



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΠΛΗΡΩΣ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ:
ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

FULLY-DISCRETE FINITE ELEMENT SCHEMES FOR THE LINEAR
PARABOLIC EQUATIONS: ERROR ESTIMATES & APPLICATIONS

ΑΦΡΟΔΙΤΗ-ΗΛΙΑΝΑ ΖΩΤΟΥ (ge18017)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΧΡΥΣΑΦΙΝΟΣ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΧΡΥΣΑΦΙΝΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Καθηγητής Ε.Μ.Π

ΚΟΚΚΙΝΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

ΚΟΛΕΤΣΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2023

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα πρωτίστως να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Κωνσταντίνο Χρυσάφινο για την καθοδήγηση, την υπομονή και την αδιάκοπη υποστήριξη του. Κατά την διάρκεια της εργασίας υπήρξε πραγματικός αρωγός και σύμβουλος. Οφείλω, ακόμη, να τον ευχαριστήσω για τα μαθήματα του κατά την διάρκεια της καραντίνας (ακαδημαϊκό έτος 2020-2021) που ήταν για μένα μικρές εβδομαδιαίες απολαύσεις. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Ιωάννη Κολέτσο και τον κύριο Βασίλειο Κοκκίνη για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή της διπλωματικής μου.

Στην συνέχεια, ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου που με βοηθούν και με στηρίζουν με κάθε τρόπο -υλικό, πνευματικό, ηθικό- να κατακτήσω τα όνειρά μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους φίλους που παραμένουν οι «σταθερές» στην ζωή μου.

© (2023) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Πρόλογος

Κεντρικό αντικείμενο των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών αποτελεί η μελέτη και η επίλυση των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων καθώς τέτοιου είδους εξισώσεις εμφανίζονται πολύ συχνά σε μαθηματικά μοντέλα που αφορούν προβλήματα από την φυσική, την βιολογία και τα οικονομικά. Συνήθως, αυτές οι εξισώσεις δεν μπορούν να επιλυθούν με αναλυτικές μεθόδους. Έτσι, η λύση τους προσεγγίζεται με μεθόδους της αριθμητικής ανάλυσης και με την βοήθεια υπολογιστικών προγραμμάτων.

Μία από τις κυριότερες μεθόδους που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση των λύσεων των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων είναι η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων. Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι συστηματική και γενική και επιτρέπει μεγάλη ευελιξία, τόσο στην γεωμετρία των χωρίων, όσο και στα είδη των συνοριακών συνθηκών.

Στην εργασία αυτή αναλύεται και επιλύεται το πρόβλημα μίας γραμμικής εξίσωσης παραβολικού τύπου, της εξίσωσης της θερμότητας σε μια και σε δύο διαστάσεις. Χρησιμοποιείται η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων Galerkin για την διακριτοποίηση του χώρου, ενώ για την διακριτοποίηση του χρόνου χρησιμοποιήθηκαν οι μέθοδοι Euler και Crank-Nicolson. Με χρήση του προγραμματιστικού περιβάλλοντος Matlab και του λογισμικού Freefem++ υπολογίστηκε προσεγγιστικά η λύση για τις παραπάνω μεθόδους, με τα αντίστοιχα σφάλματα και γραφήματα. Τέλος, με βάση τις παραπάνω μεθόδους, παρουσιάζεται ένα σύστημα παραβολικών εξισώσεων που περιγράφει την αλληλεπίδραση δύο πληθυσμών τύπου θηράματος-θηρευτή. Συγκεκριμένα, αναλύεται και επιλύεται γραφικά το Μοντέλο Lotka-Volterra με την βοήθεια του προγραμματιστικού περιβάλλοντος Matlab και του λογισμικού Freefem++.

Abstract

The study of Partial Differential Equations is a central subject of Applied Mathematics, as this kind of equations occur very often in mathematical models involving problems from physics, biology and economics. Usually, these equations cannot be solved by analytical methods. Thus, their solution is approached by methods of numerical analysis.

One of the main methods used to approximate the solutions of Partial Differential Equations is the Finite Element Method. This method is systematic, general and allows great flexibility, both in the geometry of the spaces and in the types of boundary conditions. This paper analyzes and solves the problem of a parabolic-type linear equation, the heat equation, in one and two dimensions. The Galerkin Finite Elements Method is used for the discretization of space, while the Euler and Crank-Nicolson methods are used for the discretization of time. Using the Matlab programming environment and Freefem++ software the approximate solution for the above methods was calculated, along with the corresponding errors and graphs. Finally, based on the above methods, a system of parabolic equations describing the interaction of two species populations, prey-predator, is presented. The Lotka-Volterra model is analyzed and solved graphically with the help of Matlab and Freefem++.

Περιεχόμενα

1	Βασικές Έννοιες	6
1.1	Ορισμοί	6
1.2	Ασθενείς Παράγωγοι	7
1.3	Χώροι Sobolev	8
1.4	Άλλοι Συναρτησιακοί Χώροι	9
2	Παραβολικές Εξισώσεις	12
2.1	Ορισμός	12
2.2	Ασθενείς Λύσεις	13
2.3	Ύπαρξη Ασθενών Λύσεων	14
2.4	Ισχυρές Λύσεις	19
3	Μέθοδοι Διακριτοποίησης για την Εξίσωση της Θερμότητας	22
3.1	Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών	22
3.2	Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων	25
3.3	Ανάλυση Ευστάθειας της θ -Μεθόδου	28
4	Εκτιμήσεις Σφάλματος της Μεθόδου Galerkin	31
4.1	Προσεγγίσεις για την Εξίσωση της Θερμότητας	31
4.2	Η περίπτωση της Προς τα Πίσω Euler Μεθόδου	35
4.3	Η περίπτωση της Μεθόδου Crank-Nicolson	36
5	Υπολογιστικά παραδείγματα για την εξίσωση της θερμότητας	38
5.1	Εκτιμήσεις Σφαλμάτων στο Matlab	38
5.1.1	Προς τα Εμπρός Μέθοδος Euler	39
5.1.2	Προς τα Πίσω Μέθοδος Euler	42
5.2	Εκτιμήσεις Σφαλμάτων στο FreeFem++	47
5.2.1	Προς τα Πίσω Μέθοδος Euler	48
5.2.2	Μέθοδος Crank-Nicolson	53
5.2.3	Σύγκριση Μεθόδων	58
6	Μοντέλα Αλληλεπιδρώντων Πληθυσμών	59
6.1	Η Μονοδιάστατη περίπτωση του Μοντέλου Lotka-Volterra	59
6.2	Η Δισδιάστατη περίπτωση του Μοντέλου Lotka-Volterra	62

A' Κώδικας Matlab	67
A.1 Forward Euler	67
A.2 Backward Euler	68
A.3 Forward Method for the Lotka-Volterra Model	68
B' Κώδικας FreeFem++	70
B.1 Theta Method	70
B.2 Backward Euler	71
B.3 Crank-Nicolson	72
B.4 Lotka-Volterra	73
Βιβλιογραφία	75

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες

Σε αυτό το κεφάλαιο διατυπώνονται βασικοί ορισμοί και θεωρήματα που θα μας χρειαστούν για την μελέτη των παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

1.1 Ορισμοί

Ορισμός 1.1.1. (βλ [3, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 19])

Έστω X πραγματικός γραμμικός χώρος, τότε η απεικόνιση $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty]$ καλείται νόρμα αν ικανοποιεί τα παρακάτω:

- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ για όλα τα $u, v \in X$,
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ για όλα τα $u \in X$ και για $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\|u\| = 0$ αν και μόνο αν $u = 0$.

Ορισμός 1.1.2. (βλ [3, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 21])

Έστω X ένας χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$. Μία ακολουθία $\{x_n\}$ στον χώρο X , συγκλίνει στο $x \in X$ (ως προς την νόρμα $\|\cdot\|$) αν:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x - x_k\| = 0.$$

Μία ακολουθία $\{x_n\}$ στον χώρο X με νόρμα $\|\cdot\|$ καλείται ακολουθία Cauchy ή βασική αν:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = 0.$$

Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $m, n \geq n_o(\varepsilon)$ να ισχύει:

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Ορισμός 1.1.3.

Ένας χώρος Banach είναι ένας γραμμικός χώρος με νόρμα ο οποίος είναι πλήρης, δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy σε αυτόν είναι συγκλίνουσα.

1.2 Ασθενείς Παράγωγοι

Ορισμός 1.2.1. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 256])

Έστω $C_c^\infty(U)$ ο χώρος των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα στο U , όπου $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο χωρίο με κατάλληλο ομαλό σύνορο. Καλούμε δοκιμαστική συνάρτηση ϕ μια συνάρτηση που ανήκει στον $C_c^\infty(U)$.

Έστω ότι μας δίνεται μια συνάρτηση u που ανήκει στον C^1 . Τότε για $\phi \in C_c^\infty(U)$ παρατηρούμε από την ολοκλήρωση κατά μέλη ότι:

$$\int_U u \phi_{x_i} dx = \int_U u_{x_i} \phi dx, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2.1)$$

Δεν προκύπτουν οριακοί όροι καθώς η ϕ έχει συμπαγή φορέα στο U και έτσι μηδενίζεται κοντά στο σύνορο ∂U .

Γενικότερα, για κ θετικό ακέραιο, $u \in C^k(U)$ και για $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ έναν πολυδείκτη τάξης $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \kappa$, έχουμε:

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u \phi dx.$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει αφού το D^α ορίζεται ως:

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}} \dots \frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}} \phi$$

και μπορούμε να εφαρμόσουμε την (1.2.1) $|\alpha|$ φορές.

Ορισμός 1.2.2. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 256])

Έστω $u, v \in L_{loc}^1(U)$, με u, v μετρήσιμες, και α ένας πολυδείκτης. Λέμε ότι το v είναι η $\alpha^{\text{ισστή}}$ ασθενής μερική παράγωγος του u και γράφουμε $D^\alpha u = v$, όταν ισχύει ότι:

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx \quad (1.2.2)$$

για όλες τις δοκιμαστικές συναρτήσεις $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Δηλαδή, αν μας δοθεί μια μετρήσιμη συνάρτηση u και υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση v που να ικανοποιεί την (1.2.2) για όλες τις ϕ , λέμε ότι $D^\alpha u = v$ με την ασθενή έννοια. Αν δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση v , τότε η u δεν διαθέτει $\alpha^{\text{ισστή}}$ ασθενή μερική παράγωγο.

1.3 Χώροι Sobolev

Ορισμός 1.3.1. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 258])

Ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(U)$ αποτελείται από όλες τις τοπικά μετρήσιμες συναρτήσεις $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε για κάθε α με $|\alpha| \leq k$, το $D^\alpha u$ να υπάρχει με την ασθενή έννοια και να ανήκει στον $L^p(U)$.

Ορισμός 1.3.2. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 258])

Ο χώρος $L^p(U)$ ορίζεται ως:

$$L^p(U) = \{u : U \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ μετρήσιμη και } \int_U |u|^p dx < \infty\}.$$

Αν $p = 2$,

$$L^2(U) = \{u : U \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ μετρήσιμη και } \int_U |u|^2 dx < \infty\},$$

και γράφουμε $H^k(U) = W^{k,2}(U)$, $k = 0, 1, \dots$, όπου το $H^k(U)$ ορίζει έναν χώρο Hilbert. Ένας χώρος Hilbert είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο που είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Αν $p = \infty$, τότε ορίζουμε:

$$L^\infty(U) = \{u : U \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ μετρήσιμη και } \exists \text{ σταθερά } C : |u| \leq C \text{ σχεδόν παντού στο } U\}.$$

Ορισμός 1.3.3. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 258])

Ο διανυσματικός χώρος H_0^1 ορίζεται ως:

$$H_0^1(U) = \{u \in H^1(U) : u = 0 \text{ πάνω στο } \partial U\},$$

όπου

$$H^1(U) = \{u \in L^2(U) : Du \in L^2(U)\}$$

Ορισμός 1.3.4. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 259])

Αν $u \in W^{k,p}(U)$ ορίζουμε την νόρμα του ως:

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u| dx \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_U |D^\alpha u|, & p = \infty \end{cases}.$$

Ορισμός 1.3.5. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 259])

Έστω $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ και $u \in W^{k,p}(U)$. Λέμε ότι η u_m συγκλίνει στον $W^{k,p}(U)$ και γράφουμε $u_m \rightarrow u$ στον $W^{k,p}(U)$, όταν:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0.$$

Θεώρημα 1.3.1. (Χώροι Sobolev ως συναρτησιακοί χώροι)
(βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 262])

Για κάθε $k = 1, 2, \dots$ και $1 \leq p \leq \infty$, ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(U)$ είναι ένας χώρος Banach.

Απόδειξη. Βλέπε [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 262] □

Ορισμός 1.3.6.

Ορίζουμε με $\|\cdot\|$ ή με $\|\cdot\|_2$ την νόρμα στον $L^2 = L^2(U)$ και με $\|\cdot\|_r$ την νόρμα στον χώρο Sobolev $H^r = H^r(U)$, έτσι ώστε για πραγματικές συναρτήσεις u να ισχύουν αντίστοιχα:

$$\|u\| = \|u\|_{L^2} = \left(\int_U u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\| = \|u\|_{H^r} = \left(\sum_{|a| \leq r} |D^a u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.4 Άλλοι Συναρτησιακοί Χώροι

Ορισμός 1.4.1. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 299])

Ορίζουμε ως $H^{-1}(U)$ τον δυϊκό χώρο του $H_0^1(U)$, δηλαδή

$$H^{-1}(U) = \{f : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f \text{ συνεχή και φραγμένη}\}.$$

Συμβολίζουμε το ζεύγος $H^{-1}(U)$ και $H_0^1(U)$ ως $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Ορισμός 1.4.2. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 299])

Αν f γραμμικό συναρτησοειδές με $f \in H^{-1}(U)$ ορίζουμε την νόρμα:

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \sup\{\langle f, u \rangle : u \in H_0^1(U), \|u\|_{H_0^1(U)} \leq 1\}.$$

Ορισμός 1.4.3. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 301])

Έστω X χώρος Sobolev. Ο χώρος $L^p(0, T; X)$, για ορισμένο $T > 0$, αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $u : [0, T] \rightarrow X$ τέτοιες ώστε:

- Για $1 \leq p < \infty$ ισχύει

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} := \left(\int_0^T \|u\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- Για $p = \infty$ ισχύει

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} := \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u\|_X < \infty.$$

Ορισμός 1.4.4. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 301])

Ο χώρος $C([0, T]; X)$, για ορισμένο $T > 0$, περιέχει όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $u : [0, T] \rightarrow X$ με νόρμα

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_X < \infty.$$

Ορισμός 1.4.5. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 301])

Έστω $u \in L^1(0, T; X)$, για ορισμένο $T > 0$. Λέμε ότι η $v \in L^1(0, T; X)$ είναι η ασθενής παράγωγος του u ως προς τον χρόνο και γράφουμε $\frac{du}{dt} = u_t = v$ δεδομένου ότι:

$$\int_0^T \phi_t u dt = - \int_0^T \phi v dt$$

για όλες τις βαθμωτές δοκιμαστικές συναρτήσεις $\phi \in C_c^\infty(0, T)$.

Ορισμός 1.4.6. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 302])

Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$, για ορισμένο $T > 0$, αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $u \in L^p(0, T; X)$ έτσι ώστε η u_t να ορίζεται με την ασθενή έννοια και να ανήκει στον $L^p(0, T; X)$.

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|u\|_X^p + \|u_t\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} (\|u\|_X^p + \|u_t\|_X^p), & p = \infty \end{cases}.$$

Συμβολίζουμε $H^1(0, T; X) = W^{1,2}(0, T; X)$.

Θεώρημα 1.4.1. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 302])

Έστω $u \in W^{1,p}(0, T; X)$ για ορισμένο $T > 0$ και για $1 \leq p \leq \infty$. Τότε,

- $u \in C([0, T]; X)$,
- $u(t) = u(s) + \int_s^t u_t(\tau) d\tau, \quad 0 \leq s \leq t \leq T$,
- Ισχύει η εκτίμηση

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_X \leq C \|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)},$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το T .

Θεώρημα 1.4.2. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 303])

Έστω ότι $u \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ με $u_t \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$. Τότε,

- $u \in C([0, T]; L^2(U))$
- Η απεικόνιση $t \rightarrow \|u\|_{L^2(U)}^2$ είναι απόλυτα συνεχής με

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(U)}^2 = 2 \langle u_t, u \rangle,$$

για $0 \leq t \leq T$.

- Ισχύει η εκτίμηση

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L^2(U)} \leq C \left(\|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(U))} + \|u_t\|_{L^2(0, T; H^{-1}(U))} \right),$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το T .

Θεώρημα 1.4.3. (βλ [7, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 304])

Έστω ότι U ανοιχτό και φραγμένο με ∂U ομαλό. Έστω, ακόμη, ότι m ένας μη αρνητικός ακέραιος. Υποθέτουμε ότι $u \in L^2(0, T; H^{m+2}(U))$ με $u_t \in L^2(0, T; H^m(U))$. Τότε,

- $u \in C([0, T]; H^{m+1}(U))$
- Ισχύει η εκτίμηση

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{H^{m+1}(U)} \leq C \left(\|u\|_{L^2(0, T; H^{m+2}(U))} + \|u_t\|_{L^2(0, T; H^m(U))} \right),$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται από τα T, U, m .

Κεφάλαιο 2

Παραβολικές Εξισώσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με τις γραμμικές παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις και κυρίως με την εξίσωση της θερμότητας που αποτελεί κύριο παράδειγμα παραβολικής εξίσωσης. Μελετάμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα ασθενών και ισχυρών λύσεων για την συγκεκριμένη εξίσωση και εξετάζουμε την ομαλότητά τους.

2.1 Ορισμός

Θεωρούμε U ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^n με ομαλό σύνορο ∂U και θέτουμε $U_T := U \times (0, T]$ για κάποιον ορισμένο χρόνο $T > 0$. Θεωρούμε, αρχικά, την γενική μορφή του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f, & U_T \\ u = 0, & \partial U \times [0, T] \\ u = u_0, & U \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

όπου $f : U_T \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 : U \rightarrow \mathbb{R}$ και $u : U_T \rightarrow \mathbb{R}$ η άγνωστη $u = u(x, t)$.

Με L συμβολίζουμε τον μερικό διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης για κάθε χρονική στιγμή t . Ο L γράφεται σε μορφή απόκλισης και σε μορφή μη-απόκλισης αντίστοιχα:

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^{\infty} (a^{ij}(x, t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{\infty} b^i(x, t)u_{x_i} + c(x, t)u, \quad (2.1.2)$$

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^{\infty} a^{ij}(x, t)u_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{\infty} b^i(x, t)u_{x_i} + c(x, t)u, \quad (2.1.3)$$

για δοσμένους συντελεστές a^{ij}, b^i, c , με $i, j = 1, \dots, n$.

Ακόμη, από τον ορισμό 1.2.1 υπενθυμίζουμε τον συμβολισμό:

$$Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} u$$

που αφορά την παράγωγο ως προς την χωρική μεταβλητή $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Ορισμός 2.1.1. (βλ [7, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 372])

Λέμε ότι ένας παραβολικός τελεστής $\frac{\partial}{\partial t} + L$ είναι (ομοιόμορφα) παραβολικός αν υπάρχει σταθερά $\theta > 0$ τέτοια ώστε για όλα τα $(x, t) \in U_T$ και για $\xi \in \mathbb{R}$ να ισχύει ότι:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a^{ij}(x, t)\xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2.$$

2.2 Ασθενείς Λύσεις

Θεωρούμε τον L στην μορφή απόκλισης (2.1.2) και προσπαθούμε να ορίσουμε την ασθενή λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών. Υποθέτουμε ότι $a^{ij}, b^i \in L^\infty(U_T)$, με $i, j = 1, \dots, n$, $f \in L^2(U_T)$ και $u_0 \in L^2(U_T)$, και ότι $a^{ij} = a^{ji}$ για $i, j = 1, \dots, n$.

Ορίζουμε, ακόμη, την χρόνο-εξαρτώμενη διγραμμική μορφή:

$$B[u, v; t] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\cdot, t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b^i(\cdot, t) u_{x_i} v + c(\cdot, t) uv dx,$$

για $0 \leq t \leq T$ σχεδόν παντού και για $u, v \in H_0^1(U)$.

Υποθέτουμε πως για τους συντελεστές της διγραμμικής χωροχρονικής μορφής $B[u, v; t]$ ισχύει ότι:

$$B[u, u; t] \geq \beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 - \gamma \|u\|_{L^2(U)}^2 \geq -\gamma \|u\|_{L^2(U)}^2 \quad \beta, \gamma > 0.$$

Παρατήρηση 2.2.1. (Κίνητρο για τον ορισμό της ασθενούς λύσης)
(βλ [7, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 373])

Για να είναι κατανοητοί οι επόμενοι ορισμοί για την ασθενή λύση, υποθέτουμε αρχικά ότι η $u = u(x, t)$ είναι μια ομαλή λύση του παραβολικού προβλήματος (2.1.1). Συσχετίζουμε την u με μια απεικόνιση $u : [0, T] \rightarrow H_0^1(U)$ που ορίζεται ως:

$$[u(t)](x) := u(x, t), \quad x \in U, 0 \leq t \leq T.$$

Δεν θα θεωρούμε, δηλαδή, την u ως συνάρτηση του x και του t μαζί, αλλά ως απεικόνιση u και t στον χώρο $H_0^1(U)$ των συναρτήσεων του x .

Ορίζουμε με τον ίδιο τρόπο την $f : [0, T] \rightarrow L^2(U)$ ως:

$$[f(t)](x) := f(x, t), \quad x \in U, 0 \leq t \leq T.$$

Στην συνέχεια, σταθεροποιώντας μία συνάρτηση $v \in H_0^1(U)$, πολλαπλασιάζουμε την Μερική Διαφορική Εξίσωση $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f$ με v , ολοκληρώνουμε κατά μέλη στον χώρο και καταλήγουμε:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + B[u, v; t] = (f, v), \quad (2.2.1)$$

για κάθε $0 \leq t \leq T$, όπου το (\cdot, \cdot) είναι το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(U)$.

Γνωρίζουμε ότι η u_t βρίσκεται στον χώρο Sobolev $H^{-1}(U)$, όπου $H^{-1}(U)$ ο δυϊκός του χώρου $H_0^1(U)$. (βλ [7, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 374])

Έτσι, προκύπτει η σχέση:

$$\|u_t\|_{H^{-1}(U)} \leq C \left(\|u\|_{H_0^1(U)} + \|f\|_{L^2(U)} \right), \quad C > 0.$$

Αυτή η εκτίμηση υποδηλώνει ότι είναι λογικό να ψάξουμε για ασθενή λύση με $\frac{\partial u}{\partial t} \in H^{-1}(U)$ για σχεδόν όλους τους χρόνους $0 \leq t \leq T$. Σε αυτή την περίπτωση ο όρος $\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)$ μπορεί να εκφραστεί ως $\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \rangle$, όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το ζεύγος των $H^{-1}(U)$ και $H_0^1(U)$. Από τα παραπάνω, καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2.1. (βλ [7, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 374])

Λέμε ότι η συνάρτηση

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(U)) \quad \text{με} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$$

είναι ασθενής λύση του παραβολικού προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών (2.1.1) αν

- $\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \rangle + B[u, v; t] = (f, v)$, για κάθε $v \in H_0^1(U)$ και σχεδόν για όλους τους χρόνους $0 \leq t \leq T$,
- $u(0) = u_0$.

2.3 Ύπαρξη Ασθενών Λύσεων

Θέλουμε να δημιουργήσουμε μία ασθενή λύση στο παραβολικό πρόβλημα (2.1.1). Αρχικά, θα κατασκευάσουμε λύσεις συγκεκριμένων προσεγγίσεων πεπερασμένης διάστασης και έπειτα θα περάσουμε σε όρια. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται μέθοδος Galerkin. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $w_k = w_k(x)$, $k = 1, \dots, n$ είναι ομαλές και ισχύει ότι:

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ είναι ορθογώνια βάση του } H_0^1(U),$$

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ είναι ορθοκανονική βάση του } L^2(U).$$

Σταθεροποιούμε τώρα έναν θετικό ακέραιο m . Θα ψάξουμε για μία συνάρτηση $u_m : [0, T] \rightarrow H_0^1(U)$ της μορφής:

$$u_m := \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k, \quad (2.3.1)$$

όπου επιλέγουμε τους συντελεστές $d_m^k(t)$, $0 \leq t \leq T$, $k = 1, \dots, m$ ώστε:

$$d_m^k(0) = (u_0, w_k), \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.3.2)$$

και

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}, w_k \right) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k), \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.3.3)$$

Ουσιαστικά, αναζητούμε μια συνάρτηση u_m της μορφής (2.3.1) που να ικανοποιεί την προβολή (2.3.3) του προβλήματος (2.1.1) στον χώρο πεπερασμένης διάστασης που παράγεται από την $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Θεώρημα 2.3.1. (Κατασκευή προσεγγιστικών λύσεων)
(βλ [7, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 376])

Για κάθε ακέραιο $m = 1, 2, \dots$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση u_m της μορφής (2.3.1) που να ικανοποιεί τις (2.3.2), (2.3.3).

Απόδειξη. Υποθέτοντας ότι η u_m έχει την μορφή (2.3.1) και αφού ισχύει ότι η $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(U)$, παρατηρούμε ότι:

$$\left(\frac{\partial u_m(t)}{\partial t}, w_k\right) = d_{m_t}^k(t),$$

όπου με τον δείκτη t εννοούμε την χρονική παράγωγο των d_m^k .

Επιπλέον,

$$B[u_m, w_k; t] = \sum_{l=1}^m e^{kl}(t) d_m^l(t),$$

για $e^{kl}(t) := B[w_l, w_k; t]$ με $k, l = 1, \dots, m$.

Στην συνέχεια, γράφουμε: $f^k := (f(t), w_k)$, με $k = 1, \dots, m$.

Τότε, η (2.3.3) μετατρέπεται σε γραμμικό σύστημα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων:

$$d_{m_t}^k(t) + \sum_{l=1}^m e^{kl}(t) d_m^l(t) = f^k(t), \quad k, l = 1, \dots, m,$$

με τις αρχικές συνθήκες (2.3.2).

Σύμφωνα με την θεωρία ύπαρξης λύσης στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, υπάρχει μοναδική, απολύτως συνεχής συνάρτηση $d_m(t) = (d_m^1(t), \dots, d_m^m(t))$ που ικανοποιεί το παραπάνω σύστημα για τις αρχικές συνθήκες (2.3.2) για σχεδόν όλα τα $0 \leq t \leq T$.

Τότε, η u_m όπως ορίζεται στην (2.3.1) λύνει την (2.3.3) για σχεδόν όλα τα $0 \leq t \leq T$. \square

Ύπαρξη και Μοναδικότητα

Θεώρημα 2.3.2. Ύπαρξη ασθενούς λύσης (βλ [7, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 378])

Υπάρχει ασθενής λύση του (2.1.1).

Απόδειξη. Η ακολουθία $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη στον $L^2(0, T; H_0^1(U))$ και

η $\left\{\frac{\partial u_m(t)}{\partial t}\right\}_{m=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη στον $L^2(0, T; H^{-1}(U))$ (βλέπε [7]).

Συνεπώς, υπάρχει υπακολουθία $\{u_{m_l}\}_{l=1}^{\infty} \subset \{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ και συνάρτηση $u \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ με $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} u_{m_l} \rightarrow u \text{ ασθενώς στον } L^2(0, T; H_0^1(U)), \\ \frac{\partial u_{m_l}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \text{ ασθενώς στον } L^2(0, T; H^{-1}(U)). \end{cases}$$

Στην συνέχεια, σταθεροποιούμε έναν ακέραιο N και διαλέγουμε μία τυχαία δοκιμαστική συνάρτηση $v \in C^1([0, T]; H_0^1(U))$ που λαμβάνει την μορφή:

$$v(t) = \sum_{k=1}^N d^k(t) w_k,$$

όπου $\{d^k\}_{k=1}^N$ ομαλές συναρτήσεις και η $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ είναι η ορθοκανονική βάση του $H_0^1(U)$. Επιλέγουμε $m \geq N$, πολλαπλασιάζουμε την (2.3.3) με $d^k(t)$, αθροίζουμε για $k = 1, \dots, N$ και μετά ολοκληρώνουμε ως προς t για να βρούμε:

$$\int_0^T \left(\left\langle \frac{\partial u_m}{\partial t}, v \right\rangle + B[u_m, v; t] \right) dt = \int_0^T (f, v) dt.$$

Για δείκτη $m = m_l$, περνάμε σε ασθενή όρια καθώς $u_{m_l} \rightarrow u$ ασθενώς στον $L^2(0, T; H_0^1(U))$, και $\frac{\partial u_{m_l}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}$ ασθενώς στον $L^2(0, T; H^{-1}(U))$. Έτσι, έχουμε:

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle + B[u, v; t] = \int_0^T (f, v) dt.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για όλες τις συναρτήσεις $v \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ και, αφού είναι της μορφής $v(t) = \sum_{k=1}^N d^k(t)w_k$, καταλήγουμε πως είναι πυκνές σε αυτόν τον χώρο. Έτσι, προκύπτει ότι:

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle + B[u, v; t] = (f, v),$$

για κάθε $v \in H_0^1(U)$ και για σχεδόν όλα τα $0 \leq t \leq T$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι $u \in C([0, T]; L^2(U))$ (βλέπε [7]).

Τέλος, για να δείξουμε ότι $u(0) = u_0$ ακολουθούμε όμοια διαδικασία και παρατηρούμε πρώτα ότι ο ορισμός της ασθενούς λύσης είναι ισοδύναμος με:

$$\int_0^T -\langle v_t, u \rangle + B[u, v; t] = \int_0^T (f, v) dt + (u(0), v(0)),$$

για κάθε $v \in C^1([0, T]; H_0^1(U))$ με $v(T) = 0$. Η παραπάνω σχέση προκύπτει ολοκληρώνοντας την (2.2.1) στον χρόνο. Με τον δείκτη t εννοούμε την χρονική παράγωγο του v .

Στην συνέχεια, διαλέγουμε $m \geq N$ και όπως προηγουμένως βρίσκουμε:

$$\int_0^T -\langle v_t, u_m \rangle + B[u_m, v; t] = \int_0^T (f, v) dt + (u_m(0), v(0)).$$

Θέτουμε $m = m_l$, περνάμε ξανά σε ασθενή όρια και έχουμε:

$$\int_0^T -\langle v_t, u \rangle + B[u, v; t] = \int_0^T (f, v) dt + (u_0, v(0)),$$

αφού $u_{m_l}(0) \rightarrow u_0$ στον $L^2(U)$.

Επειδή το $v(0)$ είναι αυθαίρετο συμπεραίνουμε ότι $u(0) = u_0$. □

Θεώρημα 2.3.3. *Μοναδικότητα της ασθενούς λύσης*
(βλ [7, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 379])

Η ασθενής λύση του (2.1.1) είναι μοναδική.

Απόδειξη. Λόγω της γραμμικότητας των εξισώσεων, αρκεί να δείξουμε ότι η μόνη ασθενής λύση του (2.1.1) με $f \equiv u_0 \equiv 0$ είναι η $u \equiv 0$. Υπενθυμίζουμε ότι u είναι η ασθενής λύση του προβλήματος:

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle + B[u, v; t] = (f, v),$$

για κάθε $v \in H_0^1(U)$ και για σχεδόν όλα τα $0 \leq t \leq T$.

Σε αυτή, για $f \equiv 0$, θέτουμε $v = u$ και συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u\|_{L^2(U)}^2 \right) + B[u, u; t] = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u \right\rangle + B[u, u; t] = 0.$$

Από την υπόθεση για τους συντελεστές της διγραμμικής μορφής $B[u, v; t]$ και από την ανισότητα Gronwall καταλήγουμε ότι $u \equiv 0$. □

Θεώρημα 2.3.4. *Ανισότητα Gronwall* (βλ [7, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 379])

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $u, k : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ και $K > 0$. Αν ικανοποιούν την σχέση:

$$u(t) \leq K + \int_t^0 u(s)k(s)ds$$

για όλα τα $t \in [0, T]$, τότε ισχύει:

$$u(t) \leq K e^{\left(\int_t^0 k(s)ds \right)}.$$

Εφαρμογή για την εξίσωση της Θερμότητας

Η εξίσωση της θερμότητας μπορεί να προσδιοριστεί από την γενική μορφή του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών (2.1.1) θέτοντας ως $U = [0, 1]$, $u_0 = u_0(x)$ και ως τελεστή $L = -\Delta = -\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, με αντίστοιχα $a^{ij} \equiv 0$, για $i \neq j$, $a^{ii} \equiv \mu$ και $b^i \equiv c \equiv 0$. Έτσι, η διγραμμική μορφή $B[u, v; t]$ γίνεται

$$B(u(t), v) = \int_0^1 \mu \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

και με αυτόν τον τρόπο προκύπτει το παρακάτω πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, & U_T = [0, 1] \times (0, T]. \\ u = 0, & \{x = 0, x = 1\} \times [0, T]. \\ u = u_0, & [0, 1] \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

όπου $f : U_T \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 : U = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και $u : U_T \rightarrow \mathbb{R}$, η άγνωστη $u = u(x, t)$. Συγκεκριμένα, η $u = u(x, t)$ περιγράφει την θερμοκρασία στο σημείο x για χρόνο t μιας μεταλλικής μπάρας μοναδιαίου μήκους που καταλαμβάνει το διάστημα $[0, 1]$. Η θερμική της αγωγιμότητα είναι σταθερή και ίση με $\mu > 0$, τα άκρα της διατηρούν σταθερή θερμοκρασία 0 βαθμών, την χρονική στιγμή $t = 0$, η θερμοκρασία της στο σημείο x περιγράφεται από την $u_0(x)$ και η $f(x, t)$ εκφράζει την παραγωγή θερμότητας ανά μονάδα μήκους για δεδομένο σημείο x και χρόνο t . Θεωρούμε ακόμη ότι η ογκομετρική πυκνότητα ρ και η ειδική θερμότητα ανά μονάδα μάζας c_ρ είναι σταθερές και μοναδιαίες, διαφορετικά ο όρος $\frac{\partial u}{\partial t}$ της (2.3.4) θα έπρεπε να πολλαπλασιαστεί με ρc_ρ . Το παραπάνω πρόβλημα αποτελεί ειδική περίπτωση του γενικού προβλήματος (2.1.1), για το οποίο από τα Θεωρήματα 2.3.2 και 2.3.3 αποδείξαμε αντίστοιχα την ύπαρξη και την μοναδικότητα ασθενούς λύσης. Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε για το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών που περιγράφει την εξίσωση της θερμότητας την ύπαρξη και την μοναδικότητα ασθενούς λύσης.

Παρατήρηση 2.3.1.

Γενικά, οι δεύτερης τάξης παραβολικές εξισώσεις αφορούν φυσικές εφαρμογές και περιγράφουν την εξέλιξη της πυκνότητας της ποσότητας u σε χωρίο U ως προς τον χρόνο. Ο δεύτερης τάξης όρος $\sum_{i,j=1}^{\infty} a^{ij} u_{x_i x_j}$ περιγράφει την διάχυση, ο πρώτης τάξης όρος $\sum_{i,j=1}^{\infty} b^i u_{x_i}$ περιγράφει την μεταφορά και ο μηδενικός όρος cu περιγράφει την δημιουργία ή την εξάντληση.

2.4 Ισχυρές Λύσεις

Οι βελτιωμένες υποθέσεις ομαλότητας των δεδομένων που είδαμε στο (2.3.4) μπορούν να οδηγήσουν σε βελτιωμένη ομαλότητα των λύσεων. Δηλαδή, εκτός από την ύπαρξη και μοναδικότητα της ασθενούς λύσης του προβλήματος (2.3.4), μπορούμε να αποδείξουμε ότι έχει και μοναδική ομαλή λύση.

Για καλύτερη κατανόηση των εννοιών της ενότητας, επιλέγουμε αρχικά $U = \mathbb{R}^n$ και υποθέτουμε ότι η $u = u(x, t)$ είναι μια ομαλή λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, \mathbb{R}^n \times (0, T]. \\ u = u_0, \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

όπου $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Υποθέτουμε, ακόμη, ότι η u τείνει στο μηδέν καθώς $|x| \rightarrow \infty$ επαρκώς γρήγορα, ώστε να δικαιολογούνται οι παρακάτω υπολογισμοί. Στην συνέχεια, για $0 \leq t \leq T$ υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_t - \Delta u)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\Delta u u_t + (\Delta u)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + 2DuDu_t + (\Delta u)^2 dx. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Εξ ορισμού ισχύει ότι $2DuDu_t = \frac{d}{dt}(|Du|^2)$, οπότε συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} 2DuDu_t = \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 dx \Big|_{s=0}^{s=t}. \quad (2.4.3)$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i} u_{x_j x_j} dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_j} u_{x_i x_j} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx \end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx \quad (2.4.4)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.4.3), (2.4.4) στην (2.4.2) και ολοκληρώνοντας ως προς τον χρόνο καταλήγουμε:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + |D^2 u|^2 dx dt \leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |Du_0|^2 dx \right).$$

Βλέπουμε ότι μπορούμε να εκτιμήσουμε τις L^2 νόρμες των u_t και D^2u στο $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ ως προς την L^2 νόρμα της f στο $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ και την L^2 νόρμα του Du_0 στον \mathbb{R}^n . Στην συνέχεια παραγωγίζουμε την (2.4.1) ως προς t και προκύπτει:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u_t = f_t, \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u_t = u_{0,t}, \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.4.5)$$

όπου $u_{0,t} = u_t(\cdot, 0) = f(\cdot, 0) + \Delta u_0$.

Πολλαπλασιάζουμε την $u_{tt} - \Delta u_t = f_t$ με u_t , ολοκληρώνουμε κατά μέλη και χρησιμοποιούμε την ανισότητα Gronwall για να καταλήξουμε πως:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |Du_t|^2 dx dt \leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u_0|^2 + f(\cdot, 0) dx \right). \quad (2.4.6)$$

Αλλά, από το Θεώρημα (1.4.1) ισχύει ότι:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|f(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))} + \|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))} \right). \quad (2.4.7)$$

Επιπλέον, γράφοντας $-\Delta u = f - u_t$ βρίσκουμε ότι:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + u_t^2 dx. \quad (2.4.8)$$

Συνδυάζοντας τις (2.4.6) - (2.4.8) καταλήγουμε στην εκτίμηση:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 + |D^2 u|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |Du_t|^2 dx dt \\ \leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 + f^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u_0|^2 dx \right). \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι αν αυξήσουμε τις απαιτήσεις ομαλότητας των δεδομένων, αυξάνεται η ομαλότητα της λύσης.

Θεώρημα 2.4.1. *Βελτιωμένη Ομαλότητα (βλ [7, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 382])*

Υποθέτουμε ότι $u_0 \in H_0^1(U)$ και $f \in L^2(0; T; L^2(U))$.

Θεωρούμε ακόμη ότι $u \in L^2(0; T; H_0^1(U))$ με $u_t \in L^2(0; T; H^{-1}(U))$ είναι η ασθενής λύση του προβλήματος (2.1.1).

Τότε, ισχύει ότι:

$$u \in L^2(0; T; H^2(U)) \cap L^\infty(0; T; H_0^1(U)), \quad u_t \in L^2(0; T; H^2(U)),$$

και έχουμε την εκτίμηση:

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{H_0^1(U)} + \|u\|_{L^2(0; T; H^2(U))} + \|u_t\|_{L^2(0; T; L^2(U))} \\ \leq C \left(\|f\|_{L^2(0; T; L^2(U))} + \|u_0\|_{H_0^1(U)} \right) \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα U , T και τους συντελεστές του L .
Αν επιπλέον $u_0 \in H^2(U)$, $f_t \in L^2(0; T; L^2(U))$ τότε

$$u \in L^\infty(0; T; H^2(U)), u_t \in L^\infty(0; T; L^2(U)) \cap L^2(0; T; H_0^1(U)), u_{tt} \in L^2(0; T; H^{-1}(U)),$$

και ισχύει η εκτίμηση:

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} (\|u\|_{H^2(U)} + \|u_t\|_{L^2(U)}) + \|u_t\|_{L^2(0; T; H_0^1(U))} + \|u_{tt}\|_{L^2(0; T; H^{-1}(U))} \\ \leq C \left(\|f\|_{H^1(0; T; L^2(U))} + \|u_0\|_{H^2(U)} \right). \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Απόδειξη. Βλέπε [7, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 382]. \square

Θεώρημα 2.4.2. Υψηλότερη Ομαλότητα (βλ [7, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 386])

Έστω $u_0 \in H^{2m+1}(U)$, $\frac{d^k f}{dt^k} \in L^2(0, T, H^{2m-2k}(U))$ με $k = 0, \dots, m$. Υποθέτουμε ακόμη ότι ισχύει η ακόλουθη συνθήκη συμβατότητας m -τάξης:

$$\begin{cases} u_{0_0} := u_0 \in H_0^1(U), u_{0_1} := f(0) - Lu_{0_0} \in H_0^1(U), \\ \dots, u_{0_m} := \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} - Lu_{0_{m-1}} \in H_0^1(U), \end{cases}$$

τότε $\frac{d^k u}{dt^k} \in L^2(0, T, H^{2m+2-2k}(U))$ με $k = 0, \dots, m+1$ και ισχύει η εκτίμηση:

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T, H^{2m+2-2k}(U))} \leq C \left(\sum_{k=0}^m \left\| \frac{d^k f}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T, H^{2m-2k}(U))} + \|u_0\|_{H^{2m+1}(U)} \right)$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα m , U , T και τους συντελεστές του L .

Απόδειξη. Βλέπε [7, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 386]. \square

Τέλος, εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα για $m = 0, 1, \dots$ προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.3. Άπειρη Διαφορισιμότητα (βλ [7, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 388])

Έστω ότι $u_0 \in C^\infty(\bar{U}_T)$ και ότι οι συνθήκες συμβατότητας m -τάξης ισχύουν για $m = 0, 1, \dots$. Τότε, το παραβολικό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (2.1.1) έχει μοναδική ομαλή λύση $u \in C^\infty(\bar{U}_T)$.

Απόδειξη. Βλέπε [7, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 388]. \square

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, πως το πρόβλημά μας (2.3.4) έχει μοναδική ομαλή λύση. Δηλαδή, για $U = [0, 1]$, $u_0 = u_0(x)$ και με τελεστή $L = -\Delta = -\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, η εξίσωση της θερμότητας, που εκφράζεται από παρακάτω πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, U_T = [0, 1] \times (0, T]. \\ u = 0, \{x = 0, x = 1\} \times [0, T]. \\ u = u_0, [0, 1] \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

όπου $f : U_T \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 : U = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και $u : U_T \rightarrow \mathbb{R}$, έχει μοναδική ομαλή λύση $u = u(x, t)$.

Κεφάλαιο 3

Μέθοδοι Διακριτοποίησης για την Εξίσωση της Θερμότητας

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με την εξίσωση της θερμότητας και με τις αριθμητικές μεθόδους για την επίλυσή της. Μελετάμε τις μεθόδους των Πεπερασμένων Διαφορών και των Πεπερασμένων Στοιχείων και εξετάζουμε την ευστάθεια της θ Μεθόδου. Για αυτό το κεφάλαιο αξιοποιήσαμε την αναφορά [3, Κεφάλαιο 13, Σελίδες 581-593].

3.1 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών

Στην γενική περίπτωση που θέλουμε να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση $g(x)$ σε ένα διάστημα $[0, 1]$ με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών, ξεκινάμε διαμερίζοντας το διάστημα σε $n + 1$ κόμβους (όπου $n \in \mathbb{Z}$ και $n \geq 2$). Θεωρούμε την προσέγγιση $x_k, k = 0, \dots, n$. Δηλαδή, x_k είναι τα σημεία διαμέρισης, με $x_0 = 0, x_n = 1$ και $x_{k+1} = x_k + h, k = 0, \dots, n - 1$ όπου $h = \frac{1}{n}$. Στην συνέχεια προσεγγίζουμε την χωρική παράγωγο της $g(x_i)$, δηλαδή την $\frac{dg(x_i)}{dx}$, δεδομένης της ύπαρξής της, χρησιμοποιώντας τις τιμές στους κόμβους και έχουμε:

$$\frac{dg(x_i)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(x_i + h) - g(x_i)}{h}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον ορισμό μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή $\frac{dg(x_i)}{dx}$ από τον λόγο:

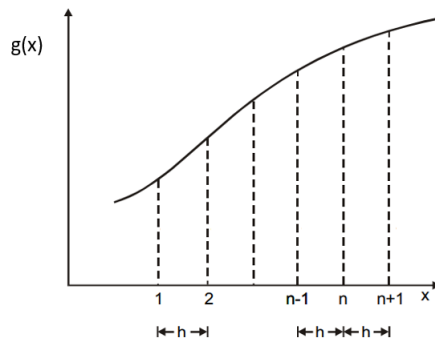
$$\frac{dg(x_i)}{dx} \approx \frac{g(x_i + h) - g(x_i)}{h},$$

για μικρές τιμές του $h > 0$, δηλαδή για επαρκώς μεγάλη τιμή του n .

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή της $\frac{dg(x_i)}{dx}$ από τον λόγο:

$$\frac{dg(x_i)}{dx} \approx \frac{g(x_i) - g(x_i - h)}{h},$$

για μικρές τιμές του $h > 0$.



Σχήμα 3.1: Διατύπωση Πεπερασμένων Διαφορών

Με όμοιο τρόπο από τον ορισμό της δεύτερης παράγωγου μιας συνάρτησης, για την προσέγγιση της $\frac{d^2g(x_i)}{dx^2}$, δεδομένης της ύπαρξής της, έχουμε:

$$\frac{d^2g(x_i)}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{dg(x_i+h)}{dx} - \frac{dg(x_i)}{dx}}{h}.$$

Έτσι μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή της $\frac{d^2g(x_i)}{dx^2}$ από τον λόγο:

$$\frac{d^2g(x_i)}{dx^2} \approx \frac{\frac{dg(x_i+h)}{dx} - \frac{dg(x_i)}{dx}}{h},$$

για μικρές τιμές του $h > 0$, δηλαδή για επαρκώς μεγάλη τιμή του n .

Αντικαθιστώντας τις τιμές $\frac{dg(x_i+h)}{dx}$ και $\frac{dg(x_i)}{dx}$ με τις αντίστοιχες προσεγγίσεις μπορούμε να καταλήξουμε:

$$\frac{d^2g(x_i)}{dx^2} \approx \frac{g(x_i+h) - 2g(x_i) + g(x_i-h)}{h^2}.$$

Στην περίπτωση μας, για την επίλυση της εξίσωσης της θερμότητας, πρέπει να διακριτοποιήσουμε την μεταβλητή x . Ξεκινάμε και διαιρούμε, όπως αναφέραμε, το διάστημα $[0, 1]$ σε $n + 1$ υποδιαστήματα. Ορίζουμε ως $u_i(t)$ μια προσέγγιση της $u(x_i, t)$, όπου $x_i, i = 0, \dots, n$ τα σημεία διαμέρισης, όπως προηγουμένως με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών. Το σύνολο των προσεγγίσεων u_i είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $\{u_i\}_{i=0}^n$ η οποία ορίζεται μόνο στα διακριτά σημεία $\{x_i\}_{i=0}^n$. Τότε, συμβολίζοντας με την άνω τελεία την παράγωγο ως προς τον χρόνο, δηλαδή $\dot{u}_i(t) = \frac{\partial u}{\partial t}$, το πρόβλημά μας (2.3.4) γίνεται αντίστοιχα:

$$\begin{cases} \dot{u}_i(t) - \frac{\mu}{h^2}(u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)) = f_i(t), & i = 1, \dots, n-1, \forall t > 0, \\ u_0(t) = u_n(t) = 0, & \forall t > 0, \\ u_i(0) = u_0(x_i), & i = 0, \dots, n, \end{cases}$$

όπου $f_i(t) = f(x_i, t)$. Το παραπάνω θεωρείται ημι-διακριτοποίηση του προβλήματος (2.3.4) στον χώρο και περιγράφεται ως ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων της ακόλουθης μορφής:

$$\begin{cases} \dot{\vec{u}}(t) = -\mu A_{fd} \vec{u}(t) + \vec{f}(t), & \forall t > 0, \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

όπου $\vec{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_{n-1}(t))$ είναι το διάνυσμα των αγνώστων, $\vec{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_{n-1}(t))$, $\vec{u}_0 = (u_0(x_1), \dots, u_0(x_{n-1}))$ και A_{fd} είναι ο τριδιαγώνιος συμμετρικός πίνακας διαστάσεων $(n-1) \times (n-1)$ που ορίζεται ως:

$$A_{fd} = \frac{1}{h^2} \text{tridiag}_{n-1}(-1, 2, -1) = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

με $h = \frac{1}{n}$. Επίσης, έχουμε υποθέσει ότι $u_0(x_0) = u_0(x_n) = 0$ που είναι λογικά συνεπές με τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (2.3.4). Για την ολοκλήρωση της (3.1.1) ως προς τον χρόνο θα χρησιμοποιήσουμε την Θ-Μέθοδο. Ορίζουμε v^k την τιμή της μεταβλητής v την χρονική στιγμή $t^k = k\Delta t$, με $\Delta t > 0$ και η Θ-Μέθοδος για την χρονική ολοκλήρωση της (3.1.1) είναι:

$$\begin{cases} \frac{\vec{u}^{k+1} - \vec{u}^k}{\Delta t} = -\mu A_{fd}(\theta \vec{u}^{k+1} + (1-\theta)\vec{u}^k) + \theta \vec{f}^{k+1} + (1-\theta)\vec{f}^k, k = 0, 1, \dots \\ \vec{u}^0 = \vec{u}_0, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

όπου \vec{u}^k είναι η τιμή του διανύσματος $u(t)$ την χρονική στιγμή t^k .
Ισοδύναμα,

$$(I + \mu\theta\Delta t A_{fd})\vec{u}^{k+1} = (I - \mu(1-\theta)\Delta t A_{fd})\vec{u}^k + \vec{g}^{k+1}, \quad (3.1.3)$$

όπου $\vec{g}^{k+1} = \Delta t(\theta \vec{f}^{k+1} + (1-\theta)\vec{f}^k)$ και I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης $n-1$. Ο πίνακας $(I + \mu\theta\Delta t A_{fd})$ έχει αυστηρή διαγώνια υπεροχή, οπότε είναι αντιστρέψιμος. Επομένως, η (3.1.3) έχει μοναδική λύση.

Για κατάλληλες τιμές της παραμέτρου θ η (3.1.3) συμπίπτει με γνωστές μεθόδους. Για παράδειγμα, για $\theta = 0$ η (3.1.3) συμπίπτει με την μέθοδο Explicit Euler, για $\theta = \frac{1}{2}$ με την Μέθοδο Crank-Nicolson, και για $\theta = 1$ με την μέθοδο Implicit Euler.

Από την ακριβή λύση του προβλήματος (2.3.4), η $u(x, t)$ τείνει στο μηδέν για κάθε x καθώς $t \rightarrow \infty$. Αν η διακριτή λύση έχει την ίδια συμπεριφορά, τότε το σχήμα της (3.1.3) καλείται ασυμπτωτικά ευσταθές.

Μελετάμε την ευστάθεια της μεθόδου για $\theta = 0$. Για $F \equiv 0$, έχουμε ότι $\vec{g}^k \equiv 0$ και από την (3.1.3) το σχήμα παίρνει την μορφή:

$$\vec{u}^k = (I - \mu\Delta t A_{fd})^k \vec{u}^0, k = 1, 2, \dots$$

Έτσι, σύμφωνα με την ανάλυση των συγκλίνοντων πινάκων, καταλήγουμε ότι $\vec{u}^k \rightarrow \vec{0}$ καθώς $k \rightarrow \infty$ αν και μόνο αν για την φασματική ακτίνα του πίνακα $(I - \mu\theta\Delta t A_{fd})$ ισχύει ότι:

$$\rho(I - \mu\Delta t A_{fd}) < 1. \quad (3.1.4)$$

Δηλαδή, η μέγιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα να είναι μικρότερη του 1. Από την άλλη, οι ιδιοτιμές του A_{fd} δίνονται από την σχέση:

$$\lambda_i = \frac{4}{h^2} \sin(i\pi \frac{h}{2}), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Οπότε, η (3.1.4) ικανοποιείται αν και μόνο αν

$$\Delta t < \frac{1}{2\mu} h^2.$$

Όπως αναμέναμε, η Προς τα Εμπρός Μέθοδος Euler είναι ευσταθής υπό προϋποθέσεις και το χρονικό βήμα Δt φθίνει όπως το τετράγωνο του διαστήματος h του πλέγματος. Για $\nu=1$, η (3.1.3) συμπίπτει με την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler και παίρνει την μορφή:

$$\vec{u}^k = [(I + \mu\Delta t A_{fd})^{-1}]^k \vec{u}^0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Τότε, όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $(I + \mu\Delta t A_{fd})^{-1}$ είναι πραγματικές, θετικές και αυστηρά μικρότερες του 1 για κάθε τιμή του Δt . Επομένως το σχήμα θα είναι απόλυτα ευσταθές.

Τοπικό Σφάλμα Διακριτοποίησης

Για μια αριθμητική μέθοδο, το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης εκφράζει την διαφορά της πραγματικής λύσης από την εκτιμώμενη λύση που προκύπτει μέσω της μεθόδου. Αν το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης τείνει στο 0, τότε η αριθμητική μέθοδος λέγεται συνεπής. Ακόμη, λέμε ότι η αριθμητική μέθοδος έχει ευστάθεια p τάξης ως προς τον χρόνο και q τάξης ως προς τον χώρο (για κατάλληλους ακεραίους p, q), αν το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης είναι της μορφής:

$$\tau(\Delta t, h) = O(\Delta t^p + h^q).$$

Σχετικά με την ακρίβεια της Θ -Μεθόδου, ισχύει ότι το τοπικό σφάλμα είναι της τάξης $\Delta t + h^2$ για $\theta \neq \frac{1}{2}$, ενώ για $\theta = \frac{1}{2}$ είναι της τάξης $\Delta t^2 + h^2$. (βλέπε [2])

Η μέθοδος που αντιστοιχεί στο $\theta = \frac{1}{2}$ καλείται Μέθοδος Crank-Nicolson, είναι απόλυτα ευσταθής και έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης ως προς τα Δt και h .

3.2 Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων αποτελεί ειδική μέθοδο για την κατασκευή του υπόχωρου V_h που βασίζεται στην κατά τμήματα πολυωνυμική παρεμβολή. Θεωρούμε μια διαμέριση \mathcal{T}_h του $[0, 1]$ σε n υποδιαστήματα $I_j = [x_j, x_{j+1}]$, $n \geq 2$ μήκους $h_j = x_{j+1} - x_j$, $j = 0, \dots, n-1$ με

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1,$$

και έστω $h = \max_{\tau_h}(h_j)$. Αφού οι συναρτήσεις στον $H_0^1(0, 1)$ είναι συνεχείς, μπορούμε να θεωρήσουμε για $k \geq 1$ την οικογένεια των κατά τμήματα πολυωνύμων βαθμού k X_h^k . Δηλαδή, κάθε συνάρτηση $v_h \in X_h^k$ είναι ένα τμηματικά συνεχές πολυώνυμο στο $[0, 1]$ και ο περιορισμός της σε κάθε υποδιάστημα $I_j \in \mathcal{T}_h$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου με k . Θέτουμε

$$V_h = X_h^{k,0} = \{v_h \in X_h^k : v_h(0) = 0, v_h(1) = 0\},$$

όπου X_h^k η οικογένεια των τμηματικών πολυωνύμων στο διάστημα $[0, 1]$, με $k \geq 1$. Η διάσταση του χώρου πεπερασμένων στοιχείων V_h ισούται με $nk - 1$.

Η χωρική διακριτοποίηση της (2.3.4) μπορεί να επιτευχθεί με την Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων Galerkin, όπως περιγράψαμε παραπάνω. Αρχικά, για όλα τα $t > 0$ πολλαπλασιάζουμε την σχέση (2.3.4) με την δοκιμαστική συνάρτηση $v = v(x)$ και ολοκληρώνουμε στο διάστημα $(0,1)$. Στον χώρο $H_0^1(0,1)$ για κάθε $t > 0$ αναζητούμε συνάρτηση $t \mapsto u(x, t) \in H_0^1(0, 1)$, δηλαδή $u(t) \in H_0^1(0, 1)$, τέτοια ώστε:

$$\int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} v dx + B(u(t), v) = F(v), \forall v \in H_0^1(0, 1), \quad (3.2.1)$$

με $u(0) = u_0$. Εδώ, το $B(u(t), v) = \int_0^1 \mu \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx$ και το $F(v) \equiv (F, v) = \int_0^1 f(t) v dx$ είναι η διγραμμική μορφή και το γραμμικό συναρτησοειδές αντίστοιχα.

Ο V_h είναι κατάλληλος υπόχωρος του $H_0^1(0, 1)$ πεπερασμένης διάστασης, οπότε θεωρούμε την διακριτοποίηση Galerkin: $\forall t > 0$ υπάρχει $u_h(t) \in V_h$ τέτοια ώστε:

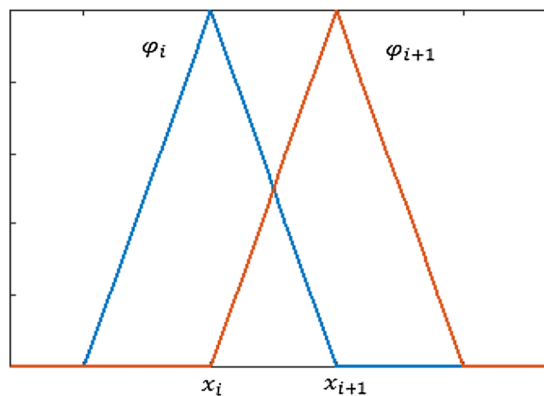
$$\int_0^1 \frac{\partial u_h(t)}{\partial t} v_h dx + B(u_h(t), v_h) = F(v_h), \forall v_h \in V_h, \quad (3.2.2)$$

όπου $u_h(0) = u_{0h}$ και $u_{0h} \in V_h$ είναι μια κατάλληλη προσέγγιση της u_0 .

Το παραπάνω θεωρείται ημι-διακριτοποίηση της (3.2.1) καθώς αφορά μόνο την διακριτοποίηση ως προς τον χώρο της εξίσωσης της θερμοτότητας.

Αναλυτικότερα, για την κατασκευή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων, θεωρούμε τις βασικές συναρτήσεις $\phi_j \forall j = 1, \dots, n - 1$ στον χώρο πεπερασμένων στοιχείων V_h . Οι ϕ_j είναι κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις που ορίζονται ως:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$



Σχήμα 3.2: Κατασκευή $\phi_j(x)$ συνάρτησης τύπου στέγη

Κάθε συνάρτηση ϕ_j έχει την μορφή "στέγης", όπως φαίνεται και από το παραπάνω σχήμα, είναι συνεχής, ομαλή και μη μηδενική σε μικρό τμήμα γύρω από τον κόμβο j . Παίρνει τιμή 1 στον κόμβο x_j και τιμή 0 στους υπόλοιπους κόμβους της διαμέρισης. Η ένωση των τμημάτων γύρω από τους κόμβους j όπου οι ϕ_j συναρτήσεις είναι μη

μηδενικές αποτελεί ένα υποσύνολο του διαστήματος $[0, 1]$ που ονομάζεται υποστήριγμα. Το υποσύνολο αυτό αποτελείται από την ένωση των διαστημάτων I_{j-1} και I_j για $1 \leq j \leq n-1$, ενώ συμπίπτει με το διάστημα I_0 όταν $j = 0$. Έτσι, η λύση της (3.2.2) μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j(t)\phi_j,$$

όπου $\{u_j(t)\}$ είναι οι άγνωστοι συντελεστές και N_h είναι η διάσταση του V_h . Έτσι, η (3.2.2) γίνεται:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{j=1}^{N_h} \dot{u}_j(t)\phi_j\phi_i dx + B\left(\sum_{j=1}^{N_h} u_j(t)\phi_j, \phi_i\right) &= F(\phi_i), i = 1, \dots, N_h \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{N_h} \dot{u}_j(t) \int_0^1 \phi_j\phi_i dx + \sum_{j=1}^{N_h} u_j(t)B(\phi_j, \phi_i) &= F(\phi_i), i = 1, \dots, N_h. \end{aligned}$$

Επομένως, προκύπτει:

$$M\ddot{u}(t) + A_{fe}\dot{u}(t) = \vec{f}_{fe}(t), \quad (3.2.3)$$

όπου $M = (m_{ij}) = \int_0^1 \phi_j\phi_i dx$ με $i, j = 1, \dots, N_h$ και $A_{fe} = (B(\phi_j, \phi_i))$, $\vec{f}_{fe}(t) = (F(\phi_i))$. Ο πίνακας A_{fe} είναι συμμετρικός λόγω του ορισμού της διγραμμικής μορφής. Ο πίνακας M είναι συμμετρικός αφού:

$$(m_{ij}) = \int_0^1 \phi_j\phi_i dx = \int_0^1 \phi_i\phi_j dx = (m_{ji}).$$

Ακόμη, για δείκτες $i, j : |i - j| > 1$ προκύπτει ότι $M = 0$. Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} m_{j-1,j} &= m_{j,j-1} = 0, \\ M &= (m_{jj}) = \int_0^1 \phi_j^2 dx > 0. \end{aligned}$$

Επομένως, ο πίνακας M είναι ένας τριδιαγώνιος πίνακας με στοιχεία m_{jj} στην κύρια διαγώνιό του. Άρα, ο M είναι αντιστρέψιμος και γι' αυτό η σχέση (3.2.3) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\ddot{u}(t) = -M^{-1}A_{fe}\dot{u}(t) + -M^{-1}\vec{f}_{fe}(t). \quad (3.2.4)$$

Για να επιλυθεί η (3.2.4) μπορούμε και πάλι να εφαρμόσουμε την Θ-Μέθοδο και έχουμε:

$$M\frac{\vec{u}^{k+1} - \vec{u}^k}{\Delta t} + A_{fe}(\theta\vec{u}^{k+1} + (1-\theta)\vec{u}^k) = \theta\vec{f}_{fe}^{k+1} + (1-\theta)\vec{f}_{fe}^k, \quad \text{για } k = 0, 1, \dots \quad (3.2.5)$$

Με τον δείκτη k εννοούμε ότι οι ποσότητες υπολογίζονται την χρονική στιγμή t^k . Όπως και προηγουμένως, για $\theta = 0, 1, 1/2$ προκύπτουν αντίστοιχα η Προς τα Έμπρός Μέθοδος Euler, η Προς τα Πίσω Μέθοδος Euler και η Crank-Nicolson Μέθοδος. Για κάθε k , η (3.2.5) είναι ένα γραμμικό σύστημα με πίνακα $K = \frac{1}{\Delta t}M + \theta A_{fe}$. Αφού οι πίνακες M και A_{fe} είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι, τότε και ο K πίνακας είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Επομένως, ο K είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον, ο πίνακας K μπορεί να γραφτεί στην μορφή παραγοντοποίησης Cholesky $K = H^T H$, όπου H άνω τριγωνικός πίνακας. Οπότε σε κάθε βήμα χρειάζεται να επιλυθούν δύο γραμμικά τριγωνικά συστήματα της μορφής:

$$\begin{cases} H^T \vec{y} = [\frac{1}{\Delta t}M - (1-\theta)A_{fe}]u^k + \theta\vec{f}_{fe}^{k+1} + (1-\theta)\vec{f}_{fe}^k, \\ Hu^{k+1} = \vec{y}. \end{cases}$$

3.3 Ανάλυση Ευστάθειας της Θ-Μεθόδου

Αρχικά, απλοποιούμε τον συμβολισμό μας. Θα συμβολίζουμε με $u^k \equiv \bar{u}^k$ και $u^{k+1} \equiv \bar{u}^{k+1}$. Εφαρμόζοντας την Θ-Μέθοδο στο πρόβλημα Galerkin (3.2.2) έχουμε:

$$\left(\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t}, v_h \right) + B(\theta u_h^{k+1} + (1 - \theta)u_h^k, v_h) = \theta F^{k+1}(v_h) + (1 - \theta)F^k(v_h) \quad (3.3.1)$$

$\forall v_h \in V_h$, για $k \geq 0$ με $u_0^h = u_{0h}$ και $F^k(v_h) = \int_0^1 f(t^k)v_h(x)dx$.

Μας ενδιαφέρει η ανάλυση της ευστάθειας, οπότε μπορούμε να εργαστούμε στην ειδική περίπτωση $F = 0$.

Θέτοντας $v_h = u_h^{k+1}$ προκύπτει ότι:

$$\left(\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t}, u_h^{k+1} \right) + B(\theta u_h^{k+1} + (1 - \theta)u_h^k, u_h^{k+1}) = 0.$$

Εξ ορισμού του $B(\cdot, \cdot)$ έπεται ότι:

$$B(u_h^{k+1}, u_h^{k+1}) = \mu \left\| \frac{\partial u_h^{k+1}(t)}{\partial x} \right\|_{L^2_{(0,1)}}^2.$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι:

$$B(\theta u_h^{k+1}, u_h^{k+1}) = \mu \theta \left\| \frac{\partial u_h^{k+1}(t)}{\partial x} \right\|_{L^2_{(0,1)}}^2 \quad \text{και} \quad B((1-\theta)u_h^{k+1}, u_h^{k+1}) = \mu(1-\theta) \left\| \frac{\partial u_h^{k+1}(t)}{\partial x} \right\|_{L^2_{(0,1)}}^2.$$

Επομένως, λαμβάνουμε:

$$\|u_h^{k+1}\|_{L^2_{(0,1)}}^2 + 2\mu\Delta t \left\| \frac{\partial u_h^{k+1}}{\partial x} \right\|_{L^2_{(0,1)}}^2 \leq \|u_h^k\|_{L^2_{(0,1)}}^2.$$

Οπότε, αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|u_h^{k+1}\|_{L^2_{(0,1)}}^2 + 2\mu\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{\partial u_h^{k+1}}{\partial x} \right\|_{L^2_{(0,1)}}^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|u_h^k\|_{L^2_{(0,1)}}^2.$$

Τα αθροίσματα είναι τηλεσκοπικά, οπότε συμπεραίνουμε ότι:

$$\|u_h^n(t)\|_{L^2_{(0,1)}}^2 + 2\mu\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{\partial u_h^{k+1}}{\partial x} \right\|_{L^2_{(0,1)}}^2 \leq \|u_{0h}\|_{L^2_{(0,1)}}^2,$$

που σημαίνει πως η μέθοδος είναι ευσταθής.

Με παρόμοιο τρόπο για $f \neq 0$ καταλήγουμε στην σχέση:

$$\|u_h^n\|_{L^2_{(0,1)}}^2 + 2\mu\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{\partial u_h^{k+1}}{\partial x} \right\|_{L^2_{(0,1)}}^2 \leq C(n) \left(\|u_{0h}\|_{L^2_{(0,1)}}^2 + \sum_{k=1}^n \Delta t \|f^k\|_{L^2_{(0,1)}}^2 \right),$$

όπου $C(n)$ σταθερά ανεξάρτητη των h και Δt .

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια της μεθόδου για κάθε θ στο διάστημα $[0, 1]$ ορίζουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της διγραμμικής μορφής $B(\cdot, \cdot)$.

Ορισμός 3.3.1. (βλ [3, Κεφάλαιο 13, Σελίδα 589])

Λέμε ότι λ είναι η ιδιοτιμή και $w \in V$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα για την διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot): V \times V \mapsto R$ αν $B(w, v) = \lambda(w, v) \forall v \in V$, όπου (\cdot, \cdot) το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(0, 1)$.

Αν η διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot)$ είναι συμμετρική και πιεστική, τότε έχει άπειρες θετικές ιδιοτιμές που ορίζουν μια μη φραγμένη ακολουθία. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους, που ονομάζονται και ιδιοσυναρτήσεις, σχηματίζουν μια βάση για τον χώρο V . Σε πεπερασμένο επίπεδο, το ζευγάρι $\lambda_h \in R, w_h \in V_h$ ικανοποιεί την:

$$A_{fe} \bar{w} = \lambda_h M \bar{w}.$$

Όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_h^1, \dots, \lambda_h^{N_h}$ είναι θετικές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $w_h^1, \dots, w_h^{N_h}$ αποτελούν βάση του υπόχωρου V_h και μπορούν να επιλεγθούν ώστε να είναι ορθοκανονικά. Υποθέτουμε τώρα ότι $\theta \in [0, 1]$ και εστιάζουμε στην περίπτωση που η διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot)$ είναι συμμετρική, αν και το τελικό αποτέλεσμα ισχύει και στην μη συμμετρική περίπτωση. Έστω $\{w_h^i\}$ τα ιδιοδιανύσματα της $B(\cdot, \cdot)$ τα οποία αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του V_h . Σε κάθε βήμα $u_h^k \in V_h$, το u_h^k μπορεί να εκφραστεί ως:

$$u_h^k(x) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j^k w_h^j(x).$$

Θέτουμε στην (3.3.1) $F = 0$ και $v_h = w_h^i$ και βρίσκουμε:

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^{N_h} [u_j^{k+1} - u_j^k] (w_h^j, w_h^i) + \sum_{j=1}^{N_h} [\theta u_j^{k+1} + (1 - \theta) u_j^k] B(w_h^j, w_h^i) = 0, i = 1, \dots, N_h.$$

Αφού τα w_h^j είναι ιδιοδιανύσματα της $B(\cdot, \cdot)$ έχουμε:

$$B(w_h^j, w_h^i) = \lambda_h^j (w_h^j, w_h^i) = \lambda_h^j \delta_{ij}.$$

Έτσι, προκύπτει ότι:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} + [\theta u_i^{k+1} + (1 - \theta) u_i^k] \lambda_h^i = 0.$$

Λύνοντας ως προς u_i^{k+1} καταλήγουμε:

$$u_i^{k+1} = u_i^k \frac{[1 - (1 - \theta) \lambda_h^i \Delta t]}{[1 + \theta \lambda_h^i \Delta t]}.$$

Για να έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια πρέπει:

$$\left| \frac{1 - (1 - \theta) \lambda_h^i \Delta t}{1 + \theta \lambda_h^i \Delta t} \right| < 1.$$

Καταλήγουμε, δηλαδή, πως για να είναι η μέθοδος ασυμπτωτικά ευσταθής πρέπει να ισχύει ότι:

$$2\theta - 1 > -\frac{2}{\lambda_h^i \Delta t}.$$

3.3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΤΗΣ Θ-ΜΕΘΟΔΟΥ

Αν $\theta \geq 1/2$, τότε η παραπάνω ανισότητα ικανοποιείται για κάθε τιμή του Δt .

Αν $\theta < 1/2$, τότε πρέπει $\Delta t < \frac{2}{(1-2\theta)\lambda_h^i}$. Αφού η παραπάνω σχέση πρέπει να ισχύει για όλες τις ιδιοτιμές λ_h^i της διγραμμικής μορφής, αρκεί να ικανοποιεί την μεγαλύτερη από αυτές, έστω $\lambda_h^{N_h}$. Επομένως, η τελευταία ανισότητα γίνεται:

$$\Delta t \leq \frac{2}{(1-2\theta)\lambda_h^{N_h}}.$$

Φράσσοντας κατάλληλα την μέγιστη ιδιοτιμή μπορούμε να καταλήξουμε στην σχέση:

$$\Delta t \leq C(\theta)h^2.$$

Κεφάλαιο 4

Εκτιμήσεις Σφάλματος της Μεθόδου Galerkin

4.1 Προσεγγίσεις για την Εξίσωση της Θερμότητας

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την κλασική μέθοδο Galerkin για πεπερασμένα στοιχεία για την επίλυση του δισδιάστατου προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών της εξίσωσης θερμότητας. Η γενική μορφή του δισδιάστατου προβλήματος είναι:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, \text{ στο } \Omega, \text{ για } t > 0, \\ u = 0, \text{ στο } \partial\Omega, \text{ για } t > 0, \\ u = u_0, \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

όπου το Ω είναι ανοικτό, συνεχτικό και φραγμένο χωρίο του \mathbb{R}^2 με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$ και όπου $u = u(x, t)$ με $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ και Δ η Λαπλασιανή που ορίζεται ως:

$$\Delta = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Ακόμη, ορίζουμε:

Ορισμός 4.1.1. (βλ [9, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 3])

Το T_h είναι η τριγωνοποίηση του Ω . Ακριβέστερα, το $T_h = \{\tau\}$ είναι ένα σύνολο από κλειστά τρίγωνα τ τέτοια ώστε: $\Omega_h = \bigcup_{\tau \in T_h} \tau$.

Οι κορυφές των τριγώνων $\tau \in T_h$ καλούνται κόμβοι της τριγωνοποίησης T_h . Απαιτούμε η τομή δύο οποιωνδήποτε τριγώνων της T_h να είναι είτε κενό, είτε ένας κόμβος, ή μια κοινή πλευρά και κανένας κόμβος να μην τοποθετείται στο εσωτερικό μιας πλευράς της T_h .

Ορισμός 4.1.2. (βλ [9, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 3])

Ο S_h είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο Ω . Αποτελείται από πολυώνυμα βαθμού $r - 1$, $r \geq 2$ που ορίζονται σε κάθε τρίγωνο της T_h και που μηδενίζονται έξω από το πολυγωνικό χωρίο Ω_h . Αν οι συναρτήσεις είναι γραμμικές, τότε $r = 2$.

Ορισμός 4.1.3. (βλ [9, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 3])

Ο τελεστής παρεμβολής μιας ομαλής $v \in \Omega$ που μηδενίζεται στο $\partial\Omega$ ορίζεται ως:

$$I_h v(x) = \sum_{j=1}^{N_h} v(P_j) \Phi_j(x),$$

όπου με $\{P_j\}_{j=1}^{N_h}$ συμβολίζουμε τις εσωτερικές κορυφές της T_h και με $\{\Phi_j\}_{j=1}^{N_h}$ τις συναρτήσεις πυραμίδας που αποτελούν βάση του S_h .

Στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε τα σφάλματα που προκύπτουν από τις προσεγγιστικές μεθόδους. Αρχικά, θα προσεγγίσουμε την $u(x, t)$ ως μια συνάρτηση $u_h(x, t)$ η οποία για κάθε δεδομένο t ανήκει σε έναν πεπερασμένης διάστασης γραμμικό χώρο S_h συναρτήσεων του x . Αυτή η συνάρτηση θα είναι μια λύση ενός h ανεξάρτητου πεπερασμένου συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων στον χρόνο. Στην συνέχεια, θα διακριτοποιήσουμε το σύστημα αυτό στην χρονική μεταβλητή για να δημιουργηθεί ένα διακριτό σχήμα για την προσεγγιστική λύση του (4.1.1). Ξεκινάμε γράφοντας το πρόβλημά μας σε ασθενή μορφή, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση της θερμότητας με μια ομαλή δοκιμαστική συνάρτηση ϕ που μηδενίζεται στο σύνορο $\partial\Omega$, ολοκληρώνουμε στο Ω και εφαρμόζουμε τον τύπο του Green στον δεύτερο όρο οπότε καταλήγουμε:

$$(u_t, \phi) + (\nabla u, \nabla \phi) = (f, \phi) \quad \forall \phi \in H_0^1, t > 0.$$

Θέτουμε όπου u το $u_h \in S_h$ και προκύπτει το προσεγγιστικό πρόβλημα:

$$(u_{h,t}, \phi) + (\nabla u_h, \nabla \phi) = (f, \phi) \quad \forall \phi \in S_h, t > 0, u_h(0) = u_{0h}. \quad (4.1.2)$$

Το παραπάνω πρόβλημα έχει διακριτή ασθενή λύση. (βλ [9, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 7])

Στόχος μας είναι η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 4.1.1. (βλ [9, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 8])

Έστω u_h και u οι λύσεις των (4.1.2) και (4.1.1) αντίστοιχα. Τότε

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq \|u_{0h} - u_0\| + Ch^r \left(\|u_0\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds \right), \quad t \geq 0.$$

Παρατήρηση 4.1.1. (βλ [9, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 8])

Εδώ, απαιτούμε η λύση του συνεχούς προβλήματος να έχει την ομαλότητα που υπονοείται από τις νόρμες στο δεξί μέλος και η u_0 να μηδενίζεται στο σύνορο $\partial\Omega$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος ορίζουμε την ελλειπτική ή Ritz προβολή R_h πάνω στον S_h ως την ορθογώνια προβολή ως προς το εσωτερικό γινόμενο ώστε:

$$(\nabla R_h w, \nabla x) = (\nabla w, \nabla x) \quad \forall x \in S_h, w \in H_0^1. \quad (4.1.3)$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1 χρησιμοποιείται το εξής λήμμα.

Λήμμα 4.1.1. (βλ [9, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 8])

Αν για την γενική περίπτωση ενός $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ με οικογένεια $\{S_h\}_{j=1}^{N_h}$ υπόχωρων του H_0^1 πεπερασμένης διάστασης, ισχύει για κάποιο $r \geq 2$ και μικρό h ότι:

$$\inf_{x \in S_h} \|w - x\| + h \|\nabla(w - x)\| \leq Ch^s \|w\|_s, \quad (4.1.4)$$

για $1 \leq s \leq r$ και $w \in H^s \cap H_0^1$, τότε με R_h ορισμένο όπως στην (4.1.3) έχουμε ότι:

$$\|R_h w - w\| + h \|\nabla(R_h w - w)\| \leq Ch^s \|w\|_s, \quad w \in H^s \cap H_0^1, \quad 1 \leq s \leq r.$$

Απόδειξη Θεωρήματος 4.1.1. Θα συγκρίνουμε ουσιαστικά την λύση του ημιδιακριτού προβλήματος με την ελλειπτική προβολή της ακριβούς λύσης. Μπορούμε να γράψουμε:

$$u_h - u = \Theta + P, \quad \text{όπου} \quad \Theta = u_h - R_h u, \quad P = R_h u - u. \quad (4.1.5)$$

Ο δεύτερος όρος φράσσεται από το Λήμμα 4.1.1 και από την ομαλότητα της λύσης (βλ. Κεφάλαιο 2), προκύπτει:

$$\|P(t)\| \leq Ch^r \|u(t)\|_r \leq Ch^r \left(\|u_0\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds \right). \quad (4.1.6)$$

Για τον όρο Θ από τους ορισμούς προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} (\Theta_t, x) &= (u_{h,t}, x) + (\nabla u_h, \nabla x) - (R_h u_t, x) - (\nabla R_h u, \nabla x) \\ &= (f, x) - (R_h u_t, x) - (\nabla u, \nabla x) \\ &= (u_t - R_h u_t, x) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

$$\Rightarrow (\Theta_t, x) + (\nabla \Theta, \nabla x) = -(P_t, x), \quad \forall x \in S_h, \quad t > 0, \quad (4.1.8)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αντιμεταθετική ιδιότητα του τελεστή R_h .

Η ποσότητα Θ ανήκει στον S_h , οπότε μπορούμε να επιλέξουμε $x = \Theta$ στην (4.1.8) και έχουμε:

$$(\Theta_t, \Theta) + \|\nabla \Theta\|^2 = -(P_t, \Theta). \quad (4.1.9)$$

Ο πρώτος όρος είναι ίσος με $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Theta\|^2$ και ο δεύτερος είναι μη αρνητικός.

Δεν γνωρίζουμε για την διαφορισμότητα του Θ , οπότε προσθέτουμε τον όρο ε^2 και έχουμε:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Theta\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\Theta\|^2 + \varepsilon^2) \leq \|P_t\| \|\Theta\|, \quad \varepsilon > 0.$$

Έτσι, προκύπτει ότι:

$$(\|\Theta\|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} (\|\Theta\|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|P_t\| \|\Theta\|.$$

Ολοκληρώνουμε καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ και αφού ισχύει ότι $\|\Theta\| \leq (\|\Theta\|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$ καταλήγουμε πως:

$$\|\Theta(t)\| \leq \|\Theta(0)\| + \int_0^t \|P_t\| ds. \quad (4.1.10)$$

Εδώ, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.1.1 έχουμε:

$$\|\Theta(0)\| = \|u_{0_h} - R_h u_0\| \leq \|u_{0_h} - u_0\| + \|R_h u_0 - u_0\| \leq \|u_{0_h} - u_0\| + Ch^r \|u_0\|_r.$$

Ακόμη, ισχύει ότι:

$$\|P_t\| = \|R_h u_t - u_t\| \leq Ch^r \|u_t\|_r,$$

οπότε προκύπτει το επιθυμητό φράγμα του $\|\Theta(t)\|$. □

4.1. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε στην σχέση (4.1.9) πως η ποσότητα $\|\nabla\Theta\|^2$ είναι μη αρνητική. Από αυτόν τον όρο, αποδεικνύεται, ακόμη, ότι η επίδραση των αρχικών δεδομένων στο σφάλμα τείνει στο μηδέν εκθετικά καθώς το t μεγαλώνει. Πράγματι, για λ_1 την μικρότερη ιδιοτιμή του $-\Delta$ με Dirichlet συννοριακές συνθήκες προκύπτει:

$$\|\nabla v\|^2 \geq \lambda_1 \|v\|^2, \quad \forall v \in H_0^1. \quad (4.1.11)$$

Έτσι, η (4.1.9) γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Theta\|^2 + \lambda_1 \|\Theta\|^2 &\leq \|P_t\| \|\Theta\| \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \|\Theta\| + \lambda_1 \|\Theta\| &\leq \|P_t\|. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \|\Theta(t)\| &\leq e^{-\lambda_1 t} \|\Theta(0)\| + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|P_t(s)\| ds \\ &\leq e^{-\lambda_1 t} \|u_{0_h} - u_0\| + Ch^r (e^{-\lambda_1 t} \|u_0\|_r + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|u_t(s)\|_r ds). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το πρώτο μέρος της και για κατάλληλα επιλεγμένο u_{0_h} καταλήγουμε:

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq Ch^r \left(e^{-\lambda_1 t} \|u_0\|_r + \|u(t)\|_r + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|u_t(s)\|_r ds \right).$$

Σχόλιο: Ο αριθμός r αναφέρεται ως τάξη ακρίβειας της οικογένειας S_h .

Συγκεκριμένα, για $r = 2$ αναφερόμαστε σε τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις, ενώ για $r > 2$, ο S_h αποτελείται από πολυώνυμα βαθμού το πολύ $r - 1$ σε μια τριγωνοποίηση T_h .

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα για την εκτίμηση σφάλματος της απόκλισης.

Θεώρημα 4.1.2. (βλ [9, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 11])

Αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.1.1, τότε προκύπτει:

$$\|\nabla u_h(t) - \nabla u(t)\| \leq C \|\nabla u_{0_h} - \nabla u_0\| + Ch^{r-1} \left(\|u_0\|_r + \|u(t)\|_r + \left(\int_0^t \|u_t\|_{r-1}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.1.12)$$

για $t \geq 0$.

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε όπως και προηγουμένως:

$$u_h - u = \Theta + P, \quad \text{όπου} \quad \Theta = u_h - R_h u, \quad P = R_h u - u.$$

Από το Λήμμα 4.1.1 ισχύει:

$$\|\nabla P(t)\| = \|\nabla(R_h u(t) - u(t))\| \leq Ch^{r-1} \|u(t)\|_r.$$

Για να εκτιμήσουμε την ποσότητα $\nabla\Theta$, χρησιμοποιούμε την (4.1.8) και δεδομένου ότι $\Theta_t \in V_h$ μπορούμε να θέσουμε $x = \Theta_t$. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} \|\Theta_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla\Theta\|^2 &= -(P_t, \Theta_t) \leq \frac{1}{2} \|P_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\Theta_t\|^2 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \|\nabla\Theta\|^2 \leq \|P_t\|^2 \\ &\Rightarrow \|\nabla\Theta(t)\|^2 \leq \|\nabla\Theta(0)\|^2 + \int_0^t \|P_t\|^2 ds \\ &\Rightarrow \|\nabla\Theta(t)\|^2 \leq (\|\nabla(u_{0h} - u_0)\| + \|\nabla(R_h u_0 - u_0)\|)^2 + \int_0^t \|P_t\|^2 ds. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας το Λήμμα 4.1.1 προκύπτει ότι:

$$\|\nabla\Theta(t)\|^2 \leq 2\|\nabla(u_{0h} - u_0)\|^2 + Ch^{2r-2} \left(\|u_0\|_r^2 + \int_0^t \|u_t\|_{r-1}^2 ds \right) \quad (4.1.13)$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

4.2 Η περίπτωση της Προς τα Πίσω Euler Μεθόδου

Έστω Δt το χρονικό βήμα και U^n η προσέγγιση της $u(t)$ στον S_h για $t = t_n = n\Delta t$. Η μέθοδος ορίζεται αντικαθιστώντας την παράγωγο ως προς τον χρόνο στην (4.1.2) με ένα πηλίκο προς τα πίσω διαφοράς, δηλαδή $\bar{\partial}U^n = \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t}$. Έτσι, προκύπτει ότι:

$$(\bar{\partial}U^n, x) + (\nabla U^n, \nabla x) = (f(t_n), x), \quad \forall x \in S_h, \quad n \geq 1, \quad U^0 = u_0. \quad (4.2.1)$$

Για δοσμένο U^{n-1} , η U^n ορίζεται έμμεσα από την εξίσωση:

$$(U^n, x) + \Delta t (\nabla U^n, \nabla x) = (U^{n-1} + \Delta t f(t_n), x), \quad \forall x \in S_h.$$

Θεώρημα 4.2.1. (βλ [9, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 15])

Για U^n και u τις λύσεις των (4.2.1) και (4.1.1) αντίστοιχα έχουμε ότι αν $\|u_{0h} - u_0\| \leq Ch^r \|u_0\|_r$, τότε:

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^r \left(\|u_0\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds \right) + \Delta t \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds$$

για $n \geq 0$.

Απόδειξη. Ομοίως με την (4.1.5), ορίζουμε:

$$U^n - u(t_n) = (U^n - R_h u(t_n)) + (R_h u(t_n) - u(t_n)) = \Theta^n + P^n,$$

όπου $P^n = P(t_n)$ είναι φραγμένη όπως στην (4.1.6). Ο υπολογισμός που αντιστοιχεί στην (4.1.8) δίνει:

$$(\bar{\partial}\Theta^n, x) + (\nabla\Theta^n, \nabla x) = -(\omega^n, x), \quad \forall x \in S_h, \quad n \geq 1, \quad (4.2.2)$$

όπου

$$\omega^n = R_h \bar{\partial} u(t_n) - u(t_n) = (R_h - I) \bar{\partial} u(t_n) + (\bar{\partial} u(t_n) - u_t(t_n)) = \omega_1^n + \omega_2^n.$$

Επιλέγουμε $x = \Theta^n$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} (\bar{\partial} \Theta^n, \Theta^n) &\leq \|\omega^n\| \|\Theta^n\| \\ \Rightarrow \|\Theta^n\|^2 - (\Theta^{n-1}, \Theta^n) &\leq \Delta t \|\omega^n\| \|\Theta^n\| \\ \Rightarrow \|\Theta^n\| &\leq \|\Theta^{n-1}\| + \Delta t \|\omega^n\|. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Από διαδοχικές εφαρμογές της τελευταίας σχέσης προκύπτει:

$$\|\Theta^n\| \leq \|\Theta^0\| + \Delta t \sum_{j=1}^n \|\omega^j\| \leq \|\Theta^0\| + \Delta t \sum_{j=1}^n \|\omega_1^j\| + \Delta t \sum_{j=1}^n \|\omega_2^j\|. \quad (4.2.4)$$

Όπως προηγουμένως, το $\Theta^0 = \Theta(0)$ είναι φραγμένο.

Μπορούμε να γράψουμε το ω_1^j ως:

$$\omega_1^j = \frac{(R_h - I)}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u_t ds = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (R_h - I) u_t ds.$$

Οπότε,

$$\Delta t \sum_{j=1}^n \|\omega_1^j\| \leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} Ch^r \|u_t\|_r ds = Ch^r \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds.$$

Ακόμη, μπορούμε να γράψουμε:

$$\Delta t \omega_2^j = u(t_j) - u(t_{j-1}) - \Delta t u_t(t_j) = - \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds,$$

οπότε καταλήγουμε:

$$\Delta t \sum_{j=1}^n \|\omega_2^j\| \leq \sum_{j=1}^n \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds \right\| \leq \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds.$$

Οι παραπάνω εκτιμήσεις ολοκληρώνουν την απόδειξη. □

Παρατηρούμε ότι λόγω της μη συμμετρικής επιλογής της διακριτοποίησης στον χρόνο, η Προς τα Πίσω Euler-Galerkin μέθοδος είναι μόνο πρώτης τάξης ως προς το Δt .

4.3 Η περίπτωση της Μεθόδου Crank-Nicolson

Η Μέθοδος Crank-Nicolson διακριτοποιείται με έναν συμμετρικό τρόπο γύρω από το σημείο $t_{n-\frac{1}{2}} = (n - \frac{1}{2})\Delta t$. Έτσι, προκύπτει μια μέθοδος με ακρίβεια δεύτερης τάξης ως προς τον χρόνο. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε U^n στον S_h αναδρομικά για $n \geq 1$ από την σχέση:

$$(\bar{\partial} U^n, x) + \left(\nabla \frac{U^n + U^{n-1}}{2}, \nabla x \right) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), x), \quad \forall x \in S_h, \quad U^0 = u_{0h}. \quad (4.3.1)$$

Θεώρημα 4.3.1. (βλ [9, Κεφάλαιο 1, Σελίδα 16])

Έστω U^n και u οι λύσεις των (4.3.1) και (4.1.1) αντίστοιχα. Έστω ακόμη ότι $\|u_{0h} - u_0\| \leq Ch^r \|u_0\|_r$. Τότε, για $n \geq 0$ έχουμε:

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^r \left(\|u_0\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\| ds \right) + C(\Delta t)^2 \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}\| + \|\Delta u_{tt}\|) ds.$$

Απόδειξη. Το P^n είναι φραγμένο όπως προηγουμένως. Οπότε, ασχολούμαστε μόνο με το Θ^n και έχουμε:

$$(\bar{\partial}\Theta^n, x) + \left(\nabla \frac{\Theta^n + \Theta^{n-1}}{2}, \nabla x \right) = -(\omega^n, x), \quad \forall x \in S_h, \quad n \geq 1$$

όπου:

$$\begin{aligned} \omega^n &= (R_h - I)\bar{\partial}u(t_n) + \left(\bar{\partial}u(t_n) - u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) \right) - \Delta \left(u(t_{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}(u(t_n) - u(t_{n-1})) \right) \\ &\Rightarrow \omega^n = \omega_1^n + \omega_2^n + \omega_3^n. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $x = \frac{\Theta^n + \Theta^{n-1}}{2}$ στην εξίσωση για το Θ^n και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \left(\bar{\partial}\Theta^n, \frac{\Theta^n + \Theta^{n-1}}{2} \right) &\leq \frac{1}{2} \|\omega^n\| (\|\Theta^n\| + \|\Theta^{n-1}\|) \\ \Rightarrow \|\Theta^n\|^2 - \|\Theta^{n-1}\|^2 &\leq \Delta t \|\omega^n\| (\|\Theta^n\| + \|\Theta^{n-1}\|) \\ \Rightarrow \|\Theta^n\| &\leq \|\Theta^{n-1}\| + \Delta t \|\omega^n\|. \end{aligned}$$

Από διαδοχικές εφαρμογές της τελευταίας σχέσης προκύπτει:

$$\|\Theta^n\| \leq \|\Theta^0\| + \Delta t \sum_{j=1}^n (\|\omega_1^j\| + \|\omega_2^j\| + \|\omega_3^j\|).$$

Τα Θ^0 και ω_1^j εκτιμώνται όπως προηγουμένως. Αρκεί να φράξουμε τους όρους ω_2^j και ω_3^j . Αναλυτικότερα, έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta t \|\omega_2^j\| &= \|u(t_j) - u(t_{j-1}) - \Delta t u_t(t_{j-\frac{1}{2}})\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_{j-\frac{1}{2}}} (s - t_{j-1})^2 u_{ttt}(s) ds + \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_j} (s - t_j)^2 u_{ttt}(s) ds \right\| \\ \Rightarrow \Delta t \|\omega_2^j\| &\leq C(\Delta t)^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_{ttt}\| ds. \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} \Delta t \|\omega_3^j\| &= \Delta t \left\| \Delta \left(u(t_{j-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}(u(t_j) + u(t_{j-1})) \right) \right\| \\ \Rightarrow \Delta t \|\omega_3^j\| &\leq C(\Delta t)^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\Delta u_{tt}\| ds. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε:

$$\Delta t \sum_{j=1}^n (\|\omega_2^j\| + \|\omega_3^j\|) \leq C(\Delta t)^2 \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}\| + \|\Delta u_{tt}\|) ds,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατηρούμε ότι λόγω της συμμετρικής επιλογής της διακριτοποίησης στον χρόνο, η Μέθοδος Crank-Nicolson έχει τάξη ακρίβειας 2 ως προς το χρόνο για ομαλές λύσεις.

Κεφάλαιο 5

Υπολογιστικά παραδείγματα για την εξίσωση της θερμότητας

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εκτιμήσουμε τα σφάλματα που προκύπτουν κατά την προσέγγιση της πραγματικής λύσης της εξίσωσης της θερμότητας. Χρησιμοποιούμε δυο διαφορετικά προγράμματα για τους υπολογισμούς μας, το Matlab και το FreeFem++, στα οποία ασχολούμαστε με την μονοδιάστατη και την δισδιάστατη περίπτωση αντίστοιχα. Θεωρούμε, για την μονοδιάστατη περίπτωση, ως αρχικό πρόβλημα την εξίσωση της θερμότητας (2.1.1) στο χωροχρονικό πεδίο $[0, 1] \times [0, 1]$. Συγκεκριμένα, θέλουμε η πραγματική λύση να είναι $u = e^{-t} \sin(2\pi x)$, οπότε προκύπτει η $f = (4\pi^2 - 1)e^{-t} \sin(2\pi x)$ και η $u_0 = \sin(2\pi x)$. Προφανώς, ικανοποιούνται και οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Για την δισδιάστατη περίπτωση θέλουμε η πραγματική λύση να είναι $u = e^{-t} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$, οπότε προκύπτει η $f = (8\pi^2 - 1)e^{-t} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$ και η $u_0 = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$. Προφανώς, ικανοποιούνται και οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

Μελετάμε τις περιπτώσεις για:

- $\theta = 0$, δηλαδή την Προς τα Εμπρός Μέθοδο Euler ή Forward Euler,
- $\theta = 1/2$, δηλαδή την Μέθοδο Crank Nicolson,
- $\theta = 1$, δηλαδή την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler ή Backward Euler.

5.1 Εκτιμήσεις Σφαλμάτων στο Matlab

Μεταφερόμαστε, αρχικά, στο προγραμματιστικό περιβάλλον του Matlab όπου δημιουργούμε δυο συναρτήσεις για την Προς τα Εμπρός Μέθοδο A.1 και για την Προς τα Πίσω Μέθοδο A.2 για την μονοδιάστατη περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας. Εκεί, δημιουργήσαμε για κάθε περίπτωση μια συνάρτηση η οποία λαμβάνει ως ορίσματα το διάνυσμα στήλη I που περιλαμβάνει τα άκρα των διαστημάτων, δηλαδή $a = I(1), b = I(2), t_0 = I(3), T = I(4)$, τον αριθμό των βημάτων για τον χώρο και τον χρόνο, τις συναρτήσεις u_0, f και u_{exact} οι οποίες ορίζονται ανεξάρτητα. Η u_0 αφορά τις αρχικές συνθήκες για $t = 0$ και η u_{exact} είναι η πραγματική λύση της ΜΔΕ.

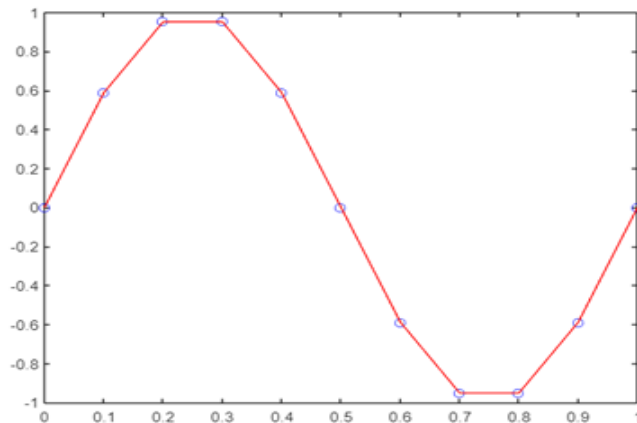
5.1.1 Προς τα Εμπρός Μέθοδος Euler

Η συνάρτηση που έχουμε δημιουργήσει στο Παράρτημα Α.1 μας επιστρέφει το διάνυσμα u , που είναι η προσεγγιστική λύση, και την τιμή του σφάλματος, $error$, στην $L^2(0, 1)$ νόρμα για διάφορα χωρικά βήματα, δηλαδή για διάφορες τιμές του h . Ταυτόχρονα, υλοποιεί στο ίδιο διάγραμμα την γραφική παράσταση της πραγματικής και της προσεγγιστικής λύσης με κόκκινο και μπλε χρώμα αντίστοιχα. Στην συνάρτησή μας ορίζεται εξ αρχής το χρονικό βήμα ως $\frac{h^2}{2}$ ώστε η μέθοδος να είναι συγκλίνουσα. Η εκτίμηση σφάλματος γίνεται την χρονική στιγμή $t = 1$. Ξεκινάμε θέτοντας την τιμή $nx = 10$ για τα υποδιαστήματα στα οποία χωρίζεται το χωρικό διάστημα $[0, 1]$, δηλαδή έχουμε χωρικό βήμα $h = \frac{1}{10}$. Έπειτα κάνουμε διαδοχικούς υποδιπλασιασμούς του βήματος h . Αντίστοιχα προκύπτουν τα σφάλματα:

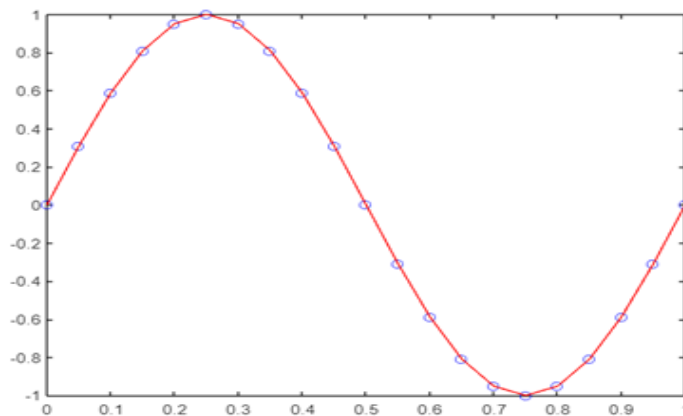
Βήμα	Σφάλμα
$h = \frac{1}{10}$	0.0013
$\frac{h}{2}$	$8.4546 * 10^{-4}$
$\frac{h}{4}$	$2.8715 * 10^{-4}$
$\frac{h}{8}$	$7.6540 * 10^{-5}$
$\frac{h}{16}$	$1.9432 * 10^{-5}$
$\frac{h}{32}$	$4.8766 * 10^{-6}$

Τα σφάλματα έχουν υπολογιστεί στον τελικό χρόνο $t = 1$ με $\Delta t = \frac{h^2}{2}$.

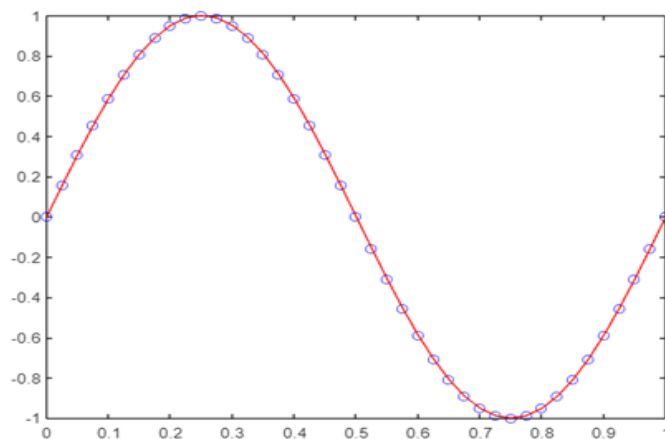
Επιβεβαιώνουμε πως με μείωση του βήματος h , δηλαδή με περισσότερα βήματα, το σφάλμα μειώνεται. Ακόμη, στον παραπάνω πίνακα, βλέπουμε ότι το τοπικό σφάλμα, δηλαδή το σφάλμα ανά βήμα, είναι ανάλογο με το τετράγωνο του μεγέθους του βήματος. Οι γραφικές παραστάσεις αφορούν τις τιμές των συναρτήσεων την χρονική στιγμή $t = 1$. Στον οριζόντιο άξονα έχουμε την τιμή του x και στον κατακόρυφο άξονα έχουμε τις συναρτήσεις u και u_{exact} .



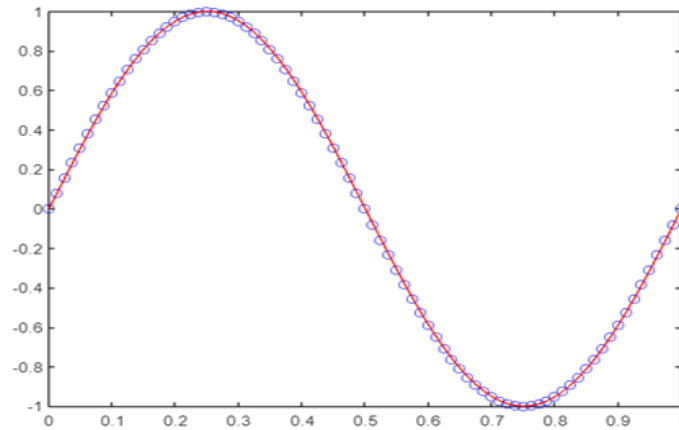
Σχήμα 5.1: Πραγματική και προσεγγιστική λύση για βήμα $h = \frac{1}{10}$ για την Προς τα Εμπρός Μέθοδο Euler



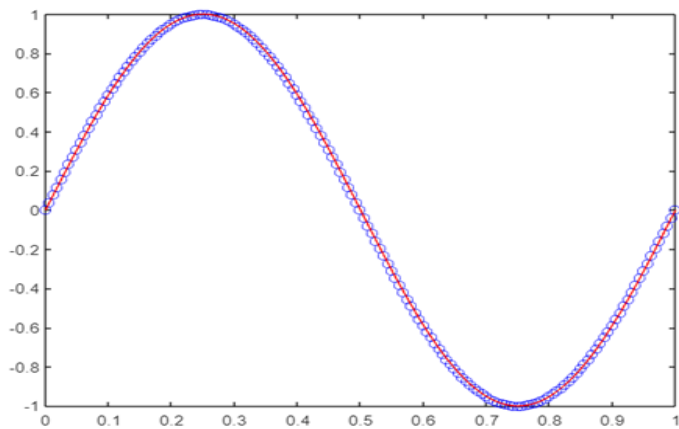
Σχήμα 5.2: Πραγματική και προσεγγιστική λύση για βήμα $h = \frac{1}{20}$ για την Προς τα Εμπρός Μέθοδο Euler



Σχήμα 5.3: Πραγματική και προσεγγιστική λύση για βήμα $h = \frac{1}{40}$ για την Προς τα Εμπρός Μέθοδο Euler



Σχήμα 5.4: Πραγματική και προσεγγιστική λύση για βήμα $h = \frac{1}{80}$ για την Προς τα Εμπρός Μέθοδο Euler



Σχήμα 5.5: Πραγματική και προσεγγιστική λύση για βήμα $h = \frac{1}{160}$ για την Προς τα Εμπρός Μέθοδο Euler

5.1.2 Προς τα Πίσω Μέθοδος Euler

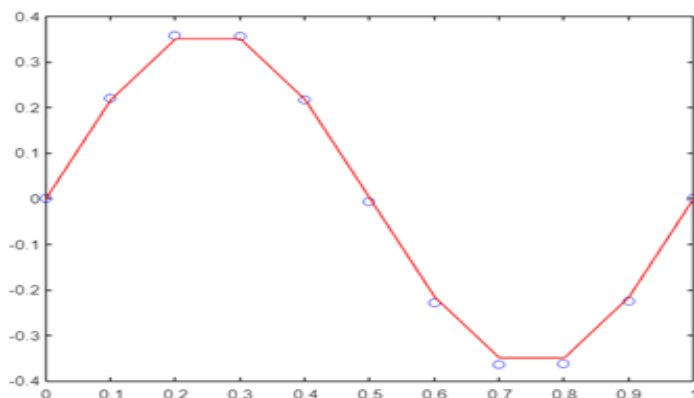
Για την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler έχουμε δημιουργήσει την συνάρτηση, όπως φαίνεται στο Παράρτημα Α.2, η οποία μας επιστρέφει το διάνυσμα u , που είναι η προσεγγιστική λύση, και την τιμή του σφάλματος, error, στην $L^2(0, 1)$ νόρμα για διάφορα χωρικά βήματα, δηλαδή για διάφορες τιμές του h . Ταυτόχρονα, υλοποιεί στο ίδιο διάγραμμα την γραφική παράσταση της πραγματικής και της προσεγγιστικής λύσης με κόκκινο και μπλε χρώμα αντίστοιχα. Γνωρίζουμε πως η μέθοδος είναι συγκλίνουσα για οποιαδήποτε τιμή του χρονικού βήματος Δt και πως έχει τάξη ακρίβειας h^2 ως προς την $L^2(0, 1)$ νόρμα για την χρονική στιγμή t^n , όταν διαλέξουμε $\Delta t \approx h^2$.

Ξεκινάμε θέτοντας την τιμή $nx = 10$ για τα υποδιαστήματα στα οποία χωρίζεται το χωρικό διάστημα $[0, 1]$, δηλαδή $h = \frac{1}{10}$, και $nt = h^2$ τα αντίστοιχα υποδιαστήματα στον χρόνο. Έπειτα κάνουμε διαδοχικούς υποδιπλασιασμούς του βήματος h . Αντίστοιχα προκύπτουν τα σφάλματα:

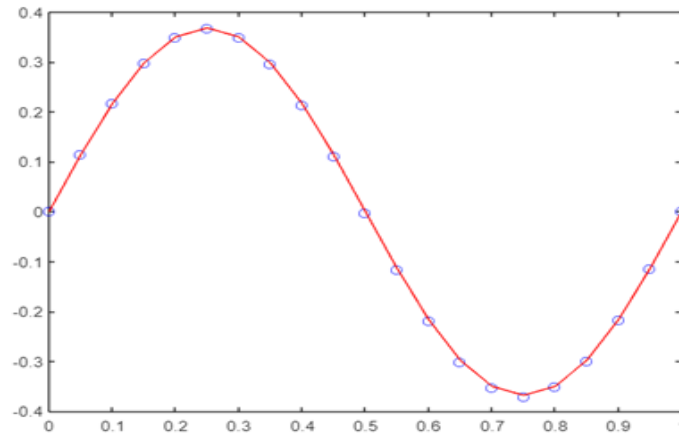
h	Δt	Σφάλμα
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	0.0143
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4000}$	0.0030
$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{1600}$	0.0026
$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{2500}$	0.0017

Τα σφάλματα έχουν υπολογιστεί στον τελικό χρόνο $t = 1$.

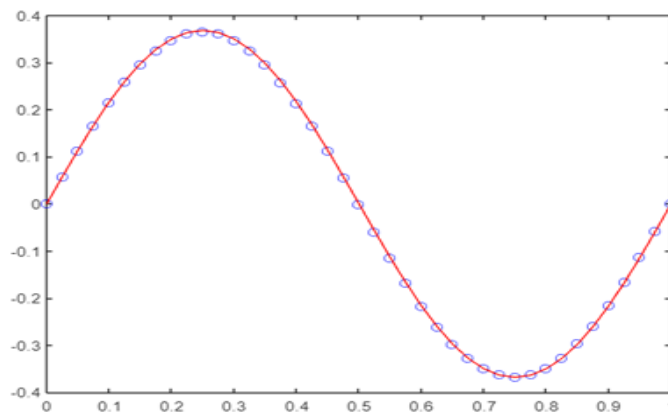
Από τα παραπάνω, βλέπουμε πως με μείωση του βήματος h , δηλαδή με περισσότερα βήματα ως προς τον χώρο, το σφάλμα μειώνεται και επιβεβαιώνουμε την τάξη ακρίβειας της μεθόδου. Οι γραφικές παραστάσεις αφορούν τις τιμές των συναρτήσεων την χρονική στιγμή $t = 1$. Στον οριζόντιο άξονα έχουμε την τιμή του x και στον κατακόρυφο άξονα έχουμε τις συναρτήσεις u και u_{exact} .



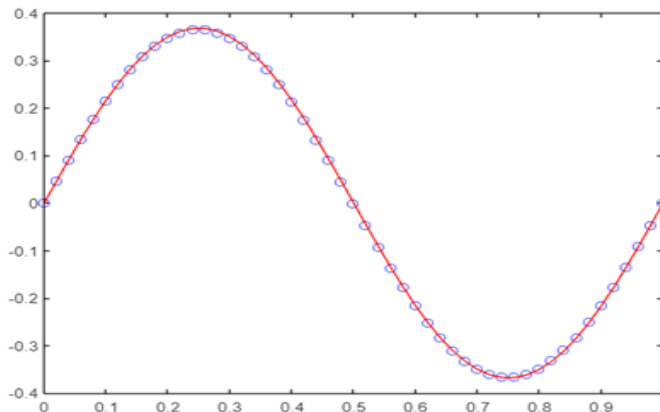
Σχήμα 5.6: Πραγματική και προσεγγιστική λύση για βήμα $h = \frac{1}{10}$ με $\Delta t = \frac{1}{100}$ για την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler



Σχήμα 5.7: Πραγματική και προσεγγιστική λύση για βήμα $h = \frac{1}{20}$ με $\Delta t = \frac{1}{400}$ για την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler



Σχήμα 5.8: Πραγματική και προσεγγιστική λύση για βήμα $h = \frac{1}{40}$ με $\Delta t = \frac{1}{1600}$ για την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler



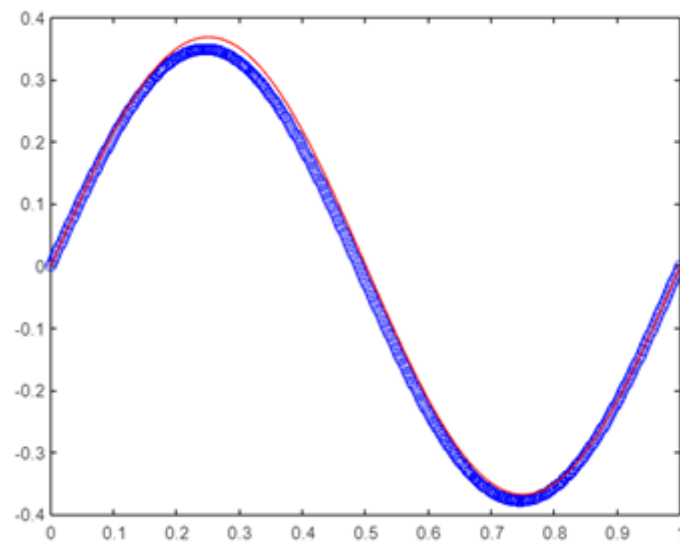
Σχήμα 5.9: Πραγματική και προσεγγιστική λύση για βήμα $h = \frac{1}{50}$ με $\Delta t = \frac{1}{2500}$ για την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler

Στην συνέχεια, σταθεροποιούμε τον αριθμό των υποδιαστημάτων ως προς τον χώρο $nx = 500$, δηλαδή επιλέγουμε να έχουμε σταθερό χωρικό βήμα $h = \frac{1}{500}$. Σύμφωνα με τον τύπο σφάλματος του Θεωρήματος 4.2.1, η συγκεκριμένη επιλογή εξασφαλίζει ότι η συνεισφορά από την χωρική διακριτοποίηση στο σφάλμα θα είναι αμελητέα σε σχέση με το χρονικό κομμάτι. Με αυτόν τον τρόπο μελετάμε πώς επηρεάζει τα σφάλματά μας η τιμή του χρονικού βήματος. Επιλέγουμε για το nt τις τιμές 10, 100, 1000, 10000 και έτσι προκύπτει:

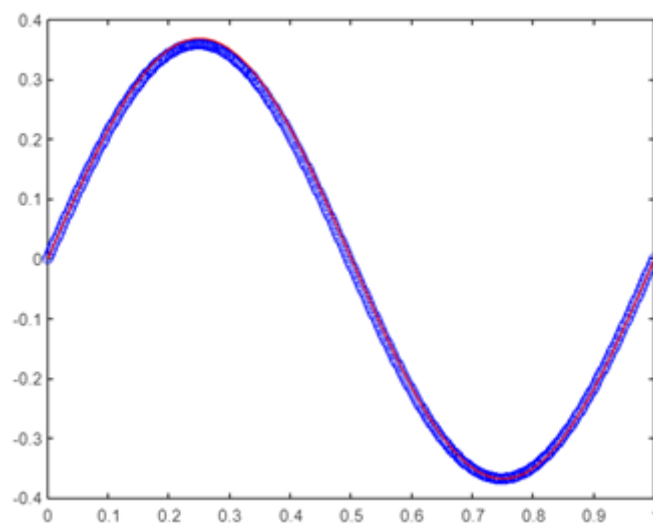
Βήμα Δt	Σφάλμα
$\frac{1}{10}$	0.0242
$\frac{1}{100}$	0.0091
$\frac{1}{1000}$	0.0057
$\frac{1}{10000}$	0.0046

Τα σφάλματα έχουν υπολογιστεί στον τελικό χρόνο $t = 1$.

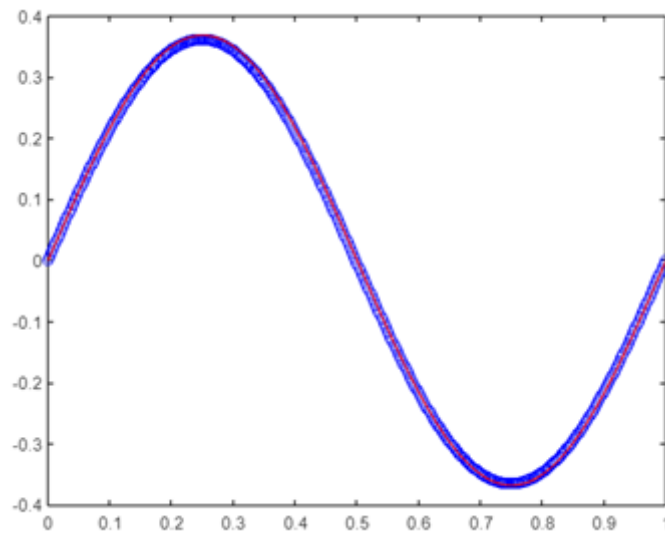
Με αυτόν τον τρόπο, βλέπουμε πως με μείωση του βήματος Δt , το σφάλμα μειώνεται. Οι γραφικές παραστάσεις είναι οι παρακάτω:



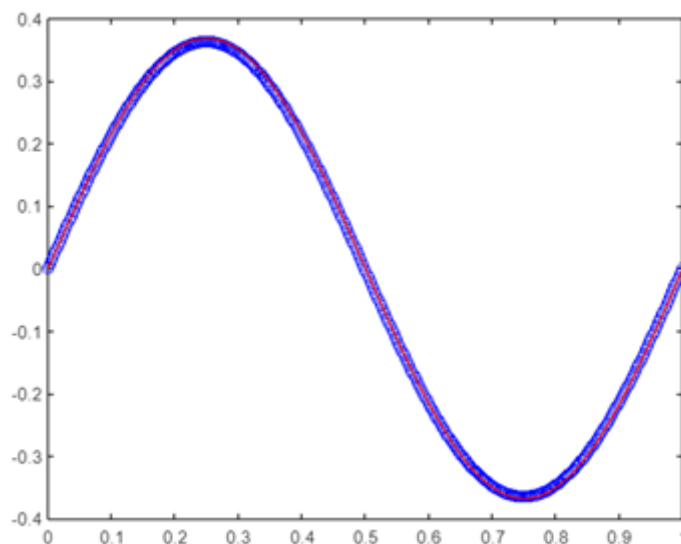
Σχήμα 5.10: Πραγματική και προσεγγιστική λύση για βήμα $h = \frac{1}{500}$ με $\Delta t = \frac{1}{10}$ για την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler



Σχήμα 5.11: Πραγματική και προσεγγιστική λύση για βήμα $h = \frac{1}{500}$ με $\Delta t = \frac{1}{100}$ για την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler



Σχήμα 5.12: Πραγματική και προσεγγιστική λύση για βήμα $h = \frac{1}{500}$ με $\Delta t = \frac{1}{1000}$ για την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler

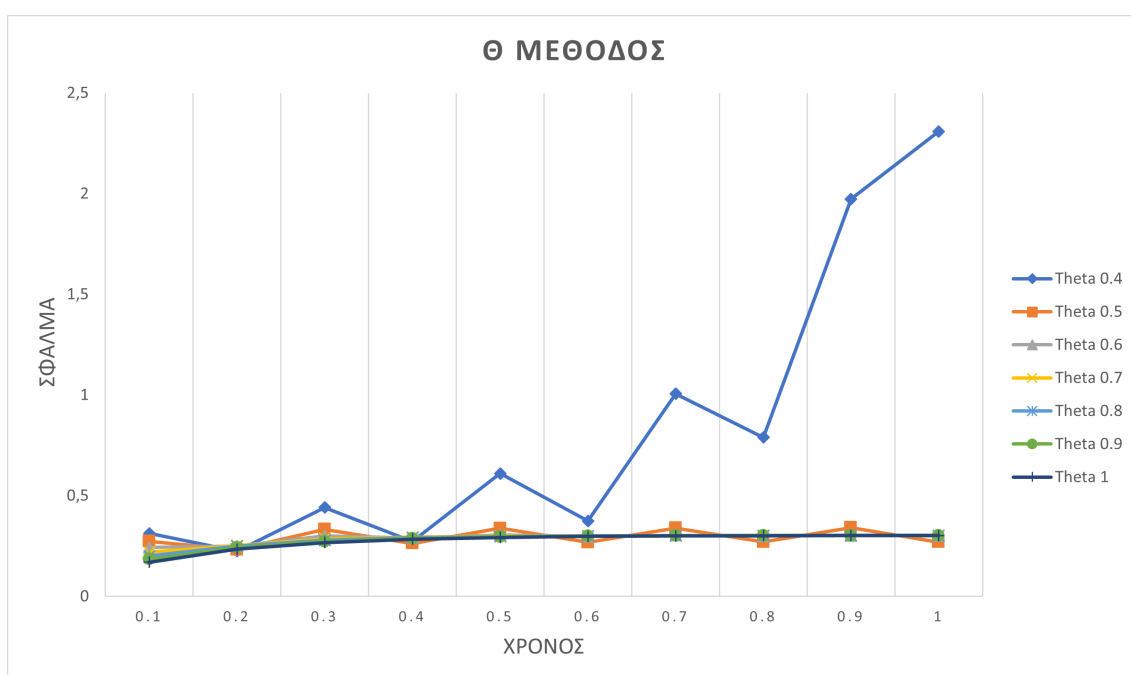


Σχήμα 5.13: Πραγματική και προσεγγιστική λύση για βήμα $h = \frac{1}{500}$ με $\Delta t = \frac{1}{10000}$ για την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler

5.2 Εκτιμήσεις Σφαλμάτων στο FreeFem++

Στην συνέχεια μεταφερόμαστε στο προγραμματιστικό περιβάλλον του Freefem++, το οποίο χρησιμοποιείται για την αριθμητική επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων και βασίζεται στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Στο FreeFem++ ασχολούμαστε με την δισδιάστατη περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας. Δημιουργήσαμε ένα γράφημα για την Θ -Μέθοδο για να μελετήσουμε την ευστάθειά της όπως είχαμε δει και στην ενότητα 3.3. Επιλέξαμε χρονικό βήμα 0.1 και μελετάμε την τιμή του σφάλματος για τις διάφορες τιμές του θ (βλ. Β.1).

Για $\theta \geq 0.5$ παρατηρούμε πως η μέθοδος συγκλίνει και το σφάλμα παραμένει μικρό. Επίσης, στο $t = 1$ για $\theta = 0.5$ έχουμε το μικρότερο σφάλμα και επιβεβαιώνουμε πως η Μέθοδος Crank-Nicolson είναι ταχύτερη. Από την άλλη, για την τιμή $\theta = 0.4 < 0.5$, βλέπουμε πως η Μέθοδος αποκλίνει και το σφάλμα αυξάνεται ανεξέλεγκτα.



Σχήμα 5.14: Απεικόνιση της τιμής του σφάλματος για την εξίσωση της θερμότητας για διάφορες τιμές της παραμέτρου θ

Στην συνέχεια, στο FreeFem++ λύσαμε το πρόβλημα (4.1.1), υπολογίσαμε τα σφάλματα ως προς τις νόρμες $L^2(\Omega)$ και $H^1(\Omega)$, όπου $\Omega = [0, 1]^2 \times [0, 1]$, και υλοποιήσαμε γραφήματα για την εξίσωση της θερμότητας για διαφορετικά χωροχρονικά βήματα. Στον κώδικα που παρατίθενται στα Παραρτήματα Β.2 και Β.3 χρησιμοποιούμε την εντολή `mesh Th = square(n,m)` η οποία τριγωνοποιεί το μοναδιαίο τετράγωνο, δηλαδή δημιουργεί ένα $n \times m$ πλέγμα στο τετράγωνο $[0, 1] \times [0, 1]$. Ακόμη, με την εντολή `fespace Vh(Th,P1)` δημιουργούμε τον χώρο των πεπερασμένων στοιχείων στις δυο διαστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, το όρισμα `P1` αντιστοιχεί στην χρήση τμηματικά γραμμικών συνεχών συναρτήσεων βάσεων.

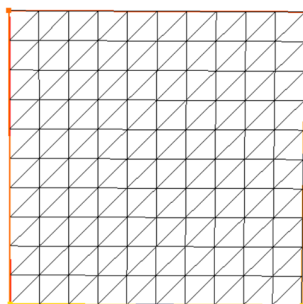
Η εξίσωση της θερμότητας επιλύεται, λοιπόν, με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων στον χώρο και με την μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών στον χρόνο.

Για την χρονική διακροτοποίηση μελετήσαμε την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler και την Μέθοδο Crank-Nicolson. Και στις δυο μεθόδους τα σφάλματά μας υπολογίζονται ως:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_0^1 |u(x,t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

5.2.1 Προς τα Πίσω Μέθοδος Euler

Για την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler ο κώδικας βρίσκεται στο Παράρτημα B.2. Αρχικά, χρησιμοποιούμε την εντολή `mesh Th = square(n,n)` η οποία τριγωνοποιεί το μοναδιαίο τετράγωνο, δημιουργώντας ουσιαστικά ένα $n \times n$ πλέγμα στο τετράγωνο $[0, 1] \times [0, 1]$. Σε κάθε περίπτωση, δηλαδή, δημιουργείται το πλέγμα που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένες τιμές των βημάτων $h, \Delta t$ της παρακάτω μορφής:



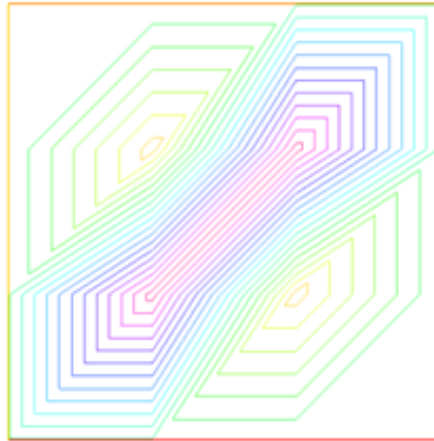
Ακόμη, με την εντολή `fespace Vh(Th,P1)` δημιουργούμε τον χώρο των πεπερασμένων στοιχείων στις δυο διαστάσεις.

Επιλέγουμε $\Delta t \approx h^2$ και ξεκινάμε με το χρονικό βήμα $\Delta t = \frac{1}{4}$. Έπειτα, με διαδοχικούς υπολογισμούς, υποδιπλασιάζουμε το Δt και ταυτόχρονα υποτετραπλασιάζεται η τιμή h του χωρικού βήματος. Στον παρακάτω πίνακα περιέχονται οι εκτιμήσεις σφαλμάτων για τις διαφορετικές τιμές των χρονικών βημάτων Δt και για τα αντίστοιχα χωρικά βήματα h :

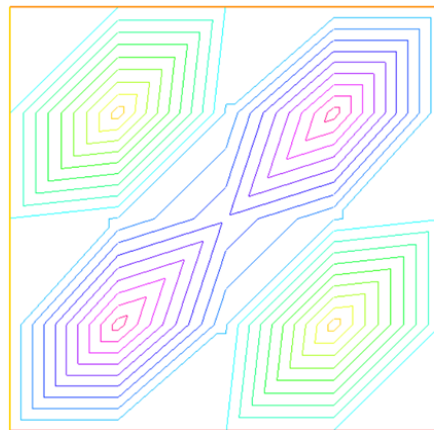
Δt	h	Σφάλμα L^2	Σφάλμα H^1
$\frac{1}{4}$	0.471405	0.0569287	0.634141
$\frac{1}{8}$	0.353553	0.0564611	0.601122
$\frac{1}{16}$	0.235702	0.0394737	0.3814
$\frac{1}{32}$	0.176777	0.0263715	0.242664
$\frac{1}{64}$	0.128565	0.0155369	0.138293
$\frac{1}{128}$	0.0883883	0.00783785	0.0683188

Τα σφάλματα έχουν υπολογιστεί στον τελικό χρόνο $t = 1$.

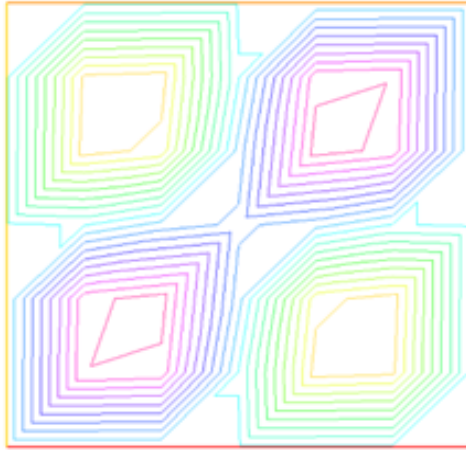
Παρατηρούμε πως καθώς το h μειώνεται, μειώνονται και τα σφάλματα και τείνουν στο 0 και για τις δυο νόρμες. Έτσι, συμπεραίνουμε πως με την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler προσεγγίζεται καλά η πραγματική λύση. Ακόμη, δημιουργήσαμε τα γραφήματα της θερμότητας που προκύπτουν για τα διάφορα χωροχρονικά βήματα που έχουμε και στον παραπάνω πίνακα. Παρατηρούμε ότι τα γραφήματα σταδιακά βελτιώνονται καθώς το βήμα Δt μειώνεται και η πραγματική λύση προσεγγίζεται αρκετά καλά.



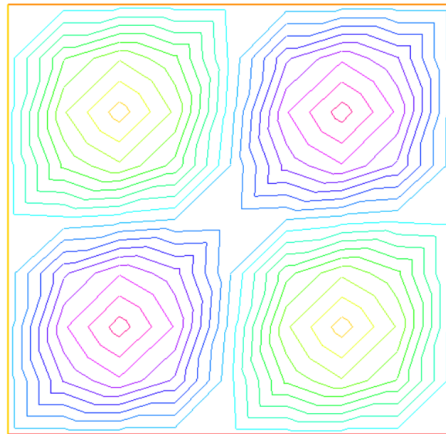
Σχήμα 5.15: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας για χωρικό βήμα $h = 0.471405$ και χρονικό βήμα $\Delta t = \frac{1}{4}$



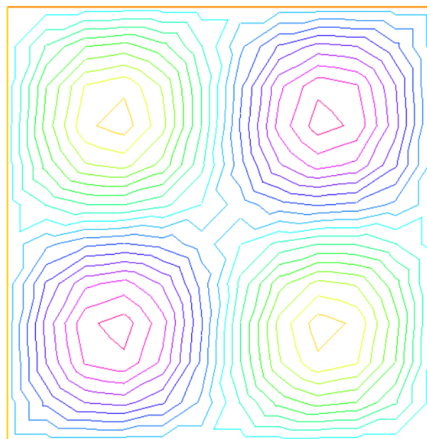
Σχήμα 5.16: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας για χωρικό βήμα $h = 0.353553$ και χρονικό βήμα $\Delta t = \frac{1}{8}$



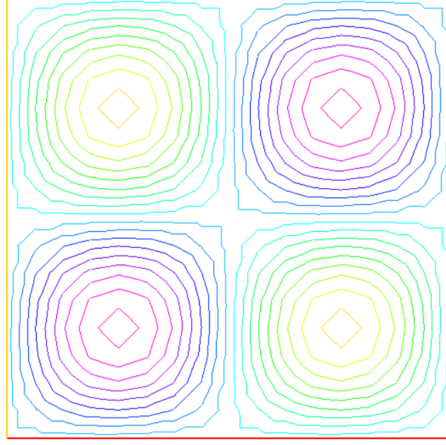
Σχήμα 5.17: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας για χωρικό βήμα $h = 0.235702$ και χρονικό βήμα $\Delta t = \frac{1}{16}$



Σχήμα 5.18: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας για χωρικό βήμα $h = 0.176777$ και χρονικό βήμα $\Delta t = \frac{1}{32}$



Σχήμα 5.19: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας για χωρικό βήμα $h = 0.128565$ και χρονικό βήμα $\Delta t = \frac{1}{64}$



Σχήμα 5.20: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας για χωρικό βήμα $h = 0.0883883$ και χρονικό βήμα $\Delta t = \frac{1}{128}$

Στην συνέχεια, με βάση τις τιμές του παραπάνω πίνακα επιβεβαιώνουμε την τάξη ακρίβειας της μεθόδου ως προς h και ως προς Δt . Σύμφωνα με το θεώρημα 4.2.1 ισχύει ότι:

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^r (\|u_0\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds) + \Delta t \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds.$$

Στην περίπτωση μας, ισχύει ότι $r = 2$. Επομένως, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^2 (\|u_0\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds) + \Delta t \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds.$$

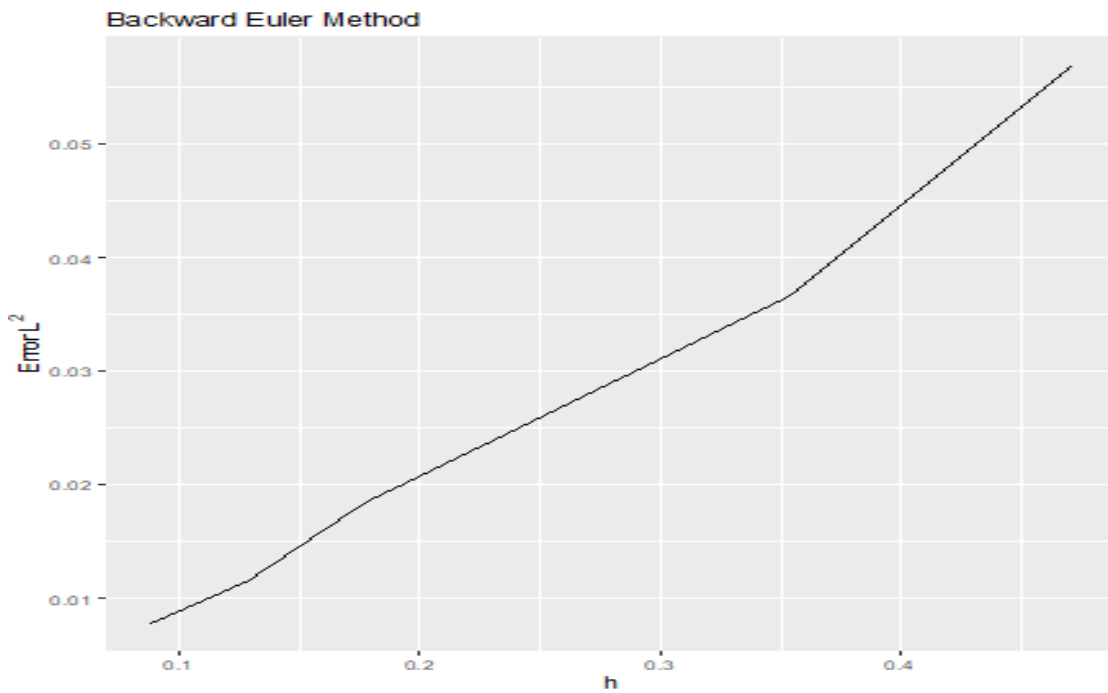
Για $\Delta t \approx h^2$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} \|U^n - u(t_n)\| &\leq Ch^2 (\|u_0\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds) + h^2 \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \\ \Leftrightarrow \|U^n - u(t_n)\| &\leq Ch^2 \left(\|u_0\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds + \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \right). \end{aligned}$$

Αναμένουμε, λοιπόν, πως καθώς το h υποδιπλασιάζεται το σφάλμα να υποτετραπλασιάζεται διότι για $\frac{h}{2}$ έχουμε:

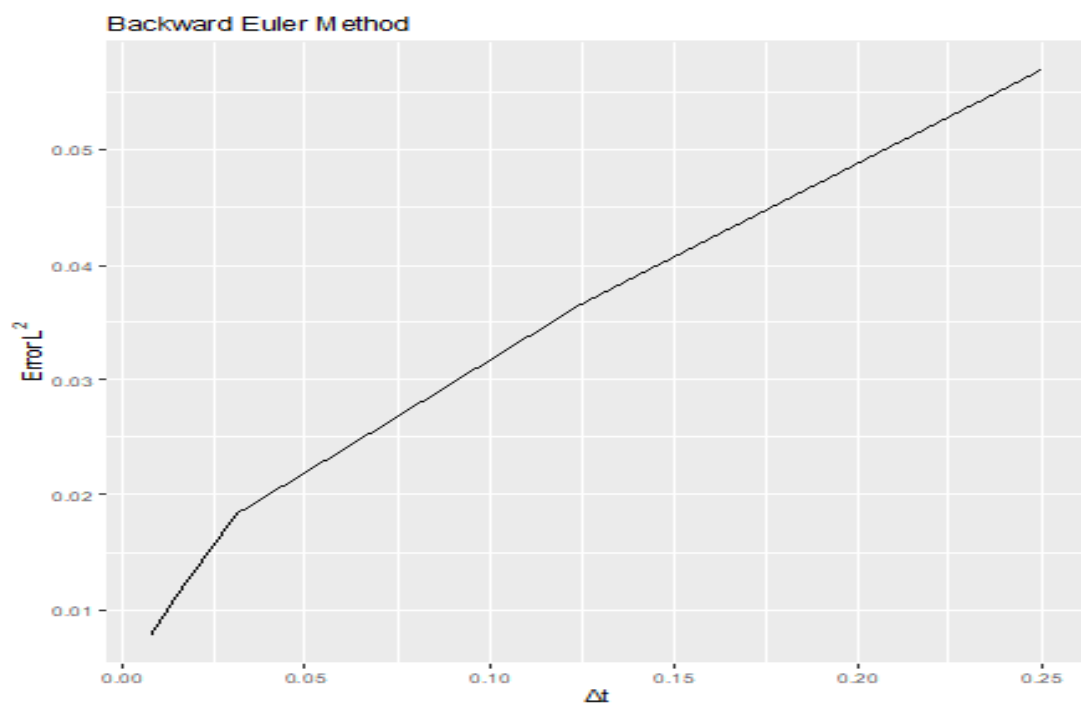
$$\begin{aligned} \|U^n - u(t_n)\| &\leq C \left(\frac{h}{2} \right)^2 \left(\|u_0\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds + \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \right) \\ \Leftrightarrow \|U^n - u(t_n)\| &\leq \frac{Ch^2}{4} \left(\|u_0\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds + \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \right). \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι η σύγκλιση ως προς h είναι τετραγωνική. Καθώς, δηλαδή, το h υποδιπλασιάζεται το σφάλμα υποτετραπλασιάζεται. Έτσι, από το υπολογιστικό μας παράδειγμα και από το παρακάτω γράφημα επιβεβαιώνεται η τάξη ακρίβειας της Προς τα Πίσω Μεθόδου Euler ως προς το χωρικό βήμα h .



Σχήμα 5.21: Γραφική παράσταση του σφάλματος L^2 συναρτήσει του βήματος h για την Μέθοδο Backward Euler

Από την άλλη, παρατηρούμε πως η σχέση του Δt με τα σφάλματα είναι σχεδόν γραμμική όπως επιβεβαιώνεται και από τα παρακάτω διαγράμματα των σφαλμάτων ως προς το Δt .



Σχήμα 5.22: Γραφική παραστάσεις του σφάλματος L^2 συναρτήσει του βήματος Δt για την Backward Euler

5.2.2 Μέθοδος Crank-Nicolson

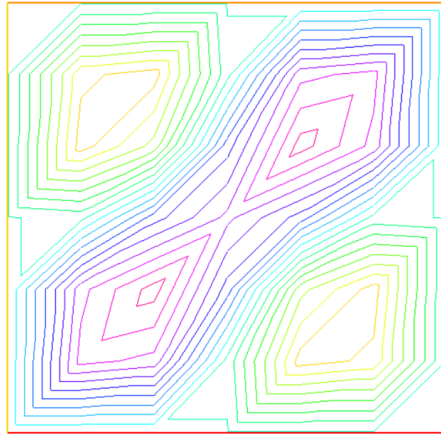
Για την Μέθοδο Crank-Nicolson ο κώδικας βρίσκεται στο Παράρτημα Β.3. Αρχικά, χρησιμοποιούμε την εντολή `mesh Th = square(n,n)` η οποία τριγωνοποιεί το μοναδιαίο τετράγωνο, δηλαδή δημιουργεί ένα $n \times n$ πλέγμα στο τετράγωνο $[0, 1] \times [0, 1]$. Ακόμη, με την εντολή `fespace Vh(Th,P1)` δημιουργούμε τον χώρο των πεπερασμένων στοιχείων στις δυο διαστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, το όρισμα $P1$ αντιστοιχεί στην χρήση τμηματικά γραμμικών συνεχών συναρτήσεων βάσεων. Με την εντολή `hTriangle` υπολογίζουμε το χωρικό βήμα h .

Ξεκινάμε με το χρονικό βήμα $\Delta t = \frac{1}{4}$. Έπειτα, με διαδοχικούς υπολογισμούς, υποδιπλασιάζουμε το Δt και ταυτόχρονα υποδιπλασιάζεται η τιμή h του χωρικού βήματος. Έχουμε επιλέξει Δt και h τέτοια ώστε $\Delta t \approx h$, η οποία είναι η συμβατή επιλογή σε σχέση με το Θεώρημα 4.3.1. Στον παρακάτω πίνακα περιέχονται οι εκτιμήσεις σφαλμάτων για τις διαφορετικές τιμές των χρονικών βημάτων Δt και για τα αντίστοιχα χωρικά βήματα h :

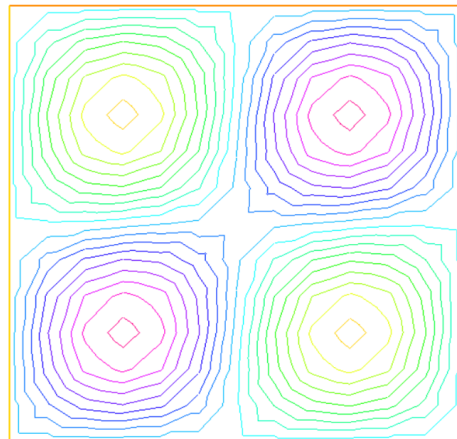
Δt	h	Σφάλμα L^2	Σφάλμα H^1
$\frac{1}{4}$	0.235702	0.0242836	0.229553
$\frac{1}{8}$	0.117851	0.0117567	0.0992474
$\frac{1}{16}$	0.0589256	0.00360098	0.0309515
$\frac{1}{32}$	0.0294628	0.000918993	0.00787122
$\frac{1}{64}$	0.0147314	0.000230899	0.001975
$\frac{1}{128}$	0.0073657	$5.77969 * 10^{-5}$	0.000494179

Τα σφάλματα έχουν υπολογιστεί στον τελικό χρόνο $t = 1$.

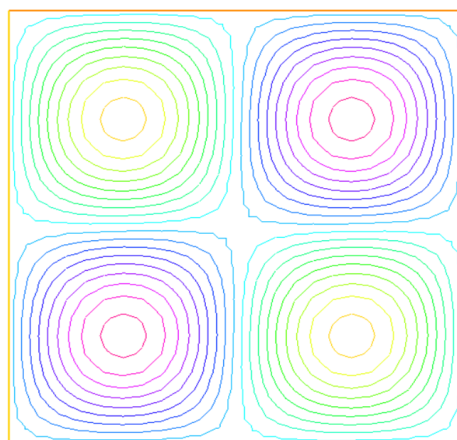
Βλέπουμε ότι και για τις δυο νόρμες τα σφάλματα τείνουν στο 0. Έτσι, καταλήγουμε πως με την Μέθοδο Crank-Nicolson προσεγγίζεται πολύ καλά η πραγματική λύση. Δημιουργήσαμε τα γραφήματα της θερμότητας που προκύπτουν για τα διάφορα χωρο-χρονικά βήματα που έχουμε στον παραπάνω πίνακα. Παρατηρούμε ότι τα γραφήματα σταδιακά βελτιώνονται και απεικονίζεται καλύτερα η μεταβολή της θερμότητας καθώς το βήμα Δt μειώνεται και η πραγματική λύση προσεγγίζεται αρκετά καλά. .



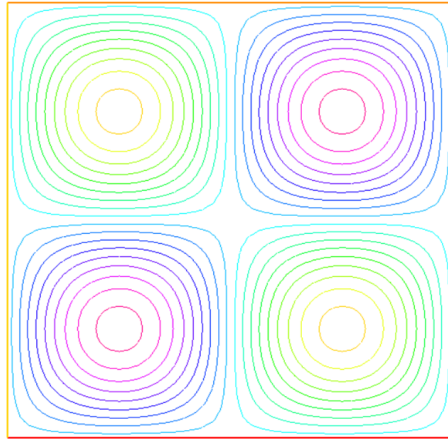
Σχήμα 5.23: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας για χωρικό βήμα $h = 0.235702$ και χρονικό βήμα $\Delta t = \frac{1}{4}$



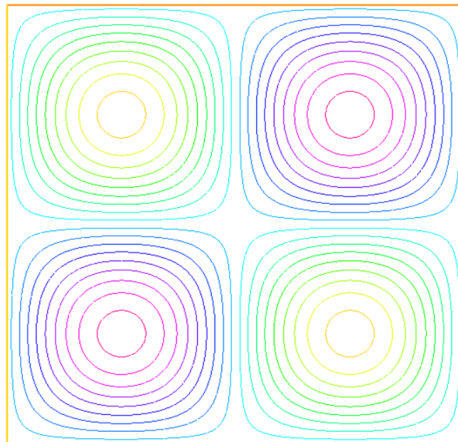
Σχήμα 5.24: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας για χωρικό βήμα $h = 0.117851$ και χρονικό βήμα $\Delta t = \frac{1}{8}$



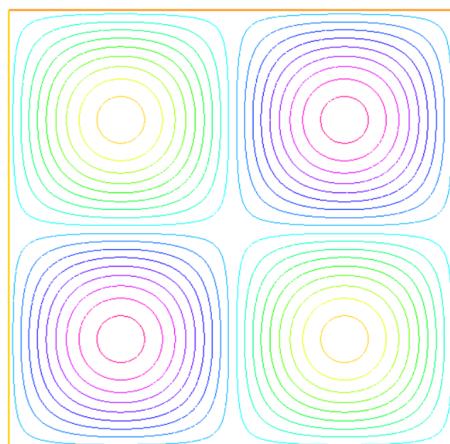
Σχήμα 5.25: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας για χωρικό βήμα $h = 0.0589256$ και χρονικό βήμα $\Delta t = \frac{1}{16}$



Σχήμα 5.26: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας για χωρικό βήμα $h = 0.0294628$ και χρονικό βήμα $\Delta t = \frac{1}{32}$



Σχήμα 5.27: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας για χωρικό βήμα $h = 0.0147314$ και χρονικό βήμα $\Delta t = \frac{1}{64}$



Σχήμα 5.28: Γράφημα της εξίσωσης της θερμότητας για χωρικό βήμα $h = 0.0073657$ και χρονικό βήμα $\Delta t = \frac{1}{128}$

Για να επιβεβαιώσουμε στο υπολογιστικό μας παράδειγμα την τάξη ακρίβειας της Μεθόδου Crank-Nicolson, θεωρούμε πως η μέθοδός μας έχει τάξη ακρίβειας p ως προς h και τότε μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\|error(1, h)\| \leq ch^p, \quad c > 0.$$

Για δυο διαδοχικά σφάλματα, έστω $error_1, error_2$ που αντιστοιχούν σε χρονικά βήματα $h, \frac{h}{2}$ ισχύει ότι:

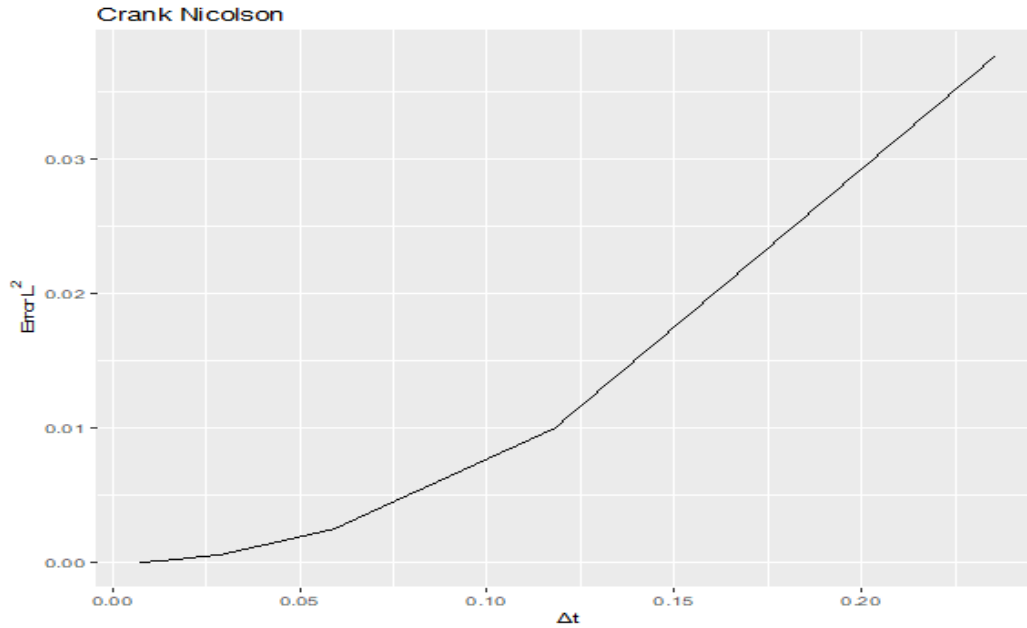
$$\begin{cases} error_1 = ch^p \\ error_2 = c\left(\frac{h}{2}\right)^p \end{cases} \Rightarrow \frac{error_1}{error_2} = \left(\frac{h}{\frac{h}{2}}\right)^p \Rightarrow \log\left(\frac{error_1}{error_2}\right) = p \log 2$$

$$p = \frac{\log\left(\frac{error_1}{error_2}\right)}{\log 2}. \quad (5.2.1)$$

Επομένως, από την σχέση (5.2.1) βρήκαμε έναν τρόπο να υπολογίσουμε την τάξη ακρίβειας της μεθόδου με βάση τις τιμές δυο διαδοχικών σφαλμάτων. Κάνοντας τους αντίστοιχους υπολογισμούς καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα:

Τάξη ακρίβειας p ως προς h με βάση το Σφάλμα L^2
1.446499149
1.707021674
1.970263809
1.992791948
1.998197906

Από το υπολογιστικό μας παράδειγμα επιβεβαιώνεται η τάξη ακρίβειας της Μεθόδου Crank-Nicolson, καθώς όπως γνωρίζουμε έχει τάξη ακρίβειας 2. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι η σύγκλιση είναι τετραγωνική. Καθώς, δηλαδή, το βήμα υποδιπλασιάζεται το σφάλμα υποτετραπλασιάζεται, όπως φαίνεται γραφικά παρακάτω:



Σχήμα 5.29: Γραφική παράσταση του σφάλματος L^2 συναρτήσει του βήματος Δt για την Μέθοδο Crank-Nicolson

Αναμέναμε η σύγκλιση να είναι τετραγωνική λόγω του θεωρήματος 4.3.1, σύμφωνα με το οποίο ισχύει ότι:

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^r (\|u_0\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\| ds) + C(\Delta t)^2 \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}\| + \|\Delta u_{tt}\|) ds.$$

Στην περίπτωση μας, έχουμε ότι $r = 2$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^2 (\|u_0\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\| ds) + C(\Delta t)^2 \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}\| + \|\Delta u_{tt}\|) ds.$$

Επιπλέον, έχουμε επιλέξει $h, \Delta t$ τέτοια ώστε $\Delta t \approx h$. Επομένως, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\begin{aligned} \|U^n - u(t_n)\| &\leq Ch^2 (\|u_0\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\| ds) + Ch^2 \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}\| + \|\Delta u_{tt}\|) ds \\ \Leftrightarrow \|U^n - u(t_n)\| &\leq Ch^2 \left(\|u_0\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\| ds + \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}\| + \|\Delta u_{tt}\|) ds \right). \end{aligned}$$

Έτσι, καθώς το h υποδιπλασιάζεται το σφάλμα υποτετραπλασιάζεται διότι για $\frac{h}{2}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|U^n - u(t_n)\| &\leq C \left(\frac{h}{2} \right)^2 \left(\|u_0\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\| ds + \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}\| + \|\Delta u_{tt}\|) ds \right) \\ \Leftrightarrow \|U^n - u(t_n)\| &\leq \frac{Ch^2}{4} \left(\|u_0\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\| ds + \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}\| + \|\Delta u_{tt}\|) ds \right). \end{aligned}$$

5.2.3 Σύγκριση Μεθόδων

Από τα παραπάνω, επιβεβαιώσαμε την θεωρητική τάξη ακρίβειας των μεθόδων Backward Euler και Crank-Nicolson. Είδαμε πως η Backward Euler είναι πρώτης τάξης ως προς το χρονικό βήμα Δt και δεύτερης τάξης ως προς το χωρικό βήμα h . Στο συγκεκριμένο υπολογιστικό παράδειγμα έχουμε επιλέξει $\Delta t \approx h^2$ και γι' αυτό αναμέναμε τετραγωνική σύγκλιση ως προς h .

Από την άλλη, για την Μέθοδο Crank-Nicolson επιλέξαμε $\Delta t \approx h$ και γι' αυτό καταλήξαμε στην τετραγωνική σύγκλιση ως προς $\Delta t \approx h$. Έτσι, η Μέθοδος Crank-Nicolson δίνει εγκυρότερα αποτελέσματα. Βασική διαφορά, λοιπόν, των δυο μεθόδων είναι η ταχύτητα σύγκλισης, καθώς η Crank-Nicolson είναι αισθητά ταχύτερη. Συγκρίνοντας τα σφάλματα που προκύπτουν από την εφαρμογή των δυο μεθόδων, βλέπουμε πως η Μέθοδος Crank-Nicolson συγκλίνει ταχύτερα στην πραγματική λύση σε σχέση με την Προς τα Πίσω Μέθοδο Euler.

Τέλος, επιβεβαιώσαμε ότι η Forward Euler είναι ευσταθής μέθοδος υπό συγκεκριμένες συνθήκες οι οποίες είναι πολύ περιοριστικές, γεγονός που καθιστά την μέθοδο δύσχρηστη για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Κεφάλαιο 6

Μοντέλα Αλληλεπιδρώντων Πληθυσμών

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, ασχολούμαστε με την απλούστερη περίπτωση αλληλεπιδρώντων πληθυσμών που αφορά τη μελέτη οικοσυστήματος στο οποίο δύο είδη αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με την συνθήκη του Θηρευτή-Θηράματος (Predator-Prey). Δηλαδή, αν το ένα είδος τρέφεται με το άλλο, ο πληθυσμός του ενός (θηράματος) μειώνεται και του άλλου (θηρευτή) αυξάνεται. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το ζεύγος λαγός – αλεπού σε ένα δάσος. Η επίλυση αρκετών παραδειγμάτων γίνεται με αλγόριθμους, ενώ στο παράρτημα του κεφαλαίου υπάρχουν οι αντίστοιχοι κώδικες σε MATLAB και FreeFem++.

6.1 Η Μονοδιάστατη περίπτωση του Μοντέλου Lotka-Volterra

Το Μοντέλο Lotka-Volterra είναι ένα ζεύγος διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει μια απλή περίπτωση μοντέλου αλληλεπιδρώντων πληθυσμών του τύπου θηράματος-θηρευτή. Αυτές οι εξισώσεις διατυπώθηκαν το 1920 από τους Alfred Lotka και Vito Volterra.

Οι υποθέσεις του Μοντέλου στην απλούστερη μορφή τους είναι οι παρακάτω:

1. Για το θήραμα υπάρχει απεριόριστη τροφή στο περιβάλλον και ο πληθυσμός του, απουσία του θηρευτή, μεγαλώνει εκθετικά.
2. Ο θηρευτής δεν μπορεί να τραφεί παρά μόνο με το θήραμα.
3. Ο θηρευτής έχει απεριόριστη όρεξη.
4. Ο ρυθμός μεταβολής των πληθυσμών είναι ανάλογος με τα αντίστοιχα μεγέθη τους.
5. Δεν υπάρχουν περιβαλλοντικές αλλαγές που να ευνοούν κάποιον πληθυσμό.

Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν το Μοντέλο είναι:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = AU - BU V \\ \frac{\partial V}{\partial t} = CU V - DV \end{cases} \quad (6.1.1)$$

6.1. Η ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ
LOTKA-VOLTERRA

όπου $U(t)$ είναι ο αριθμός των θηραμάτων σε χρόνο t , $V(t)$ είναι ο αριθμός των θηρευτών σε χρόνο t , A είναι ο φυσικός ρυθμός ανάπτυξης των θηραμάτων, απουσία των θηρευτών, B είναι ο ρυθμός μείωσης των θηραμάτων λόγω της συνύπαρξής τους με τους θηρευτές, C είναι ο ρυθμός ανάπτυξης των θηρευτών λόγω της συνύπαρξής τους με τα θηράματα και D είναι ο ρυθμός μείωσης των θηρευτών λόγω φυσικού θανάτου. Τα A, B, C, D είναι θετικές σταθερές. Το παραπάνω σύστημα έχει δυο σημεία ισορροπίας, το $(U, V) = (0, 0)$ και το $(U, V) = (\frac{D}{C}, \frac{A}{B})$. (βλέπε [1])
Μια βελτιωμένη και πιο ρεαλιστική εκδοχή του Μοντέλου Lotka-Volterra είναι αυτή στην οποία περιλαμβάνονται και όροι διάχυσης. Έτσι, η προσαρμοσμένη εκδοχή του Μοντέλου είναι η παρακάτω:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = AU \left(1 - \frac{U}{K}\right) - BU V + D_1 \nabla^2 U \\ \frac{\partial V}{\partial t} = CUV - DV + D_2 \nabla^2 V \end{cases} \quad (6.1.2)$$

όπου $K > 0$ σταθερά και D_1, D_2 οι όροι διάχυσης. Στην συνέχεια, για να μειωθεί ο αριθμός των μεταβλητών χρησιμοποιούμε τα παρακάτω:

$$u = \frac{U}{K}, \quad v = \frac{BV}{A}, \quad t^* = At, \quad x^* = x \left(\frac{A}{D_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$D^* = \frac{D_1}{D_2}, \quad a = \frac{CK}{A}, \quad b = \frac{D}{CK}.$$

Ασχολούμαστε με το μονοδιάστατο πρόβλημα, παραλείπουμε τους αστερίσκους για σημειογραφική απλότητα και καταλήγουμε:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u(1 - u - v) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = av(u - b) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ 0 < x < L, t > 0. \end{cases} \quad (6.1.3)$$

Ακόμη, θεωρούμε τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(t,0)} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(t,0)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(t,L)} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(t,L)} = 0.$$

Βλέπουμε πως το ζεύγος $(u, v) = (b, 1 - b)$ είναι μια λύση του Μοντέλου.

Για την προσέγγιση των λύσεων του συστήματος χρησιμοποιούμε την μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών για την χωρική διακριτοποίηση. Όπως στην παράγραφο 3.1, διαμερίζουμε το χρονικό διάστημα σε t_0, t_1, \dots, t_N με βήμα Δt και το χωρικό διάστημα σε x_0, x_1, \dots, x_J με βήμα Δx . Έτσι, το u_j^n αφορά την προσέγγιση του u στο σημείο j την χρονική στιγμή n . Όμοια ισχύει και για το v_j^n .

Για την προσέγγιση των λύσεων επιλέχθηκε η Προς τα Εμπρός Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών, η οποία είναι μια άμεση μεθοδολογία. Έτσι, οι εκτιμώμενες τιμές των u_j^{n+1}, v_j^{n+1} υπολογίζονται συναρτήσει των αντίστοιχων τιμών στο χρονικό βήμα n .

Για την προσέγγιση του όρου $\frac{\partial u}{\partial t}$ χρησιμοποιούμε:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t},$$

και για την εκτίμηση του όρου $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ χρησιμοποιούμε:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}.$$

6.1. Η ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ LOTKA-VOLTERRA

Έτσι, το σύστημα (6.1.3) γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = u_j^n (1 - u_j^n - v_j^n) + D \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}, \\ \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = av_j^n (u_j^n - b) + \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2}. \end{cases} \quad (6.1.4)$$

Λύνοντας ως προς u_j^{n+1} και v_j^{n+1} καταλήγουμε:

$$u_j^{n+1} = D \left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \Delta t u_j^n (1 - u_j^n - v_j^n) + u_j^n,$$

$$v_j^{n+1} = \left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) + a \Delta t v_j^n (u_j^n - b) + v_j^n,$$

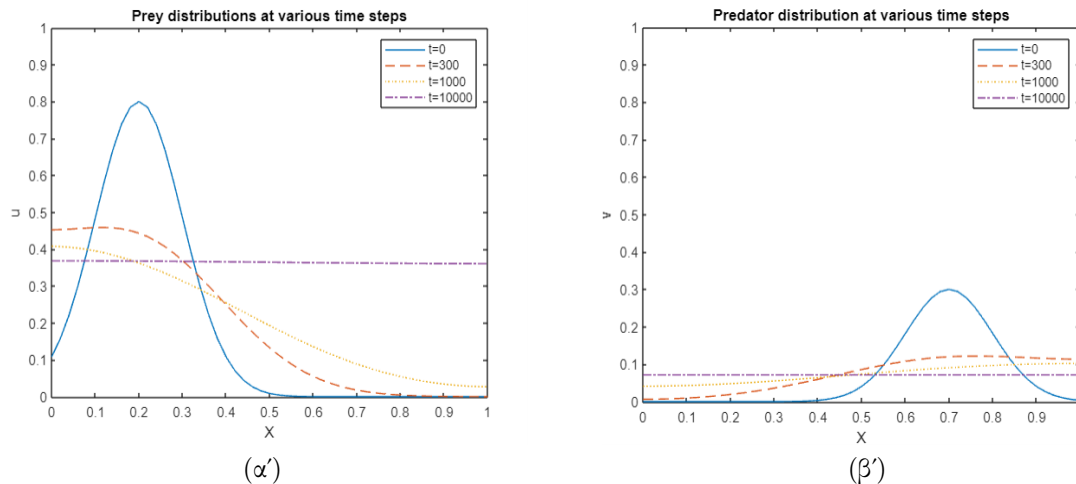
για $2 \leq j \leq N_x - 2$, όπου N_x ο αριθμός των κόμβων της χωρικής διαμέρισης. Ακόμη, ισχύουν τα εξής:

$$u_1^n = u_2^n, \quad u_{N_x-1}^n = u_{N_x-2}^n, \quad v_1^n = v_2^n, \quad v_{N_x-1}^n = v_{N_x-2}^n.$$

Παρατηρούμε ότι η διακριτοποίηση με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών που έχει γίνει για κάθε εξίσωση του συστήματος, όπως φαίνεται στην (6.1.4), ταυτίζεται με την διακριτοποίηση που θα προέκυπτε με γραμμικά πεπερασμένα στοιχεία, ορίζοντας κατάλληλα τους αντίστοιχους πίνακες M και A_{fe} .

Στην συνέχεια, μεταφερόμαστε στο προγραμματιστικό περιβάλλον του Matlab όπου εφαρμόζουμε τον κώδικα που βρίσκεται στο Παράρτημα Α.3. Αρχικά, υποθέτουμε πως οι πληθυσμοί έχουν κανονική κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$.

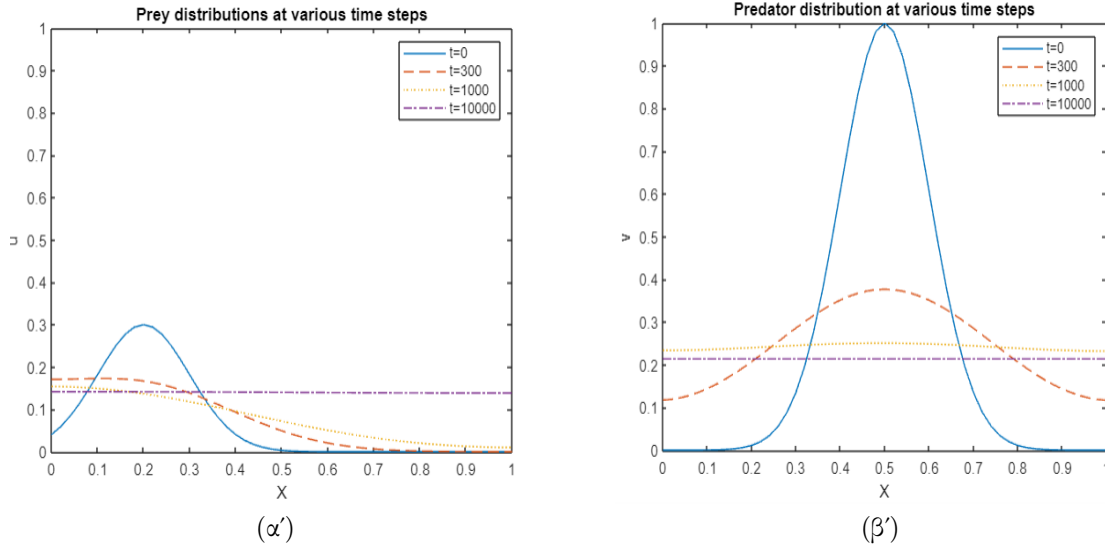
Στο πρώτο παράδειγμα επιλέγουμε ο πληθυσμός των θηραμάτων να είναι μεγαλύτερος και συγκεντρωμένος γύρω από την τιμή $x = 0.2$, ενώ ο πληθυσμός των θηρευτών μικρότερος και συγκεντρωμένος γύρω από την τιμή $x = 0.7$. Γι' αυτό θεωρήθηκαν οι αρχικές κατανομές ως $u^0(x) = 0.8e^{-50(x-0.2)^2}$ και $v^0(x) = 0.3e^{-50(x-0.7)^2}$. Επιλέγουμε, ακόμη, τις αντίστοιχες παραμέτρους $a = 0.7, b = 0.3$ και $D = 0.5$. Γραφικά, βλέπουμε την αρχική κατανομή καθώς και τις κατανομές για $t = 300, t = 1000$ και $t = 10000$ χρονικά βήματα.



Σχήμα 6.1: Αριθμητική προσέγγιση του Μοντέλου Lotka-Volterra για πληθυσμό θηραμάτων μεγαλύτερο από τον πληθυσμό των θηρευτών. Η εικόνα (α') παρουσιάζει την κατανομή του πληθυσμού των θηραμάτων για διάφορες χρονικές στιγμές, ενώ η εικόνα (β') παρουσιάζει την κατανομή του πληθυσμού των θηρευτών για διάφορες χρονικές στιγμές.

6.2. Η ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ LOTKA-VOLTERRA

Στην συνέχεια, μειώσαμε τον πληθυσμό των θηραμάτων για να είναι χαμηλότερος από των θηρευτών με $u^0(x) = 0.3e^{-50(x-0.2)^2}$ και $v^0(x) = e^{-50(x-0.5)^2}$ και με αντίστοιχες παραμέτρους $a = 0.7, b = 0.3$ και $D = 0.5$. Γραφικά, βλέπουμε την αρχική κατανομή, καθώς και τις κατανομές για $t = 300, t = 1000$ και $t = 10000$ χρονικά βήματα.



Σχήμα 6.2: Αριθμητική προσέγγιση του Μοντέλου Lotka-Volterra για πληθυσμό θηραμάτων μικρότερο από τον πληθυσμό των θηρευτών. Η εικόνα (α') παρουσιάζει την κατανομή του πληθυσμού των θηραμάτων για διάφορες χρονικές στιγμές, ενώ η εικόνα (β') παρουσιάζει την κατανομή του πληθυσμού των θηρευτών για διάφορες χρονικές στιγμές.

Παρατηρούμε πως η παρουσία του όρου διάχυσης στο Μοντέλο βοηθά στην σταθεροποίησή του. Ακόμη, καθώς ο χρόνος αυξάνεται, οι δυο πληθυσμοί τείνουν στην ευσταθή λύση του συστήματος, την $(u, v) = (b, 1 - b)$.

Και στα δυο παραδείγματα έχουμε επιλέξει το χρονικό βήμα Δt να σχετίζεται με το χωρικό βήμα Δx με την σχέση $\Delta t \approx (\Delta x)^2$ έτσι ώστε η μέθοδος μας να είναι συγκλίνουσα.

6.2 Η Δισδιάστατη περίπτωση του Μοντέλου Lotka-Volterra

Το σύστημα (6.1.1) με μια αλλαγή χρονικής κλίμακας μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω κανονικοποιημένη μορφή:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \alpha U(V - 1) \\ \frac{\partial V}{\partial t} = V(1 - U) \end{cases} \quad (6.2.1)$$

όπου σταθερά $\alpha \geq 0$. Ακόμη, για τις αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$U(x, 0) = U^0, V(x, 0) = V^0.$$

Το παραπάνω σύστημα έχει δύο σημεία ισορροπίας $(U, V) = (0, 0)$ και $(U, V) = (1, 1)$.

6.2. Η ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ LOTKA-VOLTERRA

Στην συνέχεια, εξετάζουμε την ευστάθεια του μοντέλου. Ορίζουμε μια μικρή διαταραχή (x, y) στον πληθυσμό (U, V) και κάνουμε την αντίστοιχη γραμμικοποίηση, δηλαδή το ανάπτυγμα Taylor, και κρατάμε μόνο τους γραμμικούς όρους.

Για το πρώτο σημείο $(U^*, V^*) = (0, 0)$ έχουμε την διαταραχή:

$$U = U^* + x = x,$$

$$V = V^* + y = y.$$

Με γραμμικοποίηση θα καταλήξουμε για τη χρονική εξέλιξη της διαταραχής, στις εξισώσεις:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\alpha U, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = V.$$

Συγκεκριμένα, βλέπουμε πως $V(t) = V^0 e^t$ και συμπεραίνουμε πως το σημείο $(0, 0)$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας. (βλέπε [10, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 68])

Για το δεύτερο σημείο $(U^*, V^*) = (1, 1)$ έχουμε μικρή διαταραχή:

$$U = U^* + x = 1 + x,$$

$$V = V^* + y = 1 + y.$$

Η αντίστοιχη γραμμικοποίηση δίνει:

$$\frac{\partial(x+1)}{\partial t} = (1+x)(1-1-y) = -y(1+x) = -y - xy \approx -y,$$

$$\frac{\partial(y+1)}{\partial t} = \alpha(1+y)(1+x-1) = \alpha x + \alpha xy \approx \alpha x,$$

εφόσον ισχύει ότι $xy \ll y$ και $xy \ll x$. Οι ιδιοτιμές του παραπάνω συστήματος είναι:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\alpha \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \pm i\sqrt{\alpha}.$$

Δηλαδή το σημείο $(U, V) = (1, 1)$ στο γραμμικοποιημένο σύστημα είναι κέντρο. (βλέπε [10, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 68])

Για την προσέγγιση των λύσεων του συστήματος Lotka-Volterra θεωρούμε ένα μικρό χρονικό βήμα Δt . Αρχικά, επιλύουμε για χρονικό βήμα $\frac{\Delta t}{2}$ το παρακάτω πρόβλημα:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = aU(V-1), \\ \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \\ U(x, 0) = U^0, V(x, 0) = V^0. \end{cases} \quad (6.2.2)$$

Η αναλυτική λύση του συστήματος (6.2) για χρόνο $\frac{\Delta t}{2}$ είναι:

$$U^{*,1} = U^0 e^{\alpha(V^0-1)\frac{\Delta t}{2}}, V^{*,1} = V^0. \quad (6.2.3)$$

Έπειτα, λύνουμε για χρονικό βήμα Δt το παρακάτω πρόβλημα:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} = V(1-U), \\ U(x, 0) = U^{*,1}, V(x, 0) = V^{*,1}. \end{cases} \quad (6.2.4)$$

Η αναλυτική λύση του συστήματος (6.2) για χρόνο Δt είναι:

$$U^{*,2} = U^{*,1} V^{*,2} = V^{*,1} e^{(1-U^{*,1})\Delta t}. \quad (6.2.5)$$

Τέλος, επιλύουμε για χρονικό βήμα $\frac{\Delta t}{2}$ το παρακάτω πρόβλημα:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \alpha U(V - 1), \\ \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \\ U(x, 0) = U^{*,2}, V(x, 0) = V^{*,2}. \end{cases} \quad (6.2.6)$$

Η αναλυτική λύση του συστήματος (6.2) για χρόνο $\frac{\Delta t}{2}$ είναι:

$$U^{*,3} = U^{*,2} e^{\alpha(V^{*,2}-1)\frac{\Delta t}{2}}, V^{*,3} = V^{*,2}. \quad (6.2.7)$$

Συνοψίζοντας, η δεύτερης τάξης προσέγγιση $(U(\Delta t), V(\Delta t))$ για το Μοντέλο Lotka-Volterra για χρόνο Δt είναι:

$$\begin{cases} U^* = U^0 e^{\alpha(V^0-1)\frac{\Delta t}{2}}, \\ V(\Delta t) = V^0 e^{(1-U^*)\Delta t}, \\ U(\Delta t) = U^* e^{\alpha(V(\Delta t)-1)\frac{\Delta t}{2}}. \end{cases} \quad (6.2.8)$$

Ουσιαστικά, παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την Μέθοδο Διαχωρισμού Strang ως προσεγγιστική μέθοδο. Η Μέθοδος Strang είναι μια αριθμητική μέθοδος για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων που μπορούν να αποσυντεθούν σε ένα άθροισμα διαφορικών τελεστών. (βλέπε [10, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 69])

Υποθέτουμε, τώρα, πως η κατανομή στον χώρο των θηραμάτων και των θηρευτών δεν είναι ομογενής. Γι' αυτό, εισάγουμε έναν τελεστή χωρικής διάχυσης, με την παρουσία του οποίου προκύπτει ένα δισδιάστατο πρόβλημα αντίδρασης-διάχυσης, όπως περιγράφεται παρακάτω:

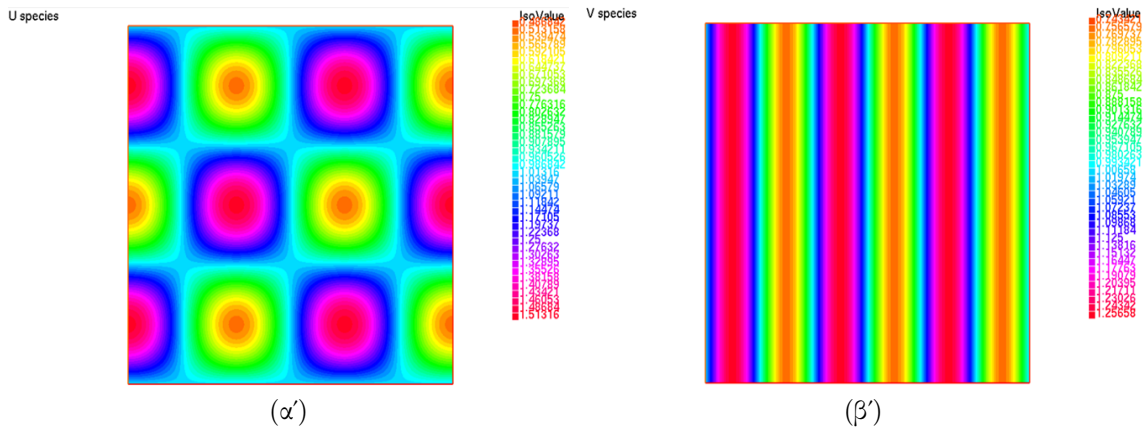
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \nu \Delta U = \alpha U(V - 1), \\ \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta V = V(1 - U), \end{cases} \quad (6.2.9)$$

για συντελεστές διάχυσης $\nu, \mu > 0$.

Επιλέγουμε, το πρώτο δισδιάστατο υπολογιστικό παράδειγμα με αρχικές συνθήκες για τα θηράματα και τους θηρευτές να είναι αντίστοιχα:

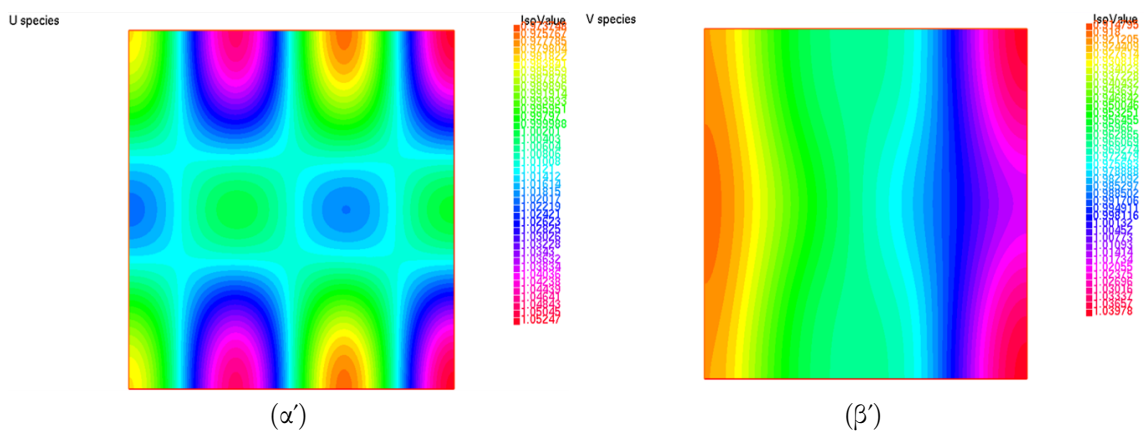
$$U(x, y) = 1 + 0.5 \cos(3\pi x) \sin(3\pi y), V(x, y) = 1 + 0.5 \sin(3\pi x) \cos(3\pi y).$$

6.2. Η ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ LOTKA-VOLTERRA



Σχήμα 6.3: Αρχικές συνθήκες του Μοντέλου Lotka-Volterra για την δισδιάστατη περίπτωση. Η εικόνα (α') αφορά την κατανομή θηραμάτων, ενώ η εικόνα (β') αφορά την κατανομή του πληθυσμού των θηρευτών.

Θεωρούμε, ακόμη, τις τιμές $\nu = 10^{-3}$, $\mu = 10^{-4}$, $\alpha = 0.5$ και επιλύουμε αριθμητικά το σύστημα συνδυάζοντας την Μέθοδο Crank-Nicolson για κάθε διαφορική εξίσωση ξεχωριστά, όπως στην παράγραφο (5.2.2), με την Μέθοδο Strang, όπως φαίνεται στον κώδικα του Παραρτήματος Β.4. Έτσι, επιλύουμε δυο συστήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων που αφορούν το πρόβλημα της αντίδρασης και ένα σύστημα Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων που αφορούν το πρόβλημα της διάχυσης.



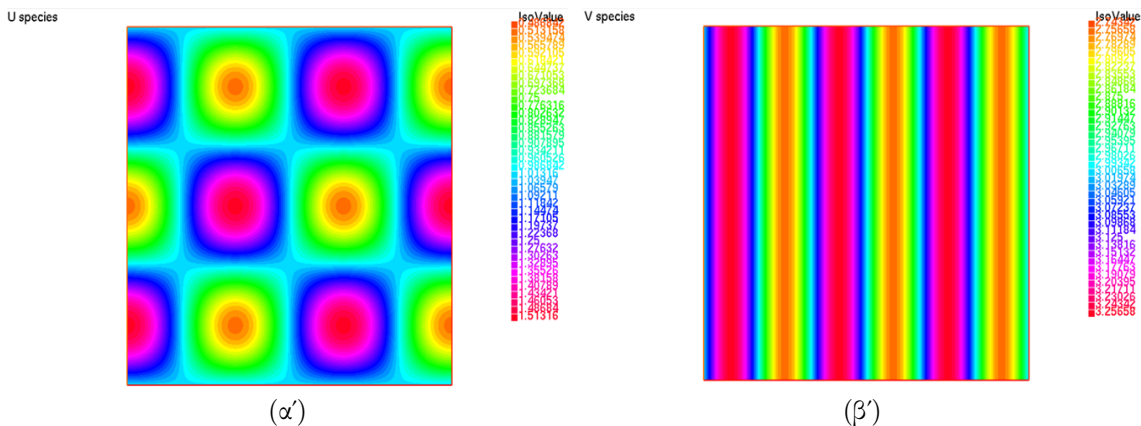
Σχήμα 6.4: Αριθμητική προσέγγιση του Μοντέλου Lotka-Volterra για την δισδιάστατη περίπτωση. Η εικόνα (α') αφορά την κατανομή θηραμάτων στον τελικό χρόνο, ενώ η εικόνα (β') αφορά την κατανομή του πληθυσμού των θηρευτών.

Τα παραπάνω διαγράμματα μας δείχνουν πως κατανέμεται η πυκνότητα του πληθυσμού των θηραμάτων και των θηρευτών στον χώρο στον τελικό χρόνο. Τα σκουρότερα χρώματα υποδηλώνουν μεγαλύτερες τιμές για τους πληθυσμούς, ενώ τα πιο ανοιχτά χρώματα συμβολίζουν μικρότερες τιμές.

6.2. Η ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ LOTKA-VOLTERRA

Έπειτα, επιλέγουμε το υπολογιστικό παράδειγμα με αρχικές συνθήκες για τα θηράματα και τους θηρευτές αντίστοιχα:

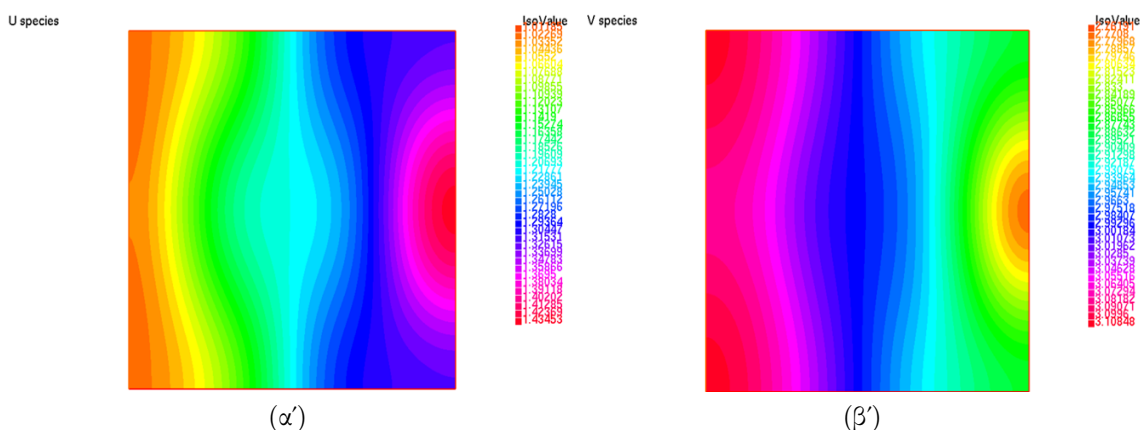
$$U(x, y) = 1 + 0.5\cos(3\pi x)\sin(3\pi y), \quad V(x, y) = 3 + 0.5\sin(3\pi x)\cos(3\pi y).$$



Σχήμα 6.5: Αρχικές συνθήκες του Μοντέλου Lotka-Volterra για την διδιάστατη περίπτωση. Η εικόνα (α) αφορά την κατανομή θηραμάτων, ενώ η εικόνα (β) αφορά την κατανομή του πληθυσμού των θηρευτών.

Η μόνη αλλαγή που παρατηρούμε στα διαγράμματα των αρχικών συνθηκών, σε σχέση με το προηγούμενο παράδειγμα, είναι το εύρος τιμών για τον πληθυσμό των θηρευτών όπως φαίνεται στο υπόμνημα του αντίστοιχου διαγράμματος (β').

Διατηρούμε τις τιμές των συντελεστών $\nu = 10^{-3}$, $\mu = 10^{-4}$, $\alpha = 0.5$ και επιλύουμε αριθμητικά το σύστημα, όπως προηγουμένως.



Σχήμα 6.6: Αριθμητική προσέγγιση του Μοντέλου Lotka-Volterra για την διδιάστατη περίπτωση. Η εικόνα (α) αφορά την κατανομή θηραμάτων στον τελικό χρόνο, ενώ η εικόνα (β) αφορά την κατανομή του πληθυσμού των θηρευτών.

Τα παραπάνω διαγράμματα μας δείχνουν πως κατανέμεται η πυκνότητα του πληθυσμού των θηραμάτων και των θηρευτών στον χώρο στον τελικό χρόνο. Παρατηρούμε πως στα σημεία που υπάρχει μεγαλύτερη πυκνότητα θηρευτών με πιο σκούρο χρώμα (εικόνα β'), υπάρχει αντίστοιχα μικρότερη πυκνότητα θηραμάτων με πιο ανοιχτό χρώμα (εικόνα α').

Παράρτημα Α'

Κώδικας Matlab

A.1 Forward Euler

```
function [u,error]= FE(I,nx,f,uo,uexact)
h = (I(2)-I(1))/nx;
k=(h^2)/2;
tau=k/h^2;
u0=zeros(nx+1,1);
u=zeros(nx+1,1); ur=zeros(nx+1,1);
for i=1:nx+1
    x(i) = I(1)+(i-1)*h;
    u0(i)=uo(x(i));
end
t=0;
for i=2:nx
    u(i)= u0(i) + tau*(u0(i-1)-2*u0(i)+u0(i+1))+k*f(x(i),t);
    ur(i)=uexact(x(i),t);
end
u0=u; t=t+k;
error=max(abs(ur-u));
plot(x,u,'bo',x,ur,'r-')
end
```

A.2 Backward Euler

```
function [u,error]=BE(I,nx,nt,f,uo,uexact)
h = (I(2)-I(1))/nx;
k=(I(4)-I(3))/nt;
tau=k/h^2;
e=ones(nx+1,1);
A=spdiags([-tau*e, (1+2*tau)*e, -tau*e ],-1:1,nx+1,nx+1);
A(1,1)=1; A(1,2)=0; A(nx+1,nx)=0; A(nx+1,nx+1)=1;
b = zeros(nx+1,1);
b(1)=0; b(nx+1)=0;
u0=zeros(nx+1,1);
u=zeros(nx+1,1); ur=zeros(nx+1,1);
for i=1:nx+1
    x(i) = I(1)+(i-1)*h;
    u0(i)=uo(x(i));
end
for j=1:nt+1
    t(j) = I(3)+(j-1)*k;
    for i=2:nx
        b(i)=u0(i)+k*f(x(i),t(j));
    u=A\b;
    u0=u;
    end
for i=1:nx+1
    ur(i)=uexact(x(i),t(j));
end
end
error=max(abs(ur-u));
plot(x,u,'bo',x,ur,'r-')
end
```

A.3 Forward Method for the Lotka-Volterra Model

Ο παρακάτω κώδικας προέρχεται από την αναφορά [1, Σελίδα 8].

```
L = 1; %total length of spatial interval
T = 1; %total length of time interval
% Parameters needed to solve the equation within the
    explicit method
maxk = 10000; % Number of time steps
dt = T/maxk;
nx = 50; % Number of space steps
dx = L/nx;
a = .7; b = .3;
nu=dt/(dx*dx);
k=50; %parameter in population normal distributions
D =.5; % diffusion constant
```

```

% Initial distributions
for j = 1:nx+1
    x(j) = (j-1)*dx;
    u(j,1) = 0.8*exp(-k.*((x(j)-0.2)).^2);
    v(j,1) = 0.3*exp(-k.*((x(j)-0.7)).^2);
end
% Implementation of the forward method
for n=1:maxk % Time Loop
    j = 1; %left-hand boundary
    u(j,n+1) = D*nu.*(u(j,n)+u(j+1,n)-2.*u(j,n))+ dt*(u(j,n)
        ).*(1-u(j,n)-v(j,n))+u(j,n);
    v(j,n+1) = nu.*(v(j,n)+v(j+1,n)-2.*v(j,n)) + dt*a.*(v(j,
        n)).*(u(j,n)-b) + v(j,n);
    for j=2:nx; % Space Loop
        u(j,n+1) = D*nu.*(u(j-1,n)+u(j+1,n)-2.*u(j,n))+ dt*(u(j,
            n)).*(1-u(j,n)-v(j,n))+u(j,n);
        v(j,n+1) = nu.*(v(j-1,n)+v(j+1,n)-2.*v(j,n)) +dt*a.*(v(j
            ,n)).*(u(j,n)-b) + v(j,n);
    end
    %right-hand boundary
    j = nx+1;
    u(j,n+1) = D*nu.*(u(j-1,n)+u(j,n)-2.*u(j,n))+ dt*(u(j,n)
        ).*(1-u(j,n)-v(j,n))+u(j,n);
    v(j,n+1) = nu.*(v(j-1,n)+v(j,n)-2.*v(j,n)) + dt*a.*(v(j,
        n)).*(u(j,n)-b) + v(j,n);
end
% Graphical representation of the temperature at
    different selected times
figure(1)
plot(x,u(:,1),'-',x,u(:,300),'--',x,u(:,1000),':',x,u
    (:,10000),'-.'.')
axis([0 1 0 1]) %specifies limits of axes (0, 1) x (0, 1)
title('Prey distributions at various time steps')
xlabel('X')
ylabel('u')
legend('t=0', 't=300', 't=1000','t=10000')
figure(2)
plot(x,v(:,1),'-',x,v(:,300),'--',x,v(:,1000),':',x,v
    (:,10000),'-.'.')
axis([0 1 0 1])
title('Predator distribution at various time steps')
xlabel('X')
ylabel('v')
legend('t=0', 't=300', 't=1000','t=10000')

```

Παράρτημα Β'

Κώδικας FreeFem++

B.1 Theta Method

Ο παρακάτω κώδικας προέρχεται από την αναφορά [4, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 585].

```
// Parameters
real tau = 0.1;
real theta = 0.;
// Mesh
mesh Th = square(12, 12);
// Fespace
fespace Vh(Th, P1);
Vh u, v, oldU;
Vh f1, f0;
fespace Ph(Th, P0);
Ph h = hTriangle; // mesh sizes for each triangle
// Function
func real f (real t){
    return (8*pi*pi-1)*exp(-t)*sin(2*pi*x)sin(2*pi*y); }
// File
ofstream out("err02.csv"); //file to store calculations
out << "mesh_size=" << h[.max] << ",time_step=" << tau << endl;
for (int n = 0; n < 5/tau; n++)
out << n*tau << ", ";
out << endl;

// Problem
problem aTau (u, v)
= int2d(Th)( u*v
+ theta*tau*(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) + u*v))
- int2d(Th)(oldU*v
- (1-theta)*tau*(dx(oldU)*dx(v) + dy(oldU)*dy(v)
+ oldU*v))
- int2d(Th)( tau*(theta*f1 + (1-theta)*f0)*v );
// Theta loop
while (theta <= 1.0){
    real t = 0;
```

```
real T = 1;
oldU = sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y);
out << theta << ", ";
for (int n = 0; n < T/tau; n++){
  // Update
  t = t + tau;
  f0 = f(n*tau);
  f1 = f((n+1)*tau);
  // Solve
  aTau;
  oldU = u;
  // Plot
  plot(u);
  // Error
  Vh uex = exp(-t)*sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y); //exact solution
  Vh err = u - uex; // err = FE_sol - exact
  out << abs(err []).max/abs(uex []).max << ", ";
}
out << endl;
theta = theta + 0.1;}
```

B.2 Backward Euler

Ο παρακάτω κώδικας προέρχεται από την αναφορά [4, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 585].

```
// Parameters
real dt=0.03125;
// Mesh
mesh th=square(8,8);
// Definition of the fespace
fespace Vh(th,P1);
Vh u,v;
Vh uu = sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y); // initial data
Vh f0,f1; // force terms at time levels t^{n+1} and t^n respectively
fespace Ph(th, P0);
Ph h = hTriangle; // mesh sizes for each triangle
//Problem
problem heat(u,v)=
  int2d(th)(u*v+dt*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)))
  -int2d(th)(uu*v)-int2d(th)(dt*f1
  +on(1,2,3,4,u=0)); //boundary conditions
//Time Loop
real t=0; // initial time
for(int n=0;n<=1/dt;n++){
  f0 = (8*pi*pi-1)*exp(-t)*sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y);
  t=t+dt;
  f1 = (8*pi*pi-1)*exp(-t)*sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y);
  //Solve
  heat;
```



```
    uu = u;
    //Plot
    plot(u, wait=true);
    Vh uex = exp(-t)*sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y); //exact solution
    //Error
    real L2=sqrt(int2d(th)((u-uex)^2));
    real H1=sqrt(L2^2+int2d(th)((dx(u)-dx(uex))^2+(dy(u)-dy(uex))^2));
    //Errors in time
    cout << "t=" << t << " L2-Error=" << L2 << endl;
    cout << "t=" << t << " H1-Error=" << H1 << endl;
    cout << "size of mesh=" << h[].max << endl; }
```

B.3 Crank-Nicolson

Ο παρακάτω κώδικας προέρχεται από την αναφορά [4, Κεφάλαιο 5, Σελίδα 585].

```
// Parameters
real dt=0.03125;
// Mesh
mesh th=square(48,48);
// Definition of the fespace
fespace Vh(th,P1);
Vh u,v;
Vh uu = sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y); // initial data
Vh f0,f1; // force terms at time levels  $t^{n+1}$  and  $t^n$  respectively
fespace Ph(th, P0);
Ph h = hTriangle; // mesh sizes for each triangle
//Problem
problem heat(u,v)=
    int2d(th)(u*v+0.5*dt*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)))
    -int2d(th)(uu*v-0.5*dt*(dx(uu)*dx(v)+dy(uu)*dy(v)))
    -int2d(th)(dt*(0.5*f1+ 0.5*f0)*v)
    +on(1,2,3,4,u=0); //boundary conditions
//Time Loop
real t=0; // initial time
for(int n=0;n<=1/dt;n++){
    f0 = (8*pi*pi-1)*exp(-t)*sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y);
    t=t+dt;
    f1 = (8*pi*pi-1)*exp(-t)*sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y);
    //Solve
    heat;
    uu = u;
    //Plot
    plot(u, wait=true);
    Vh uex = exp(-t)*sin(2*pi*x)*sin(2*pi*y); //exact solution
    //Error
    real L2=sqrt(int2d(th)((u-uex)^2));
    real H1=sqrt(L2^2+int2d(th)((dx(u)-dx(uex))^2+(dy(u)-dy(uex))^2));
```

```
//Errors in time
cout << "t=" << t << " L^2-Error=" << L2 << endl;
cout << "t=" << t << " H^1-Error=" << H1 << endl;
cout << "size of mesh=" << h[ ].max << endl; }
```

B.4 Lotka-Volterra

Ο παρακάτω κώδικας προέρχεται από την αναφορά [10, Κεφάλαιο 7, Σελίδα 71].

```
//Set parameters.
real alpha = 0.5;
real t = 0.0;
real dt = 0.2;
real nu = 0.001; real mu = 0.0001;
real theta = 0.5;
int it = 0;
//Th: the mesh.
mesh Th = square ( 40, 40 );
fespace Vh ( Th, P2 );
fespace Wh ( Th, P1 );
Vh u, uh, uold;
Vh v, vh, vold;
Wh dxu, dyu, dxv, dyv;
//Define the weak form of the U equation.
problem heatu (u, uh, init=it) =
  int2d(Th)(u*uh/dt)- int2d(Th)(uold*uh/dt)
+int2d(Th)(nu*(1.0-theta)*dx(u)*dx(uh) + nu*(1.0-theta)*dy(u)*dy(uh))
+int2d(Th)(nu*(theta)*dx(uold)*dx(uh) + nu*(theta)*dy(uold)*dy(uh));
//Define the weak form of the V equation.
problem heatv (v, vh, init=it) =
  int2d(Th)(v*vh/dt)- int2d(Th)(vold*vh/dt)
+int2d(Th)(mu*(1.0-theta)*dx(v)*dx(vh)+mu*(1.0-theta)*dy(v)*dy(vh))
+int2d(Th)(mu*(theta)*dx(vold)*dx(vh)+mu*(theta)*dy(vold)*dy(vh));
//Initializing
u=1+0.5*cos(3*pi*x)*sin(3*pi*y); uold = u;
v=1+0.5*sin(3*pi*x)*cos(3*pi*x); vold = v;
//Big loop in time
//Fractional step method
for ( it = 0; it < 200; it++ )
{ for ( int subit = 0; subit < 1; subit++ )
  { t = t + dt;
  //Step a. Solve the reaction system on ( dt /2)
  u = u * exp ( alpha*(v-1.0)*dt*0.25 );
  v = v * exp ( (1.0-u)*dt*0.5 );
  uold = u; vold = v;
  //Step b. Solve the diffusion system on ( dt )
  heatu; uold = u;
  heatv; vold = v;
  }
```

```
//Step c. Solve the reaction system on ( dt /2)
  u = u * exp ( alpha * ( v - 1.0 ) * dt * 0.25 );
  v = v * exp ( ( 1.0 - u ) * dt * 0.5 );
  uold = u; vold = v;}
plot(u,nbiso =40,value=true, fill=true,cmm="U_species");
plot(v,nbiso=40,value=true, fill=true,cmm="V_species");}
//Save the final images.
plot ( u, nbiso = 40, value = true, fill = true,
  ps = "lotka_volterra_u.ps_cmm=_U_species" );
plot ( v, nbiso = 40, value = true, fill = true,
  ps = "lotka_volterra_v.ps", cmm = "V_species" );
```

Βιβλιογραφία

- [1] Gerry Baygents (2017); Using Matlab to Numerically Solve Prey-Predator Models with Diffusion, Department of Mathematics and Statistics, UMKC
- [2] Alfio Quarteroni, A. Valli (1994); Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer, Berlin and Heidelberg.
- [3] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri (2000); Numerical Mathematics, Springer.
- [4] Frederic Hecht (2023); FreeFEM Documentation Release 4.12.
- [5] Marcus Garvie (2007); Finite-Difference Schemes for Reaction–Diffusion Equations Modeling Predator–Prey Interactions in MATLAB, School of Computational Science, Florida State University.
- [6] Fasma Diele, Marcus Garvie, Catalin Trenchea (2017); Numerical analysis of a first-order in time implicit-symplectic scheme for predator–prey systems.
- [7] Lawrence C.Evans (2010); Partial Differential Equations, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, 2nd ed.
- [8] Hans Petter Langtangen (2015); Finite difference methods for diffusion processes, Department of Informatics, University of Oslo.
- [9] Vidar Thomée (2006); Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems, Springer, 2nd ed.
- [10] Florian de Vuyst (2013); Numerical modeling of transport problems using freefem++ software – with examples in biology, CFD, traffic flow and energy transfer.