



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ &  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΠΡΩΤΟΤΥΠΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ  
ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΠΙΓΡΑΦΩΝ ΚΑΙ  
ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΕΡΓΩΝ ΖΩΓΡΑΦΙΚΗΣ ΓΙΑ ΤΟΝ  
ΕΝΤΟΠΙΣΜΟ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΤΡΟΠΙΑΣ ΤΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥ**

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

Γεωργίου Π. Γαλανόπουλου

Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Ν. Παπαοδυσσεύς

Αθήνα, Δεκέμβριος 2011





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ &  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΠΡΩΤΟΤΥΠΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ  
ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΠΙΓΡΑΦΩΝ ΚΑΙ  
ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΕΡΓΩΝ ΖΩΓΡΑΦΙΚΗΣ ΓΙΑ ΤΟΝ  
ΕΝΤΟΠΙΣΜΟ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΤΡΟΠΙΑΣ ΤΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥ**

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

Γεωργίου Π. Γαλανόπουλου

**Συμβουλευτική Επιτροπή :** Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς

Ηλίας Κουκούτσης

Βασίλειος Λούμος

.....  
Κ. Παπαοδυσσεύς  
Αναπλ. Καθ. ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....  
Η. Κουκούτσης  
Επικ. Καθ. ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....  
Β. Λούμος  
Καθ. ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....  
Γ. Στασινόπουλος  
Καθ. ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....  
Μ. Θεολόγου  
Καθ. ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....  
Θ. Ρασσιάς  
Καθ. ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ

.....  
Μ. Ζερβάκης  
Κάθ. Τμήματος Η.Μ.Μ.Υ.  
Πολυτεχνείου Κρήτης

Αθήνα, Δεκέμβριος 2011



.....

Γεώργιος Π. Γαλανόπουλος

Διδάκτωρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Γεώργιος Π. Γαλανόπουλος 2011

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με στήριξαν σε αυτή την προσπάθεια και συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής.

Πρωτίστως, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντά μου, καθηγητή, κύριο Κωνσταντίνο Παπαοδυσσέα. Είναι ο άνθρωπος ο οποίος και απετέλεσε το αρχικό θέλγητρο στην απόφασή μου να ξεκινήσω αυτή την προσπάθεια και με περιέβαλε από την πρώτη στιγμή με απεριόριστη εμπιστοσύνη. Τον ευχαριστώ για την καθοδήγηση που μου παρείχε σε όλα τα στάδια, όντας διαθέσιμος να με βοηθήσει οποιαδήποτε στιγμή. Τον ευχαριστώ για την ανοχή και υπομονή που επέδειξε στον τρόπο εργασίας μου καθώς και για την πίστη του στις δυνατότητες μου.

Θερμές είναι και οι ευχαριστίες μου προς τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής μου, καθηγητές κ.κ. Ηλία Κουκούτση και Βασίλειο Λούμο. Οι συμβουλές και κατευθύνσεις τους καθώς και η δυνατότητα πρόσβασης που μου παρείχαν σε εξειδικευμένη υλικοτεχνική υποδομή ήταν σημαντική στην υλοποίηση σημαντικού μέρους της παρούσης εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς επιτροπής τους καθηγητές κ.κ. Μιχάλη Ζερβάκη, Μιχάλη Θεολόγου, Θεμιστοκλή Ρασσιά και Γιώργο Στασινόπουλο για τα σχόλια και τις υποδείξεις τους.

Για τη βοήθεια στη συγγραφή της διατριβής αλλά και για τις συμβουλές του σε διαδικαστικά θέματα ευχαριστώ τον διδάκτορα Ε.Μ.Π. Παναγιώτη Ρουσόπουλο.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς την οικογένειά μου για την αμέριστη συμπαράστασή της όλα αυτά τα χρόνια.

Γεώργιος Π. Γαλανόπουλος





Περιεχόμενα	
Πρόλογος .....	9
A Αυτόματη ταυτοποίηση χαρακτών αρχαίων επιγραφών από τριδιάστατες απεικονίσεις .....	12
A.1 Εισαγωγή .....	12
A.2 Συσχέτιση και σύγκριση πληροφορίας από διδιάστατες & τριδιάστατες απεικονίσεις .....	15
A.2.1 Αντιστοίχιση διδιάστατων & τριδιάστατων απεικονίσεων .....	15
A.2.1.1 Επιλογή σημείων σε διδιάστατη απεικόνιση .....	16
A.2.1.2 Δημιουργία διδιάστατης εικόνας από τριδιάστατη απεικόνιση.....	16
A.2.1.3 Πρώτη προσαρμογή τριδιάστατης και διδιάστατης απεικόνισης επιγραφής.....	18
A.2.1.4 Μετατροπή μεταξύ συστημάτων αναφοράς διδιάστατης και τριδιάστατης απεικόνισης.....	20
A.3 Προσέγγιση τριδιάστατης απεικόνισης γράμματος με επιφάνειες .....	22
A.3.1 Επιλογή καταλλήλου επιπέδου αναφοράς .....	22
A.3.2 Δημιουργία Επιφανειών.....	25
A.4 Συσχέτιση τριδιάστατης & διδιάστατης απεικόνισης γράμματος .....	27
A.4.1 Μέθοδος χωρικής συσχέτισης τριδιάστατης και διδιάστατης απεικόνισης γράμματος .....	27
A.4.2 Αξιολόγηση μεθόδου και αποτελεσμάτων .....	35
A.5 Εξαγωγή γράμματος από τριδιάστατη απεικόνιση .....	36
A.6 Σύγκριση εξαχθέντων μορφών γραμμάτων .....	40
A.7 Εξαγωγή πλατωνικού προτύπου γράμματος.....	43
A.7.1 Εξαγωγή νέφους βέλτιστα προσαρμοσμένων επιφανειών γράμματος	43
A.7.2 Εξαγωγή πλατωνικού προτύπου από νέφος.....	51
A.7.3 Επιλογή βελτίστου πλατωνικού.....	53
A.8 Σύγκριση και κατάταξη πλατωνικών.....	54
A.9 Εφαρμογή Μεθόδου.....	58
B Σύστημα μελέτης τεχνοτροπίας έργων ζωγραφικής.....	62
B.1 Εισαγωγή .....	62
B.2 Εξαγωγή των προς μελέτη καμπυλών.....	62
B.2.1 Ψηφιοποίηση φωτογραφιών .....	62
B.2.2 Κατάτμηση εικόνας .....	63
B.3 Εξαντλητική μέθοδος προσαρμογής καμπυλών .....	66
B.4 Επεξεργασία αποτελεσμάτων και εξαγωγή μοτίβων.....	79
B.4.1 Ομαδοποίηση αποτελεσμάτων A.....	79
B.4.2 Ομαδοποίηση αποτελεσμάτων B.....	82
B.4.3 Εξαγωγή ελαχίστου πλήθους αντιπροσώπων έργου τέχνης .....	83
B.4.4 Έλεγχος επικάλυψης εξαχθέντων αντιπροσώπων .....	85
B.5 Εφαρμογή μεθόδου και αξιολόγηση αποτελεσμάτων .....	91
B.5.1 Εφαρμογή.....	91
B.5.2 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων .....	96
C Παράρτημα.....	100
Αλγόριθμος ICP (Iterative Closest Point).....	100
Υπολογισμός Εμβαδού πολυγώνου .....	103
Θεμελιώδεις έννοιες και θεωρήματα σχετικά με συγκεκριμένες στατιστικές κατανομές και έλεγχο στατιστικών υποθέσεων.....	108
Κανονική κατανομή (Normal Distribution).....	108
Τυπική κανονική κατανομή .....	109

Κατανομή $X^2$ .....	109
Έλεγχος υποθέσεων σχετικών με πληθυσμιακές μέσες τιμές.....	111
Υποθέσεις για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού από ένα δείγμα του.....	112
Υποθέσεις που αφορούν στη διαφορά των μέσων δύο πληθυσμών.....	114
Αναφορές -Βιβλιογραφία.....	118

## Πρόλογος

Η παρούσα διατριβή πραγματεύεται την εφαρμογή της πληροφορικής στην επίλυση σημαντικών προβλημάτων που απαντώνται κατά τη μελέτη έργων τέχνης του παρελθόντος και αρχαιολογικών ευρημάτων με ιδιαίτερο πολιτισμικό ενδιαφέρον. Πιο συγκεκριμμένα, στο παρόν έργο αναπτύσσονται πληροφοριακά συστήματα και χρησιμοποιούνται πρωτότυπες μαθηματικές τεχνικές για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών. Τα συστήματα και οι τεχνικές αποτελούνται από αλγόριθμους επεξεργασίας τριδιάστατων αντικειμένων, ψηφιακής επεξεργασίας εικόνων, καθώς επίσης και από εφαρμογή μεθόδων στατιστικής επεξεργασίας δεδομένων.

Η εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, παρουσιάζεται ένα πλήρες πληροφοριακό σύστημα, που σκοπό έχει την αυτόματη ταυτοποίηση των γραφών αρχαίων Ελληνικών επιγραφών μελετώντας τριδιάστατες απεικονίσεις των κειμένων αυτών και με κύριο σκοπό την ορθή χρονολόγηση του κειμένου τους.

Η προτεινόμενη προσέγγιση ξεκινά με τη λήψη της τριδιάστατης απεικόνισης κάθε μιας επιγραφής και την ψηφιακή αποθήκευση της.

Οι ανάγκες οργάνωσης και επισκόπησης της πληροφορίας σε επίπεδο γραμμάτων των επιγραφών οδηγούν στην ανάπτυξη κατάλληλης μεθοδολογίας μέσω της οποίας οι τριδιάστατες απεικονίσεις μετατρέπονται σε διδιάστατες με αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση.

Οι ανωτέρω διδιάστατες απεικονίσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την απομόνωση από κάθε μια επιγραφή της τριδιάστατης μορφής των συμβόλων της αλφαβήτου. Στις απομονωμένες τριδιάστατες μορφές εφαρμόζονται πρωτότυπες τεχνικές ώστε να διαχωρισθούν τα σημεία που θα πρέπει να ληφθούν ως γράμμα, λαμβάνοντας καθ'αυτό τον τρόπο την τελική μορφή κάθε μιας διαφορετικής υλοποίησης συμβολογράμματος. Επιπλέον με ανάπτυξη κατάλληλης διαδικασίας επιτυγχάνεται η διασύνδεση της τριδιάστατης μορφής των υλοποιήσεων συμβολογραμμάτων των επιγραφών με ληφθείσες διδιάστατες απεικονίσεις και ορίζονται αντικειμενικά κριτήρια για την εύρεση της βελτίστης θέσεως υπέρθεσής τους.

Κατόπιν οι πολλαπλές διαφορετικές υλοποιήσεις ενός συμβολογράμματος σε κάθε επιγραφή συνδυάζονται και εξάγεται μια αντιπροσωπευτική μορφή του. Εν συνεχεία, πραγματοποιείται η σύγκριση των αντιπροσωπευτικών μορφών και με

χρήση κριτηρίων που βασίζονται στη στατιστική ανάλυση καταλλήλως ορισθέντων ποσοτήτων, αφ' ενός καθορίζονται το πλήθος των διαφορετικών χειριών που έχουν σμιλεύσει ένα δεδομένο σύνολο επιγραφών, αφ' ετέρου ομαδοποιούνται οι επιγραφές σε χαρακτες.

Στο δεύτερο μέρος, παρουσιάζεται ένα σύστημα που αποσκοπεί στη μελέτη της τεχνοτροπίας γνωστών έργων τέχνης για τον εντοπισμό επαναλαμβανομένων μοτίβων που είναι ενδεικτικό είτε πιθανής χρήσης βοηθητικών εργαλείων στη δημιουργία του έργου είτε του χαρακτηριστικού τρόπου που χρησιμοποιεί ο δημιουργός του.

Η προτεινόμενη προσέγγιση ξεκινά από τη λήψη διδιάστατης απεικόνισης του έργου τέχνης.

Ακολουθούν τα βήματα της εξαγωγής των προς μελέτη καμπυλών βάσει των περιγραμμάτων των εικονιζομένων θεματικών περιοχών και η δημιουργία αναλυτικών εκφράσεων για τα τμήματα τους.

Με τη χρήση πρωτοτύπων μεθόδων προσαρμογής θορυβωδών καμπυλών και αναγνώρισης προτύπων αναζητούνται και αξιολογούνται οι επαναληψιμότητες σε τμήματα των καμπυλών.

Αποτέλεσμα της μελέτης είναι τελικώς η εξαγωγή αντιπροσωπευτικών τμημάτων των έργων τα οποία δύνανται να αναδημιουργήσουν το σύνολο των μελετουμένων καμπυλών.

Η ποιοτική μελέτη των αποτελεσμάτων είναι ενδεικτική για την τεχνοτροπία του δημιουργού του έργου καθώς και την ενδεχόμενη χρήση βοηθητικών μέσων κατά τη δημιουργία του έργου.

Γενικότερα η εφαρμογή των προτεινομένων μεθοδολογιών της παρούσης εργασίας σε αρχαίες επιγραφές και έργα τέχνης του παρελθόντος, συντελεί στη μοντελοποίηση και κατανόηση της διαφορετικού είδους πληροφορίας που αυτά φέρουν και επιτυγχάνουν να αποκαλύψουν σημαντικά στοιχεία για τους δημιουργούς τους.



# **A Αυτόματη ταυτοποίηση χαρακτών αρχαίων επιγραφών από τριδιάστατες απεικονίσεις**

## **A.1 Εισαγωγή**

Οι προτεινόμενες μέχρι σήμερα ψηφιακές μέθοδοι κατάταξης επιγραφών σε χάρακτη χρησιμοποιούν ως βάση ψηφιακές φωτογραφίες των μελετουμένων επιγραφών. Η διαδικασία της ψηφιακής φωτογράφισης γίνεται υπό αυστηρώς καθορισμένες και συγκεκριμένες συνθήκες (θέση φωτισμού, απόσταση φωτογράφισης) ώστε να ικανοποιηθούν οι αναγκαίες απαιτήσεις για την ποιότητα των λαμβανομένων φωτογραφιών και οι οποίες θα καταστήσουν δυνατή την αναγνώριση των γραμμάτων των επιγραφών. Εν συνεχεία με τεχνικές επεξεργασίας θεματικού περιεχομένου επιχειρείται η εξαγωγή των γραμμάτων.



*Εικόνα A-1  
Ψηφιακή διδιάστατη απεικόνιση τμήματος επιγραφής*

Στην παρούσα εργασία ως πηγαία πληροφορία επεξεργασίας για κάθε μια επιγραφή είναι μια τριδιάστατη ψηφιακή της απεικόνιση. Η διαδικασία της τριδιάστατης ψηφιοποίησης (3d Scanning) γίνεται με χρήση καταλλήλου εξοπλισμού (3d Scanner).



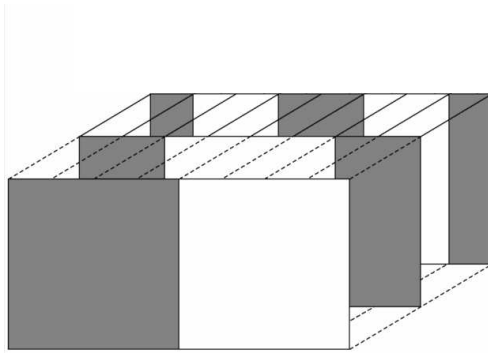
*Εικόνα A-2  
Διαδικασία λήψης τριδιάστατης απεικόνισης με χρήση 3D-Scanner*

Η μέθοδος λειτουργίας του εξοπλισμού για τη δημιουργία της τριδιάστατης απεικόνισης του υπο μελέτη αντικειμένου (επιγραφή) στηρίζεται σε αρχές φωτογραμμετρίας. Ο εξοπλισμός αποτελείται από δύο συσκευές ψηφιακής καταγραφής υψηλής ανάλυσης (Α και Β) και μια συσκευή προβολής φωτός (Π) τοποθετημένες σε σταθερές θέσεις και προσανατολισμό



*Εικόνα A-3  
Διάγραμμα 3D Scanner*

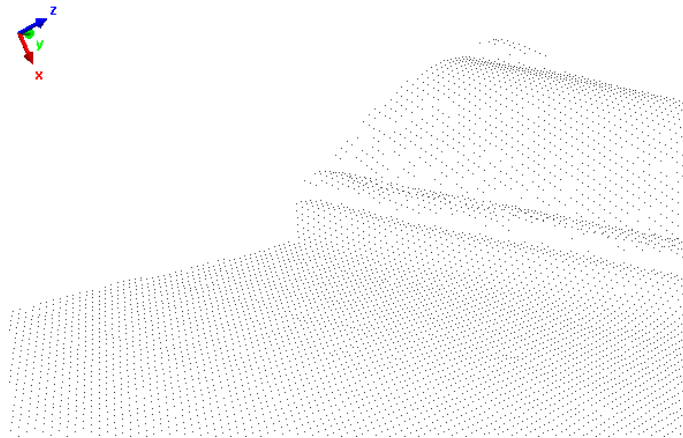
Στο αντικείμενο προβάλλονται από τη συσκευή προβολής Π διάφορα πρότυπα φωτός (structured light patterns - *Εικόνα A-4*) και λαμβάνονται διαδοχικές φωτογραφίες τους από τις συσκευές Α και Β.



Εικόνα A-4  
Πρότυπα φωτός (structured light patterns)

Απο τη μελέτη της παραμόρφωσης που προκαλείται στα πρότυπα φωτός και με χρήση ειδικού λογισμικού γίνεται δυνατή η εξαγωγή της τριδιάστατης απεικόνισής τους.

Η τριδιάστατη απεικόνιση που λαμβάνεται για ένα οποιοδήποτε αντικείμενο με χρήση του ανωτέρω εξοπλισμού και λογισμικού απαρτίζεται από ένα σύνολο σημείων  $E_i$  στο χώρο  $R^3$  (set of vertices) το οποίο και θα συμβολίζουμε με  $[\ddot{E}_i]$ .



Εικόνα A-5  
Τριδιάστατη απεικόνιση τμήματος επιγραφής



## **A.2 Συσχέτιση και σύγκριση πληροφορίας από διδιάστατες & τριδιάστατες απεικονίσεις**

Απαραίτητη προϋπόθεση για τη σύγκριση διδιάστατων και τριδιάστατων απεικονίσεων γραμμάτων είναι η δυνατότητα αντιστοίχισης των υλοποιήσεων γραμμάτων που εμφανίζονται στις διδιάστατες απεικονίσεις με τις αντίστοιχες υλοποιήσεις που εμφανίζονται στις τριδιάστατες απεικονίσεις. Δεδομένου του σχετικά μεγάλου πλήθους των ληφθεισών απεικονίσεων (διδιαστάτων & τριδιαστάτων) καθώς και των απεικονιζομένων σε αυτές γραμμάτων, είναι αναγκαία η δημιουργία ενός συστήματος το οποίο για κάθε ένα γράμμα κάποιας τριδιάστατης απεικόνισης θα εντοπίζει την υλοποίηση σε διδιάστατη απεικόνιση εφ'όσον αυτή είναι διαθέσιμη καθώς και το αντίστροφο.

Εν συνεχεία είναι απαραίτητη η επεξεργασία της τριδιάστατης απεικόνισης κάθε γράμματος ώστε να έλθει σε μορφή κατάλληλη για τα περαιτέρω δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο γίνεται βέλτιστη σχετική τοποθέτηση της τριδιάστατης απεικόνισης πάνω στη διδιάστατη ώστε να είναι δυνατή η ανά περιοχή σύγκριση της παρεχομένης από κάθε μορφή πληροφορίας. Στο δεύτερο στάδιο απομονώνεται από τη τριδιάστατη απεικόνιση ό,τι θεωρείται περιοχή του γράμματος και γίνεται σύγκριση με την αντίστοιχη εκτίμηση από τις αντίστοιχες διδιάστατες απεικονίσεις.

### **A.2.1 Αντιστοίχιση διδιάστατων & τριδιάστατων απεικονίσεων**

Για τη δημιουργία του ως άνω αναφερομένου συστήματος ελήφθησαν υπ' όψιν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά των επιγραφών καθώς και των απεικονίσεών τους:

- Οι επιγραφές θεωρούνται επιφάνειες με πολύ μικρή καμπυλότητα οι οποίες μπορούν να προσεγγισθούν με πολλές μικρές επίπεδες επιφάνειες. Για τον ορισμό κάθε τέτοιας επίπεδης επιφάνειας απαιτούνται τρία μη συγγραμμικά σημεία.

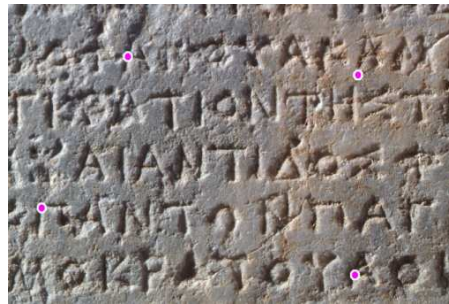
- Οι διδιάστατες ψηφιακές απεικονίσεις είναι ενδεχόμενο να παρουσιάζουν παραμορφώσεις λόγω της επίδρασης διαφόρων παραγόντων κατά τη διαδικασία της ψηφιακής φωτογράφισης (γωνία λήψης, χαρακτηριστικά φακού, κλπ). Σε επίπεδο συνολικής απεικόνισης οφείλουμε να λαμβάνουμε υπ' όψιν τις παραμορφώσεις αυτές. Αν περιοριστούμε σε κατάλληλες μικρές επιφάνειες της αρχικής απεικόνισης, οι ανωτέρω παραμορφώσεις είναι αμελήσιμες ή ίσως και αμελητέες.



Εικόνα A-6  
Ολική διδιάστατη απεικόνιση επιγραφής (αριστερά) και τμήματος αυτής (δεξιά)

#### A.2.1.1 Επιλογή σημείων σε διδιάστατη απεικόνιση

Στη διδιάστατη απεικόνιση μιας επιγραφής ορίζουμε αυθαίρετα σημεία οδηγούς (Εικόνα A-7). Τα σημεία αυτά επιλέγονται με κριτήρια την εύκολη αναγνώρισή τους από το ανθρώπινο μάτι βάσει του θεματικού τους περιεχομένου.



Εικόνα A-7  
Τμήμα διδιάστατης απεικόνισης επιγραφής με σημεία οδηγούς

#### A.2.1.2 Δημιουργία διδιάστατης εικόνας από τριδιάστατη απεικόνιση

Για την πραγματοποίηση της αντιστοίχισης, είναι απαραίτητη η ανακατασκευή από την τριδιάστατη απεικόνιση μιας διδιάστατης απεικόνισης - προβολής (εικόνα) στην οποία θα μπορεί να αναγνωρισθεί το θεματικό περιεχόμενο που εμφανίζεται στις διδιάστατες απεικονίσεις. Η δημιουργία της απεικόνισης αυτής γίνεται με την ακόλουθη διαδικασία:

A) Υπολογίζουμε τις παραμέτρους  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  του επιπέδου που κατά βέλτιστο τρόπο προσεγγίζει την επιφάνεια της επιγραφής. Το επίπεδο θα ελαχιστοποιεί την παρακάτω ποσότητα:

$$err = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( z_{i\delta} + \frac{A}{C} x_{i\delta} + \frac{B}{C} y_{i\delta} + \frac{D}{C} \right)^2 \quad (ΠΑ-1)$$

όπου  $x_{i\delta}$ ,  $y_{i\delta}$ ,  $z_{i\delta}$  καταλλήλως επιλεγθέντα σημεία από την τριδιάστατη απεικόνιση της επιγραφής και  $n$  το πλήθος των επιλεγθέντων σημείων. Για την επιλογή των σημείων πραγματοποιείται ομοιόμορφη διαμέριση του χώρου  $\mathbb{R}^3$  των σημείων της τριδιάστατης απεικόνισης έτσι ώστε να υπάρχει ικανό πλήθος περιοχών ανά διάσταση (20 περιοχές ανά άξονα συστήματος αναφοράς, μέγιστο 8000 περιοχές). Για κάθε μια από τις ανωτέρω περιοχές, εντοπίζουμε τα σημεία της τριδιάστατης απεικόνισης που ευρίσκονται στο εσωτερικό της και υπολογίζουμε το μέσο όρο τους. Επιλέγουμε ως αντιπρόσωπο της περιοχής το σημείο εκείνο της τριδιάστατης απεικόνισης που είναι εγγύτερο στον υπολογισθέντα μέσο όρο. Εάν η περιοχή δεν περιλαμβάνει σημεία, τότε δεν λαμβάνουμε αντιπρόσωπο από την περιοχή.

Β) Ορίζουμε στην τριδιάστατη απεικόνιση δύο σημεία  $H_1$ ,  $H_2$  που ορίζουν το διάνυσμα  $\vec{H}$  της διεύθυνση ανάγνωσης της επιγραφής. Βάσει του υπολογισθέντος καθέτου διανύσματος  $\vec{P} = (A, B, C)$  του επιπέδου και του άρτι ορισθέντος διανύσματος  $\vec{H}$ , πραγματοποιούνται οι ακόλουθοι δύο μετασχηματισμοί στα σημεία  $[\ddot{E}] = [x_i \ y_i \ z_i]$   $i = 1..m$  της τριδιάστατης απεικόνισης:

$$1. \text{ Στροφή γωνίας } \varphi_1 = a \cos\left(\frac{\vec{P} \cdot \hat{z}}{\|\vec{P}\|}\right) \text{ ως προς τον άξονα που ορίζεται από το}$$

$$\text{διάνυσμα } \vec{U}_1 = \vec{P} \times \hat{z}. \text{ Συμβολικά έχουμε } [\ddot{E}_1] = R([\ddot{E}], \vec{U}_1, \varphi_1)$$

$$2. \text{ Στροφή γωνίας } \varphi_2 = a \cos\left(\frac{\vec{J} \cdot \vec{H}}{\|\vec{J}\| \cdot \|\vec{H}\|}\right) \text{ ως προς τον άξονα που ορίζεται από}$$

$$\text{το διάνυσμα } \vec{U}_2 = \vec{J} \times \vec{H} \text{ όπου } \vec{J} = R(\vec{H}, \vec{U}_1, \varphi_1)$$

$$\text{Συμβολικά έχουμε } [\ddot{E}'] = R([\ddot{E}_1], \vec{U}_2, \varphi_2)$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί ευθυγραμμίζουν πρακτικά το βέλτιστο επίπεδο με το επίπεδο XY του θεωρούμενου συστήματος αναφοράς.

Γ) Επιπλέον δημιουργούμε την εικόνα  $\text{Im}_{3D}$  (πίνακας  $m$  γραμμών και  $n$  στηλών) ως εξής: Θεωρούμε μέγεθος εικονοστοιχείου (pixel) ίσο με 0.2mm οπότε οι διαστάσεις της  $\text{Im}_{3D}$  καθορίζονται μοναδικά από τις διαφορές ελαχίστων και μεγίστων τιμών των  $x, y$  συνιστωσών των σημείων του  $[\ddot{E}']$ . Δηλαδή εάν η διαφορά ελάχιστης και μέγιστης τιμής της συνιστώσας  $x$  είναι π.χ. 10cm, το πλήθος των στηλών θα είναι  $10\text{cm}/0.2\text{mm} = 500$ . Όμοια ισχύουν και για τη συνιστώσα  $y$ . Με

ορισμένη πλέον την εικόνα  $Im_{3D}$ , είναι εφικτή η αντιστοίχιση των σημείων του  $[\ddot{E}']$  με σημεία (γραμμή, στήλη) της  $Im_{3D}$ . Για κάθε ένα πλέον αντιστοιχισμένο εικονοστοιχείο (pixel) της  $Im_{3D}$  υπολογίζουμε τη μέση τιμή  $[\ddot{\bar{E}}']$  των σημείων στην περιοχή που ορίζεται από μια μάσκα σταυρό με πλευρά 1cm (10 pixel εκατέρωθεν σημείου αναφοράς) και αποδίδουμε σαν τιμή το  $[\ddot{E}'']=[\ddot{\bar{E}}']-[\ddot{E}']$ . Κατόπιν κανονικοποιούμε τις τιμές στο διάστημα  $[0,1]$ . Το αποτέλεσμα είναι άμεσα οπτικοποιήσιμο στη μορφή εικόνας διαβαθμίσεων του γκρι (Εικόνα A-8).

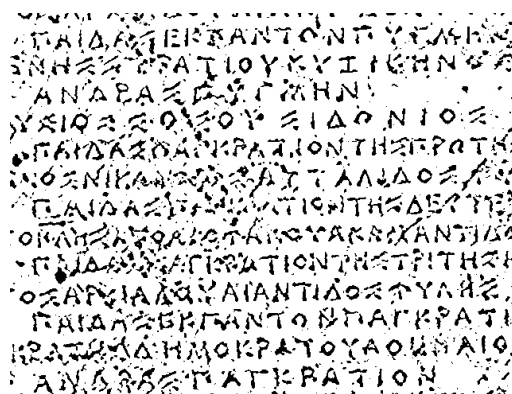


Εικόνα A-8

Παραχθείσα διδιάστατη απεικόνιση από τμήμα τριδιάστατης απεικόνισης  $Im_{3D}$

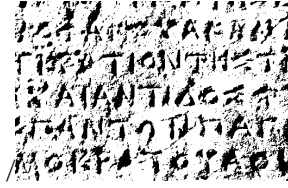
### A.2.1.3 Πρώτη προσαρμογή τριδιάστατης και διδιάστατης απεικόνισης επιγραφής

Με εφαρμογή καταλλήλου κατοφλίου στις εικόνες της διδιάστατης απεικόνισης  $Im_{2D}$  και της κατασκευασμένης τριδιάστατης απεικόνισης  $Im_{3D}$  λαμβάνουμε τις αντίστοιχες δυαδικές εικόνες  $Im_{2D}^b$  και  $Im_{3D}^b$



Εικόνα A-9

Δυαδική εικόνα  $Im_{3D}^b$  μετά την εφαρμογή κατοφλίου στη κατασκευασμένη διδιάστατη απεικόνιση  $Im_{3D}$  που εικονίζεται στην Εικόνα A-8



Εικόνα A-10

Δυναδική εικόνα  $Im_{2D}^b$  μετά την εφαρμογή κατωφλίου στη διδιάστατη απεικόνιση  $Im_{2D}$  που εικονίζεται στην Εικόνα A-7

Οι δύο πλέον εικόνες  $Im_{2D}^b$  (διδιάστατη απεικόνιση) και  $Im_{3D}^b$  (ανακατασκευασμένη εικόνα από τριδιάστατη απεικόνιση), μπορούν να συνδυασθούν κατά τον ακόλουθο τρόπο. Έστω μια τυχαία θέση  $(x_i, y_i)$  στην εικόνα  $Im_{3D}^b$ . Η  $Im_{2D}^b$  τοποθετείται πάνω στην  $Im_{3D}^b$  έτσι ώστε το κέντρο της να συμπίπτει με το  $(x_i, y_i)$ .



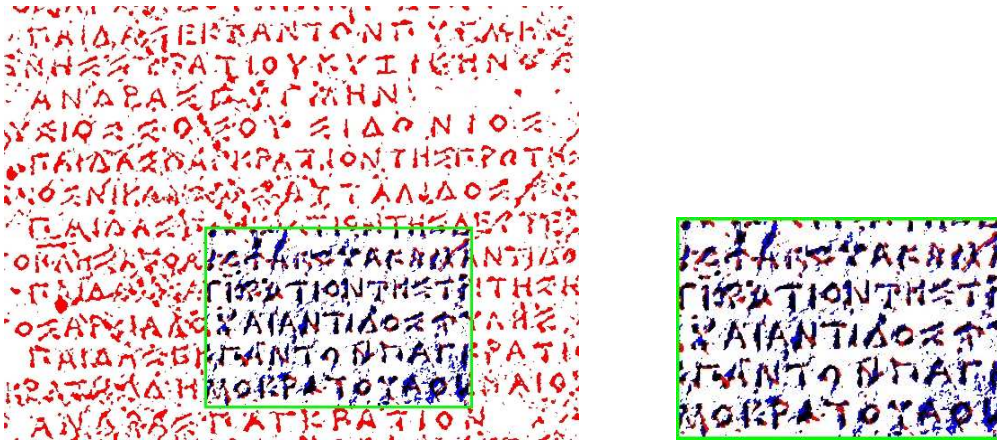
Εικόνα A-11

Επικάθηση της  $Im_{2D}^b$  σε τυχαία θέση επί της  $Im_{3D}^b$  (αριστερά) και λεπτομέρεια των  $I_{2D}^{XY}$  και  $I_{3D}^{XY}$

Εάν  $I_{2D}^{XY}, I_{3D}^{XY}$  τα τμήματα των  $Im_{2D}^b$  και  $Im_{3D}^b$  στην κοινή τους περιοχή με κέντρο το  $(x_i, y_i)$  υπολογίζουμε τον δείκτη  $h = \frac{C(I_{2D}^{XY} \cap I_{3D}^{XY})}{C(I_{2D}^{XY} \cup I_{3D}^{XY})}$  όπου  $C(A)$  το πλήθος των στοιχείων του συνόλου  $A$  και  $A \cap B, A \cup B$  οι πράξεις τομής και ένωσης των συνόλων  $A$  και  $B$ . Στην περίπτωση των  $I_{2D}^{XY}, I_{3D}^{XY}$  οι πράξεις της τομής και ένωσης εφαρμόζονται ως λογικές πράξεις AND και OR των τιμών των αντιστοίχων εικονοστοιχείων τους.

Επαναλαμβάνοντας τον ανωτέρω υπολογισμό για κάθε δυνατή θέση  $(x, y)$ , η τιμή  $h$  αποδίδεται στη συνάρτηση  $H(x, y)$ . Στη θέση  $(x_c, y_c)$  μεγιστοποίησης της

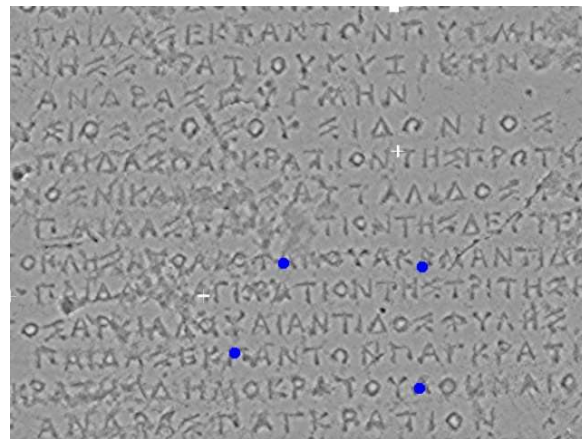
$H(x, y)$  παρατηρείται βέλτιστη ταύτιση των  $I_{2D}^{XY}$ ,  $I_{3D}^{XY}$  και κατ'επέκταση των  $Im_{2D}^b$  και  $Im_{3D}^b$ .



Εικόνα A-12

Θέση μεγιστοποίησης της  $H(x, y)$  για το χρησιμοποιηθέν ζεύγος  $Im_{3D}^b$  και  $Im_{2D}^b$

Με τις  $Im_{3D}$  και  $Im_{2D}$  βέλτιστα τοποθετημένες, είναι εφικτή η αντιστοίχιση των επιλεγέντων επί της  $Im_{2D}$  σημείων οδηγών με τα αντίστοιχα σημεία επί της  $Im_{3D}$ .



Εικόνα A-13

Αντιστοιχισμένα σημεία οδηγοί από την Εικόνα A-7 στην Εικόνα A-8

#### A.2.1.4 Μετατροπή μεταξύ συστημάτων αναφοράς διδιάστατης και τριδιάστατης απεικόνισης

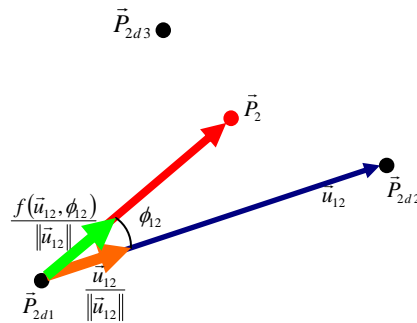
Τα αντιστοιχισμένα σημεία οδηγοί ανά 3 ορίζουν τις στοιχειώδεις επιφάνειες που θεωρούμε ότι θα προσεγγίζουν την επιφάνεια της επιγραφής και καταχωρούνται σε κατάλληλο πληροφοριακό σύστημα.

Θεωρούμε  $S_{2D}$  μια στοιχειώδη επίπεδη επιφάνεια που ορίζεται από τα σημεία  $P_i^{2D}$ ,  $i=1..3$  μιας διδιάστατης απεικόνισης και  $S_{3D}$  τη στοιχειώδη επίπεδη επιφάνεια που ορίζεται από τα αντίστοιχα σημεία  $P_i^{3D}$ ,  $i=1..3$  της τριδιάστατης απεικόνισης της επιγραφής.

Η θέση οποιουδήποτε γνωστού σημείου P πάνω στην επιφάνεια  $S_{2D}$  μπορεί να προσδιορισθεί με μοναδικό τρόπο ως προς οποιοδήποτε ζεύγος σημείων  $(P_i^{2D}, P_j^{2D})$  με  $i, j=1..3$  και  $i \neq j$  με τις παραμέτρους  $\lambda_{ij}$  και  $\phi_{ij}$  μέσω της σχέσης:

$$\vec{P}_2 = \vec{P}_{2di} + \lambda_{ij} \cdot \frac{f(\vec{u}_{2ij}, \phi_{ij})}{\|\vec{u}_{2ij}\|} \quad \text{όπου } \vec{u}_{2ij} = \vec{P}_{2dj} - \vec{P}_{2di} \quad (ΠΑ-2)$$

Όπου  $f$  ο τελεστής που στρέφει το διάνυσμα  $\vec{u}$  κατά γωνία  $\phi$  και  $\|\vec{u}\|$  το μέτρο του διανύσματος  $\vec{u}$ .



Εικόνα A-14  
Εκτίμηση της θέσης του  $\vec{P}_2$  από τα  $\vec{P}_{2d1}$  και  $\vec{P}_{2d2}$

Η εκτιμώμενη θέση του ίδιου σημείου στην επιφάνεια  $S_{3D}$  θα είναι αντίστοιχα

$$\vec{P}_3 = \vec{P}_{3di} + \lambda_{ij} \cdot \frac{f(\vec{u}_{3ij}, \phi_{ij})}{\|\vec{u}_{3ij}\|} \quad \text{όπου } \vec{u}_{3ij} = \vec{P}_{3dj} - \vec{P}_{3di} \quad (ΠΑ-3)$$

Για να εξαλείψουμε τον κυριότερο παράγοντα σφάλματος που είναι η ακρίβεια στην επιλογή των αντιστοιχισμένων σημείων, ο προσδιορισμός της θέσης του  $\vec{P}_3$  γίνεται λαμβάνοντας υπ' όψιν και τα έξι διαφορετικά ζεύγη παραμέτρων  $(\lambda_{ij}, \phi_{ij})$  που είναι διαθέσιμα από τον προσδιορισμό του  $\vec{P}_2$ .

Συνεπώς

$$\vec{P}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 \left( \vec{P}_{3di} + \lambda_{ij} \cdot \frac{f(\vec{u}_{3ij}, \phi_{ij})}{\|\vec{u}_{3ij}\|} \right) \quad (\text{ΠΑ-4})$$

$$n = \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (1) = 6$$

Επιλέγοντας μια οποιαδήποτε θέση πάνω άρα και ένα τυχαίο γράμμα πάνω σε κάποια διδιάστατη απεικόνιση μπορούμε μέσω της ανωτέρω μεθόδου και των ορισθέντων σημείων οδηγών να μεταφερθούμε στη θέση του γράμματος στην αντίστοιχη τριδιάστατη απεικόνιση της επιγραφής. Καθ' ομοίω τρόπο επιτυγχάνεται και το αντίστροφο (μεταφορά σημείου από τριδιάστατη απεικόνιση σε διδιάστατη). Αξίζει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια της ανωτέρω μεθόδου είναι επαρκής για τις ανάγκες παράλληλης επισκόπησης των δύο απεικονίσεων (διδιάστατης και τριδιάστατης) μιας επιγραφής. Η περαιτέρω χρήση πυκνότερου πλέγματος σημείων οδηγών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη χωρική συσχέτιση των δύο απεικονίσεων με μεγαλύτερη ακρίβεια.

### **A.3 Προσέγγιση τριδιάστατης απεικόνισης γράμματος με επιφάνειες**

Στόχος της παρούσας επεξεργασίας είναι να φέρει την τριδιάστατη απεικόνιση του γράμματος σε μορφή ώστε να είναι δυνατή η περαιτέρω επεξεργασία σε όλα τα επόμενα στάδια. Η επιθυμητή μορφή θα περιγράψει επιφάνειες που θα προσεγγίζουν τη συνολική επιφάνεια της τριδιάστατης απεικόνισης του γράμματος.

Η διαδικασία περιλαμβάνει τα εξής δύο βήματα:

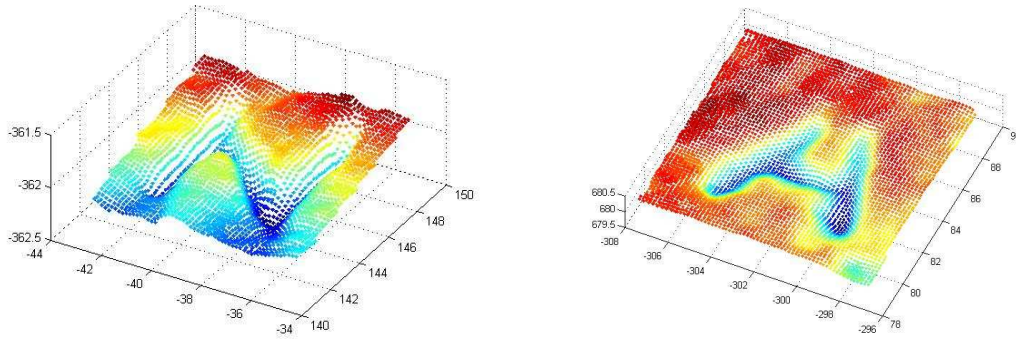
A) την προβολή της τριδιάστατης απεικόνισης του γράμματος σε κατάλληλο διδιάστατο σύστημα αναφοράς

B) τη δημιουργία στοιχειωδών επιφανειών (facets) από το σύνολο των σημείων της τριδιάστατης απεικόνισης

#### **A.3.1 Επιλογή καταλλήλου επιπέδου αναφοράς**

Αρχικά απόμονώνουμε από το σύνολο των σημείων xyz-  $[\ddot{E}_i]$  που αναπαριστούν την επιγραφή i, τα σημεία  $[\ddot{G}] = [x_i, y_i, z_i]$  της περιοχής του γράμματος που μας ενδιαφέρει.





Εικόνα A-15

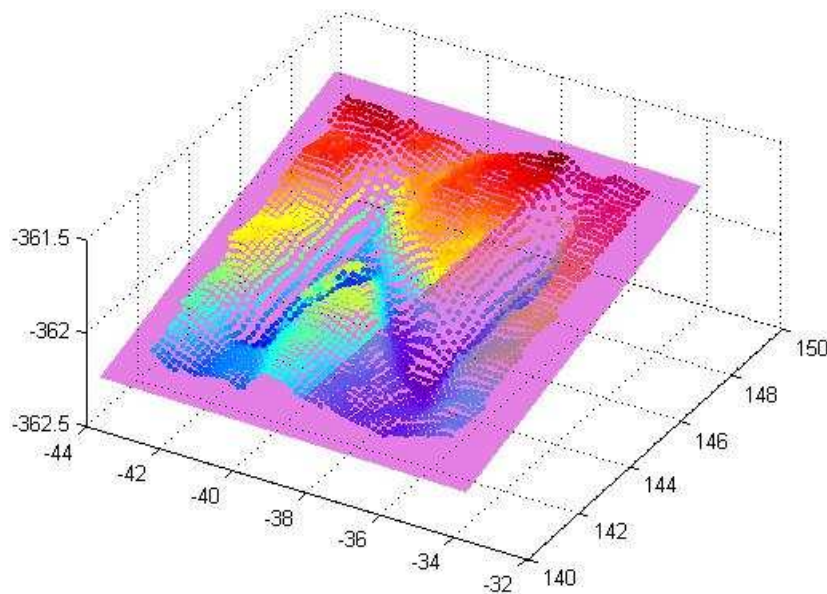
Απομονωμένα σύνολα σημείων για δύο γράμματα από δύο τριδιάστατες απεικονίσεις επιγραφών α) 17723\_N\_030 β) 16295\_A\_030. Η χρωματική απεικόνιση είναι ανάλογη της τιμής της επί του άξονα z συνιστώσας

Υπολογίζουμε τις παραμέτρους  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  του επιπέδου που ελαχιστοποιεί την παρακάτω ποσότητα:

$$err = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - z_{est})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( z_i + \frac{A}{C} x_i + \frac{B}{C} y_i + \frac{D}{C} \right)^2 \quad (ΠΑ-5)$$

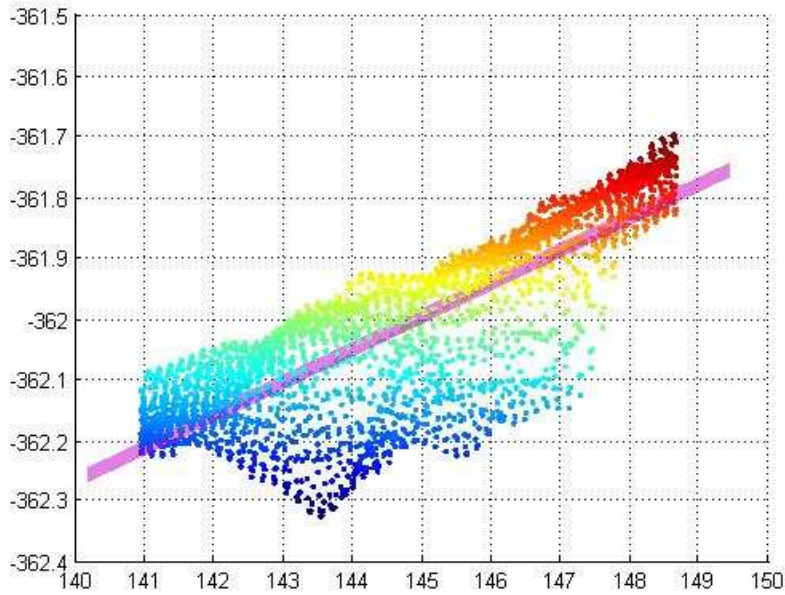
όπου  $n$  το πλήθος των σημείων.

Τοιουτοτρόπος λαμβάνουμε την καλύτερη επίπεδη προσέγγιση της επιφανείας των σημείων του γράμματος  $[G]$



Εικόνα A-16

Τριδιάστατη απεικόνιση γράμματος (LetterID: 17723\_N\_030) με βέλτιστο επίπεδο



Εικόνα A-17

Πλάγια όψη τριδιάστατης απεικόνισης γράμματος (LetterID: I7723\_N\_030) με βέλτιστο επίπεδο. Είναι εμφανές πώς το βέλτιστο επίπεδο ακολουθεί την επιφάνεια της επιγραφής

Προβάλλουμε τα σημεία του γράμματος  $[\ddot{G}]$  στο ανωτέρω επίπεδο λαμβάνοντας τα ζεύγη σημείων  $(x, y)$  που συμβολίζουμε με  $[\ddot{G}']$ .

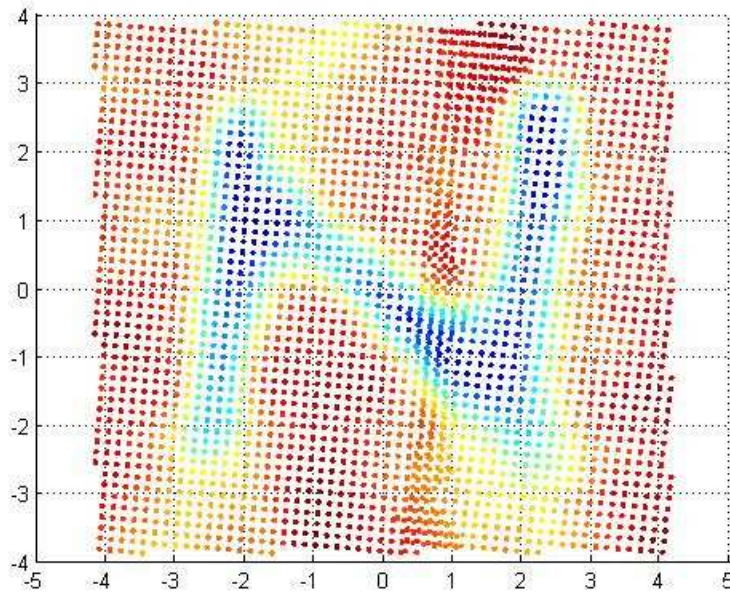
Εάν  $E_{\perp} = (A, B, C)$  το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο  $Z_0 = -\left(\frac{A}{C}x_i + \frac{B}{C}y_i + \frac{D}{C}\right)$

όπου  $[x_i, y_i]$  το σύνολο των σημείων του  $[\ddot{G}']$ , τότε προφανώς θα ισχύει:

$$|([\ddot{G}'|Z_0] - [\ddot{G}']) \cdot E_{\perp}| = 1 \quad (\text{ΠΑ-6})$$

Κατόπιν, επιλέγεται αυτόματα κατάλληλο σύστημα αναφοράς επί του ανωτέρω επιπέδου ούτως ώστε α) ο προσανατολισμός του άξονα  $X$  να συμπίπτει με τη φορά γραφής του αναπαρισταμένου συμβόλου και β) το κέντρο των αξόνων να συμπίπτει με το κέντρο βάρους των σημείων  $[\ddot{G}']$ . Με τη διαδικασία αυτή λαμβάνουμε τα σημεία  $[\ddot{G}'']$ . Εάν  $\mathfrak{R}$ ,  $T$  οι τελεστές στροφής και μεταφοράς αντίστοιχα που επιτυγχάνουν τα βήματα (α) και (β) προφανώς θα ισχύει:

$$[\ddot{G}'' ] = \mathfrak{R}([\ddot{G}'] ) + T \quad (\text{ΠΑ-7})$$



Εικόνα A-18

Τελική προβολή γράμματος (LetterID: I7723\_N\_030) στο βέλτιστο επίπεδο αναφοράς

Υπολογίζουμε τις αποστάσεις  $[Z_{est}]$  των σημείων  $[\ddot{G}]$  από το βέλτιστο επίπεδο σύμφωνα με τη

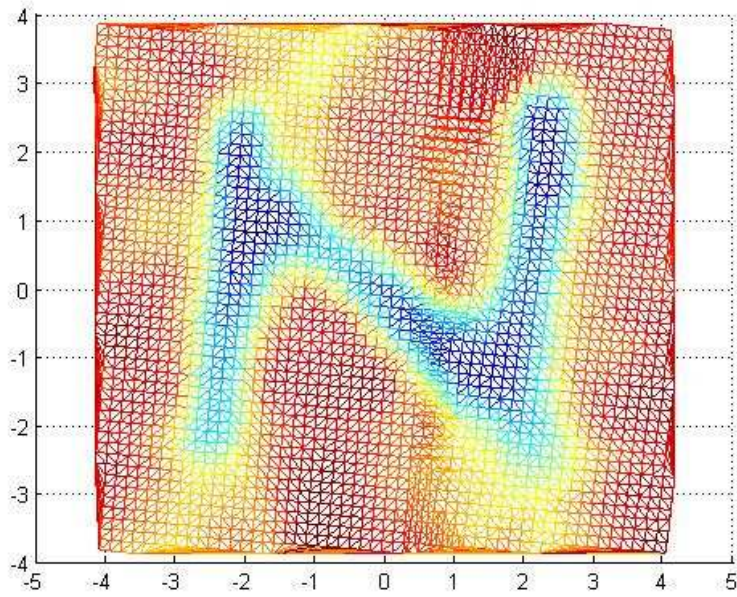
$$Z_{est} = z_i - z_{est} = z_i + \left( \frac{A}{C} x_i + \frac{B}{C} y_i + \frac{D}{C} \right) \text{ για } i = 1..n \quad (\text{ΠΑ-8})$$

Από την αρχική αναπαράσταση  $[\ddot{G}]$  των σημείων του γράμματος λαμβάνουμε πλέον τη μορφή  $P = [\ddot{G}'' \dot{Z}_{est}]$  η οποία και θα χρησιμοποιηθεί σε περαιτέρω βήματα.

### A.3.2 Δημιουργία Επιφανειών

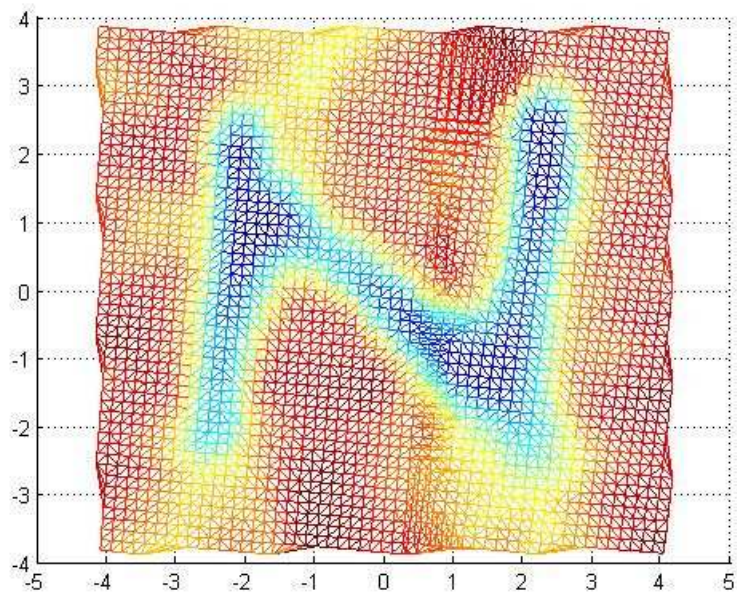
Στόχος του παρόντος βήματος είναι η δημιουργία στοιχειώδων τριγωνικών επιφανειών (facets) που θα προσεγγίσουν την επιφάνεια του γράμματος που αναπαριστά η μορφή  $P = [\ddot{G}'' \dot{Z}_{est}]$ .

Δεδομένης της μορφής του P, με την εφαρμογή της τριγωνοποίησης Delaunay [Del01] στα n στοιχεία του  $[\ddot{G}'']$  λαμβάνουμε τον πίνακα  $[\ddot{T}]$  με m γραμμές. Κάθε στοιχείο του πίνακα T ανήκει στο σύνολο  $[1..n]$ . Σε κάθε γραμμή υπάρχουν τρία στοιχεία και δηλώνουν τους αύξοντες αριθμούς των σημείων του P που συμμετέχουν σε μια στοιχειώδη επιφάνεια.



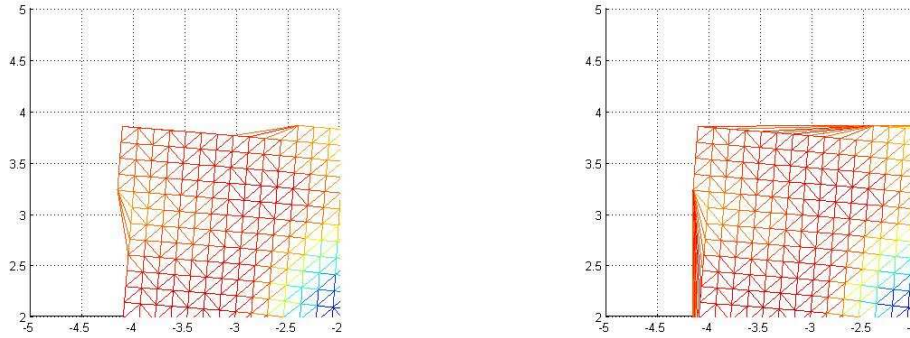
Εικόνα A-19  
Τριδιάστατη απεικόνιση γράμματος με εφαρμοσμένη τριγωνοποίηση

Για να διασφαλίσουμε την ομοιογένεια στο μέγεθος και τη μορφή των στοιχειωδών επιφανειών, απορρίπτουμε από το  $[\tilde{T}]$ , τις επιφάνειες εκείνες των οποίων το μήκος οποιασδήποτε πλευράς τους  $D$  υπερβαίνουν ένα επιλεγμένο κατώφλι  $d_{thres}$ .



Εικόνα A-20  
Τριδιάστατη απεικόνιση γράμματος με εφαρμοσμένη τριγωνοποίηση και αφαίρεση τριγώνων με μήκος πλευρών μεγαλύτερο από κατώφλι

Η πράξη έδειξε ότι μια κατάλληλη τιμή του κατωφλίου είναι  $d_{thres} = E([D]) + 3 \cdot std([D])$  όπου  $E([D])$  η μέση τιμή του μήκους όλων των πλευρών των επιφανειών που ορίζονται από το  $[T]$  και  $std([D])$  η τυπική τους απόκλιση.



Εικόνα A-21  
Λεπτομέρεια με πλευρές που απορρίπτονται από το κατώφλι

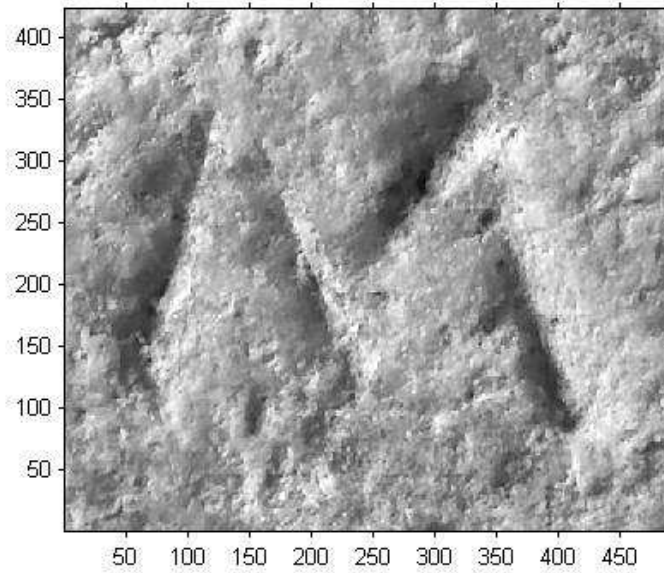
## A.4 Συσχέτιση τριδιάστατης & διδιάστατης απεικόνισης γράμματος

### A.4.1 Μέθοδος χωρικής συσχέτισης τριδιάστατης και διδιάστατης απεικόνισης γράμματος

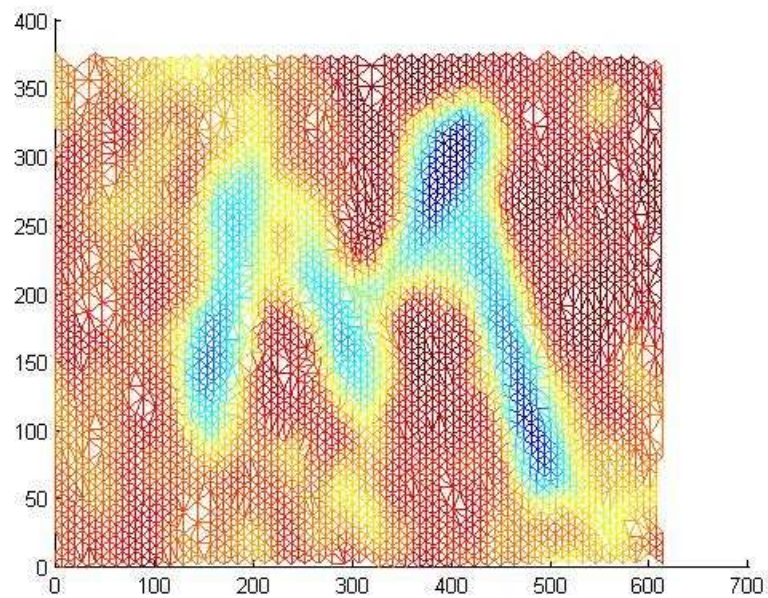
Η πραγματοποίηση οποιασδήποτε σύγκρισης μεταξύ της τριδιάστατης και διδιάστατης απεικόνισης της ίδιας υλοποίησης ενός συμβολογράμματος προϋποθέτει τη με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια χωρική συσχέτιση και αντιστοίχιση της πληροφορίας που παρέχεται από κάθε μία μορφή. Η διδιάστατη απεικόνιση είναι της μορφής  $P_{2d} = [\dot{S}'' T]$  όπου  $\dot{S}''$  οι συντεταγμένες του κάθε εικονοστοιχείου της εικόνας στο σύστημα αναφοράς της εικόνας (γραμμή, στήλη) και  $T$  η τιμή της φωτεινότητας του σημείου όπως έχει καταγραφεί από τη διαδικασία της διδιάστατης φωτογράφισης. Η τριδιάστατη απεικόνιση είναι όπως προέκυψε από τη διαδικασία της παραγράφου A.3.1, δηλαδή  $P_{3d} = [\ddot{G}'' \dot{Z}_{est}]$ .

Εν πρώτοις, η πληροφορία  $\ddot{G}''$ ,  $\dot{S}''$  που παρέχεται από τις μορφές  $P_{3d}$  και  $P_{2d}$  αντίστοιχα μπορεί να συσχετισθεί δεδομένου ότι πρόκειται για συντεταγμένες σε επίπεδα συστήματα αναφοράς. Η συσχέτιση των συντεταγμένων μπορεί να γίνει άμεσα αρκεί να ληφθεί υπ'όψιν πιθανή στροφή και μεταφορά. Είναι εμφανές ότι

υπάρχουν αναρίθμητες το πλήθος συσχετίσεις των  $\ddot{G}''$  και  $\ddot{S}''$  ωστόσο δεν είναι όλες αποδεκτές.



Εικόνα A-22  
Διδιάστατη φωτογραφία γράμματος



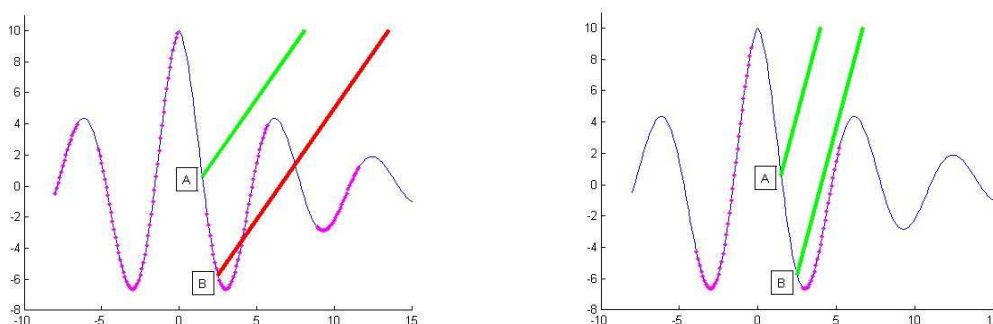
Εικόνα A-23  
Τριδιάστατη απεικόνιση γράμματος

Εν γένει η αντιστοίχιση μεταξύ  $P_{3d}$  και  $P_{2d}$  θα πρέπει να γίνει με τρόπο αντικειμενικό και μη αμφισβητήσιμο. Ένας τρόπος θα ήταν να ορίσει ο χρήστης σημεία οδηγούς στις δύο απεικονίσεις (τουλάχιστον 3) οπότε με μέθοδο αντιστοίχισης με εκείνη της παραγράφου A.2.1.4 να πραγματοποιηθεί η αντιστοίχιση. Η διαδικασία ορισμού των σημείων απαιτεί τη λήψη απόφασης από τον χρήστη καθώς θα παρατηρεί τις δύο απεικονίσεις και εμπεριέχει στοιχεία υποκειμενικής αντίληψης. Επιπλέον καθώς το πλήθος των γραμμμάτων είναι εξαιρετικά μεγάλο, η επαναλαμβανόμενη πραγματοποίηση της διαδικασίας αυτής είναι κοπιαστική και χρονοβόρα.

Για το λόγο αυτό είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε/εντοπίσουμε διαφορετική μέθοδο αντιστοίχισης. Στο σημείο αυτό θα υποθέσουμε ότι η επιγραφή φωτίζεται από πηγή φωτός και επί του αναγλύφου της επιγραφής σχηματίζονται φωτεινές και σκοτεινές περιοχές οι οποίες αποτυπώνονται κατά τη λήψη της διδιάστατης απεικόνισης.

Η φωτεινότητα κάθε μιας περιοχής (είτε σκοτεινής είτε φωτεινής) που αντιλαμβάνεται ένας εξωτερικός παρατηρητής εξαρτάται από τους ακόλουθους βασικούς παράγοντες:

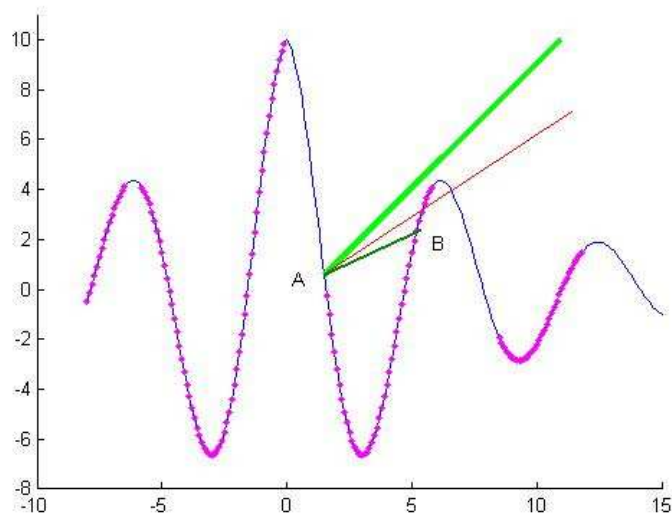
A) Την παρεμβολή κάποιου αντικειμένου μεταξύ σημείου και πηγής φωτός και δημιουργία σκίασης (Εικόνα A-24)



Εικόνα A-24

- (α) Το σημείο B καθώς και όλα τα σημεία με magenta χρώμα είναι σε σκιερές περιοχές λόγω παρεμβολής κάποιου αντικειμένου  
 (β) Με αλλαγή της γωνίας πρόσπτωσης του φωτός το σημείο B θεωρείται ως μη σκοτεινό

B) Την σκέδαση, ανάκλαση και διάθλαση του φωτός λόγω των χαρακτηριστικών του υλικού της επιγραφής (Εικόνα A-25).



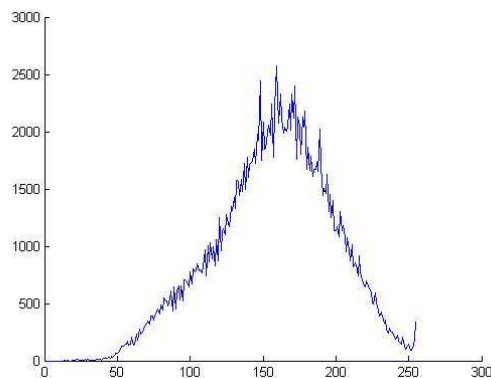
Εικόνα A-25

Το σημείο B είναι σε περιοχή σκίασης. Ενδεχόμενη ανάκλαση φωτός από την προσπίπτουσα στο A δέσμη φωτός μπορεί τελικά να μεταβάλει τη φωτεινότητά του.

Γ) Το εν γένει επίπεδο της έντασης του φωτισμού υπό το οποίο πραγματοποιείται η φωτογράφιση.

Ο παράγοντας A είναι εκείνος που προκαλεί σαφή διαχωρισμό μεταξύ φωτεινών και σκοτεινών περιοχών. Ο παράγοντας B θα προκαλεί μικρές διακυμάνσεις στην φωτεινότητα εκάστης περιοχής που αντιλαμβάνεται ένας εξωτερικός παρατηρητής. Ο παράγοντας Γ θα επηρεάζει τη φωτεινότητα των σκοτεινών και φωτεινών περιοχών κατ' απόλυτες τιμές.

Ο καθορισμός των φωτεινών και σκοτεινών περιοχών επί της διδιάστατης απεικόνισης  $P_{2d}$ , γίνεται με τη μελέτη του ιστογράμματος  $H(p)$  της φωτεινότητας.



Εικόνα A-26

Παράδειγμα ιστογράμματος φωτεινότητας διδιάστατης εικόνας



Η τιμή

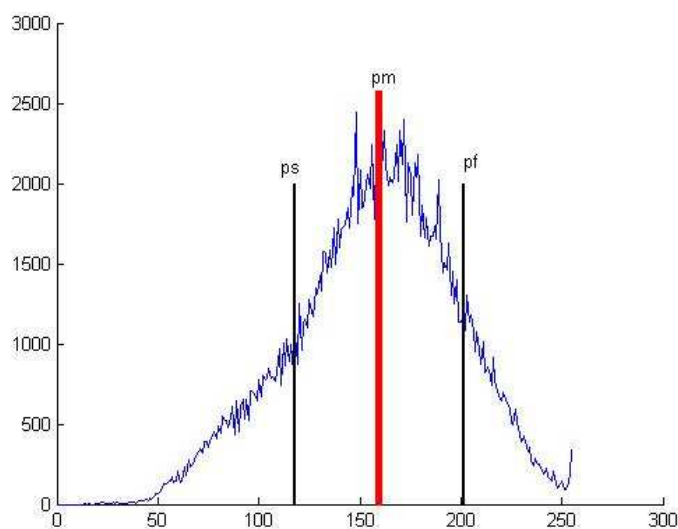
$$p_m = \frac{\sum_{i=1}^n H(p_n) \cdot p_n}{\sum_{i=1}^n H(p_n)} \quad (\text{ΠΑ-9})$$

του ιστογράμματος  $H(p)$ , αποτελεί και την εκτίμηση για τη μέση ένταση φωτισμού του γράμματος. Με βάση αυτή την τιμή ορίζονται οι ποσότητες  $p_f$ ,  $p_s$  ως ακολούθως:

$$p_f = p_m + \sigma \quad (\text{ΠΑ-10})$$

$$p_s = p_m - \sigma \quad (\text{ΠΑ-11})$$

$$\text{όπου } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (H(p_n) \cdot (p_n - p_m)^2)}{\sum_{i=1}^n H(p_n)}} \quad (\text{ΠΑ-12})$$



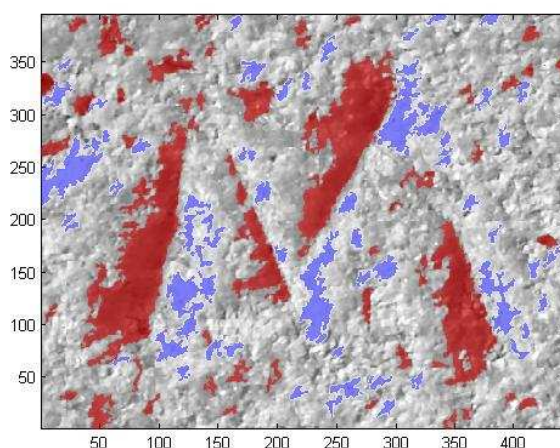
Εικόνα A-27

Παράδειγμα ιστογράμματος φωτεινότητας διδιάστατης εικόνας με ταυτόχρονη απεικόνιση των κατωφλίων  $p_s$ ,  $p_f$  και της εκτίμησης της μέσης τιμής της φωτεινότητας

Θεωρούμε ότι όσα εικονοστοιχεία έχουν τιμή μικρότερη από το κατώφλι  $p_s$  ανήκουν σε σκοτεινή περιοχή της εικόνας και όσα εικονοστοιχεία έχουν τιμή μεγαλύτερη από το κατώφλι  $p_f$  ανήκουν σε φωτεινές περιοχές.

Με εφαρμογή των ανωτέρω κατωφλίων  $p_s$ ,  $p_f$  μπορούμε να απομονώσουμε τα σκοτεινά και φωτεινά εικονοστοιχεία της διδιάστατης απεικόνισης του γράμματος. Με εφαρμογή καταλλήλων μορφολογικών μετασχηματισμών α) απορρίπτονται περιοχές (είτε φωτεινές είτε σκοτεινές) που περικλείουν λιγότερα από  $K$  το πλήθος εικονοστοιχεία και περικλείονται από μή χαρακτηρισθέντα είτε ως σκοτεινά είτε ως φωτεινά εικονοστοιχεία, β) χαρακτηρίζονται ως φωτεινές περιοχές που έχουν αρχικώς χαρακτηριστεί ως σκοτεινές αλλά ευρίσκονται εντός φωτεινών περιοχών και περικλείουν λιγότερα από  $K$  το πλήθος εικονοστοιχεία και δυικώς γ) χαρακτηρίζονται ως σκοτεινές, περιοχές που έχουν αρχικώς χαρακτηριστεί ως φωτεινές αλλά ευρίσκονται εντός σκοτεινών περιοχών και περικλείουν λιγότερα από  $K$  το πλήθος εικονοστοιχεία. Το  $K$  λαμβάνεται ίσο με 50 εικονοστοιχεία και με δεδομένο ότι η ανάλυση των εικόνων ήταν της τάξεως των 450-500pixels/cm αντιστοιχεί σε περιοχή εμβαδού  $0.02\text{mm}^2$ .

Με τον τρόπο αυτό λαμβάνουμε δύο επιμέρους δυαδικές εικόνες  $PS_{2d}$  και  $PF_{2d}$  που αντιστοιχούν στις χαρακτηρισμένες ως σκοτεινές και φωτεινές περιοχές. Οι  $PS_{2d}$  και  $PF_{2d}$  είναι ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του συνόλου των εικονοστοιχείων της  $P_{2d}$ .



Εικόνα A-28

Εικόνα διδιάστατης απεικόνισης με φωτεινές (γαλάζιο χρώμα) και σκοτεινές περιοχές (κόκκινο χρώμα)

Από τα στοιχεία της τριδιάστατης απεικόνισης θα μπορούσαμε να ανακατασκευάσουμε μια εικόνα αντίστοιχη με εκείνη της διδιάστατης με τις φωτεινές και σκοτεινές περιοχές  $PF_{3d}$  και  $PS_{3d}$  αρκεί να ήταν γνωστές οι συνθήκες φωτισμού κατά τη λήψη της διδιάστατης απεικόνισης και κυρίως η θέση και το είδος της πηγής φωτός. Από τη στιγμή που τα ανωτέρω δεν είναι γνωστά, θεωρούμε ότι η πηγή φωτός ευρίσκεται πολύ μακριά από την επιγραφή και κατά συνέπεια και οι εκπεμπόμενες ακτίνες φωτός προσπίπτουν υπό την αυτή και συγκεκριμένη γωνία στην επιγραφή. Με την υπόθεση αυτή οι απαραίτητες παράμετροι για την περιγραφή της γωνίας αυτής είναι το αζιμούθιο  $\phi$  και η ανύψωση  $\theta$ .

Για δεδομένα  $(\phi_i, \theta_i)$  τα  $PF_{3d}$  και  $PS_{3d}$  μπορούν να δημιουργηθούν από το  $P_{3d} = [\ddot{G}'' \dot{Z}_{est}]$  βάσει του ακόλουθου αλγορίθμου:

Επιλέγουμε το σημείο  $P_i, i = 1 \dots n$  από τα  $P_{3d}$ .

Εντοπίζουμε όλες τις στοιχειώδεις επιφάνειες  $F_m$  που ευρίσκονται στη διεύθυνση  $\phi_i$  ως προς τη σημείο  $P_i$ .

Για κάθε μια στοιχειώδη επιφάνεια  $F_m$ , υπολογίζουμε τη γωνία ανύψωσης  $u_m$  της ευθείας  $E(u_m, \phi_i)$  που εκκινεί από το  $Z_{est}$  και τέμνει τη στοιχειώδη επιφάνεια στο μέγιστο δυνατό σημείο  $z$  της  $F_m$ .

Εάν η μέγιστη γωνία  $u_m$  των ευθειών  $E(u_m, \phi_i)$  έχει τιμή μικρότερη από από  $\theta_i$ , τότε το σημείο χαρακτηρίζεται ως φωτεινό και προστίθεται στα  $PF_{3d}$  άλλως ως σκοτεινό και προστίθεται στα  $PS_{3d}$ .

Κατόπιν μπορούμε να βρούμε τις βέλτιστες παραμέτρους στροφής, οριζοντίου και καθέτου μετατόπισης  $(\delta\phi, \delta x, \delta y)$  που ενεργούν επί των  $[\ddot{G}'']$  και μετασχηματίζουν τα  $PF_{3d}$  και  $PS_{3d}$  σε  $PF'_{3d}$  και  $PS'_{3d}$  έτσι ώστε να έχουν τη μέγιστη ομοιότητα με τα  $PF_{2d}$  και  $PS_{2d}$ .

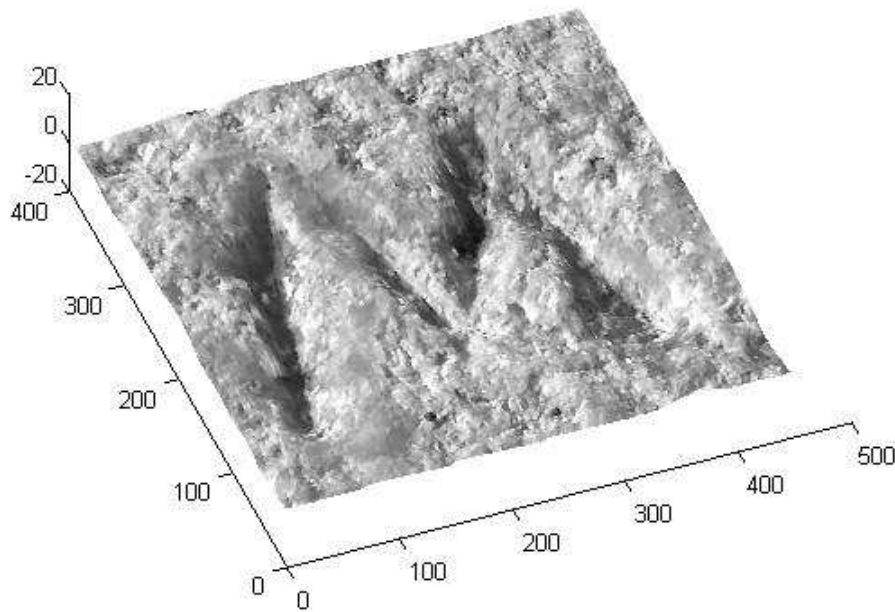
Συνεπώς αναζητούμε τις 5 παραμέτρους  $(\theta, \phi, \delta\phi, \delta x, \delta y)$  οι οποίες εφαρμοζόμενες μέσω της ανωτέρω διαδικασίας στο  $P_{3d}$  θα μεγιστοποιήσουν την ομοιότητα  $U$  που ορίζεται ως:

$$U = \frac{\langle PF_{2d} \cap PF_{3d} \rangle}{\langle PF_{2d} \rangle} + \frac{\langle PF_{2d} \cap PF_{3d} \rangle}{\langle PF_{3d} \rangle} + \frac{\langle PS_{2d} \cap PS_{3d} \rangle}{\langle PS_{2d} \rangle} + \frac{\langle PS_{2d} \cap PS_{3d} \rangle}{\langle PS_{3d} \rangle} \quad (\text{ΠΑ-13})$$

Στην ανωτέρω, ο τελεστής  $A \cap B$  εκφράζει το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών σημείων  $[G^n]$  που υπάρχουν ταυτόχρονα στα A και B, ενώ ο τελεστής  $\langle A \rangle$  εκφράζει το πλήθος των σημείων που υπάρχουν στο σύνολο A. Ο πρώτος και ο δεύτερος όρος εκφράζουν τον δείκτη ομοιότητας μεταξύ της κοινής σκοτεινής περιοχής και των σκοτεινών περιοχών διδιάστατης και τριδιάστατης απεικόνισης αντίστοιχα. Ο τρίτος και ο τέταρτος όρος είναι οι αντίστοιχοι δείκτες για τις φωτεινές περιοχές των απεικονίσεων.

Η βελτιστοποίηση επιτυγχάνεται με τη διαμέριση του χώρου των παραμέτρων  $(\theta, \phi, \delta\phi, \delta x, \delta y)$  σε κατάλληλα χωρία, τον υπολογισμό του δείκτη ομοιότητας  $U$  σύμφωνα με την ανωτέρω μέθοδο και τη διατήρηση των  $(\theta, \phi, \delta\phi, \delta x, \delta y)_{best}$  για τα οποία υπολογίζεται ο μέγιστος δείκτης ομοιότητας.

Εκτελώντας τα ανωτέρω και εφαρμόζοντας τις βέλτιστες παραμέτρους  $(\delta\phi, \delta x, \delta y)_{best}$  επιτυγχάνεται η τοποθέτηση της τριδιάστατης απεικόνισης του γράμματος πάνω στην αντίστοιχη διδιάστατη απεικόνιση.



Εικόνα A-29

Παράδειγμα ακριβούς τοποθέτησης και επισκόπησης της υφής (texture) της διδιάστατης απεικόνισης επί του αναγλύφου της τριδιάστατης απεικόνισης

#### A.4.2 Αξιολόγηση μεθόδου και αποτελεσμάτων

Η ορθότητα της ανωτέρω μεθόδου μπορεί να επιβεβαιωθεί από τις τιμές των παραμέτρων που προκύπτουν με εφαρμογή της σε ικανό πλήθος αντιστοιχισμένων ζευγών διδιάστατων και τριδιάστατων απεικονίσεων.

Πιο συγκεκριμένα, οι διδιάστατες απεικονίσεις γραμμάτων που έχουμε επιλέξει προέρχονται πολλές φορές από την ίδια διδιάστατη ψηφιακή απεικόνιση (2D Frame).

Αφού δια της ανωτέρω μεθόδου υπολογισθούν οι αναγκαίες παράμετροι που μετασχηματίζουν τις αντιστοιχισμένες τριδιάστατες απεικονίσεις γραμμάτων, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τις τιμές των παραμέτρων  $(\phi - \delta\phi, \theta)$  ανά ψηφιακή απεικόνιση επιγραφής (2D Frame). Επιλέγουμε την ποσότητα  $\phi - \delta\phi$ , δεδομένου ότι αυτή αποτελεί και τη φαινόμενη αζιμουθιακή θέση της πηγής φωτός στο σύστημα αναφοράς κάθε διδιάστατης απεικόνισης.

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι επιλέγοντας οποιαδήποτε ψηφιακή απεικόνιση επιγραφής (2D Frame), οι τιμές αυτών των δύο ποσοτήτων θα πρέπει να είναι παραπλήσιες. Ο υπολογισμός της διασποράς των  $(\phi - \delta\phi, \theta)$  ανά απεικόνιση επιγραφής (Πίνακας A-1), επιβεβαιώνει την υπόθεσή μας καθώς και την ορθότητα της ακολουθημένης μεθόδου.



Εικόνα A-30

Εικόνα με τμήμα από επιγραφή (2D Frame) από την οποία έχει εξαχθεί το εικονιζόμενο γράμμα M. Για όλα τα ελεγχθέντα γράμματα του παρόντος τμήματος αναμένονται παραπλήσιες παράμετροι για τη θέση της υποτιθέμενης πηγής φωτός

Πίνακας Α-1

Τμήμα επιγραφής (2D Frame)	Πλήθος ελεγχθέντων γραμμμάτων	Μέση τιμή $\theta$ (μοίρες)	Διασπορά $\theta$ (μοίρες)	Μέση τιμή $\phi - \delta\phi$ (μοίρες)	Διασπορά $\phi - \delta\phi$ (μοίρες)
2054_04	8	9,3	1,1	149,44	5,24
2054_08	11	7	1,5	148,55	5,22
2054_10	4	8	0,6	142,25	3,97
2054_13	10	9,8	1,4	144,7	9,46
4424_01	5	10,9	0,7	158,5	4,34
4424_02	8	10,6	0,7	160,31	6,08
4424_03	12	9,6	1	157,21	6,14
4424_05	8	10,3	1,1	157,13	5,8
4424_06	6	9,9	1,3	160,67	6,27
4424_07	8	10,2	0,5	157,38	3,48
4424_09	13	11,4	1,6	155,96	3,45
4424_10	8	10,4	1,3	158,63	6,97

### A.5 Εξαγωγή γράμματος από τριδιάστατη απεικόνιση

Στόχος μας στο στάδιο αυτό είναι η περαιτέρω επεξεργασία της μορφής  $P = [\ddot{G}'' \dot{Z}_{est}]$  της τριδιάστατης απεικόνισης και ο διαχωρισμός του γράμματος από την επιγραφή. Ως γράμμα νοείται η προσπάθεια του λιθοξόου να μεταβάλει με χρήση των εργαλείων του τη φυσική επιφάνεια του μαρμάρου της επιγραφής.

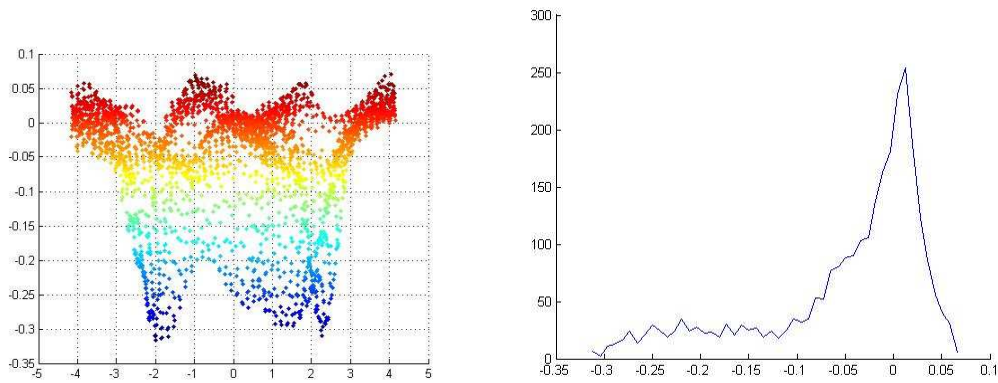
Η διαδικασία περιλαμβάνει 2 επιμέρους βήματα.

A) Αρχικός προσδιορισμός δυνάμει σημείων του γράμματος

B) Τελικός διαχωρισμός

Βήμα A: Αρχικός προσδιορισμός δυνάμει σημείων του γράμματος

Για το βήμα του αρχικού διαχωρισμού γίνεται χρήση του  $[\dot{Z}_{est}]$ , του συνόλου δηλαδή των τιμών των σημείων του γράμματος επί του άξονα  $Z$ . Έστω  $H(z)$  το ιστόγραμμα των τιμών των σημείων  $[\dot{Z}_{est}]$ .



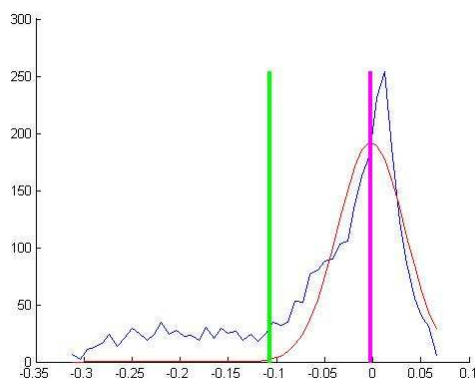
Εικόνα A-31  
 (α) Όψη των σημείων  $P = [\dot{G} \ \dot{Z}_{est}]$  από το επίπεδο XZ  
 (β) Ιστόγραμμα  $H(z)$  των τιμών του  $[\dot{Z}_{est}]$

Αναζητούμε τις παραμέτρους  $(a, \mu, \sigma)$  της κανονικής κατανομής που ελαχιστοποιεί την παρακάτω ποσότητα:

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( H(z_i) - a \cdot e^{-\frac{(\mu - z_i)^2}{2\sigma^2}} \right)^2 \quad (ΠΑ-14)$$

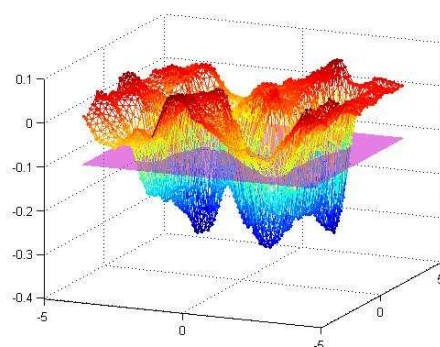
Η κατανομή με τις ανωτέρω παραμέτρους προσεγγίζει κατά βέλτιστο τρόπο το ιστόγραμμα.

Η μέση τιμή της κατανομής θεωρούμε ότι συμπίπτει με τη μέση τιμή της επιφανείας της επιγραφής. Οι μικροανωμαλίες στην επιφάνεια της επιγραφής αναμένεται να έχουν μια κανονική κατανομή γύρω από την μέση τιμή της πράγμα το οποίο και επιβεβαιώνεται από το μέσο σφάλμα προσέγγισης της κανονικής κατανομής.

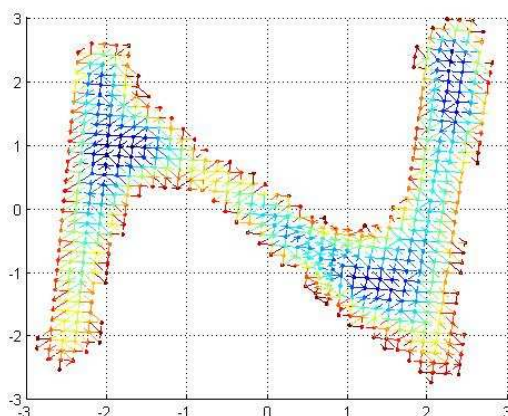


Εικόνα A-32  
 Αρχικό ιστόγραμμα (μπλέ καμπύλη) με βέλτιστη προσέγγιση κανονικής κατανομής (κόκκινη καμπύλη), μέση τιμή  $\mu$  (magenta) και κατώφλι αποκοπής (πράσινο)

Ορίζουμε ως τιμή αποκοπής την τιμή  $z_{απ} = \mu - 2\sigma$ . Οποιαδήποτε τιμή μεγαλύτερη του ανωτέρω κατώφλιου θεωρούμε ότι εντάσσεται στις μικροανωμαλίες της επιφανείας της επιγραφής και δεν αποτελεί δυνάμει σημείο του γράμματος οπότε απορρίπτεται. Το κατώφλι επελέγη διότι το 97,7% του πληθυσμού της κανονικής κατανομής βρίσκεται στο διάστημα  $(\mu - 2\sigma, \infty)$  οπότε είναι εύλογη η υπόθεση ότι οι μικροανωμαλίες της επιφανείας και ο τυχόν θόρυβος από τη λήψη της ψηφιακής απεικόνισης εντοπίζονται εντός αυτού του διαστήματος.



Εικόνα A-33  
Τριδιάστατη απεικόνιση γράμματος με επίπεδο αποκοπής



Εικόνα A-34  
Διατήρηση σημείων τριδιάστατης απεικόνισης που ενρίσκονται κάτω από το επίπεδο αποκοπής

### Βήμα Β : Τελικός Διαχωρισμός

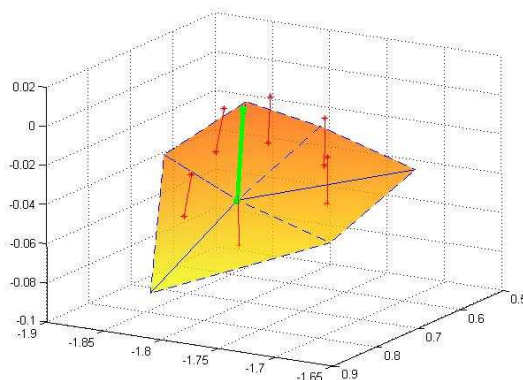
Ο πιθανότερος τρόπος κατασκευής των γραμμάτων αποτελεί η σμίλευση της επιφανείας της επιγραφής με χρήση καταλλήλων εργαλείων (καλέμι, σφύρα) και η δημιουργία των αποτυπωμένων γραμμάτων. Ένα σμιλευμένο γράμμα αποτελείται εν γένει από δύο ειδών περιοχές α) την κοίτη και β) τα τοιχώματα. Ο τελικός διαχωρισμός σκοπεύει αρχικώς να κατατάξει και κατόπιν να επιλέξει τα σημεία που



ανήκουν σε κοίτη του γράμματος καθώς και τα τοιχώματα εκείνα που συνδέονται με την κοίτη και έχουν προοδευτικά αυξανόμενη κλίση.

Κριτήριο για την κατάταξη ενός τυχόντος σημείου αποτελεί α) η τιμή  $[\dot{Z}_{est}]$  επί του άξονα Z, β) η γωνία ανύψωσης  $\theta$  της συνισταμένης  $\vec{E}_s$  των καθέτων διανυσμάτων  $\vec{e}_i$  των στοιχειωδών επιφανειών των οποίων μέλος αποτελεί το υπό μελέτη σημείο. Θα ισχύει  $\vec{E}_s = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i$  όπου n το πλήθος των περιοχών και

$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{E}_s \cdot \hat{z}}{|\vec{E}_s|} \right)$  και γ) τα γειτονικά σημεία του τυχόντος σημείου.



Εικόνα A-35

Υπολογισμός γωνίας ανύψωσης σημείου από γωνίες ανύψωσης καθέτων διανυσμάτων παρακειμένων τριγωνικών επιφανειών (facets)

Αναλυτικότερα τα σημεία ταξινομούνται κατ'αύξουσα σειρά ως προς την τιμή  $[\dot{Z}_{est}]$  επί του άξονα Z και χαρακτηρίζονται ως «μη εξετασθέντα». Για κάθε ένα σημείο  $P_i$  της ταξινομημένης σειράς, πραγματοποιούνται τα ακόλουθα:

α) Επιλεγονται όλα τα γειτονικά  $P_j^+$  τα οποία απέχουν απόσταση από το  $P_i$  μικρότερη από 1mm και για τις συνιστώσες επί του άξονα Z ισχύει  $z_{P_j^+} > z_{P_i}$ .

β) Επιλεγονται όλα τα γειτονικά  $P_j^-$  τα οποία απέχουν απόσταση από το  $P_i$  μικρότερη από 1mm και για τις συνιστώσες επί του άξονα Z ισχύει  $z_{P_j^-} < z_{P_i}$ .

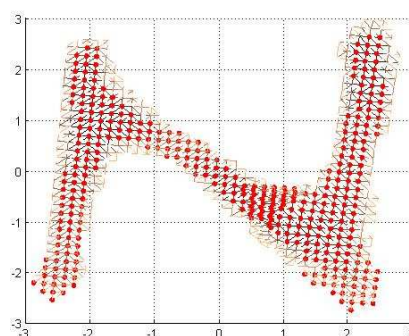
γ) Εάν το σύνολο των  $P_j^-$  δεν είναι κενό και όλα τα στοιχεία του έχουν χαρακτηριστεί «απορριπτέα» ή «τερματικά», το σημείο  $P_i$  χαρακτηρίζεται επίσης «απορριπτέο» και συνεχίζουμε με το επόμενο σημείο της σειράς από το βήμα (α).

δ) Εάν το σύνολο των  $P_j^+$  είναι κενό ή υπάρχει στοιχείο για το οποίο  $\theta_{P_j^+} > \theta_R$  το σημείο  $P_i$  χαρακτηρίζεται ως «επικυρωθέν». Σε κάθε άλλη περίπτωση το σημείο χαρακτηρίζεται ως «τερματικό».

ε) Συνεχίζουμε με το επόμενο σημείο της σειράς από το βήμα (α).

Όσα από τα  $P_i$  χαρακτηρίστηκαν είτε ως «επικυρωθέντα» είτε ως «τερματικά» αποτελούν τελεσίδικα στοιχεία του γράμματος.

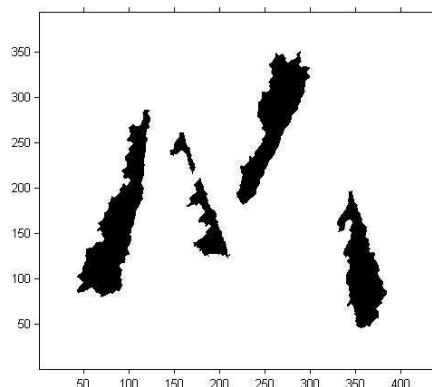
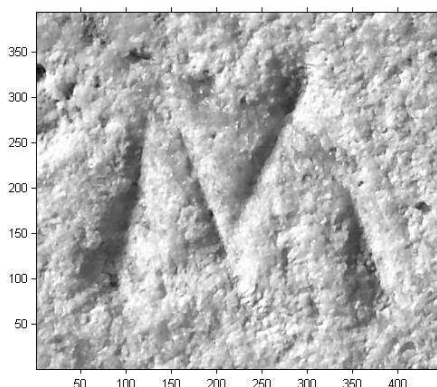
Στην πράξη ο ανωτέρω αλγόριθμος επιλέγει τα σημεία από την κοίτη του γράμματος καθώς και τα σημεία των τοιχωμάτων εφόσον αυτά παραμένουν απόκρημνα.

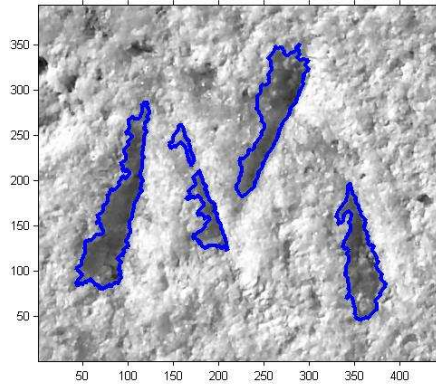


Εικόνα A-36 Τελικώς εξαχθείσα μορφή γράμματος

## A.6 Σύγκριση εξαχθέντων μορφών γραμμάτων.

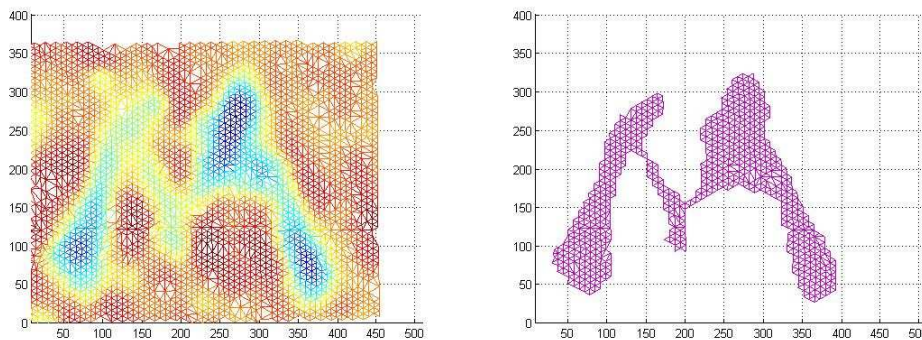
Με εφαρμογή της προτεινομένης μεθοδολογίας στο [Par01] εξάγονται από τις διδιάστατες απεικονίσεις των επιγραφών, οι μορφές των γραμμάτων (Μορφή 2Δ).





Εικόνα A-37  
 (α) Αρχική μορφή διδιάστατης απεικόνισης  
 (β) Κατάτμημένη εικόνα  
 (γ) Περίγραμμα σε αρχική μορφή

Καθ' ομοίω τρόπο, εφαρμόζοντας την περιγραφείσα στην παράγραφο A.5 διαδικασία εξαγωγής του γράμματος από τις τριδιάστατες απεικονίσεις λαμβάνουμε αντίστοιχες μορφές. (Μορφή 3Δ)



Εικόνα A-38  
 (α) Αρχική μορφή τριδιάστατου γράμματος  
 (β) Μορφή εξαχθέντος γράμματος

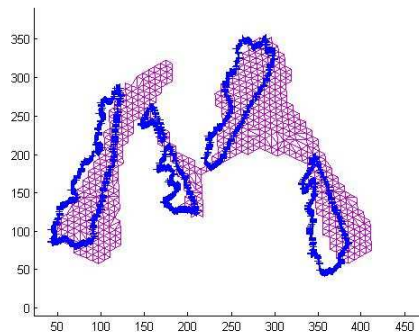
Εφαρμόζοντας τη διαδικασία εύρεσης των παραμέτρων ακριβούς τοποθέτησης τριδιάστατης και διδιάστατης απεικόνισης της παραγράφου A.4.1, υπολογίζονται οι βέλτιστες παράμετροι και γίνεται δυνατή η τοποθέτηση των αντιστοιχών μορφών 2Δ και 3Δ επί του ίδιου συστήματος αναφοράς με τρόπο ώστε να είναι εφικτή η σύγκριση των δύο μορφών.

Για τις ανάγκες της σύγκρισης ορίζονται οι παρακάτω δείκτες που σχετίζονται με τα εμβαδά  $E_{2d}$  και  $E_{3d}$  των περιοχών των μορφών 2Δ και 3Δ καθώς και τη χωρική συσχέτιση των δύο εμβαδών:

$$\rho_{2d} = \frac{E_{\cap}}{E_{2d}} \quad (ΠΑ-15)$$

$$\rho_{3d} = \frac{E_{\cap}}{E_{3d}} \quad (ΠΑ-16)$$

όπου  $E_{\cap} = E_{2d} \cap E_{3d}$  το κοινό εμβαδόν των δύο μορφών, ήτοι το εμβαδόν των περιοχών που χαρακτηρίζονται ως γράμμα τόσο στη διδιάστατη όσο και στη τριδιάστατη απεικόνιση.



Εικόνα Α-39

Τοποθέτηση επί του ίδιου συστήματος αναφοράς του περιγράμματος της διδιάστατης μορφή γράμματος και της εξαχθείσας μορφής του από τα τριδιάστατα δεδομένα.

Η σύγκριση ικανού και αντιπροσωπευτικού πλήθους εξαχθέντων μορφών γραμμάτων από τις διδιάστατες απεικονίσεις (Π2δ) με τις αντίστοιχες τριδιάστατες (Π3δ), δείχνουν διαφοροποίηση μεταξύ των χαρακτηριστικών των περιοχών αυτών.

Πιο συγκεκριμμένα και σε σχέση με τα εμβαδά  $E_{2d}$  και  $E_{3d}$ , οι τιμές των εμβαδών  $E_{2d}$  των μορφών Π2δ είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες τιμές των εμβαδών  $E_{3d}$  των μορφών Π3δ. Επιπλέον για το μέσο όρο του λόγου  $\frac{E_{2d}}{E_{3d}}$  των τιμών των εμβαδών για το σύνολο των εξαχθέντων μορφών ισχύει  $\overline{\frac{E_{2d}}{E_{3d}}} = 0.64$ .

Λαμβάνοντας επιπλέον υπ' όψιν τη σχετική τους τοποθέτηση και υπολογίζοντας τους δείκτες  $\rho_{2d}$  και  $\rho_{3d}$  διαπιστώνουμε τα ακόλουθα:

A) Ο δείκτης  $\rho_{2d}$  δίνει τιμές στην περιοχή της μονάδας και συγκεκριμμένα ισχύει  $\overline{\rho_{2d}} = 0.91$

B) Ο δείκτης  $\rho_{3d}$  δίνει τιμές για τις οποίες  $\overline{\rho_{3d}} = 0.58$

Εκ των ανωτέρω, είναι φάνερο ότι οι εξαγόμενες μορφές των γραμμάτων διαφέρουν σημαντικά, με τις εξαγόμενες διδιάστατες μορφές να αποτελούν ως επί το πλείστο υποσύνολο των εξαγομένων τριδιάστατων μορφών. Επιπλέον η εικόνα που αποκομίζεται από την παρατήρηση των δύο μορφών στη θέση ακριβούς τοποθέτησης, δίνει την αίσθηση ότι υπάρχουν τμήματα των περιοχών των δύο μορφών που δείχνουν να εφάπτονται μεταξύ τους. Σε κάθε περίπτωση τα τμήματα αυτά έχουν προσανατολισμό κοντά στην τιμή της παραμέτρου ακριβούς τοποθέτησης  $\phi - \delta\phi$ .

Δεδομένου των ανωτέρω διαφοροποιήσεων είναι χρήσιμη η ανάπτυξη μεθόδου που θα αξιοποιεί τις εξαχθείσες τριδιάστατες μορφές γραμμάτων για τη μελέτη και ταυτοποίηση των επιγραφών.

## **A.7 Εξαγωγή πλατωνικού προτύπου γράμματος**

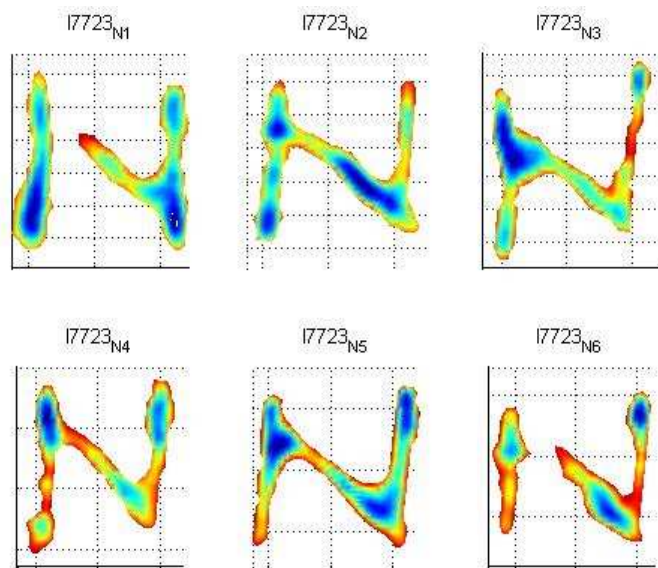
### **A.7.1 Εξαγωγή νέφους βέλτιστα προσαρμοσμένων επιφανειών γράμματος**

Θεωρούμε ότι ο λιθοξόος έχει κατά νου για κάθε σύμβολο της αλφαβήτου μια συγκεκριμένη ιδέα υλοποίησης, για την οποία αποδεχόμαστε τον όρο «πλατωνικό» και την οποία προσπαθεί με τα εργαλεία του να αποτυπώσει επί του μαρμάρου. Το αποτέλεσμα της υλοποίησης του συμβόλου απέχει από την αρχική ιδέα του λιθοξόου λόγω της προσθήκης θορύβου οφειλομένου σε διαφόρους παράγοντες όπως:

- Η τυχαιότητα στο χτύπημα στο καλέμι
- Η αστάθεια στην τοποθέτηση του καλεμίου πάνω στο μάρμαρο
- Η αθέλητη φθορά που επήλθε στο μάρμαρο λόγω των δυνάμεων συνοχής μεταξύ των μορίων του μαρμάρου
- Η ψυχολογική κατάσταση και η κόπωση του λιθοξόου
- Η φθορά του χρόνου κλπ

Στόχος της διαδικασίας εξαγωγής του τριδιάστατου νέφους είναι η εξάλειψη όλων των ανωτέρω πηγών θορύβου από τις υλοποιήσεις των συμβόλων ενός γράμματος που λαμβάνουμε από μια επιγραφή.

Ας θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε τριδιάστατη απεικόνιση επιγραφής και τις  $n$  εμφανιζόμενες υλοποιήσεις ενός συμβολογράμματος  $j$ . Συμβολίζουμε την κάθε μία από τις  $n$  υλοποιήσεις με  $P_{ij}$  όπου  $i=1\dots n$  και  $j$  ο δείκτης που υποδηλώνει το γράμμα. Λαμβάνουμε μια τυχαία διάταξη  $L = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$  των ανωτέρω υλοποιήσεων.



Εικόνα A-40

Τυχαία διάταξη των έξι επιλεγμένων υλοποιήσεων του γράμματος  $N$  της επιγραφής 7723

Λαμβάνουμε την πρώτη υλοποίηση από την ανωτέρω διάταξη έστω  $L_1$  και την τοποθετούμε στο σύστημα αναφοράς  $\Pi$  ώστε το κέντρο του να συμπίπτει με το κέντρο βάρους της υλοποίησης και το επίπεδο  $XY$  του συστήματος αναφοράς να συμπίπτει με τη μηδενική τιμή για το  $\dot{Z}_{est}$  της μορφής  $P = [\ddot{G}'' \dot{Z}_{est}]$  της υλοποίησης  $L_1$ . Τα σημεία αυτά θεωρούνται πλέον ως τα σημεία αναφοράς.

Επιλέγουμε την αμέσως επόμενη υλοποίηση  $L_2$  της διάταξης και την τοποθετούμε με τρόπο ώστε:

α) Οι άξονες  $X$ ,  $Y$  του επιπέδου αναφοράς της υλοποίησης  $L_2$  να είναι παράλληλοι με τους αντίστοιχους άξονες του επιπέδου αναφοράς του  $\Pi$ .

β) Τα κέντρα βάρους των σημείων του συστήματος αναφοράς  $\Pi$  και της υλοποίησης  $L_2$  να κείνται επί ευθείας κάθετη στο επίπεδο αναφοράς του  $\Pi$ .

Κατόπιν εφαρμόζουμε κατάλληλο μετασχηματισμό  $U$  ώστε να ταιριάζουν κατά βέλτιστο τρόπο στα σημεία που υπάρχουν στο σύστημα αναφοράς  $\Pi$ . Ο μετασχηματισμός που ασκείται αποτελείται από πέντε ανεξάρτητους μεταξύ τους τελεστές:

- Μεγέθυνση ή σμίκρυνση κατά τον παράγοντα  $r$
- Στροφή  $\phi$  ως προς τον άξονα των  $z$

- Παράλληλη μετατόπιση  $dx$  κατά τον άξονα  $x$
- Παράλληλη μετατόπιση  $dy$  κατά τον άξονα  $y$
- Παράλληλη μετατόπιση  $dz$  κατά τον άξονα  $z$

Η προσαρμογή επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας διαδικασία που βασίζεται σε επαναληπτικό αλγόριθμο κοντινότερου σημείου (ICP) με κατάλληλη παραμετροποίηση για την επίτευξη της επιθυμητής σύγκλισης.

Η ποσότητα που επιχειρείται να ελαχιστοποιηθεί είναι η ακόλουθη:

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(xL_i, \Pi) + \frac{1}{m \cdot W} \sum_{i=1}^m (w_i \cdot d(\Pi_i, xL_i)) \quad (ΠΑ-17)$$

Στην ανωτέρω ποσότητα η  $xL$  εκφράζει τη μετασχηματισμένη σε κάθε βήμα του επαναληπτικού αλγορίθμου υλοποίηση του γράμματος  $L$ ,  $\Pi_i$  τα σημεία του συστήματος αναφοράς και  $w_i$  η βαρύτητα εκάστου σημείου του  $\Pi$ . Η βαρύτητα  $w_i$ , συμπίπτει με το πλήθος των υλοποιήσεων που έχουν συνεισφέρει στην παρουσία του σημείου  $\Pi_i$ . Η ποσότητα  $W$  είναι το άθροισμα των επιμέρους βαρών  $w_i$ , δηλαδή

$$W = \sum_{i=1}^m w_i.$$

Η ποσότητα  $d(A_i, B_j)$  εκφράζει τη μέση ευκλείδεια απόσταση του σημείου  $A_i$  του  $A$  από τα σημεία  $B_j$  του  $B$  για τα οποία:

$$\vec{B}_{j\perp} \cdot \vec{A}_{i\perp} > \gamma \quad (ΠΑ-18)$$

Στην ανωτέρω  $\vec{A}_{i\perp}, \vec{B}_{j\perp}$  είναι η μέση διεύθυνση των μοναδιαίων καθέτων διανυσμάτων των στοιχειωδών επιφανειών που ανήκουν τα σημεία  $A_i$  και  $B_j$ . Δεδομένου των δύο όψεων που έχει μια στοιχειώδης επιφάνεια, τη θετική και την αρνητική, ορίζονται αντιστοίχως δύο κάθετα διανύσματα. Αμφότερα κείνται επί της ίδιας διεύθυνσης, έχουν όμως αντίθετες κατευθύνσεις. Όπως γίνεται αντιληπτό, η τιμή της (ΠΑ-18) εξαρτάται απόλυτα από την κατεύθυνση των επιλεγέντων διανυσμάτων. Για το λόγο αυτό για κάθε μια στοιχειώδη επιφάνεια λαμβάνεται εκείνο το κάθετο διάνυσμα με γωνία ανύψωσης στο διάστημα  $[0, \pi/2]$ . Ο περιορισμός της (ΠΑ-18), διασφαλίζει ότι ο υπολογισμός της (ΠΑ-17) για το τυχόν σημείο  $A_i$ , θα λαμβάνει υπ' όψιν μόνο τα σημεία του  $L_i$  των οποίων ο προσανατολισμός δεν απέχει

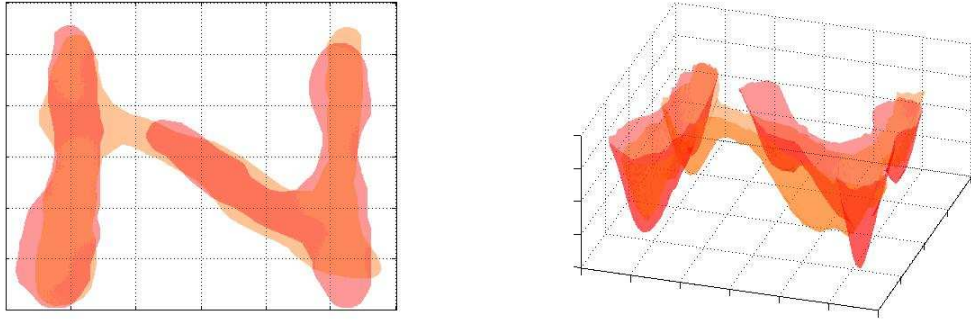
πολύ. Κατάλληλη τιμή για την παράμετρο  $\gamma$  είναι  $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , που αντιστοιχεί σε μέγιστη γωνία μεταξύ των καθέτων διανυσμάτων  $\frac{\pi}{6}$  ( $30^\circ$ ).

Η ύπαρξη και των δύο όρων στην (IIA-17) είναι απαραίτητη για την ορθή εκτέλεση του αλγορίθμου. Εάν ο πρώτος όρος απουσίαζε, ο αλγόριθμος θα έδινε πολύ μικρό σφάλμα ταιριάσματος καθώς γινόταν σμίκρυνση του  $xL$  πράγμα που θα οδηγούσε σε αποτέλεσμα που δεν θα συμβάδιζε με την ανθρώπινη αίσθηση. Η ύπαρξη του όρου αυτού αποτρέπει την ανωτέρω ανεπιθύμητη συμπεριφορά, δεδομένου ότι πολύ μικρές τιμές για τον παράγοντα  $r$  τον αυξάνουν σημαντικά και κατά συνέπεια οδηγούν σε συνολική αύξηση της ποσότητας  $E$ .

Το σημείο που συγκλίνει ο αλγόριθμος κοντινότερου σημείου εξαρτάται σημαντικά από την αρχική θέση τοποθέτησης του  $L_i$  ως προς το  $\Pi$ . Επιπλέον ο αλγόριθμος δύναται να επηρεάσει μόνο τις παραμέτρους  $(\phi, dx, dy, dz)$ . Επειδή είναι αναγκαίο αφ'ενός η σύγκλιση να γίνει στο ολικό ελάχιστο και αφ'ετέρου να συμπεριληφθεί στις παραμέτρους και η παράμετρος μεγέθυνσης/σμίκρυνσης  $r$ , η ανωτέρω διαδικασία επαναλαμβάνεται διαδοχικά λαμβάνοντας διαφορετικές τιμές για την παράμετρο μεγέθυνσης/σμίκρυνσης  $r$  και έχοντας μετακινήσει/στρέψει το  $L_i$  από την αρχική θέση τοποθέτησης. Για κάθε ένα σύνολο αρχικών παραμέτρων  $(r, \phi, dx, dy, dz)_{init}$ , ο αλγόριθμος συγκλίνει σε μια θέση έχοντας μεταβάλει τις παραμέτρους σε  $(r, \phi_s, dx_s, dy_s, dz_s)$  και υπολογίζοντας την τιμή της  $E$ . Επιλέγοντας κάθε φορά τη μικρότερη υπολογιζόμενη τιμή της  $E$  καθώς και τις παραμέτρους για τις οποίες εμφανίζεται και με την επαναληπτική εκτέλεση όλων των ανωτέρω βημάτων καταλήγουμε στην εύρεση του επιθυμητού ολικού ελαχίστου  $E_{min}$  και των παραμέτρων  $(r, \phi, dx, dy, dz)_{best}$  για τις οποίες εμφανίζεται.

Με την ολοκλήρωση του υπολογισμού των βελτίστων παραμέτρων  $(r, \phi, dx, dy, dz)_{best}$  και την εφαρμογή τους επί του  $L_2$ , το τελευταίο τοποθετείται στο σύστημα αναφοράς  $\Pi$  όπου ευρίσκεται ήδη τοποθετημένο το  $L_1$ .





Εικόνα A-41  
Βέλτιστη τοποθέτηση στο σύστημα αναφοράς Π των  $7723_{N1}$ ,  $7723_{N2}$

Το σύνολο των σημείων του Π απαρτίζει το νέφος των προσαρμοσμένων επιφανειών των  $L_1$  και  $L_2$ . Το σύνολο των σημείων αυτών θα αποτελέσει τη βάση για την υποδοχή της επόμενης υλοποίησης  $L_3$ .

Η χρονική απόκριση του αλγορίθμου προσαρμογής εξαρτάται από το πλήθος των σημείων του Π. Η διαδοχική προσθήκη όλων των σημείων εκάστης υλοποίησης  $L_i$  στο Π αυξάνει τα σημεία σε μεγάλο βαθμό με συνέπεια ο χρόνος για τη σύγκλιση να αυξάνεται σημαντικά. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να προηγηθούν τα ακόλουθα βήματα μέσω των οποίων αφ' ενός το πλήθος των σημείων του Π δεν αυξάνει με μεγάλο ρυθμό, αφ' ετέρου η μορφή του νέφους διατηρείται. Τα βήματα αυτά περιλαμβάνουν τις ακόλουθες ενέργειες:

Τα σημεία του Π ταξινομούνται σε δύο ομάδες την  $A$  και τη  $B$ . Στην ομάδα  $A$  εντάσσονται τα σημεία αναφοράς ενώ στην ομάδα  $B$  τα σημεία που προσαρμόστηκαν πάνω στα σημεία  $A$ .

Για κάθε σημείο  $A_i$  της ομάδας  $A$  του Π επιλέγεται μια περιοχή  $S$  που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες σε σχέση με τα σημεία  $B_j$  του  $B$ :

$$|(A_i - B_j) \cdot \vec{A}_{i\perp}| > a \quad (ΠΑ-19)$$

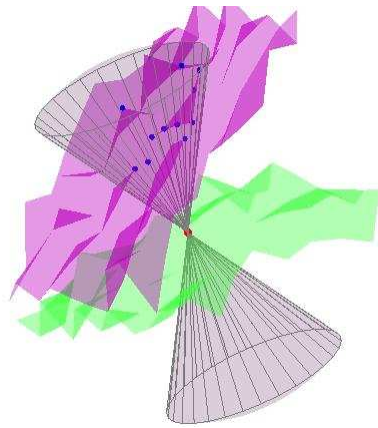
$$|(A_i - B_j)| < \beta \quad (ΠΑ-20)$$

$$|\vec{B}_{j\perp} \cdot \vec{A}_{i\perp}| > \gamma \quad (ΠΑ-21)$$

Για τα  $\vec{A}_{i\perp}, \vec{B}_{j\perp}$  ισχύουν ότι έχει αναφερθεί και προηγουμένως. Οι περιορισμοί (ΠΑ-19) και (ΠΑ-20) ορίζουν δύο χώρους εκατέρωθεν του σημείου  $A_i$ . Οι χώροι αποτελούν πρακτικά κώνους με σφαιρική βάση. Ο άξονας των κωνικών

περιοχών συμπίπτει με τη διεύθυνση του  $\vec{A}_{i\perp}$ . Η παράμετρος  $a$  ορίζει τη γωνία ανοίγματος της κωνικής περιοχής ενώ η απόσταση  $\beta$  ορίζει την ακτίνα της σφαίρας τμήμα της οποίας αποτελεί η βάση της κωνικής περιοχής. Τέλος η (ΠΑ-21) επιβάλλει τον ίδιο προσανατολισμό μεταξύ των καθέτων διανυσμάτων  $\vec{A}_{i\perp}$  και  $\vec{B}_{j\perp}$ . Καλές τιμές για τις παραμέτρους  $a$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  είναι:

$$a = 0.86 \text{ (γωνία } 30^\circ\text{)}, \beta = 3mm \text{ και } \gamma = 0 \text{ (γωνία } 90^\circ\text{)}.$$



Εικόνα Α-42  
Καθορισμός περιοχής με σημεία που λαμβάνονται υπ'όψιν

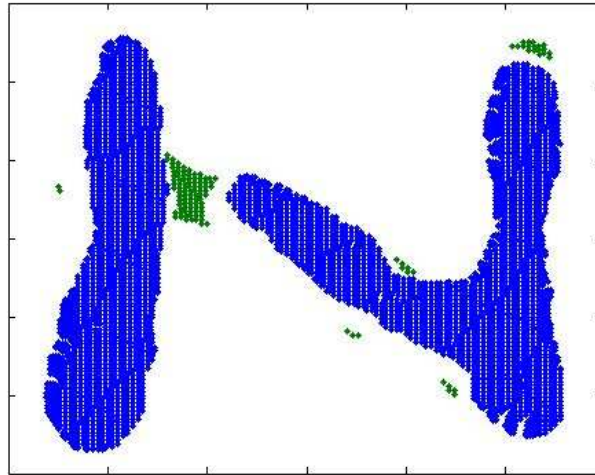
Με εφαρμογή των ανωτέρω περιορισμών απομονώνονται τα σημεία  $B_j$  που βρίσκονται εντός της περιοχής αυτής. Εάν  $m$  το πλήθος των  $B_j$  και  $B_{jp}$  η αντίστοιχη προβολή τους στην διεύθυνση του καθέτου διανύσματος στο σημείο  $A_i$ , η νέα θέση του  $A_{inew}$  προκύπτει ως

$$A_{inew} = w_i \cdot A_i + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m B_{jp} \quad (\text{ΠΑ-22})$$

Η ποσότητα  $w_i$  αποτελεί ένα αποδιδόμενο βάρος που έχει το σημείο  $\Pi_i$  και θα επεξηγηθεί αμέσως μετά. Από το σύστημα αναφοράς  $\Pi$ , αφαιρούνται όλα τα σημεία  $B_j$  που χρησιμοποιήθηκαν σε κάποια περιοχή κατά το προηγούμενο βήμα. Στα εναπομείναντα σημεία  $B_j$  αποδίδεται βάρος  $w_j = 1$

Τα σημεία  $A_{inew}$  και  $B_j$  αποτελούν το εμπλουτισμένο σύστημα αναφοράς  $\Pi$  όπου θα τοποθετηθεί η επόμενη υλοποίηση γράμματος. Σε κάθε υπολογισμό  $A_{inew}$  η

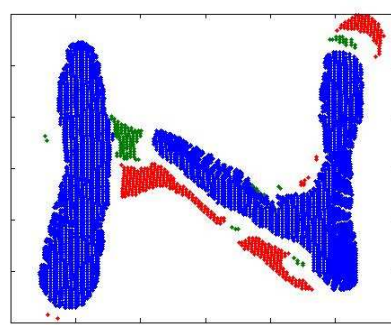
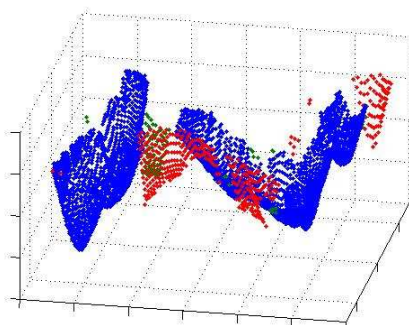
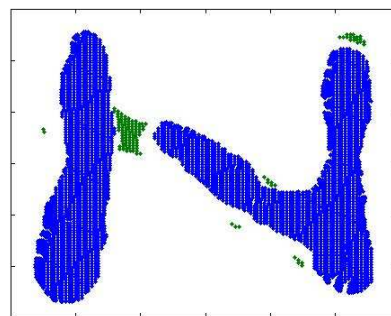
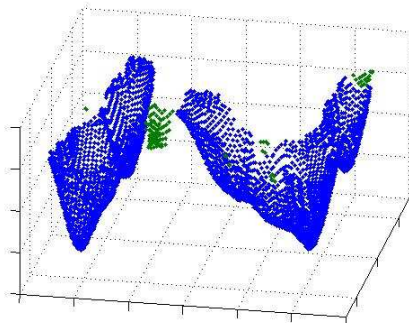
βαρύτητα  $w_i$ , αυξάνει κατά 1. Δηλαδή  $w_i = w_i + 1$ . Εξαιρέση αποτελεί η πρώτη φορά που υπολογίζονται τα  $A_{new}$  όπου  $w_i = 1$ .

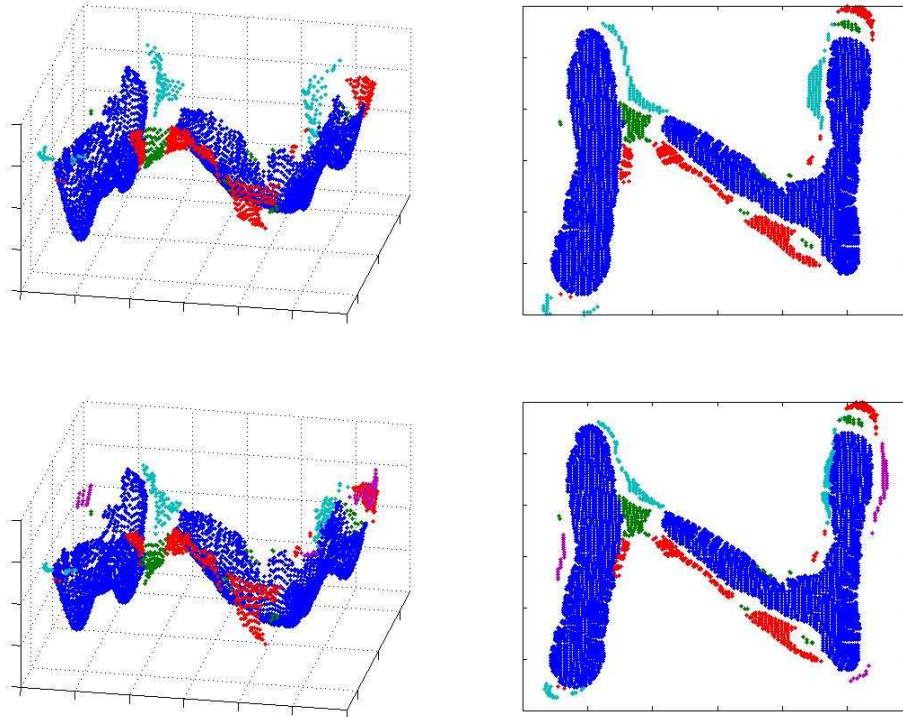


Εικόνα A-43

Εμπλουτισμένο σύστημα αναφοράς για νέο στάδιο. Με πράσινο χρώμα εικονίζονται τα εναπομείναντα σημεία που δεν έχουν ενταχθεί σε κάποια περιοχή

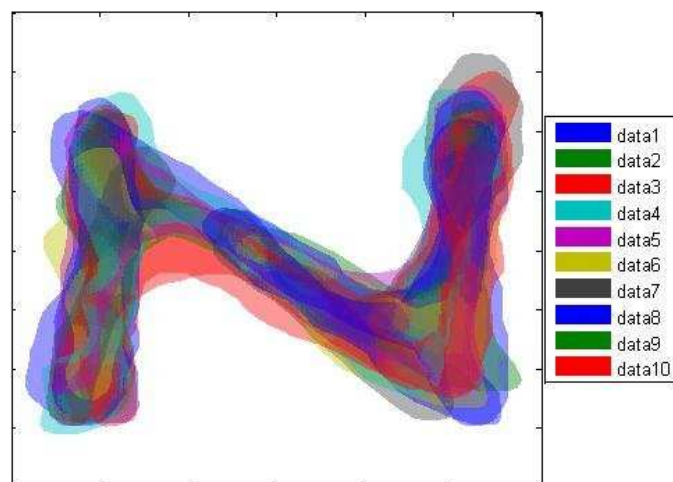
Η διαδικασία επαναλαμβάνεται διαδοχικά για όλες τις υλοποιήσεις που περιλαμβάνει η διάταξη με συνέπεια να εμπλουτίζονται σε κάθε βήμα η μορφή και τα σταθερά σημεία του συστήματος αναφοράς Π.





Εικόνα A-44  
 Εμπλουτισμένη μορφή Π με διαδοχικές προσθήκες υλοποιήσεων

Η τελική εμπλουτισμένη μορφή που προκύπτει με την διαδοχική προσθήκη των υλοποιήσεων  $L_i$ , δίνει μια αρκετά αντιπροσωπευτική εικόνα για την ιδέα του προτύπου του γράμματος. Ωστόσο για την εξαγωγή του προτύπου του γράμματος είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί η πληροφορία που μας παρέχει το πυκνό νέφος από όλα τα σημεία των υλοποιήσεων.

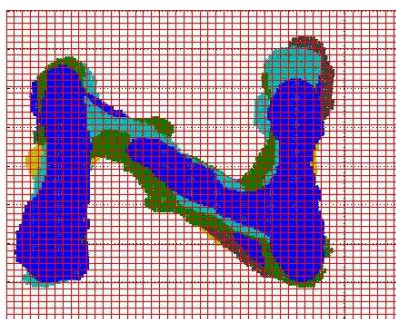


Εικόνα A-45  
 Πλήρες νέφος από τη διαδοχική προσθήκη δέκα υλοποιήσεων

### A.7.2 Εξαγωγή πλατωνικού προτύπου από νέφος

Για την εξαγωγή της εκτίμησης του πλατωνικού προτύπου από το τριδιάστατο νέφος εκτελούνται τα κατωτέρω:

Επιλέγεται κατάλληλη διαμέριση επί των αξόνων  $x, y$  και  $z$  και γίνεται κατάτμηση του χώρου  $xyz$  του συστήματος αναφοράς  $\Pi$  σε στοιχειώδεις και ίσου όγκου περιοχές  $V_{ijk}$  (voxels). Το βήμα της διαμέρισης καθορίζεται από τη μικρότερη ανάμεσα στις χρησιμοποιούμενες υλοποιήσεις γραμμάτων μέση απόσταση σημείου από το κοντινότερο σημείο του. Τα σημεία του νέφους ταξινομούνται βάσει της περιοχής  $V_{ijk}$ . Έστω  $\Pi^{ijk}$  τα ταξινομηθέντα στην περιοχή  $V_{ijk}$  σημεία του  $\Pi$ .

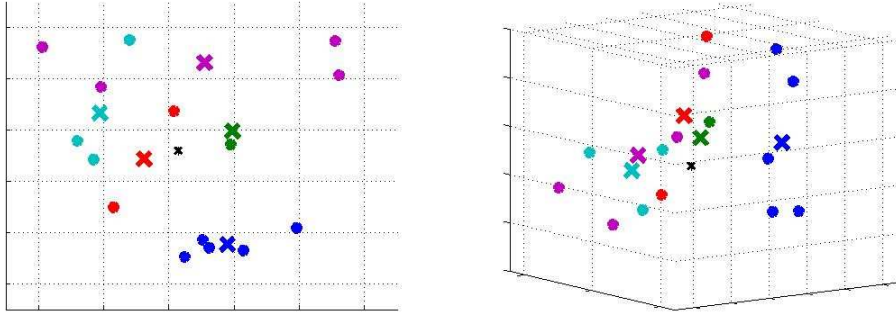


Εικόνα A-46

Πλήρες νέφος υλοποιήσεων με πλέγμα διαμέρισης

Σε κάθε μια στοιχειώδη περιοχή  $V_{ijk}$ , υπολογίζεται η μέση τιμή των  $\Pi^{ijk}$  σε τρία στάδια.

Στο πρώτο στάδιο τα  $\Pi^{ijk}$  ταξινομούνται βάσει της υλοποίησης  $L_n$  του γράμματος από την οποία έχουν προέλθει και υπολογίζεται ο μέσος όρος τους  $\Pi_{L_n}^{ijk}$ . Υπολογίζεται δηλαδή για κάθε μια υλοποίηση  $L_n$ , η μέση τιμή των σημείων της εντός της περιοχής  $\Pi^{ijk}$ , οπότε σε κάθε μια περιοχή διατηρείται το πολύ ένας αντιπρόσωπος ανά υλοποίηση ο οποίος και θα συνεισφέρει στην τελική διαμόρφωση της τιμής της περιοχής.

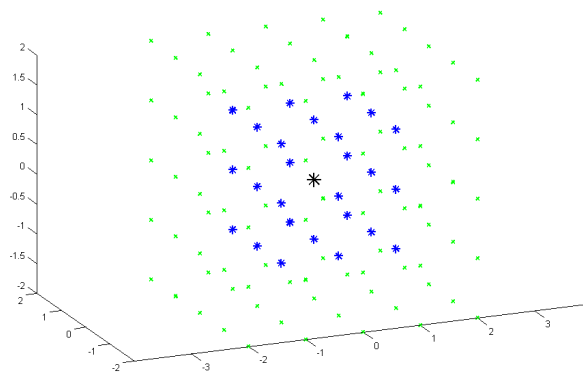


Εικόνα A-47

Λεπτομέρεια με τη διαδικασία του πρώτου σταδίου και την εύρεση των  $\Pi_{L_n}^{ijk}$  ανά σημεία υλοποίησης (κόκκινο, μπλε, πράσινο, μωβ, γαλάζιο)

Στο δεύτερο στάδιο υπολογίζεται η μέση τιμή των  $\Pi_{L_n}^{ijk}$ . Η μέση τιμή  $\Pi_{L_n}^{ijk}$  αποδίδεται ως τιμή του πλατωνικού  $P_{ijk}$  για την περιοχή  $V_{ijk}$  μόνο εάν το πλήθος  $n$  των  $\Pi_{L_n}^{ijk}$  υπερβαίνει ένα ποσοστό  $\gamma_{\min}$  υλοποιήσεων που έχουν συμμετάσχει στη δημιουργία του νέφους. Μια καλή εκτίμηση για το ποσοστό  $\gamma_{\min}$  είναι 60%

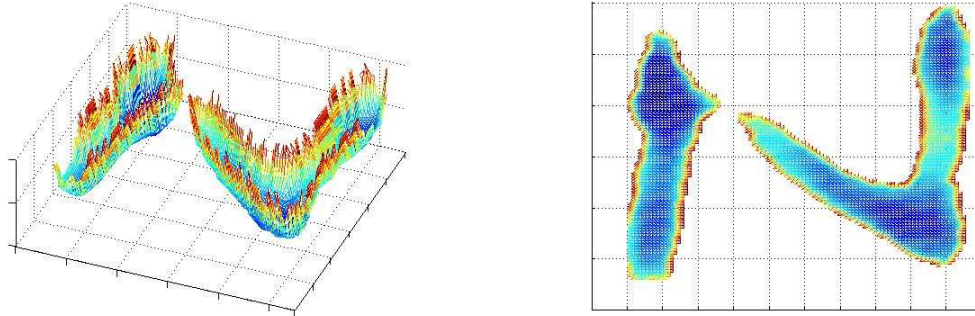
Στο τρίτο στάδιο λαμβάνονται υπ' όψιν και οι τιμές  $P_{ijk}$  των 27 άμεσα γειτονικών περιοχών της τρέχουσας περιοχής  $V_{ijk}$  υπολογίζοντας τη σταθμισμένη μέση τιμή τους. Η στάθμιση κάθε μιας περιοχής είναι ανάλογη με το πλήθος  $n$  των  $\Pi_{L_n}^{ijk}$  κάθε περιοχής. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται και μια εξομάλυνση του εξαγομένου προτύπου.



Εικόνα A-48

Απεικόνιση 26 γειτονικών περιοχών κεντρικής περιοχής

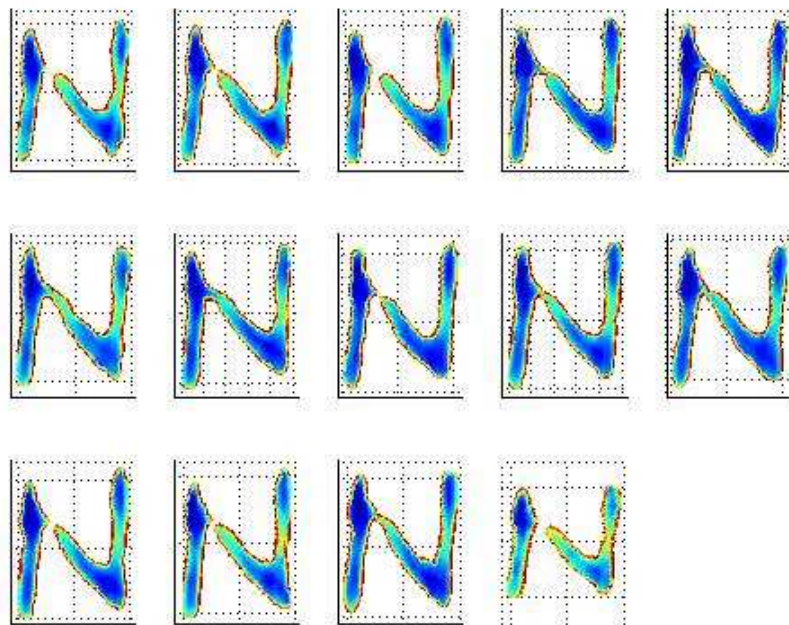
Με εφαρμογή των ανωτέρω τριών βημάτων εξάγεται μια εκτίμηση για το ιδεατό πλατωνικό πρότυπο για τις εξεταζόμενες υλοποιήσεις ενός γράμματος μιας επιγραφής.



Εικόνα A-49  
Τελική εκτίμηση πλατωνικού προτύπου

### A.7.3 Επιλογή βελτίστου πλατωνικού

Η διαδικασία εξαγωγής των προηγούμενων βημάτων επαναλαμβάνεται λαμβάνοντας μια διαφορετική τυχαία διάταξη  $L$  των υλοποιήσεων των γραμμάτων και οδηγώντας σε μια διαφορετική εκτίμηση του πλατωνικού. Έτσι για κάθε ένα γράμμα έχουμε μια συλλογή από εκτιμήσεις για το πλατωνικό πρότυπο.



Εικόνα A-50  
Εκτίμηση πλατωνικού προτύπου από διαφορετικές διατάξεις υλοποιήσεων

Εκ των ανωτέρω εκτιμήσεων και παρά τη μεγάλη τους ομοιότητα επιλέγεται μόνο μία ως τελική εκτίμηση του πλατωνικού. Για την επιλογή αυτή υπολογίζεται για κάθε μια εκτίμηση ένας δείκτης που λαμβάνει υπ' όψιν τις υλοποιήσεις από τις οποίες έχει προέλθει και εμπεριέχει και την ποιότητα προσαρμογής υλοποίησης και πλατωνικού. Η επιλογή βασίζεται σε εκείνο το πλατωνικό που δίνει το βέλτιστο μέσο δείκτη. Αναλυτικότερα:

Έστω  $P_j$  η εκτίμηση ενός πλατωνικού και  $L_i$  η υλοποίηση ενός γράμματος που συνέβαλε στη δημιουργία του πλατωνικού. Με μέθοδο ανάλογη της περιγραφόμενης στην παράγραφο Α.7.1 προσαρμόζουμε κατά βέλτιστο τρόπο το  $L_i$  στα σημεία του  $P_j$ . Έστω  $E_{ij}$  το σφάλμα από την προσαρμογή της υλοποίησης  $L_i$  στην εκτίμηση του πλατωνικού  $P_j$  όπως ορίζεται από την (IIA-17). Η ποσότητα  $R_j$  αποτελεί μια εκτίμηση της ποιότητας του πλατωνικού  $P_j$  σε σχέση πάντα με υλοποιήσεις από τις οποίες γεννήθηκε.

$$R_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E_{i,j} \quad (\text{IIA-23})$$

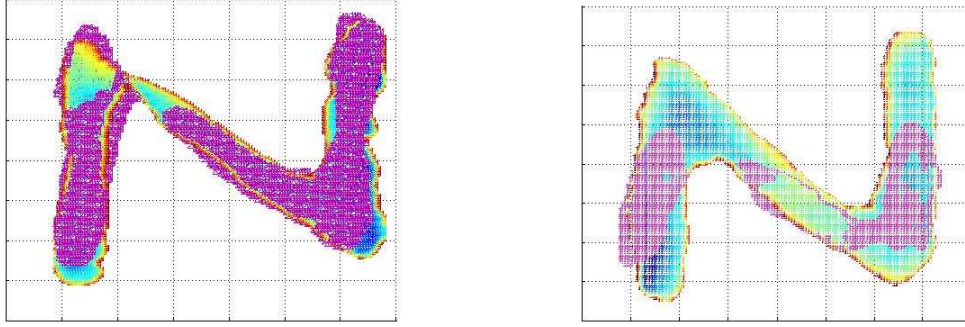
Υπολογίζοντας τον ανωτέρω δείκτη για κάθε μια εκτίμηση πλατωνικού που έχει προκύψει από ένα σύνολο υλοποιήσεων επιλέγουμε ως αντιπρόσωπο το πλατωνικό εκείνο για το οποίο έχουμε ελάχιστη τιμή του  $R_j$

## **A.8 Σύγκριση και κατάταξη πλατωνικών**

Από τα προηγούμενα στάδια έχουμε για κάθε μια επιγραφή και κάθε ένα από τα εξεταζόμενα σύμβολα, μια εκτίμηση του πλατωνικού προτύπου, της ιδέας που είχε δηλαδή για το γράμμα ο χαρακτήρας της επιγραφής. Συγκρίνοντας τα εξαχθέντα πλατωνικά πρότυπα του ίδιου συμβόλου μεταξύ διαφορετικών επιγραφών και με τη βοήθεια στατιστικής επεξεργασίας των αποτελεσμάτων, είναι δυνατή η κατάταξη και αναγνώριση των διαφορετικών χαρακτών.

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η προσαρμογή δύο πλατωνικών προτύπων ενός συμβολογράμματος  $L$  έστω  $I_{jL}$  και  $I_{iL}$  που προέρχονται από επιγραφές του ίδιου χαρακτήρα θα είναι εν γένει πολύ καλή και το αντίστοιχο σφάλμα προσαρμογής σχετικά μικρό. Με παρόμοια λογική μπορούμε να υποθέσουμε ότι μεταξύ επιγραφών διαφορετικών χαρακτών θα υπάρχουν συμβολογράμματα για τα οποία η προσαρμογή των πλατωνικών τους προτύπων δεν θα είναι καλή και το αντίστοιχο σφάλμα υψηλό.





*Εικόνα Α-51*  
 (α) Πλατωνικά που παρουσιάζουν πολύ καλή προσαρμογή  
 (β) Πλατωνικά με όχι καλή προσαρμογή

Για την ποσοτικοποίηση της ποιότητας της προσαρμογής και την κατάταξη των επιγραφών ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία.

Έστωσαν δύο επιγραφές  $E_i$  και  $E_j$ ,  $\Pi_i^L$  και  $\Pi_j^L$  τα νέφη των υλοποιήσεων του συμβόλου  $L$  της αλφαβήτου με  $L \in (A, N, \text{κλπ})$  και  $I_{jL}$ ,  $I_{iL}$  οι εξαχθείσες σύμφωνα με την παράγραφο Α.7 εκτιμήσεις πλατωνικού προτύπου του συμβόλου  $L$

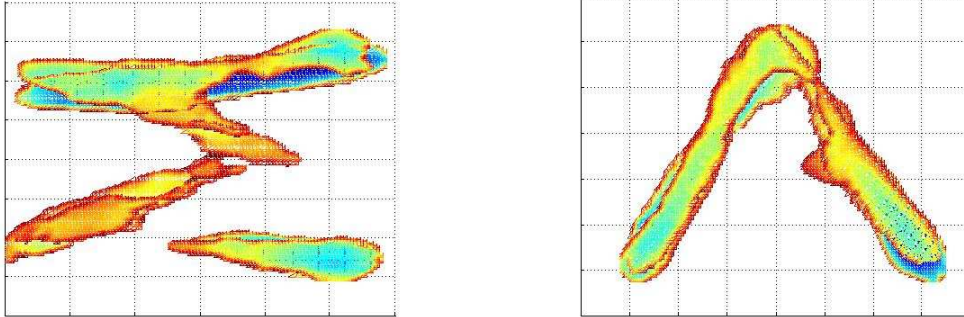
Θεωρούμε  $I_{iL}$  το πλατωνικό που λαμβάνουμε ως πρότυπο αναφοράς και  $\varepsilon_{iL}^k$  ( $k=1..n_i$ ) η προσημασμένη ελάχιστη απόσταση του σημείου  $k$  του  $I_{iL}$  από τα σημεία του νέφους  $\Pi_i^L$  στην οριζόμενη σύμφωνα με τις (ΠΑ-19), (ΠΑ-20) και (ΠΑ-21) γειτονική περιοχή του σημείου  $k$ .

Το πρόσημο της  $\varepsilon_{iL}^k$  ορίζεται για κάθε ένα σημείο  $I_{iL}^k$  του πλατωνικού προτύπου από το πρόσημο του εσωτερικού γινομένου  $(I_{iL}^k - \Pi_{iL}^\varepsilon) \cdot A_{k\perp}$  όπου  $\Pi_{iL}^\varepsilon$  το σημείο του νέφους για το οποίο αντιστοιχεί η ελάχιστη απόσταση  $\varepsilon_{iL}^k$  και  $A_{k\perp}$  το κάθετο διάνυσμα στο σημείο  $I_{iL}^k$ .

Λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος, το μέγεθος  $\varepsilon_{iL}^k$  θα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή πληθυσμού 0 και διασπορά  $\sigma_{iL}^2$ . Εάν  $\varepsilon_{iL} = \sum_{k=1}^{n_i} (\varepsilon_{iL}^k)^2$

το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα, η ποσότητα  $V_{iL} = \frac{\varepsilon_{iL}}{\sigma_{iL}^2}$  θα ακολουθεί κατανομή  $\chi^2$ .

Με χρήση μεθόδου ταιριάσματος αντίστοιχης με εκείνη της παραγράφου Α.7.1, υπολογίζουμε τις παραμέτρους ομοιοθεσίας, στροφής και παράλληλης μεταφοράς, ώστε να ταιριάξουμε βέλτιστα το  $I_{jL}$  στο  $I_{iL}$ .



Εικόνα Α-52  
Βέλτιστη προσαρμογή μεταξύ πλατωνικών υλοποιήσεων δύο επιγραφών

Ορίζουμε ως  $\varepsilon_{jiL}^k$  ( $k=1..n_i$ ) τη προσημασμένη ελάχιστη απόσταση του σημείου k του  $I_{jL}$  από τα σημεία του πλατωνικού  $I_{iL}$  κατά τον ίδιο τρόπο που ορίστηκε και προηγουμένως. Καθ' ομοίω τρόπο το μέγεθος  $\varepsilon_{jiL}^k$  θα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu_{ji}$  και διασπορά  $\sigma_{jiL}^2$  ενώ το μέγεθος

$$V_{jiL} = \frac{\sum_{k=1}^{n_j} (\varepsilon_{jiL}^k - \mu_{ji})^2}{\sigma_{jiL}^2} \text{ θα ακολουθεί κατανομή } X^2.$$

Διατυπώνουμε την υπόθεση ότι οι επιγραφές  $E_i$  και  $E_j$  προέρχονται από τον ίδιο χαρακτήρα. Εάν η υπόθεσή μας είναι αληθής τότε θα πρέπει να συμβαίνουν τα ακόλουθα: α) η πληθυσμιακή μέση τιμή  $\mu_{ji}$  θα είναι μηδενική, β) οι πληθυσμιακές διασπορές  $\sigma_{jiL}^2$ ,  $\sigma_{iL}^2$  θα πρέπει να είναι ίσες.

Αποδεικνύεται ότι η ποσότητα

$$F_{ji} = \frac{\varepsilon_{jiL} / \sigma_{jiL}^2}{\varepsilon_{iL} / \sigma_{iL}^2} = \frac{\frac{1}{\sigma_{jiL}^2} \cdot \sum_{k=1}^{n_j} (\varepsilon_{jiL}^k)^2}{\frac{1}{\sigma_{iL}^2} \cdot \sum_{k=1}^{n_i} (\varepsilon_{iL}^k)^2} \quad (ΠΑ-24)$$

ακολουθεί γνωστή κατανομή Snedecor με  $(n_j - 1, n_i - 1)$  βαθμούς ελευθερίας [Κοκ01]. Λόγω της υποθέσεως μας για την προέλευση των  $E_i$  και  $E_j$ , θα ισχύει :

$$\sigma_{jiL}^2 = \sigma_{iL}^2 \text{ οπότε } F_{ji} = \frac{\sum_{k=1}^{n_j} (\varepsilon_{jiL}^k)^2}{\sum_{k=1}^{n_i} (\varepsilon_{iL}^k)^2} \quad (IIA-25)$$

Εάν  $f(x, n_1, n_2)$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Snedecor με  $(n_1, n_2)$  βαθμούς ελευθερίας, υπολογίζουμε την ποσότητα:

$$G_{ji} = \int_{F_{ji}}^{\infty} f(x, n_j - 1, n_i - 1) \cdot dx \quad (IIA-26)$$

Η ποσότητα  $G_{ji}$  ελέγχει την πιθανοφάνεια της υποθέσεώς μας. Εάν  $G_{ji} < BE$  όπου  $BE$  κατάλληλα επιλεγέν κατώφλι, απορρίπτουμε τον ισχυρισμό της υποθέσεως μας, ότι δηλαδή οι επιγραφές  $E_i$  και  $E_j$  προέρχονται από τον ίδιο χαρακτή. Σε κάθε άλλη περίπτωση δεν μπορούμε να τον απορρίψουμε.

Υπολογίζουμε τις ποσότητες  $G_{ji}^L$  για όλα τα διαθέσιμα ζεύγη επιγραφών  $E_i$ ,  $E_j$  από το σύνολο των  $N$  διαθεσίμων επιγραφών με  $i \neq j$  καθώς και γράμματα  $L$ . Για κάθε ζεύγος επιγραφών  $E_i$ ,  $E_j$  διατηρούμε την τιμή  $G_{ji} = \min(G_{ji}^{L_1}, G_{ji}^{L_2} \dots G_{ji}^{L_n})$  όπου  $n$  το πλήθος των διαφορετικών γραμμάτων αλφαβήτου που έχουν εξετασθεί μεταξύ των επιγραφών.

Αρχικά επιλέγουμε μεγάλο διάστημα εμπιστοσύνης  $BE = 10^{-8}$ . Αναζητούμε το ζεύγος των επιγραφών για τις οποίες ο ισχυρισμός ότι προέρχονται από τον ίδιο χαρακτή απορρίπτεται με το μέγιστο βαθμό εμπιστοσύνης. Αυτομάτως οι επιγραφές αυτές κατατάσσονται σε δύο διαφορετικούς χαρακτες  $X_1$  και  $X_2$ . Από τις υπόλοιπες επιγραφές, εντοπίζουμε εκείνη που μέσα από την ίδια διαδικασία απορρίπτει τον ισχυρισμό ότι προέρχεται είτε από τον χαρακτή  $X_1$  είτε από τον χαρακτή  $X_2$ . Αυτομάτως η επιγραφή αυτή κατατάσσεται σε νέο χαρακτή  $X_3$ . Η διαδικασία συνεχίζεται εξαντλητικά για όλες τις επιγραφές μέχρι να μην υπάρχει δυνατότητα απόρριψης του ισχυρισμού της ίδιας προέλευσης, οπότε και επαναλαμβάνουμε διαδοχικά τη διαδικασία με μικρότερους βαθμούς εμπιστοσύνης  $10^{-7}$ ,  $10^{-6}$  και  $10^{-5}$ . Με τον τρόπο αυτό αποδίδονται  $X$  το πλήθος επιγραφές σε ισάριθμους διαφορετικούς χαρακτες

Για τις εναπομείνουσες  $N - X$  επιγραφές υπολογίζεται η ποσότητα

$$U_{ji} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n f(F_{ji}^{L_k}, n_j^{L_k} - 1, n_i^{L_k} - 1)} \quad (ΠΑ-27)$$

όπου  $f(x, n_1, n_2)$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Snedecor με  $(n_1, n_2)$  βαθμούς ελευθερίας,  $L_k$  το εξεταζόμενο σύμβολο της αλφαβήτου (Α, Ν, κλπ) και  $F_{ji}^{L_k}$  ο λόγος που ορίστηκε με τη (ΠΑ-24) λαμβάνοντας το πλατωνικό πρότυπο του γράμματος  $L_k$  των επιγραφών  $E_i$  και  $E_j$ . Εν προκειμένω οι  $E_i$  ανήκουν στο σύνολο των ήδη καταταγισών σε διαφορετικούς χαρακτες επιγραφών ενώ οι  $E_j$  είναι κάποια από τις εναπομείνουσες. Επομένως για κάθε μια μή καταταγείσα επιγραφή  $E_j$  λαμβάνουμε  $X$  τιμές πιθανοφάνειας να έχει παραχθεί από τον ίδιο χαρακτή με την  $E_i$ . Η μεγίστη από τις  $X$  τιμές πιθανοφάνειας θεωρούμε ότι προσφέρει τον χαρακτή στον οποίο θα αποδοθεί η δημιουργία της  $E_j$ .

## **A.9 Εφαρμογή Μεθόδου**

Η περιγραφόμενη στην παρούσα εργασία μεθοδολογία εφαρμόστηκε στο σύνολο των αναγραφόμενων στον ακόλουθο πίνακα επιγραφών που φυλάσσονται ή εκτίθενται είτε στο Επιγραφικό Μουσείο είτε στην Αρχαία Αγορά.

Από κάθε μια επιγραφή επελέγησαν και εξήχθησαν ικανά πλήθη υλοποιήσεων των γραμμάτων ‘Α’, ‘Μ’, ‘Ν’ και ‘Σ’. Η επιλογή των γραμμάτων αυτών έγινε με γνώμονα την υψηλή συχνότητα εμφάνισης στις επιγραφές καθώς και τη χαρακτηριστική πληροφορία που αυτά φέρουν. Οφείλουμε βεβαίως να αναφέρουμε ότι σε αρκετές περιπτώσεις η ταυτοποίηση του γράμματος ήταν αδύνατη δεδομένου της ομοιότητας του με άλλα γράμματα (πχ το Α με το Δ και το Λ) ή και λόγω της φθοράς που έχει υποστεί η επιγραφή

Για κάθε ένα γράμμα ακολουθήθηκαν οι περιγραφόμενες στις παραγράφους Α.5 και Α.7 διαδικασίες εξαγωγής του γράμματος από την τριδιάστατη απεικόνισή τους, δημιουργίας τριδιάστατου νέφους και τριδιάστατου πλατωνικού προτύπου. Η δημιουργία του νέφους σε κάθε περίπτωση έγινε με κατα μέσο όρο χρήση 15 υλοποιήσεων. Οποιαδήποτε προς τα κάτω απόκλιση από τον ανωτέρω μέσο όρο οφείλεται αποκλειστικά στο διαθέσιμο σε κάθε περίπτωση πλήθος γραμμάτων της επιγραφής.

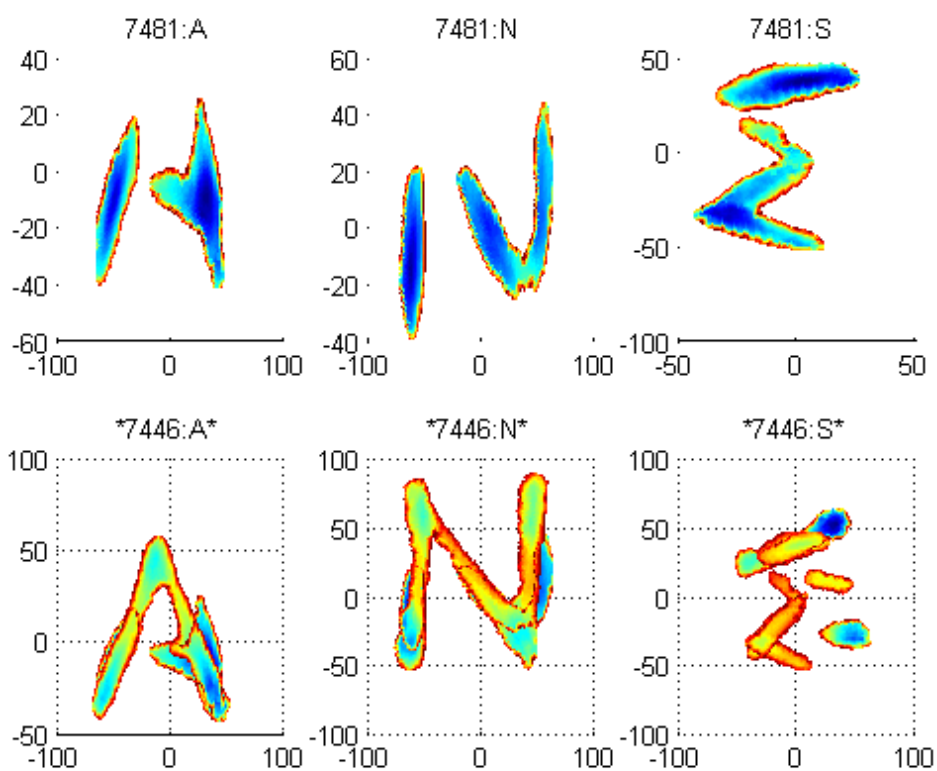
Πίνακας Α-2

$E_i$	Κωδική Ονομασία	Προέλευση	Πλήθος Υλοποιήσεων για τη Δημιουργία Νέφους			
			A	M	N	Σ
1	I0247	Αρχαία Αγορά	17	14	17	18
2	I1640	Αρχαία Αγορά	16	11	16	12
3	I4033	Αρχαία Αγορά	15		15	13
4	I4266	Αρχαία Αγορά	20	20	20	20
5	I4917	Αρχαία Αγορά	15	12	17	17
6	I5039	Αρχαία Αγορά	5		9	6
7	I5297	Επιγραφικό Μουσείο	8		7	4
8	I6006	Αρχαία Αγορά	18	16	20	18
9	I6053	Αρχαία Αγορά	19	19	20	20
10	I6124	Επιγραφικό Μουσείο	3		3	
11	I6295	Επιγραφικό Μουσείο	17		18	13
12	I7188	Αρχαία Αγορά	6		9	5
13	I7190	Επιγραφικό Μουσείο	14		12	8
14	I7233_7335	Επιγραφικό Μουσείο	14		12	
15	I7237	Επιγραφικό Μουσείο	36		28	22
16	I7237a	Επιγραφικό Μουσείο	18			28
17	I7245	Επιγραφικό Μουσείο	22	14	32	24
18	I7400	Επιγραφικό Μουσείο	14		17	17
19	I7405	Επιγραφικό Μουσείο	17	13	15	17
20	I7446	Επιγραφικό Μουσείο	12		8	10
21	I7457	Επιγραφικό Μουσείο	19		18	19
22	I7481	Επιγραφικό Μουσείο	11		13	12
23	I7482	Επιγραφικό Μουσείο	11		10	11
24	I7519	Επιγραφικό Μουσείο	16		15	13
25	I7566	Επιγραφικό Μουσείο	20		19	19
26	I7567_7568_7569	Επιγραφικό Μουσείο	19		19	19
27	I7587	Αρχαία Αγορά	20	17	20	20
28	I7723	Επιγραφικό Μουσείο	14		14	12

Κατόπιν έγινε σύγκριση και κατάταξη των εξαχθέντων πλατωνικών σύμφωνα με τη διαδικασία της παραγράφου Α.8. Στο πρώτο στάδιο η μέθοδος εξήγαγε τις αναγραφόμενες στον πίνακα Πίνακας Α-3 επιγραφές, απορρίπτοντας με τη μεγίστη πιθανοφάνεια την υπόθεση ότι οποιεσδήποτε δύο από αυτές προέρχονται από τον ίδιο χαρακτή. Κατά συνέπεια, οι επιγραφές αυτές απεδόθησαν σε διαφορετικούς χαρακτες (χέρια). Η σειρά γραφής των επιγραφών είναι η ίδια με τη σειρά που εξήχθησαν από τη μέθοδο.

Πίνακας Α-3

$E_i$	Κωδική Ονομασία	Χαράκτης
13	I7190	X <sub>1</sub>
22	I7481	X <sub>2</sub>
20	I7446	X <sub>3</sub>
10	I6124	X <sub>4</sub>
7	I5297	X <sub>5</sub>
1	I0247	X <sub>6</sub>
16	I7237a	X <sub>7</sub>
6	I5039	X <sub>8</sub>



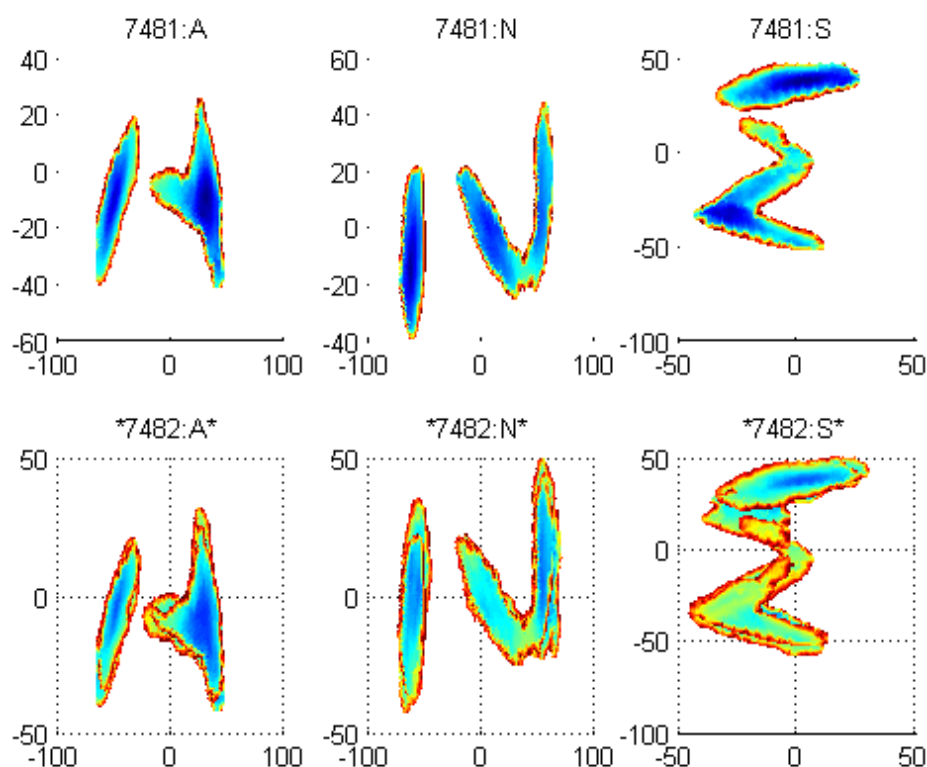
Εικόνα Α-53

Απεικόνιση προσαρμοσμένων πλατωνικών προτύπων επιγραφών I7481 και I7446 όπου είναι εμφανής η μεγάλη διαφοροποίησή τους

Οι υπόλοιπες 20 επιγραφές με χρήση της (ΠΑ-26) απεδόθησαν στους ανωτέρω 8 χαρακτες ως ακολούθως:

Πίνακας Α-4

Χαράκτης	Επιγραφές
X <sub>1</sub>	-
X <sub>2</sub>	I7482, I1640, I4033
X <sub>3</sub>	I7457, I7723, I7245
X <sub>4</sub>	I7400, I7405
X <sub>5</sub>	I6295, I6053, I6006, I7566, I7519, I7567_7568_7569
X <sub>6</sub>	I4917, I7188
X <sub>7</sub>	I7233_7335, I7237
X <sub>8</sub>	I4266, I7587



Εικόνα Α-54

Απεικόνιση πλατωνικών της επιγραφής I7482 προσαρμοσμένα στην επιγραφή I7481

Τα ανωτέρω αποτελέσματα έρχονται σε πλήρη συμφωνία τόσο με την άποψη του επιφανούς ειδικού αρχαιολόγου-επιγραφολόγου κ. Steven Tracy αλλά και διακεκριμένων αρχαιολόγων του επιγραφικού μουσείου όσο και με τα αποτελέσματα των συστημάτων ταυτοποίησης που βασίζονται στις διδιάστατες απεικονίσεις και είτε εξετάζουν γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμάτων [Pap02] είτε εξάγουν και συγκρίνουν διδιάστατα πλατωνικά πρότυπα των γραμμάτων [Pap03].

## **B Σύστημα μελέτης τεχνοτροπίας έργων ζωγραφικής**

### ***B.1 Εισαγωγή***

Η μελέτη του θεματικού περιεχομένου έργων ζωγραφικής είναι σημαντική γιατί μπορεί να μας δώσει πολλές πληροφορίες για τον τρόπο δημιουργίας τους. Πιο αναλυτικά η επαναληψιμότητα στην εμφάνιση συγκεκριμένων μοτίβων (καμπυλών) σε ένα έργο αποτελεί ενδεικτικό είτε πιθανής χρήσης εκ μέρους του δημιουργού βοηθητικών εργαλείων (καμπυλογράφοι) είτε του χαρακτηριστικού τρόπου με τον οποίον το χέρι του δημιουργού υλοποιεί και αποτυπώνει την ιδεατή μορφή που έχει ο δημιουργός για το μοτίβο.

Στο παρόν μέρος παρουσιάζεται μια μεθοδολογία εντοπισμού ενός συνόλου καμπυλών σε έργα ζωγραφικής που εμφανίζουν επαναληψιμότητα και μπορούν να θεωρηθούν ως αντιπροσωπευτικές καμπύλες του έργου. Εν συνεχεία εξετάζεται το ενδεχόμενο οι αντιπροσωπευτικές καμπύλες να αντιστοιχούν σε εύλογο αριθμό προτύπων καμπυλών ή ισοδυνάμως να έχουν παραχθεί από καμπυλογράφους.

### ***B.2 Εξαγωγή των προς μελέτη καμπυλών***

#### **B.2.1 Ψηφιοποίηση φωτογραφιών**

Το πρώτο στάδιο στην εξαγωγή των προς μελέτη καμπυλών είναι η ψηφιακή καταγραφή των έργων τέχνης. Η διαδικασία περιλαμβάνει τη δημιουργία ψηφιακής διδιάστατης απεικόνισης κάθε έργου είτε με την απ' ευθείας φωτογράφησή του με ψηφιακή μηχανή υψηλής ανάλυσης είτε με τη χρήση σαρωτή και τη ψηφιοποίηση υπάρχουσας αναλογικής φωτογραφίας της. Σε κάθε περίπτωση λαμβάνεται πρόνοια ώστε η ανάλυση της ψηφιοποιημένης εικόνας να είναι τουλάχιστον 1 pixel/mm.





Εικόνα Β-1  
«Ο Δαβίδ στο λάκκο των λεόντων» (Rubens)

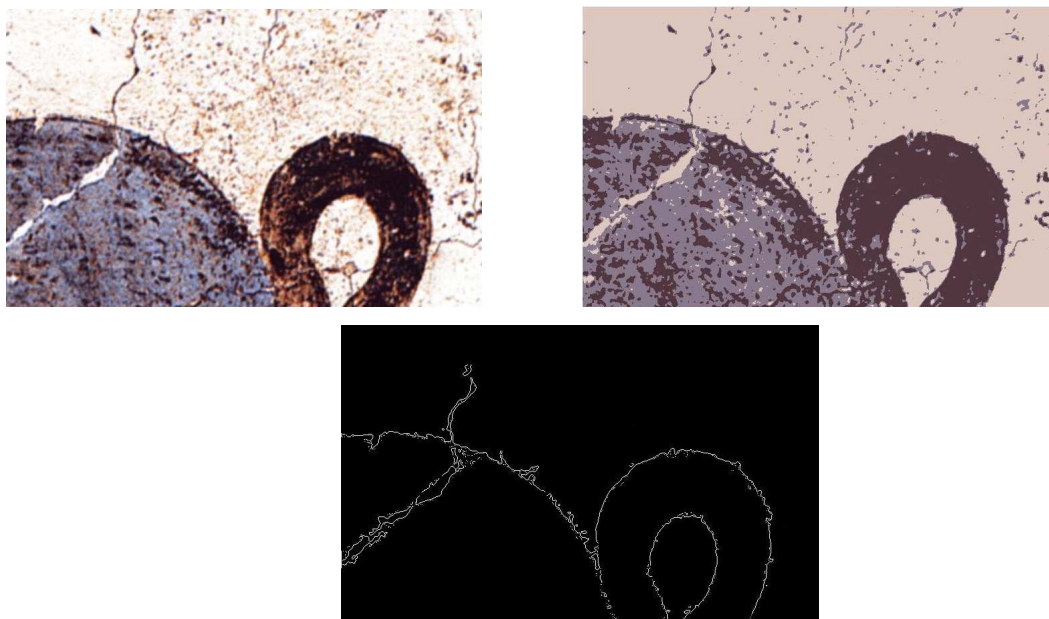


Εικόνα Β-2  
Κροκουλλέκτρια (Θήρα)

### Β.2.2 Κατάτμηση εικόνας

Η κατάτμηση της εικόνας αποσκοπεί στον καθορισμό των προς μελέτη καμπυλών. Δοκιμάστηκαν διάφοροι αλγόριθμοι κατάτμησης που προτείνονται από τη βιβλιογραφία και βασίζονται τόσο σε τεχνικές γράφων [Leo01], [Jia01] όσο και σε ιστογράμματα [Par04]. Αμφότερες κατηγορίες αλγορίθμων, ομαδοποιούν τα εικονοστοιχεία (pixels) οποιασδήποτε περιοχής της εικόνας με τρόπο που συμφωνεί και

η ανθρώπινη αίσθηση/παρατήρηση. Με την τελική εφαρμογή αλγορίθμων εύρεσης και εξαγωγής περιγράμματος [Canny01] είναι εφικτή μια καλή εκτίμηση των συνόρων των περιοχών αυτών.



Εικόνα B-3

Διαδοχικές εικόνες για την εξαγωγή των συνόρων από το κεφάλι και την κοτσίδα του έργου Im156 «Κροκοσυλλέκτρια»

- α) Αρχική εικόνα, β) Εικόνα μετά από εφαρμογή αλγορίθμου κατάτμησης  
γ) Σύνορα από τα οποία θα εξαχθούν οι καμπύλες



Εικόνα B-4

Διαδοχικές εικόνες για την εξαγωγή των συνόρων από τον βραχίονα της αριστερής φιγούρας του έργου Im001 «The Fall of Man»

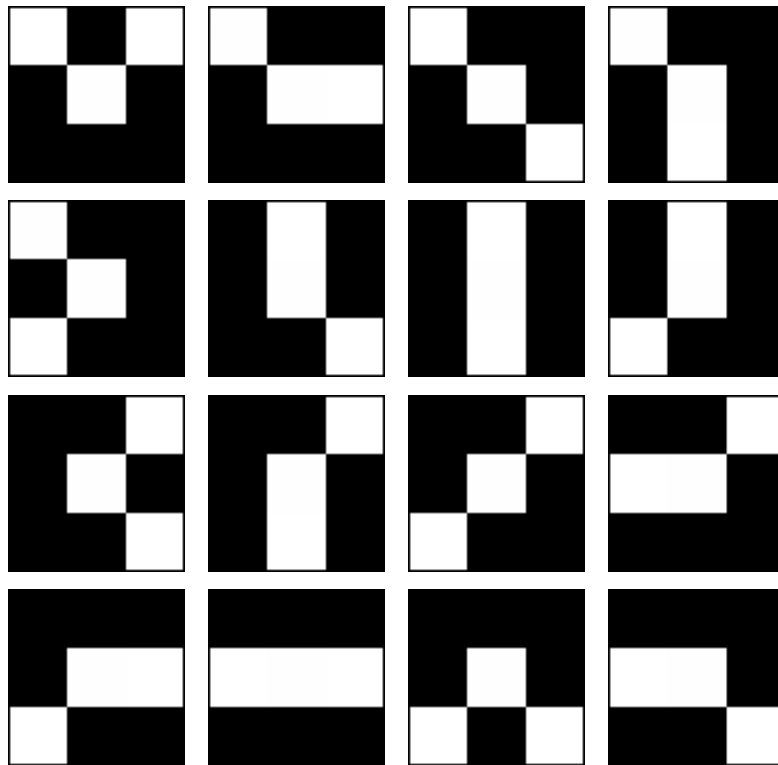
- α) Αρχική εικόνα, β) Εικόνα μετά από εφαρμογή αλγορίθμου κατάτμησης  
γ) Σύνορα από τα οποία θα εξαχθούν οι καμπύλες

Η εξαγωγή των καμπυλών που αποτελούν τμήματα των συνόρων των περιοχών των κατατμημένων εικόνων έγινε με την αλληλεπίδραση του χρήστη. Δηλαδή, ο χρήστης επιλέγει την αρχή και το πέρας της καμπύλης και εν συνεχεία με αυτόματο τρόπο εξάγεται ένα σύνολο διατεταγμένων σημείων που είναι τα κέντρα των εικονοστοιχείων του εκάστοτε συνόρου των ζωγραφισμένων θεματικών

περιοχών. Έχει ληφθεί ειδική μνεία ώστε τα περιγράμματα άρα και τα διατεταγμένα σημεία να έχουν καθορισμένη μορφή. Συγκεκριμένα κάθε εικονοστοιχείο του περιγράμματος πρέπει να έχει επακριβώς δύο γειτονικά εικονοστοιχεία ενώ απαγορεύεται να υπάρχουν διαδοχικά εικονοστοιχεία του περιγράμματος που να σχηματίζουν ορθή γωνία. Οι επιτρεπτοί συνδυασμοί pixels σε συνεκτικότητα οκτώ παρουσιάζονται κατωτέρω στην *Εικόνα Β-6*.

1	2	3
8	0	4
7	6	5

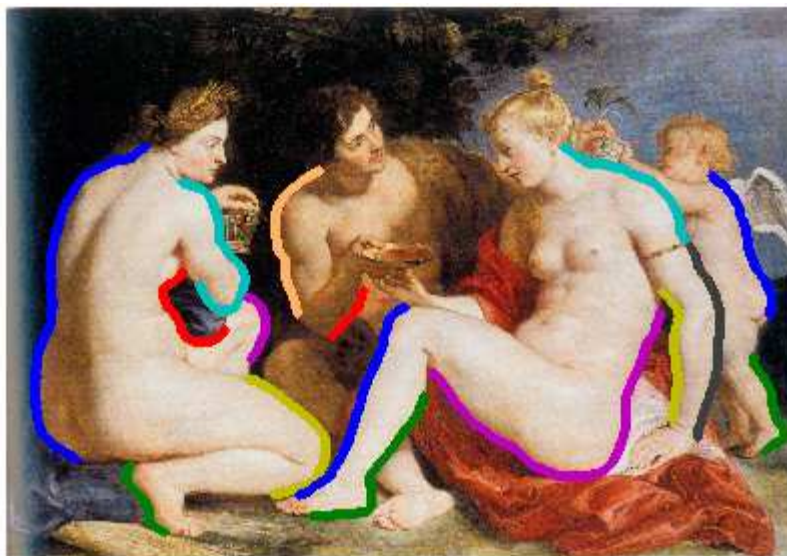
*Εικόνα Β-5*  
Αρίθμηση μιας περιοχής συνεκτικότητας Σ8



*Εικόνα Β-6*  
Σε αυτήν την εικόνα παρουσιάζονται όλοι οι επιτρεπτοί συνδυασμοί εικονοστοιχείων. Με άσπρο χρώμα εμφανίζονται τα pixels που ανήκουν στο περίγραμμα.

Επομένως κάθε μια καμπύλη αναπαρίσταται από ένα σύνολο διατεταγμένων σημείων  $(x_i, y_i)$  στο σύστημα αναφοράς καθε μιας εικόνας. Ορίζοντας κωδική

ονομασία για κάθε έργο  $m$  και αύξοντα αριθμό  $n$  για κάθε μια καμπύλη προκύπτει το σύνολο  $S_n^m$  των προς μελέτη καμπυλών.



Εικόνα Β-7  
Παράδειγμα εξαχθέντων καμπυλών επί έργου

Στόχος είναι η μελέτη των καμπυλών  $S_n^m$  που ανήκουν στο ίδιο έργο  $m$ , ο εντοπισμός πιθανών επαναλαμβανομένων μοτίβων και η ομαδοποίησή τους ώστε να επιλεγεί ο ελάχιστος αριθμός μοτίβων που εναπαδημιουργεί το σύνολο των υπό μελέτη καμπυλών. Για τον σκοπό αυτό αναπτύχθηκε η μέθοδος που παρουσιάζεται στις επόμενες παραγράφους

### **B.3 Εξαντλητική μέθοδος προσαρμογής καμπυλών**

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο ισοπληθή σύνολα σημείων στο επίπεδο, τα οποία θα μπορούσαν να συνιστούν δύο διακριτές ψηφιακές καμπύλες. Ας υποθέσουμε επίσης ότι ζητούμε έναν ακριβή και ταχύ τρόπο για να προσδιορίσουμε τη γωνία στροφής και την παράλληλη μετατόπιση ως προς  $x$  και  $y$  την οποία πρέπει να υποστεί το ένα σύνολο σημείων ως στερεό σώμα προκειμένου να ταιριάζει βέλτιστα στο άλλο σύνολο. Μία λύση σε αυτό το πρόβλημα θα μπορούσε να ήταν η ελαχιστοποίηση μιας κατάλληλης συνάρτησης λάθους. Μια τέτοια προσέγγιση όμως, κατά βάση δεν είναι τόσο ταχεία και κυρίως δεν είναι ακριβής με την έννοια ότι όποιον αναδρομικό αλγόριθμο ελαχιστοποίησης συνάρτησης και αν

χρησιμοποιήσουμε, ποτέ δεν θα είμαστε σίγουροι ότι το σημείο στο οποίο συνέκλινε ο αλγόριθμος θα είναι όντως το απολύτως ελάχιστο. Για το λόγο αυτό επιχειρήσαμε να δώσουμε αναλυτική λύση σε αυτό το πρόβλημα διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας το κατωτέρω λήμμα :

### ΛΗΜΜΑ 1

Έστωσαν, δύο ομοεπίπεδα, ισοπληθή σύνολα σημείων  $(x_i, y_i)$  και  $(P_i, Q_i)$  έκαστον πλήθους  $N$ . Θεωρούμε ότι καθένα από τα σύνολα αυτά μπορεί να στρέφεται και να μετατοπίζεται σε στερεό σώμα. Ζητείται η γωνία περιστροφής  $\theta$  και το διάνυσμα μετατόπισης  $x_\mu \vec{i} + y_\mu \vec{j}$  για τα οποία η διακριτή καμπύλη  $(x_i, y_i)$  μετακινούμενη ως στερεό σώμα θα ταιριάζει βέλτιστα με την  $(P_i, Q_i)$  υπό την έννοια των Ελαχίστων Τετραγώνων.

Τα  $\theta$  και  $x_\mu, y_\mu$  δίδονται από τις κάτωθι σχέσεις:

$$\tan \theta = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N P_i - \sum_{i=1}^N Q_i \sum_{i=1}^N x_i - N \sum_{i=1}^N (y_i P_i) + N \sum_{i=1}^N (x_i Q_i)}{-\sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N P_i - \sum_{i=1}^N Q_i \sum_{i=1}^N y_i + N \sum_{i=1}^N (x_i P_i) + N \sum_{i=1}^N (y_i Q_i)} \quad (ΠΒ-1)$$

$$x_\mu = \frac{\sum_{i=1}^N P_i - \cos \theta \sum_{i=1}^N x_i + \sin \theta \sum_{i=1}^N y_i}{N} \quad (ΠΒ-2)$$

$$y_\mu = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i - \sin \theta \sum_{i=1}^N x_i - \cos \theta \sum_{i=1}^N y_i}{N} \quad (ΠΒ-3)$$

### Απόδειξη

Έστω  $\theta$  γωνία στροφής και  $x_\mu, y_\mu$  το βέλος τυχούσης παράλληλης μετατόπισης των σημείων  $(x_i, y_i)$  ως στερεού σώματος. Το αποτέλεσμα τέτοιων μετασχηματισμών επί της καμπύλης  $(x_i, y_i)$  είναι μια νέα ψηφιακή καμπύλη έστω  $(X_i, Y_i)$  οι συντεταγμένες της οποίας δίδονται από τις σχέσεις

$$X_i = x_i \cos \theta - y_i \sin \theta + x_\mu \quad (ΠΒ-4)$$

$$Y_i = x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + y_\mu \quad (ΠΒ-5)$$

Ορίζουμε σαν λάθος προσέγγισης της καμπύλης  $(P_i, Q_i)$  από την εστραμμένη και μετατοπισμένη καμπύλη  $(X_i, Y_i)$ , το άθροισμα των τετραγώνων των ευκλειδίων αποστάσεων των σημείων ενός προς ένα, δηλαδή το

$$E(\theta, x_\mu, y_\mu) = \sum_{i=1}^N \left( (X_i - P_i)^2 + (Y_i - Q_i)^2 \right)$$

ή ισοδυνάμως το

$$E(\theta, x_\mu, y_\mu) = \sum_{i=1}^N \left( (x_i \cos \theta - y_i \sin \theta + x_\mu - P_i)^2 + (x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + y_\mu - Q_i)^2 \right) \quad (IIB-6)$$

Η ανωτέρω συνάρτηση λάθους είναι προφανώς φραγμένη κάτω από το μηδέν στο  $\mathfrak{R}^3$ . Άρα έχει infimum (μέγιστο κάτω φράγμα) και επειδή είναι συνεχής συνάρτηση των  $\theta$  και  $x_\mu, y_\mu$  σε όλο το πεδίο ορισμού της, το infimum ανήκει στο πεδίο τιμών της συνάρτησης και συνεπώς είναι ελάχιστο αυτής. Επιπλέον η εν λόγω συνάρτηση λάθους είναι απείρως παραγωγίσιμη άρα στο σημείο ελαχίστου έχουμε:

$$\nabla E(\theta, x_\mu, y_\mu) = 0 \quad (IIB-7)$$

ή ισοδυνάμως

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial E}{\partial x_\mu} = \frac{\partial E}{\partial y_\mu} = 0$$

Η εξίσωση  $\frac{\partial E}{\partial x_\mu} = 0$  δίνει:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N [2(x_i \cos \theta - y_i \sin \theta + x_\mu - P_i)] &= 0 \Leftrightarrow \\ \cos \theta \sum_{i=1}^N x_i - \sin \theta \sum_{i=1}^N y_i + Nx_\mu - \sum_{i=1}^N P_i &= 0 \Leftrightarrow \\ x_\mu &= \frac{\sum_{i=1}^N P_i - \cos \theta \sum_{i=1}^N x_i + \sin \theta \sum_{i=1}^N y_i}{N} \end{aligned}$$

που είναι η έκφραση (IIB-2).

Η εξίσωση  $\frac{\partial E}{\partial y_\mu} = 0$  δίνει:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N [2(x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + y_\mu - Q_i)] &= 0 \Leftrightarrow \\ \sin \theta \sum_{i=1}^N x_i + \cos \theta \sum_{i=1}^N y_i + Ny_\mu - \sum_{i=1}^N Q_i &= 0 \Leftrightarrow \\ y_\mu &= \frac{\sum_{i=1}^N Q_i - \sin \theta \sum_{i=1}^N x_i - \cos \theta \sum_{i=1}^N y_i}{N} \end{aligned}$$

που είναι η έκφραση (IIB-3).

Η εξίσωση  $\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$  δίνει:

$$\sum_{i=1}^N \left( 2(x_i \cos \theta - y_i \sin \theta + x_\mu - P_i)(-x_i \sin \theta - y_i \cos \theta) + \right. \\ \left. + 2(x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + y_\mu - Q_i)(x_i \cos \theta - y_i \sin \theta) \right) = 0 \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^N \left( -x_\mu x_i \sin \theta + x_i P_i \sin \theta - x_\mu y_i \cos \theta + \right. \\ \left. + y_i P_i \cos \theta + y_\mu x_i \cos \theta - x_i Q_i \cos \theta - y_\mu y_i \sin \theta + y_i Q_i \sin \theta \right) = 0 \Leftrightarrow \\ -x_\mu \sin \theta \sum_{i=1}^N x_i + \sin \theta \sum_{i=1}^N (x_i P_i) - x_\mu \cos \theta \sum_{i=1}^N y_i + \\ + \cos \theta \sum_{i=1}^N (y_i P_i) + y_\mu \cos \theta \sum_{i=1}^N x_i - \cos \theta \sum_{i=1}^N (x_i Q_i) - y_\mu \sin \theta \sum_{i=1}^N y_i + \sin \theta \sum_{i=1}^N (y_i Q_i) = 0$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των  $x_\mu$  και  $y_\mu$  ανωτέρω και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην

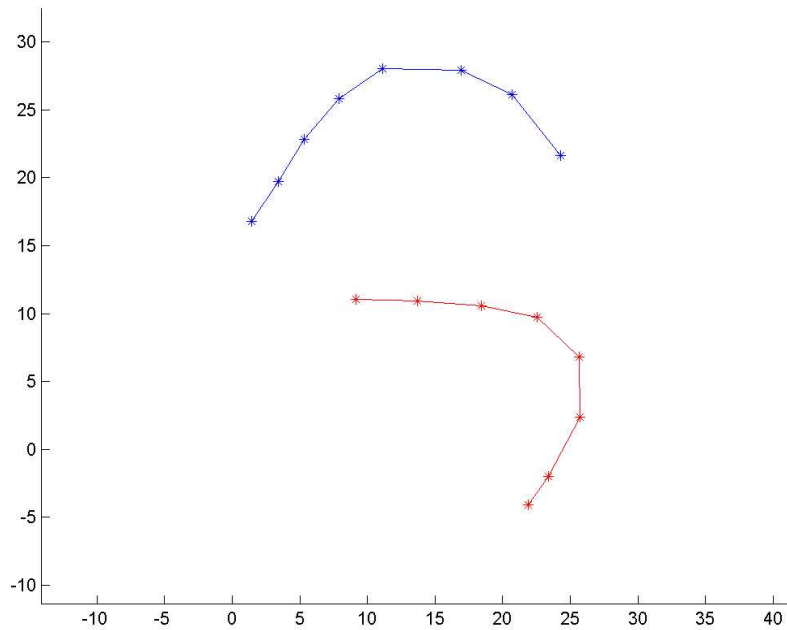
$$\tan \theta = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N P_i - \sum_{i=1}^N Q_i \sum_{i=1}^N x_i - N \sum_{i=1}^N (y_i P_i) + N \sum_{i=1}^N (x_i Q_i)}{-\sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N P_i - \sum_{i=1}^N Q_i \sum_{i=1}^N y_i + N \sum_{i=1}^N (x_i P_i) + N \sum_{i=1}^N (y_i Q_i)}$$

που είναι η έκφραση (ΠΒ-1).

Αν ο παρονομαστής της  $\tan \theta$  είναι  $0^+$  και ο αριθμητής θετικός ή δυϊκός ο παρονομαστής της  $\tan \theta$   $0^-$  και ο αριθμητής αρνητικός τότε  $\theta = \pi/2$ . Αν ο παρονομαστής της  $\tan \theta$  είναι  $0^-$  και ο αριθμητής θετικός ή δυϊκός ο παρονομαστής της  $\tan \theta$   $0^+$  και ο αριθμητής αρνητικός τότε  $\theta = -\pi/2$ . Αν ο παρονομαστής της  $\tan \theta$  είναι διάφορος του μηδενός τότε η εν λόγω εξίσωση έχει δύο λύσεις στο  $[0, 2\pi)$  που διαφέρουν κατά  $\pi$ . Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση λάθους είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$  και επομένως αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της στο διάστημα  $[0, 2\pi)$ . Στο διάστημα αυτό υπολογίζω και τις δύο τριάδες λύσεων, αντικαθιστώντας το  $\theta$  στις εκφράσεις (ΠΒ-2) και (ΠΒ-3) για τα  $x_\mu$ ,  $y_\mu$  αντίστοιχα και κρατώ αυτή που δίνει το μικρότερο σφάλμα, έστω  $E$ . Επειδή, όπως δείξαμε προηγουμένως, η συνάρτηση  $E(\theta, x_\mu, y_\mu)$  έχει ελάχιστο στην περίοδό της, αυτό που βρήκαμε με την ανωτέρω μέθοδο είναι και το ελάχιστό της.

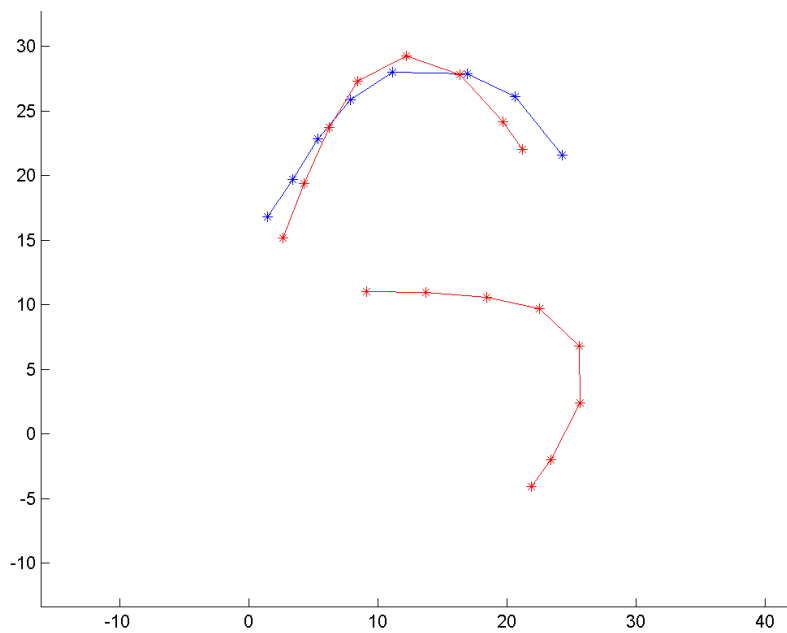
Στις κάτωθι εικόνες Εικόνα Β-8 και Εικόνα Β-9 παρουσιάζεται μια σχηματική αναπαράσταση εφαρμογής του λήμματος. Σε αυτές παρουσιάζονται δύο ομοεπίπεδες ψηφιακές καμπύλες αποτελούμενες από 8 σημεία η καθεμία. Μεταξύ των αστερίσκων έχει γίνει γραμμική παρεμβολή για να υπάρχει καλύτερη εποπτεία.

Σημειώνεται ότι η κόκκινη καμπύλη που υφίσταται τη στροφή και την παράλληλη μετατόπιση μετακινείται σαν στερεό σώμα.



Εικόνα Β-8

Δύο ισοπληθείς ομοεπίπεδες ψηφιακές καμπύλες, σε τυχούσα αρχική θέση η μία σημειούμενη με 8 κόκκινους αστερίσκους, η δε άλλη με 8 μπλε αστερίσκους.



Εικόνα Β-9

Η καμπύλη με τους κόκκινους αστερίσκους έχει περιστραφεί και μετατοπιστεί σύμφωνα με το ΛΗΜΜΑ 1, ούτως ώστε να προσαρμοστεί στην καμπύλη των 8 μπλε αστερίσκων βέλτιστα κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.

Θα χρησιμοποιήσουμε το ανωτέρω λήμμα για να αναπτύξουμε μία πρωτότυπη μεθοδολογία προσαρμογής θορυβώδους τμήματος μια καμπύλης  $S_i^m$  σε μια ίδια



πρότυπη καμπύλη που έχει προέλθει από κάποια άλλη θορυβώδη καμπύλη  $S_j^m$  ή ακόμη και την ίδια  $S_i^m$ .

Βήμα .1 Δημιουργία πρότυπης συνεχούς καμπύλης από τυχόν τμήμα ψηφιακής καμπύλης

Έστω  $S = (x_i, y_i) \quad i = 1 \dots n$  τα διαδοχικά σημεία ενός τμήματος ψηφιακής καμπύλης  $S$  όπως έχουν προκύψει από τη διαδικασία κατάτμησης της εικόνας. Για κάθε ένα σημείο  $k$  του ανωτέρω συνόλου θεωρούμε το υποσύνολο των σημείων στην περιοχή του  $(x_k, y_k)$  ήτοι

$$[X_k, Y_k] = \{(x_i, y_i) : i = (k - n_s, \dots, k + n_e) \& (1 < i < n)\} \quad (ΠΒ-8)$$

όπου  $n_s$  και  $n_e$  οι μικρότεροι θετικοί ακέραιοι έτσι ώστε για τις αποστάσεις  $dS$  μεταξύ των σημείων  $k - n_s, k$  και  $k + n_e$  να ισχύει  $dS(k - n_s, k) > 20mm$  και  $dS(k, k + n_e) > 20mm$ .

Υπολογίζουμε τις παραμέτρους  $(x_0, y_0, R_0)$  του κύκλου που προσεγγίζει τα σημεία της (ΠΒ-8) ή ισοδύναμα ελαχιστοποιεί την κατωτέρω ποσότητα :

$$D = \sum_{\forall [X_k, Y_k]} \left( \sqrt{(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2} - R_0 \right)^2 \quad (ΠΒ-9)$$

Η ελαχιστοποίηση πραγματοποιείται με εφαρμογή του αλγορίθμου μη γραμμικού προγραμματισμού Nelder-Mead [Nel01]. Με γνωστές τις παραμέτρους  $(x_0, y_0, R_0)$  υπολογίζουμε :

A) την τιμή  $(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$  του σημείου  $k$  όπως προσεγγίζεται από τον βέλτιστο κύκλο

B) τη διεύθυνση  $\phi_k$  της εφαπτομένης στο σημείο  $(\hat{x}_k, \hat{y}_k)$

Γ) τη φορά  $d_k$  με την οποία ο βέλτιστος κύκλος διαγράφει τα  $[X_k, Y_k]$  (-1 για ωρολογιακή φορά και 1 για ανθωρολογιακή)

Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η ακολουθία των σημείων  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$  που αποτελούν τις εκτιμήσεις των σημείων  $(x_i, y_i)$ .

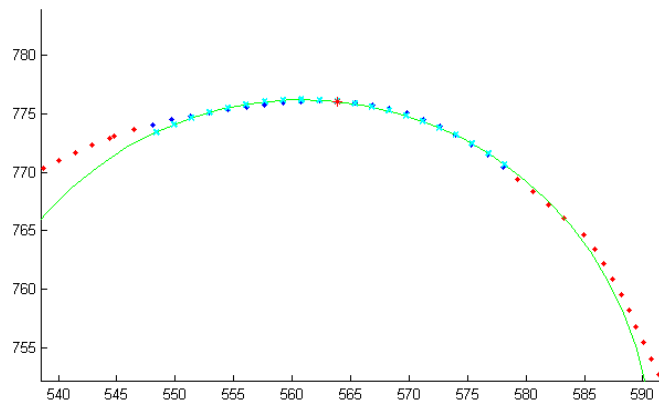
Τα τμήματα μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων  $n$  και  $n + 1$  της ακολουθίας  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$  προσεγγίζονται με πολυώνυμο  $f_m(x)$  όπου  $m$  ο βαθμός του πολυωνύμου έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

$$m = \begin{cases} 2 & d_n = d_{n+1} \\ 3 & d_n \neq d_{n+1} \end{cases}$$

$$\left. \frac{df_m}{dx} \right|_{x=x_n} = \phi_n$$

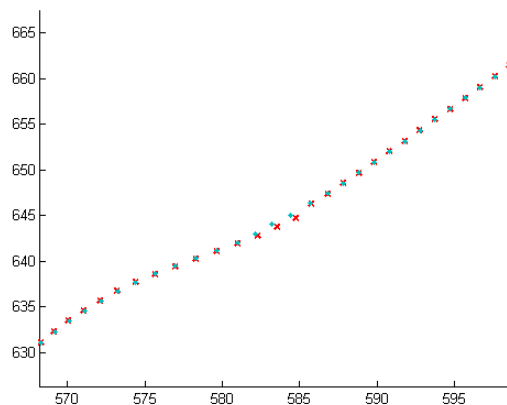
$$\left. \frac{df_m}{dx} \right|_{x=x_{n+1}} = \phi_{n+1}$$

Με τον τρόπο αυτό προκύπτει επ' ακριβώς η αναλυτική περιγραφή μιας καμπύλης η οποία θεωρείται ως πρότυπη για το τυχαίο τμήμα  $S$ . Βάσει της αναλυτικής περιγραφής δημιουργούμε μια πρότυπη ψηφιακή καμπύλη  $P^S$  που αντιστοιχεί στο τμήμα  $S$  έτσι ώστε οι διαδοχικές αποστάσεις των σημείων της να είναι μικρότερες από 0.01mm.



Εικόνα B-10

Παράδειγμα προσαρμογής κύκλου. Με κόκκινες τελείες απεικονίζεται ένα τμήμα μιας ψηφιακής καμπύλης. Με κyanό απεικονίζεται ο κύκλος που προσαρμόζεται με βέλτιστο τρόπο στο υποσύνολο των σημείων της καμπύλης (μπλέ σημεία) γύρω από το σημείο αναφοράς (κόκκινος αστερισκος)



Εικόνα B-11

Παράδειγμα με τις εκτιμήσεις (cyanές τελείες) των σημείων μιας ψηφιακής καμπύλης (κόκκινα x) με τη διαδοχική προσέγγιση κύκλων

Βήμα .2 Δημιουργία κλάσης αμφιμονοσήμαντων ισομηκών πολυγώνων

Με αρχή το πρώτο σημείο της πυκνής προτύπου καμπύλης  $P^S$ , δημιουργούμε εγγεγραμμένο πολύγωνο σε αυτήν, «αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες» με τη θορυβώδη-καμπύλη  $S_j$ . Με τον όρο «αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες» εννοούμε το εξής: εύκολα υπολογίζεται η ακολουθία των ευκλειδείων αποστάσεων των διαδοχικών σημείων του  $S_j$ , δηλαδή η ακολουθία

$$\delta s_j = d(P_j, P_{j+1}), \quad j = 0, \dots, N^P - 1 \quad (PB-10)$$

όπου  $P_j$  το  $j$ -οστό σημείο της  $S_j$ , και  $d(P, Q)$  είναι το σύμβολο που θα χρησιμοποιούμε για την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο τυχόντων σημείων  $P$  και  $Q$  και ως συνήθως  $N^P$  είναι το πλήθος των σημείων του  $S_j$ . Εν συνεχεία, ας ονομάσουμε  $M_1^1$  το πρώτο σημείο του  $P^S$  και ας αναζητήσουμε το σημείο  $M_2^1$  του  $P^S$ , το οποίο έχει την ιδιότητα η απόστασή του από το  $M_1^1$  να είναι πλησιέστερη στο  $\delta s_1$ , από όλα τα σημεία του  $P^S$ . Σε αυστηρή διατύπωση

$$M_2^1 \in P^S \wedge (t(M_2^1) > t(M_1^1)): |d(M_2^1, M_1^1) - \delta s_1| = \min.$$

Όπου  $t$  υποδηλώνεται ο δείκτης του σημείου στην ακολουθία των πυκνών σημείων της  $P^S$ . Η ανισότητα  $t(M_2^1) > t(M_1^1)$  μας εξασφαλίζει ότι διαγράφουμε την  $P^S$  πάντα κατά την ίδια φορά.

Συνεχίζοντας, αναλόγως προσδιορίζουμε και το σημείο  $M_3^1$ :

$$M_3^1 \in P^S \wedge (t(M_3^1) > t(M_2^1)): |d(M_3^1, M_2^1) - \delta s_2| = \min$$

και αναδρομικά ορίζουμε το  $M_j^1$ :

$$M_j^1 \in P^S \wedge (t(M_j^1) > t(M_{j-1}^1)): |d(M_j^1, M_{j-1}^1) - \delta s_{j-1}| = \min, \quad j \leq N^P \quad (PB-11)$$

Τονίζουμε πάλι ότι η συνθήκη  $t(M_j^1) > t(M_{j-1}^1)$  μας διασφαλίζει ότι τα σημεία επιλέγονται πάντα με την ίδια φορά επί της προτύπου καμπύλης  $P^S$ . Στο τέλος αυτής της διαδικασίας έχουμε πρακτικά εξασφαλίσει την ισότητα

$$d(M_j^1, M_{j+1}^1) \approx \delta s_j \quad \text{για κάθε } j = 1, 2, \dots, N^P - 1 \quad (PB-12)$$

Αφού δημιουργήσαμε το πρώτο «αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες» με το  $S_j$  πολύγωνο  $M_1^1 M_2^1 \dots M_{N^P}^1$  όλες οι κορυφές του οποίου είναι στοιχεία του  $P^S$ , «ολισθαίνουμε» το πρώτο σημείο αυτού και δημιουργούμε ένα δεύτερο

αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες πολύγωνα με σημείο εκκίνησης το δεύτερο στοιχείο του  $P^S$ . Συνεχίζουμε τη διαδικασία παράγοντας όλη την κλάση των αμφιμονοσήμαντα ισομήκων με το  $S_j$  πολυγώνων με κορυφές τα σημεία  $M_j^n$  του  $P^S$  όπου ο άνω δείκτης  $n$  δείχνει το σημείο του  $P^S$  απ' όπου εκκινεί το πολύγωνο, ενώ ο κάτω δείκτης  $j$  είναι ο πληθικός αριθμός των κορυφών του πολυγώνου.  $j = 1, \dots, N^P$ . Αναλυτικά, ως πρώτο σημείο του  $n$ -οστού πολυγώνου θέτουμε το  $n$ -οστό σημείο της πυκνής προτύπου καμπύλης  $P^S$ , ενώ οι επόμενες κορυφές του πολυγώνου είναι τα σημεία του  $P^S$  που ορίζονται απ' την αναδρομική συνθήκη

$$M_j^n \in P^S \wedge (t(M_j^n) > t(M_{j-1}^n)): |d(M_j^n, M_{j-1}^n) - \delta s_{j-1}| = \min, \quad j = 2, \dots, N^P \quad (PIB-13)$$

Προφανώς τα ανωτέρω πολύγωνα δημιουργούνται εφ' όσον παραμένουμε εντός των ορίων της προτύπου ψηφιακής καμπύλης όπως αυτή ορίστηκε σε προηγούμενο βήμα. Κατ' αυτόν τον τρόπο, δημιουργούμε μία πλήρη κλάση πολυγωνικών καμπυλών εγγεγραμμένων στην πρότυπη, κάθε μία από τις οποίες είναι αμφιμονοσήμαντα ισομήκης με τη θορυβώδη καμπύλη  $S_j$ .

### Βήμα .3 Προσαρμογή τυχαίου τμήματος καμπύλης σε πρότυπο καμπύλη

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 1 για να προσαρμόσουμε τη θορυβώδη καμπύλη π.χ.  $S_j$ , στρέφοντας και μετατοπίζοντας την ως στερεό σώμα, σε κάθε αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες πολύγωνο  $M_1^n M_2^n \dots M_{N^P}^n$ , εγγεγραμμένο στο  $P^S$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο για όλα τα δυνατά σημεία εκκίνησης λαμβάνουμε ένα αντίστοιχο λάθος προσέγγισης  $E^n$ , αντίστοιχη γωνία στροφής  $\mathcal{G}_a^n$  και μετατοπίσεις  $x_a^n$  και  $y_a^n$ , όπου ο κάτω δείκτης  $a$  δηλώνει ότι οι αντίστοιχες ποσότητες είναι αρχικές εκτιμήσεις των βελτίστων τιμών τους.

Με το βήμα αυτό το  $S_j$  μεταφέρεται ως στερεό σώμα στα σημεία  $\Gamma_j$  ( $j = 1, \dots, N^P$ ) τα οποία σχηματίζουν το πολύγωνο  $\Gamma_A^T$  που είναι ίσο με το  $S_j$ . Στην αρχική θέση βέλτιστης προσαρμογής του  $S_j$  στην πρότυπο καμπύλη  $P^S$  κάθε ένα από τα σημεία αυτά βρίσκεται πολύ κοντά στο ομόλογο σημείο του αμφιμονοσήμαντα ισομήκους πολυγώνου: δηλαδή το  $\Gamma_1$  κοντά στο  $M_1^n$  το  $\Gamma_2$  στο  $M_2^n$  κ.ο.κ.

Ορίζουμε τις ακόλουθες έννοιες απόστασης του  $S_j$  από όλη την πρότυπο καμπύλη  $P^S$  ως εξής:

$$d^m(S_j, P^S) = d^m(\Gamma_A^T, P^S) = \sum_{j=1}^{N^P} \frac{d(\Gamma_j, P^S)}{N^P} \quad (ΠΒ-14)$$

$$d^\zeta(S_j, P^S) = d^\zeta(\Gamma_A^T, P^S) = \max_{j=1..N^P} (d(\Gamma_j, P^S)) \quad (ΠΒ-15)$$

$$d^A(S_j, P^S) = d^A(\Gamma_A^T, P^S) = \frac{1}{L_{P^S}} \cdot E(M_1^n M_2^n \dots M_{N^P}^n \Gamma_{N^P} \dots \Gamma_2 \Gamma_1) \quad (ΠΒ-16)$$

όπου

$$d(\Gamma_j, P^S) = \min_{M \in P^S} (d(\Gamma_j, M)) \text{ η ελάχιστη απόσταση του σημείου } \Gamma_j \text{ από όλα τα}$$

σημεία του  $P^S$ .

$L_{P^S}$  το μήκος της προτύπου καμπύλης  $P^S$ ,

$E(M_1^n \dots M_{N^P}^n \Gamma_{N^P} \dots \Gamma_1 M_1^n)$  το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο

$$M_1^n \dots M_{N^P}^n \Gamma_{N^P} \dots \Gamma_1 M_1^n$$

Μετακινούμε παράλληλα και περιστρέφουμε το  $\Gamma_A^T$  γύρω από τη θέση του, όπως αυτή προσδιορίστηκε με την εφαρμογή των υπολογισθέντων από το λήμμα 1 εκτιμήσεων των  $\theta_a^n$ ,  $x_a^n$  και  $y_a^n$ .

Το εύρος μεταβολής των παραμέτρων προσδιορίζονται ως ακολούθως: θέτουμε ένα αποδεκτό όριο λάθους προσαρμογής  $MaxErr$  του  $S_j$  στην πρότυπη καμπύλη π.χ. τα 0,3mm ανά σημείο της  $S_j$ . Εάν το μήκος του  $S_j$  είναι π.χ.  $L$  mm τότε μία περιστροφή του  $S_j$  γύρω απ' τη θέση ισορροπίας μέχρι  $MaxErr/L$  ενδέχεται να μην καταστρατηγήσει τη συγκεκριμένη απαίτηση άνω φράγματος στο λάθος. Τα ίδια ισχύουν για μία παράλληλη μετατόπιση μέχρι  $MaxErr$  κατά τον  $x$  άξονα και τον  $y$  άξονα.

Περιστρέφουμε και μετατοπίζουμε το  $\Gamma_A^T$  γύρω από τα  $\theta_a^n, x_a^n, y_a^n$  εντός των προαναφερθέντων στενών ορίων και με πολύ μικρά βήματα αλλαγής της γωνίας και της μετατόπισης. Για κάθε θέση του  $\Gamma_A^T$  εντός των ορίων αυτών, υπολογίζουμε το λάθος που ορίστηκε σύμφωνα με την (ΠΒ-16) και με την προϋπόθεση ότι η τιμή των εκάστοτε  $d^\zeta(S_j, P^S)$  και  $d^A(S_j, P^S)$  είναι μικρότερη από τα κατώφλια  $\frac{3}{2} \cdot MaxErr$

και  $MaxErr$  αντίστοιχα. Η προϋπόθεση για το  $d^c(S_j, P^S)$  διασφαλίζει ότι η διασπορά των  $d(\Gamma_j, P^S)$  που υπερβαίνουν το  $MaxErr$  έχουν ένα άνω φράγμα.

Κρατάμε το μικρότερο από όλα αυτά τα λάθη καθώς και τις παραμέτρους  $\theta_\tau^n$ ,  $x_\tau^n$ ,  $y_\tau^n$  για τα οποία εμφανίζεται και θεωρούμε ότι αυτό είναι το ελάχιστο λάθος με το οποίο το  $S_j$  δύναται να προσεγγίσει την εκάστοτε πρότυπο καμπύλη κοντά στο σημείο εκκίνησης  $n$ .

Το ελάχιστο όλων αυτών των λαθών μας δίνει το βέλτιστο τρόπο με τον οποίο το εκάστοτε  $S_j$  προσαρμόζεται σε όλη την συγκεκριμένη πρότυπη καμπύλη. Ταυτόχρονα, ο συνδυασμός των μετασχηματισμών  $[\theta_a^n, x_a^n, y_a^n]$ ,  $[\theta_\tau^n, x_\tau^n, y_\tau^n]$  που εφαρμόστηκαν δίνουν την ακριβή γωνία στροφής καθώς και τις μετατοπίσεις κατά  $x$  και  $y$  οι οποίες πραγματοποιούν αυτή τη βέλτιστη προσαρμογή του εκάστοτε  $S_j$  επί της συγκεκριμένης προτύπου καμπύλης  $P^S$ .

Η ανωτέρω μεθοδολογία εφαρμόζεται για το σύνολο των διαθέσιμων τμημάτων καμπυλών κάθε έργου (πίνακας ζωγραφικής, τοιχογραφία), ακολουθώντας τα ακόλουθα βήματα:

A) Επιλέγεται το σύνολο  $S^m = \{S_i^m\}$ ,  $i=1..n$  των τμημάτων καμπυλών του έργου με κωδικό  $m$ .

B) Λαμβάνεται αυθαίρετα η  $S_i^m$  και δημιουργείται με τη διαδικασία του βήματος 1 η πυκνή πρότυπος ψηφιακή καμπύλη.

Γ) Λαμβάνεται τυχαία μια καμπύλη  $S_j^m$  από το σύνολο  $S^m$  η οποία θεωρείται ως η προς εξέταση καμπύλη.

Δ) Από την ακολουθία των σημείων  $(x_i, y_i)$  που απαρτίζουν την καμπύλη  $S_j^m$ , και με αρχή το σημείο  $(x_k, y_k)$  επιλέγονται διαδοχικά σημεία της ακολουθίας έτσι ώστε το άθροισμα των μηκών των διαδοχικών διαστημάτων που ορίζουν τα σημεία της ακολουθίας να προσεγγίζει μια επιθυμητή τιμή  $L_m$  με όσο το δυνατόν μικρότερο σφάλμα το οποίο σε καμμία περίπτωση δεν πρέπει να υπερβαίνει τα 3mm. Συμβολίζουμε την υπακολουθία των σημείων αυτών με  $S_j^m(k, L_m)$ .

E) Επιλέγονται το πρώτο και τελευταίο σημείο της ακολουθίας  $S_j^m(k, L_m)$  έστω  $A_1$  και  $A_n$ . Υπολογίζεται η ευκλείδιος απόσταση  $L_{ch} = d(A_1, A_n)$  μεταξύ του

πρώτου και του τελευταίου σημείου της ακολουθίας  $S_j^m(k, L_m)$ . Κατόπιν υπολογίζεται η μέγιστη απόσταση  $d_{Max}$  των σημείων της ακολουθίας  $S_j^m(k, L_m)$  από το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τα  $A_1$  και  $A_n$ . Σε περίπτωση που το πηλίκο

$$kam = \frac{d_{Max}}{L_{ch}} \quad (ΠΒ-17)$$

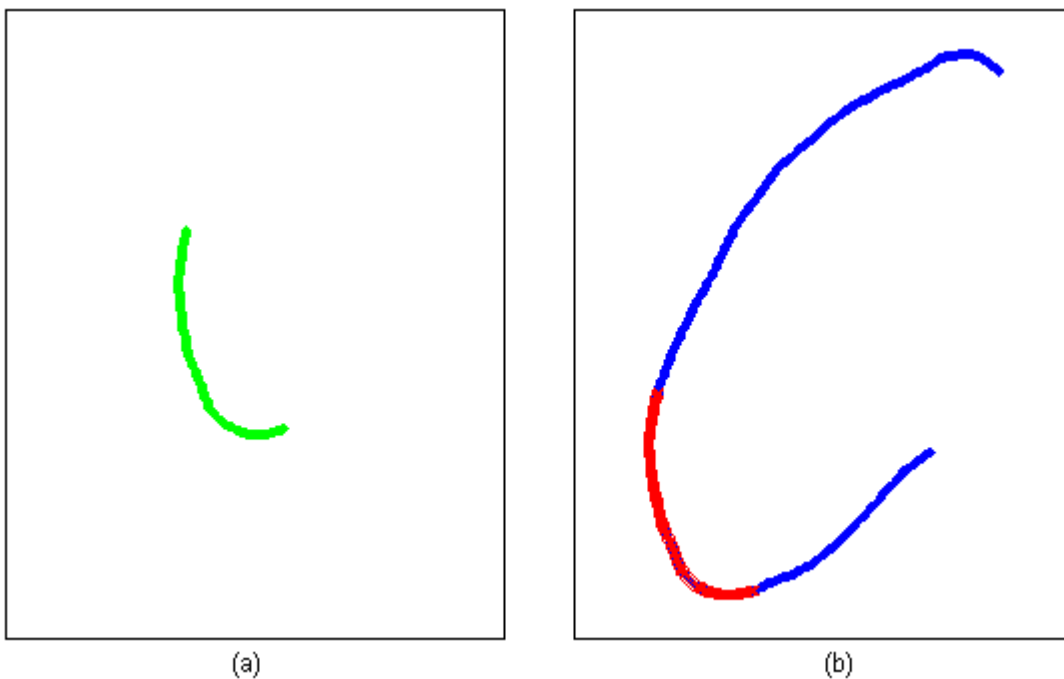
είναι μικρότερο από ένα κατώφλι  $kam_{Thres}$ , η υπό εξέταση ακολουθία  $S_j^m(k, L_m)$  απορρίπτεται άλλως εκτελείται το επόμενο βήμα ΣΤ. Με αυτό τον τρόπο δεν εξετάζουμε τμήματα τα οποία μπορούν να προσεγγισθούν σε ικανοποιητικό βαθμό από ευθύγραμμο τμήματα. Ούτως ή άλλως η ουσιαστική πληροφορία για πιθανά μοτίβα που δεν αντιστοιχούν σε ευθύγραμμους χάρακες βρίσκεται στα καμπύλα μέρη. Η ποσοτητα  $kam$  είναι μια ταχεία εκτίμηση για τη μορφή της καμπύλης σε σχέση με το ευθύγραμμο τμήμα  $A_1A_n$ . Αποτελεί δηλαδή έναν δείκτη καμπυλότητας της καμπύλης. Όσο μεγαλύτερη είναι τιμή του τόσο πιο χαρακτηριστική και μοναδική είναι η «πληροφορία» που αναμένουμε η καμπύλη να φέρει καθιστώντας την όποια επανεμφάνισή της σοβαρή ένδειξη ότι δεν είναι τυχαίο γεγονός, αλλά οφείλεται σε επανάληψη που γίνεται συνειδητά από τον δημιουργό του έργου. Το κατώφλι  $kam_{Thres} = 3\%$  είναι αρκετό ώστε το σφάλμα προσέγγισης της καμπύλης από ένα ευθύγραμμο τμήμα να είναι αρκετά μεγάλο και να την καθιστά κατ'ουσίαν μη αποδεκτή.

ΣΤ) Εφαρμόζεται η περιγραφείσα μεθοδολογία και για κάθε ένα τυχαίο τμήμα καμπύλης που εξετάζεται καταγράφεται η πληροφορία για το πρότυπο κομμάτι καμπύλης στην οποία επανεμφανίζεται με το ελάχιστο δυνατό σφάλμα προσαρμογής όπως αυτό ορίζεται από την (ΠΒ-16). Το σφάλμα αυτό όπως και οι ποσότητες που ορίζονται από τις (ΠΒ-14) και (ΠΒ-15) καταγράφονται.

Τα βήματα Α, Β και Γ επαναλαμβάνονται, λαμβάνοντας κάθε φορά ως πρότυπη και ως τυχαία κάθε μια από τις διαθέσιμες καμπύλες του  $S^m$ . Τα βήματα Δ, Ε και ΣΤ επαναλαμβάνονται επιλέγοντας όλες τις δυνατές υπακολουθίες  $S_j^m(i, L_m)$  με έναρξη το σημείο  $i = 1 \dots n$  και μήκος  $L_m = 70 + 10 \cdot v$  (mm)  $v = 0 \dots 18$ . Σημαντικό στοιχείο είναι η επιλογή του μέγιστου σφάλματος προσαρμογής  $MaxErr$ . Καλές τιμές για το μέγιστο σφάλμα προσαρμογής  $MaxErr$  είναι στο διάστημα  $[0.25, 0.5]$ . Η επιλογή των ορίων του ανωτέρω διαστήματος έγινε με ένα ποιοτικό μεν αλλά πολύ

σημαντικό κριτήριο. Μόλις το λάθος ξεπεράσει την άνω τιμή του διαστήματος, τότε αμέσως ο παρατηρητής αισθάνεται ότι δύο καμπύλες είναι ουσιαδώς διαφορετικές ανεξαρτήτως της παρουσίας θορύβου. Επομένως είναι ουσιαστικά απίθανο οι δύο καμπύλες να έχουν προκύψει από τον ίδιο οδηγό. Το κάτω όριο επελέγη ώστε να συμπεριλάβει οποιαδήποτε πιθανή διαταραχή κατά τη δημιουργία της καμπύλης.

Στην περίπτωση που ο δείκτης της υπό εξέταση καμπύλης συμπίπτει με τον δείκτη της καμπύλης που θεωρήθηκε ως πρότυπος, κατά το βήμα ΣΤ και την εφαρμογή της προτεινομένης μεθοδολογίας, εξαιρούνται όλα τα αμφιμονοσήμαντα ισομήκη πολύγωνα τα οποία περιλαμβάνουν σημεία που έχουν προέλθει από οποιοδήποτε σημείο του εκάστοτε τμήματος  $S_j^m(k, L_m)$  της υπό εξέτασης καμπύλης. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγουμε την εύρεση από τη ανωτέρω διαδικασία της τετριμμένης θέσης προσαρμογής της  $S_j^m(k, L_m)$ .



Εικόνα B-12

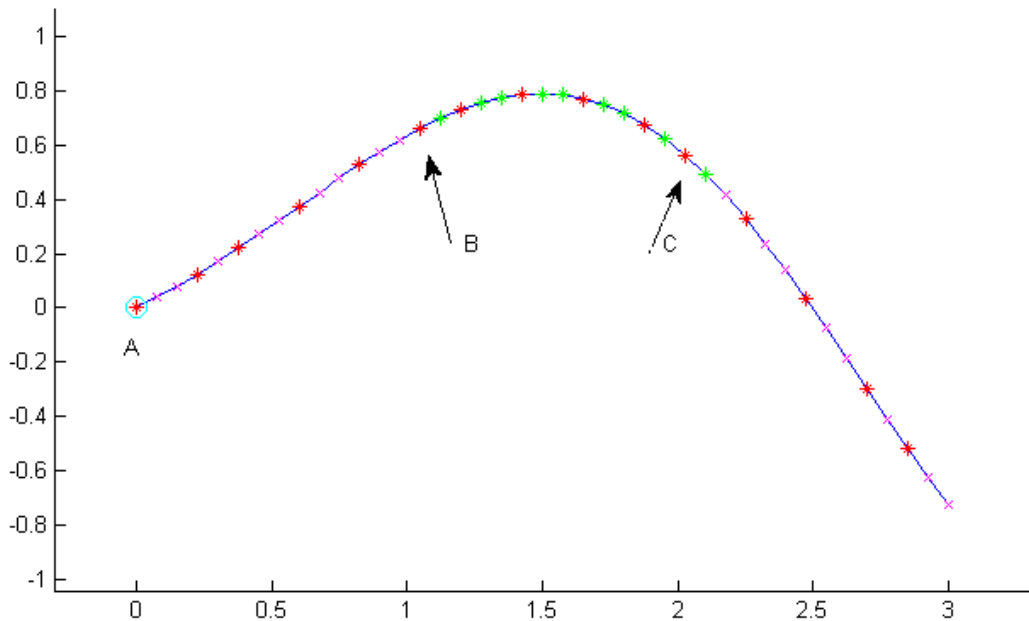
*Το απεικονιζόμενο στο (a) κομμάτι καμπύλης που έχει προέλθει από το κόκκινο τμήμα του (b) θα εξετασθεί μόνο με ισομήκη πολύγωνα που δεν περιλαμβάνουν σημεία του κόκκινου τμήματος.*



## B.4 Επεξεργασία αποτελεσμάτων και εξαγωγή μοτίβων

### B.4.1 Ομαδοποίηση αποτελεσμάτων A

Με την ολοκλήρωση της ανωτέρω διαδικασίας έχουμε λάβει για κάθε έργο  $m$  και για κάθε ένα τμήμα της καμπύλης  $S_j^m$  που εκκινεί από το σημείο  $k$  και έχει μήκος  $L_m$ ,  $S_j^m(k, L_m)$ , το τμήμα της προτύπου ψηφιακής καμπύλης  $P^{S_j^m}$  στο οποίο έχουμε τη βέλτιστη προσαρμογή καθώς και το σφάλμα αυτής της προσαρμογής το οποίο είναι πάντα μικρότερο από το κατώφλι  $MaxErr$  που έχει επιλεγεί. Από το τμήμα της προτύπου καμπύλης  $P^{S_j^m}$  είναι εύκολο να μετάβούμε στο τμήμα  $S_i^m(u, L_m)$  της ψηφιακής καμπύλης από την οποία έχει προέλθει. Επιπλέον το εκάστοτε τμήμα καμπύλης  $S_i^m(u, L_m)$  όπου  $u$  το σημείο έναρξης του τμήματος και  $L_m$  το μήκος του μπορεί εύκολα να απεικονισθεί με την ισοδύναμη μορφή  $S_i^m[v, w]$  όπου  $v, w$  οι δείκτες των σημείων έναρξης και λήξης του τμήματος της ψηφιακής καμπύλης που αναπαριστά.



Εικόνα B-13

Με κόκκινο απεικονίζονται τα σημεία μιας ψηφιακής καμπύλης  $S_i^m$  με εκκίνηση το σημείο A. Με χρώμα ματζέντα απεικονίζονται τα σημεία της προτύπου ψηφιακής καμπύλης  $P^{S_i^m}$  που αναπαριστά την  $S_i^m$ . Το πράσινο τμήμα της προτύπου καμπύλης έχει μήκος  $L_m = 20mm$ . Η αναπαράστασή του είναι  $S_i^m(16, 20)$  δεδομένου ότι εκκινεί από το 16<sup>ο</sup> σημείο της  $P^{S_i^m}$  και έχει μήκος  $L_m = 20mm$ . Η ισοδύναμη μορφή του είναι  $S_i^m[6, 11]$  δεδομένου ότι τα σημεία A και C της  $S_i^m$  που είναι εγγύτερα στα άκρα του  $S_i^m(16, 20)$  είναι αντίστοιχα το 6<sup>ο</sup> και 11<sup>ο</sup> σημείο της  $S_i^m$ .

Συνοπτικά έχουμε:

$$M_n = \langle L, S_i [v_i, w_i], S_j [v_j, w_j], Err \rangle \quad n = 1 \dots m$$

$$\langle M \rangle = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$$

Ομαδοποιούμε τα στοιχεία  $M_1, M_2, \dots, M_m$  κατά τον ακόλουθο τρόπο:

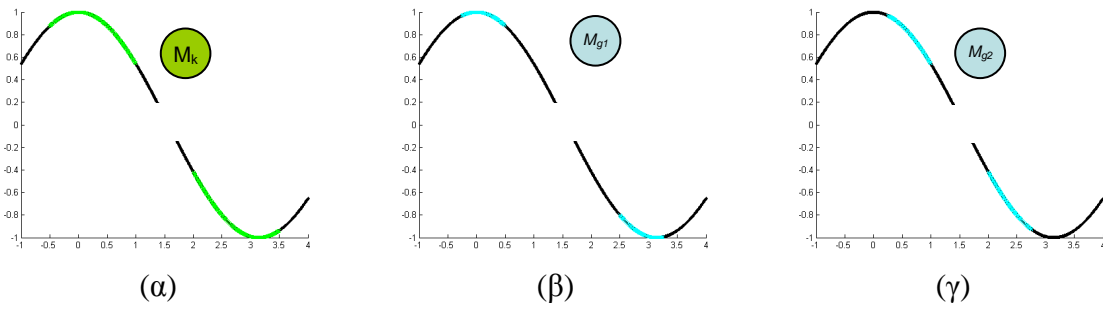
A) Διατάσσουμε τα  $M_1, M_2, \dots, M_m$  κατά φθίνουσα σειρά ως προς το μήκος  $L$  και κατά αύξουσα σειρά ως προς το σφάλμα προσαρμογής  $Err$ .

B) Επιλέγουμε το πρώτο κατά σειρά διαθέσιμο στοιχείο του  $\langle M \rangle$  έστω  $M_k$ .

Γ) Εντοπίζουμε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του  $\langle M \rangle$   $M_g$  που πληρούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Το μήκος  $L$  του  $M_g$  είναι μικρότερο από το μήκος  $L$  του τρέχοντος στοιχείου  $M_k$
- Οι δείκτες  $i, j$  των δύο καμπυλών  $S$  της εγγραφής  $M_k$  να συμπίπτουν με τους δείκτες  $i, j$  των δύο καμπυλών  $S$  της εγγραφής  $M_g$ .
- Οι δείκτες των τμημάτων που αντιστοιχούν στα τμήματα των καμπυλών  $S_i^k$ ,  $S_i^g$  ικανοποιούν τις σχέσεις  $v_i^k \leq v_i^g$  και  $w_i^g \leq w_i^k$
- Οι δείκτες των τμημάτων που αντιστοιχούν στα τμήματα των καμπυλών  $S_j^k$ ,  $S_j^g$  ικανοποιούν τις σχέσεις  $v_j^k \leq v_j^g$  και  $w_j^g \leq w_j^k$
- Το σφάλμα προσέγγισης που αντιστοιχεί στο τρέχουσα εγγραφή  $M_k$  είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο της εγγραφής  $M_g$ , δηλαδή  $Err_k > Err_g$ .

Δ) Το  $M_k$  μαζί με τα  $M_g$  που εξήχθησαν από το βήμα Γ αποτελούν την ομάδα  $h$  με αντιπρόσωπο το  $M_k$ . Ισοδυνάμως, ο αντιπρόσωπος  $M_k$  μιας ομάδας  $h$  είναι η το σχήμα που προκύπτει από την υπέρθεση δυο ξένων ζωγραφισμένων τμημάτων καμπυλών, τμήματα τα οποία εμφανίζουν μικρό λάθος προσαρμογής σε μεγάλο ποσοστό του μήκους τους. Εάν δεν υπάρχουν εξαχθέντα  $M_g$ , το τρέχον  $M_k$  αποτελεί την ομάδα  $h$ .



Εικόνα B-14

Τα τμήματα του  $M_k$  μαζί με τα  $M_{g1}$  και  $M_{g2}$  αποτελούν μια ομάδα με αντιπρόσωπο το  $M_k$ . Τα τμήματα του  $M_k$  περιέχουν στο εσωτερικό τους τα αντίστοιχα τμήματα των  $M_{g1}$  και  $M_{g2}$ .

Ε) Επαναλαμβάνουμε από το βήμα Β με το επόμενο διαθέσιμο στοιχείο του  $\langle M \rangle$  που δεν έχει αποδοθεί σε κάποια ομάδα  $h$ .

Πίνακας B-1  
Παράδειγμα συνόλου  $\langle M \rangle$

$\alpha\alpha$	$L$ (mm)	$S_i$	$v_i$	$w_i$	$S_j$	$v_j$	$w_j$	$Err$
$M_1$	150	A	30	130	B	55	160	0,35
$M_2$	150	A	32	132	B	52	155	0,39
$M_3$	140	A	40	110	B	68	135	0,38
$M_4$	140	A	44	115	B	70	137	0,34
$M_5$	130	A	50	111	B	75	133	0,29
$M_6$	130	A	28	95	B	50	120	0,25
$M_7$	130	A	100	170	B	10	89	0,25

Η εφαρμογή της περιγραφείσας διαδικασίας, στον πίνακα Πίνακας B-1 που αναπαριστά το σύνολο  $\langle M \rangle$  κάποιου έργου θα δώσει τις ακόλουθες ομάδες:

Πίνακας B-2

Ομάδα	Αντιπρόσωπος	Μέλη
$h_1$	$M_1$	$M_1, M_4, M_5$
$h_2$	$M_2$	$M_2, M_3$
$h_3$	$M_6$	$M_6$
$h_4$	$M_7$	$M_7$

## B.4.2 Ομαδοποίηση αποτελεσμάτων B

Η διαδικασία τη παραγράφου B.4.1 επαναλαμβάνεται θεωρώντας ως σύνολο  $\langle M_h \rangle$  μόνο τους αντιπροσώπους των ομάδων που έχουν εξαχθεί και με τροποποίηση των κριτηρίων που θα πρέπει να πληρούνται. Αναλυτικότερα γίνονται τα ακόλουθα:

A) Διατάσσουμε τους αντιπροσώπους  $M_1, M_2, \dots, M_m$  κατά φθίνουσα σειρά ως προς το μήκος  $L$  και κατά αύξουσα σειρά ως προς το σφάλμα προσαρμογής  $Err$ .

B) Επιλέγουμε το πρώτο κατά σειρά διαθέσιμο στοιχείο από την ομάδα των αντιπροσώπων έστω  $M_k$ .

Γ) Εντοπίζουμε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία από το σύνολο των αντιπροσώπων  $\langle M_h \rangle$   $M_g$  που πληρούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Το μήκος  $L$  του  $M_g$  είναι μικρότερο ή ίσο από το μήκος  $L$  του τρέχοντος στοιχείου  $M_k$
- Οι δείκτες  $i, j$  των δύο καμπυλών  $S$  της εγγραφής  $M_k$  να συμπίπτουν με τους δείκτες  $i, j$  των δύο καμπυλών  $S$  της εγγραφής  $M_g$ .
- Συμβολίζουμε με  $D_R(S_i^k, S_i^g)$  το «εκτός ορίων επικάλυψης» μήκος των  $S_i^k, S_i^g$ . Εάν  $L_s(a, b)$  η τιμή για το επικαμπύλιο μήκος μεταξύ των σημείων  $a$  και  $b$  της καμπύλης  $S$ , η αυστηρή διατύπωση για το  $D_R(S_i^k, S_i^g)$  είναι η ακόλουθη:

$$D_R(S_i^k, S_i^g) = d_v + d_w$$
$$d_v = \begin{cases} 0 & v_i^k \leq v_i^g \\ L_s(v_i^g, v_i^k) & v_i^k > v_i^g \end{cases}$$
$$d_w = \begin{cases} 0 & w_i^k \geq w_i^g \\ L_s(w_i^k, w_i^g) & w_i^k < w_i^g \end{cases}$$

Θα πρέπει να πληρούται η σχέση  $D_R(S_i^k, S_i^g) + D_R(S_j^k, S_j^g) < D_R^{Thres}$ . Η τιμή του  $D_R^{Thres}$  λαμβάνεται ίση με 10mm

Δ) Οι ομάδες των αντιπροσώπων που πληρούν τα κριτήρια του προηγούμενου βήματος συνενώνονται κρατώντας ως αντιπρόσωπο το εκάστοτε  $M_k$ .

Ε) Επαναλαμβάνουμε από το βήμα B με το επόμενο διαθέσιμο στοιχείο του  $\langle M_h \rangle$  το οποίο δεν έχει συγχωνευθεί με κάποια άλλη ομάδα.

Εφαρμόζοντας για παράδειγμα την ανωτέρω τροποποιημένη διαδικασία, στον πίνακα με τους αντιπροσώπους Πίνακας Β-2 του συνόλου  $\langle M_h \rangle$  θα λάβουμε τις ακόλουθες ομάδες:

Πίνακας Β-3

Ομάδα	Αντιπρόσωπος	Μέλη
$h_1$	$M_1$	$M_1, M_4, M_5, M_2, M_3, M_6$
$h_4$	$M_7$	$M_7$

### Β.4.3 Εξαγωγή ελαχίστου πλήθους αντιπροσώπων έργου τέχνης

Οι αντιπρόσωποι των ομάδων που έχουν εξαχθεί με την εφαρμογή των μεθόδων των παραγράφων Β.4.1 και Β.4.2 αποτελούν το υπερσύνολο των πιθανών επαναλαμβανομένων μοτίβων που υπάρχουν στο έργο και έχουν μήκος μεγαλύτερο από το ελάχιστο μήκος  $L_{\min} = 70mm$  που έχει χρησιμοποιηθεί κατά τη διαδικασία εξαγωγής. Κατά το παρόν βήμα με χρήση της τεχνικής που παρουσιάζεται επιλέγεται το ελάχιστο πλήθος αντιπροσώπων με τρόπο που να μεγιστοποιείται η κάλυψη των χρησιμοποιηθεισών καμπυλών.

Για την εφαρμογή της τεχνικής γίνεται χρήση της οριζομένης από την ακόλουθη παράγραφο εκτίμησης πιθανότητας  $P$  του αντιπροσώπου μιας ομάδας να μην είναι τυχαία επανάληψη αλλά αποτέλεσμα συστηματικής προσπάθειας του δημιουργού η οποία δεν αποκλείει τη χρήση εργαλείου σχεδίασης.

Επι τη βάσει της προγουμένης ανάλυσεως εύλογα προκύπτει το εξής.

#### ΔΗΜΜΑ 2

Έστω ότι δύο τμήματα  $S_i [v_i^k, w_i^k]$  και  $S_j [v_j^k, w_j^k]$  του αντιπροσώπου μιας ομάδας  $h_k$  του βήματος 1 έχουν πράγματι δημιουργηθεί με χρήση του ίδιου προτύπου τμήματος καμπύλης και έχουν έκαστο μήκος  $L_k$ . Εάν  $dS_i$  είναι η μέση απόσταση των σημείων τους τότε το πλήθος των αναμενομένων ταιριασμάτων μήκους  $L_R < L_k$  θα είναι  $n_R = \frac{L_k - L_R}{dS_i}$ . Συνεπώς η ποσότητα  $N_R = \sum_{L_R < L_k} n_R$  αποτελεί το θεωρητικό άνω φράγμα του πλήθους των στοιχείων που θα αναμένουμε να υπάρχουν στην υπό εξέταση ομάδα. Εάν  $N_C$  το πραγματικό πλήθος των στοιχείων της ομάδας  $h_k$  τότε ο λόγος  $P = \frac{N_C}{N_R}$  αποτελεί μια καλή εκτίμηση της

πιθανότητας ο αντιπρόσωπος της ομάδας να αποτελεί πράγματι υλοποίηση που προέρχεται από την ίδια καμπύλη.

Η τεχνική εφαρμόζεται ως ακολούθως:

A) Επιλέγεται το σύνολο  $S^m = \{S_i^m\}$ ,  $i = 1 \dots n$  των τμημάτων καμπυλών του έργου με κωδικό  $m$ .

B) Επιλέγεται από το σύνολο  $M_h^m = \{M_i^m\}$ ,  $i = 1 \dots h_{\max}$  των αντιπροσώπων που εξήχθησαν από το βήμα 1 εκείνος ο αντιπρόσωπος που μεγιστοποιεί κατά μήκος την κάλυψη  $C$  στα τμήματα του συνόλου  $S^m$ , δηλαδή επιλέγεται ο αντιπρόσωπος με το μεγαλύτερο ανεξάρτητο επικαμπύλιο μήκος, όπου ο όρος ανεξάρτητος υποδηλοί ότι ο αντιπρόσωπος αυτός δεν έχει επικαλυφθεί σε σημαντικό ποσοστό από έναν άλλο ήδη επιλεγέντα αντιπρόσωπο (όπως θα περιγραφεί κατωτέρω, οι ήδη επιλεγέντες αντιπρόσωποι ονομάζονται χαρακτηριστικοί). Η κάλυψη αυτή ορίζεται σαν κάλυψη αναφοράς  $C_{\max}$ .

Γ) Επιλέγεται από το σύνολο των  $M_h^m$  όλοι οι αντιπρόσωποι  $M_{hc}^m$  για τους οποίους η κάλυψη  $|C - C_{\max}| < C_{\text{thres}}$ , όπου  $C_{\text{thres}}$  κατάλληλα επιλεγέν κατώφλι. Για κάθε έναν από τους αντιπροσώπους  $M_{hc}^m$  υπολογίζεται η εκτίμηση της πιθανότητας  $P$  να είναι επανάληψη όπως αναφέρθηκε προηγουμένως στο Λήμμα 2.

Δ) Επιλέγεται ο αντιπρόσωπος με τη μέγιστη πιθανότητα  $P$ , αφαιρείται από το σύνολο  $M_h^m$  και προστίθεται στο σύνολο των χαρακτηριστικών αντιπροσώπων  $M_x$ . Ευθύς αμέσως μετά αφαιρούνται από το  $S^m$  τα τμήματα εκείνα που δεσμεύει ο αντιπρόσωπος.

E) Η διαδικασία επαναλαμβάνεται από το βήμα B με τα εναπομείναντα στοιχεία του  $M_h^m$  μέχρι είτε την ολοκλήρωση της κάλυψης του συνόλου  $S^m$  είτε εως ότου η μέγιστη κάλυψη αναφοράς  $C_{\max}$  να είναι μικρότερη από ένα κατώφλι  $C_{\max}^{\text{thres}}$ .

Η επιλογή της τιμής που έγινε για το κατώφλι  $C_{\text{thres}}$  είναι τέτοια ώστε η διαφοροποίηση στην κάλυψη να μην γίνεται αισθητά αντιληπτή από το ανθρώπινο μάτι. Καλή τιμή για την παράμετρο αυτή είναι  $C_{\text{thres}} = 10mm$ . Ομοίως η επιλογή της τιμής για το κατώφλι  $C_{\max}^{\text{thres}}$  είναι τέτοια ώστε οποιοδήποτε κομμάτι επιλέγεται κατά το βήμα Δ να καλύπτει ικανό τμήμα του  $S^m$ . Καλή τιμή για την παράμετρο αυτή είναι  $C_{\max}^{\text{thres}} = 50mm$ .

#### B.4.4 Έλεγχος επικάλυψης εξαθθέντων αντιπροσώπων

Οι χαρακτηριστικοί αντιπρόσωποι  $M_X = M_x^1, M_x^2, \dots, M_x^m$  που εξήχθησαν κατά το προηγούμενο βήμα ελέγχονται μεταξύ τους για να διαπιστωθεί: α) Το ενδεχόμενο κάποιος χαρακτηριστικός αντιπρόσωπος να αποτελεί αυστηρό υποσύνολο κάποιου άλλου και β) Το ενδεχόμενο ακραία τμήματα διαφορετικών αντιπροσώπων να εμφανίζουν επικάλυψη σε βαθμό ώστε να σχηματίζουν ένα συνεχόμενο μοτίβο. Στην περίπτωση αυτή οι αντιπρόσωποι που απαρτίζουν το μοτίβο μπορούν να θεωρηθούν με ασφάλεια ως τμήματα του συνεχόμενου μοτίβου. Όπως γίνεται αντιληπτό, η εφαρμογή των ανωτέρω δύο ελέγχων είναι πιθανόν να μειώσει το τελικό σύνολο των αντιπροσώπων με τη δημιουργία είτε συνενώσεων είτε με τη συγχώνευσή τους. Για τις ανάγκες των ελέγχων αυτών ακολουθείται η κατωτέρω διαδικασία:

Βήμα Α: Επιλογή μοναδικής ψηφιακής καμπύλης για κάθε χαρακτηριστικό αντιπρόσωπο

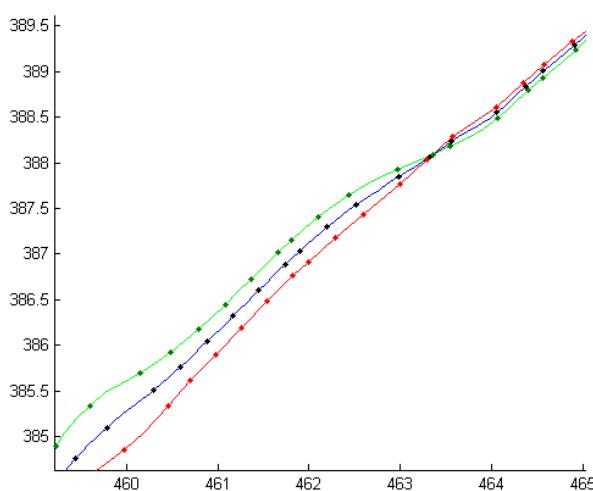
Επειδή ο χαρακτηριστικός αντιπρόσωπος αναφέρεται σε δύο τμήματα καμπυλών που έχουν προσαρμοσθεί σε μεγάλο ποσοστό του μήκους τους με μικρό λάθος, είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε μια μοναδική ψηφιακή καμπύλη που θα εκφράζει τον αντιπρόσωπο.

Απο τα δύο τμήματα  $S_i [v_i^k, w_i^k]$  και  $S_j [v_j^k, w_j^k]$  καθενός από τους χαρακτηριστικούς αντιπροσώπους του συνόλου  $M_X$ , εξάγονται οι πυκνές πρότυπες ψηφιακές καμπύλες  $P^{S_i}$  και  $P^{S_j}$  όπως έχει παρουσιασθεί στο βήμα 1 της παραγράφου Β.3. Για τις ανάγκες της παρούσης διαδικασίας θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια πρότυπος ψηφιακή καμπύλη  $P$  που θα εκφράζει επαρκώς τις  $P^{S_i}$  και  $P^{S_j}$ . Για το λόγο αυτό, εφαρμόζουμε τον συνδυασμό των ήδη υπολογισθέντων μετασχηματισμών  $[\theta_a^n, x_a^n, y_a^n]$  και  $[\theta_\tau^n, x_\tau^n, y_\tau^n]$  και οι καμπύλες  $P^{S_i}$  και  $P^{S_j}$  τοποθετούνται στη θέση βελτίστης προσαρμογής.

Επί των καμπυλών  $P^{S_i}$  και  $P^{S_j}$  λαμβάνονται αμφιμονοσήμαντα ισομήκη πολύγωνα  $M^i = M_1^i M_2^i \dots M_N^i$  και  $M^j = M_1^j M_2^j \dots M_L^j$  με σταθερή απόσταση μεταξύ των κορυφών και ίση με 2mm για τη  $P^{S_i}$  και 0.5mm για την  $P^{S_j}$ . Για κάθε ένα σημείο του  $M^i$  εντοπίζουμε το σημείο του  $M^j$  για το οποίο ελαχιστοποιείται η

μεταξύ τους ευκλείδειος απόσταση. Δημιουργείται συνεπώς η ακολουθία  $G_{ij}$  των ζευγαριών των δεικτών  $[m, n]$  των κορυφών των δύο πολυγώνων.

Για κάθε ένα ζεύγος υπολογίζεται ο μέσος όρος  $H$  των συντεταγμένων των κορυφών των πολυγώνων που τους αντιστοιχούν. Με τον τρόπο αυτό λαμβάνεται η ακολουθία σημείων  $H_{ij} = H_1 H_2 \dots H_{\max}$ . Με εφαρμογή της μεθοδολογίας του βήματος 1 της παραγράφου Β.3 δημιουργείται από την ακολουθία  $H_{ij}$  η πυκνή πρότυπος ψηφιακή καμπύλη που εκφράζει επαρκώς τις υπερτεθειμένες  $P^{S_i}$  και  $P^{S_j}$  και προστίθεται στα στοιχεία του αντιπροσώπου.



Εικόνα Β-15

Με κόκκινο και πράσινο χρώμα απεικονίζονται οι ψηφιακές καμπύλες των δύο αντιπροσώπων μιας ομάδας στη θέση βελτίστου ταιριάσματος. Οι κόκκινες και πράσινες κουκίδες αντιστοιχούν στα κοινά ζεύγη των ακολουθιών  $G_{ij}$  και  $G_{ji}$ . Με μπλε κουκίδες απεικονίζονται οι μέσοι όροι των κοινών ζευγών ενώ με μπλε γραμμή η αντίστοιχη πρότυπος ψηφιακή καμπύλη.

Βήμα Β: Έλεγχος επικάλυψης μοναδικών καμπυλών χαρακτηριστικών αντιπροσώπων

Το στοιχεία του συνόλου  $\langle M_x \rangle$  των χαρακτηριστικών αντιπροσώπων  $M_x$  διατάσσονται κατά φθίνουσα σειρά με βάση το μήκος των τμημάτων που αντιστοιχούν. Κατόπιν λαμβάνεται ο πρώτος διαθέσιμος χαρακτηριστικός αντιπρόσωπος  $M_x$  και θεωρείται ως ο αντιπρόσωπος αναφοράς.



Δημιουργείται το υποσύνολο  $\langle M_y \rangle_{M_x}$  των στοιχείων του  $\langle M_x \rangle$  για τα οποία το μήκος τους  $L_{M_y}$  είναι μικρότερο από το μήκος  $L_{M_x}$  αντιπροσώπου αναφοράς  $M_x$ . Ισοδύναμα  $\langle M_y \rangle_{M_x} = \langle M_y : M_y \in \langle M_x \rangle, L_{M_y} < L_{M_x} \rangle$ . Για κάθε ένα στοιχείο  $M_y$  του συνόλου  $\langle M_y \rangle_{M_x}$  εφαρμόζεται διαδικασία προσαρμογής ανάλογη με εκείνη που αναφέρθηκε στην παράγραφο Β.3 χρησιμοποιώντας τις πρότυπες καμπύλες για κάθε έναν αντιπρόσωπο όπως εξήχθησαν από το προηγούμενο βήμα Α. Η διαδικασία διαθέτει δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο εξετάζεται το ενδεχόμενο ο αντιπρόσωπος  $M_y$  να αποτελεί κατά το σύνολο του κομμάτι του αντιπρόσωπου αναφοράς  $M_x$ . Στο δεύτερο στάδιο εξετάζουμε το ενδεχόμενο ακραία τμήματα των  $M_x$  και  $M_y$  να προσαρμόζονται πολύ καλά.

Αναλυτικότερα για το πρώτο στάδιο, η διαδικασία προσαρμογής είναι αντίστοιχη με εκείνη που αναφέρθηκε στην παράγραφο Β.3. Από τα στοιχεία του  $M_x$  δημιουργείται η κλάση όλων των αμφιμονοσημάντων ισομηκών με το  $M_y$  πολυγώνων. Για κάθε ένα πολύγωνο, εφαρμόζεται το λήμμα 1 για να εντοπισθούν οι αρχικές παράμετροι ταιριάσματος και κατόπιν οι παράμετροι αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των βελτίστων παραμέτρων όπως ορίζει το βήμα 3 της παραγράφου Β.3. Καταγράφουμε το εκάστοτε σφάλμα προσαρμογής  $Err$  που αποτελεί και μια εκτίμηση του ενδεχομένου ο αντιπρόσωπος  $M_y$  να αποτελεί κατά το σύνολό του κομμάτι του αντιπρόσωπου αναφοράς  $M_x$ . Όσο πιο μεγάλο είναι το σφάλμα τόσο μικρότερη είναι και η πιθανότητα ο αντιπρόσωπος  $M_y$  να αποτελεί κατά το σύνολό του κομμάτι του αντιπρόσωπου αναφοράς  $M_x$ .

Για το δεύτερο στάδιο που αφορά την εύρεση του μεγίστου μήκους επικάλυψης των δύο αντιπρόσωπων έτσι ώστε η προσαρμογή τους να μην υπερβαίνει το επιλεγέν κατώφλι μεγίστου σφάλματος, εφαρμόζονται τα ακόλουθα:

Από τον αντιπρόσωπο  $M_y$  λαμβάνουμε τμήμα το οποίο έχει μήκος  $L_k$  έστω  $M_y^{L_k}$ . Από τα στοιχεία του  $M_x$  λαμβάνουμε τα αμφιμονοσήμαντα και ισομήκη με το άρτι επιλεγέν τμήμα του  $M_y$  πολύγωνα τα οποία περιλαμβάνουν υποχρεωτικώς τα ακραία σημεία του  $M_x$ . Η απαίτηση για την παρουσία των ακραίων σημείων του

$M_x$  στα ισομήκη πολύγωνα, περιορίζει το πλήθος τους αυστηρώς σε δύο, ένα που ξεκινά από το πρώτο σημείο του  $M_x$  έστω  $M_x^s$  και ένα που καταλήγει στο τελευταίο σημείο του  $M_x$  έστω  $M_x^e$

Για κάθε ένα από τα  $M_x^s$  και  $M_x^e$  εφαρμόζεται το λήμμα 1 για να εντοπισθούν οι αρχικές παράμετροι ταιριάσματος του  $M_y^{L_k}$  και κατόπιν οι παράμετροι αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των βελτίστων παραμέτρων όπως ορίζει το βήμα 3 της παραγράφου Β.3. Εάν το τελικό σφάλμα προσαρμογής είναι μικρότερο από το μέγιστο επιλεγέν κατώφλι, η διαδικασία του δευτέρου σταδίου επαναλαμβάνεται επιλέγοντας τμήμα μεγαλύτερου μήκους  $L_{k+1}$  με  $|L_{k+1} - L_k| \geq 5mm$  από τον αντιπρόσωπο  $M_y$  και μέχρι είτε το σφάλμα να ξεπεράσει το επιλεγέν κατώφλι είτε το μήκος  $L_k$  να γίνει ίσο με το μήκος  $L_{max}$  του αντιπροσώπου  $M_y$ . Σε κάθε περίπτωση καταγράφουμε ξεχωριστά για κάθε ένα από τα  $M_x^s$  και  $M_x^e$  το μέγιστο μήκος  $L_k^m$  για το οποίο το σφάλμα προσαρμογής δεν υπερβαίνει το επιλεγέν κατώφλι καθώς και την τιμή του σφάλματος  $Err$ .

Τα ανωτέρω στάδια πραγματοποιούνται, λαμβάνοντας ως αντιπρόσωπο αναφοράς κάθε ένα από τα στοιχεία του  $\langle M_x \rangle$ . Παράλληλα καταγράφονται τα εκάστοτε στοιχεία που αναφέρθηκαν με σκοπό να αξιολογηθούν ως ακολούθως:

Από τα στοιχεία του πρώτου σταδίου εφαρμογής και για κάθε έναν αντιπρόσωπο  $M_y$  μπορούμε να εντοπίσουμε τον αντιπρόσωπο  $M_x$  για τον οποίο το σφάλμα προσαρμογής  $Err$  είναι ελάχιστο. Εάν το σφάλμα  $Err$  είναι μεγαλύτερο από το κατώφλι  $Err_{Thres}$  τότε απορρίπτεται το ενδεχόμενο ο αντιπρόσωπος  $M_y$  να αποτελεί κατά το σύνολό του κομμάτι του αντιπροσώπου  $M_x$ , άλλως το αποδεχόμαστε και ο αντιπρόσωπος  $M_y$  αφαιρείται από το σύνολο των  $\langle M_x \rangle$ . Η επιλογή της τιμής του κατωφλίου  $Err_{Thres}$  είναι ίδια με την τιμή για το μέγιστο σφάλμα προσαρμογής  $MaxErr$  που έχει επιλεγεί για την εξαγωγή των αντιπροσώπων.

Ομοίως από τα στοιχεία του δευτέρου σταδίου εφαρμογής και για κάθε έναν αντιπρόσωπο  $M_y$  μπορούμε να εντοπίσουμε τον αντιπρόσωπο  $M_x$  για τον οποίο το μήκος επικάλυψης μεγιστοποιείται και υπό τις προϋποθέσεις

α) Ο αντιπρόσωπος  $M_Y$  εξακολουθεί να ευρίσκεται στο σύνολο  $\langle M_X \rangle$

β) Το σφάλμα προσαρμογής  $Err$  να είναι μικρότερο από το ίδιο κατώφλι  $Err_{Thres}$ .

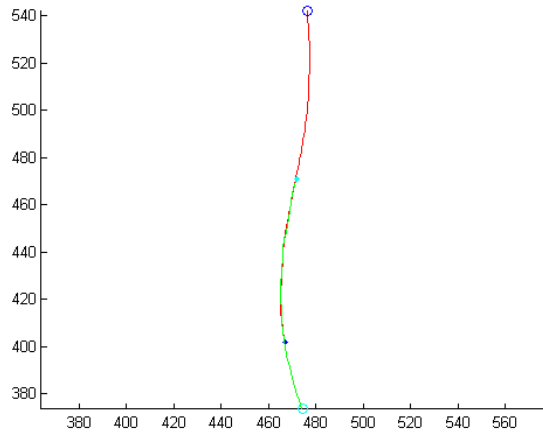
Στην περίπτωση που το μήκος επικάλυψης  $L_k$  υπερβαίνει το κατώφλι  $L_k^{thres} = 50mm$ , θεωρείται πιθανό ότι οι αντιπρόσωποι  $M_X$   $M_Y$  μπορούν να συνενωθούν με τρόπο ώστε να έχουν την επικάλυψη  $L_k$ . Η συνένωση γίνεται αποδεκτή μόνο στην περίπτωση όπου ισχύουν τα δύο παρακάτω τελεσίδικα κριτήρια

α) Η συνένωση δεν δημιουργεί κλειστή καμπύλη και

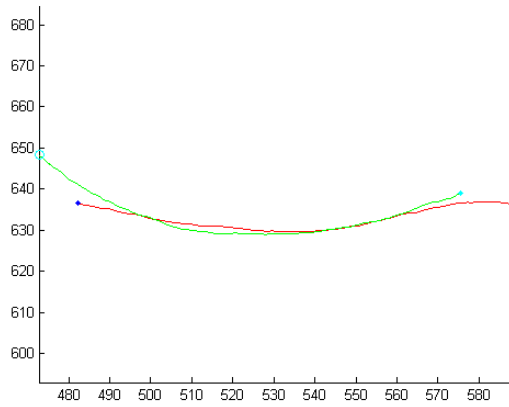
β) Η μέγιστη απόκλιση των γωνιών των εφαιπτομένων στα συνενούμενα άκρα των  $M_X$  και  $M_Y$  δεν υπερβαίνει τα  $0.0873 \text{ rad}$  ( $5^\circ$ ).

Στην περίπτωση αυτή ο αντιπρόσωπος  $M_Y$  αφαιρείται από το σύνολο των  $\langle M_X \rangle$ , ενώ τη θέση του  $M_X$  καταλαμβάνει η συνένωσή τους, άλλως λαμβάνεται προς εξέταση ο αντιπρόσωπος με το αμέσως μικρότερο μήκος  $L_k$

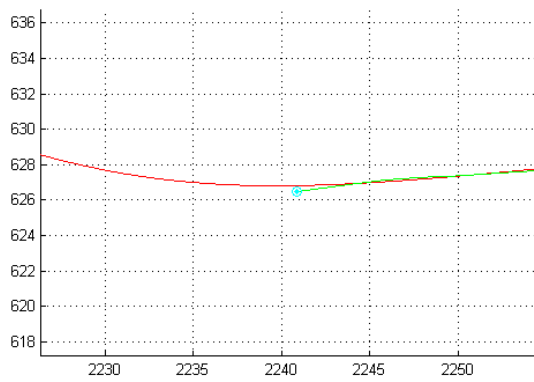
Η διαδικασία του ελέγχου επαναλαμβάνεται εφόσον έχει υπάρξει οποιαδήποτε μεταβολή στο πλήθος των στοιχείων του  $\langle M_X \rangle$  με την αφαίρεση κάποιου αντιπροσώπου είτε λόγω συνένωσης είτε λόγω ενσωμάτωσης με κάποιον άλλον αντιπρόσωπο. Το τελικό σύνολο των εναπομεινάντων αντιπροσώπων, θεωρείται και το χαρακτηριστικό σύνολο των καμπυλών από το οποίο μπορεί να προέλθει σημαντικό τμήμα ως και καθ' ολοκληρία το εκάστοτε έργο.



*Εικόνα B-16*  
*Παράδειγμα με αποδεκτή συνένωση καμπυλών*



*Εικόνα B-17*  
*Παράδειγμα με μη αποδεκτή συνένωση καμπυλών λόγω υπέρβασης σφάλματος προσαρμογής τόσο στα άκρα όσο και στο ενδιάμεσο τμήμα*



*Εικόνα B-18*  
*Λεπτομέρεια από μη αποδεκτή συνένωση καμπυλών λόγω υπέρβασης μεγίστης απόκλισης γωνιών εφαπτομένων*

## **B.5 Εφαρμογή μεθόδου και αξιολόγηση αποτελεσμάτων**

### **B.5.1 Εφαρμογή**

Η ανωτέρω μεθοδολογία εφαρμόστηκε σε 6 διαφορετικά έργα τέχνης τα οποία μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε 2 διαφορετικές ομάδες. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει 2 έργα τέχνης που αποτελούν τμήματα απο την τοιχογραφία «κροκοσυλλέκτριες» που έχει ανακαλυφθεί στις ανασκαφές στην περιοχή του Ακρωτηρίου στη νήσο Θήρα. Στη δεύτερη ομάδα ανήκουν τέσσερα έργα του φλαμανδού ζωγράφου της εποχής μπαρόκ Peter Paul Rubens. Στον πίνακα Πίνακας B-4 καταγράφονται τα ανωτέρω έργα καθώς η αποδοθείσα για κάθε ένα έργο κωδικοποίηση, το πλήθος του συνόλου  $S^m$  των καμπυλών που εξήχθησαν μετά την κατάτμηση των ψηφιακών εικόνων καθώς και το συνολικό τους μήκος.

*Πίνακας B-4*

Τίτλος Έργου	Προέλευση	Κωδικός Έργου	Διαστάσεις Έργου Υ x Π (cm)	Πλήθος Αρχικών Καμπυλών	Ολικό μήκος Καμπυλών (m)
Ο Δαυίδ στο λάκκο των λεόντων	Rubens	Im000	224 x 330,5	21	9,18
The Fall Of man	Rubens	Im001	182,5 x 140,7	14	7,15
Venus Bacchus and Ceres	Rubens	Im002	140,5 x 200	16	7,27
Ixion, King of the Lapiths	Rubens	Im003	175 x 245	17	7,51
Κροκοσυλλέκτρια	Ακρωτήριο Θήρας	Im154	92 x 73,5	27	3,65
Κροκοσυλλέκτρια	Ακρωτήριο Θήρας	Im156	89,5 x 74,5	25	3,64

Στον πίνακα Πίνακας B-5 παρατίθενται για κάθε ένα έργο και επιλεγέν κατώφλι μεγίστου σφάλματος προσαρμογής  $MaxErr$ , το πλήθος των αρχικώς ευρεθέντων ταιριασμάτων τμημάτων καμπυλών με μήκη  $L_m = 70 + 10 \cdot \nu$  (mm)  $\nu = 0 \dots 18$ , και η ποσοστιαία κάλυψη που επιτυγχάνεται στο σύνολο του μήκους των υπό εξέταση καμπυλών του έργου καθώς και το πλήθος των ταιριασμάτων μετά από τα στάδια των ομαδοποιήσεων που αναφέρθησαν.

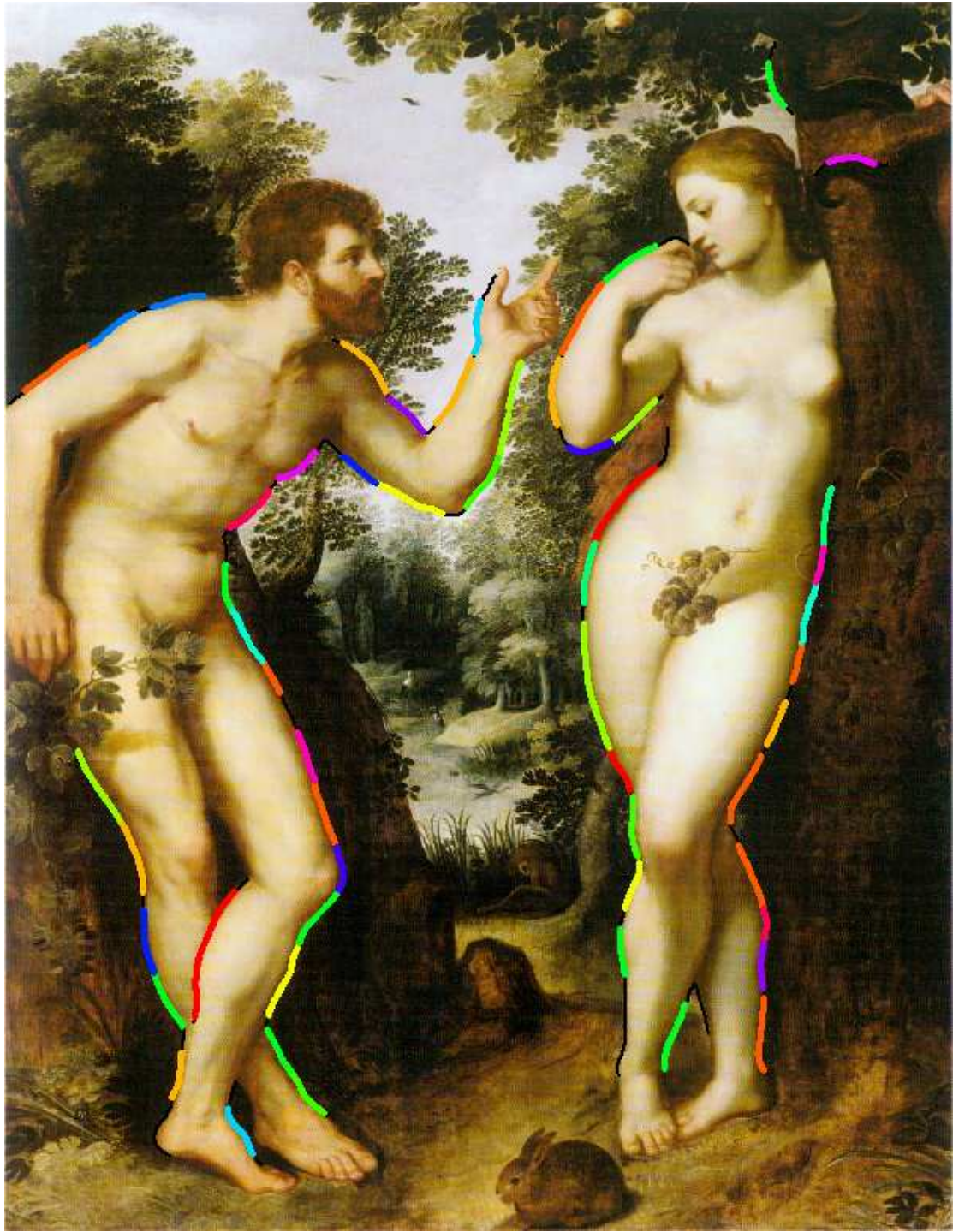
Πίνακας Β-5

Κωδικός Έργου	MaxErr (mm)	Πλήθος στοιχείων συνόλου $\langle M \rangle$	Πλήθος Ομάδων Α (Β.4.1)	Πλήθος Ομάδων Β (Β.4.2)	Πλήθος επιλεγέντων Ομάδων (Β.4.3)	Μετά απο συνένωση (Β.4.4)
Im000	0,25	2541	1530	405	17	15
Im000	0,4	8869	4587	977	22	16
Im001	0,25	8194	4031	787	22	18
Im001	0,4	15733	6606	1382	25	16
Im002	0,25	14308	6635	1382	30	22
Im002	0,4	24466	10217	2042	30	21
Im003	0,25	20684	8406	1821	32	21
Im003	0,4	32312	11661	2449	27	19
Im154	0,25	4755	2502	458	9	7
Im154	0,4	7825	3793	750	11	7
Im156	0,25	4246	1992	189	10	9
Im156	0,4	7186	3217	288	11	9



Εικόνα Β-19

Απεικόνιση με ίδιο χρώμα των ευρεθέντων επαναλήψεων τμημάτων με μέγιστο σφάλμα 0.4mm επί των εξαχθέντων καμπυλών (μαύρο χρώμα) του έργου Im000 «Ο Δαβίδ στο λάκκο των λεόντων»



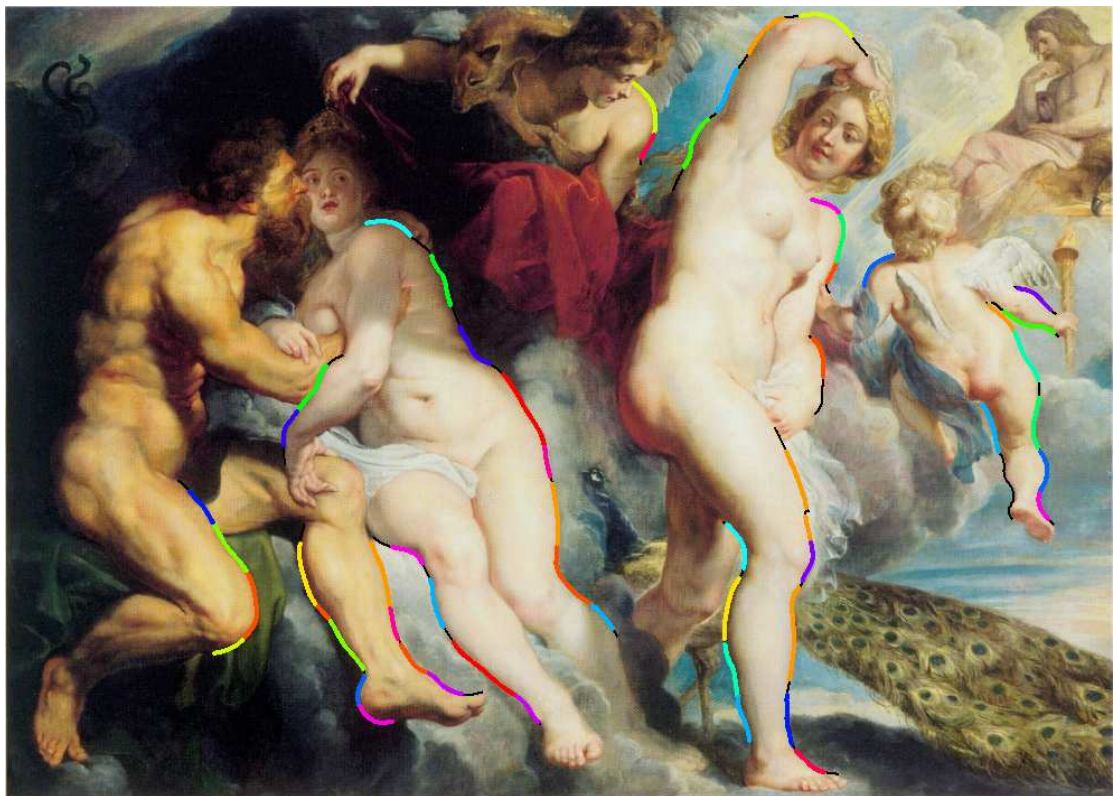
Εικόνα B-20

Απεικόνιση με ίδιο χρώμα των ευρεθέντων επαναλήψεων τμημάτων με μέγιστο σφάλμα 0.4mm επί των εξαχθέντων καμπυλών (μαύρο χρώμα) του έργου Im001 «The Fall Of man»



Εικόνα B-21

Απεικόνιση με ίδιο χρώμα των ευρεθέντων επαναλήψεων τμημάτων με μέγιστο σφάλμα 0.4mm επί των εξαχθέντων καμπυλών (μαύρο χρώμα) του έργου Im002 «Venus Bacchus and Ceres»



Εικόνα B-22

Απεικόνιση με ίδιο χρώμα των ευρεθέντων επαναλήψεων τμημάτων με μέγιστο σφάλμα 0.4mm επί των εξαχθέντων καμπυλών (μαύρο χρώμα) του έργου Im003 «Ixion, King of the Lapiths»





Εικόνα B-23

Απεικόνιση με ίδιο χρώμα των ευρεθέντων επαναλήψεων τμημάτων με μέγιστο σφάλμα 0.4mm επί των εξαχθέντων καμπυλών (μαύρο χρώμα) του έργου Im156 «Κροκοσυλλέτρια»



Εικόνα Β-24

Απεικόνιση με ίδιο χρώμα των ευρεθέντων επαναλήψεων τμημάτων με μέγιστο σφάλμα 0.4mm επί των εξαχθέντων καμπυλών (μαύρο χρώμα) του έργου Im154 «Κροκοσυλλέκτρια»

### **B.5.2 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων**

Η μελέτη των ανωτέρω αποτελεσμάτων καταδεικνύει τα ακόλουθα αναφορικά με τη χρήση καμπυλογράφων:

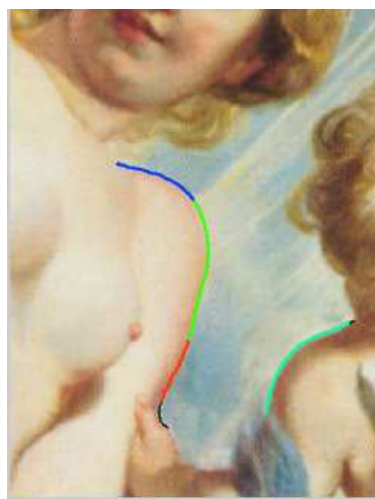
Α) Για μεγάλα τμήματα συνενωμένων αντιπροσώπων (μήκος συνενωμένων τμημάτων μεγαλύτερο από 14cm) δεν υπάρχει απλή συναρτησιακή μορφή που να

περιγράφει τη μορφή τους. Αντιθέτως οι καμπυλογράφοι που προκύπτουν από την προηγούμενη ανάλυση αντιστοιχούν σε εξαιρετικά περίπλοκες καμπύλες, οι οποίες επίσης είναι διαφορετικές από έργο σε έργο.

Β) Μικρά τμήματα αντιπροσώπων (μήκος μικρότερο από 8 cm) έχουν κατά μέσο όρο μικρή τιμή για τον δείκτη καμπυλότητας όπως αυτός ορίστηκε στην (PB-17) και πιο συγκεκριμένα τιμή μικρότερη από 8.5%

Γ) Εάν υποθέσουμε ότι οι τελικοί αντιπρόσωποι που έχουν προκύψει μετά από τις συνενώσεις, οι οποίοι στην ουσία είναι οι πιθανοί καμπυλογράφοι, έχουν επαφή μεγαλύτερη ή ίση των 5cm, τότε αυτοί αποκλείεται να έχουν την ίδια συναρτησιακή μορφή. Αυτό επιβεβαιώνεται από το μεγάλο σφάλμα προσαρμογής στην επαφή τους και την έλλειψη συνέχειας των παραγώγων στα άκρα της επαφής.

Δ) Η ποσοστιαία κάλυψη του περιγράμματος από τμήματα των τελικών αντιπροσώπων στα έργα του Rubens είναι μικρή και αφορά κυρίως σε τμήματα που έχουν μικρή καμπυλότητα. Όντως παρατηρήθηκε συχνά το φαινόμενο εκατέρωθεν μιας περιοχής μιας καμπύλης με μεγάλη καμπυλότητα να εμφανίζονται δύο αντιπρόσωποι οι οποίοι δεν συμπεριλαμβάνουν το τμήμα μεγάλης καμπυλότητας.



Εικόνα B-25

Λεπτομέρεια από τα έργα Im001 και Im003 όπου οι αντιπρόσωποι εντοπίζονται εκατέρωθεν της μεγάλης καμπυλότητας

Ε) Τονίζεται ότι στους ελεγχθέντες πίνακες του Rubens, οι περιοχές περιγράμματος με μεγάλο δείκτη καμπυλότητας δεν εμφανίζουν επαναληψιμότητα. Όπως φαίνεται και από τον παρακάτω πίνακα Πίνακας B-6, με εξαίρεση την κροκοσυλλέκτρια (Im156) σε όλα τα υπόλοιπα έργα ποσοστό μεγαλύτερο από 70%

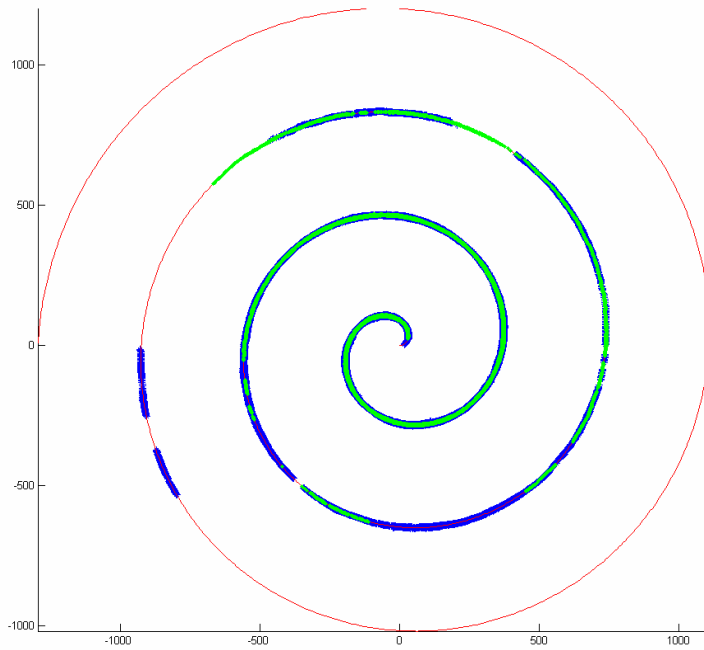
των ευρεθεισών επαναλήψεων, των στοιχείων δηλαδή του συνόλου  $\langle M \rangle$  έχει καμπυλότητα μικρότερη από 7%

Πίνακας Β-6

Κωδικός Έργου	Προέλευση	Διάστημα καμπυλότητας					
		<5%	5%-7%	7%-9%	9%-11%	11%-15%	>15%
Im000	Rubens	78%	8%	7%	5%	2%	0%
Im001	Rubens	61%	30%	8%	1%	0%	0%
Im002	Rubens	44%	32%	14%	6%	4%	1%
Im003	Rubens	48%	24%	11%	8%	8%	1%
Im154	Θήρα	49%	39%	10%	1%	0%	0%
Im156	Θήρα	15%	27%	21%	19%	15%	1%

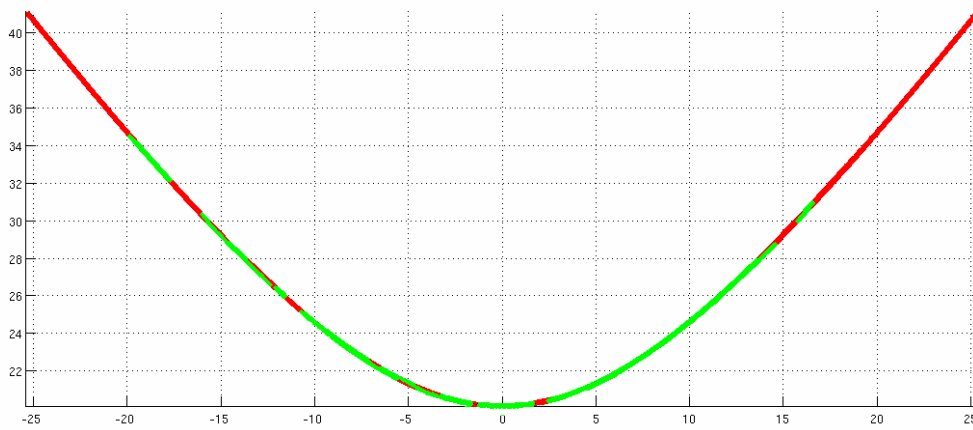
ΣΤ) Το πλήθος των τελικών αντιπροσώπων στους πίνακες του Rubens είναι σε κάθε περίπτωση σαφώς μεγαλύτερο από το πλήθος των τελικών αντιπροσώπων των τοιχογραφιών του ακρωτηρίου Θήρας ενώ και η κάλυψη είναι κατά μέσον όρο σαφώς μικρότερη.

Ζ) Στην περίπτωση μεγάλου πλήθους τελικών αντιπροσώπων, όπως συμβαίνει στα έργα του Rubens, δεν μπορεί να αποκλεισθεί το ενδεχόμενο δύο ή και περισσότεροι τελικοί αντιπρόσωποι να αποτελούν τμήματα ενός διευρυμένου αντιπροσώπου, όπου αναγκαστικά οι αντιπρόσωποι δεν θα έχουν κοινά τμήματα. Σε μια τέτοια περίπτωση, η συναρτησιακή μορφή του διευρυμένου αντιπροσώπου θα ήταν πολύ σύνθετη και περίπλοκη σε βαθμό που η πλήρης απεικόνισή της θα στερείτο αρμονίας και θα καθιστούσε τη χρήση της ουτοπική. Αντιθέτως στις τοιχογραφίες του προϊστορικού οικισμού Ακρωτηρίου Θήρας, υπάρχουν σχετικά απλές και λίαν κομψές συναρτησιακές μορφές πάνω στις οποίες μπορούν να προσαρμοσθούν με εξαιρετικά μικρό λάθος [Pap05], [Pap06] πρακτικά όλα τα τμήματα περιγράμματος των κυρίων μορφών τους (Εικόνα Β-26, Εικόνα Β-27).



Εικόνα B-26

Τοποθέτηση τμημάτων καμπυλών των τοιχογραφιών της Θήρας (πράσινο, μπλέ χρώμα) επί οδηγού (κόκκινο χρώμα) που αντιστοιχεί σε γραμμική σπείρα.



Εικόνα B-27

Τοποθέτηση τμημάτων καμπυλών των τοιχογραφιών της Θήρας (πράσινο, χρώμα) επί οδηγού (κόκκινο χρώμα) που αντιστοιχεί σε υπερβολή.

## C Παράρτημα

### Αλγόριθμος ICP (Iterative Closest Point)

Ο Επαναληπτικός Αλγόριθμος Κοντινού Σημείου (ICP algorithm), επιλύει το πρόβλημα της ευθυγράμμισης του αντικειμένου  $D$  (data) στο αντικείμενο  $M$  (model). Αρχικά τα δύο αντικείμενα πρέπει να εκφραστούν σαν σύνολα σημείων. Έστω  $M = (\vec{m}_1, \vec{m}_2 \dots \vec{m}_{N_M})$  και  $D = (\vec{d}_1, \vec{d}_2 \dots \vec{d}_{N_D})$  τα σύνολα σημείων που απαρτίζουν κάθε ένα αντικείμενο και  $N_M, N_D$  τα αντίστοιχα πλήθη τους. Ο τελεστής κοντινότερου σημείου συμβολίζεται με  $C$ . Η έκφραση  $Y = C(M, D)$  υποδηλώνει το σύνολο σημείων  $Y = (\vec{y}_1, \vec{y}_2 \dots \vec{y}_{N_M})$  τα οποία έχουν υπολογισθεί από το  $D$  έτσι ώστε το  $\vec{y}_i$  να είναι το κοντινότερο στο αντίστοιχο  $\vec{m}_i$ .

Η έννοια του κοντινότερου σημείου ανάμεσα σε δύο σημεία του  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  που υπολογίζει ο τελεστής  $C$  μπορεί να ορισθεί ως ακολούθως:

A) Με βάση την ευκλείδια απόσταση (closest point)

$$\delta_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Εν προκειμένω η εφαρμογή του τελεστή  $C$  στα σημεία  $\vec{d}_i, \vec{m}_i$  των αντικειμένων  $D$  και  $M$  αντίστοιχα θα δίνει

$$y_i = \min_{k \in 1..N_D} \delta_1(\vec{m}_i, \vec{d}_k)$$

B) Με βάση τα κάθετα διανύσματα (normal shooting)

Έστω  $S_i, S_j$  οι επίπεδες επιφάνειες που προσεγγίζουν τα σημεία των δύο αντικειμένων σε μια περιοχή των σημείων  $\vec{r}_i$  και  $\vec{r}_j$  αντίστοιχα και  $\hat{r}_i, \hat{r}_j$  τα αντίστοιχα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στις επιφάνειες  $S_i, S_j$ . Η απόσταση μεταξύ των σημείων αυτών ορίζεται ως ακολούθως:

$$\delta_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \begin{cases} \infty & A < a_t \\ \delta_1(\vec{r}_i, \vec{r}_j) & A \geq a_t \end{cases} \text{ όπου } A = |\hat{r}_i \cdot \hat{r}_j|$$

Η ποσότητα  $a_t = \cos \theta_t$  καθορίζει τη μέγιστη σχετική γωνία  $\theta_t$  που μπορεί να έχουν τα δύο κάθετα διανύσματα  $\hat{r}_i$  και  $\hat{r}_j$ . Εάν  $a_t = 1$ , τότε απαιτούμε πλήρη

παραλληλία των δύο καθέτων διανυσμάτων. Συνήθεις τιμές για το  $a_i$  είναι στο διάστημα  $\sqrt{2}/2 < a_i < 1$ .

Στην περίπτωση αυτή η εφαρμογή του τελεστή  $C$  δίνει

$$y_i = \min_{k \in 1..N_D} \delta_2(\vec{m}_i, \vec{d}_k)$$

Με διαθέσιμα τα  $M, Y$  ορίζεται η ποσότητα

$$E(M, Y) = \|M - Q(Y)\|^2 = \sum_{i=1}^{N_M} \|\vec{m}_i - Q(\vec{y}_i)\|^2 \quad (PC-1)$$

όπου  $Q(Y) = R \cdot Y + T$  και  $R, T$  τελεστές στροφής και μεταφοράς αντίστοιχα. Ο υπολογισμός των παραμέτρων του μετασχηματισμού  $Q$  που ελαχιστοποιεί την  $E(M, Y)$  μπορεί να γίνει είτε με μέθοδο βασισμένη σε ιδιοτιμές πίνακα [Arun01], είτε με χρήση τετραδονίων (quaternions) [Horn01], [Walk01] είτε με μέθοδο ορθοκανονικών πινάκων [Horn02].

Με οποιονδήποτε από τους ανωτέρω τρόπους λαμβάνουμε τις τιμές  $\vec{q}$  των παραμέτρων των τελεστών  $R$  και  $T$  που ευθυγραμμίζουν τα  $M$  και  $Q(Y)$  καθώς και το σχετικό μέσο σφάλμα ευθυγράμμισης  $d_{ms}$  που αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή της  $E(M, Y)$ . Αντί της ορισθείσης στην (PC-1) ποσότητας, η οποία αποτελεί και τη συνήθη επιλογή, είναι δυνατόν να ορισθεί και οποιαδήποτε άλλη νόρμα μεταξύ των σημείων των  $M, Y$ .

Η ροή του επαναληπτικού αλγορίθμου είναι ως ακολούθως:

1) Έστω  $\tau$  η επιθυμητή ακρίβεια σύγκλισης, και  $\vec{q}_{init}$  οι αρχικές τιμές για τις παραμέτρους των τελεστών  $R$  και  $T$ .

2) Θεώρησε  $D_0 = D, \vec{q}_0 = \vec{q}_{init}$  και  $k = 0$

3) Υπολόγισε τα κοντινότερα σημεία  $Y_k = C(M, D_k)$  χρησιμοποιώντας κατάλληλο τελεστή (closest point, normal shooting).

4) Υπολόγισε τις παραμέτρους της ευθυγράμμισης  $Q_k$  καθώς και το αντίστοιχο σφάλμα  $d_k$ .

5) Εφάρμοσε την ευθυγράμμιση:  $D_{k+1} = Q_k(D_k)$

6) Εάν  $d_{k-1} - d_k < \tau$  ολοκλήρωσε, άλλως επανάλαβε από το βήμα 3

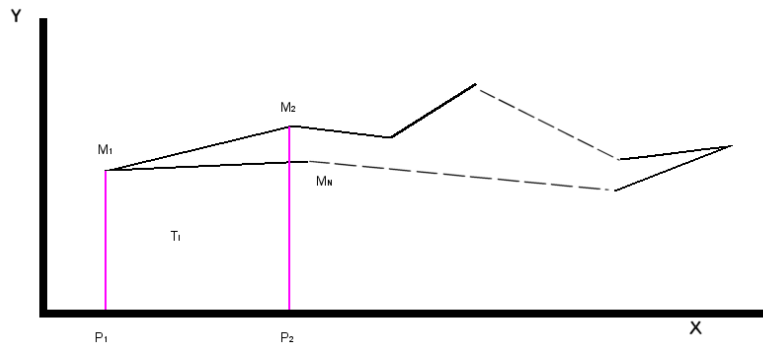
Ο αλγόριθμος συγκλίνει πάντα σε ένα τοπικό ελάχιστο του  $d_{ms}$ . [Besl01]. Το τοπικό ελάχιστο εξαρτάται από την επιλογή των αρχικών παραμέτρων της ευθυγράμμισης  $\bar{q}_{ini}$  και δεν συμπίπτει πάντα με το ολικό ελάχιστο. Για το λόγο αυτό ο αλγόριθμος εκτελείται πολλαπλώς με καταλλήλως επιλεγμένες παραμέτρους αρχικής ευθυγράμμισης. Τελικά διατηρούνται οι παράμετροι για το μικρότερο από όλα τα τοπικά ελάχιστα.



## Υπολογισμός Εμβαδού πολυγώνου

Έστω  $M = M_0 M_1, M_2, M_3 \dots M_N$  οι κορυφές ενός κλειστού πολυγώνου ( $M_0 \equiv M_N$ ) και  $(x_i, y_i)$  οι συντεταγμένες της κορυφής  $M_i$ . Σε περίπτωση που το πολύγωνο είναι απλό, δεν έχει δηλαδή τεμνόμενες πλευρές, ο υπολογισμός του εμβαδού  $E_A$  του πολυγώνου γίνεται ως ακολούθως:

Θεωρούμε τις προβολές  $P_i$  των  $M_i$  επί του οριζοντίου άξονα  $x$  και τα σχηματιζόμενα τραπέζια  $T_i = M_i M_{i+1} P_{i+1} P_i$   $i = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$  (Εικόνα C-1).



Εικόνα C-1

Σχηματιζόμενα τραπέζια από τις προβολές των κορυφών απλού πολυγώνου επί του οριζοντίου άξονα

Για το εμβαδόν  $E_i^T$  εκάστου τραπεζίου θα ισχύει:

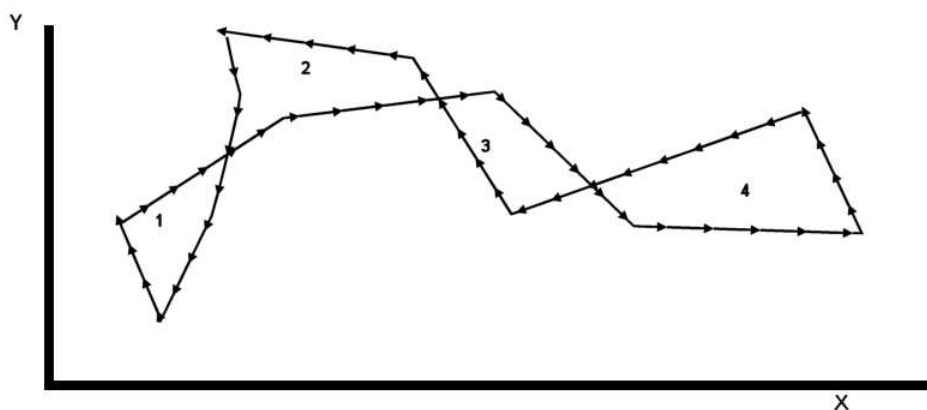
$$E_i^T = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) \cdot (y_i + y_{i+1}) \Leftrightarrow E_i^T = \frac{1}{2}(x_{i+1}y_i + x_{i+1}y_{i+1} - x_iy_i - x_iy_{i+1})$$

Η τιμή  $E_i^T$  είναι προσημασμένη με βάση την ωρολογιακή ή ανθωρολογιακή φορά διαγραφής του τραπεζίου  $T_i$ . Λαμβάνοντας υπ'όψιν το πρόσημο και αθροίζοντας τα εμβαδά αυτά, οι περιοχές των τραπεζίων που δεν αποτελούν τμήματα του πολυγώνου αλληλοαναιρούνται. Κατά συνέπεια για την τιμή του συνολικού εμβαδού που περικλείεται από το πολύγωνο θα ισχύει:

$$E_A = \left| \sum_{i=0}^{N-1} E_i^T \right| \Leftrightarrow E_A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1}) \right| \quad (ΠC-2)$$

Στην περίπτωση που το πολύγωνο  $M$  δεν είναι απλό, η τιμή που υπολογίζει η ανωτέρω θα αντιστοιχεί στη διαφορά του αθροίσματος των εμβαδών των πολυγώνων που διαγράφονται κατά την ορθή φορά (ανθωρολογιακή) από το άθροισμα των

εμβαδών που διαγράφονται κατά την ανάδρομο φορά (ωρολογιακή). Συνεπώς ο υπολογισμός του εμβαδού όπως ορίζεται από την (PC-2) θα πρέπει να γίνει ξεχωριστά για κάθε ένα από τα σχηματιζόμενα απλά πολύγωνα.



Εικόνα C-2

Τα απλά πολύγωνα 1 και 3 διαγράφονται κατά την ανάδρομο φορά ενώ τα 2 και 4 κατά την ορθή φορά

Ο σχηματισμός των απλών πολυγώνων μπορεί να γίνει αφού πρώτα υπολογισθούν τα σημεία τομής των πλευρών, οπότε και είναι δυνατός ο ορισμός όλων των κορυφών των απλών πολυγώνων. Τα ανωτέρω επιτελούνται μέσα από τα ακόλουθα βήματα:

#### Βήμα 1 Εντοπισμός σημείων τομής

Έστωσαν δύο πλευρές  $S_i = M_i M_{i+1}$  και  $S_j = M_j M_{j+1}$  με  $i, j = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$  και  $i \neq j$  του πολυγώνου  $M$ . Εάν  $\vec{M}_i$  το διάνυσμα θέσης του  $i$  σημείου τότε ορίζονται οι συναρτήσεις:

$$\vec{f}_1(t) = \vec{M}_i + t \cdot (\vec{M}_{i+1} - \vec{M}_i)$$

$$\vec{f}_2(s) = \vec{M}_j + s \cdot (\vec{M}_{j+1} - \vec{M}_j)$$

Από την επίλυση του συστήματος των αναλυτικών εξισώσεων που προκύπτουν από την ισότητα  $\vec{f}_1(t) = \vec{f}_2(s)$  προκύπτουν τα ακόλουθα:

A) Εάν το σύστημα των εξισώσεων δεν έχει λύση ως προς τα  $t$  και  $s$  οι πλευρές είναι παράλληλες και δεν τέμνονται.

B) Εάν το σύστημα των εξισώσεων έχει μοναδική λύση με  $0 \leq t \leq 1$  και  $0 \leq s \leq 1$  τότε υπάρχει μοναδικό σημείο τομής  $C_{ij}$  μεταξύ των πλευρών  $S_i$  και  $S_j$ .

Στην περίπτωση που οι πλευρές  $S_i$  και  $S_j$  είναι διαδοχικές υπάρχουν τα προφανή ζεύγη λύσεων α)  $t=1, s=0$  και β)  $t=0, s=1$  και το σημείο τομής  $C_{ij}$  δεν λαμβάνεται υπ' όψιν.

Γ) Εάν το σύστημα εξισώσεων έχει μοναδική λύση με  $\left|t - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$  ή  $\left|s - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$  τότε μεταξύ των ευθειών που διατρέχουν τις πλευρές  $S_i$  και  $S_j$  υπάρχει αφ' ενός σημείο τομής, ευρίσκεται ωστόσο εκτός των ορίων τουλάχιστον μιας εκ των πλευρών  $S_i$  και  $S_j$ . Συνεπώς και σε αυτή την περίπτωση θεωρείται ότι οι πλευρές  $S_i$  και  $S_j$  δεν τέμνονται.

Δ) Εάν το σύστημα εξισώσεων έχει άπειρο πλήθος λύσεων, οι πλευρές  $S_i$  και  $S_j$  κείνται επί της αυτής ευθείας με τρόπο ώστε να έχουν κοινό τμήμα. Ισοδύναμα υπάρχει γραμμική εξάρτηση μεταξύ των  $t$  και  $s$ . Με την απαίτηση για την ταυτόχρονη ισχύ των  $0 \leq t \leq 1$  και  $0 \leq s \leq 1$ , υπολογίζονται τα σημεία  $C_{ij}^s$  και  $C_{ij}^e$  στην αρχή και στο τέλος του κοινού τμήματος.

### Βήμα 2 Καθορισμός απλών πολυγώνων

Τα σημεία τομής  $C_{ij}$  που ευρέθησαν στο προηγούμενο βήμα παρεμβάλλονται στην ακολουθία των σημείων  $M_i$  του πολυγώνου  $M$ . Με γνωστό το πλήθος των  $C_{ij}$  ορίζεται ο κατευθυντικός γράφος  $G = (V, E)$  του πολυγώνου. Η αναπαράσταση του γράφου γίνεται μέσω της μήτρας γειτνίασης των κόμβων του γράφου οι οποίοι συμπίπτουν με τα  $C_{ij}$ . Δύο σημεία  $C_{ij}$  θεωρείται ότι γειτνιάζουν όταν μεταξύ τους υπάρχει υποακολουθία σημείων  $M_i$  που δεν περιλαμβάνει άλλα  $C_{ij}$ . Από τη μήτρα γειτνίασης είναι δυνατή η εύρεση όλων των στοιχειωδών κυκλικών διαδρομών που ανα δύο θα έχουν κοινό το πολύ έναν κλάδο του γράφου. Κάθε μια τέτοια διαδρομή θα αποτελεί και ένα απλό πολύγωνο.

Στην περίπτωση που η μήτρα είναι συμμετρική, τότε τα απλά πολύγωνα ορίζονται άμεσα α) απο τους δύο κλάδους δύο γειτνιαζόντων κόμβων και β) από τους κλάδους που εκκινούν και τερματίζουν στον ίδιο κόμβο ( στοιχεία διαγωνίου μήτρας

γεινίασης). Συνεπώς ο υπολογισμός των εμβαδών τους μπορεί να γίνει με χρήση της (ΠC-2).



## Θεμελιώδεις έννοιες και θεωρήματα σχετικά με συγκεκριμένες στατιστικές κατανομές και έλεγχο στατιστικών υποθέσεων.

### Κανονική κατανομή (Normal Distribution)

Μια τυχαία μεταβλητή  $X$  λέγεται ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma^2$ , συμβολικά  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σππ)  $f(x)$  είναι της μορφής

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ως γνωστόν γι' αυτή τη συνάρτηση έχει αποδειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Θα επιβεβαιώσουμε ότι αυτή η σππ έχει πράγματι μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma^2$ . Οντως, για κάθε τυχαία μεταβλητή  $X$  με σππ  $f(x)$  ισχύει

$$\text{μέση τιμή } X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu + \mu) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu) f(x) dx + \mu,$$

οπότε με την αντικατάσταση  $z = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \Rightarrow dz = -\frac{(x-\mu)dx}{\sigma^2}$  προκύπτει

ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu) f(x) dx = 2 \int_{\mu}^{+\infty} (x - \mu) f(x) dx = -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\infty} e^z dz = 0.$$

Άρα τελικώς αποδείξαμε ότι: μέση τιμή  $X = \mu$ .

Αναλόγως ισχύει

$$\text{Διασπορά } X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx, \text{ οπότε με την αντικατάσταση } z = \frac{x - \mu}{\sigma},$$

λαμβάνω

$$\text{Διασπορά } X = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z(e^{-\frac{z^2}{2}})' dz \Rightarrow$$

$$\text{Διασπορά } X = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[ z(e^{-\frac{z^2}{2}}) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right\} = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (0 - \sqrt{2\pi}) = \sigma^2$$

Άρα τελικώς αποδείξαμε ότι: διασπορά  $X = \sigma^2$ .

### Τυπική κανονική κατανομή

Εάν η τυχαία μεταβλητή  $Z$  ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διασπορά ένα, δηλαδή  $Z \sim N(0,1)$ , τότε αυτή λέγεται τυπική κανονική κατανομή (standard normal distribution - *snd*). Η μεγάλη χρησιμότητα μια τέτοιας κατανομής έγκειται στο γεγονός ότι οι πιθανότητες αναφορικά με οποιαδήποτε κανονική κατανομή, μπορούν να υπολογιστούν βάσει των πιθανοτήτων της  $Z$ . Πράγματι έστω η  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Τότε η πιθανότητα  $P(X \leq t)$  μπορεί να υπολογιστεί μέσω της  $Z$  ως εξής:

$$P(X \leq t) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{t - \mu}{\sigma}\right). \text{ Αλλά εάν χρησιμοποιηθεί ο τύπος της}$$

κανονικής κατανομής (Π.Σ.1) και τον ορισμό της πιθανότητας  $P$  ισχύει:

$$P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Με την αντικατάσταση  $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$  στο τελευταίο ολοκλήρωμα λαμβάνουμε

$$P(X \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = P(Z \leq \frac{t-\mu}{\sigma})$$

Άρα η γνώση των πιθανοτήτων της  $Z$  παρέχει αμέσως γνώση των πιθανοτήτων της  $X$  μέσω του ανωτέρου τύπου. Γι' αυτό το λόγο όλοι οι στατιστικοί πίνακες και οι περισσότερες βάσεις δεδομένων στους υπολογιστές υπολογίζουν και χρησιμοποιούν ως τυχαία μεταβλητή αναφοράς την  $Z$ .

### Κατανομή $\chi^2$

Έστω μια τυπική κανονική κατανομή,  $X \sim N(0,1)$  και έστω ένας πληθυσμός, μία ιδιότητα/ποσότητα  $I$  του οποίου ακολουθεί την  $X$ . Δειγματοληπτούμε τυχαία  $n$  άτομα του πληθυσμού και μετρούμε την  $I$  για κάθε άτομο οπότε λαμβάνουμε  $n$  μετρήσεις-ποσότητες  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ . Υπολογίζουμε την ποσότητα

$$\chi_{n,1}^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \dots + \chi_n^2$$

Δειγματοληπτούμε τυχαία με επανάθεση, για δεύτερη φορά το συγκεκριμένο πληθυσμό, μετρούμε πάλι την  $I$  των ατόμων του δείγματος, οπότε και λαμβάνουμε μια νέα ποσότητα  $\chi_{n,2}^2$ . Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία για  $i$ -οστή φορά οπότε και λαμβάνουμε την ποσότητα  $\chi_{n,i}^2$ . Αφήνοντας το  $i$  να τείνει στο άπειρο, λαμβάνουμε μια στατιστική κατανομή των  $\chi_{n,1}^2$ , η οποία συμβολίζεται  $X_n^2$  και ονομάζεται κατανομή  $X$  – τετράγωνο (chi-square) με  $n$  βαθμούς ελευθερίας. Για να γράψουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $X$  – τετράγωνο, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση Γάμα, η οποία είναι η αναλυτική επέκταση του  $n!$  και δίνεται από τον τύπο

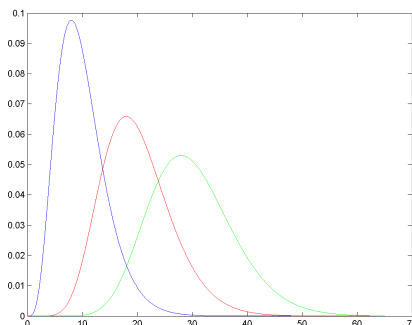
$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (n > 0)$$

Πράγματι όταν το  $n$  είναι ακέραιος  $\Gamma(n) = (n-1)!$  διότι προφανώς  $\Gamma(1) = 1$ , ενώ εύκολα αποδεικνύεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ότι  $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ .

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής  $X$  – τετράγωνο με  $n$  βαθμούς ελευθερίας έχει ως εξής:

$$f_{x^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

γραφική παράσταση της οποίας παρατίθεται κατωτέρω για διάφορα  $n$ .



Εικόνα C-3

Γραφική παράσταση της (σππ) μιας κατανομής  $X$ -τετράγωνο για διάφορους βαθμούς ελευθερίας. Με μπλε χρώμα αναπαρίσταται η σππ με 10 βαθμούς ελευθερίας με κόκκινο χρώμα με 20 βαθμούς και με πράσινο χρώμα με 30 βαθμούς



Σημειώνεται ότι η δειγματική διασπορά  $S_n^2$  ενός τυχαίου δείγματος  $n$  ατόμων όταν ο πληθυσμιακός μέσος  $\mu$  είναι γνωστός δίνεται από τον τύπο

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

Εάν, επιπλέον, ο πληθυσμός αυτός ακολουθεί κανονική κατανομή, τότε, η ποσότητα  $\frac{nS_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2$  ακολουθεί κατανομή  $X$  – τετράγωνο

με  $n$  βαθμούς ελευθερίας δεδομένου ότι όλες οι ποσότητες  $\frac{x_i - \mu}{\sigma}$  ακολουθούν

$N(0,1)$ .

Εάν ο πληθυσμιακός μέσος  $\mu$  είναι άγνωστος τότε η δειγματική διασπορά δίνεται από τον τύπο

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Το  $(n-1)$  στον παρονομαστή εισάγεται αντί του  $n$  για να αποφεύγεται η πόλωση κατά τη στατιστική επεξεργασία των δειγμάτων.

Έστω η τυχαία μεταβλητή  $X$  η οποία ακολουθεί την  $N(\mu, \sigma^2)$ . Παρατηρούμε ότι η ποσότητα

$$Y^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2$$

είναι άθροισμα των τετραγώνων των ποσοτήτων  $y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$ . Επειδή, δε, η

πληθυσμιακή μέση τιμή του  $y_i$  είναι μηδέν ενώ η πληθυσμιακή διασπορά του  $y_i$  τείνει στο ένα όταν  $n \rightarrow \infty$  προκύπτει ότι και τα  $y_i$  οριακά ακολουθούν τυπική

κανονική κατανομή. Η  $Y^2$  είναι τελικά μια κατανομή  $X$  – τετράγωνο, αλλά με  $n-1$  βαθμούς ελευθερίας λόγω του ενός περιορισμού που εισάγει η εξάρτηση του  $\bar{x}$  από τα  $x_i$ . Άρα η δειγματική διασπορά ενός κανονικού πληθυσμού διασυνδέεται άμεσα με την κατανομή  $X$  – τετράγωνο.

## Έλεγχος υποθέσεων σχετικών με πληθυσμιακές μέσες τιμές

### Υποθέσεις για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού από ένα δείγμα του

#### α) Όταν η πληθυσμιακή διασπορά είναι γνωστή

Έστω ότι δειγματοληπτούμε τυχαία  $N$  άτομα από ένα κανονικό πληθυσμό του οποίου γνωρίζουμε τη διασπορά και έστω  $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$  η μέση τιμή του δείγματος.

Διατυπώνουμε την υπόθεση ότι η κανονική κατανομή από την οποία δειγματοληπτήσαμε έχει μέση τιμή  $\mu$ .

Υπάρχει ένα κριτήριο για να αποδεχθούμε ή να απορρίψουμε αυτή την υπόθεση το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

#### Κριτήριο ελέγχου υπόθεσης 1

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την ορθότητα της υπόθεσης:

$$H_0 : \text{η μέση τιμή του πληθυσμού είναι } \mu$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \text{η μέση τιμή του πληθυσμού δεν είναι } \mu$$

Για το σκοπό αυτό, υπολογίζουμε την τιμή της ποσότητας

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

και την συγκρίνουμε με δύο προκαθορισμένες συμμετρικές τιμές  $-t_\alpha$  και  $t_\alpha$  του πεδίου ορισμού της τυπικής κανονικής κατανομής. Εάν η τιμή του  $Z$  ανήκει στο διάστημα  $(-t_\alpha, t_\alpha)$  τότε αποδεχόμαστε την  $H_0$  με ένα βαθμό εμπιστοσύνης

$$P = \int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} f(z) dz, \text{ όπου } f(z) \text{ η σππ της τυπικής κανονικής κατανομής. Στην αντίθετη}$$

περίπτωση απορρίπτουμε την  $H_0$  ή ισοδυνάμως αποδεχόμαστε την εναλλακτική της  $H_1$ , με τον ίδιο βαθμό εμπιστοσύνης.

Η ιδέα που βρίσκεται πίσω από αυτό το κριτήριο είναι αρκετά ευθύγραμμη. Πράγματι, η ποσότητα  $Z$  ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή [Kok01], [Kio01], εάν δε επιλέξουμε τις τιμές  $-t_\alpha, t_\alpha$  ούτως ώστε ο μεγαλύτερος όγκος του κανονικού πληθυσμού να βρίσκεται στο μεταξύ τους διάστημα, τότε θεωρούμε ότι είναι εξαιρετικά απίθανο να πάρουμε ένα δείγμα  $N$  ατόμων από αυτό τον πληθυσμό το οποίο να έχει μέση δειγμιακή τιμή  $\bar{X}$  τέτοια ώστε το  $Z$  να είναι εκτός του

διαστήματος  $(-t_\alpha, t_\alpha)$ . Η πιθανότητα το  $Z$  να βρεθεί εκτός του διαστήματος αυτού είναι

$$\alpha = 2 \int_{t_\alpha}^{\infty} f(z) dz$$

όπου  $f(z)$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής όπως αυτή ορίστηκε ανωτέρω. Είναι προφανές ότι όσο μικρότερο είναι το  $\alpha$  τόσο μεγαλύτερη είναι η δύναμη αυτού του τεστ με την έννοια ότι τόσο περισσότερο είμαστε σίγουροι ότι η  $H_0$  δεν ισχύει εάν βρεθούμε εκτός των ορίων  $-t_\alpha, t_\alpha$ . Το  $\alpha$  λέγεται συνήθως επίπεδο σημαντικότητας και μερικές τυπικές τιμές του είναι οι 0.05, 0.01, 0.001 και 0.0001.

*β) Όταν η πληθυσμιακή διασπορά δεν είναι γνωστή*

Έστω ότι δειγματοληπτούμε τυχαία  $N$  άτομα από ένα κανονικό πληθυσμό του οποίου δεν γνωρίζουμε τη διασπορά και έστω  $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$  μέση τιμή του δείγματος.

Διατυπώνουμε την υπόθεση ότι η κανονική κατανομή από την οποία δειγματοληπτήσαμε έχει μέση τιμή  $\mu$ .

Υπάρχει και σε αυτή την περίπτωση ένα κριτήριο για να αποδεχθούμε ή να απορρίψουμε αυτή την υπόθεση το οποίον διατυπώνεται ως εξής:

*Κριτήριο ελέγχου υπόθεσης 2*

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την ορθότητα της υπόθεσης:

$$H_0 : \text{η μέση τιμή του πληθυσμού είναι } \mu$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \text{η μέση τιμή του πληθυσμού δεν είναι } \mu$$

Για το σκοπό αυτό, υπολογίζουμε την τιμή της ποσότητας

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{N}}$$

όπου  $S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$  η τυπική απόκλιση του δείγματος.

Την ποσότητα  $t$  τη συγκρίνουμε με δύο προκαθορισμένες συμμετρικές τιμές  $-t_\alpha$  και  $t_\alpha$  του πεδίου ορισμού της κατανομής Student με  $N-1$  βαθμούς ελευθερίας. Εάν η

τιμή του  $t$  κείται εντός του διαστήματος  $(-t_\alpha, t_\alpha)$  τότε αποδεχόμεθα την  $H_0$ . Αλλιώς, απορρίπτουμε την  $H_0$  ή ισοδυνάμως αποδεχόμεθα την εναλλακτική της  $H_1$ .

Πάλι, η ιδέα που βρίσκεται πίσω από αυτό το κριτήριο είναι αρκετά ευθύγραμμη. Η ποσότητα  $t$  ακολουθεί κατανομή Student με  $N-1$  βαθμούς ελευθερίας [Kok01], [Kio01], εάν δε επιλέξουμε τις τιμές  $-t_\alpha, t_\alpha$  ούτως ώστε ο μεγαλύτερος όγκος του πληθυσμού Student να βρίσκεται στο μεταξύ τους διάστημα, τότε θεωρούμε ότι είναι εξαιρετικά απίθανο να πάρουμε ένα δείγμα  $N$  ατόμων από αυτό τον πληθυσμό το οποίο να έχει μέση δειγματική τιμή  $\bar{x}$  τέτοια ώστε το  $t$  να είναι εκτός του διαστήματος  $(-t_\alpha, t_\alpha)$ . Η πιθανότητα το  $t$  να βρεθεί εκτός του διαστήματος αυτού είναι  $\alpha = 2 \int_{t_\alpha}^{\infty} f(t) dt$  όπου  $f(t)$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Student με  $N-1$  βαθμούς ελευθερίας όπως αυτή ορίστηκε προηγουμένως. Είναι προφανές ότι όσο μικρότερο είναι το  $\alpha$ , τόσο μεγαλύτερη είναι η δύναμη αυτού του τεστ. Το  $\alpha$  λέγεται συνήθως επίπεδο σημαντικότητας όπως και προηγουμένως.

#### **Υποθέσεις που αφορούν στη διαφορά των μέσων δύο πληθυσμών**

*α) Όταν οι πληθυσμιακές διασπορές είναι γνωστές*

Έστωσαν δύο κανονικοί πληθυσμοί  $P_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  και  $P_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  όπου τα  $\mu_1, \mu_2$  είναι άγνωστα ενώ τα  $\sigma_1, \sigma_2$  είναι γνωστά. Δειγματοληπτούμε τυχαία από τον πληθυσμό  $P_1$  ένα δείγμα  $N_1$  ατόμων και ανεξάρτητα, από τον  $P_2$  ένα δείγμα  $N_2$  ατόμων. Έστωσαν  $\bar{x} = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} x_i$  και  $\bar{y} = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} y_i$  οι μέσες τιμές των δύο δειγμάτων αντίστοιχα. Διατυπώνουμε την υπόθεση ότι οι δύο κανονικοί πληθυσμοί έχουν διαφορά μέσων τιμών μια γνωστή ποσότητα  $\delta\mu = \mu_1 - \mu_2$ . Υπάρχει ένα κριτήριο για να αποδεχθούμε ή να απορρίψουμε την υπόθεση αυτή το οποίον διατυπώνεται ως εξής:

*Κριτήριο ελέγχου υπόθεσης 3*

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την ορθότητα της υπόθεσης:

$H_0$ : οι δύο πληθυσμοί έχουν διαφορά μέσων τιμών  $\delta\mu$

έναντι της εναλλακτικής

$H_1$ : οι δύο πληθυσμοί δεν έχουν διαφορά μέσων τιμών  $\delta\mu$

Για το σκοπό αυτό, υπολογίζουμε την τιμή της ποσότητας

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}}$$

η οποία ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή και τη συγκρίνουμε με δύο προκαθορισμένες συμμετρικές τιμές  $-t_\alpha$  και  $t_\alpha$  του πεδίου ορισμού αυτής της κατανομής. Εάν η τιμή του  $Z$  ανήκει στο διάστημα  $(-t_\alpha, t_\alpha)$  τότε αποδεχόμαστε την  $H_0$ . Αλλιώς, απορρίπτουμε την  $H_0$  ή ισοδυνάμως αποδεχόμαστε την εναλλακτική της  $H_1$ .

Η συλλογιστική πάνω στην οποία βασίζεται το κριτήριο αυτό είναι η ίδια με αυτήν που περιγράφει στα κριτήρια 1 και 2, επειδή η ποσότητα  $Z$  ακολουθεί πάλι τυπική κανονική κατανομή. Η πιθανότητα το  $Z$  να βρεθεί εκτός του διαστήματος  $(-t_\alpha, t_\alpha)$  είναι πάλι  $\alpha = 2 \int_{t_\alpha}^{\infty} f(t) dt$  όπου  $f(t)$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής.

β) Όταν οι πληθυσμικές διασπορές δεν είναι γνωστές

Έστωσαν δύο κανονικοί πληθυσμοί  $P_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  και  $P_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  όπου τόσο τα  $\mu_1, \mu_2$  όσο και τα  $\sigma_1, \sigma_2$  είναι άγνωστα και δεν έχουμε καμία πληροφορία γ' αυτά. Δειγματοληπτούμε τυχαία από τον πληθυσμό  $P_1$  ένα δείγμα  $N_1$  ατόμων και ανεξάρτητα, από τον  $P_2$  ένα δείγμα  $N_2$  ατόμων. Έστωσαν  $\bar{X} = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} X_i$  και

$\bar{Y} = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} Y_i$  οι μέσες τιμές των δύο δειγμάτων αντίστοιχα. Διατυπώνουμε την υπόθεση ότι οι δύο κανονικοί πληθυσμοί έχουν διαφορά μέσων τιμών μια γνωστή ποσότητα  $\delta\mu = \mu_1 - \mu_2$ . Υπάρχει ένα κριτήριο για να αποδεχθούμε ή να απορρίψουμε την υπόθεση αυτή το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

*Κριτήριο ελέγχου υπόθεσης 4*

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την ορθότητα της υπόθεσης:

$$H_0: \text{οι δύο πληθυσμοί έχουν διαφορά μέσων τιμών } \delta\mu$$

έναντι της εναλλακτικής

$H_1$ : οι δύο πληθυσμοί δεν έχουν διαφορά μέσων τιμών  $\delta\mu$

Για το σκοπό αυτό, υπολογίζουμε την τιμή της ποσότητας

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}} \quad (ΠC-3)$$

$$\text{όπου } S_1 = \sqrt{\frac{1}{N_1 - 1} \sum_{i=1}^{N_1} (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{και} \quad S_2 = \sqrt{\frac{1}{N_2 - 1} \sum_{i=1}^{N_2} (y_i - \bar{y})^2}$$

είναι οι τυπικές αποκλίσεις των δύο δειγμάτων. Η ποσότητα  $t$  ακολουθεί κατανομή Student με  $n$  βαθμούς ελευθερίας όπου  $n$  είναι το ακέραιο μέρος της ποσότητας

$$\frac{\left(\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{N_1}\right)^2}{N_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{N_2}\right)^2}{N_2 - 1}}$$

Όταν διατυπώνουμε την υπόθεση ότι η διαφορά των δύο πληθυσμιακών μέσων  $\mu_1 - \mu_2$  είναι γνωστή, τότε η τιμή της ποσότητας  $t$  στην

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}} \quad (ΠC-3)$$

είναι γνωστή. Την τιμή αυτή τη συγκρίνουμε με δύο προκαθορισμένες συμμετρικές τιμές  $-t_\alpha$  και  $t_\alpha$  του πεδίου ορισμού της κατανομής Student με  $n$  βαθμούς ελευθερίας και εάν αυτή ανήκει στο διάστημα  $(-t_\alpha, t_\alpha)$  τότε αποδεχόμαστε την  $H_0$ . Αλλιώς, απορρίπτουμε την  $H_0$  ή ισοδυνάμως αποδεχόμαστε την εναλλακτική της  $H_1$ .

Η συλλογιστική πάνω στην οποία βασίζεται το κριτήριο αυτό είναι η ίδια με αυτήν που περιγράφει στο κριτήριο 2. Η πιθανότητα το  $t$  να βρεθεί εκτός του διαστήματος  $(-t_\alpha, t_\alpha)$  είναι πάλι  $\alpha = 2 \int_{t_\alpha}^{\infty} f(t) dt$  όπου  $f(t)$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Student με  $n$  βαθμούς ελευθερίας. Εκ νέου όσο μικρότερη είναι η τιμή του  $\alpha$ , τότε εάν το  $t$  βρεθεί εκτός του διαστήματος

$(-t_\alpha, t_\alpha)$ , τόσο περισσότερο βέβαιοι είμαστε ότι ισχύει η  $H_1$  δηλαδή ότι η  $H_0$  απορρίπτεται.

## Αναφορές -Βιβλιογραφία

[Arun01] - K. S. Arun T. S. Huang S. D. Blostein "Least Squares Fitting of Two 3-D Point Sets, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence Volume 9, Issue 5 Pages: 698 – 700, (September 1987)

[Besl01] - P. J. Besl and N. D. McKay, "A method for registration of 3-D shapes," IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 14, pp. 239–256, 1992

[Canny01] - Canny, John, "A Computational Approach to Edge Detection," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-8, No. 6, 1986, pp. 679-698.

[Del01] - B. Delaunay: Sur la sphère vide, Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh Nauk, 7:793–800, 1934

[Horn01] - B. K. P. Horn, "Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions", Journal of the Optical Society of America A, 4(4):629 - 642, April 1987

[Horn02] - B. K. P. Horn, H. M. Hilden, and Sh. Negahdaripour, "Closed-form solution of absolute orientation using orthonormal matrices", Journal of the Optical Society of America A, 5(7):1127 - 1135, July 1988

[Jia01] - Jianbo Shi and Jitendra Malik (2000): "Normalized Cuts and Image Segmentation", IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, pp 888-905, Vol. 22, No. 8

[Kiox01] Πέτρος Α. Κιόχος «Επαγωγική Στατιστική» Σύγχρονη Εκδοτική Φεβρουάριος 1989

[Kok01] Γ. Κοκολάκης, Ι. Σπηλιώτης «Εισαγωγή στη θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική» Εκδόσεις Συμεών Έκδοση 2η Μάιος 1991

[Leo01] - Leo Grady (2006): "Random Walks for Image Segmentation", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, pp. 1768-1783, Vol. 28, No. 11

[Nel01] - Nelder, J. A. and R. Mead, "A simplex method for function minimization", Computer Journal, Vol. 7, pp. 308-313, 1965

[Pap01].- C. Papaodysseus, M. Exarhos, M. Panagopoulos, P. Roussopoulos, C.Triantafillou, Th. Panagopoulos "IMAGE AND PATTERN ANALYSIS FOR 1650 B.C.WALL PAINTINGS STUDY AND RECONSTRUCTION" , IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, Volume: 38, Issue: 4, July 2008



- [Pap02] – C.Papaodysseus, St. Tracy, P. Rousopoulos, M. Panagopoulos, D. Fragoulis, D. Dafi, Th. Panagopoulos. “Identifying Hands on Ancient Athenian Inscriptions: First Steps towards a Digital Approach”
- [Pap03] – M. Panagopoulos, C.Papaodysseus, P. Rousopoulos, D. Dafi, St. Tracy. “Automatic Writer Identification of Ancient Greek Inscriptions”, Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on May 2009
- [Pap04] - Th. Panagopoulos, C. Papaodysseus, M. Exarhos, C. Triantafillou, G. Roussopoulos, P. Roussopoulos. “Prehistoric Wall-Paintings Reconstruction Using Image Pattern Analysis And Curve Fitting”, 4th WSEAS Int.Conf. on OPTICS, PHOTONICS, LASERS and IMAGING (ICOPLI 2004)
- [Pap05] - C. Papaodysseus., M. Panagopoulos, P. Rousopoulos, G. Galanopoulos & C.Doumas “Geometric templates used in the Akrotiri (Thera) wall-paintings” Antiquity Volume 82, Number 316, Page 401-408, 2008
- [Pap06] - C. Papaodysseus, Ath. Panagopoulos, M. Exarhos, D. Fragoulis, G. Roussopoulos, P. Roussopoulos, G. Galanopoulos, C. Triantafillou, A. Vlahopoulos, C. Doumas, Distinct, Late Bronze Age (c. 1650 BC) Wall Paintings of Akrotiri, Thera, Comprising Advanced Geometrical Patterns, Archaeometry, Oxford University, Blackwell Publishing, Vol. 48, Issue 1, pp. 97-114, 2006
- [Walk01] - M. W. Walker, L. Shao, and R. A. Volz, “Estimating 3-d location parameters using dual number quaternions”, VGIP: Image Understanding, 54:358 - 367, November 1991