



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

## Υπολογιστική Αεροδυναμική Ανάλυση Φωνητικού Σωλήνα με Εξισώσεις Navier Stokes

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

ΙΩΑΝΝΗ Β. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΥ  
Διπλωματούχου Χημικού Μηχανικού ΕΜΠ

Αθήνα, Νοέμβριος 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών

# Υπολογιστική Αεροδυναμική Ανάλυση Φωνητικού Σωλήνα με Εξισώσεις Navier Stokes

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

**ΙΩΑΝΝΗ Β. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΥ**

Διπλωματούχου Χημικού Μηχανικού ΕΜΠ

**Συμβουλευτική Επιτροπή:** Καθ. Σωκράτης Τσαγγάρης (επιβλέπων)  
Αν. Καθ. Δημήτριος Μαθιουλάκης  
Καθ. Πέτρος Μαραγκός

**Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή:**

.....  
Σωκράτης Τσαγγάρης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.  
(Επιβλέπων)

.....  
Δημήτριος Μαθιουλάκης  
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Πέτρος Μαραγκός  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Γρηγόρης Σταϊνχάουερ  
Ερευνητής Α', Ινστιτούτο  
Επεξεργασίας του Λόγου

.....  
Αλέξανδρος Ποταμιάνος  
Αν. Καθηγητής, Πολυτεχνείο  
Κρήτης

.....  
Σπυρίδων Βουτσινάς  
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Βασίλειος Ριζιώτης  
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2011

Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ  
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ



ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ



Ελλάδα

ανταγωνιστική

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Η παρούσα διδακτορική διατριβή πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του προγράμματος ΠΕΝΕΔ – 2003 της Γενικής Γραμματείας Έρευνας και Τεχνολογίας. Το πρόγραμμα χρηματοδοτήθηκε κατά 80% από την Ευρωπαϊκή Ένωση και κατά 20% από το Ελληνικό Δημόσιο.

This Ph.D. thesis was supported by grant PENED2003 of the Greek Ministry of Development - GSRT. It was cofinanced by E.U. - European Social Fund (80%) and National Resources (20%).

.....  
ΙΩΑΝΝΗΣ Β. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

Υποψήφιος Διδάκτωρ, Χημ. Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Copyright © Ιωάννης Παπαγεωργακόπουλος, 2011.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ .....</b>	<b>Π-1</b>
1 ΣΥΝΟΨΗ ΤΩΝ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΧΩΝ .....	Π-1
2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΕΡΑΚΟΥΣΤΙΚΗ (ΥΑΑ).....	Π-1
2.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ .....	Π-1
3 ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΣΤΟ ΦΩΝΗΤΙΚΟ ΣΩΛΗΝΑ.....	Π-4
3.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ .....	Π-4
4 ΣΤΟΧΟΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΕΣ.....	Π-5
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	Π-6
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΑΕΡΑΚΟΥΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ .....</b>	<b>1-1</b>
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	1-1
1.2 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ .....	1-2
1.2.1 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ .....	1-2
1.2.2 ΤΟ ΑΚΟΥΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ .....	1-2
1.2.3 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ .....	1-3
1.3 ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ .....	1-4
1.3.1 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΑΛΛΟΜΕΝΗ ΣΦΑΙΡΑ.....	1-4
1.3.2 ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΑΛΛΟΜΕΝΗ ΣΦΑΙΡΑ.....	1-5
1.4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ .....	1-5
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	1-8
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. ΡΗΤΟ ΣΧΗΜΑ MC CORMACK.....</b>	<b>A-1</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΕΙΣ 1 .....</b>	<b>B-1</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ C. ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΕΙΣ 2 .....</b>	<b>C-1</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΕΝΑΣ ΑΥΣΤΗΡΟΣ (RIGOROUS) ΑΚΟΥΣΤΙΚΟΣ ΕΠΙΛΥΤΗΣ .....</b>	<b>2-1</b>
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	2-2
2.2 ΔΙΕΠΟΥΣΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.....	2-4
2.2.1 Η ΑΝΑΛΟΓΙΑ LIGHTHILL.....	2-4
2.3 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.....	2-5
2.3.1 ΤΟΠΙΚΕΣ ABC'S.....	2-5
2.3.2 ΠΛΗΡΩΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΕΝΟ ΣΤΡΩΜΑ .....	2-7
2.3.3 ΣΥΝΘΗΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ .....	2-9
2.4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ .....	2-9
2.4.1 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.....	2-9
2.4.2 ΧΩΡΙΚΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ – ΣΥΜΠΑΓΗ ΣΧΗΜΑΤΑ .....	2-10
2.4.3 ΧΕΙΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΥΝΟΡΟΥ .....	2-11
2.4.4 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ .....	2-11
2.4.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ .....	2-12
2.4.6 ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ .....	2-14
2.4.7 ΧΩΡΙΚΟ ΦΙΛΤΡΟ .....	2-15
2.4.8 ΧΡΟΝΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ.....	2-16

2.5	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.....	2-17
2.5.1	ΔΙΑΔΟΣΗ ΑΠΛΟΥ ΓΚΑΟΥΣΙΑΝΟΥ ΠΑΛΜΟΥ .....	2-17
2.5.2	ΣΥΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟ ΖΕΥΓΟΣ ΣΤΡΟΒΙΛΩΝ .....	2-20
2.5.3	ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ ΣΚΕΔΑΣΗ ΑΠΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΕΜΠΟΔΙΟ .....	2-24
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	2-28
	<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΧΩΡΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ .....</b>	<b>A-1</b>

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΑΕΡΑΚΟΥΣΤΙΚΗ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN ..... 3-1**

3.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	3-1
3.2	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ.....	3-2
3.2.1	ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ Lighthill .....	3-3
3.2.2	ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN.....	3-5
3.3	ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ – ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ .....	3-7
3.3.1	ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΧΡΟΝΟΥ ΔΕΚΤΗ (RECEPTION TIME ALGORITHM) .....	3-7
3.3.2	ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΧΡΟΝΟΥ ΕΚΠΟΜΠΗΣ (EMISSION TIME ALGORITHM) .....	3-8
3.4	ΔΙΠΟΛΙΚΟΣ ΗΧΟΣ ΑΠΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ ΣΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ .....	3-9
3.4.1	ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΡΟΗΣ / ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.....	3-9
3.4.2	ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ / ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΛΕΓΜΑ .....	3-10
3.4.3	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ .....	3-12
3.5	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	3-17
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	3-19

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΤΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ ΕΝΑΣ ΑΠΛΟΣ FORMANT ΣΥΝΘΕΤΗΣ ..... 4-1**

4.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	4-1
4.2	ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ .....	4-2
4.2.1	ΔΙΕΠΟΥΣΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.....	4-2
4.2.2	ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ .....	4-3
4.2.3	ΑΣΘΕΝΗΣ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ.....	4-3
4.2.4	ΧΩΡΙΚΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ .....	4-4
4.2.5	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟΝ ΦΩΝΗΤΙΚΟ ΣΩΛΗΝΑ .....	4-5
4.3	ΑΝΑΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΦΩΝΗΣ.....	4-7
4.3.1	ΣΥΝΘΕΣΗ ΑΠΟ FORMANTS.....	4-9
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	4-16

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΔΙΟΥ ΡΟΗΣ ΜΕ ΤΟ FLUENT ..... 5-1**

5.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	5-1
5.2	ΜΗ ΔΟΜΗΜΕΝΑ ΠΛΕΓΜΑΤΑ.....	5-2
5.3	ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΕ ΤΟ FLUENT .....	5-7
5.4	Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΟΓΚΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ .....	5-9
5.4.1	ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ .....	5-9
5.4.2	ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ.....	5-11
5.5	ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΑΠΛΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΡΟΗΣ ΣΕ ΑΓΩΓΟ .....	5-13
5.5.1	ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΛΕΠΤΟΜΕΡΕΙΕΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....	5-13
5.5.2	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΛΕΓΜΑ .....	5-14

5.5.3	ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ.....	5-15
5.5.4	ΣΥΛΛΟΓΗ - ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	5-16
5.5.5	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ .....	5-17
5.6	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	5-21
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	5-22

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΚΑΙ Η ΡΟΗ ΣΤΟΝ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟ**

### **ΦΩΝΗΤΙΚΟ ΣΩΛΗΝΑ ..... 6-1**

6.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	6-1
6.2	ΑΝΑΤΟΜΙΑ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟΥ ΦΩΝΗΤΙΚΟΥ ΣΩΛΗΝΑ .....	6-6
6.2.1	ΥΠΟΓΛΩΤΤΙΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ.....	6-7
6.2.2	Ο ΛΑΡΥΓΓΑΣ ΚΑΙ ΤΑ ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΟΡΓΑΝΑ .....	6-8
6.2.3	ΤΟ ΥΠΕΡΓΛΩΤΤΙΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ – ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΘΡΩΤΩΝ.....	6-13
6.3	ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΟΥ ΦΩΝΗΤΙΚΟΥ ΣΩΛΗΝΑ.....	6-14
6.3.1	Η ΠΗΓΗ.....	6-14
6.3.2	ΤΟ ΦΙΛΤΡΟ .....	6-19
6.3.3	ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΣ ΣΩΛΗΝΑΣ.....	6-20
6.4	ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΤΟΥ PORTNOFF .....	6-23
6.4.1	ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.....	6-23
6.4.2	ΔΟΝΟΥΜΕΝΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ .....	6-26
6.4.3	ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΣΤΑ ΧΕΙΛΗ.....	6-27
6.4.4	Η ΕΞΙΣΩΣΗ WEBSTER .....	6-28
6.5	ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER – STOKES ΚΑΙ Η ΡΟΗ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ.....	6-28
6.5.1	Η ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ PORTNOFF .....	6-30
6.5.2	ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER STOKES.....	6-31
6.5.3	ΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΛΕΓΜΑ .....	6-32
6.5.4	ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ ΚΑΙ ΟΙ ΑΚΟΥΣΤΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ .....	6-34
6.6	ΑΚΟΥΣΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ .....	6-37
6.6.1	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΛΕΠΤΟΜΕΡΕΙΕΣ .....	6-37
6.6.2	ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΥ ΣΩΛΗΝΑ.....	6-39
6.6.3	ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ /U/.....	6-40
6.7	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	6-43
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	6-44

### **ΕΠΙΛΟΓΟΣ ..... E-1**

1	ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ .....	E-1
2	ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ.....	E-1
3	ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ .....	E-3
4	ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΩΝ ΑΝΑΦΟΡΩΝ .....	E-4

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1-1. Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης για το 1D πρόβλημα και διάφορους αριθμούς Mach .....	1-6
Εικόνα 1-2. Μεταβολές πυκνότητας (εικόνα και ισοσταθμικές καμπύλες) για το 2D πρόβλημα για $M=0.05$ και $Str=0.3$ .....	1-6
Εικόνα 1-3. Ακτινικά προφίλ μεταβολών πυκνότητας για το 2D πρόβλημα και σύγκριση με την αναλυτική λύση.....	1-7
Εικόνα 2-1. Κυματική διάδοση σε ελεύθερο χώρο.....	2-4
Εικόνα 2-2. Τετραγωνικό χωρίο και PML .....	2-7
Εικόνα 2-3. Ιακωβιανός μετασχηματισμός .....	2-9
Εικόνα 2-4. (α)Πραγματικό και (β)Φανταστικό μέρος φασματικής συνάρτησης για την $1^n$ παράγωγο.....	2-14
Εικόνα 2-5. (α)Εύρος και (β)φάση του σχετικού παράγοντα ενίσχυσης .....	2-16
Εικόνα 2-6. Κατανομές πίεσης στην περίπτωση του PML.....	2-19
Εικόνα 2-7. Προφίλ πίεσης κατά $x$ για $y=0$ .....	2-19
Εικόνα 2-8. Σύγκριση απορροφητικότητας ABC και PML.....	2-20
Εικόνα 2-9. Σύγκριση ακρίβειας ABC και PML .....	2-20
Εικόνα 2-10. Σκαρίφημα ζεύγους συστρεφομένων στροβίλων .....	2-20
Εικόνα 2-11. Πεδία ταχυτήτων στους στροβίλους με/χωρίς μοντέλο πυρήνα .....	2-21
Εικόνα 2-12. Ακουστικές πηγές (α) ισοσταθμικές και (β) επιφάνεια για $t=120$ .....	2-23
Εικόνα 2-13. Πεδία ακουστικής πίεσης για (α) $t=120$ και (β) $t=180$ .....	2-23
Εικόνα 2-14. Χρονική εξέλιξη του φαινομένου.....	2-24
Εικόνα 2-15. Προφίλ πίεσης κατά τον $x$ – ημιάξονα.....	2-24
Εικόνα 2-16. Χρονοσειρά πίεσης στο $(x,y)=(0,80)$ .....	2-24
Εικόνα 3-1. Κυκλικός κύλινδρος σε ομοιόμορφη ροή.....	3-10
Εικόνα 3-2. Άποψη υπολογιστικού πλέγματος κοντά στον κύλινδρο. ....	3-11
Εικόνα 3-3. Ροϊκές γραμμές για $Re=40$ .....	3-12
Εικόνα 3-4. Χρονοσειρά μεταβολής συντελεστών ανωστικής δύναμης και οπισθέκουσας.....	3-13
Εικόνα 3-5. Ροϊκές γραμμές τη στιγμή μέγιστης και ελάχιστης ανωστικής δύναμης (κοντά) ..	3-13
Εικόνα 3-6. Ροϊκές γραμμές τη στιγμή μέγιστης και ελάχιστης ανωστικής δύναμης (μακριά) ..	3-13
Εικόνα 3-7. Ισοσταθμικές του στροβιλώδους κοντά στον κύλινδρο .....	3-14
Εικόνα 3-8. Ισοσταθμικές του στροβιλώδους μακριά από τον κύλινδρο .....	3-14
Εικόνα 3-9. Ανάλυση συχνότητας σημάτων συντ. ανωστικής δύναμης και οπισθέκουσας....	3-15
Εικόνα 3-10. Ακουστικές πηγές κοντά στον κύλινδρο (μέγιστη κ. ελάχιστη αν. δύναμη).....	3-15
Εικόνα 3-11. Χρονοσειρές ακουστικής πίεσης και ανάλυση συχνότητας για $M=0.003$ .....	3-16

Εικόνα 3-12. Χρονοσειρές ακουστικής πίεσης και ανάλυση συχνότητας για $M=0.1$ .....	3-17
Εικόνα 4-1. Φώνημα – Γεωμετρία – Διακριτοποίηση – Μετρική ποιότητας .....	4-6
Εικόνα 4-2. Φώνημα – Κατανομή ακουστικής πίεσης (στα 4990Hz) – Εκτίμηση συνάρτησης μεταφοράς – Συντονισμοί.....	4-7
Εικόνα 4-3. Κατηγοριοποίηση συνθετών ανθρώπινης φωνής.....	4-8
Εικόνα 4-4. Παράλληλη και εν σειρά σύνδεση των φίλτρων συντονισμού .....	4-10
Εικόνα 4-5. Ο συνθέτης του Klatt (1980) .....	4-11
Εικόνα 4-6. Διαδικασία εύρεσης των formant φίλτρων.....	4-12
Εικόνα 4-7. Συνθετικά σήματα για τις τέσσερις περιπτώσεις γεωμετριών φωνητικού σωλήνα .....	4-13
Εικόνα 4-8. Συχνοτικές αποκρίσεις των formant φίλτρων σε σχέση με τη συνολική .....	4-14
Εικόνα 5-1. Δεικτοδότηση γειτονικών κελιών σε μη δομημένο και δομημένο πλέγμα. ....	5-3
Εικόνα 5-2. Δεικτοδότηση δομημένου πλέγματος – Σάρωση κατά γραμμές.....	5-3
Εικόνα 5-3. Δεικτοδότηση δομημένου πλέγματος – Σάρωση κατά στήλες.....	5-4
Εικόνα 5-4. Γεωμετρικοί τύποι υποστηριζόμενων στοιχείων.....	5-5
Εικόνα 5-5. Δομημένο (τύπου C) και μη δομημένο πλέγμα γύρω από αεροτομή.....	5-6
Εικόνα 5-6. Δομημένο πλέγμα τύπου O και C αντίστοιχα .....	5-6
Εικόνα 5-7. Δομημένο πλέγμα πολλαπλών διαμερίσεων .....	5-6
Εικόνα 5-8. Μη δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων γύρω από αεροτομή.....	5-7
Εικόνα 5-9. Υβριδικό πλέγμα τριγωνικών / τετράπλευρων στοιχείων .....	5-7
Εικόνα 5-10. Όγκοι ελέγχου στο μετατοπισμένο πλέγμα .....	5-11
Εικόνα 5-11. Όγκοι ελέγχου στο μετατοπισμένο και μη πλέγμα.....	5-13
Εικόνα 5-12. Γεωμετρία στενωτικού αγωγού .....	5-13
Εικόνα 5-13. Τμήματα πλέγματος στην είσοδο, στένωση και έξοδο .....	5-15
Εικόνα 5-14. Διάλογος για την επιβολή οριακής συνθήκης ταχύτητας εισόδου .....	5-15
Εικόνα 5-15. Εκτέλεση συνάρτησης χρήστη κατά βούληση .....	5-16
Εικόνα 5-16. Ιστορικά σύγκλισης για $W_t = 1$ και $W_t = 2$ αντίστοιχα.....	5-17
Εικόνα 5-17. Ανύσματα ταχύτητας για $W_t = 1$ και $W_t = 2$ αντίστοιχα.....	5-17
Εικόνα 5-18. Ροϊκές γραμμές για $W_t = 1$ και $W_t = 2$ αντίστοιχα.....	5-18
Εικόνα 5-19. Κατανομές πίεσης στον αγωγό για $W_t = 1$ και $W_t = 2$ αντίστοιχα .....	5-19
Εικόνα 5-20. Συγκρίσεις κατανομών πίεσης στο κάτω τοίχωμα του αγωγού για $W_t = 1$ και $W_t = 2$ .....	5-20
Εικόνα 6-1. Όψη του κατωτέρου αναπνευστικού συστήματος.....	6-7
Εικόνα 6-2. Εξωτερική όψη των μυών και χόνδρων του λάρυγγα .....	6-8
Εικόνα 6-3. Οριζόντια όψη των χόνδρων του λάρυγγα .....	6-10



Εικόνα 6-4. Πλάγια όψη των χόνδρων του λάρυγγα .....	6-10
Εικόνα 6-5. Όψη των φωνητικών χορδών από πάνω.....	6-11
Εικόνα 6-6. Φωνητικές χορδές στις φάσεις Απαγωγής κ. Προσαγωγής.....	6-11
Εικόνα 6-7. Όψη του λάρυγγα σε τομή.....	6-12
Εικόνα 6-8. Πλάγια όψη του φωνητικού σωλήνα σε τομή.....	6-14
Εικόνα 6-9. Η ογκομετρική παροχή στη γλωττίδα και η παράγωγός της.....	6-15
Εικόνα 6-10. Τυπικές θέσεις και σχήμα των φωνητικών χορδών σε ένα κύκλο ταλάντωσης <sup>[34]</sup> .....	6-17
Εικόνα 6-11. Πραγματικό γλωττογράφημα ενήλικα ομιλητή <sup>[40]</sup> .....	6-17
Εικόνα 6-12. Φάσμα παλμού LF χωρίς και με φάση επιστροφής.....	6-18
Εικόνα 6-13. Πλάγια όψη και διατομές φωνητικού σωλήνα σε καθορισμένες θέσεις <sup>[5]</sup> .....	6-19
Εικόνα 6-14. Ομοιόμορφος σωλήνας και το ηλεκτρικό ανάλογό του .....	6-20
Εικόνα 6-15. Συντονισμοί ομοιόμορφου σωλήνα με ανοιχτό άκρο, με και χωρίς απώλειες.....	6-22
Εικόνα 6-16. Στάσιμα κύματα σε αγωγό 0,177 m, κλειστό αριστερά .....	6-22
Εικόνα 6-17. Αγωγός μεταβλητής διατομής με δονούμενα τοιχώματα.....	6-23
Εικόνα 6-18. Στοιχειώδης όγκος ελέγχου μεταβλητής διατομής.....	6-24
Εικόνα 6-19. Κατάταξη Μεθόδων Διαχωρισμού Ακουστικού Προβλήματος.....	6-30
Εικόνα 6-20. Το πρόβλημα του στρεβλού πλέγματος. Αρχικό πλέγμα και κατανομή μετρικής στρεβλότητας.....	6-33
Εικόνα 6-21. Πλέγμα με διακριτοποίηση κατά διαμερίσματα και μετρική στρεβλότητας. ....	6-34
Εικόνα 6-22. Κυματομορφές ρευστοδυναμικών μεγεθών στις πρώτες 25 περιόδους.....	6-34
Εικόνα 6-23. Φάσμα ισχύος της πίεσης στο κέντρο του φωνητικού σωλήνα .....	6-35
Εικόνα 6-24. Προφίλ οριζόντιας ταχύτητας στην έξοδο του σωλήνα μέσα σε μια περίοδο. ....	6-36
Εικόνα 6-25. Κατανομή εύρους ταχύτητας στο σωλήνα μέσα σε μια περίοδο .....	6-36
Εικόνα 6-26. Κατανομή ακουστικών πηγών (όρος Lighthill) .....	6-37
Εικόνα 6-27. Κρουστική απόκριση ομοιόμορφου σωλήνα .....	6-39
Εικόνα 6-28. Κρουστική απόκριση ομοιόμορφου σωλήνα – πρώτα δείγματα.....	6-39
Εικόνα 6-29. Απόκριση συχνότητας ομοιόμορφου σωλήνα.....	6-40
Εικόνα 6-30. Απόκριση συχνότητας ομοιόμορφου σωλήνα – χαμηλές συχνότητες .....	6-40
Εικόνα 6-31. Συνάρτηση εμβαδού για το φώνημα /u/ .....	6-41
Εικόνα 6-32. Ακουστικές πηγές κατά μήκος του σωλήνα σε μια περίοδο .....	6-41
Εικόνα 6-33. Ακουστική πίεση στα χείλη χωρίς τετραπολικές πηγές .....	6-41
Εικόνα 6-34. Ακουστική πίεση στα χείλη με τετραπολικές πηγές.....	6-42
Εικόνα 6-35. Φάσμα ισχύος των σημάτων με και χωρίς τετραπολικούς όρους πηγής.....	6-42
Εικόνα 6-36. LPC φάσμα των σημάτων με και χωρίς τετραπολικούς όρους πηγής.....	6-42

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα φαινόμενα κυματικής διάδοσης παίζουν σημαντικότατο ρόλο σε πολλές επιστημονικές περιοχές εφαρμογών μηχανικού, όπως αερακουστική, ηλεκτρομαγνητισμός, κβαντική μηχανική, σεισμολογία, αλλά και περιοχές εφαρμογών βιολογίας, όπως ροή αίματος στις αρτηρίες και παραγωγή φωνής. Γνωρίζοντας εκ των προτέρων τον τρόπο που τα κύματα δημιουργούνται, διαδίδονται, διαθλώνται, ανακλώνται και διαχέονται σε κάποιο μέσο, επιτρέπει στους μηχανικούς να λάβουν κρίσιμες αποφάσεις για ποικίλα θέματα, όπως για παράδειγμα για τη βέλτιστη τοποθέτηση συσκευών (κεραίες), για την κατασκευή ασφαλών κτιρίων και για το βέλτιστο ακουστικό σχεδιασμό μεγάλων χώρων.

Ο επιστημονικός κλάδος της αερακουστικής μελετά την παραγωγή και τη διάδοση ήχου οφειλομένου στην αυτή καθαυτή κίνηση του αέρα ή στην επίδραση του τελευταίου με στερεές ή κινούμενες επιφάνειες. Η αδιάρρηκτη σύνδεση της αερακουστικής με συγγενείς επιστημονικές περιοχές όπως η μηχανική των ρευστών και η κυματική εξηγεί σε ένα βαθμό την έλλειψη ολοκληρωμένης επιστημονικής θεωρίας για την παραγωγή του ήχου. Παρόλα αυτά και για τις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές η αερακουστική ανάλυση βασίζεται στις λεγόμενες Ακουστικές Αναλογίες, οι οποίες δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια αναδιάταξη των εξισώσεων της μηχανικής ρευστών στη γνωστή από τη φυσική κυματική εξίσωση. Η τελευταία προτάθηκε για πρώτη φορά το 1952 από τον Sir James Lighthill, σε μια προσπάθεια να υπολογιστούν τα παραγόμενα επίπεδα θορύβου από αεροπορικού τύπου στροβιλοκινητήρες. Η υπολογιστική αερακουστική (ΥΑΑ) ασχολείται με την κατασκευή αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων και είναι και αυτή στενά συνδεδεμένη με τη συγγενή περιοχή της υπολογιστικής μηχανικής ρευστών (ΥΡΜ).

Στα πλαίσια της παρούσης γίνεται μια προσπάθεια κάλυψης των περισσότερων τάσεων που επικρατούν στο χώρο της ΥΑΑ με απώτερο στόχο την εφαρμογή αυτών στο πρόβλημα της παραγωγής ανθρώπινης φωνής. Αναλύθηκαν και κατασκευάστηκαν τριών τύπων αερακουστικοί επιλύτες στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας σε δύο και μία χωρικές διάστασεις, ενώ ακόμα μελετήθηκε και το πεδίο ροής στον ανθρώπινο φωνητικό σωλήνα με χρήση ενός εμπορικού ρευστοδυναμικού επιλύτη. Παράλληλα επιχειρήθηκε μια καταγραφή και ανάλυση του μηχανισμού παραγωγής της ανθρώπινης φωνής από ανατομική – φυσιολογική σκοπιά. Επιλύθηκαν διάφορα προβλήματα διάδοσης ακουστικών διαταραχών με και χωρίς παράλληλο ροϊκό πεδίο. Τέλος έγινε προσπάθεια εφαρμογής δύο ακουστικών μοντέλων στον ανθρώπινο φωνητικό σωλήνα στο πεδίο της συχνότητας και στο πεδίο του χρόνου.

# ABSTRACT

Wave propagation phenomena play an important role in many engineering fields such as aeroacoustics, blood flow in arteries, phonation, electromagnetism, quantum mechanics and seismology. Knowing a priori the mechanism waves are generated, propagated, scattered, reflected and/or dispersed in some medium allows engineers to take decisions about the topological placement of devices (antennas), the construction of safe buildings and the optimal acoustic design of rooms/halls.

The scientific branch of aeroacoustics studies the generation and the propagation of sound inducted by the movement of air itself or by the interaction of the last with rigid or moving surfaces. The indissoluble link of aeroacoustics with relative scientific areas like Fluid Mechanics and Wave Physics explains up to a certain point the lack of establishment of a complete scientific theory for the generation of noise by aerodynamic flows. However and for applications with practical interest aeroacoustic analysis relies upon the so called Analogies, which are nothing but a rearrangement of the fluid mechanics conservation equations to the well known from physics wave equation. The last one was first proposed by Sir James Lighthill at 1952 in an attempt to calculate the noise levels generated from aviation type turbine engines. The branch of Computational Aeroacoustics (CAA) on the other hand is the application of numerical methods and computers to find approximate solutions of the governing equations for specific aeroacoustic problems.

In the present work an attempt was made to cover the most trends in the area of CAA, while the ultimate goal was the use of a similar model for the study of sound generation and radiation in the human vocal tract. Three types of aeroacoustic solvers were build in one and two spatial dimensions and for the time and frequency domain, while a parallel study of the flow field in the human vocal tract was attempted. Furthermore an analysis of the voice production mechanism from a anatomical and physiological point of view was made. Several numerical problems concerning the propagation, diffraction and scattering of acoustical disturbances with and without a flow field were also solved. Finally two acoustical models were selected and applied to the human vocal tract problem both in the time and the frequency domain.

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

## 1 ΣΥΝΟΨΗ ΤΩΝ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΧΩΝ

Τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα κατά την παραγωγή της ανθρώπινης φωνής είναι εκ των πραγμάτων σύνθετα και πολύπλοκα. Η κατανόηση και διερεύνησή τους απαιτεί την ταυτόχρονη συνεισφορά γνώσης και στοιχείων από πολλές ερευνητικές περιοχές, οι οποίες μπορεί να είναι και εντελώς ξένες μεταξύ τους. Έτσι για την κατανόηση της φυσικής λειτουργίας της παραγωγής φωνής απαιτείται γνώση *ανατομίας* του άνω και κάτω αναπνευστικού συστήματος σε συνδυασμό με γνώσεις *μηχανικής συνεχούς μέσου*, για την μελέτη της ροής μέσα στον φωνητικό σωλήνα απαιτείται η συνεισφορά της *μηχανικής ρευστών*, ενώ για την μελέτη της διάδοσης των ηχητικών κυμάτων είναι απαραίτητη η γνώση *αερακουστικής* και *κυματικής*. Τέλος για την ψηφιακή αναπαράσταση – μοντελοποίηση απαιτούνται τουλάχιστο γνώσεις *επεξεργασίας σήματος και συστημάτων*. Σίγουρο είναι ότι υπό το πρίσμα ενός και μόνο επιστημονικού κλάδου είναι πολύ δύσκολη η απόκτηση ολοκληρωμένης εικόνας για τις πολύπλοκες διεργασίες που λαμβάνουν χώρα στο φωνητικό σωλήνα. Έτσι αν ο ερευνητικός στόχος είναι για παράδειγμα η παραγωγή συνθετικής φωνής, τότε προφανώς το πεδίο της επεξεργασίας σήματος θα έχει τον κυρίαρχο ρόλο στη έρευνα, χωρίς όμως να αποκλείονται τελείως τα άλλα. Αν ο ερευνητικός στόχος είναι η περιγραφή της φυσικής των φαινομένων της αεροροής στο φωνητικό σωλήνα, τότε η μηχανική συνεχούς μέσου και η μηχανική ρευστών θα έχουν τον κυρίαρχο ρόλο. Τέλος είναι πεποιθήση του γράφοντος ότι η γνώση της ανατομίας και των οργάνων που λαμβάνουν ρόλο και συνεισφέρουν στη φώνηση είναι σημαντικότερη και δεν μπορεί να παραληφθεί, ανεξάρτητα από τον εκάστοτε ερευνητικό στόχο. Η ποικιλία των ερευνητικών στόχων και η εμπλοκή και των τριών σημαντικών επιστημονικών πεδίων σε αυτούς συνηγορεί στο γεγονός ότι η περιοχή είναι πολύ ενεργή ακόμη και σήμερα με πληθώρα ανακοινώσεων και δημοσιεύσεων, ενώ ακόμα υπάρχουν σημεία τα οποία δεν έχουν πλήρως διευκρινιστεί. Στα πλαίσια της παρούσης επιχειρήθηκε η προσέγγιση του φαινομένου περισσότερο από την πλευρά της αερακουστικής και μηχανικής ρευστών χωρίς όμως να αμεληθούν η οριζόντια προσέγγιση και οι άλλες επιστημονικές περιοχές. Στις επόμενες παραγράφους γίνεται μια σύντομη παρουσίαση των κύριων περιοχών που εμπλέκονται στη διατριβή.

## 2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΕΡΑΚΟΥΣΤΙΚΗ (ΥΑΑ)

### 2.1 Ιστορική ανασκόπηση

Η απαρχή της μοντέρνας αερακουστικής θεωρίας θεωρείται ότι έγινε το 1952 από τον Sir James Lighthill με τη δημοσίευση 2 άρθρων που δημοσιεύθηκαν αντίστοιχα το 1952 και 1954 με θέμα την παραγωγή του αεροδυναμικού θορύβου. Στις εργασίες αυτές ανέπτυξε τη θεωρία παραγωγής ήχου από δέσμες αέρα (jets), στην οποία δηλώνεται με μαθηματικό φορμαλισμό, ότι ο παραγόμενος ήχος μπορεί να υπολογιστεί από το άθροισμα κατανεμημένων *τετραπολικών* πηγών, οι οποίες υπολογίζονται από τις διαταραχές της ταχύτητας στο αντίστοιχο πεδίο ροής. Αργότερα το 1968 οι J. Ffowcs and D. Hawkings επέκτειναν τη θεωρία ώστε να μπορεί να συμπεριλάβει και ακτινοβολούμενο ήχο από επιφάνειες σε αυθαίρετη κίνηση. Η προέκταση έτσι

συμπεριλαμβάνει πηγές *μονοπολικού* και *διπολικού* χαρακτήρα. Οι διπολικές κατανεμημένες πηγές οφείλονται στις δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό από την ύπαρξη στερεών επιφανειών στο πεδίο ροής, ενώ οι μονοπολικές καθορίζονται από τη γεωμετρία και την εν δυνάμει κινηματική των επιφανειών αυτών. Παρότι θεωρητικές διατυπώσεις των νόμων αυτών υπήρχαν από τόσο παλιά, η αξιοποίησή τους έγινε εφικτή πρόσφατα, με την ταυτόχρονη αύξηση των υπολογιστικής ισχύος και την παράλληλη ανάπτυξη της συγγενούς ερευνητικής περιοχής της υπολογιστικής ρευστομηχανικής (YPM). Η αξιοποίηση των θεωριών αυτών γίνεται με την *υβριδική μεθοδολογία* σε δύο υπολογιστικά βήματα: Αρχικά υπολογίζεται το πεδίο ροής από το οποίο μετέπειτα είναι δυνατός ο υπολογισμός των ακουστικών πηγών. Στη συνέχεια με εφαρμογή των ακουστικών αναλογιών εκτιμάται ο ακτινοβολούμενος ήχος στο μακρινό πεδίο βάσει των ακουστικών πηγών που έχουν υπολογιστεί από το προηγούμενο βήμα. Σημαντική παραδοχή εφαρμογής της υβριδικής μεθοδολογίας αποτελεί το γεγονός ότι δεν προβλέπεται επίδραση του ακουστικού πεδίου στο ροϊκό κάτι που για ροές χαμηλού αριθμού Mach είναι ασφαλές να υποτεθεί. Το γεγονός της εμπλοκής της YPM επιτρέπει το διαχωρισμό των τρεχουσών τάσεων για ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων στην ΥΑΑ σε δύο κύριες κατηγορίες: αριθμητικές μέθοδοι YPM που στοχεύουν μόνο στη σωστή επίλυση του πεδίου ροής από το οποίο θα υπολογιστούν οι ακουστικές πηγές και αριθμητικές μέθοδοι που στοχεύουν μόνο την επακόλουθη ακουστική διάδοση.

### **Μέθοδοι YPM**

Η ραγδαία αύξηση της υπολογιστικής ισχύος έδωσε το έναυσμα για την επίτευξη σημαντικών προόδων στο χώρο της YPM, η οποία πια είναι σε θέση να δώσει σημαντικές πληροφορίες για τη φυσική και τα χαρακτηριστικά ενός πλήθους ροών σε πραγματικές εφαρμογές. Παρότι οι υπολογισμοί και οι μέθοδοι της YPM δεν είναι το κυρίως αντικείμενο της παρούσης διατριβής, θεωρείται σημαντικό να δοθεί μια μικρή περιγραφή των ερευνητικών τάσεων και επιτευγμάτων που έχουν σημειωθεί στο χώρο αυτό, δεδομένου ότι η YPM είναι η απαρχή οποιουδήποτε ακουστικού υπολογισμού και πιθανές ανακρίβειες στη λύση του ροϊκού πεδίου έχουν άμεσο αντίκτυπο στο ακτινοβολούμενο ακουστικό σήμα.

Η *Απευθείας Αριθμητική Προσομοίωση* (Direct Numerical Simulation - DNS) είναι η πιο ακριβής μέθοδος υπολογισμού του ροϊκού πεδίου, αφού συνίσταται στην επίλυση των συμπιεστών εξισώσεων ροής σε όλες τις κλίμακες μήκους και χρόνου. Τα φαινόμενα τύρβης αναδεικνύονται απευθείας, χωρίς να χρειάζεται η χρήση κάποιου μαθηματικού μοντέλου. Σημειώνεται ότι ο ήχος στην περίπτωση αυτή εμπεριέχεται στη λύση και για να βρεθεί δε χρειάζεται καν η εφαρμογή της υβριδικής μεθοδολογίας, δηλ. χρήση κάποιου μοντέλου ακουστικής διάδοσης εκ των υστέρων, αλλά τα ακουστικά μεγέθη μπορούν να προκύψουν σαν η διαφορά των υδροδυναμικών μεγεθών από κάποια στατιστική μέση τιμή. Η DNS είναι γενικά αδύνατη για τις περισσότερες εφαρμογές πρακτικού ενδιαφέροντος, λόγω του εξαιρετικά υψηλού απαιτούμενου υπολογιστικού φόρτου σε υλικό και σε χρόνο. Παρόλα αυτά λόγω της πολύ υψηλής ακρίβειάς της παραμένει αρκετά ελκυστική σαν επιλογή εργαλείου YPM και υπάρχει η ελπίδα ότι με την παράλληλη αύξηση της υπολογιστικής ισχύος θα γίνει δυνατή η προσομοίωση ροών υψηλών αριθμών Reynolds και πολύπλοκων γεωμετριών. Μια άλλη κατηγορία μοντέλων YPM που χρησιμοποιούνται αρκετά στη ΥΑΑ είναι αυτές των *Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS)*<sup>[4],[7],[10]</sup>. Παρόλο το έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον από πλευράς YPM η αποτελεσματική χρήση είναι αμφίβολη λόγω της

ισχυρής εξάρτησης από το εκάστοτε χρησιμοποιούμενο μοντέλο τύρβης. Έτσι προβλέπονται σωστά όλα τα μέσα μεγέθη της ροής και η πρόβλεψη των τυρβωδών χαρακτηριστικών εξαρτάται από την πραγματική ένταση τύρβης που παρουσιάζει το φαινόμενο σε συνδυασμό με την εκάστοτε χρησιμοποιούμενη κλίμακα μήκους. Επίσης σε προβλήματα με μεγάλη ένταση τύρβης ή με ένταση τύρβης ίδιας τάξης μεγέθους με αυτή της μέσης ροής<sup>[16]</sup>, η χρήση των RANS για την ΥΑΑ είναι αμφιβόλου αξίας. Τέτοια προβλήματα είναι συνήθως προβλήματα βιομηχανικού ενδιαφέροντος σε μεγάλους αριθμούς Re, όπως π.χ. υπολογισμός θορύβου από επιφάνειες όπως αεροτομές, πτέρυγες αεροσκαφών κ.λπ.. Η *Προσομοίωση Μεγάλων Δινών (Large Eddy Simulation)* είναι μια άλλη κατηγορία μοντέλων που χρησιμοποιούνται ευρέως στην ΥΑΑ. Όπως στην DNS οι μεγάλες κλίμακες επιλύονται απευθείας και μοντελοποιείται η επίδραση αυτών στις μικρές. Παρόλη τη σχετικά μεγάλη απαιτούμενη υπολογιστική ισχύ με τη LES κατέστη δυνατή η προσομοίωση ροών υψηλού Re σε πολύπλοκες γεωμετρίες και θεωρείται πια καθιερωμένη μέθοδος υπολογισμού του πεδίου ροής σε προβλήματα ακουστικής. Ο υβριδικός συνδυασμός RANS και LES γεννά νέες μεθόδους YPM και φαίνεται να είναι αρκετά αποτελεσματικός σε εφαρμογές ΥΑΑ. Παράδειγμα τέτοιας μεθόδου είναι η *Προσομοίωση Αποκολλημένων Δινών (Detached Eddy Simulation)* στην οποία υπάρχει αλλαγή του τυρβώδους μοντέλου από RANS για τα προσκολλημένα οριακά στρώματα σε LES για τις περιοχές αποκόλλησης της ροής. Η αλλαγή αυτή μπορεί να γίνεται με δυναμικό και προσαρμοστικό τρόπο ανάλογα με τις ήδη υπολογισμένες κλίμακες, οπότε προκύπτει νέα οικογένεια μεθόδων γνωστή ως *Προσομοίωση Προσαρμοσμένης Κλίμακας (Scale-Adaptive Simulation method - SAS)*<sup>[11]</sup>. Μια αρκετά εμπειριστική εξέταση μεθόδων YPM χρήσιμες για υπολογισμούς ΥΑΑ μπορεί να βρεθεί στο [17].

Για ροές χαμηλού αριθμού Re και χαμηλού αριθμού Mach ( $M < 0.3$ ) η υβριδική προσέγγιση δεν απαιτεί τόσο υψηλής ευκρίνειας μοντέλα YPM και μπορεί να λειτουργήσει ακόμα και με απλούς ασυμπίεστους επιλύτες με η χωρίς τυρβώδες μοντέλο, ανάλογα με το κάθε φορά διαθέσιμο υλικό (hardware). Στα πλαίσια της παρούσης και για τους υπολογισμούς ροής χρησιμοποιήθηκαν αποκλειστικά οι δυνατότητες που προσφέρει ο εμπορικός επιλύτης Fluent. Στο **κεφάλαιο 5** γίνεται μια διεξοδική παρουσίαση των δυνατοτήτων του λογισμικού και παρουσιάζεται ο τρόπος χρήσης του σε ένα απλό πρόβλημα ασυμπίεστης ροής χωρίς τυρβώδες μοντέλο.

## Μέθοδοι ΥΑΑ

Έχοντας υπολογίσει το πεδίο ροής στο πρώτο βήμα της υβριδικής προσέγγισης είναι πια δυνατός ο υπολογισμός των κατανεμημένων αερακουστικών πηγών και ο τρόπος διάδοσης του ήχου από αυτές με τα εργαλεία και της μεθόδους της ΥΑΑ. Αντικείμενο εδώ από μαθηματικής άποψης είναι η επίλυση μιας υπερβολικής εξίσωσης ή ενός συστήματος υπερβολικών εξισώσεων. Η υπερβολική εξίσωση δεν είναι άλλη από την κυματική εξίσωση δευτέρου βαθμού, ενώ το υπερβολικό σύστημα είναι οι εξισώσεις Euler πρώτου βαθμού. Και οι δύο προσεγγίσεις είναι ισοδύναμες και η επιλογή γίνεται ανάλογα με την πολυπλοκότητα και το εκάστοτε χρησιμοποιούμενο αριθμητικό σχήμα.

Οι τρέχουσες τάσεις στα εργαλεία της ΥΑΑ χωρίζονται σε δύο κύριες καταγορίες:

- Τις ολοκληρωτικές μεθόδους, όπου γίνεται χρήση των συναρτήσεων Green για τον υπολογισμό των χρονικών και χωρικών κατανομών των ακουστικών μεγεθών. Ανάλογα με τον τύπο της εφαρμοζόμενης ολοκλήρωσης στις ακουστικές πηγές (επιόγκιο ή

επιφανειακό ολοκλήρωμα) οι μέθοδοι κατηγοριοποιούνται στις επιόγκιες και επιφανειακές. Η αναλογία των Ffowcs Williams και Hawkins (FW-H) είναι κλασσικό παράδειγμα της πρώτης κατηγορίας. Στο **κεφάλαιο 3** δίνεται η μαθηματική θεμελίωση των συναρτήσεων Green και η εφαρμογή τους στην αναλογία Lighthill μέσω δύο αλγορίθμων υπολογισμού των ολοκληρωμάτων των τετραπολικών πηγών σε πρόβλημα ανοικτής γεωμετρίας. Στη δεύτερη κατηγορία αντιπροσωπευτική είναι η μέθοδος Kirchhoff, όπου η λύση για το μακρινό πεδίο υπολογίζεται από ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα με χρήση του θεωρήματος Green πάνω σε μια αυθαίρετη επιφάνεια ελέγχου που περικλείει όλες τις πηγές. Στο [8] γίνεται μια κατατοπιστική αναθεώρηση των μεθόδων επιφανειακής ολοκλήρωσης.

- Τις μεθόδους όπου οι μερικές διαφορικές εξισώσεις διάδοσης επιλύονται αυστηρά (rigorously) στο χωρίο ενδιαφέροντος, στο χρόνο ενδιαφέροντος, ή και στη συχνότητα – κυματαριθμό ενδιαφέροντος. Χαρακτηριστικό εδώ είναι ότι απαιτείται η συμβολή σχήματος διακριτοποίησης των εξισώσεων πράγμα που κοστίζει πολύ περισσότερο σε υπολογιστικό χρόνο σε σύγκριση με τις ολοκληρωτικές. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν όλα τα γνωστά σχήματα διακριτοποίησης μερικών διαφορικών εξισώσεων και το σημαντικό πλεονέκτημα είναι ότι μπορεί να ληφθούν υπόψη μη συμπαγείς πηγές, πολύπλοκες γεωμετρίες, ενώ οι αλληλεπιδράσεις του ήχου με στερεές επιφάνειες και όρια (ανακλάσεις, απορροφήσεις) μπορούν να συμπεριληφθούν έμμεσα στον ακουστικό επιλύτη. Στο **κεφάλαιο 2** παρουσιάζεται ένας τέτοιος ακουστικός επιλύτης, που βασίζεται σε υψηλής τάξης σχήματα διακριτοποίησης πεπερασμένων διαφορών και στο **κεφάλαιο 4** κατασκευάστηκε ένας ανάλογος επιλύτης για την αρμονική όμως κυματική εξίσωση, βασιζόμενος στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον παρουσιάζεται και στους αυστηρούς επιλύτες που αντιμετωπίζουν τις πρώτης τάξης ακουστικές εξισώσεις υπό το πρίσμα της υβριδικής προσέγγισης. Η πιο κοινή μέθοδος επιλύει τις γραμμικοποιημένες συμπίεστες εξισώσεις Euler (linearized Euler equations – LEE) με ή χωρίς όρους πηγής<sup>[2],[14]</sup>. Η προσέγγιση με χρήση εξισώσεων πρώτης τάξης για τις ακουστικές διαταραχές (acoustic perturbation equations – APE)<sup>[3]</sup> αποτελεί μια άλλη εναλλακτική, πολύ πιο χρήσιμη ειδικά σε περιπτώσεις ροών με υδροδυναμικές αστάθειες. Μια διαφορετική διατύπωση της ίδιας μεθόδου είναι οι γραμμικοποιημένες συμπίεστες εξισώσεις διαταραχών (linearized perturbed compressible equations – LPCE) του Moon<sup>[12]</sup> και της ομάδας του, όπου χρησιμοποιείται η συμπίεστη εξίσωση ενέργειας, αντί της κλασσικής ισεντροπικής παραδοχής και αμελούνται οι μη γραμμικοί στροβιλώδεις όροι, οι οποίοι μπορεί να δημιουργήσουν αριθμητικές αστάθειες σε περιπτώσεις ανεπαρκούς πυκνότητας στο ακουστικό πλέγμα. Στο **κεφάλαιο 1** παρουσιάζεται ένα παρόμοιο ακουστικό μοντέλο με εξισώσεις πρώτης τάξης.

### 3 ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΣΤΟ ΦΩΝΗΤΙΚΟ ΣΩΛΗΝΑ

#### 3.1 Ιστορική ανασκόπηση

Πρωτοπόρος θεωρείται ο Teager<sup>[15]</sup> που άνοιξε τον δρόμο με τα πειράματα και τις παρατηρήσεις του για την αεροδυναμική ανάλυση της φωνής. Συγκεκριμένα, με πολυάριθμες μετρήσεις θερμού νήματος στην στοματική κοιλότητα κατά την παραγωγή φωνηέντων, ανεκάλυψε αποκόλληση της

ροής από τα τοιχώματα του σωλήνα, μη-στρωτή (non-laminar) και ανομοιόμορφη ροή σε μορφή ασταθούς δέσμης αέρα, ύπαρξη στροβίλων, αλληλεπίδραση μεταξύ της δέσμης αέρα και των κοιλοτήτων και διαμόρφωση της ροής από τους στροβίλους. Ο Kaiser<sup>[6]</sup> συστηματοποίησε την καταγραφή των ατελειών και λανθασμένων υποθέσεων του γραμμικού μοντέλου και συνέβαλλε στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων των πειραμάτων του Teager, που οδηγούν στην απόρριψη του. Ο McGowan<sup>[9]</sup> και ο Hirschberg<sup>[5]</sup>, παρακινήμένοι από τις ιδέες και τα πειράματα του Teager καθώς και από την ανάλυση του Kaiser, μελέτησαν θεωρητικά την αεροδυναμική της ροής στον ηχητικό σωλήνα και συμπέραναν ότι η αεροροή μπορεί εν μέρει να συσχετισθεί με μια μη-ακουστική συνιστώσα της ταχύτητας που οφείλεται στην γένεση στροβίλων στην γλωττίδα και που μπορεί να δημιουργήσει επιπρόσθετες ακουστικές πηγές στον ηχητικό σωλήνα. Τα πειράματα των Barney, Shadle & Davies<sup>[1]</sup> σε ένα υπεραπλουστευμένο μηχανικό μοντέλο των φωνητικών χορδών και του ηχητικού σωλήνα με σταθερή διατομή, έδειξαν ότι το πεδίο αποτελείται από μία μέση συνιστώσα ροής, ένα ακουστικό πεδίο, και ένα μη-ακουστικό πεδίο. Ένα αντίστοιχο μοντέλο για την ακτινοβολία ήχου από τον σωλήνα, που συμπεριέλαβε την ακουστική και την μη-ακουστική συνιστώσα της ταχύτητας, οδήγησε σε καλύτερη πρόβλεψη του μετρηθέντος ηχητικού πεδίου από την πρόβλεψη που βασίστηκε μόνο στην ακουστική συνιστώσα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης και η προσπάθεια του Sinder<sup>[13]</sup> να χρησιμοποιήσει κάποιες ιδέες αεροδυναμικής για μοντελοποίηση συριστικών ήχων. Τα αποτελέσματά της συνηγορούν σε μεγάλο βαθμό υπέρ της αεροδυναμικής προσέγγισης.

## 4 ΣΤΟΧΟΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΕΣ

Οι στόχοι της παρούσης διατριβής ήταν οι εξής:

- Οριζόντια εξέταση σχεδόν όλων των μεθόδων και εργαλείων της αερακουστικής. Επιχειρήθηκε έτσι η παρουσίαση της ολοκληρωτικής μεθόδου των *συναρτήσεων Green*, κατασκευάστηκε ένας *αυστηρός επιλύτης*, που επιλύει κατευθείαν τη δευτέρου βαθμού κυματική μερική διαφορική εξίσωση με χρήση υψηλής ακρίβειας μεθόδων χωρικής και χρονικής διακριτοποίησης και κατασκευάστηκε ένας αντίστοιχος επιλύτης για την *αρμονική κυματική εξίσωση* στην οποία αίρονται τα υπερβολικά της χαρακτηριστικά, χρησιμοποιώντας τη μεταβολική θεωρία και τα πεπερασμένα στοιχεία. Τέλος παρουσιάζεται μια μέθοδος διαχωρισμού ακουστικού – αεροδυναμικού προβλήματος με ασυμπίεστο αεροδυναμικό επιλύτη για χαμηλούς αριθμούς Mach. Εδώ το ερευνητικό ενδιαφέρον ήταν περισσότερο στραμμένο στο αριθμητικό κομμάτι (*numerics*) και όχι στη διερεύνηση της φυσικής κάποιο πρόβληματος. Ακόμα ίσως να αμελήθηκε η εις βάθος ανάλυση για την κάθε μέθοδο, αφού στόχος ήταν η οριζόντια και όχι κατακόρυφη κάλυψη αυτών.
- Ειδικά για το πρόβλημα παραγωγής και διάδοσης φωνής στον ανθρώπινο φωνητικό σωλήνα επιχειρείται κατ' αρχήν μια *ανατομική προσέγγιση* στα επιμέρους όργανα αυτού και τις λειτουργίες που επιτελεί το καθένα. Στη συνέχεια αναλύεται η κλασική προσέγγιση *πηγής – φίλτρου* και επιχειρείται μια σύνδεση με το αεροδυναμικό πρόβλημα με την προσθήκη *τετραπολικών αερακουστικών πηγών* στο μοντέλο διάδοσης του Portnoff, εκτός από την κλασική διπολική πηγή που τίθεται στη γλωττίδα. Η προσέγγιση αυτή απαιτεί την ταυτόχρονη επίλυση του ροϊκού ασυμπίεστου προβλήματος και



βασίζεται στο διαχωρισμό του ακουστικού και ροϊκού προβλήματος, που δύναται να γίνει λόγω του χαμηλού αριθμού Mach που χαρακτηρίζει τη ροή μέσα στο φωνητικό σωλήνα. Ο στόχος εδώ είναι η προσθήκη ροϊκής κατανεμημένης πληροφορίας στο παραδοσιακό μοντέλο ακουστικής διάδοσης του Portnoff, η οποία θεωρείται αμελητέα για τις ανάγκες χρήσης του μοντέλου.

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ**

- [1] Barney A., Shadle C.H., Davies P., *Fluid Flow in a dynamic mechanical model of vocal folds and tract*, J. Acous. Soc. Am., vol. 105, pp: 444-455, (1999).
- [2] Bogey C., Bailly C., and Juvé D., *Computation of flow noise using source terms in linearized Euler's equations*, AIAA Journal, vol. 40, no. 2, pp. 235–243, (2002).
- [3] Ewert R. and Schröder W., *Acoustic Perturbation Equations based on Flow decomposition via Source Filtering*, Journal of Computational Physics, vol. 188, pp. 365–398, (2003).
- [4] Ewert P. and Emunds R., *CAA Slat Noise Studies Applying Stochastic Sound Sources Based On Solenoidal Digital Filters*, 11th AIAA Aeroacoustics Conference, no. 2005-2862, 2005, Monterey, USA.
- [5] Hirschberg A., *Some Fluid Dynamic Aspects of Speech*, Bull. Communication Parlee, 2, pp.7-30, (1992).
- [6] Kaiser J.F., *Some observations on vocal tract operation from a fluid flow point of view*, In Vocal Fold Physiology: Biomechanics, Acoustics and Phonatory Control, (1983).
- [7] Lummer M., Delfs J., and Lauke T., *Simulation of Sound Generation by Vortices passing the Trailing Edge of Airfoils*, 8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Breckenridge (USA), no. 2002-2578, 2002.
- [8] Lyrintzis A.S., *Surface integral methods in computational aeroacoustics - From the (CFD) near field to the (Acoustic) far-field*, Int. Journal of Aeroacoustics, vol 2, pp: 95–128, (2003).
- [9] McGowan R.S., *An Aeroacoustics Approach to Phonation*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 83 (2), pp.696-704, (1988).
- [10] Nagarajan S., Hahn S., and Lele S.K., *Prediction of Sound Generated by a Pitching Airfoil: A Comparison of RANS and LES*, 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, no. 2006-2516, 2006.
- [11] Paliath U. and Morris P.J., *Prediction of Jet Noise From Circular Beveled Nozzles*, 11th AIAA Aeroacoustics Conference, no. 2005-3096, 2005, Monterey, USA.
- [12] Seo J. and Moon Y., *Linearized perturbed compressible equations for low Mach number aeroacoustics*, Journal of Computational Physics, vol. 218, no. 2, pp. 702–719, (2006).
- [13] Sinder D.J., *Speech Synthesis Using an Aeroacoustic Fricative Model*, Ph.D. Thesis, Rutgers University, New Brunswick, NJ., (1999).
- [14] Tam, C.K.W., Webb, J.C., (1993), *Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics*, Journal of Computational Physics, Vol. 107, pp. 262-281.
- [15] Teager H.M., *Some Observations on Oral Air Flow During Phonation*, IEEE Trans. Acoust. Speech & Signal Process., ASSP-28, pp.599-601, (1980).
- [16] Uzun A., Lyrintzis A.S., and Blaisdell G.A., *Coupling of Integral Acoustics Methods with LES for Jet Noise Prediction*, Proceedings of AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, no. 2004-0517, January 2004, Reno, NV. USA.
- [17] Wagner C., Hüttl T., and Sagaut P. (eds.), *Large-Eddy Simulation for Acoustics*, Cambridge University Press, 2007.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΑΕΡΑΚΟΥΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ

Μόνο πρόσφατα με την παράλληλη αύξηση της υπολογιστικής ισχύος κατέστη δυνατή η απευθείας προσομοίωση (Direct Numerical Simulation) των ακουστικών ροών, χωρίς τη χρήση κάποιας ακουστικής αναλογίας, η οποία ως γνωστό απαιτεί a priori γνώση για το είδος και το χαρακτηρισμό των πηγών ήχου του εκάστοτε πεδίου ροής. Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστεί μία μεθοδολογία 2 βημάτων για τον υπολογισμό ακουστικών πεδίων ροής χαμηλού αριθμού Mach, η οποία βασίζεται στις εξισώσεις Navier-Stokes και διαχωρίζει πλήρως το ακουστικό από το ρευστοδυναμικό πρόβλημα. Σύμφωνα με τη μεθοδολογία αυτή το πεδίο ροής λαμβάνεται από τις ασυμπίεστες εξισώσεις Navier-Stokes, ενώ το ακουστικό από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων Euler, όπου οι μεταβλητές επίλυσης είναι οι ακουστικές διαταραχές. Η τεχνική αυτή εφαρμόστηκε με επιτυχία σε ένα μονοδιάστατο και ένα διδιάστατο ισεντροπικό πρόβλημα αναφοράς.

## 1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι εξισώσεις Navier – Stokes για το συμπιεστό ρευστό περιγράφουν πλήρως την παραγωγή και τη διάδοση του ήχου σε όλες τις περιπτώσεις και συνθήκες ροής. Παρόλα αυτά όμως η απευθείας αριθμητική επίλυση των εξισώσεων αυτών (DNS - direct numerical simulation) είναι πολύ χρονοβόρα, έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος και κυρίως δεν μπορεί να περιγράψει την παραγωγή ήχου, καθότι το ενεργειακό περιεχόμενο των ηχητικών κυμάτων είναι κατά πολύ μικρότερο από αυτό των διαταραχών της πίεσης του ρευστού. Έτσι τυχόν πηγές ήχου που δημιουργούνται από ροϊκά φαινόμενα (στροβιλισμούς, στενώσεις, κινούμενα τοιχώματα) δεν μπορούν να απομονωθούν, παρότι περιγράφονται πλήρως από τις ρευστομηχανικές μεταβλητές πίεση, πυκνότητα και ταχύτητες που δίδουν σα λύση οι Navier – Stokes. Προς την κατεύθυνση αυτή αναπτύχθηκαν τα μοντέλα ακουστικών αναλογιών (Lighthill – 1952, Ffowcs Williams Hawkins - 1968) τα οποία σε συνδυασμό με την επίλυση του συμπιεστού πεδίου ροής, είναι σε θέση να χαρακτηρίσουν πηγές ήχου για τις οποίες όμως απαιτείται a priori γνώση για το είδος τους.

Πρόσφατα η ερευνητική κοινότητα (Hardin & Pope<sup>[3]</sup> 1994, Shen & Sorensen<sup>[7]</sup> 1999, Slimon & Soteriou & Davis<sup>[8]</sup> 2000) χρησιμοποίησε τις εξισώσεις Navier – Stokes για την κατασκευή νέων ακουστικών μοντέλων που βασίζονται στον πλήρη διαχωρισμό του ακουστικού από το ρευστοδυναμικό πρόβλημα. Αυτό επιτυγχάνεται θεωρώντας ότι οι συμπιεστές ρευστοδυναμικές μεταβλητές (πίεση, πυκνότητα, ταχύτητα) αποτελούνται από το άθροισμα μιας ακουστικής διαταραχής και μιας τιμής που δίνει η λύση του ασυμπίεστου πεδίου ροής. Τα μοντέλα αυτά περιγράφουν με επιτυχία και την παραγωγή και τη διάδοση των ηχητικών κυμάτων.

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε ένα τέτοιο μοντέλο και εφαρμόστηκε σε δύο προβλήματα αναφοράς ισεντροπικών ροών και χαμηλών αριθμών Mach (pulsating sphere, oscillating sphere) με γνωστό ροϊκό πεδίο. Σχολιάζονται τα αποτελέσματα και γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στους διάφορους τύπους συνοριακών συνθηκών που χρησιμοποιούνται στα μοντέλα αυτά.

## 1.2 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Σύμφωνα με τη διατύπωση των Hardin και Pope<sup>[3]</sup> και των Shen και Sorensen<sup>[7]</sup> αργότερα για μια συμπίεστη, ιξώδη ροή αν  $p, \rho, \mathbf{u}$  είναι η πίεση, πυκνότητα και άνυσμα ταχύτητας αντίστοιχα, τότε η κίνηση του ρευστού περιγράφεται από τις συμπίεστες Navier – Stokes, οι οποίες έχουν τη μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (1.2)$$

$$p = p(\rho, S) \quad (1.3)$$

Στις παραπάνω  $\boldsymbol{\tau}$  είναι ο δυαδικός των ιξωδών τάσεων, ο οποίος στη γενική περίπτωση δίδεται από την υλική σχέση του Stokes, όπου  $\kappa, \mu, \mathbf{I}$  το διαστολικό ιξώδες, δυναμικό ιξώδες και ο μοναδιαίος δυαδικός αντίστοιχα:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \left[ \left( \kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{I} \quad (1.4)$$

Η (1.3) είναι μια καταστατική συσχέτιση, η οποία προέρχεται συνήθως από τη θερμοδυναμική. Στην (1.3) με  $S$  συμβολίζεται η εντροπία.

### 1.2.1 Οι εξισώσεις ροής

Όπως αναφέρθηκε για χαμηλούς αριθμούς Mach ( $M < 0.3$ ) χρησιμοποιούνται οι ασυμπίεστες εξισώσεις Navier – Stokes, οι οποίες σε όρους πρωτογενών μεταβλητών διατυπώνονται ως εξής:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{U} \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1.6)$$

όπου  $P, \rho_0$  και  $\mathbf{U}$  είναι η ασυμπίεστη πίεση, πυκνότητα και άνυσμα ταχύτητας αντίστοιχα, ενώ  $\nu$  είναι το κινηματικό ιξώδες. Για την επίλυσή τους μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε ασυμπίεστος επιλύτης επιθυμείται. Στα προβλήματα αναφοράς που επιλύθηκαν το ασυμπίεστο πεδίο ροής δίδεται από κλειστές συναρτήσεις (δε χρησιμοποιήθηκε ασυμπίεστος επιλύτης), δεδομένου ότι στόχος της εργασίας ήταν η ανάπτυξη και πιστοποίηση του ακουστικού μοντέλου, το οποίο περιγράφεται παρακάτω.

### 1.2.2 Το ακουστικό μοντέλο

Παίρνοντας το ολικό διαφορικό της (1.3), θεωρώντας ισεντροπικές μεταβολές πίεσης και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο προκύπτει η:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.7)$$

όπου η ταχύτητα του ήχου σε μέσο ορίζεται ως:

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (1.8)$$

Ακολούθως οι συμπιεστές μεταβλητές αποσυντίθενται στο ασυμπίεστο και ακουστικό μέρος ως εξής:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}' \quad (1.9)$$

$$p = P + p' \quad (1.10)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (1.11)$$

Αντικαθιστώντας τις (1.9)-(1.11) στις (1.1), (1.2) και (1.7) και αγνοώντας τους ιξώδεις όρους προκύπτουν οι εξισώσεις του ακουστικού μοντέλου:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = 0 \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{f}\mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{U}\mathbf{u}' + p'\mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{f} = -\frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.14)$$

Στις (1.12)-(1.14) ο ενδιάμεσος όρος ορμής:

$$\mathbf{f} = \rho'\mathbf{U} + \rho\mathbf{u}' \quad (1.15)$$

είναι πια ο νέος άγνωστος μαζί με την ακουστική πίεση και πυκνότητα. Η ασυμπίεστη πίεση και ταχύτητα θεωρούνται γνωστά από τον επιλύτη του πεδίου ροής. Οι εξισώσεις συμπληρώνονται από την θερμοδυναμική παρατήρηση ότι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα συνδέεται με το λόγο των ειδικών θερμοτήτων με τη σχέση:

$$c^2 = \frac{\mathcal{P}}{\rho} = \frac{\gamma(P + p')}{\rho_0 + \rho'} \quad (1.16)$$

### 1.2.3 Συνοριακές Συνθήκες

Στα προβλήματα παραγωγής και διάδοσης ήχου σημαντικό ρόλο παίζουν οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στα όρια του υπολογιστικού χωρίου. Συγκριτικά με τα προβλήματα ροής ο ρόλος των συνοριακών είναι πολύ σημαντικότερος αφού εκτός από την ακρίβεια της λύσης μπορεί να επηρεάσει άμεσα την ευστάθεια του εκάστοτε αριθμητικού σχήματος χρονικής διακριτοποίησης που χρησιμοποιείται. Ο λόγος είναι ότι τα ακουστικά κύματα όταν πλησιάσουν τα όρια του υπολογιστικού χωρίου ανακλώνται και επιστρέφουν στο εσωτερικό με διαφορετικό πλάτος και συχνότητα που εξαρτώνται από το εκάστοτε πρόβλημα και το εκάστοτε σχήμα χρονικής διακριτοποίησης.

Έχει προταθεί ποικιλία μη ανακλωμένων συνοριακών συνθηκών (non reflecting boundary conditions) στη βιβλιογραφία<sup>[9]</sup>. Η επιλογή εξαρτάται από τον τύπο ροής (είσοδος, έξοδος, τοίχωμα) αλλά και από τον τύπο του ακουστικού επιλύτη που χρησιμοποιείται.

### 1.3 ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Για τον έλεγχο της ορθότητας και ακρίβειας του αερακουστικού μοντέλου επιλύθηκαν ένα μονοδιάστατο και ένα διδιάστατο πρόβλημα αναφοράς. Πρόκειται για το γνωστό από τον κλασική ακουστική πρόβλημα της παλλόμενης σφαίρας ακτίνας  $a$  σε μία και δύο διαστάσεις.

#### 1.3.1 Μονοδιάστατα παλλόμενη σφαίρα

Στην περίπτωση αυτή η σφαίρα πάλλεται ακτινικά με ταχύτητα  $V_r(a,t) = U_0 \sin(\omega t)$ , ενώ το ασυμπίεστο πεδίο ροής είναι:

$$U(r,t) = U_0 \frac{a^2}{r^2} \sin(\omega t) \quad (1.17)$$

$$P = p_0 + \rho_0 \omega U_0 \frac{a^2}{r} \cos(\omega t) - \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 \frac{a^4}{r^4} \sin^2(\omega t) \quad (1.18)$$

Οι ακουστικές εξισώσεις σε σφαιρικές συντεταγμένες αφού αδιαστατοποιήθηκαν, με βάση τους αδιάστατους αριθμούς  $M = \frac{U_0}{c_0}$  και  $Str = \frac{\omega a}{2\pi \cdot c_0}$  επιλύονται για την περιοχή  $1 < \frac{r}{a} < 26$  χρησιμοποιώντας 500 ισαπέχοντα χωρικά σημεία στην ακτινική διεύθυνση με οριακές συνθήκες:

$$u'_r(a,t) = 0 \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial p'(a,t)}{\partial r} = 0 \quad (1.20)$$

Για τη χρονική διακριτοποίηση χρησιμοποιήθηκαν το ρητό σχήμα πρόβλεψης – διόρθωσης Mc Cormack και η κλασική μέθοδος Runge Kutta 4ης τάξης, με επιλογή χρονικού βήματος τέτοια ώστε ο αριθμός CFL να είναι όσο το δυνατόν περισσότερο κοντά στη μονάδα, ούτως ώστε να ελαχιστοποιούνται τα σφάλματα διασποράς των ακουστικών κυμάτων καθώς αυτά κινούνται στο χώρο. Το αδιάστατο χρονικό βήμα τέθηκε ίσο με  $\Delta t = \frac{\Delta r}{1+M}$ , ενώ είναι δυνατή περαιτέρω ελαχιστοποίησή του.

Από την κλασική γραμμική ακουστική<sup>[4]</sup> προκύπτει η αναλυτική λύση για την πίεση, η οποία είναι:

$$p - p_0 = \rho_0 c_0 U_0 \frac{a}{r} \cos(\phi_\alpha) \sin(\omega t - k(r-a) + \phi_\alpha) \quad (1.21)$$

όπου  $\phi_\alpha = \arctan\left(\frac{1}{ka}\right)$  και  $k = \frac{\omega}{c_0}$ . Αφαιρώντας από την (1.21) την ασυμπίεστη πίεση προκύπτουν οι μεταβολές πίεσης, οι οποίες και τελικά ενδιαφέρουν. Οι μεταβολές πυκνότητας προκύπτουν από τη θερμοδυναμική συσχέτιση:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \Rightarrow \frac{P+p'}{p_0} = \left(\frac{\rho'+\rho_0}{\rho_0}\right)^\gamma \quad (1.22)$$

Οι (1.21), (1.22) πρέπει να αδιαστατοποιηθούν για να είναι εφικτή η σύγκριση.

### 1.3.2 Διδιάστατα παλλόμενη σφαίρα

Στην περίπτωση αυτή προστίθεται και η αζιμουθιακή διάσταση στο πρόβλημα, οπότε η σφαίρα πάλλεται με ταχύτητες:

$$\begin{aligned} V_r &= U_0 \sin(\omega t) \cos(\phi) \\ V_\phi &= \frac{U_0}{2} \sin(\omega t) \sin(\phi) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Υποθέτοντας ότι η ροή είναι αστρόβιλη το ασυμπιεστο πεδίο πίεσης δίδεται από τις σχέσεις:

$$U_r = U_0 \sin(\omega t) \frac{a^3}{r^3} \cos(\phi) \quad (1.24)$$

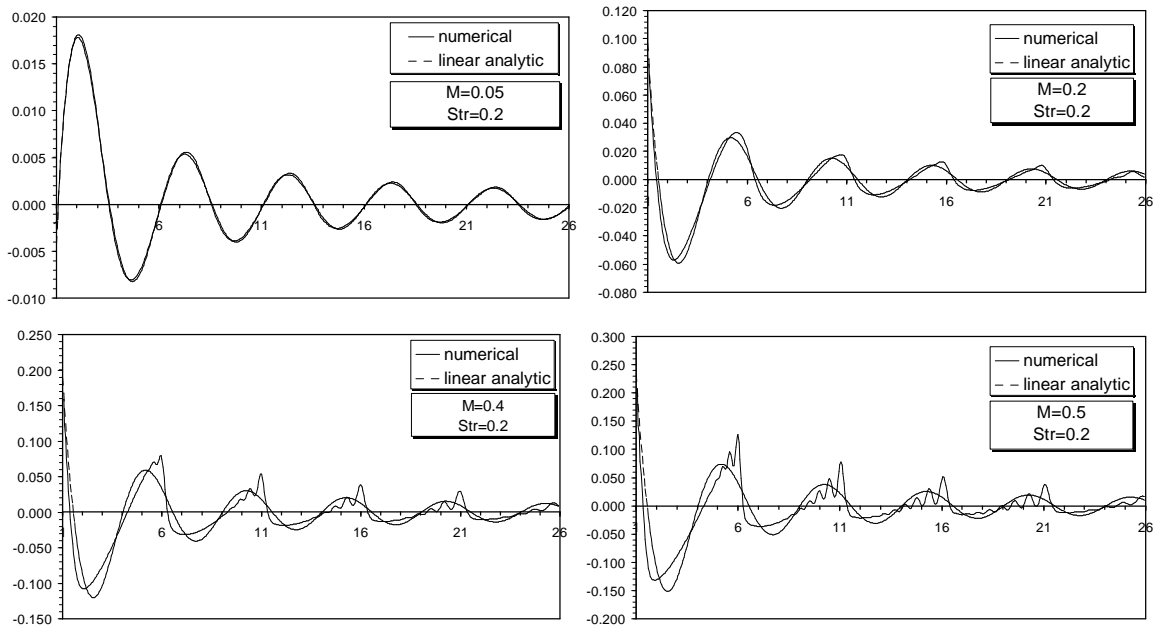
$$U_\phi = \frac{U_0}{2} \sin(\omega t) \frac{a^3}{r^3} \sin(\phi) \quad (1.25)$$

$$P = p_0 + \rho_0 \omega \frac{U_0}{2} \cos(\omega t) \frac{a^3}{r^2} \cos(\phi) - \rho_0 \frac{U_0^2 \sin^2(\omega t) a^6}{2 r^6} \left( 1 - \frac{3}{4} \sin^2(\phi) \right) \quad (1.26)$$

Οι ακουστικές εξισώσεις σε σφαιρικές συντεταγμένες αφού αδιαστατοποιήθηκαν, επιλύθηκαν για την περιοχή  $1 < \frac{r}{a} < 11$  χρησιμοποιώντας 50 ισαπέχοντα χωρικά σημεία στην ακτινική διεύθυνση και 50 στην αζιμουθιακή. Στο πρόβλημα αυτό χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά το ρητό σχήμα Mc Cormack, ενώ η χρήση των τιμών πρόβλεψης για το όριο φαίνεται ότι αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση στις μη ανακλώμενες οριακές συνθήκες<sup>[3]</sup>. Οι υπόλοιπες οριακές συνθήκες, οι αδιάστατοι αριθμοί και η επιλογή του χρονικού βήματος είναι ίδια με αυτά του προηγούμενου προβλήματος. Σύμφωνα με την [5] λήφθηκε σοβαρά υπόψη το γεγονός ότι οι εξισώσεις έχουν ιδιάζουσα συμπεριφορά στα σημεία  $\phi = 0, \pi, 2\pi$ . Σύγκριση επιχειρήθηκε με την αναλυτική λύση που δίνουν οι Geer και Pope στο [2].

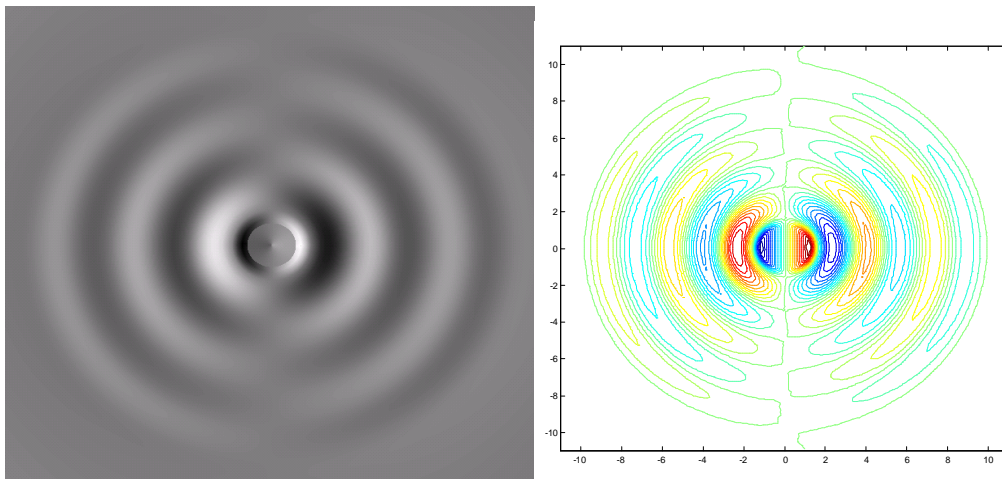
## 1.4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ

Στην Εικόνα 1-1 παρουσιάζονται για το πρόβλημα της μονοδιάστατα παλλόμενης σφαίρας η υπολογιστική και αναλυτική λύση για διάφορους αριθμούς Mach και για  $Str = 0.2$ . Είναι προφανής η καλή συμπεριφορά του μοντέλου στους χαμηλούς αριθμούς Mach όπου υπάρχει σχεδόν πλήρης ταύτιση με την αναλυτική λύση. Αυξανόμενου όμως του αριθμού Mach αυξάνονται και οι μη γραμμικότητες του φαινομένου τις οποίες η αναλυτική λύση δεν μπορεί να ακολουθήσει, διότι έχει προκύψει από την επίλυση της απλής γραμμικής κυματικής εξίσωσης. Από την άλλη η υπολογιστική λύση είναι σε θέση να αναπαράγει τις μη γραμμικότητες του φαινομένου εμφανίζοντας όμως σφάλματα φάσης (dispersion errors) τα οποία όμως μπορούν να ελαχιστοποιηθούν με την εκλογή ακόμα μικρότερου χρονικού βήματος ολοκλήρωσης.



Εικόνα 1-1. Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης για το 1D πρόβλημα και διάφορους αριθμούς Mach

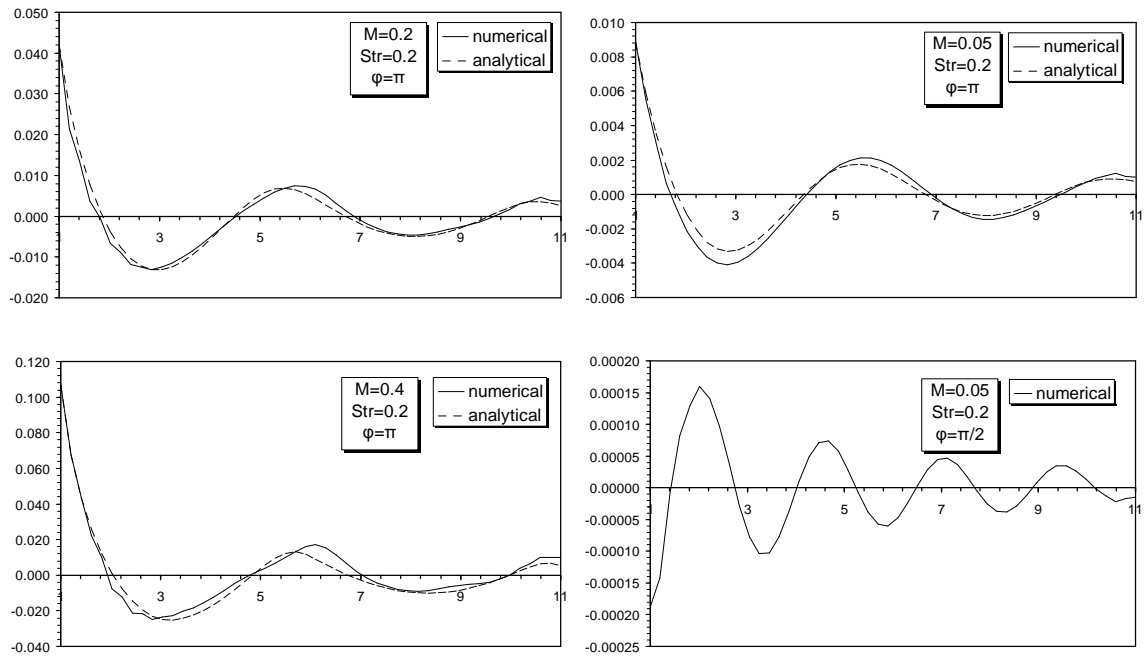
Στο Εικόνα 1-2 παρουσιάζονται για το πρόβλημα της διδιάστατα παλλόμενης σφαίρας, οι μεταβολές πυκνότητας στο χώρο με τη μορφή εικόνας και ισοσταθμικών καμπύλων. Όσο αφορά τη φυσική του προβλήματος είναι προφανές η διάδοση του ήχου είναι συνάρτηση της γωνίας ταλάντωσης. Έτσι περισσότερος ήχος διαδίδεται στις γωνίες  $\phi = 0$  και  $\phi = \pi$  ενώ λιγότερος στις γωνίες  $\phi = \pi/2$  και  $\phi = 3\pi/2$ . Μάλιστα τις δύο τελευταίες περιπτώσεις η ταλάντωση φαίνεται να έχει σχεδόν διπλάσια συχνότητα από την αρχικώς τιθέμενη. Το τελευταίο αποτελεί χαρακτηριστικό του διπολικού χαρακτήρα της αρμονικής πηγής που χρησιμοποιήθηκε.



Εικόνα 1-2. Μεταβολές πυκνότητας (εικόνα και ισοσταθμικές καμπύλες) για το 2D πρόβλημα για  $M=0.05$  και  $Str=0.3$

Τέλος στην Εικόνα 1-3 και για το πρόβλημα της διδιάστατα παλλόμενης σφαίρας φαίνονται τα ακτινικά προφίλ των μεταβολών πυκνότητας και η σύγκρισή τους με την αναλυτική λύση για διάφορους αριθμούς Mach. Είναι προφανής η καλή συμπεριφορά του μοντέλου. Για  $\phi = \pi/2$  η αναλυτική λύση δεν προβλέπει διάδοση σε αντίθεση με την αριθμητική λύση που προβλέπει διάδοση κύματος μικροτέρου πλάτους και σχεδόν διπλάσιας συχνότητας.





Εικόνα 1-3. Ακτινικά προφίλ μεταβολών πυκνότητας για το 2D πρόβλημα και σύγκριση με την αναλυτική λύση.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Anderson D.A., Tannenhill J.C., Pletcher R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing, New York, (1984).
- [2] Geer J.F., Pope D.S., *A Multiple Scales Approach to Sound Generation by Vibrating Bodies*, Computational Aeroacoustics, 69-84, Springer Verlag, New York, (1993).
- [3] Hardin J.C., Pope D.S., *An Acoustic/Viscous Splitting Technique for Computational Aeroacoustics*, Therot. Comput. Fluid Dynamics, 6, 323-340, (1994).
- [4] Kinsler J.U., Coppens A.R. and Sanders J.V., *Fundamentals of Acoustics*, Wiley, New York.
- [5] Mohseni K., Colonius T., *Numerical Treatment of Polar Coordinate Singularities*, Journal of Computational Physics, 157, 787-795, Academic Press, (2000).
- [6] Rienstra S.W., A. Hirschberg, *An Introduction to Acoustics*, Eindhoven University of Technology, (2004).
- [7] Shen Wen Zhong, Sørensen Jens Norkaer, *Aeroacoustic Modeling of Low Speed flows*, Therot. Comput. Fluid Dynamics, 13, 271-289, (1999).
- [8] Slimon S.A., Soteriou M.C., Davis D.W., *Development of Computational Aeroacoustics Equations for Subsonic Flows Using a Mach Number Expansion Approach*, Journal of Computational Physics, 159, 377-406, Academic Press, (2000).
- [9] Tam Christofer K.W., *Advances in Numerical Boundary Conditions for Computational Aeroacoustics*, Journal of Computational Acoustics, 6, 377-402, (1998).

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. ΡΗΤΟ ΣΧΗΜΑ MC CORMACK

Το σχήμα αποτελεί εξέλιξη του σχήματος Lax Wendroff χωρίς την απαίτηση υπολογισμού σε ενδιάμεσα χωρικά σημεία και είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και για μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις υπερβολικού τύπου.

Έστω η υπερβολικού τύπου πρώτου βαθμού εξίσωση σε μια χωρική διάσταση:  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0$ ,

όπου  $F$  είναι συνεχής, ομαλή συνάρτηση της άγνωστης μεταβλητής.

Η μέθοδος Mc Cormack χωρίζεται σε δύο ρητά αριθμητικά βήματα: Στο πρώτο (*βήμα πρόβλεψης- predictor step*) υπολογίζεται μια ενδιάμεση λύση χρησιμοποιώντας εμπρός διαφορές στο χώρο  $(j+1, j)$ :

$$u_j^{\overline{n+1}} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n) \quad (\text{A.1})$$

Στο δεύτερο βήμα (*βήμα διόρθωσης - corrector step*) η ενδιάμεση λύση διορθώνεται χρησιμοποιώντας πίσω διαφορές  $(j, j-1)$  για τη χωρική παράγωγο:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ u_j^n + u_j^{\overline{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_j^{\overline{n+1}} - F_{j-1}^{\overline{n+1}}) \right] \quad (\text{A.2})$$

Η (A.2) παρέχει την τελική τιμή της  $u$  για τη χρονική στιγμή  $n+1$ . Η σειρά διαφόρισης στο επόμενο βήμα αντιστρέφεται (πίσω στο βήμα πρόβλεψης, εμπρός στο βήμα διόρθωσης) και εναλλάσσεται συνέχεια μέχρι το τέλος των επαναλήψεων. Αυτή η εναλλαγή λειτουργεί σα φίλτρο μειώνοντας τα σφάλματα φάσης, ιδιαίτερα σε προβλήματα κυματικής μετάδοσης, όπου το σχήμα του κύματος έχει απότομες κλίσεις στο χώρο. Δυνητικά μπορεί να εφαρμοστεί και υπερχαλάρωση στη μέθοδο με διαφορετικούς συντελεστές στα δύο βήματα. Η επιλογή των συντελεστών εξαρτάται από την ακριβή μορφή της εκάστοτε διαφορικής εξίσωσης και πρέπει να γίνεται ώστε το συνολικό σχήμα να διατηρείται ευσταθές. Επίσης για συγκεκριμένου τύπου εξισώσεις το σχήμα μπορεί να γίνει άρρητο και άνευ όρων ευσταθές, με την προσθήκη απαίτησης επίλυσης ενός αλγεβρικού συστήματος σε κάθε βήμα.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΕΙΣ 1

Μονοδιάστατη παλλόμενη σφαίρα – σφαιρικές συντεταγμένες

$$\text{πίεση:} \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0} = \frac{p}{\rho_0 c_0^2} \gamma$$

$$\text{πυκνότητα:} \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$\text{ταχύτητα:} \quad \bar{u} = \frac{u}{c_0} \quad \text{και} \quad \bar{f} = \frac{f}{f_0} = \frac{f}{\rho_0 c_0}$$

$$\text{μήκος:} \quad \bar{r} = \frac{r}{\alpha}$$

$$\text{χρόνος:} \quad \bar{t} = \frac{t}{\rho_0}$$

Ακουστικές εξισώσεις αδιαστατοποιημένες:

$$\text{πυκνότητα:} \quad \frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \bar{f}) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\text{ακτινική ορμή:} \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \bar{f} \bar{u} + r^2 \bar{U} \bar{u}') + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial r} = 0, \quad \bar{f} = \bar{\rho} \bar{u}' + \bar{\rho}' \bar{U} \quad (\text{B.2})$$

$$\text{πίεση:} \quad \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{t}} + \gamma \frac{\bar{P} + \bar{p}'}{1 + \bar{\rho}'} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \bar{f}) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{t}} \quad (\text{B.3})$$

Αδιάστατοι αριθμοί:

$$\text{αριθμός Mach:} \quad M = \frac{U_0}{c_0}$$

$$\text{αριθμός Strouhal:} \quad Str = \frac{\omega \cdot \alpha}{2\pi \cdot c_0}$$

Λύση ασυμπίεστου πεδίου ροής:

$$P = 1 + \frac{2\pi \cdot Str \cdot M \cdot \gamma}{r} \cdot \cos(2\pi \cdot Str \cdot t) - \frac{M^2 \cdot \gamma}{2 \cdot r^4} \cdot \sin^2(2\pi \cdot Str \cdot t) \quad (\text{B.4})$$

$$U = \frac{M}{r^2} \sin(2\pi \cdot Str \cdot t)$$

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ C. ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΕΙΣ 2

Διαδιάστατη παλλόμενη σφαίρα – σφαιρικές συντεταγμένες

Για τις ίδιες αδιάστατες ποσότητες οι ακουστικές εξισώσεις γίνονται:

$$\text{μάζα:} \quad \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r}^2 \bar{f}_r) + \frac{1}{\bar{r} \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi \cdot \bar{f}_\phi) = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} \text{ακτινική ορμή:} \quad & \frac{\partial \bar{f}_r}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} [\bar{r}^2 \bar{f}_r (\bar{U}_r + \bar{u}'_r) + \bar{r}^2 \bar{U}_r \bar{u}'_r] \\ & + \frac{1}{\bar{r} \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} [\bar{f}_\phi \sin \phi \cdot (\bar{U}_r + \bar{u}'_r) + \sin \phi \cdot \bar{U}_r \bar{u}'_r] \\ & - \frac{1}{\bar{r}} [\bar{f}_\phi (\bar{U}_\phi + \bar{u}'_\phi) + \bar{U}_\phi \bar{u}'_\phi] \\ & + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{r}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \text{αξιμουθιακή ορμή:} \quad & \frac{\partial \bar{f}_\phi}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} [\bar{r}^2 \bar{f}_r (\bar{U}_\phi + \bar{u}'_\phi) + \bar{r}^2 \bar{U}_r \bar{u}'_\phi] \\ & + \frac{1}{\bar{r} \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} [\bar{f}_\phi \sin \phi \cdot (\bar{U}_\phi + \bar{u}'_\phi) + \sin \phi \cdot \bar{U}_\phi \bar{u}'_\phi] \\ & - \frac{1}{\bar{r}} [\bar{f}_r (\bar{U}_r + \bar{u}'_r) + \bar{U}_r \bar{u}'_r] \\ & + \frac{1}{\gamma \bar{r}} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \phi} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\text{πίεση:} \quad \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{t}} + \gamma \frac{\bar{P} + \bar{p}'}{1 + \bar{p}'} \left[ \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r}^2 \bar{f}_r) + \frac{1}{\bar{r} \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi \cdot \bar{f}_\phi) \right] = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{t}} \quad (\text{C.4})$$

Λύση ασυμπίεστου πεδίου ροής:

$$\begin{aligned} \bar{U}_r(\bar{r}, \bar{\phi}, \bar{t}) &= \frac{M}{\bar{r}^3} \sin(2\pi \cdot Str \cdot \bar{t}) \cdot \cos \phi \\ \bar{U}_\phi(r, \phi, t) &= \frac{M}{2\bar{r}^3} \sin(2\pi \cdot Str \cdot \bar{t}) \cdot \sin \phi \\ \bar{P}(\bar{r}, \bar{\phi}, \bar{t}) &= 1 + \frac{\pi \cdot Str \cdot \gamma \cdot M}{\bar{r}^2} \cos(2\pi \cdot Str \cdot \bar{t}) \cdot \cos \phi \\ &\quad - \frac{\gamma M^2}{2\bar{r}^6} \sin^2(2\pi \cdot Str \cdot \bar{t}) \cdot (1 - 3/4 \cdot \sin^2 \phi) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΕΝΑΣ ΑΥΣΤΗΡΟΣ (RIGOROUS) ΑΚΟΥΣΤΙΚΟΣ ΕΠΙΛΥΤΗΣ

Τα φαινόμενα κυματικής διάδοσης παίζουν σημαντικότατο ρόλο σε πολλές επιστημονικές περιοχές εφαρμογών μηχανικού, όπως αερακουστική, ηλεκτρομαγνητισμός, κβαντική μηχανική, σεισμολογία, αλλά και περιοχές εφαρμογών βιολογίας, όπως ροή αίματος στις αρτηρίες και παραγωγή φωνής. Γνωρίζοντας εκ των προτέρων τον τρόπο που τα κύματα δημιουργούνται, διαδίδονται, διαθλώνται, ανακλώνται και διαχέονται σε κάποιο μέσο, επιτρέπει στους μηχανικούς να λάβουν κρίσιμες αποφάσεις για ποικίλα θέματα, όπως για παράδειγμα για τη βέλτιστη τοποθέτηση συσκευών (κεραίες), για την κατασκευή ασφαλών κτιρίων και για το βέλτιστο ακουστικό σχεδιασμό μεγάλων χώρων.

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστεί μια αριθμητική μεθοδολογία για την εκτίμηση ακουστικής κυματικής διάδοσης σε δύο διαστάσεις και στο πεδίο του χρόνου με εστίαση στην δεύτερης τάξης κυματική εξίσωση. Αρχικά παρουσιάζονται οι τεχνικές της υψηλής τάξης συμπαγούς χωρικής (compact schemes) και χρονικής διακριτοποίησης. Μιας και τα συμπαγή αριθμητικά σχήματα έχουν μηδενικά σφάλματα διάχυσης πλάτους (non dissipative), είναι επιρρεπή στην ανάπτυξη νόθων ταλαντώσεων (σφάλματα φάσης), τα οποία μπορούν να αυξηθούν σημαντικά κατά την επαναληπτική διαδικασία της επίλυσης και να επηρεάσουν σημαντικά την ακρίβεια της τελικής λύσης. Ως εκ τούτου η μέθοδος συμπληρώνεται με την προσθήκη ενός χωρικού φίλτρου, το οποίο βασίζεται και αυτό στις μαθηματικές αρχές των συμπαγών σχημάτων.

Στην συνέχεια θίγεται ο πολύ σημαντικός ρόλος των συνοριακών συνθηκών. Για να είναι σε θέση η μέθοδος να προβλέψει σωστά την ακτινοβολία στο μακρινό πεδίο (far field), το υπολογιστικό χωρίο πρέπει να 'τερματιστεί' κατάλληλα στο εγγύς πεδίο (near field) με σωστό τρόπο, χωρίς να επηρεαστεί η ακρίβεια της λύσης και χωρίς να εισαχθούν αριθμητικά τεχνουργήματα στον υπολογισμό. Οι δύο πιο δημοφιλείς τρόποι για να γίνει αυτό, παρουσιάζονται και συγκρίνονται εδώ: Ο πρώτος είναι η διατύπωση των λεγομένων απορροφητικών συνοριακών συνθηκών με το μορφή μερικών διαφορικών εξισώσεων ειδικά για το σύνορο του υπολογιστικού χωρίου και ο δεύτερος η κατασκευή ενός 'απορροφητικού στρώματος' που περικλείει το χωρίο, στο οποίο τα κύματα, αφού εξέλθουν, εξασθενούν κατά πλάτος και αποσβένονται εκθετικά. Η ιδέα αυτή, που πρώτα παρουσιάστηκε για τις εξισώσεις Maxwell στον ηλεκτρομαγνητισμό και αργότερα υιοθετήθηκε σε πολλές παραλλαγές και στα ακουστικά προβλήματα, εφαρμόζεται και εδώ με μια διαφορετική όμως διατύπωση, ειδικά για τη δεύτερου βαθμού κυματική εξίσωση, που επιτρέπει τη διατήρηση της τάξης της εξίσωσης, χωρίς να είναι απαραίτητο το 'σπάσιμο' σε ένα ισοδύναμο σύστημα 2 εξισώσεων πρώτης τάξης, εισάγοντας περισσότερους αγνώστους και αυξάνοντας τον υπολογιστικό φόρτο και της απαιτήσεις σε μνήμη.

Στη συνέχεια η μέθοδος αξιολογείται συνολικά με την ανάκληση τριών βασικών προβλημάτων αναφοράς. Στο πρώτο, όπου ένας γκαουσιανός παλμός παράγεται και διαδίδεται από κέντρο ενός διδιάστατου χωρίου, συγκρίνονται η απορροφητικότητα και η ακρίβεια των προαναφερομένων συνοριακών συνθηκών. Στο δεύτερο εξετάζεται ανάλογη περίπτωση σε καμπυλόγραμμες όμως συντεταγμένες και με την παρουσία στερεού εμποδίου που σκεδάζει τον παλμό. Τέλος

υπολογίζεται το ακουστικό πεδίο που παράγεται από ροή ενός συστρεφομένου ζεύγους στροβίλων και συγκρίνεται με την αντίστοιχη αναλυτική λύση από τη βιβλιογραφία. Παρουσιάζονται και σχολιάζονται πλήρως τα αποτελέσματα, ώστε να αξιολογηθεί η συμπεριφορά της μεθόδου.

## **2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

Σε πολλά υπολογιστικά προβλήματα κυματικής διάδοσης, όπως για παράδειγμα ακουστική, ηλεκτρομαγνητισμός και μηχανική ρευστών, τα χαμηλής τάξης (πρώτης, δεύτερης) σχήματα αριθμητικής διακριτοποίησης δεν παρέχουν πάντα ικανοποιητική ακρίβεια. Το πλεονέκτημα της χρήσης υψηλής τάξης σχημάτων πεπερασμένων διαφορών είναι διπλό: πρώτον επιτρέπουν αύξηση της ακρίβειας για τον ίδιο αριθμό κόμβων και δεύτερον μειώνουν το υπολογιστικό κόστος επιτρέποντας μείωση της πυκνότητας του υπολογιστικού πλέγματος για δεδομένη ακρίβεια και παρότι απαιτούν περισσότερη υπολογιστική ‘εργασία’ για κάθε κόμβο, το γεγονός ότι χρειάζεται να αποθηκευθούν λιγότεροι κόμβοι, τα κάνει πιο αποτελεσματικά από τα χαμηλής τάξης σχήματα.

Τα υψηλής τάξης σχήματα πεπερασμένων διαφορών μπορούν να καταταγούν σε δύο ομάδες, ανάλογα με τον τρόπο που γίνεται ο υπολογισμός της παραγωγού:

- ρητά σχήματα
- συμπαγή (τύπου Padé) σχήματα

Στα πρώτα η παράγωγος υπολογίζεται κετευθείαν σε κάθε κόμβο, ενώ στα συμπαγή υπολογίζεται έμμεσα, επιλύοντας ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Όπως έχουν δείξει αρκετοί ερευνητές<sup>[24]</sup> τα συμπαγή σχήματα είναι πιο ακριβή, από τα αντίστοιχα ίδιας τάξης ρητά. Επίσης τα συμπαγή σχήματα επιδέχονται αριστοποίηση για κάποιο συγκεκριμένο εύρος κυματαριθμών, ελαχιστοποιώντας τη σχέση διάχυσης τους, παρέχοντας έτσι ακόμη περισσότερη ακρίβεια. Βέβαια το γεγονός του εκμηδενισμού των σφαλμάτων εύρους που παρουσιάζουν τα σχήματα αυτά, μπορεί να πυροδοτήσει την εμφάνιση νόθων ταλαντώσεων υψηλού κυματαριθμού, οι οποίες υπάρχει περίπτωση να αυξηθούν κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων, να επηρεάσουν την ακρίβεια του σχήματος και στη χειρότερη των περιπτώσεων να οδηγήσουν σε αστάθεια. Πολύ συγγραφείς προτείνουν τη χρήση χωρικών φίλτρων για να αποφύγουν το πρόβλημα<sup>[35]</sup>, ενώ άλλοι αποφεύγουν να εφαρμόσουν φίλτρο κετευθείαν στη λύση και εισάγουν όρους απόσβεσης στις διακριτοποιημένες εξισώσεις, οι οποίοι δρουν έμμεσα και αφήνουν ανεπηρέαστους τους μικρούς κυματαριθμούς<sup>[30][8]</sup>. Ένα παρόμοιο χωρικό φίλτρο χρησιμοποιείται και στα πλαίσια της παρούσης μαζί με ειδικό χειρισμό στο σύνορο για την εφαρμογή των von Neumann συνθηκών ανάκλασης.

Πέρα από τη διακριτοποίηση το πιο ευαίσθητο και σημαντικό θέμα στην αριθμητική προσομοίωση υπερβολικών φαινομένων είναι η σωστή επιλογή και εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών. Η ακτινοβολία στο μακρινό πεδίο, η ανάκλαση από εμπόδια και οι χωρικές αλλαγές στο μέσο διάδοσης πρέπει να μπορούν να προβλεφθούν σωστά, κρατώντας παράλληλα τη λύση φραγμένη και την όλη μέθοδο ευσταθή. Η ακτινοβολία στο μακρινό πεδίο φαίνεται ότι είναι το

πιο δύσκολο και προκλητικό πρόβλημα στην αριθμητική προσομοίωση της κυματικής διάδοσης. Εδώ και 30 χρόνια ήταν και συνεχίζει να είναι πεδίο ενεργής ερευνητικής δραστηριότητας σε διάφορα επιστημονικά πεδία. Οι πρώτες προσπάθειες για την αντιμετώπιση των ανακλάσεων που δημιουργούνται στο υπολογιστικό σύνορο, έγιναν από τους Engquist and Majda<sup>[12][13]</sup>, οι οποίοι ανέπτυξαν θεωρητικές πλήρως απορροφητικές συνθήκες (theoretical non local ABC's) για γενικές κλάσεις κυματικών εξισώσεων. Ακόλουθα κάνοντας χρήση προσεγγίσεων Padé των λύσεων της κυματικής εξίσωσης, που ουσιαστικά παριστούν κύματα που ταξιδεύουν σε μία χωρική διεύθυνση, ανέπτυξαν μια ιεραρχία ευσταθών τοπικών απορροφητικών συνθηκών (local ABC's), οι οποίες προσεγγίζουν επαρκώς τις θεωρητικές μη τοπικού χαρακτήρα. Με αύξηση της τάξης των συνθηκών, αυξάνονται και οι επιδόσεις των συνθηκών. Αργότερα ο Giles<sup>[16]</sup> ανέπτυξε τοπικές ABC's για τις εξισώσεις Euler χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις Taylor, ενώ οι Bayliss – Turkel<sup>[5]</sup> παίρνοντας ασυμπτωτικές επεκτάσεις των λύσεων καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα. Ο τελευταίος φορμαλισμός προτάθηκε και από τον Tam<sup>[31]</sup> και χρησιμοποιήθηκε αργότερα και από άλλους ερευνητές όπως οι Bogey and Bailly<sup>[7]</sup> σε τριδιάστατες όμως εφαρμογές. Με διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα ο Thomson<sup>[32],[33]</sup> αναπτύσσει ABC's χρησιμοποιώντας τη θεωρία των χαρακτηριστικών.

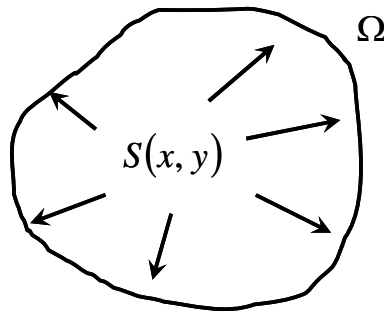
Οι απορροφητικές ικανότητες των παραπάνω συνθηκών εξαρτώνται από την εκάστοτε γωνία πρόσπτωσης και τη απόσταση του συνόρου από τις πηγές. Όσο μακρύτερα τοποθετείται το σύνορο, τόσο καλύτερεύουν οι απορροφητικές ιδιότητες. Τέλεια απορρόφηση υφίσταται μόνο για επίπεδα κύματα. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι παραπάνω διατυπώσεις έχουν κάποιο βαθμό ανάκλασης, που μπορεί να επηρεάσει τη λύση. Μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα εύρεσης καλών απορροφητικών συνθηκών είναι και τα λεγόμενα 'απορροφητικά στρώματα' (absorbing layers). Χρησιμοποιούνται μόνα τους ή σε συνδυασμό με τις ABC's, ώστε να αυξήσουν την αποτελεσματικότητά τους. Εισήχθησαν αρχικά από τους Israeli and Orszag<sup>[20]</sup> και η λειτουργία τους αποσκοπεί στην μερική απόσβεση των προσπιπτόντων κυμάτων πριν αυτά αλληλεπιδράσουν με τις ABC's. Αυτό γίνεται με την προσθήκη γραμμικών όρων τριβής στις εξισώσεις, όπως δείχνουν αναλυτικά οι Kosloff και Kosloff<sup>[22]</sup> για την εξίσωση Schrödinger και για τις ακουστικές κυματικές εξισώσεις. Οποσδήποτε ανακλάσεις από το σύνορο αποσβέννεται ξανά, καθώς προχωρούν πίσω προς το υπολογιστικό χωρίο. Το βασικό πρόβλημα με την προσέγγιση αυτή είναι ότι το εσωτερικό όριο το στρώματος ανακλά και αυτό, οπότε για ικανοποιητικά αποτελέσματα απαιτείται σταδιακή αύξηση του βαθμού απόσβεσης από το μηδέν και για μια σχετικά μεγάλη απόσταση. Το τελευταίο έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία μεγάλων στρωμάτων. Το Πλήρως Τατριασμένο Στρώμα (Perfectly Matched Layer - PML) του Berenger<sup>[6]</sup> προτάθηκε σαν ένας εναλλακτικός τρόπος για την κατασκευή απορροφητικών στρωμάτων με μηδενική θεωρητικά ανάκλαση για οποιαδήποτε γωνία και συχνότητα προσπιπτόντων κυμάτων. Η ιδέα του Berenger βασίστηκε σε έναν αφύσικο διαχωρισμό της ακτινοβολούμενης βαθμωτής ποσότητας στις γεωμετρικές συνιστώσες της (π.χ.  $p'_x$ ,  $p'_y$ ,  $p'_z$ ) και κατόπιν εφαρμογή απόσβεσης σε διεύθυνση κάθετη στο στρώμα και μετά επιλογή των συναρτήσεων απόσβεσης ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ) για κάθε διεύθυνση απαιτώντας πολύ μικρό βαθμό ανάκλασης. Το 'καλώς τιθέμενο' της διατύπωσης αυτής ήταν ασθενές λόγω του μη φυσικού διαχωρισμού, ενώ η εφαρμογή στο πεδίο του χρόνου σχετικά δύσκολη λόγω της απαίτησης πρώτης τάξης στις κυματικές εξισώσεις. Αργότερα ένας πιο κομψός και ισχυρά τιθέμενος φορμαλισμός γνωστός ως Στρώμα Τεντωμένων Συντεταγμένων (Stretched Coordinate PML)



χρησιμοποιείται πρώτα από τους Chew and Weedon<sup>[10]</sup> πάλι σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού και από τον Hu<sup>[17],[18]</sup> σε προβλήματα ακουστικής. Η βασική ιδέα της νέας διατύπωσης είναι ότι μέσα στο PML οι εξισώσεις μεταφέρονται στο μιγαδικό επίπεδο, όπου εκεί εφαρμόζεται απόσβεση μόνο στο φανταστικό μέρος κάθε συντεταγμένης. Αυτό αναγκάζει τα κύματα να εξασθενούν μέσα στο στρώμα ανεξάρτητα από τη γωνία πρόσπτωσής τους. Οι φυσικές εξισώσεις του στρώματος λαμβάνονται ομαδοποιώντας τις φανταστικές συνιστώσες και αναγνωρίζοντας αυτές σε βοηθητικές μεταβλητές. Για τις δευτέρου βαθμού κυματικές εξισώσεις άλλοι συγγραφείς χρησιμοποιούν το μετασχηματισμό Laplace με ίδιο τρόπο. Μια παρόμοια μεθοδολογία ακολουθείται και στα πλαίσια της παρούσης αργότερα στο κεφάλαιο αυτό. Τα PMLs πρέπει να 'ρυθμιστούν' σωστά για να έχουν την αναμενόμενη λειτουργία. Αυτό γίνεται με πειραματισμό και επιλογή καταλλήλων τιμών για παραμέτρους όπως το πάχος του στρώματος και η εσωτερική συνάρτηση – προφίλ απόσβεσης.

## 2.2 ΔΙΕΠΟΥΣΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έστω ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ακουστικό πεδίο πίεσης  $p'$  διαδιδόμενο σε διδιάστατο χώρο όπου όλες οι πηγές και αρχικές διαταραχές περιορίζονται στο καμπυλόγραμμο χωρίο  $\Omega$  (Εικόνα 2-1). Επίσης θεωρείται σταθερή ταχύτητα διάδοσης  $c_0 > 0$ .



Εικόνα 2-1. Κυματική διάδοση σε ελεύθερο χώρο.

Μέσα στο  $\Omega$  το πεδίο  $p'(x, y, t)$  ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις:

$$p''_{tt} - c_0^2 \nabla^2 p' = S \quad t > 0 \quad (2.1)$$

$$p' = p_0(x, y) \quad t = 0 \quad (2.2)$$

$$p'_t = 0 \quad t = 0 \quad (2.3)$$

όπου  $S = S(x, y)$  είναι φραγμένες πηγές μέσα στο χωρίο.

### 2.2.1 Η αναλογία Lighthill

Για τις ανάγκες της αριθμητικής αξιολόγησης της μεθόδου αργότερα στο κεφάλαιο ανακαλείται η ακουστική αναλογία του Lighthill, στην οποία δηλώνεται, ότι κάτω από ισεντροπικές συνθήκες διάδοσης οι διακυμάνσεις της πίεσης που προκαλούνται από τη ροή ρευστού, μπορούν να προσδιοριστούν από την επίλυση της ακόλουθης μη ομογενούς κυματικής εξίσωσης δευτέρου βαθμού:

$$p''_n - c_0^2 \nabla^2 p' = c_0^2 \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.4)$$

όπου  $T_{ij}$  είναι ο τανυστής πηγών του Lighthill, ο οποίος έχει τη μορφή:

$$T_{ij} = \rho u_i u_j - \tau_{ij} \quad (2.5)$$

Στην (2.5) ο όρος  $\rho u_i u_j$  αναπαριστά τις μη γραμμικές ακουστικές συνεισφορές λόγω μεταφορικών δυνάμεων, ενώ ο όρος  $\tau_{ij}$  αναπαριστά ακουστικές συνεισφορές λόγω ιξωδών τάσεων.

Παρόλα αυτά όταν η ροή είναι ασυμπίεστη μπορεί να δειχθεί παίρνοντας την απόκλιση της εξίσωσης ορμής και χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας για την απλοποίηση όρων, ότι η ασυμπίεστη πίεση ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$\nabla^2 p^{inc} = \rho \frac{\partial^2 (u_i u_j)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.6)$$

Υποθέτοντας ότι για ασυμπίεστη ροή οι διακυμάνσεις της πίεσης μπορούν να χωριστούν στο ακουστικό και ασυμπίεστο μέρος  $p' = p^a + p^{inc}$ , η αναλογία του Lighthill με αντικατάσταση της (2.4) στην (2.6) γίνεται:

$$p''_n - c_0^2 \nabla^2 p^a = -p''_n^{inc} \quad (2.7)$$

Η εξίσωση (2.7) παρέχει έναν εναλλακτικό τρόπο για τον υπολογισμό της ακουστικής πίεσης χρησιμοποιώντας μόνο τη δεύτερη χρονική παράγωγο της ασυμπίεστης πίεσης ροής σε δεδομένο και όχι τη διπλή απόκλιση του τανυστή του Lighthill, είναι υπολογιστικά πιο απαιτητικό να υπολογιστεί. Δεδομένα ασυμπίεστης πίεσης μπορούν γενικά να είναι διαθέσιμα από έναν επιλύτη ροής.

## 2.3 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Στις επόμενες δύο παραγράφους επιχειρείται μια σύντομη παρουσίαση των δύο τύπων συνοριακών συνθηκών που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο.

### 2.3.1 Τοπικές ABC's

Ακολουθώντας την ακριβή συνθήκη ακτινοβολίας για την ομογενή κυματική εξίσωση σε μία διάσταση  $\partial_t p' \pm \partial_x p' = 0$  και χρησιμοποιώντας ψευδοδιαφορικούς τελεστές, μπορεί κανείς εύκολα να κατασκευάσει συνθήκες ABC και για τη διδιάστατη περίπτωση. Η ομογενής κυματική εξίσωση στις δύο διαστάσεις, θεωρώντας για απλότητα  $c_0 = 1$ , μπορεί να γραφεί και ως:

$$(\partial_{xx}^2 - L^2)p' = 0 \quad (2.8)$$

όπου  $L^2$  ο ψευδοδιαφορικός τελεστής:

$$L^2 = \partial_n^2 - \partial_{yy}^2 \quad (2.9)$$

Η ανάλογη με τη μονοδιάστατη ακριβής συνθήκη ακτινοβολίας για τις δύο διαστάσεις είναι:

$$(\partial_x + L)p' = 0 \quad (2.10)$$

όπου  $L$  είναι μία από τις ‘τετραγωνικές ρίζες’ του τελεστή  $L^2$ . Για επίπεδα κύματα μεταδιδόμενα στην  $y$  διεύθυνση  $p' = p'(x) \cdot e^{-i\omega t +iky}$ , μπορεί κανείς να καταλήξει σε μια έκφραση που να περιέχει τον τελεστή  $L^2$ , χρησιμοποιώντας την (2.9):

$$\begin{aligned} L^2 &= -\omega^2 + k^2 \quad \text{ή} \\ L &= \pm\sqrt{-\omega^2} \cdot \sqrt{1 - k^2/\omega^2} \quad \text{ή} \\ L &= \pm i\omega\sqrt{1 - k^2/\omega^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

και αναλύοντας την τελευταία σε δυναμοσειρά του  $k/\omega$ :

$$L \approx \pm i(\omega - k^2/2\omega) \quad (2.12)$$

Γυρνώντας στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιώντας τις γνωστές αντιστοιχίες  $i\omega \leftrightarrow \partial_t$ ,  $ik^2 \leftrightarrow \partial_{yy}$ , αντικαθιστώντας στην (2.10) και παίρνοντας ακόμη μια φορά χρονική παράγωγο, καταλήγει κανείς σε τοπική απορροφητική συνθήκη για την  $x$  διεύθυνση:

$$p'_{xt} \pm p'_{tt} \mp \frac{1}{2} p'_{yy} = 0 \quad (2.13)$$

και με ακριβώς ίδιο τρόπο για την  $y$  διεύθυνση:

$$p'_{yt} \pm p'_{tt} \mp \frac{1}{2} p'_{xx} = 0 \quad (2.14)$$

Οι πρώτες των (2.13), (2.14) ισχύουν για το δεξιό και πάνω σύνορο, ενώ οι δεύτερες για το αριστερό κάτω. Η (2.12) είναι η δεύτερη προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας στην (2.11). Η επιλογή της πρώτης προσέγγισης, δηλ.  $L \approx \pm i\omega$ , θα είχε ως αποτέλεσμα την γνωστή συνθήκη ακτινοβολίας στη μία διάσταση:

$$p'_x = \pm p_t \quad (2.15)$$

και

$$p'_y = \pm p_t \quad (2.16)$$

Μια ενδελεχής σύγκριση διαφόρων προσεγγίσεων της (2.11) είναι διαθέσιμη στο [28], όπου αποδεικνύεται ότι η Chebychev – Padé προσέγγιση αφήνει λιγότερη υπολείπουσα ενέργεια στο διδιάστατο πρόβλημα αναφοράς ευθυγράμμου καναλιού. Στο [34] οι Trefethen και Halpern διατυπώνουν θεωρήματα για την εκτίμηση του καλώς τιθέμενου αυτών των τύπων των προσεγγίσεων. Οι (2.15) και (2.16) είναι ευκολότερα υλοποιήσιμες αλλά υπολείπονται σε ακρίβεια στα διδιάστατα προβλήματα. Οι (2.13) και (2.14) υλοποιούνται πιο δύσκολα, ειδικά σε μεθόδους μεταβολικού λογισμού (πεπερασμένα στοιχεία), εξαιτίας της παρουσίας των μικτών παραγώγων, απαιτώντας έτσι τη χρήση βοηθητικών μεταβλητών.

Η γενικότερη μορφή των (2.15) και (2.16) είναι:

$$p'_n = p'_t \quad (2.17)$$

όπου  $\mathbf{n}$  παριστά κάθετη παράγωγο.

Παρόμοιες εκφράσεις εξάγονται και στα (2.4) και (2.6) χρησιμοποιώντας όμως τις ασυμπτωτικές λύσεις των εξισώσεων Euler ή/και χρησιμοποιώντας την κυματική εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες αντίστοιχα. Η συνοριακή συνθήκη τότε γράφεται:

$$\partial_n p' + \partial_t p' + \frac{1}{2R} p' = 0 \quad (2.18)$$

Μια άλλη έκφραση για κυκλικά όρια παρέχεται στο [4] ως:

$$\partial_n p' + \partial_t p' + \frac{1}{2R} p' = (1 + R\partial_t)^{-1} \left( \frac{1}{8R} p' + \frac{1}{2R} \partial_\theta^2 p' \right) \quad (2.19)$$

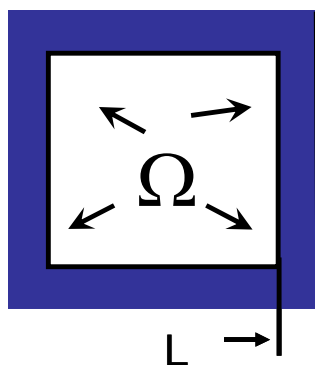
Παρόλα αυτά η βελτίωση έναντι της (2.18) είναι μικρή.

### 2.3.2 Πλήρως Ταιριασμένο Στρώμα

Ακολουθεί μια συνοπτική παρουσίαση της εξαγωγής των εξισώσεων του PML σύμφωνα με τα [2] και [3], θεωρώντας διάδοση σε τετραγωνικό διδιάστατο χωρίο  $\Omega$ , περιβαλλόμενο από στρώμα πάχους  $L_i, i=1,2$  (Εικόνα 2-2). Η κύρια ιδέα του στρώματος τεντωμένων συντεταγμένων (coordinate stretched) εφαρμόζεται σε τρία βήματα:

- Εισαγωγή φάσης στις χωρικές συντεταγμένες (complex coordinate stretching)
- Συνέχιση της λύσης στις νέες μιγαδικές συντεταγμένες
- Αλλαγή στις πραγματικές με εισαγωγή βοηθητικών μεταβλητών, ώστε να σχηματιστεί η μερική διαφορική εξίσωση που θα ισχύει μέσα στο στρώμα

Η λογική αυτή έχει εφαρμοσθεί επιτυχώς στις εξισώσεις Euler και άλλες πρώτου βαθμού κυματικές εξισώσεις. Στα πλαίσια της παρούσης διατριβής προτείνεται η εφαρμογή των ανωτέρω βημάτων στο χώρο Laplace και όχι στο μιγαδικό επίπεδο, ειδικά για την κυματική εξίσωση δευτέρου βαθμού για την οποία δεν επιθυμείται το σπάσιμο σε σύστημα πρώτου βαθμού με την εισαγωγή βοηθητικής μεταβλητής (ταχύτητα).



Εικόνα 2-2. Τετραγωνικό χωρίο και PML

Ο μετασχηματισμός Laplace της ακουστικής πίεσης είναι κατ' ορισμό:

$$L(p') = \tilde{p}'(\mathbf{x}, s) = \int_0^{\infty} e^{st} p'(\mathbf{x}, t) dt \quad (2.20)$$

και η νέα ‘τεντωμένη’ μεταβλητή στο χώρο Laplace:

$$x_i \rightarrow \tilde{x}_i := x_i + \frac{1}{s} \int_0^{x_i} Z_i(x) dx, \quad i = 1, 2 \quad (2.21)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της (2.1) δίνει την εξίσωση Helmholtz για την  $\tilde{p}'$ , η οποία με εισαγωγή της νέας ‘τεντωμένης’ μεταβλητής δίνει τη μορφή της (2.22):

$$s^2 \tilde{p}' = \partial_{\tilde{x}_1} (c_0^2 \partial_{\tilde{x}_1} \tilde{p}') + \partial_{\tilde{x}_2} (c_0^2 \partial_{\tilde{x}_2} \tilde{p}') \quad (2.22)$$

Τα προφίλ απόσβεσης  $Z_i$  είναι θετικά μέσα στο στρώμα και μηδενικά στο  $\Omega$ . Αν η  $\tilde{p}'$  ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz (2.22) στις νέες συντεταγμένες, τότε η πίεση θα παραμένει αμετάβλητη στο  $\Omega$  και θα αποσβένει εκθετικά μέσα στο στρώμα. Μετασχηματίζοντας την (2.22) στο πεδίο του χρόνου και εισάγοντας βοηθητικές μεταβλητές προκύπτει η μερική διαφορική εξίσωση που πρέπει να λυθεί μέσα στο στρώμα. Από την (2.21) παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη, προκύπτει η σχέση μεταξύ των παραγώγων για τις δύο συντεταγμένες:

$$\partial_{\tilde{x}_i} = \left(1 + \frac{Z_i}{s}\right) \cdot \partial_{x_i} = k_i \cdot \partial_{x_i} \quad (2.23)$$

και αντικαθιστώντας στην (2.22):

$$s^2 k_1 k_2 \tilde{p}' = \partial_{x_1} \left( c_0^2 \frac{k_2}{k_1} \partial_{x_1} \tilde{p}' \right) + \partial_{x_2} \left( c_0^2 \frac{k_1}{k_2} \partial_{x_2} \tilde{p}' \right) \quad (2.24)$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} & (s^2 + s(Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2) \tilde{p}' = \\ & \partial_{x_1} (c_0^2 \partial_{x_1} \tilde{p}') + \partial_{x_2} (c_0^2 \partial_{x_2} \tilde{p}') + \partial_{x_1} \left( c_0^2 \frac{Z_2 - Z_1}{s + Z_1} \partial_{x_1} \tilde{p}' \right) + \partial_{x_2} \left( c_0^2 \frac{Z_1 - Z_2}{s + Z_2} \partial_{x_2} \tilde{p}' \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Εισάγοντας τώρα το άνυσμα των βοηθητικών μεταβλητών  $\tilde{\mathbf{f}} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) = \left( c_0^2 \frac{Z_2 - Z_1}{s + Z_1} \partial_{x_1} \tilde{p}', c_0^2 \frac{Z_1 - Z_2}{s + Z_2} \partial_{x_2} \tilde{p}' \right)$  και παίρνοντας τον αντίστροφο

μετασχηματισμό Laplace, η εξίσωση του στρώματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$\begin{aligned} p''_t + (Z_1 + Z_2) p'_t + Z_1 Z_2 p' &= \nabla \cdot (c_0^2 \nabla p' + \mathbf{f}) \\ \mathbf{f}_t &= \mathbf{A}_1 \mathbf{f} + c_0^2 \mathbf{A}_2 \nabla p' \end{aligned} \quad (2.26)$$

όπου τα μητρώα  $\mathbf{A}_1$  και  $\mathbf{A}_2$  ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \text{diag}(-Z_1, -Z_2) \\ \mathbf{A}_2 &= \text{diag}(Z_2 - Z_1, Z_1 - Z_2) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Παρατηρείται ότι όταν τα προφίλ και το άνυσμα των βοηθητικών μεταβλητών μηδενιστούν η (2.26) παίρνει τη μορφή της (2.1), δηλ., μεταπίπτει στην κυματική εξίσωση. Η (2.26) πρέπει να λυθεί με την εφαρμογή του ίδιου σχήματος ολοκλήρωσης στο χρόνο με την (2.1). Η μεταβλητή

$\mathbf{f}$  αυξάνει τον υπολογιστικό φόρτο και είναι ένας επιπλέον άγνωστος στο σύστημα. Η συμπεριφορά του στρώματος μπορεί να ρυθμιστεί εκλέγοντας κατάλληλα τα μήκη  $L_i$  και τα προφίλ απόσβεσης  $Z_i$ , κάτι που γίνεται συνήθως με πειραματισμό. Εμπειρικοί κανόνες συνιστούν ότι οι συναρτήσεις  $Z_i$  πρέπει να αυξάνουν βαθμιαία και ομαλά από το μηδέν, χωρίς απότομες μεταβολές. Σημειώνεται επίσης ότι η (2.27) ισχύει για τετραγωνικό χωρίο. Παρόλα αυτά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες αν αντικατασταθούν οι κατάλληλες εκφράσεις για την κλίση και την απόκλιση.

### 2.3.3 Συνθήκη Στερεού Σώματος

Στην περίπτωση πρόσκρουσης του ακουστικού κύματος σε στερεή επιφάνεια, θεωρείται ότι ανακλάται πλήρως χωρίς απώλειες, οπότε θα ισχύει η παρακάτω ομογενής συνθήκη von Neumann:

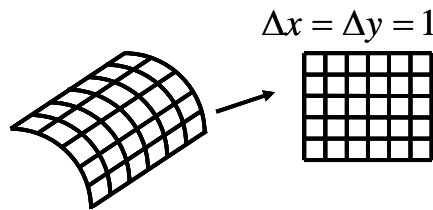
$$\partial_{\mathbf{n}} p' = 0 \quad (2.28)$$

Η (2.28) παρέχει πλήρη ανάκλαση του κύματος και δεν χρειάζεται να διατυπωθούν πρόσθετες εκφράσεις, όπως στις εξισώσεις Euler όπου πρέπει να τεθεί και η κάθετη ταχύτητα ίση με το μηδέν ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ). Αυτό είναι ένα πρόσθετο πλεονέκτημα της κατευθείαν μοντελοποίησης της δευτέρου βαθμού κυματικής εξίσωσης, όπου δε λύνονται όλες οι πρωτογενείς ακουστικές μεταβλητές.

## 2.4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

### 2.4.1 Μετασχηματισμός Συντεταγμένων

Για να μπορέσει η μέθοδος να εφαρμοσθεί σε καμπυλόγραμμες γεωμετρίες, πρέπει πρώτα οι διέπουσες εξισώσεις να γραφούν στο ομοιόμορφο δομημένο σύστημα συντεταγμένων  $(\xi, \eta)$  με πλευρά κελιού ίση με 1, χρησιμοποιώντας το συνήθη Ιακωβιανό μετασχηματισμό.



Εικόνα 2-3. Ιακωβιανός μετασχηματισμός

Η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), & \eta &= \eta(x, y) \\ J &= \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{aligned} \quad (2.29)$$

οπότε χρησιμοποιώντας τον αλυσωτό κανόνα παραγώγισης η (2.1) μετασχηματίζεται στην:

$$p''_n = c_0^2 \left[ \begin{array}{l} (\xi_x^2 + \xi_y^2) p'_{\xi\xi} + 2(\xi_x n_x + \xi_y n_y) p'_{\xi\eta} + (n_x^2 + n_y^2) p'_{nn} + \\ (\xi_{xx} + \xi_{yy}) p'_\xi + (n_{xx} + n_{yy}) p'_n \end{array} \right] + S \quad (2.30)$$

Η κάθετη παράγωγος που εμφανίζεται στις εκφράσεις συνοριακών συνθηκών γίνεται:

$$\partial_n p' = [p'_\xi (\xi_x n_x + \xi_y n_y) \pm p'_n (n_x^2 + n_y^2)] (n_x^2 + n_y^2)^{-1/2} \quad (2.31)$$

Η (2.31) ισχύει για το πάνω και κάτω όριο και αν οι πλεγματικές γραμμές είναι κάθετες στην περιοχή αυτή (στις περισσότερες μεθόδους παραγωγής πλεγμάτων επιβάλλεται η συνθήκη αυτή), τότε  $x_\xi x_n + y_\xi y_n = -n_y \xi_x - n_x \xi_y = 0$  και συνεπώς η κάθετη παράγωγος μπορεί να υπολογιστεί στο μετασχηματισμένο σύστημα πολύ απλά από την:

$$\partial_n p' = \pm p'_n \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \quad (2.32)$$

Παρόμοια έκφραση μπορεί να προκύψει και για το δεξιό / αριστερό όριο:

$$\partial_\xi p' = \pm p'_\xi \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \quad (2.33)$$

Συνεπώς οι συνθήκες ανάκλασης από στερεό τοίχωμα (2.28) γίνονται:

$$p'_\xi = 0, \quad p'_n = 0 \quad (2.34)$$

#### 2.4.2 Χωρική Διακριτοποίηση – Συμπαγή Σχήματα

Τα συμπαγή σχήματα (compact schemes – CS's) είναι ιδιαίτερα δημοφιλή σε αριθμητικές εφαρμογές πεπερασμένων διαφορών λόγω της απλότητάς τους και της ευκολίας στην υλοποίηση. Στα πλαίσια της παρούσης χρησιμοποιήθηκε ένα έκτης τάξης CS και αναπτύχθηκαν ειδικές εξισώσεις για την περίπτωση των στερών ορίων. Τα CS είναι πλήρως κεντρικά και ανάλογα με τον αριθμό των γειτονικών κόμβων που χρησιμοποιούνται για υπολογισμό της παραγώγου χωρίζονται σε σχήματα τριδιαγώνιας και πενταδιαγώνιας μήτρας<sup>[24]</sup>. Η γενική μορφή για τα τριδιαγώνια σχήματα και για τον υπολογισμό της πρώτης και δεύτερης παραγώγου είναι αντίστοιχα:

$$a(p'_{i-1})' + (p'_i)' + a(p'_{i+1})' = b \frac{p'_{i+1} - p'_{i-1}}{2h} + c \frac{p'_{i+2} - p'_{i-2}}{4h} \quad (2.35)$$

$$a(p'_{i-1})'' + (p'_i)'' + a(p'_{i+1})'' = b \frac{p'_{i+1} - 2p'_i + p'_{i-1}}{h^2} + c \frac{p'_{i+2} - 2p'_i + p'_{i-2}}{4h^2} \quad (2.36)$$

όπου δείκτες εδώ αντιστοιχούν σε διακριτές τιμές κομβικού σημείου και όχι σε μερική παραγωγή.

Οι αριθμητικές τιμές των συντελεστών υπολογίζονται παίρνοντας τα αναπτύγματα Taylor των παραγώγων γύρω από το σημείο  $i$ , ομαδοποιώντας τους όρους σε δυνάμεις του  $h$  και τέλος εξισώνοντας τις ποσότητες ίδιας δύναμης. Απαιτώντας ακρίβεια  $6^{th}$  τάξης το προκύπτον γραμμικό σύστημα εξισώσεων έχει 3 αγνώστους και 2 εξισώσεις. Έτσι παράγεται μια οικογένεια μονοπαραμετρικών σχημάτων  $6^{th}$  τάξης, η οποία, καθώς η ελεύθερη παράμετρος τείνει στο μηδέν, μεταπίπτει στο  $4^{th}$  τάξης ακρίβειας κεντρικό σύστημα διαφορών.

Οι αριθμητικές τιμές για την πρώτη παράγωγο είναι:

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{14}{9}, \quad c = \frac{1}{9} \quad (2.37)$$

και για τη δεύτερη:

$$a = \frac{2}{11}, \quad b = \frac{12}{11}, \quad c = \frac{3}{11} \quad (2.38)$$

Η εφαρμογή στο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων είναι πολύ εύκολη παίρνοντας απλά  $h = 1$ .

### 2.4.3 Χειρισμός του Συνόρου

Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχουν περιοδικές συνθήκες στα όρια, τότε πρέπει να διατυπωθούν εκφράσεις μιας πλευράς, προς αποφυγή χρήσεως σημείων έξω από το χωρίο. Οι εκφράσεις πρέπει να διατηρούν την τριδιαγώνια μορφή της τελικής μήτρας, ούτως ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν εύκολα γνωστοί αλγεβρικοί επιλύτες. Επίσης το πλήθος των συμμετεχόντων γειτονικών κόμβων πρέπει να εκλεγεί έτσι ώστε να επιτευχθεί η ίδια τάξης ακρίβεια με το εσωτερικό CS, αν και πολλές φορές όπως θα φανεί παρακάτω είναι επιθυμητή η μείωση της ακρίβειας στα CS, καθώς προσεγγίζονται τα όρια. Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο με προηγούμενως (ταίριασμα συντελεστών Taylor ίδιας τάξης) λαμβάνονται οι παρακάτω σχέσεις για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο αντίστοιχα και για ακρίβεια 6<sup>ης</sup> τάξης.

$$\text{σημείο 1: } (p'_1)' + 5(p'_2)' = \left[ \frac{197}{60} p'_1 - \frac{5}{12} p'_2 + 5p'_3 - \frac{5}{3} p'_4 + \frac{5}{12} p'_5 - \frac{1}{20} p'_6 \right] \frac{1}{h} \quad (2.39)$$

$$\text{σημείο 2: } \frac{1}{8}(p'_1)' + (p'_2)' + \frac{3}{4}(p'_3)' = \left[ -\frac{43}{96} p'_1 - \frac{5}{6} p'_2 + \frac{9}{8} p'_3 - \frac{1}{6} p'_4 + \frac{1}{96} p'_5 \right] \frac{1}{h} \quad (2.40)$$

σημείο 1:

$$(p''_1) + \frac{126}{11}(p''_2) = \left[ \frac{2077}{157} p'_1 - \frac{2943}{110} p'_2 + \frac{573}{44} p'_3 - \frac{167}{99} p'_4 + \frac{18}{11} p'_5 - \frac{57}{110} p'_6 + \frac{131}{1980} p'_7 \right] \frac{1}{h^2} \quad (2.41)$$

σημείο 2:

$$\frac{2}{11}(p''_1) + (p''_2) - \frac{131}{22}(p''_3) = \left[ \frac{177}{88} p'_1 - \frac{507}{44} p'_2 + \frac{783}{44} p'_3 - \frac{201}{22} p'_4 + \frac{81}{88} p'_5 - \frac{3}{44} p'_6 \right] \frac{1}{h^2} \quad (2.42)$$

Για τα δεξιά όρια (σημεία N, N-1) οι συντελεστές για την πρώτη παράγωγο απλά αλλάζουν πρόσημο, ενώ για τη δεύτερη παραμένουν ως έχουν στις (2.41),(2.42).

### 2.4.4 Συνοριακές Συνθήκες

Η υλοποίηση των τύπου Dirichlet συνοριακών συνθηκών στα CS είναι πολύ εύκολη και προφανής μέσω των (2.39)-(2.42). Η εφαρμογή συνθηκών τύπου Neumann χρειάζεται περισσότερη προσοχή. Η ομογενής συνθήκη τοιχώματος (2.34) εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας την ακόλουθη προσέγγιση για την τιμή της συνάρτησης στο πρώτο σημείο με κόμβους μόνο μιας πλευράς:



$$ap'_1 = \sum_{i=2} b_i p'_i \quad (2.43)$$

Οι (2.39) και (2.40) χρησιμοποιούνται για το σχηματισμό του τριδιαγώνιου συστήματος, όπου όμως η τιμή της  $p'_1$  στα δεξιά μέλη πρέπει να υπολογιστεί από τη (2.43). Για τον υπολογισμό των συντελεστών της τελευταίας εφαρμόζεται πάλι η ανάλυση Taylor και το ταίριασμα των συντελεστών των ποσοτήτων δεξιού – αριστερού μέλους μετά από ομαδοποίηση, με τη μόνη διαφορά ότι ο συντελεστής της πρώτης παραγώγου  $\left. \frac{dp'}{dx} \right|_{x_i}$  μπορεί να τεθεί ίσος με οποιαδήποτε

σταθερά, λόγω της παρουσίας της Neumann συνθήκης. Εδώ τέθηκε ίσος με 1 και μετά από επιβολή 4<sup>ης</sup> τάξης ακρίβειας οι τιμές των συντελεστών προκύπτουν:

$$a = 48, \quad b_2 = -36, \quad b_3 = 16, \quad b_4 = -3 \quad (2.44)$$

Για να ληφθεί υπόψη η συνθήκη Neumann και στην περίπτωση της δεύτερης παραγώγου διατυπώθηκε μια ελαφρώς διαφορετική σχέση από την (2.43), στο αριστερό μέλος της οποίας εμφανίζεται ρητά η τιμή της παραγώγου στο σύνορο.

$$a \cdot (p'_1)'' + \frac{b}{h} (p'_1)' + c \cdot (p'_2)'' = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1} d_i \cdot p'_i \quad (2.45)$$

Η (2.45) που διατυπώθηκε στα πλαίσια της παρούσης διατριβής ισχύει γενικά και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε ομογενή / μη ομογενή Neumann συνθήκη. Για 4<sup>ης</sup> τάξης ακρίβεια και ομογενή συνθήκη Neumann οι αριθμητικές τιμές των συντελεστών προκύπτουν:

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = 1, \quad c = \frac{7}{6}, \quad d_1 = -1, \quad d_2 = 1 \quad (2.46)$$

Για το δεύτερο και προτελευταίο συνοριακό κόμβο χρησιμοποιήθηκε 4<sup>ης</sup> τάξης με συντελεστές για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο αντίστοιχα:

$$\text{Πρώτη παράγωγος: } a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{3}{2} \quad (2.47)$$

$$\text{Δεύτερη παράγωγος: } a = \frac{1}{10}, \quad b = \frac{6}{5} \quad (2.48)$$

Για τις περιπτώσεις συνθηκών (2.13)-(2.18) στις οποίες εμπλέκεται και μεταβατικός όρος, δεν απαιτείται κάποιος ιδιαίτερος χειρισμός και μπορεί να εφαρμοσθεί κατευθείαν το σχήμα ολοκλήρωσης με τις πρώτες παραγώγους να υπολογίζονται από τις (2.39)-(2.40).

### 2.4.5 Ανάλυση Σφάλματος

Παίρνοντας την ανάλυση κατά Fourier της εξαρτημένης μεταβλητής, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.35) και αναγνωρίζοντας τον τροποποιημένο κυματαριθμό ως  $\hat{\omega} = h\omega$ , μπορεί να κανείς να κατασκευάσει τη φασματική συνάρτηση μεταφοράς για το θεωρούμενο CS. Για τη μονοδιάστατη περίπτωση και στο διάστημα  $[0, L]$  με  $N$  διαμερίσεις, η ανάλυση Fourier της ακουστικής πίεσεως είναι:

$$p'(x) = \sum_0^N p'_k \exp\left(\frac{2\pi i k x}{L}\right) \quad (2.49)$$

Οι συντελεστές ικανοποιούν την  $p'_k = (p'_{N-k})^*$  για  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ , όπου \* συμβολίζει το συζυγή μιγαδικό. Για σταθερή διαμέριση  $h$  και εισάγοντας τον κυματικό αριθμό  $\omega = \frac{2\pi k h}{L} = \frac{2\pi k}{N}$  η (2.49) γίνεται:

$$p'(x) = \sum_0^N p'_k e^{i\omega s} \quad (2.50)$$

όπου  $s = x/h$  η χωρική μεταβλητή κλιμακούμενη ως προς  $h$  και  $\omega \in [0, \pi]$ .

Με αντικατάσταση της τελευταίας στο συμπαγές σχήμα για την πρώτη παράγωγο (σχέση (2.35)), εκτέλεση των πράξεων και αντικατάσταση των εκθετικών με τριγωνομετρικές συναρτήσεις από τη σχέση Euler, προκύπτει η φασματική συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ του πραγματικού και του 'τροποποιημένου' από το αριθμητικό σχήμα κυματαριθμού:

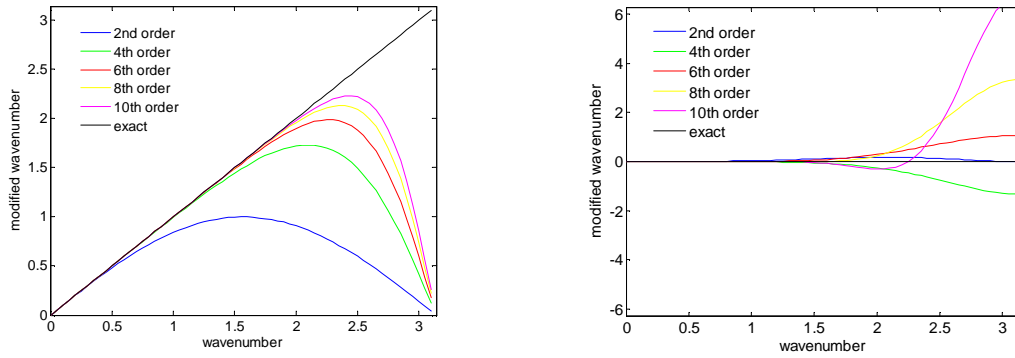
$$TF(\omega) = \hat{\omega}(\omega) = \frac{b \sin(\omega) + \frac{c}{2} \sin(2\omega) + \frac{d}{3} \sin(3\omega) + \frac{e}{4} \sin(4\omega)}{1 + 2a \cos(\omega)} \quad (2.51)$$

Οι συντελεστές  $d, e$  αντιστοιχούν στους πρόσθετους όρους υψηλότερης ακρίβειας που δεν υπάρχουν στην (2.35) και είναι αντίστοιχα οι  $d \frac{p'_{i+3} - p'_{i-3}}{6h}$  και  $e \frac{p'_{i+4} - p'_{i-4}}{8h}$ .

Με όμοιο τρόπο και για την πρώτη παράγωγο πάντα προκύπτει η φασματική συνάρτηση για τα συνοριακά σημεία (σχέση (2.43)):

$$\hat{\omega}(\omega) = \frac{\sum_{k=2} b_j e^{(k-1)i\omega}}{i(1 + a e^{i\omega})} \quad (2.52)$$

Είναι γνωστό<sup>[24]</sup> ότι τα CS σαν κεντρικά σχήματα έχουν μηδενικά σφάλματα εύρους (dissipation errors), συνεπώς η φασματική συνάρτηση για τα εσωτερικά σημεία δεν έχει καθόλου φανταστικό μέρος. Στην Εικόνα 2-4(α) φαίνεται η γραφική παράσταση του πραγματικού μέρους (που αντιστοιχεί στα σφάλματα φάσης – dispersion errors) της φασματικής συνάρτησης για 5 διαφορετικά σε ακρίβεια συμπαγή σχήματα. Είναι φανερό η υπεροχή έναντι του κλασικού σχήματος κεντρικών διαφορών 2<sup>ης</sup> τάξης και η βελτίωση που παρέχει η άνοδος της ακρίβειας ανερχομένου του κυματαριθμού, προσεγγίζοντας όλο και περισσότερο την ιδεατή διαφόριση που αντιστοιχεί στην διαγώνιο. Επίσης από την ίδια εικόνα φαίνεται ότι τα σφάλματα φάσης, που αντιστοιχούν στους υψηλούς κυματαριθμούς δεν μπορούν να εξαφανιστούν τελείως, όσο υψηλής τάξης και αν είναι το CS. Μια από τις μεθόδους αποφυγής περιγράφεται σε επόμενη παράγραφο. Στην Εικόνα 2-4(β) παρίσταται το φανταστικό μέρος της φασματικής συνάρτησης για το συνοριακό σημείο. Είναι φανερό ότι το σφάλμα εύρους αυξάνεται με αύξηση της ακρίβειας του σχήματος. Αυτός είναι και ο λόγος υποβιβασμού της τάξης ακρίβειας για τα συνοριακά σημεία, σε σχέση με τα εσωτερικά, που ακολουθήθηκε στην παρούσα μεθοδολογία.



Εικόνα 2-4. (α)Πραγματικό και (β)Φανταστικό μέρος φασματικής συνάρτησης για την 1<sup>η</sup> παράγωγο

## 2.4.6 Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Εξισώσεων

Από την παραπάνω συζήτηση έγινε φανερό ότι ο υπολογισμός της χωρικής παραγώγου στα CS είναι έμμεσος, πράγμα που σημαίνει ότι δομείται ένα ταινιωτό σύστημα στη γενική περίπτωση το οποίο πρέπει να λυθεί σε κάθε χρονικό βήμα. Για την τριδιαγώνια περίπτωση ο πλέον εύκολος και απλός στην υλοποίηση είναι ο αλγόριθμος του Thomas<sup>[36]</sup>, ο οποίος εκμεταλλεύεται τη δομή του μητρώου των εξισώσεων και αποθηκεύει μόνο τις τρεις διαγωνίους.

Η μέθοδος κατατάσσεται στις άμεσες μεθόδους επίλυσης και ουσιαστικά αποτελεί μια παραλλαγή της απαλοιφής Gauss. Έστω ότι το σύστημα μπορεί να γραφεί ως:

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i \quad (2.53)$$

όπου  $a_1 = 0$  και  $c_N = 0$

Σε μητρική μορφή θα είναι:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & c_{N-1} & \\ & & & a_N & b_N & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Ο αλγόριθμος υπολογισμού συνιστά απαλοιφή των  $a_i$  σε πρώτη σάρωση και σε δεύτερη (πίσω αντικατάσταση) παράγεται η λύση. Ο ψευδοκώδικας υπολογισμού είναι:

- Υπολόγισε τις ενδιάμεσες ποσότητες  $\tilde{c}_1 = \frac{c_1}{b_1}$  και  $\tilde{c}_i = \frac{c_i}{b_i - \tilde{c}_{i-1} a_i}$ ,  $i > 1$  και

$$\tilde{d}_1 = \frac{d_1}{b_1} \text{ και } \tilde{d}_i = \frac{d_i - \tilde{d}_{i-1} a_i}{b_i - \tilde{c}_{i-1} a_i}, \quad i > 1$$

- Βρες τη λύση ξεκινώντας από το τέλος ως:

$$x_N = \tilde{d}_N \text{ και } x_i = \tilde{d}_i - \tilde{c}_i x_{i+1}, \quad i < N$$

Αποδεικνύεται ότι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι τάξης  $O(N)$  σε αντίθεση με την απαλοιφή Gauss που είναι  $O(N^3)$ . Σε περιπτώσεις περιοδικών οριακών συνθηκών (δηλ. όταν η πρώτη  $a_1 \neq 0$  και  $c_N \neq 0$  - δε χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία) και για να διατηρηθεί η

πολυπλοκότητα στην ίδια τάξη εφαρμόζεται μια παραλλαγή του αλγορίθμου γνωστή και ως μέθοδος Sherman – Morisson.

#### 2.4.7 Χωρικό Φίλτρο

Η ανάλυση ευστάθειας δεν είναι πάντα εύκολο να γίνει στα CS. Κάποιες πληροφορίες μπορεί να δώσει η φασματική συνάρτηση που αναφέρθηκε παραπάνω, αλλά για αριθμητικούς σκοπούς η ευστάθεια επιτυγχάνεται με την εισαγωγή τεχνητής απόσβεσης - διάχυσης στο σχήμα, είτε φιλτράροντας κατευθείαν την αριθμητική λύση σε κάθε χρονικό βήμα, ή έμμεσα, εισάγοντας όρους απόσβεσης στις διακριτοποιημένες εξισώσεις. Ο λόγος για την εισαγωγή της τεχνητής απόσβεσης στα CS είναι η ύπαρξη των σφαλμάτων φάσης που αναφέρθηκε παραπάνω. Τα τελευταία όταν εμφανιστούν αναγκάζουν τις υψηλής συχνότητας συνιστώσες του κύματος να μεταφέρονται με διαφορετική ταχύτητα από τις υπόλοιπες. Δημιουργούνται έτσι ψευδείς ταλαντώσεις (spurious oscillations) στο χώρο, οι οποίες επηρεάζουν την τελική ποιότητα της λύσης και αν δεν αντιμετωπιστούν μπορεί να οδηγήσουν και σε αστάθεια. Η εμφάνιση των ταλαντώσεων αυτών είναι στενά συνδεδεμένη με τη δομή του αριθμητικού πλέγματος και τις τοπικές διαφορές στην πυκνοτήτά του. Σημειώνεται επίσης ότι η εμφάνισή τους δεν μπορεί να εξοφληθεί εκ των προτέρων, εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα και απαιτείται πειραματισμός με το κάθε φορά χρησιμοποιούμενο φίλτρο για την εύρεση των βέλτιστων παραμέτρων του και τη συχνότητα εφαρμογής του.

Για τα CS που χρησιμοποιήθηκαν εδώ εφαρμόστηκε φίλτρο κατευθείαν στη λύση και χρησιμοποιήθηκε η παρακάτω εξίσωση<sup>[35]</sup>:

$$a_f \bar{p}'_{i-1} + \bar{p}'_i + a_f \bar{p}'_{i+1} = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2} (p'_{i+n} + p'_{i-n}) \quad (2.55)$$

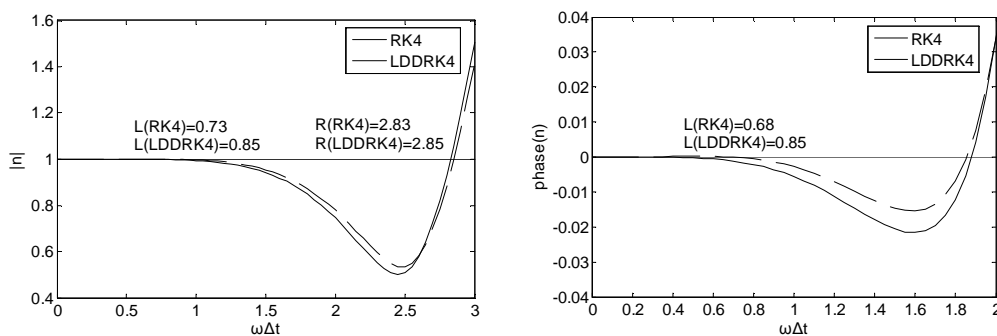
Έτσι για τη λύση  $p'_i$  οι φιλτραρισμένες τιμές  $\bar{p}'_i$  λαμβάνονται πάλι επιλύοντας ένα τριδιαγώνιο σύστημα εξισώσεων. Η (2.55) αντιστοιχεί σε  $2N$  τάξης φίλτρο με stencil  $2N+1$  σημείων. Οι συντελεστές υπολογίζονται με το γνωστό τρόπο της ανάλυσης Taylor και μπορούν να βρεθούν στο Παράρτημα Α. Εκτενής ανάλυση σφάλματος γίνεται στην [15]. Η παράμετρος  $a_f$  ικανοποιεί την ανισότητα  $-0.5 \leq a_f \leq 0.5$  με τις υψηλές τιμές να αντιστοιχούν σε μικρή εισαγωγή διάχυσης. Ερευνητές προτείνουν<sup>[35]</sup> τιμές μεταξύ 0.4 και 0.5 για ένα αρκετά μεγάλο εύρος εφαρμογών. Όσο αφορά την τάξη του φίλτρου, σύμφωνα με γενικό εμπειρικό κανόνα αυτή εκλέγεται τουλάχιστο 2 τάξεις μεγαλύτερη από την τάξη του εφαρμοζόμενου CS, που σημαίνει ότι στα πλαίσια της παρούσης ένα  $8^{th}$  τάξης φίλτρο συμπληρώνει το  $6^{th}$  τάξης CS. Ειδικές σχέσεις απαιτούνται για τα συνοριακά σημεία, εξαιτίας του σχετικά μεγάλου stencil του φίλτρου. Στην παρούσα μεθοδολογία όμως ακολουθήθηκε μια διαφορετική προσέγγιση σύμφωνα με τη οποία, διατηρούνται οι ίδιες εξισώσεις με μειούμενη σταδιακά την τάξη του φίλτρου, καθώς προσεγγίζονται τα όρια, και με τα εξωτερικά σημεία να αφήνονται αφιλτράριστα. Σε προβλήματα με περισσότερες από μία χωρικές διαστάσεις το φίλτρο πρέπει να εφαρμοστεί σε κάθε χωρική διάσταση. Δεν υπάρχει κανόνας για τη συχνότητα εφαρμογής του φίλτρου, οπότε απαιτούνται δοκιμές, λαμβανομένου υπόψη του αυξημένου υπολογιστικού φόρτου που μπορεί να δημιουργήσει συχνή εφαρμογή μετά από κάθε χρονικό βήμα.

### 2.4.8 Χρονική Ολοκλήρωση

Για την ενημέρωση της λύσης της κύριας διαφορικής εξίσωσης και των εξισώσεων του PML σε κάθε χρονικό βήμα επιστρατεύθηκε το χαμηλής διάχυσης – χαμηλής απαγωγής Runge Kutta (Low Dispersion Dissipation - LDDRK) σχήμα<sup>[19]</sup> τέταρτης τάξεως. Η κύρια ιδιότητα του σχήματος αυτού είναι ότι διατηρεί τη σχέση διάχυσης μεταξύ της διαφορικής εξίσωσης και της αριθμητικής της αναπαράστασης ελαχιστοποιώντας ένα τετραγωνικό κριτήριο του παράγοντα ενίσχυσης για ένα μεγάλο εύρος κυματαριθμών. Η σχέση που συνδέει τους παράγοντες ενίσχυσης της διαφορικής εξίσωσης και της αριθμητικής της αναπαράστασης είναι:

$$\frac{r}{r_e} = \frac{1 + \sum_{j=1}^4 c_j (-i\sigma)^j}{e^{-i\sigma}} \quad (2.56)$$

όπου  $\sigma = c_0 k \Delta t$  και  $c_j$  οι σταθερές του κάθε σταδίου - βήματος της μεθόδου RK, που υπόκεινται στη διαδικασία αριστοποίησης. Για την κλασική RK 4<sup>ης</sup> τάξης οι σταθερές είναι  $c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{2!}, c_3 = \frac{1}{3!}, c_4 = \frac{1}{4!}$ , ενώ για τη βελτιστοποιημένη  $c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{2!}, c_3 = 0.162997, c_4 = 0.0407574$ . Στην Εικόνα 2-5 παρουσιάζονται διαγραμματικά το εύρος και η φάση του σχετικού παράγοντα ενίσχυσης από την (2.56) για την κλασική RK4 και την LDDRK4. Από τα διαγράμματα αυτά μπορούν να βρεθούν τα όρια ευστάθειας (R) και ακρίβειας (L) των συγκρινόμενων μεθόδων για δεδομένη ακρίβεια  $\varepsilon = 0.001$  και να αναδειχθεί η σχετική βελτίωση που παρέχεται στην LDDRK4. Όπως και στην ανάλυση σφάλματος για τα CS η απόλυτη τιμή του μιγαδικού παράγοντα ενίσχυσης αντιστοιχεί στα σφάλματα εύρους (dissipation errors) και η γωνία του στα σφάλματα φάσης (dispersion errors).



Εικόνα 2-5. (α)Εύρος και (β)φάση του σχετικού παράγοντα ενίσχυσης

Για ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης  $\mathbf{U}' = \mathbf{F}(\mathbf{U})$  το αλγοριθμικό μέρος της μεθόδου μπορεί να γραφεί:

- υπολόγισε:  $\mathbf{K}_i = dt \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}^n + w_i \mathbf{K}_{i-1}), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.57)$

- ενημέρωσε:  $\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \mathbf{K}_4 \quad (2.58)$

όπου οι βελτιστοποιημένες τιμές των βαρών υπολογίζονται από τις  $c_i$  και βρίσκονται να είναι<sup>[27]</sup>:

$$w_1 = 0, \quad w_2 = \frac{1}{4}, \quad w_3 = \frac{1}{3}, \quad w_4 = \frac{1}{2}.$$

Πρόσθετο πλεονέκτημα της τελευταίας διατύπωσης έναντι στην κλασική υλοποίηση της RK είναι το οι χαμηλότερες απαιτήσεις σε υπολογιστική μνήμη. Έτσι στο βρόχο υλοποίησης της (2.57) απαιτείται η φύλαξη δύο μόνο τιμών των  $\mathbf{K}_i$  (τρέχουσα και προηγούμενη) και όχι τεσσάρων όπως στην κλασική RK4. Το τελευταίο είναι ακόμη ευεργετικότερο αν η τάξη – στάδια της μεθόδου αυξηθούν (δεν έγινε στην παρούσα εργασία).

Για να ενσωματωθεί η LDDRK4 στην παρούσα μεθοδολογία πρέπει να γίνει υποβιβασμός τάξεως των εξισώσεων σε πρώτης τάξης με τη χρήση βοηθητικής μεταβλητής. Τονίζεται εδώ ότι αν επιλύονταν οι Euler θα υπήρχε και άλλη μια βοηθητική μεταβλητή (ταχύτητες). Έτσι η (2.1) μεταπίπτει στο διαφορικό σύστημα:

$$\begin{aligned} p'_t &= q \\ q_t &= c_0^2 \nabla^2 p' \end{aligned} \quad (2.59)$$

Με την ίδια πρακτική να ακολουθείται και για τις εξισώσεις των ABC's οι (2.13) και (2.14) γίνονται, με επαναεισαγωγή της σταθεράς  $c_0$ :

$$\begin{aligned} q_t &= \pm c_0 \frac{1}{2} p'_{yy} \\ p'_t &= (\mp q \pm p'_x) c_0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Και οι εξισώσεις του PML:

$$\begin{aligned} p'_t &= q \\ q_t + (Z_1 + Z_2) p'_t + Z_1 Z_2 p' &= \nabla \cdot (c_0^2 \nabla p' + \mathbf{f}) \\ \mathbf{f}_t &= \mathbf{A}_1 \mathbf{f} + c_0^2 \mathbf{A}_2 \nabla p' \end{aligned} \quad (2.61)$$

Σημειώνεται τέλος ότι δεν εφαρμόστηκε ειδική διαχείριση της υπολογιστικής μνήμης για της εξισώσεις του PML. Αυτό σημαίνει ότι η ανυσματική μεταβλητή  $\mathbf{f}$  ορίστηκε σε ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο, παρότι χρειάζεται μόνο για τους κόμβους του στρώματος. Στους κόμβους έξω από το στρώμα ανατέθηκαν μηδενικές τιμές και δεν ενημερώθηκαν ποτέ κατά τη διάρκεια επίλυσης. Η υλοποίηση αυτή είναι προφανής και εύκολη, θυσιάζει όμως περισσότερους υπολογιστικούς πόρους.

## 2.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### 2.5.1 Διάδοση απλού Γκαουσιανού Παλμού

Στόχος στο συγκεκριμένο πρόβλημα αναφοράς είναι η σύγκριση της ακρίβειας, απορροφητικής ικανότητας και ευστάθειας μακρού χρονικού διαστήματος των τύπων συνοριακών συνθηκών ABC (εξισώσεις (2.60)) και PML (εξισώσεις (2.61)). Οι εξισώσεις (2.59) επιλύονται σε τετραγωνικό χωρίο στο κέντρο του οποίου αφήνεται ένας γκαουσιανός παλμός. Η λύση αναφοράς (RS – reference solution), που χρησιμοποιήθηκε για λόγους σύγκρισης, υπολογίστηκε σε 5 φορές μεγαλύτερο χωρίο με την ίδια πυκνότητα πλέγματος, ούτως ώστε να αποφευχθούν οποιεσδήποτε αλληλεπιδράσεις με το όριο. Το 6<sup>ης</sup> τάξης CS (εξ. (2.35)-(2.36) και (2.39)-(2.40)) και η μέθοδος ολοκλήρωσης LDDRK4 (εξ. (2.57)-(2.58)) χρησιμοποιήθηκαν για τη χωρική και χρονική διακριτοποίηση αντίστοιχα. Το χρησιμοποιηθέν χρονικό βήμα για ευσταθή λειτουργία

του όλου σχήματος υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας τα όρια που φαίνονται στην Εικόνα 2-5. Εξαιτίας της ομοιομορφίας του πλέγματος δεν ήταν απαραίτητη η εφαρμογή φίλτρου στη λύση. Περισσότερες πληροφορίες συγκεντρώνονται στον Πίνακα 2-1, όπου στις τιμές υπονοούνται μονάδες SI, αλλά έχουν παραληφθεί για λόγους απλότητας.

**Πίνακας 2-1. Αριθμητικές λεπτομέρειες προβλήματος 1**

σύνορα χωρίου:	$[10\ 60] \times [10\ 60]$
σύνορα χωρίου RS:	$[-215\ 285] \times [-215\ 285]$
αρχικές συνθήκες:	για $t = 0$ , $p'(x, y) = e^{-0.4[(x-35)^2 + (y-35)^2]}$
όρος πηγής:	$S(x, y) = 0$
ταχύτητα ήχου:	$c_0 = 1$
κόμβοι $NI \times NJ$ , $dx \times dy$ :	$101 \times 101$ , $0.5 \times 0.5$
κόμβοι RS $NI \times NJ$ , $dx \times dy$ :	$1001 \times 1001$ , $0.5 \times 0.5$
χρονικό βήμα $dt$ :	0.1
CFL:	0.2
ευσταθές $dt$ :	0.14166
κόμβοι ανά μήκος κύματος:	12-13
συνοριακή συνθήκη:	εξ.(13)-(14), εξ.(53)
φιλτράρισμα:	καθόλου

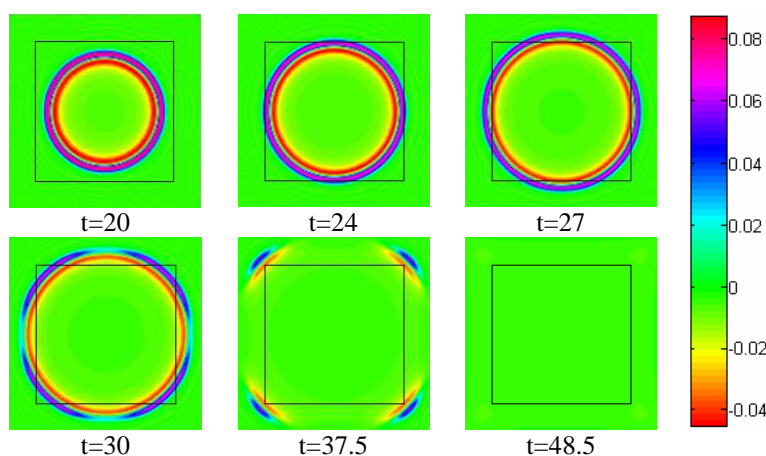
Τα αριθμητικά δεδομένα για το PML συνοψίζονται στον Πίνακα 2-1, όπου  $b_i$  και  $L_i$  είναι οι συντεταγμένες της εσωτερικής διεπιφάνειας και το πάχος του αντίστοιχα. Το προφίλ στον Πίνακα 2-1 βρέθηκε ότι παρέχει πολύ ομαλή μετάβαση απόσβεσης από την εσωτερική διεπιφάνεια προς το όριο. Οι επιλογές πάχους και σταθεράς παρέχουν τέτοια απόσβεση στο προσπίπτων κυματικό μέτωπο, μέχρι αυτό να φτάσει το εξωτερικό όριο, ώστε δεν παίζει κανέναν απολύτως ρόλο η επιλογή της εξωτερικής συνοριακής συνθήκης. Για λόγους δοκιμής επιβλήθηκε η ανακλαστική συνθήκη von Neumann.

**Πίνακας 2-2. Λεπτομέρειες PML για το πρόβλημα 1**

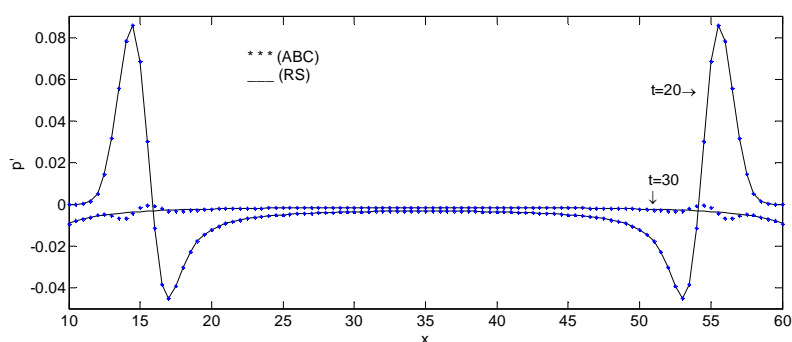
PML:	εξ.(26), εξ.(54)
προφίλ:	$Z_i(x_i) = \zeta_i \left( \frac{x_i - b_i}{L_i} - \frac{\sin(2\pi(x_i - b_i)/L_i)}{2\pi} \right)$
πάχος PML:	$L_i = 10$ , $i = 1, 2$
σταθερές:	$\zeta_i = 0.1$ , $i = 1, 2$
PML κόμβοι ανά πλευρά:	20

Στην Εικόνα 2-6 έχουν σχεδιαστεί στιγμιότυπα της κατανομής πίεσης σε χρόνους κατά τους οποίους το κυματικό μέτωπο φθάνει και προσκρούει στη διεπιφάνεια του στρώματος και το εξωτερικό όριο, όπου ισχύει η ανακλαστική συνθήκη. Απολύτως καμία ανάκλαση δεν είναι ορατή. Εντελώς διαφορετική συμπεριφορά παρατηρείται στην περίπτωση της ABC. Στην ZZZ επιχειρείται μια σύγκριση μεταξύ της λύσης αναφοράς και της λύσης της ABC. Έχουν σχεδιαστεί προφίλ πίεσης σε δύο διακριτές χρονικές στιγμές. Τη χρονική στιγμή  $t=30$  όπου ο παλμός έχει πια εξέλθει του χωρίου, μπορούν να παρατηρηθούν καθαρά τα ανακλώμενα κύματα

κινούμενα στην αντίθετη κατεύθυνση. Παρόλα αυτά το εύρος των κυμάτων αυτών είναι μόλις 0.89% του προσπίπτοντος και μπορεί να φθάσει μέχρι και το 1% ανάλογα με τη γωνία πρόσπτωσης. Η τελευταία παρατήρηση μαρτυρά καλή μεν, αλλά με ανακλάσεις δε, λειτουργία των ABC's.



Εικόνα 2-6. Κατανομές πίεσης στην περίπτωση του PML

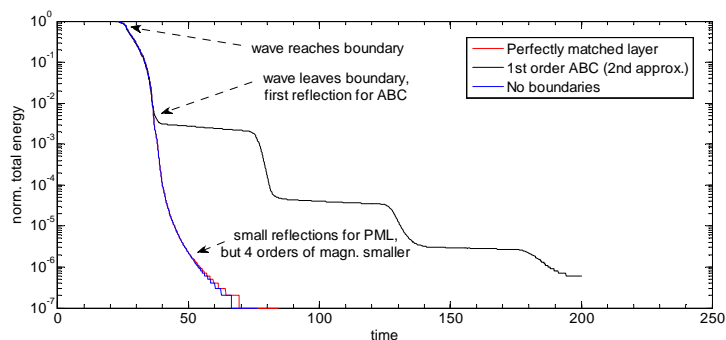


Εικόνα 2-7. Προφίλ πίεσης κατά x για y=0

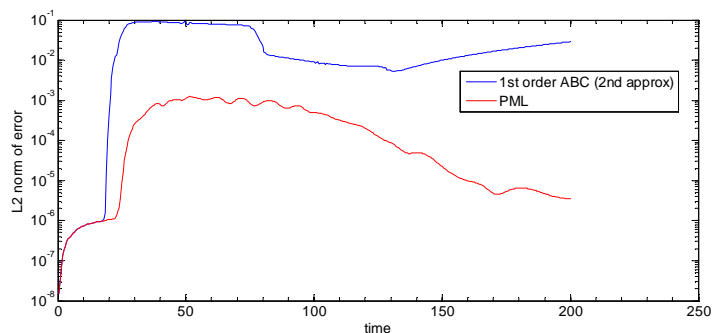
Στη συνέχεια επιχειρείται μια πιο ενδελεχής σύγκριση της απορροφητικότητας και ακρίβειας των δύο τύπων συνοριακών συνθηκών. Αρχικά υπολογίζεται η κανονικοποιημένη υπολείπουσα ενέργεια του χωρίου οριζόμενη όπως στην (2.62) και στη συνέχεια η L2 νόρμα του σφάλματος για σχετικά μεγάλο χρονικό διάστημα. Και οι δύο τύποι δείχνουν ευσταθή συμπεριφορά στο χρόνο, το PML όμως ξεπερνά τις ABC's και στις δύο συγκρίσεις. Στην Εικόνα 2-8 και Εικόνα 2-9 φαίνεται ότι η υπολείπουσα ενέργεια για την περίπτωση του PML είναι τουλάχιστο 4 τάξεις μεγέθους μικρότερη, ενώ η απόκλιση από τη λύση αναφοράς τουλάχιστο 2 τάξεις μεγέθους μικρότερη. Εμφανείς στο διάγραμμα ενέργειας είναι επίσης και οι ανακλάσεις (σκαλοπάτια) στην περίπτωση των ABC's, οι οποίες παραμένουν μέσα στο χωρίο κινούμενες από το ένα όριο στο άλλο. Μειώνονται βέβαια καθώς ένα μέρος της των κυμάτων ενέργειας εξέρχεται από το χωρίο, όχι όμως με το ρυθμό του PML για το οποίο επίσης παρατηρούνται πολύ μικρές ανακλάσεις ήσσονος όμως σημασίας και πολύ μικρότερης τάξης μεγέθους όπως ήδη αναφέρθηκε.

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (c_0^2 \partial_x p')^2 + (c_0^2 \partial_y p')^2 + (\partial_t p')^2 d\Omega \quad (2.62)$$





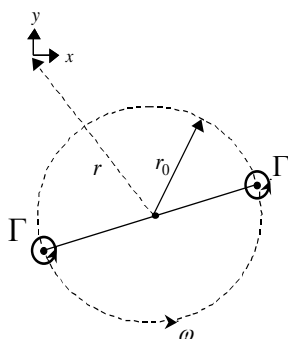
Εικόνα 2-8. Σύγκριση απορροφητικότητας ABC και PML



Εικόνα 2-9. Σύγκριση ακρίβειας ABC και PML

### 2.5.2 Συστρεφόμενο Ζεύγος Στροβίλων

Το σημαντικό κίνητρο που ώθησε στην μελέτη του προβλήματος αυτού είναι η ύπαρξη αναλυτικής λύσης για το επαγόμενο ακουστικό πεδίο, η οποία επιτρέπει άμεσο έλεγχο της λειτουργίας του ακουστικού κώδικα. Το συστρεφόμενο ζεύγος στροβίλων αποτελείται από δύο σημειακούς στρόβιλους με σταθερή απόσταση μεταξύ τους  $2r_0$  και περιστροφικής έντασης  $\Gamma$ , όπως φαίνεται στο σκαρίφημα στην XXX. Ο κάθε στρόβιλος περιστρέφεται με σταθερή περίοδο  $T = 8\pi^2 r_0^2 / \Gamma$  και γωνιακή ταχύτητα  $v_\theta = \Gamma / (4\pi r_0)$ , ενώ η ταχύτητα περιστροφής γύρω από το κέντρο της απόστασης των στροβίλων είναι  $\omega = \Gamma / (4\pi r_0^2)$ . Ο αδιάστατος περιστροφικός αριθμός Mach ορίζεται με βάση τη γωνιακή ταχύτητα των στροβίλων από τις παρακάτω ισότητες:  $M_r = v_\theta / c_0 = \Gamma / (4\pi r_0 c_0) = 2\pi r_0 / T c_0$ .



Εικόνα 2-10. Σκαρίφημα ζεύγους συστρεφόμενων στροβίλων

Υποθέτοντας ότι εμπλεκόμενο ρευστό είναι άτριβο, το επαγόμενο πεδίο ροής μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά από τη μιγαδική συνάρτηση δυναμικού:

$$\Phi(z,t) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z^2 \left(1 - \frac{b^2}{z^2}\right) \approx \frac{\Gamma}{\pi i} \ln z - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{b^2}{z^2} \quad (2.63)$$

όπου  $z = re^{i\theta}$  και  $b = r_0 e^{i\alpha}$ . Η προσέγγιση της (2.63) ισχύει μόνο για το μακρινό πεδίο, δηλ. για αποστάσεις  $|z/b| \gg 1$ . Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της (2.63) αναπαριστά μόνιμη περιστροφική ροή, ενώ ο δεύτερος τις συνεισφορές λόγω της στροβιλώδους κίνησης<sup>[23]</sup>. Από την (2.63) μπορεί κανείς να εξάγει τις υδροδυναμικές μεταβλητές (ταχύτητες, πίεση), παραγωγίζοντας ως προς  $z$  και χρησιμοποιώντας την εξίσωση Bernoulli αντίστοιχα.

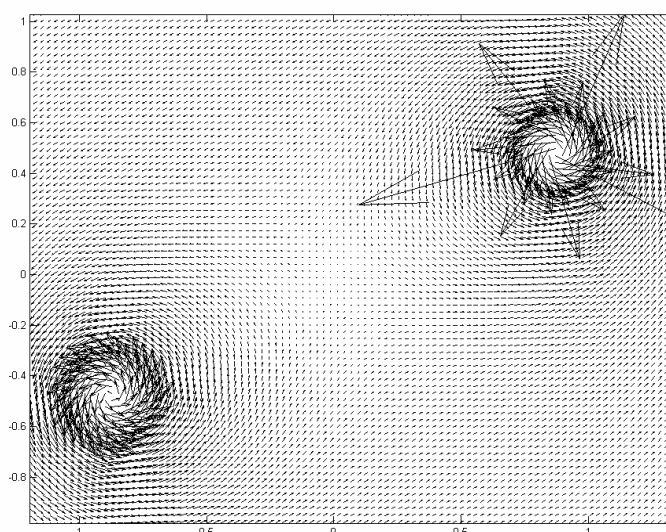
$$u_x - iu_y = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\Gamma}{i\pi} \frac{z}{z^2 - b^2} \quad (2.64)$$

$$p^{inc} = p_0 - \rho_0 \frac{\partial(\text{Re}(\Phi))}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 (u_x^2 + u_y^2) \quad (2.65)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (2.65) και παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς το χρόνο μπορεί κανείς να υπολογίσει τις ακουστικές πηγές για το δεξί μέλος της (2.7). Το αποτέλεσμα είναι:

$$p''^{inc} = -\rho_0 (\ddot{\Phi}_{\text{Re}} + \dot{u}_x^2 + u_x \ddot{u}_x + \dot{u}_y^2 + u_y \ddot{u}_y) \quad (2.66)$$

όπου  $\rho_0$  είναι η πυκνότητα του ρευστού και  $\ddot{\Phi}_{\text{Re}}$  είναι η τρίτη χρονική παράγωγος του πραγματικού μέρους της συνάρτησης δυναμικού και  $u_x, u_y$  οι συνιστώσες της ταχύτητας από την (2.64). Τα κέντρα των στροβίλων αποτελούν ιδιάζοντα σημεία για τις υδροδυναμικές μεταβλητές, λόγω των πολύ απότομων και υψηλών κλίσεων που παρουσιάζουν οι ποσότητες αυτές κοντά στα κέντρα των στροβίλων, οπότε χρειάζεται προσοχή κατά την αριθμητική εφαρμογή της (2.66). Εξάλλου υπενθυμίζεται η συνάρτηση δυναμικού ισχύει μόνο για το μακρινό πεδίο. Για την αποφυγή των εμποδίων αυτών μπορούν να ακολουθηθούν δύο πρακτικές: (α) εφαρμογή μοντέλου πυρήνα (core model), το οποίο απλά προτείνει εφαρμογή συγκεκριμένων εξισώσεων για τις ταχύτητες πολύ κοντά στους στροβίλους, βλ. για παράδειγμα Εικόνα 2-11, όπου εικονίζεται το πεδίο ταχύτητας του ζεύγος με τον ένα στρόβιλο υπό μοντέλο πυρήνα και (β) πρακτική cut – off, που απλά σημαίνει ότι για αποστάσεις πολύ κοντά στους στροβίλους δεν υπολογίζονται καθόλου οι ακουστικές πηγές.



Εικόνα 2-11. Πεδία ταχυτήτων στους στρόβιλους με/χωρίς μοντέλο πυρήνα

Στη παρούσα περίπτωση ακολουθήθηκε η δεύτερη πρακτική, οπότε για κόμβους σε αποστάσεις  $r/r_0 \leq 1.5$  οι ακουστικές πηγές θεωρούνται μηδενικές. Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα αναφοράς έτσι και εδώ χρησιμοποιήθηκε το 6<sup>ης</sup> τάξης CS (εξ. (2.35)-(2.36) και εξ. (2.39)-(2.40)) και η μέθοδος LDDRK4 (εξ. (2.50)-(2.51)) για τη χωρική και χρονική διακριτοποίηση αντίστοιχα. Δεν ήταν απαραίτητη η χρήση χωρικού φίλτρου. Περισσότερες αριθμητικές λεπτομέρειες για την προσομοίωση υπάρχουν στον Πίνακα 2-3 (οι μονάδες SI έχουν παραληφθεί).

**Πίνακας 2-3. Αριθμητικές λεπτομέρειες προβλήματος 2**

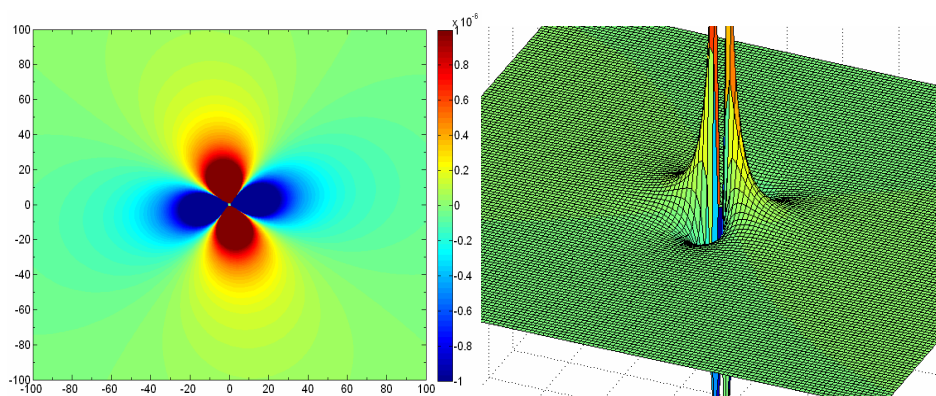
σύνορα χωρίου:	$[-200 \ 200] \times [-200 \ 200]$
αρχικές συνθήκες:	για $t = 0$ , $p'(x, y) = 0$
όρος πηγής:	$S(x, y) = p''^{inc}$ μόνο στο $[-100 \ 100] \times [-100 \ 100]$ cut off για $r/r_0 \leq 1.5$
ταχύτητα ήχου:	$c_0 = 1$
ένταση στροβιλισμού:	$\Gamma = 1.00531$
απόσταση στροβίλων:	$r_0 = 1$
Ταχύτητα περιστροφής και μήκος κύματος:	$\omega = 0.08$ , $\lambda = 12.5$
αρ. Mach:	$M_r = 0.0796$
κόμβοι $NI \times NJ$ , $dx \times dy$ :	$251 \times 251$ , $1.6 \times 1.6$
χρονικό βήμα $dt$ :	0.5
CFL:	0.3125
κόμβοι ανά μήκος κύματος:	22-23
φιλτράρισμα:	καθόλου

Η τεχνική του PML επιστρατεύθηκε και πάλι για την σωστή αποκοπή του υπολογιστικού χωρίου και τη σωστή προσομοίωση του μακρινού πεδίου, χρησιμοποιώντας το ίδιο προφίλ και σταθερές, εκτός από το πάχος του στρώματος το οποίο τώρα είναι  $L_i = 80$ ,  $i=1,2$  και τον αριθμό επιπρόσθετων κόμβων, οποίος τώρα είναι 50 ανά πλευρά. Για τη σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε η αναλυτική λύση για την ακουστική πίεση, όπως προκύπτει με τη μέθοδο της ασυμπτωτικής επέκτασης<sup>[26]</sup>:

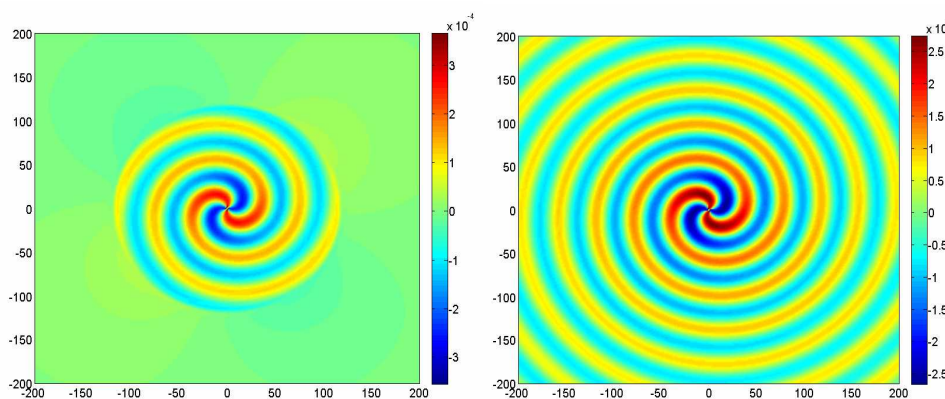
$$p'(r, \theta, t) = \frac{\rho_0 \Gamma^4}{64\pi^3 r_0^2 c_0^2} [J_2(kr) \cdot \cos(2\theta - 2\omega t) - Y_2(kr) \cdot \sin(2\theta - 2\omega t)] \quad (2.67)$$

όπου  $k = 2\omega/c_0$  και  $J_2, Y_2$  είναι η δεύτερης τάξης συναρτήσεις Bessel πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα. Οι Εικόνες 2-12 δείχνουν τη χωρική κατανομή του τετραπολικού όρου πηγής, όπως αυτός προκύπτει από τον υπολογισμό τη χρονική στιγμή  $t=120$ , με τη μορφή χρωματισμών ισοσταθμικών καμπυλών και τριδιάστατης επιφανείας αντίστοιχα. Είναι εμφανείς οι πολύ μεγάλες και απότομες κλίσεις κοντά πόλους της πηγής. Επίσης η περιοχή που υπολογίζονται οι πηγές είναι ικανώς μεγάλη ώστε να αποφευχθεί σημαντική αποκοπή τους. Τα πλάτη στο όριο της περιοχής των πηγών είναι περίπου το 1% του πλάτους που επιτυγχάνεται στο μέσο αυτής. Στις Εικόνες 2-13 φαίνονται οι υπολογισθείσες κατανομές ακουστικής πίεσης στους

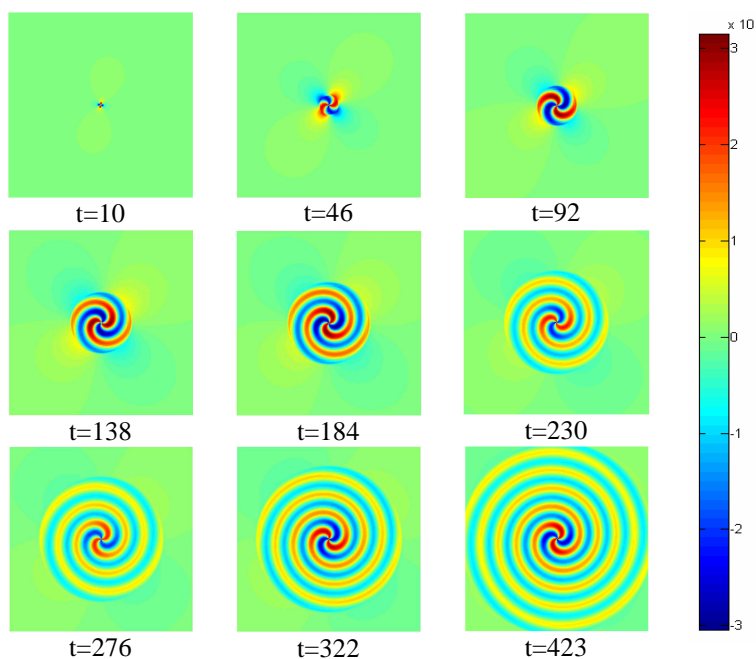
χρόνους  $t = 120$  και  $t = 280$  αντίστοιχα (δε φαίνεται η περιοχή του PML), ενώ στην Εικόνα 2-14 φαίνεται η χρονική εξέλιξη του φαινομένου μέχρι τα κύματα να φτάσουν του όρια και να αρχίσουν να εξέρχονται. Η λειτουργία του PML είναι πάλι πολύ καλή απορροφώντας τα εξερχόμενα κύματα, χωρίς να επηρεάζει την ακρίβεια της λύσης, αφού δεν παρατηρούνται καθόλου ανακλάσεις στις κατανομές. Στη συνέχεια συγκρίνεται η ακρίβεια της αριθμητικής λύσης με την αναλυτική. Για το σκοπό αυτό σχεδιάζονται στην Εικόνα 2-15 οι τιμές της ακουστικής πίεσης κατά τον θετικό ημιάξονα των  $x$  μαζί με αυτές που προβλέπει η (2.67), ενώ στην Εικόνα 2-16 επιχειρείται σύγκριση των χρονοσειρών της πίεσης στη θέση δέκτη  $(x, y) = (0, 80)$ . Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα υπάρχει πολύ καλή συμφωνία με την αναλυτική λύση. Σημειώνεται επίσης ότι η αναλυτική λύση ισχύει μόνο για το μακρινό πεδίο, το οποίο ορίζεται σαν δύο μήκη κύματος μακριά από τις πηγές το λιγότερο, δηλ. για  $r/r_0 \geq 80$ . Ο διακριτός υπολογισμός των πηγών μπορεί να είναι ένας λόγος για τα ελαφρώς χαμηλότερα πλάτη στις ταλαντώσεις, που αντιστοιχούν περίπου στο 95% των αναλυτικών τιμών. Ένας άλλος λόγος για αυτό μπορεί να είναι και η εφαρμογή της cut off πρακτικής (κα της επιλογής της απόστασης  $r/r_0 \leq 1.5$ ) κοντά στους στροβίλους κατά τον υπολογισμό των πηγών.



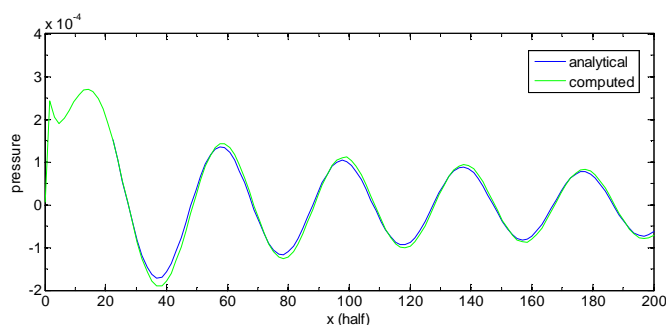
Εικόνα 2-12. Ακουστικές πηγές (α) ισοσταθμικές και (β) επιφάνεια για  $t=120$



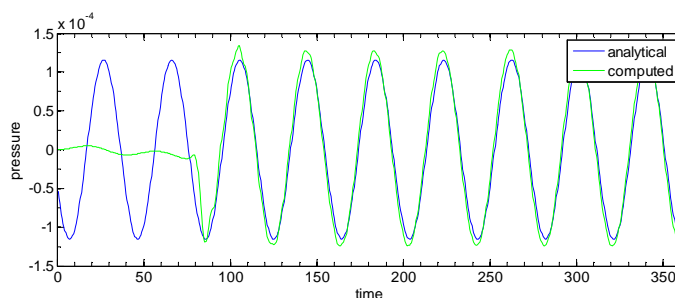
Εικόνα 2-13. Πεδία ακουστικής πίεσης για (α)  $t=120$  και (β)  $t=180$



Εικόνα 2-14. Χρονική εξέλιξη του φαινομένου



Εικόνα 2-15. Προφίλ πίεσης κατά τον x – ημιάξονα

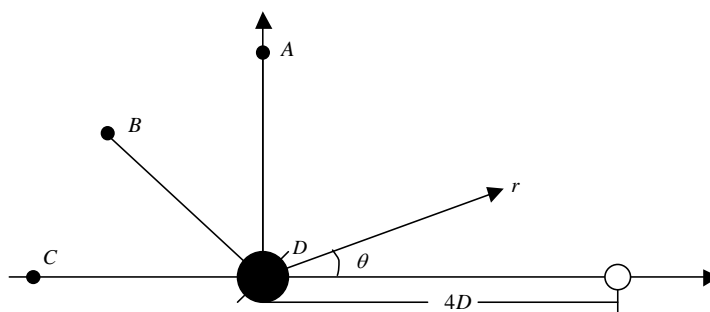


Εικόνα 2-16. Χρονοσειρά πίεσης στο  $(x,y)=(0,80)$

### 2.5.3 Ακουστική Σκέδαση από Κυλινδρικό Εμπόδιο

Σκοπός του προβλήματος αυτού που παρουσιάστηκε αρχικά στο 2<sup>nd</sup> CAA Workshop on Benchmark Problems<sup>[1]</sup>, είναι η εύρεση του παραγόμενου ακουστικού πεδίου από τον κινητήρα αεροσκάφους, όπως αυτό σκεδάζεται από την παράπλευρη άτρακτο. Η πίεση που εξασκείται στην άτρακτο εκλαμβάνεται σα θόρυβος στο εσωτερικό αυτής. Η άτρακτος παριστάνεται σαν κύλινδρος διαμέτρου  $D$  με κέντρο  $(x, y) = (0,0)$  και κάθετος στο  $xy$  επίπεδο και η πηγή θορύβου εντοπίζεται στο  $(x, y) = (4D,0)$ . Η πηγή μπορεί να είναι είτε περιοδική ή μη περιοδική, όπου στην τελευταία περίπτωση ο παλμός απελευθερώνεται τη χρονική στιγμή  $t = 0$  με αρχική

κατανομή  $p(x, y, 0) = e^{\frac{-\ln 2}{0.04}((x-4D)^2 + y^2)}$ . Στόχος είναι η εύρεση των ιστορικών της πίεσης στα σημεία  $A(r=5, \theta=90^\circ)$ ,  $B(r=5, \theta=135^\circ)$ ,  $C(r=5, \theta=180^\circ)$  και η σύγκριση αυτών με κατανομές από αναλυτική έκφραση.



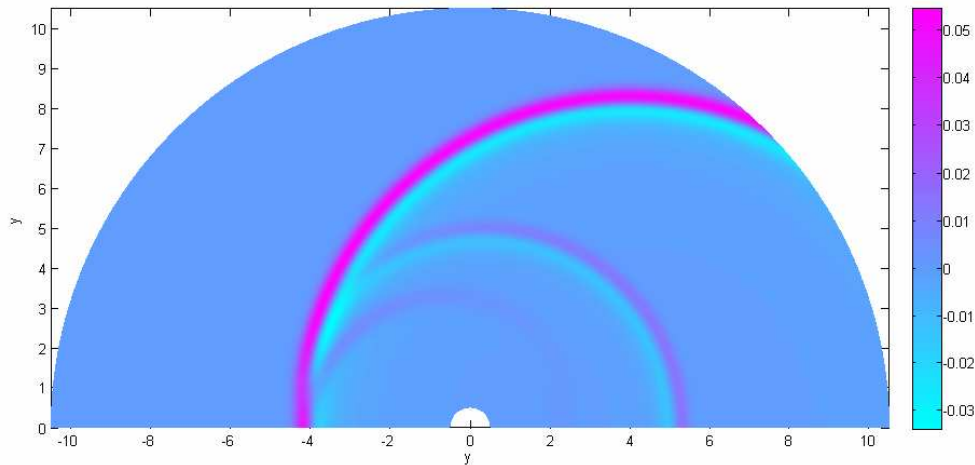
Εικόνα 2-17. Σκαρίφημα προβλήματος ακουστικής σκέδασης

Εφόσον το πρόβλημα είναι συμμετρικό οι υπολογισμοί διεξάγονται μόνο για το πάνω μισό του πεδίου. Το υπολογιστικό χωρίο αποτελείται είναι μια ημικυκλική περιοχή με όρια το εξωτερικό ημικύκλιο, το τοίχωμα του κυλίνδρου και τον άξονα των  $x$ . Κατασκευάστηκε ένα τύπου O αριθμητικό πλέγμα με  $\xi$  γραμμές ομόκεντρους κύκλους με τον πρώτο και τελευταίο κύκλο να είναι αντίστοιχα ο κύλινδρος και το εξωτερικό όριο και  $n$  γραμμές ακτίνες κατευθυνόμενες από τον κύλινδρο προς το εξωτερικό όριο διαμέτρου  $10.5D$ . Η απορροφητική συνθήκη (2.19) επιβλήθηκε στο εξωτερικό όριο, ενώ η συνθήκη τοιχώματος (2.28) χρησιμοποιήθηκε στην επιφάνεια του κυλίνδρου και στον άξονα συμμετρίας. Η αρχική πυκνότητα πλέγματος ( $201 \xi \times 91 n$ ) δε ήταν αρκετή για την σωστή επίλυση του προβλήματος. Επίσης ψευδείς ταλαντώσεις παρατηρήθηκαν, καθώς ο αρχικός παλμός διαδιδόταν αριστερά προς το μέρος του κυλίνδρου πριν καν ανακλαστεί. Το γεγονός αποδόθηκε στην ανομοιομορφία του χρησιμοποιούμενου πολικού πλέγματος. Ο διπλασιάζοντας την πυκνότητα ( $401 \xi \times 181 n$ ) και η εισαγωγή φίλτρου  $8^{th}$  τάξης κάθε 10 επαναλήψεις κρίθηκε απαραίτητη για την παραγωγή ακριβούς λύσης χωρίς ψευδείς ταλαντώσεις. Όπως στα προηγούμενα προβλήματα χρησιμοποιήθηκε το  $6^{th}$  τάξης CS (εξ. (2.35)-(2.36) και (2.39)-(2.40)) και η μέθοδος ολοκλήρωσης LDDRK4 (εξ. (2.57)-(2.58)) για τη χωρική και χρονική διακριτοποίηση αντίστοιχα. Λεπτομέρειες περιέχονται στον XXX.

Πίνακας 2-4. Αριθμητικές λεπτομέρειες προβλήματος 3

διάμετρος κυλίνδρου:	$D = 1$
όρια χωρίου:	$[r, \theta] = [1/2, 0] \times [8, \pi]$
αρχική συνθήκη:	$p'(x, y, 0) = e^{\frac{-\ln 2}{0.04}((x-4)^2 + y^2)}$
ABC:	εξ. (2.19)
ταχύτητα κύματος:	$c_0 = 1$
συνθήκη τοιχώματος:	εξ. (2.28), εξ. (2.45)-(2.48)
κόμβοι $NI \times NJ$ , $dx \times dy$ :	$401 \times 181$ , $0.025 \times 0.0174$
χρονικό βήμα $dt$ :	0.05
CFL (βασισμένο στο $dr$ ):	0.2
φιλτράρισμα:	$8^{th}$ τάξης κάθε 10 βήματα

Η Εικόνα 2-18 δείχνει την κατανομή της ακουστικής πίεσης τη χρονική στιγμή  $t=8.20$ . Διακρίνονται 3 κυματικά μέτωπα. Το πρώτο και το πιο μακρινό από τον κύλινδρο είναι το κύριο μέτωπο της αρχικής συνθήκης. Το επόμενο είναι το ανακλώμενο από τη δεξιά στερεή επιφάνεια του κυλίνδρου και το τρίτο το πλησιέστερο στον κύλινδρο δημιουργείται καθώς τα δύο μέρη του κυρίως μετώπου διαπερνούν τον κύλινδρο και ενώνονται στην αμέσως αριστερή πλευρά του. Το τελευταίο μέτωπο είναι και το ασθενέστερο σε σύγκριση με τα άλλα δύο. Οι ABCs φαίνεται να λειτουργούν καλά, αφού δε φαίνεται κάποια ισχυρή ανάκλαση στην εικόνα. Ακόμα η συνθήκη τοιχώματος δε δημιούργησε προβλήματα ευστάθειας στον αλγόριθμο και λειτούργησε επίσης σωστά.



Εικόνα 2-18. Ίχνος του ακουστικού κύματος για  $t=8.20$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της υπέρθεσης των λύσεων για το προσπίπτον και ανακλώμενο κύμα και αφού διορθώθηκαν κάποια σφάλματα που βρέθηκαν στην [1] η αναλυτική λύση για το δυναμικό ταχύτητας δίνεται από τη σχέση:

$$\phi(r, \theta, t) = \int_0^\infty A(r, \theta, \omega) \sin(\omega t) d\omega$$

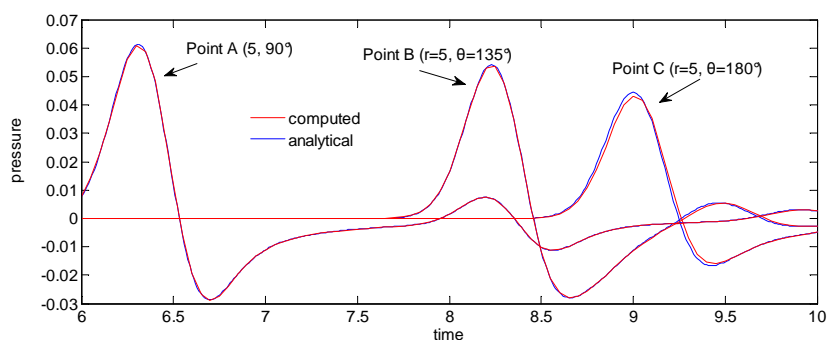
$$A(r, \theta, t) = -\frac{e^{-b\omega/4}}{2b} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \text{Re} \left[ \frac{\varepsilon_k H_k(r\omega) \cos(k\theta)}{2k\pi \cdot H_k(\omega/2) - \pi\omega \cdot H_{k+1}(\omega/2)} \right] + \int_0^\pi \omega \frac{(0.5 - x_s \cos(\eta)) J_1(\omega \sqrt{0.25 + x_s^2 - x_s \cos(\eta)})}{\sqrt{0.25 + x_s^2 - x_s \cos(\eta)}} \cos(kn) dn \right\} \quad (2.68)$$

όπου  $J_0, J_1$  είναι η μηδενικής και πρώτης τάξης συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους και  $H_k$  η  $k$ -οστής τάξης συνάρτηση Hankel πρώτου είδους.  $\varepsilon_k = 2$  για  $k > 0$  και  $\varepsilon_k = 1$  για  $k = 0$ ,  $b = \ln 2 / 0.04$  και  $x_s$  η θέση της πηγής στον άξονα των  $x$ . Η έκφραση για την πίεση μπορεί να βρεθεί παίρνοντας την πρώτη χρονική παράγωγο:

$$p(r, \theta, t) = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\int_0^\infty A(r, \theta, t) \omega \cos(\omega t) d\omega \quad (2.69)$$

Χρειάζεται προσοχή κατά την αριθμητική εφαρμογή των εξ. (2.68)-(2.69), καθώς οι συναρτήσεις Bessel και Hankel απειρίζονται κοντά στο μηδέν.

Η Εικόνα 2-19 δείχνει τις χρονοσειρές πίεσης στα προκαθορισμένα σημεία συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες αναλυτικές λύσεις. Παρατηρείται πολύ καλή συμφωνία μεταξύ αριθμητικής και αναλυτικής λύσης.



Εικόνα 2-19. Ιστορικά πίεσης στα σημεία δέκτη

## 2.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αναπτύχθηκε μια αριθμητική μέθοδος για την επίλυση της 2<sup>ης</sup> τάξης κυματική εξίσωση συνδυάζοντας ένα 6<sup>ης</sup> τάξης συμπαγές σχήμα χωρικής διακριτοποίησης με την χαμηλής διάχυσης – διασποράς μέθοδο χρονικής προαγωγής Runge Kutta. Προτάθηκε μια ελαφρώς διαφορετική διατύπωση της μεθόδου των τετρωμένων συντεταγμένων βασιζόμενη στο μετασχηματισμό Laplace για το Πλήρως Ταιριασμένο Στρώμα. Συζητήθηκε η ενσωμάτωση των συνθηκών Neumann στο 6<sup>ης</sup> τάξης συμπαγές σχήμα και διατυπώθηκε εξίσωση για τη δεύτερη παράγωγο. Ανακλήθηκαν οι διατυπώσεις των τοπικών απορροφητικών συνθηκών και παρουσιάστηκαν για λόγους σύγκρισης. Παρουσιάστηκαν τρία προβλήματα αναφοράς όπου δοκιμάστηκαν η ακρίβεια της μεθόδου και των συνοριακών συνθηκών. Αναδείχθηκε ότι οι τοπικές ABCs έχουν μικρές ανακλάσεις που εξαρτώνται από τη γωνία πρόσπτωσης και ότι αφήνουν 4 τάξης μεγέθους περισσότερη υπολείπουσα ενέργεια μέσα στο υπολογιστικό χωρίο, ενώ το Πλήρως Ταιριασμένο Στρώμα με κατάλληλες ρυθμίσεις μπορεί να τις ξεπεράσει. Παρόλα αυτά οι βοηθητικές μεταβλητές του τελευταίου αυξάνουν τον υπολογιστικό φόρτο και τις απαιτήσεις σε μνήμη. Η χρήση χωρικού φίλτρου αποδείχθηκε απαραίτητη ειδικά σε προβλήματα με πλέγματα με υψηλό βαθμό ανομοιομορφίας. Τέλος η μέθοδος έδωσε πολύ καλά αποτελέσματα σε δύο προβλήματα αναφοράς με αναλυτικές λύσεις με και χωρίς όρο πηγής στο δεξί μέλος της κυματικής εξισώσεως.



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] (1997), *Proceedings of 2nd Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems*, NASA CP-3352.
- [2] Abarbanel, S., Gottlieb, D., Hesthaven, J.S., (2002), “*Long time behavior of the perfectly matched layer equations in computational electromagnetics*, ” *Journal of Scientific Computing*, Vol. 17(1-4), pp. 405–422.
- [3] Appelö, D., Kreiss, G., (2007), “*Application of a perfectly matched layer to the nonlinear wave equation*,” *Wave Motion*, Vol. 44, pp. 531–548.
- [4] Bayliss, A., Gunzburger, M., Turkel, E., (1982), “*Boundary Conditions for the Numerical Solution of Elliptic Equations in Exterior Regions*, ” *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 42 , pp. 430-451.
- [5] Bayliss, A., Turkel, E., (1980), “*Radiation Boundary Conditions for wave like equations*,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. XXXIII, pp. 707-725.
- [6] Berenger, J.P., (1994), “*A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves*,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 114, pp. 185-200.
- [7] Bogey C., Bailly C., (2002), “*Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations: far field formulation and validation test cases*,” *ACTA Acustica*, Vol. 88, pp. 463-471.
- [8] Bogey C., Bailly C., (2004), “*A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations*,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, pp. 194-214.
- [9] Bogey C., Bailly C., Marsden O., (2010), “*Progress in Direct Noise Computation*,” *Int. Journal of Aeroacoustics*, Vol. 9, pp. 123-143.
- [10] Chew, W., Weedon, W., (1994), “*A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates*,” *Microwave Optical Technol. Lett.*, Vol. 7, pp. 599-604.
- [11] Ekaterinaris, J., “*New Formulation of Hardin-Pope Equations for Aeroacoustics*,” *AIAA Journal*, Vol. 37, pp. 1033–1039.
- [12] Engquist B., Majda A., (1977), “*Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves*,” *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 74, pp. 1765-1766.
- [13] Engquist B., Majda A., (1979), “*Radiation Boundary Conditions for Acoustic and Elastic Wave Calculations*,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. XXXII, pp. 313-357.
- [14] Ewert, R., Schröder, W., (2003), “*Acoustic Perturbation Equations based on Flow decomposition via Source Filtering*,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 188, pp. 365–398.
- [15] Gaitonde, D.V., Shang, J.S., Young, J. L., (1999), “*Practical aspects of higher-order numerical schemes for wave propagation phenomena*,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, pp. 1849-1869.
- [16] Giles, M.B., (1990), “*Nonreflecting Boundary Conditions for Euler equation calculations*,” *AIAA J.*, Vol. 28(12), pp. 2050-58.
- [17] Hu, F.Q., (1996), “*On Absorbing Boundary Conditions for Linearized Euler Equations by a Perfectly Matched Layer*,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 129, pp. 201-219.

- [18] Hu, F.Q., (2001), “A stable, perfectly matched Layer for Linearized Euler Equations in unsplit physical variables,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 173, pp. 455-480.
- [19] Hu, F.Q., Hussaini, M.Y., Manthley, J.L., (1996), “Low Dissipation and Low Dispersion Runge - Kutta schemes for Computational Acoustics,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 124, pp. 177-191.
- [20] Israeli, M., Orszag, S.A., (1981), “Approximation of Radiation Boundary Conditions,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 41, pp. 115-135.
- [21] Kondaxakis, D., Tsangaris, S., (2008), “Aerodynamic and aeroacoustic analysis of a pulsating internal flow by a multidomain weak collocation spectral method,” *Fluid Dynamics Research*, Vol. 40, pp. 311-342.
- [22] Kosloff, R., Kosloff, D., (1986), “Absorbing Boundaries for Wave Propagation Problems,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 63, pp. 363-376.
- [23] Lee, D.J., Koo, S.O., (1995), “Numerical Study of Sound Generation due to a Spinning Vortex Pair,” *AIAA Journal*, Vol. 33, pp. 20–26.
- [24] Lele, S.K. (1992), “Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 103, pp. 16-42.
- [25] Lighthill, M. J., (1952), “On sound generated aerodynamically: I. General theory,” *Proc. Royal Society London*, Vol. 211, pp.564–587.
- [26] Mitchell, B.E., Lele, S.K., Moin, P., (1995), “Direct Computation of the sound from a compressible co-rotating vortex pair,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 285, pp. 181-202.
- [27] Popescu, M., Shyy, W., Garbey, M., (2005), “Finite Volume Treatment of dispersion-relation-preserving and optimized prefactored compact schemes for wave propagation,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 210, pp. 705-729.
- [28] Renaut, R.A., Petersen, J., (1989), “Stability of wide angle absorbing boundary conditions for the wave equation,” *Geophysics*, Vol. 54(9), pp. 1153–1163.
- [29] Seo, J.H., Mittal, R., (2011), “A high-order immersed boundary method for acoustic wave scattering and low-Mach number flow-induced sound in complex geometries,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 230, pp. 1000-1019.
- [30] Tam, C.K.W. (2001), “Computational Aeroacoustics: An Overview,” *Proceedings of the RTO AVT Symposium on “Ageing Mechanisms and Control: Part A – Developments in Computational Aero- and Hydro-Acoustics”*, Manchester, UK, 8-11 October 2001.
- [31] Tam, C.K.W., Webb, J.C., (1993), “Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 107, pp. 262-281.
- [32] Thomson K.W., (1987), “Time dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 68, pp. 1-24.
- [33] Thomson K.W., (1990), “Time dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems II,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 89(2), pp. 439-461.
- [34] Trefethen, L.N., Halpern, L., (1986), “Well-posedness of one-way wave equations and absorbing boundary conditions,” *Mathematics of Computation*, Vol. 47, pp. 421-435.
- [35] Visbal, M.R., Gaitonde, D.V., (2002), “On the Use of Higher-Order Finite-Difference Schemes on Curvilinear and Deforming Meshes,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 181, pp. 155-185.

- [36] Μαρκάτος Ν., Ασημακόπουλος Δ., *Υπολογιστική Ρευστοδυναμική*, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα (1995).

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΧΩΡΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ

Τα στοιχεία του πίνακα αναφέρονται στη σχέση (2.55) του κυρίως κειμένου.

Τάξη	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$F2$	$\frac{1}{2} + a_f$	$\frac{1}{2} + a_f$				
$F4$	$\frac{5}{8} + \frac{3a_f}{4}$	$\frac{1}{2} + a_f$	$\frac{-1}{8} + \frac{a_f}{4}$			
$F6$	$\frac{11}{16} + \frac{5a_f}{8}$	$\frac{15}{32} + \frac{17a_f}{16}$	$\frac{-3}{16} + \frac{3a_f}{8}$	$\frac{1}{32} + \frac{a_f}{16}$		
$F8$	$\frac{93+70a_f}{128}$	$\frac{7+18a_f}{16}$	$\frac{-7+14a_f}{32}$	$\frac{1}{16} - \frac{a_f}{8}$	$\frac{-1}{128} + \frac{a_f}{64}$	
$F10$	$\frac{193+126a_f}{256}$	$\frac{105+302a_f}{256}$	$\frac{15(-1+2a_f)}{64}$	$\frac{45(1-2a_f)}{512}$	$\frac{5(-1+2a_f)}{256}$	$\frac{-1+2a_f}{512}$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΑΕΡΑΚΟΥΣΤΙΚΗ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη παρουσίαση μεθόδων ολοκλήρωσης με χρήση των συναρτήσεων Green. Αρχικά γίνεται μια σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση των χρήσεων των συναρτήσεων αυτών σε προβλήματα ακουστικής. Έπειτα δίνονται εν συντομία ο ορισμός και η μαθηματική θεμελίωσή τους. Εν συνεχεία εξάγεται η ακουστική / κυματική εξίσωση για ρευστό εν κινήσει με ακουστικές πηγές στο δεξί μέλος (αναλογία Lighthill) και παρουσιάζονται δύο αλγοριθμικές μέθοδοι για τη διεξαγωγή των ολοκληρώσεων και τον υπολογισμό του μακρινού ακουστικού πεδίου. Τέλος γίνεται εφαρμογή μιας εκ των μεθόδων σε ένα πρόβλημα εξωτερικής ροής, με παράλληλο υπολογισμό των κατανεμημένων ακουστικών πηγών του δεξιού μέλους από το λογισμικό Fluent.

### 3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χρήση των συναρτήσεων Green σε προβλήματα ακουστικής ξεκινά από τις εργασίες της ομάδας Brentner, Farassat<sup>[5],[4],[1]</sup> με στόχο όμως τον υπολογισμό της στάθμης θορύβου κινούμενων αερακουστικών πηγών, όπως για παράδειγμα ο παραγόμενος θόρυβος από την κίνηση του στροφίου ελικοπτέρου. Αποτέλεσμα των ερευνών ήταν και η δημιουργία του υπολογιστικού εργαλείου WOPWOP+ στα εργαστήρια της NASA<sup>[3]</sup>, ο οποίος μπορεί να προβλέψει θόρυβο από πολλαπλά στροφία ελικοπτέρου σε σταθερή, αλλά και με ελιγμούς πτήση. Ο κώδικας βασίζεται στην ακουστική αναλογία των Ffowcs - Williams - Hawkins<sup>[6]</sup>, η οποία είναι εξέλιξη της κλασσικής αναλογίας του Lighthill.

Αντίστοιχα και στο επιστημονικό πεδίο της διάδοσης ήχου στον ανθρώπινο φωνητικό σωλήνα οι εργασίες των Howe και McGowan<sup>[9],[11]</sup> είναι χαρακτηριστικές για τη χρήση των συναρτήσεων Green. Η μέθοδος εφαρμόζεται σε γεωμετρίες τύπου ευθύγραμμου σωλήνα με στενωτική περιοχή σε μια προσπάθεια να μελετηθούν τα ακουστικά φαινόμενα στη γλωττιδική περιοχή. Εισάγεται η έννοια των ‘συμπαγών’ συναρτήσεων Green<sup>[9]</sup>, αφού ο ανθρώπινος φωνητικός σωλήνας μπορεί να θεωρηθεί ‘συμπαγής’ (compact) περιοχή, δηλ. περιοχή όπου οι κλίμακες μήκους είναι πολύ μικρότερες του μήκους κύματος του σήματος της παραγόμενης φωνής, και αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση Green δίδεται από το γινόμενο δύο επιμέρους συναρτήσεων: Η πρώτη αποτελεί τη συνάρτηση Green για διάδοση σε περιοχές μακράν των πηγών (far field) ενώ η δεύτερη αποτελεί τη συνάρτηση Green για διάδοση στο εγγύς πεδίο κοντά στις ακουστικές πηγές. Η προσέγγιση αυτή είναι δυνατό να γίνει στο πεδίο της συχνότητας, οπότε οι συναρτήσεις αυτές μπορούν να ειπωθούν σαν επιμέρους συναρτήσεις μεταφοράς του ακουστικού συστήματος από την πηγή μέχρι το δέκτη του ήχου. Η συνάρτηση Green για το εγγύς πεδίο δεν είναι άλλη από τη συνάρτηση δυναμικού (με προσέγγιση μιας σταθεράς ολοκλήρωσης) της αστροβίλης - ασυμπίεστης ροής κοντά στις πηγές, και συνήθως είναι η λύση μιας εξισώσεως Laplace με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Τέλος ο Howe<sup>[9]</sup> εισάγει την έννοια των πηγών ήχου από στροβιλισμούς (vortex sound) και τροποποιεί ανάλογα την αναλογία Lighthill, θέτοντας στο δεξί μέλος της εξισώσεως για την ακουστική πίεση την ποσότητα:  $\rho_0 \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})$ , όπου  $\boldsymbol{\omega}$  το

στροβιλότητα (vorticity) του πεδίου ροής, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από ανάλογο ρευστοδυναμικό επιλύτη και έχει χαρακτηριστικά διπόλου σε αντίθεση με τον όρο του Lighthill (όρος διπλής απόκλισης – double divergence), που έχει χαρακτηριστικά τετραπολικής πηγής. Σε πρόσφατο άρθρο<sup>[10]</sup> γίνεται ενδελεχής ανάλυση και εφαρμογή των compact συναρτήσεων Green σε σύστημα περιοδικά κινούμενου στενωτικού σωλήνα επιχειρώντας παράλληλα διασύνδεση με τη θεωρία πηγής – φίλτρου (source – filter theory). Εξάγονται οι συναρτήσεις Green για την υπο και υπεργλωττιδική περιοχή, ενώ η στενωτική περιοχή θεωρείται σαν ένα κινούμενο σύστημα μάζας με ελατήριο και αποσβεστήρα, ανάλογο με τα συστήματα που χρησιμοποιούνται στα μοντέλα πηγής – φίλτρου. Τέλος ο όρος πηγής για τον οποίο απαιτείται πλήρης επίλυση του πεδίου ροής, αντικαθίσταται από έναν όρο που περιέχει την συνολική ογκομετρική παροχή από τη γλωττίδα.

Σημαντική είναι επίσης η συνεισφορά της διατριβής του Hofman<sup>[7]</sup>, όπου διατυπώνεται και επιλύεται η αναλογία Lighthill για άπειρο στενωτικό σωλήνα με τη χρήση συναρτήσεων Green. Οι Zhao et. al.<sup>[17]</sup> διατυπώνουν την πλήρη αναλογία Ffowcs - Williams – Hawkings για ημίπειρο σωλήνα με στενωτική περιοχή και την εφαρμόζουν<sup>[16]</sup> σε πρόβλημα για την μελέτη της επίδρασης της γλωττιδικής κίνησης στο παραγόμενο σήμα φωνής, χρησιμοποιώντας πάλι συναρτήσεις Green.

Από υπολογιστικής / αλγοριθμικής σκοπιάς αρχικά ο Brentner<sup>[2]</sup> δίνει τους 2 βασικούς αλγορίθμους υπολογισμού των ακουστικών ολοκληρωμάτων που έχουν προκύψει από συναρτήσεις Green (emission time dominant and reception time dominant algorithms) και εν συνεχεία σε πρόσφατο άρθρο οι Margnat et. al.<sup>[13]</sup> προτείνουν μια πιο αποτελεσματικότερη αλγοριθμική μεθοδολογία για τον υπολογισμό, μειώνοντας τον υπολογιστικό φόρτο κατά περίπου 20%. Εφαρμόζουν την μέθοδο σε πρόβλημα ροής στρώματος ανάμιξης σε ανοιχτού τύπου γεωμετρία.

Τέλος σημειώνεται ότι παρά την απλότητα των μεθόδων ολοκλήρωσης με χρήση συναρτήσεων Green, είναι χαρακτηριστική η δυσκολία εφαρμογής της μεθόδου σε πολύπλοκες γεωμετρίες, τόσο για το αρμονικό, όσο και για το χρονομεταβλητό πρόβλημα.

### 3.2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ

Αν  $L = L(x)$  είναι ένας γραμμικός διαφορικός τελεστής σε έναν υπόχωρο του  $\mathbb{R}^n$ , τότε για ένα σημείο  $s$  αυτού, οποιαδήποτε συνάρτηση ικανοποιεί την (3.1) ονομάζεται συνάρτηση Green.

$$LG(x, s) = \delta(x - s) \quad (3.1)$$

Στην παραπάνω  $\delta(x - s)$  είναι η συνάρτηση δέλτα ή παλμός Dirac οριζόμενη ως:

$$\delta(x - s) = \begin{cases} \infty, & x = s \\ 0, & x \neq s \end{cases} \quad (3.2)$$

και το ολοκλήρωμα αυτής ισούται με τη μονάδα:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$

Εναλλακτικά ο παλμός Dirac μπορεί να θεωρηθεί σαν το όριο γκαουσιανής κατανομής με μηδενική διασπορά. Είναι πιο χρήσιμο ο παλμός Dirac να ειπωθεί σαν κατανομή παρά σα συνάρτηση.

Αν ο διαφορικός τελεστής είναι αναλλοίωτος στη μετάθεση τότε η συνάρτηση Green είναι και συνελκτικός τελεστής, δηλ:  $G(x, s) = G(x - s)$ .

Η σπουδαιότητα των συναρτήσεων Green έγκειται στην χρήση τους για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων και προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Έστω για παράδειγμα η γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$Lu(x) = f(x) \quad (3.3)$$

Αν για τον γραμμικό διαφορικό τελεστή μπορεί να βρεθεί μια συνάρτηση Green, τότε αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (3.1) με  $f(s)$  και ολοκληρώσουμε ως προς την μεταβλητή  $s$  προκύπτει:

$$\int LG(x, s)f(s)ds = \int \delta(x - s)f(s)ds = f(x) \quad (3.4)$$

Αντικαθιστώντας την  $f(x)$  από την (3.3):

$$\int LG(x, s)f(s)ds = Lu(x) \quad (3.5)$$

Επειδή ο διαφορικός τελεστής επιδρά στην  $x$  ανεξάρτητη μεταβλητή και όχι στη μεταβλητή ολοκλήρωσης  $s$ , μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα συνεπώς:

$$L \int G(x, s)f(s)ds = Lu(x) \quad (3.6)$$

όπου με απαλοιφή του τελεστή και απ' τα δύο μέλη, προκύπτει η γενική λύση της (3.3):

$$u(x) = \int G(x, s)f(s)ds \quad (3.7)$$

Έτσι συνάρτηση Green ενός γραμμικού διαφορικού τελεστή είναι η συνάρτηση εκείνη στην οποία αν επιδράσει ο τελεστής δίνει το μοναδιαίο παλμό Dirac. Αρκεί λοιπόν η εύρεση μιας συνάρτησης Green για την εύρεση της γενικής λύσης μιας γραμμικής εξίσωσης.

### 3.2.1 Ακουστική αναλογία Lighthill

Η διάδοση των ακουστικών κυμάτων περιγράφεται / εμπεριέχεται στις εξισώσεις διατήρησης (συνέχειας, ορμής και ενέργειας) της μηχανικής ρευστών. Έτσι η ακουστική αναλογία δεν παρέχει νέα πληροφορία, ούτε είναι κάποιος νέος φυσικός νόμος. Πρόκειται πολύ απλά για μια νέα επαναδιατύπωση των φυσικών νόμων της μηχανικής ρευστών με διαφορετικό τρόπο. Επιχειρώντας έτσι την εξαγωγή της αναλογίας διατυπώνουμε τις εξισώσεις διατήρησης μάζας και ορμής, χρησιμοποιώντας συμβολισμό δεικτών και τη συνθήκη άθροισης του Einstein.

Η χρονική παράγωγος της εξίσωσης συνέχειας είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (3.8)$$

Η κατά μέλη απόκλισης της εξίσωσης ορμής:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.9)$$

όπου  $P_{ij}$  ο τανυστής πίεσης στον οποίο περιέχονται και οι ιξώδεις τάσεις του ρευστού:

$$P_{ij} = p \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (3.10)$$

Ο τανυστής των ιξωδών τάσεων δίδεται από κάποια υλική σχέση, η οποία για νευτώνικό ρευστό είναι:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (3.11)$$

όπου  $\delta_{ij}$  το δέλτα του Kronecker.

Αφαιρώντας κατά μέλη και προσθέτοντας και στα δύο μέλη τον όρο  $-c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x_i^2}$  ( $c_0$  είναι η ταχύτητα του ήχου σε θέση **δέκτη**) προκύπτει η μη ομογενής κυματική εξίσωση για τις μεταβολές της πυκνότητας, αφού τεθεί  $\rho = \rho' + \rho_0$ :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.12)$$

Η παραπάνω είναι η περίφημη αναλογία του Lighthill. Στο αριστερό μέλος παρουσιάζεται ο κυματικός τελεστής που περιγράφει τη χωροχρονική διάδοση του αντιστοίχου μεγέθους, ενώ στο δεξί μέλος ο τελεστής Laplace του τανυστή του Lighthill ( $T_{ij}$ ) μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι κάποιος όρος πηγής.

Ο τανυστής του Lighthill έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= P_{ij} + \rho u_i u_j - \tau_{ij} + c_0^2 \rho' \delta_{ij} \\ &= \rho u_i u_j - \tau_{ij} + (p' - c_0^2 \rho') \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα:  $c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 (c_0^2 \rho' \delta_{ij})}{\partial x_i \partial x_j}$  στο δεξί μέλος για να ομαδοποιηθούν οι

όροι. Επίσης αντικαταστήσαμε τον τανυστή της πίεσης από την (3.10) και θέσαμε  $p = p' + p_0$  εισάγοντας έτσι και τις διαταραχές πίεσης. Ο όρος της πίεσης αναφοράς αμελείται από τον τανυστή Lighthill διότι δε μεταβάλλεται χωρικά.

Η πλέον χρησιμοποιούμενη μορφή για τον τανυστή Lighthill είναι αυτή της δεύτερης ισότητας της (3.13). Σε αυτήν μπορούν να διακριθούν συνεισφορές τριών βασικών ειδών ακουστικών πηγών:

1. μη γραμμικές συναγωγικές δυνάμεις (τάσεις Reynolds) που περιγράφονται από τον δυαδικό:  $\rho u_i u_j$
2. ιξώδεις τάσεις  $\tau_{ij}$



3. απόκλιση από την μη ομοιόμορφη ταχύτητα του ήχου  $c_0$ , ή απόκλιση από την ισεντροπικότητα, αν λάβει κανείς υπόψη τον τρόπο ορισμού της ταχύτητας σε ομοιόμορφο μέσο  $c_0^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$

Ανάλογη εξίσωση με την (3.12) μπορεί να ληφθεί και για την πίεση, αρκεί να θεωρηθεί ισεντροπική διάδοση για τις διαταραχές πίεσης και ήχου. Θέτοντας λοιπόν  $p' = c_0^2 \rho'$  η (3.12) γίνεται:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.14)$$

όπου πια ο τανυστής του Lighthill παίρνει τη μορφή:

$$T_{ij} = \rho u_i u_j - \tau_{ij} \quad (3.15)$$

Σημειώνεται εδώ ότι η εξαγωγή της (3.12) έγινε χωρίς παραδοχές από τις εξισώσεις συνεχείας και ορμής. Ο όρος “αναλογία” που συναντάται στην βιβλιογραφία αναφέρεται στο ότι η (3.12) αναπαριστά την ίδια σύνθετη διαδικασία που περιγράφουν οι εξισώσεις συνεχείας / ορμής με όμως ακουστικά “ανάλογο” / ισοδύναμο τρόπο. Η χρησιμότητα της αναλογίας έγκειται στο γεγονός ότι μπορούμε να πάρουμε εκτιμήσεις τάξης μεγέθους από την (3.12) όσον αφορά τις ακουστικές διαταραχές πυκνότητας, έχοντας πειραματικά δεδομένα από κάποιο πεδίο ροής. Προς τούτο η (3.12) πρέπει να συμπληρωθεί από κατάλληλες συνοριακές συνθήκες και να λυθεί αριθμητικά με κάποια μέθοδο για υπερβολικού τύπου εξισώσεις. Οποιαδήποτε επίδραση του ακουστικού πεδίου στο ροϊκό δεν περιέχεται στην αναλογία, διότι έχει συμπεριληφθεί κατά την εξαγωγή της.

### 3.2.2 Επίλυση με συναρτήσεις Green

Ανάλογα με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ορίζονται οι συναρτήσεις Green και για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Έστω η ανυσματική μορφή της (3.12):

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = S(\mathbf{x}, t) \quad (3.16)$$

Η (3.16) παριστά κύματα που διαδίδονται σφαιρικά στο άπειρο ξεκινώντας από κάποια περιοχή πηγών όπου  $S(\mathbf{x}, t) \neq 0$ . Σα συνάρτηση Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t, t_0)$  για το πρόβλημα αυτό ορίζεται η μερική λύση της εξίσωσης:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \nabla^2 G = \delta(x - x_0) \delta(t - t_0) \quad (3.17)$$

Στην (3.17)  $\mathbf{x}_0$  είναι μια τυχαία θέση δέκτη και  $t_0$  είναι η χρονική στιγμή στην οποία φθάνουν τα κύματα στη θέση αυτή. Αντίστοιχα  $\mathbf{x}$  είναι οι θέσεις πηγών και  $t$  οι χρόνοι στους οποίους οι πηγές εξέπεμψαν κάποιο κύμα. Για την  $G$  ισχύει η αρχή αιτιότητας, η οποία υπαγορεύει ότι  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t, t_0) = 0$  για  $t > t_0$ , αφού κύματα που φθάνουν στη θέση  $\mathbf{x}_0$  σε χρόνο  $t_0$  πρέπει να έχουν δημιουργηθεί από τις πηγές  $S(\mathbf{x}, t)$  σε χρόνους προωθύτερους του  $t_0$ .

Πολλαπλασιάζοντας την (3.16) με  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t, t_0)$ , την (3.17) με  $p'(\mathbf{x}, t)$ , αφαιρώντας κατά μέλη και ολοκληρώνοντας στο χώρο και για χρόνους  $-\infty < t < \infty$ , προκύπτει:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ p' \frac{\partial G}{\partial t} - G \frac{\partial p'}{\partial t} \right] - \nabla \cdot (p' \nabla G - G \nabla p') \right) dt dV(\mathbf{x}) = p'(x_0, t_0) - \iint_{-\infty}^{\infty} SG \cdot dt dV(\mathbf{x}) \quad (3.18)$$

Για ελεύθερη διάδοση των κυμάτων και απουσία σταθερών ορίων όλο το αριστερό μέλος είναι μηδέν. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί εξετάζοντας τον κάθε όρο ξεχωριστά: Για  $t = \infty$   $G = 0$ , λόγω της αρχής αιτιότητας και για  $t = -\infty$   $p' = 0$ , επειδή οι πηγές δεν έχουν ακόμα αρχίσει να εκπέμπουν, οπότε ο όρος εντός της παρένθεσης είναι μηδέν. Ο όρος απόκλισης μπορεί να μετατραπεί σε ολοκλήρωμα στο σύνορο του χώρου  $V$  βάσει του θεωρήματος Gauss. Για  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  και  $t = t_0$  προκύπτει η ζητούμενη τιμή της ακουστικής πίεσης, η οποία μεταφέρεται στο δεξί μέλος, ενώ για τις λοιπές χρονικές στιγμές και σημεία του συνόρου ισχύει ότι και προηγουμένως. Έτσι η λύση για την ακουστική πίεση μπορεί να γραφεί:

$$p'(x_0, t_0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} S(\mathbf{x}, t) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t, t_0) dt dV(\mathbf{x}) \quad (3.19)$$

Αποδεικνύεται επίσης<sup>[8]</sup> ότι η γενική λύση της (3.17) για σφαιρική συμμετρία είναι:

$$G = \frac{\Phi(t - t_0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/c)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{\Psi(t - t_0 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/c)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \quad (3.20)$$

όπου  $\Phi$  και  $\Psi$  οποιεσδήποτε τυχαίες συναρτήσεις. Η αρχή αιτιότητας επιβάλλει  $\Phi = 0$ , ενώ μετά από αντικατάσταση της (3.20) στην (3.17) προσδιορίζεται η ακριβής μορφή της  $\Psi$ :

$$\Psi(t - t_0) = \delta(t - t_0) \quad (3.21)$$

Συνεπώς η τελική μορφή της συναρτήσεως Green, γνωστή και σαν συνάρτηση Green ελευθέρου χώρου είναι:

$$G(x, x_0, t, t_0) = \frac{\delta(t - t_0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/c)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \quad (3.22)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.22) η σχέση για τον υπολογισμό της ακουστικής πίεσης στη θέση δέκτη γίνεται (αμέσως μετά την χρονική ολοκλήρωση):

$$p'(\mathbf{x}_0, t_0) = \int \frac{S(x, t_0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/c)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} dV(\mathbf{x}) \quad (3.23)$$

Έτσι μια απλή εφαρμογή της (3.23) σε διάφορα σημεία δέκτη και διάφορες χρονικές στιγμές δίνει τη λύση στο πρόβλημα υπολογισμού της ελεύθερης διάδοσης του ήχου με βάση την ακουστική αναλογία Lighthill. Το ολοκλήρωμα είναι γνωστό και σαν καθυστερημένο δυναμικό (retarded potential), αφού για την εύρεση της κατανομής της ακουστικής πίεσης στην χρονική στιγμή  $t_0$  απαιτείται ο υπολογισμός κατανομής των πηγών στην πρωθύστερη χρονική στιγμή  $t_0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/c$ . Το χρονικό διάστημα  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/c$  είναι ο χρόνος που θα χρειαστεί ένα κύμα κινούμενο με ταχύτητα  $c$  για ταξιδεύσει από το σημείο εκπομπής  $\mathbf{x}$  στο σημείο δέκτη  $\mathbf{x}_0$ .

### 3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ – ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Η υπολογιστική εφαρμογή της εξίσωσης (3.23) προϋποθέτει αφενός σφαιρική και ελεύθερη διάδοση των ακουστικών διαταραχών και αφετέρου την ύπαρξη ρευστοδυναμικών δεδομένων για τον υπολογισμό των ακουστικών πηγών στο δεξί μέλος σύμφωνα με την αναλογία Lighthill. Επίσης η ύπαρξη του “καθυστερημένου χρόνου” (retarded time) στο ολοκλήρωμα, σημαίνει ότι οι συνεισφορές από δύο ακουστικές πηγές που απέχουν μεταξύ τους συγκεκριμένη απόσταση, πρέπει να υπολογισθούν σε διαφορετικούς χρόνους εκπομπής ούτως ώστε να φτάσουν την ίδια χρονική στιγμή στο σημείο δέκτη. Και αντίστροφα η τιμή της ακουστικής πίεσης σε συγκεκριμένο σημείο δέκτη και συγκεκριμένη χρονική στιγμή αποτελείται από τη συνεισφορά διαφορετικών σημείων εκπομπής σε διαφορετικούς χρόνους. Η χρονική και χωρική όμως κατανομή των ακουστικών πηγών είναι δεδομένη και εξαρτάται από τον ρευστοδυναμικό επιλύτη, πράγμα που σημαίνει ότι για τη σωστή εκτέλεση των υπολογισμών του ακουστικού ολοκληρώματος θα χρειαστεί οπωσδήποτε να γίνουν παρεμβολές στο χρόνο, δηλ. υπολογισμός των ακουστικών πηγών σε κάποια χρονική στιγμή που αυτές δεν είναι γνωστές.

Η διακριτή μορφή της (3.23) για ένα πεδίο με  $N_{xs}$  αριθμό ακουστικών πηγών είναι:

$$p'(\mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N_{xs}} S \left( x_j, t_0 - \frac{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0|}{c} \right) \frac{\Delta V \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0|} \quad (3.24)$$

Παρακάτω παρουσιάζονται οι δύο βασικοί αλγόριθμοι για τον υπολογισμό της (3.24), σύμφωνα με τους Margnat et. al.<sup>[13]</sup>. Στους αλγορίθμους αυτούς θεωρείται ότι από τον ρευστοδυναμικό επιλύτη διατίθενται  $N_{ts}$  κατανομές ακουστικών πηγών με συχνότητα δειγματοληψίας ίση με  $\frac{1}{\Delta t}$ . Οι δείκτες  $i, l$  αναφέρονται στα σημεία και τους χρόνους **δέκτη**, ενώ οι δείκτες  $j, k$  αναφέρονται στα σημεία και τους χρόνους **πηγής**. Επίσης οι χρόνοι πηγής και δέκτη έχουν την ίδια συχνότητα δειγματοληψίας.

#### 3.3.1 Αλγόριθμος Χρόνου Δέκτη (Reception Time Algorithm)

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο αυτό για κάθε χρονική στιγμή και σημείο **δέκτη** που ζητείται, και για κάθε σημείο **πηγής**, υπολογίζεται ο αντίστοιχος χρόνος (καθυστερημένος χρόνος  $t_0 - \frac{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0|}{c}$ ) που έγινε η εκπομπή και οι δείκτες των αρχείων που πρέπει να διαβαστούν για να γίνει η παρεμβολή. Εν συνεχεία γίνεται η παρεμβολή για να βρεθεί η τιμή της ακουστικής πηγής στον καθυστερημένο χρόνο. Τέλος αθροίζεται / ενημερώνεται η συνεισφορά του σημείου αυτού σε μια θέση υπολογιστικής μνήμης και ο υπολογισμός προχωρά στο επόμενο σημείο **πηγής**. Ο αλγόριθμος αυτός είναι η πιο προφανής υλοποίηση της (3.24) και απαιτεί  $2N_{xs}$  φορές λειτουργίες ανάγνωσης αρχείων δεδομένων πηγής, για κάθε χρονική στιγμή και σημείο δέκτη, πράγμα πάρα πολύ δαπανηρό σε υπολογιστικό χρόνο και ισχύ. Στον Πίνακα 3-1 παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για την υλοποίηση του αλγορίθμου αυτού. Ο τελεστής `int` δηλώνει στρογγυλοποίηση προς τον κάτω πλησιέστερο ακέραιο.

Πίνακας 3-1. Υπόδειγμα αλγορίθμου χρόνου δέκτη

Διάβασε χρόνο δέκτη, σημείο δέκτη  $\mathbf{x}_0, t_0$

Υπολόγισε το δείκτη  $l = \frac{t_0}{\Delta t}$

**Για κάθε** σημείο πηγής  $\mathbf{x}_j$

Υπολόγισε τις αποστάσεις  $r_{ij}$

Υπολόγισε τους δείκτες  $k = l - \text{int}\left(\frac{r_{ij}}{\Delta t}\right)c, k + 1$

Υπολόγισε τον καθυστερημένο χρόνο  $t_0 - \frac{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0|}{c}$

Διάβασε τις πηγές  $S(k), S(k+1)$  από τα αντίστοιχα αρχεία

Κάνε παρεμβολή στον καθυστερημένο χρόνο μεταξύ των  $S(k), S(k+1)$

Πρόσθεσε το αποτέλεσμα στη μνήμη  $p'(\mathbf{x}_0, t_0)$

**Επόμενο** σημείο πηγής

### 3.3.2 Αλγόριθμος χρόνου εκπομπής (Emission Time Algorithm)

Σύμφωνα με τη λογική του αλγορίθμου αυτού ο κύριος βρόχος γίνεται στους δείκτες των κατανομών των ακουστικών πηγών ξεκινώντας από αυτόν που αντιστοιχεί στον μικρότερο χρόνο εκπομπής. Έτσι για κάθε **δείκτη** αρχείου δεδομένων **πηγής** και για κάθε σημείο πηγής υπολογίζεται ο δείκτης και ο χρόνος **εκπομπής**, και ο χρόνος παρεμβολής στον καθυστερημένο χρόνο. Ακολούθως εκτελείται η παρεμβολή και προστίθεται το αποτέλεσμα στη θέση  $p'(l(\mathbf{x}_0))$  και ο αλγόριθμος προχωρά στο επόμενο σημείο πηγής. Στον Πίνακα 3-2 παρατίθεται ο ψευδοκώδικας για την υλοποίηση του αλγορίθμου αυτού.

Πίνακας 3-2. Υπόδειγμα αλγορίθμου χρόνου εκπομπής

**Για κάθε** δείκτη αρχείου δεδομένων πηγής  $k$

Διάβασε τις πηγές  $S(k), S(k+1)$  από τα αντίστοιχα αρχεία

Διάβασε σημείο δέκτη  $\mathbf{x}_0$

Υπολόγισε τις αποστάσεις  $r_{ij}$

**Για κάθε** σημείο πηγής  $\mathbf{x}_j$

Υπολόγισε τον δείκτη  $l = k + 1 + \text{int}\left(\frac{r_{ij}}{c\Delta t}\right)$

Υπολόγισε την ποσότητα  $\omega = 1 - \left[ \frac{r_{ij}}{c\Delta t} - \text{int}\left(\frac{r_{ij}}{c\Delta t}\right) \right]$

Υπολόγισε τον καθυστερημένο χρόνο  $(k + \omega)\Delta t$

Κάνε παρεμβολή στον καθυστερημένο χρόνο μεταξύ των  $S(k), S(k+1)$

Πρόσθεσε το αποτέλεσμα στη μνήμη  $p'(l(\mathbf{x}_0))$

**Επόμενο** σημείο πηγής

**Επόμενος** δείκτης αρχείου

Σημειώνεται ότι η ποσότητα  $\omega$  είναι πάντα μικρότερη της μονάδας  $0 \leq \omega < 1$ . Το πλεονέκτημα με τον αλγόριθμο αυτό είναι ότι τα αρχεία των ακουστικών πηγών διαβάζονται μόνο μία φορά, ενώ το μειονέκτημα είναι ότι η χρονοσειρά της ακουστικής πίεσης για το τρέχον σημείο δέκτη δεν γεμίζει σειριακά. Έτσι η δέσμευση υπολογιστικής μνήμης πρέπει να γίνεται δυναμικά. Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι κάθε συνεισφορά που φθάνει σε σημείο δέκτη πριν τη χρονική στιγμή  $t = k_{\min} \Delta t + r_{\max} / c$  ή μετά τη χρονική στιγμή  $t = k_{\max} \Delta t + r_{\min} / c$  θα οδηγήσει σε ελλειπές ακουστικό πεδίο, δηλ. θα υπάρχει τουλάχιστο ένα σημείο δέκτη, το οποίο δε θα έχει δεχθεί τη συνεισφορά τουλάχιστο ενός σημείου εκπομπής.  $k_{\min}$  και  $k_{\max}$  είναι ο ελάχιστος και μέγιστος δείκτης αρχείου ακουστικών πηγών και  $r_{\min}$ ,  $r_{\max}$  είναι η ελάχιστη και μέγιστη απόσταση ζευγαριών πηγής – δέκτη. Συνεπώς μη ελλειπή ακουστικά πεδία θα είναι διαθέσιμα μόνο για το χρονικό διάστημα  $T_c = (k_{\max} - k_{\min}) \Delta t - \frac{r_{\max} - r_{\min}}{c}$ .

### 3.4 ΔΙΠΟΛΙΚΟΣ ΗΧΟΣ ΑΠΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ ΣΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ

Στην παράγραφο αυτή εξετάζεται το πρόβλημα παραγωγής ήχου από κύλινδρο σε ομοιόμορφη ροή. Αρχικά επιλύεται το πεδίο ροής χρησιμοποιώντας τον εμπορικό επιλύτη Fluent. Στη συνέχεια από τα υδροδυναμικά και με χρήση συναρτήσεων χρήστη υπολογίζονται οι κατανομημένες ακουστικές πηγές της αναλογίας Lighthill. Τέλος με εφαρμογή του αλγορίθμου χρόνου εκπομπής υπολογίζονται τα σήματα ακουστικής πίεσης σε τρεις θέσεις δέκτη στο μακρύ πεδίο του κυλίνδρου. Είναι γνωστό ότι η ροή γύρω από κύλινδρο από κάποιους αριθμούς Reynolds και πάνω δημιουργεί περιόδους στροβιλισμούς στον ομόρρο (von Karman vortices), με αποτέλεσμα η ροή να αποκολλάται εναλλάξ από το πάνω και κάτω μέρος του στερεού σώματος. Η συχνότητα των ταλαντώσεων μπορεί να βρεθεί υπολογίζοντας και παρακολουθώντας την ανωστική δύναμη και πρέπει να συμφωνεί με τον αριθμό Strouhal της ροής. Το ίδιο ισχύει και για την ακουστική πίεση. Η ανάδειξη εκεί της ίδιας συχνότητας ισοδυναμεί με επιτυχία της ακουστική μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε. Επίσης η εξέταση της χωρικής κατανομής των ακουστικών μεγεθών δίνει χρήσιμες πληροφορίες για το είδος του παραγόμενου ήχου.

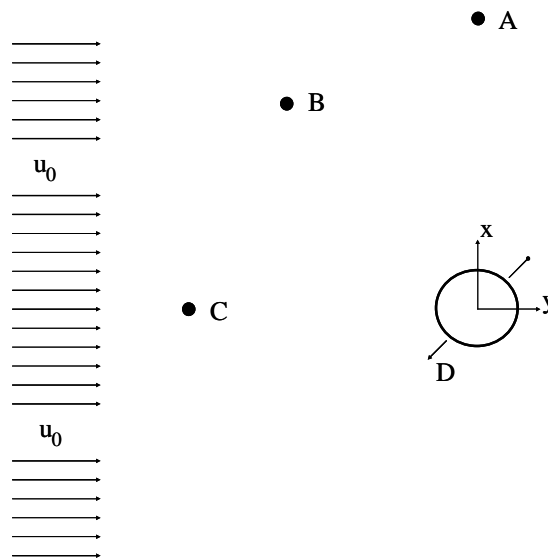
Το πρόβλημα έχει εξεταστεί πολλές φορές στη βιβλιογραφία με διαφορετικούς κάθε φορά σκοπούς. Οι Shen και Sorenson<sup>[14]</sup> το χρησιμοποιούν σαν πρόβλημα αναφοράς για την διερεύνηση της ακρίβειας του ακουστικού τους επιλύτη, που βασίζεται σε μοντέλο πλήρους διαχωρισμού (splitting) των ακουστικών μεταβλητών από τις υδροδυναμικές για χαμηλούς αριθμούς Mach. Ομοίως οι Sheo et. al.<sup>[15]</sup> για αριθμό Reynolds ίσο με 150 και αριθμό Mach ίσο με 0.1.

#### 3.4.1 Πρόβλημα ροής / Οριακές συνθήκες

Στην Εικόνα 3-1 φαίνεται ένα σκαρίφημα του υπό εξέταση προβλήματος. Ρευστό δεδομένων ιδιοτήτων (πυκνότητας  $\rho_0$ , ιξώδους  $\mu$ ) με ομοιόμορφο προφίλ ταχύτητας  $u_0$  συναντά σταθερό κύλινδρο διαμέτρου  $D$ . Το πρόβλημα θεωρείται διδιάστατο, ενώ για το ακουστικό κομμάτι θεωρούνται ταχύτητες χαμηλού αριθμού Mach ( $M \leq 0.1$ ). Η ροή θεωρείται ασυμπίεστη και μη μόνιμη, οπότε οι εξισώσεις Navier - Stokes σε αδιαστατοποιημένη μορφή μπορούν να γραφούν ως:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla p = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$
(3.25)



Εικόνα 3-1. Κυκλικός κύλινδρος σε ομοιόμορφη ροή

Η ανωστική και οπισθέλκουσα δύναμη και οι συντελεστές αυτών αντίστοιχα δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις, στις οποίες  $\theta$  είναι η γωνία που σχηματίζει η επαπτόμενη στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας του στερεού με τη διεύθυνση της κύριας ροής και  $\tau_w$  είναι η διατμητική τάση που ασκεί το ρευστό στο τμήμα αυτό και  $A_0$  η συνολική εκτιθέμενη επιφάνεια στη ροή.

$$F_{lift} = -\iint_A p \sin \theta dA + \iint_A \tau_w \cos \theta dA$$

$$C_L = \frac{2F_{lift}}{\rho u_0^2 A_0}$$
(3.26)

$$F_{drag} = \iint_A p \cos \theta dA + \iint_A \tau_w \sin \theta dA$$

$$C_D = \frac{2F_{drag}}{\rho u_0^2 A_0}$$
(3.27)

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι:

- οριζόντια ταχύτητα στην είσοδο του υπολογιστικού χωρίου ίση με  $u_0$
- μηδενική πίεση στην έξοδο του υπολογιστικού χωρίου
- συνθήκη μη ολίσθησης στην επιφάνεια του κυλίνδρου

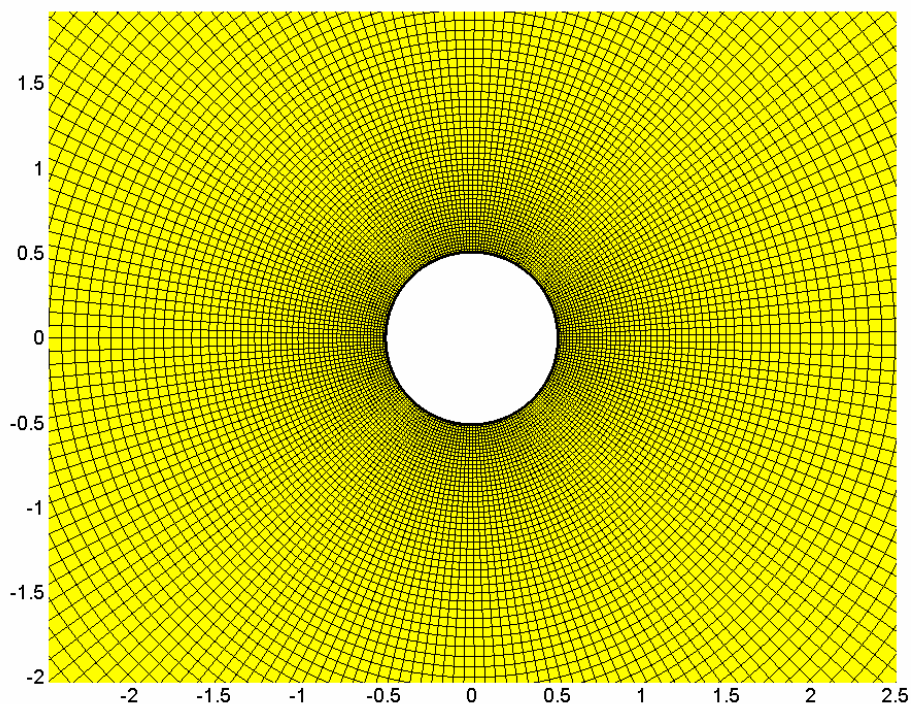
### 3.4.2 Δεδομένα προβλήματος / Αριθμητικό πλέγμα

Για την επίλυση του υδροδυναμικού πεδίου χρησιμοποιήθηκε ο επιλύτης Fluent σε 2D καρτεσιανές συντεταγμένες και αριθμητικό πλέγμα τύπου O, άποψη του οποίου κοντά στον κύλινδρο φαίνεται στην Εικόνα 3-2. Για την υλοποίηση των αδιαστατοποιημένων εξισώσεων Navier Stokes, θεωρήθηκε ασυμπίεστο ρευστό πυκνότητας ίσης με τη μονάδα και ιξώδους ίσου με  $1/\text{Re}$ . Η πυκνότητα του αριθμητικού πλέγματος ήταν 112 στοιχεία κατά την ακτινική και 203 στοιχεία κατά την αζιμουθιακή διεύθυνση, ενώ το υπολογιστικό χωρίο κάλυπτε την περιοχή που ορίζεται από το καρτεσιανό  $[0.5, 16] \times [0, 2\pi]$ . Οι 16 διάμετροι γύρω από τον κύλινδρο θεωρείται ότι καλύπτουν ικανοποιητική περιοχή για την ανάδειξη των στροβίλων του ομόρρου, οι οποίοι

συνεισφέρουν σημαντικά στην παραγωγή ήχου. Για τη σωστή χρήση πλέγματος τύπου O στο περιβάλλον του Fluent είναι απαραίτητο να τεθούν περιοδικές συνθήκες για την πρώτη και τελευταία ακτίνα. Οι τελευταίες ελήφθησαν αυθαίρετα από την δεξιά μεριά του κυλίνδρου στον θετικό ημιάξονα των  $x$ . Το πρόβλημα θεωρήθηκε χρονομεταβλητό με χρονικό βήμα  $dt = 0.0125$ , ενώ χρησιμοποιήθηκε δεύτερης τάξης ακρίβεια στην προσέγγιση του χρονικού όρου, σε συνδυασμό με τον αλγόριθμο διόρθωσης πεδίου πίεσης SIMPLE. Στον Πίνακα 3-3 φαίνονται συγκεντρωμένα όλα τα αριθμητικά στοιχεία του προβλήματος. Όσο αφορά το ακουστικό κομμάτι χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος χρόνου εκπομπής και υπολογίστηκαν οι χρονοσειρές ακουστικής πίεσης στα σημεία A, B και C της Εικόνας 3-1 για δύο αριθμούς Mach. Επειδή τα μεγέθη των ακουστικών πηγών, όπως υπολογίζονται από τον ροϊκό επιλύτη, είναι αδιαστατοποιημένα, η επιλογή του αριθμού Mach στον ακουστικό αλγόριθμο έγινε μεταβάλλοντας την ταχύτητα του ήχου  $c$ . Υπενθυμίζεται ότι η ροή μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστη για αριθμούς Mach μικρότερους από 0.3.

Πίνακας 3-3. Δεδομένα προβλήματος

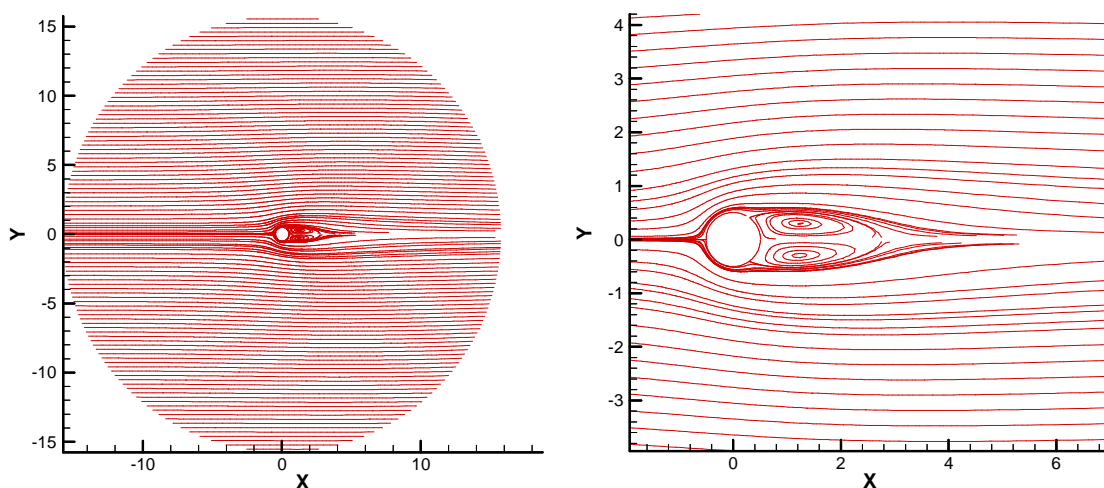
αριθμητικό χωρίο:	$[0.5, 16] \times [0, 2\pi]$
πυκνότητα πλέγματος:	$203 \times 112$
διάμετρος κυλίνδρου:	$D = 1$
αριθμός Reynolds:	$Re = 500$
ιδιότητες ρευστού:	$\rho = 1$ $\mu = 1/500 = 0.002$
ομοιόμορφη ταχύτητα:	$u_0 = 1$
χρονικό βήμα:	$dt = 0.0125$
ακτινική απόσταση και γωνίες δεκτών A,B,C:	$R = 90, \phi_A = 90^\circ, \phi_B = 135^\circ, \phi_C = 180^\circ$
αριθμοί Mach:	$M = 0.003, c = 343 \text{ m/s}$ $M = 0.1, c = 10 \text{ m/s}$



Εικόνα 3-2. Αποψη υπολογιστικού πλέγματος κοντά στον κύλινδρο.

### 3.4.3 Αποτελέσματα

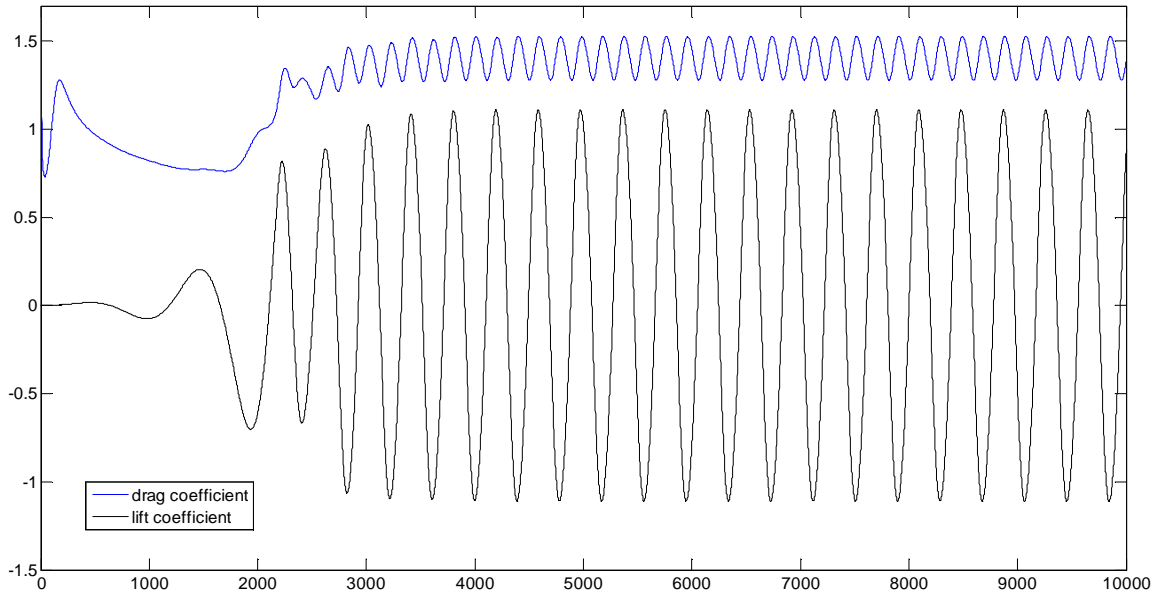
Ως γνωστόν για χαμηλούς αριθμούς  $Re$  η ροή είναι μόνιμη και δε δημιουργούνται στροβιλισμοί στον ομόρρου. Επίσης η συνολική ανωστική δύναμη προκύπτει σχεδόν μηδενική, ενώ αρχίζει να γίνεται αισθητή από αριθμούς  $Re$  50 και πάνω. Στην Εικόνα 3-3 φαίνονται οι ισοσταθμικές καμπύλες της ροϊκής συνάρτησης, όπως αυτή υπολογίστηκε για αριθμό  $Re$  ίσο με 50. Στο κοντινό πλάνο στην ίδια εικόνα φαίνεται η δημιουργία δύο περιοχών στροβιλισμού ακριβώς πίσω από τον κύλινδρο. Το ρευστό κινείται αντίρροπα / αντίθετα στις περιοχές αυτές με αποτέλεσμα οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις να αλληλοεξουδετερώνεται και να προκύπτει μηδενική η ανωστική δύναμη. Μια ενδιαφέρουσα ανάλυση του φαινομένου ειδικά στις περιοχές των χαμηλών αριθμών  $Re$  με παραμετρική συνοριακή συνθήκη για την ταχύτητα γίνεται από τον Kang στο <sup>[12]</sup>.



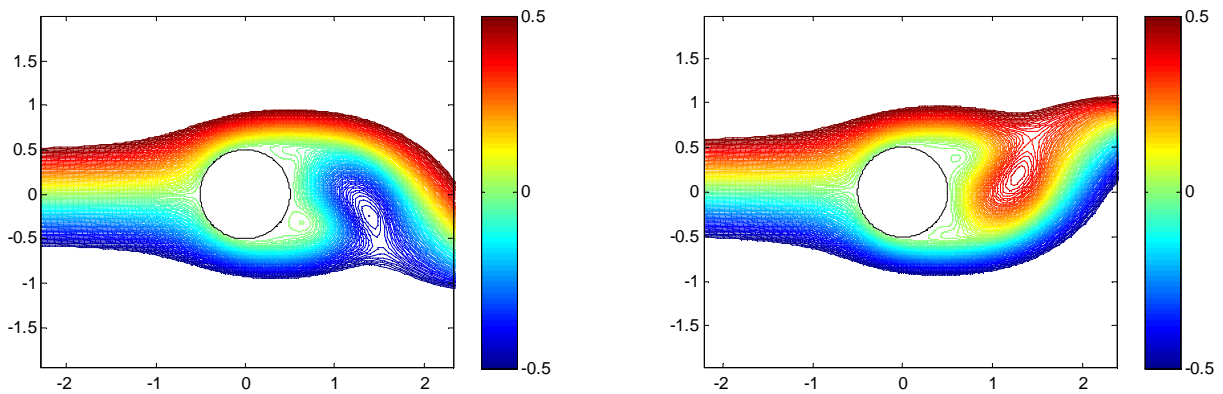
Εικόνα 3-3. Ροϊκές γραμμές για  $Re=40$

Αντίθετα για  $Re$  από περίπου 50 και άνω η ροή γίνεται μη μόνιμη και αρχίζουν οι εναλλασσόμενες αποκολλήσεις στον ομόρρου με αποτέλεσμα τη δημιουργία των στροβιλισμών. Το φαινόμενο μετά την έλευση εύλογου χρονικού διαστήματος από την εφαρμογή των ομοιόμορφων αρχικών συνθηκών γίνεται και περιοδικό. Στην Εικόνα 3-4 φαίνεται η μεταβολή των συντελεστών της ανωστικής και οπισθέλκουσας δύναμης από την αρχή της προσομοίωσης. Η περιοδική κατάσταση αποκαθίσταται σχετικά γρήγορα και το μέγιστο / ελάχιστο όριο της ανωστικής δύναμης σταθεροποιούνται μετά τη  $2500 \cdot dt$  χρονική στιγμή. Στην Εικόνα 3-5 φαίνονται οι ροϊκές γραμμές σε περιοχή πολύ κοντά στον κύλινδρο τις χρονικές στιγμές επικράτησης ελάχιστης και μέγιστης ανωστικής δυνάμεως αντίστοιχα. Σχεδιάστηκαν 100 τιμές ισοσταθμικών γραμμών στο διάστημα από -0.5 έως 0.5. Ορατά είναι και τα σημεία αποκόλλησης της ροής στο κάτω και πάνω μέρος του ομόρρου αντίστοιχα. Μια άποψη του ομόρρου από πιο μακριά δίνει η Εικόνα 3-6, στην οποία φαίνεται η κυματοειδής μορφή της ροής. Στις Εικόνες 3-7 και 3-8 φαίνεται η κατανομή της στροβιλότητας κοντά και μακριά από τον κύλινδρο αντίστοιχα, στις ίδιες χαρακτηριστικές χρονικές στιγμές. Σχεδιάστηκαν 200 ισαπέχουσες στάθμες της συναρτήσεως στο διάστημα από -20 έως 20. Επιβεβαιώνεται έτσι η περιοδική φύση του φαινομένου και ποιοτικά.

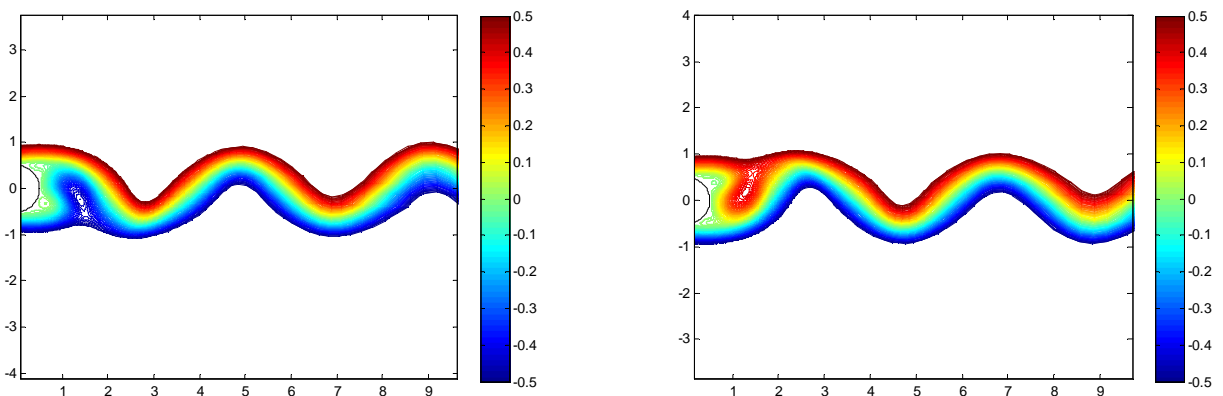




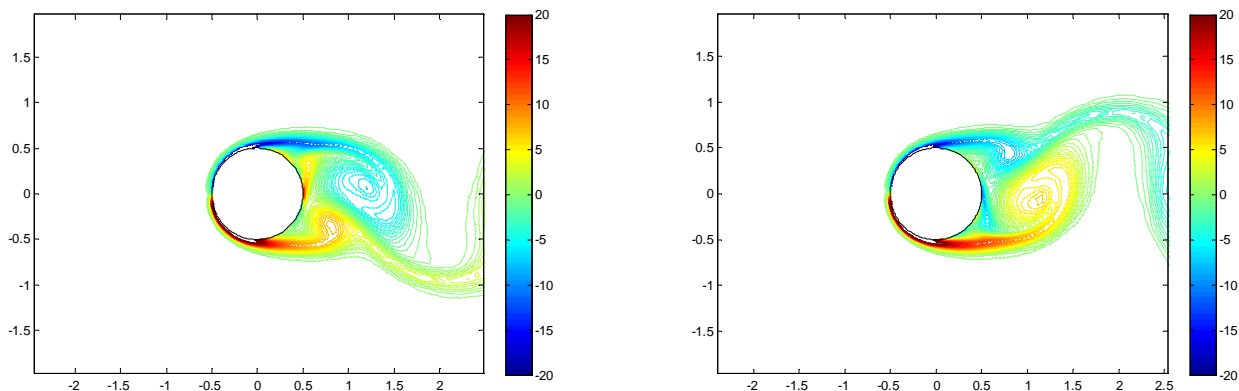
Εικόνα 3-4. Χρονοσειρά μεταβολής συντελεστών ανωστικής δύναμης και οπισθέκουσας



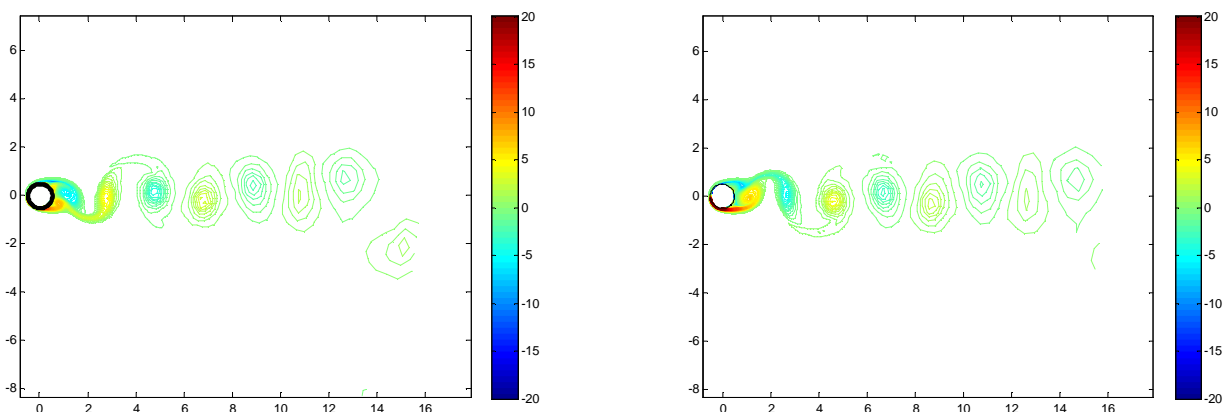
Εικόνα 3-5. Ροϊκές γραμμές τη στιγμή μέγιστης και ελάχιστης ανωστικής δύναμης (κοντά)



Εικόνα 3-6. Ροϊκές γραμμές τη στιγμή μέγιστης και ελάχιστης ανωστικής δύναμης (μακριά)



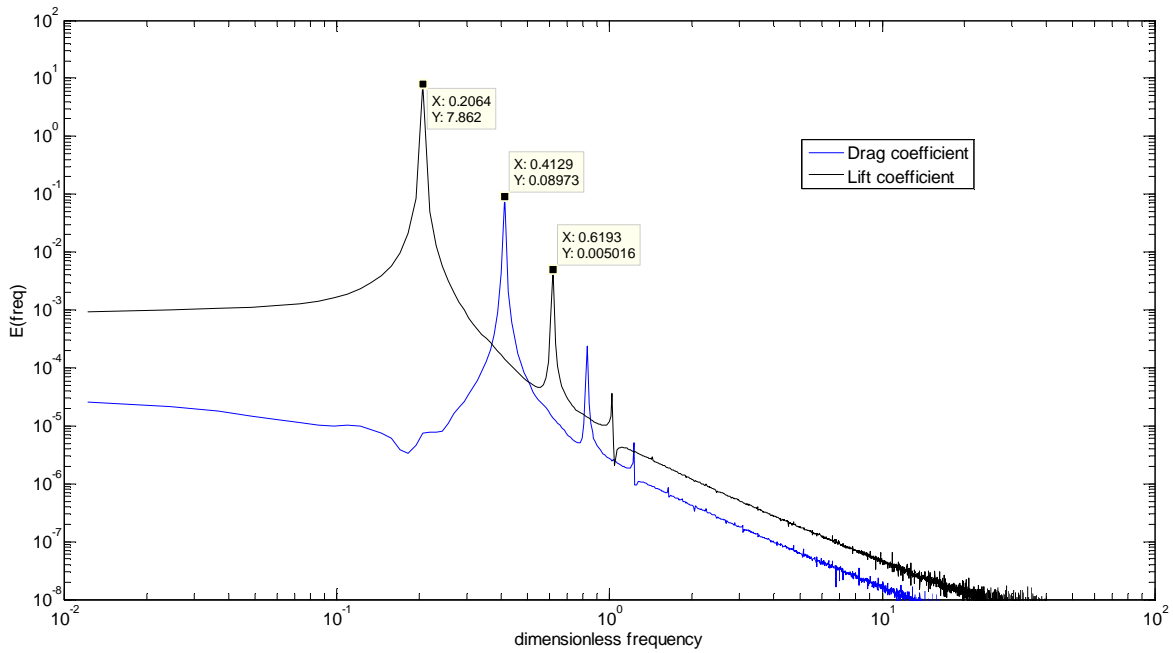
Εικόνα 3-7. Ισοσταθμικές της στροβιλότητας κοντά στον κύλινδρο



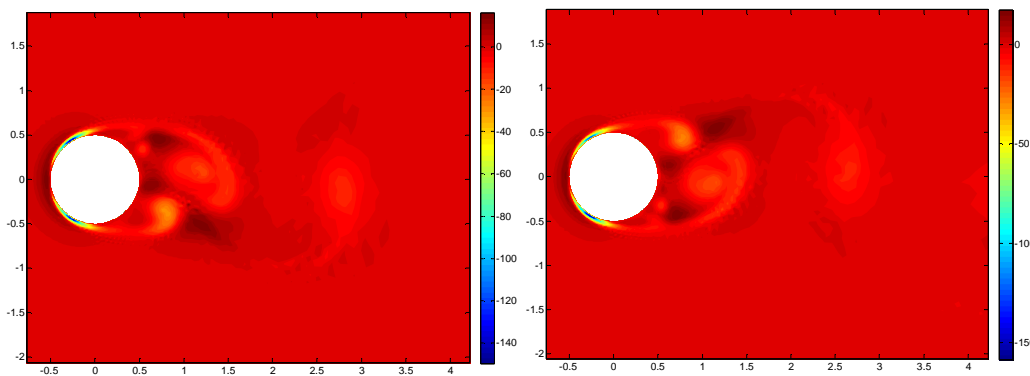
Εικόνα 3-8. Ισοσταθμικές του στροβιλότητας μακριά από τον κύλινδρο

Η ανάλυση Fourier στο σήμα της ανωστικής δύναμης αναδεικνύει τη βασική αδιάστατη συχνότητα του φαινομένου ίση με  $f_0 = 0.2064$ , γνωστή και ως συχνότητα Strouhal. Η τιμή αυτή είναι πολύ κοντά στην τιμή που αναφέρεται και στην σχετική αναφορά <sup>[19]</sup>. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-9 η συχνότητα του συντελεστή οπισθέλκουσας είναι σχεδόν διπλάσια από αυτή του συντελεστή ανωστικής δύναμης, γεγονός που οφείλεται στη συνεισφορά της επάνω και της κάτω επιφάνειας του κυλίνδρου στο έργο της αντίστασης. Αντίθετα και επειδή η ροή αποκολλάται, μόνο οι μισές πίσω επιφάνειες του κυλίνδρου συνεισφέρουν εναλλάξ στο έργο της ανωστικής δύναμης. Ομοίως οι χρονοσειρές της κατακόρυφης και οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας έχουν την ίδια συχνότητα με το συντελεστή άνωσης και οπισθέλκουσας αντίστοιχα. Η συχνότητα αποβολής στροβίλων είναι αυτή του συντελεστή ανωστικής δύναμης. Ορατή στην Εικόνα 3-9 είναι και μια περίπου τριπλάσια αρμονική ίση με  $f_1 = 0.6763$  και με πολύ μικρότερη ενέργεια. Το ίδιο και ισχύει και για το συντελεστή οπισθέλκουσας.

Όσο αφορά το ακουστικό κομμάτι του προβλήματος στην Εικόνα 3-10 φαίνεται το πεδίο των ακουστικών πηγών (διπλή απόκλιση των τάσεων Reynolds - οι ιξώδεις τάσεις έχουν αμεληθεί) και εν συνεχεία δίδονται οι χρονοσειρές της ακουστικής πίεσης όπως υπολογίστηκαν στα σημεία A, B και C για αριθμούς Mach 0.003 και 0.1, συνοδευόμενες από τις αντίστοιχες αναλύσεις Fourier. Η κατανομή των ακουστικών πηγών φαίνεται ότι παρουσιάζει σταθερή μέγιστη κατ' απόλυτο τιμή στις δύο εμπρός περιοχές του κυλίνδρου, ανεξάρτητα με το τί συμβαίνει στον ομόρρο.

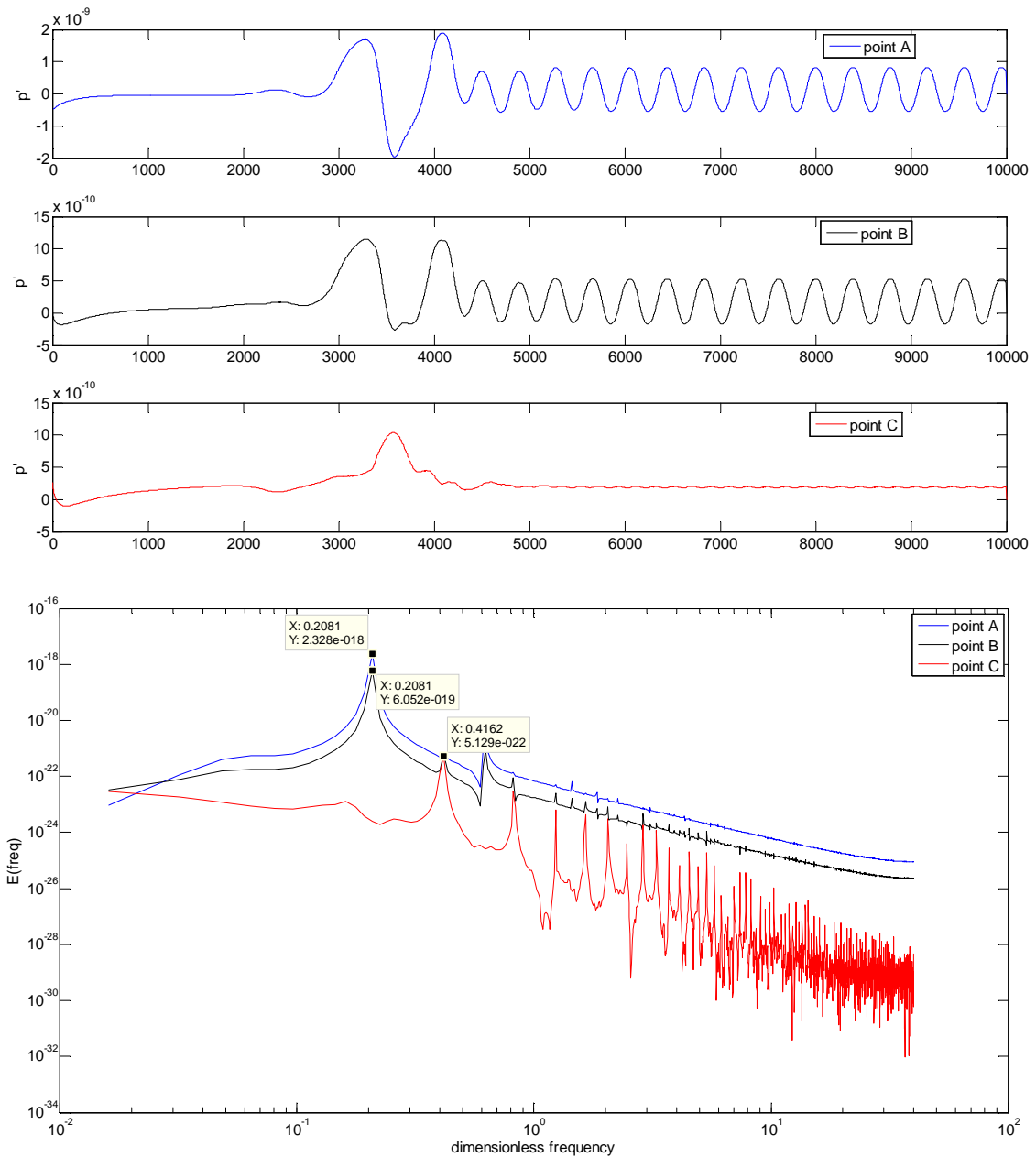


Εικόνα 3-9. Ανάλυση συχνότητας σημάτων συντ. ανωστικής δύναμης και οπισθέλκουσας

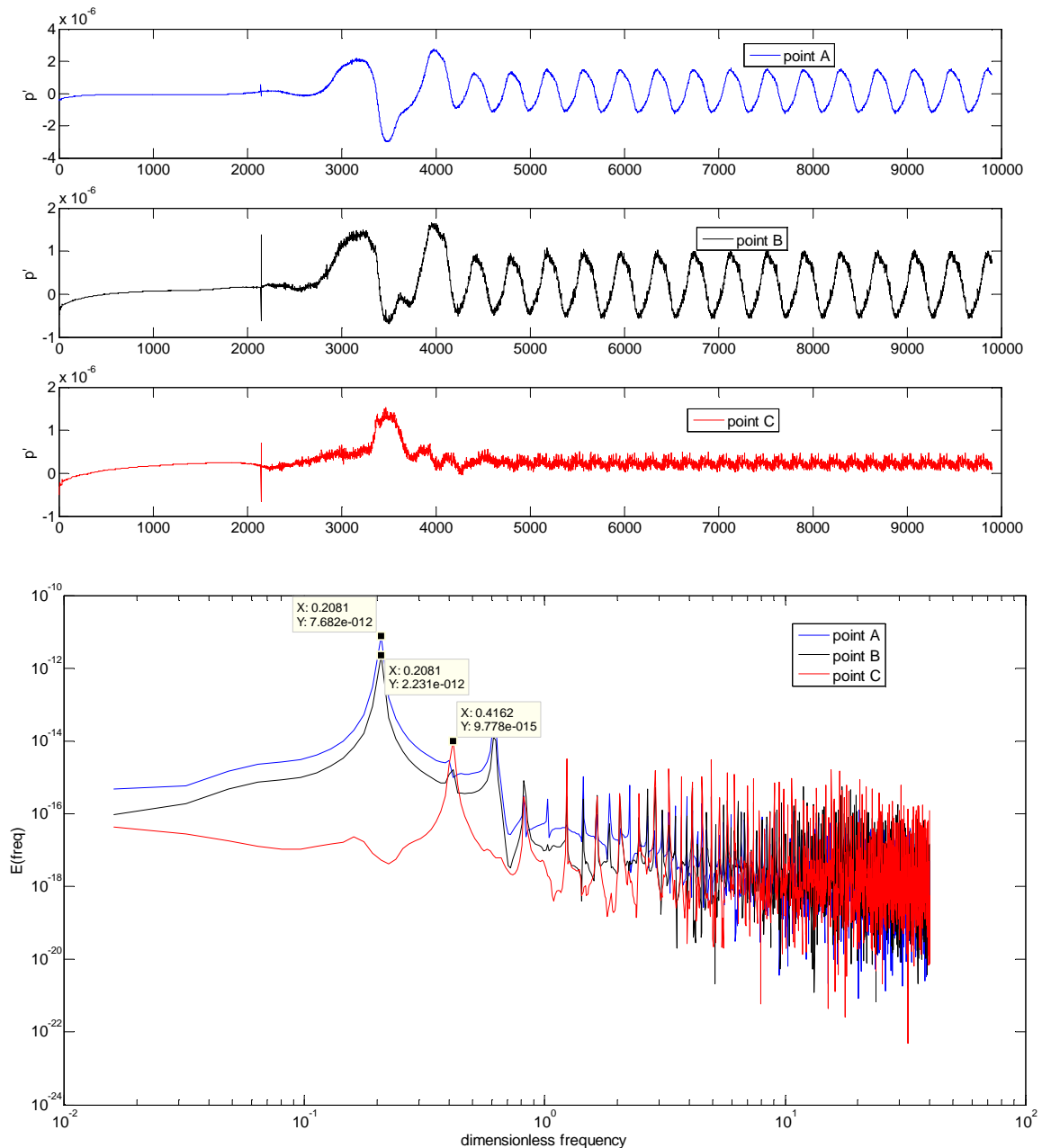


Εικόνα 3-10. Ακουστικές πηγές κοντά στον κύλινδρο (μέγιστη κ. ελάχιστη αν. δύναμη)

Στα σήματα των σημείων A και B κυριαρχεί η συχνότητα  $f_0$ , σε αντίθεση με το σημείο C όπου η κύρια συχνότητα είναι διπλάσια της  $f_0$ . Επίσης η ένταση της ακουστικής πίεσης είναι σαφώς μικρότερη στο σημείο C. Οι δύο τελευταίες παρατηρήσεις επιβεβαιώνουν το διπολικό χαρακτήρα των πηγών στο φαινόμενο. Τέλος παρατηρείται σημαντική ενίσχυση των υψηλών συχνοτήτων με την αύξηση του αριθμού Mach και αύξηση του θορύβου στις χρονοσειρές των σημάτων.



Εικόνα 3-11. Χρονοσειρές ακουστικής πίεσης και ανάλυση συχνότητας για  $M=0.003$



Εικόνα 3-12. Χρονοσειρές ακουστικής πίεσης και ανάλυση συχνότητας για  $M=0.1$

### 3.5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η μέθοδος ολοκλήρωσης με χρήση των συναρτήσεων Green είναι απλή, εύκολη στην υλοποίηση και προσφέρεται για τον υπολογισμό κυρίως χρονοσειρών σε συγκεκριμένα σημεία ακουστικών πεδίων. Ειδικά ο αλγόριθμος χρόνου εκπομπής είναι πιο γρήγορος από τον αλγόριθμο χρόνου δέκτη και προσφέρεται για χρήση σε προβλήματα όπου υπάρχουν χρονικά δεδομένα ροής από κάποιον ρευστοδυναμικό επιλύτη. Η χρήση του αλγορίθμου για τον υπολογισμό ολόκληρου του ακουστικού πεδίου σε δεδομένη χρονική στιγμή είναι μεν δυνατή, απαιτεί όμως και αυτή πολύ αρκετό υπολογιστικό χρόνο αν λάβει κανείς υπόψη τον περιορισμό που αναφέρθηκε στην §3.3.2, ότι δηλαδή οι χρονοσειρές δε γεμίζουν σειριακά. Πρόσθετο πλεονέκτημα έναντι αυστηρών

(rigorous) μεθόδων επίλυσης της κυματικής εξισώσεως είναι ότι δεν υπάρχει ο περιορισμός χρονικού / χωρικού βήματος που επιβάλλει η συνθήκη Courant–Friedrichs–Lewy (CFL condition), σύμφωνα με την οποία η εκλογή των τελευταίων πρέπει να γίνει έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ανισότητα (τουλάχιστο για τη μονοδιάστατη περίπτωση)

$$CFL = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \text{ Επιπλέον δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ κοντινού και μακρινού πεδίου (near / far}$$

field), αφού σε όλα τα σημεία θεωρείται ελεύθερη διάδοση των κυμάτων, ανεξάρτητα αν ή όχι τα σημεία είναι κοντά σε ακουστικές πηγές. Αντίθετα στις αυστηρές μεθοδολογίες επίλυσης πρέπει να κατασκευαστεί ακουστικό πλέγμα αρκούντως μεγάλο και μακριά από τις πηγές, ανάλογα πάντα με το μήκος κύματος που αναμένεται, ούτως ώστε να δουλέψουν σωστά οι απορροφητικές συνθήκες που προσομοιώνουν το μακρινό πεδίο. Έτσι για το πρόβλημα της §3.4 και για αριθμό  $M = 0.003$  η ακτινική απόσταση των σημείων των δεκτών είναι στο εγγύς πεδίο και πολύ κοντά στις πηγές, αφού το μήκος κύματος για  $c = 343 \text{ m/s}$  προκύπτει τεράστιο  $\lambda = 1633.33 \text{ m}$ . Μια αυστηρή μέθοδος θα απαιτούσε δημιουργία ενός τεράστιου ακουστικού πλέγματος ακτίνας τουλάχιστο πέντε / έξι μηκών κύματος, ούτως ώστε να λειτουργήσουν καλά οι συνθήκες ακτινοβολίας στα όρια.

Βέβαια οι ολοκληρωτικές μέθοδοι που βασίζονται στις συναρτήσεις Green έχουν και αυτές τα μειονεκτήματά τους, το βασικότερο των οποίων είναι η εφαρμογή σε πολύπλοκες γεωμετρίες. Η εύρεση της κατάλληλης συνάρτησης Green δεν είναι πάντα εύκολη υπόθεση για όλα τα υπολογιστικά χωρία, ούτε είναι εύκολη η εισαγωγή συνθηκών ανάκλασης από στερεές επιφάνειες, διότι έτσι καταστρατηγείται η παραδοχή της σφαιρικής διάδοσης, που αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την εφαρμογή της μεθόδου.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Brentner K.S., *Numerical algorithms for acoustic integrals with examples for rotor noise prediction*, AIAA Journal, Vol. 35, 4, (1997).
- [2] Brentner K.S., *Numerical algorithms for acoustic integrals: The devil is in the details*, 2nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, State College, PA (1996), AIAA Paper No. 96-1706.
- [3] Brentner K.S., *Prediction of Helicopter Rotor Discrete Frequency Noise*, NASA Technical Memorandum 87721, (1986).
- [4] Farassat F., *Linear Acoustic Formulas for Calculation of Rotating Blade Noise*, AIAA Journal, Vol. 19, No. 9, pp. 1122-1130, (1981).
- [5] Farassat F., *Theory of Noise Generation from Moving Bodies with Application to Helicopter Rotors*, NASA TR-451, (1975).
- [6] Ffowcs Williams J. E. and Hawkings D. L., *Sound Generated by Turbulence and Surfaces in Arbitrary Motion*, Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. A264, pp. 321-342, (1969).
- [7] Hofmans G.C.J., *Vortex Sound in confined flows*, PhD Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, (1998).
- [8] Howe M.S., *Mathematical Methods for Mechanical Sciences*, Boston University, College of Engineering, 6<sup>th</sup> edition, (2003).
- [9] Howe M.S., McGowan R.S., *Compact Green's functions extend the acoustic theory of speech production*, Journal of Phonetics, Vol. 35, pp. 259-270, (2007)
- [10] Howe M.S., McGowan R.S., *On the generalized Fant equation*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 330, pp. 3123-3140, (2011)
- [11] Howe M.S., McGowan R.S., *Sound generated by aerodynamic sources near a deformable body with application to voiced speech*, J. Fluid Mech., Vol. 592, pp. 367-392, (2007)
- [12] Kang S. , *Uniform-shear flow over a circular cylinder at low Reynolds numbers*, Journal of Fluids and Structures, Vol. 22, 4, pp. 541-555, (2006)
- [13] Margnat F., Fortuné V., *An iterative algorithm for computing aeroacoustic integrals with application to the analysis of free shear flow noise*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 128, 4, pp. 1656-1667, (2010).
- [14] Shen W.Z., Sørensen J. N., *Aeroacoustic Modelling of Low Speed Flows*, Theoret. Comput. Fluid Dynamics, Vol. 13, pp. 271-289, (1999).
- [15] Sheo J.H., Moon Y.J., *Perturbed Compressible Equations for Aeroacoustic Noise Prediction at Low Mach Numbers*, AIAA Journal, Vol. 13, 8, pp. 1716-1724, (2005).
- [16] Zhao W., Frankel S. H., Mongeau L., *Computational Aeroacoustics of Phonation, Part I: Computational Methods and Sound Generation Mechanisms*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 112, 5, pp. 2134-2146 (2002).
- [17] Zhao W., Frankel S. H., Mongeau L., *Numerical simulation of sounds from confined pulsating axisymmetric jets*, AIAA J. Vol. 39, pp. 1868-1874, (2001).
- [18] Παπαϊωάννου Α.Θ., *Μηχανική των Ρευστών*, Β' έκδοση, Εκδόσεις ΚΟΡΑΛΙ, (2002)

- [19] Πάππου Θ. Ι., *Ανάπτυξη αριθμητικής μεθοδολογίας τεχνητής συμπίεσότητας για τον υπολογισμό μη μόνιμων ροών με κινούμενα όρια*, Διδακτορική Διατριβή, Ε.Μ.Π., Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, (1998).



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΤΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ ΕΝΑΣ ΑΠΛΟΣ FORMANT ΣΥΝΘΕΤΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της ακουστικής μετάδοσης στην *αρμονική* του μορφή. Δηλαδή υποτίθεται ότι τα μεγέθη ακολουθούν κάποια χρονική μεταβολή των προτέρων γνωστή, οπότε η επίλυση του προβλήματος πια γίνεται στο πεδίο της συχνότητας (ή κυματικού αριθμού) και όχι στο πεδίο του χρόνου. Από αριθμητικής σκοπιάς το τελευταίο γεγονός είναι πολύ σημαντικό, αφού τα *υπερβολικά* χαρακτηριστικά των κυματικών εξισώσεων παύουν να υφίστανται και μεταπίπτουν σε *ελλειπτικά*. Οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης είναι πια μιγαδικοί αριθμοί και αντιπροσωπεύουν το μέτρο και τη φάση της ακουστικής πίεσης στο πεδίο για δεδομένη συχνότητα. Προφανώς για την κατασκευή της συχνοτικής απόκρισης ενός συστήματος απαιτείται η επίλυση του ίδιου προβλήματος για όλο το εύρος των υπό εξέταση συχνοτήτων. Το τελευταίο δεν δημιουργεί πρόβλημα υπολογιστικού φόρτου, αφού πια το πρόβλημα είναι ελλειπτικό και δεν υπάρχει η χρονική συνιστώσα. Στο παρόν κεφάλαιο επιχειρήθηκε η κατασκευή ενός διδιάστατου επιλύτη της εξίσωσης Helmholtz. Η διακριτοποίηση έγινε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και τα αριθμητικά πλέγματα κατασκευάστηκαν με τη μέθοδο του *προελαύνοντος μετώπου*. Στη συνέχεια επιχειρήθηκε εφαρμογή σε 4 διαφορετικές γεωμετρίες φωνητικού σωλήνα με την κάθε μια να αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο γνωστό φωνήεν. Η εξίσωση επιλύθηκε για συχνότητες μέχρι και 5kHz, επιχειρώντας την κατασκευή της συνάρτησης μεταφοράς των 4 γεωμετριών του φωνητικού σωλήνα. Τέλος έγινε μια προσπάθεια ανακατασκευής / σύνθεσης του ακουστικού σήματος στο πεδίο του χρόνου για τις παραπάνω περιπτώσεις χρησιμοποιώντας βασικές γνώσεις από την θεωρία επεξεργασίας σήματος και γραμμικών φίλτρων.

## 4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η λύση του αρμονικού προβλήματος αποτελεί μια εναλλακτική προσέγγιση στο πρόβλημα της μοντελοποίησης της ακουστικής διάδοσης στον ανθρώπινο φωνητικό σωλήνα. Μια ματιά στην βιβλιογραφία φανερώνει τις διαφορετικές τάσεις μοντελοποίησης που επικρατούσαν στο παρελθόν. Μοντέλα *γραμμών μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας* έχουν χρησιμοποιηθεί από το 1950<sup>[3]</sup>, ενώ στο περίφημο μοντέλο των Kelly–Lochbaum, χρησιμοποιούνται συντελεστές ανάκλασης για σωλήνα μεταβλητής διαμέτρου<sup>[12]</sup>, παρόμοιοι με αυτούς μοντέλων γεωφυσικής. Επίσης το μοντέλο του Webster για τη διάδοση ήχου στα πνευστά μουσικά όργανα είναι στενά συνδεδεμένο με το προηγούμενο. Όλα τα μοντέλα δίνουν αξιόπιστα αποτελέσματα προσομοίωσης και έχουν αρκετές εφαρμογές, όπως π.χ. στην κινητή τηλεφωνία. Πιο σύνθετες διδιάστατες και τριδιάστατες παραλλαγές του μοντέλου Kelly–Lochbaum αποτελούν τα μοντέλα *γραμμών μεταφοράς* που προτάθηκαν από τους El Masri et. al.<sup>[4]</sup> και Mullen et. al.<sup>[16]</sup>. Για περισσότερες λεπτομέρειες και πιο εμπειριστατωμένη ανασκόπηση και κριτική, βλ. [17].

Η κυματική εξίσωση σε μια ανατομικά ρεαλιστική γεωμετρία φωνητικού σωλήνα έχει προφανώς μεγαλύτερη φυσική υπόσταση από τις προηγούμενες προσεγγίσεις, αν και η επίλυσή της για πολύπλοκες γεωμετρίες δεν είναι ιδιαίτερα εύκολη. Στο [21] επιχειρείται η αναλυτική λύση για

μια απλοποιημένη γεωμετρία, ενώ στα [7] και [8] επιλύεται το αρμονικό πρόβλημα αριθμητικά χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η γεωμετρία αντιστοιχεί στο σουηδικό φωνήεν /ø:/ είναι τριδιάστατη και προέκυψε από επεξεργασία δεδομένων εικόνων μαγνητικού συντονισμού. Εξάγονται τα formants και μελετάται η επίδραση των συνοριακών συνθηκών. Ομοίως στο [9] επιλύεται η ίδια εξίσωση σε διάφορες πολύπλοκες γεωμετρίες και σαρώνονται συχνότητες μέχρι τα 8kHz. Η επίλυση γίνεται και στο χώρο έξω από το φωνητικό σωλήνα, ώστε να προσεγγισθούν σωστά τα φαινόμενα ακτινοβολίας από τα χείλη. Επιπρόσθετα τα τοιχώματα θεωρούνται μαλακά και όχι εντελώς στερεά με συγκεκριμένη οριακή συνθήκη σύνθετης ακουστική αντίστασης. Εξάγονται οι συναρτήσεις μεταφοράς για όλες τις γεωμετρίες και συγκρίνονται με τις αντίστοιχες του απλοποιημένου μονοδιάστατου μοντέλου με οριακή συνθήκη ακτινοβολίας τα χείλη. Αναδεικνύεται ότι τα μαλακά τοιχώματα παρουσιάζουν επιπρόσθετο μηδενικό στις υψηλές συχνότητες, το οποίο εξαφανίζεται με την κλασική οριακή συνθήκη στερεού τοιχώματος. Παρόλα αυτά για τους τρεις πρώτους συντονισμούς το απλοποιημένο μοντέλο φαίνεται να είναι πολύ καλή προσέγγιση, αν εξαιρέσει κανείς τις μικρές μετατοπίσεις (shifts) λόγω της συνθήκης ακτινοβολίας. Τέλος στο [1] μελετώνται τα αριθμητικά προβλήματα που προκύπτουν κατά τη λύση της κυματικής αρμονικής εξίσωσης σε υψηλούς κυματαριθμούς. Είναι χαρακτηριστικό ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα έχει χαρακτηριστεί ως *άλυτο* για όλες τις μοντέρνες αριθμητικές μεθοδολογίες. Οι συγγραφείς προτείνουν μια τοπική φασματική μέθοδο (Discrete Singular Convolution) η οποία και αποδεικνύουν ότι δεν αναδεικνύει το *φαινόμενο μόλυνσης* (pollution effect), σύμφωνα με το οποίο το αριθμητικό σφάλμα αυξάνεται απότομα με αύξηση του κυματικού αριθμού και ταυτόχρονη μείωση του χωρικού βήματος. Η μέθοδος ωστόσο προτείνεται και δοκιμάζεται σε προβλήματα μιας μόνο χωρικής διαστάσεως.

## 4.2 ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

### 4.2.1 Διέπουσες Εξισώσεις

Ξεκινώντας από την ομογενή κυματική εξίσωση για την ακουστική πίεση:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = 0 \quad (4.1)$$

και θεωρώντας αρμονική μεταβολή των μεγεθών της τελευταίας:

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}) \cdot e^{-i\omega t} \quad (4.2)$$

μετά από αντικατάσταση λαμβάνουμε:

$$-\omega^2 p(\mathbf{x}) - c^2 \nabla^2 p(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.3)$$

ή:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} p(\mathbf{x}) - \nabla^2 p(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.4)$$

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) = 0$$

όπου  $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$  είναι ο κυματικός αριθμός συσχετιζόμενος άμεσα με τη συχνότητα, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης αυτού. Η εξίσωση (4.4) είναι η εξίσωση Helmholtz και επιτρέπει την πρόβλεψη της κατανομής της ακουστικής πίεσης στο χωρικό πεδίο ενδιαφέροντος για συγκεκριμένο κυματικό αριθμό. Επιλύοντας για διάφορους κυματικούς αριθμούς μπορεί κανείς να κατασκευάσει τη *συχνοτική απόκριση* του υπό εξέταση συστήματος χωρίς να χρειάζεται να κάνει χρονομεταβλητές προσομοιώσεις επιλύοντας την (4.1). Για να συνυπολογισθούν τυχόν πηγές στο δεξί μέλος της (4.1), δηλ. για το μη ομογενές πρόβλημα, αυτές πρέπει πρώτα να μετασχηματισθούν στο χώρο της συχνότητας. Η (4.4) σε μερική διαφορική εξίσωση έχει *ελλειπτικά* χαρακτηριστικά σε αντίθεση με την (4.1) που έχει *υπερβολικά*. Αυτό σημαίνει ότι οι διαταραχές γίνονται αμέσως αντιληπτές σε όλα τα σημεία του χώρου, σε αντίθεση με την (4.1) όπου οι διαταραχές ταξιδεύουν μόνο στις χαρακτηριστικές καμπύλες αυτής με την πεπερασμένη ταχύτητα  $c$ .

#### 4.2.2 Συνοριακές Συνθήκες

Στα σταθερά / ακίνητα τοιχώματα μηδενίζεται η κάθετη παράγωγος της πίεσης:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \partial_{\mathbf{n}} p = 0 \quad (4.5)$$

Η κλασική *συνθήκη ακτινοβολίας* (radiation condition) από την χρονομεταβαλλόμενη κυματική εξίσωση μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \partial_t p \pm c \partial_{\mathbf{n}} p &= 0 \rightarrow \\ ikp \pm \partial_{\mathbf{n}} p &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Η (4.6) είναι γνωστή και ως συνθήκη Sommerfeld. Στην περιοχή της γλωττίδας (είσοδος σωλήνα) σταθερή κλίση στην πίεση:

$$\partial_{\mathbf{n}} p = a_{\mathbf{n}} \quad (4.7)$$

#### 4.2.3 Ασθενής Διατύπωση

Η ασθενής μορφή του προβλήματος συνοριακών τιμών (4.4)-(4.7) λαμβάνεται εφαρμόζοντας τη μέθοδο των *σταθμισμένων υπολοίπων*. Πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλη χωρική συνάρτηση και ολοκληρώνοντας στο χωρίο επίλυσης  $\Omega \in R^2$  λαμβάνεται η παρακάτω μορφή, όπου ο διαφορικός τελεστής Laplace είναι γραμμένος με χρήση δεικτών:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} \cdot w \cdot d\Omega + \int_{\Omega} k^2 p(\mathbf{x}) \cdot w \cdot d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green, ή το θεώρημα απόκλισης Gauss σε δύο διαστάσεις υποβιβάζεται η τάξη της (4.8) και το ολοκλήρωμα επιφανείας μετατρέπεται σε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο σύνορο της τελευταίας  $\Gamma = \partial\Omega$ :

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_{\Omega}} w \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Omega} k^2 p(\mathbf{x}) \cdot w \cdot d\Omega = 0 \quad (4.9)$$

Έτσι το πρόβλημα επαναδιατυπώνεται ως εξής: Βρείτε την  $p(\mathbf{x})$ , έτσι ώστε για οποιαδήποτε τυχαία συνάρτηση  $w$ , να ικανοποιείται η (4.9).

#### 4.2.4 Χωρική Διακριτοποίηση

Εν συνεχεία χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Galerkin η διακριτή μορφή του προβλήματος λαμβάνεται από την (4.9), αφού ο χώρος επίλυσης  $\Omega$  χωρισθεί σε διακριτά πεπερασμένα στοιχεία (finite elements). Η άγνωστη ακουστική πίεση  $p(\mathbf{x})$  και η τυχαία συνάρτηση  $w$  προσεγγίζονται ως:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x}) \cdot p_i$$

$$w = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x}) \quad (4.10)$$

όπου  $N_i(\mathbf{x})$  κατάλληλες συναρτήσεις παρεμβολής,  $N$  το πλήθος των στοιχείων διακριτοποίησης και  $p_i$  η (μέση) τιμή της ακουστικής πίεσης στο κάθε στοιχείο. Σημειώνεται εδώ ότι στη μέθοδο Galerkin χρησιμοποιούνται οι ίδιες συναρτήσεις παρεμβολής για την άγνωστη μεταβλητή και για την τυχαία συνάρτηση, πράγμα που δεν είναι απαραίτητο στη γενική περίπτωση των μεθόδων μεταβολικού λογισμού (variational methods), ειδική περίπτωση των οποίων είναι και η μέθοδος Galerkin. Αντικαθιστώντας τις (4.10) στην ασθενή διατύπωση λαμβάνεται τελικά το παρακάτω σύστημα εξισώσεων σε μητρική μορφή:

$$\mathbf{K}\bar{p} = \bar{f} \quad (4.11)$$

Τα στοιχεία του μητρώου  $\mathbf{K}$  που καλείται και *μητρώο ακαμψίας* (stiffness matrix) κατ' αναλογία με το γραμμικό νόμο ελατηρίου του Hooke και του ανύσματος  $\bar{f}$  είναι:

$$\mathbf{K} = K_{ij} = -\int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} k^2 N_i N_j d\Omega$$

$$\bar{f} = f_i = \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial p}{\partial n_i} d\Gamma \quad (4.12)$$

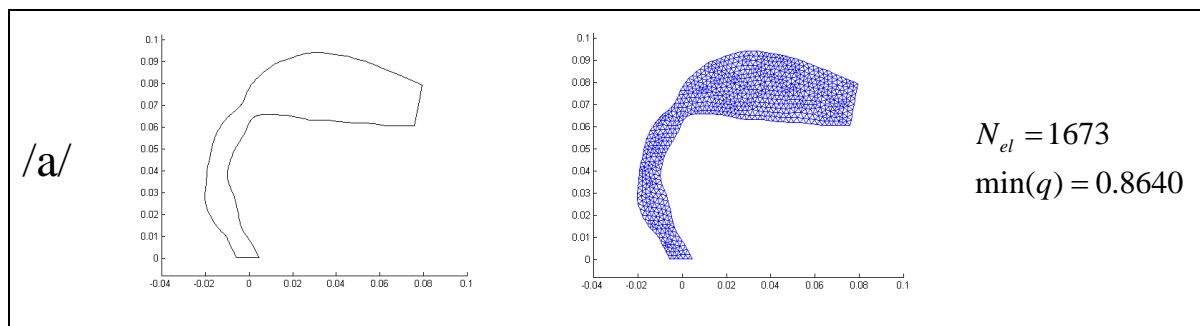
Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται αριθμητικά με τον κανόνα ολοκλήρωσης Gauss. Η επίλυση του αλγεβρικού συστήματος των εξισώσεων (4.11) δίνει τις τιμές της ακουστικής πίεσης μέσα στα διακριτά στοιχεία, η ένωση των οποίων δίνει το χωρίο  $\Omega$  στο οποίο λύνεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών (4.4)-(4.7). Το πλήθος των στοιχείων διακριτοποίησης μαζί με το είδος των συναρτήσεων  $N_i$  επηρεάζουν άμεσα την ακρίβεια της προσέγγισης της λύσης. Το μητρώο ακαμψίας  $\mathbf{K}$  έχει αραιή μορφή, πράγμα που καθορίζει και τον τρόπο αποθήκευσής του σε δομή δεδομένων ηλεκτρονικού υπολογιστή. Το αλγεβρικό σύστημα (4.11) μπορεί να λυθεί με άμεσες μεθόδους (απαλοιφή Gauss Jordan και παραλλαγές για αραιά συστήματα, π.χ. frontal solver) ή με έμμεσες επαναληπτικές (Jacobi, Gauss Seidel factorization κ.λπ.). Στη συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε ο αλγεβρικός επιλύτης του MATLAB mldivide, ο οποίος για την περίπτωση τετραγωνικών πινάκων χρησιμοποιεί τελικά απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση.

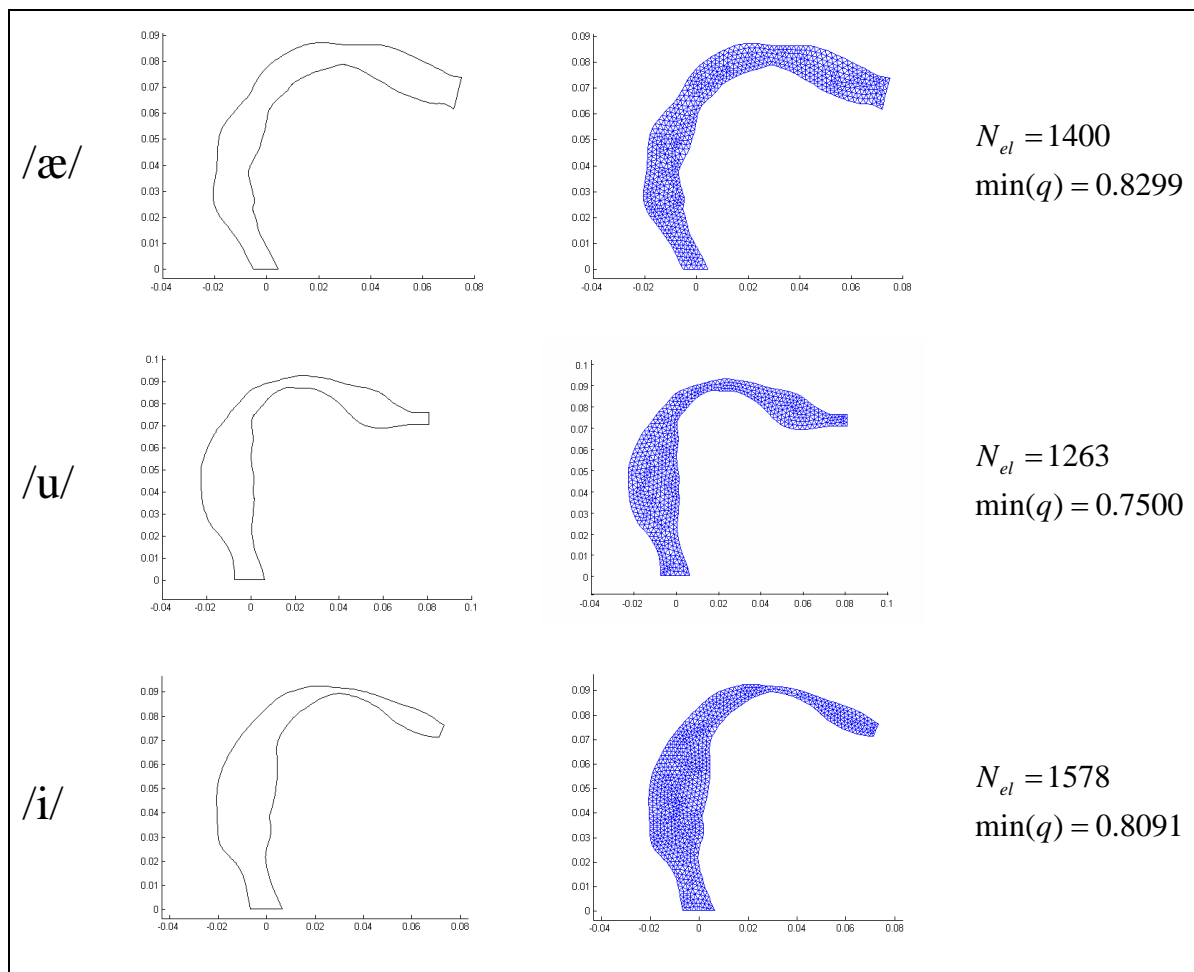
#### 4.2.5 Αριθμητική Εφαρμογή στον Φωνητικό Σωλήνα

Χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα αριθμητική μεθοδολογία επιχειρήθηκε η κατασκευή της συνάρτησης μεταφοράς (φίλτρου) του ανθρώπινου φωνητικού σωλήνα για την περίπτωση συγκεκριμένων γεωμετριών που αντιστοιχούν στα φωνήματα /u/, /a/, /æ/, /i/ άρρενος ομιλητή. Η γεωμετρίες κατασκευάστηκαν με δεδομένα που δίνουν οι Story et al [22]-[23], ενώ η διακριτοποίηση έγινε με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου (advancing front method - AFM<sup>[18]</sup>) χρησιμοποιώντας τριγωνικά στοιχεία. Η μέθοδος ξεκινά με το διακριτοποιημένο όριο ενός διδιάστατου χωρίου και εφαρμόζει ευρηστικές τεχνικές για να καθοριστεί το πού θα τοποθετηθούν στο επίπεδο κομβικά σημεία, τα οποία συνδεόμενα κατάλληλα μεταξύ τους μπορούν να δώσουν ομαλά πλέγματα. Σημαντικό πλεονέκτημα της AMF είναι ότι μπορεί να συμμορφωθεί με απαιτήσεις τύκνωσης του χρήστη σε συγκεκριμένες διευθύνσεις ή σημεία, σε αντίθεση με την κλασσική Delaunay τριγωνοποίηση, η οποία συναντά ιδιαίτερες δυσκολίες στις περιπτώσεις αυτές. Το μέγιστο επιτρεπτό μήκος στοιχείου τέθηκε ίσο με 0.002m, ενώ η πυκνότητα των πλεγμάτων διατηρήθηκε ομοιόμορφη θέτοντας πολύ μικρό ρυθμό τύκνωσης στις στενές και καμπύλες περιοχές των γεωμετριών. Σα μετρική της ποιότητας πλέγματος

χρησιμοποιήθηκε η  $q = \frac{4\sqrt{3}A}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$ , όπου  $A$  η επιφάνεια του στοιχείου και  $h_i, i=1,2,3$  το

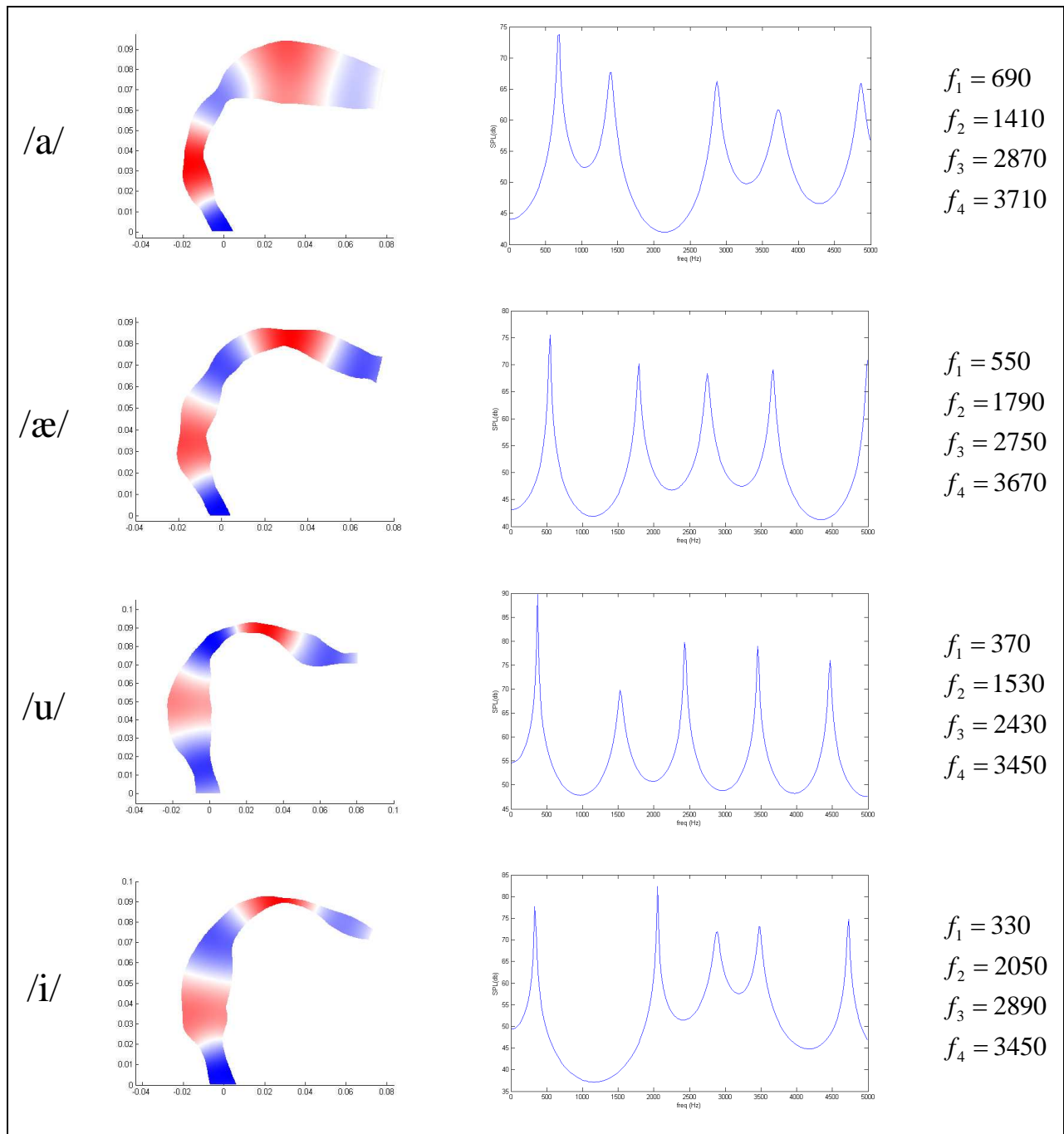
μήκος των ακμών του. Η μετρική είναι τύπου λόγου επιμήκους (aspect ratio), έτσι στοιχεία με μεγάλη δυσαναλογία μήκους στις ακμές βαθμολογούνται χαμηλά, ενώ στοιχεία με μορφή όσο το δυνατόν κοντά στο ισόπλευρο τρίγωνο βαθμολογούνται με μονάδα. Τιμές μετρικών πάνω από 0.3 είναι γενικά αποδεκτές, με την έννοια ότι η αριθμητική λύση που λαμβάνεται θεωρείται ανεξάρτητη από την ποιότητα του πλέγματος. Εικόνες από τις γεωμετρίες, τις διακριτοποιήσεις των χωρίων, αλλά και στοιχεία ποιότητας των πλεγμάτων παρατίθενται στην Εικόνα 4-1. Οι συναρτήσεις βάσης που χρησιμοποιήθηκαν ήταν δευτέρου βαθμού, ενώ η βελτίωση στην ακρίβεια από πειράματα που έγιναν με γραμμικές πρώτης τάξης ήταν μικρή. Για την κατασκευή της συναρτήσεως μεταφοράς του σωλήνα και την εύρεση των συντονισμών (formants), σαρώθηκαν συχνότητες μέχρι τα 5kHz. Η πυκνότητα του αέρα και η ταχύτητα μετάδοσης του ήχου σε αυτόν ήταν  $\rho = 1.25 \text{ kg/m}^3$  και  $c_s = 343 \text{ m/sec}$  αντίστοιχα.





Εικόνα 4-1. Φώνημα – Γεωμετρία – Διακριτοποίηση – Μετρική ποιότητας

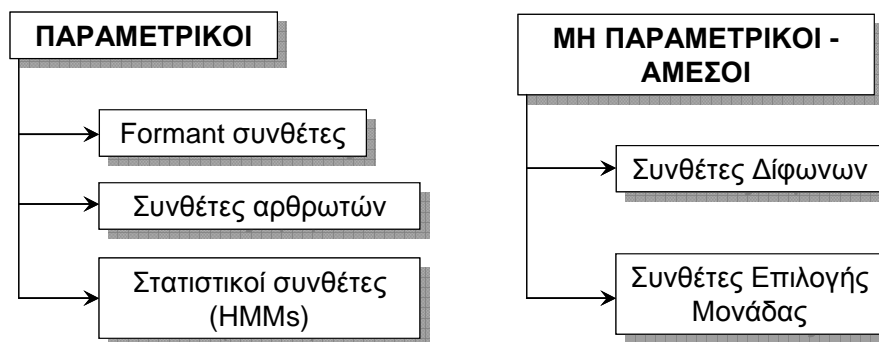
Η μέθοδος για τις πυκνότητες πλέγματος που αναφέρθηκαν είχε γενικά αποδεκτό υπολογιστικό χρόνο σε κεντρική μονάδα τύπου Core 2 Duo/1.87MHz. Στην Εικόνα 4-2 φαίνονται οι κατανομές ακουστικής πίεσης (για συχνότητα 4990Hz), οι καμπύλες της στάθμης ακουστικής πίεσης σε συνάρτηση με τη συχνότητα και οι συχνότητες συντονισμού ανά φώνημα. Η σωστή λειτουργία των συνοριακών συνθηκών είναι προφανής. Μπορεί κανείς να παρατηρήσει την παρουσία μιας *ισχυρής κοιλάδας* (λόγω της μεγάλης απόστασης των γειτονικών formants) στις περιπτώσεις των /a/, /æ/, το οποίο αλλάζει θέση ανάμεσα από το δεύτερο και τρίτο formant στην περίπτωση του /a/, στο πρώτο και δεύτερο στην περίπτωση του /æ/, ενώ η δεύτερη ισχυρή κοιλάδα στην περίπτωση του /æ/ ελαττώνεται σημαντικά στην περίπτωση του /a/. Η συνάρτηση μεταφοράς για την περίπτωση του /i/ έχει μεγάλη απόσταση ανάμεσα στους δύο πρώτους συντονισμούς και ο δεύτερος συντονισμός είναι ισχυρότερος από τον πρώτο, ενώ η συνάρτηση μεταφοράς για το /u/ φαίνεται να καθορίζεται από τον πρώτο συντονισμό με τους υπόλοιπους συντονισμούς σε σχετικά ίση απόσταση μεταξύ τους, προσεγγίζοντας πολύ τη συμπεριφορά του *ουδέτερου φωνήεντος*. Επίσης στην περίπτωση του /i/ παρατηρείται το φαινόμενο αύξησης του πλάτους (μικρή κοιλάδα) λόγω της γεινίασης του τρίτου και τέταρτου συντονισμού.



Εικόνα 4-2. Φώνημα – Κατανομή ακουστικής πίεσης (στα 4990Hz) – Εκτίμηση συνάρτησης μεταφοράς – Συντονισμοί.

### 4.3 ΑΝΑΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΦΩΝΗΣ

Ο υπολογισμός των συντονισμών στις προηγούμενες γεωμετρίες φωνητικού σωλήνα επιτρέπει δυνητικά την κατασκευή του αντίστοιχου σήματος στο πεδίο του χρόνου. Η διαδικασία υπολογισμού ονομάζεται *σύνθεση* και αν συνδυαστεί με συνεχή μεταβολή των συντονισμών, όπως συμβαίνει στην πραγματική ομιλία, τότε το τελικό σήμα θα είναι σε θέση να μιμηθεί την πραγματική ανθρώπινη φωνή. Η διαδικασία υπολογισμού από τους συντονισμούς ονομάζεται *formant synthesis* και αποτελεί μια υποπερίπτωση μιας από τις δύο βασικές οικογένειες προσεγγίσεων που υπάρχουν σήμερα στο πρόβλημα αυτό.



Εικόνα 4-3. Κατηγοριοποίηση συνθετών ανθρώπινης φωνής

Στην Εικόνα 4-3 φαίνεται μια κατηγοριοποίηση των προσεγγίσεων αυτών. Στις *παραμετρικές μεθόδους* ανήκουν εκτός από τη formant προσέγγιση, η *στατιστική παραμετρική σύνθεση* που χρησιμοποιεί κρυμμένα Markov μοντέλα για την μοντελοποίηση των χαρακτηριστικών του φάσματος της φωνής και η σύνθεση με χρήση *αρθρωτών*, στην οποία χρησιμοποιούνται μηχανικά ή ηλεκτρικά ανάλογα για την μοντελοποίηση όσο το δυνατό περισσότερων αρθρωτικών φαινομένων που συμβαίνουν στο φωνητικό σωλήνα, όπως για παράδειγμα η κίνηση και η διαμόρφωση του σχήματος της γλώσσας και της κάτω γνάθου, η συνεισφορά των δοντιών, ακόμα και η κίνηση της γλωττίδας (που δεν είναι αρθρωτής) και η διαμόρφωση της ροής μέσα από αυτή. Αντίθετα η ιδέα στις *μη παραμετρικές μεθόδους* ή μεθόδους *απευθείας σύνθεσης* (Direct Synthesis) είναι ότι η κυματομορφή του φωνητικού σήματος αποτελείται από πολύ μικρά κομμάτια, τα οποία αν συνδεθούν κατάλληλα μεταξύ τους μπορούν να παράξουν συνθετικό σήμα πολύ κοντά στο ανθρώπινο. Για να αντιμετωπιστούν σωστά προβλήματα άρθρωσης και προσωδίας τα κομμάτια αυτά επιλέγονται έτσι ώστε να περιγράφουν ένα σύνολο μεταβάσεων από το ένα φώνημα στο άλλο ανάλογα με το περιβάλλον ομιλίας (π.χ. *diphones*). Προφανώς απαιτείται αρκετή εργασία για την προετοιμασία μιας πλήρους βάσης δεδομένων με τέτοια προηχογραφημένα *δίφωνα*, αλλά η υπολογιστική ισχύς που απαιτείται για την μετέπειτα συρραφή τους σε αλληλουχία που να πλησιάζει το πραγματικό σήμα φωνής είναι πάρα πολύ μικρή. Η συρραφή των δίφωνων γίνεται χρησιμοποιώντας μεθόδους επεξεργασίας σήματος όπως Linear Predictive Coding (LCP) και Pitch Synchronous Overlap Method (PSOLA), ενώ η ποιότητα του παραγόμενου σήματος είναι μεν αποδεκτή, απέχει όμως από αυτή μιας άλλης κατηγορίας *συνθετών αλληλουχίας* (concatenative synthesizers), που ονομάζονται *Συνθέτες Επιλογής Μονάδας* (Unit Selection). Στους τελευταίους δεν αποθηκεύονται μόνο δίφωνα, αλλά ολόκληρες ακολουθίες σημάτων φωνής όπως συλλαβές, λέξεις, φράσεις και ολόκληρες προτάσεις. Η κατάτμηση σε στοιχειώδεις μονάδες σήματος (*phonemes*) γίνεται με τη χρήση μεθόδων και αλγορίθμων αναγνώρισης φωνής, ενώ απαιτείται και χειρονακτική επέμβαση για τη βέλτιστη και ακριβή δημιουργία της τελικής βάσης, στην οποία αποθηκεύονται και συνοδευτικές πληροφορίες, όπως η θεμελιώδης συχνότητα (pitch), η διάρκεια, η θέση μέσα στη φωνητική ακολουθία και τα γειτονικά φωνήματα. Η σύνθεση της βέλτιστης τελικής ακολουθίας από ένα σύνολο των υποψήφιων μονάδων (units) γίνεται με τη βοήθεια αλγορίθμων αριστοποίησης (unit selection) που λαμβάνουν υπόψη τους ένα σύνολο επιθυμητών παραμέτρων στο τελικό σήμα. Συνήθως χρησιμοποιείται ένα κατάλληλα σταθμισμένο δέντρο αποφάσεων. Η ποιότητα του τελικού σήματος είναι σαφώς ανώτερη και έχει μεγαλύτερη φυσικότητα, εξαρτάται όμως σε μεγάλο βαθμό από το μέγεθος και την ποιότητα της χρησιμοποιούμενης βάσης δεδομένων σε αντίθεση με τους συνθέτων δίφωνων, όπου ο αριθμός των τελευταίων είναι περίπου δεδομένος



για κάθε γλώσσα. Γίνονται έτσι προσπάθειες στόχευσης του περιβάλλοντος της γλώσσας, στο οποίο θα χρησιμοποιηθεί το κάθε σύστημα, με αποτέλεσμα τη μείωση του μεγέθους της βάσης αλλά και την αύξηση της ποιότητας της τελικής συνθετικής φωνής.

#### 4.3.1 Σύνθεση από formants

Ιστορικά οι formant συνθέτες ήταν οι πρώτες απόπειρες που έγιναν στην κατεύθυνση της συνθετικής φωνής. Στηρίζονται στη θεωρία του μοντέλου πηγής – φίλτρου, σύμφωνα με την οποία ο φωνητικός σωλήνας μπορεί να προσεγγισθεί από ένα γραμμικό φίλτρο, οι παράμετροι του οποίου μεταβάλλονται στο χρόνο. Το φίλτρο διεγείρεται από μια πηγή, η οποία μπορεί να είναι είτε κάποια ειδική προσομοίωση της ταλάντωσης των φωνητικών χορδών για εύφωνους ήχους, ή απλά θόρυβος οποίος θα αναπαριστά κάποια στένωση οπουδήποτε μέσα στο φωνητικό σωλήνα. Το σήμα ήχου που δημιουργείται μέσα στο σωλήνα, εν συνεχεία, ακτινοβολείται στο περιβάλλον από τα χείλη. Η θεωρία δεν προβλέπει καμιά αλληλεπίδραση μεταξύ πηγής και φίλτρου, πέρα από το γεγονός ότι το φίλτρο επιβάλλει τους συντονισμούς του στην πηγή, οπότε η λειτουργία των φωνητικών χορδών δεν επηρεάζεται καθόλου από το φωνητικό σωλήνα, πράγμα που δεν ισχύει στην πραγματικότητα, όπως θα φανεί και στη συζήτηση του Κεφαλαίου 6. Η μη αλληλεπίδραση της πηγής επιτρέπει την κατασκευή ξεχωριστών παραμετρικών μοντέλων που περιγράφουν τα ακουστικά χαρακτηριστικά, για την ίδια και για το φωνητικό σωλήνα. Τέλος ο φωνητικός σωλήνας προσομοιώνεται σαν ευθύγραμμος σωλήνας με μεταβλητή εγκάρσια διάμετρο αποτελούμενος από το φάρυγγα, τη στοματική κοιλότητα, τις ρινικές κοιλότητες και τα χείλη. Τα φαινόμενα συντονισμού σε κάθε κομμάτι του σωλήνα προσομοιώνονται από ένα γραμμικό φίλτρο.

Για τη μοντελοποίηση της πηγής χρησιμοποιήθηκε το παραμετρικό γλωττιδικό μοντέλο LF, περισσότερες πληροφορίες για το οποίο αλλά και για τα φαινόμενα που επικρατούν κοντά στη γλωττίδα μπορούν να βρεθούν στο Κεφάλαιο 6.

Καθώς το ακουστικό κύμα μεταφέρεται στον φωνητικό σωλήνα με ανάλογα πάντα με τη θέση των διαφόρων οργάνων που συναντά, κάποιες από τις συχνότητές τους ενισχύονται και κάποιες αποσβέννουνται. Οι συχνότητες που ενισχύονται ονομάζονται ως γνωστό *formants*. Γίνεται παραδεκτό ότι οι συντονισμοί αυτοί μπορούν να προσεγγισθούν από ένα φίλτρο με μόνο πόλους (*all pole filter*), που σημαίνει ότι η συνάρτηση μεταφοράς του έχει ρίζες μόνο στον παρανομαστή. Οι πόλοι εμφανίζουν τις γνωστές κορυφές στο φάσμα που αναλύθηκαν για τις γεωμετρικές φωνητικού σωλήνα που εξετάστηκαν προηγουμένως. Στην περίπτωση σύζευξης με τις ρινικές κοιλότητες εμφανίζονται και κορυφές προς τα κάτω, οι οποίες αντιστοιχούν σε μηδενικά, δηλ. ρίζες του αριθμητή της αντίστοιχης συνάρτησης μεταφοράς και ονομάζονται *anti-formants*. Μηδενικά εμφανίζονται και στην περίπτωση πολύπλοκης άρθρωσης τυρβωδών, εκρηκτικών συμφώνων και ήχων παύσης.

Το κάθε formant μπορεί τελικά να προσεγγισθεί από ένα band pass φίλτρο, με παραμέτρους τη συχνότητα συντονισμού  $f_n$ ,  $n=1,2,3,4$  και το εύρος ζώνης  $\Delta f_n$ ,  $n=1,2,3,4$ . Αν ο αντίστοιχος πόλος παρασταθεί ως (πολική μορφή):

$$P_n = \exp(i2\pi f_n - i\pi\Delta f_n) \quad (4.13)$$

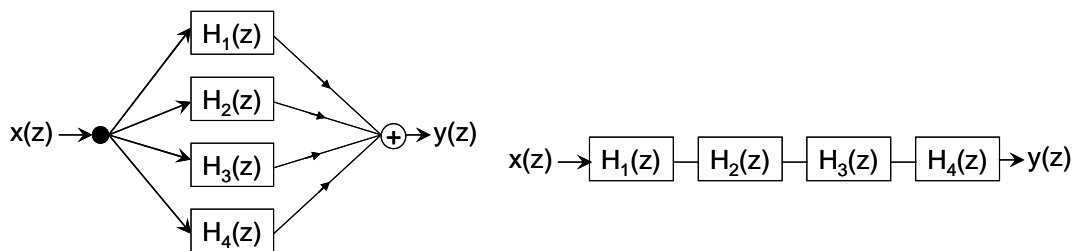
τότε για να είναι η τελική συνάρτηση μεταφοράς  $H(z) = B(z)/A(z)$  πραγματική (αφού το τελικό φίλτρο είναι πραγματικό) θα πρέπει μετά την ανάλυση της  $H(z)$  σε μερικά κλάσματα (partial fraction expansion) ο κάθε πόλος  $(r_n, p_n)$  να εμφανίζεται με το συζυγές του ζευγάρι  $(\bar{r}_n, \bar{p}_n)$  ως εξής:

$$H_n(z) = \frac{r_n}{1 - p_n z^{-1}} + \frac{\bar{r}_n}{1 - \bar{p}_n z^{-1}} \quad (4.14)$$

Εκτελώντας τις πράξεις στην (4.14):

$$\begin{aligned} H_n(z) &= \frac{r_n - r_n \bar{p}_n z^{-1} + \bar{r}_n - \bar{r}_n p_n z^{-1}}{(1 - p_n z^{-1})(1 - \bar{p}_n z^{-1})} \\ &= \frac{2 \operatorname{Re}(r_n) - 2 \operatorname{Re}(r_n \bar{p}_n) z^{-1}}{1 - 2 \operatorname{Re}(p_n) z^{-1} + |p_n|^2 z^{-2}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

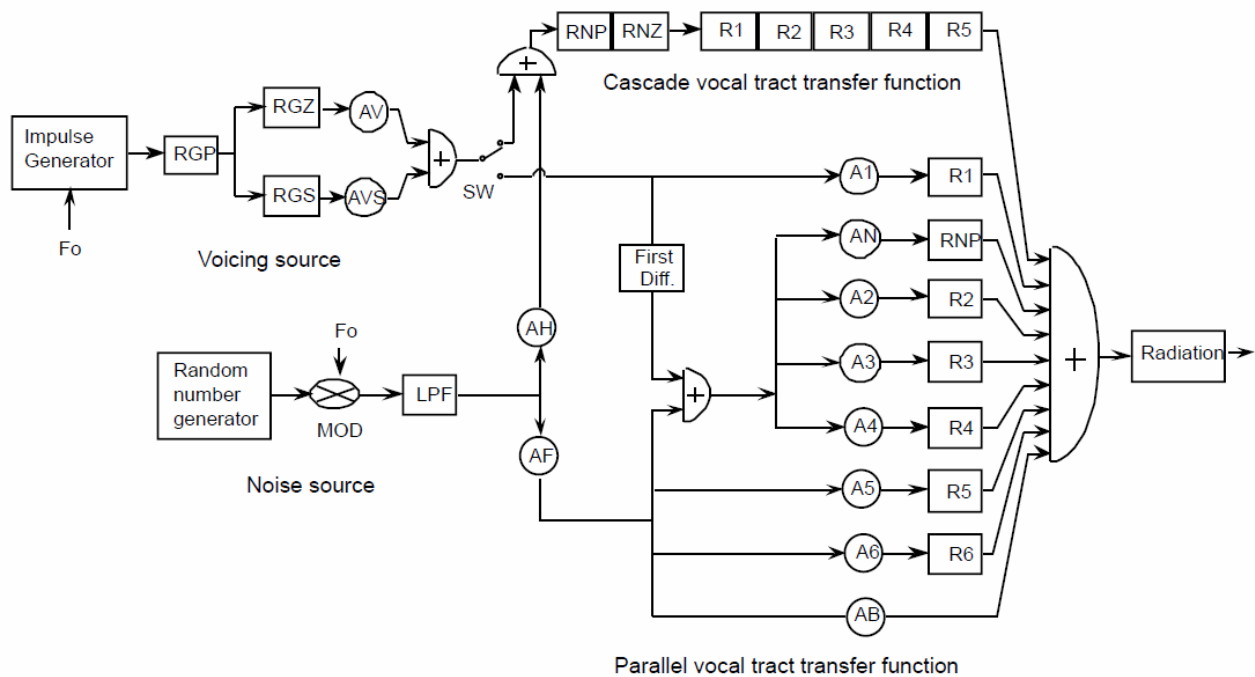
Η ολική συνάρτηση μεταφοράς για όλο το σωλήνα λαμβάνεται από το συνδυασμό των  $H_n(z)$  σε παράλληλη ή εν σειρά συνδεσμολογία. Η παράλληλη συνδεσμολογία επιτρέπει τον έλεγχο του πλάτους του κάθε συντονισμού ξεχωριστά και αθροίζει όλες τις εξόδους που διεγείρονται ταυτόχρονα από το σήμα πηγής. Παρότι η διάταξη αυτή δεν αποτελεί και πολύ καλή απομίμηση του φωνητικού σωλήνα, χρησιμοποιείται συνήθως για την παραγωγή συμφώνων<sup>[10]</sup>. Αντίθετα η σειριακή διάταξη τονίζεται ο τελευταίος συντονισμός (καθώς η συνολική συνάρτηση μεταφοράς είναι το γινόμενο των επιμέρους), πράγμα που αντιστοιχεί καλύτερα στον τρόπο κατανομής της ακουστικής ενέργειας των formants και πλησιάζει περισσότερο τον πραγματικό φυσικό μηχανισμό που πραγματοποιούνται οι συντονισμοί μέσα στον φωνητικό σωλήνα. Έτσι οι σειριακοί συνθέτες είναι καλύτεροι για την παραγωγή των φωνηέντων.



Εικόνα 4-4. Παράλληλη και εν σειρά σύνδεση των φίλτρων συντονισμού

Χαρακτηριστικό παράδειγμα ολοκληρωμένου formant συνθέτη αποτελεί ο συνθέτης του Klatt<sup>[13]</sup> που παρουσιάστηκε το 1980. Το διάγραμμα βαθμίδων φαίνεται στην Εικόνα 4-5. Η υλοποίηση αποτελείται από ένα σύνολο φίλτρων συνδεδεμένων παράλληλα και σειριακά, με δυνατότητα επιλογής της διαμόρφωσης της συνδεσμολογίας ανάλογα με τον επιθυμητό τύπο φωνής, πράγμα που τελικά δίνει δυνατότητα παραγωγής ανδρικών και γυναικείων φωνών. Ένα σύνολο σαράντα συνολικά παραμέτρων καθορίζει την τελική κυματομορφή με τις τριάντα τέσσερις από αυτές να μπορούν να καθοριστούν δυναμικά, ενώ οι υπόλοιπες ρυθμίζουν τη γενική διαμόρφωση του συνθέτη. Υπάρχει δυνατότητα επιλογής της φασματικής κλίσης της πηγής με χρήση δύο low pass φίλτρων ανάλογα με τον τύπο του επιθυμητού φωνήεντος. Έτσι για τα φωνήεντα χρησιμοποιείται κλίση -12db ανά οκτάβα, ενώ για τυρβώδη φωνήεντα η κλίση γίνεται -24db ανά οκτάβα. Ένας

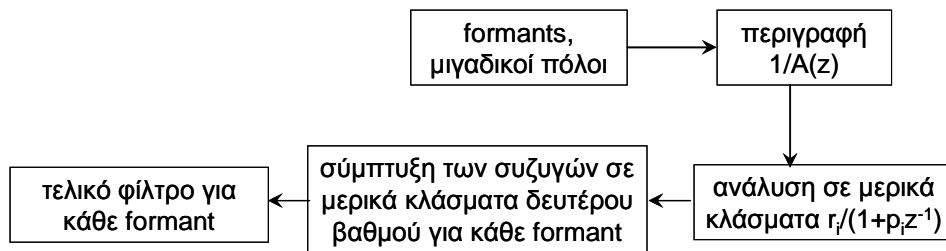
δεύτερος τύπος πηγής τυχαίου θορύβου με ελεγχόμενο εύρος χρησιμοποιείται για την παραγωγή της τυρβώδους συνιστώσας. Στην παράλληλη συνδεσμολογία χρησιμοποιούνται επτά συνολικά συντονισμοί με ξεχωριστό έλεγχο εύρους, ενώ στη σειριακή υπάρχουν 5 συντονισμοί με ξεχωριστό έλεγχο συχνότητας και εύρους ζώνης. Η τελευταία βαθμίδα προσομοιώνει την ακτινοβολία από τα χείλη και είναι ένα high pass φίλτρο, αφού οι υψηλές συχνότητες μεταφέρονται καλύτερα μέσα από το άνοιγμα των χειλιών, λόγω της προστιθέμενης αντίστασης η οποία αναγκάζει τη αύξηση της φασματικής κλίσης από -12db σε περίπου -6db ανά οκτάβα.



Εικόνα 4-5. Ο συνθέτης του Klatt (1980)

Το διάγραμμα βαθμίδων της Εικόνας 4-5 δεν είναι η τελευταία έκδοση του συνθέτη, αφού τα μετέπειτα χρόνια έγιναν σημαντικές βελτιώσεις στους παραμετρικούς συνθέτες με βασικότερες των οποίων τα γλωττιδικά μοντέλα που προτάθηκαν από τους Fant και Liljencrants<sup>[5]</sup> και τον ίδιο τον Klatt<sup>[14]</sup> και η προσθήκη ενός ζεύγους πόλου - μηδενικού στην παράλληλη συνδεσμολογία για την καλύτερη προσομοίωση των ένρινων ήχων. Παρόλα αυτά ο μεγάλος αριθμός των παραμέτρων που υπεισέρχονται και η αδυναμία προσέγγισης των μη γραμμικών φαινομένων στο φωνητικό σωλήνα, κάνουν τους formant συνθέτες δύσκολους στη χρήση και για αυτό η αξία τους είναι πια μόνο ακαδημαϊκή σαν μια πολύ καλή εφαρμογή του γραμμικού μοντέλου πηγής – φίλτρου.

Για την εύρεση των επιμέρους φίλτρων και το μετέπειτα σπάσιμο σε μερικά κλάσματα συντίθεται πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της συνάρτησης μεταφοράς από τους πόλους και τους συζυγείς τους. Η ολική διαδικασία φαίνεται στο λογικό διάγραμμα της Εικόνας 4-6.



Εικόνα 4-6. Διαδικασία εύρεσης των formant φίλτρων

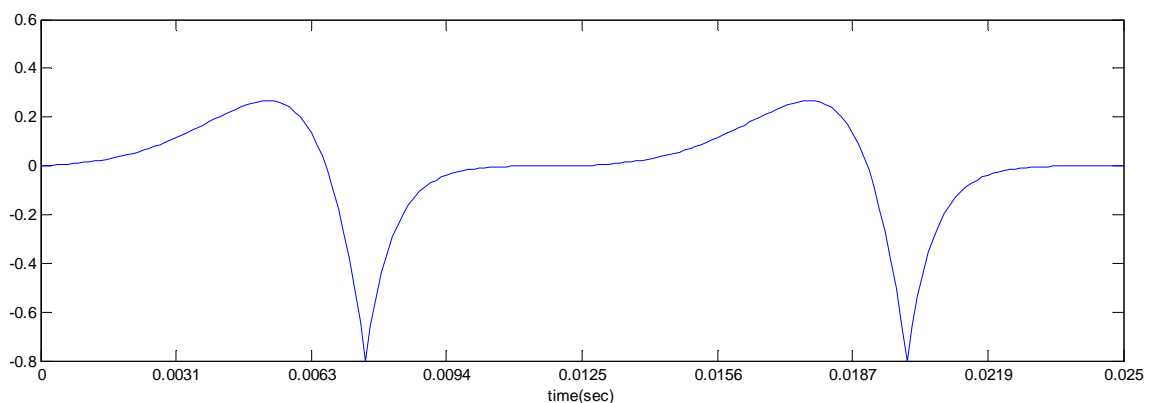
Το σήμα πηγής του γλωττιδικού μοντέλου LF έχει τις εξής παραμέτρους (βλ. κεφάλαιο 6):

$$\begin{aligned}
 a &= 8.0 \\
 b &= 20.0 \\
 \omega_0 &= 6.0 \\
 E_e &= 0.8
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

με χρόνους ανοιχτής φάσης και φάσης επιστροφής:

$$\begin{aligned}
 T_e &= 0.6 \\
 T_c &= 0.9
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

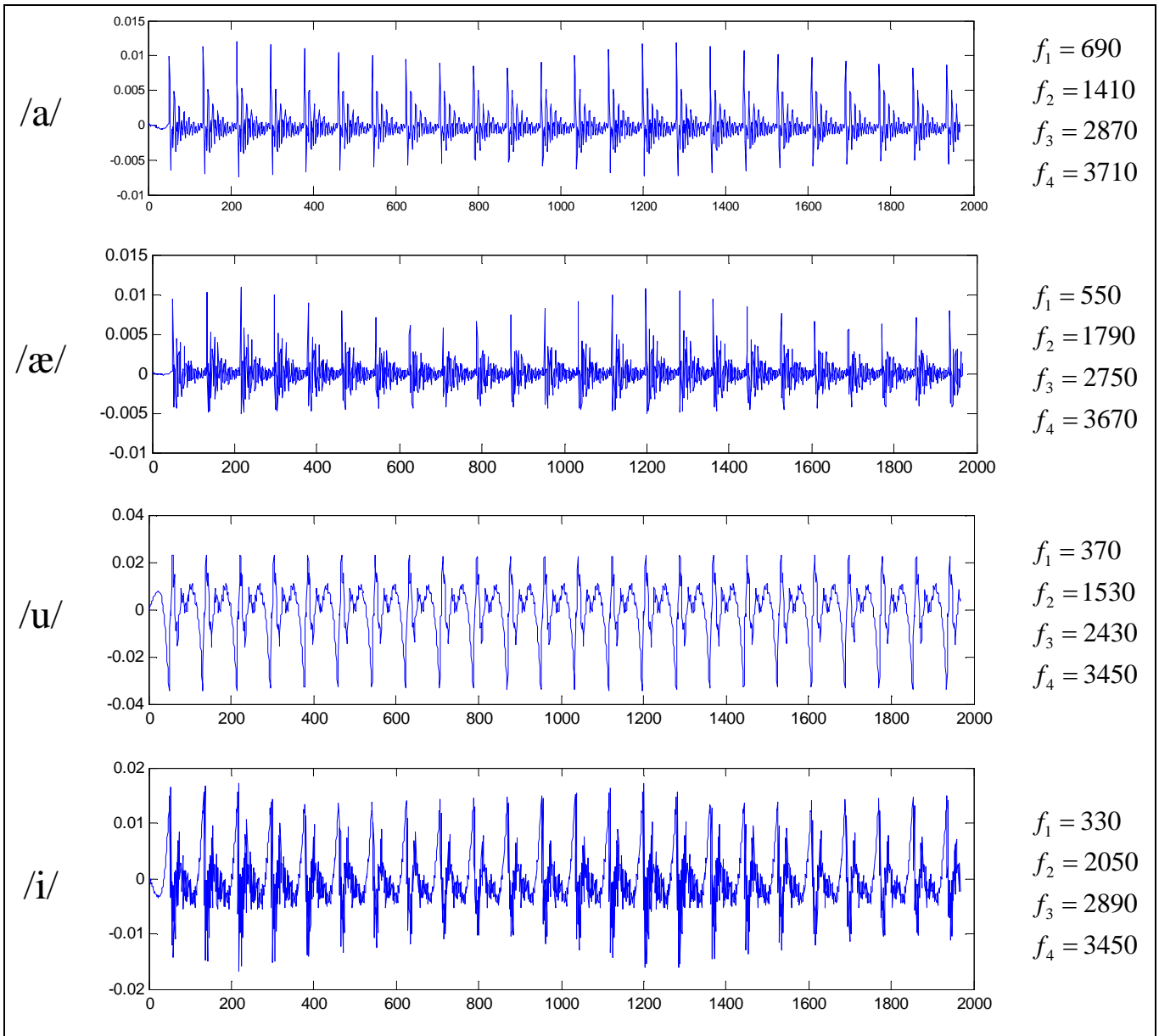
Χρησιμοποιήθηκε συχνότητα 80Hz για την οποία το σήμα πηγής για δύο περιόδους έχει την ακόλουθη μορφή:



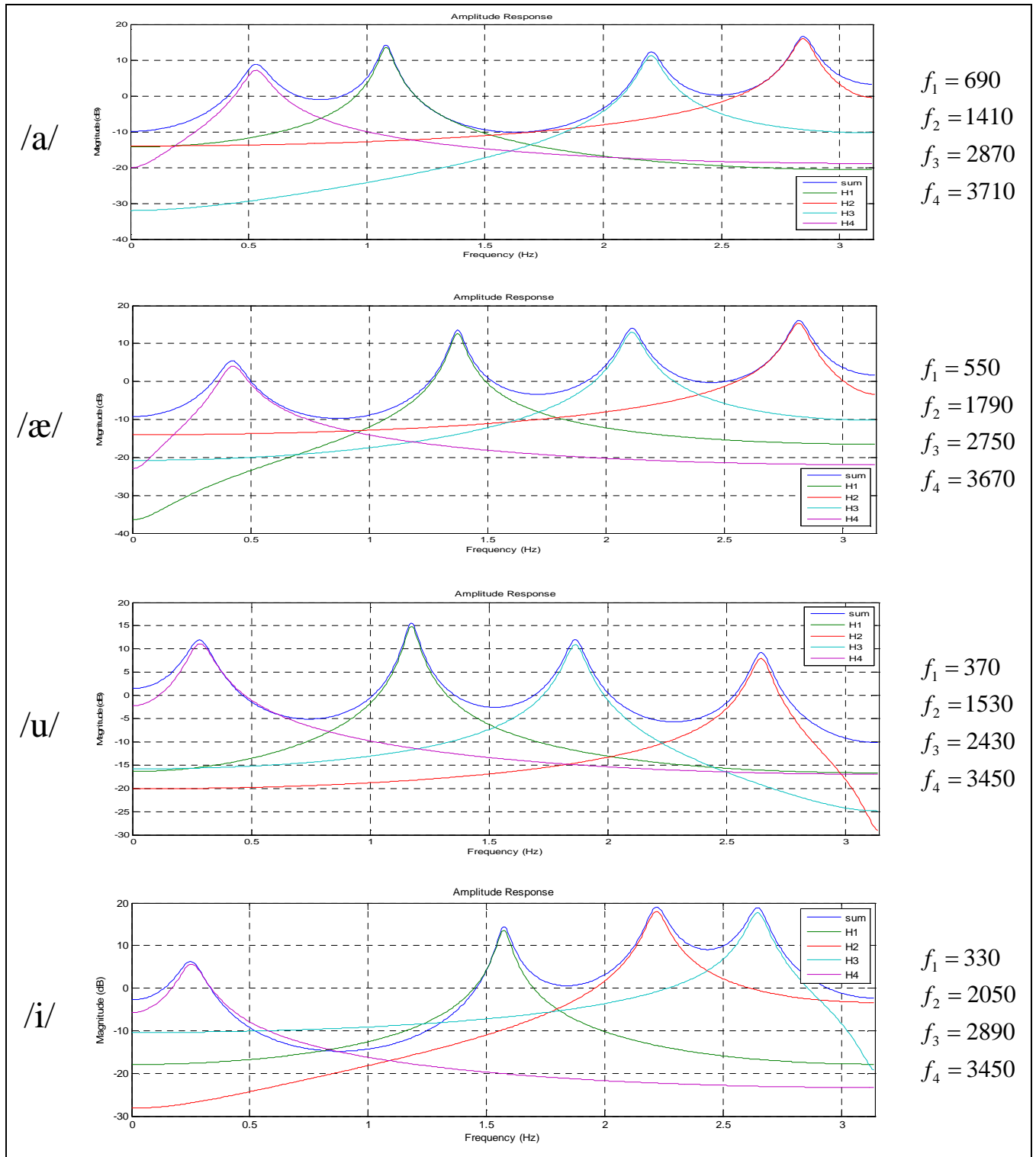
Για τη σύνθεση των φωνημάτων από το αρμονικό πρόβλημα τα εύρη ζώνης των formants θεωρήθηκαν οι ακόλουθες σταθερές τιμές (Στη γενική περίπτωση είναι μεταβλητά και μπορούν να αλλαχθούν από το χρήστη):

$$\begin{aligned}
 bw_1 &= 130Hz \\
 bw_2 &= 70Hz \\
 bw_3 &= 100Hz \\
 bw_4 &= 100Hz
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

Τέλος στην Εικόνα 4-7 παρατίθενται τα συνθετικά σήματα για τις περιπτώσεις των φωνημάτων που εξετάστηκαν στο αρμονικό πρόβλημα, ενώ στην Εικόνα 4-8 φαίνονται οι συχνοτικές αποκρίσεις των φίλτρων ξεχωριστά και συνολικά για την κάθε περίπτωση. Τα φίλτρα έχουν συνδεθεί σειριακά.



Εικόνα 4-7. Συνθετικά σήματα για τις τέσσερις περιπτώσεις γεωμετριών φωνητικού σωλήνα



Εικόνα 4-8. Συγκριτικές αποκρίσεις των formant φίλτρων σε σχέση με τη συνολική

#### 4.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό τονίστηκε η ιδιαίτερη σημασία και ευκολία που παρέχει ο μετασχηματισμός ενός ακουστικού προβλήματος στην αρμονική του μορφή. Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για την εύρεση της κατανομής της ακουστικής πίεσης σε τέσσερις γεωμετρικές φωνητικού σωλήνα που ελήφθησαν με ψηφιοποίηση από τη βιβλιογραφία. Το πρόβλημα λύθηκε επαναληπτικά για συχνότητες μέχρι 4990kHz, πράγμα που έδωσε τη δυνατότητα κατασκευής των συχνοτικών αποκρίσεων των γεωμετριών, από τις οποίες προέκυψαν οι γνωστοί συντονισμοί ή formants. Τέλος επιχειρήθηκε η αναπαραγωγή του ακουστικού σήματος στο χρόνο με χρήση της θεωρίας πηγής – φίλτρου.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Bao G., Wei G.W., Zhao S., *Numerical solution of the Helmholtz equation with high wavenumbers*, Int. J. Numer. Meth. Engng, vol. 59, pp. 389–408, (2004).
- [2] Cohen Gary C., *Higher Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*, Springer Verlag, (2002).
- [3] Dunn, H. K., *The calculation of vowel resonances, and an electrical vocal tract*, J. Acoust. Soc. Am. 22, 740 –753, (1950).
- [4] El Masri S., Pelorson X., Saguët P. and Badin P., *Development of the transmission line matrix method in acoustics - Applications to higher modes in the vocal tract and other complex ducts*, Int. J. of Numerical Modelling, vol. 11, pp: 133- 151, (1998).
- [5] Fant, G. and Liljencrants, J. and Lin, Q., *A four-parameter model of glottal flow*, STL-QPSR Journal, 25/4, pp. 1-13, (1985).
- [6] Flanagan James L., *Speech Analysis and Perception*, Springer Verlag, Berlin, (1972).
- [7] Hannukainen A., Lukkari T., Malinen J., Paolo P., *Formants and Vowel Sounds by the Finite Element Method*, The Phonetics Symposium, pp. 24-33, (2006).
- [8] Hannukainen A., Lukkari T., Malinen J., Paolo P., *Vowel Formants from the wave equation*, Journal of the Acoustical Society of America, 122, EL1, (2007).
- [9] Hiroki Matsuzaki, Kunitoshi Motoki and Nobuhiro Mikit, *Computation of the Acoustic Characteristics of Simplified Vocal-tract Models by 3-D Finite Element Method*, International Symposium on Communications and Information Technologies, Sapporo, Japan, (2004).
- [10] Holmes J.N., *Formant synthesizers: Cascade or parallel*, Speech Communication, vol.2, pp:251-273, (1983).
- [11] Ishizaka K., Flanagan J.L., *Synthesis of voiced sounds from a two mass model of the vocal folds*, The Bell System Technical Journal, vol. 51/6, pp. 1233-1268, (1972).
- [12] Kelly J. and Lochbaum C., *Speech synthesis*. In Proceedings of the 4th International Congress on Acoustics, paper G42:1-4, (1962).
- [13] Klatt D.H., *Software for a cascade/parallel formant synthesizer*, Journal of the Acoustical Society of America, vol.67, pp:971-995, (1980).
- [14] Klatt D. H., Klatt L. C., *Analysis, synthesis and perception of voice quality variations among female and male talkers*, J.Acoust.Soc.Am., vol. 87/2, pp. 820–857, (1990).
- [15] Maeda, *VA digital simulation method of the vocal tract system*, Speech Communication, vol.1, pp. 199-229, (1982).
- [16] Mullen J., Howard D., and Murphy D., *Waveguide physical modelling of vocal tract acoustics: Flexible formant bandwidth control from increased model dimensionality*, IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, vol.14, 964 – 971, (2006).
- [17] Palo P., *A Review of Articulatory Speech Synthesis*, Master's thesis, TKK, Helsinki, (2006).
- [18] Péraire J., Vahdati M., Morgan K., Zienkiewicz O.C., *Adaptive Remeshing For Compressible Flow Computations*, Journal of Computational Physics, vol. 72, pp. 449-466, (1987).



- [19] Portnoff M.R., *A quasi-one dimensional digital simulation for the time varying vocal tract*, Master's Thesis, MIT, (1973).
- [20] Rosenberg A. E., *Effect of glottal pulse shape on the quality of natural vowels*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 49, pp. 583–590, (1971).
- [21] Sondhi M. M., *Resonances of a bent vocal tract*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 79, pp:1113–1116, (1986).
- [22] Story B.H., Pope D.S., *A parametric model of the vocal tract area function for vowel and consonant simulation*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 117/5, pp. 3231–3254, (2005)
- [23] Story B.H., Titze I.R., Hoffman E.A., *The relationship of vocal tract shape to three voice qualities*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 109/4, pp. 1651–1667, (2001).
- [24] Yokoyama T., Miki N., Ogawa Y., *On Construction Method of Three Dimensional Modeling of Vocal Tract Shape*, Electronics and Communications in Japan, vol. 80/9, pp. 1873–1792, (1997).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΔΙΟΥ ΡΟΗΣ ΜΕ ΤΟ FLUENT

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη παρουσίαση του επιλύτη πεδίων ροής Fluent, οποίος χρησιμοποιήθηκε σε αρκετά σημεία της παρούσης διατριβής. Αρχικά γίνεται μια σύντομη αναφορά στις δυνατότητες και στα προσφερόμενα μοντέλα του επιλύτη. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στον τρόπο χειρισμού των αριθμητικών πλεγμάτων, στον τρόπο επικοινωνίας με τον πυρήνα του επιλύτη και στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων ελέγχου με χρήση της οποίας ολοκληρώνονται οι εξισώσεις διατήρησης ορμής και μάζας. Τέλος επιλύεται ένα απλό πρόβλημα εσωτερικής ροής σε αγωγό και συγκρίνονται τα αποτελέσματα με λύσεις από τη διεθνή βιβλιογραφία. Μέσα από τη διαδικασία τονίζεται η ιδιαιτερότητα του τρόπου χειρισμού του αριθμητικού πλέγματος, η επικοινωνία με τον επιλύτη και ο τρόπος επεξεργασία των δεδομένων μετά την επίλυση.

### 5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το Fluent είναι ίσως ο πιο διαδεδομένος εμπορικός επιλύτης για υπολογισμό πεδία ροής με χρήση υπολογιστή, και όχι μόνο. Στα πλαίσια της παρούσης χρησιμοποιήθηκε η έκδοση 6.2, η οποία είναι γραμμένη στη χαμηλού επιπέδου γλώσσα C, κάτω από το λειτουργικό σύστημα Windows XP. Χαρακτηριστικά της έκδοσης αυτής είναι η δυναμική δέσμευση υπολογιστικής μνήμης, ο αποδοτικός έλεγχος του επιλύτη και η χρήση παραθυροποιημένου περιβάλλοντος διεπαφής με το χρήστη, το οποίο βέβαια τη στιγμή συγγραφής του παρόντος δεν θεωρήθηκε από τα πλέον εξελιγμένα από πλευράς σχεδιασμού και λειτουργιών. Παρέχεται επίσης δυνατότητα επικοινωνίας με τον επιλύτη με τη συγγραφή κώδικα σε γλώσσα C και ενσωμάτωσή του σε συγκεκριμένα, προεπιλεγμένα σημεία της ακολουθίας εκτέλεσης.

Πιο συγκεκριμένα ο επιλύτης μπορεί να αντιμετωπίσει:

- διδιάστατες επίπεδες ή αξονοσυμμετρικές ροές
- πλήρως τριδιάστατες ροές σε πολύπλοκες γεωμετρίες
- ασυμπίεστες υποηχητικές με σταθερή ή μεταβλητή πυκνότητα του ρευστού
- συμπίεστες ατριβείς ροές παρουσία αιφνίδιων διαταραχών (shock)
- μόνιμες και μη μόνιμες ροές

Παρέχονται τα εξής ιξώδη μοντέλα για νευτώνικά ρευστά:

- απλό μόνο για την περιοχή στρωτής ροής
- μοντέλο μεγάλων δινών (LES - Large Eddy Simulation) για τυρβώδεις ροές
- μοντέλο μιας εξίσωσης Spalart-Allmaras για μεταβατικού τύπου ροές

- μοντέλο k-ε (κλασσικό, Renormalized Group και Realizable) δύο εξισώσεων για τυρβώδεις ροές
- μοντέλο k-ω (κλασσικό και Shear Stress transport) δύο εξισώσεων για τυρβώδεις ροές χαμηλού σχετικά αριθμού Reynolds
- μοντέλο τάσεων Reynolds (Reynolds Stress Model) για τυρβώδεις ροές, το οποίο επιλύει τις εξισώσεις διατήρησης για τις τάσεις Reynolds μαζί με μία εξίσωση για τον τυρβώδη ρυθμό σκέδασης της ροής. Συνολικά πέντε και επτά επιπλέον εξισώσεις σε δύο και τρεις διαστάσεις αντίστοιχα.

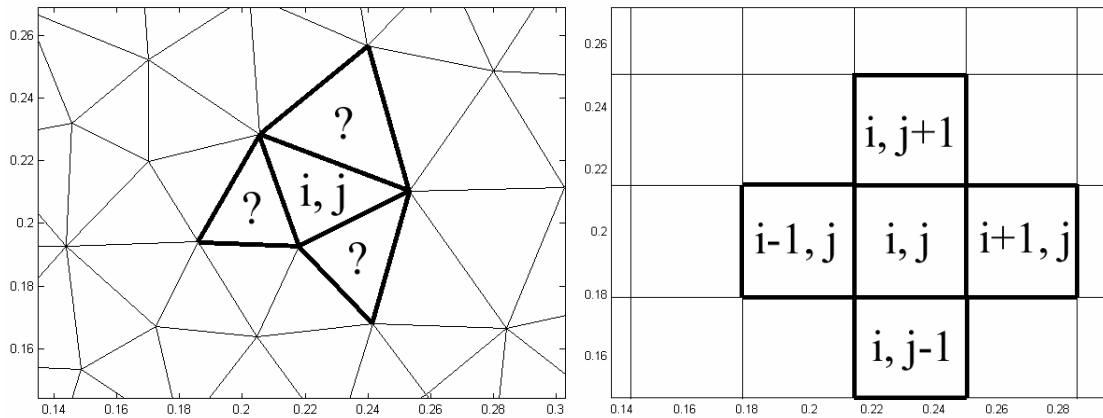
Σχετικά με τα ρευστά/υλικά παρέχεται μεγάλη βιβλιοθήκη φυσικών ιδιοτήτων, ενώ μπορούν να αντιμετωπιστούν:

- μη νευτωνικά ρευστά
- ροές με ταυτόχρονη αλλαγή φάσεως
- ροές σε πορώδη υλικά
- ροές με παράλληλη χημική αντίδραση (π.χ. καύση)
- ροές με παράλληλη μεταφορά θερμότητας ή μάζας

Οι δυνατότητες του λογισμικού συμπληρώνονται από ένα σύνολο λειτουργιών διαθέσιμων για μετα-επεξεργασία (post processing) των δεδομένων ροής. Υπάρχουν πολλές δυνατότητες οπτικοποίησης των πεδίων ροής, όπως διδιάστατα και τριδιάστατα ισοσταθμικά διαγράμματα και απλούστερα διαγράμματα ζεύγους εξαρτημένης / ανεξάρτητης μεταβλητής (xy plots). Οι δυνατότητες αυτές δε χρησιμοποιήθηκαν σχεδόν καθόλου στα πλαίσια της παρούσης, κυρίως διότι κατασκευάστηκε ειδική διεπαφή επικοινωνίας για τον χειρισμό και την αποθήκευση των δεδομένων. Ένας άλλος λόγος ήταν και η προβληματική λειτουργία των συναρτήσεων γραφικών του λογισμικού στο λειτουργικό σύστημα που χρησιμοποιήθηκε. Το τελευταίο είναι πιθανό να οφείλεται στους οδηγούς γραφικών που διανέμονται μαζί με το λογισμικό και ήταν ίσως το μοναδικό σοβαρό πρόβλημα που αντιμετωπίστηκε κατά την χρήση.

## **5.2 ΜΗ ΔΟΜΗΜΕΝΑ ΠΛΕΓΜΑΤΑ**

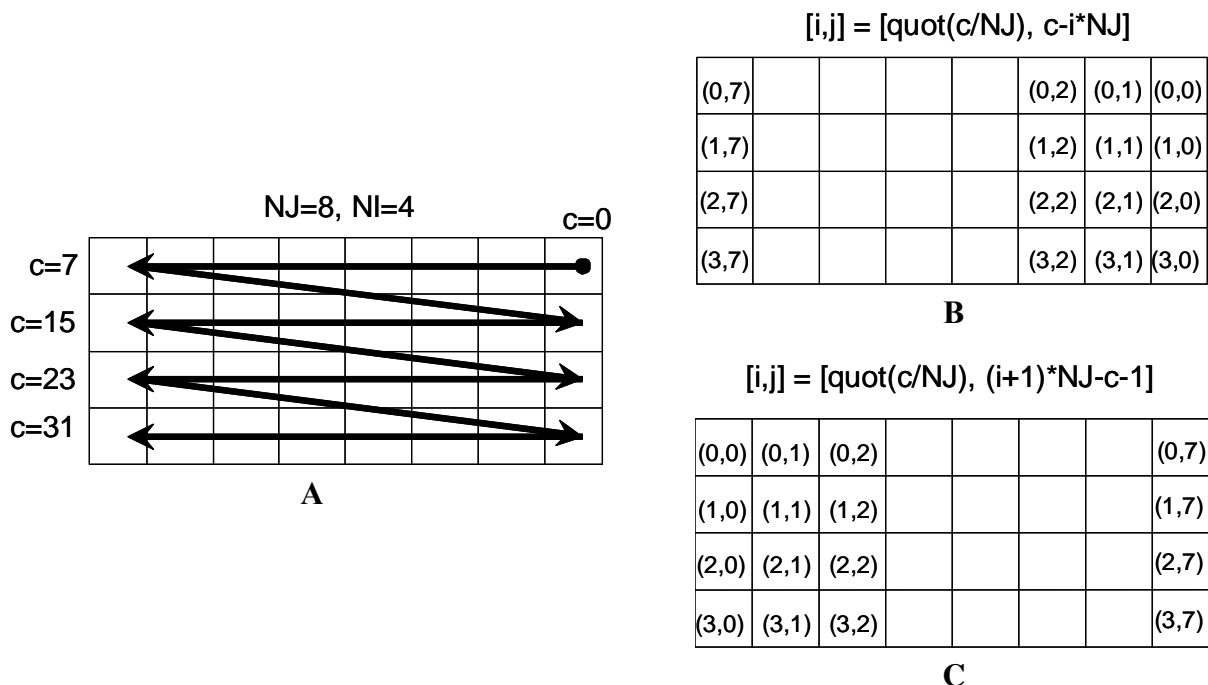
Ο επιλύτης του Fluent λειτουργεί αποκλειστικά με μη δομημένα (unstructured) αριθμητικά πλέγματα. Στα πλέγματα αυτά δεν είναι προφανής ο τρόπος αντιστοίχισης και απεικόνισης στην υπολογιστική μνήμη. Έτσι για παράδειγμα δεδομένου ενός ζεύγους δεικτών (i,j) για ένα διδιάστατο χωρίο, ενώ στην περίπτωση ενός δομημένου (structured) πλέγματος είναι προφανής ο τρόπος εύρεσης των δεικτών των γειτονικών κελιών, στην περίπτωση ενός μη δομημένου πλέγματος δεν είναι δυνατή η εύρεση των δεικτών χωρίς προηγουμένως να είναι γνωστή η δομή αποθήκευσης στην υπολογιστική μνήμη. Η παρατήρηση αυτή οπτικοποιείται στην Εικόνα 5-1. Η δεικτοδότηση στα μη δομημένα αριθμητικά πλέγματα γίνεται με χρήση ειδικών δομών, που λέγονται μητρώα γειννίας (adjacent matrices) και παράγονται από το λογισμικό κατασκευής του αριθμητικού πλέγματος.



Εικόνα 5-1. Δεικτοδότηση γειτονικών κελιών σε μη δομημένο και δομημένο πλέγμα.

Το γεγονός αυτό δεν εμποδίζει το Fluent να λειτουργήσει με δομημένα πλέγματα, τα οποία έχουν αποθηκευθεί σε μη δομημένα. Έτσι στα πλαίσια της παρούσης χρησιμοποιήθηκαν αποκλειστικά δομημένα αριθμητικά πλέγματα, για λόγους εύκολης πρόσβασης στην μετέπειτα επεξεργασία των δεδομένων ροής από άλλα λογισμικά που επίσης κατασκευάστηκαν για τον υπολογισμό ακουστικών πηγών και ακουστικών πεδίων και για την οπτικοποίηση δεδομένων ροής). Η εύρεση του αλγορίθμου δεικτοδότησης εξαρτάται από τον τύπο του πλέγματος και από τον τρόπο παραγωγής του.

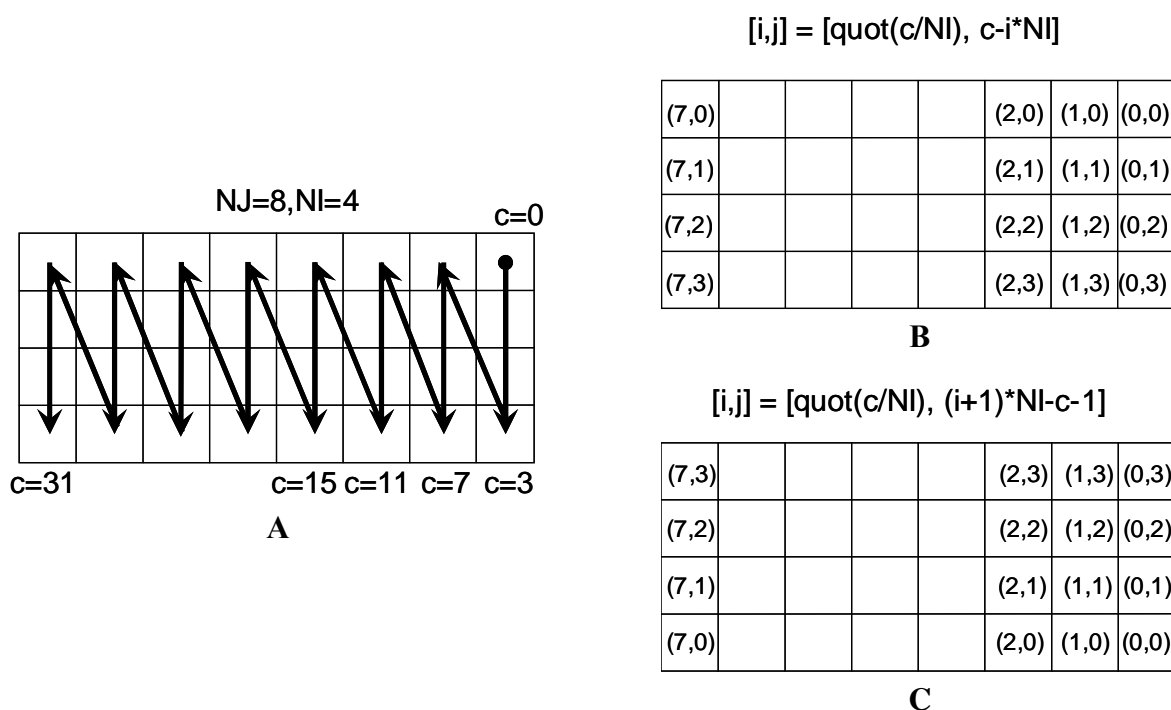
Έστω για παράδειγμα ένα τετράπλευρο χωρίο για το οποίο κατασκευάστηκε δομημένο πλέγμα, το οποίο εξάγεται σε μη δομημένη μορφή κατά γραμμές, όπως στην Εικόνα 5-2. Με  $c$  συμβολίζεται ο δείκτης / αύξων αριθμός του κάθε κελιού ξεκινώντας από την τιμή μηδέν.



Εικόνα 5-2. Δεικτοδότηση δομημένου πλέγματος – Σάρωση κατά γραμμές

Τότε για την μετατροπή σε διδιάστατη δομή μνήμης υπολογιστού, πρέπει να υπολογιστούν οι δείκτες  $i, j$ , οι οποίοι για κάθε κελί δείχνουν τη θέση μνήμης που αυτό αποθηκεύεται. Σύμφωνα

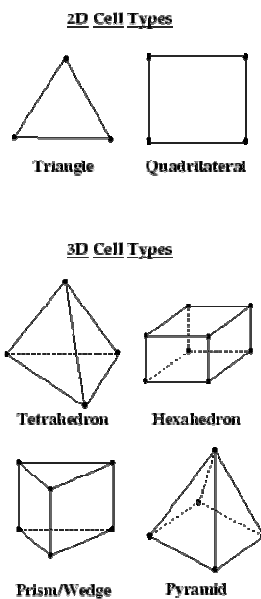
με την πρώτη εναλλακτική, κατά την οποία η αρίθμηση των δεικτών ξεκινά από το πρώτο κελί, οι δείκτες υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις της Εικόνας 5-2-B. Η σάρωση γίνεται κατά γραμμές και η συνάρτηση quot συμβολίζει το αποτέλεσμα της ακέραιας διαίρεσης του αύξοντος αριθμού του κελιού με τον αριθμό των στηλών. Η δεύτερη εναλλακτική (Εικόνα 5-2-C) διατηρεί την ίδια δεικτοδότηση στις γραμμές και απλά αναστρέφει τη δεικτοδότηση στις στήλες (left right flipping). Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις όπου αυτό είναι επιθυμητό. Ακριβώς η ίδια λογική διατηρείται και στην περίπτωση όπου η σάρωση των κελιών γίνεται κατά στήλες. Η δεικτοδότηση υπολογίζεται σύμφωνα με τις σχέσεις της Εικόνας 5-3-A. Η λογική παραμένει ακριβώς η ίδια, ενώ στην περίπτωση αυτή, η δεύτερη εναλλακτική (Εικόνα 5-3-C) διατηρεί τη δεικτοδότηση στις στήλες και αναστρέφει τη δεικτοδότηση στις γραμμές (upside down flipping). Η χρήση του πρώτου ή του δεύτερου αλγορίθμου δεικτοδότησης εξαρτάται από τον τρόπο που το λογισμικό παραγωγής κατασκευάζει το δομημένο πλέγμα και τον τρόπο που αριθμεί τα κελιά κατά την αποθήκευση σε ‘μη δομημένη’ δομή.



Εικόνα 5-3. Δεικτοδότηση δομημένου πλέγματος – Σάρωση κατά στήλες

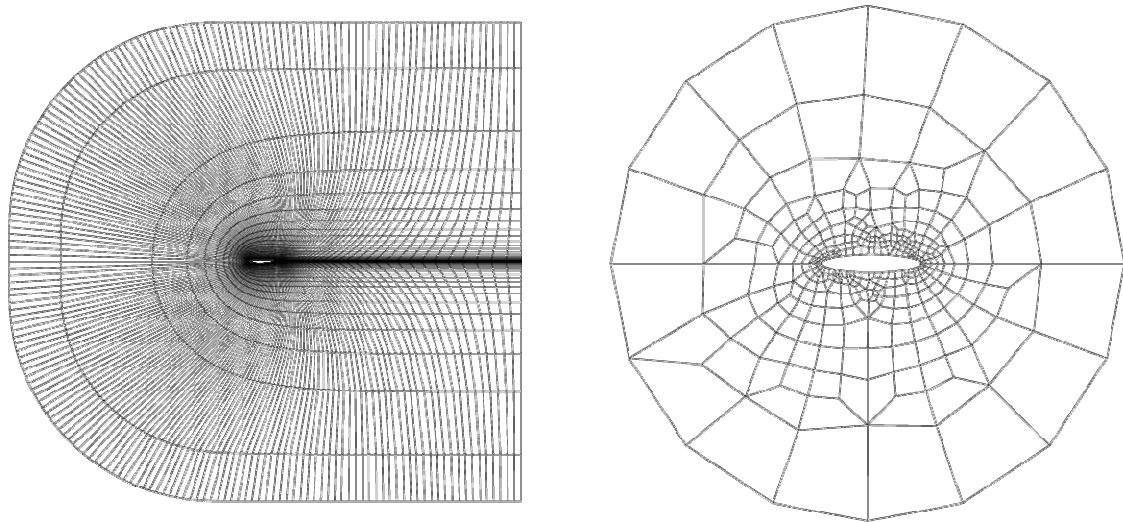
Το Fluent μπορεί να χειριστεί διάφορους τύπους πλεγμάτων (δομημένων / μη δομημένων), όπως Ο τύπου, C τύπου, πολλαπλών διαμερίσεων και υβριδικά. Παραδείγματα των πιο σημαντικών τύπων παρατίθενται παρακάτω, από την Εικόνα 5-5 έως την Εικόνα 5-9. Η εκλογή του κατάλληλου τύπου για κάθε πρόβλημα εξαρτάται από την πολυπλοκότητα της γεωμετρίας, τον γεωμετρικό τύπο των επιμέρους στοιχείων και την ποσότητα της ψευδούς διαχύσεως (false diffusion) που εισάγεται στους υπολογισμούς. Αναφορικά με τον γεωμετρικό τύπο των επιμέρους στοιχείων το Fluent υποστηρίζει τους τύπους που φαίνονται στην Εικόνα 5-4. Γενικά τα τριγωνικά στοιχεία προσφέρουν καλύτερο έλεγχο του πλέγματος, με την έννοια της δυνατότητας πύκνωσης σε συγκεκριμένα σημεία της γεωμετρίας, ενώ τα τετράπλευρα στοιχεία είναι κατάλληλα για ροές που ακολουθούν καλά τις γεωμετρίες με μεγάλους λόγους επιμήκους (π.χ. ροές σε αγωγούς). Στην τελευταία περίπτωση τριγωνικά στοιχεία με μεγάλο λόγο επιμήκους

είναι σχεδόν σίγουρο ότι θα οδηγήσουν σε προβλήματα σύγκλισης του αλγορίθμου επίλυσης της ροής. Ο όρος ψευδής διάχυση αναφέρεται στα σφάλματα αποκοπής που προκύπτουν από τη διακριτοποίηση των εξισώσεων διατήρησης στο αριθμητικό πλέγμα. Το αποτέλεσμα της επίδρασής της είναι ότι αυξάνει την πραγματική διάχυση και είναι ιδιαίτερα αισθητή σε συναγωγικού τύπου ροές (convective flows), με πολύ μικρή ή σχεδόν καθόλου πραγματική διάχυση. Η ψευδής διάχυση ελαχιστοποιείται όταν το αριθμητικό πλέγμα ‘ακολουθεί’ την πραγματική κατεύθυνση της ροής, πράγμα που φυσικά είναι εφικτό μόνο με χρήση δομημένου πλέγματος και τετράπλευρων στοιχείων και όχι τριγωνικών. Ένας άλλος προφανής τρόπος για την ελαχιστοποίηση της είναι η πυκνωση του πλέγματος (όποιο και αν είναι αυτό) ή/και η αύξηση της τάξης του σχήματος αριθμητικής διακριτοποίησης, που καθόλου σχέση δεν έχει με το χρησιμοποιούμενο πλέγμα.

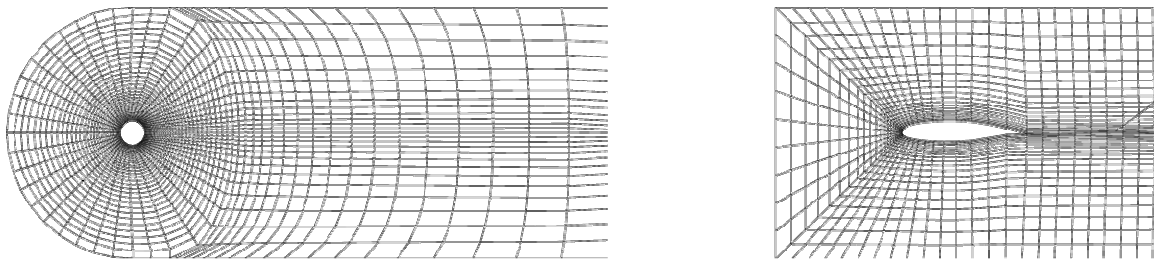


Εικόνα 5-4. Γεωμετρικοί τύποι υποστηριζόμενων στοιχείων

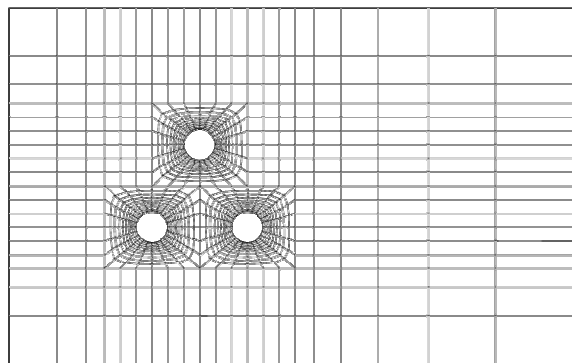
Στα πλαίσια της παρούσης χρησιμοποιήθηκαν αποκλειστικά δομημένα πλέγματα τετράπλευρων στοιχείων και οι περιπτώσεις πιο πολύπλοκων γεωμετριών (π.χ. φωνητικός σωλήνας) αντιμετωπίστηκαν με πολλαπλή διαμερίση. Προτιμήθηκε ο τρόπος αυτός για ευκολία στη μεταφορά δεδομένων σε άλλα λογισμικά (π.χ. υπολογισμός ακουστικών πηγών, οπτικοποίηση δεδομένων ροής). Το λογισμικό κατασκευής των αριθμητικών πλεγμάτων ήταν το Gambit έκδοση 2.3, που διανέμεται μαζί με το Fluent. Η δομή των αρχείων δεδομένων του λογισμικού είναι εύκολα αναγνώσιμη από το Fluent, οπότε δεν προκύπτουν προβλήματα ανταλλαγής πληροφορίας. Για την κατασκευή δομημένων πλεγμάτων με πληροφορία από τα όρια το Gambit χρησιμοποιεί μεθόδους μερικών διαφορικών εξισώσεων, σύμφωνα με τις οποίες επιλύονται ελλειπτικές εξισώσεις τύπου Laplace ή Poisson. Η πληροφορία από τα όρια (π.χ. καθετότητα πλεγματικών γραμμών) επιβάλλεται με τη χρήση συνοριακών συνθηκών τύπου Dirichlet και Robin, σύμφωνα με τις μεθόδους Thomas – Middlecoff<sup>[11]</sup> ή Sorenson<sup>[10]</sup>. Η καθετότητα των πλεγματικών γραμμών στα όρια είναι σημαντική για την μετέπειτα επιβολή συνοριακών συνθηκών τύπου von Neumann κατά την επίλυση του πεδίου ροής.



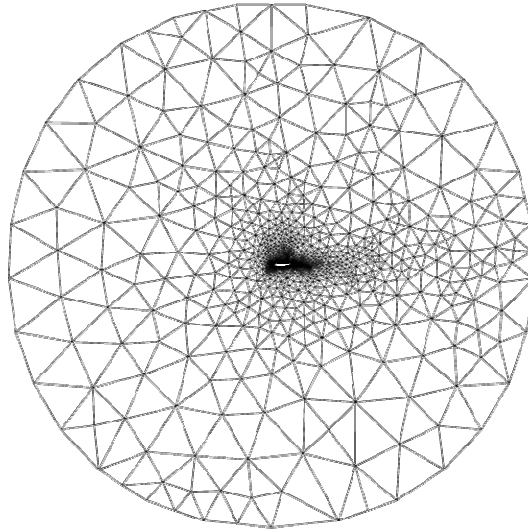
Εικόνα 5-5. Δομημένο (τύπου C) και μη δομημένο πλέγμα γύρω από αεροτομή.



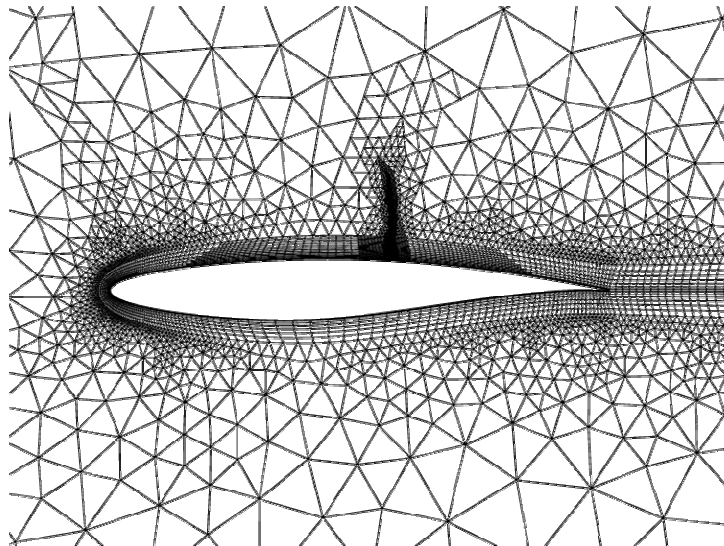
Εικόνα 5-6. Δομημένο πλέγμα τύπου O και C αντίστοιχα



Εικόνα 5-7. Δομημένο πλέγμα πολλαπλών διαμερίσεων



Εικόνα 5-8. Μη δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων γύρω από αεροτομή



Εικόνα 5-9. Υβριδικό πλέγμα τριγωνικών / τετράπλευρων στοιχείων

### 5.3 ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΕ ΤΟ FLUENT

Η επικοινωνία με τον επιλύτη του Fluent γίνεται με τη χρήση συναρτήσεων χρήστη (User Defined Functions - UDFs). Η αρχιτεκτονική του προγράμματος επιτρέπει την εξωτερική παρέμβαση σε συγκεκριμένα σημεία της ροής κώδικα και για συγκεκριμένους σκοπούς. Αυτό γίνεται με τη συγγραφή κώδικα από το χρήστη σε γλώσσα C, μετάφραση – σύνδεση του αντικειμενικού κώδικα και δημιουργία εκτελέσιμων αρχείων. Τα αρχεία αυτά πρέπει να δημιουργηθούν στη μορφή δυναμικών βιβλιοθηκών (dynamic link libraries – dlls, για το λειτουργικό σύστημα Windows) και να “φορτωθούν” στη συνέχεια σε συγκεκριμένα σημεία μέσα από το γραφικό περιβάλλον του λογισμικού. Οι συναρτήσεις χρήστη είναι ουσιαστικά μακροεντολές (DEFINE MACROS για τη γλώσσα C) ορισμένες εξαρχής από το λογισμικό, το οποίο συνάμα παρέχει ένα μεγάλο σύνολο συναρτήσεων και τύπων για την πρόσβαση στα δεδομένα του επιλύτη. Αυτά περιλαμβάνουν όλα τα γεωμετρικά δεδομένα του αριθμητικού πλέγματος



(συντεταγμένες κόμβων των κελιών, κάθετα και παράλληλα διανύσματα, επιφάνειες ορίου), όλες τις ρευστοδυναμικές μεταβλητές (πίεση, ταχύτητες, πυκνότητα) στην τρέχουσα και προηγούμενη χρονική στιγμή (σε περίπτωση μη μόνιμου προβλήματος), αλλά και παράγωγες μεταβλητές ορισμένες από το χρήστη για τη μετέπειτα επεξεργασία.

Από τις βασικότερες λειτουργίες που μπορούν να εκτελέσουν οι συναρτήσεις χρήστη θα μπορούσε να ξεχωρίσει κανείς πρώτα τη δυνατότητα να αλλάξουν ρευστοδυναμικές μεταβλητές κατά τη διάρκεια της επίλυσης και τη δυνατότητα εξόδου (I/O) των δεδομένων για μετέπειτα επεξεργασία σε οποιαδήποτε μορφή είναι επιθυμητό.

Τα σημεία (hooks) που το λογισμικό επιτρέπει την εκτέλεση των συναρτήσεων χρήστη είναι:

- κατά την αρχικοποίηση των μεταβλητών του πεδίου ροής
- κατά την εφαρμογή συνοριακών συνθηκών
- πριν τη έναρξη κάθε επανάληψης
- πριν και μετά την ολοκλήρωση κάθε χρονικού βήματος
- όταν ο χρήστης το ζητήσει (execute on demand)

Στον Πίνακα 5-1 παρατίθεται μια συνάρτηση χρήστη που χρησιμοποιείται για την επιβολή παραβολικού προφίλ οριζόντιας ταχύτητας στην είσοδο ενός πεδίου ροής. Η συνάρτηση έχει σαν ορίσματα τις μεταβλητές `inlet_x_velocity`, `thread`, `i`. Η πρώτη μεταβλητή είναι απλά το όνομα της συναρτήσεως, η δεύτερη περιέχει το σύνολο των κελιών στα οποία εφαρμόζεται και η τρίτη είναι ο δείκτης της μεταβλητής στην οποία εφαρμόζεται. Η μακροεντολή `begin_f_loop` εκτελεί σάρωση όλων των επιφανειακών κελιών της ομάδος `thread`. Η μακροεντολή `F_CENTROID` επιστρέφει στο διάνυσμα πραγματικών τιμών `x` τις συντεταγμένες του βαρύκεντρου του τρέχοντος κελιού `f` της ομάδος `thread`. Στη συνέχεια η μακροεντολή `F_PROFILE` θέτει την τιμή για τη μεταβλητή `i` (του τρέχοντος κελιού `f` της ομάδος `thread`) ίση με  $6.0 * Wt * y * (1.0 - y)$  που είναι η τιμή του παραβολικού προφίλ. Η ενεργοποίηση της συναρτήσεως πρέπει να γίνει μέσα από το περιβάλλον του λογισμικού στο σημείο που τίθενται οι συνοριακές συνθήκες. Το τελευταίο προϋποθέτει ότι ο κώδικας έχει μεταφραστεί και συνδεθεί και ότι έχει δημιουργηθεί η εκτελέσιμη δυναμική βιβλιοθήκη.

**Πίνακας 5-1. Υπόδειγμα συνάρτησης χρήστη για την επιβολή συνοριακής συνθήκης**

---

```
DEFINE_PROFILE(inlet_x_velocity, thread, i)
{
    real x[ND_ND];          /* this will hold the position vector */
    real y;
    face_t f;
    real Wt=1.0;

    begin_f_loop(f, f)
    {
        F_CENTROID(x, f, thread);
        y = x[1];
        F_PROFILE(f, thread, i) = 6.0 * Wt * y * (1.0 - y);
    }
    end_f_loop(f, thread)
}
```

---

Στα πλαίσια της παρούσης οι συναρτήσεις χρήστη χρησιμοποιήθηκαν σχεδόν αποκλειστικά για την έξοδο των δεδομένων σε δυαδική μορφή και ειδική δομή, που επιτρέπει την επικοινωνία με άλλα λογισμικά που κατασκευάστηκαν για την οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων του προβλήματος ροής.

## 5.4 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΟΓΚΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ

Ο επιλύτης του Fluent βασίζεται στην μέθοδο των πεπερασμένων όγκων ελέγχου (ο.ε.) (finite control volume method) για την επίλυση της γενικής εξίσωσης μεταφοράς. Βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι ότι η διακριτοποιημένη εξίσωση προκύπτει από ολοκλήρωση της διαφορικής μορφής σε έναν όγκο ελέγχου, σε αντίθεση με τις μεθόδους πεπερασμένων διαφορών που προσεγγίζουν κατευθείαν τις μερικές παραγώγους στο αριθμητικό πλέγμα. Επίσης η διαφορική εξίσωση είναι γραμμένη στη συντηρητική μορφή με χρήση του διαφορικού τελεστή απόκλισης (divergence), η φυσική σημασία του οποίου είναι καθαρή εκροή (εκροή μείον εισροή) της μεταφερόμενης ποσότητας από τον όγκο ελέγχου. Το τελευταίο είναι σημαντικό αφού η “συντηρητική ιδιότητα” θα μεταφερθεί και στη διακριτοποιημένη εξίσωση, διατηρώντας έτσι τη φυσική σημασία του ισοζυγίου της ποσότητας στον όγκο ελέγχου. Στην συνοπτική παρουσίαση που ακολουθεί η μέθοδος παρουσιάζεται σε διδιάστατο δομημένο αριθμητικό πλέγμα. Η επέκταση στον τριδιάστατο χώρο είναι εύκολη και άμεση<sup>[8]</sup>.

### 5.4.1 Ολοκλήρωση της εξίσωσης μεταφοράς

Η γενική διαφορική εξίσωση μεταφοράς για το βαθμωτό μέγεθος  $\phi$  γράφεται στη συντηρητική της μορφή, ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\phi - \Gamma_\phi \nabla \phi) = S_\phi \quad (5.1)$$

Η πυκνότητα του ρευστού συμβολίζεται με  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  είναι το άνωσμα της ταχύτητας,  $\Gamma_\phi$  είναι ο συντελεστής μεταφοράς λόγω διάχυσης,  $S_\phi$  είναι πρόσθετες πηγές. Ολοκληρώνοντας πάνω σε τυχόντα όγκο ελέγχου  $V$  με σύνορο την επιφάνεια  $A$ :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) dV + \int_V \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\phi - \Gamma_\phi \nabla \phi) dV = \int_V S_\phi dV \quad (5.2)$$

Με χρήση του θεωρήματος απόκλισης Gauss το ολοκλήρωμα όγκου της απόκλισης μετατρέπεται σε κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα στο σύνορο, ενώ οι αγκύλες συμβολίζουν μέση τιμή στον όγκο ελέγχου:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho\phi] \Delta V + \oint_A (\rho\mathbf{u}\phi - \Gamma_\phi \nabla \phi) d\mathbf{A} = [S_\phi] \Delta V \quad (5.3)$$

Η ολοκλήρωση της (5.3) απαιτεί τον ορισμό όγκων ελέγχου. Σύμφωνα με την πρακτική του μετατοπισμένου πλέγματος<sup>[8]</sup>, οι όγκοι ελέγχου των ταχυτήτων είναι μετατοπισμένοι προς τα πίσω και πάνω σε σχέση με τους όγκους ελέγχου των βαθμωτών μεταβλητών (staggered grid), όπως δείχνει το σκαρίφημα στην Εικόνα 5-10. Εφαρμόζοντας την (5.3) στον όγκο ελέγχου του σημείου P, προκύπτει μια αλγεβρική σχέση που περιέχει, εκτός από τον μεταβατικό και τον

μεταβατικό όρο, τις ροές λόγω διάχυσης και συναγωγής (convective and diffusive fluxes) σε όλες τις συνοριακές επιφάνειες:

$$\frac{d}{dt}[\rho\phi]V_p + f_e - f_w + f_n - f_s = [S_\phi]V_p \quad (5.4)$$

$$f_i = C_i + D_i, \quad i = e, w, n, s$$

όπου:

$$C_i = (\rho u)_i A_i \phi_i$$

$$D_i = -\Gamma_i A_i \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i \quad (5.5)$$

Για την πλήρη διακριτοποίηση και την εύρεση του τελικού αλγεβρικού συστήματος εξισώσεων, που θα έχει ως αγνώστους τις τιμές της  $\phi$  στους κόμβους του πλέγματος, απαιτείται ο υπολογισμός των τιμών και των παραγώγων της μεταβλητής  $\phi$  στις επιφάνειες των όγκων ελέγχου, συναρτήσει των τιμών στους γειτονικούς κόμβους. Η ακρίβεια των υπολογισμών η εισαγωγή ψευδούς διαχύσεως στη λύση και η διαγώνια υπεροχή ή όχι του τελικού μητρώου του συστήματος εξαρτώνται ισχυρά από την εκλογή του τελικού σχήματος διακριτοποίησης. Ο επιλύτης του Fluent προσφέρει αρκετές εναλλακτικές μεταξύ των οποίων και οι κάτωθι:

- πρώτης τάξης και δεύτερης σχήμα ανάντι διαφορών, όπου η τιμή της μεταφερόμενης μεταβλητής στην επιφάνεια του ο.ε., τίθεται ίση με την τιμή του κόμβου/ων ανάντι της ροής.
- σχήμα κεντρικών διαφορών, όπου λαμβάνεται ο μέσος όρος των γειτονικών κόμβων σαν η ζητούμενη τιμή στην επιφάνεια του ο.ε.. Το σχήμα αυτό εισάγει σφάλματα φάσης, δηλ. εμφανίζει τρόπους που κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες από την κύρια ταχύτητα της ροής, πράγμα το οποίο έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία αφύσικων ταλαντώσεων στα προφίλ της λύσης, οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν ακόμα και σε αστάθεια.
- σχήμα εκθετικού νόμου (Power Law), όπου οι τιμή στην επιφάνεια του ο.ε. τίθεται χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση της μονοδιάστατης εξίσωσης διάχυσης-συναγωγής.
- σχήματα τύπου QUICK, τα οποία βασίζονται σε κατάλληλα στάθμιση (weighted averaging) των τιμών που προκύπτουν από τα σχήματα κεντρικών και δεύτερης τάξης ανάντι διαφορών. Το QUICK λειτουργεί μόνο σε δομημένα πλέγματα<sup>[31]</sup>.
- σχήμα MUSCL, που βασίζεται στην ίδια αρχή με το προηγούμενο, αλλά είναι τρίτης τάξης και δεν έχει περιορισμό εφαρμογής σε συγκεκριμένο τύπο πλέγματος<sup>[13]</sup>.

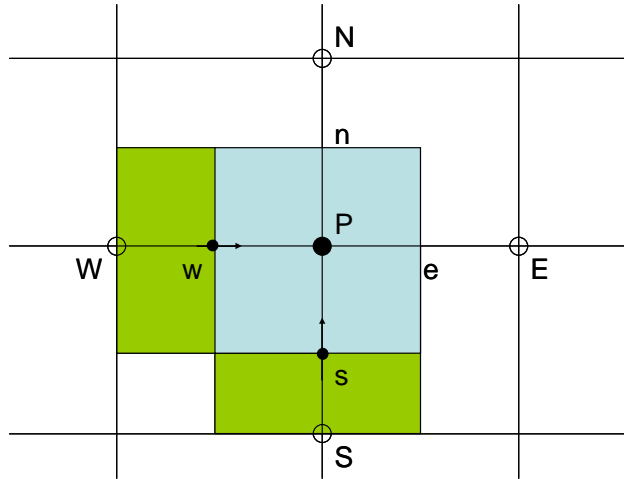
Τέλος όρος πηγής γραμμικοποιείται με βάση την αρνητική βαθμίδα της εξαρτώμενης μεταβλητής ως εξής<sup>[8]</sup>:

$$S_{\phi,p} = SU_\phi + SP_\phi \phi_p, \quad SP_\phi < 0 \quad (5.6)$$

Το τελικό σύστημα εξισώσεων (για δύο πάντα διαστάσεις) που προκύπτει έχει τη μορφή:

$$(A_p - SP)u_p = A_E\phi_E + A_W\phi_W + A_N\phi_N + A_S\phi_S + SU \quad (5.7)$$

Είναι προφανής η ταινιωτή (πενταδιαγώνια στην προκειμένη περίπτωση) μορφή του συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων. Η επίλυση μπορεί να γίνει με χρήση άμεσων ή επαναληπτικών μεθόδων. Η απαλοιφή Gauss με ή χωρίς οδήγηση, η LU παραγοντοποίηση και ο αλγόριθμος TDMA για τριδιαγώνια μητρώα αποτελούν παραδείγματα ορισμένων άμεσων μεθόδων. Η μέθοδος Jacobi, η μέθοδος Gauss Seidel και η εξέλιξή της (μέθοδος διαδοχικής υπερχαλάρωσης) αποτελούν παραδείγματα επαναληπτικών μεθόδων. Το Fluent χρησιμοποιεί μια παραλλαγή χαλαρωμένης μεθόδου Gauss Seidel.



Εικόνα 5-10. Όγκοι ελέγχου στο μετατοπισμένο πλέγμα

#### 5.4.2 Επίλυση του υδροδυναμικού πεδίου

Η εξίσωση μεταφοράς όταν μεταφερόμενες ποσότητες θεωρηθούν οι ταχύτητες και σε περίπτωση διδιάστατης μόνιμης ροής γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + S_\phi \quad (5.8)$$

όπου για:

$$\begin{aligned} \phi = u, \quad S_\phi &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ \phi = v, \quad S_\phi &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Αντίστοιχα με την (5.7) η διακριτοποιημένη μορφή για την  $u$  ταχύτητα είναι:

$$A_p|_p u_p = \sum_k A_k u_k|_p + S U_p - A_p^x (P_e - P_w) \quad (5.10)$$

όπου σκόπιμα διαχωρίζεται ο όρος της πίεσης από τους υπόλοιπους όρους πηγής. Παρατηρείται ότι η (5.10) περιέχει τις πιέσεις στις επιφάνειες των όγκων ελέγχου, οι οποίες είναι άγνωστες. Τίθεται έτσι το πρόβλημα της σύζευξης των υδροδυναμικών μεταβλητών πίεσης και ταχύτητας. Η μόνη διαθέσιμη εξίσωση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι η εξίσωση συνέχειας, η οποία αν από τη διαφορική της μορφή (5.11) ολοκληρωθεί χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία που

περιγράφηκε παραπάνω προκύπτει η διακριτοποιημένη μορφή της (5.12). Το πρόβλημα όμως είναι ότι η (5.12) πάλι δεν περιέχει την πίεση. Τη λύση στο πρόβλημα δίνουν οι επαναληπτικοί αλγόριθμοι τύπου SIMPLE<sup>[7]</sup>, οι οποίοι στηρίζονται στην εκτίμηση κάποιου αρχικού πεδίου πίεσης και στην διαδοχική διόρθωσή του μέχρις ότου οι ταχύτητες που προκύπτουν να ικανοποιούν τις διακριτοποιημένες εξισώσεις συνέχειας και ορμής.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (5.11)$$

$$\rho_e u_e A_e^x - \rho_w u_w A_w^x + \rho_n u_n A_n^y - \rho_s u_s A_s^y = 0 \quad (5.12)$$

Έστω μια εκτίμηση πίεσης  $P^*$  και  $u^*, v^*$  το πεδίο ταχυτήτων που βασίζεται σε αυτή και προκύπτει από τις διακριτοποιημένες εξισώσεις ορμής. Τότε οι σωστές τιμές των πεδίων μπορούν να υπολογιστούν με την πρόσθεση κάποιων τιμών διόρθωσης  $P', u', v'$  ως:

$$\begin{aligned} P &= P^* + P' \\ u &= u^* + u' \\ v &= v^* + v' \end{aligned} \quad (5.13)$$

Οι διορθώσεις ταχύτητας υπολογίζονται αφαιρώντας τις διακριτοποιημένες εξισώσεις ορμής για την εκτίμηση και τη σωστή ταχύτητα και περιέχουν τις διορθώσεις πίεσης στα κέντρα των όγκων ελέγχου. Αντίστοιχα οι διορθώσεις της πίεσης υπολογίζονται από την (5.12) αφού σε αυτήν αντικατασταθούν οι σωστές τιμές για τις ταχύτητες. Για την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας η σωστή τιμή (εκτίμηση + διόρθωση) είναι:

$$u_p = u_p^* + u_p' = u_p^* + \frac{A_{ew}}{A_p} (P_w' - P_p') \quad (5.14)$$

Τελικά προκύπτει η (5.15) απ' όπου μπορούν να υπολογιστούν οι διορθώσεις πίεσης:

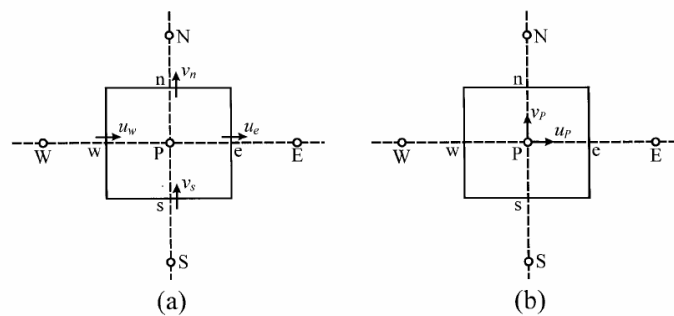
$$A_p P_p' = \sum_i A_i P_i' + S_m \quad (5.15)$$

Ο όρος  $S_m$  ταυτίζεται με τη διακριτοποιημένη εξίσωση συνέχειας εκφρασμένη σε όρους εκτίμησης ταχύτητας ( $u^*, v^*$ ) και με αρνητικό πρόσημο. Όταν  $S_m = 0$  η εξίσωση συνέχειας θα ικανοποιείται από τις εκτιμήσεις ταχυτήτων, οπότε η μέθοδος θα έχει συγκλίνει. Τα βήματα του αλγορίθμου είναι:

1. Εκτίμηση πεδίου πίεσης  $P^*$
2. Επίλυση εξισώσεων ορμής για  $u^*, v^*$
3. Επίλυση εξίσωσης διόρθωσης πίεσης (5.15)
4. Υπολογισμός σωστής πίεσης  $P = P^* + P'$
5. Διόρθωση ταχυτήτων (5.14)
6. Θέσε  $P^* = P$  και επανέλαβε από το πρώτο βήμα

Εφόσον χρησιμοποιείται μετατοπισμένο πλέγμα οι πιέσεις στις επιφάνειες των ο.ε. που εμφανίζονται στις εξισώσεις ορμής πρέπει να υπολογιστούν με κάποιο είδος παρεμβολής. Ο

επιλύτης του Fluent χρησιμοποιεί μη μετατοπισμένο πλέγμα για αποφυγή της πολυπλοκότητας που δημιουργεί η αποθήκευση γεωμετρικών στοιχείων για δύο πλέγματα. Οι τύπου SIMPLE αλγόριθμοι δε διαφοροποιούνται σημαντικά ως προς την εκτέλεσή τους σε μη μετατοπισμένα πλέγματα. Η μόνη διαφοροποίηση έγκειται στον υπολογισμό των ταχυτήτων και πιέσεων στις επιφάνειες των ο.ε. προς αποφυγήν του φαινομένου δημιουργίας ταλαντούμενων πεδίων<sup>[1],[8]</sup>. Το φαινόμενο αυτό (σε μη μετατοπισμένο πλέγμα πάντα) προκύπτει αν χρησιμοποιηθεί απλή γραμμική παρεμβολή για τον υπολογισμό των επιφανειακών πιέσεων στην (5.10) και έχει σα συνέπεια η τελική μορφή της (5.10) να περιέχει πιέσεις σε εναλλασσόμενους κόμβους και όχι σε διαδοχικούς. Έτσι ένα κυματοειδές πεδίο πίεσης θα ληφθεί σαν ομοιόμορφο και θα δώσει μηδενική ροή στους επιμέρους ο.ε.. Η τεχνική που χρησιμοποιείται για την αποφυγή αυτού του φαινομένου ονομάζεται *παρεμβολή ορμής (momentum interpolation)*<sup>[9]</sup> και βασίζεται στην παραδοχή ότι οι επιφανειακές ταχύτητες υπακούουν μια σχέση παρόμοια με την (5.10) (επιλυμένη ως προς  $u_p$ ), όπου όμως όλοι οι συντελεστές θα υπολογίζονται με γραμμική παρεμβολή των αντίστοιχων συντελεστών των εξισώσεων που ισχύουν για τις ταχύτητες στα βαρύκεντρα των ο.ε., με τον όρο διαφοράς της πίεσης να αντικαθίσταται από την διαφορά πίεσης στα βαρύκεντρα των ο.ε..



Εικόνα 5-11. Όγκοι ελέγχου στο μετατοπισμένο και μη πλέγμα

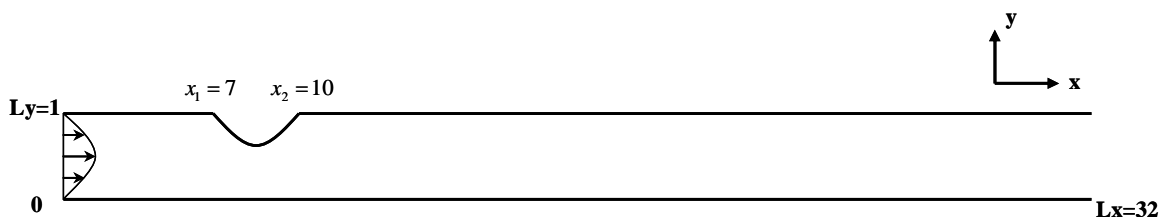
Η παρεμβολή είναι συνήθως γραμμική με συντελεστές που εξαρτώνται από τις αποστάσεις των επιφανειών από τα γειτονικά βαρύκεντρα. Σε κάποιες εξελίξεις της μεθόδου<sup>[6]</sup> η παρεμβολή γίνεται χρησιμοποιώντας πολυώνυμα υψηλότερου βαθμού (π.χ. δευτέρου βαθμού) με παράλληλη εισαγωγή upwinding (ανάντι διαφόρισης), όπως ακριβώς στο σχήμα QUICK. Αποτέλεσμα αυτού είναι η αισθητή βελτίωση της ακρίβειας σε προβλήματα με ισχυρό συναγωγικό χαρακτήρα.

## 5.5 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΑΠΛΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΡΟΗΣ ΣΕ ΑΓΩΓΟ

Για τον έλεγχο καλής λειτουργίας του λογισμικού επιλύθηκε ένα απλό πρόβλημα ροής σε αγωγό χαμηλού αριθμού Reynolds. Το πρόβλημα όπως αναφέρεται στην <sup>[2]</sup> αφορά ροή σε διδιάστατο αγωγό με στενωτική περιοχή κοντά στην είσοδο και το μέγεθος σύγκρισης είναι η πίεση στο κάτω τοίχωμα.

### 5.5.1 Γεωμετρία και λεπτομέρειες του προβλήματος

Στην Εικόνα 5-12 φαίνεται η γεωμετρία του προβλήματος. Η λόγος επιμήκους του αγωγού είναι 1/32, ενώ η στενωτική περιοχή περιγράφεται από τη συνάρτηση:  $y(x) = 3.0 - \sqrt{2.5^2 - (x - 7 - 1.5)^2}$ .



Εικόνα 5-12. Γεωμετρία στενωτικού αγωγού

Επιλύονται οι αδιαστατοποιημένες εξισώσεις Navier Stokes (5.16) για μόνιμη, συνεκτική ροή αριθμού Reynolds 180.

$$\mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla p = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (5.16)$$

Στην είσοδο η ταχύτητα θεωρείται ότι έχει μόνο οριζόντια συνιστώσα παραβολικού προφίλ σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$u(y) = 6 \cdot W_t \cdot \left( L_y - y \right) \frac{y}{L_y} \quad (5.17)$$

Σαν οριακή συνθήκη εξόδου τίθεται:

$$p = 0, x = L_x \quad (5.18)$$

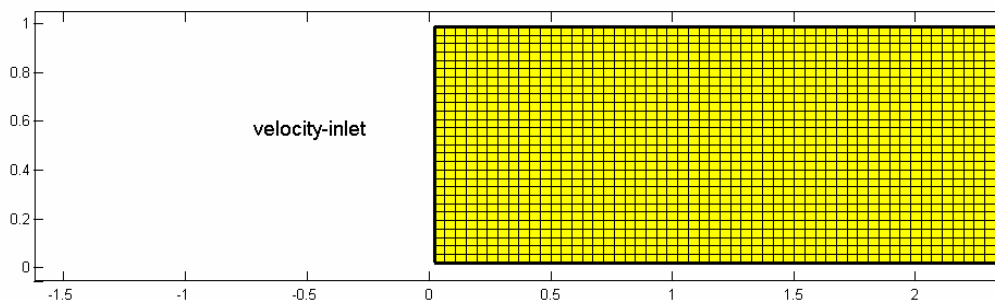
Ενώ η συνθήκη μη ολίσθησης για τα στερεά τοιχώματα είναι:

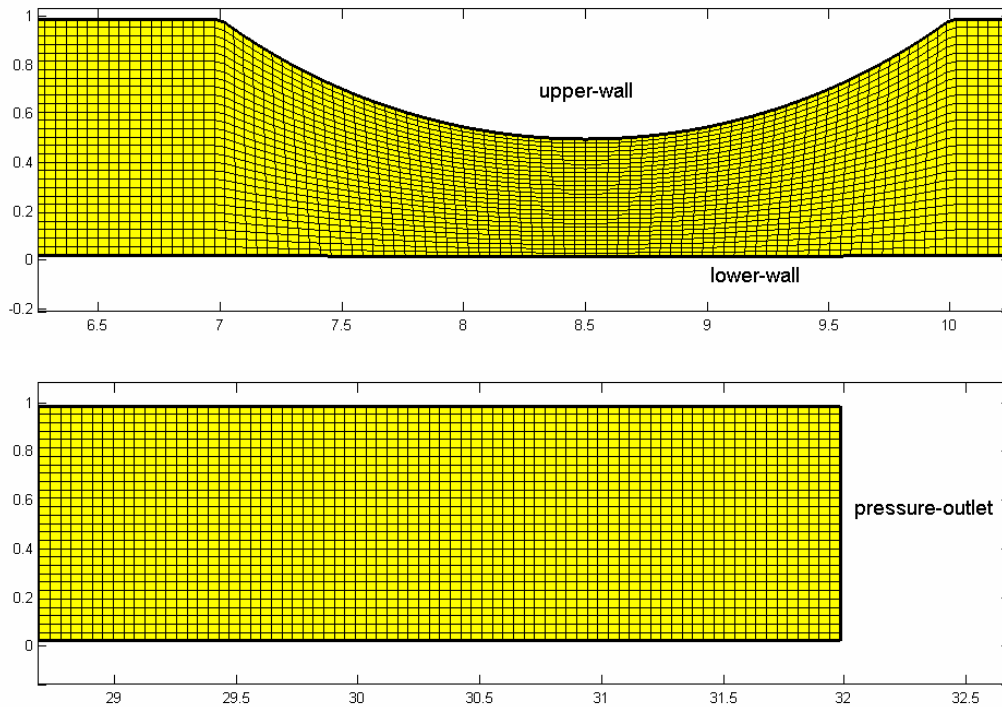
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.19)$$

όπου  $\mathbf{n}$  το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια των τοιχωμάτων.

### 5.5.2 Αριθμητικό πλέγμα

Χρησιμοποιήθηκε δομημένο πλέγμα πυκνότητας 739x29 στοιχείων, ανάλογης του λόγου επιμήκους του αγωγού. Η κατασκευή έγινε ξεκινώντας από διακριτοποιημένα όρια με χρήση της μεθόδου Thomas - Middlecoff στο λογισμικό Gambit. Σημαντική είναι επίσης η δεικτοδότηση - σήμανση των επιφανειών που θα χρησιμοποιηθούν για την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών μετέπειτα στο Fluent. Στην Εικόνα 5-13 φαίνονται τρία χωρία του πλέγματος που αντιστοιχούν στην είσοδο, έξοδο του ρευστού από τον αγωγό και στη στενωτική περιοχή, μαζί με τη σήμανση των επιφανειών.

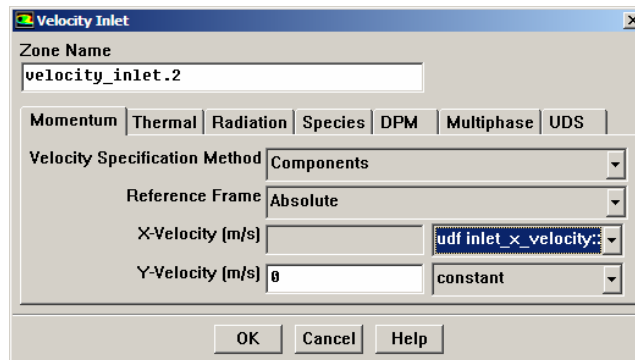




Εικόνα 5-13. Τμήματα πλέγματος στην είσοδο, στένωση και έξοδο

### 5.5.3 Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

Η επιβολή παραβολικού προφίλ στην είσοδο του αγωγού έγινε με χρήση συνάρτησης χρήστη παρόμοιας με αυτή στον Πίνακα 5-1. Η επιβολή στα στοιχεία της σεσημασμένης επιφάνειας “velocity-inlet” γίνεται μέσα από το περιβάλλον διεπαφής στο παράθυρο διαλόγου που φαίνεται στην Εικόνα 5-14.



Εικόνα 5-14. Διάλογος για την επιβολή οριακής συνθήκης ταχύτητας εισόδου

Με όμοιο τρόπο επιβάλλονται και οι οριακές συνθήκες τοιχώματος και εξόδου, χωρίς να χρειάζεται για αυτές η συγγραφή συναρτήσεων χρήστη, στα στοιχεία των επιφανειών “upper-wall”, “lower-wall” και “pressure-outlet”.

Χρησιμοποιήθηκαν το σχήμα διακριτοποίησης QUICK με δεύτερης τάξης παρεμβολή για τον υπολογισμό των επιφανειακών τιμών πίεσης και ο αλγόριθμος SIMPLE για τη σύζευξη των υδροδυναμικών μεταβλητών μεταξύ τους. Οι συντελεστές υποχαλάρωσης ήταν 0.6 για την πίεση και 0.8 για τις ταχύτητες.

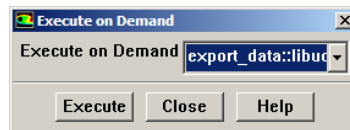


Οι αδιαστατοποίηση των εξισώσεων επιτυγχάνεται δημιουργώντας ένα πλασματικό ρευστό μοναδιαίας πυκνότητας και ιξώδους:  $\frac{1}{Re} = \frac{1}{180} = 0.005555$ .

#### 5.5.4 Συλλογή - επεξεργασία αποτελεσμάτων

Για την επεξεργασία των αποτελεσμάτων και την οπτικοποίηση της ροής δημιουργήθηκαν συναρτήσεις χρήστη μετατροπής σε δομημένο τρόπο αποθήκευσης, σύμφωνα με την πρώτη μέθοδο δεικτοδότησης κατά γραμμές που αναφέρθηκε πιο πάνω. Στον Πίνακα 5-2 δίνεται ένα ενδεικτικό τμήμα του κώδικα δεικτοδότησης σε δομημένο τρόπο αποθήκευσης. Η χρήση των μακροεντολών βρόχου που παρέχει ο επιλύτης διευκολύνουν σημαντικά τη συγγραφή. Αφού ληφθεί ο δείκτης του χωρίου, ξεκινά η εκτέλεση δύο βρόχων: ο εξωτερικός επιδρά σε όλες τις ομάδες κελιών του χωρίου, και ο εσωτερικός σε κάθε κελί της τρέχουσας ομάδας. Η μεταβλητή  $c$  είναι ο αύξων αριθμός του τρέχοντος κελιού. Ακολουθούν οι υπολογισμοί των δεικτών  $i, j$  την πρώτη μέθοδο της Εικόνας 5-2. Εν συνεχεία υπολογίζονται τα μεγέθη της στροβιλότητας και του μέτρου του διανύσματος της ταχύτητας.

Η συνάρτηση συνδέεται με τον επιλύτη, έτσι ώστε η εκτέλεση να γίνεται κατά βούληση (on demand) και όχι σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο του εξωτερικού βρόχου επίλυσης. Αυτό βέβαια προϋποθέτει ότι ο επιλύτης θα βρίσκεται σε κατάσταση αναμονής χωρίς να εκτελεί κάποια άλλη εργασία. Η σύνδεση – εκτέλεση γίνεται μέσω του διαλόγου στην Εικόνα 5-15.



Εικόνα 5-15. Εκτέλεση συνάρτησης χρήστη κατά βούληση

Πίνακας 5-2. Υπόδειγμα κώδικα δεικτοδότησης σε δομημένο πλέγμα

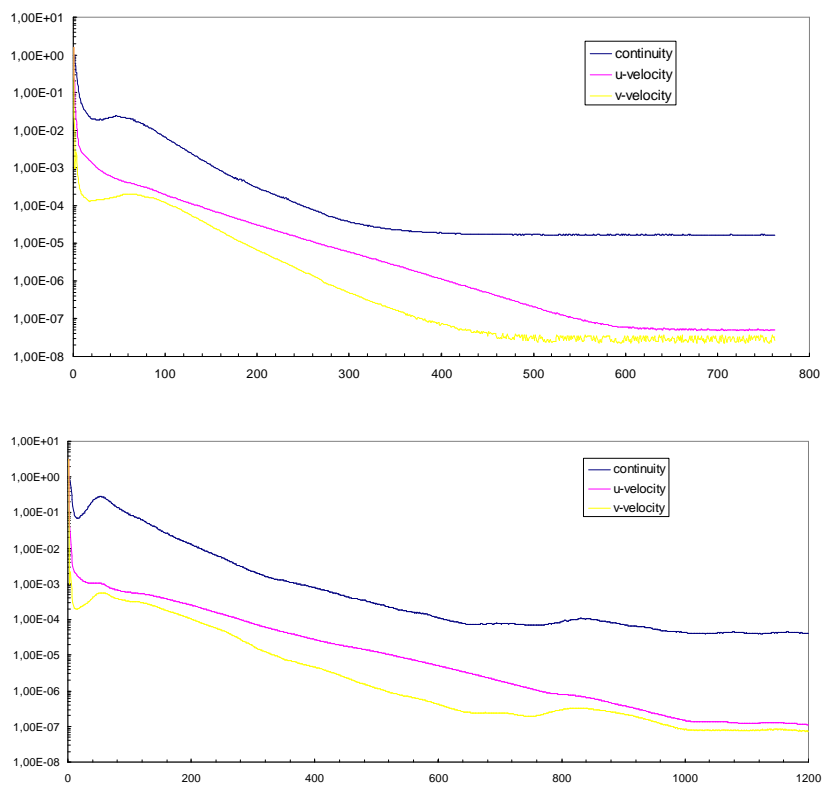
```
// Get variables from unstructured solver
// and store them in structured grid.
// Calculate vorticity, velocity magnitude
d=Get_Domain(1);
thread_loop_c(t,d)
{
  begin_c_loop_all(c,t)
  {
    C_CENTROID(xc,c,t);

    dd=div(c,NJ);
    i=dd.quot;
    j=c-i*NJ;
    X[i][j]=xc[0];
    Y[i][j]=xc[1];
    P[i][j]=C_P(c,t);
    U[i][j]=C_U(c,t);
    V[i][j]=C_V(c,t);
    vort[i][j]=C_DVDX(c,t)-C_DUDY(c,t);
    velmag[i][j]=sqrt(pow(U[i][j],2)+pow(V[i][j],2));
  }
  end_c_loop_all(c,t)
}
```

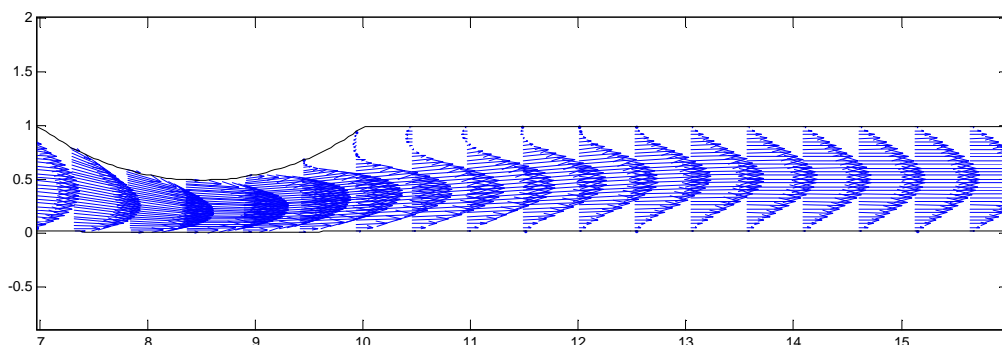
### 5.5.5 Αποτελέσματα

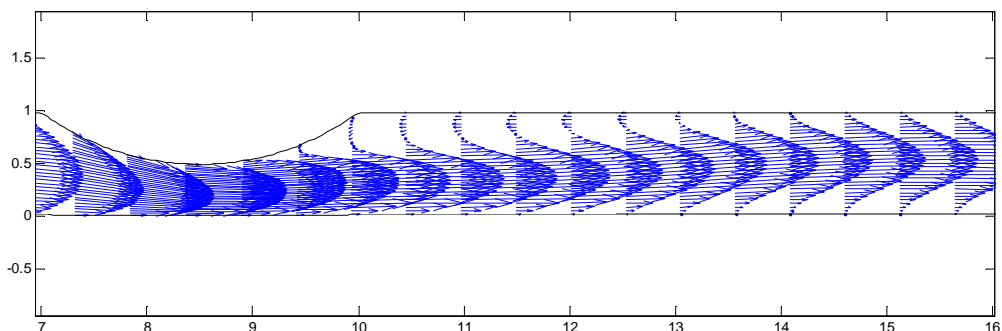
Η σύγκλιση της μεθόδου SIMPLE για  $W_t = 1$  είναι πλήρως ικανοποιητική και όπως φαίνεται στο ημιλογαριθμικό διάγραμμα στην Εικόνα 5-16, το υπόλοιπο της οριζόντιας ταχύτητας είναι το τελευταίο που σταματά να μειώνεται περίπου στην  $600^{\text{η}}$  επανάληψη. Το απόλυτο κριτήριο για την παύση των επαναλήψεων είχε τεθεί και για τις τρεις μεταβλητές ίσο με  $1.7E-5$ . Πιο αργή είναι η σύγκλιση για  $W_t = 2$  με τα υπόλοιπα να φθάνουν σε σταθερές τιμές στην  $1000^{\text{η}}$  περίπου επανάληψη. Το απόλυτο κριτήριο για την παύση των επαναλήψεων στην περίπτωση αυτή είναι ελαφρώς μεγαλύτερο και ίσο με  $4E-5$ .

Στην Εικόνα 5-17 φαίνονται τα ανύσματα ταχύτητας κοντά στη στένωση για τις δύο τιμές της παραμέτρου  $W_t$ , που καθορίζει τη μέση τιμή της ταχύτητας εισόδου στον αγωγό.



Εικόνα 5-16. Ιστορικά σύγκλισης για  $W_t = 1$  και  $W_t = 2$  αντίστοιχα





Εικόνα 5-17. Ανύσματα ταχύτητας για  $W_t = 1$  και  $W_t = 2$  αντίστοιχα

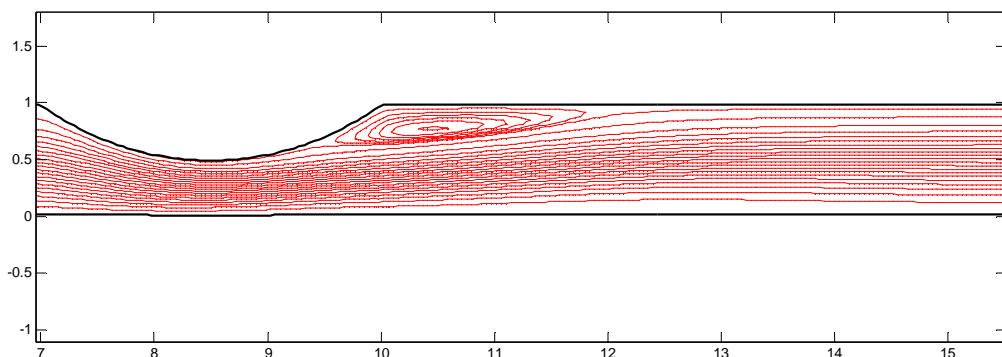
Τα διανύσματα έχουν σχεδιαστεί σε συγκεκριμένες θέσεις έτσι ώστε να δίνεται μια σαφής εικόνα της ροής κοντά στο στενωτικό κομμάτι του αγωγού. Διακρίνεται και η δημιουργία μιας μικρής περιοχής στροβιλισμού, η οποία είναι μεγαλύτερη στη δεύτερη περίπτωση. Οι στροβιλισμοί φαίνονται καλύτερα στην Εικόνα 5-18, όπου έχουν σχεδιαστεί οι ισοσταθμικές καμπύλες της ροϊκής συνάρτησης για τις δύο περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών εισόδου. Η ροϊκή συνάρτηση υπολογίστηκε μετά τη μετατροπή των αποτελεσμάτων σε δομημένο πλέγμα μέσα στη συνάρτηση χρήστη και με ολοκλήρωση ξεκινώντας από το άνω - δεξιά κάτω τοίχωμα του αγωγού, όπου αποδίδεται αυθαίρετα η τιμή μηδέν. Στον Πίνακα 5-3 παρατίθεται το ανάλογο απόσπασμα υπολογιστικού κώδικα. Οι μετρικές του πλέγματος υποτίθεται ότι έχουν υπολογιστεί σε προηγούμενο βήμα. Για λόγους πληρότητας υπενθυμίζεται ότι η ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$  για διδιάστατη, ασυμπίεστη και μόνιμη ροή, είναι το βαθμωτό πεδίο του οποίου η περιστροφή είναι ίση με το διάνυσμα της ταχύτητας:

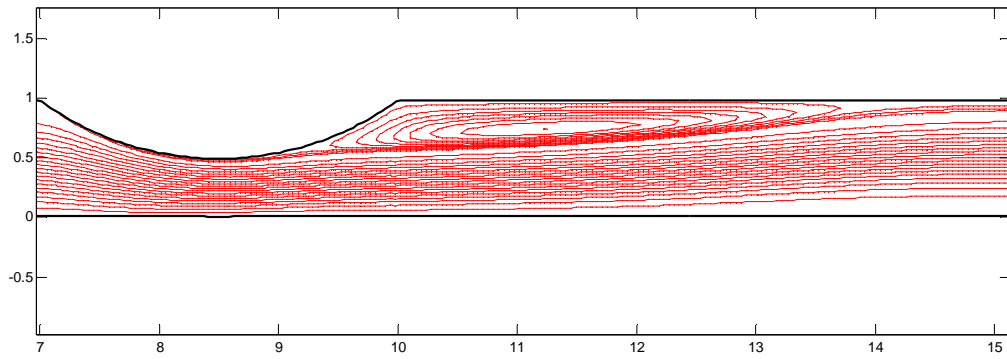
$$\mathbf{u} = \nabla \times \Psi \quad (5.20)$$

Από τον ορισμό προκύπτουν άμεσα οι εξισώσεις υπολογισμού:

$$\begin{aligned} u &= \partial_y \Psi \\ v &= -\partial_x \Psi \end{aligned} \quad (5.21)$$

οι οποίες πρέπει να ολοκληρωθούν με προσέγγιση αυθαίρετης σταθεράς.





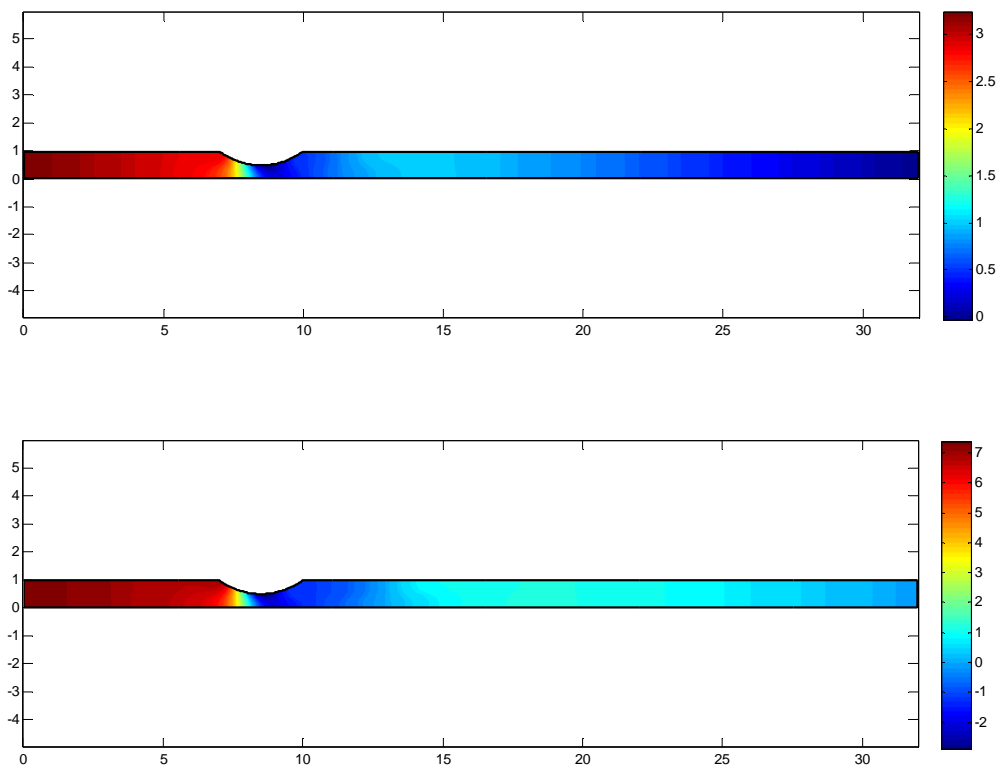
Εικόνα 5-18. Ροϊκές γραμμές για  $W_i = 1$  και  $W_i = 2$  αντίστοιχα

Οι κατανομές της πίεσης κατά μήκος του αγωγού για τις δύο περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών στην είσοδο φαίνονται με τη μορφή χρωματισμένων ισοσταθμικών καμπυλών στην Εικόνα 5-19. Διακρίνονται οι έντονες κλίσεις στη στενωτική περιοχή που έχουν ίδια μορφή και στις δύο περιπτώσεις με μεγαλύτερες όμως τιμές στη δεύτερη περίπτωση λόγω της μεγαλύτερης επιβαλλόμενης παροχής στην είσοδο, επιβεβαιώνοντας έτσι την ισχύ του νόμου Hagen-Poiseuille.

Πίνακας 5-3. Υπολογισμός ροϊκής συνάρτησης

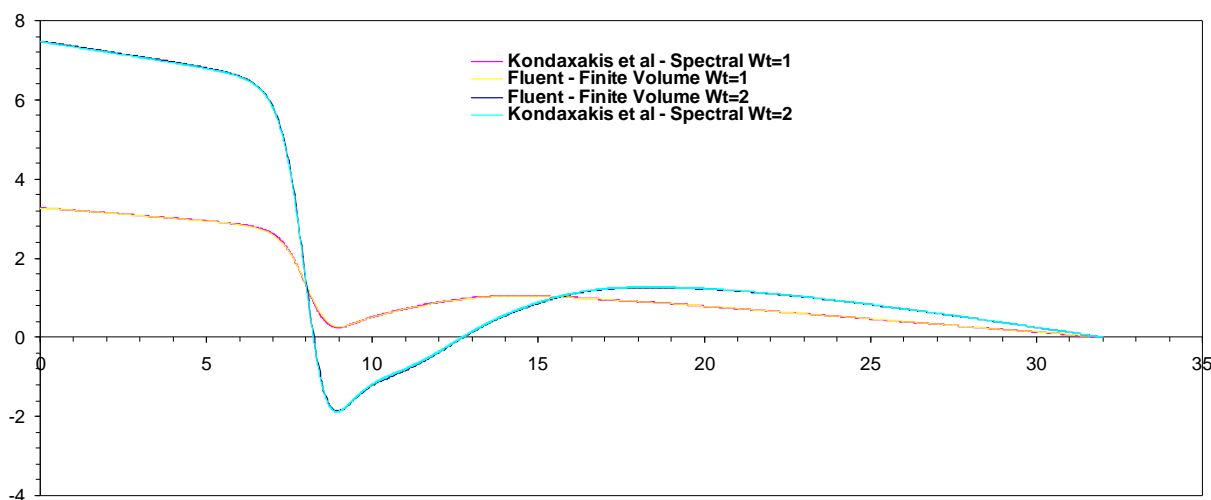
```
//
//Calculate stream function
//

for (i=0;i<=NI-1;i++){
  if (i==0){
    PSI[i][0]=0.0;
    PSIM1=0.0;
  }else{
    PSI[i][0]=PSIM1-0.5*
    (-XKSI[i][0]*V[i][0]+YKSI[i][0]*U[i][0]-
    XKSI[i-1][0]*V[i-1][0]+YKSI[i-1][0]*U[i-1][0]);
    PSIM1=PSI[i][0];
  }
  for(j=0;j<=NJ-1;j++){
    if (j>0){
      Dy1 = 1.0;
      Dyy2 = (pow(Y[i][j],2) - pow(Y[i][j-1],2))/2.0;
      CU = ((-XETA[i][j]*V[i][j]+YETA[i][j]*U[i][j]) -
      (-XETA[i][j-1]*V[i][j-1]+YETA[i][j-1]*U[i][j-1]))/Dy1;
      PSI[i][j] = PSI[i][j-1] + Dy1*((-XETA[i][j-1]*V[i][j-1] +
      YETA[i][j-1]*U[i][j-1]));
    }
  }
}
```



Εικόνα 5-19. Κατανομές πίεσης στον αγωγό για  $W_i = 1$  και  $W_i = 2$  αντίστοιχα

Τέλος στην Εικόνα 5-20 συγκρίνονται οι κατανομές πίεσης στο κάτω τοίχωμα του αγωγού για τις δύο τιμές της παραμέτρου για την ταχύτητα εισόδου, με τις κατανομές στην αναφορά [2]. Παρατηρείται η ισχυρή πτώση πίεσης στη στένωση και σαν αποτέλεσμα αυτής η απόκλιση από τη γραμμική συμπεριφορά. Η σύμπτωση των αποτελεσμάτων και στις δύο περιπτώσεις είναι πάρα πολύ καλή, επιβεβαιώνοντας την ορθή λειτουργία του επιλύτη του Fluent και της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων ελέγχου.



Εικόνα 5-20. Συγκρίσεις κατανομών πίεσης στο κάτω τοίχωμα του αγωγού για  $W_i = 1$  και  $W_i = 2$

## 5.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρουσιάστηκε ο επιλύτης του εμπορικού λογισμικού Fluent. Έγινε σύντομη αναφορά στις δυνατότητες και στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων ελέγχου. Σχολιάστηκε ειδικά ο τρόπος χειρισμού των αριθμητικών πλεγμάτων και ο τρόπος επικοινωνίας με τον επιλύτη μέσω των συναρτήσεων χρήστη. Επιλύθηκε ένα απλό πρόβλημα εσωτερικής ροής σε αγωγό, παρουσιάστηκαν και συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα με λύση από τη διεθνή βιβλιογραφία. Διαπιστώθηκε η ορθή λειτουργία του επιλύτη και των συναρτήσεων που κατασκευάστηκαν, καθώς και η πολύ καλή σύμπτωση των αποτελεσμάτων με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν ως λύση αναφοράς.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Date AW, *Solution of Navier–Stokes equations on non-staggered grid*, International Journal for Heat and Mass Transfer, Vol. 36, pp. 1913–1922, (1993).
- [2] Kondaxakis, D., Tsangaris, S., *Aerodynamic and aeroacoustic analysis of a pulsating internal flow by a multidomain weak collocation spectral method*, Fluid Dynamics Research, Vol. 40, pp. 311–342, (2008).
- [3] Leonard B.P., *A stable accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation*, Computational Methods in Applied Mechanical Engineering, Vol 19, pp. 59–98, (1979).
- [4] Leonard B.P., *The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection*, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., Vol 88, pp. 17–74, (1991).
- [5] Majumdar S., *Role of underrelaxation in momentum interpolation for calculation of flow with non-staggered grids*, Numerical Heat Transfer, Vol. 13, pp. 125–132, (1988).
- [6] Papageorgakopoulos J., Arampatzis G., Assimacopoulos D., Markatos N.C., *Enhancement of the momentum interpolation method on non-staggered grids*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 33, pp 1–22, (2000).
- [7] Patankar SV, Spalding DB., *A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows*, International Journal for Heat and Mass Transfer, 15, pp. 1787–1806, (1972).
- [8] Patankar SV., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere: New York, (1980).
- [9] Rhie CM, Chow WL, *A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation*, AIAA Journal, Vol. 21, pp 1525–1532, (1983).
- [10] Sorenson R.L., Steger J.L., *Numerical Generation of two dimensional Grids by the use of Poisson Equations with Grid Control at Boundaries*, WNGG-NASA, 449, (1980).
- [11] Thomas P.D., Middlecoff J.F., *Direct Control of the Grid Point distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations*, AIAA Journal, Vol. 18, 6, (1980).
- [12] Van Doormal JP, Raithby GD., *Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows*, Numerical Heat Transfer, 7, pp. 147–163, (1984).
- [13] van Leer B., *Toward the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A Second Order Sequel to Godunov's Method*, Journal of Computational Physics, Vol. 32, pp. 101–136, (1979).
- [14] Μαρκάτος Ν., Ασημακόπουλος Δ., *Υπολογιστική Ρευστοδυναμική*, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα (1995).
- [15] Μπεργελές Γ., *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα (1994).
- [16] Τσαγγάρης Σ., *Μηχανική των Ρευστών*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα (1995).

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΚΑΙ Η ΡΟΗ ΣΤΟΝ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟ ΦΩΝΗΤΙΚΟ ΣΩΛΗΝΑ

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται και αναλύονται προσεγγίσεις της ακουστικής διάδοσης στον ανθρώπινο φωνητικό σωλήνα. Αρχικά περιγράφεται η ανατομία και φυσιολογία όλου του συστήματος παραγωγής φωνής. Στη συνέχεια γίνεται μια σύντομη ανασκόπηση των εργασιών που έχουν γίνει για τη μελέτη και τη μοντελοποίηση όλων ή επιμέρους στοιχείων του συστήματος. Γίνεται αναφορά στο περίφημο μοντέλο πηγής – φίλτρου και στην πιο διαδεδομένη μοντελοποίηση της πηγής: το μοντέλο των Liljencrants–Fant. Η τελευταία παρουσιάζεται αναλυτικά καθότι χρησιμοποιείται αργότερα στο κεφάλαιο. Ακολούθως γίνεται αναφορά στα μονοδιάστατα μοντέλα ακουστικής διάδοσης στο φωνητικό σωλήνα και ο τρόπος εισαγωγής της δεύτερης διάστασης σαν όρος πηγής στις εξισώσεις (δονούμενα τοιχώματα). Επισημαίνεται η αναλογία με τα μοντέλα πλήρους διαχωρισμού ακουστικού πεδίου και ροής. Σε μια προσπάθεια εισαγωγής πληροφορίας από το πρόβλημα ροής, προστίθενται στις εξισώσεις νέοι όροι ακουστικών πηγών. Στο σημείο αυτό έγκειται και η πρωτοτυπία της παρούσης εργασίας, αφού η πηγή πια θεωρείται κατανεμημένη σε όλο το σωλήνα και δεν εισάγεται μόνο σαν οριακή συνθήκη στο άκρο της γλωττίδας, όπως στα μοντέλα του Portnoff και του Maeda και στις παραλλαγές αυτών. Στη συνέχεια για την επιβεβαίωση της ορθότητας της προσέγγισης προσομοιώνεται το πεδίο ροής για το φώνημα /u/ σε μια διδιάστατη γεωμετρία φωνητικού σωλήνα, υπολογίζονται οι ακουστικές πηγές, εισάγονται στο μονοδιάστατο μοντέλο διάδοσης και συγκρίνονται οι λαμβανόμενες ακουστικές πιέσεις στα χείλη με την περίπτωση εφαρμογής της διπολικής πηγής μόνο στη γλωττίδα.

## 6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το πρόβλημα περιγραφής της φυσικής, αλλά και της μοντελοποίησης των φαινομένων που επικρατούν στον ακουστικό σωλήνα είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο, πολυσύνθετο με την έρευνα για αυτό να έχει ξεκινήσει αρκετά παλιά, εδώ και εξήντα έτη. Ο λόγος είναι η ταυτόχρονη εμπλοκή σε αυτό αρκετών επιστημονικών πεδίων με αποτέλεσμα να είναι προαπαιτούμενη ευρεία γνώση τουλάχιστο τριών κλάδων για την ενασχόληση με αυτό. Έτσι για την κατανόηση της φυσικής λειτουργίας της παραγωγής φωνής απαιτείται γνώση ανατομίας του άνω και κάτω αναπνευστικού συστήματος του ανθρώπου σε συνδυασμό με γνώσεις μηχανικής συνεχούς μέσου, ενώ για την ψηφιακή αναπαράσταση – μοντελοποίηση απαιτούνται τουλάχιστο γνώσεις επεξεργασίας σήματος και συστημάτων. Σίγουρο είναι πάντως πως από την οπτική γωνία ενός μόνο κλάδου είναι πολύ δύσκολη η απόκτηση ολοκληρωμένης εικόνας για τις πολύπλοκες διεργασίες που λαμβάνουν χώρα στο φωνητικό σωλήνα. Επίσης οι ερευνητικοί στόχοι ποικίλουν από κλάδο σε κλάδο με αποτέλεσμα να υπάρχει κάποια εξειδίκευση ως προς αυτή τη συνιστώσα, για την ταυτόχρονη εμπλοκή τους. Έτσι αν ο ερευνητικός στόχος είναι για παράδειγμα η παραγωγή συνθετικής φωνής, τότε προφανώς το πεδίο της επεξεργασίας σήματος θα έχει τον κυρίαρχο ρόλο στη έρευνα, χωρίς όμως να αποκλείονται τελείως τα άλλα. Αν ο ερευνητικός στόχος είναι η περιγραφή της φυσικής των φαινομένων της αεροροής στο φωνητικό σωλήνα, τότε η μηχανική συνεχούς μέσου και η μηχανική ρευστών θα έχουν τον κυρίαρχο ρόλο. Τέλος



είναι πεποίθηση του γράφοντος ότι η γνώση της ανατομίας και των οργάνων που λαμβάνουν ρόλο και συνεισφέρουν στη φώνηση είναι σημαντικότερη και δεν μπορεί να παραληφθεί, ανεξάρτητα από τον εκάστοτε ερευνητικό στόχο. Η ποικιλία των ερευνητικών στόχων και η εμπλοκή και των τριών σημαντικών επιστημονικών πεδίων σε αυτούς συνηγορεί στο γεγονός ότι η περιοχή είναι πολύ ενεργή ακόμη και σήμερα με πληθώρα ανακοινώσεων και δημοσιεύσεων, ενώ ακόμα υπάρχουν σημεία τα οποία δεν έχουν πλήρως διευκρινιστεί.

Ξεκινώντας μια μικρή βιβλιογραφική περιήγηση της επιστημονικής δραστηριότητας στο χώρο, θα επεσήμανε κανείς τις πρώτες προσπάθειες για μοντελοποίηση των Fant<sup>[5]</sup>, Flanagan<sup>[9]</sup>, οι οποίοι βασιζόμενοι στη γραμμική ακουστική θεωρία, προτείνουν ένα υπεραπλουστευμένο μοντέλο παραγωγής φωνής, βασιζόμενο στην εξίσωση Webster. Η ψηφιακή αναπαράσταση του μοντέλου αυτού καταλήγει στο μονοδιάστατο γραμμικό μοντέλο πηγής – φίλτρου, το οποίο υποθέτει ότι η μεταβαλλόμενη παροχή όγκου στην γλωττίδα είναι η μόνη ακουστική πηγή και ότι ο ηχητικός σωλήνας δρα ως παθητικό ακουστικό φίλτρο ώστε η κυματομορφή φωνής στην έξοδο να είναι το συνελκτικό ολοκλήρωμα της κυματομορφής εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου. Το μοντέλο αυτό και η αντίστοιχη αναπαράστασή του στο πεδίο της συχνότητας προβλέπει σωστά την παραγωγή φωνηέντων και αποτέλεσε το ξεκίνημα για την εφαρμοσμένη γραμμική τεχνολογία φωνής.

Ακολούθησαν ισχυρές θεωρητικές και πειραματικές επιβεβαιώσεις για την ύπαρξη σημαντικών διδιάστατων και τριδιάστατων αεροδυναμικών μη γραμμικών φαινομένων κατά τη διαδικασία παραγωγής φωνής τα οποία δεν μπορούν να εξηγηθούν και να προβλεφθούν σωστά από το μονοδιάστατο γραμμικό μοντέλο. Ο Teager<sup>[47]</sup> με πειραματικές δοκιμές παρατήρησε αποκολλήσεις της ροής από τα τοιχώματα του φωνητικού σωλήνα και μετάβαση από στρωτή σε μεταβατική – ανομοιόμορφη ροή και επιβεβαίωση την ύπαρξη στροβιλισμών. Ο Kaiser<sup>[18]</sup> συνέβαλλε σημαντικά στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων αυτών, ενώ οι McGowan<sup>[28]</sup>, Hirschberg<sup>[11]</sup> διατύπωσαν την άποψη ότι οι παρατηρούμενοι στροβιλισμοί στη γλωττίδα αποτελούν και αυτοί ακουστικές πηγές και συμβάλλουν στη δημιουργία του ήχου που εξέρχεται από τον ακουστικό σωλήνα. Ο Sinder<sup>[39]</sup> χρησιμοποίησε αρχές αεροδυναμικής για τη μοντελοποίηση συριστικών ήχων.

Η αλληλεπίδραση ρευστού – στερεού (fluid – structure interaction) και η πρώτη ολοκληρωμένη μοντελοποίηση της πηγής γίνεται από τους Ishizaka, Flanagan στο [14], οι οποίοι με τη χρήση μη γραμμικών ταλαντωτών επιχειρούν να προσομοιώσουν τις κινήσεις της γλωττίδας κατά τη διέλευση δέσμης αέρα από αυτή, ξεφεύγοντας από τα εμπειρικά μοντέλα παραμετρικών εξισώσεων του Fant. Ο συνδυασμός τους με τις απλές εξισώσεις ακουστικής διάδοσης οδήγησε σε κάποια από τα πιο ολοκληρωμένα μονοδιάστατα μοντέλα ακουστικής διάδοσης στο φωνητικό σωλήνα, όπως αυτά των Portnoff<sup>[32]</sup> και Maeda<sup>[27]</sup>. Η αριθμητική επίλυση των τελευταίων οδηγεί σε ένα σχετικά γρήγορο και ακριβή συνθέτη απλών ακολουθιών φωνημάτων.

Πρωτοπόρος θεωρείται η προσπάθεια του Thomas<sup>[48]</sup> να επιλύσει τις εξισώσεις Navier – Stokes και να τις χρησιμοποιήσει στη μοντελοποίηση σύνθεσης φωνής. Με χρήση πεπερασμένων στοιχείων και για εξειδικευμένη γεωμετρία και συνοριακές συνθήκες σε δύο διαστάσεις, επιλύεται η χρονομεταβλητή και συμπιεστή μορφή των εξισώσεων, πραγματοποιώντας έτσι την λεγόμενη Απευθείας Αριθμητική Προσομοίωση (DNS – Direct Numerical Simulation) και

βγάζοντας σημαντικά συμπεράσματα για τη διαμόρφωση της ροής, τις περιοχές αποκολλήσεων και τους στροβιλισμούς σε όλο το μήκος του φωνητικού σωλήνα.

Περνώντας σε πιο σύγχρονες αναφορές, διαπιστώνει κανείς ότι η περιοχή είναι πλήρως ενεργή με μεγάλη βιβλιογραφική δραστηριότητα. Οι Doel, Ascher<sup>[2]</sup> συνεχίζουν την έρευνα πάνω στο μοντέλο του Portnoff με διαφορετική αυτή τη φορά αριθμητική προσέγγιση και διατηρώντας το μοντέλο των δύο μαζών σαν οριακή συνθήκη στη γλωττίδα. Η αύξηση της υπολογιστικής ισχύος συνηγορεί στο γεγονός της αύξησης των εργασιών που επιχειρούν την πλήρη αεροδυναμική μελέτη των φαινομένων κοντά στη γλωττίδα. Ο Zhao και η ομάδα του επιχειρούν Απευθείας Αριθμητική Προσομοίωση ενός αξονοσυμμετρικού ευθύγραμμου στενωτικού σωλήνα με τη στένωση να είναι κινούμενη και να πλησιάζει το σχήμα των φωνητικών χορδών. Η συχνότητα της πάλμωσης επιβάλλεται μέσω αναλυτικής χρονικής συνάρτησης. Η μελέτη ολοκληρώνεται με τον υπολογισμό του επαγόμενου ηχητικού πεδίου με τη βοήθεια της ακουστικής αναλογίας των Ffowcs-Williams-Hawkins. Αναγνωρίζονται και χαρακτηρίζονται οι επιμέρους ακουστικές πηγές, σχολιάζονται οι μηχανισμοί γέννησης των επιμέρους ήχων και η συνεισφορά τους στο τελικό σήμα που λαμβάνεται από μια θέση δέκτη μακριά από τις πηγές. Επιβεβαιώνεται ο μονοπολικός – διπολικός χαρακτήρας του τελικού ήχου όταν σαν πηγή χρησιμοποιηθεί μια ισοδύναμη χρονομεταβλητή ογκομετρική παροχή όπως γίνεται στα μοντέλα πηγής – φίλτρου, με το διπολικό χαρακτήρα να είναι κυρίαρχος στις χαμηλές συχνότητες μέχρι και τον τέταρτο συντονισμό και τον μονοπολικό να κυριαρχεί στις υψηλές συχνότητες και το εύρος του να αυξάνεται με αυτές. Ο μονοπολικός χαρακτήρας συνδέεται με την κάθετη υδροδυναμική κάθετη ταχύτητα στην επιφάνεια ακουστικής ολοκλήρωσης (Kirchhoff surface) και εν γένει είναι μη γραμμικός, ενώ ο διπολικός με τη μεταβολή της υδροδυναμικής πίεσης (ή ογκομετρικής παροχής) λόγω των κινήσεων των φωνητικών χορδών και είναι γραμμικός. Οι τετραπολικές πηγές είναι μη γραμμικές και συνδέονται με την κατά τόπους έλκυση στροβίλων από την γλωττιδική δέσμη, το εύρος τους όμως και η συνεισφορά τους στο τελικό σήμα είναι σχετικά μικρή και κυρίως στις υψηλές συχνότητες. Σε επόμενη εργασία τους<sup>[52]</sup> οι ίδιοι ερευνητές εξετάζουν το ίδιο πρόβλημα μεταβάλλοντας διάφορες παραμέτρους, όπως υπογλωττιδική πίεση, συχνότητα πάλμωσης των χορδών και εισάγοντας την παρουσία των ψευδοχορδών οι οποίες δημιουργούν τις γνωστές 'κοιλότητες του Γαληνού' και επηρεάζουν δυναμικά τη ροή. Πράγματι το γεγονός επιβεβαιώθηκε και στο ακουστικό σήμα εισήχθησαν νέες διπολικές πηγές. Παρόλα αυτά επισημαίνεται η απαίτηση για περισσότερο πειραματισμό και προβληματισμό πάνω στο θέμα. Παρόμοια μελέτη συγκεντρωμένη όμως μόνο στις ροϊκές παραμέτρους και όχι στην ακουστική συνιστώσα γίνεται και στα [24],[23] όπου χρησιμοποιείται και πειραματική μηχανική συσκευή - ανάλογο των φωνητικών χορδών. Κύριος στόχος είναι η μελέτη της επίδρασης της γωνίας των χορδών στη μεταβολή της πίεσης κατά μήκος του λαρυγγικού καναλιού. Μελετήθηκαν οι γωνίες στην συγκλίνουσα και αποκλίνουσα φάση, ενώ κατόπιν ο εμπορικός επιλύτης Fluent χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση των σημείων αποκόλλησης της ροής στην περίπτωση της αποκλίνουσας φάσης. Διαπιστώθηκε το προφανές, ότι δηλαδή η μετρηθείσα αντίσταση στη ροή (που συνοδεύεται και από αντίστοιχη πτώση πίεσης) ήταν μεγαλύτερη στις περιπτώσεις όλων των γωνιών αποκλίνουσας φάσης. Το τελευταίο ίσως να σημαίνει ότι κατά τη φώνηση να παρουσιάζονται μεγάλες γωνίες στη συγκλίνουσα φάση (κλείσιμο χορδών) και σχετικά μικρές αποκλίνουσες γωνίες (άνοιγμα χορδών). Τα σημεία αποκόλλησης της ροής φαίνεται να κινούνται προς το γλωττιδικό άνοιγμα με αύξηση της αποκλίνουσας γωνίας. Η

πειραματική συσκευή έφερε εννέα αισθητήρες για την μέτρηση της πίεσης καλύπτοντας μια απόσταση μισού εκατοστού εκατέρωθεν της γλωττίδας. Οι McGowan και Howe σε πρόσφατη εργασία<sup>[29]</sup> τους μελετούν και αυτοί το πρόβλημα της επίδρασης των ψευδοχορδών με διδιάστατη προσομοίωση σε ευθύγραμμο σωλήνα. Η ακουστική πίεση υπολογίζεται με ολοκλήρωση της ακουστικής αναλογίας του Lighthill (ισοδύναμη διατύπωση Howe με βάση το στροβιλώδες<sup>[12]</sup>), χρησιμοποιώντας τις συμπαγείς συναρτήσεις Green και δίδονται τα ακουστικά σήματα για 2 περιόδους γλωττιδικής διέγερσης με και χωρίς ψευδοχορδές. Δεν εντοπίζονται σημαντικές διαφορές για συχνότητες διέγερσης μέχρι 650 Hz. Για υψηλότερες συχνότητες τα σημεία αποκόλλησης της ροής απομακρύνονται προς την έξοδο του σωλήνα, οπότε δεν υπάρχει περίπτωση αλληλεπίδρασης με τις ψευδοχορδές. Παρόλα αυτά η πάλμωση είναι επιβαλλόμενη και οι συγγραφείς αφήνουν ερωτηματικό για τις περιπτώσεις όπου υπάρχει αλληλεπίδραση με τον αέρα και οι χορδές κινούνται από μόνες τους. Στο [46] επιχειρείται η σύγκριση των μοντέλων τύρβης για ένα διδιάστατο γλωττιδικό μοντέλο ευθύγραμμου σωλήνα με τις φωνητικές χορδές σε αποκλίνουσα φάση γωνίας 20°. Χρησιμοποιείται πάλι ο εμπορικός επιλύτης Fluent και 5 από τα τυρβώδη μοντέλα που περιέχει: το κλασσικό k-ε, το RNG (Renormalization Group) k-ε, το RNS (Realizable) k-ε, το χαμηλού αριθμού Reynolds k-ω, το SST (Shear Stress Transport) k-ω και το γνωστό μιας εξίσωσης SA (Spalart – Allmaras) για μεταβατικού τύπου ροές. Επιλύονται οι ασυμπίεστες εξισώσεις Navier - Stokes στη μη μόνιμη κατάσταση και τα αποτελέσματα δείχνουν ότι καλύτερη συμφωνία με αποτελέσματα προηγούμενων πειραματικών ερευνών επιτυγχάνονται με το SST k-ω. Οι συγκρίσεις αφορούν την κατανομή της εσωγλωττιδικής πίεσης και την κατανομή του συντελεστή τριβής (skin friction coefficient) οριζόμενου ως

$$C_f = \frac{\tau_w}{0.5\rho U_\infty^2}, \text{ με } U_\infty = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} \text{ βασιζόμενη στη μέγιστη διαφορά πίεσης μέσα στη γλωττίδα.}$$

Μεταξύ άλλων σημειώνεται η αποτυχία του κλασσικού k-ε και ότι το SST k-ω είναι το μοναδικό μοντέλο που κατάφερε να εμφανίσει την χαρακτηριστική κύρτωση – ασυμμετρία του γλωττιδικής δέσμης. Τέλος εντύπωση κάνει ο πολύ μεγάλος αριθμός των κελιών διακριτοποίησης που φθάνουν τα 71.966. Σε μια διαφορετική προσέγγιση στο [17] ο Jiang εξετάζει το μοντέλο δύο μαζών από τη σκοπιά όμως της δυναμικής ανάλυσης. Σε μη γραμμικός ταλαντωτής το σύστημα μπορεί υπό την παρουσία τυρβωδών διαταραχών να ξεφύγει από τις γνωστές περιοδικές δονήσεις και να εμφανίσει χάος. Χρησιμοποιώντας μεθόδους ανάλυσης μη γραμμικών συστημάτων όπως εκθέτες Lyapunov και χάρτες Poincaré αποδεικνύεται όταν προστεθούν τυχαίες διαταραχές στην σταθερή ογκομετρική παροχή εισόδου ή / και στις σταθερές ελατηρίων, εμφανίζεται αύξηση των διαστημάτων ταλάντωσης στο διάγραμμα διακλάδωσης (bifurcation) και εξαφανίζονται τα ευκόλως διακρινόμενα (χωρίς τις τυρβώδεις διαταραχές) σημεία διχασμού των λύσεων (doubling period points). Βέβαια οι παρατηρήσεις αυτές έχουν μικρή αξία για τις συνθήκες πραγματικής λειτουργίας ενός μοντέλου δύο μαζών, προσθέτουν όμως σημαντική γνώση για τη συμπεριφορά των χορδών υπό συνθήκες τυχαίου αεροδυναμικού θορύβου. Στο [19] επιχειρείται η επίλυση της αναλογίας του Lighthill μέσα σε ένα τριδιάστατο μοντέλο ευθύγραμμου σωλήνα με στενωτική περιοχή που προσεγγίζει το άνοιγμα της γλωττίδας. Χρησιμοποιούνται δεδομένα από το ροϊκό πρόβλημα, για το οποίο όμως δεν αναφέρεται σχεδόν καμία λεπτομέρεια. Από αριθμητικής πλευράς χρησιμοποιούνται τα Mortar Πεπερασμένα Στοιχεία, που επιτρέπουν τον χωρισμό του πεδίου σε περιοχές με εντελώς διαφορετικές διακριτοποιήσεις και προβλέπουν ειδικούς χειρισμούς στις διεπιφάνειες. Στα άκρα του σωλήνα σαν οριακή συνθήκη χρησιμοποιείται η τεχνική του Πλήρως Ταιριασμένου Στρώματος (Perfectly

Matched Layer), επιτρέποντας στα προσπίπτοντα κύματα να εξέλθουν εντελώς από πεδίο χωρίς να ανακλαστούν καθόλου προς τα μέσα. Στην είσοδο εφαρμόζεται μια ημιτονική κυματομορφή και η επιτυχία της μεθόδου έγκειται στο γεγονός της ανίχνευσης των αναμενόμενων από τη θεωρία ισαπέχοντων συντονισμών (για ευθύγραμμο σωλήνα) από το σήμα που μετράται σε θέση μακριά από τις ακουστικές πηγές. Μια ενδιαφέρουσα προσομοίωση της διφασικής ροής αέρα – μικροσωματιδίων από τους πνεύμονες μέχρι το στόμα επιχειρείται με χρήση του εμπορικού επιλύτη CFX από τους Kleinstreuer και Zhang<sup>[21]</sup>. Χρησιμοποιείται ένα πολύ απλό τριδιάστατο μοντέλο του αναπνευστικού σωλήνα το οποίο κατασκευάστηκε υποθέτοντας κυκλικές διατομές κάθετες στην κεντρική γραμμή (centreline) του σωλήνα. Οι διάμετροι των κύκλων προέκυψαν από τη μεταβολή της συνάρτησης επιφάνειας κατά μήκος της κεντρικής γραμμής του σωλήνα, τη στιγμή της αναπνευστικής λειτουργίας. Χρησιμοποιήθηκε το τυρβώδες μοντέλο k-ε, ενώ τα αποτελέσματα δίνουν πολύ σημαντικές πληροφορίες για τον τρόπο κίνησης και κυρίως εναπόθεσης των μικροσωματιδίων στον αναπνευστικό σωλήνα. Ο Story και η ομάδα του στα [43] και [44] μελετούν τη διαμόρφωση της γεωμετρίας του φωνητικού σωλήνα και αναζητούν συσχετίσεις με την ποιότητα φωνής για άνδρες και γυναίκες ομιλητές. Δίδονται πολύ ενδιαφέροντα διαγράμματα των formants σε συνάρτηση με τη μεταβολή της γεωμετρίας για συγκεκριμένα φωνήματα. Τα δεδομένα γεωμετρίας προέκυψαν από επεξεργασία δεδομένων πυρηνικού μαγνητικού συντονισμού και χρησιμοποιήθηκαν εν μέρει και στα πλαίσια των αριθμητικών δοκιμών που παρουσιάζονται αργότερα στο παρόν κεφάλαιο. Τέλος οι πρόσφατες εργασίες παρουσιάζονται από την ομάδα του Mittal<sup>[54],[26]</sup>, στις οποίες συμπεριλαμβάνεται και αλληλεπίδραση ρευστού – στερεού, δίνουν μια πολύ πιο ολοκληρωμένη εικόνα στο φαινόμενο από πλευράς φυσικής προσέγγισης. Στο [54] χρησιμοποιείται ένα διδιάστατο μοντέλο ευθύγραμμου σωλήνα για τον υπολογισμό της δυναμικής των τάσεων στις φωνητικές χορδές και επιβάλλονται οριακές συνθήκες συνέχειας των τάσεων που υπολογίζονται από τη ροή. Έτσι στη διεπιφάνεια οι τάσεις που υπολογίζει ο ροϊκός επιλύτης επιβάλλονται μέσω ενός σχήματος παρεμβολής στο στερεό, το οποίο υπό την επίδρασή τους παραμορφώνεται και αλλάζει σχήμα. Η μεταβολή της διεπιφάνειας φυλάσσεται και εισάγεται στον ροϊκό επιλύτη για τη συνέχιση των υπολογισμών στο επόμενο χρονικό βήμα. Το σύστημα του στερεού θεωρείται ότι είναι το κλασσικό σύστημα ελατηρίου – αποσβεστήρα με μια δεύτερης τάξης συνήθη διαφορική εξίσωση στο χρόνο, στο δεξί μέλος της οποίας εμφανίζονται οι επιβαλλόμενες από το ρευστό δυνάμεις. Για τη διακριτοποίηση χρησιμοποιούνται τριγωνικά στοιχεία και η επίλυση του αραιού αλγεβρικού συστήματος γίνεται με χρήση παραγοντοποίησης LU μετά από επαναδεικτοδότηση της αραιής μήτρας. Σημαντική καινοτομία είναι ότι υπάρχει και μοντέλο υπολογισμού των δυνάμεων όταν οι επιφάνειες των χορδών έρθουν σε επαφή μεταξύ τους (fold contact model). Επίσης ο εσωτερικός ιστός των χορδών μοντελοποιήθηκε σαν ιξωδοελαστικό ρευστό λαμβάνοντας υπόψη και τις τρεις διαφορετικές διαστρωματώσεις ιστού (με διαφορετικές μηχανικές ιδιότητες) που υπάρχουν από κάτω: επικαλυπτικός ιστός, συνδετικός ιστός και μυς. Οι ψευδοχορδές θεωρήθηκαν σταθερές. Η ροή του ρευστού μοντελοποιήθηκε με τη μέθοδο του βυθιζομένου ορίου (immersed boundary method), στην οποία όλη η γεωμετρία διακριτοποιείται με τη χρήση αυστηρά και μόνο τετραγωνικών κελιών. Η μέθοδος αυτή έχει χαρακτηριστική ευκολία εφαρμογής σε γεωμετρίες αυθαίρετου σχήματος και καμπυλότητας, απαιτεί όμως μεγάλο αριθμό κελιών για σωστή και ακριβή προσέγγιση. Για την εφαρμογή των οριακών συνθηκών απαιτείται προέκταση προς τα έξω και χρήση ψευδοσημείων (ghost points), των οποίων οι τιμές για όλες τις μεταβλητές επίλυσης πρέπει να υπολογιστούν κατάλληλα. Επίσης η

εφαρμογή των σχημάτων αριθμητικής διακριτοποίησης είναι πολύ εύκολη, καθώς το πλέγμα είναι καρτεσιανό και δε χρειάζεται υπολογισμός μετρικών. Επιλύονται οι ασυμπίεστες, χρονικά μεταβλλόμενες εξισώσεις Navier Stokes για το ρευστό και η διδιαστάτη εξίσωση Navier για το στερεό συμπληρούμενη από την υλική σχέση τάσεων - ρυθμού παραμόρφωσης Kelvin – Voigt. Επιβάλλονται Dirichlet συνθήκες για την πίεση στην είσοδο και έξοδο του σωλήνα. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η παρουσία των ψευδοχορδών οδηγεί σε αυξημένη τιμή της παραγώγου της ογκομετρικής παροχής  $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$  (και μείωση της ροϊκής αντίστασης) σε σχέση με

την περίπτωση όπου δεν υπάρχουν καθόλου ψευδοχορδές για ίδια επιβαλλόμενη διαφορά πίεσης. Επειδή η παράγωγος της παροχής είναι η σημαντικότερη πηγή ήχου κατά τη φώνηση (για άλλους μονοπολική, για άλλους διπολική), το τελευταίο σημαίνει ότι οι ψευδοχορδές βοηθούν σημαντικά τη φώνηση, τουλάχιστο όσον αφορά τη συγκεκριμένη πηγή. Επιβεβαιώνεται έτσι και η κλινική παρατήρηση, που θέλει ασθενείς με ψευδοχορδές που έχουν αφαιρεθεί να έχουν μικρή δυσκολία στη φώνηση. Στο [26] εξετάζεται πάλι το ίδιο πρόβλημα με έμφαση όμως στην αλληλεπίδραση στερεού – ρευστού. Η διαφορά είναι ότι το μοντέλο του στερεού είναι πια τριδιάστατο, ενώ υπολογίζονται και οι ιδιομορφές και ιδιοσυχνότητες κίνησης των χορδών. Η ροή επιλύεται πάλι σε δύο διαστάσεις, αμελούνται τελείως οι ψευδοχορδές και επιβάλλονται συνθήκες σταθερής πίεσης στην είσοδο και έξοδο του αγωγού. Αναδεικνύεται το φαινόμενο στρέβλωσης του γλωττιδικής δέσμης (coanda effect) και η χρονική μεταβολή της ογκομετρικής παροχής προκύπτει ίδια με τα εμπειρικά μοντέλα LF και Klatt.

## 6.2 ΑΝΑΤΟΜΙΑ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟΥ ΦΩΝΗΤΙΚΟΥ ΣΩΛΗΝΑ

Για την κατανόηση του μηχανισμού της γένεσης της ανθρώπινης φωνής είναι απαραίτητη η κατανόηση των επιμέρους συστημάτων που συμβάλουν σε αυτή, από πλευράς ανατομίας και φυσιολογίας. Τα τρία κύρια συστήματα που συνεισφέρουν στο μηχανισμό είναι:

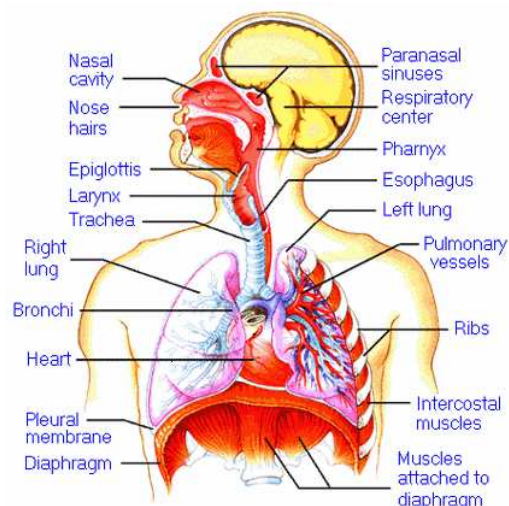
- το υπογλωττιδικό σύστημα
- ο λάρυγγας και τα επιμέρους όργανά του και
- το υπεργλωττιδικό σύστημα

Σύμφωνα με την κλασσική θεώρηση του μοντέλου φίλτρου – πηγής<sup>[5]</sup> (Fant, 1970) φωνή παράγεται κατά το συνδυασμό εκπομπής ακουστικής ενέργειας από μια ή περισσότερες πηγές, με τις κοιλότητες συντονισμού του φωνητικού σωλήνα. Η διέγερση μπορεί να προέρχεται από μια περιοδική πηγή όπως οι φωνητικές χορδές ή από τυρβώδεις πηγές (θόρυβος), οι οποίες είναι παράγονται όταν ο αέρας περνά από πολύ στενά περάσματα οπουδήποτε μέσα στο φωνητικό σωλήνα. Και τα δύο αυτά είδη πηγών μπορεί να συνυπάρχουν κατά την ομιλία. Ο παραγόμενος ήχος ακολούθως διαμορφώνεται από τις οποιεσδήποτε κοιλότητες του φωνητικού ή / και του ρινικού σωλήνα δίδοντας τους συντονισμούς (resonances) και τέλος εκπέμπεται με τη μορφή μεταβολών πίεσης στον περιβάλλοντα αέρα από το στόμα ή τη μύτη. Τέλος τον παραγόμενο ήχο μπορούν να αλλάξουν και οι θέσεις των διαφόρων κινουμένων μερών (αρθρωτών - articulators) του υπεργλωττιδικού συστήματος. Αποτέλεσμα είναι η παραγωγή των βασικών γλωσσικών οντοτήτων επικοινωνίας, όπως φωνήματα, συλλαβές και λέξεις. Το εύρος κάθε περιεχόμενης

συχνότητας και η διακύμανσή της με το χρόνο είναι χαρακτηριστικές για κάθε γλωσσική οντότητα μόνο σε βασικό επίπεδο θεώρησης. Δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ ενός φωνήματος και του συχνοτικού περιεχομένου του αντίστοιχου σήματος, μόνο όταν αμεληθεί ο παράγων της προσωδίας του συνεχούς λόγου. Ο τελευταίος παράγων είναι σημαντικότερος κατά την εκφορά του συνεχούς λόγου, είναι συνάρτηση των θέσεων των αρθρωτών οι οποίοι με τη σειρά τους δεν έχουν καθορισμένη θέση για κάθε φώνημα, αλλά η θέση τους εξαρτάται ισχυρά από το προηγούμενο και το επόμενο φώνημα.

### 6.2.1 Υπογλωττιδικό Σύστημα

Βασικότερο στοιχείο του υπογλωττιδικού συστήματος είναι το αναπνευστικό σύστημα. Αυτό αποτελείται από τους πνεύμονες, το θώρακα και τους θωρακικούς μύες και το διάφραγμα (βλ. Εικόνα 6-1) . Κατά την αναπνοή η ροή του αέρα στους πνεύμονες ελέγχεται από τους θωρακικούς πλευρικούς μύες. Οι εξωτερικοί μεσοπλεύριοι μύες είναι συνδεδεμένοι έτσι ώστε να ωθούν τα πλευρά προς τα έξω, διευρύνοντας έτσι τους πνεύμονες. Οι εσωτερικοί μεσοπλεύριοι δρουν ακριβώς αντίθετα και κατά τη διάρκεια της εκπνοής σπρώχνουν το θώρακα και τα πλευρά προς τα κάτω μειώνοντας έτσι τον όγκο των πνευμόνων. Όταν κανένα από τα δύο μυών δε λειτουργεί τότε το θωρακικό σύστημα έρχεται στην κατάσταση ισορροπίας του, η οποία καθορίζεται από την ελαστικότητά του.



Εικόνα 6-1. Όψη του κατωτέρου αναπνευστικού συστήματος.

Κατά τη διάρκεια της εισπνοής ο συνδυασμός διεύρυνσης του θωρακικού τοιχώματος και το χαμήλωμα του διαφράγματος, που είναι ένας λεπτός και πλατύς μυς που χωρίζει την περιοχή του θώρακα από την άνω κοιλιακή χώρα, προκαλούν πτώση πίεσης στους πνεύμονες, η οποία με τη σειρά της δημιουργεί ροή αέρα από τη μύτη και το στόμα προς την τραχεία. Η εκπνοή μέχρι το σημείο ελαστικής ισορροπίας (περίπου 40% της ολικής χωρητικότητας των πνευμόνων σε αέρα) γίνεται σχεδόν μόνη της χωρίς τη συνεισφορά μυϊκών ομάδων, εκμεταλλευόμενη την ελαστικότητα του θωρακικού συστήματος. Αν απαιτηθεί συνέχιση της εκπνοής πέρα από το σημείο αυτό, τότε αναλαμβάνουν οι εσωτερικοί μεσοπλεύριοι να συνεισφέρουν στη μείωση του όγκου των πνευμόνων με το μηχανισμό που αναφέρθηκε νωρίτερα.

Ο αέρας μεταφέρεται στους πνεύμονες μέσω της τραχείας, η οποία είναι ένας σωλήνας που αποτελείται, στους περισσότερους ανθρώπους από 16-20 κρίκους (δακτυλίους). Οι κρίκοι αυτοί

είναι χωριστοί, αλλά μεταξύ τους υπάρχουν λεπτοί ελαστικοί ιστοί, που τους ενώνουν και διαμορφώνουν το σωλήνα της τραχείας, οποίος φθάνει το μήκος των 10 cm περίπου. Ο σωλήνας της τραχείας παραμένει πάντοτε ανοικτός με σταθερή διατομή. Το επάνω μέρος του σωλήνα συνδέεται με τη βάση του λάρυγγα, ενώ το κάτω μέρος, με δύο διακλαδώσεις που λέγονται βρόγχοι, καταλήγει στους πνεύμονες δεξιά και αριστερά. Πίσω από το σωλήνα της τραχείας και με την ίδια κατεύθυνση υπάρχει ο οισοφάγος. Οι βρόγχοι δεν εισχωρούν στους πνεύμονες κατευθείαν αλλά διακλαδίζονται και αυτοί σε μικρότερους σωλήνες που λέγονται βρόγγια, τα οποία και αυτά διακλαδίζονται σε ακόμη μικρότερα βρογχίδια εισχωρώντας βαθύτερα στους πνεύμονες. Η διακλάδωση αυτή των βρόγχων, σε βρόγγια και κλαδίσκους βρογχικούς αποτελεί το βρογχικό δένδρο. Οι ακρότατοι κλαδίσκοι του βρογχικού δένδρου καταλήγουν στις πνευμονικές κυψέλες, οι οποίες δεσμεύουν το απαραίτητο οξυγόνο από τον εισπνεόμενο αέρα. Όλες οι διακλαδώσεις των βρόγχων μέχρι το ακρότατο σημείο των πνευμονικών κυψελών καλύπτονται από βλεννογόνο, για να διατηρείται η υγρασία τους.

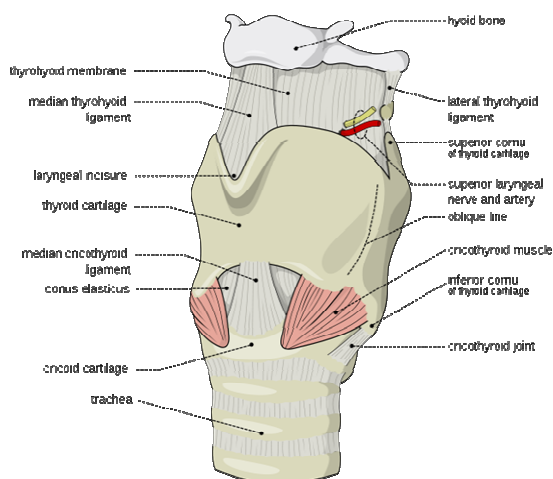
Η παραγωγή φωνής απαιτεί τη διατήρηση της πίεσης της υπογλωττιδικής περιοχής στα επίπεδα των 6-10 cm H<sub>2</sub>O. Η παροχή αέρα είναι λιγότερη συγκριτικά με αυτή κατά την εκπνοή, οπότε απαιτείται η συνεισφορά των θωρακικών μυών κατά τη διάρκεια της φώνησης. Καθώς η ένταση και η συχνότητα των παραγομένων ήχων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την υπογλωττιδική πίεση, πρέπει να γίνονται συνεχείς και πολύ ακριβείς ρυθμίσεις της έντασης των μυών για τον έλεγχο προσωδιακών πτυχών της ομιλίας.

### 6.2.2 Ο Λάρυγγας και τα επιμέρους όργανα

Ο λάρυγγας είναι το πρώτο και το κυριότερο φωνητικό όργανο του ανθρώπου, μέσα στον οποίο περικλείονται και οι φωνητικές χορδές (βλ. Εικόνα 6-2). Βρίσκεται κατά μήκος του λαιμού και αποτελείται από τα εξής όργανα:

#### Κρικοειδής χόνδρος

Χόνδρος σε σχήμα δακτυλιδιού, ή κρίκου που είναι σε οριζόντια θέση στο λαιμό και αποτελεί τη βάση στήριξης του λάρυγγα γιατί βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο. Από το κάτω άνοιγμα του κρίκου συνεχίζεται ο σωλήνας της τραχείας, ενώ πάνω σε αυτόν είναι τοποθετημένος άλλος ένας χόνδρος που λέγεται θυρεοειδής. (βλ. Εικόνα 6-4)



**Εικόνα 6-2. Εξωτερική όψη των μυών και χόνδρων του λάρυγγα**

### ***Θυρεοειδής χόνδρος***

Ο θυρεοειδής χόνδρος αποτελείται από δύο πλευρές, σχεδόν τετράγωνες, που συγκλίνουν και σχηματίζουν σχεδόν ορθή γωνία. Οι εξωτερικές πλευρές της γωνίας είναι το μπροστινό μέρος του λάρυγγα που λέγεται και «μήλο του Αδάμ». Αυτή ακριβώς τη θέση έχει το «καρύδι» στο λαιμό μας, γι' αυτό και φαίνεται. Στις δύο άκρες των πλευρών του θυρεοειδούς χόνδρου τόσο στο επάνω μέρος όσο και στο κάτω μέρος, υπάρχουν δύο προεξοχές γνωστές σαν πάνω και κάτω κέρατα (βλ. Εικόνα 6-3). Τα κάτω κέρατα συνδέονται με αρθρώσεις από ίνες στο επάνω μέρος του δακτυλίου του κρικοειδούς χόνδρου, δηλαδή στερεώνονται στη βάση του λάρυγγα.

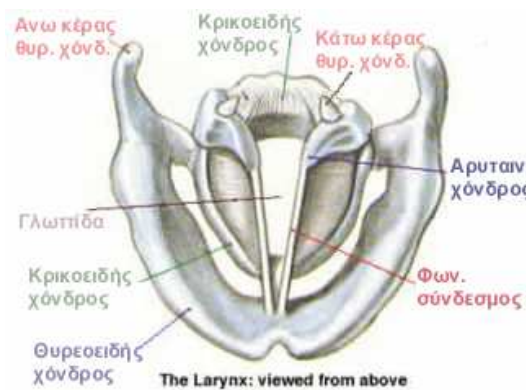
### ***Αρυταινοειδείς χόνδροι***

Τέλος στο επάνω χείλος του δακτυλίου του κρικοειδούς χόνδρου, δηλ. επάνω στη βάση του λάρυγγα, είναι τοποθετημένοι και άλλοι δύο μικρότεροι χόνδροι μπροστά από τις εσωτερικές πλευρές του θυρεοειδούς χόνδρου σε σχήμα τριγωνικό, έτσι ώστε οι κορυφές των δύο τριγώνων να «κοιτάζουν» προς τα άνω στη βάση της επιγλωττίδας (βλ. Εικόνα 6-4). Οι αρυταινοειδείς χόνδροι προστατεύονται από τις πλευρές του θυρεοειδούς χόνδρου και κινούνται κι αυτοί με ευκολία γιατί είναι συνδεδεμένοι πάνω στη βάση του λάρυγγα με αρθρώσεις από ίνες και ιστούς. Στις εσωτερικές γωνίες της βάσεως του τριγωνικού σχήματος των αρυταινοειδών χόνδρων (αυτές που 'βλέπουν' προς το κέντρο του λάρυγγα) υπάρχουν οι φωνητικές χορδές ή 'φωνητικές αποφύσεις'. Οι τέσσερις χόνδροι, δηλαδή ο κρικοειδής, ο θυρεοειδής και οι δύο αρυταινοειδείς, συνδέονται μεταξύ τους με ινώδεις συνδέσμους και με μυς, από τους οποίους οι μεν σύνδεσμοι δημιουργούν ελαφρές κινήσεις πάνω στις αρθρώσεις της βάσεως των χόνδρων, οι δε μύες, εκτός από το ρόλο της συνδέσεως των χόνδρων αυτών, ρυθμίζουν και τις κινήσεις τους.

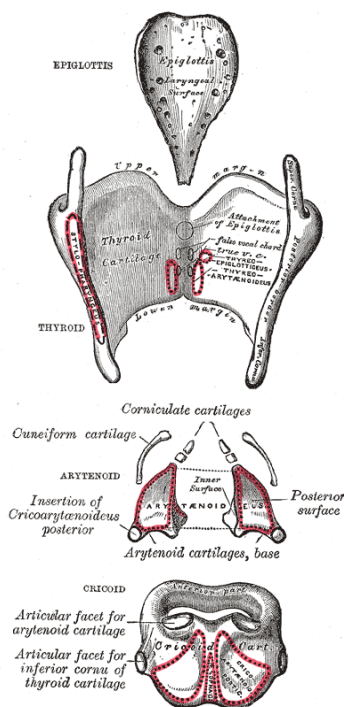
### ***Επιγλωττίδα***

Η επιγλωττίδα είναι ένας λεπτός και πλατύς χόνδρος σε σχήμα φύλλου μουριάς ή φτυαριού, ο οποίος βρίσκεται όρθιος πάνω από το θυρεοειδή χόνδρο και πίσω από τη βάση της γλώσσας. Συνδέεται κι αυτός στη βάση του λάρυγγα με συνδετικές ίνες και με μύες, από την κάτω άκρη του, η οποία μοιάζει με μίσχο. Η βασική του λειτουργία είναι να καλύπτει την όλη περιοχή των φωνητικών χορδών κατά τη διάρκεια της κατάποσης, ούτως ώστε το περιεχόμενο να προωθηθεί στον οισοφάγο, που βρίσκεται ακριβώς πίσω από το λάρυγγα προς τη μεριά του αυχένα. Κατά τη διάρκεια εισπνοής και εκπνοής η επιγλωττίδα σηκώνεται και ανοίγει εντελώς το πέρασμα του αέρα προς την τραχεία. Κατά τη διάρκεια της φώνησης μπορεί να θεωρηθεί ως αρθρωτής αφού ακολουθεί τις κινήσεις της γλώσσας, λίγο όμως συνεισφέρει στην τελική διαμόρφωση της παραγόμενης ομιλίας.



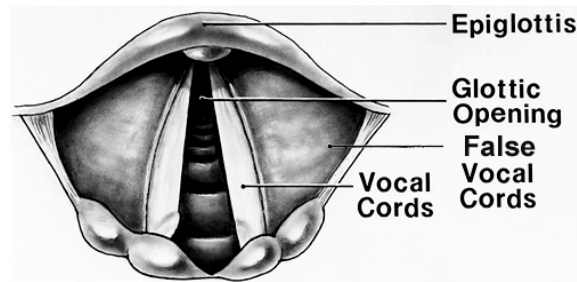


Εικόνα 6-3. Οριζόντια όψη των χόνδρων του λάρυγγα



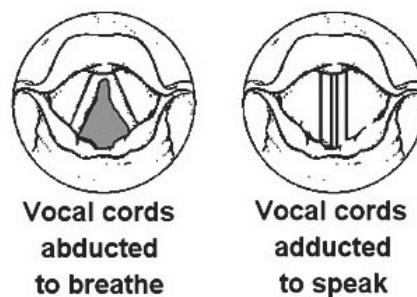
Εικόνα 6-4. Πλάγια όψη των χόνδρων του λάρυγγα

Οι παραπάνω χόνδροι αποτελούν τη θήκη (voice box) μέσα στην οποία βρίσκεται το πολυτιμότεο όργανο παραγωγής ανθρώπινης φωνής: οι φωνητικές χορδές (vocal folds). Στην Εικόνα 6-5 φαίνεται μια οριζόντια τομή του λάρυγγα στο ύψος της βάσης των αρυταινοειδών χόνδρων. Διακρίνει κανείς τις φωνητικές χορδές, που ξεκινούν ακριβώς μέσα από την ορθή γωνία που σχηματίζουν οι δύο πλευρές του θυρεοειδούς χόνδρου. Στο άνω μέρος καταλήγουν και ενώνονται με τις αντίστοιχες άκρες των εσωτερικών γωνιών των αρυταινοειδών χόνδρων. Τα χείλη των χορδών λέγονται φωνητικοί σύνδεσμοι και η μεταξύ των τελευταίων σχισμή ονομάζεται γλωττίδα.



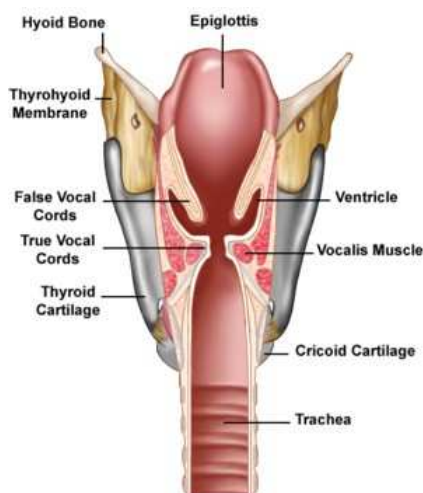
Εικόνα 6-5. Όψη των φωνητικών χορδών από πάνω

Η γλωττιδική σχισμή ανοίγει ή κλείνει, από τη συστολή ή διαστολή ειδικών μυών που ευρίσκονται στη πλάγια και καθ' όλο το μήκος των φωνητικών συνδέσμων. Οι μύες αυτοί προχωρούν προς τα πίσω και ενώνονται με τις βάσεις των αρυταινοειδών χόνδρων και ονομάζονται εσωτερικοί φωνητικοί μύες. Εκτός των εσωτερικών φωνητικών μυών υπάρχουν ακόμη και άλλοι δύο συμμετρικοί μύες που λέγονται εξωτερικοί φωνητικοί μύες. Αυτοί ξεκινούν από το ίδιο σημείο της γωνίας των πλευρών του θυρεοειδούς χόνδρου, απλώνονται σε όλη την εσωτερική επιφάνεια των πλευρών του θυρεοειδούς χόνδρου και καταλήγουν στο πίσω μέρος του λάρυγγα ενωμένοι με τις εξωτερικές άκρες των γωνιών των αρυταινοειδών χόνδρων. Η όλη περιοχή καλύπτεται από βλεννογόνο. Κατά την εκφώνηση κάποιου φωνήεντος οι χορδές ενώνονται και συγκλίνουν σε ευθεία γραμμή (φάση Προσαγωγής, βλ. Εικόνα 6-6). Κατά την εισπνοή οι φωνητικές χορδές ανοίγουν (φάση Απαγωγής, βλ. Εικόνα 6-6) και σχηματίζουν ένα ισοσκελές τρίγωνο, η κορυφή του οποίου βρίσκεται μπροστά στην άκρη της γωνίας του θυρεοειδούς χόνδρου (μήλο του Αδάμ), ενώ η βάση αυτού βρίσκεται πίσω προς τους αρυταινοειδείς χόνδρους και κοιτά προς τη κατεύθυνση του σπονδύλων του αυχένα.



Εικόνα 6-6. Φωνητικές χορδές στις φάσεις Απαγωγής κ. Προσαγωγής

Λίγο ψηλότερα από τη θέση των φωνητικών χορδών, βρίσκεται ένα ζευγάρι συμμετρικών πτυχών του βλεννογόνου, που λέγονται ψευδοχορδές (false vocal cords – ventricular folds) και εξέχουν προς τα μέσα λιγότερο από τις φωνητικές χορδές (βλ. Εικόνα 6-7). Οι ψευδοχορδές δεν αποτελούν πηγή φυσικού ήχου αφ' εαυτού τους, παίζουν όμως πολύ σημαντικό ρόλο στη δημιουργία των πολύ υψηλών φθόγγων. Μεταξύ των φωνητικών χορδών και των ψευδοχορδών υπάρχουν δύο κοιλότητες που λέγονται λαρυγγικές κοιλότητες (βλ. Εικόνα 6-7). Επειδή τις περιέγραψε πρώτος ο Γαληνός που θεωρείται ο δεύτερος σε αξία Έλληνας ιατρός της αρχαιότητας μετά τον Ιπποκράτη, πήραν το όνομά του – 'κολπώματα του Γαληνού'. Οι κοιλότητες αυτές χρησιμεύουν αφ' ενός σαν αντηχεία και αφ' ετέρου σαν χώρος για την ελεύθερη κίνηση των φωνητικών χορδών προς τα πάνω.



Εικόνα 6-7. Όψη του λάρυγγα σε τομή

Ο βασικός μηχανισμός παραγωγής φωνής στη γλωττίδα είναι ο εξής: Αέρας από τους πνεύμονες και το διάφραγμα ανέρχεται διαμέσου της τραχείας προς τον λάρυγγα. Οι φωνητικές χορδές κλείνουν δημιουργώντας τη γλωττιδική σχισμή, το άνοιγμα της οποίας εξαρτάται από τον ήχο που θα παραχθεί. Σπρωγμένες από την πίεση του αέρα οι χορδές υποχωρούν προς τα πάνω και έτσι επιτρέπουν μια μικρή διέξοδο στον αέρα. Όμως λόγω της πτώσης πίεσης που δημιουργείται κατά τη διέλευση ρευστού από στένωση και της ελαστικότητας που έχουν οι χορδές, επανέρχονται στην αρχική τους θέση διακόπτοντας τη διέλευση του αέρα σε απειροελάχιστο χρόνο και πάλι αυτοστιγμεί αλλάζουν ξανά κατεύθυνση προς τα πάνω πιεζόμενες από τον ανερχόμενο αέρα. Αυτή η παλμική κίνηση επαναλαμβάνεται και διαρκεί όσο υπάρχει ροή εκπνεομένου αέρα από τους πνεύμονες. Η βασική συχνότητα του παραγομένου ήχου είναι ίση με τη συχνότητα πάλμωσης των χορδών, η οποία βεβαίως δύναται να αλλάζει κατά τη διάρκεια της φώνησης σε συνάρτηση με το χρόνο, ανάλογα πάντα με το επιθυμητό φώνημα. Επίσης είναι σημαντικό να γίνει κατανοητό ότι η πάλμωση / ταλάντωση των χορδών δεν είναι εκούσια κίνηση, αλλά αποτέλεσμα της υπογλωττιδικής πίεσης, του ανοίγματος της γλωττιδικής σχισμής και κυρίως των βιο-μηχανικών ιδιοτήτων των χορδών. Οι άνδρες έχουν πιο ‘συμπαγείς’ φωνητικές χορδές και παράγουν χαμηλότερου ύψους φωνή, έχουν όμως καλύτερο μυϊκό έλεγχο της περιοχής, με αποτέλεσμα να μπορούν να εκφωνήσουν σε εύρος σχεδόν τριών οκτάβων. Ο ρόλος των ψευδοχορδών στο μηχανισμό γένεσης της φώνησης είναι λιγότερο σημαντικός. Οι ψευδοχορδές ανάλογα με το άνοιγμά τους έχουν τη δυνατότητα να κατευθύνουν, κατά κάποιον τρόπο, την δέσμη αέρος που δημιουργεί η γλωττιδική σχισμή. Σε μελέτες προσομοίωσης με υπολογιστή αλλά και σε εργαστηριακές δοκιμές έχει βρεθεί ότι οι ψευδοχορδές μειώνουν τη συνολική αντίσταση ροής, αυξάνοντας λίγο την πίεση στο σημείο αυτό και αναγκάζοντας έτσι τις φωνητικές χορδές να λειτουργήσουν με ελαφρώς μεγαλύτερο γλωττιδικό άνοιγμα, πράγμα που σημαίνει μεγαλύτερη ογκομετρική παροχή αέρος και κατά συνέπεια μεγαλύτερη οξύτητα παραγόμενου ήχου. Ολοκληρώνοντας τα περί μηχανισμού παραγωγής της φωνής και για να γίνουν καλύτερα αντιληπτές οι σχετικές τιμές των μεταβλητών: θέση λάρυγγα, μήκος – τάση φωνητικών χορδών και παροχή αέρα, παρατίθεται ο Πίνακας 6-1, στον οποίο συγκρίνονται οι χαμηλού και υψηλού τόνου ήχοι:

Πίνακας 6-1. Σύγκριση μηχανισμών παραγωγής οξέων και βαθέων ήχων

Βαθείς ήχοι	Οξείς ήχοι
ο λάρυγγας <i>κατεβαίνει</i>	ο λάρυγγας <i>ανεβαίνει</i>
τα κολπώματα του Γαληνού <i>φαρδαίνουν</i>	τα κολπώματα του Γαληνού <i>στενεύουν</i>
οι φωνητικές χορδές <i>διογκώνονται και μακραίνουν</i>	οι φωνητικές χορδές <i>κονταίνουν</i>
το τέντωμα των χορδών <i>ελαττώνεται</i>	το τέντωμα των χορδών <i>δυναμώνει</i>
η παροχή αέρα <i>ελαττώνεται</i>	η παροχή αέρα <i>αυξάνεται</i>

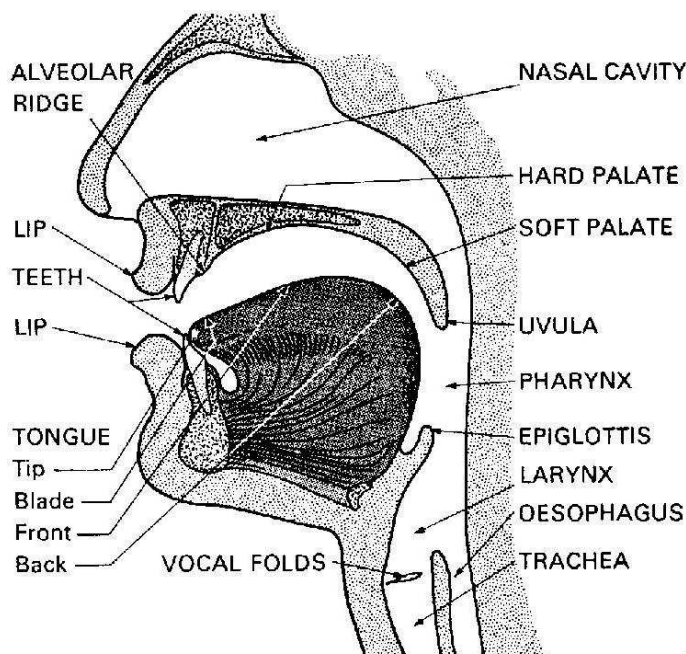
### 6.2.3 Το Υπεργλωττιδικό Σύστημα – Σύστημα Αρθρωτών

Το υπεργλωττιδικό σύστημα αρθρωτών αποτελείται από τη *γλώσσα*, τα *χείλη*, τον *ουρανίσκο* (σκληρή υπερώα), τη *σιαγόνα*, τα *δόντια*, και τη *μαλακή υπερώα* (βλ. Εικόνα 6-8). Η μαλακή υπερώα και τα δόντια της άνω γνάθου αναφέρονται και ως παθητικοί αρθρωτές<sup>[22]</sup>, διότι δεν κινούνται, αλλά παρέχουν σταθερές επιφάνειες πάνω στις οποίες λειτουργούν οι ενεργοί αρθρωτές (γλώσσα, χείλη, ουρανίσκος και μαλακή υπερώα). Οι τελευταίοι ελέγχουν το σχήμα ης στοματικής κοιλότητας, τη σύνδεση ή όχι της ρινικής κοιλότητας και συνεπεία τούτου το βαθμό κατά τον οποίο διάφορες συχνότητες παρούσες στο σήμα διέγερσης της γλωττίδας ενισχύονται ή αποσβένονται. Στην περίπτωση των φωνηέντων το σύστημα αρθρωτών δρα σα φίλτρο τροποποιώντας τον ήχο που παράγεται στις φωνητικές χορδές, σε ορισμένες περιπτώσεις όμως συμφώνων (π.χ. τυρβώδη σύμφωνα - fricatives) δρα και ως πηγή, παράγοντας το σήμα της διέγερσης. Επίσης σε ορισμένες γλώσσες που περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό μη πνευμονικών ήχων (π.χ. clicks), η αεροροή δημιουργείται από το σύστημα των αρθρωτών και όχι από το κάτω αναπνευστικό σύστημα. Οι κύριοι παράγοντες που ρυθμίζουν τη συχνοτική απόκριση του φωνητικού σωλήνα είναι η θέση των αρθρωτών και ο βαθμός στένωσης ή διαπλάτυνσης που δημιουργούν στο σωλήνα με την κίνησή τους<sup>[5]</sup>.

Η εξαιρετικά ευκίνητη *γλώσσα* παίζει, λόγω του μεγάλου όγκου της, το σημαντικότερο ρόλο στη διαμόρφωση του σχήματος της στοματικής και φαρυγγικής κοιλότητας και κατά συνέπεια στη διαμόρφωση της συχνοτικής απόκρισης του φωνητικού σωλήνα, τον οποίο κάποιες φορές μπορεί να κλείσει στιγμιαία (π.χ. σύμφωνα παύσης) ή παρατεταμένα (π.χ. ρινικά σύμφωνα). Αποτελείται κυρίως από μύες που εμφύονται από τη βάση της κάτω γνάθου, δεν έχει καθόλου σκελετική στήριξη (εξ ου και η μεγάλη ευκινησία – ευλυγισία της), το πάνω μέρος της είναι εξαιρετικά πλούσιο σε νευρικές απολήξεις κυττάρων γεύσης, ενώ η τροφοδοσία με αίμα γίνεται με διακλάδωση από τις καρωτίδες μέσω της γλωσσικής αρτηρίας. Η κύρια λειτουργία της είναι η διαχείριση της μασσημένης τροφής και η προώθησή της στον οισοφάγο με μια ποικιλία χαρακτηριστικών κινήσεων.

Η *κάτω γνάθος* ή *σιαγόνα* αποτελεί το δάπεδο της στοματικής κοιλότητας πάνω στο οποίο φύονται τα κάτω δόντια και η γλώσσα. Στηρίζεται με αρθρώσεις δεξιά και αριστερά στο πίσω μέρος του στόματος, ακριβώς κάτω από τα πτερύγια των αυτιών. Μπορεί να πραγματοποιήσει με

ευκολία μεγάλες κινήσεις και ως προς τους τρεις άξονες, συνεισφέροντας έτσι στη μάσηση που είναι και η βασική της λειτουργία. Στη φώνηση συμβάλει περισσότερο η κάθετη κίνηση (πάνω - κάτω) και σχεδόν καθόλου η πλάγια (δεξιά - αριστερά), μεγαλώνοντας και μικραίνοντας τον όγκο της στοματικής κοιλότητας, παρέχοντας έτσι χώρο στη γλώσσα για να κάνει τις δικές της κινήσεις.



**Εικόνα 6-8. Πλάγια όψη του φωνητικού σωλήνα σε τομή**

Η *υπερώα* χωρίζεται σε δύο μέρη: Το πρώτο μέρος καταλαμβάνει τα 2/3 της ολικής επιφάνειας και λέγεται *σκληρή υπερώα* (ή ουρανίσκος), έχει σχήμα θόλου και αποτελείται σχεδόν αποκλειστικά από οστέινη πλάκα. Το δεύτερο μέρος καταλαμβάνει το υπόλοιπο 1/3 της ολικής επιφάνειας λέγεται *μαλακή υπερώα* και αποτελείται από λεπτούς μύες και μαλακά μόρια καλυπτόμενα από βλεννογόνο. Είναι πολύ ευκίνητη και πραγματοποιεί κάθετες κινήσεις ανοίγοντας και κλείνοντας τους χώρους που συνδέουν τις ρινικές κοιλότητες με το φάρυγγα. Αυτή της η λειτουργία συνεισφέρει και στη φώνηση επιτρέποντας στον αέρα να περάσει μερικώς ή ολικώς στο ρινοφάρυγγα, δημιουργώντας έτσι τα ένρινα φωνήματα. Στο τέλος και στο μέσο του ελεύθερου χείλους της μαλακής υπερώας φύεται η σταφυλή, που φαίνεται και με απλή οπτική παρατήρηση στο ανοικτό στόμα.

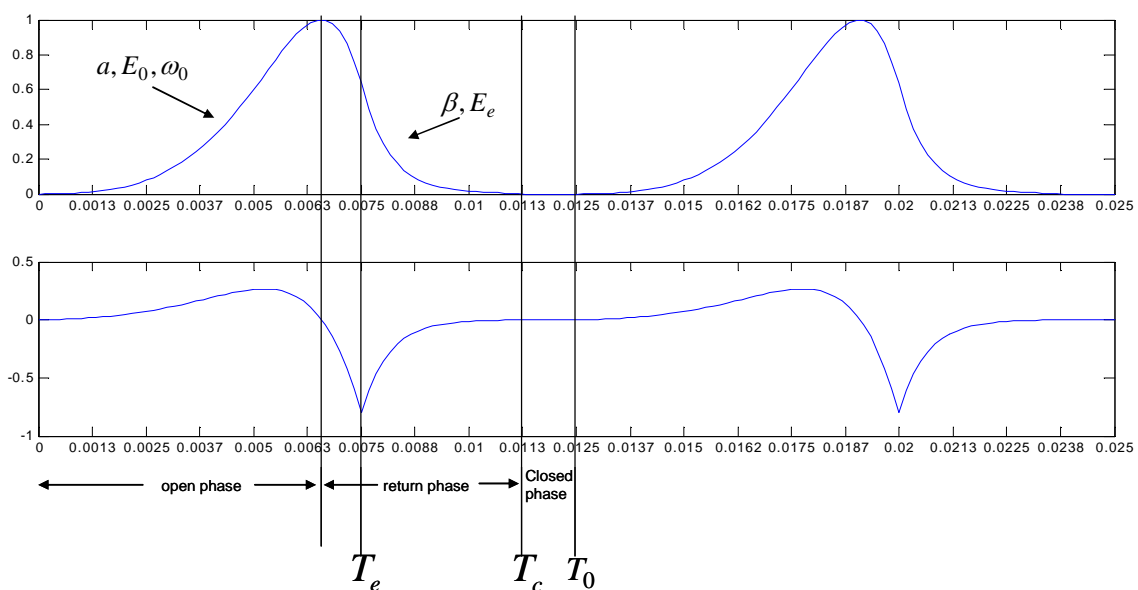
Τα *χείλη* μπορούν κλείνοντας τη φωνητική οδό εντελώς, ή να δημιουργήσουν μικρή στένωση για την παραγωγή σε συνδυασμό με τα δόντια συγκεκριμένων συμφώνων ή εναλλακτικά μπορούν να μεταβάλλουν το μήκος του τελευταίου για κάποια εκατοστά εξωθούμενα προς τα εμπρός.

## **6.3 ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΟΥ ΦΩΝΗΤΙΚΟΥ ΣΩΛΗΝΑ**

### **6.3.1 Η Πηγή**

Η διέγερση ή η πηγή της ακουστικής ενέργειας σε ένα σήμα ανθρώπινης φωνής μπορεί να έχει δύο μορφές: **περιοδική ή απεριοδική**, αν και πολλές φορές οι δύο μορφές συνυπάρχουν. Στην πρώτη περίπτωση η ακουστική ενέργεια παράγεται από τις περιοδικές κινήσεις των φωνητικών

χορδών, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, και έχει μια χαρακτηριστική βασική συχνότητα και χαρακτηριστικό βαθμό εντάσεως (pitch). Το περιοδικό άνοιγμα και κλείσιμο της γλωττίδας έχει σαν αποτέλεσμα την περιοδική είσοδο 'πακέτων' αέρα προς το φάρυγγα. Η Εικόνα 6-9 δείχνει μια τυπική κυματομορφή των γλωττιδικών παλμών σε όρους ογκομετρικής παροχής και της παραγώγου αυτής έναντι του χρόνου. Ο παλμός έχει μια σχετικά αργή άνοδο στην αρχή και ένα αρκετά απότομο τελείωμα στο τέλος. Το φάσμα ισχύος μιας τέτοιας ακολουθίας παλμών φαίνεται στην Εικόνα 6-12 (μπλε γραμμή). Το εύρος των παρατηρούμενων αρμονικών μικραίνει με ρυθμό 12dB ανά οκτάβα και εξαρτάται από το ακριβές σχήμα του γλωττιδικού παλμού, τη φυσιολογία και ανατομία της λαρυγγικής περιοχής και μεταβάλλεται όπως είναι φυσικό από ομιλητή σε ομιλητή. Απεριοδική διέγερση δημιουργείται όταν η γλωττιδική στένωση μικραίνει τόσο ώστε η ροή της δημιουργούμενης δέσμης αέρα (glottal jet) παύει να έχει χαρακτηριστικά στρωτής ροής και μεταβαίνει σε τυρβώδη, όπου κυριαρχούν τυχαίες αποκολλήσεις της δέσμης προς όλες τις διευθύνσεις της υπερ-λαρυγγικής κοιλότητας. Το γεγονός αυτό παράγει τυχαίο θόρυβο το φάσμα του οποίου καθορίζεται από τους ακριβείς μηχανισμούς γένεσης της τύρβης. Στην απλούστερη των περιπτώσεων κυριαρχούν οι αποκολλήσεις και η ανάμιξη των στροβίλων που προκύπτουν με τον περιβάλλοντα αέρα. Σε άλλες όμως, όπως για παράδειγμα κατά την εκφώνηση άφωνων και συριστικών όπως /s/ και /S/ υπήρχε σύγχυση απόψεων στη βιβλιογραφία για το μηχανισμό γένεσης. Προτάθηκε μετά από πειραματικές δοκιμές<sup>[37]</sup> ότι η πηγή δεν είναι αυτή καθαυτή η τυρβώδης δέσμη αλλά η αλληλεπίδρασή της με την περιβάλλουσα γεωμετρία, όπως π.χ. οι συγκρούσεις των 'πακέτων' αέρα με τα γύρω σταθερά εμπόδια. Αργότερα λαμβάνοντας υπόψη τον τριδιάστατο χαρακτήρα της τύρβης, έγινε δεκτό ότι το φαινόμενο εξαρτάται αποκλειστικά από τις τριδιάστατες λεπτομέρειες της γεωμετρίας της φωνητικής οδού, οπότε μια απλή αξονική κατανομή των διατομών αυτής μπορεί να μην είναι αρκετή για τη διερεύνηση του μηχανισμού παραγωγής των άφωνων ήχων. Όπως και να έχει όμως ο παραγόμενος ήχος θα διαμορφωθεί σε μεγάλο βαθμό από τους συντονισμούς που θα δημιουργηθούν στο υπόλοιπο του φωνητικού σωλήνα μέχρι και την έξοδο από τα χείλη.

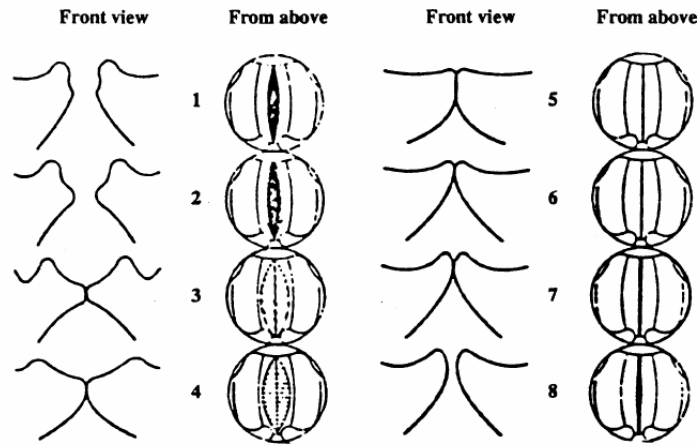


Εικόνα 6-9. Η ογκομετρική παροχή στη γλωττίδα και η παράγωγός της

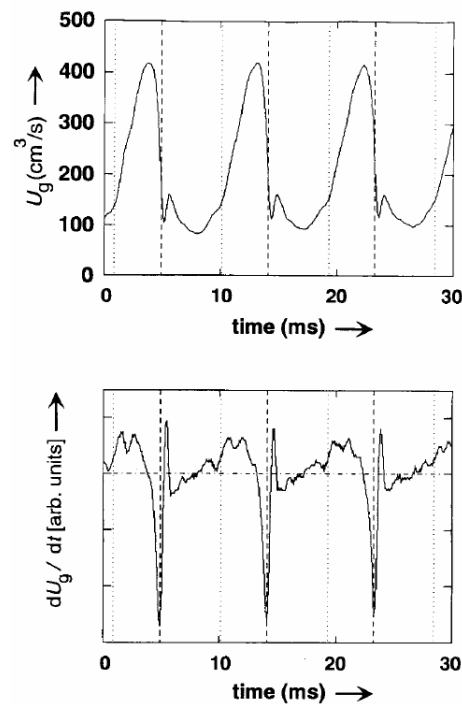
Η μελέτη των ακουστικών και μηχανικών ιδιοτήτων του λάρυγγα είναι ακόμα και σήμερα περιοχή έντονης μελέτης και έρευνας. Η μοντελοποίηση απαιτεί οπωσδήποτε την πραγματοποίηση απλοποιητικών παραδοχών για τις κινήσεις των ιστών αλλά και για την αεροδυναμική κοντά στη γλωττιδική περιοχή. Ανάλογα με το βαθμό της περιεχόμενης φυσικής / ανατομικής πληροφορίας τα γλωττιδικά μοντέλα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο κύριες ομάδες:

**Μοντέλα ταλαντωτών.** Τα μοντέλα αυτά είναι τα πιο σύνθετα, αλλά και πιο αυστηρά στην περιγραφή της αλληλεπίδρασης της αεροροής και των φωνητικών χορδών για παραγωγή περιοδικής διέγερσης. Πρόκειται για μοντέλα γραμμικών ταλαντωτών που παίρνουν σαν είσοδο την αργή μεταβολή της πίεσης στους πνεύμονες, την τάση στις φωνητικές χορδές και το σχήμα αυτών πριν από τη φώνηση. Κύριος εκπρόσωπος της κατηγορίας αυτής είναι το μοντέλο δύο μαζών των Ishizaka, Flanagan<sup>[14]</sup>. Στο μοντέλο αυτό οι φωνητικές χορδές χωρίζονται σε δύο 'περιοχές' με διαφορετικά χαρακτηριστικά μήκη. Η πρώτη αντιστοιχεί στο μέρος προς την τραχεία και η δεύτερη στο μέρος προς το φάρυγγα. Στις περιοχές αυτές αντιστοιχίζονται δύο συστήματα ελατηρίου – αποσβεστήρα συζευγμένα μεταξύ τους, δίνοντας τη δυνατότητα έτσι σωστής αναπαράστασης του φαινομένου της καθυστέρησης φάσης (vertical phasing) του εμπρόσθιου τμήματος των χορδών, ως προς αυτό της μεριάς της τραχείας. Για τη σωστή προσομοίωση των μηχανικών ιδιοτήτων των ιστών οι σταθερές των ελατηρίων και των αποσβεστήρων είναι μη γραμμικές συναρτήσεις των απομακρύνσεων.

**Εμπειρικά παραμετρικά μοντέλα.** Τα μοντέλα αυτά αντιμετωπίζουν το σύστημα φωνητικών χορδών σα μαύρο κουτί χωρίς να εμπεριέχουν την πληροφορία αλληλεπίδρασης της ροής με τους ιστούς και παρέχουν αναλυτικές κλαδικές συναρτήσεις για τη μεταβολή της ογκομετρικής παροχής και της παραγωγού της στη γλωττίδα ως προς το χρόνο. Προφανώς τα μοντέλα αυτά δεν μπορούν να προσομοιώσουν σωστά τα φαινόμενα μικτής τυρβώδους διέγερσης που παρατηρούνται σε κάποια φωνήεντα όπως το /i/, αλλά και άλλες περιπτώσεις ένρινων και υψηλού τόνου φωνήματα όπως π.χ. σε θηλυκούς ομιλητές. Παρόλα αυτά αρκούν για να περιγράψουν μια απλή περιοδική διέγερση στη γλωττίδα για τους συνήθεις τύπους φωνηέντων. Στην Εικόνα 6-10 φαίνονται οι θέσεις και το σχήμα των φωνητικών χορδών κατά τη διάρκεια ενός κύκλου περιοδικής διέγερσης<sup>[34]</sup> σε στιγμιότυπα που ελήφθησαν με τη βοήθεια υψηλής ταχύτητας στροβοσκοπικής φωτογράφισης. Διακρίνεται η μεταβολή της εξωτερικής επιφάνειας των χορδών καθώς αυτή πιέζεται για να ανοίξει από τον εισερχόμενο αέρα από την τραχεία. Οι χορδές έτσι 'μεταφέρουν' τρόπον τινά ένα μηχανικό κύμα που ξεκινά από κάτω και μεταφέρεται προς τα πάνω. Αποτέλεσμα αυτού είναι η μεταβολή της ογκομετρικής παροχής αέρα και της παραγωγού αυτής, όπως φαίνεται στην Εικόνα 6-11, όπου εικονίζεται ένα πραγματικό γλωττογράφημα άρρενος ομιλητή<sup>[40]</sup>.



Εικόνα 6-10. Τυπικές θέσεις και σχήμα των φωνητικών χορδών σε ένα κύκλο ταλάντωσης<sup>[34]</sup>



Εικόνα 6-11. Πραγματικό γλωττογράφημα ενήλικα ομιλητή<sup>[40]</sup>.

Σε αυτό μπορεί να διακρίνει κανείς την *κλειστή φάση* όπου η γλωττίδα είναι εντελώς κλειστή και δεν υπάρχει ροή. (Σε ορισμένες περιπτώσεις η γλωττίδα δεν κλείνει ποτέ εντελώς και αφήνει ένα μικρό μέρος ανοικτό συνέχεια). Κατά τη διάρκεια της *ανοικτής φάσης* η ροή αυξάνεται με χαρακτηριστικό ρυθμό, φθάνει σε κάποιο μέγιστο και τέλος αρχίζει να πέφτει πολύ απότομα. Η ασυμμετρία αυτή οφείλεται στη γεωμετρία των χορδών προς την περιοχή της τραχείας και στις κοιλότητες που δημιουργούνται εκεί. Το εύρος της θεμελιώδους συχνότητας καθορίζεται από τη θέση του μεγίστου της ογκομετρικής παροχής, ενώ το εύρος των υψηλότερων αρμονικών καθορίζεται από το αρνητικό μέγιστο της παραγώγου, που συμβαίνει λίγο πριν αρχίσει η κλειστή φάση. Η ακριβής κυματομορφή της γλωττιδικής παροχής επηρεάζεται από έναν αρκετά μεγάλο αριθμό παραμέτρων συμπεριλαμβανομένων του φύλου του ομιλητή, της θεμελιώδους συχνότητας πάλμωσης των χορδών, της υπογλωττιδικής πίεσης και της θέσης των χορδών στην κατάσταση ισορροπίας. Στο παραμετρικό μοντέλο των Liljencrants, Fant<sup>[6]</sup> η παράγωγος της γλωττιδικής παροχής προσεγγίζεται από την ακόλουθη κλαδική συνάρτηση:



$$E(t) = \dot{U}'(t) = \begin{cases} E_0 e^{at} \sin(\omega_0 t), & 0 \leq t < T_e \\ E_1 (e^{-b(t-T_c)} - e^{-b(T_c-T_e)}), & T_e \leq t < T_c \\ 0, & T_c \leq t < T_0 \end{cases} \quad (6.1)$$

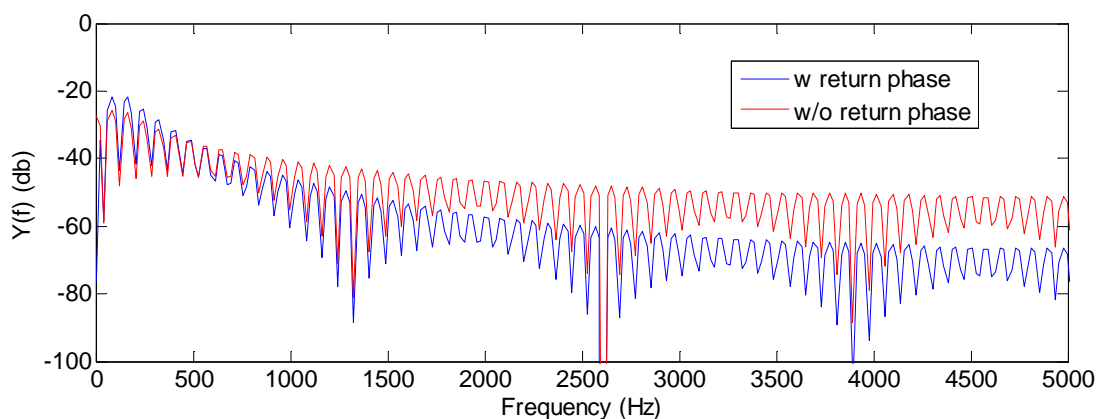
όπου  $T_0$  η θεμελιώδης περίοδος και  $T_e$  το ποσοστό του χρόνου (ως προς τη θεμελιώδη περίοδο) της ανοιχτής φάσης. Για το υπόλοιπο της περιόδου η παράγωγος της παροχής είτε μηδενίζεται απότομα ή μηδενίζεται ανερχόμενη εκθετικά σύμφωνα με τον δεύτερο κλάδο της (6.1). Η μορφή της καμπύλης μέχρι το  $T_e$  καθορίζεται από τις παραμέτρους  $E_0, a, \omega_0$ , εκ των οποίων μόνο η πρώτη είναι υπολογιζόμενη σύμφωνα με την σχέση:

$$E_0 = -E_e / \{e^{aT_e} \sin(\omega_0 T_e)\} \quad (6.2)$$

Η τέταρτη παράμετρος  $T_c$  εκφράζεται σαν μέρος της θεμελιώδους περιόδου και καθορίζει το ρυθμό της εκθετικής ανόδου της παραγωγού από τη μέγιστη αρνητική τιμή της στο μηδέν κατά τη *φάση επιστροφής* (return phase). Η σταθερά  $E_1$  του δεύτερου κλάδου ορίζεται συναρτήσει των άλλων παραμέτρων:

$$E_1 = E_e / (1 - e^{\beta(T_c - T_e)}) \quad (6.3)$$

Όταν η τιμή της  $T_c$  είναι μηδέν, δηλ. δεν υπάρχει καθόλου φάση επιστροφής, τότε η παράγωγος της παροχής μηδενίζεται απότομα τη χρονική στιγμή  $T_e$  και η κλίση του φάσματος του παλμού στις υψηλές συχνότητες είναι περίπου 6db ανά οκτάβα. Όταν υπάρχει φάση επιστροφής, δηλ. μη μηδενική τιμή της  $T_c$ , η κλίση διπλασιάζεται και γίνεται περίπου 12db ανά οκτάβα από τη συχνότητα  $1/(2\pi T_c)$ . Η Εικόνα 6-12 δείχνει το φάσμα ενός σήματος που κατασκευάστηκε από παλμούς θεμελιώδους περιόδου  $T_0 = 1/80s$  με και χωρίς φάση επιστροφής. Είναι προφανής η ενίσχυση των υψηλών συχνοτήτων στην περίπτωση που δεν υπάρχει καθόλου φάση επιστροφής, γεγονός το οποίο αποδίδεται στο ότι ο παλμός γίνεται πολύ πιο απότομος χωρίς την εκθετική άνοδο της (6.2).



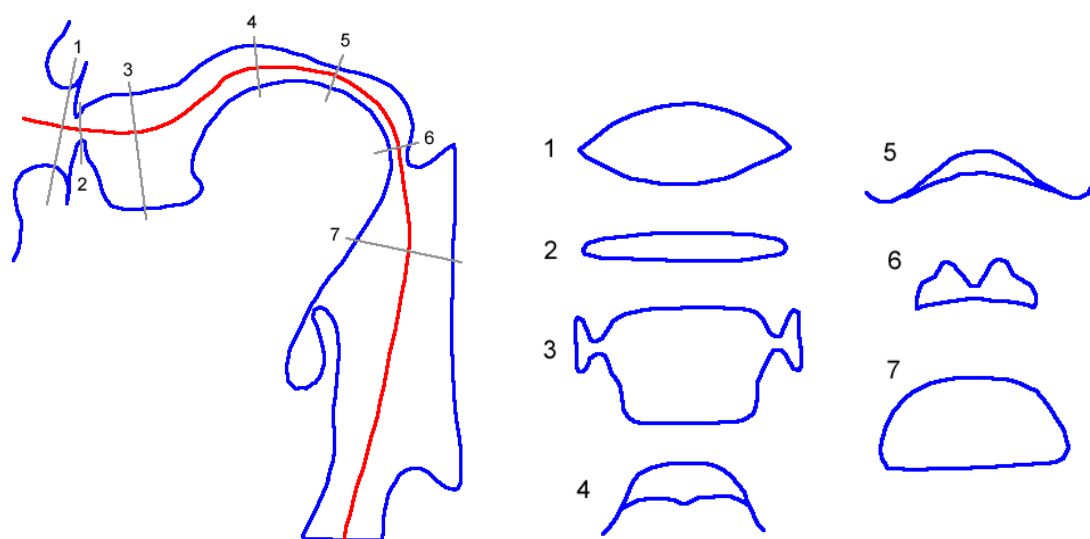
Εικόνα 6-12. Φάσμα παλμού LF χωρίς και με φάση επιστροφής

Αντίθετα η μεταβολή της διάρκειας της ανοιχτής φάσης έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή της ισχύος των χαμηλών συχνοτήτων (2 πρώτες αρμονικές). Παρόμοιο εμπειρικό γλωττιδικό μοντέλο είναι αυτό των Klatt – Rosenberg<sup>[20]</sup>, στο οποίο το ημίτονο αντικαθίσταται από μια τετραγωνική

συνάρτηση. Υπάρχει και σε αυτό η παράμετρος του χρόνου της φάσης επιστροφής και το φάσμα των παραγομένων κυματομορφών είναι περίπου ίδιο με το LF.

### 6.3.2 Το Φίλτρο

Η ακριβής διαμόρφωση του φάσματος της φωνής εξαρτάται σχεδόν αποκλειστικά από το σχήμα του φωνητικού σωλήνα, οποίος ενισχύει ή αποσβένει διάφορες από την συχνότητες που παράγονται από την πηγή. Ο φωνητικός σωλήνας έχει ισχυρά μεταβλητή διατομή και μήκος από το λάρυγγα έως τα χείλη περίπου 17 cm για αρσενικό και περίπου 14 cm για θηλυκό ομιλητή. Η επιφάνεια της διατομής του μεταβάλλεται από 0 έως και 10 cm<sup>2</sup> και ο κύριος αρθρωτής που τη ρυθμίζει, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως είναι η γλώσσα, λόγω του μεγάλου της όγκου. Για να γίνει αντιληπτή η πολυπλοκότητα της γεωμετρίας του φωνητικού σωλήνα, στην Εικόνα 6-13 παρατίθεται η μέση πλάγια όψη αυτού από σκαρίφημα που προέκυψε μετά από επεξεργασία εικόνας ακτίνων X ανδρός ομιλητή κατά την παραγωγή κάποιου χειλικού φωνήεντος. Η κόκκινη γραμμή αναπαριστά περίπου την κεντρική γραμμή του σωλήνα (centerline) για το συγκεκριμένο φώνημα, ενώ στο δεξί μέρος της εικόνας φαίνονται τα σχήματα που παίρνει η εγκάρσια διατομή στις αριθμημένες θέσεις. Το σχήμα καλύπτει το σωλήνα από τη γλωττίδα μέχρι και τα χείλη. Κατά τη διάδοση του ήχου (τουλάχιστο για τα φωνήεντα) δημιουργούνται στάσιμα κύματα αέρα σε συγκεκριμένα σημεία του σωλήνα, τα οποία δεν κινούνται προς τα έξω αλλά ταλαντώνονται με χαρακτηριστικές συχνότητες, οι οποίες ονομάζονται συχνότητες συντονισμού (resonance frequencies). Για την καλύτερη κατανόηση του φαινομένου συνίσταται η παραβολή με το μοντέλο των χορδών με στερεωμένα άκρα, που συναντάται σε πληθώρα συγγραμμάτων κυματικής<sup>[31]</sup>. Ο μηχανισμός δημιουργίας των στάσιμων κυμάτων είναι ακριβώς ο ίδιος με μια όμως σημαντική διαφορά: Στην περίπτωση που το μέσο διάδοσης δεν είναι στερεό, αλλά αέριο οι συχνότητες συντονισμού αυξάνονται ως προς το εύρος ζώνης τους (bandwidth), ακριβώς επειδή οι δυνάμεις μεταξύ των μορίων είναι πολύ πιο χαλαρές, οπότε υπάρχει πολύ μεγαλύτερη ελευθερία και ευκολία ως προς τη δημιουργία και τον τρόπο των ταλαντώσεων. Το εύρος ζώνης εξαρτάται αποκλειστικά από το μέσο διάδοσης και τη συνεκτικότητά του.

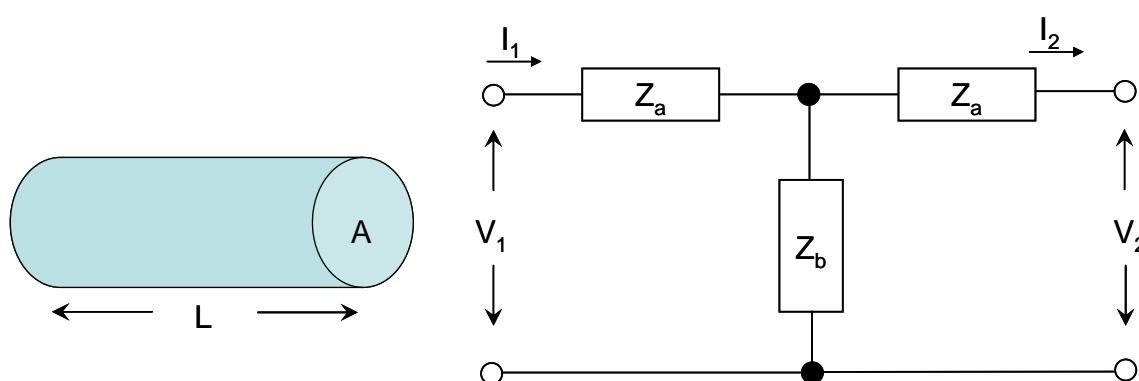


Εικόνα 6-13. Πλάγια όψη και διατομές φωνητικού σωλήνα σε καθορισμένες θέσεις<sup>[5]</sup>

Οι συντονισμοί ή άλλως formants εξαρτώνται αποκλειστικά από το φωνητικό σωλήνα. Το σχήμα των διατομών παρότι είναι εξαιρετικά ποικίλο και αλλάζει δραστικά κατά μήκος του αγωγού, έχει πολύ μικρή ως αμελητέα επίδραση στη δημιουργία των συντονισμών. Αντίθετα η **συνολική επιφάνεια** των διατομών και η μεταβολή της κατά μήκος του σωλήνα είναι ο κύριος ρυθμιστής των συντονισμών. Σε πολλά μαθηματικά μοντέλα ο σωλήνας προσεγγίζεται σαν ένα σύνολο πολλών μικρών αγωγών συνδεδεμένων μεταξύ τους με κυκλική διατομή και μεταβλητή εγκάρσια επιφάνεια. Αναλυτικές λύσεις μπορούν να εξαχθούν θεωρητικά για μέχρι εννέα σωλήνες, πρακτικά όμως το όριο είναι μέχρι τέσσερις ή πέντε. Πιο ακριβείς προσεγγίσεις είναι εφικτές με χρήση αριθμητικών μεθόδων και πλήθος σωλήνων μέχρι σαράντα<sup>[43],[44]</sup>. Η μαθηματική ανάλυση για την εύρεση της συναρτήσεως μεταφοράς και κατά συνέπεια της συνολικής απόκρισης του σωλήνα έχει μελετηθεί εκτενώς και μπορεί να βρεθεί σε πλήθος κειμένων συμπεριλαμβανομένων αυτών του Fant<sup>[5]</sup> και του Flanagan<sup>[9]</sup>. Παρόλα αυτά για λόγους πληρότητας στην επόμενη παράγραφο παρατίθεται η ανάλυση για ομοιόμορφο σωλήνα σταθερής διατομής.

### 6.3.3 Ομοιόμορφος Σωλήνας

Ο ομοιόμορφος σωλήνας προσεγγίζει το σχήμα το σχήμα της φωνητικής οδού κατά την παραγωγή των λεγομένων **ουδέτερων φωνηέντων** (neutral vowels), όπως π.χ. /æ/ στις αγγλικές λέξεις heard ή ago. Η απόκριση του σωλήνα στα περισσότερα συγγράμματα προσεγγίζεται είτε με την κατασκευή του ηλεκτρικού αναλόγου σε συνδιασμό με χρήση της κυματικής θεωρίας και της θεωρίας των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Στην πρώτη περίπτωση η τάση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος θεωρείται το ανάλογο της ακουστικής πίεσης, ενώ το ρεύμα θεωρείται το ανάλογο της ογκομετρικής ακουστικής παροχής. Η αναλογία έχει νόημα μόνον όταν το ακουστικό κύμα μπορεί να θεωρηθεί επίπεδο κατά μήκος του σωλήνα, πράγμα το οποίο συμβαίνει όταν η εγκάρσια διάσταση του τελευταίου είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μεταφερόμενο μήκος κύματος. Το τελευταίο είναι προφανές ότι συμβαίνει για συχνότητες μέχρι 5kHz, όταν η ταχύτητα του ήχου είναι 343m/s. Η Εικόνα 6-14 δείχνει έναν ομοιόμορφο σωλήνα μήκους  $L$  και διατομής  $A$  και το ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα.



Εικόνα 6-14. Ομοιόμορφος σωλήνας και το ηλεκτρικό ανάλογό του

Οι σύνθετες αντιστάσεις του κυκλώματος αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\begin{aligned} Z_a &= Z_0 \tanh\left(\frac{i\omega L}{2c}\right) \\ Z_b &= Z_0 \cosh\left(\frac{i\omega L}{c}\right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

όπου  $Z_0 = \rho_0 c_0 / A$ ,  $\rho_0$ ,  $c_0$  η πυκνότητα και ταχύτητα του ήχου αντίστοιχα και  $\omega$  η γωνιακή συχνότητα. Για να αναπαρασταθεί σωστά η παραγωγή των ουδετέρων φωνηέντων πρέπει να εισαχθούν τερματισμοί στο κύκλωμα ώστε να προσομοιωθούν σωστά οι επικρατούσες συνθήκες στη γλωττίδα και τα χείλη. Στα χείλη επικρατεί πολύ χαμηλή ακουστική αντίσταση, αφού ο εξωτερικός όγκος είναι πολύ μεγαλύτερος από αυτόν του φωνητικού σωλήνα, ενώ στο άκρο της γλωττίδας ο ακουστικός σωλήνας μπορεί να θεωρηθεί τελείως κλειστός, αφού το άνοιγμα της γλωττίδας κατά την παραγωγή των φωνηέντων είναι πολύ μικρό. Βραχυκυκλώνοντας έτσι το δεξί άκρο του ισοδύναμου κυκλώματος και εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm:

$$(I_2 - I_1)Z_b + I_2 Z_a = 0 \quad (6.5)$$

Συνεπώς η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ  $I_2$  και  $I_1$  είναι:

$$T(\omega) = \frac{I_2}{I_1} = \frac{Z_b}{Z_a + Z_b} = \frac{1}{\cos(\omega L/c)} \quad (6.6)$$

Συντονισμοί συμβαίνουν όταν μεγιστοποιείται / απειρίζεται η συνάρτηση μεταφοράς, δηλ. όταν  $\cos(\omega L/c) = 0 \Rightarrow \omega_n L/c = (2n-1)\pi/2$ , ή όταν:

$$f_n = \frac{(2n-1)c}{4L} \quad (6.7)$$

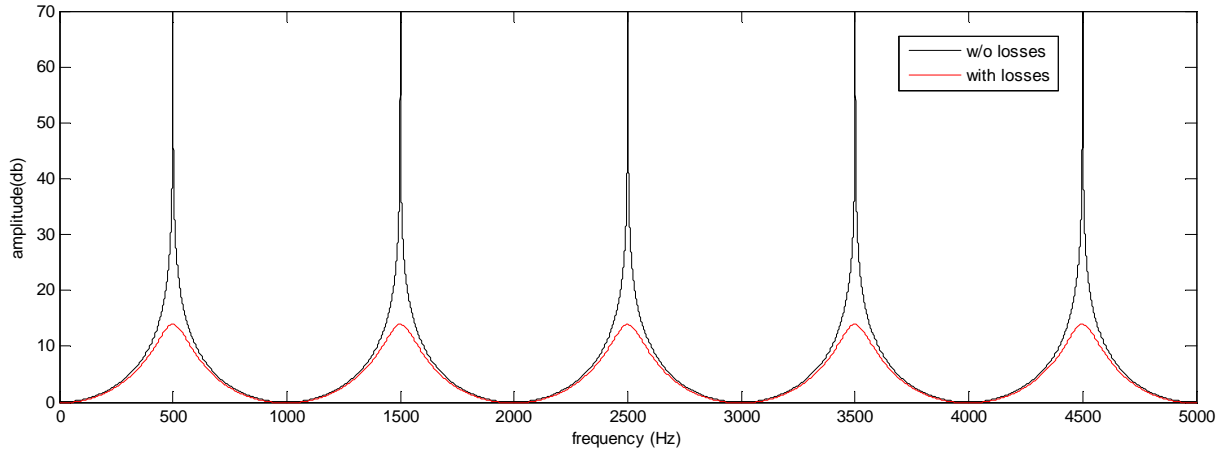
Και για την περίπτωση που ο σωλήνας έχει απώλειες:

$$T(\omega) = \frac{1}{i/Q + \cos(\omega L/c)} \quad (6.8)$$

όπου  $Q$  συντελεστής απωλειών. Είναι προφανές ότι το ρεύμα αντιστοιχεί στην ογκομετρική παροχή και η τάση στην ακουστική πίεση.

Για σωλήνα 17,7 cm που είναι σχεδόν το μήκος της φωνητικής οδού ενός ενήλικα και για ταχύτητα ήχου ίση με  $c = 354 \text{ m/s}$  προκύπτουν οι ισαπέχουσες συχνότητες συντονισμού των 500, 1500, 2500, 3500 και 4500 Hz. Η επίδραση των απωλειών όπως φαίνεται και στην Εικόνα 6-15 είναι ότι διευρύνουν το εύρος ζώνης του κάθε συντονισμού. Τέλος στην πραγματικότητα υπάρχει και μετατόπιση προς τα πίσω (κατά 5% περίπου) των συντονισμών λόγω των συνθηκών ακτινοβολίας που επικρατούν στην έξοδο του σωλήνα, οι οποίες δεν έχουν μοντελοποιηθεί σωστά στο ηλεκτρικό ανάλογο. Ακριβώς όμοια αποτελέσματα δίνει και η ανάλυση με βάση την εξίσωση Webster (βλ παρακάτω) για σταθερή διατομή και σωλήνα κλειστό στο ένα άκρο (γλωττίδα) και ανοιχτό στο άλλο. Για σωλήνα κλειστό ή ανοικτό και στα δύο άκρα οι συντονισμοί μετακινούνται προς τα πίσω κατά 500 Hz και γίνονται:

$$f = 0, \frac{c}{2L}, \frac{c}{L}, \frac{3c}{2L}, \dots = 0, 1000, 2000, 3000, \dots \text{ Hz}$$



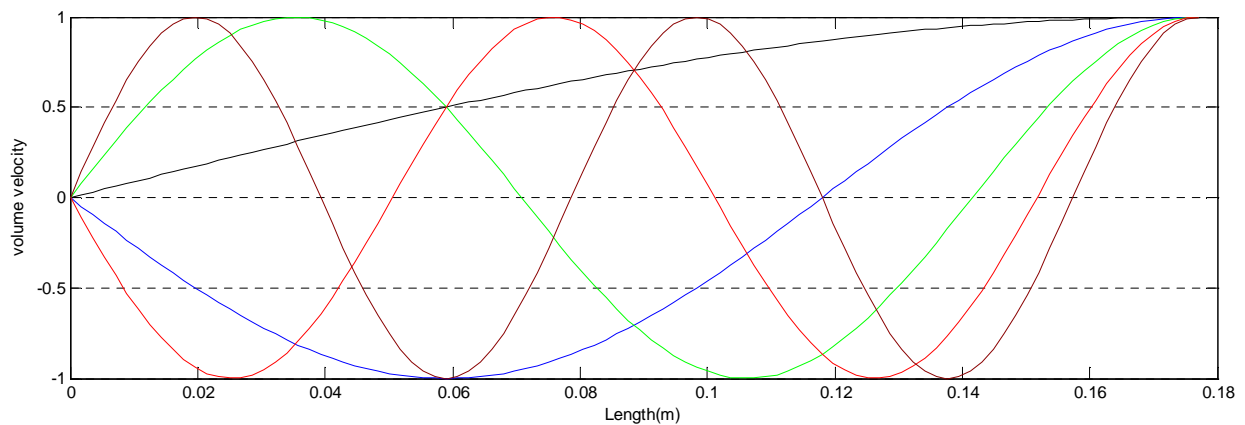
Εικόνα 6-15. Συντονισμοί ομοιόμορφο σωλήνα με ανοιχτό άκρο, με και χωρίς απώλειες

Όπως προκύπτει από την ανάλυση του ισοδύναμου κυκλώματος ή της διαφορικής εξίσωσης Webster, οι αξονικές κατανομές της ακουστικής πίεσης και ογκομετρικής παροχής δίδονται από τις σχέσεις:

$$p(x) = P_m \sin\left(\frac{2\pi f}{c} x\right)$$

$$U(x) = iP_m \frac{A}{\rho_0 c} \cos\left(\frac{2\pi f}{c} x\right)$$
(6.9)

Κάθε ένας από τους συντονισμούς αντιστοιχεί και σε ένα στάσιμο κύμα πίεσης και ογκομετρικής παροχής με τα διαφορά φάσης 90 μοιρών. Τα στάσιμα κύματα της ογκομετρικής παροχής για αγωγό κλειστό στο δεξιό άκρο φαίνονται στην Εικόνα 6-16.



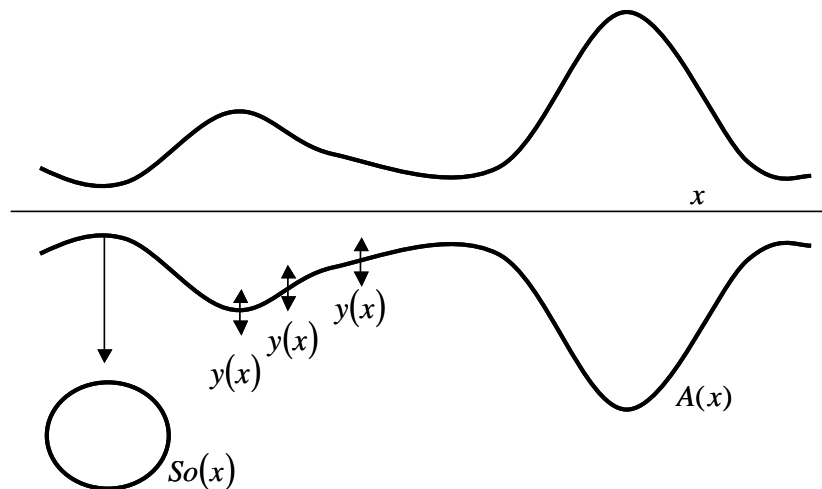
Εικόνα 6-16. Στάσιμα κύματα σε αγωγό 0,177 m, κλειστό αριστερά

Χαρακτηριστικό τέλος είναι ότι η συνάρτηση μεταφοράς για ήχους φωνηέντων έχει μόνο πόλους και καθόλου μηδενικά. Μηδενικά μπορεί βεβαίως να προκύψουν όταν συμπεριλαμβάνεται η ένρινη κοιλότητα στην φώνηση ή / και όταν συνεισφέρουν σε αυτή και άλλες πηγές κατά μήκος του φωνητικού σωλήνα πέραν της γλωττίδας, όπως για παράδειγμα στενώσεις της φαρυγγικής κοιλότητας. Τα μηδενικά δημιουργούν στο φάσμα κορυφές προς τα κάτω, ενώ η έντασή τους εξαρτάται και από την ύπαρξη γειτονικών πόλων με τους οποίους πολλές φορές τυχαίνει και να αλληλοεξουδετερώνονται, όταν συμβαίνει να έχουν μηδενική απόσταση.

## 6.4 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΤΟΥ PORTNOFF

### 6.4.1 Οι Εξισώσεις

Στις επόμενες παραγράφους γίνεται προσπάθεια εξαγωγής των εξισώσεων μονοδιάστατης ακουστικής διάδοσης σε αγωγό με χρονομεταβαλλόμενη διατομή. Η διαδικασία δεν είναι ακριβώς η ίδια με αυτή που παρουσιάζεται στο<sup>[32]</sup> και ο λόγος που παρατίθεται είναι γιατί θεωρήθηκε ότι υπάρχουν μη ξεκάθαρα σημεία που δε διευκρινίζονται σωστά. Θεωρείται η διατομή του αγωγού ακολουθεί κάποια λεία και ομαλή συνάρτηση  $A_0(x)$  κατά τη διεύθυνση μήκους του (βλ. Εικόνα 6-17) και ότι τα τοιχώματά του είναι ελαστικά και μπορούν να πραγματοποιήσουν μικρές μετατοπίσεις γύρω από μια θέση ισορροπίας, ώστε η συνολική επιφάνεια σε τυχόν σημείο και χρονική στιγμή να είναι  $A(x,t) = A_0(x) + A'(x,t) = A_0(x) + S_0(x) \cdot y(x,t)$ , όπου  $S_0(x)$ ,  $y(x,t)$  η περίμετρος ισορροπίας και η μετατόπιση του τοιχώματος από τη θέση ισορροπίας αντίστοιχα.



Εικόνα 6-17. Αγωγός μεταβλητής διατομής με δονούμενα τοιχώματα

Θεωρείται σύμφωνα με τις κλασικές θεωρίες διαταραχών που χρησιμοποιούνται στα μοντέλα πλήρους διαχωρισμού ακουστικού και προβλήματος ροής, ότι τα ακουστικά μεγέθη προκύπτουν σαν διακυμάνσεις (συμβολίζονται με τονούμενα μεγέθη) αθροιζόμενες σε μια μέση τιμή ισορροπίας. Έτσι για την ολική ακουστική πυκνότητα, ακουστική ταχύτητα και ακουστική πίεση θα ισχύει:

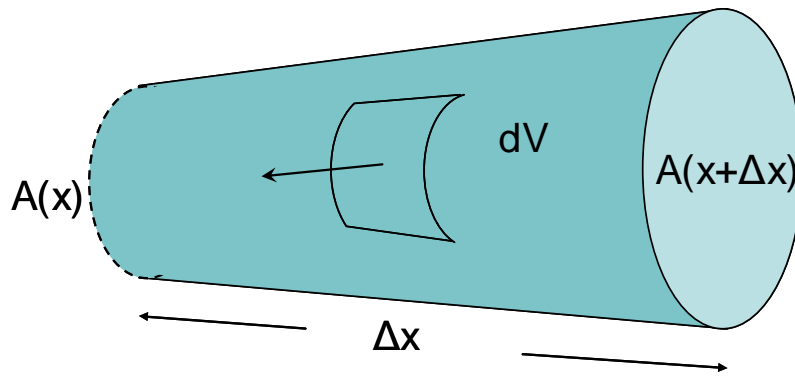
$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho' \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}' \\ p &= p_0 + p' \end{aligned} \quad (6.10)$$

Ξεκινώντας από την εξίσωση συνέχειας και με αντικατάσταση των (6.10):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \overline{\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}')} + \overline{\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_0)} + \overline{\nabla \cdot (\rho' \mathbf{u}_0)} + \overline{\nabla \cdot (\rho' \mathbf{u}') } = 0 \quad (6.11)$$

Αμελούνται οι όροι που περιέχουν τα γινόμενα των διαταραχών μεταξύ τους (όρος 4), επειδή θα δώσουν τιμές πολύ μικρές συγκρινόμενες με τους όρους που περιέχουν τις μέσες τιμές και ο όρος 2 μπορεί να αμεληθεί αν θεωρηθεί ότι η μέση ροή του ρευστού είναι ασυμπίεστη σε ροή χαμηλού αριθμού Mach  $\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_0) = \rho_0 \nabla \cdot (\mathbf{u}_0) = \rho_0 \cdot 0 = 0$  (προσοχή: ασυμπίεστη δε σημαίνει απαραίτητα και μόνιμη, οπότε ο μεταβατικός όρος διατηρείται).



Εικόνα 6-18. Στοιχειώδης όγκος ελέγχου μεταβλητής διατομής

Θεωρώντας τώρα ισεντροπικές μεταβολές για το ρευστό (αέριο), οι μεταβολές της πυκνότητας μπορούν να συνδεθούν με τις μεταβολές της πίεσης σύμφωνα με την:

$$\rho' = \frac{p'}{c_0^2} = \rho_0 \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \quad (6.12)$$

Σε πολλά συγγράμματα<sup>[33]</sup> η ποσότητα  $\frac{1}{\rho_0 c_0^2}$  αναφέρεται και ως bulk modulus του αερίου.

Αντικαθιστώντας την (6.12) στην εξίσωση συνεχείας:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} \left( 1 + \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \right) + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}') + \nabla \cdot \left( \rho_0 \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \mathbf{u}_0 \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} \left( 1 + \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \right) + \nabla \cdot \left( \rho_0 \mathbf{u}' + \rho_0 \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \mathbf{u}_0 \right) = 0 \quad (6.13)$$

Ολοκληρώνοντας στον όγκο ελέγχου της Εικόνας 6-18 και χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης Gauss, το ολοκλήρωμα όγκου της απόκλισης μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα επιφανείας στο σύνορο του ορίσματος της απόκλισης. Από το ολοκλήρωμα επιφανείας μόνο οι όροι στις επιφάνειες εισόδου και εξόδου είναι μη μηδενικοί, ενώ η αλλάζει σειρά παραγωγίσις και ολοκλήρωσης στον μεταβατικό όρο.

$$\iiint_V \frac{\partial \rho_0}{\partial t} \left( 1 + \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \right) dV + \iint_{\partial V} \left( \rho_0 \mathbf{u}' + \rho_0 \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \mathbf{u}_0 \right) \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (6.14)$$

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+dx} dx \iint_{A(x)} \rho_0 \left( 1 + \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \right) + \iint_{A(x+dx)} \left( \rho_0 \mathbf{u}' + \rho_0 \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \mathbf{u}_0 \right) dA - \iint_{A(x)} \left( \rho_0 \mathbf{u}' + \rho_0 \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \mathbf{u}_0 \right) dA = 0$$

Διαιρώντας την (6.14) με το μήκος του στοιχειώδους ο.ε. και παίρνοντας το όριο στο μηδέν:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{d}{dt} \int_x^{x+dx} dx \iint_{A(x)} \rho_0 \left( 1 + \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \right) dA \right\} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left\{ \iint_{A(x+dx)} \left( \rho_0 \mathbf{u}' + \rho_0 \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \mathbf{u}_0 \right) dA - \iint_{A(x)} \left( \rho_0 \mathbf{u}' + \rho_0 \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \mathbf{u}_0 \right) dA \right\} = 0 \quad (6.15)$$

Στον μεταβατικό όρο το πρώτο ολοκλήρωμα ‘απλοποιείται’ με την παράγωγο που προκύπτει και μένει η χρονική παράγωγος και το διπλό ολοκλήρωμα, ενώ για τους δύο υπόλοιπους όρους προκύπτει μερική παραγωγή κατά μήκος του αγωγού.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(x)} \rho_0 \left( 1 + \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \right) dA + \frac{\partial}{\partial x} \iint A(x) \left( \rho_0 \mathbf{u}' + \rho_0 \frac{p'}{\rho_0 c_0^2} \mathbf{u}_0 \right) dA = 0 \quad (6.16)$$

Αν εκτελεστούν οι ολοκληρώσεις στον πρώτο όρο και αναγνωριστούν στον δεύτερο η ακουστική ογκομετρική παροχή  $U' = \iint_A u dA$  σα νέα μεταβλητή, αφού πρώτα θεωρηθεί μία διάσταση για το διάνυσμα της ταχύτητας (μονοδιάστατη προσέγγιση), προκύπτει:

$$\frac{\partial(\rho_0 A_0)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_0 p' A_0}{\rho_0 c_0^2} \right) + \frac{\partial(\rho_0 U')}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_0 u_0 \frac{p' A_0}{\rho_0 c_0^2} \right) = 0 \quad (6.17)$$

Σημειώνεται ότι οι ολοκληρώσεις επιφανείας ΔΕΝ λαμβάνουν υπόψη τη χρονομεταβολή της διατομής του αγωγού. Απουσία μέσης ροής ο τελευταίος όρος είναι μηδενικός και απλοποιώντας την πυκνότητα ισορροπίας, προκύπτει η προς λύση μορφή της εξίσωσης συνέχειας.

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \left( -\frac{\partial U'}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \frac{\rho_0 c_0^2}{A_0(x)} \quad (6.18)$$

Η δεύτερη διάσταση είναι ‘κρυμμένη’ στη συνάρτηση μεταβολής της διατομής του αγωγού  $A_0(x)$  και στην παραδοχή ότι τα τοιχώματα μπορούν να κάνουν μικρές κινήσεις επηρεαζόμενα από τον μεταφερόμενο ήχο. Είναι ένας τρόπος εισαγωγής αλληλεπίδρασης στερεού – ρευστού στο μοντέλο (fluid structure interaction), αλλά και το στοιχείο εκείνο που τελικά θα δώσει τους συντονισμούς (formants) του σωλήνα κατά την αριθμητική επίλυση.

Με όμοιο τρόπο γίνονται οι χειρισμοί και στη διαφορική μορφή της εξίσωσης ορμής, που είναι η δεύτερη εξίσωση που περιγράφει το φαινόμενο της ακουστικής διάδοσης και θα συμπληρώσει το διαφορικό σύστημα. Ξεκινώντας από τη μη συντηρητική μορφή της εξίσωσης ορμής, που αποτελεί και μια εναλλακτική μορφή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για το συνεχές μέσο, αμελώντας τις ιξώδεις τάσεις, αντικαθιστώντας τις (6.10) και κάνοντας τις πράξεις και ομαδοποιώντας τους όρους:



$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p \Rightarrow \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p \quad (6.19)$$

$$(\rho_0 + \rho') \frac{\partial(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}')}{\partial t} + (\rho_0 + \rho')(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}') \cdot \nabla(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}') = -\nabla(p_0 + p')$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \frac{2}{\rho'} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \frac{3}{\rho_0} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \frac{4}{\rho'} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \\ & \frac{5}{\rho_0 \mathbf{u}_0} \nabla \mathbf{u}_0 + \frac{6}{\rho_0 \mathbf{u}'} \nabla \mathbf{u}' + \frac{7}{\rho_0 \mathbf{u}_0} \nabla \mathbf{u}' + \frac{8}{\rho_0 \mathbf{u}'} \nabla \mathbf{u}_0 + \\ & \frac{9}{\rho' \mathbf{u}_0} \nabla \mathbf{u}_0 + \frac{10}{\rho' \mathbf{u}'} \nabla \mathbf{u}' + \frac{11}{\rho' \mathbf{u}_0} \nabla \mathbf{u}' + \frac{12}{\rho' \mathbf{u}'} \nabla \mathbf{u}_0 = -\frac{13}{\nabla p_0} - \frac{14}{\nabla p'} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Οι όροι 4, 6, 10, 11 και 12 αμελούνται επειδή περιέχουν γινόμενα διαταραχών και παραγώγων μεγεθών τους. Οι όροι 1, 5 και 13 απαλείφονται, επειδή αποτελούν την εξίσωση ορμής για τις ποσότητες ισορροπίας. Οι όροι 2, 8 και 9 αμελούνται αν θεωρηθεί ομοιόμορφο πεδίο ροής στην ισορροπία. Οι όροι που μένουν είναι:

$$\frac{3}{\rho_0} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \frac{7}{\rho_0 \mathbf{u}_0} \nabla \mathbf{u}' = -\frac{14}{\nabla p'} \quad (6.21)$$

Στη μία τώρα διάσταση και εισάγοντας την ακουστική ογκομετρική παροχή  $U' = \frac{u'}{A}$ :

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{U'}{A} \right) + \rho_0 u_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U'}{A} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x} \quad (6.22)$$

Η συνολική επιφάνεια της διατομής του σωλήνα είναι το άθροισμα της επιφάνειας ισορροπίας και της μικρής επιφάνειας που δημιουργούν τα τοιχώματα με την εγκάρσια κίνησή τους, καθώς η ακουστική πίεση τα σπρώχνει προς τα έξω. Έτσι όπως και προηγουμένως  $A = A_0 + A'$  με  $A'$  πολύ μικρότερο του  $A_0$ . Συνεπώς:

$$\frac{U}{A} = \frac{U}{A_0 + A'} = \frac{U}{A_0} \left( 1 - \frac{A'}{A_0} + \frac{A'^2}{A_0^2} - \dots \right) \approx \frac{U}{A_0} \quad (6.23)$$

Και η τελική μορφή της εξίσωσης ορμής, αν αμεληθεί και η μέση ροή ( $u_0 = 0$ ) γίνεται:

$$\frac{\partial U'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} \frac{A_0(x)}{\rho_0} \quad (6.24)$$

#### 6.4.2 Δονούμενα Τοιχώματα

Η κάθετη μετατόπιση του τοιχώματος από τη θέση ισορροπίας του συμβολίζεται με  $y(x, t)$  (βλ. Εικόνα 6-17). Αν  $S_0(x, t)$  είναι η περίμετρος του αγωγού στην ισορροπία (όπου  $y(x, t) = 0$ ), τότε η προσεγγιστική αλλαγή στην επιφάνεια  $A'$  θα είναι:

$$A'(x, t) = S_0(x) \cdot y(x, t) \quad (6.25)$$

Η κίνηση ενός στοιχειώδους τμήματος της επιφάνειας του τοιχώματος μοντελοποιείται σαν μια κινούμενη μάζα  $M_w(x)$  προσδεδεμένη στο άκρο ελατηρίου με σταθερά και σταθερά απόσβεσης ανά μονάδα επιφάνειας. Για μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας (βλ. Εικόνα 6-17), για ένα στοιχειώδες μήκος του σωλήνα με επιφάνεια  $dS$  ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα (μάζα επί επιτάχυνση ισούται με τη συνισταμένη δύναμη πάνω στην επιφάνεια) γράφεται:

$$pdS - (K_w dx)y - (b_w dx)\dot{y} = (M_w dx)\ddot{y} \quad (6.26)$$

ή, αν θεωρηθεί ότι  $dS = S_0 dx$ :

$$\frac{M_w}{S_0} \ddot{y} + \frac{b_w}{S_0} \dot{y} + \frac{K_w}{S_0} y = p \quad (6.27)$$

Η λύση στην εξίσωση μπορεί να εκφραστεί σαν το συνελκτικό ολοκλήρωμα:

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^t p(x, a) \cdot h(x, t - a) da \quad (6.28)$$

όπου  $h(x, t)$  είναι η κρουστική απόκριση της (6.27) στη θέση  $x$  κατά μήκος του σωλήνα.

### 6.4.3 Συνοριακή Συνθήκη στα χείλη

Ένα λογικό μηχανικό μοντέλο για την εκτίμηση του φορτίου εκπομπής στα χείλη προτάθηκε από τον Flanagan<sup>[9]</sup>. Σύμφωνα με αυτό το κεφάλι προσομοιώνεται από μια σφαίρα γνωστής διαμέτρου και το στόμα από την έξοδο ενός εμβόλου με γνωστά μηχανικά χαρακτηριστικά. Αν η διάμετρος του εμβόλου θεωρηθεί μικρή σε σχέση με αυτή της σφαίρας, τότε το φορτίο εκπομπής θα καθορίζεται από τη σύνθετη αντίστασή του με άπειρη επίπεδη επιφάνεια στην έξοδο. Η σύνθετη αυτή αντίσταση μπορεί να εκφραστεί σε κλειστή μορφή σαν μια ηλεκτρικά ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση ενός κυκλώματος μιας αντίστασης και μιας επαγωγής σε παράλληλη σύνδεση<sup>[9]</sup>.

$$z = \frac{i\omega L_{rad}}{1 + i\omega \frac{L_{rad}}{R_{rad}}} \quad (6.29)$$

όπου  $L_{rad} = \frac{8a}{3\pi c_0}$  και  $R_{rad} = \frac{128}{9\pi^2}$  με  $a$  να συμβολίζει την ακτίνα του εμβόλου - στόματος. Για

να χρησιμοποιηθεί σαν οριακή συνθήκη πρέπει να μετασχηματιστεί στο χρόνο λαμβάνοντας υπόψη παράλληλα την αναλογία πίεσης – ηλεκτρικού δυναμικού και ογκομετρικής παροχής – ηλεκτρικού ρεύματος. Έτσι στο πεδίο του χρόνου:

$$U(t) = \frac{A}{\rho_0 c_0} \left[ \frac{1}{L_{rad}} \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau + \frac{p(t)}{R_{rad}} \right] \quad (6.30)$$

όπου  $A$  η επιφάνεια του εμβόλου.

#### 6.4.4 Η εξίσωση Webster

Αμελώντας τα δονούμενα τοιχώματα και θεωρώντας αρμονική μεταβολή των ακουστικών μεγεθών  $p'(x,t) = p'(x) \cdot e^{i2\pi ft}$ ,  $U'(x,t) = U'(x) \cdot e^{i2\pi ft}$  οι κυματικές εξισώσεις γράφονται:

$$\begin{aligned} \frac{dp'}{dx} &= -i2\pi f \frac{\rho_0}{A_0(x)} U' \\ \frac{dU'}{dx} &= -i2\pi f \frac{A_0(x)}{\rho_0 c_0^2} p' \end{aligned} \quad (6.31)$$

όπου  $f = \omega/2\pi$  η φυσική (όχι κυκλική) συχνότητα  $i$  η φανταστική μονάδα και  $p', U'$  η κατανομή των μιγαδικών ευρών των ακουστικών μεγεθών κατά μήκος του σωλήνα. Παραγωγίζοντας την πρώτη ως προς  $x$  και απαλείφοντας την ογκομετρική παροχή προκύπτει:

$$\frac{d^2 p'}{dx^2} + \frac{1}{A_0(x)} \frac{dA_0}{dx} \frac{dp'}{dx} + k^2 p' = 0 \quad (6.32)$$

όπου  $k = 2\pi f / c_0 = \omega / c = 2\pi / \lambda$  ο κυματικός αριθμός.

Η (6.32) ονομάζεται και εξίσωση Webster<sup>[30],[49]</sup> και χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά με απώτερο σκοπό την περιγραφή διάδοσης ήχου στα πνευστά μουσικά όργανα. Αναλυτικές λύσεις σε κλειστή μορφή μπορούν να βρεθούν για πολύ συγκεκριμένες αξονικές κατανομές της επιφανείας.

### 6.5 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER – STOKES ΚΑΙ Η ΡΟΗ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Οι εξισώσεις διατήρησης για τη μάζα την ορμή και την ενέργεια μπορούν να περιγράψουν εκ των πραγμάτων και τη διάδοση του ήχου. Τα μεγέθη που προκύπτουν σα λύση από τις εξισώσεις αυτές εμπεριέχουν και τον ήχο. Το πρόβλημα όμως είναι οι κλίμακες μεγέθους της ακουστικής και της συνολικής ενέργειας της ροής, οι οποίες βρίσκονται σε μεγάλη αντιδιαστολή μεταξύ τους, με διαφορά τουλάχιστο τριών τάξεων μεγέθους. Ο ήχος έτσι θεωρείται ότι είναι οι μικρές διαταραχές των μεγεθών γύρω από μια στατιστική μέση τιμή. Μπορεί λοιπόν το πρόβλημα της διάδοσης του ήχου να περιγραφεί πλήρως από τη **συμπιεστή** μορφή των εξισώσεων διατήρησης μάζας, ορμής, ενέργειας (δεν είναι αυτές οι εξισώσεις Navier – Stokes, παρότι έχει επικρατήσει στη βιβλιογραφία να λέγονται και αυτές έτσι), συμπληρωμένων από μια καταστατική εξίσωση. Για να μπορέσει όμως να προκύψει στατιστικώς ο ήχος από τις διαταραχές των μεγεθών, πρέπει το εκάστοτε πρόβλημα να θεωρηθεί χρονομεταβλητό και να λυθεί σε όλες τις κλίμακες χρόνου και χώρου. Η μεγάλη τιμή της ταχύτητας διάδοσης του ήχου σε συνθήκες περιβάλλοντος και σε χαμηλούς αριθμούς Mach ( $M = \frac{u}{c_0}$ ), οδηγεί σε μεγάλα μήκη κύματος (τουλάχιστο για τις

θεμελιώδεις συχνότητες της φωνής), πράγμα που με τη σειρά του οδηγεί στη δημιουργία πολύ μεγάλων υπολογιστικών χωρίων. Μια ακόμη δυσκολία έρχεται να προσθέσει και η υπερβολική μορφή των εξισώσεων διατήρησης, η οποία λόγω περιορισμών ευστάθειας αριθμητικής φύσης, συνδέει το χρονικό και χωρικό βήμα μέσω του αδιάστατου αριθμού Courant. Έτσι για ένα μονοδιάστατο υπερβολικό πρόβλημα αποδεικνύεται ότι η ευσταθής περιοχή του αριθμού Courant είναι  $CFL = c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ . Η τελευταία συνθήκη ονομάζεται και συνθήκη Courant–Friedrichs–Lewy.

Γίνεται έτσι φανερό ότι η πολύ μικρή διακριτοποίηση στο χώρο, που είναι απαραίτητη για να υπολογιστούν σωστά όλες οι λεπτομέρειες της ροής (π.χ. οι ελκυσόμενοι στροβιλισμοί), επιφέρει ακόμα μικρότερο χρονικό βήμα  $\Delta t \leq \Delta x/c_0$ . Πρόσθετα προβλήματα αριθμητικής υφής που πηγάζουν από τον υπερβολικό χαρακτήρα των εξισώσεων είναι αυτά της διάχυσης και σκέδασης. Επειδή κατά τη χωρική και χρονική διακριτοποίηση μιας υπερβολικής εξίσωσης είναι σχεδόν αδύνατο να διατηρηθεί η σχέση διάχυσης αυτής (dispersion relation), προκύπτουν φαινόμενα κατά τα οποία το πλάτος (dissipation) και η φάση (dispersion) των διαδιδόμενων κυμάτων αλλάζει σε συνάρτηση με το χρόνο. Χρειάζεται έτσι ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή ενός σωστού σχήματος διακριτοποίησης. Τέλος η επιβολή σωστών οριακών συνθηκών σε υπερβολικού τύπου προβλήματα γεννά μια ακόμα δυσκολία, αφού αποδεικνύεται ότι η επιβολή ορίων στο υπολογιστικό χωρίο, πράγμα που δεν μπορεί να αποφευχθεί ούτως ή άλλως, έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ανακλάσεων των κυμάτων καθώς αυτά προσπίπτουν στα όρια, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να προσομοιωθεί σωστά η ελεύθερη κυματική διάδοση.

Η επίλυση των εξισώσεων διατήρησης στη συμπίεστη μορφή σε όλες τις κλίμακες χώρου και χρόνου ονομάζεται και Απευθείας Αριθμητική Προσομοίωση (Direct Numerical Simulation) και είναι αρκετά δύσκολο να γίνει, λόγω του μεγάλου υπολογιστικού φόρτου που επιφέρει. Βέβαια παρότι τα σύγχρονα υπολογιστικά συστήματα καλύπτουν από πλευράς υλικού τις απαιτήσεις αυτές, ο υπολογισμός του ήχου μέσω αυτής της οδού ειδικά για εφαρμογές όπως η σύνθεση φωνής, όπου δεν ενδιαφέρει τόσο το πεδίο ροής, γίνεται απαγορευτικός.

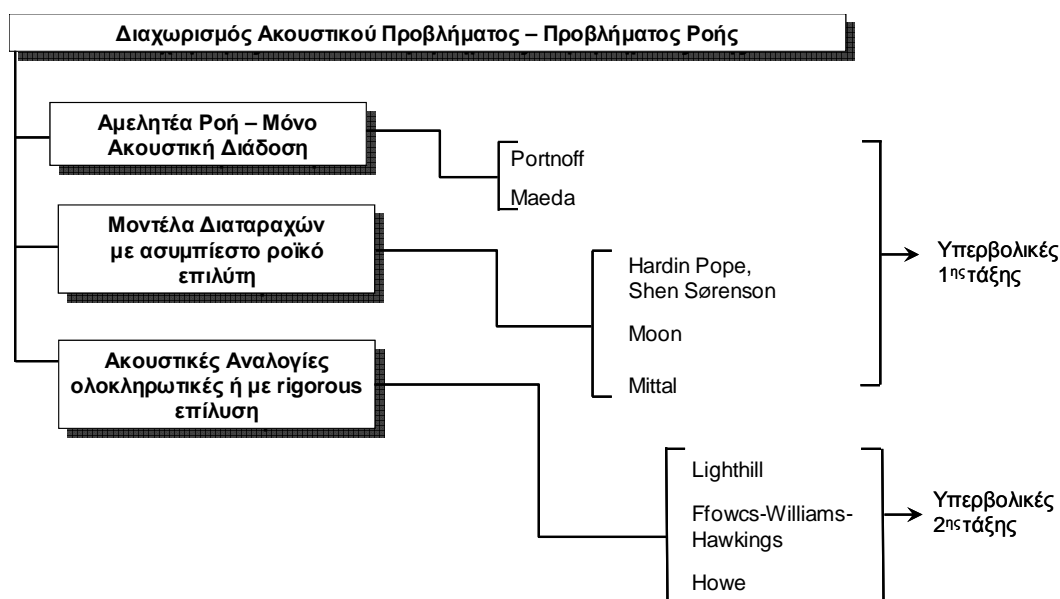
Τη λύση στο πρόβλημα έρχονται να δώσουν ένα σύνολο από προσεγγίσεις, οι οποίες βασίζόμενες σε απλοποιητικές παραδοχές, κάνουν τα πράγματα αρκετά πιο εύκολα, και μπορούν να εφαρμοσθούν ανάλογα πάντα με το στόχο μιας μελέτης ή έρευνας. Η κύρια λογική πίσω από τις προσεγγίσεις αυτές είναι ο **διαχωρισμός** των προβλημάτων ροής και ήχου με βάση τη θεωρία διαταραχών, ότι δηλαδή ο ήχος είναι οι μικρές διαταραχές των μεγεθών οι οποίες προστίθενται σε κάποιες **μέσες τιμές**. Οι διαταραχές αυτές ονομάζονται και **ακουστικά μεγέθη**. Με βάση το διαχωρισμό αυτό και ανάλογα με τις ανάγκες της εκάστοτε μελέτης οι μέσες τιμές μπορούν να αμεληθούν τελείως και να προκύψουν μοντέλα διάδοσης αντίστοιχα με το μονοδιάστατο του Portnoff που παρουσιάστηκε σε προηγούμενη παράγραφο (§6.4), ή να θεωρηθεί, λόγω και του χαμηλού αριθμού Mach, ότι αυτές οι μέσες τιμές αντιστοιχούν σε **ασυμπίεστα μεγέθη** και μπορούν να υπολογιστούν από τις εξισώσεις Navier – Stokes, οι οποίες είναι οι εξισώσεις διατήρησης για **ασυμπίεστη** όμως ροή και **σταθερό ιξώδες**. Προκύπτει έτσι ένα σύνολο από μεθοδολογίες όπως αυτές των Hardin – Pope<sup>[10]</sup>, Shen Sørensen<sup>[38]</sup>, Moon<sup>[36]</sup>, Mittal<sup>[35]</sup>, οι οποίες, εν γένει, διατυπώνουν τις ακουστικές εξισώσεις διάδοσης διατηρώντας όρους που αμελήθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο και καταλήγουν σε ένα υπερβολικό σύστημα πρώτης τάξης που περιέχει σαν **όρους πηγής** μεγέθη από τον ασυμπίεστο επιλύτη. Ο υπερβολικός χαρακτήρας των εξισώσεων διατήρησης στο πρόβλημα ροής εξαφανίζεται και γίνεται παραβολικός (Navier – Stokes), ενώ όμως διατηρείται στις ακουστικές εξισώσεις, για τις οποίες ισχύει ότι αναφέρθηκε πιο πάνω. Το πρόβλημα έχει έτσι διαχωριστεί πλήρως στο ακουστικό και σε αυτό της ασυμπίεστης ροής.

Περίπου όμοια λογική έχουν και οι προσεγγίσεις των ακουστικών αναλογιών, με τη βασική διαφορά ότι εδώ η ακουστική διάδοση περιγράφεται από μια δευτέρου βαθμού υπερβολική εξίσωση:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (6.33)$$

Η (6.33) είναι η γνωστή αναλογία Lighthill και έχει προκύψει από συνδυασμό των εξισώσεων διατήρησης λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο ορισμού των διαταραχών. Ο όρος 'αναλογία' αναφέρεται στο ότι η (6.33) δεν προσφέρει καμία νέα πληροφορία από τις εξισώσεις διατήρησης, αλλά είναι ένας ισοδύναμος – ανάλογος τρόπος διατύπωσης. Ο διαχωρισμός ακουστικού προβλήματος και προβλήματος ροής μπορεί να εφαρμοσθεί και εδώ αφού το δεξί μέλος της (6.33) μπορεί να υπολογιστεί από δεδομένα ροής από κάποιο ασυμπίεστο επίλυτη. Στη βιβλιογραφία έχουν διατυπωθεί και άλλες αναλογίες (Ffowcs-Williams-Hawkings<sup>[8]</sup>, Howe<sup>[13]</sup>) αλλάζοντας ή προσθέτοντας όρους ακουστικών πηγών στο δεξί μέλος της (6.33). Όσον αφορά τον τρόπο επίλυσης επικρατούν δύο τάσεις:

- Αυστηροί επίλυτες (Rigorous solvers), όπου επιλύεται κανονικά η μερική διαφορική εξίσωση σε διακριτοποιημένο χωρίο και ισχύουν όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω για τα υπερβολικού τύπου προβλήματα.
- Ολοκληρωτικές μέθοδοι, όπου χρησιμοποιούνται συναρτήσεις Green ή το θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού Kirchhoff και ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 3 για την ευκολία εφαρμογής και ταχύτητα των υπολογισμών.



Εικόνα 6-19. Κατάταξη Μεθόδων Διαχωρισμού Ακουστικού Προβλήματος

Στην Εικόνα 6-19 φαίνεται μια απλή κατάταξη των μεθόδων διαχωρισμού ακουστικού – ροϊκού προβλήματος μαζί με την τάξη παραγωγίσις των τελικών υπερβολικών εξισώσεων ακουστικής διάδοσης.

### 6.5.1 Η προτεινόμενη βελτίωση στο μοντέλο του Portnoff

Σε μια προσπάθεια να εισάγουμε πληροφορία από το πεδίο ροής στο ακουστικό μοντέλο του Portnoff καταγράφουμε τις πηγές που χρησιμοποιούνται συνήθως στα μοντέλα διαταραχών και στις ακουστικές αναλογίες.

- Στα μοντέλα διαταραχών χρησιμοποιείται η χρονική ή υλική παράγωγος της υδροδυναμικής πίεσης:  $\frac{\partial P^{inc}}{\partial t}$  ή  $\frac{DP}{DT} = \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla P$ .
- Στις ακουστικές αναλογίες χρησιμοποιείται η διπλή απόκλιση του τανυστή του Lighthill, απ' τον οποίο αμελούνται ο ιξώδης και εντροπικός όρος, λόγω της χαμηλής συνεισφοράς τους και κρατείται μόνο ο μεταφορικός, ή η απόκλιση του εξωτερικού γινομένου του στροβιλώδους με την ταχύτητα (Howe):  $\nabla \cdot \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u})$  ή  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})$ .

Θα μπορούσε να προταθεί ότι μια βελτίωση του μοντέλου Portnoff, η οποία συμπεριλαμβάνει τις κατανεμημένες ακουστικές πηγές σε όλο το μήκος του σωλήνα, θα ήταν να προστεθούν στις αντίστοιχες εξισώσεις οι πηγές λόγω μεταφοράς. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} &= \left( -\frac{\partial U'}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \frac{\rho_0 c_0^2}{A_0(x)} + S_p \\ \frac{\partial U'}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} \frac{A_0(x)}{\rho_0} + S_u \end{aligned} \quad (6.34)$$

όπου όταν:  $S_p = 0$ ,  $S_u = [abs(\nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}))]_{cnt} \cdot A(x)$  και όταν  $S_u = 0$ ,  $S_p = \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p \right]_{cnt}$ . Ο δείκτης

cnt εκφράζει κάποια μέση τιμή πάνω στη διατομή του σωλήνα και μπορεί να υπολογισθεί ως εξής για το τυχαίο μέγεθος  $\Psi$ :

$$[\Psi]_{cnt} = \frac{\iint \Psi(x, y) dx dy}{A(x)} \quad (6.35)$$

Τονίζεται ότι η προσθήκη των πηγών αυτών στο μοντέλο δεν προκύπτει από κάποιο φυσικό νόμο, αλλά είναι περισσότερο διαισθητική και γίνεται με στόχο τη διερεύνηση της επίδρασης στο τελικό ακουστικό σήμα.

### 6.5.2 Ασυμπίεστες εξισώσεις Navier Stokes

Για διδιάστατη ροή και πεδίο ταχυτήτων, νευτωνικό ρευστό και ασυμπίεστη ροή (εύλογη παραδοχή λόγω του χαμηλού αριθμού Mach), οι εξισώσεις διατήρησης ορμής και μάζας μπορούν να γραφούν ως:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (6.36)$$

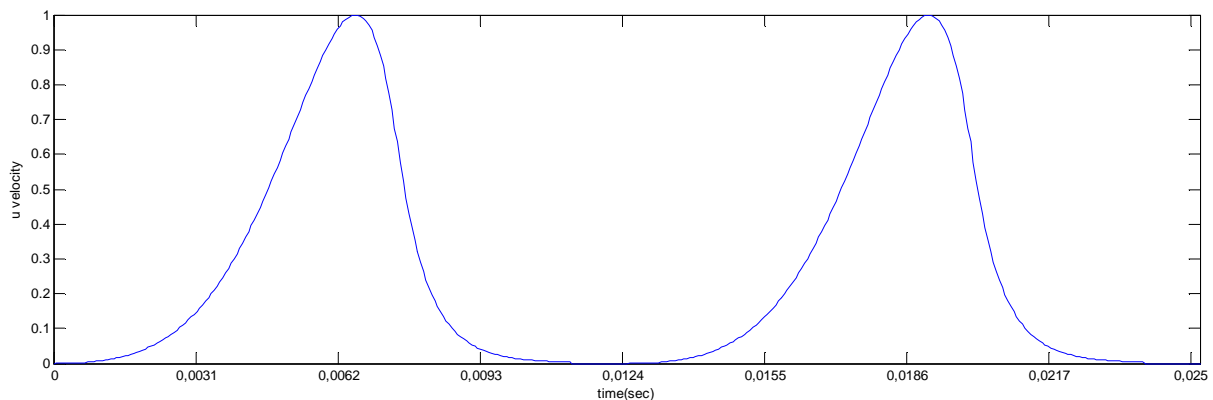
Περισσότερες λεπτομέρειες για τον τρόπο διακριτοποίησης και επίλυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων ελέγχου μπορούν να βρεθούν στο κεφάλαιο 5. Στην είσοδο του σωλήνα επιβάλλεται οριακή συνθήκη σταθερής ταχύτητας με βάση το μοντέλο LF, οι παράμετροι του οποίου ελήφθησαν ως:

$$\begin{aligned} a &= 8.0 \\ b &= 20.0 \\ \omega_0 &= 6.0 \\ E_e &= 0.8 \end{aligned} \tag{6.37}$$

με χρόνους ανοιχτής φάσης και φάσης επιστροφής:

$$\begin{aligned} T_e &= 0.6 \\ T_c &= 0.9 \end{aligned} \tag{6.38}$$

Με επιβαλλόμενη θεμελιώδη συχνότητα 80Hz και για δύο περιόδους η ταχύτητα στην είσοδο έχει την ακόλουθη κυματομορφή:



Το χρονικό βήμα τέθηκε ίσο με 1/100 της περιόδου, ενώ η οριακή συνθήκη στη γλωττίδα τέθηκε μέσω παραβολικού προφίλ της κάθετης ταχύτητας με μέγιστη τιμή  $V_{\max} = 32m/s$ . Συνολικά προσομοιώθηκαν 35 περίοδοι γλωττιδικής κίνησης. Στην έξοδο επιβάλλονται συνθήκες εκροής, οι οποίες υλοποιούνται σα Dirichlet συνθήκη για την πίεση, δηλ.:

$$P_{exit} = 0 \tag{6.39}$$

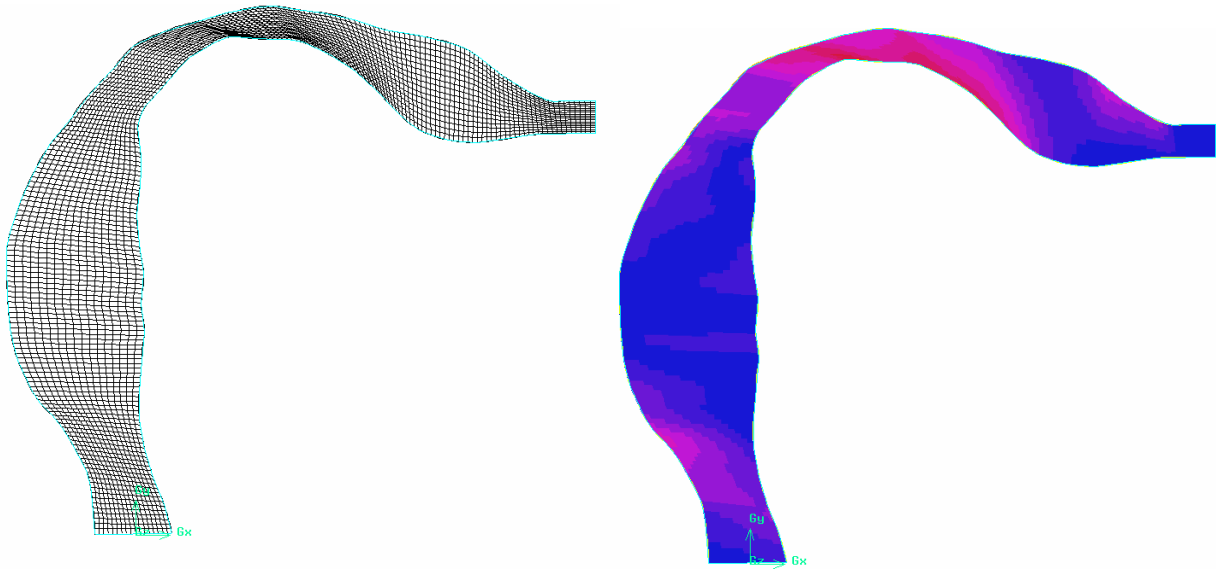
### 6.5.3 Το αριθμητικό πλέγμα

Για τη διερεύνηση της επίδρασης των πρόσθετων όρων πηγής στο μονοδιάστατο μοντέλο του Portnoff, πρέπει να υπολογιστούν οι όροι πηγής που προκύπτουν από την επίλυση των (6.36). Επιλέχθηκε η απλή διδιάστατη γεωμετρία που αντιστοιχεί στο φωνήεν /u/ από τα test cases που εξετάστηκαν στο κεφάλαιο 4. Επισημαίνεται ότι λόγω δυσκολιών που υπήρχαν στη σύγκλιση του επαναληπτικού αλγορίθμου αλλάχθηκε ελαφρώς η διαμόρφωση των χειλιών από αυτή που δίδεται στο [42], ούτως ώστε να είναι κάθετη στον άξονα των y. Το γεγονός αυτό επηρέασε, όπως ήταν αναμενόμενο το ηχητικό σήμα, το οποίο αλλάζει χροιά και μετακινείται προς το /e/.

Η χρήση δομημένου πλέγματος για τέτοιου τύπου γεωμετρία δημιουργεί σημαντικό πρόβλημα στην τελική ποιότητα, η οποία υποβαθμίζεται σημαντικά, αφού δημιουργούνται πολύ στρεβλά κελιά ειδικά κοντά σε περιοχές αλλαγής κατεύθυνσης της ροής, όπως δείχνει η Εικόνα 6-20, στην οποία εκτός από το στρεβλό πλέγμα φαίνεται και η κατανομή της μετρικής στρεβλότητας που ορίζεται με βάση την (6.40):

$$Q = \frac{S_{eq} - S}{S_{eq}} \quad (6.40)$$

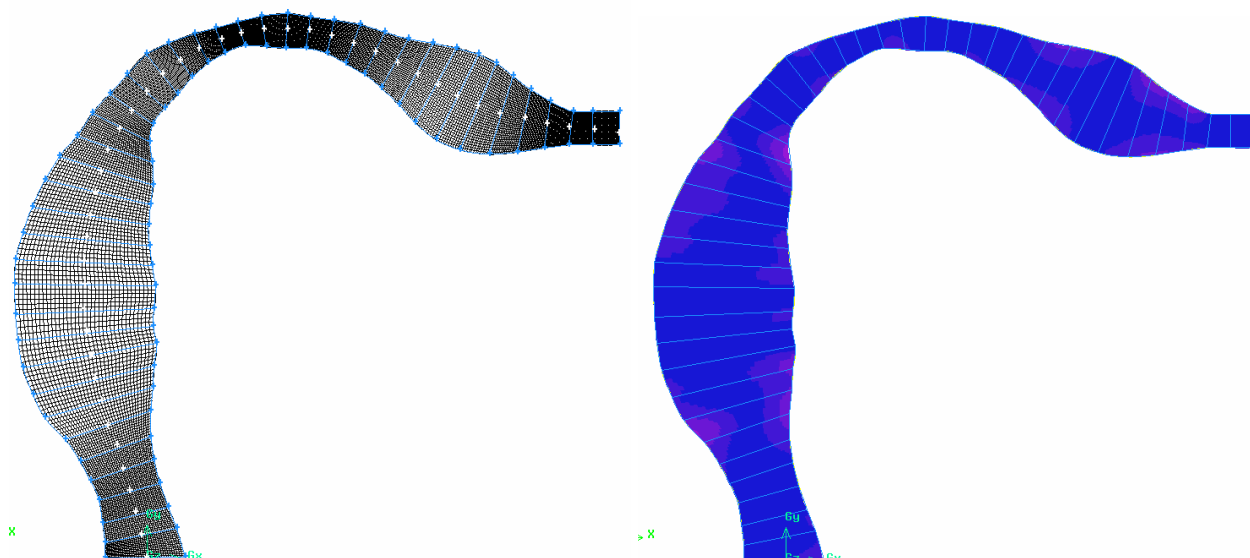
$S$  είναι η επιφάνεια του εκάστοτε κελιού και  $S_{eq}$  είναι η ισοδύναμη επιφάνεια κελιού οριζόμενου από το τετράγωνο με ακτίνα περιγραμμένου κύκλου ίση με αυτή του κελιού. Στην Εικόνα 6-20 με κόκκινο χρώμα σημειώνονται οι περιοχές υψηλής στρεβλότητας ( $Q \rightarrow 1$ ) ενώ με μπλε οι περιοχές με φυσιολογική τιμή ( $Q \rightarrow 0$ ). Πλέγμα με υψηλές τιμές της μετρικής δεν είναι γενικά αποδεκτό για τον ρευστομηχανικό επιλύτη.



Εικόνα 6-20. Το πρόβλημα του στρεβλού πλέγματος. Αρχικό πλέγμα και κατανομή μετρικής στρεβλότητας

Για την αποφυγή των προβλημάτων που δημιουργεί η απευθείας κατασκευή από το διακριτοποιημένο σύνορο, το χωρίο χωρίζεται σε επαρκή αριθμό υποχωρίων, για καθένα από τα οποία κατασκευάζεται ξεχωριστά ένα πλέγμα με πληροφορία το όριό του. Προς τούτο πρέπει πρώτα να υπολογιστεί η κεντρική γραμμή του σωλήνα και ύστερα οι κάθετες προς αυτή σε συγκεκριμένα ισαπέχοντα σημεία. Χρησιμοποιήθηκαν συνολικά 45 τέτοιες γραμμές. Στη συνέχεια γίνεται η διακριτοποίηση των ορίων του κάθε τμήματος χωριστά. Για να υπάρχει ομοιόμορφη κατανομή των σημείων, η πυκνότητά τους ακολουθεί το λόγο μηκών (εγκάρσιο προς οριζόντιο) του κάθε τμήματος. Το πλέγμα που προκύπτει έτσι είναι σαφώς καλύτερο και δίνει καλύτερη κατανομή της μετρικής στρεβλότητας, αφού όπως φαίνεται στην Εικόνα 6-21 οι κόκκινες περιοχές μειώνονται σημαντικά.

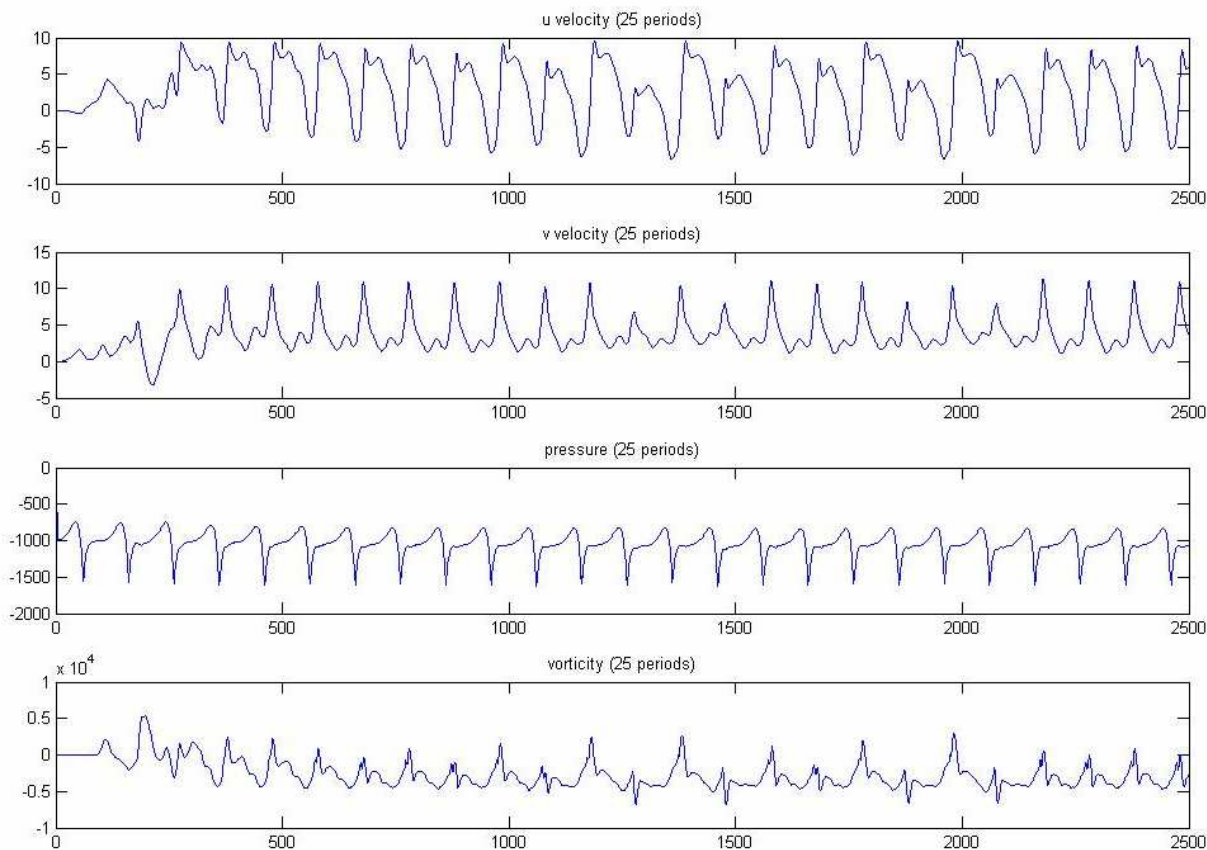




Εικόνα 6-21. Πλέγμα με διακριτοποίηση κατά διαμερίσματα και μετρική στρεβλότητα.

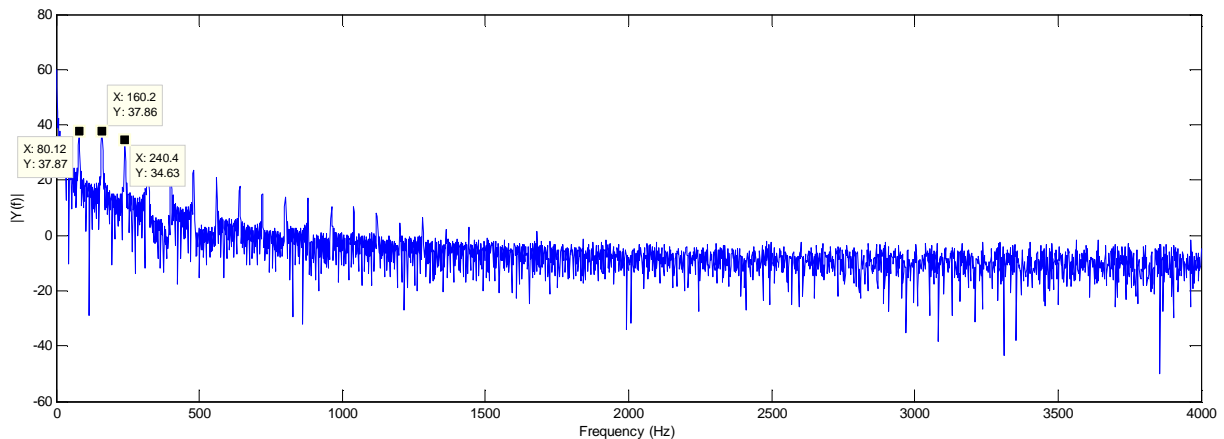
### 6.5.4 Το πεδίο ροής και οι ακουστικές πηγές

Συνολικά προσομοιώθηκαν 35 περίοδοι γλωττιδικής κίνησης. Σαν ιδιότητες του ρευστού ελήφθησαν αυτές του αέρα, ώστε με τεχνητή αύξηση του ιξώδους και για μέγιστη ταχύτητα εισόδου  $V_{max} = 32m/s$  ο αριθμός Reynolds να προκύψει  $Re = 4000$ . Κατά μέσο όρο απαιτήθηκαν 50-70 επαναλήψεις ανά χρονικό βήμα. Ξεκινώντας από μηδενικές αρχικές συνθήκες η ροή φαίνεται ότι έρχεται πολύ γρήγορα σε περιοδική κατάσταση.



Εικόνα 6-22. Κυματομορφές ρευστοδυναμικών μεγεθών στις πρώτες 25 περιόδους

Στην Εικόνα 6-22 απεικονίζονται οι κυματομορφές των βασικών μεγεθών (οριζόντια, κάθετη ταχύτητα) και ενός παραγώγου μεγέθους (στροβιλότητα) κατά τη διάρκεια των πρώτων 25 περιόδων γλωττιδικής κίνησης, στο κέντρο του φωνητικού. Παρατηρείται ότι η κυματομορφή της πίεσης ομοιάζει με την παράγωγο της ογκομετρικής παροχής του μοντέλου LF, πράγμα που επιβεβαιώνει την ορθότητα της προσομοίωσης.



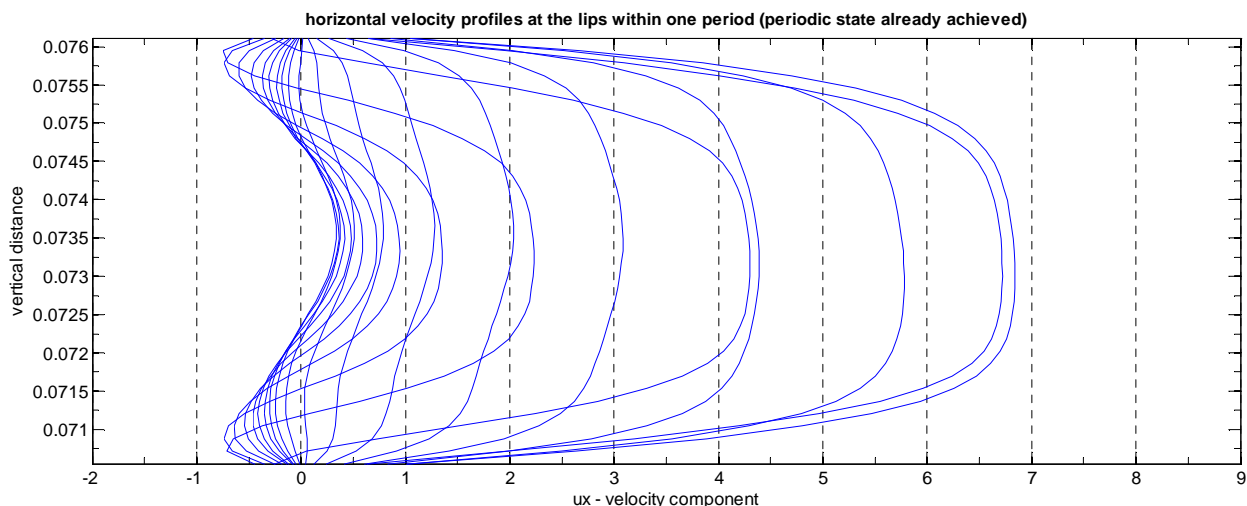
Εικόνα 6-23. Φάσμα ισχύος της πίεσης στο κέντρο του φωνητικού σωλήνα

Περισσότερα στοιχεία μπορούν να εξαχθούν και από τη μελέτη των φασμάτων ισχύος των μεγεθών. Στην Εικόνα 6-23 φαίνεται το φάσμα ισχύος της πίεσεως στο ίδιο σημείο του φωνητικού σωλήνα. Επιβεβαιώνεται η βασική συχνότητα των 80Hz που επιβλήθηκε στην είσοδο. Το σήμα είναι πλούσιο σε αρμονικές, οι οποίες εξασθενούν πάνω από μια συχνότητα αποκοπής. Η συχνότητα αυτή είναι χαρακτηριστική του χρόνου που μεσολαβεί από τη στιγμή έναρξης της φάσης επιστροφής μέχρι τη στιγμή που η εφαπτόμενη στο σημείο αυτό τέμνει το χρονικό άξονα ( $t_\alpha$ ). Η κλίση του φάσματος (spectral tilt) επηρεάζεται επίσης από αυτή την συχνότητα και είναι σημαντική παράμετρος ειδικά σε σήματα φωνής πλούσια σε υψηλές συχνότητες. Στη περίπτωση της 6-23 η κλίση του φάσματος είναι σχεδόν μηδενική καθώς οι συχνότητες τείνουν στο άπειρο, πράγμα που αντιστοιχεί σε σχετικά μικρό χρόνο  $t_\alpha$ . Μια άλλη παράμετρος που αξίζει αναφοράς είναι ο λόγος ή η διαφορά των δύο πρώτων αρμονικών. Η παράμετρος αυτή εξαρτάται σχεδόν αποκλειστικά από το λόγο του χρόνου που η γλωττίδα μένει ανοικτή προς το χρόνο της συνολικής περιόδου. Στην περίπτωση της 6-23 η διαφορά αυτή είναι περίπου 3.5dB, επιβεβαιώνοντας τα όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο §6.3.1.

Χαρακτηριστική ήταν επίσης η αναστροφή της ροής στην έξοδο του σωλήνα κατά τη διάρκεια περίπου του 40% της περιόδου. Η αναστροφή δεν επηρέασε τη σύγκλιση των εξισώσεων και θεωρείται φυσιολογική, αν ειπωθεί υπό το πρίσμα του αριθμού Womersley της ροής. Ο αριθμός Womersley εκφράζει το λόγο των δυνάμεων μη μόνιμης φύσης προς τις ιξώδεις δυνάμεις. Τιμές του αριθμού από 10 και πάνω υποδηλώνουν ότι η ροή κυριαρχείται από τις μη μόνιμες δυνάμεις. Συνέπεια αυτού είναι ότι κατά τη ροή σε αγωγό το ρευστό δεν προλαβαίνει να αναπτύξει πλήρως παραβολικό προφίλ. Επομένως μέσα στην περίοδο είναι δυνατό να συμβεί το γεγονός της αναστροφής της ροής, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 6-24, όπου εικονίζονται τα προφίλ της οριζόντιας ταχύτητας σε 20 στιγμές μέσα μία περίοδο, αφού έχει αποκατασταθεί η περιοδική κατάσταση. Είναι προφανές ότι σε κάποιες χρονικές στιγμές οι τιμές γίνονται αρνητικές κοντά

στα τοιχώματα. Ο αριθμός Womersley με βάση τη διάμετρο εξόδου ορίζεται ως και παίρνει την τιμή:

$$Wo = D \left( \frac{2\pi f_0 \rho}{\mu} \right)^{0.5} = 12.304 \quad (6.41)$$



Εικόνα 6-24. Προφίλ οριζόντιας ταχύτητας στην έξοδο του σωλήνα μέσα σε μια περίοδο.

Στη συνέχεια επιχειρήθηκε να ληφθεί μια εικόνα πεδίου ροής μέσα στο φωνητικό σωλήνα, μετά την επικράτηση της περιοδικής κατάστασης. Προς τούτο χρησιμοποιήθηκε το μέγεθος του εύρους του διανύσματος της ταχύτητας, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad (6.42)$$

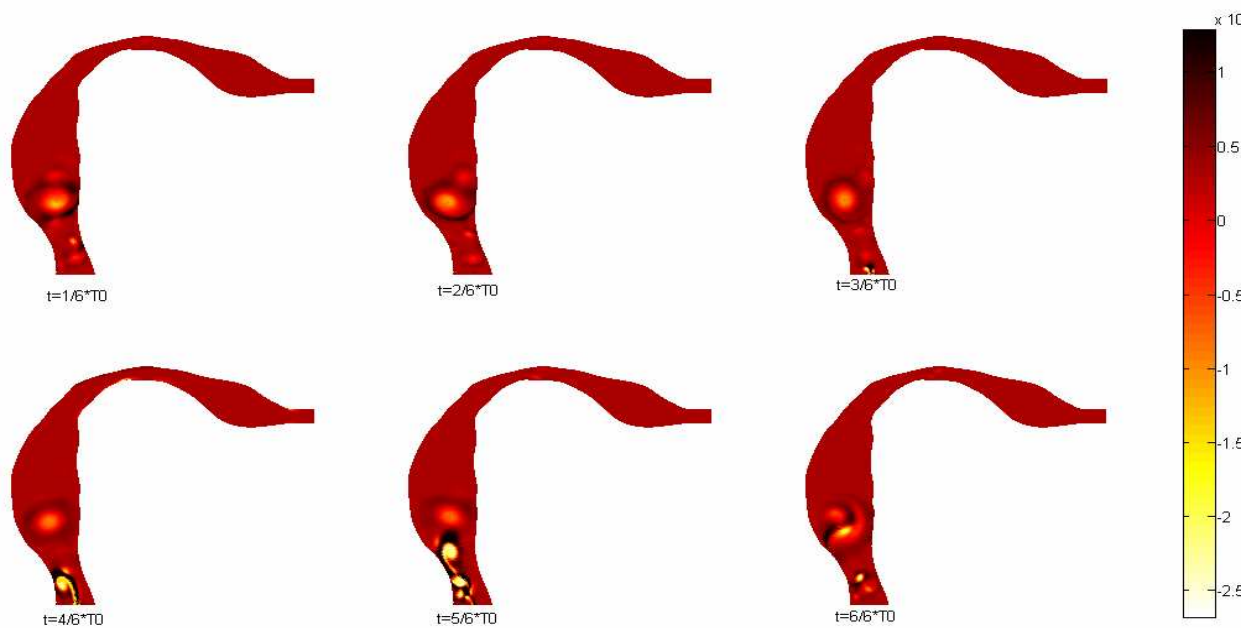


Εικόνα 6-25. Κατανομή εύρους ταχύτητας στο σωλήνα μέσα σε μια περίοδο

Η κατανομή του μεγέθους σε 6 στιγμές μέσα σε μια περίοδο φαίνεται στην Εικόνα 6-25. Παρατηρείται η ύπαρξη ενός κεντρικού στροβίλου η ισχύς του οποίου μειώνεται όταν η γλωττίδα ανοίγει και δημιουργείται η ισχυρή δέσμη στην είσοδο του σωλήνα. Μικρότερη ένταση αλλά σημαντική έχει το πεδίο στην περιοχή της στένωσης στο φάρυγγα. Περίπου όμοιες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν με βάση την ένταση του στροβιλώδους της ροής το οποίο ορίζεται ως:

$$|\boldsymbol{\omega}| = |\nabla \times \mathbf{u}| \quad (6.43)$$

Παράλληλα υπολογίστηκαν οι κατανομές δύο τύπων ακουστικών πηγών από τις αναλογίες του Lighthill -  $\nabla \cdot \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})$  και του Howe -  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})$  αντίστοιχα. Στην Εικόνα 6-26 φαίνεται η κατανομή χωρική κατανομή του όρου του Lighthill σε 6 χρονικές στιγμές μέσα την περίοδο. Είναι προφανής ο τετραπολικός χαρακτήρας της πηγής.



Εικόνα 6-26. Κατανομή ακουστικών πηγών (όρος Lighthill)

## 6.6 ΑΚΟΥΣΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Το μονοδιάστατο μοντέλο του Portnoff με τα δονούμενα τοιχώματα (σχέση (6.27)) και την προσθήκη των αερακουστικών όρων πηγής (σχέσεις (6.34)) χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή του ακουστικού σήματος στα χείλη στο πεδίο του χρόνου μαζί με τη συνοριακή συνθήκη της εξίσωσης (6.30). Ο υπολογισμός των πηγών στη μία διάσταση και στο ακουστικό πλέγμα γίνεται με χρήση της (6.35) και με απλής γραμμικής παρεμβολής. Χρησιμοποιήθηκαν τα ρευστομηχανικά δεδομένα για τη γεωμετρία φωνητικού σωλήνα που εξετάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο, αφού πρώτα επιβεβαιώθηκαν οι ακουστικοί υπολογισμοί για την περίπτωση ενός ομοιόμορφου σωλήνα σταθερής εγκάρσιας διαμέτρου.

### 6.6.1 Αριθμητικές λεπτομέρειες

Το μονοδιάστατο ακουστικό μοντέλο ξαναγράφεται στην παρακάτω μορφή (εξ. (6.44)), όπου γίνεται χρήση βοηθητικών μεταβλητών για υποβιβασμό της τάξης παραγωγίσισης κατά ένα.

Επίσης στην εξίσωση της πίεσης έχει προστεθεί ένας όρος αντίστασης ώστε να συμπεριληφθούν οι απώλειες λόγω ιξώδους. Ο όρος αυτός είναι απλά ο νόμος των Hagen–Poiseuille για ροή σε αγωγό κυκλικής διατομής.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} &= \left( -\frac{\partial U'}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \frac{c_0^2 \rho_0}{A_0(x)} + S_p \\ \frac{\partial U'}{\partial t} &= \left( -\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \frac{A_0(x)}{\rho_0} + \frac{8\pi\mu}{A_0^2(x)} U' + S_u \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= y_1 \\ \frac{\partial y_1}{\partial t} &= -\frac{b_w}{M_w} y_1 - \frac{K_w}{M_w} y + \frac{1}{M_w} p \\ A &= A_0(x) + S_0(x) \cdot y \end{aligned} \tag{6.44}$$

Για την επίλυση χρησιμοποιείται η ρητή μέθοδος ολοκλήρωσης Runge Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης, η οποία για ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, t)$ , όπου  $\dot{\mathbf{z}}$  άνυσμα χρονικών παραγώγων και  $\mathbf{z}$  το άνυσμα των αγνώστων, γράφεται ως εξής:

Πίνακας 6-2. Αλγόριθμος RK ολοκλήρωσης

---


$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= \mathbf{f}(\mathbf{z}_n, t_n) \\ \mathbf{b}_n &= \mathbf{f}\left(\mathbf{z}_n + \frac{dt}{2} \mathbf{a}_n, t_n + \frac{dt}{2}\right) \\ \mathbf{c}_n &= \mathbf{f}\left(\mathbf{z}_n + \frac{dt}{2} \mathbf{b}_n, t_n + \frac{dt}{2}\right) \\ \mathbf{d}_n &= \mathbf{f}(\mathbf{z}_n + dt \mathbf{c}_n, t_n + dt) \\ \text{Ενημέρωσε τη λύση ως εξής: } \mathbf{z}_{n+1} &= \mathbf{z}_n + \frac{dt}{6} (\mathbf{a}_n + 2\mathbf{b}_n + 2\mathbf{c}_n + \mathbf{d}_n) \end{aligned}$$

Υπολόγισε τα ανύσματα:

Επόμενο χρονικό βήμα

---

Για τους συντελεστές του μηχανικού μοντέλου δονούμενων τοιχωμάτων (σχέση (6.27)) χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω τιμές<sup>[16]</sup>:

Πίνακας 6-3. Τιμές συντελεστών μοντέλου δονούμενων τοιχωμάτων

---

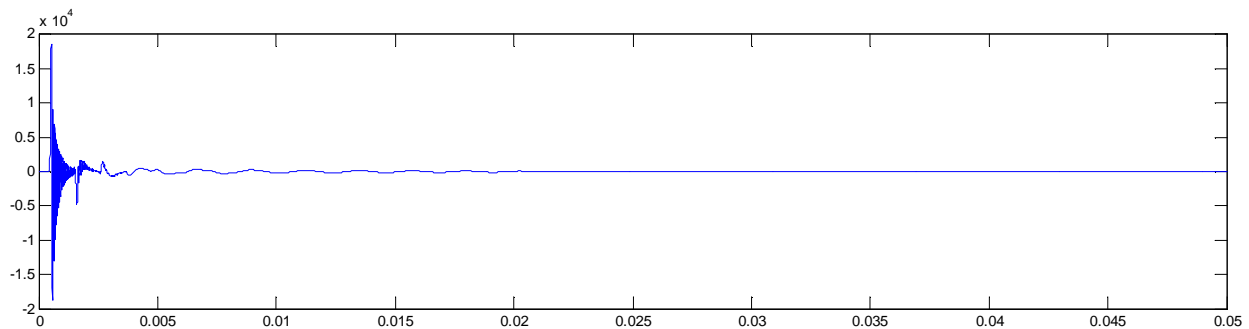

$$\begin{aligned} M_w &= 21 \text{ kg / m}^2 \\ b_w &= 8000 \text{ kg / m}^2 \\ K_w &= 845000 \text{ kg / m}^2 \text{ s}^2 \end{aligned}$$


---

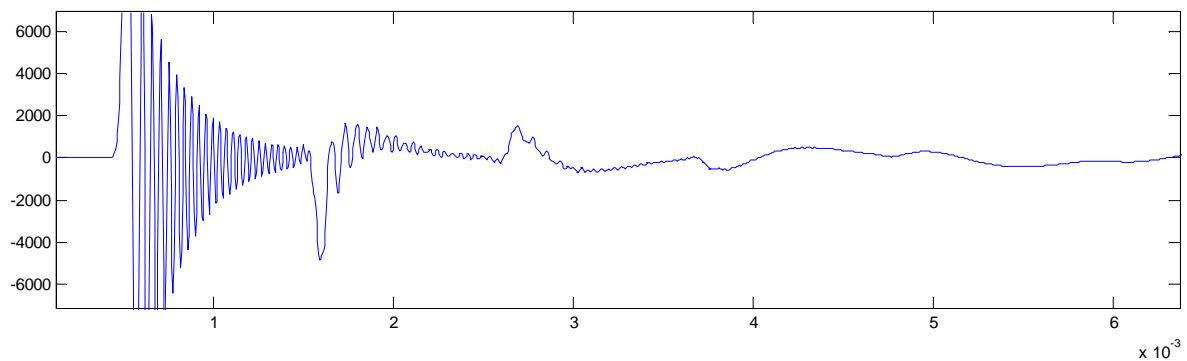
Η χωρική διακριτοποίηση γίνεται με χρήση κεντρικών διαφορών π.χ.  $\left. \frac{\partial p'}{\partial x} \right|_i = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2dx}$ , ενώ η επιλογή του χρονικού βήματος ολοκλήρωσης γίνεται έτσι ώστε ο αριθμός Courant να διατηρείται κοντά στη μονάδα, δηλ.  $dt = dx / c_0$ , με  $c_0 = 343 \text{ m / s}$ .

### 6.6.2 Απόκριση συχνότητας ομοιόμορφου σωλήνα

Για την πιστοποίηση της ορθής λειτουργίας της αριθμητικής μεθοδολογίας υπολογίστηκε η απόκριση συχνότητας σωλήνα με ομοιόμορφη διατομή εμβαδού  $A_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  και μήκους  $L = 0.175 \text{ m}$ . Το σύστημα διεγείρεται από έναν όσο το δυνατό περισσότερο ιδανικό παλμό παροχής, ο οποίος θεωρητικά περιέχει όλες τις συχνότητες δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός Fourier αυτού είναι ίσος με τη μονάδα. Το πλάτος της απόκρισης συχνότητας λαμβάνεται ως το πλάτος του διακριτού μετασχηματισμού Fourier του σήματος της πίεσεως στην έξοδο του σωλήνα (χείλη). Το εύρος συχνοτήτων που ενδιαφέρει είναι μέχρι περίπου 5 kHz. Χρησιμοποιήθηκαν 100 σημεία για τη χωρική διακριτοποίηση, ενώ το χρονικό βήμα τέθηκε ίσο με  $dt = 0.175/100/343 \approx 5.15 \text{E-}6$ . Προσομοιώνεται η απόκριση μέχρι και 1sec, ώστε η επιβληθείσα διαταραχή να έχει αποσβεστεί εντελώς. Στις Εικόνες 6-27 και 6-28 φαίνεται η κρουστική απόκριση του σωλήνα για τα πρώτα 0.05 sec και 6E-3 sec αντίστοιχα. Είναι σημαντικό να προσομοιωθεί όσο το δυνατό περισσότερος χρόνος καθότι οι χαμηλές συχνότητες εμφανίζονται τελευταίες. Στην έξοδο του σωλήνα χρησιμοποιήθηκε η συνοριακή συνθήκη (6.29).

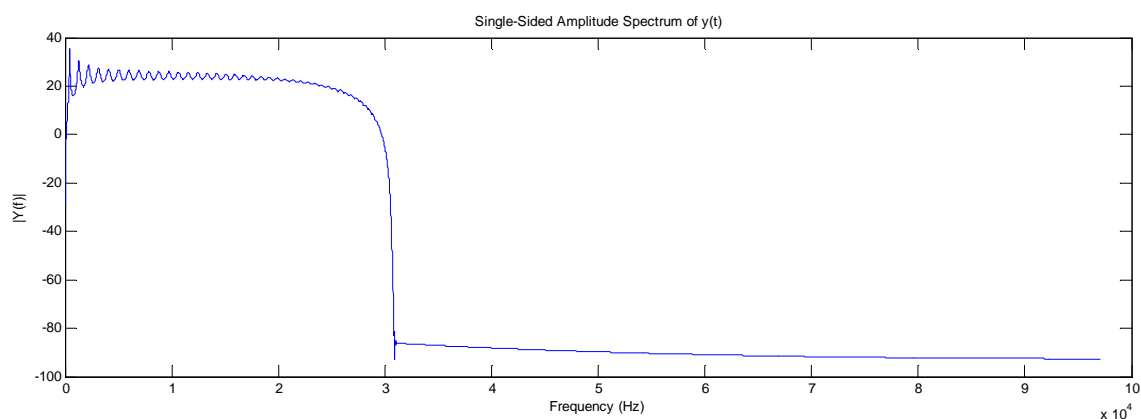


Εικόνα 6-27. Κρουστική απόκριση ομοιόμορφου σωλήνα

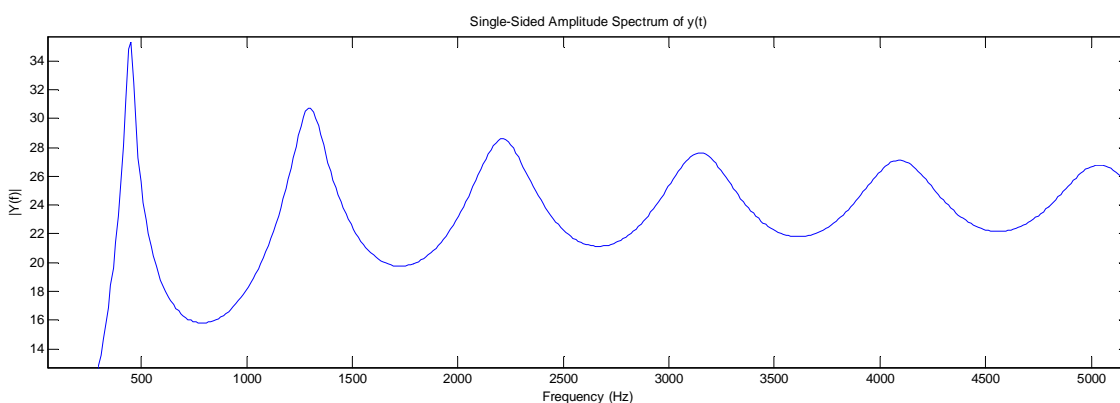


Εικόνα 6-28. Κρουστική απόκριση ομοιόμορφου σωλήνα – πρώτα δείγματα

Στην Εικόνα 6-29 σχεδιάζεται η συχνοτική απόκριση του σωλήνα και φαίνεται καθαρά ότι η συχνότητα αποκοπής είναι κοντά στα 30 kHz, ενώ στην Εικόνα 6-30 φαίνονται οι συχνότητες μέχρι 5 kHz που ενδιαφέρουν από ακουστική πλευρά. Οι συντονισμοί έχουν προβλεφθεί σωστά, αν ληφθεί υπόψη η μικρή μετατόπιση (shift) λόγω του επιβαλλόμενου φορτίου ακτινοβολίας στην έξοδο μέσω της συνοριακής συνθήκης (6.29), όπως άλλωστε είχε αναφερθεί και σε προηγούμενη παράγραφο (§6.3.3). Χαρακτηριστική είναι επίσης η έλλειψη των απότομων κορυφών στους συντονισμούς λόγω του συνυπολογισμού των απωλειών (όρος τριβής Hagen Poiseuille) στις ακουστικές εξισώσεις.



Εικόνα 6-29. Απόκριση συχνότητας ομοιόμορφου σωλήνα

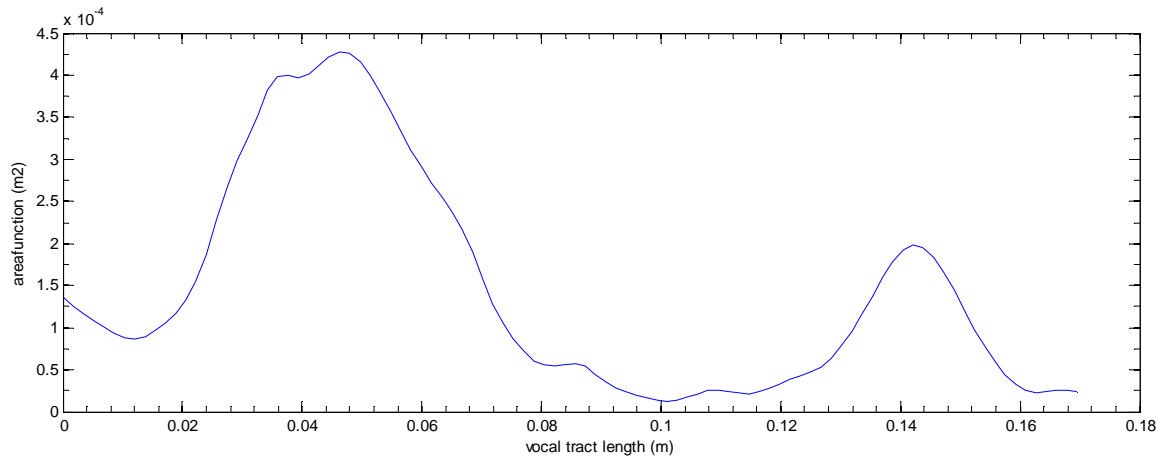


Εικόνα 6-30. Απόκριση συχνότητας ομοιόμορφου σωλήνα – χαμηλές συχνότητες

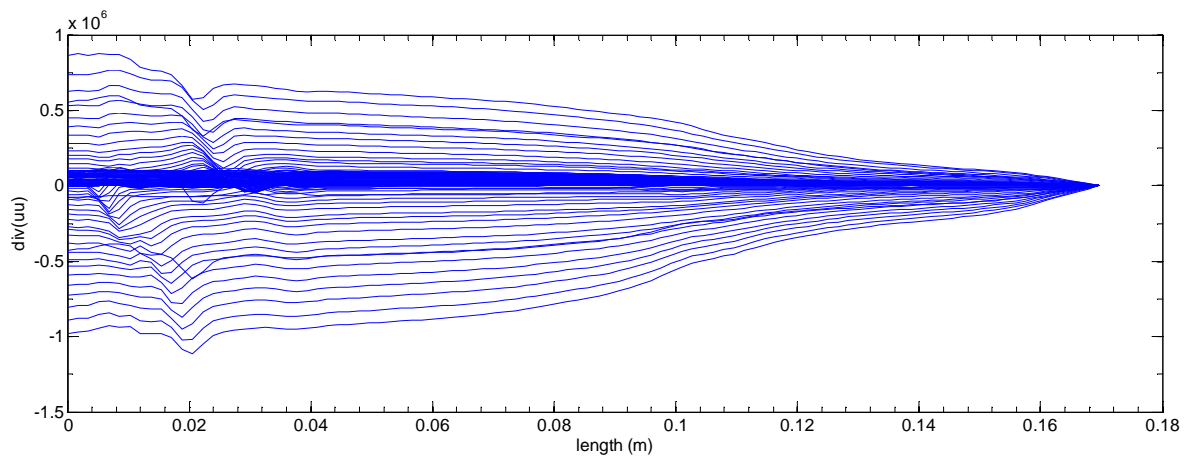
### 6.6.3 Εφαρμογή στην περίπτωση του /u/

Μετά την επιβεβαίωση της ορθής λειτουργίας του ακουστικού μοντέλου του Portnoff, επιχειρείται η ενσωμάτωση των τετραπολικών ακουστικών πηγών, όπως αυτές υπολογίστηκαν από τον ρευστοδυναμικό επιλύτη στην παράγραφο §6.5.4, και η διερεύνηση της επίδρασής τους στο ακουστικό σήμα στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας.

Αρχικά υπολογίστηκε η μεταβολή της συνάρτησης εμβαδού (area function) από τα διδιάστατα γεωμετρικά δεδομένα και προσεγγίστηκε από ένα κυβικό spline για μετέπειτα χρήση από τον αερακουστικό κώδικα. Η μεταβολή της συνάρτησης εμβαδού ως προς το μήκος του σωλήνα φαίνεται σχηματικά στην Εικόνα 6-31. Παρατηρείται η μεγάλη αύξηση αμέσως μετά τη γλωττιδική περιοχή και η στένωση στο φάρυγγα, που τη διαδέχεται μια μικρότερη αύξηση στην περιοχή του στόματος. Στη συνέχεια δημιουργήθηκαν οι συναρτήσεις παρεμβολής για τον υπολογισμό των ακουστικών πηγών στη χρονική στιγμή που θα απαιτηθεί από τον αερακουστικό κώδικα. Στην Εικόνα 6-32 φαίνεται ο τρόπος που μεταβάλλονται οι κατανεμημένες πηγές (οριζόντια συνιστώσα του διανύσματος  $div(\mathbf{uu})$ ) κατά μήκος του σωλήνα και μέσα σε μια περίοδο γλωττιδικής διέγερσης. Η μεγαλύτερες τιμές (κατ' απόλυτο τιμή) παρατηρούνται στην περιοχή της γλωττίδας και στις στιγμές ανοιχτής φάσης, όπου προφανώς οι φωνητικές χορδές είναι σε φάση απαγωγής και υπάρχει παροχή αέρα. Προχωρώντας προς την έξοδο οι πηγές μηδενίζονται εντελώς δημιουργώντας κάποια τοπικά ελάχιστα ή μέγιστα στις περιοχές όπου υπάρχουν στροβιλισμοί.

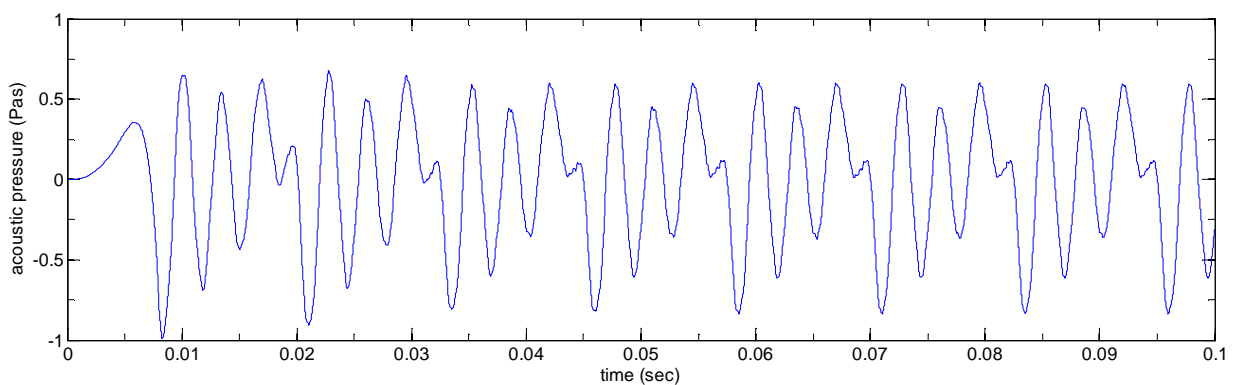


Εικόνα 6-31. Συνάρτηση εμβαδού για το φώνημα /u/



Εικόνα 6-32. Ακουστικές πηγές κατά μήκος του σωλήνα σε μια περίοδο

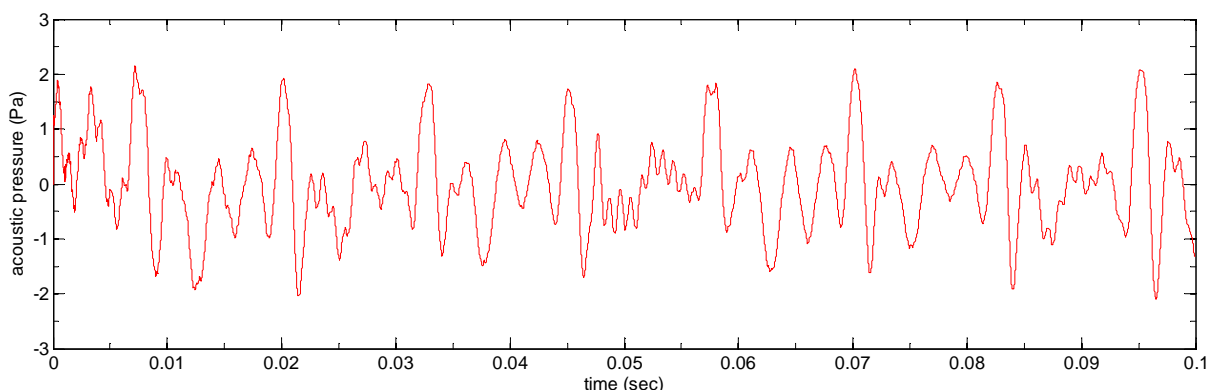
Για την αριθμητική προσομοίωση στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιήθηκαν ξανά 100 χωρικά σημεία και βήμα ολοκλήρωσης  $dt = 0.1695/100/343 \approx 4.99E - 6$ . Η θεμελιώδης συχνότητα της γλωττιδικής κίνησης ήταν 80 Hz και ο συνολικός χρόνος προσομοίωσης, για τον οποίο υπάρχουν τα δεδομένα ακουστικών πηγών, ήταν (10 περίοδοι από τις 35 διαθέσιμες)  $t = 0.1 \text{ sec}$ .



Εικόνα 6-33. Ακουστική πίεση στα χείλη χωρίς τετραπολικές πηγές

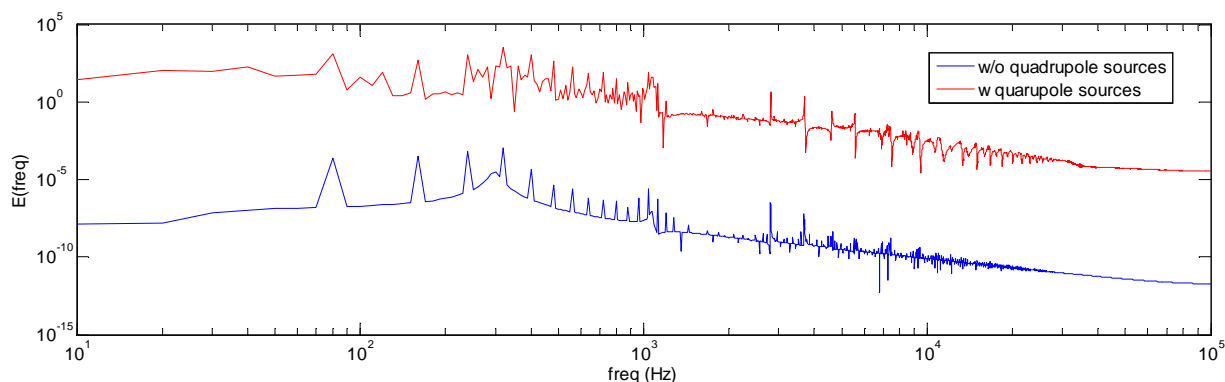


Έγιναν δύο δοκιμές με και χωρίς τις τετραπολικές πηγές αντίστοιχα. Στην Εικόνα 6-33 φαίνεται το σήμα της ακουστικής πίεσης χωρίς τις πηγές, ενώ στην Εικόνα 6-34 το σχεδιάζεται το ίδιο σήμα με την παρουσία αυτή φορά των κατανεμημένων πηγών.

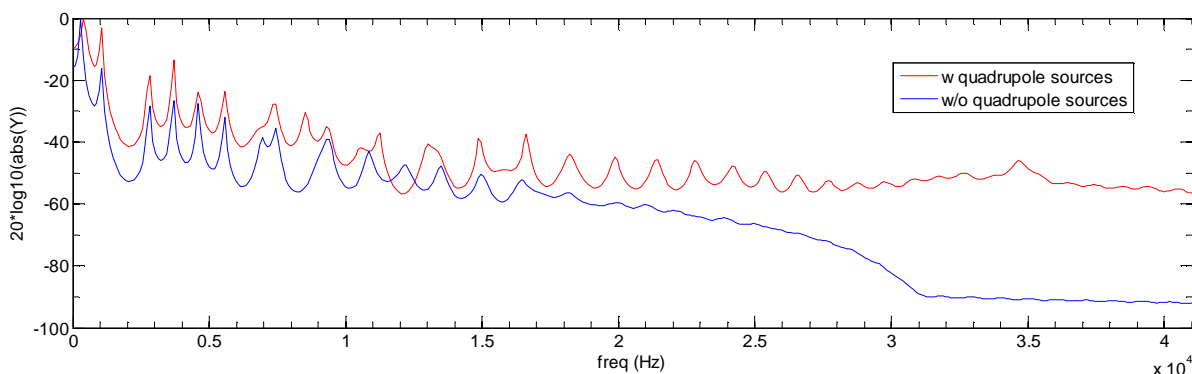


**Εικόνα 6-34. Ακουστική πίεση στα χείλη με τετραπολικές πηγές**

Για τη διερεύνηση της επίδρασης των κατανεμημένων πηγών τα σήματα μεταφέρονται στο χώρο της συχνότητας με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier και σχεδιάζονται τα φάσματα ισχύος στην Εικόνα 6-35, όπου έχει γίνει τεχνητός διαχωρισμός ώστε να είναι καλύτερα αντιληπτή η προσθήκη περισσότερων αρμονικών στο σήμα των τετραπολικών πηγών. Για την μελέτη των φασμάτων βρίσκονται οι συντελεστές γραμμικής πρόβλεψης των σημάτων (Linear Prediction Coefficients, τάξης  $1/dt/10^3$ ), και σχεδιάζεται η ανάλυση Fourier των τελευταίων.



**Εικόνα 6-35. Φάσμα ισχύος των σημάτων με και χωρίς τετραπολικούς όρους πηγής**



**Εικόνα 6-36. LPC φάσμα των σημάτων με και χωρίς τετραπολικούς όρους πηγής**

Είναι προφανής η ενίσχυση των υψηλών συχνοτήτων ενώ οι χαμηλές συχνότητες και οι συντονισμοί του σωλήνα φαίνεται να μην επηρεάζονται καθόλου. Επίσης η συχνότητα αποκοπής στην περίπτωση των τετραπολικών πηγών εξαφανίζεται τελείως, πράγμα αναμενόμενο, αφού οι πηγές κατανέμονται σε όλο το μήκος του σωλήνα και όχι μόνο στη γλωττίδα, ανεξάρτητα με το αν η ισχύ τους φθίνει προς την έξοδο.

## **6.7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Μετά από μια εκτενή παρουσίαση της φυσιολογίας και ανατομίας του ανθρώπινου φωνητικού σωλήνα, παρουσιάστηκε η μονοδιάστατη ακουστική προσέγγιση του ακουστικού μοντέλου του Portnoff. Εξήχθησαν αναλυτικά οι εξισώσεις και συμπληρώθηκαν με την συνοριακή συνθήκη των Ishizaka, Flanagan ενώ έγινε και αναφορά στα μηχανικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση της κίνησης της γλωττίδας καθώς και στο εμπειρικό παραμετρικό μοντέλο LF. Στη συνέχεια αφού έγινε αναφορά και κατάταξη των λοιπών μεθόδων αερακουστικής ανάλυσης επιχειρήθηκε η εισαγωγή ρευστομηχανικής πληροφορίας με την ‘διαισθητική’ προσθήκη κατανεμημένων τετραπολικών πηγών. Έγινε εφαρμογή σε πραγματική γεωμετρία που αντιστοιχεί στο φώνημα /u/ και αφού εκτιμήθηκε το πεδίο ροής και υπολογίστηκαν οι ακουστικές πηγές με χρήση ασυμπίεστου επιλύτη, υπολογίστηκε το σήμα ακουστικής πίεσης στα χείλη με και χωρίς τις τετραπολικές πηγές. Διαπιστώθηκε ότι η προσθήκη των πηγών προσθέτει ‘αεροδυναμικό θόρυβο’ σήμα κόνοντάς πιο breathy, ενώ η γλωττιδική δέσμη στην είσοδο παραμένει η βασική πηγή φώνησης, τουλάχιστο για τα φωνήεντα.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Ananthapadmanabha T.V., Fant G., *Calculation of true glottal flow and its components*, Speech Communications, pp: 167-184, (1982).
- [2] Doel Kees van den, Ascher U.M., *Real-time numerical solution of Webster's equation on a non-uniform grid*, IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, Vol. 16, pp. 1163-1172, (2008).
- [3] Doel van den K., Ascher U.M., *Real-time numerical solution of Webster's equation on a non-uniform grid*, IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, Vol. 16, pp. 1163-1172, (2008).
- [4] Fant G., *Some Problems in Voice Source Analysis*, Speech Communications, 13, pp 7-22, (1993).
- [5] Fant Gunnar, *Acoustic Theory of Speech Production*, Mouton, Gravehage, (1970).
- [6] Fant, G. and Liljencrants, J. and Lin, Q., *A four-parameter model of glottal flow*, STL-QPSR Journal, 25/4, pp. 1-13, (1985).
- [7] Fant, G., *The LF-model revisited. Transformations and frequency domain analysis*, STL-QPSR Journal, 36/2-3, pp. 119-156, (1995).
- [8] Ffowcs Williams J. E. and Hawkings D. L., *Sound Generated by Turbulence and Surfaces in Arbitrary Motion*, Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. A264, pp. 321-342, (1969).
- [9] Flanagan James L., *Speech Analysis and Perception*, Springer Verlag, Berlin, (1972).
- [10] Hardin J.C., Pope D.S., *An Acoustic/Viscous Splitting Technique for Computational Aeroacoustics*, Therot. Comput. Fluid Dynamics, 6, 323-340, (1994).
- [11] Hirschberg A., *Some Fluid Dynamic Aspects of Speech*, Bull. Communication Parlee, 2, pp.7-30, (1992).
- [12] Howe M.S., McGowan R.S., *Sound generated by aerodynamic sources near a deformable body with application to voiced speech*, J. Fluid Mech., Vol. 592, pp. 367-392, (2007)
- [13] Howe M.S., McGowan R.S., *Compact Green's functions extend the acoustic theory of speech production*, Journal of Phonetics, Vol. 35, pp. 259-270, (2007)
- [14] Ishizaka K. and Flanagan J.L., *Synthesis of voiced sounds from a two-mass model of the vocal cords*, Bell System Tech. J., Vol. 51 (6), pp. 1233-1268, (1972).
- [15] Ishizaka K., Flanagan J.L., *Synthesis of voiced sounds from a two mass model of the vocal folds*, The Bell System Technical Journal, Vol. 51/6, pp. 1233-1268, (1972).
- [16] Ishizaka K., French J.C., Flanagan J.L., *Direct determination of vocal tract wall impedance*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 23, pp. 370-373, (1975).
- [17] Jiang J.J., Zhang Y., *Chaotic vibration induced by turbulent noise in a two-mass model of vocal folds*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 112 (5), Pt. 1, (2002).
- [18] Kaiser J.F., *Some observations on vocal tract operation from a fluid flow point of view*, In Vocal Fold Physiology: Biomechanics, Acoustics and Phonatory Control, (1983)
- [19] Kaltenbacher M., Triebenbacher S., Wohlmuth B., Zörner S., *Enhanced Finite Element Scheme for Vibrational and Flow Induced Sound*, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, Vol. 10, (2010).

- [20] Klatt D.H., Klatt L.C., *Analysis synthesis and perception of voice quality variations among female and male talkers*, J.Acoust.Soc.Am., Vol. 87/2, pp. 820–857, (1990).
- [21] Kleinstreuer C., Zhang Z., *Laminar-to-turbulent fluid-particle flows in a human airway model*, International Journal of Multiphase Flow, Vol. 29, pp. 271–289, (2003).
- [22] Laver J., *Principles of Phonetics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1994).
- [23] Li S., Scherer R.C., Wan M., Wang S., Wu H., *Numerical study of the effects of inferior and superior vocal fold surface angles on vocal fold pressure distributions*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 119, 5, May (2006).
- [24] Li S., Scherer R.C., Wan M., Wang S., Wu H., *The effect of glottal angle on intraglottal pressure*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 119, 1, (2006).
- [25] Li S., Wan M., Wang S., *The Effects of the False Vocal Fold Gaps in a Model of the Larynx on Pressures Distributions and Flows*, Digital Human Modelling, pp. 147–156, Springer Verlag, (2007).
- [26] Luo H., Mittal R., Zheng X., Bielamowicz S., Walsh R.J., Hahn J.K., *An immersed-boundary method for flow–structure interaction in biological systems with application to phonation*, Journal of Computational Physics, Vol. 227, pp. 9303–9332, (2008).
- [27] Maeda V., *A digital simulation method of the vocal tract system*, Speech Communication, vol.1, pp. 199-229, (1982).
- [28] McGowan R.S., *An Aeroacoustics Approach to Phonation*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 83 (2), pp.696-704, (1988).
- [29] McGowan R.S., Howe M.S., *Influence of the ventricular folds on a voice source with specified vocal fold motion*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 127, 3, (2010).
- [30] Morse P.M., *Vibration and Sound*, McGraw-Hill, New York, (1948).
- [31] Pain H.J., *Φυσική των Ταλαντώσεων και των Κυμάτων*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα (1990).
- [32] Portnoff M.R., *A quasi-one dimensional digital simulation for the time varying vocal tract*, Master's Thesis, MIT, (1973).
- [33] Rienstra S.W., Hirschberg A., *An Introduction to Acoustics*, Eindhoven University of Technology, July (2005).
- [34] Schönhärl E., *Die Stroboskopie in der praktischen Laryngologie*, Georg Thieme Verlag, Stuttgart, Germany, (1960).
- [35] Seo, J.H., Mittal, R., “A high-order immersed boundary method for acoustic wave scattering and low-Mach number flow-induced sound in complex geometries,” Journal of Computational Physics, Vol. 230, pp. 1000-1019, (2011)
- [36] Seo J. and Moon Y., *Linearized perturbed compressible equations for low Mach number aeroacoustics*, Journal of Computational Physics, vol. 218, no. 2, pp. 702–719, (2006).
- [37] Shadle C., *The acoustics of fricative consonants*, PhD Thesis, M.I.T., (1985).
- [38] Shen Wen Zhong, Sørensen Jens Norkaer, *Aeroacoustic Modeling of Low Speed flows*, Therot. Comput. Fluid Dynamics, 13, 271-289, (1999).
- [39] Sinder D.J., *Speech Synthesis Using an Aeroacoustic Fricative Model*, Ph.D. Thesis, Rutgers University, New Brunswick, NJ., (1999).

- [40] Sondhi M.M., Schröter J., *Speech Production Models and Their Digital Implementations*, Digital Signal Processing Handbook, Ed. Vijay K. Madiseti and Douglas B. Williams, Boca Raton: CRC Press LLC, (1999)
- [41] Stevens Kenneth N., *Acoustic Phonetics*, The MIT Press, (1998)
- [42] Story B.H., Titze I.R., Hoffman E.A., *The relationship of vocal tract shape to three voice qualities*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 109, pp. 1651-1667, (2001).
- [43] Story B.H., Titze I.R., Hoffman E.A., *Vocal tract area functions from magnetic resonance imaging*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 100, pp. 537-554, (1996).
- [44] Story B.H., Titze I.R., Hoffman E.A., *Vocal tract area functions for an adult female speaker based on volumetric imaging*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 104, pp. 471-487, (1998).
- [45] Story B.H., Titze I.R., Hoffman E.A., *The relationship of vocal tract shape to three voice qualities*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 109/4, pp. 1651–1667, (2001).
- [46] Suh J., Frankel S.H., *Comparing turbulence models for flow through a rigid glottal model*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 123, 3, (2008).
- [47] Teager H.M., *Some Observations on Oral Air Flow During Phonation*, IEEE Trans. Acoust. Speech & Signal Process., ASSP-28, pp.599-601, (1980).
- [48] Thomas T.J., *A finite element model of fluid flow in the vocal tract*, Computer Speech and Language, Vol. 1, pp. 131-151, (1986).
- [49] Webster A.G., *Acoustical impedance and the theory of horns and of the phonograph*, Proc. Natl. Acad. Sci. (U.S.), Vol. 5, pp. 275–282, (1919).
- [50] Zhang Z., Mongeau L., Frankel S.H., Thomson S., Park J.B., *Sound generation by steady flow through glottis-shaped orifices*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 116, 3, (2004).
- [51] Zhao W., Frankel S. H., Mongeau L., *Computational Aeroacoustics of Phonation, Part I: Computational Methods and Sound Generation Mechanisms*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 112, 5, pp. 2134-2146 (2002).
- [52] Zhao W., Frankel S. H., Mongeau L., *Computational Aeroacoustics of Phonation, Part II: Effects of flow parameters and ventricular folds*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 112, 5, pp. 2147-2154 (2002).
- [53] Zhao W., Frankel S. H., Mongeau L., *Numerical simulation of sounds from confined pulsating axisymmetric jets*, AIAA J. Vol. 39, pp. 1868–1874, (2001).
- [54] Zheng X., Bielamowicz S., Haoxiang L., Mittal R., *A Computational Study of the Effect of False Vocal Folds on Glottal Flow and Vocal Fold Vibration During Phonation*, Annals of Biomedical Engineering, Vol. 37, No. 3, pp. 625–642, (2009).

# ΕΠΙΛΟΓΟΣ

## 1 ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Οι δραστηριότητες της παρούσης διατριβής κινήθηκαν γύρω από δύο βασικούς άξονες. Έγινε έτσι προσπάθεια αφενός να καλυφθούν όσο το δυνατό περισσότερο οι μέθοδοι της υπολογιστικής αερακουστικής που χρησιμοποιούνται σήμερα, και αφετέρου να καλυφθεί το πρόβλημα της παραγωγής φωνής στον ανθρώπινο φωνητικό σωλήνα με όσο το δυνατό μικρότερο υπολογιστικό κόστος. Θα μπορούσε λοιπόν ο πρώτος άξονας να χαρακτηριστεί ως '*numerics*' και ο δεύτερος ως '*το φυσικό πρόβλημα*'. Ο πρώτος άξονας παρείχε τα υπολογιστικά εργαλεία για να διερευνηθεί ο δεύτερος και τελικά αποδείχθηκε κατά τη διάρκεια της εργασίας, ότι η επίτευξη θετικών στόχων και στους δύο ήταν αρκετά δύσκολο εγχείρημα.

Αν θα επιχειρούσε κανείς να συνοψίσει τις θετικές **συνεισφορές** της διατριβής στους δύο άξονες που τελικά κινήθηκε, θα μπορούσε συνοπτικά να αναφέρει τα παρακάτω σημεία κλειδιά:

- *<numerics>* Η κατασκευή του αυστηρού επιλύτη για την κυματική του κεφαλαίου 3 από την αρχή χρησιμοποιώντας και ταιριάζοντας επιλεγμένα αριθμητικά εργαλεία της σύγχρονης ερευνητικής δραστηριότητας.
- *<numerics>* Η μαθηματική διατύπωση του Πλήρως Ταιριασμένου Στρώματος με βάση το μετασχηματισμό Laplace, αντί της κλασσικής χαλάρωσης των συντεταγμένων στο μιγαδικό επίπεδο.
- *<numerics>* Η διατύπωση συνοριακής συνθήκης στερεού τοιχώματος για χρήση στα συμπαγή σχήματα  $6^{15}$  τάξης ακρίβειας.
- *<numerics, φυσικό πρόβλημα>* Η κατασκευή επιλύτη πεπερασμένων στοιχείων για την αρμονική κυματική εξίσωση σε διδιάστατες γεωμετρίες. Με βάση αυτόν μπορούν να υπολογιστούν οι συντονισμοί του φωνητικού σωλήνα σε διάφορες γεωμετρίες.
- *<numerics>* Η κατασκευή ακουστικού επιλύτη με βάση τη διατύπωση των δύο αλγορίθμων υπολογισμού των ακουστικών ολοκληρωμάτων που προκύπτουν από τη χρήση των συναρτήσεων Green στην επίλυση της κυματικής εξισώσεως.
- *<φυσικό πρόβλημα>* Η 'δαισθητική' προσθήκη των κατανεμημένων αερακουστικών πηγών στο μονοδιάστατο ακουστικό μοντέλο διάδοσης του Portnoff και η μελέτη της επίδρασης αυτών στο τελικό ακουστικό σήμα.

## 2 ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Η ποιότητα των αερακουστικών υπολογισμών στις υβριδικές προσεγγίσεις διαχωρισμού, οι οποίες ήταν και το αντικείμενο έρευνας της παρούσης, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό και είναι άμεσα συνυφασμένη με τους ρευστομηχανικούς υπολογισμούς. Οι τελευταίοι παρέχουν τις αερακουστικές πηγές και οι πρώτοι προσομοιώνουν την διάδοση του ηχητικού αποτελέσματος που παράγεται από αυτές. Στα πλαίσια των προσεγγίσεων διαχωρισμού και για λόγους μείωσης

του υπολογιστικού φόρτου και αποφυγής της άμεσης αριθμητικής προσομοίωσης χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά ο ασυμπίεστος εμπορικός επιλύτης του Fluent.

Παρόλα αυτά όμως και επειδή η διάδοση του ήχου εμπεριέχεται στις εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας, είναι πεποίθηση του γράφοντος, ότι η μελλοντική έρευνα στον τομέα των αερακουστικών υπολογισμών πρέπει να κινηθεί προς την κατεύθυνση της απευθείας αριθμητικής προσομοίωσης. Η πληροφορία που μπορεί να δώσει μια προσομοίωση των συμπεριπτώσεων διατήρησης σε όλες τις κλίμακες μήκους και χρόνου θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως ανεκτίμητη και πραγματικά μεγάλης αξίας, τόσο για το πεδίο ροής όσο και για τα ακουστικά μεγέθη, τα οποία προκύπτουν μετέπειτα με απλούς στατιστικούς υπολογισμούς. Είναι χαρακτηριστικό άλλωστε ότι σε ένα μεγάλο αριθμό από τις βιβλιογραφικές αναφορές που μελετήθηκαν στην διατριβή, η απευθείας αριθμητική προσομοίωση χρησιμοποιείτο ως μέτρο σύγκρισης για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων που δίνουν τα ακουστικά μοντέλα διαχωρισμού.

Από την άλλη μεριά βέβαια οι υπερβολικές απαιτήσεις σε υπολογιστικό υλικό και υπολογιστικό χρόνο κάνουν τη διεξαγωγή μιας απευθείας αριθμητικής προσομοίωσης δύσκολη (όχι αδύνατη) και την καθιστούν άμεσα εξαρτώμενη από άλλους παράγοντες με βασικότερο αυτών τον οικονομικό. Η ύπαρξη των μοντέλων τύρβης μπορεί κατά κάποιο τρόπο να μετριάσει τον υπολογιστικό φόρτο, όπου αυτό είναι επιθυμητό, σε μικρό όμως βαθμό. Η παράληψη μιας χωρικής διάστασης, αν και χονδροειδής παραδοχή, αφού η τύρβη είναι τριδιάστατο φαινόμενο, μπορεί επίσης να ελαφρύνει κι άλλο τους υπολογισμούς.

Τα αποτελέσματα όμως δίνουν την πραγματική εικόνα του φαινομένου, ακριβώς όπως αυτό συμβαίνει σε όλες τις κλίμακες μήκους και χρόνου. Ειδικότερα στον τομέα της ροής στον ανθρώπινο σωλήνα, οι προσπάθειες που έχουν γίνει για απευθείας αριθμητική προσομοίωση είναι πολύ λίγες, αλλά έχουν δώσει πολύ κατατοπιστικές πληροφορίες για την διαμόρφωση της ροής, ειδικά σε στενωτικές περιοχές όπως η γλωττίδα και κάποιοι αρθρωτές του στόματος. Τα αποτελέσματα αυτά δεν θα είναι μόνο χρήσιμα σε εντελώς ερευνητικό επίπεδο και στα πλαίσια μιας ίσως νέας διατριβής, αλλά και σε εντελώς πρακτικό, όπως για παράδειγμα σε επιστήμες υγείας. Δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις όπου η χειρουργική επεμβαίνει με σκοπό την επίτευξη συγκεκριμένης διαμόρφωσης και χροιάς στην ανθρώπινη φωνή. Επίσης η χρήση εμπειρικών – παραμετρικών μοντέλων ογκομετρικής παροχής στη γλωττίδα (σαν συνοριακή συνθήκη), βοηθά σημαντικά, αφού απαλείφει τη χρήση παράλληλων μηχανικών μοντέλων που προσομοιώνουν την κίνηση των φωνητικών χορδών και επιβαρύνουν ακόμα περισσότερο τους υπολογισμούς απαιτώντας την επίλυση εξισώσεων συνεχούς μέσου με ειδικές συνοριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια ρευστού – στερεού.

Η αύξηση της υπολογιστικής ισχύος που παρατηρείται σήμερα, η οποία πια γίνεται με καθορισμένους προβλεπόμενους ρυθμούς από τις αντίστοιχες εταιρείες παραγωγής δεν μπορεί παρά να είναι ένα σημαντικό εφόδιο προς την κατεύθυνση αυτή. Είναι λοιπόν πεποίθηση του γράφοντος ότι η διεξαγωγή απευθείας αριθμητικών προσομοιώσεων θα πρέπει να είναι η κατεύθυνση προς την οποία πρέπει να κινηθεί η ερευνητική δραστηριότητα τουλάχιστο στο κομμάτι της μελέτης ροής και ακουστικής στον ανθρώπινο φωνητικό σωλήνα.

Όσο αναφορά τώρα το κομμάτι της εν σειρά παραγωγής συνθετικής φωνής βασιζομένης σε ένα καθαρά ρευστομηχανικό μοντέλο, η απευθείας αριθμητική προσομοίωση πολύ λίγο θα

βοηθούσε, αφού ακόμα και τα πιο απλοποιημένα μοντέλα (ρευστομηχανικά και αερακουστικά) που παρουσιάστηκαν εδώ δεν μπορούν δυστυχώς (τουλάχιστο ακόμα) να χρησιμοποιηθούν σε ένα τέτοιο σύστημα αφού έχουν ακόμα αρκετά μεγάλους χρόνους επεξεργασίας και απόκρισης. Οι μη παραμετρικοί συνθέτες είναι η κατεύθυνση στην οποία δίδεται και θα δίδεται για καιρό ακόμα το ερευνητικό βάρος στο θέμα αυτό.

### 3 ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

- [1] Papageorgakopoulos J., Arampatzis G., Assimacopoulos D., Markatos N.C., *Enhancement of the momentum interpolation method on non-staggered grids*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 33, pp 1–22, (2000).
- [2] Papageorgakopoulos J., Tsangaris S., *Numerical Simulation of aeroacoustic models based on the Navier – Stokes equations*, 3<sup>rd</sup> Hellenic Institute of Acoustics Congress, Congress Proceedings, (2006).
- [3] Papageorgakopoulos J., Tsangaris S., *Numerical Simulation of the 2<sup>nd</sup> order wave equation*, 7<sup>th</sup> International Congress on Computational Mechanics (GRACM), Congress Proceedings, (2011).
- [4] Papageorgakopoulos J., Tsangaris S., *A Numerical Method for Predicting Acoustical Wave Propagation in Open Spaces*, ISRN Mechanical Engineering, Article ID 174031, vol. (2011).



## ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΩΝ ΑΝΑΦΟΡΩΝ

- (1997), *Proceedings of 2nd Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems*, NASA CP-3352.
- Abarbanel, S., Gottlieb, D., Hesthaven, J.S., (2002), “*Long time behavior of the perfectly matched layer equations in computational electromagnetics*,” *Journal of Scientific Computing*, Vol. 17(1-4), pp. 405–422.
- Ananthapadmanabha T.V., Fant G., *Calculation of true glottal flow and its components*, *Speech Communications*, pp: 167-184, (1982).
- Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, *Hemisphere Publishing*, New York, (1984).
- Appelö, D., Kreiss, G., (2007), “*Application of a perfectly matched layer to the nonlinear wave equation*,” *Wave Motion*, Vol. 44, pp. 531–548.
- Bao G., Wei G.W., Zhao S., *Numerical solution of the Helmholtz equation with high wavenumbers*, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 59, pp. 389–408, (2004).
- Barney A., Shadle C.H., Davies P., *Fluid Flow in a dynamic mechanical model of vocal folds and tract*, *J. Acous. Soc. Am.*, vol. 105, pp: 444-455, (1999).
- Bayliss, A., Gunzburger, M., Turkel, E., (1982), “*Boundary Conditions for the Numerical Solution of Elliptic Equations in Exterior Regions*,” *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 42 , pp. 430-451.
- Bayliss, A., Turkel, E., (1980), “*Radiation Boundary Conditions for wave like equations*,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. XXXIII, pp. 707-725.
- Berenger, J.P., (1994), “*A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves*,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 114, pp. 185-200.
- Bogey C., Bailly C., (2002), “*Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations: far field formulation and validation test cases*,” *ACTA Acustica*, Vol. 88, pp. 463-471.
- Bogey C., Bailly C., (2004), “*A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations*,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, pp. 194-214.
- Bogey C., Bailly C., and Juvé D., *Computation of flow noise using source terms in linearized Euler's equations*, *AIAA Journal*, vol. 40, no. 2, pp. 235–243, (2002).
- Bogey C., Bailly C., Marsden O., (2010), “*Progress in Direct Noise Computation*,” *Int. Journal of Aeroacoustics*, Vol. 9, pp. 123-143.
- Brentner K.S., *Numerical algorithms for acoustic integrals with examples for rotor noise prediction*, *AIAA Journal*, Vol. 35, 4, (1997).
- Brentner K.S., *Numerical algorithms for acoustic integrals: The devil is in the details*, 2nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, State College, PA (1996), AIAA Paper No. 96-1706.
- Brentner K.S., *Prediction of Helicopter Rotor Discrete Frequency Noise*, *NASA Technical Memorandum 87721*, (1986).
- Chew, W., Weedon, W., (1994), “*A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates*,” *Microwave Optical Technol. Lett.*, Vol. 7, pp. 599-604.
- Cohen Gary C., *Higher Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*, *Springer Verlag*, (2002).

- Date AW, *Solution of Navier–Stokes equations on non-staggered grid*, International Journal for Heat and Mass Transfer, Vol. 36, pp. 1913–1922, (1993).
- Doel Kees van den, Ascher U.M., *Real-time numerical solution of Webster's equation on a non-uniform grid*, IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, Vol. 16, pp. 1163–1172, (2008).
- Dunn, H. K., *The calculation of vowel resonances, and an electrical vocal tract*, J. Acoust. Soc. Am. 22, 740–753, (1950).
- Ekaterinaris, J., “*New Formulation of Hardin-Pope Equations for Aeroacoustics*,” AIAA Journal, Vol. 37, pp. 1033–1039.
- El Masri S., Pelorson X., Saguet P. and Badin P., *Development of the transmission line matrix method in acoustics - Applications to higher modes in the vocal tract and other complex ducts*, Int. J. of Numerical Modelling, vol. 11, pp: 133- 151, (1998).
- Engquist B., Majda A., (1977), “*Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves*,” Applied Mathematical Sciences, Vol. 74, pp. 1765-1766.
- Engquist B., Majda A., (1979), “*Radiation Boundary Conditions for Acoustic and Elastic Wave Calculations*,” Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXII, pp. 313-357.
- Ewert R. and Schröder W., *Acoustic Perturbation Equations based on Flow decomposition via Source Filtering*, Journal of Computational Physics, vol. 188, pp. 365–398, (2003).
- Ewert P. and Emunds R., *CAA Slat Noise Studies Applying Stochastic Sound Sources Based On Solenoidal Digital Filters*, 11th AIAA Aeroacoustics Conference, no. 2005-2862, 2005, Monterey, USA.
- Ewert, R., Schröder, W., (2003), “*Acoustic Perturbation Equations based on Flow decomposition via Source Filtering*,” Journal of Computational Physics, Vol. 188, pp. 365–398.
- Fant G., *Some Problems in Voice Source Analysis*, Speech Communications, 13, pp 7-22, (1993).
- Fant Gunnar, *Acoustic Theory of Speech Production*, Mouton, Gravehage, (1970).
- Fant, G. and Liljencrants, J. and Lin, Q., *A four-parameter model of glottal flow*, STL-QPSR Journal, 25/4, pp. 1-13, (1985).
- Fant, G., *The LF-model revisited. Transformations and frequency domain analysis*, STL-QPSR Journal, 36/2-3, pp. 119-156, (1995).
- Farassat F., *Linear Acoustic Formulas for Calculation of Rotating Blade Noise*, AIAA Journal, Vol. 19, No. 9, pp. 1122-1130, (1981).
- Farassat F., *Theory of Noise Generation from Moving Bodies with Application to Helicopter Rotors*, NASA TR-451, (1975).
- Ffowcs Williams J. E. and Hawkings D. L., *Sound Generated by Turbulence and Surfaces in Arbitrary Motion*, Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. A264, pp. 321-342, (1969).
- Flanagan James L., *Speech Analysis and Perception*, Springer Verlag, Berlin, (1972).
- Gaitonde, D.V., Shang, J.S., Young, J. L., (1999), “*Practical aspects of higher-order numerical schemes for wave propagation phenomena*,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 45, pp. 1849-1869.
- Geer J.F., Pope D.S., *A Multiple Scales Approach to Sound Generation by Vibrating Bodies*, Computational Aeroacoustics, 69-84, Springer Verlag, New York, (1993).

- Giles, M.B., (1990), “*Nonreflecting Boundary Conditions for Euler equation calculations,*” AIAA J., Vol. 28(12), pp. 2050-58.
- Hannukainen A., Lukkari T., Malinen J., Paolo P., *Formants and Vowel Sounds by the Finite Element Method*, The Phonetics Symposium, pp. 24-33, (2006).
- Hannukainen A., Lukkari T., Malinen J., Paolo P., *Vowel Formants from the wave equation*, Journal of the Acoustical Society of America, 122, EL1, (2007).
- Hardin J.C., Pope D.S., *An Acoustic/Viscous Splitting Technique for Computational Aeroacoustics*, Therot. Comput. Fluid Dynamics, 6, 323-340, (1994).
- Hiroki Matsuzaki, Kunitoshi Motoki and Nobuhiro Mikit, *Computation of the Acoustic Characteristics of Simplified Vocal-tract Models by 3-D Finite Element Method*, International Symposium on Communications and Information Technologies, Sapporo, Japan, (2004).
- Hirschberg A., *Some Fluid Dynamic Aspects of Speech*, Bull. Communication Parlee, 2, pp.7-30, (1992).
- Hofmans G.C.J., *Vortex Sound in confined flows*, PhD Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, (1998).
- Holmes J.N., *Formant synthesizers: Cascade or parallel*, Speech Communication, vol.2, pp:251-273, (1983).
- Howe M.S., *Mathematical Methods for Mechanical Sciences*, Boston University, College of Engineering, 6<sup>th</sup> edition, (2003).
- Howe M.S., McGowan R.S., *Compact Green’s functions extend the acoustic theory of speech production*, Journal of Phonetics, Vol. 35, pp. 259-270, (2007)
- Howe M.S., McGowan R.S., *On the generalized Fant equation*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 330, pp. 3123-3140, (2011)
- Howe M.S., McGowan R.S., *Sound generated by aerodynamic sources near a deformable body with application to voiced speech*, J. Fluid Mech., Vol. 592, pp. 367-392, (2007)
- Hu, F.Q., (1996), “*On Absorbing Boundary Conditions for Linearized Euler Equations by a Perfectly Matched Layer,*” Journal of Computational Physics, Vol. 129, pp. 201-219.
- Hu, F.Q., (2001), “*A stable, perfectly matched Layer for Linearized Euler Equations in unsplit physical variables,*” Journal of Computational Physics, Vol. 173, pp. 455-480.
- Hu, F.Q., Hussaini, M.Y., Mantley, J.L., (1996), “*Low Dissipation and Low Dispersion Runge - Kutta schemes for Computational Acoustics,*” Journal of Computational Physics, Vol. 124, pp. 177-191.
- Ishizaka K. and Flanagan J.L., *Synthesis of voiced sounds from a two-mass model of the vocal cords*, Bell System Tech. J., Vol. 51 (6), pp. 1233-1268, (1972).
- Israeli, M., Orszag, S.A., (1981), “*Approximation of Radiation Boundary Conditions,*” Journal of Computational Physics, Vol. 41, pp. 115-135.
- Jiang J.J., Zhang Y., *Chaotic vibration induced by turbulent noise in a two-mass model of vocal folds*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 112 (5), Pt. 1, (2002).
- Kaiser J.F., *Some observations on vocal tract operation from a fluid flow point of view*, In Vocal Fold Physiology: Biomechanics, Acoustics and Phonatory Control, (1983)

- Kaltenbacher M., Triebenbacher S., Wohlmuth B., Zörner S., *Enhanced Finite Element Scheme for Vibrational and Flow Induced Sound*, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, Vol. 10, (2010).
- Kang S. , *Uniform-shear flow over a circular cylinder at low Reynolds numbers*, Journal of Fluids and Structures, Vol. 22, 4, pp. 541-555, (2006)
- Kelly J. and Lochbaum C., *Speech synthesis*. In Proceedings of the 4th International, Congress on Acoustics, paper G42:1-4, (1962).
- Kinsler J.U., Coppens A.R. and Sanders J.V., *Fundamentals of Acoustics*, Wiley, New York.
- Klatt D.H., Klatt L.C., *Analysis synthesis and perception of voice quality variations among female and male talkers*, J.Acoust.Soc.Am., Vol. 87/2, pp. 820–857, (1990).
- Klatt D.H., *Software for a cascade/parallel formant synthesizer*, Journal of the Acoustical Society of America, vol.67, pp:971-995, (1980).
- Kleinstreuer C., Zhang Z., *Laminar-to-turbulent fluid-particle flows in a human airway model*, International Journal of Multiphase Flow, Vol. 29, pp. 271–289, (2003).
- Kondaxakis, D., Tsangaris, S., *Aerodynamic and aeroacoustic analysis of a pulsating internal flow by a multidomain weak collocation spectral method*, Fluid Dynamics Research, Vol. 40, pp. 311-342, (2008).
- Kosloff, R., Kosloff, D., (1986), “*Absorbing Boundaries for Wave Propagation Problems*,” Journal of Computational Physics, Vol. 63, pp. 363-376.
- Laver J., *Principles of Phonetics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1994).
- Lee, D.J., Koo, S.O., (1995), “*Numerical Study of Sound Generation due to a Spinning Vortex Pair*,” AIAA Journal, Vol. 33, pp. 20–26.
- Lele, S.K. (1992), “*Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution*,” Journal of Computational Physics, Vol. 103, pp. 16-42.
- Leonard B.P., *A stable accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation*, Computational Methods in Applied Mechanical Engineering, Vol 19, pp. 59–98, (1979).
- Leonard B.P., *The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection*, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., Vol 88, pp. 17-74, (1991).
- Li S., Scherer R.C., Wan M., Wang S., Wu H., *Numerical study of the effects of inferior and superior vocal fold surface angles on vocal fold pressure distributions*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 119, 5, May (2006).
- Li S., Scherer R.C., Wan M., Wang S., Wu H., *The effect of glottal angle on intraglottal pressure*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 119, 1, (2006).
- Li S., Wan M., Wang S., *The Effects of the False Vocal Fold Gaps in a Model of the Larynx on Pressures Distributions and Flows*, Digital Human Modelling, pp. 147–156, Springer Verlag, (2007).
- Lighthill, M. J., (1952), “*On sound generated aerodynamically: I. General theory*,” Proc. Royal Society London, Vol. 211, pp.564–587.
- Lummer M., Delfs J., and Lauke T., *Simulation of Sound Generation by Vortices passing the Trailing Edge of Airfoils*, 8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Breckenridge (USA), no. 2002-2578, 2002.

- Luo H., Mittal R., Zheng X., Bielałowicz S., Walsh R.J., Hahn J.K., *An immersed-boundary method for flow–structure interaction in biological systems with application to phonation*, Journal of Computational Physics, Vol. 227, pp. 9303–9332, (2008).
- Lyrantzis A.S., *Surface integral methods in computational aeroacoustics - From the (CFD) near field to the (Acoustic) far-field*, Int. Journal of Aeroacoustics, vol 2, pp: 95–128, (2003).
- Maeda, *VA digital simulation method of the vocal tract system*, Speech Communication, vol.1, pp. 199-229, (1982).
- Majumdar S., *Role of underrelaxation in momentum interpolation for calculation of flow with non-staggered grids*, Numerical Heat Transfer, Vol. 13, pp. 125–132, (1988).
- Margnat F., Fortuné V., *An iterative algorithm for computing aeroacoustic integrals with application to the analysis of free shear flow noise*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 128, 4, pp. 1656–1667, (2010).
- McGowan R.S., *An Aeroacoustics Approach to Phonation*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 83 (2), pp.696-704, (1988).
- McGowan R.S., Howe M.S., *Influence of the ventricular folds on a voice source with specified vocal fold motion*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 127, 3, (2010).
- Mitchell, B.E., Lele, S.K., Moin, P., (1995), “*Direct Computation of the sound from a compressible co-rotating vortex pair*,” J. Fluid Mech. ,Vol. 285, pp. 181-202.
- Mohseni K., Colonius T., *Numerical Treatment of Polar Coordinate Singularities*, Journal of Computational Physics, 157, 787-795, Academic Press, (2000).
- Morse P.M., *Vibration and Sound*, McGraw-Hill, New York, (1948).
- Mullen J., Howard D., and Murphy D., *Waveguide physical modelling of vocal tract acoustics: Flexible formant bandwidth control from increased model dimensionality*, IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, vol.14, 964 – 971, (2006).
- Nagarajan S., Hahn S., and Lele S.K., *Prediction of Sound Generated by a Pitching Airfoil: A Comparison of RANS and LES*, 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, no. 2006-2516, 2006.
- Pain H.J., Φυσική των Ταλαντώσεων και των Κυμάτων, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα (1990).
- Paliath U. and Morris P.J., *Prediction of Jet Noise From Circular Beveled Nozzles*, 11th AIAA Aeroacoustics Conference, no. 2005-3096, 2005, Monterey, USA.
- Palo P., *A Review of Articulatory Speech Synthesis*, Master’s thesis, TKK, Helsinki, (2006).
- Parageorgakopoulos J., Arampatzis G., Assimacopoulos D., Markatos N.C., *Enhancement of the momentum interpolation method on non-staggered grids*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 33, pp 1–22, (2000).
- Patankar SV, Spalding DB., *A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows*, International Journal for Heat and Mass Transfer, 15, pp. 1787–1806, (1972).
- Patankar SV., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere: New York, (1980).
- Peraire J., Vahdati M., Morgan K., Zienkiewicz O.C., *Adaptive Remeshing For Compressible Flow Computations*, Journal of Computational Physics, vol. 72, pp. 449-466, (1987).

Popescu, M., Shyy, W., Garbey, M., (2005), “*Finite Volume Treatment of dispersion-relation-preserving and optimized prefactored compact schemes for wave propagation,*” *Journal of Computational Physics*, Vol. 210, pp. 705-729.

Portnoff M.R., *A quasi-one dimensional digital simulation for the time varying vocal tract*, Master's Thesis, MIT, (1973).

Renaut, R.A., Petersen, J., (1989), “*Stability of wide angle absorbing boundary conditions for the wave equation,*” *Geophysics*, Vol. 54(9), pp. 1153–1163.

Rhie CM, Chow WL, *A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation*, *AIAA Journal*, Vol. 21, pp 1525–1532, (1983).

Rienstra S.W., Hirschberg A., *An Introduction to Acoustics*, Eindhoven University of Technology, July (2005).

Rosenberg A. E., *Effect of glottal pulse shape on the quality of natural vowels*, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 49, pp. 583–590, (1971).

Schönhärl E., *Die Stroboskopie in der praktischen Laryngologie*, Georg Thieme Verlag, Stuttgart, Germany, (1960).

Seo J. and Moon Y., *Linearized perturbed compressible equations for low Mach number aeroacoustics*, *Journal of Computational Physics*, vol. 218, no. 2, pp. 702–719, (2006).

Seo, J.H., Mittal, R., “*A high-order immersed boundary method for acoustic wave scattering and low-Mach number flow-induced sound in complex geometries,*” *Journal of Computational Physics*, Vol. 230, pp. 1000-1019, (2011).

Shadle C., *The acoustics of fricative consonants*, PhD Thesis, M.I.T., (1985).

Shen Wen Zhong, Sørensen Jens Norkaer, *Aeroacoustic Modeling of Low Speed flows*, *Therot. Comput. Fluid Dynamics*, 13, 271-289, (1999).

Sheo J.H., Moon Y.J., *Perturbed Compressible Equations for Aeroacoustic Noise Prediction at Low Mach Numbers*, *AIAA Journal*, Vol. 13, 8, pp. 1716-1724, (2005).

Sinder D.J., *Speech Synthesis Using an Aeroacoustic Fricative Model*, Ph.D. Thesis, Rutgers University, New Brunswick, NJ., (1999).

Slimon S.A., Soteriou M.C., Davis D.W., *Development of Computational Aeroacoustics Equations for Subsonic Flows Using a Mach Number Expansion Approach*, *Journal of Computational Physics*, 159, 377-406, Academic Press, (2000).

Sondhi M. M., *Resonances of a bent vocal tract*, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 79, pp:1113–1116, (1986).

Sondhi M.M., Schröter J., *Speech Production Models and Their Digital Implementations*, *Digital Signal Processing Handbook*, Ed. Vijay K. Madisetti and Douglas B. Williams, Boca Raton: CRC Press LLC, (1999)

Sorenson R.L., Steger J.L., *Numerical Generation of two dimensional Grids by the use of Poisson Equations with Grid Control at Boundaries*, *WNGG-NASA*, 449, (1980).

Stevens Kenneth N., *Acoustic Phonetics*, The MIT Press, (1998)

Story B.H., Titze I.R., Hoffman E.A., *Vocal tract area functions from magnetic resonance imaging*, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 100, pp. 537-554, (1996).

Story B.H., Titze I.R., Hoffman E.A., *Vocal tract area functions for an adult female speaker based on volumetric imaging*, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 104, pp. 471-487, (1998).

- Story B.H., Pope D.S., *A parametric model of the vocal tract area function for vowel and consonant simulation*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 117/5, pp. 3231–3254, (2005)
- Story B.H., Titze I.R., Hoffman E.A., *The relationship of vocal tract shape to three voice qualities*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 109/4, pp. 1651–1667, (2001).
- Suh J., Frankel S.H., *Comparing turbulence models for flow through a rigid glottal model*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 123, 3, (2008).
- Tam Christofer K.W., *Advances in Numerical Boundary Conditions for Computational Aeroacoustics*, Journal of Computational Acoustics, 6, 377-402, (1998).
- Tam, C.K.W. (2001), “*Computational Aeroacoustics: An Overview*,” Proceedings of the RTO AVT Symposium on “Ageing Mechanisms and Control: Part A – Developments in Computational Aero- and Hydro-Acoustics”, Manchester, UK, 8-11 October 2001.
- Tam, C.K.W., Webb, J.C., (1993), *Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics*, Journal of Computational Physics, Vol. 107, pp. 262-281.
- Teager H.M., *Some Observations on Oral Air Flow During Phonation*, IEEE Trans. Acoust. Speech & Signal Process., ASSP-28, pp.599-601, (1980).
- Thomas P.D., Middlecoff J.F., *Direct Control of the Grid Point distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations*, AIAA Journal, Vol. 18, 6, (1980).
- Thomas T.J., *A finite element model of fluid flow in the vocal tract*, Computer Speech and Language, Vol. 1, pp. 131-151, (1986).
- Thomson K.W., (1987), “*Time dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems*,” Journal of Computational Physics, Vol. 68, pp. 1-24.
- Thomson K.W., (1990), “*Time dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems II*,” Journal of Computational Physics, Vol. 89(2), pp. 439-461.
- Trefethen, L.N., Halpern, L., (1986), “*Well-posedness of one-way wave equations and absorbing boundary conditions*,” Mathematics of Computation, Vol. 47, pp. 421-435.
- Uzun A., Lyrantzis A.S., and Blaisdell G.A., *Coupling of Integral Acoustics Methods with LES for Jet Noise Prediction*, Proceedings of AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, no. 2004-0517, January 2004, Reno, NV. USA.
- Van Doormal JP, Raithby GD., *Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows*, Numerical Heat Transfer, 7, pp. 147–163, (1984).
- van Leer B., *Toward the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A Second Order Sequel to Godunov's Method*, Journal of Computational Physics, Vol. 32, pp. 101-136, (1979).
- Visbal, M.R., Gaitonde, D.V., (2002), “*On the Use of Higher-Order Finite-Difference Schemes on Curvilinear and Deforming Meshes*,” Journal of Computational Physics, Vol. 181, pp. 155-185.
- Wagner C., Hüttl T., and Sagaut P. (eds.), *Large-Eddy Simulation for Acoustics*, Cambridge University Press, 2007.
- Webster A.G., *Acoustical impedance and the theory of horns and of the phonograph*, Proc. Natl. Acad. Sci. (U.S.), Vol. 5, pp. 275–282, (1919).
- Yokoyama T., Miki N., Ogawa Y., *On Construction Method of Three Dimensional Modeling of Vocal Tract Shape*, Electronics and Communications in Japan, vol. 80/9, pp. 1873–1792, (1997).

- Zhang Z., Mongeau L., Frankel S.H., Thomson S., Park J.B., *Sound generation by steady flow through glottis-shaped orifices*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 116, 3, (2004).
- Zhao W., Frankel S. H., Mongeau L., *Computational Aeroacoustics of Phonation, Part I: Computational Methods and Sound Generation Mechanisms*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 112, 5, pp. 2134-2146 (2002).
- Zhao W., Frankel S. H., Mongeau L., *Computational Aeroacoustics of Phonation, Part II: Effects of flow parameters and ventricular folds*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 112, 5, pp. 2147-2154 (2002).
- Zhao W., Frankel S. H., Mongeau L., *Numerical simulation of sounds from confined pulsating axisymmetric jets*, AIAA J. Vol. 39, pp. 1868–1874, (2001).
- Zheng X., Bielamowicz S., Haoxiang L., Mittal R., *A Computational Study of the Effect of False Vocal Folds on Glottal Flow and Vocal Fold Vibration During Phonation*, Annals of Biomedical Engineering, Vol. 37, No. 3, pp. 625–642, (2009).
- Μαρκάτος Ν., Ασημακόπουλος Δ., *Υπολογιστική Ρευστοδυναμική*, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα (1995).
- Μπεργελές Γ., *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα (1994).
- Παπαϊωάννου Α.Θ., *Μηχανική των Ρευστών*, Β' έκδοση, Εκδόσεις ΚΟΡΑΛΙ, (2002)
- Πάππου Θ. Ι., *Ανάπτυξη αριθμητικής μεθοδολογίας τεχνητής συμπίεστικότητας για τον υπολογισμό μη μόνιμων ροών με κινούμενα όρια*, Διδακτορική Διατριβή, Ε.Μ.Π., Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, (1998).
- Τσαγγάρης Σ., *Μηχανική των Ρευστών*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα (1995).