ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Εξαρμόσεις ολίσθησης και αναρρίχησης στα διηλεκτρικά υλικά

του Μαρίου Κ. Χαλδούπη

Επιβλέπων Αθανάσιος Ζήσης

Καθηγητής Τομέα μηχανικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

ΣΤΟΧΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Να παρουσιάσουμε αναλυτικές λύσεις για εξαρμόσεις ολίσθησης και αναρρίχησης σε ελαστικά διηλεκτρικά υλικά.

Θα μελετήσουμε:

- Την θεωρία βαθμίδας της πόλωσης
- Την θεωρία κεντροσυμμετρικών υλικών
- Την συνθήκη θετικά ορισμένης ενέργειας
- Τις συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης
- Τους μετασχηματισμούς Fourier

Θα παρουσιάσουμε τις ισοϋψείς καμπύλες για το αδιάστατο μέτρο του διανύσματος μετατόπισης, για τις αδιάστατες τάσεις κατά von Mises και για το αδιάστατο μέτρο του διανύσματος της πόλωσης.

Η θεωρία βαθμίδας της πόλωσης σε ελαστικά διηλεκτρικά υλικά

Toupin - διαχωρίζει την ηλεκτρική πυκνότητα ενθαλπίας:

- μία πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης και πόλωσης
- υπολειπόμενη πυκνότητα ενέργειας.

Mindlin - προσθέτει μια λειτουργική εξάρτηση της ενεργειακής πυκνότητας από την βαθμίδα της πόλωσης

$$H = W^{L}(S_{ij}, P_i, P_{i,j}) - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varphi_{,i}\varphi_{,i} + \varphi_{,i}P_i$$

όπου,

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j})$$

$$E_i^{MS} = -\varphi_{,i}$$

Η θεωρία βαθμίδας της πόλωσης σε ελαστικά διηλεκτρικά υλικά

Mindlin - προσθέτει μια λειτουργική εξάρτηση της ενεργειακής πυκνότητας από την βαθμίδα της πόλωσης

$$H = W^L(S_{ij}, P_i, P_{i,j}) - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varphi_{,i}\varphi_{,i} + \varphi_{,i}P_i$$

$$\downarrow$$

$$T_{ij}S_{ij} + E_{ij}P_{i,j} - \bar{E}_i P_i$$

όπου,

$$T_{ij} \equiv \frac{\partial W^L}{\partial S_{ij}} = T_{ji}, \;\; \bar{E}_i \equiv -\frac{\partial W^L}{\partial P_i}, \;\; E_{ij} \equiv \frac{\partial W^L}{\partial P_{j,i}}$$

Η θεωρία βαθμίδας της πόλωσης σε ελαστικά διηλεκτρικά υλικά

$$H = T_{ij}S_{ij} + E_{ij}P_{i,j} - \bar{E}_i P_i - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varphi_{,i}\varphi_{,i} + \varphi_{,i}P_i$$

Αναλύοντας την παραπάνω εξίσωση και διαχωρίζοντας τους όρους της λαμβάνουμε:

Εξισώσεις ισορροπίας

$$T_{ij,j} - F_i = 0, \quad \text{in } V,$$

$$\bar{E}_i + E_{ij,j} - \varphi_{,i} + E_i^0 = 0, \quad \text{in } V,$$

$$-\varepsilon_0 \varphi_{,ii} + P_{i,i} = 0, \quad \text{in } V,$$

$$\varphi_{,ii} = 0, \quad \text{in } V',$$

Συνοριακές συνθήκες

$$n_j T_{ij} = t_i, \quad \text{on } S,$$

$$n_j E_{ij} = \Pi_i, \quad \text{on } S,$$

$$n_i\left(-\varepsilon_0 \left[\!\left[\varphi_{,i} \right]\!\right] + P_i\right) = q, \quad \text{on } S,$$

Η θεωρία βαθμίδας της πόλωσης σε ελαστικά διηλεκτρικά υλικά

Ακολούθως, γράφουμε την πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας ως:

$$W^L = \boxed{b_{ij}^0 P_{j,i}} + \frac{1}{2} a_{ij} P_i P_j + \frac{1}{2} b_{ijkl} P_{j,i} P_{l,k} + \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} + d_{ijkl} P_{j,i} S_{kl} + f_{ijk} P_i S_{jk} + g_{ijk} P_i P_{k,j}$$

$$T = \frac{1}{2} b_0 \left[n_i P_i \right]_s$$

επιφανειακή ενέργεια παραμόρφωσης και πόλωσης ανά μονάδα επιφανείας

Καταστατικές εξισώσεις:

$$-\bar{E}_j = f_{jkl} S_{kl} + a_{jk} P_k + g_{jkl} P_{l,k},$$

$$E_{ij} = d_{ijkl} S_{kl} + g_{kij} P_k + b_{ijkl} P_{l,k} + b_{ij}^0,$$

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} + f_{kij} P_k + d_{klij} P_{l,k},$$

Κεντροσυμμετρικά υλικά

$$W^L = b_{ij}^0 P_{j,i} + \frac{1}{2} a_{ij} P_i P_j + \frac{1}{2} b_{ijkl} P_{j,i} P_{l,k} + \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} + \underline{d_{ijkl} P_{j,i} S_{kl}} + \underline{f_{ijk} P_i S_{jk}} + g_{ijk} P_i P_{k,j}$$

Σύμφωνα με τον **Mason**:

$$f_{ijk} = 0 \,, g_{ijk} = 0, \; a_{ij} = a\delta_{ij} \;, b_{ij}^0 = b_0 \delta_{ij} ,$$

$$b_{ijkl} = b\delta_{ijkl} + b_{12}\delta_{ij}\delta_{kl} + b_{44}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + b_{77}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \,,$$

$$c_{ijkl} = c\delta_{ijkl} + c_{12}\delta_{ij}\delta_{kl} + c_{44}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \,,$$

$$d_{ijkl} = d\delta_{ijkl} + d_{12}\delta_{ij}\delta_{kl} + d_{44}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \,.$$

όπου,

$$b = b_{11} - b_{12} - 2b_{44} \;, c = c_{11} - c_{12} - 2c_{44} \;, d = d_{11} - d_{12} - 2d_{44} \;.$$

Για ισότροπα υλικά απαιτείται: $b = c = d = 0.$

Κεντροσυμμετρικά υλικά

Καταστατικές εξισώσεις:

$$-\bar{E}_j \equiv \frac{\partial W^L}{\partial P_j} = aP_j,$$

$$E_{ij} \equiv \frac{\partial W^L}{\partial P_{j,i}} = b_{12}\delta_{ij}P_{k,k} + \left(b_{44}+b_{77}\right)P_{j,i} + \left(b_{44}-b_{77}\right)P_{i,j} + d_{12}\delta_{ij}S_{kk} + 2d_{44}S_{ij} + b_0\delta_{ij},$$

$$T_{ij} \equiv \frac{\partial W^L}{\partial S_{ij}} = d_{12}\delta_{ij}P_{k,k} + d_{44}\left(P_{j,i}+P_{i,j}\right) + c_{12}\delta_{ij}S_{kk} + 2c_{44}S_{ij} = T_{ji}$$

Εξισώσεις ισορροπίας:

$$c_{44}\nabla^2\mathbf{u} + \left(c_{12}+c_{44}\right)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + d_{44}\nabla^2\mathbf{P} + \left(d_{12}+d_{44}\right)\nabla\nabla\cdot\mathbf{P} + \mathbf{F} = 0,$$

$$d_{44}\nabla^2\mathbf{u} + \left(d_{12}+d_{44}\right)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + \left(b_{44}+b_{77}\right)\nabla^2\mathbf{P} + \left(b_{12}+b_{44}-b_{77}\right)\nabla\nabla\cdot\mathbf{P} - a\mathbf{P} - \nabla\varphi + \mathbf{E}^0 = 0,$$

$$-\varepsilon_0\nabla^2\varphi + \nabla\cdot\mathbf{P} = 0, \text{ in } V,$$

$$\nabla^2\varphi = 0, \text{ in } V'.$$

Κεντροσυμμετρικά υλικά

Συνοριακές συνθήκες:

$$d_{12}\,\mathbf{n}\nabla\cdot\mathbf{P} + d_{44}\,\mathbf{n}\cdot\left(\nabla\mathbf{P}+\mathbf{P}\nabla\right) + c_{12}\mathbf{n}\nabla\cdot\mathbf{u} + c_{44}\,\mathbf{n}\cdot\left(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla\right) = \mathbf{t},$$

$$b_{12}\,\mathbf{n}\nabla\cdot\mathbf{P} + b_{44}\,\mathbf{n}\cdot\left(\nabla\mathbf{P}+\mathbf{P}\nabla\right) + b_{77}\mathbf{n}\cdot\left(\nabla\mathbf{P}-\mathbf{P}\nabla\right) + d_{12}\mathbf{n}\nabla\cdot\mathbf{u} + d_{44}\mathbf{n}\cdot\left(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla\right) + b_0\mathbf{n} = \mathbf{\Pi},$$

$$\mathbf{n}\cdot\left(-\varepsilon_0\ \ \nabla\varphi\ \ +\mathbf{P}\right) = q.$$

για ελεύθερη επιφάνεια S σε σχέση με τα u, P και φ.

Θετικά ορισμένη ενέργεια της συνάρτησης ενεργειακής πυκνότητας

Η παραμορφωσιακή πυκνότητα ενέργειας μπορεί να γραφτεί σε μορφή πίνακα ως:

$$W^{L} = \frac{1}{2}\mathbf{R}\mathbf{M}\mathbf{R}^{T}$$

όπου,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{33} & \mathbf{0}_{33} & \mathbf{0}_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{33} & \mathbf{B}_{33} & \mathbf{0}_{33} & \cdot & \mathbf{D}_{99} & \cdot \\ \mathbf{0}_{33} & \mathbf{0}_{33} & \mathbf{C}_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbf{E}_{99} & \cdot & \cdot & \mathbf{F}_{99} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{T} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{22} & e_{33} & e_{12} & e_{23} & e_{13} & P_{1} & P_{2} & P_{3} & P_{11} & P_{22} & P_{33} & P_{12} & P_{23} & P_{31} & P_{21} & P_{32} & P_{13} \end{bmatrix}$$

Οι περιορισμοί αυτοί δίνονται από τις ακόλουθες ανισότητες:

$$c_{44} > 0, \quad 3c_{12} + 2c_{44} > 0, \quad a > 0, \quad b_{44} > \frac{d_{44}^{2}}{c_{44}}$$

$$b_{12} + 2b_{44} > \frac{4b_{44}\left(3c_{12} + 2c_{44}\right) + \left(3d_{12} + 2d_{44}\right)^{2}}{9c_{12} + 6c_{44}}, \quad b_{77} > 0$$

Εξισώσεις υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης

Πεδίο μετατόπισης: $u_x \equiv u_x(x,y) \neq 0,\ u_y \equiv u_y(x,y),\ u_z = 0$

Καταστατικές εξισώσεις:

i. $-\bar{E}_x = aP_x,\ -\bar{E}_y = aP_y,$

ii. $E_{xx} = (b_{12} + 2b_{44})P_{x,x} + b_{12}P_{y,y} + (d_{12} + 2d_{44})u_{x,x} + d_{12}u_{y,y} + b_0$

$$E_{yy} = b_{12}P_{x,x} + (b_{12} + 2b_{44})P_{y,y} + d_{12}u_{x,x} + (d_{12} + 2d_{44})u_{y,y} + b_0$$

$$E_{xy} = (b_{44} + b_{77})P_{y,x} + (b_{44} - b_{77})P_{x,y} + d_{44}(u_{x,y} + u_{y,x})$$

$$E_{yx} = (b_{44} + b_{77})P_{x,y} + (b_{44} - b_{77})P_{y,x} + d_{44}(u_{x,y} + u_{y,x})$$

iii. $T_{xx} = (d_{12} + 2d_{44})P_{x,x} + d_{12}P_{y,y} + (c_{12} + 2c_{44})u_{x,x} + c_{12}u_{y,y}$

$$T_{yy} = d_{12}P_{x,x} + (d_{12} + 2d_{44})P_{y,y} + c_{12}u_{x,x} + (c_{12} + 2c_{44})u_{y,y}$$

$$T_{xy} = T_{yx} = d_{44}\left(P_{y,x} + P_{x,y}\right) + c_{44}(u_{x,y} + u_{y,x})$$

Εξισώσεις υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης

Πεδίο μετατόπισης: $u_x \equiv u_x(x,y) \neq 0,\ u_y \equiv u_y(x,y),\ u_z = 0$

Εξισώσεις ισορροπίας (απουσία καθολικών δυνάμεων και $E_x^0 = E_y^0 = 0$):

i. $$(d_{12}+2d_{44})P_{x,xx}+d_{12}P_{y,yx}+d_{44}\left(P_{x,yy}+P_{y,xy}\right)+(c_{12}+2c_{44})u_{x,xx}+c_{12}u_{y,yx}+c_{44}(u_{x,yy}+u_{y,xy})=0,$$

$$(d_{12}+2d_{44})P_{y,yy}+d_{12}P_{x,xy}+d_{44}\left(P_{y,xx}+P_{x,yx}\right)+(c_{12}+2c_{44})u_{y,yy}+c_{12}u_{x,xy}+c_{44}(u_{x,yx}+u_{y,xx})=0,$$

ii. $$-aP_x+(b_{12}+2b_{44})P_{x,xx}+b_{12}P_{y,yx}+(b_{44}+b_{77})P_{x,yy}+(b_{44}-b_{77})P_{y,xy}$$

$$+(d_{12}+2d_{44})u_{x,xx}+d_{12}u_{y,yx}+d_{44}(u_{x,yy}+u_{y,xy})-\varphi_{,x}=0$$

$$-aP_y+(b_{12}+2b_{44})P_{y,yy}+b_{12}P_{x,xy}+(b_{44}+b_{77})P_{y,xx}+(b_{44}-b_{77})P_{x,yx}$$

$$+(d_{12}+2d_{44})u_{y,yy}+d_{12}u_{x,xy}+d_{44}(u_{x,yx}+u_{y,xx})-\varphi_{,y}=0$$

iii. $$-\varepsilon_0(\varphi_{,xx}+\varphi_{,yy})+P_{x,x}+P_{y,y}=0 \ \text{in } V,$$

$$\varphi_{,xx}+\varphi_{,yy}=0 \ \text{in } V',$$

Εξισώσεις υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης

Πεδίο μετατόπισης: $u_x \equiv u_x(x,y) \neq 0,\ u_y \equiv u_y(x,y),\ u_z = 0$

Στην περίπτωση του ημιεπιπέδου, οι συνοριακές συνθήκες λαμβάνουν την εξής μορφή:

$$-d_{44}\left(P_{x,y} + P_{y,x}\right) - c_{44}(u_{x,y} + u_{y,x}) = t_x,$$

$$-d_{12}P_{x,x} - (d_{12} + 2d_{44})P_{y,y} - c_{12}u_{x,x} - (c_{12} + 2c_{44})u_{y,y} = t_y$$

$$(b_{44} + b_{77})P_{x,y} + (b_{44} - b_{77})P_{y,x} + d_{44}(u_{x,y} + u_{y,x}) = \Pi_x,$$

$$b_{12}P_{x,x} + (b_{12} + 2b_{44})P_{y,y} + d_{12}u_{x,x} + (d_{12} + 2d_{44})u_{y,y} + b_0 = \Pi_y,$$

$$-\varepsilon_0\left[\!\left[\varphi_{,y}\right]\!\right] + P_y = q$$

Εφαρμογή του Μετασχηματισμού Fourier

Θέλουμε να επιλύσουμε:

- πρόβλημα συνοριακών τιμών
- υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης
- σε ημιεπίπεδο χωρίο D με ευθύγραμμο όριο L

Ορίζουμε τον ευθύ και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα:

$$\hat{f}\left(\frac{\partial^n \varphi(x,y)}{\partial x^n} \right) = (-i\xi)^n \hat{f}\left(\varphi(x,y)\right)$$

Εφαρμογή του Μετασχηματισμού Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi$$

Το μετασχηματισμένο E_{ij} είναι:

$$\hat{E}_{xx} = -i\xi(b_{12} + 2b_{44})\hat{P}_x + b_{12}\frac{d\hat{P}_y}{dy} - i\xi(d_{12} + 2d_{44})\hat{u}_x + d_{12}\frac{d\hat{u}_y}{dy} + b_0\delta(\xi)$$

$$\hat{E}_{yy} = -i\xi b_{12}\hat{P}_x + (b_{12} + 2b_{44})\frac{d\hat{P}_y}{dy} - i\xi d_{12}\hat{u}_x + (d_{12} + 2d_{44})\frac{d\hat{u}_y}{dy} + b_0\delta(\xi)$$

$$\hat{E}_{xy} = -i\xi(b_{44} + b_{77})\hat{P}_y + (b_{44} - b_{77})\frac{d\hat{P}_x}{dy} + d_{44}(\frac{d\hat{u}_x}{dy} - i\xi\hat{u}_y)$$

$$\hat{E}_{yx} = (b_{44} + b_{77})\frac{d\hat{P}_x}{dy} - i\xi(b_{44} - b_{77})\hat{P}_y + d_{44}(\frac{d\hat{u}_x}{dy} - i\xi\hat{u}_y)$$

Εφαρμογή του Μετασχηματισμού Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi$$

Οι μετασχηματισμένες τάσεις είναι:

$$\hat{T}_{xx} = -i\xi(d_{12} + 2d_{44})\hat{P}_x + d_{12}\frac{d\hat{P}_y}{dy} - i\xi(c_{12} + 2c_{44})\hat{u}_x + c_{12}\frac{d\hat{u}_y}{dy}$$

$$\hat{T}_{yy} = -i\xi d_{12}\hat{P}_x + (d_{12} + 2d_{44})\frac{d\hat{P}_y}{dy} - i\xi c_{12}\hat{u}_x + (c_{12} + 2c_{44})\frac{d\hat{u}_y}{dy}$$

$$\hat{T}_{xy} = \hat{T}_{yx} = d_{44}\left(\frac{d\hat{P}_x}{dy} - i\xi\hat{P}_y\right) + c_{44}\left(\frac{d\hat{u}_x}{dy} - i\xi\hat{u}_y\right)$$

Εφαρμογή του Μετασχηματισμού Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi$$

Θέτουμε: $b = b_{12} + 2b_{44}, \quad c = c_{12} + 2c_{44}, \quad d = d_{12} + 2d_{44}, \quad B = b_{77} + b_{44}$

Πίνακας εξισώσεων ισορροπίας:

$$\begin{bmatrix} c_{44}\mathtt{d}^2 - c\xi^2 & -i(c - c_{44})\xi\mathtt{d} & d_{44}\mathtt{d}^2 - d\xi^2 & -i(d - d_{44})\xi\mathtt{d} & 0 \\ -i(c - c_{44})\mathtt{d}\xi & c\mathtt{d}^2 - c_{44}\xi^2 & -i(d - d_{44})\xi\mathtt{d} & d\mathtt{d}^2 - d_{44}\xi^2 & 0 \\ d_{44}\mathtt{d}^2 - \delta\xi^2 & -i(d - d_{44})\mathtt{d}\xi & -a + B\mathtt{d}^2 - b\xi^2 & -i(b - B)\xi\mathtt{d} & i\xi \\ -i(d - d_{44})\xi\mathtt{d} & d\mathtt{d}^2 - d_{44}\xi^2 & -i(b - B)\xi\mathtt{d} & -a + b\mathtt{d}^2 - B\xi^2 & -\mathtt{d} \\ 0 & 0 & i\xi & -\mathtt{d} & \varepsilon_0\left(\mathtt{d}^2 - \xi^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{P}_x \\ \hat{P}_y \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας συνοριακών συνθηκών:

$$\begin{bmatrix} -c_{44}\mathtt{d} & i\xi c_{44} & -d_{44}\mathtt{d} & i\xi d_{44} & 0 \\ i\xi(c - 2c_{44}) & -c\mathtt{d} & i\xi(d - 2d_{44}) & -d\mathtt{d} & 0 \\ d_{44}\mathtt{d} & -i\xi d_{44} & B\mathtt{d} & -i\xi(2b_{44} - B) & 0 \\ -i\xi(d - 2d_{44}) & d\mathtt{d} & -i\xi(b - 2b_{44}) & b\mathtt{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\varepsilon_0\ \mathtt{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{P}_x \\ \hat{P}_y \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{\Pi}_x \\ \hat{\Pi}_y - b_0\delta(\xi) \\ \hat{q} \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή του Μετασχηματισμού Fourier

Οι λύσεις του πίνακα εξισώσεων ισορροπίας πρέπει να έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\hat{u}_x(y) = \left(A_1 + A_2 y + A_3 y^2\right)e^{-|\xi| y} + A_4 e^{-z_1 y} + A_5 e^{-z_2 y},$$

$$\hat{u}_y(y) = \left(B_1 + B_2 y + B_3 y^2\right)e^{-|\xi| y} + B_4 e^{-z_1 y} + B_5 e^{-z_2 y},$$

$$\hat{P}_x(y) = \left(C_1 + C_2 y + C_3 y^2\right)e^{-|\xi| y} + C_4 e^{-z_1 y} + C_5 e^{-z_2 y},$$

$$\hat{P}_y(y) = \left(D_1 + D_2 y + D_3 y^2\right)e^{-|\xi| y} + D_4 e^{-z_1 y} + D_5 e^{-z_2 y},$$

$$\hat{\varphi}(y) = \left(E_1 + E_2 y + E_3 y^2\right)e^{-|\xi| y} + E_4 e^{-z_1 y} + E_5 e^{-z_2 y},$$

όπου,

$$z_1 = \sqrt{\frac{a\,c_{44}}{B\,c_{44} - d_{44}{}^2} + \xi^2}, \quad z_2 = \sqrt{\frac{c\left(1 + a\,\varepsilon_0\right)}{\left(b\,c - d^2\right)\varepsilon_0} + \xi^2}.$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας μας παρέχουν 20 από τις 25 σταθερές που ορίζονται παραπάνω. Οι υπόλοιπες 5 θα υπολογιστούν από τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες των δύο προβλημάτων εξάρμοσης.

Εφαρμογή του Μετασχηματισμού Fourier

$$A_3 = 0,\ A_4 = -\frac{iD_4 d_{44}\sqrt{\dfrac{ac_{44}}{Bc_{44} - d_{44}{}^2} + \xi^2}}{c_{44}\xi},\ A_5 = -\frac{idD_5\xi}{c\sqrt{\dfrac{c}{bc - d^2}\dfrac{1 + a\varepsilon_0}{\varepsilon_0} + \xi^2}},$$

$$B_1 = -\frac{i\left(\dfrac{(c + c_{44})}{c - c_{44}}A_2 + A_1|\xi|\right)}{\xi},\ B_2 = -\frac{iA_2\xi}{\sqrt{\xi^2}},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{D_4 d_{44}}{c_{44}},\ B_5 = -\frac{dD_5}{c}$$

$$C_2 = 0,\ C_3 = 0,\ C_4 = \frac{iD_4\sqrt{\dfrac{ac_{44}}{Bc_{44} - d_{44}{}^2} + \xi^2}}{\xi},\ C_5 = \frac{iD_5\xi}{\sqrt{\dfrac{c}{bc - d^2}\dfrac{1 + a\varepsilon_0}{\varepsilon_0} + \xi^2}}$$

$$D_1 = -\frac{iC_1\xi}{\sqrt{\xi^2}},\ D_2 = 0,\ D_3 = 0,\ E_1 = -\frac{iaC_1}{\xi} - \frac{i\left(2A_2(cd_{44} - c_{44}d)\sqrt{\xi^2}\right)}{(c - c_{44})\xi},$$

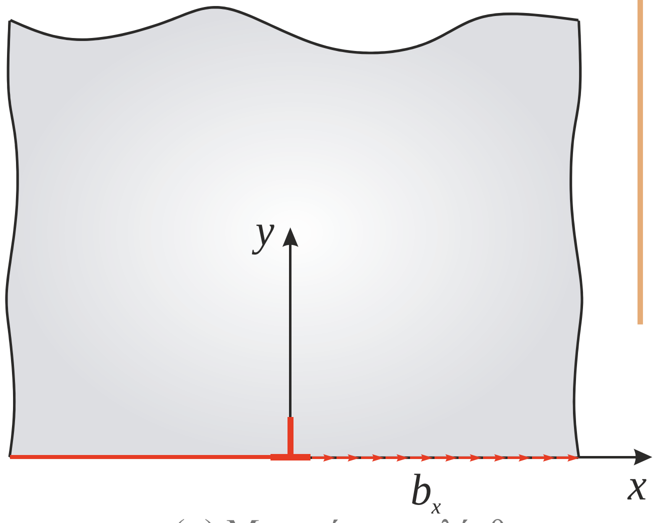
$$E_2 = 0,\ E_3 = 0,\ E_4 = 0,\ E_5 = -\frac{D_5}{\varepsilon_0\sqrt{\dfrac{c}{bc - d^2}\dfrac{1 + a\varepsilon_0}{\varepsilon_0} + \xi^2}}$$

Εξάρμοση ακμών

Ολίσθησης

Κίνηση κατά μήκος μιας κρυσταλλογραφικής κατεύθυνσης.

Επιτρέπει την πλαστική παραμόρφωση να συμβεί με μικρότερη τάση από αυτή για την μετακίνηση ενός ολόκληρού επιπέδου ατόμων.

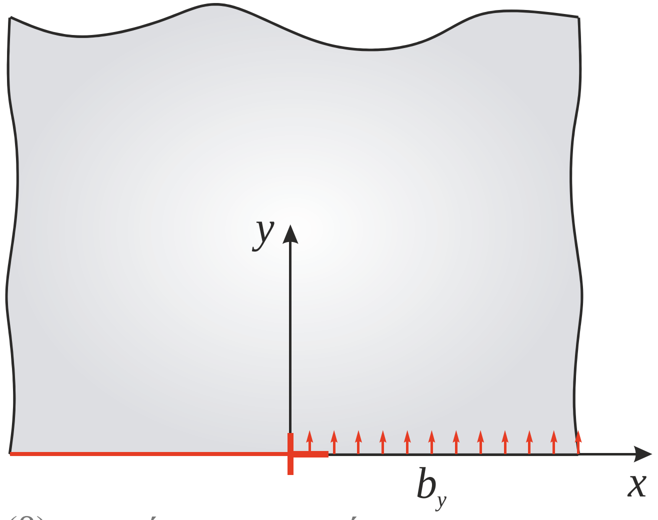


(α) Μετατόπιση ολίσθησης

Αναρρίχησης

Κίνηση κάθετη στο επίπεδο ολίσθησής της.

Απαιτεί διαδικασίες διάχυσης που ευνοούνται σε υψηλές θερμοκρασίες, καθώς τα σημειακά ελαττώματα είναι κινητά.



(β) μετατόπισης αναρρίχησης.

Εξάρμοση ακμών

Έστω D το ανοικτό ημιεπίπεδο ($-\infty < x < \infty,\ \ y > 0$) με ευθύγραμμο όριο L (y = 0). Εφαρμόζουμε τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες σε κάθε πρόβλημα στο y = 0:

Εξάρμοση ολίσθησης	Εξάρμοση αναρρίχησης
$u_x = b_x\ H(x), \quad -\infty < x < \infty$	$t_x = 0, \quad -\infty < x < \infty$
$t_y = 0, \quad -\infty < x < \infty$	$u_y = b_y\ H(x), \quad -\infty < x < \infty$
$P_x = 0, \quad -\infty < x < \infty$	$\Pi_x = 0, \quad -\infty < x < \infty$
$\Pi_y = 0, \quad -\infty < x < \infty$	$P_y = 0, \quad -\infty < x < \infty$
$\varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty$	$q = 0, \quad -\infty < x < \infty$

όπου, *H(x)* είναι η συνάρτηση Heaviside και b_x, b_y οι συνιστώσες του διανύσματος Burger.

Εξάρμοση ακμών

Θέτουμε $b_0 = 0$ και λαμβάνουμε τους πίνακες των συνοριακών συνθηκών:

Εξάρμοση ολίσθησης

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\xi\left(c-2c_{44}\right) & -c\mathrm{d} & i\xi\left(d-2d_{44}\right) & -d\mathrm{d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ i\xi\left(d-2d_{44}\right) & -d\mathrm{d} & i\xi\left(b-2b_{44}\right) & -b\mathrm{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{P}_x \\ \hat{P}_y \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \frac{i}{\xi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Εξάρμοση αναρρίχησης

$$\begin{bmatrix} -c_{44}\mathrm{d} & i\xi c_{44} & -d_{44}\mathrm{d} & i\xi d_{44} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{44}\mathrm{d} & i\xi d_{44} & -B\mathrm{d} & i\xi\left(2b_{44}-B\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{P}_x \\ \hat{P}_y \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_y \frac{i}{\xi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Οι λύσεις των παραπάνω εξισώσεων μας δίνουν και τις υπόλοιπες 5 σταθερές του κάθε προβλήματος

Εξάρμοση ακμών

Εξάρμοση ολίσθησης

$$A_1 = \frac{i}{|\xi|} b_x + \frac{2id\left(c_{44}d - cd_{44}\right)}{c^2} \frac{\varepsilon_0}{1+a\varepsilon_0} b_x |\xi|$$

$$A_2 = i\left(\frac{c_{44}}{c} - 1\right) b_x,$$

$$C_1 = -\frac{2i\left(c_{44}d - cd_{44}\right)}{c} \frac{\varepsilon_0}{1+a\varepsilon_0} b_x \xi,$$

$$D_4 = 0,$$

$$D_5 = \frac{2\left(c_{44}d - cd_{44}\right)}{c} \frac{\varepsilon_0}{1+a\varepsilon_0} b_x \sqrt{\frac{c}{bc-d^2} \frac{1+a\varepsilon_0}{\varepsilon_0} + \xi^2}.$$

Εξάρμοση αναρρίχησης

$$A_1 = \frac{c_{44}}{c} b_y \frac{1}{|\xi|} + \frac{2d\left(c_{44}d - cd_{44}\right)}{c^2} \frac{\varepsilon_0}{1+a\varepsilon_0} b_y |\xi|$$

$$A_2 = \left(\frac{c_{44}}{c} - 1\right) b_y,$$

$$C_1 = -\frac{2\left(c_{44}d - cd_{44}\right)}{c} \frac{\varepsilon_0}{1+a\varepsilon_0} b_y |\xi|,$$

$$D_4 = 0,$$

$$D_5 = -\frac{2i\left(c_{44}d - cd_{44}\right)}{c} \frac{\varepsilon_0}{1+a\varepsilon_0} b_y \xi.$$

Εξάρμοση ακμών

Θεωρούμε: $\eta=\dfrac{\varepsilon_0}{1+a\varepsilon_0},\ \Gamma=1-\dfrac{c}{c_{44}}\dfrac{d_{44}}{d},\ \ell^2=\dfrac{bc-d^2}{c}\eta,\ {\ell_0}^2=\dfrac{d^2\eta}{c},\ \xi=\dfrac{\zeta}{\ell},\ x=r\,\ell,\ y=z\,\ell$

Μετά από κάποιους αλγεβρικούς χειρισμούς λαμβάνουμε το κανονικοποιημένο διάνυσμα μετατόπισης, το κανονικοποιημένο διάνυσμα πόλωσης, καθώς και το κανονικοποιημένο δυναμικό του αυτοπεδίου Maxell σε κλειστή μορφή ως:

Εξάρμοση ολίσθησης

$$\bar{u}_x(r,z)=\frac{\pi}{b_x}u_x(r,z)=-\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{r}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c_{44}}{c}-1\right)\frac{rz}{s^2}+\Gamma\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2\frac{c_{44}}{c}\frac{rz}{s^2}\left(\frac{2}{s^2}-K_2[s]\right),$$

$$\bar{u}_y(r,z)=\frac{\pi}{b_x}u_y(r,z)=\frac{1}{2}\left(\frac{c_{44}}{c}-1\right)\frac{z^2}{s^2}+\frac{1}{2}\frac{c_{44}}{c}\log|s|-\Gamma\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2\frac{c_{44}}{c}\left(\frac{z^2}{s^2}K_0[s]+\frac{r^2-z^2}{s^3}\left(\frac{1}{s}-K_1[s]\right)\right),$$

$$\bar{P}_x(r,z)=\frac{\pi d}{b_x c_{44}\Gamma}\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^2P_x(r,z)=-\frac{rz}{s^2}\left(\frac{2}{s^2}-K_2[s]\right),$$

$$\bar{P}_y(r,z)=\frac{\pi d}{b_x c_{44}\Gamma}\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^2P_y(r,z)=\frac{r^2-z^2}{s^4}+\left(\frac{z^2}{s^2}K_0[s]-\frac{r^2-z^2}{s^3}K_1[s]\right),$$

$$\bar{\varphi}(r,z)=\frac{\pi\varepsilon_0}{b_x c_{44}\Gamma}\frac{\ell}{\ell_0}\sqrt{\frac{c}{\eta}}\varphi(r,z)=\frac{z}{s}\left(\frac{1}{s}-K_1[s]\right),$$

Σημειώνοντας ότι: $s=\sqrt{r^2+z^2},\ c_{44}=\mu,\ c=c_{12}+2c_{44}=\dfrac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu},\ \dfrac{c}{c_{44}}=\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$

Εξάρμοση ακμών

Θεωρούμε: $\eta=\dfrac{\varepsilon_0}{1+a\varepsilon_0},\ \Gamma=1-\dfrac{c}{c_{44}}\dfrac{d_{44}}{d},\ \ell^2=\dfrac{bc-d^2}{c}\eta,\ {\ell_0}^2=\dfrac{d^2\eta}{c},\ \xi=\dfrac{\zeta}{\ell},\ x=r\,\ell,\ y=z\,\ell$

Μετά από κάποιους αλγεβρικούς χειρισμούς λαμβάνουμε το κανονικοποιημένο διάνυσμα μετατόπισης, το κανονικοποιημένο διάνυσμα πόλωσης, καθώς και το κανονικοποιημένο δυναμικό του αυτοπεδίου Maxell σε κλειστή μορφή ως:

Εξάρμοση αναρρίχησης

$$\bar{u}_x(r,z)=\frac{\pi}{b_y}u_x(r,z)=\frac{1}{2}\left(\frac{c_{44}}{c}-1\right)\frac{z^2}{s^2}-\frac{1}{2}\frac{c_{44}}{c}\log(s)+\Gamma\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2\frac{c_{44}}{c}\left(\frac{r^2}{s^2}K_0[s]-\frac{r^2-z^2}{s^3}\left(\frac{1}{s}-K_1[s]\right)\right),$$

$$\bar{u}_y(r,z)=\frac{\pi}{b_y}u_y(r,z)=\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{r}{z}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{c_{44}}{c}-1\right)\frac{rz}{s^2}-2\Gamma\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2\frac{c_{44}}{c}\frac{r\,z}{s^2}\left(\frac{1}{s^2}-K_2[s]\right),$$

$$\bar{P}_x(r,z)=\frac{\pi d}{b_y c_{44}\Gamma}\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^2 P_x(r,z)=\frac{r^2-z^2}{s^4}-\left(\frac{r^2}{s^2}K_0[s]+\frac{r^2-z^2}{s^3}K_1[s]\right),$$

$$\bar{P}_y(r,z)=\frac{\pi d}{b_y c_{44}\Gamma}\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^2 P_y(r,z)=\frac{2\,r\,z}{s^4}-\frac{r\,z}{s^2}K_2[s]$$

$$\bar{\varphi}(r,z)=\frac{\pi\varepsilon_0}{b_y c_{44}\Gamma}\frac{\ell}{\ell_0}\sqrt{\frac{c}{\eta}}\,\varphi(r,z)=-\frac{r}{s}\left(\frac{1}{s}-K_1[s]\right)$$

Σημειώνοντας ότι: $s=\sqrt{r^2+z^2},\ c_{44}=\mu,\ c=c_{12}+2c_{44}=\dfrac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu},\ \dfrac{c}{c_{44}}=\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$

Εξάρμοση ακμών

Θεωρούμε: $\eta=\dfrac{\varepsilon_0}{1+a\varepsilon_0},\ \Gamma=1-\dfrac{c}{c_{44}}\dfrac{d_{44}}{d},\ \ell^2=\dfrac{bc-d^2}{c}\eta,\ \ell_0{}^2=\dfrac{d^2\eta}{c},\ \xi=\dfrac{\zeta}{\ell},\ x=r\,\ell,\ y=z\,\ell$

Επιπλέον, υπολογίζουμε τις συνιστώσες του τανυστή τάσης:

Εξάρμοση ολίσθησης

$$\bar{T}_{xx}=\frac{\pi c\,\ell}{b_x c_{44}{}^2}T_{xx}=\left(\frac{c}{c44}-1\right)\frac{z\left(3r^2+z^2\right)}{s^4}-$$
$$-2\Gamma^2\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2\frac{z\left(3r^2-z^2\right)}{s^4}\left(\frac{2}{s^2}-K_0[s]-\frac{6r^2-\left(2+r^2\right)z^2-z^4}{s\left(3r^2-z^2\right)}K_1[s]\right)$$

$$\bar{T}_{yy}=\frac{\pi c\,\ell}{b_x c_{44}{}^2}T_{yy}=-\left(\frac{c}{c44}-1\right)\frac{z\left(r^2-z^2\right)}{s^4}+$$
$$+2\Gamma^2\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2\frac{z}{s^3}\left(2\frac{\left(3r^2-z^2\right)}{s^3}-r^2K_1[s]-\frac{\left(3r^2-z^2\right)}{s}K_2[s]\right)$$

$$\bar{T}_{xy}=\bar{T}_{yx}=\frac{\pi c\,\ell}{b_x c_{44}{}^2}T_{xy}=-\left(\frac{c}{c44}-1\right)\frac{r\left(r-z\right)\left(r+z\right)}{s^4}+$$
$$+2\Gamma^2\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2\frac{r\left(r^2-3z^2\right)}{s^4}\left(\frac{2}{s^2}-K_0[s]-\frac{2r^2-\left(6+r^2\right)z^2-z^4}{s\left(r^2-3z^2\right)}K_1[s]\right)$$

Ως $K_0[s], K_1[s]$ και $K_2[s]$ ορίζουμε τις συναρτήσεις Bessel, δευτέρου είδους και τάξης 0,1 και 2 αντίστοιχα

Σημειώνοντας ότι: $s=\sqrt{r^2+z^2},\ c_{44}=\mu,\ \ c=c_{12}+2c_{44}=\dfrac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu},\ \ \dfrac{c}{c_{44}}=\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$

Εξάρμοση ακμών

Θεωρούμε: $\eta = \dfrac{\varepsilon_0}{1+a\varepsilon_0},\ \Gamma = 1 - \dfrac{c}{c_{44}}\dfrac{d_{44}}{d},\ \ell^2 = \dfrac{bc-d^2}{c}\eta,\ \ell_0{}^2 = \dfrac{d^2\eta}{c},\ \xi = \dfrac{\zeta}{\ell},\ x = r\,\ell,\ y = z\,\ell$

Επιπλέον, υπολογίζουμε τις συνιστώσες του τανυστή τάσης:

Εξάρμοση αναρρίχησης

$$\bar{T}_{xx} = \frac{\pi c\,\ell}{b_y c_{44}{}^2} T_{xx} = -\left(\frac{c}{c44} - 1\right)\frac{r(r-z)(r+z)}{\mathrm{s}^4} + \\ + 2\Gamma^2\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2 \frac{r\left(r^2-3z^2\right)}{\mathrm{s}^4}\left(\frac{2}{\mathrm{s}^2} + \frac{\mathrm{s}z^2}{r^2-3z^2}K_1[\mathrm{s}] - K_2[\mathrm{s}]\right)$$

$$\bar{T}_{yy} = \frac{\pi c\,\ell}{b_y c_{44}{}^2} T_{yy} = -\left(\frac{c}{c44} - 1\right)\frac{r\left(r^2+3z^2\right)}{\mathrm{s}^4} - \\ - 2\Gamma^2\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2 \frac{r\left(r^2-3z^2\right)}{\mathrm{s}^4}\left(\frac{2}{\mathrm{s}^2} - K_0[\mathrm{s}] + \frac{r^4-6z^2+r^2(2+z^2)}{\mathrm{s}\left(r^2-3z^2\right)}K_1[\mathrm{s}]\right)$$

$$\bar{T}_{xy} = \bar{T}_{yx} = \frac{\pi c\,\ell}{b_y c_{44}{}^2} T_{xy} = -\left(\frac{c}{c44} - 1\right)\frac{z\left(r^2-z^2\right)}{\mathrm{s}^4} + \\ + \Gamma^2\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2 \frac{z\left(3r^2-z^2\right)}{\mathrm{s}^4}\left(\frac{2}{\mathrm{s}^2} - K_0[\mathrm{s}] - \frac{r^4-2z^2+r^2\left(6+z^2\right)}{\mathrm{s}\left(3r^2-z^2\right)}K_1[\mathrm{s}]\right)$$

Σημειώνοντας ότι: $\mathrm{s} = \sqrt{r^2+z^2},\ c_{44} = \mu,\ c = c_{12} + 2c_{44} = \dfrac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu},\ \dfrac{c}{c_{44}} = \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$

Ως $K_0[\mathrm{s}], K_1[\mathrm{s}]$ και $K_2[\mathrm{s}]$ ορίζουμε τις συναρτήσεις Bessel, δευτέρου είδους και τάξης 0,1 και 2 αντίστοιχα

Εξάρμοση ακμών

Για $\Gamma \to 0$ ή/και $\ell_0/\ell \to 0$ λαμβάνονται οι αντίστοιχες λύσεις της κλασικής ελαστικότητας για το αντίστοιχο πρόβλημα:

Εξάρμοση ολίσθησης

$$\bar{u}_x(r,z) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{r}{z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c_{44}}{c} - 1\right)\frac{r\,z}{\mathrm{S}^2}$$

$$\bar{u}_y(r,z) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_{44}}{c} - 1\right)\frac{z^2}{\mathrm{S}^2} + \frac{1}{2}\frac{c_{44}}{c}\log|\mathrm{S}|$$

$$\bar{T}_{xx} = \left(\frac{c}{c44} - 1\right)\frac{z\left(3r^2 + z^2\right)}{\mathrm{S}^4}$$

$$\bar{T}_{yy} = -\left(\frac{c}{c44} - 1\right)\frac{z\left(r^2 - z^2\right)}{\mathrm{S}^4}$$

$$\bar{T}_{xy} = \bar{T}_{yx} = -\left(\frac{c}{c44} - 1\right)\frac{r(r-z)(r+z)}{\mathrm{S}^4}$$

Εξάρμοση αναρρίχησης

$$\bar{u}_x(r,z) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_{44}}{c} - 1\right)\frac{z^2}{\mathrm{S}^2} - \frac{1}{2}\frac{c_{44}}{c}\log|\mathrm{S}|$$

$$\bar{u}_y(r,z) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{r}{z}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{c_{44}}{c} - 1\right)\frac{rz}{\mathrm{S}^2}$$

$$\bar{T}_{xx} = -\left(\frac{c}{c44} - 1\right)\frac{r(r-z)(r+z)}{\mathrm{S}^4}$$

$$\bar{T}_{yy} = -\left(\frac{c}{c44} - 1\right)\frac{r\left(r^2 + 3z^2\right)}{\mathrm{S}^4}$$

$$\bar{T}_{xy} = \bar{T}_{yx} = -\left(\frac{c}{c44} - 1\right)\frac{z\left(r^2 - z^2\right)}{\mathrm{S}^4}$$

Αποτελέσματα και συζήτηση

Μετατοπίσεις:

- σε αδιάστατη μορφή παρουσιάζονται ως: $\dfrac{\pi u_i}{b_{x,y}}$
- αποτελούνται από έναν μηχανικό όρο και τον όρο που αφορά στην εισαγωγή της βαθμίδας πόλωσης.
- ο δεύτερος όρος περιλαμβάνει το: $\Gamma\left(\dfrac{\ell_0}{\ell}\right)^2\dfrac{c_{44}}{c}=\Gamma\left(\dfrac{\ell_0}{\ell}\right)\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$
- για $\Gamma\left(\dfrac{\ell_0}{\ell}\right)^2\dfrac{c_{44}}{c}\to 0$ παίρνουμε αποτελέσματα της κλασικής ελαστικότητας.
- Ισχύει $\Gamma=1-\dfrac{c}{c_{44}}\dfrac{d_{44}}{d}$: - $\Gamma\to 0$ όταν $c\,d_{44}\to c_{44}\,d$

  - $\Gamma\to 1$ όταν $\dfrac{c}{c_{44}}\dfrac{d_{44}}{d}\to 0$, που ισχύει μόνο όταν $\dfrac{d_{44}}{d}\to 0$ ή $d\gg d_{44}\Rightarrow d_{12}+2d_{44}\gg d_{44}$

$$\Rightarrow d_{12}+d_{44}\gg 0$$

Αποτελέσματα και συζήτηση

Πόλωση:

- σε αδιάστατη μορφή παρουσιάζεται ως: $\dfrac{\pi d}{b_{x,y} c_{44} \Gamma} \left(\dfrac{\ell}{\ell_0} \right)^2$
- για υψηλή τιμή της πόλωσης, ο όρος $\left(\dfrac{\ell_0}{\ell} \right)^2 \Gamma \dfrac{c_{44}}{d}$ πρέπει να λάβει την μέγιστη δυνατή τιμή.
- αν μηδενίσουμε τον παραπάνω όρο, δεν λαμβάνουμε αποτελέσματα στην κλασική ελαστικότητα (ομοίως και με το δυναμικό του Maxwell).

Τάσεις:

- σε αδιάστατη μορφή παρουσιάζεται ως: $\dfrac{\pi c \ell}{b_{x,y} c_{44}{}^2} T_{ij}$
- περιλαμβάνει τον καθαρά μηχανικό όρο και τον όρο που σχετίζεται με το διηλεκτρικό φαινόμενο $\left(\dfrac{\ell_0}{\ell} \right)^2 \Gamma^2$.
- όσο ο τελευταίος όρος αυξάνεται, η αδιάστατη τάση αποκλίνει από την αντίστοιχη της κλασικής ελαστικότητας.

Αποτελέσματα και συζήτηση

Εφαρμόζουμε:

Πίνακας 1: Ισοτροπικοί συντελεστές υλικών και σχετικών παραμέτρων					
	NaCl	**GaAs**	**BaTiO3**	**SrTiO3**	**Μονάδες**
E	$37.2 \cdot 10^9$	$85.26 \cdot 10^9$	$117 \cdot 10^9$	$246 \cdot 10^9$	**N/m^2**
v	0.249	0.311	0.349	0.300	**-**
d_{12}	0.470	1.304	22	6.27	**Nm/C**
d_{44}	-0.170	0.356	-12	-5.57	
b_{12}	0	0	0	0	**10^{-9} Nm^4/C^2**
b_{44}	0.34	0.53	5.00	0.50	
b_{77}	0.34	0.53	5.00	0.50	
ε_r	7.50	13.4	2000	310	**-**
a	$1.74 \cdot 10^{10}$	$9.16 \cdot 10^9$	$5.68 \cdot 10^7$	$3.68 \cdot 10^8$	**C^2/Nm^2**

Αποτελέσματα και συζήτηση

Εφαρμόζουμε:

Πίνακας 2: Μέτρο διανύσματος Burger						
	a(nm)	**n**	**h**	**l**	**k**	**b(nm)**
NaCl	0.5635	0.5	1	1	0	0.398455
GaAs	0.567667	0.5	1	1	0	0.401401
$BaTiO_3$	0.404	1	1	0	0	0.404
$SrTiO_3$	0.395	0.5	0	1	1	0.279307

με την βοήθεια της εξίσωσης:

$$b = \frac{a}{n}\sqrt{h^2 + l^2 + k^2}$$

όπου *a* είναι το μήκος της πλευράς της μοναδιαίας κυψελίδας, n είναι ο συντελεστής διόρθωσης του *a* που εξαρτάται από την δομή του κρυστάλλου και (*h l k*) είναι οι δείκτες Miller.

Αποτελέσματα και συζήτηση

Λαμβάνουμε:

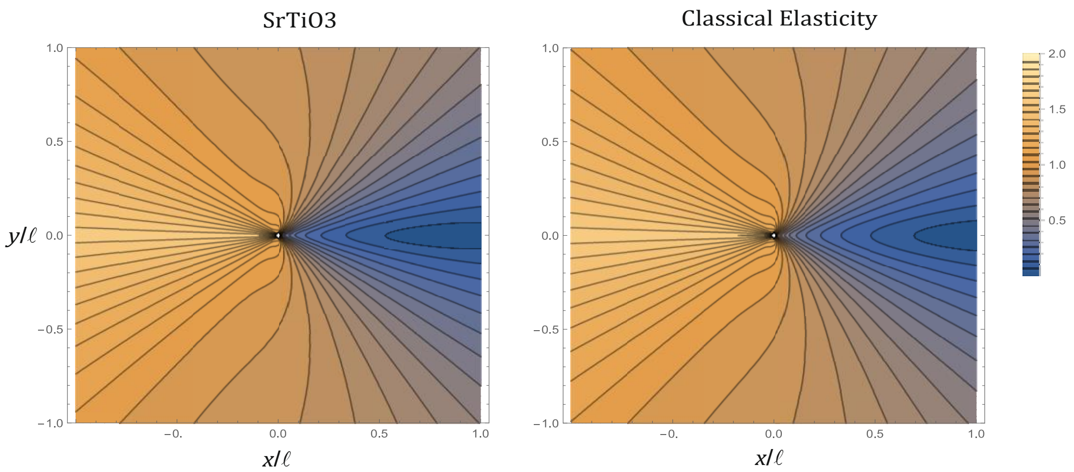
Πίνακας 3		
	$\Gamma\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2$	$\Gamma^2\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2$
NaCl	0.00272516	0.0134162
GaAs	0.011908	0.004242
$BaTiO_3$	-0.050923	1.01846
$SrTiO_3$	-0.204802	0.461615

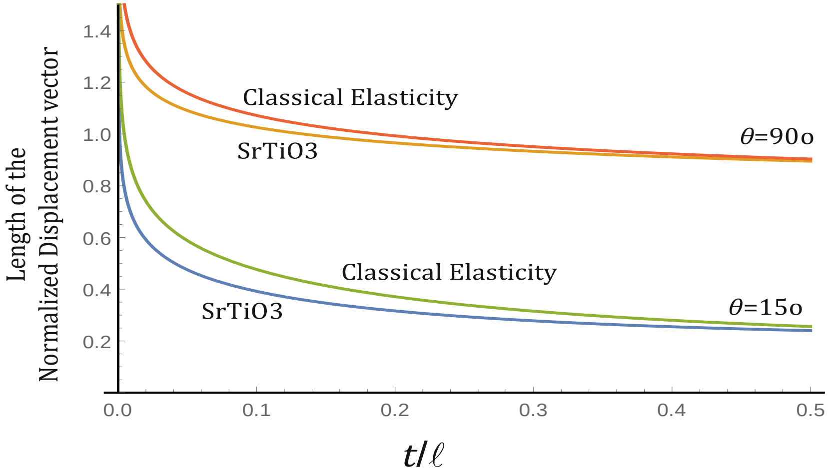
Τα αποτελέσματα που ακολουθούν αφορούν το υλικό $SrTiO_3$, καθώς και τα αντίστοιχα αποτελέσματα της κλασικής ελαστικότητας.

Για κλασική ελαστικότητα:
θεωρούμε τις ίδιες μηχανικές ιδιότητες με το $SrTiO_3$, μηδενίζοντας τα Γ και $\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2$.

Παρουσιάζεται μόνο η περίπτωση της εξάρμοσης ολίσθησης, ενώ τα αποτελέσματα για την εξάρμοση αναρρίχησης είναι ανάλογα.

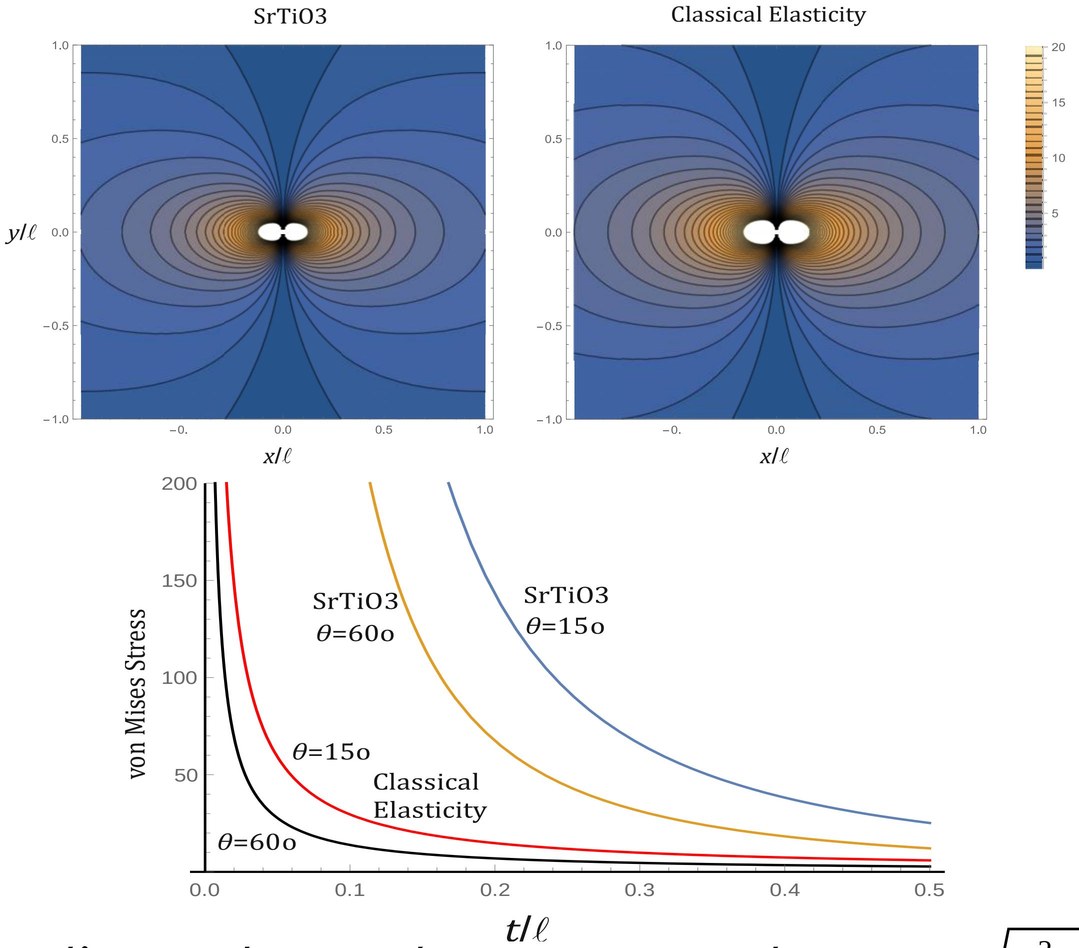
Αποτελέσματα και συζήτηση





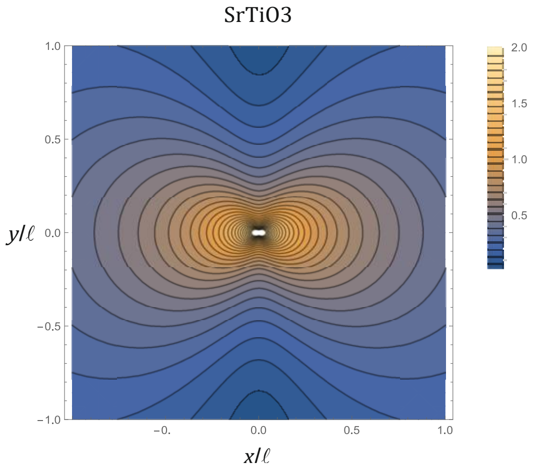
Ισοϋψείς καμπύλες και μέτρο της τάσης ως προς την απόσταση $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ για επιλεγμένες γωνίες για το αδιάστατο μέτρο του διανύσματος της μετατόπισης, για το υλικό $SrTiO_3$.

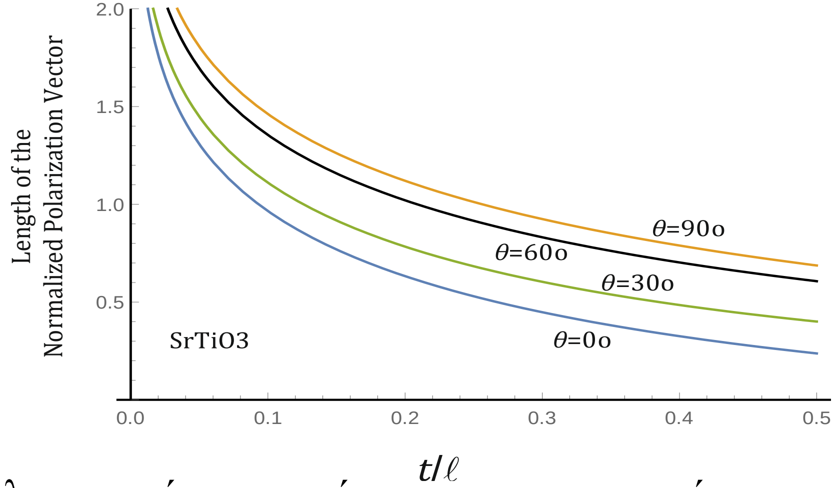
Αποτελέσματα και συζήτηση



Ισοϋψείς καμπύλες και μέτρο της τάσης ως προς την απόσταση $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ για επιλεγμένες γωνίες για ορισμένες επιλεγμένες γωνίες για την τάση von Mises, για το υλικό $SrTiO_3$.

Αποτελέσματα και συζήτηση





Ισοϋψείς καμπύλες και μέτρο της τάσης ως προς την απόσταση $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ για επιλεγμένες γωνίες για επιλεγμένες γωνίες για το αδιάστατο μέτρο του διανύσματος της πόλωσης, για το υλικό $SrTiO_3$.

Ευχαριστώ πολύ για τον χρόνο και την προσοχή σας