ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΙΤΛΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Το θεώρημα *Blumberg*

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

Παπαστεργής Παναγιώτης

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

Βασίλης Κανελλόπουλος, Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Βασίλης Κανελλόπουλος, Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ

Βασίλης Γρηγοριάδης, Επίκουρος Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ

Αλέξανδρος Αρβανιτάκης, Επίκουρος Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ

Αθήνα, Ιούνιος 2023

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Βασίλη Κανελλόπουλο και τον επίκουρο καθηγητή Βασίλη Γρηγοριάδη για την πολύτιμη συνεισφορά τους.

....
Παναγιώτης Παπαστεργής

Περίληψη

Το θεώρημα *Blumberg* ισχυρίζεται πως για οποιαδήποτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, θα υπάρχει ένα πυκνό υποσύνολο του X ώστε ο περιορισμός της συνάρτησης σε αυτό θα είναι συνεχής. Ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα προέκυψε από τους J. C. Bradford και C. Goffman, γενικεύοντας το αρχικό συμπέρασμα για κάθε συναρτήση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου ο X είναι μετρικός χώρος *Baire* και δίνοντας ένα χαρακτηρισμό των χώρων, στους οποίους ο ισχυρισμός του Blumberg είναι βάσιμος. Το πρώτο μέρος της απόδειξης του θεωρήματος στηρίζεται στην ιδιότητα περίπου συνέχειας, η οποία κατασκευάστηκε από τον ίδιο τον H. Blumberg. Το κυριότερο συμπέρασμα από αυτή την ιδιότητα είναι πως, αν ο X είναι χώρος *Baire*, κάθε συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι περίπου συνεχής σε ένα πυκνό σύνολο $R \subseteq X$. Το δεύτερο μέρος της απόδειξης αφορά την εύρεση του πυκνού υποσυνόλου του X, όπου ο περιορισμός της f σε αυτό θα είναι συνεχής. Ειδικότερα, για τη συνάρτηση $f|_R : R \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι περίπου συνεχής σε κάθε σημείο του R, κατασκευάζεται ένα πυκνό σύνολο $D \subseteq R$, στα σημεία του οποίου η $f|_R$ είναι συνεχής. Το πρώτο μέρος αποτελεί τοπολογικό συμπέρασμα, ενώ για το δεύτερο, απαιτείται μια επαγωγική διαδικασία επιλογής στοιχείων του R, που οδηγεί, τελικά, στην κατασκευή του επιθυμητού συνόλου D. Για την περίπτωση του $\mathbb{R}$ και γενικότερα ενός χώρου X με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του, αρκεί η χρήση μαθηματικής επαγωγής, ενώ, διαφορετικά, χρειάζονται απαραίτητα αξιωματικά εργαλεία, όπως η υπερπεπερασμένη επαγωγή ή το λήμμα του *Zorn*. Σε αυτή την εργασία, παρουσιάζονται δύο διαφορετικές επεκτάσεις του θεωρήματος Blumberg. Ειδικότερα, η πρώτη αναφέρεται σε μετρικούς χώρους *Baire*, ενώ η δεύτερη σε δεύτερους αριθμήσιμους και T_2 τοπολογικούς χώρους *Baire*.

Λέξεις Κλειδιά:
Πουθενά πυκνό σύνολο, κατηγορίες *Baire*, ισχνό σύνολο, σύνολο $2^{ης}$ κατηγορίας, συνισχνό σύνολο, πυκνό σύνολο, περίπου συνέχεια, $f-$συμβατή τριάδα.

Abstract

$Blumberg's$ theorem states that for every function $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, there exists a dense subset of X, such that the restriction of f on that subset is continuous. A stronger result originated from J. C. Bradford και C. Goffman, generalizing the former statement for every function $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, whenever X is a *Baire* metric space and moreover, giving a characterization of the spaces where Blumberg's statement can be valid. The first part of the proof is based on the property of almost continuity, which was introduced by H. Blumberg himself. The main deduction from that property is that, if X is a *Baire* space, then every real function $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ is almost continuous on a dense subset $R \subseteq X$. The second part of the proof focuses on the existence of a dense subset of X, on which the restriction of f is continuous. In particular, regarding the restriction $f|_R : R \longrightarrow \mathbb{R}$, which is almost continuous at every point of R, a dense subset $D \subseteq R$ is constructed, such that the function $f|_R$ is continuous at every point of D. The first part is a topological result , while the second part requires an inductive process of selecting points of R, leading to the construction of the desired set D. In the case of $X = \mathbb{R}$ and in general whenever X has a countable base for its topology, the process of induction is adequate, while alternatively, the utilization of axiomatic tools such as transfinite induction or *Zorn* lemma are necessary. In this paper, two different extensions of Blumberg's theorem are presented. More specifically, the first one refers to *Baire* metric spaces, while the second one concernes second countable T_2 topological spaces.

Keywords:

Nowhere dense set, *Baire* categories, meager set, second category set, comeager set, dense set, almost continuiuty, $f-$compatible trinity.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

1.1 Στοιχειώδεις έννοιες

Παρακάτω, σημειώνονται κάποια βασικά στοιχεία θεωρίας συνόλων.
Ένα σύνολο A είναι ουσιαστικά μια συλλογή κάποιων διακεκριμένων στοιχείων ή μελών.

- Ένα οποιοδήποτε στοιχείο x , είτε θα είναι μέλος της συλλογής A , είτε όχι και δηλαδή θα λέμε ότι: $\{x \in A \Longleftrightarrow$ το x είναι μέλος του $A\}$. Όμοια αν το στοιχείο δεν ανήκει στη συλλογή A, θα γράφουμε
$$\{x \notin A \Longleftrightarrow \text{το } x \text{ δεν είναι μέλος του } A\}$$
- Ένα οποιόδηποτε σύνολο θα καθορίζεται από τα στοιχεία που περιέχει. Επομένως, θεωρώντας δύο σύνολα A, B, έχουμε $A = B$, αν και μόνο εάν έχουν τα ίδια μέλη και γράφουμε
$$A = B \Longleftrightarrow \forall x \,\text{ισχύει}\; x \in A \Longleftrightarrow x \in B$$
- Υπάρχει σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο, το οποίο καλείται "κενό σύνολο" και ισχύει ότι : Αν $\forall x$ ισχύει $x \notin A \Longleftrightarrow A = \oslash$, όπου $\oslash$ συμβολίζουμε το κενό σύνολο. Από το παραπάνω, είναι προφανές ότι, αν δύο σύνολα δεν περιέχουν κανένα στοιχείο, τότε θα ταυτίζονται και δηλαδή, το κενό σύνολο είναι μοναδικό.
- Αν A, B δύο σύνολα, θα λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B, αν όλα τα στοιχεία του A περιέχονται στο B και γράφουμε : $A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall x$ ισχύει $x \in A \Longrightarrow x \in B$. Προφανώς, αν $A = B$, έχουμε $B \subseteq B$, ενώ αν το A δεν περιέχει στοιχεία, τότε $A = \oslash$ και για οποιοδήποτε B, ισχύει ότι $\oslash \subseteq B$.
- Αν A, B δύο σύνολα, θα λέμε ότι το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B , αν ισχύει ότι $A \subseteq B$ και ταυτόχρονα $A \neq B$. Θα γράφουμε
$$A \subset B \Longleftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$
.
- Όταν μας δίνεται μια συνθήκη P που καθορίζει ιδιότητες κάποιων αντικειμένων x , μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο (έστω A) των στοιχείων που ικανοποιούν την απαιτούμενη ιδιότητα. Θα γράφουμε $A = \{x : P(x)\}$ και θα ισχύει η σχέση $x \in A \Longleftrightarrow P(x)$. Όταν θέλουμε να

δημιουργήσουμε μια νέα συλλογή στοιχείων (έστω B) ενός δοσμένου συνόλου A , όπου όλα τα στοιχεία του B θα ικανοποιούν μια συγκεκριμένη συνθήκη P , θα γράφουμε

$$B = \{x \in A : P(x)\} = \{x : x \in A \wedge P(x)\}$$

- Ένωση δύο συνόλων A, B είναι ένα νέο σύνολο που προκύπτει από τη συλλογή των στοιχείων που είναι είτε μέλη του A, είτε μέλη του B και γράφουμε

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

- Τομή δύο συνόλων A, B είναι ένα νέο σύνολο που προκύπτει από τη συλλογή των στοιχείων που είναι ταυτόχρονα μέλη του A και μέλη του B. Θα γράφουμε

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Προφανώς, αν τα σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία, τότε η τομή τους θα είναι κενή και δηλαδή, θα ισχύει $A \cap B = \oslash$.

- Αν X μη κενό σύνολο και $A \subseteq X$, το συμπλήρωμα ενός συνόλου A είναι ενα νέο σύνολο που προκύπτει από τη συλλογή των στοιχείων που δεν είναι μέλη του A και θα γράφουμε

$$X \setminus A = \{x : x \notin A\}$$

.

- Διαφορά δύο συνόλων A, B είναι ένα νέο σύνολο που προκύπτει από τη συλλογή των στοιχείων που είναι μέλη του A και δεν είναι μέλη του B. Θα γράφουμε

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Αν ισχύει $A \subseteq B$, τότε $\forall x \in A \Longrightarrow x \in B$, οπότε θα ισχύει ότι $A \setminus B = \oslash$.

- Δυναμοσύνολο ενός συνόλου A είναι ένα νέο σύνολο που αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του A. Θα συμβολίζεται με $\mathcal{P}(A)$ και θα γράφουμε

$$B \subseteq A \Longleftrightarrow B \in \mathcal{P}(A)$$

Λήμμα 1.1. *Έστω σύνολα A, B. Τότε ισχύουν:*

(i) Η ένωση είναι μεταθετική, δηλαδή $A \cup B = B \cup A$.

(ii) Η τομή είναι μεταθετική, δηλαδή $A \cap B = B \cap A$.

(iii) *Η ένωση είναι προσαιτεριστική, δηλαδή* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(iv) *Η τομή είναι προσαιτεριστική, δηλαδή* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(v) *Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα της ένωσης ως προς την τομή. Δηλαδή, ισχύει* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(vi) *Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την ένωση. Δηλαδή, ισχύει* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Απόδειξη. (i)$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} = \{x : x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$

(ii)$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} = \{x : x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$

(iii)$A \cup (B \cup C) = \{x : x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\} = \{x : x \in A \vee x \in B \vee x \in C\} = \{x : (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\} = \{x : x \in A \cup B \vee x \in C\} = (A \cup B) \cup C$

(iv)$A \cap (B \cap C) = \{x : x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)\} = \{x : x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\} = \{x : (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C\} = \{x : x \in A \cap B \wedge x \in C\} = (A \cap B) \cap C$

(v)$A \cup (B \cap C) = \{x : x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\} = \{x : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\} = \{x : x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(vi)$A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\} = \{x : (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} = \{x : x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)\} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

□

Ορισμός 1.2. *Έστω ένα οποιοδήποτε σύνολο* $\mathcal{I}$ *και υποθέτουμε ότι* $\forall i \in \mathcal{I}$ $\exists F_i$ *σύνολο. Τότε, θεωρώντας* $\mathcal{F}$ *την οικογένεια των συνόλων* $\{F_i : i \in \mathcal{I}\}$*, γράφουμε* $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ *και θα λέμε ότι:*

- *Το* $\mathcal{I}$ *ένα σύνολο δεικτών*
- *Αναφερόμαστε στο* $\{F_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ *ως αρίθμηση (indexing) της* $\mathcal{F}$ *από το σύνολο* $\mathcal{I}$

Με τη βοήθεια του συνόλου $\mathcal{I}$ *και κατ'επέκταση της αρίθμησης της οικογένειας* $\mathcal{F}$*, ορίζουμε την ένωση και την τομή μιας οικογένειας με δείκτες στο* $\mathcal{I}$ *ως εξής:*

- $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} F_i = \{x : \exists i \in \mathcal{I} \text{ με } x \in F_i\}$
- $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} F_i = \{x : \forall i \in \mathcal{I} \text{ ισχύει } x \in F_i\}$

Αν δεν επιλεχθεί κάποιο σύνολο δεικτών για την αρίθμηση των στοιχείων της οικογένειας $\mathcal{F}$, τότε η ένωση και η τομή της $\mathcal{F}$ ορίζεται ως εξής:

- $\bigcup \mathcal{F} = \{x : \exists F \in \mathcal{F} \text{ με } x \in F\}$
- $\bigcap \mathcal{F} = \{x : \forall F \in \mathcal{F} \text{ ισχύει } x \in F\}$

Λήμμα 1.3. *(Νόμοι de Morgan) Έστω ένα μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{P}(X)$, όπου $\mathcal{I}$ ένα σύνολο δεικτών. Τότε, ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $X \setminus \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} F_i = \bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} (X \setminus F_i)$

(ii) $X \setminus \bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} F_i = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} (X \setminus F_i)$

Απόδειξη. (i)$X \setminus \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} F_i = \{x : x \notin (\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} F_i)\} = \{x : \forall i \in \mathcal{I} \,\text{ισχύει}\; x \notin F_i\} = \{x : \forall i \in \mathcal{I} \,\text{ισχύει}\; x \in X \setminus F_i\} = \bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} (X \setminus F_i)$

(ii)$X \setminus \bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} F_i = \{x : x \notin (\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} F_i)\} = \{x : \exists i \in \mathcal{I} \,\text{με}\; x \notin F_i\} = \{x : \exists i \in \mathcal{I} \,\text{με}\; x \in X \setminus F_i\} = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} (X \setminus F_i)$

□

1.2 Συναρτήσεις

Θεωρούμε δύο μη κενά σύνολα A, B. Μία ***συνάρτηση*** από το σύνολο A στο σύνολο B είναι ένας μετασχηματισμός $x \mapsto f(x)$ και αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $x \in A$ σε ακριβώς ένα στοιχείο $f(x) \in B$. Θα τη συμβολίζουμε ως

$$f : A \longrightarrow B$$

και θα λέμε ότι:

- το A είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- το B είναι το πεδίο τιμών της συνάρτησης f

Παρακάτω, αναφέρονται κάποιες βασικές παρατηρήσεις και ιδιότητες που αφορούν τις συναρτήσεις μεταξύ συνόλων.

- Έστω δύο συναρτήσεις $f : A \longrightarrow B$ και $g : A \longrightarrow C$. Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις είναι ίσες, αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και επιπλέον, κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται από τις f και g στο ίδιο στοιχείο του πεδίου τιμών. Θα γράφουμε

$$f = g \Longleftrightarrow \forall x \in A \text{ ισχύει } f(x) = g(x)$$

- Μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ λέγεται ***μονομορφισμός*** ή $1-1$, αν και μόνο εάν $\forall x, w \in A$ ισχύει $f(x) = f(w) \Longrightarrow x = w$.

- Μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ λέγεται ***επιμορφισμός*** ή απλά επί, αν και μόνο εάν $\forall b \in B \ \exists x \in A$ ώστε $f(x) = b$.

- Μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ λέγεται ***αντιστοιχία*** αν και μόνο εάν $\forall y \in B \ \exists ! x \in A$ ώστε $f(x) = y$.

- Έστω $Z \subseteq A$ και ορίζουμε το σύνολο $f[Z] = \{y \in B : \exists x \in Z \text{ με } f(x) = y\} \subseteq B$. Θα λέμε ότι το $f[Z]$ είναι η εικόνα του Z υπό την f. Αν $Z = A$, τότε το σύνολο $f[A]$ λέγεται εικόνα της f και σε κάθε περίπτωση, θα είναι υποσύνολο του πεδίου τιμών.

- Έστω $V \subseteq B$. Η αντίστροφη εικόνα του V ως προς την f είναι το σύνολο $f^{-1}[V] = \{x \in A : \exists y \in V \text{ με } f(x) = y\} \subseteq A$. Αν $V = B$, τότε θα ισχύει $f^{-1}[B] = A$.

- Αν η συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ είναι αντιστοιχία, τότε ορίζεται ανεξάρτητα και η αντίστροφη συνάρτηση της f, $f^{-1} : B \longrightarrow A$, όπου για $x \in A, y \in B$, ισχύει:

  $$x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow f(x) = y$$

  Για οποιουδήποτε $V \subseteq B$, το σύνολο $f^{-1}[V]$ θα είναι ακριβώς η εικόνα του V από την συνάρτηση f^{-1} που ορίστηκε.

Ορισμός 1.4. *Έστω X μη κενό σύνολο. Με τον όρο* ***ακολουθία*** *στο X, εννοούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ με $f(n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $x_n \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Μια ακολουθία στο X θα συμβολίζεται με $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και τα στοιχεία x_n καλούνται* ***όροι*** *της ακολουθίας. Προφανώς, θα ισχύει $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$.*

Ορισμός 1.5. *Έστω X μη κενό σύνολο. Το X καλείται* ***πεπερασμένο****, αν $\exists n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε υπάρχει επιμορφισμός $f : \{0, 1, ..., n\} \longrightarrow X$. Αν ένα σύνολο δεν είναι πεπερασμένο, τότε θα λέμε ότι είναι* ***άπειρο****.*

Ορισμός 1.6. *Έστω X μη κενό σύνολο. Το A καλείται* ***αριθμήσιμο****, αν υπάρχει μονομορφισμός $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$. Αν ένα σύνολο δεν είναι αριθμήσιμο, τότε θα λέμε ότι είναι* ***υπεραριθμήσιμο****.*

Πρόταση 1.7. *Έστω* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *μη κενή, αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων με* X_n *αριθμήσιμο,* $\forall n \in \mathbb{N}$. *Τότε, το σύνολο* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *είναι αριθμήσιμο.[1]*

Πρόταση 1.8. *Έστω* $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}$ *το σύνολο των ακεραίων αριθμών. Το* $\mathbb{Z}$ *είναι αριθμήσιμο.[1]*

Πρόταση 1.9. *Έστω* $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Q}^- = \{\frac{-m}{n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{-m}{n} : m \in \mathbb{N}\}$ *και* $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ *το σύνολο των ρητών αριθμών. Το* $\mathbb{Q}$ *είναι αριθμήσιμο.[1]*

Πρόταση 1.10. *Έστω* $\mathbb{R}$ *το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Το* $\mathbb{R}$ *είναι υπεραριθμήσιμο.[2]*

1.3 Σχέσεις-Διατάξεις

Ορισμός 1.11. *Έστω σύνολα* A, B. *Το γινόμενο των* A, B *είναι η συλλογή των (διατεταγμένων) ζευγών με στοιχεία των* A, B *και είναι σύνολο. Θα συμβολίζεται με* $A \times B$ *και θα γράφουμε*

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \,\&\, y \in B\}$$

Ορισμός 1.12. *Έστω μη κενά σύνολα* A, B. ***Διμελής σχέση*** *στα σύνολα* A, B *είναι ένα οποιοδήποτε* $R \subseteq A \times B$, *όπου για τα* $x \in A, y \in B$ *που ικανοποιούν την απαιτούμενη συνθήκη, θα γράφουμε*

$$(x, y) \in R \iff xRy \iff R(x, y)$$

Αν $B = A$, *τότε θα λέμε ότι η* R *είναι διμελής σχέση στο* A.

Ορισμός 1.13. *Έστω μη κενό σύνολο* A. *Μια διμελής σχέση στο* A *θα λέγεται* ***σχέση ισοδυναμίας****, αν είναι ενα οποιοδήποτε* $P \subseteq A \times A$ *που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) *Η* P *είναι αυτοπαθής* $\iff \forall x \in A$ *ισχύει* xPx

(ii) *Η* P *είναι συμμετρική* $\iff \forall x, y \in A$ *ισχύει* $xPy \Longrightarrow yPx$

(iii) *Η* P *είναι μεταβατική* $\iff \forall x, y, z \in A$ *ισχύει* $xPy \,\&\, yPz \Longrightarrow xPz$

Ορισμός 1.14. *Έστω μη κενό σύνολο* A. *Μια διμελής σχέση* $(\preceq)$ *στο* A *θα λέγεται* ***μερική διάταξη*** *στο* A, *αν για οποιαδήποτε* $x, y, z \in A$ *ικανοποιούνται τα εξής:*

(i) $H \preceq$ *είναι αυτοπαθής* $\Longleftrightarrow x \preceq x$

(ii) $H \preceq$ *είναι μεταβατική* $\Longleftrightarrow$ *Αν* $x \preceq y \,\&\, y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z$

(iii) $H \preceq$ *είναι αντισυμμετρική* $\Longleftrightarrow$ *Αν* $x \preceq y \,\&\, y \preceq x \Longrightarrow y = x$

Αν για κάποια $x, y \in A$ *ισχύει ότι* $x \preceq y \,\&\, x \neq y$, *τότε θα γράφουμε* $x \prec y$.

Ορισμός 1.15. *Έστω μη κενό σύνολο A. Μια διμελής σχέση* $(\leq)$ *στο A θα λέγεται* ***ολική διάταξη*** *στο A, αν είναι μερική διάταξη στο A και επιπλέον, ισχύει ότι*

$$\forall x, y \in A \text{ ισχύει } x \leq y \vee y \leq x$$

Αν για κάποια $x, y \in A$ *ισχύει* $x \leq y \,\&\, x \neq y$, *τότε θα γράφουμε* $x < y$.

Ορισμός 1.16. *Έστω μη κενό σύνολο A. Μια διμελής σχέση* $(\leq)$ *στο σύνολο A θα λέγεται* ***καλή διάταξη*** *του A, αν είναι ολική διάταξη του A και επιπλέον, ισχύει ότι*

$$\forall X \subseteq A \text{ με } X \neq \oslash \Longrightarrow \exists x \in X \text{ ώστε } \forall y \in X \text{ έχουμε } x \leq y$$

Δηλαδή, κάθε μη κενό $X \subseteq A$ *θα περιέχει στοιχείο* x, *τέτοιο ώστε* $\forall y \in X$ *ισχύει* $y \leq x \Longrightarrow y = x$.

Ορισμός 1.17. *Μερικά διατεταγμένο σύνολο είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος* $(X, \preceq)$, *όπου X μη κενό σύνολο και* $\preceq$ *μια μερική διάταξη στο X. Ένα τέτοιο ζεύγος* $(X, \preceq)$ *θα λέγεται και* ***μερικά διατεταγμένος χώρος****. Κάθε* $A \subseteq X$ *είναι επίσης ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο (χώρος) υπό τον περιορισμό της* $\preceq$ *στο A και θα γράφουμε*

$$x \preceq_A y \Longleftrightarrow x \preceq y \,\&\, x \in A \,\&\, y \in A$$

Ορισμός 1.18. *Έστω μερικά διατεταγμένος χώρος* $(X, \preceq)$, *μη κενό* $A \subseteq X$ *και* $y \in X$. *Τότε:*

- *Το* $y \in X$ *λέγεται* ***μέγιστο*** *στοιχείο του X, αν ισχύει* $\forall x \in X$ *ισχύει* $x \preceq y$ *και θα συμβολίζεται με* $max(X)$.
- *Το* $y \in X$ *λέγεται* ***μεγιστικό*** *στοιχείο του X, αν ισχύει* $\forall x \in X$ *ισχύει* $y \preceq x \Longrightarrow y = x$ *και θα συμβολίζεται με* $maximal(X)$.
- *Το* $y \in X$ *λέγεται* ***ελάχιστο*** *στοιχείο του X, αν ισχύει* $\forall x \in X$ *ισχύει* $y \preceq x$ *και θα συμβολίζεται με* $min(X)$.
- *Το* $y \in X$ *λέγεται* ***ελαχιστικό*** *στοιχείο του X, αν ισχύει* $\forall x \in X$ *ισχύει* $x \preceq y \Longrightarrow x = y$ *και θα συμβολίζεται με* $minimal(X)$.

- *Το $y \in X$ λέγεται* ***άνω φράγμα*** *του A , αν ισχύει $\forall x \in A$ ισχύει $x \preceq y$.*

- *Το $y \in X$ λέγεται* ***ελάχιστο άνω φράγμα*** *του A , αν είναι άνω φράγμα του A και $\forall u \in X$ ισχύει $u =$ άνω φράγμα του $A \Longrightarrow y \preceq u$ και θα συμβολίζεται με $sup(A)$.*

- *Το $y \in X$ λέγεται* ***κάτω φράγμα*** *του A, αν ισχύει $\forall x \in A$ ισχύει $y \preceq x$.*

- *Το $y \in X$ λέγεται* ***μέγιστο κάτω φράγμα*** *του A , αν είναι κάτω φράγμα του A και $\forall u \in X$ ισχύει $u =$ κάτω φράγμα του $A \Longrightarrow u \preceq y$ και θα συμβολίζεται με $inf(A)$.*

Ορισμός 1.19. *Έστω $(X, \preceq)$ μερικά διατεταγμένος χώρος και $A \subseteq X$, τέτοιο ώστε $\forall x, y \in A$ ισχύει $x \preceq y \vee y \preceq x$. Τότε η $\preceq$ είναι ολική διάταξη στο A και το ζεύγος $(A, \preceq)$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του X ή μια* ***αλυσίδα*** *του X. Μια ολική διάταξη, συνήθως, τη συμβολίζουμε με $\leq$ και το ζεύγος $(A, \leq)$ θα λέγεται* ***ολικά διατεταγμένος χώρος***.

2 Τοπολογικοί Χώροι

2.1 Βασικές έννοιες

2.1.1 Τοπολογίες-Μετρικές

Ορισμός 2.1. *Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{T}$ λέγεται* ***τοπολογία*** *, αν:*

(i) $\oslash \in \mathcal{T}$ *και* $X \in \mathcal{T}$.

(ii) Αν $\{U_i\}_{i=1}^n$ *είναι μια πεπερασμένη οικογένεια στοιχείων της* $\mathcal{T}$, *ισχύει* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

(iii) Αν $\mathcal{I}$ *μη κενό σύνολο και* $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *οικογένεια στοιχείων της* $\mathcal{T}$, *ισχύει* $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$.

Κάθε στοιχείο $U \in \mathcal{T}$ *θα λέμε ότι είναι* $\mathcal{T}-$*ανοιχτό ή απλά* ***ανοιχτό*** *και το ζεύγος* $(X, \mathcal{T})$ *ονομάζεται* ***τοπολογικός χώρος****.*

Ορισμός 2.2. *Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ τοπολογίες στο X. Θα λέμε ότι η $\mathcal{T}_2$ είναι* ***λεπτότερη*** *ή* ***ισχυρότερη*** *από την $\mathcal{T}_1$, αν ισχύει $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Η τοπολογία $\mathcal{T}_1$ λέγετα* ***μικρότερη*** *ή* ***ασθενέστερη*** *από την $\mathcal{T}_2$.*

Παρατήρηση 2.3. *Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ τοπολογίες στο X. Τότε, ισχύει $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ αν και μόνο εάν κάθε $\mathcal{T}_1-$ανοιχτό υποσύνολο του X είναι και $\mathcal{T}_2-$ανοιχτό.*

Ορισμός 2.4. *Έστω X μη κενό σύνολο και $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $\rho(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$ *και* $\rho(x, y) = 0$, *αν και μόνο εάν* $x = y$.

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall x, y \in X$ *(συμμετρκή ιδιότητα).*

(iii) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$ *(τριγωνική ανισότητα).*

Η συνάρτηση ρ καλείται ***μετρική*** *στο X και το ζεύγος* (X,ρ) *ονομάζεται* ***μετρικός χώρος****.* *Ο αριθμός* $\rho(x,y)$ *ονομάζεται* ***απόσταση*** *του σημείου x από το σημείο y.*

Ορισμός 2.5. *Έστω* (X,ρ) *μετρικός χώρος και* $A \subseteq X$*. Η* ***διάμετρος*** *του A συμβολίζεται με* $diam(A)$ *και ισούται με*

$$diam(A) = sup\{\,\rho(x,y) : x,y \in A\,\}$$

Είναι σαφές ότι $diam(A) \geq 0$*.*

Ορισμός 2.6. *Έστω* (X,ρ) *μετρικός χώρος και ένα μη κενό* $A \subseteq X$*. Το A λέγεται* ***φραγμένο*** *στο* (X,ρ)*, αν ισχύει* $diam(A) < +\infty$*. Επιπλέον, αν* $diam(X) < +\infty$*, τότε θα λέμε ότι η ρ είναι* ***φραγμένη μετρική****.*

Ορισμός 2.7. *Έστω* (X,ρ) *μετρικός χώρος,* $x_0 \in X$ *και* $\delta > 0$ *. Η* ***ανοιχτή μπάλα*** *στο* (X,ρ) *με* ***κέντρο*** x_0 *και* ***ακτίνα*** δ *, συμβολίζεται με* $B_\rho(x_0,\delta)$ *και ισούται με*

$$B_\rho(x_0,\delta) = \{x \in X : \rho(x,x_0) < \delta\,\}$$

Πρόταση 2.8. *Έστω* (X,ρ) *μετρικός χώρος. Η οικογένεια*

$$\mathcal{T}_\rho = \{A \subseteq X : \forall x \in A \;\exists \delta > 0 \;\; \text{ώστε}\; B_\rho(x,\delta) \subseteq A\}$$

είναι τοπολογία στο X και ονομάζεται ***επαγόμενη μετρική τοπολογία*** *του X από τη ρ.*

Απόδειξη. (i) Προφανώς, ισχύει $X \subseteq X$ και επιπλέον, $\forall x \in X$ και $\forall \varepsilon > 0$, ισχύει $B_\rho(X,\varepsilon) \subseteq X$. Άρα $X \in \mathcal{T}_\rho$. Από την άλλη, αν υποθέσουμε ότι $\oslash \notin \mathcal{T}_\rho$, τότε $\exists y \in \oslash$ ώστε $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει $B_\rho(y,\varepsilon) \nsubseteq X$. Προκύπτει $y \notin X$, ο οποίο είναι άτοπο και δηλαδή $\oslash \in \mathcal{T}_\rho$.

(ii) Έστω $\{U_i\}_{i=1}^n$ πεπερασμένη οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{T}_\rho$. Αν $\bigcap\limits_{i=1}^n U_i = \oslash$, τότε $\bigcap\limits_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_\rho$. Έστω, ότι $\exists x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^n U_i$. Τότε, $\forall i \in \{1,2,...,n\}$ $\exists \delta_i > 0$ ώστε $B_\rho(x_0,\delta_i) \subseteq U_i$ και θέτουμε $\delta_0 = min\{\delta_i : i \in \{1,2,...,n\}\}$. Παρατηρούμε ότι

$$B_\rho(x_0,\delta_0) \subseteq B_\rho(x_0,\delta_i) \subseteq U_i\,,\; \forall i \in \{1,2,...,n\}$$

και δηλαδή ισχύει $B_\rho(x_0,\delta_0) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^n U_i$. Επειδή το x_0 ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι $\bigcap\limits_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_\rho$.

(iii) Έστω $\mathcal{I}$ μη κενό σύνολο και $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{T}_\rho$. Προφανώς, αν $\forall i \in \mathcal{I}$ έχουμε $U_i = \oslash$, είναι άμεσο ότι $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i = \oslash$ και δηλάδή $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}_\rho$.

Έστω ότι $\exists x_0 \in \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i$. Τότε, $\exists i_0 \in \mathcal{I}$ ώστε $x_0 \in U_{i_0}$. Εφόσον $U_{i_0} \in \mathcal{T}_\rho \quad \exists \delta_0 > 0$ ώστε $B_\rho(x_0,\delta_0) \subseteq U_{i_0}$. Προκύπτει ότι

$$B_\rho(x_0,\delta_0) \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i$$

και συνεπώς $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}_\rho$. □

Ορισμός 2.9. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ο $(X,\mathcal{T})$ λέγεται* ***μετρικοποιήσιμος*** *αν υπάρχει μετρική ρ στο X, τέτοια ώστε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$. Στην περίπτωση αυτή, θα λέμε ότι η τοπολογία $\mathcal{T}$ είναι* ***μετρικοποιήσιμη****.*

Ορισμός 2.10. *Έστω X μη κενό σύνολο και ρ_1,ρ_2 μετρικές στο X. Θα λέμε ότι οι ρ_1,ρ_2 είναι* ***ισοδύναμες μετρικές****, αν $\exists c_1 > 0 \;\; \exists c_2 > 0$ ώστε $\forall x,y \in X$, ισχύει*

$$c_1\rho_1(x,y) \le \rho_2(x,y) \le c_2\rho_1(x,y)$$

Παρατήρηση 2.11. *Έστω X μη κενό σύνολο και ρ_1,ρ_2 ισοδύναμες μετρικές στο X. Αν $\mathcal{T}_{\rho_1}$, $\mathcal{T}_{\rho_2}$ οι αντίστοιχες επαγόμενες τοπολογίες από τις ρ_1 και ρ_2, ισχύει $\mathcal{T}_{\rho_1} = \mathcal{T}_{\rho_2}$.*

Παραδείγματα τοπολογιών και μετρικών

1) Θεωρώντας το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, ορίζουμε τη συνάρτηση $\rho : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, όπου $\forall x,y \in \mathbb{R}$,

$$\rho(x,y) = |x-y|,\ \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση ρ είναι μετρική στο $\mathbb{R}$ και αναφέρεται ως ***συνήθης μετρική*** στο $\mathbb{R}$. Η επαγόμενη τοπολογία

$$\mathcal{T}_\rho = \{B_\rho(x,\varepsilon) : x \in \mathbb{R},\, \varepsilon > 0\} = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : x \in \mathbb{R},\, \varepsilon > 0\}$$

λέγεται ***συνήθης τοπολογία*** στο $\mathbb{R}$.

2) Έστω μη κενό σύνολο X και ορίζουμε τη συνάρτηση $\rho_d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, όπου $\forall x,y \in X$

$$\rho_d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \ne y \\ 0 & \text{αν } x = y \end{cases}$$

Η συνάρτηση ρ_d είναι μετρική στο X και αναφέρεται ως ***διακριτή μετρική*** στο X. Επιπλέον, ισχύει ότι $\mathcal{T}_\rho = \mathcal{P}(X)$. Πράγματι, αν $A \in \mathcal{P}(X)$, ισχύει $A = \bigcup\limits_{x\in A}\{x\}$. Για οποιοδήποτε $x \in A$, επιλέγουμε $\varepsilon_x \in (0,1)$ και έτσι ώστε $B_{\rho_d}(x,\varepsilon_x) = \{x\}$. Είναι άμεσο ότι

$$A = \bigcup_{x\in A} B_{\rho_d}(x,\varepsilon_x) \Longrightarrow \mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{T}_{\rho_d}$$

Επειδή για οποιοδήποτε τοπολογία $\mathcal{T}$ στο X ισχύει $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{T}_{\rho_d} = \mathcal{P}(X)$. Η συλλογή $\mathcal{P}(X)$ λέγεται ***διακριτή τοπολογία*** στο X και είναι η ισχυρότερη τοπολογία στο X.

3) Έστω X μη κενό σύνολο, $x_0 \in X$ και η συλλογή $\mathcal{T} = \{\oslash\} \cup \{U \subseteq X : x_0 \in U\}$ είναι τοπολογία στο X και καλείται ***τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου***. Επιπλέον, αν το X έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, η $\mathcal{T}$ δεν είναι μετρικοποιήσιμη.
Η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία.
(i) $\oslash \in \mathcal{T}$ και $X \in \mathcal{T}$, αφού $X \subseteq X$ και $x_0 \in X$.

(ii) Έστω $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Αν $U_1 = \oslash$ ή $U_2 = \oslash$, ισχύει $U_1 \cap U_2 = \oslash$ και δηλαδή $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Αν $U_1 \neq \oslash$ και $U_2 \neq \oslash$, τότε

$$x_0 \in U_1 \wedge x_0 \in U_2 \Longrightarrow x_0 \in U_1 \cap U_2 \subseteq X$$

και οπότε $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

(iii) Έστω $\mathcal{I}$ μη κενό σύνολο και $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{T}$. Προφανώς, αν $\forall i \in \mathcal{I}$ έχουμε $U_i = \oslash$, είναι άμεσο ότι $\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} U_i = \oslash$. Διαφορετικά, $\exists i_0 \in \mathcal{I}$ ώστε $U_{i_0} \neq \oslash$ και επειδή $U_{i_0} \in \mathcal{T}$, οφείλει $x_0 \in U_{i_0}$. Είναι άμεσο ότι

$$x_0 \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i \subseteq X \Longrightarrow \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$$

Αν X περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, η $\mathcal{T}$ δεν είναι μετρικοποιήσιμη.

Πράγματι, αν (X, ρ) μετρικός χώρος, όπου $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$ και $x_0, x_1 \in X$, επιλέγουμε $0 < \varepsilon < \dfrac{\rho(x_0, x_1)}{2}$ και τότε, ισχύει $B_\rho(x_0, \varepsilon) \cap B_\rho(x_1, \varepsilon) = \oslash$. Αφού $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$, οφείλει $B_\rho(x_1, \varepsilon) \in \mathcal{T}$, το οποίο είναι άτοπο, καθώς $x_0 \notin B_\rho(x_1, \varepsilon)$.

4) Έστω μη κενό σύνολο X. Η συλλογή $\mathcal{T} = \{\oslash\} \cup \{X \setminus F : F \subseteq X, F\,\text{πεπερασμένο}\}$ είναι τοπολογία στο X και καλείται ***συμπεπερασμένη τοπολογία*** στο X. Επιπλέον, αν το X είναι άπειρο, η $\mathcal{T}$ δεν είναι μετρικοποιήσιμη.
Η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία.
(i) $\oslash \in \mathcal{T}$ και $X \in \mathcal{T}$, αφού $X \setminus X = \oslash$ είναι πεπερασμένο.

(ii) Έστω $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Αν $U_1 = \oslash$ ή $U_2 = \oslash$, ισχύει $U_1 \cap U_2 = \oslash$ και δηλαδή $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Αν $U_1 \neq \oslash$ και $U_2 \neq \oslash$, τότε τα $X \setminus U_1$ και $X \setminus U_2$ είναι πεπερασμένα και το

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$$

είναι πεπερασμένο. Συνεπώς $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

(iii) Έστω $\mathcal{I}$ μη κενό σύνολο και $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{T}$. Προφανώς, αν $\forall i \in \mathcal{I}$ έχουμε $U_i = \oslash$, είναι άμεσο ότι $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i = \oslash$. Διαφορετικά, $\exists i_0 \in \mathcal{I}$ ώστε $U_{i_0} \neq \oslash$ και δηλαδή $X \setminus U_{i_0}$ είναι πεπερασμένο. Έχουμε ότι

$$X \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \subseteq X \setminus U_{i_0}$$

από όπου, έπεται ότι το $X \setminus \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i$ είναι πεπερασμένο και δηλαδή $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$.

Αν X άπειρο, τότε η $\mathcal{T}$ δεν είναι μετρικοποιήσιμη.

Πράγματι, αν (X, ρ) μετρικός χώρος, όπου $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$ και $x, y \in X$, επιλέγουμε $0 < \varepsilon < \dfrac{\rho(x,y)}{2}$ και τότε, ισχύει $B_\rho(x, \varepsilon) \cap B_\rho(y, \varepsilon) = \oslash$. Αυτό σημαίνει πως σε κάθε μετρικό χώρο υπάρχουν ανοιχτά και ξένα μεταξύ τους σύνολα. Ωστόσο, αν $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $U_1 \cap U_2 = \oslash$, προκύπτει ότι

$$X = X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$$

είναι πεπερασμένο, το οποίο είναι άτοπο. Εφόσον η τοπολογία $\mathcal{T}$ δεν περιέχει σύνολα ξένα μεταξύ τους, είναι αδύνατο να επάγεται από κάποια μετρική στο X.

2.1.2 Σύγκλιση-Συνέχεια

Ορισμός 2.12. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ μια ακολουθία στο X. Το $x_0 \in X$ καλείται **όριο** της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $(X, \mathcal{T})$, αν $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$, ισχύει $x_n \in U$. Μια ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ καλείται **συγκλίνουσα** στο $(X, \mathcal{T})$, αν $\exists x_0 \in X$ που είναι όριο της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Θα λέμε ότι η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **συγκλίνει** στο x_0 υπό την τοπολογία $\mathcal{T}$ και θα το συμβολίζουμε με $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x_0$. .*

Ορισμός 2.13. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ μια ακολουθία στο X και $x_0 \in X$. Αν x_0 είναι όριο της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο (X, ρ), τότε αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$, ισχύει $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$. Θα το συμβολίζουμε με $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_\rho} x_0$ ή απλά $x_n \longrightarrow x_0$*

Πρόταση 2.14. *[3](Μοναδικότητα ορίου) Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος , $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ μια συγκλίνουσα ακολουθία στο $(X, \mathcal{T})$. Τότε, το όριο της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι και μοναδικό.*

Ορισμός 2.15. *Έστω $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{V})$ τοπολογικοί χώροι, μια $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{V})$ και $x_0 \in X$. Η f λέγεται **συνεχής** στο x_0 αν $\forall V \in \mathcal{V}$ με $f(x_0) \in V$, $\exists U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$ και ώστε $f(U) \subset V$. Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in X$, θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $(X, \mathcal{T})$, ή απλά συνεχής στο X.*

Παρατήρηση 2.16. *Αν $x_0 \in X$ και η f είναι ασυνχεής στο x_0, τότε $\exists V \in \mathcal{V}$ με $f(x_0) \in V$ τέτοιο ώστε $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, ισχύει $f(U) \nsubseteq V$.*

Θεώρημα 2.17. *(<u>Αρχή μεταφοράς</u>) Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι, μια $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ και $x_0 \in X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Η f είναι συνεχής στο x_0.

(ii) Για οποιαδήποτε ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ με $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_\rho} x_0$, ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{\mathcal{T}_d} f(x_0)$.

Απόδειξη. (i)$\Longrightarrow$(ii) Έστω ότι f είναι συνεχής στο x_0 και έστω ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ώστε $x_n \longrightarrow x_0$.Θεωρούμε, επίσης, ένα οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, $\exists \delta > 0$ ώστε $\forall x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta$, ισχύει $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Δεδομένου ότι $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_\rho} x_0$ και για το δοθέν ε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$, ισχύει $\rho(x_n, x_0) < \delta$. Από τη συνέχεια της f στο x_0, είναι άμεσο ότι $\forall n \geq n_0$, ισχύει $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$,. Επειδή το ε ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ ώστε } \forall n \geq n_0,\ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

και δηλαδή $f(x_n) \xrightarrow{\mathcal{T}_d} f(x_0)$.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Έστω ότι για οποιαδήποτε ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ με $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_\rho} x_0$, ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{\mathcal{T}_d} f(x_0)$ και έστω προς άτοπο ότι f είναι ασυνεχής στο x_0. Τότε, $\exists \varepsilon > 0$ ώστε $\forall \delta > 0$, $\exists x_\delta \in X$ με $\rho(x_\delta, x_0) < \delta$ και ισχύει $d(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Θέτονας $\delta = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in X$ με $\rho(x_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$ και $d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Αφού, τώρα, ισχύει $0 \leq \rho(x_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\rho(x_n, x_0) \longrightarrow 0$ και δηλαδή $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_\rho} x_0$. Τότε, όμως, βρήκαμε ακολουθία στο (X, ρ) που συγκλίνει στο x_0 και για την οποία, έχουμε $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_\rho} x_0$ και $\exists \varepsilon > 0$ ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$, και δηλαδή η ακολουθία $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ δε συγκλίνει στο $f(x_0)$. Άτοπο. Επομένως, η f είναι συνεχής στο x_0. $\square$

2.2 Ανοιχτά σύνολα-Βάσεις-Περιοχές

Πρόταση 2.18. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και μη κενό $A \subseteq X$. Το A είναι ανοιχτό αν και μόνο εάν $\forall x \in A$ $\exists U \in \mathcal{T}$, ώστε $x \in U \subseteq A$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω $x_0 \in A$. Αφού A είναι ανοιχτό, τότε $A \in \mathcal{T}$ και οπότε $x \in A \subseteq A$.

($\Longleftarrow$) Έχουμε ότι

$$\forall x \in A\ \exists U_x \in \mathcal{T} \text{ ώστε } x \in U_x \subseteq A$$

και δηλαδή $A \subseteq \bigcup_{x\in A} U_x$. Επειδή, επιπλέον, ισχύει $\bigcup_{x\in A} U_x \subseteq A$, συμπεραίνουμε ότι $A = \bigcup_{x\in A} U_x \in \mathcal{T}$. □

Παρατήρηση 2.19. *Τα ανοιχτά υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου είναι ακριβώς εκείνα που γράφονται ως ένωση ανοιχτών.*

Ορισμός 2.20. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Η $\mathcal{B}$ καλείται **βάση** για την τοπολογία $\mathcal{T}$, αν $\forall U \in \mathcal{T}\ \ \exists \{B_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{B}$, ώστε $U = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i$. Τα στοιχεία της $\mathcal{B}$ λέγονται **βασικά ανοιχτά σύνολα**.*

Πρόταση 2.21. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την $\mathcal{T}$.

(ii) Για κάθε $U \in \mathcal{T} \setminus \emptyset$ και $\forall x \in U$, $\exists B \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B \subseteq U$.

Απόδειξη. (i)$\Longrightarrow$(ii) Έστω $U \in \mathcal{T} \setminus \emptyset$. Τότε, $\exists \{B_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{B}$ ώστε $U = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i$. Αν $x_0 \in U$, τότε $\exists i_0 \in \mathcal{I}$, ώστε $x_0 \in B_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i$.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Έστω $U \in \mathcal{T} \setminus \emptyset$. Για κάθε $x \in U$ επιλέγουμε $B_x \in \mathcal{B}$, ώστε $x \in B_x \subseteq U$. Είναι άμεσο ότι $U = \bigcup_{x\in U} B_x$. Εφόσον το U ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε πως η $\mathcal{B}$ είναι βάση της $\mathcal{T}$. □

Παρατήρηση 2.22. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}$ μια βάση για την $\mathcal{T}$. Οποιοδήποτε οικογένεια $\mathcal{B}'$ με $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{T}$ είναι επίσης βάση για την $\mathcal{T}$. Ειδικότερα, η $\mathcal{T}$ είναι μια βάση για την $\mathcal{T}$.*

Πρόταση 2.23. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ μια βάση της $\mathcal{T}$ και $U \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το U είναι ανοιχτό.

(ii) Για κάθε $x \in U$, $\exists B \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B \subseteq U$.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από Πρόταση 2.18 και από Πρόταση 2.21. □

Θεώρημα 2.24. *Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η συλλογή $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση μιας τοπολογίας στο X.

(ii) $X = \bigcup \mathcal{B}$ *και αν* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *και* $x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ *ώστε* $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Απόδειξη. (i)$\Longrightarrow$(ii) Θεωρούμε τοπολογία $\mathcal{T}$ για την οποία η $\mathcal{B}$ είναι βάση. Εφόσον $X \in \mathcal{T}$, $\exists \{B_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{B}$ ώστε $X = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} B_i$. Έχουμε ότι

$$X = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i \subseteq \bigcup \mathcal{B}$$

καθώς επίσης

$$\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X) \Longrightarrow \bigcup \mathcal{B} \subseteq X$$

Από τα παραπάνω, προκύπτει $X = \bigcup \mathcal{B}$. Επιπλέον, για οποιαδήποτε $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ισχύει $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$ και επειδή η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο X, οφείλει $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$. Συνεπώς, $\exists \{B_j\}_{j\in\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{B}$ με $B_1 \cap B_2 = \bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} B_j$. Αν $x \in B_1 \cap B_2$, τότε από Πρόταση 2.17 $\exists j_0 \in \mathcal{J}$ ώστε $x \in B_{j_0} \subseteq B_1 \cap B_2$. Θέτοντας $B_3 = B_{j_0} \in \mathcal{B}$, έχουμε το ζητούμενο.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Θέτουμε $\mathcal{T} = \{U \subseteq X : \exists \{B_j\}_{j\in\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{B}$ ώστε $U = \bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} B_j\}$, δηλαδή, όλα τα $U \subseteq X$ που εκφράζονται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο X και έχει για βάση τη $\mathcal{B}$.

(i) Πράγματι, $\oslash \in \mathcal{T}$ και $X \in \mathcal{T}$ (για $B_j = \oslash, j \in \mathcal{J}$ και $\{B_j\}_{j\in\mathcal{J}} = \mathcal{B}$ αντίστοιχα).

(ii) Έστω $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Τότε υπάρχουν $\mathcal{J}_1$ και $\mathcal{J}_2$ ώστε $U_1 = \bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}_1} B_{j_1}$ και $U_2 = \bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}_2} B_{j_2}$ και συνεπώς, έχουμε

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup B_{j_1} \cap B_{j_2} : j_1 \in \mathcal{J}_1, j_2 \in \mathcal{J}_2\}$$

Από το (2), αν για κάποια $j_1 \in \mathcal{J}_1$, $j_2 \in \mathcal{J}_2$ ισχύει $x \in B_{j_1} \cap B_{j_2}$ θα περιέχεται σε ένα $B_x \in \mathcal{B}$, για το οποίο ισχύει $x \in B_x \subseteq B_{j_1} \cap B_{j_2}$. Είναι άμεσο ότι $B_{j_1} \cap B_{j_2} = \bigcup\limits_{x\in B_{j_1}\cap B_{j_2}} B_x$ και άρα, έχουμε $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

(iii) Έστω $\mathcal{I}$ μη κενό σύνολο και $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{T}$. Τότε, $\forall i \in \mathcal{I}$ $\exists \mathcal{J}_i \subseteq \mathcal{B}$, τέτοιο ώστε $U_i = \bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}_i} B_j$. Θέτοντας $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{J}_i$ προκύπτει

$$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} (\bigcup_{j\in\mathcal{J}_i} B_j) = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} B_j$$

και δηλαδή $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$.

Επιπλέον, για οποιοδήποτε $B \in \mathcal{B}$ και $\{B_j\}_{j\in\mathcal{J}} = \{B\}$ έχουμε $B = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} B_j$ και οπότε $B \in \mathcal{T}$. Είναι άμεσο πως η $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για την $\mathcal{T}$. $\square$

Ορισμός 2.25. *Έστω X μη κενό σύνολο, $\mathcal{T}$ μια τοπολογία στο X και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Θα λέμε ότι η $\mathcal{T}$* ***παράγεται*** *από την $\mathcal{F}$ και θα συμβολίζουμε με $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F})$, αν ικανοποιούνται τα παρακάτω:*

(i) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$.

(ii) Για οποιοδήποτε τοπολογία $\mathcal{T}'$ στο X με $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}'$, ισχύει $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Η $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ είναι η μικρότερη τοπολογία στο X που περιέχει την $\mathcal{F}$.

Πρόταση 2.26. *[4]Έστω X μη κενό σύνολο και $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ μια οικογένεια τοπολογιών στο X. Τότε, η συλλογή $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{T}_i$ είναι τοπολογία στο X.*

Πρόταση 2.27. *Έστω X μη κενό σύνολο και οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Τότε, υπάρχει η μικρότερη τοπολογία στο X που περιέχει την $\mathcal{F}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $\mathcal{A} = \{\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{T}\,\text{τοπολογία στο}\, X \,\&\, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}\}$. Τότε $\mathcal{A} \neq \emptyset$, αφού $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{A}$ και θέτουμε

$$\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \bigcap \{\mathcal{T} : \mathcal{T} \in \mathcal{A}\}$$

Από την προηγούμενη πρόταση, η συλλογή $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ είναι τοπολογία στο X με $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F})$. Μάλιστα, αν $\mathcal{T} \in \mathcal{A}$, ισχύει $\mathcal{T}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{T}$ και δηλαδή, η $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ είναι ακριβώς η μικρότερη τοπολογία στο X που περίεχει την $\mathcal{F}$. $\square$

Ορισμός 2.28. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $x_0 \in X$. Ένα $G \subseteq X$ θα καλείται* ***περιοχή*** *του x_0, αν $\exists U \in \mathcal{T}$ τέτοιο ώστε $x_0 \in U \subseteq G$. Αν επιπλέον το G είναι ανοιχτό, τότε λέγεται* ***ανοιχτή περιοχή*** *του x_0. Κάθε $U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$ είναι μια ανοιχτή περιοχή του x_0.*

Πόρισμα 2.29. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και μη κενό $A \subseteq X$. Το A είναι ανοιχτό αν και μόνο εάν $\forall x \in A \;\; \exists G \subseteq A$ περιοχή του x.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με την Πρόταση 2.18. $\square$

Ορισμός 2.30. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Η οικογένεια $\mathcal{G}_x = \{G \subseteq X : G\,\text{περιοχή του}\, x\}$ είναι το σύνολο όλων των περιοχών του x και καλείται* ***σύστημα περιοχών*** *του x. Για τη διάκριση της τοπολογίας, το σύστημα περιοχών κάποιου $x \in X$ ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$ συμβολίζεται και ως $\mathcal{G}_x^{\mathcal{T}}$.*

Πρόταση 2.31. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Το σύστημα περιοχών $\mathcal{G}_x$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) *Αν* $G \in \mathcal{G}_x$*, τότε* $G \neq \oslash$*.*

(ii) *Αν* $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_x$*, τότε* $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}_x$*.*

(iii) *Αν* $G \in \mathcal{G}_x$ *και* $G \subseteq V \subseteq X$*, τότε* $V \in \mathcal{G}_x$*.*

(iv) *Ένα* $G \subseteq X$ *είναι ανοιχτό, αν και μόνο εάν* $G \in \mathcal{G}_x$*,* $\forall x \in G$*.*

(v) *Αν* $G \in \mathcal{G}_x$*, τότε* $\exists V \in \mathcal{G}_x$ *με* $V \subseteq G$ *και* $V \in \mathcal{G}_y$*,* $\forall y \in V$*.*

Απόδειξη. (i) Αν $G \in \mathcal{G}_x$, τότε $x \in G$ και άρα $G \neq \oslash$.

(ii) Αν $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_x$, τότε $x \in G_1 \wedge x \in G_2$ και οπότε $x \in G_1 \cap G_2 \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}_x$.

(iii) Αν $G \in \mathcal{G}_x$ και $G \subseteq V$, είναι άμεσο ότι $x \in V \Longrightarrow V \in \mathcal{G}_x$.

(iv) ($\Longrightarrow$) Έστω $G \subseteq X$ ανοιχτό και $x \in G$. Τότε $\exists \{U_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \mathcal{T}$ ώστε $G = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} U_i$. Αφού $x \in G$, $\exists i_0 \in \mathcal{I}$ ώστε $x \in U_{i_0}$ και επειδή $U_{i_0} \in \mathcal{T}$, οφείλει $U_{i_0} \in \mathcal{G}_x$. Έχουμε ότι

$$x \in U_{i_0} \subseteq G \overset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} G \in \mathcal{G}_x$$

($\Longleftarrow$) Έστω $G \subseteq X$ ώστε $G \in \mathcal{G}_x, \forall x \in G$. Τότε, $\forall x \in G \;\; \exists U_x \in \mathcal{T}$ ώστε $x \in U_x \subseteq G$. Από Πρόταση 2.18 προκύπτει ότι G είναι ανοιχτό.

(v) Έστω $G \in \mathcal{G}_x$. Τότε $\exists U \in \mathcal{T}$, ώστε $x \in U \subseteq G$. Θέτοντας $V = U$, που είναι ανοιχτό, είναι άμεσο ότι $V \in \mathcal{G}_x$ και από (iv) προκύπτει ότι $V \in \mathcal{G}_y$, $\forall y \in V$.

$\square$

Παρατήρηση 2.32. *Αν* $(X, \mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος και* $V \subseteq X$ *τέτοιο ώστε* $V \in \mathcal{G}_y$*,* $\forall y \in V$*, τότε το* V *είναι ανοιχτό.*

Θεώρημα 2.33. *Έστω* X *μη κενό σύνολο και* $\forall x \in X$ *θεωρούμε μη κενή οικογένεια* $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ *με τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Αν* $U \in \mathcal{N}_x$*, τότε* $x \in U$*.*

(ii) *Αν* $U_1, U_2 \in \mathcal{N}_x$*, τότε* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{N}_x$*.*

(iii) *Αν* $U \in \mathcal{N}_x$ *και* $U \subseteq V \subseteq X$*, τότε* $V \in \mathcal{N}_x$*.*

(iv) *Αν* $U \in \mathcal{N}_x$*, τότε* $\exists V \in \mathcal{N}_x$ *με* $V \subseteq U$ *και* $V \in \mathcal{N}_y$*,* $\forall y \in V$*.*

Τότε, η συλλογή $\mathcal{T} = \{U \subseteq X : U \in \mathcal{N}_x \, \forall x \in U\} \cup \{\oslash\}$ είναι τοπολογία στο X και $\forall x \in X$ ισχύει $\mathcal{G}_x = \mathcal{N}_x$, όπου $\mathcal{G}_x$ το σύστημα περιοχών του x ως προς την $\mathcal{T}$.

Απόδειξη. Η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία.

(i) Εξ ορισμού έχουμε $\oslash \in \mathcal{T}$. Επειδή $\mathcal{N}_x \neq \oslash$, $\exists U_x \in \mathcal{N}_x$. Αφού $U_x \subseteq X$, από (iii) έχουμε $X \in \mathcal{N}_x$, $\forall x \in X$ και συνεπώς $X \in \mathcal{T}$.

(ii) Έστω $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Αν $U_1 = \oslash$ ή $U_2 = \oslash$, ισχύει $U_1 \cap U_2 = \oslash$ και δηλαδή $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Αν $U_1 \neq \oslash$ και $U_2 \neq \oslash$, τότε

$$U_1 \in \mathcal{N}_x \,\&\, U_2 \in \mathcal{N}_x \overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} U_1 \cap U_2 \in \mathcal{N}_x$$

Είναι άμεσο ότι $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

(iii) Έστω $\mathcal{I}$ μη κενό σύνολο και $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ αφθαίρετη οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{T}$. Προφανώς, αν $\forall i \in \mathcal{I}$ έχουμε $U_i = \oslash$, είναι άμεσο ότι $\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} U_i = \oslash$. Διαφορετικά, $\exists i_0 \in \mathcal{I}$ ώστε $U_{i_0} \neq \oslash$ και δηλαδή $U_{i_0} \in \mathcal{N}_x$. Έχουμε ότι

$$x \in U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i \overset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i \in \mathcal{N}_x$$

και άρα $\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$.

Ισχύει ότι $\mathcal{G}_x = \mathcal{N}_x$, $\forall x \in X$.

Θεωρούμε τον τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$, όπου $\mathcal{T}$ η τοπολογία που ορίστηκε παραπάνω και έστω $x \in X$, $G \in \mathcal{G}_x$. Τότε, $\exists U \in \mathcal{T}$ με $x \in U \subseteq G$ και δηλαδή $U \in \mathcal{N}_x$. Από (iii) προκύπτει ότι $G \in \mathcal{N}_x$ και επειδή το G ήταν τυχαίο, έχουμε ότι $\mathcal{G}_x \subseteq \mathcal{N}_x$. Αντίστροφα, έστω $U \in \mathcal{N}_x$. Από (iv) και την παραπάνω παρατήρηση, $\exists V \in \mathcal{N}_x$ ανοιχτό και ώστε $V \subseteq U$. Από (i) έχουμε ότι $x \in V$ και εφόσον V ανοιχτό, οφείλει $V \in \mathcal{G}_x$. Έχουμε ότι

$$x \in V \subseteq U \,\&\, V \in \mathcal{G}_x \Longrightarrow U \in \mathcal{G}_x$$

Αφού U ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{G}_x$. □

Ορισμός 2.34. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $x \in X$ και το σύστημα περιοχών $\mathcal{G}_x$. Μια οικογένεια $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{G}_x$ λέγεται **βάση περιοχών** του x, αν $\forall G \in \mathcal{G}_x \;\; \exists B \in \mathcal{B}_x$, ώστε $B \subseteq G$. Για τη διάκριση της τοπολογίας, μια βάση περιοχών κάποιου $x \in X$ ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$ συμβολίζεται και ως $\mathcal{B}_x^{\mathcal{T}}$. Τα στοιχεία της $\mathcal{B}_x$ λέγονται βασικές περιοχές του x.*

Πρόταση 2.35. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\forall x \in X$ θεωρούμε $\mathcal{B}_x$ βάση περιοχών του x. Τότε:*

(i) Αν $B \in \mathcal{B}_x$, τότε $B \neq \oslash$.

(ii) *Αν* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, *τότε* $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_x$.

(iii) *Ένα* $G \subseteq X$ *είναι ανοιχτό, αν και μόνο εάν* $\forall x \in G \;\; \exists B \in \mathcal{B}_x$, *ώστε* $x \in B \subseteq G$.

(iv) *Αν* $B \in \mathcal{B}_x$, *τότε* $\exists G \subseteq X$ *με* $G \subseteq B$ *και* $\forall y \in G \;\; \exists B_y$ *ώστε* $B_y \subseteq G$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με την Πρόταση 2.31. □

Θεώρημα 2.36. *Έστω* X *μη κενό σύνολο και* $\forall x \in X$ *θεωρούμε μη κενή οικογένεια* $\mathcal{B}_x$ *με τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Αν* $B \in \mathcal{B}_x$, *τότε* $x \in B$.

(ii) *Αν* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, *τότε* $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_x$.

(iii) *Αν* $B \in \mathcal{B}_x$, *τότε* $\exists G \subseteq X$ *με* $x \in G \subseteq B$ *και* $\forall y \in G \;\; \exists B_y$, *ώστε* $B_y \subseteq G$.

Τότε, η συλλογή $\mathcal{T} = \{U \subseteq X : \forall x \in U \; \exists B \in \mathcal{B}_x \text{ ώστε } B \subseteq U\} \cup \{\oslash\}$ *είναι τοπολογία στο* X *και* $\forall x \in X$, *η* $\mathcal{B}_x$ *είναι βάση περιοχών του* x *ως προς την* $\mathcal{T}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με την Πρόταση 2.33. □

Θεώρημα 2.37. *Έστω* X *μη κενό σύνολο και* $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ *δύο τοπολογίες στο* X. *Επιπλέον,* $\forall x \in X$ *θεωρούμε συστήματα περιοχών* $\mathcal{G}_x^1$, $\mathcal{G}_x^2$ *και βάσεις περιοχών* $\mathcal{B}_x^1$, $\mathcal{B}_x^2$ *του* x *ως προς* $\mathcal{T}_1$ *και* $\mathcal{T}_2$ *αντίστοιχα. Τότε, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

(ii) *Για κάθε* $x \in X$ *ισχύει* $\mathcal{G}_x^1 \subseteq \mathcal{G}_x^2$.

(iii) *Για κάθε* $x \in X$ *και* $B_1 \in \mathcal{B}_x^1$, *υπάρχει* $B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ *ώστε* $B_2 \subseteq B_1$.

Απόδειξη. (i)$\Longrightarrow$(ii)Έστω $x \in X$ και $G \in \mathcal{G}_x^1$. Τότε, $\exists U \in \mathcal{T}_1$ με $x \in U \subseteq G$. Αφού $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, έπεται ότι $U \in \mathcal{T}_2$ και επειδή $x \in U$, οφείλει $U \in \mathcal{G}_x^2$. Επιπλέον

$$x \in U \subseteq G \,\&\, U \in \mathcal{G}_x^2 \Longrightarrow G \in \mathcal{G}_x^2$$

Εφόσον G ήταν τυχαίο, προκύπτει $\mathcal{G}_x^1 \subseteq \mathcal{G}_x^2$.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Έστω $U \in \mathcal{T}_1$. Τότε, από Πρόταση 2.31 (iv) έχουμε $U \in \mathcal{G}_x^1$, $\forall x \in U$. Αφού $\mathcal{G}_x^1 \subseteq \mathcal{G}_x^2$, είναι άμεσο ότι $U \in \mathcal{G}_x^2$, $\forall x \in U$ και συνεπώς $U \in \mathcal{T}_2$. Αφού U ήταν τυχαίο, έπεται ότι $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii)Έστω $x \in X$ και $B_1 \in \mathcal{B}_x^1$. Τότε $B_1 \in \mathcal{G}_x^1$ και από το (i) οφείλει $B_1 \in \mathcal{G}_x^2$. Αφού $\mathcal{B}_x^2$ είναι βάση περιοχών του x ως προς $\mathcal{T}_2$ και $B_1 \in \mathcal{B}_x^2$, από Πρόταση 2.35 (iv), $\exists B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ και ώστε $B_2 \subseteq B_1$.

(iii)$\Longrightarrow$(ii) Έστω $x \in X$ και $U \in \mathcal{B}_x^1$. Αφού $\mathcal{B}_x^1$ είναι βάση περιοχών του x ως προς $\mathcal{T}_1$, από Πρόταση 2.35 (iv) $\exists B_1 \in \mathcal{B}_x^1$, τέτοιο ώστε $B_1 \subseteq U$. Από υπόθεση, αφού $B_1 \in \mathcal{B}_x^1$, θα υπάρχει $B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ με $B_2 \subseteq B_1$ και συνεπώς $B_2 \in \mathcal{G}_x^2$. Τέλος, επειδή $x \in B_2 \subseteq U$, από Πρόταση 2.31 (iv) προκύπτει $U \in \mathcal{G}_x^2$. Αφού U ήταν τυχαίο, έχουμε $\mathcal{G}_x^1 \subseteq \mathcal{G}_x^2$. $\square$

2.3 Κλειστότητα-Εσωτερικό-Υπόχωροι

Ορισμός 2.38. *Έστω $(X, \mathcal{T})$τοπολογικός χώρος και μη κενό $F \subseteq X$. Το σύνολο F λέγεται $\mathcal{T}-$κλειστό ή απλά* ***κλειστό*** *αν $X \setminus F \in \mathcal{T}$.*

Θεώρημα 2.39. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Τότε:*

(i) Τα σύνολα X και $\oslash$ είναι κλειστά.

(ii) Αν $\{F_i\}_{i=1}^n$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, το $\bigcup\limits_{i=1}^n F_i \subseteq X$ είναι επίσης κλειστό.

(iii) Αν $\mathcal{I}$ μη κενό σύνολο και $\{F_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, το $\bigcap\limits_{i \in \mathcal{I}} F_i \subseteq X$ είναι επίσης κλειστό.

Απόδειξη. (i) Ισχύει ότι $X \setminus X = \oslash \in \mathcal{T}$ και $X \setminus \oslash = X \in \mathcal{T}$.

(ii) Έστω $\{F_i\}_{i=1}^n$ πεπερασμένη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X. Για κάθε $i \in \{1, 2, ..., n\}$ έχουμε $X \setminus F_i \in \mathcal{T}$ και συνεπώς $\bigcap\limits_{i=1}^n (X \setminus F_i) \in \mathcal{T}$. Από τους νόμους de Morgan, έχουμε

$$\bigcap_{i=1}^n (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i$$

και δηλαδή $X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^n F_i \in \mathcal{T}$.

(iii) Έστω $\{F_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X. Για κάθε $i \in \mathcal{I}$ έχουμε $X \setminus F_i \in \mathcal{T}$ και συνεπώς $\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} (X \setminus F_i) \in \mathcal{T}$. Από τους νόμους de Morgan, έχουμε

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_{i \in \mathcal{I}} F_i$$

και δηλαδή $X \setminus \bigcap_{i\in\mathcal{I}} F_i \in \mathcal{T}$.

□

Ορισμός 2.40. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το σύνολο*

$$\bigcap\{F \subseteq X : A \subseteq F \,\&\, F \text{ κλειστό}\}$$

λέγεται ***κλειστότητα*** *του A και συμβολίζεται με $cl_X(A)$. Για τη διάκριση της τοπολογίας, η κλειστότητα του A ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$ συμβολίζεται και ως $cl_{\mathcal{T}}(A)$. Ένα $x \in cl_X(A)$ λέγεται* ***οριακό σημέιο*** *του A.*

Παρατήρηση 2.41. *Αν $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, το σύνολο $cl_X(A)$ είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του X που περιέχει το A.*

Πρόταση 2.42. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε για όλα τα $A, B \subseteq X$ ισχύουν:*

(i) $A \subseteq cl_X(A)$

(ii) A *κλειστό* $\Longleftrightarrow A = cl_X(A)$

(iii) $cl_X(cl_X(A)) = cl_X(A)$

(iv) *Αν* $A \subseteq B$, *τότε* $cl_X(A) \subseteq cl_X(B)$

(v) $cl_X(A \cup B) = cl_X(A) \cup cl_X(B)$

Απόδειξη. (i) Άμεσο Παρατήρηση 2.41.

(ii) Εφόσον A κλειστό, οφείλει $cl_X(A) = \bigcap\{F \subseteq X : A \subseteq F \,\&\, F \text{ κλειστό}\} = A$.

(iii) Θέτουμε $F = cl_X(A)$. Επειδή F κλειστό, από το (ii) έχουμε ότι

$$cl_X(F) = F \Longrightarrow cl_X(cl_X(A)) = cl_X(A)$$

(iv) Έστω $A \subseteq B$ και έστω οποιοδήποτε $K \in \{F \subseteq X : B \subseteq F \,\&\, F \text{ κλειστό}\}$. Τότε, ισχύει $A \subseteq B \subseteq K$ και συνεπώς, $K \in \{F \subseteq X : A \subseteq F \,\&\, F \text{ κλειστό}\}$. Είναι άμεσο ότι

$$\{F \subseteq X : B \subseteq F \,\&\, F \text{ κλειστό}\} \subseteq \{F \subseteq X : A \subseteq F \,\&\, F \text{ κλειστό}\}$$

$$\Longrightarrow \bigcap\{F \subseteq X : A \subseteq F \,\&\, F \text{ κλειστό}\} \subseteq \bigcap\{F \subseteq X : B \subseteq F \,\&\, F \text{ κλειστό}\}$$

και δηλαδή $cl_X(A) \subseteq cl_X(B)$.

(v) Από το (i) έχουμε ότι

$$A \subseteq cl_X(A) \,\&\, B \subseteq cl_X(B) \Longrightarrow A \cup B \subseteq cl_X(A) \cup cl_X(B)$$

$$\overset{(\text{iv})}{\Longrightarrow} cl_X(A \cup B) \subseteq cl_X(cl_X(A) \cup cl_X(B))$$

Επειδή $cl_X(A) \cup cl_X(B)$ είναι κλειστό, από (ii) προκύπτει $cl_X(A \cup B) \subseteq cl_X(A) \cup cl_X(B)$ (1). Επιπλέον, θα ισχύει ότι

$$cl_X(A) \cup cl_X(B) \in \{F \subseteq X : A \cup B \subseteq F \,\&\, F \,\text{κλειστό}\}$$

$$\Longrightarrow \bigcap \{F \subseteq X : A \cap B \subseteq F \,\&\, F \,\text{κλειστό}\} \subseteq cl_X(A) \cup cl_X(B)$$

και δηλαδή $cl_X(A \cup B) \subseteq cl_X(A) \cup cl_X(B)$ (2). Από τα (1), (2) έχουμε το ζητούμενο.

□

Πρόταση 2.43. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x_0 \in X$. Τότε $x_0 \in cl_X(A)$ αν και μόνο εάν $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, ισχύει $U \cap A \neq \oslash$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω ότι $x_0 \in cl_X(A)$ και έστω προς άτοπο ότι $\exists U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, τέτοιο ώστε $U \cap A = \oslash$. Τότε οφείλει $A \subseteq X \setminus U$ και επιπλέον, $X \setminus U$ είναι κλειστό. Επομένως, ισχύει

$$X \setminus U \in \{F \subseteq X : F \,\text{κλειστό}\} \Longrightarrow cl_X(A) \subseteq X \setminus U$$

Αφού $x_0 \in cl_X(A)$, προκύπτει $x_0 \in X \setminus U$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, επειδή από υπόθεση $x_0 \in U$.

($\Longleftarrow$) Έστω προς άτοπο ότι $x_0 \notin cl_X(A)$. Τότε $x_0 \in X \setminus cl_X(A)$ το οποίο είναι ανοιχτό και συνεπώς, $\exists V \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in V$ και ώστε $V \subseteq X \setminus cl_X(A)$. Από Πρόταση 2.42 (i) έχουμε $A \subseteq cl_X(A)$ και οπότε

$$X \setminus cl_X(A) \subseteq X \setminus A \Longrightarrow X \setminus cl_X(A) \cap A = \oslash$$

Επειδή $V \subseteq X \setminus cl_X(A)$ είναι άμεσο ότι $V \cap A = \oslash$, το οποίο είναι άτοπο. □

Πρόταση 2.44. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Αν $\mathcal{I}$ μη κενό σύνολο και $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq X$, τότε ισχύει $\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} cl_X(A_i) \subseteq cl_X(\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i)$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} cl_X(A_i)$. Τότε, $\exists i_0 \in \mathcal{I}$ ώστε $x_0 \in cl_X(A_{i_0})$ και οπότε, από Πρόταση 2.43 $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, ισχύει $U \cap A_{i_0} \neq \oslash$. Για κάθε $U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$ έχουμε

$$U \cap A_{i_0} \neq \oslash \Longrightarrow U \cap \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \neq \oslash$$

και συνεπώς, $x_0 \in cl_X(\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i)$. Εφόσον το x_0 ήταν τυχαίο, έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 2.45. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$. Τότε $U \cap A \neq \oslash$ αν και μόνο εάν $U \cap cl_X(A) \neq \oslash$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Άμεσο εφόσον $A \subseteq cl_X(A)$ και άρα

$$U \cap A \neq \oslash \Longrightarrow U \cap cl_X(A) \neq \oslash$$

($\Longleftarrow$) Έστω $U \cap cl_X(A) \neq \oslash$ και δηλαδή $\exists x_0 \in U \cap cl_X(A)$. Επειδή $x_0 \in cl_X(A)$, από Πρόταση 2.43 έπεται ότι $\forall V \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in V$, θα ισχύει $V \cap A \neq \oslash$. Αφού $U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ και $x_0 \in U$, επιλέγοντας $V = U$ προκύπτει άμεσα ότι $U \cap A \neq \oslash$. □

Ορισμός 2.46. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x_0 \in X$. Το x_0 λέγεται* ***σημείο συσσώρευσης*** *του A αν $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, ισχύει $U \cap A \setminus \{x_0\} \neq \oslash$. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A καλείται* ***παράγωγο σύνολο*** *του A και συμβολίζεται με A'.*

Ορισμός 2.47. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x_0 \in X$. Το x_0 θα λέμε ότι είναι* ***μεμονωμένο σημείο*** *του A αν $\exists U \in \mathcal{T}$ ώστε $U \cap A = \{x_0\}$.*

Παρατήρηση 2.48. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Ένα $x_0 \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν δεν είναι μεμονωμένο σημείο του A και αντίστροφα, το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A αν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν επιπλέον $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, τότε, ισχύει $A' = \oslash$. Γενικότερα, σε οποιοδήποτε χώρο με τη διακριτή τοπολογία και για οποιοδήποτε $A \subseteq X$, κάθε σημείο του A είναι μεμονωμένο.*

Πρόταση 2.49. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε, ισχύει $cl_X(A) = A \cup A'$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in cl_X(A)$. Προφανώς, ισχύει είτε $x_0 \in A$, είτε $x_0 \notin A$. Αν $x_0 \in A$, έχουμε $x_0 \in A \cup A'$. Αν $x_0 \notin A$, τότε, από υπόθεση, $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, ισχύει

$$U \cap (A \setminus \{x_0\}) = U \cap A \neq \oslash$$

και συνεπώς $x_0 \in A' \subseteq A \cup A'$.

Αντίστροφα, έστω $x_0 \in A \cup A'$. Αν $x_0 \in A$, τότε $x_0 \in cl_X(A)$. Αν $x_0 \in A'$, τότε $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, ισχύει

$$U \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \oslash \Longrightarrow U \cap A \neq \oslash$$

και άρα $x_0 \in cl_X(A)$. □

Πρόταση 2.50. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A είναι κλειστό αν και μόνο εάν $A' \subseteq A$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω A κλειστό. Τότε, από Πρόταση 2.42(ii) έχουμε ότι $cl_X(A) = A$. Επιπλέον, από Πρόταση 2.49 ισχύει $cl_X(A) = A \cup A'$. Επομένως, προκύπτει

$$A' \subseteq A \cup A' = cl_X(A) = A$$

($\Longleftarrow$) Έστω $A' \subseteq A$. Από Πρόταση 2.49 έχουμε $cl_X(A) = A \cup A' = A$ και από Πρόταση 2.42(ii) συμπεραίνουμε ότι το A είναι κλειστό.

□

Ορισμός 2.51. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το σύνολο*

$$\bigcup\{U \subseteq X : U \subseteq A \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\}$$

λέγεται ***εσωτερικό*** *του A και συμβολίζεται με $int_X(A)$. Για τη διάκριση της τοπολογίας, το εωτερικό του A ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$ συμβολίζεται και ως $int_{\mathcal{T}}(A)$. Ένα $x \in int_X(A)$ λέγεται* ***εσωτερικό σημέιο*** *του A.*

Παρατήρηση 2.52. *Αν $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, το σύνολο $int_X(A)$ είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό υποσύνολο του X που περιέχεται στο A.*

Πρόταση 2.53. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε για όλα τα $A, B \subseteq X$ ισχύουν:*

(i) $int_X(A) \subseteq A$

(ii) A *ανοιχτό* $\Longleftrightarrow A = int_X(A)$

(iii) $int_X(int_X(A)) = int_X(A)$

(iv) *Αν* $A \subseteq B$, *τότε* $int_X(A) \subseteq int_X(B)$

(v) $int_X(A \cap B) = int_X(A) \cap int_X(B)$

Απόδειξη. (i) Άμεσο από Παρατήρηση 2.52.

(ii) Εφόσον A ανοιχτό, οφείλει $int_X(A) = \bigcup\{U \subseteq X : U \subseteq A \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\} = A$.

(iii) Θέτουμε $U = int_X(A)$. Επειδή U ανοιχτό, από (ii) έχουμε ότι

$$int_X(U) = U \Longrightarrow int_X(int_X(A)) = int_X(A)$$

(iv) Έστω $A \subseteq B$ και έστω οποιοδήποτε $V \in \{U \subseteq X : U \subseteq A \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\}$. Τότε, ισχύει $V \subseteq A \subseteq B$ και συνεπώς, $V \in \{U \subseteq X : U \subseteq B \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\}$. Είναι άμεσο ότι

$$\{U \subseteq X : U \subseteq A \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\} \subseteq \{U \subseteq X : U \subseteq B \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\}$$

$$\Longrightarrow \bigcup\{U \subseteq X : U \subseteq A \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\} \subseteq \bigcup\{U \subseteq X : U \subseteq B \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\}$$

και δηλαδή $int_X(A) \subseteq int_X(B)$.

(v) Από το (i) έχουμε ότι

$$int_X(A) \subseteq A \,\&\, int_X(B) \subseteq B \Longrightarrow int_X(A) \cap int_X(B) \subseteq A \cap B$$

$$\overset{\text{(iv)}}{\Longrightarrow} int_X(int_X(A) \cap int_X(B)) \subseteq int_X(A \cap B)$$

Επειδή $int_X(A) \cap int_X(B)$ είναι ανοιχτό, από (ii) προκύπτει $int_X(A) \cap int_X(B) \subseteq int_X(A \cap B)$ (1). Επιπλέον, θα ισχύει ότι

$$int_X(A \cap B) \in \{U \subseteq X : U \subseteq A \cap B \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\}$$

$$\Longrightarrow int_X(A \cap B) \subseteq \bigcup \{U \subseteq X : U \subseteq A \cap B \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\}$$

$$\Longrightarrow int_X(A \cap B) \subseteq \bigcup \{U \subseteq X : U \subseteq A \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\} \cap \bigcup \{U \subseteq X : U \subseteq B \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\}$$

και δηλαδή $int_X(A \cap B) \subseteq int_X(A) \cap int_X(B)$ (2). Από τα (1), (2) έχουμε το ζητούμενο.

□

Πρόταση 2.54. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x_0 \in X$. Τότε $x_0 \in int_X(A)$ αν και μόνο εάν $\exists U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$ και ώστε $U \subseteq A$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω ότι $x_0 \in int_X(A)$. Αφού $int_X(A) = \bigcup \{U \subseteq X : U \subseteq A \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\}$, έπεται ότι υπάρχει ανοιχτό $U \subseteq X$ και ώστε $x_0 \in U \subseteq A$. Προφανώς, ισχύει $U \in \mathcal{T}$.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι $\exists V \in \mathcal{T}$ ώστε $x_0 \in V \subseteq A$. Είναι άμεσο ότι

$$V \in \{U \subseteq X : U \subseteq A \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\} \Longrightarrow V \subseteq \bigcup \{U \subseteq X : U \subseteq A \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\} = int_X(A)$$

και δηλαδή $x_0 \in int_X(A)$.

□

Πρόταση 2.55. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε, ισχύουν:*

(i) $X \setminus cl_X(A) = int_X(X \setminus A)$

(ii) $X \setminus int_X(A) = cl_X(X \setminus A)$

Απόδειξη. (i) Έχουμε ότι

$$X \setminus cl_X(A) = X \setminus \bigcap \{F \subseteq X : A \subseteq F \,\&\, F \text{ κλειστό}\}$$

$$= \bigcup \{X \setminus F \subseteq X : A \subseteq F \,\&\, F \text{ κλειστό}\}$$

$$= \bigcup \{X \setminus F \subseteq X : X \setminus F \subseteq X \setminus A \,\&\, X \setminus F \text{ ανοιχτό}\}$$

$$= \bigcup \{U \subseteq X : U \subseteq X \setminus A \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\} = int_X(X \setminus A)$$

(ii) Όμοια έχουμε ότι

$$X \setminus int_X(A) = X \setminus \bigcup \{U \subseteq X : U \subseteq A \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\}$$

$$= \bigcap \{X \setminus U \subseteq X : U \subseteq A \,\&\, U \text{ ανοιχτό}\}$$
$$= \bigcap \{X \setminus U \subseteq X : X \setminus A \subseteq X \setminus U \,\&\, X \setminus U \text{ κλειστό}\}$$
$$\bigcap \{F \subseteq X : X \setminus A \subseteq F \,\&\, F \text{ κλειστό}\} = cl_X(X \setminus A)$$

□

Ορισμός 2.56. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το **σύνορο** του A συμβολίζεται με ∂A και ορίζεται ως*
$$\partial A = cl_X(A) \cap cl_X(X \setminus A)$$

Παρατήρηση 2.57. *Ισοδύναμα μπορούμε να ορίσουμε το σύνορο ενός σύνολου ως εξής:*

$$\partial A = \{x \in X : U \cap A \neq \oslash \,\&\, U \cap (X \setminus A) \neq \oslash, \forall U \in \mathcal{T} \text{ με } x \in U\}$$

και επιπλέον, ισχύει

$$\partial A = \{x \in X : U \cap (X \setminus A) \neq \oslash \,\&\, U \cap A \neq \oslash, \forall U \in \mathcal{T} \text{ με } x \in U\} = \partial(X \setminus A)$$

Παρατήρηση 2.58. *Αν $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε το ∂A είναι κλειστό υποσύνολο του X. Πράγματι, αφού*
$$\partial A = cl_X(A) \cap cl_X(X \setminus A)$$
όπου από Παρατήρηση 2.41 γνωρίζουμε πως $cl_X(A)$ και $cl_X(X \setminus A)$ είναι κλειστά σύνολα. Είναι άμεσο ότι ∂A είναι κλειστό ως πεπερασμένη τομή κλειστών υποσυνόλων του X.

Πρόταση 2.59. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε, ισχύουν:*

(i) $\partial A = cl_X(A) \setminus int_X(A)$

(ii) $\partial A \cap int_X(A) = \oslash$

(iii) $cl_X(A) = int_X(A) \cup \partial A$

(iv) $X = int_X(A) \cup \partial A \cup int_X(X \setminus A)$

Απόδειξη. (i) Έχουμε ότι
$$\partial A = cl_X(A) \cap cl_X(X \setminus A)$$
και από Πρόταση 2.55 (ii)
$$\partial A = cl_X(A) \cap (X \setminus int_X(A))$$
$$\Longrightarrow \partial A = cl_X(A) \setminus int_X(A)$$

(ii) Άμεσο από το (i)

(iii) Έχουμε ότι

$$int_X(A) \cup \partial A = int_X(A) \cup [cl_X(A) \cap cl_X(X \setminus A)]$$

και από Πρόταση 2.55 (ii) προκύπτει

$$int_X(A) \cup \partial A = int_X(A) \cup [cl_X(A) \cap (X \setminus int_X(A)] = cl_X(A)$$

(iv) Από Παρατήρηση 2.57

$$int_X(A) \cup \partial A \cup int_X(X \setminus A) = int_X(A) \cup \partial A \cup \partial(X \setminus A) \cup int_X(X \setminus A)$$

και από το (iii) προκύπτει

$$int_X(A) \cup \partial A \cup int_X(X \setminus A) = cl_X(A) \cup cl_X(X \setminus A) = X$$

$\square$

Πόρισμα 2.60. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε, ισχύουν:*

(i) A ανοιχτό αν και μόνο εάν $\partial A \cap A = \oslash$.

(ii) A κλειστό αν και μόνο εάν $\partial A \subseteq A$.

Απόδειξη. (i) ($\Longrightarrow$)Έστω A ανοιχτό. Από Πρόταση 2.53 (i) γνωρίζουμε ότι $A = int_X(A)$. Από Πρόταση 2.59 (ii) έχουμε ότι

$$\partial A \cap int_X(A) = \oslash \Longrightarrow \partial A \cap A = \oslash$$

($\Longleftarrow$) Έστω ότι $\partial A \cap A = \oslash$ και έστω προς άτοπο ότι το A δεν είναι ανοιχτό. Τότε, $\exists x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, ισχύει $U \nsubseteq A$ και συνεπώς, έχουμε ταυτόχρονα

$$U \cap A \neq \oslash \,\&\, U \cap (X \setminus A) \neq \oslash$$

Από Παρατήρηση 2.57 είναι άμεσο ότι $x_0 \in \partial A$ και άρα $x_0 \in \partial A \cap A$, το οποίο είναι άτοπο.

(ii) ($\Longrightarrow$) Έστω A κλειστό. Από Πρόταση 2.59 (iii) έχουμε

$$cl_X(A) = int_X(A) \cup \partial A \Longrightarrow \partial A \subseteq cl_X(A)$$

και από Πρόταση 2.42 (i) γνωρίζουμε ότι $cl_X(A) = A$. Είναι άμεσο ότι $\partial A \subseteq A$.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι $\partial A \subseteq A$. Αρκεί να δειχθεί ότι $cl_X(A) \subseteq A$. Πράγματι, από Πρόταση 2.59 (i) έχουμε ότι

$$\partial A = cl_X(A) \setminus int_X(A)$$
$$\Longrightarrow cl_X(A) \setminus int_X(A) \subseteq A$$
$$\Longrightarrow [cl_X(A) \setminus int_X(A)] \cup int_X(A) \subseteq A \cup int_X(A)$$

Από Πρόταση 2.53 (i) και από Πρόταση 2.42 (i) ισχύει $int_X(A) \subseteq A \subseteq cl_X(A)$. Επομένως, προκύπτει $cl_X(A) \subseteq A$ και δηλαδή, το A είναι κλειστό.

□

Πρόταση 2.61. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και κλειστό σύνολο $A \subseteq X$. Τότε, ισχύει ότι $int_X(\partial A) = \oslash$.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι $int_X(\partial A) \neq \oslash$. Τότε, $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $U \subseteq int_X(\partial A)$. Από Πρόταση 2.53 (i) ισχύει $int_X(\partial A) \subseteq \partial A$ και επειδή A είναι κλειστό, από Πόρισμα 2.60 (ii) έχουμε $\partial A \subseteq A$. Συνεπώς

$$int_X(\partial A) \subseteq \partial A \subseteq A \Longrightarrow U \subseteq \partial A \subseteq A$$

και θεωρούμε $x_0 \in U$. Από τον ορισμό του ∂A και επειδή $x_0 \in U \subseteq \partial A$, οφείλει $U \cap (X \setminus A) \neq \oslash$. Τότε, όμως, προκύπτει

$$U \subseteq A \,\&\, U \cap (X \setminus A) \neq \oslash$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Πρόταση 2.62. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq \mathcal{T}$ τέτοια ώστε $U_i \cap U_j = \oslash$, $\forall i, j \in \mathcal{I}$ με $j \neq i$. Τότε, $\forall i \in \mathcal{I}$ ισχύει*

$$U_i \cap \bigcup_{\substack{j \in \mathcal{I} \\ j \neq i}} cl_X(U_j) = \oslash$$

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι $U_i \cap \bigcup_{\substack{j \in \mathcal{I} \\ j \neq i}} cl_X(U_j) \neq \oslash$. Τότε $\exists j_0 \in \mathcal{I}$ ώστε $U_i \cap cl_X(U_{j_0}) \neq \oslash$ και δηλαδή $\exists x_0 \in U_i \cap cl_X(U_{j_0})$. Επίσης, από Πρόταση 2.59 (iii) έχουμε ότι

$$cl_X(U_{j_0}) = int_X(U_{j_0}) \cup \partial U_{j_0}$$

και εφόσον U_{j_0} ανοιχτό, από Πρόταση 2.53 (i) θα ισχύει $U_{j_0} = int_X(U_{j_0})$. Επειδή $U_{j_0} \cap U_i = \oslash$, είναι αδύνατο να έχουμε $x_0 \in U_i \cap U_{j_0}$ και άρα $x_0 \in U_i \cap \partial U_{j_0}$. Και πάλι, αφού U_i ανοιχτό, από Πρόταση 2.18 $\exists V \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in V$ και ώστε

$$V \subseteq U_i \Longrightarrow V \cap U_{j_0} = \oslash \quad (1)$$

Επιπλέον, από Παρατήρηση 2.57 γνωρίζουμε ότι

$$\partial A = \{x \in X : U \cap A \neq \oslash \,\&\, U \cap (X \setminus A) \neq \oslash, \forall U \in \mathcal{T} \text{ με } x \in U\}$$

και συνεπώς, επιλέγοντας το $x_0 \in \partial U_{j_0}$ και ως ανοιχτό το V, οφείλει να ισχύει

$$V \cap U_{j_0} \neq \oslash \ (2)$$

Από τις $(1), (2)$ προκύπτει άτοπο. □

Ορισμός 2.63. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $Y \subseteq X$. Θεωρούμε τη συλλογή*

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \subseteq X : U \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

Τότε, η $\mathcal{T}_Y$ είναι τοπολογία στο Y και το ζεύγος $(Y, \mathcal{T}_Y)$ καλείται ***τοπολογικός υπόχωρος*** *του $(X, \mathcal{T})$. Αν $V \in \mathcal{T}_Y$, θα λέμε ότι το V είναι ανοιχτό στο Y και θα λέμε ότι η $\mathcal{T}_Y$ είναι η τοπολογία που επάγεται από το Y.*

Παρατήρηση 2.64. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $Y \subseteq X$ και $V \subseteq Y$. Το V είναι ανοιχτό στο Y αν και μόνο εάν $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, τέτοιο ώστε $V = U \cap Y$.*

Πρόταση 2.65. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $Y \subseteq X$ και $V \subseteq Y$. Αν $Y \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ και $V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, τότε $V \in \mathcal{T}_Y \setminus \oslash$.*

Απόδειξη. Είναι άμεσο, αφού $V \subseteq Y, V \in \mathcal{T} \setminus \oslash \Longrightarrow V = V \cap Y, V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$. □

Πρόταση 2.66. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $Y \subseteq X$ και $V \subseteq Y$. Αν $Y \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ και $V \in \mathcal{T}_Y \setminus \oslash$, τότε $V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$.*

Απόδειξη. Αφού $V \in \mathcal{T}_Y \setminus \oslash$, $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $V = U \cap Y$. Επειδή $Y \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, θα ισχύει ότι $U \cap Y \in \mathcal{T} \setminus \oslash \Longrightarrow V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$. □

Ορισμός 2.67. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ μια βάση για την τοπολογία και $Y \subseteq X$. Για κάθε $B \in \mathcal{B}$, τα σύνολα $B_Y = B \cap Y$ βασικά ανοιχτά του τοπολογικού υπόχωρου $(Y, \mathcal{T}_Y)$, ή απλά βασικά ανοιχτά στο Y.*

Πόρισμα 2.68. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ μια βάση για την τοπολογία και $Y \subseteq X$. Τότε, η συλλογή $\mathcal{B}_Y = \mathcal{B} \cap Y$ αποτελεί βάση για τον τοπολογικό υπόχωρο $(Y, \mathcal{T}_Y)$.*

Απόδειξη. Έστω $V_Y \in \mathcal{T}_Y \setminus \oslash$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ η βάση της τοπολογίας. Τότε $\exists V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $V_Y = V \cap Y$ και για κάποιο μη κενό σύνολο $\mathcal{I}$, $\exists \{B_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{B}$ ώστε $V = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} B_i$. Έχουμε ότι

$$V_Y = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i \cap Y = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} (B_i \cap Y)$$

όπου $B_i \cap Y$ είναι βασικό ανοιχτό σύνολο στο Y, $\forall i \in \mathcal{I}$. Αφού το $V_Y \in \mathcal{T}_Y \setminus \oslash$ που επιλέχθηκε ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε πως κάθε ανοιχτό σύνολο στο Y εκφράζεται ως ένωση βασικών ανοιχτών στο Y και συνεπώς, η συλλογή $\mathcal{B}_Y = \mathcal{B} \cap Y$ αποτελεί βάση για τον τοπολογικό υπόχωρο $(Y, \mathcal{T}_Y)$. □

Ορισμός 2.69. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $Y \subseteq X$ και $K \subseteq Y$. Θα λέμε ότι το K είναι κλειστό στο Y, αν $\exists F \subseteq X$ κλειστό στο X και ώστε $K = F \cap Y$.*

Πρόταση 2.70. *[3]Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $Y \subseteq X$ και $K \subseteq Y$ κλειστό στο Y. Τότε, το K είναι κλειστό στο X αν και μόνο εάν Y είναι κλειστό στο X.*

Ορισμός 2.71. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $Y \subseteq X$ και $A \subseteq X$. Η κλειστότητα του A στο Y συμβολίζεται με $cl_Y(A)$ και ισούται με το σύνολο*

$$cl_Y(A) = cl_X(A) \cap Y$$

Ορισμός 2.72. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $Y \subseteq X$ και $A \subseteq X$. Το εσωτερικό του A στο Y συμβολίζεται με $int_Y(A)$ και ισούται με το σύνολο*

$$int_Y(A) = int_X(A) \cap Y$$

2.4 Πυκνά σύνολα-Διαχωρισιμότητα-Αριθμησιμότητα

Ορισμός 2.73. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $D \subseteq X$. Θα λέμε ότι το D είναι* **πυκνό** *στο X, αν ισχύει $cl_X(D) = X$.*

Πόρισμα 2.74. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $D \subseteq X$ πυκνό στο X. Τότε, $int_X(X \setminus D) = \oslash$.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι $int_X(X \setminus D) \neq \oslash$. Τότε, $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $U \subseteq X \setminus D$. Επειδή D είναι πυκνό στο X, $\forall V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ θα ισχύει $D \cap V \neq \oslash$. Επιλέγοντας $V = U$, προκύπτει

$$\oslash \neq D \cap U \subseteq D \cap (X \setminus D) = \oslash$$

Άτοπο.

□

Πόρισμα 2.75. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $D \subseteq Y \subseteq X$. Αν D είναι πυκνό στο X, τότε, το Y είναι πυκνό στο X.*

Απόδειξη. Από Πρόταση 2.42(iv) έχουμε

$$D \subseteq Y \Longrightarrow cl_X(D) \subseteq cl_X(Y)$$

και αφού D είναι πυκνό στο X, προκύπτει $X \subseteq cl_X(Y)$ και δηλαδή, το Y είναι πυκνό στο X. □

Πρόταση 2.76. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $D \subseteq Y \subseteq X$. Τότε*

$$\text{Αν } D \text{ πυκνό στο} Y \,\&\, Y \text{ πυκνό στο } X \Longrightarrow D \text{ πυκνό στο } X$$

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι $cl_X(D) \neq X$. Τότε, $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $U \cap D = \oslash$. Επειδή $cl_X(Y) = X$, έχουμε $U \cap Y \neq \oslash$ και θέτουμε $V = U \cap Y$. Τότε, όμως, ισχύει $V \in \mathcal{T}_Y \setminus \oslash$ και επειδή $cl_Y(D) = Y$, οφείλει

$$V \cap D \neq \oslash \Longrightarrow U \cap Y \cap D \neq \oslash \overset{D \subseteq Y}{\Longrightarrow} U \cap D \neq \oslash$$

Άτοπο. □

Πρόταση 2.77. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $D \subseteq X$. Τότε, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το D είναι πυκνό στο X.*

(ii) $\forall x \in X$ *και* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in D$ *ώστε* $\rho(x, y) < \varepsilon$.

(iii) $\forall x \in X$, $\exists \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$ *ώστε* $y_n \longrightarrow x$.

(iv) $\forall x \in X$ *και* $\forall \varepsilon > 0$, *ισχύει* $B_\rho(x, \varepsilon) \cap D \neq \oslash$.

(v) *Για οποιοδήποτε ανοιχτό, μη κενό* $U \subseteq X$, *ισχύει* $U \cap D \neq \oslash$.

Απόδειξη. (i)$\Longrightarrow$(ii) Έστω $x_0 \in X$. Αφού το D είναι πυκνό στο X, θα ισχύει $cl_X(D) = X$ και άρα το x_0 είναι οριακό σημείο του D. Συνεπώς, $\forall \varepsilon > 0$, ισχύει $B_\rho(x_0, \varepsilon) \cap D \neq \oslash$ και δηλαδή $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists y \in D$ με $\rho(x_0, y) < \varepsilon$. Επειδή το x_0 ήταν τυχαίο, έχουμε ότι $\forall x \in X$ και $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in D$ ώστε $\rho(x, y) < \varepsilon$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Έστω $x_0 \in X$. Τότε, θέτοντας $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ έχουμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists y_n \in D$ ώστε $\rho(y_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$ και δηλαδή, $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $0 < \rho(y_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$. Επομένως

$$\rho(y_n, x_0) \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow y_n \longrightarrow x_0$$

Επειδή το x_0 ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε πως $\forall x \in X$, $\exists \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ώστε $y_n \longrightarrow x$.

(iii)$\Longrightarrow$(iv) Έστω $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$ και ακολουθία $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ ώστε $y_n \longrightarrow x_0$. Τότε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ώστε $\forall n \geq n_0$, $\rho(y_n, x_0) < \varepsilon$ και δηλαδή, $\forall n \geq n_0$ ισχύει $y_n \in B_\rho(x_0, \varepsilon)$. Εφόσον τα $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαία, τότε $\forall x \in X$ και $\forall \varepsilon > 0$, ισχύει $B_\rho(x, \varepsilon) \cap D \neq \oslash$.

(iv)$\Longrightarrow$(v) Έστω U ανοιχτό, μη κενό υποσύνολο του X.Τότε, $\exists x_0 \in U$ και $\delta > 0$ ώστε $B_\rho(x_0, \delta) \subseteq U$, που συνεπάγεται ότι

$$B_\rho(x_0, \delta) \cap D \subseteq U \cap D$$

Εφόσον $\forall x \in X$ και $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει $B_\rho(x, \varepsilon) \cap D \neq \oslash$, τότε

$$B_\rho(x_0, \delta) \cap D \neq \oslash$$

και δηλαδή

$$U \cap D \neq \oslash$$

Επειδή το U ήταν τυχαίο, έχουμε το ζητούμενο.

(v)$\Longrightarrow$(i) Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $\forall U \subseteq X$ με U ανοιχτό, μη κενό, ισχύει $U \cap D \neq \oslash$, τότε θέτοντας $U = B_\rho(x_0, \varepsilon)$ προκύπτει $B_\rho(x_0, \varepsilon) \cap D \neq \oslash$. Επειδή τα $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$ είναι τυχαία, τότε, $\forall x \in X$ και $\forall \varepsilon > 0$, έχουμε $B_\rho(x, \varepsilon) \cap D \neq \oslash$, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι κάθε $x \in X$ είναι οριακό σημείο του D και επομένως, ισχύει $X \subseteq cl_X(D)$. Αντίστροφα, επειδή, τώρα, το X είναι κλειστό σύνολο, έχουμε $X = cl_X(X)$ και από Πρόταση 2.42(iv) προκύπτει

$$D \subseteq X \Longrightarrow cl_X(D) \subseteq cl_X(X) = X$$

Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι $cl_X(D) = X$ και δηλαδή, το D είναι πυκνό σύνολο στο X. □

Ορισμός 2.78. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ο $(X, \mathcal{T})$ λέγεται* ***διαχωρίσιμος****, αν $\exists D \subseteq X$ αριθμήσιμο, τέτοιο ώστε $cl_X(D) = X$*

Ορισμός 2.79. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ο $(X, \mathcal{T})$ λέγεται* ***πρώτος αριθμήσιμος (first countable)*** *αν κάθε $x \in X$ έχει μια αριθμήσιμη βάση περιοχών. Δηλαδή, θα υπάρχει $B_x = \{U_n \in \mathcal{T} : n \in \mathbb{N}\}$.*

Πρόταση 2.80. *Κάθε μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πρώτος αριθμήσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in X$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{B}_{x_0} = \{B_\rho(x_0, q) : q \in \mathbb{Q}\}$ και έστω οποιοδήποτε ανοιχτό, μη κενό $G \subseteq X$ με $x_0 \in G$. Αφού το G είναι ανοιχτό, $\exists \varepsilon_0 > 0$ ώστε $B_\rho(x_0, \varepsilon_0) \subseteq G$ και επιλέγουμε $q_0 \in \mathbb{Q}$, τ''ετοιο ώστε ώστε $0 < q_0 < \varepsilon_0$. Είναι άμεσο ότι

$$B_\rho(x_0, q_0) \subseteq B_\rho(x_0, \varepsilon_0)$$

και δηλαδή
$$x_0 \in B_\rho(x_0, q_0) \subseteq G$$
Επειδή το G είναι τυχαίο ανοιχτό υποσύνολο του X που περιέχει το x_0, έχουμε ότι $\forall \varepsilon > 0$, $\exists q \in \mathbb{Q}$ ώστε $x_0 \in B_\rho(x_0, q) \subseteq B_\rho(x_0, \varepsilon)$. Εφόσον $x_0 \in B_\rho(x_0, q)$, $\forall q \in \mathbb{Q}$, συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{B}_{x_0}$ είναι βάση περιοχών του x_0. Τέλος, επειδή το x_0 ήταν τυχαίο έχουμε το ζητούμενο $\forall x \in X$ και οπότε, η συλλογή $\mathcal{B}_x = \{B_\rho(x, q) : q \in \mathbb{Q}\}$ αποτελέι βάση περιοχών του x. ☐

Ορισμός 2.81. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ο $(X, \mathcal{T})$ λέγεται* ***δεύτερος αριθμήσιμος (second countable)*** *αν υπάρχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$.*

Παρατήρηση 2.82. *Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι $2^{ος}$ αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ μια βάση της τοπολογίας και $V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, τότε $\exists \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ ώστε $V = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$.*

Πόρισμα 2.83. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ $2^{ος}$ αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και $Y \subseteq X$. Τότε το ζεύγος $(Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι επίσης $2^{ος}$ αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Έστω $V_Y \in \mathcal{T}_Y \setminus \oslash$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ η αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας. Τότε $\exists V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $V_Y = V \cap Y$ και $\exists \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ ώστε $V = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Έχουμε ότι
$$V_Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \cap Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap Y)$$
όπου $B_n \cap Y$ είναι βασικό ανοιχτό σύνολο στο Y, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αφού το $V_Y \in \mathcal{T}_Y \setminus \oslash$ που επιλέχθηκε ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε πως κάθε ανοιχτό σύνολο στο Y εκφράζεται ως αριθμήσιμη ένωση βασικών ανοιχτών στο Y και συνεπώς, η συλλογή $\mathcal{B}_Y = \mathcal{B} \cap Y$ αποτελεί αριθμήσιμη βάση για τον τοπολογικό υπόχωρο $(Y, \mathcal{T}_Y)$. ☐

Πόρισμα 2.84. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ $1^{ος}$ αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και $Y \subseteq X$. Τότε το ζεύγος $(Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι επίσης $1^{ος}$ αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με εκείνη το Πόρισμα 2.83. ☐

Πόρισμα 2.85. *[5]Έστω $(X, \mathcal{T})$ $2^{ος}$ αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος. Τότε, ο $(X, \mathcal{T})$ είναι και $1^{ος}$ αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος.*

Πρόταση 2.86. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ $2^{ος}$ αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος. Τότε, ο $(X, \mathcal{T})$ είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{B}$ μια αριθμήσιμη βάση για την $\mathcal{T}$. Τότε, $\forall U \in \mathcal{B}$ επιλέγουμε $y_U \in U$ και θέτουμε $D = \{y_U : U \in \mathcal{B}\} \subseteq X$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathcal{B} \longrightarrow D$ με τύπο $f(U) = y_u$, $\forall U \in \mathcal{B}$ και παρατηρούμε ότι είναι επί, το οποίο συνεπάγεται πως το σύνολο D είναι αριθμήσιμο. Επιπλέον, θεωρούμε τυχαίο $x_0 \in X$ και $V \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in V$. Αφού $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας, $\exists \mathcal{I}$ σύνολο δεικτών τέτοιο ώστε $U_i \in \mathcal{B}, \forall i \in \mathcal{I}$ και ισχύει ότι $V = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{A}} U_i$. Επομένως, $\exists i_0 \in \mathcal{A}$ ώστε $x_0 \in U_{i_0}$ και αφού $U_{i_0} \in \mathcal{B}$, τότε, $\exists y_0 \in D \cap U_{i_0}$. Προκύπτει ότι

$$D \cap U_{i_0} \neq \oslash \Longrightarrow D \cap V \neq \oslash$$

και επειδή τα $x_0 \in X$ και $V \in \mathcal{T}$ ήταν τυχαία, συμπεραίνουμε πως $cl_X(D) = X$. □

Πρόταση 2.87. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και D ένα πυκνό υποσύνολο του X. Τότε, η οικογένεια $\mathcal{B} = \{B_\rho(y, q) : y \in D, q \in \mathbb{Q}\}$ είναι βάση της $\mathcal{T}_\rho$.*

Απόδειξη. Έστω ανοιχτό, μη κενό $U \subseteq X$ και τυχαίο $x_0 \in U$. Αρκεί να βρούμε στοιχείο της $\mathcal{B}$ που περιέχει το x_0 και περιέχεται το U.

Επειδή U είναι ανοιχτό, $\exists \delta_0 > 0$ ώστε $B_\rho(x_0, \delta_0) \subseteq U$. Επειδή το σύνολο D είναι πυκνό στο X, από Πρόταση 2.77(iv) θα ισχύει ότι $B_\rho(x_0, \frac{\delta_0}{2}) \cap D \neq \oslash$ και δηλαδή $\exists y_0 \in B_\rho(x_0, \frac{\delta_0}{2}) \cap D$. Επιπλέον, $\exists \varepsilon_0 > 0$ ώστε $\rho(x_0, y_0) = \varepsilon_0 < \frac{\delta_0}{2}$ και επιλέγουμε ένα $q_0 \in \mathbb{Q}$, τέτοιο ώστε $\varepsilon_0 < q_0 < \frac{\delta_0}{2}$. Τότε, έχουμε ότι $x_0 \in B_\rho(y_0, q_0)$, καθώς επίσης $B_\rho(y_0, q_0) \subseteq B_\rho(x_0, \delta_0) \subseteq U$. Επομένως, ισχύει ότι

$$x_0 \in B_\rho(y_0, q_0) \subseteq U$$

Αφού τα $U \subseteq X$ και $x_0 \in U$ ήταν τυχαία, έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 2.88. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Αν ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος, τότε έχει μια αριθμήσιμη βάση για την $\mathcal{T}_\rho$.*

Απόδειξη. Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος . Τότε, $\exists D \subseteq X$ με D αρθμήσιμο και πυκνό στο X. Από Πρόταση 2.87, η οικογένεια $\mathcal{B} = \{B_\rho(y, q) : y \in D, q \in \mathbb{Q}\}$ είναι μία βάση της $\mathcal{T}_\rho$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi : D \times \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathcal{B}$, όπου $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ και $\varphi(y, q) = B_\rho(y, q)$, $\forall (y, q) \in D \times \mathbb{Q}^+$.Το σύνολο $D \times \mathbb{Q}^+$ είναι αριθμήσιμο ως καρτεσιανό γινόμενο αριθμήσιμων συνόλων και δεδομένου ότι η φ είναι επί της $\mathcal{B}$, συμπεραίνουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{B}$ είναι επίσης αριθμήσιμη. Επομένως, ο (X, ρ) έχει μία αριθμήσιμη βάση για την $\mathcal{T}_\rho$. □

Πρόταση 2.89. *Έστω οποιοδήποτε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Τότε, $\exists q \in \mathbb{Q}$ ώστε $a < q < b$.[2]*

Πρόταση 2.90. *Έστω το ζεύγος $(\mathbb{R}, \rho_{|.|})$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο με τη συνήθη μετρική. Τότε, το $(\mathbb{R}, \rho_{|.|})$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η τοπολογία που επάγεται από τη συνήθη μετρική είναι η

$$\mathcal{T}_\rho = \{B_\rho(x, \varepsilon) : x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\} = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$$

Θέτοντας $a = x - \varepsilon < x + \varepsilon = b$ και $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$, είναι ισοδύναμο να πούμε ότι

$$\mathcal{T}_\rho = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

Από Πρόταση 2.89, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, $\exists q \in \mathbb{Q}$ ώστε $a < q < b$ και δηλαδή, $\exists q \in \mathbb{Q}$ ώστε $q \in (a, b)$. Επομένως, για οποιοδήποτε $U \in \mathcal{T}_\rho \setminus \oslash$ θα ισχύει $\mathbb{Q} \cap U \neq \oslash$ και οπότε, το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη τοπολογία. Επιπλέον, επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, έχουμε το ζητούμενο. $\square$

3 Κατηγορίες Baire

3.1 Πουθενά πυκνά σύνολα

Ορισμός 3.1. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Θα λέμε ότι το A είναι **κάπου πυκνό** στο X αν $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, τέτοιο ώστε $U \subset cl_X(A \cap U)$.*

Ορισμός 3.2. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $N \subset X$. Θα λέμε ότι το N είναι **πουθενά πυκνό** στο X αν $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, ισχύει $U \nsubseteq cl_X(N \cap U)$.*

Παρατήρηση 3.3. *Ισοδύναμα, θα λέμε ότι το σύνολο N είναι πουθενά πυκνό στο X αν $\forall U \in \mathcal{T}$, όπου $N \cap U \neq \oslash$, $\exists V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ με $V \subseteq U$ και τέτοιο ώστε $N \cap V = \oslash$.*

Πρόταση 3.4. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $N \subset X$ πουθενά πυκνό στο X. Τότε, $int_X(X \setminus N) \neq \oslash$.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι $int_X(X \setminus N) = \oslash$. Από Πρόταση 2.55(i) έχουμε ότι

$$int_X(X \setminus N) = X \setminus cl_X(N) = \oslash$$

και συνεπώς, το N είναι πυκνό στο X. Άτοπο. □

Πρόταση 3.5. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Το A είναι πουθενά πυκνό στο X, αν και μόνο εάν $int_X(cl_X(A)) = \oslash$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω ότι A πουθενά πυκνό στο X και έστω προς άτοπο ότι $int_X(cl_X(A)) \neq \oslash$. Τότε, $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ τέτοιο ώστε $U \subseteq cl_X(A)$ και έστω ότι ισχύει $U \cap (X \setminus cl_X(A \cap U)) \neq \oslash$.

Τότε, $\exists V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $V \subseteq U \cap (X \setminus cl_X(A \cap U))$, από το οποίο προκύπτουν:

$$V \subseteq U \subseteq cl_X(A) \Longrightarrow V \cap A \neq \oslash \ (1)$$

καθώς επίσης

$$V \cap cl_X(A \cap U) = \oslash \,\&\, V \subseteq U \Longrightarrow V \cap A = \oslash \ (2)$$

Από τις $(1), (2)$ καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως, αν $int_X(cl_X(A)) \neq \oslash$, οφείλει

$$U \cap (X \setminus cl_X(A \cap U)) = \oslash \Longrightarrow U \subseteq cl_X(A \cap U)$$

Επειδή U είναι ανοιχτό και $cl_X(A \cap U)$ είναι κλειστό στο X, είναι άμεσο ότι $U \subset cl_X(A \cap U)$ και δηλαδή, το A είναι κάπου πυκνό στο X. Άτοπο, αφού A είναι πουθενά πυκνό στο X.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι $int_X(cl_X(A)) = \oslash$ και έστω προς άτοπο ότι A είναι κάπου πυκνό στο X. Τότε, $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ τέτοιο ώστε $U \subset cl_X(A \cap U) \subseteq cl_X(A)$. Επειδή U είναι ανοιχτό, από Πρόταση 2.53 (i) οφείλει $U = int_X(U)$ και δηλάδή $int_X(U) \neq \oslash$. Επομένως, προκύπτει

$$\oslash \neq int_X(U) \subset int_X(cl_X(A)) = \oslash$$

Άτοπο.

$\square$

Παρατήρηση 3.6. *Αν $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, όπου $A \neq$ πουθενά πυκνό στο X, τότε $int_X(cl_X(A)) \neq \oslash$ και δηλαδή, $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $U \subseteq cl_X(A)$. Μάλιστα, επειδή U είναι ανοιχτό και $cl_X(A)$ είναι κλειστό, θα ισχύει ότι $U \subseteq int_X(cl_X(A))$. Αντίστορφα, αν $int_X(cl_X(A)) \neq \oslash$ ή, ισοδύναμα, αν $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $U \subseteq cl_X(A)$, τότε $A \neq$ πουθενά πυκνό στο X*

Πρόταση 3.7. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $N \subset X$ πουθενά πυκνό στο X. Τότε, ισχύουν:*

(i) $int_X(N) = \oslash$

(ii) $cl_X(X \setminus N) = X$

Απόδειξη. (i) Αφού N είναι πουθενά πυκνό στο X, από Πρόταση 3.5 θα ισχύει $int_X(cl_X(N)) = \oslash$. Από Πρόταση 2.42 (i) έχουμε $N \subseteq cl_X(N)$ και από Πρόταση 2.53 (iv), προκύπτει

$$N \subseteq cl_X(N) \Longrightarrow int_X(N) \subseteq int_X(cl_X(N))$$

Επειδή $int_X(cl_X(N)) = \oslash$, είναι άμεσο ότι $int_X(N) = \oslash$.

(ii) Έστω προς άτοπο ότι $cl_X(X \setminus N) \neq \oslash$. Τότε, $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $U \cap cl_X(X \setminus N) = \oslash$. Από Πρόταση 2.55 (ii) γνωρίζουμε ότι $cl_X(X \setminus N) = X \setminus int_X(N)$ και συνεπώς, θα ισχύει

$$U \cap (X \setminus int_X(N)) = \oslash \Longrightarrow U \subseteq int_X(N) \Longrightarrow int_X(N) \neq \oslash$$

Άτοπο από το (i). $\square$

Πρόταση 3.8. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $F \subset X$. Αν F είναι κλειστό και με κενό εσωτερικό στο X, τότε, F είναι πουθενά πυκνό στο X.*

Απόδειξη. Εφόσον F είναι κλειστό, από Πρόταση 2.42 (ii) έχουμε $cl_X(F) = F$ και από Πρόταση 2.53 (iv), προκύπτει

$$cl_X(F) = F \Longrightarrow int_X(cl_X(F)) = int_X(F)$$

Αφού, από υπόθεση, ισχύει $int_X(F) = \oslash$, είναι άμεσο ότι $int_X(cl_X(F)) = \oslash$. Από Πρόταση 3.5 συμπεραίνουμε ότι F είναι πουθενά πυκνό στο X. $\square$

Ορισμός 3.9. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathfrak{I}$ μια μη κενή συλλογή υποσυνόλων του X. Το $\mathfrak{I}$ λέγεται* **ιδεώδες** *του $(X, \mathcal{T})$ αν:*

(i) $\forall A \in \mathfrak{I}$ *και* $B \subseteq A$ *ισχύει* $B \in \mathfrak{I}$.

(ii) $\forall A, B \in \mathfrak{I}$ *ισχύει* $A \cup B \in \mathfrak{I}$

Πόρισμα 3.10. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathfrak{I}$ ένα ιδεώδες του $(X, \mathcal{T})$. Τότε, ισχύουν:*

(i) $\forall A, B \in \mathfrak{I}$ *ισχύει* $A \cap B \in \mathfrak{I}$.

(ii) Αν $\{A_i\}_{i=1}^n$ *είναι μια πεπερασμένη συλλογή στοιχείων του $\mathfrak{I}$, τότε* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{I}$.

Πρόταση 3.11. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{F}_N = \{N \subset X : N \text{ πουθενά πυκνό στο } X\}$. Τότε, η συλλογή $\mathcal{F}_N$ είναι ένα ιδεώδες του $(X, \mathcal{T})$ και δηλαδή:*

(i) $\forall A \in \mathcal{F}_N$ *και* $B \subseteq A$, *ισχύει* $B \in \mathcal{F}_N$.

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{F}_N$, *ισχύει* $A \cup B \in \mathcal{F}_N$.

Απόδειξη. (i) Έστω $N \in \mathcal{F}_N$ και οποιοδήποτε $A \subseteq N$. Από Πρόταση 3.5 θα ισχύει $int_X(cl_X(N)) = \oslash$. Αφού $A \subseteq N$, από Πρόταση 2.42 (iv) έχουμε ότι $cl_X(A) \subseteq cl_X(N)$ και από Πρόταση 2.53 (iv), έπεται

$$cl_X(A) \subseteq cl_X(N) \Longrightarrow int_X(cl_X(A)) \subseteq int_X(cl_X(N))$$

Εφόσον $int_X(cl_X(N)) = \oslash$, είναι άμεσο ότι $int_X(cl_X(A)) = \oslash$ και άρα, από Πρόταση 3.5, το A είναι πουθενά πυκνό στο X.

(ii) Έστω $N_1, N_2 \in \mathcal{F}_N$ και έστω $x_0 \in N_1 \cup N_2$ και $U \in \mathcal{T}$ ώστε $x_0 \in U$. Τότε, επειδή τα N_1, N_2 είναι πουθενά πυκνά στο X, από Παρατήρηση 3.3 $\exists V_1, V_2 \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ με $V_1 \subseteq U$, $V_2 \subseteq U$ και τέτοιο ώστε $N_1 \cap (V_1 \cup V_2) = \oslash$ και $N_2 \cap (V_1 \cup V_2)$. Επειδή $V_1 \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ και $V_2 \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, θέτουμε $V = V_1 \cup V_2$ και δηλαδή $V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$. Επίσης, αφού $V_1 \subseteq U$ και $V_2 \subseteq U$, οφείλει $V \subseteq U$ και προκύπτει ότι

$$(N_1 \cup N_2) \cap V = (N_1 \cap V) \cup (N_2 \cap V) = \oslash$$

Εφόσον τα x_0, U ήταν τυχαία, συμπεραίνουμε πως $\forall U \in \mathcal{T}$, όπου $(N_1 \cup N_2) \cap U \neq \oslash$, $\exists V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ με $V \subseteq U$ και τέτοιο ώστε $(N_1 \cup N_2) \cap V = \oslash$. Συνεπώς, από Παρατήρηση 3.3, το σύνολο $N_1 \cup N_2$ είναι πουθενά πυκνό στο X. $\square$

Πρόταση 3.12. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subset Y \subseteq X$. Αν A είναι πουθενά πυκνό στο Y, τότε, το A είναι πουθενά πυκνό στο X.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι $A \neq$ πουθενά πυκνό στο X. Τότε, από Παρατήρηση 3.6 ισχύει πως $int_X(cl_X(A)) \neq \oslash$ και άρα, $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $U \subseteq cl_X(A)$. Από το τελευταίο, έχουμε

$$A \cap U \neq \oslash \Longrightarrow Y \cap U \neq \oslash$$

και εφόσον $U \subseteq cl_X(A)$, είναι άμεσο ότι

$$\oslash \neq Y \cap U \subseteq Y \cap cl_X(A) = cl_Y(A)$$

Επειδή το σύνολο $Y \cap U$ είναι ανοιχτό, μη κενό στο Y, από Πρόταση 2.53(i) και (i), προκύπτει

$$\oslash \neq Y \cap U = int_Y(Y \cap U) \subseteq int_Y(cl_Y(A))$$

Από Παρατήρηση 3.6, καταλήγουμε πως $A \neq$ πουθενά πυκνό στο Y. Άτοπο. $\square$

Πρόταση 3.13. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subset Y \subseteq X$. Αν A είναι πουθενά πυκνό στο X και το Y είναι ανοιχτό, τότε το A είναι πουθενά πυκνό στο Y.*

Απόδειξη. Εστω προς άτοπο ότι $A \neq$ πουθενά πυκνό στο Y. Τότε, από Παρατήρηση 3.6 θα ισχύει πως $int_Y(cl_Y(A)) \neq \oslash$ και οπότε, $\exists V \in \mathcal{T}_Y \setminus \oslash$ ώστε $V \subseteq cl_Y(A)$. Επειδή Y είναι ανοιχτό στο X και V ανοιχτό στο Y, από Πρόταση 2.66 έπεται ότι το V είναι ανοιχτό στο X και αφού $V \subseteq cl_Y(A)$, από Πρόταση 2.53(ii) και (iv), έχουμε

$$V = int_X(V) \subseteq int_X(cl_Y(A)) \overset{V \neq \oslash}{\Longrightarrow} int_X(Y \cap cl_X(A)) = int_X(cl_Y(A)) \neq \oslash$$

Επιπλέον, από Πρόταση 2.53(v), ισχύει

$$int_X(Y) \cap int_X(cl_X(A)) = int_X(cl_Y(A)) \neq \oslash$$

Εφόσον A πουθενά πυκνό στο X, από Πρόταση 3.5 έχουμε ότι $int_X(cl_X(A)) = \oslash$ και άρα, προκύπτει

$$\oslash \neq int_X(Y) \cap int_X(cl_X(A)) = int_X(Y) \cap \oslash = \oslash$$

Άτοπο. $\square$

3.2 Ισχνά, $2^{ης}$ κατηγορίας και συνισχνά σύνολα

Ορισμός 3.14. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $E \subseteq X$. Θα λέμε ότι το E είναι* ***ισχνό (meager)*** *στο X, αν γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών υποσυνόλων του X.*

Ορισμός 3.15. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Το σύνολο A είναι ισχνό στο X αν περιέχεται σε μια αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του X, με κενό εσωτερικό στο X.*

Ορισμός 3.16. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathfrak{I}$ μια μη κενή συλλογή υποσυνόλων του X. Το $\mathfrak{I}$ λέγεται* ***σ-ιδεώδες*** *του $(X,\mathcal{T})$ αν:*

(i) $\forall A \in \mathfrak{I}$ και $B \subseteq A$ ισχύει $B \in \mathfrak{I}$.

(ii) Για οποιοδήποτε αριθμήσιμη οικογένεια $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ με $E_n \in \mathfrak{I}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathfrak{I}$.

Πόρισμα 3.17. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathfrak{I}$ ένα σ-ιδεώδες του $(X,\mathcal{T})$. Τότε $\forall A, B \in \mathfrak{I}$ ισχύει $A \cap B \in \mathfrak{I}$.*

Πρόταση 3.18. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{F}_E = \{E \subseteq X : E\, \text{ισχνόστο}\ X\}$. Τότε, η συλλογή $\mathcal{F}_E$ είναι ένα σ-ιδεώδες του $(X,\mathcal{T})$ και δηλαδή:*

(i) $\forall A \in \mathcal{F}_E$ και $B \subseteq A$, ισχύει $B \in \mathcal{F}_E$.

(ii) Αν $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}_E$, ισχύει $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{F}_E$.

Απόδειξη. (i) Έστω $E \in \mathcal{F}_E$ και οποιοδήποτε $A \subseteq E$. Αν $A = \oslash$, τότε A είναι πουθενά πυκνό στο X και δηλαδή θα είναι ισχνό στο X, ενώ αν $A \neq \oslash$, θεωρούμε $x_0 \in A$. Επειδή E είναι ισχνό στο X, $\exists\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, όπου N_n είναι πουθενά πυκνό στο X , $\forall n \in \mathbb{N}$ και ώστε $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} N_n$. Εφόσον $x_0 \in A \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} N_n$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_0 \in N_{n_0}$ και ορίζουμε το σύνολο

$$A_n = \{x \in X : (x \in A \wedge x \in N_n), n \in \mathbb{N}\} \subseteq N_n$$

Είναι άμεσο ότι $x_0 \in A \cap N_{n_0} = A_{n_0}$ και δηλαδή $x_0 \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Αντίστροφα, αν $x_0 \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_0 \in A_{n_0} = A \cap N_{n_0}$και οπότε $x_0 \in A$. Επομένως, $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ και επειδή $A_n \subseteq N_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, από Πρόταση 3.11 (i) θα είναι πουθενά πυκνό στο X και συνεπώς, το A είναι ισχνό στο X.

(ii) Έστω μια αριμήσιμη οικογένεια $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ με E_n να είναι ισχνό στο X, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $\exists\{N_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ οκογένεια πουθενά πυκνών συνόλων στο X, τέτοια ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει $E_n = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} N_k^n$. Από 1.7 η ένωση $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} N_k^n$ είναι αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών υποσυνόλων του X και δηλαδή, το σύνολο $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} N_k^n$ είναι ισχνό στο X. □

Ορισμός 3.19. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $S \subseteq X$. Θα λέμε ότι το S είναι $2^{ης}$* ***κατηγορίας (second category)*** *στο X, αν δεν είναι ισχνό στο X.*

Παρατήρηση 3.20. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν A είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X, τότε $A \neq \oslash$.*

Πρόταση 3.21. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και τυχαία $A \subseteq B \subseteq X$. Αν A είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X, τότε και B είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X.*

Απόδειξη. Άμεσο από 3.18(i) και τον ορισμό των συνόλων $2^{ης}$ κατηγορίας. □

Πόρισμα 3.22. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subset Y \subseteq X$. Αν A είναι ισχνό στο X και Y είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X, τότε, το σύνολο $Y \setminus A$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι $Y \setminus A$ είναι ισχνό στο X. Τότε, έχουμε $Y \subseteq (Y \setminus A) \cup A$ και δηλαδή, από Πρόταση 3.18(i) και (ii), το Y είναι ισχνό στο X ως υποσύνολο ένωσης ισχνών υποσυνόλων του X. Άτοπο. □

Πρόταση 3.23. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subset Y \subseteq X$. Αν A είναι ισχνό στο Y, τότε, το A είναι ισχνό στο X.*

Απόδειξη. Εφόσον A είναι ισχνό στο Y, $\exists \{N_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, όπου $\forall n \in \mathbb{N}$, N_n είναι πουθενά πυκνό στο Y και $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subset Y$. Από Πρόταση 3.12 , $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$N_n \text{ πουθενά πυκνό στο } Y \,\&\, Y \subseteq X \Longrightarrow N_n \text{ πουθενά πυκνό στο } X$$

Είναι άμεσο ότι το σύνολο $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ είναι ισχνό στο X. □

Πόρισμα 3.24. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subset Y \subseteq X$. Αν A είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X, τότε, το A είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο Y. Ισοδύναμα, αν $A \neq$ ισχνό στο X, τότε $A \neq$ισχνό στο Y.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι A είναι ισχνό στο Y. Επειδή $Y \subseteq X$, από Πρόταση 3.23 , θα ισχύει ότι A είναι επίσης ισχνό στο X. Άτοπο. □

Πρόταση 3.25. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subset Y \subseteq X$. Αν A είναι ισχνό στο X και το Y είναι ανοιχτό , τότε, το A είναι ισχνό στο Y.*

Απόδειξη. Εφόσον το A είναι ισχνό στο X, θα υπάρχει $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, όπου $\forall n \in \mathbb{N}$, N_n είναι πουθενά πυκνό στο X και $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subset Y$. Από Πρόταση 3.13 , $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$N_n \text{ πουθενά πυκνό στο } X \,\&\, Y \text{ ανοιχτό} \Longrightarrow N_n \text{ πουθενά πυκνό στο } Y$$

Είναι άμεσο ότι το σύνολο $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ είναι ισχνό στο Y. □

Πόρισμα 3.26. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subset Y \subseteq X$. Αν A είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο Y και Y ανοιχτό, τότε, το A είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X. Ισοδύναμα, αν $A \neq$ ισχνό στο Y και Y ανοιχτό, τότε $A \neq$ ισχνό στο X.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι A είναι ισχνό στο X. Επειδή Y είναι ανοιχτό, από Πρόταση 3.25, θα ισχύει ότι A είναι επίσης ισχνό στο Y. Άτοπο. $\square$

Ορισμός 3.27. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $R \subseteq X$. Θα λέμε ότι το σύνολο R είναι* ***συνισχνό (comeager)*** *στο X, αν το συμπλήρωμα $X \setminus R$ είναι ισχνό στο X.*

Ορισμός 3.28. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το σύνολο A είναι συνισχνό στο X αν περιέχει μια αριθμήσιμη τομή ανοιχτών και πυκνών υποσυνόλων του X.*

Πρόταση 3.29. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $R \subseteq X$ συνισχνό στο X και $Y \subseteq X$. Αν Y είναι ανοιχτό, τότε, το $Y \cap R$ είναι συνισχνό στο Y.*

Απόδειξη. Αφού R είναι συνισχνό στο X, το $X \setminus R$ είναι ισχνό στο X. Επειδή $Y \subseteq X$ είναι ανοιχτό, από Πρόταση 3.25, ισχύει πως

$$X \setminus R \text{ ισχνό στο } X \,\&\, Y \text{ ανοιχτό } \implies X \setminus R \text{ ισχνό στο } Y$$

και κατά συνέπεια, $Y \setminus (X \setminus R)$ είναι συνισχνό στο Y. Είναι άμεσο ότι το $Y \cap R = Y \setminus (X \setminus R)$ θα είναι συνισχνό στο Y. $\square$

Πόρισμα 3.30. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $R \subseteq X$ συνισχνό στο X και $Y \subseteq X$. Αν Y είναι ανοιχτό και $2^{ης}$ κατηγορίας στο X, τότε, το $Y \cap R$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο Y.*

Απόδειξη. Εφόσον $Y \subseteq X$ είναι ανοιχτό, από την προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι $R \cap Y$ είναι συνισχνό στο Y. Επιπλέον, ισχύει ότι

$$Y = (Y \cap R) \cup [Y \cap (X \setminus R)]$$

και έστω προς άτοπο ότι $Y \cap R$ είναι ισχνό στο X. Τότε, επειδή $Y \cap (X \setminus R) \subseteq X \setminus R$, από Πρόταση 3.18(i) και (ii), το Y είναι ισχνό στο X, ως ένωση ισχνών υποσυνόλων του X. Άτοπο. $\square$

3.3 Οι τελεστές $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$ και $\mathcal{H}$

Ορισμός 3.31. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x_0 \in X$. Θα λέμε ότι το x_0 είναι* ***ισχνό σχετικά με το*** *A , αν $\exists U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, τέτοιο ώστε το σύνολο $U \cap A$ είναι ισχνό στο X.*

Ορισμός 3.32. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x_0 \in X$. Θα λέμε ότι x_0 είναι $2^{ης}$* ***κατηγορίας σχετικά με το*** *A , αν $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, το σύνολο $U \cap A$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X.*

Παρατήρηση 3.33. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x_0 \in X$. Το x_0 είναι ισχνό σχετικά με το A, αν δεν είναι $2^{ης}$ κατηγορίας σχετικά με το A.*

Ισοδύναμα, το x_0 είναι $2^{ης}$ κατηγορίας σχετικά με το A, αν δεν είναι ισχνό σχετικά με το A.

Ορισμός 3.34. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x_0 \in X$. Θα λέμε ότι το x_0 είναι* ***heavy σχετικά με το*** *A , αν $\exists U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, τέτοιο ώστε κάθε $y \in U$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας σχετικά με το A.*

Ορισμός 3.35. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Η συνάρτηση $\mathcal{E} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ είναι ένας τελεστής που δέχεται ως όρισμα ένα $A \subseteq X$ και η εικόνα του είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του X, τα οποία είναι ισχνά σχετικά με το A. Έτσι, $\forall A \subseteq X$ έχουμε*

$$\mathcal{E}(A) = \{x \in X : x \text{ ισχνό σχετικά με το } A\}$$

Ορισμός 3.36. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Η συνάρτηση $\mathcal{S} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ είναι ένας τελεστής που δέχεται ως όρισμα ένα $A \subseteq X$ και η εικόνα του είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του X, τα οποία είναι $2^{ης}$ κατηγορίας σχετικά με το A. Έτσι, $\forall A \subseteq X$ έχουμε*

$$\mathcal{S}(A) = \{x \in X : x \ 2^{ης} \text{ κατηγορίας σχετικά με το } A\}$$

Ορισμός 3.37. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Η συνάρτηση $\mathcal{H} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ είναι ένας τελεστής που δέχεται ως όρισμα ένα $A \subseteq X$ και η εικόνα του είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του X, τα οποία είναι heavy σχετικά με το A. Έτσι, $\forall A \subseteq X$ έχουμε*

$$\mathcal{H}(A) = \{x \in X : x \text{ heavy σχετικά με το } A\}$$

Πρόταση 3.38. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν A είναι ισχνό στο X, τότε $\mathcal{S}(A) = \oslash$. Ισοδύναμα, αν $\mathcal{S}(A) \neq \oslash$, τότε το A είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $x_0 \in X$ που είναι $2^{ης}$ κατηγορίας σχετικά με το A. Τότε, $\exists U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$ και ώστε $U \cap A$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X. Επειδή το A είναι ισχνό στο X, από Πρόταση 3.18 (i) οποιοδήποτε $E \subseteq A$ θα είναι επίσης ισχνό στο X. Επιλέγοντας $E = U \cap A \subseteq A$, προκύπτει άτοπο. □

Παρατήρηση 3.39. *Αν $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$ ισχνό στο X, από Πρόταση 3.38 συμπεραίνουμε ότι κάθε $x \in X$ είναι ισχνό σχετικά με το A.*

Παρατήρηση 3.40. *Αν $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε από Παρατήρηση 3.33 έχουμε $\mathcal{E}(A) = X \setminus \mathcal{S}(A)$.*

Παρατήρηση 3.41. *Αν* $(X, \mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος και* $A \subseteq X$*, από ορισμό των heavy σημείων σχετικά με το* A*, παρατηρούμε ότι* $\mathcal{H}(A) = int_X(\mathcal{S}(A))$ *και δηλαδή, το* $\mathcal{H}(A)$ *είναι ανοιχτό υποσύνολο του* X*. Επίσης, από Παρατήρηση 3.40, είναι άμεσο ότι τα σύνολα* $\mathcal{E}(A)$ *και* $\mathcal{H}(A)$ *θα είναι ξένα μεταξύ τους.*

Πρόταση 3.42. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος και* $A \subseteq X$*. Τότε:*

(i) Το σύνολο $\mathcal{E}(A)$ *είναι ανοιχτό στο* X*.*

(ii) Το σύνολο $\mathcal{S}(A)$ *είναι κλειστό στο* X*.*

(iii) Το σύνολο $\mathcal{S}(A) \setminus \mathcal{H}(A)$ *είναι πουθενά πυκνό στο* X*.*

Απόδειξη. (i) Έστω $x_0 \in \mathcal{E}(A)$. Τότε, $\exists U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U_0$ και ώστε ώστε το $U \cap A$ είναι ισχνό στο X. Αρκεί να δειχτεί ότι $U \subseteq \mathcal{E}(A)$, ή ισοδύναμα, αν $y \in U \Longrightarrow y \in \mathcal{E}(A)$.

Έστω οποιοδήποτε $y_0 \in U$. Επειδή U είναι ανοιχτό, $\exists V \in \mathcal{T}$ ώστε $y_0 \in V \subseteq U$. Επιπλέον, ισχύει

$$V \subseteq U \Longrightarrow V \cap A \subseteq U \cap A$$

και αφού $U \cap A$ ισχνό στο X, από Πρόταση 3.18 (i) συμπεραίνουμε πως $V \cap A$ είναι ισχνό στο X. Αφού V είναι ανοιχτό, είναι άμεσο ότι το y_0 είναι ισχνό σχετικά με το A και δηλαδή $y_0 \in \mathcal{E}(A)$. Αφού $y_0 \in U$ ήταν τυχαίο, έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Άμεσο, από Παρατήρηση 3.40 επειδή $\mathcal{S}(A) = X \setminus \mathcal{E}(A)$ και δηλαδή, $\mathcal{S}(A)$ είναι κλειστό ως συμπλήρωμα ανοιχτού υποσυνόλου του X.

(iii) Από Παρατήρηση 3.41 θα ισχύει πως $\mathcal{H}(A) = int_X(\mathcal{S}(A))$. Αφού $\mathcal{S}(A)$ είναι κλειστό, από Πρόταση 2.42 (ii) έχουμε $\mathcal{S}(A) = cl_X(\mathcal{S}(A))$ και από Πρόταση 2.59 (i), ισχύει ότι

$$\partial\mathcal{S}(A) = cl_X(\mathcal{S}(A)) \setminus int_X(\mathcal{S}(A)) = \mathcal{S}(A) \setminus \mathcal{H}(A)$$

Και πάλι, επειδή $\mathcal{S}(A)$ είναι κλειστό, από Πρόταση 2.61 προκύπτει

$$int_X(\partial\mathcal{S}(A)) = \oslash \Longrightarrow int_X(\mathcal{S}(A) \setminus \mathcal{H}(A)) = \oslash$$

Από Πρόταση 3.5 έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 3.43. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος και* $A \subseteq X$*. Τότε, ισχύει* $A \cup \mathcal{S}(A) \subseteq cl_X(A)$*.*

Απόδειξη. Από Πρόταση 2.42 (i) ισχύει $A \subseteq cl_X(A)$ και δηλαδή, αρκεί να δειχθεί ότι $\mathcal{S}(A) \subseteq cl_X(A)$. Έστω $x_0 \in \mathcal{S}(A)$. Τότε, το x_0 είναι $2^{ης}$ κατηγορίας σχετικά με το A και οπότε, $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, έχουμε $U \cap A$ $2^{ης}$κατηγορίας στο X. Από Παρατήρηση 3.20 οφείλει $U \cap A \neq \oslash$ και εφόσον το U ήταν τυχαίο, έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 3.44. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν $\mathcal{H}(A) \neq \oslash$, τότε το σύνολο $A \cap \mathcal{H}(A)$ είναι $2^{ης}$κατηγορίας στο X.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in A \cap \mathcal{H}(A)$ και έστω προς άτοπο ότι $A \cap \mathcal{H}(A)$ είναι ισχνό στο X. Τότε, $x_0 \in \mathcal{E}(A \cap \mathcal{H}(A))$ και δηλαδή, $\exists U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$ και ώστε $U \cap A \cap \mathcal{H}(A)$ είναι ισχνό στο X. Επιπλέον, επειδή $x_0 \in \mathcal{H}(A)$ το οποίο είναι ανοιχτό, επιλέγουμε $U \subseteq \mathcal{H}(A)$ και δηλαδή έχουμε

$$U \cap A \cap \mathcal{H}(A) \text{ ισχνό στο } X \Longrightarrow U \cap A \text{ ισχνό στο } X \ (1)$$

Ταυτόχρονα, ισχύει $x_0 \in \mathcal{H}(A) \subseteq \mathcal{S}(A)$ και κατα συνέπεια, $\forall V \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in V$, θα ισχύει ότι $V \cap A$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X. Επιλέγοντας $V = U$, προκύπτει ότι $U \cap A$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X (2).

Από τις $(1), (2)$ προκύπτει άτοπο και επομένως, , το σύνολο $A \cap \mathcal{H}(A)$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X. □

Παρατήρηση 3.45. *Γνωρίζουμε ότι για κάποιο σύνολο $A \subseteq X$, θα ισχύει $\mathcal{E}(A) = X \setminus \mathcal{S}(A)$ και συνεπώς, το A μπορεί να εκφραστεί ως*

$$A = (A \cap \mathcal{E}(A)) \cup (A \cap \mathcal{S}(A))$$

Επιπλέον, $A \cap \mathcal{S}(A) = (A \cap \mathcal{H}(A)) \cup [A \cap (\mathcal{S}(A) \setminus \mathcal{H}(A))]$ για τα οποία, έχουμε αποδείξει ότι:

(i) Από Πρόταση 3.42(iii), έχουμε ότι $\mathcal{S}(A) \setminus \mathcal{H}(A)$ πουθενά πυκνό στο X και από Πρόταση 3.11 (i), το σύνολο $A \cap (\mathcal{S}(A) \setminus \mathcal{H}(A))$ είναι, επίσης, πουθενά πυκνό στο X.

(ii) Αν $\mathcal{H}(A) \neq \oslash$, τότε από Πρόταση 3.44, το σύνολο $A \cap \mathcal{H}(A)$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X.

3.4 Θεωρήματα για ισχνά σύνολα

Πρόταση 3.46. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ $2^{ος}$ αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε, το σύνολο $A \cap \mathcal{E}(A)$ είναι ισχνό στο X.*

Απόδειξη. Αφού $(X, \mathcal{T})$ $2^{ος}$ αριθμήσιμος, οφείλει να έχει μία αριθμήσιμη βάση περιοχών και θεωρούμε $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ αυτή τη βάση.

Έστω $x_0 \in A \cap \mathcal{E}(A)$. Επειδή $x_0 \in \mathcal{E}(A)$, $\exists U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U_0$, τέτοιο ώστε το $U \cap A$ είναι ισχνό στο X. Επειδή U είναι ανοιχτό και $\mathcal{B}$ είναι βάση, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_0 \in B_{n_0} \subseteq U$ και οπότε, ισχύει

$$B_{n_0} \subseteq U \Longrightarrow B_{n_0} \cap A \subseteq U \cap A$$

Επομένως, από Πρόταση 3.18(i) το $B_{n_0} \cap A$ είναι ισχνό στο X. Εφόσον το $x_0 \in A \cap \mathcal{E}(A)$ ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι $\forall x \in A \cap \mathcal{E}(A)$, υπάρχεουν $n \in \mathbb{N}$ και $B_n \in \mathcal{B}$, τέτοια ώστε $x \in B_n$ και $B_n \cap A$ είναι ισχνό στο X. Θεωρούμε αριθμήσιμο σύνολο δεικτών $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $\mathcal{E}(A) \subset \bigcup\limits_{n \in \mathcal{J}} B_n$ και $\forall n \in \mathcal{J}$, ισχύει πως $B_n \cap A$ είναι ισχνό στο X. Είναι άμεσο ότι

$$\mathcal{E}(A) \subset \bigcup_{n \in \mathcal{J}} B_n \Longrightarrow \mathcal{E}(A) \cap A \subset \bigcup_{n \in \mathcal{J}} B_n \cap A = \bigcup_{n \in \mathcal{J}} [B_n \cap A]$$

όπου, από Πρόταση 3.18(ii) οφείλει $\bigcup\limits_{n \in \mathcal{J}} [B_n \cap A]$ να είναι ισχνό στο X. Κατά συνέπεια, και πάλι από Πρόταση 3.18(i) , το $\mathcal{E}(A) \cap A$ είναι ισχνό στο X. □

Θεώρημα 3.47. *(Banach) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε, το σύνολο $A \cap \mathcal{E}(A)$ είναι ισχνό στο X.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in A \cap \mathcal{E}(A)$. Τότε, υπάρχει ανοιχτό $U \subset X$, με $x_0 \in U$, ώστε $U \cap A$ είναι ισχνό στο X. Αφού U είναι ανοιχτό, $\exists \delta > 0$ και ανοιχτή μπάλα $V_0 = B_\rho(x_0, \delta)$, τέτοια ώστε $V_0 \subseteq U$. Έχουμε

$$V_0 \subseteq U \Longrightarrow V_0 \cap A \subseteq U \cap A$$

και άρα, το $V_0 \cap A$ είναι ισχνό στο X. Εφόσον το $x_0 \in A \cap \mathcal{E}(A)$ ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι $\forall x \in A \cap \mathcal{E}(A)$, υπάρχει ανοιχτή μπάλα $V \subset X$, τέτοια ώστε $x \in V$ και $V \cap A \cap \mathcal{E}(A)$ είναι ισχνό στο X.

Θεωρούμε $\mathcal{I}$ ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και τη συλλογή ανοιχτών μπαλών $\mathcal{F} = \{V_a \subset X : a \in \mathcal{I}\}$ με τις εξής ιδιότητες:

(a) $\forall a \in \mathcal{I}$, το $V_a \cap A \cap \mathcal{E}(A)$ είναι ισχνό στο X.

(b) $\forall a, b \in \mathcal{I}$, όπου $a \neq b$, ισχύει $V_a \cap V_b = \oslash$.

(c) Η οικογένεια είναι κορεσμένη, δηλαδή, για οποιοδήποτε ανοιχτό, μη κενό $U \subset X$ με $U \cap V_a = \oslash$, $\forall a \in \mathcal{I}$, θα ισχύει ότι $U \cap A \cap \mathcal{E}(A)$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X.

Έχουμε ότι $A \cap \mathcal{E}(A) = (A \cap \mathcal{E}(A) \cap \bigcup\limits_{a \in \mathcal{I}} V_a) \cup (A \cap \mathcal{E}(A) \cap (X \setminus \bigcup\limits_{a \in \mathcal{I}} V_a))$ και ισχυριζόμαστε τα παρακάτω:

(i) $(A \cap \mathcal{E}(A) \cap (X \setminus \bigcup\limits_{a \in \mathcal{I}} V_a)$ είναι πουθενά πυκνό στο X.

(ii) $(A \cap \mathcal{E}(A) \cap \bigcup\limits_{a \in \mathcal{I}} V_a)$ είναι ισχνό στο X.

Για το (i): Έστω προς άτοπο ότι $A\cap\mathcal{E}(A)\cap(X\setminus\bigcup_{a\in\mathcal{I}}V_a)$ είναι κάπου πυκνό στο X.

Τότε, $int_X(cl_X(A\cap\mathcal{E}(A)\cap(X\setminus\bigcup_{a\in\mathcal{I}}V_a)))\neq\oslash$ και υπάρχει ανοιχτό, μη κενό $U_0\subset cl_X(A\cap\mathcal{E}(A)\cap(X\setminus\bigcup_{a\in\mathcal{I}}V_a))$. Για κάθε $a\in\mathcal{I}$, ισχύει

$$cl_X(X\setminus\bigcup_{a\in\mathcal{I}}V_a)\cap V_a=\oslash$$

και κατά συνέπεια, $\forall a\in\mathcal{I}$ έχουμε $U_0\cap V_a=\oslash$. Από (c), είναι άμεσο ότι $U_0\cap A\cap\mathcal{E}(A)$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X και άρα, από Παρατήρηση 3.20, οφείλει $U_0\cap A\cap\mathcal{E}(A)\neq\oslash$. Έστω $x_0\in U_0\cap A\cap\mathcal{E}(A)$. Επειδή $x_0\in\mathcal{E}(A)$, υπάρχει ανοιχτό $U_1\subset X$, με $x_0\in U_1$, ώστε $U_1\cap A$ είναι ισχνό στο X. Αφού $x_0\in U_1$, που είναι ανοιχτό, $\exists\delta>0$ και ανοιχτή μπάλα $V(x_0,\delta)$ ώστε $V(x_0,\delta)\subseteq U_1$. Κατά συνέπεια, έχουμε ότι

$$V(x_0,\delta)\subseteq U_1\Longrightarrow V(x_0,\delta)\cap A\subseteq U_1\cap A$$

και άρα, το $V(x_0,\delta)\cap A$ είναι ισχνό στο X (1).

Ταυτόχρονα, επειδή $x_0\in U_0$, που είναι ανοιχτό, επιλέγουμε κατάλληλα τη $V(x_0,\delta)$, έτσι ώστε $V(x_0,\delta)\subseteq U_0$. Είναι άμεσο ότι $\forall a\in\mathcal{I}$, ισχύει

$$V(x_0,\delta)\cap V_a=\oslash\Longrightarrow V(x_0,\delta)\notin\mathcal{F}$$

και συνεπώς, αφού $V(x_0,\delta)$ είναι ανοιχτό, θα ισχύει πως $V(x_0,\delta)\cap A$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X (2).

Από τις (1) , (2), προκύπτει άτοπο και δηλαδή, το σύνολο $A\cap\mathcal{E}(A)\cap(X\setminus\bigcup_{a\in\mathcal{I}}V_a)$ είναι πουθενά πυκνό στο X.

Για το (ii): Έχουμε ότι $(A\cap\mathcal{E}(A)\cap\bigcup_{a\in\mathcal{I}}V_a)=\bigcup_{a\in\mathcal{I}}[V_a\cap A\cap\mathcal{E}(A)]$. Για κάθε $a\in\mathcal{I}$, ισχύει πως $V_a\cap A\cap\mathcal{E}(A)$ είναι ισχνό στο X και δηλαδή, $\forall a\in\mathcal{I}$ υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\{N_a^n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$, όπου $\forall n\in\mathbb{N}$, N_a^n είναι πουθενά πυκνό στο X, και ισχύει

$$V_a\cap A\cap\mathcal{E}(A)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}N_a^n$$

Επομένως, έχουμε

$$\bigcup_{a\in\mathcal{I}}(V_a\cap A\cap\mathcal{E}(A))=\bigcup_{a\in\mathcal{I}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}N_a^n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{a\in\mathcal{I}}N_a^n$$

και θέτοντας $N^n=\bigcup_{a\in\mathcal{I}}N_a^n$, προκύπτει $\bigcup_{a\in\mathcal{I}}(V_a\cap A\cap\mathcal{E}(A))=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}N^n$. Αρκεί να δειχθεί ότι $\forall n\in\mathbb{N}$, το σύνολο N^n είναι πουθενά πυκνό στο X. Έστω προς άτοπο ότι για κάποιο $n\in\mathbb{N}$, το N^n είναι κάπου πυκνό στο X. Τότε, $int_X(cl_X(N^n) \neq \oslash$ και υπάρχει ανοιχτό, μη κενό $S_0 \subset cl_X(N^n)$. Επειδή $A \cap \mathcal{E}(A) \cap (X \setminus \bigcup_{a\in\mathcal{I}} V_a)$ είναι πουθενά πυκνό στο X και S_0 ανοιχτό, από Πρόταση 3.7(i) έχουμε

$$int_X(A \cap \mathcal{E}(A) \cap (X \setminus \bigcup_{a\in\mathcal{I}} V_a)) = \oslash$$

$$\Longrightarrow S_0 \nsubseteq A \cap \mathcal{E}(A) \cap (X \setminus \bigcup_{a\in\mathcal{I}} V_a)$$

και οπότε, οφείλει $S_0 \cap [A \cap \mathcal{E}(A) \cap \bigcup_{a\in\mathcal{I}} V_a] \neq \oslash$. Είναι άμεσο ότι $\exists a_0 \in \mathcal{I}$, ώστε $S_0 \cap V_{a_0} \neq \oslash$ και ισχύει:

$$N^n = N^n_{a_0} \cup (\bigcup_{\substack{\alpha\in\mathcal{I}\\ \alpha\neq a_0}} N^n_a)$$

$$\Longrightarrow cl_X(N^n) = cl_X(N^n_{a_0} \cup (\bigcup_{\substack{\alpha\in\mathcal{I}\\ \alpha\neq a_0}} N^n_a))$$

και από Πρόταση 2.42(v) προκύπτει

$$cl_X(N^n) = cl_X(N^n_{a_0}) \cup cl_X(\bigcup_{\substack{\alpha\in\mathcal{I}\\ \alpha\neq a_0}} N^n_a)$$

Για κάθε $a \in \mathcal{I}$, έχουμε $V_a \cap A \cap \mathcal{E}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N^n_a$ και συνεπώς, ισχύει $N^n_a \subset V_a$. Οπότε

$$cl_X(N^n) \subseteq cl_X(N^n_{a_0}) \cup cl_X(\bigcup_{\substack{\alpha\in\mathcal{I}\\ \alpha\neq a_0}} V_a)$$

$$\Longrightarrow cl_X(N^n) \cap V_{a_0} \subseteq [cl_X(N^n_{a_0}) \cup cl_X(\bigcup_{\substack{\alpha\in\mathcal{I}\\ \alpha\neq a_0}} V_a)] \cap V_{a_0}$$

$$\Longrightarrow cl_X(N^n) \cap V_{a_0} \subseteq [cl_X(N^n_{a_0}) \cap V_{a_0}] \cup [cl_X(\bigcup_{\substack{\alpha\in\mathcal{I}\\ \alpha\neq a_0}} V_a) \cap V_{a_0}] \ (3)$$

Για κάθε $a \neq a_0$, ισχύει $V_a \cap V_{a_0} = \oslash$ και επειδή είναι ανοιχτά, από Πόρταση 2.62 θα ισχύει ότι $cl_X(\bigcup_{\substack{\alpha\in\mathcal{I}\\ \alpha\neq a_0}} V_a) \cap V_{a_0} = \oslash$ και άρα, η (3) μετατρέπεται στην

$$cl_X(N^n) \cap V_{a_0} \subseteq cl_X(N^n_{a_0}) \cap V_{a_0} \subseteq cl_X(N^n_{a_0})$$

Επειδή $S_0 \subseteq cl_X(N_n)$, τότε

$$S_0 \cap V_{a_0} \subseteq cl_X(N^n) \cap V_{a_0} \subseteq cl_X(N^n_{a_0})$$

Το $S_0 \cap V_{a_0}$ είναι ανοιχτό, μη κενό υποσύνολο του X, και συνεπώς, έχουμε $V = S_0 \cap V_{a_0} \subseteq cl_X(N^n_{a_0})$, το οποίο είναι άτοπο, καθώς $N^n_{a_0}$ είναι πουθενά πυκνό στο X και από Πρόταση 3.5 οφείλει $int_X(cl_X(N^n_{a_0})) = \oslash$.

Επομένως, $\forall n \in \mathbb{N}$, το N^n είναι πουθενά πυκνό στο X και οπότε, το σύνολο

$$\bigcup_{a\in\mathcal{I}}[V_a \cap A \cap \mathcal{E}(A)] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N^n$$

θα είναι ισχνό στο X. Εφόσον ολοκληρώθηκε η απόδειξη των (i) και (ii), συμπεραίνυμε ότι το

$$A \cap \mathcal{E}(A) = \bigcup_{a\in\mathcal{I}}[V_a \cap A \cap \mathcal{E}(A)] \cup [(X \setminus \bigcup_{a\in\mathcal{I}} V_a) \cap A \cap \mathcal{E}(A)]$$

είναι ισχνό υποσύνολο του X. □

Πρόταση 3.48. *(Kuratowski) Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq X$ με X_i ισχνό στο X, $\forall i \in \mathcal{I}$. Αν X_i είναι ανοιχτό στο $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i$, τότε το συνόλο $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i$ είναι επίσης ισχνό στο X.[6]*

Πρόταση 3.49. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε, το σύνολο $A \cap \mathcal{E}(A)$ είναι ισχνό στο X.*

Απόδειξη. Για οποιοδήποτε $x \in A \cap \mathcal{E}(A)$, $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $U \cap A$ είναι ισχνό στο X. Θέτουμε $A \cap \mathcal{E}(A) = \{x_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ και δηλαδή, $\forall i \in \mathcal{I}$ υπάρχουν $U_i \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, όπου $U_i \cap A$ ισχνό στο X. Στη συνέχεια, θέτουμε $X_i = U_i \cap A$. Αφού $U_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i$ με $U_i \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, $\forall i \in \mathcal{I}$ και $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, από Πρόταση 2.65 έχουμε ότι U_i είναι ανοιχτό στο $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i$ και κατά συνέπεια, θα ισχύει ότι $U_i \cap A$ είναι ανοιχτό στο $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \cap A = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} (U_i \cap A)$. Άρα, X_i είναι ανοιχτό στο $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i$, $\forall i \in \mathcal{I}$ και συνεπώς, από Πρόταση 3.48, το σύνολο $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} (U_i \cap A)$ θα είναι ισχνό στο X. Αφού $A \cap \mathcal{E}(A) \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} (U_i \cap A)$, από Πρόταση 3.18(i), το σύνολο $A \cap \mathcal{E}(A)$ θα είναι ισχνό στο X.

□

Πρόταση 3.50. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν $\mathcal{S}(A) = \oslash$, τότε, το A είναι ισχνό στο X.*

Απόδειξη. Αφού $\mathcal{E}(A) = X \setminus \mathcal{S}(A)$, είναι άμεσο ότι $A = (A \cap \mathcal{E}(A)) \cup (A \cap \mathcal{S}(A))$ και επειδή $\mathcal{S}(A) = \oslash$, ισχύει $A = A \cap \mathcal{E}(A)$. Από Πρόταση 3.49 , το A είναι ισχνό στο X. □

Πόρισμα 3.51. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A\subseteq X$. Αν A είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X, τότε $\mathcal{S}(A)\neq\oslash$. Επιπλέον, $\exists U\in\mathcal{T}\setminus\oslash$ ώστε $U\cap A$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X.*

Πρόταση 3.52. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A\subseteq X$. Τότε, $\mathcal{S}(A)=\oslash$, αν και μόνο εάν, $\mathcal{H}(A)=\oslash$.*

Απόδειξη. $(\Longrightarrow)$ Άμεσο, αφού $\mathcal{H}(A)\subseteq\mathcal{S}(A)=\oslash$ και άρα, $\mathcal{H}(A)=\oslash$.

$(\Longleftarrow)$ Γνωρίζουμε ότι $\mathcal{S}(A)=\mathcal{H}(A)\cup(\mathcal{S}(A)\setminus\mathcal{H}(A))$, όπου $\mathcal{S}(A)\setminus\mathcal{H}(A)$ είναι πουθενά πυκνό στο X. Παρατηρούμε ότι

$$A=[A\cap\mathcal{E}(A)]\cup[A\cap\mathcal{H}(A)]\cup[A\cap(\mathcal{S}(A)\setminus\mathcal{H}(A))]$$

και από υπόθεση, $\mathcal{H}(A)=\oslash$. Συνεπώς, έχουμε

$$A=[A\cap\mathcal{E}(A)]\cup[A\cap(\mathcal{S}(A)\setminus\mathcal{H}(A))]$$

όπου, από Πρόταση 3.49 , $A\cap\mathcal{E}(A)$ είναι ισχνό στο X και επιπλέον, από Παρατήρηση 3.45(i) το $A\cap(\mathcal{S}(A)\setminus\mathcal{H}(A))$ είναι πουθενά πυκνό στο X. Επομένως, από Πρόταση 3.18(ii) συμπεραίνουμε πως το A είναι ισχνό στο X. Από Πρόταση 3.38 έχουμε ότι $\mathcal{S}(A)=\oslash$. □

Λήμμα 3.53. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A\subseteq X$. Τότε, υπάρχουν ξένα μεταξύ τους $S\subseteq A$ και $E\subseteq A$, όπου:*

(i) Το E είναι ισχνό στο X.

(ii) Κάθε $x\in S$ είναι heavy σχετικά με το A.

Απόδειξη. (i) Παρατηρούμε ότι

$$A=[A\cap\mathcal{E}(A)]\cup[A\cap\mathcal{H}(A)]\cup[A\cap(\mathcal{S}(A)\setminus\mathcal{H}(A))]$$

όπου, από Πρόταση 3.49, $A\cap\mathcal{E}(A)$ είναι ισχνό στο X και επιπλέον, από Παρατήρηση 3.45(i) το $A\cap(\mathcal{S}(A)\setminus\mathcal{H}(A))$ είναι πουθενά πυκνό στο X. Θέτοντας

$$E=[A\cap\mathcal{E}(A)]\cup[A\cap(\mathcal{S}(A)\setminus\mathcal{H}(A))]$$

και από Πρόταση 3.18(ii), προκύπτει ότι E είναι ισχνό στο X.

(ii) Άμεσο, αφού $A\cap\mathcal{H}(A)\subseteq\mathcal{H}(A)$ και δηλαδή, θέτοντας $S=A\cap\mathcal{H}(A)$, έχουμε ότι, αν $x\in S$, τότε, $x\in\mathcal{H}(A)$ και άρα, το x είναι heavy σχετικά με το A.

□

Λήμμα 3.54. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{F} = \{A_n \subseteq X : n \in \mathbb{N}\}$. Αν $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$, τότε το σύνολο*

$$E = \{x \in X : \exists n \in \mathbb{N} \, \text{ώστε} \, x \in A_n \cap (X \setminus \mathcal{H}(A_n))\}$$

είναι ισχνό στο X.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.53, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε $A_n = S_n \cup E_n$, όπου

(i) $S_n = A_n \cap \mathcal{H}(A_n)$.

(ii) $E_n = [A_n \cap \mathcal{E}(A_n)] \cup [A_n \cap (\mathcal{S}(A_n) \setminus \mathcal{H}(A_n))] = A_n \cap (X \setminus \mathcal{H}(A_n))$ θα είναι ισχνό στο X.

Έστω οποιοδήποτε $x_0 \in E$. Αφού $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ και $A_{n_0} \in \mathcal{F}$, ώστε $x_0 \in E_{n_0}$. Είναι άμεσο ότι $x_0 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ το οποίο, είναι ισχνό υποσύνολο του X. Επειδή το x_0 ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ και συνεπώς, από Πρόταση 3.18(ii), το E είναι ισχνό στο X. □

3.5 Χώροι Baire

Ορισμός 3.55. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ο $(X, \mathcal{T})$ θα καλείται **χώρος Baire**, αν για οποιοδήποτε αριθμήσιμη συλλογή $\mathcal{U} = \{U_n \in \mathcal{T} : U_n$ πυκνό στο $X, n \in \mathbb{N}\}$, ισχύει*

$$cl_X(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n) = X$$

Παρατήρηση 3.56. *Είναι ισοδύναμο να πούμε ότι: ο $(X, \mathcal{T})$ είναι χώρος Baire, αν για οποιοδήποτε αριθμήσιμη συλλογή $\mathcal{F} = \{F_n \subseteq X : F_n$ κλειστό& $int_X(F_n) = \oslash, n \in \mathbb{N}\}$, ισχύει*

$$int_X(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \oslash$$

Πρόταση 3.57. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Baire και $E \subset X$ ισχνό στο X. Τότε, ισχύει $int_X(E) = \oslash$.*

Απόδειξη. Αφού E είναι ισχνό στο X, από Ορισμό 3.15, θα υπάρχει $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, όπου $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n είναι κλειστό, με κενό εσωτερικό στο X και $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Επειδή $(X, \mathcal{T})$ είναι *Baire*, οφείλει $int_X(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \oslash$ και άρα, από Πρόταση 2.53(iv) ισχύει

$$E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \Longrightarrow int_X(E) \subseteq int_X(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \oslash$$

□

Πόρισμα 3.58. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ο $(X,\mathcal{T})$ είναι Baire αν και μόνο εάν κάθε $U \in \mathcal{T}$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω προς άτοπο ότι $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε V ισχνό στο X. Από Πρόταση 3.57 , κάθε ισχνό υποσύνολο του X εχει κενό εσωτερικό στο X και άρα $int_X(U) = \oslash$. Επιπλέον, αφού U ανοιχτό, μη κενό, από Πρόταση 2.53(ii) έχουμε ότι

$$\oslash \neq U = int_X(U) = \oslash$$

Άτοπο.

($\Longleftarrow$)Έστω προς άτοπο ότι ο $(X,\mathcal{T})$ δεν είναι *Baire*. Τότε, θα υπάρχει $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, όπου $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n είναι κλειστό και με κενό εσωτερικό στο X και τέτοιο ώστε $int_X(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n) \neq \oslash$. Απο Πρόταση 3.8, το F_n είναι πουθενά πυκνό στο X ,$\forall n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς, το σύνολο $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ είναι ισχνό στο X. Εφόσον $int_X(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n) \neq \oslash$, $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε

$$U \subseteq int_X(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)$$

και από Πρόταση 2.53(iv) προκύπτει

$$int_X(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \Longrightarrow U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

και δηλαδή, από Πρόταση 3.18(i) θα ισχύει

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \,\text{ισχνό στο}\; X \Longrightarrow U \,\text{ισχνό στο}\; X$$

Άτοπο, αφού U είναι ανοιχτό υποσύνολο του X. $\square$

Παρατήρηση 3.59. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ο $(X,\mathcal{T})$ είναι Baire αν και μόνο εάν, το $X \subseteq X$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X και δηλαδή, κάθε $x \in X$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας σχετικά με το X.*

Ένας χώρος Baire θα καλείται και homogeneous second category

Πρόταση 3.60. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Baire και $R \subseteq X$ συνισχνό στο X. Τότε, ισχύει $cl_X(R) = X$ και δηλαδή, κάθε συνισχνό υποσύνολο του X είναι πυκνό στο X.*

Απόδειξη. Αρκεί $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ να ισχύει ότι $U \cap cl_X(R) \neq \oslash$.

Έστω οποιοδήποτε $U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$. Αφού R συνισχνό στο X, το $E = X \setminus R \subset X$ είναι ισχνό στο X, όπου από Πρόταση 3.57 ισχύει $int_X(E) = \oslash$. Έχουμε ότι

$$U \nsubseteq int_X(E) \Longrightarrow U \cap (X \setminus int_X(E)) \neq \oslash$$

και από Πρόταση 2.55 (ii) προκύπτει

$$U \cap cl_X(X \setminus E) \neq \oslash \Longrightarrow U \cap cl_X(R) \neq \oslash$$

Εφόσον το U ήταν τυχαίο, ισχύει το ζητούμενο. □

Πρόταση 3.61. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Baire και $R \subseteq X$ συνισχνό στο X. Τότε, για οποιοδήποτε $U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, το $U \cap R$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X.*

Απόδειξη. Έστω οποιοδήποτε $U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$. Αφού $(X, \mathcal{T})$ είναι *Baire*, από Πόρισμα 3.58 το U είναι $2^{ης}$κατηγορίας στο X. Επειδή R συνισχνό στο X και U ανοιχτό και $2^{ης}$ κατηγορίας στο X, από Πόρισμα 3.26 συμπεραίνουμε ότι

$$U \cap R \neq \text{ ισχνό στο } R \,\&\, U \text{ ανοιχτό} \Longrightarrow U \cap R \neq \text{ ισχνό στο } X$$

Εφόσον U ήταν τυχαίο, ισχύει το ζητούμενο.

□

Πρόταση 3.62. *Έστω Baire και $R \subseteq X$ συνισχνό στο X. Τότε, ισχύουν:*

(i) $X \subseteq \mathcal{H}(R)$ *και δηλαδή* $X \setminus \mathcal{H}(R) = \oslash$.

(ii) *Το ζεύγος* $(R, \mathcal{T}_R)$ *θα είναι επίσης χώρος Baire.*

Απόδειξη. (i) Έστω οποιοδήποτε $x_0 \in X$ και έστω προς άτοπο ότι $x_0 \notin \mathcal{H}(R)$. Τότε, $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, $\exists V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ με $V \subseteq U$, το $V \cap R$ είναι ισχνό στο X. Από Πρόταση 3.61 προκύπτει άτοπο.

(ii) Αρκεί να δειχθεί ότι οποιοδήποτε ανοιχτό σύνολο στο R είναι και $2^{ης}$ κατηγορίας στο R.

Έστω προς άτοπο ότι $\exists U_R \in \mathcal{T}_R \setminus \oslash$ ώστε U_R ισχνό στο R. Τότε, $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $U_R = U \cap R$ και επειδή $R \subseteq X$, από Πρόταση 3.23 έχουμε ότι

$$U \cap R \text{ ισχνό στο } R \Longrightarrow U \cap R \text{ ισχνό στο } X$$

Από Πρόταση 3.61 προκύπτει άτοπο. □

Παρατήρηση 3.63. *(i) Αν $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Baire και $R \subseteq X$ συνισχνό στο X, τότε $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, θα ισχύει $U = \mathcal{H}(R \cap U)$.*

(ii) Αν $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Baire και $R \subseteq X$ συνισχνό στο X, τότε $\forall U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, το ζέυγος $(R \cap U, \mathcal{T}_{R \cap U})$ θα είναι χώρος Baire.

Πρόταση 3.64. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος* $Baire$, $R \subseteq X$ *συνισχνό στο* X *και* $U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$. *Τότε, το* $U \cap R$ *είναι:*

(i) *συνισχνό στο* U

(ii) $2^{ης}$ *κατηγορίας στο* U

(iii) *πυκνό στο* U

Απόδειξη. (i) Άμεσο από Πρόταση 3.29.

(ii) Αφού $(X, \mathcal{T})$ είναι $Baire$, από Πρόταση 3.58 το U είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X και από Πόρισμα 3.30, έχουμε το ζητούμενο.

(iii) Έστω $V_0 \in \mathcal{T}_U \setminus \oslash$ και έστω προς άτοπο ότι $V_0 \cap (U \cap R) = V_0 \cap R = \oslash$. Αφού $V_0 \in \mathcal{T}_U \setminus \oslash$ και $U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, από Πρόταση 2.66 θα ισχύει ότι $V_0 \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ και δηλαδή $\exists V_0 \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ώστε $V_0 \cap R = \oslash$. Επειδή $(X, \mathcal{T})$ είναι $Baire$ και R είναι συνισχνό στο X, από Πρόταση 3.60 το R είναι πυκνό στο X και οπότε, $\forall V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ θα ισχύει $V \cap R \neq \oslash$. Επιλέγοντας $V = V_0$ προκύπτει άτοπο. Συνεπώς, το $U \cap R$ είναι πυκνό στο U. $\square$

4 Η έννοια της περίπου συνέχειας

Στο πρωτότυπο άρθρο [7] αναλύεται διεξοδικά η έννοια των σημείων του πεδίου ορισμού μια συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, στα οποία η f είναι "densely apporached". Συγκεκρμένα, αν $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, η f είναι densely approached στο (ξ, η) αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτή περιοχή του (ξ, η), τέτοια ώστε το σύνολο $\{(x, y) \in U : |f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon\}$ είναι πυκνό στο U. Η συγκεκριμένη ιδιότητα γενικεύεται στην έννοια της περίπου συνέχειας, όπως αναφέρεται στο [8].

Ορισμός 4.1. *Έστω $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{V})$ τοπολογικοί χώροι, μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ και $x_0 \in X$. Η f καλείται* ***περίπου συνεχής*** *στο x_0 , αν $\forall G \in \mathcal{V}$ με $f(x_0) \in G$, $\exists U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, τέτοιο ώστε $U \subseteq cl_X(f^{-1}[G])$. Ισοδύναμα, η f είναι περίπου συνεχής στο x_0, αν $\forall G \in \mathcal{V}$ με $f(x_0) \in G$, ισχύει $x_0 \in int_X(cl_X(f^{-1}[G]))$. Αν η $f : X \longrightarrow Y$ είναι περίπου συνεχής σε κάθε $x \in X$, τότε θα λέγεται περίπου συνεχής.*

Πόρισμα 4.2. *Έστω $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{V})$ τοπολογικοί χώροι, συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ περίπου συνεχής και $U \subseteq X$. Αν U είναι ανοιχτό και μη κενό, τότε, η συνάρτηση $f|_U : U \longrightarrow Y$ είναι περίπου συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω ο τοπολογικός υπόχωρος $(U, \mathcal{T}_U)$ και θεωρούμε τυχαία $x_0 \in U$ και $G \in \mathcal{V}$ με $f(x_0) \in G$. Αφού f είναι περίπου συνεχής στο x_0, $\exists V \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in V$ και ώστε $V \subseteq cl_X(f^{-1}[G])$. Αφού $U \in \mathcal{T}$ και $V \in \mathcal{T}$, θέτουμε $V_U = U \cap V$ και δηλαδή $V_U \in \mathcal{T}$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $x_0 \in V_U$ και $V_U \subseteq V \subseteq cl_X(f^{-1}[G])$. Επειδή $U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ και $V_U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, με $V_U \subseteq U$, από Πρόταση 2.65 θα ισχύει ότι το $V_U \in \mathcal{T}_U \setminus \oslash$. Εφόσον τα x_0 και G ήταν τυχαία, συμπεραίνουμε πως $\forall x \in U$ και $\forall G \in \mathcal{V}$ με $f(x) \in G$, $\exists V_U \in \mathcal{T}_U$, με $x \in V_U$ και ώστε $V_U \subseteq cl_X(f^{-1}[G])$. □

Σε αυτο σημείο, υπενθυμίζουμε ότι αν $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, έχουμε

$$\mathcal{S}(A) = \{x \in X : x \text{ είναι } \ 2^{ης} \text{ κατηγορίας σχετικά με το } A\}$$

$$= \{x \in X : \forall U \in \mathcal{T} \text{ με } x \in U, \text{ το } U \cap A \text{ είναι } 2^{ης} \text{ κατηγορίας στο } X\}$$

Πρόταση 4.3. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το σύνολο $\mathcal{S}(A)$ έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) $A \subseteq B \Longrightarrow \mathcal{S}(A) \subseteq \mathcal{S}(B)$

(ii) $\mathcal{S}(\mathcal{S}(A)) \subseteq \mathcal{S}(A)$

(iii) $\mathcal{S}(A \cup B) = \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B)$

Απόδειξη. (i) Έστω $A \subseteq B$ και τυχαίο $x_0 \in \mathcal{S}(A)$. Τότε, $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$ θα ισχύει ότι $U \cap A$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X. Έχουμε ότι

$$A \subseteq B \Longrightarrow U \cap A \subseteq U \cap B$$

και από Πρόταση 3.21 , το σύνολο $U \cap B$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X. Αφού το U ήταν τυχαίο, έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Έστω $x_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{S}(A))$ και έστω οποιοδήποτε $U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$. Τότε, $U \cap \mathcal{S}(A)$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X και από Παρατήρηση 3.20 θα ισχύει $U \cap \mathcal{S}(A) \neq \oslash$. Έστω, τώρα, οποιοδήποτε $y_0 \in U \cap \mathcal{S}(A)$. Επειδή $y_0 \in U$, το οποίο είναι ανοιχτό, από Πρόταση 2.18 $\exists V \in \mathcal{T}$ ώστε $y_0 \in V \subseteq U$. Επιπλέον, επειδή $y_0 \in \mathcal{S}(A)$ και $y_0 \in V$, όπου V ανοιχτό, το σύνολο $V \cap A$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X. Εφόσον y_0 ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε πως $\forall V \in \mathcal{T}$, όπου $V \subseteq U$ και $V \cap \mathcal{S}(A) \neq \oslash$, το σύνολο $V \cap A$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X. Εφόσον, U ήταν επίσης τυχαίο, προκύπτει ότι $U \cap A$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X και συνεπώς, έχουμε το ζητούμενο.

(iii) Έχουμε ότι

$$\mathcal{S}(A) = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{T} \text{ με } x \in U, \text{ το } U \cap A \text{ είναι } 2^{ης} \text{ κατηγορίας στο } X\}$$

και επίσης

$$\mathcal{S}(B) = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{T} \text{ με } x \in U, \text{ το } U \cap B \text{ είναι } 2^{ης} \text{ κατηγορίας στο } X\}$$

Έστω $x_0 \in \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B)$ και έστω $U \in \mathcal{T}$, με $x_0 \in U$. Τότε είτε $U \cap A$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X, είτε $U \cap B$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X και οπότε

$$(U \cap A) \cup (U \cap B) \text{ είναι } 2^{ης} \text{ κατηγορίας στο } X$$

$$\Longrightarrow U \cap (A \cup B) \text{ είναι } 2^{ης} \text{ κατηγορίας στο } X$$

Εφόσον ισχύει $\forall U \in \mathcal{T}$, με $x_0 \in U$, είναι άμεσο ότι

$$x_0 \in \{x \in X : \forall U \in \mathcal{T} \text{ με } x \in U, \text{ το } U \cap (A \cup B) \text{ είναι } 2^{ης} \text{ κατηγορίας στο } X\} = \mathcal{S}(A \cup B)$$

Επειδή το x_0 που επιλέχθηκε ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B) \subseteq \mathcal{S}(A \cup B)$.

Αντίστροφα, έστω οποιοδήποτε $x_0 \in \mathcal{S}(A \cup B)$ και έστω προς άτοπο ότι $x_0 \in \mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B)$. Τότε, το x_0 είναι ισχνό σχετικά με τα A και B, οπότε

$$\exists U_1 \in \mathcal{T} \text{ με } x_0 \in U_1 \,\&\, U_1 \cap A \text{ ισχνό στο } X$$

και ταυτόχρονα

$$\exists U_2 \in \mathcal{T} \text{ με } x_0 \in U_2 \,\&\, U_2 \cap B \text{ ισχνό στο } X$$

Αφού $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ και $U_1 \cap U_2 \neq \oslash$, επιλέγουμε $U = U_1 \cap U_2$ και δηλαδή $U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$. Επιπλέον, θα ισχύει

$$U \cap A \subseteq U_1 \cap A \,\&\, U \cap B \subseteq U_2 \cap B$$

και άρα, από Πρόταση 3.18(i), οφείλει $U \cap A$ ισχνό στο X και $U \cap B$ ισχνό στο X. Κατ'επέκταση, από 3.18(ii) έχουμε $(U \cap A) \cup (U \cap B)$ ισχνό στο X και συνεπώς, προκύπτει ότι

$$\exists U \in \mathcal{T} \text{ με } x_0 \in U \,\&\, (U \cap A) \cup (U \cap B) \text{ ισχνό στο } X$$

$$\Longrightarrow \exists U \in \mathcal{T} \text{ με } x_0 \in U \,\&\, U \cap (A \cup B) \text{ ισχνό στο } X \ (1)$$

Επειδή, από υπόθεση, έχουμε $x_0 \in \mathcal{S}(A \cup B)$, τότε ισχύει πως

$$\forall V \in \mathcal{T} \text{ με } x_0 \in V, \text{ το } V \cap (A \cup B) \text{ είναι } 2^{ης} \text{ κατηγορίας στο } X \ (2)$$

Από τις $(1), (2)$ καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως, θα πρέπει

$$x_0 \in X \setminus (\mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B)) \Longrightarrow x_0 \in (X \setminus \mathcal{E}(A)) \cup (X \setminus \mathcal{E}(B))$$

και από Παρατήρηση 3.40, θα ισχύει ότι $x_0 \in \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B)$. Εφόσον το x_0 που επιλέχθηκε ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε πως $\mathcal{S}(A \cup B) \subseteq \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B)$. □

Πρόταση 4.4. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq X$. Τότε $\mathcal{S}(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{S}(A_i)$.*

Απόδειξη. Ισχύει πως

$$\mathcal{S}(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i) = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{T} \text{ με } x \in U, \text{ το } U \cap \bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i \text{ είναι } 2^{ης} \text{ κατηγορίας στο } X\}$$

Έστω $x_0 \in \mathcal{S}(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i)$ και έστω προς άτοπο ότι $\exists i_0 \in \mathcal{I}$, ώστε το x_0 να είναι ισχνό σχετικά με το A_{i_0}. Τότε $\exists U \in \mathcal{T}$, με $x_0 \in U$ και ώστε το $U \cap A_{i_0}$ είναι ισχνό στο X. Έχουμε ότι

$$U \cap \bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i \subseteq U \cap A_{i_0}$$

και άρα, από Πρόταση 3.18(i), το $U \cap \bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$ θα είναι, επίσης, ισχνό στο X. Άτοπο. Επομένως, $\forall i \in \mathcal{I}$ ισχύει πως το x_0 είναι $2^{ης}$ κατηγορίας σχετικά με το A_i και άρα

$$x_0 \in \{x \in X : \forall U \in \mathcal{T} \text{ με } x \in U, \forall i \in \mathcal{I} \text{ το } U \cap A_i \text{ είναι } 2^{ης} \text{ κατηγορίας στο } X\} = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{S}(A_i)$$

Εφόσον το $x_0 \in \mathcal{S}(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i)$ που επιλέχθηκε ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{S}(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{S}(A_i)$. □

Πρόταση 4.5. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Baire και $A \subseteq X$. Τότε, ισχύει $X \setminus \mathcal{S}(A) \subseteq int_X(\mathcal{S}(X \setminus A))$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in X \setminus \mathcal{S}(A)$. Τότε, $\exists U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$ και ώστε $U \cap A$ ισχνό στο X και θεωρούμε τυχαία $y_0 \in U$ και $V \in \mathcal{T}$ με $y_0 \in V$. Αφού $U \cap V \neq \oslash$ και είναι ανοιχτά, θέτουμε $G = U \cap V$, όπου θα ισχύει $G \in \mathcal{T} \setminus \oslash$. Έχουμε ότι

$$G = (G \cap A) \cup (G \cap (X \setminus A))$$

και επειδή $G \cap A \subseteq U \cap A$, από Πρόταση 3.18(i) το $G \cap A$ είναι ισχνό στο X. Αφού $(X,\mathcal{T})$ είναι *Baire* και $G \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, από Πρόταση 3.58, το G είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X και συνεπώς, το $G \cap (X \setminus A)$ θα είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X. Επιπλέον. έχουμε

$$G \cap (X \setminus A) \subseteq V \cap (X \setminus A)$$

και από Πρόταση 3.21 , το $V \cap (X \setminus A)$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας στο X. Εφόσον το V ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι $y_0 \in \mathcal{S}(X \setminus A)$ και επειδή το $y_0 \in U$ ήταν τυχαίο, έπεται ότι

$$x_0 \in U \subseteq \mathcal{S}(X \setminus A) \Longrightarrow x_0 \in int_X(\mathcal{S}(X \setminus A))$$

□

Πρόταση 4.6. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $F : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ με απεικόνιση*

$$F(A) = A \cup \mathcal{S}(A), \forall A \subseteq X.$$

Τότε, το F είναι ένας τελεστής κλειστότητας και δηλαδή, ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $F(\oslash) = \oslash$

(ii) $A \subseteq F(A)$

(iii) $F(F(A)) = F(A)$

(iv) $F(A \cup B) = F(A) \cup F(B)$

Απόδειξη. (i) Άμεσο.
(ii) Προκύπτει από Πρόταση 4.3(i).
(iii) Έστω $x_0 \in F(F(A))$. Παρατηρούμε ότι

$$F(F(A)) = F(A \cup \mathcal{S}(A)) = A \cup \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(A \cup \mathcal{S}(A))$$

και από Πρόταση 4.3(iii) προκύπτει

$$F(F(A)) = A \cup \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(\mathcal{S}(A)) = A \cup \mathcal{S}(A)$$

και άρα $F(F(A)) = F(A)$.

(iv) Και πάλι, από Πρόταση 4.3(iii) έχουμε

$$\mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B) \subseteq \mathcal{S}(A \cup B)$$

$$\Longrightarrow A \cup B \cup \mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B) \subseteq A \cup B \cup \mathcal{S}(A \cup B)$$
$$\Longrightarrow F(A) \cup F(B) \subseteq F(A \cup B)$$

Αντίστροφα, έστω ότι για κάποιο $x_0 \in X$ έχουμε $x_0 \notin F(A) \cup F(B)$. Τότε, οφείλει $x_0 \notin \mathcal{S}(A)$, $x_0 \notin \mathcal{S}(B)$ και δηλαδή

$$x_0 \in X \setminus (\mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(B)) \Longrightarrow x_0 \in (X \setminus \mathcal{S}(A)) \cap (X \setminus \mathcal{S}(B))$$

Από Παρατήρηση 3.40, θα ισχύει ότι $x_0 \in \mathcal{E}(A) \cap \mathcal{E}(B)$ και οπότε, το x_0 είναι ισχνό σχετικά με τα A και B. Επομένως, $\exists U_1 \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U_1$, ώστε $U_1 \cap A$ ισχνό στο X και όμοια, $\exists U_2 \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U_2$, ώστε $U_2 \cap A$ ισχνό στο X. Εφόσον $U_1 \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ και $U_2 \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, θέτουμε $U = U_1 \cap U_2$ και δηλαδή $U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$. Έχουμε

$$U \cap (A \cup B) \subseteq (U \cap A) \cup (U \cap B)$$

και επειδή $U \subseteq U_1$ και $U \subseteq U_2$, προκύπτει

$$U \cap (A \cup B) \subseteq (U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap B)$$

Από Πρόταση 3.18(i) και (ii), συμπεραίνουμε πως $U \cap (A \cup B)$ είναι ισχνό στο X και άρα, το x_0 είναι ισχνό σχετικά με το $A \cup B$. Είναι άμεσο ότι $x_0 \notin F(A \cup B)$. $\square$

Ορισμός 4.7. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και ο τελεστής F που ορίστηκε στην Πρόταση 4.6. Θα λέμε ότι το A είναι $F-$κλειστό, αν ισχύει ότι $A = F(A)$.*

Πόρισμα 4.8. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε ισχύουν:*

(i) Το $\oslash$ είναι $F-$κλειστό.

(ii) Το X είναι $F-$κλειστό.

(iii) Αν $A.B \subseteq X$ είναι $F-$κλειστά, τότε το $A \cup B$ είναι $F-$κλειστό.

Απόδειξη. (i) Άμεσο από Πρόταση 4.6(i).

(ii) Από Πρόταση 4.6(ii) έχουμε

$$X \subseteq F(X) = X \cup \mathcal{S}(X) \subseteq X \cup X = X$$

και οπότε $X = F(X)$.

(iii) Αν A, B είναι $F-$κλειστά, τότε $A = F(A)$ και $B = F(B)$ και δηλαδή $A \cup B = F(A) \cup F(B)$. Από Πρόταση 4.6(iv) προκύπτει

$$A \cup B = F(A) \cup F(B) = F(A \cup B)$$

□

Πρόταση 4.9. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subseteq X$. Αν A_i είναι $F-$κλειστό, $\forall i \in \mathcal{I}$, τότε το σύνολο $\bigcap\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i$ είναι $F-$κλειστό.*

Απόδειξη. Αφού $\bigcap\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i \subseteq X$, από Πρόταση 4.6(ii) έχουμε

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i \subseteq F(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i \cup \mathcal{S}(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i)$$

Από Πρόταση 4.4 ισχύει ότι $\mathcal{S}(\bigcap\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i) \subseteq \bigcap\limits_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{S}(A_i)$ και οπότε

$$F(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i \cup \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{S}(A_i) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} [A_i \cup \mathcal{S}(A_i)] = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} F(A_i)$$

Επειδή A_i είναι $F-$κλειστό, $\forall i \in \mathcal{I}$, ισχύει $F(A_i) = A_i$ και κατ'επέκταση $\bigcap\limits_{i \in \mathcal{I}} F(A_i) = \bigcap\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i$. Συνεπώς, προκύπτει ότι

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i \subseteq F(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in \mathcal{I}} F(A_i) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$$

και άρα $\bigcap\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i = F(\bigcap\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i)$. □

Πρόταση 4.10. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Θεωρούμε, επίσης, τη συλλογή $\mathcal{T}_F = \{X \setminus A : A \subseteq X,\ A$ είναι $F-$ κλειστό$\}$. Τότε, η $\mathcal{T}_F$ είναι τοπολογία στο X και θα λέμε ότι είναι τοπολογία που επάγεται από το F.*

Απόδειξη. (*i*) Από Πόρισμα 4.8(ii), το X είναι $F-$κλειστό και επειδή $\oslash = X \setminus X$, οφείλει $\oslash \in \mathcal{T}_F$. Όμοια, από Πόρισμα 4.8(i), το $\oslash$ είναι $F-$κλειστό και αφού $X = X \setminus \oslash$, έπεται ότι $X \in \mathcal{T}_F$.

(ii) Έστω $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_F$. Τότε, υπάρχουν $F-$κλειστά $A_1, A_2 \subseteq X$, ώστε $U_1 = X \setminus A_1$ και $U_2 = X \setminus A_2$. Έχουμε

$$U_1 \cap U_2 = (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2) = X \setminus (A_1 \cup A_2)$$

Από 4.8(iii), αν A_1, A_2 είναι $F-$κλειστά, τότε το $A_1 \cup A_2$ είναι, επίσης, $F-$κλειστό και οπότε $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_F$.

(iii) Έστω $\mathcal{I}$ μη κενό σύνολο και $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{T}_F$. Τότε $\forall i \in \mathcal{I}\ \exists A_i \subseteq X$ $F-$κλειστό, τέτοιο ώστε $U_i = X \setminus A_i$. Έχουμε

$$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} (X \setminus A_i) = X \setminus \bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$$

Από Πρόταση 4.9, αν A_i είναι $F-$κλειστό, $\forall i \in \mathcal{I}$, τότε το $\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i$ είναι, επίσης, $F-$κλειστό και άρα $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}_F$.

□

Πρόταση 4.11. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Baire. Θεωρούμε $\mathcal{T}_F = \{X \setminus A : A \subseteq X,\ A \text{ είναι } F-\text{κλειστό}\}$ η τοπολογία που επάγεται από το F. Τότε, ισχύει $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_F$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι κάθε $\mathcal{T}-$κλειστό είναι και $\mathcal{T}_F-$κλειστό. Ισοδύναμα, αρκεί να δειχτεί πως

$$A = F(A) \iff \mathcal{S}(A) \subseteq A$$

Πράγματι, έστω $x_0 \in \mathcal{S}(A)$. Αν $x_0 \notin A$, τότε, αφού A είναι $\mathcal{T}-$κλειστό, το $X \setminus A$ είναι ανοιχτό και από Πρόταση 2.18, $\exists U \in \mathcal{T}$ ώστε $x_0 \in U \subseteq X \setminus A$. Όμως, αυτό συνεπάγεται $U \cap A = \oslash$ και οπότε $U \cap A$ ισχνό στο X. Επομένως, ισχύει $x_0 \notin \mathcal{S}(A)$, το οποίο είναι άτοπο από υπόθεση. Άρα, οφείλει $x_0 \in A$ και αφού το x_0 ήταν τυχαίο, προκύπτει $\mathcal{S}(A) \subseteq A$.

Αντίστορφα, αν $\mathcal{S}(A) \subseteq A$, έχουμε $A = A \cup \mathcal{S}(A) = F(A)$. □

Ορισμός 4.12. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και η τοπολογία $\mathcal{T}_F = \{X \setminus A : A \subseteq X,\ A \text{ είναι } F-\text{κλειστό}\}$. Ορίζουμε τα παρακάτω:*

(i) Η κλειστότητα του A ως προς $\mathcal{T}_F$ θα συμβολίζεται με $cl_F(A)$ και ισούται με

$$cl_F(A) = A \cup \mathcal{S}(A)$$

(ii) Το εσωτερικό του A ως προς $\mathcal{T}_F$ θα συμβολίζεται με $int_F(A)$ και από Πρόταση 2.55(i), θα ισούται με

$$int_F(A) = A \setminus cl_F(X \setminus A)$$

Πρόταση 4.13. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Baire και θεωρούμε επίσης την τοπολογία $\mathcal{T}_F = \{X \setminus A : A \subseteq X,\ A$ είναι $F -$ κλειστό$\}$. Τότε, $\forall A \subseteq X$ ισχύει*

$$int_F(cl_F(A)) = int_X(\mathcal{S}(A))$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\forall B \subseteq X$, ισχύει

$$cl_F(B) \subseteq B \cup \mathcal{S}(B)$$

Από Πρόταση 3.43 προκύπτει

$$cl_F(B) \subseteq cl_X(B)$$

και εξίσου

$$cl_F(X \setminus B) \subseteq cl_X(X \setminus B)$$

$$\Longrightarrow X \setminus cl_X(X \setminus B) \subseteq X \setminus cl_F(X \setminus B)$$

και άρα, από Πρόταση 2.55(i) έχουμε

$$int_X(B) \subseteq int_F(B) \overset{B=\mathcal{S}(A)}{\Longrightarrow} int_X(\mathcal{S}(A)) \subseteq int_F(\mathcal{S}(A))$$

Απόο Πρόταση 2.53(iv) έχουμε $int_F(\mathcal{S}(A)) \subseteq int_F(A \cup \mathcal{S}(A)) = int_F(cl_F(A))$ και συνεπώς

$$int_X(\mathcal{S}(A)) \subseteq int_F(cl_F(A)) \ (1)$$

Αντίστροφα, θέτοντας $B = cl_F(A) = A \cup \mathcal{S}(A)$ και από Πρόταση 2.55(i) έχουμε

$$int_F(cl_F(A)) = int_F(B) = B \setminus cl_F(X \setminus B)$$

$$= B \setminus [(X \setminus B) \cup \mathcal{S}(X \setminus B)]$$

$$= B \cap [B \cap (X \setminus \mathcal{S}(X \setminus B))]$$

και από Πρόταση 4.5 θα ισχύει

$$B \cap [B \cap (X \setminus \mathcal{S}(X \setminus B))] \subseteq B \cap int_X(\mathcal{S}(B))$$

$$\Longrightarrow int_F(cl_F(A)) \subseteq B \cap int_X(\mathcal{S}(B)) \subseteq int_X(\mathcal{S}(B)) = int_X(\mathcal{S}(A \cup \mathcal{S}(A)))$$

και από Πρόταση 4.3(ii), (iii) και Πρόταση 2.53(iv) έχουμε

$$int_X(\mathcal{S}(A \cup \mathcal{S}(A))) = int_X(\mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(\mathcal{S}(A)) \subseteq int_X(\mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(A)) = int_X(\mathcal{S}(A))$$

και συνεπώς

$$int_F(cl_F(A)) \subseteq int_X(\mathcal{S}(A)) \ (2)$$

Από τις $(1), (2)$ προκύπτει το ζητούμενο. □

Ορισμός 4.14. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, η τοπολογία $\mathcal{T}_F = \{X \setminus A : A \subseteq X,\ A$ είναι $F-$ κλειστό$\}$ και $x_0 \in X$. Θα λέμε ότι η f είναι περίπου συνεχής στο x_0 ως προς $\mathcal{T}_F$, αν $\forall G \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό, με $f(x_0) \in G$, $\exists V \in \mathcal{T}_F$ με $x_0 \in V$, τέτοιο ώστε $V \subseteq cl_F(f^{-1}[G])$. Ισοδύναμα, η f είναι περίπου συνεχής στο x_0 ως προς $\mathcal{T}_F$, αν $\forall G \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό, με $f(x_0) \in G$, ισχύει $x_0 \in int_F(cl_F(f^{-1}[G]))$.*

Πρόταση 4.15. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Baire και συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Έστω, επίσης, η τοπολογία $\mathcal{T}_F = \{X \setminus F(A) : A \subseteq X\}$ και τυχαίο $x_0 \in X$. Τότε, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Για κάθε ανοιχτό $G \subseteq \mathbb{R}$ με $f(x_0) \in G$, το x_0 είναι heavy σχετικά με το $f^{-1}[G]$.

(ii) Η f είναι περίπου συνεχής στο x_0 ως προς $\mathcal{T}_F$.

Απόδειξη. Έστω ότι για οποιοδήποτε $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό, μη κενό και ώστε $f(x_0) \in G$ ισχύει $x_0 \in \mathcal{H}(f^{-1}[G])$. Έχουμε

$$x_0 \in \mathcal{H}(f^{-1}[G]), \forall G \subseteq \mathbb{R} \text{ ανοιχτό, μη κενό}$$

και από Παρατήρηση 3.41

$$\Longleftrightarrow x_0 \in int_X(\mathcal{S}(f^{-1}[G]), \forall G \subseteq \mathbb{R} \text{ ανοιχτό, μη κενό}$$

Από Πρόταση 4.13

$$\Longleftrightarrow x_0 \in int_F(cl_F(f^{-1}[G])), \forall G \subseteq \mathbb{R} \text{ ανοιχτό, μη κενό}$$

□

Πρόταση 4.16. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Baire. Τότε, $\forall A \subseteq X$ ισχύει $int_F(cl_F(A)) \subseteq int_X(cl_X(A))$.*

Απόδειξη. Από Πρόταση 4.13 έχουμε

$$int_F(cl_F(A)) = int_X(\mathcal{S}(A))$$

και από Πρόταση 3.43 ισχύει $\mathcal{S}(A) \subseteq cl_X(A)$. Από Πρόταση 2.53(iv) προκύπτει άμεσα ότι

$$int_F(cl_F(A)) = int_X(\mathcal{S}(A)) \subseteq int_X(cl_X(A))$$

□

5 Χώροι Blumberg

Ορισμός 5.1. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος. Ο* $(X, \mathcal{T})$ *θα λέγεται χώρος Blumberg, αν* $\forall f : X \longrightarrow \mathbb{R} \;\; \exists D \subseteq X$ *πυκνό στο* X*, έτσι ώστε η* $f|_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *είναι συνεχής.*

Το θεώρημα Blumberg ισχυρίζεται πως για οποιαδήποτε $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, υπάρχει $D \subseteq \mathbb{R}$ πυκνό στο $\mathbb{R}$, ώστε η $f|_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και δηλαδή, το $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη τοπολογία είναι χώρος *Blumberg*. Ειδικότερα, στο πρωτότυπο άρθρο [7] (1922), αποδεικνύεται ότι το $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με την ευκλείδια τοπολογία είναι, επίσης, χώρος *Blumberg*. Το σημαντικότερο ερώτημα που προκύπτει, με αφορμή τον παραπάνω ορισμό, είναι, ποιοι χώροι είναι *Blumberg*. Μια απάντηση σε αυτό το ερώτημα, δόθηκε από τους J. C. Bradford and C. Goffman, για την περίπτωση όπου το X είναι εφοδιασμένο με κάποια μετρική. Συγκεκριμένα, στο [9] (1959) αποδεικνύεται ο παρακάτω ισχυρισμός.

Θεώρημα 5.2. *Έστω* (X, ρ) *μετρικός χώρος. Τότε, ο* (X, ρ) *είναι χώρος Blumberg, αν και μόνο εάν είναι χώρος Baire.*

Η ευθύς συνεπαγωγή, δηλαδή, ότι εάν ένας μετρικός χώρος είναι *Blumberg*, τότε θα είναι χώρος *Baire* ή ισοδύναμα, ότι εάν ένας μετρικός χώρος δεν είναι *Baire*, τότε δε θα είναι χώρος *Blumberg*, δίνει έναν περιορισμό ως προς το σύνολο των χώρων που θα μπορούσαν να είναι *Blumberg*. Ειδικότερα, αυτή η κατεύθυνση του θεωρήματος γενικεύεται σε τοπολογικούς χώρους και υποδεικνύει, ότι το σύνολο των χώρων *Blumberg* θα περίεχεται στο σύνολο των χώρων *Baire*. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5.3. *(Bradford-Goffman) Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος. Αν* $(X, \mathcal{T})$ *δεν είναι Baire, τότε υπάρχει συνάρτηση* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$*, ώστε για οποιοδήποτε* $D \subseteq X$ *πυκνό στο* X*, ισχύει ότι* $f|_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *είναι ασυνεχής.*

Η απόδειξη της αντίστροφης συνεπαγωγής του θεωρήματος 5.2, δηλαδή ότι αν ένας μετρικός χώρος είναι *Baire*, τότε ειναι χώρος *Blumberg*, αναλύεται σε δύο βασικά βήματα.

Πρόταση 5.4. *(Πρώτο βήμα) Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος και συνάρτηση* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$*. Έστω, επίσης, το σύνολο*

$$R = \{x \in X : f \;\text{ είναι περίπου συνεχής στο } x \;\text{ ως προς } \mathcal{T}_F\}$$

όπου $\mathcal{T}_F$ η τοπολογία που επάγεται από τον τελεστή F, που ορίστηκε στην Πρόταση 4.6. Τότε, ισχύουν:

(i) Το R είναι συνισχνό στο X.

(ii) Αν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι Baire, τότε το R είναι πυκνό στο X ως προς $\mathcal{T}$ και η συνάρτηση $f|_R : R \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι περίπου συνεχής ως προς την επαγόμενη τοπολογία του $R \subseteq X$.

Πρόταση 5.5. *(Δεύτερο βήμα) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ περίπου συνεχής. Τότε, $\exists D \subseteq X$ πυκνό στο X, τέτοιο ώστε η $f|_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.*

Σημειώνουμε πως για το δεύτερο βήμα, είναι απαραίτητο για το X να είναι εφοδιασμένο με κάποια μετρική. Ξεκινώντας, λοιπόν, από ένα (X, ρ) μετρικό χώρο *Baire* και για οποιοδήποτε συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, βρίσκουμε ένα $R \subseteq X$ πυκνό στο X και μοναδικό για την f που επιλέχθηκε, τέτοιο ώστε η $f|_R : R \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι περίπου συνεχής. Στη συνέχεια, για τη δεδομένη f, περιοριζόμαστε στον υπόχωρο (R, ρ_R), όπου η συνάρητηση $g = f|_R$ είναι περίπου συνεχής σε κάθε σημείο του R . Εκεί, κατασκευάζουμε ένα $D \subseteq R$ πυκνό στο R, τέτοιο ώστε η $g|_D$ είναι συνεχής. Εφόσον D είναι πυκνό στο R και R είναι πυκνό στο X, από Πρόταση 2.75, προκύπτει ότι το D θα είναι πυκνό στο X. Επιπλέον, επειδή $D \subseteq R$, θα ισχύει πως $g|_D = f|_D$ και δηλαδή, τελικά, η συνάρτηση $f|_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ θα είναι συνεχής. Παρατηρούμε ότι τα τελευταία δύο συμπεράσματα που προαναφέρθηκαν, ικανοποιούν ακριβώς τις προϋποθέσεις του θεωρήματος *Blumberg*. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η απόδειξη των προτάσεων 5.3, 5.4 και 5.5, είναι επαρκείς για την απόδειξη του ισχυρισμού του θεωρήματος 5.2.

5.1 Απόδειξη της Θεωρήματος 5.2

Απόδειξη της Πρότασης 5.3

Απόδειξη. Έστω $D \subseteq X$ πυκνό στο X. Αφού (X, T) δεν είναι *Baire*, $\exists U \in \mathcal{T} \setminus \oslash$ ισχνό στο X. Είναι άμεσο ότι $\exists \{N_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, όπου $\forall n \in \mathbb{N}$, το N_n είναι πουθενά πυκνό στο X και ώστε $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$. Θεωρούμε συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = n \,, \text{ αν } x \in N_n \, n \in \mathbb{N} \,\&\, f(x) = 0 \,, \text{ αν } x \in X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$$

Εφόσον D είναι πυκνό και U ανοιχτό, ισχύει

$$U \cap D \neq \oslash \Longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \cap D \neq \oslash$$

και έστω $x_0 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \cap D$. Τότε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_0 \in N_{n_0}$ και θεωρούμε οποιοδήποτε ανοιχτό $V \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in V$. Αφού $U \in \mathcal{T}$ και $V \in \mathcal{T}$, θέτουμε $V_0 = U \cap V$ και δηλαδή $V_0 \in \mathcal{T}$. Επίσης, θα ισχύει ότι $x_0 \in V_0 \subseteq U \cap V$. Εφόσον D είναι πυκνό στο X και V_0 ανοιχτό, έχουμε $V_0 \cap D \neq \oslash$ και επιπλέον, επειδή N_{n_0} πουθενά πυκνό στο X, οφείλει $D \nsubseteq N_{n_0}$. Είναι άμεσο πως

$$\exists y_0 \in V_0 \cap (D \setminus N_{n_0}) \subseteq (U \cap V) \cap (D \setminus N_{n_0})$$

και συνεπώς, θα υπάρχει $n_1 \neq n_0$, τέτοιο ώστε $y_0 \in V \cap D \cap N_{n_1}$ και $|f(y_0) - f(x_0)| = |n_1 - n_0| \geq 1$. Επειδή τα V και D που επιλέχθηκαν ήταν τυχαία, συμπεραίνουμε ότι $\forall D \subseteq X$ πυκνό στο X, η f είναι ασυνεχής στα σημεία του $D \cap U$ και κατά συνέπεια, η $f|_D$ είναι ασυνεχής. □

Απόδειξη της Πρότασης 5.4

Απόδειξη. (i) Εφόσον το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη τοπολογία είναι 2^{ος} αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, θεωρούμε $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{G_n \subseteq \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του $\mathbb{R}$. Επειδή $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[G_n]$, από Λήμμα 3.54, γνωρίζουμε ότι το σύνολο

$$E = \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x \in f^{-1}[G_n] \cap (X \setminus \mathcal{H}(f^{-1}[G_n]))\}$$

θα είναι ισχνό στο X. Αρκεί να δειχθεί ότι $X \setminus R \subseteq E$.

Έστω $x_0 \in X \setminus R$ και δηλαδή $f \neq F-$περίπου συνεχής στο x_0. Τότε, υπάρχει ανοιχτό $G \subset \mathbb{R}$ με $f(x_0) \in G$, ώστε $x_0 \in X \setminus int_F(cl_F(f^{-1}[G]))$. Από Πρόταση 4.13, γνωρίζουμε πως

$$int_F(cl_F(f^{-1}[G])) = int_X(\mathcal{S}(f^{-1}[G])) \Longrightarrow X \setminus int_F(cl_F(f^{-1}[G])) = X \setminus int_X(\mathcal{S}(f^{-1}[G]))$$

Συνεπώς, έχουμε $x_0 \in X \setminus int_X(\mathcal{S}(f^{-1}[G]))$ και από Παρατήρηση 3.41, προκύπτει ότι $x_0 \in X \setminus \mathcal{H}(f^{-1}[G])$. Επειδή το G είναι ανοιχτό και $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ είναι βάση, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ και $G_{n_0} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ώστε $f(x_0) \in G_{n_0} \subseteq G$. Έχουμε

$$G_{n_0} \subseteq G \Longrightarrow f^{-1}[G_{n_0}] \subseteq f^{-1}[G]$$

Από Πρόταση 4.3(i) και την Πρόταση 2.53(iv), προκύπτει

$$int_X(\mathcal{S}(f^{-1}[G_{n_0}])) \subseteq int_X(\mathcal{S}(f^{-1}[G]))$$

και από Παρατήρηση 3.41, θα ισχύει

$$\mathcal{H}(f^{-1}[G_{n_0}]) \subseteq \mathcal{H}(f^{-1}[G]) \Longrightarrow X \setminus \mathcal{H}(f^{-1}[G]) \subseteq X \setminus \mathcal{H}(f^{-1}[G_{n_0}])$$

Αφού $x_0 \in X \setminus \mathcal{H}(f^{-1}[G])$, έπεται ότι $x_0 \in X \setminus \mathcal{H}(f^{-1}[G_{n_0}])$. Επιπλέον, έχουμε $f(x_0) \in G_{n_0}$ και άρα $x_0 \in f^{-1}[G_{n_0}]$. Είναι, λοιπόν, άμεσο πως $x_0 \in f^{-1}[G_{n_0}] \cap (X \setminus \mathcal{H}(f^{-1}[G_{n_0}])) \subseteq E$. Εφόσον το $x_0 \in X \setminus R$ ήταν τυχαίο, προκύπτει το ζητούμενο.

(ii) Υπενθυμίζουμε ότι $\forall A \subseteq X$, το σύνολο $int_R(A) = int_X(A) \cap R$ είναι το εσωτερικό του A στο R και $cl_R(A) = cl_X(A) \cap R$ είναι η αντίστοιχη κλειστότητα του A στο R. Επίσης, $\forall A \subseteq X$, τα σύνολα $int_F(A)$ και $cl_F(A)$ είναι το εσωτερικό και η αντίστοιχη κλειστότητα του A ως προς $\mathcal{T}_F$ και όπως δόθηκαν στον ορισμό 4.12.

Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι *Baire*, από Πρόταση 3.60, το σύνολο R θα είναι πυκνό στο X ως συνισχνό υποσύνολο του X. Έστω, τώρα, οποιοδήποτε $x_0 \in R$ και ανοιχτό $G \subseteq \mathbb{R}$ με $f(x_0) \in G$. Αρκεί να δειχθεί ότι $x_0 \in int_R(cl_R(f^{-1}[G]))$.

Αφού $x_0 \in R$, από (i) έχουμε ότι η f είναι $F-$περίπου συνεχής στο x_0 και δηλαδή, θα ισχύει $x_0 \in int_F(cl_F(f^{-1}[G]))$. Από Πρόταση 4.16 ισχύει

$$int_F(cl_F(f^{-1}[G])) \subseteq int_X(cl_X(f^{-1}[G]))$$

και άρα, έπεται ότι $x_0 \in int_X(cl_X(f^{-1}[G]))$. Επομένως, $\exists V \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in V$ και ώστε $V \subseteq cl_X(f^{-1}[G])$ και έχουμε

$$V \subseteq cl_X(f^{-1}[G]) \implies V \cap R \subseteq cl_X(f^{-1}[G]) \cap R$$

Θέτοντας $V_R = V \cap R$, όπου $V \in \mathcal{T} \setminus \oslash$, οφείλει $V_R \in \mathcal{T}_R \setminus \oslash$ και επειδή $x_0 \in V \cap R$, προκύπτει ότι

$$x_0 \in V_R \subseteq cl_R(f^{-1}[G])$$

Από Πρόταση 2.53(iv) έχουμε

$$int_X(V_R) \subseteq int_X(cl_R(f^{-1}[G])) \implies int_X(V_R) \cap R \subseteq int_X(cl_R(f^{-1}[G])) \cap R$$
$$\implies int_R(V_R) \subseteq int_R(cl_R(f^{-1}[G]))$$

Εφόσον $V \in \mathcal{T}_R$, από Πρόταση 2.53(ii) θα ισχύει πως $V_R = int_R(V_R)$ και οπότε

$$V_R \subseteq int_R(cl_R(f^{-1}[G]))$$

Αφού $x_0 \in V_R$, είναι άμεσο ότι $x_0 \in int_R(cl_R(f^{-1}[G]))$. Δεδομένου ότι το G που επιλέχθηκε ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε πως η $f|_R$ είναι περίπου συνεχής στο x_0. Τέλος, επειδή το $x_0 \in R$ ήταν, επίσης, τυχαίο, καταλήγουμε ότι η $f|_R$ είναι περίπου συνεχής. □

Ορισμός 5.6. *Έστω A μη κενό σύνολο (αλφάβητο) και έστω, επίσης, $n \in \mathbb{N}$. Θα συμβολίζουμε με A^n το σύνολο όλων των ακολουθιών μήκους n στο A. Για κάθε $n \geq 1$, έχουμε $A^n = \{(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) : a_i \in A, \forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}\}$ και για $n = 0$, θέτουμε $A^0 = \{\{\oslash\}\}$ (ακολουθία μήκους 0). Θέτουμε*

$$A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n, \text{ όπου αν } t \in A^{<\mathbb{N}} \implies |t| = n : t \in A^n$$

Στο $A^{\mathbb{N}}$ θεωρούμε την εξής μερική διάταξη:

Έστω $s,t \in A^{<\mathbb{N}}$, θα γράφουμε $s \sqsubseteq t$ όταν το s είναι αρχικό τμήμα του t. Αυτό, σημαίνει πως $|s| \leq |t|$ και δηλαδή, αν $s = (s_0, s_1, ..., s_{n-1})$ και $t = (t_0, t_1, ..., t_{n-1})$, θα ισχύει $s_i = t_i$, $\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Ένα δέντρο στο A είναι ένα σύνολο $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$, τέτοιο ώστε $\forall t \in T$, ισχύει

$$\{s \in A^{<\mathbb{N}} : s \sqsubseteq t\} \subseteq T$$

Ορισμός 5.7. *Έστω A μη κενό σύνολο και δέντρο T στο A. Το T καλείται **pruned**, αν δεν περιέχει μεγιστικούς κόμβους και δηλαδή, $\forall t \in T \;\; \exists t' \in T$, τέτοιο ώστε $t \sqsubseteq t'$ και $t \neq t'$.*

Ορισμός 5.8. *Έστω A μη κενό σύνολο και δέντρο T στο A. Για κάθε $t \in T$ ορίζουμε τα παρακάτω:*

- $Pred_T(t) = \{s \in T : t \sqsubseteq t' \,\&\, t \neq t'\}$
- $Succ_T(t) = \{s \in T : t \sqsubseteq s\}$
- $ImmSucc_T(t) = IS_T(t) = \{s \in T : t \sqsubseteq t' \,\&\, t \neq t' \,\&\, |s| = |t| + 1\}$
- $Incompatible_T(t) = Inc_T(t) = \{s \in T : s \notin Pred_T(t) \,\&\, s \notin Succ_T(t)\} = \{s \in T : s \perp t\}$

Παρατήρηση 5.9. *Αν $s,t \in T$, τότε $s \in Succ_T(t)$, αν και μόνο εάν $t \in Pred_T(s)$.*

Παρατήρηση 5.10. *Αν $s,t \in T$, τότε $s \in Inc_T(t)$, αν και μόνο εάν $t \in Inc_T(s)$.*

Ορισμός 5.11. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ περίπου συνεχής. Μια τρίαδα (x, B, G) θα καλείται $f-$**συμβατή**, αν ισχύουν:*

(i) $x \in X$

(ii) $B \subseteq X$ *ανοιχτή μπάλα κέντρου* x

(iii) $G \subseteq \mathbb{R}$ *ανοιχτό, με* $f(x) \in G$

(iv) $B \subseteq cl_X(f^{-1}[G])$

Για τη συνέχεια του κεφαλαίου, σταθεροποιούμε μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι περίπου συνεχής. Επιπλέον, $\forall x, y \in X$ θεωρούμε τη μετρική

$$d(x,y) = min\{\rho(x,y), 1\}$$

έτσι ώστε $(X, d) = B_\rho(x_0, 1)$, για κάποιο $x_0 \in X$. Επειδή, εξ ορισμού, δεν υπάρχει βλάβη στην περίπτωση όπου η μετρική ρ είναι φραγμένη, για λόγους συνοχής, θέτουμε $\rho = d$ και δηλαδή $(X, \rho) = B_\rho(x_0, 1)$.

Ορισμός 5.12. *Έστω $A = \kappa$ ο πληθάριθμος του συνόλου των $f-$συμβατών τριάδων στο X και έστω T ένα δέντρο στο A χωρίς μεγιστικά στοιχεία (pruned). Ένα $T-$σχήμα από $f-$συμβατές τριάδες, θα λέμε μια οικογένεια $f-$συμβατών τριάδων $\{(x_t, B_t, G_t) : t \in T\}$ με τις εξής ιδιότητες:*

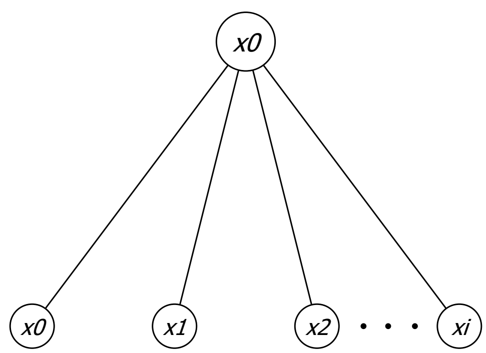
(i) $B_{\oslash} = X$

(ii) $\forall t \in T$, $\bigcup_{s \in IS_T(t)} B_s \subseteq B_t \subseteq cl_X(\bigcup_{s \in IS_T(t)} B_s)$.

(iii) $\forall t \in T$ *και* $\forall s, s' \in IS_T(t)$, *αν* $s \neq s'$, *τότε* $B_s \cap B_{s'} = \oslash$ *και επίσης,* $G_s \subseteq G_t$ *και* $G_{s'} \subseteq G_t$.

(iv) $\forall t \in T$, $\exists s \in IS_T(t)$ *τέτοιο ώστε* $x_s = x_t$.

(v) $\forall t \in T$ *με* $|t| \geq 1$, *έχουμε* $max\{diam(B_t), diam(G_t)\} < \dfrac{1}{|t|}$.



Λήμμα 5.13. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ και $\mathcal{T} = \{(x_t, B_t, G_t) : t \in T\}$ ένα $T-$σχήμα $f-$συμβατών τριάδων. Τότε, ισχύει ότι*

$$X = cl_X(\bigcup_{t \in T(n)} B_t), \forall n \in \mathbb{N}$$

όπου $T(n) = \{\{t \in T : |t| = n\}$.

Απόδειξη. Για $n = 0$, έχουμε $X = B_{(\oslash)}$.

Έστω προς επαγωγή ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $X = cl_X(\bigcup_{t \in T(n)} B_t)$.

Τότε, έχουμε

$$X = cl_X(\bigcup_{t \in T(n)} B_t)$$

$$\overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} X \subseteq cl_X(\bigcup_{t\in T(n)} (cl_X(\bigcup_{s\in IS_T(t)} B_s)$$

και από Πρόταση 2.42 προκύπτει

$$X \subseteq cl_X(\bigcup_{t\in T(n)} (\bigcup_{s\in IS_T(t)} B_s)) = cl_X(\bigcup_{t\in T(n+1)} B_t)$$

Συνεπώς, από αρχή μαθηματικής επαγωγής, έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 5.14. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\mathcal{T} = \{(x_t, B_t, G_t) : t \in T\}$ ένα $T-$σχήμα $f-$συμβατών τριάδων. Τότε $\forall t \in T$ και $\forall s \in Succ_T(t)$ ισχύει:*

(i) $B_s \subseteq B_t$

(ii) $G_s \subseteq G_t$

Απόδειξη. (i)(Με επαγωγή) Έστω $t \in T$ και $s \in Succ_T(t)$.

Για $n = 1$, έχουμε $s \in \{u \in T : u \in Succ_T(t) \,\&\, |u| = |t| + 1\}$ και δηλαδή $s \in IS_T(t)$. Από (ii), οφείλει $B_S \subseteq B_t$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι $\forall s \in Succ_T(t)$ με $|s| = |t| + n$, ισχύει $B_S \subseteq B_t$.

Θεωρούμε $s' \in \{u \in T : u \in Succ_T(t) \,\&\, |u| = |t| + n + 1\}$. Τότε $\exists s_t \in T$ ώστε

$$s' \in IS_T(s_t) \,\&\, s_t \in Succ_T(t)$$

Συνεπώς, οφείλει $|s_t| = |t| + n$ και από επαγωγική υπόθεση, προκύπτει $B_{s_t} \subseteq B_t$. Τέλος, αφού $s' \in IS_T(s_t)$, από Ιδιότητα 1 έχουμε $B_{s'} \subseteq B_{s_t} \subseteq B_t$.

(ii) Όμοια με το (i).

□

Λήμμα 5.15. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\mathcal{T} = \{(x_t, B_t, G_t) : t \in T\}$ ένα $T-$σχήμα $f-$συμβατών τριάδων. Τότε $\forall t \in T$ και $\forall n \geq 1$ $\exists s_n \in T$, τέτοιο ώστε*

$$x_{s_n} = x_t \,\&\, |s_n| = |t| + n$$

Απόδειξη. (Με επαγωγή) Έστω $t \in T$ και $K_n = \{u \in T : |u| = |t| + n \,\&\, u = t\}$ και αρκεί να δείχτεί ότι $K_n \neq \oslash$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 1$, θεωρούμε το σύνολο $K_1 = \{u \in T : |u| = |s| + 1 \,\&\, u = t\}$. Τότε, από (iv) $\exists s_1 \in IS_T(t)$ ώστε $s_1 = t$ και δηλαδή $s_1 \in K_1$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι $K_n \neq \oslash$.

Θεωρούμε το $K_{n+1} = \{u \in T : |u| = |t| + n + 1 \,\&\, u = t\}$. Από επαγωγική υπόθεση $\exists s_n \in K_n$ και θεωρούμε το σύνολο $IS_T(s_n)$. Και παλι από (iv), $\exists s' \in IS_T(s_n)$ με $x_{s'} = x_{s_n}$ και θα ισχύει ότι $|s'| = |s_n| + 1$. Είναι άμεσο πως

$$|s'| = |s_n| + 1 = |t| + n + 1 \,\&\, x_{s'} = x_{s_n} = x_t$$

και συνεπώς $s' \in K_{n+1}$. □

Λήμμα 5.16. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\mathcal{T} = \{(x_t, B_t, G_t) : t \in T\}$ ένα $T-$σχήμα $f-$συμβατών τριάδων. Τότε $\forall t, s \in T$ με $|t| = |s|$ και $t \neq s$, ισχύει $B_t \cap B_s = \oslash$.*

Απόδειξη. (Με επαγωγή) Έστω $t, s \in T$ με $|t| = |s|$ και $t \neq s$.

Για $|t| = |s| = 1$, θεωρούμε $t_0 \in T$ τον αρχικό κόμβο του δέντρου και συνεπώς, οφείλει $t, s \in IS_T(t_0)$. Από (iii), έχουμε άμεσα ότι $B_s \cap B_t = \oslash$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι $\forall t, s \in T$ με $|t| = |s| = n$ και $t \neq s$, ισχύει $B_t \cap B_s = \oslash$.

Θεωρούμε $t', s' \in T$ με $|t'| = |s'| = n + 1$ και $t' \neq s'$. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις.

Αν $\exists u \in T$ ώστε $t', s' \in IS_T(u)$, τότε, από (iii), οφείλει $B_{t'} \cap B_{s'} = \oslash$.

Αν $\exists t, s \in T$ ώστε $t' \in IS_T(t)$, $s' \in IS_T(s)$ και $u_t \neq u_s$, τότε έχουμε $|t| = |s| = n$ και από επαγωγική υπόθεση, οφείλει $B_t \cap B_s = \oslash$. Αφού $t' \in IS_T(t)$, από (ii) έχουμε $B_{t'} \subseteq B_t$ και όμοια, επειδή $s' \in IS_T(s)$, έχουμε $B_{s'} \subseteq B_s$. Προκύπτει ότι

$$B_{t'} \subseteq B_t \,\&\, B_{s'} \subseteq B_s \,\&\, B_t \cap B_s = \oslash \Longrightarrow B_{t'} \cap B_{s'} = \oslash$$

□

Λήμμα 5.17. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\mathcal{T} = \{(x_t, B_t, G_t) : t \in T\}$ ένα $T-$σχήμα $f-$συμβατών τριάδων. Τότε $\forall s, t \in T$ με $s \perp t$, ισχύει ότι $B_s \cap B_t = \oslash$.*

Απόδειξη. Έστω $t \in T$ και έστω $s \in Inc_T(t)$. Τότε, οφείλει $s \neq t$ και αν $|s| = |t|$, τότε, από Λήμμα 5.16 θα ισχύει ότι $B_s \cap B_t = \oslash$. Έστω, λοιπόν, ότι $|s| \neq |t|$ και χωρίς βλάβη, θεωρούμε πως $|s| > |t|$. Αν $|t| = 0$, δηλαδή είναι ο αρχικός κόμβος του δέντρου, τότε έπεται ότι $s \in Succ_T(t)$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, οφείλει $|t| = n_t > 0$ και $|s| = n_s > n_t$. Τότε, λοιπόν, $\exists s_p \in Pred_T(s)$, έτσι ώστε $|s_p| = n_t = |t|$. Αν ίσχυε πως $B_{s_p} \cap B_t \neq \oslash$, από Λήμμα 5.16 προκύπτει $s_p = t$ και κατά συνέπεια, έχουμε $t \in Pred_T(t)$. Από Παρατήρηση 5.9, συμπεραίνουμε ότι $s \in Succ_T(t)$, το οποίο είναι άτοπο. Τέλος, από Παρατήρηση 5.10, προκύπτει το ίδιο συμπέρασμα και στην περίπτωση όπου $t \in Inc_T(s)$. □

Παρατήρηση 5.18. *Αν $\mathcal{T} = \{(x_t, B_t, G_t) : t \in T\}$, $D = \{x_s \in X : s \in T\}$ και $t \in T$, το σύνολο D μπορεί να διαμεριστεί ως εξής:*

- $\{x_s \in D : s \sqsubseteq t \,\&\, s \neq t\}$

- $\{x_s \in D : s \perp t\}$
- $\{x_s \in D : t \sqsubseteq s\}$

Λήμμα 5.19. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\mathcal{T} = \{(x_t, B_t, G_t) : t \in T\}$ ένα $T-$σχήμα $f-$συμβατών τριάδων. Αν $D = \{x_s \in X : s \in T\}$ και $x_t \in D$, τότε*

$$x_s \in B_t \Longleftrightarrow t \sqsubseteq s$$

Απόδειξη. $(\Longrightarrow)$ Έστω $x_s \in B_t$.

Αν $s \sqsubseteq t \,\&\, s \neq t$, τότε, $|s| < |t|$ και δηλαδή $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|t| = |s| + n_0$. Από Λήμμα 5.15, $\exists s_{n_0} \in T$ ώστε

$$|s_{n_0}| = |s| + n_0 = |t| \,\&\, s_{n_0} = s$$

Συνεπώς, έχουμε $|s_{n_0}| = |t|$, $s_{n_0} \neq t$ και οπότε, από Λήμμα 5.16, είναι άμεσο ότι

$$B_{s_{n_0}} \cap B_t = \oslash \Longrightarrow x_s \notin B_t$$

Άτοπο. Ειπλέον, αν $s \perp t$, από Λήμμα 5.17 προκύπτει, επίσης, πως $B_s \cap B_t = \oslash \Longrightarrow x_s \notin B_t$. Από την Παρατήρηση 5.18 είναι άμεσο ότι αν $x_s \in B_t$, τότε, οφείλει να ισχύει $t \sqsubseteq s$ και δηλαδή $s \in Succ_T(t)$.

$(\Longleftarrow)$ Έστω $s \in T$ ώστε $t \sqsubseteq s$. Τότε, $s \in Succ_T(t)$ και από Λήμμα 5.14(i), έχουμε $B_s \subseteq B_t \Longrightarrow x_s \in B_t$. □

Λήμμα 5.20. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\mathcal{T} = \{(x_t, B_t, G_t) : t \in T\}$ ένα $T-$σχήμα $f-$συμβατών τριάδων. Αν $D = \{x_s \in X : s \in T\}$, τότε $\forall t \in T$ ισχύουν:*

(i) $D \cap B_t = \{x_s : t \sqsubseteq s\}$

(ii) $D \cap B_t \subseteq f^{-1}[G_t]$

Απόδειξη. (i) $(\Longrightarrow)$ Έστω $x \in D \cap B_t$. Τότε $x = x_s$ για κάποιο $s \in T$ και δηλαδή $x_s \in B_t$. Από Λήμμα 5.19, έχουμε άμεσα ότι $t \sqsubseteq s$ και δηλαδή $x \in \{x_s : t \sqsubseteq s\}$.

$(\Longleftarrow)$ Έστω $s \in T$ ωστε $t \sqsubseteq s$. Τότε, ισχύει $s \in Succ_T(t)$ και από Λήμμα 5.14(i), οφείλει

$$B_s \subseteq B_t \Longrightarrow x_s \in B_t \overset{s \in T}{\Longrightarrow} x_s \in D \cap B_t$$

(ii) Από (i) έχουμε $D \cap B_t = \{x_s : t \sqsubseteq s\}$. Για οποιοδήποτε $s \in Succ_T(t)$ ισχύει $f(x_s) \in G_s$ και από Λήμμα 5.14(ii), έχουμε

$$G_s \subseteq G_t \Longrightarrow f(x_s) \in G_t \Longrightarrow x_s \in f^{-1}[G_t]$$

Αφού το $x_s \in Succ_T(t)$ ήταν τυχαίο, προκύπτει το ζητούμενο. □

Πρόταση 5.21. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ και $\mathcal{T} = \{(x_t, B_t, G_t) : t \in T\}$ ένα $T-$σχήμα $f-$συμβατών τριάδων. Τότε, ισχύουν:*

(i) Το σύνολο $D = \{x_t \in X : t \in T\}$ είναι πυκνό στο X.

(ii) Η συνάρτηση $f|_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. (i) Έστω $x_0 \in X$, $n \in \mathbb{N}$ και θέτουμε $D_n = \{x_t : |t| = n\}$. Από, Λήμμα 5.13 έχουμε $x_0 \in cl_X(\bigcup_{t\in T(n)} B_t)$ και συνεπώς, αν $\delta > 0$ οφείλει

$$B_\rho(x_0,\delta) \cap B_t \neq \oslash \Longrightarrow \exists t \in T(n) \text{ ώστε } B_\rho(x_0,\delta) \cap B_t \neq \oslash$$

$$\overset{(v)}{\Longrightarrow} \rho(x_0,t) < \frac{1}{2n} + \delta$$

Αφού το $x_0 \in X$, $n \in \mathbb{N}$ και $\delta > 0$ ήταν τυχαία και επειδή $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Έστω $x_0 \in D$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $x_0 \in D$, $\exists t \in T$ ώστε $x_0 = x_t$ και από Λήμμα 5.15 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|t| = n$ και ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Από (v) έχουμε $diam(G_t) < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Επειδή $f(x_t) \in G_t$ και $diam(G_t) < \varepsilon$, τότε

$$G_t \subseteq (f(x_t) - \varepsilon, f(x_t) + \varepsilon)$$

και από Λήμμα 5.20 προκύπτει

$$B_t \cap D \subseteq f^{-1}[G_t] \subseteq f^{-1}[(f(x_t) - \varepsilon, f(x_t) + \varepsilon)]$$

Συνεπώς, $\forall x \in B_t \cap D$, έχουμε ότι $f(x) \in (f(x_t) - \varepsilon, f(x_t) + \varepsilon) = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ και δηλαδή, $\forall x \in B_t \cap D$ θα ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Εφόσον τα $x_0 \in D$ και $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαία, προκύπτει το ζητούμενο. □

Ορισμός 5.22. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και (x,B,G) μια $f-$συμβατή τριάδα. Μια οικογένεια $\mathcal{F} = \{(x_i, B_i, G_i) : i \in \mathcal{I}\}$, όπου $\mathcal{I} \subseteq \kappa$, θα λέγεται $\varepsilon-$ανάλυση της (x,B,G), αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $\forall i \in \mathcal{I}$, $B_i \subseteq B$ και $G_i \subseteq G$.

(ii) $\forall i,j \in \mathcal{I}$ με $i \neq j$ έχουμε $B_i \cap B_j = \oslash$.

(iii) $\exists i \in \mathcal{I}$ ώστε $x_i = x$.

(iv) $\forall i \in \mathcal{I}$ έχουμε $max\{diam(B_i), diam(G_i)\} < \varepsilon$

Λήμμα 5.23. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, (x, B, G) μια $f-$συμβατή τριάδα και $\varepsilon > 0$. Έστω, επίσης, το σύνολο*

$$\mathcal{P}_\varepsilon = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ είναι } \varepsilon - \text{ανάλυση της } (x, B, G), \text{ εφοδιασμένο με τη διάταξη } \subseteq \text{ του περιέχεσθαι}\}$$

Τότε, το $\mathcal{P}_\varepsilon$ είναι ένα μη κενό, μερικά διατεταγμένο σύνολο και κάθε αλυσίδα του $\mathcal{P}_\varepsilon$ έχει άνω φράγμα στο $\mathcal{P}_\varepsilon$.

Απόδειξη. Εφόσον G είναι ανοιχτό και $f(x) \in G$, είναι εφικτό να επιλέξουμε ανοιχτό $G_0 \subseteq G$, τέτοιο ώστε $f(x) \in G_0$ και $diam(G_0) < \varepsilon$. Επειδή η f είναι περίπου συνεχής στο x, $\exists U \subseteq X$ ανοιχτό, με $x \in U$ και ώστε $U \subseteq cl_X(f^{-1}[G_0])$. Αφού B, U είναι ανοιχτά στο X και $x \in B \cap U$, θέτοντας $V = B \cap U$, έπεται ότι V είναι ανοιχτό, μη κενό υποσύνολο του X. Επειδή V είναι ανοιχτό και $x \in V$, υπάρχουν $r < \frac{\varepsilon}{2}$ και ανοιχτή μπάλα $B_0 = B_\rho(x, r) \subseteq V$ και κατ'επέκταση, έχουμε

$$B_0 \subseteq V \subseteq U \subseteq cl_X(f^{-1}[G_0])$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η τριάδα (x, B_0, G_0) είναι $f-$συμβατή και η $\mathcal{F}_0 = \{(x, B_0, G_0)\}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i), (ii), (iii), (iv)$ του ορισμού (5.22). Συνεπώς, θα ισχύει ότι $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{P}_\varepsilon$ και δηλαδή, $\mathcal{P}_\varepsilon \neq \emptyset$.

Επιλέγουμε, τώρα, μια οποιοδήποτε αλυσίδα $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ και θεωρούμε το σύνολο

$$\bigcup \mathcal{C} = \{(x', B', G') : \exists \mathcal{F} \in \mathcal{C} \text{ ώστε } (x', B', G') \in \mathcal{F}\}$$

Αρκεί να δειχτεί ότι $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{P}_\varepsilon$, δηλαδή ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i), (ii), (iii), (iv)$ του ορισμού (5.22) και επιπλέον, ότι είναι άνω φράγμα της $\mathcal{C}$. Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε πως $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Διαφορετικά, αν $\mathcal{C} = \emptyset$, τότε επειδή $\mathcal{P}_\varepsilon \neq \emptyset$, η τριάδα (x, B_0, G_0) είναι ένα άνω φράγμα της $\mathcal{C}$ στο $\mathcal{P}_\varepsilon$.

Για την ιδιότητα (i): Έστω $(x', B', G') \in \bigcup \mathcal{C}$. Τότε $\exists \mathcal{F} \in \mathcal{C}$, ώστε $(x', B', G') \in \mathcal{F}$. Επιπλέον, $\mathcal{F} = \{(x_i, B_i, G_i) : i \in \mathcal{I}\}$ για κάποιο $\mathcal{I} \subseteq \kappa$ και δηλαδή, $\exists j \in \mathcal{I}$ ώστε $(x', B', G') = (x_j, B_j, G_j)$. Αφού $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_\varepsilon$ και $(x_j, B_j, G_j) \in \mathcal{F}$, από (i) έχουμε $B_j \subseteq B$ και $G_j \subseteq G$. Αφού $B_j = B'$ και $G_j = G'$, θα ισχύει ότι $B' \subseteq B \,\&\, G' \subseteq G$.

Για την ιδιότητα (ii): Έστω $(x_1, B_1, G_1) \in \bigcup \mathcal{C}$ και $(x_2, B_2, G_2) \in \bigcup \mathcal{C}$, όπου $x_1 \neq x_2$. Τότε $\exists \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{P}_\varepsilon$, ώστε $(x_1, B_1, G_1) \in \mathcal{F}_1$ και $(x_2, B_2, G_2) \in \mathcal{F}_2$. Εφόσον $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα, τότε είτε $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, είτε $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$. Χωρίς βλάβη, θεωρούμε $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ και τότε, έχουμε ότι $(x_1, B_1, G_1) \in \mathcal{F}_2$ και $(x_2, B_2, G_2) \in \mathcal{F}_2$. Επιπλέον, $\mathcal{F}_2 = \{(x_i, B_i, G_i) : i \in \mathcal{I}\}$ για κάποιο $\mathcal{I} \subseteq \kappa$ και δηλαδή, $\exists i_1, i_2 \in \mathcal{I}$ με $i_1 \neq i_2$, τέτοια ώστε $(x_1, B_1, G_1) = (x_{i_1}, B_{i_1}, G_{i_1})$ και $(x_2, B_2, G_2) = (x_{i_2}, B_{i_2}, G_{i_2})$. Επειδή $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{P}_\varepsilon$,

$(x_{i_1}, B_{i_1}, G_{i_1}) \in \mathcal{F}_2$, $(x_{i_2}, B_{i_2}, G_{i_2}) \in \mathcal{F}_2$ και $i_1 \neq i_2$, από (ii) οφείλει $B_{i_1} \cap B_{i_2} = \oslash$. Αφού $B_{i_1} = B_1$ και $B_{i_2} = B_2$, έπεται ότι $B_1 \cap B_2 = \oslash$.

Για την ιδιότητα (iii): Έστω $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$. Τότε $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_\varepsilon$ και εφόσον $\mathcal{F} = \{(x_i, B_i, G_i) : i \in \mathcal{I}\}$ για κάποιο $\mathcal{I} \subseteq \kappa$, από ιδιότητα (iii) $\exists i_0 \in \mathcal{I}$, τέτοιο ώστε $(x_{i_0}, B_{i_0}, G_{i_0}) \in \mathcal{F}$ και $x_{i_0} = x$. Επειδή $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$, έπεται ότι $(x_{i_0}, B_{i_0}, G_{i_0}) \in \bigcup \mathcal{C}$. Θέτοντας $(x', B', G') = (x_{i_0}, B_{i_0}, G_{i_0})$, προκύπτει, τελικά, ότι $\exists (x', B', G') \in \bigcup \mathcal{C}$, τέτοια ώστε $x' = x$.

Για την ιδιότητα (iv): Έστω $(x', B', G') \in \bigcup \mathcal{C}$. Τότε $\exists \mathcal{F} \in \mathcal{C}$, ώστε $(x', B', G') \in \mathcal{F}$. Επιπλέον, $\mathcal{F} = \{(x_i, B_i, G_i) : i \in \mathcal{I}\}$ για κάποιο $\mathcal{I} \subseteq \kappa$ και δηλαδή, $\exists j \in \mathcal{I}$ ώστε $(x', B', G') = (x_j, B_j, G_j)$. Αφού $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_\varepsilon$ και $(x_j, B_j, G_j) \in \mathcal{F}$, από (iv) έχουμε

$$max\{diam(B_j), diam(G_j)\} < \varepsilon$$

και επιεδή $B_j = B'$ και $G_j = G'$, θα ισχύει ότι $max\{diam(B'), diam(G_j)\} < \varepsilon$.

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε πως το σύνολο $\bigcup \mathcal{C}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i), (ii), (iii), (iv)$ του ορισμού (5.22) και δηλαδή $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{P}_\varepsilon$. Θεωρώντας, τώρα, ένα οποιοδήποτε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, είναι αντιληπτό ότι

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{F}_k : k \in \mathcal{K},\, \mathcal{F}_k \in \mathcal{C}\}$$

και αν $(x', B', G') \in \bigcup \mathcal{A}$, τότε $\exists k \in \mathcal{K}$ ώστε $(x', B', G') \in \mathcal{F}_k$. Εφόσον $\forall k \in \mathcal{K}$ έχουμε $\mathcal{F}_k \in \mathcal{C}$, έπεται ότι $(x', B', G') \in \bigcup \mathcal{C}$. Είναι άμεσο πως το σύνολο $\bigcup \mathcal{C}$ είναι άνω φράγμα της $\mathcal{C}$. Επειδή η $\mathcal{C}$ που επιλέχτηκε ήταν τυχαία, συμπεραίνουμε ότι κάθε αλυσίδα του $\mathcal{P}_\varepsilon$ θα έχει άνω φράγμα στο $\mathcal{P}_\varepsilon$. $\square$

Λήμμα 5.24. *(Zorn) Έστω $(X, \preceq)$ μερικά διατεταγμενος χώρος. Αν κάθε αλυσίδα $\mathcal{C} \subseteq X$ έχει άνω φράγμα στο X, τότε το X περιέχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*

Λήμμα 5.25. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, (x, B, G) μια $f-$συμβατή τριάδα και $\varepsilon > 0$. Αν $\mathcal{F}_M = \{(x_i, B_i, G_i) : i \in \mathcal{I}\}$, όπου $\mathcal{I} \subseteq \kappa$, είναι μια μεγιστική $\varepsilon-$ανάλυση της (x, B, G), τότε ισχύει*

$$B \subseteq cl_X(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_i)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{P}_\varepsilon = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ είναι } \varepsilon - \text{ανάλυση της } (x, B, G), \text{ εφοδιασμένο με τη διάταξη } \subseteq \text{ του περιέχεσθαι}\}$$

Από Λήμμα 5.23, γνωρίζουμε ότι $\mathcal{P}_\varepsilon \neq \oslash$ και επιπλέον, κάθε αλυσίδα του $\mathcal{P}_\varepsilon$ έχει άνω φράγμα στο $\mathcal{P}_\varepsilon$. Τότε, από Λήμμα *Zorn*, το σύνολο $\mathcal{P}_\varepsilon$ θα περιέχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο $\mathcal{F}_M = \{(x_i, B_i, G_i) : i \in \mathcal{I}\}$, $\mathcal{I} \subseteq \kappa$. Έστω προς άτοπο ότι $int_X(B \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_i) \neq \oslash$. Τότε $\exists U \subseteq B$

ανοιχτό, μη κενό, τέτοιο ώστε $U \subseteq B \setminus \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i$. Επειδή (x, B, G) είναι $f-$συμβατή τριάδα, το σύνολο $f^{-1}[G]$ είναι πυκνό στο B και κατά συνέπεια, αφού $U \subseteq B$ και είναι ανοιχτό, το $f^{-1}[G]$ θα είναι πυκνό στο U. Οπότε, $\exists x_U \in U \cap f^{-1}[G]$. Επιπλέον, εφόσον G είναι ανοιχτό και $f(x_U) \in G$, είναι εφικτό να επιλέξουμε ανοιχτό $G_U \subseteq G$, τέτοιο ώστε $f(x_U) \in G_U$ και $diam(G_U) < \varepsilon$. Επειδή η f είναι περίπου συνεχής στο x_U, θα υπάρχει ανοιχτό $V \subseteq B$ με $x_U \in V$ και ώστε $V \subseteq cl_X(f^{-1}[G_U])$. Εφόσον $x_U \in U$ και $x_U \in V$, θέτουμε $V_U = U \cap V$ ανοιχτό, μη κενό και έχουμε $x_U \in V_U$. Αφού V_U ανοιχτό και $x_U \in V_U$, θα υπάρχουν $r_U > 0$ και ανοιχτή μπάλα $B_U = B_\rho(x_U, r_U) \subseteq V_U$ και κατ'επέκταση, έχουμε

$$B_U \subseteq V_U \subseteq V \subseteq cl_X(f^{-1}[G_U])$$

Είναι άμεσο ότι η τριάδα (x_U, B_U, G_U) είναι $f-$συμβατή και επιπλέον $B_U \cap \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i = \oslash$. Θέτουμε

$$\mathcal{F}'_M = \{(x_i, B_i, G_i) : i \in \mathcal{I}\} \cup \{(x_U, B_\rho(x_U, r_U), G_U)\}$$

και παρατηρούμε ότι $\mathcal{F}_M \subset \mathcal{F}'_M$. Αρκεί να δειχτεί ότι $\mathcal{F}'_M \in \mathcal{P}_\varepsilon$ και δηλαδή, το $\mathcal{F}'_M$ να ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i), (ii), (iii), (iv)$ του ορισμού (5.22).

Για την ιδιότητα (i): Έστω $(x', B', G') \in \mathcal{F}'_M$. Αν $(x', B', G') = (x_{i_0}, B_{i_0}, G_{i_0})$ για κάποιο $i_0 \in \mathcal{I}$, τότε $(x', B', G') \in \mathcal{F}_M$ και επειδή $\mathcal{F}_M \in \mathcal{P}_\varepsilon$, από (i) θα ισχύει ότι $B' \subseteq B$ και $G' \subseteq G$. Αν $(x', B', G') = (x_U, B_U, G_U)$, τότε έχουμε

$$B_U \subseteq V_U \subseteq U \subseteq B \,\&\, G_U \subseteq G$$

και συνεπώς, $B' \subseteq B$ και $G' \subseteq G$.

Για την ιδιότητα (ii): Έστω $(x_1, B_1, G_1) \in \mathcal{F}'_M$ και $(x_2, B_2, G_2) \in \mathcal{F}'_M$, όπου $x_1 \neq x_2$. Αν $(x_1, B_1, G_1) = (x_{i_1}, B_{i_1}, G_{i_1})$ και $(x_2, B_2, G_2) = (x_{i_2}, B_{i_2}, G_{i_2})$ για κάποια $i_1, i_2 \in \mathcal{I}$, με $i_1 \neq i_2$, έχουμε $(x_1, B_1, G_1) \in \mathcal{F}_M$, $(x_2, B_2, G_2) \in \mathcal{F}_M$ και από (ii), οφείλει $B_1 \cap B_2 = \oslash$. Αν $(x_1, B_1, G_1) = (x_{i_1}, B_{i_1}, G_{i_1})$ για κάποιο $i_1 \in \mathcal{I}$ και $(x_2, B_2, G_2) = (x_U, B_U, G_U)$, τότε αφού

$$B_{i_1} \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i \,\&\, B_U \cap \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i = \oslash$$

προκύπτει $B_{i_1} \cap B_u = \oslash$ και δηλαδή $B_1 \cap B_2 = \oslash$.

Για την ιδιότητα (iii): Εφόσον $\mathcal{F}_M \in \mathcal{P}_\varepsilon$, από (iii) έχουμε ότι $\exists (x_{i_0}, B_{i_0}, G_{i_0}) \in \mathcal{F}_M$, με $i_0 \in \mathcal{I}$, τέτοιο ώστε $x_{i_0} = x$. Αφού $\mathcal{F}_M \subset \mathcal{F}'_M$, είναι άμεσο ότι $(x_{i_0}, B_{i_0}, G_{i_0}) \in \mathcal{F}'_M$ και $x_{i_0} = x$.

Για την ιδιότητα (iv): Έστω $(x', B', G') \in \mathcal{F}'_M$. Αν $(x', B', G') = (x_{i_0}, B_{i_0}, G_{i_0})$ για κάποιο $i_0 \in \mathcal{I}$, τότε $(x', B', G') \in \mathcal{F}_M$ και επειδή $\mathcal{F}_M \in \mathcal{P}_\varepsilon$, από (iv) θα ισχύει ότι $diam(B') < \varepsilon$ και $diam(G') < \varepsilon$. Αν $(x', B', G') = (x_U, B_U, G_U)$, τότε, αφού $B_U = B_\rho(x_U, r_U)$, όπου $r_U < \frac{\varepsilon}{2}$, έχουμε $diam(B_U) < \varepsilon$ και επιπλέον $diam(G_U) < \varepsilon$. Σε κάθε περίπτωση, έπεται ότι

$$max\{diam(B'), diam(G')\} < \varepsilon$$

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε πως το $\mathcal{F}'_M$ ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i), (ii), (iii), (iv)$ του ορισμού (5.22) και άρα $\mathcal{F}'_M \in \mathcal{P}_\varepsilon$. Επομένως, η $\mathcal{F}'_M$ είναι $\varepsilon-$ανάλυση της τριάδας (x, B, G) και επειδή $\mathcal{F}_M \subset \mathcal{F}'_M$, καταλήγουμε ότι το $\mathcal{F}_M$ δεν είναι μεγιστική $\varepsilon-$ανάλυση της (x, B, G). Άτοπο. Συνεπώς, θα πρέπει

$$int_X(B \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_i) = \emptyset$$

και από Πρόταση (2.55) (i) προκύπτει

$$B \setminus cl_X(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_i) = \emptyset \Longrightarrow B \subseteq cl_X(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_i)$$

□

Πόρισμα 5.26. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, (x, B, G) μια $f-$συμβατή τριάδα και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει μεγιστική $\varepsilon-$ανάλυση της (x, B, G), που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $\forall i \in \mathcal{I}$, $B_i \subseteq B$ *και* $G_i \subseteq G$.

(ii) $\forall i, j \in \mathcal{I}$ *με* $i \neq j$ *έχουμε* $B_i \cap B_j = \emptyset$.

(iii) $\exists i \in \mathcal{I}$ *ώστε* $x_i = x$.

(iv) $\forall i \in \mathcal{I}$ *έχουμε* $max\{diam(B_i), diam(G_i)\} < \varepsilon$.

(v) $B \subseteq cl_X(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_i)$

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τα Λήμματα (5.23) , (5.25) και το λήμμα του *Zorn*. □

Λήμμα 5.27. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε, υπάρχει $T-$σχήμα $f-$συμβατών τριάδων.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι $A = \kappa$ είναι ο πληθάριθμος του συνόλου των $f-$συμβατών τριάδων στο X. Θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $f-$συμβατές τριάδες (x_t, B_t, G_t), όπου $t \in T^n$, έτσι ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα παρακάτω:

(a) $T^n \subseteq A^{<\mathbb{N}}$

(b) $\forall t \in T^n$ έχουμε $|t| = n$

(c) $T^n \subseteq T^{n+1}$

(d) $\forall s \in T^{n+1}$ και $\forall m < |s|$, ισχύει ότι $s|m \in T^m$, όπου $s|m$ είναι το μοναδικό αρχικό τμήμα του s μήκους m

(e) Το $\bigcup\limits_{m \leq n} T^m$ ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i), (ii), (iii), (iv), (v)$ του ορισμού (5.12), με τον περιορισμό ότι αν για κάποιο $t \in \bigcup\limits_{m \leq n} T^m$ έχουμε $s \in IS_{\bigcup\limits_{m \leq n} T^m}(t)$, θα πρέπει να ισχύει $|t| < n$.

Τότε, το $T = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} T^n$ είναι ένα *pruned* δέντρο στο A και το σύνολο $\{(x_t, B_t, G_t) : t \in T\}$ είναι ένα $T-$σχήμα $f-$συμβατών τριάδων. Η κατασκευή θα γίνει με τη βοήθεια αναδρομής στο $n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 0$, επιλέγουμε οποιοδήποτε $x_0 \in X$ και θεωρούμε την τριάδα $(x_0, X, \mathbb{R})$, όπου, όπως έχουμε ορίσει, ισχύει $X = B_\rho(x_0, 1)$. Ορίζουμε $T^0 = \{\oslash\}$ και

$$(x_\oslash, B_\oslash, G_\oslash) = (x_0, X, \mathbb{R})$$

Από Πόρισμα (5.26) θα υπάρχει μια μεγιστική $\varepsilon-$ανάλυση της $(x_\oslash, B_\oslash, G_\oslash)$ και θεωρούμε $\mathcal{F}_\oslash$ αυτή την οικογένεια. Τότε, $\exists \mathcal{I}_\oslash \subseteq \kappa$ ώστε $\mathcal{F}_\oslash = \{(x_i, B_i, G_i) : i \in \mathcal{I}_\oslash\}$και θέτουμε

$$IS(\oslash) = \{\oslash^\frown i : i \in \mathcal{I}_\oslash\}$$

Το $T^1 = IS(\oslash)$ πληρεί τις $(a), (b), (c), (d)$ και επιπλέον, το σύνολο

$$T^0 \cup T^1$$

ικανοποιεί την (e).

Έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουν οριστεί τα $T^0, T^1, ..., T^n$ και οι τριάδες (x_t, B_t, G_t), με $t \in T^m$, $m \leq n$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι $(a), (b), (c), (d), (e)$ που αναφέρονται παραπάνω.

Επιλέγουμε οποιοδήποτε $t \in T^n$ και θεωρούμε την $f-$συμβατή τριάδα (x_t, B_t, G_t). Επιλέγοντας $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$, από Πόρισμα (5.26), θα υπάρχει μια μεγιστική $\dfrac{1}{n+1}-$ανάλυση της (x_t, B_t, G_t) και θεωρούμε $\mathcal{F}_t$ αυτή την οικογένεια. Τότε $\exists \mathcal{I}_t \subseteq \kappa$ ώστε $\mathcal{F}_t = \{(x_i, B_i, G_i) : i \in \mathcal{I}_t\}$ και θέτουμε

$$IS(t) = \{t^\frown i : i \in \mathcal{I}_t\}$$

Θεωρώντας, τώρα, το σύνολο

$$T^{n+1} = \bigcup_{t \in T^n} IS(t) = \bigcup_{t \in T^n} \{t^\frown i : i \in \mathcal{I}_t\}$$

παρατηρούμε ότι πληρεί τις $(a), (b), (c), (d)$ και επιπλέον, το σύνολο

$$\bigcup_{m \leq n} T^m \cup T^{n+1} = \bigcup_{m \leq n+1} T^m$$

ικανοποιεί την (e). Συμπεραίνουμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ κατασκευάζονται τα σύνολα $T^0, T^1, ...T^n, ...$ και έτσι, ολοκληρώνεται η αναδρομή. Θέτοντας

$$T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^n$$

προκύπτει το ζητούμενο $T-$σχήμα $f-$συμβατών τριάδων. $\square$

Η απόδειξη της Πρότασης 5.5 προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 5.21 και το Λήμμα 5.27. Εδώ, λοιπόν, ολοκληρώνται η απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.

6 Επέκταση του Θ. Blumberg σε $2^{ους}$ αριθμήσιμους T_2 τοπολογικούς χώρους

Ορισμός 6.1. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ο $(X, \mathcal{T})$ θα λέμε ότι είναι T_2, αν $\forall x, y \in X$ με $x \neq y$, $\exists U_x, U_y \in \mathcal{T}$ με $x \in U_x$, $y \in U_y$ και ώστε $U_x \cap U_y = \oslash$.*

Πόρισμα 6.2. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $Y \subseteq X$. Αν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι T_2, τότε ο $(Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι, επίσης, T_2 τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι $(Y, \mathcal{T}_Y) \neq T_2$. Τότε $\exists x, z \in Y$, ώστε $\forall U_x^Y \in \mathcal{T}_Y$ με $x \in U_x^Y$ και $\forall U_z^Y \in \mathcal{T}_Y$ με $z \in U_z^Y$, ισχύει $U_x^Y \cap U_z^Y \neq \oslash$. Έστω, τώρα, οποιαδήποτε $V_x \in T$ με $x \in V_x$ και $V_z \in \mathcal{T}$ με $z \in V_z$. Θέτοντας $V_x^Y = V_x \cap Y$ και $V_z^Y = V_z \cap Y$, έπεται ότι $x \in V_x^Y$, $z \in V_z^Y$ και συνεπώς, θα ισχύει $V_x^Y \cap V_z^Y \neq \oslash$. Έχουμε, λοιπόν, ότι

$$V_x^Y \subseteq V_x \,\&\, V_z^Y \subseteq U_z \,\&\, V_x^Y \cap V_z^Y \neq \oslash \Longrightarrow V_x \cap V_z \neq \oslash$$

Εφόσον τα $V_x \in \mathcal{T}$ και $V_z \in \mathcal{T}$ που επιλέχθηκαν ήταν τυχαία, συμπεραίνουμε πως $\exists x, z \in X$, ώστε $\forall V_x \in \mathcal{T}$ με $x \in V_x$ και $\forall V_z \in \mathcal{T}$ με $z \in V_z$, θα ισχύει $V_x \cap V_z \neq \oslash$. Άτοπο, αφού ο $(X, \mathcal{T})$ είναι T_2. $\square$

Υπενθυμίζουμε ότι από Πρόταση 5.3, αν ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι *Blumberg*, τότε οφείλει να είναι χώρος *Baire*. Επιπλέον, από το Θεώρημα 5.2 έχουμε ότι κάθε μετρικός χώρος *Baire* είναι και χώρος *Blumberg*. Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζεται μια διαφορετική επέκταση του θεωρήματος Blumberg, που αφορά $2^{ους}$ αριθμήσιμους και T_2 τοπολογικούς χώρους. Συγκεκριμένα, θα αποδειχθεί η εξής πρόταση:

Πρόταση 6.3. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Baire. Αν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι $2^{ος}$ αριθμήσιμος και T_2, τότε είναι χώρος Blumberg.*

Σημειώνουμε πως η ιδέα της απόδειξης της παραπάνω πρότασης, προέρχεται από τους K. C. Ciesielski, M. E. Martınez–Gomez, και J. B. Seoane–Sepulveda οι οποίοι, στο [10] (2018), δίνουν μια νέα απόδειξη του θεωρήματος Blumberg για συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι αν το X είναι πεπερασμένο, η απόδειξη είναι τετριμμένη και οπότε, για τη συνέχεια, θα θεωρήσουμε πως το X είναι άπειρο.

Η απόδειξη της πρότασης 6.3 αναλύεται σε δύο βήματα.

Το πρώτο βήμα αποτελεί η Πρόταση 5.4, από την οποία, έχουμε ότι για κάθε τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$ και για κάθε συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\exists R \subseteq X$ συνισχνό στο X και ώστε η $f|_R : R \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι περίπου συνεχής. Υπενθυμίζουμε ότι, αν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι $Baire$, τότε από Πρόταση 3.60 το σύνολο R θα είναι πυκνό στο X. Επιπλέον, αν $(X, \mathcal{T})$ είναι $2^{ος}$ αριθμήσιμος και T_2, τότε από Πρόταση 2.83 και Πόρισμα 6.2, ο υπόχωρος $(R, \mathcal{T}_R)$ θα είναι, επίσης, $2^{ος}$ αριθμήσιμος και T_2 τοπολογικός χώρος.

Το δεύτερο βήμα είναι όμοιο με εκείνο της απόδειξης του θεωρήματος 5.2, με τη διαφορά ότι εργαζόμαστε σε $2^{ους}$ αριθμήσιμους και T_2 τοπολογικούς χώρους, αντί για μετρικούς χώρους. Έτσι, ξεκινώντας από ένα $(X, \mathcal{T})$ 2^{o} αριθμήσιμο και T_2 τοπολογικό χώρο $Baire$ και για οποιαδήποτε $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, βρίσκουμε ένα $R \subseteq X$ πυκνό στο X, μοναδικό για την f που επιλέχθηκε και τέτοιο ώστε η $f|_R : R \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι περίπου συνεχής. Στη συνέχεια, για τη δεδομένη f, περιοριζόμαστε στον υπόχωρο $(R, \mathcal{T}_R)$ ο οποίος, όπως εξηγήσαμε, θα είναι $2^{ος}$ αριθμήσιμος και T_2. Επιπλέον, η συνάρτηση $g = f|_R$ είναι περίπου συνεχής σε κάθε σημείο του R και στη συνέχεια, κατασκευάζουμε ένα $D \subseteq R$ πυκνό στο R, έτσι ώστε η $g|_D$ είναι συνεχής. Εφόσον D είναι πυκνό στο R και R είναι πυκνό στο X, από Πρόταση 2.75, προκύπτει ότι το D θα είναι πυκνό στο X. Τέλος, επειδή $D \subseteq R$, θα ισχύει πως $g|_D = f|_D$ και δηλαδή, τελικά, η συνάρτηση $f|_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ θα είναι συνεχής. Έχουμε, λοιπόν, την εξής πρόταση:

Πρόταση 6.4. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ $2^{ος}$ αριθμήσιμος και T_2 τοπολογικός χώρος, όπου X άπειρο και $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ περίπου συνεχής. Τότε $\exists D \subseteq X$ πυκνό στο X, τέτοιο ώστε η $f|_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.*

Η απόδειξη του θεωρήματος 6.3 προκύπτει από την Πρόταση 5.4 και την Πρόταση 6.4. Τονίζουμε πως αντίθετα με την Πρόταση 5.5, η απόδειξη της Πρότασης 6.4 δεν απαιτεί τη χρήση του λήμματος του $Zorn$ και ειδικότερα, είναι επαρκές να χρησιμοποιηθεί μαθηματική επαγωγή. Αυτό, είναι επόμενο από το γεγονός ότι ο χώρος είναι $2^{ος}$ αριθμήσιμος. Επιπροσθέτως, για την απόδειξη της Πρότασης 6.4, μπορούμε να υποθέσουμε πως το X δεν έχει απομονωμένα σημεία. Πράγματι, αν $K = \{x \in X : x \text{ απομονωμένο σημείο του } X\}$, έχουμε

$$X = cl_X(K) \cup (X \setminus cl_X(K))$$

όπου $K \cap (X \setminus cl_X(K)) = \oslash$. Το σύνολο $X \setminus cl_X(K)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και f περίπου συνεχής, οπότε από Πρόταση 4.2, ο περιορισμός

$$f|_{X \setminus cl_X(K)} : X \setminus cl_X(K) \longrightarrow \mathbb{R}$$

είναι επίσης περίπου συνεχής. Θέτουμε $h = f|_{X \setminus cl_X(K)}$. Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στα απομονωμένα σημεία του X και δηλαδή $f|_K : K \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Έστω, επίσης, ότι έχουμε

$D \subseteq X \setminus cl_X(K)$ πυκνό στο $X \setminus cl_X(K)$ με $h|_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε, $D \cap K = \oslash$, το σύνολο $D \cup K$ είναι πυκνό στο X και η συνάρτηση $f|_{D\cup K} : D \cup K \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Για την πυκνότητα: Πράγματι, έστω $x_0 \in X$. Αν $x_0 \in cl_X(K)$ και $U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, είναι άμεσο ότι $U \cap K \neq \oslash$. Επιπλέον, $x_0 \in X \setminus cl_X(K)$ και $U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, επειδή $X \setminus cl_X(K)$ είναι ανοιχτό, από Πρόταση 2.18 $\exists V \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in V$ και ώστε $V \subseteq X \setminus cl_X(K)$. Αφού D είναι πυκνό στο $X \setminus cl_X(K)$, είναι άμεσο ότι $V \cap D \neq \oslash \Longrightarrow U \cap D \neq \oslash$. Σε κάθε περίπτωση, αν $x_0 \in X$ και $U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, προκύπτει $U \cap (D \cup K) \neq \oslash$ και συνεπώς, το $D \cup K$ είναι πυκνό στο X.

Για τη συνέχεια: Έστω προς άτοπο ότι $\exists x_0 \in D \cup K$ ώστε $f \neq$ συνεχής στο x_0. Αν $x_0 \in K$ προκύπτει άτοπο, αφού x_0 θα είναι απομονωμένο σημείο του X. Αν $x_0 \in D$, τότε $\exists G \subseteq \mathbb{R}$ με $f(x_0) \in G$ και ώστε $\forall U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$, ισχύει $f(U) \nsubseteq G$. Επειδή $x_0 \in D \subseteq X \setminus cl_X(K)$, το οποίο είναι ανοιχτό, από Πρόταση 2.18 $\exists V_0 \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in V_0$ και ώστε $V_0 \subseteq X \setminus cl_X(K)$. Επιλέγοντας $U = V_0$, προκύπτει ότι $f(V) \nsubseteq G$ και κατά συνέπεια, $h(V) \nsubseteq G$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, διότι από υπόθεση, η συνάρτηση h είναι συνεχής στο D.

6.1 Απόδειξη της Πρότασης 6.3

Ορισμός 6.5. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ περίπου συνεχής. Μια τρίαδα (x, U, G) θα καλείται $f-$**συμβατή**, αν ισχύουν:*

(i) $x \in X$

(ii) $U \subseteq X$ *ανοιχτό, με* $x \in U$

(iii) $G \subseteq \mathbb{R}$ *ανοιχτό, με* $f(x) \in G$

(iv) $U \subseteq cl_X(f^{-1}[G])$

Για τη συνέχεια του κεφαλαίου, σταθεροποιούμε μια συνάρητηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι περίπου συνεχής.

Ορισμός 6.6. *Έστω $\mathbb{N}^2_{\uparrow} = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i \leq j\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ και θεωρούμε λεξικογραφική διάταξη ως εξής:*

Αν $(i,j) \in \mathbb{N}^2_{\uparrow} \,\&\, (k,l) \in \mathbb{N}^2_{\uparrow}$ έχουμε $(i,j) <_{lex} (k.l)$ όταν:

- *Είτε* $i < k$

- *Είτε* $i = k \,\&\, j < l$

Ορισμός 6.7. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ T_2 τοπολογικός χώρος, όπου X άπειρο. Ένα $f-$ συμβατό άνω τριγωνικό σχήμα είναι ένα σύνολο $\{(x_i, U_i^j, G_i^j) : (i,j) \in \mathbb{N}^2_{\uparrow}\}$ και έχει τις παρακάτων ιδιότητες:*

(i) $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2_{\uparrow}$ *η τρίαδα* (x_i, U_i^j, G_i^j) *είναι* $f-$*συμβατή και* $diam(G_i^j) < \dfrac{1}{j}$.

(ii) $\forall j \in \mathbb{N}$, *η συλλογή* $\{U_i^j \subset X \,|\, i \leq j\}$ *αποτελείται από ξένα ανά δύο ανοιχτά υποσύνολα του* X.

(iii) $\forall i \in \mathbb{N}$, *η συλλογή* $\{U_i^j \subset X \,|\, i \leq j\}$ *είναι μια φθίνουσα ακολουθία ανοιχτών υποσυνόλων του* X.

(iv) *Αν* $(i,j) \in \mathbb{N}^2_{\uparrow} \,\&\, (k,l) \in \mathbb{N}^2_{\uparrow}$ *με* $(i,j) <_{lex} (k,l)$, *τότε, είτε* $U_i^j \cap U_k^l = \oslash$, *είτε* $U_k^l \times G_k^l \subset U_i^j \times G_i^j$.

$$\begin{bmatrix} (x_1, U_1^1, G_1^1) & (x_1, U_1^2, G_1^2) & \cdots & (x_1, U_1^n, G_1^n) & \cdots \\ & (x_2, U_2^2, G_2^2) & \cdots & (x_2, U_2^n, G_2^n) & \cdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & (x_n, U_n^n, G_n^n) & \cdots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση 6.8. *Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, η συλλογή $\{G_i^j : j \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί βάση περιοχών του $f(x_i)$. Ωστόσο, η συλλογή $\{U_i^j : j \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι απαραίτητα βάση περιοχών του x_i.*

Πρόταση 6.9. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $B \subseteq X$ ανοιχτό, μη κενό. Επίσης, θεωρούμε μια πεπερασμένη οικογένεια $\mathcal{U} = \{U \subseteq X : U$ ανοιχτό, μη κενό$\}$. Τότε, $\exists B^* \subseteq B$ ανοιχτό, μη κενό και ώστε $\forall U \in \mathcal{U}$ θα ισχύει:*

- *Είτε* $B^* \cap U = \oslash$
- *Είτε* $B^* \subseteq U$

και θα λέμε ότι το B είναι σε καλή θέση σχετικά με τη $\mathcal{U}$.

Απόδειξη. Αν $|\mathcal{U}| = 1$ και δηλαδή $\mathcal{U} = \{U\}$, θέτουμε

$$B^* = B \cap U, \text{αν} B \cap U \neq \oslash \,\wedge\, B^* = B, \text{αν } B \cap U = \oslash$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ ώστε $|\mathcal{U}| = n$ και έστω προς επαγωγή ότι το B είναι σε καλή θέση σχετικά με τη $\mathcal{U}$. Θεωρούμε ανοιχτό, μη κενό $U^* \subseteq X$ ώστε $U^* \notin \mathcal{U}$ και θέτουμε $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \cup U^*$. Τότε, από επαγωγική υπόθεση, $\exists B^* \subseteq X$ ανοιχτό, μη κενό και ώστε

$$B^* = B \cap U, \text{αν} B \cap U \neq \oslash, U \in \mathcal{U} \ \wedge \ B^* = B, \text{αν } B \cap U = \oslash, U \in \mathcal{U}$$

Θέτουμε

$$B^{**} = B^* \cap U, \text{αν} B^* \cap U^* \neq \oslash \ \wedge \ B^{**} = B^*, \text{αν } B^* \cap U^* = \oslash$$

και παρατηρούμε ότι:

- Αν $B^{**} = B^* \cap U^*$, τότε $B^{**} \subseteq U^* \,\&\, B^{**} \subseteq U, \forall U \in \mathcal{U}$
- Αν $B^{**} = B^*$, τότε $B^{**} \cap U^* = \oslash \,\&\, B^{**} \cap U = \oslash, \forall U \in \mathcal{U}$

Αφού, επιπλέον, ισχύει $B^{**} \subseteq B^* \subseteq B$, συμπεραίνουμε ότι το B είναι σε καλή θέση σχετικά με τη $\mathcal{U}^*$ και συνεπώς, ολοκληρώθηκε το επαγωγικό βήμα. □

Πρόταση 6.10. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ T_2 τοπολογικός χώρος και μια πεπερασμένη ακολουθία $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ στοιχείων του X, διαφορετικά μεταξύ τους. Επίσης, έστω πεπερσμένη οικογένεια $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ ανοιχτών υποσυνόλων του X, όπου $\forall i \leq n$ ισχύει $x_i \in U_i$. Τότε, υπάρχει νέα πεπερασμένη οικογένεια $\{U'_1, U'_2, ..., U'_n\}$ ανοιχτών υποσυνόλων του X, τέτοια ώστε $\forall i \leq n$ ισχύουν:*

(i) $x_i \in U'_i$

(ii) *Αν $j \leq n$ με $j \neq i$, τότε $U'_j \cap U'_i = \oslash$*

Απόδειξη. Εφόσον $(X, \mathcal{T})$ είναι T_2, $\forall i \neq j \ \exists V_i^j \in \mathcal{T}$ με $x_i \in V_i^j$, $x_j \notin V_i^j$ και $\exists V_j^i \in \mathcal{T}$ με $x_j \in V_j^i$, $x_i \notin V_j^i$ και ώστε $V_i^j \cap V_j^i = \oslash$. Για κάθε $i \in \{1, 2, ..., n\}$ θέτουμε

$$V_i = \bigcap_{j \neq i} V_i^j \Longrightarrow V_i \in \mathcal{T}$$

όπου θα ισχύει $x_i \in V_i$, $x_j \notin V_i$ και $V_i \cap V_j = \oslash$, $\forall j \neq i$. Θέτοντας $U'_i = V_i \cap U_i$, προκύπτει ακριβώς ότι

$$x_i \in U'_i \subseteq U_i \,\&\, U'_i \cap U'_j = \oslash, \forall j \neq i$$

□

Λήμμα 6.11. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ $2^{ος}$ αριθμήσιμος και T_2 τοπολογικός χώρος, όπου X άπειρο και $D = \{x_i \in X : i \in \mathbb{N}\}$ ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του X. Αν υπάρχει $f-$ συμβατό άνω τριγωνικό σχήμα $\{(x_i, U_i^j, G_i^j) : (i, j) \in \mathbb{N}^2_{\uparrow}\}$, τότε η συνάρτηση $f|_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής*

Απόδειξη. Έστω $(i,j) \in \mathbb{N}^2_\uparrow$ και τυχαίο $x_0 \in U_i^j \cap D$. Αρκεί να δειχθεί ότι $f(x_0) \in G_i^j$. Αφού $x_0 \in D$, $\exists m \in \mathbb{N}$ ώστε $x_0 = x_m$. Έχουμε ότι:

- Αν $m = i$, τότε, τετριμμένα ισχύει $f(x_m) = f(x_i) \in G_i^j$.
- Αν $m \leq j \,\&\, m \neq i$, τότε $x_m \in U_m^j \,\&\, x_m \in U_i^j \implies x_m \in U_m^j \cap U_i^j$ (1).

Επιπλέον, από (ii) ισχύει

$$U_m^j \cap U_i^j = \oslash \,, \forall j \in \mathbb{N} \,, \, i \leq j \,, \, m \leq j \,, m \neq i \, (2)$$

Από τις $(1), (2)$ προκύπτει άτοπο και συνεπώς, απορρίπτεται.

Είναι άμεσο πως $m > j \geq i$ και οπότε $(i,j) <_{lex} (m,m)$. Επειδή

$$x_m \in U_m^m \,\&\, x_m \in U_i^j \implies x_m \in U_m^m \cap U_i^j$$

και επομένως, από (iv), έχουμε $G_m^m \subset \mathbb{R}$ με $diam(G_m^m) < \dfrac{1}{m}$ και ώστε

$$(x_m, f(x_m)) \in U_m^m \times G_m^m \subset U_i^j \times G_i^j$$

Εφόσον το $x_0 \in D$ ήταν τυχαίο, έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 6.12. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ $2^{ος}$ αριθμήσιμος και T_2 τοπολογικός χώρος, όπου X άπειρο. Τότε, υπάρχει $f-$ συμβατό άνω τριγωνικό σχήμα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $\mathcal{B} = \{B_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(X)$ μια αριθμήσιμη βάση του $(X, \mathcal{T})$. Για όλα τα $(i,j) \in \mathbb{N}^2_\uparrow$, θα επιλεχθούν $x_i \in X$ και ανοιχτά $U_i^j \subset X$, $G_i^j \subset \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:

(1) $x_i \in B_i$

(2) $U_i^j \subseteq cl_X(f^{-1}[G_i^j])$

(3) $x_i \in U_i^j \cap f^{-1}[G_i^j]$ και $diam(G_i^j) < \dfrac{1}{j}$

(4) Αν $(i,j) \in \mathbb{N}^2_\uparrow \,\&\, (k,l) \in \mathbb{N}^2_\uparrow$ ώστε $(i,j) <_L (k.l)$, τότε, είτε $U_i^j \cap U_k^l = \oslash$, είτε $U_k^l \times G_k^l \subset U_i^j \times G_i^j$ και $\forall j \in \mathbb{N}$, η συλλογή $\{U_i^j \subset X \,|\, i \leq j\}$ αποτελείται από, ξένα ανά δύο, ανοιχτά σύνολα.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω προς επαγωγή ότι για όλα τα $i \leq j < n$ ισχύουν οι $(1) - (2) - (3) - (4)$. Σύμφωνα με το άνω τριγωνικό σχήμα έχουμε

$$\begin{bmatrix} (x_1,U_1^1,G_1^1) & (x_1,U_1^2,G_1^2) & \cdots & (x_1,U_1^{n-1},G_1^{n-1}) & . \\ & (x_2,U_2^2,G_2^2) & \cdots & (x_2,U_2^{n-1},G_2^{n-1}) & . \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & (x_{n-1},U_{n-1}^{n-1},G_{n-1}^{n-1}) & . \\ & & & & . \end{bmatrix}$$

Η ολοκλήρωση του επαγωγικού βήματος θα γίνει με την εύρεση στοιχείου $x_n \in X$ και στη συνέχεια με τη συμπλήρωση των $f-$συμβατών τριάδων στη n-οστή στήλη του παραπάνω σχήματος.

Έστω $B_n \in \mathcal{B}$, το οποίο είναι βασικό ανοιχτό υποσύνολο του X και δηλαδή είναι ανοιχτό. Αφού η συλλογή $\{U_i^j : i \leq j < n\}$ είναι πεπερασμένη, από Πρόταση 6.9, το B_n βρίσκεται σε καλή θέση σχετικά με τη $\{U_i^j : i \leq j < n\}$. Συνεπώς, $\exists B_n^* \subseteq B_n$ τέτοιο ώστε είτε $B_n^* \subseteq U_i^j$, $i \leq j < n$, είτε $B_n^* \cap U_i^j = \oslash$ και θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2_{\uparrow} : j < n \,\&\, B_n^* \subseteq U_i^j\}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1 : Έστω $A \neq \oslash$.

Τότε, $\exists (i_0, j_0) \in \mathbb{N}^2_{\uparrow}$ ώστε $(i_0, j_0) = max(A)$. Παρατηρούμε ότι $\forall (i,j) \in \mathcal{A}$, έχουμε $B_n^* \subseteq U_{i_0}^{j_0} \subseteq U_i^j$, και επιπλέον, θα ισχύει $B_n^* \subseteq U_{i_0}^{j_0} \subseteq cl_X(f^{-1}[G_{i_0}^{j_0}])$. Αφού το σύνολο $f^{-1}[G_{i_0}^{j_0}]$ είναι πυκνό στο B_n^*, το σύνολο $B_n^* \cap f^{-1}[G_{i_0}^{j_0}]$ είναι άπειρο και οπότε

$$\exists x_n \in B_n^* \cap f^{-1}[G_{i_0}^{j_0}] \setminus \{x_i : i < n\}$$

Για όλα τα $i \leq n$ επιλέγουμε ανοιχτά $G_i^n \subset \mathbb{R}$ με $diam(G_i^n) < \dfrac{1}{n}$ και τετοια ώστε $f(x_n) \in G_n^n \subseteq G_{i_0}^{j_0}$ και $f(x_i) \in G_i^n \subseteq G_i^{n-1}$, αν $i < n$. Η f είναι περίπου συνεχής στο x_i, $i \leq n$ και οπότε, $\exists U_i^n \subset X$ με $x_i \in U_i^n$ και ώστε $U_i^n \subseteq cl_X(f^{-1}[G_i^n])$. Επειδή η συλλογή $\{U_i^n : i \leq n\}$ είναι πεπερασμένη και $(X, \mathcal{T})$ είναι T_2, εκλεπτύνουμε τα U_i^n και από Πρόταση 6.10, είναι εφικτό

- $U_n^n \subseteq B_n^* \setminus \{x_i : i < n\}$
- $U_i^n \subseteq U_i^{n-1}$, αν $i < n$
- $U_i^n \cap U_k^n = \oslash$, αν $k \neq i$

Περίπτωση 2 : Έστω $A = \oslash$.

Τότε, $\forall (i,j) \in \mathcal{A}$ ισχύει $B_n^* \cap U_i^j = \oslash$, οπότε, επιλέγουμε $x_n \in B_n^*$ και το ανοιχτό διάστημα $G_n^n = (f(x_n) - \dfrac{1}{n}, f(x_n) + \dfrac{1}{n})$. Ταυτχόρονα, για όλα τα $i < n$, θεωρούμε ανοιχτά $G_i^n \subset \mathbb{R}$, όπου $diam(G_i^n) < \dfrac{1}{n}$ και $f(x_i) \in G_i^n \subseteq G_i^{n-1}$. Η f είναι περίπου συνεχής στο x_i, $i \leq n$ και άρα, $\exists U_i^n \subset X$

με $x_i \in U_i^n \subseteq cl_X(f^{-1}[G_i^n])$ και ώστε $U_i^n \subseteq cl_X(f^{-1}[G_i^n])$. Και πάλι, επειδή $\{U_i^n : i \leq n\}$ είναι πεπερασμένη και $(X, \mathcal{T})$ είναι T_2, εκλεπτύνουμε τα U_i^n και από Πρόταση 6.10, είναι εφικτό

- $U_n^n \subseteq B_n^*$
- $U_i^n \subseteq U_i^{n-1}$, αν $i < n$
- $U_i^n \cap U_k^n = \emptyset$, αν $k \neq i$

Σε κάθε περίπτωση, είναι εύκολο να ελέγξουμε πως οι οι τριάδες (x_i, U_i^n, G_i^n) θα είναι $f-$συμβατές και ικανοποιούνται οι ιδιότητες $(1)-(2)-(3)-(4)$. Με την ολοκλήρωση του επαγωγικού βήματος στις παραπάνω περιπτώσεις, συμπεραίνουμε πως έχουμε το ζητούμενο $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Η απόδειξη της Πρότασης 6.4 προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 6.11 και από το Λήμμα 6.12. Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη της Πρότασης 6.3.

Αναφορές

[1] Γιάννης Μοσχοβάκης, *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία*. 2007.

[2] Σπύρος Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης*. 2011.

[3] John L. Kelley, *General Topology*. D. Van Nostrand Company, Inc., 1st ed., 1955.

[4] Ryszard Engelking, *General Topology*. 2012.

[5] H. L. Royden, *Real analysis / H.L. Royden, Stanford University, P.M. Fitzpatrick, University of Maryland, College Park*. Pearson modern classic, New York, NY: Pearson, fourth edition [2018 reissue]. ed., 2018 - 2010.

[6] K. Kuratowski, *TOPOLOGY volume I*. ACADEMIC PRESS, 1966.

[7] H. Blumberg, "New properties of all real functions," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 8, no. 10, pp. 283–288, 1922.

[8] P. E. LONG and J. EARL E. McGEHEE, "Properties of almost continuous functions," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 24, no. 1, pp. 175–180, 1970.

[9] J. C. Bradford and C. Goffman, "Metric spaces in which blumberg's theorem holds," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 11, no. 4, pp. 667–670, 1960.

[10] K. C. Ciesielski, M. E. Martínez-Gómez, and J. B. Seoane-Sepúlveda, ""big" continuous restrictions of arbitrary functions," *The American Mathematical Monthly*, vol. 126, no. 6, pp. pp. 547–552, 2019.

[11] S. Banach, *Theoreme sur les ensembles de premiere categorie*. 1931.

[12] H. E. White, "Some baire spaces for which blumberg's theorem does not hold," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 51, no. 2, pp. 477–482, 1975.

[13] A. S. Kechris, "Classical descriptive set theory," 1987.