



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**Ανασκόπηση των τεχνικών γραμμικής διάταξης
και διάταξης σε πολυδιάστατα πεδία**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ ΣΠΥΡΙΔΩΝ

Επιβλέπουσα: Βασιλική Καντερέ

Επίκουρη Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2023



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**Ανασκόπηση των τεχνικών γραμμικής διάταξης
και διάταξης σε πολυδιάστατα πεδία**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ ΣΠΥΡΙΔΩΝ

Επιβλέπουσα: Βασιλική Καντερέ

Επίκουρη Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 4^η Ιουλίου 2023.

.....

Βασιλική Καντερέ	Συμεών Παπαβασιλείου	Δημήτριος Τσουμάκος
Επίκουρη Καθηγήτρια	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αναπληρωτής
Ε.Μ.Π.		Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2023

(υπογραφή)

.....

Γιαννόπουλος Σπυρίδων

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Γιαννόπουλος Σπυρίδων, 2023.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΔΗΛΩΣΗ ΜΗ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων δηλώνω ενυπογράφως ότι είμαι αποκλειστικός συγγραφέας της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, για την ολοκλήρωση της οποίας κάθε βοήθεια είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται λεπτομερώς στην εργασία αυτή. Έχω αναφέρει πλήρως και με σαφείς αναφορές όλες τις πηγές χρήσης δεδομένων, απόψεων, θέσεων και προτάσεων, ιδεών και λεκτικών αναφορών, είτε κατά κυριολεξία είτε βάσει επιστημονικής παράφρασης. Αναλαμβάνω την προσωπική και ατομική ευθύνη ότι σε περίπτωση αποτυχίας στην υλοποίηση των ανωτέρω δηλωθέντων στοιχείων, είμαι υπόλογος έναντι λογοκλοπής, γεγονός που σημαίνει αποτυχία στην Πτυχιακή μου Εργασία και κατά συνέπεια αποτυχία απόκτησης του Τίτλου Σπουδών, πέραν των λοιπών συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων. Δηλώνω, συνεπώς, ότι αυτή η Πτυχιακή Εργασία προετοιμάστηκε και ολοκληρώθηκε από εμένα προσωπικά και αποκλειστικά και ότι αναλαμβάνω πλήρως όλες τις συνέπειες του νόμου στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δε μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής άλλης πνευματικής διαδικασίας.

Περίληψη

Το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης είναι ένα κλασικό πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης που έχει μελετηθεί για πολλά χρόνια. Στην παρούσα εργασία γίνεται για πρώτη φορά μία βιβλιογραφική ανασκόπηση του προβλήματος τέτοιου εύρους, η οποία έχει ως στόχο τη συγκεντρωτική παρουσίαση των πιο σημαντικών ερευνητικών ευρημάτων όλων αυτών τον καιρό. Αρχικά, καταγράφεται η πρόοδος της πολυπλοκότητας όσον αφορά την προσέγγιση του προβλήματος στη γενική περίπτωση, αλλά και για συγκεκριμένες κατηγορίες γράφων. Έπειτα, καταγράφονται οι βασικότερες μέθοδοι υπολογισμού κατώτατων ορίων ανά τα χρόνια. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τόσο οι πιο παλιοί και απλοί όσο και οι πιο σύγχρονοι, αποδοτικοί και σύνθετοι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι του προβλήματος. Έπειτα, διατυπώνεται η δομή κάποιων αλγορίθμων που υπολογίζουν τη βέλτιστη λύση σε πολυωνυμικό χρόνο για τις κατηγορίες γράφων τις οποίες αφορούν και καταγράφονται βιβλιογραφικά ευρήματα σχετικά με το πρόβλημα σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Τέλος, η εργασία ολοκληρώνεται με μία σύνοψη των παραπάνω και αναφορές σε πιθανές μελλοντικές κατευθύνσεις του προβλήματος.

Λέξεις – κλειδιά

ελάχιστη γραμμική διάταξη, θεωρία γραφημάτων, συνδυαστική βελτιστοποίηση, διάταξη γραφήματος, κατώτατα όρια, προσεγγιστικοί αλγόριθμοι, NP-δυσκολία, NP-πληρότητα, ευρετικοί αλγόριθμοι, υπολογιστική πολυπλοκότητα, γραμμικός προγραμματισμός, απεικόνιση γράφου, πολυδιάστατα πεδία, φασματική αλληλούχηση, προσομοιωμένη απόπτηση, βέλτιστη διάταξη

Abstract

The problem of minimum linear arrangement is a classical combinatorial optimization problem that has been studied for many years. In this paper, a comprehensive literature review of such range is conducted for the first time, aiming to provide a consolidated presentation of the most significant research findings over the years. Initially, the progress of complexity regarding the problem's general case is documented, as well as for specific categories of graphs. Then, all kinds of methods for computing lower bounds over the years are recorded. Afterwards, both the oldest and simplest, as well as the most modern, efficient, and complex approximation algorithms for the problem, are presented. Furthermore, the structure of some algorithms that compute the optimal solution in polynomial time for the graph categories they concern is formulated, and literature findings concerning the problem in larger dimensions are documented. Finally, the work is concluded with a summary of the above and references to potential future directions of the problem.

Keywords

minimum linear arrangement, graph theory, combinatorial optimization, graph ordering, lower bounds, approximation algorithms, NP-hardness, NP-completeness, heuristic algorithms, computational complexity, linear programming, graph layout, multidimensional fields, spectral sequencing, simulated annealing, optimal arrangement

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους όσους υπήρξαν δίπλα μου όλο αυτό το διάστημα και συνέβαλαν στην εκπόνησή της.

Ευχαριστώ θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτρια, κ. Βασιλική Καντερέ, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα και για τη συνεχή καθοδήγηση και υποστήριξη από την αρχή μέχρι το τέλος.

Έπειτα, θέλω να ευχαριστήσω τους στενούς φίλους και κοντινούς μου ανθρώπους οι οποίοι ομόρφυναν τα φοιτητικά μου χρόνια. Ευελπιστώ, η παρέα τους να συνοδεύει και τα επόμενα εγχειρήματα της ζωής μου.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω στην οικογένεια μου, και κυρίως τους γονείς μου, για την ανιδιοτελή στήριξη και την αγάπη τους όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	5
Abstract	6
Ευχαριστίες	7
Περιεχόμενα	8
Κατάλογος πινάκων.....	10
Κατάλογος σχημάτων.....	12
Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή.....	14
Κεφάλαιο 2 Ιστορικά στοιχεία και πολυπλοκότητα	16
2.1 Ορισμός και παραλλαγές	16
2.2 Εφαρμογές	17
2.3 Πολυπλοκότητα	18
Κεφάλαιο 3 Σύνολο γράφων για πειραματική μελέτη, κατώτατα όρια και βασικές ευρετικές τεχνικές.....	21
3.1 Σύνολο γράφων για πειραματική μελέτη.....	21
3.2 Συνδυαστικά κατώτατα όρια	25
3.2.1 Μέθοδος μονοπατιού.....	25
3.2.2 Μέθοδος ακμών.....	25
3.2.3 Μέθοδος βαθμού	26
3.2.4 Μέθοδος δέντρου Gomory-Hu.....	27
3.2.5 Μέθοδος Juvan-Mohar	27
3.2.6 Μέθοδος πλέγματος.....	28
3.2.7 Παρατηρήσεις.....	29
3.3 Γραμμικά προγράμματα.....	29
3.3.1 Κομψά κατώτατα όρια	33
3.3.2 Μεταβλητές διαμεσολάβησης	36
3.3.3 Γραμμικό πρόγραμμα με εύρεση κοινότητας.....	37
3.4 Ευρετικές συναρτήσεις προσέγγισης.....	42
3.4.1 Κανονικές και τυχαίες απεικονίσεις	42
3.4.2 Διαδοχικές επαυξήσεις	43
3.4.3 Φασματική αλληλούχηση.....	45
3.4.4 Τοπική αναζήτηση	45

3.4.5	Αναρρίχηση λόφου	47
3.4.6	Ολική αναζήτηση	47
3.4.7	Metropolis	48
3.4.8	Προσομοιωμένη ανόπτηση.....	49
3.4.9	Παρατηρήσεις και συμπεράσματα	49
Κεφάλαιο 4 Προχωρημένες ευρετικές τεχνικές		51
4.1	Φασματική αλληλούχηση + Προσομοιωμένη ανόπτηση	51
4.2	Δυαδικό δέντρο αποσύνθεσης	52
4.3	Πολύ-κλιμακωτός αλγόριθμος.....	55
4.4	Γενετικός αλγόριθμος αναρρίχησης λόφου	58
4.5	Σχήμα αλγεβρικού πολυπλέγματος.....	61
4.6	Λοιπές ευρετικές.....	64
4.6.1	Βελτιωμένη ελαχιστοποίηση της εμπρόσθιας αύξησης	64
4.6.2	Μιμητικός αλγόριθμος	64
4.6.3	Φ-προσομοιωμένη ανόπτηση δύο σταδίων	65
4.6.4	GRASP και Path Relinking	67
Κεφάλαιο 5 Ακριβείς αλγόριθμοι και εφαρμογή τεχνικών σε πολυδιάστατα πεδία.....		68
5.1	Ακριβείς αλγόριθμοι	68
5.1.1	Χορδικά γραφήματα	68
5.1.2	Γράφοι Halin	71
5.2	Πολυδιάστατα πεδία	74
Κεφάλαιο 6 Σύνοψη		77
Βιβλιογραφία.....		79

Κατάλογος πινάκων

Πίνακας 2.1 Κατηγορίες γράφων με βέλτιστη λύση σε πολυωνυμικό χρόνο.	19
Πίνακας 2.2 Η εξέλιξη της πολυπλοκότητας και η αντίστοιχη παραπομπή.....	20
Πίνακας 3.1 Για κάθε γράφο το όνομα, ο αριθμός κορυφών και ακμών, ο βαθμός (ελάχιστος / μέσος / μέγιστος), η διάμετρος και η οικογένεια όπου ανήκει.....	24
Πίνακας 3.2 Σύγκριση της μεθόδου του Zündorf με ήδη γνωστές μεθόδους.	41
Πίνακας 4.1 Το σύνολο γράφων των Koren και Harel. Όνομα, πλήθος κορυφών και ακμών και βαθμός (ελάχιστος / μέγιστος).....	63

Κατάλογος σχημάτων

Σχήμα 2.1 Μία βέλτιστη γραμμική διάταξη για το πλέγμα 5x5. Οι μαύροι αριθμοί δείχνουν την αριθμηση των κόμβων, ενώ οι γκρι τα κόστη που προκύπτουν για κάθε ακμή.	16
Σχήμα 3.1 Μερικοί γράφοι από το σύνολο του Petit.	23
Σχήμα 3.2 Απεικόνιση για τη μέθοδο βαθμού.....	26
Σχήμα 3.3 Ένας γράφος G , το Gomory-Hu δέντρο του και ο πίνακας f μέγιστων ροών – ελάχιστων αποκοπών.....	28
Σχήμα 5.1 Ένα παράδειγμα γράφου Halin.....	71

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Τα προβλήματα απεικόνισης γράφων αποτελούν μια συγκεκριμένη τάξη των συνδυαστικών προβλημάτων βελτιστοποίησης, των οποίων ο στόχος είναι η γραμμική απεικόνιση ενός γράφου με τέτοιον τρόπο ώστε μια συγκεκριμένη αντικειμενική συνάρτηση να βελτιστοποιείται [29]. Γραμμική απεικόνιση είναι η αρίθμηση των κορυφών ενός γράφου με διακριτούς ακεραίους. Ένας μεγάλος αριθμός σχετικών προβλημάτων από διαφορετικά επιστημονικά πεδία μπορούν να μοντελοποιηθούν ως προβλήματα απεικόνισης γραφημάτων, όπως η σχεδίαση κυκλωμάτων VLSI, η ανάκτηση πληροφοριών, η αριθμητική ανάλυση, η υπολογιστική βιολογία, ο προγραμματισμός (scheduling), η αρχαιολογία και άλλα. Τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα απεικόνισης γράφων θεωρούνται NP-δύσκολα και τα αντίστοιχα προβλήματα απόφασής τους NP-πλήρη, αλλά στις περισσότερες εφαρμογές τους εφικτές λύσεις με σχεδόν βέλτιστο κόστος επαρκούν. Ως συνέπεια, προσεγγιστικοί αλγόριθμοι και αποτελεσματικές ευρετικές συναρτήσεις έχουν αναπτυχθεί με εφαρμογή σε πρακτικό επίπεδο.

Ένα από τα προβλήματα αυτά, που αποτελεί και το κυρίως θέμα της παρούσας διπλωματικής, είναι το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης (Minimum Linear Arrangement ή MinLA), δηλαδή η τοποθέτηση των κόμβων ενός γράφου, που συνδέονται μεταξύ τους με ακμές συγκεκριμένου κόστους, με τέτοιον τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος αυτό. Το MinLA είναι ένα ενδιαφέρον πρόβλημα το οποίο διατυπώθηκε αρχικά από τον Harper το 1964 [57]. Ακολουθούν περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον ορισμό και την ιστορία του προβλήματος στο επόμενο κεφάλαιο.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη των προτεινόμενων λύσεων από τη βιβλιογραφία και η εφαρμογή τους σε πολυδιάστατα πεδία. Πιο συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται γενικά στοιχεία και εφαρμογές του προβλήματος, καθώς και η πρόοδος όσον αφορά την πολυπλοκότητα βέλτιστων αλγορίθμων ανά κατηγορία γράφου, αλλά και προσεγγιστικών για κάθε πιθανό γράφο ή υποσύνολο του γενικού συνόλου. Στο κεφάλαιο 3 γίνεται αναφορά στις μεθόδους εύρεσης κατώτατων ορίων και στις βασικές ευρετικές συναρτήσεις που προσεγγίζουν το MinLA, ενώ παρουσιάζεται και το πιο σημαντικό σύνολο γράφων που αποτέλεσε τη βάση των περισσότερων πειραματικών μελετών όλα αυτά τα χρόνια. Στο κεφάλαιο 4 αναφέρονται οι καλύτερες ευρετικές που προέκυψαν με την πάροδο του χρόνου

και θεωρούνται αποδοτικές μέχρι και σήμερα, οι οποίες συνήθως συνδυάζουν στοιχεία και τεχνικές από τις πιο βασικές και συγκρίνονται οι επιδόσεις τους όπου είναι δυνατόν. Στο κεφάλαιο 5 γίνεται αναφορά σε κάποιους αλγορίθμους που υπολογίζουν λύσεις με ακρίβεια και ταχύτητα για συγκεκριμένες κατηγορίες γράφων, καθώς και μια σύνοψη των βιβλιογραφικών γνώσεων που υπάρχουν σχετικά με το MinLA σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Τέλος, στο κεφάλαιο 6, γίνεται μια ανακεφαλαίωση, αναγράφονται κάποια συμπεράσματα και αναφέρονται πιθανές μελλοντικές κατευθύνσεις σχετικά με το πρόβλημα.

Κεφάλαιο 2

Ιστορικά στοιχεία και πολυπλοκότητα

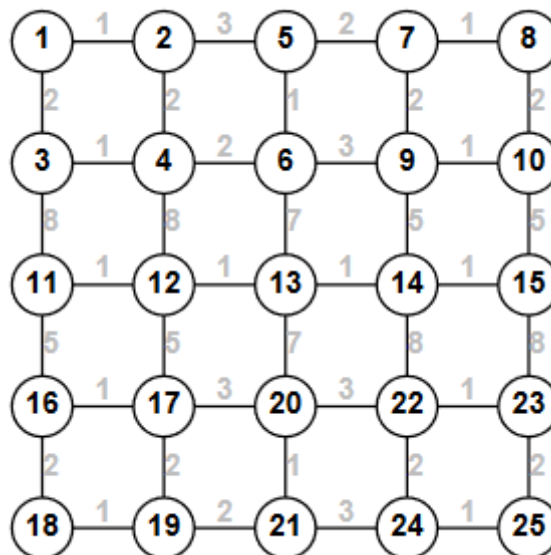
Στο παρόν κεφάλαιο, αρχικά, παρατίθενται ευρήματα που αφορούν ιστορικά στοιχεία και βασικές έννοιες του προβλήματος. Έπειτα, παρουσιάζεται η πολυπλοκότητα πολυωνυμικών αλγορίθμων που βρίσκουν τη βέλτιστη λύση σε συγκεκριμένες κατηγορίες γράφων, ενώ καταγράφονται ακόμα διάφορα επιτεύγματα σχετικά με την προσεγγισσιμότητα του MinLA από την εποχή της διατύπωσής του μέχρι σήμερα.

2.1 Ορισμός και παραλλαγές

Μια απεικόνιση (layout) ή μια γραμμική διάταξη (linear ordering) ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G = (V, E)$ με $|V| = n$ είναι μια 1-1 συνάρτηση $\varphi: V \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης διατυπώνεται ως εξής:

Δεδομένου ενός γράφου $G = (V, E)$, πρέπει να βρούμε μια απεικόνιση φ η οποία να ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση:

$$LA(G, \varphi) = \sum_{u,v \in V} |\varphi(u) - \varphi(v)|$$



Σχήμα 2.1 Μία βέλτιστη γραμμική διάταξη για το πλέγμα 5x5. Οι μαύροι αριθμοί δείχνουν την αρίθμηση των κόμβων, ενώ οι γκρι τα κόστη που προκύπτουν για κάθε ακμή.

Το Σχήμα 2.1 απεικονίζει μια ελάχιστη γραμμική διάταξη για το 5×5 πλέγμα. Από εδώ και πέρα θα θεωρούμε ότι το σύνολο των κόμβων του υπό μελέτη γράφου G είναι $V(G) = \{1, \dots, n\}$ και ότι $|E(G)| = m$. Συνεπώς, μία απεικόνιση φ μπορούμε να πούμε πως είναι και μια μετάθεση (permutation). Χωρίς απώλεια της γενικότητας, θεωρούμε ότι ο γράφος που θα εξετάζουμε είναι συνεκτικός και χωρίς βρόχους. Φυσικά, υπάρχει και η έκδοση όπου ο γράφος έχει βεβαρημένες ακμές, αλλά στην πλειοψηφία των περιπτώσεων παρακάτω δεν θα μας απασχολήσει αυτή η διάκριση.

Το MinLA αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα απεικόνισης γράφων. Μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια ειδική περίπτωση των προβλημάτων της γενικής τοποθέτησης (General Placement Problem) [55], της τετραγωνικής ανάθεσης (Quadratic Assignment Problem ή QAP) [55] και της διάταξης σειριακής μονάδας (Single Row Facility Layout Problem) [7].

Η πιο γνωστή παραλλαγή του είναι το πρόβλημα ελαχιστοποίησης εύρους ζώνης πίνακα (Matrix Bandwidth Minimization Problem), το οποίο αρχικά διατυπώθηκε στο [57].

Μία άλλη ενδιαφέρουσα παραλλαγή είναι η γενίκευση του προβλήματος σε 2 ή περισσότερες διαστάσεις, με την οποία θα ασχοληθούμε περισσότερο στο κεφάλαιο 5 (d-Dimensional Arrangement Problem ή d-DIMAP).

Θεωρώντας ότι αναζητούμε τη μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης που αναφέρθηκε στον ορισμό του MinLA, προκύπτει το πρόβλημα της μέγιστης γραμμικής διάταξης (Maximum Linear Arrangement Problem) το οποίο ερευνάται στο [59].

Τέλος, έχουν γίνει και κάποιες μελέτες πάνω στην παραμετροποιημένη έκδοση του προβλήματος. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα [39] [40] [41] [53] [113] [117].

2.2 Εφαρμογές

Όπως προαναφέραμε, το πρόβλημα αρχικά διατυπώθηκε από τον Harper το 1964, ο οποίος προσπαθούσε να σχεδιάσει κώδικες διόρθωσης σφαλμάτων σε συγκεκριμένες κλάσεις γραφημάτων, ώστε οι μέσες απόλυτες τιμές των σφαλμάτων να ελαχιστοποιούνται. Αλλού, αναφέρεται ως πρόβλημα GT42 στο [45] και ως GT40 στο [14]. Επίσης, εναλλακτικές ονομασίες του έχουν δοθεί ανά καιρούς, όπως η βέλτιστη γραμμική διάταξη (optimal linear

ordering), το πρόβλημα του αθροίσματος των ακμών (edge sum problem) ή το ελάχιστο-1-άθροισμα (minimum-1-sum).

Η πρώτη του εφαρμογή ήταν ως αφηρημένο μοντέλο στη σχεδίαση απεικονίσεων VLSI. Δεδομένου ενός συνόλου στοιχείων, το πρόβλημα της απεικόνισης VLSI είναι η τοποθέτηση των στοιχείων σε ένα ταμπλό και η ένωσή τους με καλώδια έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις της σχεδίασης και να μην μπλέκονται τα καλώδια μεταξύ τους. Όσον αφορά την τοποθέτηση, υπάρχουν αρκετές μελέτες που χρησιμοποιούν το MinLA ώστε να πετύχουν την ελαχιστοποίηση του συνολικού μήκους των καλωδίων που θα χρησιμοποιηθούν [4] [58].

Το εν λόγω πρόβλημα σχετίζεται, επίσης, με τη σχεδίαση γραφημάτων: μία διμερής σχεδίαση (ή σχεδίαση 2 στρωμάτων) είναι μια απεικόνιση όπου οι κόμβοι ενός διμερούς γραφήματος τοποθετούνται σε 2 παράλληλες γραμμές και ενώνονται με ακμές οι οποίες είναι ευθείες γραμμές από τον έναν κόμβο στον άλλον. Ο διμερής αριθμός διασταυρώσεων ενός διμερούς γράφου είναι ο μικρότερος αριθμός διασταυρώσεων μεταξύ των ακμών από όλες τις δυνατές διμερείς σχεδιάσεις. Ο Pach το 1996 έδειξε ότι, για μια μεγάλη κλάση διμερών γραφημάτων, το να μειώσεις τον αριθμό αυτό ισοδυναμεί με την μείωση του συνολικού μήκους των ακμών, δηλαδή με το MinLA [89].

Άλλη εφαρμογή του προβλήματός είναι ως ένα υπεραπλουστευμένο μοντέλο για κάποια νευρική δραστηριότητα του εγκεφαλικού φλοιού [83], ενώ έχει αποδειχθεί επίσης ότι σχετίζεται με τον προγραμματισμό των εργασιών σε ένα μηχάνημα [3] [98].

Τη σημερινή εποχή, η κύρια εφαρμογή του MinLA είναι στη σχεδίαση γράφων, καθώς το άθροισμα όλων των μηκών των ακμών μπορεί να θεωρηθεί ως κριτήριο για την καλή αναπαράσταση ενός γράφου. Άλλα πεδία ενασχόλησης περιλαμβάνουν την απεικόνιση UML (Unified Modeling Language) ακολουθιακών διαγραμμάτων, διαγραμμάτων λογισμικού γενικότερα και πιο συγκεκριμένα μοντέλα οντοτήτων-συσχετίσεων (ER models) [23] και διαγράμματα ροής δεδομένων (data flow diagrams) [44].

2.3 Πολυπλοκότητα

Όπως επισημάνθηκε και στην εισαγωγή και διατυπώνει και ο Garey στο [46], το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης είναι NP-δύσκολο και η εύρεση λύσης για αυτό είναι NP-πλήρης. Συγκριτικά με άλλα NP-δύσκολα προβλήματα βελτιστοποίησης, το MinLA αποδεικνύεται δυσκολότερο, ενώ ιδιαίτερα δύσκολη είναι και η επίλυσή του στην πράξη. Παρ'

όλα αυτά, υπάρχουν αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου που υπολογίζουν ακριβείς λύσεις για συγκεκριμένες κατηγορίες γράφων (βλ. πίνακα 2.1).

Κατηγορία γράφου	Πολυπλοκότητα	Παραπομπή
Δέντρα	$O(n^3)$	Goldberg and Klipker 1976 [47]
Δέντρα με ρίζες	$O(n \log n)$	Adolphson and Hu 1973 [4]
Δέντρα	$O(n^{2.2})$	Shiloach 1979 [114]
Δέντρα	$O(n^{\log 3 / \log 2})$	Chung 1988 [24]
Ορθογώνια πλέγματα	$O(n)$	Muradyan and Piliposjan 1980 [86]
Τετράγωνα πλέγματα	$O(n)$	Mitchison and Durbin 1986 [83]
Υπερκύβιοι	$O(n)$	Harper 1964 [57]
Γράφος de Bruijn τάξης 4	$O(n)$	Harper 1970 [58]
n-διάστατες k-κλίκες	$O(n)$	Ellis and Warren 1964 [34]
Πλήρεις p-μερείς γράφοι	$O(n + p \log p)$	Muradyan and Piliposjan 1988 [87]
Γράφοι κατάλληλων διαστημάτων	$O(n)$	Safro 2002 [108]
Συγκεκριμένοι γράφοι Halin	$O(n)$	Easton <i>et. al.</i> 1996 [32]
Εξωεπίπεδοι γράφοι	$O(\delta^2 n + n^2)$	Frederickson and Hambrusch 1988 [42]
Γράφοι μοναδιαίου διαστήματος	$O(n)$	Jinjiang and Sanming 1995 [65]
Χορδικοί γράφοι	$O(n)$	Raoufi <i>et. al.</i> 2013 [97]

Πίνακας 2.1 Κατηγορίες γράφων με βέλτιστη λύση σε πολυωνυμικό χρόνο.

Η έλλειψη αποδοτικών αλγορίθμων που να βρίσκουν τη βέλτιστη λύση με ακρίβεια για κάθε κατηγορία γράφου έχει αναδείξει την σπουδαιότητα των προσεγγιστικών αλγορίθμων. Στην περίπτωση των πυκνών γράφων, μπορεί να υπολογιστεί μια προσέγγιση του MinLA εντός ενός παράγοντα $1+\epsilon$ σε χρόνο $n^{O(1/\epsilon)}$ για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ [43]. Γι' αυτό και στην πλειοψηφία των περιπτώσεων που θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, θα ασχολούμαστε με αραιούς γράφους για τους οποίους δεν υπάρχουν ακόμα επαρκή θεωρητικά αποτελέσματα. Η εξέλιξη της προσεγγισσιμότητας από άποψη πολυπλοκότητας κατά το πέρασμα των ετών παρουσιάζεται στον πίνακα 2.2.

Μία καλή επισκόπηση γύρω από τους προσεγγιστικούς αλγορίθμους για το MinLA μπορεί κανείς να βρει στο [61]. Επίσης, αξίζει να αναφερθούν δύο ακόμα ερευνητικά αποτελέσματα, όπου και στις δύο περιπτώσεις αποδείχθηκε ότι δεν υπάρχει προσεγγιστικό σχήμα πολυωνυμικού χρόνου. Το 2006 στο [27] υπό την υπόθεση των μοναδικών παιχνιδιών του Khot (Unique Games Conjecture) [72], ενώ το 2007 στο [8] με την προϋπόθεση ότι τα NP-πλήρη προβλήματα δεν μπορούν να επιλυθούν σε τυχαιοποιημένο υπο-εκθετικό χρόνο.

Πολυπλοκότητα		Παραπομπή
Σχήμα προσέγγισης σε πολυωνυμικό χρόνο για πυκνούς γράφους	$n^{o(1/\epsilon)}$	Frieze and Kannan 1996 [43]
$O(\log^2 n)$ -προσεγγ.	$pol(n)$	Hansen 1989 [56] Leighton and Rao 1999 [77]
$O(\log n \log \log n)$ -προσεγγ.	$pol(n)$	Even <i>et. al.</i> 1995 [36]
$O(\log n)$ -προσεγγ.	$pol(n)$	Rao and Richa 1998 [96]
$O(\sqrt{\log n \log \log n})$ -προσεγγ.	$pol(n)$	Charikar <i>et. al.</i> 2006 [21] Feige and Lee 2007 [38]
$O(\log \log n)$ -προσεγγ. για επίπεδους γράφους	$pol(n)$	Rao and Richa 1998 [96]
4-προσεγγ. για γράφους διαστημάτων	$pol(n)$	Safro 2002 [108]
2-προσεγγ. για γράφους διαστημάτων	$pol(n)$	Cohen <i>et. al.</i> 2006 [25]

Πίνακας 2.2 Η εξέλιξη της πολυπλοκότητας και η αντίστοιχη παραπομπή.

Στις αρχές, η απουσία αποδοτικών λύσεων για τη γενική περίπτωση των γράφων οδήγησε στην ανάπτυξη μεθόδων με στόχο την εύρεση κατώτατων ορίων για το MinLA [70] [78]. Αυτό είχε ως στόχο η απόδοση κάθε ευρετικής να έχει ένα μέτρο σύγκρισης με βάση τα υπάρχοντα καλύτερα κατώτατα όρια για κάθε γράφο.

Εκτενέστερη αναφορά σε μεθόδους εύρεσης κατώτατων ορίων και ευρετικές τεχνικές ακολουθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3

Σύνολο γράφων για πειραματική μελέτη, κατώτατα όρια και βασικές ευρετικές τεχνικές

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά παρουσιάζεται το βασικό σύνολο γράφων πάνω στο οποίο διεξάγονται τα πειράματα για τους περισσότερους αλγορίθμους και ευρετικές εδώ και χρόνια. Έπειτα, επισημαίνονται τόσο οι αρχικές όσο και οι πιο σύγχρονες μέθοδοι για την εύρεση κατώτατων ορίων. Το κεφάλαιο 3 ολοκληρώνεται με την διατύπωση των βασικότερων ευρετικών τεχνικών για την προσέγγιση του προβλήματος με σκοπό την καλύτερη κατανόηση του επόμενου κεφαλαίου με τις προχωρημένες ευρετικές.

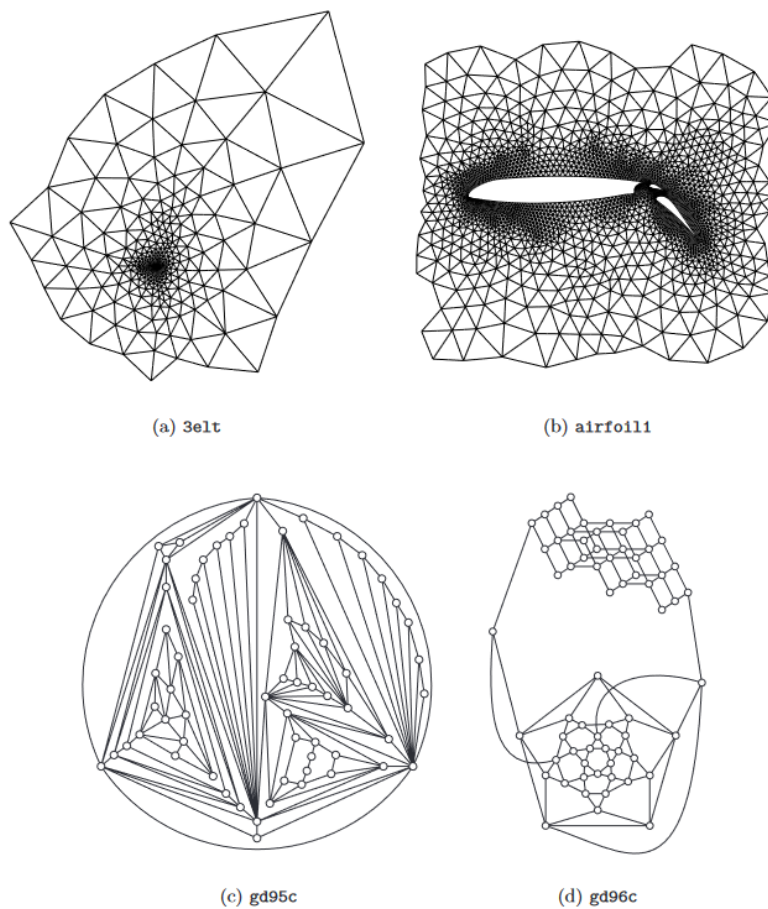
3.1 Σύνολο γράφων για πειραματική μελέτη

Διάφορα συνδυαστικά προβλήματα βελτιστοποίησης έχουν το δικό τους σύνολο γράφων, πάνω στο οποίο μπορεί κανείς να δοκιμάσει πειραματικά νέους αλγορίθμους και τεχνικές. Για το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης ένα τέτοιο σύνολο δημιουργήθηκε το 1997 από τον Petit, το οποίο διατυπώνεται στο [93] από τον ίδιο, και αποτελεί βασικό εργαλείο της πειραματικής ανάλυσης ακόμα και σήμερα. Η δημιουργία του, ωστόσο, δεν ήταν εύκολη υπόθεση. Το σύνολο θα έπρεπε να περιέχει γράφους που προκύπτουν από εφαρμογές της πραγματικής ζωής, γράφους με γνωστά βέλτιστα, γράφους που μπορούν να υποστηρίξουν γενικά συμπεράσματα καθώς και γεννήτορες περιπτώσεων. Για την επιλογή τους λήφθηκαν ορισμένες πρακτικές αποφάσεις:

- Η πρώτη απόφαση αφορούσε τον περιορισμό του εύρους του συνόλου μόνο σε αραιούς γράφους, καθώς έχει ήδη αναφερθεί ότι για πυκνούς γράφους υπάρχουν σχήματα ακριβούς προσέγγισης.
- Η δεύτερη απόφαση ήταν ότι στο σύνολο γράφων συμπεριλήφθηκαν μόνο μεγάλοι γράφοι, όπου ο όρος «μεγάλοι» σημαίνει γράφους για τους οποίους δεν μπορεί να βρεθεί βέλτιστη λύση από κάποιον αλγόριθμο ωμής βίας (brute force) σε ένα λογικό χρόνο. Αυτός είναι ένας ασαφής ορισμός, παρ' όλα αυτά είναι χρήσιμος και δυναμικός. Σύμφωνα με αυτόν λοιπόν, ένα τετράγωνο πλέγμα 5x5 θεωρείται μεγάλος γράφος. Τελικά, κατά τη διάρκεια της έρευνας, ο Petit αποφάσισε ότι οι γράφοι που θα επιλεγθούν θα πρέπει να έχουν τουλάχιστον 1000 κορυφές.

- Σύμφωνα με την τρίτη απόφαση, το σύνολο γράφων έπρεπε να περιέχει γράφους των οποίων η βέλτιστη λύση να είναι γνωστή. Εκείνη την εποχή, οι μοναδικές οικογένειες γράφων με την ιδιότητα που αναφέραμε ήταν αυτές που αναφέρονται στον πίνακα 2.1 μέχρι και τη σειρά των n -διάστατων k -κλικών. Από αυτές επιλέχθηκαν ένας υπερκύβος, ένα τετράγωνο πλέγμα και ένα δυαδικό δέντρο, μιας και ανήκουν όλοι σε φυσικές οικογένειες γράφων με αρκετά διαφορετικές τοπολογίες μεταξύ τους. Οπότε, για να έχουν και περίπου 1000 κορυφές, επιλέχθηκε ο 10-υπερκύβος (*hc10*), το πλέγμα 33×33 (*mesh33x33*) και ένα πλήρες δυαδικό δέντρο 10 επιπέδων (*bintree10*).
- Η τέταρτη απόφαση που πάρθηκε ήταν ότι στο σύνολο γράφων θα έπρεπε να περιλαμβάνονται και τυχαίοι γράφοι, διότι σε τέτοιου είδους γράφους μπορεί να γίνει στοχαστική ανάλυση και, συνεπώς, να προκύψουν γενικά συμπεράσματα από τη μελέτη τους. Αρχικά επιλέχθηκαν δύο διωνυμικοί τυχαίοι γράφοι $G_{n,p}$ με $n = 1000$ και $p = 0.01$ και 0.05 , όπου $G_{n,p}$ ο γράφος με n κορυφές και κάθε μία από τις $n(n - 1)/2$ ακμές του εμφανίζεται με πιθανότητα p . Ονομάστηκαν *randomA1* και *randomA2*. Εκτός από αυτούς, αναζητήθηκε κι άλλη κατηγορία τυχαίων γράφων, όπως οι τυχαίοι κανονικοί γράφοι, οι οποίοι όμως μοιράζονται πολλές κοινές ιδιότητες με τους διωνυμικούς και γι' αυτό απορρίφθηκαν. Τελικά, επιλέχθηκε ένας γράφος από τους τυχαία γεωμετρικούς γράφους, των οποίων οι κορυφές αντιστοιχούν σε σημεία ομοιόμορφα κατανομημένα στο μοναδιαίο τετράγωνο και οι ακμές ενώνουν κορυφές που η απόστασή τους είναι εντός κάποιου συγκεκριμένου ορίου. Ονομάστηκε *randomG4* και έχει 1000 κορυφές και ακτίνα 0.075. Η προσθήκη ενός τυχαίου γεωμετρικού γράφου οδήγησε και στην προσθήκη ενός διωνυμικού τυχαίου γράφου με παρόμοιο αριθμό κορυφών και ακμών. Έτσι, δημιουργήθηκε και ο γράφος *randomA4* με στόχο την παρατήρηση τυχόν διαφορών με τον *randomG4*.
- Η πέμπτη και τελευταία απόφαση αφορούσε τη συμπερίληψη γράφων από εφαρμογές της πραγματικής ζωής. Επειδή δεν υπήρχαν παραδείγματα από την καθημερινότητα συγκεκριμένα για το MinLA, επιλέχθηκαν 3 οικογένειες γράφων, οι οποίες σχετίζονται με εφαρμογές στις οποίες προκύπτουν προβλήματα απεικόνισης. Πρόκειται για γράφους από τη σχεδίαση VLSI συστημάτων, από διακριτοποιήσεις πεπερασμένων στοιχείων και από γράφο-σχεδιαστικούς διαγωνισμούς. Οι VLSI γράφοι *c1y*, *c2y*, *c3y*, *c4y* και *c5y* είναι γράφοι που προέκυψαν από διατάξεις κυκλωμάτων. Οι γράφοι πεπερασμένων στοιχείων προέκυψαν από εφαρμογές όπως η υπολογιστική

ρευστοδυναμική (*airfoill* και *3elt*), η διάδοση σεισμικών κυμάτων (*whitaker3*) και η δομική μηχανική (*crack*). Τέλος, η 3η κατηγορία γράφων επιλέχθηκε από διάφορους σχεδιαστικούς διαγωνισμούς που υπήρχαν στο διαδίκτυο. Ο *gd95c* αποτελεί ένα μυστηριώδη γράφο, ο *gd96a* αναπαριστά ένα πεπερασμένο αυτόματο που χρησιμοποιείται σε συστήματα επεξεργασίας της φυσικής γλώσσας, ο *gd96b* αναπαριστά τις κλήσεις που έγιναν μεταξύ ενός συνόλου τηλεφωνικών αριθμών, ο *gd96c* είναι ένας τεχνητός όμορφος γράφος και ο *gd96d* αναπαριστά τη δομή ενός τμήματος μιας ιστοσελίδας.



Σχήμα 3.1 Μερικοί γράφοι από το σύνολο του *Petit*.

Όνομα γράφου	V	E	Βαθμός	Διάμετρος	Οικογένεια γράφων
randomA1	1000	4974	1/9.95/21	6	$G_{n=1000,p=0.01}$
randomA2	1000	24738	28/49.47/72	3	$G_{n=1000,p=0.05}$
randomA4	1000	8177	4/16.35/29	4	$G_{n=1000,p=0.0164}$
randomG4	1000	8173	5/16.34/31	23	$G_{n=1000}$ ($r = 0.075$)
bintree10	1023	5120	10/10/10	10	Γράφοι με βέλτιστη λύση
hc10	1024	2112	2/3.88/4	64	
mesh33x33	1089	1022	1/1.99/3	18	
3elt	4720	13722	3/5.81/9	65	Διακριτοποιήσεις πεπερασμένων στοιχείων
airfoill	4253	12289	3/5.78/10	65	
crack	10240	30380	3/5.93/9	121	
whitaker3	9800	28989	3/5.91/8	161	
c1y	828	1749	2/4.22/304	10	VLSI συστήματα
c2y	980	2102	1/4.29/327	11	
c3y	1327	2844	1/4.29/364	13	
c4y	1366	2915	1/4.26/309	14	
c5y	1202	2557	1/4.25/323	13	
gd95c	62	144	2/4.65/15	11	Γραφο – σχεδιαστικοί διαγωνισμοί
gd96a	1076	1676	1/3.06/111	20	
gd96b	111	193	2/3.47/47	18	
gd96c	65	125	2/3.84/6	10	
gd96d	180	228	1/2.53/27	8	

Πίνακας 3.1 Για κάθε γράφο το όνομα, ο αριθμός κορυφών και ακμών, ο βαθμός (ελάχιστος / μέσος / μέγιστος), η διάμετρος και η οικογένεια όπου ανήκει.

Παραπάνω βρίσκονται η σχηματική αναπαράσταση μερικών από τους παραπάνω γράφους και ο πίνακας με τα στοιχεία των γράφων που επιλέχθηκαν τελικά από τον Petit. Σε αυτούς

προστέθηκε τελικά και ο διωνυμικός τυχαίος γράφος $randomA3$ με $|V| = 1000$, $|E| = 49820$, βαθμό (ελάχ. / μέσος / μέγ.) $72 / 99.64 / 129$ και διάμετρο 4.

3.2 Συνδυαστικά κατώτατα όρια

Όπως έχουμε αναφέρει, το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης είναι NP-δύσκολο, οπότε δεν υπάρχουν αλγόριθμοι με βέλτιστες λύσεις για όλους τους γράφους. Συνεπώς, είναι δύσκολο να εκτιμήσουμε την απόδοση οποιασδήποτε ευρετικής συγκρίνοντας το αποτέλεσμα της με το βέλτιστο, εκτός από λίγες συγκεκριμένες κατηγορίες γράφων. Η συνθήκη αυτή κατέστησε απαραίτητη την αναζήτηση κατώτατων ορίων για το κόστος μιας βέλτιστης απεικόνισης. Μέχρι το 2010 περίπου, οι τεχνικές που χρησιμοποιούνταν βασιζόνταν σε απλά δεδομένα των γράφων. Παρακάτω ακολουθούν οι πιο γνωστές από αυτές.

3.2.1 Μέθοδος μονοπατιού

Η μέθοδος του μονοπατιού (path method) προτάθηκε από τους Juvan και Mohar το 1992 [70]. Έστω $P_n^k = (V_n, E_n^k)$ το γράφημα που είναι η k -οστή δύναμη του γράφου μονοπατιού με n κορυφές, όπου $V_n = \{1, \dots, n\}$ και $E_n^k = \{ij \mid 0 < |i - j| \leq k\}$. Αποδεικνύεται ότι:

$$MINLA(P_n^k) = \frac{k(k+1)(3n-2k-1)}{6}$$

Έστω $c(n, m)$ το μεγαλύτερο k για το οποίο $|E(P_n^k)| \leq m$. Τότε έχουμε:

$$c(n, m) = n - \frac{1}{2} \sqrt{(2n-1)^2 - 8m} - \frac{1}{2}$$

Στο [70] αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ. Έστω G ένας γράφος με n κόμβους και m ακμές. Τότε:

$$MINLA(G) \geq MINLA(P_n^k), \text{ όπου } k = \lfloor c(n, m) \rfloor$$

3.2.2 Μέθοδος ακμών

Λόγω της στρογγυλοποίησης που συμβαίνει στο προηγούμενο θεώρημα, η μέθοδος του μονοπατιού αγνοεί το μήκος κάποιων ακμών του γράφου. Ένας τρόπος να τις λάβουμε υπόψιν είναι η μέθοδος των ακμών (edges method): θεωρούμε μία οποιαδήποτε απεικόνιση φ . Παρατηρούμε ότι το πολύ $n-1$ ακμές μπορούν να έχουν κόστος 1 στην φ . Επίσης, το πολύ $n-2$ ακμές μπορούν να έχουν κόστος 2. Γενικά, το πολύ $n-c$ ακμές μπορούν να έχουν

κόστος c σε οποιαδήποτε απεικόνιση φ . Αυτή η παρατήρηση μας δίνει έναν απλό αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός κατώτατου ορίου για το MinLA: ενώ εξακολουθούμε να μην μετράμε κάποιες ακμές, συνυπολογίζουμε την ελάχιστη συνεισφορά τους:

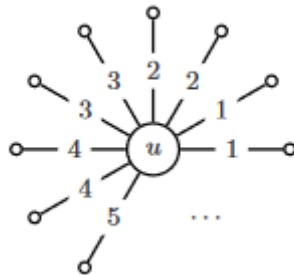
```

function EdgesMethod ( $G$  : graph) : int
   $n := |V(G)|$ ;  $m := |E(G)|$ ;  $i := 1$ ;  $f := 0$ ;  $lb := 0$ 
  while  $f + n - i \leq m$  :
     $f := f + n - i$ 
     $lb := lb + i(n - i)$ 
     $i := i + 1$ 
  return  $lb + i(m - f)$ 

```

3.2.3 Μέθοδος βαθμού

Θεωρούμε μια απεικόνιση φ και ορίζουμε ως συνεισφορά του κόμβου u το άθροισμα: $\sum_{u,v \in E} |\varphi(u) - \varphi(v)|$. Στην καλύτερη περίπτωση, ένας κόμβος θα πρέπει να έχει 2 γειτονικές ακμές με συνεισφορά 1, 2 γειτονικές ακμές με συνεισφορά 2 κ.ο.κ. (βλ. Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2 Απεικόνιση για τη μέθοδο βαθμού

Συνεπώς, ένας κόμβος u βαθμού d δεν μπορεί να έχει συνεισφορά μεγαλύτερη από $\sum_{i=1}^{d/2} 2i = \frac{d^2+2d}{4}$, αν d άρτιος ή $\frac{1}{2}(d+1) + \sum_{i=1}^{(d-1)/2} 2i = \frac{d^2+2d+1}{4}$, αν d περιττός. Αυτό το αποτέλεσμα δίνει άλλον έναν απλό τρόπο να βρούμε ένα κατώτατο όριο: προσθέτουμε τις ελάχιστες συνεισφορές κάθε κόμβου και διαιρούμε το άθροισμα με το 2 (αφού οι ακμές έχουν υπολογιστεί 2 φορές).

```

function DegreeMethod ( $G$  : graph) : int
     $lb := 0$ 
    for all  $u \in V(G)$  :
         $d := \text{deg}(u)$ 
        if  $d \bmod 2 = 0$  then  $lb := lb + d^2/4 + d/2$  else  $lb := lb + (d^2 + 2d + 1)/4$ 
    return  $lb/2$ 

```

3.2.4 Μέθοδος δέντρου Gomory-Hu

Η μέθοδος αυτή προτάθηκε από τους Adolphson και Hu το 1973 [4]. Έστω $G = (V, E)$ ένας γράφος με n κόμβους. Οι Gomory και Hu απέδειξαν ότι ο πίνακας γειτνίασης μέγιστης ροής f του G μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα βεβαρημένο δέντρο $T = (V, E', w)$, όπου κάθε ακμή $e \in E'$ αναπαριστά μια θεμελιώδη αποκοπή του G και έχει βάρος $w(e)$ ίσο με την αντίστοιχη ελάχιστη αποκοπή [48]. Η μέγιστη ροή $f(i, j)$ μεταξύ οποιουδήποτε ζευγαριού κόμβων (i, j) υπολογίζεται βρίσκοντας το ελάχιστο βάρος από όλους τους πιθανούς συνδυασμούς ακμών στο μονοπάτι από τον i στον j στο T . Το σχήμα 3.3 απεικονίζει ένα γράφημα με το Gomory-Hu δέντρο του και τον πίνακα f . Το ακόλουθο θεώρημα δίνει έναν τρόπο εύρεσης ενός κατώτατου ορίου μέσω του υπολογισμού ενός Gomory-Hu δέντρου:

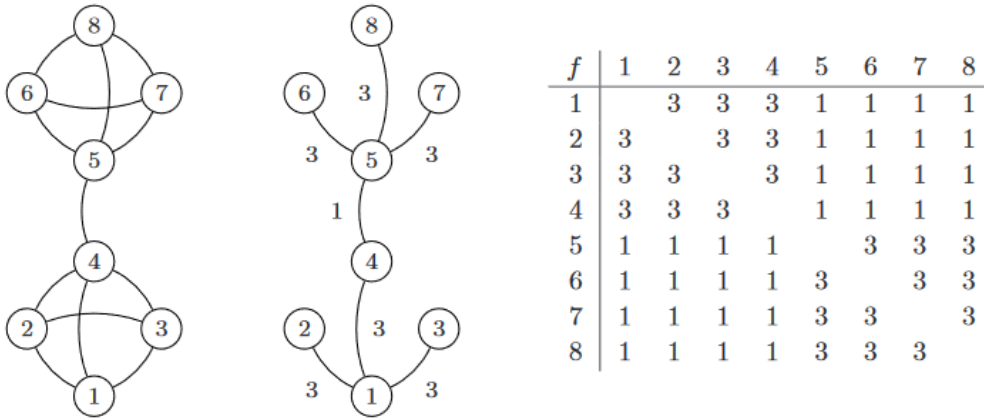
ΘΕΩΡΗΜΑ. Έστω $G = (V, E)$ ένας γράφος και $T = (V, E', w)$ το Gomory-Hu δέντρο του. Τότε: $LA(G) \geq \sum_{e \in E'} w(e)$.

3.2.5 Μέθοδος Juvan-Mohar

Έστω $G = (V, E)$ ένας συνεκτικός γράφος με $V = \{1, \dots, n\}$ και L_G ο $n \times n$ Λαπλασιανός του πίνακας, ο οποίος ορίζεται $\forall u, v \in V$ ως εξής:

$$L_G[u, v] = f(x) = \begin{cases} 0 & uv \notin E, \\ -1 & uv \in E, \\ \text{deg}(u) & u = v. \end{cases}$$

Η μικρότερη ιδιοτιμή του L_G είναι 0 αφού είναι θετικά ημιορισμένος. Έστω λ_2 η $2^{\text{η}}$ μικρότερη ιδιοτιμή L_G , η οποία έχει την ιδιότητα να δίνει πληροφορίες σχετικά με τη συνεκτικότητα του γράφου. Αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα [70]:



Σχήμα 3.3 Ένας γράφος G , το Gomory-Hu δέντρο του και ο πίνακας f μέγιστων ροών – ελάχιστων αποκοπών.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Έστω λ_2 η $2^{\text{η}}$ μικρότερη ιδιοτιμή του Λαπλασιανού πίνακα ενός συνεκτικού γράφου G . Τότε:

$$\text{MINLA}(G) \geq \frac{\lambda_2(n^2-1)}{6}.$$

3.2.6 Μέθοδος πλέγματος

Έστω L_n ένα τετραγωνικό πλέγμα με πλευρές μήκους n , δηλαδή $V(L_n) = \{1, \dots, n\}^2$ και

$E(V_n) = \{uv \mid \|u - v\|_2 = 1\}$. Οι Muradyan και Piliposjan το 1980, και αργότερα οι Mitchison και Durbin το 1986, απέδειξαν ότι [83][83] [86]:

$$\text{MINLA}(L_n) = \frac{4-\sqrt{2}}{3}n^3 + O(n^2).$$

Οπότε, άλλος ένας τρόπος εύρεσης ενός κατώτατου ορίου για το MinLA είναι η αποσύνθεση ενός γράφου εισόδου G σε t ξένα τετραγωνικά πλέγματα M_1, M_2, \dots, M_n , αφού το $\text{MinLA}(M_i)$ είναι γνωστό και $\text{MINLA}(G) \geq \sum_{i=1}^t \text{MINLA}(M_i)$.

Ο Petit το 2003 πρότεινε τον ακόλουθο άπληστο αλγόριθμο για τον υπολογισμό κατώτατου ορίου για το MinLA, ο οποίος βρίσκει επαναληπτικά τα μέγιστα τετραγωνικά πλέγματα σε έναν γράφο [93]:

```

function MeshMethod( $G$ ) : int
   $lb := 0$ 
  Let  $M$  be the largest square mesh contained in  $G$ ; let  $s$  be its side
  while  $s \geq 2$  :
     $lb := lb + (4 - \sqrt{2})s^3$ 
     $G := G \setminus M$ 
    Let  $M$  be the largest square mesh contained in  $G$ ; let  $s$  be its side
  return  $lb + EdgesMethod(G)$ 

```

Για την εύρεση του μεγαλύτερου τετραγωνικού πλέγματος που περιέχεται στον G πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική της οπισθοδρόμησης (backtracking), κάτι που καθιστά την προτεινόμενη μέθοδο ανεπαρκή (αν και, με προσεκτική υλοποίηση, μπορεί να μειωθεί αρκετά ο χώρος αναζήτησης).

3.2.7 Παρατηρήσεις

Στην περίπτωση των αραιών γράφων όπου $|E| = O(|V|)$ παρατηρούμε ότι τα κατώτατα όρια που προκύπτουν με τις μεθόδους μονοπατιού, ακμών και βαθμού είναι γραμμικά στο $|V|$. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι οι μέθοδοι αυτές μπορεί να μην ιδιαίτερα αποτελεσματικές. Αντιθέτως, τα κατώτατα όρια που βρίσκουμε με τη μέθοδο Juvan-Mohar έχουν καλύτερη πολυπλοκότητα συγκριτικά με τη γραμμική, ανάλογα βέβαια και τις ιδιότητες των γράφων εισόδου. Τέλος, η μέθοδος πλέγματος είναι αρκετά χρήσιμη σε γράφους που προκύπτουν από εφαρμογές σε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων, αφού αυτοί οι γράφοι περιέχουν πολλά μεγάλα υποπλέγματα.

3.3 Γραμμικά προγράμματα

Πλέον, η καλύτερη επιλογή για την εύρεση κατώτατων ορίων μοιάζει να είναι ο γραμμικός προγραμματισμός. Το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης μπορεί να διατυπωθεί ως το ακόλουθο ακέραιο πρόγραμμα [78]:

$$\min \sum_{e \in E} c_e d_e \quad (3.1)$$

έτσι ώστε:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i \in V \quad (3.2)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \quad j \in \{1, \dots, n\} \quad (3.3)$$

$$d_{ij} \geq |p - q|(x_{ip} + x_{jq} - 1), \quad ij \in E, p, q \in \{1, \dots, n\} \quad (3.4)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in V, j \in \{1, \dots, n\} \quad (3.5)$$

$$d_{ij} \geq 0, \quad i \in V, j \in \{1, \dots, n\} \quad (3.6)$$

Οι δυαδικές μεταβλητές x μοντελοποιούν τη θέση των κορυφών, δηλαδή:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } p(i) = j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases},$$

ενώ οι d μεταβλητές αναπαριστούν τα μήκη των ακμών:

$$d_{ij} = |p(i) - p(j)|.$$

Οι εξισώσεις (3.2) και (3.3) (μαζί με τη δυαδική συνθήκη (3.5)) εξασφαλίζουν ότι οι μεταβλητές x περιγράφουν μια διάταξη: κάθε κορυφή έχει ακριβώς μία θέση και ακριβώς μία κορυφή τοποθετείται σε κάθε θέση. Η εξίσωση (3.4) συνδυάζει τους δύο τύπους μεταβλητών. Για κάθε ακμή και για όλες τις πιθανές θέσεις των κορυφών στο τέλος κάθε ακμής, η απόσταση φράσσεται από κάτω, αν οι θέσεις έχουν όντως ανατεθεί στη διάταξη.

Η παραπάνω μοντελοποίηση, πέρα από το μεγάλο αριθμό περιορισμών, έχει και το μειονέκτημα ότι η «χαλάρωση» μέσω γραμμικού προγραμματισμού δίνει ένα πολύ αδύναμο κατώτατο όριο αφού έχει την τετριμμένη λύση:

$$x_{ij} = \frac{1}{n}, \quad i, j \in V$$

$$d_{ij} = 0, \quad e \in E$$

Στο [6] γίνεται χρήση ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού που χρησιμοποιεί μόνο τις d_e μεταβλητές του παραπάνω μοντέλου περιορισμένες από τις επονομαζόμενες ανισότητες τάξης (όπου $lap(H)$ το κόστος της ελάχιστης γραμμικής διάταξης του H):

$$\sum_{e \in H} d_e \geq lap(H), H \subseteq G \quad (3.7)$$

Με χρήση της (3.7) για όλους τους πιθανούς υπογράφους $H \subseteq G$ θα καταλήγαμε σε μια ακριβή μορφοποίηση, αλλά απαιτείται επίσης η ίδια η λύση του προβλήματος (για $H = G$). Αντί γι' αυτό, χρησιμοποιήθηκαν μόνο συγκεκριμένες κατηγορίες υπογράφων H των οποίων οι

βέλτιστες λύσεις $lap(H)$ είναι γνωστές ή υπολογίσιμες σε πολυωνυμικό χρόνο. Έτσι, προέκυψε ένα έγκυρο κατώτατο όριο για το πρόβλημα.

Αυτή η προσέγγιση αναπτύχθηκε περαιτέρω στο [19]. Εκτός από τις ανισότητες τάξης των υπογράφων H που προκύπτουν στο G , λήφθηκε υπόψιν και ο πλήρης γράφος K_n του G . Με αυτόν τον τρόπο έγκυρες ανισότητες θα μπορούσαν να προβληθούν πίσω στο αρχικό πρόβλημα διατηρώντας τον αριθμό των μεταβλητών ίσο με m . Το αποτέλεσμα ήταν να οριοθετηθεί η απόσταση μεταξύ των κατώτατων ορίων και των τιμών των καλύτερων ευρετικών στο εύρος $5 - 20\%$, τουλάχιστον για μικρού μεγέθους γράφους όπως του Petit.

Μια παραλλαγή της προσέγγισης αυτής διατυπώθηκε από τον Seitz στο [112], όπου γίνεται χρήση των μεταβλητών δυαδικής απόστασης d_{ijk} :

$$d_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{αν } |p(i) - p(j)| = k, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \forall 1 \leq i < j \leq n \text{ και } 1 \leq k \leq n - 1$$

Αυτές οι μεταβλητές αντιστοιχίζονται με τις μεταβλητές ακέραιας απόστασης μέσω της σχέσης:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} k d_{ijk},$$

οπότε είναι δυνατή η επαναχρησιμοποίηση των ήδη γνωστών περιορισμών για το σχηματισμό ενός νέου μοντέλου ακέραιου προγραμματισμού. Βέβαια, τα αποτελέσματα του τελευταίου ξεπεράστηκαν από την επόμενη μέθοδο που θα εξετάσουμε, συνεπώς δεν κρίνεται απαραίτητη η αναλυτική περιγραφή του.

Η μέθοδος αυτή σχετίζεται με τις λεγόμενες μεταβλητές διαμεσολάβησης (betweenness variables) οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{αν } p(i) < p(j) < p(k) \text{ ή } p(k) < p(j) < p(i) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \forall ik \in E, j \in V \setminus \{i, k\},$$

δηλαδή η δυαδική μεταβλητή x_{ijk} δείχνει αν η κορυφή j βρίσκεται μεταξύ των i και k δεδομένης μιας διάταξης p . Ο Schwarz στο [111] και οι Caprara *et. al.* στο [20] διατύπωσαν από έναν αλγόριθμο διακλάδωσης και διαχωρισμού (branch-and-cut) με χρήση των μεταβλητών αυτών και πέτυχαν μεγαλύτερα κατώτατα όρια (ο αλγόριθμος του Schwarz αποδείχτηκε καλύτερος) για κάποιους από τους γράφους του Petit (βλ. ενότητα 3.1). Λόγω της

στενής σχέσης των μεταβλητών διαμεσολάβησης με τις d_e μεταβλητές, οι δύο αλγόριθμοι μπορούν να θεωρηθούν βελτίωση της μεθόδου των Caprara *et. al.* [19].

Το 2022 ο Zündorf [123] διατύπωσε έναν αλγόριθμο που συνδυάζει την αρχική μέθοδο των Caprara *et. al.* [19] και τη μέθοδο της εύρεσης κοινότητας (community detection) με στόχο τη μείωση του χρόνου εκτέλεσης και τιμές κοντά στις καλύτερες γνωστές. Από την πειραματική μελέτη του προέκυψαν ικανοποιητικά αποτελέσματα σε ταχύτερους χρόνους, ενώ για έναν από τους γράφους του Petit (τον *randomG4*) βρέθηκε και νέο κατώτατο όριο.

Εκτός από τις παραπάνω προσεγγίσεις, μία άλλη κατεύθυνση των ερευνητών τα τελευταία 15 χρόνια σχετικά με το γραμμικό προγραμματισμό αφορά τη χρήση ενός τετραγωνικού μοντέλου για τη διατύπωση του MinLA. Ειδικότερα, το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική περίπτωση του προβλήματος της τετραγωνικής ανάθεσης, άρα για τη μοντελοποίησή του μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο παρακάτω σχηματισμός των Koormans και Beckmann [74]:

Έστω x_{ik} οι δυαδικές μεταβλητές που ορίζονται ως εξής:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{αν η τιμή } k \text{ έχει ανατεθεί στην κορυφή } i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές αυτές, το τετραγωνικό μοντέλο του MinLA εκφράζεται ως εξής:

$$(Q) = \text{Min} \sum_{(i,j) \in E} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |k - l| x_{ik} x_{jl} \quad (3.8)$$

έτσι ώστε:

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} = 1, \forall i = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} = 1, \forall k = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, \forall i, k = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

Το παραπάνω πρόβλημα ανήκει στην τάξη των 0-1 τετραγωνικών προβλημάτων προγραμματισμού. Από την εξίσωση (3.9) κάθε κορυφή i έχει ακριβώς μία τιμή k , ενώ από την εξίσωση (3.10) προκύπτει ότι μία τιμή k έχει ανατεθεί σε ακριβώς μία κορυφή i . Με κατάλληλη γραμμικοποίηση του παραπάνω μοντέλου και προσθήκη έγκυρων ανισοτήτων προέκυψαν

διάφορα μοντέλα, όπως το μικτού 0-1 ακέραιου προγραμματισμού του Amaral το 2009 και των Moeini *et. al.* το 2014 και 2015 [5] [84] [85].

Το 2017 οι Andrade *et. al.* παρουσίασαν ένα καινούριο τετραγωνικό μοντέλο για το MinLA, το οποίο χρησιμοποίησαν για να βρουν ένα νέο συμπαγές μοντέλο μικτού ακέραιου προγραμματισμού με $O(|V|^2)$ μεταβλητές και $O(|V|^2)$ περιορισμούς [9]. Τα πειραματικά αποτελέσματα απέδειξαν την υπεροχή του σε σχέση με τα μέχρι τότε γνωστά μοντέλα.

Το 2022 και πάλι οι Andrade *et. al.* δημοσιεύσαν ένα άρθρο όπου επεκτείνουν τις ιδέες που διατύπωσαν 5 χρόνια νωρίτερα [10]. Πιο συγκεκριμένα, ανέπτυξαν ένα νέο τετραγωνικό μοντέλο με πολλές ομοιότητες με αυτό στο [9]. Γραμμικοποιώντας το, προέκυψε ένα καινούριο μοντέλο μικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού που μοιράζεται την ίδια βέλτιστη λύση με το τετραγωνικό μοντέλο. Έπειτα, πρότειναν ένα σύνολο έγκυρων γραμμικών εκφράσεων για τα μοντέλα αυτά και έδειξαν πως μπορούν να ενσωματώσουν προσαρμοσμένες ανισότητες αστεροειδούς και κλίκας σε έναν αλγόριθμο διακλάδωσης και διαχωρισμού (branch-and-cut). Στη συνέχεια, μείωσαν τις διαστάσεις του μικτού μοντέλου εξαλείφοντας κάποιες μεταβλητές και προσάρμοσαν τις έγκυρες γραμμικές εκφράσεις, ώστε να αποκτήσουν ένα νέο σχηματισμό του MinLA.

Τα υπολογιστικά πειράματα έδειξαν ότι ξεπερνά σημαντικά τις υπόλοιπες προσεγγίσεις με χρήση τετραγωνικού μοντέλου. Συγκριτικά με τα καλύτερα μέχρι τώρα αποτελέσματα των Carrawa *et. al.* παρουσιάζεται ιδιαίτερα ανταγωνιστικός και σε τιμές και σε χρόνο εκτέλεσης, ειδικά στις περιπτώσεις αραιών γράφων. Για τους πυκνούς γράφους δεν πρέπει να εφαρμοστούν οι αποκοπές κλίκας και αστεροειδούς, αλλιώς οι χρόνοι εκτέλεσης αυξάνονται αρκετά.

Στη συνέχεια ακολουθούν λίγο πιο αναλυτικά οι περιορισμοί και η λογική πίσω από τους αλγορίθμους στην αρχική μέθοδο των Carrawa *et. al.* [19], στη βελτιωμένη εκδοχή της των Carrawa *et. al.* [20] και στη συνδυαστική μέθοδο του Zündorf [123], όπως αυτά αναφέρονται στις αντίστοιχες δημοσιεύσεις. Ταυτόχρονα, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα κείμενα του Schwarz [111] και των Andrade *et. al.* [10], τα οποία εδώ αναφέρθηκαν συνοπτικά, αλλά βάσει πειραματικών αποτελεσμάτων αξίζουν μεγαλύτερη διερεύνηση.

3.3.1 Κομψά κατώτατα όρια

Το πρώτο γραμμικό πρόγραμμα που θα αναλύσουμε χρησιμοποιεί $O(m)$ μεταβλητές με πραγματικές τιμές και κάθε μεταβλητή αντιστοιχεί στο μήκος μίας ακμής [19]. Αυτή η ιδέα

είναι πολύ φυσική, αλλά απαιτεί πολλούς περιορισμούς για να δώσει καλά αποτελέσματα. Ακολουθώντας, αναφέρονται οι περιορισμοί και η λογική του αλγορίθμου:

Περιορισμοί τάξης. Δεδομένου ενός υπογραφήματος H του G , το άθροισμα όλων των μεταβλητών που αντιστοιχούν σε ακμές στο H πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το κόστος της ελάχιστης γραμμικής διάταξης του H . Αυτοί οι τύποι περιορισμών ονομάζονται περιορισμοί τάξης και κάθε υπογράφοις H αντιστοιχεί σε ακριβώς έναν περιορισμό τάξης. Προσθέτοντας όλους τους πιθανούς περιορισμούς τάξης θα βρίσκαμε το τέλειο κατώτατο όριο, αφού το G θεωρείται και υπογράφοις του εαυτού του. Ωστόσο, αυτό προφανώς δεν είναι εφικτό, καθώς υπάρχουν πάρα πολλοί πιθανοί υπογράφοι και οι περιορισμοί και μόνο απαιτούν να είναι γνωστό το κόστος για την ελάχιστη γραμμική διάταξη.

Προβαλλόμενοι περιορισμοί τάξης. Η εύρεση καλών περιορισμών τάξης είναι δύσκολη, αφού το H πρέπει να είναι υπογράφοις του G και απαιτείται να λυθεί το MinLA για το H . Οι προβαλλόμενοι περιορισμοί τάξης προσπαθούν να ξεπεράσουν το πρώτο μειονέκτημα εισάγοντας έναν τελεστή προβολής, ο οποίος επιτρέπει την προσθήκη έγκυρων περιορισμών για οποιοδήποτε γράφο H εφόσον μπορεί να λυθεί το MinLA για αυτόν. Αρχικά, υπολογίζεται το συντομότερο μονοπάτι μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους κορυφών σύμφωνα με το συνολικό μήκος των ακμών. Έπειτα, ο προβαλλόμενος περιορισμός τάξης αποτελείται από το άθροισμα όλων των συντομότερων a - b μονοπατιών για κάθε ακμή $\{a, b\}$ στο H . Έτσι, ο περιορισμός αυτός εξασφαλίζει ότι το άθροισμα όλων των συντομότερων μονοπατιών πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσο με το κόστος της ελάχιστης γραμμικής διάταξης του H . Αποδείχθηκε ότι αυτοί οι περιορισμοί είναι έγκυροι, παρόλο που κάποιες ακμές εμφανίζονται πολλαπλές φορές στον περιορισμό, αφού μια ακμή μπορεί να αποτελεί μέρος πολλαπλών συντομότερων μονοπατιών.

Περιορισμοί μονοπατιού. Για την περαιτέρω βελτίωση των προβαλλόμενων περιορισμών τάξης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ένα συντομότερο μονοπάτι a - b στο G δεν μπορεί να είναι μικρότερο από την αντίστοιχη ακμή $\{a, b\}$ στο G , αν αυτή υπάρχει. Για κάθε ακμή όπου παραβιάζεται αυτή η απαίτηση, μπορεί να προστεθεί ένας περιορισμός μονοπατιού.

Αλγόριθμος. Στο [19] προτάθηκε ένας επαναληπτικός αλγόριθμος διακλάδωσης και διαχωρισμού (branch-and-cut) που αποτελείται από δύο βήματα. Αρχικά, βρίσκεται μια έγκυρη ανάθεση για τα μήκη των ακμών, ώστε να μην παραβιάζεται κανείς από τους τρέχοντες περιορισμούς. Στο δεύτερο βήμα, αναζητούνται νέοι προβαλλόμενοι περιορισμοί τάξης που παραβιάζονται από τη λύση και προστίθενται στο σύνολο. Αφού οι προβαλλόμενοι περιορισμοί

τάξης εξακολουθούν να απαιτούν το κόστος του MinLA για τον αντίστοιχο υπογράφο H , οι Carrrara *et. al.* αποφάσισαν να αναζητούν γράφους από κατηγορίες για τις οποίες η βέλτιστη λύση είναι ήδη γνωστή ή έχει προταθεί κάποιος βέλτιστος αλγόριθμος. Ονομαστικά, χρησιμοποιούν προβαλλόμενους περιορισμούς τάξης που βασίζονται στις ακόλουθες κατηγορίες γράφων:

- *Αστεροειδείς (stars)*
- *Κλίκες (cliques)*
- *Κυκλικοί σύνδεσμοι (circuits)*
- *Πλήρη διμερή γραφήματα (complete bipartite graphs)*
- *Δέντρα (trees)*

Για κάθε μία από αυτές τις κατηγορίες μπορούν να βρεθούν τουλάχιστον $2^{|V|}$ περιορισμοί. Αυτό ισχύει, αφού για κάθε πιθανό υποσύνολο κορυφών υπάρχει τουλάχιστον ένας γράφος ανά κατηγορία. Ακόμα, ισχύει ότι για όλες τις κατηγορίες εκτός από τις κλίκες υπάρχουν πολλαπλοί γράφοι ανά υποσύνολο. Συνεπώς, δεν μπορούμε απλά να δοκιμάσουμε όλους τους πιθανούς υπογράφους που ανήκουν σε κάποια από τις προαναφερθείσες κατηγορίες, ώστε να βρούμε παραβιασμένους περιορισμούς. Το δεύτερο βήμα χρειάζεται παραπάνω δουλειά για να είναι αποδοτικό. Για τους αστεροειδείς, οι Carrrara *et. al.* παρουσίασαν έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου που βρίσκει παραβιασμένους περιορισμούς αστεροειδούς, αν υπάρχουν. Για τις άλλες 4 κατηγορίες γράφων απέδειξαν ότι η εύρεση περιορισμών που παραβιάζονται είναι NP-δύσκολη και πρότειναν κάποιες απλές ευρετικές για το σκοπό αυτό.

Αξίζει να σημειωθεί ότι χρησιμοποιήθηκαν περιορισμοί τάξης βασισμένοι σε δέντρα και για τον υπολογισμό του κόστους του MinLA για αυτά έγινε χρήση του αλγόριθμου του Shiloach [114][114]. Όμως, οι Esteban και Ferrer-i-Cancho πρόσφατα βρήκαν ένα λάθος στο άρθρο του Shiloach [35]. Βέβαια, δεν γνωρίζουμε ακριβώς πως οι Carrrara *et. al.* υπολόγισαν το κόστος της ελάχιστης γραμμικής διάταξης για τα δέντρα. Αν χρησιμοποίησαν τον αλγόριθμο του Shiloach για να δημιουργήσουν μια μετάθεση, τότε μάλλον χρησιμοποίησαν μη έγκυρους περιορισμούς αφού η μετάθεση δεν είναι βέλτιστη, άρα δεν αποτελεί κατώτατο όριο για τον περιορισμό δέντρου. Ωστόσο, αφού βρήκαν ένα αυστηρό κατώτατο όριο για το πλήρες δυαδικό δέντρο 10 επιπέδων και ο αλγόριθμος του Shiloach μπορεί να υπολογίσει κατευθείαν το κόστος, το πιο πιθανό είναι ότι χρησιμοποίησαν τα κόστη αυτά. Σε αυτήν την περίπτωση, οι περιορισμοί που προστέθηκαν φαίνεται να είναι έγκυροι, αλλά όχι οι πιο αυστηροί που θα μπορούσαν.

3.3.2 Μεταβλητές διαμεσολάβησης

Η προσέγγιση αυτή, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, θεωρείται βελτίωση της προηγούμενης [20]. Απαιτεί $|V| - 2$ δυαδικές μεταβλητές για κάθε ακμή $e = \{u, v\}$ και κάθε τέτοια μεταβλητή δηλώνει αν μια κορυφή b βρίσκεται μεταξύ των u και v ή όχι. Οπότε, το μήκος μιας ακμής μπορεί να γραφτεί ως 1 συν το άθροισμα από όλες τις $|V| - 2$ μεταβλητές που αντιστοιχούν στην ακμή αυτή. Αφού η φόρμουλα για το μήκος κάθε ακμής είναι γραμμική, οποιοσδήποτε περιορισμός από την προηγούμενη προσέγγιση μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως περιορισμός και γι' αυτή την προσέγγιση. Το μόνο που απαιτείται είναι η αντικατάσταση της μεταβλητής μιας ακμής με τη φόρμουλα που αναφέρθηκε. Παρ' όλα αυτά, το επεκταμένο σύνολο μεταβλητών επιτρέπει τη διατύπωση των παρακάτω επιπρόσθετων περιορισμών:

Τριγωνικοί περιορισμοί. Για οποιεσδήποτε 3 κορυφές όπου ανά δύο συνδέονται μεταξύ τους με ακμή, το άθροισμα των 3 μεταβλητών διαμεσολάβησης πρέπει να ισούται με 1, αφού ακριβώς μία κορυφή βρίσκεται στη μέση των άλλων 2. Για αυτούς τους περιορισμούς μπορεί να εισαχθεί και μια προβαλλόμενη εκδοχή, όπου σε αυτήν την περίπτωση το άθροισμα των 3 συντομότερων μονοπατιών πρέπει να είναι τουλάχιστον 1.

Περιορισμοί εφαρμοσιμότητας. Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα της εν λόγω προσέγγισης είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση ενός αυστηρού κατώτατου ορίου και ακόμα επιτρέπει την ανακατασκευή μιας βέλτιστης μετάθεσης των κορυφών. Έστω M ο $|E| \times |V|$ πίνακας με $M_{e,v} = 1$ αν και μόνο αν υπάρχει μια μεταβλητή διαμεσολάβησης για τις e και v με τιμή ίση με 1. Κάθε σειρά του πίνακα αντιστοιχεί σε μια ακμή και κάθε στήλη σε μια κορυφή. Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι ο M αντιστοιχεί σε μια μετάθεση αν και μόνο αν διαθέτει την ιδιότητα των συνεχόμενων άσων για τις σειρές.

Αυτή η ιδιότητα δηλώνει ότι οι στήλες μπορούν να αναδιαταχθούν έτσι ώστε οι άσσοι σε κάθε σειρά να είναι συνεχόμενοι. Αν αναδιαταχθεί ο M με τη μετάθεση π ώστε να ισχύει η ιδιότητα, τότε ο πίνακας αντιστοιχεί σε μια έγκυρη διάταξη του G , αφού κάθε ακμή μπορεί να ενσωματωθεί ακριβώς όπως απαιτείται από τον M με κόστος ίδιο με της αντίστοιχης σειράς συν 1. Έτσι, το γραμμικό πρόγραμμα αποδίδει ένα κατώτατο όριο που ισούται με το ανώτατο όριο για το κόστος της διάταξης π .

Πίνακες με την ιδιότητα των συνεχόμενων άσων για σειρές μπορούν να χαρακτηριστούν πλήρως από ένα σύνολο απαγορευμένων υποπινάκων. Αυτό σημαίνει ότι είναι

δυνατή η εισαγωγή περιορισμών που απαγορεύουν τέτοιους υποπίνακες και εξασφαλίζουν την εγκυρότητα του M .

Αλγόριθμος. Οι παραπάνω περιορισμοί οδηγούν κατευθείαν σε έναν αλγόριθμο διακλάδωσης και διαχωρισμού για την επίλυση του MinLA. Αν η λύση του γραμμικού προγράμματος δεν είναι ακέραια, τότε προστίθεται ένα τετμημένο επίπεδο με σκοπό την αφαίρεση της μη ακέραιας λύσης. Αλλιώς, ελέγχεται η ιδιότητα των συνεχόμενων άσσεων του M με χρήση ενός αλγορίθμου που πρότειναν οι Booth και Lueker [18]. Αν η ιδιότητα παραβιάζεται, τότε εισάγεται ένας καινούριος περιορισμός εφαρμοσιμότητας και, έπειτα, υπολογίζεται μια νέα λύση του γραμμικού προγράμματος. Αν κάποια στιγμή δεν μπορεί να προστεθεί νέος περιορισμός, τότε η λύση είναι βέλτιστη και δύναται να ανακατασκευαστεί μια μετάθεση.

Ο βασικός αλγόριθμος μπορεί να επιταχυνθεί περισσότερο με επιπρόσθετους περιορισμούς, όπως οι προβαλλόμενοι τριγωνικοί περιορισμοί και οποιοσδήποτε προβαλλόμενος περιορισμός χρησιμοποιήθηκε στο μοντέλο της προηγούμενης υποενότητας. Όπως σε εκείνο το μοντέλο, έτσι και εδώ χρησιμοποιήθηκαν περιορισμοί μονοπατιού και αστεροειδούς λόγω του ότι μπορεί να ελεγχθεί αποτελεσματικά αν παραβιάζονται ή όχι. Τα αποτελέσματα του εν λόγω αλγορίθμου ήταν καλύτερα από το πρώτο γραμμικό πρόγραμμα, ενώ έχει, επίσης, τη δυνατότητα εύρεσης βέλτιστης λύσης, αν διατεθεί αρκετός υπολογιστικός χρόνος. Παρ' όλα αυτά, συγκλίνει πολύ πιο αργά από τον προηγούμενο, επομένως δεν είναι ανταγωνιστικός στους μεγαλύτερους γράφους.

3.3.3 Γραμμικό πρόγραμμα με εύρεση κοινότητας

Ο Zündorf προσπάθησε να βελτιώσει τις τιμές των κατώτατων ορίων εισάγοντας νέους περιορισμούς και αναπτύσσοντας μια προσέγγιση βασισμένη στο συμπληρωματικό πρόβλημα του MinLA, εκείνο της μέγιστης γραμμικής διάταξης (MaxLA). Ωστόσο, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι δεν υπάρχουν μεγάλα περιθώρια βελτίωσης, οπότε επικεντρώθηκε στη μείωση της χρονικής πολυπλοκότητας των προσεγγίσεων, αποφεύγοντας τη χειροτέρευση της ποιότητας των λύσεων.

Το πρώτο βήμα σε αυτή την κατεύθυνση ήταν να μειωθεί ο αριθμός των διαφορετικών περιορισμών. Στο [19] έχει ήδη αναφερθεί ότι οι πιο σημαντικοί περιορισμοί είναι οι προβαλλόμενοι αστεροειδείς και κλίκες σε συνδυασμό με τους περιορισμούς μονοπατιού. Συνεπώς, στην προσέγγισή του περιορίστηκε σε αυτούς, προσπαθώντας να επιταχύνει τους

αλγόριθμους που βρίσκουν παραβιασμένους περιορισμούς των 3 αυτών τύπων. Ακολουθούν οι διαφοροποιήσεις σε κάθε τύπο περιορισμών και ο αλγόριθμος υλοποίησης:

Περιορισμοί μονοπατιού. Για την εύρεση παραβιασμένων περιορισμών μονοπατιού, αρχικά επιλύθηκε στο πρώτο βήμα το πρόβλημα του ελάχιστου μονοπατιού μεταξύ όλων των ζευγών κορυφών υπολογίζοντας το δέντρο ελάχιστου μονοπατιού ξεκινώντας από κάθε κορυφή. Αφού οι γράφοι που εξετάζονται είναι αραιοί, χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος του Dijkstra, ο οποίος υπολογίζει τα n δέντρα ελάχιστου μονοπατιού σε συνολικό χρόνο εκτέλεσης με πολυπλοκότητα $O(n(n+m)\log n)$ [31]. Η χρήση των ελάχιστων μονοπατιών για την προσθήκη παραβιασμένων περιορισμών μονοπατιού απαιτεί το πολύ $O(mn)$ χρόνο, οπότε στο χρόνο εκτέλεσης όλου του βήματος κυριαρχεί ο αλγόριθμος του Dijkstra.

Ο χρόνος εκτέλεσης μπορεί να μειωθεί περιορίζοντας το συνολικό μέγεθος όλων των υπολογιζόμενων δέντρων ελάχιστου μονοπατιού, δηλαδή περιορίζοντας το μέγεθος της εξόδου στο πρώτο βήμα. Στην υλοποίησή του ο Zündorf υπολογίζει όλα τα δέντρα παράλληλα και ο αλγόριθμος σταματά μετά την εύρεση $c \cdot m$ ελάχιστων μονοπατιών, όπου c μια σταθερά την οποία θέτει ίση με 10. Συνολικά, τα δέντρα ελάχιστου μονοπατιού μπορούν να περιέχουν το πολύ $n + c \cdot m$ κορυφές αντί για τις n^2 κορυφές που περιέχονται στη λύση του προβλήματος του ελάχιστου μονοπατιού μεταξύ όλων των ζευγών κορυφών.

Τώρα, ο χρόνος εκτέλεσης εξαρτάται κυρίως από τη δομή του γράφου, αφού ο αριθμός των μονοπατιών που λαμβάνει υπόψιν ο αλγόριθμος του Dijkstra δεν εξαρτάται άμεσα από το μέγεθος της εξόδου. Όμως, μιας και το κύριο ενδιαφέρον εστιάζεται σε γράφους του πραγματικού κόσμου οι οποίοι είναι αραιοί, αναμένεται το βήμα αυτό να επιταχυνθεί. Ο κύριος λόγος για τη μείωση του μεγέθους της εξόδου δεν είναι η επιτάχυνση αυτού του σταδίου, αλλά η μείωση του αριθμού των ακμών που πρέπει να ληφθούν υπόψιν για τους περιορισμούς αστεροειδών και κλικών. Οπότε, η επιτάχυνση του σταδίου που βρισκόμαστε θα βοηθήσει και στα επόμενα στάδια τα οποία κρίνονται πιο χρονοβόρα γενικά. Ωστόσο, αναμένεται η ποιότητα των αποτελεσμάτων να χειροτερεύσει, αφού δεν εξετάζονται όλοι οι πιθανοί περιορισμοί μονοπατιού και αργότερα εξετάζονται επίσης λιγότεροι περιορισμοί.

Περιορισμοί αστεροειδούς. Αυτό το βήμα απλοποιείται, αναζητώντας απλά τον μεγαλύτερο παραβιασμένο περιορισμό αστεροειδούς για κάθε κορυφή λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τις ακμές που βρέθηκαν στο προηγούμενο στάδιο. Η εύρεση του μεγαλύτερου τέτοιου περιορισμού για μία κορυφή μπορεί να γίνει σε χρόνο $O(n\log n)$, αφού το μόνο που χρειάζεται είναι να

ταξινομηθούν όλες οι εξερχόμενες ακμές. Ο χρόνος εκτέλεσης του βήματος που βρισκόμαστε, ωστόσο, κυριαρχείται από το προηγούμενο βήμα, αφού κάθε μονοπάτι συνεισφέρει μόνο σε δύο αστεροειδείς και όλα τα μονοπάτια έχουν ήδη δημιουργηθεί στο προηγούμενο στάδιο. Οπότε, το βήμα αυτό δεν χειροτερεύει καθόλου τη χρονική πολυπλοκότητα.

Περιορισμοί κλίκας. Η ευρετική των Carraza *et. al.* για την εύρεση παραβιασμένων περιορισμών κλίκας είναι το πιο χρονοβόρο κομμάτι του αρχικού αλγορίθμου. Η προσθήκη ενός μόνο περιορισμού κλίκας απαιτεί $O(n^3)$ χρόνο, αφού η κλίκα περιέχει $O(n^2)$ προβαλλόμενες ακμές και κάθε μία από αυτές μπορεί να αποτελείται μέχρι και από $n - 1$ πραγματικές ακμές. Συνεπώς, δοκιμάστηκε μία καινούρια προσέγγιση για την εύρεση περιορισμών κλίκας, η οποία βασίζεται στην ιδιότητα της εύρεσης κοινότητας.

Μια κοινότητα σε ένα γράφο είναι ένα σύνολο κορυφών πυκνά συνδεδεμένων εσωτερικά και αραιά συνδεδεμένων με άλλα τμήματα του γράφου. Στην περίπτωση ενός βεβαρημένου γράφου, οι ακμές εντός της κοινότητας θα πρέπει να είναι μικρές, ενώ οι συνδέσεις με άλλα μέρη του γράφου θα πρέπει να περιέχουν ακμές με μεγαλύτερα βάρη.

Η προσέγγιση για την εύρεση περιορισμών κλίκας αφορά τη χρήση του βεβαρημένου γράφου από το πρώτο βήμα για την εύρεση κοινοτήτων μέσα σε αυτόν και η προσθήκη ενός περιορισμού κλίκας για κάθε κοινότητα που εντοπίζεται. Η ιδέα πίσω από αυτή τη μέθοδο βασίζεται στο γεγονός ότι το άθροισμα όλων των προβαλλόμενων ακμών στην κοινότητα αναμένεται να είναι μικρό, αφού είναι καλά συνδεδεμένες. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κενό ανάμεσα στα τρέχοντα κόστη και σε εκείνα που απαιτούνται για την ενσωμάτωση μιας κλίκας είναι μεγάλο, οπότε και το κατώτατο όριο θα πρέπει να αυξηθεί. Για την εύρεση κοινοτήτων λοιπόν, ο Zündorf χρησιμοποίησε τον αλγόριθμο του Leiden όπως προτάθηκε στο [119][119]. Ο αλγόριθμος εφαρμόστηκε ως ένα μαύρο κουτί και με τις προεπιλεγμένες παραμέτρους του, με μόνη διαφορά την προσθήκη μιας μεταβλητής ελέγχου, ώστε να έχει ντετερμινιστική και αναπαράξιμη συμπεριφορά.

Για τη δημιουργία του περιορισμού από μια δεδομένη κοινότητα, είναι απαραίτητη η εύρεση των μικρότερων μονοπατιών μεταξύ όλων των κορυφών εντός της κοινότητας. Για την αποτελεσματική υλοποίηση αυτού του βήματος, πρώτα δημιουργείται ένα δέντρο ελάχιστου μονοπατιού για κάθε κορυφή στην κοινότητα, ώστε κάθε μία να ενώνεται με τις υπόλοιπες κορυφές της κοινότητας. Αυτό επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Dijkstra στον αρχικό γράφο και σταματώντας μόλις έχουμε επισκεφθεί όλες τις κορυφές της κοινότητας. Στη

συνέχεια, μετράμε σε πόσα συντομότερα μονοπάτια βρίσκεται κάθε ακμή, αφού αυτό το άθροισμα ισούται με τη συνεισφορά κάθε ακμής στον περιορισμό κλίκας. Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει σε γραμμικό χρόνο στο δέντρο ελάχιστου μονοπατιού με μια απλή αναζήτηση πρώτα κατά βάθος, η οποία προσθέτει τον αριθμό των κορυφών που διασχίζονται από μια ακμή του δέντρου. Τελικά, η πολυπλοκότητα σε αυτό το στάδιο εξαρτάται μόνο από την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου εύρεσης κοινότητας και το χρόνο που απαιτείται για τη δημιουργία δέντρων ελάχιστου μονοπατιού.

Αλγόριθμος. Με βάση όλα τα προηγούμενα προκύπτει ένας επαναληπτικός αλγόριθμος διακλάδωσης και διαχωρισμού που λειτουργεί ως εξής: πρώτα, δημιουργείται μια αρχική λύση προσθέτοντας έναν περιορισμό αστεροειδούς για κάθε κορυφή με όλους τους γείτονές της και λύνοντας το αντίστοιχο γραμμικό πρόγραμμα. Αυτοί οι αρχικοί περιορισμοί εξασφαλίζουν ότι τα αποτελέσματα θα είναι τουλάχιστον τόσο καλά όσο αυτά που προκύπτουν από την τετριμμένη μέθοδο του βαθμού του Petit (βλ. υποενότητα 3.2.3). Έπειτα, αναζητούνται επαναληπτικά παραβιασμένοι περιορισμοί και προστίθενται στο γραμμικό πρόγραμμα. Στη συνέχεια, το επιλύουμε και προκύπτει μία νέα λύση για την οποία επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο βήμα. Ταυτόχρονα, διατηρούμε περιορισμένο τον αριθμό των περιορισμών που προστίθενται σε κάθε επανάληψη, καθώς παρατηρήθηκε ότι το γραμμικό πρόγραμμα γίνεται πολύ πιο αργό αν προστεθούν πολλοί κατευθείαν.

Επίσης, για αργούς χρόνους εκτέλεσης βρέθηκε ότι ευθύνεται το μέγεθος των περιορισμών κλίκας που υπολογίζονται, γι' αυτό στην υλοποίηση κάποιες κοινότητες που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του Leiden αγνοούνται αν το σύνολο των κορυφών τους ξεπερνά το όριο που έχει τεθεί. Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι μία επανάληψη δεν θα καταναλώσει υπερβολικά πολύ χρόνο.

Αποτελέσματα. Ο Zündorf πρώτα χρησιμοποίησε το σύνολο γράφων του Petit (βλ. υποενότητα 3.1) για την πειραματική μελέτη του. Σύγκρινε τη νέα μέθοδό του με τα αποτελέσματα του Petit και τις δύο μεθόδους των Carraza *et. al.* και προέκυψαν κάποια συμπεράσματα.

Αρχικά, αξίζει να σημειωθεί ότι ο Petit είχε απεριόριστο υπολογιστικό χρόνο για τον υπολογισμό των κατώτατων ορίων ενώ στις άλλες δύο περιπτώσεις το χρονικό όριο βρισκόταν στις 24 ώρες. Ο Zündorf υπολόγισε τα παραπάνω όρια σε μόλις 10 λεπτά ανά παράδειγμα. Βέβαια πρόκειται για διαφορετικές πλατφόρμες και χαρακτηριστικά αλλά και πάλι η διαφορά είναι μεγάλη.

Γράφος	Petit [93]	Caprara 1 [19]	Caprara 2 [20]	Zündorf [123]
randomA1	140634	-	-	82336
randomA2	4429294	-	-	1610485
randomA3	11463259	-	-	2465981
randomA4	601130	-	-	197591
randomG4	39972	-	-	64250
bintree10	1277	3696	-	2847
hc10	349525	-	-	77947
mesh33x33	31680	20042	-	12769
3elt	44785	-	-	42090
airfoill	40221	-	-	39825
crack	95347	-	-	67415
whitaker3	144854	-	-	63438
c1y	14101	59971	-	28597
c2y	17842	76253	-	33783
c3y	23417	113801	-	42313
c4y	21140	106942	-	34221
c5y	19217	88741	-	35470
gd95c	292	443	506	417
gd96a	5155	77860	-	26853
gd96b	702	1281	1404	1258
gd96c	241	402	519	365
gd96d	595	2021	1578	1965

Πίνακας 3.2 Σύγκριση της μεθόδου του Zündorf με ήδη γνωστές μεθόδους.

Όσον αφορά τους γράφους, υπολογίστηκε ένα νέο κατώτατο όριο για τον τυχαίο γεωμετρικό γράφο *randomG4*, ενώ τα αποτελέσματα για τα γραφήματα που προκύπτουν από τον πραγματικό κόσμο δεν απέχουν πολύ από εκείνα των Caprara *et. al.* στο [19]. Αντιθέτως, στους τυχαίους γράφους ή σε άλλους όπως ο *hc10* ή ο *mesh33x33* οι τιμές είναι πολύ κακές. Αυτό συμβαίνει καθώς οι γράφοι αυτοί δεν έχουν δομές φυσικών κοινοτήτων, οπότε ο αλγόριθμος του Leiden δεν βρίσκει κοινότητες που να δίνουν καλούς περιορισμούς κλίκας.

Εκτός από τους γράφους του Petit, ο Zündorf ασχολήθηκε επίσης με ένα προσαρμοσμένο σύνολο πολύ μεγαλύτερων γράφων, το οποίο απαρτίζεται από γραφήματα του πραγματικού κόσμου των Rossi και Ahmed [104] και από γεωμετρικούς μη ομογενείς τυχαίους γράφους των Bläsius *et. al.* [16]. Πρόκειται για περιπτώσεις που έχουν εξετασθεί σε διάφορους αλγορίθμους, αλλά ποτέ μέχρι πέρυσι στο πλαίσιο του προβλήματος της ελάχιστης γραμμικής διάταξης. Συγκρίνοντας τη μέθοδό του με εκείνη των Carrawa *et. al.* στο [19] συμπέρανε ότι το γραμμικό πρόγραμμα με την τεχνική της εύρεσης κοινοτήτων δίνει καλύτερες τιμές σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι το πρόγραμμά του συγκλίνει πολύ πιο γρήγορα από τις προηγούμενες μεθόδους αλλά και στην ιδιότητα πολλών από τους γράφους να έχουν καλή δομή κοινοτήτων από την οποία ο αλγόριθμος επωφελείται.

Συμπερασματικά, ο αλγόριθμος του Zündorf καταφέρνει να βελτιώσει σημαντικά το χρόνο εκτέλεσης ενός από τους καλύτερους αλγορίθμους εύρεσης κατώτατων ορίων θυσιάζοντας ένα πολύ μικρό μέρος της απόδοσης. Από εκεί που απαιτούνταν μέρες για γράφους με μερικές χιλιάδες ακμές, τώρα πλέον μπορούν να υπολογιστούν κατώτατα όρια για γράφους με εκατομμύρια ακμές μόλις σε μερικά λεπτά. Ιδιαίτερα για τους γεωμετρικούς τυχαίους γράφους και τους γράφους του πραγματικού κόσμου ο αλγόριθμος κρίνεται αρκετά αποδοτικός, ενώ υπάρχουν πολλά περιθώρια βελτίωσης αν παρατηρήσει κανείς τις αναφορές στις μελλοντικές κατευθύνσεις της δημοσίευσης.

3.4 Ευρετικές συναρτήσεις προσέγγισης

Οι ευρετικές συναρτήσεις αποτελούν βασικό εργαλείο στην προσπάθεια εύρεσης μιας όσο το δυνατόν καλύτερης λύσης για το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης. Παρακάτω ακολουθούν οι βασικότερες από αυτές [93]. Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δοθεί στις τεχνικές της φασματικής αλληλούχησης (spectral sequencing) και της προσομοιωμένης απόψησης (simulated annealing), καθώς δίνουν τα καλύτερα αποτελέσματα, ενώ ο συνδυασμός ή/και παραλλαγές τους χρησιμοποιούνται από τις πιο σύγχρονες ευρετικές που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

3.4.1 Κανονικές και τυχαίες απεικονίσεις

Ένας απλός τρόπος για την επίτευξη μιας προσεγγιστικής λύσης είναι η δημιουργία μιας τυχαίας απεικόνισης για το πρόβλημα. Μια παρόμοια ιδέα είναι να μην μεταθέσουμε καθόλου

την είσοδο-γράφο (θεωρούμε γράφους με αριθμημένους κόμβους). Αυτό ονομάζεται κανονική απεικόνιση και ορίζεται ως εξής: $\varphi(i) = i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Φυσικά, αυτές οι μέθοδοι παράγουν κακά αποτελέσματα γενικότερα, ωστόσο ο χρόνος εκτέλεσής τους είναι αμελητέος.

3.4.2 Διαδοχικές επαυξήσεις

Στη συγκεκριμένη ενότητα θα ασχοληθούμε με μια οικογένεια ευρετικών διαδοχικών επαυξήσεων (successive augmentation), όπου μια μερική απεικόνιση επεκτείνεται κόμβο-κόμβο έως ότου όλες οι κορυφές να είναι αριθμημένες. Σε αυτό το σημείο ο αλγόριθμος σταματά χωρίς περαιτέρω προσπάθεια για βελτίωση. Σε κάθε βήμα, η καλύτερη πιθανή αρίθμηση ορίζεται στην τρέχουσα κορυφή. Τέτοιου είδους ευρετικές έχουν εφαρμοσθεί σε διάφορα προβλήματα βελτιστοποίησης, όπως του χρωματισμού γράφου ή του πλανόδιου πωλητή [66] [68].

Η γενική μεθοδολογία παρουσιάζεται στον ακόλουθο αλγόριθμο. Αρχικά, η τιμή 0 ορίζεται σε μια τυχαία κορυφή. Έπειτα, σε κάθε επανάληψη, μια νέα κορυφή προστίθεται στην απεικόνιση, από τα αριστερά ή από τα δεξιά, ώστε να ελαχιστοποιείται το μερικό κόστος. Η απεικόνιση τελικά θα έχει τιμές από το $l + 1$ μέχρι το $r - 1$ και όχι από το 1 μέχρι το i ως συνήθως, αλλά αυτό δεν είναι πρόβλημα, αφού το MinLA ασχολείται με τις διαφορές μεταξύ των τιμών και όχι με τις ίδιες τις τιμές. Για να αποφασίσουμε σε ποια θέση της τρέχουσας διάταξης θα προστεθεί η νέα κορυφή, μια συνάρτηση $Increment(G, \varphi, i, v_i, x)$ επιστρέφει την αύξηση του κόστους της μερικής απεικόνισης φ , η οποία περιορίζεται στις κορυφές v_1, \dots, v_{i-1} , όταν οριστεί η τιμή x στην κορυφή v_i . Τέλος, ένας δεύτερος βρόχος επανάληψης απεικονίζει την φ στο $\{1, \dots, n\}$.

Σημαντικό σημείο της εν λόγω ευρετικής είναι η αρχική διάταξη των κόμβων. Ο Petit το 2003 πρότεινε 5 διαφορετικές στρατηγικές [93]:

- Κανονική διάταξη: οι κορυφές διατάσσονται με τον ίδιο τρόπο που έχουν αριθμηθεί στο γράφο.
- Τυχαία διάταξη: οι κορυφές διατάσσονται τυχαία. Το μειονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι αγνοεί τη συνεκτικότητα και την πυκνότητα του γράφου.
- Τυχαία αναζήτηση κατά πλάτος: επιλέγουμε μια αρχική κορυφή v_1 και έστω $S := \{v_1\}$ και $i := 2$. Όσο $S \neq V$, επιλέγουμε τυχαία μια ακμή $uv_i \in E$ με $u \in S$ και $v_i \notin S$.

Προσθέτουμε την κορυφή v_i στο S , δηλαδή $S := S \cup \{v_i\}$ και αυξάνουμε το i . Αυτή η αρχική διάταξη εκμεταλλεύεται τη συνεκτικότητα του γράφου, αλλά υστερεί σε τοπικότητα.

- Αναζήτηση πρώτα κατά πλάτος: για την κατασκευή μιας αρχικής διάταξης εκτελούμε έναν αλγόριθμο αναζήτησης πρώτα κατά πλάτος (breadth-first search) ξεκινώντας από έναν τυχαίο κόμβο. Με τον τρόπο αυτό, η άπληστη ευρετική θα λάβει υπόψιν την πιθανή τοπικότητα και συνεκτικότητα του γράφου.
- Αναζήτηση πρώτα κατά βάθος: μια εναλλακτική για τις προηγούμενες μεθόδους είναι να πραγματοποιηθεί μια αναζήτηση πρώτα κατά βάθος (depth-first search) από έναν τυχαίο κόμβο του γραφήματος.

```

function Increment ( $G, \varphi, i, v_i, x$ ) : int
     $\varphi[v_i] := x; c := 0$ 
    for  $j := 1$  to  $i$  :
        if  $v_i v_j \in E$  :
             $c := c + |\varphi[v_i] - \varphi[v_j]|$ 
    return  $c$ 

function SuccessiveAugmentation ( $G$ ) : layout
     $n := |V(G)|$ 
    Select an initial ordering of vertices  $v_1, v_2, \dots, v_n$ 
     $\varphi[v_1] := 0; l := -1; r := 1$ 
    for  $i := 2$  to  $n$  :
        if  $\text{Increment}(G, \varphi, i, v_i, l) < \text{Increment}(G, \varphi, i, v_i, r)$  :
             $\varphi[v_i] := l; l := l - 1$     ▷ Put at left
        else
             $\varphi[v_i] := r; r := r + 1$     ▷ Put at right
    ▷ Remap  $\varphi$  to  $\{1, \dots, n\}$ 
    for  $i := 1$  to  $n$  :  $\varphi[i] := \varphi[i] - l$ 
    return  $\varphi$ 

```

Εάν ο γράφος εισόδου είναι αποθηκευμένος με χρήση ταξινομημένων λιστών γειτνίασης (δηλαδή για κάθε κορυφή υπάρχει αποθηκευμένη μια ταξινομημένη λίστα με τους γείτονες της κορυφής), τότε η οικογένεια ευρετικών συναρτήσεων με διαδοχικές επαυξήσεις έχει πολυπλοκότητα $O(n^2 \log n)$, η οποία κυριαρχεί έναντι του κόστους της αρχικής διάταξης των κόμβων. Επίσης, παρατηρούμε ότι όλες οι διαφοροποιήσεις, εκτός από την κανονική διάταξη, είναι τυχαιοποιημένοι αλγόριθμοι, αφού η τελική διάταξη εξαρτάται από την πρώτη κορυφή που θα επιλεγεί.

3.4.3 Φασματική αλληλούχηση

Η φασματική αλληλούχηση (ΦΑ) προτάθηκε ως ευρετική τεχνική από τους Juvan και Mohar το 1992 [70]. Δεδομένου ενός γράφου G , ο αλγόριθμος αρχικά υπολογίζει το διάνυσμα Fiedler του G . Αυτό είναι το ιδιοδιάνυσμα $x^{(2)}$ που αντιστοιχεί στη $2^{\text{η}}$ μικρότερη ιδιοτιμή λ_2 του Λαπλασιανού πίνακα L_G του G . Έπειτα, κάθε θέση του $x^{(2)}$ βαθμολογείται. Έτσι, η ευρετική επιστρέφει μια απεικόνιση φ για την οποία ισχύει:

$$\varphi(u) \leq \varphi(v), \text{ όταν } x_u^{(2)} \leq x_v^{(2)}$$

Η λογική πίσω από αυτή τη μέθοδο είναι ότι η διάταξη των κορυφών, που προκύπτει από τις τιμές τους στο διάνυσμα Fiedler, έχει κάποιες ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Ειδικότερα, οι κορυφές που συνδέονται μεταξύ τους με μια ακμή τείνουν να είναι αριθμημένες με τιμές που είναι κοντά η μια στην άλλη. Αυτή η ιδιότητα έχει χρησιμοποιηθεί ήδη σε διάφορα προβλήματα, όπως ο διαμερισμός γράφου, η απεικόνιση χρωμοσωμάτων και η αναδιάταξη πίνακα [13] [60].

3.4.4 Τοπική αναζήτηση

Οι Papadimitrou και Steiglitz το 1982 εξήγησαν ότι για τις ευρετικές τοπικής αναζήτησης (local search heuristics) σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση και τα εμπειρικά τεστ, ενώ η σχεδίαση τους είναι κάτι σαν τέχνη [91]. Παρά την αφαιρετικότητά της, η τοπική αναζήτηση είναι μια από τις πιο διαδεδομένες τεχνικές προσέγγισης πολλών συνδυαστικών προβλημάτων, κυρίως λόγω της επίδοσης και της απλότητάς της. Η βασική της αρχή είναι η επαναληπτική βελτίωση μιας τυχαία παραχθείσας λύσης, εκτελώντας τοπικές αλλαγές στη συνδυαστική της δομή. Συνήθως, αλλαγές οι οποίες βελτιώνουν τη λύση γίνονται αποδεκτές, ενώ όσες τη χειροτερεύουν απορρίπτονται.

Για να εφαρμοστεί η τοπική αναζήτηση σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, πρέπει να έχουν επισημανθεί τα ακόλουθα: το σύνολο των εφικτών λύσεων ($S = \{\sigma_i\}$), μια συνάρτηση κόστους που αναθέτει μια αριθμητική τιμή σε οποιαδήποτε εφικτή λύση ($f: S \rightarrow R^+$) και μια γειτονιά, η οποία είναι μια σχέση μεταξύ των εφικτών λύσεων οι οποίες είναι «κοντά» κατά μία έννοια. Ακολουθεί η γενική δομή, υποκείμενο πολλών παραλλαγών:

```

function LocalSearch ( )
   $\sigma :=$  Select initial random feasible solution
  while  $\neg$ Termination() :
     $\sigma' :=$  Select a neighbor of  $\sigma$ 
     $\delta := f(\sigma) - f(\sigma')$ 
    if Acceptable( $\delta$ ) :
       $\sigma := \sigma'$ 
  return  $\sigma$ 

```

Για το MinLA, το σύνολο όλων των εφικτών λύσεων είναι το σύνολο όλων των απεικονίσεων (μεταθέσεων) μεγέθους n και η αντικειμενική συνάρτηση είναι η $LA(G, \varphi)$. Για την γειτονιά υπάρχουν πολλές διαφορετικές επιλογές. Εκτός από την απλότητα των γειτονιών που αναφέρονται παρακάτω, οι λόγοι που επιλέχθηκαν αντί των υπολοίπων είναι η ευκολία στις κινήσεις και η μικρή προσπάθεια που απαιτείται για τον σταδιακό υπολογισμό του κόστους της νέας απεικόνισης.

- *Flip2*: Δύο απεικονίσεις είναι γειτονικές αν μπορεί κανείς να μεταβεί από τη μία στην άλλη εναλλάσσοντας τις τιμές οποιουδήποτε ζεύγους κορυφών στο γράφο.
- *Flip3*: Δύο απεικονίσεις είναι γειτονικές αν μπορεί κανείς να μεταβεί από τη μία στην άλλη περιστρέφοντας τις τιμές οποιασδήποτε τριάδας κορυφών στο γράφο.
- *FlipE*: Δύο απεικονίσεις είναι γειτονικές αν μπορεί κανείς να μεταβεί από τη μία στην άλλη εναλλάσσοντας τις τιμές δύο γειτονικών κορυφών στο γράφο.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οποιαδήποτε κίνηση μπορεί να γίνει στη γειτονιά *FlipE* θα γίνεται και στη *Flip2* και όποια κίνηση μπορεί να γίνει στη *Flip2* θα γίνεται και στη *Flip3*. Είναι αβέβαιο ποια από τις 3 είναι η καταλληλότερη, αφού αν και η *Flip3* συνήθως δεν σταματά σε πολλά τοπικά ελάχιστα, η εξερεύνησή της απαιτεί περισσότερο χρόνο μιας και έχει μεγαλύτερο μέγεθος από τις *Flip2* και *FlipE*.

Οι ευρετικές που θα ακολουθήσουν πηγάζουν από το γενικό σκελετό της τοπικής αναζήτησης. Οι διαφοροποιήσεις τους αφορούν τον τρόπο που εξερευνάται η γειτονιά, ώστε να βρίσκονται κατάλληλες κινήσεις, αλλά και το ποιο θα είναι το κριτήριο αποδοχής κινήσεων οι οποίες δεν βελτιώνουν κατευθείαν τη λύση. Αυτοί οι αλγόριθμοι αποκαλούνται ευρετικές μαύρου κουτιού [69], αφού ασχολούνται μόνο με την αντικειμενική συνάρτηση και τη δομή της γειτονιάς και δεν εφαρμόζουν στρατηγικές που να εξαρτώνται από το ίδιο το πρόβλημα.

3.4.5 Αναρρίχηση λόφου

Η αναρρίχηση λόφου (hillclimbing) στη γειτονιά *Flip2* υλοποιείται ως εξής: μια αρχική απεικόνιση δημιουργείται τυχαία. Έπειτα, προτεινόμενες κινήσεις παράγονται επίσης τυχαία και γίνονται αποδεκτές, όταν το κέρδος τους δ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. Ο αλγόριθμος τερματίζει, όταν *max* συνεχόμενες προτεινόμενες λύσεις δεν έχουν μειώσει το κόστος της απεικόνισης.

```
function HillClimbing2 (G : graph, max : int) : layout
   $\varphi$  := Generate an initial random layout; z := 0
  repeat
    z := z + 1
    u := Generate a random integer in {1, ..., n}
    v := Generate a random integer in {1, ..., n}
     $\delta$  := GainWhenFlip2(G,  $\varphi$ , u, v)
    if  $\delta \geq 0$  :
      Flip2( $\varphi$ , u, v)
      if  $\delta > 0$  : z := 0
  until z = max
  return  $\varphi$ 
```

Η συνάρτηση *GainWhenFlip2*(*G*, φ , *u*, *v*) επιστρέφει το κέρδος (ή απώλεια) της συνάρτησης κόστους, όταν εναλλάσσονται οι τιμές των *u* και *v* στη φ και η *Flip2*(φ , *u*, *v*) εκτελεί την εναλλαγή αυτή.

Για τη γειτονιά *Flip3* ο αλγόριθμος εκτελείται με τον ίδιο τρόπο, μόνο που επιλέγονται 3 κόμβοι τυχαία. Για τη *FlipE* πρώτα επιλέγεται ένας κόμβος *u* τυχαία από το σύνολο *V* και στη συνέχεια, άλλος ένας κόμβος, γειτονικός του *u*, επιλέγεται επίσης τυχαία. Στις γειτονιές *Flip2* και *Flip3* θέτουμε: $max = n \log_2 n$, ενώ στη *FlipE* ισχύει: $max = \log_2^2 n$.

3.4.6 Ολική αναζήτηση

Στην ευρετική ολικής αναζήτησης, σε κάθε βήμα υπολογίζεται το κέρδος κάθε πιθανής μετάβασης έτσι ώστε να επιλέγεται η κίνηση με το μέγιστο κέρδος στην τρέχουσα γειτονιά. Ο αλγόριθμος στη γειτονιά *Flip2* διατυπώνεται ως εξής:

```

function FullSearch ( $G$  : graph,  $max$  : int) : layout
   $\varphi$  := Generate an initial random layout;  $z := 0$ 
  repeat
     $z := z + 1$ 
     $\langle u, v, \delta \rangle := SelectBestMove(G, \varphi)$ 
    if  $\delta \geq 0$  :
      Flip2( $\varphi, u, v$ )
      if  $\delta > 0$  :  $z := 0$ 
  until  $z = max$ 
  return  $\varphi$ 

```

Σύμφωνα με αυτή την υλοποίηση, μοιάζει σε κάθε βήμα απαραίτητος ο υπολογισμός του κέρδους των $n(n - 1)/2$ πιθανών κινήσεων. Ωστόσο, στην περίπτωση που ο γράφος είναι αραιός, μπορούν να εξοικονομηθούν αρκετοί πόροι και χρόνος, αφού δεν χρειάζεται να υπολογιστούν ξανά οι κινήσεις κόμβων οι οποίοι δεν είναι γείτονες των τελευταίων κόμβων που εναλλάχθηκαν. Έτσι, το κόστος κάθε επανάληψης, εκτός από την πρώτη, μειώνεται σε $O(dn)$ όπου d είναι ο μέγιστος βαθμός του γράφου εισόδου.

3.4.7 Metropolis

Το πρόβλημα όλων των ευρετικών τοπικής αναζήτησης που έχουν αναφερθεί είναι ότι, όταν βρεθεί ένα βέλτιστο σημείο τοπικά, ο αλγόριθμος σταματά, αλλά αυτό το σημείο μπορεί να απέχει αρκετά από το ολικό βέλτιστο. Για να επιτρέψουμε κινήσεις κατάβασης, η ευρετική Metropolis παραμετροποιείται με μια θερμοκρασία t και υλοποιείται στη γειτονιά Flip2 ως εξής [80]:

```

function Metropolis ( $G$  : graph,  $r$  : int) : layout
   $\varphi$  := Generate an initial random layout
  for  $i := 1$  to  $r$  :
     $u :=$  Generate a random integer in  $\{1, \dots, n\}$ 
     $v :=$  Generate a random integer in  $\{1, \dots, n\}$ 
     $\delta := GainWhenFlip2(G, \varphi, u, v)$ 
    with probability  $\min(1, e^{-\delta/t})$  :
      Flip2( $\varphi, u, v$ )
  return  $\varphi$ 

```

Αξίζει να επισημανθεί ότι κινήσεις ανάβασης γίνονται αποδεκτές αυτόματα, ενώ όσες είναι αρνητικού κέρδους γίνονται αποδεκτές τυχαία συναρτήσει του «ψυγούς» δ της κίνησης και της θερμοκρασίας t . Με μια υψηλή θερμοκρασία η πιθανότητα κατάβασης είναι υψηλή και

με χαμηλή το αντίθετο. Οριακά, καθώς $t \rightarrow \infty$, η Metropolis εκτελεί έναν τυχαίο περίπατο στη γειτονιά, ενώ καθώς $t \rightarrow 0$, η Metropolis συμπεριφέρεται σαν την ευρετική μέθοδο αναρρίχησης λόφου.

3.4.8 Προσομοιωμένη ανόπτηση

Η συγκεκριμένη ευρετική σχετίζεται αρκετά με τη διαδικασία Metropolis [73]. Συνοπτικά, η προσομοιωμένη ανόπτηση (ΠΑ) αποτελείται από μια ακολουθία εκτελέσεων της Metropolis με σταδιακή μείωση της θερμοκρασίας. Για το MinLA ο βασικός αλγόριθμος έχει ως εξής:

```

function SimulatedAnnealing (G : graph) : layout
   $\varphi$  := Generate an initial random layout
  t := InitialTemperature()
  while  $\neg$ Frozen() :
    while  $\neg$ Equilibrium() :
      u := Generate a random integer in {1, ..., n}
      v := Generate a random integer in {1, ..., n}
       $\delta$  := GainWhenFlip2(G,  $\varphi$ , u, v)
      with probability  $\min(1, e^{-\delta/t})$  :
        Flip2( $\varphi$ , u, v)
      t :=  $\alpha \cdot t$     ▷  $0 < \alpha < 1$ 
  return  $\varphi$ 

```

Το κύριο σημείο σε αυτή την ευρετική αποτελεί η επιλογή των παραμέτρων (αρχική θερμοκρασία, ανίχνευση σημείων ισορροπίας και ψύξης, συντελεστής ψύξης α , ...). Αυτές δεν εξαρτώνται μόνο από το ποιο είναι το πρόβλημα βελτιστοποίησης, αλλά και από την εκάστοτε περίπτωση του. Διάφορα σχήματα υλοποίησης της SA έχουν διατυπωθεί [66] [67] [68]. Επίσης, αντί για διερεύνηση διαφορετικών επιλογών για τις παραμέτρους, μια προσαρμοστική τεχνική προτάθηκε από τους Van Laarhoven και Aarts το 1987 [120][120].

3.4.9 Παρατηρήσεις και συμπεράσματα

Ο Petit εξέτασε πειραματικά τις παραπάνω μεθόδους πάνω στο σύνολο γράφων που παρουσίασε (βλ. υποενότητα 3.1) και στο οποίο βασίζονται και οι περισσότερες από τις μεταγενέστερες μελέτες. Από τα αποτελέσματα προέκυψε ότι η ευρετική που, γενικά, παρουσιάζει καλά αποτελέσματα σε σύντομο χρόνο είναι η φασματική αλληλούχηση. Η μόνη που την ξεπερνά από άποψη απόδοσης, σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις, είναι η προσομοιωμένη ανόπτηση, ωστόσο έχει το μειονέκτημα ότι απαιτεί πολύ μεγαλύτερο χρόνο εκτέλεσης. Για

παράδειγμα, στο γράφο *airfoill*, η ΦΑ εκτελείται σε 1 δευτερόλεπτο, ενώ η ΠΑ χρειάζεται 2 ώρες.

Επίσης, αξίζει να σημειωθούν οι διαφορετικές τάσεις που παρατηρούνται στις προσεγγίσεις σε διαφορετικές οικογένειες γράφων. Για παράδειγμα, η ευρετική της αναρρίχησης λόφου έχει πολύ καλή απόδοση σε διωνυμικούς τυχαίους γράφους (καλύτερη ακόμα και από την ΠΑ), ενώ υστερεί σε γράφους με έμφυτη γεωμετρική δομή, όπως οι τυχαία γεωμετρικοί ή οι γράφοι πεπερασμένων στοιχείων.

Σχετικά με τις διαφορετικές γειτονίες στην αναρρίχηση λόφου, τα πειράματα έδειξαν ότι την καλύτερη συμπεριφορά παρουσιάζει η *Flip2*, ακολουθούμενη κοντά από την *Flip3*, ενώ αρκετά από αυτές απέχει η *FlipE*.

Συνοπτικά, καταλήγουμε ότι η καλύτερη ευρετική από άποψη απόδοσης μεταξύ των παραπάνω βασικών ευρετικών είναι η προσομοιωμένη ανόπτηση. Ωστόσο, αν αρκεί απλά μια καλή προσέγγιση, τότε η φασματική αλληλούχηση θα ήταν σίγουρα η επιλογή λόγω του σημαντικά ταχύτερου χρόνου εκτέλεσης, ενώ σε ένα μικρότερο βαθμό, πιο απλές τεχνικές, όπως η αναρρίχηση λόφου και οι διαδοχικές επαυξήσεις με αναζήτηση πρώτα κατά βάθος, μπορούν να δώσουν λύσεις κοντά σε αυτές της φασματικής αλληλούχησης.

Κεφάλαιο 4

Προχωρημένες ευρετικές τεχνικές

Στο κεφάλαιο αυτό επισημαίνονται οι πιο αντιπροσωπευτικές προσεγγιστικές διαδικασίες επίλυσης του προβλήματος της ελάχιστης γραμμικής διάταξης. Αναφέρεται συνοπτικά η λογική πίσω από κάθε αλγόριθμο και στο τέλος γίνεται μια σύγκριση μεταξύ των ήδη γνωστών πειραματικών αποτελεσμάτων (όπου επιτρέπεται) με σκοπό την καλύτερη κατανόηση σχετικά με την επιλογή κάθε ευρετικής ανάλογα με τον εξεταζόμενο γράφο.

4.1 Φασματική αλληλούχηση + Προσομοιωμένη ανόπτηση

Η συγκεκριμένη ευρετική (ΦΑ + ΠΑ ή SS + SA) προτάθηκε το 2003 από τον Petit [92] και συνδυάζει 2 από τις ευρετικές του προηγούμενου κεφαλαίου. Η βασική ιδέα είναι πρώτα η εύρεση μιας καλής γενικής απεικόνισης μέσω της ΦΑ και, έπειτα, η βελτίωσή της τοπικά χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ΠΑ, ξεκινώντας από μια χαμηλή θερμοκρασία.

Μια νέα γειτονιά: *FlipN*. Αφού η διαδικασία ΠΑ θα ξεκινήσει από μια αρκετά καλή λύση σε χαμηλή θερμοκρασία, είναι αναμενόμενο ότι ο αριθμός των κινήσεων στη γειτονιά *Flip2* που απορρίπτονται θα είναι μεγάλος. Συνεπώς, η εύρεση αποδεκτών λύσεων θα είναι δύσκολη. Για τη μείωση του χρόνου αναζήτησης, παρατηρούμε ότι σε μια καλή λύση οι πιθανές κινήσεις θα αφορούν κόμβους κοντινούς στην τρέχουσα απεικόνιση. Αυτό οδήγησε σε μια νέα κατανομή για τη γειτονιά *Flip2*: ακριβώς μετά τη λύση που προκύπτει από την ΦΑ, κάνουμε μια δειγματοληψία στη γειτονιά *Flip2* και υπολογίζουμε τη μέση τιμή μ και την τυπική απόκλιση σ των αποστάσεων μεταξύ των αποδεκτών λύσεων (το μέγεθος της δειγματοληψίας ισούται με $n\sqrt{n}$). Έτσι, κατά τη διάρκεια της ΠΑ παράγονται κινήσεις που δημιουργούν ζευγάρια κορυφών των οποίων η απόσταση ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma)$.

Πρόγραμμα ψύξης. Η επιλογή και η ρύθμιση του προγράμματος ψύξης αποτελεί σημείο-κλειδί για τη μέθοδο ΠΑ. Εδώ, γίνεται χρήση ενός γεωμετρικού συστήματος που μειώνει τη θερμοκρασία σε κάθε γύρο πολλαπλασιάζοντας την με α ($0 < \alpha < 1$, α κοντά στο 1). Για κάθε θερμοκρασία δοκιμάζονται r κινήσεις. Αν αυτές οι κινήσεις μειώσουν την αντικειμενική συνάρτηση περισσότερο από έναν λόγο ρ , θεωρούμε ότι η θερμοκρασία δεν έχει φτάσει ακόμα το σημείο ισορροπίας, οπότε εκτελούμε άλλον ένα γύρο με την ίδια

θερμοκρασία. Η ΠΑ τερματίζει, όταν λιγότερες από B κινήσεις σε ένα γύρο έχουν αυστηρά θετικό κέρδος. Ακολουθεί η δομή του αλγορίθμου:

```

function  $SS+SA(G)$  is
  Generate an initial layout  $\varphi$  using Spectral Sequencing
  Sample the neighborhood at  $t_0$  to obtain  $\mu$  and  $\sigma$ 
   $t := t_0$ ;  $r := \beta \cdot \mu \cdot n$ 
  repeat
     $c := c_\varphi$ ;  $b := 0$ 
    repeat  $r$  times
      Select  $u, v$  with  $|\varphi(u) - \varphi(v)|$  drawn from  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ 
       $\varphi' := \varphi$ ;  $\varphi'[u] := \varphi[v]$ ;  $\varphi'[v] := \varphi[u]$ ;  $\delta := c_\varphi - c_{\varphi'}$ 
      with probability  $\min(1, e^{-\delta/t})$  do
         $\varphi := \varphi'$ ; if  $\delta > 0$  then  $b := b + 1$ 
      end with
    end repeat
    if  $c_{G,\varphi}/c > \rho$  then  $t := \alpha \cdot t$ 
  until  $b < B$ 
  return  $\langle \varphi, c_\varphi \rangle$ 
end

```

Ο Petit σύγκρινε πειραματικά το συνδυασμό των δύο μεθόδων με κάθε μέθοδο ξεχωριστά στο σύνολο γράφων του που αναφέρεται στην ενότητα 3.1, και παρατήρησε ότι η $\Phi A + \Pi A$ δίνει πάντα καλύτερη λύση από την ΦA , ενώ μόνο για 2 γράφους δεν βελτιώνει τη λύση που προκύπτει από την ΠA . Οι χρόνοι εκτέλεσης των πειραμάτων είναι σαφώς μικρότεροι με τη χρήση της νέας ευρετικής.

4.2 Δυαδικό δέντρο αποσύνθεσης

Μία προσέγγιση με χρήση της τεχνικής διαίρει και βασίλευε προτάθηκε το 2001 από τους Bar-Yehuda *et. al.* [15]. Αναπτύχθηκε ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου με πολυπλοκότητα $O(|V|^{2.2})$ για τον υπολογισμό μια γραμμικής διάταξης που προκύπτει από ένα δυαδικό δέντρο αποσύνθεσης (binary decomposition tree ή BDT). Παρακάτω ακολουθούν κάποιοι απαραίτητοι ορισμοί, αλλά και μια συνοπτική παρουσίαση της πειραματικής σχεδίασης που έγινε για τη συγκεκριμένη τεχνική.

Δέντρα αποσύνθεσης. Ένα δέντρο αποσύνθεσης ενός γράφου $G(V, E)$ είναι ένα δυαδικό δέντρο με ρίζα με αντιστοίχιση των κόμβων του σε υποσύνολα κορυφών ως εξής: η ρίζα αντιστοιχείται στο V , τα υποσύνολα που αντιστοιχούν σε κάθε δύο αδέρφια συγκροτούν μια

διαμέριση του υποσυνόλου που αντιστοιχεί στο γονέα και τα φύλλα αντιστοιχούν σε υποσύνολα που περιέχουν μία μόνο κορυφή. Ορίζουμε ως $V(t)$ το υποσύνολο των κορυφών που αντιστοιχούν σε έναν κόμβο δέντρου t και ως $T(t)$ το υποδέντρο με ρίζα τον t . Από κάθε διάσχιση ενός δέντρου αποσύνθεσης κατά τη διάρκεια μιας αναζήτησης πρώτα κατά βάθος (DFS) προκύπτει μια διάταξη στο V σύμφωνα με τη σειρά που επισκεπτόμαστε τους κόμβους-φύλλα. Αφού για κάθε εσωτερικό κόμβο υπάρχουν δύο πιθανές σειρές επίσκεψης των κόμβων-παιδιών, ισχύει ότι από τις διασχίσεις DFS προκύπτουν 2^{n-1} διατάξεις. Κάθε τέτοια διάταξη ορίζεται αποφασίζοντας για κάθε εσωτερικό κόμβο ποιο παιδί θα επισκεφθούμε πρώτο. Με γραφικούς όρους, αν το πρώτο παιδί σχεδιάζεται πάντα ως το αριστερό παιδί, τότε η επαγόμενη διάταξη ορίζεται ως η διάταξη των φύλλων από τα αριστερά προς τα δεξιά.

(Βέλτιστοι) Προσανατολισμοί. Έστω ένας κόμβος δέντρου t ενός δέντρου αποσύνθεσης. Ένας προσανατολισμός του t είναι ένα bit το οποίο καθορίζει ποιο από τα δύο παιδιά του t θεωρείται ως το αριστερό παιδί. Η παραδοχή που κάνουμε είναι ότι κατά την εκτέλεση μιας αναζήτησης πρώτα κατά βάθος το αριστερό παιδί επισκέπτεται πάντα πρώτο. Οπότε, από ένα δέντρο αποσύνθεσης, του οποίου όλοι οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν καθορισμένους προσανατολισμούς, προκύπτει μία μοναδική διάταξη. Η ανάθεση προσανατολισμών σε όλους τους εσωτερικούς κόμβους ονομάζεται προσανατολισμός του δέντρου αποσύνθεσης. Θεωρούμε ένα δέντρο αποσύνθεσης T ενός γράφου $G(V, E)$. Ένας προσανατολισμός του T είναι βέλτιστος ως προς ένα πρόβλημα διάταξης, αν το κόστος της διάταξης που προκύπτει από τον προσανατολισμό είναι το ελάχιστο συγκριτικά με όλες τις πιθανές διατάξεις του T .

Αλγόριθμος. Η μέθοδος που υλοποιήθηκε αποτελεί έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού. Ο πίνακας που χρησιμοποιήθηκε έχει στοιχεία $\langle t, a \rangle$, όπου t είναι ένας κόμβος ενός δυαδικού δέντρου αποσύνθεσης και a μια δυαδική συμβολοσειρά μήκους ίσου με το βάθος του t που αναπαριστά τις αναθέσεις προσανατολισμών στους προγόνους του t στο δέντρο αποσύνθεσης. Να σημειωθεί ότι το μέγεθος του πίνακα είναι εκθετικό στο βάθος του δέντρου αποσύνθεσης, άρα αν το δέντρο έχει λογαριθμικό βάθος, δηλαδή είναι ισορροπημένο, τότε ο πίνακας έχει πολωνυμικό μέγεθος.

Τα περιεχόμενα ενός στοιχείου $\langle t, a \rangle$ έχουν ως εξής: έστω M το σύνολο των φύλλων του υποδέντρου με ρίζα το t . Οι κορυφές που ανήκουν στο M συνθέτουν ένα συνεχές τμήμα σε κάθε διάταξη που συμφωνεί με το δέντρο αποσύνθεσης. Η ανάθεση προσανατολισμών στους προγόνους του t σημαίνει ότι μπορούμε να καθορίσουμε το σύνολο L των κορυφών που

τοποθετούνται αριστερά του M και το σύνολο R των κορυφών στα δεξιά του. Το στοιχείο του πίνακα $\langle t, a \rangle$ δείχνει το ελάχιστο τοπικό κόστος που σχετίζεται με το τμήμα M , υποκείμενο των προσανατολισμών a των προγόνων του t . Αυτό το κόστος ασχολείται μόνο με τις ακμές που είναι γειτονικές στο M και μόνο με το κόστος που αυτές επιβάλλουν μέσα στο τμήμα αυτό. Όταν ο αλγόριθμος ολοκληρωθεί, το τοπικό κόστος της ρίζας θα είναι το συνολικό κόστος ενός βέλτιστου προσανατολισμού, αφού το M περιέχει κάθε φύλλο του δέντρου.

Η ικανότητα εφαρμογής του δυναμικού προγραμματισμού βασίζεται σε μια ιδιότητα τοπικότητας που επιτρέπει τον υπολογισμό ενός στοιχείου $\langle t, a \rangle$ βάσει 4 άλλων στοιχείων. Έστω t_1 και t_2 τα παιδιά του t στο δέντρο αποσύνθεσης και $\sigma \in \{0,1\}$ ένας πιθανός προσανατολισμός του t . Αποδεικνύεται ότι είναι εύκολο να υπολογιστεί το $\langle t, a \rangle$ από τα 4 στοιχεία $\langle t_i, a \cdot \sigma \rangle$, όπου $i \in \{1,2\}$, $\sigma \in \{0,1\}$.

Ο πίνακας που περιγράφεται παραπάνω μπορεί να θεωρηθεί ως μια δομή που ονομάζεται δέντρο προσανατολισμών ενός δέντρου αποσύνθεσης. Κάθε εσωτερικός κόμβος $\hat{t} = \langle t, a \rangle$ του δέντρου προσανατολισμών αντιστοιχεί σε έναν κόμβο t του δέντρου αποσύνθεσης και σε μια συμβολοσειρά a με τους προσανατολισμούς των προγόνων του t στο δέντρο αποσύνθεσης. Τα παιδιά του \hat{t} είναι τα 4 παιδιά που αναφέρθηκαν παραπάνω, οπότε η τιμή κάθε κόμβου στο δέντρο προσανατολισμών είναι τοπικά υπολογίσιμη από τις τιμές των 4 παιδιών του. Άρα εκτελούμε μια αναζήτηση πρώτα κατά βάθος στο δέντρο αυτό και για να μειωθεί η χωρική πολυπλοκότητα δεν το αποθηκεύουμε κατευθείαν όλο στη μνήμη.

Εμπειρικά αποτελέσματα. Τα πειράματα που εκτελέστηκαν βασίστηκαν στους γράφους του Petit και έχουν ως εξής: πρώτα, υπολογίστηκαν δέντρα αποσύνθεσης για τους υπό μελέτη γράφους χρησιμοποιώντας το πακέτο διαμερισμού γράφων HMETIS [71]. Για όλους εκτός από τους τυχαίους γράφους του συνόλου που μελετήθηκε, διαπιστώθηκε ότι η διαφορά μεταξύ των καλύτερων και των χειρότερων προσανατολισμών για τα δέντρα αποσύνθεσης που υπολογίστηκαν είναι προσεγγιστικά ένας παράγοντας του 2. Αυτό υποδηλώνει ότι η εύρεση βέλτιστων προσανατολισμών είναι χρήσιμη σε πρακτικό επίπεδο. Έπειτα, υπολογίστηκαν αρκετά δέντρα αποσύνθεσης για κάθε γράφο εκτελώντας το HMETIS πολλές φορές. Αφού το πακέτο αυτό είναι ένας τυχαίος αλγόριθμος, υπολογίζει μια διαφορετική αποσύνθεση κάθε φορά που εκτελείται.

Οι βέλτιστοι προσανατολισμοί υπολογίστηκαν για κάθε δέντρο αποσύνθεσης. Διαπιστώθηκε ότι ο αλγόριθμος που βρίσκεται παραπάνω θα μπορούσε να συνδυαστεί με έναν

αλγόριθμο διαμέρισης για τον υπολογισμό λύσεων λίγο μεγαλύτερου κόστους από την ΠΑ, αλλά σε ένα κλάσμα του χρόνου εκτέλεσής της. Στη συνέχεια, έγινε χρήση ενός αλγορίθμου βελτίωσης της ευρετικής. Ένα τυχαίο δέντρο αποσύνθεσης δημιουργήθηκε βασισμένο στη διάταξη που υπολογίστηκε πριν και βρέθηκε ο βέλτιστος προσανατολισμός του. Με την επανάληψη της διαδικασίας αυτής τα αποτελέσματα έγιναν συγκρίσιμα με εκείνα του Petit, ενώ ο χρόνος εκτέλεσης παρέμεινε μικρότερος από της ΠΑ. Τέλος, η καλύτερη διάταξη που υπολογίστηκε με το τελευταίο πείραμα χρησιμοποιήθηκε ως αρχική λύση για τον αλγόριθμο ΠΑ του Petit με λίγο καλύτερα αποτελέσματα από τον γενικό αλγόριθμο, αλλά σε μεγαλύτερους χρόνους.

4.3 Πολύ-κλιμακωτός αλγόριθμος

Το 2002 οι Koren και Harel παρουσίασαν έναν αλγόριθμο γραμμικού χρόνου για το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης, ο οποίος βασίζεται σε φασματικές μεθόδους και πολύ-κλιμακωτές τεχνικές [75]. Οι τεχνικές αυτές μετατρέπουν σταδιακά ένα πρόβλημα αρχικά μεγαλύτερων διαστάσεων σε ολοένα και μικρότερες μέσω μιας διαδικασίας που ονομάζεται συμπίκνωση (coarsening) του προβλήματος. Στην μικρότερη δυνατή διάσταση υπολογίζεται η λύση του προβλήματος και ξεκινά μια διαδικασία βελτίωσης, κατά την οποία η λύση προβάλλεται σε όλο και μεγαλύτερες διαστάσεις και ενημερώνεται κατάλληλα σε κάθε κλίμακα, μέχρι να αναπαραχθεί το αρχικό πρόβλημα. Αυτό το σύνολο βημάτων αποτελεί έναν V-κύκλο. Ακολουθεί συνοπτικά η υλοποίηση του πολύ-κλιμακωτού αλγορίθμου (MS), η οποία, εκτός του V-κύκλου, περιέχει και άλλες τεχνικές, λεπτομέρειες για τις οποίες ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει στο [75].

Προκατασκευαστικό στάδιο. Πριν την εκτέλεση του αλγορίθμου είναι επιθυμητή μια καλή γραμμική διάταξη σε πολύ μικρό χρόνο. Για την εύρεση μιας τέτοιας διάταξης πρώτα διατάσσονται οι κορυφές χρησιμοποιώντας την τεχνική της φασματικής ακολουθίας και έπειτα βελτιώνεται το αποτέλεσμα μέσω της μεθόδου επανάληψης της διαμέσου για περίπου 50 αναζητήσεις. Η μέθοδος αυτή είναι μια γρήγορη τυχαιοποιημένη επαναληπτική διαδικασία για τη μείωση του κόστους μιας γραμμικής διάταξης και βασίζεται σε μια συνεχή χαλάρωση του προβλήματος, όπου επιτρέπεται κορυφές να μοιράζονται την ίδια θέση ή να τοποθετούνται σε μη ακέραια σημεία.

Ο V-κύκλος. Το βασικό πολύ-κλιμακωτό εργαλείο είναι ο V-κύκλος, ο οποίος ξεκινά βελτιώνοντας τοπικά τη διάταξη. Στόχος δεν είναι μόνο η ελαχιστοποίηση του κόστους, αλλά

και η βελτίωση της ποιότητας του επόμενου βήματος συμπίκνωσης. Το επόμενο βήμα είναι η συμπίκνωση του γράφου, η οποία βασίζεται στον περιορισμό συνεχόμενων ζευγαριών από κορυφές της τρέχουσας διάταξης. Έπειτα, το πρόβλημα λύνεται στον περιορισμένο χώρο επίλυσης, δουλεύοντας αναδρομικά στον συμπυκνωμένο γράφο. Μόλις βρεθεί μία καλή λύση στον περιορισμένο αυτό χώρο, βελτιώνεται τοπικά (σε όλο τον χώρο επίλυσης).

Στο καλύτερο δυνατό σενάριο, σε κάθε κλίμακα μια βέλτιστη λύση επιτυγχάνεται μέσω τοπικής βελτιστοποίησης από την καλύτερη περιορισμένη λύση, οπότε τελικά βρίσκεται και η βέλτιστη λύση για το γενικό πρόβλημα. Φυσικά, σε ένα ρεαλιστικό σενάριο όπου αναμένεται μια αρκετά καλή λύση κάθε φορά, η ποιότητά της εξαρτάται από τη διαδικασία βελτίωσης και από τους περιορισμούς που έχουν τεθεί.

Η συνθήκη τερματισμού του V-κύκλου μπορεί να είναι όταν ο γράφος είναι αρκετά μικρός και δεν μπορεί να αναζητηθεί μια βέλτιστη γραμμική διάταξη. Σε όλους τους γράφους που εξετάστηκαν η διαδικασία βελτίωσης δεν είχε ουσία μετά από 5 επίπεδα αναδρομής, λόγω της καλής γενικής δομής της διάταξης. Οι πιο συμπυκνωμένοι γράφοι είναι τόσο μικροί, ώστε το ακριβές σημείο τερματισμού να έχει μηδαμινή επίδραση στον χρόνο εκτέλεσης.

Η χρονική και χωρική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου του V-κύκλου είναι $O(|E|)$.

Επαναλαμβάνοντας τον V-κύκλο. Ο V-κύκλος ωφελείται αν αρχικοποιηθεί με μια καλύτερη διάταξη. Έτσι, μια επαναληπτική εκτέλεσή του μπορεί να βελτιώσει τα αποτελέσματα. Ένα τέτοιο είδος επανάληψης είναι σύνηθες στους πολύ-κλιμακωτούς αλγορίθμους [118].

Η επανάληψη του V-κύκλου μπορεί μόνο να μειώσει το κόστος της διάταξης. Παρατηρήθηκε ότι συχνά, μετά από λίγες επαναλήψεις, η διαδικασία συγκλίνει και η βελτίωση γίνεται πολύ αργή, αν όχι μηδενική. Καλύτερα αποτελέσματα παράγονται αν πριν την εκτέλεση κάθε V-κύκλου εκτελείται η επανάληψη της διαμέσου για λίγες αναζητήσεις. Αυτό αναταράσσει τη διάταξη και ορίζει ένα νέο σημείο εκκίνησης για τον επόμενο V-κύκλο, ξεπερνώντας τυχόν πρόωρες συγκλίσεις. Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι, καθώς η διάταξη μπορεί να είναι ήδη αρκετά καλή, η ανικανότητα της επανάληψης της διαμέσου να βελτιστοποιεί τοπικές περιοχές της διάταξης αποκτά μεγαλύτερη σημασία. Δηλαδή, μπορεί η διαδικασία αυτή να οδηγήσει σε μια «χειρότερη» διάταξη μεγαλύτερου κόστους, κάτι που θυμίζει τις κινήσεις ανάβασης της προσομοιωμένης απόκτησης. Ωστόσο, η επανάληψη της διαμέσου είναι καλύτερη σαν μέθοδος, καθώς τείνει εξ' ορισμού στο ολικό βέλτιστο. Κατά

συνέπεια, διαπιστώθηκε ότι λίγες σαρώσεις της μεθόδου είναι αρκετά αποτελεσματικές, ακόμα και αν αυξάνουν προσωρινά το κόστος της διάταξης. Επιπλέον, η ομοιότητα με την ΠΑ μπορεί να επεκταθεί και στο γεγονός ότι η αποδοχή αναταράξεων που αυξάνουν το κόστος μπορεί να υπόκειται σε μια πιθανότητα η οποία μειώνεται καθώς η διαδικασία προχωρά. Οπότε, παρόμοια μπορεί να μειωθεί σταδιακά ο αριθμός των σαρώσεων της επανάληψης της διαμέσου, ελαττώνοντας την επίδραση των κινήσεων ανάβασης. Ακολουθεί η δομή του πολύ-κλιμακωτού αλγορίθμου γραμμικής διάταξης.

```

Function MS_MinLA (G(V, E), Ordering, Iterations)
% Parameters:
% G(V, E) – An s-graph
% Ordering – a linear arrangement of V
% Iterations – no. of V-cycle iterations
% Variables:
% k1[= 40] – no. of sweeps in first median iteration
% k2[= 10] – no. of sweeps in rest median iterations
Spectral_Sequencing(G, Ordering)
Median_Iteration(G, Ordering, k1)
for i = 1 to Iterations
    Median_Iteration(G, Ordering, k2)
    V-cycle(G, Ordering)
    Decrease(k2)
end for

```

Παρατηρήσεις και πειραματική μελέτη. Χρησιμοποιώντας τον 10-διάστατο υπερκύβο σαν γράφο εισόδου, αποδείχθηκε ότι έχει μεγαλύτερο όφελος η ενσωμάτωση της διαδικασίας της τοπικής βελτίωσης μέσα στο πολύ-κλιμακωτό σχήμα του V-κύκλου, τόσο σε θέμα ποιότητας όσο και στους χρόνους εκτελέσεων. Είναι γεγονός ότι η ενσωμάτωση αυτή προσθέτει πιο γενικά στοιχεία στη διαδικασία βελτίωσης, αφού κάθε τοπική κίνηση σε ένα συμπυκνωμένο γράφο εκφράζει μια πιο γενική κίνηση στον αρχικό γράφο. Οπότε, κατά μία έννοια, η λογική ενός πολύ-κλιμακωτού αλγορίθμου χωρίζεται σε δύο μέρη: το πρώτο σχετίζεται με τη βελτιστοποίηση τοπικά και βρίσκεται μέσα στη διαδικασία τοπικής βελτιστοποίησης, ενώ το δεύτερο έχει να κάνει με τις καθολικές ιδιότητες του προβλήματος, οι οποίες κωδικοποιούνται στην κατασκευή που αφορά τη συμπύκνωση του εξεταζόμενου γράφου.

Και αυτή η πειραματική μελέτη βασίστηκε στο σύνολο γράφων του Petit. Για κάθε γράφο, εκτελέστηκε ο παραπάνω πολύ-κλιμακωτός αλγόριθμος με τη μεταβλητή *Iterations* να παίρνει τις τιμές 1 και 10. Το αρχικό τυχαίοποιημένο στάδιο, που περιλαμβάνει την φασματική αλληλουχία και την επανάληψη της διαμέσου, εκτελέστηκε 10 φορές και

επιλέχθηκε το καλύτερο αποτέλεσμα. Τα τελικά αποτελέσματα για $Iterations = 10$ είναι πολύ παρόμοια με εκείνα της ΠΑ του Petit, όμως ο γραμμικός χρόνος εκτέλεσης του εξεταζόμενου αλγορίθμου είναι σημαντικά ταχύτερος. Τα κόστη μπορούν να μειωθούν περισσότερο με κάποιες διαφοροποιήσεις στις τιμές των παραμέτρων, αλλά ο ρυθμός βελτίωσης θα είναι αργός.

Μία ακόμη διαπίστωση που έγινε είναι η ικανότητα της επανάληψης της διαμέσου να βελτιώνει αρκετά τη λύση, καθώς εφαρμόζεται μετά τη φασματική αλληλουχία, ενώ ταυτόχρονα ο γρήγορος χρόνος εκτέλεσής της την καθιστά κατάλληλη ακόμα και για τους πιο μεγάλους γράφους. Όμως, για το γράφο *randomA3* η τεχνική αυτή αυξάνει το κόστος της διάταξης λόγω της ανικανότητάς της να λάβει έξυπνες αποφάσεις τοπικά. Συνεπώς, στις περιπτώσεις όπου η διάταξη είναι σχεδόν βέλτιστη και απαιτούνται μόνο τοπικές βελτιώσεις, η μέθοδος κρίνεται ακατάλληλη.

4.4 Γενετικός αλγόριθμος αναρρίχησης λόφου

Το 2002 αναπτύχθηκε από τον Poranen άλλος ένας αλγόριθμος με καλύτερα αποτελέσματα από τους μέχρι τότε γνωστούς [94], ο οποίος βασίζεται στο συνδυασμό ενός γενετικού και του αλγορίθμου αναρρίχησης λόφου. Ακολουθούν οι απαραίτητοι ορισμοί, η δομή του αλγορίθμου καθώς και τα αποτελέσματα των πειραμάτων.

Γενετικοί αλγόριθμοι. Αποτελούν μια κατηγορία πιθανοκρατικών αλγορίθμων, οι οποίοι αν και δεν εγγυώνται ότι θα βρουν τη βέλτιστη λύση, είναι ικανοί να επιστρέψουν μια αρκετά καλή λύση σε εύλογο χρονικό διάστημα. Ο βασικός τους μηχανισμός είναι εμπνευσμένος από τη Δαρβινική θεωρία της εξέλιξης της φύσης. Η γενική αρχή είναι η εύρεση ενός πληθυσμού πιθανών λύσεων και έπειτα ο συνδυασμός τους για τη δημιουργία μιας νέας καλύτερης γενιάς. Οι νέες λύσεις αποκτώνται μέσω των πράξεων της διασταύρωσης και της μετάλλαξης. Η μετάλλαξη είναι μια μοναδιαία πράξη που αυξάνει την ποικιλία του πληθυσμού κάνοντας αλλαγές κατά σημείο στην αναπαράσταση των λύσεων. Η διασταύρωση είναι μια πιο ισχυρή πράξη από τη μετάλλαξη. Συνδυάζει τα χαρακτηριστικά των δύο γονέων για το σχηματισμό δύο νέων λύσεων ανταλλάσσοντας τα αντίστοιχα τμήματα από τις αναπαραστάσεις των γονέων. Έτσι, ο πληθυσμός υπόκειται σε μια εξελικτική διαδικασία η οποία μιμείται τη φυσική βιολογική εξέλιξη.

Οι κύριοι παράμετροι για ένα γενετικό αλγόριθμο είναι το μέγεθος του πληθυσμού και οι ρυθμοί διασταύρωσης και μετάλλαξης. Μεγαλύτερο μέγεθος πληθυσμού σημαίνει καλύτερες

προσεγγίσεις, αλλά μεγαλύτερο χρόνο εκτέλεσης. Όσον αφορά το ρυθμό μετάλλαξης, ένας πολύ υψηλός ρυθμός θα οδηγήσει τον αλγόριθμο στο να περιφέρεται άσκοπα στο χώρο αναζήτησης. Συνήθως ορίζεται στο εύρος 0 – 20%. Ο ρυθμός διασταύρωσης αντιθέτως είναι πολύ υψηλός με τιμές κοντά στο 100% αφού η διασταύρωση αποτελεί τη βασική λειτουργία των γενετικών αλγορίθμων. Ακολουθεί ένα απλοποιημένο παράδειγμα της δομής τους:

Algorithm. Genetic algorithm

```
begin
  t = 0;
  create the initial population P(0);
  evaluate the initial population;
  while-not Termination-condition do
    t = t + 1;
    select individuals to be reproduced;
    apply genetic operations to create new population P(t);
    evaluate(P(t));
  od
end;
```

Γενετικός αλγόριθμος αναρρίχησης λόφου. Σε πολλές περιπτώσεις, ο χρόνος εκτέλεσης και η ποιότητα της λύσης ενός γενετικού αλγορίθμου μπορούν να βελτιωθούν χρησιμοποιώντας άλλες ευρετικές μαζί με τις πράξεις της διασταύρωσης και της μετάλλαξης. Συνήθως, οι λύσεις που προκύπτουν δεν είναι ήδη βέλτιστες τοπικά, οπότε είναι αναμενόμενη η εφαρμογή αλγορίθμων τοπικής αναζήτησης σε κάθε άτομο του τρέχοντος πληθυσμού για την εύρεση καλύτερων λύσεων. Σε έναν γενετικό αλγόριθμο αναρρίχησης λόφου η βέλτιστη λύση τοπικά βρίσκεται χρησιμοποιώντας την αναρρίχηση λόφου σε κάθε άτομο κάθε γενιάς. Καθώς αποτελεί ένα συνδυασμό δύο αλγορίθμων, τα προβλήματα της επιλογής των παραμέτρων και του ορισμού των πράξεων συμπίπτουν με τα αντίστοιχα προβλήματα για τον κάθε ένα ξεχωριστά. Στα προκαταρκτικά του τεστ ο Poranen διαπίστωσε την ανεπάρκεια του παραδοσιακού γενετικού αλγορίθμου. Ο χρόνος εκτέλεσης ήταν μεγαλύτερος απ' ό,τι χρησιμοποιώντας τοπική βελτιστοποίηση μεταξύ των γενιών, ο χρόνος μέχρι την εύρεση καλών λύσεων ήταν πιο αργός και τα αποτελέσματα που προέκυψαν ήταν χειρότερα. Ακολουθεί η δομή του γενετικού αλγορίθμου αναρρίχησης λόφου:

Algorithm. Genetic hillclimbing algorithm

```
begin
  t = 0;
  create the initial population P(0);
  evaluate the initial population;
  while-not Termination-condition do
    t = t + 1;
    select individuals to be reproduced;
    apply genetic operations, mutation and crossover, to population P(t);
    apply hillclimbing to each member of P(t) to obtain locally optimal solutions;
    evaluate(P(t));
  od
end;
```

Πειραματική μελέτη. Για την πειραματική εξέταση του αλγορίθμου χρησιμοποιήθηκε κατά τα γνωστά το σύνολο γράφων του Petit μαζί με 4 ακόμη διμερείς γράφους. Για τους τελευταίους δεν υπήρχαν αποτελέσματα στη βιβλιογραφία οπότε εκτός από το γενετικό αλγόριθμο αναρρίχησης λόφου εκτελέστηκε και μια προσομοιωμένη ανόπτηση με συγκεκριμένες παραμέτρους ώστε να υπάρχει ένα μέτρο σύγκρισης. Αυτή η ΠΑ αναπτύχθηκε καθώς οι χρόνοι εκτέλεσης της ΠΑ του Petit εξαρτώνται από την πλατφόρμα που χρησιμοποιήθηκε οπότε δεν θα ήταν σωστό να συγκριθεί με το νέο αλγόριθμο. Για τη νέα ΠΑ και το γενετικό αλγόριθμο επιλέχθηκαν κατάλληλες παράμετροι, ώστε οι χρόνοι εκτέλεσης να είναι παρόμοιοι και υπολογίστηκαν οι καλύτερες και οι μέσες τιμές του κόστους για κάθε γράφο. Για πιο αναλυτικές πληροφορίες σχετικά με την επιλογή των παραμέτρων και το εύρος τιμών τους ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [94].

Παρατηρήθηκε ότι οι γενετικοί αλγόριθμοι έχουν τη δυνατότητα να βελτιώσουν τα αποτελέσματα από ήδη γνωστές ευρετικές για το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης. Υπήρξαν κατηγορίες γράφων για τους οποίους με την ΠΑ προέκυψε μικρότερο κόστος, αλλά συνολικά οι μέσες τιμές που βρέθηκαν με χρήση του γενετικού αλγορίθμου αναρρίχησης λόφου ήταν καλύτερες απ' ό,τι της ΠΑ. Καθώς ο αλγόριθμος για τις περισσότερες κατηγορίες γράφων βρίσκει αρκετά καλές λύσεις, ο Poranen τον συνιστά για το MinLA, αλλά επισημαίνει ότι ίσως είναι πιο ωφέλιμη η εφαρμογή της ΠΑ, αν είναι γνωστοί οι γράφοι που θα μελετηθούν και ανήκουν στις κατηγορίες για τις οποίες υπολογίστηκε μικρότερο κόστος.

Παραπομπή. Ένα συνδυασμό γενετικών αλγορίθμων με ένα σχήμα δυναμικού προγραμματισμού παρουσίασαν οι Yagiura και Ibaraki στο [122]. Τα υπολογιστικά

αποτελέσματα απέδειξαν ενθαρρυντικά στοιχεία προς αυτή την κατεύθυνση, γι' αυτό παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο αντίστοιχο άρθρο.

4.5 Σχήμα αλγεβρικού πολυπλέγματος

Το 2006 παρουσιάστηκε από τους Saftro *et. al.* το σχήμα αλγεβρικού πολυπλέγματος (algebraic multi-grid scheme ή AMG), το οποίο αποτελεί μια βελτιωμένη εκδοχή του πολύ-κλιμακωτού αλγορίθμου της ενότητας 4.3 [109]. Ακολουθούν συνοπτικά η λογική πάνω στην οποία βασίστηκε ο αλγόριθμος και τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την πειραματική διαδικασία.

Αλγόριθμος. Η βασική διαφορά σε σύγκριση με τον πολύ-κλιμακωτό αλγόριθμο εντοπίζεται στη μέθοδο της συμπίκνωσης. Εδώ ακολουθείται μια διαδικασία βεβαρημένης συνάθροισης, ενώ η συμπίκνωση στον αλγόριθμο των Koren και Harel είναι περισσότερο μια διαδικασία αυστηρής συνάθροισης. Κατά την αυστηρή συνάθροιση, η οποία ονομάζεται και σύμπτυξη των ακμών ή ταίριασμα των κορυφών, οι κόμβοι ενός γράφου σχηματίζουν μικρά διακριτά υποσύνολα που λέγονται συναθροίσεις. Αντιθέτως, στη βεβαρημένη συνάθροιση κάθε κόμβος χωρίζεται σε τμήματα και διαφορετικά τμήματα ανήκουν σε διαφορετικές συναθροίσεις. Και στις 2 περιπτώσεις οι συναθροίσεις αυτές θα σχηματίσουν τις κορυφές στο συμπτυκνωμένο επίπεδο. Οι υλοποιήσεις με το σχήμα του αλγεβρικού πολυπλέγματος έχουν αναδείξει τη χρησιμότητα της βεβαρημένης συνάθροισης έναντι της αυστηρής, καθώς επιτρέπει την έκφραση της πιθανότητας οι κορυφές να ανήκουν στο ίδιο σύνολο. Αυτές όλες οι πιθανότητες συσσωρεύονται στα πιο συμπτυκνωμένα επίπεδα της διαδικασίας, ενισχύοντας αυτόματα η μία την άλλη, όπου αυτό είναι απαραίτητο. Το γεγονός αυτό προσδίδει μεγαλύτερη ελευθερία στην επίλυση του προβλήματος στις μικρότερες διαστάσεις, ενώ αποφεύγεται και η λήψη δύσκολων αποφάσεων τοπικά, όπως οι συμπτώξεις των ακμών, πριν τη συσσώρευση της σχετικής καθολικής πληροφορίας, τη στιγμή που μια αυστηρή συνάθροιση μπορεί να οδηγήσει σε ασυνέπειες μεταξύ των γενικών και τοπικών εικόνων.

Για την αποφυγή λανθασμένων τοπικών ελαχίστων χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της προσομοιωμένης απόπτωσης. Εισάγοντας μια παράμετρο που λειτουργεί σαν θερμοκρασία, κινήσεις οι οποίες αυξάνουν το κόστος που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί γίνονται αποδεκτές με κάποια μη αμελητέα πιθανότητα. Αυτοί οι αλγόριθμοι είναι συνήθως αρκετά ανεπαρκείς, καθώς απαιτούν εκθετικά αργή μείωση της θερμοκρασίας για να προσεγγίσουν το πραγματικό ελάχιστο. Στο πολυεπίπεδο πλαίσιο ωστόσο, η ΠΑ αναζητά τοπικές αλλαγές με ταχεία ψύξη σε

κάθε επίπεδο, γεγονός που εγγυάται τη διατήρηση των χαρακτηριστικών, τα οποία κληρονομούνται από τις μικρότερες διαστάσεις, στις λύσεις για τις μεγαλύτερες κλίμακες.

Η υλοποίηση του συγκεκριμένου αλγορίθμου έχει πολλές ομοιότητες με τον πολύ-κλιμακωτό αλγόριθμο που έχουμε ήδη αναφέρει, εκτός από τα σημεία που επισημάνθηκαν. Για περισσότερες λεπτομέρειες και εκτενέστερη ανάλυση των μεθόδων και τεχνικών ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην αντίστοιχη δημοσίευση [109].

Πειραματικά αποτελέσματα. Για την πειραματική μελέτη χρησιμοποιήθηκαν 3 τύποι V-κύκλου: ο «γρήγορος», ο «εκτεταμένος» και ο «σούπερ». Ο πρώτος δεν χρησιμοποιεί την ΠΑ, σε αντίθεση με τους άλλους 2, και στοχεύει σε ταχύτερες εκτελέσεις διακινδυνεύοντας την ποιότητα του κόστους διάταξης. Ο «εκτεταμένος» εκτελείται πιο αργά, όμως φτάνει σε μικρότερα κόστη από τα ήδη γνωστά, ενώ ο «σούπερ» πετυχαίνει ακόμα καλύτερα αποτελέσματα, αλλά στο διπλάσιο, κατά μέσο όρο, χρόνο από τον «εκτεταμένο». Αρχικά, τα πειράματα βασίστηκαν στο σύνολο γράφων του Petit. Συγκρίθηκαν οι 3 V-κύκλοι με το καλύτερο κόστος του Petit για κάθε γράφο, αλλά και με κάποιες από τις προχωρημένες ευρετικές. Ο «γρήγορος» V-κύκλος είναι περισσότερο χρήσιμος σε τεράστιους γράφους, (θα αναφερθούμε παρακάτω) όπου είναι απαραίτητη η μείωση του χρόνου εκτέλεσης. Δεδομένου του σχετικά μικρού μεγέθους των γράφων του Petit, ο «εκτεταμένος» και ο «σούπερ» V-κύκλος εκτελέστηκαν σε ικανοποιητικούς χρόνους και ο αλγόριθμος έδωσε σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις καλύτερα αποτελέσματα από τα μέχρι τότε γνωστά με εξαίρεση τους πρώτους 4 τυχαίους γράφους. Όπου δεν υπήρχε βελτίωση με χρήση του «εκτεταμένου» έδινε τη λύση ο «σούπερ» πετυχαίνοντας μικρότερο κόστος. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι η τυπική απόκλιση που υπολογίστηκε μεταξύ των δοκιμών ήταν μικρότερη του 1% και σε πολλές περιπτώσεις ακόμα μικρότερη αναδεικνύοντας έτσι τη συνέπεια στην ποιότητα των αποτελεσμάτων.

Οι πρώτοι 4 γράφοι που παραλείψαμε προηγουμένως ανήκουν στο σύνολο των ομοιόμορφων τυχαίων γράφων, ενώ ο τελευταίος τυχαίος γράφος είναι ένα παράδειγμα γεωμετρικού τυχαίου γράφου. Παρατηρήθηκε ότι για την επιτυχή λειτουργία του αλγορίθμου είναι απαραίτητο ο εξεταζόμενος γράφος να έχει κάποια γεωμετρική δομή, όπως ο τελευταίος. Βέβαια, ο Petit είχε ήδη διατυπώσει ότι στην πραγματικότητα δεν αξίζει να εκτιμηθεί η απόδοση των ευρετικών αλγορίθμων πάνω σε ομοιόμορφα τυχαίους γράφους, γι' αυτό και εξαιρέθηκαν προηγουμένως [28] [30].

Για την περαιτέρω εκτίμηση της απόδοσης της ευρετικής εξετάστηκαν γράφοι στους οποίους η λύση για το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης είναι γνωστή. Ειδικότερα, τρεις τέτοιοι υπάρχουν ήδη στο σύνολο του Petit, ο υπερκύβος *hc10*, το πλέγμα *mesh33x33* και το δυαδικό δέντρο *bintree10* [29], ενώ επιλέχθηκαν ακόμα 4 μεγαλύτερα πλέγματα *mesh i x i*, $i = 100, 200, 500, 1000$ και 3 γράφοι κατάλληλων διαστημάτων, που επίσης το ολικό τους ελάχιστο είναι γνωστό. Διαπιστώθηκε ότι για τα πλέγματα, αν και δε βρέθηκαν ακριβώς οι βέλτιστες τιμές, οι λύσεις που έδωσε ο αλγόριθμος με τη βοήθεια του «εκτεταμένου» V-κύκλου είναι πολύ κοντά σε αυτές, ενώ ταυτόχρονα η αύξηση του μεγέθους του πλέγματος δεν χειροτέρεψε την απόδοση από άποψη κόστους. Για τα γραφήματα κατάλληλων διαστημάτων υπολογίστηκε με ακρίβεια το γνωστό ολικό βέλτιστο.

Όνομα γράφου	$ V $	$ E $	Βαθμός
tooth	78136	452591	3 / 39
ocean	143437	409593	1 / 6
mrngA	257000	505048	2 / 4
rotor	99617	662431	5 / 125
598	110971	741934	5 / 26
144	144649	1074393	4 / 26
m14b	214765	1679018	4 / 40
mrngB	1017253	2015714	2 / 4
auto	448695	3314611	4 / 37

Πίνακας 4.1 Το σύνολο γράφων των Koren και Harel. Όνομα, πλήθος κορυφών και ακμών και βαθμός (ελάχιστος / μέγιστος).

Αφού ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι ουσιαστικά γραμμικός, ακόμα και χωρίς βελτιστοποιήσεις, αναζητήθηκαν γράφοι μεγαλύτερου μεγέθους για την εκτίμηση της απόδοσης από άποψη χρόνου. Βρέθηκε μόνο ένα άρθρο με πειράματα σε μεγάλους γράφους, αυτό των Koren και Harel [75]. Συγκριτικά με εκείνα τα αποτελέσματα παρατηρήθηκε ότι ένας «γρήγορος» V-κύκλος εκτελείται κατά μέσο όρο στο 1/5 του χρόνου που απαιτούν 5 V-κύκλοι του πολύ-κλιμακωτού αλγορίθμου και το κόστος μειώνεται κατά 8.3%. Επίσης, βρέθηκε ότι η εκτέλεση 3 «εκτεταμένων» V-κύκλων είναι 3,5 φορές πιο αργή, αλλά μειώνει το κόστος κατά 12%. Ο «σούπερ» V-κύκλος κρίθηκε ακατάλληλος για τόσο μεγάλους γράφους, αφού αυξάνει

πολύ το χρόνο εκτέλεσης, χωρίς σημαντική βελτίωση των αποτελεσμάτων. Παραπάνω αναφέρονται οι γράφοι που μελετήθηκαν.

Συνοψίζοντας, η πειραματική μελέτη απέδειξε ότι το σχήμα αλγεβρικού πολυπλέγματος μπορεί να δώσει αποτελέσματα υψηλής ποιότητας σε γραμμικό χρόνο για το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης, οπότε θεωρείται ένας από τους καλύτερους αλγορίθμους προσέγγισης μέχρι και σήμερα.

4.6 Λοιπές ευρετικές

Κατά το πέρασμα των ετών έχουν αναπτυχθεί κι άλλοι σημαντικοί ευρετικοί αλγόριθμοι, εκ των οποίων οι περισσότερες υλοποιήσεις δεν ήταν διαθέσιμες την περίοδο συγγραφής της παρούσας εργασίας. Γι' αυτό αναφέρονται συγκεντρωτικά σε αυτή την ενότητα, όπου επισημαίνονται συνοπτικά τα απαραίτητα στοιχεία για κάθε έναν, καθώς και χρήσιμες πειραματικές παρατηρήσεις. Ιδιαίτερα οι δύο τελευταίοι θεωρούνται μέχρι και σήμερα από τους καλύτερους προσεγγιστικούς αλγορίθμους για το MinLA. Για πιο εκτενείς πληροφορίες ο αναγνώστης προτρέπεται να μελετήσει τα αντίστοιχα άρθρα που αναφέρονται σε κάθε υποενότητα.

4.6.1 Βελτιωμένη ελαχιστοποίηση της εμπρόσθιας αύξησης

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος (Improved Frontal Increase Minimization ή IFIM) αναπτύχθηκε το 1999 από τον McAllister [79]. Η ευρετική ακολουθεί την ίδια γενική στρατηγική αρίθμησης, όπως άλλοι ήδη υπάρχοντες αλγόριθμοι για προβλήματα μείωσης του εύρους ζώνης ή του προφίλ, τα οποία σχετίζονται σε μεγάλο βαθμό με το MinLA, αλλά είναι προσαρμοσμένη στις μοναδικές απαιτήσεις που έχει το πρόβλημά μας. Εκείνη την εποχή κατάφερε να βελτιώνει το κόστος για μερικές περιπτώσεις γράφων, όμως το πραγματικό πλεονέκτημά της, που χρησιμοποιήθηκε και σε μεταγενέστερους αλγορίθμους, είναι ο γρήγορος χρόνος εκτέλεσής της, καθώς πρόκειται για μια ευρετική με γραμμική πολυπλοκότητα $O(|E|)$.

4.6.2 Μιμητικός αλγόριθμος

Το 2006 παρουσιάστηκε ένας νέος μιμητικός αλγόριθμος ειδικά σχεδιασμένος για τον υπολογισμό σχεδόν βέλτιστων λύσεων για το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης [101][101]. Οι μιμητικοί αλγόριθμοι ανήκουν στην οικογένεια των εξελικτικών αλγορίθμων και αποτελούν μια επέκταση των γενετικών, σαν αυτόν που είδαμε στην ενότητα 4.4,

υιοθετώντας μια τεχνική τοπικής αναζήτησης για την αποφυγή πρώιμων συγκλίσεων. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος ενσωματώνει έναν εξειδικευμένο τελεστή διασταύρωσης, την ταχύτατη ευρετική του McAllister, που αναφέρεται στην προηγούμενη υποενότητα, για τη δημιουργία του αρχικού πληθυσμού και έναν τελεστή εύρεσης τοπικών βέλτιστων στο χώρο αναζήτησης βασισμένο σε έναν κατάλληλα ρυθμισμένο αλγόριθμο προσομοιωμένης απόπτησης.

Η πειραματική μελέτη αρχικά απέδειξε την υπεροχή έναντι του γενετικού αλγορίθμου του Fogan. Συγκριτικά με τις υπόλοιπες τεχνικές, ο αλγόριθμος έδωσε πολύ ανταγωνιστικά αποτελέσματα από άποψη κόστους, ωστόσο, λόγω της φύσης των μιμητικών αλγορίθμων, υστέρησε σημαντικά στο χρόνο εκτέλεσης.

Αργότερα το ίδιο έτος, δημοσιεύτηκε ένα άρθρο, στο οποίο ενσωματώνεται στον μιμητικό αλγόριθμο μια ανανεωμένη συνάρτηση εκτίμησης, η οποία παρέχει αποτελεσματική καθοδήγηση στη διαδικασία αναζήτησης [100]. Η απόδοση της βελτιωμένης ευρετικής εκτιμήθηκε μέσω εκτεταμένης πειραματικής ανάλυσης πάνω στους γράφους του Petit. Συγκρίθηκε ξανά με τους αλγορίθμους των ενοτήτων 4.1-4.5 και κατάφερε να πετύχει καλύτερες τιμές κόστους για 8 από τους 21 γράφους, ενώ για άλλους 8 το αποτέλεσμα ήταν ίδιο με το μέχρι τότε καλύτερο. Παρ' ότι αρκετά αποδοτική όσον αφορά την ποιότητα των λύσεων, οι χρόνοι εκτέλεσης παρέμειναν αρκετά υψηλοί σε σύγκριση με αλγορίθμους ειδικά σχεδιασμένους για το MinLa, όπως αυτοί στις ενότητες 4.2, 4.3 και 4.5.

Εκτός από αυτά, αξίζει να παραπέμψουμε τον αναγνώστη και στο [99], όπου εισάγεται ένας νέος τελεστής ανασυνδυασμού (recombination operator), που ονομάζεται διασταύρωση τροχιάς (trajectory crossover) και συγκρίνονται οι επιδόσεις του με άλλους γνωστούς τελεστές διασταύρωσης και τους πιο αποδοτικούς αλγορίθμους του MinLA.

4.6.3 Φ-προσομοιωμένη απόπτηση δύο σταδίων

Η προσομοιωμένη απόπτηση (ΠΑ) είναι αποδεδειγμένα ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την προσέγγιση βέλτιστων λύσεων σε πολλά NP-δύσκολα προβλήματα βελτιστοποίησης, ωστόσο έχει ένα σημαντικό μειονέκτημα, τους πολύ μεγάλους χρόνους υπολογισμών. Η επιτάχυνσή της, λοιπόν, αποτελεί ένα ενεργό πεδίο ερευνών από την εισαγωγή της το 1983. Οι περισσότερες έρευνες έχουν επικεντρωθεί στην ανάπτυξη ταχύτερων συστημάτων ψύξης [2] [63] [76], εναλλακτικών στρατηγικών παραγωγής και αποδοχής κινήσεων [49], συναρτήσεων

εκτίμησης κόστους με θόρυβο [50] καθώς και βέλτιστων προγραμμάτων θερμοκρασίας πεπερασμένου χρόνου [17] [54] [116].

Μία διαφορετική προσέγγιση από αυτές, που αποτελεί και τη βάση της εν λόγω ευρετικής, είναι η προσομοιωμένη ανόπτηση σε δύο στάδια [51] [67] [103] [121]. Σε αυτόν τον αλγόριθμο μία ταχύτερη ευρετική αντικαθιστά τις λειτουργίες της ΠΑ στις πιο υψηλές θερμοκρασίες. Έπειτα, εφαρμόζεται μια διαδικασία βελτίωσης βασισμένη σε μια συνηθισμένη ΠΑ, η οποία όμως αρχικοποιείται σε μια θερμοκρασία χαμηλότερη της κανονικής. Οπότε, η βασική μελέτη για την ανάπτυξη ενός τέτοιου συστήματος αφορά την τιμή της θερμοκρασίας κατά την εκκίνηση της ΠΑ.

Το 2008 δημοσιεύτηκε μια νέα υλοποίηση της ΠΑ δύο σταδίων για την επίλυση του MinLA [102]. Σε αυτή την ευρετική βελτιώνονται 4 σημαντικά σημεία με μεγάλη επίδραση στην απόδοσή της που αφορούν: την ευρετική για την παραγωγή καλών αρχικών λύσεων, τις συναρτήσεις εκτίμησης και γειτονιάς καθώς και το πρόγραμμα ψύξης. Ειδικότερα, για την αρχική λύση χρησιμοποιήθηκε η ευρετική του McAllister λόγω της υψηλής ποιότητας του αποτελέσματος σε συνδυασμό με το μικρό χρόνο υπολογισμού [79]. Ως συνάρτηση εκτίμησης χρησιμοποιήθηκε η ανανεωμένη συνάρτηση εκτίμησης Φ που αναφέρθηκε και στο μιμητικό αλγόριθμο [100]. Ως συνάρτηση γειτονιάς επιλέχθηκε ο συνδυασμός δύο γειτονιών με συμπληρωματικά χαρακτηριστικά η μία ως προς την άλλη, οι οποίες σχετίζονται με τη στατιστική διάμεσο των τιμών των κόμβων σε κάποια διάταξη του γράφου, και η εφαρμογή τους με πιθανότητα p και $1 - p$ αντίστοιχα, $0 < p < 1$. Για τον καθορισμό της αρχικής θερμοκρασίας επιλέχθηκε μία μέθοδος των Varanelli και Cohoon [121], ενώ προτιμήθηκε το στατιστικό πρόγραμμα ψύξης έναντι άλλων [2], αφού έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα αποδοτικό σε αρκετά συνδυαστικά προβλήματα βελτιστοποίησης [1] [95].

Η υπεροχή των ανωτέρω τεχνικών έναντι άλλων πιθανών επιλογών επιβεβαιώθηκε με την εκτέλεση εκτενών πειραμάτων. Στα πειράματα αυτά έγινε σαφές ότι η κατάλληλη επιλογή στοιχείων όπως οι συναρτήσεις γειτονιάς και εκτίμησης ή το πρόγραμμα ψύξης είναι αναγκαία για την επίτευξη υψηλής απόδοσης σε έναν αλγόριθμο προσομοιωμένης ανόπτησης. Πιο συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος της υποενότητας συγκρίθηκε με τις καλύτερες μέχρι τότε ευρετικές τόσο στους γράφους του Petit όσο και στους πιο μεγάλους γράφους που παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι πετυχαίνει μικρότερα κόστη σε 10 από τους 21 γράφους του Petit, ενώ σε ακόμα 6 βρίσκει ίδιο κόστος με το καλύτερο γνωστό

μέχρι τότε. Ακόμα και στις περιπτώσεις όπου δεν βελτίωσε τις καλύτερες λύσεις, η απόκλιση από αυτές είναι πολύ μικρή. Στους μεγάλους γράφους βελτίωσε το κόστος σε 7 από τις 9 περιπτώσεις. Όσον αφορά τους χρόνους εκτέλεσης που απαιτήθηκαν για την εξαγωγή των εξαιρετικών αυτών αποτελεσμάτων, στους γράφους του Petit και συγκριτικά με τον πολύ-κλιμακωτό αλγόριθμο και το σχήμα αλγεβρικού πολυπλέγματος χρειάζεται κατά μέσο όρο τον τετραπλάσιο χρόνο για να μειώσει το καλύτερο γνωστό κόστος. Βέβαια, λόγω της απόδοσης, από άποψη κόστους είναι απόλυτα δικαιολογημένος ο επιπλέον χρόνος που απαιτεί, οπότε και θεωρείται ίσως ο πιο αποδοτικός αλγόριθμος για την προσέγγιση του MinLA.

4.6.4 GRASP και Path Relinking

Το 2008 δημοσιεύτηκε από τους Pantrigo *et. al.* ένας αλγόριθμος που βασίζεται σε δύο νέες μεθοδολογίες [90]. Η πρώτη μεταφράζεται ως διαδικασία άπληστης, τυχαιοποιημένης, προσαρμοστικής αναζήτησης (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure ή GRASP) και αποτελεί μια επαναληπτική διαδικασία κατασκευής και τοπικής αναζήτησης. Η δεύτερη ονομάζεται επανασύνδεση μονοπατιού (Path Relinking) και στην ουσία αποτελείται από δύο φάσεις: πρώτα υπολογίζεται ένα σύνολο ελίτ λύσεων μέσω της μεθόδου GRASP και έπειτα για κάθε ζευγάρι (f, g) του συνόλου θεωρούμε ένα μονοπάτι από την f στη g . Η διαδικασία της επανασύνδεσης έγκειται στην ανάθεση τιμών στις κορυφές, μία προς μία, ανάλογα με τις τιμές τους στις λύσεις f και g .

Η πειραματική μελέτη βασίστηκε στο σύνολο γράφων του Petit και σύγκρινε τη νέα μέθοδο με τη Φ-προσομοιωμένη ανόπτηση δύο σταδίων των Rodriguez-Tello *et. al.* (βλ. υποενότητα 4.6.3) και άλλες μεθόδους. Τα αποτελέσματα ανέδειξαν την αποδοτικότητά της, καθώς για πολλούς γράφους υπολογίζει το μικρότερο κόστος από όλες σε μεσαίους χρόνους εκτέλεσης. Βέβαια, χωρίς χρονικά όρια, τα καλύτερα αποτελέσματα, κατά μέσο όρο, προκύπτουν από τη Φ-προσομοιωμένη ανόπτηση δύο σταδίων.

Κεφάλαιο 5

Ακριβείς αλγόριθμοι και εφαρμογή τεχνικών σε πολυδιάστατα πεδία

Στο ακόλουθο κεφάλαιο καταγράφεται συνοπτικά η λειτουργία κάποιων από τους πιο πρόσφατους αλγορίθμους που λύνουν σε πολυωνυμικό χρόνο το MinLA για συγκεκριμένες κατηγορίες γράφων. Έπειτα διατυπώνονται βιβλιογραφικά ευρήματα σχετικά με το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης σε πολυδιάστατα πεδία και το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την αξιολόγηση της εφαρμογής πιθανών τεχνικών προσέγγισης του προβλήματος στις μεγαλύτερες αυτές διαστάσεις.

5.1 Ακριβείς αλγόριθμοι

Διάφοροι αλγόριθμοι έχουν αναπτυχθεί για την ακριβή λύση του MinLA σε γράφους με συγκεκριμένες ιδιότητες ή που ανήκουν σε συγκεκριμένες κλάσεις. Στη συνέχεια της ενότητας ακολουθούν δύο από τους πιο πρόσφατα αναπτυγμένους που αφορούν τα χορδικά γραφήματα και μια ειδική κατηγορία γράφων Halin. Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στο θέμα ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία του Πίνακα 2.1, ενώ άλλες χρήσιμες μελέτες μπορεί κανείς να αναζητήσει στα: [62] για αναδρομικά κατασκευασμένους γράφους, [33] για series-parallel γράφους, [81] για μη πλήρεις υπερκύβους και [64] για ένα σύνολο γράφων με αμφιμονοσήμαντη συνεκτικότητα που περιλαμβάνει υπερκύβους, πολλές από τις παραλλαγές τους καθώς και υποοικογένειες αυτών.

5.1.1 Χορδικά γραφήματα

Το κίνητρο επίλυσης του MinLA για αυτή την κατηγορία γράφων προέκυψε από τη μελέτη πάνω στην αναγνώριση της τοπικότητας των δικτύων επικάλυψης ομότιμων κόμβων (P2P overlay networks), τα οποία βασίζονται στο χορδικό πρωτόκολλο (Chord based) [115]. Ο χώρος διεύθυνσης του συγκεκριμένου πρωτοκόλλου προφανώς αναπαριστά ένα χορδικό γράφημα. Το 2007 οι Rostami και Habibi έδειξαν ότι για την καλύτερη επίδοση ενός δικτύου επικάλυψης ομότιμων κόμβων πρέπει να ελαχιστοποιηθεί μια αντικειμενική συνάρτηση με κοινά χαρακτηριστικά με εκείνη του MinLa [105], κάτι που αποδείχτηκε ότι είναι NP-δύσκολο για οποιοδήποτε γράφο, δηλαδή οποιαδήποτε δομή του δικτύου. Με τον όρο καλύτερη επίδοση εννοούμε την ελάττωση της πλεονάζουσας κίνησης στο υποκείμενο φυσικό δίκτυο καθώς και

τη μείωση της καθυστέρησης μετάδοσης των μηνυμάτων στο δίκτυο επικάλυψης. Ωστόσο, με τις ακόλουθες απλοποιήσεις και χρήση του χορδικού πρωτόκολλου, το παραπάνω πρόβλημα ουσιαστικά μετατρέπεται στο πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης των χορδικών γραφημάτων:

- Το φυσικό δίκτυο είναι ένα κρίσιμο μονοπάτι.
- Το χορδικό γράφημα είναι πλήρες και στατικό.
- Το χορδικό γράφημα είναι μη κατευθυνόμενο.
- Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από τους κόμβους του δικτύου επικάλυψης σε εκείνους του φυσικού δικτύου και οι μεν συνδέονται με τους αντίστοιχους δε μέσω μιας σύνδεσης υψηλού εύρους ζώνης και μικρής καθυστέρησης.

Ένα χρόνο αργότερα, το 2008, οι ίδιοι ερευνητές παρουσίασαν έναν $O(n \log n)$ αλγόριθμο για τη βέλτιστη διάταξη των χορδικών γραφημάτων [106], ενώ το 2013 σχεδιάστηκε ένας αλγόριθμος με χρονική πολυπλοκότητα $O(n)$ [97]. Παρακάτω ακολουθεί η δομή του καθενός με τις κατάλληλες επεξηγήσεις:

$O(n \log n)$ Algorithm. *Label (array vertices, int m)* [106]

```

if vertices.size() is not a power of 2 then
    return error;
end if
if vertices.size() == 1 then
    vertices[0].φ = m;
    return 0
else
    s = vertices.size();
    Array v1 = new Array[s/2];
    Array v2 = new Array[s/2];
    j = 0;
    for i = 0 to vertices.size(), i += 2 do
        v1[j] = vertices[i];
        v2[j] = vertices[i + 1];
        j++;
    end for
    r1 = Label (v1, m);
    r2 = Label (v2, m +  $\frac{s}{2}$ );
    if s == 2 then
        return 1;
    else
        return r1 + r2 + s × s/2
    end if
end if

```

Ο παραπάνω αλγόριθμος αναθέτει τιμές στις κορυφές του γράφου εισόδου αναδρομικά. Η πρώτη παράμετρος είναι ένας ταξινομημένος πίνακας δεικτών, μεγέθους $n = 2^t$, οι οποίοι αντιστοιχούν στις κορυφές ενός χορδικού γραφήματος CH_t , δηλαδή το i -οστό κελί του πίνακα εισόδου δείχνει στην κορυφή v_i . Η δεύτερη παράμετρος είναι ένας θετικός ακέραιος που καθορίζει τον αριθμό από όπου θα ξεκινήσει η αρίθμηση των κορυφών, δηλαδή από m έως $m + vertices.size()$. Συνεπώς, εκτελώντας τον αλγόριθμο με παραμέτρους την ταξινομημένη λίστα με τις κορυφές ενός χορδικού γραφήματος και $m = 1$, προκύπτει μια βέλτιστη διάταξη του γράφου σε χρόνο $O(n \log n)$.

$O(n)$ Algorithm. *assignLabels (array vertices)* [97]

```

if vertices.size() is not a power of 2 then
    return error;
end if
vertices[0]. $\phi$  = 0;
 $m = \log(\text{vertices.size}())$ 
for  $i = 1$  to vertices.size() - 1 do
    vertices[ $i$ ]. $\phi$  = ReverseAddOne(vertices[ $i - 1$ ]. $\phi$ ,  $m$ )
end for

```

Algorithm. *ReverseAddOne (int k, int m)*

```

res = k
 $i = m$ 
while  $i$ 'th bit of  $k$  is 1 do
    set  $i$ 'th bit of  $res$  to 0
     $i = i - 1$ 
end while
set  $i$ 'th bit of  $res$  to 1

```

Στο [97] αποδείχθηκε ότι σε μια βέλτιστη διάταξη ενός χορδικού γραφήματος, η τιμή που ανατίθεται στην κορυφή k ισούται με τον αντίστροφο της δυαδικής αναπαράστασης n -ψηφίων της k . Πάνω σε αυτή την ιδέα βασίστηκε ο παραπάνω αλγόριθμος, ο οποίος ουσιαστικά υπολογίζει την ετικέτα της κορυφής $i + 1$ προσθέτοντας 1 στην αντίστροφη ετικέτα της κορυφής i .

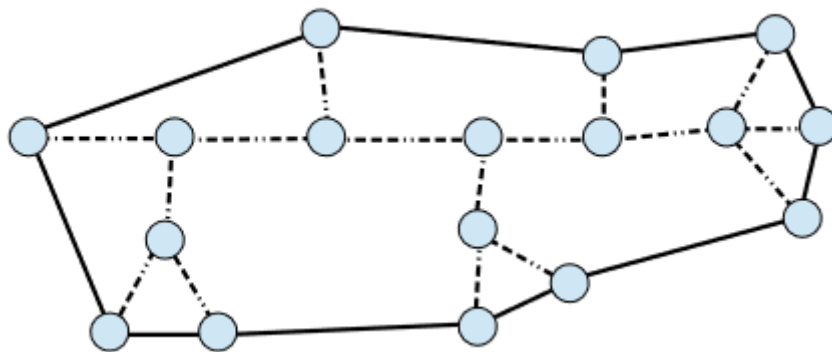
Με άλλα λόγια, η ετικέτα της κορυφής i ισούται με την αντίστροφη δυαδική αναπαράσταση της i και η ετικέτα της κορυφής $i + 1$ με την αντίστροφη δυαδική

αναπαράσταση της $i + 1$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το $i + 1$ από το i προσθέτοντας 1 στο i . Συνεπώς, μπορούμε και να υπολογίσουμε την ετικέτα της κορυφής $i + 1$ προσθέτοντας 1 στην αντίστροφη ετικέτα της κορυφής i . Η πρόσθεση του άσσου στην αντίστροφη ετικέτα σημαίνει ότι προσθέτουμε 1 στο πιο σημαντικό bit της αναπαράστασης και αν έχει κρατούμενο, το περνάμε στο δεξί γειτονικό bit κ.ο.κ. Η μόνη διαφορά μεταξύ της πρόσθεσης στην αντίστροφη ετικέτα και της κανονικής πρόσθεσης είναι ότι κινούμαστε από τα αριστερά προς τα δεξιά αντί για το ανάποδο.

Με χρήση της αποσβεστικής ανάλυσης (amortized analysis) αποδείχθηκε ότι ο αλγόριθμος *assignLabels* αριθμεί τις κορυφές ενός γράφου εισόδου με n κορυφές σε χρόνο $O(n)$. Άρα, με βάση και τα προηγούμενα, ο αλγόριθμος πετυχαίνει μια βέλτιστη διάταξη των κορυφών ενός χορδικού γραφήματος με n κορυφές σε χρόνο $O(n)$.

5.1.2 Γράφοι Halin

Με τον όρο γράφοι Halin αναφερόμαστε σε επίπεδους γράφους, στους οποίους ο βαθμός κάθε κορυφής είναι τουλάχιστον 3 και μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας ένα υποκείμενο δέντρο T και έναν κύκλο C που ενώνει τις κορυφές-φύλλα του T (βλ. Σχήμα 5.1). Αποτελούν μία από τις πιο απλές κατηγορίες μη εξωεπίπεδων γράφων και το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης στη γενική περίπτωση των γράφων Halin είναι ακόμα ανοιχτό.



Σχήμα 5.1 Ένα παράδειγμα γράφου Halin.

Για την απλή περίπτωση όπου το υποκείμενο δέντρο T είναι ένα δέντρο-κάμπια (caterpillar) έχει διατυπωθεί αλγόριθμος που λύνει το MinLA σε πολυωνυμικό χρόνο [32] [62].

Με τον όρο δέντρο-κάμπια αναφερόμαστε στα δέντρα στα οποία αν αφαιρεθούν όλες οι κορυφές βαθμού 1, τότε ο γράφος που προκύπτει είναι ένα μονοπάτι.

Μία άλλη περίπτωση είναι όταν το T είναι αναδρομικά ισορροπημένο. Οι Mirzaei και Kfoury το 2015 απέδειξαν ότι το MinLA υπό αυτόν τον περιορισμό λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο και διατύπωσαν έναν $O(n \log n)$ αλγόριθμο για την επίλυσή του [82]. Ακολουθούν τα απαραίτητα θεωρητικά στοιχεία και η δομή του αλγορίθμου:

Ορισμός (Αναδρομικά ισορροπημένα δέντρα). Έστω το δέντρο T , η κορυφή v_r ορισμένη ως η ρίζα του δέντρου και το σύνολο κορυφών $v_{r,0}, \dots, v_{r,k}$ που συνδέονται με την v_r ως άμεσα παιδιά της. Αφαιρώντας το σύνολο των ακμών $\{v_r, v_{r,0}\}, \dots, \{v_r, v_{r,k}\}$ προκύπτει το σύνολο των υποδέντρων $T_{r,0}, \dots, T_{r,k}$ με αντίστοιχες ρίζες τις $v_{r,0}, \dots, v_{r,k}$. Το T είναι αναδρομικά ισορροπημένο αν:

- $\mathcal{J}_{r,0} = \mathcal{J}_{r,1} = \dots = \mathcal{J}_{r,k}$ όπου $\mathcal{J}_i = |V(T_i)|$ και
- το $T_{r,i}$, με ρίζα το $v_{r,i}$, είναι αναδρομικά ισορροπημένο για $i = 0, 1, \dots, k$

Τελεστής. Έστω η απεικόνιση φ τύπου $(T_1, \dots, T_i, \dots, T_j, \dots, T_k)$ για το δέντρο T με ρίζα την κεντρική κορυφή v_r . Η ανταλλαγή των διατάξεων των κορυφών των δύο υποδέντρων T_i και T_j , ενώ η σχετική τάξη των κορυφών κάθε υποδέντρου διατηρείται σταθερή (ή το ανάποδο), παρουσιάζεται με τον τελεστή $\sigma(\varphi, T_i, T_j)$ τύπου $(T_1, \dots, T_i, \dots, T_j, \dots, T_k)$.

Πρόταση. Έστω μια βέλτιστη γραμμική διάταξη φ^* για ένα γράφο Halin $H(V, E)$ κατασκευασμένο από το δέντρο $T = (V, E')$ και τον κύκλο C . Τότε, ισχύει:

$$LA(\varphi^*, H) \geq 2 \times (n - 1) + LA(\varphi_T^*, H)$$

όπου φ_T^* είναι η βέλτιστη γραμμική διάταξη για το T .

Θεώρημα. Έστω ένας γράφος Halin $H = T \cup C$, όπου το υποκείμενο δέντρο T είναι αναδρομικά ισορροπημένο με ρίζα τη v_r . Επίσης, έστω ότι φ^\circledast είναι μια βέλτιστη γραμμική διάταξη για το T . Τότε υπάρχει μια γραμμική διάταξη φ^* έτσι ώστε:

- $LA(\varphi^*, H) = LA(\varphi^\circledast, T) + 2 \times (|V| - 1)$. Οπότε, λόγω της παραπάνω πρότασης, η φ^* είναι μια βέλτιστη γραμμική διάταξη για το H .
- Η φ^* μπορεί να κατασκευαστεί από τη φ^\circledast σε χρόνο $O(n \log n)$ όπου $n = |V|$.

Αλγόριθμος. Εύρεση της βέλτιστης γραμμικής διάταξης φ^* για το γράφο Halin $H = (T, C)$ με δεδομένη τη βέλτιστη γραμμική διάταξη φ^\oplus για το αναδρομικά ισορροπημένο δέντρο T .

```

 $\varphi^* \leftarrow \varphi^\oplus$ 
let  $\{T_1, \dots, T_k\}$  be subtree of height  $h - 1$  as  $\varphi^*$  is of type  $(T_1, \dots, v_r, \dots, T_k)$ 
let  $T_L$  be  $T_1$ 
let  $T_R$  be one of the two subtrees connected to  $T_L$  via  $E(C)$ 
 $\sigma(\varphi^*, T_R, T_k)$ 
for  $i = 1$  to  $k - 2$ 
  Let  $T_{i,R} \in \{T_{i+1}, \dots, T_{k-1}\}$  be the subtree connected to  $T_i$  via and edge in  $E(C)$ 
   $\sigma(\varphi^*, T_{i+1}, T_{i,R})$ 

for  $h = h$  to 2:
  for every subtree  $T$  of height  $h$  rooted at  $v_r$ :
    Let  $(T_{r,1}, \dots, v_r, \dots, T_{r,k})$  be  $\varphi^*$  restricted to  $T$ 
    if  $\varphi^*$  is of type  $(T, \dots)$ :
      ReArrLeftSubTree( $(T_{r,1}, \dots, T_{r,k}), \varphi^*$ )
    else if  $\varphi^*$  is of type  $(\dots, T)$ :
      ReArrRightSubTree( $(T_{r,1}, \dots, T_{r,k}), \varphi^*$ )
    else:
      ReArrMidSubTree( $(T_{r,1}, \dots, T_{r,k}), \varphi^*$ )

ReArrMidSubTree( $(T_{r,1}, \dots, T_{r,k}), \varphi^*$ ):
  Let  $T_{r,L}$  be the subtree connected to some vertex  $v_L$ , where based on  $\varphi^*$ ,  $v_L$  is labeled before  $T_{r,1}$ 
  Hence,  $v_L \notin \{V(T_{r,1}) \uplus \dots \uplus T_{r,k}\}$  and  $\forall vin\{V(T_{r,1}) \uplus \dots \uplus T_{r,k}\}, \varphi^*(v_L) < \varphi^*(v)$ 
  Let  $T_{r,R}$  be the subtree connected to some vertex  $v_R$ , where based on  $\varphi^*$ ,  $v_R$  is labeled after  $T_{r,k}$ . Hence,
   $v_R \notin \{V(T_{r,1}) \uplus \dots \uplus T_{r,k}\}$  and  $\forall vin\{V(T_{r,1}) \uplus \dots \uplus T_{r,k}\}, \varphi^*(v) < \varphi^*(v_R)$ 
   $\sigma(\varphi^*, T_{r,1}, T_{r,L})$ 
   $\sigma(\varphi^*, T_{r,k}, T_{r,R})$ 
  if  $k > 3$ :
    ReArrMidSubTree( $(T_{r,2}, \dots, T_{r,k-1}), \varphi^*$ )

ReArrLeftSubTree( $(T_{r,1}, \dots, T_{r,k}), \varphi^*$ ):
  Let  $T_{r,L}$  be the subtree connected to  $T_{r,k}$  via  $E(C)$ 
   $\sigma(\varphi^*, T_{r,1}, T_{r,L})$ 
  for  $i = 1$  to  $k - 2$ 
    Let  $T_{i,R} \in \{T_{i+1}, \dots, T_k\}$  be the subtree connected to  $T_i$ 
     $\sigma(\varphi^*, T_{i+1}, T_{i,R})$ 

ReArrRightSubTree( $(T_{r,1}, \dots, T_{r,k}), \varphi^*$ ):
  Let  $T_{r,R}$  be the subtree connected to  $T_L$  via  $E(C)$ 
   $\sigma(\varphi^*, T_{r,k}, T_{r,R})$ 
  for  $i = k$  to 2
    Let  $T_{i,R} \in \{T_1, \dots, T_{i-1}\}$  be the subtree connected to  $T_i$ 
     $\sigma(\varphi^*, T_{i-1}, T_{i,R})$ 

```

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την εγκυρότητα του παραπάνω αλγορίθμου, τη χρονική του πολυπλοκότητα και, γενικότερα, τα γραφήματα Halin ο αναγνώστης παραπέμπεται στην αντίστοιχη δημοσίευση [82].

5.2 Πολυδιάστατα πεδία

Το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης ουσιαστικά αποτελεί μια ειδική περίπτωση του πιο γενικού προβλήματος της ελάχιστης d -διάστατης διάταξης (d-DIMAP), το οποίο ορίζεται ως εξής:

Δεδομένου ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G = (V, E)$ και ενός ακεραίου $k \geq \sqrt[d]{n}$, πρέπει να βρεθεί μια 1-1 συνάρτηση $\varphi: V \rightarrow \{1, \dots, k\}^d$ που να ελαχιστοποιεί το άθροισμα:

$$\sum_{\{u,v\} \in E} \|\varphi(u) - \varphi(v)\|$$

όπου $n = |V|$, $m = |E|$ και d μια σταθερά.

Προφανώς, για $d = 1$ προκύπτει το MinLA. Θεωρούμε εδώ την έκδοση του προβλήματος χωρίς βάρη στις ακμές, αλλά είναι αρκετά εμφανές ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν ισχύουν και στην περίπτωση των βεβαρημένων ακμών.

Με άλλα λόγια, πρόκειται για την ενσωμάτωση ενός γράφου εισόδου σε έναν πολυδιάστατο πίνακα, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η συναθροιστική απόσταση Manhattan. Το d-DIMAP, εκτός από τις γνωστές εφαρμογές του MinLA (στη 1 διάσταση), σχετίζεται με την καλωδίωση ταμπλό ή τη διάταξη ηλεκτρονικών στοιχείων σε κυκλώματα (στις 2 διαστάσεις) και με την τοποθέτηση σέρβερ στις βάσεις ενός κέντρου δεδομένων (στις 3 διαστάσεις).

Το d-DIMAP το εισήγαγε πρώτος ο Hansen το 1989 ως μια ειδική περίπτωση των προβλημάτων d -διάστατης γεωμετρικής ενσωμάτωσης (d-dimensional Geometric Embedding Problems) [56]. Επίσης, παρουσίασε έναν $O(\log^2 n)$ -προσεγγιστικό αλγόριθμο, ο οποίος διαμερίζει αναδρομικά το σύνολο των κορυφών με τη βοήθεια ενός διαχωριστικού αλγορίθμου των Leighton και Rao [77]. Αν συνδυαστεί με το βελτιωμένο αλγόριθμο διαχωρισμού των Arora, Rao και Vazirani, τότε προκύπτει μια προσέγγιση της τάξης $O(\log^{3/2} n)$ [12].

Επίσης, οι Even *et. al.* κατάφεραν να πετύχουν μια $O(\log n \cdot \log \log n)$ προσέγγιση για το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης με d -διάστατο κόστος (d-LAP) [36]:

Δεδομένου ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G = (V, E)$ πρέπει να βρεθεί μια 1-1 συνάρτηση $\varphi: V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ που να ελαχιστοποιεί το άθροισμα:

$$\sum_{\{u,v\} \in E} \sqrt[d]{|\varphi(u) - \varphi(v)|}$$

Ακόμα, οι Charikar, Makarychev και Makarychev χρησιμοποίησαν το αποτέλεσμα στο [12] για να δημιουργήσουν έναν $O(\sqrt{\log n})$ -προσεγγιστικό αλγόριθμο για το d-LAP [22]. Έπειτα, και οι δύο ισχυρίστηκαν ότι από τον αλγόριθμό τους μπορεί να προκύψει ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος για το d-DIMAP με ίδιες επιδόσεις. Όμως, οι Rotter και Vygen το 2013 βρήκαν ένα λάθος στους ισχυρισμούς τους, με συνέπεια η πολυπλοκότητα των αλγορίθμων να είναι μεγαλύτερης τάξης απ' ότι διατύπωσαν αρχικά [107].

Εκτός από τη διαπίστωση αυτή, στο [107] καταλήγουν ότι ο αλγόριθμος του Even είναι πράγματι $O(\log n \cdot \log \log n)$ τάξης. Συνδυάζοντάς τον με ένα αποτέλεσμα των Fakcharoenphol, Rao και Talwar σχετικά με μια ειδική μετρική δέντρων [37], κατάφεραν να πετύχουν μια $O(\log n)$ προσέγγιση, που είναι και η καλύτερη γνωστή μέχρι σήμερα για το d-DIMAP.

Όσον αφορά ακριβείς αλγορίθμους, το 2011 οι Demaine *et. al.* παρουσίασαν ένα σχήμα δυναμικού προγραμματισμού, πολυπλοκότητας $O(n^{7.5})$, το οποίο ενσωματώνει τον πλήρη γράφο K_n στο δισδιάστατο πλέγμα και βρίσκει τη βέλτιστη λύση σε περιπτώσεις γράφων με έως και 80 κορυφές [26]. Το σχήμα εκμεταλλεύεται με έξυπνο τρόπο χαρακτηριστικά συμμετρίας και τη σχέση ύψους-βάθους της βέλτιστης ενσωμάτωσης με τη μόνη προϋπόθεση ότι ο γράφος εισόδου είναι πλήρης.

Ένα χρόνο αργότερα, οι Oswald *et. al.* ανέπτυξαν ένα ακριβές σχήμα διακλάδωσης και διαχωρισμού για το 2-διάστατο πρόβλημα για τη γενική περίπτωση των γράφων, το οποίο μπορεί εύκολα να επεκταθεί και σε μεγαλύτερες διαστάσεις [88]. Σχημάτισαν ένα μοντέλο ακέραιου προγραμματισμού για το 2-DIMAP ακολουθώντας παρόμοια προσέγγιση με εκείνη των Carrara *et. al.* στο [19]. Με τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη των απαραίτητων πολυέδρων στο 2-διάστατο πεδίο και με τους κατάλληλους περιορισμούς και ανισότητες δημιούργησαν έναν αλγόριθμο που συνήθως υπολογίζει τη βέλτιστη λύση μέσα σε λίγα δευτερόλεπτα για γράφους με περίπου 20 κορυφές και πυκνότητα 15%.

Εκτός από τον αλγόριθμο, απέδειξαν ότι το d-DIMAP είναι NP-δύσκολο για οποιαδήποτε σταθερά $d \geq 2$, ενώ για $d = 2$ αυτό ισχύει ακόμα και για επίπεδους γράφους με μέγιστο βαθμό κορυφής ίσο με 3.

Το 2014 οι Aroca και Anta παρουσίασαν μία ευρετική υβριδικής προσομοιωμένης απόπτησης (hybrid simulated annealing heuristic) προσαρμόζοντας, μη τετριμμένα, τεχνικές που εφαρμόζονται στο MinLA, ώστε να λειτουργούν και σε μεγαλύτερες διαστάσεις [11]. Λόγω της έλλειψης συγκεκριμένων συνόλων με γράφους για πειραματική ανάλυση στην περίπτωση του d-DIMAP, οι συγγραφείς επέλεξαν σύνολα από το MinLA και από το πρόβλημα της τετραγωνικής ανάθεσης, ένα NP-δύσκολο πρόβλημα [110], πιο γενικό από το d-DIMAP, το οποίο απασχολεί την ερευνητική κοινότητα για πάνω από 60 χρόνια [74]. Για κάθε γράφο σε αυτά τα σύνολα παρείχαν αποτελέσματα για τις 3 πρώτες διαστάσεις του d-DIMAP, τα οποία τελικά απέδειξαν την πρακτικότητα της προτεινόμενης ευρετικής, συχνά ισοφαρίζοντας το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα ή και κάποιες φορές ξεπερνώντας το.

Από το 2014 μέχρι και σήμερα δεν έχει παρατηρηθεί κάποια πρόοδος σχετικά με το πρόβλημα της ελάχιστης d-διάστατης διάταξης. Το τελευταίο σχετικό βιβλιογραφικό εύρημα αφορά μια παραλλαγή του προβλήματος, το d-DIMAP+, όπου οι θέσεις μερικών κορυφών είναι συγκεκριμένες και δίνονται ως σταθερές κατά την είσοδο. Το ζητούμενο είναι η επέκταση αυτής της μερικής απεικόνισης σε απεικόνιση όλων των κορυφών, ελαχιστοποιώντας τη συνολική απόσταση των ακμών. Το συγκεκριμένο πρόβλημα προκύπτει φυσικά από εφαρμογές με σχεδίαση κυκλωμάτων VLSI και τοποθέτηση στοιχείων σε αυτά, για παράδειγμα αν ο πίνακας έχει κάποια μπλοκαρισμένα τμήματα ή αν μερικά στοιχεία πρέπει να βρίσκονται σε συγκεκριμένες θέσεις. Το 2013 οι Gupta και Sidiropoulos μελέτησαν το θέμα από τη σκοπιά της προσεγγισιμότητας διατυπώνοντας ορισμένα θεωρητικά αποτελέσματα και κάποιους προσεγγιστικούς αλγορίθμους. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το d-DIMAP+ παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [52].

Κεφάλαιο 6

Σύνοψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται μία προσπάθεια, ώστε να παρουσιαστούν συγκεντρωτικά τα πιο σημαντικά βιβλιογραφικά ευρήματα γύρω από το πρόβλημα της ελάχιστης γραμμικής διάταξης και της διάταξης σε πολυδιάστατα πεδία.

Αρχικά, διατυπώνονται στοιχεία σχετικά με τον ορισμό του MinLA και τις εφαρμογές του στον πραγματικό κόσμο. Έπειτα, το MinLA εξετάζεται από τη σκοπιά της προσεγγισιμότητας και παρουσιάζεται η πολυπλοκότητα αλγορίθμων πολυωνυμικού χρόνου ανά κατηγορία γράφου.

Στη συνέχεια, επισημαίνεται το βασικό σύνολο γράφων με το οποίο ασχολήθηκαν οι ερευνητές για τα πειράματά τους όλα αυτά τα χρόνια και καταγράφονται βιβλιογραφικές γνώσεις που αφορούν τεχνικές για την εύρεση κατώτατων ορίων για το πρόβλημα. Εδώ, αξίζει να αναφέρουμε ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν μέσω γραμμικού προγραμματισμού τα τελευταία χρόνια είναι πολύ ελπιδοφόρα, αφού έχουν αποδείξει σε διάφορες περιπτώσεις ότι οι υπάρχουσες ευρετικές τεχνικές είναι πολύ κοντά στη βέλτιστη λύση. Συνεπώς, ίσως δεν χρειάζεται η περαιτέρω ανάπτυξη ευρετικών, ενώ η προσοχή φαίνεται να έχει δοθεί στη βελτίωση των μεθόδων εύρεσης κατώτατων ορίων ώστε να εφαρμόζονται και σε μεγαλύτερους γράφους.

Έπειτα, διατυπώνονται οι σημαντικότερες ευρετικές τεχνικές, τόσο οι απλές όσο και οι πιο συνδυαστικές. Η καλύτερη εξακολουθεί να θεωρείται η Φ-προσομοιωμένη ανόπτηση δύο σταδίων που δημοσιεύτηκε το 2008 [102]. Μέχρι σήμερα δεν έχει προκύψει κάποια νέα ευρετική που να την ξεπερνά σταθερά, αν και είναι λογικό να υποθέσουμε ότι αν υπάρξει, θα είναι ίδιας λογικής με των Rodriguez-Tello *et. al.*, δηλαδή θα προκύψει συνδυαστικά από πιο απλές ευρετικές και με κατάλληλη επιλογή και προσαρμογή των παραμέτρων.

Τέλος, παρουσιάζονται ορισμένοι αλγόριθμοι οι οποίοι υπολογίζουν τη βέλτιστη λύση του MinLA για την κατηγορία γράφων που αφορούν, ενώ καταγράφονται όλα όσα είναι γνωστά για την ελάχιστη διάταξη σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Αναζητώντας βιβλιογραφικά ευρήματα παρατηρήσαμε πως το d-DIMAP δεν έχει ερευνηθεί αρκετά, οπότε υπάρχουν πολλά περιθώρια για νέες ανακαλύψεις. Αναμένουμε ότι η προσαρμοσμένη εφαρμογή στο d-DIMAP ευρετικών,

αποδοτικών για το MinLA, θα είναι αρκετά αποτελεσματική, όπως παρατηρήθηκε ήδη από την ευρετική των Aroca και Anta [11].

Βιβλιογραφία

- [1] Aarts E. H. and Korst J. H. 1989. Simulated annealing and Boltzmann machines: a stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing. New York: Wiley.
- [2] Aarts E. H. and Laarhoven P. J. V. 1985. Statistical cooling: a general approach to combinatorial optimization problems. *Philips Journal of Research*, 40: 193–226.
- [3] Adolphson D. 1977. Single machine job sequencing with precedence constraints. *SIAM Journal on Computing* 6, 40–54.
- [4] Adolphson D. and Hu T. C. 1973. Optimal linear ordering. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 25, 3 (Nov.), 403–423.
- [5] Amaral A. R. S. 2009. A mixed 0–1 linear programming formulation for the exact solution of the minimum linear arrangement problem. *Optim. Lett.* 3(4): 513–520.
- [6] Amaral A. R. S., Caprara A., Letchford A. N. and Salazar-Gonzalez J. J. 2008. A New Lower Bound for the Minimum Linear Arrangement of a Graph. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 30: 87–92.
- [7] Amaral A. R. S. and Letchford A. N. 2013. A Polyhedral Approach to the Single Row Facility Layout Problem. In: *Math. Programming* 141(1): 453–477.
- [8] Ambuhl C., Mastrolilli M., and Svensson O. 2007. Inapproximability results for sparsest cut, optimal linear arrangement, and precedence constrained scheduling. In *FOCS: IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*.
- [9] Andrade R., Bonates T., Campelo M. and Ferreira M. 2017. Minimum linear arrangements. *Electron. Notes Discrete Math.* 62, 63–68, LAGOS’17 – IX Latin and American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium.
- [10] Andrade R., Bonates T., Campelo M. and Ferreira M. 2022. A compact quadratic model and linearizations for the minimum linear arrangement problem. *Discrete Applied Mathematics* 323, 134–148.
- [11] Aroca J. A. and Anta A. F. 2014. JAM: A Tabu-Based Two-Stage Simulated Annealing Algorithm for the Multidimensional Arrangement Problem. In: *Hybrid Metaheuristics. HM 2014. Lecture Notes in Computer Science*, vol 8457.
- [12] Arora S., Rao S. and Vazirani U. V. 2009. Expander flows, geometric embeddings and graph partitioning. *J. ACM*, 56(2).

- [13] Atkins J. E., Boman E. G. and Hendrickson B. 1999. A spectral algorithm for seriation and the consecutive ones problem. *SIAM Journal on Computing* 28, 1, 297–310 (electronic).
- [14] Ausiello G., Crescenzi P., Gambosi G., Kann V., Marchetti-Spaccamela A. and Protasi M. 1999. *Complexity and approximation*. Springer-Verlag, Berlin.
- [15] Bar-Yehuda R., Even G., Feldman J. and Naor J. 2001. Computing an optimal orientation of a balanced decomposition tree for linear arrangement problems. *Journal of Graph Algorithms and Applications*; 5(4): 1–27.
- [16] Bläsius T., Friedrich T., Katzmann M., Meyer U., Penschuck M. and Weyand C. 2019. Efficiently generating geometric inhomogeneous and hyperbolic random graphs. In: *27th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2019)*. Vol. 144. *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, 21: 1-14.
- [17] Boese K. D. and Kahng A. B. 1994. Best-so-far vs. where-you-are: implications for optimal finite time annealing. *Systems and Control Letters*; 22(1): 71–8.
- [18] Booth K. S. and Lueker G. S. 1976. Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms. In: *Journal of computer and system sciences* Volume 13.3, 335–379.
- [19] Caprara A., Letchford A. N. and Salazar-Gonzalez J. J. 2011. Decorous lower bounds for minimum linear arrangement. In: *INFORMS Journal on Computing* Volume 23.1, 26–40.
- [20] Caprara A., Oswald M., Reinelt G., Schwarz R. and Traversi E. 2011. Optimal linear arrangements using betweenness variables. In: *Mathematical Programming Computation* Volume 3.3, 261.
- [21] Charikar M., Hajiaghayi M. T., Karloff H. and Rao S. 2006. 122 spreading metrics for vertex ordering problems. In: *Proceedings of the seventeenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithm, SODA '06*, 1018–1027, New York, NY, USA. ACM.
- [22] Charikar M., Makarychev K. and Makarychev Y. 2007. A divide and conquer algorithm for d-dimensional arrangement. In: *SODA*, 541-546.
- [23] Chen P. S. 1976. The entity-relationship model—toward a unified view of data. *ACM Transactions on Database Systems*, 1, 9–36.

- [24] Chung F. R. K. 1988. Labelings of graphs. In *Selected topics in graph theory*, 3, 151–168. San Diego, California: Academic Press.
- [25] Cohen J., Fomin F. V., Heggernes P., Kratsch D. and Kucherov G. 2006. Optimal linear arrangement of interval graphs. In *Proceedings of MFCS 2006*, LNCS 4162, 267–279. Springer.
- [26] Demaine E. D., Fekete S. P., Rote G., Schweer N., Schymura D. and Zelke M. 2011. Integer point sets minimizing average pairwise L1 distance: what is the optimal shape of a town? In: *Computational Geometry, Theory and Applications* 44: 82–94.
- [27] Devanur N., Khot S., Saket R. and Vishnoi N. 2006. Integrality gaps for sparsest cut and minimum linear arrangement problems. In *STOC: ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*.
- [28] Díaz J., Penrose M. D., Petit J. and Serna M. 2001. Approximating layout problems on random geometric graphs. *Journal of Algorithms* 39, 1, 78–116.
- [29] Díaz J., Petit J. and Serna M. 2002. A survey on graph layout problems. Technical Report 3.
- [30] Díaz J., Petit J., Serna M. and Trevisan L. 2001. Approximating layout problems on random graphs. *Discrete Mathematics* 235, 1–3, 245–253.
- [31] Dijkstra E. W. 1959. A note on two problems in connexion with graphs. In: *Numerische Mathematik* Volume 1.1. 269–271. ISSN: 0945-3245.
- [32] Easton T., Horton S. B. and Parker R. G. 1996. A solvable case of the optimal linear arrangement problem on halin graphs. *Congressus Numerantium (Utilitas mathematica)*, 119: 3–17.
- [33] Eikel M., Scheideler C. and Setzer A. 2014. Minimum Linear Arrangement of Series-Parallel Graphs. In: *International Workshop on Approximation and Online Algorithms*, arXiv:1410.4395 .
- [34] Ellis J. and Warren R. 1964. Assignments of numbers to vertices. *American Mathematical Monthly*, 71: 508–516.
- [35] Esteban J. L. and Ferrer-i-Cancho R. 2017. A correction on Shiloach’s algorithm for minimum linear arrangement of trees. In: *SIAM Journal on Computing* Volume 46.3, 1146–1151.

- [36] Even G., Naor J., Rao S. and Schieber B. 1995. Divide-and-conquer approximation algorithms via spreading metrics. In 36th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 62–71.
- [37] Fakcharoenphol J., Rao S. and Talwar K. 2004. A tight bound on approximating arbitrary metrics by tree metrics. *J. Comput. Syst. Sci.*, 69(3): 485–497.
- [38] Feige U. and Lee J. R. 2007. An improved approximation ratio for the minimum linear arrangement problem. *Information Processing Letters*, 101(1): 26–29.
- [39] Fellows M. R., Hermelin D., Rosamond F. and Shachnai H. 2016. Tractable parameterizations for the minimum linear arrangement problem. In: *ACM Transactions on Computation Theory* 8(2), 6: 1-12.
- [40] Fernau H. 2005. Parameterized algorithmics: A graph-theoretic approach. Habilitation thesis.
- [41] Fernau H. 2008. Parameterized algorithmics for linear arrangement problems. *Discrete Applied Mathematics*, 156(17): 3166–3177.
- [42] Frederickson G. N. and Hambrusch S. E. 1988. Planar linear arrangements of outerplanar graphs. *IEEEETCS: IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35.
- [43] Frieze A. and Kannan R. 1996. The regularity lemma and approximation schemes for dense problems. *Proceedings of the 37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 12.
- [44] Gane C. and Sarson T. 1977. *Structured Systems Analysis: Tools and Techniques*. McDonnell Douglas Systems Integration Company, 1st edition. 29.
- [45] Garey M. R. and Johnson D. S. 1979. *Computers and Intractability. A guide to the theory of NP-completeness*. Freeman and Company.
- [46] Garey M. R., Johnson D. S. and Stockmeyer L. 1976. Some simplified NP-complete graph problems. *Theoretical Computer Science* 1, 237–267.
- [47] Goldberg M. K. and Klipker I. A. 1976. An algorithm for minimal numeration of tree vertices. *Sakharth. SSR Mecn. Akad. Moambe* 81, 3, 553–556. In Russian (English abstract at MathSciNet).
- [48] Gomory R. E. and Hu T. C. 1975. Multi-terminal flows in a network, 172–199. *Studies in Math.*, Vol. 11. Math. Assoc. Amer., Washington, D.C.
- [49] Greene J. and Supowit K. J. 1988. Simulated annealing without rejected moves. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*; 5(1): 221-8.

- [50] Grover L. K. 1986. A new simulated annealing algorithm for standard cell placement. In: Proceedings of the IEEE international conference on computer aided design. Santa Clara, CA, USA. New York: IEEE Press; 378–80.
- [51] Grover L. K. 1987. Standard cell placement using simulated sintering. In: Proceedings of the 24th ACM/IEEE design automation conference. Miami Beach, FL, USA. New York: IEEE Press; 56–9.
- [52] Gupta A. and Sidiropoulos A. 2013. Minimum d-dimensional arrangement with fixed points. In: Data Structures and Algorithms, arXiv:1307.6627 .
- [53] Gutin G., Rafiey A., Szeider S. and Yeo A. 2007. The linear arrangement problem parametrized above guaranteed value. *Theory of Computing Systems*, 41(3): 521–538.
- [54] Hajek B. 1988. Cooling schedules for optimal annealing. *Mathematics of Operations Research*; 13(2): 311–29.
- [55] Hanan M. and Kurtzberg J. M. 1972. A review of the placement and quadratic assignment problems. *SIAM Review*, 14(2): 324–342.
- [56] Hansen M. D. 1989. Approximation algorithms for geometric embeddings in the plane with applications to parallel processing problems. In 30th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 604–609.
- [57] Harper L. H. 1964. Optimal assignments of numbers to vertices. *Journal of SIAM* 12, 1 (March), 131–135.
- [58] Harper L. H. 1970. Chassis layout and isoperimetric problems. Technical Report SPS 37–66, vol II (Sept.), Jet Propulsion Laboratory.
- [59] Hassin R. and Rubinstein S. 2000. Algorithm Theory - SWAT 2000, volume 1851 of Lecture Notes in Computer Science, chapter Approximation Algorithms for Maximum Linear Arrangement, 633–643.
- [60] Hendrickson B. and Leland R. 1993. Multidimensional Spectral Load Balancing. 6th SIAM Conf. Parallel Proc. Sci. Comput.
- [61] Horton S. B. 1997. The optimal linear arrangement problem: Algorithms and approximation. Ph.D. thesis, Georgia Institute of Technology, USA, 33.
- [62] Horton S. B., Easton T. and Parker R. G. 2003. The linear arrangement problem on recursively constructed graphs. *Networks*, 42(3): 165–168.

- [63] Huang M., Romeo F. and Sangiovanni-Vincentelli A. 1986. An efficient general cooling schedule for simulated annealing. In: Proceedings of the IEEE international conference on computer aided design. New York: IEEE Press; Santa Clara, CA, USA, 381–4.
- [64] Jiang X., Liu Q., Natarajan P. and Sundara Rajan R. 2017. A note on minimum linear arrangement for BC graphs. *Discrete Mathematics Algorithms and Applications* 10 (02).
- [65] Jinjiang Y. and Sanming Z. 1995. Optimal labelling of unit interval graphs. *Applied Mathematics - A Journal of Chinese Universities*, 10: 337–344. 10.1007/BF02662875.
- [66] Johnson D. S. 1990. Local optimization and the traveling salesman problem. In *Automata, languages and programming (Coventry, 1990)*, 446–461. New York: Springer.
- [67] Johnson D. S., Aragon C. R., McGeoch L. A. and Schevon C. 1989. Optimization by simulated annealing: an experimental evaluation; part I, graph partitioning. *Operations Research* 37, 6 (Nov.), 865–892.
- [68] Johnson D. S., Aragon C. R., McGeoch L. A. and Schevon C. 1991. Optimization by simulated annealing: an experimental evaluation; part II, graph coloring and number partitioning. *Operations Research* 39, 3 (May), 378–405.
- [69] Juels A. 1996. Basics in Black-box Combinatorial Optimization. Ph. D. thesis, University of California at Berkeley.
- [70] Juvan M. and Mohar B. 1992. Optimal linear labelings and eigenvalues of graphs. *Discrete Applied Mathematics* 36, 2, 153–168.
- [71] Karypis G. and Kumar V. hMeTiS – a hypergraph partitioning package. URL: <http://www-users.cs.umn.edu/~karypis/metis/hmetis/filesmanual.ps> .
- [72] Khot S. 2002. On the power of unique 2-prover 1-round games. In *Proc. 34th ACM Symposium on Theory of Computing*.
- [73] Kirkpatrick S., Gelatt C. D. and Vecchi M. P. 1983. Optimization by simulated annealing. *Science* 220, 671–680.
- [74] Koopmans T. C. and Beckmann M. J. 1957. Assignment problems and the location of economic activities. *Econometrica* 25, 53–76.
- [75] Koren Y. and Harel D. 2002. A multi-scale algorithm for the linear arrangement problem. In: *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2573. 293–306.
- [76] Lam J. and Delosme J-M. 1988. Performance of a new annealing schedule In: *Proceedings of the 25th ACM/IEEE design automation conference*. Atlantic City, NJ, USA. New York: IEEE Press; 306–11.

- [77] Leighton T. and Rao S. 1999. Multicommodity max-flow min-cut theorems and their use in designing approximation algorithms. *Journal of the ACM*, 46(6): 787–832.
- [78] Liu W. and Vannelli A. 1995. Generating lower bounds for the linear arrangement problem. *Discrete Applied Mathematics* 59, 137–151.
- [79] McAllister A. J. 1999. A new heuristic algorithm for the linear arrangement problem. Technical Report TR-99-126a, Faculty of Computer Science, University of New Brunswick.
- [80] Metropolis W., Rosenbluth A., Rosenbluth M., Teller A. and Teller E. 1953. Equation of State Calculations by Fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics* 21, 6, 1087–1092.
- [81] Miller M., Sundara Rajan R., Natarajan P. and Rajasingh I. 2014. Minimum Linear Arrangement of Incomplete Hypercubes. *The Computer Journal* 58(2): 331-337.
- [82] Mirzaei S. and Kfoury A. J. 2015. Linear Arrangement of Halin Graphs, *Discrete Mathematics*, arXiv:1509.08145 .
- [83] Mitchison G. and Durbin R. 1986. Optimal numberings of an $n \times n$ array. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* 7, 4, 571–582.
- [84] Moeini M., Gueye S. and Michel S. 2014. A new mathematical model for the minimum linear arrangement problem. In: *ICORES - Angers - France*, 57–62.
- [85] Moeini M., Gueye S. and Michel S. 2015. Adjacency variables formulation for the minimum linear arrangement problem. In: *Communications in Computer and Information Science: Operations Research and Enterprise Systems*, Vol. 509, Springer International Publishing, 95–107.
- [86] Muradyan D. O. and Piliposjan T. E. 1980. Minimal numberings of vertices of a rectangular lattice. *Akad. Nauk. Armjan. SRR* 1, 70, 21–27. In Russian (English abstract at MathSciNet).
- [87] Muradyan D. O. and Piliposjan T. E. 1988. The problem of finding the length and width of the complete p -partite graph. *Uchen. Zapiski Erevan. Gosunivers.* 2: 18–26. In Russian.
- [88] Oswald M., Reinelt G. and Wiesberg S. 2012. Exact solution of the 2-dimensional grid arrangement problem. In: *Discrete Optimization* 9(3): 189-99.
- [89] Pach J., Shahrokhi F. and Szegedy M. 1996. Applications of the crossing number. *Algoritmica* 16, 111–117.

- [90] Pantrigo J., Duarte A., Campos V. and Marti R. 2008. Heuristics for the minimum linear arrangement problem.
- [91] Papadimitrou C. and Steiglitz K. 1982. Combinatorial Optimization, Algorithms and Complexity. Prentice Hall.
- [92] Petit J. 2003. Combining spectral sequencing and parallel simulated annealing for the MinLA problem. *Parallel Processing Letters* 13, 1, 77–91.
- [93] Petit J. 2003. Experiments on the minimum linear arrangement problem. *The ACM Journal of Experimental Algorithmic*; 8.
- [94] Poranen T. 2002. A genetic hillclimbing algorithm for the optimal linear arrangement problem.
- [95] Poupaert E. and Deville Y. 2000. Simulated annealing with estimated temperature. *AI Communications*; 13(1): 19–26.
- [96] Rao S. and Richa A. W. 1998. New approximation techniques for some ordering problems. In *Proceedings 9th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (1998), 211–218.
- [97] Raoufi P., Rostami H. and Bagherinezhad H. 2013. An optimal time algorithm for minimum linear arrangement of chord graphs, *Information Sciences*, Volume 238, 212-220.
- [98] Ravi R., Agrawal A. and Klein P. 1991. Ordering problems approximated: single processor scheduling and interval graph completion. In M. R. J. Leach, B. Monien Ed., 18th. International Colloquium on Automata, Languages and Programming, Volume 510 of *Lecture Notes in Computer Science*, 751–762. Springer-Verlag.
- [99] Rodriguez-Tello E., Hao J-K. and Torres-Jimenez J. 2005. A comparison of memetic recombination operators for the MinLA problem. In: *MICAI 2005: Advances in Artificial Intelligence*, 613-622.
- [100] Rodriguez-Tello E., Hao J-K. and Torres-Jimenez J. 2006. A refined evaluation function for the MinLA problem. In: *Lecture notes in computer science*, vol. 4293. 392–403.
- [101] Rodriguez-Tello E., Hao J-K. and Torres-Jimenez J. 2006. Memetic algorithms for the MinLA problem. In: *Lecture notes in computer science*, vol. 3871. 73–84.
- [102] Rodriguez-Tello E., Hao J.-K. and Torres-Jimenez J. 2008. An effective two-stage simulated annealing algorithm for the minimum linear arrangement problem. *Computers & Operations Research*; 35(10): 3331–3346.

- [103]Rose J., Klebsch W. and Wolf J. 1990. Temperature measurement and equilibrium dynamics of simulated annealing placements. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*; 9(3): 253–9.
- [104]Rossi R. A. and Ahmed N. K. 2015. The network data repository with interactive graph analytics and visualization. In: *AAAI*. URL: <https://networkrepository.com>.
- [105]Rostami H. and Habibi J. 2007. Topology awareness of overlay P2P networks, *Concurr. Comput. Pract. Exper.* 19(7): 999–1021.
- [106]Rostami H. and Habibi J. 2008. Minimum linear arrangement of chord graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 203(1): 358–367.
- [107]Rotter D. and Vygen J. 2013. d-dimensional arrangement revisited. In: *Information Processing Letters* 113(13): 498-505.
- [108]Safro I. 2002. The minimum linear arrangement problem. PhD Thesis, Weizmann Institute of Science.
- [109]Safro I., Ron D. and Brandt A. 2006. Graph minimum linear arrangement by multilevel weighted edge contractions. *Journal of Algorithms*; 60(1): 24–41.
- [110]Sahni S. and González T. F. 1976. P-complete approximation problems. *J. ACM* 23(3): 555–565.
- [111]Schwarz R. 2010. A branch-and-cut algorithm with betweenness variables for the Linear Arrangement Problem. Diplomarbeit, Universität Heidelberg.
- [112]Seitz H. 2010. Contributions to the Minimum Linear Arrangement Problem. PhD thesis, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg.
- [113]Serna M. and Thilikos D. M. 2005. Parameterized complexity for graph layout problems. *EATCS Bulletin*, 86, 41–65.
- [114]Shiloach Y. 1979. A minimum linear arrangement algorithm for undirected trees. *SIAM Journal on Computing* 8, 1 (Feb.), 15–32.
- [115]Stoica I., Morris R., Karger D., Kaashoek M. F. and Balakrishnan H. 2001. Chord: a scalable P2P lookup service for internet applications, in: *Proc. ACM SIGCOMM'01*.
- [116]Strenski P. N. and Kirkpatrick S. 1991. Analysis of finite length annealing schedules. *Algorithmica*; 6(1): 346–66.
- [117]Tamaki S. and Yoshida Y. 2018. Approximation guarantees for the minimum linear arrangement problem by higher eigenvalues. In: *ACM Transactions on Algorithms* 14(4), 45: 1-13.

- [118]Teng S. H. 1999. Coarsening, Sampling, and Smoothing: Elements of the Multilevel Method. In: Algorithms for Parallel Processing, vol. 105 of IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Springer Verlag, 247–276.
- [119]Traag V. A., Waltman L. and Van Eck N. J. 2019. From Louvain to Leiden: guaranteeing well-connected communities. In: Scientific reports Volume 9.1, 1–12.
- [120]Van Laarhoven P. J. M. and Aarts E. H. L. 1987. Simulated annealing: theory and applications, Volume 37 of Mathematics and its Applications. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht.
- [121]Varanelli J. M. and Cohoon J. P. 1999. A fast method for generalized starting temperature determination in homogeneous two-stage simulated annealing systems. Computers and Operations Research; 26(5): 481–503.
- [122]Yagiura M. and Ibaraki T. 1996. The use of dynamic programming in genetic algorithms for permutation problems. In: European Journal of Operational Research, 92(2): 387–401.
- [123]Zündorf M. 2022. Minimum Linear Arrangement revisited. Master’s Thesis, Karlsruhe Institute of Technology.