



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή ΕΜΦΕ
Τομέας Φυσικής
Τροποποιημένη Βαρύτητα

Διδακτορική Διατριβή

Πέτρου Παναγιώτη Ασημάκη

Αθήνα 2022

Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου ερευνητικού δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας – 2ος Κύκλος» (ΜΙΣ-5000432), που υλοποιεί το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ).



Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τη τριμελή επιτροπή μου, τους κυρίους Κεχαγιά Αλέξανδρο, Νικόλαο Ήργε και Κουτσούμπα Γεώργιο για την υποστήριξή τους και την καθοδήγησή τους. Επίσης, ιδιαίτερες ευχαριστίες στον κύριο Σαριδάκη Μάνο που έμαθα πολλά κοντά του και συνεργαστήκαμε όλον αυτόν τον καιρό. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που με στήριξε και με βοήθησε να φτάσω ως εδώ.

Περιεχόμενα

1	Κίνητρα	4
2	Εισαγωγή	6
3	Κοσμολογία	16
3.1	Γενική Σχετικότητα	16
3.2	Κοσμολογικό υπόβαθρο	17
3.3	Κρίσιμη Πυκνότητα	18
3.4	Διαστολή του Σύμπαντος	19
3.5	Κοσμολογική σταθερά	21
3.6	Κοσμικές Αποστάσεις	22
3.7	Πρόβλημα Ορίζοντα	23
3.8	Πληθωρισμός	23
3.9	Απόσταση Φωτεινότητας	25
3.10	Προσδιορισμός της σημερινής τιμής της σταθεράς του Hubble μέσω της απόστασης φωτεινότητας	26
3.11	Γωνιακή απόσταση διαμέτρου	28
3.12	Υπολογισμός εξισώσεων Friedmann	29
3.13	Θεωρία Διαταραχών	32
3.14	Θερμοδυναμική	46
3.15	Σκοτεινή Ύλη	52
4	Θεωρίες Τροποποιημένης Βαρύτητας	58
4.1	Ασθενής σύζευξη βαθμωτού καμπυλότητας με βαθμωτό πεδίο	59
4.2	Μη ελάσσονα σύζευξη βαθμωτού καμπυλότητας με βαθμωτό πεδίο	60
4.3	Σύμμορφος μετασχηματισμός	61
4.4	Θεωρία Horndeski	62
4.5	DGP μοντέλο	63
4.6	$f(R)$ βαρύτητα	63
4.7	Gauss-Bonnet βαρύτητα	66
4.8	Gauss-Bonnet βαρύτητα σύζευξη με βαθμωτό	66
4.9	$f(G)$ βαρύτητα	66
4.10	Σύζευξη Gauss-Bonnet βαθμωτού με βαθμωτό dilaton	67

<i>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</i>	3
4.11 Κυβική βαρύτητα	69
4.12 $f(P)$ βαρύτητα	70
4.13 “Running Vacuum” μοντέλα	70
5 Θεωρία διαταραχών στην P βαρύτητα	72
5.1 Δράση και εξισώσεις κίνησης	72
5.2 Σύνδεσμοι στις ελεύθερες παραμέτρους και εύρεση εξισώσεων Poisson και βαρυτικών κυμάτων	74
5.3 Συμπεράσματα	83
6 BBN ανάλυση σε κοσμολογικά μοντέλα καμπυλότητας ανώτερης τάξης	84
6.1 $f(G)$	86
6.2 $f(G)$ Model I	86
6.3 $f(G)$ Model II	88
6.4 $f(G)$ Model III	89
6.5 $f(G)$ Model IV	90
6.6 Gauss-Bonnet-Dilaton Gravity	90
6.7 $f(P)$ Βαρύτητα	92
6.8 $f(G) + f(P)$ βαρύτητα και κοσμολογία	93
6.9 Χορδές	95
6.10 “Running Vacuum” Κοσμολογία	98
6.11 Συμπεράσματα	102
7 BBN ανάλυση σε κοσμολογικά μοντέλα τροποποιημένης τηλεπαράλληλης βαρύτητας	103
7.1 Μοντέλο 1	110
7.2 Μοντέλο 2	112
7.3 Μοντέλο 3	113
7.4 Μοντέλο 4	116
7.5 Μοντέλο 5	120
7.6 Συμπεράσματα	122
8 Σύζευξη ύλης και βαρύτητας	124
8.1 Δράση και γενικές εξισώσεις κίνησης	124
8.2 Εφαρμογές στην κοσμολογία	125
8.3 Διαταραχές	126
8.4 Συμπεράσματα	133
9 Επίλογος	134

Κεφάλαιο 1

Κίνητρα

Από μικρό παιδάκι μου άρεσε να διαβάζω εξωσχολικά βιβλία φυσικής και κυρίως αστροφυσικής. Μου άρεσε να διαβάζω για τους πλανήτες, για τους αστέρες και γενικά για το σύμπαν. Είχα αποφασίσει από τα σχολικά μου χρόνια να σπουδάσω φυσικός και να ασχοληθώ με την θεωρητική φυσική. Όσο μεγάλωνα στα σχολικά χρόνια μάθαινα την επιστημονική μέθοδο η οποία με σαγήνευσε. Τα μαθηματικά και η φυσική και γενικά οι θετικές επιστήμες είχαν μια παράξενη γοητεία. Αποφάσισα στις πανελλαδικές να διαλέξω το φυσικό. Τώρα μάθαινα τη φυσική σε διαφορετικό πλαίσιο σε σχέση με το σχολείο. Προς το τέλος του προπτυχιακού ήρθα σε επαφή με τα μαθήματα της κοσμολογίας και γενικής σχετικότητας τα οποία μου έδωσαν μια έξτρα ώθηση να αχολειθώ μετέπειτα ερευνητικά με αυτούς τους τομείς. Ακολούθησε το μεταπτυχιακό όπου τα μαθήματα γίνονται πιο σύνθετα και μελέτησα στη διπλωματική μου κοσμολογικές θεωρίες. Η βαρύτητα είναι η δύναμη η οποία έρχομαστε σε επαφή καθημερινά. Είναι η πρώτη που δόθηκε ένα μαθηματικό πλαίσιο περιγραφής της από τον Νεύτωνα. Όμως είναι και αυτή η οποία είναι η πιο δύσκολη στη μελέτη της και στη συμπεριφορά της. Το κίνητρο για να μελετήσει κανείς τη βαρύτητα είναι μεγάλο διότι υπάρχουν ανοικτά προβλήματα στην κοσμολογία αλλά και στη συμπεριφορά της στον μικρόκοσμο. Η ανάπτυξη της τεχνολογίας τα τελευταία χρόνια και το πλήθος των παρατηρησιακών δεδομένων που λαμβάνουμε μπορεί να δώσει μια κατεύθυνση προς τα που να ψάξουμε για να βρούμε τροποποιήσεις ή μια κανούρια θεωρίας βαρύτητας. Συνεπώς ο ένας λόγος που ασχολήθηκα είναι ότι υπάρχουν πολλά ανοικτά προβλήματα στο πεδίο της βαρύτητας και της κοσμολογίας και ο δεύτερος είναι ότι με τις συσκευές μας μπορούμε να τεστάρουμε τις τροποποιημένες θεωρίες ώστε να έχουμε σωστή συμπεριφορά. Επίσης μέσω του διδακτορικού απέκτησα διάφορα προσόντα. Για παράδειγμα έμαθα ένα υπολογιστικό πρόγραμμα (Xact-Mathematica) το οποίο θα μου είναι πολύ χρήσιμο και στη συνέχεια διότι θα μπορώ να υπολογίζω πράγματα που με το χέρι θα ήταν αδύνατα. Άρα ήταν ένα κίνητρο να μάθω να δουλεύω ένα πρόγραμμα στο υπολογιστή και θα μπορώ και στη συνέχεια να εργαστώ πάνω και σε άλλα. Επίσης, κίνητρο ήταν για μένα να συνεργαστώ με άλλους

ανθρώπους που μοιράζονται το πάθος μου για την επιστήμη και να μάθω από τις γνώσεις τους και την εμπειρία τους και να αναπτύξω τις διαπροσωπικές μου σχέσεις. Επίσης, η επαφή με φοιτητές είναι σημαντική για να βελτιωθώ και στο διδακτικό κομμάτι.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή

Ο άνθρωπος από τη στιγμή που πάτησε το πόδι του στη Γη, είχε την περιέργεια να ανακαλύψει το περιβάλλον του. Στην αρχή προσπάθησε να ερμηνεύσει τα διάφορα φυσικά φαινόμενα μέσω υπερφυσικών δυνάμεων. Επίσης, θέλησε να μάθει τι είναι αυτά τα μαγικά φώτα που έβλεπε κάθε βράδυ στον νυχτερινό ουρανό. Υπάρχουν στοιχεία ότι οι πρωτόγονοι αυτοί άνθρωποι προσπάθησαν να δημιουργήσουν έναν άτλα του ουρανού. Έχουν έρθει στο φως διάφορα αντικείμενα που απεικονίζουν διάφορα ουράνια σώματα. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι έδωσαν ονόματα σε θεοτήτες τους από ουράνια σώματα. Οι Βαβυλώνιοι έγιναν γνωστοί για τις αστρονομικές τους παρατηρήσεις, όπως οι εκλειψεις, η θέση των πλανητών και η κίνηση της Σελήνης. Επίσης ανέπτυξαν διάφορες αριθμητικές μεθόδους για να υπολογίζουν τις εκλειψεις και την κίνηση των πλανητών. Το πρώτο κοσμολογικό μοντέλο προήλθε από τους αρχαίους Έλληνες. Ο Εμπεδοκλής πρότεινε ένα μοντέλο στο οποίο υπάρχουν τέσσερα κυρίαρχα στοιχεία στο σύμπαν, η φωτιά, το νερό, ο αέρας και η γη. Ο Πλάτωνας εμπνευσμένος από αυτό το μοντέλο έφτιαξε ένα γεωκεντρικό μοντέλο στο οποίο ο Ήλιος και οι πλανήτες περιστρέφονται γύρω από τη Γη. Το 340 π.Χ ο Αριστοτέλης υποστήριξε πως η Γη είναι σφαιρική και όχι επίπεδη με δύο ισχυρά επιχειρήματα. Το πρώτο επιχειρήμα βασιζόταν στην κατανόηση του φαινομένου των εκλείψεων της Σελήνης, δηλαδή κατάλαβε ότι προκαλούνται από την παρεμβολή της Γης ανάμεσα στη Σελήνη και στον Ήλιο. Η σκιά της Γης πάνω στη Σελήνη έχει πάντοτε κυκλικό σχήμα, συνεπώς αυτό οδήγησε τον Αριστοτέλη στο συμπέρασμα ότι η Γη είναι σφαιρική. Αν η Γη ήταν επίπεδη με κυκλικά όρια η σκιά της πάνω στη Σελήνη θα ήταν ελλειψοειδής και όχι κυκλική, εκτός της περίπτωσης που η έκλειψη συνέβαινε μόνο όταν ο Ήλιος βρισκόταν ακριβώς κάτω από το κέντρο της Γης. Το δεύτερο επιχειρήμα βασιζόταν στην παρατήρηση των ελληνων ταξιδιωτών ότι ο πολικός αστέρας φαίνεται χαμηλότερα στο στερέωμα όταν κάποιος βρίσκεται στις νοτιότερες περιοχές της Γης και ψηλότερα στις βορειότερες. Για παράδειγμα ο πολικός αστέρας φαίνεται ακριβώς από πάνω σε κάποιον παρατηρητή στον Βόρειο Πόλο και στον ορίζοντα για κάποιον παρατηρητή στον Ισημερινό. Ο Αριστοτέλης αναφέρει πως λόγω της διαφοράς της

θέσης του πολικού αστέρα από την Ελλάδα και την Αίγυπτο, αστρονόμοι της εποχής υπολόγισαν ότι το μήκος της περιμέτρου της Γης είναι περίπου 400000 στάδια. Αν υπολογίσουμε ότι ένα στάδιο είναι περίπου 180 μέτρα, τότε αυτό μεταφράζεται στο διπλάσιο μήκος από το πραγματικό. Ένα τρίτο επιχείρημα των αρχαίων Ελλήνων ήταν γιατί πρώτα βλέπουμε το κατάρτι του πλοίου στον ορίζοντα και μετά ολόκληρο το πλοίο καθώς μας πλησιάζει.

Ο Αριστοτέλης πίστευε πως η Γη είναι ακίνητη στο κέντρο του Σύμπαντος και όλα τα υπόλοιπα ουράνια σώματα κινούνται σε κυκλικές τροχιές γύρω από αυτή. Τον 2ο αιώνα μ.Χ ο Πτολεμαίος επεξεργάστηκε την εικόνα αυτή για το σύμπαν και δημιούργησε ένα πλήρες αστρονομικό μοντέλο. Η Γη είναι ακίνητη στο κέντρο και περιβάλλεται από οκτώ μεγάλες σφαίρες που μεταφέρουν τα ουράνια σώματα. Πάνω σε αυτές κινούνται η Σελήνη, ο Ήλιος και οι πέντε τότε γνωστοί πλανήτες. Οι ίδιοι οι πλανήτες κινούνται επίσης σε μικρότερους κύκλους συνδεδεμένους με τις αντίστοιχες σφαίρες, έτσι είναι δυνατόν να εξηγηθούν οι πολύπλοκες τροχιές των πλανητών στον ουρανό. Η εξωτερική σφαίρα μεταφέρει τους απλανείς αστέρες, δηλαδή όλα τα άστρα που παραμένουν σταθερά στις ίδιες θέσεις το καθένα σχετικά με τα άλλα, όμως περιστρέφονται όλα μαζί στον ουρανό. Το αστρονομικό μοντέλο του Πτολεμαίου ήταν ένα αρκετά ακριβές σύστημα που έδινε τη δυνατότητα προβέψεων των θέσεων των ουράνιων σωμάτων στο στερέωμα. Για να μπορεί να κάνει σωστές προβλέψεις βασίστηκε στην υπόθεση ότι η Σελήνη ακολουθεί τροχιά που τη φέρνει στη μισή απόσταση από τη Γη απ' ότι συνήθως. Δηλαδή πρέπει σε αυτό το σημείο να φαίνεται διπλάσια από το συνηθισμένο. Το αστρονομικό αυτό μοντέλο έγινε αποδεκτό στους αιώνες που ακολούθησαν. Το αποδέχτηκε και η χριστιανική εκκλησία ως εικόνα του Σύμπαντος που συμφωνεί με την Βίβλο διότι πέρα από την εξωτερική σφαίρα των άστρων, που δεν υπάρχει αναφορά για το τι υπάρχει γιατί προφανώς δεν γνώριζαν, αφήνει αρκετό χώρο για τον Παράδεισο και την Κόλαση.

Το 1514 ένας πολωνός ιερέας, ο Κοπέρνικος πρότεινε ένα απλούστερο μοντέλο. Σε αυτό υπέθεσε ότι ο Ήλιος είναι αυτός που είναι ακίνητος στο κέντρο του Σύμπαντος και ότι η Γη και οι πλανήτες κινούνται σε κυκλικές τροχιές γύρω από αυτόν. Πέρασε ένας αιώνας από αυτή την διατύπωση μέχρι να τη λάβουν σοβαρά. Τότε, δύο αστρονόμοι ο Κέπλερ και ο Γαλιλαίος άρχισαν να υποστηρίζουν δημόσια τη θεωρία του Κοπέρνικου παρά το γεγονός ότι οι τροχιές που προβλέπονταν δεν συμφωνούσαν απόλυτα με αυτές που παρατηρούσαν. Το 1609 ο Γαλιλαίος χρησιμοποίησε το τηλεσκόπιο που μόλις είχε εφευρεθεί. Όταν το έστρεψε προς τον Δία είδε πως τον συνόδευαν αρκετοί μικροί δορυφόροι που περιφέρονταν σε τροχιές γύρω του. Αυτό σήμαινε ότι τα ουράνια σώματα δεν ήταν υποχρεωμένα να περιστρέφονται γύρω από το κέντρο της Γης όπως υποστήριζαν ο Αριστοτέλης και ο Πτολεμαίος.

Ένα άλλο μεγάλο βήμα προς την ανακάλυψη του σωστού μοντέλου έκανε ο Κέπλερ ο οποίος υποστήριξε πως οι πλανήτες κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές και όχι σε κυκλικές, πράγμα στο οποίο συμφωνούσαν οι παρατηρήσεις. Η εξήγηση γιατί οι τροχιές είναι ελλειπτικές δόθηκε το 1687 από το Νεύτωνα και

την καινούρια θεωρία του για την βαρύτητα. Η θεωρία αυτή βασίστηκε στον νόμο της παγκόσμιας έλξης, δηλαδή κάθε σώμα στο Σύμπαν έλκει τα υπόλοιπα με μια δύναμη ανάλογη της μάζας των σωμάτων και του αντιστρόφου του τετραγώνου της απόστασης τους. Στη συνέχεια ο Νεύτωνας απέδειξε ότι σύμφωνα με τον νόμο του η βαρύτητα αναγκάζει τη Σελήνη να κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τη Γη και τη Γη και τους πλανήτες σε ελλειπτικές τροχιές γύρω από τον Ήλιο. Επίσης, ο Νεύτωνας κατάλαβε ότι και τα άστρα αφού έλκονται μεταξύ τους δεν μπορούν να είναι ακίνητα. Ο ίδιος πρότεινε ότι για να καταρρέουν τα άστρα προς ένα σημείο του χώρου θα πρέπει να έχουν πεπερασμένο πλήθος και να είναι συγκεντρωμένα σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου. Αν υπήρχε ένα μη πεπερασμένο άπειρο πλήθος άστρων κατανεμημένων ομοιόμορφα σε έναν άπειρο χώρο, επειδή δεν θα υπήρχε κάποιο κεντρικό σημείο να κινηθούν τα άστρα θα παρέμεναν ακίνητα. Σε ένα άπειρο Σύμπαν κάθε σημείο μπορεί να θεωρηθεί κεντρικό αφού προς όλες τις κατευθύνσεις γύρω του υπάρχει άπειρο πλήθος άστρων. Σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα κάθε άστρο που βρίσκεται στο εσωτερικό μιας πεπερασμένης περιοχής θα συνεχίσει να πέφτει με την ίδια ταχύτητα όπως και πριν αφού η συνολική επίδραση των άστρων πάνω του δεν θα αλλάξει. Όσα άστρα και αν προσθέσουμε θα συνεχίζουν να πέφτουν το ένα πάνω στο άλλο. Η γενική παραδοχή των ανθρώπων πριν τον εικοστό αιώνα ήταν ότι το σύμπαν είτε υπήρχε αμετάβλητο είτε δημιουργήθηκε κάποια στιγμή στο παρελθόν στην ίδια περίπου κατάσταση με την σημερινή του. Όσοι είχαν καταλάβει ότι με την θεωρία του Νεύτωνα το Σύμπαν δεν γίνεται να είναι στατικό, δεν διανοήθηκαν ότι μπορεί να διαστέλλεται. Υπέθεσαν ότι η βαρυτική δύναμη κάνει να απωθούνται όσα σώματα βρίσκονται σε πάρα πολύ μεγάλες αποστάσεις μεταξύ τους. Η υπόθεση αυτή δεν είχε σημαντική επίδραση στις προβλέψεις των κινήσεων των πλανητών αλλά επέτρεπε μια άπειρη κατανομή άστρων να παραμένει σε ισορροπία με τις ελκτικές δυνάμεις των κοντινών άστρων να εξισορροπούν τις απωστικές των μακρινών άστρων. Τέτοια ισορροπία θα ήταν ασταθής διότι αν σε κάποια περιοχή τα άστρα πλησίαζαν λίγο μεταξύ τους, οι ελκτικές δυνάμεις θα κυριαρχούσαν οπότε τα άστρα θα έπεφταν το ένα πάνω στο άλλο. Σε αντίθετη αν τα άστρα απομακρύνονταν λίγο μεταξύ τους οι απωστικές δυνάμεις θα κυριαρχούσαν και θα απομακρύνονταν ακόμα περισσότερο.

Το 1929 ο αστρονόμος Έντουιν Χάμπλ έκανε την παρατήρηση ότι σε όποια κατεύθυνση και αν κοιτάζουμε οι μακρινοί γαλαξίες κινούνται απομακρυνόμενοι γρήγορα από εμάς. Δηλαδή, το σύμπαν διαστέλλεται. Οι παρατηρήσεις του Χάμπλ οδηγούν στο συμπέρασμα ότι υπήρξε κάποια στιγμή που το Σύμπαν ήταν απείρως μικρό και πυκνό. Τώρα θα μιλήσουμε πως προήλθαν οι θεωρίες βαρύτητας. Οι πρώτες αντιλήψεις που είχε ο κόσμος ήταν αυτές του Αριστοτέλη ότι η φυσική κατάσταση ενός σώματος είναι η ακινησία και ότι για να υπάρχει κίνηση πρέπει να υπάρχει κάποια δύναμη σαν αιτία. Ο Γαλιλαίος στη συνέχεια έκανε ένα πείραμα με σφαίρες διαφορετικού βάρους σε κεκλιμένο επίπεδο. Διαπίστωσε ότι κάθε σώμα αυξάνει την ταχύτητά του με τον ίδιο ρυθμό ανεξάρτητα από το βάρος του. Οι παρατηρήσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν από

τον Νεύτωνα, όπου διατύπωσε τον δεύτερο νόμο του. Ο δεύτερος νόμος μας λέει πως όταν μια δύναμη ασκείται σε ένα σώμα που ηρεμεί ή κινείται με σταθερή ταχύτητα, τότε επιταχύνεται δηλαδή αλλάζει ο ρυθμός της ταχύτητάς του. Η επιτάχυνση είναι ανάλογη της ανάλογη της δύναμης και αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του. Επίσης ο νόμος της παγκόσμιας έλξης που μας λέει ότι η δύναμη μεταξύ δύο μαζών που έλκονται μεταξύ τους είναι ανάλογη με το γινόμενο των μαζών και και του αντιστρόφου του τετραγώνου της απόστασης τους. Ο χώρος και ο χρόνος σύμφωνα με τις θεωρίες αυτές είναι εντελώς χωρισμένοι μεταξύ τους. Το 1676 ο Δανός αστρονόμος Όλε Κρίστενσεν Ρέμερ ανακάλυψε ότι το φως κινείται με πεπερασμένη ταχύτητα. Ο Ρέμερ παρατήρησε ότι τα χρονικά διαστήματα μεταξύ των διδαοχικών διελεύσεων των δορυφόρων του Δία πίσω από τον πλανήτη αυτόν (δηλαδή μεταξύ διδαοχικών εκλείψεων των δορυφόρων του Δία) δεν φαινόταν να είναι ακριβώς ίσα, όπως θα περίμενε κανείς από ένα ανάλογο περιοδικό φαινόμενο. Καθώς η Γη και ο Δίας περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο, η μεταξύ τους απόσταση μεταβάλλεται. Ο Ρέμερ παρατήρησε ότι οι εκλείψεις των δορυφόρων του Δία φαίνονταν να καθυστερούν τόσο όσο μακρύτερα βρισκόταν η Γη από τον Δία. Υποστήριξε ότι αυτό συμβαίνει διότι το φως από τους δορυφόρους του Δία καθυστερεί περισσότερο να φτάσει στη Γη όσο μεγαλύτερη είναι η απόστασή τους. Οι μετρήσεις δεν ήταν πολύ ακριβείς και η τιμή που υπολόγισε για το φως ήταν 225000 χιλιόμετρα το δευτερόλεπτο. Το 1985 ο βρετανός φυσικός Τζέιμς Μάξγουελ κατάφερε να ενοποιήσει τις επιμέρους θεωρίες που υπήρχαν τότε για τον ηλεκτρισμό και τον μαγνητισμό. Οι εξισώσεις που έβγαλε προέβλεπαν την ύπαρξη κυμάτων στο συνδυασμένο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Επίσης προέβλεπαν ότι τα κύματα αυτά θα κινούνταν με σταθερή ταχύτητα.

Τα κύματα με μήκος κύματος μεγαλύτερο από ένα μέτρο ονομάζονται ραδιοφωνικά κύματα. Μικρότερα μήκη κύματος της τάξης των μερικών εκατοστών ονομάζονται μικροκύματα και κύματα της τάξης του ενός δεκάκις χιλιοστού του εκατοστομέτρου ονομάζονται υπέρυθρες ακτίνες. Το ορατό φως έχει μήκη κύματος ακόμη μικρότερα. Τα μικρότερα μήκη κύματος τα έχουν οι ακτίνες Χ και οι υπεριώδεις ακτίνες. Η θεωρία του Μάξγουελ προέβλεπε ότι όλες οι συχνότητες του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος έπρεπε να μεταδίδονται με μια συγκεκριμένη ταχύτητα. Όμως η θεωρία του Νεύτωνα μας λέει ότι δεν μπορούμε να έχουμε απόλυτη κίνηση αλλά πρέπει να ορίσουμε ως προς ποιο σώμα πρέπει να μετράμε αυτή την ταχύτητα. Αυτό οδήγησε στην υπόθεση ότι υπάρχει μια ουσία, ο αιθέρας, που ήταν παρούσα παντού ακόμα και στον κενό χώρο. Τα φωτεινά κύματα θα έπρεπε να κινούνται μέσα στον αιθέρα όπως τα ηχητικά κύματα κινούνται μέσα στον αέρα. Άρα η ταχύτητά τους θα έπρεπε να είναι σχετική ως προς τον αιθέρα. Διάφοροι παρατηρητές που θα κινούνταν με διαφορετικές ταχύτητες μέσα στον αιθέρα θα έβλεπαν το φως να κινείται με διαφορετικές ταχύτητες. Σε σχέση με τον αιθέρα το φως θα διατηρούσε πάντα την ίδια ταχύτητα. Στην περίπτωση της Γης, που θα έπρεπε να κινείται και αυτή μέσα στον αιθέρα κατά την κίνησή της γύρω από τον Ήλιο, η ταχύτητα του φωτός πάνω σε μια ευθεία παράλληλη προς τη διεύθυνση κίνησής της (όταν

κινούμαστε προς τη φωτεινή πηγή) θα έπρεπε να είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός πάνω σε μια ευθεία κάθετη προς αυτή τη διεύθυνση (όταν δεν κινούμαστε προς τη φωτεινή πηγή).

Το 1887 οι Μίχελσον, Μόρλεϋ μέσω του διάσημου πειράματος που έκαναν συνέκριναν την ταχύτητα του φωτός κατά τη διεύθυνση της κίνησης της Γης με την ταχύτητά του κατά την κάθετη διεύθυνση. Βρήκαν ότι η ταχύτητα είναι ίδια πράγμα που ερχόταν σε αντιδιαστολή με την νευτώνεια φυσική. Από κει και μετά έγιναν πολλές προσπάθειες να εξηγηθεί το αποτέλεσμα του πειράματος, ειδικά από τον Χέντρικ Λόρεντζ, ο οποίος έκανε διάφορες υποθέσεις όπως ότι η κίνηση μέσα στον αιθέρα επηρεάζει τις συσκευές μέτρησης αποστάσεων κάνοντάς τις να συστέλλονται ή τις συσκευές μέτρησης χρόνου κάνοντας τις να επιβραδύνονται. Το 1905 ο Άλμπερτ Αϊνστάιν έδειξε ότι η ιδέα του αιθέρα δεν είναι αναγκαία αρκεί να είναι διατεθειμένος κανείς να εγκαταλείψει την ιδέα του απόλυτου χρόνου. Παρόμοια θέση υποστήριξε λίγο αργότερα ο γάλλος μαθηματικός Χένρυ Πουανκαρέ. Τα επιχειρήματα του Αϊνστάιν όμως ήταν πιο κοντά στη φυσική. Ο Πουανκαρέ συνεισέφερε αρκετά στον μαθηματικό φορμαλισμό της νέας θεωρίας. Η θεμελιώδης υπόθεση της νέας θεωρίας, της ειδικής σχετικότητας, ήταν ότι οι νόμοι της φυσικής πρέπει να είναι ίδιοι για όλους τους ελεύθερα κινούμενους παρατηρητές ανεξάρτητα από την ταχύτητά τους. Αυτή η ιδέα ίσχυε στους νόμους της κίνησης του Νεύτωνα, τώρα όμως επεκτάθηκε για να συμπεριλάβει την θεωρία του Μάξγουελ. Δηλαδή, όλοι οι παρατηρητές μετρούν την ίδια ταχύτητα του φωτός, η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερά, ανεξάρτητα τι ταχύτητα έχουν.

Μια συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι τίποτα δεν μπορεί να κινηθεί γρηγορότερα από το φως. Δηλαδή ένα σώμα με μάζα όταν κινείται με κάποια ταχύτητα, η μάζα του αυξάνεται, αυτό γίνεται εμφανές όταν η ταχύτητα προσεγγίζει την ταχύτητα του φωτός. Ένα σώμα που δεν έχει μάζα ηρεμίας μηδενική, δηλαδή η μάζα του όταν δεν κινείται, τότε δεν μπορεί ποτέ να φτάσει την ταχύτητα του φωτός γιατί η μάζα του απειρίζεται. Αυτό σημαίνει ότι χρειάζεται άπειρη ενέργεια για να επιταχυνθεί και να φτάσει σε αυτή τη ταχύτητα. Μόνο τα φωτόνια μπορούν να ταξιδέψουν με την ταχύτητα του φωτός και σωμάτια που έχουν μηδενική μάζα ηρεμίας. Ήταν σημαντική η ανακάλυψη της ειδικής σχετικότητας διότι μας έφερε νέα οπτική στο τι πιστεύαμε για τον χώρο και τον χρόνο. Σύμφωνα με τη θεωρία του Νεύτωνα αν σταλεί ένας παλμός φωτός από ένα σημείο σε ένα άλλο τότε όλοι οι παρατηρητές θα συμφωνούν για την διάρκεια της διαδρομής αλλά όχι για το μήκος. Συνεπώς θα μετρήσουν διαφορετικές ταχύτητες για το φως. Στην θεωρία του Αϊνστάιν όλοι οι παρατηρητές ανεξαρτήτως κίνησης θα πρέπει να συμφωνούν για την τιμή της ταχύτητας του φωτός. Με βάση το τελευταίο, επειδή το μήκος διαδρομής θα είναι διαφορετικό για τον κάθε παρατηρητή, θα πρέπει και η χρονική διάρκεια να είναι διαφορετική. Κάθε σημείο στο χώρο προσδιορίζεται από τρεις συντεταγμένες, το μήκος το πλάτος και το ύψος. Στην σχετικότητα υπεισέρχεται ως τέταρτη διάσταση ο χρόνος ο οποίος δεν είναι ξεχωριστή συντεταγμένη. Το φως όταν εκπέμπεται από μια πηγή διαδίδεται σφαιρικά στο χώρο. Δηλαδή αν έχουμε ένα διάγραμμα

και στον κατακόρυφο άξονα βάλουμε τον χρόνο και στον οριζόντιο τον χώρο τότε η τροχιά που διαγράφει το φως είναι ένας ανεστραμένος κώνος. Όσοι παρατηρητές βρίσκονται μέσα στον κώνο μπορούν να συνδεθούν αιτιατά. Δηλαδή, κάποιος με κάποια ταχύτητα, μικρότερη της ταχύτητας του φωτός, μπορεί μετά από κάποιο χρόνο να βρισκείται από την πηγή στο σημείο παρατήρησης. Αν το σημείο βρίσκεται στην επιφάνεια του κώνου τότε μόνο το φως θα το προλάβει, ενώ αν βρίσκεται εκτός δεν θα το προλάβει.

Πιο αναλυτικά, έστω ότι ένας παρατηρητής βρίσκεται στο σημείο A και στο σημείο B που απέχει από το A 5 μέτρα θα γίνει ένα γεγονός σε 1 δευτερόλεπτο. Ο παρατηρητής αν κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη των 5 μέτρων ανά δευτερόλεπτο τότε θα προλάβει να φτάσει στο σημείο B ώστε να βιώσει το γεγονός. Αν το σημείο B απέχει από το A 300000000 μέτρα και το γεγονός γίνει σε 1 δευτερόλεπτο τότε μόνο με την ταχύτητα του φωτός ή μεγαλύτερη μπορεί κάποιος να το βιώσει. Αν το σημείο B απέχει για παράδειγμα 8×10^{15} μέτρα και το γεγονός γίνει σε 8 δευτερόλεπτα τότε κάποιος θέλει ταχύτητα ίση ή μεγαλύτερη των 8×10^{15} μέτρων ανά δευτερόλεπτο για να το βιώσει. Άρα δεν μπορεί να συνδεθεί αιτιατά και είναι εκτός του κώνου φωτός. Η ειδική θεωρία της σχετικότητας έφερε επανάσταση στις απόψεις μας για τον χώρο και το χρόνο αφού τώρα πια κάθε παρατηρητής βιώνει διαφορετική χρονική διάρκεια για ένα γεγονός ανάλογα με την ταχύτητά του. Κάτι όμως έλειπε. η θεωρία αυτή προβλέπει τι γίνεται όταν οι παρατηρητές κινούνται με σταθερές ταχύτητες ο ένας ως προς τον άλλο. Τι γίνεται όμως αν κάποιος κινείται επιταχυνόμενα; Ο Αϊνστάϊν έκανε την εξής επαναστατική υπόθεση: η βαρύτητα δεν είναι μια δύναμη σαν τις άλλες αλλά είναι μια συνέπεια του γεγονότος ότι ο χωρόχρονος δεν είναι επίπεδος όπως πίστευαν μέχρι τότε αλλά καμπυλωμένος από την παρουσία μάζας και ενέργειας. Έτσι τα διάφορα σώματα όπως οι πλανήτες δεν ακολουθούν ευθείες τροχιές αλλά ακολουθούν τις πιο ευθείες διαδρομές στον καμπυλωμένο χωρόχρονο. Τις καμπύλες αυτές τις ονομάζουμε γεωδαισιακές. Μια γεωδαισιακή καμπύλη είναι η διαδρομή με το μικρότερο μήκος ανάμεσα σε δύο γειτονικά σημεία. Για παράδειγμα τα αεροπλάνα χρησιμοποιούν γεωδαισιακές καμπύλες, λόγω του ότι η Γη είναι σφαιρική, γιατί είναι οι συντομότερες διαδρομές ανάμεσα στα αεροδρόμια. Στην γενική θεωρία της σχετικότητας τα αντικείμενα ακολουθούν πάντα τέτοιες τροχιές. Οι ελλειπτικές τροχιές των πλανητών που προβλέπει η γενική θεωρία της σχετικότητας είναι σχεδόν ίδιες με αυτές που προβλέπει η θεωρία του Νεύτωνα. Αλλά στην περίπτωση του πλανήτη Ερμή, που υφίσταται τις ισχυρότερες βαρυτικές επιδράσεις επειδή βρίσκεται πιο κοντά στον Ήλιο, και ακολουθεί μια αρκετά πεπλατυσμένη ελλειπτική τροχιά, η γενική θεωρία της σχετικότητας προέβλεπε επίσης τη στροφή του άξονα της έλλειψης κατά μία μοίρα κάθε δέκα χιλιάδες χρόνια. Παρά το ότι αυτό το φαινόμενο είναι σχεδόν ανεπαίσθητο, είχε παρατηρηθεί πριν το 1915 και χρησίμευσε ως μία από τις επιβεβαιώσεις της γενικής σχετικότητας.

Σήμερα οι ακόμη πιο μικρές αποκλίσεις αποκλίσεις από τις προβλέψεις της θεωρίας του Νεύτωνα που έχουν παρατηρηθεί για τις τροχιές των άλλων πλανητών μετρήθηκαν από ραντάρ και βρέθηκαν να συμφωνούν με την γενική σχετικότη-

τα. Μία άλλη πρόβλεψη της γενικής θεωρίας της σχετικότητας είναι η κάμψη των ακτίνων φωτός από βαρυτικά πεδία. Για παράδειγμα, η θεωρία προβλέπει ότι οι κώνοι φωτός πρέπει να έχουν μια μικρή κλίση προς τα μέσα, λόγω της μάζας του Ήλιου. Αυτό σημαίνει πως, όταν το φως άλλων αστέρων περάσει κοντά από τον Ήλιο θα αλλάξει κατά μικρή γωνία διεύθυνσης διάδοσης και έτσι για κάποιον παρατηρητή στη Γη τα άστρα θα φαίνονται σε διαφορετική θέση. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να παρατηρηθεί κατά τη διάρκεια μιας έκλειψης Ηλίου, όταν το ηλιακό φως παρεμποδίζεται από τη Σελήνη. Το 1919 μια βρετανική αποστολή παρατηρούσε μια έκλειψη Ηλίου στη δυτική Αφρική διαπίστωσε ότι όντως το φως αλλάζει διεύθυνση όταν περνά κοντά από τον Ήλιο. Μεταγενέστερες παρατηρήσεις επιβεβαίωσαν για άλλη μια φορά τη γενική σχετικότητα.

Μία άλλη πρόβλεψη της γενικής σχετικότητας είναι ότι ο χρόνος περνάει πιο αργά κοντά σε ένα σώμα με μεγάλη μάζα όπως η Γη. Αυτό συμβαίνει λόγω της σχέσης που συνδέει την ενέργεια των φωτονίων με τη συχνότητά τους. Όσο μεγαλύτερη ενέργεια τόσο μεγαλύτερη συχνότητα. Καθώς το φως κινείται προς τα πάνω στο βαρυτικό πεδίο της Γης, χάνει ενέργεια, και έτσι η συχνότητα του χαμηλώνει. Για κάποιον παρατηρητή που βρίσκεται ψηλά πάνω, οτιδήποτε συμβαίνει εκεί κάτω θα φαίνεται ότι συμβαίνει πιο αργά. Η πρόβλεψη αυτή επιβεβαιώθηκε το 1962 με τη χρησιμοποίηση δύο χρονομέτρων πολύ μεγάλης ακρίβειας. Το ένα τοποθετήθηκε στην κορυφή ενός υδατοπύργου και το άλλο στη βάση του. Το χρονοόμετρο στη βάση, που βρισκόταν πιο κοντά στη Γη, βρέθηκε να καθυστερεί σε σχέση με το άλλο στην κορυφή, ακριβώς όσο προέβλεπε η γενική θεωρία της σχετικότητας. Η διαφορά στο ρυθμό των ρολογιών σε διαφορετικά υψόμετρα από τη Γη έχει σήμερα σημαντική πρακτική χρησιμότητα, με την καθιέρωση μεθόδων ακριβούς πλοήγησης πλοίων και αεροπλάνων που βασίζονται σε λήψη σημάτων από δορυφόρους. Άλλη μια πρόβλεψη της θεωρίας είναι η ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων όταν σώματα μεγάλης μάζας έρχονται σε επαφή. Για παράδειγμα η συγχώνευση δύο μελανών οπών ή αστέρων νετρονίων. Το 2015 ήρθε η πρώτη πειραματική επιβεβαίωση των βαρυτικών κυμάτων από το LIGO.

Οι εξισώσεις του Αϊνσταϊν προβλέπουν ένα σύμπαν δυναμικό. Όμως τότε υπήρχε η πεποίθηση για ένα σύμπαν στατικό. Αυτό οδήγησε τον Αϊνστάϊν στην εισαγωγή της κοσμολογικής σταθεράς που θα δρα σαν δύναμη απωστική ώστε να ισορροπεί τις ελκτικές βαρυτικές δυνάμεις και να μας δίνει ένα στατικό σύμπαν. Ένας ρώσος μαθηματικός ο Αλεξάντερ Φρίντμαν έκανε δύο απλές υποθέσεις: ότι το Σύμπαν φαίνεται το ίδιο σε οποιαδήποτε κατεύθυνση και αν κοιτάξουμε και ότι το ίδιο θα ίσχυε αν παρατηρούσαμε από οπουδήποτε αλλού. Από αυτές τις δύο υποθέσεις συμπέρανε ότι το Σύμπαν δεν μπορεί να είναι στατικό. Η πρώτη υπόθεση δεν είναι απόλυτα σωστή διότι τα άλλα άστρα μας στο Γαλαξία μας σχηματίζουν μια φωτεινή λωρίδα που διασχίζει το νυχτερινό ουρανό. Αλλά αν κοιτάξουμε στους μακρινούς γαλαξίες, βλέπουμε ότι υπάρχει περίπου το ίδιο πλήθος άστρων. Συνεπώς το Σύμπαν φαίνεται πραγματικά το ίδιο σε οποιαδήποτε κατεύθυνση αρκεί να το βλέπουμε όπως φαίνεται σε μεγάλη κλίμακα σε σχέση με τις αποστάσεις των γαλαξιών και να αγνοήσουμε τις διαφορές

του στις μικρότερες κλίμακες.

Το 1965 δύο αμερικάνοι φυσικοί των εργαστηρίων Bell ο Άρνο Πεντζίας και ο Ρόμπερτ Γουίλσον δοκίμαζαν μια καινούρια κεραία ανίχνευσης μικροκυμάτων μεγάλης ευαισθησίας. Οι παρατηρήσεις έδειξαν ότι η κεραία ανίχνευε περισσότερο θόρυβο από το αναμενόμενο. Ο θόρυβος δεν ερχόταν από κάποια διεύθυνση συγκεκριμένα. Πρώτα απέκλεισαν το ενδεχόμενο να υπάρχει κάποιο πρόβλημα λειτουργίας. Γνώριζαν ότι αν ο θόρυβος προερχόταν από την ατμόσφαιρα θα έπρεπε να είναι δυνατότερος όταν η κεραία έχει κάποια κλίση και πιο αδύναμος όταν η κεραία είναι κατακόρυφη, επειδή οι πλάγιες διαδρομές στην ατμόσφαιρα είναι μακρύτερες. Όμως ήταν ανεξάρτητος από την κλίση της κεραίας. Επειδή ήταν ίδιος ανεξάρτητα από την κατεύθυνση και το χρόνο παρατήρησης, δηλαδή την κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο και την περιστροφή της, θα έπρεπε να προέρχεται έξω από το Ηλιακό Σύστημα και τον Γαλαξία μας. Οι δύο αυτοί επιστήμονες έπεσαν τυχαία πάνω σε μια πραγματική επιβεβαίωση της πρώτης υπόθεσης του Φρίντμαν. Επειδή όμως το Σύμπαν δεν είναι ακριβώς το ίδιο σε οποιαδήποτε κατεύθυνση αλλά μόνο κατά μέσο όρο σε μεγάλη κλίμακα και τα μικροκύματα δεν μπορεί να είναι ακριβώς τα ίδια σε οποιαδήποτε κατεύθυνση. Θα πρέπει να υπάρχουν μικρές διαφοροποιήσεις μεταξύ των διαφόρων κατευθύνσεων. Αυτές οι διαφοροποιήσεις ανιχνεύτηκαν για πρώτη φορά το 1992 από τον ερευνητικό δορυφόρο COBE σε ποσοστό περίπου 0.001%. Οι Ντικς και Πιμπλς υποστήριξαν ότι θα έπρεπε να σούμε ακόμα και σήμερα τη λάμψη από το υπέρπυκνο σύμπαν βλέποντας το φως από πολύ μακρινά άστρα. Η διαστολή του Σύμπαντος θα προκαλούσε στο φως αυτό μια μεγάλη μετατόπιση προς το ερυθρό, τόσο ώστε να φτάσει σε μας με τη μορφή των μικροκυμάτων.

Εκ πρώτης όψεως, θα πρέπει να συμπεράνουμε ότι κατέχουμε μια ειδική θέση στο Σύμπαν, επειδή οι γαλαξίες απομακρύνονται από μας τότε λογικό να υποθέσει κανείς ότι είμαστε στο κέντρο του Σύμπαντος. Υπάρχει όμως και μια άλλη εξήγηση: το Σύμπαν μπορεί να μοιάζει το ίδιο σε οποιαδήποτε κατεύθυνση και από τους άλλους γαλαξίες. Επίσης, ο Φρίντμαν υπέθεσε ότι όσο μεγαλύτερη απόσταση απέχουν οι γαλαξίες μεταξύ τους τόσο μεγαλύτερη θα είναι η ταχύτητα απομάκρυνσής τους. Συνεπώς η μετατόπιση προς το ερυθρό θα πρέπει να είναι ανάλογη της απόστασης από εμάς, όπως παρατήρησε ο Χάμπλ. Υπάρχουν τρία διαφορετικά μοντέλα που πληρούν τις δύο υποθέσεις του Φρίντμαν. Το πρώτο μοντέλο, που ο ίδιος βρήκε, το Σύμπαν διαστέλλεται αργά ώστε η βαρυτική έλξη των γαλαξιών να επιβραδύνει τη διαστολή και τελικά να σταματήσει. Μετά αρχίζει η συστολή μέχρι να φτάσουμε σε ένα ένα σημείο άπειρης πυκνότητας όπως αυτό που ξεκίνησε. Στο δεύτερο μοντέλο το Σύμπαν διαστέλλεται τόσο γρήγορα που η βαρυτική έλξη αν και το επιβραδύνει κάπως δεν μπορεί να το σταματήσει. Στο τρίτο μοντέλο το Σύμπαν διαστέλλεται τόσο γρήγορα όσο ακριβώς χρειάζεται για να αποφύγει την τελική συστολή. Ένα χαρακτηριστικό του πρώτου μοντέλου είναι ότι ούτε το Σύμπαν είναι άπειρο στο χώρο, ούτε ο χώρος έχει κάποιο όριο. Η βαρύτητα είναι τόσο ισχυρή, ώστε ο χώρος καμπυλώνεται προς τον εαυτό του, όπως περίπου η επιφάνεια της Γης. Αν κάποιος κινείται προς κάποια κατεύθυνση στην επιφάνεια της Γης δεν φτάνει ποτέ σε

κάποια άκρη ή όριο, αλλά κάποτε ξαναγυρίζει στο σημείο εκκίνησής του. Στο πρώτο μοντέλο ο χώρος είναι κάπως έτσι με την διαφορά των τριών διαστάσεων σε σχέση με τις δύο στην επιφάνεια της Γης. Ο χρόνος σε αυτό το μοντέλο είναι πεπερασμένος. Στο πρώτο μοντέλο ο χώρος που αρχικά διαστέλλεται και μετά συστέλλεται, “κλείνεται” στον εαυτό του όπως η επιφάνεια μιας σφαίρας. Στο δεύτερο μοντέλο, που διαστέλλεται για πάντα, ο χώρος “άνοίγει”, είναι κυρτωμένος κατά την αντίθετη έννοια, όπως η επιφάνεια ενός σαμαριού. Στην περίπτωση αυτή ο χώρος είναι άπειρος. Στο τρίτο μοντέλο ο χώρος είναι επίπεδος και άπειρος.

Για να απαντήσουμε ποιο μοντέλο περιγράφει το Σύμπαν πρέπει να γνωρίζουμε τον σημερινό ρυθμό διαστολής του Σύμπαντος με τη μέση πυκνότητα. Αν η πυκνότητα είναι μικρότερη μιας κρίσιμης τιμής τότε η βαρύτητα θα είναι αρκετά αδύναμη και δεν μπορεί να σταματήσει τη διαστολή. Αν είναι μεγαλύτερη τότε η βαρύτητα θα είναι αρκετά ισχυρή και θα σταματήσει κάποια στιγμή τη διαστολή και θα αρχίσει να συστέλλεται. Ο ρυθμός διαστολής μπορεί να προσδιοριστεί αν υπολογίσουμε τις ταχύτητες απομάκρυνσης των άλλων γαλαξιών από μας, με τη βοήθεια του φαινομένου Doppler. Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει με μεγάλη ακρίβεια. Αλλά οι αποστάσεις των γαλαξιών δεν είναι επακριβώς γνωστές, επειδή μπορούν να μετρηθούν μόνο έμμεσα. Το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι το Σύμπαν διαστέλλεται κατά 5% με 10% περίπου κάθε ένα δισεκατομμύριο χρόνια. Η αβεβαιότητα στη σημερινή μέση πυκνότητα του Σύμπαντος είναι ακόμα μεγαλύτερη. Αν προσθέσουμε τις μάζες όλων των γαλαξιών που βλέπουμε στο Γαλαξία μας και στους άλλους γαλαξίες, η συνολική μάζα είναι λιγότερο από ένα εκατοστό όσης χρειάζεται για να σταματήσει η διαστολή του Σύμπαντος, ακόμη και αν υποθέσουμε έναν πολύ μικρό ρυθμό διαστολής. Ο Γαλαξίας μας και οι υπόλοιποι γαλαξίες θα πρέπει να περιέχουν μεγάλη ποσότητα σκοτεινής ύλης που δεν μπορούμε να τη δούμε αλλά γνωρίζουμε ότι υπάρχει λόγω της βαρυτικής της έλξης στις τροχιές των άστρων μέσα στους γαλαξίες. Το ίδιο μπορούμε να συμπεράνουμε και για τα σμήνη γαλαξιών. Ωστόσο, κι αν ακόμη αθροίσουμε όλες αυτές τις πυκνότητες σκοτεινής ύλης, δεν έχουμε παρά το ένα δέκατο του ποσού που χρειάζεται για να σταματήσει η διαστολή. Δεν μπορούμε να αποκλείσουμε τη δυνατότητα να υπάρχει κάποια άλλη μορφή ύλης κανεμνημένη σχεδόν ομοιόμορφα μέσα στο Σύμπαν που δεν την έχουμε ανιχνεύσει ακόμα και μπορεί να επαρκεί μαζί με τη γνωστή για να συμπληρωθεί το απαιτούμενο ποσό. Οι ενδείξεις που έχουμε οδηγούν στο συμπέρασμα ότι πιθανόν το Σύμπαν θα συνεχίσει να διαστέλλεται επί άπειρον. Το κοινό που έχουν και τα τρία μοντέλα του Φρίντμαν είναι ότι προβλέπουν ένα σημείο που η απόσταση των γειτονικών γαλαξιών πρέπει να ήταν μηδενική. Τη στιγμή εκείνη η πυκνότητα του Σύμπαντος και η καμπυλότητα του χωροχρόνου ήταν άπειρες.

Όπως είπαμε προηγουμένως βλέπουμε ένα σύμπαν που έχει επιταχυνόμενη διαστολή. Οι εξισώσεις του Άινσταϊν προβλέπουν μόνο τη βαρύτητα συνεπώς μια ελκτική δύναμη, οπότε θα πρέπει να υπάρχει κάτι σαν δύναμη που να υπερνικά τη βαρύτητα. Επίσης, άλλο ένα πρόβλημα είναι ότι η γενική θεωρία της

σχετικότητας δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον μικρόκοσμο διότι είναι μη επανακανονικοποιήσιμη και παίρνουμε αποτελέσματα με άπειρο σε μετρήσιμα μεγέθη. Συνεπώς χρειάζεται μια τροποποίηση της βαρύτητας και στις μεγάλες κοσμολογικές κλίμακες ώστε να εξηγήσει την επιταχυνόμενη διαστολή, και στις μικρές κλίμακες ώστε να μπορέσουμε να δούμε τι συμβαίνει στις πολύ υψηλές ενέργειες όπως μπορούμε με τις άλλες τρεις θεμελιώδεις δυνάμεις.

Κεφάλαιο 3

Κοσμολογία

3.1 Γενική Σχετικότητα

Η σημερινή αποδεχόμενη θεωρία για τη βαρύτητα είναι η Γενική θεωρία της Σχετικότητας. Είναι η συνέχεια της ειδικής θεωρίας με την οποία ο Einstein αντικατέστησε την βαρυτική θεωρία του Νεύτωνα η οποία εισάγει τις έννοιες του απόλυτου χώρου και του απόλυτου χρόνου. Η ειδική θεωρία της σχετικότητας αλλάζει αυτές τις αντιλήψεις κάνοντας αυτές τις έννοιες σχετικές ως προς την κίνηση των παρατηρητών. Η ειδική θεωρία όμως δεν περιγράφει κινήσεις στις οποίες η ταχύτητα μεταβάλλεται, δηλαδή μη αδρανειακά συστήματα. Ο Einstein συνέλαβε την ιδέα ότι μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς και η βαρύτητα συνδέονται. Το 1915 γεννήθηκε η Γενική θεωρία της Σχετικότητας η οποία περιγράφει και κινήσεις σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς και είναι μια γεωμετρική περιγραφή της βαρύτητας. Έχει πολλές επιτυχημένες προβλέψεις όπως η μετάθεση του περιηλίου του Ερμή, το gravitational lensing, το οποίο έχει να κάνει με την κύρτωση του φωτός όταν περνάει κοντά από σώματα με μεγάλη μάζα, η ύπαρξη των μαύρων τρυπών η οποία επαληθεύτηκε πρόσφατα πειραματικά. Σαν μια θεωρία πεδίου περιγράφεται από τη δράση Einstein-Hilbert

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_m \right), \quad (3.1)$$

όπου

$$\kappa^2 = 8\pi Gc^{-4}, \quad (3.2)$$

και \mathcal{L}_m η λανγκρατζιανή πυκνότητα όλων των μορφών ενέργειας που ξέρουμε. Η μετρική είναι η $(-, +, +, +)$. Οι εξισώσεις κίνησης που παίρνουμε είναι οι:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

όπου $R_{\mu\nu}$ είναι ο ταυστής Ricci, $g_{\mu\nu}$ η μετρική και R το βαθμωτό Ricci και $T_{\mu\nu}$ ο ταυστής ενέργειας ορμής. Ισχύει ότι

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (3.4)$$

Με αυτή τη συνθήκη διατηρείται η ενέργεια και η ορμή. Ο ταυστής Ricci προέρχεται από τη συστολή της μετρικής με τον ταυστή Riemann

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R^{\kappa}_{\mu\kappa\nu}, \quad (3.5)$$

όπου

$$R^{\lambda}_{\mu\kappa\nu} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\kappa}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\kappa}. \quad (3.6)$$

Εδώ έχουμε εκφράσει τον ταυστή Riemann σε συνάρτηση με τα σύμβολα Christoffel, και κατ' επέκταση με την μετρική. Για τα σύμβολα Christoffel ισχύει ότι

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} \right). \quad (3.7)$$

Το βαθμωτό Ricci προκύπτει από τη συστολή της μετρικής με τον ταυστή Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Οι εξισώσεις (7.72) είναι 16 εξισώσεις αλλά στην πραγματικότητα είναι 10 ανεξάρτητες εξισώσεις λόγω του ότι ο ταυστής $g_{\mu\nu}$ είναι συμμετρικός. Οι λύσεις αυτές παράγουν ένα συστελλόμενο ή ένα επιβρδυνόμενο διαστελλόμενο σύμπαν.

3.2 Κοσμολογικό υπόβαθρο

Τα μοντέλα που εξετάζουμε είναι αυτά που υπακούν την κοσμολογική αρχή, δηλαδή ότι το σύμπαν είναι ομογενές και ισότροπο. Οπότε συνήθως εξετάζουμε ένα μοντέλο το οποίο περιγράφεται από μια FRW μετρική. Η γενική της μορφή είναι η

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.9)$$

όπου t είναι ο κοσμικός χρόνος, $a(t)$ ο παράγοντας κλίμακας που εξαρτάται από τον κοσμικό χρόνο, r , θ , ϕ οι πολικές συντεταγμένες και k η καμπυλότητα. όταν έχουμε ένα επίπεδο σύμπαν τότε η καμπυλότητα παίρνει τιμή 0, όταν το σύμπαν είναι κλειστό τότε παίρνει την τιμή 1, ενώ όταν παίρνει την τιμή -1 είναι ανοικτό. Εδώ χρησιμοποιούμε την σύμβαση $(-, +, +, +)$ για την μετρική.

Στην κοσμολογία θεωρούμε συνήθως ο ταυστής ενέργειας ορμής να παίρνει τη μορφή του ταυστή ενέργειας ορμής ενός τέλει υγρού. Δηλαδή

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

όπου ρ η πυκνότητα, p η πίεση και u η ταχύτητα του υγρού. Αν θεωρήσουμε την μετρική (3.17) με μηδενική καμπυλότητα τότε οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από τις $[(0, 0), (i, i)]$ συνιστώσες των (3.3) είναι

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (3.11)$$

και

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (3.12)$$

Επίσης χρησιμοποιώντας την (0) συνιστώσα της εξίσωσης $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, βρίσκουμε

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (3.13)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί ως

$$\dot{\rho} = -3H\rho(1 + w), \quad (3.14)$$

όπου w ονομάζουμε τον λόγο της πίεσης προς την πυκνότητα $w = \frac{p}{\rho}$.

3.3 Κρίσιμη Πυκνότητα

Σε ένα σύμπαν που κυριαρχεί η ύλη έχουμε ότι $\rho = \rho_m$ και $p = 0$. Από την εξίσωση (3.13) μπορούμε να βρούμε την εξέλιξη της πυκνότητας της ύλης συναρτήσει του παράγοντα κλίμακας. Αν θεωρήσουμε ότι τη σημερινή εποχή η πυκνότητα της ύλης είναι ρ_{m0} και η σημερινή τιμή του παράγοντα κλίμακας είναι ίση με τη μονάδα, $a_0 = 1$, τότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\rho_m = \rho_{m0}a^{-3}. \quad (3.15)$$

Στην σημερινή εποχή έχουμε ένα επιταχυνόμενο διαστελλόμενο σύμπαν. Άρα από την εξίσωση (3.12) πρέπει $\ddot{a} > 0$. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει το δεξί μέλος να δώσει $\frac{p}{\rho} < -\frac{1}{3}$. Καμία μορφή ενέργειας από τις γνωστές δεν έχει αυτήν την συμπεριφορά, οπότε κάποιο νέο είδος ενέργειας, η σκοτεινή ενέργεια, απαιτείται για να ερμηνεύσει αυτήν την συμπεριφορά.

Τώρα αν θεωρήσουμε ότι η πίεση είναι μη μηδενική τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον λόγο της πίεσης προς την πυκνότητα που ορίσαμε προηγουμένως, δηλαδή την παράμετρο w . Αυτός ο λόγος παίρνει διάφορες τιμές για τα διαφορετικά είδη ρευστών. Για παράδειγμα όταν έχουμε ακτινοβολία ο λόγος παίρνει την τιμή $\frac{1}{3}$. Όταν έχουμε σκόνη παίρνει την τιμή 0, ενώ παχύρευστο υγρό παίρνει την τιμή 1. Σε ένα σύμπαν με κοσμολογική σταθερά η τιμή γίνεται -1.

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (3.13) βρίσκουμε ότι

$$\rho = \frac{C}{a^{3(1+w)}}, \quad (3.16)$$

όπου C μια σταθερά ολοκλήρωσης που εξαρτάται από το είδος του ρευστού. Τώρα θεωρούμε ότι $C = \rho_{X_0}a_0^{3(1+w)}$, άρα καταλήγουμε ότι

$$\frac{\rho_X}{\rho_{X_0}} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)}, \quad (3.17)$$

όπου το X είναι για διαφορετικά είδη υγρών, a_0 η αρχική τιμή του παράγοντα κλίμακας. Αν θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα αποτελείται από τις συνιστώσες των

διαφορών ρευστών και λάβουμε υπ όψιν τον όρο καμπυλότητας, τότε η εξίσωση (3.11) παίρνει τη μορφή και

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}. \quad (3.18)$$

Διαιρώντας αυτήν την εξίσωση με τον παράγοντα H^2 , βρίσκουμε ότι

$$\Omega_M + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1 + \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (3.19)$$

όπου

$$\begin{aligned} \Omega_M &= \frac{8\pi G \rho_m}{3H^2} \\ \Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{3H^2}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

και Ω_r η αντίστοιχη ποσότητα για την ακτινοβολία. Λύνοντας την (3.19) ως προς την καμπυλότητα, βρίσκουμε ότι

$$\Omega_M + \Omega_r + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (3.21)$$

Αν το άθροισμα όλων των παραμέτρων πυκνοτήτων είναι μεγαλύτερο του 1 τότε η καμπυλότητα είναι θετική, άρα το σύμπαν είναι κλειστό. Αν η παράμετρος αυτή είναι μικρότερη του 1 τότε η καμπυλότητα είναι αρνητική και το σύμπαν είναι ανοικτό. Στην περίπτωση που $\Omega = 0$ τότε $k = 0$, δηλαδή το σύμπαν είναι επίπεδο. Την τιμή της πυκνότητας για την οποία η καμπυλότητα είναι μηδέν την ονομάζουμε κρίσιμη πυκνότητα ρ_c . Από την (3.18) έχουμε ότι $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$.

3.4 Διαστολή του Σύμπαντος

Για να δούμε το μέτρο της διαστολής του Σύμπαντος χρησιμοποιούμε την ερυθρά μετατόπιση. Αυτή ορίζεται ως

$$1 + z = \frac{a_0}{a}, \quad (3.22)$$

όπου a_0 ο παράγοντας κλίμακας την σημερινή εποχή. Αν αντικαταστήσουμε $a = a_0$ τότε βρίσκουμε ότι η ερυθρά μετατόπιση τη σημερινή εποχή είναι $z_0 = 0$. Χρησιμοποιώντας την (3.17) βρίσκουμε ότι

$$\frac{\Omega_X}{\Omega_X^{(0)}} = (1 + z)^{3(1+w)}. \quad (3.23)$$

Σε αυτή την εξίσωση βλέπουμε την εξέλιξη της κάθε παραμέτρου πυκνότητας συναρτήσει της ερυθράς μετατόπισης. Το $\Omega_X^{(0)}$ είναι η τιμή στο παρόν. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.17), (3.18) βλέπουμε ότι $H^2 \sim \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)} - \frac{k}{a^2}$.

Κοιτάζοντας τους δύο όρους βλέπουμε ότι αν θεωρήσουμε το όριο $a \rightarrow 0$, ο πρώτος όρος γίνεται ο κυρίαρχος για $w > -\frac{1}{3}$. Συνεπώς, στα πρώιμα χρόνια του σύμπαντος που ισχύει η παραπάνω ανισότητα, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σύμπαν επίπεδο χωρίς καμπυλότητα. Άρα χρησιμοποιώντας τις (3.16), (3.18) για μηδενική καμπυλότητα, βρίσκουμε ότι

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{C}{a^{3(1+w)}}. \quad (3.24)$$

Λύνοντας αυτή την διαφορική εξίσωση καταλήγουμε στη σχέση μεταξύ του παράγοντα κλίμακας και του χρόνου. Βρίσκουμε ότι

$$a(t) = [6\pi GC(1+w^2)]^{\frac{1}{3(1+w)}} (t-t_0)^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (3.25)$$

όπου t , είναι ο χρόνος και t_0 η αρχή του χρόνου. Για τις διάφορες τιμές των ρευστών έχουμε, πχ για ακτινοβολία ($w = \frac{1}{3}$) βρίσκουμε $a(t) = \left(\frac{32\pi GC_r}{3}\right)^{\frac{1}{4}} (t-t_0)^{\frac{1}{2}}$. Για “σκόνη” ($w = 0$), παίρνει την τιμή $a(t) = (6\pi GC_d)^{\frac{1}{3}} (t-t_0)^{\frac{2}{3}}$. Για παχύρρευστο υγρό ($w = 1$) έχουμε ότι $a(t) = (24\pi GC_s)^{\frac{1}{6}} (t-t_0)^{\frac{1}{3}}$. Στην περίπτωση της κοσμολογικής σταθεράς ($w = -1$), από την εξίσωση $H = \frac{\dot{a}}{a}$, για H ανεξάρτητο του χρόνου, βρίσκουμε ότι $a(t) = a_* e^{Ht}$, όπου a_* είναι η αρχική τιμή του παράγοντα κλίμακας. Για $t = 0$ έχουμε ότι $a(t) = 0$, άρα από την (3.17) βλέπουμε ότι $\rho \rightarrow \infty$. Αυτό το σημείο είναι η αρχική μοναδικότητα που ξεκίνησε το σύμπαν. Για τις περιπτώσεις της ακτινοβολίας, της σκόνης και του παχύρρευστου υγρού η σταθερά του Hubble εξελίσσεται ως $H = \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{t}$. Στην περίπτωση της κοσμολογικής σταθεράς, η παράμετρος του Hubble είναι σταθερή. Όταν $w = \frac{1}{3}$, $H = \frac{1}{2t}$, για $w = 0$, $H = \frac{2}{3t}$. Για $w = 1$, $H = \frac{1}{3t}$. Βλέπουμε για τις διάφορες τιμές του w πως συπεριφέρεται η σταθερά του Hubble συναρτήσει του χρόνου. Και στις 3 περιπτώσεις είναι αντιστρόφως ανάλογη του χρόνου. όσο το σύμπαν εξελίσσεται τόσο ο ρυθμός που διαστέλλεται μικραίνει.

Αν λάβουμε υπόψιν ένα σύμπαν με κοσμολογική σταθερά και θεωρήσουμε ότι ο λόγος w είναι συνάρτηση του παράγοντα κλίμακας, δηλαδή $w = w(a)$, και μέσω του κανόνα αλυσίδας, $\frac{d\rho}{dt} = aH \frac{d\rho}{da}$, η εξίσωση (3.13) γίνεται

$$\rho(a) = \rho_0 e^{-3 \int [1+w(a)] \frac{da}{a}}, \quad (3.26)$$

όπου έχουμε ολοκληρώσει την σχέση και ρ_0 η αρχική πυκνότητα. Μέσω της σχέσης $H^2 = \frac{8\pi G\rho(a)}{3}$, λύνοντας ως προς τον χρόνο βρίσκουμε ότι

$$t = \int \sqrt{\frac{3}{8\pi G a \rho(a)}} da. \quad (3.27)$$

Για να εκφράσουμε τη σταθερά Hubble συναρτήσει της ερυθράς μετατόπισης, χρησιμοποιούμε την τιμή H_0^2 , όπου H_0 είναι η σημερινή τιμή της σταθεράς

Hubble ίση με $H_0 \sim 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ και χρησιμοποιώντας ότι

$$\begin{aligned}\Omega_{M0} &= \frac{8\pi G \rho_m}{3H_0^2} \\ \Omega_{\Lambda 0} &= \frac{\Lambda}{3H_0^2},\end{aligned}\quad (3.28)$$

βρίσκουμε ότι

$$H^2 = H_0^2 \sum_X \Omega_{X0} (1+z)^{3(1+w)}. \quad (3.29)$$

Αυτό μπορεί να γραφτεί σαν

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_{m0} (1+z)^3 + \Omega_{\gamma 0} (1+z)^4 + \Omega_{k0} (1+z)^2 + \Omega_{\Lambda 0} e^{-3 \int_z^0 \frac{1+w(z')}{1+z'} dz'} \right), \quad (3.30)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την (3.26). Αν το w δεν εξαρτάται από το a τότε $f(z) = 0$. Η Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιώντας τις (3.22), (3.27) βλέπουμε ότι

$$t_L = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z') \sqrt{\Omega_{m0} (1+z')^3 + \Omega_{\gamma 0} (1+z')^4 + \Omega_{k0} (1+z')^2 + \Omega_{\Lambda 0}}}, \quad (3.31)$$

όπου t_L η ηλικία του σύμπαντος συναρτήσει της τωρινής τιμής της σταθεράς του Hubble και της ερυθράς μετατόπισης.

3.5 Κοσμολογική σταθερά

Το πιο απλό μοντέλο στο οποίο μπορούμε να επιτύχουμε επιταχυνόμενη διαστολή είναι η δράση Einstein-Hilbert με την προσθήκη ενός ακόμα όρου, της κοσμολογικής σταθεράς. Η δράση (3.1) γίνεται:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_m \right], \quad (3.32)$$

όπου $\kappa^2 = 8\pi G$. Οι εξισώσεις κίνησης είναι οι:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (3.33)$$

Η εισαγωγή της κοσμολογικής σταθεράς τροποποιεί τις εξισώσεις Friedmann. Δηλαδή έχουμε

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.34)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.35)$$

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (3.36)$$

Η εισαγωγή της κοσμολογικής σταθεράς συνεισφέρει στην συνολική πυκνότητα και πίεση. Δηλαδή, σε ένα σύμπαν που κυριαρχεί η ύλη έχουμε ότι $\rho = \rho_m + \rho_\Lambda$ και $p = -p_\Lambda$. Στο διαταρακτικό επίπεδο, στο οποίο θα αναφερθούμε εκτενώς αργότερα, η εισαγωγή της κοσμολογικής σταθεράς αφήνει αναλλοίωτες τις αντίστοιχες διαταρακτικές εξισώσεις (3.11),(3.12) και (3.13).

3.6 Κοσμικές Αποστάσεις

Η διαδρομή που κινείται το φως είναι αυτή κατά την οποία ισχύει $ds^2 = 0$. Μπορούμε να γράψουμε την αρχική μετρική ως

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[dX^2 + \Phi(X)^2 (d\theta^2 + \sin^2\phi d\phi^2) \right], \quad (3.37)$$

όπου

$$\Phi(X) = \begin{cases} \sin X, & k = 1 \\ X, & k = 0 \\ \sinh X, & k = -1. \end{cases} \quad (3.38)$$

Αν εισαγάγουμε τον σύμμορφο χρόνο, ο οποίος συνδέεται με τον κοσμικό χρόνο μέσω της σχέσης

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.39)$$

τότε η προηγούμενη μετρική μπορεί να γραφεί σαν

$$ds^2 = -a(\eta)^2 \left[d\eta^2 - \left(dX^2 + \Phi(X)^2 (d\theta^2 + \sin^2\phi d\phi^2) \right) \right]. \quad (3.40)$$

Μπορούμε να διαλέξουμε έναν παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται στο κέντρο μια σφαίρας. Εκεί ισχύει $r = 0$ για την ακτινική συνιστώσα. Αν διαλέξουμε μια γεωδαισιακή που κατά μήκος της ακτίνας, αυτή θα έχει σταθερές συνιστώσες θ, ϕ . Άρα $d\theta = d\phi = 0$. Συνεπώς για το φως έχουμε ότι

$$d\eta^2 = dX^2. \quad (3.41)$$

Άρα οι γεωδαισιακές που διασχίζει το φως μέσω της ακτίνας, είναι οι

$$X(\eta) = \pm\eta + c, \quad (3.42)$$

όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης. Ολοκληρώνοντας τη σχέση (3.39) βρίσκουμε ότι

$$\eta - \eta_0 = \int_{t_0}^t \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.43)$$

όπου t_0, η_0 οι χρόνοι από τη δημιουργία του σύμπαντος. Συνδιάζοντας τις δύο τελευταίες βρίσκουμε ότι

$$X_H = \int_{t_0}^t \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.44)$$

Πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη με τον παράγοντα κλίμακας, βρίσκουμε το μέγεθος του σύμπαντος, δηλαδή την απόσταση που διήνυσε το φως από την αρχή του σύμπαντος, δηλαδή είναι το μέγεθος του παρατηρούμενου σύμπαντος. Η εξίσωση είναι η

$$d_H = a(t) X_H = a(t) \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (3.45)$$

3.7 Πρόβλημα Ορίζοντα

Αν θεωρήσουμε τις δύο εποχές του σύμπαντος, την εποχή της ύλης και την εποχή της ακτινοβολίας. Έστω t ο χρόνος και t' ο χρόνος που είναι στο μεταίχμιο της εποχής της ακτινοβολίας με την εποχή της ύλης. Για την εποχή της ακτινοβολίας έχουμε $t \leq t'$. Χρησιμοποιώντας τον παράγοντα κλίμακας που αναλύσαμε πιο πάνω για τις διάφορες εποχές, βρίσκουμε ότι $X_H = \frac{2}{a'} (t't)^{\frac{1}{2}}$. Τώρα για το μέγεθος του παρατηρούμενου σύμπαντος βρίσκουμε ότι $d_H = 2t = H^{-1}$. Για την εποχή της ύλης ισχύει $t' \leq t \leq t_0$, και κάνοντας την ίδια ανάλυση βρίσκουμε ότι $\frac{a(t)}{a_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$, και άρα $X_H = \frac{3}{a_0} (t_0 t)^{\frac{2}{3}}$. Για το μέγεθος του παρατηρούμενου σύμπαντος βρίσκουμε ότι $d_H = 3t = 2H^{-1}$. Βλέπουμε ότι ο παράγοντας κλίμακας και στις 2 εποχές (εποχή ακτινοβολίας $a \sim t^{\frac{1}{2}}$, εποχή ύλης $a \sim t^{\frac{2}{3}}$) πέφτει πιο αργά με το χρόνο σε σχέση με τους αντίστοιχους ορίζοντες σωματιδίων (d_H), άρα αν πάρουμε το όριο $t \rightarrow 0$ βλέπουμε ότι $a(t) > d_H(t)$. Αυτό σημαίνει ότι το σύμπαν είναι αιτιατός αποσυνδεδεμένο. Μετρήσεις από το κοσμικό υπόβαθρο μικροκυμάτων (CMB) δείχνουν ότι η ακτινοβολία μικροκυμάτων υποβάθρου είναι ισότροπη. Οι μετρήσεις της θερμοκρασίας μεταξύ μιας περιοχής του ουρανού και της μέσης παρατηρούμενης τιμής της θερμοκρασίας είναι της τάξεως $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$. Αυτό σημαίνει ότι για να υπάρχει τόσο μικρή διαφορά θερμοκρασίας θα πρέπει οι περιοχές αυτές να έχουν έρθει σε θερμοδυναμική ισορροπία, άρα θα πρέπει να είναι αιτιατά συνδεδεμένες μεταξύ τους. Αυτό είναι το πρόβλημα του ορίζοντα. Ορίζουμε σαν ορίζοντα γεγονότων την απόσταση εκείνη η οποία ορίζει τα συμβάντα μια περιοχής τα οποία μπορεί να δει ένας μελλοντικός παρατηρητής. Αυτή γράφεται σαν

$$d_{og} = a(t) \int_t^{t_{max}} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (3.46)$$

όπου t_{max} ο χρόνος που θα φτάσει το σήμα στον μελλοντικό παρατηρητή και t ο σημερινός χρόνος που εκπέμπεται το σήμα.

3.8 Πληθωρισμός

Οι εξισώσεις (3.11)-(3.13) δίνουν λύσεις επιταχυνόμενης διαστολής για τον παράγοντα κλίμακας. Αυτό γίνεται όταν $\rho + 3p < 0$, δηλαδή $w < -\frac{1}{3}$ για $\ddot{a} > 0$. Για $w = -\frac{2}{3}$, $a \sim t^2$ και $\rho \sim \frac{1}{a}$, συνεπώς η πηγή της διαστολής (πυκνότητα

ενέργειας ύλης) είναι αντιστρόφως ανάλογη του παράγοντα κλίμακας, δηλαδή μειώνεται όσο το σύμπαν διαστέλλεται. Στην περίπτωση $w = -1$, $\rho = c$, όπου c σταθερά και ο ρυθμός διαστολής δεν επηρεάζεται από την πυκνότητα. Όπως είδαμε προηγουμένως για $w = -\frac{2}{3}$ ο παράγοντας κλίμακας έχει τη μορφή $a(t) = a_* e^{Ht}$, όπου τ το χρονικό διάστημα στο οποίο η πυκνότητα παραμένει σταθερή. Ο παραπάνω παράγοντας κλίμακας στην εξίσωση (3.45) θα δώσει

$$d_H = \frac{1}{H} (e^{Ht} - 1), \quad (3.47)$$

όπου η απόσταση ορίζοντα μεγαλώνει εκθετικά με το χρόνο ενώ ο παράγοντας $\frac{1}{H}$ παραμένει σταθερός. Αν τη συγκρίνουμε με οποιαδήποτε κλίμακα μήκους $L(t) = L_* \frac{a(t)}{a_*} = L_* e^{Ht}$ βρίσκουμε

$$\frac{d_H}{L(t)} = \frac{1}{H} \frac{(e^{Ht} - 1)}{L_* e^{Ht}} \gtrsim 1 - e^{-Ht}, \quad (3.48)$$

για $L_* \lesssim \frac{1}{H}$ όπου L_* αρχική κλίμακα μήκους. Μια κλίμακα μήκους $L(t)$ που είναι μικρότερη αρχικά από τον ορίζοντα γεγονότων μετά από κάποιο χρόνο θα γίνει παρόμοιου μεγέθους. Η ιδέα του πληθωρισμού λύνει το πρόβλημα του ορίζοντα, δηλαδή φωτόνια από απομακρυσμένες περιοχές που δεν συνδέονται αιτιατά έχουν την ίδια θερμοκρασία. Αυτό γίνεται μόνο εάν κάποια στιγμή έχουν αλληλεπιδράσει και έχουν φτάσει σε θερμοδυναμική ισορροπία. Ο πληθωρισμός μας λέει ότι κάποια στιγμή που οι περιοχές συνδέονταν αιτιατά λόγω του πληθωρισμού απομακρύνθηκαν τόσο που σήμερα δεν είναι συνδεδεμένες αιτιατά. Αν $L_* > \frac{1}{H}$ αρχικά τότε $d_H < L(t)$ που σημαίνει ότι περιοχές που ήταν αιτιατά αποσυνδεδεμένες αρχικά θα παραμείνουν και κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού. Ολοκληρώνοντας την (3.46) από t που είναι ο χρόνος που γίνεται ένα γεγονός μέχρι τον χρόνο t_{max} που είναι το χρονικό όριο που μπορεί κάποιος μέσα στον ορίζοντα γεγονότων να λάβει το μήνυμα βρίσκουμε

$$d_{og} = \frac{1}{H} \left(1 - e^{-H(t_{max}-t)}\right) \approx \frac{1}{H}. \quad (3.49)$$

Δηλαδή ένας παρατηρητής μπορεί να λάβει το γεγονός μόνο αν βρίσκεται σε ακτίνα μικρότερη ή ίση της $\frac{1}{H}$. Ο σημερινός ορίζοντας ξεκινάει από μια περιοχή ίση με d_{og} κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού. Επειδή ο παράγοντας $\frac{1}{H}$ παραμένει σταθερός κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού τότε προς το τέλος της περιόδου θα ισχύει $a(t) \gg \frac{H^{-1}(t)}{H_0^{-1}}$, όπου H_0^{-1} η απόσταση του ορίζοντα σήμερα.

Αργότερα στην εποχή της ακτινοβολίας και της ύλης η ποσότητα $\frac{1}{H}$ εξελίσσεται ως $\frac{1}{H} \sim t$ ενώ ο παράγοντας κλίμακας σαν $a(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ και $a(t) \sim t^{\frac{2}{3}}$ που σημαίνει ότι κάποια στιγμή $H^{-1} \sim a(t)H_0^{-1}$. Αυτό γίνεται μετά από $N \equiv Ht_* = 60$. Αυτό λύνει αρκετά προβλήματα. Για παράδειγμα, μια κλίμακα μήκους $L_* \lesssim \frac{1}{H}$ θα μεγαλώσει εκθετικά αφού $L(t) = L_* \frac{a(t)}{a_*} = L_* e^N$, οπότε οποιεσδήποτε ανισοτροπίες, ανομοιογένειες και διαταραχές που ξεκινούν από μια περιοχή d_{og}

θα αραιώνουν όσο το σύμπαν διαστέλλεται και η πυκνότητα μικραίνει λύνοντας για παράδειγμα το πρόβλημα με τα μονόπολα.

Άλλο ένα σημαντικό πρόβλημα είναι το πρόβλημα της επιπεδότητας. Καθώς πηγαίνουμε πίσω στο χρόνο η ποσότητα Ω τείνει στη μονάδα, δηλαδή στον χρόνο Planck πρέπει $\Omega_{Pl} = 1 \pm 10^{-59}$ ώστε να εξηγήσουμε την σημερινή τιμή $\Omega_0 \approx 1$. Αν θεωρήσουμε Ω_* την αρχική τιμή με $\Omega_* = 1 + \frac{k}{a_*^2 H_*^2} \approx 1 + k$, τότε για χρόνο $t = \tau$ έχουμε

$$\Omega(\tau) = 1 + \frac{k}{a^2 H^2} = 1 + k e^{-2N}, \quad (3.50)$$

όπου για $N > 60$ μας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με την αρχική συνθήκη. Αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι αν έχουμε πληθωρισμό τότε η τιμή που θα πάρουμε είναι η μονάδα ανεξαρτήτως της αρχική τιμής, συνεπώς δεν χρειάζεται να πάρουμε μια ειδική τιμή στο παρελθόν.

3.9 Απόσταση Φωτεινότητας

Ορίζουμε σαν απόσταση φωτεινότητας τον λόγο

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi F}, \quad (3.51)$$

όπου d_L η απόσταση παρατηρητή-πηγής, L η απόλυτη φωτεινότητα του αντικειμένου και F η παρατηρούμενη ροή ενέργειας. Η παρατηρούμενη ροή ενέργειας γράφεται ως $F = \frac{L_0}{S}$, όπου L_0 η παρατηρούμενη φωτεινότητα και $S = 4\pi (a_0 \Phi(X))^2$, η επιφάνεια της σφαίρας στο $z = 0$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι η απόσταση φωτεινότητας μπορεί να εκφραστεί μέσω της απόλυτης και παρατηρούμενης φωτεινότητας από την εξίσωση

$$d_L^2 = (a_0 \Phi(X))^2 \frac{L}{L_0}. \quad (3.52)$$

Έστω μια πηγή ακτινοβολίας με απόλυτη λαμπρότητα L η οποία απέχει απόσταση X . Η ενέργεια E που εκπέμπεται σε χρονικό διάστημα Δt συνδέεται με την λαμπρότητα μέσω της σχέσης $L = \frac{E}{\Delta t}$. Με παρόμοια σχέση μπορούμε να εκφράσουμε την παρατηρούμενη φωτεινότητα, δηλαδή έστω E_0 η ενέργεια που ανιχνεύουμε σε χρονικό διάστημα Δt_0 . Τότε έχουμε ότι $L_0 = \frac{E_0}{\Delta t_0}$. Άρα $\frac{L}{L_0} = \frac{E}{E_0} \frac{\Delta t_0}{\Delta t}$. Η παρατηρούμενη ενέργεια με την εκπεμπόμενη ενέργεια συνδέονται μέσω του μήκος κύματος. Αν λ το εκπεμπόμενο μήκος κύματος και λ_0 το παρατηρούμενο μήκος κύματος, τότε

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\hbar \frac{c}{\lambda}}{\hbar \frac{c}{\lambda_0}} = \frac{\lambda_0}{\lambda}. \quad (3.53)$$

Όμως ο λόγος των μηκών κύματος συνδέεται με την ερυθρά μετατόπιση $\frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 + z$. Άρα

$$\frac{E}{E_0} = 1 + z. \quad (3.54)$$

Επίσης, λόγω του ότι κινούνται με την ταχύτητα του φωτός ισχύει ότι $c = \frac{\lambda}{\Delta t} = \frac{\lambda_0}{\Delta t_0}$. Άρα $\frac{\Delta t_0}{\Delta t} = 1 + z$. Συνεπώς, η σχέση μεταξύ των φωτεινότητων παίρνει τη μορφή

$$\frac{L}{L_0} = (1 + z)^2. \quad (3.55)$$

Η απόσταση φωτεινότητας γίνεται

$$d_L = a_0 \Phi(X) (1 + z). \quad (3.56)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\Phi(X) = \frac{1}{H_0 a_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_i^0 (1 + z')^{3(1+w)}}}, \quad (3.57)$$

στην εξίσωση (3.56). Τοποθετώντας την τελευταία στην εξίσωση (3.56), παίρνουμε

$$d_L = \frac{1 + z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_i^0 (1 + z')^{3(1+w)}}}. \quad (3.58)$$

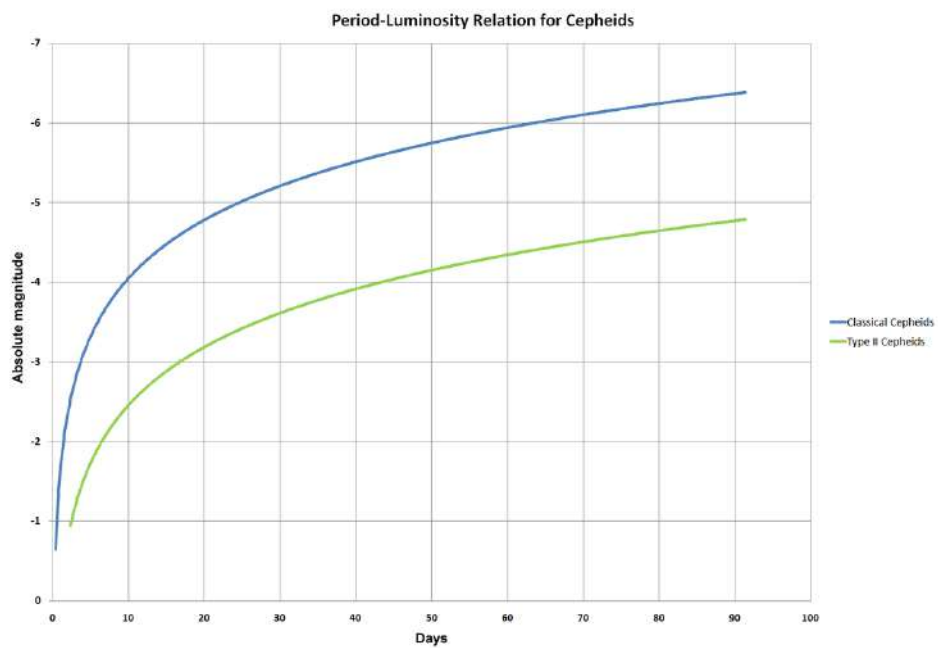
Η απόσταση φωτεινότητας εμφανίζεται στη σχέση μεταξύ φαινόμενου μεγέθους m , και απόλυτου μεγέθους M . Δηλαδή

$$m - M = 5 \log \left(\frac{d_L}{Mpc} \right) + 25. \quad (3.59)$$

Το απόλυτο μέγεθος είναι το φαινόμενο μέγεθος μιας πηγής αν η πηγή τοποθετηθεί σε απόσταση $10Mpc$ από τον παρατηρητή.

3.10 Προσδιορισμός της σημερινής τιμής της σταθεράς του Hubble μέσω της απόστασης φωτεινότητας

Ένας τρόπος να υπολογίσουμε αποστάσεις στο σύμπαν είναι, γνωρίζοντας το φαινόμενο μέγεθος μιας πηγής, προσδιορίζοντας το απόλυτο μέγεθος, να υπολογίσουμε την απόσταση του από εμάς μέσω της (3.59). Αυτές τις πηγές τις ονομάζουμε standard candles. Μια τέτοια πηγή ακτινοβολίας είναι οι Κηφείδες, των οποίων η λαμπρότητα μεταβάλλεται περιοδικά. Μέσω της περιόδου μπορεί να προσδιοριστεί το απόλυτο μέγεθος και ύστερα, γνωρίζοντας το φαινόμενο μέγεθος, να υπολογιστεί η απόσταση. Σε ακόμα μεγαλύτερες αποστάσεις χρειαζόμαστε λαμπρότερες πηγές από τους Κηφείδες. Αυτές είναι οι σούπερ-νοβα τύπου SnIa. Χρησιμοποιώντας αυτά τα φωτεινά αντικείμενα, μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή της σταθεράς του Hubble μέσω της απόστασης



Σχήμα 3.1: Η σχέση περιόδου-φωτεινότητας των Κηφείδων. Μαθηματικά δίνεται από τη σχέση $M = (-2.43 \pm 0.12) (\log P - 1) - (4.05 \pm 0.02)$, όπου M το απόλυτο μέγεθος και P η περίοδος σε μέρες.

φωτεινότητας. Μπορούμε να ορίσουμε την αδιάστατη ελεύθερη απόσταση φωτεινότητας Hubble D_L

$$D_L(z) = \frac{H_0 d_L(z)}{c}, \quad (3.60)$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός, H_0 η σταθερά Hubble την σημερινή εποχή και $d_L(z)$ η απόσταση φωτεινότητας συναρτήσεως της ερυθράς μετατόπισης. Συνεπώς η σχέση μεταξύ φαινομένου και απόλυτου μεγέθους μετατρέπεται στην

$$m - M = 5 \log D_L(z) + 5 \log \left(\frac{c}{H_0} \right) + 25. \quad (3.61)$$

Η αδιάστατη ελεύθερη απόσταση φωτεινότητας Hubble σχετίζεται με την ερυθρά μετατόπιση μέσω του αναπτύγματος

$$D_L(z) = z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \dots \quad (3.62)$$

όπου η σχέση αυτή ισχύει για πολύ μικρά z . Συνεπώς, σε πρώτη τάξη η (3.61) γίνεται

$$m - M = 5 \log z + 5 \log \left(\frac{c}{H_0} \right) + 25 + \dots \quad (3.63)$$

Γνωρίζοντας το απόλυτο και φαινόμενο μέγεθος μιας πηγής φωτεινότητας και την ερυθρά μετατόπιση του φωτός που εκπέμπεται μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή της σταθεράς Hubble. Η φωτεινότητα των Κηφείδων χρησιμοποιείται σαν μετρητής για να υπολογίσουμε το απόλυτο μέγεθος φωτεινότερων πηγών (SnIa) στον ίδιο γαλαξία. Έτσι κάθε φορά χρησιμοποιούμε μια γνωστή πηγή για να υπολογίσουμε το απόλυτο μέγεθος μιας ακόμα φωτεινότερης πηγής και έτσι χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες αποστάσεις σαν σκάλα, μπορούμε να φτάσουμε σε μεγαλύτερες ερυθρές μετατοπίσεις και άρα και αποστάσεις.

Άλλη πηγή φωτός που είναι λαμπρή αρκετά είναι οι ερυθροί γίγαντες. Οι ερυθροί γίγαντες έχουν εξαντλήσει τα αποθέματα υδρογόνου στον πυρήνα τους και κάνουν καύσεις με ήλιο. Η λαμπρότητά τους είναι μεγάλη γιατί ο όγκος τους στη φάση αυτή αυξάνεται ραγδαία. Άλλες πηγές είναι οι αστέρες τύπου Mira, όπως και οι παρατηρήσεις στη διακύμανση της επιφανειακής φωτεινότητας σε αστέρες μεγαλύτερης ηλικίας οι οποίοι είναι μακρύτερα από τους Κηφείδες.

3.11 Γωνιακή απόσταση διαμέτρου

Έστω αντικείμενο στον ουρανό μέγεθος r το οποίο καλύπτει μια γωνία θ ως προς τον παρατηρητή. Τότε θεωρώντας ότι η γωνία είναι πολύ μικρή, η γωνιακή απόσταση D_A δίνεται από τη σχέση

$$D_A = \frac{r}{\Delta\theta}. \quad (3.64)$$

Η απόσταση αυτή συνήθως χρησιμοποιείται στις παρατηρήσεις ανισοτροπίας της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου (CMBR anisotropy) γιατί η πηγή είναι μια σφαίρα ακτίνας ρ και ο παρατηρητής βρίσκεται στο κέντρο. Αν θεωρήσουμε τη μετρική (3.37) και ότι τη στιγμή t_1 έχουμε μέγεθος r , τότε για πολύ μικρά θ έχουμε

$$r = a(t_1) \Phi(X) \Delta\theta. \quad (3.65)$$

Άρα

$$D_A = a(t_1) \Phi(X), \quad (3.66)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{a_0}{a_1} = 1 + z$, έχουμε

$$D_A = \frac{a_0 \Phi(X)}{1 + z}, \quad (3.67)$$

και συγκρίνοντάς την με την (3.56), βλέπουμε ότι

$$D_A = \frac{d_L}{(1 + z)^2}. \quad (3.68)$$

3.12 Υπολογισμός εξισώσεων Friedmann

Για να υπολογίσουμε τις εξισώσεις Einstein σε χωρόχρονο Friedmann θα χρησιμοποιήσουμε την μετρική $g_{\mu\nu} = (-1, a^2(t), a^2(t), a^2(t))$, όπου $a(t)$ ο παράγοντας κλίμακας που εξαρτάται από τον χρόνο. Πρώτα θα πρέπει να υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel. Τα είχαμε ορίσει ως

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} \right).$$

Τα ελληνικά γράμματα αναφέρονται σε χωροχρονικούς δείκτες δηλαδή $\mu, \nu, \dots = (0, 1, 2, 3)$ ενώ τα λατινικά σε χωρικούς δηλαδή $m, n, \dots = (1, 2, 3)$. η μετρική $g^{\mu\nu}$ είναι η αντίστροφη μετρική και υπολογίζεται από τη σχέση $g^{\mu\nu} g_{\mu\alpha} = \delta^{\nu}_{\alpha}$. Δηλαδή $g^{\mu\nu} = (-1, 1/a^2(t), 1/a^2(t), 1/a^2(t))$. Θα υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel με τον πάνω δείκτη 0 δηλαδή

$$\Gamma^0_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{0\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} \right). \quad (3.69)$$

Επειδή η μετρική είναι διαγώνια τα στοιχεία με χωρικό και χρονικό δείκτη μαζί μας δίνουν 0. Άρα τα μόνα στοιχεία που επιβιώνουν είναι τα $g^{00} = -1$. Άρα

$$\Gamma^0_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{0\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{0\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^0} \right). \quad (3.70)$$

Οι πρώτοι 2 όροι κάνουν 0 διότι επιβιώνουν πάλι τα ίδια στοιχεία (g^{00}) των οποίων η παράγωγος δίνει 0. Άρα

$$\Gamma^0_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^0}. \quad (3.71)$$

Για διάφορες τιμές των δεικτών β, γ έχουμε

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = 0, \\ \Gamma^0_{0i} &= \Gamma^0_{i0} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} = 0, \\ \Gamma^0_{ij} &= \Gamma^0_{ji} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = \delta_{ij} \dot{a}.\end{aligned}\quad (3.72)$$

Στην περίπτωση με 3 χωρικούς δείκτες ο όρος που επιβιώνει είναι ο

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right), \quad (3.73)$$

το οποίο μας δίνει 0 διότι η μετρική δεν έχει χωρική εξάρτηση. Τα σύμβολα Γ^i_{00} μας δίνουν

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{i\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\delta 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\delta} \right) \quad (3.74)$$

το οποίο μας δίνει 0 γιατί η μετρική είναι διαγώνια και εξαρτάται μόνο από τον χρόνο. Επίσης έχουμε

$$\Gamma^i_{j0} = \Gamma^i_{0j} = \frac{1}{2} g^{i\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta j}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\delta 0}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^\delta} \right) = \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^0} = \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij}. \quad (3.75)$$

Ο ταυστής Ricci μπορεί να γραφτεί συναρτήσει των συμβόλων Christoffel ως

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} \Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \Gamma^\beta_{\mu\alpha}. \quad (3.76)$$

Θα εξετάσουμε την συνιστώσα (0-0). Οι όροι που επιζούν είναι

$$R_{00} = -\Gamma^i_{0i,0} - \Gamma^i_{j0} \Gamma^j_{0i} = -3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (3.77)$$

Η συνιστώσα (0-i) είναι μηδενική. Μένει η συνιστώσα (i-j). Αυτή μας δίνει

$$R_{ij} = \Gamma^0_{ij,0} + \Gamma^k_{0k} \Gamma^0_{ij} - \Gamma^k_{0j} \Gamma^0_{ik} - \Gamma^0_{kj} \Gamma^k_{i0} = (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \delta_{ij} \quad (3.78)$$

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε το βαθμωτό Ricci. Χρησιμοποιώντας ότι $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ έχουμε

$$R = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij},$$

το οποίο μας δίνει

$$R = 3 \frac{\ddot{a}}{a} + 3 \left(2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) = 6 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) \quad (3.79)$$

Οι εξισώσεις πεδίου είναι οι

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu},$$

και η μηδενική συνιστώσα

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi GT_{00},$$

που μας δίνει

$$G_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right) = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad (3.80)$$

Ο ταυιστής ενέργειας ορμής έχει τη μορφή

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + Pg_{\mu\nu}, \quad (3.81)$$

όπου $u_\mu = (-1, 0, 0, 0)$ η τετραταχύτητα του κοσμικού ρευστού και $u_\mu u^\mu = -1$. Η μηδενική συνιστώσα του ταυιστή ενέργειας ορμής είναι η πυκνότητα ενέργειας ρ . Συνολικά έχουμε

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G\rho. \quad (3.82)$$

Η $(i - j)$ συνιστώσα μας δίνει

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = 8\pi GT_{ij},$$

δηλαδή

$$G_{ij} = \delta_{ij} [2\dot{a}^2 + a\ddot{a} - 3(\dot{a}^2 + a\ddot{a})] \quad (3.83)$$

Η διαγώνια χωρική συνιστώσα του ταυιστή ενέργειας ορμής είναι η Pg_{ij} , όπου P η πίεση. Άρα έχουμε

$$G_{ij} = -(\dot{a}^2 + 2a\ddot{a})\delta_{ij} = 8\pi Ga^2 P\delta_{ij},$$

Συνεπώς

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi GP. \quad (3.84)$$

Τώρα αν αντικαταστήσουμε την (3.82) στην (3.84) παίρνουμε

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \quad (3.85)$$

όπου είναι η δεύτερη εξίσωση Friedmann. Η εξίσωση της συνέχειας προκύπτει από την απόκλιση του ταυιστή ενέργειας ορμής. Επειδή ισχύει ότι

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0,$$

τότε θα πρέπει

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0.$$

Αν αναλύσουμε την συναλλοίωτη παράγωγο έχουμε

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\beta\mu} T^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\mu} T^{\mu\alpha} = 0,$$

που μας δίνει

$$\partial_0 T^{00} + \Gamma^i_{0i} T^{00} + \Gamma^0_{ji} T^{ij} = 0,$$

όπου $T^{\mu\nu} = (\rho + P) u^{\mu} u^{\nu} + P g^{\mu\nu}$ και $T^{00} = \rho$, $T^{0i} = T^{i0} = 0$, $T^{ij} = P g^{ij}$. Αυτό τελικά θα δώσει

$$\dot{\rho} + a \dot{a} \delta_{ij} P g^{ij} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho = \dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + P) = 0,$$

όπου $g^{ij} = \frac{1}{a^2} \delta^{ij}$. Τελικά έχουμε την εξίσωση της συνέχειας

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P), \quad (3.86)$$

όπου $H = \frac{\dot{a}}{a}$.

3.13 Θεωρία Διαταραχών

Θεωρούμε μετασχηματισμό της μορφής

$$x^{\mu} \rightarrow \tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}, \quad (3.87)$$

όπου $\epsilon^{\mu} = a^{\mu}(\tilde{x})$ απειροστές διαταραχές που εξαρτώνται από τις συντεταγμένες x^{μ} . Σύμφωνα με τον νόμο μετασχηματισμού των ταχυστών κάτω από αλλαγή συντεταγμένων, η μετρική μετασχηματίζεται ως

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \tilde{x}^{\nu}} g_{\kappa\lambda}(x) \approx g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\lambda}(x) \epsilon^{\lambda}_{,\nu} - g_{\kappa\nu}(x) \epsilon^{\kappa}_{,\mu}, \quad (3.88)$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί σαν

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) \approx {}^{(0)}g_{\mu\nu}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x) - {}^{(0)}g_{\mu\lambda}(x) \epsilon^{\lambda}_{,\nu} - {}^{(0)}g_{\kappa\nu}(x) \epsilon^{\kappa}_{,\mu}, \quad (3.89)$$

όπου ${}^{(0)}g_{\mu\nu}$ η μετρική υποβάθρου και έχουμε κρατήσει όρους μέχρι πρώτη τάξη. Επίσης μπορούμε να γράψουμε με την ίδια λογική

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = {}^{(0)}g_{\mu\nu}(\tilde{x}) + \delta \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}). \quad (3.90)$$

Το κομμάτι ${}^{(0)}g_{\mu\nu}(\tilde{x})$ χρησιμοποιώντας την (3.87) γραφεται ως

$${}^{(0)}g_{\mu\nu}(\tilde{x}) = {}^{(0)}g_{\mu\nu}(x + \epsilon),$$

και παίρνοντας τη σειρά μέχρι πρώτη τάξη βρίσκουμε ότι

$${}^{(0)}g_{\mu\nu}(\tilde{x}) \approx {}^{(0)}g_{\mu\nu}(x) + {}^{(0)}g_{\mu\nu,\beta}(x)\epsilon^\beta. \quad (3.91)$$

Συνδυάζοντας τις (3.87), (3.90), (3.91) βρίσκουμε ότι

$$\delta\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \delta g_{\mu\nu}(x) - {}^{(0)}g_{\mu\nu,\beta}(x)\epsilon^\beta - {}^{(0)}g_{\mu\lambda}(x)\epsilon^\lambda{}_{,\nu} - {}^{(0)}g_{\kappa\nu}(x)\epsilon^\kappa{}_{,\mu}. \quad (3.92)$$

Τώρα θα δείξουμε πως μετασχηματίζονται τα βαθμωτά και τα διανύσματα. Για βαθμωτό της μορφής A έχουμε $A(x) = {}^{(0)}A(x) + \delta A(x)$. Επίσης στο σύστημα αναφοράς των συντεταγμένων \tilde{x}^μ θα πρέπει να ισχύει το αντίστοιχο $\tilde{A}(\tilde{x}) = {}^{(0)}A(\tilde{x}) + \delta\tilde{A}(\tilde{x})$. Λόγω του γεγονότος ότι είναι βαθμωτό και πρέπει να είναι αναλλοίωτο και στα δύο συστήματα αναφοράς ισχύει τελικά ότι

$$A(x) = {}^{(0)}A(x) + \delta A(x) = \tilde{A}(\tilde{x}) = {}^{(0)}A(\tilde{x}) + \delta\tilde{A}(\tilde{x}).$$

Επίσης έχουμε σε πρώτη τάξη ότι

$${}^{(0)}A(\tilde{x}) \approx {}^{(0)}A(x) + {}^{(0)}A(x)_{,\beta}\epsilon^\beta. \quad (3.93)$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω βρίσκουμε ότι

$$\delta\tilde{A}(\tilde{x}) = \delta A(x) - {}^{(0)}A(x)_{,\beta}\epsilon^\beta. \quad (3.94)$$

Για τα διανύσματα ισχύει

$$\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} B_\nu(x) \approx B_\mu(x) - B_\nu(x)\epsilon^\nu{}_{,\mu} \quad (3.95)$$

Το αριστερό μέλος μπορεί να γραφτεί σαν

$$B_\mu(x) = {}^{(0)}B_\mu(x) + \delta B_\mu(x). \quad (3.96)$$

Αντίστοιχα στο στο σύστημα συντεταγμένων έχουμε

$$\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = {}^{(0)}B_\mu(\tilde{x}) + \delta\tilde{B}_\mu(\tilde{x}). \quad (3.97)$$

Η ποσότητα ${}^{(0)}B_\mu(\tilde{x})$ γράφεται ως

$${}^{(0)}B_\mu(\tilde{x}) \approx {}^{(0)}B_\mu(x) + {}^{(0)}B_{\mu,\beta}(x)\epsilon^\beta \quad (3.98)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω βλέπουμε ότι ο νόμος μετασχηματισμού για τα διανύσματα είναι

$$\delta\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = \delta B_\mu(x) - {}^{(0)}B_{\mu,\beta}(x)\epsilon^\beta - B_\nu(x)\epsilon^\nu{}_{,\mu}. \quad (3.99)$$

Το 4-διάνυσμα ϵ^μ αναλύεται ως $\epsilon^\mu = (\epsilon^0, \epsilon^i)$, με $\epsilon^i = \epsilon_\perp^i + b^i$, όπου η απόκλιση του διανύσματος ϵ_\perp^i κάνει μηδέν, δηλαδή $\epsilon_\perp^i{}_{,i} = 0$ και b ένα βαθμωτό.

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό (3.92) μπορούμε να υπολογίσουμε πως μετασχηματίζονται οι ποσότητες δg_{00} , δg_{0i} και δg_{ij} . Βρίσκουμε ότι

$$\delta \tilde{g}_{00} = \delta g_{00} - 2 {}^{(0)}g_{00} \epsilon^0_{,0} = \delta g_{00} + 2\epsilon^0, \quad (3.100)$$

όπου ${}^{(0)}g_{00} = -1$. Για τα διανύσματα βρίσκουμε

$$\delta \tilde{g}_{0i} = \delta g_{0i} - {}^{(0)}g_{ki} a^k_{,0} - {}^{(0)}g_{00} a^0_{,i} = \delta g_{0i} - a^2 \left[(\epsilon_{\perp}^i + b_{,i})_0 - \frac{\epsilon^0_{,i}}{a^2} \right], \quad (3.101)$$

όπου ${}^{(0)}g_{0i} = 0$ και ${}^{(0)}g_{ij}$. Για τους τανυστές έχουμε

$$\delta \tilde{g}_{ij} = \delta g_{ij} - {}^{(0)}g_{ij,0} \epsilon^0 - {}^{(0)}g_{kj} \epsilon^k_{,i} - {}^{(0)}g_{ik} \epsilon^k_{,j}.$$

Αυτό μας δίνει

$$\delta \tilde{g}_{ij} = \delta g_{ij} - a^2 (2H\epsilon^0 + \epsilon_{\perp i,j} + \epsilon_{\perp j,i} + 2b_{,ij}). \quad (3.102)$$

Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε πως εφαρμόζεται η θεωρία διαταραχών στις παραπάνω εξισώσεις υποβάθρου. Χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως την μετρική $g_{\mu\nu} = (-1, a^2(t), a^2(t), a^2(t))$, την οποία ονομάζουμε μετρική υποβάθρου. Τώρα μπορούμε να γράψουμε την καινούρια μετρική ως το άθροισμα της μετρικής υποβάθρου με μια μικρή διαταραχή, δηλαδή

$$g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}. \quad (3.103)$$

Η μετρική $g_{\mu\nu}$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας 4×4 , άρα περιέχει $16-6=10$ ανεξάρτητα στοιχεία, δηλαδή 10 βαθμοί ελευθερίας. Το ίδιο συμβαίνει και για την διαταραχή της μετρικής $\delta g_{\mu\nu}$. Αυτοί οι βαθμοί ελευθερίας μπορούν να μοιραστούν σε βαθμωτούς διανυσματικούς και τανυστικούς. Η ποσότητα ds^2 μπορεί να γραφτεί ως

$$ds^2 = ({}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu. \quad (3.104)$$

Αυτό ισούται με

$$ds^2 = ({}^{(0)}g_{00} + \delta g_{00}) (dx^0)^2 + 2 ({}^{(0)}g_{0i} + \delta g_{0i}) dx^0 dx^i + ({}^{(0)}g_{ij} + \delta g_{ij}) dx^i dx^j.$$

Τώρα μπορούμε να το γράψουμε συναρτήσει των διάφορων ποσοτήτων. Δηλαδή

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi) (dx^0)^2 + 2a (\partial_i B + S_i) dx^i dx^0 + a^2 [\delta_{ij} (1 - 2\Psi) + 2h_{ij} + \partial_i D_j + \partial_j D_i + 2\partial_i \partial_j E] dx^i dx^j. \quad (3.105)$$

Έχουμε 4 βαθμωτά Φ, Ψ, B, E , 2 διανύσματα S_i, D_i και έναν τανυστή h_{ij} . Οι 4 βαθμωτές ποσότητες έχουν 4 βαθμούς ελευθερίας συνολικά. Για την ποσότητα

S_i ισχύει $\partial_i S^i = 0$, επομένως έχει $3-1 = 2$ βαθμούς ελευθερίας. Το ίδιο ισχύει για το διάνυσμα D_i , δηλαδή $\partial_i D^i = 0$, άρα έχει 2 βαθμούς ελευθερίας. Ο ταυυστής h_{ij} είναι ένας συμμετρικός πίνακας 3×3 άρα έχει $9-3 = 6$ ανεξάρτητα στοιχεία. Επίσης ισχύει ότι το ίχνος του είναι 0. Δηλαδή, $h_{ii} = 0$, άρα έχουμε 1 ακόμα λιγότερο ανεξάρτητο στοιχείο, σύνολο 5. Τέλος, ισχύει $\partial_i h^{ij} = 0$ που σημαίνει ότι έχουμε 3 συνδέσμους ακόμα και φτάνουμε τους 2 ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας. Συνολικά μας δίνουν τους 10 βαθμούς ελευθερίας της μετρικής $\delta g_{\mu\nu}$. Αυτές οι διαταραχές εξελίσσονται με τον χρόνο διαφορετικά, δηλαδή διαφορετικά τα βαθμωτά, τα διανύσματα και οι ταυυστές. Αυτό γίνεται χωρίς να μπλέκουν μεταξύ τους, έτσι μπορούμε να τις μελετήσουμε ξεχωριστά. Οι διαταραχές από τα βαθμωτά προκαλούνται από διάφορες ανομοιογένειες στην πυκνότητα ενέργειας, δηλαδή όταν έχουμε μεγάλους σχηματισμούς μάζας ή ενέργειας. Αυτές είναι σημαντικές διότι μπορούμε να μελετήσουμε τη δομή της ύλης και στα πρώιμα στάδια του σύμπαντος. Οι διαταραχές από τα διανύσματα έχουν σχέση με την περιστροφή του υγρού. Αυτές γίνονται ασήμαντες πολύ γρήγορα οπότε δεν είναι σημαντικές. Οι διαταραχές του πεδίου h_{ij} είναι πολύ σημαντικές διότι είναι ουσιαστικά τα βαρυτικά κύματα που εκπέμπονται από διάφορες κινήσεις μαζών και έτσι η μελέτη τους μας οδηγεί σε σημαντικά συμπεράσματα ως προς την δομή της ύλης και την ίδια την βαρύτητα. Για παράδειγμα η χρονική συνιστώσα του ταυυστή $g_{\mu\nu}$ μπορεί να γραφτεί ως

$$g_{00} = -1 - 2\Phi, \quad (3.106)$$

όπου $\delta g_{00} = -2\Phi$, όπου Φ ένα βαθμωτό πεδίο. Η συνιστώσα $g_{0i} = g_{i0}$ γράφεται ως

$$g_{0i} = 0, \quad (3.107)$$

όπου $\delta g_{0i} = \partial_i B + S_i$, B ένα βαθμωτό και S_i ένα διάνυσμα. Η συνιστώσα g_{ij} γράφεται ως

$$g_{ij} = a^2 [\delta_{ij} (1 - 2\Psi) + 2h_{ij} + \partial_i D_j + \partial_j D_i + 2\partial_i \partial_j E] \quad (3.108)$$

όπου $\delta g_{ij} = a^2 (-2\Psi + 2h_{ij} + \partial_i D_j + \partial_j D_i + 2\partial_i \partial_j E)$ και h_{ij} ένας συμμετρικός ταυυστής, Ψ , E βαθμωτά πεδία και D_i ένα διάνυσμα. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τους νόμους μετασχηματισμού που γράψαμε προηγουμένως για να υπολογίσουμε πως μετασχηματίζονται οι διάφοροι βαθμοί ελευθερίας. Για το βαθμωτό Φ έχουμε

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \dot{a}^0, \quad (3.109)$$

Για τις ποσότητες B , S_i έχουμε

$$\tilde{B} = B - a\dot{b} + \frac{\epsilon^0}{a}, \quad (3.110)$$

$$\tilde{S}_i = S_i - a\epsilon^i. \quad (3.111)$$

Για τις ποσότητες Ψ , E , D_i , h_{ij} έχουμε

$$\tilde{\Psi} = \Psi + H\epsilon^0, \quad (3.112)$$

$$\tilde{E} = E - b, \quad (3.113)$$

$$\tilde{D}_i = D_i - \epsilon_{\perp}^i, \quad (3.114)$$

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij}. \quad (3.115)$$

Όπως βλέπουμε ο τανυστής h_{ij} παραμένει ίδιος. Τώρα θέτουμε 2 μεταβλητές οι οποίες μένουν αναλλοίωτες κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς,

$$\phi = \Phi - \frac{d}{dt} (B + a^2 \dot{E}), \quad (3.116)$$

και

$$\psi = \Psi + H (B + a^2 \dot{E}). \quad (3.117)$$

Τώρα μπορούμε να επιλέξουμε βαθμίδα. Για παράδειγμα η βαθμίδα Newton ισχύει για $E = B = 0$ και δίνει $\phi = \Phi$, $\psi = \Psi$. Σε αυτή την βαθμίδα η μετρική γράφεται

$$ds^2 = -(1 + 2\phi) dt^2 + a(t)^2 \delta_{ij} (1 - 2\psi). \quad (3.118)$$

Από δω και στο εξής θα γράφουμε $a(t) = a$. Τώρα θα υπολογίσουμε τις βαθμωτές διαταραχές για τις εξισώσεις Einstein. Από την παραπάνω μετρική βλέπουμε ότι $g_{00} = -1 - 2\phi$, Επειδή η μετρική είναι διαγώνια ισχύει ότι $g_{00}g^{00} = 1$ σε πρώτη τάξη, άρα πρέπει $g^{00} = -1 + 2\phi$. Το ίδιο ισχύει και για το χωρικό κομμάτι, δηλαδή $g_{ij}g^{kj} = \delta^k_j$, άρα $g^{ij} = \frac{\delta^{ij}}{a^2} (1 + 2\psi)$. Παίρνουμε τα σύμβολα Christoffel με τον ένα δείκτη πάνω 0. Έχουμε

$$\Gamma^0_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{0\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \right). \quad (3.119)$$

Λόγω του ότι η μετρική είναι διαγώνια έχουμε

$$\Gamma^0_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{0\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{0\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^0} \right). \quad (3.120)$$

Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση Γ^0_{00} . Παίρνουμε

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = \frac{1}{2} (-1 + 2\phi) (-2)\phi_{,0} \approx \phi_{,0}, \quad (3.121)$$

όπου έχουμε κρατήσει όρους μέχρι πρώτη τάξη και για μια ποσότητα A ορίζουμε $\frac{dA}{dt} = A_{,0}$. Για τα σύμβολα με ένα χωρικό δείκτη κάτω και έναν χρονικό έχουμε

$$\Gamma^0_{i0} = \Gamma^0_{0i} = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2} (-1 + 2\phi) (-2)\phi_{,i} \approx \phi_{,i}, \quad (3.122)$$

διότι τα βαθμωτά ϕ, ψ έχουν και χωρική εξάρτηση. Στον χώρο των ορμών έχουμε $\Gamma^0_{i0} = ik_i\phi$, όπου k το κυματόνισμα. Για τα σύμβολα με δύο κάτω χωρικούς δείκτες έχουμε

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) = -\frac{1}{2}g^{00} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}. \quad (3.123)$$

Αντικαθιστώντας τη μετρική και την παράγωγό της έχουμε

$$\Gamma^0_{ij} = -\frac{1}{2}(-1 + 2\phi) \frac{d}{dt} [a^2 \delta_{ij} (1 - 2\psi)].$$

Αυτό θα μας δώσει

$$\Gamma^0_{ij} = -\frac{1}{2}(-1 + 2\phi) [2a a_{,0} \delta_{ij} (1 - 2\psi) + a^2 \delta_{ij} (-2\psi_{,0})].$$

Κρατώντας όρους μέχρι πρώτη τάξη και χρησιμοποιώντας την σχέση $a\dot{a}(t) = a^2 H$, βρίσκουμε τελικά

$$\Gamma^0_{ij} \approx a^2 \delta_{ij} \{ H [1 + 2(\phi - \psi)] + \phi_{,0} \}. \quad (3.124)$$

Για τα σύμβολα με χωρικό δείκτη πάνω

$$\Gamma^i_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{i\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \right), \quad (3.125)$$

Από αυτό έχουμε ότι

$$\Gamma^i_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{ij} \left(\frac{\partial g_{j\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{j\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^j} \right). \quad (3.126)$$

Τώρα θα υπολογίσουμε το Γ^i_{00} .

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}g^{ij} \left(\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \right) = -\frac{1}{2}g^{ij} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} = \frac{1}{2a^2} \delta^{ij} (1 + 2\psi) (1 + 2\phi), \quad (3.127)$$

Κάνοντας υπολογισμούς και κρατώντας όρους μέχρι πρώτη τάξη βρίσκουμε

$$\Gamma^i_{00} \approx \frac{1}{2a^2} \delta^{ij} \phi_{,j} = \frac{ik_j}{2a^2} \phi. \quad (3.128)$$

Ο πίνακας δ^{ij} είναι η ευκλείδια μετρική οπότε μπορούμε να ανεβοκατεβάζουμε δείκτες χωρίς να αλλάζουμε πρόσημο ή να πολλαπλασιάζουμε με τον παράγοντα κλίμακας. Για παράδειγμα $k_i = k^i$, $\delta^{ij} = \delta^i_j = \delta_{ij}$. Για τα σύμβολα με ένα χωρικό δείκτη και έναν χρονικό έχουμε

$$\Gamma^i_{j0} = \Gamma^i_{0j} = \frac{1}{2}g^{ik} \left(\frac{\partial g_{k0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2}g^{ik} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^0}. \quad (3.129)$$

Αυτό μας δίνει

$$\Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2a^2} \delta^{ik} (1 + 2\psi) [2a_{,0} \delta_{ij} (1 - 2\psi) + a^2 \delta_{ij} (-2\psi_{,0})].$$

Κρατώντας όρους μηδενικής και πρώτης τάξης έχουμε

$$\Gamma^i_{j0} \approx \delta_{ij} (H - \psi_{,0}). \quad (3.130)$$

Το τελευταίο μη μηδενικό στοιχείο είναι το

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right). \quad (3.131)$$

Αυτο μας δίνει

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2a^2} \delta^{il} (1 + 2\psi) [a^2 \delta_{lj} (-2\psi_{,k}) + a^2 \delta_{lk} (-2\psi_{,j}) - a^2 \delta_{jk} (-2\psi_{,l})]. \quad (3.132)$$

Κάνοντας τις πράξεις παίρνουμε ότι

$$\Gamma^i_{jk} \approx -i\psi (\delta_{ij} k_k + \delta_{ik} k_j - \delta_{jk} k_i). \quad (3.133)$$

Επίσης βλέπουμε ότι $\Gamma^k_{jk} \approx -3i\psi k_j$. Τώρα θα υπολογίσουμε τον ταυυστή Ricci. Από την (3.76) έχουμε

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} \Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \Gamma^\beta_{\mu\alpha}.$$

Για το (0-0) στοιχείο έχουμε

$$R_{00} = \Gamma^i_{00,i} - \Gamma^i_{0i,0} + \Gamma^i_{0i} \Gamma^0_{00} + \Gamma^i_{ji} \Gamma^j_{00} - \Gamma^i_{00} \Gamma^0_{0i} - \Gamma^i_{j0} \Gamma^j_{0i}, \quad (3.134)$$

όπου κάποιοι όροι αλληλοαναιρούνται. Έχουμε ότι

$$\Gamma^i_{00,i} = \frac{ik^i}{a^2} \phi_{,i} = -\frac{k^2}{a^2} \phi, \quad (3.135)$$

όπου $k_i k^i = k^2$. Επίσης έχουμε

$$-\Gamma^i_{0i,0} = -3\delta_{ij} (H - \psi_{,0})_{,0} = -3(H_{,0} - \psi_{,00}), \quad (3.136)$$

$$\Gamma^i_{0i} \Gamma^0_{00} = 3(H - \psi_{,0}) \phi_{,0} \approx 3H\phi_{,0}, \quad (3.137)$$

και

$$-\Gamma^i_{j0} \Gamma^j_{0i} = -\delta_{ij} \delta_{ij} (H - \psi_{,0})^2 \approx -3(H^2 - 2H\psi_{,0}). \quad (3.138)$$

Οι υπόλοιποι όροι θα δώσουν όρους δεύτερης τάξης. Οπότε

$$R_{00} = -\frac{k^2}{a^2} \phi - 3(H_{,0} - \psi_{,00}) + 3H\phi_{,0} - 3(H^2 - 2H\psi_{,0}),$$

και κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε

$$R_{00} = -3 (H_{,0} + H^2) - \frac{k^2}{a^2} \phi + 3\psi_{,00} + 3H (\phi_{,0} + 2\psi_{,0}). \quad (3.139)$$

Για το χωρικό κομμάτι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} R_{ij} = & \Gamma^0_{ij,0} + \Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^0_{i0,j} - \Gamma^k_{ik,j} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{ij} + \Gamma^0_{k0}\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{0k}\Gamma^0_{ij} \\ & + \Gamma^k_{lk}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^0_{0j}\Gamma^0_{i0} - \Gamma^0_{kj}\Gamma^k_{i0} - \Gamma^k_{0j}\Gamma^0_{ik} - \Gamma^k_{lj}\Gamma^l_{ik}, \end{aligned} \quad (3.140)$$

όπου

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{ij,0} = & 2\delta_{ij}aa_{,0} \{H [1 - 2(\psi + \phi)] - \psi_{,0}\} \\ & + 2\delta_{ij}a^2 \{H_{,0} - 2[H_{,0}(\psi + \phi) + H(\psi_{,0} + \phi_{,0})] - \psi_{,00}\}, \end{aligned} \quad (3.141)$$

$$- \Gamma^0_{i0,j} = k_i k_j \phi. \quad (3.142)$$

Επίσης έχουμε

$$\Gamma^k_{ij,k} = \psi (\delta_{kj}k_j k_k + \delta_{ik} - \delta_{ij}k_k k_k) = \psi (2k_i k_j - \delta_{ij}k^2). \quad (3.143)$$

Ο όρος Γ^k_{ik} μας δίνει

$$\Gamma^k_{ik} = -\frac{1}{2}g^{kl} (g_{li,k} + g_{lk,i} - g_{ik,l}).$$

Αυτό είναι ίσο με

$$\Gamma^k_{ik} = \frac{1}{2}\delta^{kl} (1 + 2\psi) 2 (\delta_{li}\psi_{,k} + \delta_{lk}\psi_{,i} - \delta_{ik}\psi_{,l}) \approx 3ik_i\psi.$$

Άρα

$$- \Gamma^k_{ik,j} = -3k_i k_j \psi. \quad (3.144)$$

Επίσης

$$\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{ij} = \phi_{,0}\delta_{ij}a(t)^2 \{H [1 - 2(\psi + \phi)] - \psi_{,0}\} \approx a(t)^2 \delta_{ij}H\phi_{,0}. \quad (3.145)$$

Το άλλο κομμάτι που δίνει συνεισφορά είναι το

$$\Gamma^k_{0k}\Gamma^0_{ij} = 3\delta_{ij}a^2 \{H [1 - 2(\psi + \phi)] - \psi_{,0}\} (H - \psi_{,0}).$$

Αυτό μας δίνει

$$\Gamma^0_{ij} \approx 3\delta_{ij}a^2 [H^2 - 2H\psi_{,0} - 2H^2(\psi + \phi)]. \quad (3.146)$$

Το προτελευταίο κομμάτι είναι το

$$- \Gamma^0_{kj}\Gamma^k_{i0} = -\delta_{kj}a^2 \{H [1 - 2(\psi + \phi)] - \psi_{,0}\} \delta_{ki} (H - \psi_{,0}).$$

Έχουμε

$$-\Gamma^0_{kj}\Gamma^k_{i0} \approx -\delta_{ij}a^2 [H^2 - 2H\psi_{,0} - 2H^2(\psi + \phi)]. \quad (3.147)$$

Για το τελευταίο κομμάτι έχουμε

$$\Gamma^k_{0j}\Gamma^0_{ik} \approx -\delta_{ij}a^2 [H^2 - 2H\psi_{,0} - 2H^2(\psi + \phi)], \quad (3.148)$$

το οποίο είναι ίδιο με το προηγούμενο. Χρησιμοποιώντας ότι $aa_{,0} = a^2H$ βρίσκουμε τελικά

$$R_{ij} \approx a^2\delta_{ij} \left\{ (3H^2 + H_{,0}) [1 - 2(\phi + \psi)] - H(6\psi_{,0} + \phi_{,0}) - \psi_{,00} - \frac{k^2}{a^2}\psi \right\}, \quad (3.149)$$

Αυτό μπορεί να γραφτεί σαν

$$R_{ij} = a^2\delta_{ij} \left\{ \left(2\left(\frac{a_{,0}}{a}\right)^2 + \frac{aa_{,00}}{a^2} \right) [1 - 2(\phi + \psi)] - H(6\psi_{,0} + \phi_{,0}) - \psi_{,00} - \frac{k^2}{a^2}\psi \right\}, \quad (3.150)$$

όπου έχουμε την μηδενική τάξη και την πρώτη τάξη. Τώρα θα υπολογίσουμε το βαθμωτό Ricci. Έχουμε

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij}. \quad (3.151)$$

Ο πρώτος όρος είναι ο $g^{00}R_{00}$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$g^{00}R_{00} = (-1 + 2\phi) \left[-3(H^2 + H_{,0}) - \frac{k^2}{a^2}\phi + 3\psi_{,00} + 3H(\phi_{,0} + 2\psi_{,0}) \right].$$

Κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στο

$$g^{00}R_{00} \approx 3(H^2 + H_{,0}) + \frac{k^2}{a^2}\phi - 3\psi_{,00} - 3H(\phi_{,0} + 2\psi_{,0}) - 6\phi(H^2 + H_{,0}), \quad (3.152)$$

όπου έχουμε κρατήσει μέχρι την πρώτη τάξη. Ο δεύτερος όρος γράφεται ως

$$g^{ij}R_{ij} = \frac{\delta^{ij}}{a^2} (1 + 2\psi) a^2\delta_{ij} \left[(3H^2 + H_{,0}) (1 - 2(\phi + \psi)) - H(\phi_{,0} + 6\psi_{,0}) - \psi_{,00} - \frac{k^2}{a^2}\psi \right] + \frac{\delta^{ij}}{a^2} (1 + 2\psi) [k_ik_j(\phi - \psi)].$$

Τελικά βρίσκουμε ότι

$$g^{ij}R_{ij} = 3 \left[(3H^2 + H_{,0}) (1 - 2(\phi + \psi)) - H(\phi_{,0} + 6\psi_{,0}) - \psi_{,00} - \frac{k^2}{a^2}\psi \right] + 6\psi(3H^2 + H_{,0}) + \frac{k^2}{a^2}(\phi - \psi), \quad (3.153)$$

όπου έχουμε κρατήσει μέχρι την πρώτη τάξη. Προσθέτωντας τους δύο όρους βρίσκουμε

$$R = 6(2H^2 + H_{,0}) - 12\phi(2H^2 + H_{,0}) - 6H(\phi_{,0} + 4\psi_{,0}) - 6\psi_{,00} + 2\frac{k^2}{a^2}(\phi - 2\psi), \quad (3.154)$$

όπου $6(2H^2 + H_{,0}) = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)$, η μηδενική τάξη. Οι εξισώσεις Einstein παίρνουν την μορφή

$$G^\mu{}_\nu = 8\pi GT^\mu{}_\nu. \quad (3.155)$$

Η (0-0) μορφή θα δώσει

$$G^0{}_0 = 8\pi GT^0{}_0, \quad (3.156)$$

όπου $T^0{}_0 \approx -(\rho + \delta\rho)$. Έχουμε $G^0{}_0 = g^{0\beta}G_{\beta 0} = g^{00}G_0 = g^{00}(R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R) = (-1 + 2\phi)R_{00} - \frac{R}{2}$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$\begin{aligned} G^0{}_0 &= 3(H^2 + H_{,0}) + \frac{k^2}{a^2}\phi - 3\psi_{,00} - 3H(\phi_{,0} + 2\psi_{,0}) - 6\phi(H^2 + H_{,0}) \\ &- 3(2H^2 + H_{,0}) + 6\phi(2H^2 + H_{,0}) + 3H(\phi_{,0} - 2\psi_{,0}) + 3\psi_{,00} - \frac{k^2}{a^2}(\phi - 2\psi), \end{aligned}$$

και κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε

$$-3H^2 + 6H(H\phi + \psi_{,0}) + 2\frac{k^2}{a^2}\psi = -8\pi G(\rho + \delta\rho),$$

όπου $3H^2 = \rho$ είναι η μηδενική τάξη. Άρα

$$6H(H\phi + \psi_{,0}) + 2\frac{k^2}{a^2}\psi = -8\pi G\delta\rho \quad (3.157)$$

Τώρα θα υπολογίσουμε την $(i-j)$ συνιστώσα. Έχουμε $G^i{}_j = g^{i\beta}G_{\beta j} = g^{ik}G_{kj} = g^{ik}\left(R_{kj} - \frac{1}{2}g_{kj}R\right) = g^{ik}R_{kj} - \frac{1}{2}\delta^i{}_j R$. Κάνοντας την αντικατάσταση παίρνουμε

$$\begin{aligned} G^i{}_j &= \frac{\delta^{ik}}{a^2}(1 + 2\psi)\left[a^2\delta_{ij}(3H^2 + H_{,0})[1 - 2(\phi + \psi)] - H(\phi_{,0} + 6\psi_{,0})\right. \\ &- \left.\psi_{,00} - \frac{k^2}{a^2}\psi + k_ik_j(\phi - \psi)\right] - \frac{\delta^i{}_j}{2}\left[6(2H^2 + H_{,0}) - 12\phi(2H^2 + H_{,0})\right. \\ &\left.+ 2\frac{k^2}{a^2}\phi - 6\psi_{,00} - 4\frac{k^2}{a^2}\psi - 6H(\phi_{,0} + 4\psi_{,0})\right]. \end{aligned}$$

Τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} \delta_{ij}(-3H^2 - 2H_{,0}) + \delta_{ij}(6H^2\phi + 4H_{,0}\phi + 2H\phi_{,0} + 6H\psi_{,0} + 2\psi_{,00} \\ + \frac{k^2}{a^2}(\psi - \phi)) + \frac{k_ik_j}{a^2}(\phi - \psi) = p\delta_{ij} + \delta p\delta_{ij}, \end{aligned}$$

όπου $(3H^2 + 2H_{,0}) = -8\pi G\rho$, η μηδενική τάξη και

$$6H^2\phi + 4H_{,0}\phi + 2H\phi_{,0} + 6H\psi_{,0} + 2\psi_{,00} + \frac{k^2}{a^2}(\psi - \phi) = 8\pi G\delta\rho, \quad (3.158)$$

$$\frac{k_ik_j}{a^2}(\phi - \psi) = 0. \quad (3.159)$$

Η τελευταία ισχύει γιατί έχουμε τέλειο ρευστό, συνεπώς $\phi = \psi$. Τώρα θα υπολογίσουμε την $(i-0)$ συνιστώσα. Από την (3.76) αντικαθιστώντας τους δείκτες και κάνοντας την άθροιση βρίσκουμε

$$\begin{aligned} R_{i0} = & \Gamma^0_{i0,0} + \Gamma^j_{i0,j} - \Gamma^0_{i0,0} - \Gamma^j_{ij,0} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{i0} + \Gamma^0_{j0}\Gamma^j_{i0} + \Gamma^j_{0j}\Gamma^0_{i0} \\ & + \Gamma^j_{kj}\Gamma^k_{i0} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{i0} - \Gamma^0_{j0}\Gamma^j_{i0} - \Gamma^j_{00}\Gamma^0_{ij} - \Gamma^j_{k0}\Gamma^k_{ij}, \end{aligned} \quad (3.160)$$

Οι όροι που είναι γραμμικοί ως προς τις διαταραχές είναι

$$\Gamma^j_{i0,j} = -ik_i\psi_{,0}, \quad (3.161)$$

$$-\Gamma^j_{ij,0} = 3ik_i\psi_{,0}, \quad (3.162)$$

$$\Gamma^j_{0j}\Gamma^0_{i0} = 3iHk_i\phi, \quad (3.163)$$

$$\Gamma^j_{kj}\Gamma^k_{i0} = -3iHk_i\psi, \quad (3.164)$$

$$-\Gamma^j_{00}\Gamma^0_{ij} = -iHk_i\phi, \quad (3.165)$$

και

$$-\Gamma^j_{k0}\Gamma^k_{ij} = 3iHk_i\psi. \quad (3.166)$$

Τελικά βρίσκουμε ότι

$$R_{i0} = 2ik_i(H\phi + \psi_{,0}). \quad (3.167)$$

Ο τανυστής Einstein ισούται με $G_{i0} = R_{i0} - \frac{1}{2}g_{i0}R$, όμως $g_{i0} = 0$, άρα $G_{i0} = R_{i0}$. Ισχύει $G^i_0 = g^{ij}G_{j0} = g^{ij}G_{0j} = g^{ij}R_{j0} = \frac{2ik_i}{a^2}(H\phi + \psi_{,0})$. Για τον τανυστή ενέργειας ορμής θεωρούμε ότι η διαταραχή της τετραταχύτητας δίνεται από τις συνιστώσες $\delta u^\mu = (-\phi, \frac{1}{a}k_iv)$, $\delta u_\mu = (\phi, ak_iv)$. Εδώ η βαθμωτή συνάρτηση v καθορίζει τις διαταραχές της ταχύτητας. Οπότε η συνιστώσα $(i-0)$ του τανυστή ενέργειας ορμής γράφεται ως $T_{i0} = -iak_i(\rho + P)v$. Άρα $T^i_0 = g^{ij}T_{j0} = -\frac{ik_i}{a}(\rho + P)v$. Συνεπώς $G^i_0 = 8\pi GT^i_0$,

$$H\phi + \psi_{,0} = -4\pi Ga(\rho + P)v. \quad (3.168)$$

Επίσης για την συνιστώσα $(0-i)$ βρίσκουμε $G^0_i = g^{00}G^0_i = -2ik_i(H\phi + \psi_{,0})$. Για τον τανυστή ενέργειας ορμής έχουμε $T^0_i = g^{00}T^0_i = g^{00}T^i_0 = iak_i(\rho + P)v$. Άρα

$$H\phi + \psi_{,0} = -4\pi Ga(\rho + P)v. \quad (3.169)$$

Τώρα θα μελετήσουμε Η μετρική και οι διαταραχές της δίνονται από τις $g_{00} = -1$, $g_{ij} = a^2 (\delta_{ij} + 2h_{ij})$, όπου ο ταυιστής h_{ij} έχει ίχνος και απόκλιση μηδέν ($h^i_i = 0$, $\partial_i h^{ij} = 0$). Συνεπώς για να ισχύει η συνθήκη $g_{ij} g^{ik} = \delta^k_j$ θα πρέπει $g^{00} = -1$ και $g^{ij} = \frac{1}{a^2} (\delta^{ij} - 2h^{ij})$. Τώρα θα υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel. Παίρνουμε τα σύμβολα Christoffel με τον ένα δείκτη πάνω 0. Απο την (3.120) έχουμε ότι

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = 0, \quad (3.170)$$

$$\Gamma^0_{i0} = \Gamma^0_{0i} = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} \right) = 0, \quad (3.171)$$

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) = -\frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = -\frac{1}{2} g^{00} g_{ij,0}$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις βρίσκουμε

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2} [2a\dot{a}g_{ij} + 2a^2 h_{ij,0}] = Hg_{ij} + a^2 h_{ij,0}. \quad (3.172)$$

Για τα σύμβολα με τον πάνω δείκτη χωρικό έχουμε

$$\Gamma^i_{00} = 0, \quad (3.173)$$

$$\Gamma^i_{j0} = \Gamma^i_{0j} = \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial g_{k0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^0} = \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^0}.$$

Αυτό μας δίνει

$$\Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2} g^{ik} (2Hg_{kj} + 2a^2 h_{kj,0}) \approx H\delta_{kj} + h_{kj,0}. \quad (3.174)$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $\Gamma^i_{i0} = 3H$. Επίσης

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) = i (h_{ik} k_j + h_{ij} k_k - h_{kj} k_i). \quad (3.175)$$

Για την (0-0) συνιστώσα του ταυιστή Ricci τα μόνα στοιχεία που είναι μη μηδενικά είναι

$$R_{00} = -\Gamma^i_{0i,0} - \Gamma^i_{j0} \Gamma^j_{0i} = -3H_{,0} - (H\delta_{ij} + h_{ij,0})^2, \quad (3.176)$$

Τελικά λόγω του ότι το ίχνος του ταυιστή h_{ij} κάνει μηδέν παίρνουμε ότι

$$R_{00} \approx -3 (H^2 + H_{,0}). \quad (3.177)$$

Δηλαδή παίρνουμε την μηδενική τάξη και τετραγωνικούς όρους και πάνω. Για την $(i-j)$ συνιστώσα οι όροι που επιζούν είναι

$$R_{ij} = \Gamma^0_{ij,0} + \Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^k_{ik,j} + \Gamma^k_{0k} \Gamma^0_{ij} + \Gamma^k_{lk} \Gamma^l_{ij} - \Gamma^0_{kj} \Gamma^k_{i0} - \Gamma^k_{0j} \Gamma^0_{ik} - \Gamma^k_{lj} \Gamma^l_{ik}, \quad (3.178)$$

με

$$\Gamma^0_{ij,0} = H_{,0} + Hg_{ij,0} + 2a\dot{a}h_{ij,0} + a^2g_{ij,00}, \quad (3.179)$$

$$\Gamma^k_{ik,j} = -(h_{ik}k_jk_k + h_{kj}k_ik_k - h_{ij}k^2) = h_{ij}k^2, \quad (3.180)$$

λόγω του ότι η απόκλιση της διαταραχής κάνει μηδένάρα οι δύο πρώτοι όροι μηδενίζονται. Επίσης έχουμε

$$-\Gamma^k_{ik,j} = (h_{ik}k_jk_k + h_{kj}k_ik_k - h_{ik}k_kk_j) = 0, \quad (3.181)$$

λόγω του ότι η απόκλιση και το ίχνος της διαταραχής είναι μηδέν. Επίσης

$$\Gamma^k_{0k}\Gamma^0_{ij} = 3H(Hh_{ij} + a^2h_{ij,0}), \quad (3.182)$$

$$-\Gamma^0_{kj}\Gamma^k_{i0} = -(Hh_{kj} + a^2h_{kj,0})(H\delta_{ki} + a^2h_{ki,0}) \approx -H(Hg_{ij} + 2a^2h_{ij,0}), \quad (3.183)$$

$$-\Gamma^k_{0j}\Gamma^0_{ik} \approx -H(Hg_{ij} + 2a^2h_{ij,0}), \quad (3.184)$$

και οι δύο όροι που απομένουν είναι δεύτερης τάξης. Άρα

$$R_{ij} = g_{ij}(3H^2 + H_{,0}) + 3a^2Hh_{ij,0} + a^2h_{ij,00} + k^2h_{ij}. \quad (3.185)$$

Το βαθμωτό Ricci δίνεται από την

$$R = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} = 3(H^2 + H_{,0}) + g^{ij}[g_{ij}(3H^2 + H_{,0}) + 3a^2Hh_{ij,0} + a^2h_{ij,00} + k^2h_{ij}],$$

όπου έχουμε

$$R = 6(2H^2 + H_{,0}), \quad (3.186)$$

που είναι η μηδενική τάξη διότι οι διαταραχές θα έχουν όρους ανάλογους με το ίχνος που δίνει μηδέν. Συνεπώς, $G^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha}G_{\alpha\nu}$. Άρα $G^i{}_j = g^{ik}R_{kj} - \frac{1}{2}\delta^i{}_jR$. Κάνοντας αντικατάσταση παίρνουμε

$$G^i{}_j = -(6H^2 + 3H_{,0})\delta_{ij} + g^{ik}(g_{kj}(3H^2 + H_{,0}) + 3a^2Hh_{kj,0} + a^2h_{kj,00} + k^2h_{kj}).$$

Αυτό θα δώσει

$$G^i{}_j = -(3H^2 + 2H_{,0})\delta_{ij} + h_{ij,00} + 3Hh_{ij,0} + \frac{k^2}{a^2}h_{ij}, \quad (3.187)$$

όπου έχουμε την μηδενική και πρώτη τάξη. Η εξίσωση για τα βαρυτικά κύματα για ιδανικό ρευστό γράφεται

$$h_{ij,00} + 3Hh_{ij,0} + \frac{k^2}{a^2}h_{ij} = 0. \quad (3.188)$$

Τώρα θα δούμε πως γράφεται η εξίσωση συνέχειας. Ισχύει ότι η απόκλιση του ταυστή Αιστάν είναι μηδέν, $\nabla_\mu G^\mu{}_\nu = 0$. Άρα θα πρέπει $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$. Αν πάρουμε την (0) συνιστώσα έχουμε ότι

$$\partial_0 T^0{}_0 + \partial_i T^i{}_0 + \Gamma^i{}_{0i} T^0{}_0 - \Gamma^j{}_{i0} T^i{}_j = 0, \quad (3.189)$$

όπου έχουμε κρατήσει τους όρους με μη μηδενική πρώτη τάξη. Έχουμε

$$\partial_0 T_0^0 = -\partial_0 (\rho + \delta\rho) = -\rho_{,0} - \delta\rho_{,0}, \quad (3.190)$$

$$\partial_i T_0^i = \frac{1}{a} (\rho + P) k^2 v, \quad (3.191)$$

$$\Gamma_{0i}^i T_0^0 = -3 (H - \psi_{,0}) (\rho + \delta\rho) \approx -3H (\rho + \delta\rho) + 3\psi_{,0}\rho, \quad (3.192)$$

$$-\Gamma_{i0}^j T_j^i = -\delta_{ij} (H - \psi_{,0}) \delta_{ij} (P + \delta P) \approx -3H (P + \delta P) + 3P\psi_{,0}. \quad (3.193)$$

Οπότε, έχουμε

$$\rho_{,0} + \delta\rho_{,0} = -3H (\rho + P) - 3H (\delta\rho + \delta P) + 3H (\rho + P) \psi_{,0} + \frac{1}{a} (\rho + P) k^2 v, \quad (3.194)$$

όπου $\rho_{,0} = -3H (\rho + P)$ είναι η μηδενική τάξη και

$$\delta\rho_{,0} = -3H (\delta\rho + \delta P) + 3H (\rho + P) \psi_{,0} + \frac{1}{a} (\rho + P) k^2 v, \quad (3.195)$$

η πρώτη τάξη. Τώρα θα υπολογίσουμε την συνιστώσα (i) της απόκλισης του τανυστή ενέργειας ορμής. Ισχύει

$$\begin{aligned} \partial_0 T_i^0 + \partial_j T_i^j + \Gamma_{0j}^0 T_i^j + \Gamma_{jk}^j T_i^k + \Gamma_{j0}^j T_i^0 \\ - \Gamma_{0i}^0 T_0^0 - \Gamma_{0i}^j T_0^j - \Gamma_{ji}^0 T_0^j - \Gamma_{ji}^k T_k^j = 0. \end{aligned} \quad (3.196)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \partial_0 T_i^0 = \frac{\partial}{\partial t} [ia (\rho + P) k_i v] = \\ ia_{,0} (\rho + P) k_i v + ia (\rho_{,0} + P_{,0}) k_i v + ia (\rho + P) k_i v_{,0}, \end{aligned} \quad (3.197)$$

$$\partial_j T_i^j = \partial_j (P + \delta P) \delta_{ij} = ik_i \delta P, \quad (3.198)$$

$$\Gamma_{0j}^0 T_i^j = ik_j \phi (P + \delta P) \delta_{ij} \approx ik_i \phi, \quad (3.199)$$

$$\Gamma_{jk}^j T_i^k = i\psi (\delta_{jj} k_k + \delta_{jk} k_j - \delta_{jk} k_j) P \delta_{ki} = -3ik_i \psi, \quad (3.200)$$

$$\Gamma_{j0}^j T_i^0 = 3iak_i (H - \psi_{,0}) (\rho + P) v \approx 3iak_i (\rho + P) v, \quad (3.201)$$

$$-\Gamma_{0i}^0 T_0^0 = ik_i \phi (\rho + \delta\rho) \approx ik_i \phi \rho, \quad (3.202)$$

$$-\Gamma_{0i}^j T_0^j = -ia\delta_{ij} (H - \psi_{,0}) (\rho + P) k_j v \approx -iaH (\rho + P) k_i v, \quad (3.203)$$

$$\begin{aligned} -\Gamma_{ji}^0 T_0^j = -\delta_{ij} a^2 [H (1 + 2(\phi - \psi)) + \phi_{,0}] \left[-\frac{i}{a} (\rho + P) k_j v \right] \\ \approx iaH (\rho + P) k_i v, \end{aligned} \quad (3.204)$$

$$-\Gamma_{ji}^k T_k^j = -[-i\psi (\delta_{kj} k_i + \delta_{ki} k_j - \delta_{ji} k_k)] P \delta_{jk} = 3i\psi k_i P. \quad (3.205)$$

Αν τα προσθέσουμε όλα μαζί η (3.196) γίνεται

$$4aH (\rho + P) v + a (\rho_{,0} + P_{,0}) v + a (\rho + P) v_{,0} + (\rho + P) \phi + \delta P = 0 \quad (3.206)$$

Παρατηρούμε ότι δεν έχουμε όρους πρώτης τάξης.

3.14 Θερμοδυναμική

Η πιο αποδεκτή σήμερα θεωρία είναι αυτή της Μεγάλης Έκρηξης. Η θεωρία αυτή περιγράφει ένα σύμπαν το οποίο ξεκίνησε από μια μοναδικότητα. Δηλαδή ένα σημείο το οποίο έχει άπειρη πυκνότητα και θερμοκρασία. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το σύμπαν αρχίζει και διαστέλλεται. Οι κλίμακες στα πρώτα στάδια του σύμπαντος είναι της τάξης του μήκους Planck. Σε αυτές τις κλίμακες η Γενική Σχετικότητα καταρρέει οπότε χρειάζεται μια κβαντική θεωρία. Θεωρούμε χρόνο t_e στο πρώιμο σύμπαν όπου $t \gtrsim t_P$, όπου t_P είναι ο χρόνος Planck, δηλαδή ο χρόνος που κάνει ένα φωτόνιο να διανύσει μια απόσταση ίση με το μήκος Planck. Σε αυτό το χρονικό διάστημα το σύμπαν περιέχει πλάσμα σωματιδίων τα οποία βρίσκονται σε θερμοδυναμική ισορροπία σε πολύ μεγάλη θερμοκρασία. Το ρευστό αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν ιδανικό αέριο. Αν υποθέσουμε ότι το ρευστό αυτό περιέχει έναν αριθμό από διάφορα σωματίδια, τότε ο αριθμός πυκνότητας δίνεται από τη σχέση

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int \frac{p^2 dp}{e^{\frac{E_i - \mu_i}{T}} \pm 1}. \quad (3.207)$$

Η σχετικιστική ενέργεια των σωματιδίων δίνεται από τη σχέση $E_i = \sqrt{m_i^2 + p^2}$, όπου p η ορμή των σωματιδίων. Η ποσότητα μ_i είναι το χημικό δυναμικό. Ο αριθμός n_i έχει να κάνει με το είδος των σωματιδίων και ο αριθμός g_i με τον αριθμό των καταστάσεων ιδιοστροφορμής. Αν το είδος των σωματιδίων είναι φερμιόνια τότε ισχύει το (+), ενώ αν είναι μποζόνια ισχύει το (-). Ο αριθμός g_i παίρνει την τιμή 2 για φωτόνια, κουάρκς, βαρυόνια, ηλεκτρόνια, μύονια, σωματίδια ταυ και τα αντισωματίδιά τους και την τιμή 1 για τα νετρίνα. Για τα σωματίδια στο πρώιμο σύμπαν θεωρούμε ότι $\mu_i = 0$. Σε κάθε αντίδραση μεταξύ σωματιδίων ισχύει η αρχή διατήρησης του χημικού δυναμικού, του ηλεκτρικού φορτίου, της ενέργειας, της ιδιοστροφορμής και του λεπτονικού και βαρυονικού αριθμού. Για τα φωτόνια που δημιουργούνται και καταστρέφονται από τις αντιδράσεις των σωματιδίων, ο αριθμός πυκνότητας δεν πρέπει να διατηρείται και ισχύει ότι $\mu_\gamma = 0$, $E = q = \hbar\omega$. Το χημικό δυναμικό έχει να κάνει με την ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ ενός συστήματος σωματιδίων. Αν κάποιος αφαιρέσει ή προσθέσει κάποιο σωματίδιο το χημικό δυναμικό αλλάζει. Αυτό σημαίνει ότι όταν σε μια αντίδραση ο αριθμός των σωματιδίων κάποιου είδους διατηρείται τότε διατηρείται και το χημικό δυναμικό. Στην περίπτωση των φωτονίων, σε μια αντίδραση μπορούν να εμφανίζονται ή να εξαφανίζονται οπότε δεν διατηρείται ο αριθμός τους και άρα το χημικό δυναμικό των φωτονίων είναι μηδέν. Δεδομένα από το WMAP δείχνουν ότι ο λόγος της πυκνότητας των βαρυονίων προς την πυκνότητα των φωτονίων είναι ίσος με $6.14 \pm 0.25 \times 10^{-10}$. Λόγω του ότι η πυκνότητα των βαρυονίων σε σχέση με τα φωτόνια είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι και ο αριθμός των λεπτονίων σε σχέση με τα φωτόνια είναι πολύ μικρός. Το χημικό δυναμικό έχει να κάνει με την ανταλλαγή ενέργειας λόγω της αύξησης ή μείωσης του αριθμού των σωματιδίων. Έτσι αφού έχουμε

υποθέσει ότι η πυκνότητα των σωματιδίων σε σχέση με τα φωτόνια είναι μηδέν, και αυτή είναι ίση με τη διαφορά του αριθμού πυκνότητας των σωματιδίων, τότε θα πρέπει να έχουμε συμμετρία μεταξύ σωματιδίων και αντισωματιδίων. Το χημικό δυναμικό εμφανίζεται όταν δεν έχουμε συμμετρία στον αριθμό σωματιδίων αντισωματιδίων, δηλαδή $N = n_i - \bar{n}_i \neq 0$, οπότε αφού έχουμε θεωρήσει ότι σε σχέση με τα φωτόνια ο αριθμός των άλλων σωματιδίων είναι πολύ μικρός, οπότε θεωρούμε το χημικό δυναμικό μηδέν για όλα τα σωματάρια. Ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής μας δίνει

$$dS(T, V) = \frac{1}{T} [d(\rho V) + PdV], \quad (3.208)$$

όπου S η εντροπία, T η θερμοκρασία, V ο όγκος ο οποίος είναι της τάξης ενός όγκου κύβου με ακμή όσο ο παράγοντας κλίμακας, δηλαδή $V \sim a^3$, και ρ , P η πυκνότητα και πίεση αντιστοιχα που είναι συναρτήσεις της θερμοκρασίας. Παίρνοντας την δεύτερη παράγωγο της (3.208) πρώτα ως προς τον όγκο και μετά ως προς τη θερμοκρασία βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial S(T, V)}{\partial T \partial V} = -\frac{1}{T^2} (\rho + P) + \frac{1}{T} \left(\frac{d\rho}{dT} + \frac{dP}{dT} \right). \quad (3.209)$$

Η ίδια παράγωγος με την αντίθετη σειρά δίνει:

$$\frac{\partial S(T, V)}{\partial V \partial T} = \frac{1}{T} \frac{d\rho}{dT}. \quad (3.210)$$

Εξισώνοντας τις βρίσκουμε ότι:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{1}{T} (\rho + P). \quad (3.211)$$

Η εξίσωση (3.13) μπορεί να γραφεί σαν

$$a^3 \dot{\rho} + a^3 \dot{p} = -3a^2 \dot{a} (\rho + p) + a^3 \dot{p}. \quad (3.212)$$

Ο πρώτος όρος αριστερά πηγαίνοντας στο δεξί μέλος θα δώσει με τους υπόλοιπους μια ολική παράγωγο ως προς τον χρόνο. Συνεπώς

$$a^3 \frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt} (a^3 (\rho + p)). \quad (3.213)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3.211) με τον παράγοντα a^3 και παραγωγίζουμε ως προς τον χρόνο. Καταλήγουμε στην

$$\frac{d}{dt} \left(a^3 \frac{dP}{dT} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3}{T} (\rho + P) \right). \quad (3.214)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.211) στην (3.213) βρίσκουμε ότι

$$a^3 \frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt} \left(a^3 T \frac{dP}{dT} \right). \quad (3.215)$$

Κάνοντας τις πράξεις και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας βρίσκουμε ότι $T \frac{d}{dt} (a^3 \frac{dP}{dT}) = 0$ που συνεπάγεται ότι

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a^3}{T} (\rho + P) \right) = 0. \quad (3.216)$$

Η εξίσωση (3.208) με τη βοήθεια της (3.211) μετατρέπεται στην

$$dS(T, V) = \frac{1}{T} d[(\rho + P) V] - \frac{V}{T^2} (\rho + P) dT. \quad (3.217)$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις συμπεραίνουμε ότι η εντροπία είναι μια σταθερά κίνησης

$$S = \frac{a^3}{T} (\rho + P) = \text{σταθ}. \quad (3.218)$$

Από τον ταυιστή ενέργειας ορμής έχουμε ότι

$$\rho = \frac{g_i}{2\pi^2} \int \frac{E_i(p) p^2 dp}{e^{\frac{E_i - \mu_i}{T}}} \quad (3.219)$$

και η πίεση

$$p = \frac{g_i}{2\pi^2} \int \frac{p^2}{3E_i(p)} \frac{p^2 dp}{e^{\frac{E_i - \mu_i}{T}}}. \quad (3.220)$$

Για τα φωτόνια ισχύει ότι $E_i = p$, οπότε $p = \frac{1}{3}\rho$. Με αυτό το δεδομένο η (3.211) μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{d\rho}{dT} = \frac{4\rho}{T}. \quad (3.221)$$

Ολοκληρώνοντας την παίρνουμε ότι $\rho = bT^4$, όπου b σταθερά ολοκλήρωσης και ισούται με $\frac{\pi^2}{15}$. Αν κάποιος συμπεριλάβει όλα τα σχετικιστικά σωματάρια (βαρυόνια και μποζόνια), η σταθερά b ισούται με $b = \frac{\pi^2}{30} (N_B + \frac{3}{4}N_F)$, όπου N_B και N_F οι βαθμοί ελευθερίας των βαρυονίων και φερμιονίων. Στο καθιερωμένο πρότυπο έχουμε για θερμοκρασίες $T \ll 1\text{MeV}$ η σταθερά b να έχει τιμή $b \approx 1$ και για θερμοκρασίες $T > 300\text{GeV}$ η σταθερά b γίνεται $b \approx 35$. Για σχετικιστικά σωματάρια ισχύει $E \approx p$ οπότε η (3.213) γίνεται

$$n = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\frac{p}{T}} \pm 1} \quad (3.222)$$

Αυτά τα ολοκληρώματα είναι η συνάρτηση ζήτα. Οπότε η λύση είναι

$$n = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left(N_B + \frac{3}{4}N_F \right) T^3. \quad (3.223)$$

Στη σημερινή εποχή η ποσότητα n παίρνει την τιμή $n_\gamma \approx \frac{422}{\text{cm}^3} \left(\frac{T_{\gamma 0}}{2.75\text{K}} \right)^3$, όπου $T_{\gamma 0}$ η θερμοκρασία της μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου στο σήμερα.

Συνδιάζοντας την εξίσωση $\rho = bT^4$ με την σχέση $\rho = \frac{C_T}{a(t)^4}$ και λύνοντας την εξίσωση (3.11) ως προς τον παράγοντα κλίμακας βρίσκουμε τη σχέση θερμοκρασίας-χρόνου

$$T = \left(\frac{3}{32\pi bG} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{(t - t_0)}. \quad (3.224)$$

Βλέπουμε ότι η θερμοκρασία μειώνεται με την πάροδο του χρόνου και στην αρχή της δημιουργίας του σύμπαντος έχουμε ότι η θερμοκρασία ήταν άπειρη. Αυτό συνηγορεί στη θεωρία ότι σύμπαν ξεκίνησε από μια υπέρπυκνη και υπέρθερμη κατάσταση. Θεωρούμε το μη σχετικιστικό όριο όπου $m \gg T$. Σε ευτό το όριο το ολοκλήρωμα (3.207) γίνεται

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int \frac{p^2 dp}{e^{\frac{E_i - \mu_i}{T}} \pm 1} \rightarrow n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T}. \quad (3.225)$$

Στο μη σχετικιστικό όριο βλέπουμε ότι ο αριθμός των μαζικών σωματιδίων μειώνεται εκθετικά. Η πυκνότητα και πίεση, χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα παραπάνω, παίρνουν τη μορφή $\rho = nm$ και $p = nT$. Χρησιμοποιώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις στην (3.223) διαπιστώνουμε ότι η εντροπία μειώνεται εκθετικά με τη μάζα. Συνεπώς για να μπορούν να συνεισφέρουν ουσιαστικά στην εντροπία που είναι σταθερή θα πρέπει να αυξήσουν τη θερμοκρασία τους. Έτσι όμως παύει η προσέγγιση του μη σχετικιστικού ορίου. Άρα στην εντροπία συνεισφέρουν μόνο τα σωματίδια που έχουν σχετικιστική συμπεριφορά. Τα σωματίδια αυτά είναι κατά βάση τα φωτόνια που είναι άμαζα. Παραπάνω δείξαμε ότι για τα σχετικιστικά σωματίδια η πυκνότητα ενέργειας δίνεται από τη σχέση $\rho = bT^4$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή με την εντροπία που είναι σταθερή, βρίσκουμε ότι $S = \frac{4}{3}ba^3T^3 = \text{σταθ}$. Συνεπώς ο όρος a^3T^3 είναι σταθερός. Επιπλέον, δείξαμε παραπάνω ότι η πυκνότητα του αριθμού των σχετικιστικών σωματιδίων είναι ανάλογος του T^3 , άρα ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων είναι ανάλογος του a^3T^3 όπου a^3 είναι ο συνολικός όγκος του σύμπαντος. Οπότε κάνοντας αυτές τις διαπιστώσεις παρατηρούμε ότι ο συνολικός αριθμός των σχετικιστικών σωματιδίων είναι σταθερός. Για τα μη σχετικιστικά σωματίδια έχουμε ότι ο συνολικός αριθμός τους είναι $n \sim a^3 m^{3/2} T^{3/2} e^{-m/T}$. Δηλαδή όσο το σύμπαν κρυώνει ο αριθμός των σωματιδίων μειώνεται εκθετικά.

Αν πάρουμε δύο μαζικά σωματίδια, το πρωτόνιο και το νετρόνιο και δούμε τον λόγο του αριθμού πυκνότητας καταλήγουμε στη σχέση $\frac{n_n}{n_p} \sim e^{\frac{m_p - m_n}{T}}$. Σε θερμοκρασίες $T \gg 1.5 \times 10^{10} K$ βλέπουμε ότι η αναλογία πρωτονίων νετρονίων είναι ίση, η οποία ισχύει όταν τα σωματίδια είναι σε θερμική ισορροπία. Παρατηρούμε ότι ο λόγος εξαρτάται από τη διαφορά μάζας μεταξύ νετρονίου και πρωτονίου. Αυτό συμβαίνει όταν η θερμοκρασία του σύμπαντος είναι $T = 10^{10} K$. Αντικαθιστώντας στον παραπάνω λόγο βρίσκουμε ότι $\frac{n_n}{n_p} \sim e^{\frac{m_p - m_n}{T}} = e^{-1.5} \approx \frac{1}{6}$. Στα αρχικά στάδια έχουμε ότι ο ρυθμός αλληλεπίδρασης των σωματιδίων είναι

μεγαλύτερος από το τον ρυθμό της διαστολής του σύμπαντος. Έτσι, τα σωματίδια βρίσκονται σε θερμική ισορροπία και μέσω των αλληλεπιδράσεών τους αλλάζουν και οι αριθμοί τους. Από ένα χρονικό σημείο και μετά ο ρυθμός διαστολής του σύμπαντος μεγαλώνει, η θερμοκρασία μικραίνει και έτσι ο ρυθμός αλληλεπιδράσεων είναι μικρότερος του ρυθμού διαστολής, οπότε χάνεται η θερμική ισορροπία και τα σωματίδια παύουν να αλληλεπιδρούν και ο αριθμός τους παραμένει σταθερός. Τα ελεύθερα νετρόνια όταν χάνεται η θερμική ισορροπία διασπώνται μέσω της διάσπασης-β. Οπότε λαμβάνοντας υπόψιν τη διάσπαση-β, ο λόγος από $1/6$ γίνεται περίπου $1/7$.

Αν ο ρυθμός διαστολής ήταν μεγαλύτερος τότε η θερμική ισορροπία θα σταματούσε σε προγενέστερο χρόνο, άρα και σε μεγαλύτερη θερμοκρασία. Αυτό θα σήμαινε ότι η θερμοκρασία που θα γινόταν αυτό θα ήταν μεγαλύτερη άρα και ο λόγος n_n/n_p θα ήταν μεγαλύτερος από $1/6$. Αν αυτό συνέβαινε τότε θα είχαμε μεγαλύτερες ποσότητες του ισοτόπου ${}^4\text{He}$, που αυτό θα είχε επιπτώσεις στην σύνθεση ελαφρύτερων στοιχείων. Όπως είπαμε προηγουμένως, αν ο ρυθμός αλληλεπιδράσεων είναι πολύ μεγαλύτερος του ρυθμού διαστολής τότε τα σωματίδια που αλληλεπιδρούν βρίσκονται σε θερμική ισορροπία και ισχύουν οι δύο κατανομές που γράψαμε. Δηλαδή για τα σωματίδια που είναι σχετικιστικά ($T \gg m$) ισχύει η (3.223) και τα μη σχετικιστικά ($T \ll m$) η (3.225). Τώρα όταν ο ρυθμός διαστολής του σύμπαντος γίνεται πολύ μεγαλύτερος από το ρυθμό αντιδράσεων τότε χάνεται η θερμική ισορροπία και έχουμε αποσύζευξη των σωματιίων από το θερμό πλάσμα. Για τα σχετικιστικά σωματίδια η συνάρτηση κατανομής είναι η ίδια με αυτή που είχαν στην θερμική ισορροπία με τη διαφορά ότι η θερμοκρασία τώρα σταθμίζεται από τον παράγοντα κλίμακας. Δηλαδή $T \rightarrow T_D (a_D/a(t))$ όπου T_D η θερμοκρασία που γίνεται η αποσύζευξη και a_D ο παράγοντας κλίμακας τη στιγμή της αποσύζευξης. Αυτό ισχύει και για μαζικά σωματίδια που τη στιγμή της αποσύζευξης ισχύει ($T \gg m$), δηλαδή έχουν κατανομή ενός άμαζου σωματίου. Για τα σωματίδια τα οποία ισχύει ($T \ll m$) τη στιγμή της αποσύζευξης η κατανομή τους είναι ίδια με αυτή που είχαν στην θερμική ισορροπία με θερμοκρασία $T_D (a_D/a(t))$. Η θερμική ισορροπία ισχύει και για σωματίδια όπως τα νετρίνο τα οποία εμφανίζονται μέσω αντιδράσεων ($\nu_\alpha \nu_\beta \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta, \nu_\alpha \bar{\nu}_\beta \leftrightarrow \nu_\alpha \bar{\nu}_\beta, \nu_\alpha e^- \leftrightarrow \nu_\alpha e^-, \nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^+ e^-$). Αν θεωρήσουμε τον ρυθμό αντιδράσεων Γ τότε ο ρυθμός αντιδράσεων προς το ρυθμό διαστολής παίρνει τη μορφή $\frac{\Gamma}{H} \approx \left(\frac{T}{MeV}\right)^3$. Βλέπουμε ότι το όριο αποσύζευξης βρίσκεται περίπου στην θερμοκρασία $T = 1MeV$. Για $T < 1MeV$ βλέπουμε ότι $\Gamma < H$, οπότε τα νετρίνο αρχίζουν και απομπλέκονται από το θερμό πλάσμα. Τα νετρίνα ως σχετικιστικά σωματίδια υπακούουν στη σχέση $a^3 T^3 = \text{σταθ}$, όπως δείξαμε προηγουμένως. Αυτή η σχέση ισχύει τη στιγμή της αποσύζευξης οπότε η θερμοκρασία τους μειώνεται με ρυθμό $T \sim 1/a$. Για θερμοκρασίες $T \geq m_e$, όπου $m_e = 0.51MeV$ η μάζα του ηλεκτρονίου, στο θερμό πλάσμα υπάρχουν συζευγμένα τα φωτόνια και ζεύγη ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων. Η σταθερά b που είχαμε ορίσει προηγουμένως παίρνει την τιμή ($N_B = 2, N_F = 4$) $b = (\pi^2/30) (2 + 4(7/8)) = (11/2) (\pi^2/30)$.

Όταν η θερμοκρασία πέσει και άλλο ($T \ll m_e$) τότε μόνο τα φωτόνια παραμένουν στο πλάσμα οπότε η σταθερά b παίρνει την τιμή $b = 2 (\pi^2/30)$. Η εντροπία όμως πρέπει να παραμείνει σταθερή συνεπώς η μείωση στη σταθερά b πρέπει να εξισορροπηθεί με μια αύξηση στη θερμοκρασία των φωτονίων. Συνεπώς, $b_\gamma T_\gamma^3 = b_\nu T_\nu^3$, άρα $T_\gamma/T_\nu = (b_\nu/b_\gamma)^{1/3} = (11/4)^{1/3}$. Η τιμή στο σήμερα πρέπει να είναι $T_{\nu 0} = 1.96K$, όπου $T_{\gamma 0} \approx 2.73K$. Όπως είπαμε προηγουμένως οι βαθμοί ελευθερίας για την εντροπία δίνονται από τη σχέση $\nu_e = N_B + \frac{7}{8}N_F$, όπου η σταθερά b συνδέεται με το ν_e μέσω της σχέσης $b = \frac{\pi^2}{30}\nu_e$. Όταν έχουμε στις υψηλές ενέργειες όλα τα σωματίια του καθιερωμένου προτύπου συζευγμένα τότε έχουμε 28 βαθμούς ελευθερίας για τα μποζόνια και 90 για τα φερμιόνια. Αυτό μας κάνει $\nu_e = 28 + \frac{7}{8}90 = 106.75$ βαθμούς ελευθερίας για την εντροπία. Όσο το σύμπαν ψύχεται αρχίζουν τα σωματίια και εξαυλώνονται μέσω αντιδράσεων, οπότε οι βαθμοί ελευθερίας μειώνονται ανάλογα με τους βαθμούς ελευθερίας των σωματιίων που εξαυλώνονται. Όταν έχουμε αποσύζευξη ενός σωματιδίου τότε οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας για την εντροπία δεν μειώνονται με τον παραπάνω τρόπο διότι τα σωματίια αυτά παρά το ότι έχουν φύγει από το πλάσμα συνεισφέρουν ακόμα στη συνολική εντροπία. Για παράδειγμα μετά την αποσύζευξη των νετρονίων και την εξαύλωση ηλεκτρονίου ποζιτρονίου οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας είναι $\nu_e = 2 + 6 \times \frac{7}{8} \times \left(\frac{T_\nu}{T_\gamma}\right)^3 \approx 3.909$. Αν θεωρήσουμε ότι τα γκραβιτόνια ήταν σε θερμική ισορροπία στο καυτό πλάσμα με τα υπόλοιπα σωματίδια του καθιερωμένου προτύπου και αποσυζεύχτηκαν πρώτα τότε η σημερινή θερμοκρασία υποβάθρου για τα γκραβιτόνια θα είναι ίση με $T_g = \left(\frac{3.909}{106.75}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.91K$. Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (3.213) και με τον κανόνα της αλυσίδας να εκφράσουμε την παράγωγο ως προς τον χρόνο σε παράγωγο ως προς τον παράγοντα κλίμακας. Η εξίσωση θα πάρει τη μορφή

$$a^3 \frac{dp}{da} \frac{da}{dt} = \frac{d}{da} [a^3 (\rho + p)] \frac{da}{dt}. \quad (3.226)$$

Αυτό θα μας δώσει

$$\frac{d}{da} (a^3 \rho) = -3a^2 p. \quad (3.227)$$

Για την εποχή της ακτινοβολίας, θεωρούμε ιδανικό αέριο μάζας m , πυκνότητας $\rho = nm + \frac{3}{2}nT_m$, και πίεσης $p = nT_m$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε ότι

$$\frac{d}{da} \left(a^3 (t) nm + \frac{3}{2} a^3 (t) nT_m \right) = -3a^2 (t) nT_m \quad (3.228)$$

Η ποσότητα n είναι ο αριθμός των mol . Αυτή ισούται με $n = \frac{N}{V} \sim \frac{N}{a^3(t)}$ όπου εκφράζεται σαν ο αριθμός των μορίων σε συγκεκριμένο όγκο, ο οποίος προσεγγιστικά είναι η τρίτη δύναμη του παράγοντα κλίμακας. Συνεπώς η ποσότητα $a^3(t) nm$ είναι σταθερή και η παράγωγός της κάνει μηδέν. Οπότε η (3.228)

δίνει

$$\frac{3}{2}N \frac{d}{da} T_m = -3N \frac{T_m}{a(t)}. \quad (3.229)$$

Αυτή μας δίνει

$$\int \frac{dT_m}{T_m} = -2 \int \frac{da(t)}{a(t)}. \quad (3.230)$$

Λύνοντας τη παίρνουμε

$$T_m a^2(t) = \text{const.} \quad (3.231)$$

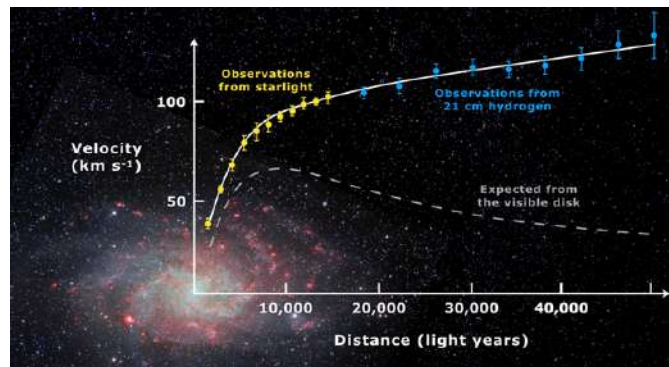
Είδαμε ότι στην εποχή της ακτινοβολίας η θερμοκρασία πέφτει με ρυθμό $T \sim \frac{1}{a(t)}$ ενώ στην εποχή της ύλης η θερμοκρασία πέφτει με ρυθμό $T \sim \frac{1}{a^2(t)}$. Τώρα αν θεωρήσουμε μαζί ακτινοβολία και ύλη, η πυκνότητα μπορεί να γραφτεί σαν $\rho = nm + \frac{3}{2}nT_m + bT_r^4$ και η πίεση $p = nT_m + \frac{1}{4}bT_r^4$. Συνδυάζοντάς τες με την εξίσωση (3.12) έχουμε

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(nm + \frac{9}{2}nT_m + 2bT_r^4 \right). \quad (3.232)$$

Ο πρώτος όρος “πέφτει” με την τρίτη δύναμη του παράγοντα κλίμακας, ο δεύτερος με την πέμπτη και ο τρίτος με την τέταρτη. Ο πρώτος όρος είναι ο κυρίαρχος άρα την εποχή της ύλης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $p = 0$.

3.15 Σκοτεινή Ύλη

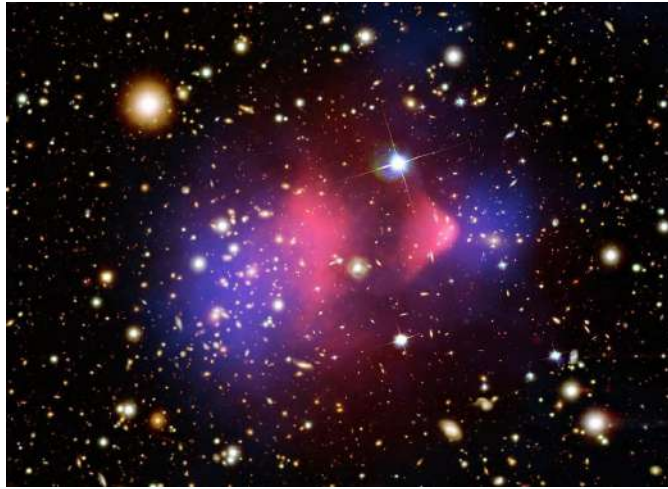
Η σκοτεινή ύλη προτάθηκε τη δεκαετία του 70 για να εξηγήσει τις καμπύλες περιστροφής των γαλαξιών, κάτι που η παρατηρήσιμη κατανομή της ύλης δεν μπορούσε να εξηγήσει. Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε την καμπύλη περι-



Σχήμα 3.2: Η ταχύτητα περιστροφής των αστέρων σε έναν γαλαξία συναρτήσει της απόστασης τους από το κέντρο του γαλαξία. Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη απόσταση έχουν οι αστέρες από το κέντρο η ταχύτητά τους τείνει προς μια σταθερή τιμή.

στροφής από έναν σπειροειδή γαλαξία. Οι μπλε και κίτρινες τελείες είναι τα

παρατηρησιακά δεδομένα και η καμπύλη που παίρνουμε από αυτά και η διακεκομμένη γραμμή είναι η θεωρητική καμπύλη που παίρνουμε από την κατανομή της γνωστής ορατής ύλης. Η διαφορά σε αυτές τις δύο καμπύλες μας οδηγεί στο πρόβλημα της μάζας που δεν είναι ορατή. Επίσης, σε συμπλέγματα γαλαξιών έχει παρατηρηθεί ότι η διάχυση φωτός από μακρυνότερους γαλαξίες είναι περίπου δέκα φορές ισχυρότερη από αυτή θεωρητικά παίρνουμε από την ορατή μάζα του συμπλέγματος. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει κάποιο είδος ύλης που αλληλεπιδρά βαρυτικά αλλά δεν αλληλεπιδρά ηλεκτρομαγνητικά. Τώρα θα δείξουμε πως συμβαίνει αυτό. Για ένα σύστημα σωμάτων τα οποία υ-



Σχήμα 3.3: Στην παραπάνω φωτογραφία βλέπουμε το σύμπλεγμα γαλαξιών *Bullet*. Το μπλε είναι η βαρυτική διάχυση του φωτός πανω στο οπτικό φάσμα και το ροζ είναι το φάσμα των ακτίνων X που παίρνουμε.

πόκειται σε δυνάμεις οι οποίες είναι ανάλογες του αντιστρόφου του τετραγώνου της απόστασης από το κέντρο μάζας του συστήματος πρέπει να ισχύει το θεώρημα Virial για να είναι σε μια κατάσταση ισορροπίας. Το θεώρημα αυτό λέει ότι το άθροισμα του διπλασίου της μέσης τιμής της κινητικής ενέργειας ως προς τον χρόνο και της αντίστοιχης της δυναμικής ενέργειας είναι μηδέν. Δηλαδή

$$2 \langle T \rangle + \langle U \rangle = 0. \quad (3.233)$$

Θεωρούμε έναν σφαιρικό ελλειπτικό γαλαξία ακτίνας R και ομοιόμορφης πυκνότητας που αποτελείται από N αστέρες μάζας m . Θεωρούμε ότι η ταχύτητα κάθε αστέρα είναι ίση με $v = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$, όπου $\langle v^2 \rangle$ η μέση τιμή του τετραγώνου της ταχύτητας ως προς τον χρόνο. Συνεπώς η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$K = \frac{1}{2} N m v^2. \quad (3.234)$$

Η δυναμική ενέργεια μιας σφαίρας μάζας M και ακτίνας R είναι

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad (3.235)$$

και η μέση τιμή ως προς τον χρόνο είναι

$$\langle U \rangle = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (3.236)$$

Άρα χρησιμοποιώντας το θεώρημα Virial βρίσκουμε

$$v^2 = \frac{3}{5} \frac{GM}{R} \approx \frac{GM}{R}, \quad (3.237)$$

όπου $M = Nm$. Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι $v \propto R^{-\frac{1}{2}}$. Αυτό έρχεται σε αντιδιαστολή με την καμπύλη των γαλαξιών όπου βλέπουμε ότι μακριά από το κέντρο του γαλαξία παρατηρούμε μια σταθερή ταχύτητα. Αν θεωρήσουμε σταθερή ταχύτητα v_0 τότε

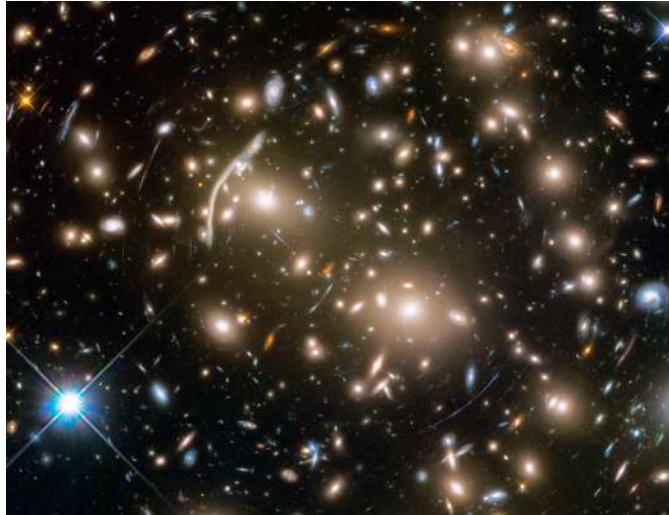
$$M = \frac{v_0^2 R}{G}, \quad (3.238)$$

που σημαίνει ότι η μάζα αυξάνεται με την ακτίνα το οποίο δεν γίνεται με την ορατή μάζα αφού ο δισκός του γαλαξία μετά απο κάποια ακτίνα αρχίζει και φθίνει. Συνεπώς πρέπει να υπάρχει κάποιο είδος ύλης το οποίο δεν αλληλεπιδρά ηλεκτρομαγνητικά. Υπάρχουν σμήνη αστέρων τα οποία εκτείνονται σφαιρικά γύρω από το κέντρο του γαλαξία. Αν θεωρήσουμε μια σφαιρική κατανομή τότε η πυκνότητα που παίρνουμε από τις καμπύλες είναι $\rho \approx \frac{v_0^2}{4\pi GR^2} \propto R^{-2}$, ενώ η ορατή πυκνότητα φθίνει εκθετικά με την ακτίνα. Επίσης, υπάρχουν μέθοδοι για να υπολογιστεί η μάζα από σμήνη γαλαξιών. Η μια μέθοδος είναι μέσω της βαρυτικής εκτροπής του φωτός. Η γωνιακή ακτίνα της βαρυτικής εκτροπής δίνεται από τη σχέση

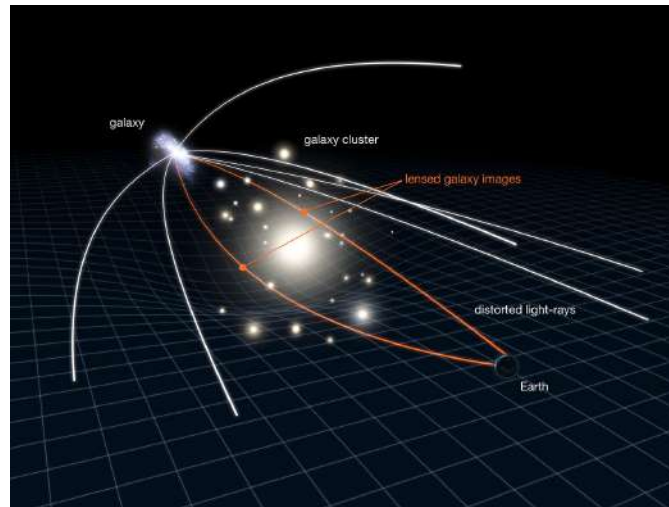
$$\theta = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{(D_s - D_l)}{D_s D_l}}, \quad (3.239)$$

όπου M η μάζα που δημιουργεί την βαρυτική εκτροπή, D_s η απόσταση από την πηγή του φωτός και D_l η απόσταση από τη μάζα που δημιουργεί την βαρυτική εκτροπή. Οι παρατηρήσεις δείχνουν ότι το $1/10 - 1/5$ από τη συνολική μάζα είναι η ορατή. Μετά την εποχή της επανασύνδεσης και της εκπομπής της ακτινοβολίας υποβάθρου σχηματίζονται τα άτομα. Η βαρύτητα προκαλεί σε περιοχές που είναι πυκνές να γίνουν ακόμα πυκνότερες και να σχηματιστούν εν τέλει όλο και μεγαλύτερες δομές όπως οι γαλαξίες. Συνεπώς έχουμε από τη μία την βαρύτητα που έλκει την ύλη σε κέντρα με μεγάλες μάζες και από την άλλη την επιταχυνόμενη διαστολή που απομακρύνει τις μεγάλες μάζες μεταξύ τους. Η σκοτεινή ύλη θεωρείται ότι δεν παράγει συγκρούσεις σε αντίθεση με την βαρυονική ύλη. Θεωρούμε ότι υπάρχουν δύο είδη σκοτεινής ύλης, η καυτή και η παγωμένη. Η καυτή είναι τα σωματίδια που κινούνται με ρελατιβιστικές ταχύτητες ενώ η παγωμένη με μη ρελατιβιστικές. Για παράδειγμα τα νετρίνα είναι ένας καλός υποψήφιος για την καυτή σκοτεινή ύλη διότι δεν αλληλεπιδρούν ηλεκτρομαγνητικά και κινούνται με ταχύτητες πολύ κοντά στην ταχύτητα του

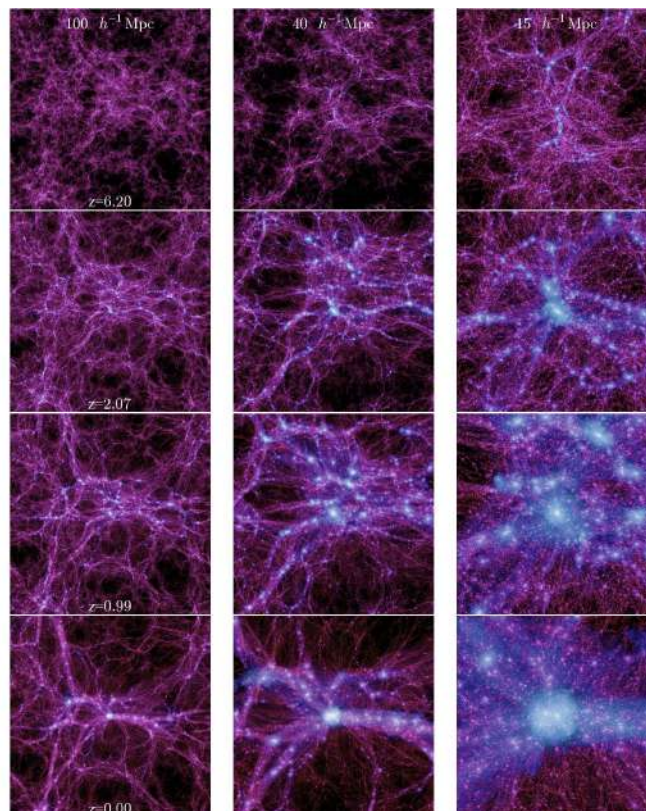
φωτός. Η καυτή σκοτεινή ύλη αποτελείται από μαζικά σωματjα κινούμενα με υψηλές ταχύτητες οπότε αυτό θα επηρέαζε τη δομή των γαλαξιών και θα είχαν διαφορετικό σχήμα από αυτό που παρατηρούμε. Συνεπώς η σκοτεινή ύλη θα πρέπει να περιέχει ένα μικρό ποσοστό καυτής σκοτεινής ύλης. Το μοντέλο Λ CDM προβλέπει την ύπαρξη παγωμένης σκοτεινής ύλης. Υπάρχουν πολλές θεωρίες τι σωματjα μπορεί να αποτελούν την σκοτεινή ύλη.



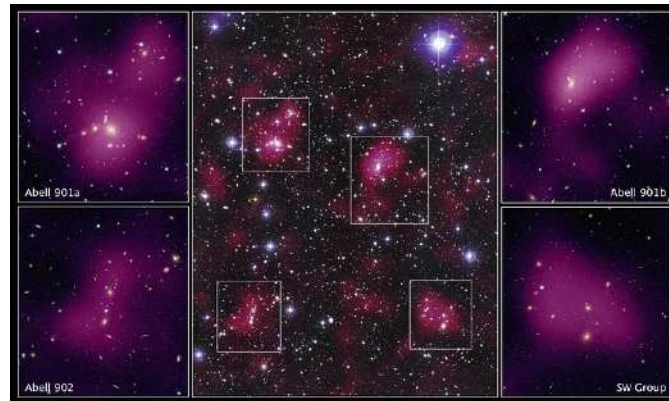
Σχήμα 3.4: Στην παραπάνω φωτογραφία βλέπουμε το σύμπλεγμα γαλαξιών Abell 370. Τα μπλε τόξα είναι εικόνες απομακρυσμένων γαλαξιών που έχουν υποστεί βαρυτική εκτροπή.



Σχήμα 3.5: Στην παραπάνω φωτογραφία βλέπουμε σχηματικά την βαρυτική εκτροπή ενός απομακρυσμένου γαλαξία από ένα σμήνος αστέρων.



Σχήμα 3.6: Στην παραπάνω φωτογραφία βλέπουμε την χρονική εξέλιξη της συγκέντρωσης της σκοτεινής ύλης από την προσομοίωση Millennium



Σχήμα 3.7: Στην παραπάνω φωτογραφία βλέπουμε εικόνες από το υπερμήγρος γαλαξιών Abell 901/902 τραβηγμένες από το τηλεσκόπιο Hubble. Με μωβ είναι σχεδιασμένη η σκοτεινή ύλη.

Κεφάλαιο 4

Θεωρίες Τροποποιημένης Βαρυτητας

Η ύπαρξη της σκοτεινής μάζας και η επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος οδήγησε τους επιστήμονες σε προσπάθειες τροποποίησης της γενικής σχετικότητας ή στη δημιουργία άλλων θεωριών. Οι αστρονόμοι την εποχή που ανακαλύφθηκε η Γενική Σχετικότητα πίστευαν μέσω παρατηρήσεων ότι μακρινά ουράνια αντικείμενα δεν παρουσίαζαν μεγάλες κινήσεις. Έτσι έφτασαν στο συμπέρασμα ότι το σύμπαν είναι στατικό. Αυτό οδήγησε και τον Άινστάιν να εισάγει τη λεγόμενη κοσμολογική σταθερά, που είναι και πρώτη απόπειρα τροποποιημένης βαρύτητας, ώστε οι εξισώσεις να δώσουν λύσεις για ένα στατικό σύμπαν. Σήμερα υπάρχουν διάφορες κατευθύνσεις που δουλεύουν οι επιστήμονες για να εξηγήσουν την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος στα πρώιμα στάδια αλλά και στην σημερινή εποχή. Μία από αυτές είναι η εισαγωγή ενός βαθμωτού inflaton στη δράση Einstein-Hilbert το οποίο μπορεί να δώσει λύσεις για ένα επιταχυνόμενο διαστελλόμενο σύμπαν. Μία δεύτερη κατεύθυνση της τροποποιημένης βαρύτητας, η οποία εξετάζεται στην παρούσα διδακτορική διατριβή, είναι η εισαγωγή όρων υψηλότερης τάξης στην δράση Einstein-Hilbert η οποία δίνει ένα παραπάνω κίνητρο αφού μπορεί θεωρητικά να βοηθήσει στο να έχει καλή συμπεριφορά η θεωρία στις υψηλές ενέργειες. Τέτοιες θεωρίες ίσως είναι 'effective' θεωρίες στις χαμηλές ενέργειες οι οποίες είναι προσέγγιση της θεωρίας χορδών και δεν περιέχουν μη πραγματικούς βαθμούς ελευθερίας. Η Γενική σχετικότητα είναι ο χαμηλότερης τάξης όρος σε μια σειρά με παραγώγους της μετρικής. Μία ενδιαφέρουσα κλάση θεωριών με ανώτερης τάξης παραγώγους χωρίς προβληματικούς βαθμούς ελευθερίας οι οποίες στο γραμμικοποιημένο επίπεδο είναι ισοδύναμες της Γενικής σχετικότητας είναι οι θεωρίες του Lovelock. Αυτές δίνουν ένα άμαζο γκραβιτόνιο. Οι κατασκευές θεωριών με ανώτερης τάξης παραγώγους γίνεται με την εισαγωγή πρόσθετων όρων στην δράση Einstein-Hilbert, όπως η $f(R)$ βαρύτητα, η θεωρία του Lovelock, η θεωρία Weyl, η θεωρία galileon. Μια θεωρία η οποία είναι δεύτερης τάξης ως προς τους όρους καμπυλότητας είναι Gauss-Bonnet

η οποία στις 4 διαστάσεις δίνει μηδενικές εξισώσεις κίνησης ως προς τη μετρική, όμως η γενίκευση της $f(G)$ παρουσιάζει ενδιαφέρουσα φαινομενολογία. Επίσης υπάρχει και το βαθμωτό P το οποίο είναι συνδιασμός όρων που είναι 3ης τάξης ως προς την καμπυλότητα και το οποίο δεν έχει τετριμμένη λύση στις 4 διαστάσεις και μπορεί να δώσει φάσμα παρόμοιο με την Γενικής Σχετικότητας. Επίσης υπάρχει και η γενίκευσή του $f(P)$ που έχει ενδιαφέρουσες εφαρμογές στην κοσμολογία και σε μαύρες τρύπες. Επίσης, στα πλαίσια της θεωρίας χορδών υπάρχουν θεωρίες στις οποίες το Βαθμωτό Gauss Bonnet ή η γενίκευσή του είναι συζευγμένα με βαθμωτά πεδία (dilaton) τα οποία δίνουν εφαρμογές σε λύσεις με μαύρες τρύπες ή κοσμολογικές εφαρμογές. Άλλη μια κλάση μοντέλων είναι τα 'running vacuum models' σύμφωνα με τα οποία η πυκνότητα της ενέργειας κενού είναι σειρά δυνάμεων της σταθεράς του Hubble και των παραγώγων της. Τέτοια μοντέλα έχουν ενδιαφέρουσα φαινομενολογία. Παρακάτω θα δούμε κάποια μοντέλα τροποποιημένης βαρύτητας.

4.1 Ασθενής σύζευξη βαθμωτού καμπυλότητας με βαθμωτό πεδίο

Το αμέσως επόμενο βήμα είναι κανείς να θεωρήσει ένα βαθμωτό πεδίο $\phi = \phi(t)$ και να το εισάγει στη δράση Einstein-Hilbert. Επομένως, η δράση θα πάρει τη μορφή

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - V(\phi) - \mathcal{L}_m \right), \quad (4.1)$$

όπου $-\frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi$ είναι ο κινητικός όρος για το βαθμωτό πεδίο και $V(\phi)$ το δυναμικό και η σύμβαση για τη μετρική είναι η $(-, +, +, +)$. Οι εξισώσεις κίνησης που παίρνουμε είναι οι

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T^m_{\mu\nu} + T^\phi_{\mu\nu} \right), \quad (4.2)$$

όπου

$$T^\phi_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \left(\frac{1}{2} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi + V(\phi) \right) g_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $\rho = \rho_m + \rho_\phi$, $p = p_m + p_\phi$. Άρα οι εξισώσεις (3.11), (3.12) παίρνουν την μορφή

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_\phi), \quad (4.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} [\rho_m + \rho_\phi + 3(p_m + p_\phi)]. \quad (4.5)$$

Θεωρώντας ότι η ύλη και το βαθμωτό πεδίο δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους έχουμε

$$\dot{\rho}_m = -3H(\rho_m + p_m), \quad (4.6)$$

και

$$\dot{\rho}_\phi = -3H(\rho_\phi + p_\phi). \quad (4.7)$$

Οι εξισώσεις για το βαθμωτό πεδίο δίνονται από τις σχέσεις

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (4.8)$$

και

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (4.9)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.8), (4.9) στην (4.7) βρίσκουμε ότι

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (4.10)$$

όπου $V_{,\phi} = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. Αυτή είναι η εξίσωση εξέλιξης για το βαθμωτό πεδίο. Όπως βλέπουμε οι εξισώσεις (3.11), (3.12), (3.13) αντικαθιστώνται από τις εξισώσεις (4.1), (4.7), (4.8). Άρα βλέπουμε ότι το βαθμωτό τροποποιεί τις εξισώσεις υποβάθρου, όπως αντίστοιχα η εισαγωγή της κοσμολογικής σταθεράς. Παρόμοιο μοντέλο χρησιμοποιείται για την περίοδο του πληθωρισμού στο πρώιμο σύμπαν. Το βαθμωτό βρίσκεται σε ένα πηγάδι δυναμικού με ελάχιστη κινητική ενέργεια. Αυτό σημαίνει ότι στις εξισώσεις (4.8), (4.9) μπορούμε να αγνοήσουμε τον κινητικό όρο οπότε $\rho_\phi \approx V(\phi)$ και $p_\phi \approx -V(\phi)$. Άρα έχουμε $\rho_\phi = -p_\phi$ και $w = -1 < -\frac{1}{3}$ που χρειάζεται για να έχουμε πληθωρισμό.

4.2 Μη ελάσσονα σύζευξη βαθμωτού καμπυλότητας με βαθμωτό πεδίο

Μέχρι τώρα είδαμε θεωρίες που εισήγαγαν είτε την κοσμολογική σταθερά είτε ένα βαθμωτό πεδίο τα οποία ήταν συζευγμένα μόνο με την μετρική. Τώρα θα δούμε θεωρίες που το βαθμωτό πεδίο κάνει σύζευξη και με το βαθμωτό Ricci. Για παράδειγμα έχουμε την Λαγκρανγίαν

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\phi R}{16\pi G} - \frac{w(\phi)}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - 2U(\phi) - \mathcal{L}_m \right]. \quad (4.11)$$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι οι

$$\phi G_{\mu\nu} + \left(\square\phi + \frac{w}{2\phi} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + U(\phi) \right) g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{w}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi = 8\pi G T_{\mu\nu}^m, \quad (4.12)$$

$$(2w+3)\square\phi + \frac{dw}{d\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + 4U(\phi) - 2\phi \frac{dU(\phi)}{d\phi} = 8\pi G T, \quad (4.13)$$

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (4.14)$$

όπου T το ίχνος του τανυστή ενέργειας-ορμής.

4.3 Σύμμορφος μετασχηματισμός

Μπορεί ναδειχθεί ότι με έναν σύμμορφο μετασχηματισμό, είναι ισοδύναμη με την γενική σχετικότητα. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $g_{\mu\nu} = A^2(\phi)\hat{g}_{\mu\nu}$, όπου $\hat{g}_{\mu\nu}$ είναι η σύμμορφη μετρική, μπορούμε να δείξουμε ότι η προηγούμενη δράση μετασχηματίζεται σε μια δράση που μοιάζει με αυτή της γενικής σχετικότητας. Από τη σχέση

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\alpha} = \delta^\nu_\alpha \quad (4.15)$$

και από τη σχέση που συνδέει τις δύο μετρικές, βρίσκουμε ότι

$$g^{\mu\nu} = A^{-2}(\phi)\hat{g}^{\mu\nu}. \quad (4.16)$$

Η ποσότητα $\sqrt{-g}$ μετασχηματίζεται ως

$$\sqrt{-g} = A^4\sqrt{-\hat{g}}. \quad (4.17)$$

Το βαθμωτό R μετασχηματίζεται

$$R = A^{-2}\left(\hat{R} - 6\hat{\nabla}_\mu \ln A \hat{\nabla}^\mu \ln A\right). \quad (4.18)$$

Ο ταυυστής ενέργειας-ορμής παίρνει τη μορφή

$$T_{\mu\nu} = A^{-2}\hat{T}_{\mu\nu}. \quad (4.19)$$

Η ποσότητα $\sqrt{-g}\phi R$ μετασχηματίζεται ως

$$\sqrt{-g}\phi R = \phi A^2\sqrt{-\hat{g}}\hat{R} - 6\phi A^2\sqrt{-\hat{g}}\hat{\nabla}_\mu \ln A \hat{\nabla}^\mu \ln A. \quad (4.20)$$

Θέτοντας $A^2 = \frac{1}{\phi}$, δεν υπάρχει πια η σύζευξη του βαθμωτού με το βαθμωτό Ricci. Η δράση παίρνει τη μορφή

$$S = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left(\frac{\hat{R}}{16\pi G} - [6 + 4A^2w] \hat{\nabla}_\mu \ln A \hat{\nabla}^\mu \ln A - 2A^4U(\phi) - \hat{\mathcal{L}}_m \right). \quad (4.21)$$

Για να απλοποιήσουμε την παραπάνω δράση συνδέουμε την ποσότητα A με το βαθμωτό πεδίο ϕ μέσω της εξίσωσης

$$\frac{d\phi}{d \ln A} = (12 + 8A^2w)^{\frac{1}{2}} = \Gamma. \quad (4.22)$$

Επίσης, εισάγουμε το δυναμικό $V(\phi)$ μέσω τη σχέσης $V(\phi) = 2A^4U$. Οπότε συνολικά έχουμε

$$S = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left(\frac{\hat{R}}{16\pi G} - \hat{\nabla}_\mu \phi \hat{\nabla}^\mu \phi - V(\phi) - \hat{\mathcal{L}}_m \right). \quad (4.23)$$

Η δράση τώρα είναι παρόμοια με τη δράση (4.1) με τη μόνη διαφορά ότι η Λαγκραντζιανή της ύλης περιέχει το βαθμωτό πεδίο. Δηλαδή η ύλη είναι συζευγμένη με το βαθμωτό πεδίο. Αυτό φαίνεται και στις εξισώσεις κίνησης της δράσης. Δηλαδή

$$\hat{G}_{\mu\nu} = 8\pi G \left[\hat{\nabla}_\mu \phi \hat{\nabla}_\nu \phi - \left(\frac{1}{2} \hat{\nabla}^\alpha \phi \hat{\nabla}_\alpha \phi + V(\phi) \right) \hat{g}_{\mu\nu} + \hat{T}_{\mu\nu} \right], \quad (4.24)$$

$$\hat{\square} \phi - \frac{dV}{d\phi} = -\Gamma \hat{T}, \quad (4.25)$$

$$\hat{\nabla}_\mu \hat{T}^{\mu\nu} = \Gamma \hat{T} \hat{\nabla}^\mu \phi. \quad (4.26)$$

Η πρώτη εξίσωση είναι ίδια με την εξίσωση με την εξίσωση όταν έχουμε τη δράση της γενικής σχετικότητας με ένα βαθμωτό πεδίο. Οι άλλες δύο εξισώσεις δείχνουν αυτό που είπαμε προηγουμένως. Το βαθμωτό πεδίο είναι συζευγμένο στην ύλη.

4.4 Θεωρία Horndeski

Η πιο γενική θεωρία σύζευξης με βαθμωτό είναι αυτή του Horndeski. Η δράση της είναι

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_m) \quad (4.27)$$

με

$$\mathcal{L}_2 = G_2(\phi, X)$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X) \square \phi$$

$$\mathcal{L}_4 = -G_4(\phi, X) R + \frac{d}{dX} G_4(\phi, X) \left[(\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) \right]$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5 G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - \frac{1}{6} \frac{d}{dX} G_5(\phi, X) \left[(\square \phi)^3 - 3 \square \phi (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) + 2 (\nabla_\mu \nabla^\nu \phi) (\nabla_\nu \nabla^\alpha \phi) (\nabla_\alpha \nabla^\mu \phi) \right]$$

$$(4.28)$$

Τα G_2, G_3, G_4, G_5 είναι συναρτήσεις του βαθμωτού πεδίου ϕ και του κινητικού όρου $X = -\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi$. Αυτή η δράση είναι η πιο γενική δράση με βαθμωτό πεδίο που δίνει εξισώσεις κίνησης μέχρι δεύτερη τάξη ως προς τη μετρική και ως προς το βαθμωτό. Αν κάνουμε τις επιλογές

$$G_2 = -c_2 X$$

$$G_3 = \frac{2c_3}{M^3} X$$

$$G_4 = - \left(\frac{1}{16\pi G} + \frac{c_4}{M^6} \right) X^2 \quad (4.29)$$

$$G_5 = \frac{3c_5}{M^9} X^2,$$

με c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 σταθερές και M μια κλίμακα μάζας, τότε έχουμε το μοντέλο Galileon[17, 18]. Αυτό είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής $\partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu \phi + a_\mu$, όπου a_μ ένα σταθερό τετραδιάνυσμα. Αυτά τα μοντέλα λόγω του ότι έχουν αυτή τη δομή δεν είναι επανακανονικοποιήσιμα άρα δεν δέχονται χβαντικές διορθώσεις. Για $c_4 = c_5 = 0$ έχουμε το Cubic Galileon μοντέλο. Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= 8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^2 + T_{\mu\nu}^3) \\ T_{\mu\nu}^2 &= c_2 \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi \right) \\ T_{\mu\nu}^3 &= \frac{c_3}{M^3} \left(2\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \square \phi + 2g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi \nabla^\alpha \nabla^\beta \phi - 4\nabla^\lambda \phi \nabla_{(\mu} \phi \nabla_{\nu)} \nabla_\lambda \phi \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Η εξίσωση για το βαθμωτό είναι η

$$c_2 \square \phi + \frac{2c_3}{M^3} \left((\square \phi)^2 - \nabla^\alpha \nabla^\beta \phi \nabla_\alpha \nabla_\beta \phi - R_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi \right) = 0. \quad (4.31)$$

Στην τελευταία εξίσωση βλέπουμε τη σύζευξη του τανυστή Ricci με το βαθμωτό.

4.5 DGP μοντέλο

Μια άλλη κατεύθυνση τροποποίησης της γενικής θεωρίας της σχετικότητας είναι αυτή της εισαγωγής των παραπάνω διαστάσεων. Ένα από τα πιο γνωστά μοντέλα είναι το (ΔΓΠ). Η δράση του είναι η

$$S = \int_{brane} d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{16\pi G} - \mathcal{L}_m \right) + \frac{1}{16\pi G^{(5)}} \int_{bulk} d^5x \sqrt{-g^{(5)}} R^{(5)}. \quad (4.32)$$

Η δράση αποτελείται από έναν τετραδιάστατο όρο και έναν πενταδιάστατο όρο. Η τετραδιάστατη βράνη είναι εμβαπτισμένη μέσα στον πενταδιάστατο χωρόχρονο που είναι μια γενίκευση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας.

4.6 $f(R)$ βαρύτητα

Η κατεύθυνση που εξετάζουμε είναι αυτή της εισαγωγής όρων μεγαλύτερης τάξης καμπυλότητας στη δράση Einstein-Hilbert. Για παράδειγμα η πρώτη ιστορικά τροποποίηση τέτοιας τάξης είναι η αντικατάσταση του βαθμωτού Ricci στη δράση με μια συνάρτηση που μπορεί να αποτελείται από δυνάμεις του βαθμωτού Ricci[11, 13, 12]. Η δράση είναι η

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{f(R)}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_m \right). \quad (4.33)$$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι οι

$$F(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) F(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (4.34)$$

όπου $F(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R}$. Αυτές οι εξισώσεις βλέπουμε ότι είναι 4ης τάξης ως προς την μετρική. Αν πάρουμε το ίχνος της παραπάνω εξίσωσης βρίσκουμε ότι

$$F(R) R - 2f(R) + 3\square F(R) = \kappa^2 T. \quad (4.35)$$

Βλέπουμε ότι το βαθμωτό καμπυλότητας συνδέεται με το ίχνος του τανυστή ενέργειας ορμής μέσω διαφορικής εξίσωσης, κάτι το οποίο δεν έχει τετριμμένη λύση σε αντίθεση με την Γενική Σχετικότητα που το βαθμωτό καμπυλότητας συνδέεται με τον τανυστή ενέργειας ορμής μέσω αλγεβρικής σχέσης ($R = -\kappa^2 T$). Η μορφή με το ίχνος βοηθάει στο να βρούμε κάποιες λύσεις για χωροχρόνους με μέγιστη συμμετρία. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το βαθμωτό καμπυλότητας σταθερό και τον τανυστή ενέργειας ορμής μηδενικό, τότε η παραπάνω εξίσωση δίνει

$$F(R) R - 2f(R) = 0. \quad (4.36)$$

Αν θεωρήσουμε λύση την $R = 0$ τότε θα έχουμε από την παραπάνω σχέση ότι $f(R=0) = 0$. Αντικαθιστώντας αυτό στις γενικές εξισώσεις κίνησης, έχουμε ότι $F(R=0) R_{\mu\nu} = 0$. Με ένα μη μηδενικό $F(R=0)$ καταλήγουμε ότι $R_{\mu\nu} = 0$. Δηλαδή έχουμε χωρόχρονο Minkowski. Τώρα αν το R ισούται με μια σταθερά C τότε η (4.36) δίνει $F(R=C) C - 2f(R=C) = 0$. Αντικαθιστώντας αυτό στην (4.34) βρίσκουμε ότι $R_{\mu\nu} = \frac{1}{4} C g_{\mu\nu}$. Η λύση είναι χώρος de Sitter ή anti de Sitter, ανάλογα με το πρόσημο της σταθεράς C . Οι εξισώσεις (4.34) μπορούν να τροποποιηθούν ώστε να μοιάζουν με αυτές της γενικής σχετικότητας,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{\kappa^2 T_{\mu\nu}}{F(R)} + g_{\mu\nu} \frac{f(R) - RF(R)}{F(R)} + \frac{(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) F(R)}{F(R)}. \quad (4.37)$$

Δηλαδή,

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{F(R)} \left(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{eff} \right) \equiv \kappa'^2 \left(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{eff} \right), \quad (4.38)$$

όπου

$$T_{\mu\nu}^{eff} = g_{\mu\nu} \frac{(f(R) - RF(R))}{2} + (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) F(R). \quad (4.39)$$

Επειδή $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, τότε και $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{eff} = 0$, δηλαδή ισχύει η εξίσωση της συνέχειας. Η τελευταία μορφή μας δείχνει ότι η τροποποιημένη σταθερά του Νεύτωνα είναι η $G_{eff} = \frac{G}{F(R)}$. Συνεπώς για να έχουμε μια θετική σταθερά

θα πρέπει η παράγωγος να είναι θετική.

Αν θεωρήσουμε μετρική της μορφής $ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \phi d\phi^2) \right]$ και ταυιστή ενέργειας της μορφής $T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$, τότε οι εξισώσεις που παίρνουμε είναι

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3F} \left(\rho + \frac{RF - f}{2} - 3H\dot{R}F' \right), \quad (4.40)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{\kappa^2}{F} \left[p + \dot{R}^2 F'' + 2H\dot{R}F' + \ddot{R}F' + \frac{1}{2}(f - RF) \right], \quad (4.41)$$

όπου $F' = \frac{\partial f}{\partial R}$, $F'' = \frac{\partial^2 f}{\partial R^2}$, $\dot{R} = \frac{\partial R}{\partial t}$, $\ddot{R} = \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}$. Βλέπουμε στις εξισώσεις αυτές ότι

$$\rho_{eff} = \frac{RF - f}{2} - 3H\dot{R}F' \quad (4.42)$$

και

$$P_{eff} = \dot{R}^2 F'' + 2H\dot{R}F' + \ddot{R}F' + \frac{1}{2}(f - RF). \quad (4.43)$$

Κοιτώντας την (4.40) βλέπουμε ότι κενό, όπου η πυκνότητα ρ αποτελείται από την πυκνότητα της ύλης και της ακτινοβολίας, είναι μηδέν, η ρ_{eff} πρέπει να είναι θετική γιατί και το δεξί μέλος είναι θετικό. Η πυκνότητα είναι ουσιαστικά η πυκνότητα σκοτεινής ενέργειας, η οποία στο μοντέλο με την κοσμολογική σταθερά οφείλεται στην κοσμολογική σταθερά ενώ εδώ οφείλεται στην διαφορετική γεωμετρία του χωροχρόνου. Αν χρησιμοποιήσουμε τον λόγο της πίεσης προς την πυκνότητα ενέργειας και βρίσκουμε ότι

$$w_{eff} = \frac{p_{eff}}{\rho_{eff}} = \frac{\dot{R}^2 F'' + 2H\dot{R}F' + \ddot{R}F' + \frac{1}{2}(f - RF)}{\frac{RF - f}{2} - 3H\dot{R}F'}. \quad (4.44)$$

Ο παράγοντας αυτός πρέπει να είναι κοντά στο -1 σύμφωνα με τα παρατηρησιακά δεδομένα. Άρα για να έχουμε $w_{eff} = -1$ πρέπει

$$\frac{F''}{F'} = \frac{H\dot{R} - \ddot{R}}{\dot{R}^2}. \quad (4.45)$$

Η τροποποιημένη θεωρία πρέπει να εξηγήει τις διάφορες φάσεις που πέρασε το σύμπαν. Για παράδειγμα θα πρέπει να εξηγήει την εποχή του πληθωρισμού τότε που το σύμπαν διαστελλόταν με μεγάλο ρυθμό. Για παράδειγμα το μοντέλο $f(R) = R + \alpha R^n$ μπορεί για κάποιες τιμές του εκθέτη n να δώσει πληθωρισμό. Επίσης θα πρέπει να εξηγήει και την επιταχυνόμενη διαστολή στις μέρες μας, δηλαδή την σκοτεινή ενέργεια. Ένα μοντέλο που είχε προταθεί είναι το $f(R) = R - \frac{\alpha}{R^n}$. Όμως εμφανίζει διάφορες αστάθειες, οπότε τα μοντέλα $f(R)$ που χρησιμοποιούνται για να εξηγήσουν την επιταχυνόμενη διαστολή πρέπει να πληρούν κάποιες συνθήκες (π.χ οι παράγωγοι ως προς το βαθμωτό καμπυλότητας να είναι θετικές).

4.7 Gauss-Bonnet βαρύτητα

Μια άλλη θεωρία που έχει μελετηθεί η οποία περιέχει ανώτερης τάξης συνδιασμούς του βαθμωτού καμπυλότητας και των τανυστών Ricci, Riemann είναι το βαθμωτό Gauss-Bonnet[19]. Η δράση σε d διαστάσεις είναι η

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^d x \sqrt{-g} G, \quad (4.46)$$

όπου $G = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R^2$. Οι εξισώσεις κίνησης που παίρνουμε είναι δεύτερης τάξης ως προς τη μετρική. Η διαφορά αυτού του βαθμωτού ως προς το βαθμωτό καμπυλότητας είναι ότι δεύτερο έχει γραμμική εξάρτηση ως προς τις δεύτερες παραγώγους της μετρικής ενώ το πρώτο έχει τετραγωνική εξάρτηση. Στις τέσσερις διαστάσεις αυτό μπορεί να γραφτεί σαν να μια απόκλιση $\nabla_\mu D^\mu$ όπου

$$D^\mu = \det \sqrt{-g} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\mu\beta} \left(\frac{R^\sigma{}_{\nu\gamma\delta}}{2} + \frac{\Gamma^\sigma{}_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma}}{3} \right), \quad (4.47)$$

όπου $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ το σύμβολο Levi-Civita. Συνεπώς στις 4 διαστάσεις αυτός είναι συνοριακός όρος οπότε δεν συνεισφέρει στις εξισώσεις κίνησης.

4.8 Gauss-Bonnet βαρύτητα σύζευξη με βαθμωτό

Ένας τρόπος να δούμε την επίδραση του βαθμωτού Gauss-Bonnet στη δράση είναι μέσω σύζευξης με ένα βαθμωτό πεδίο. Για παράδειγμα

$$S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4 x \sqrt{-g} \left(\frac{f(\phi) R}{2} - \frac{\omega(\phi) (\nabla\phi)^2}{2} - V(\phi) - g(\phi) G \right), \quad (4.48)$$

όπου $f(\phi)$, $\omega(\phi)$, $g(\phi)$ συναρτήσεις του βαθμωτού ϕ . Τέτοια σύζευξη εμφανίζεται και στη δράση του βαθμωτού dilaton όπως θα δούμε παρακάτω.

4.9 $f(G)$ βαρύτητα

Τώρα η ιδέα είναι να πάρουμε μια γενικευμένη συνάρτηση του βαθμωτού Gauss-Bonnet όπως με το βαθμωτό καμπυλότητας. Δηλαδή

$$S = \int d^4 x \sqrt{-g} \left[\frac{M_P^2}{2} R + f(G) \right], \quad (4.49)$$

όπου $f(G)$ συνάρτηση του G και $M_P^2 = \frac{1}{\kappa^2}$. Η δράση μας δίνει

$$\begin{aligned} M_P^2 G^{\mu\nu} = & \frac{1}{2} g^{\mu\nu} f(G) - 2f'(G) R R^{\mu\nu} + 4f'(G) R_\rho^\mu R^{\nu\rho} \\ & - 2f'(G) R^{\mu\rho\sigma\tau} R_\nu^{\rho\sigma\tau} - 4f'(G) R^{\mu\rho\sigma\nu} R_{\rho\sigma} \\ & + 2\nabla^\mu \nabla^\nu f'(G) R - 2g^{\mu\nu} \nabla^2 f'(G) R + 4\nabla^2 f'(G) R^{\mu\nu} \\ & - 4\nabla_\rho \nabla^\mu f'(G) R^{\nu\rho} - 4\nabla_\rho \nabla^\nu f'(G) R^{\mu\rho} \\ & + 4g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\sigma f'(G) R^{\rho\sigma} - 4\nabla_\rho \nabla_\sigma f'(G) R^{\mu\rho\nu\sigma}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

όπου $f'(G) \equiv \partial f(G)/\partial G$. Σε μετρική της μορφής FRW οι εξισώσεις έχουν τη μορφή

$$3M_P^2 H^2 = \rho_m + \rho_r + \rho_{DE} \quad (4.51)$$

$$-2M_P^2 \dot{H} = \rho_m + p_m + \rho_r + p_r + \rho_{DE} + p_{DE}, \quad (4.52)$$

όπου ρ_m και p_m η πυκνότητα ενέργειας και πίεση που προέρχεται από την ύλη, ρ_r και p_r οι η πυκνότητα ενέργειας και πίεση της ακτινοβολίας, και έχουμε εισάγει την πυκνότητα ενέργειας και πίεση του τομέα της σκοτεινής ύλης, όπου

$$\begin{aligned} \rho_{DE} \equiv & -f(G) + 24H^2 (H^2 + \dot{H}) f'(G) \\ & - 24^2 H^4 (2\dot{H}^2 + H\ddot{H} + 4H^2\dot{H}) f''(G), \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} p_{DE} \equiv & f(G) - 24H^2 (H^2 + \dot{H}) f'(G) \\ & + 8(24)^2 (2\dot{H}^2 + H\ddot{H} + 4H^2\dot{H})^2 f'''(G) \\ & + 192H^2 (6\dot{H}^3 + 8H\dot{H}\ddot{H} + 24\dot{H}^2 H^2 \\ & + 6H^3\ddot{H} + 8H^4\dot{H} + H^2\ddot{H}) f''(G), \end{aligned} \quad (4.54)$$

όπου οι παράγωγοι που εμφανίζονται είναι ως προς το βαθμωτό G . Στην ίδια μετρική το βαθμωτό G γράφεται

$$G = 24H^2(H^2 + \dot{H}), \quad (4.55)$$

το οποίο είναι $G \sim R^2$ ως προς τις δυνάμεις του H και του \dot{H} , όπου $R = 6(2H^2 + \dot{H})$.

4.10 Σύζευξη Gauss-Bonnet βαθμωτού με βαθμωτό dilaton

Όπως είπαμε παραπάνω για να δούμε τη συνεισφορά του βαθμωτού G στις εξισώσεις κίνησης θα πρέπει να είναι συζευγμένο με κάποιο πεδίο. Θα δούμε

μια περίπτωση η οποία προκύπτει από μικροσκοπικά μοντέλα χορδών [51, 52] στην οποία το βαθμωτό G είναι συζευγμένο με ένα μη τετριμμένο (αδιάστατο) βαθμωτό πεδίο (dilaton Φ με δυναμικό $V(\Phi)$) [53]. Η δράση είναι η

$$\int d^4x \sqrt{-g} M_P^2 \left[\frac{R}{2} - \frac{1}{4} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + c_1 e^\Phi G - V(\Phi) \right], \quad (4.56)$$

όπου το βαθμωτό G δίνεται από την παραπάνω σχέση. Στα μοντέλα χορδών ο συντελεστής c_1 δίνεται από τη σχέση

$$c_1 = \frac{\alpha'}{8 g_s^{(0)2}}, \quad (4.57)$$

όπου $g_s^{(0)}$ είναι η σταθερά σύζευξης της χορδής και $\alpha' = 1/M_s^2$ είναι η κλίση Regge της χορδής, και M_s η κλίμακα της χορδής, που είναι εν γένει διαφορετική από την (reduced) μάζα Planck M_P , που εισέρχεται στη δράση Einstein-Hilbert, που είναι κομμάτι της 'effective' δράσης της χορδής στις χαμηλές ενέργειες. Οι εξισώσεις κίνησης είναι οι

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \\ &\quad - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \left[(\partial_\alpha \Phi)^2 + 4 V(\Phi) \right] - \alpha' \mathcal{K}_{\mu\nu}, \\ \mathcal{K}_{\mu\nu} &= 2 (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) \varepsilon^{\sigma\lambda\alpha\beta} D_\gamma \left(\tilde{R}^{\rho\gamma}{}_{\alpha\beta} \partial_\sigma f \right), \\ \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \Phi) &= -2 \sqrt{-g} c_1 e^\Phi G - 2 \frac{\delta V(\Phi)}{\delta \Phi}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

όπου είναι οι εξισώσεις ως προς τη μετρική και ως προς το πεδίο dilaton αντίστοιχα και $f \equiv \frac{c_1}{\alpha'} e^\Phi$. Στις παραπάνω εξισώσεις η D_μ είναι μια συναλλοίωτη παράγωγος και, $\tilde{R}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\rho\sigma\alpha\beta}$ είναι ο dual ταυιστής Riemann. Η συναλλοίωτη Levi-Civita πυκνότητα $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ορίζεται ως $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, όπου $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ το πλήρως αντισυμμετρικό Levi-Civita σύμβολο του Mikowski χωρόχρονου. Η ανταλλοίωτη πυκνότητα $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ορίζεται ανεβάζοντας του δείκτες με την κατάλληλη μετρική του καμπυλωμένου χωρόχρονου. Ο ταυιστής ενέργειας ορμής είναι ο

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \left[(\partial_\alpha \Phi)^2 + 4 V(\Phi) \right] - \alpha' \mathcal{K}_{\mu\nu}. \quad (4.59)$$

Εοιεδή ισχύει ότι $D_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} = 0$ τότε θα πρέπει να ισχύει ότι

$$D_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0. \quad (4.60)$$

Σε επίπεδη FRW μετρική οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν

$$3H^2 = \frac{1}{4}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi) - 24c_1e^{\Phi}\dot{\Phi}H^3 + M_P^{-2}(\rho_m + \rho_r), \quad (4.61)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = - \left[\frac{1}{4}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi) + 16c_1e^{\Phi}\dot{\Phi}H(\dot{H} + H^2) + 8c_1e^{\Phi}(\ddot{\Phi} + \dot{\Phi}^2)H^2 + M_P^{-2}(p_m + p_r) \right], \quad (4.62)$$

και

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + 2V'(\Phi) - 48c_1e^{\Phi}H^2(\dot{H} + H^2) = 0. \quad (4.63)$$

Άρα η πυκνότητα ενέργειας της σκοτεινής ενέργειας είναι η

$$\rho_{DE} \equiv M_P^2 \left[\frac{1}{4}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi) - 24c_1e^{\Phi}\dot{\Phi}H^3 \right],$$

και η πίεση

$$p_{DE} \equiv M_P^2 \left[\frac{1}{4}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi) + 16c_1e^{\Phi}\dot{\Phi}H(\dot{H} + H^2) + 8c_1e^{\Phi}(\ddot{\Phi} + \dot{\Phi}^2)H^2 \right]. \quad (4.64)$$

4.11 Κυβική βαρύτητα

Μία άλλη θεωρία η οποία μελετήσαμε είναι μία κλάση θεωριών η οποία λέγεται cubic gravity. Σε αυτές τις θεωρίες η δράση αποτελείται από όρους οι οποίοι είναι τρίτης τάξης ως προς τον ταυιστή Riemann και τις συστολές του[9]. Η δράση είναι η

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_P^2}{2} R + \alpha P \right], \quad (4.65)$$

όπου

$$\begin{aligned} P = & \beta_1 R_{\mu}^{\rho} R_{\nu}^{\sigma} R_{\rho}^{\gamma} R_{\sigma}^{\delta} R_{\gamma}^{\mu} R_{\delta}^{\nu} + \beta_2 R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}^{\mu\nu} \\ & + \beta_3 R^{\sigma\gamma} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho}{}_{\gamma} + \beta_4 R R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \\ & + \beta_5 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\rho} R^{\nu\sigma} + \beta_6 R_{\mu}^{\nu} R_{\nu}^{\rho} R_{\rho}^{\mu} \\ & + \beta_7 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} R + \beta_8 R^3. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Η παραπάνω θεωρία περιέχει πολλές ελεύθερες παράμετρους. Αυτές μπορούν να μειωθούν απαιτώντας η θεωρία να έχει παρόμοιο φάσμα με τη Γενική Σχετικότητα, να μην είναι τοπολογικός όρος στις 4 διαστάσεις[35] και να ορίζεται ανεξάρτητα από τις διαστάσεις. Κάνοντας αυτά το βαθμωτό σε γεωμετρία FRW γράφεται ως

$$P = 6\tilde{\beta}H^4 (2H^2 + 3\dot{H}), \quad (4.67)$$

όπου βλέπουμε ότι υπάρχει μία μόνο ελεύθερη παράμετρος. Αυτή ισούται με

$$\tilde{\beta} = -\beta_1 + 4\beta_2 + 2\beta_3 + 8\beta_4. \quad (4.68)$$

Βλέπουμε ότι $P \sim R^3$ ως προς τις δυνάμεις της σταθεράς Hubble και της παραγώγου της. Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από τη δράση (4.65) είναι οι

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 (T_{\mu\nu} + \alpha H_{\mu\nu}), \quad (4.69)$$

όπου η μορφή του τανυστή $H_{\mu\nu}$ δίνεται σε άλλο κεφάλαιο. Σε FRW μετρική έχουμε

$$3H^2 = \kappa^2 (\rho_m + \rho_c), \quad (4.70)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -\kappa^2 (p_m + p_c), \quad (4.71)$$

όπου

$$\rho_c = 6\alpha\tilde{\beta}H^6, \quad (4.72)$$

$$p_c = -6\alpha\tilde{\beta}H^4 (H^2 + 2\dot{H}), \quad (4.73)$$

όπου ρ_c η πυκνότητα ενέργειας και p_c η πίεση αντίστοιχα.

4.12 $f(P)$ βαρύτητα

Τώρα μπορούμε να γενικεύσουμε το βαθμωτό P και να πάρουμε μια συνάρτηση $f(P)$. Η δράση που προκύπτει είναι

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_P^2}{2} R + \alpha f(P) \right]. \quad (4.74)$$

Οι γενικές εξισώσεις κίνησης είναι πολύ πολύπλοκες οπότε θα γράψουμε τις εξισώσεις σε FRW μετρική. Έχουμε

$$\rho_{DE} \equiv -f(P) - 18\tilde{\beta}H^4 (H\partial_t - H^2 - \dot{H})f'(P), \quad (4.75)$$

$$p_{DE} \equiv f(P) + 6\tilde{\beta}H^3 \left[H\partial_t^2 + 2(H^2 + 2\dot{H})\partial_t - 3H^3 - 5H\dot{H} \right] f'(P). \quad (4.76)$$

4.13 “Running Vacuum” μοντέλα

Άλλα κοσμολογικά μοντέλα που υπάρχουν είναι τα “running vacuum” μοντέλα [56]. Σε αυτά τα μοντέλα η πυκνότητα ενέργειας του κενού είναι συνάρτηση μια δυναμοσειράς της σταθεράς Hubble. Υπάρχει μια πιθανή εξάρτηση από την παράγωγο της σταθεράς του Hubble \dot{H} αλλά στην εποχή της νουκλεοσύνθεσης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\dot{H} \sim H^2$, δηλαδή μπορούμε να

εκφράσουμε την παράγωγο με την δεύτερη δύναμη της σταθεράς του Hubble. Η πυκνότητα ενέργειας της σκοτεινής ενέργειας δίνεται από τη σχέση

$$\rho_{\text{RVM}}^{\text{vac}} = 3M_P^2 \left(c_0 + \nu H^2 + \frac{\alpha}{H_I^2} H^4 + \dots \right), \quad (4.77)$$

όπου η καταστατική εξίσωση δίνεται από τη σχέση

$$P_{\text{RVM}}^{\text{vac}} = -\rho_{\text{RVM}}^{\text{vac}}, \quad (4.78)$$

όπου H_I είναι η κλίμακα του πληθωρισμού η οποία σύμφωνα με τα δεδομένα από το Planck είναι της τάξης $H_I \sim 10^{-5} M_P$. Επίσης οι συντελεστές $\nu, \alpha > 0$ είναι αδιάστατοι και οι όροι της σειράς οι οποίοι παραλείπονται έχουν τάξη H^6 και παραπάνω οι οποίοι δεν είναι σημαντικοί. Η σταθερά c_0 δεν μπορεί να προσδιοριστεί από πρώτες αρχές διότι το μοντέλο είναι βασισμένο σε σειρά άρτιων δυνάμεων της σταθεράς του Hubble με κλίμακα που μοιάζει στο renormalisation group $\frac{d\rho_{\text{RVM}}^{\text{vac}}}{d\ln H} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n H^{2n}$. Η σταθερά c_0 παίζει το ρόλο της κοσμολογικής σταθεράς. Σε τέτοια περίπτωση ο όρος νH^2 δίνει αποκλίσεις από το Λ CDM μοντέλο και η τρέχουσα φαινομενολογία απαιτεί $\nu = \mathcal{O}(10^{-3}) > 0$. Τέτοια μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να λύσουν κάποιες από τις αποκλίσεις των παρατηρησιακών δεδομένων με το μοντέλο Λ CDM. Επίσης μικροσκοπικά RVM μοντέλα κατασκευάζονται στο πλαίσιο θεωριών που είναι εμπνευσμένες από μικροσκοπικά μοντέλα χορδών. Τέτοια μοντέλα, που περιέχουν βαρυτικές ανωμαλίες (Chern-Simons όροι) οι οποίες είναι συζευγμένες με πεδία αξιονίων, οι όροι με H^4 , οι οποίοι μπορούν να δώσουν δυναμικό πληθωρισμό, προκαλούνται από συμπυκνώματα primordial βαρυτικών κυμάτων των όρων Chern-Simons που παραβιάζουν την CP συμμετρία. Στην εποχή μετά τον πληθωρισμό οι βαρυτικές ανωμαλίες θεωρούμε ότι αναιρούνται οπότε οι όροι H^4 δεν παρουσιάζονται στην εποχή της μεγάλης νουκλεοσύνθεσης. Γενικά ίσως υπάρχουν και άλλοι λόγοι για να υπάρχουν H^4 όροι, μη γεωμετρικοί, όπως ολοκληρώνοντας χβαντικά πεδία που αλληλεπιδρούν τα οποία μπορεί να είναι κάποιας κλίμακας μάζας m . Στην περίπτωση της υπερβαρύτητας που μπορεί να συνδεθεί με το τρέχον κενό του πρώιμου σύμπαντος, οι διορθώσεις του χβαντικού βαρυτονίου σε ένα κοσμολογικό υπόβαθρο μπορεί να οδηγήσει σε επανακανονικοποίηση της σταθεράς του Νεύτωνα η οποία και αυτή παύει να είναι σταθερά και αποκτά μια εξάρτηση λογαριθμική μπό τη σταθερά του Hubble. Η ακριβής μορφή ενός τέτοιου “running” εξαρτάται από τη θεωρία χβαντικής βαρύτητας που χρησιμοποιούμε. Από φαινομενολογικής σκοπιάς μπορούμε να παραμετροποιήσουμε την “effective RVM” πυκνότητα ενέργειας του κενού κατά τη διάρκεια των περιόδων μετά τον πληθωρισμό, περιλαμβάνοντας και την εποχή της μεγάλης νουκλεοσύνθεσης. Έχουμε

$$\rho_{\text{RVM}}^{\text{vac}} \equiv \rho_{DE} \simeq 3M_P^2 \left\{ c_0 + [\nu + d_1 \ln(M_P^{-2} H^2)] H^2 + \frac{\alpha}{H_I^2} [1 + d_2 \ln(M_P^{-2} H^2)] H^4 + \dots \right\}, \quad (4.79)$$

όπου $c_0 > 0, \nu > 0, \alpha > 0$ και $d_i, i = 1, 2$ είναι φαινομενολογικοί παράμετροι.

Κεφάλαιο 5

Θεωρία διαταραχών στην P βαρύτητα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα υπολογίσουμε τις διαταραχές για την P βαρύτητα. Προηγουμένως είχαμε υπολογίσει τους συνδέσμους της νουκλεοσύνθεσης για την aP^n βαρύτητα. Το βαθμωτό P είναι ένα βαθμωτό το οποίο αποτελείται από τρίτης τάξης όρους καμπυλότητας. Αυτή η θεωρία ονομάζεται κυβική θεωρία Αινστάιν. Οι παράμετροι σύζευξης δεν εξαρτώνται από τις διαστάσεις και επιτρέπουν ως φορέα αλληλεπίδραση ένα άμαζο και εγχάρσιο γκραβιτόνιο σε ένα συμμετρικό υπόβαθρο. Έχει αποδειχθεί [44] ότι η αρχική μορφή της θεωρίας είναι επαρκής ώστε να πάρουμε σφαιρικές συμμετρικά λύσεις μελανών οπών οι οποίες δίνονται από δεύτερης τάξης διαφορικές εξισώσεις ως προς την μετρική. Σκοπός μας είναι χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο να παράγουμε μια εξίσωση για τα βαρυτικά κύματα που να μοιάζει με αυτή της γενικής σχετικότητας παίρνοντας κατάλληλους περιορισμούς για τις παραμέτρους βήτα. Κάνοντας αυτή την ανάλυση σε μετρική $finw$ παίρνουμε την εξίσωση για τα βαρυτικά κύματα με μια διόρθωση στον όρο τριβής και επίσης από τις βαθμωτές διαταραχές παίρνουμε μια διόρθωση στον νόμο Poisson.

5.1 Δράση και εξισώσεις κίνησης

Έχουμε την ακόλουθη δράση

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) + \alpha P + \mathcal{L}_m \right], \quad (5.1)$$

όπου έχουμε την δράση Einstein-Hilbert με μια κοσμολογική σταθερά συν τον κυβικό όρο P με μια παράμετρο α και $\kappa = 8\pi G$. Οι εξισώσεις κίνησης ως προς $g_{\mu\nu}$, δίνονται από [36].

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa (T_{\mu\nu} + \alpha H_{\mu\nu}), \quad (5.2)$$

όπου

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &= 2(\beta_1 + 4\beta_3 + 40\beta_4 - \beta_5 + \beta_6) g_{\mu\nu} R_\alpha^\gamma R^{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} + 2\beta_7 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} R_{\mu\nu} \\
&- 2(2\beta_3 + \beta_5) R_{\alpha\beta} R_\mu^\alpha R_\nu^\beta - \left(\frac{9}{2}\beta_1 + 9\beta_3 + 88\beta_4 + \beta_7\right) g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} R_{\mu\nu} - 8\beta_4 R_\mu^\alpha R_{\nu\alpha} R \\
&\quad + 6\beta_8 R_{\mu\nu} R^2 + 2\beta_4 R_{\mu\nu} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} + \left(\frac{5}{8}\beta_1 + \frac{5}{4}\beta_3 + 12\beta_4 - \beta_8\right) g_{\mu\nu} R^3 \\
&+ (3\beta_1 + 6\beta_3 + 64\beta_4 + \beta_5 - 3\beta_6) g_{\mu\nu} R^{\alpha\gamma} R^{\beta\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \left(\frac{8}{3}\beta_1 + \frac{3}{4}\beta_3 + 7\beta_4\right) g_{\mu\nu} R R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \\
&- \frac{1}{2} [\beta_1 + 2\beta_2 + 3(\beta_3 + 8\beta_4)] g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta}{}^{\epsilon\zeta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\gamma\delta\epsilon\zeta} + 4(2\beta_4 + \beta_7) R R^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} \\
&+ 2(2\beta_3 + 3\beta_6) R^{\beta\gamma} R_{(\nu}{}^\alpha R_{\mu)\beta\alpha\gamma} + [4(\beta_3 + \beta_6) - 6\beta_1] R_\alpha^\gamma R^{\alpha\beta} R_{\mu\beta\nu\gamma} - \beta_3 R_\nu^\alpha R_{\alpha\beta\gamma\delta} R_\mu^{\beta\gamma\delta} \\
&\quad - 24\beta_2 R_\nu^\alpha R_{\alpha\gamma\beta\delta} R_\mu^{\beta\gamma\delta} + (6\beta_1 - 4\beta_3 + 4\beta_5) R^{\alpha\beta} R_{\alpha\gamma\beta\delta} R_\mu^{\gamma\nu\delta} \\
&\quad + 4\beta_4 R R_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\alpha\beta\gamma} + 6\beta_2 R_{\beta\gamma\delta\epsilon} R_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\alpha}{}^{\delta\epsilon} + 2(6\beta_2 + \beta_3) R^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha}{}^{\gamma\delta} R_{\nu\beta\gamma\delta} \\
&+ 2(12\beta_2 + \beta_3 + \beta_5) R^{\alpha\beta} R_\mu^{\gamma\alpha\delta} R_{\nu\beta\gamma\delta} + (\beta_3 - 6\beta_2) R_{\alpha\gamma\delta\epsilon} R_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\beta}{}^{\delta\epsilon} + 9\beta_1 R_{\alpha\delta\gamma\epsilon} R_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\beta}{}^{\delta\epsilon} \\
&- \beta_3 R_\mu^\alpha R_{\alpha\beta\gamma\delta} R_\nu^{\beta\gamma\delta} - 24\beta_2 R_\mu^\alpha R_{\alpha\gamma\beta\delta} R_\nu^{\beta\gamma\delta} + 2(12\beta_2 + \beta_3 + \beta_5) R^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha}{}^{\gamma\delta} R_{\nu\gamma\beta\delta} \\
&+ 4\beta_3 R^{\alpha\beta} R_\mu^{\gamma\alpha\delta} R_{\nu\gamma\beta\delta} - 2[3\beta_1 + 2(\beta_3 + \beta_5)] R^{\alpha\beta} R_\mu^{\gamma\alpha\delta} R_{\nu\delta\beta\gamma} + (\beta_3 - 6\beta_2) R_{\beta\gamma\delta\epsilon} R_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\alpha}{}^{\delta\epsilon} \\
&+ 3\beta_1 R_{\beta\delta\gamma\epsilon} R_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\alpha}{}^{\delta\epsilon} + [6\beta_1 + 4(\beta_3 - 6\beta_2)] R_{\alpha\delta\gamma\epsilon} R_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\beta}{}^{\delta\epsilon} + 6\beta_1 R_{\alpha\epsilon\gamma\delta} R_\mu^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu\beta}{}^{\delta\epsilon} \\
&\quad + 2(4\beta_4 + \beta_7) R \square R_{\mu\nu} + (\beta_5 + 2\beta_7) R_{\mu\nu} \square R + (\beta_7 + 12\beta_8) g_{\mu\nu} R \square R \\
&+ 2(\beta_3 + 8\beta_4 + \beta_5 + 2\beta_7) \nabla_\alpha R_{\mu\nu} \nabla^\alpha R + \left[\frac{3}{4}\beta_6 + 2(\beta_7 + 6\beta_8)\right] g_{\mu\nu} \nabla_\alpha R_{\mu\nu} \nabla^\alpha R \\
&- 2\left(\beta_3 + \beta_5 + \frac{3}{2}\beta_6 + 2\beta_7\right) R_{\alpha(\nu} \nabla^\alpha \nabla_{\mu)} R + 2(2\beta_3 + \beta_5) R^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\alpha R_{\mu\nu} + 2(2\beta_3 + 3\beta_6) R_{(\mu}{}^\alpha \square R_{\nu)\alpha} \\
&\quad + 2(2\beta_5 - 2\beta_3 - 3\beta_6) R^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_{(\mu} R_{\nu)\alpha} + 2\beta_3 R^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\beta \nabla_{(\mu} R_{\nu)\alpha\gamma\delta} \\
&- 2(3\beta_1 + 12\beta_2 + 2\beta_3 + \beta_5) \nabla_\alpha R_{\nu\beta} \nabla^\beta R_\mu^\alpha + (24\beta_2 + 8\beta_3 + 6\beta_6) \nabla_\beta R_{\nu\alpha} \nabla^\beta R_\mu^\alpha \\
&+ (2\beta_7 + 3\beta_6 - \beta_5) g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} \nabla^\beta \nabla^\alpha R + (8\beta_4 + 2\beta_3 - 3\beta_1) R_{\mu\alpha\nu\beta} \nabla^\beta \nabla^\alpha R + 2(\beta_5 + 2\beta_7) g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} \square R_{\alpha\beta} \\
&+ 2(3\beta_1 + \beta_5) R_{\mu\alpha\nu\beta} \square R^{\alpha\beta} + 2\beta_5 R^{\alpha\beta} \square R_{\mu\alpha\nu\beta} + (3\beta_6 - 4\beta_5 - 2\beta_3) g_{\mu\nu} \nabla_\beta R_{\alpha\gamma} \nabla^\gamma R^{\alpha\beta} \\
&\quad - 2(2\beta_3 - 6\beta_1) \nabla_\beta R_{\alpha(\mu\nu)\gamma} \nabla^\gamma R^{\alpha\beta} + 2[\beta_3 + 2(\beta_5 + \beta_7)] g_{\mu\nu} \nabla_\gamma R_{\alpha\beta} \nabla^\gamma R^{\alpha\beta} \\
&\quad + 4(3\beta_1 + \beta_5) \nabla_\gamma R_{\mu\alpha\nu\beta} \nabla^\gamma R^{\alpha\beta} - 2(2\beta_3 - 6\beta_1) R_{\beta\gamma\alpha(\nu} \nabla^\gamma \nabla^\gamma R_{\mu)}^\alpha \\
&\quad - 4(12\beta_2 + \beta_3) R_{\alpha\gamma\beta\nu} \nabla^\gamma \nabla^\beta R_\mu^\alpha - 4(3\beta_1 + \beta_3 + \beta_5) R_{\beta\gamma\alpha(\nu} \nabla^\gamma \nabla_{\mu)} R^{\alpha\beta} \\
&\quad + 6\beta_1 R^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\delta \nabla_\beta R_{\mu\alpha\nu\gamma} + 2\beta_3 R_{(\nu}{}^{\alpha\beta\gamma} \square R_{\mu)\alpha\beta\gamma} \\
&\quad + 12\beta_2 \nabla_\alpha R_{\nu\delta\beta\gamma} \nabla^\delta R_\mu^{\alpha\beta\gamma} - 6\beta_1 \nabla_\gamma R_{\nu\beta\alpha\delta} \nabla^\delta R_\mu^{\alpha\beta\gamma} + 2\beta_3 \nabla_\delta R_{\nu\alpha\beta\gamma} \nabla^\delta R_\mu^{\alpha\beta\gamma} \\
&+ 2(2\beta_3 + 8\beta_4 + \beta_5) g_{\mu\nu} R_{\alpha\gamma\beta\delta} \nabla^\delta \nabla^\gamma R^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\beta_3 + 8\beta_4) g_{\mu\nu} \nabla_\epsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla^\epsilon R^{\alpha\beta\gamma\delta} \\
&+ (6\beta_1 - 2\beta_3 + 2\beta_5 - 3\beta_6) \nabla^\beta R_\nu^\alpha \nabla_\mu R_{\alpha\beta} - 2\left(\beta_3 + 8\beta_4 + \frac{3}{2}\beta_6 + 2\beta_7\right) \nabla^\alpha R \nabla_{(\mu} R_{\nu)\alpha} \\
&+ \beta_3 \nabla^\delta R_\nu^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\mu R_{\alpha\delta\beta\gamma} + 4(\beta_3 + \beta_5) \nabla^\gamma R^{\alpha\beta} \nabla_{(\mu} R_{\nu)\alpha\beta\gamma} + (6\beta_1 - 2\beta_3 + 2\beta_5 - 3\beta_6) \nabla^\beta R_\mu^\alpha \nabla_\nu R_{\alpha\beta} \\
&+ 2[3\beta_1 + 2(\beta_5 + \beta_7)] \nabla_\mu R^{\alpha\beta} \nabla_\nu R_{\alpha\beta} - \left[\frac{1}{2}\beta_5 + 2(\beta_7 + 6\beta_8)\right] \nabla_\mu R \nabla_\nu R - 4\beta_4 \nabla_\mu R^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\nu R_{\alpha\beta\gamma\delta} \\
&+ \beta_3 \nabla^\delta R_\mu^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\nu R_{\alpha\delta\beta\gamma} - 4(\beta_5 + \beta_7) R^{\alpha\beta} \nabla_\nu \nabla_\mu R_{\alpha\beta} - 2(2\beta_4 + \beta_7 + 6\beta_8) R \nabla_\nu \nabla_\mu R \\
&\quad - 4\beta_4 R^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\nu \nabla_\mu R_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

5.2 Σύνδεσμοι στις ελεύθερες παραμέτρους και εύρεση εξισώσεων Poisson και βαρυτικών κυμάτων

Θα αναλύσουμε τις εξισώσεις αυτές σε μετρική frw . Πρώτα θεωρούμε βαθμωτές διαταραχές της μετρικής. Η διαταραγμένη μετρική παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = -a(\eta)^2 (1 + 2\phi) d\eta^2 + a(\eta)^2 \delta_{ij} (1 - 2\psi) dx^i dx^j, \quad (5.4)$$

όπου η είναι ο σύμμορφος χρόνος, $a(\eta)$ είναι ο παράγοντας κλίμακας στον σύμμορφο χρόνο και τα ϕ, ψ είναι οι βαθμωτές διαταραχές πρώτης τάξης της μετρικής. Επειδή οι εξισώσεις είναι πολύπλοκες και έχουν μεγάλη μορφή, θα κρατήσουμε τους όρους που χρειαζόμαστε. Για παράδειγμα στη χρονική συνιστώσα (5.2) θέλουμε να υπολογίσουμε τη διόρθωση στο βαρυτικό δυναμικό συνεπώς θα κρατήσουμε τους όρους με την μεγαλύτερη συνεισφορά από το κομμάτι του ταυυστή Αινστάιν και από το κομμάτι του κυβικού όρου, στην περιοχή $k \gg \mathcal{H}$. Θα δούμε πως οι εξισώσεις αυτές λειτουργούν σε ένα σύμπαν με ιδανικό ρευστό. Το ιδανικό ρευστό ορίζεται ως

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}. \quad (5.5)$$

Το $(0 - 0)$ και το $(i - j)$ κομμάτι του διαταραγμένου ρευστού είναι

$$\delta T_0^0 = -\delta\rho, \quad (5.6)$$

$$\delta T_j^i = \delta p \delta_j^i. \quad (5.7)$$

Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω βρίσκουμε την $(0 - 0)$ συνιστώσα των εξισώσεων κίνησης(5.2)

$$\begin{aligned} & 2\psi + \frac{\kappa\alpha k^2}{a^4} \left\{ [(8\beta_3 + 48\beta_4 + 8\beta_5 + 12\beta_6 + 40\beta_7 + 144\beta_8) \mathcal{H}^2 + \right. \\ & + (48\beta_2 + 32\beta_3 + 80\beta_4 + 20\beta_5 + 24\beta_6 + 56\beta_7 + 144\beta_8) \mathcal{H}'] \phi - \\ & \left. - [(8\beta_3 + 32\beta_4 + 12\beta_5 + 24\beta_6 + 72\beta_7 + 288\beta_8) \mathcal{H}^2 + \right. \\ & \left. + (12\beta_1 + 8\beta_3 + 32\beta_4 + 24\beta_5 + 12\beta_6 + 72\beta_7 + 288\beta_8) \mathcal{H}'] \psi \right\} = -\frac{\kappa a^2 \delta\rho}{k^2}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

Στο ιδανικό ρευστό δεν έχουμε μη διαγώνια συνιστώσα. Συνεπώς οι μη διαγώνιοι όροι με τη μεγαλύτερη συνεισφορά θα είναι

$$\begin{aligned} & \phi - \psi - \frac{\kappa\alpha k^2}{a^4} \left\{ [(4\beta_3 + 16\beta_4 + 6\beta_5 + 12\beta_6 + 36\beta_7 + 144\beta_8) \mathcal{H}^2 + \right. \\ & + (6\beta_1 + 4\beta_3 + 16\beta_4 + 12\beta_5 + 6\beta_6 + 36\beta_7 + 144\beta_8) \mathcal{H}'] \phi + \\ & \left. - [(6\beta_1 + 48\beta_2 + 40\beta_3 + 112\beta_4 + 34\beta_5 + 36\beta_6 + 100\beta_7 + 288\beta_8) \mathcal{H}^2 + \right. \\ & \left. + (8\beta_3 + 48\beta_4 + 12\beta_5 + 18\beta_6 + 68\beta_7 + 288\beta_8) \mathcal{H}'] \psi \right\} = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

όπου το δεξί μέλος θα δώσει μηδέν. Τώρα θεωρούμε διαταραχές της μορφής

$$ds^2 = -a(\eta)^2 d\eta^2 + a(\eta)^2 (\delta_{ij} + 2h_{ij}) dx^i dx^j, \quad (5.10)$$

όπου ο ταυυστής h_{ij} έχει μηδενική απόκλιση ($\partial^i h_{ij} = 0$) και έχει μηδενικό ίχνος ($h^i_i = 0$). Επίσης, ορίζουμε [36]

$$\tilde{\beta} = -\beta_1 + 4\beta_2 + 2\beta_3 + 8\beta_4. \quad (5.11)$$

Η εξίσωση βαρυτικών κυμάτων που λαμβάνουμε από τον ταυυστή $H_{\mu\nu}$ είναι η

$$\begin{aligned} & -2\alpha\kappa \{ [3\beta_1 - 4\beta_3 - 24\beta_4 + \beta_5 - 6(\beta_6 + \beta_7)] \mathcal{H}^2 \\ & \quad - 3(8\beta_2 + 4\beta_3 + 8\beta_4 + 2\beta_5 + \beta_6 + 2\beta_7) \mathcal{H}' \} h^{(4)}_{ij} \\ & - 4\alpha\kappa \{ 2[-3\beta_1 + 4\beta_3 + 24\beta_4 - \beta_5 + 6(\beta_6 + \beta_7)] \mathcal{H}^3 \\ & \quad + 2(3\beta_1 + 24\beta_2 + 8\beta_3 + 7\beta_5 - 3\beta_6) \mathcal{H}\mathcal{H}' \\ & \quad - 3(8\beta_2 + 4\beta_3 + 8\beta_4 + 2\beta_5 + \beta_6 + 2\beta_7) \mathcal{H}'' \} h^{(3)}_{ij} \\ & + \{ a^4 + 2\alpha\kappa \{ 3\beta_1 - 4(3\beta_2 + 2\beta_3 - 3\beta_4 + \beta_5 + 6\beta_6 + 9\beta_7 + 27\beta_8) \mathcal{H}^4 \\ & \quad - (3\beta_1 - 24\beta_2 + 26\beta_3 + 192\beta_4 + 22\beta_5 + 36\beta_6 + 96\beta_7 + 216\beta_8) \mathcal{H}^2\mathcal{H}' \\ & \quad - 3(16\beta_2 + 8\beta_3 + 12\beta_4 + 5\beta_5 + 5\beta_6 + 12\beta_7 + 36\beta_8) \mathcal{H}'^2 \\ & \quad + 2k^2 \{ [-3\beta_1 + 12\beta_2 + 8\beta_3 + 24\beta_4 + \beta_5 + 6(\beta_6 + \beta_7)] \mathcal{H}^2 \\ & \quad + (12\beta_2 + 8\beta_3 + 24\beta_4 + 4\beta_5 + 3\beta_6 + 6\beta_7) \mathcal{H}' \} \\ & \quad - (3\beta_1 + 72\beta_2 + 26\beta_3 + 24\beta_4 + 16\beta_5 - 6\beta_6) \mathcal{H}\mathcal{H}'' \\ & \quad + 3(8\beta_2 + 4\beta_3 + 8\beta_4 + 2\beta_5 + \beta_6 + 2\beta_7) \mathcal{H}''' \} \} h''_{ij} \\ & + \{ 2a^4\mathcal{H} - 2\alpha\kappa \{ 6[5\beta_1 - 4(\beta_2 + 2\beta_3 + 7\beta_4 + 4\beta_6 + 5\beta_7 + 9\beta_8)] \mathcal{H}^5 \\ & \quad + 2[-63\beta_1 + 2(-24\beta_2 + 7\beta_3 + 60\beta_4 - 28\beta_5 + 54\beta_6 + 30\beta_7)] \mathcal{H}^3\mathcal{H}' \\ & \quad + 2(39\beta_1 + 72\beta_2 + 26\beta_3 + 12\beta_4 + 55\beta_5 - 36\beta_6 + 24\beta_7 + 108\beta_8) \mathcal{H}\mathcal{H}'^2 \\ & \quad + (39\beta_1 + 120\beta_2 + 62\beta_3 + 96\beta_4 + 76\beta_5 + 84\beta_7 + 216\beta_8) \mathcal{H}^2\mathcal{H}'' \\ & \quad + (-15\beta_1 - 24\beta_2 + 2\beta_3 + 48\beta_4 - 8\beta_5 + 36\beta_6 + 60\beta_7 + 216\beta_8) \mathcal{H}'\mathcal{H}'' \\ & \quad - k^2 \{ 4[3\beta_1 - 12\beta_2 - 8\beta_3 - 24\beta_4 - \beta_5 - 6(\beta_6 + \beta_7)] \mathcal{H}^3 - 12(\beta_1 + \beta_5 - \beta_6) \mathcal{H}\mathcal{H}' \\ & \quad + 2(12\beta_2 + 8\beta_3 + 24\beta_4 + 4\beta_5 + 3\beta_6 + 6\beta_7) \mathcal{H}'' \\ & \quad - [3\beta_1 + 2(12\beta_2 + 7\beta_3 + 12\beta_4 + 5\beta_5 + 3\beta_6 + 6\beta_7)] \mathcal{H}\mathcal{H}''' \} \} h'_{ij} \\ & + k^2 \{ -2\alpha\kappa k^2 \{ [3\beta_1 - 10\beta_3 - 3[8\beta_4 + \beta_5 + 2(\beta_6 + 2\beta_7)]] \mathcal{H}^2 \\ & \quad - 2(4\beta_3 + 24\beta_4 + 2\beta_5 + 3\beta_6 + 6\beta_7) \mathcal{H}' \} + a^4 \\ & \quad - 2\alpha\kappa \{ 3[3\beta_1 - 4(3\beta_2 + 2\beta_3 + \beta_4 + 3\beta_6 + \beta_7 - 9\beta_8)] \mathcal{H}^4 \\ & \quad - [27\beta_1 - 2(36\beta_2 + 23\beta_3 + 24\beta_4 + \beta_5 + 42\beta_6 + 48\beta_7 + 108\beta_8)] \mathcal{H}^2\mathcal{H}' \\ & \quad + [(12\beta_1 + 8\beta_3 + 36\beta_4 + 19\beta_5 + 3\beta_6 + 36(\beta_7 + 3\beta_8))] \mathcal{H}'^2 \\ & \quad + (15\beta_1 + 10\beta_3 + 24\beta_4 + 20\beta_5 + 6\beta_6 + 24\beta_7) \mathcal{H}\mathcal{H}'' \\ & \quad - (3\beta_1 + 2\beta_3 + 4\beta_5 + 3\beta_6 + 6\beta_7) \mathcal{H}''' \} \} h_{ij} = 0 \quad (5.12) \end{aligned}$$

Στόχος μας είναι μία παρόμοια εξίσωση για τα βαρυτικά κύματα με αυτή της γενικής σχετικότητας. Για το λόγο αυτό κάνουμε κάποιες παραδοχές. Για παράδειγμα θεωρούμε ότι οι χωρικές παράγωγοι είναι παρόμοιας τάξης με τις χρονικές δηλαδή, $k^2 \sim \mathcal{H}^2$. Επίσης, ανταλλάσσουμε μία χρονική παράγωγο του ταυυστή h_{ij} με μία επιπλέον δύναμη της σταθεράς Hubble και μία χρονική παράγωγο της σταθεράς Hubble με μία επιπλέον δύναμη της σταθεράς Hubble. Κάνουμε αυτή την διαδικασία μέχρι τους όρους h''_{ij} για να πάρουμε έναν σύνδεσμο και άλλη μία φορά μέχρι τους όρους h_{ij} . Έτσι, έχουμε δύο εξισώσεις για τις οκτώ παραμέτρους. Ο λόγος που το κάνουμε είναι διότι αν μηδενίσουμε τους συντελεστές από όλους τους ανεπιθύμητους όρους καταλήγουμε στο $\tilde{\beta} = 0$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει διαταραχή. Επίσης, από τις διαταραχές των βαθμωτών παίρνουμε άλλες τέσσερις συνδέσμους ώστε να έχουμε παρόμοια απόκλιση του φωτός από την βαρύτητα όπως δίνει η γενική σχετικότητα. Συνολικά έχουμε έξι συνδέσμους για οκτώ παραμέτρους. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων για τις παραμέτρους βρίσκουμε

$$\beta_1 = \frac{14}{39}\beta_3 + 8\beta_4 - \frac{34}{39}\beta_5 \quad (5.13)$$

$$\beta_2 = -\frac{11}{78}\beta_3 - \frac{1}{26}\beta_5 \quad (5.14)$$

$$\beta_6 = \frac{2}{39}\beta_3 + 8\beta_4 - \frac{1}{13}\beta_5 \quad (5.15)$$

$$\beta_7 = -\beta_3 - 8\beta_4 - \frac{1}{2}\beta_5 \quad (5.16)$$

$$\beta_8 = \frac{299}{28}\tilde{\beta} - \beta_1 - 17\beta_2 \quad (5.17)$$

$$\beta_8 = \frac{199}{936}\beta_3 + \frac{11}{9}\beta_4 + \frac{121}{1404}\beta_5 \quad (5.18)$$

$$\tilde{\beta} = \frac{14}{13}\beta_3 + \frac{28}{39}\beta_5 \quad (5.19)$$

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε την διόρθωση στον νόμο Poisson. Προσθέτοντας την (5.8) στην (5.9) βρίσκουμε

$$\Phi_{eff} = -\frac{4\pi G a^2 \delta\rho}{k^2}, \quad (5.20)$$

όπου

$$\Phi_{eff} = \frac{\phi + \psi}{2}. \quad (5.21)$$

Αυτή η εξίσωση είναι ότι χαρακτηρίζει την κύρτωση του φωτός. Όπως είπαμε προηγουμένως πήραμε τις παραμέτρους έτσι ώστε να έχουμε παρόμοιο αποτέλεσμα με την γενική σχετικότητα. Στην γενική σχετικότητα σε μικρές αποστάσεις ($k^2 \gg \mathcal{H}^2$) από την χρονική εξίσωση παίρνουμε ότι

$$2\psi = -\frac{\kappa a^2 \delta\rho}{k^2}, \quad (5.22)$$

και από τη μη διαγώνια χωρική

$$\phi = \psi, \quad (5.23)$$

όταν έχουμε ιδανικό ρευστό. Συνδιάζοντας τις δύο προηγούμενες βρίσκουμε

$$\phi = -\frac{\kappa a^2 \delta \rho}{2k^2}. \quad (5.24)$$

Κάνοντας την ίδια διαδικασία όταν έχουμε και τον κυβικό όρο βρίσκουμε

$$\phi = \frac{\left[-2 + \frac{7a^4}{14a^4 + 3k^2 \kappa \alpha \tilde{\beta} (5\mathcal{H}^2 - 7\mathcal{H}')}\right] \kappa a^2 \delta \rho}{3k^2}. \quad (5.25)$$

Αυτή είναι η διόρθωση στο βαρυτικό δυναμικό. Μπορούμε να το γράψουμε σαν $\phi = -\frac{\kappa' a^2 \delta \rho}{2k^2}$. Χρησιμοποιώντας την σχέση $\kappa = 8\pi G$ παίρνουμε

$$G' = \frac{1}{3}G \left[4 - \frac{7a^4}{7a^4 + 12\pi G k^2 \alpha \tilde{\beta} (5\mathcal{H}^2 - 7\mathcal{H}')}\right], \quad (5.26)$$

όπου G' είναι η τροποποιημένη σταθερά του Νεύτωνα λόγω του κυβικού όρου. Μπορούμε να μετατρέψουμε τις σχέσεις (5.25), (5.26) στον κοσμικό χρόνο χρησιμοποιώντας τις $\mathcal{H} = aH$, $\mathcal{H}' = a^2 (H^2 + \dot{H})$. Κάνοντας το βρίσκουμε

$$\phi = \frac{\kappa a^2 \delta \rho \left[7a^2 - 2k^2 \kappa \alpha \tilde{\beta} (2H^2 + 7\dot{H})\right]}{k^2 \left[-14a^2 + 3k^2 \kappa \alpha \tilde{\beta} (2H^2 + 7\dot{H})\right]}, \quad (5.27)$$

όπου

$$G_{eff} = \frac{1}{3}G \left[4 + \frac{1}{\frac{12k^2 \pi G \alpha \tilde{\beta} (2H^2 + 7\dot{H})}{7a^2} - 1}\right]. \quad (5.28)$$

Όπως βλέπουμε έχουμε τον όρο της γενικής σχετικότητας συν μια διόρθωση που προέρχεται από το κυβικό βαθμωτό που έχει να κάνει με την διαστολή του χωρου. Χρησιμοποιώντας το πειραματικό δεδομένο

$$\left|\frac{\delta G}{G}\right| < 0.1, \quad (5.29)$$

βρίσκουμε ότι η σταθερά σύζευξης παίρνει τιμές $\alpha \in [-4.84932 \times 10^{175}, 9.00588 \times 10^{175}] \text{GeV}^{-2}$. Τώρα θα υπολογίσουμε τον μετα Νευτώνειο παράγοντα γ , που είναι ίσος με

$$\gamma = \frac{\psi}{\phi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 - \frac{4}{7}a^2 \mu (2H^2 + 7\dot{H})}, \quad (5.30)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\mu = \frac{k^2 \alpha \tilde{\beta} \kappa}{a^4}$. Βλέπουμε ότι αν μηδενίσουμε τον κυβικό όρο ($\alpha \rightarrow 0$) τότε $\mu \rightarrow 0$ και παίρνουμε το αποτέλεσμα της γενικής σχετικότητας ($\gamma \rightarrow 1$). Τώρα μπορούμε να εκφράσουμε την παράμετρο μ σαν συνάρτηση

της ερυθράς μετατόπισης μέσω της $a = \frac{1}{1+z}$, όπου z η ερυθρά μετατόπιση. Τελικά βρίσκουμε

$$\mu(z) = 8\pi G\alpha\tilde{\beta}k^2(1+z)^4. \quad (5.31)$$

Τώρα χρησιμοποιώντας τους συνδέσμους για τις παραμέτρους καταλήγουμε στην εξίσωση για τα βαρυτικά κύματα

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H} \left[1 - \frac{12}{7}\pi G\alpha\tilde{\beta} \frac{(153\mathcal{H}^4 - 488\mathcal{H}^2\mathcal{H}' + 235\mathcal{H}'^2)}{a^4} \right] h'_{ij} + k^2 h_{ij} = 0. \quad (5.32)$$

Βλέπουμε ότι καταλήγουμε σε παρόμοια εξίσωση με την γενική σχετικότητα. Ο διαφορετικός όρος τριβής έχει να κάνει με την προσθήκη του βαθμωτού και την διαστολή του σύμπαντος Μπορούμε να γράψουμε την (5.32)

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}(1 + \beta_P) h'_{ij} + k^2 h_{ij} = 0, \quad (5.33)$$

όπου

$$\beta_P = -\frac{12}{7}\pi G\alpha\tilde{\beta} \frac{(153\mathcal{H}^4 - 488\mathcal{H}^2\mathcal{H}' + 235\mathcal{H}'^2)}{a^4}. \quad (5.34)$$

Αλλάζοντας στον κοσμικό χρόνο έχουμε

$$\ddot{h}_{ij} + 3H(1 + \beta_P) \dot{h}_{ij} + \frac{k^2}{a^2} h_{ij} = 0, \quad (5.35)$$

$$\beta_P = \frac{8}{7}\pi G\alpha\tilde{\beta} (100H^4 + 18H^2\dot{H} - 235\dot{H}^2). \quad (5.36)$$

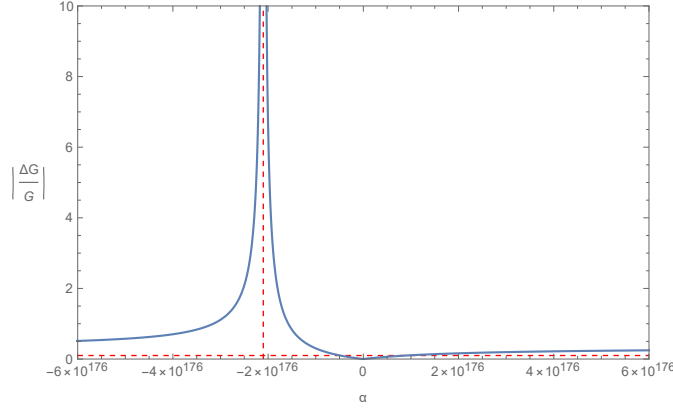
Η καταστατική παράμετρος της σκοτεινής ενέργειας δίνεται από την

$$w_{DE} = -\frac{6\alpha\tilde{\beta}H^4 \left(H^2 + 2\dot{H} \right) + \frac{\Lambda}{8\pi G}}{6\alpha\tilde{\beta}H^6 + \frac{\Lambda}{8\pi G}}. \quad (5.37)$$

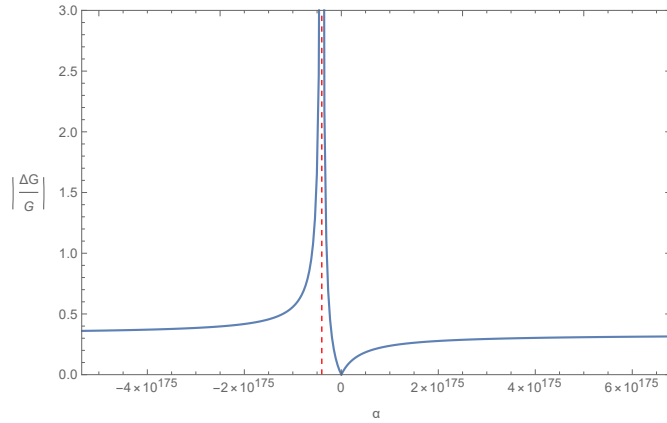
Συνδιάζοντας τις (5.36), (5.37) βρίσκουμε

$$\beta_P = \frac{800}{7}H^4\pi G\alpha\tilde{\beta} - \frac{3(1+w) \left(48GH^6\pi\alpha\tilde{\beta} + \Lambda \right)}{14H^2} - \frac{235(1+w)^2 \left(48GH^6\pi\alpha\tilde{\beta} + \Lambda \right)^2}{8064GH^8\pi\alpha\tilde{\beta}} \quad (5.38)$$

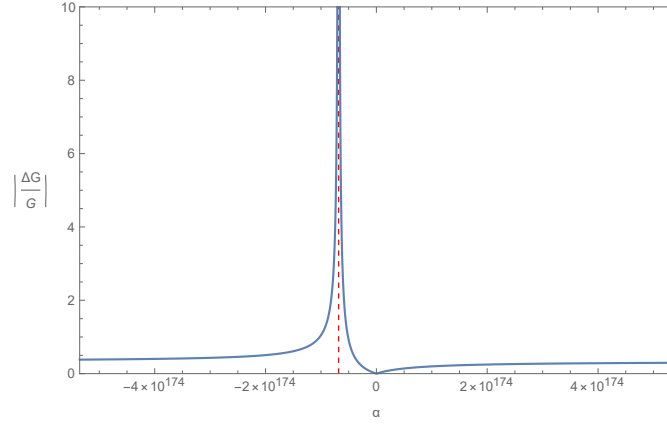
Παρατηρούμε ότι αν έχουμε μόνο τον όρο της γενικής σχετικότητας συν μια κοσμολογική σταθερά τότε παίρνουμε $\alpha = 0$ και $w_{DE} = -1$, συνεπώς $\beta_P = 0$.



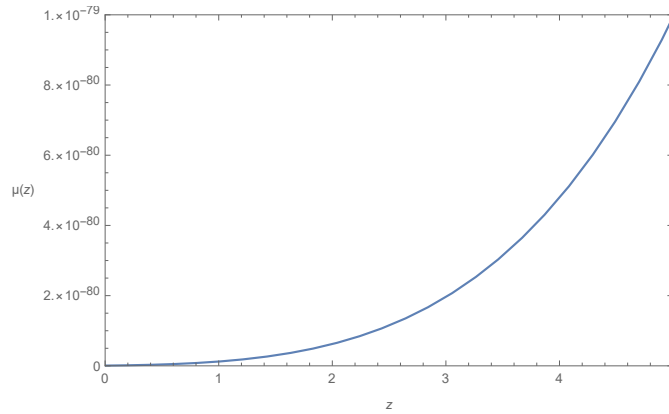
Σχήμα 5.1: Η εξέλιξη του $|\frac{\delta G}{G}|$ συναρτήσει της σταθεράς σύζευξης α . Έχουμε χρησιμοποιήσει την σημερινή τιμή του παράγοντα κλίμακας ($a_0 = 1$), την σημερινή τιμή της σταθεράς Hubble ($H_0 = 1.4 \times 10^{-42} \text{GeV}$) και $\dot{H}_0 = -H_0^2 (1 + q_0) = -9.71 \times 10^{-85} \text{GeV}^2$ όπου $q_0 = -0.503$ η σημερινή τιμή του παράγοντα επιβράδυνσης [80], $k = \frac{2\pi}{d} \approx 2.1 \times 10^{-28} \text{GeV}$, όπου $d \approx 3 \times 10^{28} \text{GeV}^{-1} \approx 39 \text{A.U}$ και $\beta = 1$. Βλέπουμε ότι υπάρχει ένα σημείο $\alpha \approx -2.1 \times 10^{176} \text{GeV}^{-2}$ όπου η ποσότητα $|\frac{\delta G}{G}|$ πηγαίνει στο άπειρο.



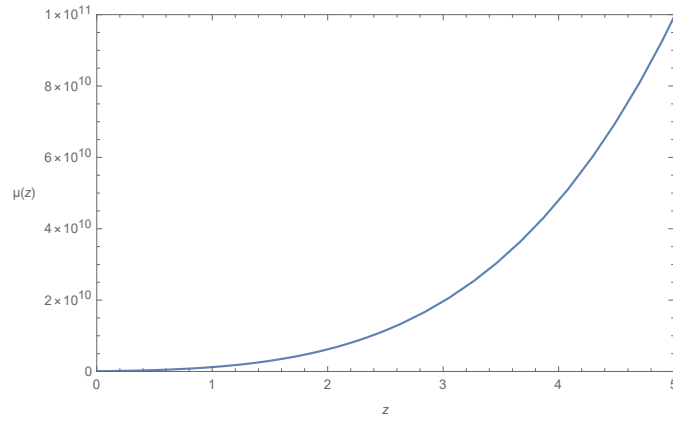
Σχήμα 5.2: Η εξέλιξη του $|\frac{\delta G}{G}|$ συναρτήσει της σταθεράς σύζευξης α . Έχουμε χρησιμοποιήσει $a = \frac{1}{2}$, $H = 2.34 \times 10^{-42} \text{GeV}$, $\dot{H} = -6.94 \times 10^{-84} \text{GeV}^2$, $k = \frac{2\pi}{d} \approx 2.1 \times 10^{-28} \text{GeV}$, όπου $d \approx 3 \times 10^{28} \text{GeV}^{-1} \approx 39 \text{A.U}$ και $\beta = 1$. Βλέπουμε ότι υπάρχει ένα σημείο $\alpha \approx -4.0 \times 10^{174} \text{GeV}^{-2}$ όπου η ποσότητα $|\frac{\delta G}{G}|$ πηγαίνει στο άπειρο.



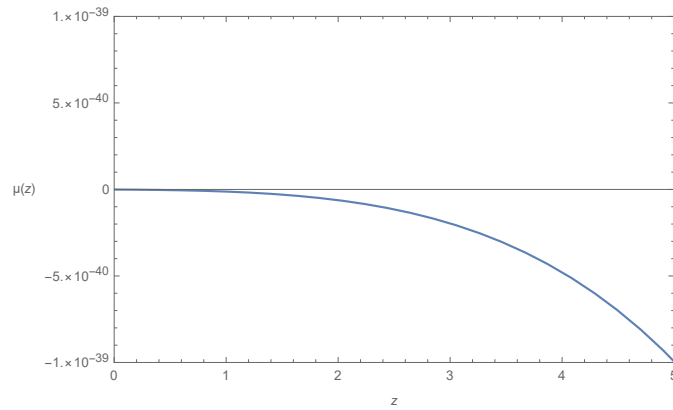
Σχήμα 5.3: Η εξέλιξη του $|\frac{\delta G}{G}|$ συναρτήσει της σταθεράς σύζευξης α . Έχουμε χρησιμοποιήσει $a = \frac{1}{3}$, $H = 3.84 \times 10^{-42} \text{ GeV}$ ανδ $\dot{H} = -1.84 \times 10^{-83} \text{ GeV}^2$, $k = \frac{2\pi}{d} \approx 2.1 \times 10^{-28} \text{ GeV}$, όπου $d \approx 3 \times 10^{28} \text{ GeV}^{-1} \approx 39 A.U$ και $\tilde{\beta} = 1$. Βλέπουμε ότι υπάρχει ένα σημείο $\alpha \approx -6.8 \times 10^{173} \text{ GeV}^{-2}$ όπου η ποσότητα $|\frac{\delta G}{G}|$ πηγαίνει στο άπειρο.



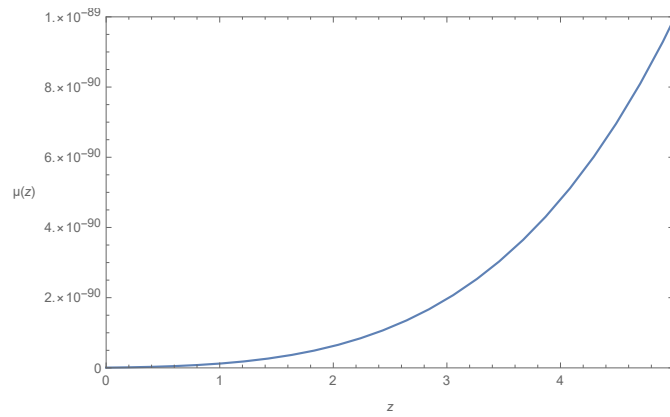
Σχήμα 5.4: Η εξέλιξη του $\mu(z)$ συναρτήσει της ερυθράς μετατόπισης z . Έχουμε χρησιμοποιήσει $k = \frac{2\pi}{d} \approx 2.1 \times 10^{-28} \text{ GeV}$, όπου $d \approx 3 \times 10^{28} \text{ GeV}^{-1} \approx 39 A.U$, $\tilde{\beta} = 1$ και $\alpha = 10^{10} \text{ GeV}^{-2}$.



Σχήμα 5.5: Η εξέλιξη του $\mu(z)$ συναρτήσει της ερυθράς μετατόπισης z . Έχουμε χρησιμοποιήσει $k = \frac{2\pi}{d} \approx 2.1 \times 10^{-28} \text{ GeV}$, όπου $d \approx 3 \times 10^{28} \text{ GeV}^{-1} \approx 39 A.U.$, $\tilde{\beta} = 1$ και $\alpha = 10^{100} \text{ GeV}^{-2}$.



Σχήμα 5.6: Η εξέλιξη του $\mu(z)$ συναρτήσει της ερυθράς μετατόπισης z . Έχουμε χρησιμοποιήσει $k = \frac{2\pi}{d} \approx 2.1 \times 10^{-28} \text{ GeV}$, όπου $d \approx 3 \times 10^{28} \text{ GeV}^{-1} \approx 39 A.U.$, $\tilde{\beta} = 1$ και $\alpha = -10^{50} \text{ GeV}^{-2}$.



Σχήμα 5.7: Η εξέλιξη του $\mu(z)$ συναρτήσει της ερυθράς μετατόπισης z . Έχουμε χρησιμοποιήσει $k = \frac{2\pi}{d} \approx 2.1 \times 10^{-28} \text{ GeV}$, όπου $d \approx 3 \times 10^{28} \text{ GeV}^{-1} \approx 39 A.U.$, $\tilde{\beta} = 1$ και $\alpha = 1 \text{ GeV}^{-2}$.

5.3 Συμπεράσματα

Με τις τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας ασχολείται αρκετός κόσμος διότι υπάρχουν πολλά παρατηρησιακά δεδομένα που υποδεικνύουν την ύπαρξη της σκοτεινής ύλης έτσι κάποιος μπορεί να υποθέσει ότι η γενική σχετικότητα δεν είναι πλήρης και έτσι χρειάζεται μια τροποποίηση. Σε αυτή την εργασία είδαμε μια θεωρία κυβικής βαρύτητας που αποτελείται από όρους τρίτης τάξης καμπυλότητας. Το χρησιμοποιήσαμε σαν μοντέλο να δούμε πως μπορούμε να φτιάξουμε εξισώσεις που να μοιάζουν στην γενική σχετικότητα. Πρώτα χρησιμοποιήσαμε μια μετρική $g_{\mu\nu}$ και υπολογίσαμε τις βαθμωτές διαταραχές. Μετά χρησιμοποιήσαμε το όριο $k \gg H$. Στη συνέχεια διαλέξαμε τις παραμέτρους βήτα ώστε να παίρνουμε παρόμοια κύρτωση φωτός με την γενική σχετικότητα. Στο τέλος υπολογίσαμε την τροποποιημένη εξίσωση Poisson και την τροποποιημένη βαρυτική σταθερά. Χρησιμοποιήσαμε παρατηρησιακά δεδομένα για να βρούμε το εύρος της ελεύθερης παραμέτρου της θεωρίας. Βρήκαμε την διόρθωση στην μετα Νευτώνεια παράμετρο και εκφράσαμε την μ συναρτήσει της ερυθράς μετατόπισης. Τέλος υπολογίσαμε την εξίσωση για τα βαρυτικά κύματα και πήραμε συνδέσμους ώστε να έχουμε παρόμοια εξίσωση με την γενική σχετικότητα. Τελικά πήραμε μια διόρθωση στον ορο τριβής που οφείλεται στην διαφορετική γεωμετρία του χωροχρόνου. Χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους αυτές υπολογίσαμε τη διόρθωση στο βαρυτικό δυναμικό.

Κεφάλαιο 6

BBN ανάλυση σε κοσμολογικά μοντέλα καμπυλότητας ανώτερης τάξης

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τους συνδέσμους που δίνουν τα παρατηρησιακά δεδομένα από την εποχή της νουκλεοσύνθεσης και θα δούμε τι αποτελέσματα έχει στις διάφορες θεωρίες τροποποιημένης βαρύτητας. Κατά τη διάρκεια της νουκλεοσύνθεσης έχουμε την εποχή της ακτινοβολίας [90, 91, 92, 93] έτσι η πρώτη εξίσωση Friedmann μπορεί να πάρει την προσέγγιση

$$H^2 \approx \frac{M_P^{-2}}{3} \rho_r \equiv H_{GR}^2. \quad (6.1)$$

Επίσης η πυκνότητα ενέργειας ενός σχετικιστικού σωματίου δίνεται από τη σχέση

$$\rho_r = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad (6.2)$$

όπου $g_* \sim 10$ είναι οι 'effective' βαθμοί ελευθερίας και T η θερμοκρασία. Συνδιάζοντας τις δύο εξισώσεις παίρνουμε

$$H(T) \approx \left(\frac{4\pi^3 g_*}{45} \right)^{1/2} \frac{T^2}{M_{Pl}}, \quad (6.3)$$

όπου $M_{Pl} = (8\pi)^{1/2} M_P = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}$ είναι η μάζα Planck. Την εποχή της ακτινοβολίας ο παράγοντας κλίμακας εξελίσσεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $a \sim t^{1/2}$. Συνεπώς η σχέση μεταξύ θερμοκρασίας και χρόνου δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{t} \simeq \left(\frac{32\pi^3 g_*}{90} \right)^{1/2} \frac{T^2}{M_{Pl}}$ (ή $T(t) \simeq (t/\text{sec})^{-1/2} \text{ MeV}$).

Ο υπολογισμός του αριθμού των νετρονίων είναι συνδεδεμένος με τον ρυθμό μετατροπής πρωτονίων-νετρονίων[92, 93]

$$\lambda_{pn}(T) = \lambda_{(n+\nu_e \rightarrow p+e^-)} + \lambda_{(n+e^+ \rightarrow p+\bar{\nu}_e)} + \lambda_{(n \rightarrow p+e^-+\bar{\nu}_e)} \quad (6.4)$$

και το αντίστροφο $\lambda_{np}(T)$. Συνεπώς για τον συνολικό ρυθμό έχουμε $\lambda_{tot}(T) = \lambda_{np}(T) + \lambda_{pn}(T)$. Θεωρούμε ότι η θερμοκρασία διαφόρων σωματιών (νετρίνα, ηλεκτρόνια, φωτόνια) είναι η ίδια και χαμηλή ώστε να χρησιμοποιήσουμε την κατανομή Boltzmann αντί για την Fermi-Dirac και ότι η μάζα είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ενέργεια των ηλεκτρονίων και νετρίνων. Κάνοντας αυτές τις παραδοχές βρίσκουμε ότι [94, 95, 96, 97, 98]

$$\lambda_{tot}(T) = 4A T^3 (4!T^2 + 2 \times 3!QT + 2!Q^2), \quad (6.5)$$

όπου $Q = m_n - m_p = 1.29 \times 10^{-3} \text{ GeV}$ η διαφορά μάζας νετρονίου-πρωτονίου και $A = 1.02 \times 10^{-11} \text{ GeV}^{-4}$. Η θερμοκρασία στην οποία αποσυζεύγνυται ένα σωματίο από το θερμό πλάσμα λέγεται "freeze out". Η θερμοκρασία αυτή προκύπτει από τον ρυθμό διαστολής του σύμπαντος $\frac{1}{H}$ σε σχέση με το $\lambda_{tot}(T)$. Αν ο ρυθμός διαστολής είναι πολύ μικρότερος του χρόνου αλληλεπίδρασης $\frac{1}{H} \ll \lambda_{tot}(T)$ τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε θερμική ισορροπία[90, 91]. Αν ο ρυθμός διαστολής είναι πολύ μεγαλύτερος του χρόνου αλληλεπίδρασης $\frac{1}{H} \gg \lambda_{tot}(T)$ τότε τα σωματίο δεν έχουν πολύ χρόνο να αλληλεπιδράσουν και αποσυζεύγνυται. Συνεπώς, η θερμοκρασία αποσύζευξης αντιστοιχεί στο $H(T_f) = \lambda_{tot}(T_f) \simeq c_q T_f^5$, όπου $c_q \equiv 4A 4! \simeq 9.8 \times 10^{-10} \text{ GeV}^{-4}$ [94, 95, 96, 97, 98]. Χρησιμοποιώντας τις (6.3), (6.5) βρίσκουμε ότι

$$T_f = \left(\frac{4\pi^3 g_*}{45 M_{Pl}^2 c_q^2} \right)^{1/6} \sim 0.0006 \text{ GeV}. \quad (6.6)$$

Σε κάθε κοσμολογικό σενάριο υπάρχουν παραπάνω όροι στις εξισώσεις Friedmann. Αυτοί οι όροι πρέπει να είναι πολύ μικροί σε σχέση με τους όρους που προέρχονται από την ακτινοβολία την εποχή της νουκλεοσύνθεσης ώστε να είναι σύμφωνη η θεωρία με τα πειραματικά δεδομένα. Σε μια γενική τροποποιημένη εξίσωση Friedmann της μορφής (4.51) παίρνουμε

$$H = H_{GR} \sqrt{1 + \frac{\rho_{DE}}{\rho_r}} = H_{GR} + \delta H, \quad (6.7)$$

όπου H_{GR} είναι η σταθερά Hubble της κοσμολογίας που αποδεχόμαστε σήμερα. Συνεπώς

$$\delta H = \left(\sqrt{1 + \frac{\rho_{DE}}{\rho_r}} - 1 \right) H_{GR}. \quad (6.8)$$

Αυτή είναι η απόκλιση από την κοσμολογία που αποδεχόμαστε σήμερα. Αυτή θα οδηγήσει και σε μια απόκλιση στην θερμοκρασία αποσύζευξης δT_f . Προηγουμένως είδαμε ότι $H_{GR} = \lambda_{tot} \approx c_q T_f^5$, συνεπώς

$$\left(\sqrt{1 + \frac{\rho_{DE}}{\rho_r}} - 1 \right) H_{GR} = 5c_q T_f^4 \delta T_f, \quad (6.9)$$

και τελικά

$$\frac{\delta T_f}{T_f} \simeq \frac{\rho_{DE}}{\rho_r} \frac{H_{GR}}{10c_q T_f^5}, \quad (6.10)$$

όπου $\rho_{DE} \ll \rho_r$ όπως είπαμε προηγουμένως. Αυτό το θεωρητικό αποτέλεσμα θα πρέπει να συγκριθεί κάθε φορά με το πειραματικό δεδομένο

$$\left| \frac{\delta T_f}{T_f} \right| < 4.7 \times 10^{-4}, \quad (6.11)$$

όπου αυτή η εκτίμηση προκύπτει από τα παρατηρησιακά δεδομένα του λόγου της μάζας των βαρυονίων που μετατρέπονται σε ${}^4\text{He}$ [99, 100, 101, 102, 103, 104, 105]. Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω δεδομένο ώστε να δούμε ποια μοντέλα μπορούν να είναι βιώσιμα.

6.1 $f(G)$

Σε αυτήν την ενότητα θα εφαρμόσουμε τον παραπάνω φορμαλισμό για να εξαγάγουμε τους συνδέσμους της νουκλεοσύνθεσης για την $f(G)$. Θα χρησιμοποιήσουμε την πυκνότητα της σκοτεινής ενέργειας για την $f(G)$. Για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε θα πρέπει να βρούμε συγκεκριμένα μοντέλα που η $f(G)$ παίρνει συγκεκριμένη μορφή. Θα επικεντρωθούμε σε 3 μοντέλα τα οποία είναι γνωστό ότι δίνουν ενδιαφέρουσα κοσμολογία. Τα μοντέλα αυτά για να μελετηθούν πρέπει να δίνουν συνεισφορά στις εξισώσεις Friedmann μέσω του τομέα της σκοτεινής ενέργειας, συνεπώς δεν θα ασχοληθούμε με το μοντέλο $f(G) = G$ διότι στις 4 διαστάσεις δεν δίνει συνεισφορά.

6.2 $f(G)$ Model I

Το πρώτο μοντέλο που θα δούμε είναι ένα εκθετικό μοντέλο[19] όπου το βαθμωτό G είναι υψωμένο σε δύναμη. Έχουμε

$$f(G) = \alpha G^n, \quad (6.12)$$

όπου $n \neq 1$. Σε αυτό το μοντέλο ο εκθέτης n είναι η μόνη πραγματική παράμετρος, αφού όσο $n \neq 1$ η παράμετρος α μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της τωρινής τιμής της σταθεράς Hubble και της τωρινής τιμής της παραμέτρου της σκοτεινής ενέργειας Ω_{DE0} . Η παράμετρος αυτή ορίζεται ως $\Omega_{DE0} \equiv \rho_{DE0}/(3M_P^2 H_0^2)$. Συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας την (4.53) στο παρόν βρισκόμαστε

$$\alpha = \frac{3H_0^2 M_P^2 \Omega_{DE0}}{2[(n-1)G_0^n - n(n-1)\gamma_0 G_0^{n-2}]},$$

όπου

$$G_0 = 24H_0^2 (H_0^2 + \dot{H}_0), \quad (6.13)$$

και

$$\gamma_0 = 24^2 H_0^4 \left(2\dot{H}_0^2 + H_0\ddot{H}_0 + 4H_0^2\dot{H}_0 \right). \quad (6.14)$$

Βλέπουμε τώρα ότι η παράμετρος α μπορεί να εκφραστεί μέσω της σταθεράς του Hubble στο παρόν και της παραμέτρου της σκοτεινής ενέργειας. Εισάγοντας την (6.12) στην (4.53) και ύστερα στην (6.10) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_f}{T_f} &= -\Omega_{DE0} (\zeta)^{4n-1} (T_f)^{8n-7} \\ &\cdot \left[(-1)^n + n(-1)^{n-1} + 8n(n-1)(-1)^{n-2} \right] \\ &\cdot (H_0)^{2-2n} \left(H_0^2 + \dot{H}_0 \right)^{-n} [10c_q(n-1)]^{-1} \\ &\cdot \left[(1-2n) \left(\dot{H}_0^2 + 2\dot{H}_0 H_0^2 \right) - n\ddot{H}_0 H_0 + H_0^4 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

όπου

$$\zeta \equiv \left(\frac{4\pi^3 g_*}{45} \right)^{\frac{1}{2}} M_{Pl}^{-1}. \quad (6.16)$$

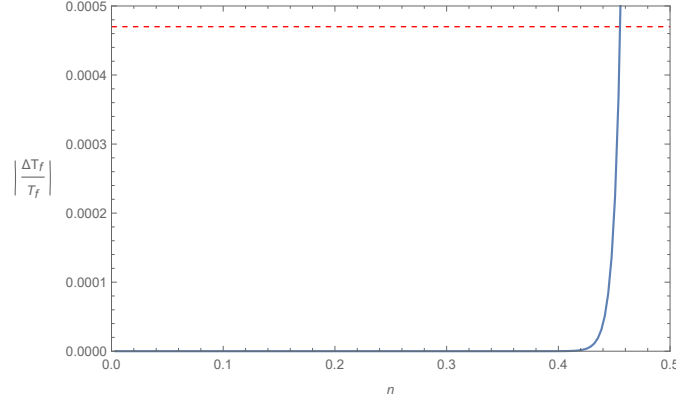
Η σημερινή τιμή της παραμέτρου της σκοτεινής ενέργειας είναι $\Omega_{DE0} \approx 0.7$ και η τιμή της σταθεράς του Hubble είναι $H_0 = 1.4 \times 10^{-42}$ GeV. Για να υπολογίσουμε τις παραγώγους της σταθεράς Hubble θα χρησιμοποιήσουμε

$$\dot{H} = -H^2(1+q), \quad \ddot{H} = H^3(j+3q+2), \quad (6.17)$$

όπου q είναι η παράμετρος επιβράδυνσης και j ο ρυθμός μεταβολής της επιτάχυνσης. Για την σημερινή εποχή έχουμε

$$\dot{H}_0 = -H_0^2(1+q_0), \quad \ddot{H}_0 = H_0^3(j_0+3q_0+2), \quad (6.18)$$

όπου το '0' υποδηλώνει τις τιμές στο σήμερα. Οι τιμές των q, j στο σήμερα είναι $q_0 = -0.503, j_0 = 1.011$ [80],[106, 107]. Παρατηρούμε ότι στην (6.15) η μόνη παράμετρος είναι ο εκθέτης n . Χρησιμοποιώντας το δεδομένο (6.11) βρίσκουμε ότι $n \lesssim 0.45$. Παρακάτω θα εισάγουμε τη γραφική η οποία αποτυπώνει το αποτέλεσμα. Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι θέλουμε να επιβάλλουμε τους συνδέσμους από τη νουκλεοσύνθεση σε μοντέλα με ανώτερης τάξης όρους που μπορούν να περιγράψουν τη σκοτεινή ενέργεια. Οπότε, εξετάζοντας τη συνθήκη (6.2) βλέπουμε ότι υπάρχει μια εξάρτηση μεταξύ των παραμέτρων α, n . Αν χαλαρώσουμε την (6.2) τότε η συνθήκη της νουκλεοσύνθεσης μπορεί να ικανοποιηθεί για κάθε n αν αλλάξουμε τη παράμετρο α . Οπότε ισοδύναμα οι σύνδεσμοι της νουκλεοσύνθεσης μπορούν πάντα να ικανοποιηθούν για κάθε τιμή του α απλά αλλάζοντας κάθε φορά ποικιλοτρόπως τον εκθέτη n . Κάτω από τη συνθήκη (6.2) ότι οι όροι του Gauss-Bonnet περιγράφουν την σκοτεινή ενέργεια στο σημερινό σύμπαν τότε το n έχει σύνδεσμο κοντά στο 0 που σε αυτή την περίπτωση σημαίνει ότι η διόρθωση από την $f(G)$ γίνεται σταθερά και το σενάριο γίνεται το Λ CDM σενάριο.



Σχήμα 6.1: $\delta T_f/T_f$ από τη σχέση (6.15) συναρτήσει του εκθέτη n (μπλε καμπύλη), και το πάνω επιτρεπτό όριο για το $\delta T_f/T_f$ (6.11) (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή). Όπως παρατηρούμε όσο $n \neq 1$ οι σύνδεσμοι από τη νουκλεοσύνθεση απαιτούν $n \lesssim 0.45$ (στην περίπτωση $n = 1$ το παραπάνω μοντέλο δεν ισχύει αφού το βαθμωτό G είναι τοπολογικός όρος στις 4 διαστάσεις).

6.3 $f(G)$ Model II

Το επόμενο μοντέλο που θα εξετάσουμε είναι το [20]

$$f(G) = \lambda \frac{G}{\sqrt{G_*}} \arctan\left(\frac{G}{G_*}\right) - \frac{\lambda}{2} \sqrt{G_*} \ln\left(1 + \frac{G^2}{G_*^2}\right) - \alpha \lambda \sqrt{G_*}, \quad (6.19)$$

όπου $\alpha, \lambda > 0$ και $G_* > 0$ είναι παράμετροι του μοντέλου. Εφαρμόζοντας (4.53) στο σήμερα μπορούμε να εκφράσουμε το λ σαν

$$\lambda = \frac{3M_P^2 H_0^2 \Omega_{DE0}}{2} \left\{ \arctan\left(\frac{G_0}{G_*}\right) \sqrt{G_0} \left(1 - \sqrt{\frac{G_0}{G_*}}\right) + \sqrt{G_*} \left[\alpha + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{G_0^2}{G_*^2}\right) - \frac{\gamma_0}{G_0^2 + G_*^2} \right] \right\}^{-1}, \quad (6.20)$$

και έτσι τελικά έχουμε 2 μόνο ελεύθερες παραμέτρους α και G_* . Εισάγοντας την (6.19) στην (4.53) και ύστερα στην (6.10) παίρνουμε

$$\frac{\delta T_f}{T_f} = \frac{1}{20} \Omega_{DE0} H_0^2 \sqrt{G_*} [c_q \zeta T_f^7]^{-1} \cdot \left\{ 2\alpha + \ln \left[1 + \frac{\zeta^8 T_f^{16}}{G_*^2} \right] - \frac{9216 \zeta^8 T_f^{16}}{576 \zeta^8 T_f^{16} + G_*^2} \right\} \quad (6.21)$$

$$\cdot \left\{ \arctan \left(\frac{G_0}{G_*} \right) \sqrt{G_0} \left(1 - \sqrt{\frac{G_0}{G_*}} \right) + \sqrt{G_*} \left[\alpha + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{G_0^2}{G_*^2} \right) - \frac{\gamma_0}{G_0^2 + G_*^2} \right] \right\}^{-1}, \quad (6.22)$$

όπου η ποσότητα ζ δίνεται στην (6.16). Η έκφραση (6.22) ικανοποιεί τη συνθήκη (6.11) για τις περιοχές του α οι οποίες είναι συνεπείς με τη συνθήκη να υπάρχει ένα σταθερό σημείο de Sitter [20]

(για το οποίο ισχύει, $G_*^{\frac{1}{4}} \sim (10^{-42})^{\frac{1}{4}} \text{ GeV}$ και $\alpha \approx 100$, $\lambda \ll 1$). Επομένως δεν παίρνουμε επιπλέον συνδέσμους από την εποχή της νουκλεοσύνθεσης από τους ήδη υπάρχοντες που δίνουν συνέπεια στη θεωρία.

6.4 $f(G)$ Model III

Το επόμενο μοντέλο που θα μελετήσουμε είναι το [20]

$$f_2(G) = \lambda \frac{G}{\sqrt{G_*}} \arctan \left(\frac{G}{G_*} \right) - \alpha \lambda \sqrt{G_*}. \quad (6.23)$$

Εφαρμόζοντας την (4.53) στη σημερινή εποχή μπορούμε να εξαλείψουμε το λ , και ύστερα την βάζουμε στην (6.10) και βρίσκουμε

$$\frac{\delta T_f}{T_f} = \frac{1}{10} \Omega_{DE0} H_0^2 [c_q \zeta T_f^7]^{-1} \cdot \left\{ \frac{(G_0^2 + G_*^2) [(1+\alpha) G_0^2 + \alpha G_*^2] - 2\gamma_0 G_*^2}{(G_0^2 + G_*^2)^2} \right\}^{-1} \cdot \left\{ -\frac{576 \zeta^8 T_f^{16}}{576 \zeta^8 T_f^{16} + G_*^2} - \alpha + \frac{9216 \zeta^8 T_f^{16} G_*^2}{[576 \zeta^8 T_f^{16} + G_*^2]^2} \right\}, \quad (6.24)$$

όπου το G_0 δίνεται στην (6.13) και $\zeta \equiv \left(\frac{4\pi^3 g_*}{45 M_P}\right)^{\frac{1}{2}} M_P^{-1}$. Όπως και στο προηγούμενο μοντέλο βρίσκουμε ότι η έκφραση (6.24) πάντα βρίσκεται εντός του (6.11) για τις περιοχές που βρίσκονται οι παράμετροι του μοντέλου ώστε να έχουμε σταθερό σημείο de Sitter [20]. Έτσι οι σύνδεσμοι της νουκλεοσύνθεσης δεν μπορούν να επιβάλλουν περαιτέρω συνδέσμους.

6.5 $f(G)$ Model IV

Το τελευταίο μοντέλο της $f(G)$ που θα δούμε είναι το [20]

$$f(G) = \lambda \sqrt{G_*} \ln \left[\cosh \left(\frac{G}{G_*} \right) \right] - \alpha \lambda \sqrt{G_*}. \quad (6.25)$$

Κάνοντας τα ίδια βήματα με πριν ώστε να απαλλαγούμε από την παράμετρο λ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_f}{T_f} &= \frac{1}{10} \Omega_{DE0} H_0^2 \left\{ 4608 \zeta^8 \operatorname{sech}^2(\xi) T_f^{16} \right. \\ &\quad \left. + [\ln(\cosh \xi) - \alpha] G_*^2 - 24 \zeta^4 T_f^8 G_* \tanh \xi \right\} \\ &\quad \cdot [c_q \zeta T_f^7]^{-1} \\ &\quad \left\{ \gamma_0 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{G_0}{G_*} \right) + \left\{ \ln \left[\cosh \left(\frac{G_0}{G_*} \right) \right] - \alpha \right\} G_*^2 \right. \\ &\quad \left. - G_0 G_* \tanh \left(\frac{G_0}{G_*} \right) \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

όπου το ζ έχει οριστεί στην (6.16) και $\xi = \frac{24 \zeta^4 T_f^8}{G_*}$. Όπως με τα προηγούμενα μοντέλα η έκφραση (6.24) είναι πάντα στα όρια του (6.11) για τις περιοχές που βρίσκονται οι παράμετροι του μοντέλου ώστε να έχουμε σταθερό σημείο de Sitter [20]. Έτσι οι σύνδεσμοι της νουκλεοσύνθεσης δεν μπορούν να επιβάλλουν περαιτέρω συνδέσμους.

6.6 Gauss-Bonnet-Dilaton Gravity

Η περίπτωση της Gauss-Bonnet-Dilaton βαρύτητας είναι πιο περίπλοκη από την $f(G)$ και την $f(P)$ βαρύτητα, αφού υπάρχει παραπάνω πεδίο το dilaton Φ , το οποίο έχει την δική του εξέλιξη (4.63). Έτσι κάποιος δεν μπορεί να λύσει αναλυτικά τις εξισώσεις οπότε μόνο αριθμητικές προσεγγίσεις μπορεί να κάνει στο σύστημα των εξισώσεων Friedmann και dilaton. Πάντως, υπάρχει μια περίπτωση που είναι καλά μελετημένη. Αυτή του εκθετικού βαθμωτού [57, 58, 59, 60, 61, 62]:

$$V(\Phi) = V_0 e^{\lambda \Phi}, \quad (6.27)$$

όπου $\tilde{\lambda} < 0$ μια σταθερά. Η εξίσωση (4.63) μας οδηγεί στην κατώτερης τάξης λύση κατά τη διάρκεια της εποχής της ακτινοβολίας $\Phi \simeq c_3 \ln a$, που σημαίνει ότι $\Phi \simeq c_3 H$, όπου $a(t) = a_1 t^{1/2}$, $c_3 = -\frac{4}{\tilde{\lambda}}$ και $a_1 = (2\tilde{\lambda}^2 V_0)^{1/4}$. Βάζοντας τες στην (4.10) βρίσκουμε κατά τη διάρκεια της εποχής της ακτινοβολίας ότι

$$\rho_{DE} = M_P^2 \left[\frac{6H^2}{\tilde{\lambda}^2} + \frac{96}{\tilde{\lambda}} 2^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} c_1 (\tilde{\lambda}^2 V_0)^{-\frac{1}{\tilde{\lambda}}} H^{4+\frac{2}{\tilde{\lambda}}} \right].$$

Εφαρμόζοντας στο παρόν μπορούμε να εκφράσουμε την παράμετρο c_1 σε συνάρτηση των H_0 και Ω_{DE0} , δηλαδή

$$c_1 = -\frac{\left(\frac{2}{\tilde{\lambda}^2} - \Omega_{DE0}\right) \tilde{\lambda} (\tilde{\lambda}^2)^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} H_0^{-2} 2^{-\frac{1}{\tilde{\lambda}}}}{32} \left(\frac{V_0}{H_0^2}\right)^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}}.$$

Τελικά χρησιμοποιώντας τις από πάνω στην (6.10) παίρνουμε ότι

$$\frac{\Delta T_f}{T_f} = \frac{\zeta \left[\frac{2}{\tilde{\lambda}^2} - \left(\frac{\zeta T_f^2}{H_0}\right)^{\frac{2(\tilde{\lambda}+1)}{\tilde{\lambda}}} \left(\frac{2}{\tilde{\lambda}^2} - \Omega_{DE0}\right) \right]}{10c_q T_f^3},$$

όπου το ζ δίνεται από την $\zeta \equiv \left(\frac{4\pi^3 g_*}{45 M_P}\right)^{\frac{1}{2}} M_P^{-1}$. Ένα ενδιαφέρον στοιχείο που βρίσκουμε είναι ότι ο σύνδεσμος $\left|\frac{\delta T_f}{T_f}\right| < 4.7 \times 10^{-4}$ ικανοποιείται στο στενό παράθυρο

$$\tilde{\lambda} \in (-1.00561, -1.00558), \quad (6.28)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\Omega_{DE0} \equiv \rho_{DE0}/(3M_P^2 H_0^2) \approx 0.7$, $H_0 = 1.4 \times 10^{-42} \text{ GeV}$. Αυτό το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, διότι σε οποιοδήποτε μοντέλο προσπαθεί να περιγράψει την σκοτεινή ενέργεια στο παρόν οι σύνδεσμοι από τη νουκλεοσύνθεση βάζουν στενά όρια στις παραμέτρους, διότι σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε μια μεγάλη πυκνότητα σκοτεινής ενέργειας την εποχή της νουκλεοσύνθεσης η οποία είναι μη αποδεκτή. Χρησιμοποιώντας την (6.6) μπορούμε να βρούμε το εύρος της παραμέτρου σύζευξης Gauss-Bonnet c_1 , για δεδομένες τιμές του λόγου V_0/H_0^2 , λαμβάνοντας υπόψη το μοντέλο σαν ένα μοντέλο φαινομενολογίας της τροποποιημένης βαρύτητας ξεχωριστό από μια θεωρία χορδών. Για παράδειγμα, για $V_0/H_0^2 \sim 10^{94}$ (λόγω ότι $H_0 \simeq 10^{-42} \text{ GeV}$ αυτό σημαίνει ότι $\sqrt{V_0} \simeq 10^5 \text{ GeV}$) βρίσκουμε ότι $c_1 H_0^2 \in (2.629 \times 10^{-95}, 2.646 \times 10^{-95})$, δηλαδή $c_1 \in (1.341 \times 10^{-11}, 1.350 \times 10^{-11}) \text{ GeV}^{-2}$.

Σε αυτό το σημείο τονίζουμε ότι όταν επικεντρωνόμαστε σε μοντέλα χορδών[51, 52, 53] πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση (4.57) για τον συντελεστή Gauss-Bonnet c_1 . Παίρνοντας σαν δεδομένο ότι στην φαινομενολογία των χορδών έχουμε ότι $g_s^{(0)2}/4\pi \simeq 1/20$, και ότι οι τρέχοντες παρατηρήσεις από τους επιταχυντές δείχνουν ότι $M_s > \mathcal{O}(10) \text{ TeV}$, βρίσκουμε ότι $c_1 \lesssim 10^{-9} \text{ GeV}^{-2}$.

έτσι κάνοντας την προηγούμενη διαδικασία από την ανάποδη βρίσκουμε από την (6.6) και την (6.28) ότι οι σύνδεσμοι από την νουκλεοσύνθεση ικανοποιούνται για $V_0/H_0^2 \gtrsim 10^{93}$, το οποίο σημαίνει ότι $\sqrt{V_0} \gtrsim 10^5 \text{ GeV}$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι στις θεωρίες χορδών που η συνεισφορά του πεδίου dilaton είναι σημαντική, θα πρέπει η συνεισφορά του να πάψει αρκετά πριν την εποχή της νουκλεοσύνθεσης [108] εκτός και αν η παράμετρος λ στο δυναμικό του dilaton (το οποίο μοιάζει με του βαθμωτού πεδίου quintessence) βρίσκεται στο στενό εύρος που προαναφέραμε. Σε αυτή την περίπτωση η παρουσία του πεδίου dilaton μπορεί να έρθει σε αντίθεση με άλλες φαινομενολογικές συνέπειες της θεωρίας του dilaton όπως η σκοτεινή ύλη στους επιταχυντές στο πλαίσιο της υπερσυμμετρίας, με την προϋπόθεση ότι θεωρούμε ότι η σκοτεινή ύλη [ροέχεται από υπερσυμμετρικά σωματίδια. Τέτοια ζητήματα βέβαια βρίσκονται εκτός της παρούσης διδακτορικής διατριβής.

6.7 $f(P)$ Βαρύτητα

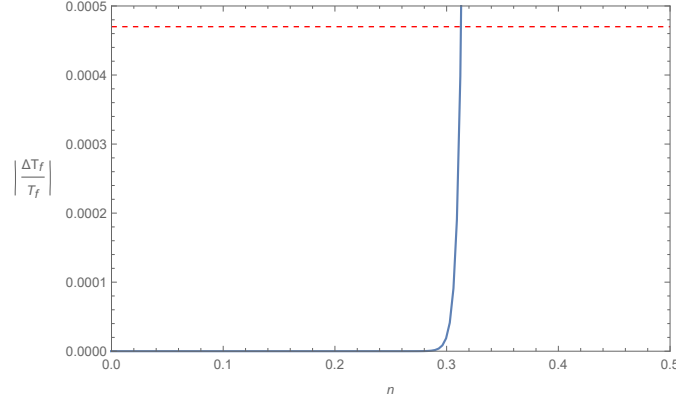
Σαν πρώτο παράδειγμα θεωρούμε ένα μοντέλο που είναι μια σειρά δυνάμεων του βαθμωτού P . Δηλαδή

$$f(P) = \alpha P^n, \quad (6.29)$$

όπου n είναι η μόνη ελεύθερη παράμετρος του μοντέλου αφού η παράμετρος α μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του H_0 και του Ω_{DE0} που δίνεται στην $\Omega_{DE0} \equiv \rho_{DE0}/(3M_P^2 H_0^2)$ χρησιμοποιώντας την (4.75) στο παρόν. Εισάγοντας την (6.29) στην (4.75) και ύστερα στην (6.10) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_f}{T_f} &= 2.1 (\zeta)^{6n-1} (T_f)^{12n-7} \\ &\cdot \left[(-24)^n - 216n(n-1)(-24)^{n-1} + 18n(-24)^{n-1} \right] \\ &\cdot (30c_q)^{-1} (6)^{1-n} (H_0)^{2-4n} \left(2H_0^2 + 3\dot{H}_0 \right)^{2-n} \\ &\cdot \left\{ [216n(n-1) - 18] \dot{H}_0 H_0^2 \right. \\ &\quad \left. + 54n(n-1) \left(4\dot{H}_0^2 + \ddot{H}_0 H_0 \right) - 12H_0^4 \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Στην γραφική 6.2 ο κατακόρυφος άξονας είναι ο λόγος $\delta T_f/T_f$ από την (6.29) και στον οριζόντιο η ελεύθερη παράμετρος n , όπως επίσης το πάνω επιτρεπτό όριο του λόγου $\delta T_f/T_f$ από την (6.11). Βλέπουμε από την γραφική ότι η έκφραση (6.15) ικανοποιεί το όριο (6.11) για $n \lesssim 0.31$. Παρατηρούμε ότι για να περιγράψει το μοντέλο τη σκοτεινή ενέργεια πρέπει η παράμετρος n να έχει μικρές τιμές, σε αυτήν την περίπτωση οι παράμετροι α και n δεν είναι ανεξάρτητοι αλλά συνδέονται μέσω της σχέσης (4.75). Αν χαλαρώσουμε αυτήν την συνθήκη οι σύνδεσμοι της νουκλεοσύνθεσης μπορούν πάντα να ικανοποιηθούν για κάθε n θέτοντας κατάλληλους συνδέσμους στην παράμετρο και αντίστροφα. Υπό τη συνθήκη που μελετήσαμε, δηλαδή η συγκεκριμένη θεωρία $f(P)$ να



Σχήμα 6.2: Στον κατακόρυφο άξονα είναι ο λόγος $\delta T_f/T_f$ από (6.30) και στον οριζόντιο η ελεύθερη παράμετρος n (μπλε γραμμή) στην περίπτωση του μοντέλου $f(P)$ της (6.29), επίσης βλέπουμε το πάνω επιτρεπτό όριο του λόγου $\delta T_f/T_f$ από την (6.11) (κόκκινη γραμμή). Παρατηρούμε ότι οι σύνδεσμοι της νουκλεοσύνθεσης επιβάλλουν $n \lesssim 0.31$.

περιγράφει την σκοτεινή ενέργεια, τότε το n πρέπει να είναι κοντά στο 0. Έτσι σε αυτή την περίπτωση η $f(P)$ γίνεται σταθερά στη δράση και το κοσμολογικό σενάριο γίνεται το Λ CDM.

6.8 $f(G) + f(P)$ βαρύτητα και κοσμολογία

Ένα πιο ρεαλιστικό σενάριο είναι ο συνδιασμός της $f(G)$ και της $f(P)$. Η δράση είναι

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (M_P^2 R + f(G)) + f(P) \right],$$

όπου

$$f(G) + f(P) = \alpha G^n + bP^n.$$

Η πυκνότητα την σκοτεινής ενέργειας είναι

$$\begin{aligned} \rho_{DE} \equiv & \frac{1}{2} \left[-f(G) + 24H^2 (H^2 + \dot{H}) f'(G) \right. \\ & \left. - 24^2 H^4 (2\dot{H}^2 + H\ddot{H} + 4H^2\dot{H}) f''(G) \right] - (f(P) \\ & + 18\tilde{\beta}H^4(H\partial_t - H^2 - \dot{H})f'(P)). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Χρησιμοποιώντας την ανάλυση που κάναμε για τα προηγούμενα μοντέλα παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_f}{T_f} = & -\Omega_{DE0} \zeta^{4n-1} T_f^{8n-7} H_0^{2-2n} (-24)^n \\ & \cdot [10c_q (a_0 - b_0)]^{-1} \left\{ 8n(n-1) - n \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \frac{b}{\alpha} \zeta^{2n} \tilde{\beta}^n T_f^{4n} [12n(n-1) - n] \right\}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

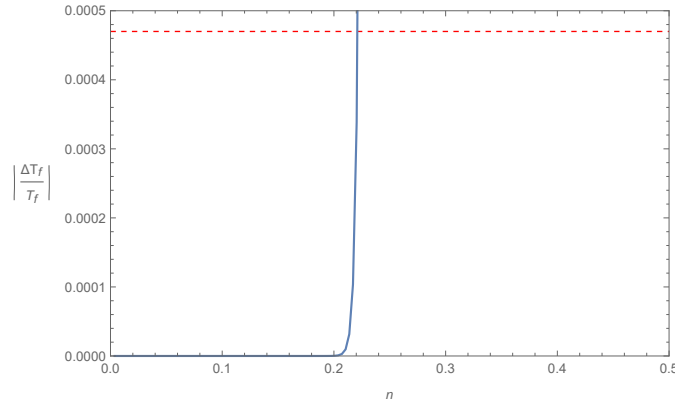
όπου

$$\begin{aligned} a_0 = & (24)^n (n-1) (H_0^2 + \dot{H}_0)^{n-2} \\ & \cdot \left[(1-2n) (\dot{H}_0^2 + 2\dot{H}_0 H_0^2) - n\ddot{H}_0 H_0 + H_0^4 \right], \end{aligned} \quad (6.33)$$

και

$$\begin{aligned} b_0 = & 108 \tilde{\beta}^n 6^{n-1} H_0^{2n} (2H_0^2 + 3\dot{H}_0)^{n-2} n(n-1) \frac{b}{\alpha} \\ & \cdot \left[4\dot{H}_0 H_0^2 + 4\dot{H}_0^2 + \ddot{H}_0 H_0 - 12H_0^4 \right]. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Στην γραφική παράσταση 6.3 στον κατακόρυφο άξονα είναι ο λόγος $\delta T_f/T_f$



Σχήμα 6.3: Στον κατακόρυφο άξονα είναι ο λόγος $\delta T_f/T_f$ από (6.32) και στον οριζόντιο η ελεύθερη παράμετρος n (μπλε γραμμή) στην περίπτωση του μοντέλου $f(G) + f(P)$ της (6.8), επίσης βλέπουμε το πάνω επιτρεπτό όριο του λόγου $\delta T_f/T_f$ από την (6.11) (κόκκινη γραμμή). Θεωρούμε τις περιπτώσεις $\tilde{\beta} = 1\text{GeV}^{-2}$ και $\frac{b}{\alpha} = 10$. Παρατηρούμε ότι οι σύνδεσμοι της νουκλεοσύνθεσης επιβάλλουν $n \lesssim 0.22$.

από την (6.32) και στον οριζόντιο η ελεύθερη παράμετρος n , στην περίπτωση $\tilde{\beta} = 1\text{GeV}^{-2}$ και $\frac{b}{\alpha} = 10$, και το πάνω επιτρεπτό όριο (6.11). Βρίσκουμε ότι οι σύνδεσμοι από την νουκλεοσύνθεση επιβάλλουν $n \lesssim 0.22$. Παρόμοια

επιτρέποντας στην παράμετρο $\tilde{\beta}$ να πάρει τιμές στο εύρος 0.01 GeV^{-2} ανδ 100 GeV^{-2} αφήνει τον σύνδεσμο ανεπηρέαστο. Τώρα κρατώντας την παράμετρο $\tilde{\beta} = 1 \text{ GeV}^{-2}$, αν πάρουμε τιμή για το λόγο $\frac{b}{\alpha}$ ίση με $\frac{b}{\alpha} = 1000$ μας οδηγεί στην $n \lesssim 0.227$, ενώ για $\frac{b}{\alpha} = 0.001$ παίρνουμε $n \lesssim 0.21$. Και στις 2 περιπτώσεις οι σύνδεσμοι για το n είναι πολύ κοντά στο 0.

6.9 Χορδές

Η επόμενη θεωρία που θα δούμε είναι εμπνευσμένη από τη θεωρία χορδών και περιέχει μέχρι τέταρτης τάξης όρους ως προς το βαθμωτό καμπυλότητας και τους ταυιστές. Η δράση της θεωρίας στις χαμηλές ενέργειες είναι [56]

$$\mathcal{S} = \int d^D x \sqrt{-g} [R + \mathcal{L}_c + \dots], \quad (6.35)$$

όπου R το βαθμωτό καμπυλότητας και \mathcal{L}_c η διόρθωση με τους όρους ανώτερης τάξης

$$\mathcal{L}_c = c_1 \alpha' e^{-2\Phi} \mathcal{L}_2 + c_2 \alpha'^2 e^{-4\Phi} \mathcal{L}_3 + c_3 \alpha'^3 e^{-6\Phi} \mathcal{L}_4, \quad (6.36)$$

όπου α' είναι μια παράμετρος, η οποία έχει να κάνει με την επέκταση, Φ είναι το πεδίο dilaton που είδαμε προηγουμένως, και

$$\mathcal{L}_2 = \Omega_2, \quad (6.37)$$

$$\mathcal{L}_3 = 2\Omega_3 + R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} R_{\lambda\rho}^{\alpha\beta} R_{\mu\nu}^{\lambda\rho}, \quad (6.38)$$

$$\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_{41} - \delta_H \mathcal{L}_{42} - \frac{\delta_B}{2} \mathcal{L}_{43}, \quad (6.39)$$

με

$$\Omega_2 = R^2 - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \Omega_3 = & R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} R_{\lambda\rho}^{\alpha\beta} R_{\mu\nu}^{\lambda\rho} - 2R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} R_{\nu}^{\lambda\beta\rho} R_{\rho\mu\lambda}^{\alpha} \\ & + \frac{3}{4} R R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + 6R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} \\ & + 4R^{\mu\nu} R_{\nu\alpha} R_{\mu}^{\alpha} - 6R R_{\alpha\beta}^2 + \frac{R^3}{4}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\mathcal{L}_{41} = \zeta(3) R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\alpha\nu\rho\beta} \left(R_{\delta\beta}^{\mu\gamma} R_{\alpha\gamma}^{\delta\sigma} - 2R_{\delta\alpha}^{\mu\gamma} R_{\beta\gamma}^{\delta\sigma} \right), \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{42} = & \frac{1}{8} \left(R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} \right)^2 + \frac{1}{4} R_{\mu\nu}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2} R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} R_{\sigma\gamma\delta}^{\mu} R_{\rho}^{\nu\gamma\delta} - R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{\rho\nu} R_{\rho\sigma}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}^{\mu\sigma}, \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{43} = & \left(R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} \right)^2 - 10R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\sigma} R_{\sigma\gamma\delta\rho} R^{\beta\gamma\delta\rho} \\ & - R_{\mu\nu\alpha\beta} R_{\sigma}^{\mu\nu\rho} R^{\beta\sigma\gamma\delta} R_{\delta\gamma\rho}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Ο συντελεστής $\delta_{H(B)} = 1$ για την περίπτωση της ετεροτικής (μποζονικής) για την θεωρία χορδών και μηδέν αλλού. Ο όρος Gauss-bonnet, Ω_2 , όπως και η πυκνότητα Euler, Ω_3 , δεν συνεισφέρουν στις εξισώσεις κίνησης του υποβάθρου για αριθμό διαστάσεων $D = 4$ εκτός και αν το πεδίο dilaton εξελίσσεται δυναμικά. Οι τιμές των συντελεστών (c_1, c_2, c_3) εξαρτώνται από το είδος της θεωρίας χορδών. Οι τιμές είναι $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 1/8), (1/8, 0, 1/8), (1/4, 1/48, 1/8)$ για τον τύπο II, ετεροτικής, και μποζονικής χορδής αντίστοιχα.

Θεωρούμε μια επίπεδη χωρικά (3+1)-διαστάσεων [56] Friedmann-Robertson-Walker μετρική με χρονική συνάρτηση $N(t)$:

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2,$$

και παίρνουμε τη μεταβολή της δράσης (6.35) ως προς την συνάρτηση N , που μας δίνει

$$6H^2 = \rho_c + \rho_m, \quad (6.45)$$

όπου $H \equiv \dot{a}/a$ είναι η σταθερά Hubble, και

$$\rho_c \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \dot{N}} \right) + 3H \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \dot{N}} - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial N} - \mathcal{L}_c \Big|_{N=1}. \quad (6.46)$$

Η ποσότητα ρ_m είναι η πυκνότητα ενέργειας του ρευστού, το οποίο θεωρείται βαροτροπικού τύπου, με καταστατική εξίσωση [56]

$$w_m = \frac{p_m}{\rho_m}, \quad (6.47)$$

ικανοποιώντας την εξίσωση διατήρησης

$$\dot{\rho}_m + 3H(1 + w_m)\rho_m = 0. \quad (6.48)$$

Από την εξίσωση (6.46) βρίσκουμε ότι για τις μποζονικές χορδές, η ενέργεια πυκνότητας ρ_c δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \rho_c = & A(5H^6 + 2I^3 - 6HIJ) + B[(-21\zeta(3) + 210)H^8 \\ & + (-3\zeta(3) + 90)I^4 - (12\zeta(3) + 48)H^4I^2 \\ & + (4\zeta(3) + 120)H^2I^3 + (-24\zeta(3) + 96)H^6I \\ & + J\{(8\zeta(3) - 32)H^5 + (12\zeta(3) - 360)HI^2 \\ & + 24\zeta(3)H^3I\}]. \end{aligned} \quad (6.49)$$

όπου $I \equiv H^2 + \dot{H}$, $J = \ddot{H} + 3H\dot{H} + H^3$, $A = 24c_2\alpha'^2 e^{-4\phi}$ και $B = 6c_3\alpha'^3 e^{-6\phi}$. Για τις χορδές τύπου II, και ετεροτικές χορδές ισχύει

$$\begin{aligned} \rho_c = & B[a_8H^8 + a_cI^4 + a_4H^4I^2 + a_2H^2I^3 + a_6H^6I \\ & - J(a_5H^5 + a_1HI^2 + a_3H^3I)], \end{aligned} \quad (6.50)$$

με $B = 6c_3\alpha'^3 e^{-6\phi}\zeta(3)$, $a_8 = -21$, $a_c = -3$, $a_4 = -12$, $a_2 = 4$, $a_6 = -24$, $a_5 = -8$, $a_1 = -12$, $a_3 = -24$ για τις χορδές τύπου II, και $B = 6c_3\alpha'^3 e^{-6\phi}$, $a_8 = -21\zeta(3) + 35$, $a_c = -3\zeta(3) + 15$, $a_4 = -12\zeta(3) - 6$, $a_2 = 4\zeta(3) + 20$, $a_6 = -24\zeta(3) + 12$, $a_5 = -8\zeta(3) + 4$, $a_1 = -12\zeta(3) + 60$, $a_3 = -24\zeta(3)$ για την ετεροτική χορδή. Στην βιβλιογραφία έχει μελετηθεί η phantom energy όπου $w_m < -1$. Η ανάλυση έδειξε ότι για θεωρίες με χορδές τύπου II όταν $w_m \lesssim -1$ τότε το Σύμπαν φτάνει σε μοναδικότητα. Γράφουμε τη δράση (6.35) στο φυσικό σύστημα μονάδων. Δηλαδή

$$\mathcal{S} = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{M_P^2}{2} R + \mathcal{L}_c + \dots \right], \quad (6.51)$$

Οι εξισώσεις Friedmann είναι

$$3M_P^2 H^2 = \rho_m + \rho_r + \rho_{DE}. \quad (6.52)$$

. Στην περίπτωση των χορδών με μποζόνια έχουμε

$$\begin{aligned} \rho_{DE} = & B[a_8 H^8 + a_c I^4 + a_4 H^4 I^2 + a_2 H^2 I^3 + a_6 H^6 I \\ & - J(a_5 H^5 + a_1 H I^2 + a_3 H^3 I)], \end{aligned} \quad (6.53)$$

Βλέπουμε στην (6.51) ότι το πεδίο dilaton δεν εξελίσσεται με τον χρόνο, συνεπώς μπορούμε να πάρουμε μια τιμή ίδια στο παρελθόν και στο παρόν. Ακολουθώντας την ίδια ανάλυση που κάναμε με τα προηγούμενα μοντέλα βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_f}{T_f} = & (60c_q)^{-1} \zeta^7 T_f^9 B [a_8 + a_c + a_4 - a_2 - a_6 - \\ & 3(a_5 + a_1 - a_3)], \end{aligned} \quad (6.54)$$

όπου B είναι η ελεύθερη παράμετρος της θεωρίας. Για τις χορδές τύπου II ικανοποιεί το όριο (6.11) για τις τιμές $-9.35462 \times 10^{254} < B < 9.35462 \times 10^{254}$ ή $-1.29703 \times 10^{254} < c_3\alpha'^3 e^{-6\phi} < 1.29703 \times 10^{254}$. Για τις ετεροτικές χορδές $-1.22593 \times 10^{254} < B < 1.22593 \times 10^{254}$ ή $-1.69977 \times 10^{253} < c_3\alpha'^3 e^{-6\phi} < 1.69977 \times 10^{253}$. Για την περίπτωση των μποζονικών χορδών έχουμε

$$\begin{aligned} \rho_{DE} = & A(5H^6 + 2I^3 - 6HIJ) + B[(-21\zeta(3) + 210)H^8 \\ & + (-3\zeta(3) + 90)I^4 - (12\zeta(3) + 48)H^4 I^2 \\ & + (4\zeta(3) + 120)H^2 I^3 + (-24\zeta(3) + 96)H^6 I \\ & + J\{(8\zeta(3) - 32)H^5 + (12\zeta(3) - 360)HI^2 \\ & + 24\zeta(3)H^3 I\}]. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Κάνοντας την παραπάνω ανάλυση βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_f}{T_f} = & (60c_q)^{-1} \zeta^5 T_f^5 \\ & \times \left[21A - 28B\zeta^2 T_f^4 \left(\zeta(3) + \frac{285}{7} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.56)$$

Παίρνουμε 6 τιμές για την παράμετρο B από το εύρος που βρήκαμε παραπάνω δηλαδή $B = \pm 10^{254}, B = \pm 10^{253}, B = \pm 5 \times 10^2$ και βρίσκουμε ότι το εύρος της παραμέτρου A για το πρώτο ζεύγος ικανοποιεί το όριο (6.11) για ($B = -10^{254}$) $-5.53226 \times 10^{169} < A < -3.51349 \times 10^{169}$ ή $-2.30511 \times 10^{168} < c_2 \alpha'^2 e^{-4\phi} < -1.46395 \times 10^{168}$ και ($B = 10^{254}$) $3.51349 \times 10^{169} < A < 5.53226 \times 10^{169}$ ή $1.46395 \times 10^{168} < c_2 \alpha'^2 e^{-4\phi} < 2.30511 \times 10^{168}$. Για το δεύτερο ζεύγος ικανοποιεί τη συνθήκη για ($B = -10^{253}$) $-1.46167 \times 10^{169} < A < 5.57098 \times 10^{168}$ ή $-6.0903 \times 10^{167} < c_2 \alpha'^2 e^{-4\phi} < 2.32124 \times 10^{167}$ και ($B = 10^{253}$) $-5.57098 \times 10^{168} < A < 1.46167 \times 10^{169}$ ή $-2.32124 \times 10^{167} < c_2 \alpha'^2 e^{-4\phi} < 6.0903 \times 10^{167}$. Για το τρίτο ζεύγος έχουμε ($B = \pm 5 \times 10^2$) $-1.00939 \times 10^{169} < A < 1.00939 \times 10^{169}$ ή $-4.20577 \times 10^{167} < c_2 \alpha'^2 e^{-4\phi} < 4.20577 \times 10^{167}$.

6.10 “Running Vacuum” Κοσμολογία

Θα χρησιμοποιήσουμε την “effective” πυκνότητα της σκοτεινής ενέργειας (4.79) στην περίπτωση μιας “running-vacuum” τύπου κοσμολογίας για να βρούμε τους συνδέσμους από την μεγάλη νουκλεοσύνθεση. Ξεκινάμε με την πιο απλή περίπτωση όπου $d_1 = d_2 = 0$. Έχειδειχθεί [68, 69, 70, 74], [81, 82] ότι στη σύγχρονη εποχή στην οποία ο όρος H^4 δεν είναι κυρίαρχος, ότι ταιριάζει με τους αντίστοιχους όρους της (4.79) μαζί με την πληθώρα των κοσμολογικών δεδομένων της σημερινής εποχής, και οπότε μας δίνει

$$0 < \nu = \mathcal{O}(10^{-3}). \quad (6.57)$$

Τονίζουμε ότι η παρουσία της μη μηδενική παραμέτρου ν επηρεάζει την εξέλιξη της πυκνότητας της ύλης και της ενέργειας στη σημερινή εποχή, σε παρατηρούμενες αποκλίσεις από το Λ CDM μοντέλο [68, 69, 70, 81, 82]. Ο κοσμολογικός σταθερός όρος c_0 στην εξίσωση (4.79) μπορεί να γίνει σύνδεσμος μέσω της σχέσης

$$c_0 = H_0^2 (\Omega_{DE0} - \nu), \quad (6.58)$$

όπου H_0 είναι η σημερινή τιμή της σταθεράς Hubble, και

$$\Omega_{DE0} = \rho_{DE0} / (3M_P^2 H_0^2), \quad (6.59)$$

όπου ρ_{DE0} είναι η συνεισφορά της σκοτεινής ενέργειας στην σημερινή ενέργεια του κενού. Αυτή βρίσκεται από τα σημερινά παρατηρησιακά δεδομένα, δηλαδή από $\Omega_{DE0} \approx 0.7$ και $H_0 = 1.4 \times 10^{-42}$ GeV.

Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στο να βάλουμε συνδέσμους στην παράμετρο ν μόνο από συνδέσμους της μεγάλης νουκλεοσύνθεσης χωρίς περεταίρω συνδέσμους από άλλα κοσμολογικά δεδομένα, απλά απαιτώντας η running πυκνότητα ενέργειας του κενού είναι συνδεδεμένη με την σκοτεινή ενέργεια. Αυτό θα μας δώσει επιπλέον συνδέσμους στο εύρος της παραμέτρου ν .

Πρώτα εξετάζουμε μοντέλα με $\frac{\alpha}{H_I^2} \equiv c_2 = d_1 = d_2 = 0, c_0 \neq 0, \nu \neq 0$ τα οποία είναι σχετικά ως προς την σημερινή φαινομενολογία γιατί όπως αναφέρθηκε προηγουμένως οι όροι H^4 στην πυκνότητα ενέργειας του κενού (4.79) δεν είναι κυρίαρχοι στις μετέπειτα εποχές του σύμπαντος [71, 72, 68, 69, 70]. Χρησιμοποιώντας τους συνδέσμους (6.59), βρίσκουμε

$$\frac{\Delta T_f}{T_f} = (10\zeta c_q T_f^7)^{-1} [H_0^2 (\Omega_{DE0} - \nu) + \nu \zeta^2 T_f^4]. \quad (6.60)$$

Από την (6.11), βλέπουμε ότι $-0.0023 \lesssim \nu \lesssim 0.0023$. Ο σύνδεσμος ικανοποιείται και για μη θετικές τιμές της παραμέτρου ν . Από την άλλη δεδομένα από άλλες παρατηρήσεις απαιτούν $\nu > 0$. Τουλάχιστον η τάξη 10^{-3} της παραμέτρου ν ικανοποιεί αυτά τα δεδομένα. Έτσι το συγκεκριμένο running vacuum μοντέλο που από δεδομένα εκτός νουκλεοσύνθεσης πρέπει να είναι της τάξης [68, 70] $\nu = \mathcal{O}(10^{-3}) > 0$, βλέπουμε ότι επίσης ικανοποιείται από τους συνδέσμους της νουκλεοσύνθεσης.

Δεύτερη περίπτωση που εξετάζουμε είναι η $c_0 = d_1 = d_2 = 0, \nu \neq 0$ και $\frac{\alpha}{H_I^2} \equiv c_2 \neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση, όπως αναφέραμε παραπάνω, επειδή οι όροι H^4 δεν περιμένουμε να έχουν κάποιο ρόλο τις μετέπειτα εποχές του σύμπαντος, δεν περιμένουμε ισχυρούς συνδέσμους στην παράμετρο α . Έχουμε

$$\rho_{DE} = 3M_P^2 H^2 (\nu + c_2 H^2).$$

Χρησιμοποιώντας τον σύνδεσμο (6.59), εξάγουμε τη συνθήκη

$$\nu = \Omega_{DE0} - c_2 H_0^2.$$

Χρησιμοποιώντας την (6.10) για να αντικαταστήσουμε την παράμετρο ν και να έχουμε μόνη ελεύθερη παράμετρο την c_2 , βρίσκουμε

$$\frac{\Delta T_f}{T_f} = \frac{1}{10} \zeta T_f^{-3} c_q^{-1} [\Omega_{DE0} - c_2 (H_0^2 - \zeta^2 T_f^4)].$$

Παρατηρούμε ότι η έκφραση είναι γραμμική στους όρους c_2 , και έτσι εύκολα βγάζουμε το συμπέρασμα ότι για $c_2 \geq 0$ (το οποίο απαιτείται για να είναι συνεπές το μοντέλο) δεν ικανοποιεί το όριο (7.70). Για την περίπτωση $d_1 = d_2 = \nu = 0, c_0 \neq 0$ και $\frac{\alpha}{H_I^2} \equiv c_2 \neq 0$, έχουμε το σύνδεσμο

$$c_0 = H_0^2 (\Omega_{DE0} - c_2 H_0^2),$$

που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να απαλείψουμε την παράμετρο c_0 . Τελικά βρίσκουμε ότι

$$\frac{\Delta T_f}{T_f} = (10\zeta c_q T_f^7)^{-1} [H_0^2 (\Omega_{DE0} - c_2 H_0^2) + c_2 \zeta^4 T_f^8].$$

Σε αυτή την περίπτωση το όριο (6.11) μας οδηγεί στην

$$0 \lesssim c_2 \lesssim 9.7 \times 10^{46} \text{ GeV}^{-2} . \quad (6.61)$$

Τώρα εισάγοντας το παραπάνω εύρος τιμών της παραμέτρου c_2 στην (6.10), βρίσκουμε ότι

$$\frac{c_0}{H_0^2} = \Omega_{DE0} - c_2 H_0^2 \approx 0.7, \quad (6.62)$$

το οποίο είναι σε συμφωνία με τα άλλα κοσμολογικά δεδομένα του μοντέλου RVM [68, 69]. Στην πιο γενική περίπτωση $d_1 = d_2 = 0$ ωιτη $c_0 \neq 0$, $\nu \neq 0$, $c_2 \neq 0$, έχουμε

$$c_0 = H_0^2 \Omega_{DE0} - \nu H_0^2 - c_2 H_0^4,$$

η οποία μας επιτρέπει να εκφράσουμε την παράμετρο c_0 σαν συνάρτηση των παραμέτρων ν και c_2 . Κάνοντας αυτά τα βήματα φτάνουμε στην

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_f}{T_f} = (10\zeta c_q T_f^7)^{-1} [& \Omega_{DE0} H_0^2 + \nu (\zeta^2 T_f^4 - H_0^2) \\ & + c_2 (\zeta^4 T_f^8 - H_0^4)] . \end{aligned} \quad (6.63)$$

Έτσι βάζοντας τον σύνδεσμο $-0.0023 < \nu < 0.0023$ (το οποίο βρήκαμε σε προηγούμενη περίπτωση) συμπεραίνουμε ότι η έκφραση (6.63) ικανοποιεί το όριο (6.11) για $0 < c_2 < 9.7 \times 10^{46} \text{ GeV}^{-2}$. Χρησιμοποιώντας την (6.10) βρίσκουμε $\frac{c_0}{H_0^2} = \Omega_{DE0} - \nu - c_2 H_0^2 \approx \Omega_{DE0} - \nu$ το οποίο δίνει

$$0.6977 < \frac{c_0}{H_0^2} < 0.7023, \quad (6.64)$$

το οποίο είναι σε συμφωνία με τα άλλα κοσμολογικά δεδομένα για το μοντέλο RVM [68, 69].

Τώρα προχωράμε στην περίπτωση όπου υπάρχουν όροι της μορφής $\ln(H)H^{2n}$ στην (4.79), δηλαδή η περίπτωση $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$.

Πρώτα επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση d_1 , δηλαδή $d_2 = \nu = c_2 = 0$, $d_1 \neq 0$, $c_0 \neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$c_0 = H_0^2 [\Omega_{DE0} - d_1 \ln(M_P^{-2} H_0^2)],$$

όπου μας επιτρέπει να εκφράσουμε την παράμετρο c_0 ως προς την παράμετρο d_1 . Βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_f}{T_f} = (10c_q \zeta T_f^7)^{-1} \{ & H_0^2 [\Omega_{DE0} - d_1 \ln(M_P^{-2} H_0^2)] \\ & + d_1 \ln(M_P^{-2} \zeta^2 T_f^4) \zeta^2 T_f^4 \}, \end{aligned} \quad (6.65)$$

άρα βρίσκουμε

$$d_1 \in (-1.2 \times 10^{-5}, 1.2 \times 10^{-5}) . \quad (6.66)$$

Εισάγοντας το εύρος (6.66) της παραμέτρου d_1 στην (6.10) βρίσκουμε

$$\frac{c_0}{H_0^2} \in (0.697, 0.703) , \quad (6.67)$$

συνεπώς η παρουσία του μη πολυωνυμικού όρου $H^2 \ln(H^2 M_P^{-2})$ στην πυκνότητα ενέργειας του μοντέλου RVM είναι συνεπής με τα δεδομένα της μεγάλης νουκλεοσύνθεσης για ένα εύρος των σχετικών παραμέτρων (6.66), το οποίο επηρεάζει τεχνητά μόνο τις παραμέτρους του μοντέλου. Αυτό είναι συνεπές με το γεγονός ότι τέτοιες διορθώσεις υπάρχουν λόγω των χβαντικών διακυμάνσεων του γκραβιτονίου [77, 84, 83]. Εστιάζοντας στην παράμετρο d_2 , δηλαδή θέτοντας $\nu = d_1 = 0$, και $c_0 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $d_2 \neq 0$, βρίσκουμε τον σύνδεσμο

$$c_0 = H_0^2 \{ \Omega_{DE0} - c_2 H_0^2 [1 + d_2 \ln(M_P^{-2} H_0^2)] \} ,$$

το οποίο μας επιτρέπει να εκγράσουμε την παράμετρο c_0 ως προς τις παραμέτρους $c_2 \neq 0$ και $d_2 \neq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_f}{T_f} = & (10c_q \zeta T_f^7)^{-1} \left\{ c_2 \zeta^4 T_f^8 [1 + d_2 \ln(M_P^{-2} \zeta^2 T_f^4)] \right. \\ & \left. + H_0^2 \{ \Omega_{DE0} - c_2 H_0^2 [1 + d_2 \ln(M_P^{-2} H_0^2)] \} \right\}. \end{aligned} \quad (6.68)$$

έτσι θέτοντας μια τυπική τιμή για την παράμετρο c_2 , $c_2 = 10^{46} \text{ GeV}^{-2}$, το οποίο βρέθηκε παραπάνω, βρίσκουμε ότι

$$d_2 \in (-4.4 \times 10^{-2}, 5.4 \times 10^{-2}). \quad (6.69)$$

Εισάγοντας το εύρος της παραμέτρου d_2 στην (6.10) βρίσκουμε ξανά $\frac{c_0}{H_0^2} \approx 0.7$. Θα πρέπει να τονιστεί ότι οι όροι H^4 δεν επηρεάζουν την φαινομενολογία, οι όροι $d_2 H^4 \ln(M_P^{-2} H^2)$ επηρεάζουν την μεγάλη νουκλεοσύνθεση, και έτσι μόνο ένα στενό εύρος (6.69) (μεγαλύτερο από το εύρος της παραμέτρου d_1 , (6.66)) είναι συνεπές με τα δεδομένα της μεγάλης νουκλεοσύνθεσης, με την υπόθεση ότι το μοντέλο RVM προσφέρει μια εναλλακτική για την εξήγηση της σκοτεινής ενέργειας.

Τελικά εξετάζουμε τις περιπτώσεις όπου d_1 και d_2 διάφορα του μηδενός και $\nu = 0$. Θεωρούμε $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$, $c_0 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $\nu = 0$. Κάνοντας αυτό βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} c_0 = & H_0^2 \{ \Omega_{DE0} - d_1 \ln(M_P^{-2} H_0^2) \\ & - c_2 H_0^2 [1 + d_2 \ln(M_P^{-2} H_0^2)] \}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Τελικά βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_f}{T_f} = & (10c_q \zeta T_f^7)^{-1} \left\{ H_0^2 \{ \Omega_{DE0} - d_1 \ln(M_P^{-2} H_0^2) \right. \\ & \left. - c_2 H_0^2 [1 + d_2 \ln(M_P^{-2} H_0^2)] \} \right. \\ & \left. + \zeta^2 T_f^4 \{ d_1 \ln(M_P^{-2} \zeta^2 T_f^4) \right. \\ & \left. + c_2 \zeta^2 T_f^4 [1 + d_2 \ln(M_P^{-2} \zeta^2 T_f^4)] \} \right\}. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Όποτε παίρνοντας τυπικές τιμές για την παράμετρο c_2 , $c_2 = 10^{46} \text{ GeV}^{-2}$ και $d_2 = 10^{-5}$ βρίσκουμε $d_1 \in (-1.0 \times 10^{-5}, 1.3 \times 10^{-5})$, και σύμφωνα με την (6.70) παίρνουμε $\frac{c_0}{H_0^2} \in (0.697, 0.704)$. Από την άλλη θέτοντας $c_2 = 10^{46} \text{ GeV}^{-2}$ και $d_1 \sim 10^{-5}$ παίρνουμε $d_2 \in (-8.5 \times 10^{-2}, 1.2 \times 10^{-2})$ και $\frac{c_0}{H_0^2} \approx 0.7$. Έτσι, οι παράμετροι d_1 και d_2 βρίσκονται σε ένα στενό εύρος για να ικανοποιούνται τα δεδομένα της μεγάλης νουκλεοσύνθεσης. Τέτοια στενά παράθυρα δεν επηρεάζουν σημαντικά τις άλλες παραμέτρους του μοντέλου RVM [68, 69].

6.11 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, τα (γενικά) κοσμολογικά σενάρια των “running vacuum” μπορούν να ικανοποιήσουν τους συνδέσμους από την μεγάλη νουκλεοσύνθεση, όμως οι εκάστοτε παράμετροι είναι σύνδεσμοι κοντά στις τιμές που δίνει το μοντέλο ΛCDM . Αυτό είναι αναμενόμενο διότι τέτοια μοντέλα είναι φυσικές προεκτάσεις του μοντέλου ΛCDM και οπότε κάποιος μπορεί πάντα να βρει ένα παράθυρο για την εκάστοτε μεταβλητή για το οποίο η συμπεριφορά του μοντέλου στο πρώιμο σύμπαν είναι κοντά στις προβλέψεις του μοντέλου ΛCDM .

Κεφάλαιο 7

BBN ανάλυση σε κοσμολογικά μοντέλα τροποποιημένης τηλεπαράλληλης βαρύτητας

Η θεωρία αυτή είναι μια ισοδύναμη περιγραφή θεωριών βαρύτητας στην οποία χρησιμοποιούμε τις λεγόμενες τετράδες αντί για την μετρική. Για παράδειγμα ορίζουμε μία πολλαπλότητα \mathcal{M} και σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας μπορούμε να ορίσουμε μια ορθοκανονική βάση διανυσμάτων τα οποία βρίσκονται στον εφαπτομενικό χώρο, που τον ορίζουμε ως $T_p(\mathcal{M})$. Οι ελληνικοί δείκτες που θα χρησιμοποιήσουμε θαισχύουν για τοπικές χωροχρονικές συντεταγμένες και οι λατινικοί για συντεταγμένες στον εφαπτομενικό χώρο. Και τα δύο σετς δεικτών παίρνουν τιμές από 0 έως 3. Τις τετράδες τις συμβολίζουμε ως $e_a(x^\mu)$. Το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ τους μας δίνει την επίπεδη μετρική, δηλαδή

$$\langle e_a, e_b \rangle = \eta_{ab}. \quad (7.1)$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε μια τοπική βάση συντεταγμένων ∂_μ στην οποία μπορούμε να εκφράσουμε τις συνιστώσες των τετράδων. Για παράδειγμα έχουμε

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu. \quad (7.2)$$

Μπορούμε να ορίσουμε και το αντίστροφο της (7.2) που είναι

$$e^a = e^a_\mu dx^\mu, \quad (7.3)$$

όπου

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu, \quad (7.4)$$

και

$$e^a(e_b) = \delta^a_b. \quad (7.5)$$

Χρησιμοποιώντας τις δύο παραπάνω βρίσκουμε ότι

$$e^a{}_{\mu} e_b{}^{\mu} = \delta^a_b. \quad (7.6)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να βρούμε παρόμοια σχέση για τους δείκτες στον κανονικό χωρόχρονο

$$e^a{}_{\mu} e_a{}^{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} \quad (7.7)$$

Τώρα μπορούμε να γράψουμε μια επίπεδη μετρική στον κανονικό χωρόχρονο η οποία θα εξαρτάται από τις τετράδες και την επίπεδη μετρική του εραπτομενικού χώρου. Δηλαδή

$$\eta_{\mu\nu} = e^a{}_{\mu} e^b{}_{\nu} \eta_{ab}. \quad (7.8)$$

Οι τετράδες που ορίσαμε και λόγω της προηγούμενης σχέσης είναι για αδρανειακά συστήματα αναφοράς όπως αυτά της ειδικής σχετικότητας. Για πιο γενικά συστήματα αναφοράς, που έχουμε επιτάχυνση π.χ, θα επιλέξουμε τις τετράδες $h^a{}_{\mu}$ όπου ισχύουν τα ίδια για τους ελληνικούς και λατινικούς δείκτες και επιπλέον η προηγούμενη σχέση γράφεται ως

$$g_{\mu\nu} = h^a{}_{\mu} h^b{}_{\nu} \eta_{ab}, \quad (7.9)$$

όπου $g_{\mu\nu}$ μια μετρική μη επίπεδη στον κανονικό χωρόχρονο. Αν συμβολίσουμε με g την ορίζουσα της μετρικής, δηλαδή $g = \det(g_{\mu\nu})$, τότε αν πάρουμε την ορίζουσα των δύο μελών, χρησιμοποιώντας ότι $\det(\eta_{ab}) = -1$ και ορίζοντας $h = \det(h^a{}_{\mu})$, βρίσκουμε ότι

$$h = \sqrt{-g}. \quad (7.10)$$

Αντίστοιχα ισχύουν $\mathbf{h}_a = h_a{}^{\mu} \partial_{\mu}$, $\mathbf{h}^a = h^a{}_{\mu} dx^{\mu}$, $h^a{}_{\mu} h_b{}^{\mu} = \delta^a_b$, $h^a{}_{\mu} h_a{}^{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$. Επίσης τα διανύσματα της βάσης έχουν μεταθετικές σχέσεις της μορφής

$$[\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_b] = f^c{}_{ab} \mathbf{h}_c, \quad (7.11)$$

όπου

$$f^c{}_{ab} = h_a{}^{\mu} h_b{}^{\nu} (\partial_{\nu} h^c{}_{\mu} - \partial_{\mu} h^c{}_{\nu}), \quad (7.12)$$

οι συντελεστές δομής. Έχοντας αυτά τα δεδομένα το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε μια "σύνδεση". Για την ακρίβεια μια σύνδεση ιδιοστροφορμής. Αυτή την ορίζουμε ως A_{μ} όπου

$$A_{\mu} = \frac{1}{2} A^ab{}_{\mu} S_{ab}, \quad (7.13)$$

όπου τα S_{ab} είναι οι γεννήτορες της ομάδας Lorentz. Επειδή είναι αντισυμμετρικοί ως προς την εναλλαγή δεικτών θα πρέπει και τα $A^ab{}_{\mu}$ να είναι αντισυμμετρικά ως προς την εναλλαγή των πάνω δεικτών. Τώρα μπορούμε να ορίσουμε μια συναλλοίωτη παράγωγο η οποία ονομάζεται Fock-Ivanenko και ορίζεται ως

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - \frac{i}{2} A^ab{}_{\mu} S_{ab}. \quad (7.14)$$

Αν την εφαρμόσουμε σε ένα βαθμωτό πεδίο ϕ , οι γεννήτορες S_{ab} θα πρέπει να είναι μηδέν ώστε να πάρουμε $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi$, δηλαδή η συναλλοίωτη παράγωγος ενός βαθμωτού να είναι ίδια με την μερική παράγωγο. Για ένα πεδίο Dirac ψ^c , έχουμε $S_{ab} = \frac{i}{4} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$, όπου οι πίνακες γ είναι οι πίνακες του Dirac και τα στοιχεία του πίνακα S_{ab} δίνονται από τη σχέση

$$(S_{ab})^c{}_d = i (\eta_{bd}\delta^c{}_a - \eta_{ad}\delta^c{}_b). \quad (7.15)$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος Fock-Ivanenko για την περίπτωση του πεδίου Dirac είναι

$$D_\mu\phi^c = \partial_\mu\phi^c + A^c{}_{d\mu}\phi^d. \quad (7.16)$$

Μπορούμε να πηγαίνουμε από τον κανονικό χωρόχρονο στον εφαπτομενικό μέσω της σχέσης

$$\phi^\rho = h_a{}^\rho\phi^a, \quad (7.17)$$

και αντίστροφα

$$\phi^a = h^a{}_\rho\phi^\rho. \quad (7.18)$$

Τώρα θα ορίσουμε μια γενική σύνδεση στον κανονικό χωρόχρονο η οποία συνδέεται με τη σύνδεση ιδιοστροφορμής μέσω της σχέσης

$$\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} = h_a{}^\rho\partial_\mu h^a{}_\nu + h_a{}^\rho A^a{}_{b\mu}h^b{}_\nu. \quad (7.19)$$

Η τελευταία σχέση γράφεται ως

$$\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} = h_a{}^\rho D_\mu h^a{}_\nu, \quad (7.20)$$

όπου D_μ η συναλλοίωτη παράγωγος Fock-Ivanenko. Με τη βοήθεια των $h^a{}_\mu h_b{}^\mu = \delta^a{}_b$, $h^a{}_\mu h_a{}^\nu = \delta^\nu{}_\mu$ η αντίστροφη σχέση γράφεται

$$A^a{}_{b\mu} = h^a{}_\nu\partial_\mu h^b{}_\nu + h^a{}_\nu\Gamma^\nu{}_{\rho\mu}h_b{}^\rho. \quad (7.21)$$

Αυτή σχέση μπορεί να γραφτεί συναρτήσει της συναλλοίωτης παραγώγου ∇ που έχει εξάρτηση από την γενική σύνδεση $\Gamma^\nu{}_{\rho\mu}$ και δρα μόνο στους ελληνικούς(κανονικός χωρόχρονος) δείκτες. Έχουμε

$$A^a{}_{b\mu} = h^a{}_\nu\nabla_\mu h_b{}^\nu. \quad (7.22)$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος ∇ ενός χωροχρονικού διανυσματικού πεδίου ϕ^ν είναι

$$\nabla_\mu\phi^\nu = \partial_\mu\phi^\nu + \Gamma^\nu{}_{\rho\mu}\phi^\rho. \quad (7.23)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (7.17), (7.18) βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ της συναλλοίωτης παραγώγου της γενικής σύνδεσης με την συναλλοίωτη παράγωγο Fock-Ivanenko. Βρίσκουμε ότι

$$D_\mu\phi^b = h^b{}_\nu\nabla_\mu\phi^\nu. \quad (7.24)$$

Αν συνδιάσουμε τις (7.20), (7.21) βρίσκουμε ότι

$$\partial_\mu h^a{}_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} h^a{}_\rho + A^a{}_{b\mu} h^b{}_\nu = 0. \quad (7.25)$$

Μία γενική σύνδεση είναι συμβατή με την μετρική όταν η συναλλοίωτη παράγωγος της μετρικής είναι μηδενική. Δηλαδή $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$, δηλαδή

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} g_{\rho\mu} = 0. \quad (7.26)$$

Η ίδια συνθήκη για τις τετράδες χρησιμοποιώντας τις (7.20), (7.21) είναι η

$$\partial_\mu \eta_{ab} - A^d{}_{a\mu} \eta_{db} - A^d{}_{b\mu} \eta_{da} = 0. \quad (7.27)$$

Χρησιμοποιώντας την επίπεδη μετρική για να ανεβοκατεβάσουμε δείκτες στην σύνδεση ιδιοστροφορμής βρίσκουμε τελικά ότι

$$A_{ba\mu} = -A_{ab\mu}. \quad (7.28)$$

Όπως δείξαμε και πιο πάνω είναι αντισυμμετρική στους δείκτες του εφαπτομενικού χώρου και τώρα επιβεβαιώνεται ότι πρέπει να ισχύει για να είναι μηδέν η συναλλοίωτη παράγωγος της μετρικής. Τώρα θα ορίσουμε την καμπυλότητα. Ορίζεται ως

$$\mathbf{R} = \frac{1}{4} R^a{}_{b\nu\mu} S_a{}^b dx^\nu \wedge dx^\mu, \quad (7.29)$$

όπου $dx^\nu \wedge dx^\mu$ το αντισυμμετρικό τανυστικό γινόμενο. Οι συνιστώσες $R^a{}_{b\nu\mu}$ δίνονται από τη σχέση

$$R^a{}_{b\nu\mu} = \partial_\nu A^a{}_{b\mu} - \partial_\mu A^a{}_{b\nu} + A^a{}_{c\nu} A^c{}_{b\mu} - A^a{}_{c\mu} A^c{}_{b\nu}. \quad (7.30)$$

Η στρέψη ορίζεται ως

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} T^a{}_{\nu\mu} P_a dx^\nu \wedge dx^\mu, \quad (7.31)$$

όπου $P_a = \partial_a$, οι μεταθέσεις και

$$T^a{}_{\nu\mu} = \partial_\nu h^a{}_\mu - \partial_\mu h^a{}_\nu + A^a{}_{c\nu} h^c{}_\mu - A^a{}_{c\mu} h^c{}_\nu. \quad (7.32)$$

Μπορούμε να εναλλάξουμε τους δείκτες τους εφαπτομενικούς με του κανονικού χωρόχρονου. Δηλαδή

$$R^\rho{}_{\lambda\nu\mu} = h_a{}^\rho h^b{}_\lambda R^a{}_{b\nu\mu}, \quad (7.33)$$

και

$$T^\rho{}_{\nu\mu} = h_a{}^\rho T^a{}_{\nu\mu}. \quad (7.34)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση που συνδέει τις δύο συνδέσεις βρίσκουμε

$$R^\rho{}_{\lambda\nu\mu} = \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} + \Gamma^\rho{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\rho{}_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}, \quad (7.35)$$

και

$$T^\rho{}_{\nu\mu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}. \quad (7.36)$$

Τώρα για τη σύνδεση αλλάζουμε τον ένα ελληνικό δείκτη που έχει με έναν λατινικό μέσω μιας τετράδας. Δηλαδή

$$A^a{}_{bc} = A^a{}_{b\mu} h_c{}^\mu. \quad (7.37)$$

Κάνοντας αυτή την αντικατάσταση βρίσκουμε

$$R^a{}_{bcd} = h_c{}^\mu \partial_\mu A^a{}_{bd} - h_d{}^\mu \partial_\mu A^a{}_{bc} + A^a{}_{ec} A^e{}_{bd} - A^a{}_{ed} A^e{}_{bc} - f^e{}_{cd} A^a{}_{be}, \quad (7.38)$$

και

$$T^a{}_{bc} = A^a{}_{cb} - A^a{}_{bc} - f^a{}_{bc}. \quad (7.39)$$

Χρησιμοποιούμε την ίδια σχέση με διαφορετική διάταξη δεικτών, δηλαδή για $T^a{}_{bc}$, $T_b{}^a{}_c$ και $T_c{}^a{}_b$, και παίρνοντας υπόψιν ότι τα $A^a{}_{bc}$ είναι αντισυμμετρικά ως προς την εναλλαγή των κάτω δεικτών, βρίσκουμε

$$A^a{}_{bc} = \frac{1}{2} (f_b{}^a{}_c + T_b{}^a{}_c + f_c{}^a{}_b + T_c{}^a{}_b - f^a{}_{bc} - T^a{}_{bc}). \quad (7.40)$$

Αυτή η σχέση μπορεί να γραφτεί ως

$$A^a{}_{bc} = \hat{A}^a{}_{bc} + K^a{}_{bc}, \quad (7.41)$$

όπου

$$\hat{A}^a{}_{bc} = \frac{1}{2} (f_b{}^a{}_c + f_c{}^a{}_b - f^a{}_{bc}), \quad (7.42)$$

είναι η έκφραση που παίρνουμε στην γενική σχετικότητα και ο έξτρα όρος

$$K^a{}_{bc} = \frac{1}{2} (T_b{}^a{}_c + T_c{}^a{}_b - T^a{}_{bc}), \quad (7.43)$$

που υπάρχει λόγω της στρέψης. Μπορούμε να ορίσουμε ένα τετραδιάνυσμα $K_\mu = \frac{1}{2} K^a{}_{b\mu} S_a{}^b$. Η γενική σύνδεση μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα της σύνδεσης της γενικής σχετικότητας και της σύνδεσης της σχέσης (7.43). Δηλαδή

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \hat{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} + K^\rho{}_{\mu\nu}, \quad (7.44)$$

όπου

$$\hat{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (7.45)$$

και

$$K^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_\nu{}^\rho{}_\mu + T_\mu{}^\rho{}_\nu - T^\rho{}_{\mu\mu}). \quad (7.46)$$

Θεωρούμε ανεξάρτητα διανύσματα βάσης της μορφής $\bar{h}^b{}_\beta$ για τα οποία ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέραμε προηγουμένως δηλαδή $\bar{h}^b{}_\beta \bar{h}^c{}^\beta = \delta^b{}_c$, $\bar{h}^c{}_\beta \bar{h}^c{}^\beta = \delta^\gamma{}_\beta$. Ορίζουμε μια συναλλοίωτη παράγωγο $\bar{\nabla}$ τέτοια ώστε

$$\bar{\nabla}_\alpha \bar{h}^c{}_\beta = \partial_\alpha \bar{h}^c{}_\beta - \bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\alpha} \bar{h}^c{}_\rho = 0, \quad (7.47)$$

όπου $\bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ η σύνδεση που συνδέεται με αυτή τη συναλλοίωτη παράγωγο. Άρα ισχύει ότι

$$\partial_\alpha \bar{h}^c_\beta = \bar{\Gamma}^\rho_{\beta\alpha} \bar{h}^c_\rho. \quad (7.48)$$

Αυτή τη σύνδεση την ονομάζουμε σύνδεση Weitzenbock. Ο ταυιστής καμπυλότητας με αυτή τη σύνδεση είναι μηδέν.

$$\bar{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\rho\gamma} \bar{\Gamma}^\rho_{\beta\delta} - \bar{\Gamma}^\alpha_{\rho\delta} \bar{\Gamma}^\rho_{\beta\gamma} = 0. \quad (7.49)$$

Τώρα η ποσότητα $T^\rho_{\nu\mu}$ θα πάρει τη μορφή

$$T^\rho_{\nu\mu} = \bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} - \bar{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} = \bar{h}^\rho_c (\partial_\nu \bar{h}^c_\mu - \partial_\mu \bar{h}^c_\nu). \quad (7.50)$$

Το βαθμωτό της στρέψης γράφεται σαν συνδιασμός συστολών των παραπάνω ποσοτήτων. Δηλαδή

$$T = \frac{1}{4} T^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\rho\mu\nu} T_{\nu\mu\rho} - T_{\rho\mu}{}^\rho T^{\nu\mu}{}_\nu. \quad (7.51)$$

Αν το χρησιμοποιήσουμε ως μια λαγκρατζιανή και πάρουμε τις εξισώσεις κίνησης θα δούμε ότι παίρνουμε την ίδια δράση με της γενικής σχετικότητας με έναν επιπλέον επιφανειακό όρο [130], συνεπώς παίρνουμε τις ίδιες εξισώσεις κίνησης. Όπως με την ισοδύναμη δράση της γενικής σχετικότητας με το βαθμωτό της στρέψης και της καμπυλότητας υπάρχει και ο ισοδύναμος όρος του Gauss-Bonnet ο οποίος διαφέρει ως προς τον όρο του Gauss-Bonnet με μία ολική παράγωγο που δεν αλλάζει τις εξισώσεις κίνησης. Το βαθμωτό γράφεται ως

$$T_G = \left(K^\kappa_{\phi\pi} K^{\phi\lambda}_\rho K^\mu_{\chi\sigma} K^{\chi\nu}_\tau - 2K^{\kappa\lambda}_\pi K^\mu_{\phi\rho} K^\phi_{\chi\sigma} K^{\chi\nu}_\tau + 2K^{\kappa\lambda}_\pi K^\mu_{\phi\rho} K^{\phi\nu}_\chi K^{\chi\sigma}_{\sigma\tau} + 2K^{\kappa\lambda}_\pi K^\mu_{\phi\rho} K^{\phi\nu}_{\sigma,\tau} \right) \delta^{\pi\rho\sigma\tau}_{\kappa\lambda\mu\nu}, \quad (7.52)$$

όπου $\delta^{\pi\rho\sigma\tau}_{\kappa\lambda\mu\nu}$ η γενικευμένη ορίζουσα των δέλτα Kronecker και οι ταυιστές K είναι οι έξτρα όροι από τις γενικές συνδέσεις που είδαμε προηγουμένως. Τώρα χρησιμοποιώντας αυτά μπορούμε να φτιάξουμε τη δράση η οποία είναι η

$$S_T = -\frac{M_P^2}{2} \int d^4x \theta T, \quad (7.53)$$

όπου $\theta = \det \theta^c_\mu = \det \sqrt{-g}$. Αντίστοιχα για το βαθμωτό Gauss-Bonnet έχουμε

$$S_{T_G} = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \theta T_G, \quad (7.54)$$

όπου T_G δίνεται από την (7.52). Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω αναλλοίωτες ποσότητες μπορούμε να κατασκευάσουμε δράση με γενικευμένες συνερτήσεις των παραπάνω βαθμωτών. Όπως για παράδειγμα το βαθμωτό $f(T, T_G)$. Η δράση είναι η [130]

$$S = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x e f(T, T_G). \quad (7.55)$$

Οι γενικές εξισώσεις κίνησης της δράσης βρίσκονται στην [130], όπου κανείς μπορεί να δει ότι η θεωρία είναι διαφορετική από τις $f(R)$, $f(R, G)$ ανδ $f(T)$ οπότε είναι μια νέα κλάση θεωριών βαρύτητας. Σε αυτή την εργασία ενδιαφερόμαστε για τις κοσμολογικές εφαρμογές της θεωρίας. Συνεπώς, θεωρούμε μια επίπεδη μετρική Friedmann-Robertson-Walker (FRW) της μορφής

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (7.56)$$

όπου $a(t)$ ο παράγοντας κλίμακας, που αντιστοιχεί στην διαγώνια τετράδα

$$e^A_{\mu} = \text{διαγ}(1, a(t), a(t), a(t)). \quad (7.57)$$

Σε αυτή την περίπτωση το βαθμωτό της στρέψης και το τηλεπαράλληλο βαθμωτό Gauss-Bonnet γίνονται

$$T = 6H^2 \quad (7.58)$$

$$T_G = 24H^2(\dot{H} + H^2), \quad (7.59)$$

όπου $H = \frac{\dot{a}}{a}$ η παράμετρος Hubble και οι τελείες οι παράγωγοι ως προς τον χρόνο t . Οι γενικές εξισώσεις κίνησης για την επίπεδη μετρική είναι [131]

$$f - 12H^2 f_T - T_G f_{T_G} + 24H^3 \dot{f}_{T_G} = 2M_P^{-2}(\rho_r + \rho_m) \quad (7.60)$$

$$f - 4(3H^2 + \dot{H})f_T - 4H\dot{f}_T - T_G f_{T_G} + \frac{2}{3H}T_G \dot{f}_{T_G} + 8H^2 \ddot{f}_{T_G} = -2M_P^{-2}(p_r + p_m), \quad (7.61)$$

όπου $\dot{f}_T = f_{TT}\dot{T} + f_{TT_G}\dot{T}_G$, $\dot{f}_{T_G} = f_{TT_G}\dot{T} + f_{T_G T_G}\dot{T}_G$, και $\ddot{f}_{T_G} = f_{TTT_G}\dot{T}^2 + 2f_{TT_G T_G}\dot{T}\dot{T}_G + f_{T_G T_G T_G}\dot{T}_G^2 + f_{TTT_G}\ddot{T} + f_{T_G T_G}\ddot{T}_G$, και οι ποσότητες f_{TT} , f_{TT_G} , ... υποδηλώνουν μερικές παραγώγους ως προς τις ποσότητες T και T_G . Στις παραπάνω εξισώσεις έχουμε εισάγει τους τομείς της ακτινοβολίας και της ύλης οι οποίες αντιστοιχούν σε ιδανικά ρευστά με πυκνότητες ενέργειας ρ_r, ρ_m και πιέσεις p_r, p_m , αντίστοιχα. Τέλος, στις παραπάνω εξισώσεις για $f(T, T_G) = -T + \Lambda$ παίρνουμε τις εξισώσεις της γενικής σχετικότητας και της τηλεπαράλληλης ισοδυναμίας της. Η ποσότητα Λ είναι η κοσμολογική σταθερά.

όπως βλέπουμε μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις (7.60) ανδ (7.61) στη συνηθισμένη μορφή

$$3M_P^2 H^2 = (\rho_r + \rho_m + \rho_{DE}) \quad (7.62)$$

$$-2M_P^2 \dot{H} = (\rho_r + p_r + \rho_m + p_m + \rho_{DE} + p_{DE}), \quad (7.63)$$

όπου έχουμε ορίσει τον τομέα της σκοτεινής ενέργειας με την πυκνότητα ενέργειας και την πίεση που αντιστοιχεί.

$$\rho_{DE} \equiv \frac{M_P^2}{2} \left(6H^2 - f + 12H^2 f_T + T_G f_{T_G} - 24H^3 \dot{f}_{T_G} \right), \quad (7.64)$$

$$p_{DE} \equiv \frac{M_P^2}{2} \left[-2(2\dot{H} + 3H^2) + f - 4(\dot{H} + 3H^2)f_T - 4H\dot{f}_T - T_G f_{T_G} + \frac{2}{3H} T_G \dot{f}_{T_G} + 8H^2 \ddot{f}_{T_G} \right]. \quad (7.65)$$

Σε αυτό το κομμάτι θα ασχοληθούμε με τους συνδέσμους στην νουκλεοσύνθεση σε βαρύτητες που περιέχουν το βαθμωτό στρέψης σε μια πιο γενικευμένη συνάρτηση. Κάποια μοντέλα είναι γνωστά στο ότι οδηγούν σε μια βιώσιμη φαινομενολογία. Συνεπώς, θα εξερευνήσουμε κάποια μοντέλα, και θα δούμε εάν μπορούν να μας δώσουν κάποιους συνδέσμους. Τα μοντέλα που θα μελετήσουμε είναι 5 και θα επιβάλλουμε τους συνδέσμους της νουκλεοσύνθεσης που αναλύσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο και θα πάρουμε συνδέσμους για τις ελεύθερες παραμέτρους της θεωρίας.

7.1 Μοντέλο 1

Πρώτα εξετάζουμε το μοντέλο $f = -T + \beta_1 \sqrt{T^2 + \beta_2 T_G}$. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα ενέργειας ρ_{DE} την οποία υπολογίζουμε στην εποχή της ακτινοβολίας οπότε οι παράγωγοι της σταθεράς Hubble $H(t) = \frac{1}{2t}$ είναι δυνάμεις της σταθεράς Hubble όπως για παράδειγμα $\dot{H} = -2H^2$, $\ddot{H} = 8H^3$, και χρησιμοποιώντας τον σύνδεσμο για την σκοτεινή ενέργεια στη σημερινή εποχή,

$$\Omega_{DE0} \equiv \rho_{DE0}/(3M_P^2 H_0^2) \approx 0.7, \quad (7.66)$$

βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_f}{T_f} &= (10c_q T_f^3)^{-1} \zeta H_0 \Omega_{DE0} (3 - 2\beta_2)^{-3/2} \\ &\times (9 - 15\beta_2 + 6\beta_2^2) \left[(3 + 2\beta_2) H_0^2 + 2\beta_2 \dot{H}_0 \right]^{3/2} \\ &\times \left[(9 + 3\beta_2 - 2\beta_2^2) H_0^4 + 9\beta_2 H_0^2 \dot{H}_0 + \beta_2^2 H_0 \ddot{H}_0 \right]^{-1}, \quad (7.67) \end{aligned}$$

όπου

$$\zeta \equiv \left(\frac{4\pi^3 g_*}{45} \right)^{\frac{1}{2}} M_{Pl}^{-1}. \quad (7.68)$$

Σε αυτή την έκφραση θέτουμε [80]

$$\Omega_{DE0} \approx 0.7, \quad H_0 = 1.4 \times 10^{-42} \text{ GeV}, \quad (7.69)$$

και οι παράγωγοι της σταθεράς Hubble στη σημερινή εποχή δίνονται από τις σχέσεις $\dot{H}_0 = -H_0^2 (1 + q_0)$ και $\ddot{H}_0 = H_0^3 (j_0 + 3q_0 + 2)$ όπου $q_0 = -0.503$ η σημερινή τιμή της παραμέτρου επιβράδυνσης του σύμπαντος [80], και $j_0 = 1.011$

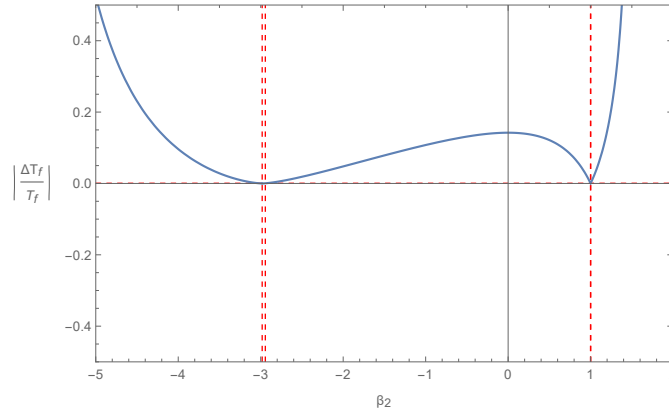
η σημερινή τιμή της παραγώγου της επιτάχυνσης ως προς τον [106, 107]. Συνεπώς, $\dot{H}_0 \approx -9.7 \times 10^{-85} \text{GeV}^2$ και $\ddot{H}_0 \approx 4.1 \times 10^{-126} \text{GeV}^3$. Χρησιμοποιώντας τον σύνδεσμο από την νουκλεοσύνθεση

$$\left| \frac{\delta T_f}{T_f} \right| < 4.7 \times 10^{-4}, \quad (7.70)$$

βρίσκουμε ότι $\beta_2 \in (-2.98211, -2.94398) \cup (0.999033, 1.00096)$, όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την (7.66) για να βρούμε

$$\beta_1 = 6 \left(\sqrt{12} \right)^{-1} H_0 \Omega_{DE0} \left[(3 + 2\beta_2) H_0^2 + 2\beta_2 \dot{H}_0 \right]^{3/2} \times \left[(9 + 3\beta_2 - 2\beta_2^2) H_0^4 + 9\beta_2 H_0^2 \dot{H}_0 + \beta_2^2 H_0 \ddot{H}_0 \right]^{-1}. \quad (7.71)$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω όρια της παραμέτρου β_2 βρίσκουμε $\beta_1 \in (2.08527 \times 10^{-26}, 0.00100975) \cup (1.38206, 1.384)$. Στα μοντέλα που ακολουθούν θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός $-2.98211 < \beta_2 < \frac{3}{2}$, στο οποίο καταλήγουμε αν δούμε τη μορφή του μοντέλου (7.67). Στην γραφική παράσταση 7.1 σχεδιάζουμε την απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ από την (7.67) σε σχέση με την ελεύθερη παράμετρο β_2 . Όπως βλέπουμε τα όρια βρίσκονται στις κάθετες κόκκινες γραμμές. Λόγω της μεγάλης κλίμακας της γραφικής το όριο (7.70) δεν φαίνεται.



Σχήμα 7.1: Η απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ σε σχέση με την ελεύθερη παράμετρο β_2 (μπλε γραμμή), στην περίπτωση του μοντέλου $f = -T + \beta_1 \sqrt{T^2 + \beta_2 T_G}$, Όπως βλέπουμε τα όρια της ελεύθερης παραμέτρου β_2 βρίσκονται στις κάθετες κόκκινες γραμμές όπου ο σύνδεσμος (7.70) είναι έγκυρος (οριζόντια κόκκινη γραμμή). Εδώ φαίνεται σχεδόν στο μηδέν λόγω της μεγάλης κλίμακας του κατακόρυφου άξονα.

7.2 Μοντέλο 2

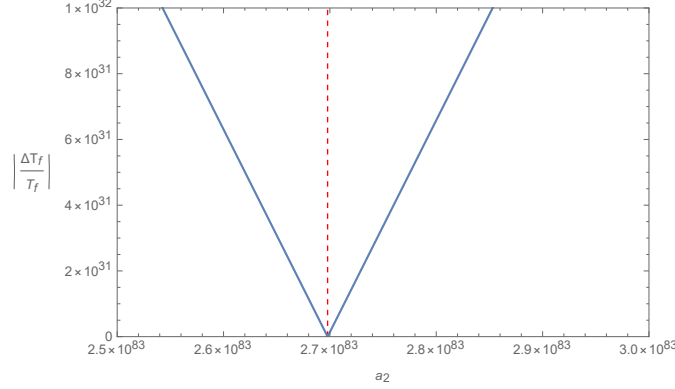
Το επόμενο μοντέλο που θα εξετάσουμε είναι το $f = -T + a_1 T^2 + a_2 T \sqrt{|T_G|}$, όπου a_1, a_2 είναι οι ελεύθερες παράμετροι της θεωρίας. Σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε

$$\frac{\delta T_f}{T_f} = \frac{3}{10} c_q^{-1} \zeta^3 T_f \left\{ \frac{\Omega_{DE0}}{3H_0^2} - \sqrt{6} a_2 \left[\frac{\sqrt{H_0^2 + \dot{H}_0}}{6H_0} \left(6 - \frac{2\dot{H}_0^2 - H_0\ddot{H}_0}{(H_0^2 + \dot{H}_0)^2} \right) - 1 \right] \right\} \quad (7.72)$$

Χρησιμοποιώντας τον σύνδεσμο (7.70) βρίσκουμε ότι η σχέση (7.72) είναι έγκυρη για μια πολύ μικρή περιοχή γύρω από το σημείο $2.69784 \times 10^{83} \text{ GeV}^{-2}$, όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τον σύνδεσμο από τη σημερινή κοσμολογική εποχή (7.66)

$$a_1 = \frac{\Omega_{DE0}}{18H_0^2} - \sqrt{6} a_2 \frac{\sqrt{H_0^2 + \dot{H}_0}}{36H_0} \left(6 - \frac{2\dot{H}_0^2 - H_0\ddot{H}_0}{(H_0^2 + \dot{H}_0)^2} \right). \quad (7.73)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω τιμή της παραμέτρου a_2 βρίσκουμε ότι $a_1 = -1.10139 \times 10^{83} \text{ GeV}^{-2}$. Στην γραφική παράσταση 7.2 σχεδιάζουμε την απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ από την (7.73) συναρτήσει της ελεύθερης παραμέτρου a_2 . Βλέπουμε ότι ο λόγος $\delta T_f/T_f$ είναι γραμμικός ως προς την παράμετρο a_2 . Λόγω μεγάλης κλίμακας της γραφικής το όριο 4.7×10^{-4} δεν φαίνεται. όπως βλέπουμε, το όριο (7.70) είναι έγκυρο όταν ο λόγος $\delta T_f/T_f$ είναι κοντά στο 0.



Σχήμα 7.2: Η απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ συναρτήσει της ελεύθερης παραμέτρου a_2 (μπλε γραμμή), στην περίπτωση του μοντέλου $f = -T + a_1 T^2 + a_2 T \sqrt{|T_G|}$, όπως βλέπουμε ο λόγος $\frac{\Delta T_f}{T_f}$ είναι γραμμικός ως προς την παράμετρο a_2 και το σημείο $2.69784 \times 10^{83} \text{ GeV}^{-2}$ είναι όπου $\frac{\Delta T_f}{T_f} \rightarrow 0$ (κάθετη κόκκινη γραμμή όπου το όριο (7.70) είναι έγκυρο).

7.3 Μοντέλο 3

Τώρα θα αναλύσουμε το μοντέλο $f = -T + \beta_1 \sqrt{T^2 + \beta_2 T_G} + a_1 T^2 + a_2 T \sqrt{|T_G|}$, όπου έχουμε σαν ελεύθερες παραμέτρους τις $\beta_1, \beta_2, a_1, a_2$. Επειδή οι σύνδεσμοι που έχουμε είναι λιγότεροι από τις παραμέτρους, για την παράμετρο β_2 χρησιμοποιούμε τον περιορισμό ότι $-2.98211 < \beta_2 < \frac{3}{2}$, επειδή βρίσκεται μέσα στις ρίζες.

Σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_f}{T_f} = & - (60c_q T_f^3)^{-1} \left\{ 3\sqrt{12}\beta_1 (3 - 2\beta_2)^{-1/2} (1 + \beta_2 - 2\beta_1) \right. \\ & - 18 \left[\frac{\Omega_{DE0}}{3H_0^2} + \frac{\sqrt{12}\beta_1}{18H_0^3} \left[(3 + 2\beta_2) H_0^2 + 2\beta_2 \dot{H}_0 \right]^{-1/2} \right. \\ & \quad \left. \left[(3 - 6\beta_1 + 2\beta_2) H_0^2 + 2\beta_2 \dot{H}_0 \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sqrt{6}}{6} \frac{a_2}{H_0} \sqrt{H_0^2 + \dot{H}_0} \left(6 - \frac{2\dot{H}_0^2 - H_0 \ddot{H}_0}{(H_0^2 + \dot{H}_0)^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sqrt{12}\beta_1 \beta_2}{18H_0^3} \left[(3 + 2\beta_2) H_0^2 + 2\beta_2 \dot{H}_0 \right]^{-3/2} \right. \\ & \quad \left. \times \left[(3 + 2\beta_2) H_0^4 + (9 + 8\beta_2) H_0^2 \dot{H}_0 + \beta_2 (4\dot{H}_0^2 + H_0 \ddot{H}_0) \right] \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{6} a_2 \right\} \zeta^2 T_f^4 \zeta. \quad (7.74) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον σύνδεσμο (7.70) και 2 σετ τιμών για τις παραμέτρους

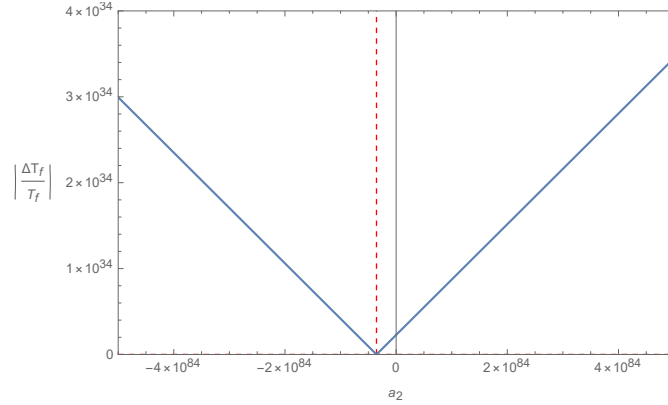
β_1, β_2 από το εύρος τιμών που βρήκαμε στο μοντέλο 1, θα προσδιορίσουμε την τιμή της παραμέτρου a_2 . Χρησιμοποιώντας τις τιμές $\beta_1 = 1.383$ και $\beta_2 = 1$ βρίσκουμε ότι η (7.72) είναι έγκυρη για μια πολύ μικρή περιοχή γύρω από το σημείο $a_2 = -3.5332 \times 10^{83} \text{ GeV}^{-2}$. Τώρα παίρνοντας τις τιμές $\beta_1 = 0.001$, $\beta_2 \approx -2.96$ βρίσκουμε ότι η (7.72) είναι έγκυρη για μια πολύ μικρή περιοχή γύρω από το σημείο $a_2 = -5.33396 \times 10^{83} \text{ GeV}^{-2}$, όπου έχουμε χρησιμοποιήσει

$$\begin{aligned}
 a_1 = & \frac{\Omega_{DE0}}{18H_0^2} + \frac{\sqrt{12}\beta_1}{108H_0^3} \left[(3 + 2\beta_2) H_0^2 + 2\beta_2 \dot{H}_0 \right]^{-1/2} \\
 & \left[(3 - 6\beta_1 + 2\beta_2) H_0^2 + 2\beta_2 \dot{H}_0 \right] \\
 & - \frac{\sqrt{6}}{36} \frac{a_2}{H_0} \sqrt{H_0^2 + \dot{H}_0} \left(6 - \frac{2\dot{H}_0^2 - H_0\ddot{H}_0}{(H_0^2 + \dot{H}_0)^2} \right) \\
 & - \frac{\sqrt{12}\beta_1\beta_2}{108H_0^3} \left[(3 + 2\beta_2) H_0^2 + 2\beta_2 \dot{H}_0 \right]^{-3/2} \\
 & \times \left[(3 + 2\beta_2) H_0^4 + (9 + 8\beta_2) H_0^2 \dot{H}_0 + \beta_2 (4\dot{H}_0^2 + H_0\ddot{H}_0) \right], \quad (7.75)
 \end{aligned}$$

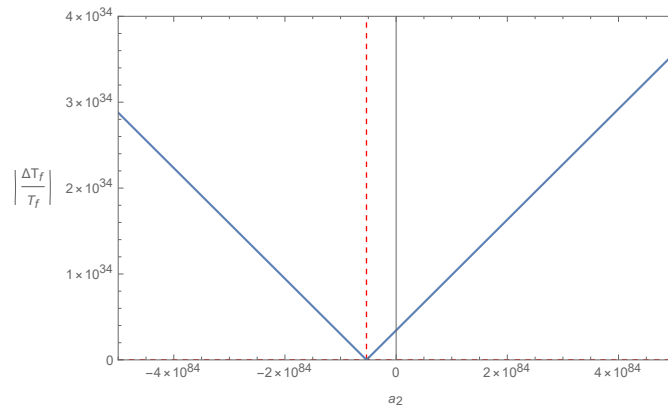
από την (7.66). Χρησιμοποιώντας την τιμή της a_2 βρίσκουμε ότι $a_1 = 1.44242 \times 10^{83} \text{ GeV}^{-2}$ για την πρώτη περίπτωση και $a_1 = 2.17758 \times 10^{83} \text{ GeV}^{-2}$ για την δεύτερη. Στις γραφικές παραστάσεις 7.3, 7.4 σχεδιάζουμε την απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ από την (7.74) συναρτήσει της ελεύθερης παραμέτρου a_2 . Βλέπουμε ότι η εξάρτηση του λόγου είναι γραμμική ως προς την παράμετρο a_2 και μόνο μια πολύ μικρή περιοχή επαληθεύει τον σύνδεσμο της νουκλεοσύνθεσης. Τώρα θα δούμε πιο γενικές συναρτήσεις του βαθμωτού της στρέψης. Η μορφή θα είναι $f(T, T_G) = f(T^2 + \beta_2 T_G)$. Μπορούμε να γράψουμε την (7.64) ως

$$\begin{aligned}
 \rho_{DE} = & -\frac{M_P^2}{2} \left[-6H^2 + f - (24H^2T + \beta_2 T_G) f' + \right. \\
 & \left. \beta_2 H^3 (2T\dot{T} + \beta_2 \dot{T}_G) f'' \right] \quad (7.76)
 \end{aligned}$$

όπου $\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t}$, $\dot{T}_G = \frac{\partial T_G}{\partial t}$ και $f' = \frac{\partial f(T^2 + \beta_2 T_G)}{\partial (T^2 + \beta_2 T_G)}$, $f'' = \frac{\partial^2 f(T^2 + \beta_2 T_G)}{\partial (T^2 + \beta_2 T_G)^2}$.



Σχήμα 7.3: Η απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ συναρτήσει της ελεύθερης παραμέτρου a_2 (μπλε γραμμή), για την περίπτωση του μοντέλου $f = -T + \beta_1\sqrt{T^2 + \beta_2 T_G} + a_1 T^2 + a_2 T\sqrt{|T_G|}$ και για τις τιμές $\beta_1 = 1.383$, $\beta_2 = 1$. Όπως βλέπουμε ο λόγος $\frac{\Delta T_f}{T_f}$ είναι γραμμικός ως προς την παράμετρο a_2 και το σημείο $-3.5332 \times 10^{83} \text{ GeV}^{-2}$ είναι όπου $\frac{\Delta T_f}{T_f} \rightarrow 0$ (κόκκινη γραμμή) και όπου το όριο (7.70) είναι έγκυρο.



Σχήμα 7.4: Η απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ συναρτήσει της ελεύθερης παραμέτρου a_2 (μπλε γραμμή), για την περίπτωση του μοντέλου $f = -T + \beta_1\sqrt{T^2 + \beta_2 T_G} + a_1 T^2 + a_2 T\sqrt{|T_G|}$ και για τις τιμές $\beta_1 = 0.001$, $\beta_2 \approx -2.96$. Όπως βλέπουμε ο λόγος $\frac{\Delta T_f}{T_f}$ είναι γραμμικός ως προς την παράμετρο a_2 και το σημείο $-5.33396 \times 10^{83} \text{ GeV}^{-2}$ είναι όπου $\frac{\Delta T_f}{T_f} \rightarrow 0$ (κόκκινη γραμμή) και όπου το όριο (7.70) είναι έγκυρο.

7.4 Μοντέλο 4

Το επόμενο μοντέλο που εξετάζουμε είναι το εκθετικό $f = -T + \beta_1 (T^2 + \beta_2 T_G)^n$, όπου οι ελεύθερες παράμετροι της θεωρίας είναι τρεις, οι β_1 , β_2 , n . Σε αυτό το μοντέλο θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες δεδομένες τιμές για τις παραμετρους β_1 , β_2 με σκοπό να πάρουμε σύνδεσμο για την παράμετρο n . Η παράμετρος β_1 θα καθοριστεί από το σύνδεσμο της σκοτεινής ενέργειας την σημερινή εποχή. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

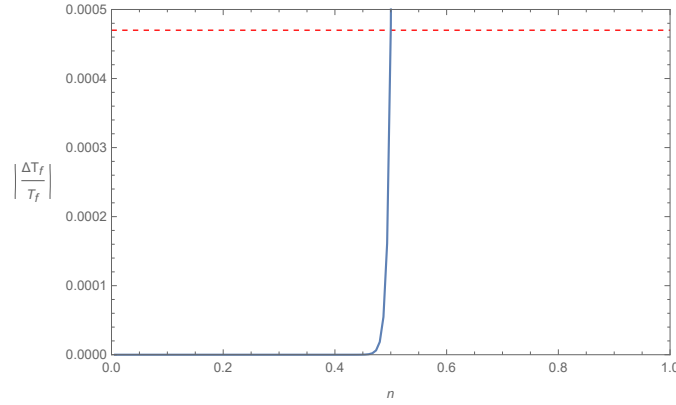
$$\begin{aligned} \frac{\delta T_f}{T_f} = & (10c_q)^{-1} \Omega_{DE0} H_0^{2(1-n)} \zeta^{4n-1} T_f^{8n-7} (3 - 2\beta_2)^{n-2} \\ & \left[(3 + 2\beta_2) H_0^2 + 2\beta_2 \dot{H}_0 \right]^{2-n} \left[(9 - 12\beta_2 + 4\beta_2^2) \right. \\ & \quad \left. - 2n (18 - 39\beta_2 + 18\beta_2^2) + 16n^2 \beta_2 (2\beta_2 - 3) \right] \\ & \left\{ (9 + 12\beta_2 + 4\beta_2^2) H_0^4 + 4\beta_2 (3 + 2\beta_2) H_0^2 \dot{H}_0 + 4\beta_2^2 \dot{H}_0^2 \right. \\ & \quad - 2n \left[(18 + 15\beta_2 + 2\beta_2^2) H_0^4 + \beta_2 (27 + 12\beta_2) H_0^2 \dot{H}_0 \right. \\ & \quad \left. \left. + 6\beta_2^2 \dot{H}_0^2 + 2\beta_2^2 H_0 \ddot{H}_0 \right] + 2n^2 \beta_2 \left[4(3 + 2\beta_2) H_0^2 \dot{H}_0 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 4\beta_2 \dot{H}_0^2 + 2\beta_2 H_0 \ddot{H}_0 \right] \right\}^{-1} \quad (7.77) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τον σύνδεσμο (7.70) και 4 τιμες για την παράμετρο β_2 από το εύρος τιμών που βρήκαμε στο μοντέλο 1. Για $\beta_2 \approx -2.9440$ βρίσκουμε ότι στο εύρος τιμών $n \in [-10, 10]$ (παίρνουμε μικρό εύρος τιμών για να πάρουμε έγκυρο αποτέλεσμα) το όριο (7.70) είναι έγκυρο για $n \lesssim 0.499$. Για $\beta_2 = -2$ και εύρος τιμών $n \in [-10, 10]$ παίρνουμε ότι $n \lesssim 0.474$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω εύρος τιμών για το n και για $\beta_2 = -1$ βρίσκουμε $n \lesssim 0.467$. Παίρνοντας το παραπάνω εύρος τιμών για το n για $\beta_2 = 1$ βρίσκουμε $n \lesssim 0.468$. Όπως είπαμε παραπάνω ο σύνδεσμος για την σκοτεινή ενέργεια στο παρόν μας δίνει σύνδεσμο για την παράμετρο β_1 . Δηλαδή

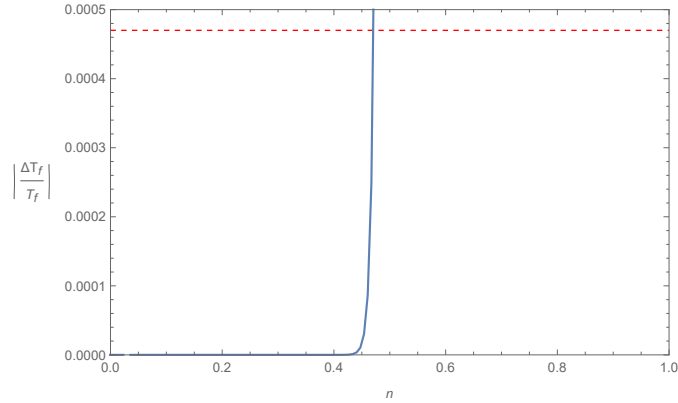
$$\begin{aligned} \beta_1 = & -6 (12)^{-n} H_0^{2(1-n)} \Omega_{DE0} \left[(3 + 2\beta_2) H_0^2 + 2\beta_2 \dot{H}_0 \right]^{2-n} \\ & \left\{ (9 + 12\beta_2 + 4\beta_2^2) H_0^4 + 4\beta_2 (3 + 2\beta_2) H_0^2 \dot{H}_0 + 4\beta_2^2 \dot{H}_0^2 \right. \\ & \quad - 2n \left[(18 + 15\beta_2 + 2\beta_2^2) H_0^4 + \beta_2 (27 + 12\beta_2) H_0^2 \dot{H}_0 \right. \\ & \quad \left. \left. + 6\beta_2^2 \dot{H}_0^2 + 2\beta_2^2 H_0 \ddot{H}_0 \right] + 2n^2 \beta_2 \left[4(3 + 2\beta_2) H_0^2 \dot{H}_0 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 4\beta_2 \dot{H}_0^2 + 2\beta_2 H_0 \ddot{H}_0 \right] \right\}^{-1}, \quad (7.78) \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την (7.66). Τώρα έχοντας το έγκυρο εύρος τιμών για το n και με τις τιμές για την παράμετρο β_2 μπορούμε να προσδιορίσουμε το εύρος τιμών της παραμέτρου β_1 . Παίρνοντας $\beta_2 \approx -2.9440$, $n \lesssim 0.499$ βρίσκουμε $\beta_1 \in [-6.14078 \times 10^{-82}, 0.000685938] \text{ GeV}^{2(1-2n)}$. Για $\beta_2 = -2$, $n \lesssim$

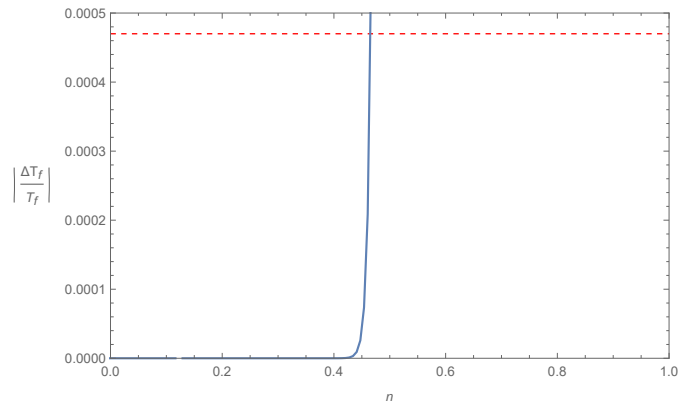
0.474 βρίσκουμε $\beta_1 \in [-3.50072 \times 10^{-74}, 5.82082 \times 10^{-6}] \text{ GeV}^{2(1-2n)}$. Χρησιμοποιώντας $\beta_2 = -1$, $n \lesssim 0.467$ βρίσκουμε $\beta_1 \in [-4.38408 \times 10^{-58}, 1.22584 \times 10^{-6}] \text{ GeV}^{2(1-2n)}$. Τέλος για $\beta_2 = 1$, $n \lesssim 0.468$ βρίσκουμε $\beta_1 \in [-6.39661 \times 10^{-8}, 8.994131 \times 10^{-6}] \text{ GeV}^{2(1-2n)}$. Στις γραφικές παραστάσεις (7.5), (7.6), (7.7), (7.8) σχεδιάζουμε την απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ από την (7.77) συναρτήσει της ελεύθερης παραμέτρου n . Παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις το n πρέπει να είναι $n \lesssim 0.5$ για να ικανοποιεί το (7.70).



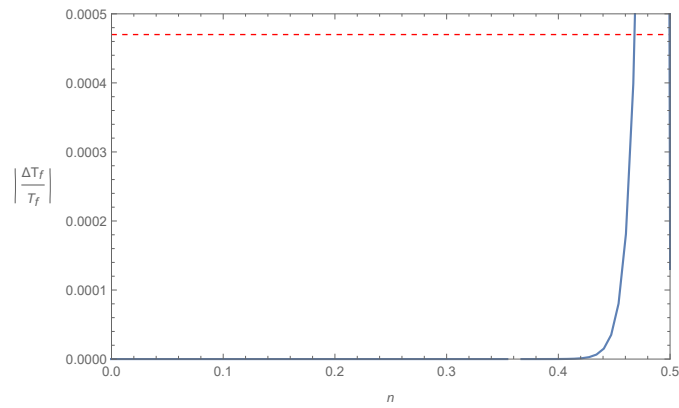
Σχήμα 7.5: Απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ συναρτήσει της ελεύθερης παραμέτρου n (μπλε γραμμή), στην περίπτωση του μοντέλου $f = -T + \beta_1 (T^2 + \beta_2 T_G)^n$ και με τιμή $\beta_2 \approx -2.9440$. Επίσης βλέπουμε το πάνω όριο από τον σύνδεσμο της νουκλεοσύνθεσης (κόκκινη γραμμή). Η όλη διαδικασία έγινε για $n \in [-10, 10]$. Όπως παρατηρούμε, οι σύνδεσμοι από την νουκλεοσύνθεση επιβάλλουν $n \lesssim 0.499$.



Σχήμα 7.6: Απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ συναρτήσει της ελεύθερης παραμέτρου n (μπλε γραμμή), στην περίπτωση του μοντέλου $f = -T + \beta_1 (T^2 + \beta_2 T_G)^n$ και με τιμή $\beta_2 = -2$. Επίσης βλέπουμε το πάνω όριο από τον σύνδεσμο της νουκλεοσύνθεσης (κόκκινη γραμμή). Η όλη διαδικασία έγινε για $n \in [-10, 10]$. Οπως παρατηρούμε, οι σύνδεσμοι από την νουκλεοσύνθεση επιβάλλουν $n \lesssim 0.474$.



Σχήμα 7.7: Απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ συναρτήσει της ελεύθερης παραμέτρου n (μπλε γραμμή), στην περίπτωση του μοντέλου $f = -T + \beta_1 (T^2 + \beta_2 T_G)^n$ και με τιμή $\beta_2 = -1$. Επίσης βλέπουμε το πάνω όριο από τον σύνδεσμο της νουκλεοσύνθεσης (κόκκινη γραμμή). Η όλη διαδικασία έγινε για $n \in [-10, 10]$. Οπως παρατηρούμε, οι σύνδεσμοι από την νουκλεοσύνθεση επιβάλλουν $n \lesssim 0.467$.



Σχήμα 7.8: Απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ συναρτήσει της ελεύθερης παραμέτρου n (μπλε γραμμή), στην περίπτωση του μοντέλου $f = -T + \beta_1 (T^2 + \beta_2 T_G)^n$ και με τιμή $\beta_2 = 1$. Επίσης βλέπουμε το πάνω όριο από τον σύνδεσμο της νουκλεοσύνθεσης (κόκκινη γραμμή). Η όλη διαδικασία έγινε για $n \in [-10, 10]$. Οπως παρατηρούμε, οι σύνδεσμοι από την νουκλεοσύνθεση επιβάλλουν $n \lesssim 0.468$.

7.5 Μοντέλο 5

Το τελευταίο μοντέλο που εξετάζουμε είναι το $f = -T + a \ln \beta_1 (T^2 + \beta_2 T_G)^n$, όπου οι ελεύθερες παράμετροι είναι οι a , β_1 , β_2 , n . Από τον σύνδεσμο της σημερινής τιμής της σκοτεινής ενέργειας θα πάρουμε την τιμή της παραμέτρου a . Κάνοντας την ανάλυση που κάναμε και στα προηγούμενα μοντέλα βρίσκουμε

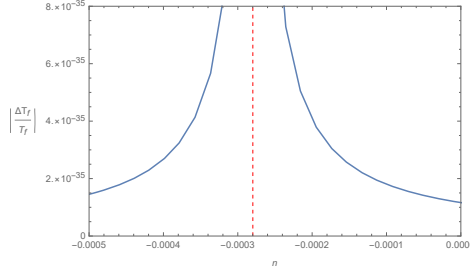
$$\begin{aligned} \frac{\delta T_f}{T_f} = & (10c_q \zeta T_f^7)^{-1} H_0^2 \Omega_{DE0} \{ \ln \beta_1 + n [\ln 12 \\ & + 4 \ln (\zeta T_f^2) + \ln (3 - 2\beta_2) - 2(3 - 2\beta_2)^{-2} \\ & (18 - 39\beta_2 + 18\beta_2^2)] \} \\ & \left\{ \ln \beta_1 + n \left[\ln 12 + 2 \ln (H_0) + \ln \left[(3 + 2\beta_2) H_0^2 + 2\beta_2 \dot{H}_0 \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \left[(3 + 2\beta_2) H_0^2 + 2\beta_2 \dot{H}_0 \right]^{-2} \left[(18 + 15\beta_2 + 2\beta_2^2) H_0^4 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \beta_2 (27 + 12\beta_2) H_0^2 \dot{H}_0 + 6\beta_2^2 \dot{H}_0^2 + 2\beta_2^2 H_0 \ddot{H}_0 \right] \right] \right\}^{-1} \quad (7.79) \end{aligned}$$

όπου

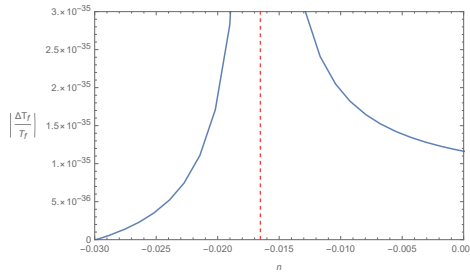
$$\begin{aligned} a = & -6H_0^2 \Omega_{DE0} \{ \ln \beta_1 + n [\ln 12 + 2 \ln (H_0) + \\ & \ln \left[(3 + 2\beta_2) H_0^2 + 2\beta_2 \dot{H}_0 \right] \\ & - 2 \left[(3 + 2\beta_2) H_0^2 + 2\beta_2 \dot{H}_0 \right]^{-2} \left[(18 + 15\beta_2 + 2\beta_2^2) H_0^4 + \right. \\ & \left. \beta_2 (27 + 12\beta_2) H_0^2 \dot{H}_0 + 6\beta_2^2 \dot{H}_0^2 + 2\beta_2^2 H_0 \ddot{H}_0 \right] \}^{-1}, \quad (7.80) \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την (7.66). Τώρα θα πάρουμε τιμές για τις παραμέτρους β_1 , β_2 από το εύρος τιμών των προηγούμενων μοντέλων και λαμβάνοντας υπόψιν τους περιορισμούς από τον λογάριθμο. Για $\beta_1 = 0.001 \text{ GeV}^{-4n}$, $\beta_2 \approx -2.9440$ βρίσκουμε ότι οι τιμές που μπορεί να πάρει το n είναι οποιαδήποτε εκτός από μια πολύ μικρή περιοχή γύρω από το σημείο -0.00027975 διότι η (7.79) απειρίζεται. Τώρα αντικαθιστώντας την τιμή του n στη σχέση για το a βρίσκουμε ότι το a μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή εκτός από 0 GeV^2 . Κάνοντας την ίδια διαδικασία για $\beta_1 = 0.001 \text{ GeV}^{-4n}$, $\beta_2 = -2$ βρίσκουμε ότι το n μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή εκτός από -0.0165378 και το a μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή εκτός από 0 GeV^2 . Για $\beta_1 = 0.001 \text{ GeV}^{-4n}$, $\beta_2 = -1$ βρίσκουμε ότι το n μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή εκτός από -0.0176744 και το a μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή εκτός από 0 GeV^2 . Για $\beta_1 = 0.001 \text{ GeV}^{-4n}$, $\beta_2 = 1$ βρίσκουμε ότι το n μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή εκτός από -0.0179833 και το a μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή εκτός από 0 GeV^2 . Στις γραφικές παραστάσεις (7.9), (7.10), (7.11), (7.12) σχεδιάζουμε την απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ από την (7.79) συναρτήσει της ελεύθερης παραμέτρου n . Το μοντέλο μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή για την παράμετρο n εκτός από πολύ

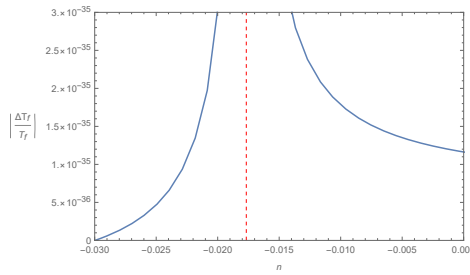
μικρές περιοχές γύρω από τα σημεία -0.00027975 , -0.0165378 , -0.0176744 , -0.0179833 στα οποία η (7.79) απειρίζεται.



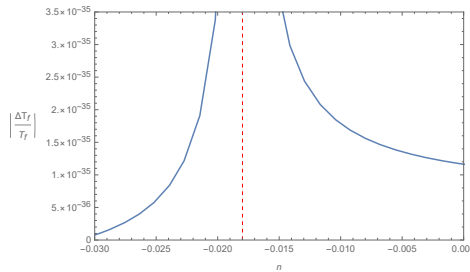
Σχήμα 7.9: Η απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ ως προς την ελεύθερη παράμετρο n (μπλε γραμμή), για το μοντέλο $f = -T + a \ln \beta_1 (T^2 + \beta_2 T_G)^n$ και χρησιμοποιώντας $\beta_1 = 0.001 \text{ GeV}^{-4n}$, $\beta_2 \approx -2.96$. Η κάθετη κόκκινη γραμμή είναι όπου ο λόγος $\left| \frac{\delta T_f}{T_f} \right|$ απειρίζεται. Δηλαδή το σημείο $n = -0.00027975$.



Σχήμα 7.10: Η απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ ως προς την ελεύθερη παράμετρο n (μπλε γραμμή), για το μοντέλο $f = -T + a \ln \beta_1 (T^2 + \beta_2 T_G)^n$ και χρησιμοποιώντας $\beta_1 = 0.001 \text{ GeV}^{-4n}$, $\beta_2 = -2$. Η κάθετη κόκκινη γραμμή είναι όπου ο λόγος $\left| \frac{\delta T_f}{T_f} \right|$ απειρίζεται. Δηλαδή το σημείο $n = -0.0165378$.



Σχήμα 7.11: Η απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ ως προς την ελεύθερη παράμετρο n (μπλε γραμμή), για το μοντέλο $f = -T + a \ln \beta_1 (T^2 + \beta_2 T_G)^n$ και χρησιμοποιώντας $\beta_1 = 0.001 \text{ GeV}^{-4n}$, $\beta_2 = -1$. Η κάθετη κόκκινη γραμμή είναι όπου ο λόγος $\left| \frac{\delta T_f}{T_f} \right|$ απειρίζεται. Δηλαδή το σημείο $n = -0.0176744$.



Σχήμα 7.12: Η απόλυτη τιμή του λόγου $\delta T_f/T_f$ ως προς την ελεύθερη παράμετρο n (μπλε γραμμή), για το μοντέλο $f = -T + a \ln \beta_1 (T^2 + \beta_2 T_G)^n$ και χρησιμοποιώντας $\beta_1 = 0.001 \text{ GeV}^{-4n}$, $\beta_2 = 1$. Η κάθετη κόκκινη γραμμή είναι όπου ο λόγος $\left| \frac{\delta T_f}{T_f} \right|$ απειρίζεται. Δηλαδή το σημείο $n = -0.0179833$.

7.6 Συμπεράσματα

Η τροποποιημένη βαρύτητα προσπαθεί να δώσει εξηγήσεις σε θέματα που δεν έχουν επιλυθεί ακόμα στην εξέλιξη του σύμπαντος. Επίσης, να δώσει μια καλύτερη συμπεριφορά στην επανακανονικοποιησιμότητα της βαρύτητας στο μικροσκοπικό επίπεδο. Παρά τα πλεονεκτήματα που μας δίνει ξεχωριστά για διάφορα σημεία δύσκολα, πρέπει κάποιος να είναι προσεκτικός με τα σημερινά παρατηρησιακά δεδομένα διότι υπάρχει πολύ μεγάλη ακρίβεια και έτσι μια θεωρία τροποποιημένης βαρύτητας πρέπει να μπορεί να τα επαληθεύσει, όπως στην περίπτωση μας την νουκλεοσύνθεση. Σε αυτή τη δουλειά εξετάζουμε μία ενδιαφέρουσα κλάση τροποποιημένων θεωριών, την $f(T, T_G)$ βαρύτητα, στην οποία επιβάλλουμε συνδέσμους από την νουκλεοσύνθεση. Η $f(T, T_G)$ είναι ο συνδιασμός του βαθμωτού της στρέψης και του βαθμωτού Gauss-Bonnet στην περιγραφή με την στρέψη. Οπότε οι εξισώσεις Friedmann που παίρνουμε είναι ο όρος της γενικής σχετικότητας συν ένας εξτρα όρος λόγω της εξτρα όρου στη δράση ο οποίος είναι ο τομέας της σκοτεινής ενέργειας.

Έχοντας υπολογίσει την απόκλιση της θερμοκρασίας αποσύζευξης T_f στο Λ CDM στα προηγούμενα κεφάλαια, υπολογίζουμε την απόκλιση στα 5 μοντέλα, η οποία προέρχεται από την παρουσία έξτρα όρων στη δράση. Μετά υπολογίζουμε τους συνδέσμους των ελεύθερων παραμέτρων της θεωρίας ώστε τα μοντέλα να ικανοποιούν τη συνθήκη $\left| \frac{\Delta T_f}{T_f} \right| < 4.7 \times 10^{-4}$. Όπως είδαμε στα περισσότερα μοντέλα οι παράμετροι παίρνουν τιμές μέσα σε ένα στενό εύρος γύρω από τις τιμές της γενικής σχετικότητας όπως προβλεπόταν. Το λογαριθμικό μοντέλο περνάει πολύ εύκολα το τεστ για μεγάλες περιοχές των παραμέτρων και άρα μας δίνει πλεονέκτημα ως προς τη μελέτη. Συνεπώς η $f(T, T_G)$, εκτός του ότι έχει ενδιαφέρουσες κοσμολογικές εφαρμογές και στην πληθωριστική περίοδο και στην σημερινή επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος, έχει και διάφορα μοντέλα τα οποία όπως δείξαμε παίρνουν το όριο της νουκλεοσύνθεσης, παρότι η τροποποίηση του βαθμωτού της στρέψης γίνεται σε πολύ μικρό εύρος γύρω από τις τιμές της γενικής σχετικότητας, όπως περιμέναμε. Αυτή η ιδιότητα θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν σε μελλοντικές κατασκευές μοντέλων.

Κεφάλαιο 8

Σύζευξη ύλης και βαρύτητας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε μια δράση στην οποία η ύλη κάνει μη ελάσσονα σύζευξη με τους τανυστές καμπυλότητας. Η θεωρία αυτή είναι εμπνευσμένη από θεωρίες με τανυστές καμπυλότητας με βαθμωτά πεδία και θεωριών που το βαθμωτό Ρίτσι κάνει σύζευξη με την ύλη. Τέτοιες θεωρίες μπορούν να δώσουν επιταχυνόμενη διαστολή με τον τομέα σκοτεινής ενέργειας να αποτελείται ουσιαστικά από την ίδια την ύλη.

8.1 Δράση και γενικές εξισώσεις κίνησης

Η δράση είναι η

$$S = \int \left[\frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) + G_{\mu\nu} \left(\alpha T^{\mu\nu} + \beta (\partial^\mu T)(\partial^\nu T) \right) + \eta L_m \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (8.1)$$

όπου $G_{\mu\nu}$ ο τανυστής Άϊνσταιν, $T^{\mu\nu}$ ο τανυστής ενέργειας-ορμής που ορίζεται ως

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (8.2)$$

όπου $T = T^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$ το ίχνος και Λ η κοσμολογική σταθερά. Συνεπώς ο τανυστής Άϊνσταιν κάνει μη ελάσσονα σύζευξη με την ύλη και τις παραγώγους τις. Ο όρος L_m είναι οποιοδήποτε πεδίο. Οι εξισώσεις κίνησης που παίρνουμε ως προς την μετρική είναι οι ,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 \tilde{T}_{\mu\nu} = \kappa^2 [\eta T_{\mu\nu} + \alpha T_{\mu\nu}^{(\alpha)} + \beta T_{\mu\nu}^{(\beta)}], \quad (8.3)$$

όπου

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu}^{(\alpha)} &= + g_{\mu\nu} T_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} + R_{\mu\nu} T - 2G_{\nu}^{\alpha} T_{\mu\alpha} - 2G_{\mu}^{\alpha} T_{\nu\alpha} - RT_{\mu\nu} - \square T_{\mu\nu} \\
 &\quad + \nabla_{\alpha} \nabla_{\mu} T_{\nu}^{\alpha} + \nabla_{\alpha} \nabla_{\nu} T_{\mu}^{\alpha} - g_{\mu\nu} \left(\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} \right) + g_{\mu\nu} \square T - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} T - 2\Xi_{\mu\nu}, \\
 T_{\mu\nu}^{(\beta)} &= + g_{\mu\nu} G^{\alpha\beta} (\nabla_{\alpha} T) (\nabla_{\beta} T) + g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} (\nabla_{\alpha} T) (\nabla_{\beta} T) + R_{\mu\nu} (\nabla_{\alpha} T) (\nabla^{\alpha} T) \\
 &\quad - 2 (\nabla_{\alpha} \nabla_{\nu} T) (\nabla^{\alpha} \nabla_{\mu} T) + g_{\mu\nu} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} T) \left(\nabla^{\alpha} \nabla^{\beta} T \right) - g_{\mu\nu} (\square T)^2 \\
 &\quad - 2R_{\mu\alpha\nu\beta} (\nabla^{\alpha} T) \left(\nabla^{\beta} T \right) - 2G_{\nu}^{\alpha} (\nabla_{\alpha} T) (\nabla_{\mu} T) - 2G_{\mu}^{\alpha} (\nabla_{\alpha} T) (\nabla_{\nu} T) \\
 &\quad - R (\nabla_{\mu} T) (\nabla_{\nu} T) + 2 (\nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} T) (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} T) \\
 &\quad + 4G_{\alpha\beta} \nabla^{\alpha} \nabla^{\beta} T (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu})
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

και

$$\frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L}_m + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T_{\mu\nu} - 2 \frac{\delta^2 \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu} \delta g^{\alpha\beta}}. \tag{8.5}$$

Οι ταυιστές Θ και Ξ ορίζονται συναρτήσει της ποσότητας L_m ως,

$$\begin{aligned}
 \Theta_{\mu\nu} &\equiv g^{\alpha\beta} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2T_{\mu\nu} - 2g^{\alpha\beta} \frac{\delta^2 \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu} \delta g^{\alpha\beta}}, \\
 \Xi_{\mu\nu} &\equiv G^{\alpha\beta} \frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = -G_{\mu\nu} \mathcal{L}_m + \frac{1}{2} G^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} (g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - T_{\mu\nu}) \\
 &\quad - 2G^{\alpha\beta} \frac{\delta^2 \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu} \delta g^{\alpha\beta}}
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

Παίρνοντας τη συναλλοίωτη παράγωγο της (8.3), και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$, φτάνουμε στην εξίσωση διατήρησης για τον ολικό ταυιστή ενέργειας ορμής, δηλαδή

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = \kappa^2 \nabla^{\mu} \tilde{T}_{\mu\nu} = 0. \tag{8.7}$$

8.2 Εφαρμογές στην κοσμολογία

Θεωρούμε μια επίπεδη μετρική της μορφής

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

όπου $a(t)$ ο παράγοντας κλίμακας. Για την ύλη θεωρούμε ένα ιδανικό ρευστό με ταυιστή ενέργειας ορμής της μορφής

$$T_{\mu\nu} = (\rho_m + p_m) u_{\mu} u_{\nu} + p_m g_{\mu\nu},$$

όπου $u^{\mu} = \partial_t$ η τετραταχύτητα που ικανοποιεί την $u_{\mu} u^{\mu} = 1$. Θεωρούμε ότι η πυκνότητα ενέργειας και η πίεση εξαρτώνται μόνο από τον χρόνο και ότι η

λαγκρατζιανή της ύλης \mathcal{L}_m παίρνει τη μορφή $\mathcal{L}_m = p_m$, συνεπώς,

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu\nu} &= -2(\rho_m + p_m)u_\mu u_\nu - p_m g_{\mu\nu}, \\ \Xi_{\mu\nu} &= -G_{\mu\nu} p_m - \frac{1}{2}G^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} (\rho_m + p_m) u_\mu u_\nu.\end{aligned}\quad (8.8)$$

Τότε οι εξισώσεις κίνησης είναι οι,

$$3H^2 - \Lambda = \kappa^2(\eta\rho_m + \rho_\alpha + \rho_\beta), \quad (8.9)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} - \Lambda = -\kappa^2(\eta p_m + p_\alpha + p_\beta), \quad (8.10)$$

όπου

$$\rho_\alpha = \alpha \left[-6(p_m + \rho_m)\dot{H} + 3H^2(p_m - \rho_m) + 6H\dot{p}_m \right] \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned}\rho_\beta = \beta \left\{ -12H(p_m + \rho_m)(3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m)(3H^2 + 2\dot{H}) \right. \\ \left. - 3H^2[4(p_m + \rho_m)(3\ddot{p}_m - \ddot{\rho}_m) - 3(3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m)^2] \right\},\end{aligned}\quad (8.12)$$

$$p_\alpha = \alpha \left\{ -(3p_m + \rho_m)(3H^2 + 2\dot{H}) - [2H(3\dot{p}_m + \dot{\rho}_m) + 2\ddot{p}_m] \right\}, \quad (8.13)$$

$$p_\beta = \beta \left\{ -(3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m)^2(3H^2 + 2\dot{H}) - 4H(3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m)(3\ddot{p}_m - \ddot{\rho}_m) \right\}, \quad (8.14)$$

και $H = \dot{a}/a$ η παράμετρος Hubble.

Τελικά, από την (8.7) παίρνουμε την εξίσωση διατήρησης

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0,$$

όπου $\rho = \eta\rho_m + \rho_\alpha + \rho_\beta$ και $p = \eta p_m + p_\alpha + p_\beta$, δηλαδή

$$\eta\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_\alpha + \dot{\rho}_\beta + 3H(\eta\rho_m + \rho_\alpha + \rho_\beta + \eta p_m + p_\alpha + p_\beta) = 0. \quad (8.15)$$

8.3 Διαταραχές

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις διαταραχές. Θεωρούμε μετρική της μορφής

$$ds^2 = -(1 + 2\phi) dt^2 + a^2 \delta_{ij} (1 - 2\psi) dx^i dx^j,$$

όπου ϕ, ψ βαθμωτά πεδία. Ο διαταραγμένος ταυιστής ενέργειας ορμής παίρνει τη μορφή

$$\delta T^0_0 = -\delta\rho_m$$

$$\delta T^i_j = \delta p_m \delta_{ij}$$

$$\delta T^i_0 = -\frac{(\rho_m + p_m)}{a} \partial_i V$$

$$\delta T^0_i = a(\rho_m + p_m) \partial_i V$$

όπου V η ταχύτητα του ρευστού. Η (0-0) συνιστώσα είναι η

$$\begin{aligned}
 & 6H \left(H\phi + \dot{\psi} \right) - 2 \frac{\nabla^2}{a^2} \psi = -\kappa^2 \left\{ \eta \delta \rho_m + \alpha \left[3 \left(H^2 - 2\dot{H} \right) \delta p_m + 6H \delta \dot{p}_m \right. \right. \\
 & - 3 \left(H^2 + 2\dot{H} \right) \delta \rho_m + 6 \left[H^2 (\rho_m - p_m) - 2H \dot{p}_m + 2\dot{H} (\rho_m + p_m) \right] \phi \\
 & + 6H (\rho_m + p_m) \dot{\phi} + 6 \left[H (\rho_m - p_m) - \dot{p}_m \right] \dot{\psi} + 6 (\rho_m + p_m) \ddot{\psi} \\
 & \left. + \frac{\nabla^2}{a^2} \left[4H (\rho_m + p_m) aV + 2 (\rho_m + p_m) \phi - 2 (\rho_m - p_m) \psi - 2\delta p_m \right] \right\} \\
 & + \beta \left[-36H^2 (\rho_m + p_m) \delta \ddot{p}_m - 18 \left[6H^3 (\rho_m + p_m) \right. \right. \\
 & + 4H \dot{H} (\rho_m + p_m) + 3H^2 (\dot{\rho}_m - 3\dot{p}_m) \left. \left. \right] \delta \dot{p}_m + 12H^2 (\rho_m + p_m) \delta \ddot{\rho}_m \right. \\
 & + 12H^2 \left[\left(2 \frac{\dot{H}}{H} + 3H \right) (\dot{\rho}_m - 3\dot{p}_m) + (\ddot{\rho}_m - 3\ddot{p}_m) \right] (\delta \rho_m + \delta p_m) \\
 & + 18H^2 \left[\left(\frac{4}{3} \frac{\dot{H}}{H} + 2H \right) (\rho_m + p_m) + (\dot{\rho}_m - 3\dot{p}_m) \right] \delta \dot{\rho}_m \\
 & + \left[\left(144H^3 + 96H\dot{H} \right) \left[3p_m \dot{p}_m + \rho_m (3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m) - p_m \dot{\rho}_m \right] \right. \\
 & + 12H^2 \left[12p_m \ddot{p}_m - 3(3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m)^2 + 4\rho_m (3\ddot{p}_m - \ddot{\rho}_m) - 4p_m \ddot{\rho}_m \right] \left. \right] \phi \\
 & + 36H^2 \left[3p_m \dot{p}_m + \rho_m (3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m) - p_m \dot{\rho}_m \right] \dot{\phi} \\
 & + \left[\left(108H^2 + 24\dot{H} \right) \left[3p_m \dot{p}_m + \rho_m (3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m) - p_m \dot{\rho}_m \right] \right. \\
 & + 6H \left[12p_m \ddot{p}_m - 3(3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m)^2 + 4\rho_m (3\ddot{p}_m - \ddot{\rho}_m) - 4p_m \ddot{\rho}_m \right] \left. \right] \dot{\psi} \\
 & + 3H \left[24p_m \dot{p}_m + 8\rho_m (3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m) - 8p_m \dot{\rho}_m \right] \ddot{\psi} \\
 & + 4 \left[\left(2\dot{H} + 3H^2 \right) (\rho_m + p_m) + H (\dot{\rho}_m - 3\dot{p}_m) \right] \frac{\nabla^2}{a^2} (3\delta p_m - \delta \rho_m) \\
 & + 8H (\rho_m + p_m) (3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m) \frac{\nabla^2}{a^2} \phi + 2 \left[(3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m)^2 - 12p_m \ddot{p}_m \right. \\
 & \left. + 4H (\rho_m + p_m) (\dot{\rho}_m - 3\dot{p}_m) + 4p_m \ddot{\rho}_m + 4\rho_m (\ddot{\rho}_m - 3\ddot{p}_m) \right] \frac{\nabla^2}{a^2} \psi \left. \right\} \quad (8.16)
 \end{aligned}$$

Η διαγώνια χωρική είναι η

$$\begin{aligned}
 & 2 \left(3H^2 + 2\dot{H} \right) \phi + 2H \left(\dot{\phi} + 3\dot{\psi} \right) + 2\ddot{\psi} + \frac{\nabla^2}{a^2} (\phi - \psi) = \kappa^2 \{ \eta \delta p_m \\
 & - \alpha \left[2\delta\ddot{p}_m - 4\ddot{p}_m\phi + \left(3H^2 + 2\dot{H} \right) [3\delta p_m + \delta\rho_m - 2(\rho_m + 3p_m)\phi] \right. \\
 & - 2\dot{\rho}\dot{\psi} - 2\ddot{\psi}(\rho_m + 3p_m) - 2\dot{p}_m \left(\dot{\phi} + 3\dot{\psi} \right) \\
 & + 2H \left[3\delta\dot{p}_m + \delta\dot{\rho}_m - 2(\dot{\rho}_m + 3\dot{p}_m)\phi - (\rho_m + 3p_m) \left(\dot{\phi} + 3\dot{\psi} \right) \right] \\
 & + \frac{\nabla^2}{a^2} \left[2[\dot{\rho}_m + \dot{p}_m + 2H(\rho_m + p_m)]aV + 2(\rho_m + p_m)a\dot{V} \right. \\
 & \left. - \delta p_m + \delta\rho_m + (\rho_m - p_m)(\phi - \psi) \right] \\
 & - \beta \left[2 \left(2\dot{H} + 3H^2 \right) [3\dot{p}_m(3\delta\dot{p}_m - \delta\dot{\rho}_m) - 2\phi(9\dot{p}_m^2 + \dot{\rho}_m^2) \right. \\
 & + \dot{\rho}_m(\delta\dot{\rho}_m - 3\delta\dot{p}_m + 12\dot{p}_m\phi)] - 12\dot{p}_m(3\ddot{p}_m - \ddot{\rho}_m)\dot{\psi} \\
 & + 4H[3\ddot{p}_m(3\delta\dot{p}_m - \delta\dot{\rho}_m) + \ddot{\rho}_m(\delta\dot{\rho}_m - 3\delta\dot{p}_m + 12\dot{p}_m\phi) \\
 & + \dot{p}_m(9\delta\ddot{p}_m - 3\delta\ddot{\rho}_m - 36\ddot{p}_m\phi) - \frac{3}{2}(9\dot{p}_m^2 + \dot{\rho}_m^2) \left(\dot{\phi} + \dot{\psi} \right) \\
 & \left. + \dot{\rho}_m \left[\delta\ddot{\rho}_m - 3\delta\ddot{p}_m + 4(3\ddot{p}_m - \ddot{\rho}_m)\phi + 9\dot{p}_m \left(\dot{\phi} + \dot{\psi} \right) \right] \right] \\
 & - 2(9\dot{p}_m^2 + \dot{\rho}_m^2)\ddot{\psi} + 4\dot{\rho}_m \left[(3\ddot{p}_m - \ddot{\rho}_m)\dot{\psi} + 3\dot{p}_m\ddot{\psi} \right] \\
 & + 2\frac{\nabla^2}{a^2} \left[[H(\dot{\rho}_m - 3\dot{p}_m) + \ddot{\rho}_m - 3\ddot{p}_m](3\delta p_m - \delta\rho_m) \right. \\
 & \left. - (3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m)^2(\phi + \psi) \right] \}. \tag{8.17}
 \end{aligned}$$

Η διαγώνια χωρική με τον ανισοτροπικό όρο είναι

$$\begin{aligned}
 \psi - \phi &= -\kappa^2 \{ \alpha [\delta p_m - \delta\rho_m - 2a[2H(\rho_m + p_m) + \dot{p}_m + \dot{\rho}_m]V \\
 & - 2a(\rho_m + p_m)\dot{V} + (\rho_m - p_m)(\psi - \phi)] \\
 & + \beta [2[H(3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m) + 3\ddot{p}_m - \ddot{\rho}_m](3\delta p_m - \delta\rho_m) \\
 & + (3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m)^2(\phi + \psi)] \}. \tag{8.18}
 \end{aligned}$$

Τώρα η μετρική για τις ταυσιτικές διαταραχές παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 (\delta_{ij} + 2h_{ij}) dx^i dx^j.$$

Η εξίσωση για τα βαρυτικά κύματα είναι η

$$\begin{aligned} & \left[\alpha (\rho_m + 3p_m) + \beta (3\dot{p}_m - \rho_m)^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right] \ddot{h}_{ij} \\ & + \left\{ \alpha [3H (\rho_m + 3p_m) + \dot{\rho}_m + 3\dot{p}_m] + \beta [3H (3\dot{p}_m - \rho_m)^2 \right. \\ & \left. + 6\dot{p}_m (3\ddot{p}_m - \ddot{\rho}_m) + 2\dot{\rho}_m (\ddot{\rho}_m - 3\ddot{p}_m)] - \frac{3H}{\kappa^2} \right\} \dot{h}_{ij} \\ & + \left[\alpha (\rho_m - p_m) + (3\dot{p}_m - \dot{\rho}_m)^2 + \frac{1}{\kappa^2} \right] \frac{\nabla^2}{a^2} h_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Τώρα θα επικεντρωθούμε στις βαθμωτές διαταραχές και εισάγουμε την ποσότητα $\delta \equiv \frac{\delta\rho_m}{\rho_m}$, δηλαδή την υπερπυκνότητα της ύλης. Εισάγωντας την δ στις εξισώσεις (0-0) και στην διαγώνια με τον ανισοτροπικό όρο και θεωρώντας $P=0$, και πηγαίνοντας στον χώρο των ορμών, με k τον κυματαριθμό, βρίσκουμε τη διαφορική εξίσωση εξέλιξης της ποσότητας δ , η οποία μπορεί να λυθεί αριθμητικά. Για να απλοποιήσουμε την έκφραση θεωρούμε μικρές αποκλίσεις από το μοντέλο Λ CDM δηλαδή $\kappa^2(\rho_\alpha + \rho_\beta) \ll \Lambda$, το οποίο προϋποθέτει μικρές τιμές για τα α και β ($\alpha, \beta \ll (\kappa^2 H^2)^{-1}$), και επίσης επικεντρωνόμαστε στις μικρές κλίμακες, δηλαδή $k \gg aH$, και επίσης για την ταχύτητα $c_{\text{eff}}^{(m)2} \equiv \delta p_m / \delta \rho_m \ll 1$. Εφαρμόζοντας βρίσκουμε

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + \frac{\kappa^2 \rho_m \delta \left\{ 6\beta \rho_m \dot{\rho}_m H^2 + \left(k^2 + 8\beta \rho_m \dot{H} \right) \dot{\rho}_m + H [4\beta \dot{\rho}_m^2 + 3\rho_m (\alpha - 2\beta \ddot{\rho}_m)] \right\}}{2k^2 \dot{\rho}_m [-1 + \kappa^2 \beta (3H \rho_m \dot{\rho}_m + \dot{\rho}_m^2 + 4\rho_m \ddot{\rho}_m)]} = 0. \quad (8.20)$$

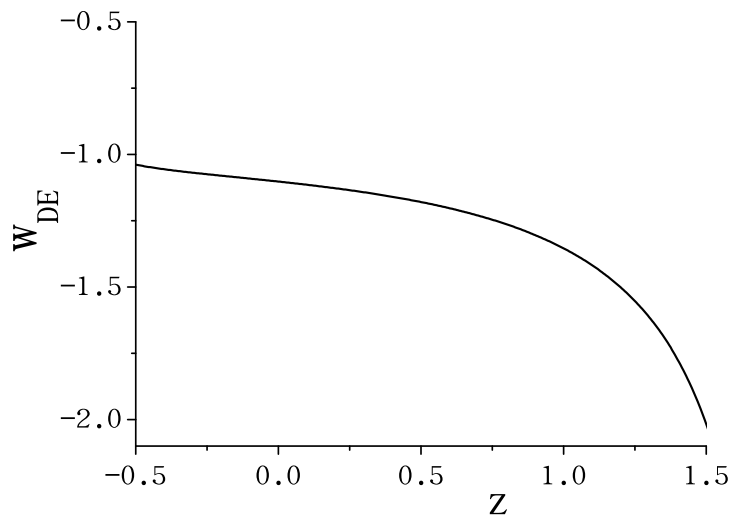
Τώρα αυτή την εξίσωση μπορούμε να την φέρουμε στη μορφή

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G_{\text{eff}} \rho_m \delta = 0, \quad (8.21)$$

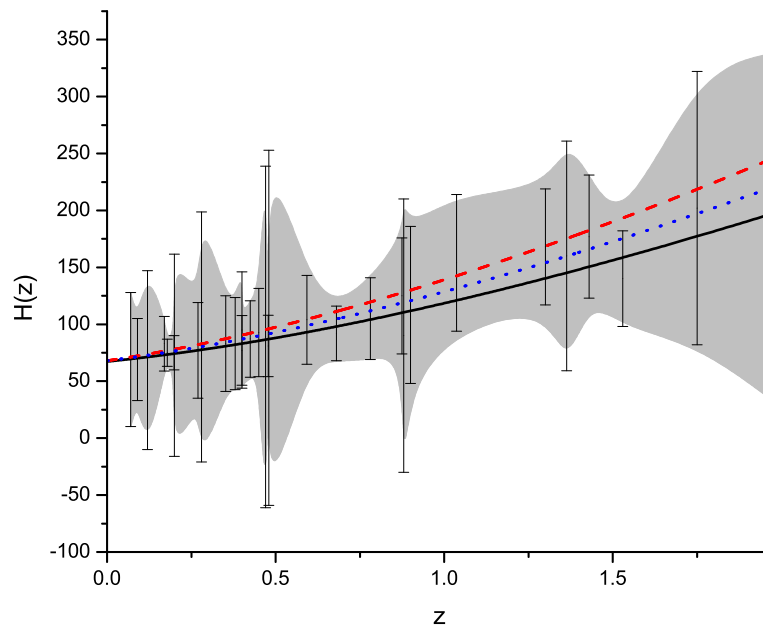
ορίζοντας μια τροποποιημένη βαρυτική σταθερά

$$8\pi G_{\text{eff}} = \kappa_{\text{eff}}^2 \equiv \frac{\kappa^2 \left\{ 6\beta \rho_m \dot{\rho}_m H^2 + \left(k^2 + 8\beta \rho_m \dot{H} \right) \dot{\rho}_m + H [4\beta \dot{\rho}_m^2 + 3\rho_m (\alpha - 2\beta \ddot{\rho}_m)] \right\}}{k^2 \dot{\rho}_m [1 - \kappa^2 \beta (3H \rho_m \dot{\rho}_m + \dot{\rho}_m^2 + 4\rho_m \ddot{\rho}_m)]}. \quad (8.22)$$

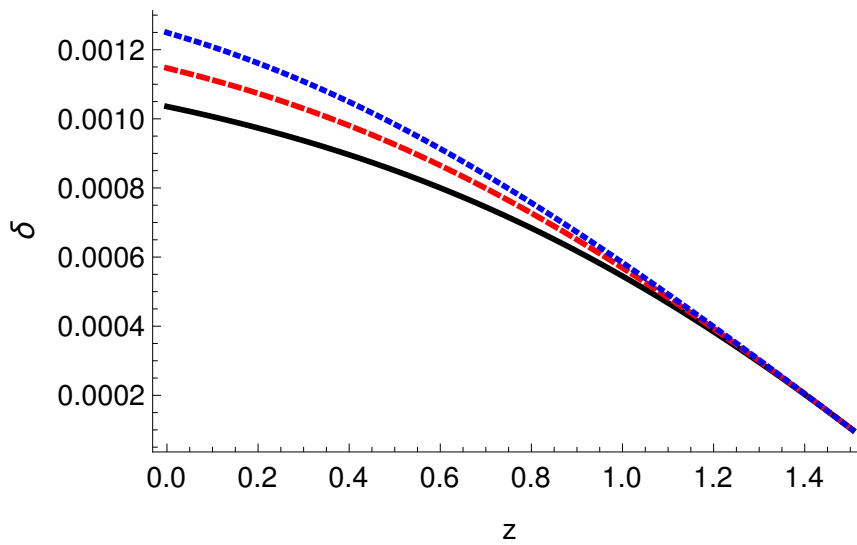
Όπως αναμενόταν αν πάρουμε $\alpha = \beta = 0$, παίρνουμε $\kappa_{\text{eff}}^2 = \kappa^2$ και έτσι $G_{\text{eff}} = G$ οπότε είμαστε στην Λ CDM κοσμολογία. Στην γραφική παράσταση 8.3 βλέπουμε την εξέλιξη της ποσότητας δ σαν συνάρτηση της ερυθράς μετατόπισης. Όπως παρατηρούμε οι θεωρίες με μη ελάσσονα σύζευξη μεταξύ ύλης και του τανυστή Άινσταιν μπορεί να περιγράψει την εξέλιξη της δομής του σύμπαντος σε μεγάλες κλίμακες σε συμφωνία με τις παρατηρήσεις. Επιπλέον η εξέλιξη είναι ευαίσθητη στις παραμέτρους σύζευξης, οπότε κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει τα δεδομένα του $f\sigma_8$ ώστε να εξάγει συνδέσμους και να εξαλείψει οποιουδήποτε εκφυλισμούς που μπορεί να εμφανίζονται στο υπόβαθρο.



Σχήμα 8.1: Η εξέλιξη της ποσότητας w_{DE} , σαν συνάρτηση ερυθράς μετατόπισης z , για $\alpha = -0.05$ και $\beta = 0.01$, σε μονάδες $\kappa^2 = 1$. Έχουμε ως σύνδεσμο $\Omega_{m0} \approx 0.3$ στη σημερινή εποχή.



Σχήμα 8.2: Η ποσότητα $H(z)$ σε μονάδες $Km/s/Mpc$ σαν συνάρτηση της ερυθράς μετατόπισης, για $\alpha = -0.05$ και $\beta = 0.01$ (κόκκινη-διακεκομμένη), και για $\alpha = -0.01$ και $\beta = 0.001$ (μπλε-διακεκομμένη) σε μονάδες $\kappa^2 = 1$, στην κορυφή των δεδομένων από [180] στο εύρος 3σ . Για σύγκριση έχουμε την ΛCDM καμπύλη στο παρόν (μαύρη-συμπαγής). Έχουμε ως σύνδεσμο $\Omega_{m0} \approx 0.3$ στη σημερινή εποχή.



Σχήμα 8.3: Η εξέλιξη της υπερπυκνότητας της ύλης $\delta \equiv \frac{\delta\rho_m}{\rho_m}$, σαν συνάρτηση της ερυθράς μετατόπισης z , για $\alpha = -0.1, \beta = 0.1$ (μαύρη-συμπαγής), $\alpha = -0.2, \beta = 0.2$ (κόκκινη-διακεκομμένη), και $\alpha = -0.5, \beta = 0.4$ (μπλε-διακεκομμένη), σε μονάδες που $\kappa^2 = 1$, στην κλίμακα $k = 10^{-3} h Mpc^{-1}$. Έχουμε ως σύνδεσμο $\Omega_{m0} \approx 0.3$ στη σημερινή εποχή.

8.4 Συμπεράσματα

Σε αυτή την εργασία η οποία είναι εμπνευσμένη από τη σύζευξη του τανυστή Άινσταιν με βαθμωτά πεδία και θεωριών που το βαθμωτό Ρίτσι κάνει σύζευξη με την ύλη, κατασκευάσαμε μια καινούρια κλάση θεωριών στην οποία οι εξισώσεις κίνησης της γενικής σχετικότητας κάνουν μη ελάσσονα σύζευξη με την ύλη και συγκεκριμένα με τον τανυστή ενέργειας ορμής και με το ίχνος των παραγώγων του. Πρώτα εξαγάγαμε τις γενικές εξισώσεις κίνησης όπου σε σχέση με τη γενική σχετικότητα έχουμε παραπάνω όρους λόγω των παραπάνω όρων στη δράση. Στη συνέχεια χρησιμοποιήσαμε σαν υπόβαθρο την επίπεδη FRW μετρική και εξαγάγαμε τις εξισώσεις Φρίντμαν όπου οι έξτρα όροι βρίσκονται στον τομέα της σκοτεινής ενέργειας. Θεωρήσαμε ρευστό το οποίο δεν έχει πίεση και λύνοντας αριθμητικά τις εξισώσεις βρήκαμε ότι μπορεί να περιγράψει τη θερμική ιστορία του σύμπαντος με ακολουθία την εποχή της ύλης και της σκοτεινής ενέργειας. Επίσης, εξετάσαμε την καταστατική εξίσωση της σκοτεινής ενέργειας και δείξαμε ότι μπορεί να βρίσκεται στην περιοχή των φαντασμάτων και τείνει προοδευτικά στο -1 στο παρόν και το μέλλον. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η συμπεριφορά αυτή υπάρχει παρόλο που ο τομέας της σκοτεινής ενέργειας αποτελείται από όρους ύλης, το οποίο δεν είναι σπάνιο σε τέτοιες θεωρίες. Τέλος, για λόγους πληρότητας χρησιμοποιήσαμε δεδομένα από τα κοσμικά χρονόμετρα δείχνοντας ότι η συμφωνία είναι πολύ καλή και η προβλεπόμενη εξέλιξη του $H(z)$ βρίσκεται μεταξύ των ορίων λάθους της άμεσης μέτρησης παρουσιάζοντας μια μικρή επιταχυνόμενη συμπεριφορά στο παρελθόν λόγω της φύσης της σκοτεινής ενέργειας. Στη συνέχεια υπολογίσαμε τις διαταραχές. Από τις βαθμωτές διαταραχές εξαγάγαμε την εξίσωση εξέλιξης της υπερπυκνότητας της ύλης το οποίο είναι πολύ σημαντικό παρατηρησιακό δεδομένο διότι έχει να κάνει με την δημιουργία δομών ύλης όπως γαλαξίες και με τις μεγάλες κλίμακες. Λύνοντας αριθμητικά την εξίσωση βρίσκουμε ότι η εξέλιξη που μας δίνει συμφωνεί με τις παρατηρήσεις. Θα ήταν ενδιαφέρον και υποχρεωτικό ταυτόχρονα να λάβουμε υπόψιν όλα τα παρατηρησιακά δεδομένα όπως τη μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου, τις βαρυονικές ακουστικές ταλαντώσεις τους σουπερνόβα τύπου Ia και τις παρατηρήσεις $f\sigma_8$ της ερυθράς μετατόπισης του φωτός, για να εξαγάγουμε συνδέσμους για τις νέες παραμέτρους σύζευξης. Επίσης κάποιος θα μπορούσε να κάνει μια αναλυτική περιγραφή φάσεων-χώρου για να μελετήσει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της θεωρίας ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες και τη συγκεκριμένη εξέλιξη του σύμπαντος. Τέλος θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσει κανείς την πιθανή λύση που μπορεί να δώσει στην τιμή της σταθεράς του Hubble στο παρόν και της τάσης S_8 .

Κεφάλαιο 9

Επίλογος

Μελετήσαμε διάφορες κλάσεις θεωριών τροποποιημένης βαρύτητας. Χρησιμοποιήσαμε σαν παρατηρησιακό δεδομένο τους συνδέσμους της θερμοκρασίας αποσύζευξης των διαφόρων σωματιδίων από το πλάσμα στην εποχή της νουκλεοσύνισης. Βρήκαμε σε πολλές από αυτές τους συνδέσμους από τις ελεύθερες παραμέτρους στη δράση ώστε να μπορούν να θεωρηθούν αξιόπιστες ως προς αυτή τη διαδικασία που συνέβη στο Σύμπαν. Επίσης, μελετήσαμε τις διαταραχές σε μια κυβική θεωρία και προσδιορίσαμε έτσι τις παραμέτρους ώστε να πάρουμε μια εξίσωση για τα βαρυτικά κύματα παρόμοια με της γενικής σχετικότητας και το αποτέλεσμα της διαφορετικής βαρύτητας να φαίνεται στον όρο τριβής. Επίσης φτάσαμε σε έναν τροποποιημένο νόμο Poisson για το βαρυτικό δυναμικό και σε μια τροποποιημένη βαρυτική σταθερά. Υπάρχουν πολλές δυνατότητες μελετώντας αυτές τις θεωρίες να βρούμε κατάλληλες προϋποθέσεις κάποιες από αυτές να είναι συνεπείς ως προς κάποια παρατηρησιακά δεδομένα, διότι συνεχώς βελτιώνονται τα υπολογιστικά εργαλεία που διαθέτουμε και οι ερευνητικές συσκευές που παίρνουμε δεδομένα και έτσι μπορούμε να τις εξετάσουμε σε μεγαλύτερο βάθος. Ελπίζω με το πέρας αυτής της διδακτορικής διατριβής να συνεχίσω να συνεισφέρω προς αυτή την κατεύθυνση.

Βιβλιογραφία

- [1] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, Phys. Rept. **513**, 1 (2012) [arXiv:1106.2476 [astro-ph.CO]].
- [2] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rept. **505**, 59 (2011) [arXiv:1011.0544 [gr-qc]].
- [3] E. N. Saridakis *et al.* [CANTATA], [arXiv:2105.12582 [gr-qc]].
- [4] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 1753 (2006) [hep-th/0603057].
- [5] Y. F. Cai, E. N. Saridakis, M. R. Setare and J. Q. Xia, Phys. Rept. **493**, 1-60 (2010) [arXiv:0909.2776 [hep-th]].
- [6] K. S. Stelle, Phys. Rev. D **16**, 953 (1977).
- [7] A. Addazi, J. Alvarez-Muniz, R. A. Batista, G. Amelino-Camelia, V. Antonelli, M. Arzano, M. Asorey, *et al.* [arXiv:2111.05659 [hep-ph]].
- [8] D. J. Gross and J. H. Sloan, Nucl. Phys. B **291**, 41 (1987).
- [9] D. Lovelock, J. Math. Phys. **12**, 498 (1971).
- [10] T. Biswas, E. Gerwick, T. Koivisto and A. Mazumdar, Phys. Rev. Lett. **108**, 031101 (2012) [arXiv:1110.5249].
- [11] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **91**, 99 (1980).
- [12] A. De Felice and S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010) [arXiv:1002.4928 [gr-qc]].
- [13] S. Capozziello, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 483 (2002), [arXiv:gr-qc/0201033].
- [14] N. Deruelle and L. Farina-Busto, Phys. Rev. D **41**, 3696 (1990).
- [15] P. D. Mannheim and D. Kazanas, Astrophys. J. **342**, 635 (1989).
- [16] E. E. Flanagan, Phys. Rev. D **74**, 023002 (2006), [arXiv:astro-ph/0605504].

- [17] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, *Phys. Rev. D* **79**, 064036 (2009), [arXiv:0811.2197].
- [18] C. Deffayet, G. Esposito-Farese and A. Vikman, *Phys. Rev. D* **79**, 084003 (2009), [arXiv:0901.1314].
- [19] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **631**, 1 (2005), [arXiv:hep-th/0508049].
- [20] A. De Felice and S. Tsujikawa, *Phys. Lett. B* **675**, 1 (2009), [arXiv:0810.5712].
- [21] A. De Felice and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **80**, 063516 (2009) [arXiv:0907.1830 [hep-th]].
- [22] K. Bamba, S. D. Odintsov, L. Sebastiani and S. Zerbini, *Eur. Phys. J. C* **67**, 295-310 (2010) [arXiv:0911.4390 [hep-th]].
- [23] E. Elizalde, R. Myrzakulov, V. V. Obukhov and D. Saez-Gomez, *Class. Quant. Grav.* **27**, 095007 (2010) [arXiv:1001.3636 [gr-qc]].
- [24] A. De Felice, J. M. Gerard and T. Suyama, *Phys. Rev. D* **82**, 063526 (2010) [arXiv:1005.1958 [astro-ph.CO]].
- [25] A. de la Cruz-Dombriz and D. Saez-Gomez, *Class. Quant. Grav.* **29**, 245014 (2012) [arXiv:1112.4481 [gr-qc]].
- [26] A. N. Makarenko, V. V. Obukhov and I. V. Kirnos, *Astrophys. Space Sci.* **343**, 481-488 (2013) [arXiv:1201.4742 [gr-qc]].
- [27] Y. Y. Zhao, Y. B. Wu, J. B. Lu, Z. Zhang, W. L. Han and L. L. Lin, *Eur. Phys. J. C* **72**, 1924 (2012) [arXiv:1203.5593 [astro-ph.CO]].
- [28] G. Kofinas and E. N. Saridakis, *Phys. Rev. D* **90**, 084045 (2014) [arXiv:1408.0107 [gr-qc]].
- [29] S. Chattopadhyay, *Astrophys. Space Sci.* **352**, 937-942 (2014) [arXiv:1406.5142 [gr-qc]].
- [30] E. N. Saridakis, *Phys. Rev. D* **97**, no.6, 064035 (2018) [arXiv:1707.09331 [gr-qc]].
- [31] Y. Zhong and D. Sáez-Chillón Gómez, *Symmetry* **10**, no.5, 170 (2018) [arXiv:1805.03467 [gr-qc]].
- [32] S. Lee and G. Tumurtushaa, *JCAP* **06**, 029 (2020) [arXiv:2001.07021 [astro-ph.CO]].
- [33] F. Bajardi and S. Capozziello, *Eur. Phys. J. C* **80**, no.8, 704 (2020) [arXiv:2005.08313 [gr-qc]].

- [34] M. F. Shamir and T. Naz, Phys. Lett. B **806**, 135519 (2020) [arXiv:2006.03339 [gr-qc]].
- [35] P. Bueno and P. A. Cano, Phys. Rev. D **94**, no. 10, 104005 (2016) [arXiv:1607.06463 [hep-th]].
- [36] C. Erices, E. Papantonopoulos and E. N. Saridakis, Phys. Rev. D **99**, no.12, 123527 (2019) [arXiv:1903.11128 [gr-qc]].
- [37] X. H. Feng, H. Huang, Z. F. Mai and H. Lu, Phys. Rev. D **96**, no.10, 104034 (2017) [arXiv:1707.06308 [hep-th]].
- [38] M. B. J. Poshteh and R. B. Mann, Phys. Rev. D **99**, no.2, 024035 (2019) [arXiv:1810.10657 [gr-qc]].
- [39] M. Marciu, Phys. Rev. D **101**, no.10, 103534 (2020) [arXiv:2003.06403 [gr-qc]].
- [40] I. Quiros, R. García-Salcedo, T. Gonzalez, J. L. M. Martínez and U. Nucamendi, Phys. Rev. D **102**, no.4, 044018 (2020) [arXiv:2003.10516 [gr-qc]].
- [41] J. B. Jiménez and A. Jiménez-Cano, JCAP **01**, 069 (2021) [arXiv:2009.08197 [gr-qc]].
- [42] J. R. Nascimento, A. Y. Petrov, P. Porfírio and A. F. Santos, Phys. Rev. D **102**, no.10, 104064 (2020) [arXiv:2009.13242 [gr-qc]].
- [43] R. A. Hennigar and R. B. Mann, Phys. Rev. D **95**, no.6, 064055 (2017) [arXiv:1610.06675 [hep-th]].
- [44] P. Bueno and P. A. Cano, Phys. Rev. D **94**, no.12, 124051 (2016) [arXiv:1610.08019 [hep-th]].
- [45] H. Dykaar, R. A. Hennigar and R. B. Mann, JHEP **05**, 045 (2017) [arXiv:1703.01633 [hep-th]].
- [46] R. A. Hennigar, M. B. J. Poshteh and R. B. Mann, Phys. Rev. D **97**, no.6, 064041 (2018) [arXiv:1801.03223 [gr-qc]].
- [47] S. A. Pavluchenko, Eur. Phys. J. C **78**, no.7, 551 (2018) [arXiv:1804.06934 [hep-th]].
- [48] P. A. Cano and D. Pereñiguez, Phys. Rev. D **101**, no.4, 044016 (2020) [arXiv:1910.10721 [hep-th]].
- [49] D. J. Burger, W. T. Emond and N. Moynihan, Phys. Rev. D **101**, no.8, 084009 (2020) [arXiv:1910.11618 [hep-th]].

- [50] R. A. Konoplya, A. F. Zinhailo and Z. Stuchlik, Phys. Rev. D **102**, no.4, 044023 (2020) [arXiv:2006.10462 [gr-qc]].
- [51] Green, M.B.; Schwarz, J.H.; Witten, E. *Superstring Theory Vols. 1 and 2 : 25th Anniversary Edition*; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2012.
- [52] Polchinski, J. *String Theory. Vol. 1: An Introduction to the Bosonic String*; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2011.
- [53] P. Kanti, N. E. Mavromatos, J. Rizos, K. Tamvakis and E. Winstanley, Phys. Rev. D **54**, 5049-5058 (1996) [arXiv:hep-th/9511071 [hep-th]].
- [54] P. Kanti, J. Rizos and K. Tamvakis, Phys. Rev. D **59**, 083512 (1999) [arXiv:gr-qc/9806085 [gr-qc]].
- [55] S. Nojiri, S. D. Odintsov and M. Sasaki, Phys. Rev. D **71**, 123509 (2005) [arXiv:hep-th/0504052 [hep-th]].
- [56] M. Sami, A. Toporensky, P. V. Tretjakov and S. Tsujikawa, Phys. Lett. B **619**, 193 (2005) [arXiv:hep-th/0504154 [hep-th]].
- [57] G. A. Diamandis, B. C. Georgalas, N. E. Mavromatos, E. Papanantonopoulos and I. Pappa, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 2241-2266 (2002) [arXiv:hep-th/0107124 [hep-th]].
- [58] G. A. Diamandis, B. C. Georgalas, N. E. Mavromatos and E. Papanantonopoulos, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 4567-4589 (2002) [arXiv:hep-th/0203241 [hep-th]].
- [59] G. A. Diamandis, B. C. Georgalas, A. B. Lahanas, N. E. Mavromatos and D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. B **642**, 179-186 (2006) [arXiv:hep-th/0605181 [hep-th]].
- [60] A. B. Lahanas, N. E. Mavromatos and D. V. Nanopoulos, PMC Phys. A **1**, 2 (2007) [arXiv:hep-ph/0608153 [hep-ph]].
- [61] A. B. Lahanas, Phys. Rev. D **83**, 103523 (2011) [arXiv:1102.4277 [hep-ph]].
- [62] S. Basilakos, N. E. Mavromatos, V. A. Mitsou and M. Plionis, Astropart. Phys. **36**, 7-17 (2012) [arXiv:1107.3532 [astro-ph.CO]].
- [63] I. L. Shapiro and J. Sola, Phys. Lett. B **682**, 105-113 (2009) [arXiv:0910.4925 [hep-th]].
- [64] I. L. Shapiro and J. Sola, JHEP **02**, 006 (2002) [arXiv:hep-th/0012227 [hep-th]].

- [65] I. L. Shapiro and J. Sola, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **127**, 71-76 (2004) [arXiv:hep-ph/0305279 [hep-ph]].
- [66] J. Sola, J. Phys. A **41**, 164066 (2008) [arXiv:0710.4151 [hep-th]], and references therein.,
- [67] C. Moreno-Pulido and J. Sola, Eur. Phys. J. C **80**, no.8, 692 (2020) [arXiv:2005.03164 [gr-qc]].
- [68] J. Solà Peracaula, J. de Cruz Pérez and A. Gómez-Valent, EPL **121**, no.3, 39001 (2018) [arXiv:1606.00450 [gr-qc]].
- [69] J. Sola Peracaula, A. Gomez-Valent and J. de Cruz Pérez, Phys. Dark Univ. **25**, 100311 (2019) [arXiv:1811.03505 [astro-ph.CO]].
- [70] J. Solà Peracaula, J. de Cruz Pérez and A. Gomez-Valent, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **478**, no.4, 4357-4373 (2018) [arXiv:1703.08218 [astro-ph.CO]].
- [71] E. L. D. Perico, J. A. S. Lima, S. Basilakos and J. Sola, Phys. Rev. D **88**, 063531 (2013) [arXiv:1306.0591 [astro-ph.CO]].
- [72] S. Basilakos, J. A. S. Lima and J. Sola, Int. J. Mod. Phys. D **22**, 1342008 (2013) [arXiv:1307.6251 [astro-ph.CO]].
- [73] J. Solà Peracaula and H. Yu, Gen. Rel. Grav. **52**, no.2, 17 (2020) [arXiv:1910.01638 [gr-qc]].
- [74] J. Solà Peracaula, A. Gómez-Valent, J. de Cruz Perez and C. Moreno-Pulido, EPL **134**, no.1, 19001 (2021) [arXiv:2102.12758 [astro-ph.CO]].
- [75] A. Gómez-Valent and J. Solà Peracaula, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **478**, no.1, 126-145 (2018) [arXiv:1801.08501 [astro-ph.CO]].
- [76] J. Solà Peracaula, Int. J. Mod. Phys. A **33**, no.31, 1844009 (2018).
- [77] N. E. Mavromatos and J. Solà Peracaula, Eur. Phys. J. Plus **136**, no.11, 1152 (2021) [arXiv:2105.02659 [hep-th]].
- [78] N. E. Mavromatos and J. Solà Peracaula, Eur. Phys. J. ST **230**, no.9, 2077-2110 (2021) [arXiv:2012.07971 [hep-ph]].
- [79] S. Basilakos, N. E. Mavromatos and J. Solà Peracaula, Phys. Rev. D **101**, no.4, 045001 (2020) [arXiv:1907.04890 [hep-ph]].
- [80] N. Aghanim *et al.* [Planck], Astron. Astrophys. **641**, A6 (2020) [arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO]].
- [81] G. Papagiannopoulos, P. Tsiapi, S. Basilakos and A. Paliathanasis, Eur. Phys. J. C **80**, no.1, 55 (2020) [arXiv:1911.12431 [gr-qc]].

- [82] P. Tsiapi and S. Basilakos, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **485**, no.2, 2505-2510 (2019) [arXiv:1810.12902 [astro-ph.CO]].
- [83] N. E. Mavromatos, *Universe* **7**, 12 (2021) [arXiv:2111.05675 [hep-th]].
- [84] N. E. Mavromatos, [arXiv:2108.02152 [gr-qc]], *Phil. Trans. (Roy. Soc. UK)*, in press.
- [85] J. Alexandre, N. Houston and N. E. Mavromatos, *Phys. Rev. D* **89**, no.2, 027703 (2014) [arXiv:1312.5197 [gr-qc]].
- [86] S. Basilakos, N. E. Mavromatos and J. Solà, *Universe* **2**, no.3, 14 (2016) [arXiv:1505.04434 [gr-qc]].
- [87] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Rev. D* **28**, 2567-2582 (1983) [erratum: *Phys. Rev. D* **30**, 508 (1984)].
- [88] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett. B* **102**, 27-31 (1981).
- [89] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Gen. Rel. Grav.* **36**, 1765-1780 (2004) [arXiv:hep-th/0308176 [hep-th]].
- [90] J. Bernstein, L. S. Brown and G. Feinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 25 (1989).
- [91] E. W. Kolb and M. S. Turner, *Front. Phys.* **69**, 1-547 (1990).
- [92] K. A. Olive, G. Steigman and T. P. Walker, *Phys. Rept.* **333**, 389-407 (2000) [arXiv:astro-ph/9905320 [astro-ph]].
- [93] R. H. Cyburt, B. D. Fields, K. A. Olive and T. H. Yeh, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 015004 (2016) [arXiv:1505.01076 [astro-ph.CO]].
- [94] D. F. Torres, H. Vucetich and A. Plastino, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1588-1590 (1997) [arXiv:astro-ph/9705068 [astro-ph]].
- [95] G. Lambiase, *Phys. Rev. D* **72**, 087702 (2005) [arXiv:astro-ph/0510386 [astro-ph]].
- [96] G. Lambiase, *Phys. Rev. D* **83**, 107501 (2011).
- [97] S. Capozziello, G. Lambiase and E. N. Saridakis, *Eur. Phys. J. C* **77**, no.9, 576 (2017) [arXiv:1702.07952 [astro-ph.CO]].
- [98] J. D. Barrow, S. Basilakos and E. N. Saridakis, *Phys. Lett. B* **815**, 136134 (2021) [arXiv:2010.00986 [gr-qc]].
- [99] A. Coc, E. Vangioni-Flam, P. Descouvemont, A. Adahchour and C. Angulo, *Astrophys. J.* **600**, 544-552 (2004) [arXiv:astro-ph/0309480 [astro-ph]].

- [100] K. A. Olive, E. Skillman and G. Steigman, *Astrophys. J.* **483**, 788 (1997) [arXiv:astro-ph/9611166 [astro-ph]].
- [101] Y. I. Izotov and T. X. Thuan, *Astrophys. J.* **500**, 188 (1998).
- [102] B. D. Fields and K. A. Olive, *Astrophys. J.* **506**, 177 (1998) [arXiv:astro-ph/9803297 [astro-ph]].
- [103] Y. I. Izotov, F. H. Chaffee, C. B. Foltz, R. F. Green, N. G. Gu-seva and T. X. Thuan, *Astrophys. J.* **527**, 757-777 (1999) [arXiv:astro-ph/9907228 [astro-ph]].
- [104] D. Kirkman, D. Tytler, N. Suzuki, J. M. O'Meara and D. Lubin, *Astrophys. J. Suppl.* **149**, 1 (2003) [arXiv:astro-ph/0302006 [astro-ph]].
- [105] Y. I. Izotov and T. X. Thuan, *Astrophys. J.* **602**, 200-230 (2004) [arXiv:astro-ph/0310421 [astro-ph]].
- [106] M. Visser, *Class. Quant. Grav.* **21**, 2603-2616 (2004) [arXiv:gr-qc/0309109 [gr-qc]].
- [107] A. Al Mamon and K. Bamba, *Eur. Phys. J. C* **78**, no.10, 862 (2018) [arXiv:1805.02854 [gr-qc]].
- [108] A. B. Lahanas and V. C. Spanos, *JHEP* **06**, 089 (2012) [arXiv:1201.2601 [hep-ph]].
- [109] A. B. Lahanas, N. E. Mavromatos and D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett. B* **649**, 83-90 (2007) [arXiv:hep-ph/0612152 [hep-ph]].
- [110] B. Dutta, A. Gurrola, T. Kamon, A. Krislock, A. B. Lahanas, N. E. Mavromatos and D. V. Nanopoulos, *Phys. Rev. D* **79**, 055002 (2009) [arXiv:0808.1372 [hep-ph]].
- [111] R. Jackiw and S. Y. Pi, *Phys. Rev. D* **68**, 104012 (2003) [arXiv:gr-qc/0308071 [gr-qc]].
- [112] S. Alexander and N. Yunes, *Phys. Rept.* **480**, 1-55 (2009) [arXiv:0907.2562 [hep-th]].
- [113] S. H. S. Alexander, M. E. Peskin and M. M. Sheikh-Jabbari, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 081301 (2006) [arXiv:hep-th/0403069 [hep-th]].
- [114] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo], *Phys. Rev. Lett.* **116**, no.6, 061102 (2016) doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102 [arXiv:1602.03837 [gr-qc]].
- [115] A. Y. Petrov, doi:10.1007/978-3-030-52862-1 [arXiv:2004.12758 [gr-qc]].

- [116] S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **76**, 023514 (2007) doi:10.1103/PhysRevD.76.023514 [arXiv:0705.1032 [astro-ph]].
- [117] A. De Felice, T. Kobayashi and S. Tsujikawa, Phys. Lett. B **706**, 123-133 (2011) doi:10.1016/j.physletb.2011.11.028 [arXiv:1108.4242 [gr-qc]].
- [118] S. F. Flender and D. J. Schwarz, Phys. Rev. D **86**, 063527 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.86.063527 [arXiv:1207.2035 [astro-ph.CO]].
- [119] S. Basilakos, S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D **87**, no.12, 123529 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.87.123529 [arXiv:1302.6051 [astro-ph.CO]].
- [120] J. Matsumoto, Phys. Rev. D **87**, no.10, 104002 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.87.104002 [arXiv:1303.6828 [hep-th]].
- [121] A. Ghodsi and F. Najafi, Eur. Phys. J. C **77**, no.8, 559 (2017) doi:10.1140/epjc/s10052-017-5130-0 [arXiv:1702.06798 [hep-th]].
- [122] C. Fidler, T. Tram, C. Rampf, R. Crittenden, K. Koyama and D. Wands, JCAP **12**, 022 (2017) doi:10.1088/1475-7516/2017/12/022 [arXiv:1708.07769 [astro-ph.CO]].
- [123] J. c. Hwang and H. r. Noh, Phys. Rev. D **65**, 023512 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.65.023512 [arXiv:astro-ph/0102005 [astro-ph]].
- [124] M. Ishak, Living Rev. Rel. **22**, no.1, 1 (2019) [arXiv:1806.10122 [astro-ph.CO]].
- [125] E. Abdalla, G. Franco Abellán, A. Aboubrahim, A. Agnello, *et al.* JHEAp **34**, 49-211 (2022) [arXiv:2203.06142 [astro-ph.CO]].
- [126] I. Antoniadis, J. Rizos and K. Tamvakis, Nucl. Phys. B **415**, 497 (1994).
- [127] G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363-384 (1974).
- [128] G. R. Bengochea and R. Ferraro, Phys. Rev. D **79**, 124019 (2009) [arXiv:0812.1205 [astro-ph]].
- [129] Y. F. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis and E. N. Saridakis, Rept. Prog. Phys. **79**, no.10, 106901 (2016) [arXiv:1511.07586 [gr-qc]].
- [130] G. Kofinas and E. N. Saridakis, Phys. Rev. D **90**, 084044 (2014) [arXiv:1404.2249 [gr-qc]].
- [131] G. Kofinas, G. Leon and E. N. Saridakis, Class. Quant. Grav. **31**, 175011 (2014) [arXiv:1404.7100 [gr-qc]].

- [132] S. Bahamonde, C. G. Böhrer and M. Wright, *Phys. Rev. D* **92**, no.10, 104042 (2015) [arXiv:1508.05120 [gr-qc]].
- [133] S. Bahamonde and S. Capozziello, *Eur. Phys. J. C* **77**, no.2, 107 (2017) [arXiv:1612.01299 [gr-qc]].
- [134] C. Q. Geng, C. C. Lee, E. N. Saridakis and Y. P. Wu, *Phys. Lett. B* **704**, 384-387 (2011) [arXiv:1109.1092 [hep-th]].
- [135] S. H. Chen, J. B. Dent, S. Dutta and E. N. Saridakis, *Phys. Rev. D* **83**, 023508 (2011) [arXiv:1008.1250 [astro-ph.CO]].
- [136] J. B. Dent, S. Dutta and E. N. Saridakis, *JCAP* **1101**, 009 (2011) [arXiv:1010.2215 [astro-ph.CO]].
- [137] P. Wu and H. W. Yu, *Phys. Lett. B* **693**, 415 (2010) [arXiv:1006.0674 [gr-qc]].
- [138] K. Bamba, R. Myrzakulov, S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **85**, 104036 (2012) [arXiv:1202.4057 [gr-qc]].
- [139] G. Otalora, *JCAP* **07**, 044 (2013) [arXiv:1305.0474 [gr-qc]].
- [140] G. Farrugia and J. Levi Said, *Phys. Rev. D* **94**, no.12, 124054 (2016) [arXiv:1701.00134 [gr-qc]].
- [141] M. Hohmann, L. Jarv and U. Ualikhanova, *Phys. Rev. D* **96**, no.4, 043508 (2017) [arXiv:1706.02376 [gr-qc]].
- [142] S. Bahamonde, C. G. Böhrer and M. Krššák, *Phys. Lett. B* **775**, 37-43 (2017) [arXiv:1706.04920 [gr-qc]].
- [143] A. Awad, W. El Hanafy, G. G. L. Nashed and E. N. Saridakis, *JCAP* **02**, 052 (2018) [arXiv:1710.10194 [gr-qc]].
- [144] H. Abedi, S. Capozziello, R. D'Agostino and O. Luongo, *Phys. Rev. D* **97**, no.8, 084008 (2018) [arXiv:1803.07171 [gr-qc]].
- [145] A. Golovnev and T. Koivisto, *JCAP* **11**, 012 (2018) [arXiv:1808.05565 [gr-qc]].
- [146] M. Krssak, R. J. van den Hoogen, J. G. Pereira, C. G. Böhrer and A. A. Coley, *Class. Quant. Grav.* **36**, no.18, 183001 (2019) [arXiv:1810.12932 [gr-qc]].
- [147] F. K. Anagnostopoulos, S. Basilakos and E. N. Saridakis, *Phys. Rev. D* **100**, no.8, 083517 (2019) [arXiv:1907.07533 [astro-ph.CO]].
- [148] E. N. Saridakis, S. Myrzakul, K. Myrzakulov and K. Yerzhanov, *Phys. Rev. D* **102**, no.2, 023525 (2020) [arXiv:1912.03882 [gr-qc]].

- [149] M. Caruana, G. Farrugia and J. Levi Said, *Eur. Phys. J. C* **80**, no.7, 640 (2020) [arXiv:2007.09925 [gr-qc]].
- [150] R. Briffa, S. Capozziello, J. Levi Said, J. Mifsud and E. N. Saridakis, *Class. Quant. Grav.* **38**, no.5, 055007 (2020) [arXiv:2009.14582 [gr-qc]].
- [151] X. Ren, T. H. T. Wong, Y. F. Cai and E. N. Saridakis, *Phys. Dark Univ.* **32**, 100812 (2021) [arXiv:2103.01260 [astro-ph.CO]].
- [152] R. Briffa, C. Escamilla-Rivera, J. Said Levi, J. Mifsud and N. L. Pullicino, *Eur. Phys. J. Plus* **137**, no.5, 532 (2022) [arXiv:2108.03853 [astro-ph.CO]].
- [153] D. Benisty, E. I. Guendelman, A. van de Venn, D. Vasak, J. Struckmeier and H. Stoecker, *Eur. Phys. J. C* **82**, no.3, 264 (2022) [arXiv:2109.01052 [astro-ph.CO]].
- [154] K. F. Dialektopoulos, J. L. Said and Z. Oikonomopoulou, *Eur. Phys. J. C* **82**, no.3, 259 (2022) [arXiv:2112.15045 [gr-qc]].
- [155] G. Papagiannopoulos, S. Basilakos and E. N. Saridakis, [arXiv:2202.10871 [gr-qc]].
- [156] S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos, M. Hohmann, J. L. Said, C. Pfeifer and E. N. Saridakis, [arXiv:2203.00619 [gr-qc]].
- [157] G. Leon, A. Paliathanasis, E. N. Saridakis and S. Basilakos, [arXiv:2203.14866 [gr-qc]].
- [158] T. Papanikolaou, C. Tzerefos, S. Basilakos and E. N. Saridakis, primordial black hole fluctuations,” [arXiv:2205.06094 [gr-qc]].
- [159] C. G. Boehmer, A. Mussa and N. Tamanini, *Class. Quant. Grav.* **28**, 245020 (2011) [arXiv:1107.4455 [gr-qc]].
- [160] R. Ferraro and F. Fiorini, *Phys. Rev. D* **84**, 083518 (2011) [arXiv:1109.4209 [gr-qc]].
- [161] P. A. Gonzalez, E. N. Saridakis and Y. Vasquez, *JHEP* **07**, 053 (2012) [arXiv:1110.4024 [gr-qc]].
- [162] X. h. Meng and Y. b. Wang, *Eur. Phys. J. C* **71**, 1755 (2011) [arXiv:1107.0629 [astro-ph.CO]].
- [163] T. Wang, *Phys. Rev. D* **84**, 024042 (2011) [arXiv:1102.4410 [gr-qc]].
- [164] M. E. Rodrigues, M. J. S. Houndjo, J. Tossa, D. Momeni and R. Myrzakulov, *JCAP* **11**, 024 (2013) [arXiv:1306.2280 [gr-qc]].

- [165] G. G. L. Nashed, *Phys. Rev. D* **88**, 104034 (2013) [arXiv:1311.3131 [gr-qc]].
- [166] C. Bejarano, R. Ferraro and M. J. Guzmán, *Eur. Phys. J. C* **75**, 77 (2015) [arXiv:1412.0641 [gr-qc]].
- [167] A. Das, F. Rahaman, B. K. Guha and S. Ray, *Astrophys. Space Sci.* **358**, no.2, 36 (2015) [arXiv:1507.04959 [gr-qc]].
- [168] Z. F. Mai and H. Lu, *Phys. Rev. D* **95**, no.12, 124024 (2017) [arXiv:1704.05919 [hep-th]].
- [169] G. Mustafa, G. Abbas and T. Xia, *Chin. J. Phys.* **60**, 362-378 (2019)
- [170] G. G. L. Nashed and S. Capozziello, *Eur. Phys. J. C* **80**, no.10, 969 (2020) [arXiv:2010.06355 [gr-qc]].
- [171] C. Pfeifer and S. Schuster, *Universe* **7**, no.5, 153 (2021) [arXiv:2104.00116 [gr-qc]].
- [172] X. Ren, Y. Zhao, E. N. Saridakis and Y. F. Cai, *JCAP* **10**, 062 (2021) [arXiv:2105.04578 [astro-ph.CO]].
- [173] S. Bahamonde, A. Golovnev, M. J. Guzmán, J. L. Said and C. Pfeifer, *JCAP* **01**, no.01, 037 (2022) [arXiv:2110.04087 [gr-qc]].
- [174] G. G. L. Nashed and E. N. Saridakis, *JCAP* **05**, no.05, 017 (2022) [arXiv:2111.06359 [gr-qc]].
- [175] S. Bahamonde, L. Ducobu and C. Pfeifer, *JCAP* **04**, no.04, 018 (2022) [arXiv:2201.11445 [gr-qc]].
- [176] Y. Huang, J. Zhang, X. Ren, E. N. Saridakis and Y. F. Cai, [arXiv:2204.06845 [astro-ph.CO]].
- [177] Y. Zhao, X. Ren, A. Ilyas, E. N. Saridakis and Y. F. Cai, [arXiv:2204.11169 [gr-qc]]
- [178] P. Asimakis, S. Basilakos, N. E. Mavromatos and E. N. Saridakis, *Phys. Rev. D* **105**, no.8, 8 (2022) [arXiv:2112.10863 [gr-qc]].
- [179] F. K. Anagnostopoulos, V. Gakis, E. N. Saridakis and S. Basilakos, [arXiv:2205.11445 [gr-qc]].
- [180] H. Yu, B. Ratra and F. Y. Wang, *Astrophys. J.* **856**, no.1, 3 (2018) [arXiv:1711.03437 [gr-qc]].