

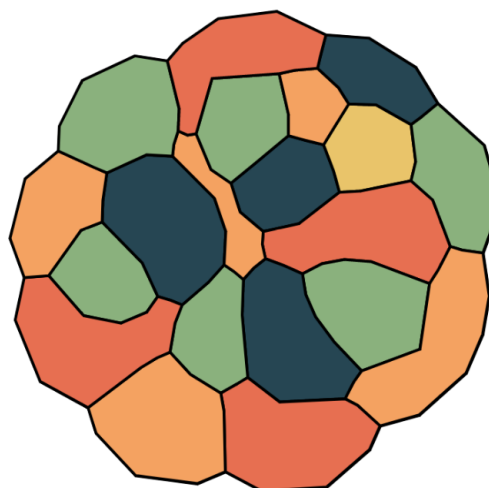
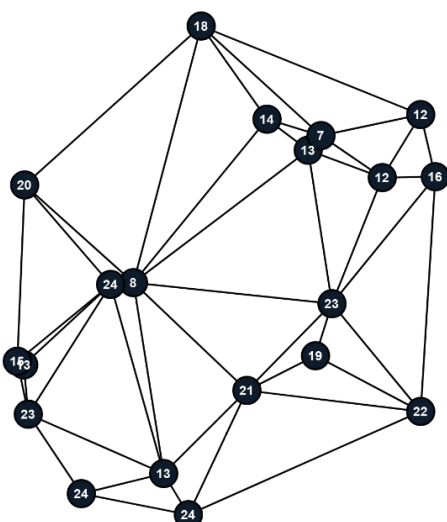


Μελέτη Χαρτογραφημάτων

Στην επιστημονική περιοχή: Πληροφορική

Διπλωματική Εργασία

Τόλιας Αθανάσιος



Αθήνα, 6/2023

Επιβλέπων:

Α. Συμβώνης, Καθηγητής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Τριμελής Επιτροπή:

Ι. Κολέτσος, Αναπληρωτής Καθηγητής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Α. Συμβώνης, Καθηγητής, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Δ. Φωτάκης, Καθηγητής, Σ.Η.Μ.Μ.Υ.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εμπιστοσύνη προς το πρόσωπο μου και η καθοδήγηση από τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Αντώνιο Συμβώνη ήταν καθοριστική για την ομαλή εξέλιξη της παρούσας εργασίας και την επίτευξη των αποτελεσμάτων της. Ιδιαίτερα μεγάλη συνεισφορά στην εργασία αυτή είχε και η καθηγήτρια κ. Tamara Mchedlidze (Πανεπιστήμιο Ουτρέχτης) η οποία με τις ειδικές γνώσεις που έχει επί του θέματος καθώς και τις υπέροχες ιδέες που είχε κατά τις συζητήσεις μας συνείσφερε τα μέγιστα στην εργασία μου, για αυτό την ευχαριστώ πολύ. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την μεταδιδάκτορα κ. Χρυσάνθη Ραυτοπούλου και την Ελένη Κατσάνου που με ανεχόταν καθημερινά για έναν χρόνο στο γραφείο, με βοηθούσαν με τεχνικές δυσκολίες και καθημερινά ζητήματα που προέκυπταν και δεχόταν να συζητήσουν κάθε ιδέα που επεξεργαζόμουν (όσο κακή και αν ήταν).

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους και την οικογένεια μου, η υποστήριξη τους ήταν ανεκτίμητη. Ξεχωριστές ευχαριστίες ωστόσο αξίζει η αδερφή μου, Άννα Τόλια, που μου στάθηκε καθημερινά, ειδικά τις περιόδους που ήμουν ιδιαίτερα αγχωμένος.

Αθανάσιος Τόλιας

© (2023) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα γραφήματα είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη μορφή οργάνωσης δεδομένων, ωστόσο, η κατανόηση της πληροφορίας που πραγματεύονται είναι συχνά δύσκολη. Αναπόφευκτα λοιπόν προκύπτει η ανάγκη απεικόνισης τους. Οι μεταφορικοί χάρτες είναι μια εναλλακτική μορφή απεικόνισης γράφων κατά την οποία οι κόμβοι απεικονίζονται ως περιοχές, οι ακμές ως μη τετριμμένα σύνορα μεταξύ περιοχών και τα βάρη των κορυφών ως εμβαδά των αντίστοιχων περιοχών. Η απεικόνιση αυτή βασίζεται στην εξοικείωση των χρηστών με τους γεωγραφικούς χάρτες και την ανεπτυγμένη ανθρώπινη αντίληψη του εμβαδού ώστε να παρουσιάσει γραφήματα με ενδιαφέρον και κατανοητό τρόπο.

Στην παρούσα εργασία μελετάμε και υλοποιούμε τους αλγόριθμους των Alam et al. [3] και των Mchedlitze και Schnorr [16] για την δημιουργία μεταφορικών χαρτών, βελτιώνουμε τον δεύτερο εξ' αυτών και επεκτείνουμε την κλάση των γραφημάτων που μπορεί να χειριστεί από εσωτερικά τριγωνοποιημένα δισυνεκτικά επίπεδα γραφήματα σε δισυνεκτικά επίπεδα γραφήματα. Παράλληλα, πραγματοποιούμε μία εκτενή πειραματική μελέτη ώστε να συγκρίνουμε τον αλγόριθμο μας έναντι εκείνου που βελτιώσαμε καθώς και να δούμε πως συμπεριφέρεται ο αλγόριθμος μας για διάφορες τιμές των παραμέτρων που μελετήσαμε. Η μελέτη μας δείχνει ότι πράγματι βελτιώνουμε τον αλγόριθμο των Mchedlitze και Schnorr [16] καθώς ρίχνουμε το μέσο χαρτογραφικό σφάλμα από 30% κοντά στο μηδέν, πληρώνοντας μοναχά μια μικρή ποσότητα πολυγωνικής πολυπλοκότητας στον τελικό χάρτη. Ταυτόχρονα, επιβεβαιώνουμε ότι ο αλγόριθμος χειρίζεται ικανοποιητικά γραφήματα της επέκτασης που πραγματοποιήσαμε.

Λέξεις Κλειδιά: Μεταφορικοί χάρτες · απεικόνιση μέσω επαφής · αλγόριθμος βασισμένος σε δυνάμεις · χαρτογραφική ακρίβεια · πολυγωνική πολυπλοκότητα

ABSTRACT

Graphs are a really common way to structure data, but in order to interpret the information contained in them we often need to visualize them. Metaphoric Maps are an alternative way of visualizing graphs, where vertices are visualized as regions, edges as non degenerate borders among regions and vertex weights as areas of the regions. This type of visualizations benefits from the familiarity of users with geographical maps and their advanced interpretation of area to demonstrate graphs in an interesting and understandable way.

In this thesis we study and implement the algorithms of Alam et al. [3] and Mchedlitze and Schnorr [16] that create metaphoric maps, we improve upon the second of them and we expand the class of potential input graphs from internally triangulated biconnected planar graphs to biconnected planar graphs. Moreover, we perform an extended experimental evaluation to compare our algorithm with the one we improved upon and to study how our algorithm performs for different initial conditions and parameters. Our experiments demonstrate that we indeed improved the aforementioned algorithm as we lower the average cartographic error from 30% to nearly zero, by paying a small price in our map's complexity. At the same time, we confirm that our algorithm can handle the graphs from the expanded class.

Keywords: Metaphoric maps · contact representation · force-directed algorithm · cartographic accuracy · polygon complexity

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	7
1.1	Εισαγωγή και Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	7
1.2	Συνεισφορά αυτής της εργασίας	9
1.3	Ορισμοί	9
1.4	Μετρικές ποιότητας μεταφορικών χαρτών	11
2	ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΑΡΧΙΚΟΥ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΟΥ ΧΑΡΤΗ	14
2.1	Δημιουργία μέσω δυϊκού γραφήματος	15
2.2	Δημιουργία μεταφορικού χάρτη με οκτάγωνα	17
3	MS-ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ	19
3.1	Δυνάμεις	19
3.2	Ένωση και υποδιαίρεση ακμών	22
3.3	Περιορισμός κίνησης κορυφών	23
4	ΕΠΕΚΤΑΣΗ MS-ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ	24
4.1	Επέκταση μετασχηματισμού σε μη τριγωνοποιημένα γραφήματα	24
4.2	Εισαγωγή ακαμψίας	27
5	ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ	29
6	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ	31
6.1	Παραγωγή τυχαίων γραφημάτων	31
6.2	Προσδιορισμός σταθερών του αλγορίθμου μας	32
6.3	Σύγκριση με MS-Αλγόριθμο	34
6.4	Σύγκριση επίδοσης αρχικών μεταφορικών χαρτών	38
6.5	Αλληλοεξάρτηση μεταξύ χαρτογραφικού σφάλματος και πολυπλοκότητας	39
6.6	Ανάλυση για μη τριγωνοποιημένα γραφήματα	41

7 ΕΠΙΛΟΓΟΣ	43
7.1 Μελλοντική δουλειά	43
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	45

1.1 Εισαγωγή και Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Στην εποχή μας υπάρχει ολοένα και μεγαλύτερη ανάγκη κατανόησης δεδομένων, οπότε είναι ιδιαίτερα σημαντικό να αναπτυχθούν μέθοδοι που να συμβάλλουν προς αυτόν τον σκοπό. Η απεικόνιση δεδομένων ως τομέας της πληροφορικής μελετά το πως μπορεί κανείς να παρουσιάσει δεδομένα ενδιαφέρον τρόπο που ταυτόχρονα γίνεται εύκολα αντιληπτός από τους χρήστες. Οι μεταφορικοί χάρτες είναι ένα πολύ ενδιαφέρον είδος απεικόνισης δεδομένων καθώς έχουν ένα μοναδικό πλεονέκτημα, βασίζονται στην εξοικείωση των ανθρώπων με τους γεωγραφικούς χάρτες εξάπτοντας έτσι την περιέργεια των χρηστών και βοηθώντας τους να αντιληφθούν καλύτερα την πληροφορία που απεικονίζεται. Έχει αποδειχθεί πειραματικά πως απεικονίσεις γραφημάτων με χάρτες είναι πιο διασκεδαστικές για τους χρήστες σε σχέση με τις καθιερωμένες απεικονίσεις με δίκτυα κόμβων και ακμών [18]. Ταυτόχρονα, έχει παρατηρηθεί ότι οι χάρτες έχουν καλύτερη επίδοση στην κατανόηση ιεραρχίας σε σχέση με τα treemaps [6]. Τέλος, ένα ιδιαίτερα σημαντικό πλεονέκτημα των απεικονίσεων αυτών είναι η έμφυτη δυνατότητα τους να απεικονίζουν το βάρος ενός κόμβου ως το εμβαδόν της περιοχής που τον αντιπροσωπεύει. Τέτοιου είδους απεικονίσεις λέγονται area-proportional απεικονίσεις μέσω επαφής.

Μια απεικόνιση κοντινή στους μεταφορικούς χάρτες που έχει απασχολήσει πολλούς επιστήμονες εδώ και δεκαετίες είναι τα Χαρτογραφήματα. Τα χαρτογραφήματα είναι απεικονίσεις που συνδυάζουν στατιστική και γεωγραφική πληροφορία σε θεματικούς χάρτες, των οποίων οι περιοχές συρρικνώνονται ή διαστέλλονται ώστε τα εμβαδά τους να αντιπροσωπεύουν κάποιο στατιστικό [17]. Τέτοιου είδους απεικονίσεις χρησιμοποιούνται τουλάχιστον 170 χρόνια τώρα ενώ η μελέτη των χαρτογραφημάτων ως πεδίο της πληροφορικής είναι πάνω από 50 ετών [24].

Στα 50 χρόνια έρευνας έχουν προταθεί και υλοποιηθεί πολλές και εξαιρετικά διαφορετικές προσεγγίσεις για την δημιουργία χαρτογραφημάτων. Η ποιότητα των προσεγγίσεων αυτών καθορίζεται από το πόσο καλά βελτιστοποιούν μία ή περισσότερες από τις ακόλουθες απαιτήσεις [17]:

- **Στατιστική ακρίβεια:** Η στατιστική ακρίβεια αναφέρεται στο πόσο καλά το εμβαδόν των περιοχών αντιπροσωπεύει το στατιστικό που παρουσιάζει ο χάρτης.
- **Γεωγραφική ακρίβεια:** Η γεωγραφική ακρίβεια αναφέρεται στο πόσο τα σχήματα των προσαρμοσμένων περιοχών καθώς και η τοποθεσία τους στον τελικό χάρτη ανταποκρίνονται στον αρχικό χάρτη.
- **Τοπολογική ακρίβεια:** Η τοπολογική ακρίβεια αναφέρεται στο πόσο καλά η τοπολογία του τελικού χάρτη αντιστοιχεί στην τοπολογία του αρχικού χάρτη, δηλαδή κατά πόσο διατηρούνται οι σχέσεις γειτνίασης και δεν δημιουργούνται καινούριες.

Παρατηρώντας τις παραπάνω απαιτήσεις είναι αρκετά εμφανές ότι το πρόβλημα δημιουργίας χαρτογραφημάτων είναι ιδιαίτερα κοντινό με το πρόβλημα δημιουργίας μεταφορικών χαρτών. Βασική διαφορά αποτελεί το γεγονός ότι κατά την δημιουργία των μεταφορικών χαρτών δεν υπάρχει αρχικός χάρτης τον οποίο θέλουμε να προσεγγίσουμε, καθιστώντας την απαίτηση για γεωγραφική ακρίβεια ανούσια. Σε αυτό το σημείο, θα παρουσιάσουμε έρευνα στον χώρο των χαρτογραφημάτων που είναι σχετική με την δουλειά μας.

Στην θεωρητική μελέτη των μεταφορικών χαρτών, η πολυπλοκότητα των περιοχών είχε ορισθεί ως ο μέγιστος αριθμός πλευρών ανά περιοχή. Μια σειρά από θεωρητικές δουλειές αφιερώθηκαν στην μείωση του αριθμού αυτού για ορθογώνιες area-proportional απεικονίσεις μέσω επαφής από τον αρχικό αριθμό 40 [10] στον τελικό 8 [2]. Παράλληλα, σχετική έρευνα διεξάγεται στις area proportional απεικονίσεις μέσω επαφής με μία διαφορετική απαίτηση, συγκεκριμένα η διαδικασία απεικόνισης αρχίζει από μία επίπεδη απεικόνιση ενός γραφήματος στις όψεις της οποίας ανατίθεται βάρος. Στόχος είναι η τροποποίηση της απεικόνισης με τέτοιο τρόπο ώστε, χωρίς να χαθεί η επίπεδη εμφύτευση του γραφήματος, οι περιοχές να αποκτήσουν εμβαδόν ανάλογο με το βάρος που τους ανατέθηκε. Ο Thomassen [23] έδειξε ότι κάθε ενεπίπεδο κυβικό γράφημα είναι area-universal, δηλαδή τέλεια χαρτογραφική ακρίβεια είναι επιτεύξιμη, ενώ κατά την επιθυμητή απεικόνιση οι περιοχές που προκύπτουν φράσσονται από τρίγωνα. Η Kleist [15] έδειξε ότι αρκεί ένα bend ανά ακμή ώστε κάθε ενεπίπεδο γράφημα να είναι area universal. Παρά την πρόοδο στις θεωρητικές προσεγγίσεις που εγγυώνται μικρό αριθμό πλευρών και άριστη χαρτογραφική ακρίβεια [2, 15, 23], οι προσεγγίσεις αυτές δεν προσπαθούν να αποφύγουν χαρακτηριστικά που κάνουν τις περιοχές οπτικά πολύπλοκες, όπως λεπτοί μακρείς διάδρομοι ή αιχμηρές περιοχές, με αποτέλεσμα οι απεικονίσεις που προκύπτουν να μην φαίνονται ιδιαίτερα απλές.

Ταυτόχρονα, μεγάλος όγκος δουλειάς έχει αφιερωθεί στην ανάπτυξη απεικονίσεων γραφημάτων με απλές περιοχές, χωρίς ωστόσο να δίνεται έμφαση στην παρουσίαση του βάρους του στατιστικού που απεικονίζεται. Για παράδειγμα, τα χαρτογραφήματα που αναπτύχθηκαν από τον Dorling [12] απεικονίζουν τις περιοχές ως κύκλους, τα χαρτογραφήματα Demers [11] απεικονίζουν τις περιοχές ως τετράγωνα, τέλος τα μωσαϊκά χαρτογραφήματα [9] συνήθως έχουν περιοχές με χαμηλή πολυπλοκότητα δεδομένου ότι τα σύνορα τους έχουν περιορισμένο αριθμό γωνιών. Αντίθετα, προσεγγίσεις που δεν προσπαθούν να βελτιστοποιήσουν την πολυπλοκότητα των περιοχών συνήθως έχουν ιδιαίτερα πολύπλοκα περιγράμματα περιοχών, για περισσότερες πληροφορίες βλέπε [17].

1.2 Συνεισφορά αυτής της εργασίας

Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, η απεικόνιση γραφημάτων μέσω απεικονίσεων μέσω επαφής έχει μελετηθεί στο παρελθόν. Ήδη έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι που δημιουργούν απεικονίσεις με άριστη ακρίβεια [3], ενώ ταυτόχρονα υπάρχουν αλγόριθμοι που παράγουν απεικονίσεις με σχήματα με πολύ χαμηλή πολυπλοκότητα [19]. Ωστόσο, πιστεύουμε ότι υπάρχει ένα κενό στην βιβλιογραφία καθώς δεν υπάρχουν αλγόριθμοι που επιτυγχάνουν να συνδυάσουν τις παραπάνω δύο απαιτήσεις.

Σε αυτή την εργασία θα μελετήσουμε δύο αλγορίθμους για παραγωγή *area proportional* απεικονίσεων, θα βελτιώσουμε και επεκτείνουμε έναν εξ' αυτών ώστε να προσπαθήσουμε να πετύχουμε απεικονίσεις που ταυτόχρονα πετυχαίνουν σχεδόν άψογη ακρίβεια με σχήματα με χαμηλή πολυπλοκότητα.

1.3 Ορισμοί

Σε αυτή την ενότητα καλύπτουμε μερικούς ορισμούς που είναι απαραίτητοι για την κατανόηση της υπόλοιπης εργασίας καθώς και θεμελιώνουμε ένα μέρος του συμβολισμού που χρησιμοποιούμε.

1.3.1 Ορισμοί Γραφημάτων

Ορισμός 1.3.1. Ένας γράφημα G είναι ένα αντικείμενο που αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών V και ένα σύνολο ακμών $E \subseteq V \times V$. Οι ακμές αντιπροσωπεύουν μια έννοια σύνδεσης μεταξύ των κορυφών που ενώνουν. Εάν οι ακμές είναι διατεταγμένα σύνολα, τότε το γράφημα μας αποκτά μία έννοια κατεύθυνσης και το γράφημα ονομάζεται κατευθυνόμενο. Στην παρούσα εργασία όλα τα γραφήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι μη κατευθυνόμενα.

Ορισμός 1.3.2. Ένας γράφημα G λέγεται απλό όταν το σύνολο των ακμών του δεν περιέχει ακμές που αρχίζουν και καταλήγουν στον ίδιο κόμβο, δηλαδή αν $(v, w) \in E$

τότε $v \neq w$. Στην εργασία αναφερόμαστε μόνο σε απλά γραφήματα.

Ορισμός 1.3.3. Μονοπάτι λέγεται μια ακολουθία κορυφών $\langle v_1 v_2 \dots v_n \rangle$ έτσι ώστε $(v_i, v_{i+1}) \in E$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Ορισμός 1.3.4. Ένα γράφημα λέγεται συνεκτικό (connected) αν υπάρχει μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κορυφών του.

Ορισμός 1.3.5. Ένα γράφημα G λέγεται k -συνεκτικό (k -connected) όταν έχει τουλάχιστον k κορυφές και αν αφαιρέσουμε λιγότερες από k κορυφές του παραμένει συνεκτικό.

1.3.2 Ορισμοί απεικονίσεων γραφημάτων

Ορισμός 1.3.6. Μία απεικόνιση (drawing) Γ ενός γραφήματος G είναι μία αντιστοίχιση των κορυφών του γραφήματος σε σημεία του επιπέδου και των ακμών σε καμπύλες που ενώνουν τα σημεία που αντιστοιχούν στις κορυφές της ακμής. Μια απεικόνιση λέγεται επίπεδη αν οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε ακμές δεν τέμνουν τον εαυτό τους και δύο καμπύλες τέμνονται μόνο σε σημεία που αντιστοιχούν σε κορυφές στις οποίες προσπίπτουν.

Ορισμός 1.3.7. Ένα γράφημα G λέγεται επίπεδο όταν υπάρχει μια επίπεδη απεικόνιση του.

Ορισμός 1.3.8. Όψη (face) f ενός γραφήματος G ονομάζεται η περιοχή που περιβάλλεται από ένα σύνολο κορυφών και ακμών δεδομένης μιας απεικόνισης Γ του γραφήματος. Περιθώριο μιας όψης f είναι το μονοπάτι που προκύπτει από τις ακμές και τις κορυφές που προσπίπτουν στην όψη αυτή. Σε αυτή την εργασία μπορεί να αναφερόμαστε στο περιθώριο μιας όψης ως όψη. Βαθμός μιας όψης f θα λέγεται ο αριθμός των κορυφών του περιθωρίου της όψης.

Ορισμός 1.3.9. Μία εμφύτευση (embedding) ϕ ενός γραφήματος G είναι μία κλάση ισοδυναμίας επιπέδων απεικονίσεων που ορίζουν το ίδιο σύνολο περιθωρίων όψεων για το G . Μία επίπεδη εμφύτευση ορίζει με μοναδικό τρόπο την εξωτερική και τις εσωτερικές όψεις ενός γραφήματος.

Ορισμός 1.3.10. Θα λέμε ενεπίπεδο γράφημα (plane graph) G_ϕ ένα επίπεδο γράφημα G σε συνδυασμό με μία επίπεδη εμφύτευση του, ϕ .

Ορισμός 1.3.11. Ένα επίπεδο γράφημα G λέγεται μεγιστοτικό ή πλήρως τριγωνοποιημένο όταν κάθε πιθανή προσθήκη ακμής με δεδομένο το σύνολο των κορυφών θα οδηγούσε σε ένα μη επίπεδο γράφημα. Σε ένα πλήρως τριγωνοποιημένο γράφημα όλες οι όψεις είναι βαθμού 3. Όμοια ένα ενεπίπεδο γράφημα G_ϕ λέγεται εσωτερικά τριγωνοποιημένο αν κάθε εσωτερική του όψη είναι βαθμού 3, με την εξωτερική όψη να είναι οποιουδήποτε βαθμού.

Ορισμός 1.3.12. Το δυικό γράφημα (dual graph) G^* ενός ενεπίπεδου γραφήματος G_ϕ με όψεις $F(G_\phi)$ είναι το γράφημα που περιέχει ως κορυφές και ακμές τα σύνολα:
 $V(G^*) = \{f : f \in F(G_\phi)\}$
 $E(G^*) = \{(f, g) : \text{υπάρχει ακμή } e \in E(G_\phi) \text{ έτσι ώστε να περιέχεται στις όψεις } f, g\}$

1.3.3 Ορισμοί απεικονίσεων μέσω επαφής

Ορισμός 1.3.13. Σε μία (απλή) απεικόνιση μέσω επαφής (contact representation) ενός ενεπίπεδου γραφήματος G_ϕ κάθε κορυφή του γραφήματος αναπαριστάται σαν μία περιοχή του επιπέδου, έτσι ώστε η τομή των περιοχών κάθε ζευγαριού κορυφών να είναι κενή. Οι ακμές αναπαρίστανται σαν μη σημειακά σύνορα μεταξύ των περιοχών που αντιπροσωπεύουν τις κορυφές. Δεδομένου του ότι τα γραφήματα που μελετάμε σε αυτή την εργασία είναι απλά, τα σύνορα μεταξύ δύο περιοχών αποτελούνται από ένα συνεχόμενο σύνολο καμπυλών στο επίπεδο.

1.4 Μετρικές ποιότητας μεταφορικών χαρτών

Για να υπάρχει νόημα στην μελέτη που πραγματοποιήσουμε είναι αναγκαίο να ορίσουμε ένα σύνολο από μετρήσιμους στόχους που θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε. Προς αυτόν το σκοπό εισάγουμε ένα σύνολο μετρικών που ποσοτικοποιούν την ποιότητα των χαρτών που παράγουν οι αλγόριθμοι που μελετάμε και έτσι μας ωθούν στις ενέργειες που θα προβούμε για να τους βελτιώσουμε.

1.4.1 Κανονικοποιημένο Χαρτογραφικό Σφάλμα

Ένας θεμελιώδης στόχος που προσπαθούμε να πετύχουμε είναι τα εμβαδά των περιοχών που δημιουργούμε να ανταποκρίνονται όσο το δυνατόν ακριβέστερα γίνεται στα βάρη του αρχικού γραφήματος. Προς αυτό τον στόχο, όμοια με την δουλειά των [2, 1, 16], χρησιμοποιούμε την μετρική *Κανονικοποιημένο Χαρτογραφικό Σφάλμα*.

Έστω μία κορυφή v ενός γραφήματος με βάρη $G = (V, E, w)$, $\mu(v)$ η περιοχή στην οποία αντιστοιχεί στον μεταφορικό χάρτη και έστω $A(\mu(v))$ το εμβαδόν της περιοχής $\mu(v)$. Το κανονικοποιημένο εμβαδόν $A'(\mu(v))$ της περιοχής $\mu(v)$ ορίζεται ως εξής:

$$A'(\mu(v)) := A(\mu(v)) \cdot \frac{\sum_{u \in V} w(u)}{\sum_{u \in V} A(\mu(u))}$$

Και στην συνέχεια ορίζουμε το *Κανονικοποιημένο Χαρτογραφικό Σφάλμα* E_{nc} μιας περιοχής $\mu(v)$ ως:

$$E_{nc}(\mu(v)) := \frac{|A'(\mu(v)) - w(v)|}{\max\{A'(\mu(v)), w(v)\}}$$

1.4.2 Πολυπλοκότητα Πολυγώνου

Ο δεύτερος βασικός στόχος που προσπαθούμε να πετύχουμε είναι τα σχήματα μας να είναι "απλά". Το "απλά" είναι μια φευγαλέα έννοια που είναι δύσκολο να οριστεί, ωστόσο ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε εμείς την απλότητα σε αυτή την εργασία εισάγεται από τον Brinkoff [8], ο οποίος όρισε την πολυπλοκότητα ενός

πολυγώνου P ως μία συνάρτηση τριών ποσοτήτων, της *συχνότητας της ταλάντωσης του συνόρου του πολυγώνου* $freq(P)$, του *πλάτους της ταλάντωσης του συνόρου του πολυγώνου* $ampl(P)$ και της *κυρτότητας του πολυγώνου* $conv(P)$.

Έστω ένα πολύγωνο P με $n \geq 4$ πλευρές, με $hull(P)$ συμβολίζουμε το convex hull, $A(P)$ το εμβαδόν, $circ(P)$ το μήκος της περιμέτρου και $encircle(P)$ το μήκος της περιμέτρου του ελάχιστου περικλείοντα κύκλου. Τέλος, με $L(P)$ συμβολίζουμε το πλήθος των κοίλων γωνιών του πολυγώνου P και $L'(P) = L(P)/(n-3)$. Η συχνότητα της ταλάντωσης του συνόρου του πολυγώνου P ορίζεται ως εξής:

$$freq(P) = 1 + 16 \cdot (L'(P) - 0.5)^4 - 8 \cdot (L'(P) - 0.5)^2$$

Διαισθητικά η ποσότητα αυτή δείχνει ότι όσο περισσότερες ταλαντώσεις έχει το σύνορο ενός πολυγώνου τόσο πιο πολύπλοκο είναι, κάτι που φαίνεται να συμφωνεί με την αντίληψη μας για την πολυπλοκότητα των σχημάτων. Η συνάρτηση $freq(P)$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$ με την ελάχιστη τιμή 0 να επιτυγχάνεται για κυρτά πολύγωνα και την μέγιστη τιμή να επιτυγχάνεται όταν οι μισές γωνίες του πολυγώνου είναι κοίλες.

Το πλάτος της ταλάντωσης του συνόρου του πολυγώνου P ορίζεται ως εξής:

$$ampl(P) = \frac{circ(P) - circ(hull(P))}{circ(P)}$$

Η συνάρτηση $ampl(P)$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$. Η τιμή μηδέν επιτυγχάνεται για κυρτά πολύγωνα ενώ η τιμή της συνάρτησης αυξάνεται όσο αυξάνεται το μήκος της περιμέτρου του πολυγώνου σε σχέση με το μήκος της περιμέτρου του convex hull. Διαισθητικά, η συνάρτηση αυτή τιμωρεί τις μεγάλες αποκλίσεις από κυρτά σχήματα, τα οποία αντιλαμβανόμαστε ως πιο απλά.

Τέλος, ο Brinkoff όρισε την κυρτότητα ενός πολυγώνου P ως εξής:

$$conv(P) = \frac{area(hull(P)) - area(P)}{area(hull(P))}$$

Εμείς σε αυτή την εργασία θα υιοθετήσουμε τον ελαφρώς τροποποιημένο ορισμό που δόθηκε από τους Mchedlidze και Schnorr [16] καθώς θεωρούμε ότι παχιά πολύγωνα που προσεγγίζουν έναν κύκλο είναι λιγότερο πολύπλοκα από λεπτά μακρυνά πολύγωνα. Έτσι σε αυτή την εργασία η κυρτότητα του πολυγώνου θα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$conv'(P) = 1 - \frac{A(P)}{A(encircle(P)) \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right) \cdot \frac{n}{2\pi}}$$

Η ποσότητα αυτή παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$. Η τιμή μηδέν επιτυγχάνεται όταν το πολύγωνο ταυτίζεται με το κανονικό πολύγωνο ενώ η τιμή αυξάνεται όσο το εμβαδόν του πολυγώνου μικραίνει σε σχέση με το εμβαδόν του κανονικού

πολυγώνου.

Με βάση τις ποσότητες που ορίσαμε παραπάνω ο Brinkoff όρισε την πολυπλοκότητα $\text{compl}(P)$ ενός πολυγώνου P να είναι:

$$\text{compl}(P) = 0.8 \cdot \text{ampl}(P) \cdot \text{freq}(P) + 0.2 \cdot \text{conv}'(P)$$

Εδώ αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ο όρος για την συχνότητα της ταλάντωσης και ο όρος για το πλάτος της ταλάντωσης λειτουργούν πολλαπλασιαστικά, διαισθητικά αυτή η επιλογή έχει νόημα καθώς για παράδειγμα ταλαντώσεις με μεγάλη συχνότητα εάν έχουν αμελητέο πλάτος δεν προκαλούν ιδιαίτερα μεγάλη πολυπλοκότητα, παρόμοια μία ταλάντωση χωρίς μεγάλη συχνότητα όσο μεγάλο πλάτος και να έχει δεν αυξάνει τόσο την πολυπλοκότητα του πολυγώνου.

Η πολυπλοκότητα του πολυγώνου $\text{compl}(P)$ ορισμένη με τον παραπάνω ορισμό παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$ με χαμηλές τιμές να σημαίνουν ότι το σχήμα έχει μικρή πολυπλοκότητα.

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΑΡΧΙΚΟΥ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΟΥ ΧΑΡΤΗ

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε δύο μεθόδους κατασκευής του αρχικού μεταφορικού χάρτη. Για κάθε μέθοδο, θα περιγράψουμε τον τρόπο λειτουργίας της και θα αναλύσουμε τυχόν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά που μπορεί να έχει.

Πριν περάσουμε στην παρουσίαση των μεθόδων είναι σημαντικό να προσδιορίσουμε την κλάση των γράφων G που μπορούν να επεξεργαστούν.

Ο πρώτος περιορισμός είναι ότι το γράφημα G πρέπει να είναι επίπεδο και να δίνεται μια επίπεδη εμφύτευση του. Ο περιορισμός για την επιπεδότητα του γραφήματος είναι προφανής, χωρίς αυτόν δεν θα μπορούσε να υπάρξει οποιαδήποτε απεικόνιση εξ επαφής και κατά συνέπεια δεν θα υπήρχε οποιοσδήποτε μεταφορικός χάρτης. Ο περιορισμός για την εμφύτευση του σταθεροποιεί την διάταξη των όψεων του γραφήματος.

Ένας άλλος περιορισμός είναι το γράφημα να είναι εσωτερικά τριγωνοποιημένο. Αυτός ο περιορισμός τέθηκε ώστε να εξασφαλιστεί η επιπλέον ιδιότητα ότι κάθε κόμβος μιας όψης έχει ορατότητα στο βαρύκεντρο της περιοχής του χάρτη. Η συνέπεια αυτού του περιορισμού είναι να δημιουργούνται χάρτες χωρίς οπές.

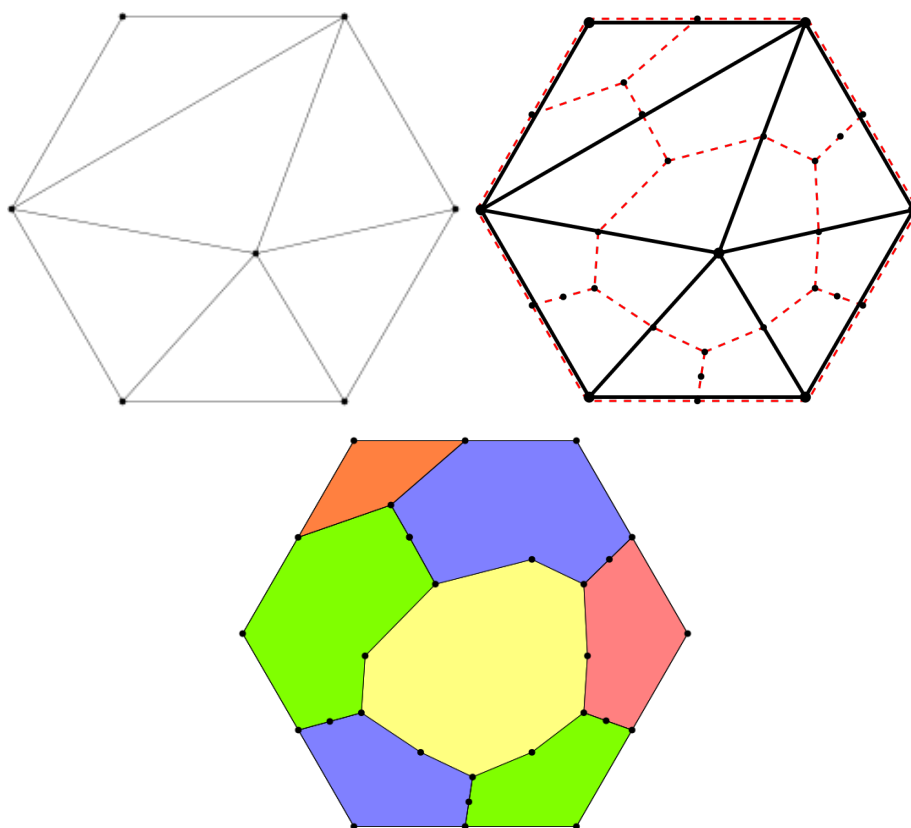
Τέλος, απαιτούμε να το γράφημα να είναι δισυνεκτικά. Είναι απαραίτητο τα γραφήματα να είναι δισυνεκτικά ώστε, σε συνδυασμό με την απαίτηση για εσωτερικά τριγωνοποιημένα γραφήματα, να μην υπάρχουν περιοχές του χάρτη με πολλαπλά σύνορα με την εξωτερική όψη.

2.1 Δημιουργία μέσω δυϊκού γραφήματος

Η μέθοδος αυτή εισάγεται στην δουλειά του Schnorr [19], δέχεται ως είσοδο μία επίπεδη απεικόνιση Γ ενός γραφήματος και παράγει τον αρχικό μεταφορικό χάρτη, παράδειγμα μετασχηματισμού με αυτή την μέθοδο παρουσιάζεται στο διάγραμμα 2.1.

Έχοντας ένα επίπεδο γράφημα μπορούμε πάντα να πάρουμε μία επίπεδη απεικόνιση του σύμφωνα με το θεώρημα του Fary [13, 22] ενώ υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι που μπορούν να δημιουργήσουν μια επίπεδη απεικόνιση του γραφήματος, για τον σκοπό αυτής της εργασίας υλοποιήθηκαν δύο, η μέθοδος του Tutte [25] και η μέθοδος του Schnyder [20].

Έχοντας κατανοήσει λοιπόν την κλάση των γραφημάτων που μπορούμε να χειριστούμε, ας περάσουμε στην παρουσίαση της μεθόδου.



Σχήμα 2.1: Διαδικασία μετατροπής επίπεδης απεικόνισης γραφήματος στον αρχικό μεταφορικό χάρτη.

Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα τμήμα ψευδοκώδικα που περιγράφει την διαδικασία δημιουργίας του αρχικού μεταφορικού χάρτη. Ο ψευδοκώδικας αυτός είναι

επηρεασμένος από τον αντίστοιχο στην διπλωματική εργασία του Schnorr [19] με την διαφορά ότι προσαρμόσαμε τον συμβολισμό ώστε να αντιστοιχεί σε αυτόν της εργασίας μας και απλοποιήσαμε τον κώδικα ώστε να γίνει ευκολότερα κατανοητός. Η εικόνα 2.1 παρουσιάζει ένα παράδειγμα δημιουργίας αρχικού μεταφορικού χάρτη με βάση τον αλγόριθμο που ακολουθεί.

Algorithm 1 Αλγόριθμος μετατροπής επίπεδης απεικόνισης σε αρχικό μεταφορικό χάρτη μέσω δυϊκού γραφήματος

Input: Επίπεδη απεικόνιση με ευθύγραμμα τμήματα Γ

Output: Αρχικός μεταφορικός χάρτης Γ^*

for all εσωτερικές όψεις f της Γ **do**

 Πρόσθεσε μία κορυφή v_f στο βαρύκεντρο της f στο Γ^*

end for

for all ακμές (u, v) στην Γ **do**

if η ακμή ανήκει σε δύο εσωτερικές όψεις f, g **then**

 Πρόσθεσε κορυφή $sub_{u,v}$ στο μέσο της ακμής (u, v) στο Γ^*

 Ένωσε την κορυφή $sub_{u,v}$ με την κορυφή v_f

 Ένωσε την κορυφή $sub_{u,v}$ με την κορυφή v_g

else

 Πρόσθεσε κορυφή $x_{(u,v)}$ στο μέσο της ακμής (u, v) στο Γ^*

 Πρόσθεσε κορυφή z στο μέσο της απόστασης μεταξύ $x_{(u,v)}$ και v_f στο Γ^*

 Ένωσε την κορυφή v_f με την κορυφή $sub_{u,v}$

 Ένωσε την κορυφή $x_{(u,v)}$ με την κορυφή $sub_{u,v}$

end if

end for

for all κορυφές $v \in V(f_{outer})$ της Γ όπου $(u, v), (v, w) \in E(f_{outer})$ **do**

 Πρόσθεσε κορυφή $sub_{u,v}$ στην θέση του v στο Γ^*

 Ένωσε την κορυφή $x_{(u,v)}$ με την κορυφή $sub_{u,v}$

 Ένωσε την κορυφή $x_{(v,w)}$ με την κορυφή $sub_{u,v}$

end for

return Γ^*

Ένα βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι ο μεταφορικός χάρτης αρχίζει με αρκετά χαμηλή πολυπλοκότητα λόγω της μορφής των αρχικών περιοχών. Ταυτόχρονα, ένα εξίσου σημαντικό πλεονέκτημα που δυστυχώς δεν απεικονίζεται στις μετρικές που χρησιμοποιούμε είναι ότι αυτή η μετατροπή διατηρεί μία σύνδεση με το layout του αρχικού γραφήματος γεγονός που είναι ιδιαίτερα σημαντικό αν η τοποθέτηση των κορυφών έχει κάποια φυσική σημασία ή αν σκοπεύουμε να απεικονίσουμε διαδοχικά πολλούς χάρτες που αναφέρονται στο ίδιο σύνολο δεδομένων.

Ωστόσο, είναι αυτή η ιδιαίτερη σύνδεση με το αρχικό γράφημα που προκαλεί και τα μειονεκτήματα της μεθόδου. Ιδιομορφίες του αρχικού γραφήματος, όπως τμήματα του επιπέδου με πολύ πυκνή παρουσία κορυφών οδηγούν σε εξαιρετικά επιβαρυντικές για τον αλγόριθμο αρχικές συνθήκες.

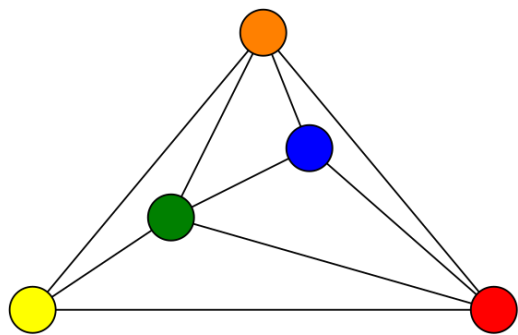
2.2 Δημιουργία μεταφορικού χάρτη με οκτάγωνα

Στην δουλειά του Alam et al. [3] παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος που δέχεται εσωτερικά τριγωνοποιημένα γραφήματα και δημιουργεί μεταφορικούς χάρτες με μηδενικό χαρτογραφικό σφάλμα και περιοχές που έχουν το πολύ οκτώ κορυφές.

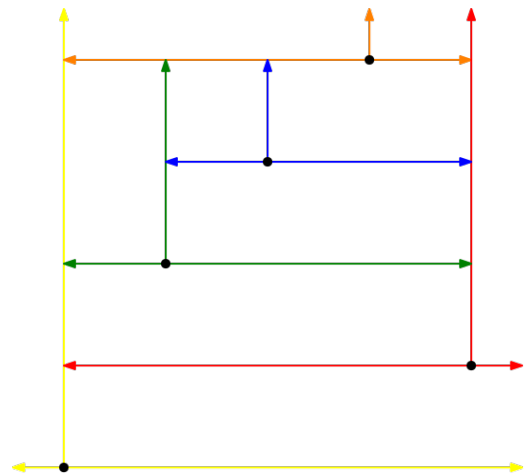
Ο αλγόριθμος αυτός υπολογίζει τις συντεταγμένες των κορυφών στην αρχική πολυγωνική απεικόνιση χρησιμοποιώντας Schnyder Trees. Υπότερα, δίνει πάχος στα τμήματα που προκύπτουν ώστε στην αρχική απεικόνιση κάθε περιοχή αποτελείται από ένα οκτάγωνο σε σχήμα T. Στην συνέχεια, αναθέτει αλγοριθμικά σε περιοχές την αξιοσημείωτη περιοχή που μπορεί να έχει προκύψει, με αποτέλεσμα η απεικόνιση πλέον να είναι ένα παραλληλόγραμμο χωρίς οπές. Τέλος, χρησιμοποιεί έναν αλγόριθμο βασισμένο στην πίεση του αέρα με τον οποίο μετακινεί το μεγιστοτικό ευθύγραμμο τμήμα που δέχεται την μέγιστη πίεση έως ότου όλες οι περιοχές λάβουν το επιθυμητό εμβαδόν. Όταν ο αλγόριθμος συγκλίνει λαμβάνει τον επιθυμητό χάρτη. Τα βήματα που περιγράψαμε παραπάνω φαίνονται στο σχήμα 2.2.

Ένα πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι δεδομένου ότι ο χάρτης δεν εξαρτάται καθόλου από την απεικόνιση του γραφήματος αλλά μόνο από την εμφύτευση του, γεγονός που οδηγεί στην εύρυθμη λειτουργία του αλγορίθμου ακόμα και για δύστροπες απεικονίσεις του αρχικού γραφήματος.

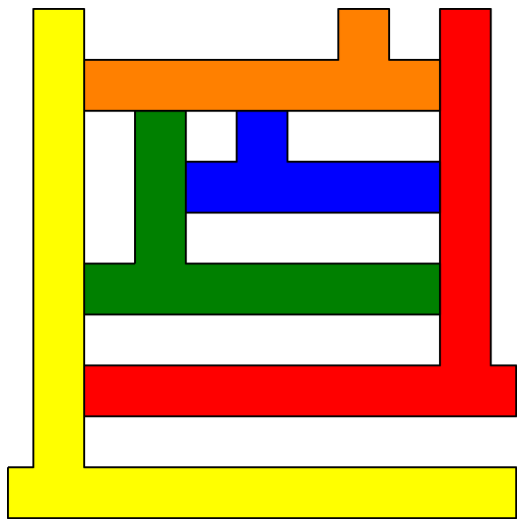
Ένα βασικό μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι ο τελικός χάρτης έχει ιδιαίτερα υψηλή πολυγωνική πολυπλοκότητα, καθώς έχει περιοχές με λεπτούς διαδρόμους με πολύ μεγάλο μήκος, γεγονός που οδηγεί στην αργότερη σύγκλιση του αλγορίθμου που θα αναλύσουμε αργότερα. Είναι σημαντικό ωστόσο να σημειωθεί ότι το μειονέκτημα αυτό έχει προκύψει διότι κατά την ανάπτυξη του αλγορίθμου αυτού η έννοια της πολυπλοκότητας είχε θεμελιωθεί ως το πλήθος των πλευρών κάθε περιοχής, σε αντίθεση με τον δικό μας ορισμό που αναφέρεται στο τέλος της προηγούμενης ενότητας.



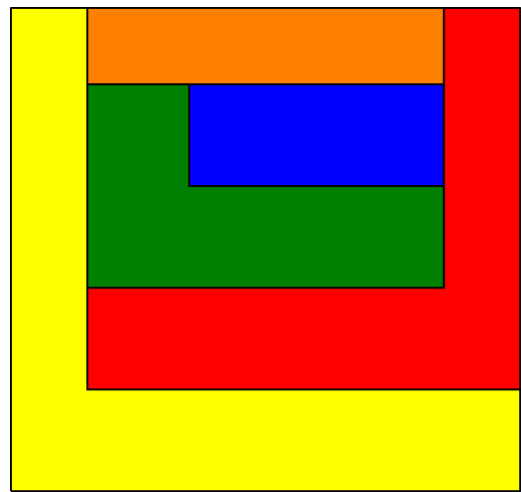
(a) Schnyder Trees



(b) Υπολογισμός συντεταγμένων



(c) T shapes



(d) Απεικόνιση μέσω επαφής

Σχήμα 2.2: Σχηματική απεικόνιση των βημάτων του αλγορίθμου των Alam et al. [3] πριν την επίδραση της πίεσης του αέρα.

MS-ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε την λειτουργία του MS-Αλγορίθμου που αναπτύχθηκε από τους Mchedlidze και Schnorr [19] καθώς η επέκταση και η βελτίωση του αποτελούν το βασικό θέμα της παρούσας εργασίας.

Ο MS-Αλγόριθμος είναι ένας αλγόριθμος βασισμένος σε δυνάμεις. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιεί τέσσερις ανταγωνιστικές δυνάμεις, την *πίεση του αέρα*, την *απόθηση μεταξύ κορυφών*, την *απόθηση μεταξύ κορυφής και ακμής* και την *γωνιακή εξομάλυνση*. Οι δυνάμεις αυτές υπολογίζονται στις περιοχές του μεταφορικού χάρτη και ασκούνται στις κορυφές του γραφήματος που αντιστοιχεί στον μεταφορικό χάρτη. Η κεντρική ιδέα είναι ότι μετά από κάποιον αριθμό από βήματα, όταν επιτευχθεί ισορροπία, ο μεταφορικός χάρτης που θα έχει προκύψει θα έχει τα επιθυμητά χαρακτηριστικά, δηλαδή χαμηλό χαρτογραφικό σφάλμα και χαμηλή πολυγωνική πολυπλοκότητα.

3.1 Δυνάμεις

3.1.1 Πίεση του αέρα

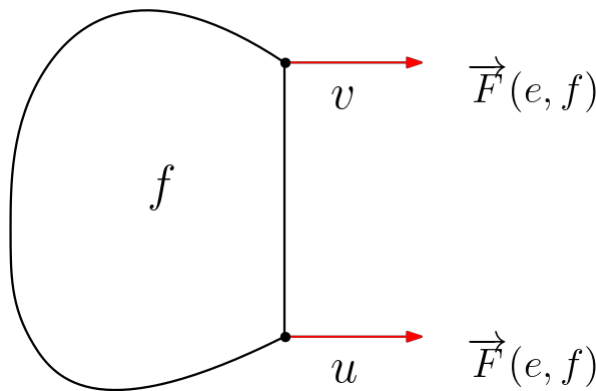
Η πίεση του αέρα είναι εμπνευσμένη από την δουλειά του Alam et al. [3] και αντιμετωπίζει τις περιοχές σαν δωμάτια γεμάτα με μία ποσότητα αέρα που αντιστοιχεί στο βάρος της κορυφής που αντιστοιχεί στην εκάστοτε περιοχή του μεταφορικού χάρτη. Με αυτό υπόψη, μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα ανάλογο της πίεσης του αέρα που ασκείται στα τοιχώματα (σύνορα) των δωματίων (περιοχών). Η δύναμη αυτή είναι η κυρίαρχη δύναμη του αλγορίθμου καθώς είναι υπεύθυνη για την ρύθμιση των εμβαδών των περιοχών και κατά συνέπεια είναι η δύναμη που βοηθάει στην ρύθμιση της χαρτογραφικής ακρίβειας. Αναπαράσταση εφαρμογής της δύναμης

της πίεσης του αέρα απεικονίζεται στο σχήμα 3.1.

Σκοπός σε αυτόν το αλγόριθμο είναι να υπάρχει ανεξαρτησία από τα μεγέθη των περιοχών, αλλά να εξαρτάται μόνο από την αναλογία των μεγεθών. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στην εισαγωγή της *κανονικοποιημένης πίεσης*. Αν f είναι μία όψη του μεταφορικού χάρτη, συμβολίζουμε $w(f)$ το βάρος και $A(f)$ το εμβαδόν που αντιστοιχεί στην όψη f . Με αυτόν τον συμβολισμό, η κανονικοποιημένη πίεση της όψης f ορίζεται ως:

$$P(f) := \frac{w(f) \sum_{g \in F} A(g)}{A(f) \sum_{g \in F} w(g)}$$

Από τον παραπάνω ορισμό αβίαστα προκύπτει ότι η πίεση στην εξωτερική όψη είναι $P(f_{outer}) = 1$.



Σχήμα 3.1: Παράδειγμα δύναμης πίεσης αέρα σε όψη f

Μεταφέροντας αυτή την δύναμη στις ακμές κάθε όψης, παίρνουμε ότι, αν $e = (u, v)$ είναι ακμή μίας όψης f και $\ell(e)$ είναι το μήκος της ακμής:

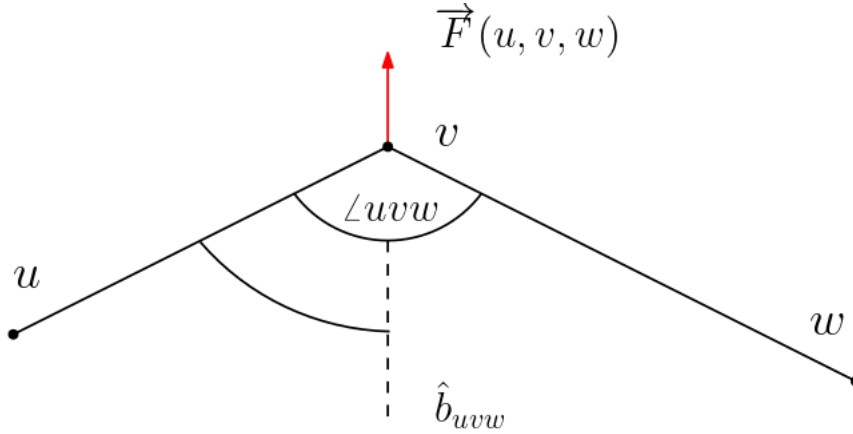
$$\vec{F}(e, f) = 3P(f) \frac{\ell(e)}{\text{circ}(f)} \hat{r}$$

,όπου \hat{r} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην ακμή e κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό της όψης f . Η δύναμη $\vec{F}(e, f)$ εφαρμόζεται και στα δύο άκρα της ακμής e .

3.1.2 Γωνιακή εξομάλυνση

Με τον τρόπο που ορίσαμε την πολυπλοκότητα των πολυγώνων είναι εμφανές ότι θέλουμε "στρογγυλά" κυρτά σχήματα. Είναι επόμενο λοιπόν να θέλουμε να αποφύγουμε γωνίες κοντά στις μηδέν και τις 360 μοίρες. Ιδανικά, θέλουμε όλες οι γωνίες που ορίζονται γύρω από έναν κόμβο να έχουν όσο το δυνατό ίσες γωνίες. Προς

αυτόν τον σκοπό ορίζουμε την *γωνιακή εξομάλυνση*. Αναπαράσταση εφαρμογής της γωνιακής εξομάλυνσης απεικονίζεται στο σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Παράδειγμα δύναμης γωνιακής εξομάλυνσης σε κορυφή v γωνίας $\angle uvw$

Έστω λοιπόν μία κορυφή v και δύο διαδοχικοί, αντίθετα από την φορά του ρολογιού, γείτονες της u, w . Έστω α_{uvw} η γωνία $\angle uvw$ και \hat{b}_{uvw} το μοναδιαίο διάνυσμα της διχοτόμου της $\angle uvw$. Ορίζουμε την *γωνιακή εξομάλυνση* $\vec{F}(u, v, w)$ στην κορυφή v ως:

$$\vec{F}(u, v, w) = \frac{1}{2} \frac{\frac{360^\circ}{\text{deg}(v)} - \alpha_{uvw}}{\alpha_{uvw}} \hat{b}_{uvw}$$

Παρόμοια δύναμη είχε χρησιμοποιηθεί από τους Argyriou et al. [4] με την διαφορά ότι η δύναμη δεν ασκούνταν στην κορυφή που χρειάζεται βελτίωση αλλά στις κορυφές των γειτόνων της.

3.1.3 Δύναμη μεταξύ κόμβων

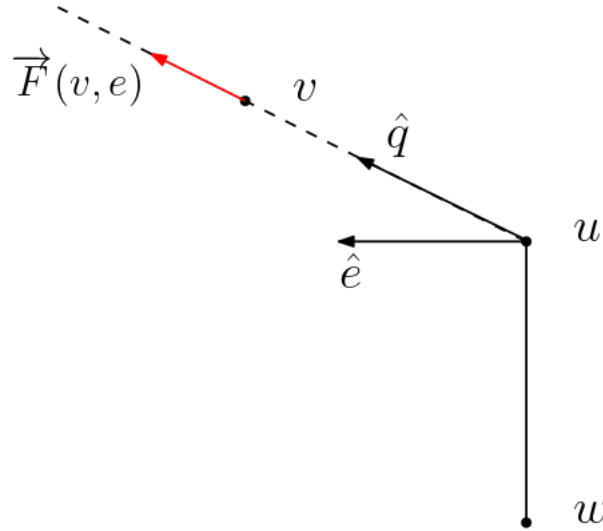
Για λόγους πολυπλοκότητας, η απωθητική δύναμη μεταξύ κορυφών και η απωθητική δύναμη μεταξύ κορυφής και ακμής υπολογίζονται μόνο για ορίσματα που ανήκουν στην ίδια όψη του μεταφορικού χάρτη.

Πολλές κοντινές κορυφές σε κοντινή απόσταση δυσκολεύουν σημαντικά την κίνηση των κόμβων δεδομένου του ότι κινούνται με τρόπο τέτοιο που διατηρεί την ιδιότητα της απεικόνισης να είναι επίπεδη. Συνεπώς, ορίζεται μία απωθητική δύναμη μεταξύ κόμβων που ανήκουν στην ίδια εσωτερική όψη. Η δύναμη προσομοιάζει την δύναμη που θα ασκούνταν σε όμοια φορτισμένα σωματίδια λόγω του νόμου του Coulomb. Ορίζουμε λοιπόν την απωθητική δύναμη μεταξύ κόμβων $\vec{F}(u, v)$ ως:

$$\vec{F}(u, v) = 25 \frac{1}{\|\vec{uv}\|^2} \widehat{uv}$$

3.1.4 Δύναμη μεταξύ κόμβου και ακμής

Τέλος, εισάγουμε την απωθητική δύναμη μεταξύ κόμβου και ακμής με σκοπό, όμοια με την γωνιακή εξομάλυνση, να περιορίσουμε μικρές γωνίες και λεπτούς μακρείς διαδρόμους σε περιοχές. Στο σχήμα 3.3 απεικονίζεται ο τρόπος εφαρμογής της δύναμης μεταξύ κόμβου και ακμής.



Σχήμα 3.3: Παράδειγμα δύναμης μεταξύ κόμβου v και ακμής (u, w)

Έστω μία ακμή e και μία μη προσκείμενη κορυφή v που ανήκει στην ίδια όψη. Αν \hat{e} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην ακμή e και \hat{q} είναι το διάνυσμα που συνδέει την κορυφή v με την προβολή της στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζει η ακμή e . Ορίζουμε την απωθητική δύναμη μεταξύ κορυφής και ακμής ως:

$$\vec{F}(v, e) = 10 \frac{1}{\|\hat{q}\|^2} (\hat{e} \cdot \hat{q}) \hat{q}$$

Η δύναμη μεταξύ κορυφής και ακμής είναι εμπνευσμένη από την δύναμη που χρησιμοποιήθηκε από τον Bertault στο PrEd [5]. Η διαφορά είναι ότι χρησιμοποιείται ένα εσωτερικό γινόμενο στην περίπτωση που η προβολή της κορυφής στην ακμή πέφτει έξω από το ευθύγραμμο τμήμα σε αντίθεση με την δύναμη του Bertault που μηδένιζε την δύναμη στην αντίστοιχη περίπτωση.

Οι σταθερές όλων των παραπάνω δυνάμεων έχουν προσδιοριστεί στην δουλειά του Schnorr [19] και παραμένουν οι ίδιες και στην δική μας υλοποίηση.

3.2 Ένωση και υποδιαίρεση ακμών

Στον MS-Αλγόριθμο ο αριθμός των κορυφών και των ακμών στον μεταφορικό χάρτη δεν είναι σταθερός. Σε κάθε βήμα υπολογίζεται το μέσο μήκος ακμής:

$$\bar{\ell} = \frac{1}{|E|} \sum_{e \in E} \ell(e)$$

Στην συνέχεια, αν κάποια ακμή έχει μήκος μεγαλύτερο από 2ℓ την διαιρούμε αφαιρώντας την ακμή, δημιουργώντας μία νέα κορυφή στο μέσο των δύο άκρων και ενώνοντας την καινούρια κορυφή με τα δύο άκρα της ακμής. Αντίστοιχα, αν κορυφή βαθμού δύο απέχει από τον κοντινότερο γείτονα της απόσταση μικρότερη από $\frac{1}{10}\ell$, αφότου επιβεβαιώσουμε ότι η αφαίρεση της δεν θα προκαλούσε τομή μεταξύ ακμών, την αφαιρούμε και ενώνουμε τους δύο γείτονες της με μία ακμή.

3.3 Περιορισμός κίνησης κορυφών

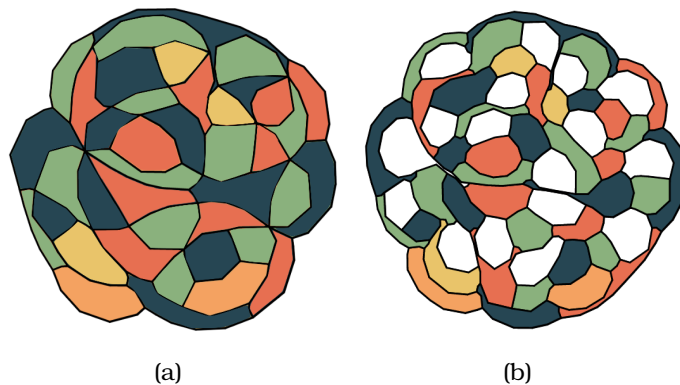
Οι δυνάμεις που ορίσαμε παραπάνω είναι υπεύθυνες για την κίνηση των κορυφών του μεταφορικού χάρτη, ωστόσο προς το παρόν δεν έχουμε καμία εγγύηση ότι δεν θα υπάρξουν τομές μεταξύ ακμών ή ότι η κυκλική σειρά των ακμών γύρω από μία κορυφή δεν θα μεταβληθούν. Συνεπώς, είναι ανάγκη να περιορίσουμε την κίνηση των κορυφών ώστε να εξασφαλίσουμε τα παραπάνω δύο αιτήματα. Για αυτόν τον σκοπό, χρησιμοποιούμε τον κανόνα για τον υπολογισμό της "μέγιστης επιτρεπτής κίνησης" από το ImPrEd [21]. Ο κανόνας αυτός εξασφαλίζει ότι δεν θα υπάρξουν τομές μεταξύ ακμών και ότι θα διατηρηθεί η εμφύτευση του γραφήματος.

ΕΠΕΚΤΑΣΗ MS-ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφονται οι βελτιώσεις και οι επεκτάσεις που κάναμε στον MS-Αλγόριθμο, θα αναφερόμαστε στον αλγόριθμο που έχει προκύψει από αυτές τις αλλαγές ως Αλγόριθμο-NEW. Θα περιγράψουμε πως επεκτείναμε την κλάση των επιτρεπών εισόδων από εσωτερικά τριγωνοποιημένα δισυνεκτικά ενεπίπεδα γραφήματα σε δισυνεκτικά ενεπίπεδα γραφήματα και θα εισάγουμε την έννοια της *ακαμψίας*.

4.1 Επέκταση μετασχηματισμού σε μη τριγωνοποιημένα γραφήματα

Στο σχήμα 4.3 φαίνονται παραδείγματα χαρτών από μη τριγωνοποιημένα γραφήματα που έχουν προκύψει από τον Αλγόριθμο-NEW.

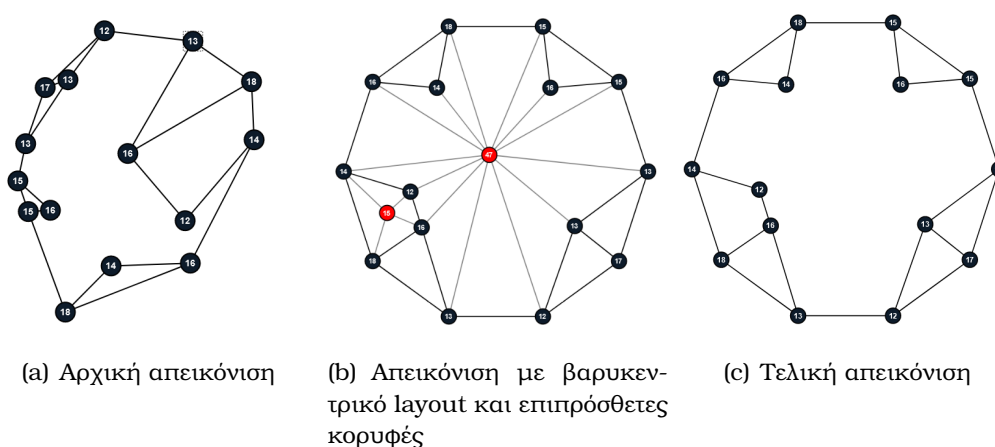


Σχήμα 4.1: Παράδειγμα μεταφορικού χάρτη μη τριγωνοποιημένου γραφήματος με δυκό μετασχηματισμό (a) και με μετασχηματισμό με οπές (b).

Ο μετασχηματισμός μέσω δικού γραφήματος (βλέπε ενότητα 2.1) που αναπτύχθηκε από τους Mchedlidze και Schnorr [16] θεωρητικά θα μπορούσε να αντιμετωπίσει μη τριγωνοποιημένα γραφήματα, αρκεί στο αρχικό γράφημα G κάθε κορυφή να έχει ορατότητα στο βαρύκεντρο κάθε όψης στην οποία ανήκει. Αυτή είναι μία απαίτηση που δεν εξασφαλίζεται αυτόματα για κάθε μη τριγωνοποιημένη απεικόνιση γραφήματος, ωστόσο μπορούμε να μετασχηματίσουμε την απεικόνιση του γραφήματος με κατάλληλο τρόπο ώστε να επιτύχουμε την επιθυμητή ιδιότητα. Παρακάτω περιγράφεται ο τρόπος με τον οποίο μετασχηματίζουμε την απεικόνιση στην δική μας υλοποίηση, ένα παράδειγμα δίνεται στο 4.2.

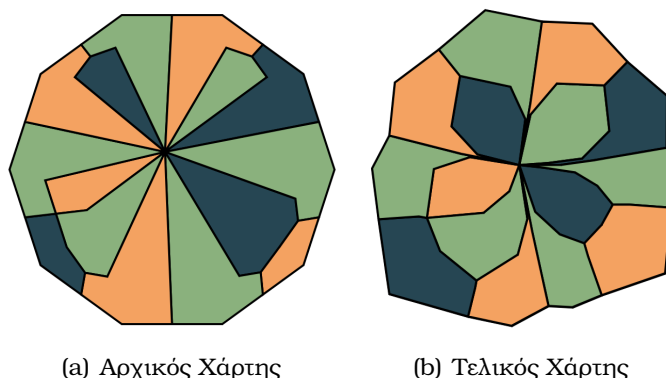
Αρχικά, τριγωνοποιούμε εσωτερικά το γράφημα μας δημιουργώντας μία καινούρια κορυφή για κάθε όψη με βαθμό μεγαλύτερο του τρία. Έστω $G' = (V \cup V_{aux}, E \cup E_{aux})$ το γράφημα που προκύπτει μετά την τριγωνοποίηση, όπου V_{aux} και E_{aux} είναι τα σύνολα των επιπρόσθετων κορυφών και ακμών, αντίστοιχα. Εφαρμόζουμε στο γράφημα G' τον βαρυκεντρικό αλγόριθμο του Tutte [25] που σταθεροποιεί την εξωτερική όψη σε έναν κύκλο και τοποθετεί κάθε εσωτερική κορυφή στο βαρύκεντρο των γειτόνων της, οδηγώντας σε μία επίπεδη απεικόνιση $\Gamma_{bar}(G')$. Τέλος, αφαιρούμε τις επιπρόσθετες ακμές από την $\Gamma_{bar}(G')$.

Είναι προφανές ότι η τελική απεικόνιση έχει την απαιτούμενη ιδιότητα. Πράγματι, οι επιπρόσθετες κορυφές από κάθε μη τριγωνοποιημένη όψη f τοποθετήθηκαν στο βαρύκεντρο των γειτόνων τους, οι οποίοι ήταν αποκλειστικά οι κορυφές της όψης f . Συνεπώς, στο γράφημα που προέκυψε, κάθε όψη f έχει το βαρύκεντρο της εντός των συνόρων της και αφού οι επιπρόσθετες ακμές μέσα στην f δεν τέμνουν τα σύνορα της, η ορατότητα από τις κορυφές της f προς το βαρύκεντρο της f είναι εγγυημένη.



Σχήμα 4.2: Παράδειγμα εφαρμογής μετασχηματισμού απεικόνισης

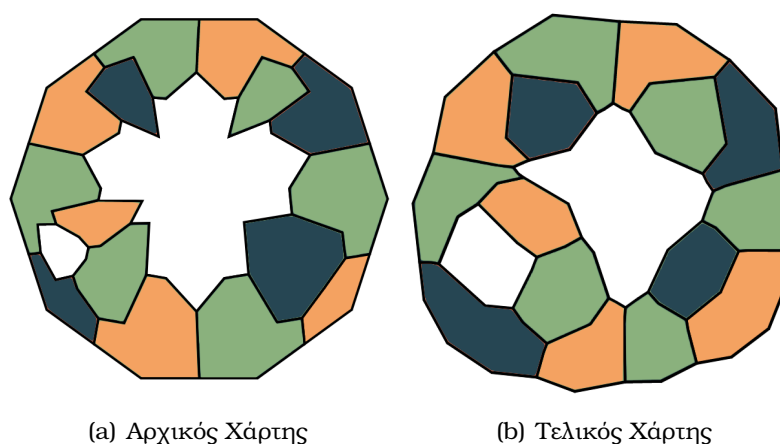
4.1.1 Δυϊκός Μετασχηματισμός



Σχήμα 4.3: Παράδειγμα χάρτη ακριβώς μετά τον δυϊκό μετασχηματισμό (a) και μετά την εφαρμογή του Αλγορίθμου-MS (b).

Εφόσον έχουμε εγγυηθεί την απαιτούμενη ιδιότητα είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό μέσω δυϊκού γραφήματος όμοια με τον MS-Αλγόριθμο. Σε αυτό το σημείο αξίζει να παρατηρήσουμε ότι για μη τριγωνοποιημένα γραφήματα αυτός ο μετασχηματισμός οδηγεί σε κορυφές που έχουν πολύ μεγάλο βαθμό στον μεταφορικό χάρτη (βλέπε σχήμα 4.3, συγκεκριμένα ίσο με το πλήθος των κορυφών στην μη τριγωνοποιημένη όψη). Θυμίζουμε ότι το γεγονός αυτό δεν αντιπαραβάλλεται με τον ορισμό της απεικόνισης μέσω επαφής καθώς η σημειακή επαφή θεωρείται τετριμμένη επαφή, άρα δεν συνεπάγεται επαφή των αντίστοιχων κορυφών του αρχικού γραφήματος.

4.1.2 Μετασχηματισμός με οπές



Σχήμα 4.4: Παράδειγμα χάρτη ακριβώς μετά τον μετασχηματισμό με οπές (a) και μετά την εφαρμογή του Αλγορίθμου-MS (b).

Βλέποντας τους χάρτες που παράγονται με τον δυικό μετασχηματισμό παρατηρούμε ότι γραφήματα που έχουν όψεις με πολύ μεγάλο βαθμό οδηγούν σε μεταφορικούς χάρτες με σημεία μεγάλου βαθμού που αναπόφευκτα είναι εξαιρετικά δυσανάγνωστοι. Συνεπώς, προτείνουμε μια εναλλακτική προσέγγιση κατά την οποία αντιμετωπίζουμε τις μεγάλες περιοχές ως οπές. Πρακτικά, ο τρόπος με τον οποίο παίρνουμε τον μετασχηματισμό αυτό είναι εξαιρετικά απλός, μετασχηματίζουμε το γράφημα που προέκυψε από την μετατροπή της απεικόνισης κρατώντας και τις επιπρόσθετες κορυφές και ακμές χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό του MS-Αλγόριθμου και αντιμετωπίζουμε τις περιοχές που αντιστοιχούν στις επιπρόσθετες κορυφές ως οπές, παράδειγμα αυτού του μετασχηματισμού απεικονίζεται στο σχήμα 4.4. Αντιμετωπίζουμε τις οπές ακριβώς με τον ίδιο τρόπο με τις περιοχές του χάρτη που αντιστοιχούν σε οπές, η μοναδική διαφορά είναι ότι, αφού δεν έχουν εκ φύσεως βάρος, έχουμε την ευχέρεια να επιλέξουμε εμείς τι βάρος θα τους αναθέσουμε. Διαισθητικά, εικάζουμε ότι όσο περισσότερες περιοχές προσπίπτουν σε μία οπή και όσο πιο βαριές είναι οι περιοχές αυτές τόσο μεγαλύτερη πρέπει να είναι η οπή. Μετά από δοκιμές με διάφορες συναρτήσεις βρήκαμε ότι η παρακάτω συνάρτηση δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα, ωστόσο πιστεύουμε ότι με επιπλέον πειράματα μπορεί να προκύψουν ακόμη καλύτερες συναρτήσεις.

$$\text{holeWeight}(h_i) = \frac{1}{4\text{deg}(h_i)} \left(\sum_{(v_j, h_i) \in E(G)}^j \sqrt{w(v_j)} \right)^2 \quad (4.1)$$

4.2 Εισαγωγή ακαμψίας

Η σημαντικότερη προσθήκη μας στον MS-Αλγόριθμο είναι η εισαγωγή της *ακαμψίας*. Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του MS-Αλγόριθμου είδαμε ότι κάποιες περιοχές είχαν σημαντικά υψηλότερο χαρτογραφικό σφάλμα από άλλες. Η παρατήρηση αυτή μας οδήγησε στο να εικάσουμε πως υπάρχουν κάποια χαρακτηριστικά που κάνουν τις περιοχές να ανταποκρίνονται λιγότερο καλά στην πίεση του αέρα, την δύναμη που είναι υπεύθυνη για την επιβολή του σωστού εμβαδού στις περιοχές. Συνεπώς, προτείνουμε την δημιουργία μιας μεταβλητής για κάθε περιοχή, στην οποία αναφερόμαστε ως σταθερά ακαμψίας, και εξισορροπεί την επίδραση αυτού του φαινομένου στην εκάστοτε περιοχή.

Έστω g μία εσωτερική περιοχή του μεταφορικού χάρτη και $P_i(g)$ η πίεση στην περιοχή αυτή κατά το i -οστό βήμα του αλγορίθμου. Αν κατά το βήμα i η περιοχή g βρίσκεται υπό υψηλή πίεση (δηλαδή, $P_i(g) > 1$) τότε αυξάνουμε την σταθερά ακαμψίας κατά μία μικρή ποσότητα *step*; αντίστοιχα αν η περιοχή είναι υπό χαμηλή πίεση ($P_i(g) < 1$) μειώνουμε κατά *step*, αλλιώς, αφήνουμε την πίεση σταθερή. Επιπλέον, περιορίζουμε τις τιμές που μπορεί να πάρει η σταθερά μας στο διάστημα $[s_{low}, s_{high}]$ όπου $s_{high} \geq 1$ και $s_{low} = \frac{1}{s_{high}}$. Πειραματικά προσδιορίζουμε μία αποδεκτή τιμή για την σταθερά s_{high} .

Δεδομένης μιας περιοχής g , ορίζουμε την *σταθερά ακαμψίας της g κατά το i -οστό βήμα του αλγορίθμου*, και συμβολίζουμε $s_i(g)$, ως:

$$\begin{cases} s_{(0)}(g) = 1 \\ s_i(g) = \min(s_{high}, \max(s_{low}, s_{i-1}(g) + \alpha \cdot step)), & i > 0 \end{cases}$$

$$\text{όπου } \alpha = \begin{cases} -1, & P_{i-1}(g) < 1 \\ 0, & P_{i-1}(g) = 1 \\ 1, & P_{i-1}(g) > 1 \end{cases}$$

Συνεπώς, η αναθεωρημένη πίεση του αέρα μιας περιοχής g στις συνοριακές ακμές της e κατά την i -οστή επανάληψη του αλγορίθμου, $i \geq 1$, $\vec{F}'_i(e, g)$ ορίζεται ως:

$$\vec{F}'_i(e, g) = s_i(g) \cdot \vec{F}_i(e, g)$$

όπου $\vec{F}_i(e, g)$ είναι η πίεση του αέρα υπολογισμένη με βάση τον MS-Αλγόριθμο.

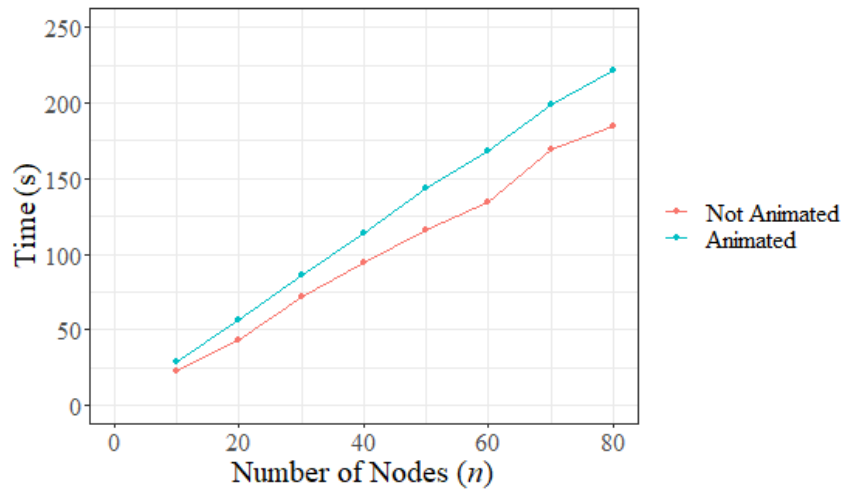
Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι η σταθερά ακαμψίας είναι διαφορετική σε κάθε περιοχή του μεταφορικού χάρτη και παρουσιάζει δυναμική συμπεριφορά κατά την διάρκεια του αλγορίθμου. Ιδανικά, επιθυμούμε η σταθερά να συγκλίνει σε μία τιμή που θα αντικρούει την επίδραση των δυνάμεων που εμποδίζουν την επίδραση του αέρα σε εκείνη την περιοχή. Στην φύση, τέτοιες σταθερές διαφέρουν από υλικό σε υλικό ή ακόμα στο ίδιο υλικό με βάση την γεωμετρία του ή την θερμοκρασία στην οποία βρίσκεται. Τέτοιου είδους δυναμικές σταθερές είναι ασυνήθιστες σε αλγορίθμους βασισμένους σε δυνάμεις, κυρίως για λόγους πολυπλοκότητας. Ωστόσο, σημειώνουμε ότι μία παρόμοια ιδέα έχει χρησιμοποιηθεί στην δουλειά του Hu [14].

ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ

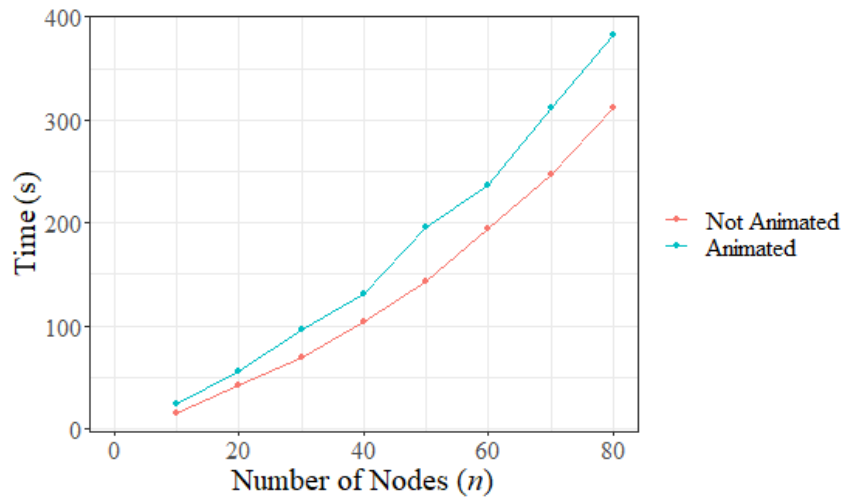
Για τους σκοπούς αυτής της εργασίας αναπτύξαμε ένα διαδικτυακό εργαλείο στο οποίο μπορεί κανείς να τρέξει τον αλγόριθμο των Mchedlidze και Schnorr [16], τον αλγόριθμο του Alam et al. [3] και τον Αλγόριθμο-NEW. Ειδικά για τον Αλγόριθμο-NEW, υπάρχει η δυνατότητα ο χρήστης να τροποποιήσει και τις παραμέτρους του. Συγκεκριμένα, ο χρήστης έχει την δυνατότητα να επιλέξει την τιμή για τις μέγιστη τιμή ακαμψίας s_{high} , για το βήμα $step$ με το οποίο αλλάζει η σταθερά ακαμψίας και για τον αριθμό των επαναλήψεων για τις οποίες θα εκτελεστεί ο Αλγόριθμος-NEW.

Η ιστοσελίδα αυτή έχει γραφτεί σε Javascript. Πέρα από το βασικό πακέτο της Javascript το μεγαλύτερο κομμάτι της εργασίας χρησιμοποιεί την εμπορική βιβλιοθήκη "yfiles for HTML". Είναι διαθέσιμο το documentation της βιβλιοθήκης καθώς και πληθώρα από demos στον σύνδεσμο <https://docs.yworks.com/yfileshtml/#/home> . Για την επεξεργασία των δεδομένων και την δημιουργία των διαγραμμάτων χρησιμοποιήσαμε την βιβλιοθήκη ggplot της R και την βιβλιοθήκη matplotlib της Python.

Όλα τα πειράματα που παρουσιάζονται στην ακόλουθη πειραματική μελέτη έχουν διεξαχθεί σε φορητό υπολογιστή με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: Windows 11, 11th Gen Intel(R) Core(TM) i7-1165G7 @ 2.80GHz, 16,0 GB RAM. Σε αυτό το σημείο να σημειωθεί ότι ο βασικός στόχος της εργασίας αυτής ήταν η ελαχιστοποίηση του χαρτογραφικού σφάλματος και κατά συνέπεια δεν έχει δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα στην ελαχιστοποίηση του χρόνου εκτέλεσης του κώδικα μας. Στα διαγράμματα του σχήματος 5.1 παρουσιάζεται η επίδραση του αριθμού των κορυφών του αρχικού γραφήματος στον χρόνο εκτέλεσης του Αλγορίθμου-NEW.



(a) 1000 επαναλήψεις



(b) $800 + 10n$ επαναλήψεις

Σχήμα 5.1: Χρόνος εκτέλεσης έναντι αριθμού κόμβων για σταθερό αριθμό επαναλήψεων (a) και για τον αριθμό επαναλήψεων που έχουμε θέσει ως συνθήκη τερματισμού (b).

Παρατηρούμε ότι για δεδομένο αριθμό βημάτων ο χρόνος εκτέλεσης αυξάνει γραμμικά ως προς τον αριθμό των κόμβων, γεγονός που συμφωνεί με την θεωρία.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

6.1 Παραγωγή τυχαίων γραφημάτων

Για την παραγωγή των γραφημάτων που χρησιμοποιούμε στα πειράματα ακολουθούμε την ίδια μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε από τους Mchedlidze και Schnorr [16]. Συγκεκριμένα, παράγουμε μία επίπεδη απεικόνιση ενός τριγωνοποιημένου γραφήματος χρησιμοποιώντας τριγωνοποίηση Delaunay για ένα τυχαίο σύνολο σημείων στο επίπεδο. Στην συνέχεια, με βάση έναν συντελεστή που ονομάζεται *λόγος εμφώλευσης* (nesting ratio) $nest \in [0, 1]$, προσθέτουμε τον υπόλοιπο λόγο κορυφών μέσα στα τρίγωνα που έχουν δημιουργηθεί από την αρχική τριγωνοποίηση και ενώνουμε με τις κορυφές του τριγώνου.

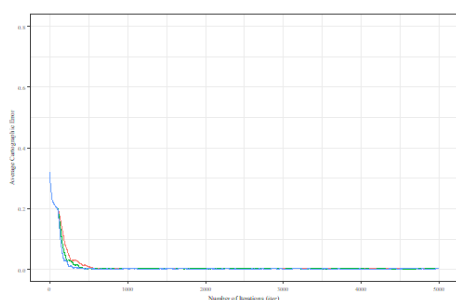
Για κάθε κορυφή, πρέπει να παράξουμε και ένα τυχαίο βάρος. Αυτό το βάρος προέρχεται από ομοιόμορφη κατανομή, ο λόγος του μέγιστου επιτρεπτού βάρους προς το ελάχιστο επιτρεπτό βάρος ονομάζεται *weight ratio* και στα πειράματα μας παίρνει τιμές στο διάστημα $w \in [5, 20]$.

Στην δική μας εργασία προέκυψε η ανάγκη να παραχθούν και μη τριγωνοποιημένες απεικονίσεις επίπεδων γραφημάτων. Για τον σκοπό αυτό, μετά την δημιουργία μίας εσωτερικά τριγωνοποιημένης απεικόνισης με την παραπάνω διαδικασία, αφαιρούμε διαδοχικά εσωτερικές ακμές από την απεικόνιση που προέκυψε. Συγκεκριμένα, θέτουμε ένα επιθυμητό ποσοστό εσωτερικών ακμών που θέλουμε να αφαιρέσουμε, το οποίο καλούμε $rem \in [0, 1]$, και αφαιρούμε διαδοχικά κορυφές μέχρι είτε να πετύχουμε το ζητούμενο ποσοστό ή να μην υπάρχουν άλλες εσωτερικές ακμές που μπορούν να αφαιρεθούν χωρίς να χαθεί η δισυνεκτικότητα του γραφήματος. Στην δεύτερη περίπτωση, απορρίπτουμε την απεικόνιση και δοκιμάζουμε να επιτύχουμε το ποσοστό που ζητήθηκε για κάποια άλλη τριγωνοποίηση.

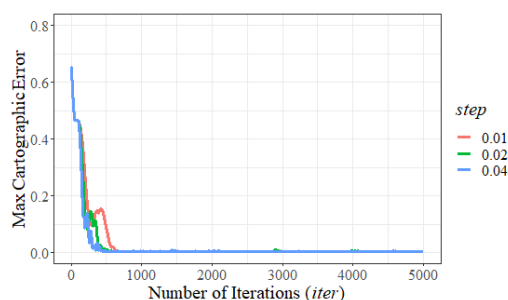
6.2 Προσδιορισμός σταθερών του αλγορίθμου μας

Πριν εκτελέσουμε το κυρίως μέρος των πειραμάτων μας χρειάζεται να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους του αλγορίθμου. Συγκεκριμένα, είναι αναγκαίο να βρούμε για ποια τιμή του βήματος μεταβολής της σταθεράς ακαμψίας ο Αλγόριθμος-NEW συγκλίνει σε καλύτερα αποτελέσματα και, δεδομένης αυτής της τιμής, να προσδιορίσουμε τον αριθμό επαναλήψεων που απαιτούνται ώστε ο Αλγόριθμος-NEW να συγκλίνει σε κάποια λύση που θεωρούμε ικανοποιητική.

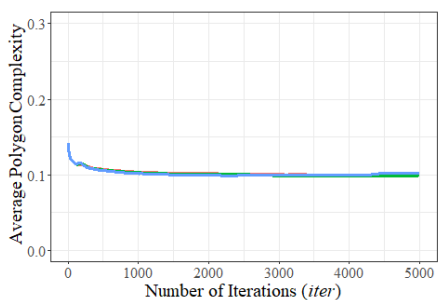
Στο σχήμα 6.1 φαίνεται η συμπεριφορά του αλγορίθμου για τρεις διαφορετικές τιμές *step* στο ίδιο γράφημα. Παρατηρούμε ότι και για τις τρεις τιμές αλγόριθμος τελικά συγκλίνει σε παρόμοια λύση. Επίσης, παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη η τιμή του *step* τόσο πιο γρήγορα συγκλίνει ως προς το Χαρτογραφικό Σφάλμα. Τέλος, παρατηρούμε ότι μετά τις 800 με 1000 επαναλήψεις οι μετρικές μας σταματάνε να βελτιώνονται.



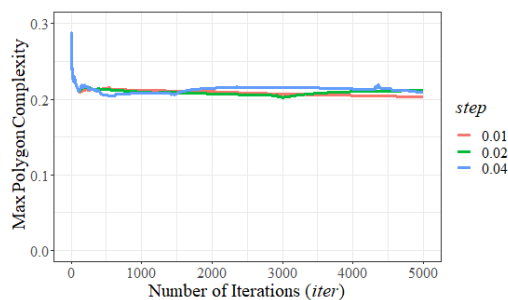
(a) Μέσο Χαρτογραφικό Σφάλμα



(b) Μέγιστο Χαρτογραφικό Σφάλμα



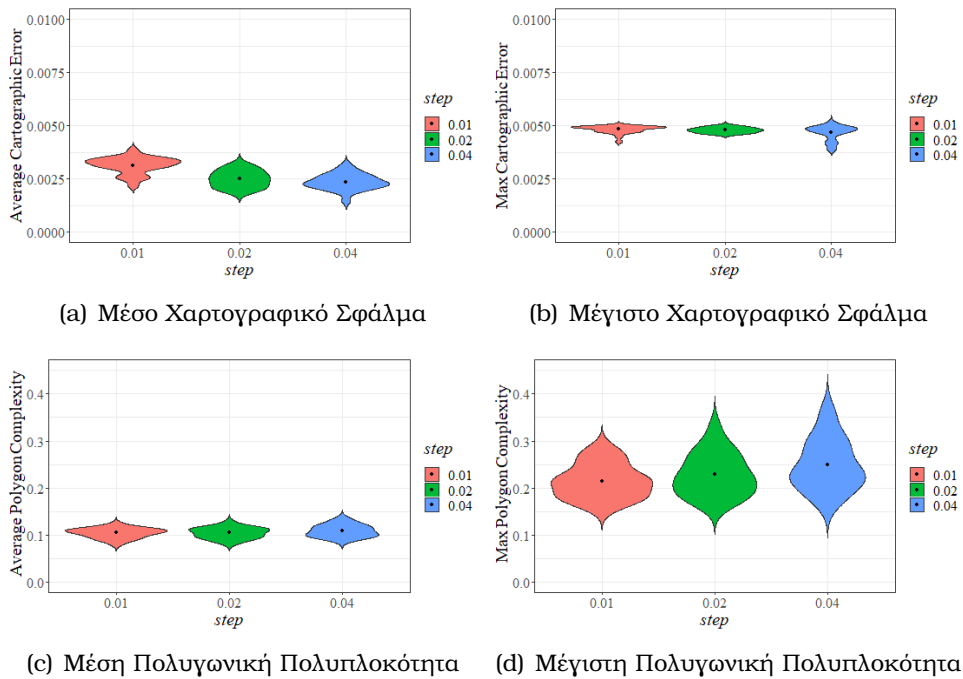
(c) Μέση Πολυγωνική Πολυπλοκότητα



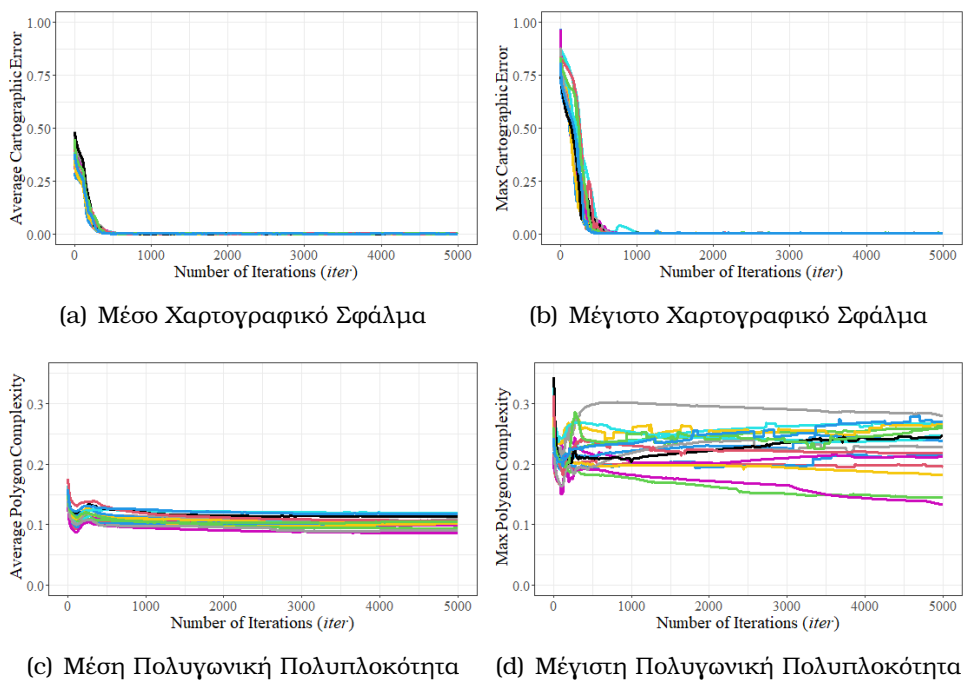
(d) Μέγιστη Πολυγωνική Πολυπλοκότητα

Σχήμα 6.1: Χαρτογραφικό σφάλμα και πολυπλοκότητα πολυγώνου για διάφορες τιμές του *step* έναντι *iter*.

Η επιλογή της παραμέτρου *step* δεν φαίνεται να οδήγησε σε σημαντική διαφορά στα αποτελέσματα για το γράφημα του παραδείγματος. Ωστόσο, για να επιβεβαιώσουμε ότι το συμπέρασμα μας ισχύει γενικά χρειάζεται να τρέξουμε το ίδιο πείραμα σε ένα μεγαλύτερο δείγμα γραφημάτων. Έτσι, επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα για $N = 50$ γραφήματα και κρατάμε την τιμή στην οποία συγκλίνει το γράφημα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο διάγραμμα 6.2.



Σχήμα 6.2: Χαρτογραφικό σφάλμα και πολυπλοκότητα πολυγώνου για διάφορες τιμές του $step$ μετά από 5000 iter, για $N = 50$ γραφήματα με $n = 20, w = 5, nest = 0$.



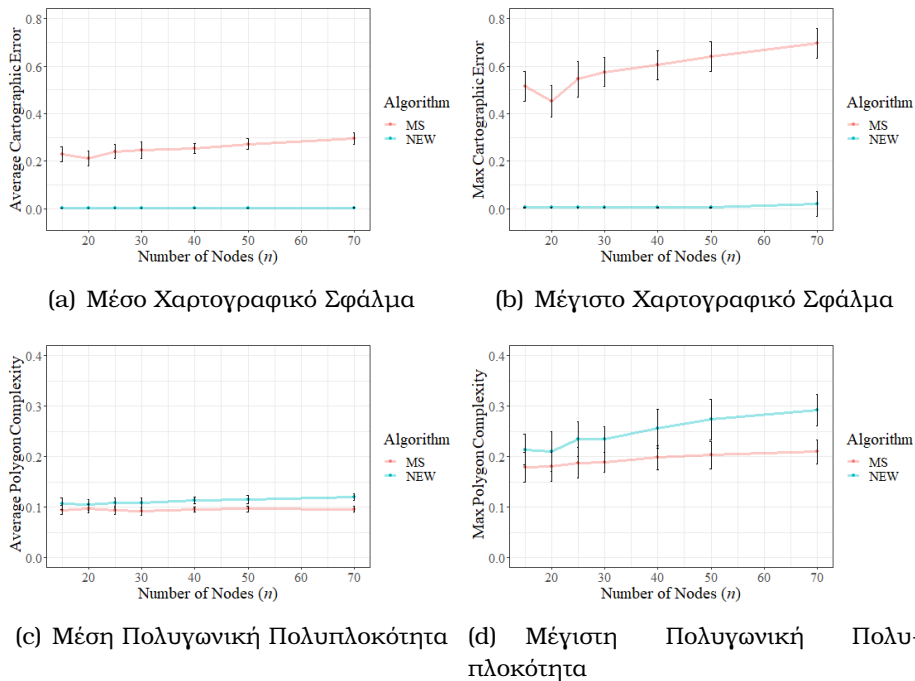
Σχήμα 6.3: Χαρτογραφικό σφάλμα και πολυπλοκότητα πολυγώνου για $step = 0.02$ για $N = 20$ γραφήματα με $n = 20, w = 5, nest = 0$ έναντι $iter$.

Στο διάγραμμα 6.2 παρατηρούμε ότι για τις τρεις τιμές δεν φαίνεται να υπάρχει μεγάλη απόκλιση στην τιμή που συγκλίνουν, άλλωστε τρέχουμε τον αλγόριθμο για αρκετές επαναλήψεις ώστε οι περιοχές να αποκτήσουν την βέλτιστη τιμή ακαμψίας. Συνεπώς, επιλέγουμε για τα πειράματα μας την τιμή $step = 0.02$ χωρίς αυτό να σημαίνει ότι είναι ιδιαίτερα καλύτερη από κάποια άλλη τιμή στο διάστημα $[0.1, 0.5]$. Σταθεροποιώντας πλέον την τιμή του $step$ μελετάμε μετά από πόσες επαναλήψεις συγκλίνει ο Αλγόριθμος-NEW, ώστε να μπορέσουμε να δώσουμε μία συνθήκη τερματισμού που θα μας δίνει ικανοποιητική λύση δίχως να τρέχει για αδικαιολόγητα πολλές επαναλήψεις.

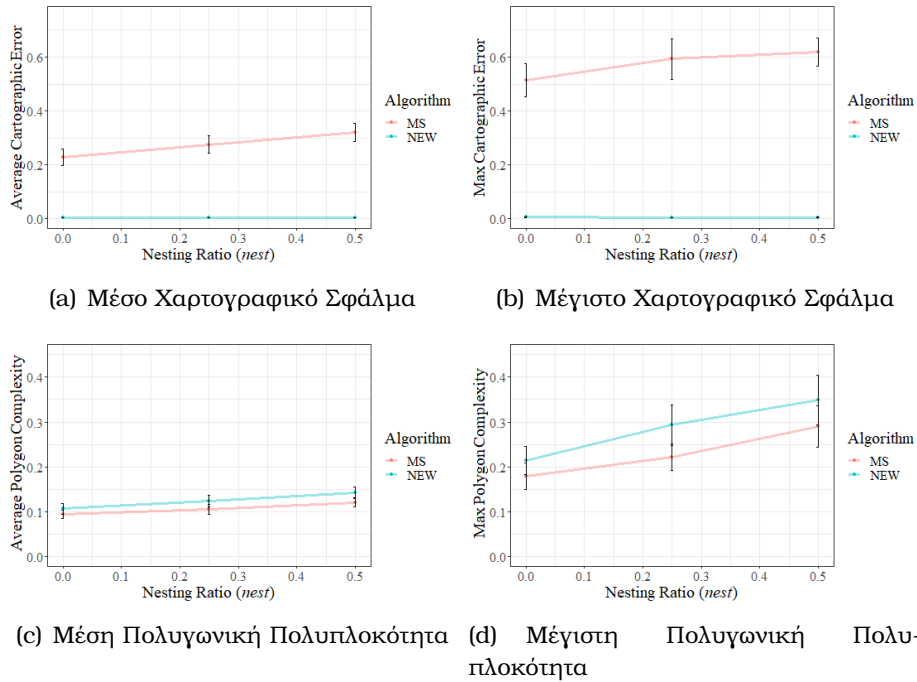
Στο διάγραμμα 6.3 παρατηρούμε ότι, με εξαίρεση την μέγιστη πολυγωνική πολυπλοκότητα, οι άλλες μετρικές έχουν συγκλίνει στην επιθυμητή λύση μετά από περίπου 1000 επαναλήψεις. Στην συνέχεια της εργασίας παρατηρούμε ότι ο αριθμός των κόμβων έχει θετική συσχέτιση με τον απαιτούμενο αριθμό επαναλήψεων. Με αυτές τις δύο παρατηρήσεις υπόψη, επιλέγουμε να σταματάμε τον αλγόριθμο μετά από $800 + 10n$ επαναλήψεις.

6.3 Σύγκριση με MS-Αλγόριθμο

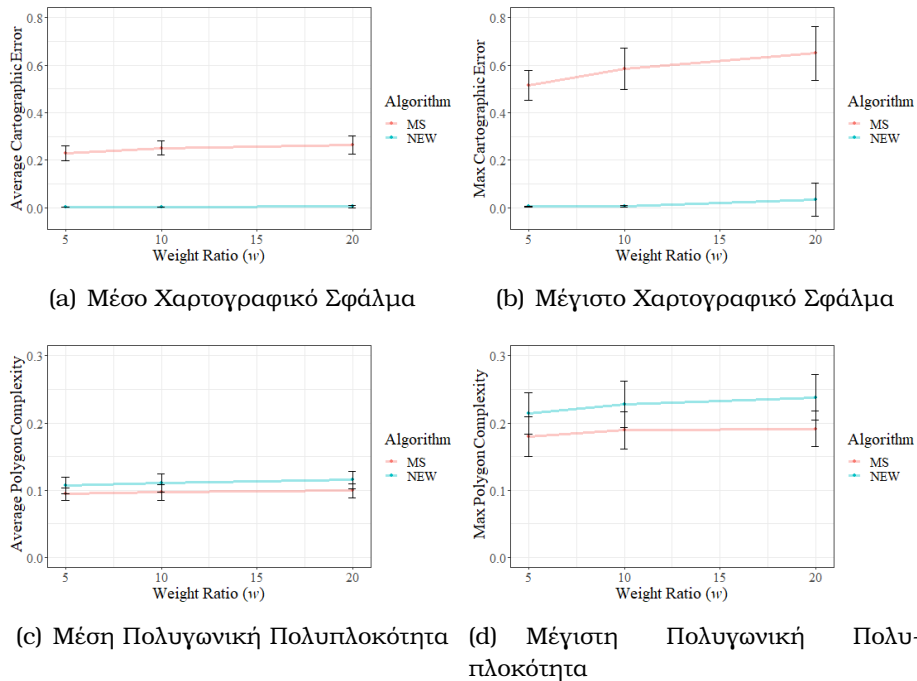
Σε αυτή την παράγραφο, παρουσιάζουμε μία πειραματική μελέτη ώστε να συγκρίνουμε τον Αλγόριθμο-NEW με τον MS-Αλγόριθμο καθώς και για να δούμε πως οι παράμετροι, $nest$, w και n επηρεάζουν την επίδοση των δύο αλγορίθμων.



Σχήμα 6.4: Χαρτογραφικό σφάλμα και πολυπλοκότητα πολυγώνου για διάφορες τιμές του αριθμού κόμβων (n) για $N = 50$ γραφήματα με $nest = 0$, $w = 5$.



Σχήμα 6.5: Χαρτογραφικό σφάλμα και πολυπλοκότητα πολυγώνου για διάφορες τιμές του λόγου εμφώλευσης ($nest$) για $N = 50$ γραφήματα με $n = 20, w = 5$.



Σχήμα 6.6: Χαρτογραφικό σφάλμα και πολυπλοκότητα πολυγώνου για διάφορες τιμές του λόγου μέγιστου προς ελάχιστο βάρους (w) για $N = 50$ γραφήματα με $n = 20, nest = 0$.

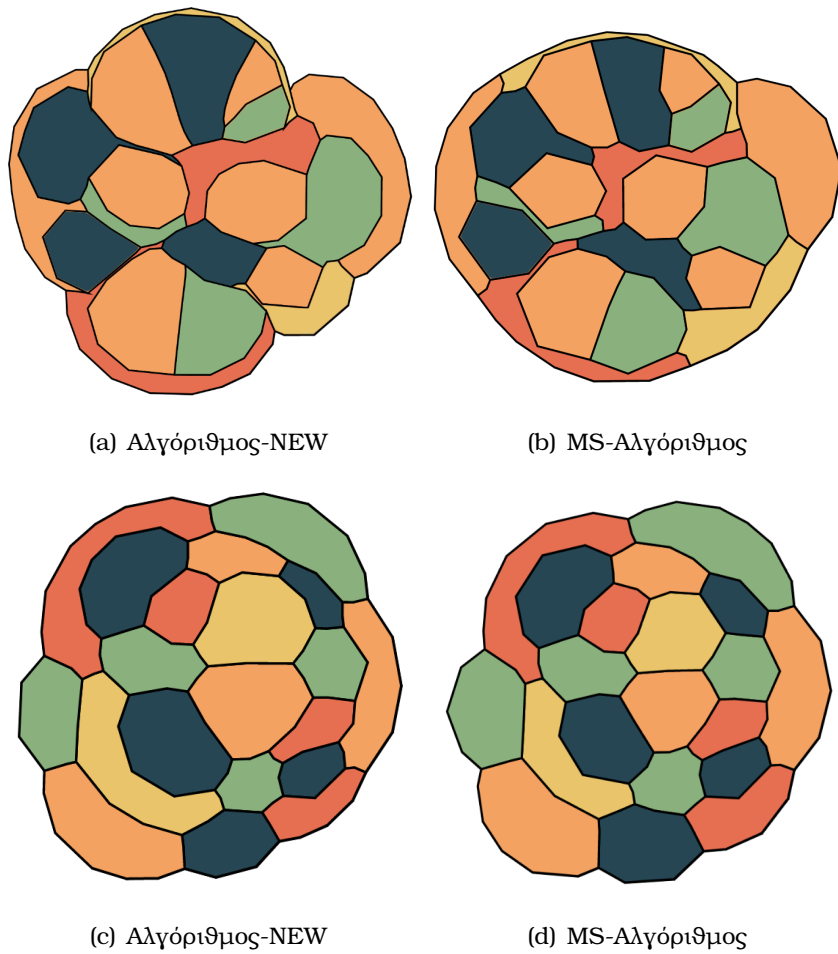
Στα σχήματα 6.4 6.5 6.6 απεικονίζονται διαγραμματικά τα αποτελέσματα των πειραμάτων μας. Είναι εμφανές ότι επαληθεύεται ο αρχικός ισχυρισμός μας ότι καταφέρνουμε να πετύχουμε χαρτογραφικό σφάλμα κοντά στο μηδέν κρατώντας τα σχήματα σχετικά "απλά". Παρά ταύτα, είναι εμφανές ότι για να επιτύχουμε αυτόν τον σκοπό θυσιάζουμε μία μικρή ποσότητα πολυγωνικής πολυπλοκότητας συγκριτικά με τον MS-Αλγόριθμο.

Πιο αναλυτικά, βλέπουμε ότι για τον Αλγόριθμο-NEW το μέσο χαρτογραφικό σφάλμα δεν ξεπερνάει το 0.02 σε κανένα από τα πειράματα μας, σφάλμα που δεν θεωρείται ανιχνεύσιμο από τον χρήστη. Όσον αφορά το μέγιστο χαρτογραφικό σφάλμα, είναι κοντά στο μηδέν και να αρχίζει να απομακρύνεται στις ακραίες τιμές των παραμέτρων στα πειράματα με τον λόγο βάρους w και τον αριθμό των κόμβων n για τα οποία φτάνει κοντά στο 0.05. Η διαφορά των δύο αλγορίθμων στο χαρτογραφικό σφάλμα είναι εμφανής, καθώς το μέσο χαρτογραφικό σφάλμα του MS-Αλγορίθμου κυμαίνεται μεταξύ 0.20 και 0.35 ενώ το μέγιστο χαρτογραφικό σφάλμα παίρνει τιμές μεταξύ 0.45 και 0.75.

Το τίμημα για την βελτίωση στο χαρτογραφικό σφάλμα είναι πολυγωνική πολυπλοκότητα. Συγκεκριμένα, ο Αλγόριθμος-NEW έχει χειρότερη επίδοση από άποψη μέσης και μέγιστης πολυγωνικής πολυπλοκότητας. Η μέση πολυπλοκότητα του αλγορίθμου μας κυμαίνεται μεταξύ 0.10 και 0.14 ενώ η μέγιστη πολυγωνική πολυπλοκότητα φτάνει έως και 0.35.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η σύγκριση των τιμών της πολυγωνικής πολυπλοκότητας μεταξύ των δύο αλγορίθμων για τα επι μέρους γραφήματα των πειραμάτων μας. Η μέγιστη αύξηση μέσης πολυγωνικής πολυπλοκότητας που παρουσιάζεται είναι 0.032, ενώ η μέγιστη τιμή μέσης πολυγωνικής πολυπλοκότητας σε ένα γράφημα είναι 0.159, αρκετά κάτω από το όριο 0.4 πάνω από το οποίο τα πολύγωνα θεωρούνται πολύπλοκα με βάση τον Brinkoff [7]. Και οι δύο τιμές παρατηρούνται στο πείραμα με την τιμή του λόγου εμφώλευσης $nest = 0.5$. Στο διάγραμμα 6.7 φαίνεται η μέση και η ακραία περίπτωση διαφοράς πολυγωνικής πολυπλοκότητας, στην ακραία περίπτωση πράγματι παρατηρούμε ότι ο χάρτης που παράγεται με τον Αλγόριθμο-NEW φαίνεται οπτικά χειρότερος από αυτόν του MS-Αλγορίθμου.

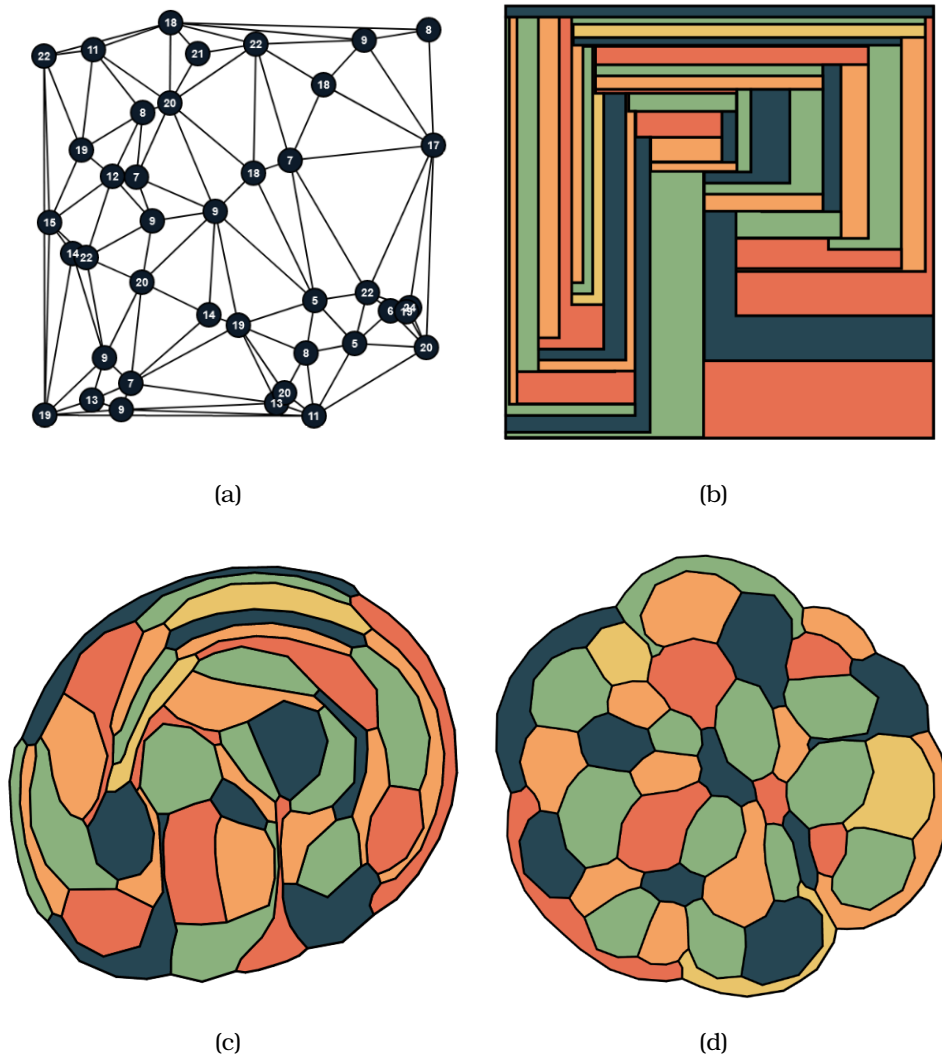
Συνολικά, επαληθεύουμε τα ευρήματα των Mchedlidze και Schnorr [16] καθώς βλέπουμε ότι οι παράμετροι w , $nest$ και N επιδρούν στα αποτελέσματα που παράγουν και οι δύο αλγόριθμοι. Επίσης, επιβεβαιώνουμε ότι η επίδραση του λόγου εμφώλευσης $nest$ είναι η σημαντικότερη.



Σχήμα 6.7: Ο τελικός μεταφορικός χάρτης για το γράφημα με την μέγιστη διαφορά πολυγωνικής πολυπλοκότητας (a-b) και για μια μέση περίπτωση (c-d).

6.4 Σύγκριση επίδοσης αρχικών μεταφορικών χαρτών

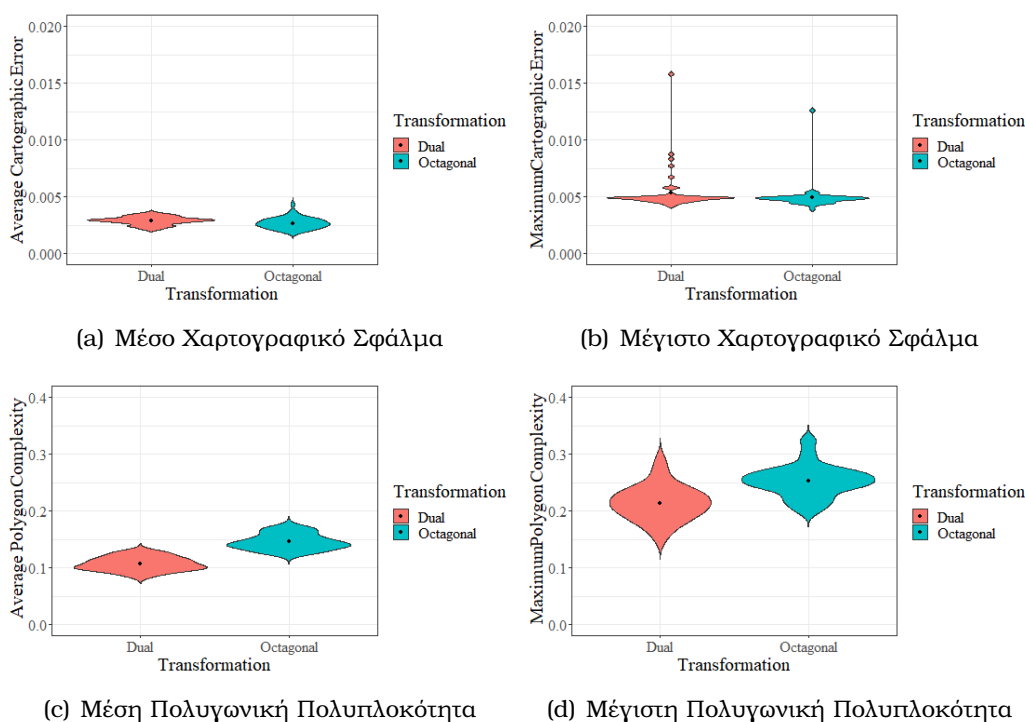
Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της σύγκρισης των χαρτών που προκύπτουν από τον δυικό μετασχηματισμό με τους χάρτες που παράγονται από τον μετασχηματισμό των Alam et al. [3], μία τεχνοτροπία με πλήρως διαφορετικά χαρακτηριστικά από τον δυικό μετασχηματισμό που χρησιμοποιούμε στην υπόλοιπη εργασία. Θέλουμε να μελετήσουμε κατά πόσο ο αρχικός χάρτης επηρεάζει την ταχύτητα σύγκλισης και την ποιότητα του τελικού χάρτη.



Σχήμα 6.8: Παράδειγμα μεταφορικού χάρτη για το γράφημα (a) χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό με τον αλγόριθμο του Alam et al. (c) και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό μέσω δυϊκού γραφήματος (d).

Στο σχήμα 6.8 βλέπουμε ότι οι χάρτες που προκύπτουν μετά από κάθε μετασχηματισμό είναι σημαντικά διαφορετικοί, οπότε φαίνεται να επιβεβαιώνεται η εικασία ότι ο αρχικός χάρτης επιδρά σημαντικά στο τελικό αποτέλεσμα. Επίσης, με βάση το συγκεκριμένο παράδειγμα παρατηρούμε ότι ο χάρτης που προκύπτει από τον δυικό μετασχηματισμό έχει χαμηλότερη πολυπλοκότητα από εκείνον με τον οκταγωνικό μετασχηματισμό. Για να επιβεβαιώσουμε τις παρατηρήσεις αυτές πραγματοποιούμε ένα πείραμα με 50 τυχαία γραφήματα.

Τα αποτελέσματα των πειραμάτων, που παρουσιάζονται στο σχήμα 6.9, φαίνεται να επαληθεύουν τις παρατηρήσεις μας. Συγκεκριμένα, φαίνεται πως οι χάρτες που παράγουμε με τον δυικό μετασχηματισμό έχουν σχεδόν 5% χαμηλότερη μέση πολυγωνική πολυπλοκότητα από εκείνους που παράγουμε με τον οκταγωνικό μετασχηματισμό, ενώ όμοια φαίνεται να είναι τα αποτελέσματα και για την μέγιστη πολυγωνική πολυπλοκότητα. Τέλος, βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός δεν φαίνεται να επηρεάζει το χαρτογραφικό σφάλμα στο οποίο συγκλίνει ο αλγόριθμος.



Σχήμα 6.9: Χαρτογραφικό σφάλμα και πολυγωνική πολυπλοκότητα

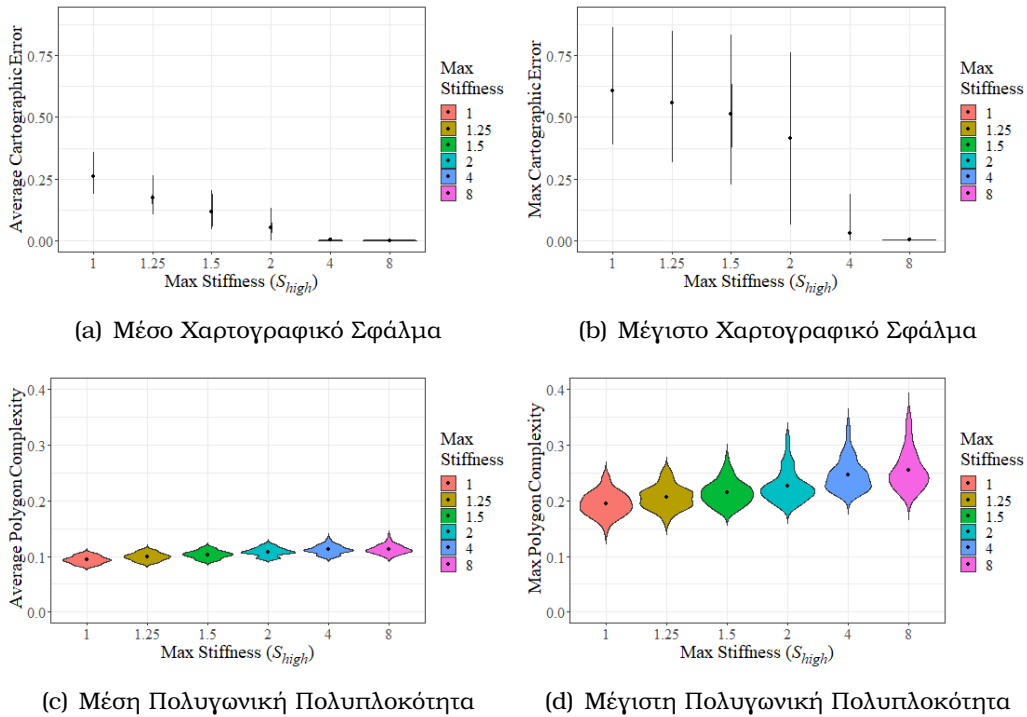
6.5 Αλληλοεξάρτηση μεταξύ χαρτογραφικού σφάλματος και πολυπλοκότητας

Το κόστος της επίτευξης μηδενικού χαρτογραφικού σφάλματος είναι μια μικρή ποσότητα πολυγωνικής πολυπλοκότητας. Δεδομένου του ότι ο Αλγόριθμος-NEW

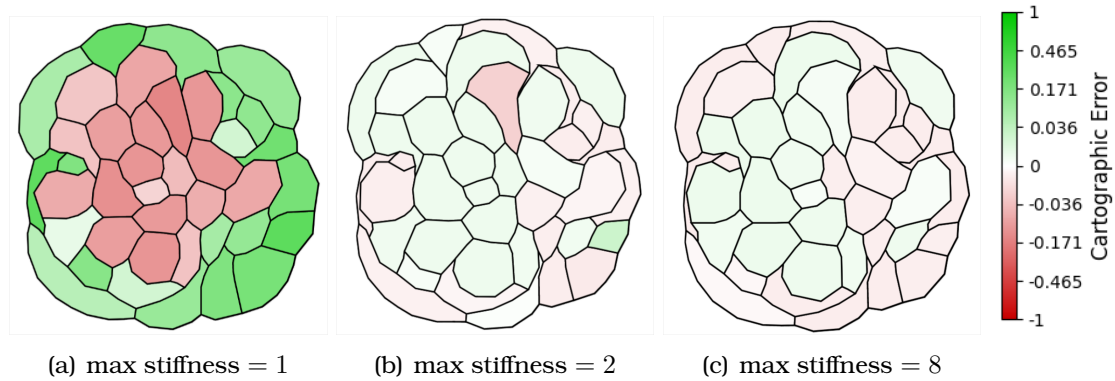
6.5. Αλληλοεξάρτηση μεταξύ χαρτογραφικού σφάλματος και πολυπλοκότητας

είναι πανομοιότυπος με τον MS-Αλγόριθμο για $\text{max stiffness } s_{high} = 1$, μελετάμε την επίδραση της παραμέτρου $\text{maximum stiffness } s_{high}$ στην πολυγωνική πολυπλοκότητα. Τα αποτελέσματα του πειράματος παρουσιάζονται στο σχήμα 6.12. Παρατηρούμε ότι ενώ για $s_{high} = 8$, το μέσο χαρτογραφικό σφάλμα γίνεται πρακτικά 0, η μέση πολυγωνική πολυπλοκότητα αυξάνεται όσο το s_{high} αυξάνεται από 1 σε 8. Το ίδιο φαινόμενο σε λίγο μεγαλύτερο βαθμό φαίνεται να επικρατεί και για το μέγιστο χαρτογραφικό σφάλμα / μέγιστη πολυγωνική πολυπλοκότητα. Δεδομένου ότι για $s_{high} > 8$ δεν παρατηρήσαμε καμία αισθητή διαφορά (δεν υπήρχε περιοχή με ακαμψία που να χρειαζόταν να λάβει μεγαλύτερες τιμές), σταθεροποιήσαμε για το Αλγόριθμο-NEW $s_{high} = 8$. Το διάγραμμα 6.11 απεικονίζει έναν “heat-map” χρωματισμό των περιοχών του μεταφορικού χάρτη για το ίδιο γράφημα για $s_{high} \in \{1, 2, 8\}$, κάνοντας έτσι εμφανή την επίδραση της παραμέτρου της ακαμψίας.

Το πείραμα αυτό εμφανίζει μια μονοτονική μείωση για το χαρτογραφικό σφάλμα και μία μονοτονική αύξηση για την πολυγωνική πολυπλοκότητα όσο αυξάνεται η τιμή του s_{high} .



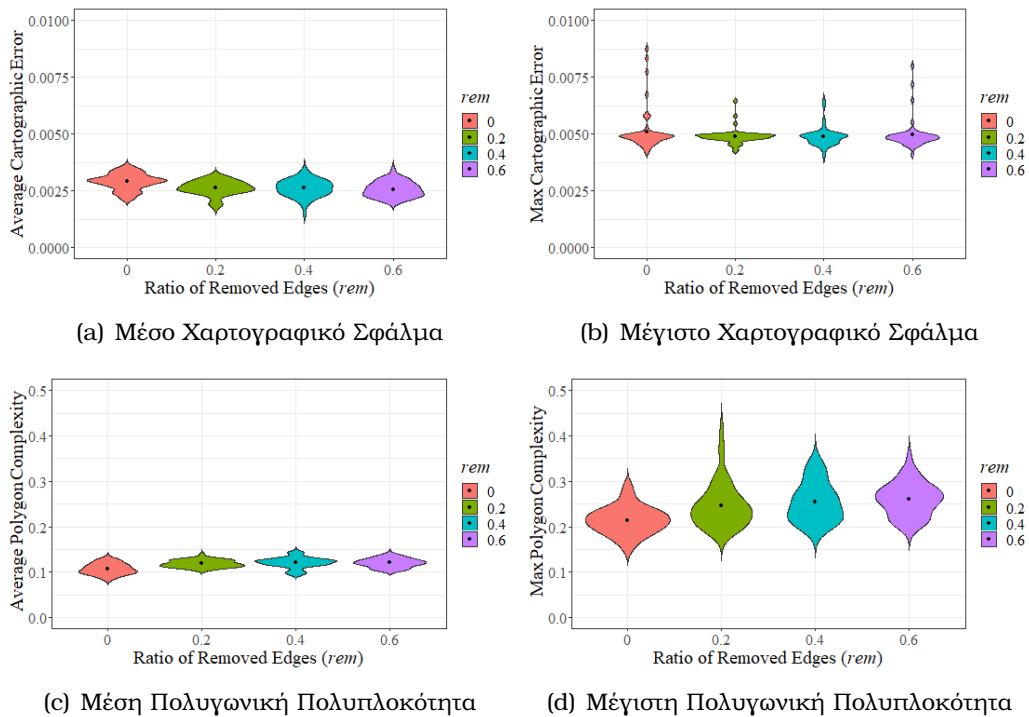
Σχήμα 6.10: Χαρτογραφικό σφάλμα και πολυγωνική πολυπλοκότητα για διάφορες τιμές της παραμέτρου max stiffness για ίδιους $N = 50$ γραφήματα με $n = 20, nest = 0, w = 5$.



Σχήμα 6.11: Παρουσίαση κανονικοποιημένης διαφοράς πίεσης για τιμές max stiffness $\in \{1, 2, 8\}$ με χρήση heat-map

6.6 Ανάλυση για μη τριγωνοποιημένα γραφήματα

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε πόσο καλά συμπεριφέρεται η επέκταση του αλγορίθμου που πραγματοποιήσαμε για μη τριγωνοποιημένα γραφήματα.



Σχήμα 6.12: Χαρτογραφικό σφάλμα και πολυγωνική πολυπλοκότητα για διάφορες τιμές λόγου αφαιρούμενων ακμών $rem \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6\}$ για $N = 50$ γραφήματα με $n = 20, nest = 0, w = 5$.

Πραγματοποιήσαμε ένα πείραμα για γραφήματα με διάφορα ποσοστά αφαίρεσης

εσωτερικών ακμών $rem \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6\}$. Υπενθυμίζουμε ότι τα βάρη στις περιοχές με τις οπές ανατίθενται σύμφωνα με την εξίσωση 4.1. Παρατηρήσαμε ότι η παράμετρος rem , για $rem > 0$, δεν φαίνεται να επιδρά ουσιαστικά στα αποτελέσματα που λαμβάνουμε. Ωστόσο, είδαμε ότι οι χάρτες χωρίς οπές έχουν ελάχιστα χαμηλότερη πολυγωνική πολυπλοκότητα από αυτούς με οπές. Εικάζουμε ότι το φαινόμενο αυτό προκύπτει επειδή οι οπές συμπεριφέρονται σαν περιοχές που αντιστοιχούν σε κορυφές μεγάλου βαθμού. Επίσης, παρατηρήσαμε ότι οι οπές συχνά φαίνονται αντιαισθητικές καθώς έχουν ιδιαίτερα στενούς διαδρόμους. Πιστεύουμε ότι τα τελευταία δύο προβλήματα που αναφέραμε μπορούν να εξαλειφθούν επιλέγοντας μία καλύτερη συνάρτηση απονομής βάρους στις οπές και πιθανώς εισάγοντας μία καινούρια δύναμη που θα εγγυάται ένα ελάχιστο πάχος περιοχής.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Σε αυτή την εργασία αναλύσαμε και υλοποιήσαμε τους αλγορίθμους των Mchedlidze και Schnorr και των Alam et al., προτείναμε μία βελτίωση για τον πρώτο από τους δύο, επεκτείναμε την κλάση των γραφημάτων που μπορεί να χειριστεί ο αρχικός μετασχηματισμός και πραγματοποιήσαμε μία εκτενή μελέτη ώστε να συγκρίνουμε τον προϋπάρχοντα αλγόριθμο με αυτόν που αναπτύξαμε καθώς και να μελετήσουμε την επίδοση του αλγορίθμου μας με καινούριες αρχικές συνθήκες. Είδαμε ότι ο Αλγόριθμος-NEW πράγματι πετυχαίνει χαρτογραφικά σφάλματα πολύ κοντά στο μηδέν θυσιάζοντας μόνο μια μικρή ποσότητα πολυγωνική πολυπλοκότητας σε σχέση με τον MS-Αλγόριθμο. Επίσης δείξαμε ότι ο Αλγόριθμος-NEW μπορεί να χειριστεί ικανοποιητικά και μη τριγωνοποιημένα γραφήματα.

7.1 Μελλοντική δουλειά

7.1.1 Προσδιορισμός μετρικών

Σε αντίθεση με το χαρτογραφικό σφάλμα, η πολυπλοκότητα του πολυγώνου είναι μία μετρική που, παρά το γεγονός ότι τα μεγέθη που περιλαμβάνει φαίνεται διαισθητικά να σχετίζονται με την πολυπλοκότητα, πιστεύουμε ότι δεν εκφράζει επαρκώς το φαινόμενο που θέλουμε να μελετήσουμε. Συνεπώς, πιστεύουμε ότι πρέπει να γίνει μία μελέτη που να περιλαμβάνει αξιολογήσεις από χρήστες ώστε να προσδιοριστεί καλύτερα μια μετρική που πραγματικά να ενθυλακώνει την πολυπλοκότητα των πολυγώνων.

7.1.2 Προσδιορισμός παραμέτρων

Παρά την εκτεταμένη πειραματική μελέτη που έγινε στην παρούσα εργασία, το πλήθος των μεταβλητών που πρέπει να προσδιοριστούν είναι πολύ μεγάλο και

συσχέτιση τους σχετικά ανεξερεύνητη. Κατά συνέπεια, πιστεύουμε ότι υπάρχει σημαντικό περιθώριο βελτίωσης της επίδοσης του αλγορίθμου αν προσδιοριστούν καλύτερα οι παράμετροι του. Κύριο παράδειγμα τέτοιας παραμέτρου είναι η συνάρτηση που αναθέτει βάρη στις επιπρόσθετες κορυφές που δημιουργήθηκαν στις μη τριγωνοποιημένες όψεις.

7.1.3 Αρχικός μετασχηματισμός σε μεταφορικό χάρτη

Σε αυτή την εργασία παρατηρήσαμε ότι ο αρχικός μετασχηματισμός σε μεταφορικό χάρτη επηρεάζει σημαντικά τον χρόνο σύγκλισης, την πολυγωνική πολυπλοκότητα και το τελικό αποτέλεσμα. Συνεπώς, πιστεύουμε ότι θα ήταν ενδιαφέρον κανείς να εξερευνήσει περισσότερους μετασχηματισμούς, ίσως ακόμη και να προσπαθήσει να μελετήσει τα χαρακτηριστικά τους που οδηγούν σε καλύτερα τελικά αποτελέσματα.

7.1.4 Διαδικασία μετά την σύγκλιση του αλγορίθμου

Τέλος, πιστεύουμε ότι θα μπορούσε κανείς να προσπαθήσει να αναπτύξει κάποια διαδικασία που να εφαρμόζεται μετά την σύγκλιση του αλγορίθμου με σκοπό να βελτιώσει τον τελικό μεταφορικό χάρτη. Όπως αναφέρεται και στην δουλειά του Schnorr [19] θα μπορούσε να δημιουργηθεί κάποια διαδικασία που θα στόχευε στην μείωση της πολυπλοκότητας και γενικά στην καλύτερη αισθητική εικόνα των χαρτών χρησιμοποιώντας splines ή gaussian filter.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Md. Jawaherul Alam, Stephen G. Kobourov, and Sankar Veeramoni. Quantitative measures for cartogram generation techniques. *Comput. Graph. Forum*, 34(3):351–360, 2015.
- [2] Muhammad Jawaherul Alam, Therese Biedl, Stefan Felsner, Andreas Gerasch, Michael Kaufmann, and Stephen G. Kobourov. Linear-time algorithms for hole-free rectilinear proportional contact graph representations. *Algorithmica*, 67(1):3–22, 2013.
- [3] Muhammad Jawaherul Alam, Therese Biedl, Stefan Felsner, Michael Kaufmann, Stephen G. Kobourov, and Torsten Ueckerdt. Computing cartograms with optimal complexity. *Discrete & Computational Geometry*, 50(3):784–810, 2013.
- [4] Evmorfia N. Argyriou, Michael A. Bekos, and Antonios Symvonis. Maximizing the total resolution of graphs. *Comput. J.*, 56(7):887–900, 2013.
- [5] François Bertault. A force-directed algorithm that preserves edge-crossing properties. *Inf. Process. Lett.*, 74(1-2):7–13, 2000.
- [6] Robert P. Biuk-Aghai, Patrick Cheong-Iao Pang, and Bin Pang. Map-like visualisations vs. treemaps: an experimental comparison. In Robert P. Biuk-Aghai, Jie Li, and Shigeo Takahashi, editors, *Proceedings of the 10th International Symposium on Visual Information Communication and Interaction, VINCI 2017, Bangkok, Thailand, August 14-16, 2017*, pages 113–120. ACM, 2017.
- [7] Thomas Brinkhoff, Hans-Peter Kriegel, Ralf Schneider, and A. Braun. Measuring the complexity of polygonal objects. In Patrick Bergougnoux, Kia Makki, and Niki Pissinou, editors, *Proceedings of the 3rd ACM International*

-
- Workshop on Advances in Geographic Information Systems, Baltimore, Maryland, USA, December 1-2, 1995, in conjunction with CIKM 1995*, page 109. ACM, 1995.
- [8] Thomas Brinkhoff, Hans-Peter Kriegel, Ralf Schneider, and Alexander Braun. Measuring the complexity of polygonal objects. In *ACM-GIS*, page 109, 1995.
- [9] Rafael G. Cano, Kevin Buchin, Thom Castermans, Astrid Pieterse, Willem Sonke, and Bettina Speckmann. Mosaic drawings and cartograms. *Comput. Graph. Forum*, 34(3):361–370, 2015.
- [10] Mark de Berg, Elena Mumford, and Bettina Speckmann. On rectilinear duals for vertex-weighted plane graphs. *Discret. Math.*, 309(7):1794–1812, 2009.
- [11] Mark de Berg, Elena Mumford, and Bettina Speckmann. On rectilinear duals for vertex-weighted plane graphs. *Discrete Mathematics*, 309(7):1794–1812, 2009.
- [12] Danny Dorling. Area cartograms: their use and creation. *University of East Anglia: Environmental Publications*, 59, 1996.
- [13] István Fáry. On straight-line representation of planar graphs. *Acta scientiarum mathematicarum*, 11(229-233):2, 1948.
- [14] Yifan Hu, Stephen G. Kobourov, and Sankar Veeramoni. Embedding, clustering and coloring for dynamic maps. *J. Graph Algorithms Appl.*, 18(1):77–109, 2014.
- [15] Linda Kleist. Drawing planar graphs with prescribed face areas. *J. Comput. Geom.*, 9(1):290–311, 2018.
- [16] Tamara Mchedlidze and Christian Schnorr. Metaphoric Maps for Dynamic Vertex-weighted Graphs. In Marco Agus, Wolfgang Aigner, and Thomas Hoell, editors, *EuroVis 2022 - Short Papers*. The Eurographics Association, 2022.
- [17] Sabrina Nusrat and Stephen G. Kobourov. The state of the art in cartograms. *Comput. Graph. Forum*, 35(3):619–642, 2016.
- [18] Bahador Saket, Carlos Scheidegger, and Stephen G. Kobourov. Comparing node-link and node-link-group visualizations from an enjoyment perspective. In *Computer Graphics Forum*, volume 35, pages 41–50. Wiley Online Library, 2016.
- [19] Christian Schnorr. Visualizing dynamic clustered data using area-proportional maps. Master’s thesis, Karlsruhe Institute of Technology, 2020.

- [20] Walter Schnyder. Embedding planar graphs on the grid. In *Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 138–148, 1990.
- [21] Paolo Simonetto, Daniel Archambault, David Auber, and Romain Bourqui. Impred: An improved force-directed algorithm that prevents nodes from crossing edges. *Comput. Graph. Forum*, 30(3):1071–1080, 2011.
- [22] Sherman K. Stein. Convex maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2(3):464–466, 1951.
- [23] Carsten Thomassen. Plane cubic graphs with prescribed face areas. *Comb. Probab. Comput.*, 1:371–381, 1992.
- [24] Waldo Tobler. Thirty five years of computer cartograms. *An. of the Assoc. of American Geographers*, 94(1):58–73, 2004.
- [25] William Thomas Tutte. How to draw a graph. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):743–767, 1963.