



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Βασικές αρχές OFDM και διαμόρφωση OFDM/OQAM

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γεώργιος Ι. Τσακμακίδης

Επιβλέπων : Φίλιππος Κωνσταντίνου
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Δεκέμβρης 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Βασικές αρχές OFDM και διαμόρφωση OFDM/OQAM

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γεώργιος Ι. Τσακμακίδης

Επιβλέπων : Φίλιππος Κωνσταντίνου
Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την Δεκεμβρίου 2011.

.....
Φίλιππος Κωνσταντίνου
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Χρήστος Καψάλης
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Αθανάσιος Δ. Παναγόπουλος
Λέκτορας

Αθήνα, Δεκέμβρης 2011

.....
Γεώργιος Ι. Τσακμακίδης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Γεώργιος Ι. Τσακμακίδης, 2011
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Ο σκοπός της διπλωματικής εργασίας ήταν η ανάλυση σε ένα βασικό επίπεδο των βασικών αρχών που διέπουν τις διαμορφώσεις OFDM και OFDM/OQAM, καθώς και η αναφορά των προβλημάτων συστημάτων τηλεπικοινωνιών που αντιμετωπίζονται αποτελεσματικά από τις διαμορφώσεις αυτές. Τα κυριότερα από αυτά τα προβλήματα είναι η διασυμβολική παρεμβολή (ISI) και η διαφεροντική παρεμβολή (ICI).

Αρχικά εξετάζεται η διαμόρφωση OFDM δίνοντας προσοχή στην ιδιότητα της ορθογωνιότητας και στο κυκλικό πρόθεμα (CP). Επίσης παρουσιάζεται παράλληλα και ένα απλοποιημένο μοντέλο συστήματος μαζί με τις αντίστοιχες μαθηματικές σχέσεις που το χαρακτηρίζουν.

Στη συνέχεια εξετάζεται η διαμόρφωση OFDM/OQAM που αποτελεί εν μέρη μια γενίκευση της εφαρμογής της OFDM. Παρουσιάζεται πιο αναλυτικά το αντίστοιχο μοντέλο συστήματος μαζί με τις μαθηματικές σχέσεις που το χαρακτηρίζουν καθώς και μια πρόχειρη σύγκριση των OFDM/OQAM και OFDM.

Λέξεις Κλειδιά

Σήμα, Παλμός, Φέρον, Σύμβολο, Πομπός, Δέκτης, Παρεμβολή, FDM, OFDM, OFDM/OQAM, Διασυμβολική Παρεμβολή ISI, Διαφεροντική Παρεμβολή ICI, Ορθογωνιότητα, Κυκλικό Πρόθεμα CP, Μορφοποίηση Παλμών

Abstract

The aim of this thesis was the analysis in a basic level of the most important features of configurations OFDM and OFDM/OQAM, as well as the report of problems of systems of telecommunications that confronted effectively by these configurations. The most important of these problems are intersymbol interference (ISI) and intercarrier interference (ICI).

Initially is examined configuration OFDM giving attention in the attributes of orthogonality and cyclic prefix (CP). Also is presented a simplified system model with the corresponding mathematic relations that characterize it.

Afterwards is examined configuration OFDM/OQAM that constitutes partially a generalization of OFDM. The corresponding system model is more analytically presented with the mathematic relations that characterize it as well as an off-hand comparison of OFDM/OQAM and OFDM.

KeyWords

Signal, Pulse, Carrier, Symbol, Transmitter, Receiver, Interference, FDM, OFDM, OFDM/OQAM, Intersymbol Interference ISI, Intercarrier Interference ICI, Orthogonality, Cyclic Prefix CP, Pulse Shaping

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας την διπλωματική μου εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον βοηθό εργαστηρίου Κωνσταντίνο Μαλιάτσο για την πολύτιμη βοήθεια του και την άριστη συνεργασία που είχαμε σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 Διασυμβολική Παρεμβολή και Πολυπλεξία FDM.....	9
1.1 Σκίαση, Διαλείψεις και Διασυμβολική Παρεμβολή (ISI).....	10
1.2 Μετάδοση Απλού Φέροντος και Πολυπλεξία. Διαίρεσης Συχνότητας FDM.....	14
2 Διαμόρφωση OFDM.....	17
2.1 Ιδιότητα της Ορθογωνιότητας.....	18
2.2 Κυκλικό Πρόθεμα (CP)	22
2.2.1 Μέγιστη Διάρκεια Κυκλικού Προθέματος	29
2.2.2 Κυκλικό Πρόθεμα και Συγχρονισμός.....	30
2.2.3 Σφάλμα Συγχρονισμού.....	32
2.3 Βασικές Μέθοδοι Ψηφιακής Διαμόρφωσης.....	34
2.3.1 Διαμόρφωση BPSK.....	34
2.3.2 Διαμόρφωση QPSK.....	35
2.3.3 Διαμόρφωση 16-QAM.....	37
2.4 Δομή Συστήματος OFDM.....	39
2.5 Αδυναμίες OFDM.....	42
2.5.1 Πλευρικοί Λοβοί.....	43
2.5.2 Διαφοροντική Παρεμβολή (ICI).....	44
2.5.3 Ολίσθηση Doppler.....	46
3 Διαμόρφωση OFDM/OQAM.....	49
3.1 Δομή Συστήματος Μετάδοσης Απλού Φέροντος	50
3.2 Βασική Ιδέα OFDM/OQAM.....	52
3.3 Δομή Συστήματος OFDM/QAM.....	60
3.4 Δομή Συστήματος OFDM/OQAM	64
3.5 Συνάρτηση Παρεμβολής (Interference Function).....	68
3.6 Κύριες Συναρτήσεις Μορφοποίησης Παλμών.....	69
3.6.1 Τετραγωνική Συνάρτηση (Rectangular function).....	69
3.6.2 Συνάρτηση Ημίσεως Συνιμητόνου (Half Cosine Function).....	71
3.6.3 Γκαουσιανή Συνάρτηση (Gaussian Function).....	74
3.6.4 Συνάρτηση ΙΟΤΑ (Isotropic Orthogonal Transform Algorithm).....	77
3.6.5 Επεκταμένη Γκαουσιανή Συνάρτηση (Extended Gaussian Function).....	82
3.7 Βασικές Ομοιότητες και Διαφορές OFDM/QAM και OFDM/OQAM.....	87
3.8 Μοντέλο Συστήματος.....	88
3.8.1 Γενική περιγραφή συνεχούς σήματος OQAM.....	88
3.8.2 Ανάλυση στο διακριτό πεδίο του χρόνου.....	89
3.9 Μοντέλο καναλιού.....	92
3.9.1 Μετάδοση OQAM μέσα από ένα πολυδιαδρομικό κανάλι.....	92
3.9.2 Αποδιαμόρφωση και ισοστάθμιση Zero Forcing.....	93
3.10 Ανάλυση ICI και ISI.....	95
3.11 Ισοστάθμιση δύο σταδίων με «ακύρωση παρεμβολής» EIC :	
Μια θεωρητική προσέγγιση.....	99
3.12 Σύγκριση OFDM και OFDM/OQAM.....	103

Κεφάλαιο 1

ΔΙΑΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΕΞΙΑ FDM

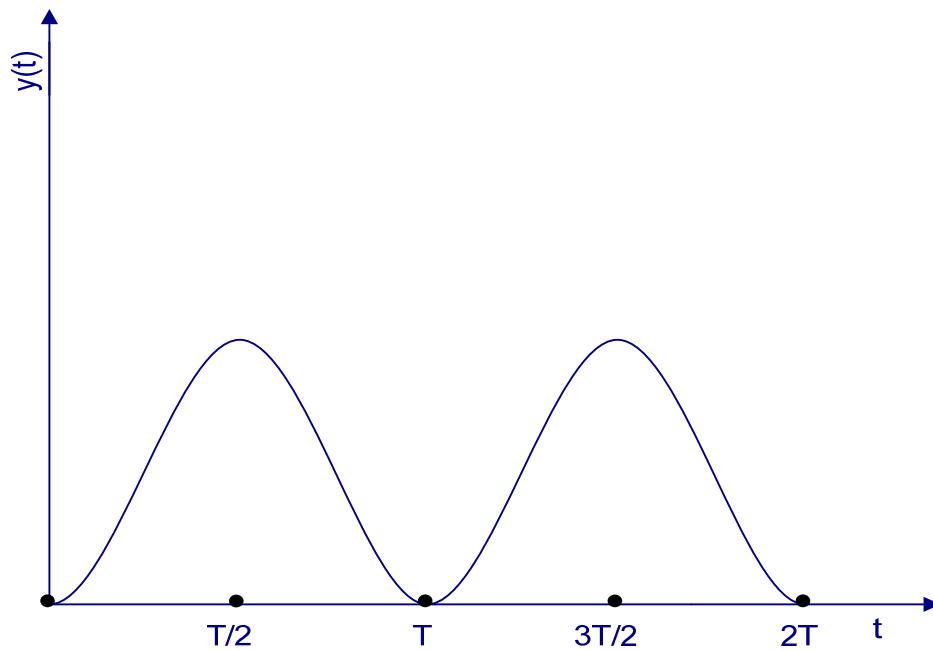
Ένα συνηθισμένο πρόβλημα στη μετάδοση δεδομένων με υψηλό ρυθμό είναι η διασυμβολική παρεμβολή (Intersymbol Interference – ISI). Είναι ένα πρόβλημα που οφείλεται στη συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά του διαύλου (frequency selective fading) λόγω της πολυδιαδρομικής διάδοσης (multipath propagation). Αυτό συμβαίνει όταν σε ένα ασύρματο σύστημα επικοινωνιών η εκπομπή γίνεται σε πολλές κατευθύνσεις και ο δέκτης λαμβάνει πολλά “αντίγραφα” του σήματος του πομπού εξαιτίας των ανακλάσεων που συμβαίνουν σε μεγάλα αντικείμενα όπως βουνά και κτίρια, τα αντίγραφα αυτά του σήματος φτάνουν στο δέκτη καθυστερημένα με αποτέλεσμα να παρεμβάλουν στο αρχικό σήμα. Το φαινόμενο αυτό προκαλεί διασυμβολική παρεμβολή. Πιο συγκεκριμένα λαμβάνοντας υπόψιν πως τα δεδομένα μας που μεταδίδονται διαμορφωμένα στο σήμα αντιστοιχούν σε σύμβολα, διασυμβολική παρεμβολή έχουμε όταν το ένα σύμβολο παρεμβάλλει στα επόμενα εξαιτίας των χρονικά μετατοπισμένων αντιγράφων του σήματος που φτάνουν στο δέκτη. Ως σύμβολο ορίζουμε μια μονάδα πληροφορίας που αποτελείται από ένα επιλεγμένο αριθμό bits. Ο αριθμός των bit ανά σύμβολο αποτελεί τον ρυθμό baud (baud rate) της πληροφορίας που εξαρτάται από τον τύπο της διαμόρφωσης. π.χ Αν σε μια μετάδοση κάθε σύμβολο πληροφορίας εκφράζεται από 2 bits τότε $baud = 2 \text{ bit / symbol}$.

1.1 Σκίαση, Διαλείψεις και Διασυμβολική Παρεμβολή (ISI)

Ας θεωρήσουμε ένα δέκτη που κινείται σε περιβάλλον πολυδιαδρομικής διάδοσης. Το σήμα του πομπού όπως είναι λογικό υφίσταται μία εξασθένηση ανάλογη της απόστασης του πομπού από το δέκτη. Οι σταθερές απώλειες αυτές στην ισχύ του σήματος καλούνται απώλειες διάδοσης. Πέρα όμως από τις απώλειες διάδοσης έχουμε και μία τυχαία εξασθένηση του σήματος λόγω της σκίασης. Σκίαση είναι η εξασθένηση της ισχύος του σήματος λόγω των εμποδίων που παρεμβάλλονται στην πορεία του (πχ. τείχη, υψώματα, αυτοκίνητα κτλ). Γενικά το φαινόμενο κατά το οποίο το εκπεμπόμενο σήμα φτάνει στο δέκτη εξασθενημένο και έχει ως αποτέλεσμα την αλλοίωση των δεδομένων που αποστέλλονται ονομάζεται διάλειψη. Οι διαλείψεις που οφείλονται στους ανωτέρω λόγους ονομάζονται διαλείψεις μεγάλης κλίμακας ή αργές διαλείψεις. Λέγονται δε αργές γιατί η αλλοίωση του λαμβανόμενου σήματος εν σχέση με το αρχικό είναι περίπου η ίδια για μια σχετικά ευρεία περιοχή που μπορεί να βρεθεί ο δέκτης, με αποτέλεσμα η ισχύς του λαμβανόμενου σήματος να μεταβάλετε «αργά» ενόσω ο δέκτης κινείται. Αν όμως λάβουμε υπόψιν μας και τα ανακλώμενα αντίγραφα του σήματος που φτάνουν στο δέκτη τότε παρατηρούμε ότι η αλλοίωση (πλάτος και φάση) του εκπεμπόμενου σήματος μεταβάλλεται αρκετά ακόμα και για πολύ μικρές κινήσεις του κινητού σταθμού της τάξης του $\lambda/2$. Όπου λ το μήκος κύματος του σήματος. Οι διαλείψεις αυτές που οφείλονται στη χρονική διασπορά του σήματος εξαιτίας της πολυδιαδρομικής διάδοσης, καθώς επίσης και στη χρονική μεταβολή του διαύλου από τη μετατόπιση του δέκτη και των σκεδαστών που συμμετέχουν στη διάδοση, λέγονται διαλείψεις μικρής κλίμακας ή γρήγορες διαλείψεις. Αποτέλεσμα αυτών είναι η διασυμβολική παρεμβολή. Συγκεκριμένα διασυμβολική παρεμβολή (ISI) έχουμε όταν η μέγιστη διαφορά στην καθυστέρηση των πολυδιαδρομικών συνιστωσών είναι μεγαλύτερη από ένα τμήμα ενός συμβόλου (συνήθως το ήμισυ της περιόδου του).

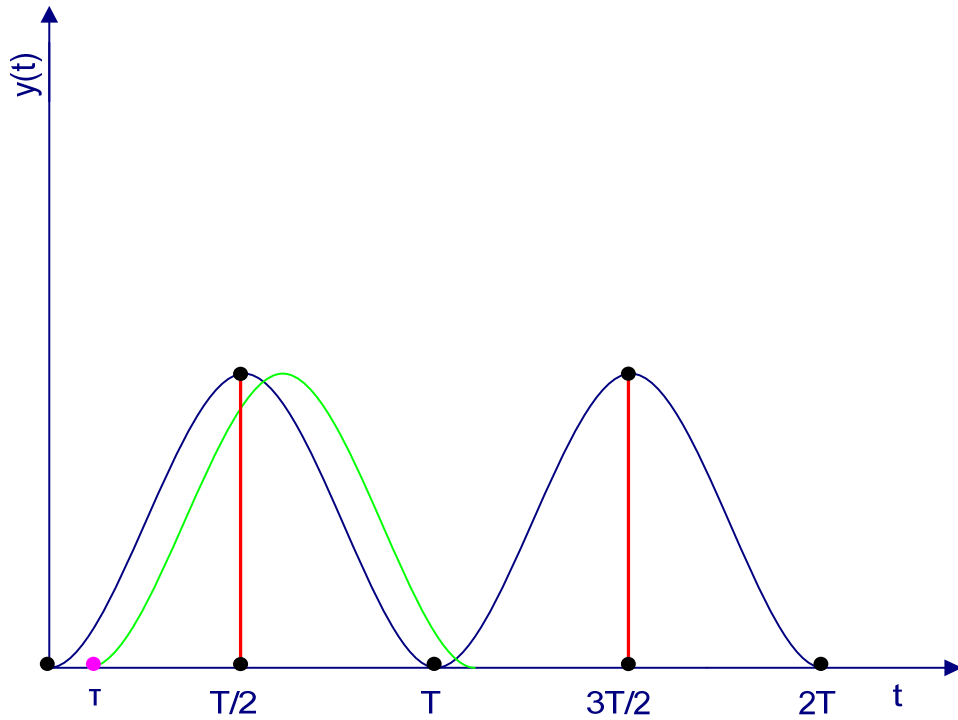
Παράδειγμα 1.1

Έστω ότι έχουμε σύμβολα διάρκειας ενός παλμού T . Παρακάτω στο Σχήμα 1.1 φαίνονται 2 τέτοια σύμβολα που μεταδίδονται σειριακά.



Σχήμα 1.1 : Σειριακή μετάδοση συμβόλων.

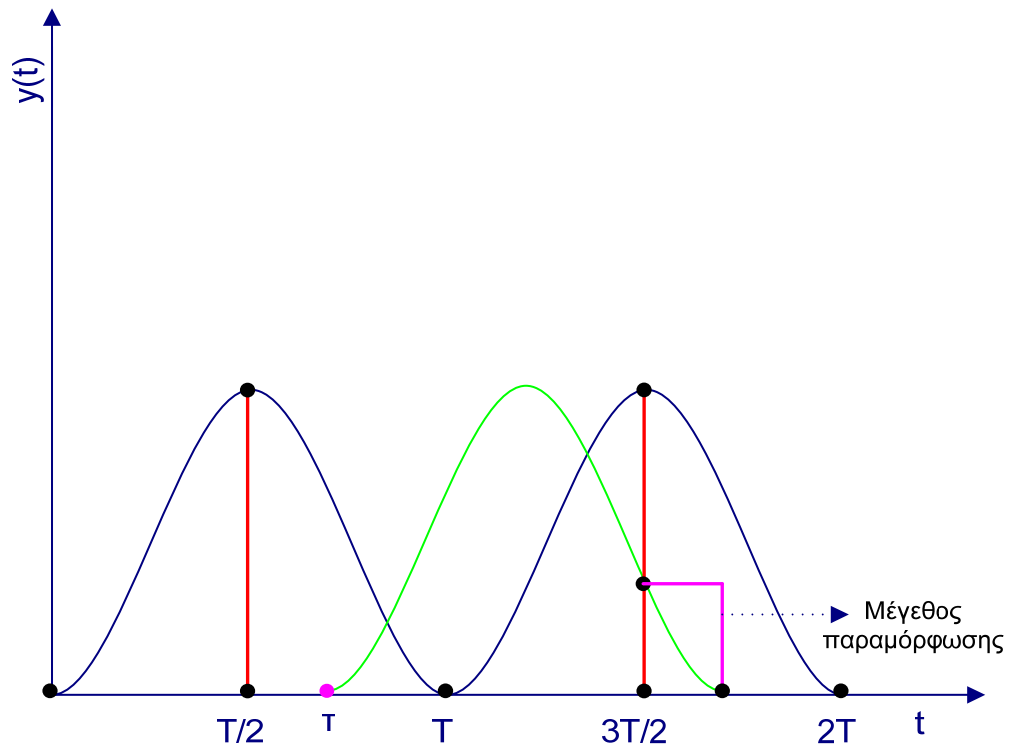
Μετά την επίδραση του διαύλου έστω ότι λαμβάνουμε στον δέκτη το σήμα στο Σχήμα 1.2 εφόσον η χρονική διασπορά τ είναι μικρή εν σχέση με την περίοδο του παλμού T .



Σχήμα 1.2 : Σειριακή μετάδοση συμβόλων με αμελητέα παρεμβολή λόγω πολυδιαδρομικής διάδοσης.

Παρατηρούμε πως το χρονικά μετατοπισμένο αντίγραφο του πρώτου παλμού-συμβόλου που έφτασε στο δέκτη(εδώ με πράσινο χρώμα) δεν παρεμβάλει στο επόμενο σύμβολο. Αυτό συμβαίνει διότι η παραμόρφωση του δεύτερου παλμού που εισάγεται από τον πρώτο δεν φτάνει ως το σημείο που ο δέκτης δειγματοληπτεί και παίρνει απόφαση για την τιμή του bit που αντιστοιχεί στο σύμβολο(κόκκινη γραμμή στο σχήμα).

Αν υποθέσουμε όμως ότι ο λόγος τ / T είναι μεγάλος τότε λαμβάνουμε κάτι σαν το παρακάτω σήμα στο Σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3 : Σειριακή μετάδοση συμβόλων με διασυμβολική παρεμβολή λόγω πολυδιαδρομικής διάδοσης.

Βλέπουμε πως εδώ το αντίγραφο του πρώτου συμβόλου απέχει περισσότερο από $T / 2$ από το αρχικό πρώτο σύμβολο και παρεμβάλλει στο δεύτερο σύμβολο, δεδομένου ότι η δειγματοληψία γίνεται ανά χρόνο T . Σε αυτή τη περίπτωση λέμε πως έχουμε διασυμβολική παρεμβολή (ISI).

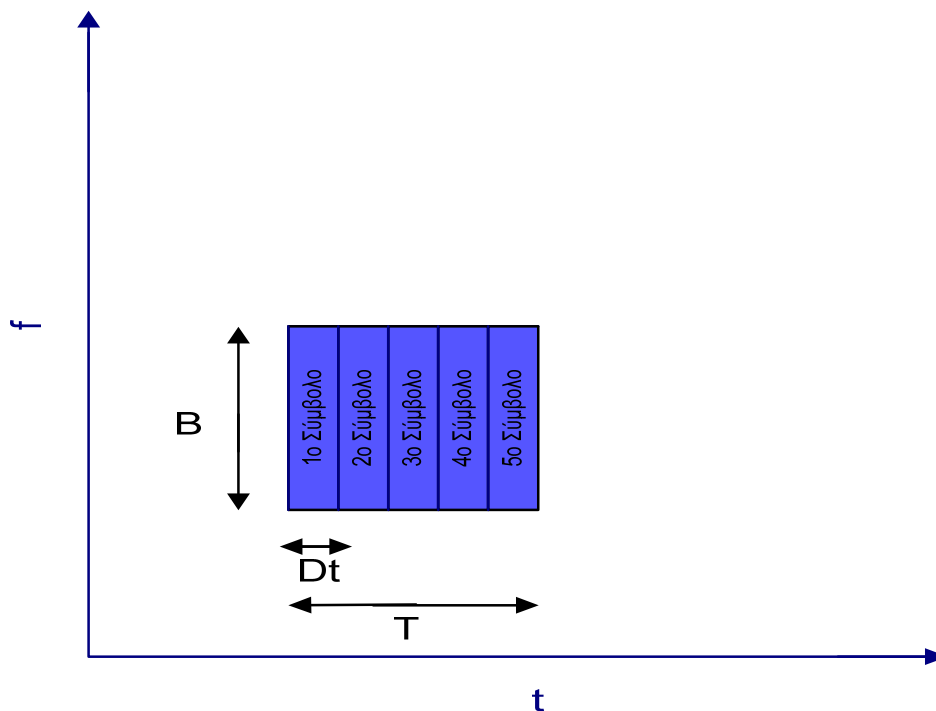
1.2 Μετάδοση Απλού Φέροντος και Πολυπλεξία Διαίρεσης Συχνότητας FDM

Στην μετάδοση απλού φέροντος(single carrier) τα σύμβολα μεταδίδονται σειριακά με παλμούς πολύ μικρής διάρκειας Δt το καθένα. Λέγεται δε απλού φέροντος διότι το σύνολο της μεταδιδόμενης πληροφορίας εκπέμπεται μέσω μόνο μίας φέρουσας συχνότητας και κάθε ένας παλμός καταλαμβάνει όλο το διαθέσιμο φάσμα συχνοτήτων. Δηλαδή το «στενό» χρονικά μεταδιδόμενο σήμα που αντιστοιχεί σε ένα σύμβολο είναι πολύ «πλατύ» όταν εκφραστεί στην συχνότητα μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού (ως επί το πλείστον Fourier) και καταλαμβάνει ολόκληρο το διαθέσιμο φάσμα συχνοτήτων του καναλιού. Εάν ο δίαυλος δεν είναι «καλός», παρουσιάζει δηλαδή διαλείψεις. Τότε κάθε σύμβολο είναι πολύ εύκολο να φτάσει αλλοιωμένο στο δέκτη εξαιτίας των ελαφρά μετατοπισμένων χρονικών αντιγράφων του παλμού που φτάνουν μαζί με τον αρχικό. Έχουμε δηλαδή αλλοίωση του ίδιου του συμβόλου καθώς επίσης και παρεμβολή στα γειτονικά σύμβολα(διασυμβολική παρεμβολή). Αυτό οδήγησε στην αναζήτηση νέων τρόπων μετάδοσης που να αξιοποιούν καλύτερα το εύρος ζώνης του καναλιού. Η προσπάθεια που έγινε σε αυτήν την κατεύθυνση είχε να κάνει με την παράλληλη μετάδοση περισσοτέρων του ενός συμβόλου ταυτόχρονα. Κάθε ένα σύμβολο θα ήταν μεγαλύτερο χρονικά εν σχέση με την single carrier μετάδοση και πολύ στενότερο φασματικά, έτσι ώστε στο διαθέσιμο εύρος ζώνης του καναλιού να χωρέσουν όλα τα σύμβολα. Αυτή ήταν η βασική ιδέα της πολυπλεξίας διαίρεσης συχνότητας FDM (Frequency Division Multiplexing). Αν θεωρήσουμε πως ο ίδιος πομπός χρησιμοποιεί FDM για παράλληλη μετάδοση ενός σήματος τότε έχουμε την φασματική διαίρεση του προς μετάδοση σήματος ευρείας ζώνης (wideband) σε μεγάλο αριθμό υποκαναλιών (subchannels) στενής ζώνης (narrowband). Τα δεδομένα διοχετεύονται παράλληλα στον δίαυλο μετάδοσης. Αυτό επιτυγχάνεται έχοντας ουσιαστικά πολλά συστήματα που μεταδίδουν ταυτόχρονα ένα μικρό μέρος της πληροφορίας με αργό ρυθμό μετάδοσης. Με αυτόν τον τρόπο κάθε μεταδιδόμενο σήμα είναι σήμα στενής ζώνης και ο συνολικός ρυθμός μετάδοσης της συνολικής πληροφορίας είναι ο ίδιος με τα συμβατικά συστήματα. Όμως ακριβώς αυτό το γεγονός ότι δηλαδή κάθε μεταδιδόμενο σήμα είναι σήμα στενής ζώνης φασματικά και μεγάλης χρονικής διάρκειας κάνει το σύστημα μας ιδιαίτερα ανθεκτικό στο πρόβλημα της διασυμβολικής παρεμβολής που παρουσιάζεται στα σήματα μικρής διάρκειας. Πράγμα που

είναι απολύτως λογικό καθώς ένα ελαφρώς μετατοπισμένο χρονικά αντίγραφο ενός σήματος μεγάλης χρονικής διάρκειας δεν θα έχει σοβαρή επίπτωση στο αρχικό σήμα αυτό καθώς και στα άλλα σήματα-σύμβολα που προηγούνται η ακολουθούν.

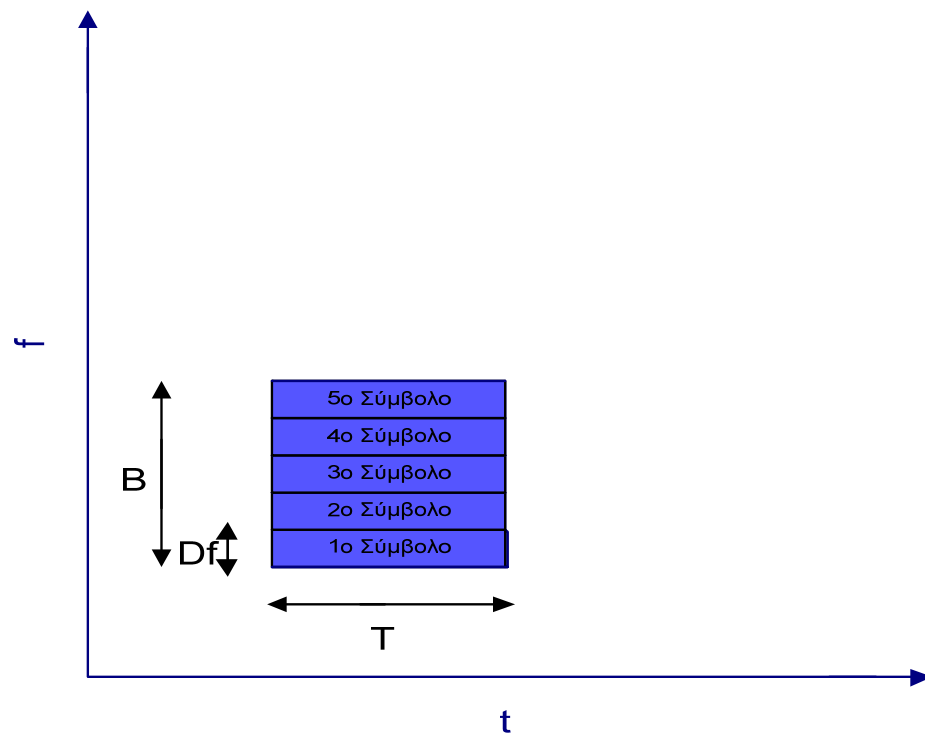
Παράδειγμα 1.2

Έστω ότι έχουμε να μεταδώσουμε 5 σύμβολα με single carrier μετάδοση. Η διάρκεια μετάδοσης ενός συμβόλου είναι Dt και καταλαμβάνει εύρος συχνοτήτων B . Η συνολική διάρκεια μετάδοσης θα είναι $5 \cdot Dt = T$



Σχήμα 1.4 : Σειριακή single carrier μετάδοση 5 συμβόλων διάρκειας Dt .

Στο αντίστοιχο FDM σύστημα η διάρκεια μετάδοσης του ενός συμβόλου θα είναι ίση με T και θα καταλαμβάνει εύρος συχνοτήτων Df . Και τα 5 σύμβολα μαζί θα καταλαμβάνουν εύρος συχνοτήτων $5 \cdot Df = B$.



Σχήμα 1.5 : Παράλληλη μετάδοση με πολυπλεξία FDM 5 συμβόλων διάρκειας T .

Και στις δύο αυτές περιπτώσεις θεωρούμε βέβαια ότι έχουμε τέλειες συνθήκες μετάδοσης χωρίς την απαίτηση διαστημάτων φύλαξης σε χρόνο και συχνότητα αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 2

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ OFDM

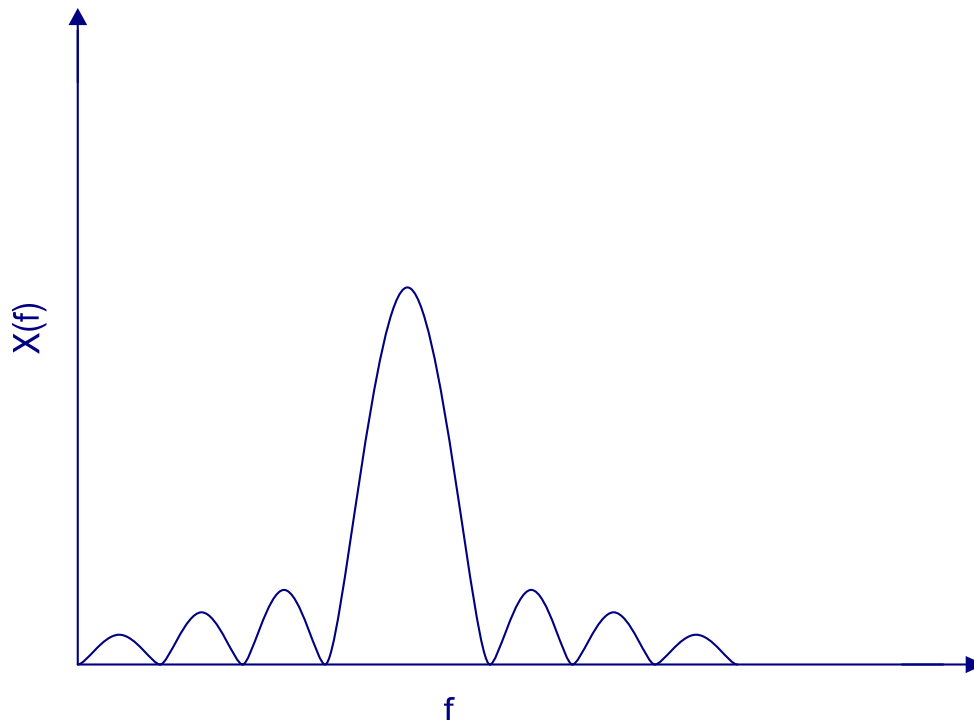
Ένα μεγάλο μειονέκτημα της μετάδοσης με πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας FDM ήταν ότι παρόλο που τα σήματα-σύμβολα ήταν μεγάλης χρονικής διάρκειας, η παράλληλη μετάδοση τους δεν μπορούσε να γίνει χωρίς να υπάρχει κάποια, έστω και μικρή, φασματική επικάλυψη τους στο πεδίο της συχνότητας (InterCarrier Interference - ICI). Για να αντιμετωπιστεί το φαινόμενο αυτό που θα είχε ως αποτέλεσμα την απώλεια χρήσιμης πληροφορίας και την υποβάθμιση στην ποιότητα της επικοινωνίας, έπρεπε να κρατούνται μεγάλες αποστάσεις μεταξύ των γειτονικών υποκαναλιών (subchannels). Οι αποστάσεις αυτές ήταν αρκετά μεγάλες και είχαν ως αποτέλεσμα τη δέσμευση μεγάλου εύρους φάσματος σε σχέση με τη μεταδιδόμενη πληροφορία. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε με την , OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) η οποία κρίθηκε ως η καταλληλότερη μέθοδος για μετάδοση υψηλού ρυθμού δεδομένων. Οι αρχές της Ορθογωνικής Πολύπλεξης με Διαίρεση Συχνότητας (OFDM) αναπτύχθηκαν τη δεκαετία του 1960 αλλά το ενδιαφέρον για αυτή την τεχνική αυξήθηκε μόλις πρόσφατα εξαιτίας της εξέλιξης στα πεδία της επεξεργασίας σήματος και της μικροηλεκτρονικής. Όπως και στην απλή FDM η βασική ιδέα της OFDM διαμόρφωσης ήταν η φασματική διαίρεση του προς μετάδοση σήματος ευρείας ζώνης (wideband) σε μεγάλο αριθμό υποκαναλιών (subchannels) στενής ζώνης (narrowband).

2.1 Ιδιότητα της Ορθογωνιότητας

Ένα μεγάλο πλεονέκτημα της OFDM και κύριο σημείο διαφοροποίησης της από την απλή FDM είναι η ορθογωνιότητα των παράλληλα μεταδιδόμενων παλμών. Η ορθογωνιότητα είναι μια ιδιότητα που επιτρέπει σε πολλαπλά σήματα πληροφορίας να μεταδίδονται σε ένα κοινό κανάλι επικοινωνίας και να ανιχνεύονται χωρίς μεταξύ τους παρεμβολή. Τα υποκανάλια μεταδίδουν παράλληλα πληροφορία στο πεδίο του χρόνου, ενώ επιτρέπουν και την φασματική τους επικάλυψη χωρίς τον κίνδυνο αλλοίωσης στο πεδίο της συχνότητας, με την προϋπόθεση ότι είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Έτσι λοιπόν δεν χρειάζεται πλέον να κρατάμε αποστάσεις μεταξύ των παράλληλα μεταδιδόμενων συμβόλων στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας αλλά μπορούν να μεταδίδονται το ένα «κολλητά» στο άλλο επιτυγχάνοντας έτσι μεγάλη εξοικονόμηση φάσματος διατηρώντας ταυτόχρονα και το αναλλοίωτο της πληροφορίας που μας ενδιαφέρει. Η βασική αρχή της ορθογωνιότητας εξασφαλίζει ότι στα σημεία όπου το φάσμα ενός υποκαναλιού παρουσιάζει κορυφή, εκεί το φάσμα των γειτονικών υποκαναλιών θα παρουσιάζει μηδενισμό. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει τα υποκανάλια να έχουν φέρουσες συχνότητες που να είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας βασικής συχνότητας.

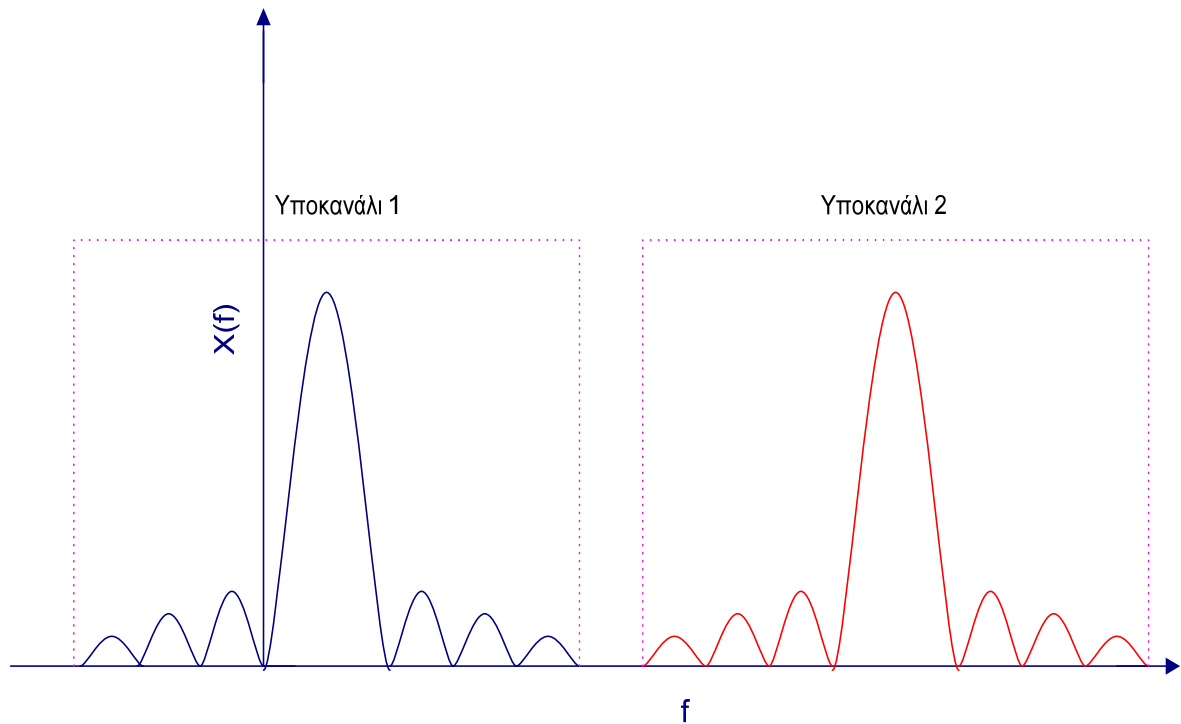
Παράδειγμα 2.1

Δεδομένου ότι τα σύμβολα μεταδίδονται με τετραγωνικούς παλμούς, ένα σύμβολο αντιστοιχεί σε ένα τετραγωνικό παλμό. Η φασματική μορφή του στο πεδίο της συχνότητας θα είναι όπως στο Σχήμα 2.1.



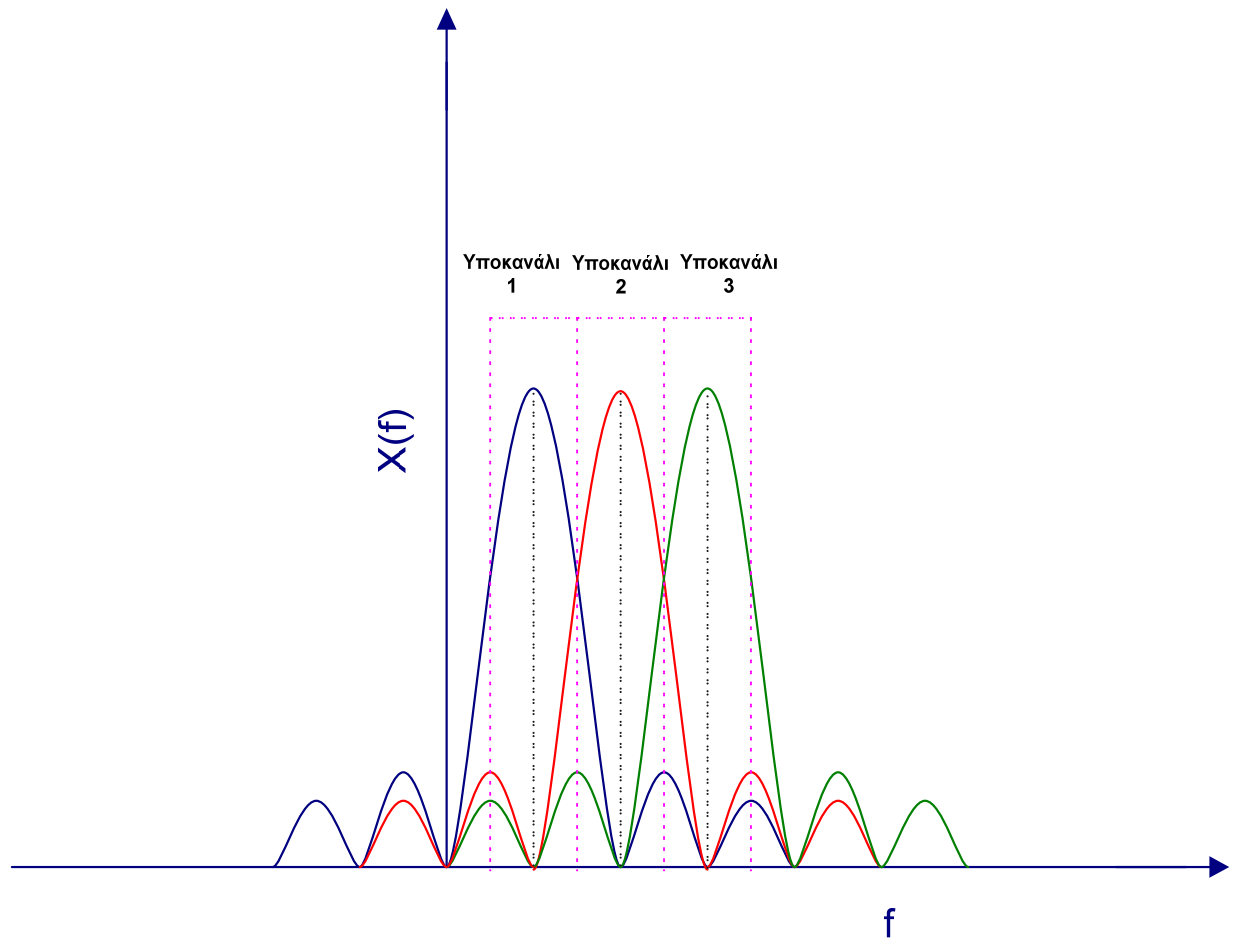
Σχήμα 2.1 : Φασματική μορφή τετραγωνικού παλμού που αντιστοιχεί σε σύμβολο.

Παρακάτω στο Σχήμα 2.2 φαίνονται δύο μεταδιδόμενα σύμβολα όμοια με το προηγούμενο στο πεδίο της συχνότητας σε σύστημα FDM. Για να μην υπάρχει μεταξύ τους επικάλυψη(ICI) λόγω των πλευρικών συνιστωσών των τετραγωνικών παλμών, είναι απαραίτητο να κρατήσουμε μια σεβαστή απόσταση μεταξύ των δύο συμβόλων. Με αυτό τον τρόπο όμως μεγάλο μέρος του διαθέσιμου φάσματος μένει αναξιοποίητο.



Σχήμα 2.2 : Φασματική μορφή 2 τετραγωνικών παλμών μετάδοσης FDM που αντιστοιχούν σε 2 σύμβολα.

Στην OFDM δεν χρειάζεται να κρατάμε φασματική απόσταση μεταξύ των παράλληλα μεταδιδόμενων συμβόλων με την προϋπόθεση να είναι ορθογώνια. Παρακάτω στο Σχήμα 2.3 φαίνονται τρία σύμβολα όμοια με τα προηγούμενα στο πεδίο της συχνότητας σε σύστημα OFDM. Όπου το φάσμα του ενός συμβόλου έχει κορυφή το φάσμα των γειτονικών συμβόλων μηδενίζεται.



Σχήμα 2.3 : Φασματική μορφή 3 τετραγωνικών παλμών μετάδοσης OFDM που αντιστοιχούν σε 3 σύμβολα.

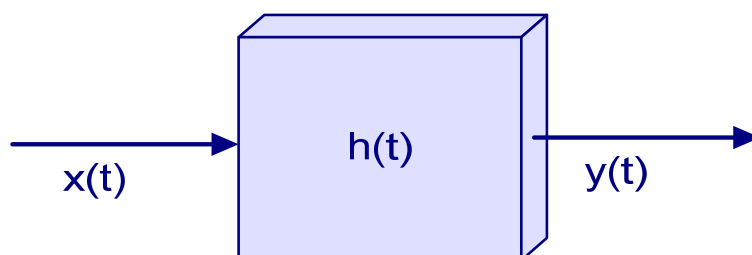
Φαίνεται ξεκάθαρα η φασματική εξοικονόμηση με την μείωση της φασματικής απόστασης μεταξύ των υποκαναλιών. Το σύνολο των συμβόλων(φερόντων) που μεταδίδονται σε μια χρονική περίοδο T και καταλαμβάνουν ολόκληρο το εύρος συχνοτήτων B του καναλιού ενός OFDM συστήματος αποτελούν ένα OFDM σύμβολο.

2.2 Κυκλικό πρόθεμα(CP)

Αν και η ορθογώνια παράλληλη μετάδοση των συμβόλων αποτελεί μία αποτελεσματική μέθοδο αντιμετώπισης της διασυμβολικής παρεμβολής(ISI), εντούτοις όμως δεν εξαλείφει εντελώς το πρόβλημα. Το αποτέλεσμα είναι να υπάρχει ένα μικρό διάστημα που κάθε OFDM σύμβολο παρεμβάλλει στο αμέσως επόμενο του. Επιπλέον το λαμβανόμενο σήμα ύστερα από την ανάλυση και την αποδιαμόρφωση στο δέκτη και αφού γίνει μετατροπή από τον αναλογικό κόσμο στον ψηφιακό με έναν A/D (Analog to Digital Converter) δεν είναι συνεχούς χρόνου αλλά διακριτό. Το γεγονός αυτό δημιουργεί νέες συνθήκες στην επεξεργασία του σήματος γιατί δεν ισχύουν ακριβώς οι ίδιες μαθηματικές ιδιότητες που ισχύουν στα σήματα συνεχούς χρόνου. Τα προβλήματα ISI παρεμβολής μπορούν να αντιμετωπιστούν αποδοτικά στο ψηφιακό σύστημα με την προσθήκη ενός επιπλέον τμήματος στην αρχή(η στο τέλος) κάθε OFDM συμβόλου που ονομάζεται κυκλικό πρόθεμα(Cyclic Prefix). Λέγεται δε κυκλικό πρόθεμα διότι το τμήμα αυτό είναι ένα μικρό κομμάτι απ' 'το τέλος (η απ' την αρχή αντίστοιχα) του OFDM συμβόλου το οποίο επαναλαμβάνεται στην αρχή(η στο τέλος) του συμβόλου.

Παράδειγμα 2.2

Ας υποθέσουμε ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ που εκπέμπεται σε δίαυλο με κρουστική απόκριση $h(t)$ και στην έξοδο(δέκτης) λαμβάνουμε το $y(t)$.



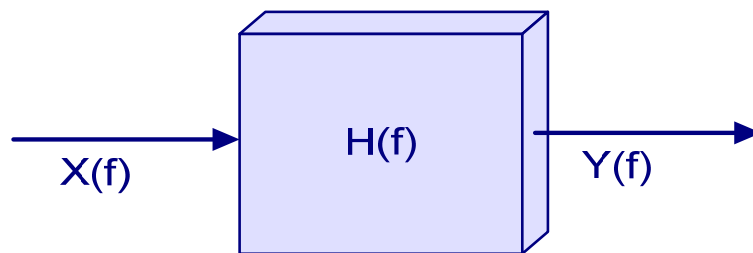
Σχήμα 2.4 :Δίαυλος στο πεδίο του χρόνου.

Ισχύει ότι το $y(t)$ ισούται με τη συνέλιξη του $x(t)$ με το $h(t)$
Δηλαδή $y(t) = x(t) * h(t)$.

Ως γνωστόν

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.1)$$

Ο υπολογισμός ενός τέτοιου ολοκληρώματος είναι συνήθως πολύ δύσκολος έως αδύνατος. Ειδικά αφού τα $x(t)$, $h(t)$ είναι στοχαστικά χρονομεταβλητά σήματα. Για το λόγο αυτό εκφράζουμε μέσω μετασχηματισμού Fourier τα $x(t)$, $h(t)$, $y(t)$ στο πεδίο της συχνότητας. Έτσι παίρνουμε αντίστοιχα τα $X(f)$, $H(f)$, $Y(f)$.



Σχήμα 2.5 : Δίαυλος στο πεδίο της συχνότητας.

Ισχύει ότι

$$X(f) \square H(f) = Y(f) \quad (2.2)$$

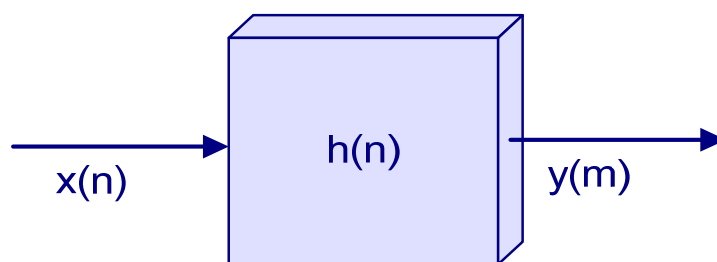
Δηλαδή η συνέλιξη των δύο σημάτων στο χρόνο ισοδυναμεί με ένα απλό πολλαπλασιασμό στο πεδίο της συχνότητας.

Αν γνωρίζαμε τέλεια το $H(f)$ και μπορούσαμε να εκτιμήσουμε με ακρίβεια το $Y(f)$ τότε θα ήταν δυνατόν να υπολογίσουμε το $X(f)$ με μία απλή διαίρεση.

$$X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} \quad (2.3)$$

και στη συνέχεια το $y(t)$ με χρήση αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier. Όμως τα σήματα μας σε ένα πραγματικό σύστημα μετά τη δειγματοληψία είναι διακριτού χρόνου και δεν ισχύουν οι ανωτέρω ιδιότητες! Επίσης για τον ακριβή υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier (όπως και του ολοκληρώματος της συνέλιξης) απαιτείται η λήψη ολόκληρου του εκπεμπόμενου σήματος καθώς τα άκρα ολοκλήρωσης εκτείνονται στο άπειρο, πράγμα πρακτικά αδύνατο καθώς θα εισήγαγε τεράστια καθυστέρηση μη ανεκτή από υπηρεσίες (όπως πχ μετάδοση φωνής). Επίσης το υπολογιστικό φορτίο και οι απαιτήσεις μνήμης θα ήταν τεράστιες.

Περνώντας στο διακριτό πεδίο του χρόνου, μετά τη δειγματοληψία, αντί για τα $x(t)$, $h(t)$, $y(t)$ θα έχουμε τα διακριτά $x(n)$, $h(n)$, $y(m)$. Όπου $h(n)$ το διακριτό ισοδύναμο της κρουστικής απόκρισης του καναλιού. Θα υπάρχει επίσης η απαίτηση αποδιαμόρφωσης κάθε OFDM συμβόλου κατά την ολοκλήρωση της λήψης του ξεχωριστά.



Σχήμα 2.6 : Δίαυλος στο πεδίο του διακριτού χρόνου.

Θα ισχύει

$$y(m) = x(n) * h(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot h(m-n) \quad (2.4)$$

Ισούται δηλαδή το $y(m)$ με την απλή διακριτή συνέλιξη των $x(n)$ και $h(n)$.

Μεταφέροντας τα ανωτέρω διακριτά σήματα στο πεδίο της συχνότητας μέσω διακριτού μετασχηματισμού Fourier(DFT) παίρνουμε τα $X(k)$, $H(k)$, $Y(k)$.



Σχήμα 2.5 : Δίαυλος στο πεδίο της διακριτής συχνότητας.

Όμως **δεν ισχύει** $X(k) \square H(k) = Y(k)$ και αυτό γιατί για τα διακριτά σήματα η δυαδική πράξη του πολλαπλασιασμού στη συχνότητα δεν είναι η απλή συνέλιξη στο χρόνο $x(n) * h(n)$ αλλά η κυκλική συνέλιξη.

$$\begin{aligned} x(n) \otimes h(n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot h([m-n]_N) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot h(m-n) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Όπου $[m - n]_N$ είναι το $(m - n) \bmod (N)$ δηλαδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του $(m - n)$ με το N . Και N το μήκος(πλήθος δειγμάτων) του $x(n)$ για ένα OFDM σύμβολο(η αλλιώς το μέγεθος του FFT/DFT για τον υπολογισμό των $X(k)$, $H(k)$ και $Y(k)$).

Προσθέτοντας στο $x(n)$ το κυκλικό πρόθεμα παίρνουμε το $x^{cp}(n)$.

Όπου

$$x^{cp}(n) = \begin{cases} x(N - N_{cp} + n) & \text{για } -N_{cp} \leq n \leq -1 \\ x(n) & \text{για } 0 \leq n \leq N - 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

Με N_{cp} το μήκος(πλήθος δειγμάτων) του Cyclic Prefix(CP).

Αν το μήκος της κρουστικής απόκρισης του διαύλου είναι μικρότερο του N_{cp} , τότε

$$y^{cp}(n) = x^{cp}(n) * h(n) = x(n) \otimes h(n) \quad (2.7)$$

Για $n = 0 \dots N - 1$

Με τον τρόπο αυτόν λοιπόν η απλή συνέλιξη μετατρέπεται σε κυκλική! Αντίστοιχα όταν μετασχηματίσουμε τη σχέση αυτή στη συχνότητα θα λάβουμε την

$$Y^{cp}(k) = X(k) \cdot H(k) \quad (2.8)$$

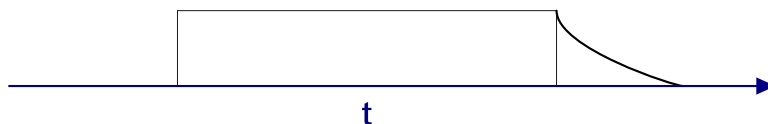
Ισχύει τώρα ύστερα από την προσθήκη του **CP** ο πολλαπλασιασμός στη συχνότητα, πράγμα που μας διευκολύνει πολύ στον υπολογισμό του αρχικού

σήματος $x(t)$. Αυτό γίνεται απλά υπολογίζοντας το $X(k)$ από την ανωτέρω σχέση. Πολλαπλασιάζουμε το $Y^{cp}(k)$ με το $H^{-1}(k)$.

Παράδειγμα 2.3

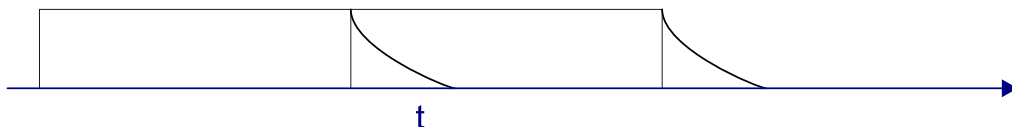
Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζεται συνοπτικά η χρησιμότητα του κυκλικού προθέματος(CP).

A) OFDM σύμβολο(συνεχούς χρόνου) χωρίς κυκλικό πρόθεμα μετά τη διέλευση από τον ραδιοδίαυλο.



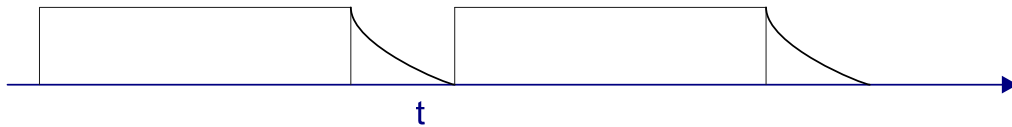
Σχήμα 2.6 : OFDM σύμβολο χωρίς διάστημα φύλαξης στο πεδίο του χρόνου.

B) Δύο OFDM σύμβολα χωρίς τη χρήση κυκλικού προθέματος. Παρατηρούμε ότι υπάρχει κάποια παρεμβολή στο χρόνο απ' το πρώτο στο δεύτερο.



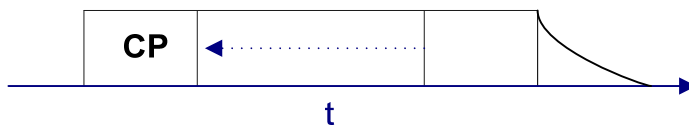
Σχήμα 2.7 : Δύο OFDM σύμβολα χωρίς διάστημα φύλαξης στο πεδίο του χρόνου.

Γ) Αν κρατούσαμε ένα «κενό»(χωρίς πληροφορία) διάστημα φύλαξης μεταξύ των συμβόλων δεν θα είχαμε παρεμβολή. Με αυτόν τον τρόπο κάθε διακριτό OFDM σύμβολο που φτάνει στο δέκτη ($y(n)$) προκύπτει με την απλή συνέλιξη του εκπεμπόμενου συμβόλου ($x(n)$) με την κρουστική απόκριση ($h(n)$). Έτσι όμως είναι δυσκολότερη η εύρεση του $X(k)$ η του $x(n)$ στο δέκτη.



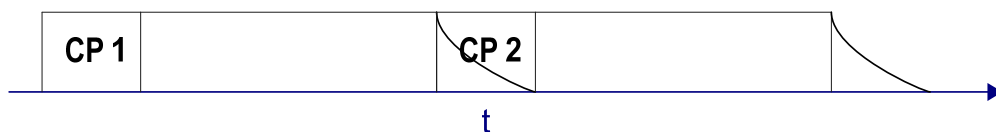
Σχήμα 2.8 : Δύο OFDM σύμβολα με «κενό» διάστημα φύλαξης στο πεδίο του χρόνου.

Δ) OFDM σύμβολο με κυκλικό πρόθεμα. Ένα τμήμα από το τέλος του συμβόλου προστίθεται στην αρχή του.



Σχήμα 2.9 : OFDM σύμβολο με κυκλικό πρόθεμα CP στο πεδίο του χρόνου.

Ε) Δεν έχουμε παρεμβολή. Επιπλέον Το αντίστοιχο OFDM σύμβολο που θα φτάσει στο δέκτη ($y(n)$) προκύπτει με την **κυκλική** συνέλιξη του εκπεμπόμενου συμβόλου ($x(n)$) και της κρουστικής απόκρισης ($h(n)$). Έτσι υπολογίζονται εύκολα τα $X(k)$ και $x(n)$ στο δέκτη.



Σχήμα 2.10 : Δύο OFDM σύμβολα με κυκλικό πρόθεμα CP στο πεδίο του χρόνου.

2.2.1 Μέγιστη Διάρκεια Κυκλικού Προθέματος

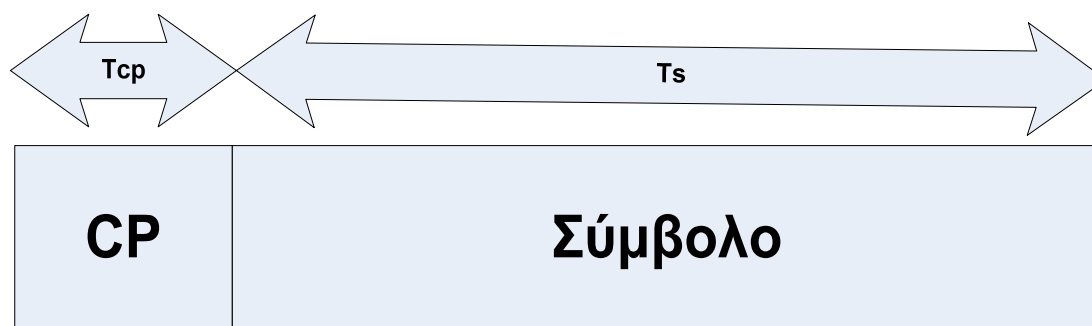
Για να αποφεύγεται η διασυμβολική παρεμβολή θα πρέπει η διάρκεια του κυκλικού προθέματος να είναι τουλάχιστον ίση με τη μέγιστη χρονική διασπορά του διαύλου.

Αν η διάρκεια του κυκλικού προθέματος είναι T_{cp} και η διάρκεια του συμβόλου T_s τότε θα έχουμε μείωση του ρυθμού μετάδοσης κατά :

$$R = \frac{T_s}{T_s + T_{cp}} \quad (2.9)$$

Εάν δεν θέλουμε να έχουμε πτώση του ρυθμού μετάδοσης μεγαλύτερη από 1 dB τότε καθορίζουμε τη μέγιστη διάρκεια του κυκλικού προθέματος ίση με 20% της συνολικής διάρκειας του OFDM συμβόλου[1]. Πράγματι :

$$10 \cdot \log_{10} \left(\frac{T_s}{T_s + T_{cp}} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{T_s}{T_s + \frac{1}{4} \cdot T_s} \right) = 10 \cdot \log_{10} (0.8) \cong -1 \text{ dB}$$



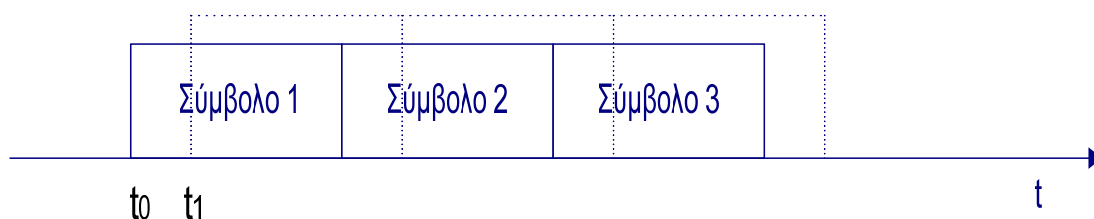
Σχήμα 2.11 : Σύμβολο και κυκλικό πρόθεμα.

2.2.2 Κυκλικό Πρόθεμα και Συγχρονισμός

Ένα ακόμα σημαντικό όφελος του κυκλικού προθέματος(CP) είναι το γεγονός ότι λύνει σε πολύ μεγάλο βαθμό τα προβλήματα συγχρονισμού. Ο δέκτης πρέπει να γνωρίζει με πολύ μεγάλη ακρίβεια τη χρονική στιγμή που φτάνει σε αυτόν το εκπεμπόμενο σήμα ώστε να ξεκινήσει τη λήψη και την περαιτέρω επεξεργασία του. Τυχόν σφάλματα στον συγχρονισμό έχουν ως αποτέλεσμα την αλλοίωση των συμβόλων που λαμβάνονται. π.χ. Αν ο δέκτης ξεκινήσει να λαμβάνει το σήμα κάποιο χρονικό διάστημα t μετά από την άφιξη του πρώτου δείγματος του σήματος είναι προφανές ότι τα αρχικά τμήματα των συμβόλων που αντιστοιχούν στο διάστημα αυτό χάνονται. Αυτό συνεπάγεται όμως και μεγάλη πιθανότητα αλλοίωσης της πληροφορίας.

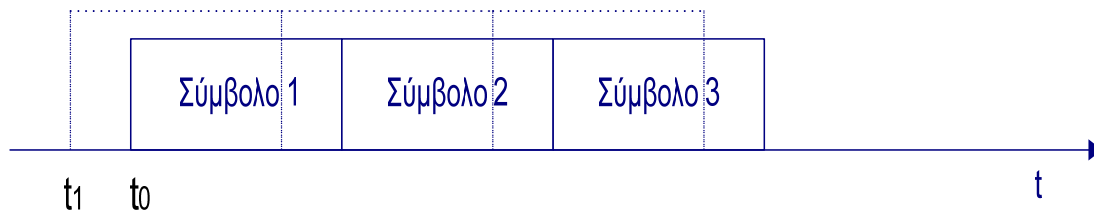
Παράδειγμα 2.4

Στο Σχήμα 2.11 φαίνονται τρία μεταδιδόμενα σύμβολα που έφτασαν στο δέκτη και με διακεκομμένες τα σύμβολα που λαμβάνει ο δέκτης. Η χρονική στιγμή της άφιξης του σήματος στο δέκτη είναι η t_0 και η χρονική στιγμή που αρχίζει τη λήψη του σήματος ο δέκτης η t_1 . Παρατηρούμε υπάρχει μια καθυστέρηση στη λήψη του σήματος και τα σύμβολα που λαμβάνονται είναι λανθασμένα. π.χ. Το πρώτο δεν έχει ένα κομμάτι του αρχικού πρώτου συμβόλου που έφτασε και έχει ένα κομμάτι που ανήκει στο αρχικό δεύτερο σύμβολο.



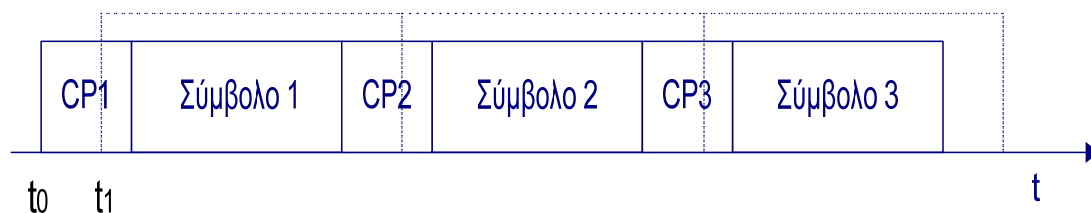
Σχήμα 2.12 : Τρία αφικνούμενα σύμβολα με καθυστέρηση λήψης από τον δέκτη.

Τα ίδια προβλήματα θα έχουμε και στην περίπτωση που η λήψη του σήματος ξεκινήσει πριν από την άφιξη του σήματος όπως φαίνεται παρακάτω στο Σχήμα 2.13 .



Σχήμα 2.13 : Τρία αφικνούμενα σύμβολα με πρόωρη λήψη από τον δέκτη.

Με την προσθήκη του κυκλικού προθέματος το πρόβλημα λύνεται διότι το κομμάτι του συμβόλου που χάνεται περιέχεται στο κυκλικό πρόθεμα. Έτσι έχουμε περιθώριο σφάλματος στο συγχρονισμό $|t_0 - t_1|$, αν θεωρηθεί επίπεδο κανάλι. Διαφορετικά $|t_0 - t_1 - t_L|$ όπου t_L η χρονική διάρκεια της κρουστικής απόκρισης του ραδιοδιαύλου.



Σχήμα 2.14 : Τρία αφικνούμενα σύμβολα με CP και καθυστέρηση λήψης από τον δέκτη.

2.2.3 Σφάλμα Συγχρονισμού

Αν φτάνει στο δέκτη σήμα $s(t)$ και υπάρχει ένα σφάλμα στο συγχρονισμό τ (time offset) μεταξύ πομπού και δέκτη τότε το σήμα που λαμβάνει ο δέκτης θα είναι

$$\bar{s}(t, \tau) = \begin{cases} s(t+\tau), & \text{για } 0 \leq t \leq T_s - \tau, \\ e(t-T_s+\tau), & \text{για } T_s - \tau \leq t \leq T_s \end{cases} \quad (2.10)$$

Όπου το $e(t)$ εκφράζει την παρεμβολή λόγω του time offset τ και T_s η περίοδος του συμβόλου.

Το αποδιαμορφωμένο σήμα στο δέκτη είναι[2] :

$$\begin{aligned} X_m &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \bar{s}(t, \tau) e^{-j2\pi f_m t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s - \tau} s(t+\tau) e^{-j2\pi f_m t} dt + \frac{1}{T_s} \int_{T_s - \tau}^{T_s} e(t-T_s+\tau) e^{-j2\pi f_m t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{\tau}^{T_s} s(t) e^{-j2\pi f_m (t-\tau)} dt + \frac{1}{T_s} \int_0^{\tau} e(t) e^{-j2\pi f_m (t-\tau)} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} s(t) e^{-j2\pi f_m (t-\tau)} dt - \frac{1}{T_s} \int_0^{\tau} s(t) e^{-j2\pi f_m (t-\tau)} dt \\ &\quad + \frac{1}{T_s} \int_0^{\tau} e(t) e^{-j2\pi f_m (t-\tau)} dt \\ &= s_m e^{j2\pi f_m \tau} + \frac{1}{T_s} \int_0^{\tau} [e(t) - s(t)] e^{-j2\pi f_m (t-\tau)} dt \end{aligned} \quad (2.11)$$

Το σφάλμα συγχρονισμού είναι το :

$$\mathbf{K} = \frac{1}{T_s} \int_0^{\tau} [e(t) - s(t)] e^{-j2\pi f_m(t-\tau)} dt \quad (2.12)$$

Για $\tau \leq T_{cp}$ είναι $e(t) = s(t)$ και συνεπώς το σφάλμα συγχρονισμού είναι μηδέν.

2.3 Βασικές Μέθοδοι Ψηφιακής Διαμόρφωσης

Τρεις είναι οι κυριότερες μέθοδοι διαμορφώσης για κάθε υποκανάλι ξεχωριστά που χρησιμοποιούνται στην OFDM. Η BPSK, η QPSK και η 16-QAM[3].

2.3.1 Διαμόρφωση BPSK

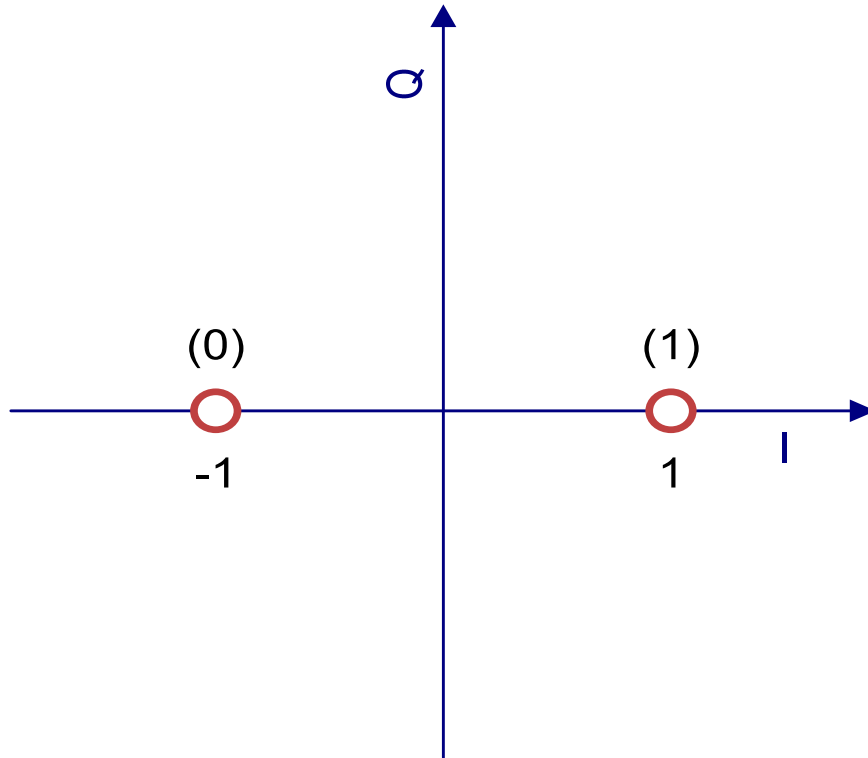
Στη διαμόρφωση BPSK το κάθε σύμβολο έχει δύο μόνο πιθανές τιμές τις 1 και -1 που αντιστοιχούν στις αντίστοιχες τιμές bit 1 και 0 . Όπως είναι προφανές ο ρυθμός των εσφαλμένων bit θα ισούται με τον ρυθμό των εσφαλμένων συμβόλων. Αποδεικνύεται πως η πιθανότητα εμφάνισης λανθασμένου bit είναι :

$$P_b^{BPSK} = Q(\sqrt{2 \cdot \gamma_b}) \quad (2.13)$$

όπου γ_b ο σηματοθορυβικός λόγος

Παρακάτω στο Σχήμα 2.15 απεικονίζονται τα λογικά σύμβολα στο μιγαδικό επίπεδο καθώς και οι αντίστοιχες περιοχές επιλογής τους για την BPSK.

Το δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο αντιστοιχεί στο σύμβολο 1 (bit 1) και το αριστερό στο σύμβολο -1 (bit 0). Αυτό σημαίνει πως αν η τιμή του σήματος που αντιστοιχεί σε ένα σύμβολο στο δέκτη ληφθεί ίση με κάποιο μιγαδικό αριθμό στο δεξί ημιεπίπεδο τότε λαμβάνουμε για το σύμβολο την τιμή 1 και για το αντίστοιχο bit την τιμή 1 . Ανάλογα για την περίπτωση που η τιμή του συμβόλου βρεθεί στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.



Σχήμα 2.15 : Περιοχές συμβόλων BPSK.

2.3.2 Διαμόρφωση QPSK

Η QPSK είναι ουσιαστικά δύο διαμορφώσεις BPSK ορθογώνιες μεταξύ τους. Στη διαμόρφωση αυτή αντιστοιχούν δύο bits για κάθε σύμβολο. Οι τιμές των μιγαδικών συμβόλων και οι αντιστοιχες τιμές bits που αντιστοιχούν σε αυτά είναι οι παρακάτω :

$$(1 + j) / \sqrt{2} \quad : \quad 00$$

$$(1 - j) / \sqrt{2} \quad : \quad 01$$

$$(-1 + j) / \sqrt{2} \quad : \quad 10$$

$$(-1 - j) / \sqrt{2} \quad : \quad 11$$

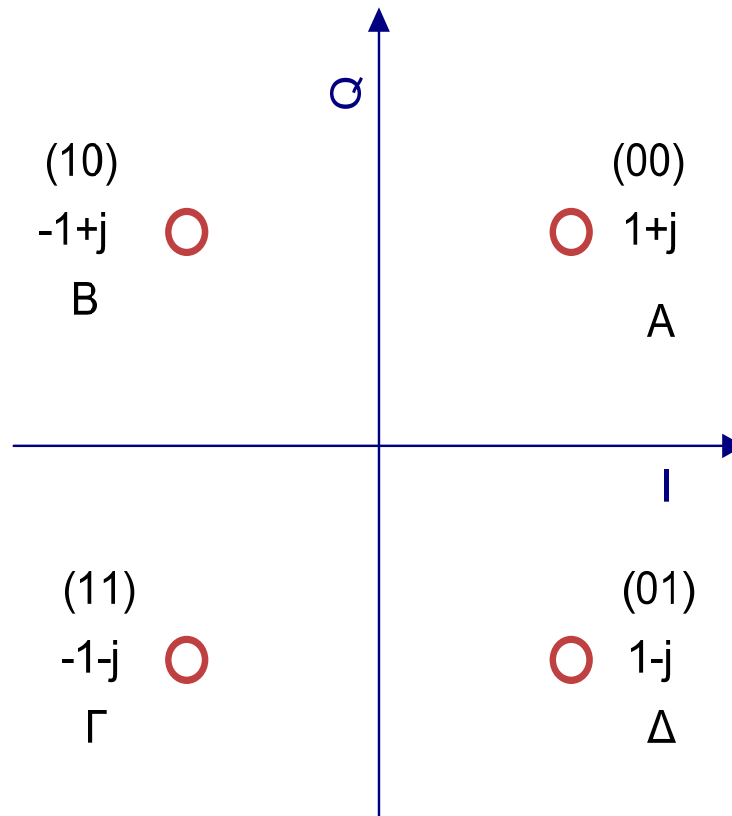
Η πιθανότητα και τα δύο λαμβανόμενα bits ενός συμβόλου να είναι σωστά είναι

$$[1 - P_b^{BPSK}]^2 = [1 - Q(\sqrt{2 \cdot \gamma_b})]^2 \quad (2.14)$$

Άρα η πιθανότητα να είναι το σύμβολο εσφαλμένο είναι :

$$P_s^{QPSK} = 1 - [1 - P_b^{BPSK}]^2 = 1 - [1 - Q(\sqrt{2 \cdot \gamma_b})]^2 \quad (2.15)$$

Εδώ το μιγαδικό επίπεδο χωρίζεται σε τέσσερις ίσες περιοχές από τους δύο κάθετους άξονες. Η περιοχή A για παράδειγμα (1^ο τεταρτημόριο) αντιστοιχεί στο σύμβολο $1 + j$ και στα bit (00). Αντίστοιχα προκύπτουν και οι υπόλοιπες αποφάσεις.



Σχήμα 2.16 : Περιοχές συμβόλων QPSK.

2.3.3 Διαμόρφωση 16-QAM

Στη διαμόρφωση αυτή χρησιμοποιούνται 4 bits για κάθε ένα σύμβολο.

Έχουμε 16 διαφορετικά σύμβολα και τις αντίστοιχες ακολουθίες bit που τα περιγράφουν :

$(-1 + j) / \sqrt{10}$: 0101
$(-1 - j) / \sqrt{10}$: 1101
$(1 + j) / \sqrt{10}$: 0111
$(1 - j) / \sqrt{10}$: 1111
$(-3 + j) / \sqrt{10}$: 0100
$(-3 - j) / \sqrt{10}$: 1100
$(3 + j) / \sqrt{10}$: 0110
$(3 - j) / \sqrt{10}$: 1110
$(-1 + 3j) / \sqrt{10}$: 0001
$(-1 - 3j) / \sqrt{10}$: 1001
$(1 + 3j) / \sqrt{10}$: 0011
$(1 - 3j) / \sqrt{10}$: 1011
$(-3 + 3j) / \sqrt{10}$: 0000
$(-3 - 3j) / \sqrt{10}$: 1000
$(3 - 3j) / \sqrt{10}$: 1010
$(3 + 3j) / \sqrt{10}$: 0010

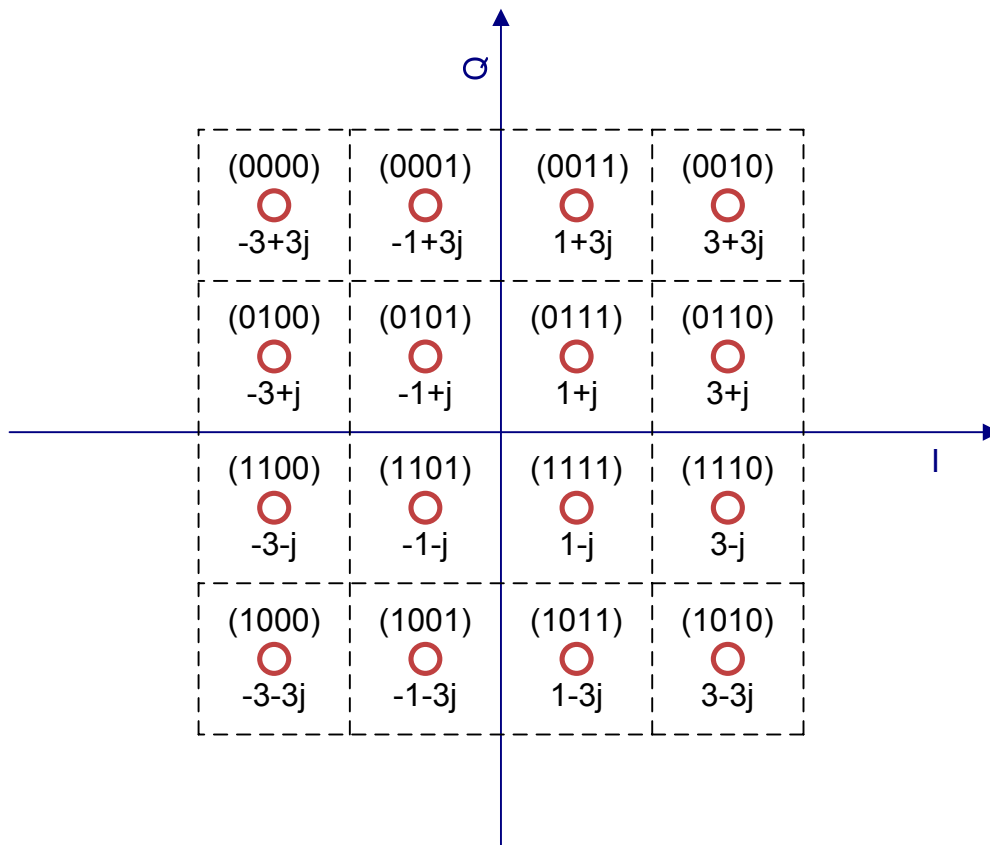
Αποδεικνύεται ότι η πιθανότητα σφάλματος για την 16-QAM διαμόρφωση είναι :

$$P_s^{16-QAM} = 1 - \left[1 - \frac{3}{2} \cdot Q \left(\sqrt{\frac{3 \cdot \gamma_s}{15}} \right) \right]^2 \quad (2.16)$$

Γενικά η πιθανότητα σφάλματος στη M-QAM διαμόρφωση είναι :

$$P_s^{M-QAM} = 1 - \left[1 - \frac{2 \cdot (\sqrt{M} - 1)}{\sqrt{M}} \cdot Q \left(\sqrt{\frac{3 \cdot \gamma_s}{M - 1}} \right) \right]^2 \quad (2.17)$$

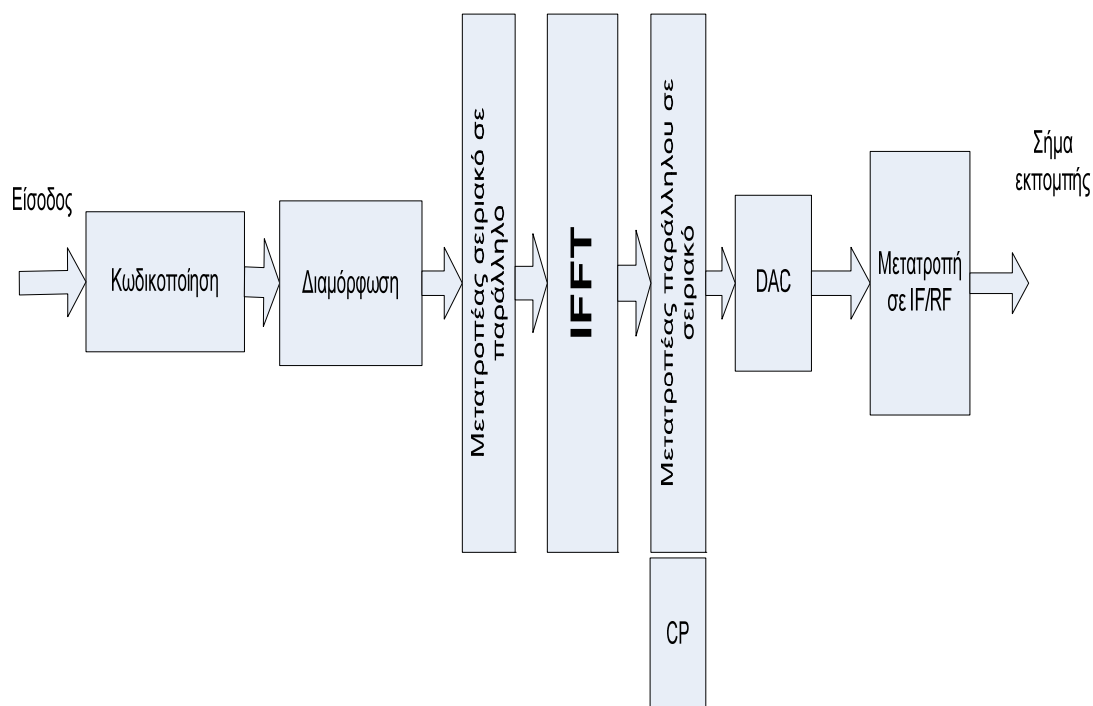
Στην 16-QAM έχουμε 16 περιοχές συμβόλων στο μιγαδικό επίπεδο όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.17.



Σχήμα 2.17 : Περιοχές συμβόλων 16-QAM.

2.4 Δομή Συστήματος OFDM

Στο σχήμα φαίνεται το βασικό δομικό διάγραμμα ενός πομπού OFDM. Το σήμα αρχικά κωδικοποιείται και διαχωρίζεται σε πακέτα και μετά διαμορφώνεται ψηφιακά στη βασική ζώνη με μία μέθοδο ψηφιακής διαμόρφωσης. Ύστερα μετατρέπεται από σειριακό σε παράλληλους συρμούς N συμβόλων και τροφοδοτείται σε ένα κύκλωμα IFFT (Inverse Fast Fourier Transform). Συμβατικά θεωρούμε πως τα ψηφιακά σύμβολα στην είσοδο του IFFT αντιστοιχούν στο πεδίο της συχνότητας και στην έξοδο του IFFT στο πεδίο του χρόνου. Στη συνέχεια το σήμα περνάει μέσα από ένα μετατροπέα παράλληλου προς σειριακό στον οποίο προστίθεται και το Cyclic Prefix. Τέλος μετατρέπεται σε αναλογικό.

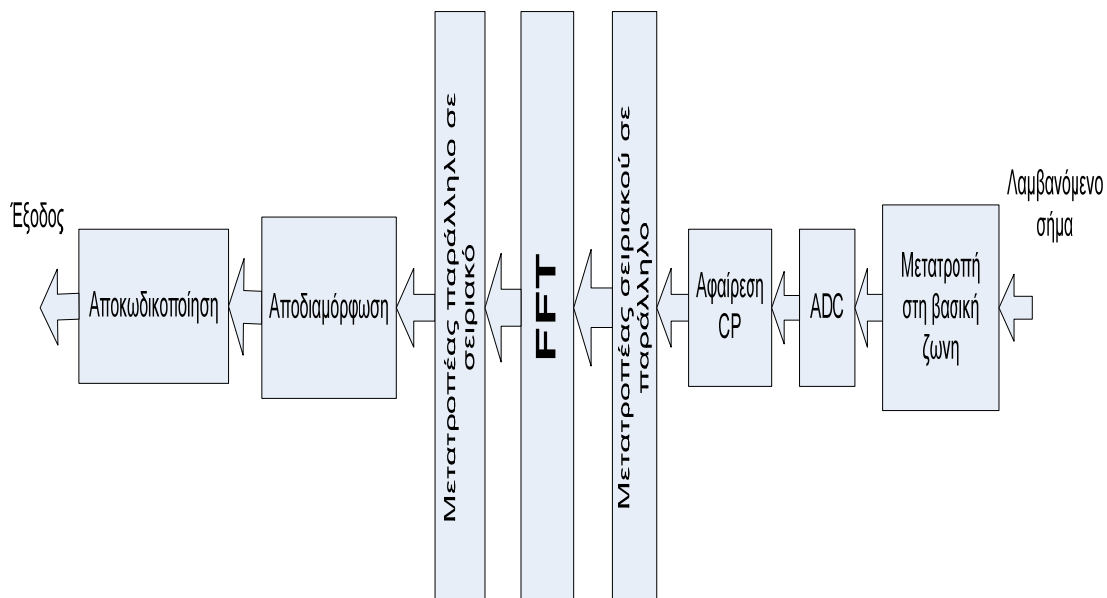


Σχήμα 2.18 : Δομή πομπού OFDM.

Αν έχουμε να μεταδώσουμε τα σύμβολα $\{X_k\}_{k=0}^{N-1}$ τότε η n-οστή έξοδος του IFFT θα είναι

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j2\pi nk/N}, \quad 0 \leq n < N - 1 \quad (2.18)$$

Η αντίστροφη διαδικασία ακολουθείται στο δέκτη. Από το λαμβανόμενο σήμα αφού μετατραπεί σε ψηφιακό αφαιρείται το Cyclic Prefix και τροφοδοτείται σε έναν μετατροπέα σειριακού προς παράλληλο. Μετά περνάει από έναν FFT(Fast Fourier Transform) και μετατρέπεται σε σειριακό. Στο τέλος αποδιαμορφώνεται και αποκωδικοποιείται.



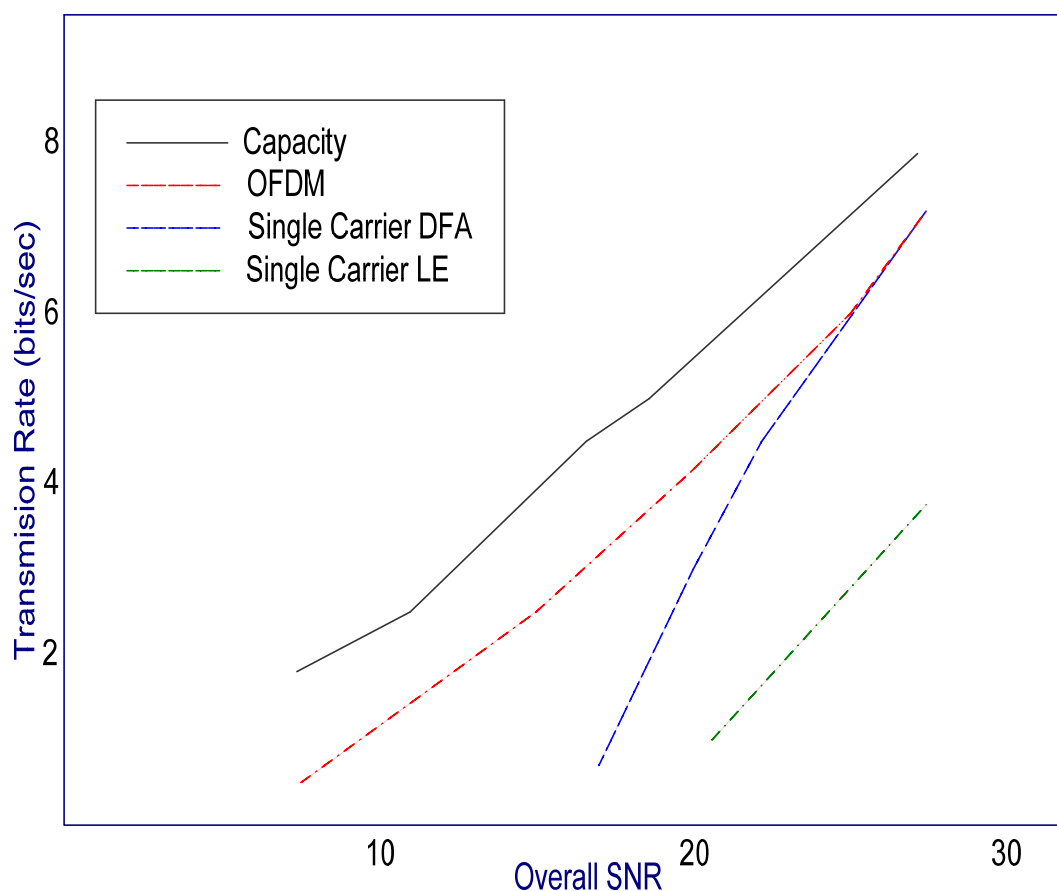
Σχήμα 2.19 : Δομή δέκτη OFDM.

Η έξοδος του FFT θα είναι :

$$\begin{aligned} Y_m &= \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cdot e^{-j2\pi nm/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j2\pi nk/N} \cdot e^{-j2\pi nm/N} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j2\pi n(k-m)/N} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} X_m = X_m, 0 \leq m \leq N-1 \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.5 Αδυναμίες OFDM

Στο παρακάτω διάγραμμα του ρυθμού μετάδοσης προς το σηματοθόρυβικό λόγο φαίνεται μια σύγκριση της OFDM με κάποιες διαμορφώσεις απλού φέροντος.

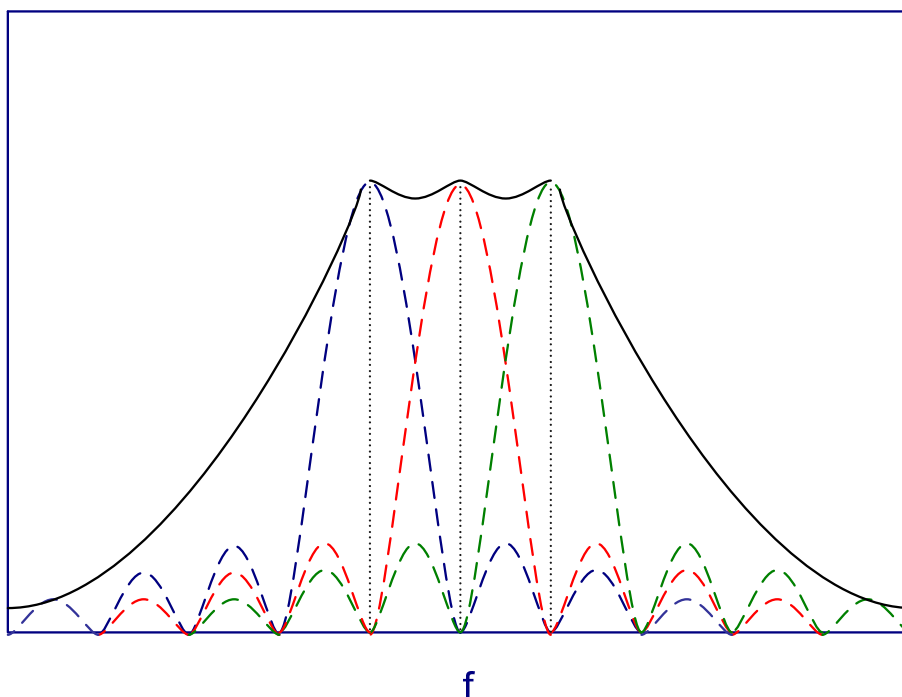


Σχήμα 2.20 : Σύγκριση OFDM και μετάδοσης απλού φέροντος DFA και LE.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα η OFDM υπερέχει αισθητά εν συγκρίση με τις διαμορφώσεις απλού φέροντος εξασφαλίζοντας πιο αποδοτική μεταφορά δεδομένων. Παρουσιάζει όμως και κάποια προβλήματα κυριότερα απ' τα οποία είναι οι πλευρικοί λοβοί, η διαφορονητική παρεμβολή(ICI) και η ολίσθηση Doppler.

2.5.1 Πλευρικοί Λοβοί

Η OFDM αν και πετυχαίνει μεγάλη εξοικονόμηση φάσματος εν σχέση με την απλή FDM, παρόλα αυτά λόγω της μορφής στη συχνότητα του τετραγωνικού παλμού, καταλαμβάνεται ένα μεγάλο μέρος γειτονικών στο φάσμα του συστήματος συχνοτήτων χωρίς να μεταδίδεται σε αυτές καμιά χρήσιμη πληροφορία. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τρεις γειτονικοί τετραγωνικοί παλμοί σε OFDM σύστημα. Παρατηρούμε πως οι συχνότητες των πλευρικών λοβών έχουν αρκετά μεγάλες τιμές. Προκύπτει λοιπόν ένα σημαντικό πρόβλημα αφού οι συχνότητες αυτές ενώ δεν μεταφέρουν δεδομένα, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν από γειτονικά συστήματα.



Σχήμα 2.21 : Πλευρικοί λοβοί τριών φερόντων OFDM.

2.5.2 Διαφοροντική Παρεμβολή(ICI)

Ένα ακόμη πρόβλημα της OFDM είναι το σφάλμα στο συγχρονισμό των φερόντων(Carrier Synchronization Error). Εξαιτίας μιας μικρής διαφοράς στη συχνότητα των τοπικών ταλαντωτών πομπού και δέκτη προκαλείται μια μικρή απόκλιση στη συχνότητα του λαμβανόμενου σήματος. Η απόκλιση αυτή προκαλεί εξασθένηση του σήματος σε κάθε υποκανάλι καθώς και παρεμβολές μεταξύ γειτονικών υποκαναλιών(ICI) λόγω του ότι χάνεται μερικώς η ιδιότητα της ορθογωνιότητας.

Έστω ότι ο πομπός στέλνει σήμα $s(t)$ και στο δέκτη φτάνει σήμα $r(t)$. Εξαιτίας του σφάλματος στο συγχρονισμό φερόντων ο δέκτης λαμβάνει το σήμα $r'(t)$ αντί για το $r(t)$. Το $r'(t)$ για μία απόκλιση συχνότητας δf μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως εξής[4]:

$$r'(t) = r(t)e^{j(2\pi(\delta f)t+\theta)} \quad (2.20)$$

Εφόσον γνωρίζουμε τις χρονικές στιγμές kT που ξεκινάει κάθε OFDM σύμβολο, τα σύμβολα στην έξοδο του δέκτη υπολογίζονται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} y_{i,k} &= \frac{1}{T_{FFT}} \int_{t=kT}^{kT+T_{FFT}} r(t) e^{j(2\pi(\delta f)t+\theta)} e^{-j2\pi i (t-kT)/T_{FFT}} dt \\ &= e^{j2\pi\theta} \frac{1}{T_{FFT}} \int_{t=kT}^{kT+T_{FFT}} \left[\int_{\tau=0}^{\tau_{max}} h(\tau) s(t-\tau) d\tau + n(t) \right] e^{j2\pi(\delta f)t} e^{-j2\pi i (t-kT)/T_{FFT}} dt \end{aligned} \quad (2.21)$$

Όπου $n(t)$ η επίδραση του θορύβου.

Αν αντί για το $s(t)$ έχουμε τις διακριτές συνιστώσες $X_{i',k}$ τότε αποδεικνύεται ότι τα $Y_{i,k}$ δίνονται από την (2.22).

$$y_{i,k} = e^{j(\theta+2\pi(\delta f)kT)} \sum_{i'=-N/2}^{N/2-1} x_{i'k} h_{i'k} \frac{1}{T_{FFT}} \int_{u=0}^{T_{FFT}} e^{-j2\pi\left(\frac{i-i'}{T_{FFT}}-\delta f\right)u} du + n_{i,k} \quad (2.22)$$

Η ανωτέρω έκφραση αναλύεται σε δύο όρους. Ο πρώτος ($i = i'$) εκφράζει απλά μια μεταβολή φάσης όλων των φερόντων. Ο δεύτερος ($i \neq i'$) περιγράφει τη παρεμβολή μεταξύ γειτονικών φερόντων InterCarrier Interference(ICI).

$$y_{i,k} = e^{j(\theta+2\pi(\delta f)kT)} x_{i'k} h_{i'k} \frac{1}{T_{FFT}} \int_{u=0}^{T_{FFT}} e^{j2\pi(\delta f)u} du \quad (2.23)$$

$$+ e^{j(\theta+2\pi(\delta f)kT)} \sum_{i'=-N/2}^{N/2-1} x_{i'k} h_{i'k} \frac{1}{T_{FFT}} \int_{u=0}^{T_{FFT}} e^{-j2\pi\left(\frac{i-i'}{T_{FFT}}-\delta f\right)u} du + n_{i,k}$$

Καταλήγουμε στην

$$y_{i,k} = x_{ik} h_{ik} \text{sinc}(\delta f T_{FFT}) \exp\left\{j\left[\theta + 2\pi\delta f\left(kT + T_{FFT}/2\right)\right]\right\} + n'_{i,k} \quad (2.24)$$

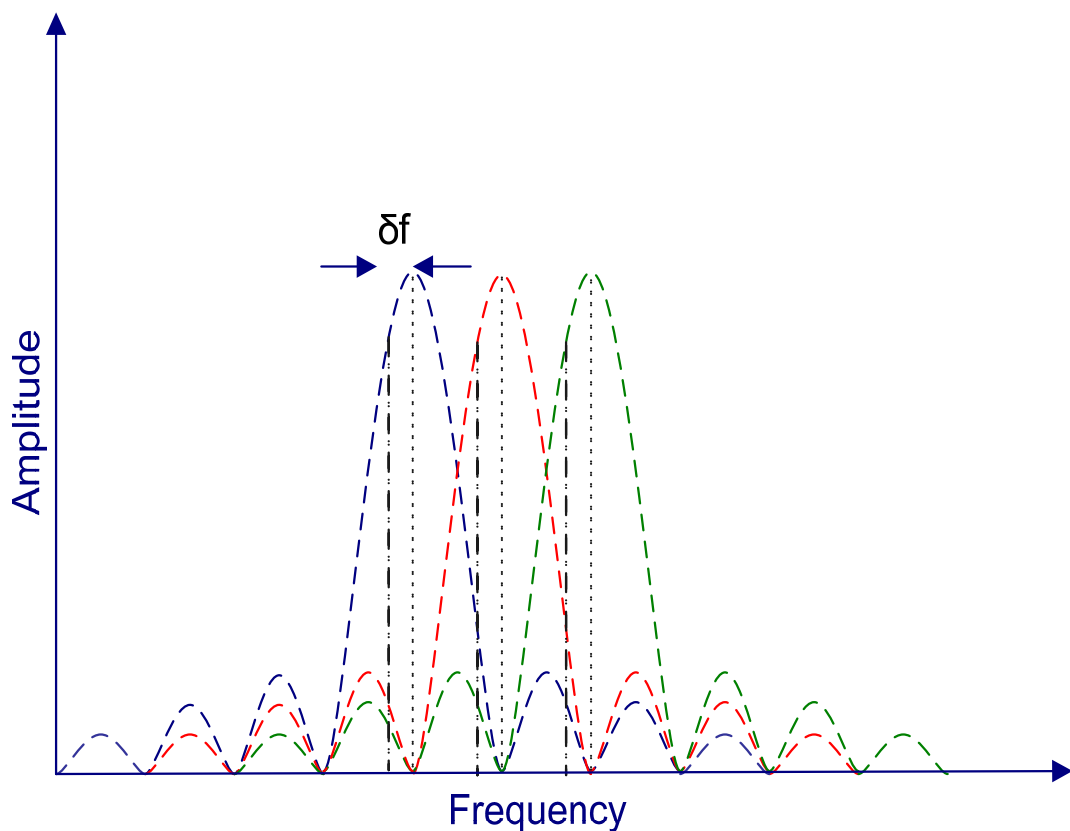
Ισχύει

$$\frac{1}{T_{FFT}} \int_{t=0}^{T_{FFT}} e^{j2\pi\delta ft} dt = \frac{1}{j2\pi\delta f T_{FFT}} \left[e^{-j2\pi\delta T_{FFT}} - 1 \right]$$

$$= e^{j2\pi\delta T_{FFT}} \frac{\sin(\pi\delta f T_{FFT})}{\pi\delta f T_{FFT}} = e^{j\pi\delta f T_{FFT}} \text{sinc}(\delta f T_{FFT}) \quad (2.25)$$

2.5.3 Ολίσθηση Doppler

Παρόμοια περίπτωση είναι και η **ολίσθηση Doppler (Doppler Shift)**. Είναι μια απόκλιση συχνότητας του λαμβανόμενου σήματος που οφείλεται στη σχετική κίνηση του δέκτη ως προς τον πομπό. Η απόκλιση αυτή προκαλεί όπως και προηγουμένως παρεμβολή μεταξύ των γειτονικών φερόντων.

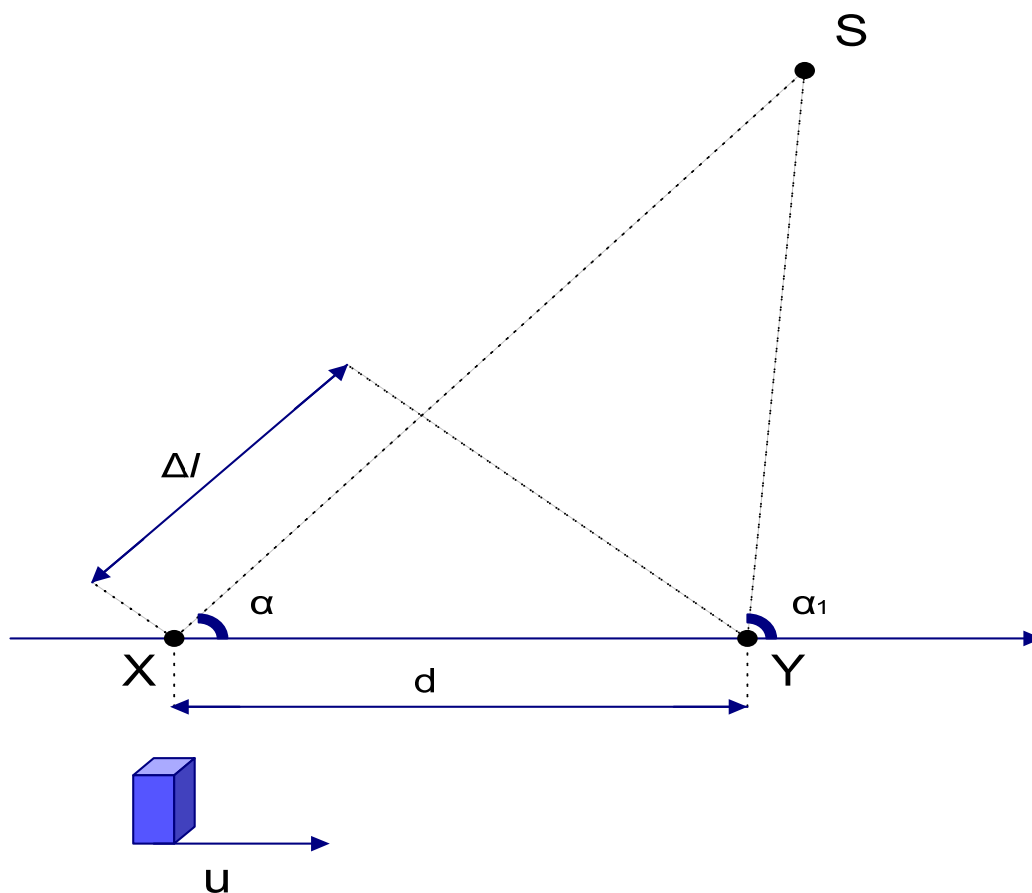


Σχήμα 2.22 : Απόκλιση συχνότητας δειγματοληψίας σε τρία φέροντα OFDM λόγω ολίσθησης Doppler.

Παράδειγμα 2.5 : Ορισμός της ολίσθησης Doppler.

Έστω ένα κινούμενο τερματικό που κινείται με σταθερή ταχύτητα \vec{u} σε διαδρομή μήκους d από το σημείο X στο σημείο Y (συμβολίζουμε με $X \rightarrow Y$) ενώ λαμβάνει σήματα από μία απομακρυσμένη πηγή S . Η διάφορα στο μήκος που διανύει το σήμα από το S στο Y ($S \rightarrow Y$) εν σχέση με το μήκος από το S στο X ($S \rightarrow X$) που θα διένυε αν το τερματικό ήταν ακίνητο στο σημείο X θα είναι προσεγγιστικά $\Delta l = d \cos(a) = u \Delta t \cos(a)$.

Όπου Δt είναι ο χρόνος που απαιτείται για τη μετατόπιση του τερματικού από το X στο Y εφόσον κινείται με ταχύτητα u και a , a_1 οι γωνίες που σχηματίζουν τα $S \rightarrow X$ και $S \rightarrow Y$ με το $X \rightarrow Y$ αντίστοιχα.



Σχήμα 2.23 : παράδειγμα ολίσθησης Doppler.

Θεωρούμε ότι $a_1 \approx a$ λόγω του ότι η πηγή S είναι πολύ μακριά. Η μεταβολή της φάσης στο λαμβανόμενο σήμα δίνεται από την ακόλουθη σχέση[3].

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi \Delta l}{\lambda} = \frac{2\pi u \Delta t}{\lambda} \cos a \quad (2.26)$$

Και η ολίσθηση συχνότητας (**ολίσθηση Doppler**) θα είναι ίση με :

$$\delta f = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{u}{\lambda} \cos a \quad (2.27)$$

Κεφάλαιο 3

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ OFDM/OQAM

Η πιο ευρέως διαδεδομένη εκδοχή της OFDM που χρησιμοποιείται σήμερα στις περισσότερες εφαρμογές είναι η διαμόρφωση OFDM/QAM. Βασικό χαρακτηριστικό της είναι η χρήση διαμόρφωσης QAM για κάθε υποκανάλι. Όταν η μετάδοση είναι ιδανική η διαφεροντική παρεμβολή(ICI) εξαλείφεται πλήρως εφόσον τα υποκανάλια είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Με την προσθήκη του διαστήματος φύλαξης(CP) λύνεται και το πρόβλημα της διασυμβολικής παρεμβολής(ISI).

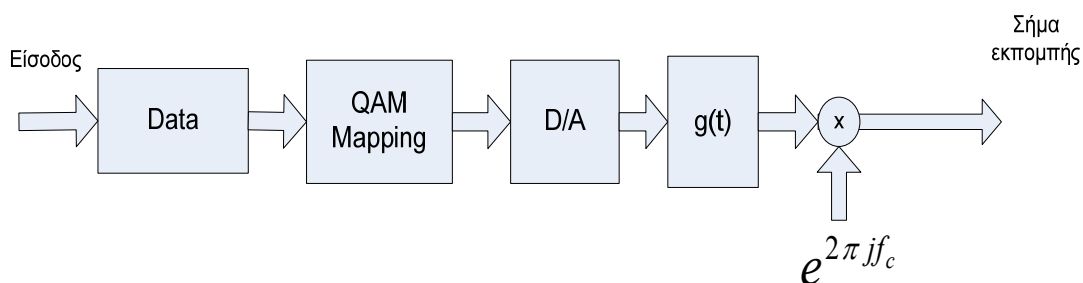
Από την άλλη πλευρά αν υπάρχουν ολισθήσεις συχνότητας και το κανάλι είναι χειρότερο του αναμενομένου η ICI και η ISI εξακολουθούν και σε κάποιο βαθμό να υπάρχουν. Ακόμα όμως και στις περιπτώσεις που είναι σε ανεκτά επίπεδα, υπάρχει το σοβαρό πρόβλημα της κατάληψης μεγάλου εύρους ζώνης συχνοτήτων εξαιτίας των πλευρικών λοβών. Για αυτό το θέμα ευθύνεται κατά κύριο λόγο η φασματική μορφή του τετραγωνικού παλμού. Το Cyclic Prefix(CP) αν και περιορίζει σημαντικά την ISI, η εφαρμογή του οδηγεί σε αύξηση της κατανάλωσης ισχύος και μείωση της φασματικής απόδοσης.

Μία ιδέα για την επίλυση αυτών των προβλημάτων ήταν η χρησιμοποίηση κάποιων άλλων κατάλληλων παλμών αντί του τετραγωνικού που να είναι καλά τοποθετημένοι(well located) τόσο στο χρόνο όσο και στη συχνότητα. Με αυτόν τον τρόπο θα εξαλείφονταν οι πλευρικοί λοβοί και θα είχαμε αρκετά μικρά ICI και ISI χωρίς να χρησιμοποιήσουμε CP. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι η ορθογωνιότητα μεταξύ των φερόντων που πρέπει να συνεχίσει να υπάρχει. Κάτι τέτοιο χωρίς τη χρησιμοποίηση διαστήματος φύλαξης θα ήταν αδύνατο για τα OFDM/QAM συστήματα.

Η λύση δόθηκε με μια άλλη παραλλαγή της OFDM που ονομάστηκε OFDM/OQAM. Στην OFDM/OQAM σε αντίθεση με την OFDM/QAM τα σύμβολα που μεταφέρουν την πληροφορία έχουν πραγματικές τιμές και δεν χρησιμοποιείται CP. Επίσης επιτρέπει τη χρήση νέων προτύπων παλμών και επιτυγχάνει πολύ καλή ποιότητα μεταφοράς δεδομένων δεσμεύοντας μικρό εύρος ζώνης συχνοτήτων.

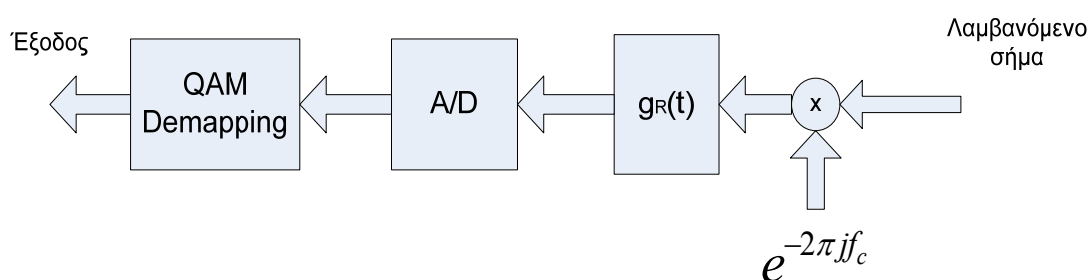
3.1 Δομή Συστήματος Μετάδοσης Απλού Φέροντος

Η βασική δομή του πομπού ενός αναλογικού συστήματος μετάδοσης απλού φέροντος (single carrier) φαίνεται παρακάτω στο Σχήμα 3.1. Αρχικά τα δεδομένα (Data) αφού διαμορφωθούν σε QAM σύμβολα (QAM Mapping), διοχετεύονται σε έναν μετατροπέα ψηφιακού σήματος σε αναλογικό (D/A). Οι τετραγωνικοί παλμοί που προκύπτουν περνάνε από ένα φίλτρο με συνάρτηση $g(t)$. Εκεί κόβονται οι πλευρικές συνιστώσες του φάσματος του τετραγωνικού παλμού και κρατιέται ουσιαστικά μόνο ο κεντρικός λοβός που περιέχει το κύριο μέρος της αποσταλόμενης πληροφορίας.



Σχήμα 3.1 : Πομπός μετάδοσης απλού φέροντος

Αφού το σήμα μας διαμορφωθεί περνάει από το δίαυλο με κρουστική απόκριση $h(t)$ φτάνει στον δέκτη (Σχήμα 3.2) και αποδιαμορφώνεται.

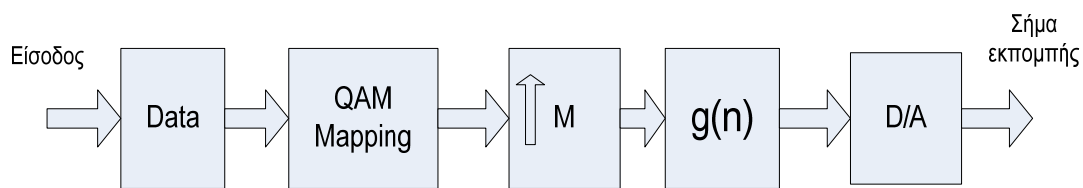


Σχήμα 3.2 : Δέκτης μετάδοσης απλού φέροντος

Έπειτα περνάει από έναν αντίστροφο μορφοποιητή παλμών με συνάρτηση $g_R(t)$. Αυτό που προκύπτει είναι ένα σήμα που μοιάζει με τους τετραγωνικούς παλμούς που στάλθηκαν αρχικά. Περνώντας το σήμα αυτό από έναν μετατροπέα αναλογικού σε ψηφιακό (A/D) με την κατάλληλη δειγματοληψία και αφού αποκωδικοποιήσουμε τα σύμβολα λαμβάνουμε τα αρχικά δεδομένα.

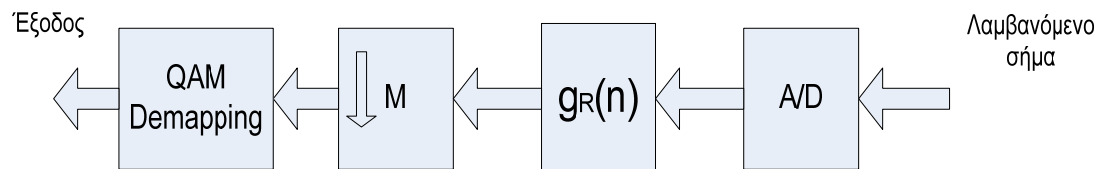
Με κατάλληλη επιλογή φίλτρου μορφοποίησης, επίπεδο κανάλι και χρονισμό της δειγματοληψίας μπορούμε να επιτύχουμε τέλεια μετάδοση.

Οι ανάλογες διαδικασίες ακολουθούνται και σε ένα ψηφιακό σύστημα απλού φέροντος. Τα δεδομένα διοχετεύονται αρχικά σε έναν upsampler που αυξάνει το ρυθμό δειγματοληψίας. Αυτό το επιτυγχάνει προσθέτοντας μηδενικά ανάμεσα στα διαμορφωμένα ψηφία των δεδομένων που παίρνουμε από τον υπολογιστή. Τα νέα δεδομένα εισάγονται σε έναν μορφοποιητή παλμών όπως και πριν με κρουστική απόκριση $g(n)$ και ύστερα προχωρούν προς τον D/A και την κεραία εκπομπής.



Σχήμα 3.3 : Πομπός ψηφιακής μετάδοσης απλού φέροντος

Αντίστοιχα στον δέκτη έχουμε ένα φίλτρο με συνάρτηση $g_R(n)$ και έπειτα έναν downsampler που μειώνει το ρυθμό δειγματοληψίας του διακριτού σήματος. Στη συνέχεια παίρνουμε τα δεδομένα στην έξοδο.



Σχήμα 3.4 : Δέκτης ψηφιακής μετάδοσης απλού φέροντος

Αποδεικνύεται ότι για να ληφθούν στην έξοδο του πομπού χωρίς παραμόρφωση τα αρχικά δεδομένα που εισάχθηκαν στο δέκτη θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη σχέση για τις συναρτήσεις $g(n)$ και $g_R(n)$. Όπου συνήθως τα $g(n), g_R(n)$ επιλέγονται έτσι ώστε $g(n) = g_R(n)$. Τα φίλτρα αυτά ονομάζονται Square root Nyquist φίλτρα.

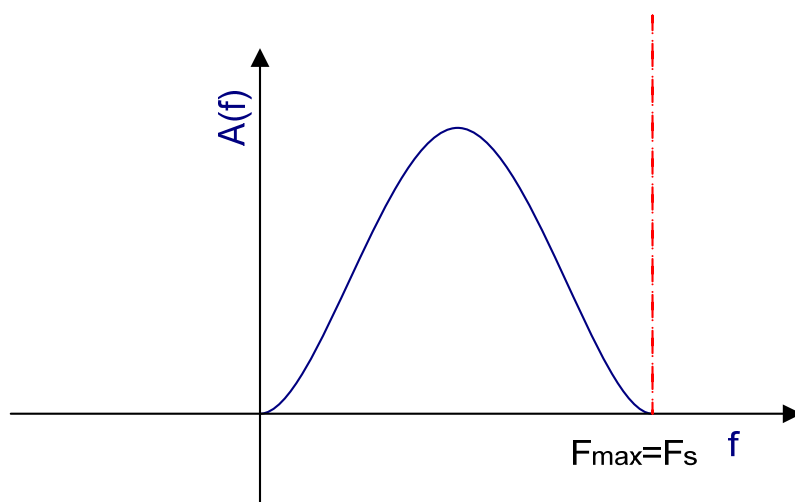
$$\sum_u g(u)g_R(nM - u) = \delta(nM) \quad (3.1)$$

3.2 Βασική ιδέα OFDM/OQAM

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο ιδιαίτερα χρήσιμη για την παράλληλη μετάδοση συμβόλων χωρίς παρεμβολή είναι η ιδιότητα της ορθογωνιότητας. Σε ένα ψηφιακό σύστημα παράλληλης μετάδοσης για να είναι τα σύμβολα ορθογώνια, πρέπει ο ρυθμός δειγματοληψίας να είναι τουλάχιστον ίσος με τον βασικό ρυθμό Nyquist. Αυτό σημαίνει ότι για N μιγαδικά σύμβολα πληροφορίας χρειαζόμαστε τουλάχιστον N δείγματα σήματος (ένα φέρον ανά σύμβολο πληροφορίας). Όμως η ορθογώνια μετάδοση σε αυτόν τον ρυθμό μπορεί να επιτευχθεί μόνο στην OFDM με χρήση τετραγωνικού παλμού. Σε μια άλλη παράλληλη μετάδοση με χρήση άλλου παλμού θα χρειαζόμασταν περισσότερα από N δείγματα σήματος (στις περισσότερες περιπτώσεις $2N$) για να μεταδώσουμε επιτυχώς N σύμβολα πληροφορίας.

Παράδειγμα 3.1

Όταν μεταδίδουμε μιγαδικά σύμβολα αποδεικνύεται πως ο ελάχιστος απαιτούμενος ρυθμός (ή συχνότητα) δειγματοληψίας F_s ισούται με τη μέγιστη συχνότητα F_{\max} του φάσματος του παλμού που χρησιμοποιείται.



Σχήμα 3.5 : Φιλτραρισμένο φάσμα παλμού που αντιστοιχεί σε ένα σύμβολο

Ισχύει

$$F_s = \frac{1}{T_s} \quad (3.2)$$

όπου T_s η περίοδος της δειγματοληψίας του σήματος.

Ο ρυθμός αυτός μπορεί να επιτευχθεί μόνο στην περίπτωση του τετραγωνικού παλμού. Αυτό ισχύει διότι ο τετραγωνικός παλμός έχει περίοδο T που είναι ακριβώς ίση με την περίοδο της μεταδιδόμενης πληροφορίας.

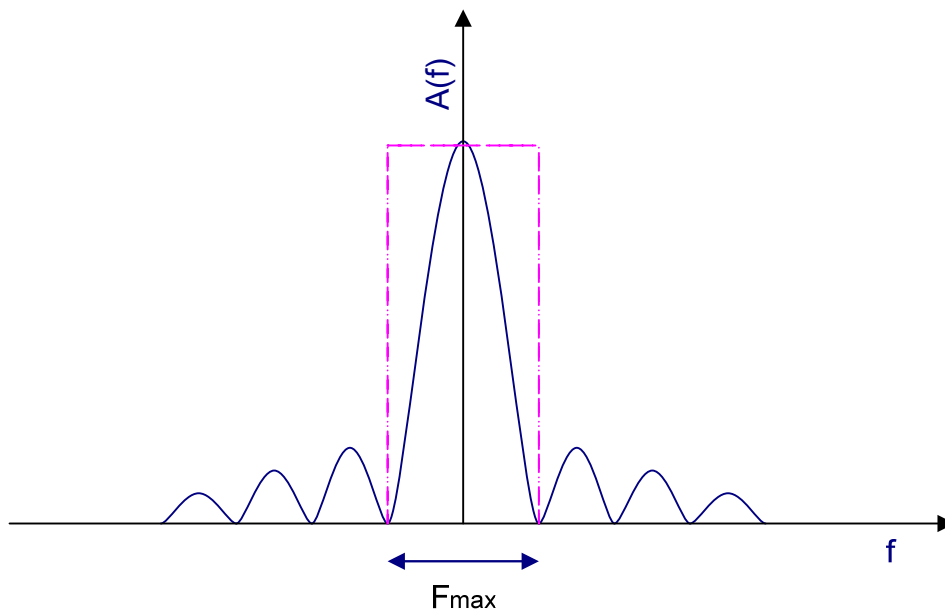
Συνεπώς η απαιτούμενη περίοδος δειγματοληψίας είναι :

$$T_s = T \quad (3.3)$$

Και

$$F_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{T} = F_{\max} \quad (3.4)$$

Η F_{\max} ταυτίζεται με το εύρος ζώνης του φάσματος του κεντρικού λοβού του τετραγωνικού παλμού.



Σχήμα 3.6 : Φιλτραρισμένο φάσμα τετραγωνικού παλμού που αντιστοιχεί σε ένα σύμβολο

Απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύουν οι (3.3) και (3.4) είναι τα υποκανάλια να είναι μεταξύ τους ορθογώνια.

Στην OFDM αν και πρακτικά $T_s < T$ (λόγω του CP) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οριακά $T_s \approx T$ και $F_s \approx F_{\max}$.

Γενικά όσο πιο κοντά είναι το T_s στο T και το F_s στο F_{\max} θεωρούμε πως τόσο πιο καλά τοποθετημένος (well localized) είναι ένας παλμός στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας αντίστοιχα. Σε όλους τους άλλους παλμούς πλην του τετραγωνικού ισχύει

$$T_s < T \quad (3.5)$$

Και

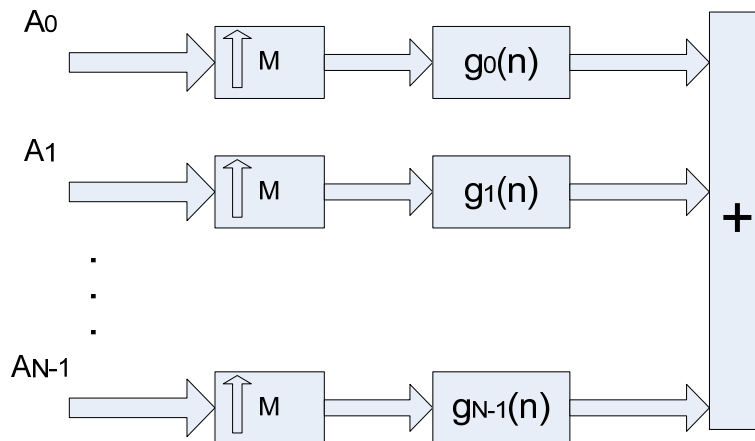
$$F_s > F_{\max} \quad (3.6)$$

Από τις (3.5) και (3.6) συνεπάγεται ότι για κάθε σύμβολο πληροφορίας χρειάζεται να λάβουμε κατά μέσο όρο περισσότερα από 1 δείγματα. Αυτό σημαίνει πως αν έχουμε να μεταδώσουμε παράλληλα N σύμβολα με έναν μη τετραγωνικό παλμό θα Θα χρειαστούμε συνολικά M δείγματα με $M > N$.

Παράδειγμα 3.2

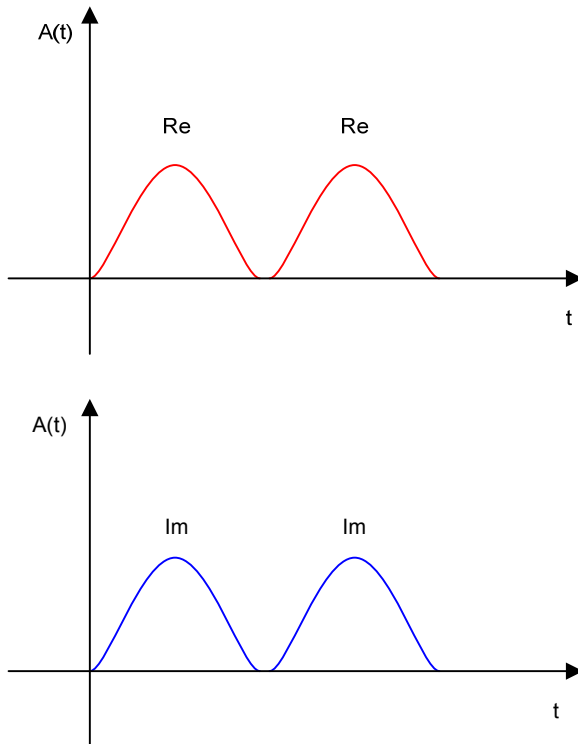
Έστω ότι έχουμε να μεταδώσουμε N σύμβολα A_0, A_1, \dots, A_{N-1} με απλή παράλληλη ψηφιακή μετάδοση. Το βασικό σχήμα του πομπού θα είναι όπως στο Σχήμα 3.7.

Πομπός



Σχήμα 3.7 : Πομπός απλής παράλληλης ψηφιακής μετάδοσης

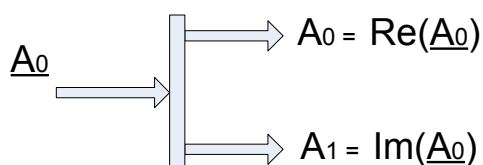
Ο upsampler θα αυξήσει το ρυθμό δειγματοληψίας σε M . Αν δεν είναι $M > N$ τότε τα υποканάλια δεν θα είναι ορθογώνια και θα έχουν μεταξύ τους παρεμβολή. Συνήθως $M = 2N$, έχουμε δηλαδή $2N$ δείγματα. Σε κάθε ένα υποκανάλι μεταδίδονται ταυτόχρονα το πραγματικό και το φανταστικό μέρος κάθε ενός συμβόλου. Αν για τη μετάδοση του πραγματικού μέρους χρησιμοποιούμε παλμό συνημιτόνου (δηλαδή παλμό πολλαπλασιασμένο με συνημίτονο) τότε για τη μετάδοση του φανταστικού μέρους χρησιμοποιούμε παλμό ημιτόνου και αντιστρόφως. Με αυτόν τον τρόπο δεν υπάρχει μεταξύ τους απολύτως καμία παρεμβολή.



Σχήμα 3.8 : Δύο απλοποιημένοι(χωρίς τους πλευρικούς λοβούς) παλμοί συνημιτόνου(κοκκινο χρώμα) και δύο απλοποιημένοι παλμοί ημιτόνου(μπλε χρώμα) σχεδόν απολύτως επικαλυπτόμενοι στο χρόνο που μεταδίδονται ταυτόχρονα με απλή παράλληλη μετάδοση.

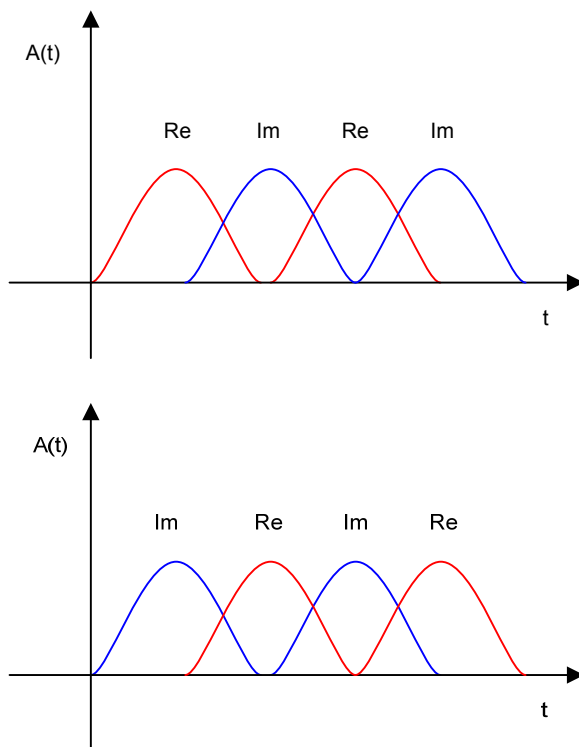
Όπως φαίνεται στο παραπάνω Σχήμα 3.12 μεταδίδουμε 2 μιγαδικά σύμβολα και πρέπει να λάβουμε $2 \times 2 = 4$ δείγματα στο χρόνο.

Στην OFDM/OQAM αντί σύμβολα μιγαδικών τιμών χρησιμοποιούμε σύμβολα με πραγματικές τιμές. Ένα μιγαδικό σύμβολο έστω το \underline{A}_0 αναλύεται σε δύο πραγματικά σύμβολα τα A_0 και A_1 τα οποία είναι ίσα με το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος αντίστοιχα.



Σχήμα 3.9: Σύμβολα OFDM/OQAM

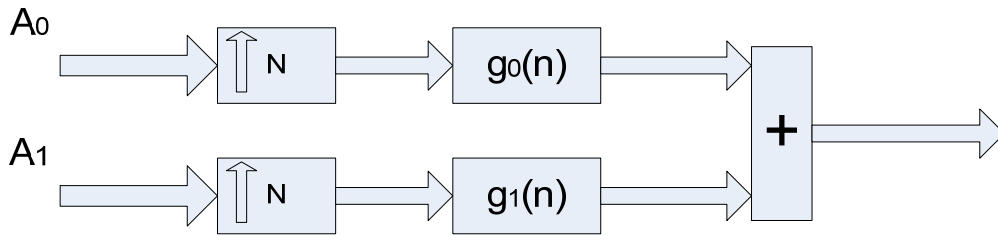
Η μετάδοση των συμβόλων γίνεται σε διπλάσιο ρυθμό σε κάθε υποκανάλι εν σχέση με την απλή παράλληλη μετάδοση χωρίς όμως να έχουμε παρεμβολή. Αυτό συμβαίνει διότι αν και έχουμε διπλάσιο αριθμό συμβόλων μεταδίδουμε παλμούς ημιτόνου και συνημιτόνου ταυτόχρονα και εναλαξ και σε διπλάσιο ρυθμό.



Σχήμα 3.10 : Τέσσερις παλμοί ημιτόνου και τέσσερις παλμοί συνημιτόνου σχεδόν απολύτως επικαλυπτόμενοι στο χρόνο που μεταδίδονται ταυτόχρονα με OFDM/OQAM.

Όπως φαίνεται παραπάνω στο Σχήμα 3.14. Μεταδίδουμε στο ίδιο περίπου εύρος ζώνης δ πραγματικά σύμβολα που αντιστοιχούν σε 4 μιγαδικά σύμβολα της απλής παράλληλης μετάδοσης και σε δ δείγματα. Επιτυγχάνουμε με αυτόν τον τρόπο να μεταδίδουμε με το ρυθμό μετάδοσης της OFDM αφού για δ σύμβολα λαμβάνουμε ακριβώς δ δείγματα. Και γενικά για N σύμβολα πληροφορίας χρειαζόμαστε ακριβώς N δείγματα!

Δύο πραγματικά σύμβολα A_0 και A_1 συνδυάζονται σε έναν αθροιστή.



Σχήμα 3.11 : Μετάδοση σύμβολων OFDM/OQAM

Όπου

$$g_1(n) = jg_0\left(n + \frac{N}{2}\right) \quad (3.7)$$

Η ποσότητα $\frac{N}{2}$ αποτελεί το **OFFSET** του συστήματος (Αυτό υποδηλώνει και το 0 στο OQAM).

Τα $g_0(n)$, $g_1(n)$ στο πεδίο της συχνότητας είναι απολύτως επικαλυπτόμενα.

Στο χρόνο διαφέρουν κατά το **OFFSET** $\frac{N}{2}$ όπως φαίνεται και από την ανωτέρω σχέση.

Ομοίως

$$g_3(n) = jg_2\left(n + \frac{N}{2}\right) \quad (3.8)$$

κ.ο.κ

Επίσης ισχύει

$$g_2(n) = e^{\frac{2\pi jn}{N}} g_0(n) \quad (3.9)$$

Γενικά ισχύει

$$g_{\kappa}(n) = e^{\frac{2\pi j \kappa n}{2N}} g_0(n) \quad (3.10)$$

για κ άρτιο.

Και

$$g_{\kappa}(n) = j g_{\kappa-1}\left(n + \frac{N}{2}\right) \quad (3.11)$$

για κ περιττό.

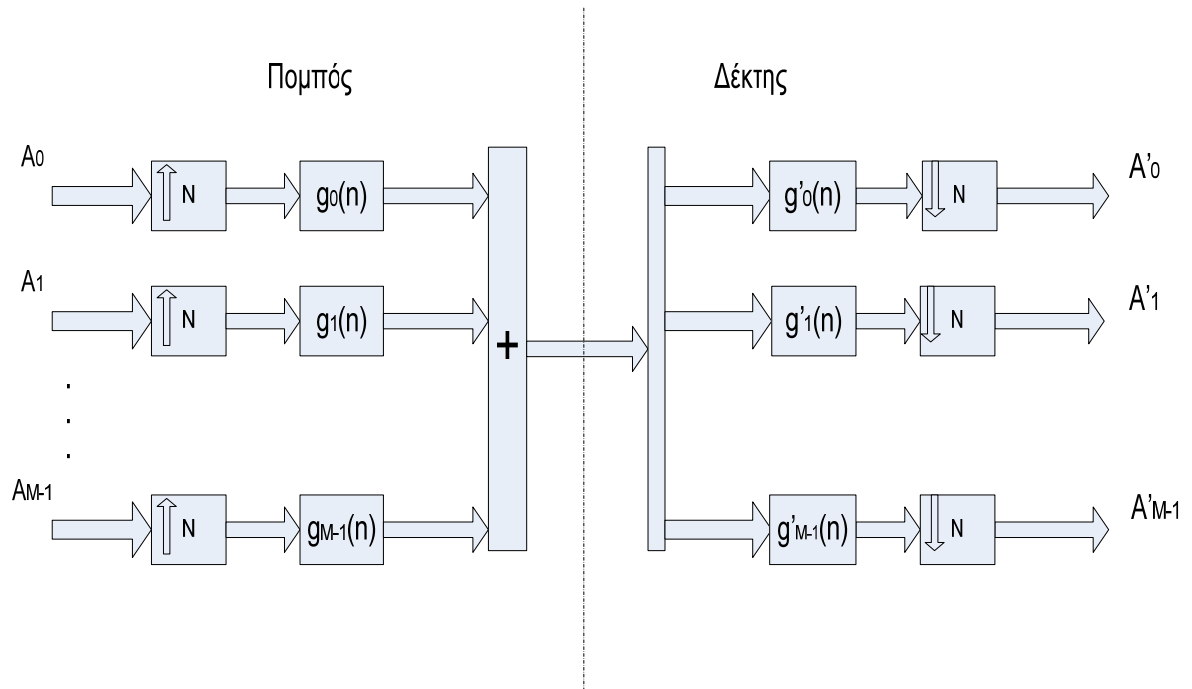
Η συνάρτηση $g_{\kappa}(n)$ ονομάζεται συνάρτηση μορφοποίησης παλμών (pulse shaping function) και όπως είδαμε η χρησιμοποίηση της είναι απαραίτητη για την επίτευξη της απαιτούμενης ορθογωνιότητας χωρίς την χρησιμοποίηση του CP. Ένας αποδοτικός παλμός θα πρέπει να είναι καλά τοποθετημένος (well localized) τόσο στο χρόνο όσο και στη συχνότητα και να έχει περίπου την ίδια κλιμάκωση χρόνου-συχνότητας με το τηλεπικοινωνιακό κανάλι. Αυτό εκφράζεται με την ακόλουθη σχέση.

$$\frac{\tau_0}{\Delta \tau} = \frac{\nu_0}{\Delta \nu} \quad (3.12)$$

Όπου $\Delta \tau$ η διασπορά στο χρόνο που οφείλεται στη συνέλιξη με την κρουστική απόκριση $h(n)$ του διαύλου και $\Delta \nu$ η διασπορά στη συχνότητα λόγω φαινομένου Doppler.

3.3 Δομή Συστήματος OFDM/QAM

Η βασική δομή ενός OFDM/QAM συστήματος μετάδοσης M συμβόλων A_0, A_1, \dots, A_{M-1} είναι η εξής.



Σχήμα 3.12 : Βασική δομή συστήματος OFDM/QAM

Για να είναι τα A_0, A_1, \dots, A_{M-1} περίπου ίδια με τα $A'_0, A'_1, \dots, A'_{M-1}$ Πρέπει :

A) Για κάθε i να ισχύει όπως και στην απλή μετάδοση

$$\sum_n g_i(n)g'_i(nN-n) = \delta(nN) \quad (3.13)$$

B) Να ισχύει η ιδιότητα της ορθογωνιότητας μεταξύ των μεταδιδόμενων φερόντων για να μην υπάρχει παρεμβολή ICI από το ένα στο άλλο.

Αποδεικνύεται πως για να είναι οι συναρτήσεις που περιγράφουν τα σήματα των φερόντων της πληροφορίας των συμβόλων A_0, A_1, \dots, A_{M-1} ορθογώνιες μετά από τη μορφοποίηση των αρχικών τετραγωνικών παλμών με τις συναρτήσεις $g_k(n)$ όπου $k = 0, 1, \dots, M-1$ πρέπει να ισχύει η παρακάτω σχέση[5] :

$$\begin{aligned}
 \langle g_{m,n}, g_{m',n'} \rangle &= \int_R g_{m,n}^*(t) g_{m',n'}(t) dt \\
 &= \int_R e^{j2\pi(m'-m)v_0 t} g^*(t - n\tau_0) g(t - n'\tau_0) dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\tau_0}} \int_{n\tau_0}^{(n+1)\tau_0} e^{j2\pi(m'-m)v_0 t} g(t - n'\tau_0) dt \\
 &= \delta_{m,m'} \delta_{n,n'}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Όπου τ_0, V_0 οι αποστάσεις των φερόντων σημάτων η ισοδύναμα των $g_k(n)$ στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας αντίστοιχα.

Χρησιμοποιήσαμε ως συνάρτηση μορφοποίησης παλμών την

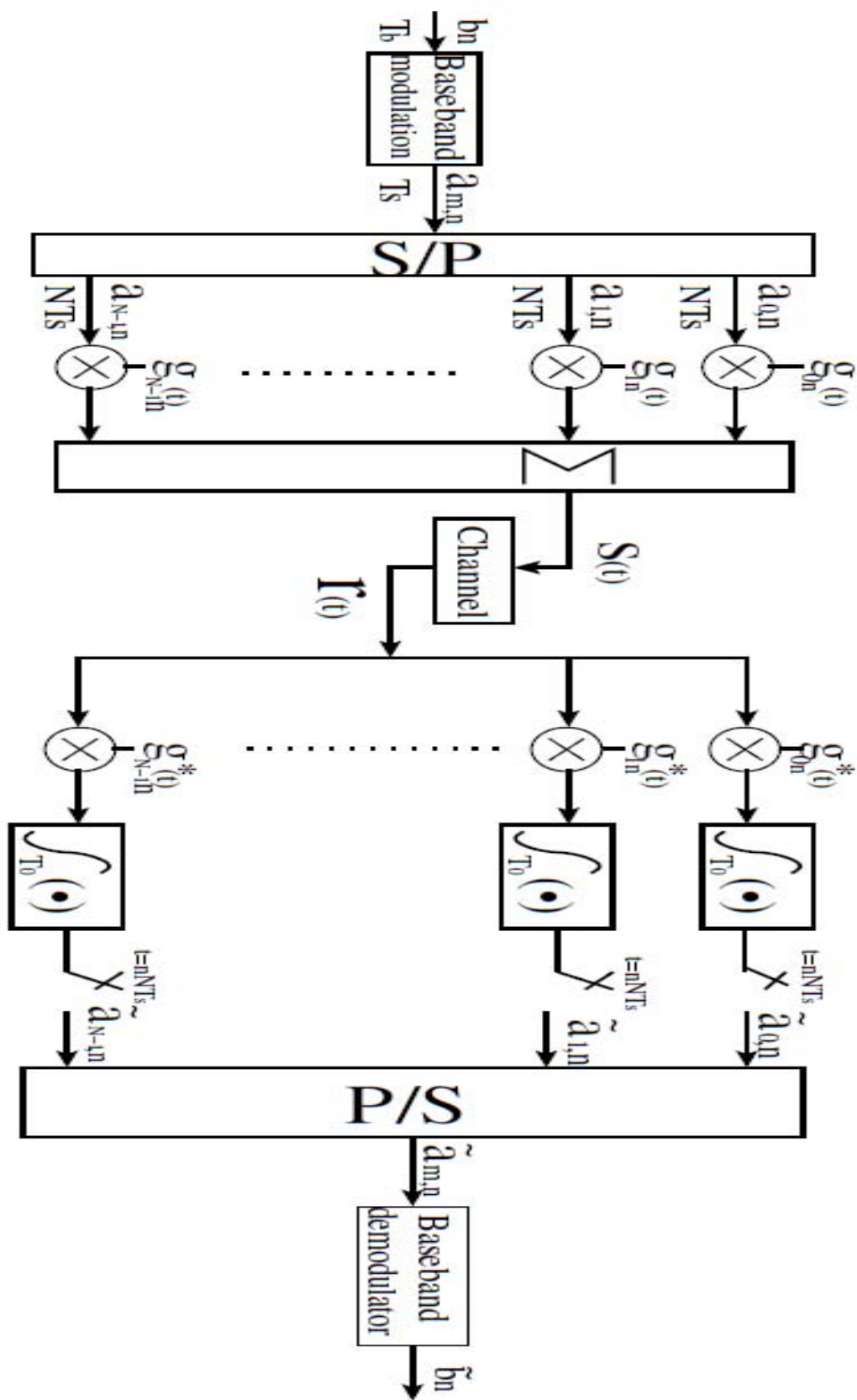
$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\tau_0}}, & 0 \leq t < \tau_0 \\ 0, & t < 0 \quad \text{ή} \quad t > \tau_0 \end{cases} \tag{3.15}$$

Και λάβαμε ως δεδομένο $\tau_0 \mathcal{V}_0 = 1$ που αποτελεί μια απαραίτητη προϋπόθεση για να επιτευχθεί ορθογωνιότητα στα OFDM/QAM συστήματα

Η $\delta_{m,n}$ είναι η συνάρτηση δέλτα του Kronecker που ορίζεται ως εξής

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (3.16)$$

Στην επόμενη παρουσιάζεται σελίδα παρουσιάζεται ένα απλό διάγραμμα ενός συστήματος OFDM/QAM.



Σχήμα 3.13 : Σύστημα OFDM/QAM

3.4 Δομή Συστήματος OFDM/OQAM

Στην OFDM/OQAM ως συνήθως χρησιμοποιούμε την παρακάτω συνάρτηση μορφοποίησης παλμών[5].

$$g_{m,n}(t) = e^{\frac{j(m+n)\pi}{2}} e^{j2\pi m\nu_0 t} g(t - n\tau_0), \nu_0\tau_0 = \frac{1}{2} \quad (3.17)$$

Επειδή τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται είναι πραγματικά ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο ως :

$$\langle x, y \rangle_R = R \left\{ \int_R x^*(t) y(t) dt \right\} \quad (3.18)$$

Όπου $R\{\bullet\}$ ο τελεστής πραγματικού μέρους.

Δεδομένου ότι $\tau_0\nu_0 = \frac{1}{2}$ και

$$\begin{aligned} A_g(\tau, \nu) &= \int_R \gamma_g(\tau, t) e^{-j2\pi\nu t} dt \\ &= \int_R e^{-j2\pi\nu t} g(t + \tau/2) g^*(t - \tau/2) dt \end{aligned} \quad (3.19)$$

Θα έχουμε

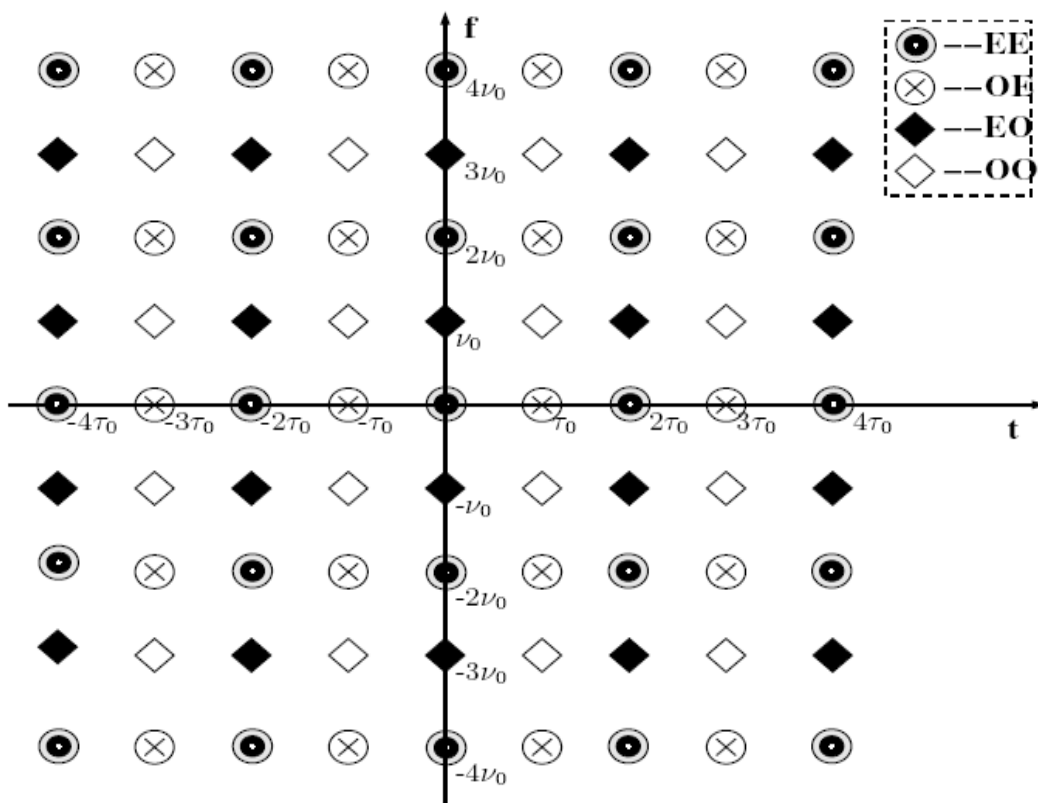
$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{G}_{m,n}, \mathcal{G}_{m',n'} \right\rangle_R &= R \left\{ \int_R \mathcal{G}_{m,n}^*(t) \mathcal{G}_{m',n'}(t) dt \right\} \\
&= R \left\{ \int_R e^{j\frac{\pi}{2}(m'+n'-m-n)} e^{j2\pi(m'-m)v_0 t} g(t-n'\tau_0) g^*(t-n\tau_0) dt \right\} \\
&= R \left\{ j^{m'-m+n'-n+(m'-m)(n'+n)} \int_R e^{-j2\pi(m-m')v_0 x} g\left(x+\frac{n-n'}{2}\tau_0\right) g^*\left(x-\frac{n-n'}{2}\tau_0\right) dx \right\} \\
&= R \left\{ j^{m'-m+n'-n+(m'-m)(n'+n)} A_g\left((n-n')\tau_0, (m-m')v_0\right) \right\} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Η $A_g(\tau, \nu)$ είναι γνωστή ως αυτό διαφορούμενη συνάρτηση (auto-ambiguity function) και η $\gamma_g(\tau, t) = g(t + \tau/2) g^*(t - \tau/2)$ ως συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (auto-correlation function). Η $\gamma_g(\tau, t)$ είναι άρτια εάν και η $g(t)$ είναι άρτια. Όπως φαίνεται παραπάνω ο μετασχηματισμός Fourier της $\gamma_g(\tau, t)$ δεν είναι άλλη από την $A_g(\tau, \nu)$ η οποία είναι μια πραγματική συνάρτηση (καθώς $\gamma_g(\tau, t)$ άρτια).

Έτσι το εσωτερικό γινόμενο των $\mathcal{G}_{m,n}(t)$, $\mathcal{G}_{m',n'}(t)$ μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\left\langle \mathcal{G}_{m,n}, \mathcal{G}_{m',n'} \right\rangle_R = \left\{ \begin{array}{l} \pm A_g\left((n-n')\tau_0, (m-m')v_0\right), \quad (m,n) \bmod 2 = (m',n') \bmod 2 \\ 0, \quad (m,n) \bmod 2 \neq (m',n') \bmod 2 \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

Ομαδοποιώντας τις βασικές συναρτήσεις $g_{m,n}(t)$ που ικανοποιούν τη συνθήκη $(m,n) \bmod 2 = (m',n') \bmod 2$ στο ίδιο υποσύνολο, το επίπεδο χρόνου συχνότητας μπορεί να διαιρεθεί σε τέσσερις διαφορετικές ομάδες σημείων ανάλογα με τα m, n . π.χ μια ομάδα σημείων είναι η $EE = \{m \text{ άρτιος}, n \text{ άρτιος}\}$ (συμβολίζουμε με \odot) αντιστοιχεί σε m και n άρτια. Αντίστοιχα έχουμε, $EO = \{m \text{ περιττός}, n \text{ άρτιος}\}$, $OE = \{m \text{ άρτιος}, n \text{ περιττός}\}$, $OO = \{m \text{ περιττός}, n \text{ περιττός}\}$.



Σχήμα 3.14 : Ομάδες OFDM/OQAM συμβόλων.

Η ιδιότητα της ορθογωνιότητας ισχύει όταν οι $g_{m,n}(t)$, $g_{m',n'}(t)$ ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες και δεν εξαρτάται καθόλου από την επιλογή της $g_{m,n}(t)$, εφόσον αυτή είναι άρτια. Όταν οι $g_{m,n}(t)$, $g_{m',n'}(t)$ βρίσκονται στην ίδια ομάδα η ορθογωνιότητα εξαρτάται από την $A_g(\tau, \nu)$. Αρκεί να βρούμε μια άρτια $g_{m,n}(t)$ που να έχει $A_g(\tau, \nu)$ με την εξής ιδιότητα.

$$A_g(2p\tau_0, 2q\nu_0) = \begin{cases} 1, & (p,q)=(0,0) \\ 0, & (p,q)\neq(0,0) \end{cases} \quad (3.22)$$

Η έξοδος στην πλευρά του δέκτη θα είναι , αν ισχύει η 3.22.

$$\begin{aligned} a_n(l) &= \langle g_{l,n}, r \rangle_R = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{N-1} h_{m,k} a_{m,k} \langle g_{l,n}, g_{m,n} \rangle_R + \langle g_{l,n}, n \rangle_R \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} h_{m,n} a_{m,n} \langle g_{l,n}, g_{m,n} \rangle_R + n_n(l) \\ &= h_{l,n} a_{l,n} + n_n(l) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Όπου $h_{l,n}(t)$ είναι το πλάτος του καναλιού όπως εκτιμάται από τον δέκτη. $r(t)$ το σήμα που λαμβάνεται στην είσοδο του δέκτη. Και $a_n(l)$ το σήμα στην έξοδο του δέκτη.

3.5 Συνάρτηση Παρεμβολής(interference function)

Ένας καλός τρόπος για να μετρήσουμε θεωρητικά την παρεμβολή μεταξύ των γειτονικών συμβόλων σε μια παράλληλη μετάδοση είναι η λεγόμενη συνάρτηση παρεμβολής[5]. Ορίζεται ως εξής.

$$I(\tau, \nu) = 1 - |A(\tau, \nu)|^2 \quad (3.24)$$

Όπου

$$A(\tau, \nu) = A_g(\tau, \nu) \quad (3.25)$$

για τα συστήματα OFDM/QAM και

$$A(\tau, \nu) = R[A_g(\tau, \nu)] \quad (3.26)$$

για τα συστήματα OFDM/OQAM

Όταν $I(\tau, \nu) = 0$ τότε δεν υπάρχει καμία παρεμβολή.

3.6 Κύριες Συναρτήσεις Μορφοποίησης Παλμών

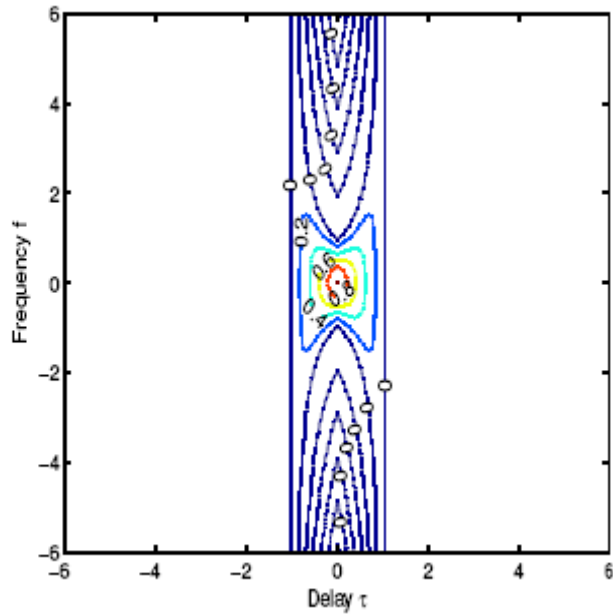
Σε αυτή τη παράγραφο παρουσιάζονται συνοπτικά ορισμένες από τις πιο γνωστές συναρτήσεις μορφοποίησης παλμών στην OFDM/OQAM[5]. Η τετραγωνική συνάρτηση, η συνάρτηση ημίσεως συνημιτόνου, η Γκαουσιανή συνάρτηση, η συνάρτηση ΙΟΤΑ και η επεκταμένη Γκαουσιανή συνάρτηση.

3.6.1 Τετραγωνική Συνάρτηση (Rectangular Function)

Η τετραγωνική συνάρτηση είναι ένα καλό μέτρο σύγκρισης για οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση μορφοποίησης παλμών. Η γενική μορφή της είναι

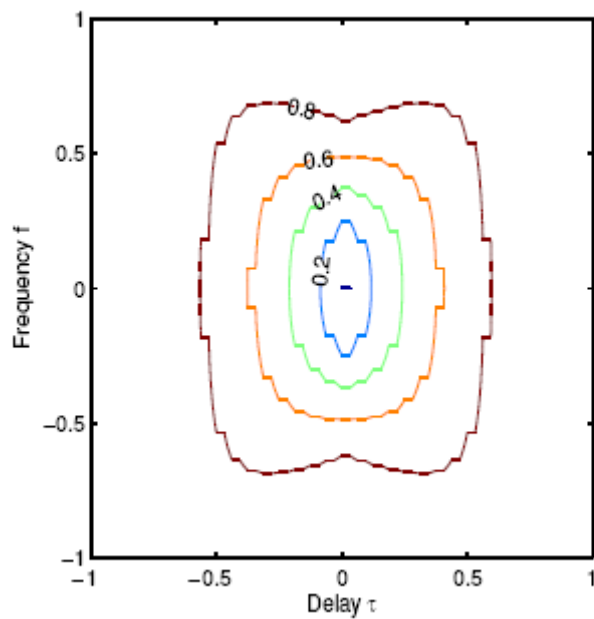
$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\tau_0}}, & |t| \leq \frac{\tau_0}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau_0}{2} \end{cases} \quad (3.27)$$

Και η γραφική παράσταση της αντίστοιχης αυτό-διφορούμενης συνάρτησης $A_g(\tau, \nu)$ (auto-ambiguity function) θα είναι η ακόλουθη.



Σχήμα 3.15 : Αυτο-διφορούμενη συνάρτηση που αντιστοιχεί σε τετραγωνική συνάρτηση.

Αντίστοιχα θα έχουμε για την $I(\tau, \nu)$ (interference function).



Σχήμα 3.16 : Συνάρτηση παρεμβολής που αντιστοιχεί σε τετραγωνική συνάρτηση.

3.6.2 Συνάρτηση Ημίσεως Συνημιτόνου(Half Cosine Function)

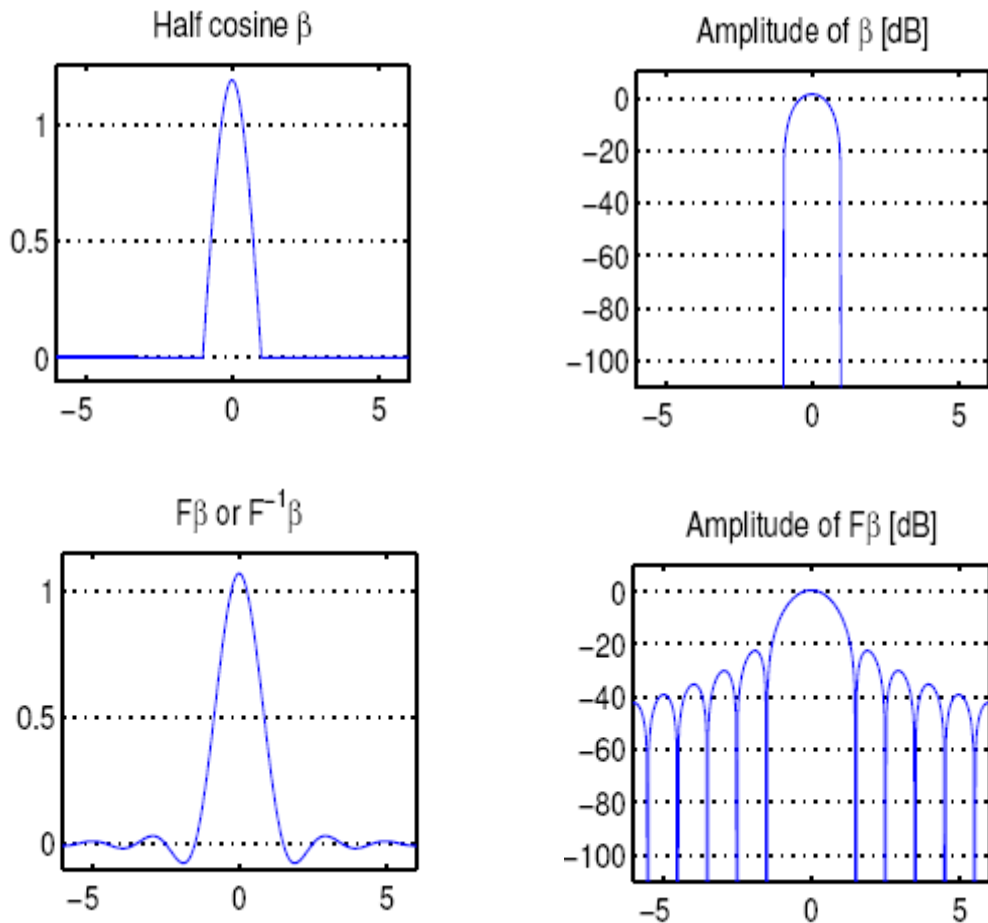
Μία πολύ αποδοτική και συγχρόνως καλά τοποθετημένη(well localized) συνάρτηση τόσο στο χρόνο όσο και στη συχνότητα είναι η συνάρτηση ημίσεως συνημιτόνου. Περιγράφεται από την παρακάτω σχέση.

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\tau_0}} \cos\left(\frac{\pi t}{2\tau_0}\right), & |t| \leq \tau_0 \\ 0, & |t| > \tau_0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $G(f)$ υπολογίζεται πολύ εύκολα εάν αντικαταστήσουμε το χρόνο t με τη συχνότητα f στην $g(t)$

$$G(f) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\nu_0}} \cos\left(\frac{\pi f}{2\nu_0}\right), & |f| \leq \nu_0 \\ 0, & |f| > \nu_0 \end{cases} \quad (3.29)$$

Όπως βλέπουμε από τους τύπους η συνάρτηση ημίσεως συνημιτόνου έχει περίπου την ίδια μορφή και στο χρόνο και στη συχνότητα. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται και στα παρακάτω διαγράμματα.



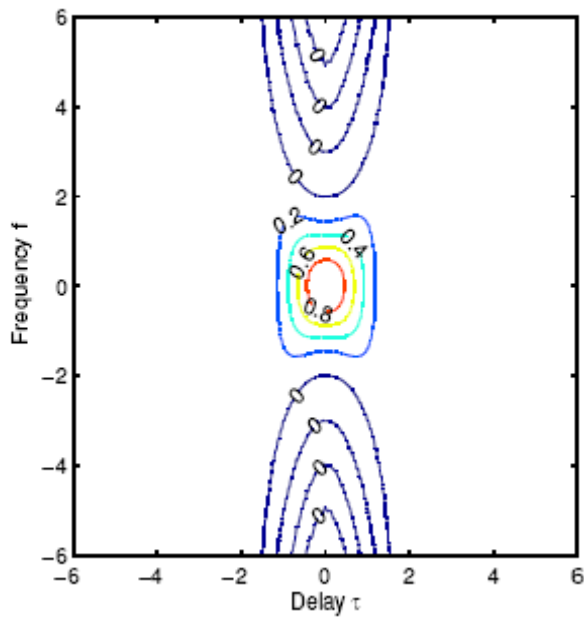
Σχήμα 3.17 : Συνάρτηση ημίσεως συνημιτόνου.

Γενικά αποδεικνύεται ότι το ρόλο της συναρτήσεως αυτής ως συνάρτηση μορφοποίησης παλμών στα OFDM/OQAM συστήματα ,μπορεί να τον παίξει οποιαδήποτε πραγματική άρτια συνάρτηση που ο μετασχηματισμός Fourier αυτής ικανοποιεί τους παρακάτω περιορισμούς.

$$\begin{cases} |G(f)|^2 + |G(f - \nu_0)|^2 = \frac{1}{\nu_0}, |f| \leq \nu_0 \\ G(f) = 0, |f| > \nu_0 \end{cases} \quad (3.30)$$

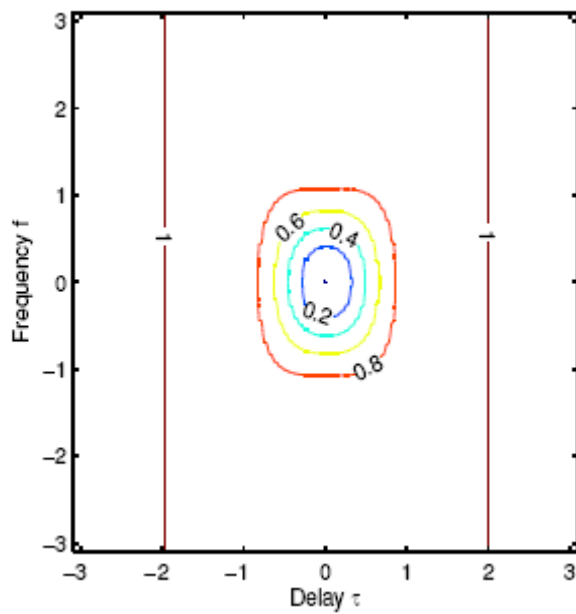
Ακολουθούν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις των $A_g(\tau, \nu)$ και $I(\tau, \nu)$.

A) $A_g(\tau, \nu)$



Σχήμα 3.18 : Αυτο-διφορούμενη συνάρτηση που αντιστοιχεί σε συνάρτηση ημίσεως συνημιτόνου.

B) $I(\tau, \nu)$



Σχήμα 3.19 : Συνάρτηση παρεμβολής που αντιστοιχεί σε συνάρτηση ημίσεως συνημιτόνου.

3.6.3 Γκαουσιανή Συνάρτηση(Gaussian Function)

Η Γκαουσιανή συνάρτηση είναι πολύ διάσημη επειδή διατηρεί στη συχνότητα ακριβώς το ίδιο σχήμα με αυτό που έχει στο πεδίο του χρόνου. Περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση.

$$g_{\alpha}(t) = (2\alpha)^{\frac{1}{4}} e^{-\pi\alpha t^2}, \alpha > 0 \quad (3.31)$$

Ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier υπολογίζεται παρακάτω

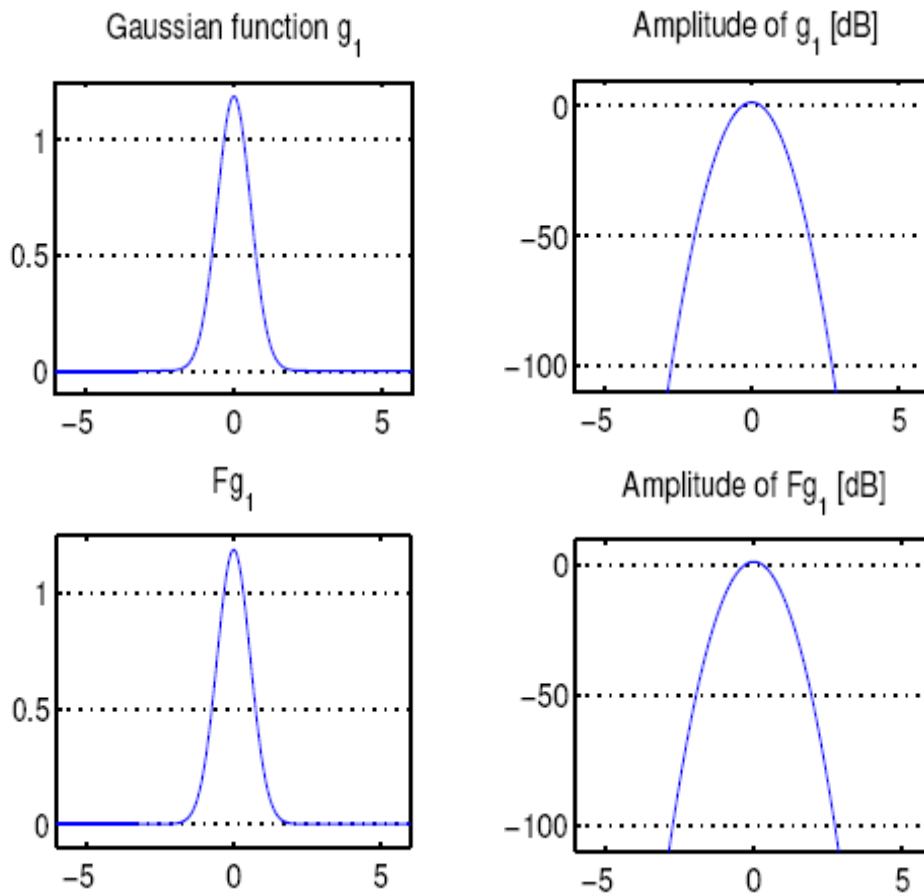
$$\begin{aligned} Fg_{\alpha}(t) &= (2\alpha)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\alpha t^2} e^{-2\pi ft} dt = (2\alpha)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\pi\alpha}} e^{(-j\pi f)^2 / (\pi\alpha)} \\ &= \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\pi f^2 / \alpha} = g_{1/\alpha}(f). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Όπου έχουμε λάβει ως δεδομένη την ισότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2bt - \alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{b^2 / \alpha}, (a > 0) \quad (3.33)$$

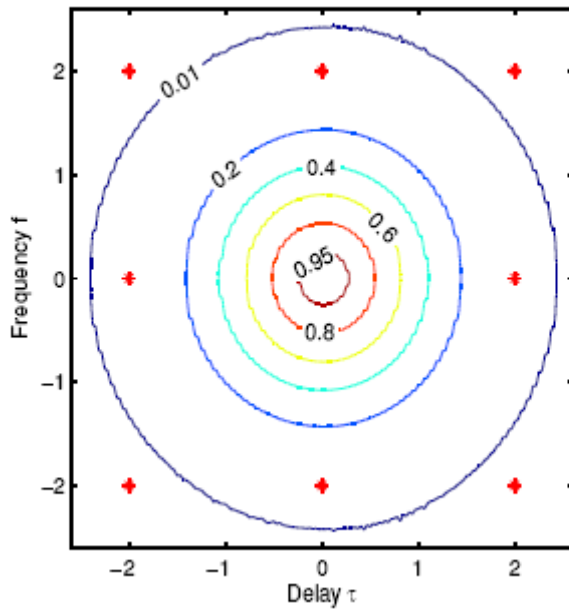
Επειδή η Γκαουσιανή συνάρτηση είναι **ισοτροπική**(ίδια στο χρόνο και στη συχνότητα) και λεπτή, θεωρείται μία πολύ καλή επιλογή για τη μορφοποίηση παλμών. Όμως έχει το μειονέκτημα ότι δεν είναι ορθογώνια και αυτό διότι $g_{\alpha}(t) > 0$

Στα διαγράμματα που ακολουθούν φαίνεται η μορφή μιας γκαουσιανής συνάρτησης με $a = 1$ στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας.



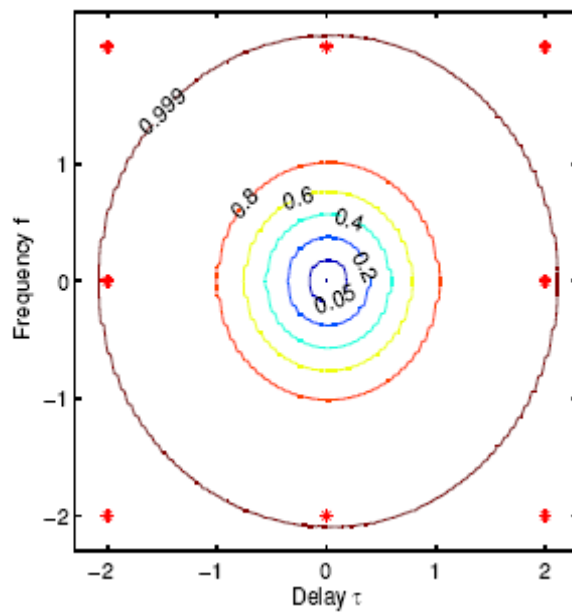
Σχήμα 3.20 : Γκαουσιανή συνάρτηση

Και η $A_g(\tau, \nu)$ θα έχει την παρακάτω γραφική παράσταση



Σχήμα 3.21 : Αυτο-διφορούμενη συνάρτηση που αντιστοιχεί σε γκαουσιανή συνάρτηση.

Η αντίστοιχη $I(\tau, \nu)$ θα είναι



Σχήμα 3.22 : Συνάρτηση παρεμβολής που αντιστοιχεί σε γκαουσιανή συνάρτηση.

3.6.4 Συνάρτηση ΙΟΤΑ(Isotropic Orthogonal Transform Algorithm)

Η ορθογωνιότητα μεταξύ των βασικών συναρτήσεων συνήθως επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας ένα περιορισμό στο χρόνο ή στη συχνότητα στην πρωτότυπη συνάρτηση μορφοποίησης παλμών. Όπως γίνεται για παράδειγμα στις rectangular και ημίσεως συνημιτόνου συναρτήσεις. Ένας εναλλακτικός τρόπος για την επίτευξη της ορθογωνιότητας είναι ο «αλγόριθμος ιστροπικού ορθογωνικού μετασχηματισμού»(Isotropic Orthogonal Transform Algorithm ή αλλιώς ΙΟΤΑ).

Ορίζουμε ως O_α τον τελεστή ορθογωνιοποίησης της συνάρτησης $x(t)$ σύμφωνα με την παρακάτω σχέση.

$$O_\alpha x = \frac{x(t)}{\sqrt{a \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(t-ka)|^2}}, \alpha > 0 \quad (3.34)$$

Σκοπός του τελεστή O_α είναι να μετατρέψει σε ορθογώνια τη συνάρτηση $x(t)$ στο πεδίο της συχνότητας. Το αποτέλεσμα μετά την εφαρμογή του O_α στην $x(t)$ είναι η συνάρτηση $y(t) = O_\alpha x(t)$ η οποία πράγματι αποδεικνύεται ότι μαζί με τις αντίστοιχες συχνοτικά μετατοπισμένες εκδόσεις της αποτελούν μία ορθογώνια ομάδα συναρτήσεων στο πεδίο της συχνότητας. Για να ορθογωνοποιήσουμε τη $x(t)$ στο πεδίο του χρόνου πρέπει πρώτα να την μετασχηματίσουμε κατά Fourier στην $X(f)$, μετά να εφαρμόσουμε τον τελεστή O_α και τέλος να υπολογίσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση στο χρόνο με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier. Θα έχουμε

$$y(t) = F^{-1} O_\alpha F x(t) \quad (3.35)$$

η οποία στο πεδίο του χρόνου είναι ορθογώνια με όλα τα ορθά μετατοπισμένα χρονικά αντίγραφα αυτής.

Εφαρμόζοντας τον τελεστή O_{τ_0} στην Γκαουσιανή συνάρτηση $g_a(t)$ παίρνουμε την

$$y_a(t) = O_{\tau_0} g_a(t) \quad (3.36)$$

από την οποία όμοια με προηγουμένως προέρχεται μια οικογένεια ορθογώνιων μεταξύ τους συναρτήσεων στη συχνότητα. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας με τη σειρά τους τελεστές $F^{-1}O_{\nu_0}F$ στην $g_a(t)$ παίρνουμε την

$$\begin{aligned} z_{a,\nu_0,\tau_0} &= F^{-1}O_{\nu_0}Fy_a(t) = F^{-1}O_{\nu_0}FO_{\tau_0}g_a(t) \\ &= O_{\tau_0}F^{-1}O_{\nu_0}Fg_a(t) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Αποδεικνύεται ότι η ανωτέρω συνάρτηση και τα μετατοπισμένα αντίγραφα της είναι ορθογώνια και στο χρόνο και στη συχνότητα.

Επειδή η $y_a(t) = O_{\tau_0}g_a(t)$ είναι άρτια ισχύει ότι

$$Fy_a = F^{-1}y_a \quad (3.38)$$

πράγμα που σημαίνει ότι η $y_a(t)$ είναι η ίδια ακριβώς και στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας. Γεγονός αναμενόμενο αφού η Γκαουσιανή $g_a(t)$ έχει αυτή την ιδιότητα. Ο μετασχηματισμός Fourier της Z_{a,ν_0,τ_0} θα μας δώσει

$$\begin{aligned} Fz_{a,\nu_0,\tau_0} &= FF^{-1}O_{\nu_0}Fy_a(t) = O_{\nu_0}Fy_a(t) \\ &= O_{\nu_0}F^{-1}y_a(t) = O_{\nu_0}F^{-1}O_{\tau_0}g_a(t) \\ &= O_{\nu_0}F^{-1}O_{\tau_0}Fg_{1/a}(t) = z_{1/a,\tau_0,\nu_0} \end{aligned} \quad (3.39)$$

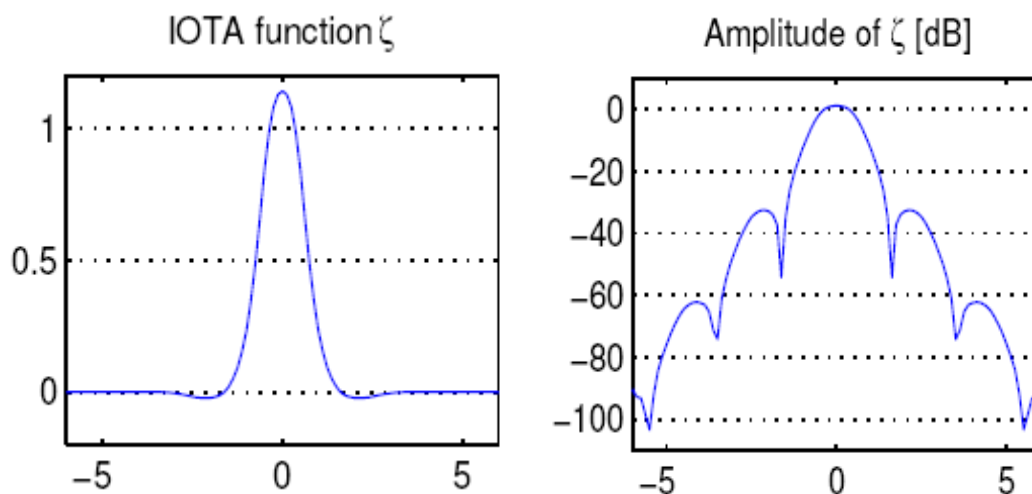
Για $a = 1$ και $\tau_0 = \nu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ορίζουμε την

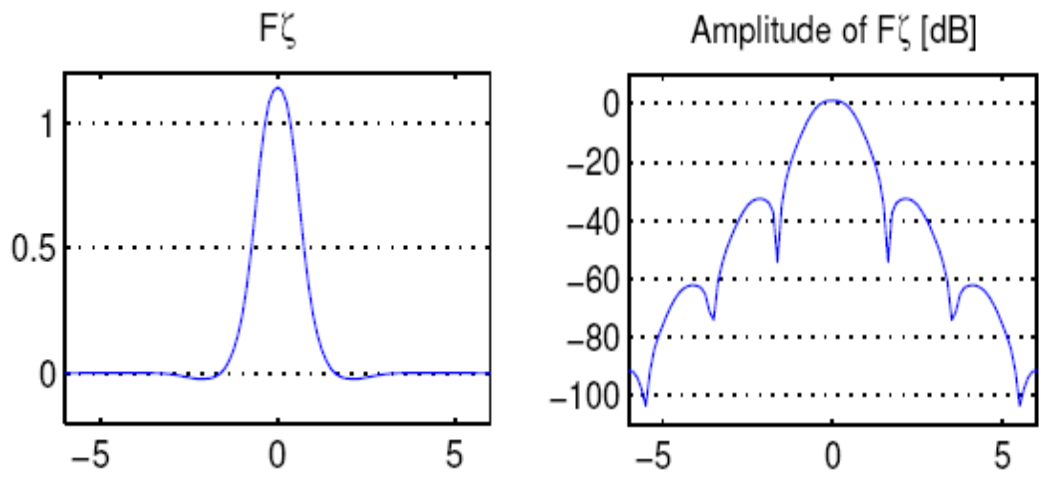
$$\zeta(t) = z_{1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}}(t) \quad (3.40)$$

η οποία έχει μετασχηματισμό Fourier

$$F\zeta(t) = Fz_{1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}}(t) = z_{1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}}(t) = \zeta(t) \quad (3.41)$$

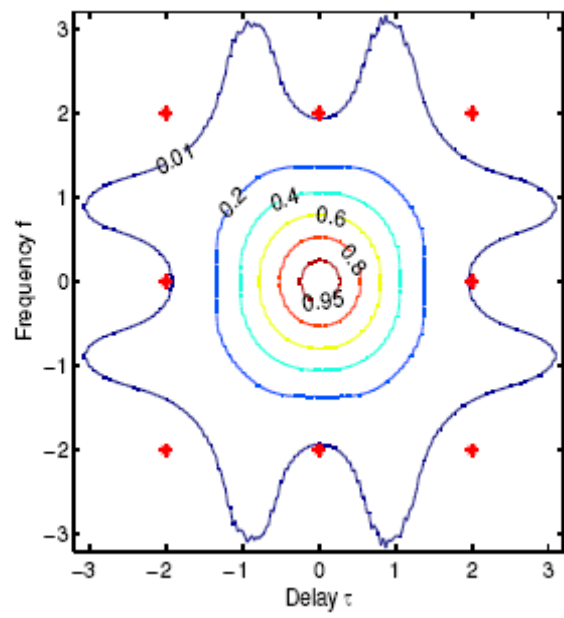
Η συνάρτηση $\zeta(t)$ έχει ισοτροπική συμπεριφορά παντού στο χρόνο και στη συχνότητα, διατηρεί την ιδιότητα της ορθογωνιότητας και ονομάζεται συνάρτηση ΙΟΤΑ. Τα πλεονεκτήματά της αυτά γίνονται εμφανή και στα παρακάτω διαγράμματα.





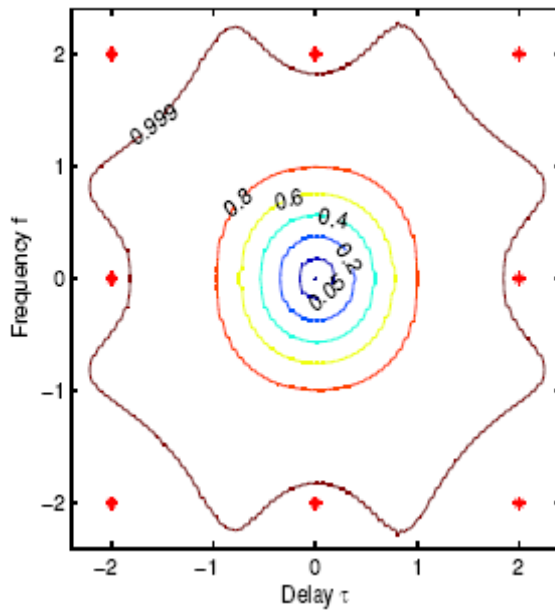
Σχήμα 3.23 : Σύναρτηση ΙΟΤΑ.

Για την $A_g(\tau, \nu)$ έχουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση.



Σχήμα 3.24 : Αυτο-διφορούμενη συνάρτηση που αντιστοιχεί σε συνάρτηση ΙΟΤΑ.

Και για την $I(\tau, \nu)$ αντίστοιχα.



Σχήμα 3.25 : Συνάρτηση παρεμβολής που αντιστοιχεί σε συνάρτηση ΙΟΤΑ.

3.6.5 Επεκταμένη Γκαουσιανή συνάρτηση(EGF)

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση Z_{a,v_0,τ_0} που είδαμε παραπάνω έχει την ακόλουθη κλειστή αναλυτική έκφραση.

$$Z_{a,v_0,\tau_0}(t) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} d_{kav_0} \left[g_a \left(t + \frac{k}{v_0} \right) + g_a \left(t - \frac{k}{v_0} \right) \right] \right] \sum_{l=0}^{\infty} d_{l,1/a,\tau_0} \cos \left(2\pi l \frac{t}{\tau_0} \right) \quad (3.42)$$

Όπου $\tau_0 v_0 = \frac{1}{2}$, $0.528v_0^2 \leq a \leq 7.568v_0^2$ και d_{k,a,v_0} πραγματικές σταθερές που μπορούν εύκολα να υπολογιστούν με βάση την παρακάτω σχέση

$$d_{k,a,v_0} = \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,j} e^{-\frac{a\pi l}{2v_0^2}}, 0 \leq k \leq \infty$$

$$\approx \sum_{j=0}^{j_l} b_{k,j} e^{-\frac{a\pi}{2v_0^2}(2j+k)}, 0 \leq k \leq K \quad (3.43)$$

Όπου $j_l = \lfloor (K-k)/2 \rfloor$ και K είναι ένας θετικός ακέραιος που εξασφαλίζει ακρίβεια $e^{-\frac{\pi a K}{2v_0^2}}$.

Μία λίστα από $b_{k,j}$ που αντιστοιχούν σε $K=14$ και ακρίβεια υπολογισμών 10^{-19} , για $a=1$, παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

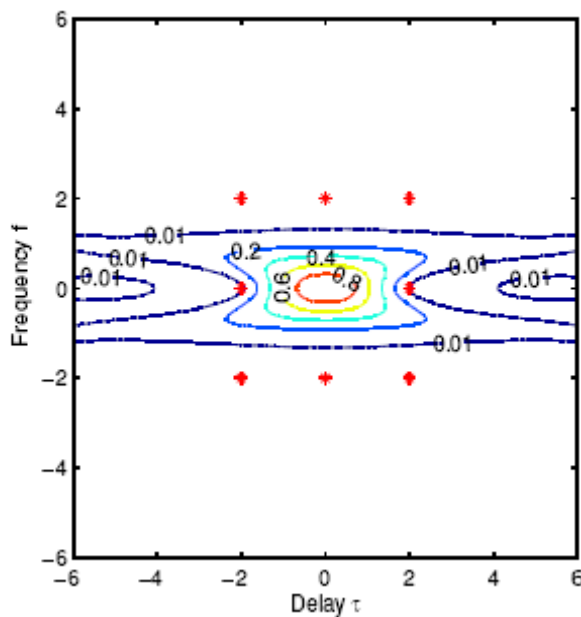
$b_{j,k}$	$j (0 \text{ to } 7)$										
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{105}{64}$	$\frac{675}{256}$	$\frac{76233}{16384}$	$\frac{457107}{65536}$	$\frac{12097169}{1048576}$	$\frac{13774755}{4194304}$				
-1	$-\frac{15}{8}$	$-\frac{219}{64}$	$-\frac{6055}{1024}$	$-\frac{161925}{16384}$	$-\frac{2067909}{131072}$	$-\frac{26060847}{1048576}$					
$\frac{3}{4}$	$\frac{19}{16}$	$\frac{1545}{512}$	$\frac{9765}{2048}$	$\frac{596277}{65536}$	$\frac{3679941}{262144}$	$-\frac{105421227}{16777216}$					
$-\frac{5}{8}$	$-\frac{123}{128}$	$-\frac{2289}{1024}$	$-\frac{34871}{8192}$	$-\frac{969375}{131072}$	$-\frac{51182445}{4194304}$						
$\frac{35}{64}$	$\frac{213}{256}$	$\frac{7797}{4096}$	$\frac{56163}{16384}$	$\frac{13861065}{2097152}$	$-\frac{139896345}{8388608}$						
$-\frac{63}{128}$	$-\frac{763}{1024}$	$-\frac{13875}{8192}$	$-\frac{790815}{262144}$	$-\frac{23600537}{4194304}$							
231	1395	202281	1434705	142044345							
512	2048	131072	524288	16777216							
$-\frac{429}{1024}$	$-\frac{20691}{32768}$	$-\frac{374325}{262144}$	$-\frac{5297445}{2097152}$								
6435	38753	1400487	1458219								
16384	65536	1048576	4194304								
$-\frac{12155}{32768}$	$-\frac{146289}{262144}$	$-\frac{2641197}{2097152}$									
46189	277797	20050485									
131072	524288	16777216									
$-\frac{88179}{262144}$	$-\frac{2120495}{4194304}$										
676039	4063017										
2097152	8388608										
$-\frac{1300075}{4194304}$											
5014575											
16777216											

Σχήμα 3.26 : $b_{k,j}$ για $0 \leq K \leq 14$ και $0 \leq j \leq 7$.

Αυτή η οικογένεια συναρτήσεων ονομάζεται επεκταμένη Γκαουσιανή συνάρτηση(Extended Gaussian Function η απλά EGF). Η συνάρτηση ΙΟΤΑ $\zeta(t)$ είναι μια ειδική περίπτωση της EGF. Και όπως είναι προφανές η EGF διατηρεί τα βασικά πλεονεκτήματα της ΙΟΤΑ. Όπως είναι η ορθογωνιότητα και η καλή συχνοτική και χρονική τοπική τοποθέτηση(Time and Frequency Localization TFL).

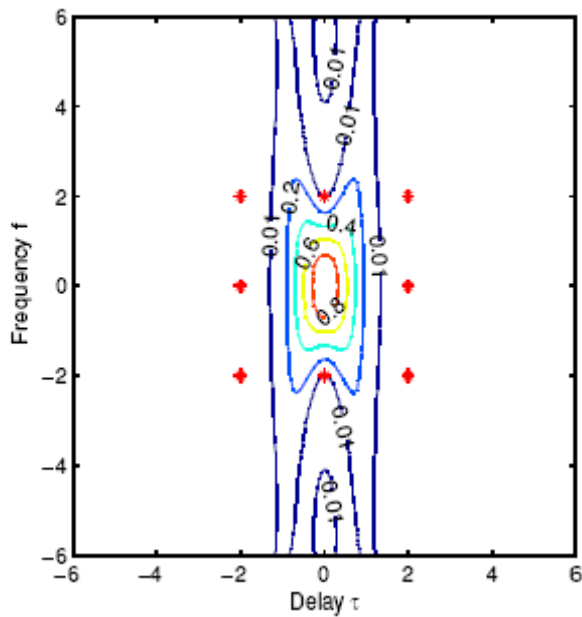
Πρακτικά το άπειρο άθροισμα της EGF μπορεί να υπολογιστεί με μεγάλη ακρίβεια χρησιμοποιώντας 50 η και ακόμη λιγότερους όρους. Ένας κατά προσέγγιση υπολογισμός με πολύ λίγους όρους είναι δυνατός αλλά με το ανάλογο κόστος στην ορθογωνιότητα και στην καλή τοποθέτηση στο χρόνο και τη συχνότητα.

Για $a = 0.265$ η $A_g(\tau, \nu)$ θα έχει την εξής μορφή.



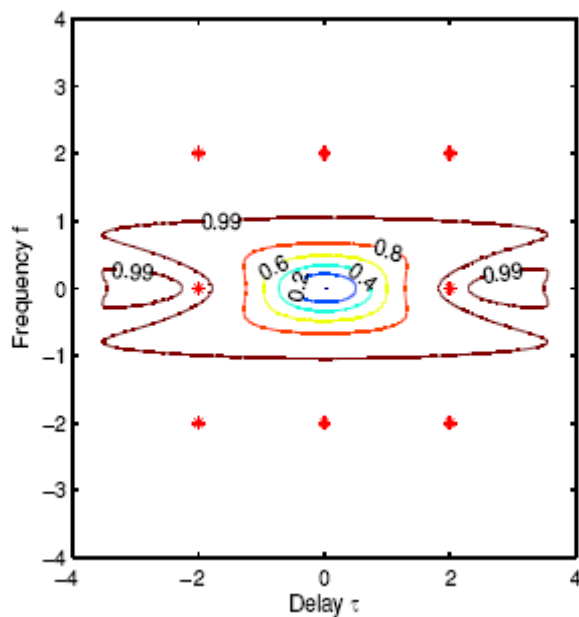
Σχήμα 3.27 : Αυτο-διφορούμενη συνάρτηση που αντιστοιχεί σε επεκταμένη γκαουσιανή συνάρτηση με $a = 0.265$.

Για $a = 3.774$ η $A_g(\tau, \nu)$ έχει την αντίστοιχη διαδική μορφή!



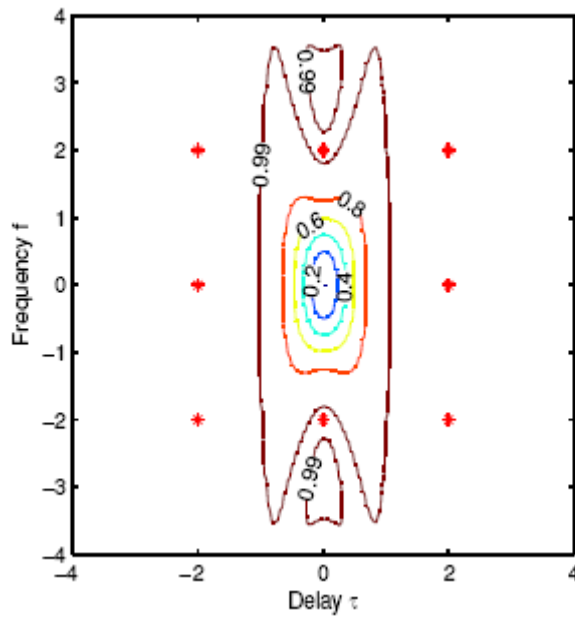
Σχήμα 3.28 : Αυτο-διφορούμενη συνάρτηση που αντιστοιχεί σε επεκταμένη γκαουσιανή συνάρτηση με $a = 3.774$.

Αντίστοιχα έχουμε για την $I(\tau, \nu)$ με $a = 0.265$.



Σχήμα 3.29 : Συνάρτηση παρεμβολής που αντιστοιχεί σε επεκταμένη γκαουσιανή συνάρτηση με $a = 0.265$.

Και για $a = 3.774$



Σχήμα 3.30 : Συνάρτηση παρεμβολής που αντιστοιχεί σε επεκταμένη γκαουσιανή συνάρτηση με $a = 3.774$.

3.7 Βασικές Ομοιότητες και Διαφορές OFDM/QAM και OFDM/OQAM

Με μία πρόχειρη σύγκριση των δύο διαμορφώσεων παρατηρούμε τα εξής βασικά χαρακτηριστικά σημεία :

- Μεγαλύτερη φασματική απόσταση για την OFDM/QAM

($\tau_0 \nu_0 = 1$ έναντι $\tau_0 \nu_0 = \frac{1}{2}$ της OFDM/OQAM).

Η μετάδοση των μιγαδικών συμβόλων γίνεται στα μαύρα σημεία (EE, EO) στο Σχήμα 3.14 για τα OFDM/QAM συστήματα καθώς και των αντίστοιχων πραγματικών συμβόλων για τα OFDM/OQAM συστήματα. Συγκεκριμένα τα πραγματικά μέρη των μιγαδικών συμβόλων μεταδίδονται στα σημεία (EE, EO) και τα φανταστικά μέρη στα λευκά σημεία (OE, OO) στην OFDM/OQAM.

- Διπλάσιος ρυθμός αποστολής συμβόλων για την OFDM/OQAM αλλά στο μισό ρυθμό κωδικοποίησης εν σχέση με την OFDM/QAM χωρίς CP αφού μεταδίδονται μόνο πραγματικά σύμβολα. Συγκεκριμένα δύο για κάθε ένα μιγαδικό σύμβολο (ένα για το πραγματικό και ένα για το φανταστικό μέρος).

- Η OFDM/OQAM και η OFDM/QAM χωρίς CP έχουν την ίδια φασματική απόδοση.

$$n = \frac{\frac{1}{2} \log_2 M}{\tau_0 \nu_0} = \log_2 M [bits / s / Hz] \quad (3.44)$$

- Στην OFDM/OQAM δεν έχουμε το σοβαρό πρόβλημα των πλευρικών λοβών της OFDM/QAM.

3.8 Μοντέλο συστήματος

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφεται σε ένα βασικό επίπεδο η διαμόρφωση OFDM/OQAM και παρουσιάζεται το αντίστοιχο μοντέλο συστήματος[6].

3.8.1 Γενική περιγραφή συνεχούς σήματος OQAM

Ένα OFDM/OQAM σήμα συνεχούς χρόνου μπορεί να οριστεί γενικά με την παρακάτω σχέση

$$s(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in Z} a_{m,n} g_{m,n} \quad (3.45)$$

όπου

$$g_{m,n}(t) = g(t - n\tau_0) e^{j\pi m F_0 t} e^{j\varphi_{m,n}} \quad (3.46)$$

Και

$$\varphi_{m,n} = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}(n + m) \pmod{\pi} \quad (3.47)$$

Με το φ_0 να είναι μια επιλεγμένη σταθερά φάσης, το M ο άρτιος αριθμός των υποφερόντων, η συχνότητα $F_0 = 1/T_0 = 1/2\tau_0$ η φασματική απόσταση μεταξύ των υποφερόντων και $g(t)$ η συνάρτηση μορφοποίησης παλμών. Τα μεταδιδόμενα σύμβολα $a_{m,n}$ έχουν πραγματικές τιμές και προέρχονται από τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των μιγαδικών συμβόλων ενός αστερισμού μιας 2^{2K} -QAM διαμόρφωσης με διάρκεια συμβόλων $T_0 = 2\tau_0$ με χρονική μετατόπιση πραγματικού και φανταστικού μέρους (time offset) τ_0 .

Σε ένα ιδανικό κανάλι, για να είναι η μετάδοση επιτυχής αρκεί να ισχύει η παρακάτω συνθήκη που εξασφαλίζει την ορθογωνιότητα μεταξύ των γειτονικών φερόντων.

$$R \left\{ \left\langle \mathbf{g}_{m,n} \mid \mathbf{g}_{p,q} \right\rangle \right\} = R \left\{ \int \mathbf{g}_{m,n}(t) \mathbf{g}_{p,q}^*(t) dt \right\} = \delta_{m,p} \delta_{n,q} \quad (3.48)$$

Για συντομία ορίζουμε ως $\langle \mathbf{g} \rangle_{m,n}^{p,q}$ το εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{g}_{m,n} \mid \mathbf{g}_{p,q} \rangle$ το οποίο και έχει καθαρά φανταστική τιμή για $(m,n) \neq (p,q)$.

3.8.2 Ανάλυση στο διακριτό πεδίο του χρόνου

Με περίοδο δειγματοληψίας $T_e = \frac{T_0}{M}$ το διακριτό OQAM σήμα δίνεται από την εξίσωση.

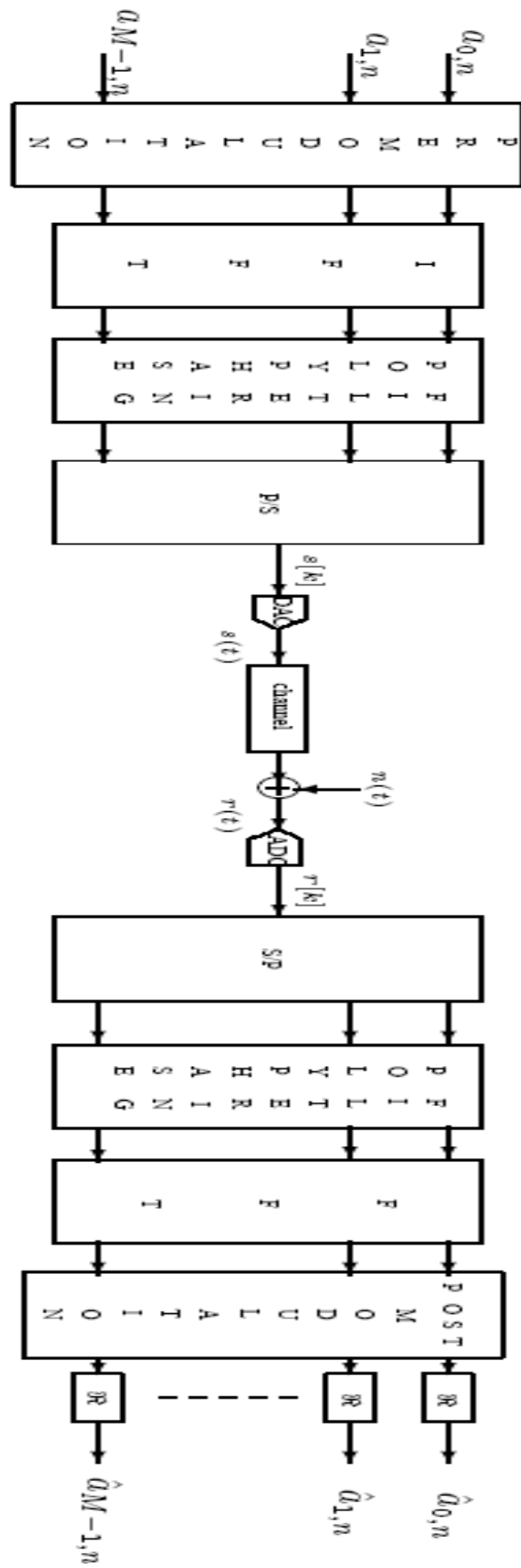
$$s[k] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in Z} a_{m,n} \mathbf{g}_{m,n}[k] \quad (3.49)$$

Με

$$\mathbf{g}_{m,n}[k] = \mathbf{g}[k - nN] e^{j \frac{2\pi}{M} m \left(k - \frac{L-1}{2} \right)} e^{j\Phi_{m,n}} \quad (3.50)$$

όπου $N = M / 2$ είναι το time offset στο διακριτό πεδίο του χρόνου και L το μήκος του φίλτρου $\mathbf{g}[k]$.

Ύστερα από το στάδιο της αρχικής διαμόρφωσης (Premodulation), τα δεδομένα σε κάθε υποφέρων φιλτράρονται με μια εκθετικά διαμορφωμένη έκδοση του αρχικού φίλτρου μορφοποίησης παλμών $\mathbf{g}[k]$ πράγμα που μπορεί να υλοποιηθεί σύμφωνα με την θεωρία του OFDM και των Δομών Συστοιχειών Φίλτρων (Filter Banks) με τη χρήση ενός IFFT. Οι αντίστροφες διαδικασίες υλοποιούνται στο δέκτη. Η συνολική εικόνα του πολυπλέκτη των παράλληλων σημάτων καθώς και του δέκτη έχει μια δομή filter bank σύνθεσης – ανάλυσης.



Σχήμα 3.31 : Μοντέλο συστήματος OFDM/OQAM.

Όπου για $m = 0, \dots, M - 1$ και $k = 0, \dots, L - 1$ ισχύει

$$f_m[k] = g[k] e^{j \frac{2\pi}{M} m \left(k - \frac{L-1-N}{2} \right)} \quad (3.51)$$

και

$$h_m[k] = g[k] e^{j \frac{2\pi}{M} m \left(k - \frac{L-1+N}{2} \right)} = f_m^*[L-1-K] \quad (3.52)$$

Αν υποθεθεί πως το φίλτρο $g[k]$ είναι πραγματικό και συμμετρικό, τότε $h_m[k] = f_m[k]$ για όλα τα m και k . Η OQAM δεν έχει CP και το μήκος του φίλτρου μπορεί να περιοριστεί στο μήκος του FFT $L_{\min} = M$. Το φίλτρο μπορεί να εκφραστεί συναρτήση των πολυφασικών στοιχείων του $E_l(z)$ τάξης $2N$ σύμφωνα με τα παρακάτω:

$$G(z) = \sum_{l=0}^{2N-1} z^{-l} E_l(z^{2N}) \quad (3.53)$$

και

$$E_l(z) = \sum_n g[l + 2N] z^{-n} \quad (3.54)$$

Αποδεικνύεται ότι στην OQAM έχουμε τέλεια ορθογωνιότητα εάν και μόνο εάν για $0 \leq l \leq N-1$ ισχύει

$$E_l(z) E_l(z^{-1}) + E_{l+N}(z) E_{l+N}(z^{-1}) = \frac{1}{N}, \forall z \quad (3.55)$$

Όταν ένα φίλτρο μορφοποίησης παλμών ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη τότε για ένα ιδανικό κανάλι επιτυγχάνουμε την τέλεια μετάδοση : $\forall(m, n)$
 $\hat{a}_{m,n} = a_{m,n}$.

Πρακτικά όμως σε ένα πραγματικό κανάλι η ιδιότητα της ορθογωνιότητας χάνεται οδηγώντας σε διασυμβολική (ISI) και διαφεροντική (ICI) παρεμβολή.

3.9 Μοντέλο καναλιού

Σε αυτή τη παράγραφο εξετάζουμε το βασικό μοντέλο μετάδοσης και αποδιαμόρφωσης της OFDM/OQAM μαζί με τις αντίστοιχες εξισώσεις που το περιγράφουν[6].

3.9.1 Μετάδοση OQAM μέσα από ένα πολυδιαδρομικό κανάλι

Για λόγους απλότητας θα θεωρήσουμε ότι το κανάλι είναι χρονικά στατικό και αμετάβλητο. Θεωρούμε επίσης ότι όπως και στην περίπτωση της κλασικής OFDM με CP υπάρχει ικανός αριθμός υποφερόντων ώστε να έχουμε επίπεδη εξασθένηση (flat fading) σε κάθε υποφέρον. Η εξίσωση που περιγράφει το λαμβανόμενο σήμα στο δέκτη είναι η παρακάτω.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= (h * s)(t) \\
 &= \sum_{n \in Z} \sum_{m=0}^{M-1} a_{m,n} \int_0^{\Delta} h(t) g_{m,n}(t - \tau) d\tau \\
 &= \sum_{n \in Z} \sum_{m=0}^{M-1} a_{m,n} e^{j\varphi_{m,n}} e^{2j\pi m F_0 t} \\
 &\quad \times \int_0^{\Delta} h(\tau) g(t - \tau - n\tau_0) e^{-2j\pi m F_0 \tau} d\tau \\
 &= \sum_{n \in Z} \sum_{m=0}^{M-1} a_{m,n} H_m g_{m,n}(t)
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Όπου Δ η μέγιστη εξάπλωση στο πεδίο της καθυστέρησης και

$$H_m = \int_0^{\Delta} h(\tau) e^{-2j\pi m F_0 \tau} d\tau \tag{3.57}$$

η συνάρτηση μεταφοράς του διαύλου διακριτοποιημένη στο πεδίο της συχνότητας.

Το h δηλώνει την κρουστική απόκριση του διαύλου (**Channel Impulse Response – CIR**). Η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο όταν η συνάρτηση μορφοποίησης παλμών έχει μικρές αυξομειώσεις στο χρόνο μέσα στο διάστημα $[0, \Delta]$ και πρακτικά ισχύει $g(t - \tau - n\tau_0) \approx g(t - n\tau_0)$ για $\tau \in [0, \Delta]$.

3.9.2 Αποδιαμόρφωση και ισοστάθμιση Zero Forcing

Η αποδιαμόρφωση του λαμβανόμενου σήματος στη θέση (m_0, n_0) αγνοώντας τον θόρυβο δίνεται από την $y_{m_0, n_0} = \langle y | g_{m_0, n_0} \rangle$. Ύστερα από υπολογισμούς λαμβάνουμε την ακόλουθη έκφραση :

$$y_{m_0, n_0} = H_{m_0} a_{m_0, n_0} + \sum_{(m, n) \neq (m_0, n_0)} a_{m, n} H_m \langle g \rangle_{m, n}^{m_0, n_0} \quad (3.58)$$

Αποδεικνύεται πως για κάθε αποδιαμορφωμένο σήμα στη θέση (m_0, n_0) στο επίπεδο χρόνου συχνότητας, η εκτίμηση του συμβόλου δίνεται από την ακόλουθη έκφραση :

$$\hat{a}_{m_0, n_0} = a_{m_0, n_0} + \mathfrak{R} \{ I_{m_0, n_0} \} \quad (3.59)$$

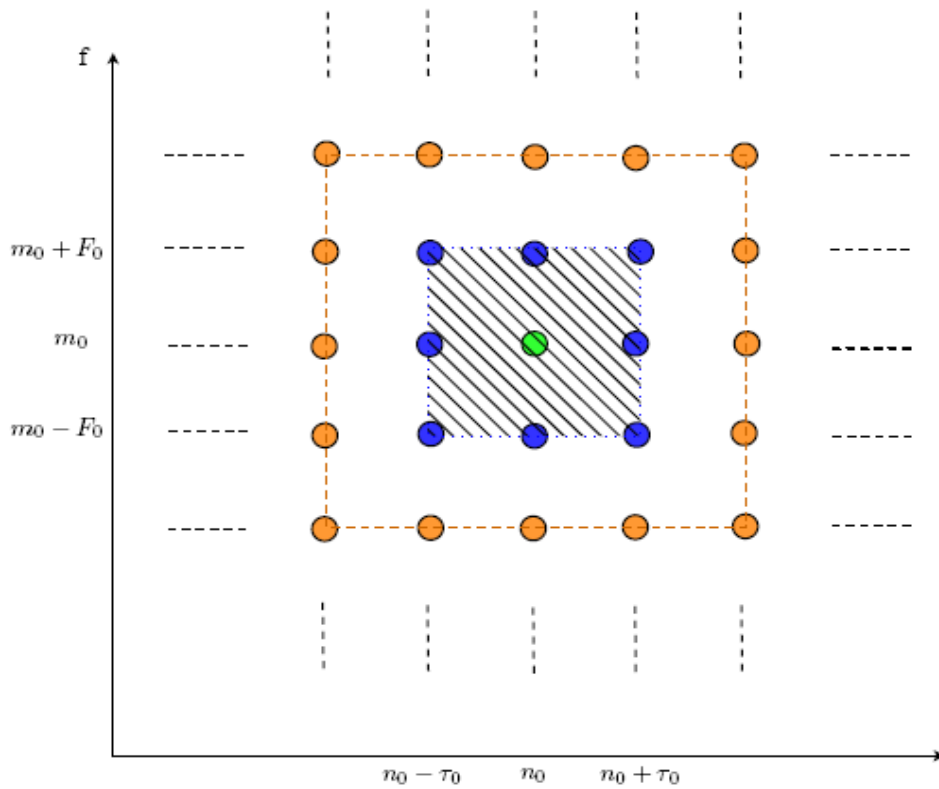
Όπου

$$I_{m_0, n_0} = \sum_{(m, n) \neq (m_0, n_0)} a_{m, n} \frac{H_m}{H_{m_0}} \langle g \rangle_{m, n}^{m_0, n_0} \quad (3.60)$$

Είναι ένας όρος με μιγαδική τιμή. Το $\mathfrak{R} \{ I_{m_0, n_0} \}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η προκύπτουσα παρεμβολή λόγω της διασποράς του καναλιού. Αν το προτότυπο φίλτρο είναι καλά τοποθετημένο (**well localized**) στο χρόνο και στη στη συχνότητα, λαμβάνουμε $\mathfrak{R} \{ I_{m_0, n_0} \} \approx 0$ γεγονός που οδηγεί σε

αξιόπιστο υπολογισμό του a_{m_0, n_0} . Επιπλέον μπορούμε να έχουμε έναν ακριβή προσδιορισμό του a_{m_0, n_0} όσο γνωρίζουμε το συντελεστή του διαύλου για το subcarrier $m_0 H_{m_0}$ στην πλευρά του δέκτη. Παρόλα αυτά οι προσεγγίσεις που χρησιμοποιούμε για το g και το $\Re \{ I_{m_0, n_0} \}$ παύουν να ισχύουν όταν η διασπορά του καναλιού είναι μεγάλη ή/και όταν η τάξη του αστερισμού της διαμόρφωσης είναι μεγάλη. Πχ για την k-QAM με $k \geq 16$ απαιτείται υψηλός σηματοθοριβικός λόγος(SNR) και το $\Re \{ I_{m_0, n_0} \}$ δεν είναι αμεληταίο συγκρινόμενο με το θόρυβο.

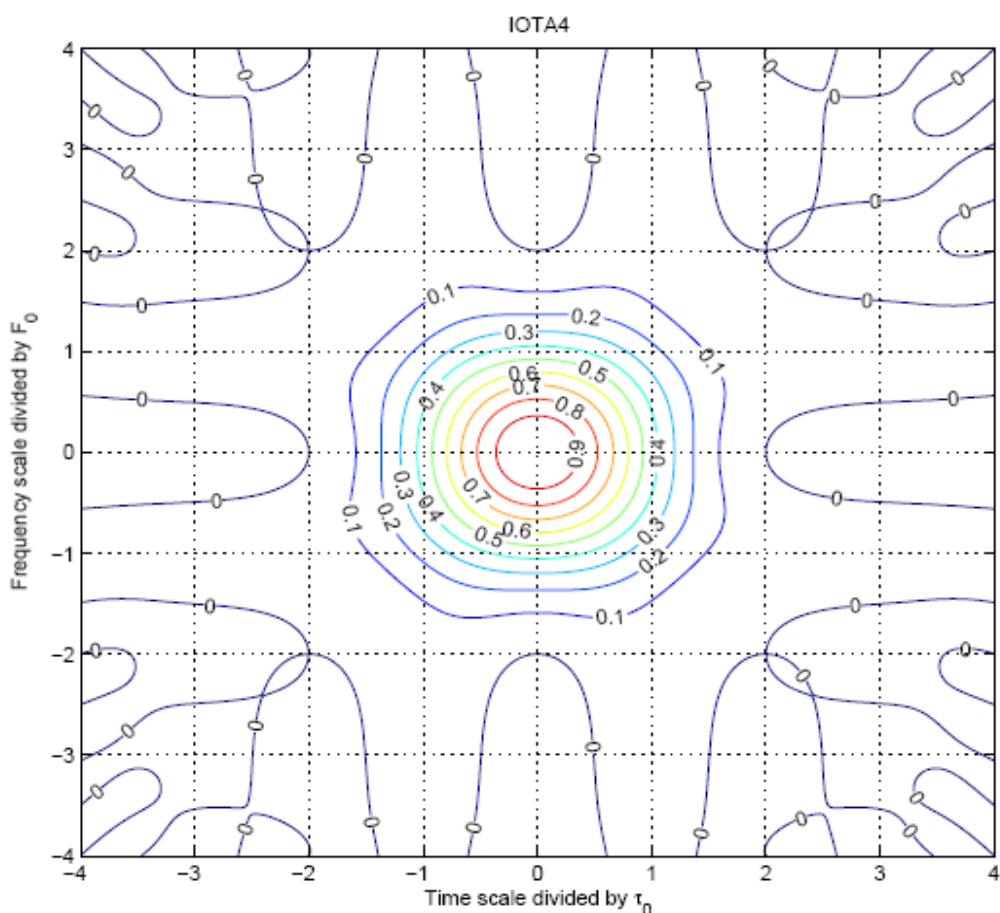
3.10 Ανάλυση ICI και ISI



Σχήμα 3.32 : Απεικόνιση OFDM/OQAM συμβόλων στο επίπεδο συχνότητας-χρόνου.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό της OQAM διαμόρφωσης είναι η επικάλυψη (overlapping) μεταξύ των επιτυχώς μεταδιδόμενων OQAM συμβόλων. Ο παράγοντας μετατόπισης $N = M / 2$ είναι πάντα μικρότερος από το μήκος του προτύπου φίλτρου ($L_{\text{min}} = M$). Κατά συνέπεια στο μέρος του πομπού πιθανώς παρουσιάζονται ορισμένες σημαντικές παρεμβολές ακόμα και χωρίς να ληφθεί υπόψιν η επίδραση του διαύλου. Σε αυτές τις παρεμβολές συμπεριλαμβάνονται τα ICI και ISI. Ρίχνοντας μια ματιά στο διάγραμμα απεικόνισης των OQAM συμβόλων (Σχήμα 3.32) στη συχνότητα και στο χρόνο, παρατηρούμε ότι σε έναν ιδανικό, χωρίς θόρυβο, δίαυλο, ένα δεδομένο σύμβολο a_{m_0, n_0} δέχεται παρεμβολή από τα γειτονικά του. Οι πίο ισχυρές παρεμβολές προέρχονται από τα σύμβολα της μπλέ ζώνης που τα αποκαλούμε πρώτης τάξεως γειτονικά σύμβολα.

Μεγαλώνοντας το μέγεθος της ζώνης η ισχύς της παρεμβολής μειώνεται. Αυτό σημαίνει πως αν το προτότυπο φίλτρο είναι καλά τοποθετημένο στο χρόνο και στη συχνότητα τότε οι παρεμβολές μπορούν να περιοριστούν σε ένα συγκεκριμένο μέγεθος ζώνης της συγκεκριμένης τάξης γειτονικών συμβόλων.



Σχήμα 3.33 : Διφορούμενη Συνάρτηση για φίλτρο ΙΟΤΑ4.

Γιά παράδειγμα το Σχήμα 3.33 δείχνει τη διφορούμενη(ambiguity) συνάρτηση μίας προτότυπης συνάρτησης μορφοποίησης παλμών που αποκαλείται Ισοτροπικός Ορθογωνικός Αλγόριθμος Μετασχηματισμού(ΙΟΤΑ). Το εύρος στο οποίο ενεργεί το φίλτρο αυτό δείχνει το εύρος παρεμβολής που μπορεί να έχει ένα φιλτραρισμένο σύμβολο. Βρίσκουμε πως οι πιο ισχυρές παρεμβολές μπορούν να περιοριστούν μέσα σε μια ομάδα γειτονικών συμβόλων τρίτης τάξεως.

Πολύ σημαντικό οστόσο είναι να αναφερθεί πως ενώ το OQAM διαμορφωμένο σήμα έχει τις δικές του ιδιαιτερότητες, που οδηγούν σε παρεμβολή μεταξύ γειτονικών συμβόλων, παρόλα αυτά στην αποδιαμόρφωση του σήματος μπορεί να ανακτηθεί η ορθογωνιότητα. Αυτό συμβαίνει διότι οι παρεμβολές αυτές έχουν καθαρά φανταστικές τιμές κάτι που δεν επηρεάζει την ανάλυση του σήματος αφού στην OFDM/OQAM μπορούμε να δεκτούμε τη μη ορθογωνιότητα στο φανταστικό επίπεδο, λόγω του ότι τα σύμβολα απεικονίζονται καθαρά με πραγματικές τιμές. Η παρακάτω σχέση μας δείχνει το βασικό μοντέλο της αποδιαμόρφωσης για ένα ιδανικό δίαυλο χωρίς θόρυβο.

$$\begin{aligned}
 y_{m_0, n_0} &= a_{m_0, n_0} + \sum_{(m, n) \neq (m_0, n_0)} a_{m, n} \langle \mathbf{g} \rangle_{m, n}^{m_0, n_0} \\
 &= a_{m_0, n_0} + I_{m_0, n_0}
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Τα μεταδιδόμενα σύμβολα a_{m_0, n_0} έχουν πραγματικές τιμές όπως αναφέραμε προηγουμένως. Το $\langle \mathbf{g} \rangle_{m, n}^{m_0, n_0}$ παίρνει καθαρά φανταστικές τιμές, όπως και το I_{m_0, n_0} . Αυτό οδηγεί στο $\Re \{ I_{m_0, n_0} \} = 0$. Παρόλα αυτά στην περίπτωση μη ιδανικού διαύλου η τελευταία σχέση ισχύει μόνο προσεγγιστικά και εξαρτάται από το αν η μετάδοση απαιτεί αστερισμούς διαμόρφωσης υψηλής τάξεως ή όχι. Για να το εξηγήσουμε αυτό θεωρούμε ότι το I_{m_0, n_0} μπορεί να χωριστεί σε δύο όρους.

$$I_{m_0, n_0} = C_{m_0, n_0} + D_{m_0, n_0} \tag{3.62}$$

Όπου

$$C_{m_0, n_0} = \sum_{(p, q) \neq (0, 0)} a_{m_0 + p, n_0 + q} \langle \mathbf{g} \rangle_{m_0 + p, n_0 + q}^{m_0, n_0} \tag{3.63}$$

Είναι ένας καθαρά φανταστικός όρος και εκφράζει τις παρεμβολές από τη ζώνη των συμβόλων για τις οποίες οι συντελεστές του καναλιού είναι ίσοι με H_{m_0} . Δηλαδή $(H_{m_0 + p} = H_{m_0})$.

Από την άλλη πλευρά

$$D_{m_0, n_0} = \sum_{(p', q') \neq (p, q)} a_{m_0 + p', n_0 + q'} \frac{H_{m_0 + p'}}{H_{m_0}} \langle \mathbf{g} \rangle_{m_0 + p', n_0 + q'}^{m_0, n_0} \quad (3.64)$$

Είναι ένας μιγαδικός όρος που εκφράζει τις παρεμβολές από τη ζώνη των συμβόλων για τις οποίες οι συντελεστές του καναλιού είναι δεν είναι ίσοι με H_{m_0} . Δηλαδή ($H_{m_0 + p} \neq H_{m_0}$). Έπειτα μπορούμε να ξαναγράψουμε την (3.59) ως

$$\hat{a}_{m_0, n_0} = a_{m_0, n_0} + \Re \left\{ D_{m_0, n_0} \right\} \quad (3.65)$$

Είναι προφανές ότι το D_{m_0, n_0} δεν εξαρτάται από τον θόρυβο. Πράγμα που σημαίνει ότι η αύξηση του σηματοθορυβικού λόγου(SNR) δεν βοηθάει για την μείωση των παρεμβολών D_{m_0, n_0} . Επιπλέον στην περίπτωση της χρήσης αστερισμών υψηλής τάξεως χρειάζεται μεγάλο SNR για να επιτύχουμε ικανοποιητικό ρυθμό εσφαλμένων bit(Bit Error Rate, BER) που θα αντιστοιχούσε σε ασθενή θόρυβο. Έτσι η D_{m_0, n_0} είναι μια αναπόφευκτη και κυρίαρχη παρεμβολή. Παρόλα αυτά στην περίπτωση της χρήσης αστερισμών χαμηλής τάξεως αυτές οι παρεμβολές καλύπτονται από τον θόρυβο και μπορούν να αγνοηθούν.

3.11 Ισοστάθμιση δύο σταδίων με «ακύρωση παρεμβολής» EIC : Μια θεωρητική προσέγγιση

Σε αυτή τη παράγραφο προτείνουμε μια ισοστάθμιση δύο σταδίων για την διατήρηση της απαιτούμενης απόδοσης στην περίπτωση που δεν ισχύουν οι βασικές προσεγγιστικές σχέσεις. π.χ : $g(t - \tau - n\tau_0) \neq g(t - n\tau_0)$ και $\Re \{ I_{m_0, n_0} \} \neq 0$. Τότε το αποδιαμορφωμένο σήμα στη θέση (m_0, n_0) χωρίς το θόρυβο δίνεται από τη σχέση :

$$\begin{aligned}
 y_{m_0, n_0} &= \langle y \mid g_{m_0, n_0} \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n \in Z} \sum_{m=0}^{M-1} a_{m, n} \\
 &\times \int_0^{\Delta} h(\tau) g_{m, n}(t - \tau) d\tau g_{m_0, n_0}^*(t) dt \\
 &= \sum_{n \in Z} \sum_{m=0}^{M-1} a_{m, n} e^{j(\Phi_{m, n} - \Phi_{m_0, n_0})} \\
 &\times \int_0^{\Delta} h(\tau) e^{-j2\pi m F_0 \tau} f(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Όπου

$$f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(m-m_0)F_0 t} g(t - \tau - n\tau_0) g^*(t - n_0\tau_0) dt \tag{3.67}$$

Αντικαθιστώντας τις μεταβλητές στην $f(\tau)$ ως ακολούθως :

$$t - \tau - n\tau_0 = \mu + \frac{\tau'}{2} \quad \text{και} \quad t - n_0\tau_0 = \mu + \frac{\tau'}{2} .$$

Λαμβάνουμε.

$$\begin{aligned}
 f(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\mu + \frac{\tau'}{2}\right) g^*\left(\mu - \frac{\tau'}{2}\right) d\mu \\
 &= e^{j2\pi(m-m_0)F_0\left(\mu + \frac{(n_0+n)\tau_0 + \tau}{2}\right)} d\mu \\
 &= e^{j\pi(m-m_0)F_0((n_0+n)\tau_0 + \tau)} \\
 &= A_g\left[(n_0 - n)\tau_0 - \tau, (m - m_0)F_0\right]
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Όπου, $A_g(\tau, \nu)$, η διαφορούμενη συνάρτηση της $g(t)$, ορίζεται ως :

$$A_g(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} g\left(t + \frac{\tau}{2}\right) g^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j2\pi\nu t} dt \tag{3.69}$$

Αντικαθιστώντας την (3.68) στην (3.66) οδηγούμεθα στην :

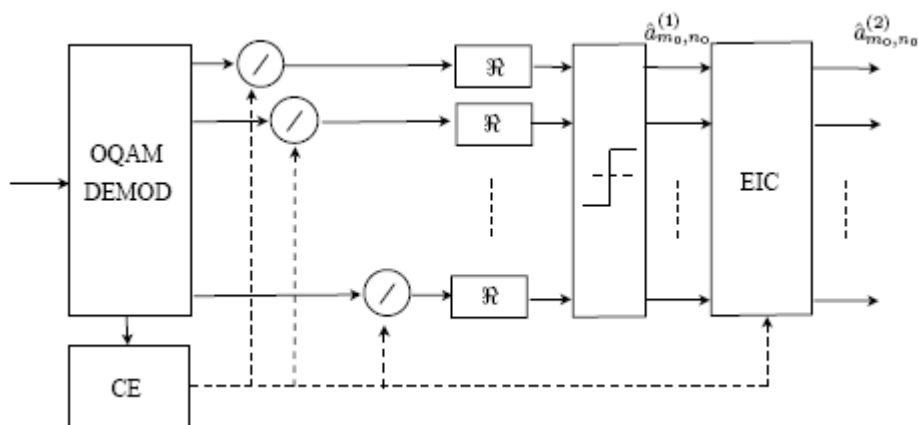
$$\begin{aligned}
 y_{m_0, n_0} &= \sum_{n \in Z} \sum_{m=0}^{M-1} a_{m, n} e^{j(\Phi_{m, n} - \Phi_{m_0, n_0})} \\
 &\times \int_0^{\Delta} h(\tau) e^{-j2\pi m F_0 \tau} f(\tau) d\tau \\
 &= a_{m_0, n_0} \int_0^{\Delta} h(\tau) e^{-j2\pi m_0 F_0 \tau} A_g(-\tau, 0) d\tau + J_{m_0, n_0}
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Όπου ο όρος μιγαδικών τιμών J_{m_0, n_0} που εκφράζει τη συνολική ICI και ISI για ένα συγκεκριμένο σημείο χρόνου-συχνότητας (m_0, n_0) δίνεται από τη σχέση :

$$\begin{aligned}
J_{m_0, n_0} &= \sum_{(m, n) \neq (m_0, n_0)} a_{m, n} e^{j(\Phi_{m, n} - \Phi_{m_0, n_0})} \\
&\times e^{j \frac{\pi}{2} (m - m_0)(n_0 + n)} \int_0^{\Delta} h(t) e^{-j\pi(m_0 + m)F_0 \tau} \\
&\times A_g \left[(n_0 - n)\tau_0 - \tau, (m_0 - m)F_0 \right] d\tau
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Με βάση τις δύο προηγούμενες εξισώσεις μια ιδανική ισοστάθμιση με «ακύρωση παρεμβολής» EIC θα δώσει ισοσταθμισμένα σύμβολα δεδομένων που δίνονται από την :

$$\hat{a}_{m_0, n_0} = \Re \left\{ \frac{y_{m_0, n_0} - J_{m_0, n_0}}{\int_0^{\Delta} h(\tau) e^{-j2\pi m_0 F_0 \tau} A_g(-\tau, 0) d\tau} \right\} \tag{3.72}$$



Σχήμα 3.34 : Δέκτης OFDM/OQAM με ισοσταθμιστή EIC.

Ο δέκτης του σχήματος 3.34 αποτελεί μια πρακτική εφαρμογή αυτού του ιδανικού ισοσταθμιστή. Αρχικά λαμβάνουμε ισοσταθμισμένα σύμβολα δεδομένων όπως τα παρακάτω.

$$\hat{a}_{m_0, n_0}^{(1)} = HD \left[\Re \left\{ \frac{y_{m_0, n_0}}{\boxed{H}_{m_0}} \right\} \right] \quad (3.73)$$

Όπου το $HD [.]$ δηλώνει σκληρή επιλογή(hard decision), το \boxed{H}_{m_0} είναι ο συντελεστής του καναλιού που έχει υπολογιστεί στη συχνότητα m_0 και $\hat{h}(\tau)$ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier(IFT) του $\boxed{H}_m^{(c)}$ με $m = 0, \dots, M-1$. Λαμβάνουμε την παρακάτω εκτίμηση για τον όρο της παρεμβολής :

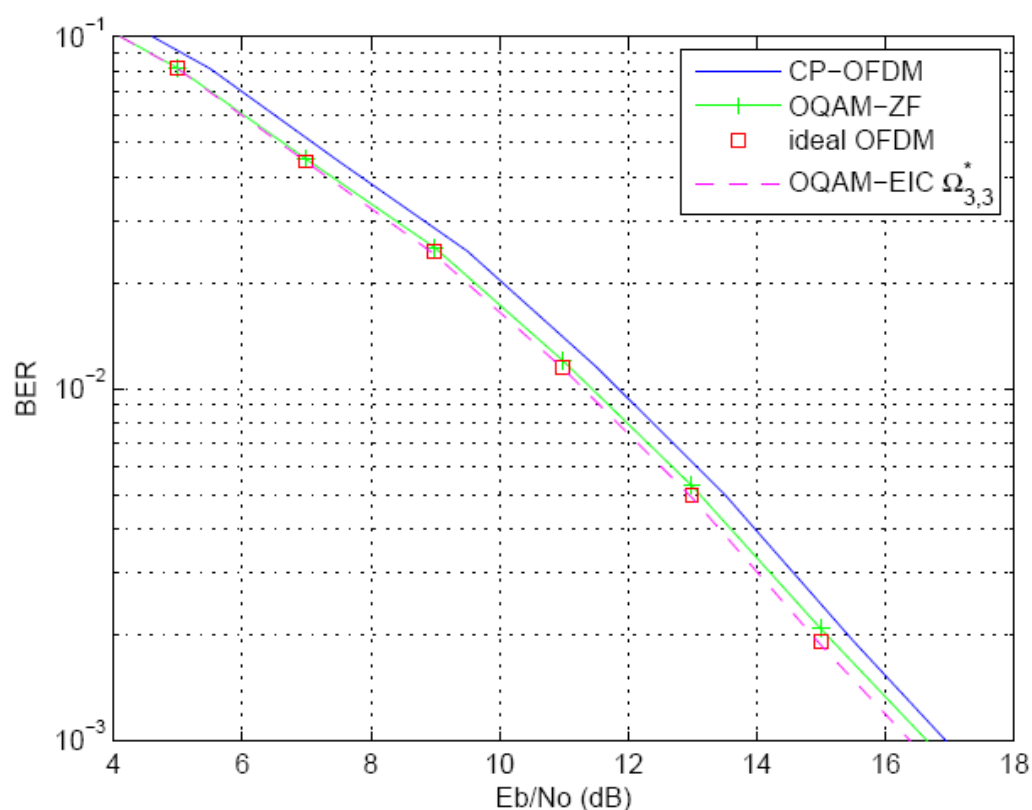
$$\begin{aligned} J_{m_0, n_0} &= \sum_{(m, n) \neq (m_0, n_0)} a_{m, n} e^{j(\Phi_{m, n} - \Phi_{m_0, n_0})} \\ &\times e^{j\frac{\pi}{2}(m-m_0)(n_0+n)} \int_0^{\Delta} h(t) e^{-j\pi(m_0+m)F_0\tau} \\ &\times A_g \left[(n_0 - n)\tau_0 - \tau, (m_0 - m)F_0 \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.74)$$

Τελικά με τη χρήση της «ακύρωσης παρεμβολής» λαμβάνουμε ισοσταθμισμένα σύμβολα δεδομένων :

$$\hat{a}_{m_0, n_0}^{(2)} = \Re \left\{ \frac{y_{m_0, n_0} - \mathcal{J}_{m_0, n_0}}{\int_0^{\Delta} \hat{h}(\tau) e^{-j2\pi m_0 F_0 \tau} A_g(-\tau, 0) d\tau} \right\} \quad (3.75)$$

3.12 Σύγκριση OFDM και OFDM/OQAM

Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις BER(Bit Error Rate) προς τον σηματοθορυβικό λόγο(SNR) που εκφράζεται ως E_b/N_0 συγκρίνονται οι ακόλουθες διαμορφώσεις για $M=128$ σύμβολα : OFDM με CP μήκους L_h+2 με $L_h=M/8$ ($1,6 \mu s$), OFDM/OQAM με ZF, OFDM/OQAM με EIC και ιδανική(ideal) OFDM που αντιστοιχεί σε OFDM με CP χωρίς να λογαριάζονται οι απώλειες λόγω του CP.

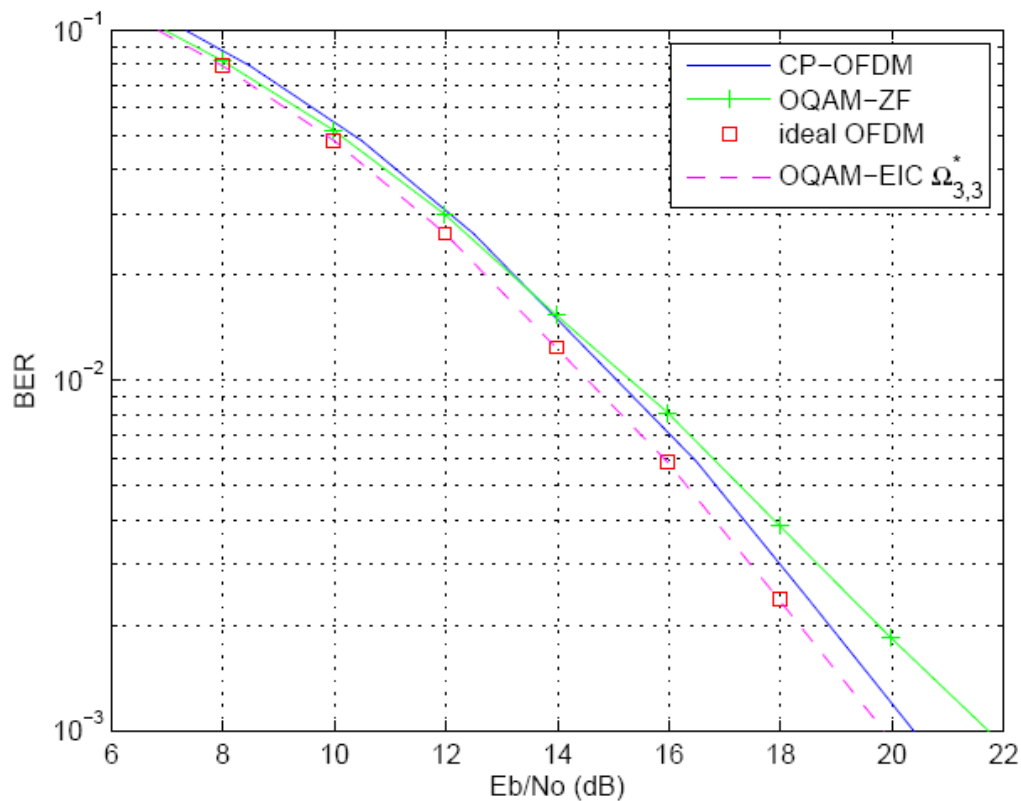


Σχήμα 3.35 : BER προς SNR για 4-QAM με $L_h = M/8$.

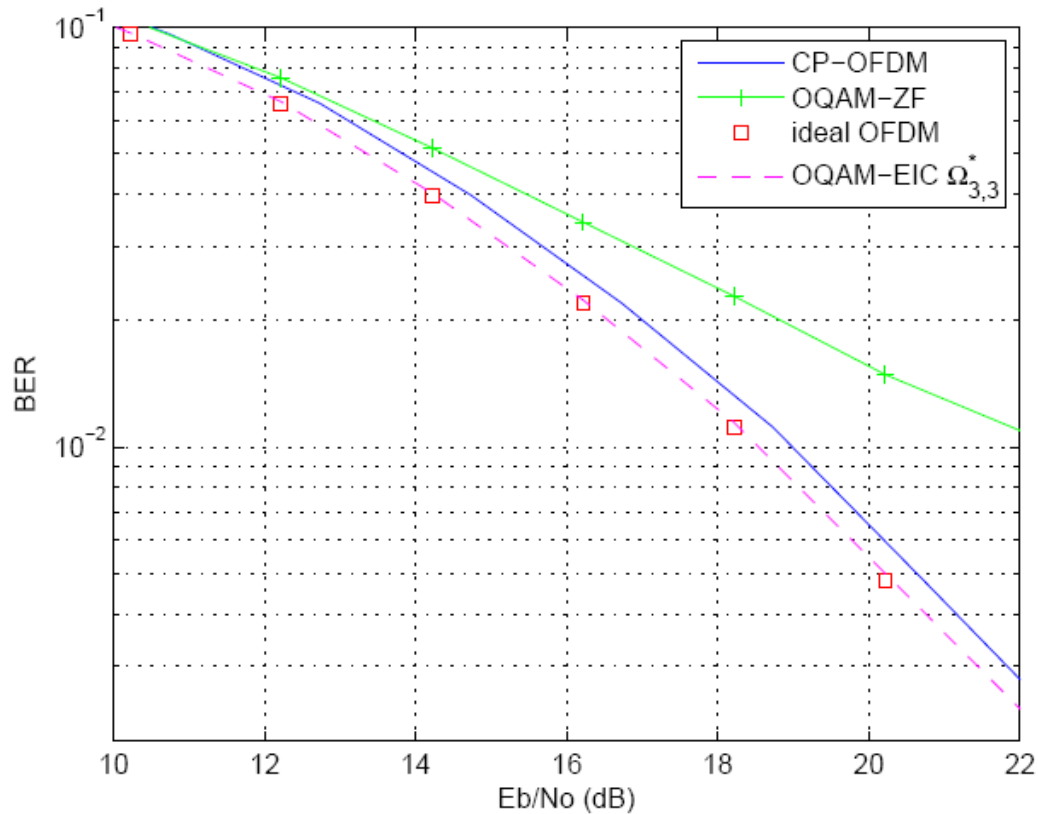
Χρησιμοποιώντας για τα σύμβολα ως μέθοδο ψηφιακής διαμόρφωσης την 4-QAM με διασπορά καθυστέρησης του καναλιού $L_h = M/8$, παρατηρούμε πως η OFDM/OQAM με ισοστάθμιση Zero Forcing(OQAM-ZF) αποδίδει καλύτερα από την απλή OFDM με CP(CP-OFDM). Αυτό συμβαίνει εξαιτίας της απώλειας φάσματος λόγω του CP. Υστερεί όμως σε απόδοση εν σχέση

με την ιδανική OFDM(ideal OFDM) πράγμα που σημείνει πως το ZF δεν εξαλήφει εντελώς την παρεμβολή. Αντίθετα η OFDM/OQAM με ισοστάθμιση «ακύρωσης παρεμβολής» EIC(OQAM-EIC) ταυτίζεται με την ideal OFDM γεγονός που αποδεικνύει πως ο ισοσταθμιστής EIC μπορεί να εξαλήφει τέλεια την παρεμβολή.

Για 16-QAM και 64-QAM όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα 3.# και 3.#, χρειαζόμαστε μεγαλύτερο SNR για να έχουμε ικανοποιητική μετάδοση και η απόδοση της OQAM-ZF πέφτει. Η OQAM-EIC όμως αποδίδει όπως και η ideal OFDM.

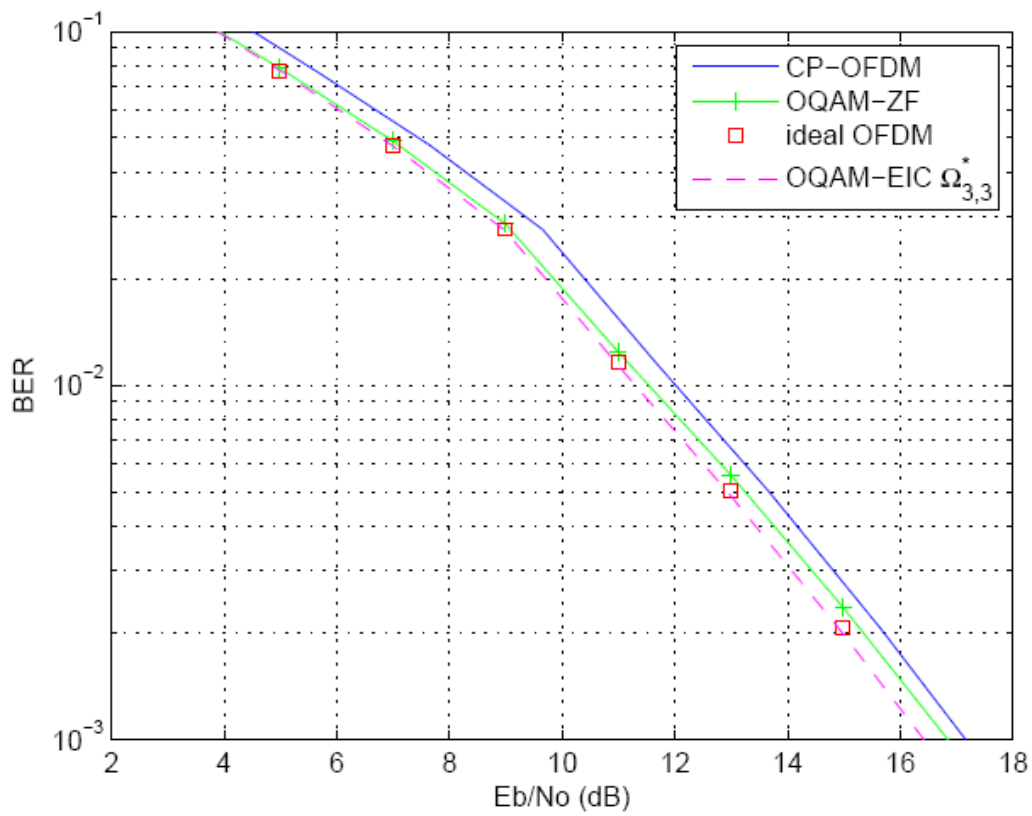


Σχήμα 3.36 : BER προς SNR για 16-QAM με $L_h = M / 8$.

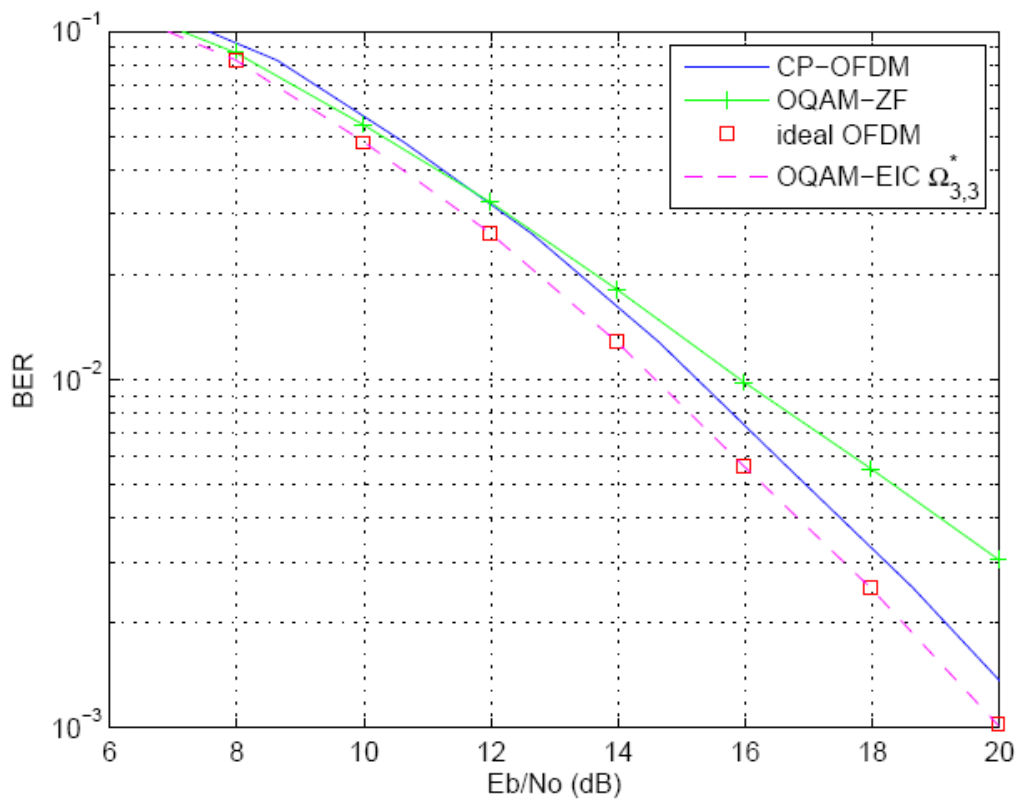


Σχήμα 3.37 : BER προς SNR για 64-QAM με $L_h = M/8$.

Στα επόμενα σχήματα 3.42 και 3.43 η διασπορά καθυστέρησης του καναλιού αυξάνεται σε $L_h = M/6$ ($2,31 \mu s$). Παρατηρούμε πως για 4 και 16-QAM αντίστοιχα η OQAM-EIC έχει πάλι την ίδια απόδοση με την ideal OFDM ενώ η απόδοση της OQAM-ZF πέφτει με την αύξηση της τάξεως της QAM.

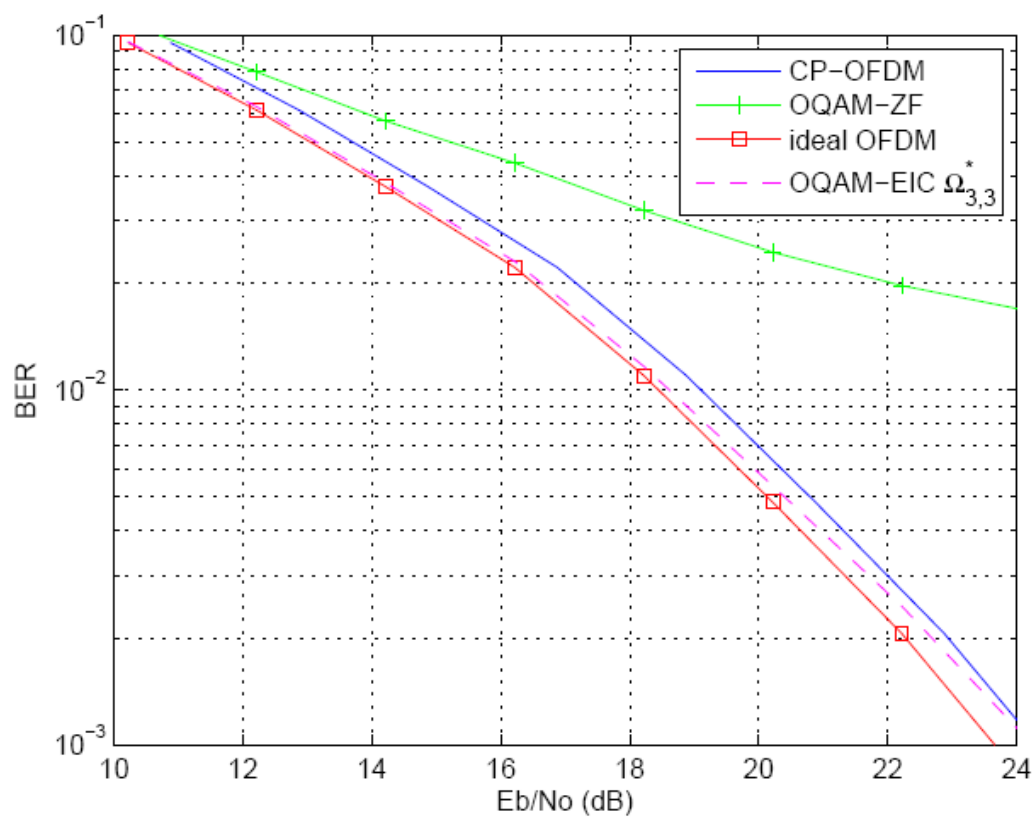


Σχήμα 3.38 : BER προς SNR για 4-QAM με $L_h = M / 6$.



Σχήμα 3.39 : BER προς SNR για 16-QAM με $L_h = M / 6$.

Τέλος για 64-QAM και $L_h = M/6$ η OQAM-EIC αποδίδει λίγο χειρότερα από την ideal OFDM και λίγο καλύτερα από την CP-OFDM ενώ η απόδοση της OQAM-ZF πέφτει πολύ. Γενικά φαίνεται πως σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις ο ισοσταθμιστής EIC μπορεί να εξαλείψει τέλεια την παρεμβολή επιτυγχάνοντας υψηλής ποιότητας μετάδοση με χαμηλή κατανάλωση ισχύος.



Σχήμα 3.40 : BER προς SNR για 64-QAM με $L_h = M/6$.

Γενικά η διαμόρφωση OFDM/OQAM με την κατάλληλη μέθοδο ισοστάθμισης υπερέχει στην ποιότητα μετάδοσης σε σύγκριση με την απλή OFDM διαμόρφωση. Ο κύριος λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι ότι επιτυγχάνει ορθογώνια μετάδοση συμβόλων χωρίς τη χρήση τετραγωνικού παλμού και χωρίς κυκλικό πρόθεμα. Επιτυγχάνεται συνεπώς εξοικονόμηση φάσματος και εξάλειψη των πλευρικών λοβών, που εμφανίζονται σε μία OFDM μετάδοση, εξασφαλίζοντας απρόσκοπτη επικοινωνία σε συστήματα που εκπέμπουν σε γειτονικές φασματικά ζώνες. Επίσης η χρήση των φίλτρων $g(n)$ κάνει την OFDM/OQAM λιγότερο ευαίσθητη σε θέματα συγχρονισμού στο πεδίο της συχνότητας. Από την άλλη πλευρά όμως και τα φίλτρα $g(n)$ και ο ισοσταθμιστής, στην περίπτωση που το κανάλι μας δεν είναι ιδανικό, επιβαρύνουν το υπολογιστικό κόστος.

Βιβλιογραφία

- [1] Γεώργιος Δ. Παντος. “Μετάδοση Δεδομένων Ευρείας Ζώνης με Ορθογωνική Πολυπλεξία Διαίρεσης Συχνότητας(OFDM)”.
- [2] Ye (Geoffrey) Li, Gordon L. Stuber. “Orthogonal Frequency Division Multiplexing for Wireless Communications”.
- [3] Αθανάσιος Κανάτας, Φίλιππος Κωνσταντίνου , Γεώργιος Πάντος. “Συστήματα Κινητών Επικοινωνιών”.
- [4] Ramjee Prasad. “OFDM for Wireless Communications Systems”.
- [5] Jinfeng Du, Svante Singell. “Classic OFDM Systems and Pulse Shaping OFDM/OQAM Systems”.
- [6] Hao Lin, Pierre Siohan, Philippe Tanguy and Jean Philippe Javaudin. “An analysis of the EIC method for OFDM/OQAM systems”.