



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ**

**Διπλωματική Εργασία**

**Στατική Ανάλυση Νανοδοκών σε Ελαστική Έδραση με Χρήση  
Μοντέλων Θεωρίας Βαθμίδας Ελαστικότητας**

**Δημήτρης Μ. Μανιάς**

**Επιβλέπων Καθηγητής**  
Ε.Ε. Θεοτόκογλου  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα 2011





## **Στατική Ανάλυση Νανοδοκών σε Ελαστική Έδραση με Χρήση Μοντέλων Θεωρίας Βαθμίδας Ελαστικότητας**

### **Επιβλέπων Καθηγητής**

Ευστάθιος Ε. Θεοτόκογλου, Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Π.

### **Μέλη Εξεταστικής Επιτροπής**

Ευστάθιος Ε. Θεοτόκογλου, Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Π.

Χαράλαμπος Γ. Γεωργιάδης, Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Π.

Ευαγγελία Κοντού-Δρούγκα, Καθηγήτρια, Τομέας Μηχανικής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Π.



*Στους γονείς μου, Μηνά και Γεωργία,  
με αμέριστη αγάπη και σεβασμό*



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία αποτελεί τη διπλωματική μου εργασία και σηματοδοτεί την ολοκλήρωση των σπουδών μου στη σχολή των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών. Το περιεχόμενο της εργασίας είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μελέτης των νέων υλικών και των ιδιοτήτων τους, καθώς, η χρήση αυτών σε όλο και περισσότερους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας επιβάλλει ολοένα και περισσότερη μελέτη της συμπεριφοράς τους. Η εργασία, επίσης, αποτελεί αντικείμενο έρευνας, ενός εκ των πολλών, τα οποία λαμβάνουν μέρος αυτή τη στιγμή τόσο στον τομέα Μηχανικής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, όσο και σε αντίστοιχα άλλα ερευνητικά ιδρύματα σε όλον τον κόσμο.

Το θέμα της εργασίας, επίσης, προκάλεσε και το προσωπικό μου ενδιαφέρον, καθώς διαπραγματεύεται πολλούς τομείς της επιστήμης και συνδιάζει πολλούς από τους κλάδους των μαθηματικών, τους οποίους διδάχτηκα κατά τη διάρκεια της φοίτησής μου στη σχολή. Έτσι, μπόρεσα να δω τον τρόπο, με τον οποίο όλα εκείνα τα μαθήματα που διδασκόμουν (και συνήθως παραπονιόμουν) συνδέονται μεταξύ τους και δημιουργούν μια ολοκληρωμένη εικόνα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Επιστημών. Τα θέματα, τα οποία συνδιάζει η εργασία αυτή, παρατίθενται παρακάτω:

*Λογισμός μεταβολών, Μερικές και Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις, Συναρτησιακή Ανάλυση, Γραμμική Άλγεβρα, Υπολογιστική Μηχανική, Τανυστική Ανάλυση, Μηχανική των υλικών, Μηχανική των κατασκευών, Αριθμητική Ανάλυση και Προγραμματισμός,*

Η εργασία ξεκινάει με την εισαγωγή, στην οποία αναφέρονται οι λόγοι χρήσης της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας (Θ.Β.Ε.) σε υλικά με μικροδομή, εισαγάγονται οι έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν, αναφέροντας λίγα λόγια για την κάθε μία ξεχωριστά και εξηγείται ο τρόπος της μεταξύ τους σύνδεσης στην εργασία. Στο Εισαγωγικό Κεφάλαιο παρατίθενται ορισμοί της Μαθηματικής Ανάλυσης, για την κατανόηση των εννοιών, καθώς και ανισότητες και θεωρήματα που θα χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία στις αποδείξεις της ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων.

Στο Κεφάλαιο 1 ορίζεται το πρόβλημα της κάμψης μέσω της (Θ.Β.Ε.) και μέσω της μεταβολικής διαδικασίας Hamilton εξάγεται η εξίσωση κίνησης της δοκού σε ελαστική έδραση. Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται η στατική ανάλυση της δοκού και υπολογίζονται οι λύσεις αναλυτικά μέσω της μεθόδου Cardano. Στα Κεφάλαια 3-5 περιγράφονται τα προβλήματα κάμψης για τρεις περιπτώσεις: του προβόλου, της αμφίπακτης και της αμφιέρειστης δοκού, αντίστοιχα. Περιγράφεται αναλυτικά η διαδικασία εύρεσης της προσεγγιστικής λύσης, μέσω της αριθμητικής μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και παρατίθενται αριθμητικά

παραδείγματα, ώστε να γίνει καλύτερη η κατανόηση του μοντέλου, καθώς και αντίστοιχα διαγράμματα, για να γίνει σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της κλασικής θεώρησης.

Έγινε προσπάθεια να εξηγηθούν όλες οι διαδικασίες, από την επιλογή των συναρτήσεων βάσης και του πολυωνύμου προσέγγισης μέχρι τη συναρμογή των μητρώων δυσκαμψίας, τόσο αναλυτικά ώστε να γίνονται κατανοητές στον κάθε αναγνώστη. Έτσι, σε κάθε ένα από τα κεφάλαια αυτά περιγράφεται η μέθοδος, βήμα-βήμα, με αποτέλεσμα να αναφέρονται συχνά τα ίδια πράγματα, κάνοντας έτσι, πιθανώς, βαρετή την ανάγνωση της συνολικής εργασίας. Σκοπός είναι, κάθε κεφάλαιο των προβλημάτων κάμψης να είναι αυτόνομο για να μη χρειάζεται ο αναγνώστης να παραπέμπεται με αναφορές σε προηγούμενα κεφάλαια, με αποτέλεσμα να πηγαίνει συνεχώς 'μπρος-πίσω'.

Στο Κεφάλαιο 6 παρατίθενται διάφορα συμπεράσματα για την επίδραση του μήκους μικροδομής και της ελαστικής έδρασης στη συμπεριφορά των δοκών σε κάμψη. Στο Κεφάλαιο 7 ορίζεται το πρόβλημα του λυγισμού μέσω της (Θ.Β.Ε.) σε ελαστική έδραση και εξάγεται η εξίσωση που διέπει το πρόβλημα στη στατική περίπτωση. Στο Κεφάλαιο 8 περιγράφεται το πρόβλημα του λυγισμού του προβόλου και γίνεται προσέγγιση των ιδιοτιμών του προβλήματος μέσω της αριθμητικής μεθόδου. Επίσης, παρατίθεται αριθμητικό παράδειγμα και γίνεται επαλήθευση των αποτελεσμάτων με τιμές αντίστοιχης εργασίας. Στο Κεφάλαιο 9 αναγράφονται διάφορα συμπεράσματα για την επίδραση του μήκους μικροδομής και της ελαστικής έδρασης στις τιμές των κρίσιμων φορτίων λυγισμού. Τέλος, στο παράρτημα I περιγράφεται η διαδικασία εύρεσης ριζών πολυωνύμων 3<sup>ου</sup> βαθμού Cardano, ενώ στο παράρτημα II παρατίθεται κώδικας σε γλώσσα Matlab, ο οποίος λύνει τα τρία προβλήματα κάμψης, αναλυτικά και προσεγγιστικά, ενώ βρίσκει τα κρίσιμα φορτία λυγισμού για την περίπτωση του προβόλου.

Η διαδικασία με την οποία αντιμετωπίζονται τα προβλήματα που παρουσιάζονται στη συγκεκριμένη εργασία, ελπίζω να αποτελέσει οδηγό για κάποιον, φοιτητή ή όχι, που θα έρθει αντιμέτωπος με παρόμοια θέματα και εύχομαι η όλη εργασία, γενικά, να αποτελέσει κίνητρο για κάποιον άλλο, ώστε να αγαπήσει και να ασχοληθεί με τον κλάδο των θετικών επιστημών.

Αθήνα, Νοέμβριος 2011

Δημήτρης Μ. Μανιάς







## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήταν πολύ δύσκολο, αν όχι αδύνατον, να ολοκληρωθεί η διπλωματική αυτή εργασία χωρίς τη συμβολή κάποιων ανθρώπων, μέσα και έξω από το ίδρυμα, τους οποίους θεωρώ υποχρέωση να ευχαριστήσω.

Καταρχήν, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Γιώργο Τσαμασφύρο, καθηγητή μου σε πολλά από τα μαθήματα, τα οποία παρακολούθησα στον τομέα Μηχανικής, ο οποίος δέχτηκε να επιβλέπει την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Λόγω, όμως, συνταξιοδότησης, τη θέση του πήρε ο κύριος Ευστάθιος Θεοτόκογλου, τον οποίο εκτιμώ εξίσου και τον ευχαριστώ με την ίδια θέρμη, καθώς επίσης και τους καθηγητές κ.Ευαγγελία Κοντού και κ.Χαράλαμπο Γεωργιάδη για την τιμή που μου έκαναν να συμμετέχουν στην τριμελή επιτροπή.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στους μεταδιδακτορικούς ερευνητές, Δρ.Θεοδόση Παπαθανασίου και Δρ.Σωτήρη Φιλόπουλο, για το χρόνο που αφιέρωσαν σε μένα και αυτή την εργασία, για την καθοδήγηση και το υλικό που μου παρείχαν, καθώς και την ανεκτίμητη βοήθεια που μου προσέφεραν στην οργάνωση, τη συγγραφή και την παρουσίαση της εργασίας. Θα ήθελα, επίσης, να τους ζητήσω ένα μεγάλο συγνώμη, ιδίως από τον πρώτο, για τον πολύτιμο για την έρευνά τους χρόνο που τους απέσπασα καθώς και για τις συνεχόμενες και κουραστικές ερωτήσεις που τους έκανα. Ευελπιστώ και σε περαιτέρω συνεργασία και τους εύχομαι τα καλύτερα στη ζωή τους.

Θα ήθελα επίσης, να ευχαριστήσω τον πολύ καλό μου φίλο και συμφοιτητή, Νικόλα, για την πολύτιμη βοήθεια του, ιδιαίτερα τις τελευταίες μέρες της προετοιμασίας της εργασίας, τόσο στην επιμέλειά της, όσο και στην προσωπική υποστήριξη που μου προσέφερε. Ένα μικρό ευχαριστώ, τέλος, θα ήθελα να πω στο συγκρότημα Metallica, τα τραγούδια των οποίων μου κράτησαν συντροφιά καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής και με ηρεμούσαν από τα διάφορα προβλήματα που προέκυπταν.

Πέραν όλων αυτών, όμως, υπάρχουν και κάποιοι, οι οποίοι βοήθησαν, καθένας με το δικό του τρόπο, στο να ολοκληρώσω τις σπουδές μου και θα ήταν παράλειψή μου να μην τους αναφέρω.

Ένα πρώτο ευχαριστώ θα ήθελα να πω στους συμφοιτητές και συνοδοιπόρους μου σε αυτό το μεγάλο ταξίδι των σπουδών μας, για την υποστήριξη και τη βοήθεια που μου προσέφεραν, άλλος λιγότερο και άλλος περισσότερο. Αν υπάρχει κάποιος που να κατανοεί τον κόπο που κάναμε και τις καταστάσεις που περάσαμε για την απόκτηση του διπλώματος, τότε είναι αυτοί.

Ένα ιδιαίτερα μεγάλο ευχαριστώ χρωστάω στις αδερφές μου για την άνευ όρων φροντίδα που τόσο απλόχερα μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια κατά τη διάρκεια της συγκατοίκησής μας. Τις ευγνωμονώ για όλη τη βοήθειά τους και τις ζητάω συγγνώμη για τις στιγμές που, πιεζόμενος από τη σχολή, ξεσπούσα πάνω τους.

Τελευταίους, αλλά πιο σημαντικούς, άφησα τους γονείς μου, τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω από τα βάθη της ψυχής μου, για την όχι μόνο οικονομική, αλλά και κάθε είδους βοήθεια και συμπαράσταση που μου παρείχαν όλα αυτά τα χρόνια. Τους ευχαριστώ για τα όσα αυτοί στερήθηκαν και ακόμα στερούνται, ώστε να έχω εγώ τη δυνατότητα σήμερα να θεωρούμαι σπουδαγμένος. Ήταν αυτοί που με τις πάμπολλες θυσίες που έκαναν, μου προσέφεραν την κατάλληλη παιδεία και το ήθος τους, ώστε να διαμορφωθεί ο χαρακτήρας μου σαν άνθρωπος, γενικά. Με την αμερόληπτη αγάπη, την καθοδήγηση και τις συμβουλές τους, κατάφερα να αντιμετωπίσω κάθε δυσκολία που παρουσιάστηκε σε αυτό το πρώτο μεγάλο ταξίδι της ζωής μου. Σε αυτούς λοιπόν, οφείλεται κατά ένα μέρος και η ύπαρξη της παρούσας εργασίας και ως επακόλουθο, τους αφιερώνεται με αμέριστη αγάπη και σεβασμό.

Αθήνα, Νοέμβριος 2011

Δημήτρης Μ. Μανιάς





# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	i
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	iii
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	1
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	2
<b>ΜΕΡΟΣ Α - ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΜΨΗΣ</b>	
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ.....	16
1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ.....	20
2. ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ .....	28
2.1. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ.....	28
2.2. ΕΥΡΕΣΗ ΓΕΝΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ.....	29
2.3. ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΤΗΝ ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ.....	32
3. Το ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΠΡΟΒΟΛΟ.....	33
3.1. ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ.....	33
3.2. ΒΗΜΑ 1 - ΑΣΘΕΝΗΣ ΜΟΡΦΗ.....	34
3.3. ΕΠΙΛΥΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ P2 - ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ.....	36
3.4. ΒΗΜΑ 2 - ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ P2 ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ Π.ΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ (ΜΕΘΟΔΟΣ GALERKIN).....	38
3.4.1. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ.....	38
3.4.2. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ.....	40
3.4.3. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.....	42
3.4.3.1 - Διαμέριση του $\Omega = [0, L]$ .....	42
3.4.3.2 - Επιλογή των συναρτήσεων βάσης $\varphi_i$ .....	42

3.4.3.3 - Προσέγγιση της λύσης $u_h$ .....	43
3.4.3.4 - Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών.....	44
3.4.3.5 - Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων $a(\varphi_i, \varphi_j)$ και $F(\varphi_i)$ .....	46
3.4.3.6 - Συναρμογή των τοπικών μητρώων δυσκαμψίας και διανυσμάτων φόρτισης.....	50
3.4.3.7 - Λύση του γραμμικού συστήματος.....	56
3.4.3.8 - Υπολογισμός Διατμητικής Δύναμης και Καμπτικών Ροπών.....	58
<b>3.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΡΟΒΟΛΟΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΦΟΡΤΙΟ</b> .....	59
<b>4. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗ ΔΟΚΟ</b> .....	65
<b>4.1. ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ</b> .....	65
<b>4.2. ΒΗΜΑ 1 - ΑΣΘΕΝΗΣ ΜΟΡΦΗ</b> .....	66
<b>4.3. ΕΠΙΛΥΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ P2 - ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ</b> .....	67
<b>4.4. ΒΗΜΑ 2 -ΜΕΘΟΔΟΣ GALERKIN</b> .....	68
<b>4.4.1. ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΟΥ <math>\Omega = [0, L]</math></b> .....	68
<b>4.4.2. ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΒΑΣΗΣ <math>\varphi_i</math></b> .....	68
4.4.2.1 - Προσέγγιση της λύσης $u_h$ .....	68
4.4.2.2 - Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών.....	69
<b>4.4.3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ <math>a(\varphi_i, \varphi_j)</math> ΚΑΙ <math>F(\varphi_i)</math></b> .....	71
4.4.3.1 - Μετατροπή του συστήματος λύσης.....	71
4.4.3.2 - Εύρεση Τοπικών Μητρώων $k^e$ και $f^e$ του στοιχείου.....	71
4.4.3.3 - Συναρμογή των τοπικών μητρώων δυσκαμψίας και διανυσμάτων φόρτισης.....	72
<b>4.4.4. ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ</b> .....	74
<b>4.4.5. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΚΑΙ ΚΑΜΠΤΙΚΩΝ ΡΟΠΩΝ</b> .....	76
<b>4.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗ ΔΟΚΟΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΦΟΡΤΙΟ</b> .....	77
<b>5. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟ</b> .....	83



<b>5.1. ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ.....</b>	<b>83</b>
<b>5.2. ΒΗΜΑ 1 - ΑΣΘΕΝΗΣ ΜΟΡΦΗ.....</b>	<b>84</b>
<b>5.3. ΕΠΙΛΥΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ P2 - ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ.....</b>	<b>85</b>
<b>5.4. ΒΗΜΑ 2 -ΜΕΘΟΔΟΣ GALERKIN.....</b>	<b>86</b>
<b>5.4.1. ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΟΥ <math>\Omega = [0, L]</math>.....</b>	<b>86</b>
<b>5.4.2. ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΒΑΣΗΣ <math>\varphi_i</math>.....</b>	<b>86</b>
5.4.2.1 - Προσέγγιση της λύσης $u_h$ .....	86
5.4.2.2 - Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών.....	87
<b>5.4.3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ <math>\alpha(\varphi_i, \varphi_j)</math> ΚΑΙ <math>F(\varphi_i)</math>.....</b>	<b>89</b>
5.4.3.1 - Μετατροπή του συστήματος λύσης.....	89
5.4.3.2 - Εύρεση Τοπικών Μητρώων $k^e$ και $f^e$ του στοιχείου.....	90
5.4.3.3 - Συναρμογή των τοπικών μητρώων δυσκαμψίας κα διανυσμάτων φόρτισης.....	90
<b>5.4.4. ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.....</b>	<b>93</b>
<b>5.4.5. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΚΑΙ ΚΑΜΠΤΙΚΩΝ ΡΟΠΩΝ.....</b>	<b>94</b>
<b>5.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΦΟΡΤΙΟ.....</b>	<b>95</b>
<b>6. ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΜΨΗ.....</b>	<b>101</b>
<b>ΜΕΡΟΣ Β - ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΛΥΓΙΣΜΟΥ</b>	
<b>7. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ - ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.....</b>	<b>102</b>
<b>7.1. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ.....</b>	<b>105</b>
<b>7.2. ΕΥΡΕΣΗ ΓΕΝΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ.....</b>	<b>107</b>
<b>7.3. ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΤΗΝ ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ.....</b>	<b>109</b>
<b>8. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΠΡΟΒΟΛΟΥ.....</b>	<b>111</b>
<b>8.1. ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ.....</b>	<b>111</b>
<b>8.2. ΒΗΜΑ 1 - ΑΣΘΕΝΗΣ ΜΟΡΦΗ.....</b>	<b>112</b>

<b>8.3. ΒΗΜΑ 2 -ΜΕΘΟΔΟΣ GALERKIN.....</b>	<b>114</b>
<b>8.3.1. ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΟΥ <math>\Omega = [0, L]</math>.....</b>	<b>115</b>
<b>8.3.2. ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΒΑΣΗΣ <math>\varphi_i</math>.....</b>	<b>116</b>
8.3.2.1 - Προσέγγιση της λύσης $u_h$ .....	116
8.3.2.2 - Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών.....	117
<b>8.3.3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ <math>a(\varphi_i, \varphi_j)</math> ΚΑΙ <math>b(\varphi_i, \varphi_j)</math>.....</b>	<b>118</b>
8.3.3.1 - Μετατροπή του συστήματος λύσης.....	118
8.3.3.2 - Εύρεση Τοπικών Μητρώων $k^e$ και $m^e$ του στοιχείου.....	119
8.3.3.3 - Συναρμογή των τοπικών μητρώων δυσκαμψίας στο ολικό.....	122
<b>8.3.4. ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.....</b>	<b>124</b>
<b>8.4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.....</b>	<b>126</b>
<b>9. ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΓΙΣΜΟ.....</b>	<b>129</b>
<b>ΑΝΑΦΟΡΕΣ ΚΑΙ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	<b>131</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι.....</b>	<b>137</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ.....</b>	<b>143</b>





## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή διατυπώνεται ένα απλοποιημένο μοντέλο βαθμίδας ελαστικότητας για λεπτές δοκούς, βασισμένο στη θεωρία της βαθμίδας ελαστικότητας του Mindlin και στις υποθέσεις των Bernoulli-Euler, συμπεριλαμβανομένων της ελαστικής θεμελίωσης και της στρεπτικής ροπής των τύπων του Winkler. Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να μελετηθεί η συμπεριφορά του μοντέλου αυτού στη στατική ανάλυση νανοσωλήνων άνθρακα μονού τοιχώματος. Η εξίσωση που χαρακτηρίζει το μοντέλο, μια 6<sup>ου</sup> βαθμού μερική διαφορική εξίσωση, μαζί με τις σχετικές συνοριακές και αρχικές συνθήκες, επάγεται από την εφαρμογή της αρχής της μεταβολής των Hamilton-Lagrange, και εξάγει την ακριβή αναλυτική λύση. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται η αναλυτική στατική λύση και οι ιδιοτιμές ταλάντωσης λυγισμού. Αρκετά παραδείγματα παρατίθενται, χρησιμοποιώντας δεδομένα “αντίστοιχων δοκών” για νανοσωλήνες άνθρακα (Carbon Nanotubes-CNTs) και συγκρίνονται τα αποτελέσματα με αυτά της κλασικής θεωρίας.

**Λέξεις κλειδιά:** Βαθμίδα Ελαστικότητας, Θεμελίωση Winkler, Δοκοί κατά Euler-Bernoulli, Νανοσωλήνες Άνθρακα, Στατική Ανάλυση, Μέθοδος Cardano, Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων.

## ABSTRACT

In this thesis we formulate a simplified gradient elastic model for slender beams based on Mindlin's gradient elasticity theory and the Bernoulli-Euler hypothesis, including a Winkler-type elastic foundation and rotary inertia. Our aim is to examine the relevance of this model for the static analysis of single-walled carbon nanotubes (CNTs). The model governing equation, a 6<sup>th</sup> order partial differential equation, along with the relevant boundary and initial conditions, is derived by application of the Hamilton-Lagrange variational principle. In the sequel we present the analytical static solution and the buckling eigenvalues. Several examples are presented, using "equivalent beam" data for CNTs and comparisons with results of other researchers in the field, as well as with those of the classical beam theory, are made.

**Keywords:** Gradient Elasticity, Winkler Foundation, Euler-Bernoulli beams, Carbon Nanotubes, Static Analysis, Cardano's Method, Finite Element Method.



## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### Μη κλασικές θεωρίες

Έχει παρατηρηθεί πειραματικώς αλλά και αναλυτικώς ότι η μηχανική συμπεριφορά μικροδομημένων γραμμικά ελαστικών στερεών και γραμμικά ελαστικών κατασκευών με διαστάσεις που συγκρίνονται με αυτές της μικροδομής τους, δε μπορούν να περιγραφούν πλήρως από την κλασική θεωρία ελαστικότητας. Πιο συγκεκριμένα, η κλασική θεωρία ελαστικότητας έχει φανεί ανίκανη να περιγράψει επαρκώς μηχανικά φαινόμενα θεωρητικής, κατασκευαστικής ή τεχνολογικής σημασίας. Αυτή η ανικανότητα γίνεται όλο και πιο φανερή στις περιπτώσεις υλικών με έντονη μικροδομή, όπως στα κοκκώδη υλικά, τα αφρώδη, αρκετά πολυμερή, τα πολυκρυσταλλικά, κλπ.

Έτσι, μη κλασικές θεωρίες συνέχειας συγκέντρωσαν το ενδιαφέρον των ερευνητών για περισσότερο από έναν αιώνα, λόγω της ικανότητας τους να μοντελοποιούν τη μικροδομική συμπεριφορά των υλικών. Αυτές οι θεωρίες είναι ικανές να συμπεριλάβουν μικροσκοπικώς τα μικροδομικά φαινόμενα που δημιουργούνται, όπως τα φαινόμενα κλίμακας (size effects), εξάλειψης των ανωμαλιών και της διάδοσης των κυμάτων σε αυτά.

Μαζί με την τεχνολογική πρόοδο της ανθρωπότητας, η ανάγκη για πιο εξελιγμένο εξοπλισμό (μικρό- και νάνο- συσκευές) γίνεται αναγκαιότητα. Αυτό το γεγονός έχει προωθήσει θεωρίες μη κλασικής ελαστικότητας από τη θεωρία στην πράξη, καθώς τώρα χρησιμοποιούνται για το σχεδιασμό και την πρόβλεψη της συμπεριφοράς των κατασκευαστικών εξαρτημάτων. Η υπάρχουσα βιβλιογραφία πάνω στο αντικείμενο αυτό είναι αρκετά μεγάλη και καλύπτει πολλές πτυχές από θεωρίες μη κλασικής ελαστικότητας, με σημασία τόσο θεωρητική, όσο και πρακτική.

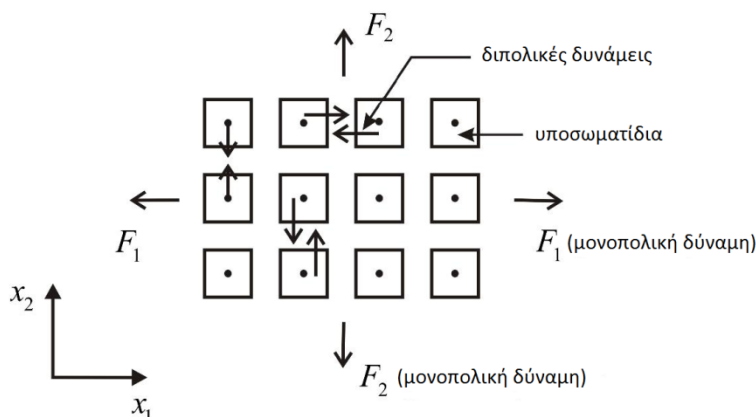
Η θεωρία των λεπτών δοκών έχει βρει πολλές εφαρμογές στους τομείς της μικρομηχανικής και της νανομηχανικής. Οι λεπτές ταινίες, τα μικρο-ηλεκτρομηχανικά και τα νανο-ηλεκτρομηχανικά συστήματα είναι τυπικές εφαρμογές της θεωρίας των λεπτών δοκών, όπου έχουν παρατηρηθεί φαινόμενα λόγω κλίμακας (size effects). Πολλοί ερευνητές, Papargyri-Beskou et al.(2003)<sup>[22]</sup>, Park and Gao (2006)<sup>[24]</sup>, Altan and Aifantis (1997)<sup>[1]</sup>, Ru and Aifantis (1993), Yang et al.(2002)<sup>[38]</sup>, έχουν συσχετίσει τη θεωρία των λεπτών δοκών με τη θεωρία βαθμίδας ελαστικότητας του Mindlin (1965)<sup>[19-20]</sup>.

### Θεωρία Βαθμίδας Ελαστικότητας [Θ.Β.Ε.]

Η βασική ανάγκη για την επέκταση της κλασικής ελαστικότητας προκύπτει από το γεγονός ότι δεν μπορεί να προβλέψει συγκεκριμένα πειραματικά επιβεβαιωμένα φαινόμενα, τα οποία σχετίζονται με την εσωτερική δομή (μικροδομή) του υλικού, αλλά και τα θεωρητικά προβλεπόμενα φαινόμενα από άλλες θεωρίες όπως του ατομικού πλέγματος (atomic lattice theory).

Η αρχική μορφή της Θ.Β.Ε. αναπτύχθηκε από τους Green και Mindlin<sup>[20-12-21]</sup> με σκοπό να περιγραφεί επαρκώς η μηχανική συμπεριφορά υλικών με έντονη μικροδομή. Η βασική ιδέα είναι ότι το παραμορφώσιμο υλικό αποτελείται από μικρότερες δομικές μονάδες, οι οποίες με τη σειρά τους μπορούν να παραμορφωθούν. Τέτοιου είδους δομικές μονάδες μπορούν να θεωρηθούν παραδείγματος χάρη οι κρύσταλλοι των πολυκρυσταλλικών υλικών, τα μόρια των πολυμερών ή οι κόκκοι στα κοκκώδη υλικά.

Η συμπεριφορά αυτή γίνεται εύκολα αντιληπτή αν κάθε ένα από αυτά τα μακρομέσα θεωρηθεί ως συλλογή μικρότερων υποσωματιδίων, τα μικρομέσα. Με τον τρόπο αυτό, κάθε σωματίδιο του συνεχούς μέσου εμπεριέχει ένα **εσωτερικό πεδίο μετατοπίσεων** (Εικόνα 1).



Εικόνα 1 - Υλικό με μικροδομή: μονοπολικές (εξωτερικές) και διπολικές (εσωτερικές) δυνάμεις δρουν σε ένα σύνολο μικρομέσων.

Όπως αναφέρεται στους Georgiadis and Grentzelou (2006)<sup>[7]</sup>, προκύπτει θεώρηση διπολικών δυνάμεων, οι οποίες είναι αντιπαράλληλες δυνάμεις και δρουν μεταξύ των μικρομέσων που περιέχονται σε συνεχές μέσο με μικροδομή. Με τον τρόπο αυτό, η συνισταμένη δύναμη που εφαρμόζεται σε ένα σύνολο υποσωματιδίων μπορεί να θεωρηθεί ότι αναλύεται σε ένα άθροισμα εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων, όπου οι τελευταίες είναι αμοιβαίως αναιρούμενες. Τέτοιες, όμως, πολυπολικές δυνάμεις παράγουν μη μηδενικές τάσεις, τις πολυπολικές τάσεις. Αυτό σημαίνει ότι ένα στοιχείο κατά μήκος ενός τμήματος του υλικού ή στην επιφάνειά του, μπορεί να μεταβιβάσει, εκτός του συνηθούς τανυστή, ένα ακόμη διάνυσμα, το διπολικό (couple vector) τανυστή (το οποίο σημαίνει ότι η αρχή τάσεων των Euler-Cauchy διευρύνεται, ώστε να περιλαμβάνει πρόσθετους διπολικούς τανυστές).



Επίσης, λόγω της εν γένει εξάρτησης της παραμορφωσιακής ενέργειας από βαθμίδες συγκεκριμένων πεδίων, εισάγονται νέες σταθερές του υλικού, που υποδεικνύουν την παρουσία χαρακτηριστικού **εσωτερικού μεγέθους** στην συμπεριφορά του. Το χαρακτηριστικό αυτό μέγεθος μπορεί να συνδεθεί με το μέγεθος της μικροδομής του υλικού. Έτσι, ενσωματώνονται φαινόμενα κλίμακας στην ανάλυση τάσεων, κάτι που δεν μπορεί να επιτευχθεί με την κλασική θεωρία.

Γενικά, οι θεωρίες με φαινόμενα βαθμίδας έχουν σκοπό να μοντελοποιήσουν καταστάσεις, όπου, το εσωτερικό μήκος των υλικών είναι της τάξης του  $0.1 - 10 \mu\text{m}$ . Επειδή τα φαινόμενα ενίσχυσης (strengthening effects) που προκύπτουν από τις βαθμίδες ελαστικότητας γίνονται σημαντικά όταν οι δεύτερες είναι αρκετά μεγάλες, τέτοια φαινόμενα θα είναι αξιοσημείωτα όταν το υλικό παραμορφώνεται σε πολύ μικρούς όγκους, όπως πολύ κοντά σε αιχμές ρωγμών και εγκοπών, σε μικρές οπές και εγκλείσματα και σε μικρομετρικές διεισδύσεις.

Η θεωρία της βαθμίδας ελαστικότητας έχει εφαρμοστεί σε πολλά προβλήματα μηχανικής από τους Altan and Aifantis (1997)<sup>[1]</sup>, επιλύοντας πολυποίκιλες ιδιομορφίες σε προβλήματα ρωγμών, ενώ σε προβλήματα συγκεντρωμένων δυνάμεων, όπως το πρόβλημα του Flamant από τους Lazar and Maugin (2006)<sup>[15]</sup>. Περαιτέρω εφαρμογές στην πλαστικότητα και τη δυναμική των εξαρμώσεων (dislocation dynamics) μπορούν να βρεθούν στους Fleck and Hutchinson (1993, 1997)<sup>[4-5]</sup>, Fleck et al. (1994)<sup>[6]</sup>. Πειραματικά στοιχεία που δείχνουν την αύξηση της δυσκαμψίας της δοκού με την παράλληλη μείωση τους πάχους της, έχουν αναφερθεί από τον Kakunai (1985)<sup>[14]</sup>. Επίσης, εφαρμογή της θεωρίας κάμψης σε λεπτές κατασκευές έχει γίνει πάνω σε λεπτές πλάκες από τους Lazoroulos (2004)<sup>[16]</sup>, Papargyri-Beskou and Beskos (2008)<sup>[23]</sup>. Επιπλέον, έχουν αναπτυχθεί προχωρημένες αριθμητικές μέθοδοι για να αντιμετωπίσουν προβλήματα που αναλύονται βάσει της θεωρίας του Mindlin από τους Tsepoura et al., (2002)<sup>[33]</sup>, Polyzos et al., (2003)<sup>[25]</sup>, Giannakopoulos et al., (2006)<sup>[9]</sup>, Tsamasphyros et al., (2007)<sup>[32]</sup>, Gourgiotis and Georgiadis, (2008), (2009)<sup>[10-11]</sup>.

Από την ανωτέρω θεώρηση, κάνοντας κατάλληλες επιλογές, μπορούν να προκύψουν διάφορες μορφές της θεωρίας. Λόγου χάρη, αν κανείς αναπτύξει σε σειρά το πεδίο των εσωτερικών μετατοπίσεων, μπορεί να σταματήσει είτε τον πρώτο γραμμικό όρο και να προκύψει έτσι θεωρία βαθμίδας  $1^{\text{ης}}$  τάξης, είτε να διατηρήσει όρους ανώτερης τάξης και να προκύψουν, αντίστοιχα, θεωρίες βαθμίδας ανώτερης τάξης.

Ως αποτέλεσμα, προκύπτει η ανάγκη εισαγωγής νέων σταθερών του υλικού στις καταστατικές εξισώσεις. Οι πρόσθετοι όροι μπορούν να γίνουν ιδιαίτερα σημαντικοί, για παράδειγμα, στην περιοχή σημείων συγκέντρωσης τάσεων, όπου η βαθμίδα της μετατόπισης υφίσταται έντονες μεταβολές. Για το λόγο αυτό, η έκφραση που προκύπτει από τη νέα θεωρία

μπορεί να θεωρηθεί ότι δίνει καλύτερη περιγραφή της συμπεριφοράς του υλικού, σε σχέση με αυτή, για την οποία δεν λαμβάνονται υπόψη οι διπολικές τάσεις.

Για να περιοριστεί η επακόλουθη πολυπλοκότητα έχουν προταθεί απλοποιήσεις που περιορίζουν σημαντικά το πλήθος των σταθερών αυτών. Μια άλλη δυνατότητα απλοποίησης παρέχεται από την ομογενοποίηση των δομικών μονάδων με το μέσο που τις περιέχει. Οι ευρέως χρησιμοποιούμενες, απλοποιημένες μορφές της Θ.Β.Ε. είναι οι ακόλουθες:

1) Μορφή I - Η πυκνότητα ενέργειας είναι συνάρτηση της κλασικής τροπής και της 2ης Βαθμίδας της μετατόπισης ( $\tilde{k}_{ijk} = \partial_i \partial_j u_k$ ).

2) Μορφή II - Η πυκνότητα της ενέργειας είναι συνάρτηση της κλασικής τροπής και της Βαθμίδας αυτής ( $\hat{k}_{ijk} = \partial_i \varepsilon_{jk}$ ) και

3) Μορφή III - Η πυκνότητα της ενέργειας είναι συνάρτηση της κλασικής τροπής, της Βαθμίδας της στροφής ( $\bar{k}_{ij} = \frac{1}{2} e_{jlm} \partial_i \partial_l u_m$ ) και του συμμετρικού μέρους του  $\tilde{k}_{ijk}$  ( $\bar{\bar{k}}_{ijk} = \frac{1}{3} (\partial_i \partial_j u_k + \partial_k \partial_i u_j + \partial_j \partial_k u_i)$ ) ή του  $\hat{k}_{ijk}$ .

Σύμφωνα με αυτές τις διατυπώσεις, κάθε σωματίδιο του υλικού έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας (τις συνιστώσες της μετατόπισης, όπως ακριβώς στις κλασικές θεωρίες) και η μικροπυκνότητα δε διαφέρει από τη μακροπυκνότητα. Επίσης, η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας εξαρτάται όχι μόνο από την τροπή (όπως στην κλασική ελαστικότητα), αλλά και από τη δεύτερη βαθμίδα της μετατόπισης. Οι διατυπώσεις αυτές αποτελούν μορφές της **Θεωρίας Βαθμίδας της Τροπής** (Strain Gradient Theory) (Θ.Β.Τ.) και είναι αυτές με τις οποίες θα ασχοληθούμε. Συγκεκριμένα, το μοντέλο το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι της 2<sup>ης</sup> μορφής ( $\hat{k}_{ijk} = \partial_i \varepsilon_{jk}$ ).

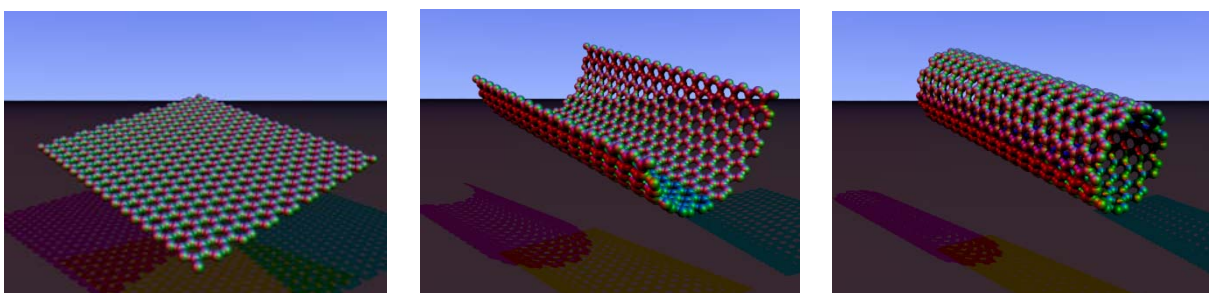
Βάσει των μέχρι σήμερα αποτελεσμάτων συμπεραίνεται ότι η θεωρία του Mindlin επεκτείνει το εύρος ισχύος της έννοιας του συνεχούς σε μία προσπάθεια γεφύρωσης του χάσματος μεταξύ των κλασικών θεωριών συνεχούς μέσου και των θεωριών κρυσταλλικού πλέγματος.

Ο Chen et al. (1998)<sup>[2]</sup> ανέπτυξε ένα μοντέλο συνεχούς μέσου για κυψελωειδή υλικά (που έχουν κοιλότητες που μοιάζουν με κυψέλες) και διαπίστωσε ότι τέτοιου είδους συνεχή μέσα υπακούουν σε μία μικροπολική θεωρία, δηλαδή θεωρία με φαινόμενα βαθμίδας. Στη μελέτη αυτή, το εσωτερικό μήκος του υλικού συσχετίστηκε με το μέγεθος της κυψελίδας. Τέτοια συμπεριφορά παρουσιάζουν και οι νανοσωλήνες άνθρακα, αφού μπορεί να θεωρηθεί ότι κατασκευάζονται από τυλιγμένο φύλλο γραφενίου, το οποίο αποτελείται από πλέγμα ατόμων άνθρακα σε κυψελωτό σχήμα.

## Νανοσωλήνες

Η εφεύρεση των νανοσωλήνων άνθρακα από τον Iijima<sup>[13]</sup>, ξεκίνησε ένα νέο πεδίο έρευνας για την ακριβέστερη ανάλυση των νανοκατασκευών. Πρόσφατα, υπήρξε αυξανόμενο ενδιαφέρον για τις εφαρμογές της μηχανικής συνεχούς μη τοπικού τύπου (nonlocal) ιδίως στον τομέα της μηχανικής των ρωγμών, της μηχανικής των εξαρμώσεων (dislocation mechanics) και μικρο/νανοτεχνολογιών (Νανοσωλήνες άνθρακα). Αυτές οι μικρές δομές φαίνεται να διαθέτουν εξαιρετικές μηχανικές, θερμικές και ηλεκτρικές ιδιότητες σε σύγκριση με τις συμβατικές. Χάρη σε αυτές τις ανωτέρω ιδιότητες, οι **νανοσωλήνες άνθρακα (CNTs)** χρησιμοποιούνται στους αναδυόμενους τομείς των νανοηλεκτρονικών και νανοσυσκευών. Οι CNTs φέρουν επίσης, συναρπαστικά αποτελέσματα όσον αφορά τις δυναμικές εφαρμογές, όπως ηλεκτρόδια σε υπερπυκνωτές και καλώδια για ανελκυστήρες διαστήματος (space elevators).

Οι CNTs είναι κυλινδρικά μακρομόρια, αποτελούμενα από ένα φύλλο ιδιαίτερα διατεταγμένων ατόμων άνθρακα, "τυλιγμένο", ώστε να δημιουργεί σωλήνα (Εικόνα 2). Τα άτομα του άνθρακα βρίσκονται σε μια περιοδική εξαγωνική διάταξη. Αυτό δίνει στους CNTs μοναδικές ιδιότητες, αλλά και ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών. Πολλοί πιστεύουν ότι οι CNTs θα αποτελέσουν τα απόλυτα υλικά ενίσχυσης για την ανάπτυξη ενός νέου πεδίου, των νανοςύνθετων. Συνεπώς, η κατανόηση των μηχανικών και φυσικών ιδιοτήτων των νανοδομών είναι απαραίτητη για τις πρακτικές εφαρμογές τους. Η μηχανική ανάλυση των νανοδομών, η θεωρητική και μαθηματική τους μοντελοποίηση γίνεται ένα σημαντικό θέμα, όσον αφορά τις νανο-μηχανικές εφαρμογές τους.



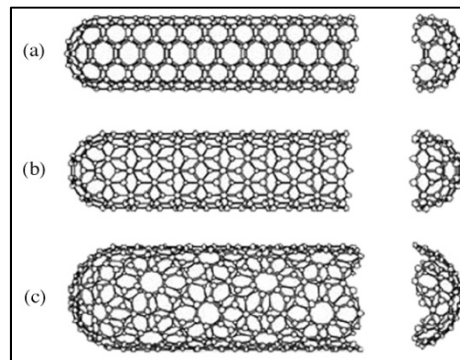
Εικόνα 2 Κατασκευή Νανοσωλήνων από δίπλωμα πλέγματος διατεταγμένων ατόμων άνθρακα

Οι νανοσωλήνες άνθρακα είναι μοναδικές νανοκατασκευές με αξιόλογες ατομικές και μηχανικές ιδιότητες, κάποιες από τις οποίες προκύπτουν από τη στενή σχέση μεταξύ των νανοσωλήνων άνθρακα και του γραφίτη και κάποιες από τη μονοδιάστατη πτυχή τους. Αρχικά, οι νανοσωλήνες άνθρακα κίνησαν μεγάλο ενδιαφέρον στο πεδίο των ερευνητών, λόγω της εντυπωσιακής ατομικής κατασκευής τους. Καθώς και άλλες ενδιαφέρουσες ιδιότητες έχουν ανακαλυφθεί, όπως οι αξιοσημείωτες ιδιότητες ηλεκτροαγωγιμότητας, το μοναδικό φάσμα

Raman και οι ασυνήθιστες μηχανικές ιδιότητες, έχει δημιουργηθεί μεγάλο ενδιαφέρον για τις προοπτικές χρήσης τους σε νανοηλεκτρονικά και σε πολλές άλλες μηχανικές εφαρμογές.

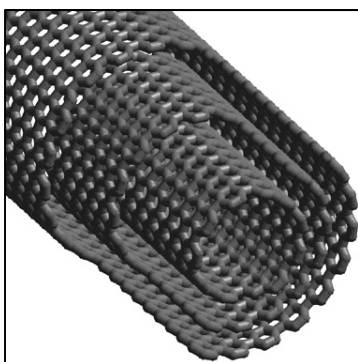
### Δομή

Ένας ιδανικός νανοσωλήνας μπορεί να θεωρηθεί ως ένα εξαγωγικό πλέγμα από άτομα άνθρακα, το οποίο έχει τυλιχθεί ώστε να δημιουργηθεί το κέλυφος ενός σωλήνα. Αυτοί οι σωλήνες μπορούν να είναι χιλιάδες νανόμετρα μακρείς, αλλά με διαμέτρους τόσο μικρές όσο 0.7 nm. Επίσης, κάθε μία από τις δύο άκρες του κυλίνδρου σχηματίζει συγκεκριμένες μορφές από πλέγματα μορίων άνθρακα, όπως 6 πεντάγωνα (Εικόνα 3).

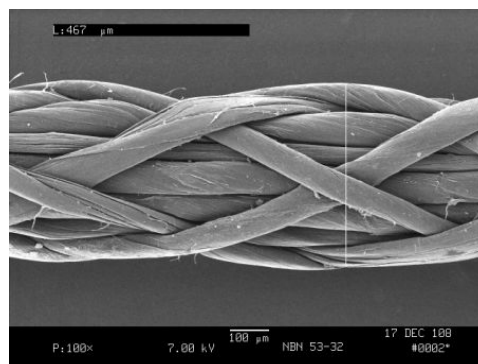


Εικόνα 3 Περιπτώσεις νανοσωλήνων άνθρακα μονού τοιχώματος

Οι **νανοσωλήνες άνθρακα μονού τοιχώματος (SWCNT)** που κάθε ένας από αυτούς είναι ένα κυλινδρικό κέλυφος με πάχος μόνο ενός στρώματος πλέγματος άνθρακα, μπορούν να θεωρηθούν ως η θεμελιώδης δομική μονάδα. Αυτές οι δομικές μονάδες σχηματίζουν τα κατασκευαστικά υλικά μέρη τόσο των νανοσωλήνων άνθρακα πολλαπλού τοιχώματος όσο και των νανοσωλήνων σχοινιών. Οι πρώτοι αποτελούνται από ομοαξονικούς κυλίνδρους με αυξανόμενη από τον άξονα διάμετρο (Εικόνα 4), ενώ τα δεύτερα συντίθενται από παρατεταγμένους SWCNTs ταξινομημένους σε τριγωνικό πλέγμα (πλεξίδα) (Εικόνα 5).



Εικόνα 4 Νανοσωλήνας άνθρακα πολλαπλού τοιχώματος



Εικόνα 5 Σχοινί φτιαγμένο από νανοσωλήνες άνθρακα

Τόσο οι νανοσωλήνες άνθρακα πολλαπλού τοιχώματος, όσο και τα σχοινιά τα οποία προκύπτουν από τους SWCNTs συγκρατούνται από τις δυνάμεις συνοχής Van der Waals. Οι δυνάμεις αυτές είναι ασθενέστερες από τις ομοιοπολικές δυνάμεις μεταξύ των ατόμων του άνθρακα, αλλά είναι ικανές να διατηρήσουν τη δομή των νανοσωλήνων. Ιδιαίτερα, στους νανοσωλήνες άνθρακα πολλαπλού τοιχώματος, τα άτομα άνθρακα που βρίσκονται σε

διαφορετικά στρώματα (τοιχώματα) δεν είναι συνδεδεμένα με ομοιοπολικούς δεσμούς, αλλά αλληλοεπηρεάζονται μεταξύ τους μέσω των δυνάμεων Van der Waals. Βέβαια, οι δυνάμεις αυτές δεν είναι μόνο ελκτικές, αλλά μπορεί να είναι και απωθητικές.

Πέραν από τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τοιχωμάτων των νανοσωλήνων, δυνάμεις Van der Waals δημιουργούνται και από την αλληλεπίδραση των νανοσωλήνων με το υπόστρωμα πάνω στο οποίο βρίσκονται. Οι δυνάμεις αυτές μπορεί να οδηγήσουν σε αξονικές και ακτινικές παραμορφώσεις, καταστρέφοντας, έτσι, την εξιδανικευμένη μορφή των ελεύθερων νανοσωλήνων που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Παρότι οι δυνάμεις αυτές είναι μικρές, οι ελαστικές παραμορφώσεις που προκύπτουν από αυτή την αλληλεπίδραση είναι σημαντικές για τη γενική συμπεριφορά των νανοσωλήνων. Έτσι, σε αντίθεση με τη μηχανική συμπεριφορά των νανοσωλήνων μονού τοιχώματος, τα συστήματα των νανοσωλήνων πολλαπλών τοιχωμάτων παρουσιάζουν νέα φυσικά φαινόμενα, τα οποία, ενώ είναι αξιόλογα για μελέτη, βγαίνουν από τα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

Η πρώτη αναφερθείσα παρατήρηση νανοσωλήνων άνθρακα έγινε από τον Iijima το 1991 για νανοσωλήνες πολλαπλού τοιχώματος. Παρόλα αυτά, πήρε περισσότερο από δύο χρόνια, μέχρις ότου οι νανοσωλήνες μονού τοιχώματος να ανακαλυφθούν πειραματικά από τον ίδιο στο εργαστήριο έρευνας NEC της Ιαπωνίας και από τον Bethune στο εργαστήριο της IBM της Καλιφόρνιας. Αυτές οι πειραματικές ανακαλύψεις και η θεωρητική μελέτη, η οποία προέβλεψε πολλές αξιόλογες ιδιότητες για τους νανοσωλήνες άνθρακα, ξεκίνησαν και προώθησαν αυτό το πεδίο. Το πεδίο των νανοσωλήνων έχει σημειώσει αλματώδη πρόοδο από τότε με πολλές αναπάντεχες ανακαλύψεις.

Λόγω της σχετικής απλότητάς τους, οι νανοσωλήνες άνθρακα παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στην ήδη ραγδαίως αναπτυσσόμενη έρευνα των νανοκατασκευών και της συνεχόμενης χρήσης τους στη νανοτεχνολογία. Αυτή η απλότητα των νανοσωλήνων μας επιτρέπει να αναπτύξουμε λεπτομερή θεωρητικά μοντέλα, ώστε να προβλεφθούν νέα φαινόμενα, τα οποία σχετίζονται με αυτά τα μικροσκοπικά, μονοδιάστατα συστήματα, και στη συνέχεια να αναζητηθούν αυτά τα φαινόμενα πειραματικά. Από την άλλη, νέα πειραματικά αποτελέσματα, τα οποία έχουν ανακαλυφθεί με απίστευτα γρήγορο ρυθμό, αποτελούν κίνητρο για περαιτέρω θεωρητικές μελέτες, πολλές από τις οποίες αναμένεται να εφαρμοστούν ευρέως σε νανοκατασκευές και στην έρευνα και την ανάπτυξη της νανοτεχνολογίας.

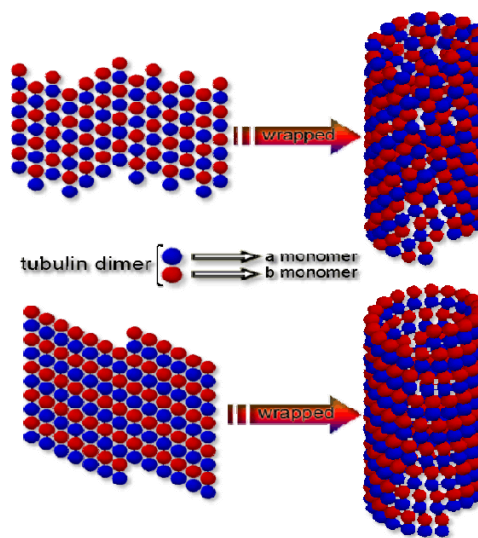
### **Μικροσωληνίσκοι**

Μεγάλο ενδιαφέρον, επίσης, παρουσιάζει μία άλλη κατηγορία μακρομορίων, τα οποία έχουν αντίστοιχη δομή και συμπεριφορά με αυτήν των νανοσωλήνων. Οι μικροσωληνίσκοι (microtubules-MTs), οι οποίοι είναι αυτοσυνδυαζόμενα (self-assembling) γραμμικά πολυμερή

που εξυπηρετούν στην οργάνωση των λειτουργιών στο εσωτερικό των κυττάρων. είναι κενοί κύλινδροι με εσωτερική διάμετρο γύρω στα 25 nm και εξωτερική γύρω στα 15 nm. Παράγονται από την πολυμεροποίηση της πρωτεΐνης τουμπουλίνης. Τα μόρια της τουμπουλίνης είναι διμερή αποτελούμενα από τα μονομερή α-τουμπουλίνη και β-τουμπουλίνη. Τα διμερή τουμπουλίνης συνδυάζονται και μετασχηματίζονται σε πρωτονημάτια. Κάθε μικροσωληνίσκος βρισκόμενος εν ζωή έχει δεκατρία τέτοια πρωτονημάτια, σχεδόν χωρίς εξαίρεση.

Η δομή του μικροσωληνίσκου εμφανίζεται σε δύο διακριτά κρυσταλλικά πλέγματα, τα οποία είναι γνωστά ως Α-πλέγμα και Β-πλέγμα (Εικόνα 6). Το Α-πλέγμα με τα δεκατρία πρωτονημάτια είναι τα μόνα μέσα στα οποία τα πρωτονημάτια κινούνται παράλληλα του άξονα του μικροσωληνίσκου.

Οι μικροσωληνίσκοι είναι δυναμικά πολυμερή κυτταρικών σκελετών, των οποίων οι καταστάσεις συνεχώς εναλλάσσονται μεταξύ ανάπτυξης και συρρίκνωσης, σε μια διαδικασία που έχει οριστεί ως δυναμική αστάθεια. Κατά τη διάρκεια του συνδυασμού τους είναι επίσης ικανά να προκαλέσουν θλίψη. Λόγω του ότι οι μικροσωληνίσκοι είναι λεπτές ελαστικές δομές, ο μηχανικός λυγισμός σε αυτούς, ένα ιδιαίτερα γνωστό φαινόμενο, θα συμβεί όταν τα φορτία θλίψης που θα εφαρμοστούν πάνω τους θα ξεπεράσουν μία κρίσιμη τιμή. Τα φαινόμενα λυγισμού στους μικροσωληνίσκους έχουν παρατηρηθεί σε πολλά πειράματα.



Εικόνα 6 - Δομή και γεωμετρία των MTs

Οι μηχανικές ιδιότητες των ευκαριωτικών κυττάρων καθορίζονται κυρίως από τον κυτταρικό σκελετό και, όπως προαναφέρθηκε, οι μικροσωληνίσκοι είναι τα πιο στερεά νημάτια της πρωτεΐνης του. Για αυτόν το λόγο, οι μηχανικές ιδιότητες των μικροσωληνίσκων έχουν μελετηθεί εκτεταμένα. Έχει βρεθεί πως η δυσκαμψία των μικροσωληνίσκων υπό κάμψη είναι περίπου 100 φορές μεγαλύτερη από αυτήν των ενδιάμεσων νημάτων και των νηματίων ακτίνης. Σε πειραματικό επίπεδο, έχουν υιοθετηθεί διάφορες μέθοδοι τις τελευταίες δεκαετίες για τη μέτρηση της ακαμψίας των μικροσωληνίων.

Η μοντελοποίηση των μικροσωληνίσκων παίζει πάντα ένα σημαντικό ρόλο τόσο αναφορικά με την πρόβλεψη της καμπτικής δυσκαμψίας όσο και την έρευνα πάνω στα φαινόμενα λυγισμού. Για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς των μικροσωληνίσκων υπό κάμψη



και λυγισμό, έχουν χρησιμοποιηθεί μοντέλα ελαστικών δοκών κατά Euler-Bernoulli. Σε πειράματα που έχουν γίνει για τον υπολογισμό της ακαμψίας των MTs υπό κάμψη, έχουν υιοθετηθεί οι μαθηματικοί τύποι από την κλασική θεωρία δοκών, οι οποίοι συσχετίζουν τα φορτία και τις αποκλίσεις. Από διάφορες έρευνες, έχουν αναπτυχθεί πολυπλοκότερα μοντέλα για τη μελέτη των MTs υπό κάμψη και λυγισμό, όπως και για τη μελέτη ανάλυσης δονήσεων σε αυτούς. Έχει επίσης παρουσιαστεί από ερευνητές η συμπεριφορά των μικροσωληνίσκων υπό λυγισμό, όταν περιβάλλονται από ιξωδοελαστικό κυτταρόπλασμα. Επιπλέον, μερικές μη κλασικές θεωρίες συνεχούς μέσου αναφέρονται ήδη στην προσομοίωση μικροσωληνίσκων υπό λυγισμό και αποδίδουν πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

Έχοντας κατά νου την πολυπλοκότητα της δομής των μικροσωληνίων, τα προβλήματα της κατοπτρικής τους ισομέρειας, την κλίμακα μήκους των τομέων τους (nms) και την ύπαρξη ισχυρών ηλεκτρομηχανικών ζευγών μέσα σε αυτούς, προτείνονται χρήσεις μη κλασικών θεωριών ζεύγους συνεχούς μέσου για τη μοντελοποίηση της συμπεριφοράς μικροσωληνίσκων, οι οποίοι υφίστανται κάποια φόρτιση. Έτσι, θεμελιώνονται νέα μοντέλα δοκού, για να αποδοθεί το φαινόμενο κλίμακας σε αυτούς. Ειδικότερα, ενδιαφέρον έχει η χρήση της θεωρίας της πρώτης βαθμίδας τροπής του Mindlin.

Ο Eringen<sup>[3]</sup> πρότεινε θεωρίες συνέχειας μη τοπικού τύπου για την ανάλυση των δομών μικρού μεγέθους. Στη θεωρία ελαστικότητας μη τοπικού τύπου, τα φαινόμενα λόγω της μικρής κλίμακας υπολογίζονται από την παραδοχή ότι η τάση σε ένα σημείο είναι συνάρτηση όχι μόνο της παραμόρφωσης σε εκείνο το σημείο, αλλά και συνάρτηση των τάσεων όλων των άλλων σημείων του χώρου. Αυτό οφείλεται στα φαινόμενα κλίμακας των νανοδομών. Όσο η κλίμακα του μήκους μειώνεται, οι επιρροές μεταξύ ατομικών και μοριακών **δυνάμεων συνοχής** με τις στατικές και δυναμικές ιδιότητες, τείνουν να είναι σημαντικές και δεν μπορούν να παραμεληθούν.

Η κλασική θεωρία της ελαστικότητας η οποία αποτελεί τη συνέχεια της ατομικής θεωρίας, αποκλείει αυτές τις επιδράσεις και ως εκ τούτου δε θα μπορούσε να αναλύσει με ακρίβεια τη δομή με μικρής κλίμακας επιδράσεις. Με αυτόν τον τρόπο, μέθοδοι βασιζόμενοι στο εξαρτώμενο από το μέγεθος συνεχές γίνονται δημοφιλείς στη μοντελοποίηση κατασκευών μικρής δομής, καθώς προσφέρουν πολύ πιο γρήγορες και ακριβείς λύσεις. Μειονεκτήματα της κλασικής θεωρίας συνέχειας μπορούν να αποφευχθούν αποτελεσματικά και φαινόμενα που εξαρτώνται από το μέγεθος μπορούν να εξηγηθούν ικανοποιητικά από τη θεωρία μη τοπικού τύπου.

Ο Sudak<sup>[30]</sup> πραγματοποίησε ανάλυση λυγισμού νανοσωληνίων άνθρακα πολλαπλών τοιχωμάτων. Οι Wang και Varadhan<sup>[35]</sup>, ανέλυσαν την επίδραση της μικρής κλίμακας νανοσωληνίων άνθρακα σε μοντέλα κελύφων. Ο Yakobson et al.<sup>[37]</sup> εισήγαγε ένα

εξατομικευμένο μοντέλο για αξονικά συμπιεσμένο νανοσωλήνα άνθρακα μονού τοιχώματος (SWCNT) και το συγκρίνει με ένα απλό συνεχές μοντέλο κελύφους. Οι Sears και Batra<sup>[29]</sup> πρότειναν μία εκτενή ανάλυση λυγισμού νανοσωλήνων άνθρακα μονού και πολλαπλού τοιχώματος, από προσομοιώσεις μοριακής μηχανικής και μοντέλα της μηχανικής συνεχούς. Η εν λόγω μελέτη του λυγισμού των νανοσωλήνων άνθρακα είναι ενδιαφέρουσα για την καλύτερη κατανόηση των μηχανικών ιδιοτήτων των CNTs. Μια σχετική αναφορά σχετικά με θεωρίες μη τοπικού τύπου για την κάμψη, το λυγισμό και την ανάλυση των κραδασμών των νανοσωλήνων αναφέρεται από τον Reddy<sup>[27]</sup>.

Ωστόσο, δεν έχει πραγματοποιηθεί μέχρι τώρα ανάλυση για λυγισμό νανοσωλήνων άνθρακα σε ελαστική θεμελίωση με διάφορες οριακές συνθήκες. Στην παρούσα εργασία έχει χρησιμοποιηθεί η διαφορική μέθοδος μετασχηματισμού για τη μελέτη των επιπτώσεων μη τοπικού τύπου σε SWCNT σε ελαστική θεμελίωση με διάφορες οριακές συνθήκες.

### Η συνεχής ελαστική έδραση

Η προσομοίωση της συνεχούς ελαστικής έδρασης είναι ένα ιδιαίτερα πολύπλοκο πρόβλημα, η αντιμετώπιση του οποίου απαιτεί ιδιαίτερες γνώσεις από τον μελετητή. Ο τελευταίος καλείται να λάβει αποφάσεις, κυριότερες των οποίων είναι αφενός η απόφαση για τον τρόπο με τον οποίο θα προσομοιωθεί η έδραση και αφετέρου η εκτίμηση των σταθερών με τις οποίες περιγράφεται η μηχανική του συμπεριφορά. Όσον αφορά το θέμα της προσομοίωσης της έδρασης ως ελαστικού υποβάθρου, έχουν προταθεί κατά καιρούς διάφορα προσομοιώματα λιγότερο ή περισσότερο ακριβή.

### Θεώρηση Winkler

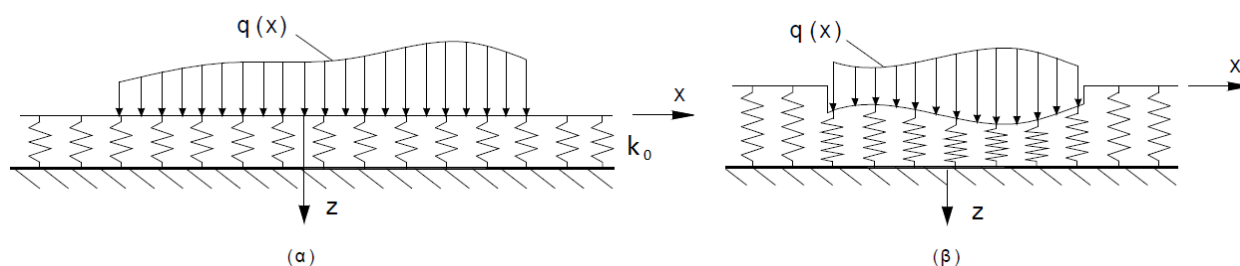
Πρακτικότερη, όμως, και ευρύτερα διαδεδομένη λύση στο συγκεκριμένο ζήτημα, η οποία είναι ταυτόχρονα και ικανοποιητική εντός των ορίων των παραδοχών απλοποίησης που αναγκαστικά θα πρέπει να γίνουν, είναι η χρήση του προσομοιώματος Winkler. Όπως είναι γνωστό, το συγκεκριμένο προσομοίωμα στηρίζεται στην παραδοχή ότι η προσομοίωση του εδάφους ως ελαστικού υποβάθρου μπορεί να υλοποιηθεί με μια σειρά πυκνά τοποθετημένων και ανεξαρτήτων μεταξύ τους κατακορύφων μεταφορικών ελατηρίων (Σχήμα 7). Επομένως, σε περιπτώσεις επίπεδων προβλημάτων, η κατακόρυφη μετατόπιση  $u(x)$  σε οποιοδήποτε σημείο της φορτιζόμενης έδρασης είναι ανάλογη της τιμής της κατακόρυφης φόρτισης  $q(x)$  στο σημείο αυτό. Έτσι, η σχέση η οποία συνδέει τα μεγέθη  $u(x)$  και  $q(x)$  είναι η εξής:

$$q(x) = k_0 u(x)$$



Στην παραπάνω σχέση ο συντελεστής  $k_0$  (ονομάζεται συντελεστής αντίδρασης του εδάφους και οι διαστάσεις του είναι  $\left[\frac{kN}{m^2}\right]$ ), ο οποίος, στην περίπτωση κατά την οποία γίνεται χρήση του προσομοιώματος του Winkler, είναι και το μόνο μέγεθος που απαιτείται για την περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς της έδρασης.

Άμεση συνέπεια της παραδοχής του Winkler είναι το γεγονός ότι στα σημεία της επιφάνειας του εδάφους τα οποία είναι αφόρτιστα η κατακόρυφη μετακίνηση  $u(x)$  είναι ίση με το μηδέν. Επομένως, το προσομοίωμα οδηγεί σε ασυνέχεια της παραμορφούμενης επιφάνειας του εδάφους μεταξύ της φορτιζόμενης και της αφόρτιστης επιφάνειας του (Σχήμα 7.β).



Σχήμα 7 (α) Το προσομοίωμα του Winkler, (β) πλήρης ασυνέχεια της παραμόρφωσης της επιφάνειας του εδάφους στα όρια της φόρτισης.

### **Μέθοδοι προσομοίωσης της ελαστικής έδρασης τύπου Winkler.**

Δύο είναι οι μέθοδοι με τις οποίες είναι δύνατη η προσομοίωση της ελαστικής έδρασης μίας δοκού με το προσομοίωμα Winkler:

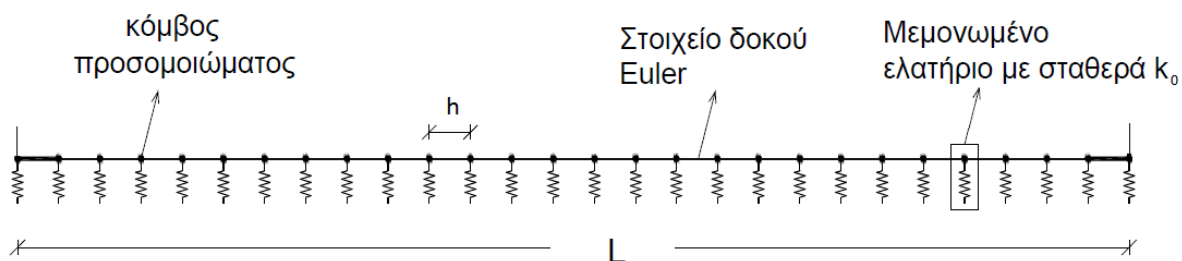
- i. Η χρήση της ακριβούς αναλυτικής λύσης των διαφορικών εξισώσεων οι οποίες διέπουν το πρόβλημα της κάμψης δοκών που εδράζονται ελαστικά και
  - ii. η διακριτοποίηση των ελαστικώς εδραζόμενων δοκών και η τοποθέτηση σημειακών ελατηρίων στους κόμβους του προσομοιώματος.
- **Η προσομοίωση με την χρήση των αναλυτικών λύσεων των εξισώσεων του προβλήματος**

Έχοντας διαθέσιμες τις αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων, οι οποίες διέπουν την κάμψη δοκών Euler επί ελαστικού υποβάθρου Winkler, είναι δυνατός ο σχηματισμός μητρώων δυσκαμψίας και φόρτισης. Η περιγραφή της διαδικασίας σχηματισμού των μητρώων αυτών είναι γνωστή και διαθέσιμη σε πολλές βιβλιογραφικές αναφορές. Θα πρέπει να τονιστεί ότι μεγάλο πλεονέκτημα της προσομοίωσης της ελαστικής έδρασης με χρήση των αναλυτικών

λύσεων των εξισώσεων που διέπουν την κάμψη ελαστικώς εδραζόμενων δοκών, αποτελεί το γεγονός ότι στην περίπτωση αυτή δεν απαιτείται η διακριτοποίηση των δοκών αυτών σε επί μέρους στοιχεία.

- **Η διακριτοποίηση των ελαστικώς εδραζόμενων δοκών και η τοποθέτηση σημειακών ελατηρίων στους κόμβους του προσομοιώματος.**

Η διαδικασία, η οποία περιγράφηκε προηγουμένως, απαιτεί την αναλυτική λύση των εξισώσεων που διέπουν την κάμψη δοκών Euler επί ελαστικού υποβάθρου Winkler. Ωστόσο, είναι εφικτή η προσομοίωση της ελαστικής έδρασης χωρίς να είναι διαθέσιμες οι αναλυτικές λύσεις, αρκεί να είναι διαθέσιμα τα κλασικά μητρώα δυσκαμψίας και φόρτισης δοκών Euler. Στην περίπτωση αυτή όμως θα πρέπει να γίνει διακριτοποίηση της ελαστικώς εδραζόμενης δοκού σε μία σειρά μη ελαστικώς εδραζόμενων στοιχείων δοκού, και η ταυτόχρονη τοποθέτηση σημειακών ελατηρίων στους κόμβους του προσομοιώματος που προκύπτει.



Σχήμα 8 Διακριτοποίηση της δοκού

Η συγκεκριμένη διαδικασία έχει το μειονέκτημα της απαίτησης της διακριτοποίησης της ελαστικώς εδραζόμενης δοκού και του υπολογισμού των τιμών των επιμέρους σημειακών ελατηρίων. Επιπλέον, είναι και κατά πολύ λιγότερο ακριβής από την επίλυση με εφαρμογή των αναλυτικών λύσεων και απαιτεί εξαιρετικά πυκνή διακριτοποίηση για την επίτευξη αποδεκτών αποτελεσμάτων. Από προγραμματιστικής άποψης, η επίλυση με την εφαρμογή των αναλυτικών λύσεων των διαφορικών εξισώσεων των ελαστικώς εδραζόμενων δοκών κρίνεται προσφορότερη, αλλά φυσικά και πιο αποτελεσματική, λόγω της μεγαλύτερης ακρίβειας αποτελεσμάτων που επιτυγχάνεται με πολύ μικρότερο αριθμό πεπερασμένων στοιχείων.

Σε πολλές, όμως, περιπτώσεις, δεν είναι δυνατόν να βρεθούν οι ακριβείς λύσεις από την εφαρμογή των αναλυτικών τύπων. Έτσι λοιπόν, στις περιπτώσεις όπου οι ακριβείς λύσεις των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα δεν είναι διαθέσιμες, εισάγονται αριθμητικές μέθοδοι για να υπολογιστούν προσεγγιστικές λύσεις. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για την προσέγγιση της λύσης της διαφορικής εξίσωσης, όταν οι αναλυτικές λύσεις είναι δύσκολες ή αδύνατον να επιτευχθούν λόγω της περίπλοκης γεωμετρίας ή των οριακών συνθηκών.

## Πεπερασμένα Στοιχεία

Οι μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων έχουν αναπτυχθεί συστηματικά κατά τα τελευταία 35 περίπου χρόνια για τη λύση εφαρμοσμένων προβλημάτων, αρχικά κυρίως από τους μηχανικούς. Αναφέρεται παρενθετικά ότι πρωτοπόρος και κύριος θεμελιωτής αυτής της πρακτικής μεθόδου υπήρξε ο Έλληνας μηχανικός Ι. Αργύρης. Παράλληλα, οι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με τη θεμελίωση της σχετικής θεωρίας και την ανάπτυξη θεωρημάτων σφάλματος.

Κοινά χαρακτηριστικά όλων των μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων είναι η αναγωγή του διαφορικού προβλήματος σε ένα αλγεβρικό σύστημα με "πολλά" μηδενικά στοιχεία, πράγμα που συντελεί στην ταχύτητα υπολογισμού και στην αριθμητική ευστάθεια. Σημειωτέον ότι η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων έχει καθιερωθεί, τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά, ως η πιο ενδεδειγμένη μέθοδος για τη λύση μιας ευρείας τάξης προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Η βασική μέθοδος προσέγγισης είναι η μέθοδος Galerkin με πεπερασμένα στοιχεία. Η προσεγγιστική αυτή μέθοδος χρησιμοποιεί μια διακριτοποίηση, ώστε με τη διατύπωση των σταθμισμένων υπολοίπων μετασχηματίζει τη διαφορική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα (ισχυρή μορφή) σε ολοκληρωτική εξίσωση (ασθενής μορφή), η οποία με μια μεταβολική διαδικασία μετετρέπεται σε ένα σύστημα εξισώσεων σε κλειστή μορφή. Δηλαδή, ανάγει το υπο μελέτη πρόβλημα συνοριακών τιμών σε ένα αλγεβρικό γραμμικό σύστημα, όπου ο προκύπτων πίνακας περιέχει "πολλά" μηδενικά στοιχεία.

## Περιεχόμενο εργασίας

Στην εργασία αυτή αναλύεται η συμπεριφορά σε **κάμψη** και **λυγισμό** μιας δοκού κατά **Euler-Bernoulli** στα πλαίσια της **θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας**, στηριγμένη στη **θεώρηση του Winkler** για τη γραμμική ελαστικότητα. Κύριο χαρακτηριστικό του προβλήματος αυτού είναι ότι η διαφορική εξίσωση που το διέπει είναι 6ης τάξης, καθώς και οι συνοριακές συνθήκες είναι αρκετά πιο περίπλοκες από την κλασική ελαστικότητα, αλλά και οι κλασικές συνοριακές συνθήκες έχουν διαφορετική εφαρμογή σε αυτό το πλαίσιο. Άμεσο αποτέλεσμα των παραπάνω είναι ότι αυτό το πρόβλημα απαιτείται να αντιμετωπιστεί με τη βοήθεια **υπολογιστικών μεθόδων**. Η αριθμητική προσομοίωση των ανάλογων διάφορων προβλημάτων που χρειάστηκε έγινε με τη μέθοδο των **πεπερασμένων στοιχείων**. Η υπολογιστική αυτή μέθοδος χρησιμοποιήθηκε επίσης για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών ταλάντωσης στην περίπτωση του λυγισμού, μιας που ο υπολογισμός των τιμών αυτών ήταν αδύνατον να γίνει αναλυτικά.

Η προσομοίωση αυτή περιλαμβάνει επίσης την εύρεση των σχετικών σφαλμάτων των λύσεων και των ρυθμών σύγκλισης της μεθόδου, καθώς επίσης και τη σύγκριση των λύσεων με αυτές που προκύπτουν από την κλασική θεωρία. Τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται είναι η κάμψη και ο λυγισμός πρισματικής δοκού στο πλαίσιο της Θ.Β.Τ. για ομογενή υλικά.

Στην πραγματικότητα, η παρούσα εργασία ενοποιεί τις θεωρίες που παρουσίασε η Papargyri-Beskou et al. (2003)<sup>[22]</sup> και ο Yang et al. (2002)<sup>[38]</sup> με τη θεώρηση Winkler (1867)<sup>[36]</sup>, με συνεπή τρόπο. Περιλαμβάνει όχι μόνο παραγώγους ανώτερης τάξης στις εξισώσεις ισορροπίας που διέπουν το πρόβλημα και λείπουν από τη θεώρηση του Yang et al. (2002)<sup>[38]</sup>, αλλά και όρους που εξαρτώνται από την διατομή της δοκού και λείπουν από τη θεώρηση της Papargyri-Beskou et al (2003)<sup>[22]</sup>, οι οποίοι αυξάνουν σημαντικά τη δυσκαμψία της δοκού, ειδικά όταν το πάχος της δοκού μειώνεται.

Τέτοιου είδους όροι έχουν περιγραφεί από τον Ma et al. (2008)<sup>[18]</sup>, του οποίου η θεώρηση έχει βρει εφαρμογές σε διάφορα προβλήματα κάμψης. Η θεωρία βαθμίδας ελαστικότητας περιλαμβάνει παραγώγους ανώτερης τάξης στις εξισώσεις ισορροπίας. Αυτοί οι όροι είναι απαραίτητοι για την ανάπτυξη των συνοριακών στρωμάτων, τα οποία είναι χαρακτηριστικά για τις εφαρμογές της θεωρίας αυτής. Οι εξισώσεις ισορροπίας που διέπουν το πρόβλημα, μαζί με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες, θα προκύψουν μέσω της μεταβολικής διαδικασίας Hamilton-Lagrange για τα προβλήματα της κάμψης και του λυγισμού. Θα παρουσιαστούν εφαρμογές πάνω σε προβλήματα κάμψης και λυγισμού και θα γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας με αυτά της κλασικής θεώρησης, ώστε να φανεί η σημασία των όρων που θα εισαχθούν, αναφορικά με τη δυσκαμψία των λεπτών δοκών.

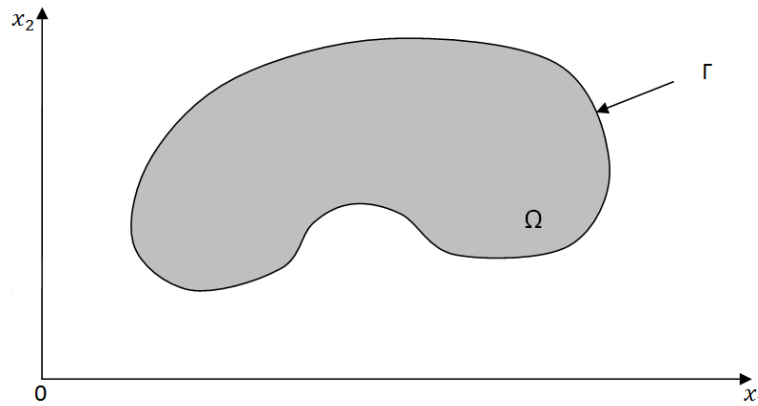
Η απλή κάμψη τέτοιων δοκών έχει εξεταστεί από πολλούς συγγραφείς. Αναφέρονται εδώ: Atlán et al (1997)<sup>[1]</sup>, ο οποίος εξέτασε το πρόβλημα της ταλάντωσης δοκών, Papargyri – Beskou et al (2003)<sup>[22]</sup>, η οποία έχει διεξαγάγει τη στατική ανάλυση τέτοιων δοκών μαζί με την εξέταση φαινομένων λυγισμού και, τέλος, οι Giannakopoulos and Stamoulis (2007)<sup>[8]</sup>, σε μια σχετικά πρόσφατη δημοσίευση σχετικά με βαθμωτά ελαστικά δομικά στοιχεία. Σε πειραματικό επίπεδο, αναφέρεται η εργασία του Vardoulakis et al (1998)<sup>[34]</sup>.

## **ΜΕΡΟΣ Α - ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΜΨΗΣ**



## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο ορίζονται οι χώροι Sobolev των λύσεων των προβλημάτων και παρατίθενται ορισμοί, ανισότητες και θεωρήματα που θα χρησιμοποιηθούν, κυρίως στο κεφάλαιο 3.3, για την απόδειξη της ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης των προβλημάτων της κάμψης.



Εικόνα 9 - Χώροι Sobolev

Έστω μια ανοκτή περιοχή του  $\mathbb{R}^n$ , με σύνορο  $\Gamma$ . Συμβολίζουμε με  $C^m(\Omega)$  το χώρο των συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους τάξης μικρότερης ή ίσης του  $m$  στο  $\Omega$  (δηλαδή μερικές παραγώγους, αν  $n > 1$ ) και με  $C^\infty(\Omega)$  το χώρο των συναρτήσεων με παραγώγους όλων των τάξεων στο  $\Omega$ . Για  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , όπου  $a_i$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, η  $\alpha$ -μερική παράγωγος της συνάρτησης  $f(x_1, \dots, x_n)$  συμβολίζεται με

$$\partial^a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}, \quad \text{όπου } |a| = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Ο **φορέας** μιας συνάρτησης  $f$  στο  $\Omega$  είναι ένα **κλειστό** υποσύνολο  $\bar{S}$  του  $\Omega$ , όπου

$$S = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}.$$

Ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  καλείται **συμπαγές**. Μία συνάρτηση  $\varphi$  στο  $\Omega$  καλείται **συνάρτηση με συμπαγή φορέα**, αν ο φορέας της είναι συμπαγής. Συμβολίζουμε με  $D(\Omega)$  το χώρο των συναρτήσεων  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$  με **συμπαγή φορέα**.

### ***L<sup>2</sup>-Παράγωγοι***

Η συνάρτηση  $g \in L^2(\Omega)$  είναι η  **$\alpha$ - $L^2$ -παράγωγος** (ή αλλιώς η μικτή μερική παράγωγος) της συνάρτησης  $f \in L^2(\Omega)$ , αν ισχύει

$$(g, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi)$$

για κάθε  $\varphi \in D(\Omega)$ , και γράφουμε τότε  $g = \partial^\alpha f$ .

### ***Χώροι Hilbert***

Ένας **πλήρης μετρικός χώρος** είναι ένας μετρικός χώρος στον οποίο κάθε ακολουθία Cauchy είναι **συγκλίνουσα**. Χώρος Hilbert ονομάζεται ένας διανυσματικός χώρος  $H$  με εσωτερικό γινόμενο  $\langle f, g \rangle$ , τέτοιο ώστε η νόρμα του που ορίζεται από τη σχέση

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

να μετατρέπει τον  $H$  σε έναν πλήρη μετρικό χώρο. Αν η μετρική που ορίζεται από τη νόρμα δεν είναι πλήρης, τότε ο  $H$  θεωρείται ως ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

### ***Χώροι Sobolev***

Ο χώρος Sobolev  $H^m(\Omega)$  είναι ο χώρος των συναρτήσεων  $u \in L^2(\Omega)$  που έχουν  $L^2$ -παράγωγους  $\partial^\alpha u \in L^2(\Omega)$ , για κάθε  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  με  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq m$ . Στο  $H^m(\Omega)$  ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx$$

και η αντίστοιχη νόρμα

$$\|u\|_m = (u, u)_m^{1/2}.$$

Θέτουμε επίσης  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ .

Στο  $H^1(\Omega)$ , έχουμε για  $n = 2$

$$\begin{aligned} (u, v)_1 &= \int_{\Omega} u v dx + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx = \int_{\Omega} u v dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \\ &= (u, v) + (\nabla u, \nabla v) \end{aligned}$$

και στο  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$

$$(u, v)_0 = (u, v) = \int_{\Omega} u v dx.$$

Στο  $H^2(\Omega)$ , έχουμε για  $n = 2$



$$(u, v)_2 = (u, v)_1 + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} \right) dx$$

Για  $u \in H^1(\Omega)$ , μπορεί να οριστεί η συνάρτηση **ίχνος**  $u|_{\Gamma}$  στο σύνορο  $\Gamma$ . Αποδεικνύεται ότι ο τελεστής ίχνος  $Tr(u) = u|_{\Gamma}$ , από το  $H^1(\Omega)$  στο  $L^2(\Gamma)$ , είναι φραγμένος (συνεχής)

$$\|u|_{\Gamma}\|_{0,\Gamma} \leq c\|u\|_1.$$

Ορίζεται τότε ο χώρος Sobolev

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \quad u|_{\Gamma} = 0\}.$$

Ο υπόχωρος  $D(\Omega)$  του  $H_0^1(\Omega)$  είναι **πυκνός** στο  $H_0^1(\Omega)$ , με τη νόρμα  $\|\cdot\|_1$ .

Για  $u \in H^2(\Omega)$  ορίζεται η **κάθετη παράγωγος** της  $u$  στο  $\Gamma$  με

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u|_{\Gamma} \cdot \nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}|_{\Gamma} \cdot \nu_i$$

όπου  $\nu$  είναι το μοναδιαίο διανυσμα, κάθετο στο  $\Gamma$  προς τα **έξω**. Ο χώρος Sobolev  $H_0^2(\Omega)$  ορίζεται τότε με

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega), \quad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ στο } \Gamma \right\}.$$

Αντίστοιχα ορίζεται και ο χώρος Sobolev  $H_0^3(A)$ ,  $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ,

$$H_0^3(A) = \left\{ u(x) \in H^3(A), \quad u = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ στο } a \text{ ή στο } b \right\}.$$

Οι χώροι Sobolev  $H^m(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega)$ ,  $H_0^2(\Omega)$ ,  $H_0^3(A)$  είναι χώροι Hilbert.

**Ορισμός.** Έστω  $H$  ένας χώρος Hilbert. Μία συνάρτηση  $\alpha : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  καλείται **διγραμμικό συναρτησιακό** αν

$$\alpha(\alpha u + \beta v, w) = \alpha \alpha(u, w) + \beta \alpha(v, w), \quad \forall u, v, w \in H, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\alpha(w, \alpha u + \beta v) = \alpha \alpha(w, u) + \beta \alpha(w, v), \quad \forall u, v, w \in H, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

και είναι

i) **συμμετρικό**, αν

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, v \in H$$

ii) **V-ελλειπτικό (πιεστικό)**, αν υπάρχει σταθερά  $\alpha > 0$ , τέτοια ώστε

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

iii) **συνεχές**, αν υπάρχει σταθερά  $C$ , τέτοια ώστε

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H$$

### Ανισότητα Friedrichs

Έστω  $\Omega$  ένα φραγμένο υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^n$  διαμέτρου  $d$ . Έστω  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  στο χώρο Sobolev  $W_0^{k,p}(\Omega)$  (δηλαδή το  $u$  βρίσκεται στον  $W^{k,p}(\Omega)$  και το ίχνος του είναι 0). Τότε

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq d^k \left( \sum_{|a|=k} \|D^a u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

όπου

- $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  συμβολίζει την  $L^p$  νόρμα,
- $a = (a_1, \dots, a_n)$  ένα διάνυσμα με νόρμα  $|a| = a_1 + \dots + a_n$ ,
- $D^a u$  η μικτή μερική παράγωγος της  $u$

$$D^a u = \frac{\partial^{|a|} u}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}.$$

### Θεώρημα Lax-Milgram

Έστω  $a(u, v)$  ένα διγραμμικό, **συνεχές** και **V-ελλειπτικό (πιεστικό)** συναρτησιακό. Τότε, για κάθε  $\varphi \in H'$  υπάρχει  $u \in H$  **μοναδικό**, τέτοιο ώστε

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H$$

Επί πλέον, αν το  $a$  είναι **συμμετρικό**, τότε το  $u$  χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα

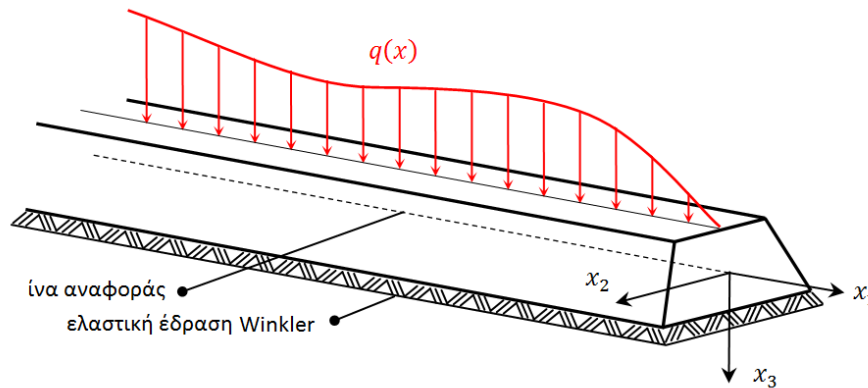
$$u \in H \quad \text{και} \quad \frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$





## 1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ

Θεωρούμε μία ευθύγραμμη πρισματική δοκό σε συνεχή ελαστική έδραση, η οποία υποβάλλεται σε στατική πλευρική φόρτιση  $q(x)$  που κατανέμεται κατά μήκος του  $x_1$  άξονα, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 10 - Πρισματική δοκός σε ελαστική έδραση

Βασιζόμενοι στο μοντέλο Winkler, θεωρούμε γραμμικά ελαστική έδραση, η οποία παραμορφώνεται μόνο εκεί όπου δρά κατακόρυφο φορτίο. Το επίπεδο φόρτισης συμπίπτει με το επίπεδο  $x_1x_3$ . Η τομή  $A$  της δοκού χαρακτηρίζεται από τους άξονες  $x_2$  και  $x_3$  με τον τελευταίο να είναι άξονας συμμετρίας.

Ξεκινάμε σύμφωνα με την υπόθεση κινηματικής των Bernoulli-Euler. Έτσι

$$\begin{aligned}
 u_3 &= u_3(x_1, t) \\
 u_1(x_1, x_3, t) &= -x_3 \frac{\partial u_3(x_1, t)}{\partial x_1} \\
 u_2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Ακολουθούμε τη δεύτερη μορφή της θεωρίας του Mindlin για τη γραμμική ελαστικότητα με μικροδομή, η οποία είναι μια ευρέως χρησιμοποιούμενη θεωρία μικρο-ελαστικότητας, εφοδιασμένη με μία επιπλέον καταστατική σταθερά, πέρα από τις σταθερές του Lamé. Η καταστατική σταθερά που προστίθεται, είναι το χαρακτηριστικό μήκος  $g$ , το οποίο είναι σταθερά της μικροδομής με διαστάσεις μήκους, ίδιας τάξης με την ογκομετρική ενέργεια παραμόρφωσης. Οπότε, πέραν του κλασικού εντατικού πεδίου, έχουμε τις βαθμίδες

$$\kappa_{ijk} := \varepsilon_{jk,i}.$$

Από τις (1.1), οι συνιστώσες της τροπής στο επίπεδο, είναι

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}(x_1, x_3, t) &= -x_3 \frac{\partial^2 u_3(x_1, t)}{\partial x_1^2} \\ \kappa_{111}(x_1, x_3, t) &= -x_3 \frac{\partial^3 u_3(x_1, t)}{\partial x_1^3} \\ \kappa_{311}(x_1, t) &= -\frac{\partial^2 u_3(x_1, t)}{\partial x_1^2}\end{aligned}\tag{1.2}$$

Από τις καταστατικές εξισώσεις για το απλοποιημένο ισότροπο στερεό, έχουμε

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ \mu_{ijk} &= g^2 (2\mu \kappa_{ijk} + \lambda \kappa_{irr}) \delta_{jk}\end{aligned}$$

όπου  $\tau_{ij}$ ,  $\mu_{ijk}$  είναι οι συνιστώσες του κλασικού τανυστή τάσης κατά Cauchy και του τανυστή διπολικής τάσης αντίστοιχα. Στην περίπτωση μας, οι καταστατικές εξισώσεις για τις επίπεδες τάσεις είναι:

$$\begin{aligned}\tau_{11}(x_1, x_3, t) &= E \varepsilon_{11} = -E x_3 \frac{\partial^2 u_3(x_1, t)}{\partial x_1^2} \\ \mu_{111}(x_1, x_3, t) &= g^2 E \kappa_{111} = -g^2 E x_3 \frac{\partial^3 u_3(x_1, t)}{\partial x_1^3} \\ \mu_{311}(x_1, t) &= g^2 E \kappa_{311} = -g^2 E \frac{\partial^2 u_3(x_1, t)}{\partial x_1^2}\end{aligned}\tag{1.3}$$

Η συνεχής ελαστική έδραση περιγράφεται με χρήση του συντελεστή αντίδρασης του εδάφους  $k_0$ . Έτσι, η ενέργεια παραμόρφωσης  $U$  είναι

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\tau_{ij} \varepsilon_{ij} + \mu_{ijk} \kappa_{ijk}) dV + \frac{1}{2} \int_V k_0 u_3^2 dV\tag{1.4}$$

Από τις (1.2) και (1.3), η εξίσωση (1.4) γίνεται

$$U = \frac{1}{2} \int_V E [(x_3^2 + g^2)(u_{3,11})^2 + g^2 x_3^2 (u_{3,111})^2] dV + \frac{1}{2} \int_V k_0 u_3^2 dV\tag{1.5}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα  $\partial_{x_1}^2 u_3, \partial_{x_1}^3 u_3$  είναι συναρτήσεις των  $(x_1, t)$  και συμβολίζοντας με  $L$  το μήκος της δοκού και με  $A$  τη διατομή της, η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^L dx_1 \int_A E[(x_3^2 + g^2)(u_{3,11})^2 + g^2 x_3^2 (u_{3,111})^2] dA \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L u_3^2 dx_1 \int_A k_0 dA \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L dx_1 \left\{ E \left[ (u_{3,11})^2 \int_A (x_3^2 + g^2) dA + g^2 (u_{3,111})^2 \int_A x_3^2 dA \right] \right\} \\
 &\quad + \int_0^L k_0 u_3^2 dx_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L dx_1 \left\{ E \left[ (u_{3,11})^2 (I_{11} + g^2 A) + g^2 I_{11} (u_{3,111})^2 \right] \right\} + \frac{1}{2} \int_0^L k_0 u_3^2 dx_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ C(u_{3,11})^2 + S(u_{3,111})^2 \right] dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^L k_0 u_3^2 dx_1.
 \end{aligned}$$

Τελικά

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ C(u_{3,11})^2 + S(u_{3,111})^2 \right] dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^L k_0 u_3^2 dx_1 \quad (1.6)$$

όπου

$$I_{11} = \int_A x_3^2 dA, \quad C := E(I_{11} + g^2 A), \quad S := g^2 E I_{11} \quad (1.7)$$

Η μεταβολή της ενέργειας παραμόρφωσης  $\delta U$  της δοκού δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \frac{1}{2} \delta \int_0^L \underbrace{\left[ C(u_{3,11})^2 + S(u_{3,111})^2 \right]}_{F(u_{3,11}, u_{3,111})} dx_1 + \frac{1}{2} \delta \int_0^L k_0 u_3^2 dx_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{\partial F}{\partial u_{3,11}} \delta u_{3,11} + \frac{\partial F}{\partial u_{3,111}} \delta u_{3,111} \right] dx_1 + \int_0^L k_0 u_3 \delta u_3 dx_1
 \end{aligned}$$

Ακολούθως, ολοκληρώνουμε κατά μέλη μέχρι το  $\delta u_3$  να εμφανιστεί χωρίς παραγώγους. Έτσι, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 \delta U = & \int_0^L \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1} \left( E(I_{11} + g^2 A) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right) - \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \left( g^2 E I_{11} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} \right) + k_0 u_3 \right] \delta u_3 dx_1 \\
 & + \left[ g^2 E I_{11} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} \frac{\partial^2 \delta u_3}{\partial x_1^2} \right]_0^L \\
 & + \left[ \left\{ E(I_{11} + g^2 A) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( g^2 E I_{11} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} \right) \right\} \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_1} \right]_0^L \\
 & + \left[ \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( E(I_{11} + g^2 A) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( g^2 E I_{11} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} \right) \right\} \delta u_3 \right]_0^L
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις που κάναμε για τον τύπο της μικροδομής, η κινητική ενέργεια  $K$  αποτελείται από δύο μέρη, το μέρος  $K_M$  των “μάκρο” και το  $K_m$  των “μίκρο”, τα οποία δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$K_M = \frac{1}{2} \int_V \rho (\partial_t u_j)^2 dV, \quad K_m = \frac{1}{6} \int_V \rho h^2 (\partial_t u_{j,i})^2 dV \tag{1.9}$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_0}^{t_1} K dt &= \delta \int_{t_0}^{t_1} (K_M + K_m) dt \\
 &= \delta \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho (\partial_t u_j)^2 dV + \delta \frac{1}{6} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho h^2 (\partial_t u_{j,i})^2 dV \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho \partial_t u_j \delta (\partial_t u_j) dV + \frac{1}{3} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho h^2 \partial_t u_{j,i} \delta (\partial_t u_{j,i}) dV \\
 &= \int_V \rho dV \int_{t_0}^{t_1} \partial_t u_j \delta (\partial_t u_j) dt + \frac{1}{3} \int_V \rho h^2 dV \int_{t_0}^{t_1} \partial_t u_{j,i} \delta (\partial_t u_{j,i}) dt \\
 &= \int_V \rho dV \left\{ [\partial_t u_j \delta u_j]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \partial_t^2 u_j \delta u_j dt \right\} \\
 &+ \frac{1}{3} \int_V \rho h^2 dV \left\{ [\partial_t u_{j,i} \delta u_{j,i}]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \partial_t^2 u_{j,i} \delta u_{j,i} dt \right\} \\
 &= - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho \partial_t^2 u_j \delta u_j dV - \frac{1}{3} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho \partial_t^2 u_{j,i} \delta u_{j,i} dV
 \end{aligned}$$

όπου το τελευταίο βήμα οφείλεται στο γεγονός ότι οι μεταβολές των  $u_j, u_{j,i}$  είναι μηδέν στα χρονικά σημεία  $t_0$  και  $t_1$ . Έτσι,



$$\delta \int_{t_0}^{t_1} K dt = - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho \partial_t^2 u_j \delta u_j dV - \frac{1}{3} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho \partial_t^2 u_j \delta u_j dV. \quad (1.10)$$

Δουλεύουμε κάθε ολοκλήρωμα της σχέσης (1.10) ξεχωριστά. Έτσι, για το πρώτο θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_V \rho \partial_t^2 u_j \delta u_j dV \stackrel{(1.1)}{\cong} \int_V \rho x_3^2 \partial_t^2 u_{3,1} (\delta u_3)_{,1} dV + \int_V \rho \partial_t^2 u_3 \delta u_3 dV = \\ & = \int_0^L \partial_t^2 u_{3,1} (\delta u_3)_{,1} dx_1 \int_A \rho x_3^2 dA + \int_0^L \partial_t^2 u_3 \delta u_3 dx_1 \int_A \rho dA \\ & = \int_0^L \rho I_{11} \partial_t^2 u_{3,1} (\delta u_3)_{,1} dx_1 + \int_0^L \rho A \partial_t^2 u_3 \delta u_3 dx_1 \end{aligned}$$

όπου το  $\rho$  είναι σταθερό σε κάθε διατομή

$$= [\rho I_{11} \partial_t^2 u_{3,1} \delta u_3]_0^L - \int_0^L (\rho I_{11} \partial_t^2 u_{3,1})_{,1} \delta u_3 dx_1 + \int_0^L \rho A \partial_t^2 u_3 \delta u_3 dx_1$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} & - \int_V \rho \partial_t^2 u_j \delta u_j dV = \\ & \int_0^L (\rho I_{11} \partial_t^2 u_{3,1})_{,1} \delta u_3 dx_1 - \int_0^L \rho A \partial_t^2 u_3 \delta u_3 dx_1 - [\rho I_{11} \partial_t^2 u_{3,1} \delta u_3]_0^L \end{aligned} \quad (1.11)$$

Αντίστοιχα, για το δεύτερο ολοκλήρωμα, θα έχουμε

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{3} \int_V \rho h^2 \partial_t^2 u_{j,i} \delta u_{j,i} dV = - \frac{1}{3} \int_V \rho h^2 (\partial_t^2 u_{1,1} \delta u_{1,1} + \partial_t^2 u_{1,3} \delta u_{1,3} + \partial_t^2 u_{3,1} \delta u_{3,1}) dV \\ & = - \int_V 2\rho \frac{h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,1} \delta u_{3,1} dV - \int_V \rho \frac{h^2}{3} x_3^2 \partial_t^2 u_{3,11} \delta u_{3,11} dV = \\ & = - \int_0^L \frac{2h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,1} \delta u_{3,1} dx_1 \int_A \rho dA - \int_0^L \frac{h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,11} \delta u_{3,11} dx_1 \int_A \rho x_3^2 dA \\ & = - \int_0^L \frac{2\rho A h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,1} \delta u_{3,1} dx_1 - \int_0^L \frac{\rho I_{11} h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,11} \delta u_{3,11} dx_1 \\ & = \int_0^L \left( \frac{2\rho A h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,1} \right)_{,1} \delta u_3 dx_1 - \int_0^L \left( \frac{\rho I_{11} h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,11} \right)_{,11} \delta u_3 dx_1 \\ & - \left[ \frac{\rho I_{11} h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,11} \delta u_{3,1} \right]_0^L + \left[ \left( \frac{\rho I_{11} h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,11} \right)_{,1} - \frac{2\rho A h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,1} \right] du_3 \Big|_0^L \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3} \int_V \rho h^2 \partial_t^2 u_{j,i} \delta u_{j,i} dV = \\
 & \int_0^L \left( \frac{2\rho Ah^2}{3} \partial_t^2 u_{3,1} \right)_{,1} \delta u_3 dx_1 - \int_0^L \left( \frac{\rho I_{11} h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,11} \right)_{,11} \delta u_3 dx_1 \quad (1.12) \\
 & - \left[ \frac{\rho I_{11} h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,11} \delta u_{3,1} \right]_0^L + \left[ \left\{ \left( \frac{\rho I_{11} h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,11} \right)_{,1} - \frac{2\rho Ah^2}{3} \partial_t^2 u_{3,1} \right\} du_3 \right]_0^L
 \end{aligned}$$

Έτσι από τις σχέσεις (1.10), (1.11) και (1.12) θα πάρουμε τελικά

$$\begin{aligned}
 \delta K = & \int_0^L \left[ (\rho I_{11} \partial_t^2 u_{3,1})_{,1} - \rho A \partial_t^2 u_3 \right] \delta u_3 dx_1 \\
 & + \int_0^L \left[ \left( \frac{2\rho Ah^2}{3} \partial_t^2 u_{3,1} \right)_{,1} - \left( \frac{\rho I_{11} h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,11} \right)_{,11} \right] \delta u_3 dx_1 \\
 & + \left[ \left\{ \left( \frac{\rho I_{11} h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,11} \right)_{,1} - \frac{2\rho Ah^2}{3} \partial_t^2 u_{3,1} - \rho I_{11} \partial_t^2 u_{3,1} \right\} du_3 \right]_0^L \\
 & - \left[ \frac{\rho I_{11} h^2}{3} \partial_t^2 u_{3,11} \delta u_{3,1} \right]_0^L \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

Μια προσεκτικότερη ματιά στις συνοριακές συνθήκες που εμφανίζονται στις σχέσεις (1.8) και (1.13) μας δείχνει ότι πρέπει να εισαγάγουμε τρεις φυσικές μεταβλητές, οι οποίες να αποτελούν τις συζυγείς ως προς το έργο των  $du_3$ ,  $du_{3,1}$  και  $du_{3,11}$ . Άρα, θεωρώντας μηδενικές καθολικές δυνάμεις, η μεταβολή του δυναμικού των εξωτερικών δυνάμεων  $V$ , ορίζεται ως εξής:

$$\delta V = \int_0^L q(x_1, t) \delta u_3 dx_1 + [Q \delta u_3]_0^L - [M \delta u_{3,1}]_0^L - [m \delta u_{3,11}]_0^L \quad (1.14)$$

όπου  $Q$  είναι η γενικευμένη τέμνουσα δύναμη, συζυγής του έργου του  $du_3$ ,  $M$  η γενικευμένη ροπή, συζυγής του έργου του  $du_{3,1}$ , και  $m$  η ροπή ανώτερης τάξης ή διπλή ροπή, συζυγής του έργου του  $du_{3,11}$ .

Οπότε, τώρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή του Hamilton

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [K - (U - V)] dt = 0 \Rightarrow \delta \int_{t_0}^{t_1} V dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} U dt - \delta \int_{t_0}^{t_1} K dt$$

από την οποία, με χρήση των εξισώσεων (1.8),(1.14) και (1.13), εξάγεται η εξίσωση κίνησης μαζί με τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \left( S \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( C \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right) + k_0 u_3 \\
 & + \left\{ \rho A - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \rho (I_{11} + 2A\bar{h}^2) \frac{\partial}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \rho I_{11} \bar{h}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \right\} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = q(x_1, t)
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}
 Q = & -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( C \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( S \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \rho I_{11} \bar{h}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\
 & + \rho (I_{11} + 2A\bar{h}^2) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\
 & \quad \quad \quad \text{ή} \\
 & \delta u_3 = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}
 M = & -C \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( S \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} \right) - \rho I_{11} \bar{h}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\
 & \quad \quad \quad \text{ή} \\
 & \delta u_{3,1} = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$m = -S \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} \quad \text{ή} \quad \delta u_{3,11} = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L \tag{1.18}$$

όπου έχουμε θέσει

$$\bar{h}^2 := \frac{h^2}{3}. \tag{1.19}$$

Για ομογενείς πρισματικές δοκούς, οι παραπάνω εξισώσεις απλοποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 -S \frac{\partial^6 u_3}{\partial x_1^6} + C \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + k_0 u_3 + \rho \left( A - (I_{11} + 2A\bar{h}^2) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + I_{11}\bar{h}^2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\
 = q(x_1, t) \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= -C \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} + S \frac{\partial^5 u_3}{\partial x_1^5} + \rho \left[ (I_{11} + 2A\bar{h}^2) \frac{\partial}{\partial x_1} - I_{11}\bar{h}^2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} \right] \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\
 \text{ή } \delta u_3 &= 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L \\
 M &= -C \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + S \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} - \rho I_{11}\bar{h}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\
 \text{ή } \delta u_{3,1} &= 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

$$m = -S \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} \quad \text{ή} \quad \delta u_{3,11} = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L$$

Οι εξισώσεις (1.21a),(1.21b) αντιστοιχούν στις κλασικές συνοριακές συνθήκες, ενώ η εξίσωση (1.21c) αντιστοιχεί στις μη κλασικές.





## 2. ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΜΨΗΣ

### 2.1. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών για μια ομογενή πρισματική δοκό προκύπτει από τις εξισώσεις (1.20) και (1.21), θεωρώντας όλες τις ποσότητες χρονικά ανεξάρτητες.

$$-S \frac{d^6 u_3}{dx_1^6} + C \frac{d^4 u_3}{dx_1^4} + k_0 u_3 = q(x_1) \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} Q &= -C \frac{d^3 u_3}{dx_1^3} + S \frac{d^5 u_3}{dx_1^5} \quad \text{ή} \quad \delta u_3 = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L \\ M &= -C \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} + S \frac{d^4 u_3}{dx_1^4} \quad \text{ή} \quad \delta u_{3,1} = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L \\ m &= -S \frac{d^3 u_3}{dx_1^3} \quad \text{ή} \quad \delta u_{3,11} = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Αξίζει να σημειωθεί ότι η μορφή της ακριβούς αναλυτικής λύσης εξαρτάται από τα πεδία τιμών, μέσα στα οποία κυμαίνονται τα μεγέθη  $S, C$  και  $k_0$ , λόγω του ότι αυτά αποτελούν τους συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης (2.1.1). Έτσι, οι αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης εξαρτώνται από τις τιμές που μπορεί να λάβουν τα μεγέθη  $S, C$  και  $k_0$ . Παραδείγματος χάρη, για πολύ μεγάλες τιμές του  $k_0$  αλλάζει το πρόσημο των διακρινουσών των χαρακτηριστικών εξισώσεων που προκύπτουν από την παραπάνω διαφορική εξίσωση.

Για να διευκολύνουμε τη διατύπωση και επίλυση του προβλήματος, μειώνουμε το μέγεθος της μετεβλητής  $x_1$  της δοκού και της παραμόρφωσης  $u_3$ , διαιρώντας τις με το μήκος της δοκού  $L$ . Δηλαδή κάνουμε την παρακάτω αδιαστατοποίηση

$$\tilde{x} := x_1/L, \quad \tilde{u} := u_3/L \quad (2.1.3)$$

Επομένως,

$$\frac{d^n u_3}{dx_1^n} = L^{-n} \frac{d^n u_3}{d\tilde{x}^n} = L^{(1-n)} \frac{d^n \tilde{u}}{d\tilde{x}^n} \quad (2.1.4)$$

Από τις (1.7), (2.1.3), (2.1.4) και με απλές αλγεβρικές πράξεις, η διαφορική εξίσωση (2.1.1) που διέπει το πρόβλημα γράφεται ως:

$$-\frac{d^6\tilde{u}}{d\tilde{x}^6} + \mathcal{A} \frac{d^4\tilde{u}}{d\tilde{x}^4} + B\tilde{u} = \tilde{q}(\tilde{x}) \quad (2.1.5)$$

όπου θέσαμε

$$\mathcal{A} := L^2 \left( g^{-2} + \frac{A}{I_{11}} \right), \quad B := \frac{k_0 L^6}{g^2 E I_{11}}, \quad \tilde{q}(\tilde{x}) := \frac{q(\tilde{x}) L^5}{g^2 E I_{11}} \quad (2.1.6)$$

Οι αντίστοιχες φυσικές μεταβλητές  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{M}$  και  $\tilde{m}$  δίνονται από:

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= -\mathcal{A} \frac{d^3\tilde{u}}{d\tilde{x}^3} + \frac{d^5\tilde{u}}{d\tilde{x}^5} = \frac{QL^4}{g^2 E I_{11}} & \text{ή } \delta\tilde{u} &= 0 \text{ στο } \tilde{x} = 0 \text{ ή στο } \tilde{x} = 1 \\ \tilde{M} &= -\mathcal{A} \frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{x}^2} + \frac{d^4\tilde{u}}{d\tilde{x}^4} = \frac{ML^3}{g^2 E I_{11}} & \text{ή } \delta\tilde{u}' &= 0 \text{ στο } \tilde{x} = 0 \text{ ή στο } \tilde{x} = 1 \\ \tilde{m} &= -\frac{d^3\tilde{u}}{d\tilde{x}^3} = \frac{mL^2}{g^2 E I_{11}} & \text{ή } \delta\tilde{u}'' &= 0 \text{ στο } \tilde{x} = 0 \text{ ή στο } \tilde{x} = 1 \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

## 2.2 ΕΥΡΕΣΗ ΓΕΝΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ

Για να βρούμε μια γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης της (2.1.5), λύνουμε το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο:

$$\lambda^6 - \mathcal{A}\lambda^4 - B = 0 \quad (2.2.1)$$

Αν θέσουμε  $z = \lambda^2$ , καταλήγουμε σε μία εξίσωση τρίτου βαθμού

$$z^3 - \mathcal{A}z^2 - B = 0 \quad (2.2.2)$$

Ορίζοντας, τώρα,

$$Q := -\frac{\mathcal{A}^2}{9}, \quad \mathcal{R} := \frac{27B + 2\mathcal{A}^3}{54}$$



οι οποίοι είναι πραγματικοί αριθμοί, η διακρίνουσα του προηγούμενου πολυωνύμου είναι:

$$D := Q^3 + R^2 = \frac{B^2}{4} + \frac{BA^3}{27} > 0$$

Συνεπώς, αφού  $D > 0$ , θα έχουμε τρεις διακριτές ρίζες (μια πραγματική και δύο μιγαδικές συζυγείς).

Συνεχίζοντας, ορίζουμε τις ποσότητες:

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{D}}, \quad T := \sqrt[3]{R - \sqrt{D}} \quad (2.2.3)$$

Από τη μέθοδο εύρεσης ριζών τριτοβάθμιας εξίσωσης του Cardano (ή Cardan) (βλ. Παράρτημα Ι), οι τρεις αυτές ρίζες αποδεικνύεται ότι είναι:

$$z_1 = S + T + \frac{A}{3}$$

$$z_2 = \frac{A}{3} - \left(\frac{S+T}{2}\right) + i \frac{\sqrt{3}(S-T)}{2} \quad (2.2.4)$$

$$z_3 = \bar{z}_2$$

Τελικά, επειδή  $\lambda = \pm\sqrt{z}$ , λαμβάνουμε τις ρίζες  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , της εξίσωσης (2.8), για τις οποίες θα ισχύει

$$\lambda_2 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_3, \quad \lambda_6 = -\lambda_5$$

Έχοντας βρει αυτές τις ιδιοτιμές, η γενική λύση της (2.1.5) θα είναι:

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^6 C_j e^{Re[\lambda_j]\tilde{x}} \{ \cos(Im[\lambda_j]\tilde{x}) + \sin(Im[\lambda_j]\tilde{x}) \} + S_p(\tilde{x}) \quad (2.2.5)$$

όπου  $Re[.]$  και  $Im[.]$  αντιπροσωπεύουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα, και  $S_p(\tilde{x})$  είναι η μερική λύση της (2.1.5).

Για την περίπτωση ομοιόμορφης φόρτισης  $q(x) = q_0$ , η μερική λύση βρίσκεται

$$S_p(\tilde{x}) = \frac{q_0}{k_0 L} \quad (2.2.6)$$

Οι σταθερές  $C_j$  της σχέσης (2.2.5) προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες (2.1.7) του εκάστοτε προβλήματος. Εφαρμόζοντας τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες πάνω στη σχέση (2.2.5), θα προκύψει ένα γραμμικό σύστημα  $6 \times 6$  και με κάποιο λογισμικό πακέτο μαθηματικών προσδιορίζονται οι τιμές των σταθερών και στη συνέχεια η γενική αναλυτική λύση.

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Οι τιμές των μεγεθών  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  και  $\tilde{q}$ , λόγω της μορφής τους, παρουσιάζουν σημαντική διαφορά όσον αφορά την τάξη μεγέθους τους. Παρατηρώντας τους τύπους τους, βλέπουμε ότι είναι συναρτήσεις των μεγεθών  $L, g, I, k_0$  και  $E$ , όπου αν για παράδειγμα με τυχαίες τιμές, το  $L$  είναι της τάξης του  $10^{-2}$ , το  $g$  είναι της τάξης του  $10^{-4}$ , το  $I$  της τάξης του  $10^{-5}$ , το  $k_0$  της τάξης του  $10^6$  και το  $E$  της τάξης του  $10^{12}$  τότε το  $\mathcal{A} := L^2 \left( g^{-2} + \frac{A}{I_{11}} \right)$  είναι της τάξης του  $10^4$ , το  $\mathcal{B} := \frac{k_0 L^6}{g^2 E I_{11}}$ , είναι της τάξης του  $10^{-3}$  και το  $\tilde{q}(\tilde{x}) := \frac{q(\tilde{x}) L^5}{g^2 E I_{11}}$  είναι της τάξης του  $10^{-2}$ .

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι υπάρχει μια διαφορά στα μεγέθη της τάξης του  $10^7$  από τον έναν έως τον άλλο συντελεστή. Αυτό προκαλεί μια δυσκολία στην επίλυση του  $6 \times 6$  γραμμικού συστήματος για τον προσδιορισμό των σταθερών  $C_j$ , γιατί ο πίνακας του συστήματος είναι κακώς κλιμακωμένος με αποτέλεσμα να παρουσιάζει ιδιομορφία, έτσι ώστε οι τιμές που θα προκύψουν να είναι ανακριβείς και τελικά να πάρουμε τελείως λάθος αποτελέσματα. Για αυτό πρέπει να γίνει τέτοια επιλογή των σταθερών του προβλήματος, όπου από τη μία να εκφράζουν φυσικά πραγματικά μεγέθη, αλλά και από την άλλη να μη "βάζουν σε κίνδυνο" την επίλυση του συστήματος και κατά συνέπεια την προσέγγιση της ακριβούς λύσης.

### 2.3 ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΤΗΝ ΚΛΑΣΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Η εξίσωση που χαρακτηρίζει την κάμψη μιας απλής Euler - Bernoulli δοκού στην ελαστική θεώρηση Winkler είναι:

$$EI \frac{d^4 u_3}{dx_1^4} + k_0 u_3 = q(x_1) \quad (2.3.1)$$

Η γενική λύση αυτής της 4<sup>ου</sup> βαθμού συνήθους διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$u = e^{\beta x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) + e^{-\beta x} (C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)) + S_p(q)$$

$$\text{όπου } \beta = \left( \frac{k_0}{4EI} \right)^{1/4}$$

και  $S_p(q)$  μια μερική λύση της εξίσωσης.

Οι σταθερές  $C_j$  θα προκύψουν πάλι από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών, οι οποίες σε αυτή την περίπτωση είναι οι τέσσερις παρακάτω κλασικές συνθήκες.

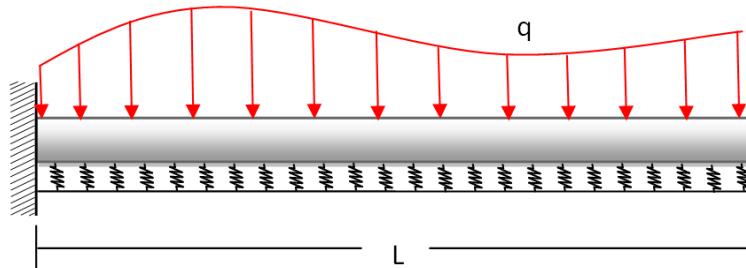
$$\begin{aligned} Q &= -EI \frac{d^3 u_3}{dx_1^3} \quad \text{ή} \quad \delta u_3 = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L \\ M &= -EI \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} \quad \text{ή} \quad \delta u_{3,1} = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L \end{aligned} \quad (2.3.2)$$



### 3. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΠΡΟΒΟΛΟ

#### 3.1. ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Από την περίπτωση της κλασικής γραμμικής θεώρησης Winkler, θεωρούμε το ακόλουθο μοντέλο του προβόλου :



Εικόνα 11 - Το πρόβλημα του Προβόλου

Η μεταβολική διατύπωση του παραπάνω προβλήματος μπορεί να διατυπωθεί όπως παρακάτω:

Εισάγουμε τον επόμενο χώρο Sobolev

$$U = \{u \in H^3(0, L) : u(0) = u'(0) = u''(0) = 0\}$$

οπότε έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

**Πρόβλημα P1:** Να βρεθεί  $u \in U$ , τέτοιο ώστε

$$-g^2 E I u^{(6)} + E(I + g^2 A)u^{(4)} + k_0 u = q.$$

Το πρόβλημα P1 μπορεί να λυθεί άμεσα υπολογίζοντας τα αόριστα ολοκληρώματα. Ωστόσο, αυτή η μέθοδος επίλυσης του προβλήματος συνοριακών τιμών λειτουργεί μόνο σε μία διάσταση και δε γενικεύεται σε προβλήματα περισσότερων διαστάσεων. Για το λόγο αυτό, η **μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων** αναπτύσσεται για το πρόβλημα P1.

Η διαδικασία εύρεσης λύσης του προβλήματος P1 θα προχωρήσει σε δύο φάσεις, οι οποίες αποτελούν τα δύο βασικά βήματα που πρέπει να κάνει κανείς για να λύσει ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών μέσω της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Στο πρώτο βήμα, πρέπει να μετατρέψουμε το αρχικό πρόβλημα συνοριακών τιμών στην **ασθενή του μορφή**. Το δεύτερο βήμα είναι η **διακριτοποίηση**, όπου η ασθενής μορφή

διακριτοποιείται σε έναν πεπερασμένο χώρο και στη συνέχεια επιλύεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

### 3.2. ΒΗΜΑ 1 - ΑΣΘΕΝΗΣ ΜΟΡΦΗ

Οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να οριστούν από τη μεταβολική διατύπωση της εξίσωσης (1.21). Στην περίπτωση μας, πρέπει να προστεθεί και ο όρος που αντιστοιχεί στη δυναμική ενέργεια που παράγεται από την ελαστική θεώρηση. Έτσι, θα έχουμε

$$-S \frac{d^6 u}{dx^6} + C \frac{d^4 u}{dx^4} + k_0 u = q \quad (3.2.1)$$

όπου θέσαμε  $S = g^2 EI$ ,  $C = E(I + g^2 A)$  για ευκολία στις πράξεις

Πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με τη (συνάρτηση βάρους)  $w$ , η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες θα έχουμε:

$$-S w \frac{d^6 u}{dx^6} + C w \frac{d^4 u}{dx^4} + k_0 w u = w q \quad (3.2.2)$$

ολοκληρώνουμε πάνω στο μήκος της δοκού:

$$-S \int_0^L w \frac{d^6 u}{dx^6} dx + C \int_0^L w \frac{d^4 u}{dx^4} dx + k_0 \int_0^L w u dx = \int_0^L w q dx \quad (3.2.3)$$

και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες θα έχουμε:

$$\begin{aligned} S \int_0^L \frac{dw}{dx} \frac{d^5 u}{dx^5} dx - S \left[ w \frac{d^5 u}{dx^5} \right]_0^L - C \int_0^L \frac{dw}{dx} \frac{d^3 u}{dx^3} dx + C \left[ w \frac{d^3 u}{dx^3} \right]_0^L + k_0 \int_0^L w u dx \\ = \int_0^L w q dx \end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned} -S \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} dx + S \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]_0^L - S \left[ w \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right]_0^L + C \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\ - C \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_0^L + C \left[ w \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_0^L + k_0 \int_0^L w u dx = \int_0^L w q dx \end{aligned}$$

⇒

$$S \int_0^L \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx - S \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_0^L + S \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]_0^L - S \left[ w \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right]_0^L + C \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

$$- C \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_0^L + C \left[ w \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_0^L + k_0 \int_0^L w u dx = \int_0^L w q dx$$

Ευκολότερα, μπορεί να γραφτεί:

$$S \int_0^L w''' u''' dx - S[w'' u''']_0^L + S[w' u^{IV}]_0^L - S[wu^V]_0^L + C \int_0^L w'' u'' dx - C[w' u'']_0^L$$

$$+ C[wu''']_0^L + k_0 \int_0^L w u dx = \int_0^L w q dx$$

⇒

$$-S[w'' u''']_0^L + S[w' u^{IV}]_0^L - S[wu^V]_0^L - C[w' u'']_0^L + C[wu''']_0^L$$

$$+ S \int_0^L w''' u''' dx + C \int_0^L w'' u'' dx \quad (3.2.4)$$

$$+ k_0 \int_0^L w u dx = \int_0^L w q dx$$

όπου αν αντικαταστήσουμε αντίστροφα  $C = E(I + g^2 A)$  και  $S = g^2 EI$ , θα πάρουμε την τελική μορφή

$$g^2 EI \int_0^L w''' u''' dx + E(I + g^2 A) \int_0^L w'' u'' dx + k_0 \int_0^L w u dx = \int_0^L w q dx \quad (3.2.5)$$

με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες, όπως αυτές προκύπτουν από τη σχέση (3.2.4)

$$-g^2 EI[w'' u''']_0^L + [w'(EI g^2 u^{IV} - E(I + g^2 A)u'')]_0^L$$

$$+ [w(E(I + g^2 A)u''' - EI g^2 u^V)]_0^L = 0 \quad (3.2.6)$$

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Μπορούμε, επίσης, να εισαγάγουμε ένα μοντέλο με **μη γραμμική θεώρηση Winkler**. Η μεταβολική διατύπωση, σε αυτήν την περίπτωση, γίνεται

$$g^2 EI \int_0^L w''' u''' dx + E(I + g^2 A) \int_0^L w'' u'' dx + \int_0^L k(u) w u dx = \int_0^L w q dx$$

$$-g^2 EI [w'' u''']_0^L + [w' (EI g^2 u^{IV} - E(I + g^2 A) u'')]_0^L + [w (E(I + g^2 A) u''' - EI g^2 u^V)]_0^L$$

όπου  $k(u) = k_0 + k_1 u^2$ . □

Έτσι, λοιπόν, προκύπτει η διατύπωση του πατακάτω προβλήματος P2:

**Πρόβλημα P2:** Να βρεθεί  $u \in U$ , τέτοιο ώστε

$$a(u, w) = F(w) \quad \text{στο } (0, L), \quad \forall w \in U$$

όπου  $a(u, w): U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ , ένα διγραμμικό συναρτησιακό, που ορίζεται από:

$$a(u, w) := g^2 EI \int_0^L w''' u''' dx + E(I + g^2 A) \int_0^L w'' u'' dx + k_0 \int_0^L w u dx$$

και  $F(w): U \rightarrow \mathbb{R}$ , ένα γραμμικό συναρτησιακό, που ορίζεται από:

$$F(w) := \int_0^L w q dx.$$

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Το πρόβλημα P2 αποτελεί την **ασθενή μορφή** του αρχικού προβλήματος P1. Προφανώς η λύση του P2 αποτελεί και λύση του P1. Για το μεταβολικό πρόβλημα P2, είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδική λύση.

### 3.3. ΕΠΙΛΥΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ P2 - ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ

**Πρόταση:**  $\forall q \in U'$ , υπάρχει μοναδική  $u \in U$  λύση του προβλήματος P2. Επιπλέον, έχουμε την *a priori* εκτίμηση ευστάθειας

$$\|u\|_U \leq C \|q\|_{U'}$$

όπου  $C = (C_F g^2 EI)^{-1} \in \mathbb{R}^+$ ,  $C_F$  είναι η ανισοτική σταθερά του Friedrichs, η οποία εξαρτάται μόνο από το πεδίο ορισμού.



**Απόδειξη Πρότασης**

Ξεκινάμε με τη συνέχεια του  $a(u, w)$ . Παρότι αυτή η ιδιότητα είναι προφανής για τη δική μας διγραμμική μορφή, θα κάνουμε την αντίστοιχη ανάλυση με σκοπό να βρούμε μια εκτίμηση της σταθεράς της συνέχειας. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} |a(u, w)| &\leq g^2 EI \int_0^L |u''''| |w''''| dx + EI \int_0^L |u''| |w''| dx + k_0 \int_0^L |u| |w| dx \\ &\leq \max(g^2 EI, EI, k_0) \left( \int_0^L |u''''| |w''''| dx + \int_0^L |u''| |w''| dx + \int_0^L |u| |w| dx \right) \end{aligned}$$

και από την ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} |a(u, w)| &\leq g^2 EI \int_0^L |u''''| |w''''| dx + EI \int_0^L |u''| |w''| dx + k_0 \int_0^L |u| |w| dx \\ &\leq \max(g^2 EI, EI, k_0) \\ &\quad \left( \|u\|_U \|w\|_U + \sqrt{\int_0^L |u''|^2 dx} \sqrt{\int_0^L |w''|^2 dx} + \|u\|_{H^0(0,L)} \|w\|_{H^0(0,L)} \right) \\ &\leq 3 \max(g^2 EI, EI, k_0) \|u\|_U \|w\|_U \end{aligned}$$

Επιπλέον, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι το  $a(u, w)$  είναι **V-ελλειπτικό**. Έχουμε

$$\begin{aligned} a(u, u) &= g^2 EI \int_0^L (u'''')^2 dx + EI \int_0^L (u'')^2 dx + k_0 \int_0^L (u)^2 dx \geq g^2 EI \int_0^L (u'''')^2 dx \\ &= g^2 EI \|u\|_U^2 \end{aligned}$$

Αξιοποιώντας την ανισότητα Friedrichs, τελικά έχουμε

$$a(u, u) \geq C_F g^2 EI \|u\|_U^2$$

όπου  $C_F$  είναι η σταθερά της ανισότητας Friedrich και  $\|u\|_U$  παριστάνει μια ημινόρμα στο χώρο  $U$ .

Έχοντας εξασφαλίσει τη συνέχεια και τη V-ελλειπτικότητα για το  $a(u, w)$ , με απλή εφαρμογή του θεωρήματος Lax-Milgram, ολοκληρώνουμε την απόδειξη της πρότασης.

□

### 3.4 ΒΗΜΑ 2 - ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ P2 ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ (ΜΕΘΟΔΟΣ GALERKIN)

#### 3.4.1 ΔΑΙΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Η μέθοδος επίλυσης αυτού του προβλήματος που περιγράφεται είναι αντιπροσωπευτική της λύσης προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη μέθοδο Galerkin.

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών P2, το οποίο μπορούμε να το εκφράσουμε ως

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u, w) = F(w) \text{ στο } \Omega, \quad \forall w \in U \\ \text{συνοριακές συνθήκες στο } \Gamma \end{array} \right.$$

όπου  $\Omega$  είναι το διάστημα  $[0, L]$  και το σύνορο  $\Gamma$  τα σημεία 0 και  $L$ . Η αριθμητική επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία γίνεται σε τέσσερις φάσεις:

**1<sup>η</sup> φάση:** Κάνουμε μία **διαμέριση** της περιοχής  $\Omega$  σε ένα πεπερασμένο πλήθος απλών υποσυνόλων, τα πεπερασμένα στοιχεία (υποδιαστήματα του  $[0, L]$ ).

**2<sup>η</sup> φάση:** Διαλέγουμε ένα **χώρο συναρτήσεων  $w$ , πεπερασμένης διάστασης  $V_n$** , οι οποίες είναι συνήθως πολυώνυμα σε κάθε τμήμα της διαμέρισης του  $\Omega$ . Ο χώρος  $V_n$  μπορεί να είναι υπόχωρος του χώρου  $V$ , στον οποίο βρίσκεται η θεωρητική (ακριβής) λύση του προβλήματος. Σημειωτέον ότι συνήθως  $V_n \subset C^k(\bar{\Omega})$ , για κάποιο μικρό  $k$ , τυπικά  $k \leq 2$ .

**3<sup>η</sup> φάση:** Διαλέγουμε μία βάση  $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$  του χώρου  $V_n$  και προσεγγίζουμε την ακριβή λύση  $u$  με μία συνάρτηση της μορφής

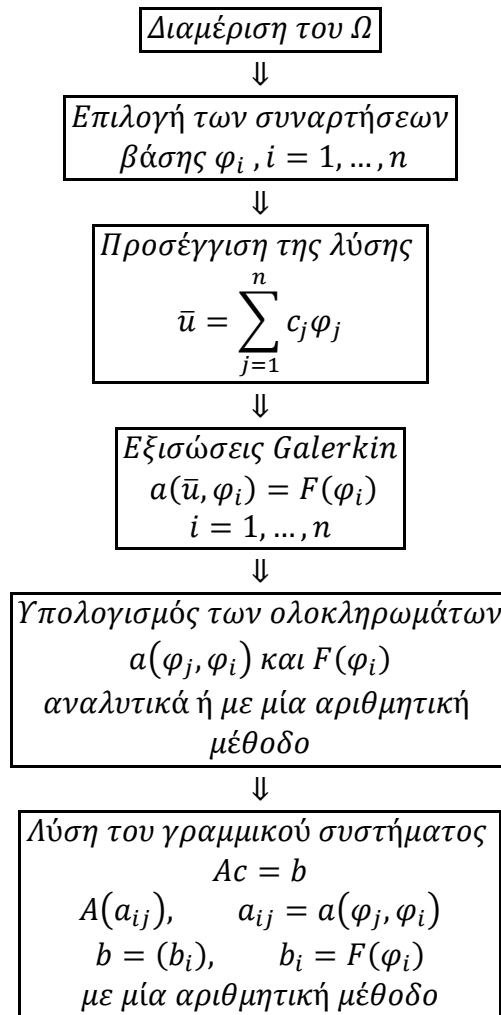
$$\bar{u}_n = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \in V_n, \quad c_j \in \mathbb{R}.$$

Οι συναρτήσεις  $\varphi_j$  κατασκευάζονται έτσι, ώστε να έχουν όσο το δυνατόν μικρότερο φορέα και προσδιορίζονται με ένα πεπερασμένο πλήθος παρεμβολικών συνθηκών (εδώ τύπου Hermite), σε επιλεγμένα σημεία του  $\Omega$ . Οι σταθερές  $c_j$  αποτελούν τους βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος.

**4<sup>η</sup> φάση:** Χρησιμοποιούμε κάποια μέθοδο προσέγγισης των εξισώσεων του προβλήματος. Αυτό σημαίνει ότι αντικαθιστούμε τις εξισώσεις με ένα πεπερασμένο πλήθος προσεγγιστικών

αλγεβρικών εξισώσεων. Αν το συναρτησιακό  $a(u, w)$  είναι γραμμικό, τότε αυτές οι εξισώσεις αποτελούν γραμμικό σύστημα  $n \times n$ ,  $Ac = b$ , όπου ο πίνακας  $A$  περιέχει "λίγα" μη μηδενικά στοιχεία (αυτό προκύπτει από το "μικρό" φορέα των  $\varphi_j$ ).

Ο γενικός αλγόριθμος της μεθόδου δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



### 3.4.2 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ GALERKIN

Η αριθμητική μέθοδος της μεθόδου Galerkin με πεπερασμένα στοιχεία έχει αναπτυχθεί εντατικά κατά τα τελευταία 35 περίπου χρόνια διότι, ακριβώς, αποτέλεσε ευνοϊκό μαθηματικό μοντέλο για την ανάπτυξη μιας ικανοποιητικής θεωρίας σφάλματος (αντίθετα με τις άλλες μεθόδους). Βασική τεχνική για τη μελέτη σφάλματος εδώ είναι οι χώροι Sobolev, που είναι ειδική περίπτωση χώρων Hilbert. Τα πεπερασμένα στοιχεία είναι προσεγγιστικές συναρτήσεις βάσης με "μικρό φορέα", δηλαδή μηδενιζόμενα έξω από ένα "μικρό" στοιχειώδες σύνολο του πεδίου ορισμού  $\Omega$  της διαφορικής εξίσωσης. Αναπτύσσονται, λοιπόν, διάφορα φράγματα σφάλματος που αντιστοιχούν σε διάφορα προσεγγιστικά μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων. Τα βασικά αποτελέσματα που θα χρειαστούν για την εκτίμηση του τυπικού σφάλματος της μεθόδου στο πρόβλημά μας θα παρουσιαστούν σε αυτή την ενότητα.

Εισάγουμε ένα διαμελισμό  $N+1$  σημείων του διαστήματος  $[0, L]$  ως εξής:

$$\mathfrak{I}_N := 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = L, \quad N \in \mathbb{N}$$

και το χώρο:

$$U_h = \left\{ \begin{array}{l} u_h \in C^2[0, L]: u_h(0) = u_h'(0) = u_h''(0) = 0 \\ u_h|_{[x_{i-1}, x_i]} = \sum_{j=1}^N a_{i,j} x^j, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

**Λήμμα Cea:** Έστω  $V$  ένας πραγματικός Hilbert χώρος με νόρμα  $\|\cdot\|$ . Έστω  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ένα διγραμμικό συναρτησιακό με τις εξής ιδιότητες:

- $|a(v, w)| \leq \gamma \|v\| \|w\|$  για κάποια σταθερά  $\gamma > 0$  και για κάθε  $v, w \in V$  (συνέχεια)
- $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$  για κάποια σταθερά  $\alpha > 0$  και για κάθε  $v \in V$  ( $V$ -ελλειπτικότητα)

Έστω  $L: V \rightarrow \mathbb{R}$  ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Θεωρούμε το πρόβλημα εύρεσης ενός στοιχείου  $u \in V$  τέτοιου, ώστε:

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{για όλα τα } v \in V$$

Θεωρούμε τώρα το ίδιο πρόβλημα σε έναν πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο  $V_h$  του  $V$ , έτσι ώστε το  $u_h \in V_h$  να ικανοποιεί τη σχέση

$$a(u_h, v) = L(v) \quad \text{για όλα τα } v \in V_h$$

Από το θεώρημα Lax-Milgram, κάθε ένα από αυτά τα προβλήματα έχει μοναδική λύση. Το λήμμα του Cea αναφέρει ότι

$$\|u - u_h\| \leq \frac{\gamma}{a} \|u - v\| \quad \text{για όλα τα } v \in V_h$$

Δηλαδή, η λύση  $u_h$ , είναι η βέλτιστη προσεγγιση της  $u$  στον υπόχωρο  $V_h$ , χωρίς να λαμβάνεται υπόψη μια πιθανή διαφορά λόγω της σταθεράς  $\frac{\gamma}{a}$ .

Μια απλή εφαρμογή του λήμματος του Cea επάγει την εν μέρει βελτιστοποίηση όσον αφορά τη σύγκλιση

$$\|u - u_h\|_U \leq \sqrt{\frac{3 \max(g^2 EI, EI, k_0)}{C_F g^2 EI}} \inf_{w^h \in U_h} \|u - w^h\|_U.$$

Στην περίπτωση μας, οι εκτιμήσεις του τυπικού σφάλματος για τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι έγκυρες. Θεωρώντας ότι για την ακριβή λύση ισχύει  $u \in H^6(0, L)$ , το σφάλμα μετρούμενο στην  $U$ -νόρμα ικανοποιεί τη σχέση

$$\|u - u_h\|_m \leq ch^{k+1-m} \|u\|_{k+1}$$

Για το πρόβλημά μας έχουμε ότι  $m = 3$  και  $k = 5$ , οπότε τελικά

$$\|u - u_h\|_3 \leq ch^3 \|u\|_6$$

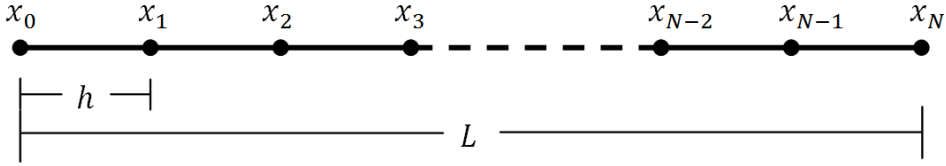
όπου

$$\|u\|_n = \sqrt{\int_0^L \left( u^2 + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{d^nu}{dx^n} \right)^2 \right) dx}$$

□

### 3.4.3 - ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

#### 3.4.3.1 - Διαμέριση του $\Omega = [0, L]$



Εικόνα 12 - Διαμέριση του χώρου

Εισάγουμε τη διαμέριση των  $N+1$  σημείων του διαστήματος  $[0, L]$  όπως στην προηγούμενη παράγραφο:

$$\mathfrak{I}_N := 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = L, \quad N \in \mathbb{N}$$

και το χώρο

$$U_h = \left\{ \begin{array}{l} u_h \in H^3(0, L): u_h(0) = u_h'(0) = u_h''(0) = 0 \\ u_h|_{[x_{i-1}, x_i]} = \sum_{j=1}^N a_{i,j} x^j, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

της προσεγγιστικής λύσης  $u_h$ . Έτσι, λοιπόν, θα κατασκευάσουμε την προσεγγιστική λύση  $u_h$  στον  $U_h$ , συναρτήσει των συναρτήσεων βάσης.

#### 3.4.3.2 - Επιλογή των συναρτήσεων βάσης $\varphi_i$

Για την επιλογή των συναρτήσεων βάσης θα χρησιμοποιήσουμε πολυώνυμα παρεμβολής Hermite.

Γενικά, ένα πολυώνυμο παρεμβολής Hermite  $q$  (εδώ  $u_h$ ) είναι μια ομαλή προσέγγιση μιας συνάρτησης  $f$  (εδώ της  $u$ ) με πολυώνυμα, τα οποία παρεμβάλλουν την  $f$  στα σημεία  $x_0, \dots, x_N$ . Επίσης, η παράγωγος του  $q$  παρεμβάλλει την παράγωγο της  $f$  στα ίδια σημεία. Έτσι, το πολυώνυμο  $q$  έχει την ίδια τιμή και την ίδια κλίση με την  $f$  στα σημεία  $x_i$ .

Το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ, θα παρεμβάλλει όχι μόνο τη λύση  $u$  και την παράγωγό της  $u' = v$ , αλλά και τη δεύτερη παράγωγο  $u'' = w$  στα σημεία  $x_i$ .

Έτσι, λοιπόν, θα κατασκευάσουμε το πολυώνυμο αυτό, το οποίο θα πληρεί τις παρακάτω προϋποθέσεις

- Το πολυώνυμο  $u_h \in \mathbb{P}_{3(N+1)}$  θα ικανοποιεί τις σχέσεις

$$u_h(x_i) = u(x_i), \quad i = 0, \dots, N$$

$$u'_h(x_i) = u'(x_i), \quad i = 0, \dots, N$$

$$u''_h(x_i) = u''(x_i), \quad i = 0, \dots, N$$

- Το πολυώνυμο  $u_h$  είναι μοναδικό και καλείται **πολυώνυμο παρεμβολής Hermite** της  $u$  στα σημεία  $x_0, \dots, x_N$ .
- Το  $u_h$  μπορεί να πατασταθεί με τη μορφή

$$\begin{aligned} u_h &= \sum_{i=0}^N \varphi_{3i-2}(x)u(x_i) + \sum_{i=0}^N \varphi_{3i-1}(x)u'(x_i) + \sum_{i=0}^N \varphi_{3i}(x)u''(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^N \varphi_{3i-2}(x)u(x_i) + \sum_{i=0}^N \varphi_{3i-1}(x)v(x_i) + \sum_{i=0}^N \varphi_{3i}(x)w(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^N c\varphi_i \end{aligned}$$

όπου οι  $\varphi_i(x)$  είναι οι συναρτήσεις βάσης που θα προκύψουν από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών και  $c = \{c_i\}$  είναι το διάνυσμα με τους **ολικούς βαθμούς ελευθερίας**.

### 3.4.3.3 - Προσέγγιση της λύσης $u_h$

Εισάγουμε, καταρχήν, το πολυώνυμο παρεμβολής για κάθε στοιχείο της διαμέρισης (διάστημα  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, N$ ). Ένα 5<sup>ου</sup> βαθμού πολυώνυμο, αφού στο πρόβλημά μας έχουμε μια διαφορική εξίσωση 6<sup>ου</sup> βαθμού. Έτσι

$$u_h = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 \quad (3.4.1)$$

Θα κατασκευάσουμε την προσέγγιση, ώστε να μεταφέρει τις τιμές της στο  $[0,1]$ , με τον ίδιο τρόπο που μειώσαμε το μέγεθος της μεταβλητής  $x$  της δοκού και της παραμόρφωσης  $u$  στη στατική ανάλυση, διαιρώντας τες με το μήκος του διαστήματος  $h$  του  $[x_i, x_{i+1}]$ . Δηλαδή, θα κάνουμε την παρακάτω αδιαστατοποίηση:

$$\tilde{x} := \frac{x}{h}, \quad \tilde{u}_h(\tilde{x}) := u_h(x)$$

οπότε και

$$\tilde{u}'_h(\tilde{x}) := \frac{u'_h(x)}{h} \quad \text{και} \quad \tilde{u}''_h(\tilde{x}) := \frac{u''_h(x)}{h^2}$$

Έτσι, θα απεικονίσουμε την προσέγγιση από το διάστημα  $[x_i, x_{i+1}]$  μήκους  $h$  στο διάστημα  $[0,1]$  μήκους 1. Για ευκολία θα χρησιμοποιήσουμε τους ίδιους συμβολισμούς  $x$  και  $u_h$ , αλλά θα αλλάξει ο χώρος της λύσης, δηλαδή

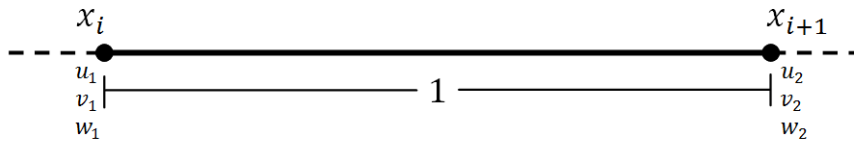
$$x \in [0,1] \quad \text{και} \quad u_h \in C^2[0,1]$$

Έτσι, λοιπόν,

$$\begin{aligned} u_h(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 \\ u'_h(x) &= \frac{c_1 + 2xc_2 + 3x^2c_3 + 4x^3c_4 + 5x^4c_5}{h} \\ u''_h(x) &= \frac{2c_2 + 6xc_3 + 12x^2c_4 + 20x^3c_5}{h^2} \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

#### 3.4.3.4 - Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

Κάθε διάστημα  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, N$ , αποτελεί και ένα **πεπερασμένο στοιχείο**. Σε κάθε στοιχείο αντιστοιχούν 2 **κόμβοι**, το σημείο  $x_i$  και το σημείο  $x_{i+1}$ . Σε κάθε κόμβο αντιστοιχούμε τρεις **βαθμούς ελευθερίας**: τη μετατόπιση  $u$ , την κλίση  $u' = v$  και τη δεύτερη παράγωγο της  $u$ , την  $u'' = w$ . Στο τοπικό σύστημα του στοιχείου, όπου έχουμε δύο κόμβους, ονομάζουμε με  $u_1, v_1, w_1$  τους βαθμούς ελευθερίας του αριστερού κόμβου και με  $u_2, v_2, w_2$  τους αντίστοιχους του δεξιού, όπως βλέπουμε και στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 13 - Πεπερασμένο στοιχείο

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στο πολυώνυμο παρεμβολής για κάθε στοιχείο, θα πάρουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} u_h(0) &= u_1, & u_h(1) &= u_2 \\ u'_h(0) &= v_1, & u'_h(1) &= v_2 \\ u''_h(0) &= w_1, & u''_h(1) &= w_2 \end{aligned} \quad (3.4.3)$$



Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.4.2) στο σύστημα (3.4.3) και επιλύοντάς το ως προς τις σταθερές  $c_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$ , θα βρούμε την έκφραση της  $u_h$  συναρτήσει των  $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ :

$$\begin{aligned}
 u_h = & (1 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5)u_1 + (hx - 6hx^3 + 8hx^4 - 3hx^5)v_1 \\
 & + \frac{1}{2}(h^2x^2 - 3h^2x^3 + 3h^2x^4 - h^2x^5)w_1 + (10x^3 - 15x^4 + 6x^5)u_2 \\
 & + (-4hx^3 + 7hx^4 - 3ht^5)v_2 + \frac{1}{2}(h^2x^3 - 2h^2x^4 + h^2x^5)w_2
 \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

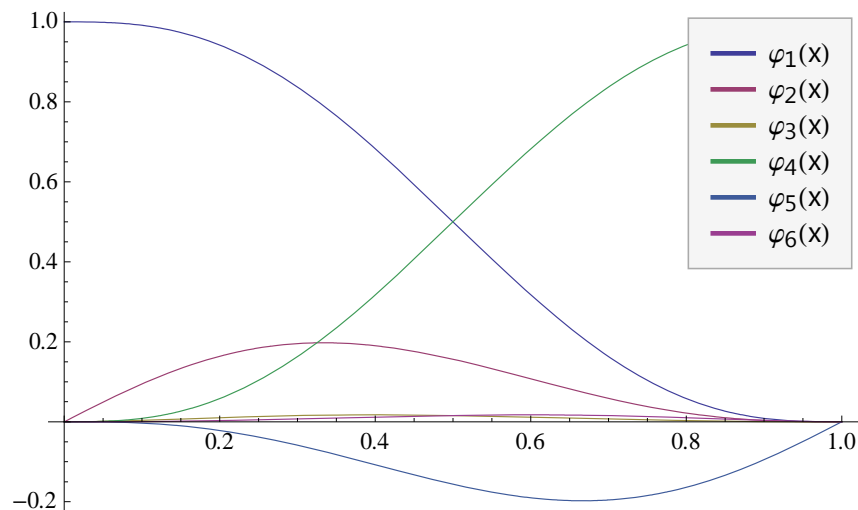
Τέλος, θέτουμε

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= 1 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5 & \varphi_4 &= 10x^3 - 15x^4 + 6x^5 \\
 \varphi_2 &= hx - 6hx^3 + 8hx^4 - 3hx^5 & \varphi_5 &= -4hx^3 + 7hx^4 - 3hx^5 \\
 \varphi_3 &= \frac{1}{2}(h^2x^2 - 3h^2x^3 + 3h^2x^4 - h^2x^5) & \varphi_6 &= \frac{1}{2}(h^2x^3 - 2h^2x^4 + h^2x^5)
 \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Οι συναρτήσεις  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  αποτελούν τις **συναρτήσεις βάσης** της προσέγγισης  $u_h$ , οπότε η  $u_h$ , πάνω σε κάθε στοιχείο, μπορεί να γραφεί ως

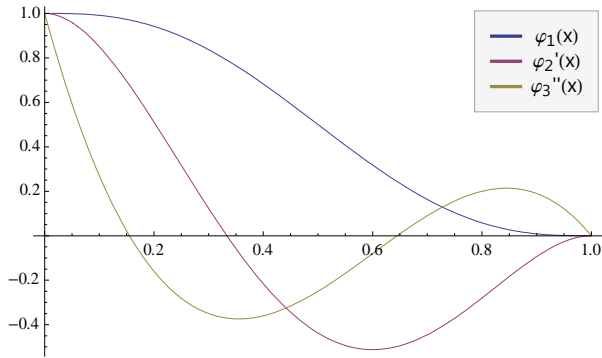
$$\mathbf{u}_h = \varphi_1 \mathbf{u}_1 + \varphi_2 \mathbf{v}_1 + \varphi_3 \mathbf{w}_1 + \varphi_4 \mathbf{u}_2 + \varphi_5 \mathbf{v}_2 + \varphi_6 \mathbf{w}_2 \quad (3.4.6)$$

Οι συναρτήσεις αυτές φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα:

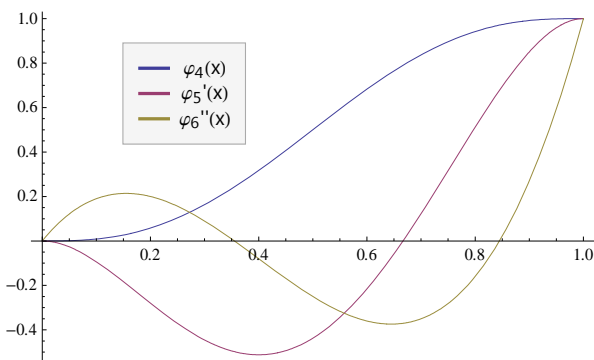


Εικόνα 14 - Συναρτήσεις Hermite

και ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:



$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \varphi_2'(0) = \varphi_3''(0) = 1 \\ \varphi_1(1) &= \varphi_2'(1) = \varphi_3''(1) = 0 \end{aligned} \quad (3.4.7)$$



$$\begin{aligned} \varphi_4(1) &= \varphi_5'(1) = \varphi_6''(1) = 1 \\ \varphi_4(0) &= \varphi_5'(0) = \varphi_6''(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Εικόνα 15 - Συνθήκες Συναρτήσεων Βάσης

### 3.4.3.5 - Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων $a(\varphi_i, \varphi_j)$ και $F(\varphi_i)$

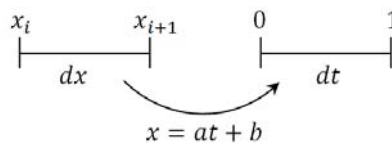
Έχουμε ορίσει το διγραμμικό συναρτησιακό

$$a(u, w) = g^2 EI \int_0^L w''' u''' dx + E(I + g^2 A) \int_0^L w'' u'' dx + k_0 \int_0^L w u dx$$

όπου το  $w$  ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος του προβόλου.

Επειδή έχουμε διαμερίσει το  $[0, L]$  σε  $N$  διαστήματα (στοιχεία), θα υπολογίσουμε το  $a(u, w)$  σε κάθε μήκος  $h$  του στοιχείου. Προηγουμένως απεικονίσαμε το διάστημα  $[x_i, x_{i+1}]$  μήκους  $h$  στο διάστημα  $[0, 1]$  μήκους 1. Αντίστοιχα, τώρα, θα μετατρέψουμε το  $a(u, w)$  στο διάστημα  $[0, 1]$ .

Η απεικόνιση είναι η εξής:



Λύνοντας το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} x_i = b \\ x_{i+1} = a + b \end{array} \right| \Rightarrow a = (x_{i+1} - x_i) = h$$

βρίσκουμε ότι  $x = ht + x_i$  και  $dx = hdt$ , ενώ

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{h^2} \frac{d^2u}{dt^2}, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{1}{h^3} \frac{d^3u}{dt^3}$$

Οπότε θα έχουμε

$$\int_0^L \frac{d^3w}{dx^3} \frac{d^3u}{dx^3} dx = \int_0^1 \frac{1}{h^6} \frac{d^3u}{dt^3} \frac{d^3u}{dt^3} hdt$$

$$\int_0^L \frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2u}{dx^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{h^4} \frac{d^2u}{dt^2} \frac{d^2u}{dt^2} hdt$$

$$\int_0^L wudx = \int_0^1 wuhdt$$

$$\int_0^L wqdx = \int_0^1 wqhdt.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} a(u, w)|_{[0,L]} &= g^2 EI \int_0^L \frac{d^3w}{dx^3} \frac{d^3u}{dx^3} dx + E(I + g^2 A) \int_0^L \frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2u}{dx^2} dx + k_0 \int_0^L wudx \\ &= g^2 EI \int_0^1 \frac{1}{h^6} \frac{d^3u}{dt^3} \frac{d^3u}{dt^3} hdt + E(I + g^2 A) \int_0^1 \frac{1}{h^4} \frac{d^2u}{dt^2} \frac{d^2u}{dt^2} hdt \\ &\quad + k_0 \int_0^1 wuhdt = a(u, w)|_{[0,1]} \end{aligned}$$

και

$$F(w)|_{[0,L]} = \int_0^L wqdx = \int_0^1 wqhdt = F(w)|_{[0,1]}.$$

Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των πινάκων που προκύπτουν από την αντικατάσταση των συναρτήσεων βάρους στις θέσεις των  $u$  και  $w$  διαδοχικά:

Ονομάζουμε  $K_3, K_2, K_0$ , τα μητρώα που θα προκύψουν από τον υπολογισμό των

$$g^2 EI \int_0^1 \frac{1}{h^5} \varphi_i''' \varphi_j''' dt, \quad E(I + g^2 A) \int_0^1 \frac{1}{h^3} \varphi_i'' \varphi_j'' dt, \quad k_0 \int_0^1 \varphi_i \varphi_j hdt \quad i, j = 1, \dots, 6$$

αντίστοιχα. Το άθροισμα των  $K_3, K_2, K_0$  αντιστοιχεί στο μητρώο  $a(\varphi_i, \varphi_j)$ , το οποίο αποτελεί το **Τοπικό Μητρώο Δυσκαμψίας  $k^e$**  του στοιχείου, χαρακτηριστικό του προβλήματος.

Έτσι, μετά από πράξεις, θα πάρουμε

$$K_3 = \frac{g^2 EI}{h^5} \begin{pmatrix} 720 & 360h & 60h^2 & -720 & 360h & -60h^2 \\ 360h & 192h^2 & 36h^3 & -360h & 168h^2 & -24h^3 \\ 60h^2 & 36h^3 & 9h^4 & -60h^2 & 24h^3 & -3h^4 \\ -720 & -360h & -60h^2 & 720 & -360h & 60h^2 \\ 360h & 168h^2 & 24h^3 & -360h & 192h^2 & -36h^3 \\ -60h^2 & -24h^3 & -3h^4 & 60h^2 & -36h^3 & 9h^4 \end{pmatrix} \quad (3.4.9)$$

όπου το στοιχείο  $K_3(1,2)$  αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα

$$g^2 EI \int_0^1 \frac{1}{h^5} \varphi_1''' \varphi_2''' dt$$

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Το μητρώο  $K_3$ , καθώς και τα υπόλοιπα μητρώα είναι συμμετρικά. Αυτό προκύπτει από το ότι το διγραμμικό συναρτησιακό  $a(\varphi_i, \varphi_j)$  είναι συμμετρικό. Αντίστοιχα

$$K_2 = \frac{E(I + g^2 A)}{h^3} \begin{pmatrix} \frac{120}{7} & \frac{60h}{7} & \frac{3h^2}{7} & -\frac{120}{7} & \frac{60h}{7} & -\frac{3h^2}{7} \\ 60h & 192h^2 & 11h^3 & -60h & 108h^2 & -4h^3 \\ \frac{7}{35} & \frac{3h^2}{11h^3} & \frac{3h^4}{35} & -\frac{7}{35} & \frac{3h^2}{4h^3} & \frac{h^4}{35} \\ \frac{7}{35} & \frac{11h^3}{35} & \frac{3h^4}{35} & -\frac{7}{35} & \frac{3h^2}{35} & \frac{70}{35} \\ 120 & 60h & 3h^2 & 120 & 60h & 3h^2 \\ -\frac{7}{7} & -\frac{60h}{7} & -\frac{3h^2}{7} & \frac{7}{7} & -\frac{60h}{7} & -\frac{3h^2}{7} \\ 60h & 108h^2 & 4h^3 & -60h & 192h^2 & -11h^3 \\ \frac{7}{35} & \frac{3h^2}{35} & \frac{3h^4}{35} & -\frac{7}{35} & \frac{3h^2}{35} & -\frac{35}{35} \\ \frac{3h^2}{35} & \frac{4h^3}{35} & \frac{h^4}{70} & \frac{3h^2}{7} & \frac{11h^3}{35} & \frac{3h^4}{35} \\ -\frac{7}{7} & -\frac{60h}{35} & -\frac{3h^2}{70} & \frac{7}{7} & -\frac{60h}{35} & -\frac{3h^2}{35} \end{pmatrix} \quad (3.4.10)$$

και

$$K_0 = k_0 h \begin{pmatrix} \frac{181}{462} & \frac{311h}{4620} & \frac{281h^2}{55440} & \frac{25}{231} & -\frac{151h}{4620} & \frac{181h^2}{55440} \\ 311h & 52h^2 & 23h^3 & 151h & -19h^2 & 13h^3 \\ \frac{4620}{281h^2} & \frac{3465}{23h^3} & \frac{18480}{h^4} & \frac{4620}{181h^2} & -\frac{1980}{13h^3} & \frac{13860}{h^4} \\ 55440 & 18480 & 9240 & 55440 & -13860 & 11088 \\ \frac{25}{231} & \frac{151h}{4620} & \frac{181h^2}{55440} & \frac{181}{462} & -\frac{311h}{4620} & \frac{281h^2}{55440} \\ 231 & 4620 & 55440 & 462 & -4620 & 55440 \\ 151h & 19h^2 & 13h^3 & 311h & 52h^2 & 23h^3 \\ -\frac{4620}{181h^2} & -\frac{1980}{13h^3} & -\frac{13860}{h^4} & -\frac{4620}{181h^2} & \frac{3465}{23h^3} & -\frac{18480}{h^4} \\ 181h^2 & 13h^3 & h^4 & 281h^2 & 23h^3 & h^4 \\ 55440 & 13860 & 11088 & 55440 & -18480 & 9240 \end{pmatrix} \quad (3.4.11)$$

όπου το στοιχείο  $K_2(1,2)$  αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα

$$E(I + g^2 A) \int_0^1 \frac{1}{h^3} \varphi_1'' \varphi_2'' dt$$

και το στοιχείο  $K_0(1,2)$  αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα

$$k_0 \int_0^1 \varphi_1 \varphi_2 h dt.$$

Έτσι, το τοπικό μητρώο δυσκαμψίας θα είναι

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{a}(\varphi_i, \varphi_j)^e = \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_0 \quad (3.4.12)$$

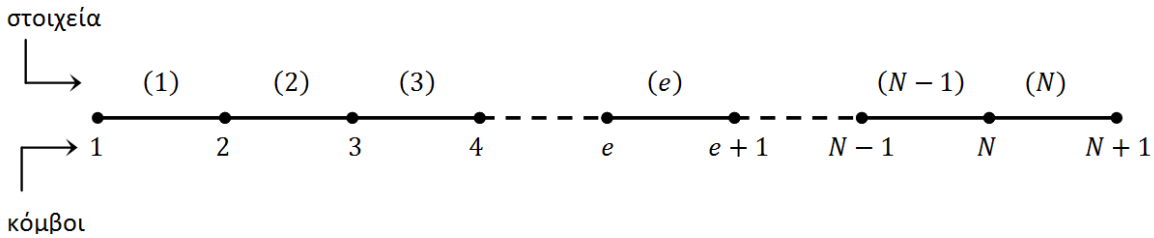
Αντίστοιχα, για τον υπολογισμό του **διανύσματος της φόρτισης**  $\mathbf{f}^e$  του στοιχείου, θα έχουμε

$$\mathbf{f}^e = F(\varphi_i) = \begin{pmatrix} \frac{hq_0}{2} \\ \frac{h^2 q_0}{10} \\ \frac{h^3 q_0}{120} \\ \frac{hq_0}{2} \\ -\frac{h^2 q_0}{10} \\ \frac{h^3 q_0}{120} \end{pmatrix} \quad (3.4.13)$$

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Εδώ θεωρήσαμε ομοιόμορφη φόρτιση  $q(x) = q_0$ , οπότε και ανεξάρτητη της ολοκλήρωσης. Γενικά, η μελέτη που θα κάνουμε, σε όλες τις περιπτώσεις της κάμψης, θα γίνει με την υπόθεση της ομοιόμορφης φόρτισης.

3.4.3.6 - Συναρμογή των τοπικών μητρώων δυσκαμψίας και διανυσμάτων φόρτισης

Σε αυτό το βήμα θα κατασκευάσουμε τον πίνακα  $A$ , ο οποίος αποτελεί το **Ολικό Μητρώο Δυσκαμψίας  $K$**  και θα προκύψει από τη **συναρμογή** των τοπικών μητρώων δυσκαμψίας, με τρόπο τέτοιο, ώστε να ικανοποιεί τις υποθέσεις που έχουμε κάνει για το μοντέλο (τρεις βαθμοί ελευθερίας ανά κόμβο, γραμμικά μονοδιάστατα στοιχεία, ταύτιση του τοπικού συστήματος αναφοράς με αυτό του ολικού). Η διαδικασία που θα ακολουθηθεί είναι αυτή που παρουσιάζεται στο βιβλίο *The Finite Element Method* του Thomas J.R.Hughes<sup>[31]</sup>. Στην παρακάτω εικόνα, βλέπουμε τη διαμέριση που θα χρησιμοποιήσουμε:



**Συμβολισμός**

Σε αυτό το κομμάτι, θα παραθέσουμε τους συμβολισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε κατά τη διαδικασία της συναρμογής. Παραθέτουμε ξανά τους ορισμούς του τοπικού μητρώου δυσκαμψίας και του διανύσματος φόρτισης, ως εξής:

$$k^e = [k_{i,j}^e], \quad k_{i,j}^e = a(\varphi_i, \varphi_j)^e, \quad f^e = \{f_i^e\}, \quad f_i^e = F(\varphi_i), \quad 1 \leq i, j \leq 6$$

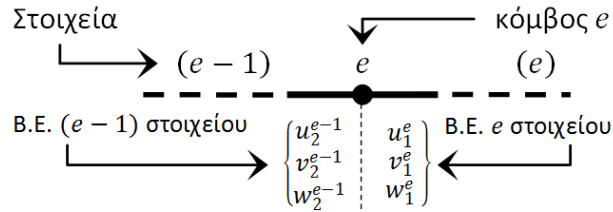
**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Η διάσταση του μητρώου  $K$ , που περιγράφει τη συμπεριφορά κάθε κόμβου για κάθε βαθμό ελευθερίας, είναι  $(3N + 3) \times (3N + 3)$ , διότι έχουμε  $N + 1$  ολικούς κόμβους και κάθε κόμβος έχει 3 βαθμούς ελευθερίας (B.E.). Έτσι, συνολικά, οι συναρτήσεις βάσης θα είναι

$$\underbrace{3}_{\text{ολικοί B.E.}} \cdot \underbrace{(N + 1)}_{\text{ολικοί κόμβοι}} \text{ και θα παράγουν ένα μητρώο } (3N + 3) \times (3N + 3).$$

Επίσης, κάθε  $k_{i,j}^e$  και  $f_i^e$  ενός στοιχείου  $e$ , αναπαρίσταται με την ακόλουθη μορφή

$$k_{i,j}^e = \begin{pmatrix} k_{1,1}^e & k_{1,2}^e & k_{1,3}^e & k_{1,4}^e & k_{1,5}^e & k_{1,6}^e \\ k_{2,1}^e & k_{2,2}^e & k_{2,3}^e & k_{2,4}^e & k_{2,5}^e & k_{2,6}^e \\ k_{3,1}^e & k_{3,2}^e & k_{3,3}^e & k_{3,4}^e & k_{3,5}^e & k_{3,6}^e \\ k_{4,1}^e & k_{4,2}^e & k_{4,3}^e & k_{4,4}^e & k_{4,5}^e & k_{4,6}^e \\ k_{5,1}^e & k_{5,2}^e & k_{5,3}^e & k_{5,4}^e & k_{5,5}^e & k_{5,6}^e \\ k_{6,1}^e & k_{6,2}^e & k_{6,3}^e & k_{6,4}^e & k_{6,5}^e & k_{6,6}^e \end{pmatrix}, \quad f_i^e = \begin{pmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \\ f_4^e \\ f_5^e \\ f_6^e \end{pmatrix}$$

Έχουμε θεωρήσει ότι κάθε κόμβος έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας. Επίσης, στο τοπικό σύστημα αναφοράς ενός στοιχείου  $e$ , ονομάσαμε  $u_1^e, v_1^e, w_1^e$  τους Β.Ε. του αριστερού κόμβου του και  $u_2^e, v_2^e, w_2^e$  τους Β.Ε. του δεξιού. Έστω, τώρα, δύο στοιχεία  $e - 1$  και  $e$ , όπως φαίνονται στο παρακατω σχήμα:



Εικόνα 16 - Βαθμοί ελευθερίας κάθε κόμβου, λόγω γειτονικών στοιχείων

Παρατηρούμε ότι οι Β.Ε.  $u_2^{e-1}, v_2^{e-1}, w_2^{e-1}$  του  $e - 1$  στοιχείου ταυτίζονται με τους Β.Ε.  $u_1^e, v_1^e, w_1^e$  του στοιχείου  $e$ . Έτσι, στις θέσεις του ολικού μητρώου  $K$  που αντιστοιχούν στον κόμβο  $e$ , θα πρέπει να προστεθούν τα αντίστοιχα στοιχεία των μητρώων των στοιχείων  $e - 1$  και  $e$ , που αναφέρονται σε αυτόν τον κόμβο, έτσι ώστε να συνυπολογιστεί η συνεισφορά και των δύο.

Έτσι, λοιπόν, θα κατασκευάσουμε κάποια βοηθητικά μητρώα, τα οποία θα "οδηγήσουν" τα στοιχεία των τοπικών μητρώων στην κατάλληλη θέση τους στο ολικό μητρώο.

### Κατασκευή μητρώου $IEN$

Το μητρώο αυτό αντιστοιχεί για κάθε στοιχείο την τοπική αρίθμηση των κόμβων στην ολική αρίθμηση της διαμέρισης. Έτσι, κατασκευάζεται από τον τύπο

$$IEN \left( \begin{array}{cc} \underbrace{\alpha}_{\text{τοπικός}} & \underbrace{e}_{\text{στοιχείο}} \\ \text{κόμβος} & \end{array} \right) = \begin{array}{c} \underbrace{A}_{\text{ολικός}} \\ \text{κόμβος} \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha = 1,2 \\ e = 1, \dots, N \\ A = 1, \dots, N + 1 \end{array}$$

και έχει ως στοιχεία την ολική αρίθμηση των κόμβων. Δηλαδή, για το στοιχείο  $e$ , οι τοπικοί του κόμβοι 1 και 2 αντιστοιχίζονται στους ολικούς κόμβους  $e$  και  $e + 1$ .

στοιχεία	$\hookrightarrow$	(1)	(2)	(3)	...	( $e$ )	...	( $N$ )
1	1	2	3	...		$e$	...	$N$
2	2	3	4	...		$e + 1$	...	$N + 1$
$\uparrow$	τοπικοί κόμβοι του στοιχείου							

**Κατασκευή μητρώου  $ID$**

Το μητρώο αυτό αντιστοιχίζει τους ολικούς βαθμούς ελευθερίας στους ολικά αριθμημένους κόμβους της διαμέρισης. Έτσι, κατασκευάζεται από τον τύπο

$$ID = \begin{pmatrix} \underbrace{i}_{\text{βαθμός}} & , & \underbrace{A}_{\text{ολικός}} \\ & & \underbrace{P}_{\text{εξίσωση}} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \underbrace{P}_{\text{ολική}} & , & \underbrace{i}_{\text{ολική}} \\ & & \underbrace{A}_{\text{ολική}} \end{matrix} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 3 \\ A = 1, \dots, N + 1 \\ P = 1, \dots, 3N + 3 \end{matrix}$$

και έχει ως στοιχεία την ολική αρίθμηση των βαθμών ελευθερίας Β.Ε. Δηλαδή, σε ένα τυχαίο κόμβο  $e$ , θα αντιστοιχίσει τους τρεις βαθμούς ελευθερίας  $u, v, w$  στην ολική αρίθμηση  $3e - 2, 3e - 1, 3e$  αντίστοιχα.

ολικοί κόμβοι

↳	1	2	3	...	$e$	...	$N$	$N + 1$
1	1	4	7	...	$3e - 2$	...	$3N - 2$	$3N + 1$
2	2	5	8	...	$3e - 1$	...	$3N - 1$	$3N + 2$
3	3	6	9	...	$3e$	...	$3N$	$3N + 3$

↑ ολικοί Β.Ε. κάθε κόμβου

**Κατασκευή μητρώου  $LM$**

Το τελικό αυτό μητρώο που κατασκευάζεται με τη βοήθεια των προηγούμενων δύο, θα οδηγήσει τα στοιχεία των τοπικών μητρώων δυσκαμψίας στην κατάλληλη θέση τους στο ολικό. Αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο της διαμέρισης τους ολικά αριθμημένους βαθμούς ελευθερίας που υπάρχουν σε αυτό. Κατασκευάζεται από τον τύπο

$$LM(i, a, e) = ID(i, IEN(a, e))$$

όπου, όπως προηγουμένως,  $i$  : ο βαθμός ελευθερίας κάθε κόμβου,  $i = 1, \dots, 3$   
 $a$  : ο τοπικός κόμβος κάθε στοιχείου,  $a = 1, 2$   
 $e$  : το στοιχείο της διαμέρισης,  $e = 1, \dots, N$

στοιχεία

↳	(1)	(2)	(3)	...	( $e$ )	...	( $N$ )	
{ 1 2 1 3 4 5 2 6	{ 1 2 3	1	4	7	...	$3e - 2$	...	$3N - 2$
		2	5	8	...	$3e - 1$	...	$3N - 1$
		3	6	9	...	$3e$	...	$3N$
	{ 1 2 3	4	7	10	...	$3e + 1$	...	$3N + 1$
		5	8	11	...	$3e + 2$	...	$3N + 2$
		6	9	12	...	$3e + 3$	...	$3N + 3$

↑ τοπικοί Β.Ε. κάθε κόμβου  
 ↑ τοπικοί κόμβοι κάθε στοιχείου  
 ↑ τοπικές εξισώσεις



### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΠΡΟΒΟΛΟ

Επειδή, όμως, το μητρώο  $LM$  έχει τρεις διαστάσεις και μας είναι πιο εύκολο να το χρησιμοποιήσουμε ως δύο διαστάσεων, κάνουμε την εξής μετατροπή:

$$LM(p, e) = LM(i, a, e) = P$$

$$p : \text{η τοπική εξίσωση, } p = 1, \dots, 6.$$

$$P : \text{η ολική εξίσωση, } P = 1, \dots, 3N + 3$$

Το μητρώο  $LM$  χωρίζεται οριζόντια σε δύο τριάδες για κάθε στοιχείο, οι οποίες αποτελούν τους βαθμούς ελευθερίας καθενός από τους δύο κόμβους του. Η χρήση του μητρώου γίνεται ως εξής:

Κάθε στοιχείο  $k_{i,j}^e$  του τοπικού μητρώου δυσκαμψίας ενός στοιχείου ( $e$ ) θα προστίθεται στη θέση  $K_{LM(i,e),LM(j,e)}$ . Δηλαδή, ο γενικός αλγόριθμος είναι

$$K(LM(i, e), LM(j, e)) \leftarrow K(LM(i, e), LM(j, e)) + k^e(i, j) \quad (3.4.14)$$

Έτσι, για παράδειγμα, το στοιχείο  $k^3(2,1)$  του τρίτου στοιχείου θα προστεθεί στη θέση

$$K(LM(2,3), LM(1,3)) = K(8,7).$$

Έτσι, θα κατασκευαστεί το μητρώο  $K$ , το οποίο θα είναι

$$K =$$

$$\left( \begin{array}{cccccc} k_{1,1}^1 & k_{1,2}^1 & k_{1,3}^1 & k_{1,4}^1 & k_{1,5}^1 & k_{1,6}^1 \\ k_{2,1}^1 & k_{2,2}^1 & k_{2,3}^1 & k_{2,4}^1 & k_{2,5}^1 & k_{2,6}^1 \\ k_{3,1}^1 & k_{3,2}^1 & k_{3,3}^1 & k_{3,4}^1 & k_{3,5}^1 & k_{3,6}^1 \\ k_{4,1}^1 & k_{4,2}^1 & k_{4,3}^1 & k_{4,4}^1 + k_{1,1}^2 & k_{4,5}^1 + k_{1,2}^2 & k_{4,6}^1 + k_{1,3}^2 & \dots \\ k_{5,1}^1 & k_{5,2}^1 & k_{5,3}^1 & k_{5,4}^1 + k_{2,1}^2 & k_{5,5}^1 + k_{2,2}^2 & k_{5,6}^1 + k_{2,3}^2 & \dots \\ k_{6,1}^1 & k_{6,2}^1 & k_{6,3}^1 & k_{6,4}^1 + k_{3,1}^2 & k_{6,5}^1 + k_{3,2}^2 & k_{6,6}^1 + k_{3,3}^2 & \dots \\ \vdots & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & k_{4,4}^{N-1} + k_{1,1}^N & k_{4,5}^{N-1} + k_{1,2}^N & k_{4,6}^{N-1} + k_{1,3}^N & k_{1,4}^N & k_{1,5}^N & k_{1,6}^N \\ & & & & & & & & k_{5,4}^{N-1} + k_{2,1}^N & k_{5,5}^{N-1} + k_{2,2}^N & k_{5,6}^{N-1} + k_{2,3}^N & k_{2,4}^N & k_{2,5}^N & k_{2,6}^N \\ & & & & & & & & k_{6,4}^{N-1} + k_{3,1}^N & k_{6,5}^{N-1} + k_{3,2}^N & k_{6,6}^{N-1} + k_{3,3}^N & k_{3,4}^N & k_{3,5}^N & k_{3,6}^N \\ & & & & & & & & & & & k_{4,4}^N & k_{4,5}^N & k_{4,6}^N \\ & & & & & & & & & & & & k_{5,4}^N & k_{5,5}^N & k_{5,6}^N \\ & & & & & & & & & & & & & k_{6,4}^N & k_{6,5}^N & k_{6,6}^N \end{array} \right) \quad (3.4.15)$$

(3N+3)×(3N+3)

Αντίστοιχα, το μητρώο  $F$  θα κατασκευαστεί με τον ίδιο τρόπο:

Κάθε στοιχείο  $f_i^e$  του τοπικού διανύσματος φόρτισης ενός στοιχείου ( $e$ ) θα προστίθεται στη θέση  $F_{LM(i,e)}$ . Δηλαδή, ο γενικός αλγόριθμος θα είναι



$d$  : το διάνυσμα των βαθμών ελευθερίας  $u^e, v^e, w^e$

Έτσι, προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα που είναι της μορφής  $Kd = F$

### Θεώρημα

1. Το  $K$  είναι συμμετρικό.
2. Το  $K$  είναι θετικά ορισμένο.

### Απόδειξη

1. Η συμμετρία του μητρώου  $K$ , πέραν του ότι είναι άμεσα αντιληπτή από τη μορφή του, επαγεται από τη συμμετρία του διγραμμικού  $\alpha(\cdot, \cdot)$ . Άρα

$$\begin{aligned} K_{i,j} &= \alpha(\varphi_i, \varphi_j) && \text{(από ορισμό)} \\ &= \alpha(\varphi_j, \varphi_i) && \text{(από συμμετρία του } \alpha(\cdot, \cdot) \text{)} \\ &= K_{j,i} && \text{(από ορισμό)} \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$K = K^T$$

2. (Αρκεί να δείξουμε ότι (i)  $c^T K c \geq 0$  και (ii)  $c^T K c = 0$  αν και μόνο αν  $c = 0$ ). Για κάθε διάνυσμα  $c = \{c_p\}, p = 1, \dots, 3N + 3$  αντιστοιχίζουμε ένα Β.Ε.  $w^h \in U^h$ , βάσει της έκφρασης

$$w^h = \sum \bar{c}_A \varphi_A, \quad \text{όπου } \bar{c}_A = c_p, \quad p = ID(A).$$

i

$$\begin{aligned} c^T K c &= \sum_{P,Q=1}^{3N+3} c_P K_{PQ} c_Q \\ &= \sum_{A,B} \bar{c}_A \alpha(\varphi_A, \varphi_B) \bar{c}_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha \left( \sum_A \varphi_A \bar{c}_A, \sum_B \varphi_B \bar{c}_B \right) && \text{διγραμμικότητα του } \alpha(\cdot, \cdot) \\ &= \alpha(w^h, w^h) && \text{ορισμός του } w^h \\ &\geq 0 && \text{ορισμός του } \alpha(\cdot, \cdot) \end{aligned}$$

ii

Έστω  $\mathbf{c}^T \mathbf{K} \mathbf{c} = 0$ . Από το i. θα έχουμε ότι και  $\alpha(w^h, w^h) = 0$ . Από ορισμό, όμως, του συναρτησιακού συνεπάγεται ότι  $w^h = 0$ , δηλαδή

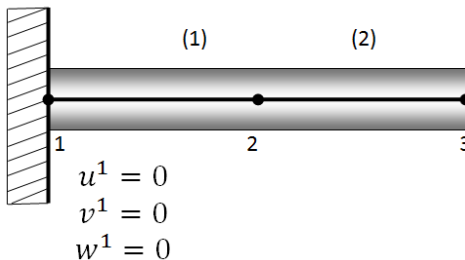
$$\sum \bar{c}_A \varphi_A = 0$$

οπότε  $\bar{c}_A = 0 = c_p$

δηλαδή  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$  και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

### 3.4.3.7 - Λύση του γραμμικού συστήματος

Το γραμμικό σύστημα  $\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F}$  δεν είναι έτοιμο να λυθεί. Πρέπει να διαμορφώσουμε τις διαστάσεις των μητρώων, ώστε να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες. Στο πρόβλημα του προβόλου που εξετάζουμε, γνωρίζουμε ότι στον πρώτο κόμβο η παραμόρφωση, η κλίση και η δεύτερη παράγωγος είναι μηδέν.



Εικόνα 17 - Συνοριακές συνθήκες Προβόλου

Οπότε, στο διάνυσμα  $\mathbf{d}$ , τα τρία πρώτα στοιχεία θα είναι μηδέν.

Έτσι, προσαρμόζουμε το σύστημα, ώστε να παραμείνει γραμμικό και να μπορεί να επιλυθεί με κάποια αριθμητική μέθοδο. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να διαγράψουμε τις γραμμές και τις στήλες από το μητρώο και τα διανύσματα που αναφέρονται στους βαθμούς ελευθερίας του πρώτου κόμβου της διαμέρισης.



3.4.3.8 - Υπολογισμός Διατμητικής Δύναμης και Καμπτικών Ροπών

Στην πραγματικότητα, η ασθενής μορφή του προβλήματος του προβόλου που βρήκαμε στη σχέση (3.2.5) περιέχει και τις συνοριακές συνθήκες, όπως αυτές φαίνονται στη σχέση (3.2.6)

$$\begin{aligned} & -g^2 EI[w''u''']_0^L \\ & + [w'(EIg^2u^{IV} - E(I + g^2A)u'')]_0^L \\ & + [w(E(I + g^2A)u''' - EIg^2u^V)]_0^L = 0 \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν, η ασθενής μορφή, μαζί με τις συνοριακές συνθήκες, γράφεται

$$\begin{aligned} & a(u, w) = F(w) \\ \Rightarrow & a(u, w) = (w, \mathcal{f}) - wQ(L) + w'M(L) + w''m(L) \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

με

$$(w, \mathcal{f}) = \int_0^L wqdx$$

και

$$\begin{aligned} Q & = E(I + g^2A)u''' - EIg^2u^V \\ M & = EIg^2u^{IV} - E(I + g^2A)u'' \\ m & = -EIu''' \end{aligned}$$

Οπότε,

$$F(w) = (w, \mathcal{f}) - wQ(L) + w'M(L) + w''m(L) \quad (3.4.22)$$

Εμείς λύσαμε το πρόβλημα  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{F}$ . Οπότε, λόγω της (3.4.22), θα έχουμε

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = (u, \mathcal{f}) - uQ(L) + u'M(L) + u''m(L) \quad (3.4.23)$$

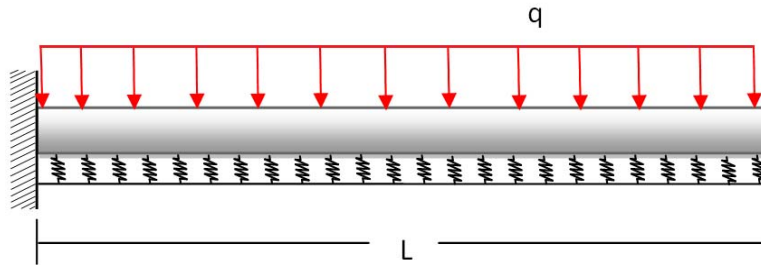
Έτσι, αφού το διάνυσμα  $\mathbf{d}$  αναφέρεται, ανά τρία στοιχεία, στη μετατόπιση, την πρώτη και δεύτερη παράγωγο αντίστοιχα, μπορούμε να βρούμε σε κάθε στοιχείο της διαμέρισης την προσέγγιση της διατμητικής δύναμης και των καμπτικών ροπών, βάσει των σχέσεων

$$\begin{aligned} Q^h(x) & = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{d}_i - (u, \mathcal{f})_{i|_{i=3k-2}} \\ M^h(x) & = \mathbf{K} \cdot \mathbf{d}_i - (u, \mathcal{f})_{i|_{i=3k-1}}, \quad k = 1, \dots, N + 1 \\ m^h(x) & = \mathbf{K} \cdot \mathbf{d}_i - (u, \mathcal{f})_{i|_{i=3k}} \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

### 3.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

#### ΠΡΟΒΟΛΟΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΦΟΡΤΙΟ

Σε αυτό το κεφάλαιο, προκειμένου να καταστεί σαφής η χρησιμότητα τόσο των αναπτυχθέντων μητρώων δυσκαμψίας, όσο και των μητρώων φόρτισης, παρατίθεται επίλυση ενός προβλήματος προβόλου με ομοιόμορφο φορτίο και σύγκριση της προσεγγιστικής λύσης με την αντίστοιχη αναλυτική, όπως αυτή προκύπτει από τη διαδικασία του Cardano του κεφαλαίου 2.2.



Εικόνα 18 - Πρόβολος με ομοιόμορφο φορτίο

Για την περίπτωση του προβόλου, εφαρμόζουμε τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$\tilde{u}(0) = \left. \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=0} = \left. \frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{x}^2} \right|_{\tilde{x}=0} = 0 \quad (3.5.1)$$

$$\tilde{Q}(1) = \tilde{M}(1) = \tilde{m}(1) = 0$$

Η έκφραση της αναλυτικής λύσης, σε αυτή την περίπτωση, θα είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της (2.2.5) και της μερικής λύσης (2.2.6):

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^6 C_j e^{Re[\lambda_j]\tilde{x}} \{ \cos(Im[\lambda_j]\tilde{x}) + \sin(Im[\lambda_j]\tilde{x}) \} + \frac{q_0}{k_0 L} \quad (3.5.2)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές  $C_j$  από το γραμμικό σύστημα που προκύπτει από τις σχέσεις (2.1.7), (3.5.1) και (3.5.2). Έτσι, αν εφαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες της (3.5.1) στη λύση (3.5.2), θα πάρουμε τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0) = 0 &\Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + \frac{q_0}{k_0 L} = 0 \\ \tilde{u}'(0) = 0 &\Rightarrow \sum_{j=1}^6 [Re(\lambda_j) + Im(\lambda_j)] C_j = 0 \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

$$\tilde{u}''(0) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^6 \left[ \operatorname{Re}(\lambda_j)^2 - \operatorname{Im}(\lambda_j)^2 + 2\operatorname{Im}(\lambda_j)\operatorname{Re}(\lambda_j) \right] C_j = 0$$

και τις αντίστοιχες που προκύπτουν από τις

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(1) &= -\mathcal{A} \frac{d^3 \tilde{u}}{d\tilde{x}^3} + \frac{d^5 \tilde{u}}{d\tilde{x}^5} \Big|_{\tilde{x}=1} = 0 \\ \tilde{M}(1) &= -\mathcal{A} \frac{d^2 \tilde{u}}{d\tilde{x}^2} + \frac{d^4 \tilde{u}}{d\tilde{x}^4} \Big|_{\tilde{x}=1} = 0 \\ \tilde{m}(1) &= -\frac{d^3 \tilde{u}}{d\tilde{x}^3} \Big|_{\tilde{x}=1} = 0 \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

αλλά για πρακτικούς λόγους δεν παρατίθενται λόγω της μεγάλης έκτασης της μορφής τους.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, θα χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα δεδομένα μιας "αντίστοιχης δοκού", τα οποία μπορούν να βρεθούν στην εργασία του Reddy Pang<sup>[26]</sup>.

$$\begin{aligned} E &= 1TPa, & d &= 1nm, & I_{11} &= 4.91 \times 10^{-38} m^4 \\ A &= 7.85 \times 10^{-19} m^2, & L &= 20d, & q_0 &= 10^{-6} N/m^2 \end{aligned}$$

Έτσι, με αντικατάσταση των τιμών αυτών στις σχέσεις (3.5.3) και (3.5.4), θα προκύψουν οι παρακάτω τιμές των σταθερών  $C_j$ :

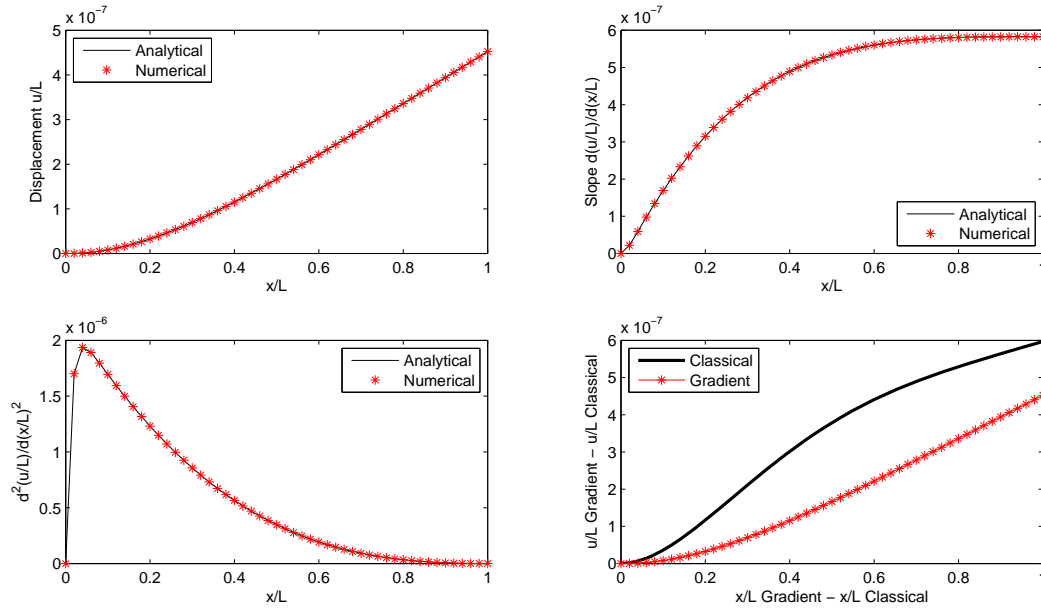
$$\begin{aligned} C_1 &= 66.4797 \times 10^{-111} & C_2 &= -181.2875 \times 10^{-12} & C_3 &= -2.87427 \times 10^{-9} \\ C_4 &= 3.82524 \times 10^{-9} & C_5 &= -2.24499 \times 10^{-9} & C_6 &= -498.524 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Η τιμή της  $C_1$  είναι πολλές τάξεις μικρότερη από αυτές των άλλων πέντε. Αυτό προκύπτει, όπως αναφέραμε παραπάνω, από τις διαφορές στην τάξη των συντελεστών της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα.

Για τις συγκεκριμένες αυτές τιμές, υπολογίζουμε τη γενική λύση αναλυτικά και τη συγκρίνουμε με αυτήν της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας που προκύπτει από τη μέθοδο Galerkin.

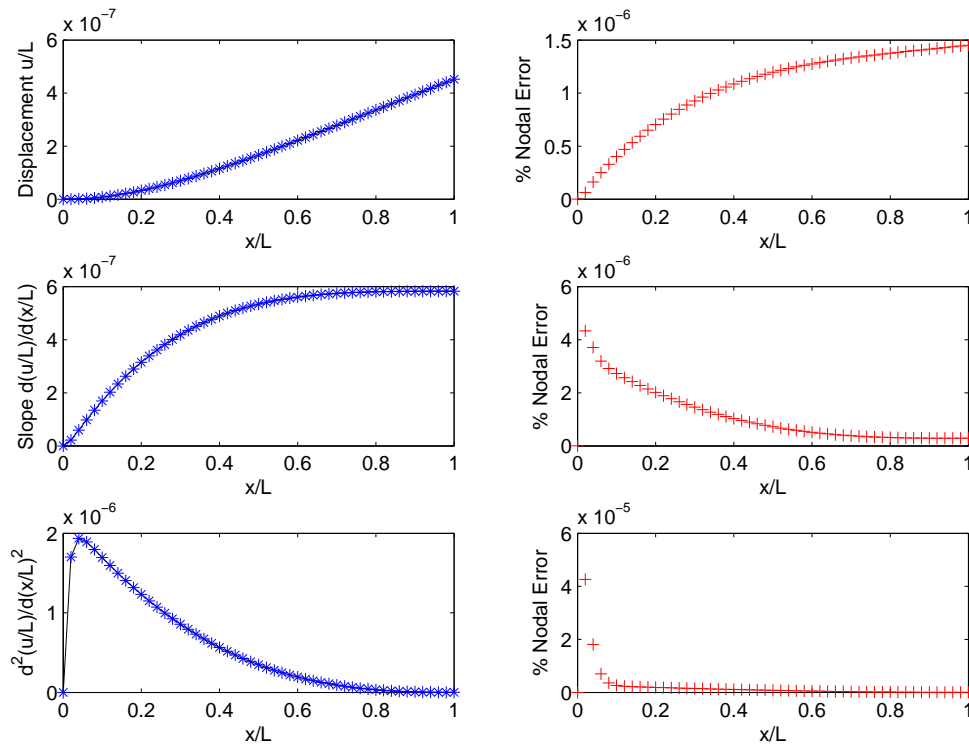
Στο παρακάτω διάγραμμα, βλέπουμε την παραμόρφωση, την κλίση και τη δεύτερη παράγωγο που προέκυψαν από εφαρμογή της μεθόδου Galerkin με διαμέριση 50 στοιχείων, σε σχέση με την αναλυτική λύση, καθώς και τη σύγκριση με τη λύση που προκύπτει από την κλασική θεωρία.





Εικόνα 19 - Αριθμητική και Αναλυτική λύση - Σύγκριση με τη λύση της κλασικής Θεωρίας

**Παρατηρήσεις:** Η προσεγγιστική λύση, όπως και η πρώτη και δεύτερη παράγωγος, ταυτίζεται **σχεδόν** πλήρως με την αναλυτική στα σημεία της παρεμβολής. Αυτό είναι και το αναμενόμενο, αφού εξ ορισμού, πήραμε τέτοιο πολυώνυμο Hermite, ώστε να έχουμε αυτήν τη συμπεριφορά. Η **σχεδόν πλήρης** ταύτιση φαίνεται από το αμέσως επόμενο διάγραμμα που δείχνει ότι το σχετικό σφάλμα μεταξύ της αναλυτικής και της προσεγγιστικής λύσης είναι της τάξης του 0.0001 %.

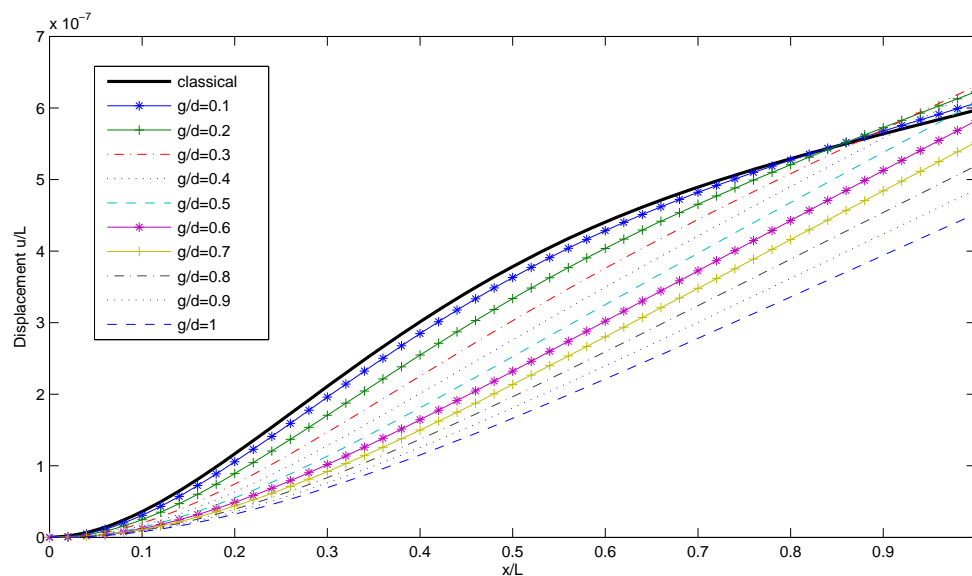


Εικόνα 20 - % σχετικό σφάλμα της αριθμητικής λύσης

Για τον υπολογισμό του επί τις εκατό σφάλματος στους κόμβους, χρησιμοποιήθηκε, ως σημείο αναφοράς, η μέγιστη τιμή που εμφανίζεται στους κόμβους, για τις στοιχειώδεις τιμές της παραμόρφωσης, της κλίσης και της δεύτερης παραγώγου αντίστοιχα, ώστε να αποφευχθεί η διαίρεση με το μηδέν.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι η προσέγγιση με την κλασική θεωρία διαφέρει πάρα πολύ στη μορφή, σε σχέση με αυτήν που προκύπτει από τη θεωρία της βαθμίδας ελαστικότητας. Αυτό οφείλεται στην θεώρηση της ελαστικής έδρασης. Το μοντέλο της κλασικής θεώρησης, δίνει πιο εύκαμπτη δοκό, με αποτέλεσμα η ελαστική έδραση να επηρεάζει την παραμόρφωσή της, δημιουργώντας αλλαγή στην καμπυλότητα της συνάρτησης της μετατόπισης.

Παρακάτω, βλέπουμε τη συμπεριφορά της μετατόπισης της δοκού, καθώς αλλάζει ο λόγος  $g/d$  του χαρακτηριστικού μήκους μικροδομής  $g$ , προς τη διάμετρο  $d$  της δοκού, καθώς και τη λύση από την κλασική θεωρία.



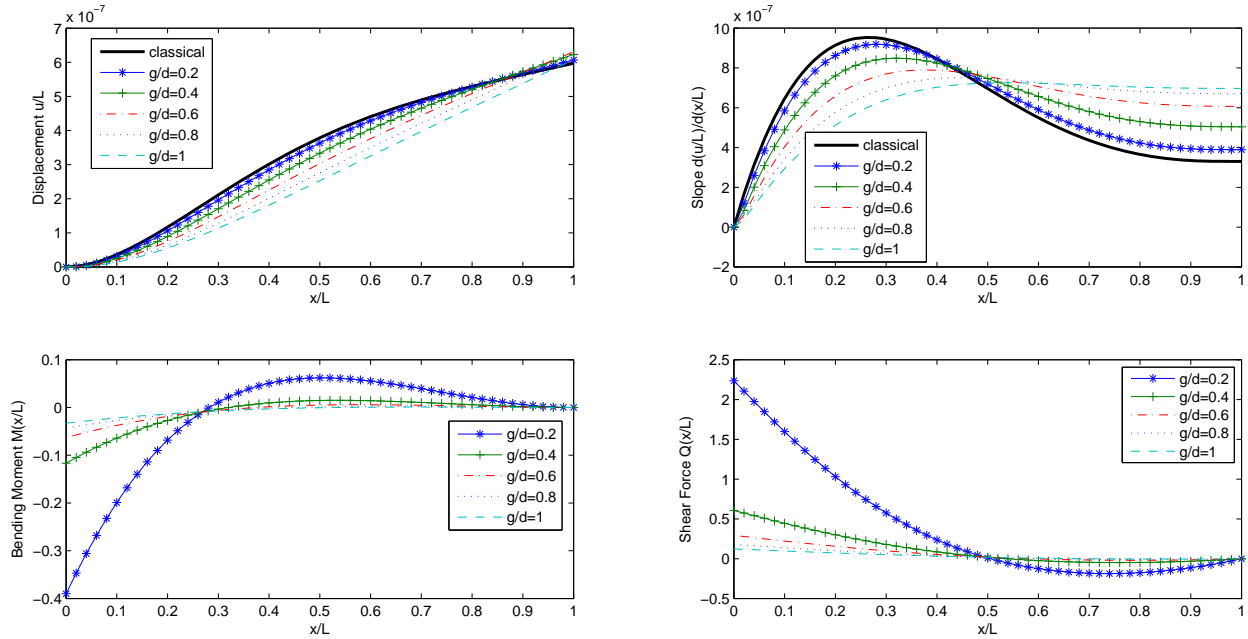
Εικόνα 21 - Οι λύσεις του προβλήματος του προβόλου για διάφορες τιμές του λόγου  $g/d$

Όσο ο λόγος  $g/d$  πηγαίνει στη μονάδα, δηλαδή, όσο η διάμετρος φτάνει τις διαστάσεις της μικροδομής, τόσο πιο σταθερή γίνεται η συνάρτηση της παραμόρφωσης, όσον αφορά την καμπυλότητά της.

Η μετατόπιση βάσει της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας είναι μικρότερη από αυτήν της κλασικής θεώρησης. Δηλαδή, στο μοντέλο της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας, η δοκός εμφανίζεται **πιο δύσκαμπτη**, συμπεριφορά η οποία είναι πιο αντιπροσωπευτική, όταν έχουμε δοκούς, η διάμετρος των οποίων είναι της τάξης του μήκους  $g$  της μικροδομής του υλικού.

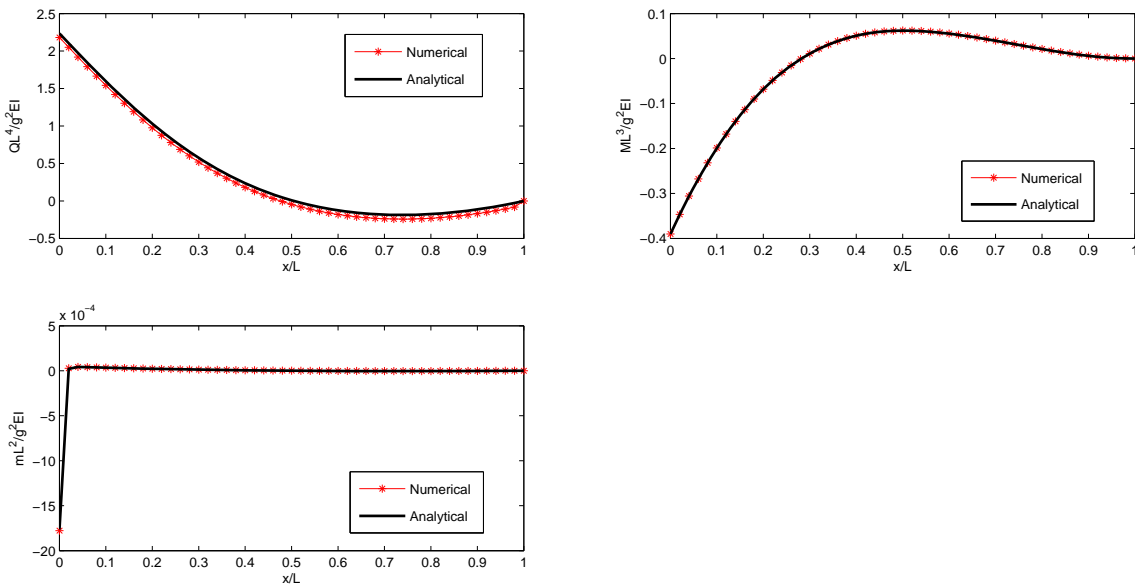
### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΠΡΟΒΟΛΟ

Το φαινόμενο της επίδρασης της ελαστικής έδρασης στο μοντέλο είναι φανερό και στο παρακάτω διάγραμμα, όπου και τα υπόλοιπα μεγέθη επηρεάζονται, όπως η κλίση της παραμόρφωσης, καθώς και η καμπτική ροπή και η διατμητική δύναμη.



Εικόνα 22 - Μετατόπιση, κλίση, ροπή και διατμητική δύναμη για τις διάφορες τιμές του  $g/d$

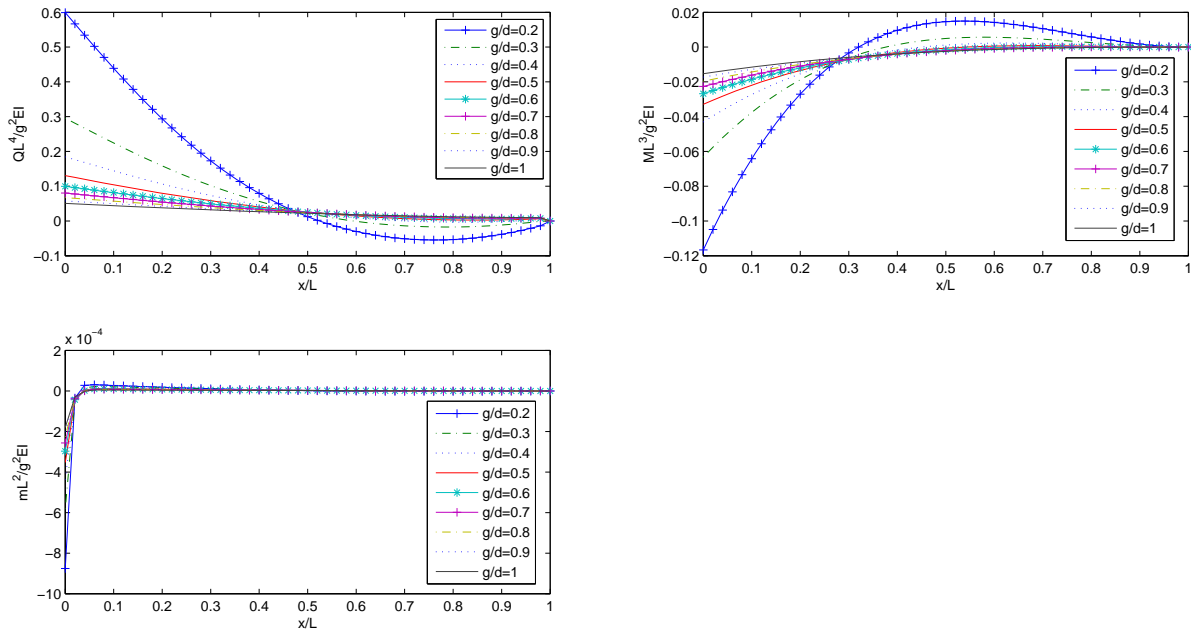
Ο υπολογισμός των καμπτικών ροπών και των διατμητικών δυνάμεων έγινε βάσει των σχέσεων (3.4.24), υπολογιστικά, και βάσει των (3.5.4), αναλυτικά. Στο επόμενο, φαίνεται η ταύτιση των αριθμητικών και αναλυτικών τιμών τους.



Εικόνα 23 - Διατμητική δύναμη και ροπές κάμψης. Σύγκριση αναλυτικών και αριθμητικών τιμών

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΠΡΟΒΟΛΟ

Η επίδραση της ελαστικής έδρασης φαίνεται και στα μεγέθη των καμπτικών ροπών και της διατμητικής δύναμης στο επόμενο διάγραμμα, για διάφορες τιμές του λόγου  $g/d$ . Παρατηρούμε ότι καθώς αυτός τείνει στη μονάδα, οι τιμές των μεγεθών αυτών μειώνονται.



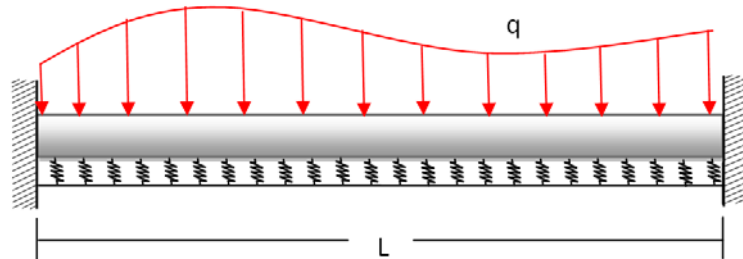
Εικόνα 24 - Καμπτικές ροπές και διατμητική δύναμη για τις διάφορες τιμές του  $g/d$





## 4. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗ ΔΟΚΟ

### 4.1. ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ



Εικόνα 25 - Το πρόβλημα της αμφίπακτης δοκού

Η ανάλυση της μεταβολικής διατύπωσης του προβλήματος συνοριακών τιμών που αντιστοιχεί στο μοντέλο της αμφίπακτης δοκού είναι παρόμοια με αυτήν της παραγράφου 3.1 του προβλήματος του προβόλου, αν προσαρμόσουμε το χώρο Sobolev  $U$  σε αυτή την περίπτωση, και θέσουμε:

$$U = \{u \in H_0^3(0, L) : u(0) = u'(0) = u''(0) = u(L) = u'(L) = u''(L) = 0\}$$

δηλαδή

$$U \equiv H_0^3(0, L) \text{ και } U' \equiv H_0^{-3}(0, L)$$

Τότε, το πρόβλημα  $P1$  θα ορίζεται, πάλι, ως

**Πρόβλημα  $P1$ :** Να βρεθεί  $u \in U$ , τέτοιο ώστε

$$-g^2 EI u^{(6)} + E(I + g^2 A) u^{(4)} + k_0 u = q. \quad (4.1.1)$$

με μόνη διαφορά ότι έχει αλλάξει ο χώρος της λύσης.

Η διαδικασία της εύρεσης της λύσης του προβλήματος  $P1$  είναι η ίδια που ακολουθήθηκε και στο προηγούμενο πρόβλημα του προβόλου και θα αποτελείται και αυτή από δύο βήματα: την εύρεση της ασθενούς μορφής και τη διακριτοποίηση και επίλυση με τη μέθοδο Galerkin.

## 4.2. ΒΗΜΑ 1 - ΑΣΘΕΝΗΣ ΜΟΡΦΗ

Το πρόβλημα  $P1$  μπορεί να γραφεί, όπως στη σχέση (3.2.1)

$$-S \frac{d^6 u}{dx^6} + C \frac{d^4 u}{dx^4} + k_0 u = q \quad (4.2.1)$$

όπου θέσαμε, πάλι,  $S = g^2 EI$ ,  $C = E(I + g^2 A)$

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με τη συνάρτηση βάρους  $w$ , η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες που προκύπτουν από τη μεταβολική διατύπωση της εξίσωσης (1.21), και ολοκληρώνουμε στο μήκος  $L$  της δοκού

$$-S \int_0^L w \frac{d^6 u}{dx^6} dx + C \int_0^L w \frac{d^4 u}{dx^4} dx + k_0 \int_0^L w u dx = \int_0^L w q dx \quad (4.2.2)$$

Μετά από μερικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες, θα πάρουμε την ασθενή μορφή του προβλήματος

$$\begin{aligned} S \int_0^L w''' u''' dx + C \int_0^L w'' u'' dx + k_0 \int_0^L w u dx &= \int_0^L w q dx \\ -S[w'' u''']_0^L + S[w' u^{IV}]_0^L - S[w u^V]_0^L - C[w' u'']_0^L + C[w u''']_0^L &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

όπου, αν αντικαταστήσουμε πίσω  $C = E(I + g^2 A)$  και  $S = g^2 EI$ , θα πάρουμε την τελική μορφή

$$g^2 EI \int_0^L w''' u''' dx + E(I + g^2 A) \int_0^L w'' u'' dx + k_0 \int_0^L w u dx = \int_0^L w q dx \quad (4.2.4)$$

με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} -g^2 EI[w'' u''']_0^L + [w'(EI g^2 u^{IV} - E(I + g^2 A)u'')]_0^L \\ + [w(E(I + g^2 A)u''' - EI g^2 u^V)]_0^L &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Η σχέση (4.2.5) αποτελεί το πρόβλημα  $P2$ , αντίστοιχο του προβλήματος του προβόλου



**Πρόβλημα P2:** Να βρεθεί  $u \in U$ , τέτοιο ώστε

$$a(u, w) = F(w) \quad \text{στο } (0, L), \quad \forall w \in U$$

όπου  $a(u, w): U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ , ένα διγραμμικό συναρτησιακό, που ορίζεται από:

$$a(u, w) := g^2 EI \int_0^L w''' u''' dx + E(I + g^2 A) \int_0^L w'' u'' dx + k_0 \int_0^L w u dx$$

και  $F(w): U \rightarrow \mathbb{R}$ , ένα γραμμικό συναρτησιακό, που ορίζεται από:

$$F(w) := \int_0^L w q dx.$$

όπου, εδώ, ο χώρος  $U$  είναι ο αντίστοιχος

$$U = \{u \in H_0^3(0, L) : u(0) = u'(0) = u''(0) = u(L) = u'(L) = u''(L) = 0\}.$$

### 4.3. ΕΠΙΛΥΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ P2 - ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ

**Πρόταση:**  $\forall q \in U'$ , υπάρχει μοναδική  $u \in U$  λύση του προβλήματος P2. Επιπλέον, έχουμε την α priori εκτίμηση ευστάθειας

$$\|u\|_U \leq C \|q\|_{U'}$$

όπου  $C = (C_F g^2 EI)^{-1} \in \mathbb{R}^+$ ,  $C_F$  είναι η ανισοτική σταθερά του Friedrichs, η οποία εξαρτάται μόνο από το πεδίο ορισμού.

#### Απόδειξη Πρότασης

Η απόδειξη είναι ίδια με αυτήν της παραγράφου 3.3, θεωρώντας ότι

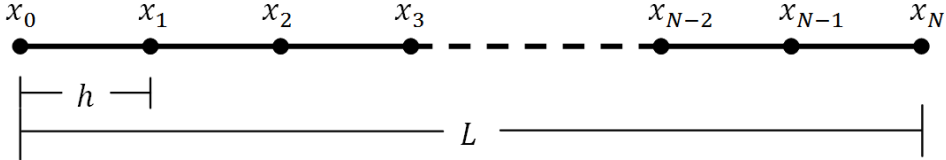
$$U = \{u \in H_0^3(0, L) : u(0) = u'(0) = u''(0) = u(L) = u'(L) = u''(L) = 0\}.$$

□

#### 4.4. ΒΗΜΑ 2 - ΜΕΘΟΔΟΣ GALERKIN

Η διαδικασία που θα ακολουθηθεί είναι ακριβώς η ίδια με αυτή του προηγούμενου αντίστοιχου κεφαλαίου 3.4. Η εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου είναι η ίδια για όλες τις περιπτώσεις των συνοριακών συνθηκών.

##### 4.4.1 - ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΟΥ $\Omega = [0, L]$



Η διαμέριση που θα γίνει θα είναι η ίδια με αυτήν του προβλήματος του προβολού, δηλαδή των  $N+1$  σημείων του διαστήματος  $[0, L]$ :

$$\mathfrak{N}_N := 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = L, \quad N \in \mathbb{N}$$

Ο χώρος της προσεγγιστικής λύσης  $u_h$  τώρα, θα είναι:

$$U_h = \left\{ \begin{array}{l} u_h \in H^3(0, L): \begin{array}{l} u_h(0) = u_h'(0) = u_h''(0) = 0 \\ u_h(L) = u_h'(L) = u_h''(L) = 0 \end{array} \\ u_h|_{[x_{i-1}, x_i]} = \sum_{j=1}^N a_{i,j} x^j, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Επομένως, θα κατασκευάσουμε την προσεγγιστική λύση  $u_h$  στον  $U_h$ , συναρτήσει των συναρτήσεων βάσης.

##### 4.4.2 - ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΒΑΣΗΣ $\varphi_i$

Οι συναρτήσεις βάσης που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι οι ίδιες με αυτές της παραγράφου 3.4.3.2. Θα είναι, δηλαδή, πολυώνυμα Hermite, τα οποία θα παρεμβάλουν τη λύση  $u$ , την κλίση της  $u' = v$  και τη δεύτερη παράγωγο  $u'' = w$ .

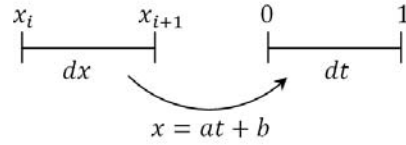
###### 4.4.2.1 - Προσέγγιση της λύσης $u_h$

Το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι το ίδιο με αυτό της περίπτωσης του προβόλου.

$$u_h = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 \quad (4.4.1)$$

Η προσέγγιση θα γίνει πάνω σε κάθε στοιχείο της διαμέρισης. Θα απεικονίσουμε το σύστημα στο διάστημα  $[0,1]$ , μετασχηματίζοντας τη μεταβλητή, όπως στην παράγραφο 3.4.3.5

Έτσι, λοιπόν, βρίσκουμε ότι



$x = ht + x_i$  και  $dx = hdt$ , ενώ

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{h^2} \frac{d^2u}{dt^2}, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{1}{h^3} \frac{d^3u}{dt^3} \quad (4.4.2)$$

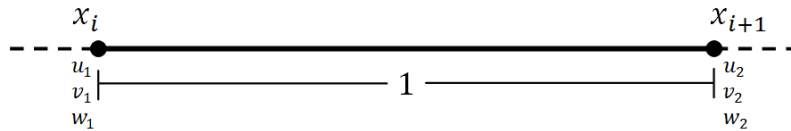
Οπότε, θα έχουμε (γράφοντας πάλι  $x$  αντί για  $t$ , για λόγους ευκολίας, το  $x$  θα αναφέρεται, από εδώ και στο εξής, στο  $[0,1]$ )

$$u_h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5$$

$$u'_h(x) = \frac{c_1 + 2xc_2 + 3x^2c_3 + 4x^3c_4 + 5x^4c_5}{h} \quad (4.4.3)$$

$$u''_h(x) = \frac{2c_2 + 6xc_3 + 12x^2c_4 + 20x^3c_5}{h^2}$$

#### 4.4.2.2 - Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών



Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στο πολυώνυμο παρεμβολής για κάθε στοιχείο, θα πάρουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$u_h(0) = u_1, \quad u_h(1) = u_2$$

$$u'_h(0) = v_1, \quad u'_h(1) = v_2 \quad (4.4.4)$$

$$u''_h(0) = w_1, \quad u''_h(1) = w_2$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.4.3) στο σύστημα (4.4.4) και επιλύοντάς το, ως προς τις σταθερές  $c_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$ , θα βρούμε την έκφραση της  $u_h$ , συναρτήσεως των  $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ :

$$u_h = (1 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5)u_1 + (hx - 6hx^3 + 8hx^4 - 3hx^5)v_1$$

$$+ \frac{1}{2}(h^2x^2 - 3h^2x^3 + 3h^2x^4 - h^2x^5)w_1 + (10x^3 - 15x^4 + 6x^5)u_2 \quad (4.4.5)$$

$$+ (-4hx^3 + 7hx^4 - 3ht^5)v_2 + \frac{1}{2}(h^2x^3 - 2h^2x^4 + h^2x^5)w_2$$

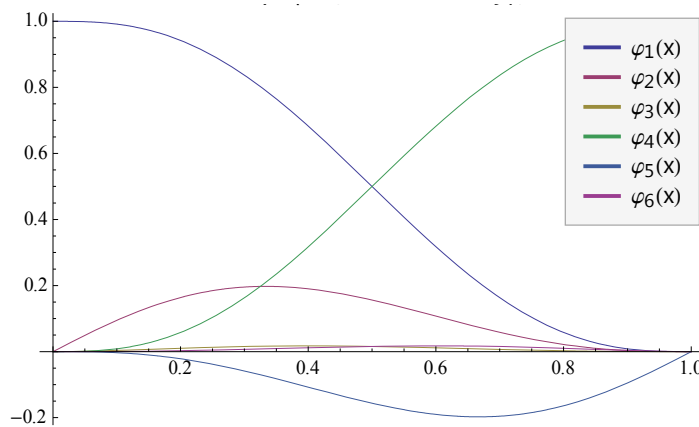
Θέτουμε, τέλος,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5 & \varphi_4 &= 10x^3 - 15x^4 + 6x^5 \\ \varphi_2 &= hx - 6hx^3 + 8hx^4 - 3hx^5 & \text{και} & \varphi_5 &= -4hx^3 + 7hx^4 - 3hx^5 & (4.4.6) \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2}(h^2x^2 - 3h^2x^3 + 3h^2x^4 - h^2x^5) & \varphi_6 &= \frac{1}{2}(h^2x^3 - 2h^2x^4 + h^2x^5) \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  αποτελούν τις **συναρτήσεις βάσης** της προσέγγισης  $u_h$ , για την περίπτωση της αμφίπακτης δοκού. Άρα, η  $u_h$  πάνω σε κάθε στοιχείο, μπορεί να γραφεί ως

$$u_h = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 v_1 + \varphi_3 w_1 + \varphi_4 u_2 + \varphi_5 v_2 + \varphi_6 w_2 \quad (4.4.7)$$

Οι συναρτήσεις αυτές φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα:



Εικόνα 26 - Συναρτήσεις Hermite

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Οι συναρτήσεις βάσης είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές του προβλήματος του προβόλου. Αυτό συμβαίνει, διότι οι συναρτήσεις αυτές κατασκευάζονται μόνο βάσει της θεώρησης που έχουμε κάνει, των συνθηκών της παρεμβολής στο στοιχείο. Το πρόβλημα της κάμψης έχει την ίδια θεώρηση για κάθε περίπτωση, είτε αυτή είναι το πρόβλημα του προβόλου, είτε της αμφίπακτης ή αμφιέριστης δοκού. Το μόνο που αλλάζει στη μελέτη για κάθε περίπτωση είναι οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, οι οποίες επηρεάζουν μόνο τα μητρώα της μεθόδου Galerkin.

### 4.4.3 -ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ $\alpha(\varphi_i, \varphi_j)$ ΚΑΙ $F(\varphi_i)$

#### 4.4.3.1 - Μετατροπή του συστήματος λύσης

Το πρόβλημα που έχουμε για επίλυση είναι το

$$g^2 EI \int_0^L w''' u''' dx + E(I + g^2 A) \int_0^L w'' u'' dx + k_0 \int_0^L w u dx = \int_0^L w q dx \quad (4.4.7)$$

όπου το  $w$  ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος της αμφίπακτης δοκού.

Επόμενο βήμα είναι η μεταφορά του προβλήματος από το σύστημα του  $[0, L]$  στο σύστημα  $[0, 1]$ . Από το μετασχηματισμό (4.4.2), θα πάρουμε

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{h^2} \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = \frac{1}{h^3} \frac{d^3 u}{dt^3}$$

οπότε

$$\int_0^L \frac{d^3 w}{dx^3} \frac{d^3 u}{dx^3} dx = \int_0^1 \frac{1}{h^6} \frac{d^3 u}{dt^3} \frac{d^3 u}{dt^3} h dt$$

$$\int_0^L \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{h^4} \frac{d^2 u}{dt^2} \frac{d^2 u}{dt^2} h dt$$

$$\int_0^L w u dx = \int_0^1 w u h dt$$

$$\int_0^L w q dx = \int_0^1 w q h dt.$$

Άρα, το πρόβλημα (4.4.7) θα μετασχηματιστεί στο

$$g^2 EI \int_0^1 \frac{1}{h^6} \frac{d^3 u}{dt^3} \frac{d^3 u}{dt^3} h dt + E(I + g^2 A) \int_0^1 \frac{1}{h^4} \frac{d^2 u}{dt^2} \frac{d^2 u}{dt^2} h dt + k_0 \int_0^1 w u h dt = \int_0^1 w q h dt \quad (4.4.8)$$

#### 4.4.3.2 - Εύρεση τοπικών μητρών $k^e$ και $f^e$ του στοιχείου

Σε αυτό το βήμα, θα υπολογίσουμε τους πίνακες που προκύπτουν από την αντικατάσταση στη σχέση (4.4.8) των συναρτήσεων βάρους, στις θέσεις των  $u$  και  $w$  διαδοχικά:

Τα μητρώα  $K_3, K_2, K_0$  που προκύπτουν από τον υπολογισμό των

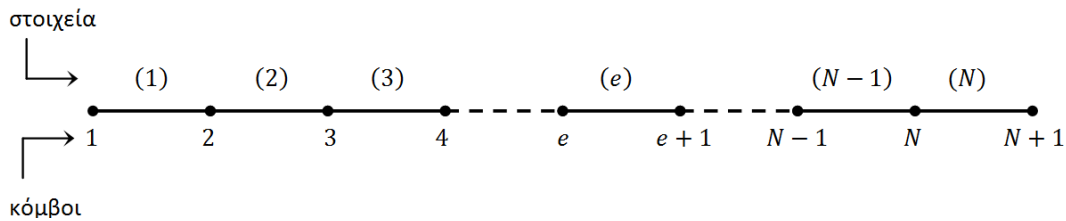
$$g^2 EI \int_0^1 \frac{1}{h^5} \varphi_i''' \varphi_j''' dt, \quad E(I + g^2 A) \int_0^1 \frac{1}{h^3} \varphi_i'' \varphi_j'' dt,$$

$$k_0 \int_0^1 \varphi_i \varphi_j h dt \quad i, j = 1, \dots, 6$$

αντίστοιχα, θα είναι τα ίδια με αυτά των σχέσεων (3.4.9), (3.4.10) και (3.4.11) που προκύπτουν στο πρόβλημα του προβόλου, αφού οι συναρτήσεις βάσης είναι ίδιες. Έτσι, το τελικό τοπικό μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου που θα προκύψει από την άθροιση των  $K_3, K_2, K_0$  θα είναι το ίδιο με αυτό της σχέσης (3.4.12). Ομοίως, το διάνυσμα φόρτισης θα είναι ίδιο με αυτό της σχέσης (3.4.13).

#### 4.4.3.3 - Συναρμογή των τοπικών μητρώων δυσκαμψίας και διανυσμάτων φόρτισης

Η διαμέριση και η αρίθμηση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ίδιες με αυτές της περίπτωσης του προβόλου.



Θα χρησιμοποιήσουμε, πάλι τα μητρώα οδηγούς  $IEN, ID, LM$  του προηγούμενου κεφαλαίου για να κάνουμε τη συναρμογή του ολικού μητρώου. Τα μητρώα αυτά θα είναι τα ίδια, καθώς κατασκευάζονται βάσει της ίδιας διαμέρισης και αρίθμησης. Συνεπώς,

#### Μητρώο $IEN$

στοιχεία	(1)	(2)	(3)	...	(e)	...	(N)
1	1	2	3	...	e	...	N
2	2	3	4	...	e + 1	...	N + 1

↑ τοπικοί κόμβοι του στοιχείου

#### Μητρώο $ID$

ολικοί κόμβοι	1	2	3	...	e	...	N	N + 1
1	1	4	7	...	3e - 2	...	3N - 2	3N + 1
2	2	5	8	...	3e - 1	...	3N - 1	3N + 2
3	3	6	9	...	3e	...	3N	3N + 3

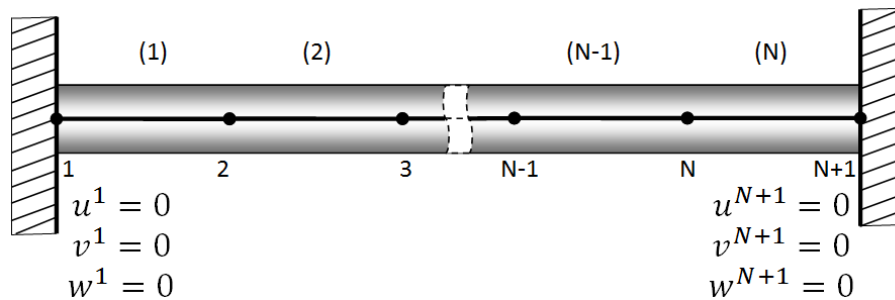
↑ ολικοί Β.Ε. κάθε κόμβου



$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 + f_1^2 \\ f_5^1 + f_2^2 \\ f_6^1 + f_3^2 \\ \vdots \\ f_4^{N-1} + f_1^N \\ f_5^{N-1} + f_2^N \\ f_6^{N-1} + f_3^N \\ f_4^N \\ f_5^N \\ f_6^N \end{pmatrix}_{(3N+3) \times 1}$$

#### 4.4.4 - ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Για να μετατρέψουμε το σύστημα στη μορφή  $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$ , θα πρέπει να εφαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος της αμφίπακτης δοκού. Αυτό θα γίνει διαμορφώνοντας ανάλογα τις διαστάσεις των μητρώων. Στο πρόβλημα της αμφίπακτης δοκού που εξετάζουμε, γνωρίζουμε ότι στον πρώτο, αλλά και στον τελευταίο κόμβο, η παραμόρφωση, η κλίση και η δεύτερη παράγωγος είναι μηδέν.



Εικόνα 27 - Συνοριακές συνθήκες αμφίπακτης δοκού

Επομένως, στο διάνυσμα  $\mathbf{d}$ , τα τρία πρώτα και τα τρία τελευταία στοιχεία θα είναι μηδέν. Έτσι, προσαρμόζουμε το σύστημα, ώστε να παραμείνει γραμμικό και να μπορεί να επιλυθεί με κάποια αριθμητική μέθοδο. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε, όπως και στο πρόβλημα του προβόλου, είναι να διαγράψουμε τις γραμμές και τις στήλες από το μητρώο και τα διανύσματα, που αναφέρονται στους βαθμούς ελευθερίας του πρώτου και του τελευταίου κόμβου της διαμέρισης.





#### 4.4.5 - ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΚΑΙ ΚΑΜΠΤΙΚΩΝ ΡΟΠΩΝ

Όπως και στην παράγραφο 3.4.3.8, το συνολικό διάνυσμα της φόρτισης έχει την εξής μορφή:

$$F(w) = (w, \mathcal{f}) - wQ_0^L + w'M|_0^L + w''m|_0^L \quad (4.4.1)$$

Εμείς λύσαμε το πρόβλημα  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{F}$ . Συνεπώς, λόγω της (4.4.22), θα έχουμε

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = (u, \mathcal{f}) - uQ(L) + u'M(L) + u''m(L) \quad (4.4.2)$$

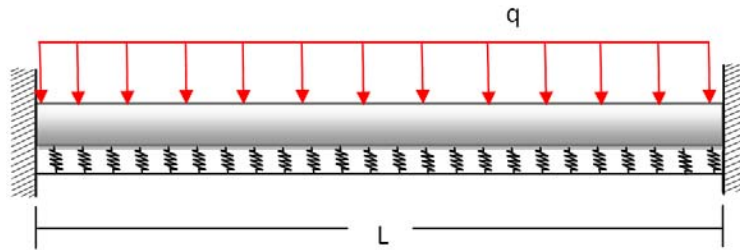
Έτσι, αφού το διάνυσμα  $\mathbf{d}$  ανά τρία στοιχεία αναφέρεται στην παραμόρφωση, την πρώτη και δεύτερη παράγωγο αντίστοιχα, μπορούμε να βρούμε σε κάθε στοιχείο της διαμέρισης την προσέγγιση της διατμητικής δύναμης και των καμπτικών ροπών, βάσει των σχέσεων

$$\begin{aligned} Q^h(x) &= -\mathbf{K} \cdot \mathbf{d}_i - (u, \mathcal{f})_{i|_{i=3k-2}} \\ M^h(x) &= \mathbf{K} \cdot \mathbf{d}_i - (u, \mathcal{f})_{i|_{i=3k-1}}, \quad k = 1, \dots, N + 1 \\ m^h(x) &= \mathbf{K} \cdot \mathbf{d}_i - (u, \mathcal{f})_{i|_{i=3k}} \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

#### 4.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

##### ΑΜΦΙΠΑΚΤΗ ΔΟΚΟΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΦΟΡΤΙΟ

Σε αυτό το κεφάλαιο, όπως στο αντίστοιχο 3.5, θα παρουσιάσουμε την προσεγγιστική λύση ενός προβλήματος αμφίπακτης δοκού με ομοιόμορφο φορτίο και θα τη συγκρίνουμε με την αντίστοιχη αναλυτική, όπως αυτή προκύπτει από τη διαδικασία του Cardano του κεφαλαίου 2.2.



Εικόνα 28 - Αμφίπακτη δοκός υπό ομοιόμορφη φόρτιση

Για την περίπτωση της αμφίπακτης δοκού, εφαρμόζουμε τις ακόλουθες συνοριακές συθήκες:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0) = \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=0} = \frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{x}=0} = 0 \\ \tilde{u}(1) = \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=1} = \frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{x}=1} = 0 \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Η έκφραση της αναλυτικής λύσης και σε αυτή την περίπτωση θα είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της (2.2.5) και της μερικής λύσης (2.2.6):

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^6 C_j e^{Re[\lambda_j]\tilde{x}} \{ \cos(Im[\lambda_j]\tilde{x}) + \sin(Im[\lambda_j]\tilde{x}) \} + \frac{q_0}{k_0 L} \quad (4.5.2)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές  $C_j$  από το γραμμικό σύστημα που προκύπτει από τις σχέσεις (2.1.7), (4.5.1) και (4.5.2).

Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι

$$\tilde{u}(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + \frac{q_0}{k_0 L} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}'(0) = 0 &\Rightarrow \sum_{j=1}^6 [Re(\lambda_j) + Im(\lambda_j)] C_j = 0 \\
 \tilde{u}''(0) = 0 &\Rightarrow \sum_{j=1}^6 [Re(\lambda_j)^2 - Im(\lambda_j)^2 + 2Im(\lambda_j)Re(\lambda_j)] C_j = 0 \\
 \tilde{u}(1) = 0 &\Rightarrow \sum_{j=1}^6 [e^{Re(\lambda_j)} (\cos(Im(\lambda_j)) + \sin(Im(\lambda_j)))] C_j + \frac{Q}{Lk_0} = 0 \quad (4.5.3) \\
 \tilde{u}'(1) = 0 &\Rightarrow \sum_{j=1}^6 [e^{Re(\lambda_j)} Re(\lambda_j) (\cos(Im(\lambda_j)) + \sin(Im(\lambda_j))) \\
 &\quad + e^{Re(\lambda_j)} Im(\lambda_j) (\cos(Im(\lambda_j)) - \sin(Im(\lambda_j)))] C_j = 0 \\
 \tilde{u}''(1) = 0 &\Rightarrow \sum_{j=1}^6 [e^{Re(\lambda_j)} Re(\lambda_j)^2 (\cos(Im(\lambda_j)) + \sin(Im(\lambda_j))) \\
 &\quad + 2e^{Re(\lambda_j)} Re(\lambda_j) Im(\lambda_j) (\cos(Im(\lambda_j)) - \sin(Im(\lambda_j))) \\
 &\quad + e^{Re(\lambda_j)} Im(\lambda_j)^2 (-\cos(Im(\lambda_j)) - \sin(Im(\lambda_j)))] C_j = 0
 \end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τα ίδια δεδομένα της εργασίας του Reddy Pang<sup>[26]</sup> που χρησιμοποιήσαμε και στην περίπτωση του προβόλου.

$$\begin{aligned}
 E &= 1TPa, \quad d = 1nm, \quad I_{11} = 4.91 \times 10^{-38} m^4 \\
 A &= 7.85 \times 10^{-19} m^2, \quad L = 20d, \quad q_0 = 10^{-6} N/m^2
 \end{aligned}$$

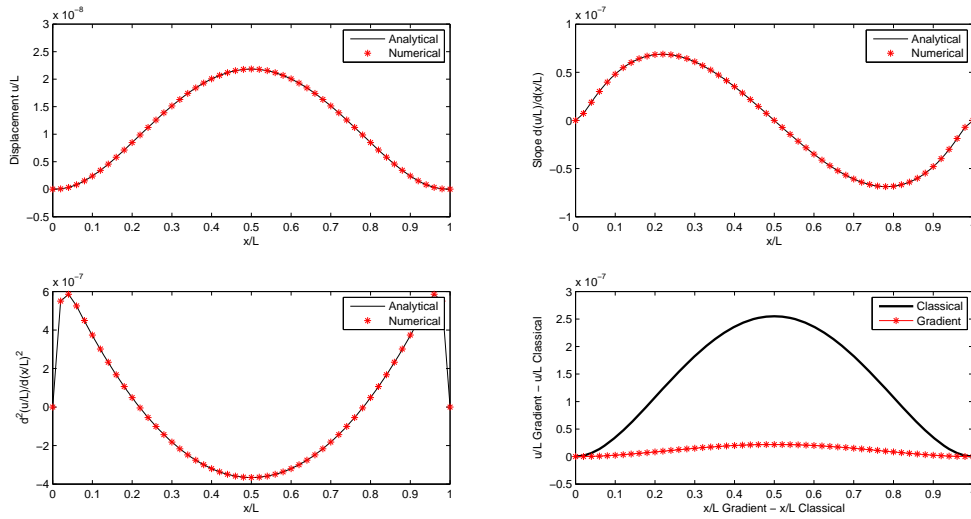
Ως εκ τούτου, οι σταθερές που θα προκύψουν είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -49.3835 \times 10^{-105} & C_2 &= -175.1792 \times 10^{-12} & C_3 &= -6.98686 \times 10^{-9} \\
 C_4 &= -519.2771 \times 10^{-12} & C_5 &= 27.91286 \times 10^{-9} & C_6 &= -520.2315 \times 10^{-9}
 \end{aligned}$$

Για τις συγκεκριμένες αυτές τιμές, υπολογίζουμε τη γενική λύση αναλυτικά και τη συγκρίνουμε με αυτήν της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας που προκύπτει από τη μέθοδο Galerkin.

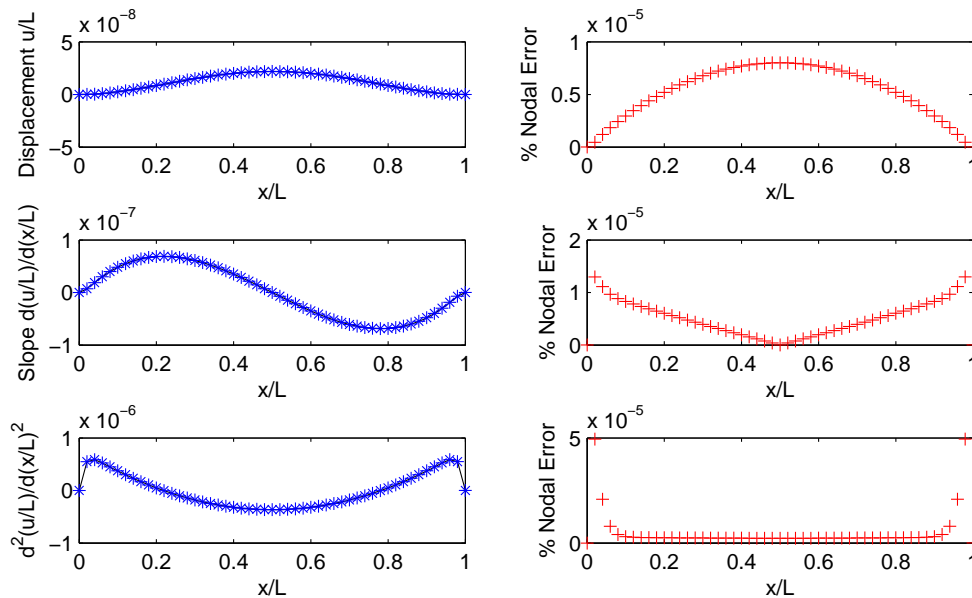
Στο παρακάτω διάγραμμα, βλέπουμε την παραμόρφωση, την κλίση και τη δεύτερη παράγωγο, οι οποίες προέκυψαν με εφαρμογή της μεθόδου Galerkin με διαμέριση 50 στοιχείων, σε σχέση με την αναλυτική λύση, καθώς και τη σύγκριση με τη λύση που προκύπτει από την κλασική θεώρηση.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗ ΔΟΚΟ



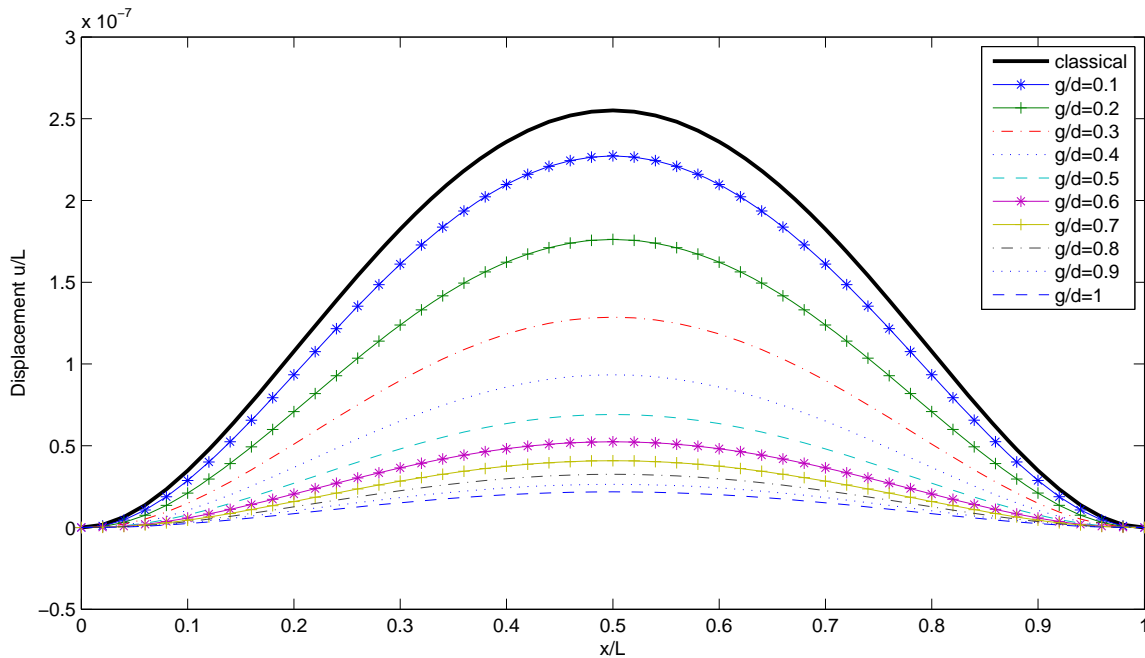
**Εικόνα 29 - Αριθμητική και Αναλυτική λύση - Σύγκριση με τη λύση της κλασικής Θεωρίας**

**Παρατηρήσεις:** Οι παρατηρήσεις είναι ίδιες με αυτές της περίπτωσης του προβόλου. Η προσεγγιστική λύση, όπως και στην περίπτωση του προβόλου, ταυτίζεται με την αναλυτική στα σημεία της παρεμβολής. Στο αμέσως επόμενο διάγραμμα, φαίνεται το επί τις εκατό σφάλμα στους κόμβους, το οποίο είναι της τάξης του  $10^{-5} \%$ .



**Εικόνα 30 - % σχετικό σφάλμα της αριθμητικής λύσης**

Η μετατόπιση, βάσει της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας, είναι μικρότερη από αυτήν της κλασικής θεώρησης. Δηλαδή, στο μοντέλο της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας, η δοκός εμφανίζεται **πιο δύσκαμπτη**, συμπεριφορά η οποία είναι πιο αντιπροσωπευτική όταν έχουμε δοκούς, η διάμετρος των οποίων είναι της τάξης του μήκους  $g$  της μικροδομής του υλικού. Στο επόμενο σχήμα, βλέπουμε αυτήν ακριβώς τη συμπεριφορά, καθώς και τη λύση βάσει της κλασικής θεωρίας.



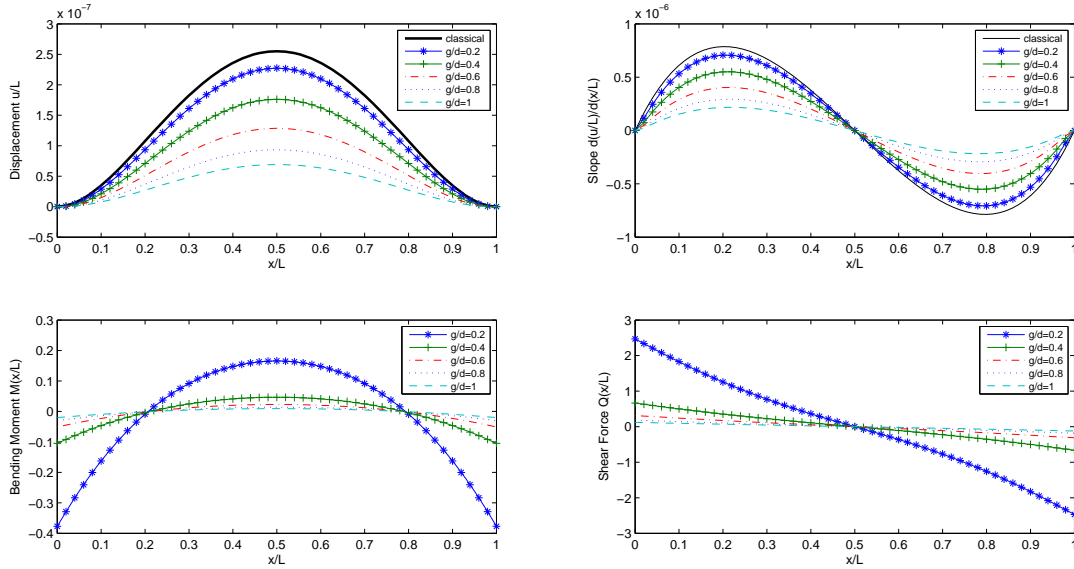
Εικόνα 31 - Οι λύσεις του προβλήματος του προβόλου για διάφορες τιμές του λόγου  $g/d$

Για διαφορετικές τιμές του λόγου  $g/d$  του χαρακτηριστικού μήκους μικροδομής προς τη διάμετρο της δοκού, βλέπουμε τον τρόπο, με το οποίο αλλάζει η παραμόρφωση. Όσο η διάμετρος της δοκού τείνει στο χαρακτηριστικό μήκος  $g$ , τόσο πιο **στιβαρή** γίνεται η δοκός.

Παρατηρούμε, πάλι, ότι η μετατόπιση βάσει της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας είναι μικρότερη από αυτήν της κλασικής θεώρησης και πως, καθώς ο λόγος  $g/d$  τείνει στο 1, η προσεγγιστική λύση της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας βαίνει μειούμενη, δηλαδή η δοκός γίνεται πιο άκαμπτη.

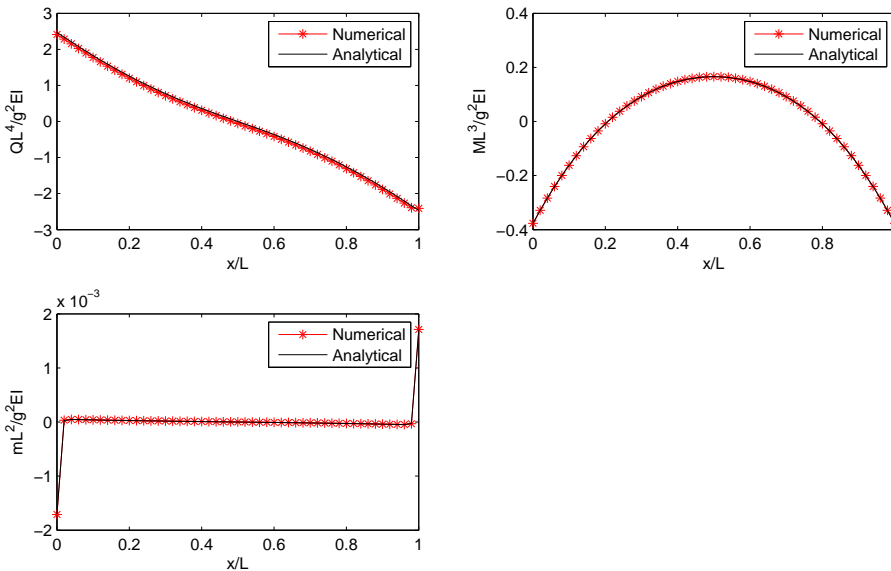
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗ ΔΟΚΟ

Το φαινόμενο της επίδρασης της ελαστικής έδρασης στο μοντέλο είναι φανερό και στο παρακάτω διάγραμμα, όπου και τα υπόλοιπα μεγέθη επηρεάζονται, όπως η κλίση της παραμόρφωσης, καθώς και η καμπτική ροπή και η διατμητική δύναμη.



**Εικόνα 32 - Μετατόπιση, κλίση, ροπή και διατμητική δύναμη για τις διάφορες τιμές του  $g/d$**

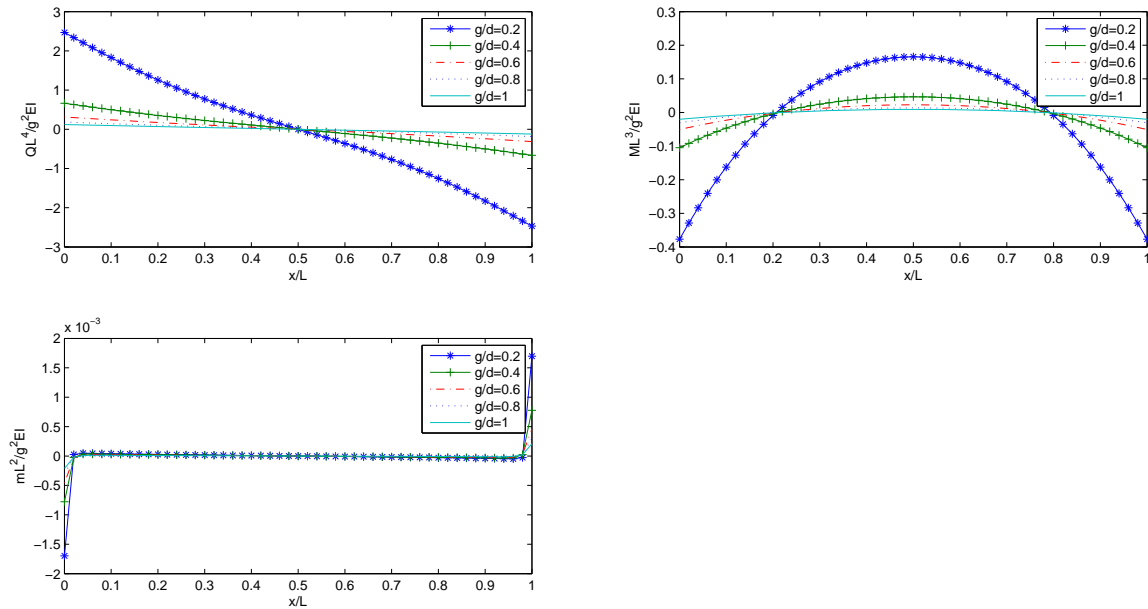
Ο υπολογισμός των καμπτικών ροπών και των διατμητικών δυνάμεων έγινε βάσει των σχέσεων (5.4.3), υπολογιστικά, και βάσει των (5.5.1), αναλυτικά. Στο επόμενο, φαίνεται η ταύτιση των αριθμητικών και αναλυτικών τιμών τους.



**Εικόνα 33 - Διατμητική δύναμη και ροπές κάμψης. Σύγκριση αναλυτικών και αριθμητικών τιμών**

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΑΜΦΙΠΑΚΤΗ ΔΟΚΟ

Η συμπεριφορά των μεγεθών των καμπτικών ροπών και της διατμητικής δύναμης για διάφορες τιμές του λόγου  $g/d$  φαίνεται στο αμέσως επόμενο διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι καθώς ο λόγος  $g/d$  τείνει στη μονάδα, οι τιμές των μεγεθών αυτών μειώνονται.



Εικόνα 34 - Καμπτικές ροπές και διατμητική δύναμη για τις διάφορες τιμές του  $g/d$

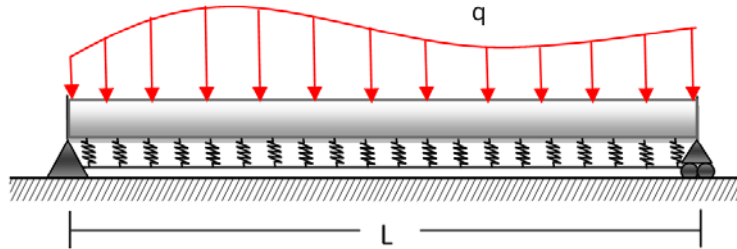






## 5. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟ

### 5.1. ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ



Εικόνα 35 - Το πρόβλημα της αμφιέρειστης δοκού

Η ανάλυση της μεταβολικής διατύπωσης του προβλήματος συνοριακών τιμών που αντιστοιχεί στο μοντέλο της αμφιέρειστης δοκού είναι παρόμοια με αυτήν των παραγράφων 3.1 και 4.1 του προβλήματος του προβόλου και της αμφίπακτης δοκού αντίστοιχα, αν προσαρμόσουμε το χώρο Sobolev  $U$  σε αυτή την περίπτωση, και θέσουμε:

$$U = \{u \in H^3(0, L) : u(0) = u(L) = 0\}$$

δηλαδή

$$U \equiv H^3(0, L) \text{ και } U' \equiv H^{-3}(0, L)$$

Τότε, το πρόβλημα  $P1$  θα ορίζεται, πάλι, ως:

**Πρόβλημα  $P1$ :** Να βρεθεί  $u \in U$ , τέτοιο ώστε

$$-g^2 E I u^{(6)} + E(I + g^2 A)u^{(4)} + k_0 u = q. \quad (5.1.1)$$

με μόνη διαφορά, πάλι, ότι έχει αλλάξει ο χώρος της λύσης.

Η διαδικασία της εύρεσης της λύσης του προβλήματος  $P1$  είναι η ίδια που ακολουθήθηκε και στα προηγούμενα δύο προβλήματα και αποτελείται και αυτή από δύο βήματα: την εύρεση της ασθενούς μορφής και τη διακριτοποίηση και επίλυση με τη μέθοδο Galerkin.

## 5.2. ΒΗΜΑ 1 - ΑΣΘΕΝΗΣ ΜΟΡΦΗ

Το πρόβλημα  $P1$  μπορεί να γραφεί, όπως στη σχέση (3.2.1)

$$-S \frac{d^6 u}{dx^6} + C \frac{d^4 u}{dx^4} + k_0 u = q \quad (5.2.1)$$

όπου θέσαμε πάλι  $S = g^2 EI$ ,  $C = E(I + g^2 A)$

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με τη συνάρτηση βάρους  $w$ , η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες που προκύπτουν από τη μεταβολική διατύπωση της εξίσωσης (1.21), και ολοκληρώνουμε στο μήκος  $L$  της δοκού

$$-S \int_0^L w \frac{d^6 u}{dx^6} dx + C \int_0^L w \frac{d^4 u}{dx^4} dx + k_0 \int_0^L w u dx = \int_0^L w q dx \quad (5.2.2)$$

Μετά από μερικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες, θα πάρουμε την ασθενή μορφή του προβλήματος

$$S \int_0^L w''' u''' dx + C \int_0^L w'' u'' dx + k_0 \int_0^L w u dx = \int_0^L w q dx$$

$$-S[w'' u''']_0^L + S[w' u^{IV}]_0^L - S[wu^V]_0^L - C[w' u'']_0^L + C[wu''']_0^L = 0 \quad (5.2.3)$$

όπου, αν αντικαταστήσουμε  $C = E(I + g^2 A)$  και  $S = g^2 EI$ , θα λάβουμε την τελική μορφή

$$g^2 EI \int_0^L w''' u''' dx + E(I + g^2 A) \int_0^L w'' u'' dx + k_0 \int_0^L w u dx = \int_0^L w q dx \quad (5.2.4)$$

με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες

$$-g^2 EI[w'' u''']_0^L + [w'(EI g^2 u^{IV} - E(I + g^2 A)u'')]_0^L$$

$$+ [w(E(I + g^2 A)u''' - EI g^2 u^V)]_0^L = 0 \quad (5.2.5)$$

Η σχέση (5.2.5) αποτελεί το πρόβλημα  $P2$ , αντίστοιχο του προβλήματος του προβόλου και της αμφίπακτης δοκού.

**Πρόβλημα P2:** Να βρεθεί  $u \in U$ , τέτοιο ώστε

$$a(u, w) = F(w) \quad \text{στο } (0, L), \quad \forall w \in U$$

όπου  $a(u, w): U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ , ένα διγραμμικό συναρτησιακό, που ορίζεται από:

$$a(u, w) := g^2 EI \int_0^L w''' u''' dx + E(I + g^2 A) \int_0^L w'' u'' dx + k_0 \int_0^L w u dx$$

και  $F(w): U \rightarrow \mathbb{R}$ , ένα γραμμικό συναρτησιακό, που ορίζεται από:

$$F(w) := \int_0^L w q dx.$$

όπου, εδώ, ο χώρος  $U$  είναι ο αντίστοιχος

$$U = \{u \in H^3(0, L) : u(0) = u(L) = 0\}$$

### 5.3. ΕΠΙΛΥΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ P2 - ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ

**Πρόταση:**  $\forall q \in U'$ , υπάρχει μοναδική  $u \in U$  λύση του προβλήματος P2. Επιπλέον, έχουμε την α priori εκτίμηση ευστάθειας

$$\|u\|_U \leq C \|q\|_{U'}$$

όπου  $C = (C_F g^2 EI)^{-1} \in \mathbb{R}^+$ ,  $C_F$  είναι η ανισοτική σταθερά του Friedrichs, η οποία εξαρτάται μόνο από το πεδίο ορισμού.

**Απόδειξη Πρότασης:**

Η απόδειξη είναι ίδια με αυτήν των παραγράφων 3.3 και 4.3, θεωρώντας ότι

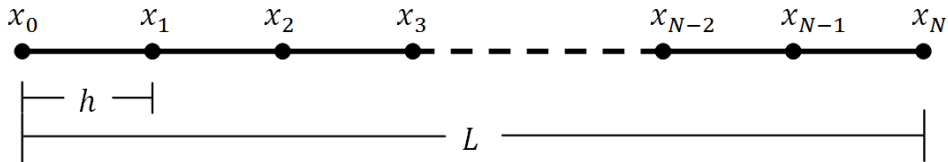
$$U = \{u \in H^3(0, L) : u(0) = u(L) = 0\}$$

□

## 5.4. ΒΗΜΑ 2 - ΜΕΘΟΔΟΣ GALERKIN

Η διαδικασία που θα ακολουθηθεί είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν των κεφαλαίων 3.4 και 4.4. Η εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου είναι η ίδια για όλες τις περιπτώσεις των συνοριακών συνθηκών.

### 5.4.1 - ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΟΥ $\Omega = [0, L]$



Η διαμέριση που θα γίνει θα είναι η ίδια με αυτήν του προβλήματος του προβολού, δηλαδή των  $N+1$  σημείων του διαστήματος  $[0, L]$ :

$$\mathfrak{I}_N := 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = L, \quad N \in \mathbb{N}$$

Ο χώρος της προσεγγιστικής λύσης  $u_h$ , τώρα, θα είναι:

$$U_h = \left\{ \begin{array}{l} u_h \in H^3(0, L): u(0) = u(L) = 0 \\ u_h|_{[x_{i-1}, x_i]} = \sum_{j=1}^N a_{i,j} x^j, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

Έτσι, λοιπόν, θα κατασκευάσουμε την προσεγγιστική λύση  $u_h$  στον  $U_h$ , συναρτήσει των συναρτήσεων βάσης.

### 5.4.2 - ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΒΑΣΗΣ $\varphi_i$

Οι συναρτήσεις βάσης που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι οι ίδιες με αυτές των παραγράφων 3.4.3.2 και 4.4.3.2. Θα είναι, δηλαδή, πολυώνυμα Hermite, τα οποία θα παρεμβάλουν τη λύση  $u$ , την κλίση της  $u' = v$  και τη δεύτερη παράγωγο  $u'' = w$ .

#### 5.4.2.1 - Προσέγγιση της λύσης $u_h$

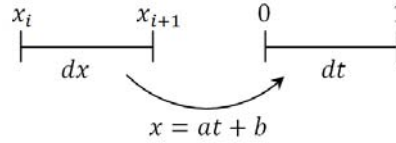
Το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι, πάλι, ένα  $5^{\text{ης}}$  τάξης πολυώνυμο με έξι σταθερές  $c_i$ .

$$u_h = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 \quad (5.4.1)$$

Η προσέγγιση θα γίνει πάνω σε κάθε στοιχείο της διαμέρισης. Θα απεικονίσουμε το σύστημα στο διάστημα  $[0,1]$ , αλλάζοντας τη μεταβλητή όπως στην παράγραφο 3.4.3.5:

Έτσι, λοιπόν, βρίσκουμε ότι

$$x = ht + x_i \text{ και } dx = hdt, \text{ ενώ}$$

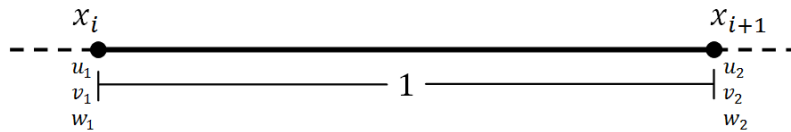


$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{h^2} \frac{d^2u}{dt^2}, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{1}{h^3} \frac{d^3u}{dt^3} \quad (5.4.2)$$

Οπότε, θα έχουμε

$$\begin{aligned} u_h(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 \\ u'_h(x) &= \frac{c_1 + 2xc_2 + 3x^2c_3 + 4x^3c_4 + 5x^4c_5}{h} \\ u''_h(x) &= \frac{2c_2 + 6xc_3 + 12x^2c_4 + 20x^3c_5}{h^2} \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

#### 5.4.2.2 - Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών



Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στο πολυώνυμο παρεμβολής για κάθε στοιχείο, θα πάρουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} u_h(0) &= u_1, & u_h(1) &= u_2 \\ u'_h(0) &= v_1, & u'_h(1) &= v_2 \\ u''_h(0) &= w_1, & u''_h(1) &= w_2 \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.4.3) στο σύστημα (5.4.4) και επιλύοντάς το ως προς τις σταθερές  $c_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$ , θα βρούμε την έκφραση της  $u_h$ , συναρτήσεως των  $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ :

$$\begin{aligned}
 u_h = & (1 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5)u_1 + (hx - 6hx^3 + 8hx^4 - 3hx^5)v_1 \\
 & + \frac{1}{2}(h^2x^2 - 3h^2x^3 + 3h^2x^4 - h^2x^5)w_1 + (10x^3 - 15x^4 + 6x^5)u_2 \\
 & + (-4hx^3 + 7hx^4 - 3ht^5)v_2 + \frac{1}{2}(h^2x^3 - 2h^2x^4 + h^2x^5)w_2
 \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

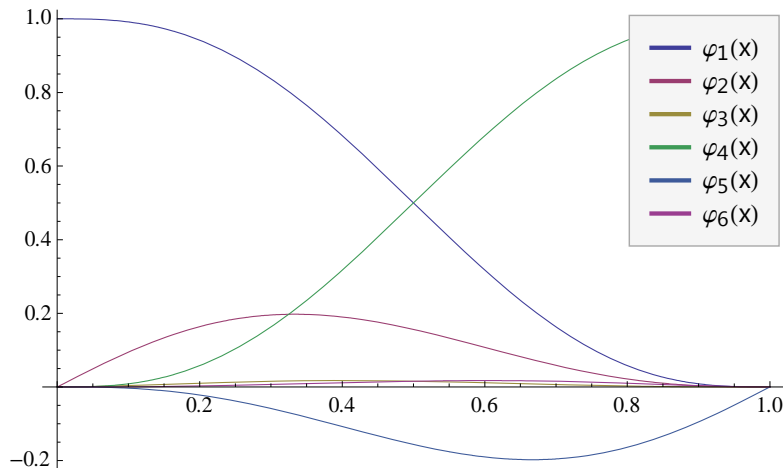
Θέτουμε, τέλος,

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= 1 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5 & \varphi_4 &= 10x^3 - 15x^4 + 6x^5 \\
 \varphi_2 &= hx - 6hx^3 + 8hx^4 - 3hx^5 & \varphi_5 &= -4hx^3 + 7hx^4 - 3hx^5 \\
 \varphi_3 &= \frac{1}{2}(h^2x^2 - 3h^2x^3 + 3h^2x^4 - h^2x^5) & \varphi_6 &= \frac{1}{2}(h^2x^3 - 2h^2x^4 + h^2x^5)
 \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Οι συναρτήσεις  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , αποτελούν τις **συναρτήσεις βάσης** της προσέγγισης  $u_h$  για την περίπτωση της αμφιέρειστης δοκού. Επομένως, η  $u_h$  πάνω σε κάθε στοιχείο, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$u_h = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 v_1 + \varphi_3 w_1 + \varphi_4 u_2 + \varphi_5 v_2 + \varphi_6 w_2 \quad (5.4.7)$$

Οι συναρτήσεις αυτές φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα:



Εικόνα 36 - Συναρτήσεις Hermite

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Οι συναρτήσεις βάσης είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές του προβλήματος του προβόλου. Αυτό συμβαίνει διότι οι συναρτήσεις αυτές κατασκευάζονται μόνο βάσει της θεώρησης που έχουμε κάνει, δηλαδή των συνθηκών της παρεμβολής στο στοιχείο. Το



πρόβλημα της κάμψης έχει την ίδια θεώρηση για κάθε περίπτωση, είτε αυτή είναι το πρόβλημα του προβόλου, είτε της αμφίπακτης ή αμφιέρειστης δοκού. Το μόνο που αλλάζει, στη μελέτη για κάθε περίπτωση, είναι οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, οι οποίες επηρεάζουν μόνο τα μητρώα της μεθόδου Galerkin.

### 5.4.3 -ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ $\alpha(\varphi_i, \varphi_j)$ ΚΑΙ $F(\varphi_i)$

#### 5.4.3.1 - Μετατροπή του συστήματος λύσης

Το πρόβλημα που έχουμε για επίλυση είναι το

$$g^2 EI \int_0^L w'''' u'''' dx + E(I + g^2 A) \int_0^L w'' u'' dx + k_0 \int_0^L w u dx = \int_0^L w q dx \quad (5.4.7)$$

όπου το  $w$  ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος της αμφιέρειστης δοκού.

Επόμενο βήμα είναι να μεταφέρουμε το πρόβλημα από το σύστημα του  $[0, L]$  στο σύστημα  $[0, 1]$ . Από το μετασχηματισμό (5.4.2), θα πάρουμε

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{h^2} \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = \frac{1}{h^3} \frac{d^3 u}{dt^3}$$

οπότε

$$\int_0^L \frac{d^3 w}{dx^3} \frac{d^3 u}{dx^3} dx = \int_0^1 \frac{1}{h^6} \frac{d^3 w}{dt^3} \frac{d^3 u}{dt^3} h dt$$

$$\int_0^L \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{h^4} \frac{d^2 w}{dt^2} \frac{d^2 u}{dt^2} h dt$$

$$\int_0^L w u dx = \int_0^1 w u h dt$$

$$\int_0^L w q dx = \int_0^1 w q h dt.$$

Άρα, το πρόβλημα (5.4.7) θα μετασχηματιστεί στο

$$g^2 EI \int_0^1 \frac{1}{h^6} \frac{d^3 u}{dt^3} \frac{d^3 u}{dt^3} h dt + E(I + g^2 A) \int_0^1 \frac{1}{h^4} \frac{d^2 u}{dt^2} \frac{d^2 u}{dt^2} h dt + k_0 \int_0^1 w u h dt = \int_0^1 w q h dt \quad (5.4.8)$$

#### 5.4.3.2 - Εύρεση τοπικών μητρώων $k^e$ και $f^e$ του στοιχείου

Σε αυτό το βήμα, θα υπολογίσουμε τους πίνακες που προκύπτουν από την αντικατάσταση στην σχέση (5.4.8) των συναρτήσεων βάρους στις θέσεις των  $u$  και  $w$  διαδοχικά:

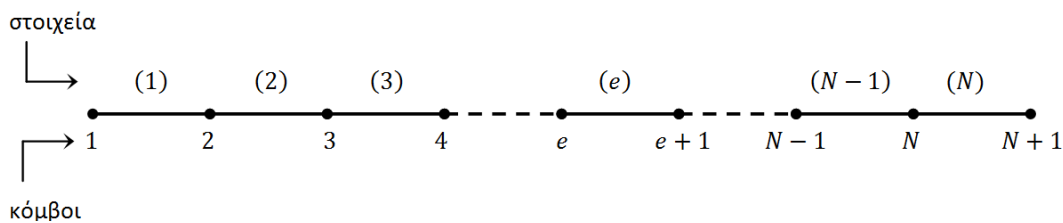
Τα μητρώα  $K_3, K_2, K_0$  που προκύπτουν από τον υπολογισμό των

$$g^2 EI \int_0^1 \frac{1}{h^5} \varphi_i''' \varphi_j''' dt, \quad E(I + g^2 A) \int_0^1 \frac{1}{h^3} \varphi_i'' \varphi_j'' dt, \\ k_0 \int_0^1 \varphi_i \varphi_j h dt \quad i, j = 1, \dots, 6$$

αντίστοιχα, θα είναι τα ίδια με αυτά των σχέσεων (3.4.9), (3.4.10) και (3.4.11) που προκύπτουν στο πρόβλημα του προβόλου ή τα αντίστοιχα στο πρόβλημα της αμφίπακτης δοκού, αφού οι συναρτήσεις βάσης είναι ίδιες. Έτσι, το τελικό τοπικό μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου που θα προκύψει από την άθροιση των  $K_3, K_2, K_0$  θα είναι το ίδιο με αυτό της σχέσης (3.4.12). Ομοίως, το διάνυσμα φόρτισης θα είναι ίδιο με αυτό της σχέσης (3.4.13).

#### 5.4.3.3 - Συναρμογή των τοπικών μητρώων δυσκαμψίας και διανυσμάτων φόρτισης

Η διαμέριση και η αρίθμηση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι κατά τα γνωστά



Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τα μητρώα οδηγούς  $IEN, ID, LM$  του προηγούμενου κεφαλαίου για να κάνουμε τη συναρμογή του ολικού μητρώου. Τα μητρώα αυτά θα είναι τα ίδια, καθώς κατασκευάζονται βάσει της ίδιας διαμέρισης και αρίθμησης. Συνεπώς, έχουμε

**Μητρώο  $IE_N$**

στοιχεία  
 $\hookrightarrow$  (1) (2) (3) ... (e) ... (N)

1	1	2	3	...	e	...	N
2	2	3	4	...	e + 1	...	N + 1

$\uparrow$  τοπικοί κόμβοι του στοιχείου

**Μητρώο  $ID$**

ολικοί κόμβοι  
 $\hookrightarrow$  1 2 3 ... e ... N N + 1

1	1	4	7	...	3e - 2	...	3N - 2	3N + 1
2	2	5	8	...	3e - 1	...	3N - 1	3N + 2
3	3	6	9	...	3e	...	3N	3N + 3

$\uparrow$  ολικοί Β.Ε. κάθε κόμβου

**Μητρώο  $LM$**

στοιχεία  
 $\hookrightarrow$  (1) (2) (3) ... (e) ... (N)

1	{	1	1	4	7	...	3e - 2	...	3N - 2
		2	2	5	8	...	3e - 1	...	3N - 1
		3	3	6	9	...	3e	...	3N
4	{	1	4	7	10	...	3e + 1	...	3N + 1
		2	5	8	11	...	3e + 2	...	3N + 2
		3	6	9	12	...	3e + 3	...	3N + 3

$\uparrow$  τοπικοί Β.Ε. κάθε κόμβου  
 $\uparrow$  τοπικοί κόμβοι κάθε στοιχείου  
 $\uparrow$  τοπικές εξισώσεις

Η συναρμογή θα γίνει ακριβώς όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, βάσει της σχέσης (4.4.14). Κάθε στοιχείο  $k_{i,j}^e$  του τοπικού μητρώου δυσκαμψίας ενός στοιχείου (e) θα προστίθεται στη θέση  $K_{LM(i,e),LM(j,e)}$ , βάσει του αλγορίθμου

$$K(LM(i, e), LM(j, e)) \leftarrow K(LM(i, e), LM(j, e)) + k^e(i, j) \quad (5.4.9)$$





$$\underbrace{\tilde{\mathbf{K}}}_{(3N+1) \times (3N+1)} \cdot \underbrace{\tilde{\mathbf{d}}}_{(3N+1) \times 1} = \underbrace{\tilde{\mathbf{F}}}_{(3N+1) \times 1} \quad (5.4.11)$$

Η λύση του συστήματος είναι το διάνυσμα

$$\tilde{\mathbf{d}}^i = \begin{Bmatrix} v^1 \\ w^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u^i \\ v^i \\ w^i \end{Bmatrix}, \quad i = 2, \dots, N \quad + \begin{Bmatrix} u^{N+1} \\ v^{N+1} \end{Bmatrix} \quad (5.4.12)$$

Δηλαδή, ανά τρία τα στοιχεία του αντιστοιχούν στη μετατόπιση, την κλίση και τη δεύτερη παράγωγο της μετατόπισης.

Η συνολική λύση είναι το διάνυσμα

$$\underbrace{\mathbf{d}}_{(3N+3) \times 1} = \{0\} + \underbrace{\tilde{\mathbf{d}}}_{(3N+1) \times 1} + \{0\}. \quad (5.4.13)$$

#### 5.4.5 - ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΚΑΙ ΚΑΜΠΤΙΚΩΝ ΡΟΠΩΝ

Όπως και στις παραγράφους 3.4.3.8 και 4.4.5, το συνολικό διάνυσμα της φόρτισης έχει την εξής μορφή:

$$F(w) = (w, \mathcal{f}) - wQ_0^L + w'M_0^L + w''m|_0^L \quad (5.4.1)$$

Εμείς λύσαμε το πρόβλημα  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{F}$ . Οπότε, λόγω της (4.4.22), θα έχουμε

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = (u, \mathcal{f}) - uQ(L) + u'M(L) + u''m(L) \quad (5.4.2)$$

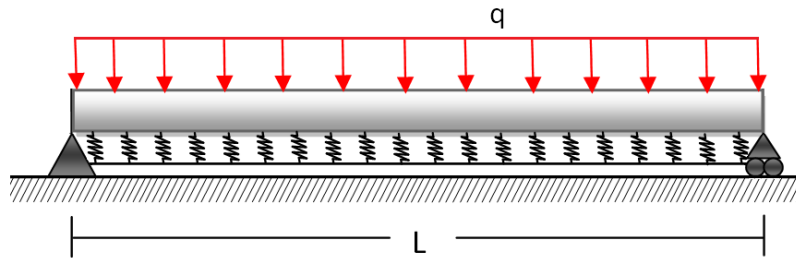
Έτσι, αφού, ανά τρία στοιχεία, το διάνυσμα  $\mathbf{d}$  αναφέρεται στην παραμόρφωση, την πρώτη και δεύτερη παράγωγο αντίστοιχα, μπορούμε να βρούμε, σε κάθε στοιχείο της διαμέρισης, την προσέγγιση της διατμητικής δύναμης και των καμπτικών ροπών, βάσει των σχέσεων

$$\begin{aligned} Q^h(x) &= -\mathbf{K} \cdot \mathbf{d}_i - (u, \mathcal{f})_i |_{i=3k-2} \\ M^h(x) &= \mathbf{K} \cdot \mathbf{d}_i - (u, \mathcal{f})_i |_{i=3k-1}, \quad k = 1, \dots, N+1 \\ m^h(x) &= \mathbf{K} \cdot \mathbf{d}_i - (u, \mathcal{f})_i |_{i=3k} \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

## 5.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

### ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΦΟΡΤΙΟ

Σε αυτό το κεφάλαιο, όπως στα αντίστοιχα 3.5 και 4.5, θα παρουσιάσουμε την προσεγγιστική λύση ενός προβλήματος αμφίπακτης δοκού με ομοιόμορφο φορτίο και θα τη συγκρίνουμε με την αντίστοιχη αναλυτική, όπως αυτή προκύπτει από τη διαδικασία του Cardano του κεφαλαίου 2.2.



Εικόνα 38 - Αμφίπακτη δοκός υπό ομοιόμορφη φόρτιση

Για την περίπτωση της αμφιέρειστης δοκού, εφαρμόζουμε τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0 \\ \tilde{M}(0) = -\mathcal{A} \left. \frac{d^2 \tilde{u}}{d\tilde{x}^2} + \frac{d^4 \tilde{u}}{d\tilde{x}^4} \right|_{\tilde{x}=0} = \tilde{M}(1) = -\mathcal{A} \left. \frac{d^2 \tilde{u}}{d\tilde{x}^2} + \frac{d^4 \tilde{u}}{d\tilde{x}^4} \right|_{\tilde{x}=1} = 0 \\ \tilde{m}(0) = -\left. \frac{d^3 \tilde{u}}{d\tilde{x}^3} \right|_{\tilde{x}=0} = \tilde{m}(1) = -\left. \frac{d^3 \tilde{u}}{d\tilde{x}^3} \right|_{\tilde{x}=1} = 0 \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

Η έκφραση της αναλυτικής λύσης και σε αυτή την περίπτωση θα είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της (2.12) και της μερικής λύσης (2.13):

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^6 C_j e^{Re[\lambda_j] \tilde{x}} \{ \cos(Im[\lambda_j] \tilde{x}) + \sin(Im[\lambda_j] \tilde{x}) \} + \frac{q_0}{k_0 L} \quad (4.5.2)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές  $C_j$  από το γραμμικό σύστημα που προκύπτει από τις σχέσεις (2.7), (5.5.1) και (5.5.2). Οι δύο πρώτες συνθήκες της σχέσης (5.5.1) δίνουν τις εξής σχέσεις:

$$\tilde{u}(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + \frac{q_0}{k_0 L} = 0$$

$$\tilde{u}(1) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^6 \left[ e^{Re(\lambda_j)} \left( \cos(Im(\lambda_j)) + \sin(Im(\lambda_j)) \right) C_j \right] + \frac{Q}{Lk_0} = 0$$

Οι υπόλοιπες συνθήκες δεν παρατίθενται, διότι η πολύπλοκη και μεγάλη μορφή τους απαγορεύει την εμφάνισή τους στο παρόν κείμενο.

Θα χρησιμοποιήσουμε τα ίδια δεδομένα με τα προηγούμενα δύο παραδείγματα των αντίστοιχων κεφαλαίων του προβλήματος του προβόλου και της αμφίπακτης δοκού.

$$E = 1TPa, \quad d = 1nm, \quad I_{11} = 4.91 \times 10^{-38} m^4$$

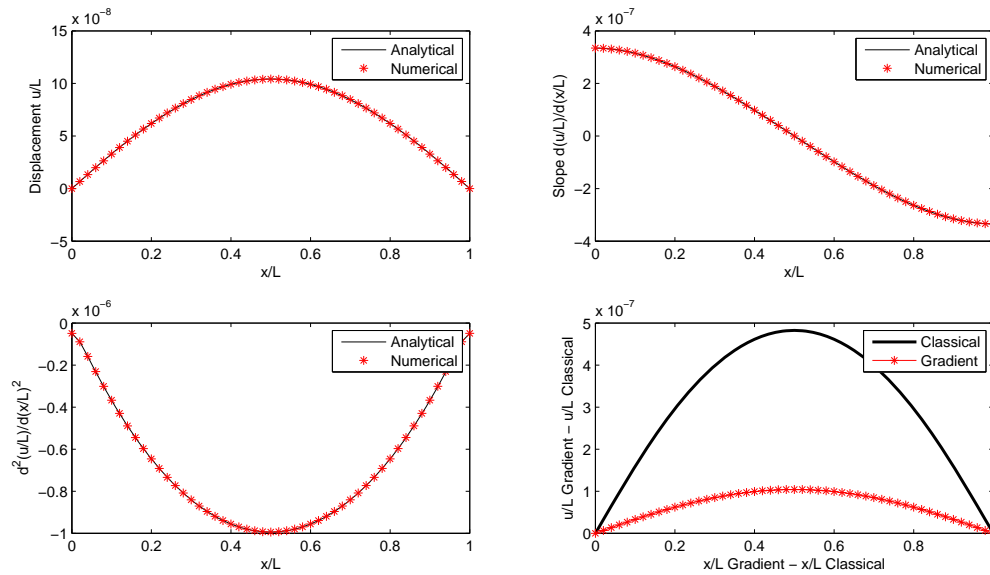
$$A = 7.85 \times 10^{-19} m^2, \quad L = 20d, \quad q_0 = 10^{-6} N/m^2$$

Έτσι, με αντικατάσταση των τιμών αυτών στις σχέσεις (5.5.3) και (5.5.4), θα προκύψουν οι παρακάτω τιμές των σταθερών  $C_j$

$$\begin{aligned} C_1 &= -782.6023 \times 10^{-108} & C_2 &= -2.77614 \times 10^{-12} & C_3 &= 10.35035 \times 10^{-9} \\ C_4 &= -260.30381 \times 10^{-9} & C_5 &= 17.88175 \times 10^{-9} & C_6 &= -267.9255 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

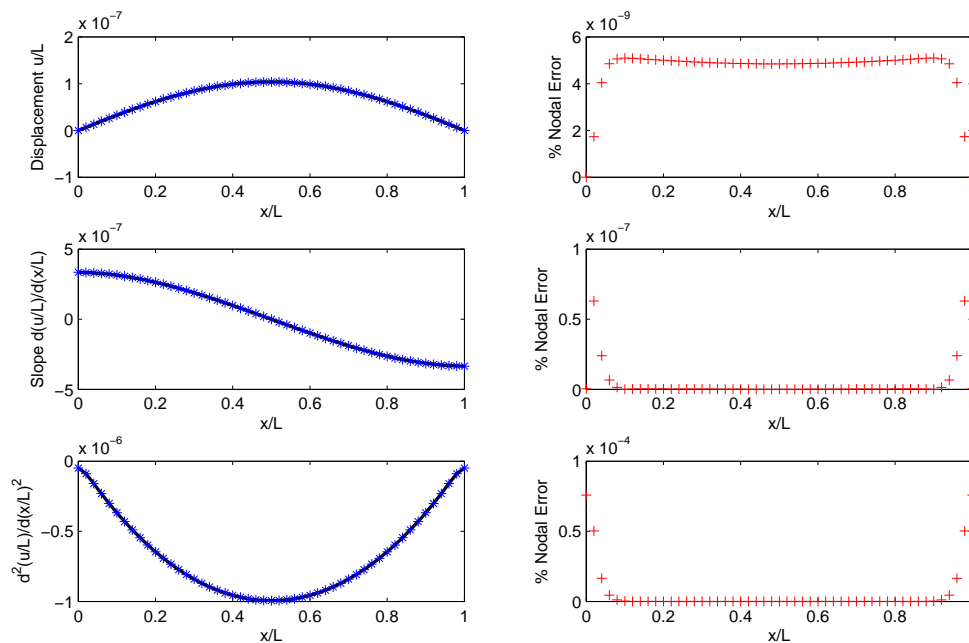
Για τις τιμές αυτές υπολογίζουμε τη γενική λύση, αναλυτικά, και τη συγκρίνουμε με αυτήν της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας που προκύπτει από τη μέθοδο Galerkin. Στο παρακάτω διάγραμμα, βλέπουμε την παραμόρφωση, την κλίση και τη δεύτερη παράγωγο που προέκυψαν από εφαρμογή της μεθόδου Galerkin με διαμέριση 50 στοιχείων, σε σχέση με την αναλυτική λύση, καθώς και τη σύγκριση με τη λύση που προκύπτει από την κλασική θεώρηση.





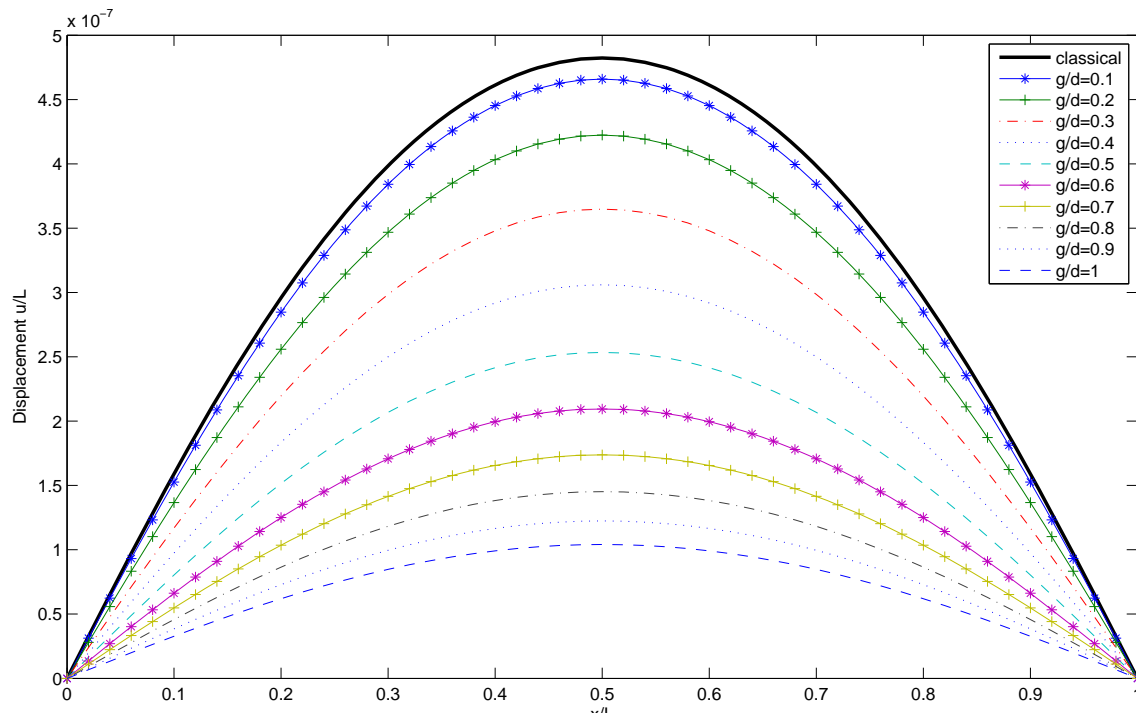
**Εικόνα 39 - Αριθμητική και Αναλυτική λύση - Σύγκριση με τη λύση της κλασικής Θεωρίας**

**Παρατηρήσεις:** Οι παρατηρήσεις είναι ίδιες με αυτές της περίπτωσης του προβόλου. Η προσεγγιστική λύση, όπως και στην περίπτωση του προβόλου, ταυτίζεται με την αναλυτική στα σημεία της παρεμβολής. Στο αμέσως επόμενο διάγραμμα, φαίνεται το επί τις εκατό σφάλμα στους κόμβους, το οποίο είναι της τάξης του  $10^{-4}$  με  $10^{-9}$  %.



**Εικόνα 40 - % σχετικό σφάλμα της αριθμητικής λύσης**

Η μετατόπιση, βάσει της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας, είναι μικρότερη από αυτήν της κλασικής θεώρησης. Δηλαδή, στο μοντέλο της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας, η δοκός εμφανίζεται **πιο δύσκαμπτη**, συμπεριφορά η οποία είναι πιο αντιπροσωπευτική όταν έχουμε δοκούς, η διάμετρος των οποίων είναι της τάξης του μήκους  $g$  της μικροδομής του υλικού. Στο επόμενο σχήμα, βλέπουμε αυτήν ακριβώς τη συμπεριφορά, καθώς και τη λύση βάσει της κλασικής θεωρίας.



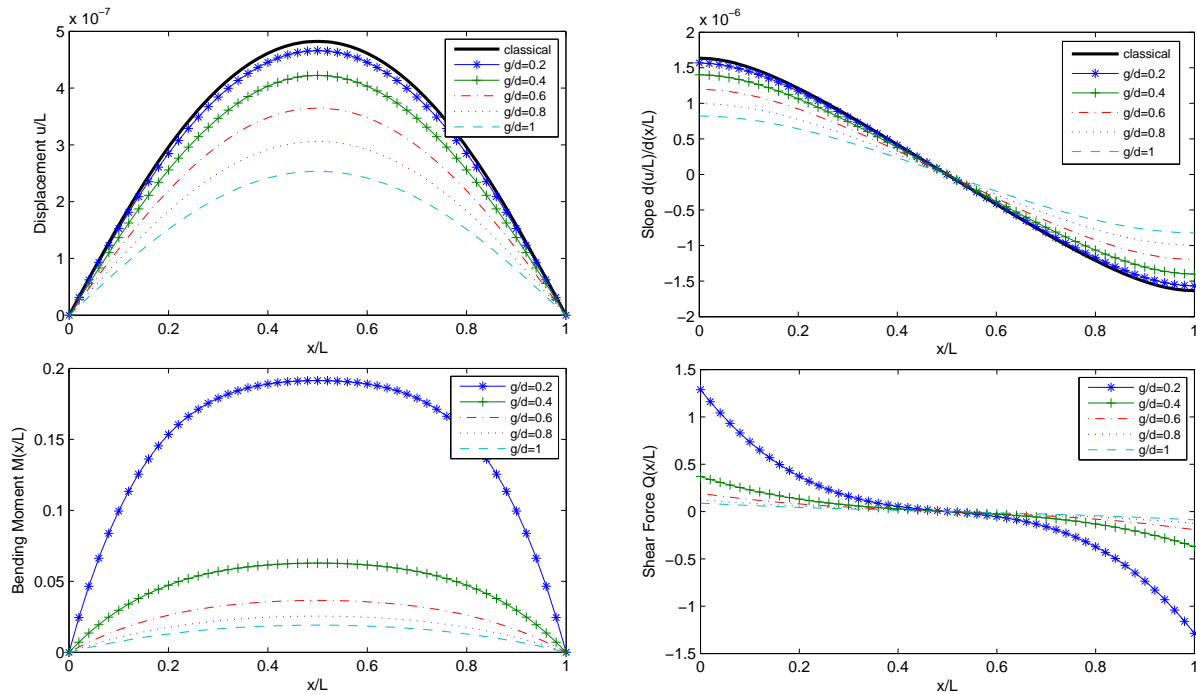
Εικόνα 41 - Οι λύσεις του προβλήματος του προβόλου για διάφορες τιμές του λόγου  $g/d$

Για διαφορετικές τιμές του λόγου  $g/d$  του χαρακτηριστικού μήκους μικροδομής προς τη διάμετρο της δοκού, βλέπουμε τον τρόπο, με το οποίο αλλάζει η παραμόρφωση. Όσο η διάμετρος της δοκού τείνει στο χαρακτηριστικό μήκος  $g$ , τόσο πιο **στιβαρή** γίνεται η δοκός. Έτσι, βλέπουμε, πάλι, ότι η θεωρία βαθμίδας ελαστικότητας δύναται να περιγράψει πλήρως τη συμπεριφορά της δοκού.

Παρατηρούμε, πάλι, ότι η μετατόπιση βάσει της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας είναι μικρότερη από αυτήν της κλασικής θεώρησης και πως, καθώς ο λόγος  $g/d$  τείνει στο 1, η προσεγγιστική λύση της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας βαίνει μειούμενη, δηλαδή η δοκός γίνεται πιο άκαμπτη.

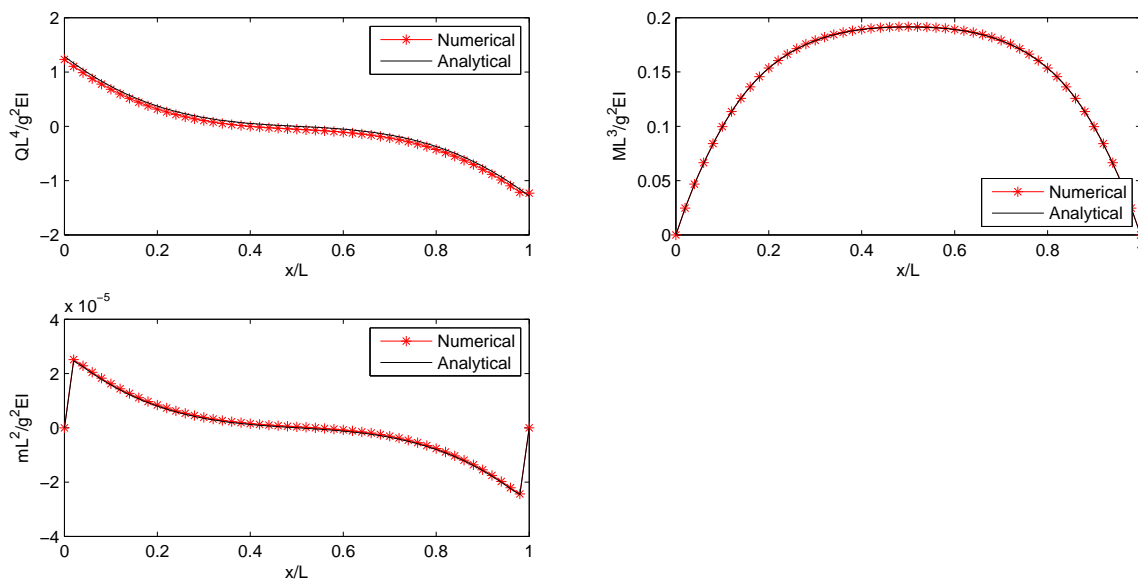
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟ

Το φαινόμενο της επίδρασης της ελαστικής έδρασης στο μοντέλο είναι φανερό και στο παρακάτω διάγραμμα, όπου και τα υπόλοιπα μεγέθη επηρεάζονται, όπως η κλίση της παραμόρφωσης, καθώς και η καμπτική ροπή και η διατμητική δύναμη.



Εικόνα 42 - Μετατόπιση, κλίση, ροπή και διατμητική δύναμη για τις διάφορες τιμές του  $g/d$

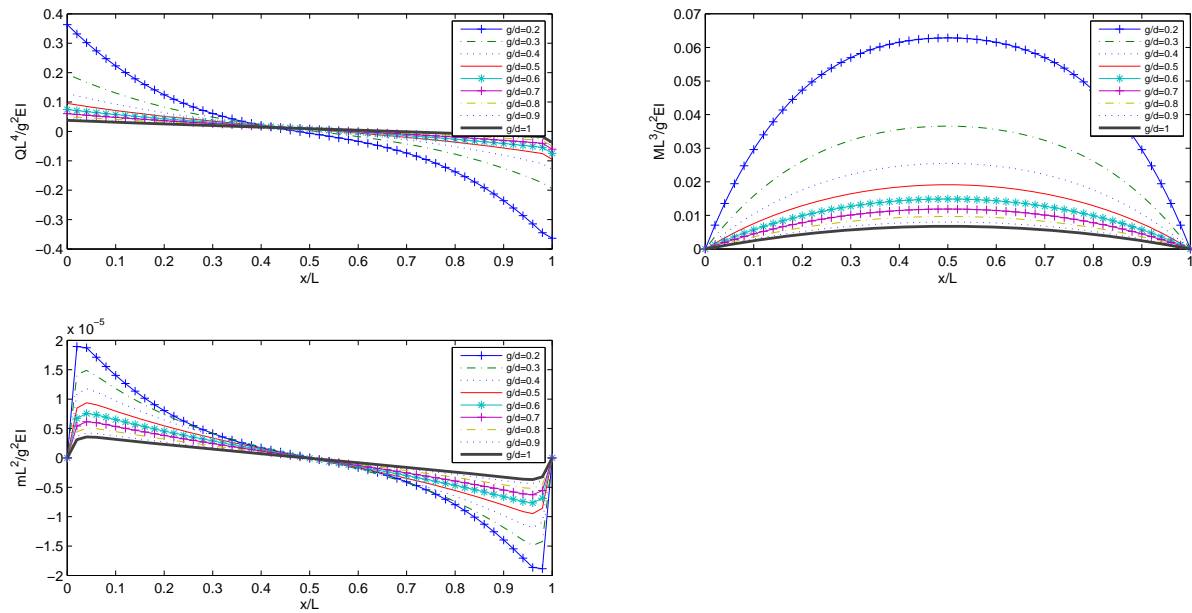
Ο υπολογισμός των καμπτικών ροπών και των διατμητικών δυνάμεων έγινε βάσει των σχέσεων (5.4.3), υπολογιστικά, και βάσει των (5.5.1), αναλυτικά. Στο επόμενο, φαίνεται η ταύτιση των αριθμητικών και αναλυτικών τιμών τους.



Εικόνα 43 - Διατμητική δύναμη και ροπές κάμψης. Σύγκριση αναλυτικών και αριθμητικών τιμών

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΗΣ ΣΕ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟ

Η συμπεριφορά των μεγεθών των καμπτικών ροπών και της διατμητικής δύναμης για διάφορες τιμές του λόγου  $g/d$  φαίνεται στο αμέσως επόμενο διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι καθώς ο λόγος  $g/d$  τείνει στη μονάδα, οι τιμές των μεγεθών αυτών μειώνονται.



Εικόνα 44 - Καμπτικές ροπές και διατμητική δύναμη για τις διάφορες τιμές του  $g/d$

## 6. ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΜΨΗ

Οι εξισώσεις που διέπουν την κάμψη και το λυγισμό της δοκού και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες (κλασικές και μη κλασικές) έχουν εξαχθεί χρησιμοποιώντας μία απλή Θ.Β.Ε. Οι συνοριακές συνθήκες έχουν εξαχθεί από την αρχή του λογισμού των μεταβολών Hamilton, με την άμεση ή έμμεση βοήθεια της μεθόδου των σταθμισμένων υπολοίπων. Παρουσιάζεται μία νέα θεωρία κάμψης για λεπτές δοκούς ως προς τη Θ.Β.Ε. με νέους όρους που εξαρτώνται από την επιφάνεια της διατομής. Η σημασία αυτών των όρων αυξάνεται όταν μειώνεται το πάχος της δοκού. Η παρούσα θεωρία δεν περιορίζεται στη μελέτη λεπτών δοκών, αλλά προτείνει μία γενική θεωρία κάμψης, εφαρμοζόμενη σε οποιαδήποτε λεπτή δομή.

Τρία χαρακτηριστικά προβλήματα συνοριακών συνθηκών της δοκού σε κάμψη έχουν λυθεί και η λύση τους, σύμφωνα με τη Θ.Β.Ε., για την παραμόρφωση της δοκού έχει βρεθεί πως μειώνεται (αλλά όχι τόσο σημαντικά) για αυξανόμενες τιμές της παραμέτρου  $g/d$ , με την κλασική λύση θεωρούμενη ως άνω φράγμα. Έτσι, λοιπόν, βάσει της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας, όπως αυτή εξειδικεύεται σε δοκούς, συμπεραίνουμε τα ακόλουθα:

- 1) Η καμπτική δυσκαμψία της δοκού ως προς τη Θ.Β.Ε έχει βρεθεί πως αυξάνει, ενώ η αδιάστατη παράμετρος  $g/d$  (μικροδομικό μήκος προς διάμετρο δοκού) λαμβάνει αυξανόμενες τιμές, συγκρινόμενη με ό,τι προβλέπει η κλασική θεωρία.
- 2) Το χαρακτηριστικό μικροδομικό μήκος  $g$  της παρούσας μοντελοποίησης έχει αποδειχθεί πως παρουσιάζει μία ισχυρότερη **συσχέτιση με τη διάμετρο της κυψέλης του πλέγματος των ατόμων άνθρακα**, όπως αυτό συγκρίνεται με το μήκος που υπολογίζεται με την προσέγγιση της διπολική τάση.
- 3) Η μέγιστη παραμόρφωση της δοκού ως προς τη Θ.Β.Ε. έχει βρεθεί πως μειώνεται σημαντικά, καθώς η παράμετρος  $g/d$  αυξάνεται. Αυτό το γεγονός έχει προφανώς επίπτωση στη συνολική συμπεριφορά της δοκού.

Επίδραση της ελαστικής έδρασης στο μοντέλο.

Το μοντέλο της κλασικής θεώρησης, δίνει πιο εύκαμπτη δοκό, με αποτέλεσμα η ελαστική έδραση να επηρεάζει την παραμόρφωσή της, δημιουργώντας αλλαγή στην καμπυλότητα της συνάρτησης της μετατόπισης.



## **ΜΕΡΟΣ Β - ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΛΥΓΙΣΜΟΥ**

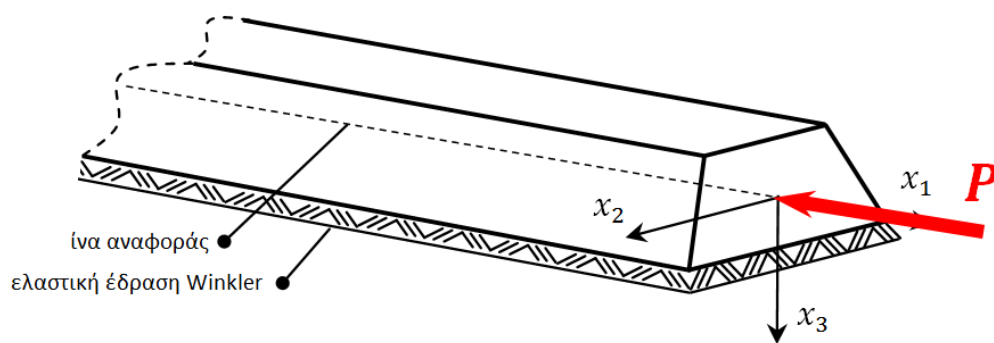




## 7. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ - ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Στην παρούσα ενότητα, θα μελετηθεί το πρόβλημα του λυγισμού μιας δοκού βάσει της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας, μέσω της οποίας θα προκύψουν οι καταστατικές εξισώσεις μαζί με τις συνοριακές συνθήκες.

Θεωρούμε, όπως και στο κεφάλαιο 1, μία ευθύγραμμη πρισματική δοκό σε συνεχή ελαστική έδραση, η οποία υποβάλλεται σε θλιπτική δύναμη  $P$ , κατά τη διεύθυνση του  $x_1$  άξονα, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 45 - Πρισματική δοκός σε ελαστική έδραση υπό αξονική θλίψη

Η τομή  $A$  της δοκού χαρακτηρίζεται από τους άξονες  $x_2$  και  $x_3$ , με τον τελευταίο να είναι άξονας συμμετρίας.

Ξεκινάμε, όπως και στο κεφάλαιο 1, σύμφωνα με την υπόθεση κινηματικής των Bernoulli-Euler. Έτσι λαμβάνουμε:

$$u_3 = u_3(x_1, t)$$

$$u_1(x_1, x_3, t) = -x_3 \frac{\partial u_3(x_1, t)}{\partial x_1} \quad (7.1)$$

$$u_2 = 0$$

Ακολουθούμε τη δεύτερη μορφή της θεωρίας του Mindlin για τη γραμμική ελαστικότητα με μικροδομή. Συνεπώς, έχουμε, πάλι, τις βαθμίδες

$$K_{ijk} := \varepsilon_{jk,i}$$

Από τις εξισώσεις (7.1), οι συνιστώσες της τροπής στο επίπεδο είναι

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}(x_1, x_3, t) &= -x_3 \frac{\partial^2 u_3(x_1, t)}{\partial x_1^2} \\ \kappa_{111}(x_1, x_3, t) &= -x_3 \frac{\partial^3 u_3(x_1, t)}{\partial x_1^3} \\ \kappa_{311}(x_1, t) &= -\frac{\partial^2 u_3(x_1, t)}{\partial x_1^2}\end{aligned}\tag{7.2}$$

Από τις καταστατικές εξισώσεις για το απλοποιημένο ισότροπο στερεό, έχουμε

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ \mu_{ijk} &= g^2 (2\mu \kappa_{ijk} + \lambda \kappa_{irr} \delta_{jk})\end{aligned}$$

όπου  $\tau_{ij}, \mu_{ijk}$  είναι οι συνιστώσες του κλασικού τανυστή τάσης κατά Cauchy και του τανυστή διπολικής τάσης, αντίστοιχα. Στην περίπτωση μας, οι καταστατικές εξισώσεις για τις επίπεδες τάσεις είναι:

$$\begin{aligned}\tau_{11}(x_1, x_3, t) &= E \varepsilon_{11} = -E x_3 \frac{\partial^2 u_3(x_1, t)}{\partial x_1^2} \\ \mu_{111}(x_1, x_3, t) &= g^2 E \kappa_{111} = -g^2 E x_3 \frac{\partial^3 u_3(x_1, t)}{\partial x_1^3} \\ \mu_{311}(x_1, t) &= g^2 E \kappa_{311} = -g^2 E \frac{\partial^2 u_3(x_1, t)}{\partial x_1^2}\end{aligned}\tag{7.3}$$

Η συνεχής ελαστική έδραση περιγράφεται με χρήση του συντελεστή αντίδρασης του εδάφους  $k_0$ .

Η ενέργεια παραμόρφωσης της δοκού μείον το έργο της αξονικής θλιπτικής δύναμης  $P$  θα είναι

$$U_b = \frac{1}{2} \int_V (\tau_{ij} \varepsilon_{ij} + \mu_{ijk} \kappa_{ijk}) dV + \frac{1}{2} \int_V k_0 u_3^2 dV - \frac{1}{2} \int_V P u_{3,1}^2 dV\tag{7.4}$$

Από τις (7.2) και (7.3), η εξίσωση (7.4) γίνεται

$$U_b = \frac{1}{2} \int_V E[(x_3^2 + g^2)(u_{3,11})^2 + g^2 x_3^2 (u_{3,111})^2] dV + \frac{1}{2} \int_V k_0 u_3^2 dV - \frac{1}{2} \int_V P u_{3,1}^2 dV \quad (7.5)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα  $\partial_{x_1} u_3, \partial_{x_1}^2 u_3, \partial_{x_1}^3 u_3$  είναι συναρτήσεις των  $(x_1, t)$  και συμβολίζοντας με  $L$  το μήκος της δοκού και με  $A$  τη διατομή της, το προηγούμενο μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} U_b &= \frac{1}{2} \int_0^L dx_1 \int_A E[(x_3^2 + g^2)(u_{3,11})^2 + g^2 x_3^2 (u_{3,111})^2] dA + \frac{1}{2} \int_0^L u_3^2 dx_1 \int_A k_0 dA \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L (u_{3,1})^2 dx_1 \int_A P dA \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L dx_1 \left\{ E \left[ (u_{3,11})^2 \int_A (x_3^2 + g^2) dA + g^2 (u_{3,111})^2 \int_A x_3^2 dA \right] \right\} \\ &\quad + \int_0^L k_0 u_3^2 dx_1 - \frac{1}{2} \int_0^L P u_{3,1}^2 dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L dx_1 \left\{ E \left[ (u_{3,11})^2 (I_{11} + g^2 A) + g^2 I_{11} (u_{3,111})^2 \right] \right\} + \frac{1}{2} \int_0^L k_0 u_3^2 dx_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L P u_{3,1}^2 dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ C(u_{3,11})^2 + S(u_{3,111})^2 \right] dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^L k_0 u_3^2 dx_1 - \frac{1}{2} \int_0^L P u_{3,1}^2 dx_1 \end{aligned}$$

Τελικά

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ C(u_{3,11})^2 + S(u_{3,111})^2 \right] dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^L k_0 u_3^2 dx_1 - \frac{1}{2} \int_0^L P u_{3,1}^2 dx_1 \quad (7.6)$$

όπου

$$I_{11} = \int_A x_3^2 dA, \quad C := E(I_{11} + g^2 A), \quad S := g^2 E I_{11} \quad (7.7)$$

Η διαδικασία για τη γενική διατύπωση των καταστατικών εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα το λυγισμού, μαζί με τις αντίστοιχες σχέσεις συνοριακών συνθηκών, είναι αντίστοιχη με αυτήν του κεφαλαίου 1. Επειδή, όμως, στην παρούσα εργασία γίνεται μόνο η στατική ανάλυση του προβλήματος, δε χρειάζεται να κάνουμε όλη αυτήν την περιγραφή. Αντίθετα, θεωρώντας τα  $\partial_{x_1} u_3, \partial_{x_1}^2 u_3, \partial_{x_1}^3 u_3$  συναρτήσει μόνο του  $x_1$ , θα γίνει η διατύπωση του στατικού προβλήματος του λυγισμού, βάσει της αντίστοιχης διαδικασίας που περιγράφεται στην εργασία της Papargyri-Beskou et.al.(2003)<sup>[22]</sup>.

### 7.1. ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ - ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Υιοθετώντας τις συνθήκες της δοκού του κεφαλαίου 1 και αντικαθιστώντας τις τιμές της (7.7) στη σχέση (7.8), η ενέργεια παραμόρφωσης της δοκού μείον το έργο της αξονικής θλιπτικής δύναμης  $P$  θα δίνεται από τη σχέση

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L [E(I + g^2 A)(u_3'')^2 + g^2 EI(u_3''')^2] dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^L k_0 u_3^2 dx_1 - \frac{1}{2} \int_0^L P(u_3')^2 dx_1$$

όπου  $u_3' = \frac{du_3}{dx_1}$ .

Αφού το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο, εφεξής θα χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις  $u$  και  $x$ , οπότε και  $u' = \frac{du}{dx}$ .

Σύμφωνα με το λογισμό μεταβολών, η μεταβολή ενός ολοκληρώματος του τύπου

$$U = \int_0^L F(u, u', u'', u''') dx$$

υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_0^L & \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial u''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{\partial F}{\partial u'''} \right) \right] \delta u dx \\ & + \left[ \left[ \frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u''} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial u'''} \right) \right] \delta u \right]_0^L \\ & + \left[ \left[ \frac{\partial F}{\partial u''} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'''} \right) \right] \delta u' \right]_0^L + \left[ \frac{\partial F}{\partial u'''} \delta u'' \right]_0^L \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

όπου, για τη συγκεκριμένη περίπτωση, η συνάρτηση Lagrange  $F$  είναι

$$F = \frac{1}{2} [C(u'')^2 + S(u''')^2 + k_0 u^2 - P(u')^2] \quad (7.1.2)$$

$$\text{όπου } C = E(I + g^2 A), \quad S = g^2 EI \quad (7.1.3)$$

Από τις εξισώσεις (7.1.1) και (7.1.2) μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια παραμόρφωσης

$$\begin{aligned} \delta U_b = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[ 2k_0 u + 2 \frac{d}{dx} P u' + \frac{d^2}{dx^2} 2C u'' - \frac{d^3}{dx^3} 2S u''' \right] \delta u \, dx \\ & + \left[ \left[ -P u' - \frac{d}{dx} C u'' + \frac{d^2}{dx^2} S u''' \right] \delta u \right]_0^L + \left[ \left[ C u'' - \frac{d}{dx} S u''' \right] \delta u' \right]_0^L \\ & + [S u''' \delta u'']_0^L \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} \delta U_b = & \int_0^L [k_0 u + P u'' + C u^{(4)} - S u^{(6)}] \delta u \, dx \\ & + \left[ [-P u' - C u''' + S u^{(5)}] \delta u \right]_0^L \quad (7.1.4) \\ & + \left[ [C u'' - S u^{(4)}] \delta u' \right]_0^L + [S u''' \delta u'']_0^L \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά, η μεταβολή του έργου που προκύπτει από το εξωτερικό φορτίο λυγισμού  $P$ , από τη συνοριακή διατμητική δύναμη  $Q$  και από τις συνοριακές καμπτικές ροπές  $M$  και  $m$  (ανώτερης τάξης ή διπλή), κλασική και μη κλασική, αντίστοιχα, θα είναι

$$\delta W_b = - \int_0^L P \delta u \, dx - [Q \delta u]_0^L + [M \delta u']_0^L + [m \delta u'']_0^L \quad (7.1.5)$$

Με βάσει τις παραδοχές κατά Euler-Bernoulli για ομογενείς πρισματικές δοκούς, η εξίσωση ισορροπίας για τη δοκό της βαθμίδας ελαστικότητας σε λυγισμό, καθώς και όλες οι πιθανές συνοριακές συνθήκες, υπολογίζονται από τη μεταβολική αρχή

$$\delta(U_b - W_b) = 0 \quad (7.1.6)$$

Οπότε, από τις (7.1.4), (7.1.5), η μεταβολική εξίσωση (7.1.6) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \delta(U_b - W_b) = & \int_0^L [-S u^{(6)} + C u^{(4)} + P u'' + k_0 u] \delta u \, dx \\ & + \{ [Q - [+S u^{(5)} - C u''' - P u'] \} \delta u \}_0^L + \{ [-M + [+S u^{(4)} - C u''] \} \delta u' \}_0^L \\ & + \{ [-m + [-S u'''] \} \delta u'' \}_0^L \quad (7.1.7) \end{aligned}$$

Έτσι, η εξίσωση ισορροπίας που διέπει το πρόβλημα του λυγισμού, στη συγκεκριμένη δοκό της βαθμίδας ελαστικότητας, δίνεται από τη σχέση

$$-S \frac{d^6 u}{dx^6} + C \frac{d^4 u}{dx^4} + P \frac{d^2 u}{dx^2} + k_0 u = 0 \quad (7.1.8)$$

με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} Q &= S \frac{d^5 u}{dx^5} - C \frac{d^3 u}{dx^3} - P \frac{d^2 u}{dx^2} & \text{ή} & \quad \delta u = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L \\ M &= S \frac{d^4 u}{dx^4} - C \frac{d^2 u}{dx^2} & \text{ή} & \quad \delta \frac{du}{dx} = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L \\ m &= -S \frac{d^3 u}{dx^3} & \text{ή} & \quad \delta \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

Οι εξισώσεις (7.1.9α), (7.1.9β) αντιστοιχούν στις κλασικές συνοριακές συνθήκες, ενώ η εξίσωση (7.1.9γ) αντιστοιχεί στη μη κλασική. Είναι εμφανές ότι η εξίσωση που διέπει το λυγισμό και οι συνοριακές συνθήκες της πρώτης είναι διαφορετικές από αυτές που έχουν παρουσιαστεί από τους Papargyri-Beskou et.al.(2003)<sup>[22]</sup> και Lazoroulos (2010)<sup>[17]</sup>. Αυτές οι διαφορές οφείλονται στον παράγοντα του ελατηρίου  $k_0$  της θεώρησης του Winkler. Επίσης, υπάρχουν όροι που περιέχουν το εμβαδόν  $A$  της διατομής της δοκού, όπως αναφέρεται και από τον Lazoroulos<sup>[17]</sup>, για πολύ λεπτές δοκούς, όπου η διάμετρος  $d$  μπορεί να συγκριθεί με το εσωτερικό μήκος  $g$ , η συνεισφορά αυτών των επιπρόσθετων όρων αποκτά μέγιστη σημασία.

## 7.2 ΕΥΡΕΣΗ ΓΕΝΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ

Για να διευκολύνουμε τη διατύπωση και επίλυση του προβλήματος του λυγισμού, μειώνουμε το μέγεθος της μετεβλητής  $x$  της δοκού και της παραμόρφωσης  $u$ , διαιρώντας τες με το μήκος της δοκού  $L$ . Δηλαδή, όπως και στο κεφάλαιο 2, πραγματοποιούμε την παρακάτω αδιαστατοποίηση:

$$\tilde{x} := x/L, \quad \tilde{u} := u/L \quad (7.2.1)$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} d\tilde{x} &= \frac{dx}{L}, & d\tilde{u} &= \frac{du}{L}, \\ \frac{d^n u}{dx^n} &= L^{-n} \frac{d^n u}{d\tilde{x}^n} = L^{(1-n)} \frac{d^n \tilde{u}}{d\tilde{x}^n} \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

Από τις (7.1.3), (7.2.1), (7.2.2) και με απλές αλγεβρικές πράξεις, η διαφορική εξίσωση (7.1.8) που διέπει το πρόβλημα γράφεται ως:

$$-\frac{d^6\tilde{u}}{d\tilde{x}^6} + \tilde{\mathcal{A}}\frac{d^4\tilde{u}}{d\tilde{x}^4} + \tilde{\mathcal{B}}\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{x}^2} + \tilde{\mathcal{C}}\tilde{u} = 0 \quad (7.2.3)$$

όπου θέσαμε

$$\tilde{\mathcal{A}} := L^2\left(g^{-2} + \frac{A}{I_{11}}\right), \quad \tilde{\mathcal{B}} := \frac{PL^4}{g^2EI}, \quad \tilde{\mathcal{C}} := \frac{k_0L^6}{g^2EI_{11}} \quad (7.2.4)$$

Οι αντίστοιχες φυσικές μεταβλητές  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{M}$  και  $\tilde{m}$  δίνονται από τους τύπους

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \frac{d^5\tilde{u}}{d\tilde{x}^5} - \tilde{\mathcal{A}}\frac{d^3\tilde{u}}{d\tilde{x}^3} - \tilde{\mathcal{B}}\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{x}^2} = \frac{QL^4}{g^2EI_{11}} & \text{ή } \delta\tilde{u} &= 0 \text{ στο } \tilde{x} = 0 \text{ ή στο } \tilde{x} = 1 \\ \tilde{M} &= -\tilde{\mathcal{A}}\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{x}^2} + \frac{d^4\tilde{u}}{d\tilde{x}^4} = \frac{ML^3}{g^2EI_{11}} & \text{ή } \delta\tilde{u}' &= 0 \text{ στο } \tilde{x} = 0 \text{ ή στο } \tilde{x} = 1 \\ \tilde{m} &= -\frac{d^3\tilde{u}}{d\tilde{x}^3} = \frac{mL^2}{g^2EI_{11}} & \text{ή } \delta\tilde{u}'' &= 0 \text{ στο } \tilde{x} = 0 \text{ ή στο } \tilde{x} = 1 \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Για να βρούμε μια γενική λύση της εξίσωσης (7.2.3) αναλυτικά, βρίσκουμε το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο, ώστε να προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές  $\lambda_i$ :

$$\lambda^6 - \tilde{\mathcal{A}}\lambda^4 - \tilde{\mathcal{B}}\lambda^2 - \tilde{\mathcal{C}} = 0 \quad (7.2.6)$$

Το πολυώνυμο αυτό αποτελεί ένα 6<sup>ου</sup> βαθμού πολυώνυμο, όπου, αν θέσουμε  $z = \lambda^2$ , θα καταλήξουμε σε μία εξίσωση τρίτου βαθμού, όπως στο κεφάλαιο 2:

$$z^3 - \tilde{\mathcal{A}}z^2 - \tilde{\mathcal{B}}z - \tilde{\mathcal{C}} = 0 \quad (7.2.7)$$

Η αναλυτική λύση της εξίσωσης (7.2.7) είναι πολύ δύσκολο να υπολογισθεί με τη μέθοδο του Cardano ή με οποιαδήποτε άλλη μέθοδο υπολογισμού ριζών τριτοβάθμιας εξίσωσης, διότι, θέλοντας να βρούμε τις τιμές εκείνες της  $P$  που θα προκαλέσουν λυγισμό, η  $P$  θεωρείται παράμετρος, οπότε κάνει τις πράξεις πιο πολύπλοκες. Επομένως, θα προσδιορίσουμε τη λύση του προβλήματος του λυγισμού μόνο μέσω της αριθμητικής μεθόδου Galerkin. Η λύση που προκύπτει δεν είναι μοναδική.

### 7.3 ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΤΗΝ ΚΛΑΣΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Η εξίσωση που χαρακτηρίζει το λυγισμό μιας απλής δοκού κατά Euler - Bernoulli στην ελαστική θεώρηση Winkler είναι:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + P \frac{d^2 u}{dx^2} + k_0 u = 0 \quad (7.3.1)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της παραπάνω εξίσωσης είναι το

$$EI\lambda^4 + P\lambda^2 + k_0 = 0 \quad (7.3.2)$$

Θέτοντας  $z = \lambda^2$ , θα πάρουμε

$$z^2 + Az + B = 0 \quad (7.3.3)$$

όπου  $A = \frac{P}{EI}$ ,  $B = \frac{k_0}{EI}$ .

Οι αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης εξαρτώνται από τις τιμές που μπορεί να λάβουν τα μεγέθη  $EI, P$  και  $k_0$ . Οι ποσότητες  $EI, P$  και  $k_0$  είναι θετικές, άρα και τα  $A$  και  $B$ , οπότε, η διακρίνουσα

$$\Delta = A^2 - 4B = \frac{P^2}{EI^2} - 4\frac{k_0}{EI}$$

της χαρακτηριστικής εξίσωσης που προκύπτει, **αλλάζει το πρόσημό της** για πολύ μεγάλες τιμές του  $k_0$ . Υπολογίζουμε τις ρίζες της εξίσωσης (7.3.3.):

$$z_1 = \frac{1}{2}(-\sqrt{\Delta} - A) = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{P^2}{EI^2} - 4\frac{k_0}{EI}} - \frac{P}{EI}\right)$$

και

$$z_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\Delta} - A) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{P^2}{EI^2} - 4\frac{k_0}{EI}} - \frac{P}{EI}\right)$$

Οπότε

$$\lambda_1 = \sqrt{z_1}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{z_1}$$

$$\lambda_3 = \sqrt{z_2}$$

$$\lambda_4 = -\sqrt{z_2}$$

Η γενική λύση αυτής της συνήθους διαφορικής εξίσωσης 4<sup>ου</sup> βαθμού είναι:



$$u(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{\gamma x} + C_4 e^{-\gamma x} \quad (7.3.4)$$

$$\text{όπου } \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{P^2 - 4EI k_0} + P}{2EI}} \text{ και } \gamma = \sqrt{\frac{\sqrt{P^2 - 4EI k_0} - P}{2EI}}$$

Οι σταθερές  $C_j$  θα προκύψουν από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών, οι οποίες σε αυτήν την περίπτωση είναι οι τέσσερις παρακάτω κλασικές συνθήκες:

$$Q = -EI \frac{d^3 u}{dx^3} - P \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \text{ή} \quad \delta u = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L$$

$$M = -EI \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \text{ή} \quad \delta u_{,1} = 0 \text{ στο } x = 0 \text{ ή στο } x = L \quad (7.3.5)$$

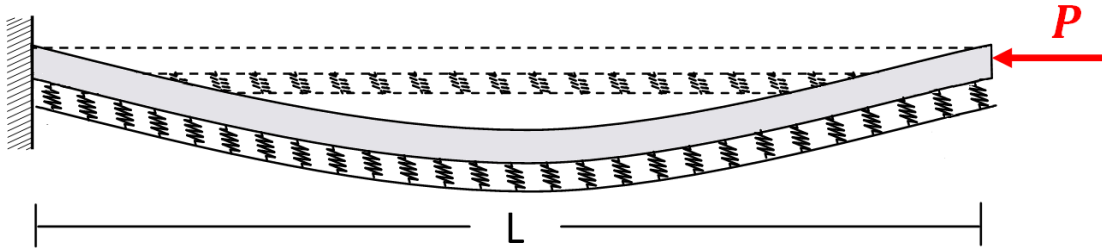
**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Η τιμή της ορίζουσας αλλάζει, βάσει των μεγεθών  $EI, P$  και  $k_0$ . Έτσι, οι ποσότητες  $\beta$  και  $\gamma$  λαμβάνουν και φανταστικές τιμές. Η λύση, λοιπόν, του λυγισμού παίρνει τη μορφή ημιτονοειδούς συνάρτησης, οπότε επαληθεύεται η πολλαπλότητά της. Το πρόβλημα, λοιπόν, είναι να προσδιοριστεί, μέσα από όλες τις πιθανές λύσεις, ποια λύση θα αντιστοιχεί στο μέγιστο φορτίο λυγισμού, φορτίο κρίσιμο για την ευστάθεια της ισορροπίας της δοκού. Η εύρεση του φορτίου αυτού αναλυτικά είναι δύσκολη, οπότε θα γίνει, όπως και στη μη κλασική περίπτωση, με τη βοήθεια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.



## 8. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΠΡΟΒΟΛΟΥ

### 8.1. ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Από την περίπτωση της κλασικής γραμμικής θεώρησης Winkler, θεωρούμε το ακόλουθο μοντέλο λυγισμού μιας δοκού κατά Euler-Bernoulli:



Εικόνα 46 - Πρόβολος επί ελαστικής έδρασης σε λυγισμό

Θεωρούμε ότι η δοκός υποβάλλεται σε αξονική θλίψη υπό σταθερή φόρτιση  $P$  και θέλουμε να υπολογίσουμε την κρίσιμη τιμή της  $P_c$ , δηλαδή το φορτίο λυγισμού.

Εισάγουμε τον ακόλουθο χώρο Sobolev:

$$U = \{u \in H^3(0, L) : u(0) = u'(0) = u''(0) = 0\} = H_0^3(0, L) \quad (8.1.1)$$

Η μεταβολική διατύπωση του παραπάνω προβλήματος μπορεί να διατυπωθεί όπως παρακάτω:

**Πρόβλημα P3:** Να βρεθεί  $u \in U$ , τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$-g^2 EI u^{(6)} + E(I + g^2 A) u^{(4)} + P u'' + k_0 u = 0. \quad (8.1.2)$$

Το πρόβλημα P3 δεν μπορεί να λυθεί "άμεσα". Υπάρχουν άπειρα ιδιοζεύγη που ικανοποιούν την εξίσωση (8.1.2), μέσω της (8.1.1). Η μικρότερη ιδιοτιμή,  $P_1 > 0$ , είναι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση  $u_{(1)}$  είναι η μορφή λυγισμού. Δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτικά (ή τουλάχιστον είναι ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία, η οποία ξεπερνάει το πλαίσιο της παρούσας εργασίας) τη μορφή των ιδιολύσεων και των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων. Για το λόγο αυτό, αναπτύσσεται η **μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων** για το πρόβλημα P3.

Η διαδικασία εύρεσης λύσης του προβλήματος P3 θα προχωρήσει σε δύο φάσεις, όπως ακριβώς και στην περίπτωση του λυγισμού. Στο πρώτο βήμα, πρέπει να μετατρέψουμε το αρχικό πρόβλημα συννοριακών τιμών στην **ασθενή του μορφή**. Το δεύτερο βήμα είναι η

**διακριτοποίηση**, όπου η ασθενής μορφή διακριτοποιείται σε έναν πεπερασμένο χώρο και στη συνέχεια επιλύεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

## 8.2. ΒΗΜΑ 1 - ΑΣΘΕΝΗΣ ΜΟΡΦΗ

Οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να οριστούν από τη μεταβολική διατύπωση της εξίσωσης (7.19). Στην περίπτωση μας, όπως και στην περίπτωση της κάμψης, προστίθεται και ο όρος που αντιστοιχεί στη δυναμική ενέργεια που παράγεται από την ελαστική θεώρηση.

Έτσι, από την (8.1.2) θα έχουμε (θέτουμε  $S = g^2 EI$ ,  $C = E(I + g^2 A)$  για ευκολία στις πράξεις)

$$-S \frac{d^6 u}{dx^6} + C \frac{d^4 u}{dx^4} + P \frac{d^2 u}{dx^2} + k_0 u = 0 \quad (8.2.1)$$

Πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με τη (συνάρτηση βάρους)  $w$ , η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες, θα έχουμε

$$\Rightarrow -S w \frac{d^6 u}{dx^6} + C w \frac{d^4 u}{dx^4} + P w \frac{d^2 u}{dx^2} + k_0 w u = 0 \quad (8.2.2)$$

ολοκληρώνουμε πάνω στο μήκος της δοκού:

$$-S \int_0^L w \frac{d^6 u}{dx^6} dx + C \int_0^L w \frac{d^4 u}{dx^4} dx + P \int_0^L w \frac{d^2 u}{dx^2} dx + k_0 \int_0^L w u dx = 0 \quad (8.2.3)$$

και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες θα έχουμε

$$S \int_0^L \frac{dw}{dx} \frac{d^5 u}{dx^5} dx - S \left[ w \frac{d^5 u}{dx^5} \right]_0^L - C \int_0^L \frac{dw}{dx} \frac{d^3 u}{dx^3} dx + C \left[ w \frac{d^3 u}{dx^3} \right]_0^L - P \int_0^L \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx + P \left[ w \frac{du}{dx} \right]_0^L + k_0 \int_0^L w u dx = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 & -S \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} dx + S \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]_0^L - S \left[ w \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right]_0^L + C \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\
 & - C \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_0^L + C \left[ w \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_0^L - P \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + P \left[ w \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L \\
 & + k_0 \int_0^L w u dx = 0
 \end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned}
 & S \int_0^L \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx - S \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_0^L + S \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]_0^L - S \left[ w \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right]_0^L + C \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\
 & - C \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_0^L + C \left[ w \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_0^L - P \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + P \left[ w \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L \\
 & + k_0 \int_0^L w u dx = 0
 \end{aligned}$$

Χάρην ευκολίας, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned}
 & S \int_0^L w''' u''' dx - S[w'' u''']_0^L + S[w' u^{IV}]_0^L - S[wu^V]_0^L + C \int_0^L w'' u'' dx - C[w' u']_0^L \\
 & + C[wu''']_0^L - P \int_0^L w' u' dx + P[wu']_0^L + k_0 \int_0^L w u dx = 0
 \end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned}
 & -S[w'' u''']_0^L + S[w' u^{IV}]_0^L - S[wu^V]_0^L - C[w' u']_0^L + C[wu''']_0^L + P[wu']_0^L \\
 & + S \int_0^L w''' u''' dx + C \int_0^L w'' u'' dx - P \int_0^L w' u' dx \\
 & + k_0 \int_0^L w u dx = 0
 \end{aligned} \tag{8.2.4}$$

όπου αν αντικαταστήσουμε, πάλι,  $C = E(I + g^2 A)$  και  $S = g^2 EI$ , θα πάρουμε την τελική μορφή

$$g^2 EI \int_0^L w''' u''' dx + E(I + g^2 A) \int_0^L w'' u'' dx - P \int_0^L w' u' dx + k_0 \int_0^L w u dx = 0 \tag{8.2.5}$$

με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες, όπως αυτές προκύπτουν από τη σχέση (8.2.4)

$$\begin{aligned}
 & -g^2 EI [w'' u''']_0^L + [w' (EI g^2 u^{IV} - E(I + g^2 A) u'')]_0^L \\
 & + [w(E(I + g^2 A) u''' - EI g^2 u^V)]_0^L + P[wu']_0^L = 0
 \end{aligned} \tag{8.2.6}$$

Έτσι, λοιπόν, προκύπτει η διατύπωση του πατακάτω προβλήματος P4:

**Πρόβλημα P4:** Να βρεθεί  $u \in U$  ώστε,

$$a(u, w) - Pb(u, w) = 0 \quad \text{στο } (0, L), \quad \forall w \in U \tag{8.2.7}$$

όπου  $a(u, w), b(u, w) : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ , διγραμμικά συναρτησιακά, που ορίζονται από:

$$a(u, w) := g^2 EI \int_0^L w''' u''' dx + E(I + g^2 A) \int_0^L w'' u'' dx + k_0 \int_0^L w u dx$$

$$b(u, w) = \int_0^L w' u' dx$$

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Το πρόβλημα P4 αποτελεί την **ασθενή μορφή** του αρχικού προβλήματος P3. Προφανώς, η λύση του P4 αποτελεί και λύση του P3. Για το μεταβολικό πρόβλημα P4, είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι **δεν υπάρχει μοναδική λύση**.

### 8.3 ΒΗΜΑ 2 - ΜΕΘΟΔΟΣ GALERKIN

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin, θα μετατρέψουμε το πρόβλημα (8.2.7)

Να βρεθεί  $u \in U$ , ώστε  $\forall w \in U$

$$\begin{cases}
 a(u, w) - Pb(u, w) = 0 \\
 a(u, w) := g^2 EI \int_0^L w''' u''' dx + E(I + g^2 A) \int_0^L w'' u'' dx + k_0 \int_0^L w u dx \\
 b(u, w) = \int_0^L w' u' dx
 \end{cases}$$

στο παρακάτω πρόβλημα πινάκων

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές  $P_h^k$  και τα ιδιοδιανύσματα  $d^k$ ,  $k=1, \dots, 3N$ , ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$(K - P_h^k M) d^k = 0 \tag{8.3.1}$$

όπου  $\mathbf{K}$  είναι το ολικό μητρώο δυσκαμψίας που προκύπτει από το συναρτησιακό  $a(u, w)$ ,  $\mathbf{M}$  το μητρώο που προκύπτει από το  $b(u, w)$ ,  $P_h^k$  η προσεγγιστική ιδιοτιμή  $P$  για την  $k$ -ιδιομορφή και  $\mathbf{d}^k$  το ιδιοδιάνυσμα που περιέχει τις κομβικές τιμές  $u_u^k(x)$ ,  $u'_u{}^k(x)$  και  $u''_u{}^k(x)$  για το αντίστοιχο φορτίο  $P_h^k$ .

Το πρόβλημα (8.4.1) μπορεί να γραφεί διαφορετικά

$$(\mathbf{K} - P_h^k \mathbf{M}) \mathbf{d}^k = \mathbf{0} \implies \mathbf{K} \mathbf{d}^k = P_h^k \mathbf{M} \mathbf{d}^k$$

Πράγμα που δείχνει ότι είναι ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών, όπου πρέπει να καθοριστούν οι μη τετριμμένες λύσεις της εξίσωσης. Σκοπός μας, λοιπόν, είναι να προσδιορίσουμε τα ολικά μητρώα  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  από τα αντίστοιχα τοπικά  $\mathbf{k}^e$ ,  $\mathbf{m}^e$ , μέσω των βημάτων των πεπερασμένων στοιχείων, και στη συνέχεια να λύσουμε το γραμμικό πρόβλημα  $\mathbf{K} - P_h^k \mathbf{M} = \mathbf{0}$ . Η λύση αυτού θα μας δώσει τις ιδιοτιμές-κρίσιμα φορτία λυγισμού και, με εφαρμογή καθε μίας από αυτές στη σχέση (8.3.1), θα λάβουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των μετατοπίσεων.

### 8.3.1 - ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΟΥ $\Omega = [0, L]$

Ο  $H^3(0, L)$  με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες  $u(0) = u'(0) = u''(0) = 0$  αποτελεί έναν κατάλληλο χώρο λύσεων. Διαμερίζουμε το διάστημα  $[0, L]$  για την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin, ως εξής:

$$\mathfrak{I}_N := 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = L, \quad N \in \mathbb{N}$$

Άρα, ο χώρος της προσεγγιστικής λύσης θα είναι ο

$$U_h = \left\{ \begin{array}{l} u_h \in H^3(0, L): u_h(0) = u'_h{}^{(0)} = u''_h{}^{(0)} = 0 \\ u_h|_{[x_{i-1}, x_i]} = \sum_{j=1}^N a_{i,j} x^j, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

Έτσι, η ασθενής μορφή (8.4.1) θα μετατραπεί στην αντίστοιχη **διατύπωση Galerkin**:

Να βρεθεί  $u_h \in U_h$ , ώστε  $\forall w_h \in U_h$

$$a(u_h, w_h) - P_h b(u_h, w_h) = 0 \tag{8.3.2}$$

### 8.3.2 - ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΒΑΣΗΣ $\varphi_i$

Οι συναρτήσεις βάσης που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι οι ίδιες με αυτές του πρώτου μέρους της εργασίας. Θα είναι, δηλαδή, πολυώνυμα Hermite, τα οποία θα παρεμβάλουν τη λύση  $u$ , την κλίση της  $u' = v$  και τη δεύτερη παράγωγο  $u'' = w$ .

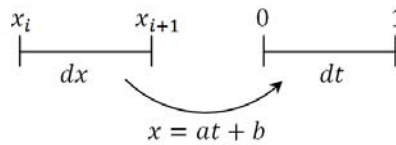
#### 8.3.2.1 - Προσέγγιση της λύσης $u_h$

Το πολυώνυμο παρεμβολής θα είναι το ίδιο με αυτό του προβλήματος της κάμψης.

$$u_h = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 \quad (8.3.3)$$

Η προσέγγιση θα γίνει πάνω σε κάθε στοιχείο της διαμέρισης. Θα απεικονίσουμε το σύστημα στο διάστημα  $[0,1]$ , κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής που φαίνεται στο σχέδιο

Έτσι, λοιπόν, βρίσκουμε ότι



$$x = ht + x_i \text{ και } dx = hdt,$$

ενώ

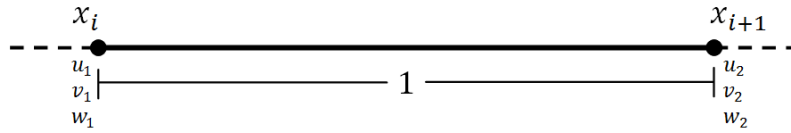
$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{h^2} \frac{d^2u}{dt^2}, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{1}{h^3} \frac{d^3u}{dt^3} \quad (8.3.4)$$

Οπότε, θα έχουμε (γράφοντας πάλι  $x$  αντί για  $t$ , για λόγους ευκολίας, το  $x$  θα αναφέρεται στο  $[0,1]$ )

$$\begin{aligned} u_h(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 \\ u'_h(x) &= \frac{c_1 + 2xc_2 + 3x^2c_3 + 4x^3c_4 + 5x^4c_5}{h} \\ u''_h(x) &= \frac{2c_2 + 6xc_3 + 12x^2c_4 + 20x^3c_5}{h^2} \end{aligned} \quad (8.3.5)$$



8.3.2.2 - Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών



Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στο πολυώνυμο παρεμβολής για κάθε στοιχείο, θα πάρουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} u_h(0) &= u_1, & u_h(1) &= u_2 \\ u'_h(0) &= v_1, & u'_h(1) &= v_2 \\ u''_h(0) &= w_1, & u''_h(1) &= w_2 \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (8.3.5) στο σύστημα (8.3.6) και επιλύοντάς το ως προς τις σταθερές  $c_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$ , θα βρούμε την έκφραση της  $u_h$ , συναρτήσεως των  $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ :

$$\begin{aligned} u_h &= (1 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5)u_1 + (hx - 6hx^3 + 8hx^4 - 3hx^5)v_1 \\ &+ \frac{1}{2}(h^2x^2 - 3h^2x^3 + 3h^2x^4 - h^2x^5)w_1 + (10x^3 - 15x^4 + 6x^5)u_2 \\ &+ (-4hx^3 + 7hx^4 - 3hx^5)v_2 + \frac{1}{2}(h^2x^3 - 2h^2x^4 + h^2x^5)w_2 \end{aligned} \quad (8.3.7)$$

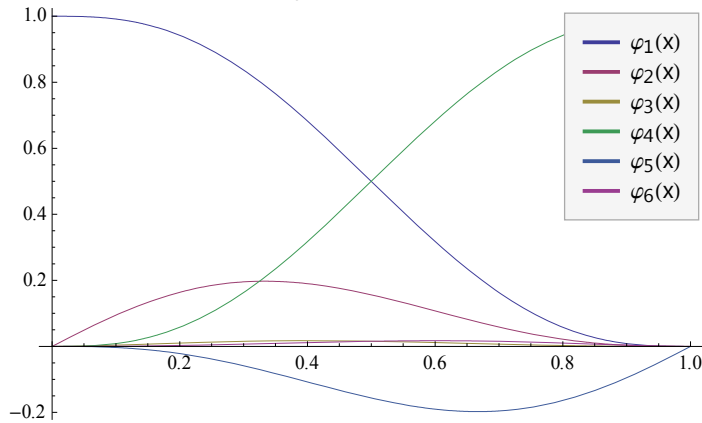
Θέτουμε, τέλος,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5 & \varphi_4 &= 10x^3 - 15x^4 + 6x^5 \\ \varphi_2 &= hx - 6hx^3 + 8hx^4 - 3hx^5 & \varphi_5 &= -4hx^3 + 7hx^4 - 3hx^5 \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2}(h^2x^2 - 3h^2x^3 + 3h^2x^4 - h^2x^5) & \varphi_6 &= \frac{1}{2}(h^2x^3 - 2h^2x^4 + h^2x^5) \end{aligned} \quad (8.3.8)$$

Οι συναρτήσεις  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  αποτελούν τις **συναρτήσεις βάσης** της προσέγγισης  $u_h$ , για την περίπτωση του λυγισμού. Οπότε η  $u_h$  πάνω σε κάθε στοιχείο, μπορεί να γραφεί ως

$$u_h = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 v_1 + \varphi_3 w_1 + \varphi_4 u_2 + \varphi_5 v_2 + \varphi_6 w_2 \quad (8.3.9)$$

Οι συναρτήσεις αυτές φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα:



Εικόνα 47 - Συναρτήσεις Hermite

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Οι συναρτήσεις βάσης είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές του προβλήματος της κάμψης. Οι συναρτήσεις αυτές κατασκευάζονται μόνο βάσει της θεώρησης που έχουμε υιοθετήσει.

### 8.3.3 -ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ $\alpha(\varphi_i, \varphi_j)$ ΚΑΙ $b(\varphi_i, \varphi_j)$

#### 8.3.3.1 - Μετατροπή του συστήματος λύσης

Το πρόβλημα που έχουμε για επίλυση είναι το

$$g^2 EI \int_0^L w'''' u'''' dx + E(I + g^2 A) \int_0^L w'' u'' dx - P \int_0^L w' u' dx + k_0 \int_0^L w u dx = 0 \quad (8.3.10)$$

όπου το  $w$  ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Επόμενο βήμα είναι να μεταφέρουμε το πρόβλημα από το σύστημα του  $[0, L]$  στο σύστημα  $[0, 1]$ . Από το μετασχηματισμό (8.3.4) θα πάρουμε

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{h^2} \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = \frac{1}{h^3} \frac{d^3 u}{dt^3}$$

οπότε

$$\int_0^L \frac{d^3 w}{dx^3} \frac{d^3 u}{dx^3} dx = \int_0^1 \frac{1}{h^6} \frac{d^3 w}{dt^3} \frac{d^3 u}{dt^3} h dt$$

$$\int_0^L \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{h^4} \frac{d^2 u}{dt^2} \frac{d^2 u}{dt^2} h dt$$

$$\int_0^L \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_0^1 \frac{1}{h^2} \frac{dw}{dt} \frac{du}{dt} h dt$$

$$\int_0^L w u dx = \int_0^1 w u h dt$$

Άρα, το πρόβλημα (8.3.10) θα μετασχηματιστεί στο

$$\begin{aligned} g^2 EI \int_0^1 \frac{1}{h^6} \frac{d^3 w}{dt^3} \frac{d^3 u}{dt^3} h dt + E(I + g^2 A) \int_0^1 \frac{1}{h^4} \frac{d^2 w}{dt^2} \frac{d^2 u}{dt^2} h dt - P \frac{1}{h^2} \int_0^1 \frac{dw}{dt} \frac{du}{dt} h dt \\ + k_0 \int_0^1 w u h dt = 0 \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

### 8.3.3.2 - Εύρεση τοπικών μητρώων $k^e$ και $m^e$ του στοιχείου

Σε αυτό το βήμα, θα υπολογίσουμε τους πίνακες που προκύπτουν από την αντικατάσταση στην σχέση (8.3.11) των συναρτήσεων βάρους, στις θέσεις των  $u$  και  $w$  διαδοχικά:

Το τοπικό μητρώο που αντιστοιχεί στο  $a(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j)$  θα προκύψει από άθροιση των μητρώων  $\mathbf{k}_3^e, \mathbf{k}_2^e, \mathbf{k}_0^e$  που προκύπτουν από τον υπολογισμό των

$$\begin{aligned} g^2 EI \int_0^1 \frac{1}{h^5} \varphi_i''' \varphi_j''' dt, \quad E(I + g^2 A) \int_0^1 \frac{1}{h^3} \varphi_i' \varphi_j'' dt, \quad , \\ k_0 \int_0^1 \varphi_i \varphi_j h dt \quad i, j = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

αντίστοιχα. Τα μητρώα αυτά θα είναι τα ίδια με τα  $K_0, K_2$  και  $K_3$  που προέκυψαν στα προβλήματα της κάμψης. Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού οι συναρτήσεις βάσης είναι ίδιες.

Το τοπικό μητρώο  $\mathbf{k}_1^e$  που αντιστοιχεί στο  $b(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j)$  θα προκύψει από το υπολογισμό

$$\int_0^1 \frac{1}{h} \varphi_i' \varphi_j' dt \quad i, j = 1, \dots, 6$$

Έτσι, μετά από πράξεις, θα λάβουμε το μητρώο

$$\mathbf{k}_3^e = \frac{g^2 EI}{h^5} \begin{pmatrix} 720 & 360h & 60h^2 & -720 & 360h & -60h^2 \\ 360h & 192h^2 & 36h^3 & -360h & 168h^2 & -24h^3 \\ 60h^2 & 36h^3 & 9h^4 & -60h^2 & 24h^3 & -3h^4 \\ -720 & -360h & -60h^2 & 720 & -360h & 60h^2 \\ 360h & 168h^2 & 24h^3 & -360h & 192h^2 & -36h^3 \\ -60h^2 & -24h^3 & -3h^4 & 60h^2 & -36h^3 & 9h^4 \end{pmatrix} \quad (8.3.12)$$

όπου το στοιχείο  $\mathbf{k}_3^e(1,2)$  αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα

$$g^2 EI \int_0^1 \frac{1}{h^5} \varphi_1''' \varphi_2''' dt$$

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Το μητρώο  $\mathbf{k}_3^e$ , καθώς και τα υπόλοιπα μητρώα είναι συμμετρικά. Αυτό προκύπτει από το ότι το διγραμμικό συναρτησιακό  $a(\varphi_i, \varphi_j)$  είναι συμμετρικό. Αντίστοιχα

$$\mathbf{k}_2^e = \frac{E(I + g^2 A)}{h^3} \begin{pmatrix} \frac{120}{7} & \frac{60h}{7} & \frac{3h^2}{7} & -\frac{120}{7} & \frac{60h}{7} & -\frac{3h^2}{7} \\ 60h & 192h^2 & 11h^3 & 60h & 108h^2 & 4h^3 \\ \frac{7}{35} & \frac{35}{11h^3} & \frac{35}{3h^4} & -\frac{7}{35} & \frac{35}{4h^3} & \frac{35}{h^4} \\ \frac{3h^2}{7} & \frac{11h^3}{35} & \frac{3h^4}{35} & -\frac{3h^2}{7} & \frac{4h^3}{35} & \frac{h^4}{70} \\ 120 & 60h & 3h^2 & 120 & 60h & 3h^2 \\ -\frac{7}{7} & -\frac{7}{7} & -\frac{7}{7} & \frac{7}{7} & -\frac{7}{7} & \frac{7}{7} \\ 60h & 108h^2 & 4h^3 & 60h & 192h^2 & 11h^3 \\ \frac{7}{35} & \frac{35}{4h^3} & \frac{35}{h^4} & -\frac{7}{35} & \frac{35}{11h^3} & -\frac{35}{3h^4} \\ 3h^2 & 4h^3 & h^4 & 3h^2 & 11h^3 & 3h^4 \\ -\frac{7}{7} & -\frac{35}{35} & \frac{70}{70} & \frac{7}{7} & -\frac{35}{35} & \frac{35}{35} \end{pmatrix} \quad (8.3.13)$$

και

$$\mathbf{k}_0^e = k_0 h \begin{pmatrix} \frac{181}{462} & \frac{311h}{4620} & \frac{281h^2}{55440} & \frac{25}{231} & -\frac{151h}{4620} & \frac{181h^2}{55440} \\ 311h & 52h^2 & 23h^3 & 151h & 19h^2 & 13h^3 \\ 4620 & 3465 & 18480 & 4620 & 1980 & 13860 \\ 281h^2 & 23h^3 & h^4 & 181h^2 & 13h^3 & h^4 \\ 55440 & 18480 & 9240 & 55440 & 13860 & 11088 \\ 25 & 151h & 181h^2 & 181 & 311h & 281h^2 \\ 231 & 4620 & 55440 & 462 & 4620 & 55440 \\ 151h & 19h^2 & 13h^3 & 311h & 52h^2 & 23h^3 \\ -4620 & -1980 & -13860 & -4620 & 3465 & -18480 \\ 181h^2 & 13h^3 & h^4 & 281h^2 & 23h^3 & h^4 \\ 55440 & 13860 & 11088 & 55440 & -18480 & 9240 \end{pmatrix} \quad (8.3.14)$$

όπου το στοιχείο  $\mathbf{k}_2^e(1,2)$  αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα

$$E(I + g^2 A) \int_0^1 \frac{1}{h^3} \varphi_1'' \varphi_2'' dt$$

και το στοιχείο  $k_0^e(1,2)$  αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα

$$k_0 \int_0^1 \varphi_1 \varphi_2 h dt.$$

Αντίστοιχα, θα προκύψει και το μητρώο

$$k_1^e = -\frac{1}{h} \begin{pmatrix} \frac{10}{7h} & \frac{3}{14} & \frac{h}{84} & -\frac{10}{7h} & \frac{3}{14} & -\frac{h}{84} \\ 3 & 8h & h^2 & 3 & h & h^2 \\ \frac{14}{14} & \frac{35}{35} & \frac{60}{60} & -\frac{14}{14} & -\frac{70}{70} & \frac{210}{210} \\ h & h^2 & h^3 & h & h^2 & h^3 \\ \frac{84}{84} & \frac{60}{60} & \frac{360}{360} & -\frac{84}{84} & -\frac{210}{210} & \frac{1260}{1260} \\ -\frac{10}{7h} & -\frac{3}{14} & -\frac{h}{84} & \frac{10}{7h} & \frac{3}{14} & \frac{h}{84} \\ 3 & h & h^2 & 3 & 8h & h^2 \\ \frac{14}{14} & -\frac{70}{70} & -\frac{210}{210} & -\frac{14}{14} & \frac{35}{35} & -\frac{60}{60} \\ h & h^2 & h^3 & h & h^2 & h^3 \\ -\frac{84}{84} & \frac{210}{210} & \frac{1260}{1260} & \frac{84}{84} & -\frac{210}{210} & \frac{360}{360} \end{pmatrix} \quad (8.3.15)$$

όπου το στοιχείο  $k_1^e(1,2)$  αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{h} \varphi_1' \varphi_2' dt$$

Έτσι, το μητρώο που αντιστοιχεί στο  $a(\varphi_i, \varphi_j)$  θα είναι

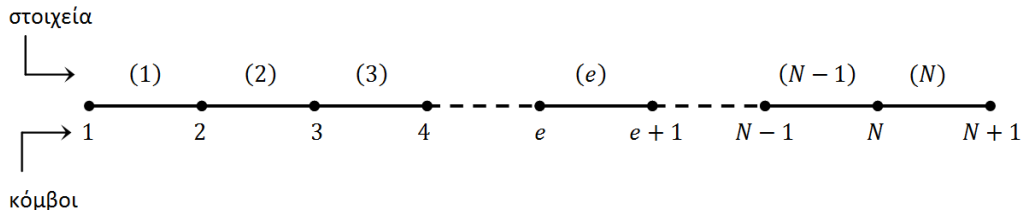
$$k^e = \int_0^1 a(\varphi_i, \varphi_j)^e dx = k_3^e + k_2^e + k_0^e \quad (8.3.16)$$

ενώ το μητρώο που αντιστοιχεί στο  $b(\varphi_i, \varphi_j)$  θα είναι

$$m^e = \int_0^1 b(\varphi_i, \varphi_j)^e dx = k_1^e \quad (8.3.17)$$

8.3.3.3 - Συναρμογή των τοπικών μητρώων στο ολικό

Αντίστοιχα μπορούμε να εκφράσουμε τα μητρώα  $k^e$  και  $m^e$  στο ολικό σύστημα αναφοράς. Για αυτό το σκοπό, θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τα μητρώα οδηγούς  $IEN, ID, LM$  του πρώτου μέρους της εργασίας για να κάνουμε τη συναρμογή στα ολικά μητρώα, καθώς αυτά θα είναι τα ίδια, επειδή θα κρατήσουμε την ίδια διαμέριση και αρίθμηση των κόμβων και των στοιχείων, σύμφωνα με τη μέθοδο του Thomas J. R. Hughes<sup>[31]</sup>.



Συνεπώς, θα προκύψουν τα βοηθητικά μητρώα, ίδια με αυτά της παραγράφου (3.4.3)

**Μητρώο  $IEN$**

στοιχεία	(1)	(2)	(3)	...	(e)	...	(N)
1	1	2	3	...	e	...	N
2	2	3	4	...	e + 1	...	N + 1

↑ τοπικοί κόμβοι του στοιχείου

**Μητρώο  $ID$**

ολικοί κόμβοι	1	2	3	...	e	...	N	N + 1
1	1	4	7	...	3e - 2	...	3N - 2	3N + 1
2	2	5	8	...	3e - 1	...	3N - 1	3N + 2
3	3	6	9	...	3e	...	3N	3N + 3

↑ ολικοί Β.Ε. κάθε κόμβου

**Μητρώο  $LM$**

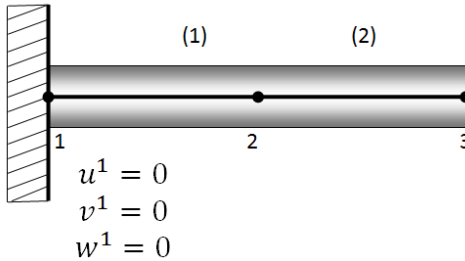
στοιχεία	(1)	(2)	(3)	...	(e)	...	(N)
1	1	4	7	...	3e - 2	...	3N - 2
	2	5	8	...	3e - 1	...	3N - 1
	3	6	9	...	3e	...	3N
2	4	7	10	...	3e + 1	...	3N + 1
	5	8	11	...	3e + 2	...	3N + 2
	6	9	12	...	3e + 3	...	3N + 3

↑ τοπικοί Β.Ε. κάθε κόμβου  
 ↑ τοπικοί κόμβοι κάθε στοιχείου  
 ↑ τοπικές εξισώσεις



8.3.4 - ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Το γραμμικό σύστημα  $\mathbf{K} - P_h^k \mathbf{M} = \mathbf{0}$  δεν είναι έτοιμο να λυθεί. Πρέπει να διαμορφώσουμε τις διαστάσεις των μητρώων, ώστε να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες. Στο πρόβλημα του προβόλου που εξετάζουμε, γνωρίζουμε ότι στον πρώτο κόμβο η παραμόρφωση, η κλίση και η δεύτερη παράγωγος είναι μηδέν.



Εικόνα 48 - Συνοριακές Συνθήκες

Συνεπώς, στο διάνυσμα  $\mathbf{d}$ , τα τρία πρώτα στοιχεία θα είναι μηδέν. Έτσι, για να ταυτίζονται τα μεγέθη των πινάκων αντίστοιχα, προσαρμόζουμε το σύστημα, ώστε να παραμείνει γραμμικό και να μπορεί να επιλυθεί με κάποια αριθμητική μέθοδο. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να διαγράψουμε τις γραμμές και τις στήλες των μητρώων που αναφέρονται στους βαθμούς ελευθερίας του πρώτου κόμβου της διαμέρισης:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c}
 k_{1,1}^1 & k_{1,2}^1 & k_{1,3}^1 & k_{1,4}^1 & k_{1,5}^1 & k_{1,6}^1 & \\
 k_{2,1}^1 & k_{2,2}^1 & k_{2,3}^1 & k_{2,4}^1 & k_{2,5}^1 & k_{2,6}^1 & \\
 k_{3,1}^1 & k_{3,2}^1 & k_{3,3}^1 & k_{3,4}^1 & k_{3,5}^1 & k_{3,6}^1 & \\
 \hline
 k_{4,1}^1 & k_{4,2}^1 & k_{4,3}^1 & k_{4,4}^1 + k_{2,1}^2 & k_{4,5}^1 + k_{2,2}^2 & k_{4,6}^1 + k_{2,3}^2 & \dots \\
 k_{5,1}^1 & k_{5,2}^1 & k_{5,3}^1 & k_{5,4}^1 + k_{2,1}^2 & k_{5,5}^1 + k_{2,2}^2 & k_{5,6}^1 + k_{2,3}^2 & \\
 k_{6,1}^1 & k_{6,2}^1 & k_{6,3}^1 & k_{6,4}^1 + k_{3,1}^2 & k_{6,5}^1 + k_{3,2}^2 & k_{6,6}^1 + k_{3,3}^2 & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & & & & k_{4,4}^{N-1} + k_{1,1}^N & k_{4,5}^{N-1} + k_{1,2}^N & k_{4,6}^{N-1} + k_{1,3}^N & k_{1,4}^N & k_{1,5}^N & k_{1,6}^N \\
 & & & & k_{5,4}^{N-1} + k_{2,1}^N & k_{5,5}^{N-1} + k_{2,2}^N & k_{5,6}^{N-1} + k_{2,3}^N & k_{2,4}^N & k_{2,5}^N & k_{2,6}^N \\
 & & & & k_{6,4}^{N-1} + k_{3,1}^N & k_{6,5}^{N-1} + k_{3,2}^N & k_{6,6}^{N-1} + k_{3,3}^N & k_{3,4}^N & k_{3,5}^N & k_{3,6}^N \\
 & & & & & & & k_{4,4}^N & k_{4,5}^N & k_{4,6}^N \\
 & & & & & & & k_{5,4}^N & k_{5,5}^N & k_{5,6}^N \\
 & & & & & & & k_{6,4}^N & k_{6,5}^N & k_{6,6}^N
 \end{array} \right) \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

$$\left( \begin{array}{cccccc|c}
 m_{1,2}^1 & m_{1,2}^1 & m_{1,3}^1 & m_{1,4}^1 & m_{1,5}^1 & m_{1,6}^1 & \\
 m_{2,1}^1 & m_{2,2}^1 & m_{2,3}^1 & m_{2,4}^1 & m_{2,5}^1 & m_{2,6}^1 & \\
 m_{3,1}^1 & m_{3,2}^1 & m_{3,3}^1 & m_{3,4}^1 & m_{3,5}^1 & m_{3,6}^1 & \\
 \hline
 m_{4,1}^1 & m_{4,2}^1 & m_{4,3}^1 & m_{4,4}^1 + m_{2,1}^2 & m_{4,5}^1 + m_{2,2}^2 & m_{4,6}^1 + m_{2,3}^2 & \dots \\
 m_{5,1}^1 & m_{5,2}^1 & m_{5,3}^1 & m_{5,4}^1 + m_{2,1}^2 & m_{5,5}^1 + m_{2,2}^2 & m_{5,6}^1 + m_{2,3}^2 & \\
 m_{6,1}^1 & m_{6,2}^1 & m_{6,3}^1 & m_{6,4}^1 + m_{3,1}^2 & m_{6,5}^1 + m_{3,2}^2 & m_{6,6}^1 + m_{3,3}^2 & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & m_{4,4}^{N-1} + m_{1,1}^N & m_{4,5}^{N-1} + m_{1,2}^N & m_{4,6}^{N-1} + m_{1,3}^N & m_{1,4}^N & m_{1,5}^N & m_{1,6}^N \\
 & & & & m_{5,4}^{N-1} + m_{2,1}^N & m_{5,5}^{N-1} + m_{2,2}^N & m_{5,6}^{N-1} + m_{2,3}^N & m_{2,4}^N & m_{2,5}^N & m_{2,6}^N \\
 & & & & m_{6,4}^{N-1} + m_{3,1}^N & m_{6,5}^{N-1} + m_{3,2}^N & m_{6,6}^{N-1} + m_{3,3}^N & m_{3,4}^N & m_{3,5}^N & m_{3,6}^N \\
 & & & & & & & m_{4,4}^N & m_{4,5}^N & m_{4,6}^N \\
 & & & & & & & m_{5,4}^N & m_{5,5}^N & m_{5,6}^N \\
 & & & & & & & m_{6,4}^N & m_{6,5}^N & m_{6,6}^N
 \end{array} \right) \mathbf{d} = \mathbf{0}$$



Το γραμμικό σύστημα που προκύπτει τώρα είναι

$$\underbrace{\mathbf{K}}_{3N \times 3N} - \mathbf{P}_h^k \cdot \underbrace{\mathbf{M}}_{3N \times 3N} = \mathbf{0} \quad (8.3.14)$$

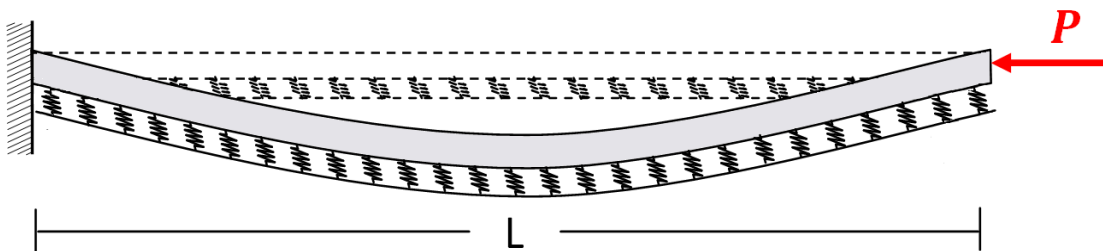
Η λύση της εξίσωσης ιδιοτιμών είναι το  $1 \times 3N$  διάνυσμα  $P_h^k$  που έχει, ως στοιχεία, τα κρίσιμα φορτία λυγισμού. Για παράδειγμα, το πρώτο στοιχείο  $P_h^1$  αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή, της οποίας η τιμή είναι και η μεγαλύτερη. Στις υπόλοιπες θέσεις, βρίσκονται και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές με φθίνουσα σειρά.

Στη συνέχεια, προσδιορίζονται τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{d}^k$  των μετατοπίσεων που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή  $P_h^k$ .

### 8.4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στην παρούσα ενότητα, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο εύρεσης των ιδιοτιμών ταλάντωσης μέσω πεπερασμένων στοιχείων, όπως αυτή παρουσιάστηκε στην ενότητα 8.3. Έτσι, θα έχουμε μια εικόνα για την επιρροή, όσον αφορά τη συμπεριφορά του μοντέλου, των όρων που παρουσιάζονται στην εργασία: τόσο του  $k_0$  που οφείλεται στη θεώρηση της ελαστικής έδρασης Winkler, όσο και του μήκους  $g$  της μικροδομής του υλικού.

Θεωρούμε, λοιπόν, μια πρισματική δοκό κατά Euler-Bernoulli, η οποία υποβάλλεται σε αξονική θλίψη υπό σταθερή φόρτιση  $P$ , και θέλουμε να υπολογίσουμε τα κρίσιμα φορτία λυγισμού.



Εικόνα 49 - Λυγισμός Προβόλου σε ελαστική έδραση

Τα δεδομένα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι από την εργασία του Lazoroulos<sup>[17]</sup>, ο οποίος υπολογίζει τα κρίσιμα φορτία με χρήση της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας, χωρίς όμως τη χρήση ελαστικής έδρασης. Υπολογίζει τις ιδιοτιμές ταλάντωσης αναλυτικά μέσω της σχέσης

$$r_1 \text{Cosh}(r_2 L) \text{Sin}(r_1 L) + r_2 \text{Sinh}(r_2 L) \text{Cos}(r_1 L) = 0 \quad (8.4.1)$$

η οποία προκύπτει από το μηδενισμό της διακρίνουσας της εξίσωσης που περιγράφει το πρόβλημα. Ο μηδενισμός της διακρίνουσας είναι αυτός που εξασφαλίζει μη τετριμμένη λύση. Η σχέση (8.4.1) περιγράφει την κρίσιμη κατάσταση, λόγω του ότι οι τιμές  $r_1$  και  $r_2$  εξαρτώνται από την αξονική θλιπτική δύναμη  $P$ .

Θεωρούμε, λοιπόν,

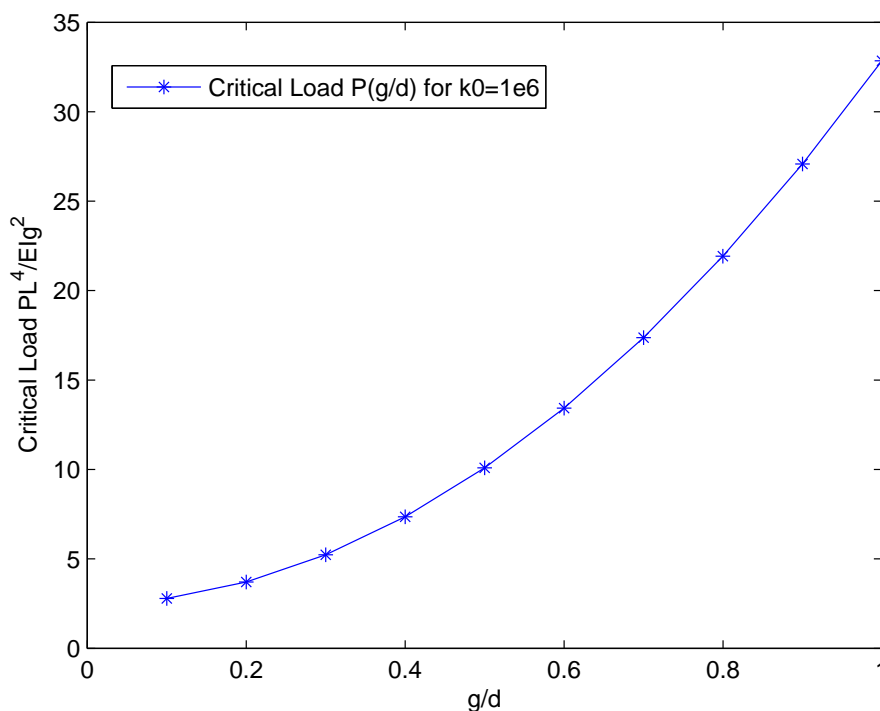
$$d = 0.05m, \quad A = 0,05 m^2, \quad L = 1m, \quad g = 0.01m$$

Οπότε, με εφαρμογή της μεθόδου της ενότητας 8.4, θα βρούμε ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P/EI$  που αντιστοιχεί σε μήκος μικροδομής  $g = 0.01m$ , οπότε και λόγο  $g/d = 0.2$  παίρνει την τιμή  $p_c = 3.75$ , τιμή ίδια με αυτή που βρίσκει ο Lazoroulos.

Στη συνέχεια, αν αυξήσουμε την τιμή  $g$  της σταθεράς μικροδομής στα  $0.02m$ , θα πάρουμε για  $g/d = 0.4$ , κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $p_c = 7.5$ , τιμή που υπολογίζει και ο Lazoroulos.

Τέλος, για τιμή  $g$  ίση με  $0.03m$ , δηλαδή για  $g/d = 0.6$ , το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα αυξηθεί στην τιμή  $p_c = 13.5$ , αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγει και η διαδικασία του Lazoroulos.

Μπορούμε, λοιπόν, να δούμε τη συμπεριφορά των κρίσιμων φορτίων λυγισμού, συναρτήσει του λόγου του εσωτερικού μήκους  $g$  της μικροδομής προς τη διάμετρο  $d$  της δοκού. Στο παρακάτω διάγραμμα, βλέπουμε τις ιδιοτιμές που προκύπτουν για σταδιακή αύξηση του λόγου  $g/d$  από 0.01 μέχρι 0.1



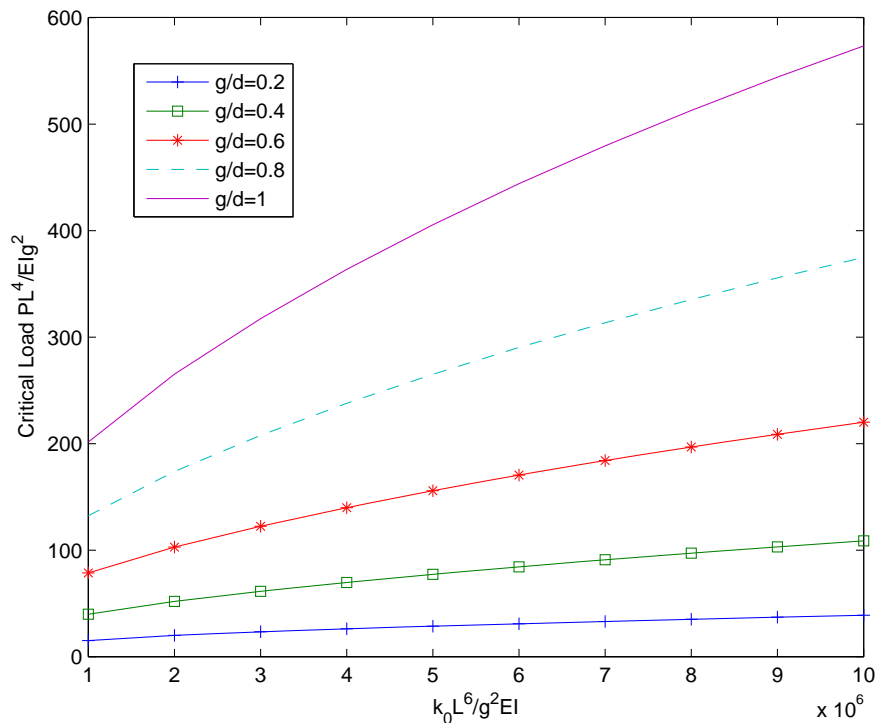
Εικόνα 50 - Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για διάφορες τιμές του λόγου  $g/d$

Είναι προφανές ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού εξαρτάται σημαντικά από το λόγο  $g/d$  και κατά συνέπεια από το μήκος  $g$  της μικροδομής του υλικού. Για την ακρίβεια, η δοκός γίνεται πιο δύσκαμπτη και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού αυξάνεται, καθώς το μήκος  $g$  της μικροδομής αυξάνεται.

Αντίστοιχα, μπορούμε να δούμε τη συμπεριφορά του κρίσιμου φορτίου σε σχέση με το μέγεθος  $k_0$  της θεώρησης της ελαστικής έδρασης Winkler. Η επίδραση του  $\tilde{k}_0$ , (του αδιάστατου συντελεστή που προκύπτει μετά την αδιαστατοποίηση, δηλαδή του  $k_0 L^6 / g^2 EI$ ) γίνεται φανερή, αν θεωρήσουμε ότι, για τα συγκεκριμένα δεδομένα, το  $\tilde{k}_0$  παίρνει τιμές

μεγαλύτερης τάξης από αυτήν του προηγούμενου παραδείγματος, όπως, για παράδειγμα, στην τάξη του  $10^6$ . Ο λόγος που χρησιμοποιείται εδώ είναι από καθαρά μαθηματικής άποψης, έτσι ώστε να δούμε τη συμπεριφορά του μοντέλου.

Στο επόμενο σχήμα, βλέπουμε, για διάφορες τιμές του  $\tilde{k}_0$  στην τάξη του  $10^6$ , τη συμπεριφορά των ιδιοτιμών  $P_c$ , σε σχέση με το λόγο  $g/d$  του εσωτερικού μήκους  $g$  της μικροδομής του υλικού ως προς τη διάμετρο της δοκού.



Εικόνα 51 - Κρίσιμα φορτία λυγισμού  $P/EI$  συναρτήσει του  $k_0 L^6 / g^2 EI$  για διάφορα  $g/d$

Παρατηρούμε, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι για μεγαλύτερες τιμές του λόγου  $g/d$  έχουμε μεγαλύτερα φορτία λυγισμού. Επίσης, βλέπουμε ότι η αύξηση του συντελεστή  $\tilde{k}_0$  της ελαστικής έδρασης επιφέρει, πάλι, αύξηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Δηλαδή, η δοκός γίνεται πιο δύσκαμπτη όσο η σταθερά  $\tilde{k}_0$  αυξάνεται, φαινόμενο που δικαιολογεί την ταύτιση της ελαστικής έδρασης με αντίστοιχα ελατήρια σταθεράς  $\tilde{k}_0$ . Όσο η σταθερά του ελατηρίου αυξάνεται τόσο πιο δύσκαμπτο γίνεται το ελατήριο.

## 9. ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΓΙΣΜΟ

Η συμπεριφορά σε λυγισμό των ναυσοωλήνων άνθρακα, η οποία ενσωματώνει έναν καταστατικό νόμο που συμπεριλαμβάνει μία κλίμακα μήκους, έχει αναλυθεί με τη βοήθεια μιας κλασικής προσέγγισης και μιας προσέγγισης των μεταβολών. Η τελευταία παρέχει το κύριο πεδίο εξισώσεων και τις συνοριακές συνθήκες που προκύπτουν από το λογισμό των μεταβολών. Η ενσωμάτωση των φαινομένων κλίμακας μικρού μήκους έχει αποδειχθεί πως επηρεάζει σημαντικά τη συμπεριφορά σε λυγισμό. Ανάλογα με τη σταθερά μικροδομής του υλικού  $g$ , το φορτίο λυγισμού κυμαίνεται μονοτονικά μεταξύ των τιμών της κλασικής θεώρησης και άλλων μικρότερων αυτών. Καθώς η χαρακτηριστική παράμετρος μη τοπικού τύπου  $g/d$ , μεγαλώνει, παρατηρείται μία αύξηση του φορτίου λυγισμού. Αυτό το φαινόμενο έχει αποδοθεί ποσοτικά για διαφορετικές συνοριακές συνθήκες.

Έχουν αναπτυχθεί μη τοπικές θεωρίες των θεωριών Euler-Bernoulli και Timoshenko για δοκούς και αναλυτικές λύσεις για διάφορες συνοριακές συνθήκες έχουν εξαχθεί για κάμψη, λυγισμό και φυσική ταλάντωση ευθύγραμμων δοκών. Γενικά, η επίδραση των μη τοπικών παραμέτρων είναι ότι **αυξάνουν το φορτίο λυγισμού**, ενώ **μειώνουν τις αποκλίσεις**. Απαιτούνται ενδελεχή πειράματα για τον καθορισμό της σταθεράς μικροδομής  $g$  του υλικού και διαφαίνεται πως τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται εδώ μπορούν να διαμορφώσουν τη βάση για ένα πειραματικό πρόγραμμα, το οποίο θα καθορίσει αυτήν τη σταθερά. Η προσέγγιση βάσει του λογισμού των μεταβολών, η οποία παρουσιάζεται εδώ, αποδίδει ένα επιπλέον ζεύγος συνοριακών συνθηκών, συνεπώς ως προς το λογισμό των μεταβολών.

Οι θεωρίες συνεχούς μέσου μη τοπικού τύπου για δοκούς που χρησιμοποιούνται εδώ εξηγούν τις επιδράσεις μη τοπικού τύπου στην κανονική και την εγκάρσια διατμητική τάση μελών. Επομένως, οι λύσεις που παρουσιάζονται εδώ για κάμψη και λυγισμό διαφέρουν με αυτές που διατίθενται στη βιβλιογραφία (εξαιρουμένων των λύσεων που παρουσιάζει ο Reddy για αμφιέριστες δοκούς). Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται εδώ μπορούν να επεκταθούν για αξονοσυμμετρικά κυκλικά ελάσματα και κυλινδρικά κελύφη. Ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα συνοριακών συνθηκών της δοκού σε λυγισμό έχει λυθεί και η λύση του σύμφωνα με τη Θ.Β.Ε. για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού έχει βρεθεί πως αυξάνει για αυξανόμενες τιμές του συντελεστή βαθμίδας, καθώς και του συντελεστή της ελαστικής έδρασης, με το κλασικό κρίσιμο φορτίο ελαστικότητας να είναι κάτω φράγμα.

Επίδραση του λόγου διαστάσεων  $g/d$  στο μοντέλο τύπου Winkler.

Για να δούμε την επίδραση διαφορετικών λόγων διαστάσεων των νανοσωλήνων άνθρακα στη μεταβολή των κρίσιμων φορτίων λυγισμού έναντι του συντελεστή  $k_0$  της θεμελίωσης του Winkler, βλέπουμε τις τιμές του  $g/d$ . Οι τιμές αυτές δείχνουν τη μεταβολή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Για μεγαλύτερους λόγους διαστάσεων, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού των νανοσωλήνων αυξάνεται. Επιπλέον, η επιρροή των συντελεστών μικρής κλίμακας  $g$  αυξάνεται για μεγαλύτερους λόγους διαστάσεων. Αυτό δείχνει ότι για λεπτούς νανοσωλήνες άνθρακα μονού τοιχώματος το φαινόμενο του ελαστικού μέσου γίνεται λιγότερο εμφανές συγκρινόμενο με μη τοπικά φαινόμενα.







## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Altan, B.S., Aifantis, E.C., 1997. On some aspects in the special theory of gradient elasticity. *J. Mech. Behav. Mater.* 8 (3), 231-282.
- [2] Chen, J.Y., Huang, Y., Ortiz, M., 1998. Fracture analysis of cellular materials: A strain gradient model. *J. Mech. Phys. Solids* 46, 789-828
- [3] Eringen, A.C., J. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Appl. Phys.* 54 (1983) 4703.
- [4] Fleck, N.A., Hutchinson, J.W., 1993. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 41 (12), 1825-1857.
- [5] Fleck, N.A., Hutchinson, J.W., 1997. Strain gradient plasticity. *Adv. Appl. Mech.* 33, 295-361.
- [6] Fleck, N.A., Muller, G.M., Ashby, M.F., Hutchinson, J.W., 1994. Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta, Metall. Mater* 42 (2), 475-487.
- [7] Georgiadis H.G. and Grentzelou C.G. (2006) Energy theorems and the  $J$  integral in dipolar gradient elasticity, *International Journal of Solids and Structures* 43, 5690-5712.
- [8] Giannakopoulos A. E., Stamoulis K., Structural analysis of gradient elastic components, *Int. J. Solids Struct.*, 44(2007) 3440 – 3451.
- [9] Giannakopoulos, A.E., Amanatidou, E., Aravas, N., 2006. A reciprocity theorem in linear gradient elasticity and the corresponding Saint-Venant principle. *Int. J. Solids Struct.* 43, 3875-3894.
- [10] Gourgiotis, P.A., Georgiadis, H.G., 2008. An approach based on distributed dislocations and disclinations for crack problems in couple-stress elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 45, 5521- 5539.
- [11] Gourgiotis, P.A., Georgiadis, H.G., 2009. Plane-strain crack problems in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, accepted.
- [12] Green, A. E. and Rivlin, R. S. Multipolar continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 17, 1964, pp. 113 - 147.
- [13] Iijima, S., Helical microtubules of graphitic carbon. 1991, *Nature (London)*, 354, 56–58.
- [14] Kakunai, S., Masaki, J., Kuroda, R., Iwata, K., Nagata, R., 1985. Measurement of apparent Young's modulus in the bending of cantilever beam by heterodyne holographic interferometry. *Exp. Mech.*, 408-412.
- [15] Lazar, M., Maugin, G.A., 2006. A note on line forces in gradient elasticity. *Mech. Res. Com* 33, 674-680.
- [16] Lazopoulos, K.A., 2004. On the gradient strain elasticity theory of plates. *Eur. J. Mech. A/Solids* 23, 843-852.
- [17] Lazopoulos, K.A., Lazopoulos, A.K., 2010. Bending and Buckling of thin strain gradient elastic beams. *Eur.J. Mech. A/Solids* 29, 837-843.

- [18] Ma, H.M., Gao, X.-L., Reddy, J.N., 2008. A microstructure dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *J. Mech. Phys. Solids* 56, 3379-3391.
- [19] Mindlin, R.D., 1965. Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 1, 417-438.
- [20] Mindlin, R. D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16, 1964, pp. 51-78.
- [21] Mindlin, R. D. and Eshel, N. N. On first-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, 1968, pp. 109-124.
- [22] Papargyri-Beskou, S., Tsepoura, K.G., Polyzos, D., Beskos, D.E., 2003. Bending and stability analysis of gradient elastic beams. *Int. J. Solids Struct.* 40, 385-400.
- [23] Papargyri-Beskou, S., Beskos, D., 2008. Static, stability and dynamic analysis of gradient elastic flexural Kirchhoff plates. *Arch. Appl. Mech.* 78, 625-635.
- [24] Park, S.K., Gao, X.L., 2006. Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory. *J. Micromech. Microeng.* 16, 2355-2359.
- [25] Polyzos, D., Tsepoura, K.G., Tsinopoulos, S.V., Beskos, D.E., 2003. A boundary element method for solving 2-D and 3-D static gradient elastic problems. Part I: Integral Formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192, 2845-2873.
- [26] Reddy, J.N., Pang, S.D, 2008. Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *J. Appl.Phys.* 103, 093502.
- [27] Reddy, J.N., Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *Int. J. Eng. Sci.* 45 (2007) 288.
- [28] Ru, C.Q., Aifantis, E.C., 1993. A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity. *Acta Mechanica* 101, 59-68.
- [29] Sears, A., Batra, R.C., Buckling of multiwalled carbon nanotubes under axial compression, *Phys. Rev. B* 73 (2006) 085410.
- [30] Sudak, L.J., Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics *J. Appl. Phys.* 94 (2003) 7281.
- [31] Thomas J. R. Hughes, *The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, 1987, Dover Publications, Inc., New York.
- [32] Tsamasphyros, G.I., Markolefas, S., Tsouvalas, D.A., 2007. Convergence and performance of the h- and p-extensions with mixed finite element C0-continuity formulations, for tension and buckling of a gradient elastic beam. *Int. J. Solids Struct.* 44, 5056-5074
- [33] Tsepoura, K.G., Papargyri-Beskou, S., Polyzos, D., 2002. A boundary element method for solving 3D static gradient elastic problems with surface energy. *Comput. Mech.* 29, 361-381.
- [34] Vardoulakis I., Exadaktylos G., Kourkoulis S. K., Bending of marble with intrinsic length scales: a gradient theory with surface energy and size effects, *J. de Physique IV* 8(1998) 399 – 406.

- [35] Wang,Q., Varadhan ,V.K., Stability analysis of carbon nanotubes via continuum models. *Smart Mater. Struct.* 14 (2005) 281.
- [36] Winkler, E., and Dominicus, H. 1867. *Die Lehre der Elasticitat und Festigkeit*, Prague.
- [37] Yakobson ,B.I., Brabec, C.J., Bernholc, Nanomechanics of Carbon Tubes: Instabilities beyond Linear Response. *J., Phys. Rev. Lett.* 76 (1996) 2511.
- [38] Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C., Tong, P., 2002. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 39, 2731-2743.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αβραμίδης, Ι.Ε. Μορφίδης Κ, Γενικευμένο Πεπερασμένο Στοιχείο Δοκού επί Ελαστικού Υποβέθρου Winkler, *Tech. Chron. Sci. J. TCG, I*, No 3, 2000.
- Akihiro Takahashi, M.ASCE, Hideki Sugita and Shunsuke Tanimoto, Beam on Winkler foundation method for piles in laterally spreading soils, *Public Works Research Institute, Tsukuba, Japan*, 2006, pp. 230-241.
- Alev Kacar , H. Tugba Tan , Metin O. Kaya, Free Vibration Analysis of Beams on Variable Winkler Elastic Foundation by Using the Differential Transform Method, *Mathematical and Computational Applications*, Vol. 16, No. 3 (2011) pp. 773-783.
- Alkim Deniz Senalp, Aytac Arikoglu, Ibrahim Ozkol, Vedat Ziya Dogan, Dynamic response of a finite length euler-bernoulli beam on linear and nonlinear viscoelastic foundations to a concentrated moving force, *Journal of Mechanical Science and Technology* 24 (10) (2010) 1957-1961.
- Altan, B.S., Aifantis, E.C., 1997. On some aspects in the special theory of gradient elasticity. *J. Mech. Behav. Mater.* 8 (3), 231e282.
- Arghavan S. and Singh A. V., Atomic lattice structure and continuum plate theories for the vibrational characteristics of graphenes, (2011), *J. Appl. Phys.* 110, 084308.
- Boyce W.E., DiPrima R.C., Στοιχειώδεις διαφορικές εξισώσεις και προβλήματα συνοριακών τιμών, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αθήνα, 1999.
- Brezis H., Συναρτησιακή Ανάλυση - Θεωρία και Εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα, 1997.
- Dresselhaus, Mildred S., Dresselhaus, Gene, Avouris, Phaedon, Carbon Nanotubes Synthesis, Structure, Properties, and Applications. *Topics in Applied Physics*, Vol. 80 , Springer Publications, 2001
- Devesh Kumar, Christian Heinrich, and Anthony M. Waas, Buckling analysis of carbon nanotubes modeled using nonlocal continuum theories, 2008, *J. Appl. Phys.* 103, 073521
- Georgiadis H.G. and Grentzelou C.G. (2006) Energy theorems and the *J* integral in dipolar gradient elasticity, *International Journal of Solids and Structures* 43, 5690-5712.
- Giannakopoulos A. E., Stamoulis K., Structural analysis of gradient elastic components, *Int. J. Solids Struct.*, 44(2007) 3440 – 3451.

- Grentzelou C.G. and Georgiadis H.G. (2005) Uniqueness for plane crack problems in dipolar gradient elasticity and in couple-stress elasticity, *International Journal of Solids and Structures* 42, 6226-6244.
- Hans Petter Langtangen and Aslak Tveito, *Advanced Topics in Computational Partial Differential Equations - Weak Solutions: Applications of the Lax-Milgram Theorem*, Springer-Verlag Berlin Germany, 2004
- Jin Wang, *Mathematical and Numerical Modelling of Sand Production as a Coupled Geomechanics-Hydrodynamics Problem*, Phd Thesis, Calgary, Alberta, 2003
- Joo, I., On Hermite Functions. II, Budapest 1995, *Acta Math. Hungar* 68, 111-116
- Καρατζά Β., Καρατζά Ε., Καρατζάς Ι., Προβλήματα δοκών ελαστικά εδραζομένων και φορτιζόμενων με οριζόντια φορτία, *15ο Συνέδριο Σκυροδέματος, ΤΕΕ, ΕΤΕΚ, Αλεξανδρούπολη, 25-27 Οκτωβρίου, 2006*
- K.A. Lazopoulos, A.K. Lazopoulos, Nonlinear strain gradient elastic thin shallow shells, *European Journal of Mechanics A/Solids* 30 (2011) 286e292
- K.A. Lazopoulos, A.K. Lazopoulos, Stability of a gradient elastic beam compressed by non-conservative forces, *Math. Mech.* 90, No. 3, 174 – 184 (2010)
- K.A. Lazopoulos, A.K. Lazopoulos, Bending and buckling of thin strain gradient elastic beams, *European Journal of Mechanics A/Solids* 29 (2010) 837e843
- Keith D. Hjelmstad, *Foundamentals of Structural Mechanics - The linear Theory of Beams*, Springer, U.S.A. 2005
- Kulik, S. On the Graphical Solution of Cubic Equations, *Mathematics Magazine*, Vol. 28, No. 3 (1955), pp. 143-146
- Lam, D.C.C., Yang, F., Chong, A.C.M., Wang, J., Tong, P., 2003. Experiments and theory in gradient strain elasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 51, 1477e1508.
- Lanczos Cornelius, *The variational principles of mechanics*, Un. of Toronto Press, Toronto, 1949.
- Μπακόπουλος Α., Χρυσοβέργης Ι., *Αριθμητικές Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων - Πεπερασμένα Στοιχεία και Διαφορές*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 2003.
- Μπακόπουλος Α., Χρυσοβέργης Ι., *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 2009
- Mindlin, R.D., Eshel, N.N., 1968. On first-gradient theories in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 4, 109-124.
- Mindlin, R.D., 1964. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 16, 51-78.
- Murmu T., Pradan S.C., Bbuckling analysis of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on ono local elasticity and Timoshenko beam theory and using DQM, *Physica E* 41, (2009) 1232-1239.
- Papargyri – Beskou S., Tsepoura K. G., Polyzos D., Beskos D. E., Bending and stability analysis of gradient elastic beams, *Int. J. Solids Struct.*, 40(2003) 385 – 400.

- Peter Kattan, Πεπερασμένα Στοιχεία με το MATLAB, Εκδόσεις Φούντας, Αθήνα, 2008.
- Peter J. F. Harris, Peter John Frederick Harris, Carbon nanotubes and related structures: new materials for the twenty-first century, Cambridge University Press, 2001
- Pradhan S.C., Reddy G.K., Buckling analysis of single walled carbon nanotube on Winkler foundation using nonlocal elasticity theory and DTM, *Computational Materials Science* Volume 50, Issue 3, January 2011, Pages 1052-1056 .
- Reddy J.N. and Pang S. D., Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes, *J. Appl. Phys.* 103, 023511 (2008).
- Richard Kavinoky, J. B. Thoo, The Number of Real Roots of a Cubic Equation, *Coll. Math. J.* 38:4 (Sep 2007), pp. 272–277.
- Robert Y. Suen, Roots of Cubics via Determinants, *The College Mathematics Journal*, Vol. 25, No. 2 (Mar., 1994), pp. 115-117.
- R.W.D. Nickalls, A new approach to solving the cubic: Cardan's solution revealed, *The mathematical Gazette* (1993), 77 (Nov, No 480), 354–359.
- RWD Nickalls, RH Dye, The geometry of the discriminant of a polynomial, *The Mathematical Gazette* (1996), 80 (July, No 488), 279–285.
- Sarbajit Banerjee, Tirandai Hemraj-Benny, Stanislaus S. Wong, Covalent Surface Chemistry of Single-Walled Carbon Nanotubes, *Adv. Mater.* **2005**, 17, 17
- S.Y.Lee, Y.H. Kuo, F.Y. Lin, Stability of a Timoshenko beam on a Winkler Elastic Foundation. *Journal of Sound and Vibration* (1992) 153(2), 193-202
- Shengli Kong, Shenjie Zhou \*, Zhifeng Nie, Kai Wang, Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science* 47 (2009) 487–498
- Τσαμασφύρος Γ., Θεοτόκογλου Ε., Μέθοδοι των Πεπερασμένων Στοιχείων, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2005.
- Τσαμασφύρος Γ., Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων II, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1991.
- Τσαμασφύρος Γ.Ι., Μαρκολέφας Σ., Τσουβαλάς Α., Εφαρμογή Της Θεωρίας Βαθμίδας Για Την Επίλυση Προβλημάτων Συνοριακών Τιμών Με Χρήση Μικτών Ιεραρχικών Πεπερασμένων Στοιχείων, ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ - Συνέδριο για την επιστημονική έρευνα στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 5-8 Ιουλίου 2007, Πλωμάρι Λέσβου.
- Thomas J. R. Hughes, The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, 1987, Dover Publications, Inc., New York.
- Tsamasphyros, G.I., Markolefas, S., Tsouvalas, D.A., 2007. Convergence and performance of the h- and p-extensions with mixed finite element C0-continuity formulations, for tension and buckling of a gradient elastic beam. *Int. J. Solids Struct.* 44, 5056-5074.
- Toupin, R.A., 1962. Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 11, 385–414.

- Vardoulakis I., Exadaktylos G., Kourkoulis S. K., Bending of marble with intrinsic length scales: a gradient theory with surface energy and size effects, *J. de Physique IV* 8(1998) 399 – 406.
- Vu-Hieu Nguyen, Denis Duhamel, Finite element procedures for nonlinear structures in moving coordinates. Part II: Infinite beam under moving harmonic loads, *Computers and Structures* 86 (2008) 2056–2063.
- W. H. Duan, C. M. Wang, Exact Solution for Buckling of Columns Including Self-Weight, *J. Eng. Mech.* 2008, 134, 116.
- William Snow Burnside, Arthur William Panton, The theory of equations: with an introduction to the theory of binary algebraic forms, Dublin 1881.
- Wing C. M., Timoshenko Beam - Bending Solution in terms of Euler-Bernoulli solutions, *Archive of Applied Mechanics*, vol. 67, issue 3, pp. 179-190.
- Yimming Fu and Jin Zhang, Modeling and analysis of microtubules based on a modified couple stress theory, 2010, *Physica E* 42, 1741–1745.
- Y. Lei, M. I. Friswell, S. Adhikari, Finite Element Analysis of Beams with Nonlocal Foundations, *Structural Dynamics, and Materials Conference, Newport, Rhode Island, 1 - 4 May 2006*.
- Y. Y. Zhang, C. M. Wang, V. B. C. Tan, Buckling of Multiwalled Carbon Nanotubes Using Timoshenko Beam Theory, *J. Eng Mech*, 2006, 952.







## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι - Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ CARDANO

πηγή: [http://www.proofwiki.org/wiki/Cardano%27s\\_Formula#Theorem](http://www.proofwiki.org/wiki/Cardano%27s_Formula#Theorem)

**Θεώρημα**

Μια πολυωνυμική εξίσωση της μορφής  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$  ονομάζεται **κυβική εξίσωση** ή απλά **κυβική**.

Αυτή έχει λύση

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)$$

όπου

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

και

$$Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$

$$R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$$

**Ορίζουσα**

Η έκφραση  $R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$  ονομάζεται **ορίζουσα** της αξίσωσης.

Έστω  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Τότε:

- αν  $D > 0$ , τότε μία ρίζα είναι πραγματική και δύο είναι συζυγείς μιγαδικές.
- αν  $D = 0$ , τότε όλες οι ρίζες είναι πραγματικές, δύο από τις οποίες είναι ίσες.
- αν  $D < 0$ , τότε όλες οι ρίζες είναι πραγματικές και άνισες.

**Σημείωση** Αυτή είναι ειδική περίπτωση της γενικής διακρίνουσας. Επίσης, αυτή εμφανίζεται σε διάφορες μορφές στη βιβλιογραφία, όμως, η συγκεκριμένη μορφή είναι πιο εύχρηστη για το παρούσα απόδειξη.

### Εναλλακτικές μορφές των λύσεων

Αν η ορίζουσα είναι  $D < 0$ , τότε οι λύσεις μπορούν να εκφραστούν ως:

$$x_1 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a}$$

$$x_3 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a}$$

όπου  $\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{-Q^3}}$ .

### Απόδειξη

Αρχικά, η κυβική διαμορφώνεται κατάλληλα, έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των όρων της.

Από το μετασχηματισμό του Tschirnhaus  $x \rightarrow x + \frac{b}{3a}$  θα πάρουμε:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 - 3\frac{b}{3a}x^2 - 3\frac{b^2}{9a^2}x - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

και ολοκληρώνοντας την κυβική  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)x + \left(\frac{27a^2d - b^3}{27a^3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) - \frac{b}{3a}\left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right) + \left(\frac{27a^2d - b^3}{27a^3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) + \left(\frac{27a^2d + 2b^3 - 9abc}{27a^3}\right) = 0$$

Έστω τώρα:

$$y = x + \frac{b}{3a}, Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}, R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$$

Έτσι, έχουμε σχηματίσει τη **συμπυγμένη κυβική**  $y^3 + 3Qy - 2R = 0$ .

Θέτουμε τώρα  $y = u + v$ , με  $u v = -Q$ .

$$\begin{aligned} \text{Τότε} \quad & (u + v) + 3Q(u + v) - 2R = 0 \\ & \Rightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + 3Q(u + v) - 2R = 0 \\ & \Rightarrow u^3 - 3Q(u + v) + 3Q(u + v) + v^3 - 2R = 0 \\ & \text{καθώς } u v = -Q \\ & \Rightarrow u^3 + v^3 - 2R = 0 \\ & \Rightarrow u^3 - \frac{Q^3}{u^3} - 2R = 0 \\ & \Rightarrow (u^3)^2 - 2Ru^3 - Q^3 = 0 \end{aligned}$$

όπου είναι τριώνυμο ως προς το  $u^3$ :

$$u^3 = \frac{2R \pm \sqrt{4Q^3 + 4R^2}}{2} = R \pm \sqrt{Q^3 + R^2}$$

Από πιο πάνω έχουμε  $u v = -Q$ , οπότε  $v^3 = -\frac{Q^3}{u^3}$ .

Ας προσπαθήσουμε να πάρουμε τη θετική ρίζα  $u^3 = R + \sqrt{Q^3 + R^2}$ .

$$\begin{aligned} \text{Τότε} \quad v^3 &= \frac{-Q^3}{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \\ &= \frac{-Q^3 (R - \sqrt{Q^3 + R^2})}{R^2 - (Q^3 + R^2)} \\ &= R - \sqrt{Q^3 + R^2} \end{aligned}$$

Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει αν ξεκινήσουμε με την αρνητική ρίζα  $u^3 = R - \sqrt{Q^3 + R^2}$ , οπότε θα πάρουμε  $v^3 = R + \sqrt{Q^3 + R^2}$ .

Έτσι, βλέπουμε, ότι παίρνοντας οποιαδήποτε από τις δύο τετραγωνικές ρίζες, θα καταλήξουμε σε μόνο μία λύση:

$$u^3 = R + \sqrt{Q^3 + R^2}, \quad v^3 = R - \sqrt{Q^3 + R^2}$$

Θέτουμε τώρα

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}.$$

Από τις μιγαδικές ρίζες ενός αριθμού, έχουμε τις τρεις κυβικές ρίζες των  $u^3$  και  $v^3$

$$u = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)S \\ \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)S \end{cases}, \quad v = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)T \\ \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)T \end{cases}$$

Λόγω του περιορισμού  $uv = -Q$ , υπάρχουν μόνο τρεις συνδιασμοί αυτών, οι οποίοι να είναι πιθανοί, έτσι ώστε  $y = u + v$

$$y = \begin{cases} S+T \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)S + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)T = -\frac{S+T}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T) \\ \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)S + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)T = -\frac{S+T}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T) \end{cases}$$

Καθώς  $y = x + \frac{b}{3a}$ , συνεπάγεται ότι οι τρεις ρίζες θα είναι

$$\begin{aligned} x_1 &= S+T - \frac{b}{3a} \\ x_2 &= -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T) \\ x_3 &= -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T) \end{aligned}$$

□

### Διαφορετικές περιπτώσεις της Διακρίνουσας

Έστω  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Τότε  $Q, R \in \mathbb{R}$ .

Από προηγουμένως, έχουμε ότι  $D = Q^3 + R^2$ .

#### Μηδενική Διακρίνουσα

Έστω  $D = 0$ .

Τότε  $S = T = \sqrt[3]{R}$ , και έτσι  $S+T = 2\sqrt[3]{R}, S-T = 0$ .

Οπότε οι τρεις λύσεις θα είναι

$$x_1 = 2\sqrt[3]{R} - \frac{b}{3a}, \quad x_2 = -\sqrt[3]{R} - \frac{b}{3a} \quad \text{και} \quad x_3 = -\sqrt[3]{R} - \frac{b}{3a}$$

Επομένως, οι ρίζες  $x_2$  και  $x_3$  είναι ίσες, και όλες πραγματικές.  
Αν είναι όλες ίσες μεταξύ τους, τότε  $R = 0$ .

### Θετική Διακρίνουσα

Έστω  $D = Q^3 + R^2 > 0$ .

Τότε οι ποσότητες  $S = R + \sqrt{Q^3 + R^2}$  και  $T = R - \sqrt{Q^3 + R^2}$  είναι πραγματικές και διακριτές.

Ομοίως, είναι και οι ποσότητες  $S + T$  και  $S - T$ .

Ως εκ τούτου, οι ποσότητες

$$-\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T) \quad \text{και} \quad -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)$$

είναι συζυγείς μιγαδικές.

### Αρνητική Διακρίνουσα

Έστω  $D = Q^3 + R^2 < 0$ .

Τότε,  $\sqrt{D} = \pm i|Q^3 + R^2| = \pm iE$ , όπου,  $E > 0$ .

Συνεπώς,  $S^3 = R + iE, T^3 = R - iE$ .

Έστω  $\sqrt[3]{R + iE} = p + iq$ , οπότε και  $\sqrt[3]{R - iE} = p - iq$ .

Άρα,  $S + T = 2p, S - T = 2iq$ .

Έτσι,

$$y_1 = S + T = 2p$$

$$y_2 = -\frac{S+T}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T) = -p - \sqrt{3}q \quad (\text{μετά από λίγες αλγεβρικές πράξεις})$$

$$y_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T) = -p + \sqrt{3}q \quad (\text{μετά από λίγες αλγεβρικές πράξεις})$$

Αντικαθιστώντας την ποσότητα  $\frac{b}{3a}$  από προηγουμένως, παίρνουμε τις τρεις διακριτές

πραγματικές λύσεις:

$$x_1 = 2p - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = -p - \sqrt{3}q - \frac{b}{3a}$$

$$x_3 = -p + \sqrt{3}q - \frac{b}{3a}$$

**Απόδειξη της εναλλακτικής μορφής των λύσεων για την περίπτωση της αρνητικής Διακρίνουσας**

Έστω  $D = Q^3 + R^2 < 0$ .

Τότε, το  $S^3$  γίνεται

$$S^3 = R + i\sqrt{|Q^3 + R^2|}.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την προηγούμενη σχέση σε πολικές συντεταγμένες:

$S^3 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , όπου

$$r = \sqrt{R^2 + (\sqrt{|Q^3 + R^2|})^2} = \sqrt{R^2 - (Q^3 + R^2)} = \sqrt{-Q^3}$$

$$\tan \theta = \frac{|Q^3 + R^2|}{R}$$

Τότε,  $\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{-Q^3}}$ .

Ομοίως μπορούμε να εκφράσουμε και το  $T^3$ .

Οπότε, μετά από μερικές αλγεβρικές πράξεις, θα προκύψει το επόμενο αποτέλεσμα

$$x_1 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a}$$

$$x_3 = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a}$$

□

```

%% GRADIENT BEAM (Bernoulli-Euler) at LINEAR WINKLER foundation
% C2 elements, adopted in "non-dimensional" form for nanobeams
% x:-->x/L, u:-->u/L, L=nanobeam length
%
% In this example grat is reduced over L and L=20d where d is the nanobeam
% diameter. Therefore to have g/d <=1 keep grat<=0.05
%
% To get the result (displacement) reduced over the nanobeam diameter d
% i.e. u/d, simply multiply uex (or u or ucex) by L/(2*rr).
% This code includes the analytical solutions for the gradient case (uex)
% and the classical solution (B-E on winkler springs) (ucex)
clc
clear all
format longEng
%
%% FIRST SELECT SUPPORT TYPE (isf)
isf=1;          % 1 for CANTILEVER,
                % 2 for SIMPLY SUPPORTED,
                % 3 for FIXED-FIXED.
Nel=5;         % Number of Elements
%% PROBLEM INPUT DATA
Y=1e12;        % Young's modulus in Pa
rr=0.5e-9      % beam cross-section radius in m
d=2*rr;        % beam cross-section diameter in m
L=20e-9;       % Beam span
I=pi*rr^4/4;   % Area moment
A=pi*rr^2;     % Cross section area
EI=Y*I;        % Product of Young's modulus Y and area moment of inertia I
grat=0.005;    %!!!! IF g>0 ACTIVATE BC's for u" at the fixed end (OVER L)
g=grat*L;      % Gradient elasticity parameter
k0=10^8;       % Winkler spring constant
q=10^(-6);     % Uniform Load

rg2=I/A;       %radius of gyration
rg2r=rg2/L^2;
kf=k0*L^4/EI;
%
% Define grid size and nodal coordinates
Nnod=Nel+1;    % Global Node Number
he=1/Nel;     % Element Length
xnod=0:he:1;  % xnod = x/L, dimensionless parameter
%
%
%% Element Matrices
% ke=k3+k2+k0
%
% k3 corresponds to the Matrix of N'''(x)*N'''(x)
k3=[720    360*he    60*he^2    -720    360*he    -60*he^2;...
    0    192*he^2    36*he^3    -360*he    168*he^2    -24*he^3;...
    0    0    9*he^4    -60*he^2    24*he^3    -3*he^4;...
    0    0    0    720    -360*he    60*he^2;...
    0    0    0    0    192*he^2    -36*he^3;...
    0    0    0    0    0    9*he^4];

```

```

for i=2:6
    for j=1:i-1
        k3(i,j)=k3(j,i);
    end
end
k3=(1/he^5)*k3; % ~ S
%
%
% k2 corresponds to the Matrix of N''(x)*N''(x)
mm1=1;
k2=[120/7      60*he/7      3*he^2/7      -120/7      60*he/7      -3*he^2/7;...
    0 192*he^2/35 11*he^3/35 -60*he/7 108*he^2/35 -4*he^3/35;...
    0          0 3*he^4/35 -3*he^2/7 4*he^3/35 he^4/70;...
    0          0          0 120/7 -60*he/7 3*he^2/7;...
    0          0          0          0 192*he^2/35 -11*he^3/35;...
    0          0          0          0          0 3*he^4/35];

for i=2:6
    for j=1:i-1
        k2(i,j)=k2(j,i);
    end
end
k2=((1/grat^2+mm1/rg2r)/he^3)*k2; % ~ C
%
%
% ko corresponds to the Matrix of N(x)*N(x)
ko=[181/462  311*he/4620 281*he^2/55440          25/231  -151*he/4620
181*he^2/55440;...
    0 52*he^2/3465 23*he^3/18480 151*he/4620 -19*he^2/1980
13*he^3/13860;...
    0          0 he^4/9240 181*he^2/55440 -13*he^3/13860
he^4/11088;...
    0          0          0 181/462 -311*he/4620
281*he^2/55440;...
    0          0          0          0 52*he^2/3465 -
23*he^3/18480;...
    0          0          0          0          0 0
he^4/9240];
for i=2:6
    for j=1:i-1
        ko(i,j)=ko(j,i);
    end
end
ko=(kf/grat^2)*he*ko; % ~k0
%
% ke = Klocal of every Element
ke=k3+k2+ko;
%
%
% Case of beam in Buckling %
%
% k1 corresponds to the Matrix of N'(x)*N'(x)
k1= [
    10/(7*he),      3/14,      he/84, -10/(7*he),      3/14,      -he/84;...
    3/14, (8*he)/35, he^2/60, -3/14, -he/70, he^2/210;...
    he/84, he^2/60, he^3/630, -he/84, -he^2/210, he^3/1260;...
    -10/(7*he), -3/14, -he/84, 10/(7*he), -3/14, he/84;...

```



```

        3/14,    -he/70, -he^2/210,    -3/14, (8*he)/35, -he^2/60;...
        -he/84, he^2/210, he^3/1260,    he/84, -he^2/60, he^3/630];
k1=(L^2/grat^2)*k1;

%% Assembly of element matrices without enforcement of boundary conditions
%
%Ksum=MatAssy6A(Nel,ke);
%
ndof=3;           % Number of Degrees of Freedom on Every Node
nnodel=2;        % Local Node Number

len=ndof*nnodel; % Local equation Number (p = ndof*(nnodel-1)+i, 1<i<ndof)
neq=ndof*Nnod;   % Global degrees of Freedom
%
%*****
% Set up of Data Processing Arrays IEN, ID and LM
%*****
% ID construction
ID=zeros(ndof,Nnod);
for j=1:Nnod           % for every node
    ID(1,j)=3*j-2;
    ID(2,j)=3*j-1;
    ID(3,j)=3*j;
end

% IEN construction
IEN = zeros(nnodel,Nel);
for i=1:nnodel         % for every element node
    for e=1:Nel         % for every element
        IEN(i,e)=i+e-1;
    end
end

% LM construction
LM = zeros(len,Nel);
for e=1:Nel            % for every element
    for i=1:ndof        % for every node degree of freedom
        for a=1:nnodel  % for every node
            p=ndof*(a-1)+i;
            LM(p,e)=ID(i,IEN(a,e));
        end
    end
end

%*****
% Assemblage of the Global stiffness matrix K
%*****
GEN=max(max(ID));
Ksum=zeros(GEN,GEN);   % zero the preallocated storage of Ksum
for e=1:Nel
    for i=1:len
        for j=1:len
            if and(LM(i,e)>0,LM(j,e)>0)
                Ksum(LM(i,e),LM(j,e))=Ksum(LM(i,e),LM(j,e))+ke(i,j);
            end
        end
    end
end
end

```

```

end
%
%
K=Ksum; % Global Stiffness matrix
%
Klsum=zeros(GEN,GEN); % zero the preallocated storage of Klsum
for e=1:Nel
    for i=1:len
        for j=1:len
            if and(LM(i,e)>0,LM(j,e)>0)
                Klsum(LM(i,e),LM(j,e))=Klsum(LM(i,e),LM(j,e))+k1(i,j);
            end
        end
    end
end
end
%
%
K1=Klsum; % Global Stiffness matrix of the k1 (for use in buckling case)
%
%% Force vector for C2 beam elements with uniform distributed load

qtilda=q*L^3/EI; % load value after the nondimensionalization of x
Fsum=zeros(GEN,1); % zero the preallocated storage of Fsum

% fe = Flocal of every element
fe=(he/120)*[60; 12*he; he^2; 60; -12*he; he^2];
%
%*****
% Assemblage of the Global Force Vector F
%*****
for e=1:Nel
    for i=1:len
        if (LM(i,e)>0)
            Fsum(LM(i,e),1)=Fsum(LM(i,e),1)+fe(i);
        end
    end
end
end

F=(qtilda/grat^2)*Fsum; % Global Force Vector
Fsum2=F;

%% Boundary Conditions (Homogeneous Dirichlet at fixed end)

%*****%
if isf==1 % Cantilever %
    %%%%%%%%%%

    K(1,:)= [1 zeros(1,3*Nnod-1)]; %
    K(:,1)= [1;zeros(3*Nnod-1,1)]; % u(0)=0
    F(1)=0; %

    K(2,:)= [0 1 zeros(1,3*Nnod-2)]; %
    K(:,2)= [0;1;zeros(3*Nnod-2,1)]; % u'(0)=0
    F(2)=0; %

```

```

K(3,:)=[0 0 1 zeros(1,3*Nnod-3)];%!!! ACTIVATE IF g>0 %
K(:,3)=[0;0;1;zeros(3*Nnod-3,1)];%!!! ACTIVATE IF g>0 % u''(0)=0
F(3)=0; %!!! ACTIVATE IF g>0 %

% Boundary Conditions Of K1
K1(1,:)=[1 zeros(1,3*Nnod-1)]; %
K1(:,1)=[1;zeros(3*Nnod-1,1)]; % u(0)=0

K1(2,:)=[0 1 zeros(1,3*Nnod-2)]; %
K1(:,2)=[0;1;zeros(3*Nnod-2,1)]; % u'(0)=0

K1(3,:)=[0 0 1 zeros(1,3*Nnod-3)];%!!! ACTIVATE IF g>0 %
K1(:,3)=[0;0;1;zeros(3*Nnod-3,1)];%!!! ACTIVATE IF g>0 % u''(0)=0
%*****%

elseif isf==2 % Simply Supported %
%*****%

K(1,:)=[1 zeros(1,3*Nnod-1)]; %
K(:,1)=[1;zeros(3*Nnod-1,1)]; % u(0)=0
F(1)=0; %

K(3*Nnod-2,:)=[zeros(1,3*Nnod-3) 1 0 0]; %
K(:,3*Nnod-2)=[zeros(3*Nnod-3,1);1;0;0]; % u(1)=0
F(3*Nnod-2)=0; %

% Boundary Conditions Of K1
K1(1,:)=[1 zeros(1,3*Nnod-1)]; %
K1(:,1)=[1;zeros(3*Nnod-1,1)]; % u(0)=0

K1(3*Nnod-2,:)=[zeros(1,3*Nnod-3) 1 0 0]; %
K1(:,3*Nnod-2)=[zeros(3*Nnod-3,1);1;0;0]; % u(1)=0

%*****%
else % Fixed %
%*****%

K(1,:)=[1 zeros(1,3*Nnod-1)]; %
K(:,1)=[1;zeros(3*Nnod-1,1)]; % u(0)=0
F(1)=0; %

K(2,:)=[0 1 zeros(1,3*Nnod-2)]; %
K(:,2)=[0;1;zeros(3*Nnod-2,1)]; % u'(0)=0
F(2)=0; %

K(3,:)=[0 0 1 zeros(1,3*Nnod-3)];%!!! ACTIVATE IF g>0 %
K(:,3)=[0;0;1;zeros(3*Nnod-3,1)];%!!! ACTIVATE IF g>0 % u''(0)=0
F(3)=0; %!!! ACTIVATE IF g>0 %

%

K(3*Nnod-2,:)=[zeros(1,3*Nnod-3) 1 0 0]; %
K(:,3*Nnod-2)=[zeros(3*Nnod-3,1);1;0;0]; % u(1)=0
F(3*Nnod-2)=0; %

```

```

K(3*Nnod-1,:)=[zeros(1,3*Nnod-2) 1 0]; %
K(:,3*Nnod-1)=[zeros(3*Nnod-2,1);1;0]; % u'(1)=0
F(3*Nnod-1)=0; %

K(3*Nnod,:)=[zeros(1,3*Nnod-1) 1];%!!! ACTIVATE IF g>0 %
K(:,3*Nnod)=[zeros(3*Nnod-1,1);1];%!!! ACTIVATE IF g>0 % u''(1)=0
F(3*Nnod)=0; %!!! ACTIVATE IF g>0 %

% Boundary Conditions Of K1

K1(1,:)=[1 zeros(1,3*Nnod-1)]; %
K1(:,1)=[1;zeros(3*Nnod-1,1)]; % u(0)=0

K1(2,:)=[0 1 zeros(1,3*Nnod-2)]; %
K1(:,2)=[0;1;zeros(3*Nnod-2,1)]; % u'(0)=0

K1(3,:)=[0 0 1 zeros(1,3*Nnod-3)];%!!! ACTIVATE IF g>0 %
K1(:,3)=[0;0;1;zeros(3*Nnod-3,1)];%!!! ACTIVATE IF g>0 % u''(0)=0

K1(3*Nnod-2,:)=[zeros(1,3*Nnod-3) 1 0 0]; %
K1(:,3*Nnod-2)=[zeros(3*Nnod-3,1);1;0;0]; % u(1)=0

K1(3*Nnod-1,:)=[zeros(1,3*Nnod-2) 1 0]; %
K1(:,3*Nnod-1)=[zeros(3*Nnod-2,1);1;0]; % u'(1)=0

K1(3*Nnod,:)=[zeros(1,3*Nnod-1) 1];%!!! ACTIVATE IF g>0 %
K1(:,3*Nnod)=[zeros(3*Nnod-1,1);1];%!!! ACTIVATE IF g>0 % u''(1)=0

end
%% EigenValues of Buckling Loads
%*****
%
%
%*****%
if isf==1 % Cantilever %
%
%*****%
Kp=zeros(3*Nel, 3*Nel);
Klp=zeros(3*Nel, 3*Nel);
Kp=K(4:3*Nel+3,4:3*Nel+3);
Klp=K1(4:3*Nel+3,4:3*Nel+3);

P1 = eig(Kp,Klp); % Array of critical loads
end

%% F.E. SOLUTION
U=K\F;
U2=Ksum\Fsum2;
%
u=zeros(Nnod,1);
du=zeros(Nnod,1);
ddu=zeros(Nnod,1);

for i=1:Nnod
u(i)=U(3*i-2); % u(xnod)

```

```

du(i)=U(3*i-1);      % u' (xnod)
ddu(i)=U(3*i);      % u'' (xnod)
end

%% Calculation of Shear Force (Q1), Moment (M1) and Double Moment (m1)
%*****
%
% Q := EI*(u''-g^2*u''')  M := -EI*(u''-g^2*u''')  m := -EI*g^2*u'''
% Q1 = Q/(g^2EI/L^4)      M1 = M/(g^2EI/L^3)      m1 = m/(g^2EI/L^2)
%
%*****
%
Q1=zeros(Nnod,1);
M1=zeros(Nnod,1);
m1=zeros(Nnod,1);

for i=2:Nel
    Q1(i)=(ke(1,:)*U(3*i-2:3*i+3)-fe(1));
    M1(i)=(ke(2,:)*U(3*i-2:3*i+3)-fe(2));
    m1(i)=(ke(3,:)*U(3*i-2:3*i+3)-fe(3));
end

%*****%
if isf==1      % Cantilever %
%*****%

Q1(1)=-(ke(1,:)*U(3*1-2:3*1+3)-fe(1));
M1(1)=(ke(2,:)*U(3*1-2:3*1+3)-fe(2));
m1(1)=(ke(3,:)*U(3*1-2:3*1+3)-fe(3));

%*****%
elseif isf==2      % Simply Supported %
%*****%

Q1(1)=-(ke(1,:)*U(3*1-2:3*1+3)-fe(1));

Q1(Nnod)=(ke(4,:)*U(3*Nnod-5:3*Nnod)-fe(1));

%*****%
else      % Fixed %
%*****%

Q1(1)=-(ke(1,:)*U(3*1-2:3*1+3)-fe(1));
M1(1)=(ke(2,:)*U(3*1-2:3*1+3)-fe(2));
m1(1)=(ke(3,:)*U(3*1-2:3*1+3)-fe(3));

Q1(Nnod)=(ke(4,:)*U(3*Nnod-5:3*Nnod)-fe(1));
M1(Nnod)=-ke(5,:)*U(3*Nnod-5:3*Nnod)+fe(2);
m1(Nnod)=-ke(6,:)*U(3*Nnod-5:3*Nnod)+fe(3);

end

```

```

%% Calculation of Analytical Solution for the Gradient Case
%
%*****
% 1. The general form of the solution is
%*****
%  $U3 = \sum C_j \exp(\operatorname{Re}(\lambda_j) * x) * (\operatorname{Cos}(\operatorname{Im}(\lambda_j) * x) + \operatorname{Sin}(\operatorname{Im}(\lambda_j) * x)) + q_0 / (k_0 * L),$ 
%
%  $j=1,2,\dots,6$ , where  $\lambda_j$  are the roots of the characteristic polynomial
%  $s^6 - AA * s^4 - BB = 0$ ,  $AA := (\operatorname{grat}^{-2} + rg2r^{-1})$ ,  $BB := kf / \operatorname{grat}^2$ 
%
% The constants  $C_j$  are calculated using the BC's for each case
% To this end we need the expressions of the derivatives of  $U3$  up to the
% 5th order. This way we can formulate the essential and natural variables
% and calculate the coefficients that multiply the  $C_j$ 's. Then we solve the
% relevant linear system and define the values of the essential and natural
% variables for each value of  $x/L$  ( $0 \rightarrow 1$ ).
%
% Root Calculation
%*****
% 2. Calculation of the roots according to Cardano's Method
%*****
% Characteristic Polynomial:  $s^6 - AA * s^4 - BB = 0$ 
% We substitute  $z = s^2$ , thus we get:
%
%  $z^3 - AA * z^2 - BB = 0$  eq.(1)
AA=grat^(-2)+1/rg2r;
BB=kf*grat^(-2);

Q=-AA^2/9;
R=(2*AA^3+27*BB)/54;
D=Q^3+R^2;
% D is the Discriminant of the eq.(1)
% if D < 0, the equation has 3 distinct
% real roots
% if D > 0, the equation has 1 real root
% and 2 complex conjugate roots
% if D = 0, at least 2 roots coincide
% and they are all real

SS=nthroot(R+sqrt(D),3);
TT=nthroot(R-sqrt(D),3);

z1=SS+TT+AA/3;
z2=- (SS+TT)/2+AA/3+1i*sqrt(3)*(SS-TT)/2;
z3=conj(z2);

% we substitute back  $s = \pm \sqrt{z}$ , thus we get
l1(1)=sqrt(z1); % l1(i) is the vector of the roots of eq.(1)
l1(2)=-l1(1);
l1(3)=sqrt(z2);
l1(4)=-l1(3);
l1(5)=sqrt(z3);
l1(6)=-l1(5);
%
%% Constant's  $C_j$  Definition
%*****
% 3. Formulation of the linear 6x6 system to define the  $C_j$ 's
%*****

```

```

%
BA=zeros(6,6);
ba=zeros(6,1);ba(1)=-q/(k0*L);

                                %*****%
if isf==1                        % Cantilever %
                                %%%%%%%%%%

    for j=1:6
        BA(1,j)=1;                                % u(0)=0
        BA(2,j)=imag(l1(j))+real(l1(j));          % u'(0)=0
        BA(3,j)=real(l1(j))^2-imag(l1(j))^2+2*...
                imag(l1(j))*real(l1(j));          % u''(0)=0
        BA(4,j)=exp(real(l1(j)))*((1/2-1i/2)*...
                (l1(j)^3+1i*conj(l1(j))^3)*cos(imag(l1(j)))+...
                (1/2+1i/2)*(l1(j)^3-1i*conj(l1(j))^3)*...
                sin(imag(l1(j))));                % m(1)=0
        BA(5,j)=exp(real(l1(j)))*(AA*cos(imag(l1(j)))*BA(3,j)+...
                AA*sin(imag(l1(j)))*(real(l1(j))^2-imag(l1(j))^2-...
                2*imag(l1(j))*real(l1(j)))-(1/2-1i/2)*...
                (l1(j)^4+1i*conj(l1(j))^4)*cos(imag(l1(j)))-...
                (1/2+1i/2)*(l1(j)^4-1i*conj(l1(j))^4)*...
                sin(imag(l1(j))));                % M(1)=0
        BA(6,j)=exp(real(l1(j)))*(AA*cos(imag(l1(j)))*(1/2-1i/2)*...
                (l1(j)^3+1i*conj(l1(j))^3)+AA*(1/2+1i/2)*...
                (l1(j)^3-1i*conj(l1(j))^3)*sin(imag(l1(j)))-...
                (1/2-1i/2)*(l1(j)^5+1i*conj(l1(j))^5)*...
                cos(imag(l1(j)))-(1/2+1i/2)*(l1(j)^5-1i*...
                conj(l1(j))^5)*sin(imag(l1(j)))); % Q(1)=0
    end

                                %*****%
elseif isf==2                    % Simply Supported %
                                %%%%%%%%%%

    for j=1:6
        BA(1,j)=1;                                % u(0)=0
        BA(2,j)=exp(real(l1(j)))*(cos(imag(l1(j)))+...
                sin(imag(l1(j))));                % u(1)=0
        BA(3,j)=(1/2-1i/2)*(l1(j)^3+1i*conj(l1(j))^3); % m(0)=0
        BA(4,j)=exp(real(l1(j)))*((1/2-1i/2)*(l1(j)^3+1i*...
                conj(l1(j))^3)*cos(imag(l1(j)))+(1/2+1i/2)*...
                (l1(j)^3-1i*conj(l1(j))^3)*sin(imag(l1(j)))); % m(1)=0
        BA(5,j)=exp(real(l1(j)))*(AA*cos(imag(l1(j)))*...
                (real(l1(j))^2-imag(l1(j))^2+2*imag(l1(j))*...
                real(l1(j)))+AA*sin(imag(l1(j)))*(real(l1(j))^2-...
                imag(l1(j))^2-2*imag(l1(j))*real(l1(j)))-(1/2-1i/2)*...
                (l1(j)^4+1i*conj(l1(j))^4)*cos(imag(l1(j)))-(1/2+1i/2)*...
                (l1(j)^4-1i*conj(l1(j))^4)*sin(imag(l1(j)))); % M(1)=0
        BA(6,j)=AA*(real(l1(j))^2-imag(l1(j))^2+2*imag(l1(j))*...
                real(l1(j)))-(1/2-1i/2)*(l1(j)^4+1i*conj(l1(j))^4); % M(0)=0
    end
    ba(2)=ba(1);

                                %*****%
else                               % Fixed -Fixed %
                                %%%%%%%%%%

    for j=1:6
        BA(1,j)=1;                                % u(0)=0
        BA(2,j)=imag(l1(j))+real(l1(j));          % u'(0)=0
        BA(3,j)=real(l1(j))^2-imag(l1(j))^2+2*...

```

```

        imag(l1(j))*real(l1(j)); % u''(0)=0
BA(4,j)=exp(real(l1(j)))*(cos(imag(l1(j)))+... % u(1)=0
        sin(imag(l1(j))));
BA(5,j)=exp(real(l1(j)))*real(l1(j))*(cos(imag(l1(j)))+...
        sin(imag(l1(j)))+exp(real(l1(j))*imag(l1(j))*...
        (cos(imag(l1(j)))-sin(imag(l1(j)))); % u'(1)=0
BA(6,j)=exp(real(l1(j)))*(real(l1(j)))^2*(cos(imag(l1(j)))+...
        sin(imag(l1(j)))+2*exp(real(l1(j))*real(l1(j))*...
        imag(l1(j))*(cos(imag(l1(j)))-sin(imag(l1(j))))+...
        exp(real(l1(j))*imag(l1(j)))^2*(-cos(imag(l1(j)))-...
        sin(imag(l1(j)))); % u''(1)=0
    end
ba(4)=ba(1);

end
%% System of Cj's
% *****
% 4. Solution of the system for the Cj's
CC=BA\ba% ACHTUNG!! the condition of BA is normally awfully bad
%
% *****
% 5. Calculation of the analytical solution values
% 5.1. Essential Variables
u0=q/(k0*L);
uex=zeros(length(xnod),1);
duex=zeros(length(xnod),1);
dduex=zeros(length(xnod),1);
d3uex=zeros(length(xnod),1);
d4uex=zeros(length(xnod),1);
d5uex=zeros(length(xnod),1);
for i=1:length(xnod)
    uex(i)=u0;
    for j=1:6
        uex(i)=uex(i)+CC(j)*exp(real(l1(j))*xnod(i))*...
            (cos(imag(l1(j))*xnod(i))+sin(imag(l1(j))*xnod(i))); % u(x)
        duex(i)=duex(i)+CC(j)*exp(real(l1(j))*xnod(i))*...
            ((imag(l1(j))+real(l1(j)))*cos(imag(l1(j))*xnod(i))+...
            (-imag(l1(j))+real(l1(j)))*sin(imag(l1(j))*xnod(i))); % u'(x)
        dduex(i)=dduex(i)+CC(j)*exp(real(l1(j))*xnod(i))*...
            ((-imag(l1(j))^2+real(l1(j))^2+2*real(l1(j))*...
            imag(l1(j)))*cos(imag(l1(j))*xnod(i))+...
            (-imag(l1(j))^2+real(l1(j))^2-2*real(l1(j))*...
            imag(l1(j)))*sin(imag(l1(j))*xnod(i))); % u''(x)
        d3uex(i)=d3uex(i)+CC(j)*exp(real(l1(j))*xnod(i))*...
            ((1/2-1i/2)*(l1(j)^3+1i*conj(l1(j))^3)*...
            cos(imag(l1(j))*xnod(i))+(1/2+1i/2)*...
            (l1(j)^3-1i*conj(l1(j))^3)*sin(imag(l1(j))*xnod(i))); % u'''(x)
        d4uex(i)=d4uex(i)+CC(j)*exp(real(l1(j))*xnod(i))*...
            ((1/2-1i/2)*(l1(j)^4+1i*conj(l1(j))^4)*...
            cos(imag(l1(j))*xnod(i))+(1/2+1i/2)*...
            (l1(j)^4-1i*conj(l1(j))^4)*sin(imag(l1(j))*xnod(i))); % u''''(x)
        d5uex(i)=d5uex(i)+CC(j)*exp(real(l1(j))*xnod(i))*...
            ((1/2-1i/2)*(l1(j)^5+1i*conj(l1(j))^5)*...
            cos(imag(l1(j))*xnod(i))+(1/2+1i/2)*(l1(j)^5-...
            1i*conj(l1(j))^5)*sin(imag(l1(j))*xnod(i))); % u'''''(x)
    end
end
end

```



```

%*****
% 5.2. Natural variables M=-AA*u"+u"", Q=-AA*u"' +u""', m=-u"'
%*****
Mex=zeros(length(xnod),1);
Qex=zeros(length(xnod),1);
mex=zeros(length(xnod),1);
for i=1:length(xnod)
    Mex(i)=-AA*dduex(i)+d4uex(i);
    Qex(i)=-AA*d3uex(i)+d5uex(i);
    mex(i)=-d3uex(i);
end

%% Classical Analytical Solution
%*****
% Classical Analytical Solution (B-E on Winkler foundation)
%
% 1. Cantilever 2. Simply supported 3. Fixed
%*****

b=L*(k0/(4*EI))^(1/4);

if isf==1
    %*****%
    % Cantilever %
    %%%%%%%%%%
    BA1=[
        1 0 1 0;... % u(0)=0
        1 1 -1 1;... % u'(0)=0
        -exp(2*b)*sin(b) exp(2*b)*cos(b) sin(b) -cos(b);... % Q(1)=0
        -exp(2*b)*(cos(b)+sin(b)) exp(2*b)*(cos(b)-sin(b)) (cos(b)-sin(b)) ...
        (cos(b)+sin(b))]; % M(1)=0

    ba1=[-q/(k0*L);0;0;0];
elseif isf==2
    %*****%
    % Simply Supported %
    %%%%%%%%%%
    BA1=[
        1 0 1 0;... % u(0)=0
        exp(b)*cos(b) exp(b)*sin(b) exp(-b)*cos(b) exp(-b)*sin(b);... % u(1)=0
        0 1 0 -1;... % M(0)=0
        -exp(2*b)*sin(b) exp(2*b)*cos(b) sin(b) -cos(b)]; % M(1)=0

    ba1=-(q/(k0*L))*[1;1;0;0];
else
    %*****%
    % Fixed %
    %%%%%%%%%%
    BA1=[
        1 0 1 0;... % u(0)=0
        1 1 -1 1;... % u'(0)=0
        exp(b)*cos(b) exp(b)*sin(b) exp(-b)*cos(b) exp(-b)*sin(b);... % u(1)=0
        exp(b)*b*(cos(b)-sin(b)) exp(b)*b*(cos(b)+sin(b)) -exp(-b)*b*...
        (cos(b)+sin(b)) exp(-b)*b*(cos(b)-sin(b))]; % u'(1)=0

    ba1=-(q/(k0*L))*[1;0;1;0];
end

```

```

% Constants C1-C4
CC1=BA1\ba1;
uc0=q/(k0*L);
ucex=zeros(length(xnod),1);
duzex=zeros(length(xnod),1);
dducex=zeros(length(xnod),1);
for i=1:length(xnod)
    ucex(i)=uc0;
ucex(i)=ucex(i)+exp(b*xnod(i))*...
    (CC1(1)*cos(b*xnod(i))+CC1(2)*sin(b*xnod(i)))+... % ucex
    exp(-b*xnod(i))*(CC1(3)*cos(b*xnod(i))+CC1(4)*sin(b*xnod(i)));

                                % duzex
duzex(i)=b*exp(b*xnod(i))*(CC1(1)*cos(b*xnod(i))+CC1(2)*sin(b*xnod(i)))+...
    exp(b*xnod(i))*(-CC1(1)*b*sin(b*xnod(i))+CC1(2)*b*cos(b*xnod(i)))-...
    b*exp(-b*xnod(i))*(CC1(3)*cos(b*xnod(i))+CC1(4)*sin(b*xnod(i)))+...
    exp(-b*xnod(i))*(-CC1(3)*b*sin(b*xnod(i))+CC1(4)*b*cos(b*xnod(i)));
end

%% Bending Moment and Shear Force in Classical Bending
%
% Mcex=zeros(length(xnod),1);
% for i=1:length(xnod)
%     Mcex(i)=-EI*dducex(xnod);
% end

%% Plots
%*****
% Plots of essential variables (u, u', u'') and (u,ucex)
%*****

figure(1)
subplot(2,2,1);plot(xnod,ucex,'k',xnod,u,'r*-');
xlabel('x/L');ylabel('Displacement u/L')
legend('Analytical', 'Numerical')

subplot(2,2,2);plot(xnod,duzex,'k',xnod,du,'r*-');
xlabel('x/L');ylabel('Slope d(u/L)/d(x/L)')
legend('Analytical', 'Numerical')

subplot(2,2,3);plot(xnod,dducex,'k',xnod,ddu,'r*-');
xlabel('x/L');ylabel('d^2(u/L)/d(x/L)^2')
legend('Analytical', 'Numerical')

subplot(2,2,4);plot(xnod,ucex,'k',xnod,u,'r*-');
xlabel('x/L Gradient - x/L Classical');ylabel('u/L Gradient - u/L
Classical')
legend('Classical', 'Gradient')

```

```

%*****
% Plots of numerical(Q, M, m) and Q/(g^2EI/L^4), M/(g^2EI/L^3),
% m/(g^2EI/L^2)
%*****

figure(2)
subplot(2,2,1);plot(xnod,Q1,'r-*',xnod,Qex,'k');
xlabel('x/L');ylabel('QL^4/g^2EI')
legend('Numerical','Analytical')

subplot(2,2,2);plot(xnod,M1,'r-*',xnod,Mex,'k');
xlabel('x/L');ylabel('ML^3/g^2EI')
legend('Numerical','Analytical')

subplot(2,2,3);plot(xnod,m1,'r-*',xnod,mex,'k');
xlabel('x/L');ylabel('mL^2/g^2EI')
legend('Numerical','Analytical')

%*****
%Plots of estimated error
%*****
erroru=abs((u-uex)/max(uex))
errordu=abs((du-duex)/max(duex))
errorddu=abs((ddu-dduex)/max(dduex))

figure(3)
subplot(3,2,1);
plot(xnod,uex,'k',xnod,u,'b*');
xlabel('x/L');ylabel('Displacement u/L')
subplot(3,2,2);
plot(xnod,erroru,'r+')
xlabel('x/L');ylabel('% Nodal Error')

subplot(3,2,3);
plot(xnod,duex,'k',xnod,du,'b*');
xlabel('x/L');ylabel('Slope d(u/L)/d(x/L)')
subplot(3,2,4);
plot(xnod,errordu,'r+')
xlabel('x/L');ylabel('% Nodal Error')

subplot(3,2,5);
plot(xnod,dduex,'k',xnod,ddu,'b*');
xlabel('x/L');ylabel('d^2(u/L)/d(x/L)^2')
subplot(3,2,6);
plot(xnod,errorddu,'r+')
xlabel('x/L');ylabel('% Nodal Error')

```