσιμες με το μοντέλο επίλυσης του R.Beck. Έτσι διατηρούμε τις παρακάτω σταθερές για την επίλυση που θα ακολουθήσουμε:

$$\frac{W}{L} = 1,95 \quad \frac{h}{T} = 1,3 \quad f_h = 0,26 \quad n = 0,074 \quad U = 3,73m/sec$$

Θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε την καμπύλη της ίσαλου, που ταξιδεύει το πλοίο μέσα στο κανάλι, με ένα πολυώνυμο που την επαληθεύει σε κάθε της σημείο.

Λόγω του ότι έχουμε μεγάλο παράλληλο τμήμα χωρίζουμε την ίσαλο σε τρία τμήματα και είναι:

1.  $-4,828 \text{ m} < L_1 < 47,144 \text{ m}$
2.  $47,144 \text{ m} < L_2 < 190,646 \text{ m}$
3.  $190,646 \text{ m} < L_3 < 250,030 \text{ m}$

Το πρώτο τμήμα είναι από πρύμνα μέχρι την αρχή του παράλληλου τμήματος.

Το δεύτερο τμήμα είναι ολόκληρο το παράλληλο τμήμα

Το τρίτο τμήμα είναι το εναπομείναν μέχρι πλώρα

Έχουμε κάνει χρήση του προγράμματος Mathematica, όπου παρακάτω παραθέτονται τα σημεία πάνω στην ίσαλο πλεύσης, εντός του καναλιού, για το πρυμναίο τμήμα:

$b1 = \{ \{ -4.8280, 4.6950 \}, \{ -4.6850, 4.8480 \}, \{ -4.5400, 4.9990 \}, \{ -4.3940, 5.1470 \},$   
 $\{ -4.3940, 5.1470 \}, \{ -4.2470, 5.2930 \}, \{ -4.0980, 5.4380 \}, \{ -3.9480, 5.5800 \}, \{ -3.7970, 5.7200 \},$   
 $\{ -3.6440, 5.8590 \}, \{ -3.4910, 5.9950 \}, \{ -3.3360, 6.1300 \}, \{ -3.1790, 6.2630 \}, \{ -3.0220, 6.3940 \},$   
 $\{ -2.8630, 6.5230 \}, \{ -2.7040, 6.6500 \}, \{ -2.5430, 6.7760 \}, \{ -2.3810, 6.9000 \}, \{ -2.0540, 7.1430 \},$   
 $\{ -1.7230, 7.3800 \}, \{ -1.3880, 7.6100 \}, \{ -1.0490, 7.8350 \}, \{ -0.7070, 8.0540 \}, \{ -0.3610, 8.2680 \},$   
 $\{ -0.0120, 8.4760 \}, \{ 0.3400, 8.6800 \}, \{ 0.6950, 8.8790 \}, \{ 1.0530, 9.0730 \}, \{ 1.4130, 9.2640 \},$   
 $\{ 1.7760, 9.4500 \}, \{ 2.1400, 9.6330 \}, \{ 2.5070, 9.8130 \}, \{ 2.8760, 9.9890 \}, \{ 3.2460, 10.1630 \},$   
 $\{ 3.6170, 10.3330 \}, \{ 3.9900, 10.5020 \}, \{ 4.3640, 10.6680 \}, \{ 4.7390, 10.8330 \}, \{ 5.4910, 11.1570 \},$   
 $\{ 6.2450, 11.4770 \}, \{ 7.0230, 11.8040 \}, \{ 7.8020, 12.1280 \}, \{ 8.5820, 12.4490 \}, \{ 9.3620, 12.7660 \},$   
 $\{ 10.1440, 13.0790 \}, \{ 10.9280, 13.3870 \}, \{ 11.7130, 13.6910 \}, \{ 12.5000, 13.9900 \},$   
 $\{ 13.2750, 14.2780 \}, \{ 14.0510, 14.5600 \}, \{ 14.8300, 14.8380 \}, \{ 15.6100, 15.1100 \},$   
 $\{ 16.3930, 15.3770 \}, \{ 17.1770, 15.6390 \}, \{ 17.9630, 15.8960 \}, \{ 18.7500, 16.1480 \},$   
 $\{ 19.5260, 16.3910 \}, \{ 20.3040, 16.6280 \}, \{ 21.0830, 16.8610 \}, \{ 21.8640, 17.0890 \},$   
 $\{ 22.6460, 17.3110 \}, \{ 23.4290, 17.5290 \}, \{ 24.2140, 17.7410 \}, \{ 25.0000, 17.9480 \},$   
 $\{ 25.7770, 18.1470 \}, \{ 26.5550, 18.3410 \}, \{ 27.3340, 18.5300 \}, \{ 28.1150, 18.7130 \},$   
 $\{ 28.8970, 18.8910 \}, \{ 29.6800, 19.0630 \}, \{ 30.4650, 19.2290 \}, \{ 31.2500, 19.3900 \},$   
 $\{ 32.0270, 19.5430 \}, \{ 32.8060, 19.6890 \}, \{ 33.5850, 19.8290 \}, \{ 34.3660, 19.9620 \},$   
 $\{ 35.1480, 20.0870 \}, \{ 35.9310, 20.2050 \}, \{ 36.3230, 20.3150 \}, \{ 37.1080, 20.3670 \},$   
 $\{ 37.5000, 20.4160 \}, \{ 37.8890, 20.4630 \}, \{ 38.2790, 20.5080 \}, \{ 38.6690, 20.5500 \},$   
 $\{ 39.0580, 20.5910 \}, \{ 39.4490, 20.6290 \}, \{ 39.8390, 20.6660 \}, \{ 40.6200, 20.7330 \},$   
 $\{ 41.4020, 20.7920 \}, \{ 42.1840, 20.8440 \}, \{ 42.9670, 20.8880 \}, \{ 43.7500, 20.9250 \},$   
 $\{ 44.1740, 20.9420 \}, \{ 44.5990, 20.9570 \}, \{ 45.0230, 20.9700 \}, \{ 45.4470, 20.9810 \},$   
 $\{ 45.8710, 20.9890 \}, \{ 46.2950, 20.9950 \}, \{ 46.7200, 20.9990 \}, \{ 47.1440, 21.0000 \} \}$

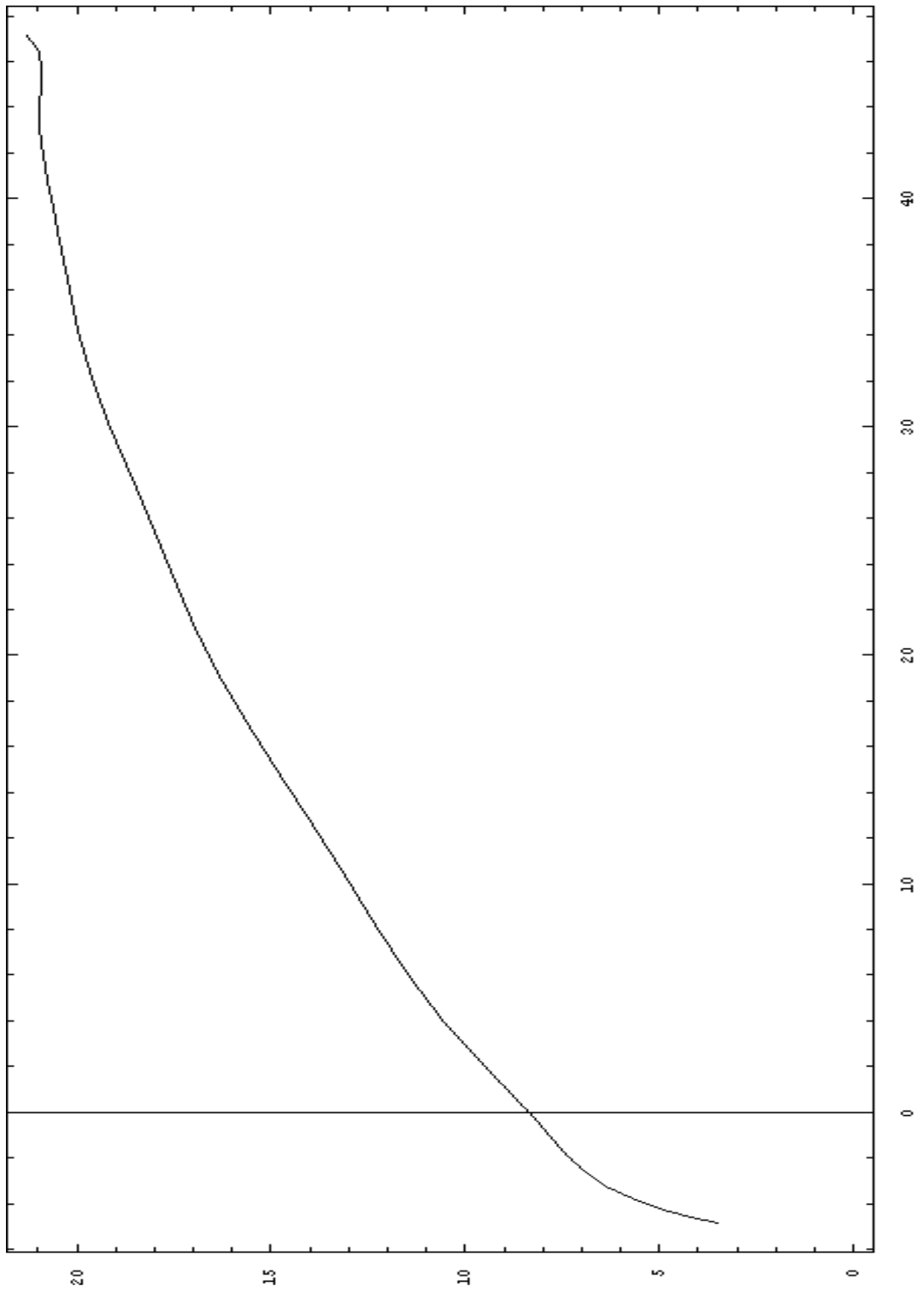
Επιλέγουμε ύστερα από δοκιμές το πολυώνυμό μας να είναι 11<sup>ου</sup> βαθμού και να έχει το παρακάτω ανάπτυγμα:

$$b(1) (t) = 8.365621 + 0.531665t + 0.016320 t^2 + 0.0010196 t^3 - 0.0020223 t^4 + 0.0003675 t^5 - 0.0000315 t^6 + 1.5417342 * 10^{-6} t^7 - 4.5613734 * 10^{-8} t^8 + 8.0757698 * 10^{-10} t^9 - 7.8883891 * 10^{-12} t^{10} + 3.273079 * 10^{-14} t^{11}$$

(31)

Αυτό επιτυγχάνεται, αφού αναπαραστήσουμε γραφικά το τμήμα αυτό και το συγκρίνουμε με την ίσαλο πλεύσης από τα ήδη υπάρχοντα σχέδια γραμμών του πλοίου μας.

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να αναπαραστήσουμε την πρύμνη μας με το πολυώνυμο 11<sup>ου</sup> βαθμού και να παρατηρήσουμε ύστερα από σύγκριση με την αντίστοιχη γραμμή ισάλου ότι την περιγράφει με ικανοποιητική ακρίβεια, όπως παρουσιάζεται στο επόμενο διάγραμμα.

**Σχήμα 3**

Κάνοντας το ίδιο για την πλήρη, έχοντας τα παρακάτω σημεία:

$b_2 = \{ \{190.6460, 21.0000\}, \{192.5970, 20.9960\}, \{193.5730, 20.9910\},$   
 $\{194.5490, 20.9840\}, \{195.5250, 20.9730\}, \{196.5000, 20.9600\}, \{197.4760, 20.9440\},$   
 $\{198.4520, 20.9240\}, \{199.4270, 20.9010\}, \{200.4020, 20.8740\}, \{201.3780, 20.8430\},$   
 $\{202.3530, 20.8080\}, \{203.3270, 20.7680\}, \{204.3020, 20.7230\}, \{205.2760, 20.6730\},$   
 $\{206.2500, 20.6180\}, \{207.0320, 20.5700\}, \{207.8140, 20.5190\}, \{208.5960, 20.4640\},$   
 $\{209.3770, 20.4050\}, \{210.1590, 20.3430\}, \{210.9390, 20.2780\}, \{211.7200, 20.2090\},$   
 $\{212.5000, 20.1360\}, \{213.2830, 20.0600\}, \{214.0650, 19.9800\}, \{214.8470, 19.8970\},$   
 $\{215.6290, 19.8100\}, \{216.4100, 19.7190\}, \{217.1900, 19.6250\}, \{217.9710, 19.5270\}$   
 $, \{218.7500, 19.4250\}, \{219.5330, 19.3190\}, \{220.3160, 19.2100\}, \{221.0980, 19.0960\},$   
 $\{221.8800, 18.9790\}, \{222.6610, 18.8580\}, \{223.4410, 18.7330\}, \{224.2210, 18.6030\},$   
 $\{225.0000, 18.4700\}, \{225.7870, 18.3310\}, \{226.5730, 18.1870\}, \{227.3580, 18.0360\},$   
 $\{227.7500, 17.9580\}, \{228.1410, 17.8770\}, \{228.5320, 17.7950\}, \{228.9220, 17.7100\},$   
 $\{229.3120, 17.6220\}, \{229.7010, 17.5310\}, \{230.0900, 17.4380\}, \{230.4770, 17.3420\},$   
 $\{230.8640, 17.2420\}, \{231.2500, 17.1390\}, \{231.6510, 17.0280\}, \{232.0500, 16.9140\},$   
 $\{232.4480, 16.7960\}, \{232.8460, 16.6730\}, \{233.2420, 16.5470\}, \{233.6360, 16.4170\},$   
 $\{234.0300, 16.2830\}, \{234.4220, 16.1450\}, \{234.8120, 16.0030\}, \{235.2010, 15.8570\},$   
 $\{235.5890, 15.7060\}, \{235.9750, 15.5520\}, \{236.3590, 15.3930\}, \{236.7410, 15.2310\},$   
 $\{237.1220, 15.0640\}, \{237.5000, 14.8930\}, \{237.9010, 14.7060\}, \{238.2980, 14.5140\},$   
 $\{238.6940, 14.3180\}, \{239.0860, 14.1160\}, \{239.4760, 13.9080\}, \{239.8620, 13.6950\},$   
 $\{240.2460, 13.4760\}, \{240.6250, 13.2510\}, \{240.8300, 13.1260\}, \{241.0330, 13.0000\},$   
 $\{241.2350, 12.8720\}, \{241.4360, 12.7420\}, \{241.6360, 12.6100\}, \{241.8350, 12.4760\},$   
 $\{242.0320, 12.3410\}, \{242.2290, 12.2040\}, \{242.4240, 12.0640\}, \{242.6170, 11.9240\},$   
 $\{242.8100, 11.7810\}, \{243.0010, 11.6360\}, \{243.1900, 11.4900\}, \{243.3780, 11.3410\},$   
 $\{243.5650, 11.1910\}, \{243.7500, 11.0390\}, \{243.9640, 10.8590\}, \{244.1760, 10.6770\},$   
 $\{244.3860, 10.4930\}, \{244.5930, 10.3050\}, \{244.7980, 10.1160\}, \{245.0000, 9.9230\},$   
 $\{245.2000, 9.7280\}, \{245.3980, 9.5310\}, \{245.5930, 9.3310\}, \{245.7850, 9.1280\},$

{245.9740,8.9230},{246.1600,8.7150},{246.3440,8.5050},{246.5240,8.2920},  
 {246.7010,8.0760},{246.8750,7.8580},{247.0170,7.6750},{247.1570,7.4890},  
 {247.2940,7.3030},{247.4290,7.1140},{247.5620,6.9230},{247.6910,6.7310},  
 {247.8180,6.5370},{247.9430,6.3410},{248.0640,6.1430},{248.1830,5.9440},  
 {248.2990,5.7420},{248.4110,5.5390},{248.5210,5.3350},{248.6270,5.1280},  
 {248.7310,4.9200},{248.8310,4.7100},{248.9440,4.4620},{249.0520,4.2120},  
 {249.1550,3.9590},{249.2530,3.7050},{249.3460,3.4490},{249.4340,3.1910},  
 {249.5170,2.9310},{249.5940,2.6700},{249.6660,2.4070},{249.7320,2.1430},  
 {249.7920,1.8770},{249.8460,1.6110},{249.8940,1.3440},{249.9360,1.0750},  
 {249.9710,0.8060},{250.0000,0.5360},{250.0120,0.4030},{250.0210,0.2680},  
 {250.0280,0.1340},{250.0300,0.0000}},14]

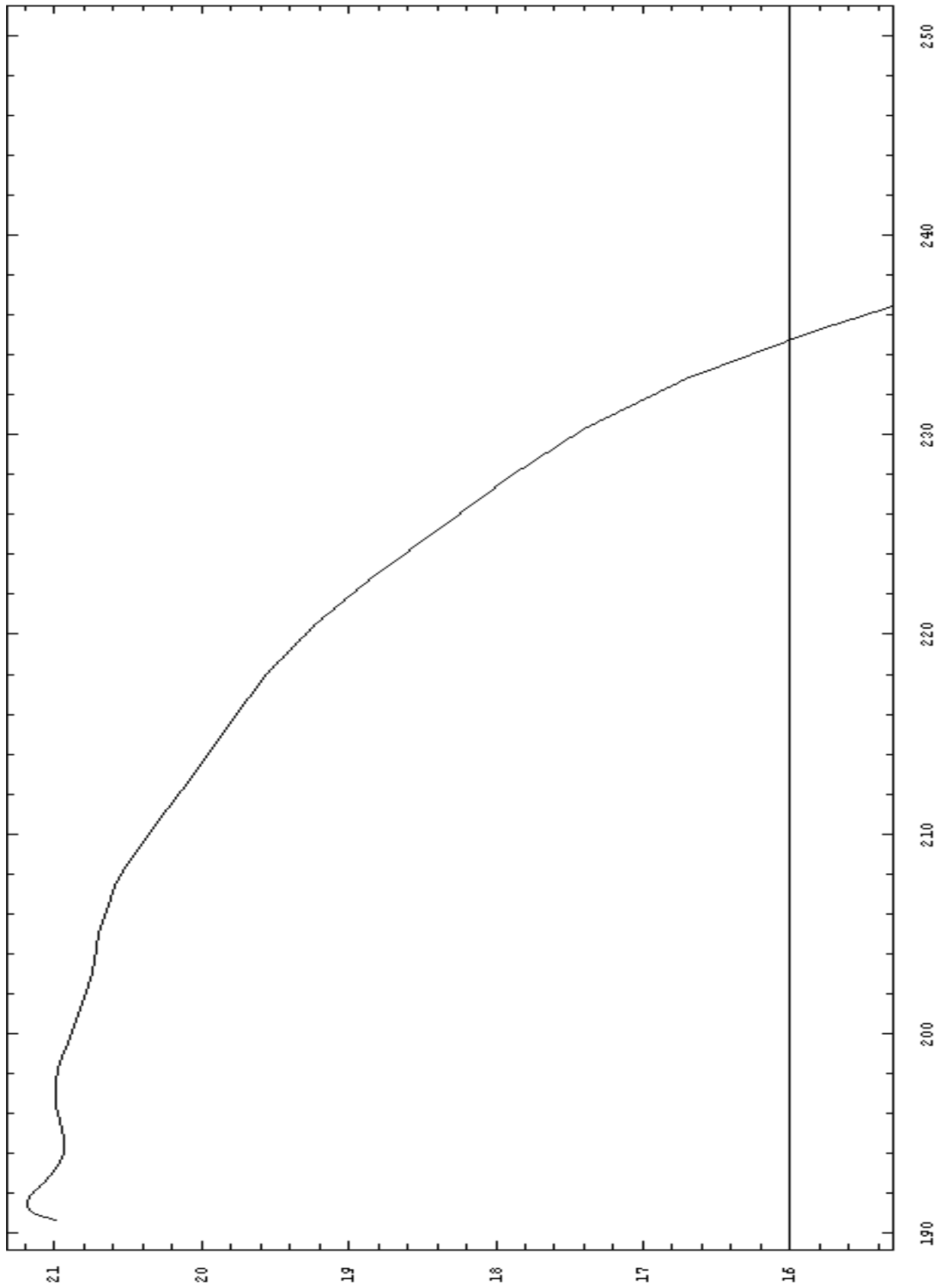
Επιλέγουμε πολυώνυμο 14<sup>ου</sup> βαθμού, με το παρακάτω ανάπτυγμα:

$$\begin{aligned}
 b(2)(t) = & -8.411044 * 10^{14} + 5.403766 * 10^{13} t - 1.610801 * 10^{12} t^2 + 2.952892 * 10^{10} t^3 - \\
 & 3.719114 * 10^8 t^4 + 3.404414 * 10^6 t^5 - 23357.1788 67 t^6 + 122.014994 t^7 - \\
 & 0.487682 t^8 + 0.001484 t^9 - 3.385243 * 10^{-6} t^{10} + 5.611995 * 10^{-9} t^{11} - \\
 & 6.391948 * 10^{-12} t^{12} + 4.477258 * 10^{-15} t^{13} - 1.455101 * 10^{-18} t^{14}
 \end{aligned}$$

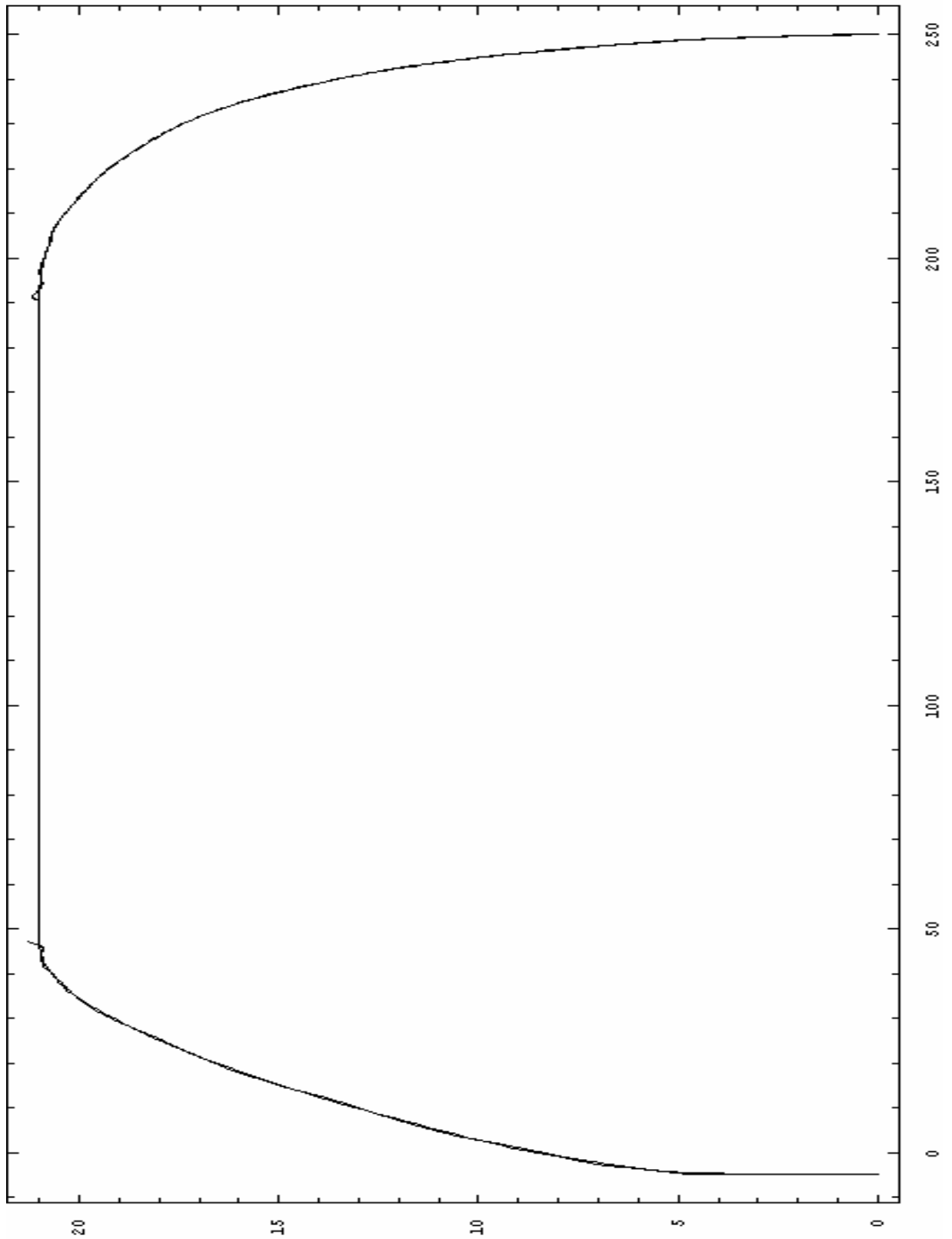
(32)

Πάλι χρησιμοποιώντας την γραφική αναπαράσταση και κάνοντας δοκιμές, τη συγκρίνουμε με την ίσαλο πλεύσης από τα σχέδια γραμμών του πλοίου μας και καταλήγουμε στο παραπάνω πολυώνυμο που διαγράφει την παρακάτω καμπύλη.



**Σχήμα 4**

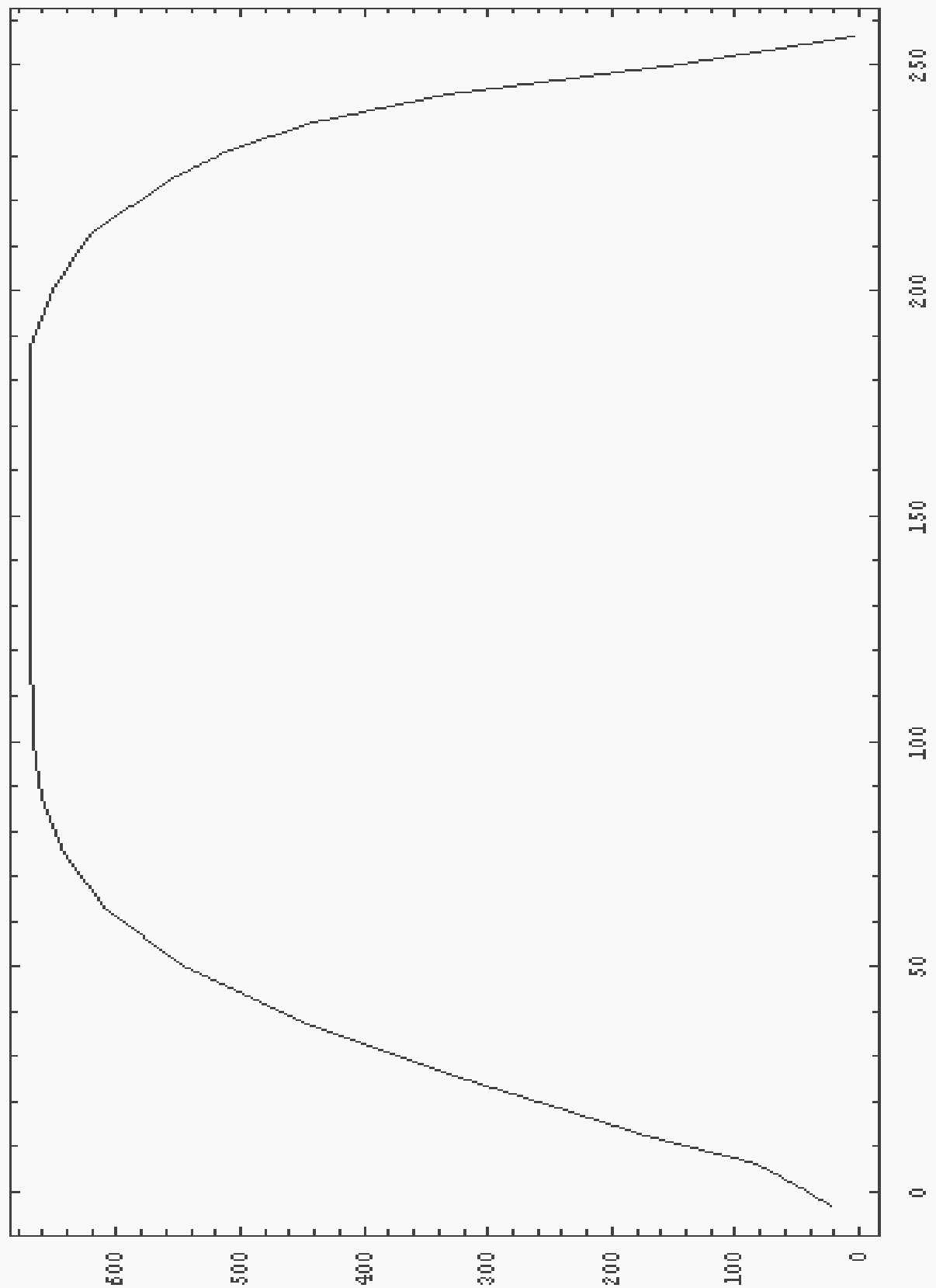
Για να βεβαιωθούμε πόσο πλησιάζουν τα δυο πολυώνυμα, που μετά από μελέτη καταλήξαμε, σχεδιάζουμε την πραγματική ίσαλο γραμμή των 16 μέτρων και μεταφέρουμε τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις, των πολυωνύμων, πάνω σε αυτή. Προβάλλοντας παρατηρούμε:

**Σχήμα 5**

Συγκρίνοντας την καμπύλη της ισάλου στα 16 μέτρα με αυτές των που δίνουν οι εξισώσεις βλέπουμε ότι σχεδόν συμπίπτουν. Υπάρχει μια μικρή ανωμαλία εκεί που ταυτίζεται το τέλος της καμπύλης, που περιγράφει την πρύμνη, με το παράλληλο τμήμα, καθώς και η αρχή της καμπύλης που περιγράφει την πλώρη, πάλι με το παράλληλο τμήμα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας αυτές οι δυσμορφίες των καμπυλών θα θεωρηθούν αμελητέες.

Έχοντας πλέον αυτή την παρατήρηση μπορούμε να αποδεχτούμε πως οι εξισώσεις αναλύουν ικανοποιητικά το πρωραίο και το πρυμναίο τμήμα, του πλοίου που μελετάμε μέσα στο κανάλι, για την ίσαλο πλεύσης των 16 μέτρων.

Το επόμενο βήμα είναι να περιγράψουμε με πολυώνυμο και την καμπύλη κυβισμού του υπό μελέτη πλοίου. Βασιζόμαστε στην ίδια μέθοδο περιγραφής – μελέτης όπως και προηγουμένως. Αρχικά η καμπύλη κυβισμού περιγράφεται από τα σημεία που έχουν υπολογιστεί από την υδροστατική μελέτη η οποία έγινε για το εν λόγω πλοίο και είναι:

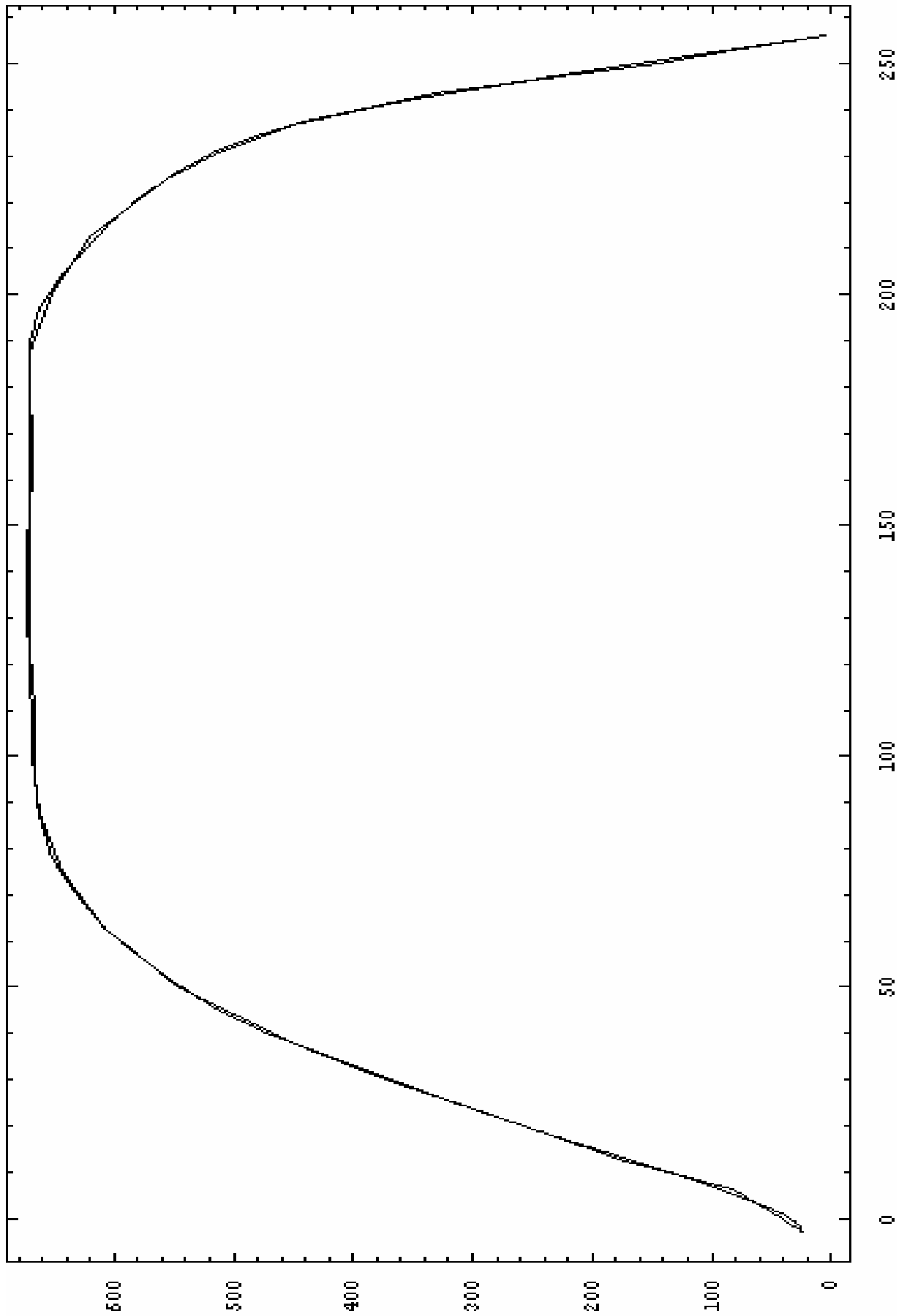
**Σχήμα 6**

Στη συνέχεια περιγράφουμε την παραπάνω καμπύλη με πολυώνυμο του οποίου η εξίσωση, μετά από δοκιμές είναι:

$$\begin{aligned}
 S(t) = & 34.311178 + 5.983545 t + 0.826524 t^2 - 0.066675 t^3 + 0.003626 t^4 - \\
 & 0.000133 t^5 + 3.255731 * 10^{-6} t^6 - 5.460556 * 10^{-8} t^7 + 6.425511 * 10^{-10} t^8 - \\
 & 5.382571 * 10^{-12} t^9 + 3.221873 * 10^{-14} t^{10} - 1.366381 * 10^{-16} t^{11} + 4.005284 * 10^{-19} t^{12} - \\
 & 7.709766 * 10^{-22} t^{13} + 8.759343 * 10^{-25} t^{14} - 4.446875 * 10^{-28} t^{15}
 \end{aligned}$$

(33)

Πάλι χρησιμοποιούμε την ίδια μέθοδο όπως και πρωτύτερα για να επιβεβαιώσουμε το πόσο προσεγγίζει το πολυώνυμο την πραγματική μας καμπύλη. Έτσι καταλήγουμε στο παρακάτω συγκριτικό διάγραμμά:



Σχήμα 7

Επίσης και σε αυτό το διάγραμμα παρατηρούμε μερικές διαφοροποιήσεις, αλλά και εδώ χωρίς βλάβη της γενικότητας τις θεωρούμε αμελητέες.

Επομένως μια πρώτη σύνοψη για τα παραπάνω έχει ως εξής:

- *Εξίσωση περιγραφής πρύμνης για  $-4,828 \text{ m} < L_1 < 47,144 \text{ m}$*

$$b(1)(t) = 8.365621 + 0.531665t + 0.016320t^2 + 0.0010196t^3 - 0.0020223t^4 + 0.0003675t^5 - 0.0000315t^6 + 1.5417342 \cdot 10^{-6} t^7 - 4.5613734 \cdot 10^{-8} t^8 + 8.0757698 \cdot 10^{-10} t^9 - 7.8883891 \cdot 10^{-12} t^{10} + 3.273079 \cdot 10^{-14} t^{11}$$

(34)

- *Εξίσωση περιγραφής παράλληλου τμήματος για  $47,144 \text{ m} < L_2 < 190,646 \text{ m}$*

Είναι σταθερή στα 21 m

- *Εξίσωση περιγραφής πρύμνης για  $190,646 \text{ m} < L_3 < 250,030 \text{ m}$*

$$b(2)(t) = -8.411044 \cdot 10^{14} + 5.403766 \cdot 10^{13} t - 1.610801 \cdot 10^{12} t^2 + 2.952892 \cdot 10^{10} t^3 - 3.719114 \cdot 10^8 t^4 + 3.404414 \cdot 10^6 t^5 - 23357.1788 t^6 + 122.014994 t^7 - 0.487682 t^8 + 0.001484 t^9 - 3.385243 \cdot 10^{-6} t^{10} + 5.611995 \cdot 10^{-9} t^{11} - 6.391948 \cdot 10^{-12} t^{12} + 4.477258 \cdot 10^{-15} t^{13} - 1.455101 \cdot 10^{-18} t^{14}$$

(35)



- Εξίσωση περιγραφής καμπύλης κυβισμού

$$\begin{aligned}
 S(t) = & 34.311178 + 5.983545t + 0.826524t^2 - 0.066675t^3 + 0.003626t^4 - 0.000133t^5 + \\
 & 3.255731 \cdot 10^{-6} t^6 - 5.460556 \cdot 10^{-8} t^7 + 6.425511 \cdot 10^{-10} t^8 - 5.382571 \cdot 10^{-12} t^9 + 3.221873 \cdot 10^{-14} t^{10} - \\
 & 1.366381 \cdot 10^{-16} t^{11} + 4.005284 \cdot 10^{-19} t^{12} - 7.709766 \cdot 10^{-22} t^{13} + 8.759343 \cdot 10^{-25} t^{14} - 4.446875 \cdot 10^{-28} t^{15}
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

Η περιγραφή της ισάλου πλεύσης στα 16 m από τις παραπάνω εξισώσεις θα μας διευκολύνει να έχουμε σε κάθε σημείο, κατά το διάμηκες του πλοίου, το αντίστοιχο πλάτος του. Το πλάτος είναι απαραίτητο για τον υπολογισμό του συντελεστή τομής  $C_x$  σε κάθε τμήμα που εξετάζουμε.

$$C_x = \frac{B(t)}{\varepsilon} + 2 \frac{h}{p} - B(t) - 2 \frac{h}{p} \text{Log}[E, 4\varepsilon] \tag{37}$$

Έχοντας λοιπόν προσδιορίσει το πλάτος, ως την τεταγμένη του μήκους του πλοίου, και κατ' επέκταση τον συντελεστή τομής  $C_x$  καθώς και την καμπύλη κυβισμού, μπορούμε πλέον να το χρησιμοποιήσουμε στην παρακάτω εξίσωση:

$$\sum_0^{10} \left( \left( \left( \left( \left( \frac{1 - \cos[2 * a]}{\cosh[2k_0 * (x - (\xi_0 + \nu * \delta))] - \cos\{2\alpha\}} \coth[k_0 * (x - (\xi_0 + n * d))] \right) \right) \right) \right) \right) =$$

$$\left( \left( \left( \left( \left( \frac{H[x - (\xi_0 + n * d)]}{C_x} \right) \right) \right) \right) \right) - \pi * \frac{U}{w * h * \beta^2} * \sin[2a] \sum_0^{10} \left( S(t) * \left( \frac{\sinh[2k_0 * (x - (\xi_0 + n * d))]}{(\cosh[2k_0 * (x - (\xi_0 + n * d))] - \cos\{2a\})^2} \right) \right)$$

(38)

Όπου:

$$\xi_0 = -127,429$$

$$t = 122,601 - (\xi_0 + n * d)$$

$$a = 49,60 \text{ m}, b = -446,40 \text{ m}, w = a - b, a = \pi \frac{a}{w}, n = \frac{a}{w}$$

$$h = 21 \text{ m}, f_h = \frac{U}{\sqrt{9,81 * h}}, \beta = \sqrt{1 - f_h^2}, k_0 = \frac{\pi}{2 * w * \beta}, \varepsilon = ((h - T)/h)$$

Το αποτέλεσμα που προσδοκούμε μετά από όλη αυτήν διαδικασία είναι να δημιουργήσουμε ένα σύστημα εξισώσεων  $N \times N$ , όπου ο οι  $N$  άγνωστοι θα είναι τα  $\gamma(\xi_0), \gamma(\xi_1), \dots, \gamma(\xi_v)$  και θα έχει τη μορφή:

$$A_0 * \gamma(\xi_0) + A_1 * \gamma(\xi_1) + A_2 * \gamma(\xi_2) + \dots + A_v * \gamma(\xi_v) = C_0$$

$$B_0 * \gamma(\xi_0) + B_1 * \gamma(\xi_1) + B_2 * \gamma(\xi_2) + \dots + B_v * \gamma(\xi_v) = C_1$$

$$E_0 * \gamma(\xi_0) + E_1 * \gamma(\xi_1) + E_2 * \gamma(\xi_2) + \dots + E_v * \gamma(\xi_v) = C_2$$

$$F_0 * \gamma(\xi_0) + F_1 * \gamma(\xi_1) + F_2 * \gamma(\xi_2) + \dots + F_v * \gamma(\xi_v) = C_3$$

.

·  
·  
·  
·

$$W_0 * \gamma(\xi_0) + W_1 * \gamma(\xi_1) + W_2 * \gamma(\xi_2) + \dots + W_v * \gamma(\xi_v) = C_v$$

Ακολουθώντας λοιπόν αυτή την διαδικασία καταλήγουμε στους επόμενους πίνακες:

m =	3.049 <sup>^6</sup>	- 11.173	- 4.661	- 2.434	- 1.400	- 0.861	- 0.559	- 0.379	- 0.267	- 0.193	- 0.144
	24.709	3.049 <sup>^7</sup>	- 11.173	- 4.661	- 2.434	- 1.400	- 0.861	- 0.559	- 0.379	- 0.267	- 0.193
	16.906	23.418	3.049 <sup>^7</sup>	- 11.173	- 4.661	- 2.434	- 1.400	- 0.861	- 0.559	- 0.379	- 0.267
	14.648	16.874	23.386	3.049 <sup>^7</sup>	- 11.173	- 4.661	- 2.434	- 1.400	- 0.861	- 0.559	- 0.379
	13.614	14.648	16.875	23.386	3.049 <sup>^7</sup>	- 11.173	- 4.661	- 2.434	- 1.400	- 0.861	- 0.559
	13.075	13.614	14.648	16.875	23.386	3.049 <sup>^6</sup>	- 11.173	- 4.661	- 2.434	- 1.400	- 0.861
	12.772	13.075	13.614	14.648	16.875	23.386	- 3.049 <sup>^7</sup>	- 11.173	- 4.661	- 2.434	- 1.400
	12.593	12.772	13.075	13.614	14.648	16.875	23.386	- 3.049 <sup>^7</sup>	- 11.173	- 4.661	- 2.434
	12.483	12.595	12.775	13.078	13.617	14.651	16.877	23.389	- 3.049 <sup>^7</sup>	- 11.173	- 4.661
	14.872	14.946	15.058	15.238	15.540	16.079	17.113	19.340	25.852	- 3.049 <sup>^7</sup>	- 11.173
	34.274	34.323	34.397	34.509	34.689	34.991	35.530	36.564	38.791	45.303	- 3.049 <sup>^6</sup>

v =	12.306
	11.635
	9.158
	5.694
	1.969
	- 1.739
	- 5.358
	- 8.658
	- 11.078
	- 11.973
- 11.197	

Έτσι έχουμε δημιουργήσει ένα γινόμενο πινάκων της μορφής:

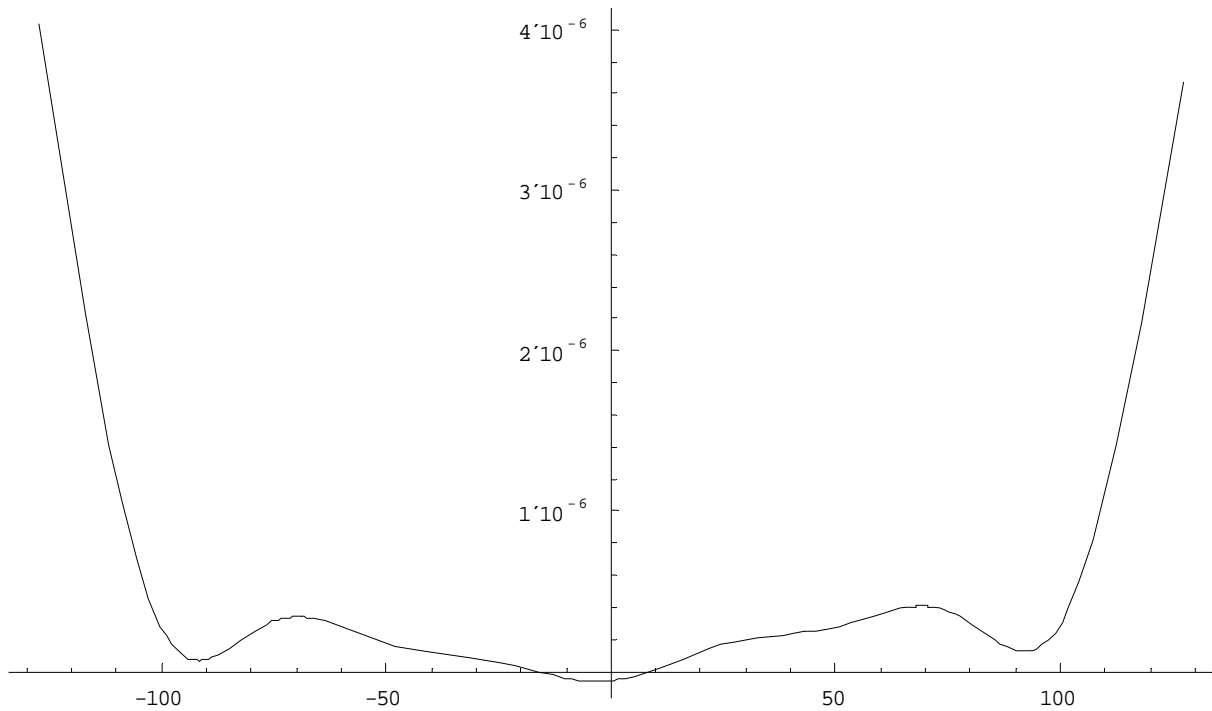
$$\bar{m} \times \left[ \gamma(\bar{\xi}_v) \right] = \bar{v} \quad (39)$$

Έχοντας λοιπόν τα παραπάνω αποτελέσματα και αφού λύσουμε το  $N \times N$  σύστημα, επιτυγχάνουμε να προσδιορίσουμε, για τα κάθε  $\xi$  που έχουμε θέσει, τα αντίστοιχο δυναμικό του  $\gamma(\xi)$ . Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω:

x0® - 127.429	g	1.0000000000000000	36*^-6
x1® - 101.9432	g	0.0000000000000000	16*^-7
x2® - 76.4574	g	0.0000000000000000	04*^-7
x3® - 50.9716	g	0.0000000000000000	67*^-7
x4® - 25.4858	g	0.0000000000000000	58*^-8
x5® 0	g	0.0000000000000000	704*^-8
x6® 25.4858	g	0.0000000000000000	57*^-7
x7® 50.9716	g	0.0000000000000000	40*^-7
x8® 76.4574	g	0.0000000000000000	33*^-7
x9® 101.9432	g	0.0000000000000000	27*^-7
x10® 127.429	g	0.0000000000000000	2*^-6

Με τα παραπάνω σημεία προσδοκούμε να δημιουργήσουμε μια πολυωνυμική σχέση η οποία να τα επαληθεύει. Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε κι εδώ είναι η ίδια με αυτή που δουλέψαμε και στα προηγούμενα.

Αρχικά αποτυπώνουμε τα σημεία σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και με κυβική καμπύλη **Spline** τα περιγράφουμε.



**Σχήμα 8**

Στη συνέχεια, για επιτύχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια, με τη βοήθεια της καμπύλης Spline παίρνουμε και ενδιάμεσα σημεία. Έτσι προκύπτει:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & \{ \{-127.429, 4.036 \cdot 10^{-6}\}, \{-114.686, 1.849 \cdot 10^{-6}\}, \{-101.9432, 3.816 \cdot 10^{-7}\}, \\ & \{-89.200, 8.123 \cdot 10^{-8}\}, \{-76.4574, 3.004 \cdot 10^{-7}\}, \{-63.715, 3.149 \cdot 10^{-7}\}, \\ & \{-50.9716, 1.867 \cdot 10^{-7}\}, \{-38.229, 1.152 \cdot 10^{-7}\}, \{-25.4858, 6.458 \cdot 10^{-8}\}, \\ & \{-12.743, -2.308 \cdot 10^{-8}\}, \{0, -5.704 \cdot 10^{-8}\}, \{12.743, 4.403 \cdot 10^{-8}\}, \\ & \{25.4858, 1.757 \cdot 10^{-7}\}, \{38.229, 2.317 \cdot 10^{-7}\}, \\ & \{50.9716, 2.840 \cdot 10^{-7}\}, \{63.715, 3.892 \cdot 10^{-7}\}, \\ & \{76.4574, 3.633 \cdot 10^{-7}\}, \{89.200, 1.436 \cdot 10^{-7}\}, \\ & \{101.9432, 3.927 \cdot 10^{-7}\}, \{114.686, 1.704 \cdot 10^{-6}\}, \{127.429, 3.672 \cdot 10^{-6}\} \} \end{aligned}$$

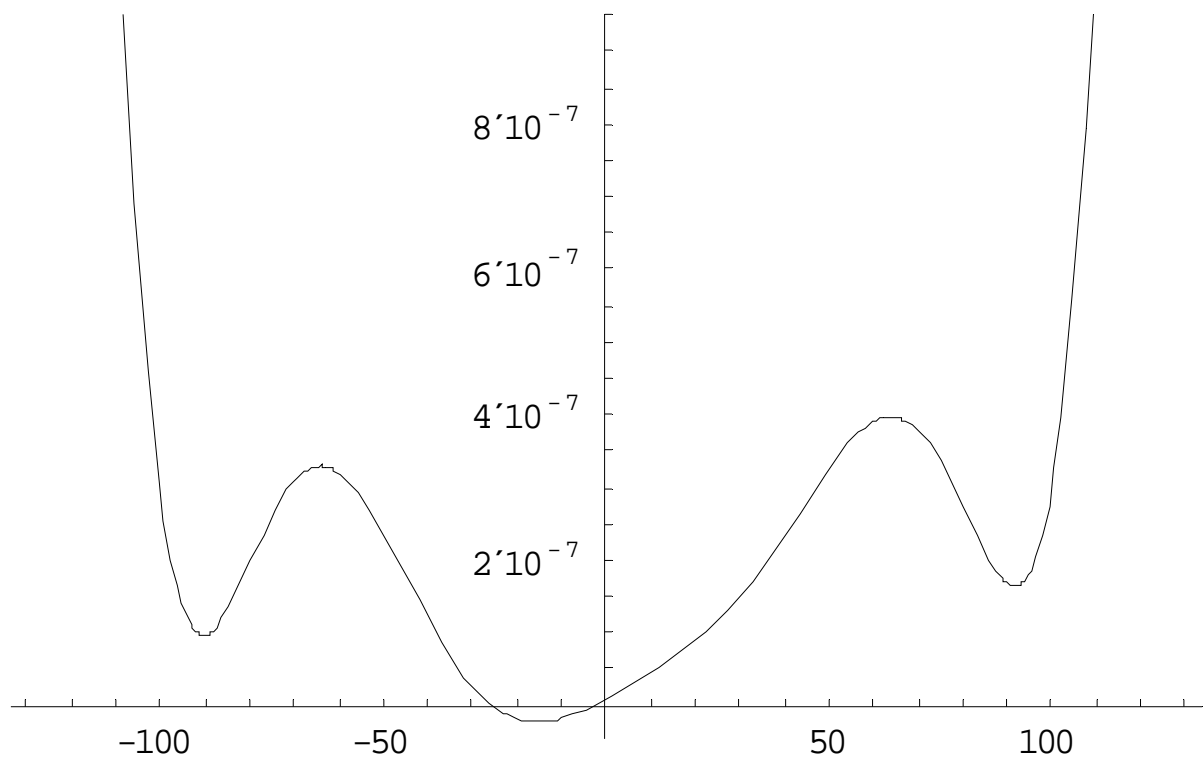
Αφού έχουμε καταφέρει να έχουμε τα διπλάσια σημεία και χρησιμοποιώντας πλέον αυτά, επιδιώκουμε να σχηματίσουμε ένα πολυώνυμο που να τα επαληθεύει.

Μετά από δοκιμές προέκυψε πολυώνυμο 10<sup>ου</sup> βαθμού:

$$\gamma_1(\xi) = 8.7265 \cdot 10^{-9} + 3.2692 \cdot 10^{-9} \xi + 4.0242 \cdot 10^{-11} \xi^2 - 1.6706 \cdot 10^{-12} \xi^3 + 6.8981 \cdot 10^{-14} \xi^4 + 3.6114 \cdot 10^{-16} \xi^5 - 2.1083 \cdot 10^{-17} \xi^6 - 3.2598 \cdot 10^{-20} \xi^7 + 1.9196 \cdot 10^{-21} \xi^8 + 9.9629 \cdot 10^{-25} \xi^9 - 5.1256 \cdot 10^{-26} \xi^{10}$$

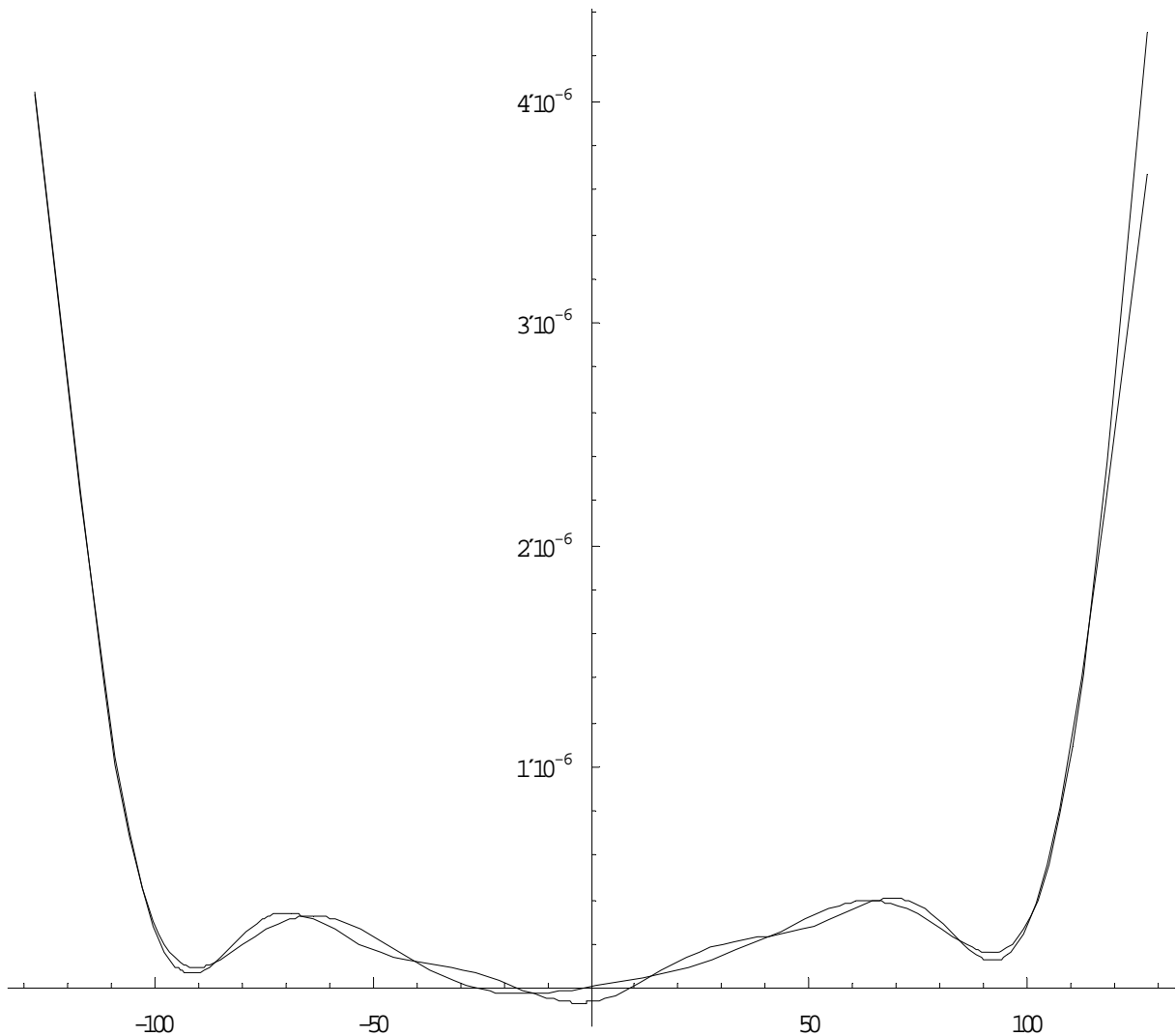
(40)

Από αυτήν την εξίσωση προκύπτει και η επόμενη καμπύλη:



**Σχήμα 9**

Όπου, αν τώρα παραστήσουμε της δυο τελευταίες γραφικές παραστάσεις, α)αυτή που σχηματίστηκε από την καμπύλη Spline, και β)αυτή που σχηματίστηκε από το πολυώνυμο προκύπτει:



**Σχήμα 10**

Συγκρίνουμε και καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι οι διαφορές μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες και πως το πειραματικό πολυώνυμο που επιλέξαμε δεν απέχει από την ουσιαστικά ορθότερη καμπύλη Spline. Άρα δεχόμαστε την τελευταία σχέση, ως έχει, για την περιγραφή του δυναμικού της δίνης.

Ως εδώ ήταν το πρώτο και σημαντικότερο στάδιο, ούτως ώστε να πετύχουμε μια πραγματική απεικόνιση του δυναμικού της δίνης, που συμβάλει στην ελικτική συμπεριφορά του πλοίου μέσα στο κανάλι. Έχοντας πλέον υπόψιν τα αποτελέσματα που εξήλθαν από την προηγούμενη θεωρητική μελέτη έχουμε την δυνατότητα να προχωρήσουμε στο επόμενο στάδιο της έρευνας που είναι ο υπολογισμός της δύναμης στην κατεύθυνση Sway και της ροπής Yaw .



## 1.2 Προσδιορισμός Δύναμης Sway - Ροπής Yaw

Το επόμενο και εξίσου σημαντικό στάδιο είναι ο προσδιορισμός της τάξης μεγέθους της δύναμης που αναπτύσσεται στην εγκάρσια διεύθυνση του πλοίου (δύναμη sway), καθώς και της δύναμης ροπής στρέψης περί τον κατακόρυφο άξονα-z (ροπή δύναμης yaw).

Όπως έχει παρουσιαστεί στην προηγούμενη ενότητα αυτές οι δυο δυνάμεις περιγράφονται από τις σχέσεις (22) και (23) αντίστοιχα.

### Δύναμη Sway:

$$\begin{aligned}
 F_2 = & -\rho h U \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) + \frac{\rho U}{2w\beta^2} \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\psi \gamma(\psi) \frac{\sinh 2k_0(\xi - \psi)}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a} \\
 & + \frac{\rho U^2}{4w\beta^3 h} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\psi S'(\psi) \frac{1}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a} \\
 & + \frac{\rho h}{4w\beta} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \int_{-l}^l d\psi \gamma(\psi) \frac{1}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a}
 \end{aligned} \quad (41)$$

### Ροπή Yaw:

$$\begin{aligned}
 F_6 = & -\rho U h \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) - \frac{\rho U}{2w\beta^2} \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\psi \gamma(\psi) \left[ \frac{(\xi - \psi) \sin^2 a \coth k_0(\xi - \psi) - \zeta \sinh 2k_0(\xi - \psi)}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a} \right] \\
 & + \frac{\rho U^2}{8w\beta^3 h} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\zeta S'(\psi) \frac{(\xi + \psi)}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a} \\
 & + \frac{\rho h}{8w\beta} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \int_{-l}^l d\psi \gamma(\psi) \frac{(\xi + \psi)}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a}
 \end{aligned} \quad (42)$$

Αν αντικαταστήσουμε στις παραπάνω εξισώσεις τις πολυωνυμικές σχέσεις που προέκυψαν στην ενότητα 1.1 τότε είναι πολύ εύκολο να γίνει υπολογισμός των ολοκληρωμάτων και να καταλήξουμε σε μια τιμή για κάθε μια από τις δυο παραπάνω δυνάμεις-ροπές.

### 1.3 Περιγραφή Μεθόδου Υπολογισμού Διπλού Ολοκληρώματος

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων γίνεται με την χρήση του προγράμματος Mathematica, όπου με συγκεκριμένη διαδικασία φτάνουμε στο αποτέλεσμα. Θα αναπτύξουμε μια αναλυτική μέθοδο η οποία μας δίνει την δυνατότητα ελέγχου σε κάθε στάδιο εφαρμογής του προγράμματος.

Αρχικά η εξίσωση για τη δύναμη στην διεύθυνση Sway είναι η παρακάτω:

$$\begin{aligned}
 F_2 = & -\rho h U \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) + \frac{\rho U}{2w\beta^2} \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\psi \gamma(\psi) \frac{\sinh 2k_0(\xi - \psi)}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a} \\
 & + \frac{\rho U^2}{4w\beta^3 h} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\psi S'(\psi) \frac{1}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a} \\
 & + \frac{\rho h}{4w\beta} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \int_{-l}^l d\psi \gamma(\psi) \frac{1}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a}
 \end{aligned} \quad (43)$$

Εμείς θα υπολογίσουμε την  $F_2$  αφού επεξεργαστούμε τον κάθε προσθετέο χωριστά, ως αυτόνομη παράσταση.

$$\text{A)} \quad F_{21} = -\rho h U \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \quad \text{με } -l = -127.429, l = 127.2429$$

$$\text{B)} \quad F_{22} = \frac{\rho U}{2w\beta^2} \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\psi \gamma(\psi) \frac{\sinh 2k_0(\xi - \psi)}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a} \quad \text{με}$$

$$-l = -127.429, l = 127.2429$$

$$\text{Γ)} \quad F_{23} = \frac{\rho U^2}{4w\beta^3 h} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\psi S'(\psi) \frac{1}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a}$$

$$\text{με } -l = -127.429, l = 127.2429$$

$$\text{Δ)} \quad F_{24} = \frac{\rho h}{4w\beta} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \int_{-l}^l d\psi \gamma(\psi) \frac{1}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a}$$

$$\text{με } -l = -127.429, l = 127.2429$$

Εκτός από το ολοκλήρωμα στο Α) που είναι απλό, σε όλα τα υπόλοιπα Β) - Γ) - Δ), τα ολοκληρώματα είναι διπλά. Αυτό θέλει μια ιδιαίτερη προσοχή διότι οι παραστάσεις που ολοκληρώνονται περιέχουν πολυώνυμα μεγάλου βαθμού.

Έτσι πριν προχωρήσουμε στην ολοκλήρωση, με την βοήθεια του προγράμματος απλοποιούμε την ολοκληρωτέα παράσταση σε κάθε ένα από τα Β) - Γ) - Δ), και προκύπτει:

B)

$$\begin{aligned}
& ((16.3632 + \psi)(394.621 - 39.0816\psi + \psi^2) \\
& (1.41225 \times 10^{-43} \xi^8 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2) \\
& (10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) + 1.11904 \times 10^{-38} \xi^3 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2) \\
& (5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) - 2.18989 \times 10^{-36} \xi (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi) \\
& (197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) + 3.43345 \times 10^{-52} \xi^{10} (-125.222 + \psi) \\
& (42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) - \\
& 6.67375 \times 10^{-51} \xi^9 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2) \\
& (10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) - 4.62076 \times 10^{-40} \xi^4 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi) \\
& (14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) - 2.69563 \times 10^{-37} \xi^2 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi) \\
& (61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) - \\
& 2.41914 \times 10^{-42} \xi^5 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2) \\
& (10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) - 1.28583 \times 10^{-47} \xi^8 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2) \\
& (5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) - 5.84551 \times 10^{-36} (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi) \\
& (197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) + 2.18359 \times 10^{-46} \xi^7 (-125.222 + \psi) \\
& (42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2)) \\
& \text{Sinh}[0.00655922(-\xi + \psi)] / (-0.809017 + \text{Cosh}[0.00655922\xi - 0.00655922\psi])
\end{aligned}$$

Γ)

$$\begin{aligned}
& ((16.3632 + \psi)(-1.88683 \times 10^{-31} \xi^3 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2) \\
& (5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) - 2.29322 \times 10^{-27} (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi) \\
& (135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) + \\
& 4.52637 \times 10^{-36} \xi^8 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2) \\
& (394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) + 5.41617 \times 10^{-51} \xi^{13} (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi) \\
& (197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) + \\
& 9.81964 \times 10^{-35} \xi^5 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2) \\
& (394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) + 3.41245 \times 10^{-29} \xi (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi) \\
& (197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) - \\
& 7.47201 \times 10^{-40} \xi^8 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2) \\
& (394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) - 1.31141 \times 10^{-32} \xi^4 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi) \\
& (197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) - \\
& 2.39727 \times 10^{-46} \xi^{11} (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2) \\
& (394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) + 4.48709 \times 10^{-53} \xi^{14} (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi) \\
& (197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) - \\
& 2.93292 \times 10^{-38} \xi^7 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2) \\
& (394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) + 1.11606 \times 10^{-29} \xi^2 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi) \\
& (197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) + \\
& 6.35698 \times 10^{-44} \xi^{10} (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2) \\
& (394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) + 3.93448 \times 10^{-42} \xi^9 (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi) \\
& (197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2)(5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) - \\
& 2.68121 \times 10^{-48} \xi^{12} (-125.222 + \psi)(42.8732 + \psi)(61.3566 + \psi)(135.929 + \psi)(197.034 + \psi)(14082.6 - 233.648\psi + \psi^2) \\
& (5937.22 - 139.609\psi + \psi^2)(394.621 - 39.0816\psi + \psi^2)(10729.7 + 204.71\psi + \psi^2)) / (-0.809017 + \text{Cosh}[0.00655922\xi - 0.00655922\psi])
\end{aligned}$$

Δ)

$$\begin{aligned}
& ((2.77637 + \psi)(25.6556 + \psi)(1515.33 - 38.4213\psi + \psi^2) \\
& (8.56271 \times 10^{-38} \xi^3 (-147.836 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) - 2.06265 \times 10^{-36} \xi^2 (-147.836 + \psi)(142.552 + \psi) \\
& (8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) - 9.83892 \times 10^{-47} \xi^8 (-147.836 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) - \\
& 1.85108 \times 10^{-41} \xi^5 (-147.836 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) + \\
& 1.67085 \times 10^{-46} \xi^7 (-147.836 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) - \\
& 1.67567 \times 10^{-34} \xi^4 (-147.836 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) - 4.47289 \times 10^{-34} (-147.836 + \psi)(142.552 + \psi) \\
& (8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) - 5.10664 \times 10^{-50} \xi^9 (-147.836 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) - \\
& 3.53573 \times 10^{-39} \xi^4 (-147.836 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) + \\
& 2.62721 \times 10^{-51} \xi^{10} (-147.836 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) + \\
& 1.08063 \times 10^{-42} \xi^8 (-147.836 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2)) / (-0.809017 + \text{Cosh}[0.00655922\xi - 0.00655922\psi])
\end{aligned}$$

Και στις τρεις παραπάνω διαδικασίες έχουμε κάνει τις πράξεις και έχουμε καταλήξει σε ένα απλοποιημένο ανάπτυγμα, ούτως ώστε να είναι πιο εύκολη η διαδικασία της ολοκλήρωσης.

Φτάνοντας πλέον στο τελευταίο στάδιο προσθέτουμε τις υπολογισθέντες παραστάσεις και έχουμε το αποτέλεσμα. Σε αυτήν την περίπτωση είναι:

$$F_2 = 608009.58 \text{ Nt}$$

για  $\eta=0.10$

Όμοια εργαζόμαστε και για την ροπή **Yaw** :

$$\begin{aligned}
 F_6 = & -\rho U h \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) - \frac{\rho U}{2w\beta^2} \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\psi \gamma(\psi) \left[ \frac{(\xi - \psi) \sin^2 a \coth k_0(\xi - \psi) - \zeta \sinh 2k_0(\xi - \psi)}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a} \right] \\
 & + \frac{\rho U^2}{8w\beta^3 h} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\zeta S'(\psi) \frac{(\xi + \psi)}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a} \\
 & + \frac{\rho h}{8w\beta} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \int_{-l}^l d\psi \gamma(\psi) \frac{(\xi + \psi)}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a}
 \end{aligned} \tag{44}$$

$$\text{Α)} \quad F_{61} = -\rho U h \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \quad \mu\epsilon \quad -l = -127.429, \quad l = 127.2429$$

$$\text{Β)} \quad F_{62} = -\frac{\rho U}{2w\beta^2} \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\psi \gamma(\psi) \left[ \frac{(\xi - \psi) \sin^2 a \coth k_0(\xi - \psi) - \zeta \sinh 2k_0(\xi - \psi)}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a} \right]$$

$$\mu\epsilon \quad -l = -127.429, \quad l = 127.2429$$

$$\text{Γ)} \quad F_{63} = \frac{\rho U^2}{8w\beta^3 h} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi S'(\xi) \int_{-l}^l d\zeta S'(\psi) \frac{(\xi + \psi)}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a}$$

$$\mu\epsilon \quad -l = -127.429, \quad l = 127.2429$$

$$\text{Δ)} \quad F_{64} = \frac{\rho h}{8w\beta} \sin 2a \int_{-l}^l d\xi \gamma(\xi) \int_{-l}^l d\psi \gamma(\psi) \frac{(\xi + \psi)}{\cosh 2k_0(\xi - \psi) - \cos 2a}$$

$$\mu\epsilon \quad -l = -127.429, \quad l = 127.2429$$

Όμοια και εδώ το ολοκλήρωμα στο Α) είναι απλό, σε όλα τα υπόλοιπα Β) - Γ) - Δ), τα ολοκληρώματα είναι διπλά. Έτσι πριν προχωρήσουμε στην ολοκλήρωση, με την βοήθεια του προγράμματος απλοποιούμε την ολοκληρωτέα παράσταση σε κάθε ένα από τα Β) - Γ) - Δ), και προκύπτει:



B)

$$\begin{aligned}
& ((-5.58197 \times 10^{-36} (-125.222 + \psi) \psi (16.3632 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) (135.929 + \psi) (197.034 + \psi) (14082.6 - 233.648 \psi + \psi^2) (5937.22 - 139.609 \psi + \psi^2) \\
& (394.621 - 39.0816 \psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71 \psi + \psi^2) - 3.27865 \times 10^{-63} \xi^{11} (-125.222 + \psi) (16.3632 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) \\
& (135.929 + \psi) (197.034 + \psi) (14082.6 - 233.648 \psi + \psi^2) (5937.22 - 139.609 \psi + \psi^2) (394.621 - 39.0816 \psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71 \psi + \psi^2) + \\
& \xi (-2.85279 \times 10^{-10} + 1.11118 \times 10^{-10} \psi - 2.01956 \times 10^{-13} \psi^2 - 5.43598 \times 10^{-13} \psi^3 + 7.16196 \times 10^{-15} \psi^4 + 6.23383 \times 10^{-16} \psi^5 - \\
& 4.01326 \times 10^{-18} \psi^6 - 2.14595 \times 10^{-19} \psi^7 + 1.2739 \times 10^{-21} \psi^8 + 3.5312 \times 10^{-23} \psi^9 - 1.75454 \times 10^{-25} \psi^{10} - \\
& 2.99243 \times 10^{-27} \psi^{11} + 1.08387 \times 10^{-29} \psi^{12} + 1.25629 \times 10^{-31} \psi^{13} - 2.46833 \times 10^{-34} \psi^{14} - 2.09116 \times 10^{-36} \psi^{15}) + \\
& \xi^2 (-1.06873 \times 10^{-10} + 2.90588 \times 10^{-12} \psi + 5.0055 \times 10^{-13} \psi^2 - 1.51958 \times 10^{-14} \psi^3 - 5.02927 \times 10^{-16} \psi^4 + 1.20994 \times 10^{-17} \psi^5 + \\
& 1.54615 \times 10^{-19} \psi^6 - 3.96348 \times 10^{-21} \psi^7 - 1.79974 \times 10^{-23} \psi^8 + 6.12007 \times 10^{-25} \psi^9 + 7.05527 \times 10^{-28} \psi^{10} - \\
& 4.76401 \times 10^{-29} \psi^{11} + 1.2568 \times 10^{-32} \psi^{12} + 1.79054 \times 10^{-33} \psi^{13} - 1.01591 \times 10^{-36} \psi^{14} - 2.57409 \times 10^{-38} \psi^{15}) + \\
& \xi^4 (5.46125 \times 10^{-14} + 1.4424 \times 10^{-15} \psi - 2.99342 \times 10^{-16} \psi^2 - 6.48143 \times 10^{-18} \psi^3 + 4.97851 \times 10^{-19} \psi^4 + 1.05573 \times 10^{-20} \psi^5 - \\
& 2.04357 \times 10^{-22} \psi^6 - 3.75259 \times 10^{-24} \psi^7 + 4.66356 \times 10^{-26} \psi^8 + 6.4107 \times 10^{-28} \psi^9 - 5.38291 \times 10^{-30} \psi^{10} - \\
& 5.68031 \times 10^{-32} \psi^{11} + 2.9959 \times 10^{-34} \psi^{12} + 2.50762 \times 10^{-36} \psi^{13} - 6.39464 \times 10^{-39} \psi^{14} - 4.41243 \times 10^{-41} \psi^{15}) + \\
& \xi^5 (-2.25507 \times 10^{-15} + 4.53628 \times 10^{-17} \psi + 1.07992 \times 10^{-17} \psi^2 - 2.43001 \times 10^{-19} \psi^3 - 1.19245 \times 10^{-20} \psi^4 + 1.64077 \times 10^{-22} \psi^5 + \\
& 3.94552 \times 10^{-24} \psi^6 - 5.21441 \times 10^{-26} \psi^7 - 5.83774 \times 10^{-28} \psi^8 + 7.7158 \times 10^{-30} \psi^9 + 4.22564 \times 10^{-32} \psi^{10} - \\
& 5.63012 \times 10^{-34} \psi^{11} - 1.40243 \times 10^{-36} \psi^{12} + 1.91296 \times 10^{-38} \psi^{13} + 1.62405 \times 10^{-41} \psi^{14} - 2.31007 \times 10^{-43} \psi^{15}) + \\
& \xi^6 (1.06566 \times 10^{-21} + 4.68946 \times 10^{-23} \psi - 6.12008 \times 10^{-24} \psi^2 - 2.17719 \times 10^{-25} \psi^3 + 1.12572 \times 10^{-26} \psi^4 + 3.13224 \times 10^{-28} \psi^5 - \\
& 4.79046 \times 10^{-30} \psi^6 - 1.10231 \times 10^{-31} \psi^7 + 1.14979 \times 10^{-33} \psi^8 + 1.86182 \times 10^{-35} \psi^9 - 1.37204 \times 10^{-37} \psi^{10} - \\
& 1.62813 \times 10^{-39} \psi^{11} + 7.80588 \times 10^{-42} \psi^{12} + 7.08523 \times 10^{-44} \psi^{13} - 1.6906 \times 10^{-46} \psi^{14} - 1.22785 \times 10^{-48} \psi^{15}) + \\
& \xi^9 (-6.27521 \times 10^{-23} + 9.66358 \times 10^{-25} \psi + 3.04915 \times 10^{-25} \psi^2 - 5.32165 \times 10^{-27} \psi^3 - 3.56176 \times 10^{-28} \psi^4 + 2.87332 \times 10^{-30} \psi^5 + \\
& 1.22466 \times 10^{-31} \psi^6 - 8.66855 \times 10^{-34} \psi^7 - 2.003 \times 10^{-35} \psi^8 + 1.18276 \times 10^{-37} \psi^9 + 1.68365 \times 10^{-39} \psi^{10} - \\
& 7.46278 \times 10^{-42} \psi^{11} - 6.99644 \times 10^{-44} \psi^{12} + 1.86289 \times 10^{-46} \psi^{13} + 1.15093 \times 10^{-48} \psi^{14} - 6.37287 \times 10^{-52} \psi^{15}) + \\
& \xi^{10} (-3.25699 \times 10^{-26} - 1.19097 \times 10^{-27} \psi + 1.83444 \times 10^{-28} \psi^2 + 5.47505 \times 10^{-30} \psi^3 - 3.24122 \times 10^{-31} \psi^4 - 8.1876 \times 10^{-33} \psi^5 + \\
& 1.36037 \times 10^{-34} \psi^6 + 2.8908 \times 10^{-36} \psi^7 - 3.20426 \times 10^{-38} \psi^8 - 4.90088 \times 10^{-40} \psi^9 + 3.77772 \times 10^{-42} \psi^{10} + \\
& 4.30447 \times 10^{-44} \psi^{11} - 2.13245 \times 10^{-46} \psi^{12} - 1.8822 \times 10^{-48} \psi^{13} + 4.5948 \times 10^{-51} \psi^{14} + 3.27865 \times 10^{-53} \psi^{15}) + \\
& \xi^7 (6.8922 \times 10^{-19} - 1.13216 \times 10^{-20} \psi - 3.3384 \times 10^{-21} \psi^2 + 6.18941 \times 10^{-23} \psi^3 + 3.8537 \times 10^{-24} \psi^4 - 3.56066 \times 10^{-26} \psi^5 - \\
& 1.31475 \times 10^{-27} \psi^6 + 1.09182 \times 10^{-29} \psi^7 + 2.10939 \times 10^{-31} \psi^8 - 1.52971 \times 10^{-33} \psi^9 - 1.72773 \times 10^{-35} \psi^{10} + \\
& 1.0159 \times 10^{-37} \psi^{11} + 6.94428 \times 10^{-40} \psi^{12} - 2.87376 \times 10^{-42} \psi^{13} - 1.09689 \times 10^{-44} \psi^{14} + 2.08514 \times 10^{-47} \psi^{15}) + \\
& \xi^8 (-1.18061 \times 10^{-17} - 5.13538 \times 10^{-19} \psi + 6.77134 \times 10^{-20} \psi^2 + 2.38287 \times 10^{-21} \psi^3 - 1.24222 \times 10^{-22} \psi^4 - 3.43584 \times 10^{-24} \psi^5 + \\
& 5.28155 \times 10^{-26} \psi^6 + 1.20939 \times 10^{-27} \psi^7 - 1.26616 \times 10^{-29} \psi^8 - 2.04313 \times 10^{-31} \psi^9 + 1.50977 \times 10^{-33} \psi^{10} + \\
& 1.78715 \times 10^{-35} \psi^{11} - 8.58525 \times 10^{-38} \psi^{12} - 7.77945 \times 10^{-40} \psi^{13} + 1.85882 \times 10^{-42} \psi^{14} + 1.34858 \times 10^{-44} \psi^{15}) + \\
& \xi^3 (-1.31555 \times 10^{-12} - 3.50364 \times 10^{-14} \psi + 7.2151 \times 10^{-15} \psi^2 + 1.57545 \times 10^{-16} \psi^3 - 1.20165 \times 10^{-17} \psi^4 - 2.55976 \times 10^{-19} \psi^5 + \\
& 4.93515 \times 10^{-21} \psi^6 + 9.09691 \times 10^{-23} \psi^7 - 1.12711 \times 10^{-24} \psi^8 - 1.55373 \times 10^{-26} \psi^9 + 1.30166 \times 10^{-28} \psi^{10} + 1.37637 \times 10^{-30} \psi^{11} - \\
& 7.24715 \times 10^{-33} \psi^{12} - 6.07454 \times 10^{-35} \psi^{13} + 1.54726 \times 10^{-37} \psi^{14} + 1.06859 \times 10^{-39} \psi^{15}) \text{Coth}[0.00327961 (-\xi + \psi)] + \\
& \psi (16.3632 + \psi) (394.621 - 39.0816 \psi + \psi^2) (-1.11904 \times 10^{-38} \xi^3 (-125.222 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) (135.929 + \psi) (197.034 + \psi) \\
& (14082.6 - 233.648 \psi + \psi^2) (5937.22 - 139.609 \psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71 \psi + \psi^2) + \\
& 6.67375 \times 10^{-51} \xi^9 (-125.222 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) (135.929 + \psi) (197.034 + \psi) (14082.6 - 233.648 \psi + \psi^2) \\
& (5937.22 - 139.609 \psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71 \psi + \psi^2) - 1.41225 \times 10^{-43} \xi^6 (-125.222 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) \\
& (135.929 + \psi) (197.034 + \psi) (14082.6 - 233.648 \psi + \psi^2) (5937.22 - 139.609 \psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71 \psi + \psi^2) + \\
& 5.84551 \times 10^{-35} (-125.222 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) (135.929 + \psi) (197.034 + \psi) (14082.6 - 233.648 \psi + \psi^2) \\
& (5937.22 - 139.609 \psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71 \psi + \psi^2) + 2.18989 \times 10^{-35} \xi (-125.222 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) \\
& (135.929 + \psi) (197.034 + \psi) (14082.6 - 233.648 \psi + \psi^2) (5937.22 - 139.609 \psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71 \psi + \psi^2) + \\
& 1.28583 \times 10^{-47} \xi^8 (-125.222 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) (135.929 + \psi) (197.034 + \psi) (14082.6 - 233.648 \psi + \psi^2) \\
& (5937.22 - 139.609 \psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71 \psi + \psi^2) + 4.62076 \times 10^{-40} \xi^4 (-125.222 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) \\
& (135.929 + \psi) (197.034 + \psi) (14082.6 - 233.648 \psi + \psi^2) (5937.22 - 139.609 \psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71 \psi + \psi^2) + \\
& 2.41914 \times 10^{-42} \xi^5 (-125.222 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) (135.929 + \psi) (197.034 + \psi) (14082.6 - 233.648 \psi + \psi^2) \\
& (5937.22 - 139.609 \psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71 \psi + \psi^2) - 2.18359 \times 10^{-46} \xi^7 (-125.222 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) \\
& (135.929 + \psi) (197.034 + \psi) (14082.6 - 233.648 \psi + \psi^2) (5937.22 - 139.609 \psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71 \psi + \psi^2) - \\
& 3.43345 \times 10^{-52} \xi^{10} (-125.222 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) (135.929 + \psi) (197.034 + \psi) (14082.6 - 233.648 \psi + \psi^2) \\
& (5937.22 - 139.609 \psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71 \psi + \psi^2) + 2.69563 \times 10^{-37} \xi^2 (-125.222 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) \\
& (135.929 + \psi) (197.034 + \psi) (14082.6 - 233.648 \psi + \psi^2) (5937.22 - 139.609 \psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71 \psi + \psi^2)) \\
& \text{Sinh}[0.00655922 (-\xi + \psi)] / (-0.809017 + \text{Cosh}[0.00655922 \xi - 0.00655922 \psi])
\end{aligned}$$

Γ)

$$\begin{aligned}
& (4.48709 \times 10^{-53} \xi^{15} (-125.222 + \psi) (16.3632 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) (135.929 + \psi) \\
& (197.034 + \psi) (14082.6 - 233.648\psi + \psi^2) (5937.22 - 139.609\psi + \psi^2) (394.621 - 39.0816\psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) - \\
& 2.29322 \times 10^{-27} (-125.222 + \psi)\psi (16.3632 + \psi) (42.8732 + \psi) (61.3566 + \psi) (135.929 + \psi) (197.034 + \psi) (14082.6 - 233.648\psi + \psi^2) \\
& (5937.22 - 139.609\psi + \psi^2) (394.621 - 39.0816\psi + \psi^2) (10729.7 + 204.71\psi + \psi^2) + \xi^2 (-0.000570384 + 0.0000181307\psi + 2.63242 \times 10^{-6} \psi^2 - \\
& 9.38605 \times 10^{-8} \psi^3 - 2.4684 \times 10^{-9} \psi^4 + 7.95688 \times 10^{-11} \psi^5 + 7.12909 \times 10^{-13} \psi^6 - 2.63284 \times 10^{-14} \psi^7 - 6.25188 \times 10^{-17} \psi^8 + 4.12059 \times 10^{-18} \psi^9 - \\
& 7.33057 \times 10^{-22} \psi^{10} - 3.26938 \times 10^{-22} \psi^{11} + 3.41166 \times 10^{-26} \psi^{12} + 1.26217 \times 10^{-26} \psi^{13} - 1.16145 \times 10^{-29} \psi^{14} - 1.88683 \times 10^{-31} \psi^{15}) + \\
& \xi^4 (9.64303 \times 10^{-6} + 5.26729 \times 10^{-7} \psi - 5.69035 \times 10^{-8} \psi^2 - 2.4684 \times 10^{-9} \psi^3 + 1.1029 \times 10^{-10} \psi^4 + 3.41983 \times 10^{-12} \psi^5 - \\
& 4.77325 \times 10^{-14} \psi^6 - 1.19956 \times 10^{-15} \psi^7 + 1.17138 \times 10^{-17} \psi^8 + 2.01834 \times 10^{-19} \psi^9 - 1.41721 \times 10^{-21} \psi^{10} - \\
& 1.7571 \times 10^{-23} \psi^{11} + 8.13376 \times 10^{-26} \psi^{12} + 7.60843 \times 10^{-28} \psi^{13} - 1.77162 \times 10^{-30} \psi^{14} - 1.31141 \times 10^{-32} \psi^{15}) + \\
& \xi^7 (-2.3133 \times 10^{-10} + 4.94125 \times 10^{-12} \psi + 1.10352 \times 10^{-12} \psi^2 - 2.63284 \times 10^{-14} \psi^3 - 1.19956 \times 10^{-15} \psi^4 + 1.84774 \times 10^{-17} \psi^5 + \\
& 3.92415 \times 10^{-19} \psi^6 - 5.91719 \times 10^{-21} \psi^7 - 5.62036 \times 10^{-23} \psi^8 + 8.85288 \times 10^{-25} \psi^9 + 3.84092 \times 10^{-27} \psi^{10} - \\
& 6.5734 \times 10^{-29} \psi^{11} - 1.13775 \times 10^{-31} \psi^{12} + 2.29889 \times 10^{-33} \psi^{13} + 9.86174 \times 10^{-37} \psi^{14} - 2.93292 \times 10^{-38} \psi^{15}) + \\
& \xi^8 (1.49893 \times 10^{-12} + 1.58824 \times 10^{-14} \psi - 7.86317 \times 10^{-15} \psi^2 - 6.25188 \times 10^{-17} \psi^3 + 1.17138 \times 10^{-17} \psi^4 + 1.54194 \times 10^{-19} \psi^5 - \\
& 4.59378 \times 10^{-21} \psi^6 - 5.62036 \times 10^{-23} \psi^7 + 9.76793 \times 10^{-25} \psi^8 + 9.87086 \times 10^{-27} \psi^9 - 1.07069 \times 10^{-28} \psi^{10} - \\
& 9.01886 \times 10^{-31} \psi^{11} + 5.74452 \times 10^{-33} \psi^{12} + 4.1108 \times 10^{-35} \psi^{13} - 1.19521 \times 10^{-37} \psi^{14} - 7.47201 \times 10^{-40} \psi^{15}) + \\
& \xi^{11} (-3.24887 \times 10^{-18} + 6.05968 \times 10^{-20} \psi + 1.56291 \times 10^{-20} \psi^2 - 3.26938 \times 10^{-22} \psi^3 - 1.7571 \times 10^{-23} \psi^4 + 2.09181 \times 10^{-25} \psi^5 + \\
& 5.88801 \times 10^{-27} \psi^6 - 6.5734 \times 10^{-29} \psi^7 - 9.01886 \times 10^{-31} \psi^8 + 9.56607 \times 10^{-33} \psi^9 + 6.90408 \times 10^{-35} \psi^{10} - \\
& 6.79255 \times 10^{-37} \psi^{11} - 2.51779 \times 10^{-39} \psi^{12} + 2.19979 \times 10^{-41} \psi^{13} + 3.46334 \times 10^{-44} \psi^{14} - 2.39727 \times 10^{-46} \psi^{15}) + \\
& \xi^{12} (1.22518 \times 10^{-20} - 4.52838 \times 10^{-23} \psi - 6.16653 \times 10^{-23} \psi^2 + 3.41166 \times 10^{-25} \psi^3 + 8.13376 \times 10^{-26} \psi^4 + 2.58995 \times 10^{-28} \psi^5 - \\
& 3.00502 \times 10^{-29} \psi^6 - 1.13775 \times 10^{-31} \psi^7 + 5.74452 \times 10^{-33} \psi^8 + 2.36279 \times 10^{-35} \psi^9 - 5.74728 \times 10^{-37} \psi^{10} - \\
& 2.51779 \times 10^{-39} \psi^{11} + 2.86493 \times 10^{-41} \psi^{12} + 1.31277 \times 10^{-43} \psi^{13} - 5.63364 \times 10^{-46} \psi^{14} - 2.68121 \times 10^{-48} \psi^{15}) + \\
& \xi^{14} (-2.76805 \times 10^{-26} + 1.82579 \times 10^{-27} \psi + 1.38127 \times 10^{-27} \psi^2 - 1.16145 \times 10^{-29} \psi^3 - 1.77162 \times 10^{-30} \psi^4 - 1.26121 \times 10^{-33} \psi^5 + \\
& 6.44555 \times 10^{-34} \psi^6 + 9.86174 \times 10^{-37} \psi^7 - 1.19521 \times 10^{-37} \psi^8 - 2.72287 \times 10^{-40} \psi^9 + 1.16077 \times 10^{-41} \psi^{10} + \\
& 3.46334 \times 10^{-44} \psi^{11} - 5.63364 \times 10^{-46} \psi^{12} - 2.02745 \times 10^{-48} \psi^{13} + 1.08323 \times 10^{-50} \psi^{14} + 4.48709 \times 10^{-53} \psi^{15}) + \\
& \xi^{13} (1.37029 \times 10^{-22} - 2.31588 \times 10^{-24} \psi - 6.62769 \times 10^{-25} \psi^2 + 1.26217 \times 10^{-26} \psi^3 + 7.60843 \times 10^{-28} \psi^4 - 7.45057 \times 10^{-30} \psi^5 - \\
& 2.58616 \times 10^{-31} \psi^6 + 2.29889 \times 10^{-33} \psi^7 + 4.1108 \times 10^{-35} \psi^8 - 3.25292 \times 10^{-37} \psi^9 - 3.32364 \times 10^{-39} \psi^{10} + \\
& 2.19979 \times 10^{-41} \psi^{11} + 1.31277 \times 10^{-43} \psi^{12} - 6.47275 \times 10^{-46} \psi^{13} - 2.02745 \times 10^{-48} \psi^{14} + 5.41617 \times 10^{-51} \psi^{15}) + \\
& \xi^{10} (-2.0108 \times 10^{-16} - 2.56687 \times 10^{-19} \psi + 1.02695 \times 10^{-18} \psi^2 - 7.33057 \times 10^{-22} \psi^3 - 1.41721 \times 10^{-21} \psi^4 - 9.96876 \times 10^{-24} \psi^5 + \\
& 5.36009 \times 10^{-25} \psi^6 + 3.84092 \times 10^{-27} \psi^7 - 1.07069 \times 10^{-28} \psi^8 - 7.13587 \times 10^{-31} \psi^9 + 1.11482 \times 10^{-32} \psi^{10} + \\
& 6.90408 \times 10^{-35} \psi^{11} - 5.74728 \times 10^{-37} \psi^{12} - 3.32364 \times 10^{-39} \psi^{13} + 1.16077 \times 10^{-41} \psi^{14} + 6.35698 \times 10^{-44} \psi^{15}) + \\
& \xi^9 (3.81873 \times 10^{-14} - 7.69329 \times 10^{-16} \psi - 1.82856 \times 10^{-16} \psi^2 + 4.12059 \times 10^{-18} \psi^3 + 2.01834 \times 10^{-19} \psi^4 - 2.78509 \times 10^{-21} \psi^5 - \\
& 6.67639 \times 10^{-23} \psi^6 + 8.85288 \times 10^{-25} \psi^7 + 9.87086 \times 10^{-27} \psi^8 - 1.31036 \times 10^{-28} \psi^9 - 7.13587 \times 10^{-31} \psi^{10} + \\
& 9.56607 \times 10^{-33} \psi^{11} + 2.36279 \times 10^{-35} \psi^{12} - 3.25292 \times 10^{-37} \psi^{13} - 2.72287 \times 10^{-40} \psi^{14} + 3.93448 \times 10^{-42} \psi^{15}) + \\
& \xi^8 (-5.01854 \times 10^{-9} - 1.56651 \times 10^{-10} \psi + 2.78663 \times 10^{-11} \psi^2 + 7.12909 \times 10^{-13} \psi^3 - 4.77325 \times 10^{-14} \psi^4 - 1.10799 \times 10^{-15} \psi^5 + \\
& 1.98112 \times 10^{-17} \psi^6 + 3.92415 \times 10^{-19} \psi^7 - 4.59378 \times 10^{-21} \psi^8 - 6.67639 \times 10^{-23} \psi^9 + 5.36009 \times 10^{-25} \psi^{10} + \\
& 5.88801 \times 10^{-27} \psi^{11} - 3.00502 \times 10^{-29} \psi^{12} - 2.58616 \times 10^{-31} \psi^{13} + 6.44555 \times 10^{-34} \psi^{14} + 4.52637 \times 10^{-36} \psi^{15}) + \\
& \xi^5 (6.70223 \times 10^{-7} - 1.49918 \times 10^{-8} \psi - 3.18713 \times 10^{-9} \psi^2 + 7.95688 \times 10^{-11} \psi^3 + 3.41983 \times 10^{-12} \psi^4 - 5.73982 \times 10^{-14} \psi^5 - \\
& 1.10799 \times 10^{-15} \psi^6 + 1.84774 \times 10^{-17} \psi^7 + 1.54194 \times 10^{-19} \psi^8 - 2.78509 \times 10^{-21} \psi^9 - 9.96876 \times 10^{-24} \psi^{10} + \\
& 2.09181 \times 10^{-26} \psi^{11} + 2.58995 \times 10^{-28} \psi^{12} - 7.45057 \times 10^{-30} \psi^{13} - 1.26121 \times 10^{-33} \psi^{14} + 9.81964 \times 10^{-35} \psi^{15}) + \\
& \xi^2 (-0.00174401 - 0.000544432\psi + 0.0000169753\psi^2 + 2.63242 \times 10^{-6} \psi^3 - 5.69035 \times 10^{-8} \psi^4 - 3.18713 \times 10^{-9} \psi^5 + \\
& 2.78663 \times 10^{-11} \psi^6 + 1.10352 \times 10^{-12} \psi^7 - 7.86317 \times 10^{-15} \psi^8 - 1.82856 \times 10^{-16} \psi^9 + 1.02695 \times 10^{-18} \psi^{10} + \\
& 1.56291 \times 10^{-20} \psi^{11} - 6.16653 \times 10^{-23} \psi^{12} - 6.62769 \times 10^{-25} \psi^{13} + 1.38127 \times 10^{-27} \psi^{14} + 1.11606 \times 10^{-29} \psi^{15}) + \\
& \xi (0.1172 - 0.00348801\psi - 0.000544432\psi^2 + 0.0000181307\psi^3 + 5.26729 \times 10^{-7} \psi^4 - 1.49918 \times 10^{-8} \psi^5 - 1.56651 \times 10^{-10} \psi^6 + \\
& 4.94125 \times 10^{-12} \psi^7 + 1.58824 \times 10^{-14} \psi^8 - 7.69329 \times 10^{-16} \psi^9 - 2.56687 \times 10^{-19} \psi^{10} + 6.05968 \times 10^{-20} \psi^{11} - 4.52838 \times 10^{-23} \psi^{12} - \\
& 2.31588 \times 10^{-24} \psi^{13} + 1.82579 \times 10^{-27} \psi^{14} + 3.41245 \times 10^{-29} \psi^{15}) / (-0.809017 + \text{Cosh}[0.00655922\xi - 0.00655922\psi])
\end{aligned}$$

Δ)

$$\begin{aligned}
& ((25.656 + \psi)(1515.33 - 38.4213\psi + \psi^2) \\
& (-1.85108 \times 10^{-41} \xi^5 (-147.836 + \psi)(2.77637 + \psi)(142.552 + \psi)(191.009 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) + \\
& 2.62721 \times 10^{-51} \xi^{10} (-147.836 + \psi)(-19.4375 + \psi)(2.77637 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) + \\
& 1.67085 \times 10^{-46} \xi^7 (-147.836 + \psi)(2.77637 + \psi)(142.552 + \psi)(646.756 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) - \\
& 1.67567 \times 10^{-34} \xi (-147.836 + \psi)(2.66931 + \psi)(2.77637 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) - \\
& 4.47289 \times 10^{-34} (-147.836 + \psi)\psi(2.77637 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) - \\
& 3.53573 \times 10^{-39} \xi^4 (-147.836 + \psi)(-24.2177 + \psi)(2.77637 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) + \\
& 1.08063 \times 10^{-42} \xi^6 (-147.836 + \psi)(-17.1297 + \psi)(2.77637 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) + \\
& 8.56271 \times 10^{-38} \xi^3 (-147.836 + \psi)(-24.0887 + \psi)(2.77637 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) - \\
& 5.10664 \times 10^{-50} \xi^9 (-147.836 + \psi)(2.77637 + \psi)(142.552 + \psi)(1926.69 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) + \\
& 2.62721 \times 10^{-51} \xi^{11} (-147.836 + \psi)(2.77637 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) - \\
& 9.83892 \times 10^{-47} \xi^8 (-147.836 + \psi)(-16.982 + \psi)(2.77637 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2) - \\
& 2.06265 \times 10^{-36} \xi^2 (-147.836 + \psi)(2.77637 + \psi)(81.2388 + \psi)(142.552 + \psi)(8866.83 - 187.28\psi + \psi^2)(8441.06 + 183.116\psi + \psi^2)) / \\
& (-0.809017 + \text{Cosh}[0.00655922\xi - 0.00655922\psi])
\end{aligned}$$

Όμοια και εδώ σε αυτές τις τρεις διαδικασίες έχουμε κάνει της πράξεις και έχουμε καταλήξει σε ένα απλοποιημένο ανάπτυγμα, ούτως ώστε να είναι πιο εύκολη η διαδικασία της ολοκλήρωσης.

Φτάνοντας πλέον στο τελευταίο στάδιο προσθέτουμε τις υπολογισθέντες παραστάσεις και έχουμε το αποτέλεσμα. Σε αυτήν την περίπτωση είναι:

$$F_6 = 7.726378 * 10^6 \text{ Ntm}$$

για  $\eta=0.10$

Αυτή την διαδικασία την ακολουθούμε για τις περιπτώσεις όπου το πλοίο κινείται σε απόσταση i) 1/10, ii) 2/10, iii) 3/10, iv) 4/10 και v) 5/10 του πλάτους του καναλιού από τον κοντινότερο τοίχο. Με αυτό τον τρόπο πετυχαίνουμε να προσδιορίσουμε την μεταβολή της δύναμης Sway και της ροπής Yaw ανάλογα με την κατά το πλάτος πορεία που διαγράφει το πλοίο μας.

Χρησιμοποιώντας τους αδιάστατους συντελεστές  $C_y$ ,  $C_N$  με:

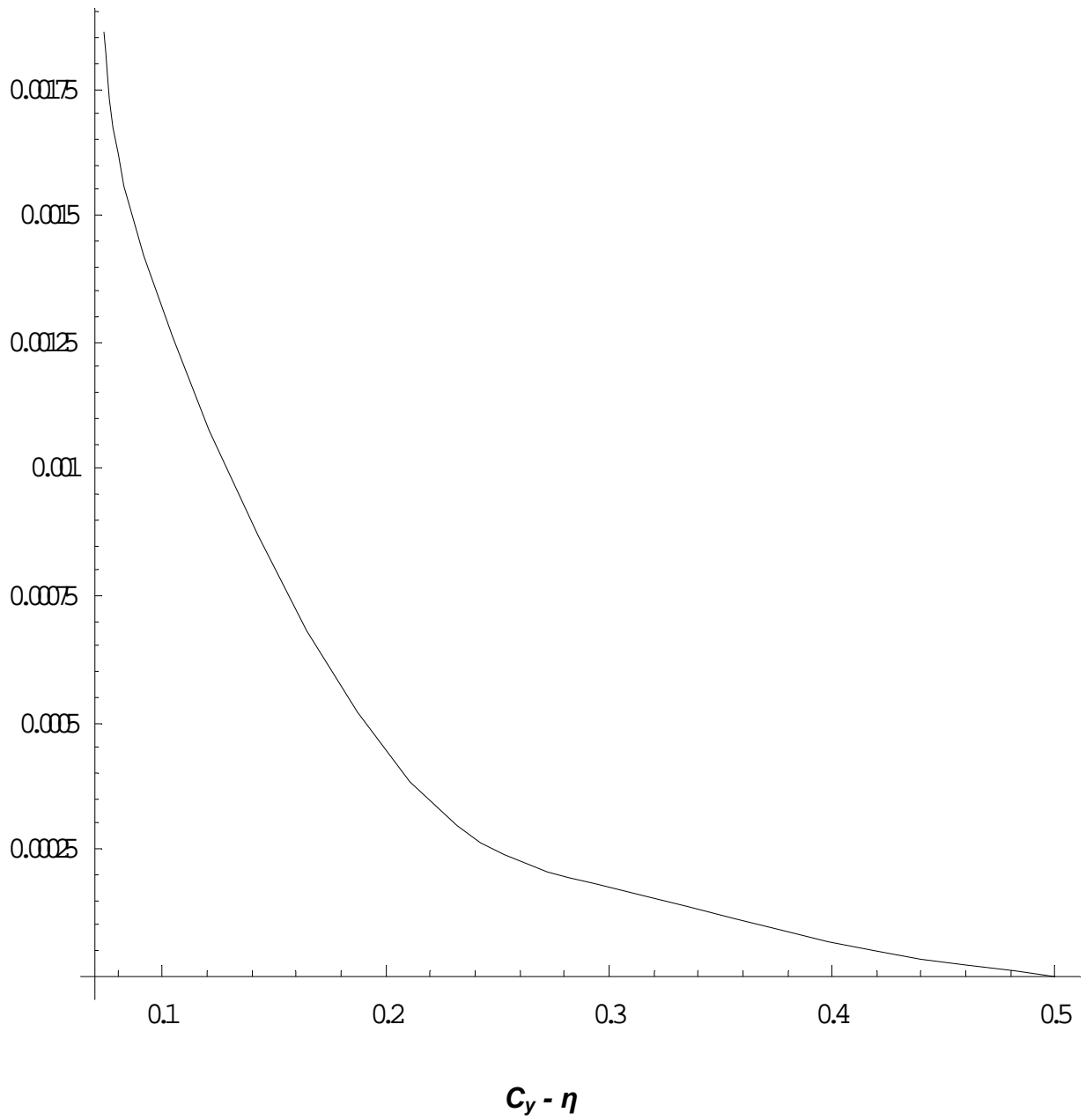
$$C_y = \frac{F_2}{0.5 * \rho * U^2 * L^2} \quad (45)$$

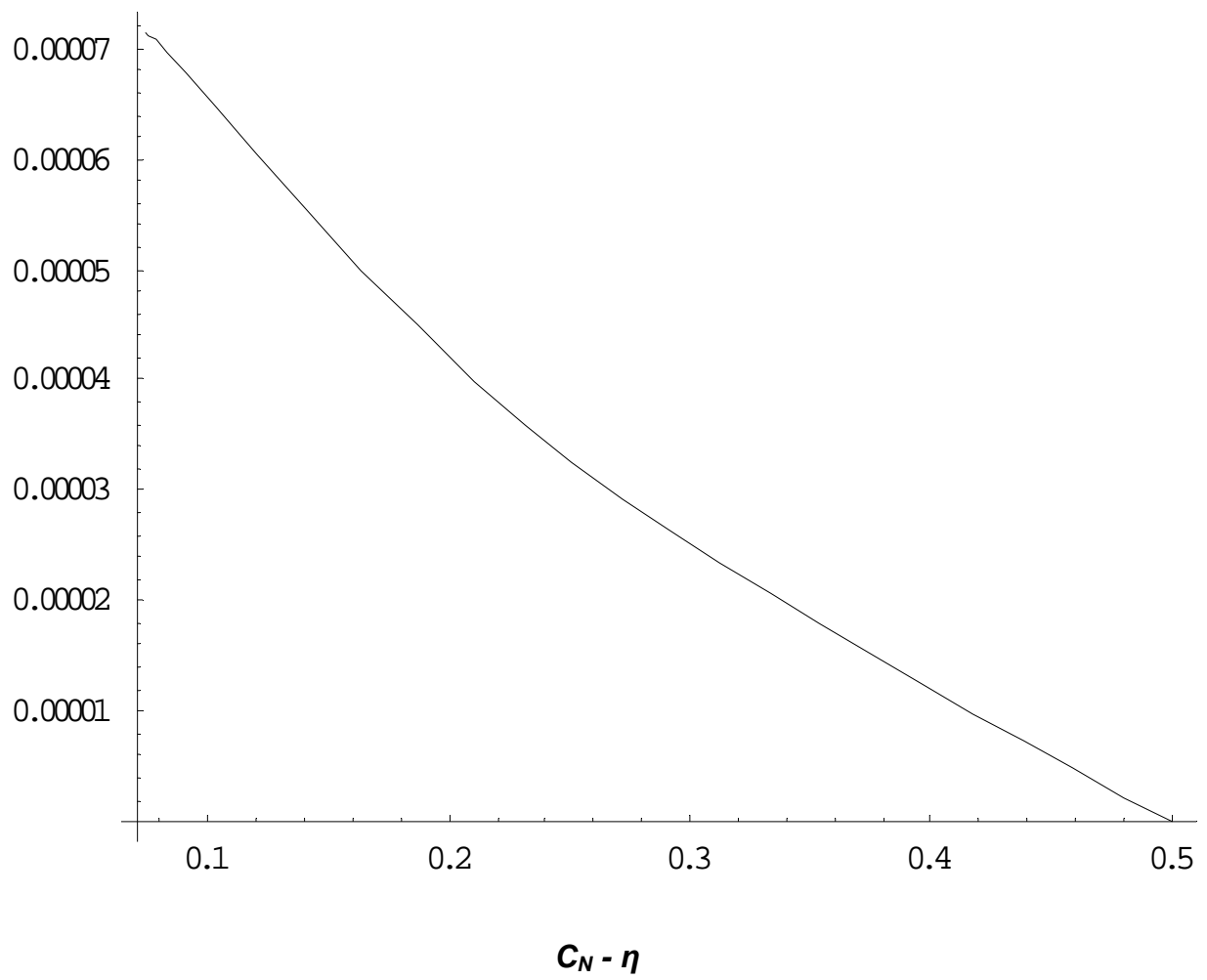
$$C_N = \frac{F_6}{0.5 * \rho * U^2 * L^3} \quad (46)$$

προκύπτουν τα παρακάτω δεδομένα:

$$\begin{aligned} h = 0.074, & \quad C_g = 0.00186188, \quad C_N = 0.0000715051 \\ h = 0.10, & \quad C_g = 0.00131281, \quad C_N = 0.000065459 \\ h = 0.20, & \quad C_g = 0.00043892, \quad C_N = 0.000042012 \\ h = 0.30, & \quad C_g = 0.000174887, \quad C_N = 0.0000252548 \\ h = 0.40, & \quad C_g = 0.0000654895, \quad C_N = 0.0000119091 \\ h = 0.50, & \quad C_g = 1.10777 \cdot 10^{-20}, \quad C_N = 2.28137 \cdot 10^{-21} \end{aligned}$$

Αποτυπώνοντας αυτά τα σημεία πάνω σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και με την βοήθεια κυβικής καμπύλης Spline παίρνουμε τις παρακάτω παραστάσεις:

**Σχήμα 11**

**Σχήμα 12**

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ****ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ**

$a$  = η αριστερή απόσταση από τον τοίχο του καναλιού

$b$  = η δεξιά απόσταση από τον τοίχο του καναλιού

$B(x)$  = το πλάτος του σκάφους

$C(x)$  = ο τοπικός αδιάστατος συντελεστής γάστρας

$C_\gamma$  = ο αδιάστατος όρος της πλευρικής δύναμης  $= \frac{F_2}{\frac{1}{2}\rho U^2 L^2}$

$C_N$  = ο αδιάστατος όρος της δύναμης στρέψης περί τον άξονα - z  $= \frac{F_6}{\frac{1}{2}\rho U^2 L^3}$

$C_s$  = ο αδιάστατος όρος της παράλληλης βύθισης  $= \frac{s}{L} \frac{\sqrt{1-F_h^2}}{F_h^2}$

$C_t$  = ο αδιάστατος όρος της διαγωγής  $= t \frac{\sqrt{1-F_h^2}}{F_h^2}$

$C_B$  = ο συντελεστής γάστρας

$C_\chi$  = ο συντελεστής γάστρας της μέσης τομής

$f(x,z)$  = η εξίσωση της επιφάνεια της γάστρας  $y = \pm f(x,z)$

$F_h$  = ο αριθμός Froude που βασίζεται στο βάθος του καναλιού  $= \frac{U}{\sqrt{gL}}$

$F_j$  = η δύναμη που ασκείται στη γάστρα στην j – διεύθυνση

$$j = 1, 2, 3 \dots 6$$

$g$  = επιτάχυνση της βαρύτητας

$h$  = το βάθος του καναλιού

$H(x-\xi)$  = εξίσωση Heaviside

$$k_o = \pi / 2w\beta$$

$L$  = μήκος του πλοίου

$$= \text{μέσο μήκος του πλοίου} = L/2$$

$S(x)$  = εξίσωση καμπύλης κυβισμού

$s$  = παράλληλη βύθιση

$T(x)$  = βύθισμα του πλοίου

$t$  = διαγωγή

$U$  = ταχύτητα πλοίου

$W$  = πλάτος καναλιού

$$= a+b$$

$$a = \pi\alpha / w$$

$$\beta = \sqrt{1 - F_h^2}$$

$\gamma(x)$  = το δυναμικό της δίνης

$\eta$  = ο λόγος της θέσης τους σκάφους σε σχέση με τον από αριστερά του τοίχο

$$= a/w$$

$\rho$  = πυκνότητα νερού

$\sigma(x)$  = το δυναμικό της πηγής



**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. Beck R. F., “Forces and Moments on a Ship Moving in a Canal.”  
Department of Naval Architecture and Marine Engineering, Report No  
179, University of Michigan, 1976.
2. Beck R. F., Newman J. N., and Tuck E. O., “Hydrodynamic Forces on Ships in  
Dredged Channels,” JOURNAL OF SHIP RESEARCH, Vol.19, No 3, Sept. 1975, pp.  
166-171.
3. Beck R. F. and Tuck E. O., “Computation of Shallow Water Ship Motions.”  
Proceedings, Ninth Symposium on Naval Hydrodynamics, Paris, France, 1972, pp.  
1543-1587.
4. Taylor P. J. “The Blockage Coefficient for Flow About an Arbitrary Body  
Immersed in a Channel.” JOURNAL OF SHIP RESEARCH. Vol.17, No 2, June 1973,  
pp. 97-105.
5. Newman J. N., “Lateral Motion of a Slender Body Between Two Parallel Walls,”  
JOURNAL OF FLUID MECHANICS, Vol. 39, No 1, 1969, pp. 97-115.
6. Kijima K. “Manoeuvring Motion of a Ship in the Proximity of Bank Wall.”  
J.S.N.A. Japan, Vol. 162, Dec. 1987.
7. Yavin Y., Zilman G. and Miloh T., “Ship Manoeuvrability in Finite Depth Water  
in the Vicinity of an Obstacle: A Stochastic Control Approach ” Computers Math.  
Applic., Vol. 30, No. 10, 1995, pp. 103-117.
8. Muskhelishvili N. I., “Singular Integral Equations, Noordhoff, Groningen, The  
Netherlands, 1953.