



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΖΑΒΙΤΣΑΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

“Επίδραση σκοτεινής ύλης στους Αστéρες
Νετρονίων”

ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΗΣ:

Κοσμολογίας

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

ΚΟΥΒΑΡΗΣ ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΣ

Καθηγητής, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΚΟΥΒΑΡΗΣ ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΣ

Καθηγητής, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΜΑΥΡΟΜΑΤΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

Καθηγητής, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Αθήνα, Ιούλιος 2023

Ευχαριστίες

Στην εκπόνηση αυτής της εργασίας συνέβαλαν αρκετοί άνθρωποι, ακόμα και εν αγνοία τους. Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένεια μου, για τη συνεχή τους στήριξη σε όλα τα χρόνια των σπουδών μου. Επίσης οφείλω να ευχαριστήσω τους φίλους μου για όλες τις συζητήσεις μας, εποικοδομητικές και μη.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα και καθηγητή μου Χριστόφορο Κούβαρη, για την καθοδήγηση του όλη τη χρονιά. Χωρίς τη βοήθεια του η ολοκλήρωση αυτής της εργασίας δε θα ήταν δυνατή.

.....
Ζαβιτσάνος Δημήτρης

© (2023) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Abstract: In this thesis, we investigate the effects of different types of dark matter on neutron stars. Specifically we explore their impact on the hydrostatic equilibrium of these stellar objects. Our focus lies in examining the alterations that occur when a dark matter population exists within the neutron star. We analyze dark matter models that involve coupling to neutrons and muons, primordial black holes, as well as dark particles that exhibit no interactions with ordinary matter. Through our results we demonstrate that neutron stars serve as a valuable system for testing and evaluating potential dark matter models.

Keywords: Neutron stars, Dark matter, Cosmology, Black Holes, General Relativity, Particle Physics

Περίληψη: Στην παρούσα εργασία, εξετάζουμε την επίδραση διαφόρων τύπων σκοτεινής ύλης στους αστέρες νετρονίων. Συγκεκριμένα μελετάμε τις διαφορές στην υδροδυναμική ισορροπία των αστεριών, όταν υπάρχει πληθυσμός σκοτεινής ύλης στο εσωτερικό τους. Οι περιπτώσεις που θα μας απασχολήσουν είναι σκοτεινή ύλη που συζευγνύεται με νετρόνια και μίονια, αρχέγονες μαύρες τρύπες και σκοτεινά σωματίδια που δεν αλληλεπιδρούν με την ύλη. Με βάση τα αποτελέσματα της εργασίας θα δείξουμε ότι οι αστέρες νετρονίων αποτελούν ένα πολύ χρήσιμο σύστημα για την ανίχνευση σκοτεινής ύλης.

Λέξεις κλειδιά: Αστέρες νετρονίων, Σκοτεινή ύλη, Κοσμολογία, Μαύρες τρύπες, Γενική Σχετικότητα, Σωματιδιακή φυσική

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Αστέρες Νετρονίων	1
1.2	Σκοτεινή ύλη	4
1.3	Σκοπός της εργασίας	10
2	Θεωρία	12
2.1	Γενική σχετικότητα	12
2.2	Η μετρική Schwarzschild	14
2.3	Εξίσωση Tolman-Oppenheimer-Volkof	15
2.3.1	Σύστημα υδροδυναμικής ισορροπίας και ευστάθεια	18
2.4	Καταστατική εξίσωση	23
2.4.1	Θερμοδυναμικά μεγέθη	23
2.4.2	Ιδανικό αέριο Fermi	25
2.4.3	Ισορροπία ασθενών αλληλεπιδράσεων	28
2.5	Ρεαλιστικές καταστατικές εξισώσεις	31
2.5.1	Σχηματική περιγραφή του αστεριού	31
2.5.2	Ενοποιημένη καταστατική των Douchin και Haensel	33
2.5.3	Καταστατική Gandolfi et al.	35
3	Επίδραση σκοτεινής ύλης σε αστέρες νετρονίων	37
3.1	Μεθοδολογία	38
3.2	Πυρηνικές καταστατικές εξισώσεις	41
3.2.1	Ιδανικό αέριο Fermi	41
3.3	Διάσπαση του νετρονίου σε σκοτεινή ύλη	45
3.3.1	Ιδανικό αέριο σκοτεινής ύλης	46
3.3.2	Σκοτεινή ύλη με απωστικές αυτο-αλληλεπιδράσεις	49
3.4	Σκοτεινή ύλη που αλληλεπιδρά με τα μίονια	55
3.4.1	Γυρομαγνητικός λόγος μιονίου	55
3.4.2	Επίδραση στους αστέρες νετρονίων	58
3.5	Μαύρη τρύπα στο εσωτερικό του αστεριού	63
3.5.1	Bondi accretion	63
3.5.2	Επίδραση στους αστέρες νετρονίων	65

3.6	Admixed αστέρες νετρονίων	71
4	Συμπεράσματα	78
A'	Λύση εξισώσεων Einstein για αστέρι νετρονίων	80
A'.1	Connection 1-forms	80
A'.2	Connection 2-forms	82
A'.3	Riemann tensor	84
A'.4	Ricci tensor	84
A'.5	Ricci Scalar	85
A'.6	Einstein Tensor	85
A'.7	Δεξι μέλος εξίσωσης Einstein	86
A'.8	Εξισώσεις TOV	86

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Αστέρες Νετρονίων

Τα αστέρια νετρονίων είναι ένα πολύ ιδιαίτερο είδος αστεριών. Αποτελούν ένα από τα τελευταία στάδια της ζωής ενός αστέρα και είναι από τα πιο πυκνά αντικείμενα που μπορούν να συναντηθούν στη φύση. Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μία εισαγωγή στον τρόπο δημιουργίας τους και στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους, εξαιτίας των οποίων έχουν μεγάλη αστροφυσική αξία. Οι ιδιότητες της ύλης στις συνθήκες που επικρατούν σε ένα αστέρι νετρονίων δεν μπορούν να επιτευχθούν στα τωρινά πειράματα. Επομένως, η μελέτη των αστερών μας προσφέρει πολύ χρήσιμες πληροφορίες για μοντέλα φυσικής υψηλών ενεργειών που δεν μπορούν να ελεγχθούν στη γη. Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε τους μηχανισμούς με τους οποίους η ύπαρξη σκοτεινής ύλης μπορεί να επηρεάσει την υδροδυναμική ισορροπία του αστέρα. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των θεωρητικών μοντέλων με τις παρατηρήσεις αστερών νετρονίων μπορούμε να λάβουμε φαινομενολογικούς περιορισμούς για τις θεωρίες σκοτεινής ύλης.

Δημιουργία αστερών νετρονίων

Οι αστέρες νετρονίων δημιουργούνται έπειτα από την καταστροφή ενός αστεριού, ως το αποτέλεσμα μιας έκρηξης σουπερνόβα. Για να δημιουργηθεί ένα αστέρι νετρονίων πρέπει να πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις, βασικό κριτήριο αποτελεί η μάζα του αρχικού αστεριού που κατέρρευσε. Ένα αστέρι στη διάρκεια της ζωής του βρίσκεται σε μία συνεχή κατάσταση ισορροπίας, όπου δύο δυνάμεις αντισταθμίζουν η μία την άλλη. Η πίεση που δημιουργείται από τις διεργασίες πυρηνικής σύντηξης, ισορροπεί τη βαρυτική έλξη που προκαλείται από τη μάζα του αστέρα. Το άστρο φτάνει στο τέλος της ζωής του όταν πια δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί η διαδικασία της σύντηξης, ή αλλιώς *a process*. Αν το αστέρι έχει μάζα μέχρι 7 φορές τη μάζα του ήλιου τότε δεν μπορεί να υποστηρίξει τις συνθήκες για τη σύντηξη του σιδήρου και η σύντηξη σταματάει στον άνθρακα. Αν έχει μεγαλύτερη μάζα τότε οι διεργασίες σύντηξης θα

συνεχίσουν μέχρις ότου δημιουργηθεί σίδηρος στο εσωτερικό του πυρήνα. Στη συνέχεια δεν υπάρχει περαιτέρω σύντηξη, καθώς ο σίδηρος έχει τη μεγαλύτερη ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο.

Στην δεύτερη περίπτωση μόλις δημιουργηθεί σίδηρος η βαρυτική δύναμη θα υπερσχύσει προκαλώντας μία από τις πιο βίαιες εκρήξεις που μπορούν να παρατηρηθούν, μία σουπερνόβα τύπου-II (Type-II supernova). Μετά την έκρηξη παραμένει ο πυρήνας του αστεριού ο οποίος μπορεί να γίνει λευκός νάνος, αστέρι νετρονίων ή μαύρη τρύπα. Οι λευκοί νάνοι και οι αστέρες νετρονίων αποκαλούνται ψυχρά αστέρια, στο εσωτερικό τους η ύλη βρίσκεται σε εκφυλισμένη κατάσταση. Στην περίπτωση των λευκών νάνων αυτό που εμποδίζει την κατάρρευση του αστεριού είναι η πίεση εκφυλισμού του πληθυσμού ηλεκτρονίων. Η πίεση εκφυλισμού οφείλεται στην φερμιονική φύση των ηλεκτρονίων, η στατιστική Fermi-Dirac απαγορεύει το να βρεθούν σωματίδια στην ίδια κβαντική κατάσταση. Αυτή η απαγορευτική αρχή προκαλεί την πίεση εκφυλισμού. Ένα εκφυλισμένο αέριο ηλεκτρονίων μπορεί να υποστηρίξει μία μέγιστη μάζα λευκού νάνου, το όριο αυτό ονομάζεται όριο Chandrasekhar. Η μέγιστη μάζα ενός τέτοιου αστεριού εξαρτάται από την σύνθεση του και είναι περίπου $1.4 M_{\odot}$.

Η ύπαρξη του ορίου Chandrasekhar είναι μια ένδειξη ότι τα αστέρια με πιο βαρύ πυρήνα δεν μπορούν να καταρρεύσουν σε λευκούς νάνους, επομένως πρέπει να υπάρχει και κάποια άλλη πιθανή κατάσταση. Αυτό οδήγησε στην μελέτη της εκφυλισμένης πίεσης των νετρονίων ως αντίσταση στην βαρύτητα, τα σώματα που δημιουργούνται ονομάστηκαν αστέρες νετρονίων. Για τους αστέρες νετρονίων υπάρχει ένα παρόμοιο όριο μάζας, όριο Tolman–Oppenheimer–Volkoff, με το οποίο θα ασχοληθούμε σε ένα μεγάλο τμήμα της παρούσας εργασίας. Ιστορικά η πρώτη πλήρης μελέτη έγινε από τους Oppenheimer, Volkoff [1] και Tolman [2]. Οι οποίοι υπέθεσαν πως το αστέρι αποτελείται από νετρόνια, ο πληθυσμός των οποίων μοντελοποιείται ως ένα ιδανικό αέριο Fermi. Παρόμοιες υποθέσεις είχαν πραγματοποιηθεί και προγενέστερα, μετά την ανακάλυψη του νετρονίου, κάνοντας χρήση της κλασικής μηχανικής. Η ανάλυση των Tolman, Oppenheimer και Volkoff είναι πληρέστερη, καθώς χρησιμοποίησαν εξισώσεις γενικής σχετικότητας. Στην δημοσίευσή τους οι Oppenheimer, Volkoff έδειξαν ότι η κβαντομηχανική πίεση του εκφυλισμένου αερίου νετρονίων μπορεί να υποστηρίξει αστέρες νετρονίων έως $0.7 M_{\odot}$. Άνω του ορίου Tolman–Oppenheimer–Volkoff δεν υπάρχουν ευσταθείς λύσεις, οι επικρατέστερες θεωρίες είναι ότι πως αυτοί οι πυρήνες καταρρέουν σε μαύρες τρύπες. Χρειάστηκαν αρκετά χρόνια ώσπου να παρατηρηθούν τα pulsars και να ταυτοποιηθούν ως ταχέως περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων. Οι μάζες των αστέρων νετρονίων που έχουμε παρατηρήσει είναι περίπου $1.4 M_{\odot}$, ενώ η μέγιστη τιμή της μάζας τους είναι πάνω από $2 M_{\odot}$. Το γεγονός πως είναι κατά πολύ μεγαλύτερες από το όριο TOV δείχνει ότι η κατάσταση της ύλης δεν είναι απλώς ένα ιδανικό αέριο νετρονίων. Για παράδειγμα θα δούμε ότι μεγάλη συνεισφορά στην πίεση έχουν οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις.

Ιδιότητες της ύλης στο εσωτερικό του αστέρα

Οι αστέρες νετρονίων όπως αναφέραμε είναι πάρα πολύ πυκνά ουράνια σώματα, τα μόνα πιο πυκνά είναι οι μελανές οπές. Οι διαφορετικές πυκνότητες στο εσωτερικό των λευκών νάνων και των αστέρων νετρονίων δίνουν πολύ διαφορετικές ιδιότητες στα δύο άστρα. Στον πυρήνα των αστέρων νετρονίων η πυκνότητα μάζας είναι έως και 10 φορές μεγαλύτερη από την πυρηνική πυκνότητα $\rho_{nuc} = 2.8 * 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$. Υπάρχουν δύο σημαντικές αλλαγές σε σχέση με τους λευκούς νάνους. Η πρώτη είναι πως πρέπει να χρησιμοποιηθούν εξισώσεις από την γενική σχετικότητα καθώς, δημιουργούνται πολύ πιο συμπαγή άστρα και τα σχετικιστικά φαινόμενα γίνονται σημαντικά. Η δεύτερη διαφορά είναι πως υπάρχει μεγάλη αβεβαιότητα για την δομή της ύλης σε τόσο μεγάλες πυκνότητες. Όπως αναφέραμε έχουν παρατηρηθεί αστέρες με μάζα που ξεπερνάει τις 2 ηλιακές μάζες [3], επομένως η υπόθεση των Tolman–Oppenheimer–Volkoff για ιδανικό αέριο Fermi δεν μπορεί να ισχύει. Σίγουρα συνεισφέρουν στην πίεση οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις των νετρονίων ενώ, μπορεί να υπάρχουν και πιο εξωτικές καταστάσεις στον πυρήνα. Άλλωστε η πυκνότητα στο κέντρο του αστέρα είναι μεγαλύτερη από την ‘πυκνότητα’ του νετρονίου, άρα είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι δημιουργούνται quark και gluons. Εισάγονται έτσι φαινόμενα από την φυσική υψηλών ενεργειών όπως ύλη από strange quark και η υπεραγωγιμότητα χρώματος. Οι παρατηρήσεις λευκών νάνων χρησιμοποιούνται για να ελεγχθούν διάφορα αστροφυσικά μοντέλα. Ενώ, οι παρατηρήσεις αστέρων νετρονίων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ελεγχθούν θεωρίες πυρηνικής και σωματιδιακής φυσικής. Σε επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε αναλυτικά τις εξισώσεις που περιγράφουν ένα αστέρι νετρονίων, προς το παρόν θα αναφέρουμε ότι η πληροφορία των ιδιοτήτων της ύλης στο εσωτερικό του αστεριού κωδικοποιείται στην καταστατική εξίσωση.

Η καταστατική εξίσωση συνδέει την πίεση (P) με κάποιο άλλο εντατικό θερμοδυναμικό μέγεθος, στην περίπτωση που μελετάμε συνήθως είναι η πυκνότητα ενέργειας (ρ) ή η αριθμητική πυκνότητα (n). Για τους αστέρες νετρονίων υπάρχει ακόμα μεγάλη αβεβαιότητα γύρω από την καταστατική εξίσωση της ύλης στο εσωτερικό τους, λόγω των πολύ ακραίων συνθηκών που δεν μπορούν μελετηθούν σε κάποιο εργαστήριο. Η μελέτη τους είναι σημαντική για να αποκτήσουμε πρόσβαση σε αυτές τις συνθήκες που δεν μπορούμε να συναντήσουμε αλλού. Αποτελούν έτσι μια μορφή εργαστηρίου μέσω του οποίου μπορούμε να ελέγξουμε τόσο τα όρια της τρέχουσας φυσικής, όσο και νέα μοντέλα. Τέτοια μοντέλα μπορούν να συμπεριλαμβάνουν πιθανές μορφές σκοτεινής ύλης, οι οποίες επηρεάζουν σημαντικά την ισορροπία των αστέρων νετρονίων. Σκοπός της εργασίας είναι να μελετήσουμε την επίδραση της σκοτεινής ύλης, λαμβάνοντας πληροφορίες για την μεταβολή παρατηρήσιμων ιδιοτήτων των αστέρων. Μας επιτρέπεται έτσι να χρησιμοποιήσουμε μετρήσεις αστέρων νετρονίων ώστε να εξάγουμε πληροφορίες για διάφορες θεωρίες σκοτεινής ύλης.

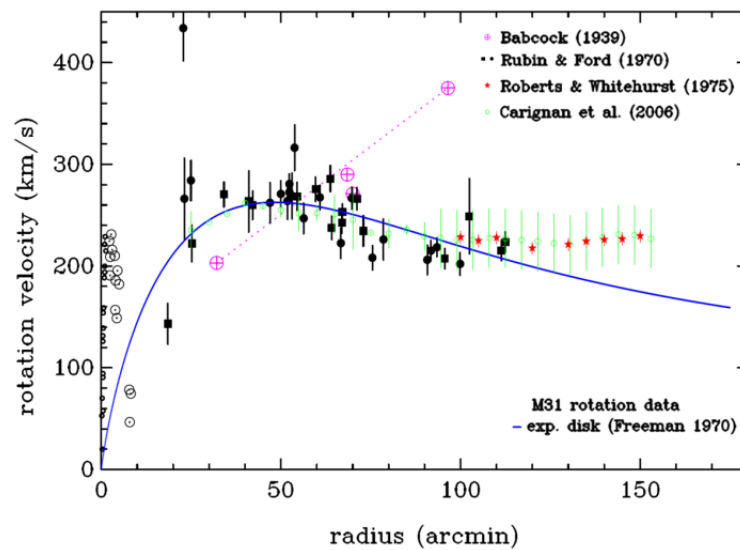
1.2 Σκοτεινή ύλη

Η σκοτεινή ύλη είναι μία μορφή ύλης που προτάθηκε πρώτη φορά το 1933 από τον αστρονόμο Fritz Zwicky με σκοπό να εξηγήσει την κίνηση γαλαξιών εντός του Coma Cluster. Η υποθετική αυτή μορφή ύλης θα έπρεπε να αλληλεπιδρά με την βαρύτητα αλλά όχι με τον ηλεκτρομαγνητισμό, καθώς δεν εξέπεμπε ακτινοβολία, έτσι έλαβε και το όνομα της. Μία τέτοια μορφή ύλης είναι επομένως πολύ δύσκολο να παρατηρηθεί ευθέως, για αυτό και αρχικά η ιδέα αυτή δεν είχε πολλούς υποστηρικτές. Στην πορεία όμως ολοένα και περισσότερες παρατηρήσεις έδειχναν ότι υπάρχει παραπάνω μάζα στο σύμπαν από την κατανομή της κανονικής ύλης που βλέπουμε, σήμερα είναι κοινώς αποδεκτό ότι πρέπει να υπάρχει μία μορφή ύλης που να πληρεί τα συγκεκριμένα κριτήρια. Αν η σκοτεινή ύλη αλληλεπιδρά με την κανονική τότε σίγουρα η αλληλεπίδραση αυτή θα είναι πολύ ασθενής. Αυτός είναι ο κύριος λόγος που η σκοτεινή ύλη έχει παρατηρηθεί μόνο εμμέσως από βαρυτικά φαινόμενα. Η φύση της σκοτεινής ύλης παραμένει επομένως ερευνητικό αντικείμενο γύρω από το οποίο υπάρχει πληθώρα διαφορετικών θεωριών. Τέτοιες θεωρίες συνήθως περιλαμβάνουν σωματίδια εκτός του καθιερωμένου προτύπου που θα μπορούσαν να είναι πιθανοί υποψήφιοι για σκοτεινή ύλη, ενώ υπάρχουν και θεωρίες που αντί για την σωματιδιακή φύση της σκοτεινής ύλης χρησιμοποιούν τροποποιήσεις της γενικής σχετικότητας. Αυτές ονομάζονται θεωρίες τροποποιημένης Νευτώνιας δυναμικής (MOND), οι τελευταίες παρατηρήσεις όμως φαίνεται να υποστηρίζουν τις σωματιδιακές θεωρίες όπως θα δούμε στην συνέχεια.

Παρατηρησιακά δεδομένα σκοτεινής ύλης

Μια από τις πρώτες ισχυρές ενδείξεις σκοτεινής ύλης, όπως αναφέραμε, ήταν η παρατήρηση της υψηλής ταχύτητας γαλαξιών στο Comma Cluster. Ο Zwicky υπολόγισε την μάζα του Comma Cluster με δύο τρόπους, μέσω των μετρήσεων της μετατόπισης του φωτός προς το ερυθρό και μέσω της φωτεινότητας του σμήνους. Μέσω της φωτεινότητας του σμήνους εκτίμησε την μάζα και το μέγεθος του, έτσι μπόρεσε να βρει την δυναμική ενέργεια του Comma Cluster. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Virial υπολόγισε την διασπορά ταχυτήτων που θα έπρεπε να έχει το σμήνος γαλαξιών. Οι μετρήσεις της μετατόπισης του φωτός που εκπέμπεται από το σμήνος έδιναν πολύ μεγαλύτερη μέση ταχύτητα από αυτήν που είχε υπολογίσει. Αυτό οδήγησε στην υπόθεση πως υπάρχει πολύ περισσότερη μάζα μέσα στο Comma Cluster η οποία επηρεάζει την κατανομή ταχυτήτων, αλλά δεν εκπέμπει φως ώστε να αλλάξει την φωτεινότητα του σμήνους. Προφανώς μία τέτοια υπόθεση δεν έγινε άμεσα αποδεκτή, η σκοτεινή ύλη άρχισε να έχει περισσότερους υποστηρικτές το 1970, όταν μετρήθηκε το προφίλ της κυκλικής ταχύτητας ως συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο του γαλαξία. Οι Kahn και Woltjer το 1959 γνωρίζοντας την σχετική ταχύτητα της Ανδρομέδας υπολόγισαν την ανοιγμένη μάζα του συστήματος Ανδρομέδα-Milky Way. Βρήκαν ότι το

σύστημα έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από την αποδεκτή τιμή της εποχής, άρα έπρεπε να υπάρχει μια άγνωστη μορφή ύλης μεταξύ των γαλαξιών που σταθεροποιεί το σύστημα. Το κέντρο ενός γαλαξία είναι και το πιο φωτεινό μέρος του καθώς εκεί βρίσκεται το μεγαλύτερο τμήμα της μάζας που οφείλεται στην κανονική ύλη. Από την Νευτώνεια μηχανική γνωρίζουμε ότι η βαρύτητα είναι δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου, υποθέτοντας κυκλική κίνηση των σωμάτων εντός του γαλαξία είναι εύκολο να δείξουμε ότι η ταχύτητα θα πρέπει να μειώνεται όσο πιο μακριά είναι το αντικείμενο από το κέντρο του γαλαξία. Συγκεκριμένα έχουμε $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ οι μετρήσεις που έγιναν αρχικά από την Vera Rubin και τον Kent Ford για την Ανδρομέδα και αργότερα για άλλους γαλαξίες δεν συμφωνούν με την θεωρητική συμπεριφορά της ταχύτητας. Στο διάγραμμα 1.1 απεικονίζεται η διαφορά θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων. Για να εξηγηθεί η συμπεριφορά της ταχύτητας θα πρέπει να υπάρχει περισσότερη μάζα από ότι παρατηρείται στα εξωτερικά τμήματα του γαλαξία. Εδραιώθηκε επομένως η ιδέα πως το κέντρο των γαλαξιών περιβάλλεται από μία μορφή ύλης, της οποίας οι ιδιότητες δεν είναι γνωστές και το φαινόμενο αυτό ονομάστηκε halo σκοτεινής ύλης.

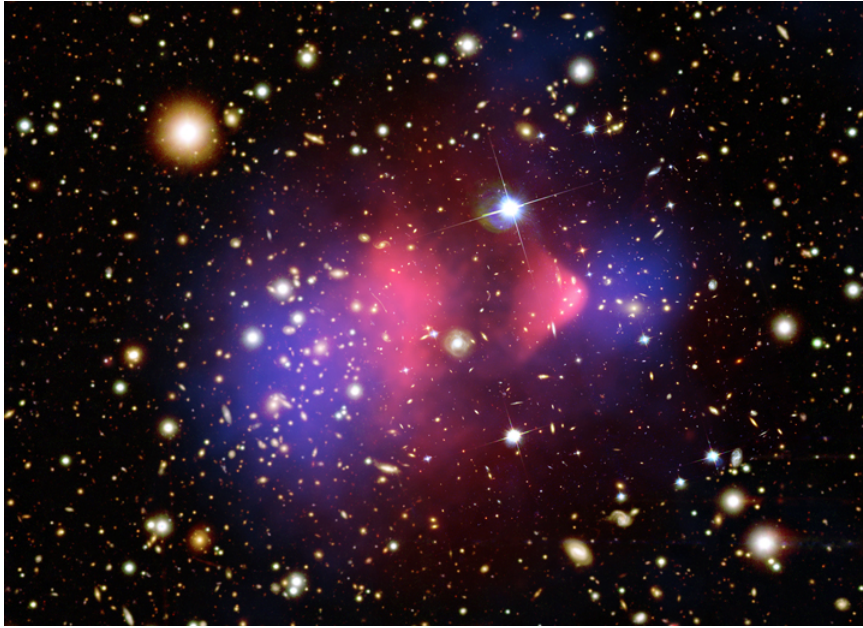


Σχήμα 1.1: Καμπύλη περιστροφής για την Ανδρομέδα (M31). Τα μαύρα σημεία αποτελούν μετρήσεις τόσο για το εσωτερικό, όσο και για το εξωτερικό μέρος του γαλαξία. Το σημαντικό για την ανάλυση μας είναι τα κόκκινα σημεία που είναι μετρήσεις από την γραμμή 21 cm HI βλέπουμε ότι αποκλίνουν σε σχέση με την αναμενόμενη καμπύλη (μπλε). Το διάγραμμα είναι από Bertone et al. [4].

Μία διαφορετική εξήγηση των καμπύλων περιστροφής που παρατηρούνται δόθηκε μέσω της τροποποίησης της Νευτώνιας μηχανικής. Μεταβάλλοντας τον δεύτερο νόμο του Newton για τις μικρές επιταχύνσεις ήταν εφικτό να περιγραφεί η συμπεριφορά της ταχύτητας των γαλαξιών. Έκτοτε έχουν υπάρξει πολλές θεωρίες που ακολουθούν παρόμοια λογική, η πιο γνωστή είναι η TeVeS που είναι πλήρως σχετικιστική. Πρόσφατα παρατηρήθηκαν γαλαξίες που πιθανώς δεν έχουν σκοτεινή ύλη ή έχουν πολύ μικρότε-

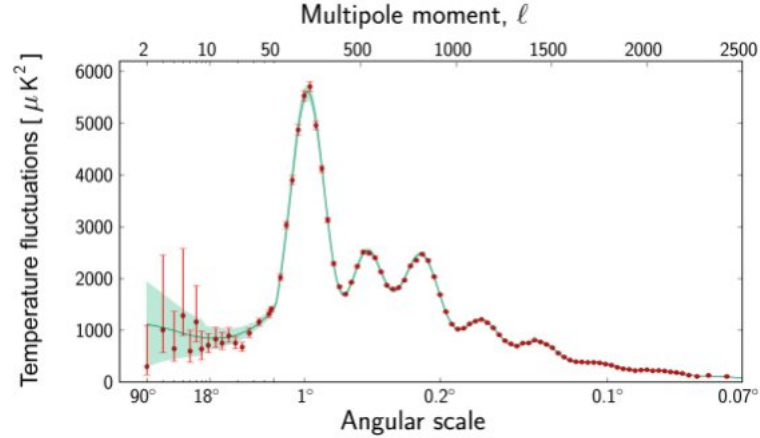
ρο ποσοστό από το αναμενόμενο [5]. Τέτοιοι γαλαξίες μπορούν να περιγραφούν από μοντέλα σκοτεινής ύλης, θεωρώντας παραδείγματος χάριν πως μέσω μιας σύγκρουσης έχει αφαιρεθεί το halo σκοτεινής ύλης. Θεωρίες τύπου MOND αποτυγχάνουν να εξηγήσουν τέτοιους γαλαξίες καθώς πρέπει να αποτελούν καθολικό νόμο του σύμπαντος και να μην διαφοροποιούνται τοπικά.

Σημαντικότατο ρόλο στην υπέρσχυση της σκοτεινής ύλης έναντι των θεωριών MOND έπαιξε η παρατήρηση της σύγκρουσης δύο σμηνών γαλαξιών [6]. Στο Bullet Cluster ένα σμήνος γαλαξιών περνάει μέσα από ένα άλλο, έτσι η ύλη αλληλεπιδρά έντονα δημιουργώντας ένα ζεστό αέριο, πλάσμα, που εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Την ακτινοβολία αυτή μετράνε τηλεσκόπια ακτίνων- X και έτσι μπορεί να προσδιοριστεί η κατανομή του πλάσματος που αποτελεί και το μεγαλύτερο ποσοστό φυσιολογικής ύλης. Γνωρίζουμε από την γενική σχετικότητα ότι μεγάλα ποσά ύλης μπορούν να καμπυλώσουν τις ακτίνες φωτός που περνάνε από την περιοχή εκείνη, ένα φαινόμενο που ονομάζεται βαρυτικός φακός (gravitational lens). Επομένως τηλεσκόπια που μετρούν οπτική ακτινοβολία που εκπέμπεται από άστρα πίσω από το Bullet Cluster μπορούν να μετρήσουν αυτήν την καμπύλωση και έτσι να προσδιορίσουν την κατανομή μάζας. Οι δύο μέθοδοι μέτρησης μάζας απεικονίζονται στην παρακάτω εικόνα (διάγραμμα 1.2), παρατηρούμε ότι η πιο έντονη καμπύλωση του χωρόχρονου δεν γίνεται στο ίδιο σημείο όπου έχουμε την έντονη ακτινοβολία της πολύ θερμής ύλης. Η εξήγηση αυτού του φαινομένου μπορεί να γίνει πάλι μέσω της σκοτεινής ύλης, κατά την σύγκρουση των δύο σμηνών τα halo σκοτεινής ύλης του κάθε σμήνους δεν αλληλεπιδρούν έντονα και επιβραδύνουν ελάχιστα περνώντας το ένα μέσα από το άλλο. Αντιθέτως η ύλη εξαιτίας των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων επιβράδυνε έντονα και συγκεντρώθηκε στο κέντρο της σύγκρουσης, εκπέμποντας ταυτοχρόνως μεγάλη ποσότητα ακτινοβολίας (κόκκινη περιοχή). Η σκοτεινή ύλη εφόσον προχώρησε πιο μακριά από το κέντρο σύγκρουσης είναι υπεύθυνη για την καμπύλωση που παρατηρείται (μπλε περιοχή), βλέπουμε ότι αποτελεί το μεγαλύτερο μέρος της μάζας των δύο γαλαξιών. Όπως αναφέρεται από τους Clowe et. al.[6] η απόσταση της ολικής μάζας από το κέντρο που βρίσκεται η βαρυονική ύλη είναι σε 8σ σημαντικότητα και δεν μπορεί να εξηγηθεί από διαφοροποιήσεις του νόμου της βαρυτικής έλξης.



Σχήμα 1.2: Απεικόνιση του Bullet Cluster. Το ερυθρό μέρος είναι μετρήσεις ακτίνων-X και δείχνουν που είναι η περισσότερη ύλη. Η μπλε περιοχή απεικονίζει την κατανομή μάζας βάση του φαινομένου του βαρυτικού φακού. Είναι εμφανές ότι η περισσότερη μάζα των γαλαξιών δεν βρίσκεται στην περιοχή της φυσιολογικής ύλης. Από Chandra X-ray Observatory [7]

Τέλος μία ακόμα ένδειξη της ύπαρξης της σκοτεινής ύλης έρχεται από την κοσμολογία και είναι η Μικροκυματική Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου (CMB). Σύμφωνα με το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης το σύμπαν αρχικά ήταν πάρα πολύ ζεστό αποτρέποντας την δημιουργία ατόμων υδρογόνου. Για αρκετά χρόνια μετά την δημιουργία τους τα πρωτόνια και τα ηλεκτρόνια αλληλεπιδρούσαν έντονα με την ακτινοβολία. Έτσι δεν επιτρέπονταν στα φωτόνια να ξεφύγουν και επομένως το σύμπαν ήταν αδιαφανές. Περίπου 300.000 χρόνια μετά την Μεγάλη Έκρηξη το σύμπαν ψύχθηκε αρκετά (3.000 K) ώστε να μπορούν τα πρωτόνια και ηλεκτρόνια να δημιουργήσουν ουδέτερα άτομα υδρογόνου χωρίς να ιονίζονται. Την χρονική στιγμή αυτή τα φωτόνια ήταν ελεύθερα να διαδοθούν κάνοντας το σύμπαν διαφανές. Η εποχή αυτή ονομάστηκε τελευταία σκέδαση ή επανασύνδεση, τα φωτόνια εκείνης της εποχής παρατηρούμε τώρα σαν ακτινοβολία υποβάθρου. Εξαιτίας της μετατόπισης προς το ερυθρό η ακτινοβολία υποβάθρου που μετράμε τώρα βρίσκεται στα μικροκύματα στο ηλεκτρομαγνητικό φάσμα, αν την μοντελοποιήσουμε ως μέλαν σώμα αντιστοιχεί σε θερμοκρασία 2.725 K. Αρχικά θεωρούταν ότι είναι η θερμοκρασία αυτή είναι ισοτροπική, όμως πιο σύγχρονα τηλεσκοπία μέτρησαν ανισοτροπίες. Παρατηρήθηκαν δηλαδή μικρές μεταβολές στην θερμοκρασία που εξαρτώνται από την γωνία στην οποία παρατηρούμε. Οι ανισοτροπίες αυτές περιλαμβάνουν μεγάλη πληροφορία για την σύσταση του σύμπαντος την στιγμή της τελευταίας σκέδασης. Η πληροφορία που μας προσφέρει το CMB συνήθως κωδικοποιείται στο λεγόμενο φάσμα ισχύος, που είναι η γωνιακή κατανομή των μεταβολών στην θερμοκρασία της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου.



Σχήμα 1.3: Ενεργειακό φάσμα μικροκυματικής κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου από το τηλεσκόπιο Planck. *Copyright: ESA and the Planck Collaboration*

Η επικρατέστερη θεωρία είναι πως αυτές οι διαταραχές προκλήθηκαν από ακουστικά κύματα που διαδίδονταν πριν την τελευταία σκέδαση. Οι τυχαίες κβαντικές διακυμάνσεις επεκτάθηκαν σε κοσμικές κλίμακες κατά το inflation δημιουργώντας περιοχές μεγάλης ενεργειακής πυκνότητας και περιοχές μικρής πυκνότητας. Η βαρύτητα τείνει να μαζέψει περισσότερη ενέργεια στις πυκνές περιοχές ενώ, η πίεση της ακτινοβολίας αντιστέκεται σε αυτήν την συμπίεση. Ο ανταγωνισμός αυτός δημιουργεί ακουστικά κύματα που διαδίδονται στο σύμπαν. Την στιγμή της επανασύνδεσης οι ακουστικές ταλαντώσεις παγώνουν και τα φωτόνια διαφεύγουν από τις περιοχές μεγάλης και μικρής πυκνότητας ενέργειας. Περιοχές που βρίσκονταν σε μέγιστο την στιγμή της επανασύνδεσης έχουν τις μεγαλύτερες θερμικές διαφοροποιήσεις. Οι πυκνές περιοχές έχουν και μεγαλύτερη βαρυτική έλξη επομένως τα φωτόνια που φεύγουν από αυτές είναι λιγότερο ενεργειακά, δηλαδή μικρότερης θερμοκρασίας. Στα πλαίσια της εργασίας αυτής προφανώς δεν γίνεται να αναπτυχθεί ο πλήρης φορμαλισμός, θα σημειώσουμε όμως ότι η δεύτερη και η τρίτη κορυφή που παρατηρούμε δίνει πληροφορία για την ποσότητα σκοτεινής ύλης στο σύμπαν.

Τα δεδομένα από το CMB μαζί με τις παρατηρήσεις για την δημιουργία γαλαξιών έχουν οδηγήσει στο να θεωρείται το Λ CDM ως ‘το καθιερωμένο πρότυπο’ της κοσμολογίας. Το μοντέλο αυτό μας λέει ότι στο σύμπαν υπάρχει κοσμολογική σταθερά Λ και χρύα σκοτεινή ύλη, οι πυκνότητες των διάφορων συστατικών ποσοτικοποιούνται στο παρόν ($t = t_0$) από τις αδιάστατες ποσότητες

$$\Omega_i = \frac{\rho_i(t = t_0)}{\rho_{crit}}$$

όπου η ρ_{crit} είναι η πυκνότητα που πρέπει να υπάρχει σήμερα, θεωρώντας μηδενικό Λ , ώστε το σύμπαν να είναι επίπεδο. Το μοντέλο Λ CDM χαρακτηρίζεται από τις ποσότητες Ω_c (ποσότητα σκοτεινής ύλης), Ω_b (ποσότητα βαρυονικής ύλης), Ω_{rad} (ποσότητα

ακτινοβολίας) και Ω_Λ (συνεισφορά κοσμολογικής σταθεράς). Αυτές οι ποσότητες εισέρχονται στην γνωστή εξίσωση Friedmann που χαρακτηρίζει την εξέλιξη του σύμπαντος. Για πληρότητα δίνουμε την εξίσωση Friedmann κάτω από κάποιες υποθέσεις

$$H(\alpha) = H_0 \sqrt{(\Omega_c + \Omega_b)\alpha^{-3} + \Omega_{rad}\alpha^{-4} + \Omega_\Lambda}.$$

Θεωρίες σκοτεινής ύλης

Μέχρι τώρα είδαμε πολλές ενδείξεις ύπαρξης της σκοτεινής ύλης και πειραματικά δεδομένα που την καθιστούν πιο πιθανή θεωρία από τους ανταγωνιστές της, για παράδειγμα θεωρίες MOND. Επίσης σε μια επιγραμματική αναφορά δείξαμε πως η σκοτεινή ύλη βρίσκεται πλέον εντός της βασικής κοσμολογικής περιγραφής του σύμπαντος. Στην παράγραφο αυτήν θα αναφέρουμε διάφορες θεωρίες που προσπαθούν να εξηγήσουν την φύση της σκοτεινής ύλης.

Η γνώση πως η σκοτεινή ύλη πρέπει να είναι σταθερή και δεν αλληλεπιδρά ούτε ηλεκτρομαγνητικά ούτε με την ισχυρή πυρηνική δύναμη, έφερε τα νετρίνα ως τον πρώτο υποψήφιο. Τα νετρίνα είναι τα μοναδικά σωματίδια εντός του καθιερωμένου προτύπου που έχουν τα βασικά χαρακτηριστικά που απαιτούνται από την σκοτεινή ύλη. Περαιτέρω μετρήσεις έδειξαν ότι τα νετρίνα δεν μπορούν να εξηγήσουν τις μεγάλες δομές του σύμπαντος και επομένως δεν γίνεται να αποτελούν όλη την ποσότητα σκοτεινής ύλης στο σύμπαν. Σωματίδια με τόσο μικρή μάζα πρέπει να κινούνται σε σχετικιστικές ταχύτητες κατά την εποχή δημιουργίας των δομών του σύμπαντος, τέτοιου είδους σκοτεινή ύλη ονομάστηκε hot. Αντίθετα πιο βαριά σωματίδια θα είναι μη-σχετικιστικά και ονομάστηκαν cold. Τα δύο είδη σκοτεινής ύλης έχουν πολύ διαφορετικές συμπεριφορές στην δημιουργία δομών όπως οι γαλαξίες και τα σμήνη γαλαξιών. Με βάση τα τωρινά δεδομένα θα πρέπει να υπάρχει ποσότητα κρύας σκοτεινής ύλης ώστε να εξηγούνται οι παρατηρήσεις. Έτσι ακολούθησαν θεωρίες όπως των sterile νετρίνων δηλαδή νετρίνα με πολύ μεγάλη μάζα και ένα μεγάλο πλήθος θεωριών που βασίζονται σε Ασθενώς Αλληλεπιδρώντα σωματίδια με μάζα (WIMPs). Οι θεωρίες με WIMPs αναφέρονται σε σωματίδια μάζας στην τάξη των MeV-TeV που αλληλεπιδρούν μέσω σωματιδίων που βρίσκονται στην ηλεκτρασθενή κλίμακα. Οι θεωρίες αυτές στηρίζονται στο ότι αν η σκοτεινή ύλη παράγεται θερμικά πρέπει η ενεργός διατομή της εξαύλωσης να είναι $\langle \sigma v \rangle \approx 3 * 10^{-26} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. Η τιμή αυτή ταιριάζει με την ενεργό διατομή των ασθενών αλληλεπιδράσεων, η ‘σύμπτωση’ αυτή ονομάστηκε WIMP θαύμα. Τέτοια σωματίδια προβλέπονται από τις περισσότερες υπερσυμμετρικές επεκτάσεις του Καθιερωμένου προτύπου. Όπως θα δούμε η ύπαρξη τέτοιων σωματιδίων επηρεάζει τις ιδιότητες των αστέρων νετρονίων, καθώς μεταβάλλει την καταστατική εξίσωση της ύλης στο εσωτερικό του.

Μία ακόμα πιθανή θεωρία είναι τα αξιόνια, τα αξιόνια προτάθηκαν το 1970 για να λύσουν το CP -πρόβλημα των ισχυρών αλληλεπιδράσεων. Μετά από μελέτη των

πιθανών ιδιοτήτων των αξιονίων βρέθηκε ότι πρέπει να είναι αρκετά ελαφριά $10^{-6} - 10^{-4}$ eV και να αλληλεπιδρούν πολύ ασθενώς με την ύλη. Παρότι είναι πολύ ελαφριά δεν εμπίπτουν στους περιορισμούς της ζεστής σκοτεινής ύλης, καθώς υπάρχουν μηχανισμοί που επιτρέπουν την δημιουργία τους κατά την αρχή του σύμπαντος με πυκνότητες συμβατές με τις μετρούμενες για την σκοτεινή ύλη. Η συνεισφορά των αξιονίων στα ποσοστά σκοτεινής ύλης μελετάται ακόμα εκτενώς. Τέλος, ένας λίγο διαφορετικής φύσης υποψήφιος για σκοτεινή ύλη είναι μαύρες τρύπες που δημιουργήθηκαν στις αρχές του σύμπαντος. Προφανώς οι μαύρες τρύπες πληρούν τα βασικά κριτήρια σκοτεινής ύλης καθώς, όσες δεν έχουν φορτίο, αλληλεπιδρούν μόνο βαρυτικά. Είναι όμως ακόμα πιο δύσκολο να ελεγχθούν ευθέως από ότι σωματίδια, όπως τα WIMPs. Οι μαύρες τρύπες αυτές ονομάζονται αρχέγονες (primordial) και υπάρχουν αυστηρά κριτήρια για τις μάζες τους τα οποία προκύπτουν από διάφορες παρατηρήσεις.

1.3 Σκοπός της εργασίας

Στις προηγούμενες δύο ενότητες παρουσιάσαμε μία εισαγωγή στους αστέρες νετρονίων και στην σκοτεινή ύλη. Για τους λόγους που αναφέραμε οι αστέρες νετρονίων αποτελούν ένα πολύ ενδιαφέρον σύστημα. Με τις εξελίξεις στον κλάδο της πειραματικής αστροφυσικής λαμβάνουμε ολοένα και πιο ακριβή δεδομένα για τα χαρακτηριστικά τους. Είδαμε επίσης πως παρότι η ύπαρξη σκοτεινής ύλης είναι πλέον σχεδόν αδιαμφισβήτητη, η φύση και οι ιδιότητες της αποτελούν ένα ανοιχτό αντικείμενο με το οποίο ασχολείται μεγάλο μέρος της επιστημονικής κοινότητας.

Υπάρχουν πολλές θεωρίες πιθανών υποψηφίων σκοτεινής ύλης, η έλλειψη άμεσης μέτρησης καθιστά δύσκολο τον αποκλεισμό θεωριών. Οι συνθήκες εντός του πυρήνα των αστέρων νετρονίου αποτελούν ένα ιδανικό περιβάλλον για να εξεταστούν αρκετές από τις θεωρίες σκοτεινής ύλης. Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε πως οι ιδιότητες των αστέρων νετρονίων, για παράδειγμα το όριο TOV, επηρεάζονται από την ύπαρξη διαφόρων ειδών σκοτεινής ύλης εντός του αστεριού. Τα τελευταία χρόνια έχουν υπάρξει πολλές τέτοιες δημοσιεύσεις που έχουν στόχο να εξερευνηθεί άλλος ένας τρόπος πειραματικού ελέγχου της σκοτεινής ύλης. Προσφέροντας έτσι νέα εργαλεία για να εξεταστούν οι ιδιότητες της σκοτεινής ύλης, κάτι που περιορίζει σημαντικά τις πιθανές θεωρίες.

Το σχεδιάγραμμα που θα ακολουθηθεί είναι το εξής, αρχικά θα εξάγουμε από την γενική σχετικότητα τις εξισώσεις που περιγράφουν αστέρες νετρονίων (εξίσωση TOV). Οι εξισώσεις αυτές πρέπει να λυθούν αριθμητικά, για τον σκοπό αυτό θα αναπτύξουμε ένα πρόγραμμα επίλυσης συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Στην συνέχεια θα αναπαράξουμε τα αποτελέσματα των Oppenheimer, Volkoff και μεταγενέστερων δημοσιεύσεων που κάνουν χρήση πιο σύγχρονων καταστατικών εξισώσεων από την πυρηνική φυσική. Οι διαφορετικές καταστατικές έχουν αναπτυχθεί ώστε να μπορούν εξηγήσουν

τους αστέρες που παρατηρούμε. Το επόμενο βήμα είναι να εισάγουμε διάφορες θεωρίες σκοτεινής ύλης στους υπολογισμούς, ώστε να εξετάσουμε την διαφορά που προκαλεί η ύπαρξη σωματιδίων σκοτεινής ύλης στον αστέρα νετρονίων. Οι θεωρίες σκοτεινής ύλης που θα ελέγξουμε έχουν χρησιμοποιηθεί για την εξήγηση φαινομένων από την φυσική υψηλών ενεργειών, παραδείγματος χάρη την ανωμαλία στην ημιζωή του νετρονίου [8, 9] και το $g - 2$ πρόβλημα για τα μιονία [10]. Θα υπολογίσουμε επίσης την επίδραση που θα είχε μια μαύρη τρύπα η οποία πιθανώς να έχει απορροφηθεί από ένα αστέρι νετρονίων και βρίσκεται στο κέντρο του. Τέλος θα μελετήσουμε την ύπαρξη σκοτεινής ύλης που δεν αλληλεπιδρά καθόλου με την ύλη, οδηγούμαστε έτσι στα admixed αστέρια νετρονίων.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία

Στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε το αναγκαίο θεωρητικό υπόβαθρο για την περιγραφή των αστέρων νετρονίων. Βασικό μέρος της εργασίας είναι οι εξισώσεις TOV που περιγράφουν την υδροδυναμική ισορροπία των αστέρων. Θα αναφερθούμε επίσης στις καταστατικές εξισώσεις στο εσωτερικό του αστέρα, δηλαδή στις ιδιότητες που περιμένουμε να έχει η ύλη στις συνθήκες που επικρατούν εντός του αστεριού.

2.1 Γενική σχετικότητα

Η Γενική σχετικότητα προτάθηκε από τον Einstein το 1915 και περιγράφει με τεράστια ακρίβεια όλα τα βαρυτικά φαινόμενα που έχουμε παρατηρήσει μέχρι στιγμής. Η βασική ιδέα είναι η αρχή της ισοδυναμίας, στην ασθενή της μορφή διατυπώνεται με πολλούς τρόπους. Ο πιο συχνός είναι πως τοπικά ένας παρατηρητής δεν μπορεί να διαχωρίσει την επίδραση ενός βαρυτικού πεδίου με αυτήν του να δέχεται μία επιτάχυνση. Η επέκταση της αρχής αυτής είναι το ότι σε αρκετά μικρές περιοχές του χωρόχρονου η φυσική είναι ίδια με αυτήν της ειδικής σχετικότητας, δηλαδή κανένα τοπικό πείραμα δεν μπορεί να μετρήσει βαρυτικό πεδίο και δόθηκε από τον Einstein. Η αρχή ισοδυναμίας επιτρέπει την αντιμετώπιση της βαρύτητας ως ψευδοδύναμης που προκαλείται από την καμπύλωση του χωρόχρονου. Η συνειδητοποίηση αυτή αποτέλεσε την βασική ιδέα πίσω από την γενική σχετικότητα. Η καμπύλωση συμβαίνει όταν υπάρχει παρουσία ύλης και ενέργειας σε κάποια περιοχή του χώρου. Μαθηματικά η έννοια της καμπύλωσης του χωρόχρονου αποτυπώνεται από τον τανυστή Riemann και τις συστολές του, τον τανυστή και το βαθμωτό Ricci. Ο τανυστής Riemann, με την επιλογή της σύνδεσης Levi-Civita, προσδιορίζεται μονοσήμαντα από την μετρική του χωρόχρονου. Επομένως η ύπαρξη ύλης και ενέργειας μεταβάλλει την μετρική του χωρόχρονου και με την σειρά της η μεταβολή της μετρικής αλλάζει την κίνηση των σωματιδίων, μέσω των γεωδαιτικών εξισώσεων.

Λείπει η ακριβής περιγραφή της σχέσης μεταξύ παρουσίας ύλης και της καμπύλω-

σης, αυτή μας παρέχεται από την διάσημη εξίσωση Einstein. Στις εξισώσεις Einstein δεν εμφανίζεται ο πλήρης τανυστής Reimann αλλά, μεγέθη που προκύπτουν από την συστολή των δεικτών του. Ο τανυστής Reimann δίνει ένα μέτρο της καμπυλότητας του χώρου συγκρίνοντας την παράλληλη μετατόπιση ενός διανύσματος κατά μήκος μίας κλειστής καμπύλης με το αρχικό διάνυσμα. Μαθηματικά ορίζεται ως εξής

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

γεωμετρικά είναι σαν να μεταφέρουμε το Z κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης που ορίζεται από τα διανύσματα X, Y . Ο τρόπος με τον οποίο κάνουμε αυτήν την παράλληλη μετατόπιση ονομάζεται σύνδεση (connection), στην περίπτωση της γενικής σχετικότητας χρησιμοποιείται μία σύνδεση που δεν έχει στρέψη (torsion-free) και διατηρεί την μετρική του χώρου (metric compatibility). Αποδεικνύεται ότι η σύνδεση που πληρεί αυτά τα κριτήρια είναι μοναδική και ονομάζεται Levi-Civita. Η χρήση της σύνδεσης Levi-Civita οδηγεί στον προσδιορισμό του τανυστή Riemann κατευθείαν από την μετρική και τις παραγώγους της. Αρχικά ορίζουμε τα σύμβολα Christoffel

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \left(\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\kappa}} \right),$$

με την χρήση των συμβόλων Christoffel μπορούμε να δώσουμε έναν δεύτερο ορισμό του τανυστή Reimann για την συγκεκριμένη σύνδεση

$$R^{\mu}_{\nu\sigma\rho} = \partial_{\sigma} \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_{\rho} \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}.$$

Από τον τανυστή Riemann μπορούμε να πάρουμε τανυστές μικρότερης τάξης που εμφανίζονται στις εξισώσεις Einstein. Υπάρχει μόνο μία ανεξάρτητη συστολή δεικτών από την οποία ορίζεται ο τανυστής Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$$

και το ίχνος του παραπάνω τανυστή δίνει το βαθμωτό Ricci

$$R \equiv R^{\mu}_{\mu}.$$

Οι εξισώσεις Einstein δίνουν την σύνδεση μεταξύ της καμπυλότητας και της ύλης, το μέρος της ύλης αναμένεται να σχετίζεται με τον τανυστή ενέργειας-ορμής. Ο τανυστής ενέργειας ορμής, από την πλευρά του θεωρήματος Noether είναι το διατηρούμενο ρεύμα που αντιστοιχεί στις χωροχρονικές μετατοπίσεις. Περιγράφει την πυκνότητα και την ροή, ενέργειας και ορμής και μπορεί να θεωρηθεί ως πηγή στις εξισώσεις Einstein. Επειδή ο τανυστής ενέργειας-ορμής χαρακτηρίζεται από κάποιες συμμετρίες θα πρέπει

στις εξισώσεις να εισέρχεται κάποιος συνδυασμός των $R_{\mu\nu}$, R που να ικανοποιεί τις ίδιες συμμετρίες. Αυτός ο περιορισμός μαζί με την απαίτηση να παίρνουμε τον νόμο του Νεύτωνα για αργή κίνηση και ασθενή πεδία, μας δίνει τις γνωστές εξισώσεις Einstein¹

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

όπου $R_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής Ricci, R το βαθμωτό Ricci, $g_{\mu\nu}$ η μετρική του χώρου. Αυτά τα μεγέθη σχετίζονται με την καμπυλότητα του χώρου, ενώ $T_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής ενέργειας-ορμής και περιγράφει την ύλη που βρίσκεται στον χώρο. Στην ουσία η σχέση (2.1) μας δίνει 6 εξισώσεις καθώς οι δείκτες μ, ν τρέχουν στο σύνολο 0, 1, 2, 3 και οι τανυστές που εμφανίζονται είναι συμμετρικοί, άρα έχουν 10 ανεξάρτητες συνιστώσες. Οι ταυτότητες Bianchi περιορίζουν τις 10 εξισώσεις σε 6 ανεξάρτητες, δίνοντας ένα σύστημα μη-γραμμικών μερικών διαφορικών που προσδιορίζει τις συνιστώσες της μετρικής. Παρότι αποτελούν ένα περίπλοκο σύστημα υπάρχουν αναλυτικές λύσεις με ιδιαίτερη φυσική σημασία. Στις επόμενες ενότητες θα εξάγουμε από τις εξισώσεις Einstein, τις εξισώσεις TOV που περιγράφουν την υδροδυναμική ισορροπία ενός ιδανικού ρευστού.

2.2 Η μετρική Schwarzschild

Η μετρική Schwarzschild είναι λύση των εξισώσεων του Einstein στο κενό, με μία πηγή μάζας στο κέντρο. Ιστορικά είναι η πρώτη λύση των εξισώσεων Einstein και σύμφωνα με το θεώρημα Birkhoff η λύση αυτή αποτελεί την μόνη σφαιρικά συμμετρική λύση στο κενό. Επομένως η μετρική Schwarzschild είναι η λύση των εξισώσεων και για τον χώρο έξω από ένα αστέρι. Αυτό είναι πολύ σημαντικό καθώς η λύση που περιγράφει το εσωτερικό ενός αστεριού θα πρέπει αναγκαστικά στην επιφάνεια του αστερά να ταυτίζεται με την λύση Schwarzschild. Όπως είναι γνωστό η λύση αυτή περιγράφει πέρα από το εξωτερικό πλανητών, αστεριών και τις μαύρες τρύπες που αποτελούν μία πρόβλεψη της γενικής σχετικότητας που έχει παρατηρηθεί. Η μετρική Schwarzschild είναι λύση των εξισώσεων

$$R_{\mu\nu} = 0$$

και είναι η ακόλουθη

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.2)$$

με $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Το M αναγνωρίζεται ως μάζα της πηγής που βρίσκεται στο κέντρο του χώρου, όπως θα δούμε όταν ταυτίσουμε την εξίσωση που περιγράφει

¹ Σε μονάδες $c = 1$

το εσωτερικό του αστέρα με την παραπάνω μετρική το M θα είναι η ολική μάζα του αστεριού. Η μετρική αυτή περιγράφει και πολλά ιδιαίτερα φαινόμενα που προβλέπει μόνο η γενική σχετικότητα, όπως ο ορίζοντας γεγονότων στο $R = 2GM$. Μεγάλο ενδιαφέρον για την ανάλυση των μελανών οπών, εντός του αστεριού έχει το φαινόμενο συσσώρευσης της ύλης από την μαύρη τρύπα. Λόγω της μεγάλης βαρυτικής έλξης η μαύρη τρύπα έλκει όλη την ύλη γύρω της και την απορροφά. Η σφαιρική συσσώρευση ύλης ονομάζεται Bondi accretion, η ροή της ύλης θα είναι υδροδυναμικής φύσης. Περιγράφεται επομένως, μέσω της εξίσωσης συνέχειας για ρευστά και της εξίσωσης Euler. Χαρακτηριστικό είναι ότι ο ρυθμός απορρόφησης είναι σταθερός (ανεξάρτητος του r). Για την Νευτώνεια περιγραφή της ροής έχουμε

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho u = \text{const},$$

όπου u η ακτινική ταχύτητα του ρευστού. Το φαινόμενο χαρακτηρίζεται από ένα κρίσιμο σημείο που ονομάζεται ακτίνα Bondi. Στην ενότητα που λύνουμε το σύστημα του αστέρα νετρονίων με μαύρη τρύπα στο εσωτερικό του, θα αναλύσουμε την σχετικιστική περιγραφή του φαινομένου και θα δούμε ότι θα χρησιμοποιήσουμε το κρίσιμο σημείο για τις αρχικές συνθήκες.

2.3 Εξίσωση Tolman-Oppenheimer-Volkof

Μετά από την μικρή αυτή αναφορά σε μία από τις πιο διάσημες λύσεις των εξισώσεων Einstein, ας δούμε λεπτομερώς το σύστημα εξισώσεων που πρέπει να επιλύσουμε για να περιγράψουμε έναν αστέρα νετρονίων. Συνήθως για να επιλυθούν οι εξισώσεις υποθέτουμε μία γενική μορφή της μετρικής, η οποία όμως συμπεριλαμβάνει τις συμμετρίες που υπάρχουν στο σύστημα ώστε να απλοποιηθεί το πρόβλημα. Γνωρίζουμε ότι αγνοώντας την περιστροφή του αστεριού θα πρέπει να υπάρχει μία σφαιρική συμμετρία, στην μετρική αυτό αποτυπώνεται από το γεγονός πως πρέπει να διατηρείται η μορφή του $d\Omega^2$. Επίσης το σύστημα είναι στατικό που σημαίνει πως οι υπόλοιποι όροι της μετρικής μπορούν να πολλαπλασιαστούν με μία γενική συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από την μεταβλητή r και δεν μπορούν να υπάρχουν όροι της μορφής $dt * dr$. Οι γενικές συναρτήσεις αυτές θα προσδιοριστούν λύνοντας την εξίσωση (2.1), διαλέγοντας κατάλληλο $T_{\mu\nu}$.

Αναφέραμε ότι η λύση ταυτίζεται με την Schwarzschild στο όριο του αστεριού, έτσι μπορούμε να διαλέξουμε την μορφή της συνάρτησης που βρίσκεται στον όρο g_{rr} . Δεδομένου των υποθέσεων που κάναμε δεν μας μένει μεγάλη ελευθερία στην μορφή

της μετρικής, η γενικότερη περίπτωση είναι η παρακάτω

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + \underbrace{r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}_{r^2 d\Omega^2} \quad (2.3)$$

παρότι συμβολίζουμε την μία άγνωστη συνάρτηση με $M(r)$ προς το παρόν είναι απλά μία συνάρτηση. Αφότου λύσουμε το σύστημα θα δούμε ότι μπορεί να αναγνωριστεί ως μάζα του αστέρα. Με την υπόθεση της παραπάνω μετρικής μπορούμε να υπολογίσουμε τον ταυστή Riemann και επομένως το αριστερό μέρος της (2.1). Μας μένει να προσδιορίσουμε τον ταυστή ενέργειας-ορμής που περιγράφει το εσωτερικό ενός αστέρα νετρονίων.

Μετά την πρώτη περίοδο ψύξης τους, οι αστέρες νετρονίων έχουν μία θερμοκρασία της τάξης του $T \sim 10^6$ K. Σε επόμενη ενότητα θα αναφερθούμε πιο αναλυτικά στην κατάσταση της ύλης μέσα στον αστέρα, προς το παρόν θα πάρουμε δεδομένο ότι το χημικό δυναμικό της ύλης είναι περίπου 1 GeV [11]. Ελέγχοντας τον λόγο της θερμοκρασίας προς το χημικό δυναμικό παρατηρούμε ότι η θερμική κίνηση συνεισφέρει ελάχιστα $\frac{kT}{\mu} \approx \frac{10^{-7} \text{ GeV}}{1 \text{ GeV}} = 10^{-7} \ll 1$, δηλαδή το αστέρι είναι πολύ ψυχρό. Σε πολύ καλή προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ύλη είναι εκφυλισμένη και έχουμε $T = 0$ K. Η συμπεριφορά της ύλης στις συνθήκες που επικρατούν στο εσωτερικό του αστέρα δεν είναι πλήρως γνωστή. Για παράδειγμα πιθανότατα υπάρχουν εξωτικές καταστάσεις της ύλης στον πυρήνα, όπως η υπεραγωγιμότητα χρώματος, αν συμπεριλάβουμε όλη αυτήν την πληροφορία στον $T_{\mu\nu}$ είναι αδύνατο να βρεθεί αναλυτική λύση των εξισώσεων Einstein. Για αυτό θα κάνουμε κάποιες παραδοχές που είναι πολύ συχνές στην μελέτη ‘ψυχρών’ αστέρων, όπως οι λευκοί νάνοι και οι αστέρες νετρονίων.

Σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το αστέρι νετρονίων ως ένα ιδανικό ρευστό, αυτή η προσέγγιση είναι αρκετά καλή στο να περιγράψει το αστέρι όσο βρίσκεται σε ισορροπία. Αγνοούμε επομένως το ιξώδες και την θερμική αγωγιμότητα, τέτοια φαινόμενα ονομάζονται μεταφορά. Για να μετακινηθούν διατηρούμενες ποσότητες από μία περιοχή του αστεριού σε άλλη πρέπει το σύστημα να βγει από την ισορροπία. Είδαμε ότι στην ανάλυση μας θα θεωρήσουμε χημική ισορροπία και θερμοκρασία $T = 0$ K, άρα η υπόθεση του ιδανικού ρευστού είναι επίσης δικαιολογημένη. Με την προσέγγιση αυτή μπορούμε να βρούμε αναλυτική λύση των εξισώσεων Einstein, η λύση αυτή ονομάζεται εξίσωση TOV και προτάθηκε το 1939 [1, 2]. Ένα ιδανικό ρευστό περιγράφεται μόνο από την πυκνότητα μάζας ρ και την ισοτροπική πίεση P του, άρα σε ένα σύστημα αναφοράς όπου το ρευστό είναι ακίνητο για επίπεδο χωρόχρονο ο

τανυστής ενέργειας ορμής θα πρέπει να έχει την μορφή

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho + P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \\ &= (\rho + P) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Στο σύστημα ηρεμίας του ρευστού η ταχύτητα είναι $U^\mu = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ άρα η γενίκευση σε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με διαφορετική ταχύτητα θα δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)U^\mu U^\nu + P \eta^{\mu\nu}.$$

Για έναν καμπύλο χωρόχρονο πρέπει απλώς να αλλάξουμε την μετρική από η στην g . Έτσι παίρνουμε τον τανυστή ενέργειας ορμής που περιγράφει το ιδανικό ρευστό στην γενική σχετικότητα

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Μέχρι τώρα κάναμε μία υπόθεση για την μετρική και υπολογίσαμε τον τανυστή ενέργειας ορμής που εισέρχεται στο δεξί μέλος των εξισώσεων Einstein. Είμαστε πλέον σε θέση να λύσουμε τις εξισώσεις προσδιορίζοντας έτσι τις άγνωστες συναρτήσεις της μετρικής, $M(r)$, $\Phi(r)$. Ο αναλυτικός υπολογισμός των τανυστών Riemann και Ricci δίνεται στο παράθεμα Α', το αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.1) λέγεται αλλιώς και τανυστής Einstein που ορίζεται ως

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

Γνωρίζουμε ότι ο τανυστής ενέργειας ορμής είναι διαγώνιος, επομένως μας ενδιαφέρουν μόνο τα διαγώνια στοιχεία του τανυστή Einstein. Από τα αποτελέσματα του παραρτήματος έχουμε

$$\begin{aligned} G_{tt} &= 2e^{2\Phi} \frac{M'}{r^2} \\ G_{rr} &= \frac{2\Phi'}{(r-2M)} - \frac{4M\Phi'}{r(r-2M)} - \frac{2M}{r^2(r-2M)} \\ G_{\theta\theta} &= r(r-2M)(\Phi'' + \Phi'^2) + (r-M)\Phi' - M' - rM'\Phi' + \frac{M}{r} \\ G_{\phi\phi} &= \left[r(r-2M)(\Phi'' + \Phi'^2) + (r-M)\Phi' - M' - rM'\Phi' + \frac{M}{r} \right] \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Με (') αναπαριστούμε την παράγωγο ως προς την μεταβλητή r . Για να απλοποιήσουμε τον τανυστή ενέργειας ορμής θα διαλέξουμε να κάνουμε τον υπολογισμό στο σύστημα που κινείται με το ρευστό, άρα

$$U_r = U_\theta = U_\phi = 0.$$

Από την σχέση που περιορίζει το μέτρο της τετραταχύτητας για χρονοειδής τροχιές έχουμε

$$g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu = -1,$$

η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα της ταχύτητας θα είναι

$$g^{tt}U_t U_t = -1 \Rightarrow -e^{-2\Phi} (U_t)^2 = -1 \Rightarrow U_t = e^\Phi.$$

Επομένως τα στοιχεία του τανυστή ενέργειας-ορμής είναι

$$\begin{aligned} T_{tt} &= \rho e^{2\Phi} \\ T_{rr} &= \left(\frac{r}{r-2M} \right) P \\ T_{\theta\theta} &= r^2 P \\ T_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2 \theta P \end{aligned}$$

2.3.1 Σύστημα υδροδυναμικής ισορροπίας και ευστάθεια

Στην υποενότητα αυτήν θα δουλέψουμε στο σύστημα $G = c = 1$, η πρώτη εξίσωση που μπορούμε να πάρουμε δίνεται από τις χρονικές συνιστώσες

$$\begin{aligned} G_{tt} &= 8\pi T_{tt} \\ 2e^{2\Phi} \frac{M'}{r^2} &= 8\pi \rho e^{2\Phi} \\ \frac{dM}{dr} &= 4\pi \rho r^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Η εξίσωση (2.5) στην ουσία περιγράφει την εξίσωση συνέχειας για την μάζα του αστεριού, όπου ρ είναι η πυκνότητα ενέργειας. Η ολοκληρωτική μορφή είναι η παρακάτω

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$$

φαίνεται πως η μάζα που περικλείεται σε ακτίνα r είναι απλώς το ολοκλήρωμα της πυκνότητας ενέργειας εντός του όγκου μιας σφαίρας ακτίνας r . Έστω ότι το αστερί επεκτείνεται μέχρι μία ακτίνα R , θυμόμαστε πως στο όριο του αστεριού πρέπει η

μετρική να ταιριάζει με την Schwarzschild. Συνεπάγεται ότι το $M(R)$ αναγνωρίζεται ως την ολική μάζα του αστεριού. Στην πραγματικότητα το χωρικό ολοκλήρωμα της πυκνότητας ενέργειας θα δίνεται από την επαγόμενη μετρική για τις 3 διαστάσεις $\gamma_{ij}dx^i dx^j = (1 - \frac{2M}{r})^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$. Άρα το ορθό χωρικό ολοκλήρωμα είναι $\bar{M}(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') (1 - \frac{2M}{r'})^{-1/2} dr'$ η διαφορά των δύο ολοκληρωμάτων μπορεί να αποδοθεί ως ενέργεια σύνδεσης εξαιτίας της βαρυτικής έλξης μεταξύ των στοιχείων του ρευστού.

Για να βρούμε την εξίσωση που προσδιορίζει την συνάρτηση Φ θα χρησιμοποιήσουμε την r συνιστώσα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} G_{rr} &= 8\pi T_{rr} \\ \frac{2\Phi'}{(r-2M)} - \frac{4M\Phi'}{r(r-2M)} - \frac{2M}{r^2(r-2M)} &= 8\pi \left(\frac{r}{r-2M} \right) P \\ \Phi'(r^2 - 2rM) &= 4\pi r^3 P + M \\ \Phi' &= \frac{4\pi r^3 P + M}{r(r-2M)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Μπορούμε να απαλείψουμε την συνάρτηση Φ από τις εξισώσεις και να πάρουμε μία σχέση που προσδιορίζει την παράγωγο της πίεσης του ρευστού. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την διατήρηση ενέργειας

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_r T^{rr} + \Gamma^r_{tt} T^{tt} + \Gamma^r_{rr} T^{rr} + \Gamma^r_{\theta\theta} T^{\theta\theta} + \Gamma^r_{\phi\phi} T^{\phi\phi} + \Gamma^\mu_{\mu r} T^{\mu r} &= 0 \\ \Phi' &= -\frac{P'}{\rho + P} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (2.6) βρίσκουμε την εξίσωση TOV

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho + P) \frac{4\pi r^3 P + M}{r(r-2M)} \quad (2.7)$$

Γνωρίζουμε ότι στην Νευτώνια μηχανική η υδροστατική ισορροπία δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho M}{r^2}.$$

Η εξίσωση (2.7) μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho M}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{M}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

από την οποία είναι εμφανές ότι έχουμε τον νευτώνειο όρο μαζί με σχετικιστικές διορθώσεις. Οι διορθώσεις αυτές δεν μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες στην περίπτωση

των αστέρων νετρονίων, για παράδειγμα ένας τυπικός αστέρας έχει μάζα $1.4 M_{\odot}$ και ακτίνα $r = 10 \text{ km}$. Επομένως $\frac{2GM}{r} \approx \frac{2 \cdot 1.4 \cdot 1.5 \text{ km}}{10 \text{ km}} = \frac{4.2}{10} = 0.42$ ο ίδιος όρος για μία μαύρη τρύπα είναι προφανώς ίσος με 1, άρα το 0.42 παίζει σημαντικό ρόλο. Το ίδιο ισχύει και για τους όρους που περιέχουν την πίεση, αντιθέτως οι λευκοί νάνοι μπορούν να περιγραφούν με αρκετή ακρίβεια από την Νευτώνεια εξίσωση.

Το σύστημα εξισώσεων που περιγράφει το αστέρι αποτελείται από τις εξισώσεις (2.5), (2.7)

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dr} &= 4\pi\rho r^2 \\ \frac{dP}{dr} &= -(\rho + P) \frac{4\pi r^3 P + M}{r(r - 2M)}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε τρεις αγνώστους την μάζα M , την πίεση P και την πυκνότητα ενέργειας ρ αλλά έχουμε μόνο δύο εξισώσεις. Για να συμπληρώσουμε το σύστημα απαιτείται η καταστατική εξίσωση της ύλης που συνδέει την πίεση με την πυκνότητα ενέργειας. Οι καταστατικές εξισώσεις όπως γνωρίζουμε από την θερμοδυναμική δίνονται συνήθως στην μορφή

$$\rho = \rho(n, s)$$

όπου n η αριθμητική πυκνότητα και s η εντροπία². Η πίεση μπορεί να βρεθεί εύκολα από τον θερμοδυναμικό ορισμό της

$$P \equiv -\frac{\partial(\rho/n)}{\partial(1/n)} = n^2 \frac{\partial(\rho/n)}{\partial n}. \quad (2.8)$$

Σε κάθε ιδανικό ρευστό η εντροπία είναι σταθερή, όμως δείξαμε πως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η θερμοκρασία είναι 0 K ($kT \ll \mu$) άρα και η εντροπία θα είναι μηδενική. Η μοναδική εξάρτηση της πυκνότητας ενέργειας και της πίεσης είναι η αριθμητική πυκνότητα. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε εν γένει να απαλείψουμε το n και να καταλήξουμε σε μία σχέση

$$P = P(\rho),$$

στην αριθμητική ολοκλήρωση του συστήματος είναι πιο βολική η αντίστροφη σχέση

$$\rho = \rho(P).$$

Φτάσαμε επομένως στο αποτέλεσμα που χρειαζόμασταν, ένα αστέρι σε υδροστατική

² Επειδή $c = 1$ η πυκνότητα ενέργειας ρ και πυκνότητα μάζας $\epsilon = \frac{\rho}{c^2}$ είναι ίδιες

ισορροπία περιγράφεται από το ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dr} &= 4\pi\rho r^2 \\ \frac{dP}{dr} &= -(\rho + P)\frac{4\pi r^3 P + M}{r(r - 2M)} \\ \rho &= \rho(P)\end{aligned}\tag{2.9}$$

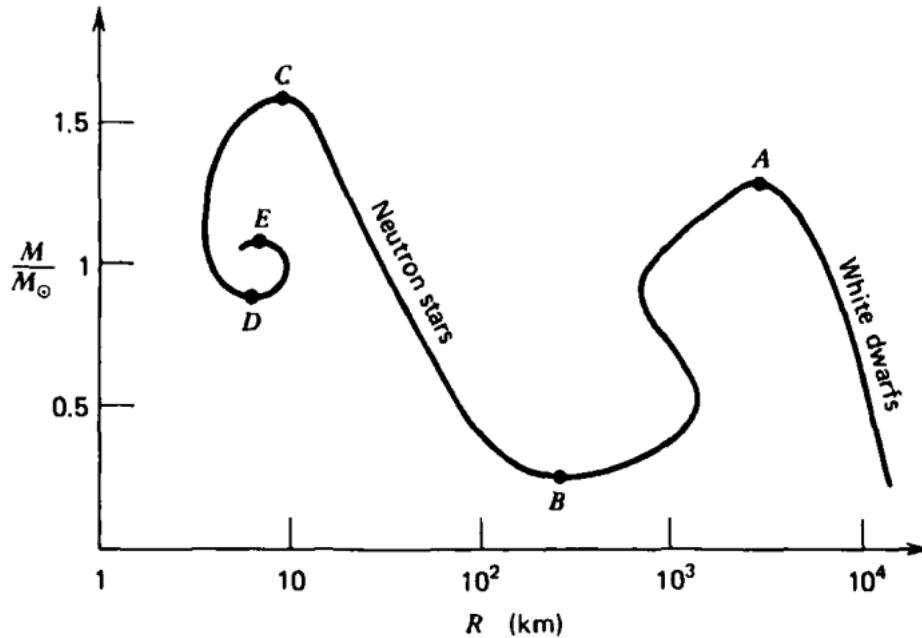
οι αρχικές συνθήκες για τις δύο διαφορικές είναι $M(0) = 0$ και η πυκνότητα ενέργειας στο κέντρο του αστέρα ρ_c . Το παραπάνω σύστημα μπορεί να επιλυθεί για πολλές τιμές ρ_c , κάθε μία αντιστοιχεί σε διαφορετικό αστέρι. Έτσι λαμβάνουμε μία σχέση μεταξύ της μάζας των αστεριών και της ακτίνας τους, η σχέση αυτή εξαρτάται από την επιλογή καταστατικής. Αυτή η διαδικασία μας επιτρέπει να συγκρίνουμε τα χαρακτηριστικά των διαφορετικών καταστατικών εξισώσεων. Για παράδειγμα κάποιες καταστατικές δίνουν αστέρες με μεγαλύτερη μάζα, ενώ άλλες επιτρέπουν μικρότερες ακτίνες δημιουργώντας πιο συμπαγή αστέρια. Ένα πολύ σημαντικό σημείο της καμπύλης μάζας-ακτίνας είναι το μέγιστο, δηλαδή το όριο TOV. Η λύση του συστήματος (2.9) για μία δεδομένη καταστατική εξίσωση μας δίνει μία μονοπαραμετρική οικογένεια αστεριών (με παράμετρο την κεντρική πυκνότητα ενέργειας) που βρίσκονται σε υδροδυναμική ισορροπία.

Για να γνωρίζουμε ποια αστέρια στην οικογένεια είναι ευσταθή, άρα αποτελούν λύσεις που μπορούμε να παρατηρήσουμε, πρέπει να διαταράξουμε το σύστημα και να δούμε αν επανέρχεται στην ισορροπία. Η μεταβολική αρχή που χρησιμοποιούμε είναι $\delta M = 0$, αποδεικνύεται ότι οι μικρές ακτινικές διαταραχές ικανοποιούν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm-Liouville για το ω^2 , όπου ω η συχνότητα του τρόπου ταλάντωσης (Κεφάλαιο 6.5 [11]). Από την θεωρία για τέτοια προβλήματα ξέρουμε ότι οι ιδιοτιμές ω^2 είναι πραγματικές, διακριτές και άπειρες σε αριθμό

$$\omega_0^2 < \omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots$$

άμεση συνέπεια είναι το ότι για να υπάρχει ταλάντωση και άρα το πλάτος της διαταραχής να μένει πεπερασμένο πρέπει $\omega_0^2 > 0$. Αυτή είναι η συνθήκη ισορροπίας, λύσεις με $\omega_0^2 < 0$ είναι ασταθείς και $\omega_0^2 = 0$ δίνει τα κρίσιμα σημεία. Στην περίπτωση που έχουμε μόνο ένα κρίσιμο σημείο στην μονοπαραμετρική οικογένεια το πρόσημο του ω_0^2 μπορεί να βρεθεί από την παράγωγο της μάζας ως προς την πυκνότητα ενέργειας. Έχουμε ευστάθεια για $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$ και αστάθεια για $\frac{dM}{d\rho_c} < 0$. Αναφέραμε ότι συνήθως η αναπαράσταση που επιλέγουμε είναι η σχέση μάζας και ακτίνας των αστεριών της οικογένειας με παράμετρο ρ_c . Η καμπύλη αυτή είναι βολική όταν υπάρχουν πολλά κρίσιμα σημεία, για να το δούμε αυτό θα δεχτούμε χωρίς απόδειξη το παρακάτω αποτέλεσμα. Όταν αλλάζει πρόσημο η ιδιοτιμή τρόπου ταλάντωσης με άρτιο αριθμό κόμβων έχουμε $\frac{dR}{d\rho_c} < 0$ ενώ, για περιττό αριθμό κόμβων η παράγωγος είναι θετική. Μία πιο αναλυτική

απόδειξη αυτών των αποτελεσμάτων μπορεί να βρεθεί στο κεφάλαιο 6.8 του βιβλίου των Shapiro, Teukolsky [11]. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε μία καταστατική που περιγράφει με συνεχή τρόπο την ύλη για ένα εύρος ενεργειών πολλών τάξεων μεγέθους, τότε η λύση του συστήματος θα μας έδινε μία καμπύλη όμοια με την ακόλουθη.



Σχήμα 2.1: Σχηματική αναπαράσταση την σχέσης $M(R)$ για την υδροστατική ισορροπία ψυχρής ύλης [11]

Μικρό ρ_c αντιστοιχεί σε μεγάλη ακτίνα εκείνη είναι η περιοχή των λευκών νάνων, παρατηρούμε ότι στο σημείο A έχουμε μέγιστο της μάζας άρα αποτελεί κρίσιμο σημείο. Βλέπουμε ότι γύρω από το σημείο A ισχύει $\frac{dR}{d\rho_c} < 0$, επομένως το ω_0^2 αλλάζει πρόσημο και γίνεται αρνητικό. Άρα τα σημεία μετά το A αντιστοιχούν σε ασταθείς ισορροπίες που σημαίνει ότι το A είναι η μέγιστη δυνατή μάζα των λευκών νάνων, γνωστή ως όριο Chandrasekhar. Στο B υπάρχει ένα ακόμα κρίσιμο σημείο με $\frac{dR}{d\rho_c} < 0$, ο μόνος άρτιος τρόπος ταλάντωσης που μπορεί να αλλάξει πρόσημο είναι πάλι ο ω_0^2 . Επιστρέφουμε επομένως σε διατάξεις ευσταθούς ισορροπίας, στην περιοχή αυτή βρίσκονται οι αστέρες νετρονίων. Αυξάνοντας και άλλο την κεντρική πυκνότητα ενέργειας φτάνουμε στο κρίσιμο σημείο C, ακολουθώντας την ίδια λογική με πριν το ω_0^2 γίνεται αρνητικό και άρα έχουμε ασταθείς διατάξεις. Το σημείο C είναι παρόμοιο με το σημείο A, μας δίνει την μέγιστη μάζα που μπορεί να υποστηρίξει ένα αστέρι νετρονίων και ονομάζεται όριο TOV. Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με το κομμάτι των αστέρων νετρονίων δηλαδή ανάμεσα στα σημεία B-C. Τα E, D δεν θα μας απασχολήσουν, πρόκειται για κρίσιμα σημεία όπου αλλάζει η ευστάθεια ανώτερων τρόπων ταλάντωσης.

2.4 Καταστατική εξίσωση

Η καταστατική εξίσωση καθορίζει τις ιδιότητες των αστερών επομένως συνεπάγεται ότι η παρατήρηση αστερών μπορεί να περιορίσει τις πιθανές καταστατικές εξισώσεις. Στην ενότητα αυτήν θα αναπτύξουμε την έννοια της καταστατικής εξίσωσης και θα αναφερθούμε στις καταστάσεις της ύλης που αναμένουμε εντός του αστεριού. Η καταστατική εξίσωση είναι μία σχέση που συνδέει τις καταστατικές μεταβλητές του συστήματος, τέτοιες μεταβλητές είναι η πίεση, η θερμοκρασία και η εσωτερική ενέργεια.

2.4.1 Θερμοδυναμικά μεγέθη

Ας ορίσουμε τα θερμοδυναμικά μεγέθη που χρειαζόμαστε για μία καταστατική εξίσωση. Έστω n η αριθμητική πυκνότητα των βαρυονίων, με την υπόθεση ότι ο βαρυονικός αριθμός διατηρείται θα ορίσουμε όλα τα μεγέθη ανά βαρυόνιο. Έτσι δεν χρειάζεται να διαλέξουμε κάποιον συγκεκριμένο όγκο εντός του ρευστού γιατί θα δουλεύουμε με τον όγκο ανά βαρυόνιο $\frac{1}{n}$. Έχουμε την ενέργεια ανά βαρυόνιο $\frac{e}{n}$, την πίεση του ρευστού P και την θερμότητα που κερδίζει το σύστημα ανά βαρυόνιο dQ . Ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος δίνει

$$dQ = d\left(\frac{e}{n}\right) + Pd\left(\frac{1}{n}\right),$$

από τον δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο έχουμε $dQ = T ds$, για σύστημα που βρίσκεται μονίμως σε ισορροπία στην διάρκεια μιας διεργασίας. Άρα έχουμε

$$d\left(\frac{e}{n}\right) = -Pd\left(\frac{1}{n}\right) + T ds.$$

Η σχέση αυτή ισχύει με την προϋπόθεση πως δεν έχουμε πολλά είδη σωματιδίων, δηλαδή $\rho = \rho(n, s)$. Αν εισάγουμε πολλά είδη σωματιδίων η ενέργεια θα εξαρτάται και από την περιεκτικότητα του κάθε είδους $Y_i = \frac{n_i}{n}$. Άρα πρέπει να προσθέσουμε έναν έξτρα όρο στην μεταβολή $d\left(\frac{e}{n}\right)$

$$d\left(\frac{e}{n}\right) = -Pd\left(\frac{1}{n}\right) + T ds + \sum_i \mu_i dY_i,$$

επειδή το $d\left(\frac{\rho}{n}\right)$ είναι τέλειο διαφορικό έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} P &\equiv \frac{-\partial\left(\frac{\rho}{n}\right)}{\partial\left(\frac{1}{n}\right)} \\ T &\equiv \frac{\partial\left(\frac{\rho}{n}\right)}{\partial s} \\ \mu_i &\equiv \frac{\partial\left(\frac{\rho}{n}\right)}{\partial Y_i} = \frac{\partial \rho}{\partial n_i} \end{aligned}$$

οι ποσότητες μ_i ονομάζονται χημικά δυναμικά και δείχνουν την μεταβολή της ενέργειας όταν μεταβάλουμε την πυκνότητα ενός είδους, διατηρώντας όλες τις άλλες μεταβλητές σταθερές.

Φαίνεται να απαιτούνται πολλές μεταβλητές για να καθορίσουμε την ισορροπία ενός συστήματος, στην πραγματικότητα όμως δεν είναι όλες οι θερμοδυναμικές ποσότητες ανεξάρτητες. Αν απαιτήσουμε το σύστημα να πηγαίνει προς την ισορροπία διατηρώντας σταθερό όγκο $1/n$ και εντροπία s , οδηγούμαστε στην σχέση

$$d\rho = 0,$$

δηλαδή η ενέργεια παραμένει σταθερή (στο ελάχιστο της). Όταν το σύστημα είναι σε ισορροπία όλα τα θερμοδυναμικά μεγέθη είναι συναρτήσεις της θερμοκρασίας και των χημικών δυναμικών. Κάθε διεργασία που γίνεται εντός του αστέρα διατηρεί σταθερές κάποιες ποσότητες, αυτές μπορούν να συσχετιστούν με τα χημικά δυναμικά. Ο προσδιορισμός αυτών των σταθερών μειώνει τον αριθμό ανεξάρτητων μεταβλητών, για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ένα ρευστό από νετρόνια, πρωτόνια, ηλεκτρόνια, μίονια και τα αντίστοιχα νετρίνα τους. Από την ουδετερότητα φορτίου $n_{charged} = 0$, μπορεί κανείς να προσδιορίσει το χημικό δυναμικό των πρωτονίων μ_p . Τα νετρίνα που παράγονται κατά τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις δεν μπορούν να παγιδευτούν στο αστέρι εξαιτίας της μικρής ενεργούς διατομής. Αν υποθέσουμε ότι είναι άμαζα ο λεπτονικός αριθμός διατηρείται ξεχωριστά για κάθε γενιά. Θέτοντας τα χημικά δυναμικά των νετρίνων ίσα με το 0 (διαλέγοντας κατάλληλα τις σταθερές $n_{Le}, n_{L\mu}$) μπορούμε να προσδιορίσουμε τα χημικά δυναμικά μιονίων και ηλεκτρονίων $\mu_{\mu,e}$. Οι αστέρες νετρονίων βρίσκονται σε $T = 0\text{ K}$, άρα τελικά μας μένει ως ελεύθερη μεταβλητή το χημικό δυναμικό των νετρονίων. Το χημικό δυναμικό των νετρονίων μπορεί να συσχετιστεί με την αριθμητική πυκνότητα των βαρυονίων, στο παραπάνω παράδειγμα είναι εμφανές ότι τελικά όλες οι ποσότητες εξαρτώνται μόνο από μία ποσότητα που εμείς επιλέξαμε να είναι η αριθμητική πυκνότητα βαρυονίων.

2.4.2 Ιδανικό αέριο Fermi

Η στατιστική φυσική και η κινητική θεωρία μας δίνουν ένα εργαλείο για να υπολογίσουμε τα θερμοδυναμικά μεγέθη βασιζόμενοι στις μικροσκοπικές ιδιότητες της ύλης. Στους λευκούς νάνους η βαρυτική κατάρρευση εμποδίζεται από την πίεση εκφυλισμού, εξαιτίας της φερμιονικής φύσης των ηλεκτρονίων. Η πρώτη μελέτη αστέρων νετρονίων βασίστηκε στο ότι αυτήν την φορά είναι η πίεση εκφυλισμού από τα νετρόνια που αντιστέκεται στην βαρυτική κατάρρευση [1]. Θα δούμε ότι η πίεση εκφυλισμού δεν είναι αρκετή για να δικαιολογήσει τις μάζες αστέρων νετρονίων που παρατηρούμε. Παρολαυτά θα αποδείξουμε την καταστατική εξίσωση για την περίπτωση εκφυλισμένης φερμιονικής ύλης, καθώς θα την χρησιμοποιήσουμε και στην μοντελοποίηση της σκοτεινής ύλης. Στην κινητική θεωρία το σύστημα περιγράφεται από την συνάρτηση κατανομής η οποία ορίζεται ως εξής

$$\frac{dN}{d^3x d^3p} = \frac{g}{h^3} f.$$

Όπου $\frac{dN}{d^3x d^3p}$ η αριθμητική πυκνότητα στον φασικό χώρο, f η συνάρτηση κατανομής, g το στατιστικό βάρος και h η σταθερά Planck. Για φερμιόνια με spin $\frac{1}{2}$ έχουμε $g = 2 * s + 1 = 2$. Τα φερμιόνια ακολουθούν την στατιστική Fermi-Dirac που περιγράφεται από την

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left[\frac{(E-\mu)}{kT}\right] + 1},$$

όπου E η ενέργεια, T η θερμοκρασία, k η σταθερά Boltzmann και μ είναι το χημικό δυναμικό. Στο όριο $\frac{\mu}{kT} \gg 1$ η θερμική κίνηση συνεισφέρει ελάχιστα και η ύλη γίνεται εκφυλισμένη. Από την αρχή Pauli τα φερμιόνια δεν μπορούν να βρεθούν στην ίδια κατάσταση και για αυτό καταλαμβάνουν ολοένα και υψηλότερες ενεργειακές στάθμες. Δημιουργείται μία επιφάνεια Fermi που διαχωρίζει τις κατειλημμένες καταστάσεις από τις μη-κατειλημμένες. Η ενέργεια της υψηλότερης κατειλημμένης στάθμης ονομάζεται ενέργεια E_f και ισούται με το χημικό δυναμικό σε θερμοκρασία $T = 0$ K εφόσον η προσθήκη ή αφαίρεση σωματιδίου από το σύστημα πρέπει να γίνει από αυτήν την στάθμη. Άρα στο όριο $\frac{\mu}{kT} \rightarrow \infty$, η $f(E)$ τείνει σε μία συνάρτηση βήματος

$$f(E) = \begin{cases} 1, & E \leq E_f \\ 0, & E > E_f \end{cases}.$$

Η αριθμητική πυκνότητα υπολογίζεται ολοκληρώνοντας την συνάρτηση κατανομής

σε όλες τις ορμές

$$\begin{aligned} n &= \int \frac{dN}{d^3x d^3p} d^3p \\ &= \int \frac{g}{h^3} f d^3p. \end{aligned}$$

Στο όριο $T \rightarrow 0$ που ισχύει στα ψυχρά αστέρια έχουμε

$$n = \int_0^{p_f} \frac{g}{h^3} 1 d^3p$$

όπου p_f είναι η ορμή Fermi που σχετίζεται με την ενέργεια Fermi από την σχέση διασποράς

$$E_f = \sqrt{p_f^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Για νετρόνια έχουμε $g = 2$, επομένως η αριθμητική πυκνότητα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} n &= \frac{2}{h^3} \int_0^{p_f} 4\pi p^2 dp \\ n &= \frac{8\pi}{3h^3} p_f^3 \\ n &= \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} p_f^3. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Για να υπολογίσουμε την ενέργεια του αερίου Fermi πολλαπλασιάζουμε την συνάρτηση κατανομής με την ενέργεια κάθε κατάστασης και στην συνέχεια ολοκληρώνουμε

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{h^3} \int_0^{p_f} E(p) 4\pi p^2 dp \\ E &= \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_f} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} p^2 dp. \end{aligned}$$

Είναι βολικό να χρησιμοποιούμε αδιάστατες ποσότητες ως μεταβλητές ολοκλήρωσης

για αυτό ορίζουμε την αδιάστατη ορμή $x = \frac{p}{mc}$,

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{8\pi}{h^3} m^4 c^5 \int_0^{x_f} \sqrt{x^2 + 1} x^2 dx \\
 E &= \frac{m^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \frac{1}{8} \left[x_f \sqrt{1 + x_f^2} (2x_f^2 + 1) - \sinh^{-1}(x_f) \right] \\
 E &= \frac{(mc^2)^4}{3\pi^2 (\hbar c)^3} \frac{1}{8} \left[x_f \sqrt{1 + x_f^2} (2x_f^2 + 1) - \sinh^{-1}(x_f) \right] \\
 E &= \rho_0 \left[x_f \sqrt{1 + x_f^2} (2x_f^2 + 1) - \sinh^{-1}(x_f) \right] \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

όπου $\rho_0 = \frac{(mc^2)^4}{24\pi^2 (\hbar c)^3}$ μία σταθερά με μονάδες ενέργειας ανά όγκο.

Η πίεση ορίζεται από την κινητική θεωρία ως

$$P = \frac{1}{3} \int pu \frac{dN}{d^3x d^3p} d^3p.$$

Στην ειδική σχετικότητα έχουμε $\|\vec{p}\| = \gamma m \|\vec{u}\|$ και $E = \gamma mc^2$ επομένως, $u = \|\vec{u}\| = \frac{pc^2}{E}$. Αντικαθιστώντας στο παραπάνω ολοκλήρωμα μπορούμε να υπολογίσουμε την πίεση

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{3} \int_0^{p_f} \frac{p^2 c^2}{E} \frac{g}{h^3} d^3p \\
 P &= \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_f} \frac{p^2 c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} p^2 dp \\
 P &= \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{x_f} \frac{m^4 c^6}{mc^2} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 1}} mc dx \\
 P &= \frac{(mc^2)^4}{3\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^{x_f} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 1}} dx .
 \end{aligned}$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας το ρ_0 που ορίσαμε παραπάνω βρίσκουμε την πίεση του ιδανικού αερίου Fermi.

$$P = \frac{\rho_0}{3} \left[x_f \sqrt{1 + x_f^2} (2x_f^2 - 3) + 3 \sinh^{-1}(x_f) \right]. \quad (2.12)$$

Παρατηρούμε ότι, όπως είχαμε ισχυριστεί, τα δύο μεγέθη εξαρτώνται μόνο από μία παράμετρο που είναι η αδιάστατη ορμή Fermi, η οποία δείξαμε ότι σχετίζεται με την αριθμητική πυκνότητα μέσω της σχέσης (2.10).

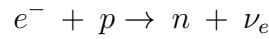
Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι τα φερμιόνια μπορούν να ασκούν πίεση ακόμα και

σε θερμοκρασία $T = 0\text{ K}$, η πίεση αυτή ονομάζεται πίεση εκφυλισμού. Βασιζόμενοι σε αυτήν την ιδέα οι Oppenheimer, Volkoff χρησιμοποίησαν ως καταστατική εξίσωση τις σχέσεις (2.11), (2.12) με μάζα την μάζα των νετρονίων [1]. Η μέγιστη μάζα που υπολόγισαν ήταν $0.71 M_{\odot}$, αρκετά μικρότερη από $1.4 M_{\odot}$ που είναι η τυπική τιμή μάζας των αστέρων νετρονίων που παρατηρούμε. Η διαφορά αυτή είναι μια ένδειξη του ότι οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις συνεισφέρουν σημαντικά στην πίεση του ρευστού, όμως εκείνη την εποχή οι ιδιότητες της ισχυρής αλληλεπίδρασης δεν ήταν γνωστές.

Γνωρίζουμε ότι τα νετρόνια δεν είναι σταθερά, εκτός των πυρήνων διασπώνται μέσω της β -διάσπασης με χρόνο ημιζωής περίπου 10 λεπτά. Θα δείξουμε ότι οι συνθήκες στους αστέρες νετρονίων είναι τέτοιες ώστε να μην επιτρέπεται η διάσπαση τους, η κατάσταση αυτή ονομάζεται β -ισορροπία. Η διάσπαση β



συνεισφέρει στην δημιουργία ηλεκτρονίων και πρωτονίων ενώ, η αντίστροφη της



παράγει νετρόνια. Επομένως είναι αδύνατο να έχουμε μόνο πληθυσμό νετρονίων καθώς η διάσπαση τους θα δημιουργούσε πρωτόνια και ηλεκτρόνια. Είναι ρεαλιστικό να υποθέσουμε την ύπαρξη τριών αερίων Fermi, για τους τρεις διαφορετικούς πληθυσμούς e , p , n . Επειδή και οι τρεις πληθυσμοί είναι εκφυλισμένοι η πρώτη αντίδραση περιορίζεται κινηματικά όταν τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονται έχουν ενέργεια κάτω από την ενέργεια Fermi του αερίου e . Η προσθήκη και των τριών ειδών σωματιδίων εξηγεί την σταθερότητα των νετρονίων εντός του αστέρου και αποτελεί μία πρώτη αρκετά σημαντική διόρθωση της καταστατικής εξίσωσης ειδικά μέχρι το neutron-drip, δηλαδή $\rho = 4.3 * 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$.

2.4.3 Ισορροπία ασθενών αλληλεπιδράσεων

Υποθέτοντας την ισορροπία που αναφέραμε μπορούμε να υπολογίσουμε ποιες είναι οι σχετικές πυκνότητες των πληθυσμών στο εσωτερικό του αστέρα. Ισορροπία των ηλεκτρονίων, πρωτονίων και νετρονίων σημαίνει

$$\mu_e + \mu_p = \mu_n,$$

αφού το χημικό δυναμικό των νετρονίων είναι 0. Σε $T = 0\text{ K}$ τα χημικά δυναμικά ισούνται με την ενέργεια Fermi. Για να απλοποιήσουμε την άλγεβρα θα κάνουμε κάποιες υποθέσεις, η ισχύς των υποθέσεων πρέπει να ελεγχθεί στο τελικό αποτέλεσμα. Θα υποθέσουμε ότι τα ηλεκτρόνια είναι πλήρως σχετικιστικά, $p_e \gg m_e$, ενώ τα νετρόνια

και τα πρωτόνια παραμένουν μη-σχετικιστικά³. Με βάση αυτές τις υποθέσεις τα χημικά δυναμικά δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\mu_e &= E_{f,e} = p_{f,e} \\ \mu_p &= E_{f,p} = \frac{p_{f,p}^2}{2m_p} + m_p \\ \mu_n &= E_{f,n} = \frac{p_{f,n}^2}{2m_n} + m_n.\end{aligned}$$

Με αντικατάσταση στην σχέση ισορροπίας έχουμε

$$p_{f,e} + \frac{p_{f,p}^2}{2m_p} + m_p = \frac{p_{f,n}^2}{2m_n} + m_n. \quad (2.13)$$

Για να έχουμε ουδετερότητα φορτίου πρέπει να ισχύει

$$n_e = n_p$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση (2.10) μπορούμε να συσχετίσουμε τις ορμές Fermi πρωτονίων και ηλεκτρονίων

$$\frac{p_{f,e}^3}{3\pi^2} = \frac{p_{f,p}^3}{3\pi^2} \Leftrightarrow p_{f,e} = p_{f,p}.$$

Η (2.13) γίνεται

$$\begin{aligned}p_{f,p} + \frac{p_{f,p}^2}{2m_p} + m_p &= \frac{p_{f,n}^2}{2m_n} + m_n \\ p_{f,p} \left(1 + \frac{p_{f,p}}{2m_p} \right) &= \frac{p_{f,n}^2}{2m_n} + Q \\ p_{f,p} - Q &= \frac{p_{f,n}^2}{2m_n} \\ p_{f,p} &\approx \frac{p_{f,n}^2}{2m_n},\end{aligned}$$

όπου $Q = m_n - m_p \approx 1.73 \text{ MeV}$, για να πάμε από την δεύτερη σχέση στην τρίτη χρησιμοποιήσαμε ότι τα πρωτόνια είναι μη σχετικιστικά $p_{f,p} \ll m_p$. Η τελευταία σχέση προκύπτει αν η ορμή των πρωτονίων είναι πολλή μεγαλύτερη από το Q . Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι την σχέση (2.10) ώστε να εκφράσουμε το αποτέλεσμα σε μία πιο

³ Στην ενότητα αυτήν χρησιμοποιούμε μονάδες $\hbar = c = 1$

βολική μορφή.

$$\begin{aligned} (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} n_p^{\frac{1}{3}} &= (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{n_n^{2/3}}{2m_n} \\ n_p &= (3\pi^2) \frac{n_n^2}{8m_n^3} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Η συνολική πυκνότητα του αστεριού είναι

$$\rho = m_n n_n + m_p n_p + m_e n_e$$

τα ηλεκτρόνια είναι πολύ ελαφριά για αυτό τα αγνοούμε, επίσης θα αγνοήσουμε την συνεισφορά από τα πρωτόνια γιατί όπως θα υπολογίσουμε είναι πολύ λιγότερα από τα νετρόνια. Άρα η συνολική πυκνότητα είναι

$$\rho = m_n n_n,$$

επομένως μπορούμε να συσχετίσουμε τις αριθμητικές πυκνότητες των πληθυσμών με την πυκνότητα του αστεριού. Ο πυρήνας ενός αστέρα νετρονίων έχει πυκνότητα έως και δέκα φορές την πυρηνική πυκνότητα, $\rho_{nuc} = 2.5 * 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$. Είναι βολικό επομένως να εκφράσουμε τα αποτελέσματα σε μονάδες πυρηνικής πυκνότητας, δηλαδή έχουμε

$$n_n = \frac{\rho}{m_n} = \frac{\rho_{nuc}}{m_n} \left(\frac{\rho}{\rho_{nuc}} \right) = 0.17 \left(\frac{\rho}{\rho_{nuc}} \right) \text{ fm}^{-3}.$$

Η (2.14) δίνει την πυκνότητα των πρωτονίων που είναι ίση με των ηλεκτρονίων

$$n_p = n_e = 0.96 * 10^{-3} \left(\frac{\rho}{\rho_{nuc}} \right)^2 \text{ fm}^{-3}$$

Οι ορμές Fermi θα είναι

$$\begin{aligned} p_{f,n} &= 340 \left(\frac{\rho}{\rho_{nuc}} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\text{MeV}}{c} \\ p_{f,e} = p_{f,p} &= 60 \left(\frac{\rho}{\rho_{nuc}} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\text{MeV}}{c} \end{aligned}$$

παρατηρούμε ότι επιβεβαιώνονται οι υποθέσεις που κάναμε. Τα πρωτόνια είναι μη-σχετικιστικά

$$p_{f,p} \approx 60 \text{ MeV} \ll m_p \approx 1 \text{ GeV},$$

τα νετρόνια μπορούν επίσης να θεωρηθούν μη σχετικιστικά για $\rho \lesssim 2\rho_{nuc}$ και τέλος τα ηλεκτρόνια είναι εμφανώς σχετικιστικά

$$p_{f,e} \approx 60 \text{ MeV} \gg m_e \approx 0.511 \text{ MeV}.$$

Η πυκνότητα των πρωτονίων είναι περίπου δέκα φορές μικρότερη από των νετρονίων άρα η υπόθεση πως η πυκνότητα ενέργειας προέρχεται κυρίως από τα νετρόνια είναι καλή προσέγγιση.

2.5 Ρεαλιστικές καταστατικές εξισώσεις

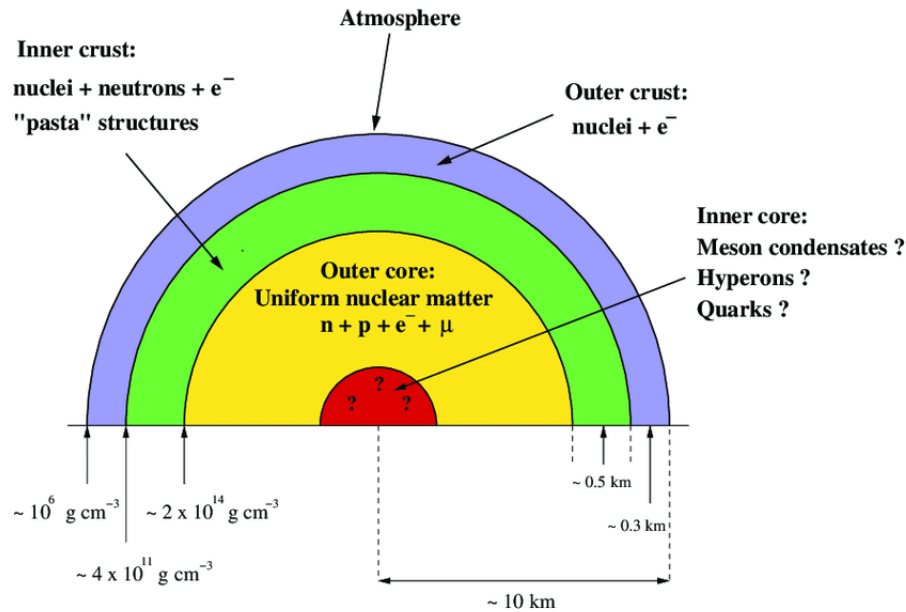
Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε σε δύο καταστατικές οι οποίες δεν μπορούν να εξηγήσουν τις παρατηρήσεις που υπάρχουν για τους αστέρες νετρονίων. Η καταστατική του πληθυσμού νετρονίων που περιγράφεται ως ιδανικό αέριο Fermi δίνει πολύ μικρό όριο TOV και δεν εξηγεί το γιατί ακτινοβολούν τα pulsars, εφόσον δεν έχουμε φορτισμένα σωματίδια. Όταν συμπεριλάβουμε τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις πρέπει να εισάγουμε πληθυσμούς ηλεκτρονίων και πρωτονίων, μαζί με τα νετρόνια, οι οποίοι βρίσκονται σε χημική ισορροπία μέσω της β -διάσπασης. Η προσθήκη αυτή όπως είδαμε μπορεί να προσδιορίσει τις σχετικές πυκνότητες των διαφορετικών σωματιδίων μέχρι $\rho \lesssim 2\rho_{nuc}$. Οι πυρήνες των αστέρων νετρονίων έχουν πυκνότητα $\rho \approx 10\rho_{nuc}$, σε τόσο μεγάλες πυκνότητες η παραπάνω ανάλυση δεν αρκεί. Πρέπει να συνυπολογιστούν φαινόμενα που σχετίζονται με την ισχυρή αλληλεπίδραση, όπως το δυναμικό νουκλεονίου – νουκλεονίου. Η ισχυρή αλληλεπίδραση σε κοντινές αποστάσεις είναι απωστική, δηλαδή προσφέρει επιπλέον πίεση για αυτό και επιτρέπει την δημιουργία βαρύτερων αστέρων.

Στην ενότητα αυτήν θα περιγράψουμε την κατάσταση της ύλης στις διάφορες περιοχές του αστεριού και θα αναφερθούμε πιο συγκεκριμένα στις δύο καταστατικές εξισώσεις που χρησιμοποιούμε ως βάση των υπολογισμών μας. Σε πυκνότητες όσο μεγάλες όσο του πυρήνα δεν γνωρίζουμε επακριβώς τι συμβαίνει. Τέτοιες πυκνότητες δεν έχουν επιτευχθεί σε εργαστήριο για να μελετηθούν και οι φαινομενολογικές πυρηνικές δυνάμεις δεν αποτελούν ακριβή προσέγγιση. Η ανάλυση τόσο υψηλών πυκνοτήτων πρέπει να γίνει μέσω της ισχυρής αλληλεπίδρασης (QCD) που είναι εξαιρετικά δύσκολη για υπολογισμούς σε συστήματα πολλών σωμάτων. Η καταστατική εξίσωση σε αυτές τις υπερύψηλες πυκνότητες είναι ένα ανοιχτό πρόβλημα της φυσικής και οι παρατηρήσεις αστέρων νετρονίων βοηθούν στον προσδιορισμό της.

2.5.1 Σχηματική περιγραφή του αστεριού

Το αστέρι χωρίζεται σε περιοχές βάση των διαφορετικών ιδιοτήτων της ύλης στα διάφορα εύρη πυκνοτήτων εντός του αστεριού. Οι περιοχές αυτές είναι ο εξωτερικός φλοιός με $\rho \approx 10^6$ έως $4 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$. Στην συνέχεια είναι ο εσωτερικός φλοιός που φτάνει

έως $\rho \approx 2.8 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$, μετά από αυτήν την πυκνότητα βρίσκεται ο πυρήνας που χωρίζεται επίσης σε εσωτερικός και εξωτερικός. Ο διαχωρισμός αυτός οφείλεται στο ότι η ύλη αλλάζει φάση όταν περνάει από αυτές τις πυκνότητες. Στο διάγραμμα 2.2 αναπαριστούμε τις διάφορες περιοχές πυκνοτήτων και την προσεγγιστική ακτίνα της κάθε μιας.

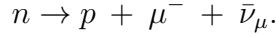


Σχήμα 2.2: Σχηματική αναπαράσταση των περιοχών ενός τυπικού αστέρα νετρονίων [12].

Ο εξωτερικός φλοιός είναι στερεός και αποτελείται από πυρήνες μαζί με ένα σύννεφο ηλεκτρονίων, οι πυρήνες αυτοί είναι στην περιοχή του σιδήρου. Ο σίδηρος έχει δημιουργηθεί από το αρχικό αστέρι που κατέρρευσε μέσω της supernova. Όσο αυξάνεται η πυκνότητα περνάμε στον εσωτερικό φλοιό, η αύξηση της πυκνότητας προκαλεί αύξηση του χημικού δυναμικού των ηλεκτρονίων. Ανοίγει έτσι το κανάλι της απορρόφησης ηλεκτρονίων από τον πυρήνα, τα ηλεκτρόνια αντιδρούν με τα πρωτόνια δημιουργώντας νετρόνια και νετρίνα που διαφεύγουν. Οι πυρήνες γίνονται ολοένα και πιο πλούσιοι σε νετρόνια μέχρι την πυκνότητα $\rho_{drip} = 4.3 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$. Μετά από αυτήν την πυκνότητα οι μόνες ελεύθερες καταστάσεις νετρονίων βρίσκονται στο συνεχές και τα νετρόνια αρχίζουν να διαφεύγουν από τον πυρήνα, ένα φαινόμενο που ονομάζεται neutron drip.

Στο σημείο αυτό ξεκινάει ο εσωτερικός φλοιός που αποτελείται από ένα πλέγμα πυρήνων πλούσιων σε νετρόνια. Το πλέγμα περιβάλλεται από τα αέρια ηλεκτρονίων και νετρονίων που έχουν διαφύγει από τους πυρήνες. Οι πυρήνες λόγω της ισχυρής αλληλεπίδρασης παραμορφώνονται έντονα και δημιουργούν μία φάση που αποκαλείται nuclear pasta. Όσο αυξάνεται η πυκνότητα δημιουργούνται περισσότερα ελεύθερα νετρόνια ενισχύοντας την παραμόρφωση και έτσι για πυκνότητα $\rho_{nuc} = 2.8 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ οι πυρήνες αρχίζουν να διαλύονται. Μετά την διάλυση των πυρήνων μπαίνουμε στην περιοχή του πυρήνα του αστεριού, εκεί απομένουν τα εκφυλισμένα αέρια των νετρονίων, πρωτονίων και ηλεκτρονίων.

Στην προηγούμενη ενότητα περιγράψαμε την ισορροπία αυτών των αερίων και βρήκαμε ότι πρωτόνια και ηλεκτρόνια έχουν παρόμοιες πυκνότητες, ενώ τα νετρόνια είναι έως και 10 φορές περισσότερα. Όταν το χημικό δυναμικό των ηλεκτρονίων γίνει μεγαλύτερο από την μάζα των μιονίων $\mu_e > m_\mu c^2 = 105.66 \text{ MeV}$ αρχίζει η εμφάνιση μιονίων διότι ανοίγει η αντίδραση



Τα μίονια βρίσκονται και αυτά σε χημική ισορροπία και έτσι έχουμε ένα αέριο $n - p - e - \mu$. Ο εσωτερικός πυρήνας βρίσκεται στις πολύ υψηλές πυκνότητες για τις οποίες δεν υπάρχει σίγουρη θεωρία. Κάποιες από τις υποθέσεις περιλαμβάνουν συμπυκνώματα μεσονίων, ύπαρξη πλάσματος quark-gluon, υπεραγωγιμότητα χρώματος και ύλη που αποτελείται από s -quark. Οι καταστατικές που θα χρησιμοποιήσουμε δεν περιέχουν τέτοια φαινόμενα, στηρίζονται μόνο στην επίλυση του συστήματος πολλών νετρονίων. Υπό μία έννοια προεκτείνουν την αλληλεπίδραση νετρονίων που μπορούμε να παρατηρήσουμε, σε μία περιοχή πυκνοτήτων που μας είναι άγνωστη.

2.5.2 Ενοποιημένη καταστατική των Douchin και Haensel

Για τους υπολογισμούς που θα πραγματοποιήσουμε στην εργασία βασιζόμαστε σε δύο καταστατικές εξισώσεις οι οποίες συμφωνούν με αρκετές από τις παρατηρήσεις. Η πρώτη καταστατική που θα χρησιμοποιήσουμε προτάθηκε από τους Douchin και Haensel και βασίζεται στην πυρηνική αλληλεπίδραση SLy [13]. Η ανάλυση του υπολογισμού της καταστατικής είναι εκτός του πλαισίου της εργασίας αυτής, θα αναφερθούμε όμως στα σημαντικά χαρακτηριστικά της. Η αλληλεπίδραση SLy εμπίπτει στα μοντέλα τύπου Skyrme, αυτά τα μοντέλα αποτελούν μία μέθοδο επίλυσης του προβλήματος πολλών σωμάτων. Πιο συγκεκριμένα μελετούν φαινομενολογικές δυνάμεις που εξαρτώνται από την πυκνότητα για την περίπτωση των δύο και τριών νουκλεονίων (NN και NNN δυνάμεις). Μία παραμετροποίηση της δύναμης NN με έμφαση στην περίπτωση της ύλης πλούσιας σε νετρόνια είναι η SLy. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ενεργό θεωρία οι Douchin, Haensel μοντελοποίησαν την ύλη σε πυκνότητες από 10^8 g cm^{-3} έως $4 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$. Αυτή η μεθοδολογία προσφέρει μία καταστατική που μπορεί να περιγράψει όλο το αστέρι, χρησιμοποιώντας το ίδιο μοντέλο σε όλο το εύρος πυκνοτήτων. Είναι επομένως θερμοδυναμικά συνεπής και μπορεί να προσφέρει πληροφορία για την αλλαγή φάσης της ύλης.

Ένα ενδιαφέρον μέγεθος που μπορούμε να εξάγουμε από μία καταστατική είναι ο αδιαβατικός συντελεστής Γ

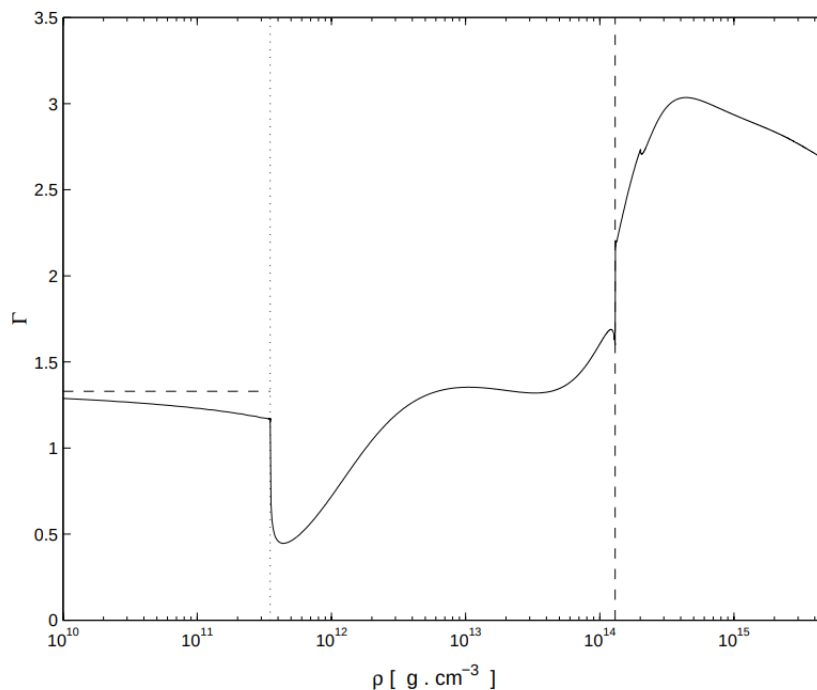
$$\Gamma = \frac{d(\ln P)}{d(\ln n)} = \frac{\rho + P/c^2}{P} \frac{dP}{d\rho}.$$

Ο αδιαβατικός συντελεστής είναι ένα μέτρο του πόσο μπορεί να συμπιεστεί το αέριο.

Μεγάλο Γ σημαίνει πως το αέριο αντιστέκεται περισσότερο στην συμπίεση του, καταστατικές με μεγάλο Γ λέγονται άκαμπτες (stiff). Συχνά ένας τρόπος μοντελοποίησης καταστατικών είναι με τα πολύτροπα, δηλαδή εξισώσεις της μορφής

$$P = k\rho^\Gamma$$

που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης Lane–Emden. Η εξίσωση αυτή εμφανίζεται στην υδροδυναμική ισορροπία, στα πλαίσια της Νευτώνιας μηχανικής. Λαμβάνοντας το όριο για μη-σχετικιστικά σωματίδια στην (2.12) βρίσκουμε $\Gamma = \frac{5}{3}$, ενώ για πλήρως σχετικιστικά σωματίδια έχουμε $\Gamma = \frac{4}{3}$. Η συμπεριφορά του αδιαβατικού συντελεστή για την καταστατική εξίσωση των Douchin και Haensel εμφανίζεται στο διάγραμμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Αδιαβατικός συντελεστής συναρτήσει της πυκνότητας ενέργειας. Η γραμμή με τελείες δείχνει το neutron drip, ενώ η διακεκομμένη παριστάνει την μετάβαση από τον φλοιό στον πυρήνα.

Από το διάγραμμα 2.3 λαμβάνουμε μεγάλη πληροφορία για την καταστατική, ας δούμε σε τι οφείλονται οι μεταβολές του Γ . Μέχρι το neutron drip ο συντελεστής Γ είναι περίπου ίσος με $\frac{4}{3}$. Αυτό είναι λογικό διότι η μεγαλύτερη συνεισφορά στην πίεση έρχεται από τα πλήρως σχετικιστικά ηλεκτρόνια, τα νετρόνια είναι ακόμα εγγλωβισμένα στους πυρήνες. Η απότομη πτώση στο neutron drip οφείλεται στο ότι τα νετρόνια που βγαίνουν από τους πυρήνες προσθέτουν πολύ μάζα στο ρευστό αλλά ελάχιστη πίεση, λόγω του μικρού αριθμού τους. Όσο αυξάνεται η πυκνότητα τα ελεύθερα νετρόνια γίνονται περισσότερα και η πίεση εκφυλισμού από τον πληθυσμό τους είναι η κύρια συνεισφορά στην ολική πίεση. Τα νετρόνια παραμένουν μη-σχετικιστικά για αυτό ο

αδιαβατικός συντελεστής φτάνει μέχρι την τιμή $\frac{5}{3}$, λίγο πριν την επαφή φλοιού-πυρήνα. Εκεί παρατηρείται μία ασυνεχής αύξηση του συντελεστή κάνοντας την καταστατική πολύ άκαμπτη. Κατά την μετάβαση από τον φλοιό στον πυρήνα η ύλη αλλάζει φάση διότι διαλύονται οι πυρήνες. Η ύπαρξη των πυρήνων μειώνει την απωστική δύναμη μεταξύ των νουκλεονίων επομένως, η διάλυση τους αυξάνει την ολική πίεση του αστεριού. Η μικρή ασυνεχής πτώση που εμφανίζεται στην συνέχεια οφείλεται στην δημιουργία μιονίων. Ο πυρήνας της καταστατικής αποτελείται από ένα αέριο *nrem*, αγνοούνται δηλαδή πιθανές εξωτικές καταστάσεις της ύλης. Όπως θα δούμε αναλυτικότερα στην ενότητα των αποτελεσμάτων η καταστατική αυτή επιτρέπει αστέρια μέχρι $2.05 M_{\odot}$.

2.5.3 Καταστατική Gandolfi et al.

Η δεύτερη πυρηνική καταστατική που θα χρησιμοποιήσουμε είναι πιο σύγχρονη και μπορεί να υποστηρίξει βαρύτερα αστέρια από την προηγούμενη. Στην καταστατική αυτή δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στην αλληλεπίδραση τριών νετρονίων και μελετήθηκε από τους Gandolfi, Carlson και Sanjay Reddy [14]. Επομένως πέρα από το δυναμικό για την αλληλεπίδραση NN υπάρχει και δυναμικό για την NNN. Το δυναμικό $3n$ εξαρτάται από διάφορες παραμέτρους που αφορούν τις συνεισφορές για μακρινές αποστάσεις ($V_{2\pi}$), ενδιάμεσες ($V_{3\pi}$) και κοντινές (V_R) όπου υπάρχει απωστική συμπεριφορά. Το μοντέλο λύνεται με μεθόδους Monte-Carlo και η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο ως συνάρτηση της αριθμητικής πυκνότητας μπορεί να προσεγγιστεί από την συνάρτηση

$$E(n) = a \left(\frac{n}{n_0} \right)^{\alpha} + b \left(\frac{n}{n_0} \right)^{\beta}. \quad (2.15)$$

Οι σταθερές a, α, b, β είναι οι παράμετροι της παλινδρόμησης και εξαρτώνται από το δυναμικό $3n$ που επιλέγουμε. Όπως αναφέρεται στην δημοσίευση των Gandolfi et al. τα a, α περιγράφουν την συμπεριφορά σε μικρές πυκνότητες, ενώ τα b, β σε υψηλές. Η σταθερά $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ είναι η πυρηνική πυκνότητα. Στην δημοσίευση δίνονται 7 διαφορετικές τιμές των παραπάνω σταθερών που καλύπτουν το εύρος αβεβαιότητας που υπάρχει στην ενέργεια συμμετρίας $E_{sym} = 32 \pm 2 \text{ MeV}$ (πίνακας 2.1).

$3n$ αλληλεπίδραση	a (MeV)	α	b (MeV)	β
καθόλου	12.7	0.49	1.78	2.26
$V_{2\pi} + V_{R,\mu=150}$	12.7	0.48	3.45	2.12
$V_{2\pi} + V_{R,\mu=300}$	12.8	0.488	3.19	2.20
$V_{3\pi} + V_R$	13.0	0.49	3.21	2.47
$V_{2\pi} + V_{R,\mu=150}$	12.6	0.475	5.16	2.12
$V_{3\pi} + V_R$	13.0	0.50	4.71	2.49
<i>UIX</i>	13.4	0.514	5.62	2.436

Πίνακας 2.1: Παράμετροι fitting για διαφορετικές $3n$ αλληλεπιδράσεις [14].

Από την ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο (2.15) μπορούμε να βρούμε την πυκνότητα ενέργειας προσθέτοντάς την μάζα του νετρονίου και πολλαπλασιάζοντας με την αριθμητική πυκνότητα n

$$\rho(n) = n (E(n) + m_n c^2). \quad (2.16)$$

Για να συμπληρώσουμε την καταστατική χρειάζεται η πίεση, μπορούμε εύκολα να την προσδιορίσουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.8) που δώσαμε στην ενότητα 2.4

$$P(n) = n^2 \frac{\partial \rho / n}{\partial n} = n_0 \left[a \alpha \left(\frac{n}{n_0} \right)^\alpha + b \beta \left(\frac{n}{n_0} \right)^\beta \right]. \quad (2.17)$$

Η εξισώσεις (2.16), (2.17) αποτελούν την καταστατική για τον πυρήνα του αστεριού. Για τον φλοιό ($n < n_{crust} = 0.08 \text{ fm}^{-3}$) πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άλλη καταστατική, σε αντίθεση με την προηγούμενη καταστατική που περιέγραφε ενιαία όλο το αστέρι. Ως καταστατική του φλοιού χρησιμοποιούμε αυτή των Baym et al. [15] και την ενώνουμε ομαλά με του πυρήνα. Δηλαδή κρατάμε συνεχή την πυκνότητα ενέργειας και την πίεση στην διεπαφή φλοιού πυρήνα.

Τέλος η παραπάνω καταστατική αφορά κυρίως μη-σχετικιστικά νετρόνια και για αυτό σε πυκνότητες $n \gtrsim 5n_0$ προβλέπει ότι η ταχύτητα του ήχου στην ύλη μπορεί να υπερβεί αυτήν του φωτός στο κενό. Προφανώς κάτι τέτοιο πρέπει να αποφευχθεί για αυτό στις πυκνότητες αυτές ακολουθούμε την μέθοδο που αναφέρουν στην δημοσίευση. Πάνω από μία κρίσιμη πυκνότητα n_c χρησιμοποιούμε την καταστατική με την μεγαλύτερη δυνατή ακαμψία

$$P(\rho) = c^2 \rho - \rho_c.$$

Η ταχύτητα του ήχου ορίζεται ως

$$c_s \equiv \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}$$

επομένως η πιο άκαμπτη καταστατική δίνει $c_s = c$. Επιλέγουμε την σταθερά ρ_c ώστε η καταστατική να είναι συνεχής στο n_c . Όπως είναι λογικό εφόσον δεν έχουμε ένα ενιαίο μοντέλο χάνουμε την περιγραφή των αλλαγών φάσης.

Κεφάλαιο 3

Επίδραση σκοτεινής ύλης σε αστέρες νετρονίων

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της εργασίας. Αρχικά θα αναλύσουμε τον τρόπο επίλυσης του συστήματος εξισώσεων (2.9). Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα των πυρηνικών καταστατικών εξισώσεων που εξετάσαμε στις ενότητες 2.5.2, 2.5.3. Το κύριο μέρος της εργασίας είναι να εξερευνήσουμε την αλλαγή αυτών των αποτελεσμάτων με την προσθήκη σκοτεινής ύλης στο αστέρι. Θα εξετάσουμε διάφορες θεωρίες σκοτεινής ύλης που περιλαμβάνουν σωματίδια τα οποία συζεύγγονται με αυτά του καθιερωμένου προτύπου, σωματίδια που δεν αλληλεπιδρούν με την ύλη και μαύρες τρύπες.

Τα αποτελέσματα για κάθε θεωρία δεν περιλαμβάνουν μόνο το όριο TOV, αλλά όλη την οικογένεια αστεριών σε υδροδυναμική ισορροπία. Το όριο TOV αποτελεί έναν σημαντικό παράγοντα, καθώς η εύρεση αστεριού με μεγαλύτερη μάζα από την προβλεπόμενη είναι αρκετή για να απορρίψει την καταστατική. Το τωρινό όριο των παρατηρήσεων είναι περίπου $2.2\text{--}2.3 M_{\odot}$ και έρχεται από την μέτρηση GW170817 (Black Widow) [16, 17]. Η μέτρηση αυτή αφορά βαρυτικά κύματα που προήλθαν από ένωση δύο αστέρων νετρονίων. Οι περισσότερες παρατηρήσεις που υπάρχουν αφορούν pulsar που βρίσκονται στο τυπικό εύρος τιμών μάζας. Στις μετρήσεις αυτές υπολογίζεται και η ακτίνα των αστέρων προσφέροντας πληροφορίες για την συμπεριφορά της οικογένειας αστέρων γύρω από την μάζα $1.4 M_{\odot}$ [18]. Οι μετρήσεις αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απόρριψη κάποιων καταστατικών, για αυτό και είναι σημαντικό να συμπεριλαμβάνουμε όλη την παραμετρική οικογένεια αστεριών. Από το κεφάλαιο 2.3.1 ξέρουμε ότι η οικογένεια περιγράφεται από την καμπύλη $M(R)$.

3.1 Μεθοδολογία

Για να λάβουμε την σχέση $M(R)$ πρέπει να λύσουμε το σύστημα (2.9) για πολλές αρχικές τιμές της κεντρικής πυκνότητας ρ_c . Όλες οι σύγχρονες καταστατικές οδηγούν σε ένα σύστημα που λύνεται μόνο με αριθμητικές μεθόδους. Επιλέξαμε την επαναληπτική μέθοδο Runge-Kutta για την επίλυση του συστήματος, συγκεκριμένα την μεταβλητού βήματος Runge-Kutta 4-5 (RK45). Η ανεξάρτητη μεταβλητή του συστήματος είναι η ακτίνα r και οι συναρτήσεις που αποτελούν λύση του συστήματος είναι η μάζα $M(r)$ και η πίεση $P(r)$. Η αρχή τέτοιων επαναληπτικών μεθόδων είναι να ξεκινάμε από μία τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής r_0 με γνωστά τα $M(r_0)$ και $P(r_0)$ να προχωράμε με βήματα μήκους h . Για την μετάβαση της λύσης από r σε $r + h$ προσεγγίζουμε τις συναρτήσεις μέσω ενός ζυγισμένου μέσου όρου των κλίσεων, σε διαφορετικά σημεία εντός του συνόλου $[r, r + h]$. Στην RK45 το βήμα h είναι μεταβλητό και προσδιορίζεται συγκρίνοντας τις προσεγγίσεις των συναρτήσεων για 4 σημεία και 5 σημεία. Χρειάζεται μία συνθήκη τερματισμού της επαναληπτικής διαδικασίας, αυτή μας παρέχεται από την απαίτηση να μην υπάρχει πίεση εκτός του αστεριού. Σταματάμε την ολοκλήρωση για $r = R$, τέτοιο ώστε $P(R) = 0$ και θεωρούμε πως το R είναι η ακτίνα του αστεριού. Το σημείο αυτό είναι μοναδικό καθώς από την εξίσωση TOV ξέρουμε ότι η πίεση έχει πάντα αρνητική παράγωγο. Επομένως μειώνεται μονοτονικά από την τιμή $P(r_0) = P_c$ ως την $P(R) = 0$.

Οι αρχικές συνθήκες αφορούν το κέντρο του αστεριού, ιδανικά θα ξεκινάγαμε από το $r_0 = 0$, με $M(0) = 0$ και $P(0) = P_c$. Η τιμή της πίεσης στο κέντρο μπορεί να προσδιοριστεί από την ενέργεια στο κέντρο μέσω της καταστατικής. Η εξίσωση TOV έχει ιδιομορφία στο $r = 0$ κάτι που καθιστά αδύνατο το να ξεκινήσουμε από την τιμή αυτή. Σε τέτοια περίπτωση η αριθμητική μέθοδος δεν θα συνέκλινε. Είναι τυπικό σε αριθμητικές επιλύσεις να επιλέγουμε $r_0 \rightarrow 0$, όπου το πόσο κοντά στο 0 είναι η αρχική τιμή περιορίζεται από την πεπερασμένη ακρίβεια της μεθόδου. Ως αρχική τιμή της μάζας λαμβάνουμε αυτήν που περιέχεται στο εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας r_0 . Επειδή $r_0 \rightarrow 0$ θεωρούμε ότι στην σφαίρα η πυκνότητα ενέργειας είναι σταθερή και ίση με ρ_c , επομένως από την (2.5) λαμβάνουμε την αρχική τιμή της μάζας

$$M(r_0) = \frac{4\pi}{3} \rho_c r_0^3.$$

Λόγω των αριθμητικών σφαλμάτων δεν μπορούμε να εισάγουμε τα αποτελέσματα σε μονάδες SI, καθώς διαφέρουν κατά πολλές τάξεις μεγέθους. Για παράδειγμα η ακτίνα είναι $\sim 10^3$ m, ενώ η πυκνότητα ενέργειας $\sim 10^{18}$ kg m⁻³. Όπως είναι σύνηθες σε αριθμητικές πράξεις θα χρησιμοποιήσουμε κατάλληλες σταθερές, ώστε να μεταφέρουμε το πρόβλημα σε αδιάστατες ποσότητες. Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε τις αδιάστατες

μεταβλητές x , m , p , ϵ που σχετίζονται με τα φυσικά μεγέθη μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} r &= R_0 x \\ M &= M_0 m \\ P &= P_0 p \\ \rho &= \rho_0 \epsilon, \end{aligned}$$

όπου R_0 , M_0 , P_0 , ρ_0 είναι σταθερές κατάλληλων μονάδων. Οι σταθερές θα οριστούν ώστε να είναι φυσικές για το πρόβλημα, δηλαδή τα αδιάστατα μεγέθη να βρίσκονται στην ίδια τάξη μεγέθους. Για να τις προσδιορίσουμε θα αντικαταστήσουμε τις σχέσεις των αδιάστατων μεγεθών στην εξίσωση TOV. Πρώτα πρέπει να επαναφέρουμε τις σταθερές c , G στο σύστημα (2.9) ώστε να είναι σε μονάδες SI ¹. Στο σύστημα αυτό η μάζα μετριέται σε μονάδες μήκους, η πυκνότητα ενέργειας και η πίεση έχουν ίδιες μονάδες μήκους⁻². Η επιστροφή στο SI γίνεται πολλαπλασιάζοντας το κάθε μέγεθος με έναν παράγοντα που δημιουργείται από τα c , G , με κατάλληλο τρόπο ώστε να έχει τις απαιτούμενες μονάδες. Για την μάζα έχουμε $M(m) \rightarrow \frac{GM(kg)}{c^2}$, ενώ για την πίεση και πυκνότητα ενέργειας $P(\rho)(m^{-2}) \rightarrow \frac{GP(\rho)}{c^4}$. Η επιστροφή στις μονάδες SI μαζί την αντικατάσταση των σχέσεων για τα αδιάστατα μεγέθη στην εξίσωση για την μάζα μας δίνει

$$\begin{aligned} \frac{G M_0}{c^2 R_0} \frac{dm(x)}{dx} &= 4\pi \frac{\rho_0 G}{c^4} \epsilon R_0^2 x^2 \\ \frac{dm(x)}{dx} &= \left(\frac{4\pi \rho_0 R_0^3}{M_0 c^2} \right) x^2 \epsilon(x). \end{aligned}$$

Αντίστοιχα η εξίσωση της πίεσης μετατρέπεται στην ακόλουθη

$$\begin{aligned} \frac{G P_0}{c^4 R_0} \frac{dp}{dx} &= - \left(\frac{G^2 \rho_0 M_0}{c^6 R_0^2} \right) \frac{\epsilon m}{x^2} \left(1 + \frac{P_0 p}{\rho_0 \epsilon} \right) \left(1 + \frac{4\pi R_0^3 P_0 G c^2 x^3 p}{c^4 G M_0 m} \right) \left(1 - \frac{2GM_0 m}{c^2 R_0 x} \right)^{-1} \\ \frac{dp(x)}{dx} &= - \left(\frac{G \rho_0 M_0}{c^2 P_0 R_0} \right) \frac{\left(\epsilon + \frac{P_0}{\rho_0} p \right) \left(m + \frac{4\pi R_0^3 P_0}{M_0 c^2} x^3 p \right)}{x^2 \left(1 - \frac{2GM_0 m}{c^2 R_0 x} \right)}. \end{aligned}$$

Η καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου Fermi (2.11), (2.12) μας προσφέρει ήδη μία φυσική επιλογή για την σταθερά με μονάδες ενέργειας ανά όγκο. Επιλέγουμε $\rho_0 = P_0 = \frac{(m_n c^2)^4}{24\pi^2 (\hbar c)^3}$ και έχουμε την ελευθερία δύο ακόμα εξισώσεων που θα προσδιορίζουν

¹ Θυμίζουμε ότι οι σχέσεις είναι σε γεωμετρικές μονάδες $c = G = 1$

τα M_0 , R_0 . Θέτοντας $P_0 = \rho_0$ ξαναγράφουμε το σύστημα ως

$$\begin{aligned}\frac{dm(x)}{dx} &= \left(\frac{4\pi P_0 R_0^3}{M_0 c^2} \right) x^2 \epsilon(x) \\ \frac{dp(x)}{dx} &= - \left(\frac{GM_0}{R_0 c^2} \right) \frac{(\epsilon + p) \left(m + \frac{4\pi R_0^3 P_0}{M_0 c^2} x^3 p \right)}{x^2 \left(1 - \frac{2GM_0 m}{R_0 c^2 x} \right)},\end{aligned}$$

εμφανίζεται έτσι μια βολική επιλογή για τις παραπάνω σχέσεις,

$$\frac{2GM_0}{R_0 c^2} = 1 = \frac{4\pi R_0^3 P_0}{M_0 c^2}.$$

Τελικώς το σύστημα εξισώσεων για τα αδιάστατα μεγέθη είναι

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dx} &= x^2 \epsilon(x) \\ \frac{dp}{dx} &= \frac{1}{2} \frac{(\epsilon + p) (m + x^3 p)}{x(x - m)} \\ \epsilon &= \epsilon(p),\end{aligned}\tag{3.1}$$

παρότι φαίνεται πολύ απλοποιημένη μορφή δεν έχει γίνει καμία προσέγγιση. Έχουμε διαλέξει απλώς να μετράμε μάζα, απόσταση και ενέργεια σε μονάδες κατάλληλες για το πρόβλημα.

Συνοψίζουμε αλγοριθμικά την μεθοδολογία επίλυσης:

1. Δίνουμε μία αρχική τιμή κεντρική πυκνότητας ενέργειας ϵ_c και θέτουμε μικρό $r_0 = 10^{-11}$.
2. Από την καταστατική προσδιορίζουμε την $p(r_0)$ και από την σχέση που δώσαμε το $m(r_0)$.
3. Ένα βήμα της RK45 μας δίνει την πίεση και την μάζα στο $r_0 + h$.
4. Από την καταστατική προσδιορίζουμε την ενέργεια στο $r_0 + h$.
5. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 3, 4 έως ότου ικανοποιηθεί η σχέση $p(r) \leq 0$ ².
6. Το r_{term} στο οποίο σταμάτησε η ολοκλήρωση είναι η ακτίνα $R = r_{term}$ και $M(R)$ είναι η μάζα του αστεριού.

Για να λάβουμε την καμπύλη $M(R)$ πρέπει να φτιάξουμε πολλά αστέρια διαφορετικών κεντρικών πυκνοτήτων. Εφαρμόζουμε επομένως τον παραπάνω αλγόριθμο για διαφορετικές τιμές ϵ_c , αποθηκεύοντας κάθε φορά την μάζα και την ακτίνα.

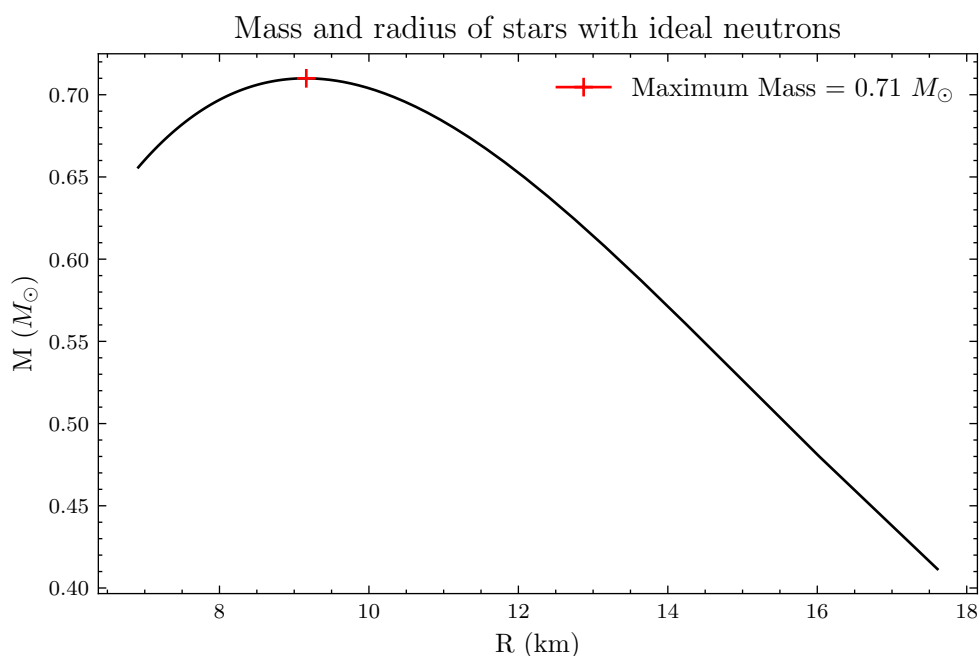
² Λόγω αριθμητικών σφαλμάτων η σχέση που χρησιμοποιούμε είναι $(p(r) - 1.0e-12) \leq 0$

3.2 Πυρηνικές καταστατικές εξισώσεις

Ακολουθώντας την μεθοδολογία που περιγράψαμε θα αναπαράξουμε τα αποτελέσματα των Oppenheimer, Volkoff και των δύο καταστατικών εξισώσεων που έχουμε μελετήσει. Μπορούμε έτσι να ελέγξουμε ότι ο κώδικας λειτουργεί σωστά και ότι έχουμε 2 καταστατικές που περιγράφουν τα πειραματικά δεδομένα. Το βήμα αυτό είναι σημαντικό καθώς για την υπόλοιπη ανάλυση θα βασιστούμε στις καταστατικές αυτές.

3.2.1 Ιδανικό αέριο Fermi

Η καταστατική που χρησιμοποίησαν οι OV ήταν αυτή του ιδανικού αερίου Fermi. Είχαν υπολογίσει ότι η μέγιστη μάζα είναι $0.71 M_{\odot}$ με ακτίνα 9.5 km και αντιστοιχεί σε κεντρική αριθμητική πυκνότητα $2.2 \times 10^{39} \text{ cm}^{-3}$ ($\rho_c = 3.7 * 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$).

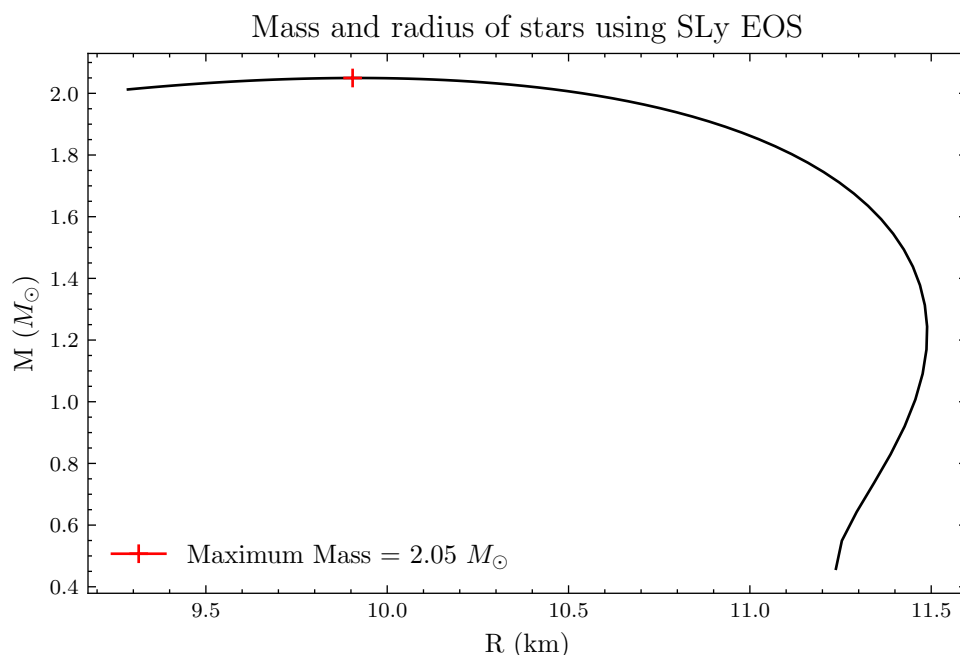


Σχήμα 3.1: Καμπύλη μάζας ακτίνας για καταστατική ιδανικού αερίου νετρονίων. Το κόκκινο σημείο συμβολίζει το όριο TOV

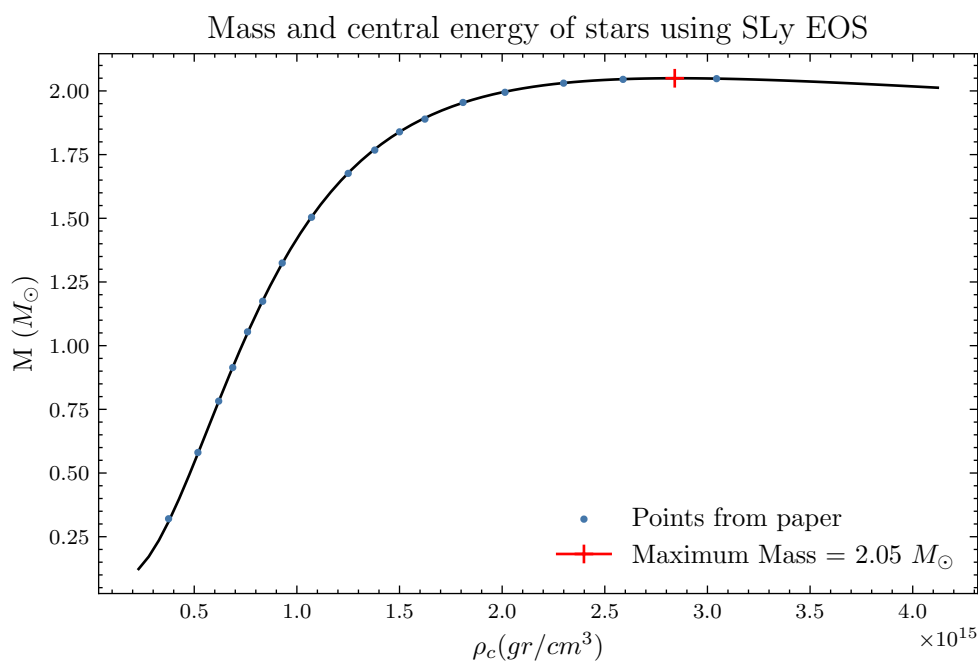
Το διάγραμμα 3.1 απεικονίζει τα αποτελέσματά μας για την καταστατική που χρησιμοποίησαν οι OV. Παρατηρούμε ότι βρίσκουμε την ίδια μάζα και ακτίνα για το αστέρι που βρίσκεται στο όριο μέγιστης μάζας. Αυτή είναι μία πρώτη επιβεβαίωση του ότι η ολοκληρωτική διαδικασία που επιλέξαμε λειτουργεί σωστά και παράγει αποτελέσματα που μπορούμε να εμπιστευτούμε. Είναι εμφανές από το διάγραμμα ότι, όπως έχουμε αναφέρει, η καταστατική αυτή δεν μπορεί να εξηγήσει τις παρατηρήσεις. Για να επιτευχθούν μεγαλύτερες μάζες πρέπει η καταστατική να γίνει πιο άκαμπτη, η ανάλυση της ενότητας 2.5.2 δείχνει ότι η προσθήκη ισχυρών αλληλεπιδράσεων προσφέρει μεγαλύτερο Γ κυρίως στον πυρήνα.

Καταστατική Douchin, Haensel. Η καταστατική που δίνεται σε μορφή πίνακα στην δημοσίευση [13] είναι ικανή να περιγράψει το αστέρι στις περιοχές του εσωτερικού φλοιού και του πυρήνα. Για πυκνότητες μικρότερες από το neutron drip, δηλαδή για τον εξωτερικό φλοιό, ακολουθούμε την [19]. Χρειάζεται να υπολογίσουμε την καταστατική ως συνάρτηση, για να γνωρίζουμε την συμπεριφορά της και ενδιάμεσα στις τιμές του πίνακα που μας δίνεται. Αυτό το επιτυγχάνουμε με μεθόδους interpolation, συγκεκριμένα για αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιούμε κυβικές spline. Από τα αποτελέσματα της δημοσίευσης ξέρουμε ότι το όριο TOV είναι $2.05 M_{\odot}$ και το αντίστοιχο αστέρι έχει ακτίνα 9.9 km. Το διάγραμμα 3.2 δείχνει ολόκληρη την οικογένεια αστεριών με διαφορετικές κεντρικές πυκνότητες ρ_c . Η καταστατική αυτή παράγει εμφανώς πιο βαριά αστέρια και συνολικά πιο συμπαγή, μεγαλύτερο λόγο $\frac{M}{R}$.

Ας την συγκρίνουμε και με κάποιες πειραματικές μετρήσεις ώστε να δούμε κατά πόσο αποτελεί μία καλή βάση για τους υπόλοιπους υπολογισμούς μας. Από τις πειραματικές μετρήσεις μπορεί να περιγράψει, στα όρια του σφάλματος, το αστέρι ακτίνας 13 km και μάζας $1.4 M_{\odot}$ [18]. Είναι επίσης ικανή να δημιουργήσει αστέρια με μάζα περίπου 2 μάζες ήλιου, δεν αρκεί όμως για αστέρια μάζας $2.3 M_{\odot}$. Θυμίζουμε ότι η καταστατική αυτή είναι από τις ‘απλούστερες’ δυνατές, συμπεριλαμβάνει μόνο το φαινομενολογικό μοντέλο $2n$ αλληλεπιδράσεων και έναν πληθυσμό n_{pne} στο πυρήνα. Η έλλειψη εξωτικών καταστάσεων της ύλης και το γεγονός ότι βρίσκεται κοντά στα πειραματικά δεδομένα την καθιστούν μία καλή βάση για πειραματιστούμε με διάφορα μοντέλα DM. Ως επαλήθευση του κώδικα μας παραθέτουμε το διάγραμμα 3.3 που απεικονίζει την εξάρτηση της μάζας από την αρχική κεντρική πυκνότητα. Στο διάγραμμα αυτό συμπεριλαμβάνουμε σημεία από την αντίστοιχη καμπύλη της δημοσίευσης, έχουμε πολύ καλή συμφωνία με τα αποτελέσματά μας.



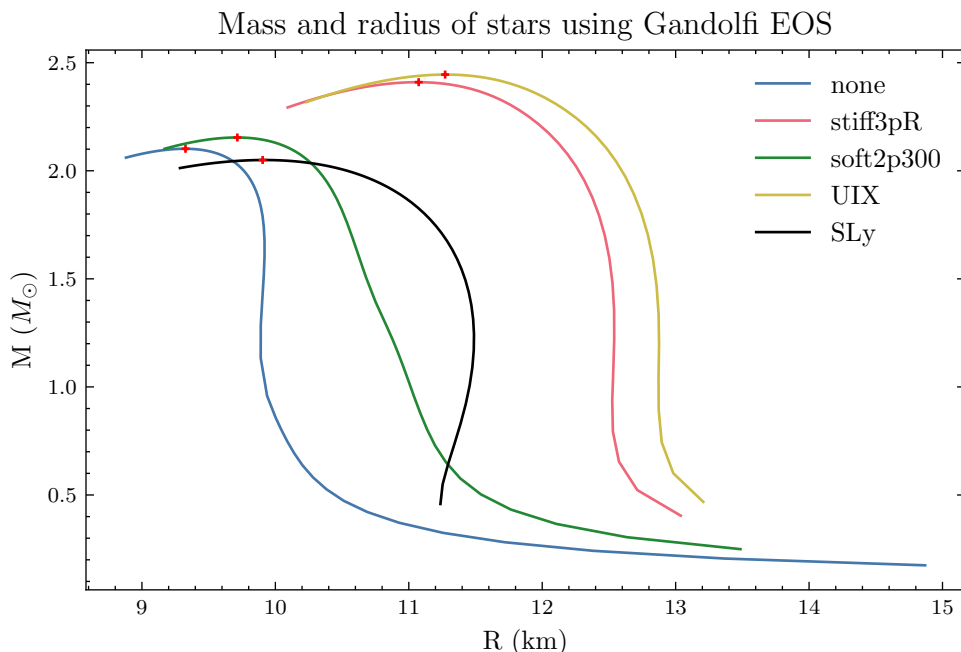
Σχήμα 3.2: Καμπύλη μάζας ακτίνας για καταστατική την καταστατική Douchin, Haensel. Το κόκκινο σημείο συμβολίζει το όριο TOV.



Σχήμα 3.3: Καμπύλη εξάρτησης της μάζας από την κεντρική πυκνότητα για καταστατική Douchin, Haensel. Τα μπλε σημεία είναι από το paper [13]. Το κόκκινο σημείο συμβολίζει το όριο TOV.

Καταστατική Gandolfi et al.. Αυτή είναι μία λίγο πιο σύνθετη καταστατική όσον αναφορά το κομμάτι των αλληλεπιδράσεων μεταξύ νετρονίων. Έχουν μελετήσει και την αλληλεπίδραση μεταξύ τριών νετρονίων, δεν συμπεριλαμβάνεται όμως κανένα άλλο σωματίδιο εντός του πυρήνα. Αντί για την καταστατική σε πίνακα, μας δίνου-

νται εξισώσεις που αποτελούν καλό fit στα αποτελέσματα των προσομοιώσεων Monte Carlo. Ανακεφαλαιώνοντας τα στοιχεία αυτής της καταστατικής οι σχέσεις (2.16), (2.17) περιγράφουν μόνο τον πυρήνα. Πάνω από την πυκνότητα ρ_{crit} όπου η ταχύτητα του ήχου ξεπερνάει το c χρησιμοποιούμε την καταστατική που εγγυάται $c_s \leq c$. Στην πραγματικότητα η απαίτηση αυτή είναι αναγκαία συνθήκη για να σεβόμαστε το αιτιατό αλλά όχι ικανή, όπως περιγράφεται από τον Olson T. [20]. Ενώ για την περιγραφή του φλοιού χρησιμοποιούμε την καταστατική των Baym et al. [15].



Σχήμα 3.4: Καμπύλη μάζας ακτίνας για καταστατική την καταστατική Gandolfi et al.. Κάθε χρωματιστή καμπύλη αντιστοιχεί σε διαφορετική περίπτωση $3n$ αλληλεπίδρασης, όπως αυτές παρουσιάζονται στον πίνακα 2.1. Η μαύρη καμπύλη αντιστοιχεί στην SLy που παρουσιάσαμε παραπάνω. Τα κόκκινα σημεία συμβολίζουν το όριο TOV κάθε περίπτωσης.

Στο διάγραμμα 3.4 ως stiff3pR θεωρούμε την αλληλεπίδραση $V_{3\pi} + V_R$ που βρίσκεται στην 6η γραμμή του πίνακα 2.1. Η soft2p300 είναι η καταστατική με παραμέτρους την 3η γραμμή του πίνακα. Οι τιμές του πίνακα που δεν έχουμε τοποθετήσει στο διάγραμμα καλύπτουν τον χώρο ανάμεσα στις καμπύλες που παρουσιάζουμε. Η προσθήκη $3n$ αλληλεπίδρασης επιτρέπει βαρύτερους αστέρες, αυτό το καταλαβαίνουμε παρατηρώντας ότι τα μικρότερα όρια TOV δίνονται από την SLy και την Gandolfi χωρίς $3n$. Το μεγαλύτερο όριο μάζας είναι για την UIX όπου το αστέρι έχει μάζα $2.45 M_{\odot}$ και ακτίνα 11 km. Επομένως χρησιμοποιώντας την καταστατική Gandolfi et al. μπορούμε να περιγράψουμε και την παρατήρηση αστεριού με μάζα $2.3 M_{\odot}$. Παρατηρούμε επίσης ότι αναλόγως την επιλογή αλληλεπίδρασης $3n$ παράγουμε ή πιο συμπαγή αστέρια ή πιο βαριά. Η παρατήρηση αυτή είναι σημαντική και αποτελεί μία γενικότερη αναμενόμενη συμπεριφορά. Η ύπαρξη απωστικής δύναμης προσφέρει μεγαλύτερη πίεση που έχει ως αποτέλεσμα την δυνατότητα υποστήριξης μεγαλύτερης μάζας. Παράλληλα η μεγαλύτε-

ρη πίεση αυξάνει και την ακτίνα των αστέρων. Αντιθέτως οι ελκτικές δυνάμεις οδηγούν σε πιο συμπαγή αστέρια τα οποία δεν μπορούν να υποστηρίξουν μεγάλες μάζες, λόγω της έλλειψης πίεσης.

Κλείνοντας την παράγραφο αυτήν θα τονίσουμε τα βασικά σημεία της. Αρχικά αναπαράγοντας τα αποτελέσματα των τριών δημοσιεύσεων ελέγξαμε ότι ο κώδικας λειτουργεί όπως περιμέναμε. Δεύτερον μελετήσαμε την μορφή των αποτελεσμάτων που αναμένουμε, ώστε να υπάρχει ένα μέτρο σύγκρισης με τις τροποποιημένες καταστατικές των επόμενων ενοτήτων. Και τέλος είδαμε ότι οι 2 καταστατικές που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ικανές για να μοντελοποιήσουν τα χαρακτηριστικά των αστέρων νετρονίων που παρατηρούμε. Στα επόμενα κεφάλαια οι καταστατικές αυτές θα χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή της κανονικής ύλης.

3.3 Διάσπαση του νετρονίου σε σκοτεινή ύλη

Η μέτρηση της ημιζωής του νετρονίου έχει γίνει από πληθώρα πειραμάτων. Υπάρχουν δύο κύριοι τρόποι μέτρησης, η μέτρηση νετρονίων σε μπουκάλι (bottle measurements) και η μέτρηση δεσμών νετρονίων (beam measurements). Η πρώτη μέθοδος αφορά πολύ ψυχρά νετρόνια που έχουν παγιδευτεί μέσω κάποιου δυναμικού, για παράδειγμα περιορίζονται βαρυτικά ή μαγνητικά. Από την μέτρηση του αριθμού νετρονίων σε διάφορες χρονικές στιγμές, μπορεί να προσδιοριστεί ο χρόνος ημιζωής τ_n . Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός νετρονίων ακολουθεί την εκθετική διάσπαση $N(t) = N(0)e^{(-t/\tau_n)}$, επομένως μέσω fit λαμβάνουμε τον χρόνο ημιζωής. Η μέθοδος αυτή εξαρτάται μόνο από τον αριθμό διασπόμενων νετρονίων και επομένως συμπεριλαμβάνει οποιοδήποτε κανάλι διάσπασης. Η τιμή του χρόνου ημιζωής από τέτοια πειράματα είναι $\tau_{bottle} = 879.6 \pm 0.6 \text{ s}$. Τα πειράματα δεσμών ήταν ιστορικά από τα πρώτα που έγιναν, σε αυτά υπολογίζεται ο αριθμός νετρονίων σε έναν όγκο της δέσμης. Τα νετρόνια της δέσμης διασπώνται και μέσω της μέτρησης των παραγόμενων πρωτονίων και ηλεκτρονίων μπορεί να υπολογιστεί ο χρόνος ημιζωής. Ένας μέσος όρος των πειραμάτων δέσμης δίνει $\tau_{beam} = 888.0 \pm 2.0 \text{ s}$, υπάρχει μία 4σ διαφορά μεταξύ των τιμών από τους δύο διαφορετικούς τρόπους μέτρησης. Τα πειράματα δεσμών περιλαμβάνουν μόνο τα κανάλια διάσπασης που έχουν ως προϊόν ένα πρωτόνιο. Η πρόβλεψη του SM είναι πως η διάσπαση γίνεται μέσω των ασθενών αλληλεπιδράσεων (β -διάσπαση) και έχει την μορφή

$$n \rightarrow p + \text{anything.}$$

Επομένως σύμφωνα με το SM οι δύο τιμές δεν θα έπρεπε να διαφέρουν διότι, το μοναδικό κανάλι διάσπασης περιέχει το πρωτόνιο σαν προϊόν. Η διαφορά των δύο τιμών μπορεί να οφείλεται σε κάποια συστηματικά σφάλματα των μετρήσεων ή μπορεί να υπάρχει κάποια βαθύτερη αιτία που να φανερώνει την ύπαρξη φυσικής εκτός του SM.

Στην βιβλιογραφία [21, 22] εμφανίζεται μία πιο πλήρης ανάλυση αυτού του προβλήματος.

Οι Fornal και Grinstein [23] πρότειναν μία λύση στο πρόβλημα του χρόνου ημιζωής, υποθέτοντας πως το νετρόνιο έχει σπάνια κανάλια διάσπασης στον σκοτεινό τομέα. Τέτοιες διασπάσεις έχουν τις ακόλουθες μορφές

$$n \rightarrow \chi + \gamma, \quad n \rightarrow \chi + \phi, \quad n \rightarrow \chi + e^- + e^+, \quad (3.2)$$

όπου χ είναι ένα φερμιόνιο σκοτεινής ύλης, ϕ βαθμωτό πεδίο σκοτεινής ύλης και γ το φωτόνιο. Υπολόγισαν ότι για να εξηγηθεί η διαφορά μεταξύ των πειραμάτων πρέπει το πλάτος διάσπασης των παραπάνω αντιδράσεων να είναι της τάξης του 10^{-5} s^{-1} . Ο χαρακτηριστικός χρόνος των διασπάσεων παρότι μεγάλος (10^5 s), είναι πολύ μικρός συγκριτικά με την ηλικία των αστερών νετρονίων. Άρα στους αστέρες ο πληθυσμός σκοτεινής ύλης χ θα βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία με την κανονική ύλη του αστεριού. Όπως ήταν φυσικό μελετήθηκε η επίδραση αυτού του πληθυσμού στα χαρακτηριστικά του αστεριού.

Κάποιες από τις δημοσιεύσεις πάνω στο αντικείμενο είναι των Baym et al. [8] που υποθέτουν ότι η σκοτεινή ύλη δεν έχει αυτο-αλληλεπιδράσεις, η δημοσίευση των Cline, Cornell [9] όπου τα χ είναι φορτισμένα κάτω από μία σπασμένη $U(1)$ και η δημοσίευση των Grinstein, Kouvaris, Nielsen [24] που αφορά επιπλέον απωστικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ του σκοτεινού τομέα και της ύλης. Στην ενότητα αυτήν θα αναλύσουμε την αντιμετώπιση τέτοιων συστημάτων και χρησιμοποιώντας τις καταστατικές της παραπάνω ενότητας, θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα παρόμοια με των δημοσιεύσεων [8, 9].

3.3.1 Ιδανικό αέριο σκοτεινής ύλης

Θα ξεκινήσουμε από την πιο απλή περίπτωση όπου μέσω των διασπάσεων (3.2) ένα μέρος του πληθυσμού νετρονίων μετατρέπεται σε χ . Τα χ θα συγκρατηθούν εντός του αστεριού δημιουργώντας ένα ιδανικό αέριο Fermi, σαν αυτό που μελετήσαμε στην ενότητα 2.4.2. Θα δούμε ότι η μετατροπή των νετρονίων σε χ είναι ενεργειακά προτιμητέα καθώς, εν γένει οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των νετρονίων είναι απωστικές. Για να υπολογίσουμε την σχετική πυκνότητα των πληθυσμών νετρονίων και σκοτεινών φερμιονίων κάνουμε χρήση της θερμοδυναμική ισορροπίας. Οι αντιδράσεις (3.2) μας δίνουν

$$\mu_n = \mu_\chi$$

με την υπόθεση πως $\mu_\gamma = 0$, όπου Y τα διάφορα προϊόντα. Η υπόθεση αυτή είναι λογική στην περίπτωση του φωτονίου ($Y = \gamma$) και του ζεύγους ηλεκτρονίου ποζιτρονίου ($Y = e^-e^+$), ενώ ισχύει και για την περίπτωση $Y = \phi$ όταν το μποζόνιο ϕ δεν μεταφέρει διατηρούμενο φορτίο. Η ύπαρξη διατηρούμενου φορτίου συσχετίζεται με το

χημικό δυναμικό και επομένως δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την συνθήκη $\mu_\phi = 0$. Στην περίπτωση της σκοτεινής ύλης το χημικό δυναμικό είναι η ενέργεια Fermi

$$\mu_\chi = E_{f,\chi} = \sqrt{m_\chi^2 + p_{f,\chi}^2}.$$

Ο προσδιορισμός του χημικού δυναμικού μας δίνει την ορμή Fermi, η οποία είναι και η μόνη μεταβλητή των εξισώσεων για την ενέργεια (2.11) και την πίεση (2.12) ιδανικού αερίου. Το χημικό δυναμικό για τις πυρηνικές καταστατικές μπορεί να προσδιοριστεί από την ενέργεια Gibbs. Για $T = 0$ K η ενέργεια Gibbs δίνεται από την εξίσωση

$$g = \frac{\rho + P}{n},$$

ενώ αποδεικνύεται από την θερμοδυναμική ότι

$$g = \sum_i \mu_i \frac{n_i}{n_{total}},$$

όπου το άθροισμα είναι πάνω σε όλα τα είδη σωματιδίων. Η μεγαλύτερη συνεισφορά στις καταστατικές εξισώσεις της ύλης είναι από τα n , όπως δείξαμε στην ισορροπία των ασθενών αλληλεπιδράσεων, άρα $i = n$ φτάνουμε έτσι στην σχέση

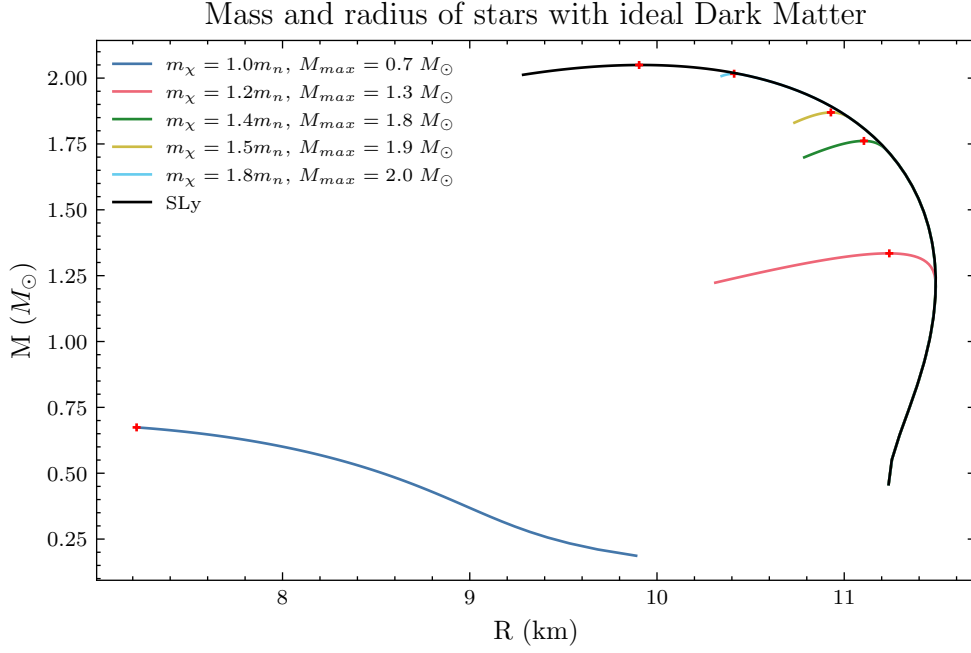
$$\mu_n = \frac{\rho + P}{n_n}. \quad (3.3)$$

Οι σχέσεις για τα χημικά δυναμικά μας δίνουν ότι χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε την καταστατική που περιγράφει το σύστημα. Από την καταστατική SLy [13] μπορούμε να υπολογίσουμε το χημικό δυναμικό των νετρονίων μέσω της (3.3). Απαιτώντας την συνθήκη χημικής ισορροπίας n - χ βρίσκουμε την ορμή Fermi και κατ' επέκταση την ενέργεια και ορμή της θάλασσας χ . Η ολική καταστατική προσδιορίζεται από τις σχέσεις

$$E_{tot} = E_{n,SLy} + E_\chi$$

$$P_{tot} = P_{n,SLy} + P_\chi,$$

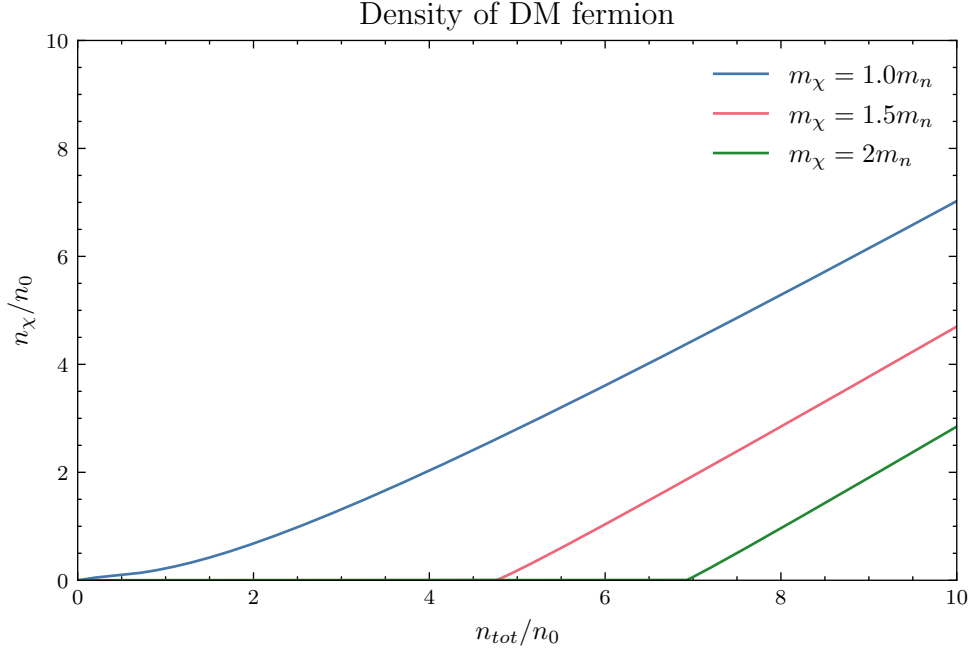
E_χ , P_χ είναι η ενέργεια και ορμή που δίνεται στις σχέσεις (2.11, 2.12) όπου στο ρ_0 εμφανίζεται η μάζα m_χ . Το συγκεκριμένο μοντέλο DM έχει ελεύθερη παράμετρο την μάζα των σωματιδίων χ , με χρήση της μεθοδολογίας που έχουμε περιγράψει θα μελετήσουμε πως οι διαφορετικές τιμές m_χ επηρεάζουν το αστέρι.



Σχήμα 3.5: Καμπύλη μάζας ακτίνας για διαφορετικές τιμές της μάζας του DM fermion. Η καμπύλη SLy είναι η καταστατική χωρίς DM. Τα κόκκινα σημεία συμβολίζουν τα όρια TOV

Παρατηρούμε ότι η ύπαρξη της θάλασσας από χ μειώνει την μέγιστη μάζα του αστεριού. Η μείωση αυτή έχει ισχυρή εξάρτηση από την μάζα των σκοτεινών φερμιονίων. Τα σωματίδια χ θα αρχίσουν να παράγονται μόνο όταν ικανοποιείται η συνθήκη $\mu_n \geq m_\chi$. Επομένως όταν η μάζα του χ είναι περίπου διπλάσια από την μάζα του νετρονίου το χημικό δυναμικό της ύλης δεν είναι αρκετά μεγάλο ώστε να ικανοποιήσει αυτήν την συνθήκη. Ως αποτέλεσμα η διάσπαση του νετρονίου σε χ δεν προτιμάτε ενεργειακά. Αντιθέτως όταν η μάζα είναι περίπου ίση με την μάζα του νετρονίου ένας μεγάλος αριθμός νετρονίων μετατρέπεται σε χ . Ως ιδανικά φερμιόνια τα χ ασκούν πολύ μικρότερη πίεση από ότι η ύλη με τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις, για αυτό και η αύξηση του πληθυσμού τους καθιστά την καταστατική πιο soft και υποστηρίζονται μικρότερες μάζες αστέρων. Η συμπεριφορά που περιγράψαμε απεικονίζεται στις δύο ακραίες καμπύλες του διαγράμματος 3.5.

Η καμπύλη για $m_\chi = m_n$ μοιάζει με την αντίστοιχη καμπύλη που λαμβάνουμε όταν υποθέτουμε αέριο νετρονίων, η κύρια πίεση έρχεται επομένως από το ιδανικό αέριο χ . Η περίπτωση $m_\chi = 1.8m_n$ συμπεριφέρεται σαν την καταστατική χωρίς DM, άρα η πίεση προέρχεται κυρίως από την ύλη. Το διάγραμμα 3.6 ποσοτικοποιεί το ποσοστό σκοτεινής ύλης που παράγεται σε κάθε περίπτωση και επιβεβαιώνει την παραπάνω ανάλυση. Για $m_\chi = m_n$ σε πυκνότητες 1.5 fm^{-3} η σκοτεινή ύλη αποτελεί το 70% της συνολικής πυκνότητας, αντιθέτως για $m_\chi = 2m_n$ είναι μόλις το 30%.



Σχήμα 3.6: Αριθμητική πυκνότητα σκοτεινής ύλης ως συνάρτηση της συνολικής πυκνότητας $n_n + n_\chi$, για τρεις περιπτώσεις μάζας φερμιονίου DM.

Τα αποτελέσματα του διαγράμματος 3.5 μας προσφέρουν δύο πληροφορίες. Αρχικά μάθαμε πως οι αστέρες νετρονίων είναι ευαίσθητοι σε σωματίδια σκοτεινής ύλης που έχουν σύζευξη με τα νετρόνια, όταν τα σωματίδια DM έχουν μάζα μέχρι 2 GeV . Μπορούν επομένως να χρησιμοποιηθούν για την μελέτη αλληλεπιδράσεων n - χ που δεν διατηρούν τον βαρυονικό αριθμό. Η ανάλυση αυτή δεν περιορίζεται στο μοντέλο που προβλέπει τις αντιδράσεις (3.2), μπορεί για παράδειγμα να χρησιμοποιηθεί σε κάποιο μοντέλο πανδημίας, όπου έχουμε $n\chi \rightarrow \chi\chi$. Αρκεί η συχνότητα των αντιδράσεων να επιτρέπει την θερμοδυναμική ισορροπία των πληθυσμών μέσα στο αστέρι. Για DM με μάζα ίση ή μικρότερη από του νετρονίου η καταστατική δεν μπορεί να προβλέψει τα παρατηρούμενα αστέρια, αφού είδαμε ότι τείνει προς αυτήν των O-V. Το μοντέλο που εξετάζουμε έχει σκοπό να εξηγήσει την διάσπαση του νετρονίου, άρα υπάρχει η απαίτηση $m_\chi < m_n$. Η δεύτερη πληροφορία επομένως είναι ότι αν θέλουμε να κρατήσουμε το παραπάνω μοντέλο ο σκοτεινός τομέας πρέπει να είναι πιο περίπλοκος, μπορεί παραδείγματος χάρη να περιέχει ισχυρές απωστικές δυνάμεις μεταξύ των χ . Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στην επόμενη ενότητα, όπου εξετάζουμε την ύπαρξη απωστικών αλληλεπιδράσεων στον σκοτεινό τομέα.

3.3.2 Σκοτεινή ύλη με απωστικές αυτο-αλληλεπιδράσεις

Οι Cline και Cornell [9] ακολούθησαν ένα διαφορετικό μοντέλο για να εξηγήσουν την διάσπαση του νετρονίου. Το μοντέλο αυτό περιέχει παραπάνω αλληλεπιδράσεις στον σκοτεινό τομέα και έτσι δεν μπορεί να αποκλειστεί με την παραπάνω ανάλυση.

Προσπαθώντας να αποφύγουν τους περιορισμούς από διάφορα πειράματα και αστέρες νετρονίων υποθέτουν την διάσπαση

$$n \rightarrow \chi + A',$$

όπου A' είναι ένα σκοτεινό φωτόνιο.

Θα περιγράψουμε επιγραμματικά τα στοιχεία του μοντέλου χωρίς να μπούμε στους ακριβείς υπολογισμούς που παρουσιάζονται στην δημοσίευση. Το χ έχει φορτίο κάτω από μία $U'(1)$, το A' είναι το μποζόνιο βαθμίδας της αβελιανής ομάδας. Υπάρχει μία μίξη των κινητικών όρων της $U'(1)$ και της $U(1)$ του ηλεκτρομαγνητισμού, που αναγκάζει το σκοτεινό φωτόνιο να διασπαστεί σε φωτόνιο ή και ηλεκτρόνια. Το φερμιόνιο χ κάνει σύζευξη με την δεξιόστροφη συνιστώσα του νετρονίου, η σύζευξη αυτή εμφανίζεται στην λαγκραντζιανή ως $-\delta m \bar{n}_{R\chi L} + h.c.$. Για να λάβουμε τις ιδιοκαταστάσεις μάζας πρέπει να διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα μαζών $n-\chi$, απαιτείται επομένως μία στροφή στον χώρο των $(n_{R(L)}, \chi_{R(L)})$ κατά γωνίες $\theta_{R(L)}$. Στο όριο όπου η m_χ είναι κοντά στην μάζα του νετρονίου οι δύο γωνίες είναι κοινές και η αλλαγή βάσης οδηγεί σε ένα μη-διαγώνιο κομμάτι στον κινητικό όρο $\bar{\chi} i \not{D}_{A'} \chi$. Ο μη-διαγώνιος όρος είναι της μορφής $L_{int} = -g' \theta \bar{n} A' \chi + h.c.$ επομένως είναι αυτός που περιγράφει την διάσπαση του νετρονίου σε $\chi A'$. Η υπόθεση που κάνουν είναι πως η $U'(1)$ σπάει δίνοντας μάζα $m_{A'}$ στον διαδότη. Ως γνωστόν αλληλεπιδράσεις που προέρχονται από μία $U(1)$ θυμίζουν τον ηλεκτρομαγνητισμό και περιγράφονται από ένα δυναμικό τύπου Coulomb. Η θραύση της συμμετρίας δίνει μάζα στο φωτόνιο και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των χ δεν έχουν πια άπειρη εμβέλεια. Τέτοιες δυνάμεις περιγράφονται από ένα δυναμικό Yukawa της μορφής

$$V_Y(r) = \pm \frac{g'^2}{4\pi} \frac{e^{-m_{A'} r}}{r}, \quad (3.4)$$

το πρόσημο συμβολίζει τον τύπο δύναμης, απωστική για (+) και ελκτική για (-). Το χαρακτηριστικό εύρος της αλληλεπίδρασης δίνεται από την μάζα που αποκτά ο διαδότης και είναι $m_{A'}^{-1}$.

Το πρόβλημα που πρέπει να λύσουμε είναι η εύρεση της καταστατικής δεδομένου ενός δυναμικού της μορφής (3.4). Παρά την απλή μορφή του δυναμικού απαιτούνται περαιτέρω προσεγγίσεις για να λύσουμε το σύστημα πολλών σωμάτων. Πολύ γνωστές προσεγγίσεις που συμπεριλαμβάνουν χβαντομηχανικά φαινόμενα είναι η μέθοδος Hartree και η μέθοδος Hartree-Fock. Θα διαλέξουμε την προσέγγιση μέσου πεδίου που είναι μία κλασική μέθοδος επίλυσης, τα αποτελέσματα της οποίας είναι αρκετά ικανοποιητικά για την μελέτη μας. Ο προσδιορισμός της ολικής ενέργειας του συστήματος γίνεται αθροίζοντας πάνω στις αλληλεπιδράσεις όλων των ζευγών σωματιδίων. Έστω

r_{ij} η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων i και j , τότε η ολική ενέργεια είναι

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}$$

με

$$V_{ij} = \pm \frac{g'^2}{4\pi} \frac{e^{-m_{A'} r_{ij}}}{r_{ij}}.$$

Ο παράγοντας $\frac{1}{2}$ υπάρχει ώστε να μην μετράμε δύο φορές το ίδιο ζεύγος (συμμετρία κάτω από $i \leftrightarrow j$). Για να συνεχίσουμε τον υπολογισμό κάνουμε χρήση της λογικής πίσω από την προσέγγιση μέσου πεδίου. Η προσέγγιση αυτή μας λέει ότι μπορούμε να αλλάξουμε όλες τις αλληλεπιδράσεις που δέχεται κάθε ένα σώμα με μία ενεργό αλληλεπίδραση, μετατρέπουμε έτσι το πρόβλημα από πολλών σωμάτων σε ενός σώματος. Υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός των σωματιδίων είναι αρκετά μεγάλος ώστε να μπορούμε να αλλάξουμε τα αθροίσματα σε ολοκληρώματα. Αν αγνοήσουμε τυχών συσχετισμούς που προκύπτουν από τις αλληλεπιδράσεις, μακροσκοπικά τα σωματίδια θα είναι ομοιόμορφα κατανομημένα. Ο αριθμός σωματιδίων σε έναν όγκο \mathcal{V} είναι $n\mathcal{V}$ επομένως, το άθροισμα πάνω στα σωματίδια γίνεται ολοκλήρωμα του $nd\mathcal{V}$ στον όγκο \mathcal{V} . Η ενέργεια υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{V}} &= \frac{1}{2} \int nd\mathcal{V}_i \int nd\mathcal{V}_j V_{ij} \\ &= \frac{1}{2} n^2 \left(\pm \frac{g'^2}{4\pi} \right) \int d\mathcal{V}_i \int d\mathcal{V}_j \frac{e^{-m_{A'} r_{ij}}}{r_{ij}}, \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση της ομοιομορφίας της πυκνότητας n ώστε, να βγει εκτός του ολοκληρώματος. Από την προσέγγιση μέσου πεδίου μπορούμε να θεωρήσουμε ως κέντρο το σωματίδιο i που βρίσκεται σε θέση r_i και να βρούμε το ενεργό δυναμικό που 'αισθάνεται' από όλα τα σωματίδια j . Αυτό γίνεται ολοκληρώντας σε όλα τα j με $r = r_{ij}$, αφού το r_i είναι το κέντρο. Μπορούμε να αγνοήσουμε επιφανειακά φαινόμενα θεωρώντας ότι το αστέρι είναι πολύ μεγαλύτερο από την μέση απόσταση της αλληλεπίδρασης $R \gg m_{A'}^{-1}$, δηλαδή όλο το δυναμικό περιορίζεται εντός του αστέρα. Από την παραπάνω προσέγγιση λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{V}} &= \frac{1}{2} n^2 \left(\pm \frac{g'^2}{4\pi} \right) \int d\mathcal{V}_i \int_0^{\infty} 4\pi r^2 dr \frac{e^{-m_{A'} r}}{r} \\ &= \pm g'^2 \frac{1}{2} n^2 \int d\mathcal{V}_i \int_0^{\infty} r dr e^{-m_{A'} r} \\ &= \pm g'^2 \frac{n^2}{2} \frac{1}{m_{A'}^2} \int d\mathcal{V}_i. \end{aligned}$$

Τέλος ολοκληρώνουμε πάνω σε όλα τα σωματίδια i που μας δίνει τετριμμένα τον όγκο \mathcal{V}

$$E_{\mathcal{V}} = \pm g'^2 \frac{n^2}{2m_{A'}^2} \mathcal{V}.$$

Βρήκαμε επομένως ότι η συνεισφορά της αλληλεπίδρασης Yukawa στην πυκνότητα ενέργειας είναι

$$\rho_Y = \pm g'^2 \frac{n^2}{2m_{A'}^2}. \quad (3.5)$$

Ο ίδιος όρος προστίθεται και στην πίεση όπως υπολογίζουμε εύκολα από τον ορισμό της πίεσης

$$P_Y = n^2 \frac{\partial(\rho_Y/n)}{\partial n} = n^2 \left(\pm \frac{g'^2}{2m_{A'}^2} \right).$$

Στο κεφάλαιο 8 του βιβλίου [11] εξετάζονται και οι κβαντομηχανικές προσεγγίσεις που αναφέραμε. Η προσέγγιση Hartree που είναι στην πραγματικότητα η μηδενική κβαντομηχανική διόρθωση, δίνει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα. Η μέθοδος Hartree-Fock συμπεριλαμβάνει τα spin των σωματιδίων, στην προσέγγιση αυτή μόνο τα σωματίδια αντίθετου spin μπορούν να βρεθούν αρκετά κοντά ώστε να αλληλεπιδράσουν μέσω της Yukawa. Η απαγορευτική αρχή Pauli επομένως μειώνει την συνεισφορά στην ενέργεια κατά έναν παράγοντα 1/2. Εμείς, όπως και οι περισσότερες δημοσιεύσεις, θα κρατήσουμε την προσέγγιση μέσου πεδίου.

Η καταστατική του πληθυσμού χ αποτελείται από αυτήν του ιδανικού αέριου και την συνεισφορά λόγω των αλληλεπιδράσεων που αποδείξαμε

$$\begin{aligned} \rho_{\chi} &= \rho_{0,\chi} \left[x_f \sqrt{1 + x_f^2(2x_f^2 + 1)} - \sinh^{-1}(x_f) \right] \pm \frac{n_{\chi}^2}{2z^2} \\ P_{\chi} &= \frac{\rho_{0,\chi}}{3} \left[x_f \sqrt{1 + x_f^2(2x_f^2 - 3)} + 3 \sinh^{-1}(x_f) \right] \pm \frac{n_{\chi}^2}{2z^2}, \end{aligned}$$

$z \equiv \frac{m_{A'}}{g'}$ και η σταθερά $\rho_{0,\chi}$ είναι αυτή που έχουμε ορίσει με $m = m_{\chi}$. Στην συνέχεια ακολουθούμε ακριβώς την ίδια μέθοδο με την προηγούμενη ενότητα. Η θερμοδυναμική ισορροπία μας εγγυάται

$$\mu_{\chi} = \mu_n,$$

η διαφορά με την προηγούμενη περίπτωση είναι ο επιπλέον όρος στο χημικό δυναμικό του DM. Από τον θερμοδυναμικό ορισμό του χημικού δυναμικού βρίσκουμε

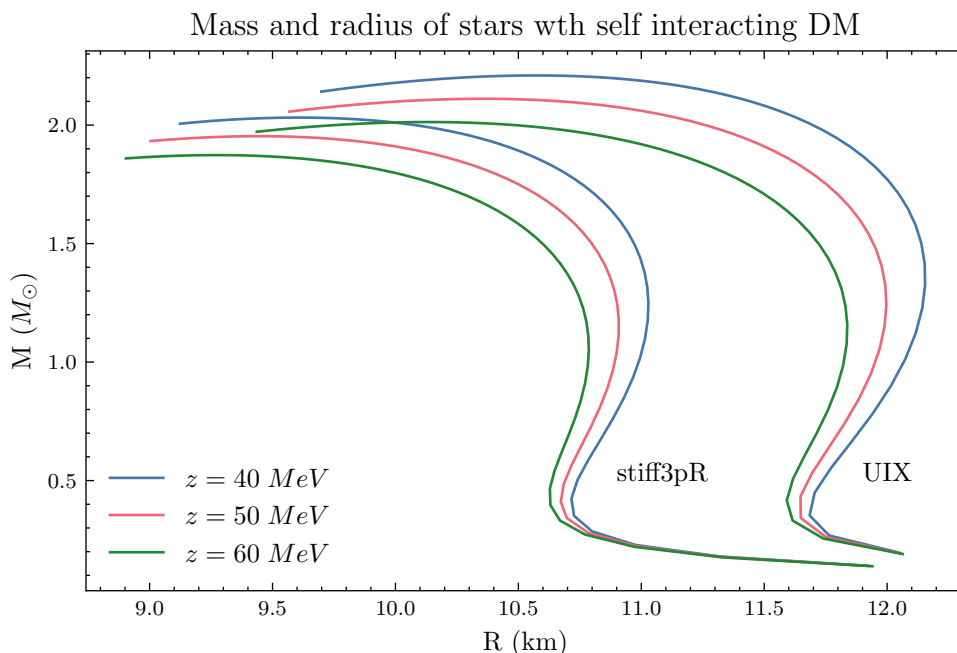
$$\mu_{\chi} = \frac{\partial \rho}{\partial n_{\chi}} = \sqrt{m_{\chi}^2 + \overbrace{p_{f,\chi}^2}^{E_{f,\chi}}} \pm \frac{n_{\chi}}{z^2}.$$

Κάνοντας χρήση της (2.10) αντικαθιστούμε την n_{χ} με την ορμή Fermi και λύνουμε

την σχέση $\mu_\chi = \mu_n$, με μοναδικό άγνωστο την $p_{f,\chi}$. Ως καταστατική για την ύλη θα χρησιμοποιήσουμε τις UIX και stiff3pR που παρουσιάσαμε στο διάγραμμα 3.4. Το χημικό δυναμικό της ύλης προσδιορίζεται όπως έχουμε δει από τον τύπο

$$\mu_n = \frac{\rho_n + P_n}{n_n}.$$

Η καταστατική του σκοτεινού τομέα έχει πλέον δύο παραμέτρους m_χ, z . Θα κρατήσουμε $m_\chi = 937.9 \text{ MeV}$ ³ και θα πειραματιστούμε με τιμές του z . Όπως έχουμε δείξει η ύπαρξη της θάλασσας ιδανικού αερίου χ , μειώνει κατά πολύ την μάζα των αστεριών. Έχει νόημα να εξετάσουμε μόνο την περίπτωση απωστικών αλληλεπιδράσεων καθώς, ήδη έχουμε παρατηρήσει ότι οι απωστικές αλληλεπιδράσεις είναι αυτές που κάνουν πιο stiff την καταστατική.



Σχήμα 3.7: Μάζα ως συνάρτηση της ακτίνας για διαφορετικές τιμές z στις δύο πιο stiff καταστατικές από την ενότητα Gandolfi et. al.

Η ύπαρξη σκοτεινής ύλης πάλι μειώνει την μέγιστη μάζα που μπορούν να υποστηρίξουν οι καταστατικές. Όμως, η προσθήκη της απωστικής αλληλεπίδρασης προσφέρει αρκετή πίεση ώστε να επιτρέπει όριο TOV πάνω από $2 M_\odot$. Θυμίζουμε πως στην προηγούμενη ενότητα, για την συγκεκριμένη μάζα χ χωρίς την αλληλεπίδραση λαμβάνουμε όριο TOV $0.71 M_\odot$. Στο διάγραμμα 3.7 φαίνεται πως η πιο άκαμπτη καταστατική μπορεί να υποστηρίξει $M_{max} = 2.21 M_\odot$ σε ακτίνα 10.6 km. Η περίπτωση χωρίς DM που φαίνεται στο διάγραμμα 3.4 μας έδινε $M_{max} = 2.45 M_\odot$. Δεν συμπεριλαμβάνουμε τις υπόλοιπες καταστατικές, καθώς παρά την ύπαρξη απωστικής δύναμης βρίσκονταν όλες κάτω από το όριο των $2 M_\odot$.

³ Η τιμή αυτή μεγιστοποιεί τον ρυθμό διάσπασης σε DM.

Υπάρχει έντονη εξάρτηση από το z επομένως αξίζει να αναλύσουμε γιατί συμβαίνει αυτό και κατά πόσο είναι φυσική αυτή η συμπεριφορά. Οι σταθερές που περιγράφουν την αλληλεπίδραση είναι η σταθερά σύζευξης g' και η μάζα του διαδότη $m_{A'}$. Η καταστατική εξίσωση εξαρτάται μόνο από τον λόγο τους $z = \frac{m_{A'}}{g'}$. Μεγάλη τιμή για το z μπορεί να σημαίνει μεγάλη μάζα $m_{A'}$, άρα μικρή εμβέλεια αλληλεπίδρασης ή μικρή τιμή της σταθεράς g' , άρα πιο ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Και οι δύο αυτές περιπτώσεις οδηγούν σε μειωμένη επίδραση της απωστικής δύναμης στην καταστατική. Προφανώς πιο ασθενής αλληλεπίδραση συνεπάγεται μικρότερη πίεση, αλλά και η πολλή μικρή εμβέλεια περιορίζει χωρικά την αλληλεπίδραση μειώνοντας την μακροσκοπική επίδραση της. Μικρή τιμή του z προκαλεί την ακριβώς αντίθετη συμπεριφορά, αυξάνεται η ένταση ή η εμβέλεια της δύναμης προσφέροντας έτσι μεγαλύτερη πίεση. Η μεταβολή του z επηρεάζει και με έναν διαφορετικό τρόπο το αστέρι, η απωστική δύναμη αυξάνει το χημικό δυναμικό των χ . Όσο μικρότερο το z τόσο μεγαλύτερη η αύξηση του χημικού δυναμικού, η αύξηση αυτή σημαίνει ότι η δημιουργία των χ γίνεται ενεργειακά κοστοβόρα για το σύστημα. Επομένως για μικρό z δημιουργούνται λιγότερα χ και όσα δημιουργούνται παρέχουν αυξημένη πίεση σε σχέση με το ιδανικό αέριο. Με βάση τα παραπάνω μικρό z πρέπει να συνεπάγεται και μεγαλύτερες μάζες αστέρων. Η συμπεριφορά που παρατηρούμε είναι συμβατή με την ανάλυση μας, αφού όσο μεγαλώνουν οι τιμές του z τόσο μειώνεται η μέγιστη μάζα.

Οι αστέρες νετρονίων είναι αποτελεσματικοί στο να περιορίσουν το εύρος τιμών που μπορεί να λάβει η σταθερά z . Η παρατήρηση αστέρων με μάζα μεγαλύτερη από $2 M_{\odot}$ μας δείχνει ότι η τιμή του z δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερη από 60 MeV , διότι ακόμα και η πιο άκαμπτη καταστατική δεν θα μπορούσε να υποστηρίξει τέτοια αστέρια. Υπάρχουν και άλλες παρατηρήσεις που μπορούν να περιορίσουν την συγκεκριμένη τιμή, η πιο αυστηρή είναι η παρατήρηση του Bullet Cluster που μελετήσαμε στην εισαγωγή. Από τις παρατηρήσεις του Bullet Cluster μπορούμε να περιορίσουμε την ενεργό διατομή των αλληλεπιδράσεων της σκοτεινής ύλης με τον εαυτό της. Ο περιορισμός που παρέχεται από τους Randall et. al. [25] είναι

$$\frac{\sigma}{m} < 1.25 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}.$$

Η αλληλεπίδραση που μελετήσαμε στο όριο των μικρών σχετικών ταχυτήτων δίνει

$$\sigma_{\chi\chi} = \frac{g'^4 m_{\chi}^2}{4\pi m_{A'}^4}.$$

Για σκοτεινή ύλη με μάζα περίπου ίση με την μάζα του νετρονίου ο περιορισμός που λαμβάνουμε είναι

$$z \geq 60 \text{ MeV}.$$

Σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα από το αστέρι νετρονίων παρατηρούμε ότι το z είναι

πολύ περιορισμένο γύρο από τα 60 MeV . Όπως σημειώνεται και στην δημοσίευση [9] το όριο από το Bullet Cluster μπορεί να αποφευχθεί αν θεωρηθεί πως το χ αποτελεί μέχρι το 10% της σκοτεινής ύλης που παρατηρούμε.

Βλέπουμε επομένως ένα πολύ ωραίο παράδειγμα του πως παρατηρήσεις εντελώς διαφορετικών συστημάτων μπορούν να περιορίσουν σημαντικά το εύρος τιμών των παραμέτρων ενός μοντέλου σκοτεινής ύλης. Η ευαισθησία των αστέρων νετρονίων στην ύπαρξη σκοτεινής ύλης, με μάζα περίπου ίση με του νετρονίου, οδήγησε στην απαίτηση ενός πιο σύνθετου σκοτεινού τομέα. Η προσθήκη απωστικής δύναμης μεταξύ των χ επέτρεψε την δημιουργία βαριών αστέρων νετρονίων. Η αλληλεπίδραση αυτή όμως πρέπει να είναι αρκετά ισχυρή κάτι που έρχεται σε αντιπαράθεση με τις παρατηρήσεις από την σύγκρουση των σμηνών στο Bullet Cluster.

3.4 Σκοτεινή ύλη που αλληλεπιδρά με τα μίονια

Από τα αποτελέσματα που έχουμε παρουσιάσει μέχρι τώρα ξέρουμε ότι οι αστέρες νετρονίων είναι ευαίσθητοι στην ύπαρξη σκοτεινής ύλης που αλληλεπιδρά με νετρόνια. Αυτό μας επιτρέπει να περιορίσουμε τις παραμέτρους μοντέλων που χρησιμοποιούνται για να εξηγήσουν το πρόβλημα της ημιζωής του νετρονίου. Στο ερευνητικό μέρος της εργασίας θέλουμε να ελέγξουμε αν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αστέρες νετρονίων ώστε να εξάγουμε παρόμοια συμπεράσματα για σκοτεινή ύλη που αλληλεπιδρά με μίονια.

3.4.1 Γυρομαγνητικός λόγος μιονίου

Ο λόγος που μας ενδιαφέρει μία τέτοια αλληλεπίδραση είναι το πρόβλημα $g - 2$ των μιονίων. Τα μίονια είναι θεμελιώδη σωματίδια, ανήκουν στα λεπτόνια και αλληλεπιδρούν παρόμοια με τα ηλεκτρόνια με εξαίρεση την μεγαλύτερη μάζα τους, $m_\mu = 105.66 \text{ MeV}$. Τα σωματίδια λόγω του spin τους έχουν μία μαγνητική ροπή μ , που μπορεί να παρατηρηθεί τοποθετώντας το σωματίδιο σε μαγνητικό πεδίο και μετρώντας την μετάπτωση του. Η μαγνητική ροπή

$$\vec{\mu} = -g \left(\frac{e}{2m} \right) * \vec{S}$$

χαρακτηρίζεται από έναν αδιάστατο παράγοντα g που ονομάζεται g-factor. Μαγνητική ροπή προκαλείται επίσης από οποιαδήποτε μορφή στροφορμής φορτισμένου σωματιδίου.

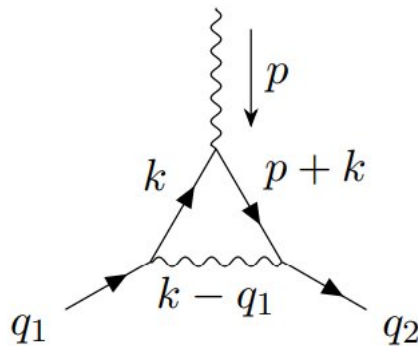
Ένα άτομο μέσα σε μαγνητικό πεδίο αλληλεπιδρά με το πεδίο εξαιτίας της μαγνητικής ροπής των ηλεκτρονίων, με ένα δυναμικό της μορφής $V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Τα ηλεκτρόνια στα άτομα έχουν στροφορμή \vec{L} , η οποία παράγει μαγνητική ροπή. Ο Zeeman παρατηρώντας μεταπτώσεις ηλεκτρονίων από άτομα μέσα σε μαγνητικά πεδία μέτρησε την μεταβολή των ενεργειακών σταθμών. Οι στάθμες με τροχιακή στροφορμή l διαχωρίζονταν σε $2l + 1$, επιβεβαίωσε έτσι την ύπαρξη της μαγνητικής ροπής που δημιουργείται από την τροχιακή στροφορμή των ηλεκτρονίων. Ο διαχωρισμός των ενεργειακών επι-

πέδων ήταν συμβατός με $g = 1$. Η σημαντική ανακάλυψη ήταν το ανώμαλο φαινόμενο Zeeman, όπου το κάθε ενεργειακό επίπεδο χωρίζονταν σε επιπλέον στάθμες. Σε αυτές τις περιπτώσεις για να εξηγηθεί ο διαχωρισμός των σταθμών το ηλεκτρόνιο έπρεπε να έχει μία επιπλέον εσωτερικής μορφής στροφορμή που να δημιουργεί μαγνητική ροπή με $g = 2$, η στροφορμή αυτή ονομάστηκε spin. Αυτή ήταν η πρώτη παρατήρηση του spin των ηλεκτρονίων και δεν μπορούσε να εξηγηθεί μέσω της εξίσωσης Schrödinger.

Μία μεγάλη επιτυχία της εξίσωσης Dirac ήταν η πρόβλεψη του spin δίνοντας μάλιστα τον σωστό παράγοντα $g = 2$. Η θεωρία της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής (QED) προβλέπει διορθώσεις στον παράγοντα g που προέρχονται από την θεωρία επανακανονικοποίησης. Η διόρθωση ονομάζεται ανώμαλη μαγνητική ροπή και ορίζεται ως

$$\alpha_e \equiv \frac{g_e - 2}{2}.$$

Η κύρια διόρθωση σε πρώτη τάξη έρχεται από το διάγραμμα βρόγχου 3.8. Γνωρίζουμε ότι λόγω της ολοκλήρωσης πάνω στην εσωτερική ορμή k , τέτοιου είδους διαγράμματα απειρίζονται. Για να συνεχίσουμε να λαμβάνουμε φυσικά αποτελέσματα επανακανονικοποιούμε την θεωρία, δηλαδή απορροφούμε τους απειρισμούς αυτούς μέσω διορθωτικών όρων. Ως αποτέλεσμα οι σταθερές της λαγκραντζιανής δεν παραμένουν σταθερές αλλά, ‘τρέχουν’ με την ενεργειακή κλίμακα που έχουμε επιλέξει. Αυτό προκαλεί και την αλλαγή του γυρομαγνητικού λόγου σε κάτι παραπάνω από 2.



Σχήμα 3.8: Διάγραμμα βρόγχου που αποτελεί διόρθωση πρώτης τάξης για την κορυφή της QED, με την μεγαλύτερη συνεισφορά στον παράγοντα g του ηλεκτρονίου

Η ανώμαλη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου αποτελεί μία από τις πιο ακριβείς μετρήσεις της φυσικής και συμφωνεί με την θεωρητική πρόβλεψη σε πάνω από 10 δεκαδικά ψηφία. Ο θεωρητικός υπολογισμός σε τέτοια ακρίβεια απαιτεί διαγράμματα 5ης τάξης που συνεισφέρουν όρους ανάλογους του α^5 , όπου α η σταθερά λεπτής υφής.

Η παραπάνω ανάλυση ισχύει και για το μιονίο, υπάρχουν δύο πειράματα που έχουν μετρήσει με μεγάλη ακρίβεια τον παράγοντα g του μιονίου. Αυτά είναι στο Brookhaven National Laboratory [26] και στο Fermilab [27], συνδυαστικά τα δύο πειράματα μετρούν μία ανώμαλη μαγνητική ροπή για το μιονίο που απέχει 4.2σ από τον θεωρητικό

υπολογισμό. Στην ακρίβεια που μετράνε τα πειράματα οι συνεισφορές από αδρόνια και από την ηλεκτρασθενή δύναμη είναι σημαντικές λόγω της μεγάλης μάζας του μιονίου. Ο θεωρητικός υπολογισμός είναι επομένως πολύ πιο περίπλοκος και έχουν υπάρξει καινούργιοι υπολογισμοί που φέρνουν τις δύο τιμές πιο κοντά. Σε κάθε περίπτωση η διαφορά των δύο τιμών μπορεί να είναι μία ένδειξη καινούργιας φυσικής.

Οι Chun, Mondal [10] εξετάζουν την πιθανότητα να υπάρχει ένα βαθμωτό ή ψευδό-βαθμωτό μποζόνιο που έχει την τάση να αλληλεπιδρά κυρίως με λεπτόνια. Η αλληλεπίδραση αυτή είναι τύπου Yukawa και θα συνεισφέρει στα διαγράμματα υπολογισμού της ανώμαλης τιμής a_μ . Ως βασικό μοντέλο για την προσθήκη αυτού του επιπλέον μποζονίου χρησιμοποιούν την επέκταση δύο διπλέτων Higgs του SM (2HDM). Υπάρχουν πολλά θεωρητικά κίνητρα που υποστηρίζουν τέτοιες επεκτάσεις όπως οι χειραλικές διπλέτες σε Υπερσυμμετρικές θεωρίες, τα αξιόνια και το πρόβλημα της βαρυογέννησης [28]. Οι δύο μιγαδικές διπλέτες $\Phi_{1,2}$ αποτελούνται από 8 πεδία, κάτω από κάποιες παραδοχές που χρησιμοποιούνται συχνά στην φαινομενολογία του μοντέλου, η θραύση της ηλεκτρασθενούς αφήνει 5 φυσικά πεδία. Κάθε μία από τις διπλέτες λαμβάνει τιμή κενού $u_{1,2}/\sqrt{2}$ και τα 5 πεδία που απομένουν είναι ένα φορτισμένο, δύο ουδέτερα βαθμωτά και ένα ψευδό-βαθμωτό. Μία σημαντική παράμετρος του μοντέλου είναι η γωνία β που διαγωνοποιεί τον πίνακα μάζας του φορτισμένου και του ψευδό-βαθμωτού μποζονίου

$$\tan \beta \equiv \frac{u_2}{u_1}.$$

Προσθέτοντας ένα ακόμα βαθμωτό μποζόνιο (CP-even) που συζεύγνυται με τις διπλέτες μπορούμε, μετά το σπάσιμο της συμμετρίας, να λάβουμε όρους αλληλεπιδράσεων της μορφής

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\frac{m_l}{u} \frac{\sin \theta_1}{\cos \beta} \phi \bar{l} l.$$

Η θ_1 σχετίζεται με την σύζευξη του μποζονίου με τις διπλέτες Higgs, $u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 246 \text{ GeV}$ είναι η ηλεκτρασθενής κλίμακα, ϕ το ελαφρύ μποζόνιο σκοτεινής ύλης και l τα γνωστά λεπτόνια. Παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν και για την περίπτωση που το μποζόνιο είναι ψευδό-βαθμωτό (CP-odd). Προφανώς τα παραπάνω δεν είναι αναλυτική μελέτη του μοντέλου 2HDM και του μηχανισμού με τον οποίο λαμβάνουμε την αλληλεπίδραση. Ξέρουμε όμως πως να διαχειριστούμε μία αλληλεπίδραση Yukawa, ώστε να υπολογίσουμε την μακροσκοπική της επίδραση στον πληθυσμό μιονίων. Επομένως για την δική μας εφαρμογή δεν απαιτείται κάποια πληρέστερη ανάλυση του μικροσκοπικού μοντέλου, προφανώς κάτι τέτοιο προσφέρεται στην δημοσίευση των Chun, Mondal [10].

3.4.2 Επίδραση στους αστέρες νετρονίων

Η βασική ιδέα της μελέτης μας ήταν να μειώσουμε το χημικό δυναμικό των μιονίων εντός του αστεριού. Η μείωση αυτή θα έκανε ενεργειακά προτιμητέα την δημιουργία περισσότερων μιονίων. Όπως θα δούμε αναλυτικά η δημιουργία μιονίων γίνεται εις βάρος του πληθυσμού των ηλεκτρονίων. Για να συμφέρει το σύστημα να μειώσει τον πληθυσμό ηλεκτρονίων και να αυξήσει τον πληθυσμό μιονίων, θα πρέπει να υπάρχει μία ελκτική αλληλεπίδραση μεταξύ των μιονίων. Αυτή ακριβώς η αλληλεπίδραση μας παρέχεται από την βαθμωτή περίπτωση του μοντέλου που περιγράψαμε. Το γεγονός πως αλληλεπιδράσεις που γίνονται με ανταλλαγή βαθμωτού (ή οποιουδήποτε σωματιδίου άρτιου spin) είναι πάντα ελκτικές αποτελεί μη τετριμμένο αποτέλεσμα της κβαντικής θεωρίας πεδίου, το οποίο θα δεχτούμε ως δεδομένο. Τα μίονια θα συνεισφέρουν στην β διάσπαση του νετρονίου μέσω της αλληλεπίδρασης

$$n \rightarrow p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu,$$

ενώ διασπώνται σε ηλεκτρόνια μέσω της

$$\mu \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu.$$

Ακολουθώντας τα βήματα που δείξαμε στην περίπτωση του πληθυσμού npe , ενότητα 2.4.3, μπορούμε να υπολογίσουμε τους σχετικούς πληθυσμούς σε θερμοδυναμική ισορροπία. Θέτοντας τα χημικά δυναμικά των νετρονίων ίσα με μηδέν, διότι φεύγουν από το αστέρι, μπορούμε να λάβουμε τις ακόλουθες συνθήκες χημικής ισορροπίας των διασπάσεων

$$\mu_\mu = \mu_e = \mu_n - \mu_p,$$

επίσης η ουδετερότητα φορτίου επιβάλλει να έχουμε

$$n_p = n_e + n_\mu.$$

Όλα τα σωματίδια περιγράφονται ως ιδανικά αέρια Fermi, με εξαίρεση το μίονιο στην καταστατική του οποίου προσθέτουμε τον όρο από την ελκτική δύναμη Yukawa. Έχουμε αποδείξει ότι η ενέργεια θα είναι

$$\rho_\mu = \rho_{0,\mu} \left[x_f \sqrt{1 + x_f^2 (2x_f^2 + 1)} - \sinh^{-1}(x_f) \right] - \frac{n_\mu^2}{2z^2},$$

με $z = \frac{m_\phi}{g}$. Η ενεργός σταθερά σύζευξης του μοντέλου διαβάζεται από την λαγκραντζιανή που δώσαμε

$$g = \frac{m_l}{u} \underbrace{\frac{\sin \theta_1}{\cos \beta}}_{\xi},$$

για μεγάλο $\tan \beta$ έχουμε $\xi = \tan \beta \sin \theta_1$. Το χημικό δυναμικό των μιονίων θα είναι

$$\mu_\mu = \sqrt{p_{F,\mu}^2 + m_\mu^2} - \frac{n_\mu}{z^2}$$

επομένως η πρώτη σχέση ισορροπίας δίνει

$$\mu_e = \mu_\mu \rightarrow \sqrt{p_{F,e}^2 + m_e^2} = \sqrt{p_{F,\mu}^2 + m_\mu^2} - \frac{n_\mu}{z^2}$$

τα ηλεκτρόνια είναι σίγουρα πολύ σχετικιστικά στις πυκνότητες που θα μελετήσουμε άρα $p_{F,e} \gg m_e$. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση αυτή στην παραπάνω εξίσωση, βρίσκουμε την σχέση μεταξύ των ορμών Fermi για τα ηλεκτρόνια και τα μίονια

$$p_{F,e} = \sqrt{p_{F,\mu}^2 + m_\mu^2} - \frac{p_{F,\mu}^3}{3\pi^2 z^2}.$$

Ενώ υποθέτοντας μη σχετικιστικά πρωτόνια έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_n &= \mu_p + \mu_\mu \\ \sqrt{p_{F,n}^2 + m_n^2} &= \frac{p_{F,p}^2}{2m_p} + m_p + \sqrt{p_{F,\mu}^2 + m_\mu^2} - \frac{p_{F,\mu}^3}{3\pi^2 z^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Στην ισορροπία των ασθενών αλληλεπιδράσεων δείξαμε ότι ορμή των νετρονίων δίνεται από την σχέση

$$p_{f,n} = 340 \left(\frac{\rho}{\rho_{nuc}} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{MeV}{c},$$

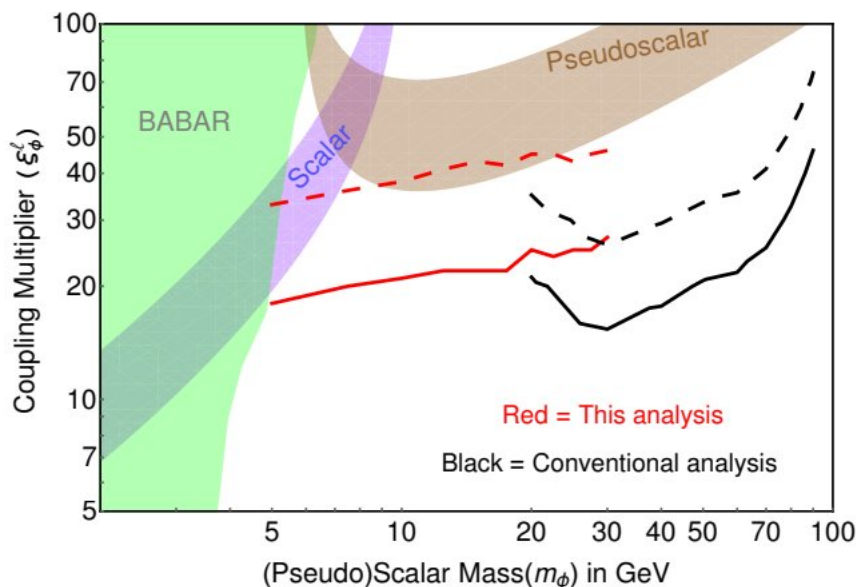
όπου ρ είναι η πυκνότητα της ύλης. Η ορμή των πρωτονίων μπορεί να προσδιοριστεί από την ουδετερότητα φορτίου

$$\begin{aligned} \frac{p_{F,\mu}^3}{3\pi^2 \hbar^3} + \frac{p_{F,e}^3}{3\pi^2 \hbar^3} &= \frac{p_{F,p}^3}{3\pi^2 \hbar^3} \\ p_{F,\mu}^3 + p_{F,e}^3 &= p_{F,p}^3 \\ p_{F,p}^3 &= p_{F,\mu}^3 + \left(\sqrt{p_{F,\mu}^2 + m_\mu^2} - \frac{p_{F,\mu}^3}{3\pi^2 z^2} \right)^3. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την ορμή νετρονίων και πρωτονίων στην (3.6), υπάρχει μόνο ένας άγνωστος η $p_{f,\mu}$. Μπορούμε έτσι να υπολογίσουμε την ορμή των μιονίων για διάφορες πυκνότητες ρ . Από την ορμή των μιονίων μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ορμές των

πρωτονίων και των ηλεκτρονίων, έχουμε επομένως πλήρη γνώση της πυκνότητας κάθε πληθυσμού.

Για να υπάρχει σημαντική μείωση του χημικού δυναμικού των μιονίων θέλουμε μικρό z , ώστε ο όρος $\frac{p_{F,\mu}^3}{3\pi^2 z^2}$ να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερος. Ο παραμετρικός χώρος των τιμών ξ, m_ϕ που εξηγούν το $(g-2)_\mu$ δίνεται στο διάγραμμα 3.9. Διαλέγουμε

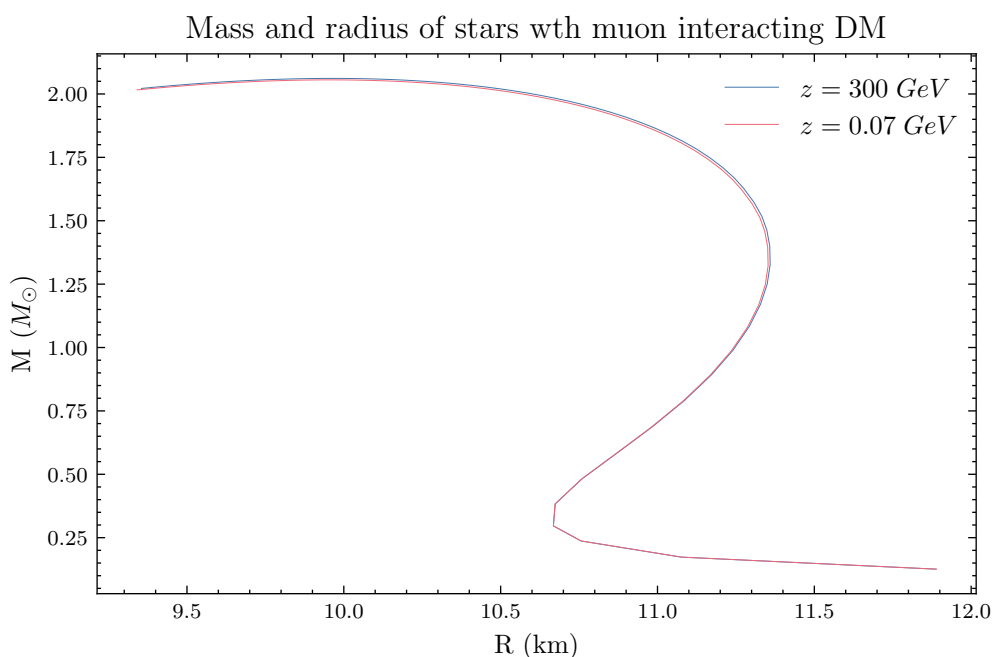


Σχήμα 3.9: Παραμετρικός χώρος της αλληλεπίδρασης που εξηγεί την ανωμαλία του μιονίου. Μας ενδιαφέρει η μπλε καμπύλη που σχετίζεται με το βαθμωτό μποζόνιο. Η πράσινη περιοχή είναι πειραματικά αποκλεισμένη [10].

$\xi = 44$ και $m_\phi = 5.6 \text{ GeV}$, που δίνουν την χαμηλότερη τιμή $z = 296.324 \text{ GeV}$ που επιτρέπει ο παραμετρικός χώρος. Λύνοντας αριθμητικά την εξίσωση (3.6) έχουμε $p_{F,\mu} = 190.2 \text{ MeV}$ και $p_{F,e} = 217.6 \text{ MeV}$. Παρατηρούμε ότι επειδή το z είναι αρκετά μεγάλο έχουμε πολύ μικρή επίδραση της αλληλεπίδρασης Yukawa και το χημικό δεν μειώνεται αρκετά ώστε να έχουμε $p_{f,e} < p_{f,\mu}$. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουμε όση παραγωγή μιονίων θα θέλαμε, ώστε να υπάρξει εμφανής διαφορά στην καταστατική του αστεριού. Η ανταλλαγή σημαντικού αριθμού πολύ σχετικιστικών ηλεκτρονίων με μίονια θα μείωνε το Γ της καταστατικής, που συνεπάγεται μείωση του ορίου TOV. Σε αυτές τις πυκνότητες η πίεση από τα λεπτόνια αποτελεί ένα πολύ μικρό μέρος της ολικής πίεσης, επομένως δεν περιμένουμε κάποια μεγάλη μείωση της μέγιστης μάζας.

Επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε ως βάση την καταστατική τύπου SLy, διότι περιέχει ήδη θάλασσα από $nre\mu$. Στην δημοσίευση τους δίνουν τα ποσοστά ηλεκτρονίων, πρωτονίων και μιονίων, το ποσοστό μεταξύ νετρονίων και πρωτονίων καθορίζεται κυρίως από τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Για την δημιουργία της δικιάς μας καταστατικής πρέπει να επιβάλουμε εκ νέου την χημική ισορροπία και την ουδετερότητα φορτίου, λαμβάνοντας υπόψιν τον επιπλέον όρο αλληλεπίδρασης στα μ . Προφανώς τα νετρόνια δεν είναι ιδανικό αέριο Fermi, επομένως για να εφαρμόσουμε την παραπάνω ανάλυση

θα χρησιμοποιήσουμε το ποσοστό πρωτονίων που μας δίνεται. Θεωρούμε πως δεν επηρεάζεται σημαντικά από τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις, όπως αναφέρεται στην δημοσίευση της καταστατικής οι τιμές προέρχονται από extrapolation της συμπεριφοράς στις πυρηνικές πυκνότητες. Επιβάλλοντας τις σχέσεις για τα χημικά δυναμικά και την ουδετερότητα φορτίου, μπορούμε να προσδιορίσουμε τα νέα ποσοστά ηλεκτρονίων και μιονίων. Προσθέτοντας την ενέργεια και την πίεση των δύο αυτών πληθυσμών στην καταστατική SLy, λαμβάνουμε την νέα καταστατική. Η καταστατική μας έχει ως παράμετρο το z που εμφανίζεται στην αλληλεπίδραση Yukawa.



Σχήμα 3.10: Καμπύλη μάζας-ακτίνας για αστέρια που περιέχουν μίονια με ελκτικές αλληλεπιδράσεις.

Στο διάγραμμα 3.10 έχουμε δύο οικογένειες αστεριών μία με $z = 300 \text{ GeV}$ και μία με $z = 70 \text{ MeV}$. Η πρώτη περίπτωση είναι ένα z ικανό για να εξηγήσει το $(g - 2)_\mu$ πρόβλημα, ενώ η δεύτερη περίπτωση το όριο στο οποίο η ελκτική δύναμη είναι τόσο ισχυρή που έχουμε ανταλλάξει σχεδόν όλα τα ηλεκτρόνια με μίονια. Παρατηρούμε ότι ακόμα και στην δεύτερη περίπτωση η πίεση που χάνουμε δεν είναι αρκετή για να επηρεάσει κατά πολύ την μέγιστη μάζα. Αυτή είναι μια απόδειξη του ότι σε τόσο μεγάλες πυκνότητες η πίεση των λεπτονίων δεν συνεισφέρει σημαντικά. Υπάρχει μία μικρή πτώση της τάξης του $0.01 M_\odot$ που μας δείχνει ότι όντως η καταστατική γίνεται ελάχιστα πιο soft. Οι αστέρες νετρονίων δεν είναι επομένως κατάλληλο σύστημα για να ελεγχθεί μία τέτοια αλληλεπίδραση, τουλάχιστον όσο αναφορά την υδροδυναμική ισορροπία τους.

Υπάρχει μία ενδιαφέρουσα επίπτωση της αλλαγής του αριθμού των μιονίων και σχετίζεται με την ψύξη του αστεριού. Οι αστέρες χάνουν ενέργεια μέσω των νετρονίων

που δημιουργούνται από την διεργασία Urca

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad p + e^- \rightarrow n + \nu_e.$$

Στην πραγματικότητα αυτή η διεργασία δίνει πολύ πιο γρήγορη απώλεια ενέργειας από αυτήν που παρατηρούμε. Η εκπομπή νετρίνων είναι ανάλογη του $(\frac{T}{10^9 K})^6$, μπορούμε να σκεφτούμε αυτήν την εξάρτηση σαν να έχουμε έναν παράγοντα kT για κάθε στάθμη Fermi των εκφυλισμένων φερμιονίων. Ο φασικός χώρος των αντινετρίνων δίνει έναν παράγοντα E_ν^2 και η απώλεια ενέργειας άλλον έναν E_ν , που είναι ανάλογοι του kT . Από την διατήρηση ορμής μπορούμε να δούμε ότι η διεργασία δεν είναι κινηματικά περιορισμένη, μόνο όταν ισχύει η τριγωνική ανισότητα

$$|p_{f,e} - p_{f,p}| \leq p_{f,n} \leq p_{f,e} + p_{f,p}.$$

Η ανισότητα αυτή δεν ικανοποιείται στο μεγαλύτερο μέρος του αστεριού, αυτό επιβεβαιώνεται και από τις παρατηρήσεις για την ψύξη αστεριών. Αφού η Urca είναι απαγορευμένη μέσω ποιας διεργασίας χάνει ενέργεια το αστέρι; Το μεγαλύτερο μέρος του αστεριού χάνει ενέργεια μέσω της modified Urca

$$\begin{aligned} n + n &\rightarrow n + p + e^- + \bar{\nu}_e \\ n + p + e^- &\rightarrow n + n + \nu_e. \end{aligned}$$

Λόγω του επιπλέον σωματιδίου-παρατηρητή ο φασικός χώρος των νετρίνων είναι πολύ μικρότερος, η διεργασία αυτή οδηγεί επομένως σε πιο αργή απώλεια ενέργειας. Η αλλαγή μεγάλου αριθμού ηλεκτρονίων σε μόνια θα οδηγούσε σε $p_{f,e} \ll p_{f,\mu}$, τότε θα μπορούσαμε να ικανοποιήσουμε την τριγωνική ανισότητα $p_{f,n} \leq p_{f,\mu} + p_{f,p}$ για την Urca με μόνια. Ως αποτέλεσμα θα προβλέπαμε μία πτώση της θερμοκρασίας των αστεριών με μεγαλύτερο ρυθμό από ότι περιμέναμε. Μπορούμε να λύσουμε την χημική ισορροπία που περιγράψαμε για $\rho = 10\rho_{nuc}$ και να λάβουμε τις ορμές Fermi των πληθυσμών. Δείχνουμε έτσι ότι η Urca process

$$n \rightarrow p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad p + \mu^- \rightarrow n + \nu_\mu.$$

ανοίγει όντως για την περίπτωση $z = 70 \text{ MeV}$, αλλά παραμένει κλειστή για την περίπτωση $z = 300 \text{ GeV}$ που μας ενδιαφέρει.

Στην ενότητα αυτήν μελετήσαμε την επίδραση που έχει στους αστέρες νετρονίων μία ελκτική δύναμη μεταξύ μιονίων, η οποία διαδίδεται μέσω σκοτεινής ύλης. Το μοντέλο που ελέγχουμε μπορεί να εξηγήσει την ασυμφωνία θεωρίας και πειράματος για το $g - 2$ του μιονίου. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η αριθμητική πυκνότητα των μιονίων εντός του αστεριού δεν είναι αρκετή για να επηρεάσει σημαντικά την καταστατική. Η

μέγιστη αριθμητική πυκνότητα που μπορούν να φτάσουν είναι περίπου ίση με αυτή των πρωτονίων λόγω της ουδετερότητας φορτίου. Οι πληθυσμοί ηλεκτρονίων και μιονίων λειτουργούν ανταγωνιστικά, καθώς αύξηση του ενός συνεπάγεται μείωση του άλλου. Αυτοί οι τρεις πληθυσμοί έχουν πολύ μικρότερη αριθμητική πυκνότητα από τα νετρόνια, επομένως δεν συνεισφέρουν σημαντικά στην πίεση. Για αυτό βρήκαμε ότι η υδροστατική ισορροπία δεν επηρεάζεται έντονα, είδαμε επίσης ότι οι αλληλεπιδράσεις των μιονίων μπορούν να ελεγχθούν μέσω της ψύξης του αστέρα. Για να γίνει αυτό πρέπει να ‘ανοίξει’ η διεργασία Urca με μόνια, η μελέτη μας έδειξε ότι απαιτείται σημαντικά πιο ισχυρή αλληλεπίδραση από αυτήν του μοντέλου [10]. Όμως κυρίως οι περιορισμοί του πειράματος BABAR απαγορεύουν τέτοιες αλληλεπιδράσεις όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 3.9.

3.5 Μαύρη τρύπα στο εσωτερικό του αστεριού

Στην εισαγωγή αναφέραμε ότι ένα μέρος της σκοτεινής ύλης μπορεί να αποτελείται από μαύρες τρύπες που δημιουργήθηκαν στα πρώτα στάδια του σύμπαντος. Τέτοιες μαύρες τρύπες ονομάζονται αρχέγονες, είναι πιθανό να βρίσκονται στα halo των γαλαξιών και να αλληλεπιδρούν με αστροφυσικά αντικείμενα. Ένα μεγάλο παράθυρο μαζών για αυτές τις μαύρες τρύπες έχει αποκλειστεί πειραματικά. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η αλληλεπίδραση συμπαγών αστερών με μαύρες τρύπες στο εύρος μαζών $[10^{-16}, 10^{-10}]M_{\odot}$. Συγκεκριμένα οι αστέρες νετρονίων μπορούν να απορροφήσουν τέτοιες μαύρες τρύπες και να τις παγιδεύσουν στο εσωτερικό τους. Αναμένουμε η μαύρη τρύπα να συσσωρεύει ύλη ώσπου να καταπιεί όλο το αστέρι και να το μετατρέψει σε μαύρη τρύπα. Το φαινόμενο αυτό μελετάται από πολλές πλευρές στην σύγχρονη βιβλιογραφία, για παράδειγμα έχει υπολογιστεί ο ρυθμός συσσώρευσης ύλης από την μαύρη τρύπα και έχει μελετηθεί η δημιουργία βαρυτικών κυμάτων από την κίνηση της μαύρης τρύπας εντός του αστεριού [29–32]. Ένας άλλος τρόπος δημιουργίας μαύρης τρύπας εντός του αστεριού είναι η ύπαρξη σκοτεινής ύλης που καταρρέει λόγω ελκτικών αλληλεπιδράσεων. Στην ενότητα αυτήν εμείς θέλουμε να ερευνήσουμε αν η μαύρη τρύπα μπορεί να επηρεάσει την ισορροπία του αστεριού, πριν τα τελευταία στάδια της ζωής του.

3.5.1 Bondi accretion

Η σφαιρική συσσώρευση μάζας από μαύρες τρύπες εμβυθισμένες σε άπειρη ύλη λέγεται Bondi accretion. Η ιδέα του υπολογισμού βασίζεται στην εξίσωση συνέχειας του ρευστού και στην εξίσωση Euler. Επειδή το μέσο είναι άπειρο η μαύρη τρύπα μαζεύει μάζα με ένα σταθερό ρυθμό. Η απαίτηση να αυξάνεται μονοτονικά η ταχύτητα του ρευστού όσο πέφτει προς την μαύρη τρύπα, χωρίς να υπάρχουν ιδιομορφίες στην ροή οδηγεί στην ύπαρξη ενός κρίσιμου σημείου. Στην Νευτώνεια περίπτωση το κρίσιμο

σημείο είναι το σημείο όπου η ταχύτητα του ρευστού ξεπερνάει την ταχύτητα του ήχου στο μέσο. Η ακτίνα που χαρακτηρίζει το κρίσιμο σημείο ονομάζεται ακτίνα Bondi. Η παραπάνω ανάλυση για τις μαύρες τρύπες πρέπει να γίνει στα πλαίσια της γενικής σχετικότητας. Η ακριβής ανάλυση παρουσιάζεται στο παράρτημα G του βιβλίου [11], εδώ θα αναφέρουμε τα βασικά αποτελέσματα που θα χρειαστούμε στην συνέχεια. Τα μεγέθη με δείκτη s αναφέρονται στην ακτίνα Bondi, ενώ ο δείκτης ∞ αφορά την ασυμπτωτική τιμή μακριά από την μαύρη τρύπα.

Η διατήρηση βαρυονικού αριθμού (εξίσωση συνέχειας) δίνεται από την

$$\nabla_{\alpha}(nu^{\alpha}) = 0,$$

ενώ η σχετικιστική εξίσωση Euler γράφεται ως

$$(\rho + P)(\nabla_{\beta}u_{\alpha})u^{\beta} = -\frac{\partial P}{\partial x_{\alpha}} - u_{\alpha}\frac{\partial P}{\partial x_{\beta}}u^{\beta}.$$

Η u_{α} είναι η τετραταχύτητα του ρευστού, εμάς μας ενδιαφέρει η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας $u = |u^r|$. Αν συμβολίσουμε με (\prime) την παράγωγο ως προς r και κάνουμε χρήση της μετρικής Schwarzschild, οι δύο εξισώσεις παίρνουν την μορφή

$$\begin{aligned} \frac{n'}{n} + \frac{u'}{u} + \frac{2}{r} &= 0 \\ uu' + \frac{M}{r^2} + \left(1 - \frac{2M}{r} + u^2\right)a^2\frac{n'}{n} &= 0, \end{aligned}$$

όπου $a^2 \equiv \frac{dP}{d\rho}$ είναι η ταχύτητα του ήχου. Λύνοντας τις παραπάνω ως προς n', u' βλέπουμε ότι πρέπει να υπάρχει το κρίσιμο σημείο που αναφέραμε σε $r_s > 2M$. Αυτό συμβαίνει διότι μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} u' &= \frac{D_1}{D} \\ n' &= \frac{-D_2}{D}, \end{aligned}$$

η συνάρτηση D όμως μηδενίζεται σε μία ακτίνα r_s , άρα για να μην έχουμε ιδιομορφία πρέπει στην ίδια ακτίνα να μηδενίζονται και οι D_1, D_2 . Η απαίτηση του μηδενισμού συνεπάγεται ότι στο σημείο αυτό έχουμε

$$u_s^2 = \frac{a_s^2}{1 + 3a_s^2} = \frac{M}{2r_s},$$

παρατηρούμε ότι στην σχετικιστική περίπτωση η ακτίνα Bondi δεν αντιστοιχεί στο σημείο που η ταχύτητα του ρευστού ξεπερνάει αυτήν του ήχου.

Για να συνεχίσουμε την ανάλυση πρέπει να υποθέσουμε μία καταστατική για το

ρευστό, έστω ότι έχουμε την πολυτροπική με σταθερές K, Γ

$$P = Kn^\Gamma.$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την ταχύτητα του ήχου σε κάθε σημείο του ρευστού. Η εξίσωση διατήρησης βαρυονικού αριθμού, όταν γραφτεί σε μορφή νόμου διατήρησης μας δίνει την σχετικιστική εξίσωση Bernoulli

$$\left(\frac{\rho + P}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + u^2\right) = \text{const} = \left(\frac{\rho_\infty + P_\infty}{n_\infty}\right)^2.$$

Εισάγοντας την τιμή της ταχύτητας του ήχου και υπολογίζοντας την σχέση στο $r = r_s$ έχουμε

$$(1 + 3a_s^2) \left(1 - \frac{a_s^2}{\Gamma - 1}\right)^2 = \left(1 - \frac{a_\infty^2}{\Gamma - 1}\right)^2. \quad (3.7)$$

Κάνοντας χρήση της παραπάνω εξίσωσης μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του ήχου στην ακτίνα Bondi και στην συνέχεια την ίδια την ακτίνα r_s .

Ένα χαρακτηριστικό που θα μας χρειαστεί είναι η αύξηση της πυκνότητας ενέργειας, σε σχέση με την ασυμπτωτική τιμή της, καθώς η ύλη συσσωρεύεται προς την μαύρη τρύπα. Ειδικά στην ακτίνα Bondi, που θα είναι το αρχικό σημείο ολοκλήρωσης, αυτή η αύξηση δεν είναι καθόλου αμελητέα. Στο βιβλίο του Shapiro η συμπεριφορά της πυκνότητας υπολογίζεται για $1 < \Gamma < \frac{5}{3}$, όμως έχουμε δει ότι η καταστατική του αστεριού στον πυρήνα δίνει $\Gamma > 5/3$. Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα των Richards, Baumgarte, Shapiro [33] που υπολόγισαν την αύξηση στην πυκνότητα για καταστατικές με $\Gamma > 5/3$

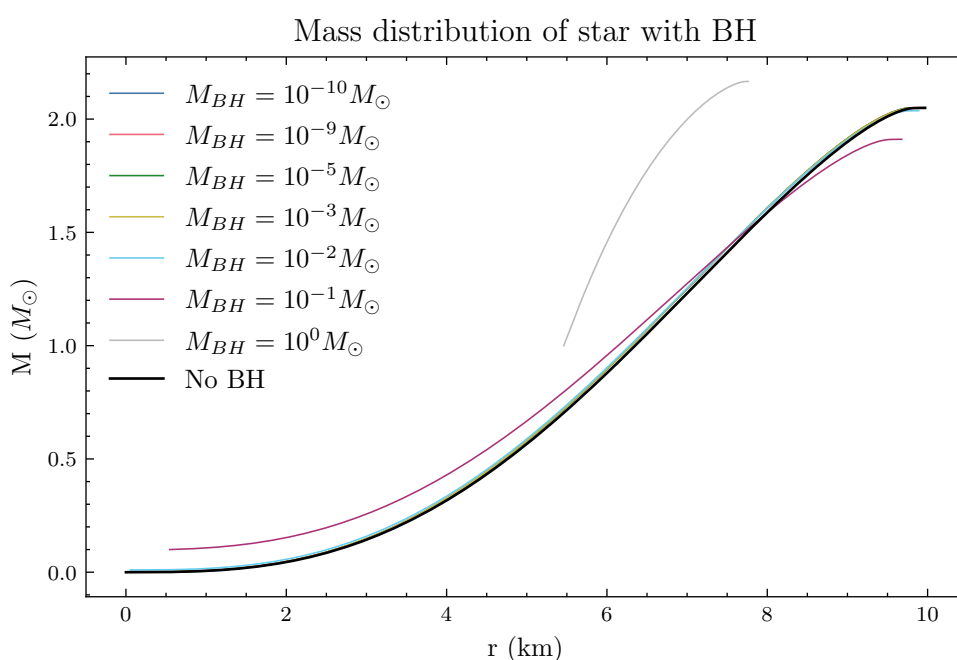
$$\rho_s = \left(\frac{a_s}{a_\infty}\right)^{2/(\Gamma-1)} \left(\frac{\Gamma - 1 - a_\infty^2}{\Gamma - 1 - a_s^2}\right)^{1/(\Gamma-1)} \rho_\infty. \quad (3.8)$$

3.5.2 Επίδραση στους αστέρες νετρονίων

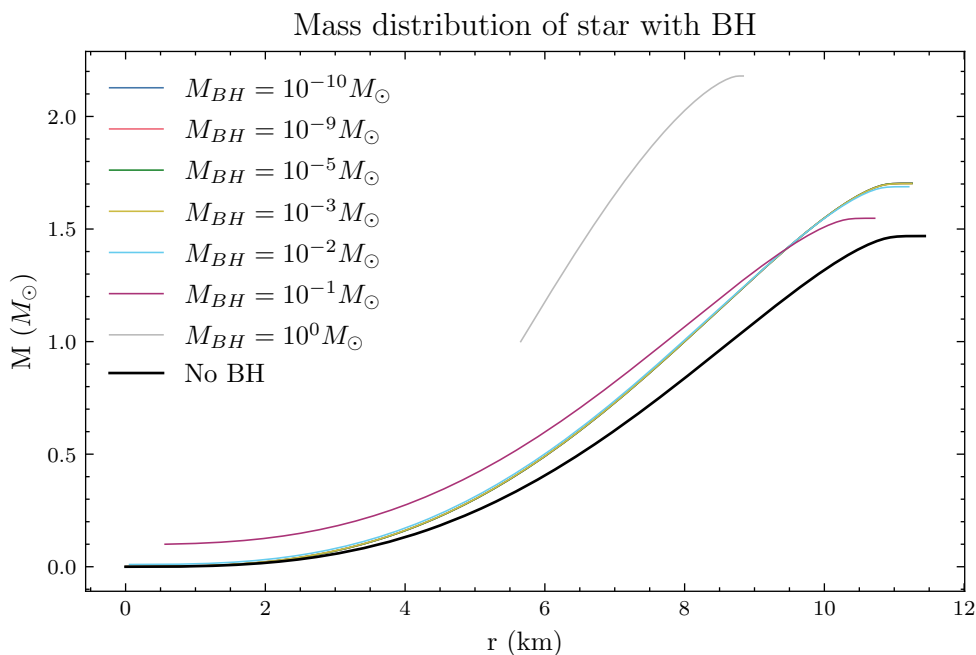
Ας δούμε τώρα γιατί μας ενδιαφέρει η παραπάνω ανάλυση. Θέλουμε να μελετήσουμε την υδροστατική επίδραση της μαύρης τρύπας στην ισορροπία του αστεριού. Εφόσον οι μαύρες τρύπες που μας ενδιαφέρουν είναι πολύ μικρές μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι ασυμπτωτικές τιμές είναι ίδιες με αυτές στο κέντρο του αστεριού. Όσο μικρότερη η μαύρη τρύπα, τόσο καλύτερη είναι αυτή η προσέγγιση καθώς γύρω της θα 'βλέπει' ύλη μόνο από το κέντρο του αστεριού. Πρέπει να ολοκληρώσουμε το σύστημα εξισώσεων TOV εισάγοντας στις αρχικές συνθήκες την ύπαρξη μιας μαύρης τρύπας στο κέντρο του αστεριού με μάζα M_{BH} . Μία πρώτη προσέγγιση είναι να θέσουμε ως αρχικές συνθήκες την ακτίνα Schwarzschild και την μάζα της μαύρης τρύπας. Θεωρώντας ότι μέχρι την ακτίνα Schwarzschild έχουμε την μετρική της μαύρης τρύπας ενώ, από εκεί μέχρι την ακτίνα του αστεριού έχουμε την TOV. Δεν μπορούμε όμως να εφαρμόσουμε

αυτές τις αρχικές συνθήκες διότι η εξίσωση TOV (2.9) έχει ιδιομορφία για $r = 2M$.

Επιλέγουμε να αρχίσουμε την ολοκλήρωση από την ακτίνα Bondi και για αρχικές τιμές χρησιμοποιούμε την πυκνότητα ενέργειας που δίνεται από την σχέση (3.8) και την μάζα της μαύρης τρύπας. Ως αποτέλεσμα θα παρουσιάσουμε το προφίλ της μάζας ενός αστεριού και όχι όλη την οικογένεια αστεριών όπως κάναμε μέχρι τώρα. Αυτή η επιλογή γίνεται ώστε να είναι εμφανής η διαφορά που προκαλεί η μαύρη τρύπα στο εσωτερικό του αστερά. Επίσης αναπαριστώντας πολλές τιμές κεντρικής πυκνότητας χάνουμε την εποπτεία της αύξησης πυκνότητας στο r_s . Θα χρησιμοποιήσουμε ως καταστατική την SLy και θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα για το αστέρι μέγιστης μάζας και για ένα τυπικό αστέρι με μάζα $1.4 M_{\odot}$.



Σχήμα 3.11: Ακτινική κατανομή μάζας στο εσωτερικού του αστεριού μέγιστης μάζας για διάφορες τιμές μάζας της μαύρης τρύπας. Η μαύρη καμπύλη αντιστοιχεί στην περίπτωση που δεν έχουμε μαύρη τρύπα στο κέντρο και δίνει όριο TOV $2.05 M_{\odot}$.



Σχήμα 3.12: Ακτινική κατανομή μάζας στο εσωτερικού ενός αστεριού τυπικής μάζας για διάφορες τιμές μάζας της μαύρης τρύπας. Η μαύρη καμπύλη αντιστοιχεί στην περίπτωση που δεν έχουμε μαύρη τρύπα στο κέντρο και δίνει μάζα αστεριού $1.46 M_{\odot}$.

Στα διαγράμματα 3.11, 3.12 εξετάζουμε την μεταβολή της κατανομής μάζας για διαφορετικές τιμές μάζας της μαύρης τρύπας. Στην περίπτωση του αστεριού με μάζα $2.05 M_{\odot}$ οι αλλαγές που παρατηρούμε συμβαίνουν μόνο για αρκετά μεγάλη μάζα της μαύρης τρύπας, ενώ για το αστέρι με μάζα $1.4 M_{\odot}$ έχουμε πιο σημαντικές διαφοροποιήσεις. Η ύπαρξη της μαύρης τρύπας προσθέτει στο κέντρο μία μάζα η οποία δεν συνεισφέρει στην πίεση, θα περιμέναμε επομένως να μειώνεται η μέγιστη μάζα του αστεριού. Διότι μεγαλύτερη μάζα στο κέντρο που δεν ασκεί επιπλέον πίεση, σημαίνει ότι τα επόμενα στρώματα δέχονται μεγαλύτερη έλξη χωρίς κάποια δύναμη για τα υποστηρίξει. Παρατηρούμε ότι για μικρές μαύρες τρύπες, στο αστέρι μέγιστης μάζας υπάρχει μία πολύ μικρή μείωση της μάζας (διάγραμμα 3.11). Αντιθέτως στο αστέρι με μάζα $1.4 M_{\odot}$ έχουμε αύξηση της μάζας του (διάγραμμα 3.12). Πρέπει επομένως να εξηγήσουμε για ποιον λόγο παρατηρούμε αυτήν την συμπεριφορά. Το αστέρι προφυλάσσεται από την μεγάλη μείωση της μάζας του, λόγω της ύλης που έχει συσσωρευτεί στην ακτίνα Bondi. Η σχέση (3.8) για την καταστατική που χρησιμοποιούμε δίνει $\rho_s \approx 2\rho_{\infty}$, δηλαδή έξω από την μαύρη τρύπα δημιουργείται μία σφαίρα που έχει διπλάσια πυκνότητα ενέργειας από ότι είχε το κέντρο του αστεριού χωρίς την μαύρη τρύπα. Αυτομάτως από την καταστατική βλέπουμε ότι αυτό αντιστοιχεί και σε αυξημένη πίεση. Αυτή η μεγαλύτερη πίεση υποστηρίζει τα επόμενα στρώματα και τα προστατεύει από την κατάρρευση εξαιτίας της ισχυρότερης βαρυτικής έλξης.

Στο διάγραμμα 3.11 έχουμε μία μικρή μείωση διότι η κεντρική πυκνότητα $\rho_{\infty} = 2.86 * 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ είναι ήδη στο πιο stiff κομμάτι της καταστατικής και ο διπλασιασμός

της δεν μπορεί να προσφέρει πολύ παραπάνω πίεση. Η ενίσχυση στην ακτίνα Bondi προφυλάσσει απλά από την μαύρη τρύπα, μέχρι αυτή να γίνει $\approx 0.1 M_{\odot}$ όπου πια η μάζα που προσθέτουμε δεν μπορεί να αντισταθμιστεί από τον διπλασιασμό της κεντρικής πυκνότητας. Σημαντικό είναι ότι η σχέση (3.8) δεν εξαρτάται από την μάζα, για συγκεκριμένη καταστατική και ρ_{∞} ο πολλαπλασιασμός της πυκνότητας στο r_s είναι ίδιος και ανεξάρτητος από την M_{BH} . Στην ακραία τιμή $M_{BH} = M_{\odot}$ η ακτίνα Bondi είναι περίπου $4.5 km$ δηλαδή καταλαμβάνει πάνω από το μισό αστέρι, ενώ η μάζα της μαύρης τρύπας είναι συγκρίσιμη με αυτήν του αστεριού. Στην περίπτωση αυτήν δεν μπορούμε να θεωρήσουμε σωστή την ανάλυση μας, από τα αποτελέσματα των Richards, Baumgarte, Shapiro (σχέση (46) [32])

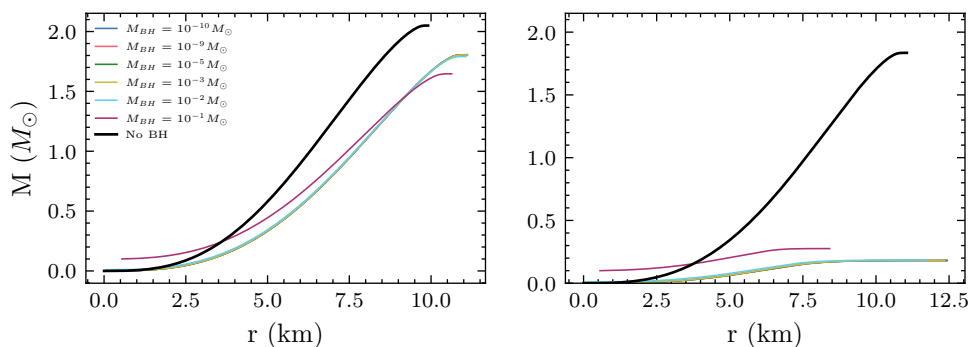
$$\dot{M}_{BH} = 7.33 * 10^{-9} \frac{M_{\odot}}{yr} \left(\frac{M_{BH}}{10^{-10} M_{\odot}} \right)^2,$$

βρίσκουμε ότι το αστέρι έχει ακόμα περίπου $10^{-5} s$ ζωής. Επίσης όταν η μάζα της μαύρης τρύπας είναι συγκρίσιμη με του αστεριού η απορρόφηση μάζας γίνεται με δυναμικό τρόπο και όχι μέσω της Bondi accretion. Το συμπέρασμα μας είναι ότι για να διαταραχθεί η υδροδυναμική ισορροπία από την μαύρη τρύπα, πρέπει να έχει απορροφηθεί μεγάλο κομμάτι του αστεριού. Σε τέτοιες περιπτώσεις δεν ισχύει η ανάλυση μας και δεν μπορούμε να μιλάμε για ισορροπία καθώς, το αστέρι έχει ελάχιστο χρόνο ζωής και η κατάρρευση του γίνεται δυναμικά. Στο εύρος των τιμών μάζας για τις ελαφριές αρχέγονες μαύρες τρύπες δεν έχουμε παρατηρήσιμη διαφορά.

Στο διάγραμμα 3.12 που αφορά ένα αστέρι νετρονίων με τυπική τιμή μάζας, η ύπαρξη της μαύρης τρύπας προκαλεί αύξηση της μάζας του αστεριού. Ο διπλασιασμός της κεντρικής πυκνότητας αυτού του αστεριού $\rho_{\infty} = 1.03 * 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$, στέλνει την τιμή ρ_s κοντά στην τιμή κεντρικής πυκνότητας του αστεριού που δίνει το όριο TOV (χωρίς μαύρη τρύπα). Η πίεση που προσφέρεται σε εκείνο το εύρος της καταστατικής είναι ικανή να αντισταθμίσει την επίδραση της μαύρης τρύπας, ενώ ταυτόχρονα επιτρέπει και την αύξηση της μάζας του αστεριού. Όσο αυξάνεται η μάζα της μαύρης τρύπας όλο και περισσότερη πίεση χρειάζεται για να αντισταθμιστεί η επιπλέον έλξη και έτσι μειώνεται η μάζα του αστεριού. Όμως ακόμα και για μαύρη τρύπα με $M_{BH} = 0.1 M_{\odot}$ το αστέρι έχει μεγαλύτερη μάζα από ότι στην περίπτωση χωρίς μαύρη τρύπα. Και εδώ η μαύρη τρύπα με $M_{BH} = M_{\odot}$ είναι έξω από τα όρια της ανάλυσης μας, σε αυτήν την περίπτωση η μαύρη τρύπα έχει απορροφήσει ήδη τα $2/3$ του αστεριού και το σύστημα δεν βρίσκεται σε ισορροπία (δυναμική απορρόφηση μάζας). Η ίδια συμπεριφορά ακολουθείται και από αστέρια μικρότερης μάζας επομένως, η ύπαρξη μιας μαύρης τρύπας στο εσωτερικό του αστεριού αυξάνει την μικρότερη δυνατή μάζα αστεριού. Αστέρια με μάζα $\lesssim M_{\odot}$ έχουν κεντρική πυκνότητα ενέργειας στα όρια του πυρήνα και του εσωτερικού φλοιού. Η συσσώρευση μάζας οδηγεί σε ρ_s που βρίσκεται εντός των τιμών του πυρήνα όπου η καταστατική είναι πολύ πιο άκαμπτη. Η ελάχιστη μάζα αστεριών

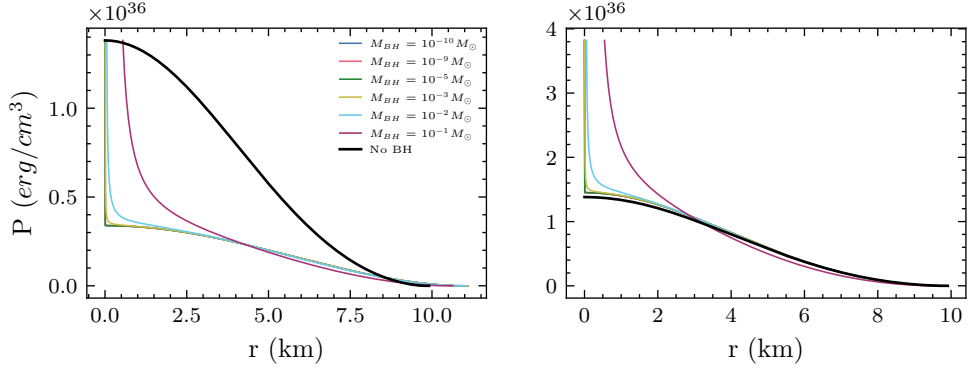
που επιτρέπεται είναι $0.9 M_{\odot}$ εν αντιθέσει με την $0.4 M_{\odot}$ που λαμβάνουμε χωρίς μαύρη τρύπα. Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι όσο μικρότερο το αστέρι τόσο χειρότερη γίνεται η προσέγγιση μας, όμως για αστέρι με μάζα $0.4 M_{\odot}$ οι πιο μικρές μαύρες τρύπες βρίσκονται εντός των υποθέσεων μας. Η αύξηση της μικρότερης δυνατής μάζας θα μπορούσε να αποτελεί σημαντικό αποτέλεσμα, αλλά μέχρι τώρα η μικρότερη μάζα αστεριού που έχει παρατηρηθεί είναι $1.17 M_{\odot}$. Επομένως τα πειραματικά δεδομένα δεν μπορούν να απαγορεύσουν την ύπαρξη μαύρης τρύπας σε ελαφριά αστέρια νετρονίων.

Ως έλεγχο της παραπάνω ανάλυσης θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα όταν αγνοήσουμε την συσσώρευση μάζας από την μαύρη τρύπα. Ξεκινάμε την ολοκλήρωση πάλι από την ακτίνα Bondi με αρχική μάζα αυτήν της μαύρης τρύπας. Διατηρούμε όμως την αρχική πυκνότητα ενέργειας ίση με την κεντρική πυκνότητα του αστεριού στην περίπτωση χωρίς μαύρη τρύπα, δηλαδή $\rho_s = \rho_{\infty}$. Ακολουθώντας τα παραπάνω για το αστέρι μάζας $1.46 M_{BH}$ δεν έχουμε λύση, η ολοκλήρωση σταματάει ακριβώς μετά την ακτίνα Bondi. Δηλαδή η μη αύξηση της πυκνότητας οδηγεί σε πίεση που δεν μπορεί να αντέξει τον επόμενο φλοιό μάζας και έτσι δεν φτιάχνεται αστέρι. Στο διάγραμμα 3.13 δίνουμε την γραφική που προέκυψε, αγνοώντας την συσσώρευση, για την περίπτωση ενός πιο βαριού αστεριού και του αστεριού μέγιστης μάζας. Είναι εμφανές ότι τώρα η μαύρη τρύπα προκαλεί μεγάλη διαφορά, η πίεση που επικρατεί στο κέντρο του αστεριού μέγιστης μάζας επιτρέπει την δημιουργία αστεριού με μικρότερη μάζα. Το αστέρι μάζας $1.84 M_{\odot}$ δεν έχει την απαραίτητη πίεση στο κέντρο ώστε να υποστηρίξει την προσθήκη ύλης, για αυτό και φτάνει μέχρι μία πολύ μικρή μάζα. Σε αυτό το αστέρι παρατηρούμε επίσης μία αύξηση της μάζας για την καμπύλη $M_{BH} = 0.1 M_{\odot}$, αυτό δεν πρέπει να μας παραξενεύει, καθώς η μάζα που δημιουργείται είναι μόλις πάνω από $0.2 M_{\odot}$. Ήμαστε επομένως στο όριο που η μάζα της μαύρης τρύπας είναι συγκρίσιμη με του αστεριού και δεν ισχύει η ανάλυση μας. Να τονίσουμε ότι η συσσώρευση μάζας είναι αποτέλεσμα της θεωρίας Bondi, ο μόνος λόγος που παρουσιάζουμε την περίπτωση που την αγνοούμε είναι για να δείξουμε ότι η αύξηση της πυκνότητας είναι αυτή που επιτρέπει την δημιουργία αστέρων με μαύρη τρύπα στο εσωτερικό. Επίσης άξιο σημείωσης είναι ότι η πίεση στο εσωτερικό του πυρήνα των πολύ βαρέων αστέρων νετρονίων, είναι ικανή να δημιουργήσει αστέρι παρά την έλξη που προκαλεί η μαύρη τρύπα.



Σχήμα 3.13: Γραφική της κατανομής μάζας για διάφορες τιμές μάζας μαύρης τρύπας, χωρίς συσσώρευση μάζας γύρω από την μαύρη τρύπα. Αριστερά έχουμε το αστέρι μέγιστης μάζας. Δεξιά το ίδιο αποτέλεσμα για ένα αστέρι με μάζα $1.84 M_{\odot}$.

Επιπλέον θεωρούμε ωφέλιμο να παρουσιάσουμε και την πίεση στο εσωτερικό του αστεριού μέγιστης μάζας ώστε να συγκρίνουμε την περίπτωση που συμπεριλαμβάνουμε την συσσώρευση μάζας με την περίπτωση που την αγνοούμε. Τα αποτελέσματα αυτά απεικονίζονται στο διάγραμμα 3.14, στην πραγματικότητα αυτή είναι η ποσοτικοποίηση της ανάλυσης που περιγράψαμε παραπάνω. Αριστερά βλέπουμε την περίπτωση που δεν συμπεριλαμβάνουμε την αύξηση της πίεσης λόγω συσσώρευσης Bondi. Είναι εμφανές ότι η πίεση είναι πολύ μικρότερη από ότι στο κανονικό αστέρι. Αντίθετα στα δεξιά συμπεριλαμβάνουμε την αρχική αύξηση, παρατηρούμε ότι η πίεση βρίσκεται στα επίπεδα της περίπτωσης του κανονικού αστεριού. Γράψαμε παραπάνω ότι η αύξηση της πίεσης χρησιμοποιείται για να αντισταθμίσει την βαρυτική έλξη της μαύρης τρύπας. Το φαινόμενο αυτό φαίνεται και καθαρά μαθηματικά, οι αρχικές τιμές που επιβάλλουμε οδηγούν σε μία πολύ μεγάλη αρνητική τιμή για το dP/dr ακριβώς μετά την ακτίνα Bondi. Στα διαγράμματα μπορούμε να παρατηρήσουμε αυτήν την ραγδαία πτώση, αν μετά από αυτήν την πτώση υπάρχει αρκετή πίεση για να υποστηρίξει τον επόμενο φλοιό μάζας τότε έχουμε αστέρι με μεγάλη μάζα (δεξιά περίπτωση). Αντιθέτως (αριστερή περίπτωση) αν η πίεση μετά την μεγάλη πτώση βρίσκεται σε πολύ μικρά επίπεδα για αστέρι νετρονίων, έχουμε πολύ μικρή μάζα αστεριού.



Σχήμα 3.14: Γραφική της κατανομής πίεσης για διάφορες τιμές μάζας μαύρης τρύπας με συσσώρευση μάζας γύρω από την μαύρη τρύπα και χωρίς. Αριστερά δεν έχουμε συσσώρευση μάζας. Δεξιά έχουμε τον διπλασιασμό της πυκνότητας ενέργειας από την συσσώρευση Bondi.

3.6 Admixed αστέρες νετρονίων

Μέχρι τώρα η μελέτη μας για σωματιδιακή σκοτεινή ύλη περιελάμβανε μόνο περιπτώσεις που είχαμε αλληλεπίδραση με κάποια από τα σωματίδια του SM. Συγκεκριμένα μελετήσαμε σκοτεινή ύλη που αλληλεπιδρά με νετρόνια και με μίονια. Είναι πιθανό να υπάρχει σκοτεινή ύλη που δεν αλληλεπιδρά με τα μέχρι τώρα γνωστά σωματίδια. Στην ενότητα αυτήν θα ερευνήσουμε την πιθανότητα να έχει παγιδευτεί σκοτεινή ύλη στο εσωτερικό του αστεριού, η οποία αλληλεπιδρά μόνο βαρυτικά με το υπόλοιπο αστέρι.

Επειδή τα δύο είδη ύλης δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους θα πρέπει να έχουμε δύο ρευστά αντί για ένα. Το κάθε ρευστό θα περιγράφεται από τον δικό του ταυστή ενέργειας-ορμής, οι οποίοι διατηρούνται ξεχωριστά. Οι δύο εξισώσεις συνέχειας οδηγούν σε δύο εξισώσεις παρόμοιες με την TOV (2.7), κάθε μία θα περιγράφει και το αντίστοιχο ρευστό. Η ύλη στις εξισώσεις Einstein περιγράφεται από το άθροισμα των δύο ταυστών ενέργειας-ορμής ⁴

$$T_{\mu\nu} = T_{M\mu\nu} + T_{DM\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}.$$

Τα μεγέθη ρ, P είναι η συνολική πυκνότητα ενέργειας και πίεση των δύο ρευστών και ορίζονται ως

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_M + \rho_{DM} \\ P &= P_M + P_{DM}.\end{aligned}$$

Ας δούμε αναλυτικά πως διαχωρίζεται η εξίσωση TOV ακολουθώντας τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 2.3. Υποθέτοντας την ίδια μετρική και χρησιμοποιώντας τον παραπάνω

⁴ Ο δείκτης M αναφέρεται στην κανονική ύλη και ο DM στην σκοτεινή.

τανυστή ενέργειας-ορμής βρίσκουμε την σχέση (2.6)

$$\Phi' = \frac{4\pi r^3 P + M}{r(r - 2M)},$$

όπου τώρα εμφανίζεται η ολική πυκνότητα και πίεση που ορίσαμε παραπάνω. Η διαφορά με την περίπτωση του ενός ρευστού είναι ότι έχουμε δύο ξεχωριστές εξισώσεις συνέχειας για τους τανυστές ενέργειας ορμής

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu} T_M^{\mu\nu} &= 0 \\ \nabla_{\mu} T_{DM}^{\mu\nu} &= 0.\end{aligned}$$

Με την χρήση των συμβόλων Christoffel βρίσκουμε ότι οι σχέσεις αυτές οδηγούν στις

$$\begin{aligned}\Phi' &= -\frac{P'_M}{\rho_M + P_M} \\ \Phi' &= -\frac{P'_{DM}}{\rho_{DM} + P_{DM}}.\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε δύο εξισώσεις σαν την (2.7)

$$\begin{aligned}\frac{dP_M}{dr} &= -(\rho_M + P_M) \frac{4\pi r^3 P + M}{r(r - 2M)} \\ \frac{dP_{DM}}{dr} &= -(\rho_{DM} + P_{DM}) \frac{4\pi r^3 P + M}{r(r - 2M)}.\end{aligned}$$

Το μέρος της εξίσωσης που εμφανίζονται τα ολικά μεγέθη προέρχεται από τις εξισώσεις Einstein, ενώ ο διαχωρισμός προκύπτει από την διατήρηση ενέργειας των επιμέρους ρευστών. Προφανώς κάθε ρευστό θα πρέπει να έχει και την δική του καταστατική εξίσωση, οδηγούμαστε επομένως στο ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dr} &= 4\pi(\rho_M + \rho_{DM})r^2 \\ \frac{dP_M}{dr} &= -(\rho_M + P_M) \frac{4\pi r^3 P + M}{r(r - 2M)} \\ \frac{dP_{DM}}{dr} &= -(\rho_{DM} + P_{DM}) \frac{4\pi r^3 P + M}{r(r - 2M)} \\ \rho_M &= \rho_M(P_M) \\ \rho_{DM} &= \rho_{DM}(P_{DM}).\end{aligned}$$

Στις αρχικές τιμές πρέπει να συμπεριλάβουμε και αυτήν της κεντρικής πυκνότητας του ρευστού σκοτεινής ύλης ρ_{cDM} , ώστε το σύστημα να είναι πλήρες. Επίσης, πρέπει να

αλλάζουμε την συνθήκη τερματισμού σε

$$(P_M(R) + P_{DM}(R)) = 0.$$

Η συνθήκη αυτή είναι απαραίτητη καθώς υπάρχουν περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της αρχικής πυκνότητας σκοτεινής ύλης, όπου το ρευστό σκοτεινής ύλης έχει μεγαλύτερη ακτίνα από το αστέρι κανονικής ύλης. Μπορούμε να βρούμε τις επιμέρους ακτίνες από τον μηδενισμό της αντίστοιχης πίεσης, η ακτίνα του αστεριού δύο ρευστών θα είναι $R = \max(R_M, R_{DM})$. Αστέρια που αποτελούνται από δύο ρευστά τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μόνο βαρυτικά λέγονται *admixed*, τα τελευταία χρόνια τέτοια αστέρια έχουν μελετηθεί σε μεγάλο βαθμό [34–39].

Ως καταστατική της ύλης θα χρησιμοποιήσουμε την SLy, όπως και στις προηγούμενες ενότητες. Η σκοτεινή ύλη θα υποθέσουμε πως είναι φερμιόνιο και επομένως θα κάνουμε χρήση της καταστατικής του ιδανικού αερίου Fermi. Στην συνέχεια θα προσθέσουμε και μία αλληλεπίδραση τύπου Yukawa στην καταστατική του ιδανικού αερίου. Επομένως έχουμε μελετήσει όλες τις καταστατικές που χρησιμοποιούμε στην ενότητα αυτήν, η διαφορά είναι ότι τώρα η σκοτεινή ύλη μπορεί να αλληλεπιδράσει μόνο βαρυτικά. Ο ‘πυρήνας’ σκοτεινής ύλης δημιουργεί ένα δυναμικό που έλκει την ύλη άρα, περιμένουμε να δούμε μείωση της μέγιστης μάζας. Στην μελέτη που θα πραγματοποιήσουμε λύνουμε το σύστημα για πολλές τιμές κεντρικής πυκνότητας της ύλης, όπως ακριβώς στην περίπτωση του ενός ρευστού. Κάθε αστέρι της οικογένειας που δημιουργούμε θα έχει ως κεντρική πυκνότητα σκοτεινής ύλης ένα ποσοστό της τιμής της πυκνότητας κανονικής ύλης. Μία παράμετρος του προβλήματος θα είναι αυτό το ποσοστό, μία δεύτερη παράμετρος είναι η μάζα της σκοτεινής ύλης.

Στα διαγράμματα 3.15, 3.16 απεικονίζουμε καμπύλες οικογενειών αστεριών για διαφορετικές τιμές των δύο μεταβλητών. Ως καταστατική του ρευστού σκοτεινής ύλης χρησιμοποιούμε το ιδανικό αέριο Fermi (2.11), (2.12). Το πρώτο αποτέλεσμα είναι αυτό που αναμέναμε, η ύπαρξη του ρευστού σκοτεινής ύλης μειώνει την μέγιστη μάζα των αστεριών. Επίσης όσο αυξάνουμε το ποσοστό κεντρικής πυκνότητας της σκοτεινής ύλης, τόσο μεγαλύτερη επίδραση παρατηρούμε στην μάζα του αστεριού. Αυτό είναι λογικό διότι δημιουργείται πιο βαρύ ρευστό σκοτεινής ύλης επομένως, η ύλη έλκεται πιο έντονα. Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα είναι ότι η σκοτεινή ύλη μικρότερης μάζας επηρεάζει περισσότερο το αστέρι, ενώ για $m_{DM} \geq 2m_n$ δεν παρατηρούμε ιδιαίτερη διαφορά. Είχαμε παρατηρήσει κάτι παρόμοιο στην περίπτωση σκοτεινής ύλης που αλληλεπιδρά με νετρόνια (διάγραμμα 3.5), όμως τα δύο αποτελέσματα οφείλονται σε διαφορετικά φαινόμενα. Έχουμε δει ότι όταν έχουμε αλληλεπίδραση ο λόγος που μειώνεται η μάζα είναι η μείωση του αριθμού νετρονίων και η αύξηση των σωματιδίων σκοτεινής ύλης, όπως επιβάλλεται από την χημική ισορροπία. Στην περίπτωση που αναλύουμε τώρα, το σημαντικό στοιχείο είναι πόσο μεγάλη μάζα και ακτίνα μπορεί να υποστηρίξει η κατα-

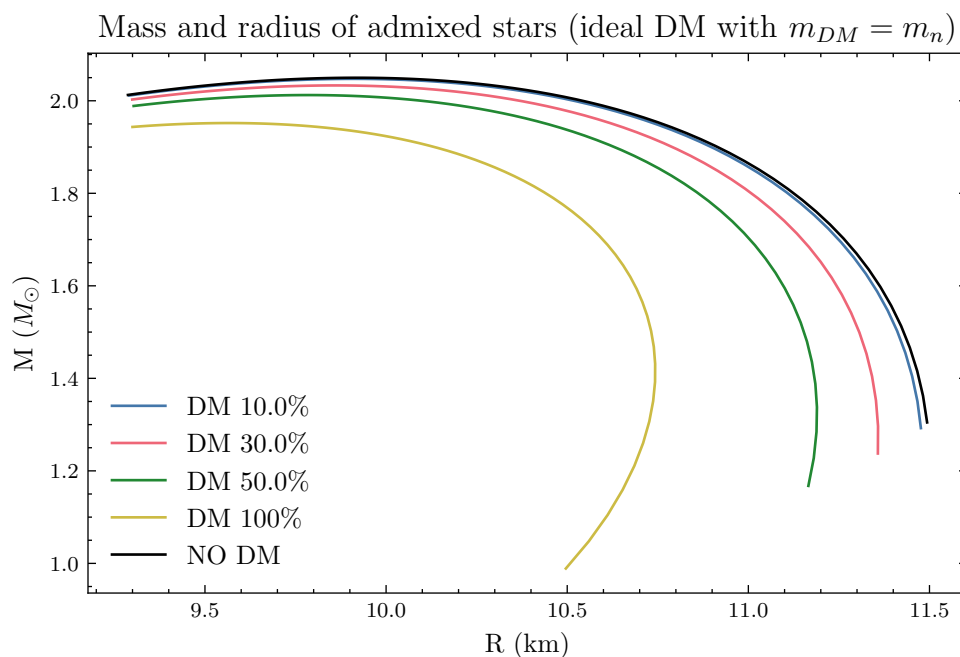
στατική της σκοτεινής ύλης. Ακριβώς επειδή η αλληλεπίδραση είναι μόνο βαρυτική η δημιουργία ενός αρκετά μαζικού ρευστού σκοτεινής ύλης, έλκει το ρευστό ύλης προκαλώντας τις διαφοροποιήσεις που εμφανίζονται στα διαγράμματα. Στην περίπτωση του ιδανικού αερίου Fermi μικρότερη μάζα προσφέρει συνθήκες για την δημιουργία μεγαλύτερων αντικειμένων, αυτό φαίνεται εύκολα αν συγκρίνουμε το όριο Chandrasekhar (ιδανικό αέριο e) με το όριο TOV (ιδανικό αέριο n).

Για $m_{DM} = 0.5m_n$ η ακτίνα των περιπτώσεων με $\rho_{cDM} = 0.3\rho_{cM}$ και $\rho_{cDM} = 0.5\rho_{cM}$ φαίνεται να είναι αρκετά μεγαλύτερη από ότι περιμένουμε. Η ακτίνα που έχουμε επιλέξει να απεικονίζουμε είναι η ολική, στις δύο αυτές περιπτώσεις το ρευστό σκοτεινής ύλης έχει μεγαλύτερη ακτίνα από αυτό της ύλης. Η ‘παρατηρήσιμη’ ακτίνα είναι αυτή του ρευστού ύλης και είναι περίπου στα $10km$ για τις δύο αυτές καμπύλες. Τέλος να τονίσουμε πως το ποσοστό που δίνουμε αφορά την αρχική συνθήκη και σε καμία περίπτωση δεν είναι το ίδιο με την ποσότητα ύλης και σκοτεινής ύλης στο τελικό αστέρι. Οι συνολικές ποσότητες των δύο ρευστών προέρχονται από την επίλυση του συστήματος, ενδιαφέρον βεβαίως έχει να μελετήσουμε το σύστημα και από αυτήν την σκοπιά. Δηλαδή ποιο ποσοστό μάζας του αστεριού προέρχεται από το ρευστό σκοτεινής ύλης και ποιο από την ύλη, καθώς και το τι συμβαίνει παραδείγματος χάρη αν θέλουμε να κρατήσουμε αυτό το ποσοστό σταθερό. Οι μάζες των δύο ρευστών μπορούν να υπολογιστούν διαχωρίζοντας την διαφορική εξίσωση για την μάζα

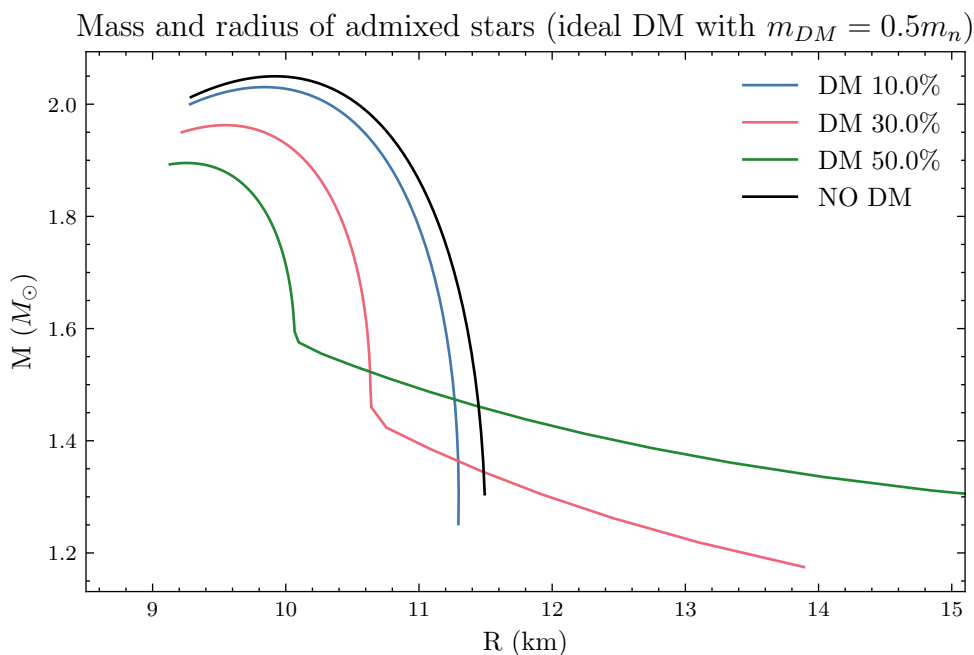
$$\frac{dM_M}{dr} = 4\pi \rho_M r^2$$

$$\frac{dM_{DM}}{dr} = 4\pi \rho_{DM} r^2$$

και έχουμε $M = M_M + M_{DM}$. Εμείς στην ανάλυση αυτή διαλέξαμε απλώς έναν τρόπο παρουσίασης που είναι συχνός στην σχετική βιβλιογραφία.



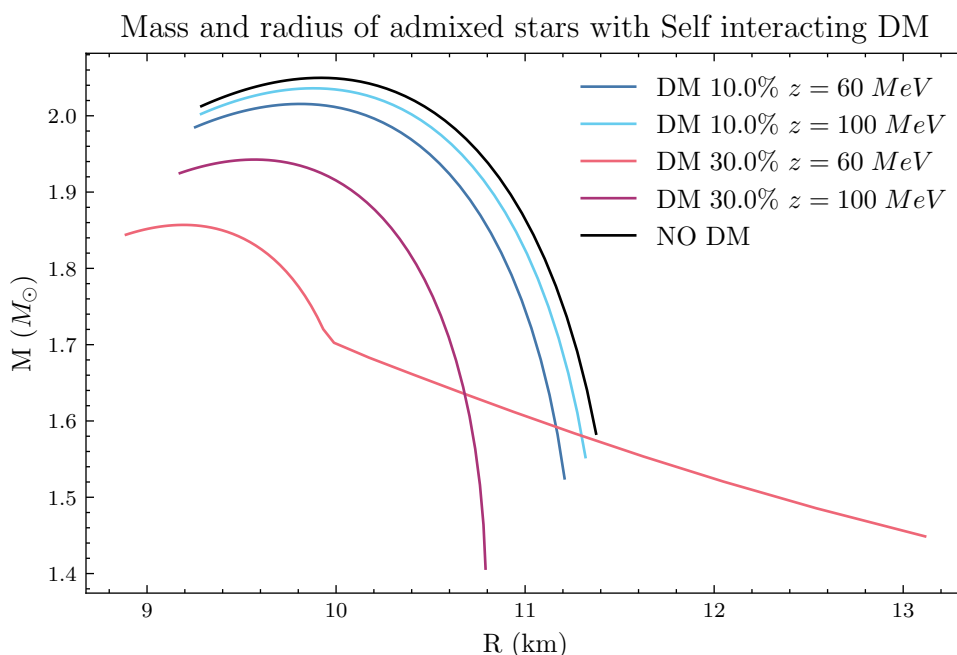
Σχήμα 3.15: Καμπύλες μάζας και ακτίνας για αστέρι δύο ρευστών. Η σκοτεινή ύλη έχει μάζα ίση με του νετρονίου, κάθε καμπύλη απεικονίζει διαφορετική επιλογή αρχικής πυκνότητας σκοτεινής ύλης. Για παράδειγμα DM 10% σημαίνει πως κάθε αστέρι έχει $\rho_{cDM} = 0.1\rho_{cM}$.



Σχήμα 3.16: Καμπύλες μάζας και ακτίνας για αστέρι δύο ρευστών. Η σκοτεινή ύλη έχει μάζα ίση με την μισή του νετρονίου, κάθε καμπύλη απεικονίζει διαφορετική επιλογή αρχικής πυκνότητας σκοτεινής ύλης.

Έχοντας τώρα μια πρώτη ιδέα του πως δουλεύει ο μηχανισμός των δύο ρευστών καταλαβαίνουμε ότι αν θέλουμε να επηρεάσουμε σημαντικά το αστέρι πρέπει να προσθέσουμε απωστική αλληλεπίδραση στην καταστατική της σκοτεινής ύλης. Αυτό ο-

δηγεί στην δημιουργία μεγαλύτερου ρευστού σκοτεινής ύλης. Θα διατηρήσουμε την μάζα της σκοτεινής ύλης ίση με του νετρονίου και θα μεταβάλλουμε το ποσοστό πυκνότητας και την σταθερά z . Έχουμε αναλύσει ήδη την σημασία του $z = \frac{m_A}{g}$ για την αλληλεπίδραση Yukawa, επιγραμματικά μεγάλο z σημαίνει πιο ασθενή αλληλεπίδραση και το αντίστροφο. Τα αποτελέσματά μας για τις διαφορετικές τιμές παρουσιάζονται στο διάγραμμα 3.17.

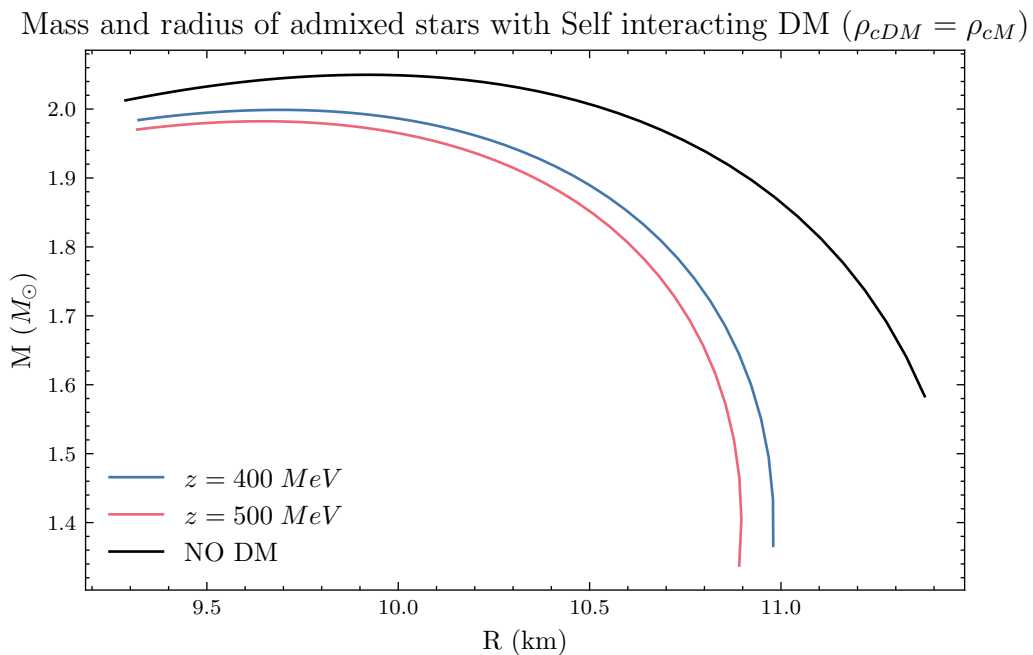


Σχήμα 3.17: Καμπύλες μάζας και ακτίνας για αστέρι δύο ρευστών. Οι καμπύλες απεικονίζουν διαφορετική επιλογή αρχικής πυκνότητας σκοτεινής ύλης και σταθεράς z .

Η αύξηση της πυκνότητας για το ίδιο z μειώνει την μάζα του αστεριού, όπως είναι αναμενόμενο από την προηγούμενη ανάλυση. Ενδιαφέρουσα είναι η συμπεριφορά για διαφορετικά z , αύξηση του z συνεπάγεται μεγαλύτερη μάζα για το συνολικό αστέρι. Θυμίζουμε ότι αυτή η συμπεριφορά είναι αντίθετη της περίπτωσης όπου η σκοτεινή ύλη συζεύγνυται με τα νετρόνια, διάγραμμα 3.7. Έχουμε δει ότι όταν υπάρχει χημική ισορροπία μία ισχυρή απωστική αλληλεπίδραση (μικρό z) κάνει την καταστατική πιο stiff, διότι είναι λιγότερο ωφέλιμο ενεργειακά να δημιουργηθεί σκοτεινή ύλη και η σκοτεινή ύλη που δημιουργείται παράγει περισσότερη πίεση. Στα admixed αστέρια η μείωση του z συνεπάγεται πιο stiff καταστατική για το ρευστό σκοτεινής ύλης, εφόσον έχουμε περισσότερη πίεση λόγω της αλληλεπίδρασης. Έτσι επιτρέπεται στο ρευστό σκοτεινής ύλης να αναπτύξει μεγαλύτερη μάζα άρα, ασκείται μεγαλύτερη βαρυτική έλξη στο ρευστό ύλης και συνολικά αυτό μειώνει την μέγιστη μάζα του αστεριού.

Στην ενότητα αυτήν μελετήσαμε τους αστέρες νετρονίων με σημαντική ποσότητα σκοτεινής ύλης στο εσωτερικό τους. Η υπόθεση πως η σκοτεινή ύλη δεν αλληλεπιδρά με την ύλη μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον φορμαλισμό δύο ρευστών. Λαμβάνουμε έτσι κάποια διαφορετικά χαρακτηριστικά από την περίπτωση του ενός ρευστού.

Τα χαρακτηριστικά αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την πειραματική ανίχνευση τέτοιων αστεριών. Στις περιπτώσεις μικρής μάζας σκοτεινής ύλης ή ισχυρών απωστικών αλληλεπιδράσεων η ακτίνα του ρευστού σκοτεινής ύλης ξεπερνάει αυτήν της ύλης. Δημιουργείται επομένως ένα halo σκοτεινής ύλης γύρω από το αστέρι νετρονίων το φαινόμενο θα μπορούσε να ανιχνευτεί συγκρίνοντας την ακτίνα του αστεριού που βλέπουμε, με την καμπύλωση του φωτός που προκαλεί η μάζα του αστερά (gravitational lens). Αν υπάρχει όντως ποσότητα σκοτεινής ύλης εκτός του ορατού αστεριού θα πρέπει να παρατηρείται βαρυτική καμπύλωση πιο μακριά από την ακτίνα που μετράμε. Επίσης ενδιαφέρον έχει η αντίστροφη συμπεριφορά των δύο τύπων αστεριών, στην μεταβολή της ισχύος των απωστικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ σκοτεινής ύλης. Περισσότερη μελέτη μπορούμε να κάνουμε και στην περίπτωση ύπαρξης ελκτικής αλληλεπίδρασης στον σκοτεινό τομέα, τότε οι πυρήνες σκοτεινής ύλης είναι μικρότεροι σε μάζα και ακτίνα. Για αυτό προκαλούν ελάχιστη μείωση της μάζας του αστεριού όταν η αρχική πυκνότητα σκοτεινής ύλης είναι μικρή. Ξεκινώντας όμως με ρ_{cDM} μεγαλύτερο από αυτό της ύλης και υποθέτοντας μία ήπια ελκτική δύναμη, μπορεί να δημιουργηθεί σημαντική ποσότητα σκοτεινής ύλης στο εσωτερικό του αστεριού. Στο διάγραμμα 3.18 δείχνουμε δύο περιπτώσεις όπου η σκοτεινή ύλη με ελκτική αλληλεπίδραση δημιουργεί αρκετά σημαντικό πυρήνα, ώστε να μεταβάλει την μέγιστη μάζα.



Σχήμα 3.18: Καμπύλες μάζας και ακτίνας για αστέρι δύο ρευστών. Οι καμπύλες απεικονίζουν διαφορετική επιλογή σταθεράς z για την ελκτική αλληλεπίδραση.

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα

Στην ενότητα κάθε διαφορετικού συστήματος που μελετήσαμε δώσαμε μία εξήγηση για την παρατηρούμενη συμπεριφορά και κάναμε μία αναφορά στα βασικά συμπεράσματά μας. Στο κεφάλαιο αυτό θα ανακεφαλαιώσουμε σύντομα τα συμπεράσματα κάθε συστήματος.

Αρχικά εξετάσαμε την περίπτωση που τα νετρόνια αλληλεπιδρούν με σωματίδια σκοτεινής ύλης και οι πληθυσμοί των δύο σωματιδίων βρίσκονται σε χημική ισορροπία. Συμπεράναμε ότι αν η μάζα του DM είναι μικρότερη από 2 GeV το αστέρι μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για την ύπαρξη της. Αντιθέτως η υδροδυναμική ισορροπία του αστεριού δεν είναι ευαίσθητη σε πιο βαριά σωματίδια σκοτεινής ύλης. Για να μπορεί το μοντέλο σκοτεινής ύλης να εξηγήσει την απόκλιση στον χρόνο ημιζωής του νετρονίου πρέπει να έχουμε $m_\chi < m_n$, οι παρατηρήσεις αστέρων νετρονίων απαγορεύουν την ύπαρξη τέτοιων σωματιδίων όταν ο σκοτεινός τομέας αποτελείται μόνο από τα φερμιόνια χ .

Δεύτερον προσπαθώντας να αποφύγουμε τον περιορισμό των αστέρων, προσθέσαμε στο μοντέλο μία απωστική αλληλεπίδραση στην λαγκραντζιανή του σκοτεινού τομέα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι αν η αλληλεπίδραση αυτή είναι αρκετά ισχυρή οι τωρινές παρατηρήσεις αστέρων νετρονίων μπορούν να εξηγηθούν, επομένως είναι πιθανή η ύπαρξη τέτοιων σωματιδίων.

Τρίτον έχοντας δείξει ότι οι αστέρες νετρονίων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξετάσουν μοντέλα σκοτεινής ύλης, θέλαμε να δοκιμάσουμε την περίπτωση που το σωματίδιο σκοτεινής ύλης αλληλεπιδρά με τα λεπτόνια. Το κίνητρό μας είναι να μελετήσουμε τα μοντέλα σκοτεινής ύλης που περιλαμβάνουν σωματίδια τα όποια αλληλεπιδρούν με τα μιονία. Η αλληλεπίδραση αυτή είναι ικανή να διορθώσει το πρόβλημα της ανώμαλης μαγνητικής ροπής του μιονίου. Συμπεράναμε πως γενικά τα λεπτόνια συνεισφέρουν ελάχιστα στην πίεση του αστεριού στις μεγάλες πυκνότητες, επομένως δεν υπάρχει μεγάλη ευαισθησία των αστέρων στην ύπαρξη τους. Τα αστέρια όμως ψύχονται μέσω των διεργασιών $U\mu\alpha$, οι οποίες επιτρέπονται μόνο αν ικανοποιείται η

τριγωνική ανισότητα $p_{f,n} \leq p_{f,p} + p_{f,e(\mu)}$. Δείξαμε ότι αλλαγές στον πληθυσμό μιονίων μπορούν να ανοίξουν το κανάλι της Uica για μίονια, αυξάνοντας έτσι τον ρυθμό φύξης των αστέρων. Για να επιτευχθεί αυτό πρέπει η αλληλεπίδραση με την σκοτεινή ύλη να είναι πολλές τάξεις μεγέθους πιο ισχυρή από την επιτρεπόμενη σύμφωνα με τις μετρήσεις του πειράματος BaBar.

Τέταρτον, μελετήσαμε την ύπαρξη μαύρης τρύπας εντός του αστεριού. Υπάρχει αρκετή βιβλιογραφία που εξετάζει την περίπτωση αυτήν, όμως δεν έχει υπάρξει έλεγχος της επίδρασης στην υδροδυναμική ισορροπία. Συμπεράναμε ότι μαύρες τρύπες μικρότερες από $10^{-2} M_{\odot}$ δεν μεταβάλλουν σημαντικά την μάζα των πιο βαρέων αστέρων. Είδαμε επίσης ότι ο κύριος λόγος που δεν έχουμε μεγάλη μεταβολή είναι η συσσώρευση ύλης γύρω από την μαύρη τρύπα. Τελικώς, εξετάσαμε την περίπτωση σκοτεινής ύλης που δεν αλληλεπιδρά με την ύλη. Χάνουμε έτσι την χημική ισορροπία μεταξύ των πληθυσμών, το αστέρι αυτό επομένως αποτελείται από δύο ρευστά που δεν επικοινωνούν μεταξύ τους. Η μοναδική επίδραση της σκοτεινής ύλης πάνω στην ύλη είναι βαρυτική. Είδαμε ότι αυτό το σύστημα έχει κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά σε σχέση με τα αστέρια ενός ρευστού, παραδείγματος χάρη η συμπεριφορά σε απωστικές αλληλεπιδράσεις του σκοτεινού τομέα και τα halo σκοτεινής ύλης που δημιουργούνται. Επομένως, είναι εφικτό πειραματικά να διαχωριστούν οι παρατηρήσεις αστέρων νετρονίου και admixed αστεριών.

Στην εργασία αυτή δείξαμε ότι οι αστέρες νετρονίων αποτελούν ένα πολύ ενδιαφέρον σύστημα, που μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για την ύπαρξη σκοτεινής ύλης διαφόρων ειδών. Με την δημιουργία νέων βαρυτικών συμβολόμετρων και πιο ευαίσθητων τηλεσκοπίων, αυξάνονται κατά πολύ τα πειραματικά δεδομένα που έχουμε για αστέρες νετρονίων. Ενώ παράλληλα η καταστατική εξίσωση σε τόσο μεγάλες πυκνότητες παραμένει ως επί το πλείστον άγνωστη, είναι σημαντικό επομένως να γνωρίζουμε την επίδραση της σκοτεινής ύλης στα χαρακτηριστικά του αστεριού. Έτσι με την χρήση των νέων δεδομένων μπορούμε να ελέγξουμε τα διάφορα μοντέλα σκοτεινής ύλης και να περιορίσουμε τον παραμετρικό χώρο των ελεύθερων μεταβλητών τους.

Παράρτημα Α΄

Λύση εξισώσεων Einstein για αστέρι νετρονίων

Θα υπολογίσουμε τον ταυστή Ricci μέσω των vielbeins κάνοντας χρήση των σχέσεων δομής του Cartan. Η μέθοδος αυτή περιγράφεται σε αρκετά βιβλία, μια ωραία και συνοπτική παρουσίαση δίνεται στις σημειώσεις του Tong [40].

Α΄.1 Connection 1-forms

Έχουμε την μετρική

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Μπορούμε να διαλέξουμε μία βάση που δεν είναι βάση συντεταγμένων αλλά είναι πολύ χρήσιμη στους υπολογισμούς. Η βάση αυτή είναι η ορθοκανονική βάση, για την οποία ισχύει

$$g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) = \eta_{ab}.$$

Τα στοιχεία της βάσης λέγονται tetrads ή vielbeins, η δυϊκή βάση βρίσκεται στον χώρο των one-form και ικανοποιεί την σχέση

$$ds^2 = \eta_{ab} \hat{\theta}^a \hat{\theta}^b.$$

Για την μετρική μας τα στοιχεία της βάσεις είναι τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^0 &= e^\Phi dt \\ \hat{\theta}^1 &= \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1/2} dr \\ \hat{\theta}^2 &= r d\theta \\ \hat{\theta}^3 &= r \sin \theta d\phi.\end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των συμβόλων Christoffel χρειαζόμαστε την exterior derivative, για τα στοιχεία της βάσης μας αυτή υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}d\hat{\theta}^0 &= \partial_r e^\Phi dr \wedge dt = \Phi' e^\Phi dr \wedge dt \\ d\hat{\theta}^1 &= \partial_r \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1/2} dr \wedge dr = 0 \\ d\hat{\theta}^2 &= dr \wedge d\theta \\ d\hat{\theta}^3 &= \sin \theta dr \wedge d\phi + r \cos \theta d\theta \wedge d\phi.\end{aligned}$$

Η πρώτη σχέση Cartan για χώρους χωρίς στρέψη είναι η εξής

$$d\hat{\theta}^a = -\omega^a_b \wedge \hat{\theta}^b,$$

από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε τα connection 1-form ω_b^a

$$\begin{aligned}\omega^0_1 &= \omega^1_0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \Phi' \hat{\theta}^0 \\ \omega^2_1 &= -\omega^1_2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \frac{1}{r} \hat{\theta}^2 \\ \omega^3_1 &= -\omega^1_3 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \frac{1}{r} \hat{\theta}^3 \\ \omega^3_2 &= -\omega^2_3 = \frac{\cot \theta}{r} \hat{\theta}^3.\end{aligned}$$

Συχνά τα ω^a_b ονομάζονται και spin connection από αυτά εύκολα προσδιορίζεται η σύνδεση Levi-Civita αλλά δεν την χρειαζόμαστε.

A'.2 Connection 2-forms

Από τα ω^a_b βρίσκουμε τα connection two-forms που έχουν άμεση συσχέτιση με τον ταυυστή Reimann. Για τον υπολογισμό χρειαζόμαστε την δεύτερη σχέση Cartan

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b.$$

Έτσι υπολογίζουμε τα μη μηδενικά στοιχεία

$$R^0_1 = d\omega^0_1 + \omega^0_c \wedge \omega^c_1$$

όμως το wedge product είναι μηδέν γιατί $\omega^0_1 = -\omega^1_0$ και η παράγωγος του ω^0_1 είναι

$$d\omega^0_1 = \left[\left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right) (\Phi'' + \Phi'^2) + \frac{M - rM'}{r^2} \right] \hat{\theta}^1 \wedge \hat{\theta}^0$$

Έχουμε

$$R^0_1 = \left[\left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right) (\Phi'' + \Phi'^2) + \frac{M - rM'}{r^2} \right] \hat{\theta}^1 \wedge \hat{\theta}^0.$$

Για το R^0_2

$$R^0_2 = \omega^0_1 \wedge \omega^1_2 = \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right) \frac{\Phi'}{r} \hat{\theta}^2 \wedge \hat{\theta}^0$$

Για το R^0_3

$$R^0_3 = \omega^0_1 \wedge \omega^1_3 = \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right) \frac{\Phi'}{r} \hat{\theta}^3 \wedge \hat{\theta}^0$$

Για το R^1_2 χρειαζόμαστε την παράγωγο $d\omega^1_2$

$$d\omega^1_2 = \frac{M'r - M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1/2} dr \wedge d\theta = \frac{M'r - M}{r^3} \hat{\theta}^1 \wedge \hat{\theta}^2,$$

επομένως

$$R^1_2 = \frac{M'r - M}{r^3} \hat{\theta}^1 \wedge \hat{\theta}^2.$$

Για το R^1_3 έχουμε

$$\begin{aligned} d\omega^1_3 &= \left(\frac{M'r - M}{r^2} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1/2} \sin \theta dr \wedge d\phi - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2} \cos \theta d\theta \wedge d\phi \\ &= \frac{M'r - M}{r^3} \hat{\theta}^1 \wedge \hat{\theta}^3 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2} \frac{\cot \theta}{r^2} \hat{\theta}^2 \wedge \hat{\theta}^3 \\ \omega^1_2 \wedge \omega^2_3 &= - \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right)^{1/2} \frac{1}{r} \hat{\theta}^2 \wedge \frac{-\cot \theta}{r} \hat{\theta}^3 \\ &= \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right)^{1/2} \frac{\cot \theta}{r^2} \hat{\theta}^2 \wedge \hat{\theta}^3. \end{aligned}$$

Άρα

$$R^1_3 = d\omega^1_3 + \omega^1_2 \wedge \omega^2_3 = \frac{M'r - M}{r^3} \hat{\theta}^1 \wedge \hat{\theta}^3.$$

Για το R^2_3 έχουμε

$$\begin{aligned} d\omega^2_3 &= \sin \theta d\theta \wedge d\phi \\ &= \frac{1}{r^2} \hat{\theta}^2 \wedge \hat{\theta}^3 \\ \omega^2_1 \wedge \omega^1_3 &= \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right)^{1/2} \frac{1}{r} \hat{\theta}^2 \wedge - \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right)^{1/2} \frac{1}{r} \hat{\theta}^3 \\ &= - \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right) \frac{1}{r^2} \hat{\theta}^2 \wedge \hat{\theta}^3 \end{aligned}$$

επομένως,

$$R^2_3 = d\omega^2_3 + \omega^2_1 \wedge \omega^1_3 = - \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right) \frac{1}{r^2} \hat{\theta}^2 \wedge \hat{\theta}^3 + \frac{1}{r^2} \hat{\theta}^2 \wedge \hat{\theta}^3 = \frac{2M}{r^3} \hat{\theta}^2 \wedge \hat{\theta}^3.$$

A'.3 Riemann tensor

Βρίσκουμε από την σχέση $R^a_b = \frac{1}{2}R^a_{bcd}\hat{\theta}^c \wedge \hat{\theta}^d$ τα στοιχεία του Riemann tensor στην ορθοκανονική βάση:

$$\begin{aligned} R_{0101} &= \left[\left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right) (\Phi'' + \Phi'^2) + \Phi' \left(\frac{M - rM'}{r^2} \right) \right] \\ R_{0202} &= \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right) \frac{\Phi'}{r} \\ R_{0303} &= \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right) \frac{\Phi'}{r} \\ R_{1212} &= \frac{M'r - M}{r^3} \\ R_{1313} &= \frac{M'r - M}{r^3} \\ R_{2323} &= \frac{2M}{r^3}. \end{aligned}$$

Τέλος τα μεταφέρουμε στην κανονική βάση από την σχέση $R_{\mu\nu\rho\sigma} = e^a_\mu e^b_\nu e^c_\rho e^d_\sigma R_{abcd}$

$$\begin{aligned} R_{trtr} &= e^{2\Phi} (\Phi'' + \Phi'^2) + \left(\frac{M - rM'}{r^2} \right) \Phi' e^{2\Phi} \\ R_{t\theta t\theta} &= (r - 2M(r)) \Phi' e^{2\Phi} \\ R_{t\phi t\phi} &= (r - 2M(r)) \sin^2 \theta \Phi' e^{2\Phi} \\ R_{r\theta r\theta} &= \frac{M'r - M}{r - 2M} \\ R_{r\phi r\phi} &= \frac{M'r - M}{r - 2M} \sin^2 \theta \\ R_{\theta\phi\theta\phi} &= 2Mr \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

A'.4 Ricci tensor

Θα υπολογίσουμε τα στοιχεία του ταυστή Ricci, δεν υπάρχουν μη-διαγώνια στοιχεία καθώς όλα τα $R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$ με $\mu \neq \nu$ είναι μηδενικά. Τα διαγώνια στοιχεία υπολογίζονται ως εξής

$$\begin{aligned} R_{tt} &= R^\mu_{t\mu t} = g^{rr} R_{rtrt} + g^{\theta\theta} R_{\theta t\theta t} + g^{\phi\phi} R_{\phi t\phi t} \\ R_{tt} &= \frac{(\Phi'' + \Phi'^2)(r - 2M)e^{2\Phi}}{r} + \frac{(M - rM')\Phi'e^{2\Phi}}{r^2} + 2\frac{(r - 2M)\Phi'e^{2\Phi}}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{rr} &= R^\mu{}_{r\mu r} = g^{tt} R_{trtr} + g^{\theta\theta} R_{r\theta r\theta} + g^{\phi\phi} R_{r\phi r\phi} \\ &= \frac{(rM' - M)}{r^2(r - 2M)} (2 + r\Phi') - (\Phi'' + \Phi'^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= R^\mu{}_{\theta\mu\theta} = g^{tt} R_{t\theta t\theta} + g^{rr} R_{r\theta r\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\theta\phi\theta} \\ R_{\theta\theta} &= M' + \frac{M}{r} + (2M - r)\Phi' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi} &= R^\mu{}_{\phi\mu\phi} = g^{tt} R_{t\phi t\phi} + g^{rr} R_{r\phi r\phi} + g^{\theta\theta} R_{\theta\phi\theta\phi} \\ R_{\phi\phi} &= \left[M' + \frac{M}{r} + (2M - r)\Phi' \right] \sin^2\theta \end{aligned}$$

A'.5 Ricci Scalar

Τέλος μας μένει το βαθμωτό Ricci που είναι η μοναδική σύμπτυξη δεικτών του τανυστή Ricci.

$$\begin{aligned} R &= R^\alpha{}_\alpha = R^t{}_t + R^r{}_r + R^\theta{}_\theta + R^\phi{}_\phi \\ &= g^{tt} R_{tt} + g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} \\ &= 2\frac{(2M - r)\Phi'}{r^2} + \frac{(rM' - M)\Phi'}{r^2} - \frac{(r - 2M)(\Phi'' + \Phi'^2)}{r} \\ &\quad + 2\frac{(rM' - M)}{r^3} + \frac{(rM' - M)\Phi'}{r^2} - \frac{(r - 2M)(\Phi'' + \Phi'^2)}{r} \\ &\quad + 2\frac{(rM' + M)}{r^3} + 2\frac{(2M - r)\Phi'}{r^2} \\ &= 4\frac{(2M - r)\Phi'}{r^2} + 4\frac{M'}{r^2} + 2\frac{(rM' - M)\Phi'}{r^2} - 2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(\Phi'' + \Phi'^2) \\ &= -2\Phi'' - 2\Phi'^2 + \frac{4M}{r}\Phi'' + \frac{4M}{r}\Phi'^2 + \frac{2M'\Phi'}{r} + \frac{6M}{r^2}\Phi' + \frac{4M'}{r^2} - \frac{4\Phi'}{r}. \end{aligned}$$

Μέσω της μεθόδου με τα tetrads υπολογίσαμε όλα τα στοιχεία των τανυστών που χρειαζόμαστε ώστε να λύσουμε τις εξισώσεις Einstein.

A'.6 Einstein Tensor

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

$$\begin{aligned}
 G_{tt} &= 2e^{2\Phi} \frac{M'}{r^2} \\
 G_{rr} &= \frac{2\Phi'}{(r-2M)} - \frac{4M\Phi'}{r(r-2M)} - \frac{2M}{r^2(r-2M)} \\
 G_{\theta\theta} &= r(r-2M)(\Phi'' + \Phi'^2) + (r-M)\Phi' - M' - rM'\Phi' + \frac{M}{r} \\
 G_{\phi\phi} &= \left[r(r-2M)(\Phi'' + \Phi'^2) + (r-M)\Phi' - M' - rM'\Phi' + \frac{M}{r} \right] \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

Α'.7 Δεξί μέλος εξίσωσης Einstein

Υποθέτουμε ότι το εσωτερικό του αστρού είναι ιδανικό ρευστό, άρα περιγράφεται από μια πίεση και την πυκνότητα του. Ο ταυιστής ενέργειας είναι:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}$$

διαλέγουμε σύστημα που κινείται με το ρευστό άρα $U_r = U_\theta = U_\phi = 0$ από την απαίτηση $g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu = -1$ έχουμε ότι $g^{tt}U_t U_t = -1 \Rightarrow U_t = e^\Phi$. Επομένως:

$$\begin{aligned}
 T_{tt} &= \rho e^{2\Phi} \\
 T_{rr} &= \left(\frac{r}{r-2M} \right) P \\
 T_{\theta\theta} &= r^2 P \\
 T_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2 \theta P
 \end{aligned}$$

Α'.8 Εξισώσεις TOV

Σε μονάδες $G = c = 1$

$$\begin{aligned}
 G_{tt} = 8\pi T_{tt} &\Rightarrow M' = 4\pi \rho r^2 \\
 G_{rr} = 8\pi T_{rr} &\Rightarrow \Phi' = \frac{4\pi r^3 P + M}{r(r-2M)}
 \end{aligned}$$

Από διατήρηση ενέργειας έχουμε

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_r T^{rr} + \Gamma^r_{tt} T^{tt} + \Gamma^r_{rr} T^{rr} + \Gamma^r_{\theta\theta} T^{\theta\theta} + \Gamma^r_{\phi\phi} T^{\phi\phi} + \Gamma^\mu_{\mu r} T^{r\mu} = 0$$

$$\Phi' = -\frac{P'}{\rho + P}$$

Αρά η δεύτερη εξίσωση γίνεται

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho + P) \frac{4\pi r^3 P + M}{r(r - 2M)}$$

Αλλιώς έχουμε:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho M}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{M}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

Και το σύστημα συμπληρώνεται από την πρώτη και την σχέση για το $\frac{d\Phi}{dr}$:

$$\frac{d\Phi}{dr} - \frac{1}{\rho + P} \frac{dP}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \left(1 + \frac{P}{\rho}\right)^{-1}$$

Βιβλιογραφία

- ¹J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, “On Massive Neutron Cores”, *Physical Review* **55**, 374–381 (1939).
- ²R. C. Tolman, “Static Solutions of Einstein’s Field Equations for Spheres of Fluid”, *Physical Review* **55**, 364–373 (1939).
- ³P. Demorest, T. Pennucci, S. Ransom, M. Roberts, and J. Hessels, “Shapiro delay measurement of a two solar mass neutron star”, *Nature* **467**, 1081–1083 (2010).
- ⁴G. Bertone and D. Hooper, “History of dark matter”, *Reviews of Modern Physics* **90**, 045002 (2018).
- ⁵P. van Dokkum et al., “A trail of dark-matter-free galaxies from a bullet-dwarf collision”, *Nature* **605**, 435–439 (2022).
- ⁶D. Clowe et al., “A direct empirical proof of the existence of dark matter”, *The Astrophysical Journal* **648**, L109–L113 (2006).
- ⁷*Chandra :: Photo Album :: 1E 0657-56 :: 21 Aug 06.*
- ⁸G. Baym, D. H. Beck, P. Geltenbort, and J. Shelton, “Testing dark decays of baryons in neutron stars”, *Physical Review Letters* **121**, 061801 (2018).
- ⁹J. M. Cline and J. M. Cornell, “Dark decay of the neutron”, *Journal of High Energy Physics* **2018**, 81 (2018).
- ¹⁰E. J. Chun and T. Mondal, “Leptophilic bosons and muon g-2 at lepton colliders”, *Journal of High Energy Physics* **2021**, 44 (2021).
- ¹¹S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: the physics of compact objects* (Wiley, New York, 1983).
- ¹²G. Burgio and I. Vidaña, “The Equation of State of Nuclear Matter: From Finite Nuclei to Neutron Stars”, *Universe* **6**, 119 (2020).
- ¹³F. Douchin and P. Haensel, “A unified equation of state of dense matter and neutron star structure”, *Astronomy & Astrophysics* **380**, 151–167 (2001).

-
- ¹⁴S. Gandolfi, J. Carlson, and S. Reddy, “The maximum mass and radius of neutron stars and the nuclear symmetry energy”, *Physical Review C* **85**, 032801 (2012).
- ¹⁵G. Baym, C. Pethick, and P. Sutherland, “The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models”, *The Astrophysical Journal* **170**, 299 (1971).
- ¹⁶M. Shibata, E. Zhou, K. Kiuchi, and S. Fujibayashi, “Constraint on the maximum mass of neutron stars using GW170817 event”, *Physical Review D* **100**, 023015 (2019).
- ¹⁷B. Margalit and B. D. Metzger, “Constraining the Maximum Mass of Neutron Stars from Multi-messenger Observations of GW170817”, *The Astrophysical Journal Letters* **850**, L19 (2017).
- ¹⁸M. C. Miller et al., “PSR J0030+0451 Mass and Radius from NICER Data and Implications for the Properties of Neutron Star Matter”, *The Astrophysical Journal Letters* **887**, L24 (2019).
- ¹⁹P. Haensel and B. Pichon, “Experimental nuclear masses and the ground state of cold dense matter”, *Astronomy and Astrophysics* **283**, 313–318 (1994).
- ²⁰T. S. Olson, “Maximally incompressible neutron star matter”, *Physical Review C* **63**, 015802 (2000).
- ²¹F. E. Wietfeldt and G. L. Greene, “*Colloquium* : The neutron lifetime”, *Reviews of Modern Physics* **83**, 1173–1192 (2011).
- ²²C. Patrignani, “Review of Particle Physics”, *Chinese Physics C* **40**, 100001 (2016).
- ²³B. Fornal and B. Grinstein, “Dark Matter Interpretation of the Neutron Decay Anomaly”, *Physical Review Letters* **120**, 191801 (2018).
- ²⁴B. Grinstein, C. Kouvaris, and N. G. Nielsen, “Neutron Star Stability in Light of the Neutron Decay Anomaly”, *Physical Review Letters* **123**, 091601 (2019).
- ²⁵S. W. Randall, M. Markevitch, D. Clowe, A. H. Gonzalez, and M. Bradac, “Constraints on the Self-Interaction Cross-Section of Dark Matter from Numerical Simulations of the Merging Galaxy Cluster 1E 0657-5”, *The Astrophysical Journal* **679**, 1173–1180 (2008).
- ²⁶Muon, Collaboration, and G. W. Bennett, “Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL”, *Physical Review D* **73**, 072003 (2006).

-
- ²⁷B. Abi et al., “Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm”, *Physical Review Letters* **126**, 141801 (2021).
- ²⁸G. C. Branco et al., “Theory and phenomenology of two-Higgs-doublet models”, *Physics Reports* **516**, 1–102 (2012).
- ²⁹C. Kouvaris and P. Tinyakov, “Growth of Black Holes in the interior of Rotating Neutron Stars”, *Physical Review D* **90**, 043512 (2014).
- ³⁰Y. Génolini, P. Serpico, and P. Tinyakov, “Revisiting primordial black holes capture into neutron stars”, *Physical Review D* **102**, 083004 (2020).
- ³¹M. Sasaki, V. Takhistov, V. Vardanyan, and Y.-l. Zhang, “Establishing the Non-Primordial Origin of Black Hole-Neutron Star Mergers”, *The Astrophysical Journal* **931**, 2 (2022).
- ³²C. B. Richards, T. W. Baumgarte, and S. L. Shapiro, “Accretion onto a small black hole at the center of a neutron star”, *Physical Review D* **103**, 104009 (2021).
- ³³C. B. Richards, T. W. Baumgarte, and S. L. Shapiro, “Relativistic Bondi accretion for stiff equations of state”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **502**, 3003–3011 (2021).
- ³⁴A. Das, T. Malik, and A. C. Nayak, *Dark matter admixed neutron star properties in the light of gravitational wave observations: a two fluid approach*, Nov. 2020.
- ³⁵J. Ellis et al., “Dark matter effects on neutron star properties”, *Physical Review D* **97**, 123007 (2018).
- ³⁶S.-C. Leung, M.-C. Chu, and L.-M. Lin, “Dark-Matter Admixed Neutron Stars”, *Physical Review D* **84**, 107301 (2011).
- ³⁷Q.-F. Xiang, W.-Z. Jiang, D.-R. Zhang, and R.-Y. Yang, “Effects of fermionic dark matter on properties of neutron stars”, *Physical Review C* **89**, 025803 (2014).
- ³⁸F. Sandin and P. Ciarcelluti, “Effects of mirror dark matter on neutron stars”, *Astroparticle Physics* **32**, 278–284 (2009).
- ³⁹N. F. Naidu, S. Carloni, and P. Dunsby, “Two-fluid stellar objects in General Relativity: the covariant formulation”, *Physical Review D* **104**, 044014 (2021).
- ⁴⁰D. Tong, “University of Cambridge Part III Mathematical Tripos”, (2019).
- ⁴¹J. Antoniadis et al., “A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary”, *Science* **340**, 1233232 (2013).

⁴²P. Ciarcelluti and F. Sandin, “Have neutron stars a dark matter core?”, *Physics Letters B* **695**, 19–21 (2011).

⁴³C. Kouvaris, *The Dark Side of Neutron Stars*, Aug. 2013.