

Διπλωματική εργασία



Ελεγκτές πορείας για δακτυλίους δρόμους χωρίς διαγράμμιση
βασιζόμενοι σε συναρτήσεις ελέγχου Lyapunov

Όνομα : Δήμητρα

Επώνυμο : Μπίστιχα

ΔΠΜΣ : Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Αριθμός μητρώου : 09421009

Επιβλέπων καθηγητής : Ιάσων Καραφύλλης

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στον τομέα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Επιστημών και ειδικότερα στο πλαίσιο του μαθήματος “Μη Γραμμικά Συστήματα και Έλεγχος” της σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Από την θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους αυτούς που συνέβαλαν στην επιστημονική μου επιμόρφωση καθ’ όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ιάσωνα Καραφύλλη για το ενδιαφέρον και το σύγχρονο θέμα της πτυχιακής εργασίας που με παρότρυνε να μελετήσω, καθώς και για την άρτια καθοδήγηση του και τις άμεσες απαντήσεις σε όλα μου τα ερωτήματα στην διάρκεια αυτού του επιστημονικού ταξιδιού. Την μεγαλύτερη ευγνωμοσύνη οφείλω σε όλη μου την οικογένεια, η οποία στάθηκε στο πλευρό μου σε όλους τους τομείς όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών. Η συμπαράσταση και η υπομονή τους αποτελούσε κινητήρια δύναμη για εμένα.

Αθήνα 2023

Δήμητρα Μπίστιχα

¹Copyright © Δημήτρα Μπίστιχα, Αθήνα 2023

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για μη κερδοσκοπικό σκοπό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται καινοτόμες οικογένειες ελεγκτών πορείας για αυτόνομα αυτοκίνητα σε δακτυλίους δρόμους χωρίς διαγράμμιση. Η δημιουργία των ελεγκτών πορείας βασίζεται στην κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης ελέγχου Lyapunov που εκφράζεται από τα μεγέθη των ενεργειών του συστήματος με την κινητική ενέργεια να εκφράζεται είτε με την Νευτώνεια είτε με την σχετικιστική μηχανική. Ο παραγόμενος νόμος ανάδρασης (ελεγκτής πορείας) είναι αποκεντρωμένος (για το κάθε όχημα ξεχωριστά), ώστε σε κάθε όχημα να ορίζεται ο έλεγχος εισόδου βασιζόμενος :

- στην δική του κατάσταση,
- είτε μόνο στην απόσταση από τα διπλανά οχήματα (μη ιξώδης ελεγκτής πορείας) είτε στην κατάσταση από τα διπλανά οχήματα (ιξώδεις ελεγκτές πορείας),
- στην απόσταση του από τα σύνορα του δακτυλίου δρόμου.

Παρουσιάζεται μια λεπτομερής ανάλυση στις διαφορές και στις ομοιότητες των ευθειών και δακτυλίων δρόμων χωρίς διαγράμμιση.

Λέξεις κλειδιά : Συναρτήσεις ελέγχου Lyapunov, Αυτόνομα οχήματα, Μη γραμμικά συστήματα, Δρόμος δακτύλιος, Κίνηση σε δρόμους χωρίς γραμμές.

Abstract

In this thesis are presented innovative cruise controllers for autonomous vehicles on lane-free ring-roads. The appropriate choice of the Control Lyapunov Functions (CLF), which is expressed through the measurements of the energy system when the kinetic energy expressed either the Newtonian mechanics either the relativistic mechanics, is the basic start for the formation of the cruise controllers. The derivative feedback law (cruise controller) is decentralized (for each vehicle), in the way that the vehicle is defined as an input control based on:

- its own state,
- either the distance only from the adjacent vehicles (inviscid cruise controllers) either the state of the adjoining vehicles (viscous cruise controllers),
- the distance from the boundaries of ring-roads.

Moreover there is a extensive presentation of the differences and the similarities between the lane-free straight roads and ring-roads.

Keywords: Control Lyapunov Functions, Autonomous Vehicles, Nonlinear Systems, Ring-Road, Lane-free traffic.

Περιεχόμενα

1 Κεφάλαιο	
Εισαγωγή	8
1.1 Εισαγωγικά στοιχεία της διπλωματικής εργασίας	8
1.2 Δομή της διπλωματικής εργασίας	10
1.3 Συμβολισμοί	11
2 Κεφάλαιο	
Υπόβαθρο	12
2.1 Βασικοί Ορισμοί	12
2.1.1 Σύστημα ελέγχου	12
2.1.2 Συναρτήσεις Lyapunov	12
2.1.3 Size Function	13
2.1.4 Ομοιομορφισμός	13
2.1.5 Διφεομορφισμός	13
2.1.6 Καμπύλες στο επίπεδο	14
2.1.7 Ομοιόμορφος Ελκυστής	14
2.2 Χρήσιμα Θεωρήματα	14
2.3 Χρήσιμα Λήμματα και Προτάσεις	15
3 Κεφάλαιο	
Μοντέλο και διαμόρφωση του προβλήματος	17
3.1 Περιγραφή του μοντέλου κίνησης των οχημάτων στον δακτύλιο δρόμο	17
3.2 Διατύπωση του προβλήματος	19
4 Κεφάλαιο	
Κύρια αποτελέσματα	19
4.1 Εισαγωγικά	19
4.2 Νευτώνειος Ελεγκτής Πορείας	21
4.3 Ψευδο-σχετικιστικός Ελεγκτής Πορείας	23
4.4 Διατύπωση των Κύριων Αποτελεσμάτων	26
5 Κεφάλαιο	
Σύγκριση με την περίπτωση του ευθέος δρόμου	28
5.1 Διαφορές του δακτυλίου και του ευθέος δρόμου	28

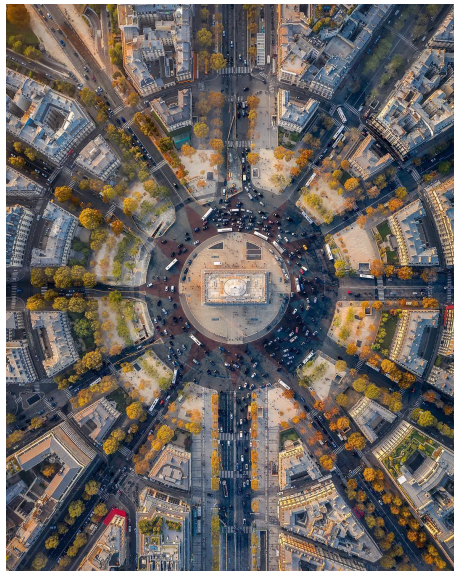
5.2	Ομοιότητες του δακτυλίου και του ευθέος δρόμου	30
6	Κεφάλαιο	
	Αριθμητικές Προσομοιώσεις	31
7	Κεφάλαιο	
	Αποδείξεις	37
7.1	Απόδειξη Λήμματος 4.2.1	38
7.2	Απόδειξη Λήμματος 4.3.1	40
7.3	Απόδειξη Θεωρήματος 4.1	42
7.4	Απόδειξη Θεωρήματος 4.2	55
8	Κεφάλαιο	
	Ηθική προέκταση στον τρόπο λήψεως αποφάσεων κατά την αυτόνομη οδήγηση	64
9	Επίλογος	66
	Αναφορές	67

1 Κεφάλαιο

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγικά στοιχεία της διπλωματικής εργασίας

Ο ασφαλής και αποτελεσματικός σχεδιασμός ελεγκτικών μεθοδολογιών για αυτόνομα οχήματα αποτελεί πρόκληση η οποία χαρακτηρίζεται από διάφορες συνθήκες οδήγησης, όπως για παράδειγμα τα συστήματα Adaptive Cruise Control (ACC) και Cooperative Adaptive Cruise Control (CACC). Πιο συγκεκριμένα, το Adaptive Cruise Control είναι ένα ανεπτυγμένο σύστημα για μηχανοκίνητα οχήματα με σκοπό την προσαρμογή της ταχύτητας του οχήματος ώστε να τηρούνται οι αποστάσεις ασφαλείας από τα υπόλοιπα οχήματα, το Cooperative Adaptive Cruise Control είναι μια επέκταση του συστήματος Adaptive Cruise Control η οποία ωστόσο βασίζεται στην "έπικοινωνία" ανάμεσα στα οχήματα, περαιτέρω πληροφορίες υπάρχουν στα [2],[9],[21],[22],[37]. Η επίδραση των αυτόνομων οχημάτων στη ροή της κυκλοφορίας μελετάται γενικά σε μια σειρά από οχήματα που οδηγούνται είτε σε δρόμους με δύο κατευθύνσεις είτε σε δρόμους δακτυλίου. Ο στόχος είναι να σχεδιαστούν νόμοι ανάδρασης ώστε τα οχήματα να μπορούν να προσαρμόσουν την ταχύτητά τους με εκείνη του πρώτου οχήματος και παράλληλα να τηρούν αποστάσεις ασφαλείας από τα υπόλοιπα οχήματα λεπτομερείς αναλύσεις βρίσκονται στα [3], [6], [9], [14], [22], [26], [35].



Εικόνα 1: Place Charles-de-Gaulle

Ένα φαινόμενο που χαρακτηρίζει τους αυτοκινητόδρομους όταν η πυκνότητα των οχημάτων είναι πολύ

μεγάλη είναι το phantom traffic jam. Το phantom traffic jam ξεκινάει όταν ένα όχημα επιβραδύνει λόγω της πυκνότητας των οχημάτων τότε το όχημα πίσω του επιβραδύνει ακόμα περισσότερο, έτσι δημιουργείται κυκλοφοριακή συμφόρηση χωρίς κάποιον προφανή λόγο. Οι δρόμοι δακτύλιοι παρουσιάζουν έντονο ενδιαφέρον διότι έχουν τη δυνατότητα να πυροδοτούν το phantom traffic jam όταν η μέση πυκνότητα υπερβαίνει το κρίσιμο σημείο της [4], [32], [36]. Γενικότερα η ικανότητα επικοινωνίας και αυτονόμηση των οχημάτων σε δρόμους δακτυλίου με σκοπό την εξαφάνιση των κυκλοφοριακών συμφορήσεων μελετάται εντατικά και αναφέρεται σε δυο μοντέλα κυκλοφορίας σε εκείνο των μικροσκοπικών και εκείνο των μακροσκοπικών ροών [7], [8], [12], [13], [15], [16]. Λόγω της εξέλιξης της τεχνολογίας των οχημάτων και την ανάδυση των πλήρως αυτόνομων οχημάτων νέες κατευθύνσεις έχουν προταθεί [26], όπου τα οχήματα δεν περιορίζονται στις γραμμές κυκλοφορίας αλλά κινούνται ελεύθερα στις δύο διαστάσεις της επιφάνειας του δρόμου και μπορούν να επηρεάσουν την κίνηση των διπλανών τους οχημάτων μέσω αισθητήρων που επικοινωνούν λεπτομερής ανάλυση υπάρχει στα [18], [19], [23], [38].

Οι ελεγκτές πορείας για αυτόνομα οχήματα σε δρόμους δακτυλίου και κυκλικούς κόμβους έχουν μεγάλη ιστορία (όπως για παράδειγμα στα [6], [10], [14], [22], [26], [27], [29], [31], [34], [39]) και βασίζονται σε δρόμους με μονή ή διπλή γραμμή και για αυτό το λόγο δεν είναι κατάλληλοι να περιγράψουν την πολυπλοκότητα των δρόμων δακτυλίων χωρίς γραμμές, όπως και στην χαρακτηριστική περίπτωση του γνωστού κόμβου Charles-de-Gaulle Place στο Παρίσι, στη Γαλλία (Εικόνα 1), η στρατηγική οδήγησης του οχήματος αναλύεται στο [23]. Σε αυτήν την εργασία επεκτείνονται οι μέθοδοι των συναρτήσεων ελέγχου Lyapunov που παρουσιάζονται στο [19] ώστε να παράγουμε οικογένειες ελεγκτών πορείας για αυτόνομα οχήματα χειριζόμενα σε διαστάσεις επιφάνειας σε δρόμους δακτυλίου χωρίς γραμμές. Οι συναρτήσεις ελέγχου Lyapunov (CLFs) βασίζονται στα μεγέθη της ολικής ενέργειας του συστήματος και στην δράση των size function που εξασφαλίζουν ότι το σύστημα κλειστού βρόχου είναι καλά τοποθετημένο (Λήμμα 4.3.1 και Λήμμα 4.2.1). Η κινητική ενέργεια εκφράζεται με δύο τρόπους, έναν όμοιο με εκείνον της Νευτώνειας μηχανικής και άλλον έναν αυτόν της σχετικιστικής μηχανικής οι αντίστοιχες δύο οικογένειες ελεγκτών πορείας ικανοποιούν ολικά τις ακόλουθες ιδιότητες (Θεώρημα 4.1 και Θεώρημα 4.2) :

- δεν υπάρχουν συγκρούσεις μεταξύ των οχημάτων ή μεταξύ των οχημάτων και των ορίων του δρόμου (είτε εσωτερικά είτε εξωτερικά),
- η ταχύτητα του κάθε οχήματος είναι πάντα θετική και δεν υπερβαίνει το όριο ταχύτητας του δρόμου,
- η γωνιακή ταχύτητα κάθε οχήματος συγκλίνει σε ένα γνωστό set-point της ταχύτητας. Οι επιταχύνσεις, οι σχετικοί προσανατολισμοί (η απόκλιση της αρχικής γωνίας από την εφαιπόμενη

του κύκλου) και οι ρυθμοί αλλαγής των σχετικών προσανατολισμών του οχήματος τείνουν στο μηδέν.

Οι προτεινόμενες οικογένειες ελεγκτών πορείας είναι αποκεντρωμένες (για κάθε όχημα) και έτσι έχει πρόσβαση στην δική του κατάσταση, την απόσταση από τα σύνορα του δρόμου δακτυλίου και στις σχετικές θέσεις από τα διπλανά του οχήματα (μη ιξώδεις ελεγκτές πορείας) και σε κάποιες περιπτώσεις στις σχετικές ταχύτητες και σχετικές θέσεις των διπλανών οχημάτων (ιξώδεις ελεγκτές πορείας). Με τον σχεδιασμό των ελεγκτών πορείας και στις δύο περιπτώσεις, αυτήν σε δρόμους δακτυλίου και σε αυτήν στις ευθείες (βλεπε [19]), είναι λογικό να αναρωτηθούμε εάν κάθε δρόμος μπορεί να αναπαραστηθεί ως μια κλειστή ή μια ανοιχτή καμπύλη που δεν παρουσιάζει βρόχο εάν επιλέξουμε την κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων :

- Μετασχηματίζοντας κάθε καμπύλη του δρόμου με σταθερό πλάτος και άπειρο μήκος σε έναν ευθύ δρόμο με σταθερό πλάτος
- Μετασχηματίζοντας κάθε δρόμο με σταθερό πλάτος που αναπαριστάται από μια κλειστή καμπύλη σε δρόμο δακτύλιο με σταθερό πλάτος.

Ας σημειωθεί το εξής ότι ο δακτύλιος και ο ευθύς δρόμος δεν είναι όμοιοι τοπολογικά, δηλαδή είναι αδύνατον να βρεθεί μια κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών τέτοια ώστε να μετασχηματίζει έναν ευθύ δρόμο σε έναν δακτύλιο δρόμο. Για αυτόν τον λόγο, λοιπόν, οι ελεγκτές πορείας που προτείνονται στην παρούσα εργασία για τους δρόμους δακτυλίου δεν είναι άμεση συνέπεια των ελεγκτών πορείας στις ευθείες.

1.2 Δομή της διπλωματικής εργασίας

Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια επαρκή εικόνα για το σύνολο της εργασίας, τα επόμενα κεφάλαια οργανώνονται ως εξής:

- Στο Κεφάλαιο 2 παρέχεται το θεωρητικό υπόβαθρο που είναι απαραίτητο για να κατανοήσει ο αναγνώστης την εργασία μας.
- Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφεται το μοντέλο του οχήματος που θα μας απασχολήσει για τον δρόμο δακτύλιο.
- Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται οι οικογένειες ελεγκτών πορείας και οι βασικές προτάσεις των κύριων αποτελεσμάτων.
- Στο Κεφάλαιο 5 περιέχονται οι διαφορές και οι ομοιότητες ανάμεσα στους ελεγκτές πορείας για τον δρόμο δακτύλιο και τον ευθύ δρόμο.

- Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται κάποιες προσομοιώσεις παραδειγμάτων που επιδεικνύουν τις ιδιότητες των οικογενειών ελεγκτών πορείας.
- Στο Κεφάλαιο 7 αποδεικνύονται τα κύρια αποτελέσματα.
- Στο Κεφάλαιο 8 περιέχεται μια προέκταση του ηθικού ζητήματος που προκύπτει με την εξέλιξη των αυτόνομων οχημάτων.
- Τέλος στο Κεφάλαιο 9 παρουσιάζονται κάποια συμπεράσματα της εργασίας.

1.3 Συμβολισμοί

Στην εργασία υιοθετούμε τον παρακάτω συμβολισμό.

- $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών.
- Με το $|x|$ συμβολίζουμε την Ευκλείδεια νόρμα ενός διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$ και επίσης την απόλυτη τιμή ενός μονόμετρου μεγέθους $x \in \mathbb{R}$. Με το x' συμβολίζουμε την αλλαγή θέσης ενός διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$. Με το $|x|_\infty = \max\{|x_i|, i = 1, \dots, n\}$ ορίζεται η άπειρη νόρμα ενός διανύσματος $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$.
- Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ να είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Το σύμβολο $C^0(A, \Omega)$ ορίζει την κλάση των συνεχών συναρτήσεων του $A \subset \mathbb{R}^n$, οι οποίες παίρνουν τιμές στο $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Το σύμβολο $C^k(A, \Omega)$ όπου $k \geq 1$ να είναι ακέραιος, ορίζει την κλάση των συναρτήσεων του $A \subset \mathbb{R}^n$ με συνεχείς παραγώγους k τάξης, οι οποίες παίρνουν τιμές στο $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Όταν $\Omega = \mathbb{R}$ γράφουμε $C^0(A)$ ή $C^k(A)$. Για μια συνάρτηση $V \in C^1(A, \mathbb{R})$ το ανάδελτα της V στο $x \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμβολίζεται ως $\nabla V(x)$ και είναι το διάνυσμα $\left[\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right]$.
- Δοσμένης $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}$, ορίζουμε $\arg \min_{x \in S} f(x) = \{x \in S : f(x) \leq f(s), \text{ για κάθε } s \in S\}$.
- Με τον συμβολισμό $\text{dist}(x, A)$ ορίζεται η Ευκλείδεια απόσταση ενός σημείου $x \in \mathbb{R}^n$ από το σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$, δηλαδή

$$\text{dist}(x, A) = \inf\{|x - y| : y \in A\}.$$

2 Κεφάλαιο

Υπόβαθρο

2.1 Βασικοί Ορισμοί

2.1.1 Σύστημα ελέγχου

Ένα δυναμικό σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα σύνολο από διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \Omega \quad (1)$$

όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο που καλείται χώρος των καταστάσεων, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο και $x \in \Omega$ είναι το διάνυσμα καταστάσεων. Ο αριθμός n ονομάζεται διάσταση του συστήματος.

Ένα σύστημα ελέγχου μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα σύνολο από διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \Omega, \quad u \in U \quad (2)$$

όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο που καλείται χώρος των καταστάσεων, $U \subset \mathbb{R}^m$ είναι ένα μη κενό σύνολο, $f : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μία συνεχής απεικόνιση, $x \in \Omega$ είναι το διάνυσμα καταστάσεων και $u \in U$ είναι το διάνυσμα των εισόδων.

Μια ειδική περίπτωση συστημάτων ελέγχου είναι τα γραμμικά συστήματα ελέγχου της μορφής

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

με $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$.

2.1.2 Συναρτήσεις Lyapunov

Ορισμός 2.1.1. Έστω το δυναμικό σύστημα (1) και έστω μία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι για κάθε $x \in \Omega$

$$\dot{V}(x) \leq 0$$

όπου

$$\dot{V}(x) := \nabla V(x)f(x)$$

Τότε λέμε ότι η V είναι μία (ασθενής) Lyapunov συνάρτηση του συστήματος (1).

2.1.3 Size Function

Ορισμός 2.1.2. Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και έστω $A \subset \Omega$ ένα συμπαγές σύνολο. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $\omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια size function για τα (Ω, A) αν η ω είναι :

1. συνεχής,
2. θετικά ορισμένη στο A , $\omega(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ και $\omega(x) > 0$ για κάθε $x \in \Omega, x \notin A$, και
3. proper, δηλαδή για κάθε πραγματικό αριθμό $r \geq 0$ το σύνολο $S_r := \{x \in \Omega \mid \omega(x) \leq r\}$ είναι ένα συμπαγές σύνολο του Ω .

Παρατηρήσεις :

- Παρατηρούμε ότι εφόσον το Ω είναι ανοιχτό σύνολο και ζητώντας το S_r να είναι συμπαγές υποσύνολό του στην εισαγόμενη τοπολογία του Ω είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι το S_r είναι συμπαγές στην τοπολογία του \mathbb{R}^n .
- Όταν $\Omega = \mathbb{R}^n$ η φυσική επιλογή για την size function είναι $\omega(x) = \text{dist}(x, A)$, δηλαδή η απόσταση από το σύνολο A .

2.1.4 Ομοιομορφισμός

Ορισμός 2.1.3. Έστω δύο ανοιχτά, μη κενά σύνολα $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^n$ και μια απεικόνιση $T : A \rightarrow B$, θα λέμε ότι η T είναι ομοιομορφισμός αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- $T : A \rightarrow B$ είναι “ένα προς ένα” και επί.
- $T : A \rightarrow B$ είναι συνεχής.
- $T^{-1} : B \rightarrow A$ είναι συνεχής

Σημείωση: Έστω ότι ορίζουμε δύο συνεχείς καμπύλες, θα λέμε ότι είναι **τοπολογικά διαφορετικές** όταν δεν υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ τους, δηλαδή ότι δεν υπάρχει συνεχής αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση που να μπορεί να δημιουργηθεί μεταξύ των δύο καμπυλών στον \mathbb{R}^2 .

2.1.5 Διφαιομορφισμός

Ορισμός 2.1.4. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, και $B \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτά σύνολα. Μια απεικόνιση $T : A \rightarrow B$ καλείται διφαιομορφισμός από το A στο B αν η T ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες :

- $T : A \rightarrow B$ είναι ένα προς ένα και επί.
- $T : A \rightarrow B$ είναι διαφορίσιμη.
- $T^{-1} : B \rightarrow A$ είναι διαφορίσιμη.

2.1.6 Καμπύλες στο επίπεδο

Έστω ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ ορίζουμε μια συνεχή συνάρτηση $x : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ και μια καμπύλη $\gamma = \{x(t) : t \in I\}$ θα λέμε ότι μια καμπύλη είναι κλειστή αν :

$$x(a) = x(b).$$

Μια καμπύλη θα παρουσιάζει βρόχο αν υπάρχουν t_1, t_2 στο εσωτερικό του διαστήματος I με $t_1 \neq t_2$ για τα οποία ισχύει:

$$x(t_1) = x(t_2).$$

2.1.7 Ομοιόμορφος Ελκυστής

Έστω το δυναμικό σύστημα (1) και έστω ότι για κάθε $z \in \Omega$ το πρόβλημα αρχικών τιμών (1) με αρχική συνθήκη $x(0) = z$ έχει μοναδική λύση $x(t) \in \Omega$ που ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ (δηλαδή θεωρούμε ότι το (1) είναι πλήρες για θετικούς χρόνους-forward complete). Συμβολίζουμε τη λύση με $\phi(t, z) = x(t)$.

Ορισμός 2.1.5. Ένα σημείο $y \in \Omega$ ονομάζεται θετικό σημειακό όριο του σημείου $z \in \Omega$ αν υπάρχει μια ακολουθία $\{t_n \in \mathbb{R}_+ : n = 1, 2, \dots\}$ με $t_n \rightarrow +\infty$ τέτοια ώστε :

$$x(t_n) \rightarrow y.$$

Ορίζουμε:

- $\Lambda_+(x) = \{y \in \Omega : \text{Υπάρχει } \{t_n \in \mathbb{R}_+ : n = 1, 2, \dots\} \text{ τέτοια ώστε } t_n \rightarrow +\infty \text{ και } \phi(t_n, x) \rightarrow y\}$
- $S(M, \epsilon) = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, M) < \epsilon\}$

Ορισμός 2.1.6. Έστω συμπαγές σύνολο M με $M \subset \Omega$. Το M ονομάζεται ελκυστής για το (1) αν υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\Lambda_+(x) \neq \emptyset$ και $\Lambda_+(x) \subset M$ για κάθε $x \in S(M, \epsilon)$

Ορισμός 2.1.7. Το συμπαγές σύνολο $M \subset \Omega$ ονομάζεται ολικός ομοιόμορφος ελκυστής αν το M είναι ελκυστής και για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset \Omega$ υπάρχει $T = T(K, \delta) \geq 0$ με $\phi(t, K) \subset S(M, \delta)$ για κάθε $t > T$.

2.2 Χρήσιμα Θεωρήματα

Θεώρημα 2.1 (Το Θεμελιώδες Θεώρημα Ύπαρξης - Μοναδικότητας). Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n που περιέχει την αρχική συνθήκη x_0 και υποθέτουμε ότι $f \in C^1(\Omega)$. Τότε υπάρχει ένα $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\dot{x} = f(x)$$

$$x(0) = x_0$$

έχει μια μοναδική λύση $x(t)$ στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$.

Ορισμός 2.2.1. Ορίζουμε το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης να είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό διάστημα χρόνου στο οποίο η μοναδική λύση του (1) υπάρχει μέσα στο Ω .

Θεώρημα 2.2. Έστω Ω είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n που περιέχει την αρχική συνθήκη x_0 και έστω $f \in C^1(\Omega)$. Υποθέτουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\dot{x} = f(x)$$

$$x(0) = x_0$$

έχει μια λύση $x(t)$ ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0, b)$ και έστω $[0, b)$ το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης $x(t)$. Ισχυριζόμαστε ότι το $b < \infty$. Τότε για κάθε γνωστό συμπαγές σύνολο $K \subset \Omega$, υπάρχει ένα $t \in [0, b)$ τέτοιο ώστε $x(t) \notin K$.

2.3 Χρήσιμα Λήμματα και Προτάσεις

Λήμμα 2.3.1 (Barbalat). Έστω $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο \mathbb{R}_+ . Υποθέτουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Τότε ,

$$\phi(t) \rightarrow 0 \quad \text{όταν} \quad t \rightarrow \infty.$$

Η αναλυτική απόδειξη του λήμματος βρίσκεται στο [20].

Λήμμα 2.3.2. (Συνέπεια του Λήμματος Barbalat.) Αν μια συνάρτηση $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$ ικανοποιεί $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) \in \mathbb{R}$ και $\sup_{r \geq 0} (|\dot{g}(t)|) < +\infty$ τότε $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{g}(t) = 0$.

Για την παρακάτω πρόταση θα χρειαστούμε δύο ορισμούς και θα θεωρήσουμε τους τοπολογικούς χώρους X, Z με αγνώστους x, z αντίστοιχα, $\phi : X \times Z \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $F : X \rightarrow Z$ και $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ όπου

$$f(x) := \sup_{z \in F(x)} \phi(x, z)$$

Ορισμός 2.3.1. Ένα set valued map $F : X \rightarrow Z$ είναι lower semi continuous (lsc) στο $x \in X$ όταν για κάθε ανοιχτό σύνολο $U \subset Z$ τέτοιο ώστε $x \in F^{-1}(U)$ υπάρχει περιοχή V του x τέτοια ώστε $V \subset F^{-1}(U)$. Λέμε ότι η F είναι lsc όταν είναι lsc σε κάθε σημείο του X .

Ορισμός 2.3.2. Ένα set valued map $F : x \rightarrow Z$ είναι upper semi continuous (usc) στο $x \in X$ όταν για κάθε ανοιχτό σύνολο $U \subset Z$ τέτοιο ώστε $F(x) \subset U$, υπάρχει περιοχή V του x τέτοια ώστε $F(V) \subset U$. Λέμε ότι η F είναι usc όταν είναι usc σε κάθε σημείο του X .

Πρόταση 2.1. Αν F και ϕ είναι lower semi continuous τότε f είναι lower semi continuous . Αν F και ϕ είναι upper semi continuous και F έχει συμπαγές τιμές, τότε f είναι upper semi continuous .

Η αναλυτική απόδειξη βρίσκεται στην παραπομπή [11].

3 Κεφάλαιο

Μοντέλο και διαμόρφωση του προβλήματος

Για την πλήρη κατανόηση του προβλήματος που θα θέσουμε είναι απαραίτητη η περιγραφή της κίνησης των οχημάτων στο δακτύλιο δρόμο, όσο και το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που προκύπτει με την επιβολή των συνοριακών συνθηκών. Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε τα ζητούμενα του προβλήματος σύμφωνα με τις απαιτήσεις που έχουμε για τον σχεδιασμό των ελεγκτών πορείας.

3.1 Περιγραφή του μοντέλου κίνησης των οχημάτων στον δακτύλιο δρόμο

Το κινηματικό μοντέλο ποδηλάτου χρησιμοποιείται για να περιγράψει την κίνηση των οχημάτων σε ευθείες

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= v_i \cos(\theta_i) \\ \dot{y}_i &= v_i \sin(\theta_i) \\ \dot{\theta}_i &= \frac{v_i}{\sigma_i} \tan(\delta_i) \\ \dot{v}_i &= F_i\end{aligned}\tag{3}$$

όπου (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ είναι το αντίστοιχο σημείο του i οχήματος που βρίσκεται στο μέσο του άξονα του προπορευόμενου οχήματος σε ένα αδρανειακό πλαίσιο με καρτεσιανές συντεταγμένες (X, Y) , v_i είναι η ταχύτητα του οχήματος στο σημείο (x_i, y_i) , θ_i είναι η αρχική γωνία (προσανατολισμός) σχετικά με τον άξονα X , σ_i είναι το μήκος του οχήματος i (σταθερό), F_i είναι η επιτάχυνση και δ_i είναι η γωνία οδήγησης των μπροστινών ρόδων σύμφωνα με τον προσανατολισμό θ_i του οχήματος.

Για να περιγράψουμε την κίνηση του οχήματος σε ένα δακτύλιο δρόμο με εσωτερική ακτίνα $R_{in} > 0$ και εξωτερική $R_{out} > R_{in}$ με κέντρο $(0, 0)$, θέτουμε $r_i \in (R_{in}, R_{out})$ να είναι η απόσταση του οχήματος από το κέντρο $(0, 0)$ και ϕ_i η γωνιακή συντεταγμένη (η γωνία του i -οχήματος σημειωτικά από την κατεύθυνση του X άξονα). Στη συνέχεια, με αλλαγή των συντεταγμένων

- $x_i = r_i \cos(\phi)$
- $y_i = r_i \sin(\phi)$

καταλήγουμε στο κινηματικό μοντέλο ποδηλάτου με πολικές συντεταγμένες το οποίο είναι κατάλληλο

για την περιγραφή της κίνησης στον δακτύλιο δρόμο:

$$\begin{aligned}
\dot{r}_i &= -v_i \sin(s_i) \\
\dot{\phi}_i &= \frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) \\
\dot{s}_i &= \frac{v_i}{\sigma_i} \tan(\delta_i) - \frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) \\
\dot{v}_i &= F_i
\end{aligned} \tag{4}$$

για $i = 1, \dots, n$ όπου $v_i \in (0, v_{max})$ η ταχύτητα του οχήματος i στο σημείο (r_i, ϕ_i) , $v_{max} > 0$ η μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα, $s_i = \theta_i - \phi_i - \frac{\pi}{2}$ ο σχετικός προσανατολισμός δηλαδή η απόκλιση της αρχικής γωνίας από την εφαπτομένη του κύκλου με ακτίνα r_i και κέντρο $(0, 0)$.

Έστω ότι δίνεται $\omega^* \in \left(0, \frac{v_{max}}{R_{out}}\right)$ (το set point της γωνιακής ταχύτητας) και ορίζουμε το σύνολο

$$S := (R_{in}, R_{out})^n \times \mathbb{R}^n \times (-\Theta, \Theta)^n \times (0, v_{max})^n \tag{5}$$

όπου $\Theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι μια γνωστή γωνία (η μέγιστη απόκλιση της αρχικής γωνίας από την εφαπτομένη του δρόμου δακτυλίου) που ικανοποιεί

$$\cos(\Theta) > \frac{R_{out}}{v_{max}}. \tag{6}$$

Ορίζουμε την απόσταση μεταξύ των οχημάτων

$$d_{i,j} := \sqrt{p_{i,j}(r_i - r_j)^2 + 2r_i r_j (1 - \cos(\phi_i - \phi_j))} \quad \text{για } i, j = 1, \dots, n \tag{7}$$

όπου $p_{i,j} > 0$ είναι οι παράμετροι του βάρους και ικανοποιούν $p_{i,j} = p_{j,i}$ για όλα τα $i, j = 1, \dots, n$.

Παρατηρούμε ότι όταν $p_{i,j} = 1$ η μετρική απόσταση που ορίζεται από την (7) ταυτίζεται με την συνήθη ευκλείδεια μετρική απόσταση (δηλαδή η $d_{i,j}$ είναι ίση με την ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στα σημεία (r_i, ϕ_i) και (r_j, ϕ_j) σε πολικές συντεταγμένες).

Έστω

$$w = (r_1 \dots, r_n, \phi_1 \dots, \phi_n, s_1, \dots, s_n, v_1 \dots, v_n)' \in \mathbb{R}^{4n} \tag{8}$$

Εξαιτίας των ποικίλων περιορισμών που παρουσιάζονται παρακάτω, το σύνολο των καταστάσεων του μοντέλου (4) είναι

$$\Omega := \left\{ w \in S : d_{i,j} > L_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad j \neq i \right\} \tag{9}$$

όπου $L_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ είναι θετικές σταθερές και παριστάνουν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των οχημάτων i και j , με $L_{i,j} = L_{j,i}$ για $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$. Είναι εύλογο να δούμε ότι ο χώρος των καταστάσεων Ω δεν είναι γραμμικό υποσύνολο του \mathbb{R}^{4n} παρά μόνο ένα ανοιχτό σύνολο.

3.2 Διατύπωση του προβλήματος

Ο σχεδιασμός ελεγκτών πορείας για οχήματα που κινούνται σε δακτυλίους δρόμους χωρίς γραμμές και ικανοποιούν τις παρακάτω προϋποθέσεις:

Π₁) Καλά τοποθετημένες προϋποθέσεις:

Για κάθε $w(0) \in \Omega$ να υπάρχει μοναδική λύση $w(t) \in \Omega$ και ορίζεται για κάθε $t \geq 0$.

Σύμφωνα με την (9) αυτή η απαίτηση μας εξασφαλίζει ότι δεν θα υπάρχουν συγκρούσεις μεταξύ των οχημάτων (διότι $d_{i,j} > L_{i,j}$ για $t \geq 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $j \neq i$) όπως και ούτε με τα όρια του δρόμου (εφόσον $r_i(t) \in (R_{in}, R_{out})$ για $t \geq 0$). Οι ταχύτητες όλων των οχημάτων είναι πάντα θετικές και δεν υπερβαίνουν το όριο ταχύτητας (γιατί $v_i \in (0, v_{max})$ για κάθε $t \geq 0$) και ο προσανατολισμός κάθε οχήματος είναι πάντα φραγμένος $\Theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ (εφόσον $s_i(t) \in (-\Theta, \Theta)$).

Π₂) Ασυμπτωτικές προϋποθέσεις :

Ο σχετικός προσανατολισμός κάθε οχήματος ικανοποιεί $\lim_{t \rightarrow \infty} s_i(t) = 0$ για $i = 1, \dots, n$ και η γωνιακή ταχύτητα όλων των οχημάτων $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_i(t)}{r_i(t)} = \omega^*$, $i = 1, \dots, n$ για ένα γνωστό set point της γωνιακής ταχύτητας $\omega^* \in (0, \frac{v_{max}}{R_{out}})$.

Επιπλέον, οι επιταχύνσεις και ο ρυθμός μεταβολής των σχετικών προσανατολισμών τείνουν στο μηδέν, δηλαδή $\lim_{t \rightarrow \infty} F_i(t) = 0$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}_i(t) = 0$ για $i = 1, \dots, n$.

4 Κεφάλαιο

Κύρια αποτελέσματα

4.1 Εισαγωγικά

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε δύο οικογένειες ελεγκτών πορείας για οχήματα που κινούνται σε δρόμους δακτυλίους χωρίς γραμμές και ικανοποιούν τις ιδιότητες Π₁, Π₂. Έστω

$V_{i,j} : (L_{i,j}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $U_i : (R_{in}, R_{out}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $i, j = 1, \dots, n$ $i \neq j$, είναι C^2 συναρτήσεις και $\kappa_{i,j} : (L_{i,j}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ είναι C^1 συναρτήσεις και ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\lim_{d \rightarrow L_{i,j}^+} V_{i,j}(d) = +\infty, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad j \neq i \quad (10)$$

$$V_{i,j}(d) = 0 \quad \text{για κάθε } d \geq \lambda, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad j \neq i \quad (11)$$

$$V_{i,j}(d) \equiv V_{j,i}(d) \quad i, j = 1, \dots, n, \quad j \neq i \quad (12)$$

$$\lim_{r \rightarrow R_{in}^+} U_i(r) = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow R_{out}^-} U_i(r) = +\infty, \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

$$\kappa_{i,j}(d) = \kappa_{j,i}(d), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad j \neq i \quad (14)$$

$$\kappa_{i,j}(d) = 0 \quad \text{για κάθε } d \geq \lambda \quad i, j = 1, \dots, n, \quad j \neq i \quad (15)$$

όπου λ είναι μια θετική σταθερά που ικανοποιεί

$$\lambda > \max\{L_{i,j} \quad , i, j = 1, \dots, n, \quad j \neq i\}. \quad (16)$$

Οι συναρτήσεις $V_{i,j}$ και U_i είναι συναρτήσεις δυναμικού και χρησιμοποιούνται για να αποφευχθούν οι συγκρούσεις μεταξύ των οχημάτων και των ορίων του δρόμου. Πιο συγκεκριμένα οι $V_{i,j}$ συναρτήσεις δυναμικού έχουν σκοπό να κρατήσουν μια ασφαλή απόσταση από τα οχήματα γύρω τους δημιουργώντας ένα δυναμικό το οποίο αυξάνει στο άπειρο όταν προσεγγίζει κάποιο άλλο όχημα. Από την (12) συνθήκη συνεπάγεται ότι αν το i όχημα ασκήσει κάποια δύναμη στο j όχημα τότε το j όχημα ασκεί την αντίθετη δύναμη στο i όχημα. Οι συναρτήσεις U_i αυξάνουν στο άπειρο για να αποτρέψουν τα οχήματα από το να ξεφύγουν από τα όρια του αυτοκινητόδρομου, πιο αναλυτική περιγραφή υπάρχει στο [37].

Σημείωση: Σκοπός μιας συνάρτησης δυναμικού είναι η αποφυγή των συγκρούσεων μεταξύ των οχημάτων αλλά και από τα σύνορα του δρόμου όπως και επίσης η ανάγκη να παραμείνει στις καλά καθορισμένες γραμμές του δρόμου ή πιο συγκεκριμένα στο κέντρο των γραμμών με την κατάλληλη ταχύτητα. Στην παρούσα εργασία οι συναρτήσεις δυναμικού αποτελούν σημαντικό κομμάτι στη διαμόρφωση του συστήματος οδήγησης των αυτόνομων οχημάτων, ωστόσο υπάρχουν και άλλοι τρόποι επίτευξης των παραπάνω προϋποθέσεων όπως για παράδειγμα η χρήση του ενεργού βοηθού οδήγησης (active drive assistance).

Επιπλέον οι ιδιότητες (11), (15) επιτρέπουν τον σχεδιασμό αποκεντροποιημένων ελεγκτών, οι οποίοι χρησιμοποιούν πληροφορίες σε πραγματικό χρόνο (όπως οι σχετικές θέσεις, οι σχετικές ταχύτητες και οι σχετικοί προσανατολισμοί) μόνο από τα οχήματα που απέχουν απόσταση λιγότερη από $\lambda > 0$. Τελικά οι συναρτήσεις $\kappa_{i,j}$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες (14) και (15) θα χρησιμοποιηθούν στην εισαγωγή μιας εξόδου συμπεριφοράς των οχημάτων.

Οι συναρτήσεις $\kappa_{i,j}$ δεν είναι απαραίτητα συναρτήσεις δυναμικού διότι δεν έχουμε υποθέσει ότι ικανοποιούν την ιδιότητα του ορίου $\lim_{d \rightarrow L_{i,j}^+} \kappa_{i,j}(d) = +\infty$.

Προχωρώντας στην εργασία μας θα χρησιμοποιήσουμε μια μεθοδολογία των συναρτήσεων ελέγχου Lyapunov και τις παραπάνω συναρτήσεις δυναμικού για να δημιουργήσουμε οικογένειες ελεγκτών πορείας για αυτόνομα οχήματα σε δακτυλίους δρόμους χωρίς γραμμές. Η κατασκευή της συνάρτησης Lyapunov βασίζεται στα μεγέθη της ολικής ενέργειας του συστήματος. Επιπλέον ανάλογα με τον τρόπο που εκφράζεται η κινητική ενέργεια παίρνουμε δύο διαφορετικές οικογένειες ελεγκτών πορείας. Η κινητική ενέργεια μπορεί να εκφραστεί με τον τρόπο της Νευτώνειας μηχανικής, δηλαδή η κινητική

ενέργεια που σχετίζεται με την ευθύγραμμη κίνηση ενός οχήματος (άκαμπτο σώμα με σταθερή μάζα) και το κέντρο μάζας του κινείται σε ευθεία γραμμή με ταχύτητα v , ονομάζουμε τον αντίστοιχο ελεγκτή ως Νευτώνειο ελεγκτή πορείας.

Όταν η κινητική ενέργεια εκφράζεται μέσω της σχετικιστικής μηχανικής, δηλαδή τα οχήματα κινούνται με αρκετά μικρότερη ταχύτητα από εκείνη του φωτός τότε προσεγγίζεται από τους πρώτους τρεις όρους της σειράς *Taylor*, ο ελεγκτής ονομάζεται ψευδο-σχετικιστικός ελεγκτής πορείας.

Μια από τις βασικές διαφορές των δύο τρόπων έκφρασης της κινητικής ενέργειας είναι ότι στην πρώτη περίπτωση η κινητική ενέργεια αυξάνεται συνεχώς όσο αυξάνεται και η ταχύτητα του αντικειμένου αντίθετα στη σχετικιστική μηχανική η κινητική ενέργεια αυξάνει στο άπειρο όταν η ταχύτητα του αντικειμένου προσεγγίσει την ταχύτητα του φωτός (στη δική μας περίπτωση όταν προσεγγίσει τη μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα του δρόμου).

Τέλος, όταν $\kappa_{i,j}(d) \equiv 0$ για όλα τα $i, j = 1, \dots, n$ $i \neq j$ ο ελεγκτής ονομάζεται *μη ιξώδης* εφόσον το αντίστοιχο μακροσκοπικό μοντέλο δεν περιέχει ιξώδη συντελεστή, διαφορετικά ονομάζεται *ιξώδης* στο [18] είναι τα αντίστοιχα μακροσκοπικά μοντέλα.

4.2 Νευτώνειος Ελεγκτής Πορείας

Newtonian Cruise Controller (NCC)

Η συνάρτηση ελέγχου Lyapunov στην προκειμένη περίπτωση δίνεται από τον τύπο

$$H(w) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right)^2 + \frac{b}{2} \sum_{i=1}^n v_i^2 \sin^2(s_i) + \sum_{i=1}^n U_i(r_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j} V_{i,j}(d_{i,j}) + A \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\cos(s_i) - \cos(\Theta)} - \frac{1}{1 - \cos(\Theta)} \right) \quad (17)$$

όπου $A > 0$, $b > \frac{1}{R_{in}^2}$ είναι παράμετροι της συνάρτησης Lyapunov. Η συνάρτηση H βασίζεται στην ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος των n οχημάτων.

Αναλυτικότερα, οι δύο πρώτοι όροι $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right)^2 + \frac{b}{2} \sum_{i=1}^n v_i^2 \sin^2(s_i)$ σχετίζονται με την κινητική ενέργεια του συστήματος λόγω στροφορμής των n οχημάτων που σχετίζονται με έναν παρατηρητή κίνησης γύρω από τον δρόμο δακτύλιο με γωνιακή ταχύτητα ίση με ω^* (όπως στην κλασική μηχανική).

Το άθροισμα του τρίτου και του τέταρτου όρου $\sum_{i=1}^n U_i(r_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j} V_{i,j}(d_{i,j})$ σχετίζονται με τη δυναμική ενέργεια του συστήματος.

Καταλήγοντας, ο τελευταίος όρος $A \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\cos(s_i) - \cos(\Theta)} - \frac{1}{1 - \cos(\Theta)} \right)$ είναι ο όρος ποινής ο οποίος εκτινάσσεται όταν $s_i \rightarrow \pm\Theta$.

Το παρακάτω λήμμα μας εξηγεί πως η συνάρτηση ελέγχου Lyapunov H έχει κάποιες από τις ιδιότητες των size functions [30] ωστόσο δεν είναι (ολικά) μια size function.

Λήμμα 4.2.1. Έστω οι σταθερές $R_{out} > R_{in} > 0$, $A > 0$, $v_{max} > 0$, $\omega^* \in \left(0, \frac{v_{max}}{R_{out}}\right)$, $L_{i,j} > 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, $\lambda > 0$ και ικανοποιεί την (16), $\Theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και ικανοποιεί την (6), η συνάρτηση $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ από το (17) όπου το Ω δίνεται από (9). Τότε υπάρχουν σταθερές $\xi_i \in (R_{in}, R_{out})$, μη φθίνουσες συναρτήσεις $\eta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\xi_i, R_{out})$, $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \Theta)$, $i = 1, \dots, n$, μη αύξουσες συναρτήσεις $\zeta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow (R_{in}, \xi_i]$, $i = 1, \dots, n$ και για κάθε ζευγάρι $i, j = 1, \dots, n$ $i \neq j$ υπάρχουν μη αύξουσες συναρτήσεις $\rho_{i,j} : \mathbb{R}_+ \rightarrow (L_{i,j}, \lambda]$ με $\rho_{i,j}(s) \equiv \rho_{j,i}(s)$ τέτοια ώστε να ισχύουν οι παρακάτω συνέπειες :

$$\begin{aligned} w \in \Omega &\implies \zeta_i(H(w)) \leq r_i \leq \eta_i(H(w)), \\ &|s_i| \leq \omega(H(w)) \\ &d_{i,j} \geq \rho_{i,j}(H(w)) \\ &\text{για } i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{18}$$

Έστω $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1, 2$) μια γνωστή C^1 μη φθίνουσα συνάρτηση και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ μια C^1 συνάρτηση που ικανοποιεί

$$f(x) \geq \max(0, x), \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbb{R} \tag{19}$$

Εφόσον βασιζόμαστε στη συνάρτηση ελέγχου Lyapunov ο Νευτώνειος ελεγκτής πορείας για το σύστημα (4) δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις για κάθε $w \in \Omega$:

$$F_i = -k_i(w) \left(v_i - \frac{r_i \omega^*}{\cos(s_i)} \right) - \frac{r_i \omega^*}{\cos(s_i)} (\Phi_i(w) - G_i(w)), \quad \text{για } i = 1, \dots, n \tag{20}$$

$$\delta_i = \tan^{-1} \left(\frac{\sigma_i}{r_i \cos(s_i)} - \frac{\sigma_i}{v_i \alpha(r_i, s_i, v_i)} (\mu_2 \sin(s_i) + (b F_i \sin(s_i) + \Lambda_i(w)) v_i - M_i(w)) \right), \quad \text{για } i = 1, \dots, n \tag{21}$$

όπου

$$k_i(w) = \mu_1 + \Phi_i(w) - G_i(w) + f \left(- \frac{v_{max} \cos(s_i)}{v_{max} \cos(s_i) - r_i \omega^*} (\Phi_i(w) - G_i(w)) \right), \quad \text{για } i = 1, \dots, n \tag{22}$$

και $\mu_1, \mu_2 > 0$ είναι θετικές σταθερές.

Επιπλέον έχουμε

$$\alpha(r, s, v) := \left(b - \frac{1}{r^2} \right) v^2 \cos(s) + \omega^* \frac{v}{r} + \frac{A}{(\cos(s) - \cos(\Theta))^2} \tag{23}$$

$$\text{για } (r, s, v) \in (R_{in}, R_{out}) \times (-\Theta, \Theta) \times (0, v_{max})$$

$$\begin{aligned} \Lambda_i(w) &:= \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) \frac{v_i}{r_i^2} \cos(s_i) - U_i'(r_i) \\ &\quad - \sum_{j \neq i} \left(p_{i,j}(r_i - r_j) + r_j (1 - \cos(\phi_i - \phi_j)) \right) \frac{V_{i,j}'(d_{i,j})}{(d_{i,j})} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\Phi_i(w) := \frac{r_i}{\omega^*} \sum_{j \neq i} V'_{i,j}(d_{i,j}) \frac{r_j \sin(\phi_i - \phi_j)}{d_{i,j}} \quad (25)$$

$$G_i(w) := \frac{1}{\omega^*} \sum_{j \neq i} \kappa_{i,j}(d_{i,j}) \left(g_1 \left(\frac{v_j}{r_j} \cos(s_j) \right) - g_1 \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) \right) \right) \quad (26)$$

$$M_i(w) := \sum_{j \neq i} \kappa_{i,j}(d_{i,j}) (g_2(\sin(s_j)) - g_2(\sin(s_i))) \quad \text{για κάθε } w \in \Omega, \quad i = 1, \dots, n. \quad (27)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι όταν ο Νευτώνειος ελεγκτής πορείας είναι μη ιξώδης, δηλαδή είτε οι συναρτήσεις $\kappa_{i,j}$ θα είναι μηδενικές είτε οι συναρτήσεις g_k θα είναι σταθερές, τότε οι μόνες απαιτήσεις για τις μετρήσεις σε πραγματικό χρόνο κάθε οχήματος θα είναι η κατάσταση του και η απόστασή του από τα γειτονικά οχήματα (όχι οι ταχύτητές τους και οι προσανατολισμοί τους). Στην αντίθετη περίπτωση όπου ο Νευτώνειος ελεγκτής πορείας είναι ιξώδης, δηλαδή οι συναρτήσεις $\kappa_{i,j}$ δεν είναι μηδέν και οι συναρτήσεις g_k δεν είναι σταθερές, τότε οι απαιτήσεις για τις μετρήσεις σε πραγματικό χρόνο κάθε οχήματος καθορίζονται από την κατάσταση του αλλά και από τις καταστάσεις των διπλανών οχημάτων (συμπεριλαμβάνοντας την ταχύτητά τους και τους προσανατολισμούς τους).

Ο όρος $k_i(w)$ στην επιτάχυνση $F_i(t)$ δίνεται από την (20) και είναι χωροεξαρτούμενος από το κέρδος του ελεγκτή. Με αυτόν τον τρόπο μας εξασφαλίζει ότι η ταχύτητα των οχημάτων παραμένει θετική και εντός των ορίων ταχύτητας του δρόμου, μικρότερη δηλαδή από την v_{max} .

Τέλος παρατηρούμε ότι οι ιδιότητες (11), (15) εγγυώνται ότι οι νόμοι ανάδρασης (20) και (21) είναι αποκεντρωμένοι (για κάθε όχημα) και εξαρτώνται μόνο από τις σχετικές θέσεις των διπλανών οχημάτων για την μη ιξώδη περίπτωση ή από τις καταστάσεις των γειτονικών οχημάτων για την ιξώδη περίπτωση.

4.3 Ψευδο-σχετικιστικός Ελεγκτής Πορείας

Pseudo- Relativistic Cruise Controller (PRCC)

Η συνάρτηση ελέγχου Lyapunov σε αυτήν την περίπτωση δίνεται από τον τύπο:

$$H_R(w) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right)^2 + b v_i^2 \sin^2(s_i)}{(v_{max} - v_i) v_i} + \sum_{i=1}^n U_i(r_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=j}^n \sum_{j \neq i} V_{i,j}(d_{i,j}) + A \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\cos(s_i) - \cos(\Theta)} - \frac{1}{1 - \cos(\Theta)} \right) \quad (28)$$

όπου $A > 0$, $b > \frac{1}{R_{in}^2}$ είναι παράμετροι της συνάρτησης Lyapunov. Αντιλαμβανόμαστε ότι ο όρος

της κινητικής ενέργειας στη συνάρτηση H_R (δηλαδή ο $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right)^2 + b v_i^2 \sin^2(s_i)}{(v_{max} - v_i) v_i}$) είναι όμοιος

με εκείνον της κινητικής ενέργειας του συστήματος των n αντικειμένων στη σχετικιστική μηχανική, με την ταχύτητα να φράσσεται από το μηδέν και το v_{max} στη θέση του c και $-c$ (με το c να συμβολίζει την ταχύτητα του φωτός) που είναι τα όρια ταχύτητας στη σχετικιστική μηχανική.

Επιπροσθέτως παρατηρούμε ακόμα μια ομοιότητα, στην σχετικιστική μηχανική η κινητική ενέργεια αυξάνεται στο άπειρο όσο η ταχύτητα ενός αντικειμένου προσεγγίζει την ταχύτητα του φωτός (σε απόλυτη τιμή), το οποίο μας υποδεικνύει ότι κανένα αντικείμενο με μάζα δεν μπορεί να φτάσει την ταχύτητα του φωτός.

Ανάλογο φαινόμενο συναντάμε και στην περίπτωση του ψευδο-σχετικιστικού ελεγκτή πορείας, πιο αναλυτικά ο όρος της κινητικής ενέργειας αυξάνεται στο άπειρο όσο η ταχύτητα του οχήματος προσεγγίζει το μηδέν ή το όριο επιτρεπτής ταχύτητας του δρόμου, v_{max} , έτσι περιορίζεται η ταχύτητα του οχήματος στο διάστημα $(0, v_{max})$.

Όπως στην περίπτωση (17) το άθροισμα των όρων $\sum_{i=1}^n U_i(r_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=j}^n \sum_{j \neq i} V_{i,j}(d_{i,j})$ σχετίζεται με τη δυναμική ενέργεια του συστήματος, ενώ ο τελευταίος όρος της H_R (

$A \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\cos(s_i) - \cos(\Theta)} - \frac{1}{1 - \cos(\Theta)} \right)$) είναι ο όρος ποινήs ο οποίος εκτινάσσεται όταν $s_i \rightarrow \pm\Theta$.

Το επόμενο Λήμμα μας δείχνει ότι η συνάρτηση ελέγχου Lyapunov H_R είναι μια size function (βλέπε [29]) για τον χώρο των καταστάσεων Ω όπως ορίζεται στην (9).

Λήμμα 4.3.1. Έστω οι σταθερές

$A > 0$, $v_{max} > 0$, $\omega^* \in \left(0, \frac{v_{max}}{R_{out}}\right)$, $L_{i,j} > 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, $\lambda > 0$ που ικανοποιούν την (16), $\Theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ που ικανοποιεί την (7) και ορίζει την συνάρτηση $H_R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ όπως στην (28) και το Ω όπως δίνεται στην (9). Τότε υπάρχουν σταθερές

$\bar{v} \in (0, v_{max})$, $\xi \in (R_{in}, R_{out})$, $i = 1, \dots, n$, μη φθίνουσες συναρτήσεις

$\eta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\xi, R_{out})$, $i = 1, \dots, n$, $\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\bar{v}, v_{max})$, $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \Theta)$,

μη αύξουσες συναρτήσεις $\zeta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow (R_{in}, \xi]$, $i = 1, \dots, n$, $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \bar{v}]$ και για κάθε ζευγάρι

$i, j = 1, \dots, n$ με $j \neq i$ υπάρχουν μη αύξουσες συναρτήσεις $\rho_{i,j} : \mathbb{R}_+ \rightarrow (L_{i,j}, \lambda]$ με

$\rho_{i,j}(s) \equiv \rho_{j,i}(s)$ τέτοιες ώστε να ισχύουν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί :

$$w \in \Omega$$

$$\psi(H_R(w)) \leq v_i \leq \chi(H_R(w)), \quad |s_i| \leq \omega(H_R(w)), \quad (29)$$

$$\zeta_i(H_R(w)) \leq r_i \leq \eta_i(H_R(w)), \quad d_{i,j} \geq \rho_{i,j}(H_R(w))$$

$$\text{για } i, j = 1, \dots, n$$

Έστω $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1, 2$) γνωστές C^1 μη φθίνουσες συναρτήσεις και έστω ότι επίσης οι συναρτήσεις $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2$) είναι C^1 και ικανοποιούν :

$$f_j(0) = 0 \quad \text{και} \quad x f_j(x) > 0, \quad \text{για } x \neq 0, \quad j = 1, 2. \quad (30)$$

Ο ψευδο-σχετικιστικός ελεγκτής πορείας (PRCC) για το (4) με την αντίστοιχη συνάρτηση Lyapunov (28) δίνεται από τις παρακάτω συναρτήσεις για κάθε $w \in \Omega$:

$$F_i = -\frac{1}{q(r_i, s_i, v_i)} \left(f_1 \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) + \omega^* (\Phi_i(w) - G_i(w)) \right), \quad \text{για } i = 1, \dots, n \quad (31)$$

$$\delta_i = \tan^{-1} \left(\frac{\sigma_i}{r_i} \cos(s_i) - \frac{\sigma_i}{\gamma(r_i, s_i, v_i)} (f_2(\sin(s_i)) - (\zeta_i(s_i, v_i) F_i + Z_i(w)) v_i - M_i(w)) \right) \quad \text{για } i = 1, \dots, n \quad (32)$$

όπου Φ_i , G_i και M_i δίνονται από τους τύπους (25), (26), (27) αντίστοιχα, και

$$q(r, s, v) = \frac{v_{max} v \cos(s) - 2rv\omega^* + r\omega^* v_{max}}{2r(v_{max} - v)^2 v^2} \quad (33)$$

$$\gamma(r, s, v) = \frac{A}{(\cos(s) - \cos(\Theta))^2} + \frac{v \cos(s)}{v_{max} - v} \left(b - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\omega^*}{r(v_{max} - v)} \quad (34)$$

$$\zeta(s, v) = \frac{bv_{max} \sin(s)}{2(v_{max} - v)^2 v} \quad (35)$$

για $(r, s, v) \in (R_{in}, R_{out}) \times (-\Theta, \Theta) \times (0, v_{max})$, $b > \frac{1}{R_{in}^2}$ και

$$Z_i(w) := \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) \frac{\cos(s_i)}{(v_{max} - v_i) r_i^2} - U'_i(r_i) - \sum_{j \neq i} (p_{i,j}(r_i - r_j) + r_j(1 - \cos(\phi_i - \phi_j))) \frac{V'_{i,j}(d_{i,j})}{d_{i,j}} \quad (36)$$

για κάθε $w \in \Omega$. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο ισχυρισμός $b > \frac{1}{R_{in}^2}$ μας εξασφαλίζει ότι $\gamma(r, s, v) > 0$ για κάθε $(r, s, v) \in (R_{in}, R_{out}) \times (-\Theta, \Theta) \times (0, v_{max})$.

Οι ψευδο-σχετικιστικοί νόμοι ανάδρασης (31) και (32) προέρχονται από την χρήση της συνάρτησης ελέγχου Lyapunov (28) η οποία είναι και size function. Συγκρίνοντας τους δύο ελεγκτές πορείας, καταλαβαίνουμε ότι ο ψευδο-σχετικιστικός είναι πιο απλός από τον Νευτώνειο, διότι δεν χρησιμοποιείται χωροεξαρτώμενος ελεγκτής κέρδους για να περιοριστεί η ταχύτητα στο διάστημα $(0, v_{max})$ (εξαιτίας των ιδιοτήτων της H_R ως size function). Τελικά παρατηρούμε ότι οι ιδιότητες (11) και (15) μας εγγυώνται ότι οι νόμοι ανάδρασης (31) και (32) είναι αποκεντρωμένοι (για κάθε όχημα) και εξαρτώνται μόνο από τις καταστάσεις των διπλανών οχημάτων, πιο συγκεκριμένα τις καταστάσεις εκείνων που απέχουν απόσταση λιγότερη από $\lambda > 0$.

Σε αυτό το σημείο να υπενθυμίσουμε επίσης ότι όταν ο ψευδο-σχετικιστικός ελεγκτής πορείας είναι μη ιξώδης, είτε οι συναρτήσεις $\kappa_{i,j}$ είναι μηδέν είτε οι συναρτήσεις g_k είναι σταθερές, τότε λοιπόν, οι μόνες απαιτήσεις μέτρησης σε πραγματικό χρόνο που χρειαζόμαστε είναι η κατάσταση του οχήματος και οι θέσεις των διπλανών οχημάτων (όχι οι ταχύτητες και οι προσανατολισμοί τους).

4.4 Διατύπωση των Κύριων Αποτελεσμάτων

Τα επόμενα θεωρήματα μας εξασφαλίζουν ότι για το σύστημα κλειστού βρόχου (4) είτε με τον Νευτώνειο ελεγκτή πορείας (20), (21) είτε με τον ψευδο-σχετικιστικό ελεγκτή πορείας (31), (32), ικανοποιούνται οι ιδιότητες Π_1 και Π_2 .

Θεώρημα 4.1. Για κάθε $w_0 \in \Omega$ το πρόβλημα αρχικών τιμών (4) με (20), (21) και $w(0) = w_0$ έχει μια και μοναδική λύση $w(t)$, ορισμένη για όλα τα $t \geq 0$, που ικανοποιεί $w(t) \in \Omega$ για κάθε $t \geq 0$ όπως και επίσης

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_i(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_i(t)}{r_i(t)} = \omega^*, \quad \text{για } i = 1, \dots, n \quad (37)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F_i(t) = 0, \quad \text{για } i = 1, \dots, n. \quad (38)$$

Επιπροσθέτως, υπάρχει μια μη φθίνουσα συνάρτηση $P_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε :

$$|F_i(t)| + |\delta_i(t)| \leq P_1(H(w_0)), \quad \text{για } t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (39)$$

Θεώρημα 4.2. Για κάθε $w_0 \in \Omega$ το πρόβλημα αρχικών τιμών (4) με (31), (32) και $w(0) = w_0$ έχει μια και μοναδική λύση $w(t)$, ορισμένη για όλα τα $t \geq 0$, που ικανοποιεί $w(t) \in \Omega$ για κάθε $t \geq 0$ όπως και επίσης

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_i(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_i(t)}{r_i(t)} = \omega^*, \quad \text{για } i = 1, \dots, n \quad (40)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F_i(t) = 0, \quad \text{για } i = 1, \dots, n. \quad (41)$$

Επιπροσθέτως, υπάρχει μια μη φθίνουσα συνάρτηση $P_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε :

$$|F_i(t)| + |\delta_i(t)| \leq P_2(H(w_0)), \quad \text{για } t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (42)$$

Παρατηρήσεις:

1. Τα αποτελέσματα των Θεωρημάτων 4.1, 4.2 ισχύουν γενικά, δηλαδή για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $w_0 \in \Omega$.
2. Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων βασίζονται στο Λήμμα Barbalat το οποίο όμως μας εξασφαλίζει μόνο ασυμπτωτικό ρυθμό σύγκλισης. Επιπλέον, αν χρησιμοποιήσουμε την ιξώδη συμπεριφορά των ελεγκτών πορείας θα μπορούσαμε να αυξήσουμε τον ρυθμό σύγκλισης των ελεγκτικών συναρτήσεων Lyapunov. Θα εξετάσουμε αυτήν τη συμπεριφορά στο κεφάλαιο *Αριθμητικών Προσομοιώσεων*. Να σημειώσουμε ότι ο ρυθμός σύγκλισης και στις δύο περιπτώσεις (ιξώδη και μη) δεν είναι εκθετικός.
3. Αν επιλέξουμε η διαφορά των R_{in} και R_{out} να είναι αρκετά μικρή, τότε το πρόβλημα περιορίζεται στη μελέτη της κίνησης των οχημάτων σε κύκλο με συνήθη διαγράμμιση.

-
4. Τα Θεωρημάτων 4.1, 4.2 εξασφαλίζουν ότι η ιδιότητα Π_1 ισχύει, δηλαδή, ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες για κάθε $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
R_{in} &< \inf_{t \geq 0} (r_i(t)) \leq \sup_{t \geq 0} (r_i(t)) < R_{out} \\
0 &< \inf_{t \geq 0} (v_i(t)) \leq \sup_{t \geq 0} (v_i(t)) < v_{max} \\
-\Theta &< \inf_{t \geq 0} (s_i(t)) \leq \sup_{t \geq 0} (s_i(t)) < \Theta \\
\inf_{t \geq 0} (d_{i,j}(t)) &> L_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad j \neq i
\end{aligned} \tag{43}$$

5 Κεφάλαιο

Σύγκριση με την περίπτωση του ευθέος δρόμου

Αρχικά θα αναφερθούμε σε κάποιες λεπτομέρειες σχετικά με τους ελεγχτές πορείας στους ευθείς δρόμους όπως αναγράφονται στα [17], [18],[19].

Έχοντας πλέον εξετάσει και στον ευθύ αλλά και στον δακτύλιο δρόμο τους ελεγχτές πορείας μπορούμε ενδεχομένως να θεωρήσουμε ότι κάθε δρόμος είναι αναπαράσταση μιας κλειστής ή ανοικτής καμπύλης. Πράγματι, εφόσον μια απλή κλειστή ή ανοικτή καμπύλη είναι η εικόνα ενός κύκλου (ή γραμμής) μέσω ενός ομοιομορφισμού, είναι πάντα πιθανό να βρούμε κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων τέτοια ώστε :

- Να μετασχηματίσουμε κάθε δρόμο που σχηματίζει καμπύλη και δε δημιουργεί βρόχο με σταθερό πλάτος και άπειρο μήκος σε ευθύ δρόμο με σταθερό πλάτος.
- Να μετασχηματίσουμε κάθε δρόμο με σταθερό πλάτος που μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια κλειστή καμπύλη που δε δημιουργεί βρόχο σε δακτύλιο δρόμο με σταθερό πλάτος.

5.1 Διαφορές του δακτυλίου και του ευθέος δρόμου

Ας προσέξουμε το εξής, είναι απίθανο να βρούμε ομοιομορφισμό που μετασχηματίζει έναν ευθύ δρόμο σε έναν δρόμο δακτύλιο και για αυτόν τον λόγο οι ελεγχτές πορείας που παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία δεν μπορούν με κανένα τρόπο να είναι άμεσα αποτελέσματα των ελεγκτών πορείας με κάποια αλλαγή συντεταγμένων που παρουσιάζονται στα [17],[18],[19] για τους ευθείς δρόμους. Υπάρχουν κάποιες ακόμη διαφορές ανάμεσα στους ευθείς και δακτυλίους δρόμους που θα εξετάσουμε διεξοδικά παρακάτω.

Δ₁. Γεωμετρικά:

Ο ευθύς και δακτύλιος δρόμος είναι τοπολογικά διαφορετικοί. Ο ευθύς δρόμος με σταθερό πλάτος $2a > 0$ είναι μια ανοικτή καμπύλη που δε δημιουργεί βρόχο ορισμένη στο $\mathbb{R} \times (-a, a)$, ενώ ο δακτύλιος δρόμος είναι μια κλειστή καμπύλη (που δε δημιουργεί βρόχο) $\tilde{\gamma}$ ορισμένη στο $[0, (R_{in} + R_{out})\pi] \times (R_{in}, R_{out})$ με $\tilde{\gamma}(0, \cdot) = \tilde{\gamma}((R_{in} + R_{out})\pi, \cdot)$.

Μια άμεση συνέπεια της γεωμετρίας των δύο περιπτώσεων είναι ότι ο αριθμός των οχημάτων που διέπουν τον δακτύλιο δρόμο είναι πεπερασμένος και εξαρτάται από το πλάτος του $R_{out} - R_{in}$, το μήκος του $(R_{in} + R_{out})\pi$ όπως επίσης και το μήκος των οχημάτων $\sigma_i, \quad i = 1, \dots, n$.

Στην περίπτωση του ευθέος δρόμου αντιθέτως δεν υπάρχει κανένας περιορισμός ως προς τον αριθμό των οχημάτων που τον διέπουν.

Δ₂. Το set-point της ταχύτητας:

Για να πετύχουμε ασυμπτωτική σύγκλιση σε set-point της ταχύτητας της ιδιότητας Π_2 εργαζόμαστε διαφορετικά στις δύο περιπτώσεις εξαιτίας των κινήσεων των οχημάτων στον ευθύ και δακτύλιο δρόμο. Πιο αναλυτικά, για την περίπτωση του ευθείας δρόμου οι ελεγκτές πορείας που παρουσιάζονται στο [18] εξασφαλίζουν ότι η ταχύτητα συγκλίνει σε μια ταχύτητα set-point v^* , όπου $v^* \in (0, v_{max})$, δηλαδή $\lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = v^*$, ενώ στην περίπτωση του δακτυλίου δρόμου οι ελεγκτές (Νευτώνειος και ψευδο-σχετικιστικός) μας εγγυώνται ότι η γωνιακή ταχύτητα συγκλίνει στο set-point της γωνιακής ταχύτητας ω^* , όπου $\omega^* \in \left(0, \frac{v_{max}}{R_{out}}\right)$, δηλαδή $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)}\right) = \omega^*$. Ενώ και στις δύο περιπτώσεις η ταχύτητα παραμένει φραγμένη από το μηδέν και το μέγιστο όριο v_{max} , στον δακτύλιο δρόμο δεν μπορούμε να ρυθμίσουμε την ταχύτητα v_i αλλά την γωνιακή ταχύτητα $\frac{v_i}{r_i}$.

Δ₃. Όριο της γωνίας οδήγησης

Η είσοδος της γωνίας οδήγησης δ_i ικανοποιεί $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\delta_i(t) - \tan^{-1}\left(\frac{\sigma_i}{r_i(t)}\right)\right) = 0$ (θυμόμαστε στο σύστημα (4) και (38), (41)) στην περίπτωση του δακτυλίου δρόμου, αντίθετα με την περίπτωση της ευθείας όπου ισχύει $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_i(t) = 0$.

Πιο συγκεκριμένα για την περίπτωση της ευθείας ισχύει ότι $\delta_i \equiv 0$ δηλαδή τα οχήματα κινούνται παράλληλα στον δρόμο. Ωστόσο, για τα οχήματα που κινούνται σε δακτυλίους δρόμους η διανυσματική ταχύτητα και η κατεύθυνση αλλάζουν συνεχώς ακολουθώντας την κυκλική κίνηση.

Δ₄. Η απόσταση μεταξύ των οχημάτων:

Καθώς ένας ευθύς δρόμος είναι ορισμένος στο $\mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)$ η απόσταση των δύο οχημάτων είναι $d_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + p_{i,j}(y_i - y_j)^2}$, $i = 1, \dots, n$, $j \neq i$ δεν είναι φραγμένη, όπου $(x_i, y_i) \in \mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)$ είναι η οριζόντια και η κατακόρυφη θέση του οχήματος i αντίστοιχα. Ωστόσο, στην περίπτωση του δακτυλίου δρόμου η απόσταση ανάμεσα στα οχήματα $d_{i,j}$ όπως ορίζεται στην (7) είναι φραγμένη και εξαρτάται από την εξωτερική ακτίνα του δακτυλίου, δηλαδή $d_{i,j} \leq 2R_{out}$ για κάθε $i, j = 1, \dots, n$, $j \neq i$. Τελικά, μολονότι η επιλογή της σταθεράς λ στην (16) είναι εξίσου σημαντική και στις δύο περιπτώσεις, αφού ορίζει σε πραγματικό χρόνο τις απαραίτητες πληροφορίες γύρω από το κάθε όχημα [18] οι επιπτώσεις στον δακτύλιο δρόμο θα είναι πολύ μεγαλύτερες. Πιο συγκεκριμένα, αν επιλέξουμε μια υψηλή τιμή για το λ , είναι πιθανό να ληφθούν υπόψη πληροφορίες για όλα τα οχήματα που βρίσκονται στον δακτύλιο δρόμο. Παράλληλα αυτό μπορεί να αυξήσει τις απαραίτητες μετρήσεις για τους ελεγκτές, όπως επίσης υπάρχει το ενδεχόμενο να οδηγηθούμε σε ισχυρή σταθεροποίηση που θα επηρεάσει την πυκνότητα [16].

5.2 Ομοιότητες του δακτυλίου και του ευθέος δρόμου

Πέρα από τις παραπάνω διαφορές υπάρχουν επίσης και κάποιες ομοιότητες ανάμεσα στις περιπτώσεις που μελετάμε, όπως φαίνονται αναλυτικά παρακάτω.

O_1 . Σημεία Ισορροπίας:

Θεωρούμε το σύστημα (4) και κάνουμε μια αλλαγή στις συντεταγμένες ως εξής

$\tilde{\phi}_i = \phi_i - \omega^* t$, $t \geq 0$ όπου το ϕ_i είναι μια γωνιακή συντεταγμένη.

Στο σύστημα (4) με τον Νευτώνειος ελεγκτή πορείας όσο και με τον ψευδο-σχετικιστικό ελεγκτή πορείας αν κάνουμε την παραπάνω αλλαγή συντεταγμένων το σύστημα κλειστού βρόχου και οι ελεγκτές πορείας παραμένουν ως έχουν με μια απλή αντικατάσταση του ϕ με $\tilde{\phi}$ (θυμόμαστε ότι $\phi_i - \phi_j = \tilde{\phi}_i - \tilde{\phi}_j$) και αντίστοιχα στις διαφορικές εξισώσεις αντικαθιστούμε το $\dot{\phi}_i = \frac{v_i}{r_i} \cos(s_i)$ με το $\dot{\tilde{\phi}}_i = \frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^*$ για $i = 1, \dots, n$. Το σύστημα κλειστού βρόχου δίνεται από τις ακόλουθες εξισώσεις για $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= -v_i \sin(s_i) \\ \dot{\phi}_i &= \frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \\ \dot{s}_i &= \frac{v_i}{r_i} \tan(\delta_i) - \frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) \\ \dot{v}_i &= F_i \end{aligned} \tag{44}$$

με τον Νευτώνειος ή ψευδο-σχετικιστικό ελεγκτή πορείας. Η κατάσταση w όπως δίνεται

$w = (r_1, \dots, r_n, \phi_1, \dots, \phi_n, s_1, \dots, s_n, v_1, \dots, v_n)' \in \mathbb{R}^{4n}$ και ο χώρος των καταστάσεων Ω ,

$\Omega = \{w \in S : d_{i,j} > L_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad j \neq i\}$.

Ορίζουμε το παρακάτω σύνολο

$$E = \left\{ \begin{array}{l} v_i - \omega^* r_i = s_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \\ w \in \Omega : U_i'(r_i) + \sum_{j \neq i} (p_{i,j}(r_i - r_j) + r_j(1 - \cos(\phi_i - \phi_j))d_{i,j}^{-1}V_{i,j}'(d_{i,j}) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n \\ \sum_{j \neq i} d_{i,j}^{-1}V_{i,j}'(d_{i,j})r_j \sin(\phi_i - \phi_j) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n \end{array} \right\} \tag{45}$$

Το σύνολο E όπως ορίσαμε είναι ένα σύνολο που αποτελείται από σημεία ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου με τους ελεγκτές πορείας που έχουμε συζητήσει για τον δακτύλιο δρόμο. Το σύνολο E δεν είναι φραγμένο ούτε συνεκτικό σε καμία από τις δύο περιπτώσεις, αυτό συμβαίνει διότι οι συναρτήσεις ϕ_i δεν είναι φραγμένες.

Παρατηρούμε ότι τα *Θεωρήματα 4.1, 4.2* μας αποδεικνύουν ότι κάθε λύση από τα δύο συστήματα κλειστού βρόχου τείνουν στο σύνολο E όταν $t \rightarrow \infty$ (δηλαδή το σύνολο E είναι ολικά ελκτικό). Παρ' όλα αυτά τα *Θεωρήματα 4.1, 4.2* δεν μπορούν να μας εγγυηθούν ότι η κάθε λύση τείνει σε ένα και μοναδικό σημείο ισορροπίας. Για αυτόν τον λόγο δεν μπορούμε να βεβαιωθούμε για το αν θα υπάρξει ολική διάταξη των οχημάτων στον δακτύλιο δρόμο. Η κατάσταση που περιγράψαμε είναι απολύτως όμοια με εκείνη στην περίπτωση του ευθέος δρόμου [18], [19].

Είναι απαραίτητες οι έννοιες της σταθερότητας σε ένα πιο προχωρημένο επίπεδο (για παράδειγμα η σταθερότητα σεβόμενη τα δύο μεγέθη [33], [17]) ώστε να μπορέσουμε να μελετήσουμε την ποιοτική συμπεριφορά των λύσεων στις δύο αυτές περιπτώσεις των συστημάτων κλειστού βρόχου.

O_2 . Ασυμπτωτική Σύγκλιση:

Οι ελεγχτές πορείας, Νευτώνειος και ψευδο-σχετικιστικός (ιξώδης και μη), για την περίπτωση του δακτυλίου και στον ευθύ δρόμο με τους αντίστοιχους ελεγχτές πορείας, μας εξασφαλίζουν μόνο ασυμπτωτική σύγκλιση και όχι εκθετική. Ο ισχυρισμός αυτός αληθεύει διότι οι αποδείξεις των *Θεωρημάτων 4.1, 4.2* βασίζονται στο λήμμα Barbalat το οποίο και εξασφαλίζει μόνο την ασυμπτωτική σύγκλιση της λύσης στο σύνολο E .

Παράλληλα, το σύνολο των σημείων ισορροπίας δεν είναι φραγμένο σύνολο (και συνεπώς ούτε συμπαγές, λόγω του θεωρήματος Heine-Borel μια επέκταση του θεωρήματος Bolzano-Weierstrass για τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n) και υπάρχει πιθανότητα να μην παρουσιάζει τις ιδιότητες της ομοιόμορφης έλξης [5].

O_3 . Χώρος των Καταστάσεων:

Ο χώρος των καταστάσεων Ω είναι ένα ανοιχτό σύνολο το οποίο μπορεί και να μην εμφανίζει διφεομορφισμό στον \mathbb{R}^{4n} , και στις δύο περιπτώσεις ορίζεται από τον τύπο

$$\Omega := \left\{ w \in S \quad : \quad d_{i,j} > L_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad j \neq i \right\}.$$

6 Κεφάλαιο

Αριθμητικές Προσομοιώσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο παρακολουθούμε κάποιες αριθμητικές προσομοιώσεις σχετικά με τους ελεγχτές πορείας που έχουμε δημιουργήσει και την εξέλιξη των εκάστοτε δεδομένων κατά το πέρασμα του χρόνου. Πιο αναλυτικά στα παρακάτω αποτελέσματα προσομοιώσεων εφαρμόζουμε τους προτεινόμενους ελεγχτές πορείας (Νευτώνειο και ψευδο-σχετικιστικό) και για τις δύο περιπτώσεις ιξώδη και μη.

Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε μια ομάδα οχημάτων με πλήθος $n = 10$ σε δακτύλιο δρόμο χωρίς διαγράμμιση με μικρή ακτίνα $R_{in} = 20$ και μεγάλη $R_{out} = 60$.

Θα συμβολίσουμε τις συναρτήσεις δυναμικού για την αποφυγή σύγκρουσης των οχημάτων ως $V_{i,j}$ και τις συναρτήσεις δυναμικού που απωθούν το όχημα από τα σύνορα του δρόμου ως U_i και για τις δύο περιπτώσεις των ελεγκτών πορείας, παρακάτω ορίζονται οι συναρτήσεις δυναμικού ως :

$$V_{i,j} = \begin{cases} q_1 \frac{(\lambda-d)^3}{d-L_{i,j}} & , \quad L_{i,j} < d \leq \lambda, \quad i, j = 1, \dots, n \\ 0 & , \quad d > \lambda, \quad i, j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (46)$$

$$U_i = \begin{cases} 0 & , \quad |r - R_m| \leq c, \quad i, j = 1, \dots, n \\ \frac{(r-R_m-c)^3(r-R_m+c)^3}{r-R_{in})(R_{out}-r)} & , \quad |r - R_m| > c, \quad i, j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (47)$$

όπου $0 < c < \frac{R_{out}-R_{in}}{2}$, $q_1 > 0$ είναι οι κατασκευαστικές παράμετροι, $R_m = \frac{R_{out}+R_{in}}{2}$ και $L_{i,j} = L$, $p_{i,j} = p$ $i, j = 1, \dots, n, j \neq i$.

Παρατηρούμε ότι $V_{i,j}$ και U_i στην (46) και (47) αντίστοιχα ικανοποιούν τις ιδιότητες (10), (11),(12), (13) και (14). Για μικρές τιμές του q_1 , οι τιμές των $V_{i,j}$ (και συνεπώς οι επιταχύνσεις F_i) θα είναι πιο μικρές όσο απομακρύνονται από το L αλλά αυξάνονται απότομα όταν το d προσεγγίζει το L .

Με την προσαρμογή της τιμής του c μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν δακτύλιο

$A = \{r \in (R_{in}, R_{out}) : R_m - c \leq r \leq R_m + c\}$ στον δρόμο δακτύλιο που ικανοποιούνται

$U_i(r) = 0$, $r \in A$ το οποίο μπορεί να επηρεάσει την τελική διαμόρφωση των οχημάτων σχετικά με τα όρια R_{in}, R_{out} του δρόμου.

Για τον Νευτώνειο ελεγκτή πορείας αλλά και για τον ψευδο-σχετικιστικό ελεγκτή πορείας θεωρούμε ότι το ιξώδες δίνεται από

$$g_1(x) = g_2(x) = x$$

$$\kappa_{i,j}(d) = \begin{cases} q_2(\lambda - d)^2 & , \quad L < d \leq \lambda, \quad \text{για } i, j = 1, \dots, n \\ 0 & , \quad d > L \end{cases} \quad (48)$$

όπου $q_2 \geq 0$ είναι μια κατασκευαστική παράμετρος η οποία μπορεί να επιλεγθεί έτσι ώστε να επιτευχθεί αύξηση ή μείωση της επίδρασης του ιξώδες. Παρατηρούμε ότι αν $q_2 \equiv 0$ τότε καταλήγουμε στους μη ιξώδεις ελεγκτές πορείας. Επιπλέον επιλέγουμε ως Νευτώνειο ελεγκτή πορείας

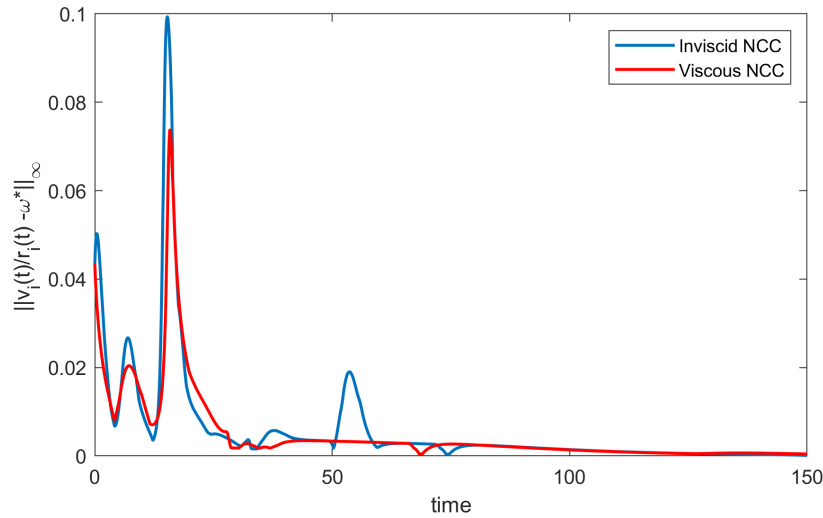
$$f(x) = \frac{1}{2\epsilon} = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -\epsilon \\ (x + \epsilon)^2 & , \quad -\epsilon < x < 0 \\ \epsilon^2 + 2\epsilon x & , \quad x \geq 0 \end{cases} \quad (49)$$

ο οποίος ικανοποιεί την (19), όπου $\epsilon > 0$ είναι κατασκευαστική παράμετρος. Τέλος για τον ψευδο-σχετικιστικό ελεγκτή πορείας επιλέγουμε $f_1(x) = \mu_1 x$ και $f_2(x) = \mu_2 x$, $x \in \mathbb{R}$ όπου $\mu_1, \mu_2 > 0$.

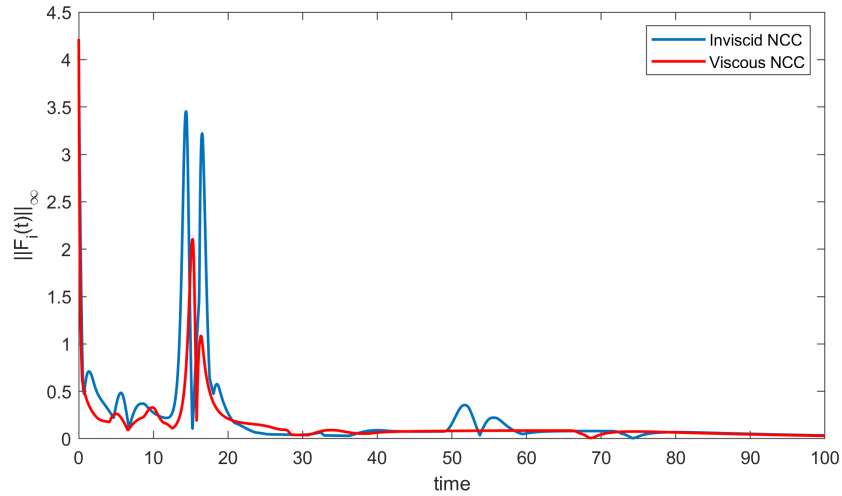
Για να επιβεβαιώσουμε αριθμητικά και να απεικονίσουμε τα αποτελέσματα των *Θεωρημάτων 4.1, 4.2* υποθέτουμε ότι όλα τα οχήματα έχουν μήκος $\sigma = 5$ και ορίζουμε το set-point της γωνιακής ταχύτητας $\omega^* = 0.15$, μέγιστη ταχύτητα του δρόμου $v_{max} = 10$ και επιλέγουμε το $\Theta = 0.17$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη (6) (θυμίζουμε ότι $R_{out} = 60$).

Ορίζουμε τις τελικές παραμέτρους ως $\epsilon = 0.2$, $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 10^2$, $p_{i,j} = 5.11$ για κάθε $i, j = 1, \dots, n$, $q_1 = 3 \times 10^{-3}$, $\lambda = 20$, $A = 0.5$, $b = 1$, $c = 10$, $q_2 = 0.1$ (για την ιξώδη περίπτωση) και $L = 6$.

Στο Σχήμα 1 φαίνεται η σύγκλιση του όρου $\frac{v_i(t)}{r_i(t)}$ στο ω^* για τις δύο περιπτώσεις ιξώδη και μη για τον Νευτώνειο ελεγκτή πορείας. Είναι φανερό ότι όταν προσθέτουμε το ιξώδες στο σύστημα έχουμε πιο ομαλή σύγκλιση στο ω^* . Αυτό απεικονίζεται επίσης και στο Σχήμα 2 παρακάτω, το οποίο δείχνει την εξέλιξη των επιταχύνσεων $\|F_i(t)\|_\infty$.

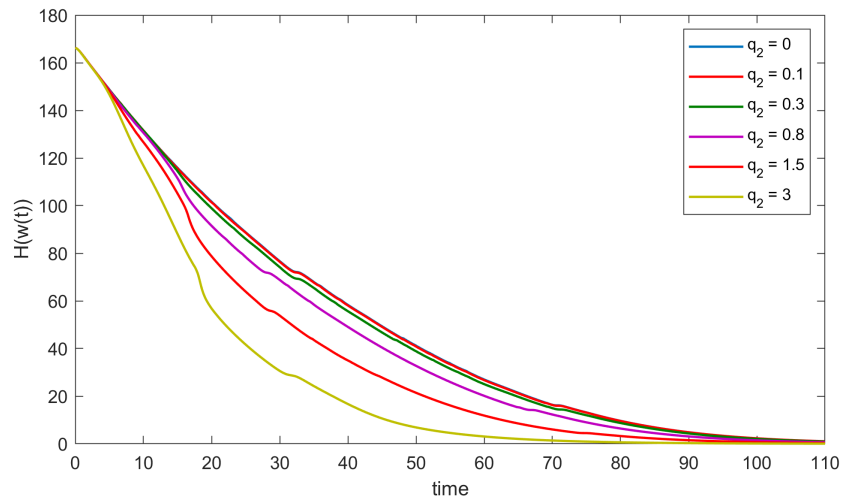


Σχήμα 1: Η εξέλιξη και η σύγκλιση του $\left\| \frac{v_i(t)}{r_i(t)} - \omega^* \right\|_\infty$ για τον ιξώδη και μη ιξώδη Νευτώνειο ελεγκτή πορείας.

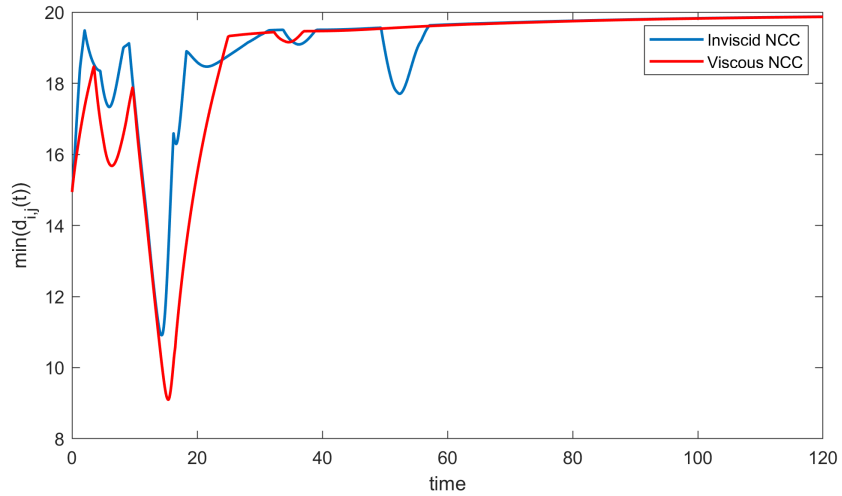


Σχήμα 2: Η εξέλιξη και η σύγκλιση του $\|F_i(t)\|_\infty$ για τον ιξώδη και μη ιξώδη Νευτώνειο ελεγχτή πορείας.

Στο Σχήμα 3 αποτυπώνεται η σύγκλιση της συνάρτησης ελέγχου Lyapunov $H(w(t))$ για διαφορετικές τιμές του q_2 . Παράλληλα στο Σχήμα 4 αναπαριστάται η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα στα οχήματα, επιβεβαιώνοντας ότι δεν υπάρχουν συγκρούσεις μεταξύ τους.



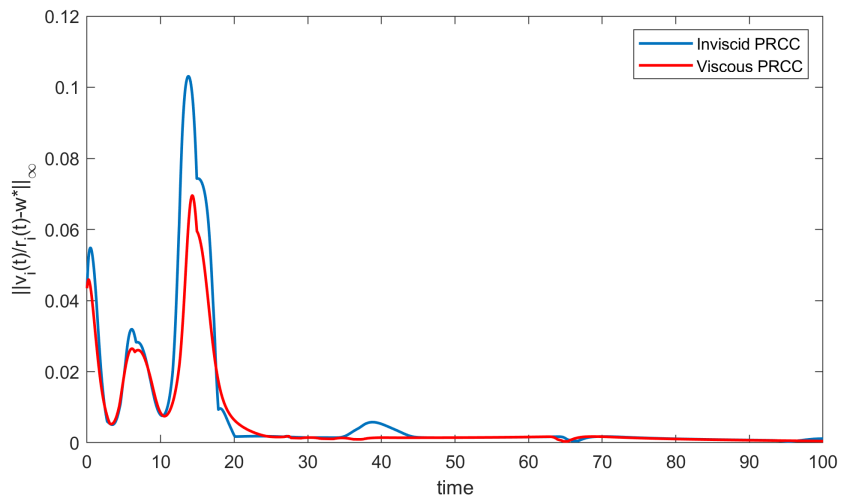
Σχήμα 3: Η εξέλιξη της συνάρτησης ελέγχου Lyapunov $H(w(t))$ για διάφορες τιμές της μεταβλητής q_2 .



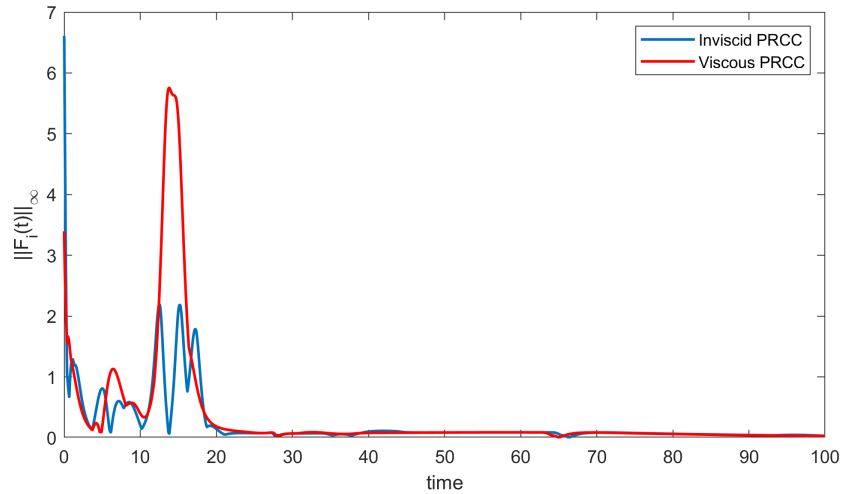
Σχήμα 4: Η ελάχιστη εσωτερική απόσταση των οχημάτων για τον ιξώδη και μη ιξώδη Νευτώνειο ελεγκτή πορείας.

Για τον ψευδο-σχετικιστικό ελεγκτή πορείας, επιλέγουμε $q_1 = 3 \times 10^{-5}$ και $q_2 = 0.1$ στην περίπτωση του ιξώδους. Στο Σχήμα 5 απεικονίζεται η εξέλιξη και η σύγκλιση του όρου $\left\| \frac{v_i(t)}{r_i(t)} - \omega^* \right\|_{\infty}$ για τον ιξώδη και μη ιξώδη ψευδο-σχετικιστικό ελεγκτή πορείας.

Στο Σχήμα 6 φαίνεται η εξέλιξη των επιταχύνσεων $\|F_i(t)\|_{\infty}$ για τον ιξώδη και μη ιξώδη ψευδο-σχετικιστικό ελεγκτή πορείας.



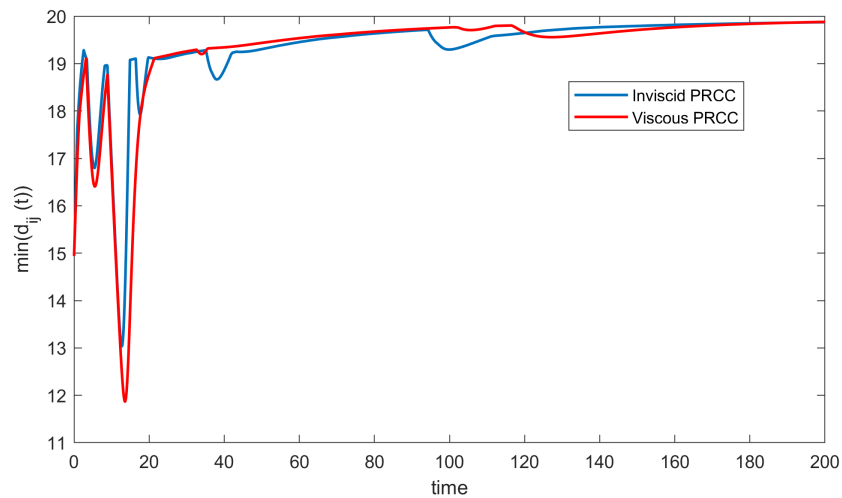
Σχήμα 5: Η εξέλιξη και η σύγκλιση του $\left\| \frac{v_i(t)}{r_i(t)} - \omega^* \right\|_{\infty}$ για τον ιξώδη και μη ιξώδη ψευδο-σχετικιστικό ελεγκτή πορείας.



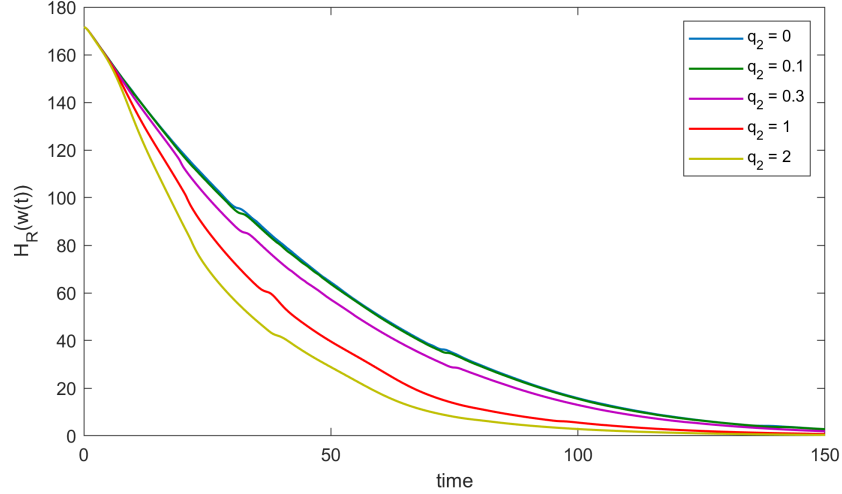
Σχήμα 6: Η εξέλιξη και η σύγκλιση του $\|F_i(t)\|_\infty$ για τον ιξώδη και μη ιξώδη ψευδο-σχετικιστικό ελεγκτή πορείας.

Στο Σχήμα 7 απεικονίζεται η ελάχιστη εσωτερική απόσταση των οχημάτων όπου επιβεβαιώνεται και η αποφυγή συγκρούσεων μεταξύ τους.

Τέλος στο Σχήμα 8 βλέπουμε τη σύγκλιση της συνάρτησης ελέγχου Lyapunov για τον ψευδο-σχετικιστικό ελεγκτή πορείας.



Σχήμα 7: Η ελάχιστη εσωτερική απόσταση των οχημάτων για τον ιξώδη και μη ιξώδη ψευδο-σχετικιστικό ελεγκτή πορείας.



Σχήμα 8: Η εξέλιξη της συνάρτησης ελέγχου Lyapunov $H_R(w(t))$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου q_2 .

7 Κεφάλαιο

Αποδείξεις

Για την απόδειξη του Λήμματος 4.2.1 θα χρειαστούμε μια ακόμα πρόταση και ένα λήμμα.

Ακολουθώντας το [18], τα δεδομένα που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω συμφωνούν με την περίπτωση του ευθέος δρόμου, για αυτό υπενθυμίζουμε τα εξής:

- $d_{i,j} := \sqrt{(x_i - x_j)^2 + p(y_i - y_j)^2}$ για $i, j = 1, \dots, n$ η ελλειπτική απόσταση των οχημάτων, όπου x_i, y_i το γεωγραφικό μήκος και πλευρική θέση του i οχήματος με $x_i \in \mathbb{R}$ και $y_i \in (-\alpha, \alpha)$.
- Η ταχύτητα $v_i \in (0, v_{max})$, v^* το set-point της ταχύτητας

Πρόταση 7.1. Έστω ότι θεωρούμε τις σταθερές

$A > 0$, $v_{max} > 0$, $v^* \in (0, v_{max})$, $\lambda > L > 0$, $\phi_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και ικανοποιούν $\cos(\phi_1) \geq \frac{v^*}{v_{max}}$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $H_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$H_1(w) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (v_i \cos(\theta_i) - v^*)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i^2 \sin^2(\theta_i) + \sum_{i=1}^n U(y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n V(d_{i,j}) + A \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\cos(\theta_i) - \cos(\phi_1)} - \frac{1}{1 - \cos(\phi_1)} \right)$$

και το Ω

$$\Omega := \{w \in S : d_{i,j} > L, i, j = 1, \dots, n, j \neq i\}.$$

Τότε υπάρχουν μη φθίνουσες συναρτήσεις $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \phi_1)$, $\kappa : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \alpha)$, μια μη αύξουσα συνάρτηση $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow (L, \lambda]$ για τις οποίες ισχύει

$$w \in \Omega_1 \implies |s_i| \leq \omega(H_1(w)), |y_i| \leq \kappa(H_1(w)), d_{1i,j} \geq \rho(H_1(w)), \quad \text{για κάθε } i, j = 1, \dots, n, j \neq i$$

Η απόδειξη της πρότασης περιγράφεται αναλυτικά στο [18].

Λήμμα 7.0.1. Έστω $c > 0$ μια σταθερά και $\beta : [0, c) \rightarrow \mathbb{R}_+$ μια μη φθίνουσα συνάρτηση με $\beta(0) = 0$ και $\lim_{s \rightarrow c^-} (\beta(s)) = +\infty$. Τότε υπάρχει μια σταθερά $s^* \in [0, c)$ και μια συνεχής μη φθίνουσα συνάρτηση $\bar{\beta} : [0, c) \rightarrow \mathbb{R}_+$ και ισχύουν τα παρακάτω :

- $\lim_{s \rightarrow c^-} (\bar{\beta}(s)) = +\infty, \quad \bar{\beta}(s^*) = 0$
- $\bar{\beta}(s) \leq \beta(s)$ για κάθε $s \geq 0$
- $\bar{\beta}$ αυξάνει στο $[s^*, c)$.

7.1 Απόδειξη Λήμματος 4.2.1

Απόδειξη. Για κάθε $i = 1, \dots, n$ έστω ότι $\xi_i \in \arg \min_{r \in (R_{in}, R_{out})} \{U_i(r)\}$, $u_i = U_i(\xi_i)$ και ορίζουμε

$$\alpha_i(s) := \min\{U_i(r) - u_i, \quad r \in (R_{in}, s]\}, \quad s \in (R_{in}, \xi_i] \quad (50)$$

$$\beta_i := \min\{U_i(r) - u_i, \quad r \in [\xi_i + s, R_{out}]\}, \quad s \in [0, R_{out} - \xi_i]. \quad (51)$$

Η οικογένεια των συναρτήσεων $\alpha_i, \quad i = 1, \dots, n$ είναι μη αύξουσες συναρτήσεις με $\alpha_i(\xi_i) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow R_{in}^+} \alpha_i(s) = +\infty$ και οι συναρτήσεις $\beta_i, \quad i = 1, \dots, n$ είναι μη φθίνουσες συναρτήσεις με $\beta_i(0) = 0$ και $\lim_{s \rightarrow (R_{out} - \xi_i)^-} \beta_i(s) = +\infty$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι για κάθε $i = 1, \dots, n$ υπάρχουν σταθερές $c_i^* \in (R_{in}, \xi_i]$ και φθίνουσες συναρτήσεις $\zeta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow (R_{in}, c_i^*]$ που ικανοποιούν $\zeta_i(H(w)) \leq r_i$ την σχέση (18)

$$\begin{aligned} w \in \Omega \implies \zeta_i(H(w)) \leq r_i \leq \eta_i(H(w)), \\ |s_i| \leq \omega(H(w)) \\ d_{i,j} \geq \rho_{i,j}(H(w)) \\ \text{για } i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Έστω $\bar{\alpha}_i(s) := \exp(R_{in} - s)\alpha_i(s), \quad s \in (R_{in}, \xi_i]$, για το οποίο ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow R_{in}} \bar{\alpha}_i(s) &= \lim_{s \rightarrow R_{in}} \exp(R_{in} - s)\alpha_i(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow R_{in}} \alpha_i(s) = +\infty \quad \text{όπως μας δίνεται από την υπόθεση, άρα} \\ \lim_{s \rightarrow R_{in}} \bar{\alpha}_i(s) &= +\infty \end{aligned} \quad (52)$$

και

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_i(\xi_i) &= \exp(R_{in} - \xi_i)\alpha_i(\xi_i) = \exp(R_{in} - \xi_i) \cdot 0 = 0 \\ \bar{\alpha}_i(\xi_i) &= 0\end{aligned}\tag{53}$$

όπως και επίσης $\bar{\alpha}_i(s) \leq \alpha_i(s)$ για κάθε $s \in (R_{in}, \xi_i]$ $i = 1, \dots, n$ διότι η

$$\bar{\alpha}_i(s) := \exp(R_{in} - s)\alpha_i(s) \quad \text{για τα } s > R_{in} \quad \text{γράφεται} \quad \bar{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\exp(s - R_{in})} \quad \text{όπου η} \quad \frac{1}{\exp(s - R_{in})}$$

φθίνει, άρα ισχύει ο παραπάνω ισχυρισμός.

Έστω επίσης $c_i^* = \inf \left\{ \arg \min_{r \in (R_{in}, \xi_i]} \{\bar{\alpha}_i(r)\} \right\}$ το οποίο ικανοποιεί $R_{in} < c_i^* \leq \xi_i$ εφόσον

$$\lim_{s \rightarrow R_{in}} \bar{\alpha}_i(s) = +\infty.$$

Επιπλέον $\bar{\alpha}_i(s)$ είναι φθίνουσες συναρτήσεις στο $(R_{in}, c_1^*]$.

Θεωρούμε τις αντίστροφες συναρτήσεις $\zeta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow (R_{in}, c_i^*]$, $i = 1, \dots, n$ του $\bar{\alpha}_i$ περιορισμένες στο $(R_{in}, c_1^*]$.

Από τον ορισμό του Νευτώνειου ελεγκτή πορείας (17) συνεπάγεται ότι $U_i(r_i) \leq H(w)$ για κάθε $w \in \Omega$ και $i = 1, \dots, n$ (προφανώς αφού το $H(w)$ αποτελείται από το άθροισμα $U_i(r_i)$ για $i = 1, \dots, n$ και είναι θετικά ορισμένες σειρές), έπεται από τον ορισμό (50) για το α_i και την σχέση του με το $\bar{\alpha}_i$ ότι

$$\bar{\alpha}_i(r_i) \leq \alpha_i(r_i) \leq H(w) \quad \text{για κάθε } r_i \in (R_{in}, \xi_i) \quad i = 1, \dots, n.$$

Λαμβάνοντας υπό όψη μας ότι οι συναρτήσεις ζ_i είναι φθίνουσες στο $(R_{in}, c_1^*]$, από την προηγούμενη ανίσωση έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\zeta_i(\alpha_i(r_i)) &\geq \zeta_i(H(w)) > R_{in} \implies \\ r_i &\geq \zeta_i(H(w)) > R_{in}.\end{aligned}$$

Τελικά θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μια μη φθίνουσα συνάρτηση η_i τέτοια ώστε

$$r_i \leq \eta_i(H(w))$$

για να ισχύει η ανίσωση (18) του Λήμματος. Από το Λήμμα 7.0.1 παίρνουμε ότι υπάρχουν σταθερές $s_i^* \in [0, R_{out} - \xi_i)$ και συνεχείς, μη φθίνουσες συναρτήσεις $\bar{\beta}_i : [0, R_{out} - \xi_i) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, n$ με $\lim_{s \rightarrow R_{out} - \xi_i} \bar{\beta}_i(s) = +\infty$, $\bar{\beta}_i(s_i^*) = 0$ $\bar{\beta}_i(s) \leq \beta_i(s)$ για κάθε $s \geq 0$ και $\bar{\beta}_i$ είναι αύξουσα στο $[s_i^*, R_{out} - \xi_i)$.

Θεωρούμε επίσης τις αντίστροφες συναρτήσεις $\eta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow [s_i^* + \xi_i, R_{out})$, $i = 1, \dots, n$ των $\bar{\beta}_i(s - \xi_i)$ περιορισμένες στο $[s_i^* + \xi_i, R_{out})$ είναι συνεχείς και αύξουσες, εφόσον οι $\bar{\beta}_i(s - \xi_i)$ είναι συνεχείς και αύξουσες.

Παρατηρούμε από τον ορισμό του Νευτώνειου ελεγκτή πορείας ότι ομοίως με παραπάνω $U_i(r_i) \leq H(w)$ για κάθε $w \in \Omega$ και $i = 1, \dots, n$.

Η ανισότητα αυτή και οι ορισμοί των β_i και η_i μας εξασφαλίζουν τα εξής:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_i(r_i) \leq \beta_i(r_i) \leq U_i(r_i) \leq H(w) \quad \text{για κάθε } r_i \in [s_i^* + \xi_i, R_{out}) &\implies \\ \eta_i(\bar{\beta}_i(r_i)) \leq \eta_i(H(w)) \leq R_{out} \quad \text{για κάθε } r_i \in [s_i^* + \xi_i, R_{out}) &\implies \\ r_i \leq \eta_i(H(w)) < R_{out}. \end{aligned}$$

Τέλος η ύπαρξη των w και ρ_i αποτελεί συνέπεια της Πρότασης 7.1 όπως αναγράφεται εφόσον πληρούνται όλες του οι προϋποθέσεις. □

7.2 Απόδειξη Λήμματος 4.3.1

Απόδειξη. Η ύπαρξη των συναρτήσεων $\eta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\xi_i, R_{out})$, $\zeta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow (R_{in}, \xi_i]$, $\xi_i \in (R_{in}, R_{out})$, $\rho_{i,j} : \mathbb{R}_+ \rightarrow (L_{i,j}, \lambda]$, $i, j = 1, \dots, n$ $j \neq i$ και $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \Theta)$ για τα οποία οι ανισότητες (29) του Λήμματος 4.3.1 να ισχύουν, είναι μια άμεση συνέπεια του Λήμματος 4.2.1 όπου χρησιμοποιείται ο ψευδο-σχετικιστικός ελεγκτής $H_R(w)$ στη θέση του Νευτώνειου $H(w)$.

Θα πρέπει τώρα να αποδείξουμε ότι υπάρχει μη αύξουσα συνάρτηση $l : \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \bar{v})$ και μη φθίνουσα συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\bar{v}, v_{max})$ για $\bar{v} \in (0, v_{max})$.

Ορίζουμε

$$Q(v, r, s) := \frac{(v \cos(s) - r\omega^*)^2 + br^2v^2 \sin(s)}{2r^2v(v_{max} - v)}, \quad \text{για } v \in (0, v_{max}), \quad s \in [-\Theta, \Theta], \quad r \in [R_{in}, R_{out}] \quad (54)$$

το οποίο ικανοποιεί την σχέση $Q(v_i, r_i, s_i) \leq H_R(w)$ για κάθε $w \in \Omega$ από τον ορισμό που έχουμε δώσει για την $H_R(w)$ (28) με $\omega^* \in \left(0, \frac{v_{max}}{R_{out}}\right)$.

Ορίζουμε επίσης για $v \in (0, v_{max})$

$$f(v) := \min\{Q(v, r, s) : s \in [-\Theta, \Theta], \quad r \in [R_{in}, R_{out}]\} \quad (55)$$

το οποίο είναι καλά ορισμένο εξαιτίας της συμπαγείας του $[-\Theta, \Theta] \times [R_{in}, R_{out}]$ (συμπαγές λόγω του θεωρήματος Heine Borel). Η συνάρτηση Q είναι θετική και συνεχής ως προς τις μεταβλητές της v, r, s και συμπαγής στα $[-\Theta, \Theta]$ και $[R_{in}, R_{out}]$ συνεπώς ότι και η συνάρτηση f όπως ορίστηκε στο (55) είναι θετική και συνεχής. [10]

Δείχνουμε στη συνέχεια ότι $\lim_{v \rightarrow 0^+} f(v) = \lim_{v \rightarrow v_{max}^-} f(v) = +\infty$.

Θεωρούμε μια τυχαία ακολουθία $\{v_i \in (0, v_{max}) : i = 1, \dots\}$ με $\lim_{i \rightarrow +\infty} v_i = 0$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $\lim_{i \rightarrow \infty} f(v_i) = +\infty$.

Εστω ότι δεν ισχύει η υπόθεση μας και ότι υπάρχει φραγμένη ακολουθία

$\{f(v_k) \in (0, v_{max}) : k = 1, \dots\}$ δηλαδή υπάρχει $M > 0$ για τα οποία $f(v_k) \leq M$. Εφόσον το σύνολο $[-\Theta, \Theta] \times [R_{in}, R_{out}]$ είναι συμπαγές και εξαιτίας της συνέχειας της f , υπάρχουν $(s_k, r_k) \in [-\Theta, \Theta] \times [R_{in}, R_{out}]$ τέτοια ώστε $f(v_k) = Q(v_k, r_k, s_k)$.

Έχουμε λοιπόν, $f(v_k) = Q(v_k, r_k, s_k) \leq M$, $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0$ και από τον ορισμό του Q (54) συνεπάγεται ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (v_k \cos(s_k) - r_k \omega^*)^2 + br_k^2 v_k^2 \sin(s_k) = 0.$$

Λόγω της συμπαγείας του συνόλου $[-\Theta, \Theta] \times [R_{in}, R_{out}]$ η ακολουθία

$\{(s_k, r_k) \in [-\Theta, \Theta] \times [R_{in}, R_{out}] : k = 1, \dots\}$ έχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία $\{(s_m, r_m) \in [-\Theta, \Theta] \times [R_{in}, R_{out}] : m = 1, \dots\}$.

Με άλλα λόγια υπάρχουν $\bar{s}, \bar{r} \in [-\Theta, \Theta] \times [R_{in}, R_{out}]$ με

$\lim_{m \rightarrow \infty} (s_m, r_m) = (\bar{s}, \bar{r})$, $\lim_{m \rightarrow \infty} v_m = 0$ και άρα

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left((v_m \cos(s_m) - r_m \omega^*)^2 + br_m^2 v_m^2 \sin(s_m) \right) = (\bar{r} \omega^*)^2 = 0.$$

Συνεπάγεται ότι $\bar{r} = 0$ και αυτό έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι το $\bar{r} \in [R_{in}, R_{out}]$. Τελικά αποδείξαμε ότι $\lim_{v \rightarrow 0^+} f(v) = +\infty$.

Χρησιμοποιώντας ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα όπως στην παραπάνω διαδικασία αποδεικνύεται ότι $\lim_{v \rightarrow v_{max}} f(v) = +\infty$.

Προχωρώντας θα δείξουμε ότι υπάρχουν οι συναρτήσεις χ, ψ που ικανοποιούν την ανισότητα (29).

Αρχικά παρατηρούμε ότι για $\bar{v} \in \arg \min_{v \in (0, v_{max})} (f(v))$ ισχύει ότι $f(\bar{v}) = 0$. Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις

$$p_1(s) = \min\{f(v), \quad v \in (0, s]\}, \quad s \in (0, \bar{v}] \quad (56)$$

$$p_2(s) = \min\{f(v), \quad v \in [\bar{v} + s, v_{max}]\}, \quad s \in [0, v_{max} - \bar{v}]. \quad (57)$$

Η συνάρτηση p_1 είναι μη αύξουσα με $p_1(\bar{v}) = 0$, $\lim_{s \rightarrow 0^+} p_1(s) = +\infty$ και η συνάρτηση p_2 είναι μη φθίνουσα με $p_2(\bar{v}) = 0$, $\lim_{s \rightarrow v_{max}^-} p_2(s) = +\infty$.

Εστω $\bar{p}_1(s) := \exp(-s)p_1(s)$, $s \in (0, \bar{v}]$, η οποία εξαιτίας της (56) ικανοποιεί

$\lim_{s \rightarrow 0^+} \bar{p}_1(s) = +\infty$, $\bar{p}_1(\bar{v}) = 0$ και $\bar{p}_1(s) \leq p_1(s)$ για κάθε $s > 0$.

Επιπλέον, η συνάρτηση $\bar{p}_1(s)$ είναι φθίνουσα στο $(0, u]$, $u = \inf \left\{ \arg \min_{v \in (0, v_{max})} (f(v)) \right\}$ με $\bar{p}_1(u) = 0$.

Θεωρούμε την αντίστροφη συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, u]$, $i = 1, \dots, n$ του \bar{p}_1 η οποία είναι συνεχής και φθίνουσα εφόσον και η \bar{p}_1 είναι συνεχής και φθίνουσα.

Αληθεύουν τα παρακάτω

$$\bar{p}_1(v_i) \leq p_1(v_i) \leq f(v_i) \leq H_R(w)$$

από τον ορισμό των $\bar{p}_1, p_1, f(v_i), H_R(w)$. Σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης ψ και την παραπάνω ανίσωση έχουμε το εξής

$$\psi(H_R(w)) \leq \psi(\bar{p}_1(v_i)) \implies \psi(H_R(w)) \leq v_i.$$

Τελικά σύμφωνα με το *Λήμμα 7.0.1* υπάρχουν σταθερές $\bar{u} \in [0, v_{max} - \bar{v})$ και μια συνεχής μη φθίνουσα συνάρτηση $\bar{p}_2 : [0, v_{max} - \bar{v}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, με $\lim_{s \rightarrow (v_{max} - \bar{v})} \bar{p}_2 = +\infty$,

$p_2(\bar{u}) = 0$, $\bar{p}_2(s) \leq p_2(s)$ για κάθε $s \geq 0$ και \bar{p}_2 είναι μια αύξουσα συνάρτηση στο $[\bar{u}, v_{max} - \bar{v})$.

Θεωρούμε επίσης την αντίστροφη συνάρτηση $\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\bar{u}, v_{max})$ του $\bar{p}_2(s - \bar{u})$ περιορισμένη στο $[\bar{u}, v_{max})$ η οποία είναι συνεχής και αύξουσα εφόσον και η \bar{p}_2 είναι συνεχής και αύξουσα. Η παρακάτω ανίσωση προκύπτει από τον ορισμό των \bar{p}_2, p_2, f, H_R

$$\bar{p}_2(v_i) \leq p_2(v_i) \leq f(v_i) \leq H_R(w).$$

Τέλος η αντίστροφη συνάρτηση της \bar{p}_2 σε συνδυασμό με την παραπάνω ανίσωση μας δίνει το εξής αποτέλεσμα

$$v_i \leq \chi(H_R(w)) \quad \text{για κάθε } w \in \Omega.$$

□

7.3 Απόδειξη Θεωρήματος 4.1

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε κάποιες ιδιότητες των συναρτήσεων $k_i(w)$, όπως ορίζονται στην (22).

Για κάθε $w \in \Omega$ υπάρχουν μη φθίνουσες συναρτήσεις $Q_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, n$ τέτοιες ώστε να ισχύει η ακόλουθη ανισότητα

$$k_i(w) \geq \Phi(w) - G(w) \geq -\frac{k_i(w)}{r_i \omega^*} (v_{max} \cos(s_i) - r_i \omega^*) \quad (58)$$

$$\mu_1 \leq k_i(w) \leq Q_i(w), \quad i = 1, \dots, n \quad (59)$$

όπου Φ, G όπως ορίζονται στις (25) και (26) αντίστοιχα. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον ορισμό

του $k_i(w)$ η ανίσωση (58) είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned} k_i(w) &= \Phi(w) - G(w) + \max \left\{ 0, -\frac{v_{max} \cos(s_i)}{v_{max} \cos(s_i) - r_i \omega^*} (\Phi(w) - G(w)) \right\} \\ &\geq \max \left\{ \Phi(w) - G(w), -\frac{r_i \omega^*}{v_{max} \cos(s_i) - r_i \omega^*} (\Phi(w) - G(w)) \right\} \end{aligned} \quad (60)$$

η ισότητα της (60) ισχύει διότι

$$\begin{aligned} \Phi(w) - G(w) + \frac{v_{max} \cos(s_i)}{v_{max} \cos(s_i) - r_i \omega^*} (\Phi(w) - G(w)) &= \frac{r_i \omega^*}{v_{max} \cos(s_i) - r_i \omega^*} (\Phi(w) - G(w)) \\ \implies v_{max} \cos(s_i) - r_i \omega^* - v_{max} \cos(s_i) &= -r_i \omega^*. \end{aligned}$$

Από την (60) ισοδύναμα ως προς $k_i(w)$ προκύπτει ότι

$$k_i(w) \geq -\frac{r_i \omega^*}{v_{max} \cos(s_i) - r_i \omega^*} (\Phi(w) - G(w))$$

Άρα έχουμε το δεύτερο σκέλος της ανίσωσης (58) .

Στη συνέχεια ορίζουμε τα παρακάτω:

$$B_{i,j}(s) := \max \left\{ |V'_{i,j}(d)| : s \leq d \leq \lambda \right\} \quad \text{για } s \in (L_{i,j}, \lambda], \quad i, j = 1, \dots, n, \quad j \neq i \quad (61)$$

$$c_{i,j}(s) := \max \left\{ \kappa_{i,j}(d) : s \leq d \leq \lambda \right\} \quad \text{για } i, j = 1, \dots, n, \quad j \neq i \quad (62)$$

$$\chi_i(s) := \max \left\{ |U'_i(r)| : s \leq r \leq c_i^* \right\} \quad \text{για } s \in (R_{in}, c_i^*] \quad i = 1, \dots, n \quad (63)$$

$$z_i(s) := \max \left\{ |U'_i(r)| : c_i^* \leq r \leq s \right\} \quad \text{για } s \in [c_i^*, R_{out}), \quad i = 1, \dots, n \quad (64)$$

$$\text{όπου } c_i^* \in \arg \min_{r \in (R_{in}, R_{out})} \left\{ |U'_i(r)| \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Επιπλέον, για κάθε $i = 1, \dots, n$ έστω $m_i \geq 2$ να είναι ο μέγιστος αριθμός σημείων που μπορούν να τοποθετηθούν σε μια περιοχή φραγμένη από δύο ομόκεντρες ελλείψεις (σε πολικές συντεταγμένες) με μείζονες ημιάξονες $\bar{L}_i = \min \left\{ L_{i,j}, j = 1, \dots, n, j \neq i \right\}$ και λ να ικανοποιεί την (16), και μικρούς ημιάξονες $\frac{\bar{L}_i}{\max_{j \neq i} \sqrt{p_{i,j}}}$ και $\frac{\lambda}{\min_{j \neq i} \sqrt{p_{i,j}}}$ έτσι κάθε όχημα να απέχει απόσταση (με την μετρική που δίνεται από τον ορισμό του $d_{i,j}$ (7)) τουλάχιστον \bar{L}_i από κάθε άλλο όχημα.

Γνωρίζουμε από τον ορισμό του χώρου καταστάσεων Ω ότι $d_{i,j} > L_{i,j}$ για $i, j = 1, \dots, n, \quad j \neq i$ και από τον ορισμό των m_i όπως είδαμε παραπάνω, τα αθροίσματα

$$\sum_{j \neq i} V'_{i,j}(d_{i,j}) \frac{r_j \sin(\phi_i - \phi_j)}{d_{i,j}}, \quad \sum_{j \neq i} \left(p_{i,j}(r_i - r_j) + r_j(1 - \cos(\phi_i - \phi_j)) \right) \frac{V'_{i,j}(d_{i,j})}{d_{i,j}}$$

περιέχουν τουλάχιστον m_i μη μηδενικούς όρους, πιο συγκεκριμένα τους όρους για τους οποίους ισχύει $d_{i,j} \leq \lambda$ (αυτό μας επιβεβαιώνει ότι δεν θα υπάρξουν συγκρούσεις μεταξύ των οχημάτων

εφόσον απέχουν την ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση ασφαλείας). Ο ορισμός (61) σε συνδυασμό με τον (18) του Λήμματος 4.2.1 και το γεγονός ότι $p_{i,j} \geq 1$ για κάθε $i, j = 1, \dots, n$ συνεπάγεται η παρακάτω εκτίμηση και αληθεύει για κάθε $w \in \Omega$ και $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
& \max \left(\frac{r_i}{\omega^*} \left| \sum_{j \neq i} V'_{i,j}(d_{i,j}) \frac{r_j \sin(\phi_i - \phi_j)}{d_{i,j}} \right|, \left| \sum_{j \neq i} \left(p_{i,j}(r_i - r_j) + r_j(1 - \cos(\phi_i - \phi_j)) \right) \frac{V'_{i,j}(d_{i,j})}{d_{i,j}} \right| \right) \\
& \text{γνωρίζοντας ότι } r_i, r_j \in (R_{in}, R_{out}), \quad |V'_{i,j}| \geq V_{i,j}, \quad \sin(\phi_i - \phi_j) \leq 1, \quad \omega^* \in (0, \frac{v_{max}}{R_{out}}), \\
& (1 - \cos(\phi_i - \phi_j)) \leq 2 \quad \text{και} \quad d_{i,j} > L_{i,j} \quad \text{έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα} \\
& \leq \max \left(\frac{R_{out}^2}{\omega^* \bar{L}_i} \sum_{j \neq i} |V'_{i,j}(d_{i,j})|, \frac{2v_{max}}{\omega^* \bar{L}_i} \sum_{i \neq j} p_{i,j} |V'_{i,j}(d_{i,j})| \right) \\
& \leq \frac{R_{out}^2 + 2v_{max}}{\omega^* \bar{L}_i} \max \left(\sum_{j \neq i} |V'_{i,j}(d_{i,j})|, \sum_{j \neq i} p_{i,j} |V'_{i,j}(d_{i,j})| \right) \\
& \leq \frac{R_{out}^2 + 2v_{max}}{\omega^* \bar{L}_i} \sum_{j \neq i} p_{i,j} B_{i,j}(\rho_{i,j}(H(w))) \\
& \leq \frac{m_i(R_{out}^2 + 2v_{max})}{\omega^* \bar{L}_i} \max_{j \neq i} \left(p_{i,j} B_{i,j}(\rho_{i,j}(H(w))) \right)
\end{aligned} \tag{65}$$

Η τελευταία ανίσωση είναι άμεση συνέπεια του ορισμού των m_i διότι είναι ο μέγιστος αριθμός μη μηδενικών όρων που περιέχει το άθροισμα.

Παράλληλα, με όμοια επιχειρήματα και εξαιτίας των (15), (18) και (62) προκύπτει ότι

$$\sum_{j \neq i} \kappa_{i,j}(d_{i,j}) \leq m_i \max_{j \neq i} \left(c_{i,j}(\rho_{i,j}(H(w))) \right). \tag{66}$$

Εν συνεχεία, από τους ορισμούς (25), (26), τις ανισότητες (65), (66) και το γεγονός ότι η g_1 συνάρτηση είναι μη φθίνουσα, τα $v_i \in (0, v_{max})$ και τα $r_i \in (R_{in}, R_{out})$, $i = 1, \dots, n$ άμεσα συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
|\Phi(w) - G(w)| & \leq \frac{m_i(R_{out}^2 + 2v_{max})}{\omega^* \min(L_{i,j})} \max_{j \neq i} \left(p_{i,j} B_{i,j}(\rho_{i,j}(H(w))) \right) \\
& \quad + \frac{m_i}{\omega^*} \max_{j \neq i} \left\{ c_{i,j}(\rho_{i,j}(H(w))) \left(g_1\left(\frac{v_{max}}{R_{in}}\right) - g_1(0) \right) \right\}
\end{aligned} \tag{67}$$

Επιπλέον, σύμφωνα με τον ορισμό του $H(w)$ (17) έχουμε

$$\begin{aligned}
H(w) & \geq A \left(\frac{1}{\cos(s_i) - \cos(\Theta)} - \frac{1}{1 - \cos(\Theta)} \right) \implies \\
H(w) & \geq \frac{A(1 - \cos(\Theta)) - (\cos(s_i) - \cos(\Theta))}{(\cos(s_i) - \cos(\Theta))(1 - \cos(\Theta))} \implies \\
(\cos(s_i) - \cos(\Theta))(1 - \cos(\Theta))H(w) & \geq A(1 - \cos(s_i))
\end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$\frac{1}{v_{max}\cos(s_i) - r_i\omega^*} \leq \frac{A + (1 - \cos(\Theta))H(w)}{A(v_{max} - r_i\omega^*) + (v_{max}\cos(\Theta) - r_i\omega^*)(1 - \cos(\Theta))H(w)}$$

διότι

$$A(v_{max} - r_i\omega^*) + (v_{max}\cos(\Theta) - r_i\omega^*)(1 - \cos(\Theta))H(w) \leq (v_{max}\cos(s_i) - r_i\omega^*)(A + (1 - \cos(\Theta))H(w)) \implies$$

$$A(1 - \cos(s_i)) \leq (\cos(s_i) - \cos(\Theta))(1 - \cos(\Theta))H(w)$$

Άρα έχουμε την παρακάτω ανίσωση να ισχύει (θυμίζουμε $r_i \in (R_{in}, R_{out}), \omega^* \in (0, \frac{v_{max}}{R_{out}})$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{max}\cos(s_i) - r_i\omega^*} &\leq \frac{A + (1 - \cos(\Theta))H(w)}{A(v_{max} - r_i\omega^*) + (v_{max}\cos(\Theta) - r_i\omega^*)(1 - \cos(\Theta))H(w)} \\ &\leq \frac{A + (1 - \cos(\Theta))H(w)}{A(v_{max} - R_{out}\omega^*) + (v_{max}\cos(\Theta) - R_{out}\omega^*)(1 - \cos(\Theta))H(w)} \end{aligned} \quad (68)$$

Παρατηρούμε ότι για

$$Q_i(s) := \mu_2 + J_i(s) + \max \left(f(z) : |z| \leq \frac{v_{max}(A + (1 - \cos(\Theta)))sJ_i(s)}{v_{max}\cos(\Theta) - R_{out}\omega^*(1 - \cos(\Theta))s} \right) \quad (69)$$

και

$$J_i(s) := \frac{m_i(R_{out}^2 + 2v_{max})}{\omega^* \min_{j \neq i} (L_{i,j})} \max_{j \neq i} \left(p_{i,j} B_{i,j}(\rho_{i,j}(s)) \right) + \frac{m_i}{\omega^*} \max_{j \neq i} \left\{ c_{i,j}(\rho_{i,j}(s)) \left(g_1 \left(\frac{v_{max}}{R_{in}} \right) - g_1(0) \right) \right\} \quad (70)$$

για $s \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$.

Η ανίσωση (59) επιβεβαιώνεται διότι για το πρώτο μέρος γνωρίζουμε από τον ορισμό της k_i ότι ισχύει και για το δεύτερο μέρος με χρήση των (7.3), (69)

$$|\Phi(w) - G(w)| \leq J_i(s),$$

$$\begin{aligned} \max \left(f(z) : |z| \leq \frac{v_{max}(A + (1 - \cos(\Theta)))sJ_i(s)}{v_{max}\cos(\Theta) - R_{out}\omega^*(1 - \cos(\Theta))s} \right) \\ \geq f \left(- \frac{v_{max}\cos(s_i)}{v_{max}\cos(s_i) - r_i\omega^*} \Phi_i(w) - G_i(w) \right) \end{aligned} \quad (71)$$

Τελικά αποδείξαμε την (59).

Συνεχίζουμε τώρα την διαδικασία απόδειξης του *Θεωρήματος 4.1*.

Έστω $w_0 \in \Omega$ και θεωρούμε μοναδική λύση $w(t)$ στο πρόβλημα αρχικών τιμών (4), (20), (21) με αρχικές συνθήκες $w(0) = w_0$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το Ω είναι ανοιχτό σύνολο (από τους ορισμούς (5), (9)), καταλήγουμε ότι υπάρχει $t_{max} \in (0, +\infty]$ για το οποίο η λύση $w(t)$ του (4), (20), (21) ορίζεται στο $[0, t_{max})$ και ικανοποιεί $w(t) \in \Omega$ για κάθε $t \in [0, t_{max})$. Επιπλέον, αν $t_{max} < +\infty$ τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία των χρόνων $\{t_i \in [0, t_{max}) : i = 1, \dots\}$ με $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = t_{max}$ και είτε $\lim_{t_i \rightarrow t_{max}} (dist(w(t_i), \partial\Omega)) = 0$ είτε $\lim_{t_i \rightarrow t_{max}} |w(t_i)| = +\infty$.

Σύμφωνα με τους ορισμούς (7), (17), (23), (24), (25) και τις εξισώσεις (4) έχουμε τα παρακάτω

$$\begin{aligned}
\nabla H(w)\dot{w} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i \cos(s_i) - \omega^*}{r_i} \right) \frac{\cos(s_i)}{r_i} \dot{v}_i - \sum_{i=1}^n \frac{v_i \cos(s_i)}{r_i^2} \dot{r}_i \left(\frac{v_i \cos(s_i) - \omega^*}{r_i} \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i \cos(s_i) - \omega^*}{r_i} \right) \sin(s_i) \dot{s}_i \frac{v_i}{r_i} + b \sum_{i=1}^n v_i \dot{v}_i \sin^2(s_i) - b \sum_{i=1}^n v_i^2 \cos(s_i) \sin(s_i) \dot{s}_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^n U'_i(r_i) \dot{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} V'_{i,j}(d_{i,j}) \dot{d}_{i,j} + A \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\cos(s_i) - \cos(\Theta))^2} \sin(s_i) \dot{s}_i \implies \\
\nabla H(w)\dot{w} &= \sum_{i=1}^n \dot{s}_i \sin(s_i) \left(\frac{A}{(\cos(s_i) - \cos(\Theta))^2} + \frac{v_i^2}{r_i^2} \cos(s_i) - \omega^* \frac{v_i}{r_i} + b v_i^2 \cos(s_i) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n v_i \sin(s_i) \left(b \dot{v}_i + \frac{v_i}{r_i^2} \cos(s_i) \left(\frac{v_i \cos(s_i) - \omega^*}{r_i} \right) - U'_i(r_i) \right) \\
&\quad - \frac{V'_{i,j}(d_{i,j})}{d_{i,j}} \sum_{i=1}^n p_{i,j}(r_i - r_j) + r_j(1 - \cos(\phi_i - \phi_j)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left(\cos(s_i) \frac{v_i}{r_i} - \omega^* \right) \frac{\cos(s_i) \dot{v}_i}{r_i} + \omega^* v_i \cos(s_i) \sum_{i=1}^n \frac{V'_{i,j}(d_{i,j})}{d_{i,j}} r_i r_j \sin(\phi_i - \phi_j) \implies \\
\nabla H(w)\dot{w} &= \sum_{i=1}^n \alpha(r_i, s_i, v_i) \dot{s}_i \sin(s_i) + \sum_{i=1}^n (b \dot{v}_i \sin(s_i) + \Lambda_i(w)) v_i \sin(s_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left(\cos(s_i) \frac{v_i}{r_i} - \omega^* \right) \frac{\cos(s_i) \dot{v}_i}{r_i} + \omega^* \Phi_i(w) v_i \cos(s_i) + (\omega^*)^2 \Phi_i(w) - (\omega^*)^2 \Phi_i(w) \implies \\
\nabla H(w)\dot{w} &= \sum_{i=1}^n \alpha(r_i, s_i, v_i) \dot{s}_i \sin(s_i) + \sum_{i=1}^n (b \dot{v}_i \sin(s_i) + \Lambda_i(w)) v_i \sin(s_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left(\cos(s_i) \frac{v_i}{r_i} - \omega^* \right) \left(\frac{\cos(s_i) \dot{v}_i}{r_i} + \omega^* \Phi_i(w) \right) + \omega^* \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} V'_{i,j}(d_{i,j}) \frac{r_i r_j \sin(\phi_i - \phi_j)}{d_{i,j}}
\end{aligned} \tag{72}$$

Εξαιτίας των σχέσεων (11),(12),(7) έχουμε ότι $\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} V'_{i,j}(d_{i,j}) \frac{r_i r_j \sin(\phi_i - \phi_j)}{d_{i,j}} = 0$, δηλαδή $\Phi_i(w) = 0$ σύμφωνα με τον ορισμό της Φ_i .

Για τον πρώτο όρο της εξίσωσης (72) λαμβάνοντας υπό όψη μας το σύστημα (4), τις εξισώσεις (20), (21), (23) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \alpha(r_i, s_i, v_i) \dot{s}_i \sin(s_i) &= \sum_{i=1}^n \alpha(r_i, s_i, v_i) \left(\frac{v_i}{\sigma_i} \tan(\delta_i) \sin(s_i) - \frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) \right) \sin(s_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha(r_i, s_i, v_i) \frac{v_i}{\sigma_i} \sin(s_i) \left(\frac{\sigma_i}{r_i} \cos(s_i) - \frac{\sigma_i}{v_i \alpha(r_i, s_i, v_i)} (\mu_2 \sin(s_i) \right. \\
&\quad \left. + [bF_i \sin(s_i) + \Lambda_i(w)] v_i - M_i(w) \right) - \sum_{i=1}^n \alpha(r_i, s_i, v_i) \frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) \sin(s_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\alpha(r_i, s_i, v_i) \frac{v_i}{r_i} \sin(s_i) \cos(s_i) - \mu_2 \sin^2(s_i) - v_i \sin^2(s_i) bF_i \right. \\
&\quad \left. - v_i \sin(s_i) \Lambda_i(w) + \sin(s_i) M_i(w) - \alpha(r_i, s_i, v_i) \frac{v_i}{r_i} \sin(s_i) \cos(s_i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n -\mu_2 \sin^2(s_i) - v_i \sin^2(s_i) bF_i - v_i \sin(s_i) \Lambda_i(w) + \sin(s_i) M_i(w).
\end{aligned} \tag{73}$$

Τον δεύτερο όρο θα τον αφήσουμε όπως είναι $\sum_{i=1}^n (bv_i \sin(s_i) + \Lambda_i(w)) v_i \sin(s_i)$ και γνωρίζοντας ότι $\Phi_i(w) = 0, v_i = F_i$ θα έχουμε για τον τρίτο όρο της εξίσωσης (72) ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{F_i}{r_i} \cos(s_i) \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) &= \sum_{i=1}^n -\frac{v_i^2 \cos(s_i)}{r_i^2} k_i(w) \\
&\quad + \frac{k_i(w) \omega^* v_i \cos(s_i)}{r_i} + \frac{v_i \cos(s_i) \omega^* G_i(w) \left(\frac{v_i \cos(s_i)}{r_i} - \omega^* \right)}{r_i} \\
&\quad + \frac{\omega^* \cos(s_i) k_i(w) v_i}{r_i} - (\omega^*)^2 k_i(w) - (\omega^*)^2 G_i(w) \left(\frac{v_i \cos(s_i)}{r_i} - \omega^* \right) \\
&= -\left(\frac{v_i \cos(s_i)}{r_i} - \omega^* \right)^2 k_i(w) + \omega^* G_i(w) \left(\frac{v_i \cos(s_i)}{r_i} - \omega^* \right).
\end{aligned} \tag{74}$$

Προσθέτοντας τώρα τους παραπάνω όρους και αντικαθιστώντας τα $M_i(w), G_i(w)$ από τους ορισμούς (26), (27) έχουμε

$$\begin{aligned}
\nabla H(w) \dot{w} &= -\mu_2 \sum_{i=1}^n \sin^2(s_i) - \sum_{i=1}^n k_i(w) \left(\frac{v_i}{r_i} - \omega^* \right)^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sin(s_i) \left\{ \sum_{j \neq i} \kappa_{i,j}(d_{i,j}) (g_2(\sin(s_j)) - g_2(\sin(s_i))) \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \omega^* \left(\frac{v_i \cos(s_i)}{r_i} - \omega^* \right) \left\{ \frac{1}{\omega^*} \sum_{j \neq i} \kappa_{i,j}(d_{i,j}) \left(g_1 \left(\frac{v_j \cos(s_j)}{r_j} \right) - g_1 \left(\frac{v_i \cos(s_i)}{r_i} \right) \right) \right\} \implies
\end{aligned}$$

Αναλύοντας τον τρίτο όρο που προέκυψε για την $\nabla H(w) \dot{w}$ έχουμε ότι

$$\sin(s_1) \left(\kappa_{1,2}(d_{1,2}) (g_2(\sin(s_2)) - g_2(\sin(s_1))) \right) + \sin(s_2) \left(\kappa_{2,1}(d_{2,1}) (g_2(\sin(s_1)) - g_2(\sin(s_2))) \right)$$

$$\begin{aligned} & \cdots + \sin(s_n) \left(\kappa_{n,n-1}(d_{n,n-1})(g_2(\sin(s_{n-1})) - g_2(\sin(s_n))) \right) \implies \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \kappa_{i,j}(d_{i,j})(g_2(\sin(s_j)) - g_2(\sin(s_i)))(\sin(s_i) - \sin(s_j)). \end{aligned}$$

Ομοίως και για τον τελευταίο όρο που μας προέκυψε, τελικά λόγω της (59) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \nabla H(w)\dot{w} &= -\mu_2 \sum_{i=1}^n \sin^2(s_i) - \sum_{i=1}^n k_i(w) \left(\frac{v_i}{r_i} - \omega^* \right)^2 \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \kappa_{i,j}(d_{i,j})(\sin(s_j) - \sin(s_i))(g_2(\sin(s_j)) - g_2(\sin(s_i))) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \kappa_{i,j}(d_{i,j}) \left(\frac{v_j \cos(s_j)}{r_j} - \frac{v_i \cos(s_i)}{r_i} \right) \left(g_1 \left(\frac{v_j \cos(s_j)}{r_j} \right) - g_1 \left(\frac{v_i \cos(s_i)}{r_i} \right) \right) \\ & \leq -\mu_2 \sum_{i=1}^n \sin^2(s_i) - \mu_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right)^2. \end{aligned} \tag{75}$$

Καταλήγουμε ότι $\forall w \in \Omega$

$$\nabla H(w)\dot{w} \leq 0 \tag{76}$$

Εφόσον $w(t) \in \Omega$ για κάθε $t \in [0, t_{max})$, ισχύει για τις (5) και (9) ότι

$$v_i(t) \in (0, v_{max}), \quad s_i(t) \in (-\Theta, \Theta) \text{ και } r_i(t) \in (R_{in}, R_{out}) \text{ για κάθε } t \in [0, t_{max}) \text{ και } i = 1, \dots, n.$$

Έτσι λοιπόν, από το σύστημα (4) έχουμε ότι $0 \leq \dot{\phi}_i(t) \leq \frac{v_{max}}{R_{in}}$ για κάθε $t \in [0, t_{max})$ και $i = 1, \dots, n$.

Επιπλέον η ανισότητα (76) επιβεβαιώνει ότι η $H(w)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση και άρα συνεπάγεται ότι

$$H(w(t)) \leq H(w_0) \quad \text{για κάθε } t \in [0, t_{max}). \tag{77}$$

Γνωρίζουμε ότι για τις μη φθίνουσες συναρτήσεις $\eta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\xi_i, R_{out}), \omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \Theta)$ και τις μη αύξουσες συναρτήσεις $\zeta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow (R_{in}, \xi_i]$, $i = 1, \dots, n$ και για κάθε ζευγάρι

$$i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j \text{ υπάρχουν μη αύξουσες συναρτήσεις } \rho_{i,j} : \mathbb{R}_+ \rightarrow (L_{i,j}, \lambda] \text{ με } \rho_{i,j}(s) \equiv \rho_{j,i}(s)$$

που ικανοποιούν την ανίσωση (18) και ισχύουν:

$$\begin{aligned} |s_i(t)| &\leq \omega(H(w(t))) \leq \omega(H(w_0)) < \Theta, \\ R_{in} &< \zeta_i(H(w_0)) \leq \zeta_i(H(w(t))) \leq r_i(t) \leq \eta_i(H(w(t))) \leq \eta_i(H(w_0)) < R_{out} \\ d_{i,j} &\geq \rho_{i,j}(H(w_0)) \geq \rho_{i,j}(H(w(t))) > L_{i,j} \\ &\text{από την ολοκλήρωση της σχέσης } \dot{\phi} \leq \frac{v_{max}}{R_{in}} \text{ έχουμε το εξής} \\ \phi_i(0) &\leq \phi_i(t) \leq \frac{v_{max}}{R_{in}} t + \phi_i(0) \end{aligned} \tag{78}$$

Από τις σχέσεις (59), (77) και (78) έχουμε ότι

$$\mu_2 < k_i(w(t)) \leq Q(H(w_0)) \quad \text{για κάθε } t \in [0, v_{max}), \quad i = 1, \dots, n \tag{79}$$

όπου Q_i όπως ορίζεται στο (69). Η ανίσωση (58), ο ορισμός (20) και το σύστημα (4) μας εξασφαλίζουν ότι οι ακόλουθες ανισότητες ισχύουν για κάθε $t \in [0, t_{max})$ και $i = 1, \dots, n$

$$k_i(w)(v_{max} - v_i(t)) \geq \dot{v}_i(t) \geq -k_i(w(t))v_i(t) \quad (80)$$

διότι από το σύστημα (4) $\dot{v}_i = F_i$ και από τον ορισμό του F_i έχουμε το πρώτο μέρος της ανίσωσης

$$\begin{aligned} k_i(w)(v_{max} - v_i) &\geq -k_i(w) \left(v_i - \frac{r_i \omega^*}{\cos(s_i)} \right) - \frac{r_i \omega^*}{\cos(s_i)} (\Phi_i(w) - G_i(w)) \\ &\geq -k_i(w)v_i(w) \\ k_i(w)(v_{max} - v_i) + k_i(w) \left(v_i - \frac{r_i \omega^*}{\cos(s_i)} \right) &\geq \frac{r_i \omega^*}{\cos(s_i)} (\Phi_i(w) - G_i(w)) \\ &\geq -k_i(w)v_i(w) + k_i(w) \left(v_i - \frac{r_i \omega^*}{\cos(s_i)} \right) \\ k_i(w)v_{max} - k_i(w) \frac{r_i \omega^*}{\cos(s_i)} &\geq \frac{r_i \omega^*}{\cos(s_i)} (\Phi_i(w) - G_i(w)) \geq -k_i(w) \frac{r_i \omega^*}{\cos(s_i)} \\ -k_i(w) \frac{v_{max} \cos(s_i) - r_i \omega^*}{r_i \omega^*} &\leq \Phi_i(w) - G_i(w) \leq k_i(w) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (79) και (80) για κάθε $t \in [0, t_{max})$ και $i = 1, \dots, n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} -Q_i(H(w_0))v_i(t) \leq \dot{v}_i(t) &\implies -Q_i(H(w_0)) \leq \frac{\dot{v}_i(t)}{v_i(t)} \implies \\ \ln(v_i(0)) - Q_i(H(w_0))t &\leq \ln(v_i(t)) \implies v_i(0) \exp(-Q_i(H(w_0))t) \leq v_i(t) \\ \text{και } \dot{v}_i(t) &\leq Q_i(H(w_0))(v_{max} - v_i(t)) \implies \\ \frac{\dot{v}_i(t)}{v_{max} - v_i(t)} &\leq Q_i(H(w_0)) \implies -\ln(v_{max} - v_i(t)) \leq Q_i(H(w_0))t + c \\ v_{max} - v_i(t) &\geq \exp(-Q_i(H(w_0))t)c' \quad \text{όπου } c' = -v_i(0) + v_{max} \implies \\ -v_i(t) &\geq -\exp(Q_i(H(w_0))t)v_i(0) + \exp(-Q_i(H(w_0))t)v_{max} - v_{max} \implies \\ v_i(t) &\leq \exp(-Q_i(H(w_0))t)v_i(0) + (1 - \exp(-Q_i(H(w_0))t)v_{max} \end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned} v_i(0) \exp(Q_i(H(w_0))t) + (1 - \exp(-Q_i(H(w_0))t)v_{max}) &\geq v_i(t) \\ &\geq v_i(0) \exp(-Q_i(H(w_0))t) \end{aligned} \quad (81)$$

Έστω ότι $t_{max} < +\infty$. Οι ανισότητες (77),(78), (81) και οι ορισμοί (5), (8), (9) μας επιτρέπουν να πούμε ότι για κάθε αύξουσα ακολουθία χρόνων $\{t_i \in [0, t_{max}) : i = 1, \dots\}$ με $\lim_{i \rightarrow \infty}(t_i) = t_{max}$ δεν μπορούμε να έχουμε κανένα από τα παρακάτω :

- $\lim_{t_i \rightarrow t_{max}} \text{dist}(w(t_i), \partial\Omega) = 0$ με $\partial\Omega = \{w \in \mathbb{R}^{4n} : r_i = R_{in} \text{ είτε } r_i = R_{out}, \text{ είτε } |s_i| = \Theta, \text{ είτε } v_i = 0, \text{ είτε } v_i = v_{max}, \text{ είτε } d_{i,j} = L_{i,j}\}$ διότι από την (78) και (81) έχουμε

τα εξής:

$$\begin{aligned}
d_{i,j} &> L_{i,j} \\
|s_i(t)| &< \Theta \\
R_{in} &< r_i(t) < R_{out} \\
v_{max} &\geq v_i(t) + \exp(Q_i(H(w_0))t) > v_i(t) \\
v_i(t) &\leq \exp(Q_i(H(w_0))t) + (1 - \exp(-Q_i(H(w_0))t)v_{max} > 0
\end{aligned}$$

- $\lim_{t_i \rightarrow t_{max}} |w_i(t)| = +\infty$ εφόσον $\phi_i(0) \leq \phi_i(t) \leq \phi_i(0) + \frac{v_{max}}{R_{in}}t$ άρα όλοι οι όροι της σύμφωνα και με τα παραπάνω είναι φραγμένοι.

Άρα, $t_{max} = +\infty$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση (39). Επειδή $w(t) \in \Omega$ για κάθε $t \geq 0$, και εξαιτίας των (5), (59), (77), (79), (80) έπεται ότι

$$\begin{aligned}
|v_i(t)| = |F_i(t)| &\leq |k_i(w(t))(v_{max} - v_i(t))| \leq |k_i v_{max}| \\
&\leq Q_i(H(w_0))v_{max}
\end{aligned} \tag{82}$$

όπου η Q_i όπως έχει οριστεί από την (69). Η ανισότητα (39) προκύπτει από τον ορισμό (21) και την ανισότητα (82) με $P_1(s) = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ Q_i(s)v_{max} + \frac{\pi}{2} \right\}$, $s \geq 0$, πιο αναλυτικά έχουμε

$$\begin{aligned}
|F_i(t)| &\leq Q_i(H(w_0))v_{max} \\
|\delta_i(t)| &\leq \frac{\pi}{2} \\
\text{άρα } |F_i(t)| + |\delta_i(t)| &\leq P_1(H(w_0))
\end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε τώρα την σχέση (37) έχουμε τους ορισμούς (23), (24), (27) τις ανισότητες (63), (64), (65), (66), (77), (78) και το γεγονός ότι $\omega^* \in \left(0, \frac{v_{max}}{R_{out}}\right)$, g_2 μη φθίνουσα συνάρτηση και $\sin(s)$ αυξάνει όταν $s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ συνεπάγεται ότι για κάθε $w \in \Omega$ και $i, j = 1, \dots, n$, $j \neq i$, ισχύουν οι

ακόλουθες ανισότητες:

$$\begin{aligned}
|\Lambda_i(w)| &= \left| \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) \frac{v_i}{r_i^2} \cos(s_i) - U_i'(r_i) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j \neq i} \left(p_{i,j}(r_i - r_j) + r_j(1 - \cos(\phi_i - \phi_j)) \right) \frac{V_{i,j}'(d_{i,j})}{d_{i,j}} \right| \\
&\leq \left(\frac{v_{max}}{R_{in}} - \omega^* \right) \frac{v_{max}}{R_{in}^2} + \max\{U_i'(r_i)\} + \frac{m_i(R_{out}^2 + 2v_{max})}{\omega^* \bar{L}_i} \max_{j \neq i} \left(p_{i,j} B_{i,j}(\rho_{i,j}(H(w_0))) \right) \\
&\leq \left(\frac{v_{max}}{R_{in}} - \omega^* \right) \frac{v_{max}}{R_{in}^2} + \max\{\chi_i(\zeta_i(H(w_0))), z_i(\eta_i(H(w_0)))\} \\
&\quad + \frac{m_i(R_{out}^2 + 2v_{max})}{\omega^* \bar{L}_i} \max_{j \neq i} \left(p_{i,j} B_{i,j}(\rho_{i,j}(H(w_0))) \right)
\end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned}
|M_i(w)| &= \left| \sum_{j \neq i} \kappa_{i,j}(d_{i,j}) \left(g_2(\sin(s_j)) - g_2(\sin(s_i)) \right) \right| \\
&\leq m_i \max_{j \neq i} \left\{ c_{i,j}(\rho_{i,j}(H(w))) \right\} \left(g_2(\sin(\Theta)) - g_2(\sin(-\Theta)) \right)
\end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(r, s, v) &= \left(b - \frac{1}{r^2} \right) v^2 \cos(s) + \omega^* \frac{v}{r} + \frac{A}{(\cos(s) - \cos(\Theta))^2} \\
&\geq \left(b - \frac{1}{r^2} \right) v^2 \cos(s) + \frac{A}{(1 - \cos(\Theta))^2} \quad \text{αφού } \omega^* \frac{v}{r} > 0 \\
&\geq \frac{A}{(1 - \cos(\Theta))^2} \quad \text{εφόσον } \cos(s) > 0, s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και } b > \frac{1}{R_{in}}
\end{aligned} \tag{85}$$

Σύμφωνα με τις ανισότητες (78), (82), (83), (84), (85) και τον ορισμό (21) συνεπάγεται ότι $\tan(\delta_i(t))$ είναι φραγμένη για κάθε $t \geq 0$ και $i = 1, \dots, n$. Φαίνεται παρακάτω ότι

$$\tan(\delta_i(t)) = \frac{\sigma_i}{r_i} \cos(s_i) - \frac{\sigma_i}{v_i \alpha(r_i, s_i, v_i)} (\mu_2 \sin(s_i) + (bF_i \sin(s_i) + \Lambda_i(w))v_i - M_i(w))$$

όλοι οι όροι της είναι φραγμένοι σύμφωνα με τις προαναφερθέντες ανισότητες.

Λόγω του συστήματος (4) και επίσης ότι $v_i(t) \in (0, v_{max})$, $r_i(t) \in (R_{in}, R_{out})$ και $s_i(t) \in (-\Theta, \Theta)$, $i = 1, \dots, n$ έχουμε ως αποτέλεσμα οι όροι $\dot{r}_i(t)$, $\dot{s}_i(t)$ να είναι φραγμένοι για κάθε $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
\dot{r}_i(t) &= -v_i(t) \sin(s_i(t)) \leq v_{max} \\
\dot{s}_i(t) &= \frac{v_i(t)}{\sigma_i} \tan(\delta_i(t)) - \frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i) \quad \text{όλοι οι όροι που αποτελούν το } \dot{s}_i(t) \text{ είναι φραγμένοι.}
\end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν, χρησιμοποιώντας το σύστημα (4), και τις σχέσεις (39), (82) καταλήγουμε ότι υπάρχει μια σταθερά $\xi_i > 0$ τέτοια ώστε

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \mu_2 \sin^2(s_i(t)) + \mu_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right)^2 \right) \leq \xi_i. \tag{86}$$

Τελικά από την ανίσωση (75) έχουμε ότι

$$\int_0^\infty \mu_2 \sum_{i=1}^n \sin^2(s_i(t)) + \mu_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right)^2 dt \leq H(w(t)) \leq H(w_0) \quad (87)$$

Σύμφωνα με το Λήμμα Barbalat και τις δύο τελευταίες ανισώσεις έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_2 \sum_{i=1}^n \sin^2(s_i(t)) = 0 &\implies \lim_{t \rightarrow \infty} s_i(t) = 0 \\ \text{και } \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right)^2 = 0 &\implies \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* = 0 \implies \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_i(t)}{r_i(t)} &= \omega^* \end{aligned}$$

πιο συγκεκριμένα αποδείξαμε την σχέση (37) του θεωρήματος.

Τελικά θα δείξουμε ότι η (38) σχέση ισχύει για τις λύσεις $w(t)$ του συστήματος (4), (20),(21) αξιοποιώντας το Λήμμα 2.3.2 με $g(t) = v_i(t)$ και $g(t) = s_i(t)$ για $i = 1, \dots, n$. Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι $\ddot{s}_i(t)$ και $\dot{F}_i(t)$ είναι φραγμένα.

Αρχικά, εκμεταλευόμενοι το γεγονός ότι $v_i(t) \in (0, v_{max})$, $s_i(t) \in (-\Theta, \Theta)$, $r_i(t) \in (R_{in}, R_{out})$ για κάθε $t \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ και εξαιτίας της συνέχειας των συναρτήσεων g_k , $k = 1, 2$ θα δείξουμε ότι $\dot{F}_i(t)$ είναι φραγμένη για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Προφανώς ισχύουν τα παρακάτω

$$\left| g_1' \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) \right) \right| \leq \max_{x \in [0, \frac{v_{max}}{R_{in}}]} (g_1'(x)), \quad \text{για } i = 1, \dots, n \text{ και } t \geq 0 \quad (88)$$

$$|g_2'(\sin(s_i(t)))| \leq \max_{x \in [-1, 1]} (g_2'(x)) \quad \text{για } i = 1, \dots, n \text{ και } t \geq 0. \quad (89)$$

Ορίζουμε επίσης τις μη αύξουσες συναρτήσεις

$$\bar{\kappa}_{i,j}(s) := \max\{|\kappa'_{i,j}(d)| : s \leq d \leq \lambda\} \quad \text{για } s \in (L_{i,j}, \lambda], \quad i, j = 1, \dots, n, \quad j \neq i \quad (90)$$

όπου τα $\kappa'_{i,j}$ είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων $\kappa_{i,j}$ που ικανοποιούν τις σχέσεις (14), (15). Από τον συνδυασμό των (15), (78) και (90) παίρνουμε

$$\begin{aligned} d_{i,j}(t) \geq \rho_{i,j}(H(w_0)) &\implies \kappa'_{i,j}(d_{i,j}(t)) \leq \kappa_{i,j}(\rho_{i,j}(H(w_0))) \implies \\ |\kappa'_{i,j}(d_{i,j}(t))| &\leq \bar{\kappa}_{i,j}(\rho_{i,j}(H(w_0))). \end{aligned} \quad (91)$$

Παρατηρούμε ότι εξαιτίας των (78), τις φραγμένες συναρτήσεις $\dot{r}_i(t), \dot{\phi}_i(t)$ για $i = 1, \dots, n$ και τον ορισμό (7)

$$d_{i,j} = \sqrt{p_{i,j}(r_i - r_j)^2 + 2r_i r_j (1 - \cos(\phi_i - \phi_j))} \quad \text{για } i, j = 1, \dots, n$$

έχουμε ότι

$$\dot{d}_{i,j} = \frac{1}{2d_{i,j}} \left(2p_{i,j}(r_i - r_j)\dot{r}_i + 2r_j(1 - \cos(\phi_i - \phi_j))\dot{r}_i + 2r_i r_j \sin(\phi_i - \phi_j)\dot{\phi}_i \right)$$

γνωρίζουμε ότι η απόσταση ($d_{i,j}$) στον δακτύλιο δρόμο είναι φραγμένη άρα $\dot{d}_{i,j}(t)$ είναι φραγμένη. Επιπλέον παρατηρούμε ότι εφόσον ισχύουν οι $d_{i,j}(t) > L_{i,j}$ δηλαδή τα $d_{i,j}$ παίρνουν τιμές σε ένα συμπαγή και φραγμένο σύνολο και οι συναρτήσεις $V_{i,j}, U_i$ είναι C^2 συναρτήσεις έχουμε ότι $V'_{i,j}(d_{i,j}(t)), V''_{i,j}(d_{i,j}(t))$ είναι φραγμένα για όλα τα $i, j = 1, \dots, n$ με $j \neq i$.

Εξαιτίας των (78), των φραγμένων συναρτήσεων $V'_{i,j}(d_{i,j}(t)), V''_{i,j}(d_{i,j}(t)), \dot{d}_{i,j}(t)$, των ορισμών (25), (26) και τις ανισότητες (65), (91) συμπαίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\Phi_i(w) - G_i(w)| \leq & \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i(R_{out}^2 + 2v_{max})}{\omega^* \min_{j \neq i}(L_{i,j})} \max_{j \neq i} (p_{i,j} B_{i,j}(\rho_{i,j}(H(w(t)))) \right) \\ & + \frac{m_i}{\omega^*} \max_{j \neq i} \left\{ c_{i,j}(\rho_{i,j}(H(w(t)))) \left(g_1\left(\frac{v_{max}}{R_{in}}\right) - g_1(0) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $\nabla H(w(t))\dot{w}(t)$ είναι φραγμένο άρα και $\frac{d}{dt} |\Phi_i(w) - G_i(w)|$ είναι φραγμένο.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το $\frac{d}{dt} (k_i(w(t)))$ είναι φραγμένο.

Έχουμε από τον ορισμό (22)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (k_i(w(t))) = & \frac{d}{dt} (\Phi_i(w(t)) - G_i(w(t))) + f' \left(-\frac{v_{max} \cos(s_i(t))}{v_{max} \cos(s_i(t)) - r_i(t)\omega^*} (\Phi_i(w(t)) - G_i(w(t))) \right) \\ & \cdot \frac{d}{dt} \left(-\frac{v_{max} \cos(s_i(t))}{v_{max} \cos(s_i(t)) - r_i(t)\omega^*} (\Phi_i(w(t)) - G_i(w(t))) \right). \quad (92) \end{aligned}$$

Η σχέση (92) σε συνδυασμό με τις (67), (70), (78), το γεγονός ότι $\frac{d}{dt} |\Phi_i(w) - G_i(w)|$ είναι φραγμένο και την ανισότητα όπως πηγάζει από την (19) μας εξασφαλίζει ότι

$$\begin{aligned} & \left| f' \left(-\frac{v_{max} \cos(s_i(t))}{v_{max} \cos(s_i(t)) - r_i(t)\omega^*} (\Phi_i(w(t)) - G_i(w(t))) \right) \right| \\ & \leq \max \left(|f'(z)| : |z| \leq \frac{v_{max}(A + (1 - \cos(\Theta)))H(w_0)J(H(w_0))}{A(v_{max} - R_{out}\omega^*) + (v_{max} \cos(\Theta) - R_{out}\omega^*)(1 - \cos(\Theta))H(w_0)} \right). \end{aligned}$$

Με αυτόν τον τρόπο συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (k_i(w(t))) = & \frac{d}{dt} (\Phi_i(w(t)) - G_i(w(t))) \\ & + \frac{d}{dt} \left(f \left(-\frac{v_{max} \cos(s_i(t))}{v_{max} \cos(s_i(t)) - r_i(t)\omega^*} (\Phi_i(w(t)) - G_i(w(t))) \right) \right) \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, n$ είναι φραγμένο.

Τελικά χρησιμοποιώντας τις ανισότητες (67), (78), (79), (82), το γεγονός ότι τα

$\dot{r}_i(t)$, $\dot{s}_i(t)$, $\frac{d}{dt}(\Phi_i(w(t)) - G_i(w(t)))$, $\frac{d}{dt}(k_i(w(t)))$ είναι φραγμένα και την εξίσωση

$$\begin{aligned} \dot{F}_i(t) = & -\frac{d}{dt}(k_i(w(t)))\left(v_i(t) - \frac{r_i(t)\omega^*}{\cos(s_i(t))}\right) - k_i(w(t))\frac{d}{dt}\left(v_i(t) - \frac{r_i(t)\omega^*}{\cos(s_i(t))}\right) \\ & - \frac{d}{dt}\left(\frac{r_i(t)\omega^*}{\cos(s_i(t))}\right)(\Phi_i(w(t)) - G_i(w(t))) - \frac{r_i(t)\omega^*}{\cos(s_i(t))}\frac{d}{dt}(\Phi_i(w(t)) - G_i(w(t))) \end{aligned}$$

καταλήγουμε στο ότι $\dot{F}_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ είναι φραγμένο.

Θα αποδείξουμε, έπειτα, ότι το $\ddot{s}_i(t)$ είναι φραγμένο για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Εφόσον γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις των $\dot{r}_i(t)$, $\dot{v}_i(t)$, $\dot{s}_i(t)$, $\tan(\delta_i(t))$, $i = 1, \dots, n$ είναι

φραγμένες, το σύστημα (4), τον ορισμό του $\delta_i(t)$ (21), τις πληροφορίες για τα

$v_i(t) \in (0, v_{max})$, $r_i(t) \in (R_{in}, R_{out})$, $s_i(t) \in (-\Theta, \Theta)$, $i = 1, \dots, n$, τις ανισότητες (78) και την σχέση

$$\ddot{s}_i(t) = \frac{\dot{v}_i(t)}{\sigma_i} \tan(\delta_i(t)) + \frac{v_i(t)}{\sigma_i} \frac{d}{dt}(\tan(\delta_i(t))) - \frac{d}{dt}\left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t))\right) \quad (93)$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tan(\delta_i(t))) = & \frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma_i}{r_i(t)} \cos(s_i(t))\right) \\ & - \frac{\sigma_i}{a(r_i(t), s_i(t), v_i(t))v_i(t)}\left(\mu_2 \sin(s_i(t)) - (bF_i(t) \sin(s_i(t)) + \Lambda_i(w(t)))v_i(t) - M_i(w(t))\right) \end{aligned} \quad (94)$$

είναι φραγμένη για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Φαίνεται από το σύστημα (4) και τις σχέσεις (23), (78), (82) ότι ο όρος

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma_i}{r_i(t)} \cos(s_i(t))\right) &= \frac{\sigma_i \sin(s_i(t))r_i(t)\dot{s}_i(t) - \sigma_i \cos(s_i(t))\dot{r}_i(t)}{(r_i(t))^2} \\ &\leq \frac{\sigma_i \dot{s}_i(t)R_{out} + \sigma_i \dot{r}_i(t)}{R_{in}^2} \end{aligned}$$

είναι φραγμένος αφού όλοι οι όροι είναι φραγμένοι όπως έχουμε αποδείξει.

Έπειτα, παρατηρούμε ότι ο όρος

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma_i}{a(r_i(t), s_i(t), v_i(t))v_i(t)}\right) &= \frac{-\sigma_i}{(a(r_i(t), s_i(t), v_i(t))v_i(t))^2} \frac{d}{dt}\left\{a(r_i(t), s_i(t), v_i(t))v_i(t)\right\} \\ &- \frac{\sigma_i}{(a(r_i(t), s_i(t), v_i(t))v_i(t))^2} \left\{\frac{d}{dt}a(r_i(t), s_i(t), v_i(t)) + \dot{v}_i(t)a(r_i(t), s_i(t), v_i(t))\right\} \end{aligned}$$

από την σχέση (22)

$$\begin{aligned} = & -\frac{\sigma_i}{(a(r_i(t), s_i(t), v_i(t))v_i(t))^2} \left\{\left(b + \frac{1}{r_i^3(t)}\dot{r}_i(t)\right)v_i^2(t) \cos(s_i(t)) + \left(b - \frac{1}{r_i^2(t)}\right)2v_i(t)\dot{v}_i(t) \cos(s_i(t))\right. \\ & \left.+ \left(b - \frac{1}{r_i^2(t)}\right)v_i^2(t) \sin(s_i(t))\dot{s}_i(t) + \frac{\omega^*\dot{v}_i(t)}{r_i(t)} - \frac{\omega^*v_i(t)\dot{r}_i(t)}{r_i^2(t)} - \frac{2A \sin(s_i(t))\dot{s}_i(t)}{(\cos(s_i(t)) - \cos(\Theta))^3}\right\} \end{aligned}$$

αποτελείται από εξίσου φραγμένους όρους άρα είναι φραγμένος. Τελικά και ο όρος της σχέσης (94)

$$\frac{d}{dt}(\sin(s_i(t))) = \cos(s_i(t))\dot{s}_i(t) \leq \dot{s}_i(t)$$

είναι επίσης φραγμένος.

Επιπλέον εξαιτίας των (11) και (78) έχουμε ότι $U'_i(r_i(t))$, $U''_i(r_i(t))$, $V'_{i,j}(d_{i,j}(t))$ και $V''_{i,j}(d_{i,j}(t))$ είναι φραγμένα για κάθε $i, j = 1, \dots, n$ $j \neq i$. Οι ορισμοί (24), (25), (27), το γεγονός ότι η $\dot{d}_{i,j}(t)$ είναι φραγμένη και οι ανισότητες (78), (7.3) και (91) συνεπάγονται ότι τα $\frac{d}{dt}(\Lambda_i(w(t)))$ και $\frac{d}{dt}(M_i(w(t)))$ είναι φραγμένα, διότι όπως φαίνεται παρακάτω όλοι οι όροι που τα αποτελούν είναι φραγμένοι, πιο αναλυτικά

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Lambda_i(w(t))) &= \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right) \frac{v_i(t)}{r_i^2(t)} \cos(s_i(t)) \right\} \\ &\quad - \frac{d}{dt} \left(U'_i(r_i(t)) \right) - \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{j \neq i} \left(p_{i,j}(r_i - r_j) + r_j(1 - \cos(\phi_i - \phi_j)) \right) \frac{V'_{i,j}(d_{i,j})}{d_{i,j}} \right\} \\ \frac{d}{dt}(M_i(w(t))) &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{j \neq i} \kappa_{i,j}(d_{i,j})(g_2(\sin(s_j(t))) - g_2(\sin(s_i(t)))) \right\}. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, την (94) $\frac{d}{dt}(\tan(\delta_i(t)))$, ότι η \dot{F}_i είναι φραγμένη και με χρήση των ανισοτήτων (83), (84), (85) καταλήγουμε ότι $\ddot{s}_i(t)$ είναι φραγμένη για κάθε $i = 1, \dots, n$. Η απόδειξη μας ολοκληρώθηκε. \square

7.4 Απόδειξη Θεωρήματος 4.2

Απόδειξη. Έστω $w_0 \in \Omega$ και θεωρούμε την μοναδική λύση $w(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (4), (31), (32) με $w(0) = w_0$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το σύνολο Ω είναι ανοιχτό καταλήγουμε ότι υπάρχει $t_{max} \in (0, +\infty]$ για το οποίο η λύση $w(t)$ του (4), (31), (32) ορίζεται στο $[0, t_{max})$ και ικανοποιεί ότι $w(t) \in \Omega$ για κάθε $t \in [0, t_{max})$. Επιπλέον, αν $t_{max} < +\infty$ τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία χρόνων $\{t_i \in [0, t_{max}) : i = 1, \dots\}$ με $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = t_{max}$ και τότε είτε $\lim_{t_i \rightarrow t_{max}} \left(\text{dist}(w(t_i), \partial\Omega) \right) = 0$ είτε $\lim_{t_i \rightarrow t_{max}} |w(t_i)| = +\infty$.

Χρησιμοποιώντας τα (4), (7) και (28), τους ορισμούς (25), (33), (34), (35) και (36) έχουμε ότι για

$\chi \acute{\alpha} \theta \varepsilon \ w \in \Omega$

$$\begin{aligned}
\nabla H(w)\dot{w} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right)^2 + bv_i^2 \sin^2(s_i)}{(v_{max} - v_i)v_i} + \sum_{i=1}^n U_i(r_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_{i,j}(d_{i,j}) \right. \\
&\quad \left. + A \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\cos(s_i) - \cos(\Theta)} - \frac{1}{1 - \cos(\Theta)} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{2 \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) \dot{v}_i (v_{max} - v_i) v_i \cos(s_i)}{(v_{max} - v_i)^2 v_i^2} - \frac{\left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right)^2 \dot{v}_i (v_{max} - 2v_i)}{(v_{max} - v_i)^2 v_i^2} \right. \\
&\quad - 2 \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) \frac{v_i \cos(s_i)}{r_i^2} \dot{r}_i \frac{1}{(v_{max} - v_i)v_i} \\
&\quad \left. - 2 \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) \frac{v_i \sin(s_i)}{r_i} \dot{s}_i \frac{1}{(v_{max} - v_i)v_i} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2bv_i^2 \sin^2(s_i) \dot{v}_i (v_{max} - v_i) - bv_i^2 \sin^2(s_i) \dot{v}_i (v_{max} - 2v_i)}{(v_{max} - v_i)^2 v_i^2} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{bv_i^2 \sin(s_i) \cos(s_i) \dot{s}_i}{(v_{max} - v_i)v_i} + \sum_{i=1}^n U'_i(r_i) \dot{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} V'_{i,j}(d_{i,j}) \dot{d}_{i,j} \\
&\quad - A \sum_{i=1}^n \frac{\dot{s}_i \sin(s_i)}{(\cos(s_i) - \cos(\Theta))^2} \implies
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla H(w)\dot{w} &= \sum_{i=1}^n \dot{s}_i \sin(s_i) \left(\frac{-A}{(\cos(s_i) - \cos(\Theta))^2} + \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) \frac{1}{r_i(v_{max} - v_i)} + \frac{bv_i \cos(s_i)}{v_{max} - v_i} \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \dot{r}_i \left(\left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) \frac{\cos(s_i)}{r_i^2(v_{max} - v_i)} - U'_i(r_i) \right) \\
&\quad - \sum_{j \neq i} \left(p_{i,j}(r_j - r_i) + r_j(1 - \cos(\phi_i - \phi_j)) \right) \frac{V'_{i,j}(d_{i,j})}{d_{i,j}} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \dot{v}_i \sin(s_i) \left\{ \frac{b \sin(s_i)(v_{max} - v_i) - \frac{1}{2} b \sin(s_i)(v_{max} - 2v_i)}{(v_{max} - v_i)^2} \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \dot{v}_i \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) \left\{ \frac{\frac{\cos(s_i)}{r_i}(v_{max} - v_i)v_i - \frac{1}{2} \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) (v_{max} - 2v_i)}{(v_{max} - v_i)^2 v_i^2} \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n v_i \cos(s_i) \sum_{j \neq i} \frac{v'_{i,j}(d_{i,j})}{d_{i,j}} r_j \sin(\phi_i - \phi_j) \pm \omega^* \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{v'_{i,j}(d_{i,j})}{d_{i,j}} r_i r_j \sin(\phi_i - \phi_j) \implies
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla H(w)\dot{w} &= \sum_{i=1}^n \gamma(r_i, s_i, v_i) \dot{s}_i \sin(s_i) + \sum_{i=1}^n \left(\dot{v}_i \zeta(s_i, v_i) + Z_i(w) \right) v_i \sin(s_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left(\dot{v}_i q(r_i, s_i, v_i) + \omega^* \Phi_i(w) \right) \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) + \omega^* \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} V'_{i,j}(d_{i,j}) \frac{r_i r_j \sin(\phi_i - \phi_j)}{d_{i,j}}.
\end{aligned}$$

(95)

Επιπλέον εξαιτίας των (7) και (12) έχουμε ότι $\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} V'_{i,j}(d_{i,j}) \frac{r_i r_j \sin(\phi_i - \phi_j)}{d_{i,j}} = 0$, άρα και $\Phi_i(w) = 0$.

Ο συνδυασμός των σχέσεων (26), (27), (31), (32), της παραπάνω σχέσης (95) και το γεγονός ότι οι συναρτήσεις g_k , $k = 1, 2$ είναι μη φθίνουσες καταλήγουμε στην παρακάτω ανισότητα

$$\begin{aligned}
\nabla H(w)\dot{w} &= \sum_{i=1}^n \gamma(r_i, s_i, v_i) \sin(s_i) \left(\frac{v_i}{\sigma_i} \left\{ \frac{\sigma_i}{r_i} \cos(s_i) - \frac{\sigma_i}{\gamma(r_i, s_i, v_i) v_i} \left(f_2(\sin(s_i)) - (\zeta(s_i, v_i) F_i \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + Z_i(w) v_i - M_i(w) \right) \right\} - \frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) \right) + \sum_{i=1}^n \left(F_i \zeta(s_i, v_i) v_i \sin(s_i) + Z_i(w) v_i \sin(s_i) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n -\frac{1}{q(r_i, s_i, v_i)} \left(f_1 \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) + \omega^* (-G_i(w)) \right) q(r_i, s_i, v_i) \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) \implies \\
\nabla H(w)\dot{w} &= -\sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) f_1 \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) - \sum_{i=1}^n \sin(s_i) f_2(\sin(s_i)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sin(s_i) \kappa_{i,j}(d_{i,j}) (g_2(\sin(s_j)) - g_2(\sin(s_i))) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) \kappa_{i,j}(d_{i,j}) \left(g_1 \left(\frac{v_j}{r_j} \cos(s_j) \right) - g_1 \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) \right) \right) \implies \\
\nabla H(w)\dot{w} &= -\sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) f_1 \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) - \sum_{i=1}^n \sin(s_i) f_2(\sin(s_i)) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \left(\sin(s_j) - \sin(s_i) \right) \kappa_{i,j}(d_{i,j}) (g_2(\sin(s_j)) - g_2(\sin(s_i))) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \left(\frac{v_j}{r_j} \cos(s_j) - \frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) \right) \kappa_{i,j}(d_{i,j}) \left(g_1 \left(\frac{v_j}{r_j} \cos(s_j) \right) - g_1 \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) \right) \right) \\
&\leq -\sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) f_1 \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) - \sum_{i=1}^n \sin(s_i) f_2(\sin(s_i))
\end{aligned} \tag{96}$$

Συνεπάγεται από την (30) και (96) ότι

$$\nabla H(w)\dot{w} \leq 0 \quad \text{για κάθε } w \in \Omega. \tag{97}$$

Εφόσον $w(t) \in \Omega$ για κάθε $t \in [0, t_{max})$, από τις (5), (9) προκύπτει ότι

$$v_i(t) \in (0, v_{max}), \quad s_i(t) \in (-\Theta, \Theta) \quad r_i(t) \in (R_{in}, R_{out}) \quad \text{για κάθε } t \in [0, t_{max}) \text{ και } i = 1, \dots, n.$$

Συνεπώς από το σύστημα (4) συνεπάγεται για το $\phi_i(t)$ το εξής :

$$0 \leq \dot{\phi}_i(t) \leq \frac{v_{max}}{R_{in}}$$

για κάθε $t \in [0, t_{max})$ και $i = 1, \dots, n$. Επιπλέον η ανισότητα (97) μας εξασφαλίζει ότι

$$H_R(w(t)) \leq H_R(w_0), \quad \text{για κάθε } t \in [0, t_{max}). \tag{98}$$

Επομένως, από την σχέση (98) και το Λήμμα 4.3.1 έχουμε τα παρακάτω συμπεράσματα :

Γνωρίζουμε ότι οι $\eta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\xi_i, R_{out}), \omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \Theta), \psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\bar{v}, v_{max})$

είναι μη φθίνουσες συνάρτησεις άρα $\eta_i(H_R(w(t))) \leq \eta_i(H(w_0)) < R_{out}, \quad \omega(H_R(w(t))) \leq \omega(H(w_0)),$
 $\psi(H_R(w(t))) \leq \psi(H_R(w_0)).$

Γνωρίζουμε ότι οι $\zeta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow (R_{in}, \xi_i], l : \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \bar{v}]$ είναι μη αύξουσες συνάρτησεις άρα

$\zeta_i(H_R(w(t))) \geq \zeta_i(H_R(w_0)), \quad l(H_R(w(t))) \geq l(H_R(w_0)).$

Σύμφωνα με τα παραπάνω και την ανίσωση (29) παίρνουμε τις ακόλουθες ανισότητες

$$\begin{aligned} \zeta_i(H_R(w_0)) &\leq r_i(t) \leq \eta_i(H_R(w_0)) \\ l(H_R(w_0)) &\leq v_i(t) \leq \psi(H_R(w_0)), \quad |s_i(t)| \leq \omega(H_R(w_0)), \\ \phi_i(0) &\leq \phi_i(t) \leq \phi_i(0) + \frac{v_{max}}{R_{in}}t \quad d_{i,j}(t) \geq \rho_{i,j}(H_R(w_0)) > L_{i,j} \end{aligned} \quad (99)$$

από την οποία επάγεται ότι για κάθε αύξουσα ακολουθία χρόνων $\{t_i \in [0, t_{max}) : i = 1, \dots\}$ με $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = t_{max}$ δεν μπορούμε να έχουμε καμία από τις δύο περιπτώσεις :

- $\lim_{t_i \rightarrow t_{max}} dist(w(t_i), \partial\Omega) = 0$ με $\partial\Omega = \left\{ w \in \mathbb{R}^{4n} : r_i = R_{in}, \quad \text{είτε } r_i = R_{out}, \quad \text{είτε } |s_i| = \Theta, \quad \text{είτε } v_i = 0, \quad \text{είτε } v_i = v_{max}, \quad \text{είτε } d_{i,j} = L_{i,j} \right\}$ διότι από την σχέση (99) έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} d_{i,j} &> L_{i,j} \\ R_{in} &< \zeta_i(H_R(w_0)) \leq r_i(t) \leq \eta_i(H_R(w_0)) < R_{out} \\ |s_i| &\leq \omega(H_R(w_0)) < \Theta \\ 0 &< l(H_R(w_0)) \leq v_i(t) \leq \psi_i(H_R(w_0)) \end{aligned}$$

- $\lim_{t \rightarrow t_{max}} |w_i(t)| = \infty$ όμως $\phi_i(t)$ είναι φραγμένο και σύμφωνα με τα παραπάνω κανένας όρος του $w(t)$ δεν απειρίζεται.

Τελικά, αποδείξαμε ότι $t_{max} = +\infty$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι σχέσεις (40), (21) ισχύουν. Όμοια με την (65) και χρησιμοποιώντας

την (99) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& \max \left(\frac{r_i}{\omega^*} \left| \sum_{j \neq i} V'_{i,j}(d_{i,j}) \frac{r_j \sin(\phi_i - \phi_j)}{d_{i,j}} \right|, \left| \sum_{j \neq i} \left(p_{i,j}(r_i - r_j) + r_j(1 - \cos(\phi_i - \phi_j)) \right) \frac{V'_{i,j}(d_{i,j})}{d_{i,j}} \right| \right) \\
& \leq \frac{R_{out}^2 + 2v_{max}}{\omega^* \bar{L}_i} \sum_{j \neq i} p_{i,j} B_{i,j} \left(\rho_{i,j}(H(w)) \right) \\
& \leq \frac{m_i(R_{out}^2 + 2v_{max})}{\omega^* \bar{L}_i} \max_{j \neq i} \left(p_{i,j} B_{i,j}(\rho_{i,j}(H(w))) \right)
\end{aligned} \tag{100}$$

όπου $\bar{L}_i = \min_{j \neq i} (L_{i,j})$. Επιπροσθέτως, εξαιτίας των (15), (62) και (99) ισχύει ότι

$$\sum_{j \neq i} \kappa_{i,j}(d_{i,j}) \leq m_i \max_{j \neq i} \left(c_{i,j}(\rho_{i,j}(H_R(w))) \right). \tag{101}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι εξαιτίας της (6) και του γεγονός ότι

$v_i \in (0, v_{max})$, $r_i \in (R_{in}, R_{out})$, $\cos(s_i) > \cos(\Theta)$, $s_i \in (-\Theta, \Theta)$, $\Theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $i = 1, \dots, n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& \cos(s_i) > \cos(\Theta) > \frac{R_{out}\omega^*}{v_{max}} > \frac{R_{in}\omega^*}{v_{max}} \\
& v_{max}v_i \cos(s_i) - 2r_iv_i\omega^* + r_i\omega^*v_{max} > R_{in}v_i\omega^* - 2R_{in}v_i\omega^* + R_{in}\omega^*v_{max} = R_{in}\omega^*(v_{max} - v_i) \implies \\
& v_{max}v_i \cos(s_i) - 2r_iv_i\omega^* + r_i\omega^*v_{max} > R_{in}\omega^*(v_{max} - v_i).
\end{aligned} \tag{102}$$

Η ανισότητα (102), ο ορισμός (33) και με $v \in (0, v_{max})$, $r \in (R_{in}, R_{out})$, $s \in (-\Theta, \Theta)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q(r, s, v)} &= \frac{2r(v_{max} - v)^2 v^2}{(v_{max}v \cos(s) - 2rv\omega^* + r\omega^*v_{max})} \\
&\leq \frac{2r(v_{max} - v)^2 v^2}{(v_{max} - v_i)R_{in}\omega^*} = \frac{2rv^2(v_{max} - v)}{R_{in}\omega^*} \\
\frac{1}{q(r, s, v)} &\leq \frac{2R_{out}v_{max}^3}{R_{in}\omega^*}
\end{aligned} \tag{103}$$

Ακόμη, από την (34), την ανισότητα $b > \frac{1}{R_{in}^2}$ και την (99), έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\begin{aligned}
\gamma(r, s, v) &= \frac{A(v_{max} - v)^2 r + v \cos(s) \left(b - \frac{1}{r^2} \right) (r(v_{max} - v)(\cos(s) - \cos(\Theta)))^2}{(\cos(s) - \cos(\Theta))^2 (v_{max} - v)^2 r} \\
&+ \frac{\omega^* (\cos(s) - \cos(\Theta))^2 (v_{max} - v)}{(\cos(s) - \cos(\Theta))^2 (v_{max} - v)^2 r} \implies \\
\gamma(r, s, v) &= \frac{A(v_{max} - v)r + v \cos(s) \left(b - \frac{1}{r^2} \right) r (\cos(s) - \cos(\Theta))^2 + \omega^* (\cos(s) - \cos(\Theta))^2}{(\cos(s) - \cos(\Theta))^2 r (v_{max} - v)} \implies \\
\frac{1}{\gamma(r, s, v)} &= \frac{1}{A(v_{max} - v)r + v \cos(s) \left(b - \frac{1}{r^2} \right) r (\cos(s) - \cos(\Theta))^2 + \omega^* (\cos(s) - \cos(\Theta))^2} \implies \\
\frac{1}{\gamma(r, s, v)} &\leq \frac{(1 - \cos(\theta))^2 (v_{max} - v)r}{A(v_{max} - v)r + \omega^* (\cos(s) - \cos(\Theta))^2} \implies
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\gamma(r, s, v)} \leq \frac{(1 - \cos(\Theta))^2}{A} \quad (104)$$

Χρησιμοποιώντας τις (35), (99) και το γεγονός ότι η l είναι μη φθίνουσα συνάρτηση και ότι η ψ είναι μη αύξουσα προκύπτει η παρακάτω εκτίμηση

$$\begin{aligned} \zeta(s_i(t), v_i(t)) &= \frac{bv_{max} \sin(s_i(t))}{2(v_{max} - v_i(t))^2 v_i(t)} \leq \frac{bv_{max}}{2(v_{max} - v_i(t))^2 v_i(t)} \\ \zeta(s_i(t), v_i(t)) &\leq \frac{bv_{max}}{2(v_{max} - \psi(H_R(w_0)))^2 l(H_R(w_0))}. \end{aligned} \quad (105)$$

Φαίνεται παρακάτω ότι λόγω της συνέχειας των f_k , $k = 1, 2$ και το γεγονός ότι

$$v_i \in (0, v_{max}), \quad r_i \in (R_{in}, R_{out}), \quad \cos(s_i) > \cos(\Theta), \quad s_i \in (-\Theta, \Theta), \quad \Theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\left| f_1\left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^*\right) \right| \leq \xi_1 := \max_{x \in [-\omega^*, \frac{v_{max}}{R_{in}} - \omega^*]} |f_1(x)|, \quad \text{για } i = 1, \dots, n, \quad t \geq 0 \quad (106)$$

$$|f_2(\sin(s_i(t)))| \leq \xi_2 := \max_{x \in [-1, 1]} |f_2(x)|, \quad \text{για } i = 1, \dots, n, \quad t \geq 0. \quad (107)$$

Από τις (31), (103), (106) και ανάλογα επιχειρήματα όπως στην (67) καταλήγουμε στην ακόλουθη εκτίμηση για $i = 1, \dots, n$ και $t \geq 0$

$$\begin{aligned} |F_i(t)| &= \left| \frac{1}{q(r_i(t), s_i(t), v_i(t))} \left(f_1\left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^*\right) + \omega^*(\Phi_i(w(t)) - G_i(w(t))) \right) \right| \\ |F_i(t)| &\leq \frac{2R_{out}v_{max}^3}{R_{in}\omega^*} \left(\xi_1 + \frac{m_i(R_{out}^2 + 2v_{max})}{\min_{j \neq i} L_{i,j}} \max_{j \neq i} \left(p_{i,j} B_{i,j}(\rho_{i,j}(H_R(w))) \right) \right) \\ &\quad + m_i \max_{j \neq i} \left\{ c_{i,j}(\rho_{i,j}(H_R(w))) \left(g_1\left(\frac{v_{max}}{R_{in}}\right) - g_1(0) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (108)$$

Η ανισότητα (42) είναι μια άμεση συνέπεια της (7.4), ορίζοντας $P_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ όπως παρακάτω

$$\begin{aligned} P_2(s) &= \max_{i=1, \dots, n} \left(\frac{2R_{out}v_{max}^3}{R_{in}\omega^*} \left(\xi_1 + \frac{m_i(R_{out}^2 + 2v_{max})}{\min_{j \neq i} L_{i,j}} \max_{j \neq i} (p_{i,j} B_{i,j}(\rho_{i,j}(s))) \right) \right. \\ &\quad \left. + m_i \max_{j \neq i} \left\{ c_{i,j}(\rho_{i,j}(s)) \left(g_1\left(\frac{v_{max}}{R_{in}}\right) - g_1(0) \right) \right\} \right) + \frac{\pi}{2}, \quad s \geq 2. \end{aligned}$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι εξαιτίας των

$v_i \in (0, v_{max}), \quad r_i \in (R_{in}, R_{out}), \quad \cos(s_i) > \cos(\Theta), \quad s_i \in (-\Theta, \Theta), \quad \Theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad i = 1, \dots, n,$
των ανισοτήτων (27), (29), (36), (98), (101), (7.4), λαμβάνοντας υπό όψη μας και τους ορισμούς (63), (64) έχουμε τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} Z_i(w) &= \left(\frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) - \omega^* \right) \frac{\cos(s_i)}{(v_{max} - v_i)r_i^2} - U'_i(r_i) \\ &\quad - \sum_{j \neq i} \left(p_{i,j}(r_i - r_j) + r_j(1 - \cos(\phi_i - \phi_j)) \right) \frac{V'_{i,j}(d_{i,j})}{d_{i,j}} \implies \end{aligned}$$

$$|Z_i(w)| \leq \left(\frac{v_{max}}{R_{in}} - \omega^* \right) \frac{1}{(v_{max} - \psi(H_R(w_0))) R_{in}^2} + \max(\chi_i(\zeta_i(H_R(w_0))), \zeta_i(\eta_i(H_R(w_0)))) \\ + \frac{m_i(R_{out}^2 + 2v_{max})}{\omega^* \bar{L}_i} \max_{j \neq i} (p_{i,j} B_{i,j}(\rho_{i,j}(H_R(w_0)))) \quad (109)$$

$$|M_i(w)| = \sum_{j \neq i} \kappa_{i,j}(d_{i,j})(g_2(\sin(s_j)) - g_2(\sin(s_i))) \implies$$

$$|M_i(w)| \leq m_i \max_{j \neq i} (c_{i,j}(\rho_{i,j}(H_R(w_0))))(g_2(\sin(\Theta)) - g_2(\sin(-\Theta))). \quad (110)$$

Από τις ανισότητες (99), (104), (105), (107), (7.4), (109), (110) και τον ορισμό (32) έχουμε ότι $\tan(\delta_i(t))$ είναι φραγμένη για κάθε $i = 1, \dots, n$, αναλυτικότερα

$$\tan(\delta_i) = \frac{\sigma_i}{r_i} \cos(s_i) - \frac{\sigma_i}{\gamma(r_i, s_i, v_i) v_i} \left\{ f_2(\sin(s_i)) - (\zeta_i(s_i, v_i) F_i + Z_i(w)) v_i - M_i(w) \right\}$$

κάθε όρος της όπως φαίνεται είναι φραγμένος.

Σε συνδυασμό με το σύστημα (4) και των διαστημάτων που ορίζονται τα v_i, r_i, s_i για κάθε $i = 1, \dots, n$ έχουμε ότι τα

$$-R_{out} \sin(-\Theta) < \dot{r}_i(t) = -v_i(t) \sin(s_i(t)) < R_{in} \sin(\Theta) \\ 0 < \dot{\phi}_i(t) = \frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) < \frac{v_{max}}{R_{in}} \\ \dot{s}_i(t) = \frac{v_i}{\sigma_i} \tan(\delta_i) - \frac{v_i}{r_i} \cos(s_i) < \Delta + \frac{v_{max}}{R_{in}}, \quad \text{όπου } \Delta \text{ το φράγμα της } \frac{v_i}{\sigma_i} \tan(\delta_i).$$

Επειδή η $f_j \in C^1(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$ και των διαστημάτων που ορίζονται τα v_i, r_i, s_i για κάθε $i = 1, \dots, n$ προκύπτει επιπλέον ότι

$$\left| f_1' \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right) \right| \leq \max_{x \in [-\omega^*, \frac{v_{max}}{R_{in}} - \omega^*]} (|f_1'(x)|), \quad \text{για } i = 1, \dots, n \text{ και } t \geq 0 \quad (111)$$

$$|f_2'(\sin(s_i(t)))| \leq \max_{x \in [-1, 1]} (|f_2'(x)|) \quad \text{για } i = 1, \dots, n \text{ και } t \geq 0. \quad (112)$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν το σύστημα (4), τις σχέσεις (99), (7.4), (111), (112), και το γεγονός ότι τα $\dot{r}_i(t), \dot{s}_i(t)$ είναι φραγμένα, συμπαρένουμε ότι υπάρχει μια σταθερά $\xi > 0$ τέτοια ώστε

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right) f_1 \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right) + \sum_{i=1}^n \sin(s_i(t)) f_2(\sin(s_i(t))) \right) \leq \xi. \quad (113)$$

Τελικά, η (96) με αλλαγή προσήμων μας εξασφαλίζει ότι

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right) f_1 \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right) + \sum_{i=1}^n \sin(s_i(t)) f_2(\sin(s_i(t))) dt \leq H(w_0). \quad (114)$$

Σύμφωνα με το λήμμα Barbalat έχουμε ότι το όριο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right) f_1 \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right) + \sum_{i=1}^n \sin(s_i(t)) f_2(\sin(s_i(t)))$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο άρα

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right) f_1 \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right) + \sum_{i=1}^n \sin(s_i(t)) f_2(\sin(s_i(t))) \rightarrow 0$$

όταν $t \rightarrow \infty$.

Δηλαδή πιο αναλυτικά

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right) f_1 \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right) = 0 \implies$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right) = 0 \implies$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) - \omega^* \right) = 0 \implies$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_i(t)}{r_i(t)} \cos(s_i(t)) = \omega^*$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin(s_i(t)) f_2(\sin(s_i(t))) = 0 \implies$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin(s_i(t)) = 0 \implies$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_i(t) = 0$$

Αποδείξαμε την (40) του *Θεωρήματος 4.2*.

Τελικά θα δείξουμε ότι η (38) ισχύει για τις λύσεις $w(t)$ των (4), (31), (32) χρησιμοποιώντας το *Λήμμα 2.3.2* όταν $g(t) = v_i(t)$ και $g(t) = s_i(t)$ για $i = 1, \dots, n$.

Εφόσον ισχύει η (40) αρκεί να δείξουμε ότι $\dot{s}_i(t)$ και $\dot{F}_i(t)$ είναι φραγμένα.

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η $\dot{F}_i(t)$ είναι φραγμένη για κάθε $i = 1, \dots, n$. Παρατηρούμε ότι εξαιτίας της (99), το γεγονός ότι τα $\dot{r}_i(t)$, $\dot{\phi}_i(t)$ είναι φραγμένα για $i = 1, \dots, n$ και από τον ορισμό (7) έπεται ότι

$$\dot{d}_{i,j} = \frac{1}{2d_{i,j}} \left(2p_{i,j}(r_i - r_j)\dot{r}_i + 2r_j(1 - \cos(\phi_i - \phi_j))\dot{r}_i + 2r_i r_j \sin(\phi_i - \phi_j)\dot{\phi}_i \right)$$

γνωρίζουμε ότι η απόσταση $(d_{i,j})$ στον δακτύλιο δρόμο είναι φραγμένη άρα $\dot{d}_{i,j}(t)$ είναι φραγμένη.

Επιπροσθέτως παρατηρούμε ότι εφόσον η (11) και η (99) ισχύουν συνεπάγεται ότι

$V'_{i,j}(d_{i,j})$, $V''_{i,j}(d_{i,j})$ είναι φραγμένα για κάθε $i, j = 1, \dots, n$ με $j \neq i$. Επιπλέον από τις (15), (90), (98) και (99) έχουμε ότι

$$|\kappa'(d_{i,j}(t))| \leq \bar{\kappa}_{i,j}(\rho_{i,j}(H_R(w_0))), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (115)$$

Εξαιτίας της (99), των φραγμένων συναρτήσεων $V'_{i,j}(d_{i,j})$, $V''_{i,j}(d_{i,j})$ και $\dot{d}_{i,j}$, των ορισμών (25), (26) και τις ανισότητες (100), (115) έπεται ότι $\frac{d}{dt}(\Phi_i(w(t)) - G_i(w(t)))$ είναι φραγμένο για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Στη συνέχεια εξετάζοντας τον όρο $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q(r_i(t), s_i(t), v_i(t))}\right)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q(r_i(t), s_i(t), v_i(t))}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2r_i(t)(v_{max} - v_i(t))^2 v_i^2(t)}{v_{max} v_i(t) \cos(s_i(t)) - 2r_i(t)v_i(t)\omega^* + r_i(t)\omega^* v_{max}}\right)$$

παρατηρούμε ότι είναι φραγμένος για κάθε $i = 1, \dots, n$ λόγω των (99), των φραγμένων συναρτήσεων $\dot{s}_i(t)$, $\dot{r}_i(t)$, $|F_i(t)|$. Καταλήγοντας, η συνάρτηση $\dot{F}_i(t)$ είναι φραγμένη και έρχεται ως άμεση συνέπεια των (31), (99), (103), (106), (111) και των φραγμένων $\Phi_i(w) - G_i(w)$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q(r_i(t), s_i(t), v_i(t))}\right), \text{ και } \frac{d}{dt}(\Phi_i(w(t)) - G_i(w(t))) \text{ για } i = 1, \dots, n.$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το $\ddot{s}_i(t)$ είναι φραγμένο για κάθε $i = 1, \dots, n$. Οι φραγμένες συναρτήσεις $\dot{r}_i(t)$, $\dot{v}_i(t)$, $\dot{s}_i(t)$, $\tan(\delta_i(t))$, $i = 1, \dots, n$, το σύστημα (4) και η σχέση (93) μας αρκεί για να δείξουμε ότι η παρακάτω σχέση είναι φραγμένη για κάθε $i = 1, \dots, n$ ώστε να πετύχουμε το ολοκληρωτικό φράξιμο της $\ddot{s}_i(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma_i}{r_i(t)} \cos(s_i) - \frac{\sigma_i}{\gamma(r_i, s_i, v_i)v_i} \left(f_2(\sin(s_i)) - (\zeta_i(s_i, v_i)F_i + Z_i(w))v_i - M_i(w)\right)\right). \quad (116)$$

Ουσιαστικά, οι φραγμένοι όροι

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma_i}{r_i(t) \cos(s_i(t))}\right)$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma_i}{\gamma(r_i(t), s_i(t), v_i(t))v_i(t)}\right)$, $\frac{d}{dt}(f_2(\sin(s_i(t))))$, $\frac{d}{dt}(\zeta_i(s_i(t), v_i(t)))$ είναι αποτέλεσμα του συστήματος (4) και των σχέσεων (33), (34), (35), (99), (7.4), (112) και του γεγονός ότι $v_i(t) \in (0, v_{max})$, $s_i(t) \in (-\Theta, \Theta)$, $r_i(t) \in (R_{in}, R_{out})$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Επιπλέον εξαιτίας των (11) και (99) έχουμε ότι $U'_i(r_i(t))$, $U''_i(r_i(t))$ είναι φραγμένα για κάθε $i = 1, \dots, n$, $j \neq i$.

Οι ορισμοί (27), (36), η φραγμένη $\dot{d}_{i,j}(t)$ και οι ανισότητες (7.3), (91), (99) συνεπάγονται ότι

$$\frac{d}{dt}(Z_i(w(t))) \text{ και } \frac{d}{dt}(M_i(w(t))) \text{ είναι φραγμένες.}$$

Συνοψίζοντας, καταλήγουμε ότι λόγω όλων των προαναφερθέντων φραξιμάτων συνεπάγεται ότι και η σχέση (116) είναι επίσης φραγμένη για κάθε $i = 1, \dots, n$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

8 Κεφάλαιο

Ηθική προέκταση στον τρόπο λήψεως αποφάσεων κατά την αυτόνομη οδήγηση

Τα αυτόνομα οχήματα έχουν καταβάλει μόνιμη θέση στη σύγχρονη βιομηχανία, όχι όμως και η πλήρη αυτονόμησή τους. Πιο συγκεκριμένα η δημιουργία και ανάπτυξη οχημάτων που θα κινούνται χωρίς ανθρώπινη παρέμβαση θεωρείται ότι θα περιορίσει από την μια πλευρά τα αυτοκινητιστικά ατυχήματα, τα οποία προκαλούν σημαντικό αριθμό ανθρώπινων απωλειών και σοβαρών τραυματισμών, ενώ από την άλλη θα βελτιώσει την κίνηση στους δρόμους. Η αυτόνομη οδήγηση κατηγοριοποιείται σε έξι επίπεδα όπως φαίνεται παρακάτω :

- **Επίπεδο 0:** Καμία αυτοματοποίηση.
- **Επίπεδο 1:** Υποβοήθηση με συστήματα ενεργητικής ασφάλειας όπως η αυτόματα προσαρμοζόμενη διατήρηση ταχύτητας (Adaptive Cruise Control).
- **Επίπεδο 2 :** Τουλάχιστον ένα ή περισσότερα συστήματα ενεργητικής ασφάλειας αναλαμβάνουν τη διατήρηση της πορείας του οχήματος στον εγκάρσιο ή και στο διαμήκη άξονα.
- **Επίπεδο 3:** Ημιαυτόνομη μετακίνηση του οχήματος όπου ο οδηγός πρέπει να είναι σε εγρήγορση για να επέμβει ανά πάσα στιγμή, γι' αυτό και υποχρεώνεται να έχει τα χέρια στο τιμόνι
- **Επίπεδο 4:** Αυτόνομη οδήγηση με επιθυμητή αλλά όχι υποχρεωτική την παρέμβαση του οδηγού.
- **Επίπεδο 5:** Το όχημα κινείται χωρίς να χρειάζεται παρέμβαση του οδηγού. Δεν υπάρχουν χειριστήρια όπως τιμόνι και πεντάλ. Υπάρχει δυνατότητα παρέμβασής του μέσω εντολών σε πληκτρολόγιο.

Στα δυο υψηλότερα επίπεδα 4,5 την ευθύνη της κίνησης του οχήματος έχει η κατασκευαστική εταιρεία. Καταλαβαίνουμε ότι ο ρόλος του λογισμικού πλέον είναι εξίσου σημαντικός αν όχι σημαντικότερος από αυτόν, των μηχανικών μερών.

Η σχέση οχημάτων και περιβάλλοντος είναι το κομβικό στοιχείο για την ορθή λήψη των τελικών αποφάσεων από το σύστημα. Αυτό σημαίνει ότι το όχημα διαθέτει ειδικούς αισθητήρες, οι οποίοι παρέχουν ζωτικές πληροφορίες στο σύστημα διεύθυνσης του οχήματος.

Όσον αφορά το ζήτημα της λήψεως αποφάσεων θα πρέπει κατ' αρχάς να τονιστεί ότι το στάδιο αυτό είναι ιδιαίτερα δυναμικό , αφού οι αλγοριθμικοί μηχανισμοί θα πρέπει να δημιουργούν σχέδιο οδήγησης

σε αληθινό χρόνο, το οποίο θα είναι ασφαλές και για τους επιβαίνοντες αλλά και για τους υπόλοιπους που κινούνται στον χώρο. Ο μηχανισμός λήψεως αποφάσεων θα πρέπει να δημιουργεί προβλέψεις για τη μελλοντική κίνηση των υπολοίπων οχημάτων στον δρόμο , να ελέγχει εάν οι προβλέψεις επιβεβαιώνονται, να διορθώνει διαρκώς την πορεία με βάση τα δεδομένα του δρόμου της κίνησης αλλά και των πληροφοριών που μπορεί να εισαχθούν από το cloud.

Η κίνηση των οχημάτων μπορεί είτε να προγραμματίζεται με βάση αλγόριθμους που θα εξετάζουν πάντοτε την ανεύρεση της καλύτερης διαδρομής είτε την επιλογή δεδομένων σε πραγματικό χρόνο με βάση πιθανολογικούς αλγόριθμους. Τα συστήματα οδήγησης μπορεί να είναι κλειστά (closed- loop control system) είτε ανοικτά με λήψη οδηγιών από το cloud.

Η νέα τεχνολογία εξελίσσεται με γρήγορους ρυθμούς, διαρκώς βελτιώνονται τα απαραίτητα υποσυστήματα για την επίτευξη του στόχου και ήδη άρχισαν να κυκλοφορούν τα πρώτα αυτόνομα αυτοκίνητα στις ΗΠΑ και στη Γερμανία. Ένα από τα προβλήματα που θα πρέπει να λυθεί είναι η δημιουργία κανόνων στον τρόπο λήψεως αποφάσεων από το όχημα ιδίως σε περίπτωση σύγκρουσης. Το έργο αυτό είναι δύσκολο, αφού άπτεται σοβαρών νομικών, ηθικών και φιλοσοφικών διλημάτων και γι' αυτό το λόγο οι λύσεις που θα επιλεγούν θα πρέπει να γίνουν αποδεκτές από το μεγαλύτερο μέρος της κοινωνίας και όπου είναι δυνατόν να δοθούν και εναλλακτικές επιλογές.

9 Επίλογος

Στην παρούσα εργασία παρουσιάσαμε δύο οικογένειες ελεγκτών πορείας για αυτόνομα οχήματα που κινούνται σε δακτυλίους δρόμους χωρίς διαγράμμιση. Η συνάρτηση ελέγχου Lyapunov εκφράστηκε μέσω των μεγεθών της ενέργειας του συστήματος, με την κινητική ενέργεια να εκφράζεται είτε μέσω της Νευτώνειας μηχανικής είτε μέσω της σχετικιστικής μηχανικής. Εξασφαλίσαμε την αποφυγή των συγκρούσεων μεταξύ των οχημάτων αλλά και μεταξύ των ίδιων με τα σύνορα του δρόμου εφόσον ο νόμος ανάδρασης των οχημάτων ήταν αποκεντρωμένος. Με τον ίδιο τρόπο επίσης καταφέραμε να κρατήσουμε την ταχύτητα του οχήματος εντός των ορίων ταχύτητας του δρόμου αλλά και θετική όπως και επίσης οι γωνιακές ταχύτητες των οχημάτων να τείνουν σε ένα γνωστό set-point της ταχύτητας. Οι διαφορές και οι ομοιότητες των ελεγκτών πορείας σε δακτυλίους δρόμους και ευθείες χωρίς διαγράμμιση συζητήθηκαν εκτενώς. Τέλος, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι έχοντας πια σχεδιάσει ελεγκτές πορείας για ευθείες και δακτυλίους δρόμους χωρίς διαγράμμιση μπορούμε με ορισμένες αλλαγές συντεταγμένων να αναπαραστήσουμε κάθε δρόμο από μια απλή ανοιχτή ή κλειστή καμπύλη με σταθερό πλάτος.

Αναφορές

- [1] Dionysis Theodosios, Iasson Karafyllis, Markos Papageorgiou "Cruise Controllers for Lane-Free Ring-Roads based on Control Lyapunov Functions", *Journal of the Franklin Institute* Volume 360, Issue 9, June 2023, Pages 6131-6161([10.48550/arXiv.2208.01977](https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.01977)).
- [2] Ames, A. D., X. Xu, J. W. Grizzle, and P. Tabuada, "Control Barrier Function Based Quadratic Programs for Safety Critical Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62, 2017, 3861– 3876.
- [3] Baldi S., P. Frasca, "Adaptive Synchronization of Unknown Heterogeneous Agents: An Adaptive Virtual Model Reference Approach", *Journal of the Franklin Institute* , 356, 2019, 935- 955.
- [4] Bando, M., Hesebem K., A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama. "Dynamical Model of Traffic Congestion and Numerical Simulation", *Physical Review E* , 51, 1995, 1035–1042.
- [5] Bhatia, N. P. and G. P. Szegő, *Stability Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, , New York, 1970.
- [6] Bian, Y., S. E. Li, B. Xu, X. Q, S. Li, Q. Xu, J. Wang, and K. Li, "Behavioral Harmonization of a Cyclic Vehicular Platoon in a Closed Road Network," in *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 6, 2021, 559-570.
- [7] Chou F.C., A. R. Bagabaldo, and A. M. Bayen, "The Lord of the Ring Road: A Review and Evaluation of Autonomous Control Policies for Traffic in a Ring Road", *ACM Transactions on Cyber-Physical Systems*. 6, 2022.
- [8] Cui S., B. Seibold, R. Stern and D. B. Work, "Stabilizing Traffic Flow via a Single Autonomous Vehicle: Possibilities and Limitations," *2017 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, 2017, 1336-1341.
- [9] Diakaki, C., M. Papageorgiou, I. Papamichail, I. Nikolos, "Overview and Analysis of Vehicle Automation and Communication Systems from a Motorway Traffic Management Perspective", *Transportation Research Part A: Policy and Practice* , 75, 2015, 147-165.
- [10] Debada, E., and D. Gillet, "Merging into Single-Lane Roundabouts in the Presence of Uncertainty", *IEEE 21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, 2019, 3168–3175.

-
- [11] Freeman, R. A. and P. V. Kokotovic, *Robust Nonlinear Control Design. State-Space and Lyapunov Techniques*, Birkhauser, Boston, 1996.
- [12] Giammarino V., S. Baldi, P. Frasca and M. L. D. Monache, "Traffic Flow on a Ring with a Single Autonomous Vehicle: An Interconnected Stability Perspective," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 22, 2021, 4998-5008.
- [13] Hayat, A., B. Piccoli, and S. Truong. "Dissipation of Traffic Jams Using a Single Autonomous Vehicle on a Ring Road", 2021, (see [hal-03354282](#)).
- [14] Herman, I., D. Martinec, J.J.P. Veerman, "Transients of Platoons with Asymmetric and Different Laplacians", *Systems and Control Letters*, 91, 2016, 28-35.
- [15] Huang K., Q. Du, "Stability of a Nonlocal Traffic Flow Model for Connected Vehicles", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 82, 2022, 221-243.
- [16] Karafyllis, I., D. Theodosis and M. Papageorgiou, "Analysis and Control of a Non-Local PDE Traffic Flow Model", *International Journal of Control*, 95, 2022, 660-678.
- [17] Karafyllis, I., D. Theodosis and M. Papageorgiou, "Stability Analysis of Nonlinear Inviscid Microscopic and Macroscopic Traffic Flow Models of Bidirectional Cruise-Controlled Vehicles", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 39, 2022, 609-642.
- [18] Karafyllis, I., D. Theodosis and M. Papageorgiou, "Lyapunov-Based Two-Dimensional Cruise Control of Autonomous Vehicles on Lane-Free Roads", *Automatica*, 145, November 2022, 110517.
- [19] Karafyllis, I., D. Theodosis and M. Papageorgiou, "Constructing Artificial Traffic Fluids by Designing Cruise Controllers", *Systems and Control Letters*, 167, 2022, 105317.
- [20] Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 2002.
- [21] Liu Y., and B. Xu, "Improved Protocols and Stability Analysis for Multivehicle Cooperative Autonomous Systems", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 16, 2015 2700-2710.
- [22] Marshall, J. A., M. E. Broucke and B. A. Francis, "Formations of Vehicles in Cyclic Pursuit," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49, 2004, 1963-1974.
- [23] Naderi, M., M. Papageorgiou, I. Karafyllis, I. Papamichail, "Automated Vehicle Driving on Large Lane-free Roundabouts". Accepted in *25th IEEE International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, Macau, China, 2022.

-
- [24] Naus G. J. L., R. P. A. Vugts, J. Ploeg, M. J. G. van de Molengraft and M. Steinbuch, “String-Stable CACC Design and Experimental Validation: A Frequency-Domain Approach”, in *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 59, 2010, 4268-4279.
- [25] Papageorgiou, M., Mountakis, K.-S., Karafyllis, I., Papamichail, I. and Y. Wang, “Lane-Free Artificial-Fluid Concept for Vehicular Traffic”, *Proceedings of the IEEE*, 109, 2021, 114-121.
- [26] Peters A.A., R. H. Middleton, and O. Mason, “Cyclic Interconnection for Formation Control of 1-D Vehicle Strings”, *European Journal of Control*, 27, 2016, 36-44.
- [27] Pooladsanj M., K. Savla and P. Ioannou, ”Vehicle Following On a Ring Road Under Safety Constraints: Role of Connectivity and Coordination,” in *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles* , doi: 10.1109/TIV.2022.3149972.
- [28] Rajamani, R., *Vehicle Dynamics and Control*, Springer-Verlag, New York, 2012.
- [29] Rogge J. A, and D. Aeyels, ”Vehicle Platoons Through Ring Coupling”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53, 2008, 1370-1377.
- [30] Sontag E. D. “Remarks on Input to State Stability of Perturbed Gradient Flows, Motivated by Model-free Feedback Control Learning”, *Systems and Control Letters*, 161, 2022, 105138.
- [31] Stüdl S., M. M. Seron, R. H. Middleton, “Vehicular Platoons in Cyclic Interconnections,” , *Automatica*, 94, 2018, 283-293.
- [32] Sugiyama, Y., Fukui, M., Kikuchi, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Nishinari, K., Yukawa, S.: “Traffic Jams Without Bottlenecks – Experimental Evidence for the Physical Mechanism of the Formation of a Jam”, *New Journal of Physics*, 10, 2008, 033001.
- [33] Teel, A. R. and L. Praly, “A Smooth Lyapunov Function from a Class-KL Estimate Involving Two Positive Semidefinite Functions”, *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variation*, 5, 2000, 313-336.
- [34] Tian, R., S. Li, N. Li, I. Kolmanovsky, A. Girard, and Y. Yildiz, “Adaptive Game-Theoretic Decision Making for Autonomous Vehicle Control at Roundabouts”, *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* , 2018, 321-326.
- [35] Vite L., L. Juárez, M. A. Gomez, S. Mondié, “Dynamic Predictor-based Adaptive Cruise Control”, *Journal of the Franklin Institute*, 2022, doi.org/10.1016/j.jfranklin.2022.06.006

-
- [36] Wilson, R.E., “Mechanisms for Spatio-Temporal Pattern Formation in Highway Traffic Models”, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 366, 2008, 2017–2032.
- [37] Wolf M. T. and J. W. Burdick, ”Artificial Potential Functions for Highway Driving With Collision Avoidance,” *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Pasadena, CA, USA, 2008, 3731-3736.
- [38] Yanumula V.K., P. Typaldos, D. Troullinos, M. Malekzadeh, I. Papamichail, and M. Papageorgiou, “Optimal Path Planning for Connected and Automated Vehicles in Lane-Free Traffic”, *24th IEEE International Conference on Intelligent Transportation (ITSC 2021)*, Indianapolis, USA, 2021, 3545-3552.
- [39] Zhang, J., X. Ma, and Y. Wang, “Study on Stability and Scalability of Vehicular Platoon with a Bidirectional Ring Interconnection”. *IET Intelligent Transportation Systems*, 15, 2021, 1388– 1400.
- [40] Lawrence P., ”Differential Equations and Dynamical Systems” Third Edition, *Springer*.
- [41] Naveen Joshi, ” 5 Moral Dilemmas That Self-Driving Cars Face Today”, August 2022 www.forbes.com.
- [42] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li, ”Applied Nonlinear Control ” *Pearson*, 1991.