ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΪΒΑΛΗΣ ΘΕΟΔΟΣΙΟΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΠΕΙΡΟΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ:

ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Βασίλειος Γρηγοριάδης, Επίκουρος Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Βασίλειος Γρηγοριάδης, Επίκουρος Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Βασίλειος Κανελλόπουλος, Καθηγητής,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Αλέξανδρος Αρβανιτάκης, Επίκουρος Καθηγητής ,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ, 2023

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστίσω τον καθηγητή μου κ. Βασίλειο Γρηγοριάδη για την συνεχή στήριξη του και τον προσωπικό χρόνο που αφιέρωσε για να με καθοδηγήσει κατα την συγγραφή αυτής της εργασίας καθώς και τους φίλους μου που μοιράστηκαν μαζί μου ιδέες, σκέψεις και βιώματα με αποτέλεσμα να συνδιαμορφώσουν τα ενδιαφέροντα μου.

. . . .

Όνομα Επώνυμο

© (2023) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ'αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Η διατριβή αυτή εξετάζει την πλούσια θεωρία των Πολωνικών χώρων, των συνόλων Borel και των εφαρμογών τους στη θεωρία των χώρων Banach. Ξεκινάμε με την εισαγωγή των θεμελιωδών εννοιών των Πολωνικών χώρων, οι οποίοι αποτελούν ένα βασικό πλαίσιο για τη μελέτη των τοπολογικών χώρων στο πλαίσιο της περιγραφικής θεωρίας συνόλων. Διερευνούμε τις ιδιότητες των συνόλων Borel, με έμφαση στην ιεραρχική τους δομή και τη σημαντική έννοια της ιεραρχίας Borel.
Ένα από τα κεντρικά θέματα που εξετάζονται σε αυτήν την εργασία είναι το θεώρημα Galvin-Prikry, το οποίο θεσπίζει βαθιές συνδέσεις μεταξύ της συνδυαστικής, της θεωρίας συνόλων και των συνόλων Borel. Εξετάζουμε τις λεπτομέρειες αυτού του θεωρήματος και εξερευνούμε τις εφαρμογές του στη θεωρία των χώρων Banach. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε το θεώρημα του Rosenthal, ένα εξαιρετικό αποτέλεσμα που χαρακτηρίζει ορισμένες ιδιότητες των χώρων Banach μέσω των Borel υποχώρων τους. Μέσω αυτής της προσέγγισης, αποκτούμε μια βαθύτερη κατανόηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ της περιγραφικής θεωρίας και της μελέτης των χώρων Banach.
Επιπλέον, αυτή η διατριβή εξετάζει το θέμα της καθορισιμότητας(determinacy), μια ιδαίτερα χρήσιμη μέθοδο στη θεωρία συνόλων που μας παρέχει ένα ισχυρό εργαλείο για την ανάλυση άπειρων παιχνιδιών. Διερευνούμε τα παιχνίδια Banach-Mazur και τη σχετικότητά τους με την κατανόηση της δομής των συνόλων Borel και των συναφών συνδυαστικών ιδιοτήτων τους. Επιπλέον, εξετάζουμε το θεώρημα Erdős-Rado, το οποίο παρέχει βαθιά αποτελέσματα για την ύπαρξη ορισμένων συνδυαστικών δομών στη θεωρία συνόλων.
Στο δεύτερο μέρος της διατριβής, παρουσιάζουμε μια εκθεση των δέντρων Aronszajn μέσω των περιπάτων σε διατακτικούς αριθμούς, όπως αναπτύχθηκε από τον Todorčević. Αυτή η κομψή προσέγγιση παρέχει μια βαθύτερη κατανόηση των δέντρων Aronszajn και της σχέσης τους με τους ασθενώς συμπαγείς πληθαρίθμους. Επισημαίνουμε τη σημασία των ασθενώς συμπαγών πληθαρίθμων στη μελέτη των μεγάλων πληθικών αριθμών και της συνδυαστικής.
Μέσω αυτής της σφαιρικής έρευνας των Πολωνικών χώρων, των συνόλων Borel και των διαφόρων εφαρμογών τους, αυτή η διατριβή συμβάλλει στον αυξανόμενο σώμα γνώσης στην περιγραφική θεωρία συνόλων, τη θεωρία των χώρων Banach και τη συνδυαστική της θεωρίας συνόλων.

Λέξεις Κλειδιά. Πολωνικοί χώροι, σύνολα Borel, θεώρημα του Ramsey, θεώρημα του Rosenthal, χώροι Banach, καθορισιμότητα, παίγνια Banach-Mazur, ανοικτά παίγνια, θεώρημα των Erdős-Rado, περιπάτους σε διατακτικούς αριθμούς, δέντρα Aronszajn, ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι.

Abstract

This thesis delves into the rich theory of Polish spaces, Borel sets, and their applications in Banach space theory. We begin by introducing the foundational concepts of Polish spaces, which serve as a fundamental framework for the study of topological spaces in the context of descriptive set theory. We investigate the properties of Borel sets, focusing on their hierarchical structure and the important notions of Borel hierarchy.

One of the central themes explored in this work is the Galvin-Prikry theorem, which establishes deep connections between set-theoretic combinatorics and Borel sets. We delve into the intricacies of this theorem and explore its applications in Banach space theory. In particular, we examine Rosenthal's theorem, a remarkable result that characterizes certain properties of Banach spaces by their Borel subspaces. Through this lens, we gain valuable insights into the interplay between descriptive set theory and the study of Banach spaces.

Moreover, this thesis delves into the topic of determinacy, a foundational principle in set theory that provides a powerful tool for analyzing infinite games. We investigate the Banach-Mazur games and their relevance in understanding the structure of Borel sets and their associated combinatorial properties. Additionally, we explore the Erdős-Rado theorem, which offers profound insights into the existence of certain combinatorial structures in set theory.

In the latter part of the thesis, we present an exposition of Aronszajn trees via walks on ordinals, as developed by Todorčević. This elegant approach provides a deeper understanding of Aronszajn trees and their connection to weakly compact cardinals. We highlight the significance of weakly compact cardinals in the study of large cardinals and set-theoretic combinatorics.

Through this comprehensive investigation of Polish spaces, Borel sets, and their various applications, this thesis contributes to the growing body of knowledge in descriptive set theory, Banach space theory, and set-theoretic combinatorics. The insights gained from these investigations further our understanding of the intricate interplay between topology, set theory, and functional analysis, providing a solid foundation for future research in these areas

Keywords. Polish Spaces, Borel sets, Ramsey's theorem, Rosenthal's theorem, Banach spaces, Determinacy, Banach-Mazur games, open games, Erdős-Rado theorem, walks on ordinals, Aronszajn trees, weakly compact cardinals.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1. Ορολογία και συμβολισμοί

Το κεφάλαιο αυτό της εργασίας έχει διττό ρόλο. Αρχικά δίνει την δυνατότητα στον μυημένο αναγνώστη να θυμηθεί βασικές έννοιες ενώ παράλληλα δύναται να αποτελέσει μια εισαγωγή στο αντικείμενο της εργασίας. Πολύ θεμελιώδεις έννοιες που εισάγονται σε ένα πρώτο μάθημα πραγματικής ανάλυσης θα θεωρηθούν λίγο ή πολύ δεδομένες. Ξεκινάμε λοιπόν με την βασική ορολογία.

Με $\mathrm{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ εννοούμε τα σύνολα των φυσικών, ακεραίων, ρητών και πραγματικών αριθμών αντίστοιχα, όπου στο $\mathbb{N}$ συμπεριλαμβάνουμε και το 0, έτσι που:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$$

Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου X είναι το σύνολο των υποσυνόλων του X και συμβολίζεται με $\mathbf{P}(X)$.

Δοσμένων δυο μη κενών συνόλων X και Y συμβολίζουμε με Y^X το σύνολο όλων των συναρτήσεων απο το X στο Y. Αν $(X_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια μη κενών συνόλων συμβολίζουμε με $\prod_{i\in I} X_i$ την οικογένεια όλων των συναρτήσεων $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ με $f(i) \in X_i \forall i \in I$. Στην περίπτωση όπου $X_i = X$ για κάθε i στο I τότε το σύνολο $\prod_{i\in I} X_i$ είναι προφανώς το X^I.

Μια ένα προς ένα συνάρτηση θα καλείται μονομορφισμός ενώ μια επί συνάρτηση θα καλείται επιμορφισμός. Με τον όρο ισομορφισμός ή αντιστοιχία εννοούμε μια συνάρτηση που είναι ένα προς ένα και επί.

Αν $f \in Y^X, A \subseteq X \,\&\, B \subseteq Y$ συμβολίζουμε με $f[A]$ την εικόνα του A κάτω απο την f και με $f^{-1}[B]$ την αντίστροφη εικόνα του B κάτω απο την f, δηλαδή:

$$f[A] = \{y \in Y \mid \exists x \in X \; s.t. \; f(x) = y\}$$

$$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Ο περιορισμός μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ στο σύνολο $A \subseteq X$ συμβολίζεται με $f|A$. Στις συναρτήσεις $f : X \to Y$ συμπεριλαμβάνουμε και τις περιπτώσεις όπου τα X, Y είναι τα κενά σύνολα. Άν κάποιο εκ των X, Y η και τα δύο εξ αυτών είναι το κενό σύνολο θα λέμε πως η παραπάνω f είναι η κενή συνάρτηση. Θεωρούμε ότι η κενή συνάρτηση είναι πάντα μονομορφισμός και ειδικότερα η $f : \emptyset \to \emptyset$ είναι ισομορφισμός.

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα χρειαστεί όταν γράφουμε μαθηματικές προτάσεις να χρησιμοποιήσουμε τους λογικούς τελεστές της διάζευξης $\vee$, σύζευξης $\&$, άρνησης$\neg$, και λογικής συνεπαγωγής $\to$, που ορίζονται με τον παρακάτω τρόπο:

$$P(x) \vee Q(x) \iff x \; has \; the \; property \; P \; or \; y \; has \; the \; property \; Q$$

$$P(x) \,\&\, Q(x) \iff x \; has \; the \; property \; P \; and \; y \; has \; the \; property \; Q$$

$$\neg \, P(x) \iff x \; does \; not \; have \; the \; property P$$

$$P(x) \to Q(y) \iff if \; x \; has \; the \; property \; P \; then \; Y \; has \; the \; property \; Q.$$

1.1.1. Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα. Δύο σύνολα A, B ονομάζονται ισοπληθικά αν υπάρχει μια ένας προς ένα και επί συνάρτηση f απο το A στο B. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $A =_c B$. Ειδικότερα το κενό σύνολο έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων με τον εαυτό του, δηλαδή κανένα στοιχείο.

Θα λέμε ότι το σύνολο A έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο από το B και θα γράφουμε $A \leq_c B$ αν υπάρχει μια ένα προς ένα συνάρτηση απο το A στο B. Η θεώρηση μας ότι η κενή συνάρτηση είναι πάντα ένα προς ένα εκφράζει τη βασική αρχή ότι το κενό σύνολο έχει πάντα λιγότερα στοιχεία απο οποιοδήποτε μη κενό σύνολο.

Ένα σύνολο A είναι πεπερασμένο αν είναι ισοπληθικό με το σύνολο $\{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$ για κάποιο φυσικό αριθμό n. Για $n = 0$ προκύπτει ότι το κενό σύνολο είναι πεπερασμένο. Απο την άλλη μεριά ένα σύνολο A θα καλείται αριθμήσιμο αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$.

Μερικά βασικά αποτελέσματα στα αριθμήσιμα σύνολα είναι τα εξής:

(1) Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία απο αριθμήσιμα σύνολα τότε η ένωση $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

(2) Αν τα $A_0, ..., A_n$ είναι αριθμήσιμα σύνολα τότε το καρτεσιανό γινόμενο $A_0 \times ... \times A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

(3) Αν το B είναι αριθμήσιμο σύνολο και $A \leq_c B$ τότε το A είναι αριθμήσιμο.

Απο τα παραπάνω προκύπτει με άμεσο τρόπο ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-1)\mathbb{N}$ και οι ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q} \leq_c \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμα σύνολα.

Επιπροσθέτως θα λέμε ότι ένα σύνολο A έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς αν $A =_c \mathbb{R}$ και ότι έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του συνεχούς αν $A \leq_c \mathbb{R}$.

1.2. Στοιχεία Πληθικής αριθμητικής

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω για να συγκρίνουμε το μέγεθος των συνόλων χρησιμοποιούμε ένα προς ένα συναρτήσεις. Επεκτείνουμε την μελέτη που προηγήθηκε εξετάζοντας τους λεγόμενους διατακτικούς αριθμούς διατυπώνοντας βασικές ιδιότητες αυτών που θα χρειαστούν σε σημαντικό βαθμό σε αυτή την εργασία.

Ορισμός 1.2.1. (1) $A \leq_c B$ αν και μόνο αν υπάρχει μια συνάρτηση απο το A στο B που είναι ένα προς ένα.

(2) $A =_c B$ αν και μόνο αν υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση απο το A επί του B.

(3) $A <_c B$ αν και μόνο αν $A \leq_c B$ και $A \neq_c B$.

Είναι προφανές ότι η σχέση $\leq_c$ είναι μεταβατική και η $=_c$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Ένα αρκετά βαθύ αποτέλεσμα είναι το επόμενο που παρόλο που φαντάζει αναμενόμενο η απόδειξη του δεν είναι καθόλου τετριμμένη.

Θεώρημα 1.2.2. *(Schroeder-Bernstein)*
Αν $A \leq_c B$ και $B \leq_c A$ τότε $A =_c B$.

Ορισμός 1.2.3. Έαν το A μπορεί να διαταχθεί γραμμικά, $|A|$ είναι το μικρότερο α τέτοιο ώστε $\alpha =_c A$.

Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι κάτω απο το Αξίωμα επιλογής το $|A|$ μπορεί να οριστεί για κάθε A.

Ορισμός 1.2.4. Το $\alpha \in ON$ είναι πληθικός αριθμός αν και μόνο αν $\alpha = |\alpha|$.

Ισοδύναμα,το α είναι πληθάριθμος αν και μόνο αν $\forall \beta < \alpha\ (\beta \neq_c \alpha)$

Λήμμα 1.2.5. *Εάν $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$ τότε $|\beta| = |\alpha|$ για κάθε $\alpha, \beta \in ON$.*

Πόρισμα 1.2.6. *Το ω είναι πληθικός αριθμός και κάθε $n \in \omega$ είναι επίσης πληθικός αριθμός.*

Ορισμός 1.2.7. Το A είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν $|A| < \omega$. Το A είναι αριθμήσιμο αν και μόνο αν $|A| \leq \omega$. Υπεραριθμήσιμο σημαίνει μη πεπερασμένο και όχι αριθμήσιμο.

Θα δώσουμε έναν ακόμη χρήσιμο ορισμό που θα μας βοηθήσει να καταλάβομε καλυτερα τον συμβολισμό που χρησιμοποιείται κατα μήκος αυτής της εργασίας.Στα παρακάτω με δ θα συμβολίζουμε έναν οριακό διατακτικό.

Ορισμός 1.2.8. 1. $\aleph$-ιεραρχία. Με υπερπεπερασμένη αναδρομή στην κλάση ON ορίζουμε:

$$\aleph_0 = \omega$$

$$\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$$

$$\aleph_\delta = \bigcup\{\aleph_\alpha : \alpha < \delta\}$$

2.$\beth$-ιεαραρχία. Με υπερπεπερασμένη αναδρομή ορίζουμε:

$$\beth_0 = \omega$$
$$\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$$
$$\beth_\delta = \bigcup\{\beth_\alpha : \alpha < \delta\}$$

Στο σημείο αυτό κάνουμε μια μικρή παρεμβολή για να συζητήσουμε ορισμένες θεμελιώδεις ιδιότητες των διατακτικών αριθμών που θα μας χρησιμέυσουν για να ορίσουμε βασικές ιδιότητες των πληθαρίθμων οι οποίες εν συνεχεία θα χρησιμοποιηθούν κατα μήκος αυτής της εργασίας.

Αρχικά εισάγουμε ένα λήμμα που μας δίνει έναν ισοδύναμο χαρακτηρισμό μιας καλής διάταξης, το οποίο είναι και το πιο σύνηθες εργαλείο για να αποφανθούμε το κατα πόσο μια διάταξη είναι καλή ή όχι.

Λήμμα 1.2.9. *Ας υποθέσουμε ότι $(L, <)$ είναι ένα γραμμικά διατεταγμένο σύνολο. Τότε το $<$ είναι μια καλή διάταξη ανν δεν υπάρχει άπειρη $<-$ φθίνουσα ακολουθία $a_0 > a_1 > ... > a_n > ....$*

Στο σημείο αυτό δίνουμε τον ορισμό ενός μεταβατικού συνόλου μια έννοια που είναι απαραίτητη για τον ορισμό των διατακτικών αριθμών που θα ακολουθήσει στην συνέχεια.

Ορισμός 1.2.10. Ένα σύνολο x είναι μεταβατικό ανν η σχέση του "ανήκειν" είναι μεταβατική στο x, δηλαδή για κάθε $y \in x$ και $z \in y$ έχουμε $z \in x$. Με άλλα λόγια κάθε στοιχείο του x είναι υποσύνολο του x.

Ορισμός 1.2.11. Ο α είναι διατακτικός αριθμός αν και μόνο αν ο α είναι μεταβατικός (ως κληρονομικό σύνολο (hereditary set)) και καλά διατεταγμένος υπο την σχέση του ανήκειν "$\in$".

Ας δώσουμε ορισμένα παραδείγματα:

1) Το $\emptyset$ είναι διατακτικός, κάθε $n \in \omega$ είναι διατακτικός όπως και το ίδιο το ω.

2) Το $\{1, 2\}$ δεν είναι μεταβατικό καθώς $0 \in 1$ αλλά $0 \notin \{1, 2\}$.

Μια απο τις πιο σημαντικές ιδιότητες των διατακτικών είναι ότι είναι συγκρίσιμοι μεταξύ τους με αρκετά άμεσο τρόπο. Θα εισάγουμε τον παρακάτω συμβολισμό για να μπορέσουμε να εξηγήσουμε καλύτερα το τι εννοούμε σε αυτό το σημείο.

Ορισμός 1.2.12. 1. Ας υποθέσουμε ότι $(L, \leq)$ είναι γραμμική διάταξη και $x \in L$.
Τότε $pred(L, x) = \{y \in L : y < x\}$.

2. Εάν $(L1, \leq_1), (L2, \leq_2)$ είναι δύο γραμμικές διατάξεις τότε ένας ισομορφισμός διάταξης μεταξύ αυτών είναι μια απεικόνιση $f : L_1 \to L_2$ που διατηρεί την διάταξη.Δηλαδή:

$$x_1 \leq_1 x_2 \iff f(x_1) \leq_2 f(x_2).$$

3. Ένα υποσύνολο A μιας γραμμικής διάταξης L είναι ένα αρχικό τμήμα αν:

$$(\forall b \in A)(\forall a \leq b) a \in A$$

Ακολουθεί ένα πολύ γνωστό θεώρημα του Cantor.

Θεώρημα 1.2.13. *(Θεώρημα Τριχοτομίας του Cantor). Έστω $(L_i, \leq_i), i = 1, 2$ δύο καλές διατάξεις. Τότε, ακριβώς ένα απο τα ακόλουθα ισχύει:*
1. L_1 ισομορφικό ως προς την διάταξη με το $pred(L_2, x)$ για κάποιο $x \in L_2$.
2. L_2 ισομορφικό ως προς την διάταξη με το $pred(L_1, x)$ για κάποιο $x \in L_1$.
3. L_1 ισομορφικό ως προς την διάταξη με το L_2.

Στο σημείο αυτό είναι αναγκαίο να παρουσιάσουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες των διατακτικών αριθμών μέσω του θεωρήματος που ακολουθεί.

Θεώρημα 1.2.14. *1. Εάν ο x είναι διατακτικός και $y \in x$ τότε ο y είναι διατακτικός και $y = pred(x, y)$.*
2. Εάν x, y διατακτικοί και $x \approx y$ τότε $x = y$.
3. (Τριχοτομία) Εάν x, y διατακτικοί τότε ακριβώς ένα απο τα επόμενα είναι αληθές:

$$x \in y, y \in x, y = x.$$

4. Δέν υπάρχει διατακτικός x τέτοιως ώστε $x \in x$.
5. Άν x, y, z διατακτικοί, $x \in y, y \in z$ τότε $x \in z$.

6. Κάθε μη κενό σύνολο διατακτικών έχει $\in -$ ελάχιστο στοιχείο.
7. Άν το G είναι μεταβατικό σύνολο διατακτικών, τότε το ίδιο το G είναι διατακτικός.

Ορισμός 1.2.15. Για διατακτικούς x, y θα λέμε ότι $x < y \iff x \in y$.

Απο το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι δεν υπάρχει το σύνολο όλων των διατακτικών αριθμών καθώς είναι δυνατή η κατασκευή ενός παραδόξου παρόμοιου με αυτό του Russel. Ειδικότερα, εάν I ήταν το σύνολο όλων των διατακτικών, θα προέκυπτε σύμφωνα με το 7 του προηγούμενου θεωρήματος ότι και το I είναι διατακτικός, το οποίο είναι άτοπο καθώς τότε θα είχαμε $I \in I$. Αναφερόμαστε πολλές φορές σε αυτό το παράδοξο με την ονομασία παράδοξο Burali-Forti.

Παρουσιάζουμε στο σημείο αυτό ένα θεώρημα που συνδέει πολλές απο τις έννοιες που συναντήσαμε προηγουμένος.

Θεώρημα 1.2.16. *Κάθε καλή διάταξη (W, R) είναι ισομορφική ως προς την διάταξη με έναν μοναδικό διατακτικό.*

Ορισμός 1.2.17. Για κάθε α, ο $S(\alpha)$ είναι ένας επόμενος διατακτικός (successor ordinal) αν και μόνο αν $\exists\beta(\alpha = S(\beta))$. Ο α είναι οριακός διατακτικός (limit ordinal) αν και μόνο αν $\alpha \neq 0$ και ο α δεν είναι επόμενος διατακτικός.

Επι παραδείγματι μπορούμε να γράψουμε :

$$\omega = lim_{n\to\infty}(n+1)$$

Άρα ο ω είναι ένας οριακός διατακτικός. Ομοίως το $\omega + \omega$ είναι το όριο όλων των $\omega + 1, \omega + 2, ...$. Ας παρατηρήσουμε επιπλέον ότι ο α είναι οριακός διατακτικός αν και μόνο αν δεν έχει μεγιστικό στοιχείο. Επιστρέφουμε τώρα στους πληθαρίθμους.

Ορισμός 1.2.18. Εάν $f : \alpha \to \beta$, η f απεικονίζει συντελικά (cofinally) το α αν και μόνο αν το $ran(f)$ είναι μη φραγμένο στο β.

Ορισμός 1.2.19. Η συντελικότητα του β, $(cf(\beta))$ είναι ο μικρότερος α έτσι ώστε να υπάρχει συντελική απεικόνιση απο το α στο β.

Επομένως $cf(\beta) \leq \beta$. Εάν ο β είναι επόμενος τότε $cf(\beta) = 1$.

Ορισμός 1.2.20. Ο β είναι κανονικός (regular) αν και μόνο αν ο β είναι οριακός διατακτικός και $cf(\beta) = \beta$.

Όπως είναι γνωστό $cf(cf(\beta)) = cf(\beta)$ επομένως ο $cf(\beta)$ είναι κανονικός για κάθε οριακό διατακτικό β. Το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει απο το εξής λήμμα:

Λήμμα 1.2.21. *Εάν ο α είναι οριακός διατακτικός και $f : \alpha \to \beta$ είναι γνησίως αύξουσα συντελική απεικόνιση,τότε $cf(\alpha) = cf(\beta)$.*

Δίνουμε μερικούς ακόμη χαρακτηρισμούς πληθαρίθμων.

Λήμμα 1.2.22. *Εάν ο β είναι κανονικός τότε ο β είναι πληθάριθμος.*

Λήμμα 1.2.23. *Ο ω είναι κανονικός*

Λήμμα 1.2.24. *Κάτω απο το Αξίωμα επιλογής ο κ^+ είναι κανονικός, όπου κ^+ είναι ο μικρότερος πληθάριθμος που είναι μεγαλύτερος απο τον κ.*

1.3. Στοιχεία μετρικών χώρων και τοπολογίας

1.3.1. Μετρικοί Χώροι. Δίνουμε μια σύντομη ανασκόπηση των εννοιών που θα χρειαστούμε. Μετρική σε ένα μη κενό σύνολο X είναι μια συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

$$d(x,y) \geq 0 \;\&\; d(x,y) \;=\; 0 \iff x = y$$

$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,x)$$

όπου $x, y \in X$.Το ζεύγος (X, d) ονομάζεται μετρικός χώρος.

Η διακριτή μετρική σε ένα σύνολο X είναι η:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq y \\ 0 & \text{if } x = y \end{cases}$$

Αν $x \in X$ και $r > 0$ η ανοικτή μπάλα κέντρου x και ακτίνας r στο (X, d) είναι το σύνολο:

$$B_d^X(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένους πολύ βασικούς ορισμούς.

(1)Το σημείο x είναι εσωτερικό σημείο του $A \subseteq X$ αν υπάρχει $r > 0$ με $B_d(x,r) \subseteq A$.

(2)Το Α είναι ανοικτό αν κάθε $x \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του A.

(3)Ένα $x \in X$ είναι οριακό σημείο του $A \in X$ αν υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \to x$ ως προς d. Επιτρέπουμε $x_n = x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έτσι που κάθε σημείο του A είναι και οριακό σημείο του.

(4)Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A αν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \to x$ και $x_n \neq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(5)Το σημείο $x \in A$ είναι μεμονωμένο σημείο του $A \subseteq X$ αν υπάρχει $r > 0$ με $B(x,r) \cap A = \{x\}$.Είναι σαφές ότι τα οριακά σημεία του A είναι ακριβώς τα μεμονωμένα σημεία του μαζί με τα σημεία συσσώρευσης του.

Απο την άλλη μεριά το Α είναι κλειστό αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία(ισοδύναμα περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του) ενώ το A είναι τέλειο αν είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

Αξίζει επιπροσθέτως να σημειωθεί ότι η κλειστότητα του A, συμβολικά $\bar{A}$ είναι το σύνολο των οριακών σημείων του.

1.3.2. Τοπολογικοί χώροι. Μια οικογένεια T υποσυνόλων του X ονομάζεται τοπολογία στο X αν περιέχει το κενό σύνολο $\emptyset$ και το X, για κάθε οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$ συνόλων της T έχουμε $\bigcup_{i\in I} A_i \in T$, και για κάθε $A_1, ..., A_n \in T$ έχουμε $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in T$.

Έτσι λοιπόν μια τοπολογία ικανοποιεί τις ιδιότητες των ανοικτών συνόλων η αλλιώς η οικεγένεια των ανοικτών συνόλων ενός μετρικού χώρου αποτελεί τοπολογία.

Τα κλειστά υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου είναι τα συμπληρώματα των ανοικτών.

Ένας τοπολογικός χώρος (X, T) είναι μετρικοποιήσιμος αν υπάρχει μετρική d στο X ώστε η T να είναι η τοπολογία του (X, d).

Μια οικογένεια V απο υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου (X, T) είναι βάση της τοπολογίας του X ή απλά βάση του X αν $V \subseteq T$ και κάθε $U \in T$ είναι ίσο με ένωση (πεπερασμένη ή άπειρη) στοιχείων της V, δηλαδή υπάρχει οικογένεια $(B_i)_{i\in\mathbb{I}}$ στοιχείων της V με $U = \bigcup_{i\in I} B_i$.

Ισοδύναμα σε μετρικούς χώρους αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο της V είναι ανοικτό σύνολο και κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται ως ένωση στοιχείων της V.

Αν το D είναι πυκνό υποσύνολο ενός χώρου (X, d) τότε το σύνολο :

$$V = \{B_d(x,q) \mid q \in \mathbb{Q} \,,\, q > 0\}, x \in D.$$

αποτελεί βάση για την τοπολογία του (X, d). Ειδικότερα αν ο X είναι διαχωρίσιμος τότε η τοπολογία του έχει αριθμήσιμη βάση, ενώ βέβαια ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε μετρικός χώρος που έχει αριθμήσιμη βάση είναι διαχωρίσιμος.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως οι ιδιότητες της διαχωρισιμότητας και της συμπάγειας διατηρούνται κάτω απο τοπολογικούς ισομορφισμούς.

1.3.3. Ισχνά Σύνολα. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq X$ καλείται πουθενά πυκνό (nowhere dense) ένα η κλειστότητά του $\overline{A}$ έχει κενό εσωτερικό. Αυτό σημαίνει ότι το συμπλήρωμα της κλειστότητας του A είναι πυκνό. Ένα σύνολο καλείται ισχνό (meager) ή πρώτης κατηγορίας εάν $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, όπου το κάθε A_n δεν είναι πουθενά πυκνό. Ένα μη ισχνό σύνολο καλείται δεύτερης κατηγορίας ενώ το συμπλήρωμα ενός ισχνού συνόλου καλείται συν-ισχνό (comeager).

1.4. Οι χώροι του Baire και Cantor

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν οι χώροι του Baire και του Cantor, χώροι που όπως θα δούμε αποτελούν την βάση της θεωρίας που θα αναπτύξουμε.

Ορισμός 1.4.1. (Ο χώρος του Baire) Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{N}$ όλων των συναρτήσεων απο το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}$ (άπειρες δηλαδή ακολουθίες). Συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\mathcal{N}$ με τα μικρά ελληνικά γράμματα $\alpha, \beta, ...$

Για $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ με $\alpha \neq \beta$ θέτουμε:

$$\eta(\alpha, \beta) = \min(n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) \neq \beta(n))$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $d : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ με :

$$d(\alpha, \beta) = \begin{cases} 2^{-n(\alpha,\beta)} & \text{if } \alpha \neq \beta \\ 0 & \text{if } \alpha = \beta \end{cases}$$

Η συνάρτηση d αποδεικνύεται ότι είναι μετρική στο $\mathcal{N}$. Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{N}, d)$ καλείται χώρος του Baire (όπως και ο αντίστοιχος τοπολογικός χώρος).

Για παράδειγμα αν $\alpha = (5, 6, 7, 1, 1, 1, ..., 1, ...,), \beta = (5, 6, 1, 1, 1, ..., 1, ...)$ και $\gamma = (3, 6, 7, 1, 1, 1, ..., 1, ...)$, τότε $n(\alpha, \beta) = 2$ και $n(\alpha, \gamma) = n(\beta, \gamma) = 0$, οπότε $d(\alpha, \gamma) = d(\beta, \gamma) = 2^0 = 1$.

Παρακάτω παραθέτουμε ορισμένες βασικές προτάσεις για τον χώρο του Baire που θα μας βοηθήσουν να αποκτήσουμε μια πρώτη διαίσθηση για αυτόν. Ξεκινάμε με ένα Λήμμα.

Λήμμα 1.4.2. *Θεωρούμε $r > 0$ και n τον ελάχιστο φυσικό αριθμό με $2^{-n} < r$. Τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ ισχύει:*

$$d(\alpha, \beta) < r \iff \forall i < n \; \alpha(i) = \beta(i).$$

Συνεπώς κάθε ανοικτή μπάλα $B_d(\alpha, r)$ ισούται με το σύνολο $\mathcal{N}_{\alpha|n}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και κάθε σύνολο $\mathcal{N}_u$ όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ισούται με την ανοικτή μπάλα $B_d(u * (0, 0, ...,), 2^{-(|u|-1)})$.

Πρόταση 1.4.3. *Η τοπολογία $(\mathcal{N}, d)$ είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Αφού οι ανοικτές μπάλες σε έναν μετρικό χώρο αποτελούν βάση για την τοπολογία ενός μετρικού χώρου προκύπτει από το παραπάνω Λήμμα ότι τα σύνολα $\mathcal{N}_u, u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι d-ανοικτά και επιπλέον αποτελούν βάση για την τοπολογία του $(\mathcal{N}, d)$. Επιπλέον, αφού τα μονοσύνολα στο **N** αποτελούν βάση για την τοπολογία του $\mathbb{N}$, έχουμε ότι τα $\mathcal{N}_u$ αποτελούν βάση για την τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Συνεπώς η τοπολογία του $(\mathcal{N}, d)$ και η τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ έχουν μια κοινή βάση και άρα είναι ίσες.

□

Πρόταση 1.4.4. *Ο $(\mathcal{N}, d)$ είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Συνεπώς ο χώρος του Baire είναι Πολωνικός.*

Ορισμός 1.4.5. (Ο χώρος του Cantor) Το σύνολο όλων των δυαδικών (άπειρων) ακολουθιών είναι το $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ το οποίο συμβολίζεται και ως $2^{\mathbb{N}}$ ή $\mathcal{C}$. Είναι προφανές ότι αυτό είναι υποσύνολο του χώρου του Baire και επομένως σαν μετρική στον χώρο αυτό θεωρούμε την ακόλουθη:

$$d_{2^{\mathbb{N}}} = d \mid (2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}})$$

Ο χώρος του Cantor είναι ο μετρικός χώρος $(2^{\mathbb{N}}, d_{2^{\mathbb{N}}})$.

Πρόταση 1.4.6. *Ο $(2^{\mathbb{N}}, d_{2^{\mathbb{N}}})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος και συνεπώς ο αντίστοιχος τοπολογικός χώρος είναι Πολωνικός.*

Μια βάση για την τοπολογία του Cantor αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}}$ όπου $u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ακριβώς επειδή τα $\mathcal{N}_u, u \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ αποτελούν βάση για την τοπολογία του $\mathcal{N}$. Προφανώς $\mathcal{N}_u \cap 2^{\mathbb{N}} = \emptyset$ όταν υπάρχει $i < |u|$ με $u(i) > 1$, συνεπώς μπορούμε να περιοριστούμε στα $u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι μια βάση για την τοπολογία του χώρου του Cantor αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής:

$$\mathcal{N}_u^{2^{\mathbb{N}}} = \{\alpha \in 2^{\mathbb{N}} \mid u \sqsubseteq \alpha\},\ u \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$$

τα οποία είναι ανοικτά-κλειστά. Επίσης η τοπολογία του χώρου του Cantor είναι η σχετική τοπολογία του χώρου του Baire, η οποία είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Προκύπτει ότι και η τοπολογία του χώρου του Cantor είναι η τοπολογία γινόμενο στο σύνολο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

1.5. Δέντρα και τοπολογία

Στο σημείο αυτό θα ήταν χρήσιμο να υπενθυμίσουμε ορισμένες βασικές έννοιες σχετικά με τα δέντρα.

Ορισμός 1.5.1. Ένα δέντρο σε ένα σύνολο A είναι ένα υποσύνολο $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ κλειστό κάτω απο αρχικά τμήματα, δηλαδή εάν $t \in T$ και $s \subseteq T$, τότε $s \in T$. (Ειδικότερα $\emptyset \in T$ εάν το T είναι μη κενό). Καλούμε τα στοιχεία του T κόμβους του δέντρου. Ένα άπειρο κλαδί του δέντρου T είναι μια ακολουθία $x \in A^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $x|n \in T$, για κάθε n. Το σώμα του T, συμβολίζεται με $[T]$ και είναι το σύνολο των άπειρων κλαδιών του T. Πιο συγκεκριμμένα:

$$[T] = \{x \in A^{\mathbb{N}} : \forall n(x|n \in T)\}.$$

Τέλος, καλούμε ένα δέντρο T κλαδεμμένο ένα κάθε $s \in T$ έχει μια "καθαρή" επέκταση.

Απο τα παραπάνω καθίστατι σαφές ότι το σώμα ενός δέντρου T στο X είναι υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. Αν εφοδιάσουμε το X με την διακριτή τοπολογία τότε ο $X^{\mathbb{N}}$ είναι μετρικός χώρος. Όπως και με τον χώρο του Baire μια βάση για την τοπολογία του $X^{\mathbb{N}}$ είναι η οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής:

$$\{x_0\} \times ...\{x_{n-1}\} \times X \times X \times X...$$

όπου $x_0, ..., x_{n-1} \in X$.

Μια ακολουθία $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στον $X^{\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην $f \in X^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(f_i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $f(n)$ μέσα στον X, ισοδύναμα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f_i(n) = f(n)$ για όλα τα μεγάλα i.

Επιπροσθέτως αξίζει να αναφερθεί ότι τα σώματα δέντρων σε ένα σύνολο X χαρακτηρίζουν τα κλειστά σύνολα του $X^{\mathbb{N}}$.

Πρόταση 1.5.2. *Έστω X μη κενό σύνολο με τη διακριτή μετρική και $F \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Τότε το Fείναι κλειστό ως προς την τοπολογία γινόμενο του $X^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο T στο X με $F = [T]$.*

Απόδειξη. Για την ευθεία κατεύθυνση θεωρούμε οτι το F είναι κλειστό υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. Αν το F είναι το κενό σύνολο τότε επιλέγουμε για T ένα οποιοδήποτε δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης με κενό σώμα, π.χ. το $\{\Lambda\}$.

Επομένως υποθέτουμε ότι το F είναι μη κενό. Αν $u \in X^{<\mathbb{N}}$ και $f \in X^{\mathbb{N}}$ γράφουμε $u \sqsubseteq f$ όταν $f(k) = u(k)$ για κάθε $k < |u|$. Ορίζουμε $T \subseteq X^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$u \in T \iff \exists f \in F\ u \sqsubseteq f$$

Επειδή F μη κενό έχουμε $\Lambda \in T$ και άρα T μη κενό. Είναι άμεσο απο τον ορισμό ότι το T είναι δέντρο.

Δείχνουμε ότι $F = [T]$. Έστω $g \in F$ και $n \in \mathbb{N}$. Είναι προφανές ότι υπάρχει $f \in F$ με $(g(0), ..., g(n)) \sqsubseteq f$, συγκεκριμμένα μπορούμε να πάρουμε $f = g$. Άρα $(g(0), ..., g(n)) \in T$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g \in [T]$. Αντίστροφα αν $g \in [T]$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $(g(0), ..., g(n)) \in T$ και άρα υπάρχει $f_n \in F$ με $(g(0), ..., g(n)) \sqsubseteq f_n$.

Η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο στοιχείο g. Πράγματι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, παίρνουμε $n_0 = k$ και για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $f_n(k) = g(k)$ γιατί $(g(0), ..., g(n)) \sqsubseteq f_n$.

Άρα $f_n(k) \xrightarrow{X} g(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και επομένως $f_n \xrightarrow{X^{\mathbb{N}}} g$. Αφού $f_n \in F$ για κάθε n και το F είναι κλειστό προκύπτει ότι $g \in F$. Άρα $F = [T]$ και έχουμε αποδείξει την ευθεία κατεύθυνση.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε μια ακολοθία $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $[T]$ η οποία συγκλίνει στο $f \in X^{\mathbb{N}}$. Δείχνουμε ότι $f \in [T]$. Για κάθε n, υπάρχει i_0 έτσι ώστε για κάθε $i \geq i_0$ και κάθε $k \leq n$ έχουμε $f_i(k) = f(k)$. Ειδικότερα $(f(0), ..., f(n)) \in T$. Προκύπτει ότι $f \in [T]$.

□

Απο την παραπάνω πρόταση προκύπτει το ακόλουθο χρήσιμο πόρισμα:

Πόρισμα 1.5.3. *Ένα σύνολο $F \subseteq \mathcal{N}$ είναι κλειστό αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο στο $\mathbb{N}$ με $F = [T]$.*

Ας σημειώσουμε σε αυτό το σημείο το ακόλουθο γνωστό Λήμμα που χρησιμοποιείτα στην απόδειξη της πρότασης που το διαδέχεται:

Λήμμα 1.5.4. *(Το Λήμμα του König) Κάθε άπειρο δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης έχει άπειρο κλαδί*

Τα συμπαγή σύνολα του $X^{\mathbb{N}}$ μπορούν επίσης να χαρακτηριστούν από τα σώματα μιας ειδικής κατηγορίας δέντρων. Ειδικότερα έχουμε την παρακάτω πρόταση :

Πρόταση 1.5.5. *(Συμπαγή σύνολα και δέντρα πεπερασμένης διακλάδωσης). Έστω X μη κενό σύνολο με τη διακριτή τοπολογία και $K \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Τότε το K είναι συμπαγές ως προς την τοπολογία γινόμενο του $X^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο* T *στο X πεπερασμένης διακλάδωσης με $K = [T]$.*

Έχουμε το επόμενο πόρισμα:

Πόρισμα 1.5.6. *Ένα σύνολο $K \subseteq \mathcal{N}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο T στο $\mathbb{N}$ πεπερασμένης διακλάδωσης με $K = [T]$.*

Απόδειξη. Το συμπέρασμα είναι άμεσο απο την πρόταση 1.5.5 για $X = \mathbb{N}$ και επειδή η τοπολογία του χώρου του Baire είναι η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. □

Τέλος θα κάνουμε μια συνοπτική αναφορά στον χώρο των δέντρων.

Ορισμός 1.5.7. (Ο χώρος των δέντρων) Θεωρούμε το σύνολο Tr όλων των δέντρων στο $\mathbb{N}$,

$$Tr = \{T \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} | \ T \ is \ a \ tree \ on \ \mathbb{N}\}$$

Πρόταση 1.5.8. *Ο χώρος των δέντρων είναι συμπαγής Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Εφόσον ο $2^{\mathbb{N}}$ είναι συμπαγής αρκεί να δείξουμε ότι η εικόνα του Tr μέσω της απεικόνισης $T \in Tr \to \alpha_T \in 2^{\mathbb{N}}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$.

Έστω $\alpha \notin \{\alpha_T \mid T \in Tr\}$ και $s_0 \in \mathbb{N}$ με $u_{s_0} = \Lambda$. Άν $a_{s_0} = 0$ τότε για κάθε $\beta \in T$ με $\beta(s_0) = \alpha(s_0)$ έχουμε $\beta \notin \{\alpha_T | T \notin Tr\}$. (Αλλιώς $\beta = \alpha_T$ και η κενή ακολουθία δεν θα άνηκε στο T.)

Επομένως θεωρούμε ότι $\alpha(s_0) = 1$. Αν για κάθε s με $a(s) = 1$ και κάθε t με $u_t \sqsubseteq u_s$ ισχύει $a(t) = 1$, τότε $\alpha = \alpha_T$ όπου T είναι το δέντρο που ορίζεται ως εξής:

$$T = \{u \in \mathcal{N} \mid \exists \, (u = u_s \ \& \ a(s) = 1)\}.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε πως $\alpha \notin \{\alpha_T \mid T \in Tr\}$. Επομένως υπάρχουν s, t με $\alpha(s) = 1, u_t \sqsubseteq u_s$ και $\alpha(t) = 0$. Τότε για κάθε $\beta \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\beta(i) = \alpha(i)$ για κάθε $i \leq max\{t, s\}$ έχουμε $\beta \notin \{\alpha_T | T \in Tr\}$.

Σε κάθε περίπτωση το συμπλήρωμα $\mathcal{C} \setminus \{\alpha_T \mid T \in Tr\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{C}$.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Πολωνικοί χώροι

2.1. Πολωνικοί χώροι

Ορισμός 2.1.1. [3] Ένας τοπολογικός χώρος (X, T) είναι Πολωνικός χώρος αν υπάρχει μετρική d που παράγει την Τ και ο (X, d) είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Μερικά παραδείγματα Πολωνικών χώρων: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ καθώς και τα κλειστά υποσύνολα τους με την συνήθη τοπολογία. Στο σημείο αυτο αξίζει να αναφερθεί πως το ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ με τη συνήθη μετρική είναι πλήρης αλλά όχι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος πάραυτα υπάρχει ισοδύναμη μετρική ως προς την οποία είναι πλήρες και επομένως είναι Πολωνικός χώρος. Εν συνεχεία θα αναφέρουμε ορισμένες βασικές προτάσεις και θα αποδείξουμε κάποιες απο αυτές έτσι ώστε να εξοικιωθούμε με τις βασικές έννοιες πριν προχωρήσουμε σε συνδιαστικές κατασκευές.

Πρόταση 2.1.2. *Δίνεται ένας Πολωνικός χώρος X και ένας τοπολογικός χώρος Y. Αν οι X, Y είναι τοπολογικά ισομορφικοί τότε και ο Υ είναι Πολωνικός χώρος.*

Πρόταση 2.1.3. *Κάθε ανοικτό διάστημα (a, b) με $a < b$ του $\mathbb{R}$ με την τοπολογία που παράγει η συνήθης μετρική της απόστασης είναι Πολωνικός χώρος.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση της εφαπτομένης tan:$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R}$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός και απο την Πρόταση 2.1.3 το διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι Πολωνικός χώρος. Ειδικότερα μελετώντας την απόδειξη της παραπάνω πρότασης προκύπτει με φυσιολογικό τρόπο ότι μια κατάλληλη μετρική θα ήταν η $\rho(x, y) = |tan(x) - tan(y)|$.

Τέλος το ζητούμενο προκύπτει απο το γεγονός ότι όλα τα μη τετριμμένα ανοικτά διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι τοπολογικά ισομορφικά μεταξύ τους. □

Ορισμός 2.1.4. Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A είναι F_σ υποσύνολο του X αν υπάρχει ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ απο κλειστά υποσύνολα του X με $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Επίσης το A είναι G_δ υποσύνολο του X αν υπάρχει ακολουθία $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ απο ανοικτά υποσύνολα του X με $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Πρόταση 2.1.5. *Αν ο X είναι μετρικοποιήσιμος τοπόλογικός χώρος τότε κάθε κλειστό σύνολό του, εκτός απο F_σ, είναι και G_δ. Ισοδύναμα κάθε ανοικτό υποσύνολο του Χ είναι G_δ και F_σ.*

Θεώρημα 2.1.6. *Έστω Χ Πολωνικός χώρος και $\emptyset \neq G \subseteq X$. Τότε το G με τη σχετική τοπολογία του Χ είναι Πολωνικός χώρος αν και μόνο αν το G είναι G_δ υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε σε πρώτη φάση ότι το G είναι Πολωνικός χώρος με τη σχετική τοπολογία του Χ. Σταθεροποιούμε μια κατάλληλη μετρική d για τια τον Χ και d_G για τον G. (Δεν είναι απαραίτητο ο περιορισμός της d στο G να είναι η d_G). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο:

$$V_n = \{x \in X \mid \exists \; open \; U \; s.t. \; x \in U \; \& \; \forall \; y, z \; \in \; U \cap G, \; d_G(y, z) < 2^{-n}\}$$

Ισχυριζόμαστε αρχικά ότι κάθε V_n είναι ανοικτό υποσύνολο του Χ. Έστω $x \in V_n$, τότε υπάρχει ένα ανοικτό U με $x \in U$ και για κάθε $y, z \in U$ ισχύει $d_G(y, z) < 2^{-n}$. Υπάρχει $r > 0$ με $B_d(x, r) \subseteq U$. Για κάθε $x' \in B_d(x, r)$ το σύνολο $U' = B_d(x, r)$ είναι ανοικτό που περιέχει το x'. Επειδή $U' \subseteq U$ έχουμε επίσης ότι για κάθε $y, z \in U'$ ισχύει $d_G(y, z) < 2^{-n}$. 'Άρα $x' \in V_n$ για κάθε $x' \in B_d(x, r)$ και το $x \in V_n$ είναι εσωτερικό σημείο του V_n. Εν συνεχεία δείχνουμε ότι:

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \cap \bar{G}.$$

Απο την πιο πάνω ισότητα και κάνοντας χρήση της τετριμμένης παρατήρησης ότι τα κλειστά σύνολα είναι G_δ προκύπτει ότι το G είναι τομή δύο G_δ συνόλων επομένως είναι και αυτό G_δ.

Ξεκινάμε με τον εγκλεισμό $G \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \cap \bar{G}$. Έστω $x \in G$ και $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς $x \in \bar{G}$,δείχνουμε ότι $x \in V_n$. Η μπάλα $B_{d_G}(x, 2^{-(n+1)})$ του G είναι ανοικτό υποσύνολο του G επομένως υπάρχει U ανοικτό υποσύνολο του X με $B_{d_G}(x, 2^{-(n+1)}) = U \cap G$.

Τότε για κάθε $y, z \in U \cap G$ έχουμε $y, z \in B_{d_G}(x, 2^{-(n+1)})$ και συνεπώς $d_G(y, z) \leq d_G(y, x) + d_G(x, z) < 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2^{-n}$. Άρα $x \in V_n$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \bar{G}, x \in V_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ακολουθία ανοικτών συνόλων $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x \in U_n$ και έτσι ώστε $y, z \in U \cap G$, ενώ ισχύει πως $d_G(y, z) < 2^{-n}$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία (U_n) είναι φθίνουσα, εναλλακτικά αντικαθιστούμε κάθε (U_n) με την τομή $\bigcap_{k=0}^{n} U_k$.

Αφού $x \in \bar{G} \cap V_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ απο το G με $y_n \in U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $d(y_n, x) \to 0$. Για κάθε $n \geq m$ έχουμε $y_n \in U_n \subseteq U_m$ και αφού $y_m \in U_m$,ισχύει ότι $d_G(y_n, y_m) < 2^{-m}$. Αυτό δείχνει ότι η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι d_G-Cauchy και αφού ο (G, d_G) είναι πλήρης υπάρχει $y \in G$ με $d_G(y_n, y) \to 0$.

Απο την άλλη μεριά η τοπολογία του (G, d_G) είναι η ίδια με τη σχετική τοπολογία του G που κληρονομεί απο τον X. Προκύπτει ότι $d_G(y_n, y) \to 0$ και αφού $d_G(y_n, x) \to 0$ έχουμε $x = y \in G$. Έτσι έχουμε και τον άλλο εγκλεισμό και αποδείξαμε την μια κατεύθυνση του θεωρήματος.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι το G είναι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών συνόλων $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και θέτουμε $F_n = X \setminus U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε κάθε F_n είναι κλειστό σύνολο.

Θεωρούμε κατάλληλη μετρική, έστω d στον X και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τη συνάρτηση $(x \to d(x, F_n))$ της απόστασης του x απο το F_n. Ορίζουμε:

$$d_G(x, y) = d(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} min\{2^{-n}, |d(x, F_n)^{-1} - d(y, F_n)^{-1}|\},\ x, y \in G$$

Παρατηρούμε ότι αν $x \in G$ τότε $x \in U_n$ και άρα $x \notin F_n$ για κάθε n. Επομένως $d(x, F_n) > 0$ και άρα ορίζεται ο αντίστροφος αριθμός $d(x, F_n)^{-1} > 0$. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η d_G είναι μετρική στο G. Ισοδύναμα μπορούμε να δείξουμε ότι η μετρική d_G και ο περιορισμός $d|(G \times G)$ της d στο $G \times G$ είναι ισοδύναμες μετρικές. Για την απόδειξη αυτού παραθέτουμε στο [3].

Αφού η τοπολογία του (G, d_G) είναι η σχετική τοπολογία στο G και ο X είναι διαχωρίσιμος είναι σαφές ότι ο μετρικός χώρος (G, d_G) είναι διαχωρίσιμος(υπόχωρος διαχωρίσιμου μετρικού χώρου είναι διαχωρίσιμος). Τέλος δείχνουμε ότι ο (G, d_G) είναι πλήρης.

Έστω $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μια $d_G - Cauchy$ ακολουθία στον G. Εφόσον $d \leq d_G$ στο $G \times G$ η $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι και $d - Cauchy$. Αφού ο (X, d) είναι πλήρης υπάρχει $y \in \bar{G}$ με $y_i \to y$ στην d. Δείχνουμε ότι $y \in G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ και ότι $y_i \to y$ ως πρός την d_G.

Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε $d(y_i, F_n) \xrightarrow{i} d(y, F_n)$.

Αν είχαμε $y \in F_n$ θα ίσχυε $d(y, F_n) = 0$ και άρα $d(y_i, F_n) \xrightarrow{i} 0$.

Επομένως $d(y_i, F_n)^{-1} \xrightarrow{i} +\infty$. Ειδικότερα για κάθε $i \in \mathbb{N}$ θα υπήρχαν $j, s \geq i$ με

$$|d(y_j, F_n)^{-1} - d(y_s, F_n)^{-1}| > 2^{-n}$$

και

$$d_G(y_j, y_s) \geq min\{2^{-n}, |d(y_j, F_n)^{-1} - d(y_s, F_n)^{-1}| > 2^{-n}\} = 2^{-n}$$

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί η $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι d_G-Cauchy. Επομένως $y \notin F_n = X \setminus U_n$ δηλαδή $y \in U_n$.

Επειδή το n είναι τυχαίο καταλήγουμε ότι $y \in G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Αφού $y_i \xrightarrow{d} y$ και $y_i, y \in G, i \in \mathbb{N}$, προκύπτει ότι $y_i \xrightarrow{d_G} y$ και ο (G, d_G) είναι πλήρης. Το θεώρημα αυτό μας δίνει μια δεύτερη απόδειξη του ότι κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι Πολωνικός χώρος καθώς ως ανοικτό σύνολο είναι G_δ. □

Πόρισμα 2.1.7. *Οι άρρητοι αριθμοί είναι Πολωνικός χώρος ενώ οι ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q}$ δεν είναι Πολωνικός χώρος με την σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ενώ το $\mathbb{Q}$ δεν είναι (λόγω θεωρήματος Baire). Το ζητούμενο προκύπτει απο το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε. □

2.2. Borel Σύνολα

Ορισμός 2.2.1. Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X και μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.
(i) Τα σύνολα $\emptyset$, X ανήκουν στην $\mathcal{A}$.
(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A \setminus X \in \mathcal{A}$.
(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Ορισμένα βασικά παραδείγματα σ-αλγεβρών στο X είναι το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ και το $\emptyset, X$. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι εαν έχουμε ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{F}$ απο σ-άλγεβρες στο ίδιο σύνολο X τότε η τομή $\cap\mathcal{F} = \{A \subseteq X | \forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}, A \in \mathcal{A}\}$ είναι επίσης σ-άλγεβρα στο X.

Ορισμός 2.2.2. Θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X και το σύνολο $\mathcal{F}$ όλων των σ-αλγεβρών στο X που περιέχουν τα ανοικτά υποσύνολα του X, δηλαδή $\mathcal{F} = \{\mathcal{A}$ | η A είναι σ-άλγεβρα στο X και για κάθε ανοικτό $V \subseteq X$ έχουμε $V \in \mathcal{A}\}$.

Είναι φανερό ότι το σύνολο αυτό είναι μη κενό καθώς το δυναμοσύνολο του X $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}|X$ των Borel υποσυνόλων του X είναι η οικεγένεια $\mathcal{B}|X = \cap\mathcal{F}$.

Ορισμός 2.2.3. Ένα υποσύνολο του X ονομάζεται Borel αν ανήκει στην σ-άλγεβρα $\mathcal{B}|X$.

Η $\mathcal{B}|X$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα στο X που περιέχει τα ανοικτά σύνολα. Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}$ την κλάση όλων των Borel συνόλων σε μετρικούς χώρους.

Λήμμα 2.2.4. *Εάν ϵ είναι μια αριθμήσιμη υποβάση του X τότε $\mathcal{B}|X = \sigma(\epsilon)$ και επομένως η $\mathcal{B}|X$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη.*

Ορισμένα παραδείγματα Borel συνόλων είναι όλα τα ανοικτά και τα συμπληρώματά τους δηλαδή τα κλειστά σύνολα. Τα F_σ σύνολα είναι επίσης Borel ως αριθμήσιμη ένωση Borel συνόλων σε μετρικούς χώρους επομένως και τα G_δ ως συμπληρώματα των F_σ συνόλων τα οποία όπως είπαμε είναι Borel.

Πρόταση 2.2.5. *Για κάθε Πολωνικό χώρο X και κάθε $n \geq 1$ ισχύει $\Sigma_n^0|X \subseteq B|X$ δηλαδή κάθε Σ_n^0 υποσύνολο του X είναι και Borel υποσύνολο του X.*

Ο ορισμός των Borel συνόλων μας υπαγορεύει μια θεμελιώδη μέθοδο για να αποδεικνύουμε ιδιότητες των Borel συνόλων. Συγκεκριμμένα ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση της μορφής
Για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq X$ ισχύει η ιδιότητα Q
Τότε θεωρούμε την οικογένεια $\mathbb{A} = \{A \subseteq X \mid$ το A έχει την ιδιότητα $Q\}$. Άν δείξουμε ότι το A είναι σ-Άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του X τότε θα έχουμε $B|X \subseteq$ A και επομένως θα έχουμε αποδείξει την παραπάνω πρόταση. Ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου αυτή είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 2.2.6. *Η κλάση των Borel συνόλων είναι κλειστή ως προς την συνεχή αντικατάσταση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μετρικούς χώρους X,Y και μια συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$. Θα δείξουμε ότι για κάθε Borel $A \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}[A]$ είναι Borel υποσύνολο του X. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathbb{A} = \{A \subseteq Y \mid f^{-1}[A] \in B|X\}$ και δείχνουμε ότι είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του Y,προκύπτει απο το προηγούμενο ότι B|X $\subseteq A$ που είναι και το ζητούμενο. Θεωρούμε εν συνεχεία ένα ανοικτό $V \subseteq Y$. Αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[V]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X και επομένως είναι Borel σύνολο. Άρα $V \in \mathbb{A}$ και η $\mathbb{A}$ περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του X.
Επιπροσθέτως παρατηρούμε ότι $\emptyset, Y \in \mathbb{A}$ γιατί τα σύνολα αυτά είναι ανοικτά κατα τετριμμένο τρόπο. Αν $A \in \mathbb{A}$ τότε:

$$f^{-1}[Y \setminus A] = X \setminus f^{-1}[A] \in B|X.$$

Στα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $f^{-1}[A] \in B|X$ και ότι η οικογένεια των Borel υποσυνόλων του X είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα στο X. □

Για λόγους πληρότητας παραθέτουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.7. *(Οι θεμελιώδεις ιδιότητες κλειστότητας της κλάσης των Borel συνόλων).*
Η κλάση B των Borel συνόλων είναι κλειστή:
(i) ως προς την συνεχή αντικατάσταση
(ii) ως προς τους τελεστές $\vee, \&, \exists^{\leq}$, όπου X είναι μετρικός χώρος, και
(iii)ως προς τους τελεστές,όπου Υ είναι αριθμήσιμος Πολωνικός χώρος.

Πόρισμα 2.2.8. *Για κάθε Πολωνικό χώρο X έχουμε:*

$$B|X \subseteq \Delta_1^1|X$$

Πρόταση 2.2.9. *Αν X είναι ένας μετρικός χώρος και το Y είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X τότε ένα $A \subseteq Y$ είναι Borel στον μετρικό χώρο Y αν και μόνο αν είναι της μορφής $B \cap Y$ όπου το B είναι Borel στον X. Δηλαδή*
$B|Y = \{B \cap Y \mid B \in B|X\}$ *Ειδικότερα αν το Y είναι Borel υποσύνολο του X και το $A \subseteq Y$ είναι Borel στον Y τότε το A είναι Borel στον X.*

2.2.1. Borel-μετρησιμότητα.

Ορισμός 2.2.10. Έστω X,Y μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι Borel μετρήσιμη αν αντιστρέφει τα ανοικτά υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X, δηλαδή για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ έχουμε $f^{-1}[U] \in B|X$.

Προφανώς κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι Borel μετρήσιμη γιατί για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ έχουμε $f^{-1}[U]$ είναι ανοικτό και συνεπώς Borel.

Ένας ισομορφισμός f είναι Borel ισομορφισμός αν τόσο η συνάρτηση f όσο και η αντίστροφη της είναι Borel-μετρήσιμες. Τέλος θα λέμε ότι δυο μετρικοί χώροι X, Y είναι Borel ισομορφικοί αν υπάρχει Borel ισομορφισμός απο τον ένα στον άλλο.

Οι Borel μετρήσιμες συναρτήσεις χαρακτηρίζονται ως εξής:

Πρόταση 2.2.11. *Θεωρούμε μετρικούς χώρους X, Y και μια συνάρτηση $f : X \to Y$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η f αντιστρέφει τα ανοικτά υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X, δηλαδή η f είναι Borel-μετρήσιμη.*
2. *Η f αντριστρέφει τα Borel υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X, δηλαδή για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}[B]$ είναι Borel.*

Ορισμός 2.2.12. Θεωρούμε δυο Πολωνικούς χώρους X, Y και έναν μονομορφισμό $f : X \mapsto Y$. Η f λέγεται καλός Borel μονομορφισμός αν

(i) Είναι Borel-μετρήσιμη

(ii) Η εικόνα $f[X]$ είναι Borel υποσύνολο του Y, και

(iii) Η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f[X] \to X$ είναι Borel μετρήσιμη(θεωρώντας το $f[X]$ ως μετρικό υπόχωρο του Y).

Σχόλιο:

Είναι γνωστό ότι κάθε ένα προς ένα Borel μετρήσιμη συνάρτηση ικανοποιεί όλες τις πιο πάνω ιδιότητες, δηλαδή είναι καλός Borel μονομορφισμός.

Πρόταση 2.2.13. *Για κάθε καλό Borel μονομορφισμό $f : X \to Y$ και κάθε Borel σύνολο $B \subseteq X$ το σύνολο $f[B]$ είναι υποσύνολο του Y.*

Πρόταση 2.2.14. *Η σύνθεση καλών Borel μονομορφισμών είναι καλός Borel μονομορφισμός.*

Λήμμα 2.2.15. *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο X υπάρχει ένας καλός Borel μονομορφισμός* $\tau : 2^{\mathbb{N}} \mapsto X$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι υπάρχει ένας συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \mapsto X$. Δείχνουμε ότι η τ είναι επίσης καλός Borel-μονομορφισμός. Επειδή η τ είναι συνεχής είναι και Borel-μετρήσιμη. Επιπλέον το σύνολο $\tau[2^{\mathbb{N}}]$ είναι συμπαγές (ως συνεχής εικόνα συμπαγούς) και άρα είναι κλειστό υποσύνολο του X . Ειδικότερα το $\tau[2^{\mathbb{N}}]$ είναι Borel υποσύνολο του X. Τέλος η αντίστροφη συνάρτηση $\tau^{-1} : \tau[2^{\mathbb{N}}] \mapsto 2^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής και άρα Borel-μετρήσιμη.(Θεωρούμε γνωστό ότι αν ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος και η f : $X \mapsto Y$ είναι συνεχής και ένα-προς-ένα τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f[X] \mapsto X$ είναι συνεχής. □

Λήμμα 2.2.16. *Υπάρχει συνεχής μονομορφισμός* $\rho : \omega^{\omega} \mapsto 2^{\mathbb{N}}$ *για τον οποίο η συνάρτηση* $f^{-1} : f[X] \mapsto 2^{\mathbb{N}}$ *να είναι συνεχής και το σύνολο* $f[\omega^{\omega}]$ *είναι* Π^0_2 *υποσύνολο του* $2^{\mathbb{N}}$.

Λήμμα 2.2.17. *Για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο X υπάρχει ένας καλός Borel μονομορφισμός* $f : \omega^{\omega} \mapsto X$

Αποδυκνείεται ότι ισχύει και το ακόλουθο:

Λήμμα 2.2.18. *Για κάθε Πολωνικό χώρο X υπάρχει ένας καλός Borel μονομορφισμός* $\tau : X \mapsto \omega^{\omega}$.

Θεώρημα 2.2.19. *Θεώρημα Schröder-Bernstein για καλούς Borel μονομορφισμούς. Για κάθε δύο Πολωνικούς χώρους* X *και* Y *αν υπάρχουν καλοί Borel μονομορφισμοί* $f : X \mapsto Y$ *και* $g : Y \mapsto X$ *τότε υπάρχει Borel ισομορφισμός*

$$h : X \xrightarrow{\sim} Y.$$

Κάνοντας χρήση του παραπάνω θεωρήματος θα δείξουμε το επόμενο πολύ σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.20. *Κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος είναι Borel-ισομορφικός με τον χώρο του Baire.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο X. Σύμφωνα με τα λήμματα παραπάνω υπάρχουν καλοί Borel μονομορφισμοί $f : \omega^{\omega} \mapsto X$ και $\tau : X \mapsto \omega^{\omega}$. Επομένως απο το Θεώρημα Schröder-Bernstein για καλούς Borel μονομορφισμούς υπάρχει ισομορφισμός

$$h : \omega^{\omega} \xrightarrow{\sim} X.$$

□

Πόρισμα 2.2.21. *Κάθε δύο υπεραριθμήσιμοι Πολωνικοί χώροι είναι Borel ισομορφικοί.*

Η απόδειξη είναι άμεση απο το προηγούμενο θεώρημα.

2.3. Borel Ιεραρχία

Στο σημείο αυτό κάνουμε μια βασική αναφορά στην Borel ιεραρχία καθώς θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια τους συμβολισμούς που θα αναφερθούν εδώ.

Έστω X μετρικοποιήσιμος, έτσι ώστε κάθε κλειστό σύνολο είναι G_{δ}. Έστω επιπλέον ω_1 ο πρώτος υπεραριθμήσιμος διατακτικός αριθμός, και για $1 \leq \xi < \omega_1$ ορίζουμε με υπερπεπερασμένη αναδρομή τις κλάσεις Σ^0_{ξ},Π^0_{ξ} υποσυνόλων του X ως ακολούθως:

$$\Sigma^0_1(X) = \{U \subseteq X : U\ open\}$$

$$\Pi^0_{\xi} = \neg\Sigma^0_{\xi}$$

$$\Sigma^0_{\xi}(X) = \{\bigcup_n A_n : A_n \in \Pi^0_{\xi}(X), \xi_n < \xi, n \in \mathbb{N}\}\xi > 1.$$

$$\Delta^0_{\xi} = \Sigma^0_{\xi}(X) \cap \Pi^0_{\xi}(X).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το θεώρημα Galvin-Prikry και εφαρμογές

Η αρχή του περιστερεώνα μας λέει ότι εάν $[\mathbb{N}] = P_0 \cup ... \cup P_{k-1}$ είναι μια διαμέριση του $\mathbb{N}$ σε πεπερασμένα κομμάτια τότε για κάποιο $i < k$, το P_i είναι άπειρο. Ο Ramsey απέδειξε την ακόλουθη γενίκευση αυτής της αρχής: Για κάθε σύνολο X έστω:

$$[X]^n = \{A \subseteq X : card(A) = n\}, n = 1, 2, ...$$

Εάν $[\mathbb{N}]^n = P_0 \cup ... \cup P_{k-1}$ είναι μια διαμέριση του $[\mathbb{N}]^n$ σε πεπερασμένα κομμάτια, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $[H]^n \subseteq P_i$ για κάποιο $i < k$. Ένα τέτοιο σύνολο H καλείται ομογενές σύνολο για την διαμέριση.

Στο κεφάλαιο αυτό στόχος μας είναι να εξετάσουμε το ενδεχόμενο άπειρων επεκτάσεων του θεωρήματος Ramsey. Για κάθε σύνολο X, έστω $[X]^{\aleph_0}$=$\{A \subseteq X : card(A) = \aleph_0\}$. Δοθείσης μιας διαμέρισης $[\mathbb{N}]^{\aleph_0} = P_0 \cup ... \cup P_{k-1}$, μπορούμε να βρούμε $H \subseteq \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $[H]^{\aleph_0} \subseteq P_i$ για κάποιο i;

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι κάτι τέτοιο αποτυγχάνει για "παθολογικές" διαμερίσεις που κατασκευάζονται με την χρήση του Αξιώματος Επιλογής(A.C.). Πράγματι, μπορούμε να αριθμήσουμε όλα τα άπειρα υποσύνολα των φυσικών αριθμών με μια υπερπεπερασμένη ακολουθία $(H_\xi)_{\xi < 2^{\aleph_0}}$ και κάνοντας χρήση υπερπεπερασμένης αναδρομής στο $\xi < 2^{\aleph_0}$ να βρούμε διακριτά υποσύνολα των φυσικών, A_ξ, B_ξ με $A_\xi \cup B_\xi \subseteq H_\xi$. Έστω τώρα $P_0 = \{A_\xi : \xi < 2^{\aleph 0}\}, P_1 = [\mathbb{N}]^{\aleph_0}$ $\setminus P_0$. Είναι άμεσο ότι δεν υπάρχει i και άπειρο H με $[H]^{\aleph_0} \subseteq P_i$.

Πότε όμως η επέκταση αυτή δεν αποτυγχάνει;

Για να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα θα εισάγουμε ορισμένες έννοιες. Αρχικά θα εισάγουμε μια νεα τοπολογία στον χώρο $X \subseteq [\mathbb{N}]^{\aleph_0}$ την οποία ονομάζουμε τοπολογία Ellentuck. Για λόγους σαφήνειας καλούμε την τοπολογία του $X \subseteq [\mathbb{N}]^{\aleph_0}$ συνήθη τοπολογία. Γράφουμε $a < A$ εάν $\max(a) < \min(A)$ και χρησιμοποιούμε επιπροσθέτως τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$[a, A] = \{S \in [\mathbb{N}]^{\aleph_0} : a \subseteq S \subseteq a \cup A\}$$

Εδώ τα γράμματα a, b, c παίρνουν τιμές σε πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ ενώ τα A, B, C μπορούν να είναι άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$. Η τοπολογία που εισάγαμε έχει ως βασικά ανοικτά σύνολα της μορφής $[a, A]$ για $a < A$ η πληθικότητα των οποίων ταυτίζεται με αυτή του συνεχούς.

Ορισμός 3.0.1. Ένα σύνολο $X \subseteq [\mathbb{N}]^{\aleph_0}$ καλείται Ramsey εάν υπάρχει A με $[\emptyset, A] \subseteq X$ ή $[\emptyset, A] \subseteq \sim$X. Εάν για κάθε $a < A$ υπάρχει $B \subseteq A$ με $[a, B] \subseteq X$ ή $B \subseteq A$ με $[a, B] \subseteq \sim$ X τότε καλείται πλήρως Ramsey.

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να κάνουμε ορισμένα βήματα πίσω και να διευρύνουμε την οπτική με την οποία προσεγγίζουμε το ζήτημα μελετώντας την έννοια του σ-ιδεώδους με την βοήθεια του οποίου θα ορίσουμε την ιδιότητα του Baire και όπως θα φανεί απο τα επόμενα θα έχουμε στα χέρια μας το κατάλληλο εργαλείο για να εξετάσουμε πότε ένα σύνολο είναι πλήρως Ramsey. Έτσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.0.2. Ένα ιδεώδες σε ένα σύνολο X είναι μια συλλογή υποσυνόλων του X που περιέχει το $\emptyset$ και είναι κλειστή κάτω απο υποσύνολα και πεπερασμένες ενώσεις. Εάν επιπλέον είναι κλειστή κάτω απο αριθμήσιμες ενώσεις καλείται σ-ιδεώδες.

Τα πουθενά πυκνά σύνολα σε έναν τοπολογικό χώρο συνιστούν ιδεώδες, και τα ισχνά (meager) σύνολα σχηματίζουν ένα σ-ιδεώδες. Η έννοια του σ-ιδεώδους είναι χρήσιμη για την περιγραφή του μικρού μεγέθους ορισμένων συνόλων, όπως της ιδιότητας τους να είναι αριθμήσιμα, να έχουν μέτρο 0, να είναι ισχνά και ούτω καθεξής.

Έστω τώρα $\mathbb{I}$ ένα σ-ιδεώδες σε ένα σύνολο X. Εάν $A, B \subseteq X$ λέμε ότι τα A, B είναι ίσα modulo $\mathbb{I}$, συμβολικά $A =_{\mathbb{I}} B$, εάν η συμμετρική διαφορά $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathbb{I}$. Αυτή είναι εύκολο να δειχθεί ότι αποτελεί σχέση ισοδυναμίας που σέβεται τα συμπληρώματα, τις αριθμήσιμες τομές καθώς και τις αριθμήσιμες ενώσεις.

Στην ιδιέταιρη περίπτωση όπου $\mathbb{I}$ είναι το σ-ιδεώδες των ισχνών συνόλων σε έναν τοπολογικό χώρο, γράφουμε:

$$A =^* B$$

εάν τα A, B είναι ίσα modulo ισχνά σύνολα.

Ορισμός 3.0.3. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq X$ έχει την ιδιότητα του Baire(BP) εάν $A =^* U$ για κάποιο U ανοικτό υποσύνολο του X.

Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι μια σ-άλγεβρα σε ένα σύνολο X είναι μια συλλογή υποσυνόλων του X που περιέχει το $\emptyset$ και είναι κλειστή κάτω απο συμπληρώματα και αριθμήσιμες ενώσεις(επομένως και αριθμήσιμες τομές).

Πρόταση 3.0.4. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Η κλάση των συνόλων που έχουν την BP είναι μια σ-άλγεβρα στο X. Ειδικότερα, είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά και όλα τα ισχνά σύνολα.*

Θεώρημα 3.0.5. *(Ellentuck) Έστω $X \subseteq [\mathbb{N}]^{\aleph_0}$. Τότε το X είναι πλήρως Ramsey αν και μόνο αν το X έχει την ιδιότητα Baire στην τοπολογία του Ellentuck.*

Αρχικά θα χρειαστούμε τα επόμενα Λήμματα:

Λήμμα 3.0.6. *Έστω $a \in [\omega]^{<\omega}$, $A \in [\omega]^{\omega}$, και $W_i \subseteq [\omega]^{\omega}$ για $i \in \omega$ να είναι τέτοιο ώστε για κάθε $B \in [A]^{\omega}$, $[a, B] \nsubseteq \bigcap_{i\in\omega} W_i$. Τότε υπάρχει $i \in \omega$, $c \in [\omega]^{<\omega}$, και $C \in [\omega]^{\omega}$ τέτοιο ώστε $[c, C] \subseteq [a, A]$, $|c| \leq |a| + i$, και $[d, D] \nsubseteq W_i$ για κάθε $d \in [\omega]^{<\omega}$ και $D \in [\omega]^{\omega}$ τέτοιο ώστε $[d, D] \subseteq [c, C]$.*

Η απόδειξη του παραπάνω παραλείπεται και μπορεί να βρεθεί στο [6]

Λήμμα 3.0.7. *Κάθε μέλος του $\mathcal{C}$ είναι πλήρως Ramsey.*

Απόδειξη. Έστω $W \in \mathcal{C}$, $a \in [\omega]^{<\omega}$, και $A \in [\omega]^{\omega}$ να είναι τέτοιο ώστε $B \in [A]^{\omega}$, $[a, B] \nsubseteq W$. Ορίζουμε W_i για $i \in \omega$ επιλέγωντας $W_i = W$ στην περίπτωση που $i = 0$, και $W_i = [\omega]^{\omega}$ διαφορετικά. Απο το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχει $C \in [A]^{\omega}$ τέτοιο ώστε $[d, D] \nsubseteq W_0$ για κάθε $[d, D] \subseteq [a, C]$. Έστω τώρα $\overline{W_i} = [\omega]^{\omega} - W$ για κάθε $i \in \omega$. Καθώς $W \in \mathcal{C}$, υπάρχει, απο το προηγούμενο Λήμμα, ένα $B \in [C]^{\omega}$ τέτοιο ώστε $[a, B] \subseteq \bigcap_{i\in\omega} \overline{W_i}$.

□

Παραθέτουμε την απόδειξη:

Απόδειξη. Εαν ο X είναι πλήρως Ramsey, τότε ισχυριζόμαστε ότι ο $Y = X \setminus Int(X)$ δεν είναι πουθενά πυκνός (nowhere dense) άρα ο X έχει την ιδιότητα Baire. Πράγματι, εάν κάτι τέτοιο δεν ίσχυε τότε θα υπήρχε $a < A$ με $[a, A] \subseteq \overline{Y}$. Έστω τώρα $B \subseteq A$ τέτοιο ώστε $[a, B] \subseteq X$ ή $[a, B] \subseteq \sim X$. Καθώς $[a, B] \cap Y \neq \emptyset, [a, B] \subseteq \sim X$ είναι αδύνατο. Άρα $[a, B] \subseteq X$ επομένως $[a, B] \subseteq Int(X)$ και $[a, B] \cap Y = \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο.

Για την αντίθετη κατεύθυνση έχουμε τα ακόλουθα: Εάν το $W \subseteq [\omega]^{\omega}$ έχει την ιδιότητα του Baire, τότε υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο O τέτοιο ώστε το $(0 - W) \cup (W - O)$ να είναι ισχνό. Γνωρίζουμε επιπλέον ότι κάθε ισχνό σύνολο (κάθε ισχνό είναι αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών συνόλων) ανήκει στον χώρο του Baire, καθώς ο χώρος του Baire είναι κλειστός κάτω απο αριθμήσιμες ενώσεις. Έχουμε συγκεκριμμένα $(0 - W) \cup (W - O) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, επομένως καθώς το $O \in \mathcal{C}$ έχουμε ότι $(0 - W) \cup (W - O)$ ανήκει στον χώρο του Cantor. Επομένως απο το προηγούμενο Λήμμα είναι πλήρως Ramsey. □

Εν συνεχεία θα αποδείξουμε το θεώρημα Galvin-Prikry.

Θεώρημα 3.0.8. *(Galvin-Prikry, [2]) Έστω $[\mathbb{N}]^{\aleph_0} = P_0 \cup ... \cup P_{k-1}$ όπου κάθε P_i είναι Borel. Τότε υπάρχει ενα άπειρο $H \subseteq \mathbb{N}$ και $i < k$ με $[H]^{\aleph_0} \subseteq P_i$*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας επαγωγή και εκμεταλευόμενοι το γεγονός ότι η αύξουσα αρίθμηση ενός άπειρου συνόλου $H \subseteq \mathbb{N}$ παράγει έναν ομοιομορφισμό μεταξύ των $X \subseteq [\mathbb{N}]^{\aleph_0}$ και $[H]^{\aleph_0}$ αρκεί να εργαστούμε για την περίπτωση όπου $X \subseteq [\mathbb{N}]^{\aleph_0} = P_1 \cup P_2$ όπου τα P_1, P_2 είναι Borel και $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Τότε το P_1 είναι Borel στην τοπολογία του Ellentuck(καθώς τα βασικά ανοικτά στην συγκεκριμμένη τοπολογία είναι το κενό σύνολο και σύνολα της μορφής $[a, A]$ όπου $a \in \omega^{<\omega}$ & $A \in \omega^{\omega}$) επομένως έχει την ιδιότητα Baire και άρα είναι πλήρως Ramsey σύμφωνα με το θεώρημα του Ellentuck. $\square$

3.1. Μια εφαρμογή στην θεωρία χώρων Banach

Δοθέντως ενός πραγματικού χώρου Banach με νόρμα $||.||$, λέμε ότι μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1 εάν υπάρχουν θετικές σταθερές a, b τέτοιες ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $c_0, c_1, ..., c_{(n-1)} \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$a\sum_{i=0}^{n-1}|c_i| \leq ||\sum_{i=0}^{n-1}c_ix_i|| \leq b\sum_{i=0}^{n-1}|c_i|.$$

Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι η απεικόνιση $(c_i) \in \ell_1 \mapsto \sum_{i=0}^{\infty}c_ix_i$ η ύπαρξη της οποίας δικαιολογείται απο τις προηγούμενες ανισότητες συνιστά εμφύτευση του ℓ_1 στον X.

Θεώρημα 3.1.1. *(Rosenthal) Εάν (f_n) είναι μια φραγμένη ακολουθία στον $l^\infty(S)$, τότε υπάρχει μια υπακολουθία (f_{n_k}) τέτοια ώστε είτε η (f_{n_k}) είναι κατα σημείο συγκλίνουσα είτε η (f_{n_k}) είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1.*

Πόρισμα 3.1.2. *Εάν ο X είναι ένας πραγματικός χώρος Banach τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) *Κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n) \in X$ έχει μια ασθενώς Cauchy υπακολουθία(δηλαδή για κάθε $x^* \in X^*$, $(x^*(x_{n_k}))$ συγκλίνει).*

(ii) *Ο ℓ_1 δεν εμφυτεύεται στον X.*

Απόδειξη. (Του 3.1.2 απο το 3.1.1)

i) $\to$ ii)

Εάν καλέσουμε e_n το n-οστό μοναδιαίο διάνυσμα του ℓ_1(μια άπειρη δηλαδή ακολουθία που στην n-οστή της θέση παίρνει την τιμή 1) τότε η e_n δεν έχει ασθενώς Cauchy υπακολουθία, καθώς εάν e_{nk} ήταν μια τέτοια υπακολουθία τότε για κάθε $x^* \in \ell_1^* = \ell^\infty(S)$ που δίνεται απο $x^*(i) = 1$ εάν $i = n_{2k}$ για κάποιο k και $x^*(i) = 0$ διαφορετικά θα έχουμε:

$$x^*(e_{nk}) = \sum x^*(i)e_{nk}(i) = x^*(n_k).$$

ii) $\to$ *i)*

Προκύπτει άμεσα απο το θεώρημα Rosenthal καθώς κάθε στοιχείο $x \in X$ δύναται να ειδωθεί ως μια συνάρτηση στο $S = B_1(X^*)$, ως εξής:

$$x(x^*) = x^*(x) \,\&\, ||x||_\infty = ||x||.$$

□

Απόδειξη. (Του 3.1.1) Δοθέντων $A, B \subseteq S$ λέμε ότι τα (A, B) είναι ξένα αν $A \cap B = \emptyset$.

Μια ακολουθία απο ξένα ζεύγη (A_n, B_n) καλείται ανεξάρτητη εάν για κάθε δύο πεπερασμένα υποσύνολα F, G του $\mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$\bigcap_{n\in F}A_n \cap \bigcap_{n\in G}B_n \neq \emptyset$$

Λήμμα 3.1.3. *Για αρρήτους $r < s$, έστω, $A_n = {A_n}^{r,s} = \{x : f_n(x) < r\}$,$B_n = {B_n}^{r,s} = \{x : f_n(x) > s\}$. Εάν $((A_n, B_n))$ είναι ανεξάρτητα, τότε η (f_n) είναι ισοδύναμη με την μοναδιαία βάση του* **l1**

Απόδειξη. Καθώς για κάποιο b, $||f_n||_\infty \leqslant b < \infty$ για κάθε n, είναι προφανές ότι:

$$||\sum_{i=0}^{n-1}c_if_i||_\infty \leq b\sum_{i=0}^{n-1}|c_i|.$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι:

$$||\sum_{i=0}^{n-1}c_if_i||_\infty \geq (\frac{s-r}{2})b\sum_{i=0}^{n-1}|c_i|.$$

Έστω $F = \{i < n : c_i \geq 0\}, G = \{i < n : c_i < 0\}$. Λόγω ανεξαρτησίας, έστω:

$$x \in \bigcap_{i\in F}A_i \cap \bigcap_{i\in G}B_i, y \in \bigcap_{i\in F}A_i \cap \bigcap_{i\in G}B_i.$$

Τότε:

$$c = \sum_{i<n} c_i f_i(y) \geq \sum_{i \in F} |c_i| s - \sum_{i \in G} |c_i| r.$$

Επιπροσθέτως:

$$d = \sum_{i<n} c_i f_i(x) \leq \sum_{i \in F} |c_i| r - \sum_{i \in G} |c_i| s.$$

επομένως:

$$c - d \geq (s-r) \sum_{i<n} |c_i|.$$

□

Λέμε ότι μια ακολουθία $((A_n, B_n))$ απο ξένα ζεύγη είναι συγκλίνουσα εάν:
$\forall x$[(για όλα πλην πεπερασμένα n $x \notin A_n$)] $\wedge$ $\forall x$[(για όλα πλην πεπερασμένα n $x \notin B_n$)].

Λήμμα 3.1.4. *Άν για όλους τους αρρήτους $r < s$, η ακολουθία $((A_n{}^{r,s}, B_n{}^{r,s}))$ συγκλίνει τότε η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο.*

Απόδειξη. Είς άτοπον. Έστω $r < s$ τέτοια ώστε για κάποιο $x \in S$, $\liminf f_n(x) < r < s < limsup f_n(x)$. Τότε για άπειρα το πλήθος n, $x \in A_n{}^{r,s}$ και την ίδια στιγμή για άπειρα το πλήθος n, $x \in B_n{}^{r,s}$ άτοπο. □

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με την χρήση του ακόλουθου λήμματος.

Λήμμα 3.1.5. *Κάθε ακολουθία $((A_n, B_n))$ απο ξένα ζεύγη περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία ή μια ανεξάρτητη υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω $P \subseteq [\mathbb{N}]^{\aleph_0}$ να ορίζεται ως ακολούθως:

$$\{n_0, n_1, ...\} \subseteq P \iff \forall k[\bigcap_{i<k,\ i\ even} A_{n_i} \cap \bigcap_{i<k,\ i\ odd} B_{n_i}]$$

όπου $n_0 < n_1 < ....$

Το P είναι προφανώς κλειστό, επομένως υπάρχει $H \subseteq \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$[H]^{\aleph_0} \subseteq P \wedge [H]^{\aleph_0} \subseteq P^C.$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1:

$$[H]^{\aleph_0} \subseteq P$$

Θα δείξουμε ότι αν $H = m_0, m_1, ...$, με $m_0 < m_1 < ...$ τότε η ακολουθία $((A_{m_{2i+1}}), (B_{m_{2i+1}}))$ είναι ανεξάρτητη. Για να ισχύει αυτό αρκεί να δείξουμε ότι εάν $F, G \subseteq 0, ..., k-1$, $F \cap G = \emptyset$, $F \cup G = 0, ..., k-1$ τότε:

$$\bigcap_{i \in F} A_{m_{2i+1}} \cap \bigcap_{i \in G} B_{m_{2i+1}} \neq \emptyset$$

Αλλά είναι εύκολο να δειχθεί ότι υπάρχει $I = \{n_0, n_1, ...\} \subseteq H$ με $n_0 < n_1 < ...$, τέτοιο ώστε:

$$\bigcap_{i \in F} A_{m_{2i+1}} \cap \bigcap_{i \in G} B_{m_{2i+1}} \supseteq \bigcap_{i<l,\ i\ even} A_{n_i} \cap \bigcap_{i<l,\ i\ odd} B_{n_i}$$

για κάποιο $l > k$.

Περίπτωση 2:

$$[H]^{\aleph_0} \subseteq P^C$$

Θα δείξουμε ότι αν $H = m_0, m_1, ...$, με $m_0 < m_1 < ...$ τότε η ακολουθία $((A_{m_i}), (B_{m_i}))$ είναι συγκλίνουσα. Είς άτοπον. Τότε θα υπήρχε x και άπειρα I, J τέτοια ώστε $I = \{m_i : x \in A_{m_i}\}$ και $J = \{m_i : x \in B_{m_i}\}$. Εδώ σημειώνουμε ότι $I \cap J = \emptyset$. Επομένως μπορούμε να βρούμε $K = \{n_0, n_1, ...\} \subseteq H$ με $n_0 < n_1 < ...$ τέτοια ώστε $\{n_0, n_2, ...\} \subseteq I$ και $\{n_1, n_3, ...\} \subseteq J$. Τότε όμως θα ίσχυε ότι $K \in P$ το οποίο είναι άτοπο. □

□

3.2. Determinancy

Έστω A μη κενό σύνολο και $X \subseteq [A]^{\aleph_0}$. Συνδέουμε το X με το ακόλουθο παίγνιο:

$$\begin{array}{l|lllll} \mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & \\ & & & & & \dots \\ \mathrm{II} & & a_1 & & a_3 & \end{array}$$

O παίκτης I παίζει το $a_0 \in A$, η παίκτρια II απαντά με το $a_1 \in A$, εν συνεχεία ο παίκτης I παίζει το $a_2 \in A$ και ούτω καθεξής. O παίκτης I κερδίζει τον γύρο εάν $(a_n) \in X$ (Το X καλείται σύνολο αποπληρωμής). Συμβολίζουμε αυτο το παίγνιο με $G(A, X)$ ή απλά $G(X)$ εάν το A είναι εννοούμενο. Μια στρατηγική για τον παίκτη I είναι μια απεικόνιση:

$$\phi : A^{<\aleph_0} \to A^{<\aleph_0}$$

τέτοια ώστε το μήκος$(\phi(s) =$ μήκος$(s) + 1$ και $s \subseteq$ t $\Rightarrow \phi(s) \subseteq \phi(t)$.

Σε γενικές γραμμές, μια στρατηγική μας δίνει έναν τρόπο για να αποφασίσουμε τι να κάνουμε σε κάθε δεδομένη κατάσταση. Μπορούμε να το επισημοποιήσουμε αυτό πολύ εύκολα: μια στρατηγική για τον παίκτη I είναι μια συνάρτηση σ που αντιστοιχίζει ακολουθίες $(n_1, n_2, \dots, n_{2k})$ σε ακέραιους αριθμούς n. (Επιτρέπουμε στο k να είναι μηδέν, οπότε οι ακολουθίες μπορεί να είναι κενές.)

O παίκτης I παίζει σύμφωνα με τη στρατηγική σ εάν στο τέλος του παιχνιδιού έχουμε μια ακολουθία $(n_1, n_2, \dots)$ τέτοια ώστε $n_{2k+1} = \sigma(n_1, \dots, n_{2k})$ για κάθε k. Με άλλα λόγια, ο παίκτης I χρησιμοποιεί τη συνάρτηση σ για να αποφασίσει ποιόν θετικό ακέραιο αριθμό θα παίξει, δεδομένης της μέχρι τώρα σειράς.

Μια στρατηγική για την δεύτερη παίκτρια ορίζεται με παρόμοιο τρόπο, αλλά τώρα η συνάρτηση ορίζεται σε ακολουθίες περιττού μήκους. Σημειώνουμε ότι εάν το σ είναι μια στρατηγική για τον παίκτη I και το τ είναι μια στρατηγική για την παίκτρια II, τότε οι δύο στρατηγικές ορίζουν μια μοναδική άπειρη ακολουθία — η ακολουθία που προκύπτει εάν ο παίκτης I παίζει με τη στρατηγική σ και η παίκτρια II παίζει με τη στρατηγική τ. Αυτή η ακολουθία συμβολίζεται με $\sigma \circ \tau$.

Μια στρατηγική σ είναι μια στρατηγική νίκης για τον παίκτη I εάν $\sigma \circ \tau \in A$ για κάθε νικητήρια στρατηγική τ της παίκτριας II. Ισοδύναμα, το σ είναι μια στρατηγική νίκης για τον παίκτη I, εάν κάθε ακολουθία $(n_1, n_2, \dots)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $n_{2k+1} = \sigma(n_1, \dots, n_{2k})$ για κάθε k ανήκει στο A . Ομοίως, μπορούμε να ορίσουμε μια στρατηγική νίκης για την παίκτρια II. Σε κάθε περίπτωση είναι σαφές ότι δεν μπορούν και οι δύο παίκτες να κερδίζουν, για τον λόγο αυτό ο παίκτης ή η παίκτρια με την νικητήρια στρατηγική κερδίζει τον γύρο.

Ένα παιχνίδι είναι καθορισμένο εάν κάποιος απο τους δύο παίκτες έχει νικητήρια στρατηγική.
Γιατί δεν είναι προφανές ότι όλα τα παίγνια είναι καθορισμένα;
Η διαίσθηση μας, μας υπαγορεύει ότι όλα τα παίγνια θα έπρεπε να είναι καθορισμένα καθώς επι παραδείγματι εάν ο παίκτης I δεν έχει νικητήρια στρατηγική τότε η παίκτρια II θα έχει νικητήρια στρατηγική. Υποθέτωντας όμως το αξίωμα επιλογής το παραπάνω συμπέρασμα είναι εσφαλμένο. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι δεν είναι σε καμία περίπτωση κάτι το τετριμμένο να υποθέσουμε ότι όλα τα παίγνια είναι καθορισμένα.

Για να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα πρέπει να εξετάσουμε τι είναι αυτό που μας δημιουργεί την εντύπωση πως κάθε φορά κάποιος απο τους δύο παίκτες θα έχει νικητήρια στρατηγική.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι ο παίκτης I δεν έχει νικητήρια στρατηγική. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μια στρατηγική για την παίκτρια II ως ακολούθως:

Μετά την πρώτη κίνηση του παίκτη I πρέπει να υπάρχει κίνηση της II έτσι ώστε στην επόμενη κίνηση ο παίκτης I να εξακολουθεί να μην έχει νικητήρια στρατηγική. Σε διαφορετική περίπτωση ο παίκτης I θα είχε νικητήρια στρατηγική, με τετριμμένο τρόπο.

Αυτή η αλληλουχία κινήσεων μπορεί να συνεχισθεί με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε μετά από κάθε κίνηση του παίκτη I, η πάικτρια II θα έχει την δυνατότητα να επιλέξει κατάλληλη κίνηση έτσι ώστε ο I να μην έχει νικητήρια στρατηγική στην επόμενη του θέση. Η στρατηγική της II μπορεί να διατυπωθεί ως εξής :

Επαναλαμβανόμενα παίζει τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n έτσι ώστε να οδηγήσει τον παίκτη I στην επιλογή κατάστατσης η οποία δεν είναι θέση νίκης.

Εάν η παίκτρια ΙΙ ακολουθήσει την παραπάνω στρατηγική τότε σε κανένα σημείο του παιχνιδιού ο παίκτης Ι δεν θα έχει νικητήρια στρατηγική. Αλλά αυτό συνεπάγεται ότι ο παίκτης Ι χάνει; Όχι απαραίτητα.

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι στόχος του παίκτη Ι είναι να κατασκευάσει την ακολουθία που περιέχει μόνο μονάδες. Τότε ό,τι και αν παίξει η ΙΙ, ο Ι δεν είναι ποτέ σε θέση να έχει νικητήρια στρατηγική. Στην περίπτωση που η ΙΙ συνεργαστεί και παίζει μονάδες τότε τελικά ο Ι κερδίζει.

3.3. Ανοικτά παίγνια

Αυτό που μπορούμε να αποδείξουμε είναι ότι μια συγκεκριμένη σημαντική κατηγορία παιγνίων είναι καθορισμένη: η κατηγορία των ανοικτών παιγνίων. Ανεπίσημα, ένα ανοικτό παιχνίδι είναι ένα παιχνίδι με την ιδιότητα ότι εάν ο Παίκτης Ι κερδίσει, τότε πρέπει να υπάρχει ένα πεπερασμένο στάδιο στο οποίο έχει ήδη κερδίσει, με την έννοια ότι όλες οι προεκτάσεις της ακολουθίας που έχει φτάσει μέχρι τώρα βρίσκονται στο Α.

Ένα φαινομενικά απλό παράδειγμα ανοικτού παιγνίου είναι το σύνολο των ακολουθιών $(n_1, n_2, ...)$ με τουλάχιστον n_2 το πλήθος μονάδες. Ο παίκτης Ι μπορεί να κερδίσει αυτό το παιχνίδι εύκολα επιλέγοντας κάθε φορά τον αριθμό 1. Επιπροσθέτως εάν ο παίκτης Ι κερδίσει το παιχνίδι θα υπάρχει κάποιο σημείο στο οποίο τουλάχιστον n_2 μονάδες θα έχουν επιλεχθεί ενώ μετά απο αυτό το σημείο δεν έχει σημασία τι θα παιχτεί. Ας σημειωθεί βέβαια πως η παίκτρια ΙΙ μπορεί να καθυστερήσει για όσο επιθυμεί την στιγμή αυτή επιλέγοντας το n_2 αρκετά μεγάλο. Έτσι ενώ η νίκη για τον παίκτη Ι θα επιτευχθεί σε πεπερασμένο χρόνο δεν υπάρχει κάποιο άνω φράγμα για τον χρόνο αυτό.

Τα ανοιχτά παίγνια φέρουν αυτό το όνομα επειδή τα νικητήρια σύνολα είναι ανοικτά στην τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, όπου το ίδιο το $\mathbb{N}$ είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία. Τα βασικά ανοικτά σύνολα σε αυτήν την τοπολογία μπορούν να περιγραφούν ως εξής. Έστω $s = (n_1, \ldots, n_k)$ μια πεπερασμένη ακολουθία.

Τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα ανοιχτό σύνολο N_s λαμβάνοντας όλες τις ακολουθίες με το s ως αρχικό τμήμα. Αυτά είναι τα βασικά ανοιχτά σύνολα, επομένως ένα ανοιχτό σύνολο είναι μια ένωση συνόλων της μορφής N_s. Εάν το A είναι ένα ανοιχτό σύνολο και το α είναι μια άπειρη ακολουθία που ανήκει στο A, τότε πρέπει να υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία s τέτοια ώστε $\alpha \in N_s$ και το $N_s \subseteq A$.

Δηλαδή, πρέπει να υπάρχει κάποιο αρχικό τμήμα s του α έτσι ώστε κάθε ακολουθία που αρχίζει με s να ανήκει στο A.

Ας υποθέσουμε ότι το A είναι ένα ανοικτό παίγνιο και ότι ο παίκτης Ι δεν έχει στρατηγική νίκης. Στη συνέχεια, σύμφωνα με το προηγούμενο επιχείρημα, είναι δυνατόν η παίκτρια ΙΙ να παίξει, εμποδίζοντας τον παίκτη Ι να φτάσει οποιαδήποτε στιγμή σε θέση που να έχει στρατηγική νίκης.

Συγκεκριμένα, η παίκτρια ΙΙ μπορεί να παίξει με τέτοιο τρόπο ώστε να μην συμβαίνει ποτέ ότι κάθε επέκταση της ακολουθίας μέχρι στιγμής ανήκει στο A (στο οποίο όλες οι πιθανές στρατηγικές για τον Παίκτη Ι θα ήταν νικηφόρες). Αλλά αν το A είναι ανοιχτό, αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία που επιτυγχάνεται στο τέλος του παιχνιδιού δεν ανήκει στον A.

Έτσι, ένας τρόπος για να απαντήσουμε στο ερώτημα γιατί δεν είναι προφανές ότι όλα τα παίγνια είναι καθορισμένα είναι να πούμε ότι η προφανής «απόδειξη» που έρχεται στο μυαλό δείχνει αντίθετα την πιο ασθενή δήλωση ότι τα ανοικτά παίγνια καθορίζονται, καθώς αυτά τα παίγνιο, εξ'ορισμού, έχουν την ιδιότητα ότι αν η ΙΙ μπορεί να καταφέρει να μην χάσει σε κανένα πεπερασμένο στάδιο, τότε κερδίζει. Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στους Γκέιλ(Gale) και Στιούαρτ(Stewart) το 1953. Η απόδειξη είναι εύκολη, αλλά το άρθρο των Gale και Stewart ήταν επίσης αυτό όπου πρωτοεμφανίστηκαν άπειρα παίγνια αυτού του είδους.

Στο σημείο αυτό θα διατυπώσουμε πλήρως το θεώρημα των Gale-Stewart και θα δείξουμε την ισοδυναμία αυτού με το αξίωμα της επιλογής(AC). Ως συνήθως εφοδιάζουμε το $A^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο,όπου το A είναι διακριτό και επιπλέον το $[T]$ είναι κλειστό υποσύνολο του Α στην σχετική τοπολογία.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω T μη κενό κλαδεμμένο δέντρο στο Α. Έστω επιπλέον $X \subseteq [T]$ ανοικτό ή κλειστό στο $[T]$. Τότε το $G(T, X)$ είναι καθορισμένο.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι το X είναι κλειστό. Επιπλέον ας θεωρήσουμε ότι η παίκτρια II δεν έχει νικητήρια στρατηγική στο παίγνιο $G(T, X)$. Θα βρούμε μια νικητήρια στρατηγική για τον παίκτη I.

Δοθείσης μιας θέσης $p = (a_0, a_1, ..., a_{2n-1}) \in T$ με τον I να έχει την επόμενη κίνηση, λέμε ότι ο I δεν χάνει εαν η II δεν έχει νικητήρια στρατηγική απο το σημείο εκείνο και έπειτα, δηλαδή η παίκτρια II δεν έχει νικητήρια στρατηγική στο παίγνιο $G(T_p, X_p)$, όπου $T_p = (s : p^s \in T)$ και $\mathrm{X}_p = (x : p^x \in X)$. Επομένως, εάν ο I παίξει το κενό σύνολο δεν χάνει.

Η προφανής αλλά κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι εαν η θέση p, δεν είναι θέση ήττας για τον I, υπάρχει $a_{2n} \in T_p$ έτσι ώστε για κάθε a_{2n+1} με $(a_{2n}, a_{2n+1}) \in T_p, p^(a_{2n}, a_{2n+1})$ δεν είναι επίσης θέση ήττας για τον I.

Χρησιμοποιούμε την παραπάνω παρατήρηση για να κατασκευάσουμε μια στρατηγική για τον παίκτη I ως ακολούθως:

Ο παίκτης I ξεκινά επιλέγοντας το a_0, με το $a_0 \in T$, έτσι ώστε για κάθε a_1 με $(a_0, a_1) \in T$ η θέση (a_0, a_1) δεν είναι θέση ήττας για τον I .Εν συνεχεία η II παίζει κάποιο a_1 με $(a_0, a_1) \in T$. Ο I απαντά επιλέγοντας κάποιο a_2,με $(a_0, a_1, a_2) \in T$, έτσι ώστε για κάθε a_3 με $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in T$, (a_0, a_1, a_2, a_3) δεν είναι θέση ήττας για τον I κ.ο.κ.

Υποστηρίζουμε ότι αυτή η στρατηγική είναι νικητήρια για τον I. Πράγματι, εάν $(a_0, a_1, ...)$ είναι ενα "στιγμιότυπο" του παιχνιδιού στο οποίο ο I την ακολούθησε, τότε $(a_0, a_1, ..., a_{2n-1}) \in T$ δεν είναι θέση ήττας για τον I, για κάθε n. Εάν $(a_n) \notin X$, τότε καθώς X είναι ανοικτό στο $[T]$, υπάρχει k τέτοιο ώστε $N_{(a_0,...,a_{2k-1})} \cup T \subseteq X$. Αλλά τότε $(a_0, a_1, ..., a_{2n-1})$ θα είναι θέση ήττας για τον I, καθώς η II έχει τετριμμένη νικητήρια στρατηγική απο το σημείο αυτό και έπειτα(παίζει αυθαίρετα). Η περίπτωση όπου το X είναι ανοικτό, είναι επι της ουσίας η ίδια. Εναλάσσοντας απλά τους ρόλους των παικτών I και II. Η μόνη διαφορά είναι ότι η παίκτρια II παίζει δεύτερη, αλλά αυτό δεν επηρεάζει την συλλογιστική πορεία που ακολουθήσαμε προηγουμένως. □

Εν συνεχεία θα παρουσιάσουμε μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση την οποία θα καταχωρήσουμε ως λήμμα.

Λήμμα 3.3.2. *Το αξίωμα της επιλογής(AC) είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη νικητήριας στρατηγικής στο παίγνιο Gale-Stewart.*

Αρχικά υπενθιμίζουμε το AC:
$\forall X[\emptyset \notin X \Longrightarrow \exists f : X \to \bigcup X \quad \forall A \in X(f(A) \in A)]$.

Θα δείξουμε την μια εκ των δύο κατευθύνσεων στην οποία γίνεται και ξεκάθαρος ο τρόπος με τον οποίο το αξίωμα της επιλογής υπεισέρχεται στην διαδικασία απόδειξης της ύπαρξης νικητήριας στρατηγικής στο παίγνιο Gale-Stewart. Αρχικά, θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό: Εάν $A \subseteq X^\omega$ και $u = (a_0, ..., a_{n-1})$ είναι μια ακολουθία άρτιου μήκους, τότε το υποπαίγνιο του A στο u είναι το:

$$A(u) = \{f \in X^\omega : (a_0, a_1, ..., a_{n-1}, f(0), f(1), ...) \in A\}$$

Λήμμα 3.3.3. *Έστω $A \subseteq X^\omega$ και $u = (a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ να είναι μια πεπερασμένη ακολουθία απο το X άρτιου μήκους. Άν η παίκτρια II δεν κερδίζει το παίγνιο $A(u)$, τότε για κάθε b υπάρχει κάποιο a έτσι ώστε η II να μην κερδίζει ούτε το $A(u \wedge (a, b))$.*

Απόδειξη. Εις άτοπον, ας υποθέσουμε ότι η παίκτρια II δεν κερδίζει το παίγνιο $A(u)$ πάραυτα υπάρχει κάποιο b και μια στρατηγική τ που έιναι νικητήρια για την II στο $A(u \wedge (a, b))$. Κάνωντας χρήση του Αξιώματος επιλογής, έστω:

$$a \rightarrowtail (b^a, \tau^a)$$

μια συνάρτηση που αποδίδει σε κάθε a κάποια b^a και τ^a με αυτές τις ιδιότητες. Τώρα η παίκτρια II μπορεί να κερδίσει το $A(u)$ απαντώντας στην πρώτη κίνηση του I, a_0, με το b^{a_0} και ύστερα να ακολουθήσει την στρατηγική τ^{a_0}, σαν να έπαιζε στο $A(u \wedge (a_0, b^{a_0}))$.

Ειδικότερα ορίζουμε την τ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\tau(a_0) = b^{a_0}$$

$$\tau(a_0, ..., a_{n-1}) = \tau^{a_0}(a_2, ..., a_{n-1})(oddn)$$

ας υποθέσουμε επιπλέον ότι ο παίκτης Ι παίζει την ακολουθία $f = (a_0, a_1, ...) \in A(u)$ ενόσω η παίκτρια ΙΙ απαντά σύμφωνα με την τ. Τότε $(a_2, a_3, ...) \notin A(u \wedge (a_0, a_1)$, καθώς η ΙΙ ακολουθεί την τ^{a_0} ύστερα απο τις δύο πρώτες κινήσεις επομένως:

$$(a_0, a_1, a_2, ...) \notin A(u)$$

δηλαδή, η παίκτρια ΙΙ κερδίζει τον γύρο.

□

Εάν κάνουμε χρήση του αξιώματος επιλογής, τότε το να δείξουμε ότι υπάρχουν μη καθορισμένα παιχνίδια είναι σχετικά απλό. Αξίζει να σημειωθεί αρχικά ότι το σύνολο των πιθανών στρατηγικών έχει την ίδια πληθικότητα με αυτήν του συνεχούς, αφού μια στρατηγική είναι μια συνάρτηση από ένα μετρήσιμο σύνολο (όλων των θετικών ακέραιων ακολουθιών άρτιου μήκους ή όλων των θετικών ακέραιων ακολουθιών περιττού μήκους) σε ένα μετρήσιμο σύνολο (θετικών ακεραίων). Επομένως, μπορούμε να διατάξουμε καλά το σύνολο όλων των στρατηγικών με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε στρατηγική να έχει λιγότερες από το συνεχές σε πληθικότητα στρατηγικές που προηγούνται αυτής.

Πως κατασκευάζουμε ένα μη καθορισμένο παίγνιο:

Είναι άμεσο από τους ορισμούς πως δεν γίνεται και οι δύο παίκτες να κερδίζουν το ίδιο παίγνιο. Αυτό δεν συνεπάγεται όμως πως αναγκαστικά ένας εκ των δύο θα κερδίζει πάντα. Δεδομένου ότι ο παίκτης Ι ακολουθεί την στρατηγική σ ενώ η παίκτρια ΙΙ την στρατηγική τ Θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό για να διευκολύνουμε την καταννόηση.

ο Παίκτης Ι κερδίζει το παίγνιο $G_X(A) \iff \exists\sigma\forall\tau(\sigma * \tau \in A)$

η Παίκτρια ΙΙ κερδίζει το παίγνιο $G_X(A) \iff \exists\tau\forall\sigma(\sigma * \tau \notin A)$

Για να δούμε το παραπάνω ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης Ι δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(A)$. Ισοδύναμα :

$$\forall\sigma\exists\tau(\sigma * \tau \notin A)$$

Αυτή είναι μια πιο ασθενής υπόθεση απο το ότι η παίκτρια ΙΙ κερδίζει. Ειδικότερα, στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι για κάθε σ υπάρχει στρατηγική τ η οποία μπορεί να εξαρτάται απο την σ ώστε η παίκτρια ΙΙ να κερδίζει τον γύρο ενώ στην περίπτωσή μας έχουμε ότι υπάρχει μια στρατηγική τ ώστε για κάθε σ η παίκτρια ΙΙ να κερδίζει τον γύρο. Αυτό υποδεικνύει ότι η άρνηση της πρότασης: ο Παίκτης Ι δεν κερδίζει το παίγνιο $G_X(A)$, δεν είναι ικανή συνθήκη για να συμπεράνουμε ότι η παίκτρια ΙΙ κερδίζει το παίγνιο. Με την χρήση του αξιώματος επιλογής μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει ένα παίγνιο που δεν είναι καθορισμένο, με άλλα λόγια κανένας απο τους δύο παίκτες δεν κερδίζει.

Πρόταση 3.3.4. *Υπάρχει $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbf{N}} = 2^{\mathbf{N}}$ έτσι ώστε κανένας από τους δύο παίκτες να μην κερδίζει το παίγνιο $G_{\{0,1\}}(A)$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το αξίωμα επιλογής κάθε σύνολο επιδέχεται καλή διάταξη. Όπως είναι γνωστό υπάρχει μια αντιστοιχεία μεταξύ ενός καλά διατάξιμου συνόλου με έναν διατακτικό αριθμό. Ο ελάχιστος τέτοιος διατακτικός είναι γνωστός ως Von Neumann πληθάριθμος, ή απλά πληθάριθμος αυτού του συνόλου. Άρα σύμφωνα με το αξίωμα επιλογής κάθε σύνολο έχει πληθάριθμο. Συμβολίζουμε με $2^{\aleph_0}$ τον πληθάριθμο του $2^{\mathbf{N}}$. Στην συνέχεια θεωρούμε τα σύνολα: $\{0,1\}^{\{0,1\}^{even}}$ και $\{0,1\}^{\{0,1\}^{odd}}$. Αυτά είναι ισοπληθικά με το $2^{\mathbf{N}}$, επομένως έχουν πληθάριθμο $2^{\aleph_0}$. Γράφουμε τα επόμενα:

$$\{0,1\}^{\{0,1\}^{even}} = \{\sigma_\xi : \xi < 2^{\aleph_0}\}$$

$$\{0,1\}^{\{0,1\}^{odd}} = \{\tau_\xi : \xi < 2^{\aleph_0}\}$$

Θα ορίσουμε σε αυτό το σημείο στοιχεία $\alpha_\xi, \beta_\xi \in 2^{\mathbf{N}}, \xi < 2^{\aleph_0}$, έτσι ώστε για κάθε ξ να ισχύει:

$$\{\alpha_{\xi'} \mid \xi' \leq \xi\} \cap \{\beta_{\xi'} \mid \xi' \leq \xi\} = \emptyset$$

$$\exists\tau(\sigma_\xi * \tau = \beta_\xi)$$
$$\exists\sigma(\sigma * \tau_\xi = \alpha_\xi)$$

Αν ορίσουμε τα παραπάνω $\alpha_\xi, \beta\xi$ τότε η απόδειξη ολοκληρώνεται ως ακολούθως. Παίρνουμε $A = \{\alpha_\xi : \xi < 2^{\aleph_0}\} \subseteq 2^{\mathbf{N}}$ και $B = \{\beta_\xi : \xi < 2^{\aleph_0}\} \subseteq 2^{\mathbf{N}}$. Απο την πρώτη σχέση παραπάνω έχουμε ότι $A \cap B = \emptyset$. Για κάθε στρατηγική $\sigma = \sigma_\xi$ του Παίκτη Ι, θεωρούμε μια στρατηγική τ για την Παίκτρια ΙΙ έτσι που $\sigma_\xi * \tau \in B$. Επομένως $\sigma_\xi * \tau \notin A$. Δηλαδή ο Παίκτης Ι δεν κερδίζει τον γύρο $\sigma_\xi * \tau$. Επιπλέον για κάθε στρατηγική $\tau = \tau_\xi$ της Παίκτριας ΙΙ θεωρούμε μια στρατηγική σ για τον Ι, έτσι που $\sigma * \tau_\xi \in A$ και άρα η παίκτρια ΙΙ δεν κερίζει τον αντίστοιχο γύρο. Εν κατακλείδι κανένας απο τους δύο παίκτες δεν κερδίζει το παίγνιο $G_{\{0,1\}}(A)$. Ο ορισμός των $\alpha_\xi, \beta\xi$ γίνεται με υπερπεπερασμένη αναδρομή και παρουσιάζεται αναλυτικά στο [3].

□

3.4. Τα γενικά ξεδιπλωμένα παίγνια Banach-Mazur, [5]

Αρχικά οφείλουμε να δώσουμε ορισμένους χαρακτηρισμούς Πολωνικών χώρων που θα μας χρειαστούν στην πορεία. Ειδικότερα έχουμε το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω X μη κενός διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $\overset{\triangle}{X}$ ένας Πολωνικός χώρος στον οποίο ο X είναι πυκνός. Τότε*

i)(Oxtoby) ο X είναι Choquet $\iff$ ο X είναι συν-ισχνός στον $\overset{\triangle}{X}$

ii)(Choquet) ο X είναι ισχυρά $Choquet$ $\iff$ ο X είναι G_δ στον $\overset{\triangle}{X}$ $\iff$ ο X είναι Πολωνικός χώρος.

Θα ασχοληθούμε με μη κενούς τοπολογικούς χώρους Χ που είναι Choquet και εφοδιάζονται με μετρική έτσι ώστε οι ανοιχτές μπάλες τους να είναι στον χώρο X. Ας σταθεροποιήσουμε μια ασθενή βάση W για τον X. Για $A \subseteq X$ το παίγνιο Banach-Mazur $G^{**}(A)$ μπορεί να ορισθεί ισοδύναμα με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{array}{l|llllll} \text{I} & U_0 & & U_1 & & \\ & & & & & \dots \\ \text{II} & & V_0 & & V_1 & \end{array}$$

όπου $U_i, V_i \in W$ ενώ επιπλέον ισχύει η ακόλουθη συνολοθεωρητική σχέση : $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq ..., diam(U_i), diam(V_i) < 2^{-i}$.Ο παίκτης ΙΙ κερδίζει αν και μόνο αν $\cap_n V_n = (\cap_n U_n) \subseteq A$. Στα επόμενα, συμβολίζουμε με $\mathbf{N}$ τον χώρο του Baire. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $F \subseteq X \times \mathbf{N}$, και έστω $A = \exists^{\mathbf{N}}(F)$.Το ξεδιπλωμένο παίγνιο Banach-Mazur $G_u^{**}(F)$ λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{array}{l|llllll} \text{I} & U_0 & & U_1 & & \\ & & & & & \dots \\ \text{II} & & y_0, V_0 & & y_1, V_1 & \end{array}$$

όπου $U_i, V_i \subseteq W$ ενώ επιπλέον ισχύει η ακόλουθη συνολοθεωρητική σχέση : $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq ..., diam(U_i), diam(V_i) < 2^{-i}$.Ο παίκτης ΙΙ κερδίζει αν και μόνο αν $\cap_n V_n \times y \subseteq F$. Στο σημείο αυτό ας σημειωθεί ότι και στα δύο παιχνίδια εάν κάποιος παίκτης έχει νικητήρια στρατηγική τότε καθώς ο Χ είναι Choquet μπορεί να εγγυηθεί ότι τροποποιόντας την στρατηγική του $\cap_n V_n = (\cap_n U_n)$ είναι μη κενό επομένως είναι μονοσύνολο.Θα χρειαστούμε εν συνεχεία το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.4.2. *Έστω Χ μη κενός χώρος Choquet που εφοφιάζεται με μετρική της οποίας οι ανοικτές μπάλες περιέχονται στον Χ. Έστω επιπλέον $F \subseteq X \times \mathbf{N}$ και $A = \exists^{\mathbf{N}}(F)$.Τότε:*
i)Ο παίκτης Ι έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_u * *(F)$ ⇒ Α είναι ισχνό σε ένα μη κενό ανοικτό σύνολο. ii)Ο παίκτης ΙΙ έχει νικητήρια στρατηγική στο $G_u * *(F)$ ⇒ Α είναι συν-ισχνό.

Εν συνεχεία παρουσιάζουμε μια ακόμη εφαρμογή του θεωρήματος Galvin-Prikry το επονομαζόμενο θεώρημα του Silver. Σε πρώτη φάση όμως είναι απαραίτητο να δώσουμε τον ορισμό των αναλυτικών συνόλων καθώς εμφανίζονται τόσο στο θεώρημα αυτό όσο και στην πορεία της εργασίας.

Ορισμός 3.4.3. Έστω X Πολωνικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq X$ καλείται αναλυτικό εάν υπάρχει Πολωνικός χώρος Y και συνεχής συνάρτηση $f : Y \to X$ με $f(Y) = A$. Ειδικότερα το κενό σύνολο είναι αναλυτικό κάτι που φαίνεται παίρνωντας όπου $Y = \emptyset$ στον παραπάνω ορισμό.

Θεώρημα 3.4.4. *(Silver) Έστω $S \subseteq [\mathbb{N}]^{\aleph_0}$ αναλυτικό. Τότε το S είναι πλήρως Ramsey.*

Απόδειξη. Έστω $[a, A]$ βασικό ανοικτό στην τοπολογία του Ellentuck. Ας σημειωθεί ότι το $[a, A]$ είναι κλειστό στην συνήθη τοπολογία του $[\mathbb{N}]^{\aleph_0}$. Εφαρμόζωντας το θεώρημα (2.0.9) στο $X = [a, A]$, όπου T είναι η συνήθης τοπολογία και T' η τοπολογία Ellentuck, έχουμε ότι είτε το S είναι συν-ισχνό στο $[a, A]$ είτε υπάρχει $[b, B] \subseteq [a, A]$.

Για να δείξουμε ότι το S είναι πλήρως Ramsey αρκεί σύμφωνα με γνωστό πόρισμα του θεωρήματος Galvin-Prikry να δείξουμε ότι το S έχει την ιδιότητα του Baire στην τοπολογία του Ellentuck. Για το τελευταίο αρκεί να δείξουμε ότι $S \setminus U(S)$ δεν είναι πουθενά πυκνό. Σε αντίθετη περίπτωση θα υπήρχε $[a, A] \subseteq \mathrm{cl}(S \setminus U(S))$, όπου η κλειστότητα λαμβάνεται στην τοπολογία Ellentuck. Εάν τώρα το S είναι συν-ισχνό στο $[a, A]$, τότε εξ'ορισμού $[a, A] \subseteq U(S)$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι $[a, A] \cap (S \setminus U(S))$ και επομένως το $[a, A] \setminus U(S)$ είναι μη κενό. Πρέπει να υπάρχει επομένως $[b, B] \subseteq [a, A]$ με το S ισχνό στο $[b, B]$ άρα απο γνωστό λήμμα (19.17 σελ.134 [5]) υπάρχει $[b, B']$ με $B' \subseteq B$ τέτοιο ώστε $[b, B'] \subseteq \sim S$. Αφού $[b, B] \subseteq [b, B] \subseteq [a, A]$ έχουμε ότι $[b, B'] \cap (S \setminus U(S))$(άρα και το $[b, B'] \cap S$) είναι μη κενό, άτοπο. □

Εν συνεχεία κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Silver θα αποδείξουμε το θεώρημα του Lusin. Αρχικά ας διατυπώσουμε ορισμένες βασικές έννοιες.

Θεωρούμε έναν χώρο μέτρου (X, A, μ). Το μέτρο μ ονομάζεται σ-πεπερασμένο αν το X είναι μια αριθμήσιμη ένωση μετρήσιμων συνόλων με πεπερασμένο μέτρο. Κατ' αντιστοιχία ένα σύνολο σε ένα χώρο μετρου λέγεται ότι έχει σ-πεπερασμένο μέτρο αν είναι μια αριθμήσιμη ένωση μετρήσιμων συνόλων με πεπερασμένο μέτρο. Ένα μέτρο που είναι σ-πεπερασμένο είναι μια πιο αδύναμη συνθήκη από το να είναι πεπερασμένο, δηλαδή όλα τα πεπερασμένα μέτρα είναι σ-πεπερασμένα αλλά υπάρχουν (πολλά) σ-πεπερασμένα μέτρα που δεν είναι πεπερασμένα.

Ένα σύνολο $A \subseteq X$, όπου ο X είναι ένας συνήθης χώρος μέτρου, καλείται καθολικά μετρήσιμο (universally measurable) εάν είναι μ-μετρήσιμο για κάθε σ-πεπερασμένο Borel μέτρο μ στο X. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ όπου X, Y χώροι μέτρου είναι καθολικά μετρήσιμη εάν είναι μ-μετρήσιμη για κάθε σ-πεπερασμένο Borel μέτρο μ.

Εν συνεχεία αναφέρουμε το θεώρημα ισομορφισμών που κατηγοριοποιεί τους χώρους μέτρου εως ισομορφισμό,ενώ παράλληλα εισάγουμε την έννοια της τοπολογίας πυκνότητας(density topology) που θα καταστεί χρήσιμη στην απόδειξη του θεωρήματος του Lusin που διατυπώνεται παρακάτω.

Θεώρημα 3.4.5. *Έστω X, Y χώροι μέτρου. Τότε οι X, Y είναι Borel ισομορφικοί ανν $card(X) = card(Y)$.*

Ειδικότερα δυο υπεραριθμήσιμοι συνήθης χώροι μέτρου είναι Borel ισομορφικοί.Το αποτέλεσμα αυτό το έχουμε δείξει σε προηγούμενο τμήμα αυτής της εργασίας.

Για κάθε Lebesque μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq (0, 1)$, έστω $\phi(A)$=$\{x : x\, \varepsilon\chi\varepsilon\iota\, \pi\upsilon\kappa\nu o\tau\eta\tau\alpha\, 1\, \sigma\tau o\, A\}$ = $\{x : lim_{x \in I, |I| \to 0} \frac{m(A \cap I)}{m(I)} = 1\}$ όπου το I είναι ανοικτό διάστημα. Ορίζουμε μια νέα τοπολογία στο $(0, 1)$ την οποία καλούμε τοπολογία της πυκνότητας, ορίζοντας ως ανοικτά εκείνα τα Lebesque μετρήσιμα σύνολα $A \subseteq (0, 1)$ για τα οποία ισχύει $A \subseteq \phi(A)$.

Θεώρημα 3.4.6. *(Lusin) Έστω X ένας Πολωνικός χώρος. Κάθε αναλυτικό σύνολο $S \subseteq X$ είναι καθολικά μετρήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω μ ένα σ-πεπερασμένο Borel μέτρο στο X. Θα δείξουμε ότι το S είναι μ-μετρήσιμο.

Καθώς το μ είναι ισοδύναμο με ένα μέτρο πιθανότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι πράγματι είναι ένα τέτοιο μέτρο. Διαχωρίζοντας το μ στα συνεχή και διακριτά του μέρη αντίστοιχα, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το μ είναι συνεχές. Τότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα ισομορφισμών για τα μέτρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathrm{X} = (0, 1)$ και ότι το μ είναι μέτρο Lebesque.

Έστω $P = S$ και $\mu_*(P) = \sup\{\mu(A) : A \subseteq P, A\, Borel\}$. Είναι προφανές ότι $\mu_*(P) = \mu(A)$ για κάποιο Borel $A \subseteq P$. Έστω P'=$P \setminus A$. Τότε $\mu_*(P') = 0$ και $P' \in \Pi^1_1$. Εάν το P' έχει μέτρο

0 τότε $P' \subseteq B$ για κάποιο Borel σύνολο B πού έχει μ-μέτρο 0, επομένως $A \subseteq P \subseteq A \cup B$ και $\mu(A) = \mu(A \cup B)$.

Επομένως το P είναι μ-μετρήσιμο όπως και το S. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι το P' έχει μ-μέτρο 0. Όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος του Silver αλλά τώρα δουλεύοντας με την τοπολογία της πυκνότητας βλέπουμε ότι είτε το P' είναι συν-ισχνό είτε το P' είναι ισχνό σε κάποιο μη κενό ανοικτό σύνολο σε αυτή την τοπολογία. Στην πρώτη περίπτωση το P' έχει μέτρο 0 και έχουμε τελειώσει. Στην δεύτερη περίπτωση, έστω U ένα μη κενό ανοικτό στην τοπολογία της πυκνότητας σύνολο έτσι ώστε $U \setminus P'$ είναι ισχνό. Επομένως το $U \setminus P'$ είναι μ-μηδενικό, άρα $U \setminus P' \subseteq G$, όπου το G είναι Borel μέτρου 0. Τότε $U \setminus G \subseteq P'$ και το $U \setminus G$ είναι μετρήσιμο με θετικό μέτρο, άρα $\mu_*(P') > 0$ το οποίο είναι άτοπο.

$\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι, δέντρα Aronszajn και περίπατοι στους διατακτικούς

4.1. Το θεώρημα Erdös-Rado, [4]

Τα δέντρα και οι συλλογές κλαδιών τους παίζουν σημαντικό ρόλο στην τοπολογία και την απειροσυνδυαστική. Πράγματι, τα κλειστά υποσύνολα του συνόλου Cantor 2^ω είναι ακριβώς οι συλλογές κλαδιών υποδέντρων του $2^{<\omega}$. Με το θεώρημα Cantor-Bendixson, τα υποδέντρα του δυαδικού δέντρου στο ω ικανοποιούν μια διχοτομία - είτε το δέντρο έχει μετρήσιμα πολλά κλαδιά ή υπάρχει ένα τέλειο υποδέντρο (και συγκεκριμένα, ο αριθμός των κλαδιών του δέντρου είναι το συνεχές, ανεξάρτητα από το μέγεθος του συνεχούς). Ισοδύναμα, αν ένα δέντρο $T \subseteq 2^{<\omega}$ έχει υπεραριθμήσιμα πολλά κλαδιά και το P είναι μια έννοια εξαναγκασμού (forcing notion) που προσθέτει ένα νέο πραγματικό τότε το P προσθέτει ένα νέο κλαδί μέσω του T. Για ένα ασθενώς συμπαγές πληθάριθμο κ η μη ύπαρξη δέντρου στο κ με ακριβώς κ^+ πολλά κλαδιά και, ειδικότερα, η ιδιότητα τέλειου υπόδεντρου για το κ, υποδηλώνει τη συνέπεια του $AD_{\mathbb{R}}$ + DC. Για τον λόγο αυτό είναι σημαντικό να καταννοήσουμε ορισμένες βασικές έννοιες γύρω απο τους ασθενώς συμπαγείς πληθαρίθμους και την ιδιότητα του δέντρου αφού αρχικά εξετάσουμε το θεώρημα των Erdös-Rado,το οποίο θα μας επιτρέψει να αναπτύξουμε καλύτερη διαίσθηση για τις έννοιες που θα μελετήσουμε.

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά θα εξετάσουμε επιπλέον επεκτάσεις του θεωρήματος του Ramsey. Για να διευκολυνθεί η έρευνά μας για τις γενικεύσεις αυτές, θα εισαγάγουμε τώρα τον συμβολισμό βέλους. Έστω κ και λ άπειροι πληθάριθμοι , έστω n φυσικός αριθμός και έστω m ένας (πεπερασμένος ή άπειρος) πληθάριθμος. Το σύμβολο :

$$\kappa \to (\lambda)^n_m$$

δηλώνει την ακόλουθη ιδιότητα διαμέρισης: Κάθε διαμέριση του $[\kappa]^n$ σε m κομμάτια περιέχει ένα ομογενές (μονοχρωματικό) σύνολο μεγέθους λ. Με τον συμβολισμό αυτό το θεώρημα του Ramsey δύναται να γραφεί ως ακολούθως: $\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_k \quad ,(n, k \in \omega)$. Όσον αφορά τους συμβολισμούς ο δείκτης m όταν παίρνει την τιμή 2 συνήθως παραλείπεται.

Λήμμα 4.1.1. *Για κάθε κ,*

$$2^\kappa \nrightarrow (\omega)^2_\kappa$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει μια διαμέριση του 2^κ σε κ κομμάτια που δεν περιέχει κανένα άπειρο ομογενές σύνολο.

Απόδειξη. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να βρούμε μια διμέριση που δεν έχει ομογενές σύνολο μεγέθους 3. Έστω $S = \{0,1\}^\kappa$ και $F : [S]^2 \to \kappa$ ορισμένη ως ακολούθως: $F(\{f, g\})$ = ο μικρότερος $\alpha < \kappa$ έτσι ώστε $f(\alpha) \neq g(\alpha)$. Εάν τα f, g, h είναι διακριτά στοιχεία του S, τότε είναι πιθανόν να έχουμε $F(\{f, g\}) = F(\{f, h\}) = F(\{g, h\})$ □

Λήμμα 4.1.2. *Για κάθε κ,*

$$2^\kappa \nrightarrow (\omega)^2_{(\kappa^+)}$$

το οποίο συνιστά μια προφανή γενίκευση του θεωρήματος του Ramsey.

Για να κατασκευάσουμε μια διαμέριση του $[2^\kappa]^2$ που να παραβιάζει την ιδιότητα διαμέρισης, ας χρησιμοποιήσουμε το γραμμικά (ολικά) διατεταγμένο σύνολο (P,<) όπου $P = (\{0,1\})^\kappa$ και $f < g$ ανν $f(\alpha) < g(\alpha)$ όπου α είναι το μικρότερα α έτσι ώστε $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ δηλαδή έχουμε την λεξικογραφική διάταξη του P.

Λήμμα 4.1.3. *Το λεξικογραφικά διατεταγμένο σύνολο $\{0,1\}^\kappa$ δεν έχει ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα κ^+ ακολουθία.*

Κάνοντας χρήση του παραπάνω λήμματος μπορούμε να προβούμε στην απόδειξη των όσων είπαμε.

Απόδειξη. Έστω $2^\kappa = \lambda$ και $\{f_\alpha : \alpha < \lambda\}$ μια αρίθμηση του P. Έστω επιπροσθέτως ότι $\prec$ είναι η γραμμική διάταξη που προέρχεται απο τη λεξικογραφική όπως αναφέρθηκε παραπάνω.

Τώρα κατασκευάζουμε μια διαμέριση $F : [\lambda]^2 \to \{0, 1\}$ με $F(\{\alpha, \beta\})$=1 όταν η $\prec$ συμφωνεί με την φυσική διάταξη ενώ $F(\{\alpha, \beta\})$=0 σε διαφορετική περίπτωση. Εάν το $H \subseteq \lambda$ είναι ομογενές σύνολο τάξης κ^+ τότε το $\{f_\alpha : \alpha \in H\}$ συνιστά μια αύξουσα η φθίνουσα κ^+ ακολουθία στο $(P, <)$ το οποίο είναι άτοπο. □

Στο σημείο αυτό παρουσιάζουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα στο οποίο υπεισέρχονται πολλά απο τα οποία εξετάσαμε στο προηγούμενο κομμάτι αυτής της εργασίας.

Θεώρημα 4.1.4. *(Erdős-Rado)*

$$\beth_n^+ \to (\aleph_1)_{\aleph_0}^{n+1}$$

Ειδικότερα,

$$(2^{\aleph_0})^+ \to (\aleph_1)_{\aleph_0}^2$$

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε την περίπτωση $n = 1$ καθώς το επαγωγικό βήμα προσομοιάζει πολύ αυτή την περίπτωση. Επομένως, έστω $\kappa = (2^{\aleph_0})^+$ και έστω $F : [\kappa]^2 \to \omega$ να είναι μια διαμέριση του $[\kappa]^2$ σε $\aleph_0$ κομμάτια. Θέλουμε να βρούμε ένα ομογενές $H \subseteq \kappa$ μεγέθους $\aleph_1$.

Για κάθε $\alpha \in \kappa$, έστω F_α να είναι μια συνάρτηση στο $\kappa - \{\alpha\}$ που ορίζεται ως $F_\alpha(x) = F(\{\alpha, x\})$. Θα δείξουμε το ακόλουθο σε πρώτη φάση:

Υπάρχει ένα σύνολο $A \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε $|A| = 2^{\aleph_0}$ και τέτοιο ώστε για κάθε αριθμήσιμο $C \subseteq A$ και κάθε $u \in \kappa - C$ υπάρχει $v \in A - C$ τέτοιο ώστε το F_v να συμφωνεί με το F_u στο C.

Για να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό κατασκευάζουμε μια ω_1 ακολουθία :

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_\alpha \subseteq ..., \alpha < \omega_1$$

υποσυνόλων του κ, το καθένα πληθικότητας $2^{\aleph_0}$, ως ακολούθως: Έστω το A_0 τυχαίο, για κάθε οριακό διατακτικό α,ορίζουμε:

$$A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta.$$

Δοθέντως A_α, υπάρχει ένα σύνολο $A_{\alpha+1} \supset A_\alpha$ μεγέθους $2^{\aleph_0}$ έτσι ώστε για κάθε αριθμήσιμο $C \subseteq A$ και κάθε $u \in \kappa - C$ υπάρχει $v \in A_{\alpha+1} - C$ τέτοιο ώστε το F_v να συμφωνεί με το F_u στο C (καθώς ο αριθμός τέτοιων συναρτήσεων είναι $\leq 2^{\aleph_0}$). Τότε ορίζουμε

$$A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$$

και είναι πλέον ξεκάθαρο ότι το A έχει την ζητούμενη ιδιότητα.

Εν συνεχεία επιλέγουμε $\alpha \in \kappa - A$, και κατασκευάζουμε μια ακολουθία $< x_\alpha : \alpha < \omega_1 >$ στο A ως εξής: Έστω x_0 τυχαίο,και δοθέντως $\{x_\beta : \beta < \alpha\} = C$, έστω x_α να είναι κάποιο $v \in A - C$ τέτοιο ώστε το F_v να συμφωνεί με το F_u στο C.Έστω τώρα

$$X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Ορίζουμε συνάρτηση $G : X \to \omega$ με $G(x) = F_\alpha(x)$.Είναι ξεκάθαρο ότι αν $\alpha < \beta$, τότε:

$$F(x_\alpha, x_\beta) = F_{x_\beta}(x_\alpha) = F_\alpha(x_\alpha) = G(x_\alpha).$$

Καθώς η εικόνα του G είναι αριθμήσιμη, υπάρχει $H \subseteq X$ μεγέθους $\aleph_1$ έτσι ώστε το G να είναι σταθερό στο H. Έπεται ότι η F είναι σταθερή στο $[H]^2$.

Στο σημείο αυτό έχουμε αποδείξει την περίπτωση n=1. Η γενική περίπτωση αποδυκνείεται με επαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι $\beth_{n-1}^+ \to (\aleph_1)_{\aleph_0}^n$ και $F : [\kappa]^{n+1} \to \omega$, όπου $\kappa = \beth_n^+$. Για κάθε $\alpha \in \kappa, \sigma\tau\omega F_\alpha : [\kappa - \{\alpha\}]^n \to \omega$ με τύπο:

$$F_\alpha(x) = F(x \cup \alpha).$$

Όπως και στην περίπτωση n=1, υπάρχει σύνολο $A \subseteq \kappa$ μεγέθους $\beth_n$ τέτοιο ώστε για κάθε $C \subseteq A$ πληθικότητας $|C| \leq \beth_{n-1}$ και κάθε $u \in \kappa - C$ υπάρχει $v \in A - C$ έτσι ώστε το F_v να συμφωνεί με το F_u στο $[C]^n$.

Εν συνεχεία επιλέγουμε $\alpha \in \kappa - A$ και κατασκευάζουμε ένα σύνολο X $= \{x_\alpha : \alpha < \beth_{n-1}^+\} \subseteq A$ τέτοιο ώστε για κάθε α η τιμή του F_{x_α} συμφωνεί με την τιμή του F_α στο $[\{x_\beta : \beta < \alpha\}]^n$.

Επιπροσθέτως κατασκευάζουμε την $G : [X]^n \to \omega$, όπου $G(x) = F_\alpha(x)$. Όπως πρίν, εάν $\alpha_1 < ... < \alpha_{n+1}$,τότε:

$$F(\{x_{\alpha_1}, ..., x_{\alpha_{n+1}}\}) = G(\{x_{\alpha_1}, ..., x_{\alpha_n}\}).$$

Κάνωντας χρήση της επαγωγικής υπόθεσης, υπάρχει ένα $H \subseteq X$ μεγέθους $\aleph_1$ έτσι ώστε το G να είναι σταθερό στο $[H]^n$. Έπεται ότι η F είναι σταθερή στο $[H]^{n+1}$. □

Οι Erdös και Rado απέδειξαν ότι για κάθε n, η ιδιότητα διαμέρισης:

$$\beth_n^+ \to (\aleph_1)_{\aleph_0}^{n+1}$$

είναι η καλύτερη δυνατή. Η ιδιότητα γενικεύεται και σε μεγαλύτερους πληθαρίθμους.

4.2. Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι

Στα θετικά αποτελέσματα που μας δίνει το θεώρημα των Erdös-Rado το μέγεθος του ομογενούς συνόλου είναι μικρότερο απο αυτό του συνόλου που διαμερίζεται. Μια πολύ φυσική ερώτηση επομένως προκύπτει. Ειδικότερα ισχύει η σχέση:

$$\kappa \to (\kappa)^2$$

για πληθάριθμο κ, όταν $\kappa \neq \omega$

Ορισμός 4.2.1. Ένας πληθάριθμος κ λέγεται ασθενώς συμπαγής αν είναι υπεραριθμήσιμος και ικανοποιεί την ιδιότητα διαμέρισης $\kappa \to (\kappa)^2$.

Ο λόγος για το όνομα "ασθενώς συμπαγής" είναι ότι αυτοί οι πληθάριθμοι ικανοποιούν ένα συγκεκριμμένο θεώρημα συμπάγειας για άπειρες γλώσσες. Θέλοντας να κατανοήσουμε καλύτερα το μέγεθος ενός τέτοιου πληθαρίθμου θα αποδείξουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.2.2. *Κάθε ασθενώς συμπαγής πληθάριθμος είναι απρόσιτος.*

Απόδειξη. Έστω κ ασθενώς συμπαγής πληθάριθμος. Για να δείξουμε ότι ο κ είναι κανονικός, ας υποθέσουμε ότι μπορεί να γραφεί ως την ξένη ένωση:

$$\bigcup \{A_\gamma : \gamma < \lambda\},\ \lambda < \& |A_\gamma| < \kappa$$

για κάθε $\gamma < \lambda$. Ορίζουμε μια διαμέριση $F : [\kappa]^2 \to \{0, 1\}$ με τις εξής ιδιότητες: $F(\alpha, \beta) = 0$ μόνο αν τα α και β βρίσκονται στο ίδιο "κομμάτι" εν ονόματι A_γ. Προφανώς η διαμέριση αυτή δεν έχει ομογενές σύνολο $H \subseteq \kappa$ μεγέθους κ. Το γεγονός ότι ο κ είναι ισχυρό όριο πληθαρίθμου προκύπτει απο το λήμμα που αποδείξαμε σε προηγούμενο σημείο και συνιστά την πρώτη γενίκευση του θεωρήματος Ramsey που παρουσιάσαμε σε αυτό το κεφάλαιο. Συγκεκριμμένα εάν $\kappa \leq 2^\lambda$ για κάποιο $\lambda < \kappa$, τότε επειδή $2^\lambda \nrightarrow (\lambda^+)_2^2$, έχουμε $\kappa \nrightarrow (\lambda^+)_2^2$ και επομένως $\kappa \nrightarrow (\kappa)_2^2$.

□

4.3. Δέντρα Aronszajn και περίπατοι στους διατακτικούς

Στο σημείο αυτό θα στρέψουμε την προσοχή μας στα δέντρα για μια ακόμη φορά, η μελέτη των οποίων θα μας βοηθήσει να αποκτήσουμε μια πιο διαισθητική εικόνα για τους ασθενώς συμπαγής πληθαρίθμους.

Ένας πολύ χρήσιμος τρόπος για να εισαγάγει κανείς την έννοια του δέντρου Aronszajn είναι αντιπαραβάλλοντάς τη με το Λήμμα του König που λέει ότι κάθε δέντρο έχει άπειρο κλαδί αν έχει άπειρα πολλά επίπεδα και το καθένα είναι πεπερασμένο. Αυτό το λήμμα αφορά ουσιαστικά το ω, το σύνολο των φυσικών αριθμών, και ένα δέντρο Aronszajn μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπαράδειγμα στην πρόταση ότι το λήμμα μπορεί να επεκταθεί στο ω_1, τον πρώτο υπεραριθμήσιμο διατακτικό. Το χαρακτηριστικό που δημιουργεί αυτή την διαφορά είναι η συμπάγεια του ω εν αντιθέση με το ω_1. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια ευρύτερη θεώρηση της έννοιας του δέντρου και θα κατασκευάσουμε ένα δέντρο Aronszajn με την χρήση τεχνικών που αναπτύχθηκαν απο τον Stevo Todorčević.

Ο λόγος είναι ότι κατά την μελέτη των ασθενώς συμπαγών πληθαρίθμων που θα παρουσιάσουμε στο τελευταίο κομμάτι αυτής της εργασίας η έννοια του δέντρου Aronszajn θα καταστεί χρήσιμη ενώ η ίδια η κατασκευή παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον.Τα παρακάτω προέρχονται απο την εργασία του [7].

Για να αποφύγουμε οποιαδήποτε πιθανή σύγχυση, θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό της έννοιας του δέντρου στα πλαίσια της αξιωματικής συνολοθεωρίας. Ένα δέντρο είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $T = (A, <)$ έτσι ώστε για κάθε κόμβο $a \in A$ το σύνολο των αρχικών τμημάτων του $\{x \in A| \ x < a\}$ είναι καλά διατεταγμένο. Έτσι το σύνολο των αρχικών τμημάτων οποιουδήποτε κόμβου a είναι ισομορφικό ως προς την τάξη με κάποιο διατακτικό, που συμβολίζεται με $ht(a)$ και λέγεται ύψος του a.

Για κάθε διατακτικό γ, το σύνολο όλων των κόμβων του T ύψους γ συμβολίζεται με T_γ. Επι παραδείγματι, το T_0 είναι το πρώτο επίπεδο του δέντρου, που αποτελείται από όλα τα ελάχιστα μέλη του T, έτσι T_n, για $n \in \omega$ είναι το σύνολο των κόμβων που έχουν ακριβώς n αρχικά τμήματα. Συνηθίζεται η απαίτηση το πρώτο επίπεδο να αποτελείται από έναν μόνο κόμβο, τη ρίζα του δέντρου.

Άρα η ρίζα r ενός δέντρου T είναι τέτοια ώστε $r < x$ για όλους τους άλλους κόμβους x του δέντρου.

Το ύψος ενός δέντρου Τ είναι ο μικρότερος διατακτικός η έτσι ώστε το Τ να μην έχει κόμβους ύψους η. Άρα $T_\eta = \emptyset$ αλλά $T_\alpha \neq \emptyset$ για κάθε $\alpha < \eta$. Για παράδειγμα, ένα δέντρο ύψους ω είναι αυτό που έχει κόμβους στο n-οστό επίπεδο για κάθε πεπερασμένο n αλλά κανένα κόμβο στο απειροστό επίπεδο.

Τώρα ένα γραμμικά διατεταγμένο υποσύνολο ενός δέντρου που είναι κλειστό προς τα κάτω ονομάζεται κλαδί. Δηλαδή, ένα κλαδί b ενός δέντρου Τ είναι ένα υποσύνολο του Τ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in b$ αν $x \neq y$ τότε $x < y$ ή $y < x$, και αν $x < y \in b$ τότε $x \in b$ επίσης. Το κλαδί b μπορεί να είναι φραγμένο, δηλαδή για κάποιο $x \in T$ όλα τα μέλη του b είναι κάτω από το x, ή μη φραγμένο. Το λήμμα του König μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής:

Λήμμα 4.3.1. *(König) Ένα άπειρο δέντρο έχει άπειρο κλαδί αν όλα τα επίπεδα του είναι πεπερασμένα.*

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε στο παραπάνω Λήμμα το ω με το ω_1 και ο λόγος είναι ότι υπάρχει ένα δέντρο T ύψους ω_1 με όλα τα επίπεδα του αριθμήσιμα που δεν έχει υπεραριθμήσιμα κλαδιά. Ένα τέτοιο δέντρο καλείται δέντρο Aronszajn, η αλλιώς ένα ειδικό(special) δέντρο.

Είναι σχετικά εύκολο να κατασκευάσει κανείς ένα δέντρο ύψους ω_1 χωρίς υπεραριθμήσιμα κλαδιά. Ειδικότερα, το δέντρο που αποτελείται απο όλες τις ένα προς ένα αριθμήσιμες συναρτήσεις απο έναν αριθμήσιμο διατακτικό στο ω με την διάταξη της επέκταση συναρτήσεων είναι ένα τέτοιο δέντρο. Προφανώς δεν είναι δέντρο Aronszajn καθώς ήδη το επίπεδο ω είναι υπεραριθμήσιμο.

Λήμμα 4.3.2. *Υπάρχει ένα ειδικό δέντρο Aronszajn, δηλαδή ένα δέντρο ύψους ω_1 με όλα τα επίπεδά του αριθμήσιμα που μπορεί να αποσυντεθεί σε αριθμήσιμα πολλές αντιαλυσίδες.*

Η συνήθης κατασκευή ενός τέτοιου δέντρου απαιτεί χρήση επαγωγής. Στην νέα απόδειξη του Todorčević η κατασκευή θα γίνει απευθείας χωρίς χρήση επαγωγής με την βοήθεια της θεωρίας που ανέπτυξε με θέμα "Περίπατοι σε Διατακτικούς (Walks on Ordinals)". Στη συνέχεια παρουσιάζουμε αυτή την κατασκευή όπως αναγράφεται στο άρθρο του [1].

Αρχικά διαλέγουμε μια ακολουθία $< C_\alpha \mid 0 < \alpha \in \omega_1 >$ τέτοια ώστε, για κάθε αριθμήσιμο α > 0:

1. $< C_\alpha >$ είναι μη φραγμένο υποσύνολο του α of order-type ω εάν το α είναι οριακός διατακτικός, και

2. $< C_\alpha >= \{\alpha_0\}$ εάν το α είναι ο επόμενος του α_0.

Λέμε ότι το $< C_\alpha \mid 0 < \alpha \in \omega_1 >$ είναι σύστημα σκάλας. Διαισθητικά, μια σκάλα είναι ένα σύστημα που μας επιτρέπει σύντομη πρόσβαση στους αριθμήσιμους διατακτικούς: Ειδικότερα, εάν $\alpha = \alpha_0 + 1$ είναι ένας επόμενος διατακτικός τότε το C_α είναι μονοσύνολο που αποτελείται απο τον μεγιστικό διατακτικό κάτω απο το α, αλλά εάν ο α είναι οριακός διατακτικός τότε το C_α είναι ομοτελικό (cofinal) υποσύνολο του α με το μικρότερο δυνατό μήκος.

Έστω Q το σύνολο ολών των πεπερασμένων ακολουθιών στοιχείων του ω. Έτσι $\alpha \in Q$ ανν για κάποιο φυσικό αριθμό n που καλείται μήκος του α, το α είναι μια ένα προς ένα συνάρτηση απο το $\{0, ..., n-1\}$ στο ω.

Γράφουμε $\alpha =< \alpha_0, ..., \alpha_{n-1} >$. Εάν $a, b \in Q$ τότε με $\alpha^\frown\beta$ συμβολίζουμε την αλληλουχία των α, β.

Ορίζουμε την ακόλουθη λεξικογραφική διάταξη στο Q:

Για $\alpha, \beta \in Q$ όπου $\alpha =< \alpha_0, ..., \alpha_{n-1} >$ και $\beta =< \beta_0, ..., \beta_{m-1} >$ ορίζουμε $\alpha \lhd \beta$ ανν είτε:

1.$n > m$ και για κάθε $i < m$ έχουμε $a_i = b_i$, είτε

2.Για κάποιο $i < \min(n, m)$, το $\alpha_i \neq \beta_i$ και για το μικρότερο τέτοιο i έχουμε $\alpha_i < \beta_i$.

Τώρα ορίζουμε τον περίπατο απο το β προς τα κάτω στο α για κάθε $\alpha \leq \beta < \omega_1$:

$$walk(\alpha, \beta) =< \beta_0, ..., \beta_{n-1} > \ s.t. \ \beta_0 = \beta, \beta_0 > \beta_1 ... \ \& \ \beta_{n-1} = \alpha$$

Ο ορισμός των διατακτικών $\beta_i \geq \alpha$ που απαρτίζουν τον περίπατο κάτω στο α γίνεται ως εξής: Ξεκινάμε με $\beta_0 = \beta$. Ας υποθέσουμε ότι τα $\beta_0 > ... > \beta_i$ έχουν οριστεί. Εάν $\beta_i = \alpha$ η διαδικασία σταματά, αλλά εάν $\beta_i > \alpha$ έστω β_{i+1} ο πρώτος διατακτικός στο C_{β_i}, που δεν βρίσκεται κάτω απο το α (κάτι που είναι εφικτό δεδομένου ότι το β_i είναι μη φραγμένο).

Στην περίπτωση όπου ο β_i είναι επόμενως διατακτικός, ο β_{i+1} προηγείται αυτού. Η διαδικασία πρέπει να τερματήσει καθώς δεν υπάρχει άπειρη φθίνουσα ακολουθία διατακτικών, επομένως πρέπει να καταλήξουμε σε κάποιο $\beta_i = \alpha$.

Εάν $walk(\alpha, \beta) =< \beta_0, ..., \beta_{n-1} >$ τότε (β_0, β_1) είναι το πρώτο βήμα, (β_1, β_2) το δέυτερο και ούτω καθεξής. Επομένως έπεται ότι υπάρχουν $n-1$ βήματα και το ίχνος του περιπάτου είναι η ακολουθία μήκους $n-1$ πεπερασμένων υποσυνόλων του α που ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο:

$$trace(\alpha, \beta) =< C_{\beta_i} \cap \alpha \mid 0 \leq i < n-1 >$$

Εάν συλλέξουμε τις πληθικότητες των πεπερασμένων συνόλων που εμφανίζονται στο ίχνος λαμβάνουμε το $\rho_0(\alpha, \beta)$:

$$\rho_0(\alpha, \beta) =< |C_{\beta_i} \cap \alpha \mid o \leq i < n-1| >$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι για $i < n-1$, υπάρχουν $\beta_i > \alpha$ τέτοια ώστε το $C_{\beta_i} \cap \alpha$ να είναι πεπερασμένο και η πληθικότητα του $|C_{\beta_i} \cap \alpha|$ να ανήκει στο ω, έτσι ώστε $\rho_0(\alpha, \beta) \in Q$, δηλαδή είναι μια ακολουθία μήκους $n-1$ φυσικών αριθμών.

Επι παραδείγματι εάν θέλουμε να κατασκευάσουμε μια "σκάλα" απο το $\omega+\omega$ στο ω θα έχουμε τα ακόλουθα:

$$\beta_0 = \omega + \omega$$
$$\beta_1 = \omega + 1$$
$$\beta_2 = \omega$$

Ας εξετάσουμε τα αίτια πίσω απο αυτή την δήλωση. Εν αρχή, είναι προφανές ότι $\beta_0 = \omega + \omega$. Στη συνέχεια, γνωρίζουμε ότι ο β_1 είναι ο πρώτος διατακτικός στο $C_{\omega+\omega}$ που δεν είναι κάτω απο το ω (υπάρχει καθώς το $C_{\omega+\omega}$ είναι μη φραγμένο στο ω).

Ορίζουμε την απεικόνιση :

$$f : \mathbb{N} \to \omega + \omega$$

που ορίζεται ως:

$$f(n) = \begin{cases} \omega + \frac{n}{2}, \ \varepsilon\alpha\nu \ \tau o \ n \ \varepsilon\iota\nu\alpha\iota \ \alpha\rho\tau\iota o \\ \frac{n-1}{2}, \ \varepsilon\alpha\nu \ \tau o \ n \ \varepsilon\iota\nu\alpha\iota \ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o \end{cases}$$

Τώρα ορίζουμε τη σχέση $<_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ως:

$$n <_1 m \iff f(n) \in f(m).$$

Τότε, $(\mathbb{N}, <_1) \approx (\omega + \omega, \in)$.

Το $C_{\omega+\omega}$ δύναται να έχει την ακόλουθη μορφή:

$$C_{\omega+\omega} = \{0, 1, 2, 3, ..., \omega + 1, \omega + 2, ...\}$$

Έτσι σύμφωνα με τον ορισμό $\beta_1 = \omega + 1$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε την απεικόνιση:

$$g : \mathbb{N} \to \omega + 1$$

που ορίζεται ως:

$$g(n) = \begin{cases} \omega, \ if\ n = 0 \\ n-1, \ if\ n \geq 1 \end{cases}$$

Ορίζουμε $<_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ως ακολούθως:

$$n < m \iff f(n) \in f(m).$$

Τότε, $(\mathbb{N}, <_2) \approx (\omega + 1, \in)$.

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $\beta_2 = \omega$ καθώς ο $\omega + 1$ είναι επόμενος διατακτικός και $C_{\beta_1} = \{\omega\}$, εν αντιθέση με το $\omega + \omega$ στο προηγούμενο βήμα που είναι οριακός διατακτικός αριθμός (ειδικότερα είναι το όριο των $\omega + 1, \omega + 2, ...$).

Θα ακολουθήσει μια σειρά απο λήμματα των οποίων θα παραλείψουμε την απόδειξη καθώς σε αυτή την παρουσίαση είναι ουσιώδες να αποκτήσουμε μια σχετική καθαρή εικόνα για την γενική ιδέα της απόδειξης και να εξοικειωθούμε με τα εργαλεία που παρουσιάζονται εδώ.

Λήμμα 4.3.3. *Ας υποθέσουμε ότι $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ είναι αριθμήσιμοι διατακτικοί και ο β είναι στο μονοπάτι απο το γ στο α. Τότε τα $walk(\beta, \gamma)$ και $walk(\alpha, \beta)$ είναι ένα αρχικό τμήμα και αντιστοίχως ένα τελικό τμήμα του $walk(\alpha, \gamma)$.*

Λήμμα 4.3.4. *Ας υποθέσουμε ότι $\alpha \leq \delta \leq \beta$ και το $trace(\delta, \beta)$ περιέχεται στο α. Τότε το δ είναι στο μονοπάτι απο το β στο α, και $trace(\alpha, \beta) = trace(\delta, \beta)^\frown trace(\alpha, \delta)$.*

Για κάθε $\beta \in \omega_1$, έστω $\lambda x \rho_0(x, \beta)$ η συνάρτηση που ορίζεται στο $\{x \mid x \leq \beta\}$ που παίρνει το x και το στέλνει στο $\rho(x_0, \beta) \in Q$.

Λήμμα 4.3.5. *Για κάθε $\beta \in \omega_1$,το $\lambda x \rho_0(x, \beta)$ διατηρεί την διάταξη απο το β στο Q(into). Αυτό σημαίνει ότι εάν $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \beta$ τότε $\rho_0(\alpha_1, \beta) \lhd \rho_0(\alpha_2, \beta)$.*

Λήμμα 4.3.6. *Ας υποθέσουμε ότι $\alpha_1 \leq \beta^1$ και $\alpha_1 \leq \beta^2$ είναι αριθμήσιμοι διατακτικοί τέτοιο ώστε $trace(\alpha_1, \beta^1) = trace(\alpha_1, \beta^2)$.Τότε για κάθε $\alpha_0 \leq \alpha_1$ έχουμε επιπλέον ότι $trace(\alpha_0, \beta^1) = trace(\alpha_0, \beta^2)$.Επομένως, εάν $trace(\alpha_1, \beta^1) = trace(\alpha_1, \beta^2)$, τότε:*

$$\lambda x \rho_0(x, \beta^1) \restriction \alpha_1 = \lambda x \rho_0(x, \beta^2) \restriction \alpha_1$$

Ο ορισμός του ειδικού δέντρου $Aronszajn$ απο τον $Todorevi$ δίνεται απο τον ακόλουθο τύπο:

$$T = \{\lambda x \rho_0(x, \beta) \restriction \alpha \mid \alpha \leq \beta \leq \omega_1\}$$

Οι κόμβοι αυτού του δέντρου είναι συναρτήσεις που διατηρούν την διάταξη απο τους αριθμήσιμους διατακτικούς στο Q (εντός). Το προηγούμενο λήμμα συνεπάγεται άμεσα ότι κάθε επίπεδο του Tείναι αριθμήσιμο καθώς ο αριθμός των πιθανών ιχνών είναι αριθμήσιμος. Είναι εφικτό να δείξει κανείς ότι το T είναι επιπλέον ειδικό δέντρο $Aronszajn$ δηλαδή δύναται να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση απο αντιαλυσίδες.

Με τη χρήση των παραπάνω τεχνικών ο Todorčević κατάφερε να αποδείξει την ακόλουθη ιδιότητα διαμέρισης:

Θεώρημα 4.3.7. *(Todorčević)*

$$\omega_1 \to [\omega_1]^2_{\omega_1}$$

Δηλαδή, υπάρχει μια συνάρτηση $f : [\omega_1]^2 \to \omega_1$ τέτοια ώστε για κάθε υπεραριθμήσιμο $A \subseteq \omega_1, f[A] = \omega_1$.

Η απόδειξη παραλείπεται και μπορεί να βρεθεί στο [1]

4.4. Η ιδιότητα δέντρου και ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι

Γενικέυοντας την έννοια ενός δέντρου Aronszajn για πληθαρίθμους $>\omega_1$ λέμε ότι ένας κανονικός υπεραριθμήσιμος πληθάριθμος κ έχει την ιδιότητα δέντρου εάν κάθε δέντρο ύψους κ του οποίου τα επίπεδα έχουν πληθικότητα $< \kappa$ έχει κάποιο κλαδί πληθικότητας κ. Ο λόγος που αναφέρουμε τα παραπάνω είναι ότι το ακόλουθο λήμμα θα μας δώσει μια πιο διαισθητική κατανόηση των ασθενώς συμπαγών πληθαρίθμων μέσω της ιδιότητας του δέντρου.

Λήμμα 4.4.1.(i) *Εάν ο κ είναι ασθενώς συμπαγής, τότε ο κ έχει την ιδιότητα δέντρου.*

(ii) *Εάν ο κ έχει την ιδιότητα δέντρου και είναι απρόσιτος,τότε ο κ είναι ασθενώς συμπαγής, και ειδικότερα $\kappa \to (\kappa)^2_m$ για κάθε $m < \kappa$.*

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] Uri Abraham. “Aronsajn Trees”. In: *Course Notes* (2009). url: `https://www.cs.bgu.ac.il/~abraham/courses/settheory09/AronsajnTrees6.pdf`.

[2] Fred Galvin and Karel Prikry. “Borel sets and Ramsey’s theorem”. In: *J. Symbolic Logic* 38 (1973), pp. 193–198. issn: 0022-4812. doi: `10.2307/2272055`. url: `https://doi.org/10.2307/2272055`.

[3] Βασίλειος Γρηγοριάδης (Vassilios Gregoriades). *Σημειώσεις στην Περιγραφική Θεωρία Συνόλων*. Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος διαθέσιμες στο διαδίκτυο. 2021.

[4] Thomas Jech. *Set theory.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London,, 1978, pp. xi+621. isbn: 0-12-381950-4.

[5] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Vol. 156. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1995.

[6] Pierre Matet. “A Short Proof of Ellentuck’s Theorem”. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 129.4 (2000), pp. 1195–1197. doi: `10.2307/2668926`. url: `https://www.ams.org/journals/proc/2001-129-04/S0002-9939-00-05653-7/S0002-9939-00-05653-7.pdf`.

[7] Stevo Todorcevic. *Walks on ordinals and their characteristics*. Vol. 263. Progress in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007, pp. vi+324. isbn: 978-3-7643-8528-6. doi: `10.1007/978-3-7643-8529-3`. url: `https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8529-3`.